Κ. ΙΟΡΔΑΝΙΔΗΣ - Δ. Λ. ΚΑΡΑΓΕΩΡΓΟΣ - Κ. ΚΩΣΤΑΚΗΣ
Α. ΜΑΚΡΙΔΗΣ - Β. ΝΑΣΟΠΟΥΛΟΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΥΛΗ ΕΠΙΛΟΓΗΣ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΑΘΗΝΑ 1980

Κ. ΙΟΡΔΑΝΙΔΗΣ - Δ. Λ. ΚΑΡΑΓΕΩΡΓΟΣ - Κ. ΚΩΣΤΑΚΗΣ
Α. ΜΑΚΡΙΔΗΣ - Β. ΝΑΣΟΠΟΥΛΟΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΥΛΗ ΕΠΙΛΟΓΗΣ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΑΘΗΝΑ 1980

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι

ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

1. Τό σύνολο C τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν
2. Γεωμετρική παράσταση τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν
3. Γεωμετρικές ἐφαρμογές τοῦ μέτρου τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν
4. Πολικές συντεταγμένες μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ
5. Τριγωνομετρική μορφή μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ
6. Ρίζες τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν
7. Σύντομη ἀνακεφαλαίωση
8. Ἀσκήσεις γιά ἐπανάληψη

1. ΤΟ ΣΥΝΟΛΟ C ΤΩΝ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

1.1. Εἰσαγωγή

Στήν προηγούμενη τάξη μάθαμε ὅτι οἱ ρίζες τῆς δευτεροβάθμιας ἐξισώσεως

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=0, \quad \alpha\neq 0, \quad \alpha,\beta,\gamma\in \mathbf{R} \tag{1}$$

δίνονται ἀπό τόν τύπο

$$x=\frac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha} \tag{2}$$

Ἄν εἶναι $\beta^2-4\alpha\gamma\geq 0$, τότε οἱ ρίζες αὐτές εἶναι πραγματικές. Ἄν ὅμως εἶναι $\beta^2-4\alpha\gamma<0$, τότε ἡ (1) δέν ἔχει ρίζες στό **R**. Στήν τελευταία αὐτή περίπτωση οἱ ρίζες τῆς (1) ἔχουν τή μορφή $\kappa\pm\lambda i$ καί προκύπτουν ἀπό τόν τύπο (2), ἄν αὐτός γραφτεῖ[1]

$$x=-\frac{\beta}{2\alpha}\pm\frac{\sqrt{4\alpha\gamma-\beta^2}}{2\alpha}\,i \tag{3}$$

Οἱ ἀριθμοί $\kappa\pm\lambda i$ ἀνήκουν σ' ἕνα σύνολο εὐρύτερο ἀπό τό **R**, στό σύνολο τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν.

Εἰδικότερα ἡ ἐξίσωση $x^2=-1 \Leftrightarrow x^2+1=0$ ἔχει ρίζες τίς $\pm i$, δηλαδή εἶναι $i^2=-1$ καί $(-i)^2=-1$.

Μετά τίς παραπάνω παραδοχές καί τή διαπίστωση ὅτι $i^2=-1$ καταλήξαμε στό συμπέρασμα ὅτι **οἱ μιγαδικοί ἀριθμοί «συμπεριφέρονται» ὅπως καί τά διώνυμα $\alpha+\beta x$ μέ $x=i$.**

Ἄς θυμηθοῦμε μέ παραδείγματα πῶς ἐκτελοῦμε τίς βασικές πράξεις πρόσθεση καί πολλαπλασιασμό στό σύνολο τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν. Γιά τούς μιγαδικούς ἀριθμούς $3+2i$ καί $4+5i$ ἔχουμε:

1. $(3+2i)+(4+5i)=3+2i+4+5i=(3+4)+(2+5)i=7+7i$, καί γενικὰ

$$(\alpha_1+\beta_1 i)+(\alpha_2+\beta_2 i)=(\alpha_1+\alpha_2)+(\beta_1+\beta_2)i \tag{4}$$

1. Ἡ μορφή αὐτή ὀφείλεται στόν Ἑλβετό μαθηματικό τοῦ 18ου αἰώνα Euler (1707-1783) ὁ ὁποῖος συμβόλισε τήν $\sqrt{-1}$ μέ τό i πού εἶναι τό ἀρχικό γράμμα τῆς λέξεως imaginare (φανταστικός). Προηγουμένως οἱ μαθηματικοί τοῦ 16ου αἰ. εἶχαν γράψει «τυπικά» $\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}=\sqrt{4\alpha\gamma-\beta^2}\cdot\sqrt{-1}$, ὅταν $\beta^2-4\alpha\gamma<0$.

Τόν 19ο αἰ. ὁ Γερμανός μαθηματικός Gauss (1777-1855) παρέστησε γεωμετρικά τούς μιγαδικούς ἀριθμούς μέ σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου καί ἀπέδειξε ἔτσι ὅτι οἱ μιγαδικοί ἀριθμοί εἶναι ἐξίσου συγκεκριμένοι (καί ὄχι φανταστικοί) ὅπως καί οἱ πραγματικοί ἀριθμοί.

2. $(3+2i)\cdot(4+5i) = (3\cdot4)+(3\cdot5)i+(2\cdot4)i+(2\cdot5)i^2$
$= (3\cdot4)+(3\cdot5)i+(2\cdot4)i+(2\cdot5)(-1)$
$= (3\cdot4-2\cdot5)+(3\cdot5+2\cdot4)i = 2+23i$, καί γενικά

$$(\alpha_1+\beta_1 i).(\alpha_2+\beta_2 i) = (\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2)+(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)i \tag{5}$$

Ἀκόμα εἶναι φανερό ὅτι στό μιγαδικό ἀριθμό $\alpha+\beta i$ μποροῦμε νά ἀντιστοιχίσουμε τό διατεταγμένο ζεῦγος (α,β) καί ἀντίστροφα. Στήν ἑπόμενη παράγραφο θά ὁρίσουμε τίς βασικές πράξεις πρόσθεση καί πολλαπλασιασμό στό σύνολο τῶν διατεταγμένων ζευγῶν τοῦ $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ ἔτσι, ὥστε νά τό ταυτίσουμε μέ τό σύνολο τῶν μίγαδικῶν ἀριθμῶν.

1.2. Τό σύνολο C σάν σύνολο διατεταγμένων ζευγῶν τοῦ R×R.

Θεωροῦμε τό σύνολο

$$\mathbf{C} = \{z \mid z = (\alpha,\beta),\quad \alpha\in\mathbf{R},\quad \beta\in\mathbf{R}\}$$

καί τή γνωστή ἰσότητα τῶν στοιχείων του

$$(\alpha_1,\beta_1) = (\alpha_2,\beta_2) \Leftrightarrow \alpha_1=\alpha_2 \quad \text{καί} \quad \beta_1=\beta_2. \tag{1}$$

Στό σύνολο **C** ὁρίζουμε δύο βασικές πράξεις, τήν πρόσθεση καί τόν πολλαπλασιασμό, μέ τά συνήθη σύμβολα "+„ καί "·„. Τό ἄθροισμα καί τό γινόμενο δύο στοιχείων (α_1,β_1) καί (α_2,β_2) τοῦ **C** ὁρίζονται μέ τόν ἀκόλουθο τρόπο:

Τό ἄθροισμα: $(\alpha_1,\beta_1)+(\alpha_2,\beta_2) = (\alpha_1+\alpha_2,\beta_1+\beta_2)$ (2)

Τό γινόμενο: $(\alpha_1,\beta_1)\cdot(\alpha_2,\beta_2) = (\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2,\ \alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)$ (3)

(Δεῖτε τή σκοπιμότητα αὐτῶν τῶν ὁρισμῶν παραβάλλοντάς τους μέ τούς τύπους (4) καί (5) τῆς παραγράφου 1.1.).

Ἄς πάρουμε τώρα τό ὑποσύνολο **R′** τοῦ **C**, πού ἔχει γιά στοιχεῖα του ὅλα τά στοιχεῖα τῆς μορφῆς $(\alpha,0)$, καί ἄς κάνουμε μεταξύ αὐτοῦ καί τοῦ **R** τήν ἀμφιμονοσήμαντη ἀντιστοιχία

$$\mathbf{R}'\ni(\alpha,0)\longleftrightarrow\alpha\in\mathbf{R}$$

Γιά δύο στοιχεῖα $(\alpha_1,0)$ καί $(\alpha_2,0)$ τοῦ **R′** εἶναι

$$(\alpha_1,0)+(\alpha_2,0)=(\alpha_1+\alpha_2,0)\longleftrightarrow(\alpha_1+\alpha_2)\in\mathbf{R} \quad \text{καί}$$
$$(\alpha_1,0)\cdot(\alpha_2,0)=(\alpha_1\alpha_2,0)\longleftrightarrow(\alpha_1\cdot\alpha_2)\in\mathbf{R}$$

Δηλαδή: α) Τό ἄθροισμα δύο στοιχείων τοῦ **R′** ἀντιστοιχίζεται ἀμφιμονοσήμαντα στό ἄθροισμα τῶν ἀντίστοιχων στοιχείων τοῦ **R**, καί

β) Τό γινόμενο δύο στοιχείων τοῦ **R′** ἀντιστοιχίζεται ἀμφιμονοσήμαντα στό γινόμενο τῶν ἀντίστοιχων στοιχείων τοῦ **R**.

Ἡ διαπίστωσή μας αὐτή μᾶς ἐπιτρέπει νά «ταυτίσουμε» τό **R′** μέ τό **R** καί νά θεωροῦμε ἔτσι ὅτι εἶναι $\mathbf{R}\subset\mathbf{C}$. Μετά ἀπό αὐτό μποροῦμε νά γράφουμε:

$$(\alpha, 0) = \alpha \tag{4}$$

Ἄν ὁρίσουμε $(\alpha,\beta)^2 = (\alpha,\beta)\cdot(\alpha,\beta)$ καί συμβολίσουμε μέ i τό στοιχεῖο $(0,1)$, τότε θά εἶναι:

$$i^2 = (0,1)\cdot(0,1) = (-1,0)$$

καί σύμφωνα μέ τήν (4)

$$i^2 = -1 \tag{5}$$

Ἐπειδή ὅμως εἶναι $(\beta,0)i = (\beta,0)\cdot(0,1) = (0,\beta)$, θά ἔχουμε:

$$(\alpha,\beta) = (\alpha,0) + (0,\beta) = \alpha + (\beta,0)i = \alpha+\beta i \tag{6}$$

Ἄρα: **τό τυχόν στοιχεῖο (α,β) τοῦ C «ταυτίζεται» μέ τό γνωστό μας μιγαδικό ἀριθμό $\alpha+\beta i$.** Ἔτσι τό σύνολο **C** ἐφοδιασμένο μέ τίς πράξεις τῆς προσθέσεως καί τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, πού τά ἐξαγόμενά τους δίνουν οἱ ἰσότητες (2) καί (3), εἶναι τό σύνολο τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν καί τά διατεταγμένα ζεύγη-στοιχεῖα τοῦ **C**—ὀνομάζονται μιγαδικοί ἀριθμοί.

Στό λογισμό συνήθως οἱ μιγαδικοί ἀριθμοί χρησιμοποιοῦνται μέ τή μορφή $\alpha+\beta i$ ἀντί (α,β). Ἡ χρησιμότητα τῆς μορφῆς (α,β) θά φανεῖ στή γεωμετρική τους παράσταση.

Ἡ παραπάνω «ταύτιση» $(\alpha,0) = \alpha$ μᾶς ἐπιτρέπει νά γράψουμε

$$\kappa.(\alpha,\beta) = (\kappa\alpha,\kappa\beta), \quad \kappa \in \mathbf{R}. \tag{7}$$

1.3. Ἰδιότητες τῆς προσθέσεως καί τοῦ πολλαπλασιασμοῦ στό C.

I. Ἰδιότητες τῆς προσθέσεως

Εἶναι φανερό ὅτι ἡ πρόσθεση, ὅπως ὁρίστηκε, ἔχει τίς ἰδιότητες

$$z_1+z_2 = z_2+z_1 \qquad \text{(ἀντιμεταθετική)}$$
$$(z_1+z_2)+z_3 = z_1+(z_2+z_3) \qquad \text{(προσεταιριστική)}$$

γιά ὅλα τά $z_1,z_2,z_3 \in \mathbf{C}$.

Ἀκόμα ἰσχύουν οἱ ἀκόλουθες προτάσεις:

Πρόταση 1. Ὑπάρχει ἕνας καί μόνο μιγαδικός ἀριθμός ζ^* τέτοιος, ὥστε γιά ὅλους τούς μιγαδικούς ἀριθμούς z νά ἰσχύει:

$$z + \zeta^* = z \tag{1}$$

Ἀπόδειξη. Ἄν εἶναι $z = \alpha+\beta i$ καί $\zeta^* = x+yi$, τότε ἡ (1) γράφεται ἰσοδύναμα

$$(\alpha+\beta i) + (x+yi) = \alpha+\beta i \Leftrightarrow (\alpha+x) + (\beta+y)i = \alpha+\beta i \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha+x = \alpha \quad \text{καί} \quad \beta+y = \beta \Leftrightarrow x=0 \quad \text{καί} \quad y=0$$

Ἄρα τό στοιχεῖο $\zeta^* = 0+0i$ εἶναι τό μοναδικό πού ἱκανοποιεῖ τήν (1) γιά κάθε $z \in C$. **Τό στοιχεῖο $0 + 0i$ ὀνομάζεται οὐδέτερο στοιχεῖο γιά τήν πρόσθεση στό C** καί γιά εὐκολία τό λέμε **μηδέν** καί τό συμβολίζουμε μέ 0.

Πρόταση 2. Γιά κάθε μιγαδικό ἀριθμό z ὑπάρχει ἕνας καί μόνο μιγαδικός ἀριθμός z^* τέτοιος, ὥστε νά ἰσχύει:

$$z + z^* = 0 \tag{2}$$

Ἀπόδειξη. Ἄν εἶναι $z = \alpha+\beta i$ καί $z^* = x+yi$, τότε ἡ (2) γράφεται ἰσοδύναμα

$$(\alpha+\beta i) + (x+yi) = 0 \Leftrightarrow (\alpha+x) + (\beta+y)i = 0+0i \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha+x = 0 \quad \text{καί} \quad \beta+y = 0 \Leftrightarrow x = -\alpha \quad \text{καί} \quad y = -\beta$$

Ἄρα ὁ μιγαδικός ἀριθμός $z^* = (-\alpha) + (-\beta)i$ εἶναι ὁ μοναδικός γιά τό μιγαδικό ἀριθμό $z = \alpha+\beta i$, πού ἱκανοποιεῖ τή σχέση (2).

Ὁ μιγαδικός ἀριθμός $(-\alpha)+(-\beta)i$, πού γιά εὐκολία τόν γράφουμε $-\alpha-\beta i$ καί τόν συμβολίζουμε μέ $-z$, **ὀνομάζεται ἀντίθετος τοῦ $z = \alpha+\beta i$ ἤ τό συμμετρικό στοιχεῖο τοῦ $z = \alpha+\beta i$ γιά τήν πρόσθεση στό C.**

Πρόταση 3. Στό σύνολο C ἰσχύει ἡ ἰσοδυναμία

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow z_1+z = z_2+z \tag{3}$$

Ἀπόδειξη. α) Ἡ συνεπαγωγή $z_1 = z_2 \Rightarrow z_1+z = z_2+z$ γιά ὅλα τά $z \in C$ εἶναι φανερή ἀπό τόν ὁρισμό τῆς προσθέσεως.

β) Θά δείξουμε τήν συνεπαγωγή $z_1+z = z_2+z \Rightarrow z_1=z_2$, πού ἀποτελεῖ **τό νόμο τῆς διαγραφῆς στήν πρόσθεση στό C.**

Πράγματι:

$$\begin{aligned} z_1+z = z_2+z \quad &\Rightarrow \quad (z_1+z)+(-z) = (z_2+z)+(-z) \\ &\Leftrightarrow \quad z_1+[z+(-z)] = z_2+[z+(-z)] \\ &\Leftrightarrow \quad z_1+0 = z_2+0 \\ &\Leftrightarrow \quad z_1 = z_2 \end{aligned}$$

Πρόταση 4. Ἡ ἐξίσωση $z_1+z = z_2$, $z_1,z_2 \in C$ (4) ἔχει μοναδική λύση στό C τήν $z = z_2+(-z_1)$.

Ἀπόδειξη. Ἔχουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned} z_1+z = z_2 \quad &\Leftrightarrow \quad (z_1+z)+(-z_1) = z_2+(-z_1) \\ &\Leftrightarrow \quad (z+z_1)+(-z_1) = z_2+(-z_1) \\ &\Leftrightarrow \quad z+[z_1+(-z_1)] = z_2+(-z_1) \\ &\Leftrightarrow \quad z+0 = z_2+(-z_1) \\ &\Leftrightarrow \quad z = z_2+(-z_1). \end{aligned}$$

Ἡ μοναδική λύση τῆς ἐξισώσεως (4) ὀνομάζεται **διαφορά τοῦ z_1 ἀπό τό z_2** *καί συμβολίζεται μέ z_2-z_1. Δηλαδή εἶναι*

$$z_2-z_1 = z_2+(-z_1) \tag{5}$$

Ἡ πράξη, μέ τήν ὁποία βρίσκουμε τή διαφορά δυό μιγαδικῶν ἀριθμῶν, ὀνομάζεται **ἀφαίρεση.**

II. Ἰδιότητες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ

Εἶναι φανερό ὅτι καί ὁ πολλαπλασιασμός ἔχει τίς ἰδιότητες

$$z_1 . z_2 = z_2 . z_1 \qquad \text{(ἀντιμεταθετική)}$$
$$(z_1 . z_2) . z_3 = z_1 . (z_2 . z_3) \qquad \text{(προσεταιριστική)}$$

καί ἀκόμη εἶναι πράξη ἐπιμεριστική ὡς πρός τήν πρόσθεση, δηλαδή

$$z_1 . (z_2 + z_3) = z_1 . z_2 + z_1 . z_3$$

γιά ὅλα τά $z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C}$.
Θά δείξουμε ὅτι καί στόν πολλαπλασιασμό ἰσχύουν ἀντίστοιχες προτάσεις μέ ἐκεῖνες πού δείξαμε στήν πρόσθεση.

Πρόταση 1΄. Ὑπάρχει ἕνας καί μόνο $\zeta^* \in \mathbf{C}$ τέτοιος, ὥστε γιά ὅλα τά $z \in \mathbf{C}$ νά ἰσχύει:

$$z . \zeta^* = z \tag{1'}$$

Ἀπόδειξη. Ἄν εἶναι $z = \alpha + \beta i$ καί $\zeta^* = x + yi$, τότε ἡ (1΄) γράφεται ἰσοδύναμα

$$(\alpha + \beta i)(x + yi) = \alpha + \beta i \Leftrightarrow (\alpha x - \beta y) + (\alpha y + \beta x) i = \alpha + \beta i \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \alpha x - \beta y = \alpha$ καί $\alpha y + \beta x = \beta$. Ἄν ἐπιπλέον εἶναι $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, τότε ἔχουμε τή μοναδική λύση $x = 1$ καί $y = 0$, ἐνῶ, ἄν εἶναι $\alpha^2 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0$, τότε τό σύστημα εἶναι ταυτοτικό καί συνεπῶς ἔχει καί τή λύση $x = 1$, $y = 0$.
Ἄρα ὁ μιγαδικός ἀριθμός $\zeta^* = 1 + 0i$ εἶναι ὁ μοναδικός πού ἱκανοποιεῖ τήν (1΄) γιά κάθε $z \in \mathbf{C}$. **Ὁ μιγαδικός ἀριθμός $1 + 0i$ ὀνομάζεται οὐδέτερο στοιχεῖο γιά τόν πολλαπλασιασμό στό C** καί γιά εὐκολία τόν λέμε **μονάδα** καί τόν συμβολίζουμε μέ 1.

Πρόταση 2΄. Γιά κάθε $z \in \mathbf{C}$ μέ $z \neq 0$ ὑπάρχει ἕνα καί μόνο $z^* \in \mathbf{C}$, ὥστε νά ἰσχύει:

$$z . z^* = 1 \tag{2'}$$

Ἀπόδειξη. Ἄν εἶναι $z = \alpha + \beta i \neq 0$ καί $z^* = x + yi$, ἡ (2΄) γράφεται ἰσοδύναμα

$$(\alpha x - \beta y) + (\alpha y + \beta x) i = 1 + 0i \Leftrightarrow \alpha x - \beta y = 1 \quad \text{καί} \quad \beta x + \alpha y = 0$$

καί, ἀφοῦ εἶναι $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, τό σύστημα θά ἔχει τή μοναδική λύση $x = \dfrac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}$ καί $y = \dfrac{-\beta}{\alpha^2 + \beta^2}$. Ἄρα ὁ μιγαδικός ἀριθμός $z^* = \dfrac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} + \dfrac{-\beta}{\alpha^2 + \beta^2} i$ εἶναι ὁ μοναδικός γιά τό μιγαδικό ἀριθμό $z = \alpha + \beta i \neq 0$ πού ἱκανοποιεῖ τή (2΄).
Ὁ μιγαδικός ἀριθμός $\dfrac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} + \dfrac{-\beta}{\alpha^2 + \beta^2} i$, πού συμβολίζεται z^{-1} ἤ $\dfrac{1}{z}$, ὀνομάζεται ἀντίστροφος τοῦ z ἤ καί τό συμμετρικό στοιχεῖο τοῦ $z = \alpha + \beta i \neq 0$ γιά τόν πολλαπλασιασμό στό C. Εἶναι λοιπόν

$$z^{-1} = (\alpha+\beta i)^{-1} = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2} + \frac{-\beta}{\alpha^2+\beta^2}i, \quad z \neq 0$$

Πρόταση 3΄. Στό C ἰσχύει ἡ συνεπαγωγή: $z_1.z = z_2.z$ καί $z \neq 0 \Rightarrow z_1 = z_2$ (3΄)

(Ἡ πρόταση αὐτή εἶναι **ὁ νόμος τῆς διαγραφῆς στόν πολλαπλασιασμό στό C** καί ἡ ἀπόδειξη ἀφήνεται γιά ἄσκηση).

Πρόταση 4΄. Ἡ ἐξίσωση $z_1.z = z_2$, $z_1, z_2 \in C$, $z_1 \neq 0$ (4΄) ἔχει μοναδική λύση στό C τήν $z = z_2.z_1^{-1}$

(Ἡ ἀπόδειξη ἀφήνεται γιά ἄσκηση).

Ἡ μοναδική λύση τῆς ἐξισώσεως (4΄) ὀνομάζεται πηλίκο τοῦ z_2 διά z_1 καί συμβολίζεται $z_2 : z_1$ ἤ $\frac{z_2}{z_1}$. Δηλαδή εἶναι

$$\frac{z_2}{z_1} = z_2.z_1^{-1} \quad , \quad z_1 \neq 0 \tag{5΄}$$

Ἡ πράξη μέ τήν ὁποία βρίσκουμε τό πηλίκο δύο μιγαδικῶν ἀριθμῶν, ὀνομάζεται **διαίρεση**.

— **Σ' ἕνα μιγαδικό ἀριθμό $z = \alpha+\beta i$ τό α ὀνομάζεται πραγματικό μέρος καί τό β ὀνομάζεται φανταστικό μέρος**[1].

— Οἱ δυνάμεις $(\alpha+\beta i)^\kappa$, $\kappa \in Z$ ὁρίζονται ὅπως καί στό R μέ $z^1 = z$ γιά κάθε $z \in C$, $z^0 = 1$ ὅταν $z \neq 0$, καί $z \neq 0$ ὅταν $\kappa < 0$. Οἱ δυνάμεις ὑπολογίζονται ὅπως καί οἱ δυνάμεις $(\alpha+\beta x)^\nu$ μέ $x = i$ καί $i^2 = -1$.

1.4. Ἀσκήσεις

1. Δεῖξτε ὅτι: $i^0+i^1+i^2+i^3+i^4+i^5+i^6+i^7 = 0$.
2. Προσδιορίστε τά $\alpha, \beta \in R$, ὥστε οἱ μιγαδικοί ἀριθμοί
   $(3\alpha+14\beta) + (2\alpha-\beta)i$ καί $7-i$ νά εἶναι ἴσοι.
3. Ἄν $\alpha,\beta,\gamma \in R$ καί $(\alpha+\beta)-\gamma i = 5\gamma+(\alpha-\beta)i$ δεῖξτε ὅτι θά εἶναι $2\alpha-\beta=\gamma$.
4. Ἄν $\alpha, \beta, \gamma \in R-\{0\}$ καί $\frac{\alpha}{2} = \frac{\beta}{3} = \frac{1}{\gamma}$, δεῖξτε ὅτι:
   $2(\alpha+\beta)+(\beta-\alpha)\gamma i = 5\alpha+i$.
5. Νά φέρετε στή μορφή $\alpha+\beta i$ τίς παραστάσεις

   α) $3i+2i^3+i^{202}-5i^{-147}-2i^7+i^{12}$ β) $\frac{5-2i}{1-2i}$

   γ) $\frac{3}{2-i\sqrt{3}} - (5+i\sqrt{2})^{-2}$ δ) $\frac{(4-i)^2-2(1+2i)}{(3+i)^2\,(2-3i)}$.
6. Δεῖξτε ὅτι ἡ ἐξίσωση $x^4+81 = 0$ ἱκανοποιεῖται ἀπό τούς μιγαδικούς ἀριθμούς:

1. Τό πραγματικό μέρος ἑνός μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ $z = \alpha+\beta i$ συμβολίζεται Rez καί τό φανταστικό Imz. Δηλαδή εἶναι Rez $= \alpha$ καί Imz $= \beta$. Ὁ μιγαδικός ἀριθμός $\alpha+\beta i$ μέ $\alpha\beta \neq 0$ ὀνομάζεται καθαρός ἤ γνήσιος μιγαδικός ἀριθμός.

$x_1 = \frac{3\sqrt{2}}{2}(1+i)$, $x_2 = \frac{3\sqrt{2}}{2}(-1+i)$, $x_3 = \frac{3\sqrt{2}}{2}(-1-i)$ καί $x_4 = \frac{3\sqrt{2}}{2}(1-i)$.

7. Δεῖξτε ὅτι στό σύνολο **C** α) ἡ πρόσθεση εἶναι πράξη ἀντιμεταθετική καί προσεταιριστική καί β) ὁ πολλαπλασιασμός εἶναι πράξη ἀντιμεταθετική, προσεταιριστική καί ἀκόμη ἐπιμεριστική ὡς πρός τήν πρόσθεση.

1.5. Συζυγεῖς μιγαδικοί ἀριθμοί

Ι. Ὁρισμός

Ὁ μιγαδικός ἀριθμός $\alpha-\beta i$ ὀνομάζεται συζυγής τοῦ μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ $z=$ $=\alpha+\beta i$ καί συμβολίζεται μέ $\bar{z}$, δηλαδή $\bar{z}=\alpha-\beta i$.

Ἐπειδή εἶναι $\overline{(\bar{z})}=\alpha+\beta i=z$, **οἱ μιγαδικοί ἀριθμοί z καί $\bar{z}$ ὀνομάζονται συζυγεῖς μιγαδικοί ἀριθμοί.**

Εὔκολα βλέπουμε ὅτι $z+\bar{z}=2\alpha$, καί $z\bar{z}=\alpha^2+\beta^2$, δηλαδή τό ἄθροισμα καί τό γινόμενο δύο συζυγῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν εἶναι πραγματικοί ἀριθμοί.

ΙΙ. Ἰδιότητες τῶν συζυγῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν

Γιά τούς συζυγεῖς μιγαδικούς ἀριθμούς ἀναφέρουμε μερικές χρήσιμες ἰδιότητες.

α) $\overline{(-z)}=-\bar{z}$ β) $\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2$ γ) $\overline{z_1-z_2}=\bar{z}_1-\bar{z}_2$

δ) $\overline{z_1+z_2+\ldots+z_\nu}=\bar{z}_1+\bar{z}_2+\ldots+\bar{z}_\nu$, $\nu\in \mathbf{N}$ ε) $\overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$

στ΄) $\overline{z_1\cdot z_2\ldots z_\nu}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2\ldots\bar{z}_\nu$, $\nu\in\mathbf{N}$ ζ) $\overline{(z^\nu)}=(\bar{z})^\nu$, $\nu\in\mathbf{N}$

η) $\overline{(z^{-1})}=(\bar{z})^{-1}$, $z\neq 0$ θ) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$, $z_2\neq 0$ καί ι) $\overline{\alpha z}=\alpha\bar{z}$, $\alpha\in\mathbf{R}$.

Ἀποδείξεις.

β) Ἄν εἶναι $z_1=\alpha_1+\beta_1 i$ καί $z_2=\alpha_2+\beta_2 i$, τότε θά εἶναι $z_1+z_2=(\alpha_1+\alpha_2)+(\beta_1+\beta_2)i$ καί συνεπῶς $\overline{z_1+z_2}=(\alpha_1+\alpha_2)-(\beta_1+\beta_2)i=(\alpha_1-\beta_1 i)+(\alpha_2-\beta_2 i)=\bar{z}_1+\bar{z}_2$.

δ) Ἀπό τή β) καί μέ τήν ὑπόθεση ὅτι γιά $\nu=\kappa$ ἰσχύει $\overline{z_1+z_2+\ldots+z_\kappa}=\bar{z}_1+\bar{z}_2+\ldots+\bar{z}_\kappa$ παίρνουμε: $\overline{z_1+z_2+\ldots+z_\kappa+z_{\kappa+1}}=\overline{(z_1+z_2+\ldots+z_\kappa)+z_{\kappa+1}}$ $=\overline{z_1+z_2+\ldots+z_\kappa}+\bar{z}_{\kappa+1}=\bar{z}_1+\bar{z}_2+\ldots+\bar{z}_\kappa+\bar{z}_{\kappa+1}$, πού ἀποδεικνύει ὅτι ἡ ἰδιότητα ἰσχύει γιά κάθε $\nu\in\mathbf{N}$.

ε) Ἄν εἶναι $z_1=\alpha_1+\beta_1 i$ καί $z_2=\alpha_2+\beta_2 i$, τότε θά εἶναι

$$z_1\cdot z_2=(\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2)+(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)i$$

καί συνεπῶς

$$\overline{z_1\cdot z_2}=(\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2)-(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)i \tag{1}$$

Ἐξάλλου $\overline{z}_1\,\overline{z}_2 = (\alpha_1-\beta_1 i)\cdot(\alpha_2-\beta_2 i) = (\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2)-(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)i$ (2)
Οἱ (1) καί (2) ἀποδεικνύουν τή ζητούμενη.

Οἱ ἀποδείξεις τῶν ὑπόλοιπων ἰδιοτήτων ἀφήνονται γιά ἄσκηση.

1.6. Ἐφαρμογές

1. **Οἱ μόνοι μή πραγματικοί μιγαδικοί ἀριθμοί, πού τό ἄθροισμα καί τό γινόμενό τους εἶναι πραγματικός ἀριθμός, εἶναι οἱ συζυγεῖς.**

Ἀπόδειξη: Ἄς εἶναι $z_1, z_2 \in \mathbf{C}-\mathbf{R}$ μέ τήν ἰδιότητα $(z_1+z_2)\in\mathbf{R}$ καί $(z_1 . z_2)\in\mathbf{R}$. Ἄν εἶναι $z_1 = x_1+y_1 i$ καί $z_2 = x_2+y_2 i$, τότε ἡ ἰδιότητα πού ἔχουν δίνει τό σύστημα

$$\left.\begin{array}{l} y_1 + y_2 = 0 \\ x_1 y_2 + x_2 y_1 = 0 \\ y_1 \cdot y_2 \neq 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} y_2 = -y_1 \\ x_2 = x_1 \\ y_1 \cdot y_2 \neq 0 \end{array}\right\}$$

ὁπότε ὁ $z_2 = x_2+y_2 i$ γράφεται $z_2 = x_1 - y_1 i$ καί συνεπῶς $z_2 = \overline{z}_1$.

2. **Ἄν ἕνας μιγαδικός ἀριθμός εἶναι ρίζα μιᾶς πολυωνυμικῆς ἐξισώσεως μέ πραγματικούς συντελεστές, τότε καί ὁ συζυγής του εἶναι ἐπίσης ρίζα αὐτῆς τῆς ἐξισώσεως.**

Ἀπόδειξη: Ἔστω ὅτι ἔχουμε τήν πολυωνυμική ἐξίσωση

$$f(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0, \quad \alpha_\nu \neq 0$$

μέ πραγματικούς συντελεστές, ἡ ὁποία ἔχει γιά ρίζα της τό μιγαδικό ἀριθμό z, δηλαδή $f(z) = 0$. Θά δείξουμε ὅτι ἡ ἐξίσωση αὐτή ἔχει γιά ρίζα της καί τόν $\overline{z}$, δηλαδή $f(\overline{z}) = 0$. Ἐπειδή ὁ συζυγής τοῦ $0+0i$ εἶναι ὁ ἑαυτός του, ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι $\overline{f(z)} = f(\overline{z})$.

Πράγματι·
$$\begin{aligned}
\overline{f(z)} &= \overline{\alpha_\nu z^\nu + \alpha_{\nu-1} z^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 z + \alpha_0} \\
&= \overline{\alpha_\nu z^\nu} + \overline{\alpha_{\nu-1} z^{\nu-1}} + \ldots + \overline{\alpha_1 z} + \overline{\alpha_0} && (\text{Ἰδιότ. δ) τῆς 1.5.}) \\
&= \alpha_\nu \overline{z^\nu} + \alpha_{\nu-1}\overline{z^{\nu-1}} + \ldots + \alpha_1 \overline{z} + \alpha_0 && (\text{Ἰδιότ. i) τῆς 1.5.}) \\
&= \alpha_\nu (\overline{z})^\nu + \alpha_{\nu-1}(\overline{z})^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 \overline{z} + \alpha_0 && (\text{Ἰδιότ. ζ) τῆς 1.5.}) \\
&= f(\overline{z}).
\end{aligned}$$

Στή θεωρία τῶν πολυωνύμων ἡ πρόταση αὐτή ἀποδεικνύεται καί μέ ἄλλο τρόπο.

3. **Νά ἐπιλυθεῖ στό C ἡ ἐξίσωση $2-3z+\overline{(-z)} = 0$ (1)**

Ἐπίλυση: Ἡ (1) γράφεται ἰσοδύναμα $2-3z-\overline{z} = 0$, καί ἄν εἶναι $z = x+yi$, τότε ἡ τελευταία γίνεται:

$$2-3(x+yi) - (x-yi) = 0 \Leftrightarrow (-4x+2) + (-2y)i = 0 \Leftrightarrow$$

$$-4x+2 = 0 \text{ καί } -2y = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \text{ καί } y=0.$$

Ἄρα ἡ ἐξίσωση (1) ἔχει τή λύση $z = \frac{1}{2}+0i = \frac{1}{2}$.

Δίνουμε ἀκόμη μία ἐφαρμογή πού, ἄν καί δέν ἀποτελεῖ ἐφαρμογή τῶν ἰδιοτήτων τῶν συζυγῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν, παρουσιάζει ἐνδιαφέρον.

4. Σύμφωνα μέ τόν ὁρισμό **«Τετραγωνική ρίζα ἑνός μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ $\xi = \alpha+\beta i$ ὀνομάζουμε κάθε μιγαδικό ἀριθμό $z = x+yi$ πού ἱκανοποιεῖ τήν ἐξίσωση $z^2 = \xi$»**, νά βρεῖτε τήν τετραγωνική ρίζα τοῦ $\xi = 5-12i$.

Λύση: Ἂν ὁ μιγαδικός ἀριθμός $z = x+yi$ εἶναι ἡ τετραγωνική ρίζα τοῦ $\xi = 5-12i$, τότε ἔχουμε:

$$\begin{aligned} &(x+yi)^2 = 5-12i \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2-y^2+2xyi = 5-12i \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2-y^2 = 5 \quad \text{καί} \quad 2xy = -12, \end{aligned} \qquad (1)$$

Ἄρα θά εἶναι καί $(x^2-y^2)^2 = 25$ καί $4x^2y^2 = 144$.

Προσθέτοντας κατά μέλη τίς δυό τελευταῖες ἐξισώσεις ἔχουμε:

$$(x^2+y^2)^2 = 169 \Leftrightarrow x^2+y^2 = 13.$$

Ἐπιλύοντας τό σύστημα $\left.\begin{aligned} x^2-y^2 &= 5 \\ x^2+y^2 &= 13 \end{aligned}\right\}$

παίρνουμε $\left.\begin{aligned} x &= \pm 3 \\ y &= \pm 2 \end{aligned}\right\}$

Ἀφοῦ ὅμως εἶναι καί $2xy = -12$, τό σύστημα (1) θά ἔχει τίς λύσεις

$$x_1 = 3 \quad , \quad y_1 = -2 \quad \text{καί} \quad x_2 = -3, \quad y_2 = 2.$$

Ἄρα ὑπάρχουν δύο τετραγωνικές ρίζες

$$z_1 = 3-2i \quad \text{καί} \quad z_2 = -3+2i \quad \text{τοῦ} \quad \xi = 5-12i.$$

Γενικά δεῖξτε ὅτι **κάθε μιγαδικός ἀριθμός $\alpha+\beta i \neq 0+0i$ ἔχει δύο διακεκριμένες τετραγωνικές ρίζες.**

1.7. Ἀσκήσεις

1. Ὑπολογίστε τούς $x, y \in \mathbf{R}$ ὥστε οἱ μιγαδικοί ἀριθμοί $z_1 = -3+i(2x-y)$ καί $z_2 = x-5y-3i$ νά εἶναι συζυγεῖς.
2. Ἐπιλύστε τίς παρακάτω ἐξισώσεις μέ ἄγνωστο τό μιγαδικό z
   α) $\bar{z} = -z$, β) $\bar{z} = -4z$ καί γ) $z^2+\bar{z} = 0$.
3. **Ἄν $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$, τότε: $z_1 . z_2 = 0 \Leftrightarrow (z_1 = 0 \vee z_2 = 0)$.**
4. **Ἄν $z_1, z_2, z \in \mathbf{C}$ μέ $z_2 . z \neq 0$, δεῖξτε ὅτι $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1 . z}{z_2 . z}$.**
5. **Ἄν $z^2 = \bar{z}^2$, τότε θά εἶναι μόνο $z \in \mathbf{R}$ ἤ $z \in \mathbf{I}$[1]**
6. **Ὑπολογίστε τούς $x, y \in \mathbf{R}$ ὥστε νά ἰσχύει:**
   $(i-x)^2 - (i+x)^2 + y + 1 = \dfrac{1}{i}$.
7. **Ὑπολογίστε τόν $x \in \mathbf{R}$ ὥστε νά ἰσχύει $1+2i\sqrt{2} = 3 . \dfrac{1+xi}{1-xi}$.**
8. **Βρεῖτε τίς τετραγωνικές ρίζες τοῦ μιγαδικοῦ $2+2i$.**
9. **Ὑπολογίστε τούς $x, y \in \mathbf{R}$, ὥστε νά ἰσχύει $\dfrac{x}{1+2i} + \dfrac{y}{3+2i} = \dfrac{5+6i}{8i-1}$.**
10. **Βρεῖτε τό ἄθροισμα τῶν ν-ὅρων:**
    $i+(2+3i)+(4+5i)+(6+7i) + \ldots + [2\nu-2 + (2\nu-1)i], \quad \nu \in \mathbf{N}$
11. **Ἐπιλύστε τήν ἐξίσωση $z^2-(3+i)z+4+3i = 0$, $z \in \mathbf{C}$.**

---

1. Τό σύνολο $\mathbf{I}$ εἶναι τό ὑποσύνολο τοῦ $\mathbf{C}$ μέ στοιχεῖα τῆς μορφῆς $(0,\beta)$, $\beta \neq 0$ καί ὀνομάζεται σύνολο τῶν φανταστικῶν ἀριθμῶν.

1.8. Μέτρο τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν

I. Ὁρισμός

Γιά τό μιγαδικό ἀριθμό $z = \alpha+\beta i$ ὁ μή ἀρνητικός ἀριθμός $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ ὀνομάζεται ἀπόλυτη τιμή ἤ μέτρο του καί συμβολίζεται μέ $|z|$, δηλαδή

$$|z| = |\alpha+\beta i| = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$$

Ἐπειδή εἶναι $z\bar{z} = \alpha^2+\beta^2$, θά εἶναι

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}}$$

Εἶναι φανερό ὅτι εἶναι $|z|\geq 0$ γιά κάθε $z \in \mathbf{C}$.

Ὅταν εἶναι $z = \alpha+0i$, ἔχουμε $|z| = \sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$. Ὅταν εἶναι $z = \alpha+\beta i$ καί $\beta \neq 0$, τότε ἰσχύει $|z|^2 \neq z^2$, γιατί ὁ $|z|^2$ εἶναι θετικός, ἐνῶ ὁ z^2 εἶναι ἀρνητικός ἤ εἶναι γνήσιος μιγαδικός ἀριθμός. Αὐτή εἶναι μία σπουδαία διαφορά μεταξύ τῶν στοιχείων τοῦ **R** καί τοῦ **C**—**R**.

II. Ἰδιότητες τοῦ μέτρου τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν.

Ἀναφέρουμε μερικές βασικές ἰδιότητες τοῦ μέτρου τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν. Ἄν $z, z_1, z_2, \ldots, z_\nu$ εἶναι μιγαδικοί ἀριθμοί, τότε θά εἶναι:

α) $|z_1+z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (τριγωνική ἀνισότητα)

β) $|z_1+z_2+\ldots+z_\nu| \leq |z_1|+|z_2|+\ldots+|z_\nu|, \quad \nu \in \mathbf{N}$

γ) $||z_1|-|z_2|| \leq |z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2|$

δ) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ ε) $|z_1 \cdot z_2 \ldots z_\nu| = |z_1| \cdot |z_2| \ldots |z_\nu|, \ \nu \in \mathbf{N}$

στ) $|z^\nu| = |z|^\nu, \quad \nu \in \mathbf{N}$ ζ) $|z^{-1}| = |z|^{-1}, \quad z \neq 0$

η) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}, \quad z_2 \neq 0.$

Ἀποδείξεις:

α) Ἄν $z_1 = \alpha_1+\beta_1 i$ καί $z_2 = \alpha_2+\beta_2 i$, ἡ ζητούμενη γίνεται

$|(\alpha_1+\alpha_2) + (\beta_1+\beta_2)i| \leq |\alpha_1+\beta_1 i| + |\alpha_2+\beta_2 i| \Leftrightarrow$

$\sqrt{(\alpha_1+\alpha_2)^2+(\beta_1+\beta_2)^2} \leq \sqrt{\alpha_1^2+\beta_1^2} + \sqrt{\alpha_2^2+\beta_2^2}$ καί, ἀφοῦ τά μέλη εἶναι μή ἀρνητικοί πραγματικοί, παίρνουμε ἰσοδύναμα

$$(\alpha_1+\alpha_2)^2+(\beta_1+\beta_2)^2 \leq \alpha_1^2+\beta_1^2+\alpha_2^2+\beta_2^2+2\sqrt{(\alpha_1^2+\beta_1^2)(\alpha_2^2+\beta_2^2)} \Leftrightarrow$$

$$\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2 \leq \sqrt{\alpha_1^2\alpha_2^2+\alpha_1^2\beta_2^2+\alpha_2^2\beta_1^2+\beta_1^2\beta_2^2} \quad (1), \quad \text{ὁπότε}$$

i) Ἄν $\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2<0$, ἡ (1) ἀληθεύει σάν γνήσια ἀνισότητα.

ii) Ἄν $0\leq\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2$, τότε ἡ (1) γίνεται ἰσοδύναμα:

$$\alpha_1^2\alpha_2^2+\beta_1^2\beta_2^2 + 2\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2 \leq \alpha_1^2\alpha_2^2+\alpha_1^2\beta_2^2+\alpha_2^2\beta_1^2+\beta_1^2\beta_2^2 \Leftrightarrow$$
$$0 \leq (\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)^2, \text{ ἡ ὁποία ἀληθεύει πάντα.}$$

Ἡ ζητούμενη θά ἰσχύει σάν ἰσότητα, ὅταν εἶναι

$$0\leq\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2 \text{ καί } \alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1=0 \qquad (2)$$

Ἀφοῦ $z_1\cdot\bar{z_2} = (\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2) + (\alpha_2\beta_1-\alpha_1\beta_2)i$, οἱ σχέσεις (2) ἰσοδυναμοῦν μέ τήν: $(z_1\cdot\bar{z_2})\geq 0$. Ἄρα ἰσχύει $|z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2|$, $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$ καί γίνεται ἰσότητα, ὅταν $(z_1\bar{z_2})\geq 0$ ἤ ἰσοδύναμα ὅταν $(\bar{z_1}z_2)\geq 0$.

Ἄς θυμηθοῦμε ὅτι ἡ ἴδια σχέση στούς πραγματικούς ἀριθμούς εἶναι $|\alpha+\beta| \leq$ $\leq |\alpha|+|\beta|$ καί ἡ ἰσότητα ἰσχύει, ὅταν $\alpha\cdot\beta\geq 0$.

δ) Ἔχουμε $|z_1\cdot z_2|^2 = (z_1\cdot z_2)\cdot(\overline{z_1z_2}) = (z_1z_2)\cdot(\bar{z_1}\cdot\bar{z_2}) =$
$$= (z_1\cdot\bar{z_1})\cdot(z_2\cdot\bar{z_2}) = |z_1|^2\cdot|z_2|^2 = (|z_1|\cdot|z_2|)^2$$
$$\Leftrightarrow |z_1\cdot z_2| = |z_1|\cdot|z_2|.$$

1.9. Ἀσκήσεις

1. Δεῖξτε τίς ὑπόλοιπες ἰδιότητες τῆς παραγράφου 1.8.
2. Δεῖξτε ὅτι γιά κάθε $z_1,z_2 \in \mathbf{C}$ ἰσχύει: $||z_1|-|z_2|| \leqslant |z_1-z_2| \leqslant |z_1|+|z_2|$.
3. Βρεῖτε τά μέτρα τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν

   α) $\dfrac{4-5i}{2+i}$ β) $\dfrac{(\sqrt{2}+i)^3}{i(1-i\sqrt{3})^2}$ γ) $\left(\dfrac{3i\,(\sqrt{3}+i\sqrt{5}).(1-i\sqrt{3})}{4-i\sqrt{3}}\right)^4$

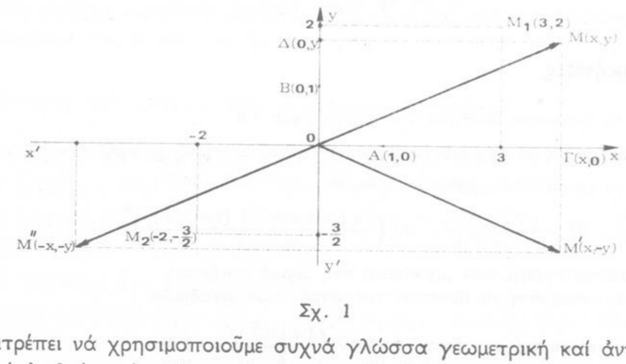
   i) φέρνοντας πρῶτα τούς μιγαδικούς στή μορφή $\alpha+\beta i$ καί
   ii) χρησιμοποιώντας τίς ἰδιότητες τοῦ μέτρου τῶν μιγαδικῶν.
4. Βρεῖτε τό μέτρο τοῦ μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^\nu$, $\nu \in \mathbf{N}$.
5. Βρεῖτε τό μιγαδικό z, γιά τόν ὁποῖο $|z-1| = |z-2| = |z-i|$.
6. Ἄν $z = x+yi$, βρεῖτε τή σχέση μεταξύ τῶν x καί y, πού ὁρίζεται ἀπό τήν ἰσότητα $|z-i| =$ $=|z+2|$.
7. Ἐπιλύστε στό σύνολο **C** τήν ἐξίσωση $z^2+|z| = 0$.
8. Βρεῖτε τούς μιγαδικούς z, γιά τούς ὁποίους ἰσχύει:
   $$|z|^2-2iz+2\alpha(1+i) = 0, \quad \alpha \geqslant 0$$
   περιορίζοντας κατάλληλα τόν α.
9. Ἄν z_1,z_2,z_3,z_4 εἶναι μιγαδικοί ἀριθμοί μέ $z_3.z_4 \neq 0$ καί
   $|z_3|^2 + |z_4|^2 \leqslant 1$, δεῖξτε ὅτι $\left|\dfrac{z_1}{z_3}\right|^2 + \left|\dfrac{z_2}{z_4}\right|^2 \geqslant |z_1+z_2|^2$.
10. Ἄν οἱ μιγαδικοί z_1, z_2 ἱκανοποιοῦν τίς σχέσεις
    $|z_1+z_2| = |z_1| = |z_2|$, $|z_1| \neq 0$, δεῖξτε ὅτι
    $|z_1-z_2| = \sqrt{3}|z_1|$.

2. ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΤΩΝ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

2.1. Ἡ ἀπεικόνιση τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν στά σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου.

Ἡ ἀμφιμονοσήμαντη ἀντιστοίχιση σέ κάθε μιγαδικό ἀριθμό $z = x + yi$ τοῦ ζεύγους $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ ὁδηγεῖ, ὅπως εἴπαμε προηγουμένως[1], στή **γεωμετρική του παράσταση** μέ ἕνα σημεῖο ἑνός ἐπιπέδου. Ἄς πάρουμε ἕνα ἐπίπεδο (Π) καί ἕνα ὀρθοκανονικό σύστημα ἀξόνων $x0y$ σ' αὐτό (Σχ. 1). Εἶναι φανερό ὅτι στό μιγαδικό ἀριθμό z ἀντιστοιχεῖ σάν **εἰκόνα του** τό σημεῖο $M(x,y)$ τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ καί ἀντίστροφα στό σημεῖο $M(x,y)$ ἀντιστοιχεῖ ὁ μιγαδικός ἀριθμός $z = (x,y)$.

Ἡ ἀμφιμονοσήμαντη ἀντιστοίχιση μιγαδικῶν ἀριθμῶν καί σημείων τοῦ (Π)



Σχ. 1

μᾶς ἐπιτρέπει νά χρησιμοποιοῦμε συχνά γλώσσα γεωμετρική καί ἀντί γιά τό μιγαδικό ἀριθμό z νά μιλᾶμε γιά τό σημεῖο Μ. Γι' αὐτό καί οἱ x,y ὀνομάζονται **καρτεσιανές συντεταγμένες** τοῦ μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ $x+yi$. Τό ἐπίπεδο (Π), πού χρησιμοποιεῖται γιά τήν παράσταση αὐτή, λέγεται **μιγαδικό ἐπίπεδο** ἤ **ἐπίπεδο τοῦ Gauss.**

Σύμφωνα μέ τήν παραπάνω παράσταση οἱ πραγματικοί ἀριθμοί x, πού τούς «ταυτίσαμε» μέ τά ζεύγη (x,0), παριστάνονται μέ τά σημεῖα τοῦ ἄξονα τῶν τετμημένων $x'0x$, ὁ ὁποῖος γι' αὐτό ὀνομάζεται **πραγματικός ἄξονας** τοῦ συστήματος. Οἱ καθαρά φανταστικοί ἀριθμοί (0,y) ἀντιστοιχοῦν στά σημεῖα τοῦ ἄξονα $y'0y$ τῶν τεταγμένων, ὁ ὁποῖος γι' αὐτό ὀνομάζεται **φανταστικός ἄξονας** τοῦ συστήματος.

Στό σχ. 1 παρατηροῦμε ὅτι στόν ἀντίθετο $-z$ τοῦ μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ z ἀντιστοιχεῖ τό συμμετρικό Μ'' τοῦ σημείου Μ ὡς πρός τήν ἀρχή 0 τοῦ συστήματος καί στό συζυγή $\bar{z}$ τοῦ z τό συμμετρικό Μ' τοῦ σημείου Μ ὡς πρός τόν πραγματικό ἄξονα $x'0x$.

---

(1) Ὑποσημείωση τῆς παραγράφου 1.1.

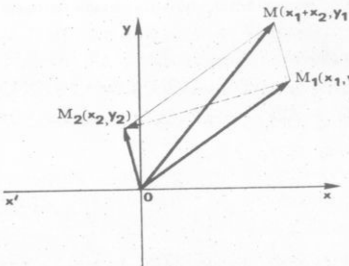
2.2. Γεωμετρική εἰκόνα τοῦ ἀθροίσματος καί τῆς διαφορᾶς δύο μιγαδικῶν ἀριθμῶν.

Ἡ ἀμφιμονοσήμαντη ἀντιστοίχιση μιγαδικῶν ἀριθμῶν καί σημείων τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου μᾶς ἐπιτρέπει τήν ἀμφιμονοσήμαντη ἀντιστοίχιση τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν καί τῶν διανυσματικῶν ἀκτίνων τῶν σημείων τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου. Ἔτσι π.χ. στό μιγαδικό ἀριθμό $z = (x,y)$ ἀντιστοιχεῖ τό σημεῖο $M(x,y)$ καί στό σημεῖο $M(x,y)$ ἀντιστοιχεῖ ἡ διανυσματική ἀκτίνα $\overrightarrow{OM}$ (Σχ. 1) καί ἄρα στό $z = (x,y)$ ἀντιστοιχεῖ ἡ $\overrightarrow{OM}$. Τήν $\overrightarrow{OM}$ τήν ὀνομάζουμε **διανυσματική ἀκτίνα τοῦ μιγαδικοῦ z**.

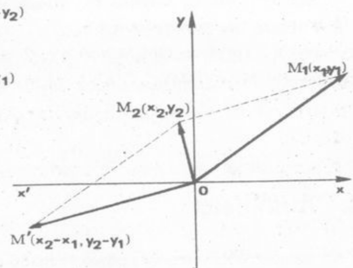
Εἶναι εὔκολο νά δοῦμε ὅτι $|\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x^2+y^2} = |z|$, δηλαδή ὅτι τό μέτρο τῆς $\overrightarrow{OM}$ ἰσοῦται μέ τό μέτρο τοῦ μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ z.

Μέ τή βοήθεια τῶν διανυσματικῶν ἀκτίνων τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν μποροῦμε νά βροῦμε τίς διανυσματικές ἀκτίνες τοῦ ἀθροίσματος καί τῆς διαφορᾶς δύο μιγαδικῶν ἀριθμῶν καί νά ἑρμηνεύσουμε ἔτσι γεωμετρικά τήν πρόσθεση καί τήν ἀφαίρεση στό **C**.

Ἄς πάρουμε τούς μιγαδικούς ἀριθμούς $z_1 = x_1+y_1i$ καί $z_2 = x_2+y_2i$ καί τίς ἀντίστοιχες εἰκόνες τους $M_1(x_1,y_1)$ καί $M_2(x_2,y_2)$ στό μιγαδικό ἐπίπεδο (Σχ.2). Οἱ διανυσματικές ἀκτίνες τῶν z_1 καί z_2 εἶναι οἱ $\overrightarrow{OM_1}$ καί $\overrightarrow{OM_2}$ ἀντίστοιχα καί τό ἄθροισμα z_1+z_2 ἔχει γιά διανυσματική του ἀκτίνα τή διαγώνιο $\overrightarrow{OM}$ τοῦ παραλληλογράμμου πού ὁρίζουν οἱ $\overrightarrow{OM_1}$ καί $\overrightarrow{OM_2}$.

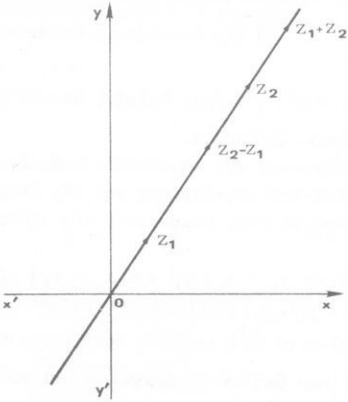


Σχ. 2

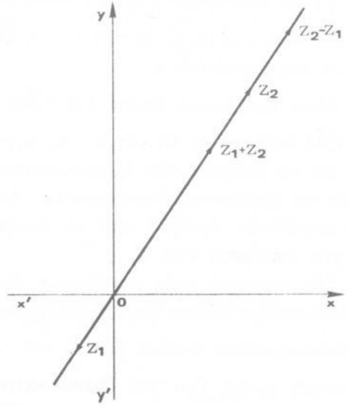


Σχ. 3

Τό διάνυσμα $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}$, πού ὁρίζεται ἀπό τήν ἄλλη διαγώνιο τοῦ παραλληλογράμμου αὐτοῦ, εἶναι ἴσο μέ τή διανυσματική ἀκτίνα τῆς διαφορᾶς z_2-z_1 τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν. Ἡ διαφορά παριστάνεται μέ τή διανυσματική ἀκτίνα $\overrightarrow{OM'}$ (Σχ. 3), πού εἶναι ἡ ἄλλη πλευρά τοῦ παραλληλογράμμου πού κατασκευάζεται μέ πλευρά τήν $\overrightarrow{OM_1}$ καί διαγώνιο τήν $\overrightarrow{OM_2}$. Στά σχήματα 2 καί 3 ὑποθέτουμε ὅτι τό παραλληλόγραμμο τῶν διανυσματικῶν ἀκτίνων $\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{OM_2}$ εἶναι κατασκευάσιμο, δηλαδή τά σημεῖα O, M_1, M_2 δέ βρίσκονται πάνω σέ εὐθεία γραμμή. Ὅταν τά σημεῖα O, M_1, M_2 βρίσκονται πάνω στήν ἴδια εὐθεία, τότε ἔχουμε εὔκολα τό ἄθροισμα καί τή διαφορά τῶν z_1 καί z_2. Αὐτό φαίνεται στά σχήματα 4 καί 5.



Σχ. 4



Σχ. 5

Ἐφαρμογή: Μέ τή βοήθεια τῆς γεωμετρικῆς παραστάσεως τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν δεῖξτε τήν ἰδιότητα γ) τῆς παραγράφου 1.8.

Ἀπό τό τρίγωνο OM_1M τοῦ σχ. 2 παίρνουμε

$$|(OM_1)-(M_1M)| \leqslant (OM) \leqslant (OM_1)+(M_1M) \Leftrightarrow |(OM_1)-(OM_2)| \leqslant (OM) \leqslant (OM_1)+(OM_2) \Leftrightarrow$$

$$||\overrightarrow{OM_1}|-|\overrightarrow{OM_2}|| \leqslant |\overrightarrow{OM}| \leqslant |\overrightarrow{OM_1}| + |\overrightarrow{OM_2}| \Leftrightarrow$$

$$||z_1| - |z_2|| \leqslant |z_1+z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|.$$

2.3. Ἀσκήσεις

1. Νά παρασταθοῦν στό μιγαδικό ἐπίπεδο οἱ μιγαδικοί ἀριθμοί $2+3i$, $2-3i$, $-2+3i$, $-2-3i$.
2. Νά παρασταθοῦν στό ἐπίπεδο Gauss τρεῖς μιγαδικοί z_1, z_2, z_3 καί ἔπειτα οἱ μιγαδικοί

$$z_1 + z_2 + z_3 \quad \text{καί} \quad z_1 + z_2 - z_3.$$

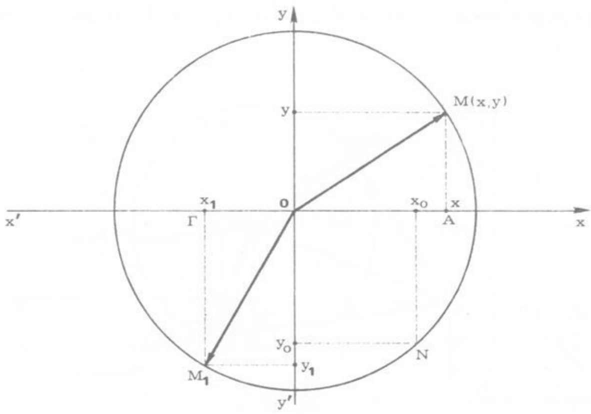
3. Δεῖξτε μέ τή βοήθεια τῆς γεωμετρικῆς παραστάσεως τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν ὅτι ἰσχύει

$$||z_1| - |z_2|| \leqslant |z_1-z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|.$$

3. ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ ΜΕΤΡΟΥ ΤΩΝ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

3.1. Ἡ ἐξίσωση τοῦ κύκλου

Ἄς εἶναι Ο ἡ ἀρχή τοῦ ὀρθοκανονικοῦ συστήματος στό ἐπίπεδο Gauss καί $M(x,y)$ ἕνα σημεῖο τοῦ ἐπιπέδου, πού ἀπέχει ἀπό τό Ο ἀπόσταση ἴση μέ α (Σχ. 6.).



Σχ. 6

Ἀπό τό ὀρθογώνιο τρίγωνο ΟΑΜ ἔχουμε $(OA)^2+(AM)^2=(OM)^2$, δηλαδή

$$x^2+y^2=\alpha^2 \qquad (1)$$

Ἄν μέ κέντρο τό Ο καί ἀκτίνα α γράψουμε τόν κύκλο (Ο,α), τότε τό τυχόν σημεῖο $M_1(x_1,y_1)$ αὐτοῦ τοῦ κύκλου ἱκανοποιεῖ τήν (1) καί ἀντίστροφα. Πράγματι· α) εἶναι $(O\Gamma)^2+(\Gamma M_1)^2=(OM_1)^2$, δηλαδή $x_1^2+y_1^2=\alpha^2$. β) Ἄν $N(x_o,y_o)$ εἶναι ἕνα σημεῖο τοῦ ἐπιπέδου μέ $x_o^2+y_o^2=\alpha^2$, τότε, ἀφοῦ $x_o^2+y_o^2=(ON)^2$, θά ἔχουμε $(ON)^2=\alpha^2$ καί ἄρα $(ON)=\alpha$, πού σημαίνει ὅτι τό σημεῖο Ν εἶναι σημεῖο τοῦ κύκλου (0,α).

Ἄρα ἡ ἐξίσωση (1) εἶναι ἡ ἐξίσωση τοῦ κύκλου (0,α). Ἐπειδή τό σημεῖο $M(x,y)$ εἶναι ἡ εἰκόνα τοῦ μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ $z=x+yi$, δηλαδή ἡ $\overrightarrow{OM}$ εἶναι ἡ διανυσματική του ἀκτίνα, ἡ (1) γράφεται ἰσοδύναμα

$$|z|^2=\alpha^2 \text{ ἤ καί } |z|=\alpha, \quad \text{ἀφοῦ } \alpha>0.$$

Ἔτσι ἔχουμε τό σπουδαῖο συμπέρασμα ὅτι:

— Στό μιγαδικό ἐπίπεδο τό σύνολο τῶν εἰκόνων τῶν μιγαδικῶν z πού ἱκανο-

ποιοῦν τή σχέση $|z|=\alpha$, $\alpha>0$, εἶναι ὁ κύκλος μέ κέντρο τήν ἀρχή Ο καί ἀκτίνα ἴση μέ α.

Εἶναι εὔκολο τώρα νά δοῦμε ὅτι γιά τό μιγαδικό ἀριθμό $z=x+yi$ ἡ σχέση

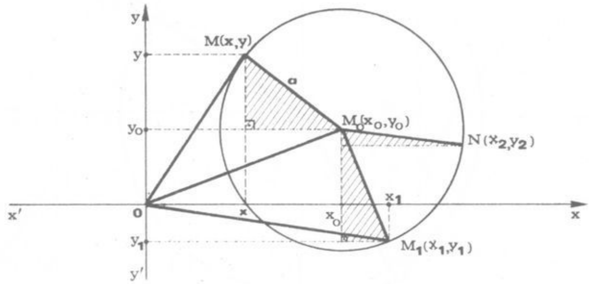
$$|z|<\alpha$$

ὁρίζει τό ἐσωτερικό τοῦ κύκλου (0,α), ἐνῶ ἡ σχέση

$$|z|>\alpha$$

ὁρίζει τό ἐξωτερικό του.

Ἄς εἶναι τώρα $M_o(x_o,y_o)$ ἕνα σταθερό σημεῖο τοῦ ἐπιπέδου τοῦ Gauss καί $M(x,y)$ τυχόν σημεῖο του, πού ἀπέχει ἀπό τό M_o σταθερή ἀπόσταση ἴση μέ α (Σχ. 7).



Σχ. 7

Γνωρίζουμε ὅτι ἡ ἀπόσταση (M_0M) δίνεται ἀπό τή σχέση

$$(M_oM)^2=(x-x_o)^2+(y-y_o)^2, \text{ δηλαδή}$$

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\alpha^2 \qquad (2)$$

Ἄν μέ κέντρο τό M_o καί ἀκτίνα α γράψουμε τόν κύκλο (M_o,α), τότε γιά τό τυχόν σημεῖο του $M_1(x_1,y_1)$ ἔχουμε: $(x_1-x_o)^2+(y_1-y_o{}^2)=\alpha^2$, δηλαδή οἱ συντεταγμένες κάθε σημείου τοῦ (M_o, α) ἱκανοποιοῦν τή (2).

Ἀντίστροφα: Ἄν $N(x_2,y_2)$ εἶναι ἕνα σημεῖο τοῦ ἐπιπέδου, γιά τό ὁποῖο ἰσχύει $(x_2-x_o)^2+(y_2-y_o)^2=\alpha^2$, τότε, ἀφοῦ $(x_2-x_o)^2+(y_2-y_o)^2=(M_oN)^2$, θά ἔχουμε $(M_oN)^2=\alpha^2$, δηλαδή $(M_oN)=\alpha$, πού σημαίνει ὅτι τό Ν εἶναι σημεῖο τοῦ κύκλου (M_o,α).

Ἡ (2) λοιπόν εἶναι ἡ ἐξίσωση τοῦ κύκλου (M_o,α). Ἄν τά σημεῖα $M(x,y)$ καί $M_o(x_o,y_o)$ εἶναι οἱ εἰκόνες τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν $z=x+yi$ καί $z_o=x_o+y_oi$ ἀντίστοιχα, τότε ἡ ἐξίσωση (2) γράφεται:

$$|z-z_o|^2=\alpha^2 \text{ ἤ } |z-z_o|=\alpha, \text{ ἀφοῦ } \alpha>0.$$

Εὔκολα βλέπουμε ὅτι ἡ σχέση $|z-z_o|<\alpha$ ὁρίζει τό ἐσωτερικό τοῦ κύκλου (M_o,α), ἐνῶ ἡ $|z-z_o|>\alpha$ ὁρίζει τό ἐξωτερικό του.

3.2. Ἐφαρμογές

1. Βρεῖτε τά σημεῖα τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου, γιά τά ὁποῖα εἶναι: $|z| = |3-4i|$ (1).

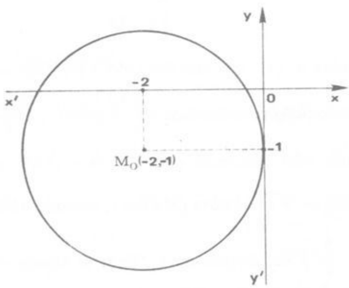
Λύση: Ἔχουμε $|z| = |3-4i| \Leftrightarrow |z| = \sqrt{3^2+4^2} \Leftrightarrow |z| = 5$ (2)

Ἡ (2) εἶναι ἡ ἐξίσωση τοῦ κύκλου (0,5) στό μιγαδικό ἐπίπεδο καί ἄρα οἱ μιγαδικοί ἀριθμοί, πού ἔχουν εἰκόνες τά σημεῖα αὐτοῦ τοῦ κύκλου, εἶναι λύσεις τῆς (1).

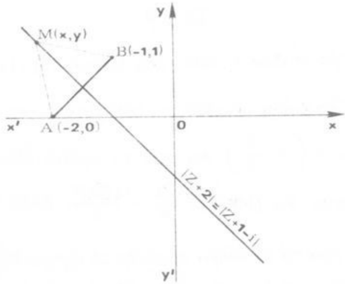
2. Στό μιγαδικό ἐπίπεδο βρεῖτε τίς λύσεις τῆς ἐξισώσεως

$$|z + 2 + i| = 2.$$

Ἐπίλυση: Ἔχουμε $|z+2+i| = 2 \Leftrightarrow |z-(-2-i)| = 2$ (1) καί σύμφωνα μέ τά προηγούμενα ἡ (1) ἐπαληθεύεται ἀπό τούς μιγαδικούς ἀριθμούς z, πού ἔχουν εἰκόνες στό μιγαδικό ἐπίπεδο τά σημεῖα τοῦ κύκλου μέ κέντρο τήν εἰκόνα τοῦ μιγαδικοῦ $-2-i$, δηλαδή τό σημεῖο $M_o(-2,-1)$ καί ἀκτίνα $\alpha = 2$. (Σχ. 8).



Σχ. 8



Σχ. 9

3. Βρεῖτε τά σημεῖα τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου, γιά τά ὁποῖα εἶναι:

$$|z+2| = |z-(-1+i)|.$$

Λύση: Ἔχουμε $|z+2| = |z-(-1+i)| \Leftrightarrow |z-(-2+0i)| = |z-(-1+i)|$ (1)

Ἄς εἶναι A(−2,0) ἡ εἰκόνα τοῦ μιγαδικοῦ $-2+0i$ καί B(−1,1) τοῦ μιγαδικοῦ $-1+i$ (Σχ. 9). Ἄν M εἶναι ἡ εἰκόνα ἑνός μιγαδικοῦ z, τότε τό $|z-(-2+0i)|$ παριστάνει τήν ἀπόσταση (AM) καί τό $|z-(-1+i)|$ τήν ἀπόσταση (BM). Ἐπειδή θέλουμε $|z-(-2+0i)| = |z-(-1+i)|$, θά πρέπει νά εἶναι (MA) = (MB). Αὐτό σημαίνει ὅτι οἱ εἰκόνες τῶν λύσεων τῆς (1) ἰσαπέχουν ἀπό τά σταθερά σημεῖα A καί B καί ἄρα ἀνήκουν στή μεσοκάθετο τοῦ AB.

Ἀντίστροφα: Κάθε σημεῖο M(x,y), εἰκόνα τοῦ μιγαδικοῦ $z = x+yi$, πού ἰσαπέχει ἀπό τά A καί B, θά ἱκανοποιεῖ τήν ἰσότητα $|z-(-2+0i)| = |z-(-1+i)|$, δηλ. τήν (1). Ἄρα τά ζητούμενα σημεῖα ἀποτελοῦν τή μεσοκάθετο τοῦ τμήματος AB, μέ A(−2,0) καί B(−1,1).

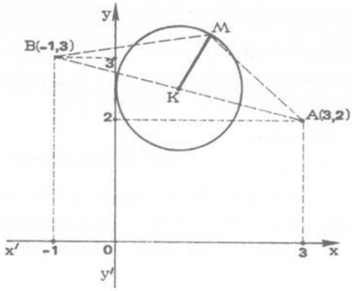
4. Στό μιγαδικό ἐπίπεδο βρεῖτε ποῦ ἀνήκουν οἱ εἰκόνες τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν, πού εἶναι λύσεις τῆς ἐξισώσεως

$$2|z-3-2i|^2 + 2|z+1-3i|^2 = 21$$

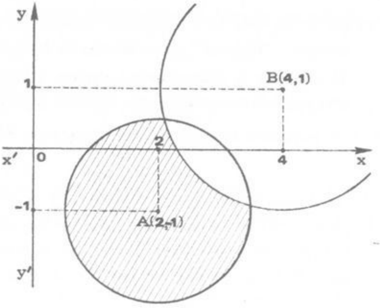
Λύση: Ἔχουμε $2|z-3-2i|^2 + 2|z+1-3i|^2 = 21 \Leftrightarrow$

$$|z-(3+2i)|^2 + |z-(-1+3i)|^2 = \frac{21}{2} \quad (1)$$

Στό μιγαδικό ἐπίπεδο παίρνουμε τά σημεῖα A(3,2) καί B(−1,3), πού εἶναι εἰκόνες τῶν μιγαδικῶν $3+2i$ καί $-1+3i$ ἀντίστοιχα (Σχ. 10).



Σχ. 10



Σχ. 11

Ἄν M εἶναι ἡ εἰκόνα μιᾶς λύσεως τῆς (1), τότε ἡ (1) μᾶς λέει ὅτι $(MA)^2+(MB)^2=\frac{21}{2}$.
Ἄν K εἶναι τό μέσο τοῦ εὐθύγραμμου τμήματος AB, τότε θά εἶναι $K\left(\frac{3+(-1)}{2},\ \frac{3+2}{2}\right)=$ $=K\left(1,\ \frac{5}{2}\right)$ καί ἀπό τό πρῶτο θεώρημα τῶν διαμέσων στό τρίγωνο MAB προκύπτει ὅτι $(MK)^2=\frac{21}{4}-\frac{(AB)^2}{4}$. Ἀλλά $(AB)=\sqrt{17}$, ὁπότε $(MK)^2=1$, δηλαδή $(MK)=1$.

Ἄρα τό M ἀνήκει σέ κύκλο μέ κέντρο $K\left(1, \frac{5}{2}\right)$ καί ἀκτίνα $\alpha=1$. Ἔτσι οἱ λύσεις τῆς (1 ἔχουν εἰκόνες τά σημεῖα αὐτοῦ τοῦ κύκλου, ὁ ὁποῖος ἔχει ἐξίσωση

$$\left|z-\left(1+\frac{5}{2}\,i\right)\right|=1.$$

5. Στό μιγαδικό ἐπίπεδο βρεῖτε τό σύνολο τῶν εἰκόνων τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν z, πού εἶναι λύσεις τοῦ συστήματος:

$$|z-2+i|<\frac{3}{2}\quad,\quad |z-4-i|>2$$

Λύση: Στό σχῆμα 11 δίνουμε τή γεωμετρική εἰκόνα τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος. Ἀφήνουμε γιά ἄσκηση τή δικαιολόγηση τῶν ἀποτελεσμάτων.

3.3. Ἀσκήσεις

1. **Δεῖξτε ὅτι ἡ ἐξίσωση τοῦ κύκλου $|z-z_0|=\alpha$ παίρνει τή μορφή**

$$z\bar{z}=2\mathrm{Re}(z\,\bar{z}_0)+\alpha^2-|z_0|^2$$

2. Στό μιγαδικό ἐπίπεδο ἐπιλύστε τήν ἐξίσωση $|z-2+3i|=5$.
3. Βρεῖτε τά σημεῖα τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου, γιά τά ὁποῖα εἶναι $|z-i|=|z+2|$.
4. Βρεῖτε τά σημεῖα τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου, γιά τά ὁποῖα εἶναι $|z-2|<|z|$.
5. Στό μιγαδικό ἐπίπεδο βρεῖτε τό σύνολο τῶν εἰκόνων τῶν μιγαδικῶν, πού ἐπαληθεύουν τήν $|z-1|<|z+1|$.

6. Ἄν εἶναι $|z-8| = 2|z-2|$, $z \in \mathbf{C}$, δεῖξτε ὅτι θά εἶναι $|z| = 4$.
7. Ἄν $|z| = 3$, βρεῖτε τά σημεῖα τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου, πού εἶναι εἰκόνες τῶν μιγαδικῶν (α) $-2z$, (β) $1-z$, (γ) $3z-1$.
8. Βρεῖτε ὅλους τούς μιγαδικούς ἀριθμούς, γιά τούς ὁποίους εἶναι: $3 \leqslant |z+i| \leqslant 4$.
9. Βρεῖτε ὅλους τούς μιγαδικούς ἀριθμούς, γιά τούς ὁποίους εἶναι: $|z-1|^2 + |z+1|^2 = 4$.
10. Βρεῖτε τούς μιγαδικούς z, οἱ ὁποῖοι ἐπαληθεύουν συγχρόνως τίς ἐξισώσεις

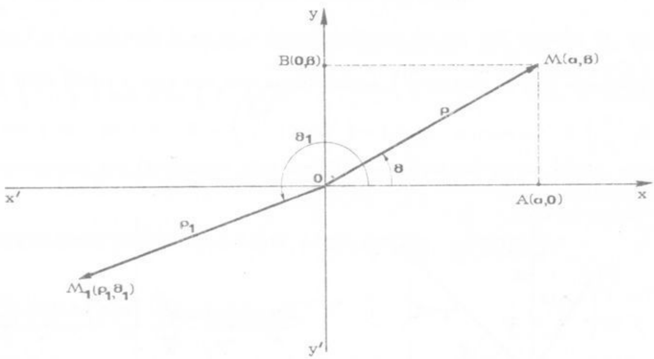
$$\left|\frac{z-12}{z-8i}\right| = \frac{5}{3} \quad \text{καί} \quad \left|\frac{z-4}{z-8}\right| = 1.$$

sos

4. ΠΟΛΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

4.1. Ὁρισμός

Ἄς πάρουμε τό μιγαδικό ἀριθμό $z = \alpha + \beta i \neq 0$ καί τή διανυσματική του ἀκτίνα $\overrightarrow{OM}$ (Σχ. 12). Εἶναι $|\overrightarrow{OM}| = \sqrt{\alpha^2+\beta^2} = \rho$.



Σχ. 12

Ὅλοι οἱ μιγαδικοί, πού οἱ εἰκόνες τους εἶναι σημεῖα τοῦ κύκλου (0,ρ), ἔχουν τό ἴδιο μέτρο μέ τόν z. Γιά νά προσδιορίσουμε λοιπόν τή γεωμετρική εἰκόνα τοῦ z, δέν εἶναι ἀρκετό τό μέτρο του. Ἄν ὅμως ξέρουμε μαζί μέ τό μέτρο ρ καί τή γωνία $\theta \in [0,2\pi)$ πού σχηματίζει ὁ θετικός ἡμιάξονας 0x μέ τή διανυσματική ἀκτίνα $\overrightarrow{OM}$ τοῦ z, τότε ἡ εἰκόνα M(α,β) τοῦ z καθορίζεται πλήρως ἀπό τό ζεῦγος (ρ,θ).

Εἶναι φανερό (Σχ. 12) ὅτι τά στοιχεῖα τῶν ζευγῶν (α,β) καί (ρ,θ) συνδέονται μέ τίς σχέσεις:

$$\boxed{\begin{array}{l} \rho = \sqrt{\alpha^2+\beta^2} \\ \sigma\upsilon\nu\theta = \dfrac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \text{ καί } \eta\mu\theta = \dfrac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}, \quad 0 \leq \theta < 2\pi \end{array}} \qquad (1)$$

Ἀπό τίς σχέσεις (1) βεβαιωνόμαστε ὅτι, ὅταν δοθοῦν τά α καί β, προσδιορίζονται μονοσήμαντα τά ρ καί θ καί ἀντίστροφα.

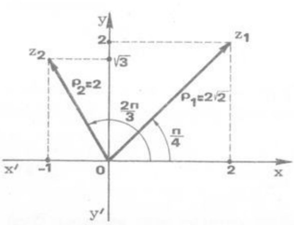
Ἄρα **κάθε μιγαδικός ἀριθμός (α,β) $\neq$ (0,0) μπορεῖ νά ὁριστεῖ καί μέ τό ζεῦγος (ρ,θ)**.

Τά στοιχεῖα τοῦ ζεύγους (ρ,θ) ὀνομάζονται **πολικές συντεταγμένες** *τοῦ μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ z=α+βi. Εἰδικότερα τό ρ ὀνομάζεται* (ὅπως ξέρουμε) **μέτρο τοῦ z** *καί τό θ* **πρωτεῦον ὅρισμα** (Argument) **τοῦ z** *καί συμβολίζεται Argz=θ* [1].

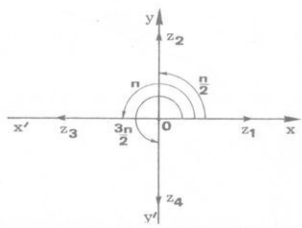
Τό μιγαδικό ἀριθμό $z=\alpha+\beta i$, ἐκτός ἀπό τό ζεῦγος (ρ,θ) πού βρίσκουμε ἀπό τίς (1), τόν προσδιορίζει καί κάθε ζεῦγος $(\rho, \theta+2\kappa\pi)$, $\kappa\in\mathbf{Z}$. Γι' αὐτό **κάθε γωνία ἀπό τίς $\theta+2\kappa\pi$, $\kappa\in\mathbf{Z}$ ὀνομάζεται** ἁπλῶς **ὅρισμα τοῦ μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ z** καί συμβολίζεται **argz**.

4.2. Παραδείγματα

1. Στό σχ. 13 φαίνεται ὅτι γιά τό μιγαδικό ἀριθμό $z_1=2+2i$ εἶναι $(\rho_1,\theta_1)=\left(2\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right)$ ἤ γενικότερα $\left(2\sqrt{2},\ 2\kappa\pi+\frac{\pi}{4}\right)$, $\kappa\in\mathbf{Z}$. Ὅμοια γιά τόν $z_2=-1+i\sqrt{3}$ εἶναι $(\rho_2,\theta_2)=\left(2,\frac{2\pi}{3}\right)$ ἤ γενικότερα $(\rho_2,\theta_2)=\left(2, 2\kappa\pi+\frac{2\pi}{3}\right)$, $\kappa\in\mathbf{Z}$. Τίς τιμές τῶν ρ καί θ μπορούσαμε φυσικά νά τίς ὑπολογίσουμε καί ἀπό τούς τύπους (1) τῆς παραγράφου 4.1.



Σχ. 13



Σχ. 14

2. Οἱ μιγαδικοί ἀριθμοί $z_1=(1,0)$, $z_2=(0,1)$, $z_3=(-1,0)$ καί $z_4=(0,-1)$ ἔχουν κοινό μέτρο $\rho=1$ καί ἀντίστοιχα πρωτεύοντα ὁρίσματα $\mathrm{Arg}z_1=\mathrm{Arg}(1+0i)=0$, $\mathrm{Arg}z_2=\mathrm{Arg}\ (0+i)=\frac{\pi}{2}$, $\mathrm{Arg}\ z_3=\pi$ καί $\mathrm{Arg}z_4=\frac{3\pi}{2}$ (Σχ. 14).

1. Στή βιβλιογραφία μερικές φορές ὡς Argz θεωρεῖται ἡ γωνία θ μέ $\theta\in(-\pi,\pi]$.

3. Οἱ πολικές συντεταγμένες τοῦ μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ $z = 1 - i\sqrt{3}$ εἶναι:

α) $\rho = \sqrt{1+3} = 2$ καί β) $\theta = \frac{5\pi}{3}$. Ἡ τιμή $\theta = \frac{5\pi}{3}$ βρίσκεται εὔκολα ἀπό τό σύστημα $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{1}{2}$, $\eta\mu\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\theta \in [0, 2\pi)$.

4. Ἄν οἱ πολικές συντεταγμένες τοῦ ἀριθμοῦ $z = \alpha + \beta i$ εἶναι $\left(2, \frac{4\pi}{3}\right)$, τότε βάζοντας στούς τύπους (1) τῆς παραγράφου 4.1 $\sqrt{\alpha^2+\beta^2} = 2$ καί $\theta = \frac{4\pi}{3}$ βρίσκουμε ὅτι ὁ μιγαδικός αὐτός ἀριθμός εἶναι ὁ $z = -1 - i\sqrt{3}$.

4.3. Ἀσκήσεις

1. Βρεῖτε τίς πολικές συντεταγμένες (ρ, θ) τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν:

$$z_1 = 3+0i, \quad z_2 = 3+3i, \quad z_3 = (0,3),$$
$$z_4 = (-3,3), \quad z_5 = (-3,0), \quad z_6 = -3-3i$$
$$z_7 = (0,-3), \quad z_8 = (3,-3).$$

2. Γράψτε στή μορφή $z = \alpha + \beta i$ τούς μιγαδικούς ἀριθμούς

$$z_1 = \left(3, \frac{\pi}{3}\right), \quad z_2 = (2, \pi), \quad z_3 = \left(\sqrt{3}, \frac{5\pi}{4}\right), \quad z_4 = \left(1, \frac{3\pi}{2}\right)$$

καί ἀπεικονίστε τους γεωμετρικά στό ἐπίπεδο τοῦ Gauss.

3. Βρεῖτε τίς πολικές συντεταγμένες τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν $z_1 . z_2$ καί $\frac{z_1}{z_2}$, ἄν εἶναι $z_1 = \left(3, \frac{\pi}{3}\right)$ καί $z_2 = \left(2, \frac{\pi}{3}\right)$.

5. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

5.1. Ὁρισμοί καί θεωρήματα

Εἴδαμε προηγουμένως ὅτι, ἄν (ρ, θ) εἶναι οἱ πολικές συντεταγμένες τοῦ μιγαδικοῦ $z = \alpha + \beta i \neq 0$, τότε θά εἶναι:

$$\boxed{\rho = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}, \quad \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} = \frac{\alpha}{\rho} \quad \text{καί} \quad \eta\mu\theta = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} = \frac{\beta}{\rho} \quad \text{μέ } 0 \leq \theta < 2\pi} \quad (1)$$

Ἀπό τίς σχέσεις αὐτές παίρνουμε:

$$\alpha = \rho\,\sigma\upsilon\nu\theta \quad \text{καί} \quad \beta = \rho\,\eta\mu\,\theta,$$

ὁπότε ὁ μιγαδικός $z = \alpha + \beta i$ παίρνει τή μορφή:

$$\boxed{z = \rho(\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta), \quad \mu\acute{\varepsilon} \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \ \rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \tag{2}$$

Ἡ μορφή αὐτή λέγεται τριγωνομετρική μορφή τοῦ μιγαδικοῦ $\alpha + \beta i$.

Φυσικά ἀντί γιά τό πρωτεῦον ὅρισμα θ μποροῦμε νά πάρουμε ὁποιοδήποτε ἄλλο ὅρισμα τῆς μορφῆς $\theta + 2\kappa\pi$, $\kappa \in \mathbf{Z}$.

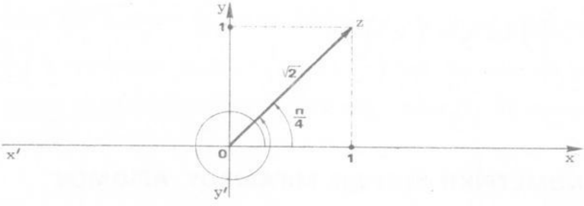
Δηλαδή:

$$\boxed{\begin{array}{l} \alpha + \beta i = \rho(\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta) = \rho[\sigma\upsilon\nu(\theta + 2\kappa\pi) + i\eta\mu\,(\theta + 2\kappa\pi)], \ \kappa \in \mathbf{Z}, \\ \text{ὅπου} \quad \rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \quad \text{καί} \quad \theta \in [0, 2\pi) \ \mu\acute{\varepsilon} \\ \sigma\upsilon\nu\theta = \dfrac{\alpha}{\rho} \quad \text{καί} \quad \eta\mu\theta = \dfrac{\beta}{\rho} \end{array}} \tag{3}$$

Ὅπως φαίνεται ἀπό τό σχ. 15, γιά τό μιγαδικό $z = 1 + i$ εἶναι

$$z = 1 + i = \sqrt{2}\left(\sigma\upsilon\nu\,\frac{\pi}{4} + i\,\eta\mu\,\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \sqrt{2}\left(\sigma\upsilon\nu\left(2\kappa\pi + \frac{\pi}{4}\right) + i\eta\mu\left(2\kappa\pi + \frac{\pi}{4}\right)\right), \ \kappa \in \mathbf{Z}.$$



Σχ. 15

Ἡ τριγωνομετρική μορφή τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν βοηθάει στό νά ἀντιμετωπίσουμε πολλά προβλήματα καί νά δώσουμε γεωμετρική ἑρμηνεία σέ πολλά θεωρητικά συμπεράσματα.

Θά δώσουμε ἀμέσως παρακάτω μερικά χρήσιμα θεωρήματα.

Θεώρημα 1ο. Δυό μιγαδικοί ἀριθμοί $z_1 = \rho_1\,(\sigma\upsilon\nu\theta_1 + i\eta\mu\theta_1)$ καί $z_2 = \rho_2\,(\sigma\upsilon\nu\theta_2 + i\eta\mu\theta_2)$ εἶναι ἴσοι, ὅταν καί μόνο ὅταν

$$\rho_1 = \rho_2, \quad \theta_2 - \theta_1 = 2\kappa\pi, \quad \kappa \in \mathbf{Z}$$

Ἀπόδειξη. Ἀφοῦ ἡ $z_1 = z_2$ συνεπάγεται ὅτι $\rho_1\,\sigma\upsilon\nu\theta_1 = \rho_2\sigma\upsilon\nu\theta_2$ καί $\rho_1\eta\mu\theta_1 = \rho_2\eta\mu\theta_2$, τότε θά εἶναι $\rho^2_1(\sigma\upsilon\nu^2\theta_1 + \eta\mu^2\theta_1) = \rho^2_2(\sigma\upsilon\nu^2\theta_2 + \eta\mu^2\theta_2)$, ὁπότε $\rho_1 = \rho_2$. Ἄρα $\sigma\upsilon\nu\theta_1 = \sigma\upsilon\nu\theta_2$ καί $\eta\mu\theta_1 = \eta\mu\theta_2$, ὁπότε $\theta_2 = 2\kappa\pi + \theta_1$ ἤ $\theta_2 - \theta_1 = 2\kappa\pi$.

Θεώρημα 2ο. Τό γινόμενο δύο μιγαδικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἕνας μιγαδικός ἀριθμός πού ἔχει μέτρο τό γινόμενο τῶν μέτρων τους καί ὅρισμα τό ἄθροισμα τῶν ὁρισμάτων τους.

Ἀπόδειξη. Ἄν $z_1=\rho_1(\sigma\upsilon\nu\theta_1+i\eta\mu\theta_1)$ καί $z_2=\rho_2(\sigma\upsilon\nu\theta_2+i\eta\mu\theta_2)$, ἔχουμε: $z_1z_2=\rho_1\rho_2[(\sigma\upsilon\nu\theta_1\sigma\upsilon\nu\theta_2-\eta\mu\theta_1\eta\mu\theta_2)+i(\sigma\upsilon\nu\theta_1\eta\mu\theta_2+\eta\mu\theta_1\sigma\upsilon\nu\theta_2)]$.

Ἄρα: $$\boxed{z_1\cdot z_2=\rho_1\rho_2(\sigma\upsilon\nu(\theta_1+\theta_2)+i\eta\mu(\theta_1+\theta_2))} \qquad (4)$$

Ἐπαγωγικά δεῖξτε ὅτι: **Ἄν $z_\kappa=\rho_\kappa(\sigma\upsilon\nu\theta_\kappa+i\eta\mu\theta_\kappa)$, $\kappa=1,2,\ldots,\nu$, τότε :**

$$z_1.z_2\ldots z_\nu=\rho_1.\rho_2\ldots\rho_\nu[\sigma\upsilon\nu(\theta_1+\theta_2+\ldots+\theta_\nu)+i\eta\mu(\theta_1+\theta_2+\ldots+\theta_\nu)] \qquad (5)$$

Ἄν εἶναι $\rho_1=\rho_2=\ldots=\rho_\nu=\rho$ καί $\theta_1=\theta_2=\ldots=\theta_\nu=\theta$, τότε $z_1=z_2=\ldots=z_\nu=$ $=\rho(\sigma\upsilon\nu\theta+i\eta\mu\theta)$ καί ἡ σχέση (5) γίνεται:

$$\boxed{z^\nu=[\rho(\sigma\upsilon\nu\theta+i\eta\mu\theta)]^\nu=\rho^\nu(\sigma\upsilon\nu(\nu\theta)+i\eta\mu(\nu\theta))} \qquad (6)$$

Ἡ (6) μᾶς εἶναι χρήσιμη παρακάτω καί **ἀναφέρεται σάν Θεώρημα De Moivre.** Ἄμεση συνέπεια τῆς σχέσεως (5) εἶναι καί ἡ γνωστή μας ἰδιότητα τοῦ μέτρου τοῦ γινομένου πολλῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν, δηλαδή

$$\boxed{|z_1\cdot z_2\ldots z_\nu|=|z_1|\cdot|z_2|\ldots|z_\nu|} \qquad (7)$$

Ἀπό τή σχέση (5) βλέπουμε ἀκόμη ὅτι:

$$\boxed{\begin{array}{l}2\kappa\pi+\mathrm{Arg}(z_1\cdot z_2\ldots z_\nu)=\mathrm{Arg}\,z_1+\mathrm{Arg}z_2+\ldots+\mathrm{Arg}\,z_\nu,\\ \text{ὅπου } \kappa \text{ κατάλληλος ἀκέραιος ἀριθμός}\end{array}} \; [1] \qquad (8)$$

Θεώρημα 3ο. Ὁ ἀντίστροφος ἑνός μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ $z\neq 0$ ἔχει μέτρο τό ἀντίστροφο τοῦ μέτρου του καί ὅρισμα τό ἀντίθετο τοῦ ὁρίσματός του.

Ἀπόδειξη. Ἄν $z=\rho(\sigma\upsilon\nu\theta+i\eta\mu\theta)$, $\rho\neq 0$, εἶναι ἕνας μιγαδικός ἀριθμός, τότε θά

$$\text{εἶναι}\quad \frac{1}{z}=\frac{1}{\rho(\sigma\upsilon\nu\theta+i\eta\mu\theta)}=\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu\theta-i\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu^2\theta+\eta\mu^2\theta}=$$
$$=\frac{1}{\rho}(\sigma\upsilon\nu\theta-i\eta\mu\theta)=\frac{1}{\rho}[\sigma\upsilon\nu(-\theta)+i\eta\mu(-\theta)].$$

Θεώρημα 4ο. Τό πηλίκο δύο μιγαδικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἕνας μιγαδικός ἀριθμός πού ἔχει μέτρο τό λόγο τῶν μέτρων τους καί ὅρισμα τή διαφορά τῶν ὁρισμάτων τους. Δηλαδή:

$$\left.\begin{array}{l}z_1=\rho_1(\sigma\upsilon\nu\theta_1+i\eta\mu\theta_1)\\ z_2=\rho_2(\sigma\upsilon\nu\theta_2+i\eta\mu\theta_2)\neq 0\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{z_1}{z_2}=\frac{\rho_1}{\rho_2}[\sigma\upsilon\nu(\theta_1-\theta_2)+i\eta\mu(\theta_1-\theta_2)]$$

1. Γράφουμε $2\kappa\pi+\mathrm{Arg}(z_1.z_2\ldots z_\nu)$, γιατί εἶναι φανερό ὅτι τό ἄθροισμα στό β' μέλος τῆς (8) μπορεῖ νά μήν ἀνήκει στό $[0,2\pi)$.

Πράγματι· $\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1} = [\rho_1(\sigma\upsilon\nu\theta_1 + i\eta\mu\theta_1)]\left[\frac{1}{\rho_2}(\sigma\upsilon\nu(-\theta_2) + i\eta\mu(-\theta_2)\right] =$

$$= \frac{\rho_1}{\rho_2}\,[\sigma\upsilon\nu(\theta_1-\theta_2) + i\eta\mu(\theta_1-\theta_2)].$$

Πόρισμα: Ἰσχύει $(\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta)^{-\nu} = \sigma\upsilon\nu(-\nu\theta) + i\eta\mu(-\nu\theta), \quad \nu \in \mathbf{N}.$

5.2. Παραδείγματα—Ἐφαρμογές

1. Γράψτε τό μιγαδικό ἀριθμό $z = \sqrt{3}+i$ σέ τριγωνομετρική μορφή.

Λύση: Εἶναι $\alpha = \sqrt{3}$, $\beta = 1$ καί ἄρα $\rho = \sqrt{3+1} = 2$.

Ἐπίσης $\quad \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ καί $\eta\mu\theta = \frac{1}{2}$ μέ $0 \leqslant \theta < 2\pi$,

ἀπό τίς ὁποῖες παίρνουμε $\theta = \frac{\pi}{6}$.

Ἔτσι εἶναι $\sqrt{3}+i = 2\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6} + i\,\eta\mu\frac{\pi}{6}\right)$.

2. Τό ἴδιο γιά τό $z = -2-2i$.

Λύση: Εἶναι $\alpha = -2$ καί $\beta = -2$ καί ἄρα $\rho = \sqrt{\alpha^2+\beta^2} = 2\sqrt{2}$,

$$\sigma\upsilon\nu\theta = -\frac{2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ καί } \eta\mu\theta = -\frac{2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ μέ } 0 \leqslant \theta < 2\pi.$$

Ἀπό τίς τελευταῖες παίρνουμε $\theta = \frac{5\pi}{4}$, ὁπότε

$$-2-2i = 2\sqrt{2}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{4} + i\,\eta\mu\frac{5\pi}{4}\right).$$

3. Γράψτε τό μιγαδικό ἀριθμό $z = 4\left(\sigma\upsilon\nu\frac{11\pi}{6} + i\eta\mu\frac{11\pi}{6}\right)$ στή μορφή $\alpha+\beta i$.

Λύση: Εἶναι $\rho = 4$ καί $\theta = \frac{11\pi}{6}$, ἄρα

$$\alpha = 4\sigma\upsilon\nu\frac{11\pi}{6} = 4.\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \text{ καί } \beta = 4\,\eta\mu\frac{11\pi}{6} = 4.\left(-\frac{1}{2}\right) = -2, \text{ ὁπότε}$$

$$z = 2\sqrt{3}-2i.$$

4. Βρεῖτε τά ἐξαγόμενα τῶν πράξεων:

α) $6(\sigma\upsilon\nu20^\circ + i\eta\mu20^\circ)\,.\,\frac{1}{3}\,(\sigma\upsilon\nu\,40^\circ + i\eta\mu\,40^\circ)$ $\qquad$ β) $\frac{6(\sigma\upsilon\nu20^\circ + i\eta\mu20^\circ)}{1/3\;(\sigma\upsilon\nu\,40^\circ + i\eta\mu40^\circ)}$.

Λύση:

α) $6(\sigma\upsilon\nu20^\circ + i\eta\mu20^\circ).\frac{1}{3}(\sigma\upsilon\nu40^\circ + i\eta\mu40^\circ) = 2(\sigma\upsilon\nu(20^\circ + 40^\circ) + i\eta\mu(20^\circ + 40^\circ)) =$

$$= 2(\sigma\upsilon\nu60^\circ + i\eta\mu60^\circ) = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + i\sqrt{3}.$$

β) $\frac{6(\sigma\upsilon\nu20^\circ + i\eta\mu20^\circ)}{1/3\;(\sigma\upsilon\nu40^\circ + i\eta\mu40^\circ)} = 18(\sigma\upsilon\nu(20^\circ-40^\circ) + i\eta\mu(20^\circ-40^\circ)) = 18(\sigma\upsilon\nu(-20^\circ) + i\eta\mu(-20^\circ))$

$$= 18\,(\sigma\upsilon\nu20^\circ - i\eta\mu20^\circ).$$

5. Νά ὑπολογιστεῖ ἡ παράσταση $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^7$.

Λύση: Γράφουμε τό μιγαδικό ἀριθμό $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2}$ σέ τριγωνομετρική μορφή.

Εἶναι $\rho = \sqrt{\frac{2}{4} + \frac{6}{4}} = \sqrt{2}$ καί, ἀφοῦ τό σημεῖο $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ ἀνήκει στό (Ι) τεταρτημόριο, ἡ συνθ $= \frac{1}{2}$ δίνει $\theta = \frac{\pi}{3}$ (πρωτεῦον ὅρισμα) Ἄρα:

$\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2} = \sqrt{2}\left(\text{συν}\frac{\pi}{3}+i\text{ημ}\frac{\pi}{3}\right)$. Ἀπό τό Θεώρημα De Moivre βρίσκουμε:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^7 = \left[\sqrt{2}\left(\text{συν}\frac{\pi}{3}+i\text{ημ}\frac{\pi}{3}\right)\right]^7 = (\sqrt{2})^7.\left(\text{συν}7.\frac{\pi}{3}+i\text{ημ}\,7.\frac{\pi}{3}\right) =$$
$$= 8\sqrt{2}\left(\text{συν}\frac{\pi}{3}+i\text{ημ}\frac{\pi}{3}\right) =$$
$$= 8\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}+i.\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4\sqrt{2}+4i\sqrt{6}.$$

6. Νά ἁπλοποιηθεῖ τό κλάσμα : $\dfrac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^7}{(\sqrt{3}-i)^3}$

Λύση: Ἀπό τό προηγούμενο παράδειγμα ἔχουμε $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^7 = 8\sqrt{2}\left(\text{συν}\frac{\pi}{3}+\right.$ $\left.+i\text{ημ}\frac{\pi}{3}\right)$.

Βρίσκουμε τώρα τήν τριγωνομετρική μορφή τοῦ $\sqrt{3}-i$. Κατά τά γνωστά ἔχουμε

$$\sqrt{3}-i = 2\left(\text{συν}\frac{11\pi}{6}+i\text{ημ}\frac{11\pi}{6}\right),\quad \text{ὁπότε}$$

$$(\sqrt{3}-i)^3 = \left[2\left(\text{συν}\frac{11\pi}{6}+i\text{ημ}\frac{11\pi}{6}\right)\right]^3 = 2^3.\left(\text{συν}3.\frac{11\pi}{6}+i\text{ημ}\,3.\frac{11\pi}{6}\right) =$$
$$= 2^3.\left(\text{συν}\frac{11\pi}{2}+i\text{ημ}\frac{11\pi}{2}\right) = 8\,(\text{συν}270^\circ + i\text{ημ}270^\circ).\ \text{Ἄρα}$$

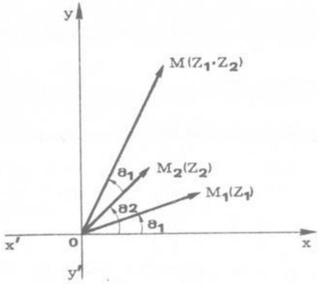
$$\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^7}{(\sqrt{3}-i)^3} = \frac{8\sqrt{2}(\text{συν}60^\circ+i\text{ημ}60^\circ)}{8(\text{συν}270^\circ+i\text{ημ}270^\circ)} = \sqrt{2}\,(\text{συν}(60^\circ-270^\circ)+i\text{ημ}(60^\circ-270^\circ))$$
$$= \sqrt{2}(\text{συν}(-210^\circ)+i\text{ημ}(-210^\circ)) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right) = -\frac{\sqrt{6}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

7. Γεωμετρική παράσταση τοῦ γινομένου $z_1.z_2$ καί τοῦ πηλίκου $\frac{z_2}{z_1}$ τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν $z_1 = \rho_1$ (συνθ$_1$+iημθ$_1$) καί $z_2 = \rho_2$(συνθ$_2$+iημθ$_2$) μέ $\rho_1\rho_2 \neq 0$.

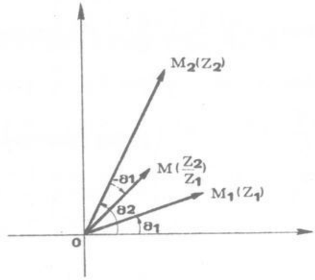
α) Εἶναι $z_1.z_2 = \rho_1.\rho_2\,(\text{συν}(\theta_1+\theta_2)+i\text{ημ}(\theta_1+\theta_2))$.

Στρέφουμε τή μιά ἀπό τίς διανυσματικές ἀκτίνες $\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{OM_2}$ (Σχ. 16) τῶν z_1 καί z_2, ἔστω τήν $\overrightarrow{OM_2}$, κατά γωνία ἴση μέ τό Arg z_1 καί πάνω στό φορέα τῆς τελικῆς ἀκτίνας παίρνουμε σημεῖο Μ, ὥστε νά εἶναι $|\overrightarrow{OM}| = \rho_1\rho_2$. Τό σημεῖο αὐτό Μ εἶναι φανερό ὅτι ὁρίζει τή διανυσματική ἀκτίνα $\overrightarrow{OM}$ τοῦ μιγαδικοῦ $z_1.z_2$.

β) Στρέφουμε τή διανυσματική ἀκτίνα $\overrightarrow{OM_2}$ τοῦ διαιρετέου z_2 (Σχ. 17) κατά γωνία ἴση μέ τό $-\mathrm{Arg}z_1$ καί ὅπως προηγουμένως βρίσκουμε τό σημεῖο Μ μέ $|\overrightarrow{OM}| = \frac{\rho_2}{\rho_1}$. Ἐπειδή



Σχ. 16



Σχ. 17

εἶναι $\frac{z_2}{z_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1}$ (συν$(\theta_2-\theta_1)$+iημ$(\theta_2-\theta_1)$), γίνεται φανερό ὅτι τό σημεῖο Μ, ὅπως βρέθηκε, ὁρίζει τή διανυσματική ἀκτίνα $\overrightarrow{OM}$ τοῦ πηλίκου $\frac{z_2}{z_1}$.

8. **Νά ὑπολογιστοῦν οἱ τριγωνομετρικοί ἀριθμοί τοῦ τόξου 3θ, ἄν γνωρίζουμε τούς τριγωνομετρικούς ἀριθμούς τοῦ τόξου θ.**

Λύση: Ἀπό τό θεώρημα De Moivre ἔχουμε συν(νθ)+iημ(νθ) = (συνθ+iημθ)$^{\nu}$, $\nu \in \mathbf{N}$ (1)
Γιά ν = 3 ἡ (1) γίνεται συν3θ + iημ3θ = (συνθ+iημθ)^3, δηλαδή
συν3θ+iημ3θ = συν^{3}θ+3iσυν^{2}θημθ−3συνθημ^{2}θ−iημ^{3}θ καί συνεπῶς
συν3θ = συν^{3}θ−3συνθημ^{2}θ = συν^{3}θ−3συνθ(1−συν^{2}θ) = 4συν^{3}θ−3συνθ καί
ημ3θ = 3συν^{2}θημθ−ημ^{3}θ = 3(1−ημ^{2}θ)ημθ−ημ^{3}θ = 3ημθ−4ημ^{3}θ.

5.3. Ἀσκήσεις

1. Νά γραφοῦν σέ τριγωνομετρική μορφή οἱ μιγαδικοί ἀριθμοί:

$$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad 2+2\sqrt{3}i, \quad -\sqrt{3}+i,$$

2. Δεῖξτε ὅτι τό θεώρημα De Moivre
(ρ (συνθ+iημθ))$^{\nu}$ = ρ$^{\nu}$(συν(νθ)+iημ(νθ)) ἰσχύει καί ὅταν $\nu \in \{\ldots, -3, -2, -1\}$

3. Νά ἀποδείξετε ὅτι :
α) $(\sqrt{3}+i)^{150} = -2^{150}$,
β) $(1+i)^{\nu}+(1-i)^{\nu} = 2^{\frac{\nu+2}{2}}$ συν $\frac{\nu\pi}{4}$, $\nu \in \mathbf{N}$, γ) $(1+i)^{\nu}-(1-i)^{\nu} = i2^{\frac{\nu+2}{2}}$ ημ$\frac{\nu\pi}{4}$, $\nu \in \mathbf{N}$
δ) (συνθ+iημθ)$^{\nu}$+(συνθ+iημθ)$^{-\nu}$=2συν(νθ), (συνθ+iημθ)$^{\nu}$−(συνθ+iημθ)$^{-\nu}$=2iημ(νθ).

4. Νά ἐκφράσετε τά συν5θ καί ημ5θ σάν πολυώνυμα τῶν συνθ καί ημθ ἀντίστοιχα.

5. Ἄν z = συνθ+iημθ, δεῖξτε ὅτι 2συνθ = $z+\frac{1}{z}$ καί 2iημθ = $z-\frac{1}{z}$.

6. ΡΙΖΕΣ ΤΩΝ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

6.1. Ὁρισμός—Θεώρημα

Ὁρισμός. Νιοστή ρίζα ἑνός μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ $\xi = \alpha+\beta i$ εἶναι κάθε μιγαδικός ἀριθμός $z = x+yi$ μέ τήν ἰδιότητα

$$(x+yi)^\nu = \alpha+\beta i.$$

Θά δείξουμε, μέ τό θεώρημα πού ἀκολουθεῖ, ὅτι κάθε μή μηδενικός μιγαδικός ἀριθμός ξ ἔχει ν ἀκριβῶς διαφορετικές μεταξύ τους νιοστές ρίζες.

Θεώρημα: Ἄν $\xi=\rho\,(\sigma\upsilon\nu\theta+i\eta\mu\theta)$ εἶναι ἕνας μιγαδικός ἀριθμός μέ $\rho\neq 0$, τότε οἱ μιγαδικοί ἀριθμοί

$$z_\kappa = \sqrt[\nu]{\rho}\left[\sigma\upsilon\nu\frac{\theta+2\kappa\pi}{\nu}+i\eta\mu\,\frac{\theta+2\kappa\pi}{\nu}\right],\quad \kappa = 0,1,2,\ldots,\nu-1$$

εἶναι διαφορετικοί μεταξύ τους καί εἶναι οἱ μόνοι πού ἐπαληθεύουν τήν ἐξίσωση $z^\nu=\xi$.

Ἀπόδειξη: Θά ἐξετάσουμε ἀρχικά ἄν ὑπάρχει μιγαδικός ἀριθμός $z = r(\sigma\upsilon\nu\omega+i\eta\mu\omega)$, πού νά εἶναι νιοστή ρίζα τοῦ $\xi = \rho(\sigma\upsilon\nu\theta+i\eta\mu\theta)$.

Γιά νά συμβαίνει αὐτό, πρέπει νά ἰσχύει

$\rho(\sigma\upsilon\nu\theta+i\eta\mu\theta) = [r(\sigma\upsilon\nu\omega+i\eta\mu\omega)]^\nu = r^\nu(\sigma\upsilon\nu(\nu\omega)+i\eta\mu(\nu\omega))$ (1), δηλαδή

$$\rho = r^\nu \text{ καί } \nu\omega = \theta+2\kappa\pi,\ \kappa\in\mathbf{Z} \text{ ἤ } r = \sqrt[\nu]{\rho} \text{ καί } \omega=\frac{\theta+2\kappa\pi}{\nu},\ \kappa\in\mathbf{Z}$$

$$\text{Ἄρα } z = \sqrt[\nu]{\rho}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\theta+2\kappa\pi}{\nu}+i\eta\mu\,\frac{\theta+2\kappa\pi}{\nu}\right),\quad \kappa\in\mathbf{Z} \qquad (2).$$

Ἡ (2) φανερώνει τήν ὕπαρξη τοῦ z, δηλ. μιᾶς νιοστῆς ρίζας τοῦ ξ.

Θά δείξουμε τώρα ὅτι ἡ (2) γιά $\kappa = 0,1,2,\ldots,\nu-1$ δίνει ν διαφορετικές τιμές τῆς νιοστῆς ρίζας τοῦ ξ, μέ $\xi\neq 0+0i$, τίς ὁποῖες θά ὀνομάζουμε νιοστές ρίζες τοῦ ξ καί θά τίς συμβολίζουμε:

$$z_\kappa= \sqrt[\nu]{\rho}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\theta+2\kappa\pi}{\nu}+i\eta\mu\frac{\theta+2\kappa\pi}{\nu}\right),\quad \kappa = 0,1,2,\ldots,\ \nu-1 \qquad (3)$$

Στή συνέχεια θά δείξουμε ὅτι γιά ὁποιαδήποτε ἄλλη τιμή τοῦ $\kappa\in\mathbf{Z}$ ὁ z_κ θά συμπίπτει μέ μία ἀπό τίς τιμές $z_0, z_1, z_2,\ldots,z_{\nu-1}$ πού δίνει ὁ τύπος (3).

Πράγματι· i) Ἄν ἦταν $z_\lambda = z_\mu$, $\lambda, \mu\in\mathbf{Z}$, $\lambda\neq\mu$ καί $0\leq\lambda, \mu<\nu$, τότε θά ἔπρεπε νά εἶναι $\dfrac{\theta+2\lambda\pi}{\nu}-\dfrac{\theta+2\mu\pi}{\nu} = 2\rho\pi$, $\rho\in\mathbf{Z}$, δηλαδή $\lambda-\mu = \rho\nu$, $\rho\in\mathbf{Z}$.

Εἶναι ὅμως $0<|\lambda-\mu|<\nu$ καί ἑπομένως $0<|\rho\nu|<\nu$, δηλ. $0<|\rho|<1$, τό ὁποῖο εἶναι ἄτοπο, γιατί δέν ὑπάρχει $\rho\in\mathbf{Z}$ μέ $0<|\rho|<1$.

Ἄρα $z_\lambda\neq z_\mu$ γιά ὅλα τά $\lambda, \mu\in\{0,1,2,\ldots,\nu-1\}$, δηλαδή οἱ ν τιμές τῆς (3) εἶναι διαφορετικές μεταξύ τους.

ii) Γιά $\kappa \in \mathbf{Z}$ μέ $\kappa \notin \{0,1,2,\ldots,\nu-1\}$, δηλαδή γιά $\kappa \geq \nu$ ἤ $\kappa < 0$ θά ἔχουμε: $\kappa = \lambda\nu + \upsilon$, $\lambda \in \mathbf{Z}$ καί $\upsilon \in \{0,1,2,\ldots,\nu-1\}$, ὁπότε

$$z_\kappa = \sqrt[\nu]{\rho}\left[\sigma\upsilon\nu\frac{\theta+2\kappa\pi}{\nu} + i\eta\mu\,\frac{\theta+2\kappa\pi}{\nu}\right]$$

$$= \sqrt[\nu]{\rho}\left[\sigma\upsilon\nu\,\frac{\theta+2(\lambda\nu+\upsilon)\pi}{\nu} + i\eta\mu\frac{\theta+2(\lambda\nu+\upsilon)\pi}{\nu}\right]$$

$$= \sqrt[\nu]{\rho}\left[\sigma\upsilon\nu\left(2\lambda\pi + \frac{\theta+2\upsilon\pi}{\nu}\right) + i\eta\mu\left(2\lambda\pi + \frac{\theta+2\upsilon\pi}{\nu}\right)\right]$$

$$= \sqrt[\nu]{\rho}\left[\sigma\upsilon\nu\,\frac{\theta+2\upsilon\pi}{\nu} + i\eta\mu\frac{\theta+2\upsilon\pi}{\nu}\right] \quad \text{μέ} \quad \upsilon \in \{0,1,2,\ldots,\nu-1\}.$$

Ἄρα ὁ z_κ συμπίπτει μέ μιά ἀπό τίς τιμές πού δίνει ὁ τύπος (3).

Ἔτσι δείξαμε ὅτι ὑπάρχουν ν ἀκριβῶς διαφορετικοί μεταξύ τους μιγαδικοί z_κ, οἱ ὁποῖοι ἐπαληθεύουν τήν $z^\nu = \xi = \rho$ $(\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta)$, ὅταν $\rho \neq 0$.

Τέλος, ἐπειδή ὅλοι οἱ z_κ, $\kappa = 0,1,2,\ldots,\nu-1$ εἶναι διαφορετικοί μεταξύ τους, θά ἔχουν καί διαφορετικές εἰκόνες, ὅταν ἀπεικονιστοῦν στό μιγαδικό ἐπίπεδο. Αὐτό θά φανεῖ στά παραδείγματα 1 καί 2 πού ἀκολουθοῦν.

6.2. Παραδείγματα—Ἐφαρμογές

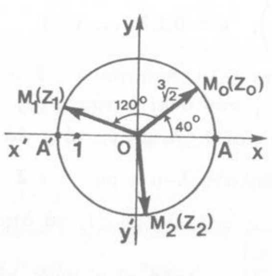
1. Βρεῖτε τίς τρεῖς κυβικές ρίζες τοῦ $-1+\sqrt{3}\,i$.

Λύση: Φέρνουμε ἀρχικά τόν $-1+\sqrt{3}\,i$ σέ τριγωνομετρική μορφή.

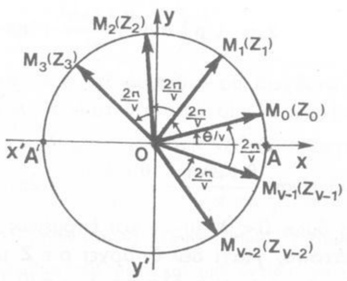
Εἶναι $-1+\sqrt{3}\,i = 2$ $(\sigma\upsilon\nu 120^\circ + i\eta\mu 120^\circ)$ καί τότε

$$z_\kappa = \sqrt[3]{2}\left[\sigma\upsilon\nu\left(\frac{120^\circ+360^\circ\kappa}{3}\right) + i\eta\mu\left(\frac{120^\circ+360^\circ\kappa}{3}\right)\right], \quad \kappa = 0,1,2$$

$$z_o = \sqrt[3]{2}\ (\sigma\upsilon\nu 40^\circ + i\eta\mu 40^\circ), \qquad z_1 = \sqrt[3]{2}\,(\sigma\upsilon\nu\ 160^\circ + i\eta\mu\ 160^\circ),$$



Σχ. 18



Σχ. 19

$z_2 = \sqrt[3]{2}(\sigma\upsilon\nu 280^\circ + i\eta\mu 280^\circ)$

Γεωμετρικά οἱ κυβικές ρίζες πού βρήκαμε ἀπεικονίζονται στίς κορυφές ἰσόπλευρου τριγώνου ἐγγεγραμμένου σέ κύκλο ἀκτίνας $\sqrt[3]{2}$ μέ πρώτη κορυφή τό M_0 ὅπου $(\widehat{OA, OM_0}) = 40^\circ$ (Σχ. 18).

2. **Νά παραστήσετε γεωμετρικά τίς νιοστές ρίζες τοῦ μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ $z = \rho\,(\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta)$.**

Λύση: Οἱ νιοστές ρίζες τοῦ z δίνονται ἀπό τόν τύπο

$$z_\kappa = \sqrt[\nu]{\rho}\left[\sigma\upsilon\nu\frac{\theta+2\kappa\pi}{\nu} + i\eta\mu\frac{\theta+2\kappa\pi}{\nu}\right],\ \kappa = 0,1,2,\ldots,(\nu-1),\ \text{καί εἶναι}$$

$$z_0 = \sqrt[\nu]{\rho}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\theta}{\nu} + i\eta\mu\,\frac{\theta}{\nu}\right),$$

$$z_1 = \sqrt[\nu]{\rho}\left[\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\theta}{\nu} + \frac{2\pi}{\nu}\right) + i\eta\mu\left(\frac{\theta}{\nu} + \frac{2\pi}{\nu}\right)\right],$$

$$z_2 = \sqrt[\nu]{\rho}\left[\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\theta}{\nu} + \frac{4\pi}{\nu}\right) + i\eta\mu\left(\frac{\theta}{\nu} + \frac{4\pi}{\nu}\right)\right],$$

$$\vdots$$

$$z_{\nu-1} = \sqrt[\nu]{\rho}\left[\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\theta}{\nu} + \frac{2(\nu-1)\pi}{\nu}\right) + i\eta\mu\left(\frac{\theta}{\nu} + \frac{2(\nu-1)\pi}{\nu}\right)\right]$$

Παρατηροῦμε ὅτι ὅλες οἱ νιοστές ρίζες τοῦ z ἔχουν τό ἴδιο μέτρο, δηλαδή $|z_\kappa| = \sqrt[\nu]{\rho}$ καί ὅρισμα τέτοιο, ὥστε ἀπό κάποια ἀρχική τιμή $\frac{\theta}{\nu}$ νά αὐξάνει διαδοχικά κατά $\frac{2\pi}{\nu}$. Ὅπως εἴπαμε καί προηγούμενα οἱ μιγαδικοί αὐτοί ἀριθμοί z_κ ἀπεικονίζονται σέ σημεῖα τοῦ μιγαδικοῦ ἐπίπεδου, πού εἶναι σημεῖα τοῦ κύκλου $(O, \sqrt[\nu]{\rho})$. (Σχ. 19).

3. **Νά ἐπιλυθεῖ ἡ ἐξίσωση $z^3 = -64i$**

Ἐπίλυση: Ἔχουμε $z^3 = -64i = 64(-i) = 64\left[\sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\eta\mu\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$, ὁπότε παίρνουμε:

$$z_\kappa = \sqrt[3]{64}\left[\sigma\upsilon\nu\frac{-\frac{\pi}{2}+2\kappa\pi}{3} + i\eta\mu\frac{-\frac{\pi}{2}+2\kappa\pi}{3}\right],\quad \kappa = 0,1,2$$

Γιά $\kappa = 0$ εἶναι: $z_0 = 4\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6} - i\eta\mu\,\frac{\pi}{6}\right) = 4\,.\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i.\frac{1}{2}\right),$

γιά $\kappa = 1$ εἶναι: $z_1 = 4\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} + i\eta\mu\frac{\pi}{2}\right) = 4\,(0+i) = 4i,$

γιά $\kappa = 2$ εἶναι: $z_2 = 4\left(\sigma\upsilon\nu\frac{7\pi}{6} + i\eta\mu\frac{7\pi}{6}\right) = 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i.\frac{1}{2}\right).$

Παρατήρηση: Κάθε ἐξίσωση τῆς μορφῆς $z^\nu = \alpha$, ὅπου $\alpha \in \mathbf{C}$, $\alpha \neq 0$ καί $\nu \in \mathbf{N}$ ὀνομάζεται **διώνυμη ἐξίσωση** καί ἐπιλύεται μέ τή βοήθεια τοῦ θεωρήματος τῆς παραγράφου 6.1. γιά τόν ὑπολογισμό τῶν ν νιοστῶν ριζῶν τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν.

4. **Νά ἐπιλυθεῖ ἡ ἐξίσωση: $z^5 = -\sqrt{3}+i$.**

Ἐπίλυση: Πρῶτα γράφουμε τόν $-\sqrt{3}+i$ σέ τριγωνομετρική μορφή.

Ἔτσι ἔχουμε: $z^5 = -\sqrt{3}+i = 2$ (συν $150°$ + iημ$150°$), ὁπότε οἱ ρίζες εἶναι

$$z_\kappa = \sqrt[5]{2}\left(\text{συν}\frac{150°+360°\kappa}{5} + i\text{ημ}\frac{150°+360°\kappa}{5}\right), \quad \kappa = 0,1,2,3,4.$$

$$z_o = \sqrt[5]{2}(\text{συν}30° + i\text{ημ}30°) = \sqrt[5]{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\,.\,\frac{1}{2}\right)$$

$$z_1 = \sqrt[5]{2}\left(\text{συν}\frac{150°+360°}{5} + i\text{ημ}\frac{150°+360°}{5}\right), \quad \text{κ.τ.λ.}$$

5. Νά ἐπιλυθεῖ ἡ ἐξίσωση: $z^\nu = 1$ (1) (Νιοστές ρίζες τῆς μονάδας).

Ἐπίλυση: Ἔχουμε $z^\nu = 1.$(συν$0°$+iημ$0°$), ὁπότε οἱ ν ρίζες εἶναι

$$z_\kappa = \sqrt[\nu]{1}\left(\text{συν}\frac{0+2\kappa\pi}{\nu} + i\text{ημ}\frac{0+2\kappa\pi}{\nu}\right) = \text{συν}\frac{2\kappa\pi}{\nu} + i\text{ημ}\frac{2\kappa\pi}{\nu}, \quad \kappa = 0,1,2,\ldots,\nu\text{-}1$$

Οἱ ν αὐτές ρίζες τῆς (1) λέγονται καί **νιοστές ρίζες τῆς μονάδας.**

Παρατηροῦμε ὅτι $z_\kappa = \text{συν}\,\frac{2\kappa\pi}{\nu} + i\text{ημ}\,\frac{2\kappa\pi}{\nu} = \left(\text{συν}\frac{2\pi}{\nu} + i\text{ημ}\,\frac{2\pi}{\nu}\right)^\kappa$, $\kappa = 0,1,2,\ldots,\nu\text{-}1$

ὁπότε $z_o = 1$, $z_1 = \text{συν}\,\frac{2\pi}{\nu} + i\text{ημ}\frac{2\pi}{\nu}$, $\quad z_2 = \left(\text{συν}\frac{2\pi}{\nu} + i\text{ημ}\,\frac{2\pi}{\nu}\right)^2 = z^2{}_1$,

$z_3 = z_1{}^3$, $\quad z_4 = z_1{}^4, \ldots, z_{\nu-1} = z_1{}^{\nu-1}$.

Ἄρα οἱ νιοστές ρίζες τῆς μονάδας εἶναι οἱ:

$$\mathbf{1, z_1, z_1{}^2, z_1{}^3, \ldots, z_1{}^{\nu-1}} \quad \textbf{μέ } z_1 = \textbf{συν}\,\frac{2\pi}{\nu} + \textbf{iημ}\,\frac{2\pi}{\nu}.$$

Γιά ν=3, ἔχουμε τίς κυβικές ρίζες τῆς μονάδας πού εἶναι:

$$z_o = 1,\ z_1 = \text{συν}\frac{2\pi}{3} + i\text{ημ}\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},\ z_2 = z^2{}_1 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Οἱ κυβικές ρίζες τῆς μονάδας, ἄν ἀπεικονιστοῦν στόν κύκλο (Ο,1), εἶναι κορυφές ἰσόπλευρου τριγώνου.

6.3. Ἀσκήσεις

1. Νά ἐπιλυθοῦν στό **C** οἱ ἐξισώσεις.

   α) $z^3 = 8$, β) $z^3 = 2+2i$ γ) $z^6+64 = 0$, δ) $z^3 = 1+i\sqrt{3}$, ε) $z^5+64i = 0$ καί στ) $3x^6+24x^3 = 0$

2. Δεῖξτε ὅτι τίς ρίζες τῆς ἐξισώσεως $(1+z)^{2\nu} + (1-z)^{2\nu} = 0$ μᾶς τίς δίνει ὁ τύπος:

$$z = i\,\text{εφ}\,\frac{2\kappa+1}{4\nu}\,\pi, \text{ ὅπου } \kappa = 0,1,2,\ldots,(2\nu-1).$$

3. Νά ἀπεικονιστοῦν στό μιγαδικό ἐπίπεδο οἱ ρίζες τῆς ἐξισώσεως $z^5 = -\sqrt{3}+i$

4. Ἄν z_1, z_2 εἶναι οἱ μιγαδικές κυβικές ρίζες τῆς μονάδας δεῖξτε ὅτι:

   α) $z_1{}^2 = z_2$ καί $z^2{}_2 = z_1$,

   β) $1+z_1+z_1{}^2 = 0$ καί $1+z_2+z_2{}^2 = 0$,

   γ) $(1+2z_1+3z_2)\,.\,(1+2z_2+3z_1) = 3$,

   δ) $(1+z_1-z_2)^3 = (1-z_1+z_2)^3$.

5. Δεῖξτε ὅτι ὁ $z = \text{συν}\theta + i\text{ημ}\theta \neq -1$ γράφεται καί

$$z = \frac{1+\kappa i}{1-\kappa i}, \quad \kappa \in \mathbf{R} \quad \text{κατάλληλος.}$$

6. Δεῖξτε ὅτι, ἄν $x,y,z \in \mathbf{R}$ καί $\omega = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, τότε θά εἶναι

α) $(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega^4)(1-\omega^5) = 9$,

β) $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx = (x+y\omega+z\omega^2)(x+y\omega^2+z\omega)$, καί

γ) $x^3+y^3+z^3-3xyz = (x+y+z)(x+\omega y+\omega^2 z)(x+\omega^2 y+\omega z)$.

7. Ἄν εἶναι $\omega = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ δεῖξτε ὅτι τότε θά εἶναι:

α) $\alpha^3+\beta^3 = (\alpha+\beta)(\alpha\omega+\beta\omega^2)(\alpha\omega^2+\beta\omega)$

β) $(\alpha+\beta+\gamma)^3 + (\alpha+\beta\omega+\gamma\omega^2)^3 + (\alpha+\beta\omega^2+\gamma\omega)^3 = 3(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+6\alpha\beta\gamma)$.

8. Δεῖξτε ὅτι κάθε μιά ἀπό τίς παραστάσεις

$z_1 = \alpha+z\beta+z^2\gamma$, $z_2 = \alpha+z^2\beta+z\gamma$, ὅπου $z = \frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$, δέ μεταβάλλεται, ἄν ἀντικαταστήσουμε τούς α,β,γ μέ τούς $\alpha+\lambda$, $\beta+\lambda$, $\gamma+\lambda$, $\lambda \in \mathbf{R}$ ἀντίστοιχα.

9. Δεῖξτε ὅτι:

$(1-z+z^2)\,.\,(1-z^2+z^4)\,.\,(1-z^4+z^8)\ldots(1-z^{2^{\kappa-1}}+z^{2^\kappa}) = 2^\kappa$,

ὅπου κ ἄρτιος φυσικός καί z τυχούσα κυβική μιγαδική ρίζα τῆς μονάδας.

10. Ἄν $\nu \in \mathbf{N}$ καί $z = \frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$, δεῖξτε ὅτι οἱ μοναδικές τιμές τῆς παραστάσεως $K = z^{2\nu}+z^\nu$ εἶναι -1 καί 2.

7. ΣΥΝΤΟΜΗ ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

1. Τό σύνολο $\mathbf{C} = \{z | z = (\alpha,\beta),\ \ \alpha \in \mathbf{R},\ \ \beta \in \mathbf{R}\}$ μέ

$$\boxed{\begin{array}{l} (\alpha_1,\beta_1) = (\alpha_2,\beta_2) \Leftrightarrow \alpha_1=\alpha_2 \ \text{καί}\ \beta_1=\beta_2 \\ (\alpha_1,\beta_1) + (\alpha_2,\beta_2) = (\alpha_1+\alpha_2,\ \beta_1+\beta_2) \\ (\alpha_1,\beta_1)\cdot(\alpha_2,\beta_2) = (\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2,\ \alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1) \end{array}}$$

είναι τό σύνολο τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν.

2. Οἱ μιγαδικοί ἀριθμοί μποροῦν νά ἀπεικονιστοῦν στά σημεῖα ἑνός ἐπιπέδου (μιγαδικό ἐπίπεδο).

3. Στό μιγαδικό ἐπίπεδο ὁ κύκλος κέντρου $(x_\circ,y_\circ)$ καί ἀκτίνας μέτρου α ἔχει ἐξίσωση

$$|z-z_\circ| = \alpha, \ \text{ὅπου}\ z_\circ = (x_\circ,y_\circ) \quad \text{καί} \quad z = (x,y).$$

4. Ἄλλες συντεταγμένες τοῦ μιγαδικοῦ $z=(\alpha,\beta)\neq(0,0)$ εἶναι οἱ πολικές (ρ,θ), ὅπου $\rho = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$, $\theta\in[0,2\pi)$ μέ $\text{συν}\theta = \dfrac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$ καί $\text{ημ}\theta = \dfrac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$.

5. Μέ τή βοήθεια τῶν πολικῶν συντεταγμένων τους οἱ μιγαδικοί ἀριθμοί παίρνουν τήν τριγωνομετρική τους μορφή

$$\boxed{z = \rho(\text{συν}\theta + i\,\text{ημ}\theta)}\ .$$

Γιά τούς μιγαδικούς $z = \rho(\text{συν}\theta+i\text{ημ}\theta)$, $z_1 = \rho_1(\text{συν}\theta_1+i\text{ημ}\theta_1)$, $z_2 = \rho_2(\text{συν}\theta_2+i\text{ημ}\theta_2)$ ἰσχύουν:

$$\boxed{\begin{array}{l} z_1 = z_2 \Leftrightarrow \rho_1=\rho_2 \ \ \text{καί}\ \ \theta_2-\theta_1 = 2\kappa\pi, \ \ \kappa \in \mathbf{Z} \\ z_1\cdot z_2 = \rho_1\cdot\rho_2\ [\text{συν}(\theta_1+\theta_2)+i\,\text{ημ}(\theta_1+\theta_2)] \\ z_1 : z_2 = \dfrac{\rho_1}{\rho_2}\ [\text{συν}(\theta_1-\theta_2) + i\,\text{ημ}(\theta_1-\theta_2)], \ \ \rho_2\neq0 \\ \dfrac{1}{z_2} = \dfrac{1}{\rho_2}\ [\text{συν}(-\theta_2)+i\,\text{ημ}(-\theta_2)], \ \ \rho_2\neq0 \\ z^\nu = \rho^\nu\ [\text{συν}(\nu\theta)+i\,\text{ημ}(\nu\theta)], \ \ \ \nu \in \mathbf{N} \end{array}}$$

6. Κάθε μή μηδενικός μιγαδικός ἀριθμός $\xi = \rho(\text{συν}\theta+i\text{ημ}\theta)$ ἔχει ν ἀκριβῶς διαφορετικές μεταξύ τους νιοστές ρίζες, τίς:

$$\boxed{z_\kappa = \sqrt[\nu]{\rho}\left(\text{συν}\,\frac{\theta+2\kappa\pi}{\nu} + i\,\text{ημ}\,\frac{\theta+2\kappa\pi}{\nu}\right), \quad \kappa = 0,1,2,\ldots,\nu-1}$$

8. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

1. Ἄν $z \neq -1+0i$ καί $z \neq 1+0i$ δεῖξτε ὅτι:

   α) ὅταν $|z| = 1$, τότε ὁ ἀριθμός $\frac{z-1}{z+1}$ εἶναι καθαρός φανταστικός, καί

   β) ὅταν ὁ ἀριθμός $\frac{z-1}{z+1}$ εἶναι καθαρός φανταστικός, τότε $|z| = 1$.

2. Γιά κάθε $\alpha \in \mathbf{R}$ μέ $\alpha \geqslant 1$ βρεῖτε τούς μιγαδικούς z, πού ἐπαληθεύουν τήν ἐξίσωση $z+\alpha|z+1|+i = 0$.

3. Γιά κάθε $\alpha \geqslant 0$ βρεῖτε τούς μιγαδικούς πού ἐπαληθεύουν τήν $2|z|-4\alpha z+1+i\alpha = 0$

4. Ἐπιλύστε τό σύστημα $z^3+\omega^5 = 0$
   $z^2 \cdot \overline{\omega}^4 = 1$, ἄν οἱ z,ω εἶναι μιγαδικοί.

5. Δεῖξτε ὅτι α) $|z_1+z_2| = |z_1|+|z_2|$, ἄν $\frac{z_1}{z_2} > 0$, $z_1,z_2 \in \mathbf{C}$, καί

   β) $|z_1+z_2| = ||z_1|-|z_2||$, ἄν $\frac{z_1}{z_2} < 0$ καί $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$

6. Δεῖξτε ὅτι α) $|z_1-z_2| = ||z_1|-|z_2||$, ἄν $\frac{z_1}{z_2} > 0$, $z_1,z_2 \in \mathbf{C}$, καί

   β) $|z_1-z_2| = |z_1|+|z_2|$, ἄν $\frac{z_1}{z_2} < 0$, $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$.

7. **Ἀπολλώνιος Κύκλος:** Ἄν z_1 καί z_2 εἶναι δεδομένοι μιγαδικοί ἀριθμοί, βρεῖτε τό σύνολο τῶν σημείων τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου, πού εἶναι εἰκόνες τῶν μιγαδικῶν z μέ: $|z-z_1| = \lambda|z-z_2|$ καί $\lambda \neq 1$.

   Δεῖξτε ἀκόμη ὅτι τό κέντρο αὐτοῦ τοῦ κύκλου εἶναι ἡ εἰκόνα τοῦ μιγαδικοῦ

   $$z_\circ = \frac{z_1-\lambda^2 z_2}{1-\lambda^2} \text{ καί ἡ ἀκτίνα του εἶναι } \alpha = \frac{\lambda|z_1-z_2|}{|1-\lambda^2|}.$$

8. Ἄν $|z-10| = 3|z-2|$ δεῖξτε ὅτι $|z-1| = 3$.

9. Ὑπολογίστε τούς $x,y \in \mathbf{R}$, πού ἱκανοποιοῦν τήν $(x+2yi)^2 = xi$

10. Ἄν $|z|^2 = |z^2-1|$, δεῖξτε ὅτι $\mathrm{Re} z^2 = \frac{1}{2}$.

11. Ἄν $z = x+yi$, $x,y \in \mathbf{R}$ καί $z^2+z+1 = 0$, τότε θά εἶναι
    $|z| = |z+1| = 1$.

12. Βρεῖτε τό μέτρο καί τό ὄρισμα τοῦ μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ

    $$z = \text{συν}\alpha - i\text{ημ}\alpha + \text{συν}\theta + i\text{ημ}\theta, \quad 0<\alpha<\frac{\pi}{2}.$$

13. Ἄν $|z+16| = 4|z+1|$, δεῖξτε ὅτι $|z| = 4$.

14. Ἄν $z = x+yi$, $z^{-1} = (\alpha+\beta i)^{-1} + (\alpha+\gamma i)^{-1}$ μέ $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbf{R}$ καί $\alpha+\beta i$, $\alpha+\gamma i$ ὄχι μηδενικοί, ὑπολογίστε τίς τιμές τῶν παραστάσεων i) x^2+y^2, ii) $(x-\alpha)^2+y^2$ καί iii) $\mathrm{Re} z$ συναρτήσει τῶν α,β,γ.

15. Ἄν $z_1 = (z-\alpha) / (\overline{\alpha}z-1)$, $z \neq 1/\overline{\alpha}$, $0 < |\alpha| < 1$, δεῖξτε ὅτι $|z_1| \gtrless 1$, ὅταν, καί μόνο ὅταν, $|z| \gtrless 1$.

16. Ἄν $\zeta^2 = 1+z^2$, $\zeta = \xi+i\eta$, $z = x+yi$ καί $\xi, \eta, x, y \in \mathbf{R}$, δεῖξτε ὅτι:

i) $\frac{\xi+x}{\xi-x}=(\xi+x)^2+(\eta+y)^2=\frac{y+\eta}{y-\eta}$

ii) $2\xi^2=\sqrt{(1+x^2-y^2)^2+4x^2y^2}+1+x^2-y^2$

$2\eta^2=\sqrt{(1+x^2-y^2)^2+4x^2y^2}-1-x^2+y^2$

17. Δεῖξτε ὅτι $|z_1-z_2|^2+|z_1+z_2|^2=2|z_1|^2+2|z_2|^2$ καί ἔπειτα δεῖξτε ὅτι γιά τυχόντες μιγαδικούς z_3 καί z_4 θά ἰσχύει

$|z_3-\sqrt{z_3^2-z_4^2}|+|z_3+\sqrt{z_3^2-z_4^2}|=|z_3+z_4|+|z_3-z_4|$

18. Δεῖξτε ὅτι οἱ εἰκόνες τῶν διακεκριμένων μιγαδικῶν ἀριθμῶν z_1,z_2,z_3 στό μιγαδικό ἐπίπεδο βρίσκονται σέ εὐθεία γραμμή, ὅταν καί μόνο ὅταν $\frac{z_1-z_3}{z_3-z_2}=\lambda\in\mathbf{R}$.

19. Ἄν γιά τούς μιγαδικούς ἀριθμούς z_1 καί z_2 εἶναι $|z_1|<1$ καί $|z_2|<1$, δεῖξτε ὅτι $|z_1-z_2|<|1-\bar{z}_1z_2|$.

20. Ἄν z_1,z_2 εἶναι μιγαδικοί ἀριθμοί καί $\lambda>0$, δεῖξτε ὅτι

$$|z_1+z_2|^2\leqslant(1+\lambda)|z_1|^2+\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)|z_2|^2.$$

21. Ἄν οἱ ἀριθμοί $z_1, z_2,\ldots,z_\nu$ ἱκανοποιοῦν τήν ἀνισότητα

$$\left|\frac{z_1-i}{z_1+i}\right|+\left|\frac{z_2-i}{z_2+i}\right|+\ldots+\left|\frac{z_\nu-i}{z_\nu+i}\right|<1,$$

τότε θά ἱκανοποιοῦν καί τήν

$$\left|\frac{z_1+z_2+\ldots+z_\nu-i}{z_1+z_2+\ldots+z_\nu+i}\right|<1.$$

22. Βρεῖτε τά ἀκόλουθα ἀθροίσματα:

$$\Sigma=1+x\,\text{συν}\theta+x^2\text{συν}2\theta+\ldots+x^{\nu-1}\text{συν}(\nu-1)\theta \quad \text{καί}$$

$$\Sigma'=x\,\text{ημ}\theta+x^2\text{ημ}2\theta+\ldots+x^{\nu-1}\text{ημ}(\nu-1)\theta,$$

ἄν $x\in\mathbf{R}$ καί $0<\theta<\pi$.

23. Ὑπολογίστε τά ἀκόλουθα ἀθροίσματα.

$$\Sigma=1+\nu\text{συν}\theta+\frac{\nu(\nu-1)}{1.2}\text{συν}2\theta+\frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{1.2.3}\text{συν}\,3\theta+\ldots, \text{ καί}$$

$$\Sigma'=\nu\,\text{ημ}\theta+\frac{\nu(\nu-1)}{1.2}\text{ημ}\,2\theta+\frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{1.2.3}\text{ημ}\,3\theta+\ldots$$

24. Ἄν $\omega=\text{συν}\frac{2\pi}{\nu}+i\text{ημ}\frac{2\pi}{\nu}$, $\nu\in\mathbf{N}$ καί

$A_\kappa=x+y\omega^\kappa+z\omega^{2\kappa}+\ldots+\tau\omega^{(\nu-1)\kappa}$, $\kappa=0,1,2,\ldots,\nu-1$, μέ $x,y,z,\ldots,\tau$ τυχόντες μιγαδικούς ἀριθμούς, δεῖξτε ὅτι:

$|A_0|^2+|A_1|^2+\ldots+|A_{\nu-1}|^2=\nu[|x|^2+|y|^2+\ldots+|\tau|^2]$.

25. Δεῖξτε ὅτι ὁ μιγαδικός $z=x+yi$ μπορεῖ νά γραφτεῖ μέ τή μορφή

$$|z|\cdot\left[\frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}+i\frac{2\lambda}{1+\lambda^2}\right], \text{ ὅπου } x,y,\lambda\in\mathbf{R}.$$

26. Νά ἐπιλυθεῖ ἡ ἐξίσωση $(z^2-1)^4=16(\text{συν}\alpha+i\text{ημ}\alpha).z^4$, $0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ II

ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΔΟΜΕΣ

ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΔΟΜΕΣ

Σέ προηγούμενες τάξεις γνωρίσαμε διάφορα σύνολα, ὅπως τό σύνολο **N** τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, τό σύνολο **R** τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, τό σύνολο V τῶν διανυσμάτων ἑνός ἐπιπέδου κ.ἄ. Στά σύνολα αὐτά εἴχαμε ορίσει διάφορες πράξεις, ὅπως πρόσθεση καί πολλαπλασιασμό ἀριθμῶν, πρόσθεση διανυσμάτων κτλ. Εἴδαμε ἀκόμα ὅτι οἱ διάφορες πράξεις στά σύνολα αὐτά εἶχαν κοινές ἰδιότητες, ὅπως π.χ. ἡ πρόσθεση στό **R** καί ἡ πρόσθεση στό **V** ἦταν ἀντιμεταθετικές, προσεταιριστικές κτλ.

Γεννιέται τώρα τό ἐρώτημα ἄν μποροῦμε νά ταξινομήσουμε τά διάφορα σύνολα μέ βάση τίς ἰδιότητες τῶν πράξεων, μέ τίς ὁποῖες εἶναι ἐφοδιασμένα, καί ἄν μιά τέτοια ταξινόμηση θά ἦταν χρήσιμη.

Γιά τήν ἀντιμετώπιση αὐτοῦ τοῦ θέματος ἡ γνωστή μας ἀξιωματική μέθοδος ἐφαρμόζεται μέ ἐπιτυχία καί μάλιστα μέ πολλά ὀφέλη (ἑνιαία γλώσσα, ἐπίλυση μαθηματικῶν προβλημάτων, ἐφαρμογές σέ ἄλλες ἐπιστῆμες κτλ.). Ἔτσι σέ ἕνα σύνολο θά ὁρίζουμε πράξεις, θά δεχόμαστε μερικά ἀξιώματα καί θά ἀποδεικνύουμε γενικές ἰδιότητες ἀνεξάρτητες ἀπό τή φύση τῶν στοιχείων τοῦ συνόλου.

Στό κεφάλαιο αὐτό θά γνωρίσουμε μερικές τέτοιες βασικές ταξινομήσεις, προηγουμένως ὅμως θά μελετήσουμε τήν ἔννοια τῆς πράξεως πού, ὅπως ἀναφέραμε καί παραπάνω, ὁ ρόλος της εἶναι βασικός.

1. ΔΙΜΕΛΕΙΣ ΠΡΑΞΕΙΣ

1.1. Ἡ ἔννοια τῆς διμελοῦς πράξεως

Κοινό γνώρισμα τῶν διάφορων πράξεων πού ἔχουμε μάθει σέ προηγούμενες τάξεις, ὅπως π.χ. ἡ πρόσθεση καί ὁ πολλαπλασιασμός ἀριθμῶν, ἡ πρόσθεση διανυσμάτων, ὁ ἐσωτερικός πολλαπλασιασμός διανυσμάτων, ὁ πολλαπλασιασμός πραγματικοῦ ἀριθμοῦ μέ διάνυσμα, εἶναι ὅτι «συνθέτουμε» δύο στοιχεῖα, πού ἀνήκουν σέ δύο σύνολα, καί παίρνουμε ὡς ἀποτέλεσμα αὐτῆς τῆς συνθέσεως ἀκριβῶς ἕνα στοιχεῖο ἑνός συνόλου, τό ὁποῖο εἶναι δυνατό νά εἶναι ἴσο μέ κάποιο ἀπό τά δύο προηγούμενα σύνολα.

Σέ πολλές πράξεις τό ἀποτέλεσμα ἐξαρτᾶται ἀπό τή διάταξη τῶν στοιχείων πού συνθέτουμε, ὅπως π.χ. στήν ἀφαίρεση πραγματικῶν ἀριθμῶν τά ἀποτελέσματα $x-y$ καί $y-x$ εἶναι γενικῶς διαφορετικά. Εἶναι ἀνάγκη λοιπόν νά θεωρήσουμε ὅτι τό ἀποτέλεσμα μιᾶς πράξεως προέρχεται ἀπό ἕνα διατεταγμένο ζεῦγος. Ἔτσι, γενικά, μιά πράξη εἶναι μιά ἀπεικόνιση(1) ἑνός συνόλου διατεταγμένων ζευγῶν σέ ἕνα ἄλλο σύνολο.

Δίνουμε τώρα τόν παρακάτω ὁρισμό.

Ὁρισμός 1. Ἄν Α,Β καί Γ εἶναι μή κενά σύνολα, τότε κάθε ἀπεικόνιση f ἑνός μή κενοῦ ὑποσυνόλου Δ τοῦ καρτεσιανοῦ γινομένου $A \times B$ στό Γ ὀνομάζεται **(διμελής) πράξη** ἀπό τό $A \times B$ στό Γ.

Ἰδιαίτερο ἐνδιαφέρον παρουσιάζουν οἱ ἀκόλουθες εἰδικές περιπτώσεις πράξεων:

(i) $A = B = \Gamma$ καί $\Delta = A \times B$. Τότε ἡ πράξη εἶναι ἀπεικόνιση τῆς μορφῆς

$$f : A \times A \to A$$

καί ὀνομάζεται **ἐσωτερική πράξη στό Α.**

Γιά τό συμβολισμό μιᾶς ἐσωτερικῆς πράξεως θά χρησιμοποιοῦμε, ἀντί γιά τό f, ἕνα ἀπό τά σύμβολα $*$, ο, $+$, $\cdot$. Ἔτσι, χρησιμοποιώντας τό σύμβολο $*$, τήν εἰκόνα $f((\alpha,\beta))$ τοῦ $(\alpha,\beta) \in A \times A$ θά τή συμβολίζουμε μέ $\alpha * \beta$ καί θά τήν ὀνομάζουμε **ἀποτέλεσμα** τῆς ἐσωτερικῆς πράξεως μεταξύ τοῦ α καί β.

Μέ $\alpha_1 * \alpha_2 * \alpha_3$ θά συμβολίζουμε τό $(\alpha_1 * \alpha_2) * \alpha_3$ καί γενικά μέ $\alpha_1 * \alpha_2 * \ldots * \alpha_\nu$ τό $(\alpha_1 * \alpha_2 * \ldots * \alpha_{\nu-1}) * \alpha_\nu$.

(ii) $B = \Gamma$ καί $\Delta = A \times B$. Τότε ἡ πράξη εἶναι ἀπεικόνιση τῆς μορφῆς

$$f : A \times B \to B$$

καί ὀνομάζεται **ἐξωτερική πράξη στό Β.**

Γιά τό συμβολισμό μιᾶς ἐξωτερικῆς πράξεως θά χρησιμοποιοῦμε, ἀντί γιά τό f, τό σύμβολο $\cdot$ (ἐπί). Ἔτσι ἡ εἰκόνα $f((\alpha, x))$ τοῦ $(\alpha,x) \in A \times B$ θά συμβολίζεται μέ $\alpha \cdot x$ καί θά ὀνομάζεται **ἀποτέλεσμα** τῆς ἐξωτερικῆς πράξεως μεταξύ τοῦ $\alpha \in A$ καί τοῦ $x \in B$. Τά στοιχεῖα τοῦ Α ὀνομάζονται **τελεστές.** Γι' αὐτό ἡ ἀκριβέστερη ὀνομασία τῆς πράξεως αὐτῆς εἶναι «ἐξωτερική πράξη στό Β μέ σύνολο τελεστῶν τό Α».

Παραδείγματα:

1. Ἡ πρόσθεση, ἡ ἀφαίρεση καί ὁ πολλαπλασιασμός εἶναι ἐσωτερικές πράξεις στό **Z**, γιατί γιά κάθε διατεταγμένο ζεῦγος $(x,y) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ τά ἀποτελέσματα $x+y$, $x-y$, $x.y$ αὐτῶν τῶν πράξεων εἶναι ἀκέραιοι (μονοσήμαντα ὁρισμένοι).
2. Ἡ ἕνωση $\cup$ (ἀντ. ἡ τομή $\cap$) στό δυναμοσύνολο $\mathscr{P}(A)$ ἑνός συνόλου Α εἶναι μιά ἐσωτερική πράξη στό $\mathscr{P}(A)$.
3. Ἡ πρόσθεση στό σύνολο

$$A = \{\nu \mid \nu \in \mathbf{N} \text{ καί } \nu \text{ ἄρτιος}\}$$

εἶναι μιά ἐσωτερική πράξη στό Α.

---

1. Μέ τόν ὅρο αὐτό ἐννοοῦμε «μονοσήμαντη ἀπεικόνιση».

4. Ὁ πολλαπλασιασμός πραγματικοῦ ἀριθμοῦ μέ διάνυσμα εἶναι μιά ἐξωτερική πράξη στό σύνολο τῶν διανυσμάτων (τοῦ ἐπιπέδου) μέ σύνολο τελεστῶν τό **R**.
5. Ἔστω $A = \mathbf{R}$ καί $B = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$. Γιά κάθε $\lambda \in A$ καί $(x,y) \in B$ ἡ ἰσότητα $\lambda \cdot (x,y)=(\lambda x,\lambda y)$ ὁρίζει μιά ἀπεικόνιση

$$\cdot : A \times B \rightarrow B,$$

πού εἶναι μιά ἐξωτερική πράξη στό $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ μέ σύνολο τελεστῶν τό **R**.
Ἐκτός ἀπό αὐτή τήν ἐξωτερική πράξη στό $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ μποροῦμε νά ὁρίσουμε καί μιά ἐσωτερική πράξη στό σύνολο αὐτό μέ τόν ἀκόλουθο τρόπο:
Γιά κάθε $(x_1, y_1), (x_2,y_2) \in B(= \mathbf{R} \times \mathbf{R})$ ἡ ἰσότητα

$$(x_1, y_1) + (x_2,y_2) = (x_1+x_2, \quad y_1+y_2)$$

ὁρίζει μία ἀπεικόνιση

$$+ : \quad B \times B \rightarrow B,$$

πού εἶναι μιά ἐσωτερική πράξη στό $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ (παραβ. μέ (2) τῆς 1.2, Κεφ. Ι).
6. Ὁ ἐσωτερικός πολλαπλασιασμός $\cdot$ στό σύνολο V τῶν διανυσμάτων τοῦ ἐπιπέδου εἶναι μία πράξη τῆς μορφῆς

$$\cdot : V \times V \rightarrow \mathbf{R},$$

γιατί τό ἐσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων εἶναι, ὡς γνωστό, ἕνας πραγματικός ἀριθμός.

Εἶναι γνωστό ὅτι τό ἄθροισμα δύο ἀρνητικῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν εἶναι πάλι ἕνας ἀρνητικός πραγματικός ἀριθμός. Γι' αὐτό τό λόγο θά λέμε ὅτι τό σύνολο τῶν ἀρνητικῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν εἶναι κλειστό ὡς πρός τήν πράξη τῆς προσθέσεως στό **R**.

Ἔτσι ἔχουμε τόν ἀκόλουθο ὁρισμό.

Ὁρισμός 2. Ἄν $*$ εἶναι μιά ἐσωτερική πράξη σέ ἕνα σύνολο Σ καί A ἕνα μή κενό ὑποσύνολο τοῦ Σ, τότε θά λέμε ὅτι τό A εἶναι **κλειστό ὡς πρός τήν πράξη** $*$, ὅταν καί μόνο ὅταν γιά κάθε $(\alpha,\beta) \in A \times A$ τό ἀποτέλεσμα $\alpha*\beta$ εἶναι στοιχεῖο τοῦ A.

Ἔτσι τό σύνολο τῶν ἀρνητικῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν δέν εἶναι κλειστό ὡς πρός τήν πράξη τῆς ἀφαιρέσεως στό **R**, ἀφοῦ ἡ διαφορά δύο ἀρνητικῶν ἀριθμῶν δέν εἶναι πάντοτε ἀρνητικός, ὅπως π.χ. $(-3)-(-8) = +5$

Σημείωση. Στά ἑπόμενα θά ἀσχοληθοῦμε μόνο μέ ἐσωτερικές καί ἐξωτερικές πράξεις. Ἐπειδή μόνο στήν τελευταία παράγραφο αὐτοῦ τοῦ κεφαλαίου θά χρησιμοποιήσουμε τήν ἔννοια τῆς ἐξωτερικῆς πράξεως, τίς ἐσωτερικές πράξεις θά τίς λέμε ἁπλῶς πράξεις, ὅταν δέν ὑπάρχει κίνδυνος συγχύσεως.

1.2. Ἐσωτερικές πράξεις σέ σύνολα μέ στοιχεῖα κλάσεις ἰσοδυναμίας

Ἀπό προηγούμενες τάξεις εἶναι γνωστό ὅτι κάθε σχέση μέσα σέ ἕνα σύνολο A $(\neq \emptyset)$, πού εἶναι ἀνακλαστική, συμμετρική καί μεταβατική, ὀνομάζεται **σχέ-**

ση ἰσοδυναμίας στό Α καί συμβολίζεται συνήθως μέ τό σύμβολο $\sim$ (ἤ $\equiv$), πού διαβάζεται «ἰσοδύναμο».

Δηλαδή γιά μιά σχέση ἰσοδυναμίας στό Α ἰσχύουν:

(i) $\alpha \sim \alpha$, γιά ὅλα τά $\alpha \in A$ (ἀνακλαστική ἰδιότητα),

(ii) $\alpha \sim \beta \Rightarrow \beta \sim \alpha$ (συμμετρική ἰδιότητα),

(iii) $\alpha \sim \beta$ καί $\beta \sim \gamma \Rightarrow \alpha \sim \gamma$ (μεταβατική ἰδιότητα).

Ἐξάλλου εἶναι γνωστό ὅτι, ἄν $\alpha \in A$, τό σύνολο ὅλων τῶν στοιχείων x τοῦ Α μέ τήν ἰδιότητα $x \sim \alpha$ ὀνομάζεται **κλάση ἰσοδυναμίας** τοῦ α καί θά συμβολίζεται μέ $\widehat{\alpha}$, δηλαδή

$$\widehat{\alpha} = \{x \mid x \in A \text{ μέ } x \sim \alpha\}$$

Κάθε $x \in \widehat{\alpha}$ θά ὀνομάζεται ἀντιπρόσωπος τῆς κλάσεως ἰσοδυναμίας $\widehat{\alpha}$.

Εἶναι εὔκολο νά δειχτεῖ ὅτι γιά τίς κλάσεις ἰσοδυναμίας ἰσχύει

$$\boxed{\alpha \sim \beta \Leftrightarrow \widehat{\alpha} = \widehat{\beta}}$$

καί ὅτι, ἄν δύο κλάσεις δέν εἶναι ἴσες, τότε εἶναι ξένα σύνολα.

Ἄς συμβολίσουμε τώρα μέ Κ τό σύνολο ὅλων τῶν κλασμάτων $\frac{\alpha}{\beta}$ μέ $\alpha, \beta \in \mathbf{Z}$ καί $\beta \neq 0$, δηλαδή

$$K = \left\{\frac{\alpha}{\beta} \mid \alpha, \beta \in \mathbf{Z} \text{ καί } \beta \neq 0\right\}$$

Τότε ἡ σχέση, πού ὁρίζεται μέ τόν ἀκόλουθο τρόπο

$$\frac{\alpha}{\beta} \equiv \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \alpha\delta = \beta\gamma,$$

εἶναι μιά σχέση ἰσοδυναμίας στό Κ καί εἶναι γνωστό ὅτι ἡ κλάση ἰσοδυναμίας ἑνός στοιχείου τοῦ Κ ὀνομάζεται ρητός ἀριθμός. Ἔτσι τά στοιχεῖα τοῦ συνόλου $\mathbf{Q}$ τῶν ρητῶν ἀριθμῶν εἶναι κλάσεις ἰσοδυναμίας.

Δίνουμε τώρα ἀκόμα ἕνα παράδειγμα συνόλου μέ στοιχεῖα κλάσεις ἰσοδυναμίας, πού θά τό χρησιμοποιήσουμε συχνά σ' αὐτό τό κεφάλαιο.

Παράδειγμα 1. Ἄν $x, y \in \mathbf{Z}$ καί $\nu \in \mathbf{N}$, τότε μέ τόν ἀκόλουθο τρόπο

$$x \equiv y \pmod{\nu} \Leftrightarrow x - y = \text{ἀκέραιο πολλαπλάσιο τοῦ } \nu,$$

ὁρίζεται μία σχέση «$\equiv \pmod{\nu}$» μέσα στό $\mathbf{Z}$. Τό $x \equiv y \pmod{\nu}$ διαβάζεται «x ἰσοδύναμο (ἤ ἰσοϋπόλοιπο[1]) μέ τό y modulo ν». Ἔτσι $6 \equiv -2 \pmod{4}$, ἀφοῦ $6-(-2) = 8 = 2 \cdot 4$ καί $3 \equiv 42 \pmod{13}$, ἀφοῦ $3 - 42 = -39 = (-3) \cdot 13$.

Ἡ σχέση «$\equiv \pmod{\nu}$» εἶναι σχέση ἰσοδυναμίας στό $\mathbf{Z}$. Πράγματι, εἶναι

1. Γιατί, ἄν $x \equiv y \pmod{\nu}$, τότε οἱ διαιρέσεις τῶν x, y μέ τό ν δίνουν τό ἴδιο ὑπόλοιπο καί ἀντίστροφα (Κεφ. ΙΙΙ 1.3, προτ. 2),

(i) ἀνακλαστική, γιατί γιά κάθε $x \in \mathbf{Z}$ εἶναι $x \equiv x(\mathrm{mod}\ \nu)$, ἀφοῦ $x-x=0=0\cdot\nu$,

(ii) συμμετρική, γιατί, ἄν $x \equiv y\ (\mathrm{mod}\ \nu)$, τότε ὑπάρχει $k \in \mathbf{Z}$ μέ $x-y=k\cdot\nu$, ὁπότε $y-x=(-k)\nu$, πού σημαίνει ὅτι $y \equiv x\ (\mathrm{mod}\ \nu)$, ἀφοῦ $-k \in \mathbf{Z}$,

(iii) μεταβατική, γιατί, ἄν $x \equiv y\ (\mathrm{mod}\ \nu)$ καί $y \equiv z\ (\mathrm{mod}\ \nu)$, τότε ὑπάρχουν ἀκέραιοι k_1 καί k_2 μέ $x-y=k_1\cdot\nu$ καί $y-z=k_2\cdot\nu$, ὁπότε
$$x-z=(x-y)+(y-z)=k_1\cdot\nu+k_2\cdot\nu=(k_1+k_2)\nu$$
καί ἑπομένως $x \equiv z\ (\mathrm{mod}\ \nu)$, ἀφοῦ $(k_1+k_2) \in \mathbf{Z}$.

2000 ππ.
1500 παπ
ΑΜ 2000 π.
5.500

Οἱ κλάσεις ἰσοδυναμίας τῶν στοιχείων τοῦ $\mathbf{Z}$ ὡς πρός τήν παραπάνω σχέση ὀνομάζονται **κλάσεις ὑπολοίπου modulo ν**. Ἔτσι ἡ κλάση ὑπολοίπου modulo ν τοῦ $\alpha\in\mathbf{Z}$ περιέχει ὅλους τούς ἀκέραιους x, γιά τούς ὁποίους ἡ διαφορά $x-\alpha$ εἶναι ἀκέραιο πολλαπλάσιο τοῦ ν, δηλαδή
$$\widehat{\alpha}=\{\alpha+k\cdot\nu \mid k \in \mathbf{Z}\}.$$

Ἡ σχέση ἰσοδυναμίας «$\equiv (\mathrm{mod}\ 3)$» ὁρίζει τίς ἀκόλουθες κλάσεις ὑπολοίπου modulo 3 στό $\mathbf{Z}$:
$$\widehat{0}=\{3k \mid k \in \mathbf{Z}\},$$
$$\widehat{1}=\{3k+1 \mid k \in \mathbf{Z}\},$$
$$\widehat{2}=\{3k+2 \mid k \in \mathbf{Z}\},$$
γιατί τά δυνατά ὑπόλοιπα τῆς διαιρέσεως ἑνός ἀκέραιου μέ τό 3 εἶναι 0,1,2.

Τό σύνολο τῶν κλάσεων ὑπολοίπου modulo ν θά τό συμβολίζουμε μέ $\mathbf{Z}_\nu$. Ἔτσι $Z_3=\{\widehat{0}, \widehat{1}, \widehat{2}\}$.

Σέ προηγούμενες τάξεις γνωρίσαμε ἐσωτερικές πράξεις στό $\mathbf{Q}$, πού στήν πραγματικότητα ἦταν πράξεις μεταξύ κλάσεων ἰσοδυναμίας. Ἄς δοῦμε πῶς μάθαμε τήν πρόσθεση στό $\mathbf{Q}$. Τά κλάσματα $x=\frac{1}{2}$ καί $y=\frac{1}{3}$ δημιουργοῦν, ὅπως εἴπαμε προηγουμένως, τούς ρητούς $\widehat{x}$ καί $\widehat{y}$. Ἄν μέ τή γνωστή πρόσθεση στό σύνολο Κ τῶν κλασμάτων προσθέσουμε δύο ἀντιπροσώπους τῶν $\widehat{x}$ καί $\widehat{y}$, π.χ. τούς $\frac{1}{2}$ καί $\frac{1}{3}$, βρίσκουμε ἄθροισμα $z=\frac{5}{6}$. Δύο ἄλλοι ἀντιπρόσωποι τῶν ρητῶν $\widehat{x}$ καί $\widehat{y}$, π.χ. οἱ $\frac{2}{4}$ καί $\frac{3}{9}$, δίνουν ἄθροισμα $\frac{30}{36}$, τό ὁποῖο ἀνήκει στήν κλάση $\widehat{z}$, ἀφοῦ $\frac{5}{6} \equiv \frac{30}{36}$. Τό ἴδιο συμβαίνει καί μέ ὁποιουσδήποτε ἀντιπροσώπους τῶν ρητῶν $\widehat{x}$ καί $\widehat{y}$.

Ἄς ἀντιμετωπίσουμε τώρα τό θέμα αὐτό γενικά. Ἔστω Α ἕνα σύνολο, στό ὁποῖο ἔχουν ὁριστεῖ μιά ἐσωτερική πράξη $*$ καί μιά σχέση ἰσοδυναμίας $\sim$. Ἄν $\widehat{A}$ εἶναι τό σύνολο τῶν κλάσεων ἰσοδυναμίας τῶν στοιχείων τοῦ Α, τότε ὑπάρχουν διάφοροι τρόποι, γιά νά ὁριστοῦν ἐσωτερικές πράξεις στό $\widehat{A}$. Ἐπειδή κάθε στοιχεῖο τοῦ $\widehat{A}$ ἀποτελεῖται ἀπό στοιχεῖα τοῦ Α, γεννιέται τό ἐρώτημα ἄν εἶναι δυνατό νά ὁριστεῖ ἐσωτερική πράξη στό $\widehat{A}$ μέ τή βοήθεια τῆς πράξεως $*$ στό Α. Γιά τό σκοπό αὐτό κάνουμε τούς ἑξῆς συλλογισμούς. Ἄν $\widehat{\alpha}, \widehat{\beta} \in \widehat{A}$ καί πάρουμε $x \in \widehat{\alpha}$ καί $y \in \widehat{\beta}$, τότε τό ἀποτέλεσμα $x * y$ ἀνήκει σέ μιά κλάση ἰσοδυναμίας, ἔστω τή $\widehat{\gamma}$. Τό θέμα τώρα εἶναι ἄν δύο ἄλλοι ἀντιπρόσωποι x_1, y_1 τῶν κλάσεων $\widehat{\alpha}$ καί $\widehat{\beta}$ ἀντιστοίχως δίνουν ἀποτέλεσμα $x_1 * y_1$, τό ὁποῖο νά ἀνήκει στήν κλάση $\widehat{\gamma}$. Εἶναι φανερό ὅτι γιά νά μπορεῖ νά ὁριστεῖ μιά πράξη στό $\widehat{A}$ μέ τή βοήθεια τῆς πράξεως $*$, πού νά εἶναι ἀνεξάρτητη ἀπό τήν ἐκλογή τῶν ἀντιπροσώπων τῶν κλάσεων $\widehat{\alpha}$ καί $\widehat{\beta}$, πρέπει τά ἀποτελέσματα $x * y$ καί $x_1 * y_1$ νά ἀνήκουν πάντα στήν ἴδια κλάση ἰσοδυναμίας.

Ἔτσι δίνουμε τόν ἀκόλουθο ὁρισμό.

Ὁρισμός. Μιά σχέση ἰσοδυναμίας $\sim$ στό Α ὀνομάζεται **συμβιβαστή** μέ τήν ἐσωτερική πράξη $*$ στό Α, ἄν καί μόνο ἄν ἰσχύει ἡ συνεπαγωγή

$$x \sim x_1 \text{ καί } y \sim y_1 \Rightarrow (x * y) \sim (x_1 * y_1)$$

Στήν περίπτωση αὐτή μποροῦμε νά ὁρίσουμε μιά ἐσωτερική πράξη στό $\widehat{A}$, πού θά τή συμβολίζουμε ἐπίσης μέ $*$, μέ τόν ἀκόλουθο τρόπο:

$$\widehat{\alpha} * \widehat{\beta} = \widehat{\alpha * \beta}$$

Τό ἑπόμενο θεώρημα εἶναι χρήσιμο, γιά νά ἐλέγχουμε ἄν μιά σχέση ἰσοδυναμίας εἶναι συμβιβαστή μέ μία πράξη.

Θεώρημα. Μιά σχέση ἰσοδυναμίας $\sim$ σέ ἕνα σύνολο Α εἶναι συμβιβαστή μέ μιά ἐσωτερική πράξη $*$ στό Α, ἄν γιά κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in A$ ἰσχύει

$$\alpha \sim \beta \Rightarrow (\alpha * \gamma) \sim (\beta * \gamma) \text{ καί } (\gamma * \alpha) \sim (\gamma * \beta) \tag{1}$$

Ἀπόδειξη. Ὑποθέτουμε ὅτι ἡ συνθήκη (1) ἰσχύει. Ἄν $\alpha \sim \alpha'$ καί $\beta \sim \beta'$, τότε λόγω τῆς (1) ἔχουμε $(\alpha * \beta) \sim (\alpha' * \beta)$ καί $(\alpha' * \beta) \sim (\alpha' * \beta')$ καί, ἀφοῦ ἡ $\sim$ εἶναι μεταβατική σχέση, ἔχουμε

$$(\alpha * \beta) \sim (\alpha' * \beta'),$$

δηλαδή ἡ $\sim$ εἶναι συμβιβαστή μέ τήν $*$.

Παραδείγματα:

2. Ἡ σχέση ἰσοδυναμίας «$\equiv (\mathrm{mod}\ 3)$» στό $\mathbf{Z}$ εἶναι συμβιβαστή μέ τήν πρόσθεση στό $\mathbf{Z}$. Ἔτσι μποροῦμε νά ὁρίσουμε στό $\mathbf{Z}_3$ πρόσθεση μέ τόν ἀκόλουθο τρόπο :

   Ἄν $(\widehat{x}, \widehat{y}) \in \mathbf{Z}_3 \times \mathbf{Z}_3$, τότε σύμφωνα μέ ὅσα ἔχουμε ἀναφέρει προηγουμένως ἔχουμε

$$\widehat{x} + \widehat{y} = \widehat{x+y}.$$

   Τά ἀποτελέσματα τῆς πράξεως $+$ στό $\mathbf{Z}_3$ δίνονται στόν πίνακα τοῦ σχήματος 1.

$+$	$\widehat{0}$	$\widehat{1}$	$\widehat{2}$
$\widehat{0}$	$\widehat{0}$	$\widehat{1}$	$\widehat{2}$
$\widehat{1}$	$\widehat{1}$	$\widehat{2}$	$\widehat{0}$
$\widehat{2}$	$\widehat{2}$	$\widehat{0}$	$\widehat{1}$

Σχ. 1

	$\widehat{0}$	$\widehat{1}$	$\widehat{2}$
$\widehat{0}$	$\widehat{0}$	$\widehat{0}$	$\widehat{0}$
$\widehat{1}$	$\widehat{0}$	$\widehat{1}$	$\widehat{2}$
$\widehat{2}$	$\widehat{0}$	$\widehat{2}$	$\widehat{1}$

Σχ. 2

Τό πρῶτο μέλος $\widehat{x}$ τοῦ διατεταγμένου ζεύγους $(\widehat{x}, \widehat{y})$ ἀναγράφεται στήν πρώτη στήλη τοῦ πίνακα, ἐνῶ τό δεύτερο $\widehat{y}$ στήν πρώτη σειρά τοῦ πίνακα καί τό ἀποτέλεσμα $\widehat{x+y}$ στή διασταύρωση τῆς γραμμῆς, πού περιέχει τό $\widehat{x}$, καί τῆς στήλης, πού περιέχει τό $\widehat{y}$.

Π.χ. $\widehat{2}+\widehat{1}=\widehat{0}$

3. Ἡ σχέση ἰσοδυναμίας «$\equiv$ (mod 3)» στό **Z** εἶναι συμβιβαστή μέ τόν πολλαπλασιασμό στό **Z**.

Μποροῦμε λοιπόν νά ὁρίσουμε στό $\mathbf{Z}_3$ πολλαπλασιασμό μέ τόν ἀκόλουθο τρόπο :

Ἄν $(\widehat{x}, \widehat{y}) \in \mathbf{Z}_3 \times \mathbf{Z}_3$, τότε κατά τά γνωστά ἔχουμε

$$\widehat{x} \cdot \widehat{y} = \widehat{x \cdot y}$$

Τά ἀποτελέσματα τῆς πράξεως $\cdot$ στό $\mathbf{Z}_3$ δίνονται στόν πίνακα τοῦ σχήματος 2. Ἔτσι π.χ. $\widehat{2} \cdot \widehat{2} = \widehat{1}$.

4. Ἡ σχέση «$\equiv$ (mod 7)» στό σύνολο **N** εἶναι μιά σχέση ἰσοδυναμίας. Ἄν ὁρίσουμε στό **N** τήν πράξη $*$ μέ τόν ἀκόλουθο τρόπο

$$\alpha * \beta = \text{ΕΚΠ}\,(\alpha,\beta),$$

τότε ἡ σχέση «$\equiv$ (mod 7)» δέν εἶναι συμβιβαστή μέ τήν πράξη $*$, γιατί

$$2 \equiv 9 \pmod 7, \qquad 4 \equiv 11 \pmod 7,$$
$$2 * 4 = 4 \quad , \qquad 9 * 11 = 99,$$

ἐνῶ τό 4 δέν εἶναι ἰσοδύναμο μέ τό 99 modulo 7.

1.3. Ἰδιότητες τῶν ἐσωτερικῶν πράξεων

Εἶναι γνωστό ὅτι ἡ πράξη τῆς προσθέσεως στό **N** εἶναι ἀντιμεταθετική καί προσεταιριστική. Μέ τόν παρακάτω ὁρισμό γενικεύουμε τίς δύο αὐτές ἰδιότητες γιά μιά ὁποιαδήποτε πράξη.

Ὁρισμός 1. Μιά πράξη o σέ ἕνα σύνολο Σ ὀνομάζεται

(i) **ἀντιμεταθετική,** ἄν καί μόνο ἄν γιά κάθε $\alpha,\beta \in \Sigma$ ἰσχύει

$$\boxed{\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha}$$

(ii) **προσεταιριστική,** ἄν καί μόνο ἄν γιά κάθε $\alpha,\beta,\gamma \in \Sigma$ ἰσχύει

$$\boxed{(\alpha \circ \beta) \circ \gamma = \alpha \circ (\beta \circ \gamma)}$$

Παραδείγματα:

1. Ἡ γνωστή πράξη τῆς προσθέσεως στό σύνολο **Q** τῶν ρητῶν ἀριθμῶν εἶναι ἀντιμεταθετική, γιατί γιά κάθε $x, y \in \mathbf{Q}$ ἰσχύει

$$x + y = y + x,$$

καί προσεταιριστική, γιατί γιά κάθε $x, y, z \in \mathbf{Q}$ ἰσχύει

$$(x+y) + z = x + (y+z).$$

2. Ἡ πράξη τῆς ἀφαιρέσεως στό σύνολο **R** δέν εἶναι ἀντιμεταθετική, γιατί ὑπάρχουν $x, y \in \mathbf{R}$ τέτοια, ὥστε

$$x-y \neq y-x \quad (\pi.\chi.\ \ 8-3 \neq 3-8),$$

οὔτε εἶναι προσεταιριστική, γιατί ὑπάρχουν $x, y, z \in \mathbf{R}$ τέτοια, ὥστε

$$(x-y)-z \neq x-(y-z) \quad [\pi.\chi\ (5-3)-1 \neq 5-(3-1)].$$

3. Ὁ πολλαπλασιασμός καί ἡ πρόσθεση στό **R** εἶναι πράξεις ἀντιμεταθετικές καί προσεταιριστικές, ἐνῶ ἡ πράξη $*$ στό **R**, πού ὁρίζεται μέ τόν ἀκόλουθο τρόπο

$$\alpha * \beta = |\alpha-\beta| \qquad (\alpha, \beta \in \mathbf{R}),$$

εἶναι ἀντιμεταθετική ἀλλά ὄχι προσεταιριστική. (Νά γίνει ἀπόδειξη ἀπό τούς μαθητές).

Ἡ γνωστή ἐπιμεριστική ἰδιότητα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ὡς πρός τήν πρόσθεση στό **R** γενικεύεται μέ τόν παρακάτω ὁρισμό.

Ὁρισμός 2. Ἄν $*$, $\circ$ εἶναι δύο πράξεις σέ ἕνα σύνολο Σ, τότε λέμε ὅτι ἡ **πράξη** $*$ **εἶναι**

(i) ἀπό ἀριστερά ἐπιμεριστική ὡς πρός τήν o, ἄν καί μόνο ἄν γιά κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in \Sigma$ ἰσχύει

$$\boxed{\alpha * (\beta \circ \gamma) = (\alpha * \beta) \circ (\alpha * \gamma)}$$

(ii) ἀπό δεξιά ἐπιμεριστική ὡς πρός τήν o, ἄν καί μόνο ἄν γιά κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in \Sigma$ ἰσχύει

$$\boxed{(\beta \circ \gamma) * \alpha = (\beta * \alpha) \circ (\gamma * \alpha)}$$

(iii) ἐπιμεριστική ὡς πρός τήν o, ἄν καί μόνο ἄν εἶναι συγχρόνως ἀπό ἀριστερά καί ἀπό δεξιά ἐπιμεριστική ὡς πρός τήν o, δηλαδή γιά κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in \Sigma$ ἰσχύει

$$\boxed{\alpha * (\beta \circ \gamma) = (\alpha * \beta) \circ (\alpha * \gamma) \quad \text{καί} \quad (\beta \circ \gamma) * \alpha = (\beta * \alpha) \circ (\gamma * \alpha)}$$

Εἶναι φανερό ὅτι, ὅταν ἡ πρώτη πράξη $*$ στόν προηγούμενο ὁρισμό εἶναι ἀντιμεταθετική, οἱ τρεῖς ἔννοιες ἐπιμεριστικότητας τῆς $*$ ὡς πρός τήν o εἶναι ἰσοδύναμες.

Παραδείγματα:

4. Ὁ πολλαπλασιασμός εἶναι πράξη ἐπιμεριστική ὡς πρός τήν πρόσθεση στό **N**, γιατί
   (i) ὁ πολλαπλασιασμός εἶναι ἀντιμεταθετική πράξη στό **N** καί
   (ii) γιά κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{N}$ ἰσχύει

$$\alpha \cdot (\beta+\gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$$

Ἡ πρόσθεση στό **N** ὅμως δέν εἶναι πράξη ἐπιμεριστική ὡς πρός τόν πολλαπλασιασμό, γιατί ὑπάρχουν $x,y,z \in \mathbf{N}$ τέτοια, ὥστε

$$x + (y \cdot z) \neq (x+y) \cdot (x+z) \qquad [\pi.\chi.\ 3+(2\cdot 1) \neq (3+2)\cdot(3+1)]$$

5. Ἡ τομή $\cap$ εἶναι πράξη ἐπιμεριστική ὡς πρός τήν ἕνωση $\cup$ στό δυναμοσύνολο $\mathscr{P}(X)$ ἑνός συνόλου X, γιατί

(i) ἡ τομή εἶναι ἀντιμεταθετική πράξη στό $\mathscr{P}(X)$ καί

(ii) γιά κάθε $A,B,\Gamma \in \mathscr{P}(X)$ ἰσχύει

$$A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma).$$

Ἐπίσης ἡ ἕνωση $\cup$ εἶναι πράξη ἐπιμεριστική ὡς πρός τήν τομή $\cap$ στό $\mathscr{P}(X)$.

6. Στό σύνολο **R** θεωροῦμε τή γνωστή πράξη τῆς προσθέσεως + καί τήν πράξη o, πού ὁρίζεται ἀπό τήν ἰσότητα

$$x \circ y = x^3 \cdot y \qquad (x,y \in \mathbf{R}).$$

Τότε

(i) γιά κάθε $x,y,z \in \mathbf{R}$ ἰσχύει

$$x \circ (y+z) = x^3 \cdot (y+z) = x^3 \cdot y + x^3 \cdot z = (x \circ y) + (x \circ z),$$

δηλαδή ἡ o εἶναι ἀπό ἀριστερά ἐπιμεριστική ὡς πρός τήν +,

(ii) ὑπάρχουν $x,y,z \in \mathbf{R}$, γιά τά ὁποῖα ἰσχύει

$$(y+z) \circ x = (y+z)^3 \cdot x \neq y^3 \cdot x + z^3 \cdot x = (y \circ x) + (z \circ x),$$

δηλαδή ἡ o δέν εἶναι ἀπό δεξιά ἐπιμεριστική ὡς πρός τήν +.

1.4. Οὐδέτερο στοιχεῖο ὡς πρός ἐσωτερική πράξη

Γνωρίζουμε ὅτι στό σύνολο **R** ὁ ἀριθμός 0 ἔχει τήν ἰδιότητα:

$$\forall\, x \in \mathbf{R}: \qquad x+0 = 0+x = x$$

καί γι' αὐτό ὀνομάζεται οὐδέτερο στοιχεῖο ὡς πρός τήν πράξη +.

Γενικεύοντας τήν ἰδιότητα αὐτή ἔχουμε τόν ἀκόλουθο ὁρισμό.

Ὁρισμός. Ἔστω $*$ μία πράξη σέ ἕνα σύνολο Σ. Τότε ἕνα στοιχεῖο e τοῦ Σ ὀνομάζεται **οὐδέτερο στοιχεῖο** ὡς πρός τήν πράξη $*$, ὅταν καί μόνο ὅταν γιά κάθε $\alpha \in \Sigma$ ἰσχύει

$$\boxed{\alpha * e = e * \alpha = \alpha}$$

Παρατήρηση. Ἄν στόν προηγούμενο ὁρισμό ἡ πράξη $*$ εἶναι ἀντιμεταθετική, εἶναι φανερό ὅτι ἕνα στοιχεῖο e τοῦ Σ εἶναι οὐδέτερο στοιχεῖο ὡς πρός τήν πράξη $*$, ὅταν καί μόνο ὅταν γιά κάθε $\alpha \in \Sigma$ ἰσχύει $\alpha * e = \alpha$.

Θεώρημα. Ἔστω $*$ μιά πράξη σέ ἕνα σύνολο Σ. Τότε, ἄν ὑπάρχει οὐδέτερο στοιχεῖο στό Σ ὡς πρός τήν πράξη $*$, αὐτό εἶναι μοναδικό.

Ἀπόδειξη. Ἄν $e_1, e_2 \in \Sigma$ εἶναι οὐδέτερα στοιχεῖα ὡς πρός τήν πράξη $*$, τότε θεωρώντας τό e_1 οὐδέτερο στοιχεῖο, λόγω τοῦ ὁρισμοῦ, ἔχουμε

$$e_1 * e_2 = e_2,$$

ἐνῶ θεωρώντας τό e_2 οὐδέτερο στοιχεῖο, πάλι λόγω τοῦ ὁρισμοῦ, ἔχουμε

$$e_1 * e_2 = e_1,$$

ὁπότε, λόγω τῆς μεταβατικῆς ἰδιότητας τῆς ἰσότητας στό Σ, παίρνουμε $e_1 = e_2$.

Στήν περίπτωση πού ὑπάρχει οὐδέτερο στοιχεῖο ὡς πρός μιά πράξη, θά ἐπιτρέπεται, λόγω τοῦ προηγούμενου θεωρήματος, νά λέμε ὅτι αὐτό εἶναι **τό** οὐδέτερο στοιχεῖο ὡς πρός τήν πράξη αὐτή. Τό οὐδέτερο στοιχεῖο (ἄν ὑπάρχει) ὡς πρός μιά πράξη, πού ὀνομάζεται «πρόσθεση», θά συμβολίζεται συνήθως μέ 0, ἐνῶ ὡς πρός μιά πράξη, πού ὀνομάζεται «πολλαπλασιασμός», θά συμβολίζεται μέ 1 ἤ I.

Παρατήρηση. Ἡ μοναδικότητα τοῦ οὐδέτερου στοιχείου ὡς πρός τήν πρόσθεση (ἀντ. τόν πολλαπλασιασμό) στό **C**, πού εἴδαμε στό Κεφ. I (Προτ. 1 καί 1' τῆς 1.3), εἶναι ἄμεση συνέπεια τοῦ προηγούμενου θεωρήματος.

Παραδείγματα:

1. Τό οὐδέτερο στοιχεῖο ὡς πρός τήν πρόσθεση στό **C** εἶναι τό $0 = 0 + 0i$, ἐνῶ τό οὐδέτερο στοιχεῖο ὡς πρός τόν πολλαπλασιασμό εἶναι τό $1 = 1 + 0i$ (Κεφ. I, Προτ. 1 καί 1' τῆς 1.3.)

2. Τό ϕ εἶναι τό οὐδέτερο στοιχεῖο τοῦ $\mathscr{P}(A)$ ὡς πρός τήν (ἀντιμεταθετική) πράξη τῆς ἑνώσεως $\cup$, ἀφοῦ γιά κάθε $X \in \mathscr{P}(A)$ ἰσχύει $X \cup \phi = X$, καί τό A εἶναι τό οὐδέτερο στοιχεῖο ὡς πρός τήν (ἀντιμεταθετική)πράξη τῆς τομῆς $\cap$, γιατί γιά κάθε $X \in \mathscr{P}(A)$ ἰσχύει $X \cap A = X$.

3. Ἡ ἰσότητα

$$x \circ y = x \qquad (x, y \in \mathbf{R})$$

ὁρίζει μιά πράξη $\circ$ στό **R**, ὡς πρός τήν ὁποία δέν ὑπάρχει οὐδέτερο στοιχεῖο, γιατί, ἄν ὑπῆρχε οὐδέτερο στοιχεῖο $e \in \mathbf{R}$, τότε γιά $x, y \in \mathbf{R}$ μέ $x \neq y$ θά ἴσχυε $e \circ x = x$ καί $e \circ y = y$, ὁπότε λόγω τοῦ ὁρισμοῦ τῆς πράξεως θά εἴχαμε $e = x$ καί $e = y$ καί ἐπομένως $x = y$, πού εἶναι ἄτοπο.

1.5. Συμμετρικά στοιχεῖα ὡς πρός ἐσωτερική πράξη

Γνωρίζουμε ὅτι γιά ὁποιοδήποτε πραγματικό ἀριθμό x ὑπάρχει ἕνας πραγματικός ἀριθμός, ὁ $-x$, τέτοιος, ὥστε

$$x + (-x) = (-x) + x = 0.$$

Γενικεύοντας αὐτό γιά μιά ὁποιαδήποτε πράξη ἔχουμε τόν ἀκόλουθο ὁρισμό.

Ὁρισμός. Ἔστω $*$ μιά πράξη σέ ἕνα σύνολο Σ, ὡς πρός τήν ὁποία ὑπάρχει οὐδέτερο στοιχεῖο $e \in \Sigma$. Τότε δύο στοιχεῖα α καί α' τοῦ Σ ὀνομάζονται **συμμετρικά** ὡς πρός τήν πράξη $*$, ὅταν καί μόνο ὅταν ἰσχύει

$$\boxed{\alpha * \alpha' = \alpha' * \alpha = e}$$

Στήν περίπτωση αὐτή λέμε ὅτι τό α εἶναι συμμετρικό τοῦ α' ὡς πρός τήν πράξη $*$ καί ἀντίστροφα τό α' συμμετρικό τοῦ α ὡς πρός τήν $*$.

Παρατήρηση. Εἶναι φανερό ὅτι, ἄν στόν προηγούμενο ὁρισμό ἡ πράξη $*$ εἶναι ἀντιμεταθετική, δύο στοιχεῖα α καί α' τοῦ Σ εἶναι συμμετρικά ὡς πρός τήν πράξη $*$, ὅταν καί μόνο ὅταν ἰσχύει $\alpha * \alpha' = e$.

Παραδείγματα:

1. Κάθε πραγματικός ἀριθμός $x \neq 0$ ἔχει συμμετρικό στοιχεῖο ὡς πρός τήν (ἀντιμεταθετική) πράξη τοῦ πολλαπλασιασμοῦ στό **R** τόν ἀριθμό x^{-1} (πού ὡς γνωστό ὀνομάζεται ἀντίστροφος τοῦ x), γιατί $x \cdot x^{-1} = 1$, ὅπου τό 1 εἶναι τό οὐδέτερο στοιχεῖο ὡς πρός τόν πολλαπλασιασμό στό **R**.

2. Οἱ ἀντίθετοι μιγαδικοί ἀριθμοί $\alpha+\beta i$ καί $-\alpha-\beta i$ εἶναι συμμετρικά στοιχεῖα ὡς πρός τήν (ἀντιμεταθετική) πράξη τῆς προσθέσεως στό **C**, γιατί $(\alpha+\beta i)+(-\alpha-\beta i) = 0$ (Κεφ. Ι, Προτ. 2 τῆς 1.3). Ἐξάλλου κάθε μιγαδικός $\alpha+\beta i \neq 0$ ἔχει συμμετρικό στοιχεῖο ὡς πρός τόν πολλαπλασιασμό στό **C** τόν ἀντίστροφό του:
$$\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2} + \frac{-\beta}{\alpha^2+\beta^2} i,$$
ὅπως εἴδαμε στό Κεφ. Ι (Προτ. 2' τῆς 1.3).

3. Στό σύνολο $A = \{e, x, y\}$ ὁρίζουμε τήν πράξη ο, τῆς ὁποίας ὁ πίνακας ἀποτελεσμάτων δίνεται στό σχῆμα 3. Εὔκολα διαπιστώνεται ὅτι τό e εἶναι τό οὐδέτερο στοιχεῖο τῆς πράξεως ο. Τό στοιχεῖο x τοῦ Α ἔχει δύο συμμετρικά στοιχεῖα ὡς πρός τήν πράξη ο, τόν ἑαυτό του καί τό y, γιατί
$$x \circ x = e \quad \text{καί} \quad x \circ y = y \circ x = e.$$

o	e	x	y
e	e	x	y
x	x	e	e
y	y	e	x

Σχ. 3

1.6. Ἁπλοποιήσιμο στοιχεῖο ὡς πρός ἐσωτερική πράξη

Ὅλοι γνωρίζουμε τούς δύο νόμους τῆς διαγραφῆς στό σύνολο **N**:
$$\alpha+\beta = \alpha+\gamma \Rightarrow \beta = \gamma,$$
$$\alpha\beta = \alpha\gamma \Rightarrow \beta = \gamma.$$

Οἱ ἰδιότητες αὐτές γενικεύονται μέ τόν ἀκόλουθο ὁρισμό.

Ὁρισμός. Ἔστω $*$ μιά πράξη σέ ἕνα σύνολο Σ. Τότε ἕνα στοιχεῖο α τοῦ Σ ὀνομάζεται **ἁπλοποιήσιμο** ὡς πρός τήν πράξη $*$, ἄν καί μόνο ἄν γιά κάθε $\beta, \gamma \in \Sigma$ ἰσχύουν
$$\boxed{\alpha * \beta = \alpha * \gamma \Rightarrow \beta = \gamma \quad \text{καί} \quad \beta * \alpha = \gamma * \alpha \Rightarrow \beta = \gamma}$$

Παραδείγματα:

1. Κάθε πραγματικός ἀριθμός εἶναι ἁπλοποιήσιμο στοιχεῖο ὡς πρός τήν πράξη τῆς προσθέσεως στό **R**. Ἐπίσης κάθε μιγαδικός ἀριθμός εἶναι ἁπλοποιήσιμο στοιχεῖο ὡς πρός τήν πράξη τῆς προσθέσεως στό **C** (Κεφ. Ι, Προτ. 3 τῆς 1.3).

2. Κάθε πραγματικός ἀριθμός $\neq 0$ εἶναι ἁπλοποιήσιμο στοιχεῖο ὡς πρός τήν πράξη τοῦ πολλαπλασιασμοῦ στό **R**, γιατί, ἄν $x \neq 0$, τότε γιά κάθε $\alpha, \beta \in$ **R** ἰσχύουν
$$x \cdot \alpha = x \cdot \beta \Rightarrow \alpha = \beta \quad \text{καί} \quad \alpha \cdot x = \beta \cdot x \Rightarrow \alpha = \beta.$$
Ἐπίσης κάθε μιγαδικός ἀριθμός $\neq 0$ εἶναι ἁπλοποιήσιμο στοιχεῖο ὡς πρός τήν πράξη

τοῦ πολλαπλασιασμοῦ στό **C** (Κεφ. Ι, Προτ. 3′ τῆς 1.3). Τό 0 (ἀντ. τό $0 = 0 + 0i$) δέν εἶναι ἁπλοποιήσιμο στοιχεῖο ὡς πρός τήν πράξη τοῦ πολλαπλασιασμοῦ στό **R** (ἀντ. **C**), γιατί π.χ. ἰσχύουν $0 \cdot 3 = 0 \cdot 4$ καί $3 \neq 4$.

1.7. Ἡ ἔννοια τῆς ἀλγεβρικῆς δομῆς

Ὅπως εἴδαμε στά προηγούμενα, σέ ἕνα σύνολο $A \neq \emptyset$ μποροῦν νά ὁριστοῦν διάφορες πράξεις. Τότε τό σύνολο Α μαζί μέ τίς πράξεις αὐτές θά λέμε ὅτι ἔχει μιά **ἀλγεβρική δομή**, ἡ ὁποία χαρακτηρίζεται ἀπό τίς ἰδιότητες αὐτῶν τῶν πράξεων. Στήν περίπτωση πού σέ ἕνα σύνολο Α ἔχουν ὁριστεῖ μόνο ἐσωτερικές πράξεις, $\circ, *, \ldots, \oplus$, θά γράφουμε $(A, \circ, *, \ldots, \oplus)$, γιά νά ἐκφράσουμε τήν ἀλγεβρική δομή (ἤ ἁπλά δομή). Ἔτσι οἱ συμβολισμοί

$$(\mathbf{N}, +),\ (\mathbf{N}, \cdot),\ (\mathbf{Z}, +),\ (\mathbf{R}, +),\ (\mathbf{Z}, +, \cdot),\ (\mathbf{Q}, +, \cdot)$$

ἐκφράζουν δομές. Οἱ δομές $(\mathbf{N}, +)$, $(\mathbf{N}, \cdot)$, παρόλο πού ἀναφέρονται στό ἴδιο σύνολο **N**, εἶναι διαφορετικές, γιατί δέ χαρακτηρίζονται ἀπό τίς ἴδιες ἰδιότητες. Π.χ. στή δομή $(\mathbf{N}, +)$ δέν ὑπάρχει οὐδέτερο στοιχεῖο ὡς πρός τήν πράξη $+$, ἐνῶ στή δομή $(\mathbf{N}, \cdot)$ ὑπάρχει καί εἶναι τό 1.

Μερικά παραδείγματα ἀλγεβρικῶν δομῶν θά γνωρίσουμε στίς ἑπόμενες παραγράφους.

1.8. Ἀσκήσεις

1. Νά ἐξετάσετε ἄν τό σύνολο
   (i) $\{1, -1\}$ εἶναι κλειστό ὡς πρός τήν πράξη τοῦ πολλαπλασιασμοῦ στό **Z**,
   (ii) τῶν θετικῶν ἀκεραίων εἶναι κλειστό ὡς πρός τίς πράξεις τῆς προσθέσεως καί ἀφαιρέσεως στό **Z**,
   (iii) $\{k + ki \mid k \in \mathbf{R}\}$ εἶναι κλειστό ὡς πρός τήν πράξη τῆς προσθέσεως στό **C**,
   (iv) $\{1, -1, i, -i\}$ εἶναι κλειστό ὡς πρός τήν πράξη τοῦ πολλαπλασιασμοῦ στό **C**
2. Ἄν $\Sigma = \{A, B, \Gamma, \Delta\}$, ὅπου
$$A = \emptyset,\quad B = \{\alpha, \beta\},\quad \Gamma = \{\alpha, \gamma\}\quad \text{καί}\quad \Delta = \{\alpha, \beta, \gamma\},$$
   δεῖξτε ὅτι ἡ ἕνωση $\cup$ εἶναι ἐσωτερική πράξη στό Σ. Εἶναι ἡ τομή $\cap$ ἐσωτερική πράξη στό Σ;
3. Δεῖξτε ὅτι ἡ σχέση ἰσοδυναμίας «$\equiv (\text{mod } \nu)$» εἶναι συμβιβαστή μέ τήν πρόσθεση καί τόν πολλαπλασιασμό στό **Z**.
4. Κατασκευάστε τούς πίνακες ἀποτελεσμάτων γιά τήν πρόσθεση καί τόν πολλαπλασιασμό στό $\mathbf{Z}_4$. Οἱ πράξεις αὐτές εἶναι ἀντιμεταθετικές ἤ προσεταιριστικές; Εἶναι ὁ πολλαπλασιασμός πράξη ἐπιμεριστική ὡς πρός τήν πρόσθεση; Ὑπάρχουν οὐδέτερα στοιχεῖα ὡς πρός τίς πράξεις αὐτές; Ποιά στοιχεῖα τοῦ $\mathbf{Z}_4$ ἔχουν συμμετρικά στοιχεῖα ὡς πρός τίς πράξεις αὐτές;
5. Βρεῖτε γιά ποιές τιμές τῶν $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ εἶναι προσεταιριστική ἡ πράξη $*$ στό **R**, πού ὁρίζεται μέ τόν ἀκόλουθο τρόπο
$$x * y = \alpha x + \beta y.$$

6. Νά δείξετε ὅτι ἡ ἰσότητα

$$\alpha * \beta = \beta$$

ὁρίζει μιά πράξη $*$ στό **N**, ὡς πρός τήν ὁποία δέν ὑπάρχει οὐδέτερο στοιχεῖο στό **N**. Εἶναι προσεταιριστική αὐτή ἡ πράξη;

7. Ἡ ἰσότητα

$$\alpha * \beta = \alpha\beta + \alpha + \beta$$

ὁρίζει μιά πράξη $*$ στό **R**. Εἶναι ἡ πράξη αὐτή ἀντιμεταθετική ἤ προσεταιριστική; Ποιά στοιχεῖα τοῦ **R** ἔχουν συμμετρικό στοιχεῖο ὡς πρός τήν πράξη αὐτή;

8. Ἡ ἰσότητα

$$x \circ y = x + y + x^2y^2$$

ὁρίζει μιά πράξη $\circ$ στό **R**. Νά δείξετε ὅτι κάθε $x \in \mathbf{R}-\{0\}$ μέ $x < \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ ἔχει δύο συμμετρικά στοιχεῖα ὡς πρός τήν πράξη αὐτή, ἐνῶ κάθε $x \in \mathbf{R}$ μέ $x > \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ δέν ἔχει συμμετρικό στοιχεῖο. Τά 0, $\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ ἔχουν συμμετρικά στοιχεῖα καί ποιά;

9. Στό σύνολο **C** ὁρίζουμε μιά πράξη $*$ μέ τόν ἀκόλουθο τρόπο

$$z_1 * z_2 = z_1 + z_2 - z_1z_2.$$

(i) Νά δείξετε ὅτι ἡ πράξη αὐτή εἶναι ἀντιμεταθετική καί προσεταιριστική.

(ii) Ὑπάρχει οὐδέτερο στοιχεῖο ὡς πρός τήν πράξη αὐτή;

(iii) Ποιά στοιχεῖα τοῦ **C** ἔχουν συμμετρικό στοιχεῖο ὡς πρός τήν πράξη αὐτή;

10. Ἔστω $*$ μιά ἐσωτερική πράξη σέ ἕνα σύνολο Ε, ὡς πρός τήν ὁποία ὑπάρχει οὐδέτερο στοιχεῖο $e \in E$. Ἄν γιά κάθε $\alpha,\beta,\gamma,\delta \in E$ ἰσχύει

$$(\alpha * \beta) * (\gamma * \delta) = (\alpha * \gamma) * (\beta * \delta),$$

νά δείξετε ὅτι ἡ πράξη αὐτή εἶναι ἀντιμεταθετική καί προσεταιριστική.

2. ΗΜΙΟΜΑΔΕΣ - ΟΜΑΔΕΣ

Οἱ δομές μέ μιά ἐσωτερική πράξη χωρίζονται, ἀνάλογα μέ τίς ἰδιότητες πού ἔχει ἡ πράξη αὐτή, σέ διάφορες κατηγορίες. Ἀπό τίς κατηγορίες αὐτές θά ἐξετάσουμε στήν παράγραφο αὐτή τίς *ἡμιομάδες* καί τίς *ὁμάδες*.

2.1. Ἡμιομάδες

Στήν κατηγορία αὐτή ὑπάγονται οἱ δομές ἐκεῖνες, στίς ὁποῖες ἡ πράξη εἶναι προσεταιριστική. Παράδειγμα τέτοιας δομῆς εἶναι τό (**N**, +), ὅπου ἡ πρόσθεση εἶναι, ὡς γνωστό, προσεταιριστική πράξη.

Ἔτσι ἔχουμε τόν ἀκόλουθο ὁρισμό.

Ὁρισμός. Μία δομή (G, o) ὀνομάζεται **ἡμιομάδα,** ἄν καί μόνο ἄν ἡ πράξη o εἶναι προσεταιριστική, δηλαδή γιά κάθε $\alpha,\beta,\gamma \in G$ ἰσχύει

$$(\alpha \circ \beta) \circ \gamma = \alpha \circ (\beta \circ \gamma)$$

Ἄν ἐπιπλέον ἡ πράξη o εἶναι ἀντιμεταθετική, τότε ἡ δομή (G, o) ὀνομάζεται **ἀντιμεταθετική ἡμιομάδα**.

Σύμφωνα μέ τόν παραπάνω ὁρισμό οἱ δομές $(\mathbf{N}, +)$ καί $(\mathbf{N}, \cdot)$ εἶναι ἀντιμεταθετικές ἡμιομάδες.

Στά προηγούμενα εἴδαμε ὅτι ἕνα στοιχεῖο εἶναι δυνατό νά ἔχει περισσότερα ἀπό ἕνα συμμετρικά στοιχεῖα ὡς πρός μία πράξη (Παραδ. 3 τῆς 1.5). Στίς ἡμιομάδες ὅμως αὐτό εἶναι ἀδύνατο, ὅπως δηλώνει τό ἀκόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα. Ἔστω (G, o) μιά ἡμιομάδα. Ἄν ὑπάρχει οὐδέτερο στοιχεῖο e ὡς πρός τήν πράξη o, τότε κάθε $x \in G$ ἔχει τό πολύ ἕνα συμμετρικό στοιχεῖο ὡς πρός τήν πράξη αὐτή.

Ἀπόδειξη. Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι τά στοιχεῖα x' καί x'' τοῦ G εἶναι συμμετρικά τοῦ $x \in G$ ὡς πρός τήν πράξη o. Τότε λόγω τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ συμμετρικοῦ στοιχείου ἔχουμε

$$x \circ x' = e \quad \text{καί} \quad x'' \circ x = e,$$

ὁπότε ἀπό τήν προσεταιριστική ἰδιότητα τῆς πράξεως o παίρνουμε

$$x'' = x'' \circ e = x'' \circ (x \circ x') = (x'' \circ x) \circ x' = e \circ x' = x',$$

δηλαδή $x' = x''$.

2.2. Ὁμάδες

Ἡ δομή $(\mathbf{Z}, +)$ εἶναι μιά (ἀντιμεταθετική) ἡμιομάδα πού ἔχει καί ἄλλες ἰδιότητες, τίς ὁποῖες δέν ἔχει ἡ (ἀντιμεταθετική) ἡμιομάδα $(\mathbf{N}, +)$. Οἱ πρόσθετες αὐτές ἰδιότητες εἶναι οἱ ἀκόλουθες:

(i) ὑπάρχει οὐδέτερο στοιχεῖο ὡς πρός τήν πρόσθεση:

$$\forall\, \alpha \in \mathbf{Z}: \qquad \alpha+0 = 0+\alpha = \alpha$$

(ii) κάθε στοιχεῖο α τοῦ **Z** ἔχει ἀντίθετο στοιχεῖο τό $-\alpha$:

$$\alpha + (-\alpha) = (-\alpha) + \alpha = 0.$$

Θεωρώντας αὐτή τήν ἀλγεβρική δομή τοῦ **Z** σέ ἕνα ὁποιοδήποτε σύνολο ἔχουμε τόν ἀκόλουθο ὁρισμό.

Ὁρισμός. Μία δομή (G, o) ὀνομάζεται **ὁμάδα,** ἄν καί μόνο ἄν ἰσχύουν οἱ ἀκόλουθες ἰδιότητες:

(O_1) Ἡ δομή (G, o) εἶναι ἡμιομάδα.

(O_2) Ὑπάρχει $e \in G$ τέτοιο, ὥστε γιά κάθε $\alpha \in G$ νά ἰσχύει

$\alpha \circ e = e \circ \alpha = \alpha$ (ὕπαρξη οὐδέτερου στοιχείου).

(O_3) Γιά κάθε $\alpha \in G$ ὑπάρχει $\alpha' \in G$ τέτοιο, ὥστε

$\alpha \circ \alpha' = \alpha' \circ \alpha = e$ (ὕπαρξη συμμετρικοῦ στοιχείου).

Ἡ ὁμάδα $(G, \circ)$ θά ὀνομάζεται **ἀβελιανή** ἤ **ἀντιμεταθετική**, ἄν καί μόνο ἄν ἡ πράξη $\circ$ εἶναι **ἀντιμεταθετική**.

Σημείωση. Ἄν σέ μιά ὁμάδα ἡ πράξη ὀνομάζεται «πρόσθεση», θά λέμε ὅτι εἶναι μιά **προσθετική ὁμάδα,** ἐνῶ, ἄν ἡ πράξη ὀνομάζεται «πολλαπλασιασμός», θά λέμε ὅτι εἶναι μιά **πολλαπλασιαστική ὁμάδα.**

Παραδείγματα:

1. Ἡ δομή $(\mathbf{Z}, \cdot)$, σέ ἀντίθεση πρός τή δομή $(\mathbf{Z}, +)$, δέν εἶναι ὁμάδα, γιατί π.χ. τό 3 δέν ἔχει συμμετρικό στοιχεῖο στό $\mathbf{Z}$ ὡς πρός τόν πολλαπλασιασμό, ἀφοῦ δέν ὑπάρχει ἀκέραιος α μέ $\alpha \cdot 3 = 1$.
2. Τό σύνολο $A = \{2^k \mid k \in \mathbf{Z}\}$ εἶναι κλειστό ὡς πρός τόν πολλαπλασιασμό στό $\mathbf{Q}$ καί ἡ δομή $(A, \cdot)$ εἶναι μιά πολλαπλασιαστική ἀβελιανή ὁμάδα, γιατί γιά κάθε $k, \lambda, \mu \in \mathbf{Z}$ ἰσχύουν
   (i) $2^k \cdot (2^\lambda \cdot 2^\mu) = (2^k \cdot 2^\lambda) \cdot 2^\mu$ (προσεταιριστική ἰδιότητα),
   (ii) $2^k \cdot 2^0 = 2^0 \cdot 2^k = 2^k$ (ὕπαρξη οὐδέτερου στοιχείου),
   (iii) $2^k \cdot 2^{-k} = 2^{-k} \cdot 2^k = 2^0$ (ὕπαρξη συμμετρικοῦ στοιχείου),
   (iv) $2^k \cdot 2^\lambda = 2^\lambda \cdot 2^k$ (ἀντιμεταθετική ἰδιότητα).
3. Ἡ συμμετρική διαφορά $\dotplus$ εἶναι μιά πράξη στό δυναμοσύνολο $\mathscr{P}(X)$ ἑνός συνόλου X, πού ὁρίζεται ὡς ἑξῆς:
   $$A \dotplus B = (A - B) \cup (B - A) \qquad (A, B \in \mathscr{P}(X))$$
   Ἡ δομή $(\mathscr{P}(X), \dotplus)$ εἶναι μιά ἀβελιανή ὁμάδα, γιατί γιά κάθε $A, B, \Gamma \in \mathscr{P}(X)$ ἰσχύουν
   (i) $(A \dotplus B) \dotplus \Gamma = A \dotplus (B \dotplus \Gamma)$ (προσεταιριστική ἰδιότητα),
   (ii) $A \dotplus \emptyset = \emptyset \dotplus A = A$ (ὕπαρξη οὐδέτερου στοιχείου),
   (iii) $A \dotplus A = \emptyset$ (ὕπαρξη συμμετρικοῦ στοιχείου),
   (iv) $A \dotplus B = B \dotplus A$ (ἀντιμεταθετική ἰδιότητα).

2.3. Βασικές ἰδιότητες σέ μιά ὁμάδα

Σέ μιά ὁμάδα $(G, \circ)$ ἰσχύουν οἱ ἀκόλουθες ἰδιότητες.

Ἰδιότητα 1. Τό οὐδέτερο στοιχεῖο $e \in G$ εἶναι μοναδικό.

Αὐτό εἶναι συνέπεια τῆς ἰδιότητας (O_2) καί τοῦ θεωρήματος τῆς 1.4.

Ἰδιότητα 2. Κάθε $\alpha \in G$ ἔχει μοναδικό συμμετρικό στοιχεῖο ὡς πρός τήν πράξη $\circ$.

Αὐτό εἶναι συνέπεια τῶν ἰδιοτήτων (O_1), (O_3) καί τοῦ θεωρήματος τῆς 2.1.

Σημείωση. Σέ μιά προσθετική ὁμάδα **τό** συμμετρικό τοῦ α θά συμβολίζεται μέ $-\alpha$ καί θά ὀνομάζεται **ἀντίθετο** τοῦ α, ἐνῶ σέ μιά πολλαπλασιαστική ὁμάδα **αὐτό** θά συμβολίζεται μέ α^{-1} καί θά ὀνομάζεται **ἀντίστροφο** τοῦ α.

Ἰδιότητα 3. Κάθε στοιχεῖο α τοῦ G εἶναι ἁπλοποιήσιμο, δηλαδή γιά κάθε $\beta, \gamma \in G$ ἰσχύουν

$$\alpha \circ \beta = \alpha \circ \gamma \Rightarrow \beta = \gamma \quad \text{καί} \quad \beta \circ \alpha = \gamma \circ \alpha \Rightarrow \beta = \gamma.$$

Ἀπόδειξη. Ἔστω $\alpha \circ \beta = \alpha \circ \gamma$. Θά δείξουμε ὅτι $\beta = \gamma$. Ἀπό τίς ἰδιότητες τῆς ὁμάδας καί τήν ὑπόθεση παίρνουμε

$$\begin{aligned} \beta &= e \circ \beta = (\alpha' \circ \alpha) \circ \beta = \alpha' \circ (\alpha \circ \beta) = \alpha' \circ (\alpha \circ \gamma) = \\ &= (\alpha' \circ \alpha) \circ \gamma = e \circ \gamma = \gamma. \end{aligned}$$

Ἔστω $\beta \circ \alpha = \gamma \circ \alpha$. Θά δείξουμε ὅτι $\beta = \gamma$. Ὅμοια παίρνουμε

$$\begin{aligned} \beta = \beta \circ e &= \beta \circ (\alpha \circ \alpha') = (\beta \circ \alpha) \circ \alpha' = (\gamma \circ \alpha) \circ \alpha' = \\ &= \gamma \circ (\alpha \circ \alpha') = \gamma \circ e = \gamma. \end{aligned}$$

Ἰδιότητα 4. Ἄν $\alpha, \beta \in G$, τότε κάθε μιά ἀπό τίς ἐξισώσεις $\alpha \circ x = \beta$, $x \circ \alpha = \beta$ ἔχει μοναδική λύση στό G.

Ἀπόδειξη. Ἔστω $\alpha' \in G$ **τό** συμμετρικό τοῦ α. Τότε

$$\begin{aligned} \alpha \circ x = \beta &\Leftrightarrow \alpha' \circ (\alpha \circ x) = \alpha' \circ \beta \Leftrightarrow (\alpha' \circ \alpha) \circ x = \alpha' \circ \beta \\ &\Leftrightarrow e \circ x = \alpha' \circ \beta \Leftrightarrow x = \alpha' \circ \beta. \end{aligned}$$

Ἄρα ἡ μοναδική λύση τῆς ἐξισώσεως $\alpha \circ x = \beta$ εἶναι τό στοιχεῖο $\alpha' \circ \beta$. Ὅμοια βρίσκουμε ὅτι ἡ μοναδική λύση τῆς ἐξισώσεως $x \circ \alpha = \beta$ εἶναι τό στοιχεῖο $\beta \circ \alpha'$.

Παρατήρηση. Σέ ἀβελιανές ὁμάδες οἱ δύο ἐξισώσεις στήν ἰδιότητα 4 εἶναι ἰσοδύναμες. Εἰδικότερα σέ προσθετικές ἀβελιανές ὁμάδες ἡ μοναδική λύση τῶν παραπάνω ἐξισώσεων θά συμβολίζεται μέ $\beta - \alpha$, δηλαδή $\beta - \alpha = \beta + (-\alpha)$.

2.4. Ἀσκήσεις

1. Ποιές ἀπό τίς δομές $(A, \circ)$, $(A, *)$, $(A, \cdot)$ καί $(A, \oplus)$ μέ $A = \{\alpha, \beta\}$ καί μέ πράξεις, πού οἱ πίνακές τους δίνονται στό σχῆμα 4,

$\circ$	α	β
α	α	β
β	β	α

$*$	α	β
α	α	β
β	α	β

$\cdot$	α	β
α	α	α
β	α	α

$\oplus$	α	β
α	α	β
β	β	β

Σχ. 4

εἶναι ἡμιομάδες καί ποιές ὁμάδες;

2. (i) Ἄν $(A, +)$ εἶναι μιά προσθετική ὁμάδα, νά δείξετε ὅτι γιά κάθε $\alpha, \beta \in A$
$$\alpha + \beta = 0 \Rightarrow \beta = -\alpha.$$
(ii) Ἄν $(B, \cdot)$ εἶναι μιά πολλαπλασιαστική ὁμάδα, νά δείξετε ὅτι γιά κάθε $\alpha, \beta \in B$
$$\alpha \cdot \beta = 1 \Rightarrow \beta = \alpha^{-1}.$$

3. Δεῖξτε ὅτι ἡ δομή $(\mathbf{Z}_6, +)$ εἶναι ἀβελιανή ὁμάδα. Ἐπιλύστε στό $\mathbf{Z}_6$ τήν ἐξίσωση $\widehat{4} + x = \widehat{2}$.

4. Σέ μιά πολλαπλασιαστική ὁμάδα $(G, \cdot)$ δεῖξτε ὅτι γιά κάθε $\alpha, \beta \in G$ καί $\mu, \nu \in \mathbf{N}$ ἰσχύουν
(i) $(\alpha^{-1})^{-1} = \alpha$,
(ii) $(\alpha \cdot \beta)^{-1} = \beta^{-1} \cdot \alpha^{-1}$

(iii) $\alpha^{\mu} \cdot \alpha^{\nu} = \alpha^{\mu+\nu}$,

(iv) $(\alpha^{\mu})^{\nu} = \alpha^{\mu\nu}$

ὅπου οἱ δυνάμεις ὁρίζονται κατά τό γνωστό τρόπο: $\alpha^1 = \alpha$, $\alpha^2 = \alpha . \alpha$ καί γενικά $\alpha^{\nu+1} = \alpha^{\nu} \cdot \alpha$ $(\nu \in \mathbf{N})$.

5. Ἄν εἶναι

$$\Sigma = \{\lambda + \lambda i \mid \lambda \in \mathbf{R}\}$$

καί + ἡ πρόσθεση στό **C**, νά δείξετε ὅτι ἡ δομή $(\Sigma, +)$ εἶναι ὁμάδα.

6. Σέ μιά προσθετική ὁμάδα $(G, +)$ γιά κάθε $\alpha,\beta \in G$ ἰσχύουν

(i) $-(-\alpha) = \alpha$ (ii) $-(\alpha+\beta) = (-\beta) + (-\alpha)$.

7. Στό σύνολο

$$E = \{(\alpha,\beta) \mid \alpha \in \mathbf{R}-\{0\} \quad \text{καί} \quad \beta \in \mathbf{R}\}$$

δέν εἶναι αντιμ/κή

ἡ σχέση

$$(\alpha,\beta) * (\gamma,\delta) = (\alpha\gamma, \beta\gamma + \delta)$$

ὁρίζει μία πράξη $*$. Νά δείξετε ὅτι ἡ δομή $(E, *)$ εἶναι ὁμάδα.

8. Ἄν $(G, *)$ εἶναι μιά ἀβελιανή ὁμάδα, νά ἐπιλυθεῖ στό G τό σύστημα

$$\begin{cases} x * \alpha = y * y \\ x * \beta = y * \alpha' \end{cases}$$

ὅπου α' τό συμμετρικό τοῦ α.

3. ΔΑΚΤΥΛΙΟΙ

3.1. Ἡ ἔννοια τοῦ δακτυλίου

Στήν προηγούμενη παράγραφο εἴδαμε ἀλγεβρικές δομές μέ μία μόνο ἐσωτερική πράξη. Ἐδῶ θά γνωρίσουμε ἀλγεβρικές δομές μέ δύο ἐσωτερικές πράξεις. Ἡ μιά πράξη θά συμβολίζεται μέ + καί θά ὀνομάζεται πρόσθεση, ἐνῶ ἡ ἄλλη πράξη θά συμβολίζεται μέ $\cdot$ καί θά ὀνομάζεται πολλαπλασιασμός, χωρίς αὐτό νά σημαίνει ὅτι οἱ πράξεις αὐτές ταυτίζονται πάντοτε μέ τίς γνωστές μας πράξεις τῆς προσθέσεως καί τοῦ πολλαπλασιασμοῦ στό **R**.

Προτοῦ δώσουμε τόν ὁρισμό τοῦ δακτυλίου, ἄς μελετήσουμε τή δομή $(\mathbf{Z}, +, \cdot)$. Ἰσχύουν οἱ ἀκόλουθες ἰδιότητες:

1. Ἡ δομή $(\mathbf{Z}, +)$ εἶναι ἀντιμεταθετική ὁμάδα, γιατί γιά κάθε $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbf{Z}$ ἰσχύουν:

(i) $(\alpha+\beta)+\gamma = \alpha+(\beta+\gamma)$,

(ii) $\alpha+\beta = \beta+\alpha$,

(iii) $\alpha+0 = \alpha$,

(iv) $\alpha + (-\alpha) = 0$.

2. Ἡ δομή $(\mathbf{Z}, \cdot)$ εἶναι ἡμιομάδα, γιατί γιά κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in Z$ ἰσχύει:
$$(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$$
3. Ὁ πολλαπλασιασμός $\cdot$ εἶναι πράξη ἐπιμεριστική ὡς πρός τήν πρόσθεση $+$, γιατί γιά κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{Z}$ ἰσχύουν:
$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma \quad \text{καί} \quad (\beta + \gamma) \cdot \alpha = \beta \cdot \alpha + \gamma \cdot \alpha.$$

Ἀπό τό προηγούμενο παράδειγμα ὁδηγούμαστε στόν ὁρισμό μιᾶς γενικῆς δομῆς, πού θά ὀνομάζεται *δακτύλιος*.

Ὁρισμός. Μία δομή $(A, +, \cdot)$ ὀνομάζεται **δακτύλιος**, ἄν καί μόνο ἄν ἰσχύουν οἱ ἀκόλουθες ἰδιότητες:

(Δ_1) Ἡ δομή $(A, +)$ εἶναι ἀντιμεταθετική ὁμάδα.
(Δ_2) Ἡ δομή $(A, \cdot)$ εἶναι ἡμιομάδα.
(Δ_3) Ἡ πράξη $\cdot$ εἶναι ἐπιμεριστική ὡς πρός τήν πράξη $+$.

Ἔτσι γιά ἕνα δακτύλιο $(A, +, \cdot)$ ἰσχύουν οἱ ἀκόλουθες ἰδιότητες:

1. $\forall \alpha, \beta, \gamma \in A$: $(\alpha+\beta)+\gamma = \alpha+(\beta+\gamma)$		(Δ_1)
2. Ὑπάρχει στό A οὐδέτερο στοιχεῖο (συμβ. 0) ὡς πρός τήν πρόσθεση		(Δ_1)
3. Κάθε στοιχεῖο α τοῦ A ἔχει **ἀντίθετο** στοιχεῖο (συμβ. $-\alpha$)		(Δ_1)
4. $\forall \alpha, \beta \in A$:	$\alpha+\beta = \beta+\alpha$	(Δ_1)
5. $\forall \alpha, \beta, \gamma \in A$:	$(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$	(Δ_2)
6. $\forall \alpha, \beta, \gamma \in A$:	$\alpha \cdot (\beta+\gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$ καί $(\beta+\gamma) \cdot \alpha = \beta \cdot \alpha + \gamma \cdot \alpha$	(Δ_3)

Ἰδιαίτερα, ἕνας δακτύλιος $(A, +, \cdot)$ θά ὀνομάζεται

(i) **ἀντιμεταθετικός**, ἄν καί μόνο ἄν ἡ ἡμιομάδα $(A, \cdot)$ εἶναι ἀντιμεταθετική, δηλαδή γιά κάθε $\alpha, \beta \in A$:
$$\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha,$$

(ii) **δακτύλιος μέ μοναδιαῖο στοιχεῖο**, ἄν καί μόνο ἄν ὑπάρχει οὐδέτερο στοιχεῖο ὡς πρός τήν πράξη $\cdot$ (πού, ὅπως ἔχουμε ἀναφέρει, συμβολίζεται μέ 1), δηλαδή γιά κάθε $\alpha \in A$:
$$\alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha.$$

Παραδείγματα:

1. Ἡ δομή $(A, +, \cdot)$, ὅπου $A = \{\alpha + \beta\sqrt{2} \mid \alpha, \beta \in \mathbf{Q}\}$ καί πράξεις $+$ καί $\cdot$ οἱ γνωστές μας πράξεις στό $\mathbf{R}$, εἶναι ἀντιμεταθετικός δακτύλιος μέ μοναδιαῖο στοιχεῖο.
Πράγματι, γιά κάθε $\alpha, \alpha', \alpha'', \beta, \beta', \beta'' \in \mathbf{Q}$ ἰσχύουν:

(i) $[(\alpha+\beta\sqrt{2}) + (\alpha'+\beta'\sqrt{2})] + (\alpha'' + \beta''\sqrt{2}) = (\alpha+\beta\sqrt{2}) + [(\alpha'+\beta'\sqrt{2}) + (\alpha''+\beta''\sqrt{2})]$, γιατί κάθε ἕνα ἀπό τά μέλη της ἰσοῦται μέ $[(\alpha+\alpha'+\alpha'') + (\beta+\beta'+\beta'')\sqrt{2}]$,

(ii) $(\alpha+\beta\sqrt{2}) + (\alpha'+\beta'\sqrt{2}) = (\alpha'+\beta'\sqrt{2}) + (\alpha+\beta\sqrt{2})$, γιατί κάθε μέλος της ἰσοῦται μέ $[(\alpha+\alpha') + (\beta+\beta')\sqrt{2}]$,

(iii) $(\alpha+\beta\sqrt{2})+(0+0\sqrt{2})=\alpha+\beta\sqrt{2},$

(iv) $(\alpha+\beta\sqrt{2})+(-\alpha-\beta\sqrt{2})=0+0\sqrt{2}=0,$

(v) $[(\alpha+\beta\sqrt{2})\cdot(\alpha'+\beta'\sqrt{2})]\cdot(\alpha''+\beta''\sqrt{2})=(\alpha+\beta\sqrt{2})\cdot[(\alpha'+\beta'\sqrt{2})\,.\,(\alpha''+$
$+\beta''\sqrt{2})],$

(vi) $(\alpha+\beta\sqrt{2})\cdot(\alpha'+\beta'\sqrt{2})=(\alpha'+\beta'\sqrt{2})\cdot(\alpha+\beta\sqrt{2}),$

(vii) $(\alpha+\beta\sqrt{2})\cdot[(\alpha'+\beta'\sqrt{2})+(\alpha''+\beta''\sqrt{2})]=$
$=(\alpha+\beta\sqrt{2})\cdot(\alpha'+\beta'\sqrt{2})+(\alpha+\beta\sqrt{2})\cdot(\alpha''+\beta''\sqrt{2})$ καί

(viii) $(\alpha+\beta\sqrt{2})\cdot(1+0\sqrt{2})=\alpha+\beta\sqrt{2}$

2. Ἡ δομή $(\mathbf{Z}_5,+,\cdot)$ εἶναι ἕνας ἀντιμεταθετικός δακτύλιος μέ μοναδιαῖο στοιχεῖο. Ἕνας εὔκολος τρόπος, γιά νά ἐξετάσουμε ἄν ἰσχύει ὁ ὁρισμός τοῦ δακτυλίου γιά τή δομή $(\mathbf{Z}_5,+,\cdot)$, εἶναι ἡ κατασκευή τῶν γνωστῶν πινάκων γιά τίς πράξεις $+$ καί $\cdot$ στό $\mathbf{Z}_5$ (Σχ. 5).

Πράξεις στό Z_5											
Πρόσθεση						Πολλαπλασιασμός					
$+$	$\widehat{0}$	$\widehat{1}$	$\widehat{2}$	$\widehat{3}$	$\widehat{4}$	$\cdot$	$\widehat{0}$	$\widehat{1}$	$\widehat{2}$	$\widehat{3}$	$\widehat{4}$
$\widehat{0}$	$\widehat{0}$	$\widehat{1}$	$\widehat{2}$	$\widehat{3}$	$\widehat{4}$	$\widehat{0}$	$\widehat{0}$	$\widehat{0}$	$\widehat{0}$	$\widehat{0}$	$\widehat{0}$
$\widehat{1}$	$\widehat{1}$	$\widehat{2}$	$\widehat{3}$	$\widehat{4}$	$\widehat{0}$	$\widehat{1}$	$\widehat{0}$	$\widehat{1}$	$\widehat{2}$	$\widehat{3}$	$\widehat{4}$
$\widehat{2}$	$\widehat{2}$	$\widehat{3}$	$\widehat{4}$	$\widehat{0}$	$\widehat{1}$	$\widehat{2}$	$\widehat{0}$	$\widehat{2}$	$\widehat{4}$	$\widehat{1}$	$\widehat{3}$
$\widehat{3}$	$\widehat{3}$	$\widehat{4}$	$\widehat{0}$	$\widehat{1}$	$\widehat{2}$	$\widehat{3}$	$\widehat{0}$	$\widehat{3}$	$\widehat{1}$	$\widehat{4}$	$\widehat{2}$
$\widehat{4}$	$\widehat{4}$	$\widehat{0}$	$\widehat{1}$	$\widehat{2}$	$\widehat{3}$	$\widehat{4}$	$\widehat{0}$	$\widehat{4}$	$\widehat{3}$	$\widehat{2}$	$\widehat{1}$

Σχ. 5

Ἄν $\widehat{\alpha}$, $\widehat{\beta}$ καί $\widehat{\gamma}$ εἶναι κλάσεις ὑπολοίπων modulo 5, ἐπαληθεῦστε τίς ἰδιότητες

(i) $(\widehat{\alpha}+\widehat{\beta})+\widehat{\gamma}=\widehat{\alpha}+(\widehat{\beta}+\widehat{\gamma}),$

(ii) $\widehat{\alpha}+\widehat{\beta}=\widehat{\beta}+\widehat{\alpha}$

(iii) $\widehat{\alpha}+\widehat{0}=\widehat{\alpha}$

(iv) Γιά κάθε $\widehat{x}\in\mathbf{Z}_5$ ὑπάρχει $\widehat{y}\in\mathbf{Z}_5$ μέ τήν ἰδιότητα $\widehat{x}+\widehat{y}=\widehat{0}$
(π.χ. $\widehat{1}+\widehat{4}=\widehat{0}$),

(v) $(\widehat{\alpha}\cdot\widehat{\beta})\cdot\widehat{\gamma}=\widehat{\alpha}\cdot(\widehat{\beta}\cdot\widehat{\gamma}),$

(vi) $\widehat{\alpha}\cdot\widehat{\beta}=\widehat{\beta}\cdot\widehat{\alpha}$

(vii) $\widehat{\alpha}\cdot(\widehat{\beta}+\widehat{\gamma})=\widehat{\alpha}\cdot\widehat{\beta}+\widehat{\alpha}\cdot\widehat{\gamma},$

(viii) $\widehat{\alpha}\cdot\widehat{1}=\widehat{\alpha}.$

3. Κάθε μονοσύνολο $A=\{\alpha\}$ μαζί μέ τίς ἀκόλουθες πράξεις $\alpha+\alpha=\alpha$ καί $\alpha.\alpha=\alpha$ εἶναι ἕνας ἀντιμεταθετικός δακτύλιος μέ μοναδιαῖο στοιχεῖο, πού ὀνομάζεται **μηδενικός δακτύλιος**.

Παρατηρῆστε ὅτι τά δύο οὐδέτερα στοιχεῖα ὡς πρός τίς πράξεις $+$ καί $\cdot$, δηλ. τά 0 καί 1, ταυτίζονται μέ τό α. Ἔτσι μποροῦμε νά γράψουμε $A = \{0\}$, πού δικαιολογεῖ τήν παραπάνω ὀνομασία.

3.2. Βασικές ἰδιότητες σέ ἕνα δακτύλιο

Οἱ βασικές ἰδιότητες σέ ἕνα δακτύλιο εἶναι ἀνάλογες μέ τίς ἰδιότητες ἐκεῖνες στό **Z**, πού δέν ἀναφέρονται στό ἀντίστροφο ἑνός στοιχείου καί τήν ἀντιμεταθετική ἰδιότητα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ. Ἐδῶ θά ἀναφέρουμε μόνο δύο ἰδιότητες τῶν δακτυλίων.

Ἰδιότητα 1. Ἄν $(A, +, \cdot)$ εἶναι ἕνας δακτύλιος, τότε γιά κάθε $\alpha \in A$ ἰσχύει

$$\boxed{\alpha \cdot 0 = 0 \cdot \alpha = 0}$$

Ἀπόδειξη. Ἄν $\beta \in A$, τότε

$$\beta + 0 = \beta,$$

ὁπότε

$$\alpha \cdot (\beta + 0) = \alpha . \beta .$$

Ἄν ἐφαρμόσουμε τήν ἐπιμεριστική ἰδιότητα, ἔχουμε

$$\alpha \cdot \beta + \alpha \cdot 0 = \alpha . \beta ,$$

δηλαδή τό $\alpha \cdot 0$ εἶναι τό οὐδέτερο στοιχεῖο ὡς πρός τήν πρόσθεση καί ἑπομένως

$$\alpha \cdot 0 = 0.$$

Μέ ἀνάλογο τρόπο ἀποδεικνύεται ὅτι $0 \cdot \alpha = 0$.

Πόρισμα. Ἄν σέ ἕνα δακτύλιο μέ μοναδιαῖο στοιχεῖο τά δύο οὐδέτερα στοιχεῖα ταυτίζονται, δηλαδή $0 \equiv 1$, τότε ὁ δακτύλιος εἶναι ἕνας μηδενικός δακτύλιος.

Ἰδιότητα 2. Ἄν $(A, +, \cdot)$ εἶναι ἕνας δακτύλιος, τότε γιά κάθε $\alpha, \beta \in A$ ἰσχύει

$$\boxed{\alpha \cdot (-\beta) = -(\alpha \cdot \beta)}$$

Ἀπόδειξη. Γιά ὁποιοδήποτε $\beta \in A$ ἔχουμε τήν ἰσότητα

$$(-\beta) + \beta = 0.$$

Ἄν τώρα πολλαπλασιάσουμε ἀπό ἀριστερά καί τά δύο μέλη της μέ $\alpha \in A$ καί ἐφαρμόσουμε τήν ἐπιμεριστική ἰδιότητα, παίρνουμε

$$\alpha \cdot (-\beta) + \alpha \cdot \beta = \alpha \cdot 0.$$

Τό δεύτερο μέλος ὅμως εἶναι τό 0. Ἑπομένως

$$\alpha \cdot (-\beta) + \alpha \cdot \beta = 0,$$

πού σημαίνει ὅτι τό $\alpha \cdot (-\beta)$ εἶναι τό ἀντίθετο τοῦ $\alpha \cdot \beta$, δηλαδή

$$\alpha \cdot (-\beta) = -(\alpha \cdot \beta).$$

3.3. Ἡ ἔννοια τῆς ἀκέραιας περιοχῆς

Ἡ δομή $(\mathbf{Z}_4, +, \cdot)$ εἶναι ἕνας ἀντιμεταθετικός δακτύλιος μέ μοναδιαῖο στοιχεῖο. Γιά ν' ἀποδείξουμε αὐτό, κατασκευάζουμε τούς πίνακες τοῦ σχήματος 6. (Τά οὐδέτερα στοιχεῖα ὡς πρός τίς δύο πράξεις εἶναι τά $\widehat{0}$ καί $\widehat{1}$).

Πράξεις στό $\mathbf{Z}_4$									
Πρόσθεση					Πολλαπλασιασμός				
$+$	$\widehat{0}$	$\widehat{1}$	$\widehat{2}$	$\widehat{3}$		$\widehat{0}$	$\widehat{1}$	$\widehat{2}$	$\widehat{3}$
$\widehat{0}$	$\widehat{0}$	$\widehat{1}$	$\widehat{2}$	$\widehat{3}$	$\widehat{0}$	$\widehat{0}$	$\widehat{0}$	$\widehat{0}$	$\widehat{0}$
$\widehat{1}$	$\widehat{1}$	$\widehat{2}$	$\widehat{3}$	$\widehat{0}$	$\widehat{1}$	$\widehat{0}$	$\widehat{1}$	$\widehat{2}$	$\widehat{3}$
$\widehat{2}$	$\widehat{2}$	$\widehat{3}$	$\widehat{0}$	$\widehat{1}$	$\widehat{2}$	$\widehat{0}$	$\widehat{2}$	$\widehat{0}$	$\widehat{2}$
$\widehat{3}$	$\widehat{3}$	$\widehat{0}$	$\widehat{1}$	$\widehat{2}$	$\widehat{3}$	$\widehat{0}$	$\widehat{3}$	$\widehat{2}$	$\widehat{1}$

Σχ. 6

Στό δακτύλιο αὐτό παρατηροῦμε ὅτι

$$\widehat{2} \cdot \widehat{2} = \widehat{0}.$$

Ἄρα, ἄν σέ ἕνα δακτύλιο $(A, +, \cdot)$ ἰσχύει

$$\alpha \cdot \beta = 0,$$

αὐτό δέ σημαίνει ὅτι θά εἶναι $\alpha = 0$ εἴτε $\beta = 0$.

Ἔτσι, μέ τήν παρατήρηση αὐτή ὁδηγούμαστε στή θεώρηση μιᾶς νέας ἀλγεβρικῆς δομῆς, πού τήν ὀνομάζουμε *ἀκέραια περιοχή*.

Ὁρισμός. Ἄν $(A, +, \cdot)$ εἶναι ἕνας μή μηδενικός ἀντιμεταθετικός δακτύλιος μέ μοναδιαῖο στοιχεῖο τέτοιος, ὥστε

$$\alpha \cdot \beta = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \text{ εἴτε } \beta = 0 \text{ [1]} \qquad (\alpha, \beta \in A),$$

τότε ἡ δομή $(A, +, \cdot)$ ὀνομάζεται **ἀκέραια περιοχή**.

Παραδείγματα:

1. Ἡ δομή $(\mathbf{Z}, +, \cdot)$ εἶναι μιά ἀκέραια περιοχή, γιατί εἶναι ἕνας μή μηδενικός ἀντιμεταθετικός δακτύλιος μέ μοναδιαῖο στοιχεῖο καί μάλιστα ἄν $\alpha \cdot \beta = 0$, τότε $\alpha = 0$ εἴτε $\beta = 0$.
2. Ἡ δομή $(\mathbf{Z}_5, +, \cdot)$ εἶναι μιά ἀκέραια περιοχή. Στό παράδειγμα 2 τῆς 3.1 εἴδαμε ὅτι ἡ δομή αὐτή εἶναι ἀντιμεταθετικός δακτύλιος μέ μοναδιαῖο στοιχεῖο. Ἀπό τόν πίνακα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ σχήματος 5 διαπιστῶστε ὅτι

$$\widehat{\alpha} \cdot \widehat{\beta} = \widehat{0} \Leftrightarrow \widehat{\alpha} = \widehat{0} \text{ εἴτε } \widehat{\beta} = \widehat{0}$$

1. Λόγω τῆς ἰδιότητας 1 τῆς 3.2, ἡ ἀντίστροφη συνεπαγωγή ἰσχύει πάντα σέ ἕνα δακτύλιο.

3.4. Ἀσκήσεις

1. Δεῖξτε ὅτι ἡ δομή (Α, $+$, $\cdot$), ὅπου $A = \{1,2\}$ καί $+$, $\cdot$ οἱ πράξεις πού ὁρίζονται στούς πίνακες τοῦ σχήματος 7,

+	1	2
1	1	2
2	2	1

.	1	2
1	1	1
2	1	2

Σχ. 7

εἶναι ἀντιμεταθετικός δακτύλιος. Ἔχει μοναδιαῖο στοιχεῖο;

2. Ποιές ἀπό τίς παρακάτω δομές

(i) (Α, $+$, $\cdot$), ὅπου $A = \{2\nu | \nu \in \mathbf{Z}\}$,

(ii) (Α, $+$, $\cdot$), ὅπου $A = \{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$ καί πράξεις πού ὁρίζονται στούς πίνακες τοῦ σχήματος 8,

+	α	β	γ	δ
α	α	β	γ	δ
β	β	α	δ	γ
γ	γ	δ	α	β
δ	δ	γ	β	α

.	α	β	γ	δ
α	α	α	α	α
β	α	β	α	β
γ	α	γ	α	δ
δ	α	δ	α	δ

Σχ. 8

(iii) $(\mathscr{P}(A), \dotplus, \cap)$,

(iv) $(\mathscr{P}(A), \dotplus, \cup)$

εἶναι δακτύλιοι; Στή συνέχεια νά βρεῖτε τούς ἀντιμεταθετικούς δακτυλίους.

3. Δεῖξτε ὅτι ἡ δομή $(\mathbf{Z}, \oplus, \odot)$, ὅπου οἱ πράξεις $\oplus$ καί $\odot$ ὁρίζονται ὡς ἑξῆς:

$$\alpha \oplus \beta = \alpha+\beta+1 \quad \text{καί} \quad \alpha \odot \beta = \alpha+\beta+\alpha\beta,$$

εἶναι ἀντιμεταθετικός δακτύλιος. Ἔχει μοναδιαῖο στοιχεῖο ὁ δακτύλιος αὐτός;

4. Ἡ δομή (Α, $+$, $\cdot$), ὅπου $A = \{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$ καί πράξεις $+$, $\cdot$ πού ὁρίζονται στούς πίνακες τοῦ σχήματος 9,

+	α	β	γ	δ
α	α	β	γ	δ
β	β	α	δ	γ
γ	γ	δ	α	β
δ	δ	γ	β	α

.	α	β	γ	δ
α	α	α	α	α
β	α	β		
γ	α			α
δ	α	β	γ	

Σχ. 9

εἶναι ἕνας δακτύλιος. Νά συμπληρώσετε τόν πίνακα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ. Εἶναι αὐτός ὁ δακτύλιος ἀντιμεταθετικός; Ἔχει μοναδιαῖο στοιχεῖο;

5. Ἄν $(A, +, \cdot)$ εἶναι ἕνας δακτύλιος, δεῖξτε ὅτι γιά κάθε $\alpha,\beta \in A$ ἰσχύει

$$(-\alpha)\,(-\beta) = \alpha\beta.$$

6. Ποιές ἀπό τίς παρακάτω δομές

(i) $(B, +, \cdot)$ μέ $B = \{2\nu \mid \nu \in \mathbf{Z}\}$,

(ii) $(E, +, \cdot)$ μέ $E = \{\mu + \nu\sqrt{5} \mid \mu, \nu \in \mathbf{Z}\}$,

(iii) $(H, +, \cdot)$ μέ $H = \{p + q\sqrt{5} \mid p, q \in \mathbf{Q}\}$.

εἶναι ἀκέραιες περιοχές;

4. ΣΩΜΑΤΑ

4.1. Ἡ ἔννοια τοῦ σώματος

Ἄς ἐξετάσουμε τή δομή $(\mathbf{Q}, +, \cdot)$. Ἡ δομή αὐτή εἶναι ἕνας ἀντιμεταθετικός δακτύλιος μέ μοναδιαῖο στοιχεῖο, ἀφοῦ

α) οἱ πράξεις $+$ καί $\cdot$ εἶναι ἀντιμεταθετικές καί προσεταιριστικές,

β) ἡ πράξη $\cdot$ εἶναι ἐπιμεριστική ὡς πρός τήν πράξη $+$,

γ) τά 0 καί 1 εἶναι οὐδέτερα στοιχεῖα ὡς πρός τίς πράξεις $+$, καί $\cdot$ ἀντιστοίχως καί

δ) κάθε στοιχεῖο τοῦ $\mathbf{Q}$ ἔχει ἀντίθετο στοιχεῖο.

Εἶναι γνωστό ὅμως ὅτι κάθε στοιχεῖο α τοῦ $\mathbf{Q}^* = \mathbf{Q} - \{0\}$ ἔχει ἀντίστροφο στοιχεῖο τό α^{-1}, δηλαδή

$$\alpha \cdot \alpha^{-1} = 1,$$

ἰδιότητα πού δέν ἀπαιτεῖται στόν ὁρισμό τοῦ δακτυλίου. Γιά τό λόγο αὐτό ἡ δομή $(\mathbf{Q}, +, \cdot)$ ὀνομάζεται *σῶμα*. Ἔτσι ἔχουμε τόν ἀκόλουθο ὁρισμό.

Ὁρισμός. Μιά δομή $(A, +, \cdot)$ ὀνομάζεται **σῶμα,** ἄν καί μόνο ἄν ἰσχύουν οἱ ἀκόλουθες ἰδιότητες:

(Σ_1) Ἡ δομή $(A, +, \cdot)$ εἶναι ἕνας μή μηδενικός ἀντιμεταθετικός δακτύλιος.

(Σ_2) Ἡ δομή $(A^*, \cdot)$ εἶναι μία ὁμάδα, ὅπου $A^* = A - \{0\}$.

Ἔτσι σέ ἕνα σῶμα $(A, +, \cdot)$ γιά κάθε $\alpha,\beta,\gamma \in A$ ἰσχύουν οἱ ἀκόλουθες ἰδιότητες:

1. $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$
2. $\alpha+0=0+\alpha=\alpha$
3. $\alpha+(-\alpha)=(-\alpha)+\alpha=0$
4. $\alpha+\beta=\beta+\alpha$ (Σ_1)
5. $\alpha\cdot\beta=\beta\cdot\alpha$
6. $\alpha\cdot(\beta+\gamma)=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma$
7. $(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma=\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)$
8. $\alpha\cdot 1=\alpha$ (Σ_2)
9. $\alpha\cdot\alpha^{-1}=1$, γιά $\alpha\neq 0$

Σημείωση. Τό ὅτι ἡ ἰδιότητα 8 ἰσχύει καί γιά $\alpha=0$, εἶναι συνέπεια τῆς ἰδιότητας 1 τῆς 3.2.

Παραδείγματα:

1. Ἡ δομή $(\mathbf{R}, +, \cdot)$ εἶναι σῶμα, γιατί στό **R** ἰσχύουν, ὅπως γνωρίζουμε, οἱ παραπάνω ἰδιότητες 1.–9. Ὁμοίως ἡ δομή $(\mathbf{C}, +, \cdot)$ εἶναι σῶμα.
2. Τό σύνολο $A=\{1,1\}$ μαζί μέ τίς πράξεις $+$ καί $\cdot$, πού ὁρίζονται στούς πίνακες τοῦ σχήματος 10, εἶναι ἐπίσης ἕνα παράδειγμα σώματος.

+	0	1
0	0	1
1	1	0

.	0	1
0	0	0
1	0	1

Σχ. 10

4.2. Βασικές ἰδιότητες σέ ἕνα σῶμα

Εἶναι γνωστό ὅτι στό σῶμα $(\mathbf{R}, +, \cdot)$ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν ἰσχύει

$$\alpha\cdot\beta=0 \Rightarrow \alpha=0 \text{ εἴτε } \beta=0.$$

Αὐτή εἶναι μιά ἰδιότητα, πού τήν ἔχουν ὅλα τά σώματα.

Ἰδιότητα 1. Ἄν $(A, +, \cdot)$ εἶναι σῶμα, τότε γιά $\alpha,\beta\in A$ ἰσχύει ἡ συνεπαγωγή

$$\boxed{\alpha\cdot\beta=0 \Rightarrow \alpha=0 \text{ εἴτε } \beta=0}$$

Ἀπόδειξη. Ἄν $\alpha=0$, τότε λόγω τῆς ἰδιότητας 1 τῆς 3·2 ἡ συνεπαγωγή ἰσχύει.

Ἔστω $\alpha\cdot\beta=0$ καί $\alpha\neq 0$. Τότε ὑπάρχει τό ἀντίστροφο α^{-1} τοῦ $\alpha\neq 0$, ὁπότε πολλαπλασιάζοντας καί τά δύο μέλη τῆς ἰσότητας $\alpha\cdot\beta=0$ μέ α^{-1} παίρνουμε

$$\alpha^{-1}\cdot(\alpha\cdot\beta)=\alpha^{-1}\cdot 0.$$

ΤΟ ΣΩΜΑ ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΑΚΕΡΑΙΑ ΠΕΡΙΟ

Λόγω τῆς ἰδιότητας 1 τῆς 3.2 τό δεύτερο μέλος εἶναι τό στοιχεῖο 0. Ἔτσι ἔχουμε

$$(\alpha^{-1} \cdot \alpha) \cdot \beta = 0$$

καί ἐπομένως

$$1 \cdot \beta = 0,$$

δηλαδή $\beta = 0$.

Πόρισμα. Κάθε σῶμα εἶναι ἀκέραια περιοχή.

Εἶναι γνωστό ἀκόμα ὅτι στό σῶμα τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν ἡ ἐξίσωση

$$\alpha x = \beta$$

μέ $\alpha \neq 0$ ἔχει μοναδική λύση στό $\mathbf{R}$. Αὐτό ἀποτελεῖ γενική ἰδιότητα τῶν σωμάτων.

Ἰδιότητα 2. Ἄν $(A, +, \cdot)$ εἶναι σῶμα καί $\alpha, \beta \in A$ μέ $\alpha \neq 0$, τότε ἡ ἐξίσωση

$$\alpha \cdot x = \beta$$

ἔχει μοναδική λύση στό A.

Ἡ ἀπόδειξη εἶναι ἴδια μέ ἐκείνη τῆς ἰδιότητας 4 τῆς 2·3. Ἡ μοναδική λύση τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς εἶναι τό στοιχεῖο $\alpha^{-1} \cdot \beta \; (= \beta \cdot \alpha^{-1})$, πού τό συμβολίζουμε μέ $\frac{\beta}{\alpha}$, δηλαδή $\frac{\beta}{\alpha} = \beta \cdot \alpha^{-1}$.

4.3. Ἀσκήσεις

1. Βρεῖτε ποιές ἀπό τίς παρακάτω δομές εἶναι σώματα:
   (i) $(\mathbf{Z}_4, +, \cdot)$,
   (ii) $(\mathbf{Z}_5, +, \cdot)$,
   (iii) $(\mathbf{Z}_7, +, \cdot)$,
   (iv) $(A, +, \cdot)$, ὅπου $A = \{x + y\sqrt{5} \mid x, y \in \mathbf{Q}\}$ καί $+, \cdot$ οἱ γνωστές πράξεις στό $\mathbf{R}$.
2. Ἔστω $A = \{\alpha = (x,y) \mid x,y \in \mathbf{Q}\}$.
   (i) Ἄν $\alpha + \alpha' = (x+x', y+y')$ καί $\alpha \,.\, \alpha' = (xx' + 2yy', xy' + x'y)$, εἶναι σῶμα ἡ δομή $(A, +, \cdot)$;
   (ii) Ἄν $\alpha + \alpha' = (x+x', y+y')$ καί $\alpha \cdot \alpha' = (xx' - yy', xy' + x'y)$, εἶναι σῶμα ἡ δομή $(A, +, \cdot)$;
3. Ἔστω $(A, +, \cdot)$ ἕνα σῶμα. Δεῖξτε ὅτι
   (i) ἄν $\alpha, \beta \in A^*$, τότε $(\alpha \cdot \beta)^{-1} = \alpha^{-1} \cdot \beta^{-1}$,
   (ii) ἄν $\alpha, \gamma \in A$ καί $\beta, \delta \in A^*$, τότε
   $$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha \cdot \delta + \beta \cdot \gamma}{\beta \cdot \delta}.$$
4. Νά ἐπιλυθεῖ τό σύστημα
   $$\widehat{2} \cdot x + \widehat{3} \cdot y = \widehat{2}$$
   $$\widehat{1} \cdot x + \widehat{2} \cdot y = \widehat{4}$$
   στό σῶμα $(\mathbf{Z}_5, +, \cdot)$.

5. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ

5.1. Ἡ ἔννοια τοῦ διανυσματικοῦ χώρου

Ἄς συμβολίσουμε μέ Δ τό σύνολο τῶν διανυσμάτων ἑνός ἐπιπέδου. Εἶναι γνωστό ὅτι ἡ πρόσθεση στό Δ ἔχει τίς ἀκόλουθες ἰδιότητες:

1. Γιά τρία ὁποιαδήποτε διανύσματα $\vec{x}, \vec{y}$ καί $\vec{z}$ τοῦ Δ ἰσχύει

$$(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}).$$

2. Γιά κάθε διάνυσμα $\vec{x}$ τοῦ Δ ἰσχύει

$$\vec{x} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{x} = \vec{x}.$$

3. Γιά κάθε διάνυσμα $\vec{x}$ τοῦ Δ ἰσχύει

$$\vec{x} + (-\vec{x}) = (-\vec{x}) + \vec{x} = \vec{0}.$$

4. Γιά δύο ὁποιαδήποτε διανύσματα $\vec{x}$ καί $\vec{y}$ τοῦ Δ ἰσχύει

$$\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}.$$

Λόγω τῶν παραπάνω ἰδιοτήτων ἡ δομή $(\Delta, +)$ εἶναι μιά ἀντιμεταθετική ὁμάδα.

Ἐξάλλου ὁ πολλαπλασιασμός πραγματικῶν ἀριθμῶν μέ διανύσματα τοῦ Δ ἔχει, ὡς γνωστό, τίς ἀκόλουθες ἰδιότητες:

α. Γιά δύο ὁποιαδήποτε διανύσματα $\vec{x}$ καί $\vec{y}$ τοῦ Δ καί γιά κάθε πραγματικό ἀριθμό λ ἰσχύει

$$\lambda . (\vec{x} + \vec{y}) = \lambda \cdot \vec{x} + \lambda \cdot \vec{y}$$

β. Γιά κάθε $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ καί γιά κάθε διάνυσμα $\vec{x}$ τοῦ Δ ἰσχύουν

$$(\lambda + \mu) \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x} + \mu \cdot \vec{x},$$

$$\lambda \cdot (\mu \cdot \vec{x}) = (\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{x}$$

γ. Γιά κάθε διάνυσμα $\vec{x}$ τοῦ Δ ἰσχύει

$$1 \cdot \vec{x} = \vec{x},$$

ὅπου 1 εἶναι τό μοναδιαῖο στοιχεῖο τοῦ σώματος τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

Ἀπό τίς παραπάνω ἰδιότητες ὁδηγούμαστε στή θεώρηση μιᾶς νέας ἀλγεβρικῆς δομῆς, πού ὀνομάζεται *διανυσματικός* ἤ *γραμμικός χῶρος*. Ἔτσι ἔχουμε τόν παρακάτω ὁρισμό.

Ὁρισμός. Ἕνα μή κενό σύνολο V θά ὀνομάζεται **διανυσματικός ἤ γραμμικός χῶρος πάνω στό σῶμα K**[1], ἄν καί μόνο ἄν ἰσχύουν οἱ ἀκόλουθες ἰδιότητες:

(Γ_1) Στό V εἶναι ὁρισμένη μιά ἐσωτερική πράξη $+$ τέτοια, ὥστε ἡ δομή $(V, +)$ νά εἶναι ἀντιμεταθετική ὁμάδα.

(Γ_2) Στό V εἶναι ὁρισμένη μιά ἐξωτερική πράξη $\cdot$ μέ σύνολο τελεστῶν τό K τέτοια, ὥστε γιά κάθε $x, y \in V$ καί $\alpha, \beta \in K$ νά ἰσχύουν οἱ ἀκόλουθες ἰδιότητες:

(i) $\alpha \cdot (x+y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$ (πρώτη ἐπιμεριστική ἰδιότητα),

(ii) $(\alpha+\beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$ (δεύτερη ἐπιμεριστική ἰδιότητα),

(iii) $(\alpha \cdot \beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x)$ (προσεταιριστική ἰδιότητα),

(iv) $1 \cdot x = x$,

ὅπου 1 εἶναι τό μοναδιαῖο στοιχεῖο τοῦ σώματος K.

Ἡ πρόσθεση στό V θά ὀνομάζεται **διανυσματική πρόσθεση** καί ἡ ἐξωτερική πράξη $\cdot$ στό V (μέ σύνολο τελεστῶν τό K) **βαθμωτός πολλαπλασιασμός** στό V.

Εἰδικότερα, ἕνας διανυσματικός χῶρος πάνω στό σῶμα $\mathbf{R}$ θά ὀνομάζεται **πραγματικός διανυσματικός** (ἤ **γραμμικός**) **χῶρος.**

Παρατήρηση. Στόν παραπάνω ὁρισμό βλέπουμε ὅτι τό ἴδιο σύμβολο $+$ χρησιμοποιεῖται τόσο γιά τήν πρόσθεση στό K, ὅπως π.χ. στό πρῶτο μέλος τῆς (ii), ὅσο καί γιά τή διανυσματική πρόσθεση, ὅπως π.χ. στό δεύτερο μέλος τῆς (ii). Γι' αὐτό δέν πρέπει νά γίνεται σύγχυση ἀνάμεσα στίς δύο αὐτές πράξεις. Ἀνάλογη παρατήρηση ἰσχύει γιά τό σύμβολο $\cdot$.

Σημείωση. Τό οὐδέτερο στοιχεῖο ὡς πρός τή διανυσματική πρόσθεση θά συμβολίζεται μέ $\mathbf{0}$ (μηδενικό στοιχεῖο τοῦ διανυσματικοῦ χώρου), ἐνῶ τό οὐδέτερο στοιχεῖο ὡς πρός τήν πρόσθεση στό K μέ 0.

Παραδείγματα:

1. Στό παράδειγμα 5 τῆς 1.1 ἔχουν ὁριστεῖ οἱ ἀκόλουθες πράξεις στό σύνολο $V = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$:

(i) μιά ἐσωτερική πράξη $+$:

$$(x_1,y_1) + (x_2,y_2) = (x_1+x_2,\ y_1+y_2)$$

καί

(ii) μιά ἐξωτερική πράξη $\cdot$ μέ σύνολο τελεστῶν τό $\mathbf{R}$ ὡς ἑξῆς:

$$\lambda \cdot (x,y) = (\lambda \cdot x, \lambda \cdot y) \qquad (\lambda \in \mathbf{R})$$

Μέ τίς παραπάνω πράξεις τό σύνολο V εἶναι ἕνας πραγματικός διανυσματικός χῶρος. Πράγματι,

α) ἡ δομή $(V, +)$ εἶναι ἀντιμεταθετική ὁμάδα μέ οὐδέτερο στοιχεῖο ὡς πρός τήν πράξη $+$ τό $(0,0)$ καί ἀντίθετο στοιχεῖο τοῦ (x,y) τό $(-x, -y)$,

β) γιά δύο ὁποιαδήποτε στοιχεῖα (x_1,y_1), (x_2,y_2) τοῦ V καί α, $\beta \in \mathbf{R}$ ἰσχύουν

(i) $\alpha \cdot [(x_1,y_1)+(x_2,y_2)] = \alpha \cdot (x_1+x_2,\ y_1+y_2) = (\alpha \cdot x_1+\alpha \cdot x_2,\ \alpha \cdot y_1+\alpha \cdot y_2) =$
$= (\alpha \cdot x_1,\ \alpha \cdot y_1) + (\alpha \cdot x_2,\ \alpha \cdot y_2) = \alpha \cdot (x_1,y_1) + \alpha \cdot (x_2,y_2)$,

1. Γιά λόγους συντομίας θά γράφουμε «σῶμα K» ἀντί «σῶμα (K, +, .)»

(ii) $(\alpha+\beta)\cdot(x_1, y_1) = (\alpha\cdot x_1+\beta\cdot x_1,\ \alpha\cdot y_1 + \beta\cdot y_1) = (\alpha\cdot x_1,\ \alpha\cdot y_1) +$
$+\ (\beta\cdot x_1, \beta\cdot y_1) = \alpha\cdot(x_1,y_1) + \beta\cdot(x_1,y_1)$,

(iii) $(\alpha\cdot\beta)\cdot(x_1,y_1) = (\alpha\cdot\beta\cdot x_1,\ \alpha\cdot\beta\cdot y_1) = \alpha\cdot(\beta\cdot x_1, \beta\cdot y_1) =$
$= \alpha\cdot[\beta\cdot(x_1, y_1)]$,

(iv) $1\cdot(x_1,y_1) = (1\cdot x_1,\ 1\cdot y_1) = (x_1,y_1)$.

Γενικά, τό σύνολο

$$\mathbf{R}^{\nu} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_\nu) \mid x_1, x_2, \ldots, x_\nu \in \mathbf{R}\}$$

μέ ἰσότητα

$$(x_1, x_2,\ldots,x_\nu) = (y_1,y_2,\ldots,y_\nu) \Leftrightarrow x_k = y_k \quad \text{γιά κάθε } \kappa \in \{1,2,\ldots,\nu\}$$

καί μέ

α) ἐσωτερική πράξη $+$:

$$(x_1, x_2,\ldots,x_\nu) + (y_1,y_2,\ldots,y_\nu) = (x_1+y_1,\ x_2+y_2,\ldots,x_\nu+y_\nu),$$

β) ἐξωτερική πράξη (μέ σύνολο τελεστῶν τό $\mathbf{R}$):

$$\lambda\cdot(x_1,x_2,\ldots,x_\nu) = (\lambda x_1,\lambda x_2,\ldots,\lambda x_\nu) \qquad (\lambda \in \mathbf{R})$$

εἶναι ἕνας πραγματικός διανυσματικός χῶρος μέ μηδενικό στοιχεῖο τό $(0,0,\ldots,0)$ καί ἀντίθετο τοῦ $(x_1,x_2,\ldots,x_\nu)$ τό $(-x_1,-x_2,\ldots,-x_\nu)$.

2. Τό σύνολο V ὅλων τῶν τριωνύμων

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma \qquad (\alpha,\beta,\gamma \in \mathbf{R})$$

μέ ἰσότητα

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma \equiv \alpha' x^2+\beta' x+\gamma' \Leftrightarrow \alpha = \alpha' \text{ καί } \beta=\beta' \text{ καί } \gamma=\gamma'$$

καί μέ

α) ἐσωτερική πράξη $+$:

$$(\alpha x^2+\beta x+\gamma) + (\alpha' x^2+\beta' x^2+\gamma') \equiv (\alpha+\alpha')x^2 + (\beta+\beta')x + (\gamma+\gamma')$$

β) ἐξωτερική πράξη (μέ σύνολο τελεστῶν τό $\mathbf{R}$):

$$\lambda\cdot(\alpha x^2+\beta x+\gamma) \equiv (\lambda\alpha)x^2 + (\lambda\beta)x+(\lambda\gamma)$$

εἶναι ἕνας πραγματικός γραμμικός χῶρος μέ μηδενικό στοιχεῖο τό $0x^2+0x+0$ καί ἀντίθετο τοῦ $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ τό $(-\alpha)x^2+(-\beta)x + (-\gamma)$.

3. Τό σύνολο $\mathbf{C}$ τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν μέ τή γνωστή πρόσθεση καί τήν ἐξωτερική πράξη, πού ὁρίζεται ἀπό τήν ἰσότητα

$$\lambda\cdot(\alpha+\beta i) = (\lambda\alpha) + (\lambda\beta)i \qquad (\lambda \in \mathbf{R}),$$

εἶναι ἕνας πραγματικός γραμμικός χῶρος, γιατί ἡ δομή $(\mathbf{C}, +)$ εἶναι ἀντιμεταθετική ὁμάδα καί εὔκολα μπορεῖ νά ἀποδειχτεῖ ὅτι ἱκανοποιοῦνται οἱ ἰδιότητες (i) — (iv) τοῦ ὁρισμοῦ.

5.2. Βασικές ἰδιότητες σέ ἕνα διανυσματικό χῶρο

Ἔστω V ἕνας διανυσματικός χῶρος πάνω στό σῶμα K. Μέ τή βοήθεια τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ διανυσματικοῦ χώρου μποροῦμε νά ἀποδείξουμε τίς παρακάτω ἰδιότητες .

Ἰδιότητα 1. Γιά κάθε $\alpha \in K$ ἰσχύει

$$\boxed{\alpha\cdot\mathbf{0} = \mathbf{0}}$$

'Απόδειξη. Γιά ἕνα στοιχεῖο x τοῦ V ἰσχύει

$$x + \mathbf{0} = x,$$

ὁπότε

$$\alpha \cdot (x + \mathbf{0}) = \alpha \cdot x$$

ἤ λόγω τῆς πρώτης ἐπιμεριστικῆς ἰδιότητας

$$\alpha \cdot x + \alpha \cdot \mathbf{0} = \alpha \cdot x,$$

πού σημαίνει ὅτι τό $\alpha \cdot \mathbf{0}$ εἶναι τό μηδενικό στοιχεῖο $\mathbf{0}$ τοῦ διανυσματικοῦ χώρου, δηλαδή

$$\alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

'Ιδιότητα 2. Γιά κάθε $x \in V$ ἰσχύει

$$\boxed{0 \cdot x = \mathbf{0}}$$

'Απόδειξη. Γιά ἕνα στοιχεῖο α τοῦ K ἰσχύει

$$\alpha + 0 = \alpha,$$

ὁπότε

$$(\alpha + 0) \cdot x = \alpha \cdot x$$

ἤ λόγω τῆς δεύτερης ἐπιμεριστικῆς ἰδιότητας

$$\alpha \cdot x + 0 \cdot x = \alpha \cdot x,$$

πού σημαίνει ὅτι τό $0 \cdot x$ εἶναι τό μηδενικό στοιχεῖο $\mathbf{0}$ τοῦ διανυσματικοῦ χώρου, δηλαδή

$$0 \cdot x = \mathbf{0}.$$

'Ιδιότητα 3. Γιά $\alpha \in K$ καί $x \in V$ ἰσχύει ἡ συνεπαγωγή

$$\boxed{\alpha \cdot x = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha = 0 \text{ εἴτε } x = \mathbf{0}}$$

'Απόδειξη. Ἄν $\alpha = 0$, ἡ συνεπαγωγή προφανῶς ἰσχύει. Ἔστω $\alpha \cdot x = \mathbf{0}$ καί $\alpha \neq 0$. Τότε, ἐπειδή τό K εἶναι σῶμα, ὑπάρχει τό ἀντίστροφο α^{-1} τοῦ $\alpha \neq 0$. Ἔτσι ἔχουμε

$$x = 1 \cdot x = (\alpha^{-1} \cdot \alpha) \cdot x = \alpha^{-1} \cdot (\alpha \cdot x) = \alpha^{-1} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Πόρισμα. Γιά $\alpha \in K$ καί $x \in V$ ἰσχύει ἡ συνεπαγωγή

$$\boxed{\alpha \neq 0 \quad \text{καί} \quad x \neq \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \alpha \cdot x \neq \mathbf{0}}$$

'Ιδιότητα 4. Γιά κάθε $\alpha \in K$ καί $x \in V$ ἰσχύει

$$\boxed{(-\alpha) \cdot x = -(\alpha \cdot x)}$$

'Απόδειξη. Γιά κάθε $\alpha \in K$ ἰσχύει

$$\alpha + (-\alpha) = 0,$$

ὁπότε πολλαπλασιάζοντας καί τά δύο μέλη μέ ἕνα στοιχεῖο x τοῦ $\mathbf{V}$ ἔχουμε

$$(\alpha+(-\alpha))\cdot x = 0\cdot x$$

ἤ

$$\alpha\cdot x + (-\alpha)\cdot x = \mathbf{0},$$

πού σημαίνει ὅτι τό $(-\alpha)\cdot x$ εἶναι τό ἀντίθετο τοῦ $\alpha\cdot x$ ὡς πρός τή διανυσματική πρόσθεση, δηλαδή

$$(-\alpha)\cdot x = -(\alpha\cdot x).$$

Πόρισμα. Γιά κάθε $x \in V$ ἰσχύει

$$\boxed{(-1)x = -x}$$

Παρατηρῆστε ὅτι τίς παραπάνω ἰδιότητες τίς γνωρίσαμε καί στό διανυσματικό λογισμό.

5.3. Ἡ ἔννοια τοῦ διανυσματικοῦ (γραμμικοῦ) ὑπόχωρου

Στό παράδειγμα 1 τῆς 5.1 εἴδαμε ὅτι τό $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ μέ κατάλληλες πράξεις εἶναι ἕνας πραγματικός διανυσματικός χῶρος. Ἄς πάρουμε τώρα τό ἀκόλουθο ὑποσύνολο τοῦ $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$:

$$A = \{(\alpha,0) \mid \alpha \in \mathbf{R}\}.$$

Παρατηροῦμε ὅτι

α) ἡ διανυσματική πρόσθεση δύο στοιχείων τοῦ A δίνει ἀποτέλεσμα ἕνα στοιχεῖο τοῦ A· πράγματι,

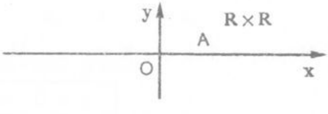
$$(\alpha,0) + (\beta, 0) = (\alpha+\beta,\ 0+0) = (\alpha+\beta,\ 0) \in A,$$

β) ὁ πολλαπλασιασμός ἑνός πραγματικοῦ ἀριθμοῦ μέ ἕνα στοιχεῖο τοῦ A δίνει ἀποτέλεσμα πάλι στοιχεῖο τοῦ A· πράγματι,

$$\lambda\cdot(\alpha,0) = (\lambda\cdot\alpha,\ \lambda\cdot 0) = (\lambda\cdot\alpha,\ 0) \in A.$$

Γι᾽ αὐτές τίς δύο ἰδιότητες λέμε ὅτι τό A εἶναι ἕνας διανυσματικός ὑπόχωρος τοῦ $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$.

Ἄν ταυτίσουμε τό $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ μέ ἕνα καρτεσιανό ἐπίπεδο, τότε τό παραπάνω σύνολο A ταυτίζεται μέ τόν ἄξονα τῶν τετμημένων τοῦ καρτεσιανοῦ ἐπιπέδου (Σχ. 11).



Σχ. 11

Δίνουμε τώρα τόν ἀκόλουθο ὁρισμό.

Ὁρισμός. Ἕνα μή κενό ὑποσύνολο A ἑνός διανυσματικοῦ χώρου V πάνω στό σῶμα K ὀνομάζεται **διανυσματικός** (ἤ **γραμμικός**) **ὑπόχωρος** τοῦ V, ἄν καί μόνο ἄν γιά κάθε $x, y \in A$ καί $\alpha \in K$ ἰσχύουν

$$x+y \in A \qquad \text{καί} \qquad \alpha\cdot x \in A.$$

Παρατήρηση. Σύμφωνα μέ τόν παραπάνω ὁρισμό ἕνας διανυσματικός ὑπόχωρος A τοῦ V περιέχει πάντα τό μηδενικό στοιχεῖο **0** τοῦ V, γιατί τό A μαζί μέ ἕνα στοιχεῖο του x θά περιέχει καί τό $0 \cdot x = \mathbf{0}$.

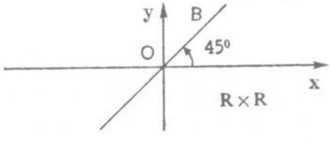
Σημείωση. Μέ τή βοήθεια τοῦ προηγούμενου ὁρισμοῦ ἀποδεικνύεται εὔκολα ὅτι κάθε διανυσματικός ὑπόχωρος τοῦ V εἶναι γραμμικός χῶρος πάνω στό σῶμα K.

Παραδείγματα:

1. Τό σύνολο $B = \{(\alpha,\alpha) \mid \alpha \in \mathbf{R}\}$ εἶναι ἕνας γραμμικός ὑπόχωρος τοῦ διανυσματικοῦ χώρου $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ (Σχ. 12).
2. Ἄν V εἶναι ἕνας διανυσματικός χῶρος πάνω στό σῶμα K, τότε τό σύνολο

$$\Gamma = \{\mathbf{0}\}$$

εἶναι διανυσματικός ὑπόχωρος τοῦ V, ἀφοῦ $\mathbf{0}+\mathbf{0} = \mathbf{0} \in \Gamma$ καί $\alpha.\mathbf{0}=\mathbf{0} \in \Gamma$ γιά ὅλα τά στοιχεῖα α τοῦ K.



Σχ. 12

5.4. Γραμμική ἀνεξαρτησία - Γραμμική ἐξάρτηση

Ἄν V εἶναι ἕνας γραμμικός χῶρος πάνω στό σῶμα K, τότε κάθε παράσταση

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_\nu x_\nu$$

μέ $\lambda_i \in K$ καί $x_i \in V$ $(i \in \{1,2,\ldots,\nu\})$ εἶναι ἕνα στοιχεῖο τοῦ V, πού ὀνομάζεται **γραμμικός συνδυασμός** τῶν $x_1,x_2,\ldots,x_\nu$ καί τά $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\nu$ λέγονται **συντελεστές** του.

Ἄς πάρουμε τώρα τά στοιχεῖα (1,0) καί (0,1) τοῦ γνωστοῦ μας πραγματικοῦ διανυσματικοῦ χώρου $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$. Θά ἐξετάσουμε σέ ποιά περίπτωση ἕνας γραμμικός συνδυασμός αὐτῶν τῶν στοιχείων εἶναι ἴσος μέ τό μηδενικό στοιχεῖο (0,0) τοῦ $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$. Ἄν $\lambda_1, \lambda_2 \in R$, ἔχουμε

$$\lambda_1(1,0)+\lambda_2(0,1) = (0,0) \Leftrightarrow (\lambda_1,0) + (0,\lambda_2)=(0,0) \Leftrightarrow (\lambda_1, \lambda_2) = (0,0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lambda_1 = 0 \quad \text{καί} \quad \lambda_2 = 0.$$

Ἄρα ἕνας γραμμικός συνδυασμός τῶν (1,0) καί (0,1) εἶναι ἴσος μέ τό (0, 0) μόνο στήν περίπτωση: $\lambda_1 = 0$ καί $\lambda_2 = 0$. Γιά τό λόγο αὐτό τά (1,0) καί (0,1) λέμε ὅτι εἶναι *γραμμικῶς ἀνεξάρτητα* στοιχεῖα τοῦ $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$. Ἔτσι ἔχουμε τόν ἀκόλουθο ὁρισμό.

Ὁρισμός. Ἔστω V ἕνας διανυσματικός χῶρος πάνω στό σῶμα K. Τότε τά στοιχεῖα $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ τοῦ V ὀνομάζονται **γραμμικῶς ἀνεξάρτητα**, ἄν καί μόνο ἄν

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_\nu x_\nu = \mathbf{0} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_\nu = 0$$

Ἄν τά $x_1,x_2,\ldots,x_\nu$ δέν εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα στοιχεῖα τοῦ V, τότε αὐτά ὀνομάζονται **γραμμικῶς ἐξαρτημένα**.

Ἔτσι, ἄν τά $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ εἶναι γραμμικῶς ἐξαρτημένα στοιχεῖα τοῦ V, τότε μπορεῖ ἕνας γραμμικός συνδυασμός τους $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_\nu x_\nu$ νά εἶναι ἴσος μέ **0** χωρίς ὅλοι οἱ συντελεστές $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu$ νά εἶναι ἴσοι μέ 0. Ἄς ὑποθέσουμε χάρη εὐκολίας ὅτι $\lambda_1 \neq 0$. Τότε ἀπό τήν ἰσότητα $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_\nu x_\nu = \mathbf{0}$ ἕπεται ὅτι

$$x_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} x_2 - \frac{\lambda_3}{\lambda_1} x_3 - \ldots - \frac{\lambda_\nu}{\lambda_1} x_\nu .$$

Ἑπομένως ἔχουμε ἀποδείξει τήν ἀκόλουθη ἰδιότητα.

Ἰδιότητα. Ἄν τά $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ εἶναι γραμμικῶς ἐξαρτημένα στοιχεῖα ἑνός διανυσματικοῦ χώρου, τότε ἕνα τουλάχιστον ἀπό αὐτά ἐκφράζεται σάν γραμμικός συνδυασμός τῶν ὑπόλοιπων στοιχείων.

Παρατήρηση. Ἄν κάποιο ἀπό τά στοιχεῖα $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ εἶναι τό **0**, π.χ. $x_1 = \mathbf{0}$, τότε τά $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ εἶναι γραμμικῶς ἐξαρτημένα, γιατί γιά $\lambda_1 \neq 0$ ἰσχύει

$$\lambda_1 \cdot \mathbf{0} + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_\nu = \mathbf{0}.$$

Παραδείγματα:

1. Τά στοιχεῖα (1,1) καί (−1,−1) τοῦ $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ εἶναι γραμμικῶς ἐξαρτημένα, γιατί ὁ γραμμικός συνδυασμός τους

$$3 \cdot (1,1) + 3 \cdot (-1,-1)$$

εἶναι ἴσος μέ τό μηδενικό στοιχεῖο (0,0) τοῦ $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ καί οἱ συντελεστές του εἶναι $\neq 0$.

2. Στόν πραγματικό γραμμικό χῶρο V ὅλων τῶν τριωνύμων

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma \qquad (\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R})$$

(πού εἴδαμε στό παράδειγμα 2 τῆς 5.1) τά $1x^2 + 0x + 0 \equiv x^2$, $0x^2 + 1x + 0 \equiv x$ καί $0x^2 + 0x + 1 \equiv 1$ εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα στοιχεῖα, γιατί

$$\lambda_1 (x^2) + \lambda_2 (x) + \lambda_3 (1) \equiv 0x^2 + 0x + 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lambda_1 x^2 + \lambda_2 x + \lambda_3 \equiv 0x^2 + 0x + 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 0 \text{ καί } \lambda_2 = 0 \text{ καί } \lambda_3 = 0.$$

5.5. Βάση καί διάσταση ἑνός διανυσματικοῦ χώρου

Στήν 5.4. εἴδαμε ὅτι τά $e_1 = (1,0)$ καί $e_2 = (0,1)$ εἶναι δύο γραμμικῶς ἀνεξάρτητα στοιχεῖα τοῦ $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$. Ἄς πάρουμε τώρα ἕνα στοιχεῖο (α, β) τοῦ $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$. Τό στοιχεῖο αὐτό μπορεῖ νά γραφτεῖ σάν γραμμικός συνδυασμός τῶν e_1 καί e_2 μέ τόν ἀκόλουθο τρόπο:

$$(\alpha, \beta) = (\alpha + 0,\ 0 + \beta) = (\alpha, 0) + (0, \beta) = \alpha \cdot (1,0) + \beta \cdot (0,1) =$$
$$= \alpha \cdot e_1 + \beta \cdot e_2 .$$

Ἔτσι βλέπουμε ὅτι κάθε στοιχεῖο τοῦ $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ μπορεῖ νά γραφτεῖ σάν γραμμικός συνδυασμός τῶν γραμμικῶς ἀνεξάρτητων στοιχείων e_1, e_2. Γιά τό λόγο αὐτό τά e_1, e_2 λέμε ὅτι ἀποτελοῦν μιά *βάση* τοῦ $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$. Δίνουμε τώρα τόν ἀκόλουθο ὁρισμό.

Ὁρισμός. Ἄν V εἶναι ἕνας διανυσματικός χῶρος πάνω στό σῶμα K, τότε ἡ νιάδα $(b_1, b_2, \ldots, b_\nu)$ ἀπό στοιχεῖα τοῦ V ὀνομάζεται **βάση τοῦ V,** ἄν καί μόνο ἄν

(i) τά $b_1, b_2, \ldots, b_\nu$ εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα στοιχεῖα,

(ii) κάθε στοιχεῖο x τοῦ V γράφεται σάν γραμμικός συνδυασμός τῶν $b_1, b_2, \ldots, b_\nu$, δηλαδή

$$x = \lambda_1 \cdot b_1 + \lambda_2 \cdot b_2 + \ldots + \lambda_\nu \cdot b_\nu \qquad (1)$$

Παρατήρηση. Σύμφωνα μέ τόν ὁρισμό αὐτό, τά στοιχεῖα $b_1, b_2, \ldots, b_\nu$ εἶναι ἀρκετά γιά νά «κατασκευάσουν» ὅλα τά στοιχεῖα τοῦ V καί γι' αὐτό ἡ ἔννοια τῆς βάσεως ἑνός διανυσματικοῦ χώρου εἶναι πολύ σημαντική.

Ἡ γραμμική ἀνεξαρτησία τῶν στοιχείων τῆς βάσεως ἐξασφαλίζει ὅτι ἡ γραφή ἑνός στοιχείου x τοῦ V μέ τή μορφή (1) εἶναι μοναδική. Πράγματι, ἄν

$$x = \lambda'_1 b_1 + \lambda'_2 b_2 + \ldots + \lambda'_\nu b_\nu,$$

τότε λόγω τῆς (1) ἔχουμε

$$\lambda'_1 \cdot b_1 + \lambda'_2 \cdot b_2 + \ldots + \lambda'_\nu \cdot b_\nu = \lambda_1 . b_1 + \lambda_2 \cdot b_2 + \ldots + \lambda_\nu \cdot b_\nu$$

ἤ

$$\lambda'_1 \cdot b_1 + (-\lambda_1) \cdot b_1 + \lambda'_2 \cdot b_2 + (-\lambda_2) \cdot b_2 + \ldots + \lambda'_\nu \cdot b_\nu + (-\lambda_\nu) \cdot b_\nu = \mathbf{0}$$

ἤ

$$[\lambda'_1 - \lambda_1] \cdot b_1 + [\lambda'_2 - \lambda_2] \cdot b_2 + \ldots + [\lambda'_\nu - \lambda_\nu] \cdot b_\nu = \mathbf{0}$$

ἤ

$$\lambda'_1 - \lambda_1 = \lambda'_2 - \lambda_2 = \ldots = \lambda'_\nu - \lambda_\nu = 0$$

ἤ

$$\lambda'_i = \lambda_i \quad , \text{ γιά κάθε } \; i \in \{1, 2, \ldots, \nu\}.$$

Οἱ συντελεστές στό δεύτερο μέλος τῆς (1) ὀνομάζονται συντεταγμένες τοῦ x ὡς πρός τή βάση $(b_1, b_2, \ldots, b_\nu)$ καί γράφονται σάν νιάδα

$$(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu).$$

Παραδείγματα:

1. Τά στοιχεῖα $b_1 = (1,2)$ καί $b_2 = (-1,1)$ σχηματίζουν μιά βάση (b_1, b_2) τοῦ $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$. Πράγματι

α) τά b_1, b_2 εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα στοιχεῖα, γιατί

$\lambda_1 \cdot b_1 + \lambda_2 \cdot b_2 = (0,0) \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot (1,2) + \lambda_2 \cdot (-1,1) = (0,0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\lambda_1, 2\lambda_1) + (-\lambda_2, \lambda_2) = (0,0) \Leftrightarrow (\lambda_1 - \lambda_2, 2\lambda_1 + \lambda_2) = (0,0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lambda_1 - \lambda_2 = 0$ καί $2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 0$ καί $\lambda_2 = 0$,

β) κάθε στοιχεῖο (α, β) τοῦ $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ μπορεῖ νά γραφτεῖ σάν γραμμικός συνδυασμός τῶν b_1, b_2, γιατί

$(\alpha, \beta) = \lambda_1 \cdot (1,2) + \lambda_2 \cdot (-1,1) \Leftrightarrow (\alpha, \beta) = (\lambda_1 - \lambda_2, 2\lambda_1 + \lambda_2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lambda_1 - \lambda_2 = \alpha$ καί $2\lambda_1 + \lambda_2 = \beta \Leftrightarrow \lambda_1 = \dfrac{\alpha + \beta}{3}$ καί $\lambda_2 = \dfrac{-2\alpha + \beta}{3}$.

Ἔτσι οἱ συντεταγμένες τοῦ (α, β) ὡς πρός τή βάση αὐτή εἶναι

$$\left(\frac{\alpha+\beta}{3}, \frac{-2\alpha+\beta}{3}\right).$$

2. Όπως εἴδαμε στήν ἀρχή, τά $e_1=(1,0)$ καί $e_2=(0,1)$ σχηματίζουν μιά βάση (e_1,e_2) τοῦ $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$, ὡς πρός τήν ὁποία οἱ συντεταγμένες ἑνός στοιχείου (α,β) τοῦ $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ εἶναι (α,β). Γιά τό λόγο αὐτό ἡ βάση αὐτή ὀνομάζεται **κανονική βάση** τοῦ $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$.

3. Στό παράδειγμα 2 τῆς 5.4 εἴδαμε ὅτι τά $x^2,x,1$ εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα στοιχεῖα τοῦ πραγματικοῦ γραμμικοῦ χώρου

$$V=\{\alpha x^2+\beta x+\gamma \mid \alpha,\beta,\gamma\in\mathbf{R}\}$$

Ἐξάλλου κάθε στοιχεῖο $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ τοῦ V γράφεται σάν γραμμικός συνδυασμός τῶν $x^2,x,1$ μέ συντελεστές α,β,γ καί ἑπομένως τά $x^2,x,1$ σχηματίζουν μιά βάση $(x^2,x,1)$ τοῦ V, ὡς πρός τήν ὁποία οἱ συντεταγμένες τοῦ $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ εἶναι (α,β,γ).

Ἀπό τά παραπάνω παραδείγματα 1 καί 2 διαπιστώνουμε ὅτι τά (b_1,b_2) καί (e_1, e_2) εἶναι δύο βάσεις τοῦ $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$. Ἀποδεικνύεται ὅτι κάθε ἄλλη βάση τοῦ $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ ἀποτελεῖται ἀπό δύο στοιχεῖα καί γι' αὐτό τό λόγο λέμε ὅτι ἡ *διάσταση* τοῦ γραμμικοῦ χώρου $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ εἶναι **δύο**. Γενικά ὁ γραμμικός χῶρος $\mathbf{R}^\nu$ ἔχει διάσταση ν καί ἡ κανονική βάση του ἀποτελεῖται ἀπό τά διανύσματα

$$e_1=(1,0,0,\ldots,0),\quad e_2=(0,1,0,\ldots,0),\ \ldots,\ e_\nu=(0,0,0,\ldots,0,1).$$

Ἀποδεικνύεται γενικά ὅτι, ἄν ἕνας διανυσματικός χῶρος ἔχει μιά βάση ἀπό μ στοιχεῖα, τότε κάθε ἄλλη βάση του θά ἔχει μ ἀκριβῶς στοιχεῖα καί τόν ἀριθμό μ θά τόν ὀνομάζουμε **διάσταση**[1] αὐτοῦ τοῦ διανυσματικοῦ χώρου.

Ἄν $x_1,x_2,\ldots,x_\mu$ εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα στοιχεῖα ἑνός διανυσματικοῦ χώρου V πάνω στό σῶμα K, τότε τό σύνολο

$$\{\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\ldots+\lambda_\mu x_\mu \mid \lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\mu\in K\}$$

ὅλων τῶν γραμμικῶν συνδυασμῶν τῶν $x_1,x_2,\ldots,x_\mu$ εἶναι προφανῶς ἕνας γραμμικός ὑπόχωρος A τοῦ V. Ὁ A ὀνομάζεται **ὑπόχωρος πού γεννιέται ἀπό τά $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$, …, $\mathbf{x_\mu}$**. Σύμφωνα μέ τόν ὁρισμό τῆς βάσεως τά $x_1,x_2,\ldots,x_\mu$ ἀποτελοῦν μιά βάση τοῦ A καί ἑπομένως ὁ A εἶναι ἕνας διανυσματικός χῶρος μέ διάσταση μ.

5.6. Ἀσκήσεις

1. Νά δείξετε ὅτι τό σύνολο

$$\mathbf{R}^3=\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1, x_2, x_3\in\mathbf{R}\}$$

(μέ ἰσότητα καί πράξεις ὅπως ὁρίστηκαν στό παράδειγμα 1 τῆς 5.1) εἶναι ἕνας πραγματικός διανυσματικός χῶρος.

2. Ἄν V εἶναι ἕνας διανυσματικός χῶρος πάνω στό σῶμα K, νά δείξετε ὅτι γιά κάθε $\alpha\in K$ καί $x\in V$ ἰσχύει

$$\alpha\cdot(-x)=-(\alpha\cdot x)$$

---

1. Ὑπάρχουν διανυσματικοί χῶροι μέ μή πεπερασμένη διάσταση. Οἱ ἔννοιες πού ἔχουμε ἀναφέρει στίς 5.4 καί 5.5 γενικεύονται καί γιά τέτοιους χώρους. Ἡ παρουσίαση ὅμως αὐτῶν τῶν ἐννοιῶν ξεφεύγει ἀπό τό σκοπό αὐτοῦ τοῦ βιβλίου.

3. Νά δείξετε ὅτι τό σύνολο

$$A = \{(\lambda, 2\lambda) \mid \lambda \in \mathbf{R}\}$$

εἶναι ἕνας γραμμικός ὑπόχωρος τοῦ $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$. Τί διάσταση ἔχει;

4. Νά δείξετε ὅτι τό σύνολο

$$A = \{(x,y) \mid (x,y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \text{ μέ } 2x+3y=0\}$$

εἶναι ἕνας γραμμικός ὑπόχωρος τοῦ $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$. Τί διάσταση ἔχει;

5. Νά ἐξετάσετε ἄν τά $(2,1)$, $(1,2)$ εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα στοιχεῖα τοῦ $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$.

6. Νά ἐξετάσετε ἄν τά $b_1 = (1,0,1)$, $b_2 = (0,1,1)$, $b_3 = (1,1,1)$ ἀποτελοῦν μιά βάση τοῦ διανυσματικοῦ χώρου τῆς ἀσκήσεως 1.

7. Νά δείξετε ὅτι τά $z_1 = 1+0i$ καί $z_2 = 0+1i$ ἀποτελοῦν μιά βάση τοῦ διανυσματικοῦ χώρου τοῦ παραδείγματος 3 τῆς 5.1. Τί διάσταση ἔχει ὁ χῶρος αὐτός;

8. Ἔστω V ἕνας διανυσματικός χῶρος πάνω στό σῶμα K. Ἄν A,B εἶναι δύο διανυσματικοί ὑπόχωροι τοῦ V, νά δείξετε ὅτι ἡ τομή $A \cap B$ δέν εἶναι τό κενό σύνολο καί μάλιστα εἶναι διανυσματικός ὑπόχωρος τοῦ V.

6. ΣΥΝΤΟΜΗ ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

1. Ἡ δομή $(G,\circ)$ ὀνομάζεται ἡμιομάδα, ἄν καί μόνο ἄν ἡ πράξη $\circ$ εἶναι προσεταιριστική.
2. Ἡ δομή $(G,\circ)$ ὀνομάζεται ὁμάδα, ἄν καί μόνο ἄν ἰσχύουν οἱ ἀκόλουθες ἰδιότητες:

   (O_1) Ἡ δομή $(G,\circ)$ εἶναι ἡμιομάδα.

   (O_2) Ὑπάρχει οὐδέτερο στοιχεῖο ὡς πρός τήν πράξη $\circ$.

   (O_3) Κάθε στοιχεῖο τοῦ G ἔχει συμμετρικό στοιχεῖο ὡς πρός τήν πράξη $\circ$.
3. Ἡ δομή $(A, +, \cdot)$ ὀνομάζεται δακτύλιος, ἄν καί μόνο ἄν ἰσχύουν οἱ ἀκόλουθες ἰδιότητες:

   (Δ_1) Ἡ δομή $(A, +)$ εἶναι ἀντιμεταθετική ὁμάδα.

   (Δ_2) Ἡ δομή $(A, \cdot)$ εἶναι ἡμιομάδα.

   (Δ_3) Ἡ πράξη $\cdot$ εἶναι ἐπιμεριστική ὡς πρός τήν πράξη $+$.
4. Ἡ δομή $(A, +, \cdot)$ ὀνομάζεται σῶμα, ἄν καί μόνο ἄν ἰσχύουν οἱ ἀκόλουθες ἰδιότητες:

   (Σ_1) Ἡ δομή $(A, +, \cdot)$ εἶναι ἕνας μή μηδενικός ἀντιμεταθετικός δακτύλιος.

   (Σ_2) Ἡ δομή $(A^*, \cdot)$ εἶναι ὁμάδα, ὅπου $A^* = A - \{0\}$.
5. Ἕνα μή κενό σύνολο V ὀνομάζεται διανυσματικός ἤ γραμμικός χῶρος πάνω στό σῶμα K, ἄν καί μόνο ἄν ἰσχύουν οἱ ἀκόλουθες ἰδιότητες:

   (Γ_1) Στό V εἶναι ὁρισμένη μιά ἐσωτερική πράξη $+$ τέτοια, ὥστε ἡ δομή $(V, +)$ νά εἶναι ἀντιμεταθετική ὁμάδα.

   (Γ_2) Στό V εἶναι ὁρισμένη μιά ἐξωτερική πράξη $\cdot$ μέ σύνολο τελεστῶν τό K τέτοια, ὥστε γιά κάθε $x, y \in V$ καί $\alpha, \beta \in K$ νά ἰσχύουν:

   (i) $\alpha \cdot (x+y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$,

   (ii) $(\alpha+\beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$,

   (iii) $(\alpha \cdot \beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x)$,

   (iv) $1 \cdot x = x$.

7. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

1. Ἄν $x = (\alpha,\alpha')$ καί $y = (\beta,\beta')$ εἶναι δύο στοιχεῖα τοῦ συνόλου $A = \mathbf{Z} \times \mathbf{Q}$, τότε ὁρίζουμε δύο ἐσωτερικές πράξεις $*$ καί $\circ$ στό A μέ τόν ἀκόλουθο τρόπο
$$x * y = (\alpha+\beta,\ \alpha'\beta') \quad , \quad x \circ y = (\alpha\beta,\ \alpha'+\beta').$$
Δεῖξτε ὅτι
   (i) οἱ πράξεις αὐτές εἶναι ἀντιμεταθετικές, προσεταιριστικές καί ὑπάρχει γι' αὐτές οὐδέτερο στοιχεῖο στό A,
   (ii) τά στοιχεῖα τοῦ A τῆς μορφῆς $(1, \alpha')$ καί $(-1,\alpha')$ ἔχουν συμμετρικά στοιχεῖα ὡς πρός τήν πράξη $\circ$,
   (iii) τά στοιχεῖα τοῦ A τῆς μορφῆς (α,α') μέ $\alpha' \neq 0$ ἔχουν συμμετρικά στοιχεῖα ὡς πρός τήν πράξη $*$.
2. Ἔστω $(E, *)$ μιά ἡμιομάδα, γιά τήν ὁποία ὑπάρχει οὐδέτερο στοιχεῖο $e \in E$. Ἄν γιά τά στοιχεῖα α,α',α'' τοῦ E ἰσχύουν $\alpha' * \alpha = e$ καί $\alpha'' * \alpha' = e$, δεῖξτε ὅτι $\alpha = \alpha''$. Τί συμπεραίνετε γιά τά στοιχεῖα α καί α';
3. Ἔστω $(G, \cdot)$ μιά ὁμάδα. Ἄν γιά κάθε $\alpha,\beta \in G$ ἰσχύει
$$(\alpha \cdot \beta)^2 = \alpha^2 \cdot \beta^2,$$
δεῖξτε ὅτι ἡ ὁμάδα αὐτή εἶναι ἀβελιανή καί γιά κάθε $\nu \in \mathbf{N}$ ἰσχύει $(\alpha\cdot\beta)^\nu = \alpha^\nu \cdot \beta^\nu$.
4. Στό σύνολο $\mathbf{R}$ ὁρίζουμε τίς πράξεις $\circ$ καί $*$ μέ τόν ἀκόλουθο τρόπο:
$$\alpha \circ \beta = \alpha+\beta-1 \quad , \quad \alpha * \beta = \alpha\beta - \alpha - \beta + 2.$$
Δεῖξτε ὅτι ἡ δομή $(\mathbf{R}, \circ, *)$ εἶναι σῶμα.
5. Στό $\mathbf{R}$ ἡ σχέση
$$x * y = \alpha x+\beta y+\gamma \qquad (\alpha,\beta \in \mathbf{R} - \{0\})$$
ὁρίζει μιά πράξη $*$. Νά προσδιορίσετε τά α,β, ὥστε ἡ πράξη αὐτή νά εἶναι προσεταιριστική. Νά ὑπολογίσετε τό γ συναρτήσει ἑνός πραγματικοῦ ἀριθμοῦ e, ὥστε ἡ δομή $(\mathbf{R}, *)$ νά εἶναι ὁμάδα μέ οὐδέτερο στοιχεῖο τό e ὡς πρός τήν πράξη $*$.
6. Ἄν ν εἶναι σταθερός φυσικός ἀριθμός, νά δείξετε ὅτι τό σύνολο
$$A_\nu = \{z \in \mathbf{C} \mid z^\nu = 1\}$$
εἶναι κλειστό ὡς πρός τήν πράξη τοῦ πολλαπλασιασμοῦ στό $\mathbf{C}$ καί στή συνέχεια ὅτι ἡ δομή $(A_\nu, .)$ εἶναι ἀντιμεταθετική ὁμάδα.
7. Ἔστω $(A, \circ)$ μιά ἡμιομάδα μέ τίς ἀκόλουθες ἰδιότητες:
   (i) ὑπάρχει $e \in A$ μέ $e \circ \alpha = \alpha$ γιά κάθε $\alpha \in A$,
   (ii) γιά κάθε $\alpha \in A$ ὑπάρχει $\alpha' \in A$ μέ $\alpha' \circ \alpha = e$.
   Δεῖξτε ὅτι ἡ δομή $(A, \circ)$ εἶναι ὁμάδα.
8. Ἔστω $(G, \cdot)$ μιά πολλαπλασιαστική ἀβελιανή ὁμάδα. Ἄν κ εἶναι ἕνα σταθερό στοιχεῖο τοῦ G, τότε ὁρίζουμε στό G τήν πράξη $*$ μέ τόν ἀκόλουθο τρόπο:
$$\alpha * \beta = \alpha \cdot \beta \cdot \kappa.$$
Δεῖξτε ὅτι ἡ δομή $(G, *)$ εἶναι ἀβελιανή ὁμάδα.
9. Ἔστω $(A, \cdot)$ μιά πολλαπλασιαστική ἀβελιανή ὁμάδα, ὅπου
$$A = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu\}.$$
   (i) Ἄν x εἶναι ἕνα στοιχεῖο τοῦ A, δεῖξτε ὅτι τό A περιέχει ἀκριβῶς τά στοιχεῖα
$$x\cdot\alpha_1,\quad x\cdot\alpha_2,\ \ldots,\ x\cdot\alpha_\nu.$$

(ii) Γιά κάθε $x \in A$ ἰσχύει

$$x^{\nu} = 1.$$

ὅπου $\widehat{\kappa}, \widehat{\lambda}$ οἱ κλάσεις ὑπολοίπου τῶν κ καί λ modulo 5, ὁρίζουν δύο ἐσωτερικές πράξεις στό E καί ἡ δομή $(E, +, .)$ εἶναι ἕνας ἀντιμεταθετικός δακτύλιος μέ μοναδιαῖο στοιχεῖο.

10. Δεῖξτε ὅτι τά $b_1 = (3, 1,5)$, $b_2 = (3,6,2)$, $b_3 = (-1,0,1)$ ἀποτελοῦν μιά βάση τοῦ $\mathbf{R}^3$. Ποιές εἶναι οἱ συντεταγμένες τῶν $x = (1,0,2)$ καί $y = (2,0,5)$ ὡς πρός τή βάση αὐτή;

11. Σέ ποιά περίπτωση τά $\alpha+\beta i$ καί $\gamma+\delta i$ ἀποτελοῦν μιά βάση τοῦ διανυσματικοῦ χώρου τοῦ παραδείγματος 3 τῆς 5.1 ;

12. Ἄν τά x,y,z εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα στοιχεῖα ἑνός διανυσματικοῦ χώρου V πάνω στό σῶμα K, δεῖξτε ὅτι καί τά $x+y$, $x-y$, $x-2y+z$ εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα στοιχεῖα τοῦ V.

13. Γράψτε τό στοιχεῖο (α, β, γ) τοῦ πραγματικοῦ διανυσματικοῦ χώρου $\mathbf{R}^3$ σάν γραμμικό συνδυασμό τῶν $(1,1,1)$, $(1,1,0)$ καί $(1,0,0)$.

14. Δίνεται τό σύστημα

$$\left.\begin{array}{l} x+4y+2z=0 \\ 2x+y+5z=0 \end{array}\right\} \quad (\Sigma)$$

Νά δείξετε ὅτι τό σύνολο τῶν λύσεων τοῦ (Σ) εἶναι ἕνας γραμμικός ὑπόχωρος V τοῦ πραγματικοῦ διανυσματικοῦ χώρου $\mathbf{R}^3$. Βρεῖτε μιά βάση τοῦ V.

15. Ἔστω $(A, +, \cdot)$ ἕνα σῶμα. Ἄν $\alpha, \gamma \in A$ καί $\beta, \delta \in A^*$, δεῖξτε τήν ἰσοδυναμία

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \alpha\delta = \beta\gamma.$$

16. Δεῖξτε ὅτι ἡ δομή $(M, +, \cdot)$ μέ $M = \{(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbf{Q}\}$ καί

$(\alpha, \beta, \gamma, \delta) + (\varepsilon, \zeta, \eta, \theta) = (\alpha+\varepsilon, \beta+\zeta, \gamma+\eta, \delta+\theta)$

$(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \cdot (\varepsilon, \zeta, \eta, \theta) = (\alpha\varepsilon+\beta\eta, \alpha\zeta+\beta\theta, \gamma\varepsilon+\delta\eta, \gamma\zeta+\delta\theta)$

εἶναι δακτύλιος. Ποιά στοιχεῖα τοῦ M ἔχουν ἀντίστροφα στοιχεῖα;

17. Δεῖξτε ὅτι

(i) ἡ δομή $(\mathbf{Z}_{15}, +, \cdot)$ εἶναι δακτύλιος,

(ii) τά ὑποσύνολα $A = \{\widehat{0}, \widehat{5}, \widehat{10}\}$ καί $B = \{\widehat{0}, \widehat{3}, \widehat{6}, \widehat{9}, \widehat{12}\}$ εἶναι κλειστά ὡς πρός τίς πράξεις + καί · στό $\mathbf{Z}_{15}$.

18. Οἱ δομές $(A, +, \cdot)$ καί $(B, +, \cdot)$ εἶναι ἀκέραιες περιοχές;

Ἄν $(G, +)$ εἶναι ὁμάδα καί A ἕνα μή κενό ὑποσύνολο τοῦ G μέ τήν ἰδιότητα

$$x, y \in A \Rightarrow x-y \in A,$$

δεῖξτε ὅτι ἡ δομή $(A, +)$ εἶναι ὁμάδα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ III

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ ΑΡΙΘΜΩΝ

1, Διαιρετότητα στό σύνολο Z

2. Ἀκέραιες λύσεις τῆς ἐξισώσεως $\alpha x+\beta y=\gamma$ $(\alpha,\beta,\gamma\in Z)$

3. Σύντομη ἀνακεφαλαίωση

4. Ἀσκήσεις γιά ἐπανάληψη

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ ΑΡΙΘΜΩΝ

Ἡ θεωρία τῶν ἀριθμῶν εἶναι ἕνας κλάδος τῶν Μαθηματικῶν, πού ἡ ἱστορία του ἀρχίζει τήν ἐποχή πού τά μυστικά τῶν ἀριθμῶν ἀπασχόλησαν γιά πρώτη φορά τούς ἀνθρώπους.

Γνωστότερος ἀπό τούς ἀρχαίους πού ἀσχολήθηκαν μέ τούς ἀριθμούς εἶναι ὁ Πυθαγόρας (500 π.Χ.). Κατά τούς χρόνους τοῦ Εὐκλείδη (300 π.Χ.) ἡ μελέτη τῶν ἀριθμῶν ἔγινε περισσότερο συστηματική καί ἡ βασική θεωρία τῶν ἀριθμῶν ἀναφέρεται στό ἔνατο βιβλίο τῶν «Στοιχείων» του. Ἀργότερα ὁ Ἐρατοσθένης (230 π.Χ.) ἔδωσε μέθοδο εὑρέσεως πρώτων ἀριθμῶν (κόσκινο τοῦ Ἐρατοσθένη).

Ὁ Διόφαντος ὁ Ἀλεξανδρινός (350 μ.Χ.) στό ἔργο του «Ἀριθμητικά», πού ἀπό τούς 13 τόμους σώζονται μόνο οἱ ἕξη, ἀσχολήθηκε μέ προβλήματα ἐξισώσεων.

Ἡ σύγχρονη θεωρία τῶν ἀριθμῶν ἀρχίζει μέ τίς ἐργασίες τοῦ P. Fermat (1601-1665 μ.Χ.), πού μέ τό φωτεινό μυαλό του πρόσφερε πολλά στή μαθηματική ἐπιστήμη καί ἰδιαίτερα στόν κλάδο τῆς θεωρίας ἀριθμῶν.

Οἱ μεγαλύτεροι μαθηματικοί τῶν τελευταίων αἰώνων ἐκτός τῶν ἄλλων ἀσχολήθηκαν καί μέ τή θεωρία ἀριθμῶν, ὅπως π.χ. ὁ L. Euler (1707-1783), ὁ K. Gauss (1777-1855) κ.ἄ.

1. ΔΙΑΙΡΕΤΟΤΗΤΑ ΣΤΟ ΣΥΝΟΛΟ Z.

Στήν παράγραφο αὐτή θά μελετήσουμε τήν ἔννοια τῆς διαιρετότητας στό σύνολο τῶν ἀκεραίων:

$$\mathbf{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Συχνά θά χρησιμοποιοῦμε καί τά παρακάτω ὑποσύνολα τοῦ $\mathbf{Z}$:

τό σύνολο τῶν μή μηδενικῶν ἀκεραίων: $\mathbf{Z}^* = \mathbf{Z} - \{0\}$

τό σύνολο τῶν μή ἀρνητικῶν ἀκεραίων: $\mathbf{Z}_+ = \{x \mid x \in \mathbf{Z} \text{ μέ } x \geq 0\}$

τό σύνολο τῶν θετικῶν ἀκεραίων: $\mathbf{Z}_+^* = \{x \mid x \in \mathbf{Z} \text{ μέ } x > 0\}$

Ἐπιπλέον θά χρησιμοποιήσουμε τό ἀκόλουθο ἀξίωμα.

Ἀξίωμα. Κάθε μή κενό ὑποσύνολο Α τοῦ συνόλου τῶν θετικῶν ἀκεραίων ἔχει ἐλάχιστο στοιχεῖο, δηλαδή ὑπάρχει στό Α μοναδικό στοιχεῖο, πού εἶναι μικρότερο ἀπό ὅλα τά ἄλλα στοιχεῖα τοῦ Α.

1.1. Ἡ ἔννοια τῆς διαιρετότητας στὸ Z.

Ἡ ἐξίσωση $-3x = 11$ δέν ἔχει ρίζα στό **Z**, γιατί δέν ὑπάρχει ἀκέραιος πού, ἄν πολλαπλασιαστεῖ μέ τό -3, νά δίνει γινόμενο 11. Ἡ ἐξίσωση ὅμως $-3x = 12$ ἔχει ρίζα στό σύνολο **Z** τόν ἀκέραιο -4, γιατί $-3(-4) = 12$. Στήν περίπτωση αὐτή λέμε ὅτι ὁ 12 *διαιρεῖται* μέ τό -3 ἤ ὅτι ὁ -3 *διαιρεῖ* τό 12.

Δίνουμε τώρα τόν παρακάτω ὁρισμό.

Ὁρισμός. Ἄν $\alpha, \beta \in \mathbf{Z}$, τότε θά λέμε ὅτι ὁ α **διαιρεῖται** μέ τό β ἤ ὅτι ὁ β **διαιρεῖ** τόν α καί θά γράφουμε $\beta|\alpha$, ὅταν καί μόνο ὅταν ὑπάρχει ἀκέραιος γ τέτοιος, ὥστε νά ἰσχύει

$$\alpha = \beta\gamma.$$

Στήν περίπτωση αὐτή θά λεμε ἐπίσης ὅτι

(i) ὁ α εἶναι **πολλαπλάσιο** τοῦ β καί

(ii) ὁ β εἶναι **διαιρέτης** ἤ **παράγοντας τοῦ** α.

Παραδείγματα:

1. Ἀπό τήν ἰσότητα $-35 = 7.(-5)$ ἔπεται ὅτι

$$7|-35 \quad \text{καί} \quad -5|-35.$$

2. Τό σύνολο τῶν πολλαπλασίων τοῦ 5 εἶναι

$$\{5.\gamma \mid \gamma \in \mathbf{Z}\},$$

δηλαδή

$$\{\ldots, -15, -10, -5, 0, 5, 10, 15, \ldots\}$$

Παρατηρήσεις

1. Ἐπειδή γιά κάθε $\beta \in \mathbf{Z}$ ἰσχύει $0 = \beta \,.\, 0$, ἔπεται ὅτι:

κάθε ἀκέραιος διαιρεῖ τό μηδέν.

2. Ἄν $0|\alpha$, τότε ὑπάρχει $\gamma \in \mathbf{Z}$ μέ τήν ἰδιότητα $\alpha = 0.\gamma$, δηλαδή $\alpha = 0$. Ἄρα:

τό μηδέν εἶναι διαιρέτης μόνο τοῦ ἑαυτοῦ του.

3. Ἀπό τίς προφανεῖς ἰσότητες

$$\alpha = (+1)\cdot\alpha \quad \text{καί} \quad \alpha = (-1)(-\alpha)$$

ἔπεται ὅτι:

κάθε ἀκέραιος α διαιρεῖται πάντα μέ τούς ± 1 καί $\pm\alpha$.

4. Ἄν γιά τρεῖς ἀκέραιους α, β καί γ ἰσχύει $\alpha = \beta\gamma$, τότε προφανῶς ἰσχύουν καί οἱ σχέσεις

$$-\alpha = \beta(-\gamma), \quad \alpha = (-\beta)(-\gamma) \quad \text{καί} \quad -\alpha = (-\beta)\gamma.$$

Ἄρα:

ἄν $\beta|\alpha$, τότε $\beta|-\alpha$, $-\beta|\alpha$ καί $-\beta|-\alpha$.

5. Ἐπειδή, λόγω τῆς προηγούμενης παρατηρήσεως, ἰσχύει

$$\beta|\alpha \Leftrightarrow -\beta|\alpha,$$

τό σύνολο τῶν διαιρετῶν τοῦ α καθορίζεται πλήρως, ὅταν εἶναι γνωστό τό σύνολο τῶν **θετικῶν** διαιρετῶν του, πού θά τό συμβολίζουμε μέ $\Delta(\alpha)$.

6. Ἀπό τήν παρατήρηση 4 συμπεραίνουμε ἐπίσης ὅτι

$$\beta|\alpha \Leftrightarrow \beta|-\alpha,$$

δηλαδή **δύο ἀντίθετοι ἀκέραιοι α καί −α ἔχουν τούς ἴδιους διαιρέτες** καί ἑπομένως

$$\Delta(\alpha) = \Delta\,(-\alpha) = \Delta(|\alpha|).$$

Ἔτσι

$\Delta(-8) = \Delta(8) = \{1,2,4,8\}$, $\Delta(-9) = \Delta(9) = \{1,3,9\}$ καί

$\Delta(0) = \{x \mid x \in \mathbf{Z}$ μέ $x > 0\} = \mathbf{Z}^*_+$.

Στή συνέχεια θά ἀποδείξουμε δύο χρήσιμες προτάσεις.

Πρόταση 1. Ἄν $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbf{Z}$, τότε ἰσχύουν οἱ ἀκόλουθες ἰδιότητες:

(i) Ἄν $\alpha|\beta$, τότε γιά κάθε $\kappa \in \mathbf{Z}$ ἰσχύει $\alpha|\kappa\beta$.
(ii) Ἄν $\alpha|\beta$ καί $\beta|\gamma$, τότε $\alpha|\gamma$.
(iii) Ἄν $\alpha|\beta$ καί $\alpha|\gamma$, τότε $\alpha|\beta+\gamma$.
(iv) Ἄν $\alpha|\beta$ καί $\beta \neq 0$, τότε $|\alpha| \leq |\beta|$.

Ἀπόδειξη.

(i) Ἄν $\alpha|\beta$, τότε ὑπάρχει ἀκέραιος λ τέτοιος, ὥστε $\beta = \alpha\cdot\lambda$ καί ἑπομένως $\kappa\beta = \alpha(\lambda\kappa)$, πού σημαίνει ὅτι $\alpha|\kappa\beta$.

(ii) Ἄν $\alpha|\beta$ καί $\beta|\gamma$, τότε ὑπάρχουν ἀκέραιοι μ,ν τέτοιοι, ὥστε

$$\beta = \alpha\cdot\mu \qquad \text{καί} \qquad \gamma = \beta\cdot\nu,$$

ὁπότε

$$\gamma = \beta\cdot\nu = (\alpha\cdot\mu)\cdot\nu = \alpha(\mu\cdot\nu),$$

δηλαδή $\alpha|\gamma$.

(iii) Ἄν $\alpha|\beta$ καί $\alpha|\gamma$, τότε ὑπάρχουν ἀκέραιοι λ,μ τέτοιοι, ὥστε

$$\beta = \alpha\lambda \qquad \text{καί} \qquad \gamma = \alpha\cdot\mu,$$

ὁπότε

$$\beta+\gamma = \alpha\,(\lambda+\mu),$$

πού σημαίνει ὅτι $\alpha|\beta+\gamma$.

(iv) Ἄν $\alpha|\beta$, τότε ὑπάρχει ἀκέραιος λ τέτοιος, ὥστε $\beta = \alpha\cdot\lambda$. Ἐξάλλου, ἀφοῦ $\beta \neq 0$, θά εἶναι $\lambda \neq 0$ καί ἑπομένως

$$|\lambda| \geq 1.$$

Πολλαπλασιάζοντας καί τά δύο μέλη αὐτῆς τῆς ἀνισότητας μέ $|\alpha|$ παίρνουμε

$$|\alpha\lambda| \geq |\alpha|$$

καί ἄρα $|\beta| \geq |\alpha|$.

Λόγω τῆς ἰδιότητας (iv) τῆς προτάσεως κάθε θετικός διαιρέτης x τοῦ $\beta\in\mathbf{Z}^*$ ἱκανοποιεῖ τή σχέση $1\leq x\leq|\beta|$, δηλαδή

$$\boxed{x\in\Delta(\beta)\ \Rightarrow\ 1\leq x\leq|\beta|} \qquad (1)$$

Ἀπό τήν (1) καί τήν παρατήρηση 4 ἔχουμε τό ἀκόλουθο πόρισμα.

Πόρισμα 1. Οἱ μοναδικοί διαιρέτες τοῦ 1 εἶναι οἱ ± 1.

Ἐξάλλου λόγω τῆς προτάσεως 1 καί τῆς παρατηρήσεως 3 ἔχουμε τό ἀκόλουθο πόρισμα.

Πόρισμα 2. Ἡ σχέση "$|$" μέσα στό σύνολο τῶν θετικῶν ἀκεραίων εἶναι σχέση μερικῆς διατάξεως (δηλαδή ἀνακλαστική, μεταβατική καί ἀντισυμμετρική).

Τέλος ἀπό τήν (1) ἔχουμε τό ἀκόλουθο πόρισμα.

Πόρισμα 3. Τό σύνολο τῶν θετικῶν διαιρετῶν ἑνός ἀκεραίου $\beta\in\mathbf{Z}^*$ εἶναι πεπερασμένο.

Πρόταση 2. Ἄν $\alpha\in Z$, $\beta\in\mathbf{Z}^*$ καί $\beta|\alpha$, τότε ὑπάρχει μοναδικός ἀκέραιος γ μέ τήν ἰδιότητα $\alpha=\beta\cdot\gamma$.

Ἀπόδειξη. Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι ὑπάρχουν $\gamma,\gamma_1\in\mathbf{Z}$ τέτοιοι, ὥστε

$$\alpha=\beta\gamma \qquad \text{καί} \qquad \alpha=\beta\gamma_1.$$

Τότε λόγω τῆς μεταβατικῆς ἰδιότητας τῆς ἰσότητας παίρνουμε

$$\beta\gamma=\beta\gamma_1$$

καί ἑπομένως $\gamma=\gamma_1$, ἀφοῦ $\beta\neq 0$.

Ἄν $\beta\in\mathbf{Z}^*$ καί $\beta|\alpha$, τότε ἡ πράξη, μέ τήν ὁποία βρίσκεται ὁ μοναδικός (λόγω τῆς προτ. 2) ἀκέραιος γ μέ τήν ἰδιότητα $\alpha=\beta\gamma$, εἶναι ἡ γνωστή μας τέλεια διαίρεση καί ὁ ἀκέραιος γ εἶναι τό ἀκέραιο πηλίκο αὐτῆς τῆς διαιρέσεως.

1.2. Πρῶτοι καί σύνθετοι ἀριθμοί.

Μιά ἀπό τίς πιό βασικές ἔννοιες στή θεωρία ἀριθμῶν εἶναι ἡ ἔννοια τοῦ *πρώτου ἀριθμοῦ*. Γιά νά κατανοήσουμε τήν ἔννοια αὐτή, ἄς πάρουμε τό σύνολο

$$A=\mathbf{Z}-\{-1,+1\}.$$

Κάθε στοιχεῖο α τοῦ συνόλου A ἔχει, λόγω τῆς παρατηρήσεως 3 τῆς 1.1, τουλάχιστον δύο θετικούς διαιρέτες, τούς 1 καί $|\alpha|$. Π.χ.

$\Delta(3)=\{1,3\}$, $\Delta(-4)=\{1,2,4\}$, $\Delta(-5)=\{1,5\}$

$\Delta(6)=\{1,2,3,6\}$, $\Delta(7)=\{1,7\}$.

Παρατηροῦμε ὅτι κάθε ἕνας ἀπό τούς ἀριθμούς 3, -5, 7 ἔχει σύνολο θετικῶν διαιρετῶν μέ *δύο ἀκριβῶς* στοιχεῖα. Τέτοιοι ἀριθμοί, ὅπως οἱ 3, -5 καί 7, ὀνομάζονται *πρῶτοι ἀριθμοί*. Ἔτσι ἔχουμε τόν ἀκόλουθο ὁρισμό.

Ὁρισμός. Ἕνας ἀκέραιος $p\neq 0$ ὀνομάζεται **πρῶτος ἀριθμός**, ὅταν καί μόνο ὅταν $p\neq\pm 1$ καί οἱ μοναδικοί θετικοί διαιρέτες του εἶναι οἱ ἀριθμοί $|p|$ καί 1, δηλαδή $\Delta(p)=\{1,|p|\}$.

Κάθε ἀκέραιος $\alpha \in \mathbf{Z} - \{-1, +1\}$, πού δέν εἶναι πρῶτος ἀριθμός, ὀνομάζεται **σύνθετος ἀριθμός**.

Ἔτσι κάθε στοιχεῖο τοῦ συνόλου $A = \mathbf{Z} - \{-1, +1\}$ εἶναι ἤ πρῶτος ἀριθμός ἤ σύνθετος. Οἱ ἀριθμοί -1 καί $+1$ (πού δέν ἀνήκουν στό A) εἶναι οἱ μόνοι ἀκέραιοι, πού τό σύνολο τῶν θετικῶν διαιρετῶν τους εἶναι μονομελές. (Πόρισμα 1 τῆς 1.1). Μέ βάση τόν προηγούμενο ὁρισμό οἱ ἀριθμοί -1 καί $+1$ οὔτε πρῶτοι ἀριθμοί εἶναι οὔτε σύνθετοι.

Παρατηρήσεις

1. Ἄν p εἶναι πρῶτος ἀριθμός, τότε, ἀφοῦ $\Delta(p) = \Delta(-p)$, θά εἶναι καί ὁ $-p$ πρῶτος ἀριθμός.
2. Ἄν p_1, p_2 εἶναι **θετικοί** πρῶτοι ἀριθμοί καί $p_1 | p_2$, τότε, ἀφοῦ $\Delta(p_2) = \{1, p_2\}$, θά εἶναι $p_1 = p_2$.

Παραδείγματα.

1. Ὁ ἀκέραιος 2 εἶναι πρῶτος ἀριθμός, γιατί $\Delta(2) = \{1,2\}$.
2. Ὁ ἀκέραιος -9 εἶναι σύνθετος ἀριθμός, γιατί $\Delta(-9) = \{1,3,9\}$.
3. Ὁ ἀκέραιος 5 εἶναι πρῶτος ἀριθμός, γιατί $\Delta(5) = \{1,5\}$.

1.3. Ἡ ἔννοια τῆς ἀλγοριθμικῆς διαιρέσεως.

Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι ἔχουμε τούς ἀκέραιους 32 καί 5. Τό 5 δέν εἶναι διαιρέτης τοῦ 32, ἀφοῦ δέν ὑπάρχει ἀκέραιος α μέ τήν ἰδιότητα $32 = 5 \cdot \alpha$. Ὁ ἀκέραιος ὅμως 32 μπορεῖ νά ἀναλυθεῖ κατά πολλούς τρόπους σέ ἄθροισμα ἑνός πολλαπλασίου τοῦ 5 καί ἑνός *θετικοῦ* ἀκεραίου, ὅπως δείχνουν οἱ παρακάτω ἰσότητες(1):

$$\begin{array}{ll} 32 = 5\cdot 6 + 2 & 32 = 5\cdot 2 + 22 \\ 32 = 5\cdot 5 + 7 & 32 = 5\cdot 1 + 27 \\ 32 = 5\cdot 4 + 12 & 32 = 5\cdot 0 + 32 \\ 32 = 5\cdot 3 + 17 & 32 = 5\cdot(-1) + 37 \\ & \cdots\cdots\cdots \end{array}$$

Γράφουμε τώρα τίς προηγούμενες ἰσότητες μέ τόν ἀκόλουθο τρόπο:

$$\begin{array}{ll} 32 - 5\cdot 6 = 2 & 32 - 5\cdot 2 = 22 \\ 32 - 5\cdot 5 = 7 & 32 - 5\cdot 1 = 27 \\ 32 - 5\cdot 4 = 12 & 32 - 5\cdot 0 = 32 \\ 32 - 5\cdot 3 = 17 & 32 - 5(-1) = 37 \\ & \cdots\cdots\cdots \end{array}$$

Τά δεύτερα μέλη στίς προηγούμενες ἰσότητες σχηματίζουν ἕνα σύνολο ἀπό μή ἀρνητικούς ἀκεραίους, καί ὁ *ἐλάχιστος* ἀπό αὐτούς εἶναι ὁ ἀκέραιος 2, πού εἶναι καί ὁ *μοναδικός* πού περιέχεται μεταξύ τοῦ 0 καί τοῦ 5.

Θά ἀποδείξουμε τώρα ὅτι ἡ ὕπαρξη καί ἡ μοναδικότητα ἑνός τέτοιου ἀριθμοῦ, ὅπως τοῦ 2 στό προηγούμενο παράδειγμα, ἰσχύει γενικά.

1. Σημειῶστε ὅτι $32 \equiv 2 \pmod 5$, $32 \equiv 7 \pmod 5$, $32 \equiv 12 \pmod 5$ κ.τ.λ.

Θεώρημα. Ἄν $\alpha \in \mathbf{Z}$ καί $\beta \in \mathbf{Z}^*$, τότε ὑπάρχουν μοναδικοί ἀκέραιοι π καί υ τέτοιοι, ὥστε

$$\alpha = \beta\pi + \upsilon \quad \text{καί} \quad 0 \leq \upsilon < |\beta|$$

Ἀπόδειξη. Διακρίνουμε τίς ἀκόλουθες περιπτώσεις:

I. $\alpha \in \mathbf{Z}_+$ καί $\beta > 0$. Ἄς θεωρήσουμε τό σύνολο A ὅλων τῶν ἀκεραίων τῆς μορφῆς $\alpha - \beta x$, ὅπου x εἶναι ἕνας ἀκέραιος τέτοιος, ὥστε νά ἰσχύει $\alpha - \beta x \geq 0$, δηλαδή

$$A = \{\alpha - \beta x \mid x \in \mathbf{Z} \quad \text{καί} \quad \alpha - \beta x \geq 0\}.$$

Τό σύνολο αὐτό δέν εἶναι τό κενό. Πράγματι, ἀφοῦ εἶναι $\beta \geq 1$, πολλαπλασιάζοντας καί τά δύο μέλη της μέ $\alpha \in \mathbf{Z}_+$ βρίσκουμε $\alpha\beta \geq \alpha$ καί ἑπομένως $\alpha + \alpha\beta \geq \geq \alpha + \alpha \geq 0$, δηλαδή $\alpha + \alpha\beta \geq 0$. Ἔτσι, ἄν πάρουμε $x = -\alpha$, συμπεραίνουμε ὅτι ὁ μή ἀρνητικός ἀκέραιος $\alpha + \alpha\beta$ ἀνήκει στό σύνολο A. Σύμφωνα μέ τό ἀξίωμα τῆς παραγράφου 1 τό σύνολο A ἔχει ἐλάχιστο στοιχεῖο, ἔστω υ. Ἀφοῦ $\upsilon \in A$, θά ὑπάρχει ἀκέραιος π τέτοιος, ὥστε νά ἰσχύει $\alpha - \beta\pi = \upsilon$. Ἑπομένως

$$\alpha = \beta\pi + \upsilon \quad \text{καί} \quad 0 \leq \upsilon.$$

Θά ἀποδείξουμε τώρα ὅτι $\upsilon < \beta$. Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι $\upsilon \geq \beta$. Τότε εἶναι $\upsilon - \beta \geq 0$ καί, ἐπειδή ἰσχύει

$$\upsilon - \beta = (\alpha - \pi\beta) - \beta = \alpha - (\pi + 1)\beta,$$

συμπεραίνουμε ὅτι τό $\upsilon - \beta$ ἀνήκει στό A. Αὐτό ὅμως εἶναι ἄτοπο, γιατί τό $\upsilon - \beta$ εἶναι μικρότερο ἀπό τό υ, ἐνῶ συγχρόνως τό υ εἶναι τό ἐλάχιστο στοιχεῖο τοῦ A. Ἑπομένως $\upsilon < \beta$ καί ἔτσι ἔχουμε ἀποδείξει ὅτι ὑπάρχουν ἀκέραιοι π καί υ τέτοιοι, ὥστε

$$\alpha = \beta\pi + \upsilon \quad \text{καί} \quad 0 \leq \upsilon < \beta \tag{1}$$

Μένει ν' ἀποδείξουμε ὅτι οἱ ἀκέραιοι π καί υ εἶναι μοναδικοί. Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι ὑπάρχουν ἀκέραιοι π' καί υ' τέτοιοι, ὥστε $\alpha = \beta\pi' + \upsilon'$ καί $0 \leq \upsilon' < \beta$. Χωρίς νά βλάψουμε τή γενικότητα μποροῦμε νά ὑποθέσουμε ὅτι $\pi' \leq \pi$. Ἐπειδή εἶναι $\alpha = \beta\pi + \upsilon$, ἔχουμε $\beta\pi + \upsilon = \beta\pi' + \upsilon'$ ἤ

$$\beta\,(\pi - \pi') = \upsilon' - \upsilon. \tag{2}$$

Προσθέτοντας τώρα κατά μέλη τίς σχέσεις $0 \leq \upsilon$ καί $\upsilon' < \beta$ βρίσκουμε $\upsilon' < \beta + \upsilon$ ἤ $\upsilon' - \upsilon < \beta$, ὁπότε ἡ (1) γράφεται

$$\beta\,(\pi - \pi') < \beta$$

ἤ, ἀφοῦ $\beta > 0$,

$$\pi - \pi' < 1.$$

Ἔτσι γιά τόν **ἀκέραιο** $\pi - \pi'$ ἰσχύουν οἱ σχέσεις

$$0 \leq \pi - \pi' \quad \text{καί} \quad \pi - \pi' < 1$$

καί ἑπομένως $\pi - \pi' = 0$, δηλαδή $\pi = \pi'$. Τώρα ἡ (2) δίνει $\upsilon' = \upsilon$. Ἄρα τό θεώρημα ἰσχύει στήν περίπτωση αὐτή.

II. $\alpha<0$ καί $\beta>0$. Ἡ ἀπόδειξη στήν περίπτωση αὐτή γίνεται, ὅπως στήν περίπτωση I, ἀρκεῖ νά διαπιστωθεῖ ὅτι τό $\alpha-\beta\alpha$ εἶναι στοιχεῖο τοῦ συνόλου A·

III. $\alpha\in\mathbf{Z}$ καί $\beta<0$. Στήν περίπτωση αὐτή θέτουμε στίς σχέσεις (1) ὅπου β τό $|\beta|$, ὁπότε παίρνουμε

$$\alpha=|\beta|\pi+\upsilon \quad \text{καί} \quad 0\leq\upsilon<|\beta|$$

ἤ

$$\alpha=\beta(-\pi)+\upsilon \quad \text{καί} \quad 0\leq\upsilon<|\beta|$$

ἤ

$$\alpha=\beta\pi'+\upsilon \quad \text{καί} \quad 0\leq\upsilon<|\beta|,$$

ὅπου $\pi'=-\pi$.

Σύμφωνα μέ τό προηγούμενο θεώρημα σέ κάθε διατεταγμένο ζεῦγος (α,β) τοῦ $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}^*$ ἀντιστοιχεῖ μοναδικό διατεταγμένο ζεῦγος (π,υ) τοῦ $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}_+$ τέτοιο, ὥστε νά ἰσχύουν οἱ σχέσεις $\alpha=\beta\pi+\upsilon$ καί $0\leq\upsilon<|\beta|$.

Δηλαδή ἔχουμε μία πράξη τοῦ $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}^*$ στό $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}_+$. Ἡ πράξη αὐτή ὀνομάζεται **ἀλγοριθμική διαίρεση.** Οἱ ἀριθμοί α, $\beta(\neq 0)$, π καί υ ὀνομάζονται ἀντιστοίχως **διαιρετέος, διαιρέτης, πηλίκο** καί **ὑπόλοιπο τῆς (ἀλγοριθμικῆς) διαιρέσεως τοῦ α μέ τό β.** Ἡ σχέση $\alpha=\beta\pi+\upsilon$ (ὅπου $0\leq\upsilon<|\beta|$) ὀνομάζεται **ἰσότητα τῆς (ἀλγοριθμικῆς) διαιρέσεως τοῦ α μέ τό β.**

Παρατήρηση. Εἶναι φανερό ὅτι, ἄν στήν ἰσότητα τῆς ἀλγοριθμικῆς διαιρέσεως τοῦ α μέ τό β εἶναι $\upsilon=0$, τότε ὁ β εἶναι παράγοντας τοῦ α.

Παραδείγματα.

1. Ἡ ἀλγοριθμική διαίρεση τοῦ -35 μέ τό 6 δίνει πηλίκο $\pi=-6$ καί ὑπόλοιπο $\upsilon=1$:
$$-35=6(-6)+1$$
2. Ἡ σχέση $-14=4(-5)+5$ δέν εἶναι ἰσότητα τῆς διαιρέσεως τοῦ -14 μέ τό 4 οὔτε τῆς διαιρέσεως τοῦ -14 μέ τό -5, γιατί εἶναι $5>4$ καί $5\geq|-5|$.
3. Ἄν $\alpha\in\mathbf{Z}$, τότε τά δυνατά ὑπόλοιπα τῆς διαιρέσεως τοῦ α μέ τό 5 εἶναι 0,1,2,3 ἤ 4, γιατί τό ὑπόλοιπο υ αὐτῆς τῆς διαιρέσεως ἱκανοποιεῖ τή σχέση $0\leq\upsilon<5$.

Ἡ ἀλγοριθμική διαίρεση ἑνός ἀκεραίου μέ τό 2 εἶναι δυνατό νά δώσει ὑπόλοιπο 0 ἤ 1. Εἶναι γνωστό ὅτι στήν πρώτη περίπτωση ὁ ἀκέραιος ὀνομάζεται *ἄρτιος*, ἐνῶ στή δεύτερη *περιττός*. Ἔτσι ἕνας ἄρτιος ἀκέραιος ἔχει τή μορφή $2k$, ἐνῶ ἕνας περιττός τή μορφή $2k+1$, ὅπου $k\in\mathbf{Z}$.

Οἱ ἀκέραιοι -8, 4, -6, 10 εἶναι ἄρτιοι, ἐνῶ οἱ 5, -7, 9, -15 περιττοί.

Ἡ ἀλγοριθμική διαίρεση τοῦ 32 μέ τό 12 δίνει ὑπόλοιπο 8. Παρατηροῦμε ὅτι ὁ ἀκέραιος 2, πού εἶναι κοινός διαιρέτης τῶν 32 καί 12, εἶναι διαιρέτης καί τοῦ ὑπόλοιπου 8 καί ἐπιπλέον ὁ ἀκέραιος 4, πού εἶναι κοινός διαιρέτης τοῦ 12 καί τοῦ ὑπόλοιπου 8, εἶναι διαιρέτης καί τοῦ διαιρετέου 32. Οἱ ἰδιότητες αὐτές ἰσχύουν γενικά, ὅπως δείχνει ἡ παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 1. Ἄν υ εἶναι τό ὑπόλοιπο τῆς ἀλγοριθμικῆς διαιρέσεως τοῦ α μέ τό β καί $\delta\in\mathbf{Z}$, τότε ἰσχύουν

(i) $\delta|\alpha$ καί $\delta|\beta \Rightarrow \delta|\upsilon$,

(ii) $\delta|\beta$ καί $\delta|\upsilon \Rightarrow \delta|\alpha$.

'Απόδειξη. (i) 'Από τήν ἰσότητα τῆς ἀλγοριθμικῆς διαιρέσεως τοῦ α μέ τό β παίρνουμε

$$\alpha - \beta\pi = \upsilon \qquad (1)$$

'Αφοῦ $\delta|\alpha$ καί $\delta|\beta$, λόγω τῆς προτάσεως 1 τῆς 1.1 ὁ δ εἶναι διαιρέτης τοῦ πρώτου μέλους τῆς (1) καί ἐπομένως $\delta|\upsilon$.

(ii) 'Αποδεικνύεται ὅμοια.

Παρατήρηση. Στό παράδειγμα πού ἀναφέραμε πρίν ἀπό τήν πρόταση 1 ὁ ἀκέραιος 8 εἶναι κοινός διαιρέτης τοῦ 32 καί τοῦ ὑπόλοιπου 8, ἀλλά δέν εἶναι διαιρέτης τοῦ 12. Ἔτσι στήν πρόταση 1 **δέν** ἰσχύει ἡ συνεπαγωγή:

$$\delta|\alpha \ \text{ καί } \ \delta|\upsilon \Rightarrow \delta|\beta.$$

Πρόταση 2. Ἔστω $\alpha, \beta \in \mathbf{Z}$ καί $\gamma \in \mathbf{Z}^*$. Τότε οἱ διαιρέσεις τῶν α καί β μέ τό γ δίνουν τό ἴδιο ὑπόλοιπο, ὅταν καί μόνο ὅταν ἡ διαφορά $\alpha - \beta$ εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ γ.

'Απόδειξη. Ἄν οἱ διαιρέσεις τῶν α καί β μέ τό γ δίνουν τό ἴδιο ὑπόλοιπο, τότε ἔχουμε

$$\alpha = \gamma\pi_1 + \upsilon \quad \text{καί} \quad \beta = \gamma\pi_2 + \upsilon \quad (\text{ὅπου } 0 \leq \upsilon < |\gamma|),$$

ὁπότε μέ ἀφαίρεση κατά μέλη παίρνουμε

$$\alpha - \beta = \gamma\,(\pi_1 - \pi_2),$$

πού σημαίνει ὅτι τό $\alpha - \beta$ εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ γ, ἀφοῦ $\pi_1 - \pi_2 \in \mathbf{Z}$.

'Αντίστροφα, ἄν εἶναι $\alpha - \beta = \gamma . \lambda$, τότε ἔχοντας ὑπόψη τήν ἰσότητα τῆς διαιρέσεως τοῦ β μέ τό γ, δηλαδή τήν

$$\beta = \gamma\pi + \upsilon \qquad (\text{ὅπου } 0 \leq \upsilon < |\gamma|),$$

βρίσκουμε

$$\alpha - (\gamma\pi + \upsilon) = \gamma \cdot \lambda$$

ἤ

$$\alpha = \gamma\,(\lambda + \pi) + \upsilon.$$

'Επειδή εἶναι $0 \leq \upsilon < |\gamma|$, ἡ τελευταία σχέση εἶναι ἡ ἰσότητα τῆς διαιρέσεως τοῦ α μέ τό γ καί ἐπομένως τό ὑπόλοιπό της εἶναι υ.

1.4. 'Ασκήσεις.

1. Ἄν $\alpha \equiv \beta \pmod 2$, δεῖξτε ὅτι ὁ ἀκέραιος $\alpha + \beta$ εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ 2.
2. Ἄν $\nu = 4\kappa + 1$, ὅπου $\kappa \in \mathbf{Z}$, δεῖξτε ὅτι $4 \mid \nu^3 + 2\nu + 1$.
3. Ἄν $\alpha_1 \equiv \alpha_2 \pmod \nu$ καί $\beta_1 \equiv \beta_2 \pmod \nu$, δεῖξτε ὅτι $\alpha_1 + \beta_1 \equiv \alpha_2 + \beta_2 \pmod \nu$ καί $\alpha_1\beta_1 \equiv \alpha_2\beta_2 \pmod \nu$.
4. Δεῖξτε ὅτι τό γινόμενο δύο διαδοχικῶν ἀκεραίων εἶναι ἄρτιος ἀριθμός καί ἔπειτα ὅτι τό τετράγωνο ἑνός περιττοῦ ἀριθμοῦ εἶναι τῆς μορφῆς $8\kappa + 1$, ὅπου $\kappa \in \mathbf{Z}$.
5. Ἄν α, β, x εἶναι ἀκέραιοι τέτοιοι, ὥστε $\alpha \equiv \beta \pmod 2$ καί $x = \alpha^2 + \beta^2$, δεῖξτε ὅτι τό $\frac{x}{2}$ εἶναι ἄθροισμα τετραγώνων δύο ἀκεραίων ἀριθμῶν.

6. Δεῖξτε ὅτι γιά κάθε $\lambda \in Z$ ὁ ἀκέραιος $\lambda(\lambda^2+2)$ εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ 3.
7. Ἄν δύο ἀκέραιοι δέν εἶναι πολλαπλάσια τοῦ 3, δεῖξτε ὅτι τό ἄθροισμα ἤ ἡ διαφορά τους διαιρεῖται μέ τό 3.
8. Ἄν ἕνας ἀκέραιος δέν εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ 3, δεῖξτε ὅτι τό τετράγωνό του εἶναι τῆς μορφῆς $3\lambda+1$, ὅπου $\lambda \in Z$.
9. Ἄν $\kappa \in Z$, δεῖξτε ὅτι $6 \mid \kappa(\kappa+1)(2\kappa+1)$.
10. Ἄν ἕνας ἀκέραιος α δέν εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ 5, δεῖξτε ὅτι ἡ διαίρεση τοῦ α^2 μέ τό 5 δίνει ὑπόλοιπο 1 ἤ 4. Στή συνέχεια δεῖξτε ὅτι, ἄν οἱ ἀκέραιοι x καί y δέν εἶναι πολλαπλάσια τοῦ 5, τότε $5 \mid x^4-y^4$.
11. Ἡ διαίρεση ἑνός ἀκεραίου α μέ τό 65 δίνει πηλίκο ἕναν ἄρτιο ἀριθμό λ καί ὑπόλοιπο λ^3. Προσδιορίστε τούς ἀκεραίους α.
12. Ἄν ν εἶναι φυσικός ἀριθμός, δεῖξτε ὅτι $9 \mid 2^{4\nu+1}-2^{2\nu}-1$.
13. Δεῖξτε ὅτι γιά κάθε φυσικό ἀριθμό ν ἰσχύουν

    α) $5 \mid 3^{3\nu+2} + 2^{\nu+4}$ β) $7 \mid 3^{2\nu+1} + 2^{\nu+2}$

    γ) $11 \mid 3^{2\nu+2} + 2^{6\nu+1}$ δ) $17 \mid 3.5^{2\nu-1} + 2^{3\nu-2}$.
14. Ἄν $\alpha,\beta,\rho \in Z$ καί οἱ ἀκέραιοι $\alpha^2-\beta$ καί $\beta^2-\alpha$ εἶναι πολλαπλάσια τοῦ ρ, δεῖξτε ὅτι οἱ διαιρέσεις τῶν $\alpha\beta^2+\alpha^2\beta$ καί $\alpha^2+\beta^2$ μέ τό ρ δίνουν τό ἴδιο ὑπόλοιπο.
15. Βρεῖτε τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως τοῦ $9^{30} + 17^{10}$ μέ τό 8.
16. Ἄν ρ,λ εἶναι ἀκέραιοι μέ $4\rho+1 = 3\lambda$, βρεῖτε τό γενικό τύπο τοῦ ρ.

1.5. Μέγιστος κοινός διαιρέτης ἀκεραίων. — Ἀλγόριθμος τοῦ Εὐκλείδη.

Ἄν α καί β εἶναι δύο ἀκέραιοι, τότε τό σύνολο $\Delta(\alpha) \cap \Delta(\beta)$ περιέχει ὅλους τούς κοινούς θετικούς διαιρέτες τῶν α καί β, ἕνας ἀπό τούς ὁποίους εἶναι καί ὁ ἀκέραιος 1. Στήν περίπτωση πού ἕνας τουλάχιστον ἀπό τούς α καί β εἶναι $\neq 0$, τό σύνολο $\Delta(\alpha) \cap \Delta(\beta)$ εἶναι πεπερασμένο (Πορ. 3 τῆς 1.1.) καί ἑπομένως ἔχει μέγιστο στοιχεῖο. Τό μέγιστο αὐτό στοιχεῖο τοῦ $\Delta(\alpha) \cap \Delta(\beta)$ ὀνομάζεται **ὁ μέγιστος κοινός διαιρέτης (ΜΚΔ) τῶν α καί β** καί συμβολίζεται μέ (α,β).

Ἔτσι ὁ μέγιστος κοινός διαιρέτης δύο ἀκεραίων α καί β (πού ἕνας τουλάχιστον εἶναι $\neq 0$) εἶναι ὁ μοναδικός **θετικός** ἀκέραιος δ, πού ἱκανοποιεῖ τίς ἰδιότητες:

(i) $\delta \mid \alpha$ καί $\delta \mid \beta$,

(i)) $\gamma \mid \alpha$ καί $\gamma \mid \beta \Rightarrow \gamma \leq \delta$.

Ἐπειδή τό σύνολο

$$\Delta(0) \cap \Delta(0) = Z_+^*$$

δέν ἔχει μέγιστο στοιχεῖο, μέγιστος κοινός διαιρέτης τῶν $\alpha = 0$ καί $\beta = 0$ δέν ὁρίζεται. Ἔτσι, ὅταν στά ἑπόμενα ἀναφερόμαστε στό μέγιστο κοινό διαιρέτη δύο ἀκεραίων, θά ὑποθέτουμε ὅτι ἕνας τουλάχιστον ἀπό αὐτούς εἶναι $\neq 0$.

Παραδείγματα.

1. Ἐπειδή $\Delta(-8) = \{1,2,4,8\}$ καί $\Delta(20) = \{1,2,4,5,10,20\}$, ἔχουμε $\Delta(-8) \cap \Delta(20) = \{1,2,4\}$ καί ἑπομένως $(-8, 20) = 4$.

2. Ἐπειδή ὁ μόνος κοινός θετικός διαιρέτης τῶν 4 καί 9 εἶναι ἡ μονάδα, ἔχουμε $(4,9) = 1$.

Παρατηρήσεις

1. Ἐπειδή $\Delta(\alpha) = \Delta(|\alpha|)$ καί $\Delta(\beta) = \Delta(|\beta|)$ (Παρατ. 6 τῆς 1.1), ἔχουμε
$$\Delta(\alpha) \cap \Delta(\beta) = \Delta(|\alpha|) \cap \Delta(|\beta|)$$
καί ἐπομένως
$$\boxed{(\alpha,\beta) = (|\alpha|, |\beta|)}$$
2. Ἄν $\alpha \in \mathbf{Z}^*$, τότε ὁ $|\alpha|$ εἶναι ὁ μέγιστος διαιρέτης τοῦ α (Προτ. 1 (iv) τῆς 1.1). Ἐπειδή ἐπιπλέον ἰσχύει $\Delta(\alpha) \cap \Delta(0) = \Delta(\alpha)$, ἔχουμε
$$(\alpha,0) = |\alpha|$$
3. Ἄν $\beta \in \mathbf{Z}^*$ καί $\beta|\alpha$, τότε, ἀφοῦ ὁ μέγιστος διαιρέτης τοῦ β εἶναι ὁ ἀκέραιος $|\beta|$ καί $|\beta| \in \Delta(\alpha)$, ἔχουμε $(\alpha,\beta) = |\beta|$.

Ἔστω
$$\alpha = \beta\pi + \upsilon \qquad (\text{ὅπου } 0 \leq \upsilon < |\beta|)$$
ἡ ἰσότητα τῆς ἀλγοριθμικῆς διαιρέσεως τοῦ α μέ τό $\beta(\neq 0)$.
Ἔχουμε μάθει (Προτ. 1 τῆς 1.3) ὅτι κάθε κοινός διαιρέτης τῶν α καί β εἶναι διαιρέτης τοῦ υ καί κάθε κοινός διαιρέτης τῶν β καί υ εἶναι διαιρέτης τοῦ α. Ἑπομένως τά σύνολα $\Delta(\alpha) \cap \Delta(\beta)$ καί $\Delta(\beta) \cap \Delta(\upsilon)$ ταυτίζονται, πού σημαίνει ὅτι $(\alpha,\beta) = (\beta,\upsilon)$. Ἔτσι ἔχουμε τήν ἀκόλουθη πρόταση.

Πρόταση 1. Ἄν υ εἶναι τό ὑπόλοιπο τῆς ἀλγοριθμικῆς διαιρέσεως τοῦ α μέ τό $\beta\ (\neq 0)$, τότε
$$(\alpha,\beta) = (\beta,\upsilon).$$

Μέ τή βοήθεια τῆς προηγούμενης προτάσεως θά ἐξηγήσουμε μιά μέθοδο, μέ τήν ὁποία θά μποροῦμε νά ὑπολογίζουμε τό μέγιστο κοινό διαιρέτη δύο θετικῶν ἀκεραίων. Ἡ μέθοδος αὐτή ὀνομάζεται **ἀλγόριθμος τοῦ Εὐκλείδη**.

Ἄς δοῦμε πρῶτα τή μέθοδο αὐτή μέ ἕνα παράδειγμα.

Παράδειγμα 3. Θέλουμε νά ὑπολογίσουμε τό ΜΚΔ τῶν 306 καί 108. Γράφουμε τήν ἰσότητα τῆς ἀλγοριθμικῆς διαιρέσεως τοῦ 306 μέ τό 108:
$$306 = 108 \,.\, 2 + 90,$$
ἔπειτα τήν ἰσότητα τῆς διαιρέσεως τοῦ 108 μέ τό 90:
$$108 = 90 \,.\, 1 + 18$$
καί τέλος τήν ἰσότητα τῆς διαιρέσεως τοῦ 90 μέ τό 18:
$$90 = 18.5 + 0.$$
Λόγω τῆς προηγούμενης προτάσεως ἔχουμε
$$(306, 108) = (108, 90) = (90, 18) = (18,0) = 18.$$

Ἄς ἐξετάσουμε τώρα τή μέθοδο αὐτή γενικά. Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι ἔχουν δοθεῖ δύο μή μηδενικοί ἀκέραιοι α καί β καί θέλουμε νά βροῦμε τό (α,β). Ἐπειδή $(\alpha,\beta) = (|\alpha|, |\beta|)$ (Παρατ. 1) μποροῦμε νά ὑποθέσουμε ὅτι οἱ α,β εἶναι θετικοί ἀκέραιοι.

Γιά τή διαίρεση τοῦ α μέ τό β ἔχουμε:

$$\alpha = \beta\pi + \upsilon \quad \text{καί} \quad 0 \leq \upsilon < \beta.$$

Ἄν εἶναι $\upsilon = 0$, τότε $\beta|\alpha$, καί ἑπομένως $(\alpha,\beta) = \beta$ (Παρατ. 3).
Ἄν εἶναι $\upsilon \neq 0$, τότε γιά τή διαίρεση τοῦ β μέ τό υ ἔχουμε:

$$\beta = \upsilon\pi_1 + \upsilon_1 \quad \text{καί} \quad 0 \leq \upsilon_1 < \upsilon.$$

Ἄν εἶναι $\upsilon_1 \neq 0$, τότε γιά τή διαίρεση τοῦ υ μέ τό υ_1 ὅμοια ἔχουμε:

$$\upsilon = \upsilon_1\pi_2 + \upsilon_2 \quad \text{καί} \quad 0 \leq \upsilon_2 < \upsilon_1$$

καί συνεχίζουμε αὐτή τή διαδικασία μέχρι νά βροῦμε ὑπόλοιπο μηδέν· τοῦτο συμβαίνει, γιατί γιά τούς μή ἀρνητικούς ἀκεραίους $\upsilon, \upsilon_1, \upsilon_2, \ldots$ ἰσχύει

$$\beta > \upsilon > \upsilon_1 > \upsilon_2 > \ldots$$

καί τό πλῆθος τους εἶναι τό πολύ β. Ἔστω $\upsilon_{\nu+1} = 0$. Τότε ἔχουμε τίς ἀκόλουθες ἰσότητες

$$\begin{array}{ll}
\alpha = \beta\pi + \upsilon & (I_0) \\
\beta = \upsilon\pi_1 + \upsilon_1 & (I_1) \\
\upsilon = \upsilon_1\pi_2 + \upsilon_2 & (I_2) \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots \\
\upsilon_{\nu-2} = \upsilon_{\nu-1}\pi_\nu + \upsilon_\nu & (I_\nu) \\
\upsilon_{\nu-1} = \upsilon_\nu\pi_{\nu+1} + 0 & (I_{\nu+1})
\end{array}$$

Τό τελευταῖο μή μηδενικό ὑπόλοιπο υ_ν εἶναι ὁ ΜΚΔ τῶν α καί β, γιατί σύμφωνα μέ τήν πρόταση 1 ἔχουμε

$$(\alpha,\beta) = (\beta,\upsilon) = (\upsilon,\upsilon_1) = \ldots = (\upsilon_{\nu-2}, \upsilon_{\nu-1}) = (\upsilon_{\nu-1},\upsilon_\nu) = (\upsilon_\nu,0) = \upsilon_\nu$$

Ἄν χρησιμοποιήσει κανείς τίς ἰσότητες $(I_0) - (I_{\nu+1})$ τοῦ παραπάνω ἀλγόριθμου τοῦ Εὐκλείδη, μπορεῖ νά ἀποδείξει τήν ἀκόλουθη πρόταση.

Πρόταση 2. Ἄν δύο ἀκέραιοι διαιρεθοῦν μέ ἕνα θετικό κοινό διαιρέτη τους γ, τότε ὁ μέγιστος κοινός διαιρέτης τους διαιρεῖται μέ τό γ.

Πόρισμα. Ἄν $(\alpha,\beta) = \delta$, τότε

$$\left(\frac{\alpha}{\delta}, \frac{\beta}{\delta}\right) = 1.$$

Ἰδιαίτερο ἐνδιαφέρον παρουσιάζουν ἐκεῖνοι οἱ ἀκέραιοι α καί β, γιά τούς ὁποίους ἰσχύει $(\alpha,\beta) = 1$. Στήν περίπτωση αὐτή ὁ μόνος θετικός κοινός διαιρέτης τῶν α καί β εἶναι ἡ μονάδα .Δύο ἀκέραιοι, πού ἔχουν μέγιστο κοινό διαιρέτη τή μονάδα, ὀνομάζονται **πρῶτοι μεταξύ τους** ἤ **σχετικῶς πρῶτοι ἀριθμοί.** Π.χ. οἱ ἀκέραιοι 6 καί 5 εἶναι σχετικῶς πρῶτοι ἀριθμοί ,γιατί $(6,5) = 1$.

Τό προηγούμενο πόρισμα μπορεῖ τώρα νά διατυπωθεῖ μέ τόν ἀκόλουθο τρόπο:

Ἄν δύο ἀκέραιοι ἀριθμοί διαιρεθοῦν μέ τό μέγιστο κοινό διαιρέτη τους, γίνονται σχετικῶς πρῶτοι ἀριθμοί.

Θά δοῦμε τώρα ὅτι ὁ ΜΚΔ δ δύο ἀκεραίων α καί β μπορεῖ νά γραφτεῖ σάν γραμμικός συνδυασμός τῶν α καί β, δηλαδή

$$\delta = \alpha\alpha' + \beta\beta' \qquad (1),$$

ὅπου $\alpha', \beta' \in \mathbf{Z}$.

Ἄς δοῦμε πρῶτα ἕνα παράδειγμα προσδιορισμοῦ ἑνός ζεύγους ἀκεραίων α' καί β', ὥστε νά ἱκανοποιεῖται ἡ σχέση (1).

Παράδειγμα 4. Στό παράδειγμα 3 βρήκαμε ὅτι $(306,108) = 18$. Ὁ ἀλγόριθμος τοῦ Εὐκλείδη ἔδωσε ἐκεῖ τίς ἀκόλουθες ἰσότητες:

$$306 = 108 \,.\, 2 + 90, \quad 108 = 90.1 + 18, \quad 90 = 18.5$$

Ἡ πρώτη ἀπό αὐτές δίνει $90 = 306 - 108.2$, ὁπότε ἀπό τή δεύτερη βρίσκουμε

$$18 = 108 - 90.1 = 108 - (306 - 108.2).1 = 306.(-1) + 108.3,$$

δηλαδή $18 = 306\,(-1) + 108.3$. Ἄρα $\alpha' = -1$ καί $\beta' = 3$.

Ἄν ἐργαστεῖ κανείς ὅπως στό προηγούμενο παράδειγμα, μπορεῖ, χρησιμοποιώντας τίς ἰσότητες (I_0)–(I_ν) τοῦ ἀλγόριθμου τοῦ Εὐκλείδη, νά ἀποδείξει τήν προηγούμενη σχέση (1) γενικά.
Στή συνέχεια ὅμως θά ἀποδείξουμε, ἀνεξάρτητα ἀπό τόν ἀλγόριθμο τοῦ Εὐκλείδη, τήν παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 3. Ἄν $\delta = (\alpha, \beta)$, τότε ὑπάρχουν ἀκέραιοι α' καί β' τέτοιοι, ὥστε νά ἰσχύει:

$$\delta = \alpha\alpha' + \beta\beta'$$

καί ὁ δ εἶναι ὁ μικρότερος θετικός ἀκέραιος, πού μπορεῖ νά γραφτεῖ σάν γραμμικός συνδυασμός τῶν α καί β.

Ἀπόδειξη. Θεωροῦμε τό σύνολο Α ὅλων τῶν *θετικῶν* ἀκεραίων τῆς μορφῆς $\alpha x + \beta y$ μέ $x, y \in \mathbf{Z}$, δηλαδή

$$A = \{\alpha x + \beta y \mid x, y \in \mathbf{Z} \quad \text{καί} \quad \alpha x + \beta y > 0\}$$

Ἄν πάρουμε $x = \alpha$ καί $y = \beta$, τότε ἔχουμε $\alpha x + \beta y = \alpha^2 + \beta^2 > 0$ (ἀφοῦ ἕνας ἀπό τούς α,β εἶναι $\neq 0$). Ἔτσι τό σύνολο Α εἶναι $\neq \emptyset$, ὁπότε σύμφωνα μέ τό ἀξίωμα τῆς παραγράφου 1 ἔχει ἐλάχιστο στοιχεῖο, ἔστω δ'. Ἀφοῦ $\delta' \in A$, θά ὑπάρχουν ἀκέραιοι α' καί β' τέτοιοι, ὥστε

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' = \delta' \qquad (1)$$

Θά ἀποδείξουμε ὅτι ὁ *θετικός* ἀκέραιος δ' εἶναι διαιρέτης τοῦ α. Σύμφωνα μέ τό θεώρημα τῆς 1.3 ὑπάρχουν ἀκέραιοι π καί υ τέτοιοι, ὥστε

$$\alpha = \delta'\pi + \upsilon \quad \text{καί} \quad 0 \leq \upsilon < \delta'.$$

Τότε ἔχουμε

$$\upsilon = \alpha - \delta'\pi = \alpha - \pi\,(\alpha\alpha' + \beta\beta') = \alpha\,(1 - \pi\alpha') + \beta(-\pi\beta'),$$

δηλαδή

$$\upsilon = \alpha\,(1 - \pi\alpha') + \beta\,(-\pi\beta').$$

Ἄν εἶναι $\upsilon > 0$, τότε ἀπό τήν τελευταία ἰσότητα συμπεραίνουμε ὅτι $\upsilon \in A$. Ἀλλά αὐτό εἶναι ἄτοπο, ἀφοῦ ἰσχύει $\upsilon < \delta'$ καί τό δ' εἶναι τό ἐλάχιστο στοιχεῖο τοῦ A. Ἑπομένως εἶναι $\upsilon = 0$ καί ἄρα $\alpha = \delta'\pi$, πού σημαίνει ὅτι $\delta'|\alpha$. Μέ ὅμοιο τρόπο μποροῦμε νά ἀποδείξουμε ὅτι $\delta'|\beta$. Ἄρα ὁ δ' εἶναι κοινός διαιρέτης τῶν α καί β. Ἄν τώρα γ εἶναι ἕνας κοινός διαιρέτης τῶν α καί β, τότε ἀπό τήν ἰσότητα (1) καί τήν πρόταση 1 τῆς 1.1 συμπεραίνουμε ὅτι ὁ γ εἶναι διαιρέτης τοῦ δ' καί ἑπομένως $\gamma \leq \delta'$. Ἄρα $\delta' = \delta = (\alpha,\beta)$.

Στήν ἀπόδειξη τῆς προηγούμενης προτάσεως εἴδαμε ὅτι κάθε κοινός διαιρέτης τῶν α καί β εἶναι ἐπίσης διαιρέτης τοῦ $\delta' = \delta$ καί ἑπομένως.

$$\Delta(\alpha) \cap \Delta(\beta) \subseteq \Delta(\delta).$$

Ἀντίστροφα, ἄν $x \in \Delta(\delta)$, τότε $x|\delta$ καί, ἀφοῦ $\delta|\alpha$ καί $\delta|\beta$, λόγω τῆς μεταβατικῆς ἰδιότητας ἔχουμε $x|\alpha$ καί $x|\beta$, ὁπότε $x \in \Delta(\alpha) \cap \Delta(\beta)$ καί ἄρα $\Delta(\delta) \subseteq \Delta(\alpha) \cap \Delta(\beta)$
Ἔτσι ἔχουμε τήν ἀκόλουθη πρόταση.

Πρόταση 4. Ἄν $\delta = (\alpha,\beta)$, τότε

$$\Delta(\delta) = \Delta(\alpha) \cap \Delta(\beta).$$

Σημείωση. Ἀξίζει νά τονίσουμε ὅτι ἡ πρόταση 3 δέ δηλώνει ὅτι οἱ ἀκέραιοι α' καί β' εἶναι μοναδικοί. Στό παράδειγμα 1 εἴδαμε ὅτι $(-8, 20) = 4$. Ἡ πρόταση 3 ἐξασφαλίζει ὅτι ὑπάρχουν ἀκέραιοι α' καί β' τέτοιοι, ὥστε

$$-8\alpha' + 20\beta' = 4.$$

Εἶναι εὔκολο νά διαπιστώσουμε ὅτι ἡ ἐξίσωση αὐτή ἐπαληθεύεται γιά $\alpha' = 2$ καί $\beta' = 1$ ἤ γιά $\alpha' = -3$ καί $\beta' = -1$. Στήν παράγραφο 2 θά μάθουμε ὅτι ὑπάρχουν καί ἄλλα ζεύγη ἀκεραίων ἀριθμῶν, πού ἐπαληθεύουν τήν παραπάνω ἐξίσωση.

Ἡ ἔννοια τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτη γενικεύεται καί γιά περισσότερους ἀπό δύο ἀκεραίους. Ἐδῶ θά ἐνδιαφερθοῦμε μόνο γιά τό μέγιστο κοινό διαιρέτη τριῶν ἀκεραίων. Ἄν α,β,γ εἶναι τρεῖς ἀκέραιοι, πού ἕνας τουλάχιστον εἶναι $\neq 0$, τότε τό μέγιστο στοιχεῖο τοῦ (πεπερασμένου) συνόλου $\Delta(\alpha) \cap \Delta(\beta) \cap \Delta(\gamma)$ τῶν κοινῶν θετικῶν διαιρετῶν τους ὀνομάζεται **ὁ μέγιστος κοινός διαιρέτης τῶν α,β καί γ** καί συμβολίζεται μέ (α,β,γ). Στήν περίπτωση πού εἶναι $(\alpha,\beta,\gamma) = 1$, οἱ ἀκέραιοι α,β καί γ θά ὀνομάζονται ἐπίσης *πρῶτοι μεταξύ τους ἤ σχετικῶς πρῶτοι ἀριθμοί.*

Ἄν ὑποθέσουμε ὅτι ἕνας ἀπό τούς β,γ εἶναι $\neq 0$ καί ὀνομάσουμε δ τό ΜΚΔ τους, δηλαδή $\delta = (\beta,\gamma)$, τότε λόγω τῆς προτάσεως 4 ἔχουμε

$$\Delta(\alpha) \cap \Delta(\beta) \cap \Delta(\gamma) = \Delta(\alpha) \cap [\Delta(\beta) \cap \Delta(\gamma)] = \Delta(\alpha) \cap \Delta(\delta)$$

καί ἑπομένως

$$(\alpha,\beta,\gamma) = (\alpha, \delta)$$

Ἄρα

$$\boxed{(\alpha, \beta, \gamma) = (\alpha, (\beta,\gamma))} \qquad (2)$$

Ἔτσι ἔχουμε

$$(12, 4, -8) = (12, (4, -8)) = (12, 4) = 4,$$
$$(-3, 5, 9) = (-3, (5, 9)) = (-3, 1) = 1,$$
$$(-8, 0, 0) = (0, -8, 0) = (0, (-8, 0)) = (0,8) = 8$$

Μέ τή βοήθεια τῆς (2) καί τῆς προτάσεως 2 μπορεῖ νά ἀποδείξει κανείς ὅτι

$$\boxed{(\alpha, \beta, \gamma) = \delta \;\rightarrow\; \left(\frac{\alpha}{\delta}, \frac{\beta}{\delta}, \frac{\gamma}{\delta}\right) = 1}$$

1.6. Προτάσεις μέ πρώτους καί σχετικῶς πρώτους ἀριθμούς.

Ὁ πρῶτος ἀριθμός 3 δέ διαιρεῖ τό 10. Παρατηροῦμε ὅτι οἱ ἀριθμοί αὐτοί εἶναι σχετικῶς πρῶτοι, δηλαδή $(3,10) = 1$. Ἡ ἰδιότητα αὐτή ἰσχύει γενικά, ὅπως φαίνεται στήν παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 1. Ἄν p εἶναι πρῶτος ἀριθμός καί $\alpha \in \mathbf{Z}^*$, τότε ὁ p δέ διαιρεῖ τόν α, ὅταν καί μόνο ὅταν $(\alpha,p) = 1$.

Ἀπόδειξη. Ἄν ὁ p δέ διαιρεῖ τόν α, τότε καί ὁ $|p|$ δέν διαιρεῖ τόν α καί ἀφοῦ $\Delta(p) = \{1, |p|\}$, ὁ μόνος κοινός θετικός διαιρέτης τῶν α καί p εἶναι τό 1. Ἄρα $(\alpha,p) = 1$. Ἀντιστρόφως, ἄν $(\alpha,p) = 1$, τότε ὁ p δέν μπορεῖ νά εἶναι διαιρέτης τοῦ α, γιατί στήν ἀντίθετη περίπτωση θά ἔπρεπε νά διαιρεῖ τό μέγιστο κοινό διαιρέτη τους 1, πού εἶναι ἄτοπο, ἀφοῦ $p \neq \pm 1$.

Θά ἀποδείξουμε τώρα μιά πολύ χρήσιμη πρόταση, πού σχετίζεται μέ σχετικῶς πρώτους ἀριθμούς.

Πρόταση 2. Ἄν $\alpha,\beta,\kappa \in \mathbf{Z}^*$ μέ $(\alpha,\beta) = 1$ καί $\alpha|\beta\kappa$, τότε $\alpha|\kappa$.

Ἀπόδειξη. Ἀφοῦ $(\alpha,\beta) = 1$, ὑπάρχουν ἀκέραιοι α' καί β' τέτοιοι, ὥστε νά ἰσχύει ἡ ἰσότητα

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' = 1,$$

ὁπότε πολλαπλασιάζοντας καί τά δύο μέλη της μέ $\kappa \neq 0$ βρίσκουμε

$$\alpha\kappa\alpha' + \beta\kappa\beta' = \kappa. \qquad (1)$$

Ἀφοῦ ὁ α εἶναι διαιρέτης τοῦ $\beta\kappa$, θά διαιρεῖ καί τούς δύο ὅρους τοῦ πρώτου μέλους τῆς (1) καί ἑπομένως $\alpha|\kappa$.

Παράδειγμα. Ἄν $x, y \in \mathbf{Z}$ μέ $3x = 8y$, τότε σύμφωνα μέ τήν πρόταση 2 ἔχουμε $3 \mid y$ καί $8 \mid x$, ἀφοῦ $(3,8) = 1$.

Μποροῦμε τώρα νά ἀποδείξουμε τήν ἀκόλουθη πρόταση.

Πρόταση 3. Ἄν $\alpha,\beta \in \mathbf{Z}^*$ καί ὁ πρῶτος ἀριθμός p διαιρεῖ τό γινόμενο $\alpha.\beta$, τότε ὁ p διαιρεῖ ἕναν ἀπό τούς α,β.

Ἀπόδειξη. Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι ὁ p δέ διαιρεῖ τόν α. Τότε σύμφωνα μέ τήν πρόταση 1 ἔχουμε $(\alpha,p) = 1$ καί ἑπομένως λόγῳ τῆς προτάσεως 2 ὁ p εἶναι διαιρέτης τοῦ β.

Μέ τή μέθοδο τῆς τελείας ἐπαγωγῆς μπορεῖ νά ἀποδειχτεῖ τό ἀκόλουθο πόρισμα.

Πόρισμα. Ἄν $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu \in \mathbf{Z}^*$ καί ὁ πρῶτος ἀριθμός p διαιρεῖ τό γινόμενο $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \ldots \alpha_\nu$, τότε διαιρεῖ ἕναν ἀπό τούς $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$.

Παρατήρηση. Ἡ πρόταση 3 δέν ἀληθεύει κατ' ἀνάγκη, ὅταν ὁ p δέν εἶναι πρῶτος ἀριθμός. Π.χ. ὁ 8 διαιρεῖ τό γινόμενο 4.6, ἀλλά κανέναν ἀπό τούς 4 καί 6 δέ διαιρεῖ.

1.7. Ἐλάχιστο κοινό πολλαπλάσιο ἀκεραίων.

Ἄς συμβολίσουμε μέ Π(α) τό σύνολο τῶν θετικῶν πολλαπλασίων ἑνός ἀκεραίου α. Τότε $\Pi(0) = \varnothing$ καί

$$\Pi(\alpha) = \Pi(-\alpha) = \Pi(|\alpha|),$$

γιατί δύο ἀντίθετοι ἀριθμοί ἔχουν τά ἴδια πολλαπλάσια.

Ἄν δοθοῦν δύο ἀκέραιοι α καί β μέ $\alpha \cdot \beta \neq 0$, τότε τό σύνολο $\Pi(\alpha) \cap \Pi(\beta)$ τῶν κοινῶν θετικῶν πολλαπλασίων τῶν α καί β δέν εἶναι τό κενό, γιατί περιέχει τό στοιχεῖο $|\alpha| \cdot |\beta|$. Ἑπομένως τό σύνολο $\Pi(\alpha) \cap \Pi(\beta)$ ἔχει ἐλάχιστο στοιχεῖο, τό ὁποῖο ὀνομάζεται **τό ἐλάχιστο κοινό πολλαπλάσιο (ΕΚΠ) τῶν α καί β** καί συμβολίζεται μέ [α,β].

Ἔτσι τό ἐλάχιστο κοινό πολλαπλάσιο δύο ἀκεραίων α καί β μέ $\alpha \cdot \beta \neq 0$ εἶναι ὁ μοναδικός **θετικός** ἀκέραιος ε, πού ἱκανοποιεῖ τίς ἰδιότητες:

(i) $\alpha | \varepsilon$ καί $\beta | \varepsilon$,

(ii) ἄν $\alpha | \gamma$, $\beta | \gamma$ καί $\gamma \in \mathbf{Z}^*_+$, τότε $\varepsilon \leq \gamma$.

Παραδείγματα.

1. Ἐπειδή

$$\Pi(3) = \{3, 6, 9, \underline{12}, \ldots, 3\lambda, \ldots\} \quad \text{καί}$$
$$\Pi(4) = \{4, 8, \underline{12}, \ldots, 4\lambda, \ldots\},$$

ἔχουμε $[3,4] = 12$

2. Ὅμοια βρίσκουμε ὅτι

$$[4, -10] = 20, \quad [5,10] = 10 \quad \text{καί} \quad [-3,4] = 12$$

Παρατηρήσεις

1. Ἐπειδή ἰσχύει $\Pi(\alpha) \cap \Pi(\beta) = \Pi(|\alpha|) \cap \Pi(|\beta|)$, ἔχουμε

$$\boxed{[\alpha, \beta] = [|\alpha|, |\beta|]} \quad (\alpha, \beta \in \mathbf{Z}^*).$$

2. Ἄν $\alpha, \beta \in \mathbf{Z}^*$ καί $\beta | \alpha$, τότε, ἀφοῦ τό ἐλάχιστο θετικό πολλαπλάσιο τοῦ α εἶναι τό $|\alpha|$ καί ἐπιπλέον $|\alpha| \in \Pi(\beta)$, ἔχουμε $[\alpha, \beta] = |\alpha|$.

Θά ἐξετάσουμε τώρα ἀναλυτικά τή μορφή, πού ἔχουν τά κοινά θετικά πολλαπλάσια δύο ἀκεραίων α καί β μέ $\alpha . \beta \neq 0$. Γιά τό σκοπό αὐτό ἄς πάρουμε ἕνα κοινό θετικό πολλαπλάσιο μ τῶν α καί β. Ἀφοῦ $|\alpha| | \mu$, ὑπάρχει θετικός ἀκέραιος λ μέ τήν ἰδιότητα

$$\mu = |\alpha| \cdot \lambda \tag{1}$$

Ἐξάλλου, ἐπειδή $|\beta| \mid \mu$, ὁ ἀριθμός

$$\frac{\mu}{|\beta|} = \frac{|\alpha|\ \lambda}{|\beta|} \tag{2}$$

εἶναι ἕνας θετικός ἀκέραιος. Ἄν θέσουμε τώρα $(\alpha,\beta) = (|\alpha|, |\beta|) = \delta$, τότε ὑπάρχουν θετικοί ἀκέραιοι α_1 καί β_1 τέτοιοι, ὥστε $|\alpha| = \alpha_1 . \delta$, $|\beta| = \beta_1\delta$ καί $(\alpha_1,\beta_1) = 1$. Τότε λόγω τῆς (2) ἔχουμε

$$\frac{\mu}{|\beta|} = \frac{\alpha_1\lambda}{\beta_1}.$$

Ἐπειδή ὁ $\frac{\mu}{|\beta|}$ εἶναι ἀκέραιος, ἀπό τήν τελευταία ἰσότητα συμπεραίνουμε ὅτι ὁ β_1 εἶναι διαιρέτης τοῦ $\alpha_1\lambda$ καί, ἀφοῦ $(\alpha_1,\beta_1) = 1$, ὁ β_1 εἶναι διαιρέτης τοῦ λ (προτ. 2 τῆς 1.6) Ἑπομένως ὑπάρχει *θετικὸς* ἀκέραιος κ τέτοιος, ὥστε

$$\lambda = \beta_1 \cdot \kappa = \frac{|\beta|}{\delta}\ \kappa$$

Ἔτσι λόγω τῆς (1) τό κοινό θετικό πολλαπλάσιο μ τῶν α καί β ἔχει τή μορφή

$$\mu = \frac{|\alpha|\ |\beta|}{\delta}\ \kappa, \tag{3}$$

ὅπου κ θετικός ἀκέραιος. Ἀντιστρόφως, κάθε ἀκέραιος τῆς μορφῆς $\frac{|\alpha|\ |\beta|}{\delta}\ \kappa$ μέ κ θετικό ἀκέραιο εἶναι φανερό ὅτι εἶναι ἕνα κοινό θετικό πολλαπλάσιο τῶν α καί β. Ἄρα.

$$\Pi(\alpha) \cap \Pi(\beta) = \left\{ \frac{|\alpha|\ |\beta|}{\delta}\ \kappa \mid \kappa \text{ θετικός ἀκέραιος} \right\}.$$

Τό ἐλάχιστο στοιχεῖο αὐτοῦ τοῦ συνόλου προκύπτει γιά $\kappa = 1$ καί εἶναι τό

$$\varepsilon = \frac{|\alpha|\ |\beta|}{\delta}$$

Ἀπό τήν (3) συμπεραίνουμε τώρα ὅτι ἕνα κοινό πολλαπλάσιο μ τῶν α καί β ἔχει τή μορφή:

$$\mu = \varepsilon \cdot \kappa \qquad (\text{ὅπου } \kappa \text{ θετικός ἀκέραιος}),$$

Ἔτσι ἔχουμε ἀποδείξει τίς ἀκόλουθες δύο προτάσεις.

Πρόταση 1. Ἄν $\alpha, \beta \in \mathbf{Z}^*$ καί $[\alpha,\beta] = \varepsilon$, τότε

$$\Pi(\varepsilon) = \Pi(\alpha) \cap \Pi(\beta),$$

δηλαδή τό σύνολο τῶν κοινῶν θετικῶν πολλαπλασίων τῶν α καί β ταυτίζεται μέ τό σύνολο τῶν θετικῶν πολλαπλασίων τοῦ ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου τους.

Πρόταση 2. Τό ἐλάχιστο κοινό πολλαπλάσιο ε δύο ἀκεραίων α καί β μέ $\alpha\beta \neq 0$ δίνεται ἀπό τόν τύπο

$$\boxed{[\alpha,\beta] = \frac{|\alpha|\ |\beta|}{(\alpha,\beta)}}$$

Πόρισμα Ἰσχύει: $(\alpha,\beta) = 1 \Rightarrow [\alpha,\beta] = |\alpha|\ |\beta|$.

Λόγω τῆς προτάσεως 2 ἔχουμε:

$$[12, 8] = \frac{12\cdot 8}{(12,8)} = \frac{12\cdot 8}{4} = 24,$$

$$[-36, 14] = \frac{|-36|\cdot 14}{(-36,14)} = \frac{36\cdot 14}{2} = 252.$$

Ἡ ἔννοια τοῦ ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου γενικεύεται καί γιά περισσότερους ἀπό δύο ἀκεραίους. Ἐδῶ θά ἐνδιαφερθοῦμε μόνο γιά τό ἐλάχιστο κοινό πολλαπλάσιο τριῶν ἀκεραίων. Ἄν $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbf{Z}$ μέ $\alpha\cdot\beta\cdot\gamma \neq 0$, τότε τό ἐλάχιστο στοιχεῖο τοῦ συνόλου $\Pi(\alpha) \cap \Pi(\beta) \cap \Pi(\gamma)$ (πού εἶναι $\neq \varnothing$, ἀφοῦ περιέχει τό $|\alpha|\ |\beta|\ |\gamma|$) τῶν κοινῶν θετικῶν πολλαπλασίων τους ὀνομάζεται **τό ἐλάχιστο κοινό πολλαπλάσιο τῶν α,β καί γ** καί συμβολίζεται μέ $[\alpha,\beta,\gamma]$.

Ἄν $\varepsilon = [\alpha,\beta]$, τότε λόγω τῆς προτάσεως 1 ἔχουμε

$$\Pi(\alpha) \cap \Pi(\beta) \cap \Pi(\gamma) = (\Pi(\alpha) \cap \Pi(\beta)) \cap \Pi(\gamma) = \Pi(\varepsilon) \cap \Pi(\gamma)$$

καί ἑπομένως

$$[\alpha, \beta, \gamma] = [\varepsilon, \gamma].$$

Ἄρα

$$\boxed{[\alpha, \beta, \gamma)] = [[\alpha,\beta],\gamma]} \qquad (\alpha\cdot\beta\cdot\gamma \neq 0).$$

Ἔτσι ἔχουμε

$$[3, 4, 5] = [[3,4], 5] = [12,5] = 60.$$

1.8. Ἀνάλυση θετικῶν[1] ἀκεραίων σέ γινόμενο θετικῶν πρώτων παραγόντων.

Ἡ ἀνάλυση ἑνός θετικοῦ ἀκεραίου σέ γινόμενο θετικῶν πρώτων παραγόντων στηρίζεται στήν ἀκόλουθη πρόταση.

Πρόταση 1. Κάθε θετικός ἀκέραιος $\neq 1$ ἔχει διαιρέτη ἕναν πρῶτο ἀριθμό.

Ἀπόδειξη. Ἔστω $\alpha \in Z^*$ μέ $\alpha > 1$. Τότε τό σύνολο Α τῶν θετικῶν διαιρετῶν τοῦ α, πού εἶναι $\neq 1$, δέν εἶναι τό κενό, γιατί $\alpha \in A$. Ἑπομένως τό Α θά ἔχει ἐλάχιστο στοιχεῖο, ἔστω ρ. Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι ὁ ρ εἶναι σύνθετος ἀριθμός. Τότε ὁ ρ θά ἔχει διαιρέτη ἕνα θετικό ἀκέραιο β, διαφορετικό ἀπό 1 καί ρ. Ἀφοῦ

1. Μιά ἀνάλυση ἀρνητικοῦ ἀκεραίου σέ γινόμενο πρώτων παραγόντων ἀνάγεται στήν ἀνάλυση τοῦ ἀντιθέτου του σέ γινόμενο θετικῶν πρώτων παραγόντων.

$\beta|p$ καί $p|\alpha$, ἔχουμε $\beta|\alpha$ καί ἑπομένως $\beta \in A$. Αὐτό ὅμως εἶναι ἄτοπο, γιατί εἶναι $\beta < p$ καί τό p εἶναι τό ἐλάχιστο στοιχεῖο τοῦ A. Ἄρα ὁ p εἶναι πρῶτος ἀριθμός.

Παρατήρηση. Ἀπό τήν ἀπόδειξη τῆς προηγούμενης προτάσεως εἶναι φανερό ὅτι ὁ μικρότερος ἀπό τούς θετικούς διαιρέτες τοῦ α, πού εἶναι μεγαλύτεροι ἀπό τή μονάδα, εἶναι πρῶτος ἀριθμός.

Γενικά, ἕνας θετικός ἀκέραιος ($\neq 1$) μπορεῖ νά γραφτεῖ σάν γινόμενο θετικῶν παραγόντων κατά διάφορους τρόπους. Π.χ.

$$60 = 10 \cdot 6 = 12 \cdot 5.$$

Συχνά κάθε ἕνας ἀπό τούς παράγοντες αὐτούς μπορεῖ νά γραφτεῖ σάν γινόμενο θετικῶν παραγόντων καί αὐτό μπορεῖ νά συνεχιστεῖ, ὥσπου ὅλοι οἱ παράγοντες νά εἶναι πρῶτοι ἀριθμοί. Ἔτσι

$$60 = 10 \cdot 6 = (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 3) = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3$$
$$60 = 12 \cdot 5 = (6 \cdot 2) \cdot 5 = (3 \cdot 2 \cdot 2) \cdot 5 = 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5.$$

Παρατηροῦμε ὅτι καί στίς δύο περιπτώσεις οἱ (θετικοί) πρῶτοι παράγοντες τοῦ 60 εἶναι ἴδιοι. Ἡ ἰδιότητα αὐτή ἰσχύει γενικά καί ἐκφράζεται μέ ἕνα πολύ σπουδαῖο θεώρημα, πού ὀνομάζεται *θεμελιῶδες θεώρημα τῆς Ἀριθμητικῆς.*

Θεώρημα. Κάθε σύνθετος θετικός ἀριθμός ἀναλύεται σέ γινόμενο θετικῶν πρώτων ἀριθμῶν κατά μοναδικό τρόπο.

Ἀπόδειξη. Ἔστω α ἕνας θετικός σύνθετος ἀριθμός. Ἄν p_1 εἶναι ὁ μικρότερος θετικός πρῶτος διαιρέτης του (Πρόταση 1), τότε ἔχουμε

$$\alpha = p_1 \cdot \alpha_1 \quad , \quad \alpha_1 < \alpha$$

Ἄν ὁ α_1 εἶναι πρῶτος ἀριθμός, τότε ὁ α ἔχει ἀναλυθεῖ σέ γινόμενο θετικῶν πρώτων ἀριθμῶν. Ἄν ὁ α_1 εἶναι σύνθετος καί ὀνομάσουμε p_2 τό μικρότερο θετικό πρῶτο διαιρέτη του, τότε ἔχουμε

$$\alpha_1 = p_2 \cdot \alpha_2 \qquad \alpha_2 < \alpha_1.$$

Ἄν ὁ α_2 εἶναι πρῶτος, τότε ὁ α ἔχει ἀναλυθεῖ σέ γινόμενο θετικῶν πρώτων ἀριθμῶν: $\alpha = p_1 \cdot p_2 \cdot \alpha_2$. Ἄν ὁ α_2 εἶναι σύνθετος, ἐπαναλαμβάνουμε τήν ἴδια ἐργασία, μέχρι νά φθάσουμε σέ κάποιον πρῶτο ἀριθμό p_ν, ὁπότε $\alpha_{\nu-1} = p_\nu$.

Πολλαπλασιάζοντας ὅλες αὐτές τίς ἰσότητες καί ἁπλοποιώντας παίρνουμε τήν παρακάτω ἀνάλυση τοῦ α σέ γινόμενο πρώτων παραγόντων.

$$\alpha = p_1 p_2 \ldots p_\nu.$$

(ii) Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι ὑπάρχει μιά δεύτερη ἀνάλυση τοῦ ἴδιου ἀκεραίου α, σέ γινόμενο θετικῶν πρώτων παραγόντων: $\alpha = q_1 \cdot q_2 \ldots q_\mu$.

Τότε ἔχουμε

$$p_1 p_2 \ldots p_\nu = q_1 \cdot q_2 \ldots q_\mu \qquad (1)$$

Τό πρῶτο μέλος τῆς (1) διαιρεῖται μέ τό q_1, ὁπότε σύμφωνα μέ τό πόρισμα τῆς $1 \cdot 6$ τουλάχιστον ἕνας ἀπό τούς παράγοντες τοῦ πρώτου μέλους τῆς (1) πρέπει νά διαιρεῖται μέ τό q_1. Ἔστω $q_1|p_1$. Τότε σύμφωνα μέ τήν παρατήρηση 2 τῆς 1.2 εἶναι $q_1 = p_1$. Ἄν διαιρέσουμε καί τά δύο μέλη τῆς (1) μέ q_1, παίρνουμε τήν ἰσότητα

$$p_2p_3\ldots p_\nu = q_2q_3\ldots q_\mu \qquad (2)$$

Ἄν ἐργαστοῦμε ὅμοια καί στήν (2), βρίσκουμε $p_3 \cdot p_4 \ldots p_\nu = q_3 \cdot q_4 \ldots q_\mu$ κτλ, ὥσπου τελικά νά βροῦμε ὅτι ὅλοι οἱ παράγοντες τοῦ ἑνός μέλους, π.χ. τοῦ πρώτου, ἔχουν ἁπλοποιηθεῖ, ὁπότε θά εἶναι $\nu < \mu$. Ἀλλά τότε πρέπει καί οἱ παράγοντες τοῦ δεύτερου μέλους νά ἔχουν ἁπλοποιηθεῖ, γιατί ἀλλιῶς θά εἴχαμε τήν ἰσότητα

$$1 = q_{\nu+1}\, q_{\nu+2} \ldots q_\mu\,,$$

πού γιά θετικούς πρώτους ἀριθμούς δέν μπορεῖ νά ἰσχύει.

Ἄρα ἡ δεύτερη ἀνάλυση σέ γινόμενο πρώτων παραγόντων ταυτίζεται μέ τήν πρώτη.

Ἄμεσες συνέπειες τοῦ παραπάνω θεωρήματος εἶναι τά ἀκόλουθα πορίσματα.

Πόρισμα 1. Κάθε θετικός ἀκέραιος $\nu \neq 1$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ὡς ἑξῆς:

$$\nu = p_1^{\alpha_1}\, p_2^{\alpha_2} \ldots p_\kappa^{\alpha_\kappa}\,,$$

ὅπου $p_1, p_2, \ldots, p_\kappa$ εἶναι θετικοί πρῶτοι ἀριθμοί διαφορετικοί μεταξύ τους καί $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\kappa$ εἶναι φυσικοί ἀριθμοί.

Παραδείγματα:

1. Ἡ ἀνάλυση τοῦ 720 σέ γινόμενο θετικῶν πρώτων παραγόντων εἶναι:

$$720 = 2^4 . 3^2 . 5$$

2. Ἡ ἀνάλυση τοῦ 2400 εἶναι

$$2400 = 2^5 \,.\, 3 \,.\, 5^2.$$

Πόρισμα 2. Κάθε διαιρέτης τοῦ ἀκεραίου

$$\nu = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \ldots p_\kappa^{\alpha_\kappa}$$

εἶναι τῆς μορφῆς

$$p_1^{\beta_1}\, p_2^{\beta_2} \ldots p_\kappa^{\beta_\kappa} \quad , \text{ ὅπου } \quad 0 \leq \beta_i \leq \alpha_i\,, \quad i = 1,2,\ldots,\kappa$$

καί ἀντιστρόφως.

Μποροῦμε τώρα νά χρησιμοποιήσουμε τά προηγούμενα, γιά νά πάρουμε μιά δεύτερη μέθοδο εὑρέσεως τοῦ Μ.Κ.Δ. (θετικῶν ἀκεραίων).

Πρόταση 2. Ἄν α καί β εἶναι θετικοί ἀκέραιοι $\neq 1$ τέτοιοι, ὥστε

$$\alpha = p_1^{\nu_1} \cdot p_2^{\nu_2} \ldots p_\lambda^{\nu_\lambda}$$
$$\beta = p_1^{\mu_1}\, p_2^{\mu_2} \ldots p_\lambda^{\mu_\lambda}\,,$$

ὅπου $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_\lambda$ καί $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\lambda$ μή ἀρνητικοί ἀκέραιοι, τότε

$$(\alpha,\beta) = p_1^{\kappa_1}\, p_2^{\kappa_2} \ldots p_\lambda^{\kappa_\lambda}$$

όπου $\kappa_i = \min(\nu_i, \mu_i)$ γιά κάθε $i \in \{1,2,\ldots,\lambda\}$

'Απόδειξη. Θά άποδείξουμε ότι ή παράσταση $p_1^{\kappa_1} p_2^{\kappa_2} \cdots p_\lambda^{\kappa_\lambda} = A$ ίκανοποιεῖ τίς ίδιότητες τοῦ Μ.Κ.Δ.

(1) 'Επειδή $\kappa_i \leq \nu_i$ γιά κάθε $i \in \{1,2,\ldots,\lambda\}$, ἔπεται ότι τό Α διαιρεῖ τό α.
'Επειδή $\kappa_i \leq \mu_i$ γιά κάθε $i \in \{1,2,\ldots,\lambda\}$, τό Α διαιρεῖ καί τό β.

(2) Ἄν γ εἶναι διαιρέτης τοῦ α, πρέπει σύμφωνα μέ τό πόρισμα 2 νά γράφεται ὡς ἀκολούθως

$$\gamma = p_1^{\rho_1} p_2^{\rho_2} \cdots p_\lambda^{\rho_\lambda},$$

όπου $0 \leq \rho_i \leq \nu_i$ γιά κάθε $i \in \{1,2,\ldots,\lambda\}$. Ἄν τό γ εἶναι καί διαιρέτης τοῦ β, ἐπίσης ἔχουμε $0 \leq \rho_i \leq \mu_i$ γιά κάθε $i \in \{1,2,\ldots,\lambda\}$.
Ἄρα $0 \leq \rho_i \leq \min(\nu_i, \mu_i) = \kappa_i$ καί ἑπομένως τό γ εἶναι διαιρέτης τοῦ Α.
Ἄρα $(\alpha,\beta) = A$.

Παράδειγμα. Ὁ ΜΚΔ τῶν ἀκεραίων

$$72 = 2^3 \cdot 3^2$$
$$270 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5$$

εἶναι: $(72,270) = 2 \cdot 3^2$. 'Επειδή $[72, 270] = \dfrac{72 \cdot 270}{(72, 270)}$, ἔχουμε

$$[72, 270] = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5$$

1.9. 'Ασκήσεις

1. Βρεῖτε τό ΜΚΔ τῶν 27 καί 20 καί ἔπειτα προσδιορίστε ἀκεραίους x καί y τέτοιους, ὥστε
$$(27, 20) = 27x + 20y.$$
2. Οἱ διαιρέσεις τῶν 253 καί 525 μέ ἕνα θετικό ἀκέραιο α δίνουν ὑπόλοιπο 15. Ποιές εἶναι οἱ δυνατές τιμές τοῦ α;
3. Μέ ποιό θετικό ἀκέραιο πρέπει νά διαιρεθοῦν οἱ 1268 καί 1802 γιά νά πάρουμε ἀντίστοιχα ὑπόλοιπα 8 καί 17;
4. Κατά τήν ἐφαρμογή τοῦ ἀλγόριθμου τοῦ Εὐκλείδη γιά τόν ὑπολογισμό τοῦ ΜΚΔ δύο θετικῶν ἀκεραίων α καί β βρίσκουμε διαδοχικά πηλίκα 1,2,1,20 καί 4. Βρεῖτε τούς α καί β, ἄν εἶναι γνωστό ότι $(\alpha,\beta) = 4$.
5. Ποιοί θετικοί ἀκέραιοι α,β ἔχουν ἄθροισμα 233 καί ΜΚΔ 24;
6. Βρεῖτε τό ΜΚΔ καί τό ΕΚΠ τῶν 90, 96, 140.
7. Ἄν $(\alpha,\beta,\gamma) = \delta$, δεῖξτε ότι ὑπάρχουν ἀκέραιοι x,y,z τέτοιοι, ὥστε $\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$. Προσδιορίστε ἀκεραίους x,y καί z, ὥστε
$$(32, 48, 72) = 32x + 48y + 72z.$$
8. Βρεῖτε ὅλους τούς διαιρέτες τοῦ 120.
9. Ποιοί θετικοί ἀκέραιοι ἐπαληθεύουν τήν ἐξίσωση $x^2 - y^2 = 36$;
10. Δεῖξτε ότι
    (i) $(\alpha,\beta) = (5\alpha+4\beta, \alpha+\beta)$ (ii) $(\alpha,\beta) = (3\alpha+4\beta, 2\alpha+3\beta)$
    (iii) $(\alpha,\beta) = (\alpha+\beta\gamma, \beta)$ (iv) $(\alpha,\beta,\gamma) = ((\alpha,\beta), (\beta,\gamma))$
11. Ἄν $(\alpha,\beta) = \delta$ καί $\delta = \alpha x + \beta y$, δεῖξτε ότι $(x,y) = 1$.
12. Ἄν $\kappa \in \mathbf{Z}_+^*$, δεῖξτε ότι

(i) $\kappa(\alpha,\beta) = (\kappa\alpha, \kappa\beta)$,
(ii) $\kappa[\alpha,\beta] = [\kappa\alpha, \kappa\beta]$.

13. Ἄν $\alpha \mid \gamma$, $\beta \mid \gamma$ καί $(\alpha,\beta) = 1$, δεῖξτε ὅτι $\alpha\beta \mid \gamma$.

14. Σέ καθεμιά ἀπό τίς παρακάτω περιπτώσεις ὑπολογίστε τούς θετικούς ἀκεραίους α καί β:
(i) $\alpha\beta = 2400$ καί $(\alpha,\beta) = 10$,
(ii) $\alpha+\beta = 36(\alpha,\beta)$ καί $[\alpha,\beta] = 3850$,
(iii) $(\alpha,\beta) = 26$ καί $[\alpha,\beta] = 4784$.

15. Ἄν δύο ἀκέραιοί εἶναι πρῶτοι μεταξύ τους, δεῖξτε ὅτι κάθε διαιρέτης τοῦ ἑνός εἶναι πρῶτος μέ τόν ἄλλο.
Στή συνέχεια δεῖξτε τή συνεπαγωγή
$$(\alpha,\kappa) = 1 \Rightarrow (\alpha,\beta) = (\alpha, \kappa\beta).$$

16. Ἄν ἕνας ἀκέραιος εἶναι πρῶτος μέ ἕνα γινόμενο ἀκεραίων, τότε εἶναι πρῶτος μέ κάθε παράγοντα τοῦ γινομένου καί ἀντιστρόφως.
Ἐφαρμογές: Δεῖξτε
(i) $(\alpha,\beta) = 1 \Leftrightarrow (\alpha,\beta^\nu) = 1 \quad (\nu \in N)$
(ii) $(\alpha,\beta) = 1 \Leftrightarrow (\alpha^\mu, \beta^\nu) = 1 \quad (\nu, \mu \in N)$.

17. Ἄν $(\alpha,\beta) = 1$, δεῖξτε
(i) $(\alpha+\beta, \alpha) = 1 = (\alpha+\beta, \beta)$,
(ii) $(\alpha-\beta, \alpha) = 1 = (\alpha-\beta, \beta)$,
(iii) $(\alpha+\beta, \alpha\beta) = 1 = (\alpha-\beta, \alpha\beta)$.

18. Ἄν α,β,γ εἶναι περιττοί ἀκέραιοι, δεῖξτε ὅτι
$$(\alpha, \beta, \gamma) = \left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{\alpha+\gamma}{2}, \frac{\beta+\gamma}{2}\right).$$

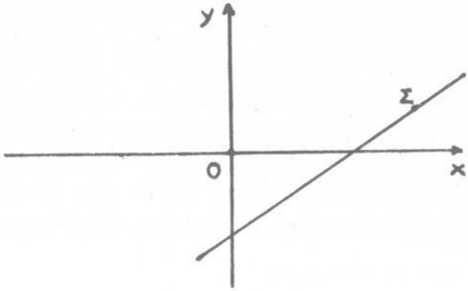
2. ΑΚΕΡΑΙΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΣ $\alpha x+\beta y=\gamma$ $(\alpha,\beta,\gamma \in Z)$

2.1. Εἰσαγωγή

Στήν παράγραφο αὐτή θά ἀσχοληθοῦμε μέ τό πρόβλημα[1] ὑπάρξεως καί εὑρέσεως ἀκέραιων λύσεων τῆς γραμμικῆς ἐξισώσεως
$$\alpha x + \beta y = \gamma \qquad (\alpha,\beta,\gamma \in Z) \tag{1}$$
Ἀκέραια λύση τῆς ἐξισώσεως (1) εἶναι κάθε ζεῦγος (x_o, y_o) ἀπό ἀκέραιους ἀριθμούς πού τήν ἐπαληθεύει.

Ἄς δοῦμε ποιά εἶναι ἡ γεωμετρική ἑρμηνεία τοῦ προβλήματος αὐτοῦ. Εἶναι γνωστό ὅτι ἡ ἐξίσωση (1) παριστάνει μιά εὐθεία πάνω στό καρτεσιανό ἐπίπεδο (Σχ. 1), πού φυσικά οἱ συντεταγμένες (x,y) κάθε σημείου της ἐπαληθεύουν τήν ἐξίσωση (1). Τό πρόβλημα τώρα εἶναι: ὑπάρχουν σημεῖα Σ πάνω στήν εὐθεία αὐτή μέ ἀκέραιες συντεταγμένες καί, ἄν ὑπάρχουν, ποιά εἶναι αὐτά; Ὅπως θά

1. Μέ τό πρόβλημα αὐτό πρῶτος ἀσχολήθηκε ὁ Ἕλληνας μαθηματικός Διόφαντος ὁ Ἀλεξανδρινός στό ἔργο του «Ἀριθμητικά» (360 μ.Χ.).



Σχ. 1

δοῦμε παρακάτω ἡ ἐξίσωση $2x-4y=5$ δέν ἔχει ἀκέραιες λύσεις, πού σημαίνει ὅτι ἡ εὐθεία μέ ἐξίσωση $2x-4y=5$ δέν ἔχει σημεῖα μέ ἀκέραιες συντεταγμένες, ἐνῶ ἡ ἐξίσωση $2x-5y=3$ ἔχει ἄπειρες ἀκέραιες λύσεις, πού σημαίνει ὅτι ἡ εὐθεία μέ ἐξίσωση $2x-5y=3$ ἔχει ἄπειρα σημεῖα μέ ἀκέραιες συντεταγμένες.

Στά ἑπόμενα θά ἐφαρμόσουμε τά συμπεράσματα τῆς παραγράφου 1, γιά νά μελετήσουμε γενικά τό πρόβλημα αὐτό.

2.2. Ὕπαρξη καί εὕρεση ἀκέραιων λύσεων τῆς $\alpha x+\beta y=\gamma\ (\alpha,\beta,\gamma\in\mathbf{Z})$

Εἶναι φανερό ὅτι, ἄν οἱ συντελεστές α,β,γ τῆς ἐξισώσεως

$$\alpha x+\beta y=\gamma \qquad (\alpha,\beta,\gamma\in\mathbf{Z}) \tag{1}$$

ἔχουν μέγιστο κοινό διαιρέτη δ, τότε τό σύνολο τῶν ἀκέραιων λύσεών της ταυτίζεται μέ τό σύνολο τῶν ἀκέραιων λύσεων τῆς ἐξισώσεως

$$\frac{\alpha}{\delta}x+\frac{\beta}{\delta}y=\frac{\gamma}{\delta},$$

πού οἱ συντελεστές της εἶναι σχετικῶς πρῶτοι ἀριθμοί. Ἔτσι στά ἑπόμενα μποροῦμε νά ὑποθέτουμε ὅτι οἱ συντελεστές α,β,γ τῆς (1) εἶναι **σχετικῶς πρῶτοι ἀριθμοί,** δηλαδή $(\alpha,\beta,\gamma)=1$.

Ἡ ἑπόμενη πρόταση ἐξηγεῖ γιατί ἡ ἐξίσωση $2x-4y=5$, πού ἀναφέραμε στήν εἰσαγωγή, δέν ἔχει ἀκέραιες λύσεις.

Πρόταση 1. Ἄν $(\alpha,\beta,\gamma)=1$ καί $(\alpha,\beta)=\lambda>1$, τότε ἡ ἐξίσωση (1) δέν ἔχει ἀκέραιες λύσεις.

Ἀπόδειξη: Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι ἡ (1) ἔχει μιά ἀκέραια λύση (x_o,y_o). Τότε

$$\alpha x_o+\beta y_o=\gamma.$$

Ἀφοῦ $\lambda|\alpha$ καί $\lambda|\beta$, ὁ λ εἶναι διαιρέτης τῶν ἀκεραίων αx_o καί βy_o τοῦ πρώτου μέλους τῆς παραπάνω ἰσότητας καί ἄρα ὁ λ εἶναι διαιρέτης τοῦ γ. Ἀφοῦ ὁ λ εἶναι κοινός διαιρέτης τῶν α,β,γ καί $(\alpha,\beta,\gamma)=1$, πρέπει $\lambda|1$, δηλαδή $\lambda=1$ πού εἶναι ἄτοπο γιατί ἀπό τήν ὑπόθεση εἶναι $\lambda>1$. Ἄρα ἡ (1) δέν ἔχει ἀκέραιες λύσεις.

Λόγω αὐτῆς τῆς προτάσεως μένει νά ἐξεταστεῖ ἡ ἐξίσωση (1) στήν περίπτωση πού οἱ συντελεστές α,β εἶναι σχετικῶς πρῶτοι ἀριθμοί, δηλαδή $(\alpha,\beta)=1$, ὁπότε καί $(\alpha,\beta,\gamma)=1$.

Πρόταση 2. Ἄν $(\alpha,\beta)=1$, τότε ἡ ἐξίσωση (1) ἔχει μία τουλάχιστον ἀκέραια λύση.

Ἀπόδειξη. Ἄν εἶναι $\gamma=0$, τότε ἡ ἐξίσωση (1) γράφεται

$$\alpha x+\beta y=0$$

καί εἶναι φανερό ὅτι μιά ἀκέραια λύση της εἶναι ἡ $(x_\circ,y_\circ)=(0,0)$.

Ἔστω $\gamma\neq 0$. Ἀφοῦ $(\alpha,\beta)=1$, ὑπάρχουν ἀκέραιοι α' καί β' τέτοιοι, ὥστε

$$\alpha\alpha'+\beta\beta'=1,$$

ὁπότε πολλαπλασιάζοντας καί τά δύο μέλη της μέ $\gamma\neq 0$ βρίσκουμε

$$\alpha(\alpha'\gamma)+\beta(\beta'\gamma)=\gamma,$$

πού σημαίνει ὅτι μιά ἀκέραια λύση τῆς (1) εἶναι ἡ $(x_1,y_1)=(\alpha'\gamma,\ \beta'\gamma)$.

Παρατήρηση. Ἀπό τίς δύο προηγούμενες προτάσεις συμπεραίνουμε τήν ἀκόλουθη ἰσοδυναμία.

$$\boxed{(\text{Ἡ (1) ἔχει μία τουλάχιστον ἀκέραια λύση})\ \text{καί}\ (\alpha,\beta,\gamma)=1 \Leftrightarrow (\alpha,\beta)=1}$$

Θά ἀποδείξουμε τώρα τήν ἀκόλουθη πρόταση.

Πρόταση 3. Ἄν ἡ ἐξίσωση (1) ἔχει μιά ἀκέραια λύση $(x_\circ,\ y_\circ)$, τότε τό σύνολο τῶν ἀκέραιων λύσεών της εἶναι

$$A=\{(x,y)|(x,y)\in\mathbf{Z}\times\mathbf{Z},\quad x=x_\circ+\beta\kappa,\ \ y=y_\circ-\alpha\kappa\quad \text{καί}\quad \kappa\in\mathbf{Z}\},$$

δηλαδή ἔχει ἄπειρες σέ πλῆθος ἀκέραιες λύσεις τῆς μορφῆς

$$\boxed{(x,y)=(x_\circ+\beta\kappa,\quad y_\circ-\alpha\kappa),\ \text{ὅπου}\ \kappa\in\mathbf{Z}}$$

Ἀπόδειξη. Ἀφοῦ ἡ (1) ἔχει μιά ἀκέραια λύση $(x_\circ,y_\circ)$ καί μποροῦμε νά ὑποθέσουμε ὅτι $(\alpha,\beta,\gamma)=1$, σύμφωνα μέ τήν παραπάνω παρατήρηση θά ἔχουμε $(\alpha,\beta)=1$. Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι (x_1,y_1) εἶναι μιά ἀκέραια λύση τῆς (1). Τότε ἀφαιρώντας κατά μέλη τίς ἰσότητες $\alpha x_1+\beta y_1=\gamma$ καί $\alpha x_\circ+\beta y_\circ=\gamma$ παίρνουμε

$$\alpha(x_1-x_\circ)=-\beta(y_1-y_\circ) \qquad (*)$$

Ἐπειδή $(\alpha,\beta)=1$, ἀπό τή σχέση (*) λόγω τῆς προτάσεως 2 τῆς 1.6 ἕπεται ὅτι $\beta|x_1-x_\circ$, ὁπότε ὑπάρχει ἀκέραιος κ μέ τήν ἰδιότητα $x_1-x_\circ=\beta\kappa$ ἤ $x_1=x_\circ+\beta\kappa$. Τότε ἀπό τήν (*) βρίσκουμε διαδοχικά

$$\alpha\beta\kappa=-\beta(y_1-y_\circ)\quad \text{ἤ}\quad -\alpha\kappa=y_1-y_\circ\quad \text{ἤ}\quad y_1=y_\circ-\alpha\kappa$$

Ἄρα $(x_1,y_1)\in A$. Ἀντιστρόφως κάθε στοιχεῖο τοῦ συνόλου A εἶναι μιά ἀκέραια λύση τῆς (1). Πράγματι, τό $(x_\circ+\beta\kappa,\ y_\circ-\alpha\kappa)$ ἐπαληθεύει τήν (1), γιατί

$$\alpha(x_o+\beta\kappa) + \beta(y_o-\alpha\kappa) = \alpha x_o+\alpha\beta\kappa+\beta y_o-\alpha\beta\kappa = \alpha x_o+\beta y_o = \gamma$$

Ἄρα, ἄν (x_o,y_o) εἶναι μιά ἀκέραια λύση τῆς (1), τότε ὅλες οἱ ἀκέραιες λύσεις της (x,y) ὑπολογίζονται ἀπό τούς τύπους:

$$\boxed{x = x_o+\beta\kappa \quad \text{καί} \quad y=y_o-\alpha\kappa, \text{ ὅπου } \kappa\in\mathbf{Z}} \qquad (T)$$

Σημείωση. Πολλές φορές στήν πράξη θέλουμε νά βροῦμε μή ἀρνητικές ἀκέραιες λύσεις τῆς (1) [μέ $(\alpha,\beta) = 1$], δηλαδή ἀκέραιες λύσεις (x,y) μέ $x\geq 0$ καί $y\geq 0$. Αὐτές βρίσκονται ἀπό τούς τύπους (T), ἄν στόν **ἀκέραιο** κ δώσουμε τιμές, πού νά συναληθεύουν οἱ ἀνισώσεις ὡς πρός κ:

$$x_o + \beta\kappa \geq 0 \quad \text{καί} \quad y_o-\alpha\kappa \geq 0.$$

2.3. Μέθοδοι εὑρέσεως μιᾶς ἀκέραιας λύσεως τῆς $\alpha x+\beta y=\gamma$ μὲ $(\alpha,\beta)=1$.

Γιά νά χρησιμοποιήσουμε τούς τύπους (T), εἶναι ἀρκετό νά γνωρίζουμε μία ἀκέραια λύση (x_o,y_o) τῆς ἐξισώσεως

$$\alpha x + \beta y = \gamma \quad \text{μέ} \quad (\alpha,\beta) = 1 \qquad (1)$$

Μιά λύση τῆς (1) μποροῦμε νά βροῦμε μέ μιά ἀπό τίς παρακάτω μεθόδους.

Μέθοδος 1η. Μποροῦμε νά ὑποθέσουμε ὅτι στήν (1) εἶναι $\alpha>0$, γιατί ἀλλιῶς ἀλλάζουμε τά πρόσημα στήν ἐξίσωση. Λύνοντας τήν (1) ὡς πρός x βρίσκουμε

$$x = \frac{\gamma-\beta y}{\alpha} \qquad (*)$$

Ἄν δώσουμε στό y τίς τιμές $0,1,2,\ldots,\alpha-1$, πού εἶναι α σέ πλῆθος, βρίσκουμε τίς ἀκόλουθες λύσεις τῆς (*) στό σύνολο $\mathbf{Q}\times\mathbf{Z}$:

$$\left(\frac{\gamma}{\alpha}, 0\right), \left(\frac{\gamma-\beta}{\alpha}, 1\right), \left(\frac{\gamma-2\beta}{\alpha}, 2\right), \ldots, \left(\frac{\gamma-\beta(\alpha-1)}{\alpha}, \alpha-1\right)$$

Θά δοῦμε ὅτι μία μόνο ἀπό αὐτές τίς λύσεις εἶναι ἀκέραια λύση τῆς (1). Ἄς ὀνομάσουμε $\pi_0,\pi_1,\pi_2,\ldots,\pi_{\alpha-1}$ τά πηλίκα καί $\upsilon_0,\upsilon_1,\upsilon_2,\ldots,\upsilon_{\alpha-1}$ τά ὑπόλοιπα τῶν ἀλγοριθμικῶν διαιρέσεων τῶν ἀκεραίων γ, $(\gamma-\beta)$, $(\gamma-2\beta)$, ..., $[\gamma-\beta(\alpha-1)]$ μέ τό α ἀντιστοίχως. Ἐπειδή, λόγω τοῦ θεωρήματος τῆς 1.3, οἱ δυνατές τιμές τῶν παραπάνω ὑπολοίπων εἶναι οἱ $0,1,2,\ldots,\alpha-1$, ἄν τά ὑπόλοιπα αὐτά εἶναι διαφορετικά μεταξύ τους, τότε, ἀφοῦ εἶναι α σέ πλῆθος, κάποιο ἀπό αὐτά, ἄς ποῦμε τό υ_ρ, θά εἶναι ἴσο μέ μηδέν, ὁπότε ὁ ρητός $\frac{\alpha-\rho\beta}{\alpha}$ θά εἶναι ἀκέραιος. Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι $\upsilon_\kappa = \upsilon_\lambda$. Τά ὑπόλοιπα αὐτά ἀντιστοιχοῦν σέ ἐκεῖνες τίς διαιρέσεις, πού στό y ἔχουμε δώσει ἀντίστοιχες τιμές κ καί λ, καί ἔστω $0 \leq \kappa<\lambda<\alpha$. Τότε ἀφαιρώντας κατά μέλη τίς ἰσότητες

$$\gamma-\beta\kappa = \alpha\pi_\kappa+\upsilon_\kappa, \quad \gamma-\beta\lambda = \alpha\pi_\lambda + \upsilon_\lambda$$

βρίσκουμε

$$\beta(\lambda-\kappa) = \alpha\ (\pi_\kappa - \pi_\lambda),$$

ὁπότε, ἀφοῦ $(\alpha,\beta) = 1$, λόγω τῆς προτάσεως 2 τῆς 1.6 ὁ α εἶναι διαιρέτης τοῦ λ—κ. Ἀλλά αὐτό εἶναι ἄτοπο, γιατί ὁ θετικός ἀκέραιος λ—κ εἶναι μικρότερος ἀπό τόν α. Ἔτσι μποροῦμε νά ὑπολογίζουμε μιά ἀκέραια λύση τῆς (1)

Γιά τή μέθοδο αὐτή ἀπαιτοῦνται τό πολύ α σέ πλῆθος δοκιμές, ὅσες τιμές δηλαδή δίνουμε στό y. Γιά τό λόγο αὐτό προτιμοῦμε νά λύνουμε τήν ἐξίσωση (1) ὡς πρός ἐκεῖνον τόν ἄγνωστο, πού ἔχει κατ' ἀπόλυτο τιμή μικρότερο συντελεστή.

Στήν περίπτωση πού οἱ συντελεστές τῆς ἐξισώσεως (1) εἶναι μεγάλοι ἀριθμοί ἡ παραπάνω μέθοδος εἶναι κουραστική, γι' αὐτό χρησιμοποιοῦμε τήν ἑπόμενη μέθοδο.

Μέθοδος 2η. Ἡ μέθοδος αὐτή στηρίζεται σέ ὅσα ἀναφέραμε στήν ἀπόδειξη τῆς προτάσεως 2 τῆς 2.2. Ἐπειδή $(|\alpha|, |\beta|) = (\alpha,\beta) = 1$, μποροῦμε νά ὑποθέσουμε, ὅτι οἱ α,β εἶναι θετικοί ἀκέραιοι, ὁπότε μέ τόν ἀλγόριθμο τοῦ Εὐκλείδη μποροῦμε νά προσδιορίσουμε, ὅπως εἴδαμε στό παράδειγμα 4 τῆς 1.5, δύο ἀκεραίους α' καί β' τέτοιους, ὥστε

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' = 1.$$

Τώρα πολλαπλασιάζοντας καί τά δύο μέλη μέ $\gamma \neq 0$ (γιατί, ἄν $\gamma = 0$, μιά ἀκέραια λύση τῆς (1) ὑπολογίζεται ἀμέσως) βρίσκουμε

$$\alpha(\alpha'\gamma) + \beta(\beta'\gamma) = \gamma$$

καί ἄρα τό $(x_o,y_o) = (\alpha'\gamma,\ \beta'\gamma)$ εἶναι μία ἀκέραια λύση τῆς (1).

Παραδείγματα:

1. Νά βρεθοῦν οἱ μή ἀρνητικές ἀκέραιες λύσεις τῆς ἐξισώσεως

$$3x + 4y = 37.$$

Ἐπίλυση. Ἐδῶ ἔχουμε $(\alpha,\beta) = (3,4) = 1$ καί ἄρα ἡ ἐξίσωση ἔχει ἀκέραιες λύσεις. Θά ἐφαρμόσουμε τήν πρώτη μέθοδο. Λύνοντας ὡς πρός x ἔχουμε $x = \frac{37-4y}{3}$. Τώρα σ' αὐτή θέτουμε διαδοχικά $y = 0, 1, 2,$ μέχρι νά βροῦμε ἀκέραια τιμή τοῦ x. Γιά $y = 0$ βρίσκουμε $x = \frac{37}{3}$. Γιά $y = 1$ βρίσκουμε $x = \frac{37-4}{3} = 11 \in \mathbf{Z}$. Ἄρα μία ἀκέραια λύση τῆς δεδομένης ἐξισώσεως εἶναι ἡ $(x_o,y_o) = (11,1)$ καί ἑπομένως οἱ ἀκέραιες λύσεις της βρίσκονται ἀπό τούς τύπους (Τ) καί εἶναι τά ζεύγη (x,y) μέ

$$\begin{aligned} x &= 11 + 4\kappa \\ y &= 1 - 3\kappa \end{aligned} \qquad \text{καί} \qquad \kappa \in \mathbf{Z}$$

Οἱ μή ἀρνητικές ἀκέραιες λύσεις της θά βρεθοῦν, ἄν στούς παραπάνω τύπους δώσουμε στόν **ἀκέραιο** κ τιμές, πού νά συναληθεύουν τίς ἀνισώσεις

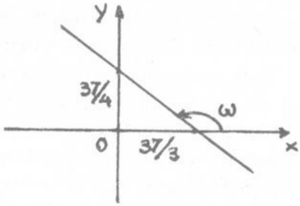
$$11 + 4\kappa \geq 0 \quad \text{καί} \quad 1-3\kappa \geq 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \kappa \geq -\frac{11}{4} \quad \text{καί} \quad \kappa \leq \frac{1}{3} \quad \Leftrightarrow \quad -2{,}75 \leq \kappa \leq \frac{1}{3}$$

Ἄρα $\kappa = -2, -1, 0$. Οἱ μή ἀρνητικές ἀκέραιες λύσεις εἶναι οἱ (3,7), (7,4), (11,1) (βλ. πίνακα τοῦ Σχ. 2) .

κ	x	y
−2	3	7
−1	7	4
0	11	1

Σχ. 2



Σχ. 3

Ὅπως βλέπουμε, οἱ μή ἀρνητικές ἀκέραιες λύσεις τῆς ἐξισώσεως $3x+4y=37$ εἶναι τρεῖς, δηλ. πεπερασμένες σέ πλῆθος. Ἄς δοῦμε πῶς ἐξηγεῖται αὐτό γεωμετρικά. Ἡ ἐξίσωση αὐτή παριστάνει πάνω στό καρτεσιανό ἐπίπεδο μιά εὐθεία μέ κλίση(1) ἀρνητική (Σχ. 3). Ἐπειδή μόνο ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα τῆς εὐθείας αὐτῆς βρίσκεται στό τεταρτημόριο I, εἶναι φυσικό νά ἔχει ἡ ἐξίσωση πεπερασμένες σέ πλῆθος μή ἀρνητικές ἀκέραιες λύσεις.

Ἄς ἐπιλύσουμε τώρα τήν ἴδια ἐξίσωση μέ τή δεύτερη μέθοδο. Ἀφοῦ $(3,4)=1$, ὑπάρχουν ἀκέραιοι α′ καί β′ μέ

$$3\alpha' + 4\beta' = 1.$$

Χωρίς τόν ἀλγόριθμο τοῦ Εὐκλείδη βρίσκουμε ὅτι οἱ τιμές $\alpha'=-1$ καί $\beta'=1$ ἐπαληθεύουν τήν ἰσότητα αὐτή, δηλαδή

$$3(-1) + 4.1 = 1$$

Πολλαπλασιάζοντας καί τά δύο μέλη μέ 37 βρίσκουμε

$$3\,(-37) + 4.37 = 37,$$

πού σημαίνει ὅτι ἡ $(x_1,y_1)=(-37,\,37)$ εἶναι μία ἀκέραια λύση τῆς ἐξισώσεως. Ἄρα οἱ ἀκέραιες λύσεις της δίνονται ἀπό τούς τύπους

$$\begin{aligned} x &= -37 + 4\lambda \\ y &= 37 - 3\lambda \end{aligned} \qquad \lambda \in \mathbf{Z},$$

πού διαφέρουν ἀπό τούς προηγούμενους, ἀλλά γιά κατάλληλες τιμές τῶν κ καί λ βρίσκουμε τίς ἴδιες λύσεις. Οἱ μή ἀρνητικές ἀκέραιες λύσεις φαίνονται στόν πίνακα τοῦ σχήματος 4, πού, ὅπως βλέπουμε, εἶναι ἴδιες μέ αὐτές πού βρήκαμε καί προηγουμένως.

$\frac{37}{4} \leq \lambda \leq \frac{37}{3}$		
λ	x	y
10	3	7
11	7	4
12	11	1

Σχ. 4

2. Νά βρεθοῦν οἱ μή ἀρνητικές ἀκέραιες λύσεις τῆς ἐξισώσεως

$$34x - 71y = 3.$$

---

1. Κλίση τῆς εὐθείας μέ ἐξίσωση $y=\lambda x+\mu$ ὀνομάζεται ὁ ἀριθμός λ καί ἐκφράζει τήν ἐφαπτομένη τῆς θετικῆς γωνίας ἀπό τό θετικό ἡμιάξονα τῶν x μέχρι τήν εὐθεία. Στό παράδειγμά μας εἶναι $\varepsilon\varphi\omega = -3/4$.

'Επίλυση: Θά χρησιμοποιήσουμε τή δεύτερη μέθοδο. 'Εδῶ ἔχουμε $\alpha = 34$ καί $\beta = -71$. 'Επειδή $(34, -71) = (34,71)$, θά βροῦμε τό μέγιστο κοινό διαιρέτη τῶν 34, 71. 'Ο ἀλγόριθμος τοῦ Εὐκλείδη δίνει τίς ἰσότητες

$$\begin{aligned} 71 &= 34.\ 2 + 3, \\ 34 &= 3.11 + 1, \\ 3 &= 1.\ 3 + 0. \end{aligned}$$

"Αρα $(34, -71) = (34,71) = 1$ καί συνεπῶς ἡ δεδομένη ἐξίσωση ἔχει ἀκέραιες λύσεις. 'Από τίς προηγούμενες ἰσότητες ἡ δεύτερη λόγω τῆς πρώτης γράφεται:

$$1 = 34-3.11 = 34-(71-34.2)11 = 34.23+71(-11)$$

$$\text{ἤ} \quad 34(23.3) - 71(11.3) = 3 \quad \text{ἤ} \quad 34.(69)-71(33) = 3,$$

πού σημαίνει ὅτι μία ἀκέραια λύση τῆς δεδομένης ἐξισώσεως εἶναι ἡ $(x_0, y_0) = (69,33)$.
"Αρα οἱ ἀκέραιες λύσεις της δίνονται ἀπό τούς τύπους

$$\left.\begin{aligned} x &= 69-71\kappa \\ y &= 33-34\kappa \end{aligned}\right. \quad \kappa \in \mathbf{Z}.$$

Γιά νά βροῦμε τίς μή ἀρνητικές ἀκέραιες λύσεις,συναληθεύουμε τίς ἀνισώσεις

$$69-71\kappa \geq 0 \quad \text{καί} \quad 33-34\kappa \geq 0 \iff$$

$$\iff \quad \kappa \leq \frac{69}{71} \quad \text{καί} \quad \kappa \leq \frac{33}{34} \iff \kappa \leq \frac{33}{34} \quad \left(\text{ἀφοῦ } \frac{33}{34} < \frac{69}{71}\right)$$

"Αρα μέ τίς δυνατές ἀκέραιες τιμές τοῦ κ: 0, −1, −2,... καί τούς παραπάνω τύπους βρίσκουμε τίς μή ἀρνητικές ἀκέραιες λύσεις τῆς ἐξισώσεως.(Δῶστε γεωμετρική ἑρμηνεία γιατί ἡ ἐξίσωση ἔχει ἄπειρες τέτοιες λύσεις).

2.4. 'Ασκήσεις

1. Νά βρεθοῦν οἱ ἀκέραιες λύσεις τῆς ἐξισώσεως $2x-5y = 3$.
2. Νά βρεθοῦν οἱ μή ἀρνητικές ἀκέραιες λύσεις τῶν ἐξισώσεων

   (i) $455x + 519y = 2$ (ii) $119x + 29y = 2$.
3. Θέλουμε νά μετατρέψουμε ἕνα χαρτονόμισμα τῶν 100 δρχ σέ κέρματα τῶν 2 καί 5 δρχ. Μέ πόσους τρόπους μποροῦμε νά τό πετύχουμε αὐτό;
4. Βρεῖτε τίς θετικές ἀκέραιες λύσεις τῶν ἐξισώσεων:

   (i) $3x + 4y = 34$,   (iii) $34x + 71y = 772$,
   (ii) $9x + 5y = 100$,   (iv) $41x + 73y = 561$.
5. "Ενας μαθητής θέλει νά ἀγοράσει τετράδια τῶν 9 δρχ. τό ἕνα καί μολύβια τῶν 7 δρχ. τό ἕνα. "Αν ξοδέψει ἀκριβῶς 100 δρχ., βρεῖτε πόσα τετράδια καί πόσα μολύβια μπορεῖ νά ἀγοράσει.
6. "Ενας χρυσοχόος θέλει νά κατασκευάσει δύο εἴδη κοσμημάτων. "Αν γιά τήν κατασκευή ἑνός κοσμήματος ἀπό κάθε εἶδος ἀπαιτοῦνται ἀντίστοιχα 5 γραμ. καί 8 γραμ. χρυσοῦ, βρεῖτε πόσα κοσμήματα ἀπό κάθε εἶδος μπορεῖ νά κατασκευάσει χρησιμοποιώντας ἀκριβῶς 134 γραμ. χρυσοῦ.
   "Αν ἀπό ἕνα κόσμημα τοῦ α' εἴδους κερδίζει 600 δρχ. καί ἀπό ἕνα τοῦ β' εἴδους 750 δρχ., βρεῖτε σέ ποιά περίπτωση θά ἔχει μέγιστο κέρδος.
7. Βρεῖτε δύο θετικούς ἀκεραίους πού ἔχουν ἄθροισμα 37, ἄν εἶναι γνωστό ὅτι ἡ διαίρεση τοῦ πρώτου μέ τό 5 δίνει ὑπόλοιπο 2 καί ἡ διαίρεση τοῦ δεύτερου μέ τό 7 δίνει ὑπόλοιπο 4.

3. ΣΥΝΤΟΜΗ ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

1. Γιά δύο ἀκεραίους α,β μέ $\beta \neq 0$ ὑπάρχουν μοναδικοί ἀκέραιοι π καί υ τέτοιοι, ὥστε
$$\alpha = \beta\pi + \upsilon \quad \text{καί} \quad 0 \leq \upsilon < |\beta|$$
2. Ὁ ἀλγόριθμος τοῦ Εὐκλείδη εἶναι χρήσιμος γιὰ τὸν ὑπολογισμὸ τοῦ ΜΚΔ ἀκεραίων.
3. Ἄν $\delta = (\alpha,\beta)$, τότε ὑπάρχουν δύο ἀκέραιοι α' καί β' τέτοιοι, ὥστε
$$\delta = \alpha\alpha' + \beta\beta' \qquad (1)$$
Ὁ ἀλγόριθμος τοῦ Εὐκλείδη εἶναι χρήσιμος γιὰ τὸν ὑπολογισμὸ ἀκεραίων α' καί β', πού νά ἐπαληθεύουν τήν (1).
4. Ἄν $\alpha,\beta,\kappa \in \mathbf{Z}^*$ μέ $(\alpha,\beta) = 1$ καί $\alpha|\beta\kappa$, τότε $\alpha|\kappa$.
5. Ἄν $\alpha,\beta \in \mathbf{Z}^*$, τότε $[\alpha,\beta].\ (\alpha,\beta) = |\alpha| \cdot |\beta|$.
6. Γιά τήν εὕρεση τοῦ Μ.Κ.Δ δύο θετικῶν ἀκεραίων α καί β, πού ἔχουν ἀναλυθεῖ σέ γινόμενο (θετικῶν) πρώτων παραγόντων, σχηματίζουμε τό γινόμενο πού περιέχει τούς κοινούς πρώτους παράγοντες τῶν α καί β τόν καθένα μέ τό μικρότερο ἐκθέτη. Γιά τήν εὕρεση τοῦ Ε.Κ.Π τους, σχηματίζουμε τό γινόμενο πού περιέχει τούς κοινούς καί μή κοινούς πρώτους παράγοντες τῶν α καί β τόν καθένα μέ τό μεγαλύτερο ἐκθέτη.
7. Ἄν $(\alpha,\beta) = 1$, τότε ἡ ἐξίσωση $\alpha x + \beta y = \gamma$ $(\alpha,\beta,\gamma \in Z)$ ἔχει ἄπειρες ἀκέραιες λύσεις (x,y), πού δίνονται ἀπό τούς τύπους
$$x = x_0 + \beta\kappa,$$
$$y = y_0 - \alpha\kappa,$$
ὅπου (x_0, y_0) εἶναι μιά ἀκέραια λύση αὐτῆς τῆς ἐξισώσεως καί $\kappa \in Z$.

4. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

1. Δεῖξτε ὅτι γιά κάθε $\nu \in \mathbf{Z}$ ὁ $\nu^2 + 3\nu + 5$ δέν διαιρεῖται μέ τό 121.

2. Δεῖξτε ὅτι ὁ $11^{10} - 1$ διαιρεῖται μέ 100.

3. Δεῖξτε ὅτι τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων πέντε διαδοχικῶν ἀκεραίων δέν εἶναι ἴσο μέ τό τετράγωνο ἀκεραίου.

4. Δεῖξτε ὅτι τό τετράγωνο κάθε πρώτου ἀριθμοῦ μεγαλύτερου ἀπό τό 3, ἄν διαιρεθεῖ μέ 12, δίνει ὑπόλοιπο 1.

5. Δεῖξτε ὅτι, ἄν ρ καί $8\rho - 1$ εἶναι θετικοί πρῶτοι ἀριθμοί, τότε ὁ $8\rho + 1$ εἶναι σύνθετος.

6. Δεῖξτε ὅτι οἱ $2^\nu - 1$ καί $2^\nu + 1$ δέν μπορεῖ νά εἶναι καί οἱ δύο πρῶτοι ἀριθμοί γιά καμιά τιμή τοῦ φυσικοῦ $\nu > 2$.

7. Δεῖξτε ὅτι γιά κάθε $\mu, \nu \in \mathbf{Z}$ ἡ παράσταση
$$\mu^5 + 3\mu^4\nu - 5\mu^3\nu^2 - 15\mu^2\nu^3 + 4\mu\nu^4 + 12\nu^5$$
δέν παίρνει τήν τιμή 33.

8. Δεῖξτε ὅτι
$$7 \mid \; 2222^{5555} + 5555^{2222}$$

9. Δεῖξτε ὅτι, ἄν ὅλοι οἱ συντελεστές τῆς ἐξισώσεως
$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$$
εἶναι περιττοί ἀκέραιοι ἀριθμοί, τότε οἱ ρίζες τῆς ἐξισώσεως δέν εἶναι ρητές.

10. Νά βρεῖτε τούς φυσικούς ἀριθμούς x,y καί z, ἄν
$$\frac{x}{7} + \frac{y}{11} + \frac{z}{13} = 0{,}946053\;946053\ldots$$

11. Ἄν ἡ διαίρεση τοῦ 802 μέ ἕναν ἀκέραιο α δίνει πηλίκο 14, βρεῖτε τίς δυνατές τιμές τοῦ α καί τῶν ὑπολοίπων.

12. Ἄν $\alpha, \beta, \nu, \rho \in \mathbf{Z}$ καί $\nu - \rho \mid \nu\alpha + \rho\beta$, δεῖξτε ὅτι
$$\nu - \rho \mid (\alpha + \beta)(\nu + \rho).$$

13. Νά δεῖξτε ὅτι γιά κάθε $\nu \in \mathbf{Z}$ τό κλάσμα
$$\frac{15\nu^2 + 8\nu + 6}{30\nu^2 + 21\nu + 13}$$
εἶναι ἀνάγωγο.

14. Ἄν $A = 222\ldots2$ μέ ν τό πλῆθος ψηφία καί $B = 888\ldots8$ μέ μ τό πλῆθος ψηφία, δεῖξτε ὅτι
$$(A,B) = \frac{2}{9}\,(10^\xi - 1)$$
ὅπου $\xi = (\nu, \mu)$.

15. Τό ἄθροισμα τῶν ἀντιστρόφων τριῶν φυσικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἴσο μέ ἕνα. Ποιοί εἶναι οἱ ἀριθμοί;

16. Δεῖξτε ὅτι γιά κάθε $\kappa \in \mathbf{Z}$ οἱ ἀριθμοί $3\kappa + 1$, $14\kappa + 5$ εἶναι πρῶτοι μεταξύ τους. Ἄν $\kappa \neq$ $\neq 29\lambda + 10$ καί $\lambda \in Z$, δεῖξτε ὅτι
$$(3\kappa - 1, \quad 14\kappa + 5) = 1.$$

17. Γιά ποιές τιμές τοῦ φυσικοῦ ἀριθμοῦ ν οἱ ἀριθμοί $5^\nu + 1$ καί 39 εἶναι πρῶτοι μεταξύ τους;

18. Ἂν $\beta \mid \alpha(\alpha-1)$, ὅπου $\alpha,\beta\in\mathbf{Z}$, δεῖξτε ὅτι

$$(2\alpha-1, \beta) = 1.$$

19. Ἂν α,β,A,B εἶναι ἀκέραιοι καί θέσουμε

$$\delta = (\alpha,\beta), \quad \Delta = (A,B), \quad \mu = [\alpha,\beta] \quad \text{καί} \quad M = [A,B],$$

δεῖξτε ὅτι

$$(\alpha A,\ \alpha B,\ \beta A,\ \beta B) = \delta . \Delta \quad \text{καί} \quad [\alpha A,\ \alpha B,\ \beta A,\ \beta B] = \mu . M.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ IV

ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

1. Τό σύνολο $C_{[x]}$ τῶν πολυωνύμων
2. Διαιρετότητα πολυωνύμων
3. Ἀριθμητική τιμή τῶν πολυωνύμων
4. Θεωρήματα σχετικά μέ τίς ρίζες τῶν πολυωνύμων
5. Ἐξισώσεις 3ου καί 4ου βαθμοῦ
6. Διερεύνηση ἐξισώσεων καί ἀνισώσεων
7. Σύντομη ἀνακεφαλαίωση
8. Ἀσκήσεις γιά ἐπανάληψη

18. Ἄν $\beta \mid \alpha(\alpha-1)$,

19. Ἄν α,β,A

δεῖξτ

1. ΤΟ ΣΥΝΟΛΟ $C_{[x]}$ ΤΩΝ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

1.1. Ὁρισμός τοῦ $C_{[x]}$.

Σέ προηγούμενες τάξεις ἔχουμε μιλήσει γιά πολυώνυμα μέ πραγματικούς συντελεστές καί ἔχουμε μάθει νά κάνουμε πράξεις μέ αὐτά. Ἐδῶ θά συμπληρώσουμε τίς γνώσεις μας αὐτές ἀναφερόμενοι καί σέ πολυώνυμα μέ μιγαδικούς συντελεστές. Ἔτσι,

κάθε παράσταση τῆς μορφῆς

$$\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_2x^2+\alpha_1x^1+\alpha_0x^0 \tag{1}$$

μέ $\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_\nu \in C$ καί $\nu \in N_0$,

θά τήν ὀνομάζουμε καί πάλι **πολυώνυμο τοῦ x** καί θά τό συμβολίζουμε μέ $f(x)$, $g(x)$, $\varphi(x)$, κ.ἄ.

Τό πολυώνυμο (1) τό γράφουμε ἁπλούστερα

$$\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_2x^2+\alpha_1x+\alpha_0 \tag{2}$$

θέτοντας ὅπου x^1 τό x καί ὅπου α_0x^0 τό α_0. Τά $\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_\nu$ ὀνομάζονται **συντελεστές τοῦ πολυωνύμου** καί τά $\alpha_\kappa x^\kappa$, $k\in\{0,1,2,\ldots,\nu\}$ **ὅροι τοῦ πολυωνύμου.**

Εἰδικότερα οἱ ὅροι $\alpha_\kappa x^\kappa$ μέ $\alpha_\kappa=0$ ὀνομάζονται **μηδενικοί ὅροι τοῦ πολυωνύμου** καί ὁ α_0 **σταθερός ὅρος τοῦ πολυωνύμου.**

Ἄν ὅλοι οἱ ὅροι ἑνός πολυωνύμου εἶναι μηδενικοί, τότε τό πολυώνυμο αὐτό ὀνομάζεται **μηδενικό πολυώνυμο**.

Ὁ «ἐκθέτης» τοῦ x σέ ἕνα μή μηδενικό ὅρο ἑνός πολυωνύμου ὀνομάζεται **βαθμός** αὐτοῦ **τοῦ ὅρου.** Γιά ἕνα μή μηδενικό πολυώνυμο ὁ μεγαλύτερος ἀπό τούς ἐκθέτες τῶν μή μηδενικῶν ὅρων του ὀνομάζεται **βαθμός τοῦ πολυωνύμου.** Π.χ. ἄν $f(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1x+\alpha_0$, μέ $\alpha_\nu\neq 0$, τότε λέμε ὅτι τό $f(x)$ εἶναι νιοστοῦ βαθμοῦ καί γράφουμε βαθμ.$f(x)=\nu$. Ὁ ὅρος $\alpha_\nu x^\nu$ ὀνομάζεται τότε καί μεγιστοβάθμιος ὅρος τοῦ $f(x)$.

Στή γραφή ἑνός πολυωνύμου δεχόμαστε τίς ἑξῆς ἁπλοποιήσεις:

α) Παραλείπουμε τή μονάδα, ὅταν εἶναι συντελεστής κάποιου ὅρου, ἐκτός ἄν εἶναι ὁ σταθερός ὅρος.

β) Παραλείπουμε τό «+», ὅταν ἀκολουθεῖ ὅρος μέ συντελεστή τῆς μορφῆς $-\alpha$

γ) Παραλείπουμε τούς μηδενικούς ὅρους ἤ καί προσαρτοῦμε, ὅταν εἶναι ἀναγκαῖο, ὁσουσδήποτε ἀπό αὐτούς. Φυσικά σέ ἕνα μηδενικό πολυώνυμο δέν παραλείπουμε όλους τούς όρους του (γράφουμε τουλάχιστον έναν). Ἔτσι δύο πολυώνυμα μποροῦν νά γραφοῦν πάντοτε μέ τό ἴδιο πλῆθος ὅρων. Αὐτό γίνεται συχνά στά ἑπόμενα χωρίς νά τονίζεται ἰδιαίτερα.

Σύμφωνα μέ τίς παραδοχές πού κάναμε, τά πολυώνυμα $f(x) = \frac{4}{3}x^2 + (-5)x + i\sqrt{2}$ καί $g(x) = (2+i)x^3 + 1x^2 + 0x + 1$ γράφονται ἁπλούστερα $f(x) = \frac{4}{3}x^2 - 5x + i\sqrt{2}$ καί $g(x) = (2+i)x^3 + x^2 + 1$.

Τονίζουμε ὅτι τό πολυώνυμο $f(x) = \alpha_0$ ὀνομάζεται **σταθερό πολυώνυμο** καί ὅταν $\alpha_0 \neq 0$, εἶναι μηδενικοῦ βαθμοῦ, ἐνῶ ὅταν $\alpha_0=0$, εἶναι μηδενικό πολυώνυμο καί **δέν ἔχει βαθμό**[1].

Ὅταν στά ἑπόμενα λέμε ὅτι *«τό πολυώνυμο f(x) εἶναι τό πολύ νιοστοῦ βαθμοῦ»* θά ἐννοοῦμε ὅτι τό $f(x)$ εἶναι μηδενικό πολυώνυμο ἤ βαθμ.$f(x) \leq \nu$.

Ἄν $f(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1x+\alpha_0$ *καί* $g(x)=\beta_\nu x^\nu+\beta_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\beta_1x+\beta_0$, *τότε θά λέμε ὅτι τά πολυώνυμα αὐτά εἶναι ἴσα καί θά γράφουμε* $f(x)=g(x)$, *ὅταν καί μόνο ὅταν εἶναι* $\alpha_j=\beta_j$ *γιά ὅλα τά* $j\in\{0,1,2,\ldots,\nu\}$.

Εἶναι φανερό ὅτι ἡ ἰσότητα τῶν πολυωνύμων, ὅπως ὁρίστηκε, ἔχει τίς γνωστές μας ἰδιότητες τῆς ἰσότητας καί ἀκόμα ὅτι **δύο ἴσα πολυώνυμα δέν εἶναι δύο πολυώνυμα, ἀλλά ἕνα καί τό αὐτό πολυώνυμο.**

Ἀπό τόν ὁρισμό τῆς ἰσότητας τῶν πολυωνύμων συμπεραίνουμε ὅτι **ὑπάρχει μοναδικό μηδενικό πολυώνυμο.** Τό μοναδικό αὐτό μηδενικό πολυώνυμο θά τό συμβολίζουμε $0(x)$ ἤ $\mathbf{0}$.

Τό σύνολο τῶν πολυωνύμων μέ μιγαδικούς συντελεστές θά τό συμβολίζουμε μέ $\mathbf{C}_{[x]}$.

Στά ἑπόμενα θά ἀναφερόμαστε γενικά σέ πολυώνυμα τοῦ $\mathbf{C}_{[x]}$, καί ὅταν εἶναι ἀπαραίτητο νά ἔχουμε πολυώνυμα μέ μόνο πραγματικούς συντελεστές ἤ μόνο ρητούς, θά τό τονίζουμε ἰδιαίτερα καί τά σύνολά τους θά τά συμβολίζουμε ἀντιστοίχως μέ $\mathbf{R}_{[x]}$ καί $\mathbf{Q}_{[x]}$.

1.2. Ἐφαρμογές.

1. Νά προσδιοριστοῦν οἱ πραγματικοί ἀριθμοί α,β,γ,δ, ὥστε τό πολυώνυμο

$$f(x)=(\alpha-1)x^3+(2\beta-\alpha+1)x^2+(\alpha+\beta-\gamma)x+2\alpha-\gamma+\beta+\delta$$

νά εἶναι τό μηδενικό πολυώνυμο.

Λύση: Σύμφωνα μέ τόν ὁρισμό τοῦ μηδενικοῦ πολυωνύμου ἔχουμε τό σύστημα

$$\alpha-1=0,\ 2\beta-\alpha+1=0,\ \alpha+\beta-\gamma=0,\ 2\alpha-\gamma+\beta+\delta=0,$$

τό ὁποῖο ἐπιλυόμενο δίνει:

$$\alpha=1,\ \beta=0,\ \gamma=1,\ \delta=-1.$$

1. Μερικές φορές στή βιβλιογραφία σέ ἕνα μηδενικό πολυώνυμο ἀποδίδεται ὁ βαθμός $-\infty$.

2. Νά προσδιοριστοῦν οἱ πραγματικοί ἀριθμοί α,β,γ, ὥστε τά πολυώνυμα

$$f(x)=(\alpha-\beta)x^2+\gamma x-2\alpha+\beta-1 \quad \text{καί} \quad g(x)=(\alpha+\beta+3)x^2+(2-\gamma)x+3\alpha-2$$

νά εἶναι ἴσα.

Λύση: Σύμφωνα μέ τόν ὁρισμό τῆς ἰσότητας τῶν πολυωνύμων ἔχουμε:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha-\beta=\alpha+\beta+3\\ \gamma=2-\gamma\\ -2\alpha+\beta-1=3\alpha-2\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l}-2\beta=3\\ 2\gamma=2\\ -5\alpha+\beta=-1\end{array}\right\}$$

Ἀπό τό τελευταῖο σύστημα παίρνουμε $\beta=-\frac{3}{2}$, $\gamma=1$, $\alpha=-\frac{1}{10}$.

1.3. Πρόσθεση στό $C_{[x]}$.

Ἄν $f(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0$ καί $g(x)=\beta_\nu x^\nu+\beta_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\beta_1 x+\beta_0$ εἶναι δύο πολυώνυμα τοῦ $C_{[x]}$, τότε ὁρίζεται μονοσήμαντα τό πολυώνυμο

$$\varphi(x)=\gamma_\nu x^\nu+\gamma_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\gamma_1 x+\gamma_0$$

μέ συντελεστές $\gamma_j=\alpha_j+\beta_j$ γιά ὅλα τά $j\in\{0,1,2,\ldots,\nu\}$, πού ὀνομάζεται **ἄθροισμα** τῶν $f(x)$ καί $g(x)$ καί συμβολίζεται μέ $f(x)+g(x)$. Ἡ πράξη, μέ τήν ὁποία στό ζεῦγος $(f(x), g(x))$ ἀντιστοιχίζεται τό πολυώνυμο $f(x)+g(x)$, ὀνομάζεται **πρόσθεση στό $C[x]$**. Ἡ πρόσθεση αὐτή, ὅπως εἶναι φανερό, ἔχει ὅλες τίς ἰδιότητες τῆς προσθέσεως στό **C** καί γι' αὐτό

ἡ δομή $(C_{[x]},+)$ εἶναι ἀντιμεταθετική ὁμάδα,

μέ **οὐδέτερο στοιχεῖο** τό μηδενικό πολυώνυμο καί **ἀντίθετο** τοῦ $f(x)=\alpha_\nu x^\nu+$ $+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0$ τό $-f(x)=-\alpha_\nu x^\nu-\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}-\ldots-\alpha_1 x-\alpha_0$.
Ἔτσι, ἄν $f(x)$ καί $g(x)$ εἶναι γνωστά πολυώνυμα, ἡ ἐξίσωση $f(x)+Y=g(x)$ ἔχει **μοναδική** λύση τήν $Y=g(x)+(-f(x))$, πού ὀνομάζεται διαφορά τοῦ πολυωνύμου $f(x)$ ἀπό τό $g(x)$ καί συμβολίζεται μέ $g(x)-f(x)$, δηλαδή

$$g(x)-f(x)=g(x)+(-f(x)).$$

1.4. Πολλαπλασιασμός πολυωνύμου ἐπί ἀριθμό $\lambda\in C$.

Ἄν $f(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0$ εἶναι ἕνα πολυώνυμο τοῦ $C_{[x]}$, τότε ὁρίζουμε στό $C_{[x]}$ μία **ἐξωτερική πράξη πολλαπλασιασμοῦ μέ τελεστές λ ἀπό τό σῶμα C**, ἀντιστοιχίζοντας στό ζεῦγος $(\lambda, f(x))$, τό πολυώνυμο:

$$\lambda f(x) \underset{\text{ορσ}}{=\!=} (\lambda\alpha_\nu)x^\nu+(\lambda\alpha_{\nu-1})x^{\nu-1}+\ldots+(\lambda\alpha_1)x_1+(\lambda\alpha_0).$$

Ὁ πολλαπλασιασμός αὐτός, ὅπως ὁρίστηκε, εἶναι εὔκολο νά δειχθεῖ ὅτι ἔχει τίς γνωστές ἰδιότητες

α) $\lambda\cdot(f(x)+g(x)) = \lambda\cdot f(x)+\lambda\cdot g(x)$
β) $(\lambda+\kappa)\cdot f(x) = \lambda\cdot f(x)+\kappa\cdot f(x)$
γ) $(\lambda\kappa)\cdot f(x) = \lambda\cdot(\kappa\cdot f(x))$
δ) $1\cdot f(x) = f(x)$

γιά ὅλα τά $\lambda,\kappa\in C$.

Ἔτσι τό C[x] ἐφοδιασμένο μέ τήν ἐσωτερική πράξη τῆς προσθέσεως καί τήν ἐξωτερική πράξη τοῦ πολλαπλασιασμοῦ μέ τελεστές ἀπό τό C εἶναι ἕνας διανυσματικός χῶρος πάνω στό σῶμα C.

Μετά τή διαπίστωση αὐτή τό πολυώνυμο $f(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$ εἶναι γραμμικός συνδυασμός τῶν πολυωνύμων $1, x, x^2, \ldots, x^{\nu-1}, x^\nu$ μέ συντελεστές ἀπό τό **C**, ὁπότε τό $f(x)$ γράφεται $f(x) = \alpha_0 \cdot 1 + \alpha_1 \cdot x + \alpha_2 \cdot x^2 + \ldots + \alpha_{\nu-1} \cdot x^{\nu-1} + \alpha_\nu \cdot x^\nu$ καί μπορεῖ νά θεωρηθεῖ σάν ἄθροισμα τῶν ὅρων του.

1.5. Πολλαπλασιασμός στό $C_{[x]}$.

Ἄν
$$f(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0 \quad \text{καί}$$
$$g(x) = \beta_\mu x^\mu + \beta_{\mu-1}x^{\mu-1} + \ldots + \beta_1 x + \beta_0$$
εἶναι δύο πολυώνυμα τοῦ $C_{[x]}$, τότε **ὀνομάζεται γινόμενο τοῦ f(x) ἐπί τό g(x)** καί συμβολίζεται μέ $f(x) \cdot g(x)$ **τό πολυώνυμο:**

$$\varphi(x) = \gamma_{\nu+\mu}\, x^{\nu+\mu} + \ldots + \gamma_\kappa x^\kappa + \ldots + \gamma_1 x + \gamma_0$$

μέ $\gamma_\kappa = \alpha_\kappa\beta_0 + \alpha_{\kappa-1}\beta_1 + \alpha_{\kappa-2}\beta_2 + \ldots + \alpha_2\beta_{\kappa-2} + \alpha_1\beta_{\kappa-1} + \alpha_0\beta_\kappa, \kappa \in \{0,1,2,\ldots,\nu+\mu\}$ (1)

Εἶναι φανερό ὅτι **τό f(x).g(x) εἶναι ἕνα πολυώνυμο τοῦ $C_{[x]}$ μοναδικό**, ὅταν δίνονται τά $f(x)$ καί $g(x)$, ἀφοῦ οἱ συντελεστές του ὁρίζονται μέ τή βοήθεια τῆς προσθέσεως καί τοῦ πολλαπλασιασμοῦ στό **C** τῶν συντελεστῶν τῶν $f(x)$ καί $g(x)$.

Ἡ πράξη, μέ τήν ὁποία σέ ἕνα ζεῦγος πολυωνύμων τοῦ $C_{[x]}$ ἀντιστοιχίζεται τό γινόμενό τους, **ὀνομάζεται πολλαπλασιασμός στό $C_{[x]}$.**

Τά πολυώνυμα $f(x)$ καί $g(x)$ ὀνομάζονται καί **παράγοντες** τοῦ γινομένου $f(x) \cdot g(x)$. Ἄν $f(x) = \mathbf{0}$, τότε $\mathbf{0} \cdot g(x) = \mathbf{0}$. Ἀπό τήν ἰσότητα αὐτή βλέπουμε ὅτι **τό 0 ἔχει γιά παράγοντα κάθε πολυώνυμο τοῦ $C_{[x]}$.** Ἐπίσης ἄν $f(x) = 1$, τότε $1 \cdot g(x) = g(x)$, δηλ. **κάθε πολυώνυμο εἶναι παράγοντας τοῦ ἑαυτοῦ του.**

Παρατήρηση: Ἄν $f(x) \in C_{[x]}$ καί λ εἶναι ἕνα σταθερό πολυώνυμο τοῦ $C_{[x]}$, τότε **τό γινόμενο λ.f(x) ταυτίζεται μέ τό γινόμενο τοῦ ἐξωτερικοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ f(x) ἐπί τό $\lambda \in C$**

Ἀπό τόν ὁρισμό τοῦ γινομένου $f(x) \cdot g(x)$ γίνεται φανερό ὅτι

ὁ βαθμός τοῦ γινομένου δύο μή μηδενικῶν πολυωνύμων εἶναι ἴσος μέ τό ἄθροισμα τῶν βαθμῶν τῶν δύο πολυωνύμων.

Ἀπό τήν (1) φαίνεται ὅτι **ἡ πράξη τοῦ πολλαπλασιασμοῦ εἶναι** πράξη **ἀντιμεταθετική** καί πράξη **ἐπιμεριστική ὡς πρός τήν πρόσθεση στό C[x].** Ἐπειδή $1 \cdot g(x) = g(x)$ καί ὁ πολλαπλασιασμός εἶναι πράξη ἀντιμεταθετική, θά ἰσχύει $1 \cdot g(x) = g(x) \cdot 1 = g(x)$, δηλ. ὁ πολλαπλασιασμός στό $C_{[x]}$ **ἔχει οὐδέτερο στοιχεῖο τό σταθερό πολυώνυμο f(x)=1.** Ἀποδεικνύεται ἀκόμα ὅτι ὁ πολλαπλασιασμός στό $C_{[x]}$ **εἶναι πράξη προσεταιριστική.** Δηλαδή

ἡ δομή $(C_{[x]}, +, \cdot)$ εἶναι ἀντιμεταθετικός δακτύλιος μέ μοναδιαῖο στοιχεῖο.

"Αν ἀναζητήσουμε **τό ἀντίστροφο στοιχεῖο** γιά κάθε μή μηδενικό πολυώνυμο, θά δοῦμε ὅτι αὐτό **δέν ὑπάρχει παρά μόνο** γιά τά σταθερά πολυώνυμα.

Πράγματι· α) ἄν γιά ἕνα πολυώνυμο $f(x) \in \mathbf{C}_{[x]}$ μέ βαθμό $\nu \neq 0$ ὑπῆρχε τό ἀντίστροφό του $f^{-1}(x)$, τότε θά ἦταν $f(x) \cdot f^{-1}(x) = 1$. "Αν ἑπομένως ὁ βαθμός τοῦ $f^{-1}(x)$ εἶναι $\mu \in \mathbf{N}_0$, τότε ὁ βαθμός τοῦ $f(x) \cdot f^{-1}(x)$ θά εἶναι $\nu + \mu > 0$, πράγμα ἄτοπο, ἀφοῦ τό β' μέλος τῆς $f(x) f^{-1}(x) = 1$ εἶναι τό πολυώνυμο 1 πού ἔχει βαθμό μηδέν.

β) "Αν εἶναι $f(x) = \alpha_0 \neq \mathbf{0}$, τότε τό σταθερό πολυώνυμο $\frac{1}{\alpha_0}$ εἶναι τό ἀντίστροφο τοῦ $f(x)$, ἀφοῦ $\alpha_0 \cdot \frac{1}{\alpha_0} = 1$.

"Ετσι βλέπουμε ὅτι **ἡ δομή $(C_{[x]}, +, .)$ δέν εἶναι σῶμα.** Γιά τή δομή ὅμως αὐτή ἰσχύει ἡ συνεπαγωγή $f(x) \cdot g(x) = \mathbf{0} \Rightarrow f(x) = \mathbf{0}$ εἴτε $g(x) = \mathbf{0}$, δηλαδή **ἡ δομή $(C[x], +, .)$ εἶναι ἀκέραια περιοχή.**

Πράγματι· ἄν ἦταν $f(x) \neq \mathbf{0}$ καί $g(x) \neq \mathbf{0}$ μέ μεγιστοβάθμιους ὅρους ἀντίστοιχα $\alpha_\nu x^\nu$ καί $\beta_\mu x^\mu$, τότε τό γινόμενο $f(x) \cdot g(x)$ θά εἶχε τόν ὅρο $\alpha_\nu \beta_\mu x^{\nu+\mu}$ μέ $\alpha_\nu \beta_\mu \neq 0$, τό ὁποῖο σημαίνει ὅτι τό γινόμενο δέ θά ἦταν τό μηδενικό πολυώνυμο.

Θά δείξουμε τώρα ὅτι **κάθε μή μηδενικό πολυώνυμο εἶναι ἁπλοποιήσιμο στοιχεῖο ὡς πρός τήν πράξη τοῦ πολλαπλασιασμοῦ στό $C_{[x]}$ (νόμος διαγραφῆς),** πού εἶναι ἰδιότητα κάθε ἀκέραιας περιοχῆς. Δηλαδή θά δείξουμε ὅτι:

$$\left.\begin{array}{r} f(x) \cdot \varphi(x) = g(x) \cdot \varphi(x) \\ \varphi(x) \neq \mathbf{0} \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) = g(x)$$

Πράγματι· $\left.\begin{array}{r} f(x) \cdot \varphi(x) = g(x) \cdot \varphi(x) \\ \varphi(x) \neq \mathbf{0} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} (f(x) - g(x)) \cdot \varphi(x) = \mathbf{0} \\ \varphi(x) \neq \mathbf{0} \end{array}\right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(x) - g(x) = \mathbf{0} \Rightarrow f(x) = g(x).$$

Δυνάμεις μέ ἐκθέτη $\nu \in \mathbf{N}_0$ ἑνός πολυωνύμου $f(x) \in \mathbf{C}_{[x]}$ ὁρίζονται μέ τόν ἀκόλουθο τρόπο:

α) $[f(x)]^2 = f(x) \cdot f(x)$ καί $[f(x)]^{\kappa+1} = [f(x)]^\kappa \cdot f(x)$ μέ $\kappa \in \mathbf{N}$ καί $\kappa > 1$ ('Επαγωγικά).

β) $[f(x)]^1 = f(x)$ καί

γ) $[f(x)]^0 = 1$, ὅταν $f(x) \neq \mathbf{0}$

Μετά τόν ὁρισμό τῶν δυνάμεων, ἄν

$$f(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0 \neq \mathbf{0} \text{ καί}$$
$$\varphi(x) = \beta_\mu x^\mu + \beta_{\mu-1} x^{\mu-1} + \ldots + \beta_1 x + \beta_0 \neq \mathbf{0}$$

εἶναι δύο πολυώνυμα, τότε τό $f(\varphi(x))$ εἶναι τό πολυώνυμο

$$\alpha_\nu (\varphi(x))^\nu + \alpha_{\nu-1} (\varphi(x))^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 (\varphi(x)) + \alpha_0.$$

Τό πολυώνυμο αὐτό, μετά τήν ἐκτέλεση τῶν πράξεων, γίνεται ἕνα πολυώνυμο τοῦ x μέ βαθμό ἴσο μέ τό γινόμενο τῶν βαθμῶν τῶν $f(x)$ καί $\varphi(x)$. Ἄν τό $\varphi(x)$ εἶναι τό σταθερό πολυώνυμο, π.χ. $\varphi(x)=\alpha$, τότε τό $f(\alpha)$ θά εἶναι ἐπίσης σταθερό πολυώνυμο.

1.6. Παραδείγματα.

1. **Νά προσδιοριστοῦν τά α,β,γ ὥστε νά ἰσχύει ἡ ἰσότητα**

$$f(x).\varphi(x)=g(x)-\sigma(x),\ \text{μέ}\ f(x)=x^2-2x+3,\quad \varphi(x)=x-1$$
$$g(x)=(\alpha+1)x^3+(\beta-2)x^2+(\gamma^2-20)x+2\ \text{καί}\ \sigma(x)=5x+5$$

Λύση: Ἐκτελώντας τίς πράξεις παίρνουμε:

$$f(x).\varphi(x)=(x^2-2x+3).(x-1)=x^3-3x^2+5x-3\quad\text{καί}$$
$$g(x)-\sigma(x)=(\alpha+1)x^3+(\beta-2)x^2+(\gamma^2-25)x-3.$$

Ζητοῦνται τά α,β,γ, ὥστε νά ἰσχύει ἡ ἰσότητα

$$x^3-3x^2+5x-3=(\alpha+1)x^3+(\beta-2)x^2+(\gamma^2-25)x-3.$$

Γιά νά συμβαίνει αὐτό, ἀρκεῖ νά συναληθεύουν οἱ ἐξισώσεις

$$\alpha+1=1,\ \beta-2=-3,\ \gamma^2-25=5\ \text{καί}\ -3=-3,$$

ἀπό τίς ὁποῖες εὔκολα παίρνουμε $\alpha=0$, $\beta=-1$ καί $\gamma=\pm\sqrt{30}$.

2. **Ἄν $f(x)=2x^2-3x+1$, $\varphi(x)=x-1$ καί $g(x)=(\alpha-\beta)x^2-(2\alpha-\beta)x-\alpha+\beta-\gamma$ νά προσδιοριστοῦν τά $\alpha,\beta,\gamma\in R$, ὥστε νά ἰσχύει ἡ ἰσότητα $g(x)=f(\varphi(x))$.**

Λύση: Εἶναι
$$\begin{aligned} f(\varphi(x)) &= 2(x-1)^2-3(x-1)+1\\ &= 2(x^2-2x+1)-3(x-1)+1=2x^2-4x+2-3x+3+1=2x^2-7x+6\end{aligned}$$

καί ζητεῖται νά εἶναι: $(\alpha-\beta)x^2-(2\alpha-\beta)x-\alpha+\beta-\gamma=2x^2-7x+6$

Γιά νά ἰσχύει ἡ τελευταία σχέση, ἀρκεῖ νά ἔχει λύση τό σύστημα:

$$\alpha-\beta=2,\ -2\alpha+\beta=-7,\ -\alpha+\beta-\gamma=6$$

Ἐπιλύοντας τό σύστημα αὐτό παίρνουμε $\alpha=5$, $\beta=3$, $\gamma=-8$.

1.7. Ἀσκήσεις

1. Ἄν ἡ διαφορά δύο πολυωνύμων εἶναι τό μηδενικό πολυώνυμο, δεῖξτε ὅτι τά πολυώνυμα αὐτά εἶναι ἴσα.
2. Ἄν ν καί μ εἶναι ἀντίστοιχα οἱ βαθμοί δύο πολυωνύμων $f(x)$ καί $g(x)$, μέ $\nu\geq\mu$, δεῖξτε ὅτι ὁ βαθμός τοῦ πολυωνύμου $f(x)+g(x)$ εἶναι τό πολύ ἴσος μέ ν.
3. Νά προσδιοριστοῦν τά α καί β, ὥστε νά ἰσχύει ἡ ἰσότητα
$$4x^3+20x^2+33x=(2x+5)\ (2x+3).(\alpha x+\beta)+2x-15$$
4. Ἄν $f(x)=3x^3-2x^2+7x+6$ καί $g(x)=\alpha_3x^3+\alpha_2x^2+\alpha_1x+\alpha_0$, βρεῖτε τίς τιμές τῶν $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$, ὥστε ἡ διαφορά $f(x)-g(x)$ νά εἶναι πολυώνυμο:
   i) 3ου βαθμοῦ, ii) τό πολύ 2ου βαθμοῦ, iii) 1ου βαθμοῦ
   iv) μηδενικοῦ βαθμοῦ καί v) τό μηδενικό.
5. Νά προσδιοριστοῦν οἱ πραγματικοί ἀριθμοί $\alpha,\beta,\gamma,\delta$, ὥστε τό πολυώνυμο $f(x)=x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+9$ νά εἶναι τό τετράγωνο τοῦ πολυωνύμου $g(x)=x^2+x+\delta$.
6. Δεῖξτε ὅτι οἱ συνθῆκες $\beta=\dfrac{\alpha^2}{4}+\dfrac{2\gamma}{\alpha}$ καί $\delta=\dfrac{\gamma^2}{\alpha^2}$ εἶναι ἀναγκαῖες καί ἱκανές, ὥστε τό

πολυώνυμο $f(x)=x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$, $\alpha \in \mathbf{R}-\{0\}$ καί $\beta,\gamma,\delta \in \mathbf{R}$ νά εἶναι τό τετράγωνο ἑνός πολυωνύμου $g(x)$ μέ πραγματικούς συντελεστές.

7. Δίνεται τό πολυώνυμο $f(x)=9x^4-30x^3+37x^2-14x-1$. Βρεῖτε δύο πολυώνυμα $g(x)$ καί $\pi(x)$, 2ου καί 1ου βαθμοῦ ἀντιστοίχως, ὥστε νά εἶναι $f(x)=(g(x))^2+\pi(x)$.
8. Δίνεται τό πολυώνυμο $f(x)=4x^4-8x^3+\alpha x+\beta$. Βρεῖτε πολυώνυμο $g(x)$, ὥστε ἡ διαφορά $f(x)-(g(x))^2$ νά εἶναι πολυώνυμο τό πολύ 1ου βαθμοῦ. Ἔπειτα νά προσδιορίσετε τά α καί β, ὥστε τό $f(x)$ νά εἶναι τέλειο τετράγωνο πολυωνύμου.
9. Ἄν εἶναι $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma$ καί $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$, ὅπου $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbf{R}$, δεῖξτε ὅτι τό πολυώνυμο $f(x)=\kappa(\alpha-\beta)x^2+\lambda(\beta-\gamma)x+\mu(\gamma-\alpha)$, μέ $\kappa,\lambda,\mu\in\mathbf{C}$ εἶναι τό μηδενικό πολυώνυμο.
10. Βρεῖτε ὅλα τά τριώνυμα $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, μέ $\alpha\neq 0$, τά ὁποῖα ἱκανοποιοῦν τήν ἰσότητα $f(x+1)=f(-x)$.

2. ΔΙΑΙΡΕΤΟΤΗΤΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

Στήν παράγραφο αὐτή θά μελετήσουμε τήν ἔννοια τῆς διαιρετότητας στό $\mathbf{C}_{[x]}$ καί θά δοῦμε προτάσεις ἀνάλογες μέ ἐκεῖνες πού εἴδαμε στό κεφάλαιο τῶν ἀκέραιων ἀριθμῶν.

2.1. Ἡ ἔννοια τῆς διαιρετότητας στό $\mathbf{C}_{[x]}$:

Ἄν $f(x)$ καί $g(x)$ εἶναι δύο πολυώνυμα τοῦ $\mathbf{C}_{[x]}$ καί ὑπάρχει πολυώνυμο $\pi(x)$, ὥστε νά ἰσχύει

$$f(x)=g(x)\,\pi(x), \qquad (1)$$

τότε λέμε ὅτι **τό $g(x)$ εἶναι παράγοντας τοῦ πολυωνύμου $f(x)$.** Φυσικά τότε καί **τό $\pi(x)$ εἶναι παράγοντας τοῦ $f(x)$.**

Ἄν ἔχουμε ἀκόμα ὅτι $g(x)\neq 0$, **τότε** θά λέμε ὅτι:

τό $g(x)$ διαιρεῖ τό πολυώνυμο $f(x)$ ἤ εἶναι διαιρέτης τοῦ $f(x)$ (συμβολικά $g(x)|f(x)$) ἤ τό $f(x)$ διαιρεῖται μέ τό $g(x)$ ἤ ὅτι εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ $g(x)$.

Στήν περίπτωση αὐτή, ὅπως γνωρίζουμε, **τό $\pi(x)$ ὀνομάζεται** καί **πηλίκο τῆς τέλειας διαιρέσεως τοῦ $f(x)$ μέ τό $g(x)$ καί εἶναι μοναδικό.**

Τό τελευταῖο ἀποδεικνύεται ὅπως ἡ πρόταση 2 τῆς 1.1 τοῦ Κεφ. III καί τότε γράφουμε καί $\pi(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Παρατηρήσεις:

1. Ἄν $f(x).g(x)\neq \mathbf{0}$ καί βαθμ. $f(x)<$ βαθμ. $g(x)$, τότε εἶναι φανερό ὅτι δέν ὑπάρχει πολυώνυμο $\pi(x)$ πού νά ἱκανοποιεῖ τήν (1).

2. Ἄν $f(x).g(x)\neq \mathbf{0}$ καί ὑπάρχει $\pi(x)$ πού ἱκανοποιεῖ τήν (1), τότε εἶναι:
βαθμ. $\pi(x)=$ βαθμ $f(x)-$ βαθμ. $g(x)$

3. Ἄν τά $f(x)$ καί $g(x)$ ἔχουν πραγματικούς συντελεστές, τότε καί τό $\pi(x)$ θά ἔχει πραγματικούς συντελεστές. Εἶναι ὅμως δυνατό ἕνα πολυώνυμο $f(x)$ μέ πραγματικούς συντελεστές νά ἔχει διαιρέτες πολυώνυμα μέ μιγαδικούς συντελεστές. Αὐτό φαίνεται ἀμέσως ἀπό τήν ἰσότητα

$$x^2+1=(x+i).(x-i).$$

2.2. Ἰδιότητες τῆς διαιρετότητας τῶν πολυωνύμων τοῦ $C_{[x]}$.

Ἐδῶ θά δοῦμε, χωρίς νά κάνουμε ὅλες τίς ἀποδείξεις, μερικές ἰδιότητες τῆς διαιρετότητας τῶν πολυωνύμων τοῦ $C_{[x]}$. Πολλές ἀπό αὐτές εἶναι ὅμοιες μέ τίς ἰδιότητες τῆς διαιρετότητας τῶν ἀκέραιων ἀριθμῶν πού εἴδαμε στήν παράγραφο 1.1 τοῦ Κεφ. III.

1. Ἡ σχέση τῆς διαιρετότητας δύο πολυωνύμων εἶναι μεταβατική, δηλαδή

   ἄν $g(x) \mid f(x)$ καί $f(x) \mid \varphi(x)$, τότε $g(x) \mid \varphi(x)$.

2. Ἄν $g(x)$ εἶναι διαιρέτης τῶν πολυωνύμων $f(x)$ καί $\varphi(x)$, τότε θά εἶναι ἐπίσης διαιρέτης τοῦ πολυωνύμου $f(x)+\varphi(x)$.

3. Ἄν $g(x)$ εἶναι διαιρέτης τοῦ $f(x)$, τότε τό $g(x)$ εἶναι διαιρέτης καί τοῦ γινομένου τοῦ $f(x)$ μέ κάθε πολυώνυμο $\varphi(x)$.

   Ἀπό τίς 2 καί 3 ἔχουμε τήν ἀκόλουθη ἰδιότητα.

4. Ἄν τό πολυώνυμο $g(x)$ εἶναι διαιρέτης καθενός ἀπό τά πολυώνυμα $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\ldots, f_\kappa(x)$, τότε τό $g(x)$ εἶναι ἐπίσης διαιρέτης τοῦ πολυωνύμου

   $$f_1(x)\ \varphi_1(x)+f_2(x)\cdot\varphi_2(x)+\ldots+f_\kappa(x)\cdot\varphi_\kappa(x),$$

   ὅπου $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_\kappa(x)$ εἶναι τυχόντα πολυώνυμα.

5. Κάθε πολυώνυμο $f(x)$ διαιρεῖται μέ κάθε πολυώνυμο μηδενικοῦ βαθμοῦ.

   Ἀπόδειξη: Ἄν $f(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0$ καί $g(x)=\kappa\neq \mathbf{0}$ (δηλ. μηδενικοῦ βαθμοῦ πολυώνυμο), τότε θά εἶναι

   $$f(x)=\kappa\cdot\left(\frac{\alpha_\nu}{\kappa}x^\nu+\frac{\alpha_{\nu-1}}{\kappa}x^{\nu-1}+\ldots+\frac{\alpha_1}{\kappa}x+\frac{\alpha_0}{\kappa}\right)$$

6. Ἄν τό $g(x)$ εἶναι διαιρέτης τοῦ $f(x)$, τότε τό $\kappa\cdot g(x)$ (μέ κ τυχόντα μή μηδενικό ἀριθμό) εἶναι ἐπίσης διαιρέτης τοῦ $f(x)$.

   Ἀπόδειξη: Ἀφοῦ $f(x)=g(x)\,\pi(x)$, τότε

   $$f(x)=\kappa\cdot\frac{1}{\kappa}\cdot g(x)\,\pi(x)\Leftrightarrow f(x)=(\kappa g(x))\cdot(\kappa^{-1}\pi(x)).$$

7. Τά μοναδικά πολυώνυμα, τά ὁποῖα εἶναι διαιρέτες τοῦ $f(x)\neq\mathbf{0}$ καί ἔχουν τόν ἴδιο βαθμό μέ αὐτό, εἶναι τά $\kappa\cdot f(x)$, μέ $\kappa\neq 0$.

Ἀπόδειξη: α) Εἶναι $f(x)=\kappa\cdot\kappa^{-1}f(x)\Leftrightarrow f(x)=(\kappa f(x))\cdot\kappa^{-1}$, δηλαδή τό $\kappa f(x)$ εἶναι διαιρέτης τοῦ $f(x)$. β) Ἄν $g(x)$ εἶναι διαιρέτης τοῦ $f(x)$ καί $g(x)$ ἔχει τόν ἴδιο βαθμό μέ τό $f(x)$, τότε τό πηλίκο τῆς διαιρέσεως τοῦ $f(x)$ μέ τό $g(x)$ πρέπει νά εἶναι μηδενικοῦ βαθμοῦ πολυώνυμο, δηλαδή $f(x)=g(x)\cdot\lambda$, $\lambda\neq 0$. Ἀπό τήν τελευταία σχέση ἔχουμε $g(x)=\lambda^{-1}f(x)=\kappa f(x)$, $(\kappa=\lambda^{-1}\neq 0)$.

8. **Ἄν** τό g(x) εἶναι διαιρέτης τοῦ f(x) καί τό f(x) εἶναι διαιρέτης τοῦ g(x), τότε θά **εἶναι $g(x)=\kappa f(x)$, $\kappa \neq 0$,** καί **θά λέμε ὅτι τά πολυώνυμα f(x) καί g(x) διαφέρουν κατά πολλαπλασιαστική σταθερά.**

Σημείωση: Ἀπό ὅλα τά πολυώνυμα $\kappa f(x)$, $\kappa \neq 0$ πού διαιροῦν τό f(x), παίρνουμε πολλές φορές ὡς **«ἀντιπρόσωπο»** ἐκεῖνο πού ἔχει συντελεστή τοῦ μεγιστοβάθμιου ὅρου τή μονάδα. Π.χ. ἄν $f(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0$, $\alpha_\nu \neq 0$, τότε μποροῦμε νά πάρουμε ὡς ἀντιπρόσωπο ὅλων τῶν $\kappa f(x)$, $\kappa \neq 0$, τό πολυώνυμο

$$g(x)=\frac{1}{\alpha_\nu} f(x)=x^\nu+\frac{\alpha_{\nu-1}}{\alpha_\nu}x^{\nu-1}+\ldots+\frac{\alpha_1}{\alpha_\nu}x+\frac{\alpha_0}{\alpha_\nu}.$$

Ἐπειδή ἡ σχέση τῆς διαιρετότητας δύο πολυωνύμων δέ μεταβάλλεται ἄν τό ἕνα ἀπό αὐτά (ἤ καί τά δύο) ἀντικατασταθεῖ ἀπό κάποιο ἄλλο, πού διαφέρει ἀπό αὐτό κατά πολλαπλασιαστική σταθερά, στά ἑπόμενα, ὅταν γράφουμε $\delta(x) \mid f(x)$ θά ἐννοοῦμε καί ὅλους τούς ἄλλους διαιρέτες τοῦ f(x) τῆς μορφῆς $\kappa \cdot \delta(x)$ μέ $\kappa \neq 0$.

Ἔτσι, μέ τά $1 \mid f(x)$ καί $f(x) \mid f(x)$ μέ $f(x) \neq \mathbf{0}$ ἐννοοῦμε καί $\kappa \mid f(x)$, $\kappa \neq 0$ καί $\kappa f(x) \mid f(x)$, $\kappa \neq 0$.

Τά κ καί $\kappa \cdot f(x)$ μέ $\kappa \neq 0$ ὀνομάζονται **προφανεῖς διαιρέτες τοῦ f(x).** Κάθε ἄλλος διαιρέτης τοῦ f(x) ὀνομάζεται **γνήσιος διαιρέτης** τοῦ f(x).

Ἄν ἕνα **μή σταθερό** πολυώνυμο f(x) ἔχει μόνο προφανεῖς διαιρέτες, τότε ὀνομάζεται **πρῶτο ἤ ἀνάγωγο πολυώνυμο.**

Τό νά εἶναι ἕνα πολυώνυμο f(x) ἀνάγωγο ἤ ὄχι ἐξαρτᾶται ἀπό τό σύνολο στό ὁποῖο τό ἐξετάζουμε. Π.χ. τό πολυώνυμο x^2+1 εἶναι ἀνάγωγο στό σύνολο $\mathbf{R}_{[x]}$, ἀλλά δέν εἶναι ἀνάγωγο στό $\mathbf{C}_{[x]}$, γιατί τά $(x \pm i) \in \mathbf{C}_{[x]}$ εἶναι γνήσιοι διαιρέτες του. Ἐπίσης τό x^2-2 εἶναι ἀνάγωγο στό σύνολο $\mathbf{Q}_{[x]}$, ἀλλά δέν εἶναι ἀνάγωγο στό $\mathbf{R}_{[x]}$, γιατί τά $(x \pm \sqrt{2}) \in \mathbf{R}_{[x]}$ εἶναι γνήσιοι διαιρέτες του.

2.3. Ἡ ἀλγοριθμική διαίρεση.

Σέ μικρότερη τάξη μάθαμε νά ἐκτελοῦμε διαιρέσεις μεταξύ πολυωνύμων μέ πραγματικούς συντελεστές. Οἱ διαιρέσεις αὐτές μποροῦν νά ἐκτελεστοῦν καί μέ πολυώνυμα τοῦ $\mathbf{C}_{[x]}$ μέ τόν ἴδιο ἀκριβῶς τρόπο. Ἐδῶ θά ἀποδείξουμε τό ἀκόλουθο θεώρημα, πού εἶναι γνωστό ὡς **θεώρημα τῆς ἀλγοριθμικῆς ἤ Εὐκλείδειας διαιρέσεως.**

Θεώρημα: Ἄν f(x) καί g(x) εἶναι δύο πολυώνυμα τοῦ $\mathbf{C}_{[x]}$ μέ $g(x) \neq 0$, τότε ὑπάρχει ἕνα μοναδικό ζεῦγος πολυωνύμων π(x) καί υ(x) τοῦ $\mathbf{C}_{[x]}$, μέ $\upsilon(x)=0$ ἤ βαθμ.υ(x) < βαθμ. g(x), τέτοιο ὥστε

$$f(x)=g(x)\,\pi(x)+\upsilon(x) \tag{1}$$

Ἀπόδειξη: Θά ἀποδείξουμε πρῶτα ὅτι *ὑπάρχουν δύο πολυώνυμα π(x) καί r(x) πού ἱκανοποιοῦν τό θεώρημα.*

Ἄν $f(x)=\mathbf{0}$, τότε τά πολυώνυμα $\pi(x)=\mathbf{0}$ καί $\upsilon(x)=\mathbf{0}$, ἱκανοποιοῦν τό θεώρημα.

Ἄς ὑποθέσουμε τώρα ὅτι:

$$f(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0,\ \alpha_\nu\neq 0 \quad \text{καί}$$
$$g(x)=\beta_\mu x^\mu+\beta_{\mu-1}x^{\mu-1}+\ldots+\beta_1 x+\beta_0,\ \beta_\mu\neq 0.$$

Τότε:

Ἄν $\nu<\mu$, τότε τά πολυώνυμα $\pi(x)=0$ καί $\upsilon(x)=f(x)$, ἱκανοποιοῦν τό θεώρημα.

Ἄν $\nu\geq\mu$, τότε θέτοντας

$$f(x)-\frac{\alpha_\nu}{\beta_\mu}x^{\nu-\mu}\cdot g(x)=\upsilon_1(x) \tag{B1}$$

παίρνουμε ἕνα πολυώνυμο $\upsilon_1(x)$ μέ τήν ἰδιότητα $\upsilon_1(x)=\mathbf{0}$ ἤ βαθμ. $\upsilon_1(x)=\nu_1<\nu$. Ἄν τώρα εἶναι $\upsilon_1(x)=\mathbf{0}$ ἤ $\nu_1<\mu$, τότε τά πολυώνυμα

$$\pi_1(x)=\frac{\alpha_\nu}{\beta_\mu}x^{\nu-\mu} \quad \text{καί} \quad \upsilon_1(x)$$

ἱκανοποιοῦν τό θεώρημα. Ἄν ὅμως εἶναι $\nu_1\geq\mu$ καί κ_1 εἶναι ὁ συντελεστής τοῦ μεγιστοβάθμιου ὅρου τοῦ $\upsilon_1(x)$, τότε θέτοντας

$$\upsilon_1(x)-\frac{\kappa_1}{\beta_\mu}x^{\nu_1-\mu}\cdot g(x)=\upsilon_2(x) \tag{B2}$$

παίρνουμε ἕνα πολυώνυμο $\upsilon_2(x)$ μέ τήν ἰδιότητα $\upsilon_2(x)=\mathbf{0}$ἤ βαθμ. $\upsilon_2(x)=\nu_2<\nu_1$. Ἄν λοιπόν εἶναι $\upsilon_2(x)=\mathbf{0}$ ἤ $\nu_2<\mu$, τότε τά πολυώνυμα

$$\pi_2(x)=\frac{\alpha_\nu}{\beta_\mu}x^{\nu-\mu}+\frac{\kappa_1}{\beta_\mu}x^{\nu_1-\mu} \quad \text{καί} \quad \upsilon_2(x)$$

ἱκανοποιοῦν τό θεώρημα, ἐνῶ ἄν εἶναι $\nu_2\geq\mu$ καί κ_2 εἶναι ὁ συντελεστής τοῦ μεγιστοβάθμιου ὅρου τοῦ $\upsilon_2(x)$, τότε θέτουμε

$$\upsilon_2(x)-\frac{\kappa_2}{\beta_\mu}x^{\nu_2-\mu}\cdot g(x)=\upsilon_3(x) \tag{B3}$$

καί συνεχίζουμε τήν ἴδια διαδικασία.

Ἐπειδή οἱ βαθμοί $\nu_1,\nu_2,\nu_3,\ldots$ τῶν πολυωνύμων $\upsilon_1(x),\ \upsilon_2(x),\ \upsilon_3(x),\ldots$ ἐλαττώνονται διαρκῶς (ἐκτός ἄν συμβεῖ $\upsilon_\rho(x)=\mathbf{0}$, ὁπότε τελειώνει ἐκεῖ ἡ διαδικασία), δηλαδή ἐπειδή εἶναι $\nu>\nu_1>\nu_2>\nu_3>\ldots$, θά φτάσουμε μετά ἀπό πεπερασμένο πλῆθος βημάτων $(B_1,B_2,\ldots,B_\lambda)$, σέ ἕνα πολυώνυμο $\upsilon_\lambda(x)$, πού ὁρίζεται ἀπό τήν ἰσότητα

$$\upsilon_{\lambda-1}(x)-\frac{\kappa_{\lambda-1}}{\beta_\mu}x^{\nu_{\lambda-1}-\mu}\cdot g(x)=\upsilon_\lambda(x) \tag{Bλ}$$

γιά τό ὁποῖο θά εἶναι $\upsilon_\lambda(x)=\mathbf{0}$ ἤ βαθμ$\cdot\upsilon_\lambda(x)<\mu$. Προσθέτοντας τότε τίς ἰσότητες (B1), (B2),...,(Bλ) κατά μέλη παίρνουμε τήν ἰσότητα

$$f(x)-\left[\frac{\alpha_\nu}{\beta_\mu}x^{\nu-\mu}+\frac{\kappa_1}{\beta_\mu}x^{\nu_1-\mu}+\ldots+\frac{\kappa_{\lambda-1}}{\beta_\mu}x^{\nu_{\lambda-1}-\mu}\right]g(x)=\upsilon_\lambda(x),$$

δηλαδή τήν $f(x)=\left[\frac{\alpha_\nu}{\beta_\mu}x^{\nu-\mu}+\frac{\kappa_1}{\beta_\mu}x^{\nu_1-\mu}+\ldots+\frac{\kappa_{\lambda-1}}{\beta_\mu}x^{\nu_{\lambda-1}-\mu}\right]\cdot g(x)+\upsilon_\lambda(x)$

πού φανερώνει ὅτι τά πολυώνυμα

$$\pi(x)=\frac{\alpha_\nu}{\beta_\mu}x^{\nu-\mu}+\frac{\kappa_1}{\beta_\mu}x^{\nu_1-\mu}+\ldots+\frac{\kappa_{\lambda-1}}{\beta_\mu}x^{\nu_{\lambda-1}-\mu} \quad \text{καί} \quad \upsilon(x)=\upsilon_\lambda(x)$$

ἱκανοποιοῦν τό θεώρημα.

Θά δείξουμε ὅτι *τά πολυώνυμα $\pi(x)$ καί $\upsilon(x)$ εἶναι μοναδικά.*

Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι ἐκτός ἀπό τά $\pi(x)$ καί $\upsilon(x)$, ὑπάρχουν καί τά πολυώνυμα $\pi'(x)$ καί $\upsilon'(x)$ πού ἱκανοποιοῦν τό θεώρημα, δηλαδή ὅτι εἶναι:

$$f(x)=g(x)\cdot\pi'(x)+\upsilon'(x) \qquad (1')$$

μέ $\upsilon'(x)=\mathbf{0}$ ἤ βαθμ $\upsilon'(x)<$ βαθμ $g(x)$. Τότε θά ἔχουμε:

$$g(x)\cdot\pi(x)+\upsilon(x)=g(x)\,\pi'(x)+\upsilon'(x) \qquad \text{ἤ}$$
$$g(x)\,[\pi(x)-\pi'(x)]=\upsilon'(x)-\upsilon(x) \qquad (2)$$

Ἡ (2) ἰσχύει μόνο στήν περίπτωση πού εἶναι $\pi(x)-\pi'(x)=\mathbf{0}$, ὁπότε θά εἶναι καί $\upsilon'(x)-\upsilon(x)=\mathbf{0}$. Γιατί, ἄν εἶναι $\pi(x)-\pi'(x)\neq\mathbf{0}$, τότε θά εἶναι

$$\text{βαθμ}\; g(x)\,[\pi(x)-\pi'(x)]=\text{βαθμ}\,(\upsilon'(x)-\upsilon(x))\geq\text{βαθμ}\; g(x)$$

ἐνῶ εἶναι συγχρόνως

$$\text{βαθμ}\,(\upsilon(x)-\upsilon'(x))<\text{βαθμ}\; g(x)$$

πράγμα ἄτοπο.

Ἄρα ἀποδείχτηκε ὅτι

$$\pi'(x)=\pi(x) \qquad \text{καί} \qquad \upsilon'(x)=\upsilon(x)$$

δηλαδή ὅτι τά $\pi(x)$ καί $\upsilon(x)$ εἶναι μοναδικά.

Ἡ πορεία μέ τήν ὁποία ἀποδείχτηκε τό θεώρημα, μᾶς δείχνει καί τόν τρόπο μέ τόν ὁποῖο βρίσκουμε τά πολυώνυμα $\pi(x)$ καί $\upsilon(x)$. Ἡ εὕρεση τῶν $\pi(x)$ καί $\upsilon(x)$ ὀνομάζεται **ἀλγοριθμική ἤ Εὐκλείδεια διαίρεση τοῦ $f(x)$ μέ τό $g(x)$.** Τά πολυώνυμα $f(x)$, $g(x)$, $\pi(x)$ καί $\upsilon(x)$ ὀνομάζονται ἀντίστοιχα **διαιρετέος, διαιρέτης, πηλίκο** καί **ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως τοῦ $f(x)$ μέ τό $g(x)$. Ἡ ἰσότητα (1)** μέ τίς προϋποθέσεις τοῦ θεωρήματος **ὀνομάζεται ἰσότητα τῆς ἀλγοριθμικῆς διαιρέσεως.**

Παρατηρήσεις:

1. Ἀπό τήν ἀπόδειξη τοῦ θεωρήματος, συμπεραίνουμε ὅτι οἱ συντελεστές τῶν πολυωνύμων $\pi(x)$ καί $\upsilon(x)$ εἶναι πραγματικοί, ὅταν τά πολυώνυμα $f(x)$ καί $g(x)$ ἀνήκουν στό $\mathbf{R}_{[x]}$.

2. Εἶναι φανερό ὅτι, ὅταν εἶναι βαθμ $f(x)\geq$ βαθμ $g(x)$, τότε ἰσχύει:

$$\text{βαθμ}\;\pi(x)=\text{βαθμ}\;f(x)-\text{βαθμ}\;g(x)$$

3. Ἄν εἶναι $\upsilon(x)=\mathbf{0}$, τότε ἔχουμε τήν **τέλεια διαίρεση** πού ἀναφέραμε προηγουμένως.

2.4. Μέγιστος κοινός διαιρέτης πολυωνύμων τοῦ $C_{[x]}$.

Ἐπειδή $x^2-5x+6=(x-2)\cdot(x-3)$ καί $x^2-4=(x-2)(x+2)$, τό πολυώνυμο $x-2$ διαιρεῖ καί τά δύο πολυώνυμα x^2-5x+6 καί x^2-4. Γενικά, **ἄν ἕνα πολυώνυμο g(x) διαιρεῖ δύο ἤ περισσότερα πολυώνυμα, τότε ὀνομάζεται κοινός διαιρέτης τῶν πολυωνύμων αὐτῶν.** Εἶναι φανερό ὅτι στούς κοινούς διαιρέτες δύο ἤ περισσότερων πολυωνύμων περιλαμβάνονται καί ὅλα τά πολυώνυμα μηδενικοῦ βαθμοῦ, δηλ. ὅλοι οἱ μιγαδικοί ἀριθμοί ἐκτός ἀπό τό μηδέν. Ἄν τά πολυώνυμα $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_\nu(x)$ δέν ἔχουν ἄλλους κοινούς διαιρέτες, ἐκτός ἀπό τά πολυώνυμα μηδενικοῦ βαθμοῦ, τότε θά **ὀνομάζονται πρῶτα μεταξύ τους.**

Εἶναι φανερό ἐπίσης ὅτι **κοινοί διαιρέτες τοῦ μηδενικοῦ πολυωνύμου καί ἑνός πολυωνύμου f(x) εἶναι ὅλοι οἱ διαιρέτες τοῦ f(x) καί,** σύμφωνα μέ τήν παρατήρηση 1 τῆς 2.1., **κανένας διαιρέτης ἑνός μή μηδενικοῦ πολυωνύμου δέν ἔχει βαθμό μεγαλύτερο ἀπό τό βαθμό αὐτοῦ τοῦ πολυωνύμου.**

Θά δείξουμε τώρα, μέ τήν πρόταση πού ἀκολουθεῖ, ὅτι *ἄν δοθοῦν δύο ἤ περισσότερα πολυώνυμα, ἀπό τά ὁποῖα τουλάχιστον τό ἕνα δέν εἶναι τό μηδενικό πολυώνυμο, μποροῦμε πάντοτε νά προσδιορίσουμε ἕνα πολυώνυμο πού τό σύνολο τῶν διαιρετῶν του ταυτίζεται μέ τό σύνολο τῶν κοινῶν διαιρετῶν τῶν πολυωνύμων, πού ἔχουν δοθεῖ.*

Ἡ πρόταση ἀναφέρεται σέ δύο μή μηδενικά πολυώνυμα, γιατί ἄν τό ἕνα εἶναι τό μηδενικό, τότε, σύμφωνα μέ ὅσα εἴπαμε παραπάνω, τό ἄλλο πολυώνυμο εἶναι τό ζητούμενο.

Πρόταση: Ἄν f(x) καί g(x) εἶναι δύο μή μηδενικά πολυώνυμα τοῦ $C_{[x]}$, μέ βαθμ. f(x) $\geq$ βαθμ. g(x) καί δ(x) εἶναι ἕνας κοινός διαιρέτης τους, τότε τό δ(x) θά εἶναι κοινός διαιρέτης καί τῶν πολυωνύμων g(x) καί υ(x), ὅπου υ(x) εἶναι τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως τοῦ f(x) μέ τό g(x), καί ἀντίστροφα.

Ἀπόδειξη. Ἄν π(x) καί υ(x) εἶναι τό πηλίκο καί τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως τοῦ f(x) μέ τό g(x), τότε θά ἔχουμε

$$f(x)=g(x)\,\pi(x)+\upsilon(x) \quad \text{ἤ} \quad f(x)-g(x)\,\pi(x)=\upsilon(x)$$

Ἀλλά τό δ(x) εἶναι διαιρέτης τοῦ πρώτου μέλους τῆς τελευταίας ἰσότητας, ὁπότε θά εἶναι καί διαιρέτης τοῦ υ(x). Ἄρα τό δ(x) εἶναι κοινός διαιρέτης τῶν πολυωνύμων g(x) καί υ(x).

Ἀντίστροφα: Ἄν εἶναι $\delta(x)\mid g(x)$ καί $\delta(x)\mid \upsilon(x)$, τότε θά εἶναι καί

$$\delta(x)\mid[g(x)\,\pi(x)+\upsilon(x)]=f(x),$$

δηλαδή τό δ(x) θά εἶναι κοινός διαιρέτης τῶν f(x) καί g(x).

Ἄρα *οἱ κοινοί διαιρέτες τῶν f(x) καί g(x) ταυτίζονται μέ τούς κοινούς διαιρέτες τῶν g(x) καί υ(x).*

Ἄν λοιπόν εἶναι $\upsilon(x)=\mathbf{0}$, τότε οἱ κοινοί διαιρέτες τῶν f(x) καί g(x) θά εἶναι οἱ διαιρέτες τοῦ $g(x)$. Ἄν ὅμως εἶναι $υ(x) \neq 0$, τότε οἱ κοινοί διαιρέτες τῶν $f(x)$ καί $g(x)$ θά εἶναι οἱ κοινοί διαιρέτες τῶν $υ(x)$ καί $υ_1(x)$, ὅπου $υ_1(x)$ τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως τοῦ $g(x)$ μέ τό $υ(x)$. Ἄν τώρα εἶναι $υ_1(x) = 0$, τότε οἱ κοινοί διαιρέτες τῶν $f(x)$ καί $g(x)$ θά εἶναι οἱ διαιρέτες τοῦ $υ(x)$, ἐνῶ ἄν εἶναι $υ_1(x) \neq 0$, συνεχίζουμε τήν ἴδια διαδικασία. Ἡ διαδικασία αὐτή, ἐπειδή εἶναι βαθμ $υ(x) >$ βαθμ $υ_1(x) > \ldots$, θά σταματήσει, ὅταν κάποιο ὑπόλοιπο, ἔστω τό $υ_λ(x)$, εἶναι τό μηδενικό πολυώνυμο. Τότε οἱ κοινοί διαιρέτες τῶν $f(x)$ καί $g(x)$ θά εἶναι οἱ διαιρέτες τοῦ $υ_{λ-1}(x)$.

Μποροῦμε τώρα γιά πολυώνυμα $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_ν(x)$, πού κανένα δέν εἶναι τό μηδενικό πολυώνυμο, νά προσδιορίσουμε ἕνα πολυώνυμο $δ(x)$, πού οἱ διαιρέτες του νά εἶναι οἱ κοινοί διαιρέτες τῶν $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_ν(x)$. Γι' αὐτό ἀρκεῖ νά ἐφαρμόσουμε τήν παραπάνω διαδικασία γιά τά $f_1(x)$ καί $f_2(x)$, μετά γιά τά $δ_1(x)$ καί $f_3(x)$, μετά γιά τά $δ_2(x)$ καί $f_4(x)$ κ.ο.κ., ὅπου τό $δ_1(x)$ ἔχει διαιρέτες τούς κοινούς διαιρέτες τῶν $f_1(x)$ καί $f_2(x)$, τό $δ_2(x)$ τούς κοινούς διαιρέτες τῶν $δ_1(x)$ καί $f_3(x)$ κ.τ.λ. (Ἄν μερικά ἀπό τά $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_ν(x)$ ἦταν ἴσα μέ τό μηδενικό πολυώνυμο, τότε αὐτά δέ μετέχουν στή διαδικασία καί γι' αὐτό πήραμε μή μηδενικά).

Τό πολυώνυμο $δ(x)$, πού προσδιορίζουμε μέ τήν παραπάνω διαδικασία,**μαζί μέ τά διαφέροντα ἀπό αὐτό κατά πολλαπλασιαστική σταθερά,** ὅπως εἶναι φανερό, **ἔχει τό μεγαλύτερο βαθμό ἀπό ὅλους τούς κοινούς διαιρέτες τῶν $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_ν(x)$ καί συγχρόνως διαιρεῖται μέ κάθε ἄλλον κοινό τους διαιρέτη,** γι' αὐτό **καί ὀνομάζεται μέγιστος κοινός διαιρέτης τῶν $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_ν(x)$.**

Τό πολυώνυμο πού εἶναι **«ἀντιπρόσωπος» τῶν πολυωνύμων $κδ(x)$, $κ \neq 0$ εἶναι** ἑπομένως **μοναδικό καί** λέμε ὅτι **εἶναι ὁ μέγιστος κοινός διαιρέτης (Μ.Κ.Δ.) τῶν πολυωνύμων $f_1(x), f_2(x), \ldots f_ν(x)$ καί τόν συμβολίζουμε μέ $< f_1(x), f_2(x), \ldots, f_ν(x) >$.**

Ἐπειδή, ὅταν βροῦμε ἕνα Μ.Κ.Δ. τῶν $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_ν(x)$, ἔχουμε συγχρόνως προσδιορίσει καί τόν ἀντιπρόσωπό τους πού εἶναι ὁ Μ.Κ.Δ. τους, μέ τό σύμβολο $<f_1(x), f_2(x), \ldots, f_ν(x)>$ θά συμβολίζουμε τόν Μ.Κ.Δ τους, ἀλλά καί κάθε ἄλλο πολυώνυμο πού διαφέρει ἀπό αὐτόν κατά πολλαπλασιαστική σταθερά. Ἔτσι ἄν τά $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_ν(x)$ εἶναι πρῶτα μεταξύ τους, θά ἔχουν Μ.Κ.Δ. κάθε μή μηδενικό σταθερό πολυώνυμο καί γράφουμε $<f_1(x), f_2(x), \ldots, f_ν(x)> = κ \neq 0$, ἀλλά μποροῦμε νά γράφουμε καί $<f_1(x), f_2(x), \ldots, f_ν(x)> = 1$.

Ἡ διαδικασία πού ἀναπτύξαμε προηγουμένως, μέ τή βοήθεια τῆς προτάσεως πού ἀποδείξαμε, ὁδηγεῖ στόν προσδιορισμό τοῦ Μ.Κ.Δ δύο μή μηδενικῶν πολυωνύμων καί ὀνομάζεται **Εὐκλείδειος ἀλγόριθμος,** ἐπειδή εἶναι ἴδια μέ τόν Εὐκλείδειο ἀλγόριθμο προσδιορισμοῦ τοῦ Μ.Κ.Δ. δύο ἀκέραιων ἀριθμῶν.

Γιά τά πολυώνυμα $2x^2-2$ καί $8x-8$, μέ τόν Εὐκλείδειο ἀλγόριθμο ἔχουμε

$$<2x^2-2,\ 8x-8> = <8x-8,\ 0> = 8x-8$$

Τό πολυώνυμο $8x-8$ εἶναι λοιπόν Μ.Κ.Δ. τῶν πολυωνύμων $2x^2-2$ καί $8x-8$, ὅπως Μ.Κ.Δ τους εἶναι καί τό πολυώνυμο $\frac{1}{4}(8x-8) = 2x-2 = 2(x-1)$ πού παίρναμε σέ προηγούμενες τάξεις, άλλά καί κάθε πολυώνυμο $\kappa\cdot(8x-8)$, $\kappa \neq 0$. Όμως ό Μ.Κ.Δ. τους είναι τό πολυώνυμο $\frac{1}{8}(8x-8) = x-1$, πού έχει συντελεστή τοῦ μεγιστοβάθμιου ὅρου του τή μονάδα καί εἶναι ὁ **«ἀντιπρόσωπος»** τῶν $\kappa(8x-8)$, $\kappa \neq 0$.

2.5. Ἐφαρμογές.

1. **Ἄν $\varphi(x) \neq 0$ καί $g(x)|f(x)$, τότε θά εἶναι $g(x).\varphi(x) \mid f(x).\varphi(x)$ καί ἀντίστροφα.**

Ἀπόδειξη: Εἶναι $g(x) \mid f(x)$, δηλ. $f(x)=g(x)\,\pi(x)$. Ἀλλά $\varphi(x) \neq \mathbf{0}$, ἄρα

$$f(x) = g(x)\,\pi(x) \Leftrightarrow f(x).\varphi(x) = g(x)\pi(x).\varphi(x)$$

Οἱ ἰσότητες αὐτές ἀποδεικνύουν τό ζητούμενο.

2. **Ἄν $\delta(x)$ εἶναι Μ.Κ.Δ. τῶν πολυωνύμων $f(x)$ καί $g(x)$, τότε ὑπάρχουν δύο πολυώνυμα $A(x)$ καί $B(x)$, ὥστε νά ἰσχύει:**

$$\delta(x)=A(x)f(x)+B(x)g(x) \qquad (1)$$

Ἀπόδειξη: Ἀφοῦ $\delta(x)$ εἶναι Μ.Κ.Δ. τῶν $f(x)$ καί $g(x)$, τότε θά εἶναι $f(x) \neq \mathbf{0}$ εἴτε $g(x) \neq \mathbf{0}$. Ἄς εἶναι $f(x) \neq \mathbf{0}$. Τότε:

i) Ἄν $g(x)=\mathbf{0}$, θά εἶναι $<f(x),g(x)> = f(x)$ καί ἄρα θά ὑπάρχει $\kappa \in \mathbf{C}$, ὥστε νά εἶναι $\delta(x)=\kappa.f(x)$. Ἄρα τό πολυώνυμο $A(x)=\kappa$ μαζί μέ ὁποιοδήποτε $B(x) \in \mathbf{C}_{[x]}$ θά ἱκανοποιοῦν τήν (1).

ii) Ἄν $g(x) \neq \mathbf{0}$, τότε δέ βλάπτεται ἡ γενικότητα, ἄν ὑποθέσουμε ἀκόμα ὅτι βαθμ. $f(x) \geq$ $\geq$ βαθμ. $g(x)$. Θά εἶναι συνεπῶς

$$<f(x),\ g(x)> = <g(x),\ \upsilon_1(x)>$$

ὅπου $\upsilon_1(x)$ τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως τοῦ $f(x)$ μέ τό $g(x)$.
Ἄν τώρα εἶναι $\upsilon_1(x)=\mathbf{0}$, τότε τό ζεῦγος πολυωνύμων $A(x)=\mathbf{0}$ καί $B(x)=\kappa$, ὅπου $\kappa \in \mathbf{C}$ μέ $\kappa g(x)=\delta(x)$ ἱκανοποιεῖ τήν (1), ἀφοῦ τό $g(x)$ θά εἶναι ἐπίσης Μ.Κ.Δ. τῶν πολυωνύμων $f(x)$ καί $g(x)$. Ἄν ὅμως εἶναι $\upsilon_1(x) \neq \mathbf{0}$, τότε τό $\upsilon_1(x)$ μπορεῖ νά εἶναι διαιρέτης τοῦ $g(x)$ ὁπότε θά εἶναι καί Μ.Κ.Δ. τῶν $f(x)$ καί $g(x)$ ἤ μπορεῖ καί νά μήν εἶναι διαιρέτης του. Στήν περίπτωση πού $\upsilon_1(x) \mid g(x)$, ἐπειδή εἶναι

$$\upsilon_1(x) = f(x)-\pi_1(x)g(x) \quad \text{καί}$$

ὑπάρχει κατάλληλο $\kappa \in \mathbf{C}$, ὥστε νά εἶναι $\delta(x)=\kappa\cdot\upsilon_1(x)$, τά πολυώνυμα

$$A(x)=\kappa \quad \text{καί} \quad B(x)=-\kappa\cdot\pi_1(x) \text{ θά ἱκανοποιοῦν τήν (1).}$$

Στήν περίπτωση πού τό $\upsilon_1(x)$ δέν εἶναι διαιρέτης τοῦ $g(x)$, ἐπειδή

$$<g(x),\ \upsilon_1(x)> = <\upsilon_1(x),\ \upsilon_2(x)> \text{ θά ἔχουμε}$$

$$\upsilon_2(x)=g(x)-\upsilon_1(x)\cdot\pi_2(x) \Leftrightarrow \upsilon_2(x)=g(x)-[f(x)-g(x)\pi_1(x)]\pi_2(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \upsilon_2(x)=(-\pi_2(x))f(x)+[1+\pi_1(x)\pi_2(x)]g(x).$$

Ἔτσι ἄν $\upsilon_2(x)=<f(x),\ g(x)>$, τότε θά ὑπάρχει $\kappa \in \mathbf{C}$ μέ $\delta(x)=\kappa\cdot\upsilon_2(x)$, ὁπότε τά πολυώνυμα $A(x)=\kappa(-\pi_2(x))$ καί $B(x)=\kappa[1+\pi_1(x)\pi_2(x)]$ θά ἱκανοποιοῦν τήν (1), ἀλλοιῶς θά συνεχίσουμε τή διαδικασία ὥς τό κατάλληλο $\upsilon_j(x)$, ὥστε νά εἶναι $\upsilon_j(x)=<f(x),g(x)>$ καί θά προσδιορίσουμε τότε τά $A(x)$ καί $B(x)$.

3. **Ἄν ἕνα πολυώνυμο $f(x)$ εἶναι πρῶτο πρός τά πολυώνυμα $\varphi(x)$ καί $\psi(x)$, τότε θά εἶναι πρῶτο καί πρός τό γινόμενό τους.**

Ἀπόδειξη: Ἀφοῦ $<f(x),\ \varphi(x)>=1$, σύμφωνα μέ τήν προηγούμενη ἐφαρμογή, θά ὑπάρχουν πολυώνυμα $A(x)$ καί $B(x)$ τέτοια, ὥστε:

$$f(x)\cdot A(x)+\varphi(x)B(x)=1 \Leftrightarrow f(x)\cdot[A(x)\cdot\psi(x)]+[\varphi(x)\cdot\psi(x)]B(x)=\psi(x).$$

Ἄν τά πολυώνυμα $f(x)$ καί $\varphi(x)\cdot\psi(x)$ εἶχαν καί κοινό διαιρέτη ὄχι μηδενικοῦ βαθμοῦ, τότε αὐτός θά ἦταν καί διαιρέτης τοῦ $\psi(x)$, τό ὁποῖο εἶναι ἄτοπο, γιατί $\langle f(x), \psi(x)\rangle=1$. Ἄρα τό $f(x)$ εἶναι πρῶτο πρός τό $\varphi(x)\cdot\psi(x)$.

4. Ἄν τό $\varphi(x)$ διαιρεῖ τό γινόμενο τῶν $f(x)$ καί $g(x)$ καί εἶναι πρῶτο πρός τό $f(x)$, τότε θά διαιρεῖ τό $g(x)$.

Ἀπόδειξη: Ἄν $g(x)=0$, τότε τό $\varphi(x)$ εἶναι διαιρέτης τοῦ $g(x)$. Ἔστω τώρα $g(x)\neq 0$, τότε ὅπως καί προηγουμένως ἔχουμε

$$f(x)\cdot A(x)+\varphi(x)\cdot B(x)=1 \Leftrightarrow [f(x)g(x)]\cdot A(x)+\varphi(x)\cdot[B(x)\cdot g(x)]=g(x).$$

Τό ἀριστερό μέλος διαιρεῖται μέ τό $\varphi(x)$, ἄρα $\varphi(x)\mid g(x)$.

5. Ἄν δύο πολυώνυμα $\varphi(x)$ καί $\psi(x)$ εἶναι πρῶτα μεταξύ τους καί καθένα τους διαιρεῖ ἕνα τρίτο πολυώνυμο $f(x)$, τότε καί τό γινόμενό τους θά διαιρεῖ τό πολυώνυμο $f(x)$.

Ἀπόδειξη: Εἶναι $f(x)=\varphi(x)\pi(x)$ καί ἐπειδή $\psi(x)\mid f(x)$, συμπεραίνουμε ὅτι $\psi(x)\mid\varphi(x)\cdot\pi(x)$, πού σημαίνει ὅτι $\psi(x)\mid\pi(x)$, ἀφοῦ $\psi(x)$ πρῶτο πρός τό $\varphi(x)$. Ἔτσι $\pi(x)=\psi(x)\cdot\pi_1(x)$, ὁπότε $f(x)=[\varphi(x)\cdot\psi(x)]\pi_1(x)$, πού ἀποδεικνύει τήν πρόταση.

2.6. Ἀσκήσεις

1. Ἄν $g_1(x)\mid f_1(x)$ καί $g_2(x)\mid f_2(x)$, δεῖξτε ὅτι $g_1(x)\cdot g_2(x)\mid f_1(x)\cdot f_2(x)$.
2. Ἄν τό $g(x)$ διαιρεῖ ἕνα ἀπό τά πολυώνυμα $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_\nu(x)$, δεῖξτε ὅτι θά διαιρεῖ καί τό γινόμενό τους.
3. Ἄν τό $g(x)$ διαιρεῖ τό $f(x)$, τότε θά διαιρεῖ καί τό $[f(x)]^\nu$, $\nu\in N$.
4. Ἄν τό $g(x)$ διαιρεῖ τό $f_1(x)+f_2(x)$ καί ἕνα ἀπό τά $f_1(x)$, $f_2(x)$, δεῖξτε ὅτι θά διαιρεῖ καί τό ἄλλο.
5. Βρεῖτε τό Μ.Κ.Δ. τῶν πολυωνύμων $f(x)=2x^4+3x^3+x^2-3x-3$ καί $g(x)=x^3-1$.
6. Νά ἐκτελεστεῖ ἡ διαίρεση τοῦ πολυωνύμου $f(x)=x^4+3x^3-7x^2+\kappa x+\lambda$ μέ τό $g(x)=x^2-3x+5$ καί ἔπειτα νά ὁριστοῦν οἱ πραγματικοί ἀριθμοί κ καί λ, ὥστε ἡ διαίρεση αὐτή νά εἶναι τέλεια.
7. Νά ἐκτελεστεῖ ἡ διαίρεση τοῦ $f(x)=x^4+1$ μέ τό $g(x)=x^2-\sqrt{2}x+\kappa$ καί στή συνέχεια νά προσδιοριστεῖ ἡ πραγματική τιμή τοῦ κ, ὥστε ἡ διαίρεση νά εἶναι τέλεια.
8. Νά ὁριστεῖ ὁ πραγματικός ἀριθμός $\lambda\neq 0$, ὥστε τό πολυώνυμο $f(x)=x^3-5x^2+\frac{6}{\lambda}$ νά διαιρεῖται μέ τό πολυώνυμο $\lambda x-1$.
9. Δεῖξτε ὅτι τό πολυώνυμο
$$f(x)=x^{\nu\alpha_{\nu-1}+\nu-1}+x^{\nu\alpha_{\nu-2}+\nu-2}+\ldots+x^{\nu\alpha_1+1}+1$$
διαιρεῖται μέ τό πολυώνυμο
$$\varphi(x)=x^{\nu-1}+x^{\nu-2}+\ldots+x+1,$$
ὅπου ν, $\alpha_{\nu-1}$, $\alpha_{\nu-2}, \ldots, \alpha_1$ εἶναι φυσικοί ἀριθμοί.
10. Δεῖξτε ὅτι τό πολυώνυμο
$$f(x)=(x^{\rho-1}+\alpha x^{\rho-2}+\ldots+\alpha^{\rho-1})x^{(\rho+1)\nu+1}+\alpha^{(\rho+1)\nu+\rho}$$
διαιρεῖται μέ τό πολυώνυμο
$$g(x)=x^\rho+\alpha x^{\rho-1}+\ldots+\alpha^{\rho-1}x+\alpha^\rho,$$
ὅπου α εἶναι ἀκέραιος ἀριθμός καί ρ,ν φυσικοί ἀριθμοί.

2.7. Προτάσεις γιά τά ὑπόλοιπα τῶν διαιρέσεων τῶν πολυωνύμων τοῦ $C_{[x]}$.

Δίνουμε ἐδῶ δύο χρήσιμες προτάσεις, πού ἀναφέρονται στά ὑπόλοιπα τῶν διαιρέσεων πολυωνύμων τοῦ $C_{[x]}$.

Πρόταση 1. **Ἄν $f_1(x)$, $f_2(x)$ καί $\delta(x)$ εἶναι πολυώνυμα τοῦ $C_{[x]}$ μέ $\delta(x) \neq 0$, τότε οἱ διαιρέσεις τῶν $f_1(x)$ καί $f_2(x)$ μέ τό $\delta(x)$ δίνουν τό ἴδιο ὑπόλοιπο, ὅταν καί μόνο ὅταν ἡ διαφορά $f_1(x)—f_2(x)$ εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ $\delta(x)$.**

Ἡ ἀπόδειξη τῆς προτάσεως αὐτῆς εἶναι ὅμοια μέ τήν ἀπόδειξη τῆς προτάσεως 2 τῆς 1.3 τοῦ Κεφ. ΙΙΙ.

Πρόταση 2. **Ἄν ὁ διαιρετέος $f(x)$ καί ὁ διαιρέτης $\varphi(x)$ μιᾶς διαιρέσεως πολλαπλασιαστοῦν μέ τό ἴδιο μή μηδενικό πολυώνυμο $g(x)$, τότε τό πηλίκο τῆς διαιρέσεως παραμένει τό ἴδιο, ἐνῶ τό ὑπόλοιπο πολλαπλασιάζεται μέ τό $g(x)$.**

Ἀπόδειξη: Ἔχουμε $f(x) = \varphi(x) \cdot \pi(x) + \upsilon(x)$, μέ $\upsilon(x) = 0$ ἤ βαθμ $\upsilon(x) <$ $<$ βαθμ $\varphi(x)$, ὁπότε $f(x) \cdot g(x) = [\varphi(x)\, \pi(x)]g(x) + \upsilon(x) \cdot g(x) \Leftrightarrow$
$f(x) \cdot g(x) = [\varphi(x) \cdot g(x)] \cdot \pi(x) + \upsilon(x) \cdot g(x)$,
ὅπου $\upsilon(x) \cdot g(x) = 0$, ἄν $\upsilon(x) = 0$ ἤ βαθμ $[\upsilon(x) \cdot g(x)]$ = βαθμ $\upsilon(x)$ + βαθμ $g(x)$ < βαθμ $\varphi(x)$ + βαθμ $g(x)$, δηλ. βαθμ $[\upsilon(x) \cdot g(x)]$ < βαθμ $[\varphi(x) \cdot g(x)]$.

Ἄρα ἡ πρόταση ἀποδείχτηκε.

2.8. Ἐφαρμογές.

1. **Ἄν $\upsilon_1(x), \upsilon_2(x), \ldots, \upsilon_\nu(x)$ εἶναι τά ὑπόλοιπα τῶν διαιρέσεων τῶν $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_\nu(x)$ μέ τό $\delta(x)$, $(\delta(x) \neq 0)$, ἀντιστοίχως, τότε τά ὑπόλοιπα τῶν διαιρέσεων τῶν $[f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_\nu(x)]$ καί $[\upsilon_1(x)+\upsilon_2(x)+\ldots+\upsilon_\nu(x)]$ μέ τό $\delta(x)$ εἶναι ἴσα.**

Λύση: Ἄν $\pi_1(x), \pi_2(x) \ldots, \pi_\nu(x)$ εἶναι τά ἀντίστοιχα πηλίκα τῶν διαιρέσεων τῶν $f_1(x)$, $f_2(x), \ldots, f_\nu(x)$ μέ τό $\delta(x)$, τότε ἔχουμε:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \delta(x)\,\pi_1(x) + \upsilon_1(x) \\ f_2(x) &= \delta(x)\pi_2(x) + \upsilon_2(x) \\ &\cdots\cdots\cdots \\ f_\nu(x) &= \delta(x)\pi_\nu(x) + \upsilon_\nu(x). \end{aligned}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τίς ἰσότητες αὐτές παίρνουμε:

$$f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_\nu(x)=\delta(x)[\pi_1(x)+\pi_2(x)+\ldots+\pi_\nu(x)]+[\upsilon_1(x)+\upsilon_2(x)+\ldots+\upsilon_\nu(x)]$$

$$\Leftrightarrow [f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_\nu(x)]-[\upsilon_1(x)+\upsilon_2(x)+\ldots+\upsilon_\nu(x)]=\delta(x)[\pi_1(x)+\pi_2(x)+\ldots+\pi_\nu(x)]$$

πού σημαίνει ὅτι τό $\delta(x)$ εἶναι διαιρέτης τοῦ πρώτου μέλους. Αὐτό, σύμφωνα μέ τήν πρόταση 1, ἀποδεικνύει τό ζητούμενο.

2. **Ἡ διαίρεση ἑνός πολυωνύμου $f(x)$ μέ τό πολυώνυμο x^2+x+1 δίνει ὑπόλοιπο $2x+1$, ἐνῶ μέ τό x^2+1 δίνει ὑπόλοιπο $x+2$. Νά βρεθεῖ τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως τοῦ $f(x)$ μέ τό γινόμενο $(x^2+x+1).(x^2+1)$.**

Λύση: Ἄν $\pi(x)$ καί $\upsilon(x)$ εἶναι τό πηλίκο καί τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως τοῦ $f(x)$ μέ τό $[(x^2+x+1) \cdot (x^2+1)]$, τότε ἔχουμε

$f(x)=(x^2+x+1) \cdot (x^2+1)\pi(x)+\upsilon(x)$ (1) ἤ $f(x)-\upsilon(x)=(x^2+x+1) \cdot (x^2+1)\pi(x)$,

δηλαδή τά πολυώνυμα x^2+x+1 καί x^2+1 εἶναι διαιρέτες τοῦ πολυωνύμου $[f(x)-\upsilon(x)]$. Αὐτό πάλι σημαίνει (πρόταση 1) ὅτι οἱ διαιρέσεις τῶν $f(x)$ καί $\upsilon(x)$ μέ τό x^2+x+1 δίνουν τό ἴδιο ὑπόλοιπο. Τό ἴδιο συμβαίνει καί μέ τίς διαιρέσεις τῶν $f(x)$ καί $\upsilon(x)$ μέ τό x^2+1.

Ἔτσι ὅμως ἡ διαίρεση τοῦ $υ(x)$ μέ τό x^2+x+1 δίνει ὑπόλοιπο $2x+1$ καί ἡ διαίρεση τοῦ $υ(x)$ μέ τό x^2+1 δίνει ὑπόλοιπο $x+2$.
Ἀπό τήν (1) ὅμως ἔχουμε ὅτι τό $υ(x)$ εἶναι τό πολύ 3ου βαθμοῦ, δηλ.
$υ(x)=αx^3+βx^2+γx+δ$
ὁπότε θά ἰσχύουν οἱ σχέσεις:

$$αx^3+βx^2+γx+δ=(x^2+x+1)π_1(x)+2x+1$$
$$αx^3+βx^2+γx+δ=(x^2+1)π_2(x)+x+2$$

ὅπου $π_1(x)=αx+κ$ καί $π_2(x)=αx+λ$.
Ἀπό τίς σχέσεις αὐτές παίρνουμε τό σύστημα

$$α+κ=β,\ α+κ+2=γ,\ κ+1=δ,\ β=λ,\ α+1=γ,\ λ+2=δ,$$

πού ἡ ἐπίλυσή του δίνει $α=-1$, $β=-2$ καί $γ=0$. Ἑπομένως $υ(x)=-x^3-2x^2$.

2.9. Ἀσκήσεις.

1. Ἄν $υ_1(x)$ καί $υ_2(x)$ εἶναι τά ὑπόλοιπα τῶν διαιρέσεων τῶν πολυωνύμων $f_1(x)$ καί $f_2(x)$ μέ τό $g(x)$ ἀντιστοίχως, δεῖξτε ὅτι οἱ διαιρέσεις τῶν πολυωνύμων $f_1(x)\,υ_2(x)$ καί $f_2(x)υ_1(x)$, μέ τό $g(x)$ ἔχουν ἴσα ὑπόλοιπα.
2. Ἄν οἱ διαιρέσεις τοῦ πολυωνύμου $f(x)$ μέ τά $x-α$ καί $x-β$, $α\neq β$, δίνουν τό ἴδιο ὑπόλοιπο υ, δεῖξτε ὅτι καί ἡ διαίρεση τοῦ $f(x)$ μέ τό πολυώνυμο $(x-α)\,(x-β)$ δίνει ἐπίσης τό ἴδιο ὑπόλοιπο υ.

3. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΤΙΜΗ ΤΩΝ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

3.1. Ἀριθμητική τιμή καί ρίζα πολυωνύμου.

Κάθε συνάρτηση $f\colon A\to A$ μέ τύπο

$$f(x)=α_νx^ν+α_{ν-1}x^{ν-1}+\ldots+α_1x+α_0, \qquad (1)$$

ὅπου $α_0,α_1,\ldots α_ν\in A$ καί A ἕνα ἀπό τά **R**,**C**, **ὀνομάζεται πολυωνυμική συνάρτηση τοῦ x.**

Ὁ ἀριθμός

$$f(ρ)=α_νρ^ν+α_{ν-1}ρ^{ν-1}+\ldots+α_1ρ+α_0 \qquad (2)$$

πού εἶναι ἡ εἰκόνα τοῦ ἀριθμοῦ ρ μέσω τῆς f, εἶναι **ἡ ἀριθμητική τιμή τῆς πολυωνυμικῆς συναρτήσεως γιά $x=ρ$.**

Στά ἑπόμενα θά λέμε ἐπίσης ὅτι **ὁ ἀριθμός $f(ρ)$ εἶναι ἡ ἀριθμητική τιμή τοῦ πολυωνύμου $f(x)=α_νx^ν+α_{ν-1}x^{ν-1}+\ldots+α_1x+α_0\in C_{[x]}$ γιά $x=ρ$.**

Σημείωση: Μποροῦμε νά δοῦμε ἀμέσως τή βασική διαφορά πού ὑπάρχει στό ρόλο τοῦ x στό $f(x)\in \mathbf{C}_{[x]}$ καί στήν πολυωνυμική συνάρτηση μέ τύπο $f(x)$. Στήν πρώτη περίπτωση τό x εἶναι τό πολυώνυμο τοῦ $\mathbf{C}_{[x]}$ μέ $α_1=1$ καί $α_0=α_2=\ldots=α_ν=0$, ἐνῶ στή δεύτερη εἶναι ἡ μεταβλητή τῆς συναρτήσεως πού ἀπεικονίζεται στόν ἀριθμό $f(x)$.

Ἕνα σπουδαῖο πρόβλημα στίς πολυωνυμικές συναρτήσεις εἶναι νά βροῦμε τίς τιμές τῆς μεταβλητῆς x, οἱ ὁποῖες ἀπεικονίζονται στόν ἀριθμό μηδέν. Δηλαδή ἄν

$$f(x)=α_νx^ν+α_{ν-1}x^{ν-1}+\ldots+α_1x+α_0$$

εἶναι ὁ τύπος μιᾶς πολυωνυμικῆς συναρτήσεως, νά βροῦμε τίς τιμές $x\in\mathbf{C}$ γιά τίς ὁποῖες εἶναι

$$f(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0 \qquad (3)$$

Ἡ (3) ὀνομάζεται **πολυωνυμική ἐξίσωση.**

Κάθε ἀριθμός ρ πού ἐπαληθεύει τήν (3) ὀνομάζεται **ρίζα τῆς πολυωνυμικῆς ἐξισώσεως.** Θά ὀνομάζουμε **ρίζα τοῦ πολυωνύμου f(x)** κάθε ρίζα τῆς ἐξισώσεως $f(x) = 0$. Ἡ εὕρεση ὅλων τῶν ριζῶν ἑνός πολυωνύμου f(x), ἀνάγεται στήν ἐπίλυση τῆς πολυωνυμικῆς ἐξισώσεως $f(x)=0$ καί θά μᾶς ἀπασχολήσει στά ἑπόμενα. Ὁ βαθμός τοῦ πολυωνύμου $f(x) \neq \mathbf{0}$ ὀνομάζεται καί βαθμός τῆς πολυωνυμικῆς ἐξισώσεως $f(x) = 0$.

3.2. Σχῆμα Horner (Χόρνερ).

Ὁ σύντομος ὑπολογισμός τῆς ἀριθμητικῆς τιμῆς ἑνός πολυωνύμου f(x), δηλ. τῆς τιμῆς τῆς συναρτήσεως f γιά x=ρ, παρουσιάζει ἐνδιαφέρον, γιατί τά πολυώνυμα ἀξιοποιοῦνται γιά τίς διάφορες μαθηματικές ἀνάγκες. Ἐπίσης ἡ ἐπίλυση πολυωνυμικῶν ἐξισώσεων γίνεται πολλές φορές, ὅπως θά δοῦμε παρακάτω, μέ τόν ὑπολογισμό ἀριθμητικῶν τιμῶν πολυωνύμων.

Ἐδῶ θά δοῦμε μία σύντομη μέθοδο νά ὑπολογίζουμε τίς ἀριθμητικές τιμές πολυωνύμων.

Ἔστω ὅτι ἔχουμε νά βροῦμε τήν τιμή τῆς συναρτήσεως f μέ τύπο

$$f(x) = \alpha_5 x^5 + \alpha_4 x^4 + \alpha_3 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0 \quad \text{γιά } x=\rho.$$

Ἡ τιμή αὐτή θά εἶναι $f(\rho) = \alpha_5\rho^5 + \alpha_4\rho^4 + \alpha_3\rho^3 + \alpha_2\rho^2 + \alpha_1\rho + \alpha_0$, ἡ ὁποία μπορεῖ νά γραφεῖ

$$f(\rho) = [[((\alpha_5\rho + \alpha_4)\cdot\rho + \alpha_3)\rho + \alpha_2]\rho + \alpha_1]\rho + \alpha_0 \qquad (1)$$

Δηλαδή γιά τόν ὑπολογισμό τοῦ f(ρ) μποροῦμε νά ἀκολουθήσουμε τήν ἀκόλουθη σειρά ὑπολογισμῶν, πού ὑποδεικνύει ἡ (1).

1. Πολλαπλασιάζουμε τόν α_5 μέ τόν ρ — $\alpha_5\cdot\rho$
2. Στό γινόμενο προσθέτουμε τόν α_4 — $\alpha_5\cdot\rho+\alpha_4$
3. Πολλαπλασιάζουμε τό ἄθροισμα αὐτό μέ τόν ρ — $(\alpha_5\cdot\rho+\alpha_4)\cdot\rho$
4. Στό γινόμενο αὐτό προσθέτουμε τόν α_3 — $(\alpha_5\cdot\rho+\alpha_4)\cdot\rho+\alpha_3$
5. Πολλαπλασιάζουμε τό ἀποτέλεσμα μέ τόν ρ — $((\alpha_5\cdot\rho+\alpha_4)\cdot\rho+\alpha_3)\cdot\rho$ κ.τ.λ.

Ἡ διαδικασία αὐτή τῶν ὑπολογισμῶν φαίνεται καλύτερα στό παρακάτω σχῆμα, πού εἶναι γνωστό σάν σχῆμα Horner.

Συντελεστές τοῦ f(x)	α_5	α_4	α_3	α_2 α_1	α_0
ρ	↓	$\alpha_5\cdot\rho$	$(\alpha_5\cdot\rho+\alpha_4)\rho$		
	$\underbrace{\alpha_5}_{\gamma_4}$	$\underbrace{\alpha_5\rho+\alpha_4}_{\gamma_3}$	$\underbrace{(\alpha_5\cdot\rho+\alpha_4)\rho+\alpha_3}_{\gamma_2}$	...	$f(\rho)=[[((\alpha_5\rho+\alpha_4)\rho+\alpha_3)\rho+\alpha_2]\rho+\alpha_1]\rho+\alpha_0$

Πρίν δώσουμε ἕνα ἀριθμητικό παράδειγμα, θά δοῦμε ἀκόμα ὅτι τό σχῆμα Horner χρησιμεύει στήν εὕρεση τοῦ πηλίκου καί τοῦ ὑπολοίπου τῆς διαιρέσεως τοῦ f(x) μέ τό x−ρ.

Ἄν ἔχουμε νά διαιρέσουμε τό προηγούμενο πολυώνυμο $f(x)$ μέ τό διώνυμο $x-\rho$ (ὅπου ρ ὁ προηγούμενος ἀριθμός), τότε τό ὑπόλοιπο $\upsilon(x)$ θά εἶναι ἕνα σταθερό πολυώνυμο $\upsilon(x)=\upsilon\in\mathbf{C}_{[x]}$, ὁπότε

$$f(x)=(x-\rho)\,\pi(x)+\upsilon \qquad (2)$$

Γιά $x=\rho$ ἡ (2) δίνει $f(\rho)=\upsilon\in\mathbf{C}$, δηλαδή **τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως τοῦ $f(x)$ μέ τό $x-\rho$ εἶναι τό σταθερό πολυώνυμο πού ἀντιστοιχεῖ στήν ἀριθμητική τιμή τοῦ πολυωνύμου $f(x)$ γιά $x=\rho$** καί μ' αὐτόν τόν τρόπο τό βρίσκαμε καί σέ προηγούμενες τάξεις. **Ἄν λοιπόν εἶναι $f(\rho)=0$, τότε $(x-\rho)|f(x)$,** δηλαδή $f(x)=(x-\rho)\pi(x)$ **καί ἀντιστρόφως.** Αὐτό σημαίνει ὅτι, **ἄν ρ εἶναι μία ρίζα ἑνός πολυωνύμου $f(x)$, τότε τό $x-\rho$ εἶναι ἕνας παράγοντας τοῦ $f(x)$ καί ἀντιστρόφως.**

Σημειώνουμε ἐδῶ ὅτι ἕνα πολυώνυμο $f(x)$, πού ἔχει ρίζα τό ρ, εἶναι δυνατό νά διαιρεῖται, ἐκτός ἀπό τό $x-\rho$, καί ἀπό μία δύναμη κ τοῦ $x-\rho$. Γενικά εἶναι δυνατό ἕνα πολυώνυμο $f(x)$ νά διαιρεῖται μέ τό $(x-\rho)^\kappa$ καί νά μή διαιρεῖται μέ τό $(x-\rho)^{\kappa+1}$. Δηλαδή εἶναι δυνατό νά εἶναι

$$f(x)=(x-\rho)^\kappa\cdot\pi(x)$$

καί τό $\pi(x)$ νά μή διαιρεῖται μέ τό $(x-\rho)$ (δηλ. τό $\pi(x)$ νά μήν ἔχει ρίζα τό ρ). Σ' αὐτή τήν περίπτωση λέμε ὅτι **τό ρ εἶναι πολλαπλή ρίζα τοῦ $f(x)$ μέ βαθμό πολλαπλότητας κ** ἤ **ὅτι τό ρ εἶναι ρίζα τοῦ $f(x)$ μέ πολλαπλότητα κ.**

Ὅταν εἶναι $\kappa=1$, τότε τό ρ λέγεται καί **ἁπλή ρίζα τοῦ $f(x)$.**

Τό πηλίκο $\pi(x)$ τῆς προηγούμενης διαιρέσεως εἶναι ἕνα πολυώνυμο 4ου βαθμοῦ τῆς μορφῆς $\gamma_4x^4+\gamma_3x^3+\gamma_2x^2+\gamma_1x+\gamma_0$ καί βρίσκεται, ἄν ἐκτελέσουμε τή διαίρεση κατά τά γνωστά:

$\alpha_5x^5+\alpha_4x^4+\alpha_3x^3+\alpha_2x^2+\alpha_1x+\alpha_0$	$x-\rho$
$-\alpha_5x^5+\alpha_5\rho x^4$	$\underbrace{\alpha_5}_{\gamma^4}x^4+\underbrace{(\alpha_5\rho+\alpha_4)}_{\gamma^3}x^3+[\underbrace{(\alpha_5\rho+\alpha_4)\rho+\alpha_3}_{\gamma_2}]x^2+\dots$
$(\alpha_5\rho+\alpha_4)x^4+\alpha_3x^3$	
$-(\alpha_5\rho+\alpha_4)x^4+(\alpha_5\rho+\alpha_4)\rho x^3$	
$[(\alpha_5\rho+\alpha_4)\rho+\alpha_3]x^3+\alpha_2x^2$	
$\dots\quad\dots\dots$	

Διαπιστώνουμε ἀμέσως ὅτι οἱ συντελεστές τοῦ πηλίκου εἶναι οἱ ἀριθμοί τῆς τρίτης σειρᾶς τοῦ σχήματος Horner, ἐκτός τοῦ τελευταίου ἀριθμοῦ πού εἶναι τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως, ὅπως εἴπαμε.

Στήν πράξη ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς:

Ἔστω ὅτι θέλουμε νά βροῦμε τό πηλίκο, $\pi(x)$, καί τό ὑπόλοιπο, $\upsilon(x)$, τῆς διαιρέσεως τοῦ $f(x)=-2x^5+3x^4-2x^2+5x-1$ μέ τό $g(x)=x+3=x-(-3)$.

Οἱ συντελεστές τοῦ $f(x)$ (διαιρετέου) γράφονται σέ μία σειρά (φροντίζοντας νά γράψουμε καί τό συντελεστή τοῦ x^3 πού εἶναι τό μηδέν), στή δεύτερη σειρά καί ἀριστερά γράφουμε τόν ἀριθμό $\rho=-3$ καί στήν τρίτη σειρά σχηματίζουμε τούς συντελεστές τοῦ πηλίκου, ὅπως εἴπαμε προηγουμένως, καθώς καί τό ὑπόλοιπο. Ἔτσι ἔχουμε τό ἀκόλουθο σχῆμα Horner.

IV 3.3.

Συντελεστές τοῦ f(x)	-2	3	0	-2	5	-1
$\rho=-3$	$\downarrow$	$(-2)\cdot(-3)$	-27	81	-237	696
	$\underbrace{-2}_{\gamma_4}$	$\underbrace{9}_{\gamma_3}$	$\underbrace{-27}_{\gamma_2}$	$\underbrace{79}_{\gamma_1}$	$\underbrace{-232}_{\gamma_0}$	$\underbrace{695}_{\upsilon(x)=\upsilon}$

Τό πηλίκο εἶναι $\pi(x)=\gamma_4x^4+\gamma_3x^3+\gamma_2x^2+\gamma_1x+\gamma_0$, δηλ.

$\pi(x)=-2x^4+9x^3-27x^2+79x-232$ καί τό ὑπόλοιπο $\upsilon(x)=695$, πού φυσικά εἶναι καί ἡ ἀριθμητική τιμή τοῦ f(x) γιά $x=-3$.

3.3. Ἐφαρμογές.

1. Δίνεται ἡ πολυωνυμική συνάρτηση $f:R\rightarrow R$ τέτοια, ὥστε γιά κάθε $z\in R$ νά ἰσχύει $f(z)=\alpha z+\beta$ μέ α,β πραγματικούς ἀριθμούς καί $\beta\neq 0$. Δεῖξτε ὅτι γιά κάθε ζεῦγος πραγματικῶν ἀριθμῶν x,y ἰσχύει: $f(x+y)\neq f(x)+f(y)$.

Ἀπόδειξη: Ἀπό τόν τύπο τῆς συναρτήσεως ἔχουμε:

$$f(x)=\alpha x+\beta,\quad f(y)=\alpha y+\beta \text{ καί } f(x+y)=\alpha(x+y)+\beta,$$

ὁπότε $f(x)+f(y)=\alpha(x+y)+2\beta$. Ἀλλά ἐπειδή $\beta\neq 0$, θά εἶναι

$$\alpha(x+y)+\beta\neq\alpha(x+y)+2\beta, \text{ δηλ. } f(x+y)\neq f(x)+f(y).$$

2. Δίνεται μία πολυωνυμική συνάρτηση $f:R\rightarrow R$ τέτοια, ὥστε γιά κάθε $x\in R$ καί κάθε φυσικό ἀριθμό ρ νά ἰσχύει:

$$f(\rho x)=f(x)$$

Δεῖξτε ὅτι γιά κάθε $\nu\in N$ ἰσχύει: $f(\rho^\nu)=f(1)$ (1)

Ἀπόδειξη: Ἐπειδή ἰσχύει $f(\rho x)=f(x)$ γιά κάθε $x\in R$ καί $\rho\in N$, ἄν πάρουμε $x=1$, τότε γιά κάθε $\rho\in N$ ἰσχύει $f(\rho\cdot 1)=f(1)$, δηλαδή $f(\rho)=f(1)$.

Θά ἀποδείξουμε τό ζητούμενο μέ τή μέθοδο τῆς μαθηματικῆς ἐπαγωγῆς.

Πράγματι· γιά $\nu=1$ ἔχουμε: $f(\rho^1)=f(\rho)=f(1)$, δηλ. ἰσχύει ἡ (1).

Ἔστω ὅτι ἡ (1) ἰσχύει καί γιά $\nu=\kappa$, δηλ. ὅτι $f(\rho^\kappa)=f(1)$.

Θά δείξουμε τότε ὅτι ἰσχύει καί γιά $\nu=\kappa+1$, δηλ. ὅτι $f(\rho^{\kappa+1})=f(1)$.

Πράγματι· ἔχουμε $f(\rho^{\kappa+1})=f(\rho\cdot\rho^\kappa)=f(\rho^\kappa)=f(1)$. Ἑπομένως ἰσχύει $f(\rho^\nu)=f(1)$ γιά κάθε $\nu\in N$, δηλαδή ἀποδείχτηκε τό ζητούμενο.

3. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως ἑνός πολυωνύμου f(x) μέ τό $x^2-\rho^2$, $\rho\neq 0$, εἶναι

$$\upsilon(x)=\frac{f(\rho)-f(-\rho)}{2\rho}x+\frac{f(\rho)+f(-\rho)}{2}.$$

Ἀπόδειξη: Ἐπειδή ὁ διαιρέτης $x^2-\rho^2$ εἶναι δευτέρου βαθμοῦ, τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως θά εἶναι τό πολύ 1ου βαθμοῦ, δηλ. θά εἶναι $\upsilon(x)=\kappa x+\lambda$.

Ἔτσι θά ἔχουμε:
$$f(x)=(x^2-\rho^2)\,\pi(x)+\kappa x+\lambda, \tag{1}$$

ὅπου $\pi(x)$ εἶναι τό πηλίκο τῆς διαιρέσεως.

Ἀπό τήν (1) γιά $x=\rho$ καί $x=-\rho$ παίρνουμε ἀντιστοίχως:

$$f(\rho)=\kappa\rho+\lambda \quad\text{καί}\quad f(-\rho)=-\kappa\rho+\lambda.$$

Ἐπιλύοντας τό σύστημα τῶν δύο αὐτῶν ἐξισώσεων ὡς πρός κ καί λ βρίσκουμε

$$\kappa=\frac{f(\rho)-f(-\rho)}{2\rho} \text{ καί } \lambda=\frac{f(\rho)+f(-\rho)}{2}, \text{ ὁπότε τό ὑπόλοιπο εἶναι}$$

$$\upsilon(x)=\frac{f(\rho)-f(-\rho)}{2\rho}\cdot x+\frac{f(\rho)+f(-\rho)}{2}.$$

4. Πολυώνυμο $f(x)$ διαιρούμενο μέ τό $x+1$ δίνει ὑπόλοιπο 2 καί διαιρούμενο μέ τό $x-2$ δίνει ὑπόλοιπο -1. Νά βρεθεῖ τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως τοῦ $f(x)$ μέ τό $g(x)=(x+1)(x-2)$.

Λύση: Ἀπό τήν ὑπόθεση ἔχουμε: $f(-1)=2$ καί $f(2)=-1$.

Τό πολυώνυμο $f(x)$ ὅταν διαιρεῖται μέ τό $g(x)$, τό ὁποῖο εἶναι δευτέρου βαθμοῦ, δίνει πηλίκο $\pi(x)$ καί ὑπόλοιπο τό πολύ πρώτου βαθμοῦ. Ἔστω ὅτι εἶναι $\upsilon(x)=\kappa x+\lambda$. Τότε θά ἰσχύει:

$$f(x)=(x+1)\cdot(x-2)\cdot\pi(x)+(\kappa x+\lambda). \qquad (1)$$

Ἀπό τήν (1) παίρνουμε: $f(-1)=-\kappa+\lambda$ καί $f(2)=2\kappa+\lambda$, δηλαδή

$$-\kappa+\lambda=2 \quad \text{καί} \quad 2\kappa+\lambda=-1$$

Ἐπιλύοντας τό σύστημα τῶν δύο αὐτῶν ἐξισώσεων βρίσκουμε $\kappa=-1$ καί $\lambda=1$, ὁπότε τό ὑπόλοιπο εἶναι: $\upsilon(x)=-x+1$.

5. Βρεῖτε τό πηλίκο καί τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως τοῦ $f(x)=ix^3-(2+i)x^2+4x-3-i$ μέ τό $g(x)=x-(1-i)$.

Λύση: Χρησιμοποιώντας τό σχῆμα Horner βρίσκουμε:

Συντελεστές τοῦ $f(x)$	i	$-(2+i)$	4	$-3-i$
$\rho=1-i$		$1+i$	$-1+i$	$4-2i$
	i	-1	$3+i$	$1-3i$

$\pi(x)=ix^2-x+3+i$ καί $\upsilon(x)=1-3i$.

3.4. Ἀσκήσεις.

1. Μέ τό σχῆμα Horner νά ὑπολογίσετε τίς ζητούμενες τιμές τῶν πολυωνυμικῶν συναρτήσεων μέ τούς παρακάτω τύπους.
   α) $f(x)=-2x^4+3x^2+2x+1$, $\quad f(-2)=;\quad f(5)=;$
   β) $\varphi(x)=x^3-\sqrt{2}x^2-1$, $\quad \varphi(-\sqrt{2})=;$
   γ) $g(x)=x^3-ix^2+1$ $\quad g(1-i)=;$
2. Ἄν $f(x)=3x^2-\lambda x+2$, βρεῖτε τό λ, ὥστε $f(-1)=-3-\lambda$
3. Ἄν $f(x)=2x^4-3x^2+\kappa x+\lambda$, βρεῖτε τά κ καί λ, ὥστε $f(-2)=-25$ καί $f(2)=-18$.
4. Νά προσδιορίσετε τά α καί β, ὥστε τό πολυώνυμο $f(x)=\alpha x^3-\beta x^2-5x+4$ διαιρούμενο μέ $x+2$ καί $x-1$ νά δίνει ἀντιστοίχως ὑπόλοιπα 6 καί 2.
5. Βρεῖτε τό πηλίκο καί τό ὑπόλοιπο τῶν διαιρέσεων:
   α) τοῦ $5x^3-x^2+2x$ μέ τό $x-3$, β) τοῦ x^5+32 μέ τό $x+2$,
   γ) τοῦ $x^3-3ix^2+4x+1-2i$ μέ τό $x+2$, δ) τοῦ $x^4+(1+i)x^3+ix^2+(-9+7i)x-1+3i$ μέ τό $x-2+i$ καί ε) τοῦ $4x^4+5x^3-12x-40$ μέ τό $x+\frac{1}{2}$.
6. Ἄν ἕνα πολυώνυμο $f(x)$ διαιρούμενο μέ $x-\alpha$ καί $x-\beta$ δίνει ἀντιστοίχως πηλίκα $\pi_1(x)$ καί $\pi_2(x)$, δεῖξτε ὅτι $\pi_1(\beta)=\pi_2(\alpha)$, ὅταν $\alpha\neq\beta$.
7. Ἕνα πολυώνυμο $f(x)$ διαιρούμενο μέ τό $x+1$ δίνει ὑπόλοιπο 2, μέ τό $x-2$ δίνει ὑπόλοιπο 11 καί μέ τό $x+3$ δίνει ὑπόλοιπο 6. Βρεῖτε τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως τοῦ $f(x)$ μέ τό $(x+1)\cdot(x-2)\cdot(x+3)$.
8. Δεῖξτε ὅτι: i) ἄν $\alpha\neq\beta$, τότε τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως τοῦ πολυωνύμου $f(x)$, βαθμ. $f(x)\geq 2$, μέ τό $\varphi(x)=(x-\alpha)\cdot(x-\beta)$ εἶναι:

$$\upsilon(x)=\frac{f(\alpha)-f(\beta)}{\alpha-\beta}\cdot x+\frac{\beta f(\alpha)-\alpha f(\beta)}{\beta-\alpha}.$$

ii) Ἄν $\alpha=\beta$, τότε $\upsilon(x)=x\pi(\alpha)\cdot f(\alpha)-\alpha\pi(\alpha)$

9. Δίνεται μία πολυωνυμική συνάρτηση: $f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ τέτοια, ὥστε γιά κάθε $x\in\mathbf{R}$ νά ἰσχύει: $f(x)=f\left(\frac{x}{2}\right)$. Δεῖξτε ὅτι γιά κάθε $x\in\mathbf{R}$ και κάθε $\nu\in\mathbf{N}$ ἰσχύει $f(x)=f\left(\frac{x}{2^\nu}\right)$.

10. Βρεῖτε ἕνα πολυώνυμο τρίτου βαθμοῦ $f(x)$ τέτοιο, ὥστε: $f(0)=0$ καί $f(x)-f(x-1)=x^2$. Στή συνέχεια ὑπολογίστε τό ἄθροισμα $\sigma_\nu=1^2+2^2+3^2+\ldots+\nu^2$, $\nu\in\mathbf{N}$.

11. Ἄν $\alpha_1,\ldots,\alpha_\nu$ εἶναι διαδοχικοί ὅροι ἀριθμητικῆς προόδου, δεῖξτε ὅτι τό

$$P(x)=\frac{x^\nu}{\alpha_1\alpha_2}+\frac{x^{\nu-1}}{\alpha_2\alpha_3}+\ldots+\frac{x^2}{\alpha_{\nu-1}\alpha_\nu}-\frac{\nu-1}{\alpha_1\alpha_\nu}$$

διαιρεῖται μέ τό $x-1$. Στή συνέχεια βρεῖτε τό πηλίκο τῆς διαιρέσεως τοῦ $P(x)$ μέ τό $x-1$.

4. ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΣΧΕΤΙΚΑ ΜΕ ΤΙΣ ΡΙΖΕΣ ΤΩΝ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

Ἐδῶ θά δοῦμε μερικά θεωρήματα σχετικά μέ τίς ρίζες τῶν πολυωνύμων, τά ὁποῖα εἶναι πολύ χρήσιμα γιά τήν ἐπίλυση πολυωνυμικῶν ἐξισώσεων. Τά θεωρήματα αὐτά θά τά ξεχωρίσουμε σέ δύο ὁμάδες. Σέ *γενικά* καί σέ *εἰδικά*. Τά πρῶτα ἀναφέρονται σέ ὅλα τά πολυώνυμα τοῦ $\mathbf{C}_{[x]}$, ἐνῶ τά δεύτερα σέ πολυώνυμα τοῦ $\mathbf{R}_{[x]}$ καί τοῦ $\mathbf{Q}_{[x]}$.

4.1. Γενικά Θεωρήματα.

Τό βασικό θεώρημα, σχετικά μέ τίς ρίζες τῶν πολυωνύμων, τό ὁποῖο ἀποδεικνύεται στήν Ἀνώτερη Ἄλγεβρα εἶναι τό ἀκόλουθο:

Θεώρημα 1. (Θεώρημα D'Alembert ἤ Θεμελιῶδες Θεώρημα τῆς Ἄλγεβρας).
Κάθε πολυώνυμο $f(x)\in C_{[x]}$, βαθμοῦ $\nu\geq 1$, ἔχει μία τουλάχιστον μιγαδική ρίζα.

Τό θεώρημα αὐτό μᾶς ἐξασφαλίζει τήν ὕπαρξη ρίζας γιά κάθε πολυώνυμο βαθμοῦ $\nu\geq 1$, ἀλλά δέ μᾶς λέει τίποτε γιά τό πλῆθος τῶν ριζῶν τοῦ πολυωνύμου. Ἔτσι γιά τήν ἐξίσωση:

$$\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0=0 \qquad (1)$$

τό μόνο πού ξέρουμε εἶναι ὅτι ἔχει μία τουλάχιστο ρίζα.

Θά ἀποδείξουμε τώρα τό ἀκόλουθο θεώρημα, πού μᾶς ἐξασφαλίζει τό πλῆθος τῶν ριζῶν τῆς (1).

Θεώρημα 2. Κάθε πολυώνυμο $f(x)\in C_{[x]}$, βαθμοῦ $\nu\geq 1$, ἔχει ν ἀκριβῶς ρίζες, ὅπου κάθε ρίζα μετριέται τόσες φορές ὅσος εἶναι ὁ βαθμός πολλαπλότητάς της.

Ἀπόδειξη: Ἔστω $f(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0$, $\alpha_\nu\neq 0$ μέ $\nu\geq 1$. Κατά τό θεώρημα D'Alembert ὑπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα $\rho_1\in\mathbf{C}$ τοῦ $f(x)$, δηλαδή $f(\rho_1)=0$, ὁπότε ἰσχύει

$$f(x)=(x-\rho_1)f_{\nu-1}(x) \qquad (2)$$

ὅπου $f_{\nu-1}(x)$ εἶναι τό πηλίκο τῆς διαιρέσεως τοῦ $f(x)$ μέ τό $x-\rho_1$ καί βαθμ. $f_{\nu-1}(x)=\nu-1$. Κατά τό Θ. D'Alembert καί πάλι, τό πολυώνυμο $f_{\nu-1}(x)$, μέ $\nu-1\geq1$, ἔχει τουλάχιστον μία ρίζα, ἔστω τόν $\rho_2\in\mathbf{C}$. Τότε ἔχουμε:

$$f_{\nu-1}(x)=(x-\rho_2)f_{\nu-2}(x) \tag{3}$$

ὁπότε ἡ (2) γίνεται:

$$f(x)=(x-\rho_1)(x-\rho_2)f_{\nu-2}(x) \tag{4}$$

μέ βαθμ $f_{\nu-2}(x)=\nu-2$.

Ἀπό τήν (4) βλέπουμε ὅτι $f(\rho_2)=0$, δηλ. ὁ ἀριθμός ρ_2 εἶναι καί ρίζα τοῦ $f(x)$. Συνεχίζοντας κατά τόν ἴδιο τρόπο, κάθε νέο πηλίκο θά ἔχει βαθμό κατά μονάδα μικρότερο ἀπό τό προηγούμενό του καί κάθε φορά θά ὑπάρχει γι' αὐτό μία ρίζα, πού θά εἶναι καί ρίζα τοῦ πολυωνύμου $f(x)$.
Ἔτσι ὅμως θά φθάσουμε νά ἔχουμε:

$$f(x)=(x-\rho_1)(x-\rho_2)\ldots(x-\rho_{\nu-1})\cdot f_1(x) \tag{5}$$

ὅπου $f_1(x)$ πολυώνυμο 1ου βαθμοῦ, ἔστω $f_1(x)=\beta_1x+\beta_0$, $\beta_1\neq0$. Ἐπειδή $f_1(x)=\beta_1\left(x+\dfrac{\beta_0}{\beta_1}\right)$, ὁ ἀριθμός $\rho_\nu=-\dfrac{\beta_0}{\beta_1}$ θά εἶναι ρίζα τοῦ $f_1(x)$, δηλ. μία ἀκόμη ρίζα τοῦ $f(x)$, ὁπότε ἡ (5) γίνεται:

$$f(x)=\beta_1(x-\rho_1)(x-\rho_2)\ldots(x-\rho_{\nu-1})(x-\rho_\nu) \tag{6}$$

Ἄν κάνουμε τίς πράξεις στό β' μέλος τῆς (6), τότε εἶναι φανερό ὅτι ὁ μεγιστοβάθμιος ὅρος θά εἶναι ὁ β_1x^ν, ὁπότε $\beta_1=\alpha_\nu$, καί ἄρα ἡ (6) γράφεται:

$$f(x)=\alpha_\nu(x-\rho_1)(x-\rho_2)(x-\rho_3)\ldots(x-\rho_\nu) \tag{7}$$

Θά δείξουμε τώρα ὅτι ἡ μορφή (7) τοῦ $f(x)$ εἶναι μοναδική, ὅταν δέ μᾶς ἐνδιαφέρει ἡ διάταξη τῶν παραγόντων $(x-\rho_1)$, $(x-\rho_2),\ldots,(x-\rho_\nu)$. Ἄς ὑποθέσουμε κατ' ἀρχήν ὅτι μέ τήν ἴδια διαδικασία βρήκαμε ὅτι εἶναι καί

$$f(x)=\alpha_\nu(x-\rho'_1)(x-\rho'_2)\ldots(x-\rho'_\nu) \tag{8}$$

Ἀπό τίς (7) καί (8) ἔχουμε τότε

$$(x-\rho_1)(x-\rho_2)\ldots(x-\rho_\nu)=(x-\rho'_1)(x-\rho'_2)\ldots(x-\rho'_\nu) \tag{9}$$

Ἄν ἔστω καί μία ἀπό τίς ρίζες $\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_\nu$ τοῦ $f(x)$, π.χ. ἡ ρ_κ, δέν εἶναι ἴση μέ κάποια ἀπό τίς $\rho'_1,\rho'_2,\ldots,\rho'_\nu$, τότε βάζοντας στήν (9) τήν τιμή $x=\rho_\kappa$ ὁδηγούμαστε σέ ἄτοπο, ἀφοῦ τό πρῶτο μέλος της μηδενίζεται καί τό δεύτερο εἶναι διαφορετικό ἀπό τό μηδέν. Ἔτσι βλέπουμε ὅτι δέν ὑπάρχει ἄλλη τιμή, ἐκτός ἀπό τίς $\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_\nu$, πού νά εἶναι ρίζα τοῦ πολυωνύμου $f(x)$. Αὐτό ὅμως δέν μᾶς ἀποδεικνύει ὅτι ἡ μορφή (7) τοῦ πολυωνύμου $f(x)$ εἶναι μοναδική, γιατί εἶναι δυνατό μία ρίζα ρ_j, ἀπό τίς $\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_\nu$, νά ἐπαναλαμβάνεται κ φορές στή μορφή (7) καί λ φορές στή μορφή (5) μέ $\kappa\neq\lambda$. Θά δείξουμε ὅτι καί αὐτό εἶναι ἄτοπο. Πράγματι· ἄν ὑποθέσουμε ὅτι εἶναι $\kappa\neq\lambda$, τότε, ἐπειδή κάθε μή μηδενικό πολυώνυμο εἶναι ἁπλοποιήσιμο στοιχεῖο ὡς πρός τόν πολλαπλασιασμό στό $C_{[x]}$, ἁπλοποιώντας τήν (9), θά ἔχουμε τόν παράγοντα $x-\rho$ στό ἕνα μέλος της χωρίς νά ὑπάρχει ἴσος παράγοντας στό ἄλλο. Αὐτό ὅμως εἶναι ἄτοπο, ὅπως ἀποδείχτηκε προηγουμένως. Ἔτσι βλέπουμε ὅτι ἡ μορφή (7) τοῦ πολυωνύμου $f(x)$ εἶναι μοναδική, ὅταν ἀδιαφοροῦμε γιά τή διάταξη τῶν $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\nu$, καί μάλιστα τό $f(x)$ μπορεῖ νά γραφεῖ καί μέ τή μορφή

$$f(x) = \alpha_\nu (x-\rho_1)^{\kappa_1} (x-\rho_2)^{\kappa_2} \ldots (x-\rho_\mu)^{\kappa_\mu} \qquad (10)$$

ὅταν οἱ ἴσοι παράγοντες γραφοῦν μέ δυνάμεις. Στήν (10) εἶναι φανερό ὅτι εἶναι $\kappa_1+\kappa_2+\ldots+\kappa_\mu = \nu$ καί ἀκόμα ὅτι τά $\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_\mu$ εἶναι οἱ πολλαπλότητες τῶν ἀντίστοιχων ριζῶν $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\mu$.

Μέ τήν παραπάνω διαδικασία ἀποδείχτηκε πλέον τό ζητούμενο.

Ἀπό τήν ἀπόδειξη τοῦ θεωρήματος προκύπτουν τά ἀκόλουθα συμπεράσματα.

1. Ἄν οἱ $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\nu$ εἶναι οἱ ρίζες τοῦ πολυωνύμου $f(x)$, νιοστοῦ βαθμοῦ, τότε αὐτό σύμφωνα μέ τήν (7) γράφεται $f(x) = \alpha_\nu (x-\rho_1)(x-\rho_2)\ldots(x-\rho_\nu)$, τό ὁποῖο ἀποτελεῖ τήν ἀνάλυσή του σέ γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων.
2. Ἐπειδή εἶναι φανερό ὅτι ἕνα πολυώνυμο μηδενικοῦ βαθμοῦ δέν ἔχει καμιά ρίζα (ἔχει δηλαδή μηδέν σέ πλῆθος ρίζες), συμπεραίνουμε ὅτι **κάθε μή μηδενικό πολυώνυμο δέν μπορεῖ νά ἔχει ρίζες περισσότερες ἀπό τό βαθμό του, ἐνῶ τό μηδενικό πολυώνυμο ἔχει ρίζες ὅλα τά $x \in C$.** Ἔτσι **ἄν ἕνα πολυώνυμο τό πολύ νιοστοῦ βαθμοῦ μηδενίζεται γιά $\nu+1$ διαφορετικές τιμές τοῦ x, τότε αὐτό εἶναι τό μηδενικό πολυώνυμο.**
3. Μετά τό προηγούμενο συμπέρασμα 2 ἔχουμε τώρα καί τό ἀκόλουθο:

   Ἄν δύο πολυώνυμα $f(x)$ καί $g(x)$ εἶναι καί τά δύο τό πολύ νιοστοῦ βαθμοῦ καί παίρνουν ἴσες τιμές γιά $\nu+1$ διαφορετικές τιμές τοῦ x, τότε θά εἶναι ἴσα.

   Πράγματι· Ἄν πάρουμε τό πολυώνυμο $F(x) = f(x)-g(x)$, τότε τό $F(x)$, ἐνῶ εἶναι τό πολύ νιοστοῦ βαθμοῦ, ἔχει $\nu+1$ διαφορετικές ρίζες, δηλ. εἶναι τό μηδενικό πολυώνυμο. Αὐτό σημαίνει ὅτι $f(x)-g(x) = 0$, δηλ. εἶναι $f(x) = g(x)$.
4. **Τύποι τοῦ Vieta. Ἄν $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \ldots, \rho_\nu$ εἶναι οἱ ν ρίζες τοῦ πολυωνύμου $f(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$ μέ $\alpha_\nu \neq 0$, τότε ἰσχύουν οἱ σχέσεις:**

$$S_1 = \rho_1+\rho_2+\rho_3+\ldots+\rho_{\nu-1}+\rho_\nu = -\frac{\alpha_{\nu-1}}{\alpha_\nu}$$

$$S_2 = \rho_1\rho_2+\rho_1\rho_3+\ldots+\rho_1\rho_\nu+\rho_2\rho_3+\ldots+\rho_2\rho_\nu+\ldots+\rho_{\nu-1}\rho_\nu = \frac{\alpha_{\nu-2}}{\alpha_\nu}$$

$$S_3 = \rho_1\rho_2\rho_3+\rho_1\rho_2\rho_4+\ldots+\rho_1\rho_2\rho_\nu+\rho_1\rho_3\rho_4+\ldots\rho_1\rho_3\rho_\nu+\ldots+\rho_{\nu-2}\rho_{\nu-1}\rho_\nu = -\frac{\alpha_{\nu-3}}{\alpha_\nu}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$S_\nu = \rho_1\cdot\rho_2\cdot\rho_3\ldots\rho_{\nu-1}\cdot\rho_\nu = (-1)^\nu \frac{\alpha_0}{\alpha_\nu}$$

Πράγματι· ἀπό τό προηγούμενο θεώρημα ἔχουμε

$$f(x)=\alpha_\nu(x-\rho_1)(x-\rho_2)\ldots(x-\rho_\nu), \text{ δηλαδή}$$

$$\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\alpha_{\nu-2}x^{\nu-2}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0=\alpha_\nu(x-\rho_1)(x-\rho_2)\ldots(x-\rho_\nu)$$

Διαιρώντας καί τά δύο μέλη τῆς τελευταίας μέ τό $\alpha_\nu \neq 0$ παίρνουμε

$$x^\nu+\frac{\alpha_{\nu-1}}{\alpha_\nu}x^{\nu-1}+\frac{\alpha_{\nu-2}}{\alpha_\nu}x^{\nu-2}+\ldots+\frac{\alpha_1}{\alpha_\nu}x+\frac{\alpha_0}{\alpha_\nu}=$$

$$x^\nu-\underbrace{(\rho_1+\rho_2+\ldots\rho_\nu)}_{S_1}x^{\nu-1}+\underbrace{(\rho_1\rho_2+\rho_1\rho_3+\ldots+\rho_{\nu-1}\rho_\nu)}_{S_2}x^{\nu-2}-\cdots+(-1)^\nu\underbrace{\rho_1\rho_2\ldots\rho_\nu}_{S_\nu}$$

Ἀπό τόν ὁρισμό τῆς ἰσότητας τῶν πολυωνύμων βρίσκουμε πλέον τίς ζητούμενες σχέσεις. Οἱ σχέσεις αὐτές, οἱ ὁποῖες συνδέουν τίς ρίζες καί τούς συντελεστές τοῦ πολυωνύμου $f(x)$ ὀνομάζονται **τύποι τοῦ Vieta.**

Δίνουμε τώρα καί μία πρόταση σχετική μέ τίς ρίζες τῶν πολυωνύμων.

Πρόταση. Ἄν τά πολυώνυμα $x-\rho_1, x-\rho_2, \ldots, x-\rho_\kappa$ διαιροῦν ἕνα πολυώνυμο $f(x)$ καί οἱ $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\kappa$ εἶναι ὅλοι διαφορετικοί μεταξύ τους, τότε τό πολυώνυμο $(x-\rho_1)(x-\rho_2)\ldots(x-\rho_\kappa)$ εἶναι παράγοντας τοῦ $f(x)$.

Ἀπόδειξη: α) Ἄν τό πολυώνυμο $f(x)$ εἶναι τό πολύ $\kappa-1$ βαθμοῦ, τότε ἀφοῦ οἱ ἀριθμοί $\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_\kappa$ εἶναι ρίζες του, σύμφωνα μέ τήν παρατήρηση 2 θά εἶναι τό μηδενικό πολυώνυμο, δηλ. $f(x)=\mathbf{0}$ καί φυσικά θά διαιρεῖται μέ τό πολυώνυμο $(x-\rho_1)(x-\rho_2)\ldots(x-\rho_\kappa)$.

β) Ἄν εἶναι βαθμ $f(x)=\nu \geq \kappa$, τότε, σύμφωνα μέ τήν παρατήρηση 1, αὐτό θά γράφεται

$$f(x)=\alpha_\nu(x-\rho_1)(x-\rho_2)\ldots(x-\rho_\kappa)(x-\sigma_1)(x-\sigma_2)\ldots(x-\sigma_{\nu-\kappa}),$$

ὅπου $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{\nu-\kappa}$ εἶναι οἱ ὑπόλοιπες ρίζες του. Ἡ τελευταία σχέση ἀποδεικνύει τό ζητούμενο.

4.2. Παραδείγματα—Ἐφαρμογὲς

1. **Ἄν ἕνα πολυώνυμο $f(x)$ ἔχει τήν ἰδιότητα $f(x)=f(1-x)$, δεῖξτε ὅτι τό πολυώνυμο $g(x)=f(x)-f(0)$ διαιρεῖται μέ τό πολυώνυμο $x(x-1)$.**

Ἀπόδειξη:

Γιά νά διαιρεῖται τό πολυώνυμο $g(x)$ μέ τό $x(x-1)$, ἀρκεῖ νά διαιρεῖται χωριστά μέ τό x καί τό $x-1$, δηλαδή πρέπει νά εἶναι $g(0)=0$ καί $g(1)=0$. Οἱ ἰσότητες αὐτές ἰσχύουν, γιατί εἶναι $f(x)=f(1-x)$.

2. **Ἄν ἕνα πολυώνυμο $f(x)$ ἔχει τήν ἰδιότητα $f(x)=f(x-1)$, τότε τό πολυώνυμο αὐτό εἶναι ἕνα σταθερό πολυώνυμο.**

Ἀπόδειξη:

Θά δείξουμε μέ τή μαθηματική ἐπαγωγή ὅτι γιά ὅλα τά $\nu \in \mathbb{N}$ ἰσχύει $f(\nu)=f(0)$.

Πράγματι· γιά $\nu=1$, ἀπό τήν ὑπόθεση ἔχουμε $f(1)=f(0)$. Ἄν δεχθοῦμε τώρα ὅτι $f(\kappa)=f(0)$,

$\kappa \in N$, ἐπειδή ἔχουμε καί $f(\kappa+1)=f(\kappa)$ ἐξ ὑποθέσεως, θά εἶναι καί $f(\kappa+1)=f(0)$. Δηλαδή τό πολυώνυμο $f(x)$ παίρνει τήν ἴδια τιμή $f(0)$ γιά ὅλους τούς φυσικούς ἀριθμούς. Ἄρα θά εἶναι: $f(x)-f(0)=0$ ἤ $f(x)=f(0)=$σταθερό.

3. Δεῖξτε ὅτι τό πολυώνυμο

$$f(x)=\frac{x(x-\alpha)(x-\beta)}{\gamma(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}+\frac{x(x-\beta)(x-\gamma)}{\alpha(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\frac{x(x-\gamma)(x-\alpha)}{\beta(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)},$$

στό ὁποῖο εἶναι $\alpha\beta\gamma(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)\neq 0$, μπορεῖ νά πάρει τή μορφή

$$f(x)=\lambda(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)+1.$$

Προσδιορίστε κατόπιν τήν τιμή τοῦ λ.

Ἀπόδειξη:

Ἐπειδή εἶναι $f(\alpha)=f(\beta)=f(\gamma)=1$ ἤ $f(\alpha)-1=f(\beta)-1=f(\gamma)-1=0$, τό πολυώνυμο $f(x)-1$ θά ἔχει ρίζες τά α,β,γ καί συνεπῶς τό πολυώνυμο $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ θά εἶναι διαιρέτης τοῦ $f(x)-1$. Ἄρα θά εἶναι

$$f(x)-1=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\pi(x) \qquad (1)$$

Ἀλλά τά πολυώνυμα $f(x)-1$ καί $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ εἶναι 3ου βαθμοῦ καί συνεπῶς τό πηλίκο $\pi(x)$ θά εἶναι σταθερό πολυώνυμο. Ἄν $\pi(x)=\lambda$, τότε ἡ (1) γράφεται

$$f(x)=\lambda(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)+1 \qquad (2)$$

καί ἀποδεικνύει τό ζητούμενο.

Ἐπειδή ἀπό τήν ἀρχική μορφή τοῦ $f(x)$ βρίσκουμε $f(0)=0$, ἐνῶ ἀπό τή (2) εἶναι $f(0)=$ $=-\alpha\beta\gamma\lambda+1$, τελικά θά εἶναι

$$\lambda=\frac{1}{\alpha\beta\gamma}$$

4. Ἐξετάστε ἄν τό 3 εἶναι πολλαπλή ρίζα τοῦ $f(x)=2x^3-11x^2+12x+9$.

Λύση: Θά ἐξετάσουμε ἄν τό $x-3$ εἶναι παράγοντας τοῦ $f(x)$. Ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι $f(3)=0$. Ἀλλά αὐτό ἰσχύει. Ἔτσι ἔχουμε $f(x)=(x-3)\pi(x)$. Μέ τό σχῆμα Horner βρίσκουμε

$$\pi(x)=2x^2-5x-3, \quad \text{ὁπότε} \quad f(x)=(x-3)(2x^2-5x-3).$$

Παρατηροῦμε τώρα ὅτι $\pi(3)=0$, δηλ. τό $x-3$ εἶναι διαιρέτης τοῦ $\pi(x)$, ὁπότε $\pi(x)=$ $=(x-3)(2x+1)$ καί ἄρα $f(x)=(x-3)\cdot(x-3)\cdot(2x+1)=(x-3)^2\cdot(2x+1)$.

Ἡ τελευταία σχέση μᾶς λέει ὅτι τό 3 εἶναι διπλή ρίζα τοῦ $f(x)$.

Στό παράδειγμα αὐτό δίνεται καί ἕνας τρόπος νά ἐλέγχουμε ἄν ἕνας ἀριθμός ρ εἶναι πολλαπλή ρίζα ἑνός πολυωνύμου. Γενικά ἀποδεικνύεται ὅτι:

Ἕνα πολυώνυμο $f(x)$, βαθμοῦ $\nu\geq\kappa$, $\kappa\in N$ ἔχει τόν ἀριθμό ρ ρίζα πολλαπλότητας κ, ἄν $f(\rho)=0$, $\pi_1(\rho)=0$, $\pi_2(\rho)=0,\cdots,\pi_{\kappa-1}(\rho)=0$, ὅπου τά $\pi_1(x)$, $\pi_2(x),\cdots,\pi_{\kappa-1}(x)$ εἶναι ἀντιστοίχως τά πηλίκα τῶν διαιρέσεων τοῦ $f(x)$ μέ τό $x-\rho$, τοῦ $\pi_1(x)$ μέ τό $x-\rho$, τοῦ $\pi_2(x)$ μέ τό $x-\rho$ κ.ο.κ. καί συγχρόνως $\pi_\kappa(\rho)\neq 0$, ὅπου $\pi_\kappa(x)$ εἶναι τό πηλίκο τῆς διαιρέσεως τοῦ $\pi_{\kappa-1}(x)$ μέ τό $x-\rho$.

Ἕνας ὅμως πιό πρακτικός τρόπος γιά νά ἐλέγχουμε τήν πολλαπλότητα μιᾶς ρίζας ἑνός πολυωνύμου φαίνεται στό ἀκόλουθο παράδειγμα.

5. Δεῖξτε ὅτι τό πολυώνυμο $f(x)=2x^4-5x^3+3x^2+x-1$ ἔχει τόν ἀριθμό 1 ρίζα μέ πολλαπλότητα 3.

Λύση: Ἄν κάνουμε τό μετασχηματισμό

$$x-1=y \quad \text{ἤ} \quad x=y+1,$$

τότε τό $f(x)$ γίνεται $f(y+1)=2(y+1)^4-5(y+1)^3+3(y+1)^2+(y+1)-1$ ἤ

$$g(y)=f(y+1)=2y^4+y^3=y^3(2y+1).$$

Δηλαδή τό $g(y)$ ἔχει παράγοντα τό y^3 καί δέν ἔχει παράγοντα δύναμη τοῦ y μεγαλύτερη ἀπό 3, δηλ. τό $f(x)$ ἔχει παράγοντα τό $(x-1)^3$, ἀλλά ὄχι δύναμη τοῦ $x-1$ μεγαλύτερη ἀπό 3.

6. Βρεῖτε τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων καί τῶν κύβων τῶν ριζῶν τοῦ πολυωνύμου

$$f(x)=2x^3-6x^2+x-10$$

Λύση: Ἄν ρ_1, ρ_2, ρ_3 εἶναι οἱ ρίζες τοῦ $f(x)$, τότε ἀπό τούς τύπους Vieta ἔχουμε

$$\rho_1+\rho_2+\rho_3=\frac{6}{2}=3, \quad \rho_1\rho_2+\rho_2\rho_3+\rho_3\rho_1=\frac{1}{2}, \quad \rho_1\rho_2\rho_3=\frac{10}{2}=5$$

Γνωρίζουμε ὅμως ὅτι: $\rho_1^2+\rho_2^2+\rho_3^2=(\rho_1+\rho_2+\rho_3)^2-2(\rho_1\rho_2+\rho_2\rho_3+\rho_3\rho_1)$,

ὁπότε $\rho_1^2+\rho_2^2+\rho_3^2=3^2-2\cdot\frac{1}{2}=8$ καί

$$(\rho_1+\rho_2+\rho_3)^3=\rho_1^3+\rho_2^3+\rho_3^3+3\rho_1^2(\rho_2+\rho_3)+3\rho_2^2(\rho_3+\rho_1)+3\rho_3^2(\rho_1+\rho_2)+6\rho_1\rho_2\rho_3 \text{ ἤ}$$

$$(\rho_1+\rho_2+\rho_3)^3=\rho_1^3+\rho_2^3+\rho_3^3+3\rho_1^2(3-\rho_1)+3\rho_2^2(3-\rho_2)+3\rho_3^2(3-\rho_3)+6\rho_1\rho_2\rho_3.$$

Ἀπό τήν τελευταία σχέση βρίσκουμε

$$\rho_1^3+\rho_2^3+\rho_3^3=\frac{75}{2}$$

7. Νά κατασκευαστεῖ πολυώνυμο g(x), τοῦ ὁποίου οἱ ρίζες νά εἶναι τά ἀντίστροφα τῶν ριζῶν τοῦ πολυωνύμου

$$f(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0, \quad \alpha_\nu\cdot\alpha_0\neq 0.$$

Λύση: Ἄν $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ εἶναι οἱ ρίζες τοῦ $f(x)$, τότε οἱ ρίζες τοῦ $g(x)$ θέλουμε νά εἶναι οἱ

$$\rho_1=\frac{1}{x_1},\ \rho_2=\frac{1}{x_2},\ \ldots,\ \rho_\nu=\frac{1}{x_\nu}$$

Σύμφωνα μέ τούς τύπους Vieta ἔχουμε:

$$S_1=x_1+x_2+\ldots+x_\nu=-\frac{\alpha_{\nu-1}}{\alpha_\nu}$$

$$S_2=x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_{\nu-1}x_\nu=\frac{\alpha_{\nu-2}}{\alpha_\nu}$$

$$\vdots$$

$$S_\nu=x_1\cdot x_2\ldots x_\nu=(-1)^\nu\frac{\alpha_0}{\alpha_\nu}$$

Τό πολυώνυμο g(x) θά εἶναι τό

$$g(x)=x^\nu-S'_1x^{\nu-1}+S'_2x^{\nu-2}+\ldots+(-1)^\nu S'_\nu$$

ὅπου

$$S_1'=\rho_1+\rho_2+\ldots+\rho_\nu=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_\nu}=$$

$$=\frac{x_2\cdot x_3\ldots x_\nu+x_1\cdot x_3\ldots x_\nu+\ldots+x_1x_2\ldots x_{\nu-1}}{x_1x_2\cdots x_\nu}=\frac{(-1)^{\nu-1}\dfrac{\alpha_1}{\alpha_\nu}}{(-1)^\nu\dfrac{\alpha_0}{\alpha_\nu}}=-\frac{\alpha_1}{\alpha_0}$$

$$S'_2=\rho_1\rho_2+\rho_1\rho_3+\ldots+\rho_{\nu-1}\rho_\nu=\frac{1}{x_1x_2}+\frac{1}{x_1x_3}+\ldots+\frac{1}{x_{\nu-1}x_\nu}=$$

$$=\frac{x_3x_4\ldots x_\nu+\ldots+x_1x_2\ldots x_{\nu-2}}{x_1x_2\ldots x_\nu}=\frac{(-1)^{\nu-2}\dfrac{\alpha_2}{\alpha_\nu}}{(-1)^\nu\dfrac{\alpha_0}{\alpha_\nu}}=\frac{\alpha_2}{\alpha_0}$$

. . . .

$$S'_\nu=\rho_1\rho_2\ldots\rho_\nu=\frac{1}{x_1x_2\ldots x_\nu}=\frac{1}{(-1)^\nu\dfrac{\alpha_0}{\alpha_\nu}}=(-1)^\nu\frac{\alpha_\nu}{\alpha_0}$$

Ἔτσι ἔχουμε $g(x)=x^{\nu}+\frac{\alpha_1}{\alpha_0}x^{\nu-1}+\frac{\alpha_2}{\alpha_0}x^{\nu-2}+\ldots+\frac{\alpha_\nu}{\alpha_0}$ ἤ

$$g(x)=\frac{1}{\alpha_0}(\alpha_0x^{\nu}+\alpha_1x^{\nu-1}+\alpha_2x^{\nu-2}+\ldots+\alpha_\nu).$$

8. **Ἄν τά πολυώνυμα $f(x)$, $g(x)$ εἶναι πρῶτα μεταξύ τους, τότε καί τά πολυώνυμα $(f(x))^{\kappa}$ καί $(g(x))^{\lambda}$, ὅπου $\kappa, \lambda \in N$, εἶναι πρῶτα μεταξύ τους.**

Ἀπόδειξη: Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι τό μή σταθερό πολυώνυμο $\sigma(x)$ εἶναι κοινός διαιρέτης τῶν $(f(x))^{\kappa}$ καί $(g(x))^{\lambda}$. Τότε $(f(x))^{\kappa}=\sigma(x)\,\pi_1(x)$ καί $(g(x))^{\lambda}=\sigma(x)\,\pi_2(x)$.
Ἄν τώρα ρ εἶναι ρίζα τοῦ $\sigma(x)$, ὁπότε $\sigma(\rho)=0$, θά εἶναι καί $(f(\rho))^{\kappa}=(g(\rho))^{\lambda}=0$, δηλ. $f(\rho)=g(\rho)=0$, πού σημαίνει ὅτι τά $f(x)$, $g(x)$ θά ἔχουν κοινό διαιρέτη τό μή σταθερό πολυώνυμο $x-\rho$. Αὐτό ὅμως εἶναι ἄτοπο, γιατί τά $f(x)$ καί $g(x)$ εἶναι πρῶτα μεταξύ τους.

4.3. Ἀσκήσεις

1. Ἄν ἕνα πολυώνυμο $f(x)\in \mathbf{C}_{[x]}$, παίρνει τήν ἀριθμητική τιμή λ γιά ἄπειρες μιγαδικές τιμές τοῦ x, τότε δεῖξτε ὅτι τό πολυώνυμο αὐτό εἶναι τό σταθερό πολυώνυμο $\lambda\in\mathbf{C}_{[x]}$.
2. Δεῖξτε ὅτι τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως τοῦ πολυωνύμου $f(x)$ μέ τό $x^2-2\rho x+\rho^2$ εἶναι τό $\pi(\rho)x+f(\rho)-\rho\pi(\rho)$, ὅπου $\pi(x)$ εἶναι τό πηλίκο τῆς διαιρέσεως τοῦ $[f(x)-f(\rho)]$ μέ τό $(x-\rho)$.
3. Ἄν τά πολυώνυμα $f(x)$ καί $g(x)$ ἔχουν τόν ἀριθμό ρ ρίζα μέ πολλαπλότητα κ καί λ ἀντιστοίχως, τότε ὁ Μ.Κ.Δ. τῶν $f(x)$ καί $g(x)$ ἔχει ἐπίσης ρίζα τόν ἀριθμό ρ μέ πολλαπλότητα $\nu=\min(\kappa,\lambda)$.
4. Δεῖξτε ὅτι τό πολυώνυμο $f(x)=\frac{(x-\alpha)(x-\beta)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}+\frac{(x-\beta)(x-\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\frac{(x-\gamma)(x-\alpha)}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)}$ μέ $(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)\neq 0$ εἶναι τό σταθερό πολυώνυμο $f(x)=1$.
5. Δεῖξτε ὅτι τό πολυώνυμο x^2-4x+4 εἶναι παράγοντας τοῦ πολυωνύμου
$$f(x)=x^4-4x^3+5x^2-4x+4.$$
6. Νά ἐξετάσετε ἄν τό πολυώνυμο $f(x)=x^5-11x^4+43x^3-74x^2+52x-8$ ἔχει τόν 2 ρίζα μέ πολλαπλότητα 3.
7. Δίνεται ἡ ἐξίσωση $(\lambda+1)x^3-(\lambda^2+5\lambda-5)x^2+(\lambda^2+5\lambda-5)x-(\lambda+1)=0$ μέ $\lambda\neq-1$
   α) Δεῖξτε ὅτι γιά κάθε τιμή τοῦ $\lambda(\lambda\neq-1)$ ἡ ἐξίσωση ἔχει ρίζες πού ἀποτελοῦν γεωμετρική πρόοδο. β) Ἄν ρ_2 εἶναι ἡ ρίζα της πού δέν ἐξαρτᾶται ἀπό τό λ, νά προσδιορίσετε τό λ, ὥστε οἱ ρίζες ρ_1,ρ_2,ρ_3 νά ἀποτελοῦν ἀριθμητική πρόοδο.
   γ) Δεῖξτε ὅτι γιά ὅλες τίς τιμές λ πού βρήκατε στήν προηγουμένη περίπτωση ἡ ἐξίσωση ἔχει τρεῖς ρίζες ἴσες.
8. Νά κατασκευάσετε ἐξίσωση τρίτου βαθμοῦ μέ ρίζες τούς ἀριθμούς $1,-2,3$.
9. Βρεῖτε ἐξίσωση πού ἔχει ρίζες τά τετράγωνα τῶν ριζῶν τῆς $x^3+\alpha_1x^2+\alpha_2x+\alpha_3=0$.
10. Δίνονται τά πολυώνυμα $f(x)=x^3+\alpha x-\beta$ καί $g(x)=\beta x^3-\alpha x-1$, μέ $\alpha>0$, $\beta>0$. Ἄν ρ_1,ρ_2,ρ_3 εἶναι οἱ ρίζες τοῦ $f(x)$ καί τά $f(x)$ καί $g(x)$ ἔχουν μιά κοινή πραγματική ρίζα, τότε δεῖξτε ὅτι i) $\rho_1^2+\rho_2^2+\rho_3^2=-2\alpha$ καί ii) $|\rho_1|+|\rho_2|+|\rho_3|>2$
11. Ἄν $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_\nu$, $\nu\in\mathbf{N}$ μέ $\nu>1$, εἶναι ν διακεκριμένοι ἀριθμοί καί θέσουμε

$P_1(x)=(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_\nu)$
$P_2(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_3)\ldots(x-\alpha_\nu)$
. . . .
$P_\kappa(x)=(x-\alpha_1)\ldots(x-\alpha_{\kappa-1})(x-\alpha_{\kappa+1})\ldots(x-\alpha_\nu)$, $\kappa=2,3,\ldots,\nu-1$
. . . .
$P_\nu(x)=(x-\alpha_1)\ldots(x-\alpha_{\nu-1})$,

τότε ἐπιλύστε τήν ἐξίσωση

$$\alpha_1 \cdot \frac{P_1(x)}{P_1(\alpha_1)} + \alpha_2 \cdot \frac{P_2(x)}{P_2(\alpha_2)} + \ldots + \alpha_\nu \cdot \frac{P_\nu(x)}{P_\nu(\alpha_\nu)} = \beta, \text{ μέ } \beta \text{ σταθερό ἀριθμό.}$$

12. Δίνεται τό πολυώνυμο
$P(x)=\alpha\beta(\alpha-\gamma)x^3+(\alpha^3-\alpha^2\gamma+2\alpha\beta^2-\beta^2\gamma+\alpha\beta\gamma)x^2+(2\alpha^2\beta+\beta^2\gamma+\alpha^2\gamma+\beta^3-\alpha\beta\gamma)x+\alpha\beta(\beta+\gamma)$
ὅπου $\alpha,\beta,\gamma \neq 0$, $\alpha\neq\gamma$ καί $\alpha\neq\beta$.
Δεῖξτε ὅτι τό $P(x)$ διαιρεῖται ἀπό τό $Q(x)=\alpha\beta x^2+(\alpha^2+\beta^2)x+\alpha\beta$ καί στή συνέχεια δεῖξτε ὅτι ὁ ἀριθμός $P(x_0)$ διαιρεῖται μέ τό $(\alpha+\beta)^3$, ὅπου $x_0=(\alpha+\beta+1)^\nu$, $\nu\in\mathbf{N}$.

13. Ἄν γιά ἕνα πολυώνυμο $f(x)\in \mathbf{C}_{[x]}$ ἰσχύει $f(x)=f(x+1)$ γιά κάθε $x\in\mathbf{C}$, δεῖξτε ὅτι εἶναι ἕνα σταθερό πολυώνυμο.

4.4. Εἰδικά θεωρήματα.

Θεώρημα 1. Ἄν ἕνα μή μηδενικό πολυώνυμο μέ πραγματικούς συντελεστές ἔχει ρίζα τό μιγαδικό ἀριθμό $z=\alpha+\beta i$, $(\beta\neq 0)$, τότε ἔχει ρίζα καί τόν συζυγή του, $\bar{z}=\alpha-\beta i$.

Ἀπόδειξη:

Ἄν τό $f(x)$ εἶναι πρώτου βαθμοῦ, τότε τό $f(x)$ δέν ἔχει μιγαδική ρίζα, ἀφοῦ ἔχει πραγματικούς συντελεστές. Ἄρα τό $f(x)$ εἶναι τουλάχιστον β′ βαθμοῦ. Γιά νά δείξουμε ὅτι καί ὁ μιγαδικός ἀριθμός $\bar{z}=\alpha-\beta i$ εἶναι ρίζα τοῦ $f(x)$, ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι ἡ διαίρεση τοῦ $f(x)$ μέ τό πολυώνυμο $g(x)=(x-z)(x-\bar{z})=x^2-2\alpha x+\alpha^2+\beta^2$ εἶναι τέλεια. Ἀλλά τό $g(x)$ εἶναι δευτέρου βαθμοῦ καί ἄρα τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως τοῦ $f(x)$ μέ τό $g(x)$ θά εἶναι τό πολύ πρώτου βαθμοῦ· Ἄν λοιπόν εἶναι $\upsilon(x)=\kappa x+\lambda$ τό ὑπόλοιπο καί $\pi(x)$ τό πηλίκο αὐτῆς τῆς διαιρέσεως, τότε ἰσχύει:

$$f(x)=g(x)\cdot\pi(x)+\kappa x+\lambda \qquad (1)$$

Εἶναι ὅμως $f(\alpha+\beta i)=g(\alpha+\beta i)=0$ καί ἐπομένως γιά τήν τιμή $\alpha+\beta i$ τοῦ x ἡ ἰσότητα (1) δίνει

$$(\kappa+\alpha\beta i)+\lambda=0 \text{ ἤ } (\kappa\alpha+\lambda)+\kappa\beta i=0, \text{ ἤ } \kappa\alpha+\lambda=0 \text{ καί } \kappa\beta=0,$$

ἀφοῦ $\kappa,\lambda\in\mathbf{R}$ σύμφωνα μέ τήν παρατήρηση 1 τῆς 2.4.
Ἐπειδή εἶναι $\beta\neq 0$ θά ἔχουμε $\kappa=0$, ὁπότε καί $\lambda=0$, δηλαδή ἡ (1) γίνεται

$$f(x)=g(x)\cdot\pi(x) \qquad (2)$$

πού ἀποδεικνύει τό ζητούμενο.

Πορίσματα.

1. **Ἄν ἕνα πολυώνυμο τοῦ $\mathbf{R}_{[x]}$, ἔχει ρίζα τό μιγαδικό ἀριθμό $z=\alpha+\beta i$, $\beta\neq 0$ μέ πολλαπλότητα κ, τότε καί ὁ $\bar{z}=\alpha-\beta i$ θά εἶναι ρίζα του μέ τήν ἴδια πολλαπλότητα.**
2. **Τό πλῆθος τῶν μιγαδικῶν ριζῶν ἑνός πολυωνύμου μέ πραγματικούς συντελεστές εἶναι ἄρτιο.**
3. **Κάθε πολυώνυμο περιττοῦ βαθμοῦ μέ πραγματικούς συντελεστές ἔχει τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα.**

Θεώρημα 2. Ἄν ἕνα μή μηδενικό πολυώνυμο μέ ρητούς συντελεστές ἔχει ρίζα τόν ἄρρητο $\alpha+\sqrt{\beta}$, $\alpha,\beta\in Q$, $\beta>0$, $\sqrt{\beta}\in R-Q$, τότε θά ἔχει ρίζα καί τόν $\alpha-\sqrt{\beta}$.

Τό θεώρημα αὐτό ἀποδεικνύεται ὅπως τό προηγούμενο καί συνάγονται ἀνάλογα πορίσματα μέ ἐκεῖνα τοῦ θεωρήματος 1.

Θεώρημα 3. Ἄν ἕνα πολυώνυμο $f(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1x+\alpha_0$, $\alpha_\nu.\alpha_0\neq0$, μέ ἀκέραιους συντελεστές, ἔχει γιά ρίζα του τό ρητό $\frac{\kappa}{\lambda}\neq0$, $(\kappa,\lambda)=1$, τότε ὁ κ θά εἶναι διαιρέτης τοῦ σταθεροῦ ὅρου α_0 τοῦ f(x) καί ὁ λ τοῦ συντελεστῆ α_ν τοῦ μεγιστοβάθμιου ὅρου του.

Ἀπόδειξη: Ἀπό τήν ὑπόθεση ἔχουμε:

$$f\left(\frac{\kappa}{\lambda}\right)=0 \Leftrightarrow \alpha_\nu\left(\frac{\kappa}{\lambda}\right)^\nu+\alpha_{\nu-1}\left(\frac{\kappa}{\lambda}\right)^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1\left(\frac{\kappa}{\lambda}\right)+\alpha_0=0$$

$$\Leftrightarrow \alpha_\nu\kappa^\nu+\alpha_{\nu-1}\kappa^{\nu-1}\lambda+\ldots+\alpha_1\kappa\lambda^{\nu-1}+\alpha_0\lambda^\nu=0$$

$$\Leftrightarrow \alpha_\nu\kappa^\nu=-\lambda(\alpha_{\nu-1}\kappa^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1\kappa\lambda^{\nu-2}+\alpha_0\lambda^{\nu-1}) \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \alpha_0\lambda^\nu=-\kappa(\alpha_\nu\kappa^{\nu-1}+\alpha_{\nu-1}\kappa^{\nu-2}\lambda+\ldots+\alpha_1\lambda^{\nu-1}) \quad (2)$$

Ἐπειδή οἱ παρενθέσεις στά δεύτερα μέλη τῶν (1) καί (2) εἶναι ἀκέραιοι ἀριθμοί, οἱ λ καί κ θά εἶναι ἀντιστοίχως διαιρέτες τῶν $\alpha_\nu\kappa^\nu$ καί $\alpha_0\lambda^\nu$. Εἶναι ὅμως $(\kappa,\lambda)=1$, ὁπότε θά εἶναι $(\kappa^\nu,\lambda)=1$ καί $(\kappa,\lambda^\nu)=1$[1]. Ἀφοῦ λοιπόν εἶναι $\lambda \mid \alpha_\nu\kappa^\nu$ καί $(\kappa^\nu,\lambda)=1$, θά εἶναι καί $\lambda \mid \alpha_\nu$. Ὅμοια καί $\kappa \mid \alpha_0$.

Πόρισμα. Ἄν τό πολυώνυμο $f(x)=x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1x+\alpha_0$, $\alpha_0\neq0$ μέ ἀκέραιους συντελεστές, ἔχει ρητές ρίζες, τότε αὐτές θά εἶναι ἀκέραιοι ἀριθμοί καί διαιρέτες τοῦ α_0.

4 5. Παραδείγματα—Ἐφαρμογές.

1. **Βρεῖτε ἕνα πολυώνυμο τετάρτου βαθμοῦ μέ ρητούς συντελεστές, τό ὁποῖο νά ἔχει δύο ρίζες του τούς ἀριθμούς i καί $1-\sqrt{3}$.**

Λύση: Ἀφοῦ τό ζητούμενο πολυώνυμο ἔχει ρητούς συντελεστές, θά ἰσχύουν γιά τίς μιγαδικές καί γιά τίς ἄρρητες ρίζες του τά θεωρήματα 1. καί 2. καί συνεπῶς οἱ ἀριθμοί $-i$ καί $1+\sqrt{3}$ θά εἶναι δύο ἀκόμα ρίζες του. Ἄρα τό f(x) θά εἶναι τῆς μορφῆς

$$f(x)=\kappa(x-i)(x+i)[(x-1)+\sqrt{3}][(x-1)-\sqrt{3}],\ \kappa\in Q,\ \kappa\neq0$$

ἤ $f(x)=\kappa(x^2+1)(x^2-2x-2)$. Ἕνα ἀπό τά ζητούμενα πολυώνυμα εἶναι π.χ. τό

$$(x^2+1)(x^2-2x-2)=x^4-2x^3-x^2-2x-2$$

2. **Ἐπιλύστε τήν ἐξίσωση $x^3-4x^2+9x-10=0$, ἄν εἶναι γνωστό ὅτι ὁ μιγαδικός ἀριθμός $1+2i$ εἶναι ρίζα της.**

Ἐπίλυση: Ἀφοῦ τό πολυώνυμο τοῦ πρώτου μέλους τῆς ἐξισώσεως ἔχει πραγματικούς συντελεστές, τότε ἡ ἐξίσωση θά ἔχει ρίζα καί τόν ἀριθμό $1-2i$, ὁπότε τό πολυώνυμο αὐτό θά διαιρεῖται μέ τό πολυώνυμο $[x-(1+2i)]([x-(1-2i)]=x^2-2x+5$. Τό πηλίκο τῆς διαιρέσεώς τους βρίσκουμε ὅτι εἶναι τό $x-2$ καί ἄρα ἡ τρίτη ρίζα τῆς ἐξισώσεως εἶναι τό 2.

1. Βλέπε ἄσκηση 16 τῆς 1.9. τοῦ Κεφαλαίου ΙΙΙ.

3. Ἐπιλύστε τήν ἐξίσωση $x^4+x^3-7x^2-x+6=0$

Ἐπίλυση: Ἐπειδή οἱ συντελεστές τοῦ πρώτου μέλους εἶναι ἀκέραιοι καί ὁ συντελεστής τοῦ x^4 τό 1, ἄν ὑπάρχουν ρητές ρίζες, αὐτές θά εἶναι ἀκέραιες καί συγχρόνως διαιρέτες τοῦ σταθεροῦ ὅρου $+6$. Εὔκολα βρίσκουμε ὅτι οἱ ρίζες εἶναι οἱ ἀριθμοί $-3, -1, 1, 2$. (Χρησιμοποιῆστε π.χ. διαδοχικά τό σχῆμα Horner).

4. Ἐπιλύστε τήν ἐξίσωση $2x^3+3x^2+8x+12=0$.

Ἐπίλυση: Ἄν ὑπάρχουν ρητές ρίζες, αὐτές θά εἶναι ἀνάγωγα κλάσματα μέ ἀριθμητή διαιρέτη τοῦ 12 καί παρονομαστή διαιρέτη τοῦ 2. Βρίσκουμε ἔτσι ὅτι ὁ ἀριθμός $-\frac{3}{2}$ εἶναι μία ρίζα καί ἡ ἐξίσωση γίνεται:

$$\left(x+\frac{3}{2}\right)(2x^2+8)=0 \Leftrightarrow (2x+3)(x^2+4)=0 \Leftrightarrow (2x+3)(x+2i)(x-2i)=0.$$

Ἄρα οἱ ρίζες εἶναι $x_1=-\frac{3}{2}$, $x_2=-2i$ καί $x_3=2i$.

5. Ἄν οἱ συντελεστές τοῦ πολυωνύμου $f_2(x)\in C_{[x]}$, εἶναι οἱ συζυγεῖς τῶν ἀντίστοιχων συντελεστῶν τοῦ πολυωνύμου $f_1(x)\in C_{[x]}$ καί ὁ βαθμός τῶν $f_1(x)$ καί $f_2(x)$ εἶναι ν, δεῖξτε ὅτι οἱ ρίζες τοῦ ἑνός εἶναι οἱ συζυγεῖς τῶν ριζῶν τοῦ ἄλλου.

Ἀπόδειξη: Τά πολυώνυμα $f_1(x)$ καί $f_2(x)$ μποροῦν νά πάρουν τή μορφή $f_1(x)=\varphi_1(x)+i\varphi_2(x)$ καί $f_2(x)=\varphi_1(x)-i\varphi_2(x)$, ὅπου τά πολυώνυμα $\varphi_1(x)$ καί $\varphi_2(x)$ ἔχουν πραγματικούς συντελεστές. Ἄν λοιπόν ὁ μιγαδικός ἀριθμός $\kappa+\lambda i$ εἶναι μία ρίζα τοῦ $f_1(x)$, τότε θά εἶναι $f_1(\kappa+\lambda i)=0$ ἤ $\varphi_1(\kappa+\lambda i)+i\varphi_2(\kappa+\lambda i)=0$ ἤ μετά τίς πράξεις $(A+Bi)+i(\Gamma+\Delta i)=0$ ἤ τέλος $(A-\Delta)+(B+\Gamma)i=0$. (1)

Στήν ἐφαρμογή 2 τῆς 1.6. τοῦ Κεφαλαίου I, δείξαμε ὅτι $\overline{\varphi(z)}=\varphi(\overline{z})$ καί ἑπομένως ἡ ἀριθμητική τιμή τοῦ $f_2(x)$ γιά $x=\kappa-\lambda i$ εἶναι:

$f_2(\kappa-\lambda i)=\varphi_1(\kappa-\lambda i)-i\varphi_2(\kappa-\lambda i)=(A-Bi)-i(\Gamma-\Delta i)=(A-\Delta)-(B+\Gamma)i$, ὁπότε λόγω τῆς (1) ἔχουμε $f_2(\kappa-\lambda i)=0$. Τό $f_2(x)$ ἔχει ἑπομένως ρίζες τίς συζυγεῖς τῶν ριζῶν τοῦ $f_1(x)$.

4.6. Ἀσκήσεις

1. Ἐπιλύστε τίς παρακάτω ἐξισώσεις

   α) $4x^4-4x^3-25x^2+x+6=0$ β) $x^3+x^2-x-10=0$

   γ) $x^3-4x^2+x+6=0$ δ) $2x^3-9x^2+7x+6=0$

   ε) $3x^3+x^2-6x+8=0$ στ) $2x^5-11x^4+14x^3-2x^2+12x+9=0$

2. Προσδιορίστε τούς ἀκέραιους κ, ὥστε ἡ ἐξίσωση
   $$x^3-x^2+\kappa x+4=0$$
   νά ἔχει μία τουλάχιστον ρητή ρίζα.

3. Δεῖξτε ὅτι ἡ ἐξίσωση
   $$x^\nu-1=0,\quad \nu\in\mathbf{N}$$
   ἔχει ἀκριβῶς δύο ρητές ρίζες, ἄν ν ἄρτιος, καί ἀκριβῶς μία ρητή ρίζα, ἄν ν περιττός.

4. Ἔστω ὅτι ὁ ἀκέραιος λ εἶναι πρῶτος ἀριθμός καί διαιρέτης τῶν $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3\in\mathbf{Z}$. Δεῖξτε ὅτι ὁ λ εἶναι διαιρέτης κάθε ἀκέραιας ρίζας τῆς ἐξισώσεως
   $$x^3+\kappa_1x^2+\kappa_2x+\kappa_3=0$$
   Μέ τή βοήθεια αὐτοῦ τοῦ συμπεράσματος ἐπιλύστε τήν ἐξίσωση
   $$x^3-4x^2-4x+16=0$$

5. Ἄν μία ρίζα τῆς ἐξισώσεως

$$x^3-8x^2+\kappa x+\lambda=0$$

εἶναι ὁ μιγαδικός ἀριθμός $3-i$, προσδιορίστε τούς πραγματικούς ἀριθμούς κ καί λ καί τίς ἄλλες ρίζες της.

6. Δεῖξτε ὅτι ὁ μιγαδικός ἀριθμός $1+i$ εἶναι ρίζα τῆς ἐξισώσεως

$$x^4-3x^3+3x^2-2=0$$

καί στή συνέχεια βρεῖτε τίς ἄλλες ρίζες της.

7. Ἄν $f(x)$ εἶναι πολυώνυμο μέ πραγματικούς συντελεστές καί συντελεστή τοῦ μεγιστοβάθμιου ὅρου τό 1, τότε προσδιορίστε τό $f(x)$ στίς ἀκόλουθες περιπτώσεις
α) Τό $f(x)$ ἔχει τρεῖς ρίζες ἀπό τίς ὁποῖες οἱ δύο εἶναι τό 1 καί τό $2i$.
β) Τό $f(x)$ ἔχει τέσσερις ρίζες ἀπό τίς ὁποῖες οἱ δύο εἶναι τό i καί τό $1+i$

8. Νά γίνει γινόμενο πρώτων παραγόντων καθένα ἀπό τά παρακάτω πολυώνυμα τοῦ $\mathbf{C}[x]$
α) $f(x)=x^4-x^3-x-1$, ἄν ἕνας παράγοντάς του εἶναι τά $x-i$.
β) $g(x)=x^4+4x^3+10x^2+12x+21$ ἄν ὁ ἕνας παράγοντας εἶναι τό $(x+2-\sqrt{3}i)$.

9. Νά γίνει γινόμενο πρώτων παραγόντων τό πολυώνυμο $f(x)=2x^3-9x^2+7x+6$ τοῦ $\mathbf{C}[x]$.

10. Ἄν ρ_1,ρ_2 εἶναι οἱ ρίζες τοῦ $\varphi(x)=x^2+\alpha x+\beta$, $\beta\neq0$ καί ρίζες τοῦ πολυωνύμου $f(x)=x^{2\nu}+$ $+\alpha^\nu x^\nu+\beta^\nu$, ὅπου ν ἄρτιος φυσικός ἀριθμός, δεῖξτε ὅτι οἱ ἀριθμοί $\frac{\rho_1}{\rho_2}$, $\frac{\rho_2}{\rho_1}$ εἶναι ρίζες τοῦ πολυωνύμου $P(x)=x^\nu+1+(1+x)^\nu$.

11. Ἄν ὑποθέσουμε ὅτι $f(x)=(f_1(x))^2+(f_2(x))^2$, ὅπου $f_1(x)$, $f_2(x)$ πολυώνυμα νιοστοῦ βαθμοῦ μέ πραγματικούς συντελεστές, δεῖξτε ὅτι τό $f(x)$ μπορεῖ νά γραφεῖ ὡς γινόμενο ν δευτεροβάθμιων πολυωνύμων μέ πραγματικούς συντελεστές.

12. Δεῖξτε ὅτι τό πολυώνυμο $f(x)=x^\nu\,\eta\mu\alpha-x\eta\mu(\nu\alpha)+\eta\mu(\nu-1)\alpha$, ὅπου $\alpha\in\mathbf{R}$ καί $\nu\in\mathbf{N}$ μέ $\nu\geq2$, διαιρεῖται μέ τό πολυώνυμο $\varphi(x)=x^2-2x\sigma\upsilon\nu\alpha+1$.

13. Ἄν τό πολυώνυμο $f(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1x+\alpha_0$ ἔχει ρίζα τόν ἀριθμό ρ καί εἶναι $f(\alpha_0)=0$, δεῖξτε ὅτι ὁ ρ εἶναι καί ρίζα τοῦ πολυωνύμου $g(x)=f(f(f(x)))$.

14. Ἄς εἶναι $f(x)=x^2+\alpha x+\beta$. Καλοῦμε $g(x)$ τό πολυώνυμο πού προκύπτει ἄν στό $f(x)$ θέσουμε ὅπου x τό $f(x)$. Δεῖξτε ὅτι ἄν ρ_1,ρ_2 εἶναι οἱ ρίζες τοῦ πολυωνύμου $f(x)-x$, τότε αὐτές εἶναι καί ρίζες τοῦ $g(x)-x$.

15. Νά ἐξετάσετε ἄν τό πολυώνυμο $f(x)=27x^3+26x^2+9x-2$ ἔχει ρίζες τῆς μορφῆς $\sqrt{\rho}$, ὅπου ρ θετικός ρητός καί $\sqrt{\rho}\in\mathbf{R}-\mathbf{Q}$.

16. Δεῖξτε ὅτι τό πολυώνυμο $f(x)=x^3-x-1$ ἔχει μία ἄρρητη ρίζα ρ_1 καί δύο συζυγεῖς μιγαδικές. Δεῖξτε ἀκόμα ὅτι $1<\rho_1<\sqrt{2}$.

17. Δεῖξτε ὅτι τό πολυώνυμο $f(x)=x^\nu+2\lambda x+2$, μέ $\nu\in\mathbf{N}$, $\nu\geq2$ καί λ ἀκέραιο ἀριθμό, δέν ἔχει ρητές ρίζες.

18. Ἄν ἕνα πολυώνυμο νιοστοῦ βαθμοῦ, μέ $\nu>4$ καί ἀκέραιους συντελεστές, λαμβάνει τήν τιμή 7 γιά τέσσερις διαφορετικές μεταξύ τους ἀκέραιες τιμές τοῦ x, δεῖξτε ὅτι γιά καμιά ἀκέραια τιμή τοῦ x τό πολυώνυμο δέ λαμβάνει τήν τιμή 14.

5. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 3ου ΚΑΙ 4ου ΒΑΘΜΟΥ

5.1. Εἰσαγωγή.

Μέ τήν ἐπίλυση πολυωνυμικῶν ἐξισώσεων ἔχουμε ἀσχοληθεῖ ἀπό τήν πρώτη τάξη τοῦ γυμνασίου. Ἔτσι ὅλοι γνωρίζουμε νά ἐπιλύουμε πρωτοβάθμιες καί δευτεροβάθμιες ἐξισώσεις καί ἀκόμα εἰδικές μορφές ἐξισώσεων μέ βαθμό μεγαλύτερο ἀπό τό δεύτερο, ὅπως εἶναι οἱ διτετράγωνες, οἱ ἀντίστροφες, οἱ διώνυμες, οἱ τριώνυμες κ.ἄ. Μέ τή βοήθεια ἐξάλλου τῶν θεωρημάτων πού ἀναφέρονται στίς ρίζες τῶν πολυωνύμων, μποροῦμε ἐπίσης νά ἐπιλύουμε ὁρισμένες ἐξισώσεις. **Ἀποδεικνύεται** στά μαθηματικά ὅτι ἡ ἐπίλυση μιᾶς ἐξισώσεως γενικῆς μορφῆς μέ βαθμό μεγαλύτερο ἀπό τόν τέταρτο δέν εἶναι πάντοτε δυνατή. Ἔτσι οἱ μόνες ἐξισώσεις πού ἐπιλύονται πάντοτε εἶναι οἱ ἐξισώσεις μέχρι καί τετάρτου βαθμοῦ.

Θά δοῦμε ἀμέσως ἀπό ἕνα τρόπο ἐπιλύσεως ἐξισώσεων 3ου καί 4ου βαθμοῦ μέ συντελεστές ἀπό τό **C**. Στά παραδείγματα, γιά εὐκολία στό λογισμό, θά περιοριστοῦμε σέ ἐξισώσεις μέ πραγματικούς συντελεστές.

5.2. Ἐπίλυση τῆς ἐξισώσεως $x^3+3\alpha x^2+3\beta x+\gamma=0$ (1)

Ἡ ἐξίσωση (1) εἶναι γενική μορφή τριτοβάθμιας ἐξισώσεως, ἀφοῦ κάθε ἐξίσωση τῆς μορφῆς

$$\alpha_3x^3+\alpha_2x^2+\alpha_1x+\alpha_0=0$$

παίρνει τή μορφή (1), ὅταν διαιρέσουμε τούς ὅρους της μέ α_3 καί θέσουμε

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_3}=3\alpha,\quad \frac{\alpha_1}{\alpha_3}=3\beta,\quad \frac{\alpha_0}{\alpha_3}=\gamma$$

Κάνοντας τό μετασχηματισμό

$$\boxed{x=y-\alpha} \qquad (M_1)$$

ἡ (1) παίρνει τή μορφή

$$\boxed{y^3+3py+q=0} \qquad (2)$$

ὅπου εἶναι $p=\beta-\alpha^2$ καί $q=2\alpha^3-3\alpha\beta+\gamma$.

Κάνοντας τώρα τό μετασχηματισμό

$$\boxed{y=z-\frac{p}{z}} \qquad (M_2)$$

ἡ (2) παίρνει τή μορφή

$$z^6+qz^3-p^3=0 \qquad (3)$$

πού εἶναι δευτεροβάθμια ἐξίσωση μέ ἄγνωστο τό z^3.

Ἄν ρ_1, ρ_2 εἶναι οἱ ρίζες τῆς δευτεροβάθμιας ὡς πρός z^3 ἐξισώσεως (3), τότε ἐπιλύοντας μία ἀπό τίς διώνυμες ἐξισώσεις

$$z^3=\rho_1 \quad , \quad z^3=\rho_2 \qquad (4)$$

βρίσκουμε τρεῖς τιμές z_1, z_2, z_3 γιά τό z.

Θέτοντας τίς τιμές αὐτές στό μετασχηματισμό (M_2), βρίσκουμε ἀντίστοιχες τιμές y_1, y_2, y_3 γιά τό y, ἀπό τίς ὁποῖες μέ τή βοήθεια τοῦ (M_1) βρίσκουμε τίς ρίζες x_1, x_2, x_3 τῆς ἀρχικῆς.

Παρατήρηση: Ὁποια ἐξίσωση ἀπό τίς (4) καί ἄν ἐπιλύσουμε, θά βροῦμε τελικά τίς ἴδιες τιμές γιά τίς ρίζες x_1, x_2, x_3 τῆς (1).

Παράδειγμα:

Νά ἐπιλυθεῖ ἡ ἐξίσωση $7x^3-12x^2-8=0$.

Ἐπίλυση: Φέρνουμε τήν ἐξίσωση στή μορφή (1), δηλαδή γράφουμε τήν ἰσοδύναμή της

$$x^3+3\cdot\left(-\frac{4}{7}\right)x^2+3\cdot 0x+\left(-\frac{8}{7}\right)=0$$

Εἶναι λοιπόν $\alpha=-\frac{4}{7}$, $\beta=0$, $\gamma=-\frac{8}{7}$ καί ἄρα

$$p=-\frac{4^2}{7^2} \quad \text{καί} \quad q=-\frac{2^3\cdot 5\cdot 13}{7^3}$$

Ἡ (3) γίνεται $z^6-\frac{2^3\cdot 5\cdot 13}{7^3}z^3+\frac{4^6}{7^6}=0$

καί ἔχει λύσεις

$$z^3=\left(\frac{2}{7}\right)^3 \quad \text{εἴτε} \quad z^3=\left(\frac{8}{7}\right)^3$$

Ἀπό τήν $z^3=\left(\frac{2}{7}\right)^3$ παίρνουμε

$$z_1=\frac{2}{7},\quad z_2=\frac{-1+i\sqrt{3}}{7} \quad \text{καί} \quad z_3=\frac{-1-i\sqrt{3}}{7}$$

καί μέ τή βοήθεια τοῦ (M_2) βρίσκουμε

$$y_1=\frac{10}{7},\quad y_2=\frac{-5-3i\sqrt{3}}{7} \quad \text{καί} \quad y_3=\frac{-5+3i\sqrt{3}}{7}$$

ὁπότε μέ τή βοήθεια τοῦ (M_1) βρίσκουμε τίς ρίζες τῆς ἀρχικῆς πού εἶναι:

$$x_1=2,\quad x_2=\frac{-1-3i\sqrt{3}}{7},\quad x_3=\frac{-1+3i\sqrt{3}}{7}.$$

Σημείωση: Ἄν ἐπιλύσουμε τήν ἐξίσωση:

$$z^3=\left(\frac{8}{7}\right)^3$$

παίρνουμε $z_1=\frac{8}{7}$, $z_2=\frac{4(-1+i\sqrt{3})}{7}$ καί $z_3=\frac{4(-1-i\sqrt{3})}{7}$.

Βρίσκουμε λοιπόν τώρα

$$y_1=\frac{10}{7},\quad y_2=\frac{-5+3i\sqrt{3}}{7} \quad \text{καί} \quad y_3=\frac{-5-3i\sqrt{3}}{7}$$

ὁπότε καί πάλι εἶναι

$$x_1=2,\quad x_2=\frac{-1-3i\sqrt{3}}{7} \quad \text{καί} \quad x_3=\frac{-1+3i\sqrt{3}}{7}$$

Ἡ ἐξίσωση μποροῦσε νά ἐπιλυθεῖ καί μέ τή βοήθεια τοῦ θεωρήματος 3 τῆς 4.4.

5.3. Ἐπίλυση τῆς ἐξισώσεως $x^4+4\alpha x^3+6\beta x^2+4\gamma x+\delta=0$ (1)

Ἡ ἐξίσωση (1) εἶναι γενική μορφή τεταρτοβάθμιας ἐξισώσεως, ὅπως εὔκολα μποροῦμε νά διαπιστώσουμε.

Ἄν συμβολίσουμε μέ $\varphi(x)$ τό πρῶτο μέλος τῆς (1), τότε μποροῦμε νά τό γράψουμε σάν διαφορά τετραγώνων τῶν πολυωνύμων

$$\left.\begin{aligned} A(x) &= x^2+2\alpha x+\beta+2\lambda \\ B(x) &= 2\mu x+\nu \end{aligned}\right\} \qquad (M_1)$$

όπου τά λ, μ, ν είναι κατάλληλοι μιγαδικοί άριθμοί πού πρέπει νά τούς προσδιορίσουμε.

Πράγματι· γράφοντας

$$\varphi(x) = [A(x)]^2 - [B(x)]^2 \quad \text{ἤ}$$
$$[B(x)]^2 = [A(x)]^2 - \varphi(x)$$

μετά τίς πράξεις βρίσκουμε τήν ἰσότητα

$$(2\mu x+\nu)^2 = 4(\lambda+\alpha^2-\beta)x^2+4(\alpha\beta+2\alpha\lambda-\gamma)x+(\beta+2\lambda)^2-\delta \qquad (2)$$

Γιά νά μπορεῖ λοιπόν τό δεύτερο μέλος τῆς (2), πού εἶναι δευτεροβάθμιο τριώνυμο τοῦ x, νά γίνει τέλειο τετράγωνο, ἀρκεῖ νά προσδιορίσουμε τό λ, ὥστε νά μηδενίζεται ἡ διακρίνουσά του Δ. Μετά τίς πράξεις διαπιστώνουμε ὅτι ἡ ἐξίσωση $\Delta = 0$ εἶναι ἰσοδύναμη μέ τήν ἐξίσωση

$$4\lambda^3 - (\delta-4\alpha\gamma+3\beta^2)\lambda + \beta\delta+2\alpha\beta\gamma-\beta^3-\gamma^2-\alpha^2\delta=0 \qquad (3)$$

πού εἶναι τριτοβάθμια ὡς πρός λ καί ἐπιλύεται ὅπως ἡ (2) τῆς 5.2.

Μέ τή βοήθεια μιᾶς ἀπό τίς τρεῖς τιμές τοῦ λ, πού δίνει ἡ (3), ὑπολογίζουμε τό $[B(x)]^2$ ἀπό τήν (2) καί στή συνέχεια ἡ (1) λόγω τῆς $\varphi(x) = [A(x)]^2-[B(x)]^2$ ἰσοδυναμεῖ μέ τήν ἐξίσωση

$$[A(x) + B(x)]\,[A(x) - B(x)] = 0 \qquad (4)$$

πού ἐπιλύεται ἁπλά, γιατί ἀνάγεται σέ δύο δευτεροβάθμιες ἐξισώσεις.

Παρατηρήσεις

1. Ὁποια τιμή τοῦ λ, πού δίνει ἡ (3), καί ἄν βάλουμε στή (2) θά βροῦμε ἀντίστοιχα πολυώνυμα $A(x)$ καί $B(x)$ ἀπό τόν (M_1) πού δίνουν τίς λύσεις τῆς (1).
2. Ὁ σταθερός ὅρος τῆς (3) εἶναι τό ἀνάπτυγμα τῆς ὁρίζουσας τρίτης τάξεως

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix}$$

Παράδειγμα:

Νά ἐπιλυθεῖ ἡ ἐξίσωση $\varphi(x)=x^4+4x^3+12x^2+12x+27=0$

Ἐπίλυση:

Εἶναι $\alpha=1, \quad \beta=2, \quad \gamma=3, \quad \delta=27$.

Ὁ σταθερός ὅρος τῆς (3) εἶναι $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 27 \end{vmatrix} = 54+6+6-8-9-27 = 22$

καί ὁ συντελεστής τοῦ πρωτοβάθμιου ὅρου της εἶναι

$$-(27-4\cdot 1\cdot 3+3\cdot 2^2) = -27.$$

Ἔχουμε λοιπόν τήν ἐξίσωση

$$4\lambda^3-27\lambda + 22 = 0$$

ἤ τήν ἰσοδύναμή της

$$\lambda^3+3\left(-\frac{9}{4}\right)\lambda+\frac{11}{2}=0$$

πού εἶναι ἡ (2) τῆς 5.2. μέ $p=-\frac{9}{4}$ καί $q = \frac{11}{2}$ καί ἔχει ρίζες

$$\lambda_1=2, \ \lambda_2=\frac{-2+\sqrt{15}}{2} \quad \text{καί} \quad \lambda_3=\frac{-2-\sqrt{15}}{2}$$

Γιά $\lambda=2$ παίρνουμε ἀπό τόν (M_1)

$$A(x) = x^2+2x+6,$$

ὁπότε ἀπό τήν $[B(x)]^2 = [A(x)]^2-\varphi(x)$ ἤ ἀπό τήν (2) βρίσκουμε

$$[B(x)]^2 = (2x+3)^2$$

Οἱ ἐξισώσεις $A(x)+B(x)=0$, $A(x)-B(x)=0$ πού δίνει ἡ (4) γίνονται $(x^2+2x+6)+(2x+3)=0$, $(x^2+2x+6)-(2x+3)=0$ καί ἔχουμε ἀπό αὐτές τίς ρίζες τῆς ἀρχικῆς πού εἶναι οἱ

$$x_1=-2+i\sqrt{5},\quad x_2=-2-i\sqrt{5},\quad x_3=i\sqrt{3} \text{ καί } x_4=-i\sqrt{3}\cdot$$

5.4. Ἀσκήσεις.

1. Ἐπιλύστε τίς ἐξισώσεις
   α) $2x^3-9x^2+12x-4=0$
   β) $x^3+3x^2-3x-14=0$
   γ) $x^3-3x^2+12x+16=0$
   δ) $x^3-9x-12=0$
2. Ἐπιλύστε τίς ἐξισώσεις
   α) $x^4-2x^3+4x^2-10x-5=0$
   β) $x^4+32x-60=0$

6. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΚΑΙ ΑΝΙΣΩΣΕΩΝ

6.1. Εἰσαγωγή.

Οἱ ἐξισώσεις καί ἀνισώσεις μέ τίς ὁποῖες θά ἀσχοληθοῦμε ἐδῶ, θά ἔχουν πραγματικούς συντελεστές.

Διερεύνηση μιᾶς ἐξισώσεως, μέ ἄγνωστο $x\in\mathbf{C}$, κάνουμε

α) ὅταν ἀναζητοῦμε τό εἶδος καί τό πρόσημο τῶν ριζῶν της γιά τίς διάφορες πραγματικές τιμές τῶν συντελεστῶν της, ἤ

β) ὅταν ἀναζητοῦμε τίς τιμές τῶν συντελεστῶν γιά τίς ὁποῖες οἱ ρίζες τῆς ἐξισώσεως ἱκανοποιοῦν ὁρισμένες συνθῆκες.

Διερεύνηση μιᾶς ἀνισώσεως, μέ ἄγνωστο $x\in R$, κάνουμε

α) ὅταν ἀναζητοῦμε τίς πραγματικές τιμές τοῦ x πού ἱκανοποιοῦν τήν ἀνίσωση γιά τίς διάφορες πραγματικές τιμές τῶν συντελεστῶν της, ἤ

β) ὅταν ἀναζητοῦμε τίς τιμές τῶν συντελεστῶν της γιά τίς ὁποῖες ἡ ἀνίσωση ἱκανοποιεῖται γιά δεδομένες τιμές τοῦ $x\in R$.

Δίνουμε ἀμέσως μερικά ἐνδιαφέροντα παραδείγματα διερευνήσεων, πού φυσικά δέν ἐξαντλοῦν τό θέμα, ἀλλά μᾶς κατατοπίζουν σέ ἱκανοποιητικό βαθμό πάνω στά συνήθη προβλήματα διερευνήσεων.

6.2. Διερεύνηση ἐξισώσεων καί ἀνισώσεων.

1. Νά διερευνηθεῖ γιά τίς τιμές $\lambda \in R$ ἡ ἐξίσωση μέ ἄγνωστο x:

$$(\lambda-3)x^2-2(3\lambda-4)x+7\lambda-6=0 \quad (1)$$

Διερεύνηση:

α) Γιά $\lambda-3=0$ ἤ $\lambda=3$ ἡ (1) γίνεται $-10x+15=0$, δηλαδή πρωτοβάθμια, καί ἔχει τή λύση $x=\frac{3}{2}$.

β) Γιά $\lambda-3\neq 0$ ἤ $\lambda\neq 3$, ἡ (1) εἶναι δευτεροβάθμια. Θά ἐξετάσουμε λοιπόν τά πρόσημα τῶν Δ, P, S, ὅπου Δ ἡ διακρίνουσα, P τό γινόμενο τῶν ριζῶν καί S τό ἄθροισμά τους. Ἔχουμε:

i) $\Delta=4(2\lambda^2+3\lambda-2)$. Εἶναι $\Delta=0$ γιά $\lambda_1=-2$ καί $\lambda_2=\frac{1}{2}$

$\Delta>0$ ἤ $2\lambda^2+3\lambda-2>0$ γιά $\lambda<-2$ εἴτε $\lambda>\frac{1}{2}$

καί $\Delta<0$ γιά $-2<\lambda<\frac{1}{2}$.

ii) $P=\frac{7\lambda-6}{\lambda-3}$. Εἶναι $P=0$ γιά $\lambda=\frac{6}{7}$,

$P>0$ ἤ $(7\lambda-6)(\lambda-3)>0$ γιά $\lambda<\frac{6}{7}$ εἴτε $\lambda>3$

καί $P<0$ γιά $\frac{6}{7}<\lambda<3$

iii) $S=\frac{2(3\lambda-4)}{\lambda-3}$. Εἶναι $S=0$ γιά $\lambda=\frac{4}{3}$,

$S>0$ ἤ $2(3\lambda-4)(\lambda-3)>0$ γιά $\lambda<\frac{4}{3}$ εἴτε $\lambda>3$

καί $S<0$ γιά $\frac{4}{3}<\lambda<3$

Σ' ἕναν κοινό πίνακα βάζουμε τά παραπάνω μερικά συμπεράσματα καί βγάζουμε ἀπό τό συνδυασμό τους τά γενικά συμπεράσματα γιά τήν (1).

λ	Δ	P	S	$(\lambda-3)x^2-2(3\lambda-4)x+7\lambda-6=0$
$-\infty$				
	$+$	$+$	$+$	$0<\rho_1<\rho_2$
-2	0			$\dashrightarrow$ $\rho_1=\rho_2=2$
	$-$	$+$	$+$	$\rho_1,\rho_2\in C-R,\ \rho_1=\bar{\rho}_2$
$\frac{1}{2}$	0			$\dashrightarrow$ $\rho_1=\rho_2=1$
	$+$	$+$	$+$	$0<\rho_1<\rho_2$
$\frac{6}{7}$		0		$\dashrightarrow$ $\rho_1=0,\ \rho_2=\frac{1}{3}$
	$+$	$-$	$+$	$\rho_1<0<\rho_2,\quad \rho_2>\lvert\rho_1\rvert$
$\frac{4}{3}$			0	$\dashrightarrow$ $\rho_1=-\sqrt{2}=-\rho_2$
	$+$	$-$	$-$	$\rho_1<0<\rho_2,\quad \lvert\rho_1\rvert>\rho_2$
3		//	//	$\dashrightarrow$ πρωτοβάθμια $x=\frac{3}{2}$
$+\infty$	$+$	$+$	$+$	$0<\rho_1<\rho_2$

2. Νά διερευνηθεῖ γιά τίς τιμές $\lambda\in R$ μέ ἄγνωστο $x\in R$ ἡ ἀνίσωση

$$(\lambda+1)x^2-2(\lambda-1)x+2(\lambda-1)>0 \qquad (1)$$

Διερεύνηση. Θά ἀναζητήσουμε τό πρόσημο τοῦ $\alpha=\lambda+1$ καί τῆς διακρίνουσας $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$ γιά τίς διάφορες τιμές $\lambda\in \mathbf{R}$ καί θά σχηματίσουμε πίνακα γιά νά διερευνήσουμε τήν (1).

Ἔχουμε:

α) $\alpha=\lambda+1=0$ γιά $\lambda=-1$, $\alpha>0$ γιά $\lambda>-1$ καί $\alpha<0$ γιά $\lambda<-1$

β) $\Delta=-4\lambda^2-8\lambda+12$ καί εἶναι $\Delta=0$ γιά $\lambda_1=-3$ καί $\lambda_2=1$,
$\Delta>0$ ἤ $-\lambda^2-2\lambda+3>0$ ἤ $\lambda^2+2\lambda-3<0$ γιά $-3<\lambda<1$ καί
$\Delta<0$ γιά $\lambda<-3$ εἴτε $\lambda>1$

λ	α	Δ	Λύσεις τῆς $(\lambda+1)x^2-2(\lambda-1)x+2(\lambda-1)>0$
$-\infty$	$-$	$-$	Ἀδύνατη
-3		0	$\dashrightarrow$ Ἀδύνατη
	$-$	$+$	Λύσεις: $x\in\mathbf{R}$ μέ $\rho_1<x<\rho_2$
-1	0		$\dashrightarrow$ Πρωτοβάθμια. Λύσεις: $x\in\mathbf{R}$ μέ $x>1$
	$+$	$+$	Λύσεις: $x\in\mathbf{R}$ μέ $x<\rho_1<\rho_2$ εἴτε $\rho_1<\rho_2<x$
1		0	$\dashrightarrow$ Λύσεις: ὅλα τά $x\in\mathbf{R}$ μέ $x\neq 0$
	$+$	$-$	Λύσεις: ὅλα τά $x\in\mathbf{R}$
$+\infty$			

3. Νά διερευνηθεῖ γιά τίς τιμές $\lambda \in R$ μέ ἄγνωστο x ἡ ἐξίσωση

$$(4\lambda-1)x^4+2(2\lambda-3)x^2-(4\lambda+9)=0 \qquad (1)$$

Διερεύνηση: Ἀπό τή διερεύνηση τῆς ἐξισώσεως

$$(4\lambda-1)y^2+2(2\lambda-3)y-(4\lambda+9)=0 \qquad (2)$$

πού ὀνομάζεται ἐπιλύουσα τῆς (1) καί προκύπτει ἀπ' αὐτήν, ὅταν θέσουμε $x^2=y$, θά βγάλουμε τά συμπεράσματά μας γιά τήν (1).

Γιά $4\lambda-1=0$ ἤ $\lambda=\frac{1}{4}$ ἡ (2) γίνεται πρωτοβάθμια μέ λύση $y=-2$.

Γιά $4\lambda-1 \neq 0$ ἤ $\lambda \neq \frac{1}{4}$ ἔχουμε:

α) $\Delta=80\lambda^2+80\lambda$ καί εἶναι $\Delta=0$ γιά $\lambda_1=0$ καί $\lambda_2=-1$,
$\Delta>0$ γιά $\lambda<-1$ εἴτε $\lambda>0$ καί $\Delta<0$ γιά $-1<\lambda<0$.

β) $P=\dfrac{-(4\lambda+9)}{4\lambda-1}$ καί εἶναι $P=0$ ἤ $4\lambda+9=0$ γιά $\lambda=-\dfrac{9}{4}$,

$P>0$ ἤ $-(4\lambda+9)(4\lambda-1)>0$ ἤ $(4\lambda+9)(4\lambda-1)<0$ γιά $-\dfrac{9}{4}<\lambda<\dfrac{1}{4}$

$P<0$ γιά $\lambda<-\dfrac{9}{4}$ εἴτε $\lambda>\dfrac{1}{4}$

γ) $S=\dfrac{-2(2\lambda-3)}{4\lambda-1}$ καί εἶναι $S=0$ γιά $\lambda=\dfrac{3}{2}$,

$S>0$ ἤ $-2(2\lambda-3)(4\lambda-1)>0$ ἤ $2(2\lambda-3)(4\lambda-1)<0$ γιά $\dfrac{1}{4}<\lambda<\dfrac{3}{2}$

$S<0$ γιά $\lambda<\dfrac{1}{4}$ εἴτε $\lambda>\dfrac{3}{2}$.

λ	Δ	P	S	Συμπεράσματα γιά τήν ἐπιλύουσα	Συμπεράσματα γιά τίς ρίζες τῆς $(4\lambda-1)x^4+2(2\lambda-3)x^2-(4\lambda+9)=0$
$-\infty$					
	+	−	−	$y_1<0<y_2$, $\lvert y_1\rvert>y_2$	$\rho_1=-\sqrt{y_2}$, $\rho_2=\sqrt{y_2}$, $\rho_3=-i\sqrt{-y_1}$, $\rho_4=i\sqrt{-y_1}$
$-\frac{9}{4}$		0		$\dashrightarrow$ $y_1=-\frac{9}{4}$, $y_2=0$	$\rho_1=\rho_2=0$, $\rho_3=-\frac{3i}{2}$, $\rho_4=\frac{3i}{2}$
	+	+	−	$y_1<y_2<0$	$\rho_1=-i\sqrt{-y_1}$, $\rho_2=i\sqrt{-y_1}$, $\rho_3=-i\sqrt{-y_2}$, $\rho_4=i\sqrt{-y_2}$
-1	0			$\dashrightarrow$ $y_1=y_2=-1$	$\rho_1=\rho_3=-i$ $\rho_2=\rho_4=i$
	−	+	−	$y_1, y_2 \in C-R$ $y_1=\overline{y_2}$	$\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4 \in C-R$
0	0			$\dashrightarrow$ $y_1=y_2=-3$	$\rho_1=\rho_3=-i\sqrt{3}$ $\rho_2=\rho_4=i\sqrt{3}$
	+	+	−	$y_1<y_2<0$	$\rho_1=-i\sqrt{-y_1}$, $\rho_2=i\sqrt{-y_1}$, $\rho_3=-i\sqrt{-y_2}$, $\rho_4=i\sqrt{-y_2}$
$\frac{1}{4}$		//	//	$\dashrightarrow$ Πρωτοβ. $y=-2$	$\rho_1=-i\sqrt{2}$, $\rho_2=i\sqrt{2}$
	+	−	+	$y_1<0<y_2$, $y_2>\lvert y_1\rvert$	$\rho_1=-i\sqrt{-y_1}$, $\rho_2=i\sqrt{-y_1}$, $\rho_3=-\sqrt{y_2}$, $\rho_4=\sqrt{y_2}$
$\frac{3}{2}$			0	$\dashrightarrow$ $y_1=-\sqrt{3}$, $y_2=\sqrt{3}$	$\rho_1=-i\sqrt[4]{3}$, $\rho_2=i\sqrt[4]{3}$, $\rho_3=-\sqrt[4]{3}$, $\rho_4=\sqrt[4]{3}$
	+	−	−	$y_1<0<y_2$, $\lvert y_1\rvert>y_2$	$\rho_1=-i\sqrt{-y_1}$, $\rho_2=i\sqrt{-y_1}$, $\rho_3=-\sqrt{y_2}$, $\rho_4=\sqrt{y_2}$
$+\infty$					

4. Βρεῖτε τίς τιμές τοῦ $\lambda\in R$ γιά τίς ὁποῖες ἡ ἐξίσωση

$$(2\lambda+1)x^2-4x+2\lambda=0$$

ἔχει δύο ρίζες πραγματικές ἄνισες καί μικρότερες ἀπό τόν 3.

Λύση:

Γιά νά ἔχει ἡ ἐξίσωσή μας δύο πραγματικές καί ἄνισες ρίζες, ἀρκεῖ νά εἶναι

$2\lambda+1\neq 0$ καί $\Delta'=\frac{1}{4}(\beta^2-4\alpha\gamma)=\left(\frac{\beta}{2}\right)^2-\alpha\gamma>0$, δηλαδή

$\lambda\neq-\frac{1}{2}$ καί $4-2\lambda(2\lambda+1)>0$ ἤ

$\lambda\neq-\frac{1}{2}$ καί $2\lambda^2+\lambda-2<0$ ἤ

$$\boxed{\lambda\neq-\frac{1}{2} \quad \text{καί} \quad \frac{-1-\sqrt{17}}{4}<\lambda<\frac{-1+\sqrt{17}}{4}} \qquad (1)$$

Γιά νά βρίσκεται ὁ 3 ἔξω ἀπό τό διάστημα τῶν ριζῶν, ἀρκεῖ, μέ τούς περιορισμούς (1), ἡ ἀριθμητική τιμή τοῦ τριωνύμου $f(x)=(2\lambda+1)x^2-4x+2\lambda$, γιά $x=3$, νά εἶναι ὁμόσημη τοῦ $\alpha=2\lambda+1$, δηλ. ἀρκεῖ $(2\lambda+1)f(3)>0$ ἤ $(2\lambda+1)(20\lambda-3)>0$ ἤ

$$\boxed{\lambda<-\frac{1}{2} \quad \text{εἴτε} \quad \lambda>\frac{3}{20}} \qquad (2)$$

Ἐπειδή θέλουμε ἀκόμα νά εἶναι καί

$\left.\begin{matrix}\rho_1<3\\ \rho_2<3\end{matrix}\right\}$, ἀρκεῖ μέ τούς περιορισμούς (1) καί (2)

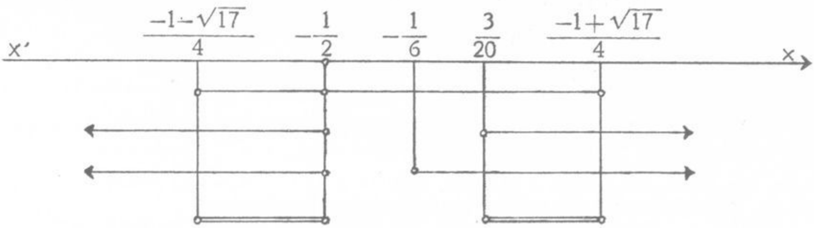
νά εἶναι ἀκόμα $\frac{\rho_1+\rho_2}{2}<3$ ἤ $-\frac{\beta}{2\alpha}<3$ ἤ $3+\frac{\beta}{2\alpha}>0$, δηλαδή

$$3-\frac{2}{2\lambda+1}>0 \quad \text{ἤ} \quad \frac{3(2\lambda+1)-2}{2\lambda+1}>0$$

$$\text{ἤ} \qquad (6\lambda+1)(2\lambda+1)>0 \qquad \text{ἤ}$$

$$\boxed{\lambda<-\frac{1}{2} \quad \text{εἴτε} \quad \lambda>-\frac{1}{6}} \qquad (3)$$

Μέ τή βοήθεια τῆς εὐθείας τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν βρίσκουμε εὔκολα ποιές τιμές τοῦ $\lambda\in\mathbf{R}$ ἱκανοποιοῦν τίς (1), (2), (3).



Ἄρα ἡ ἐξίσωση θά ἔχει δύο πραγματικές καί ἄνισες ρίζες καί μικρότερες ἀπό τόν 3

γιά $\lambda\in\left(\frac{-1-\sqrt{17}}{4},\ -\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{20}\ ,\ \frac{-1+\sqrt{17}}{4}\right)$

5. Γιά τήν προηγούμενη ἐξίσωση προσδιορίστε τούς λ∈R, γιά νά βρίσκεται ἡ μία ρίζα της στό διάστημα (—1,3).

Λύση:

Οἱ ἀριθμητικές τιμές τοῦ f(x) γιά x=—1 καί γιά x=3 θά εἶναι ἡ μία ὁμόσημη τοῦ α καί ἡ ἄλλη ἑτερόσημη, ὁπότε ἀρκεῖ νά εἶναι

$$f(-1)f\,(3)<0. \qquad (1)$$

Ἡ συνθήκη αὐτή ἐξασφαλίζει συγχρόνως καί τήν ὕπαρξη πραγματικῶν καί ἄνισων ριζῶν, ὅταν εἶναι $\alpha\neq0$ δηλ. $\lambda\neq-\frac{1}{2}$.

Ἡ (1) ἰσοδυναμεῖ μέ τήν ἀνίσωση

$$(4\lambda+5)\,(20\lambda-3)<0$$

πού ἀληθεύει γιά $\quad -\frac{5}{4}<\lambda<\frac{3}{20}$

καί ἄρα ἡ ἐξίσωση γιά τίς τιμές

$\lambda\in\left(-\frac{5}{4},\ -\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2}\ ,\ \frac{3}{20}\right)$ θά ἔχει ρίζες πραγματικές καί ἄνισες, ἀπό τίς ὁποῖες ἡ μία θά ἀνήκει στό διάστημα (—1,3).

6. Βρεῖτε τούς λ∈R, ὥστε ἡ ἀνίσωση

$$\lambda x^2-2(\lambda+1)x+\lambda<0$$

νά ἀληθεύει γιά κάθε x∈R.

Λύση:

Ἐπειδή τό τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ διατηρεῖ τό ἴδιο πρόσημο γιά ὅλα τά $x\in\mathbf{R}$, μόνο ὅταν εἶναι $\Delta<0$, ἀρκεῖ νά εἶναι

$\alpha=\lambda<0 \quad$ καί $\quad \Delta'=\frac{1}{4}\,[[2(\lambda+1)]^2-4\lambda\cdot\lambda]<0 \quad$ ἤ

$\lambda<0 \quad$ καί $\quad (\lambda+1)^2-\lambda^2<0 \quad$ ἤ

$\lambda<0$ καί $2\lambda+1<0$ ἤ

$$\lambda<-\frac{1}{2}$$

Ἄρα γιά $\lambda<-\frac{1}{2}$ ἡ δεδομένη ἀνίσωση ἀληθεύει γιά ὅλα τά $x\in\mathbf{R}$.

6.3. Ἐφαρμογές σέ τριγωνομετρικές ἐξισώσεις.

1. Νά ἐπιλυθεῖ καί νά διερευνηθεῖ ἡ ἐξίσωση

$$\alpha\eta\mu^2x+\beta\eta\mu x+\gamma=0,\quad \alpha,\beta,\gamma\in\mathbf{R} \quad \text{καί} \quad \alpha\neq0 \qquad (1)$$

Ἐπίλυση: Ἄν θέσουμε $\eta\mu x=t$ ἡ (1) γίνεται ἀλγεβρική ἐξίσωση ὡς πρός t:

$$f(t)=\alpha t^2+\beta t+\gamma=0,\quad \alpha\neq0 \qquad (2)$$

Ἄν t_1,t_2 εἶναι οἱ ρίζες τῆς (2), τότε ἡ (1) ἔχει γιά γενική λύση ὅλες τίς λύσεις τῶν βασικῶν ἐξισώσεων

$$\eta\mu x=t_1 \quad , \quad \eta\mu x=t_2 \qquad (3)$$

Γιά νά ἔχει ἡ (1) λύση, πρέπει νά ἔχει λύση μία τουλάχιστον ἀπό τίς (3).Δηλαδή πρέπει οἱ ἀριθμοί t_1,t_2 νά εἶναι πραγματικοί καί ἕνας τουλάχιστον νά βρίσκεται στό διάστημα $[-1,1]$. Ἔτσι ἔχουμε τήν ἀκόλουθη διερεύνηση.

Διερεύνηση. α) Ἡ ἐξίσωση $f(t)=\alpha t^2+\beta t+\gamma=0$ ἔχει **μιά μόνο δεκτή ρίζα,** ὅταν:

i) Μιά μόνο ἀπό τίς ρίζες της t_1,t_2 (ἔστω $t_1<t_2$) ἀνήκει στό διάστημα $(-1,1)$, δηλαδή εἶναι $t_1<-1<t_2<1$ ἤ $-1<t_1<1<t_2$.

Ἡ ἱκανή καί ἀναγκαία συνθήκη γι' αὐτό εἶναι:

$\alpha f(-1)\cdot\alpha f(1)<0$ ἤ $\alpha^2 f(-1)\cdot f(1)<0$ ἤ $\mathbf{f(-1).f(1)}<0$, δηλ. $\boldsymbol{(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha-\beta+\gamma)<0}$

ii) Ἡ μιά ρίζα εἶναι 1 καί ἡ ἄλλη ἔξω ἀπό τό διάστημα $[-1,1]$. Αὐτό ἰσχύει ὅταν καί μόνο ὅταν

$$\mathbf{f(1)=0} \ \text{καί} \ \left|\frac{\gamma}{\alpha}\right|>\mathbf{1}, \text{ δηλ. } \ \boldsymbol{\alpha+\beta+\gamma=0} \ \text{καί} \ \left|\frac{\gamma}{\alpha}\right|>1$$

γιατί, ἀπό $t_1\cdot t_2=\frac{\gamma}{\alpha}$, ἄν ἡ μιά ρίζα εἶναι ὁ ἀριθμός 1 ἡ ἄλλη εἶναι ὁ $\frac{\gamma}{\alpha}$.

iii) Ἡ μιά ρίζα εἶναι τό -1 καί ἡ ἄλλη ἔξω ἀπό τό διάστημα $[-1,1]$. Αὐτό ἰσχύει, ὅταν καί μόνον ὅταν:

$$\mathbf{f(-1)=0} \ \text{καί} \ \left|\frac{\gamma}{\alpha}\right|>\mathbf{1}, \text{ δηλ. } \ \boldsymbol{\alpha-\beta+\gamma=0} \ \text{καί} \ \left|\frac{\gamma}{\alpha}\right|>\mathbf{1}$$

β) Ἡ ἐξίσωση $f(t)=\alpha t^2+\beta t+\gamma=0$ ἔχει δύο δεκτές ρίζες, $-1\leq t_1<t_2\leq1$, ὅταν καί μόνον ὅταν $\boldsymbol{\Delta>0}$, $\boldsymbol{\alpha f(-1)\geq0}$, $\boldsymbol{\alpha f(1)\geq0}$ καί $\boldsymbol{-1<-\frac{\beta}{2\alpha}<1}$, δηλαδή

$$\beta^2-4\alpha\gamma>0,\ \alpha(\alpha-\beta+\gamma)\geq0,\ \alpha(\alpha+\beta+\gamma)\geq0,\ \text{καί}\ \left|-\frac{\beta}{2\alpha}\right|<1$$

Ἡ τελευταία συνθήκη προκύπτει ἀπό τό ὅτι $-1\leq t_1<t_2\leq1$ ἤ $-1\leq t_1<\frac{t_1+t_2}{2}<t_2\leq1$ καί $t_1+t_2=-\frac{\beta}{\alpha}$.

γ) Ἡ ἐξίσωση $f(t)=\alpha t^2+\beta t+\gamma=0$ ἔχει μιά διπλή ρίζα δεκτή, ὅταν καί μόνο ὅταν $\Delta=0$ καί $-1\leq t_1=t_2=\frac{t_1+t_2}{2}\leq1$, δηλαδή $\beta^2-4\alpha\gamma=0$ καί $\left|-\frac{\beta}{2\alpha}\right|\leq1$.

δ) Ἡ ἐξίσωση $f(t)=\alpha t^2+\beta t+\gamma=0$ δέν ἔχει καμιά ρίζα δεκτή ὅταν καί μόνο ὅταν

i) $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma<0$, δηλ. ἡ ἐξίσωση ἔχει ρίζες μιγαδικές.

ii) ἔχει δυό ρίζες μικρότερες ἀπό τό -1, ὁπότε θά ἰσχύουν

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma\geq0,\ \alpha f(-1)>0\ \text{καί}\ t_1\leq\frac{t_1+t_2}{2}\leq t_2<-1,\ \text{δηλαδή}$$

$$\beta^2-4\alpha\gamma>0,\ \alpha(\alpha-\beta+\gamma)>0\ \text{καί}\ -\frac{\beta}{2\alpha}<-1.$$

iii) Ἔχει δυό ρίζες μεγαλύτερες ἀπό τό $+1$, ὁπότε θά ἰσχύουν

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma\geq0,\ \alpha f(1)>0\ \text{καί}\ 1<t_1\leq\frac{t_1+t_2}{2}\leq t_2,\ \text{δηλαδή}$$

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma\geq0,\ \alpha(\alpha+\beta+\gamma)>0\ \text{καί}\ -\frac{\beta}{2\alpha}>1.$$

iv) Ἔχει δυό ρίζες πραγματικές ἀπό τίς ὁποῖες ἡ μία εἶναι μικρότερη ἀπό τό -1 καί ἡ ἄλλη μεγαλύτερη ἀπό τό $+1$, ὁπότε θά ἰσχύουν:

$\alpha f(-1)<0$ καί $\alpha f(1)<0$, δηλαδή $\alpha(\alpha-\beta+\gamma)<0$ καί $\alpha(\alpha+\beta+\gamma)<0$

2. Νά ἐπιλυθεῖ καί νά διερευνηθεῖ ἡ ἐξίσωση (γραμμική τριγωνομετρική)

$$\alpha\eta\mu x+\beta\sigma\upsilon\nu x=\gamma,\quad \alpha.\beta.\gamma\neq0 \tag{1}$$

Ἐπίλυση. 1ος τρόπος. Ἡ (1) γράφεται:

$\eta\mu x+\frac{\beta}{\alpha}\sigma\upsilon\nu x=\frac{\gamma}{\alpha}$, καί ἐπειδή ὑπάρχει πάντοτε τόξο $\theta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ὥστε $\varepsilon\varphi\theta=\frac{\beta}{\alpha}$ ἔχουμε:

$\eta\mu x+\varepsilon\varphi\theta\cdot\sigma\upsilon\nu x=\frac{\gamma}{\alpha}$ ἤ $\eta\mu x+\frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}\cdot\sigma\upsilon\nu x=\frac{\gamma}{\alpha}$ ἤ $\eta\mu x\sigma\upsilon\nu\theta+\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu x=\frac{\gamma}{\alpha}\sigma\upsilon\nu\theta$ ἤ

$$\eta\mu(x+\theta)=\frac{\gamma}{\alpha}\sigma\upsilon\nu\theta \tag{2}$$

Ἡ (2) εἶναι βασική τριγωνομετρική ἐξίσωση καί **ἔχει λύση, ὅταν καί μόνο ὅταν**

$$\left|\frac{\gamma}{\alpha}\text{συν}\theta\right| \leq 1 \Leftrightarrow \frac{\gamma^2}{\alpha^2}\text{συν}^2\theta \leq 1 \Leftrightarrow \frac{\gamma^2}{\alpha^2} \leq \frac{1}{\text{συν}^2\theta} \Leftrightarrow \frac{\gamma^2}{\alpha^2} \leq 1+\text{εφ}^2\theta \Leftrightarrow \frac{\gamma^2}{\alpha^2} \leq 1+\frac{\beta^2}{\alpha^2} \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2+\beta^2 \geq \gamma^2 \qquad (3)$$

Δηλαδή, ἄν ἰσχύει $\alpha^2+\beta^2 \geq \gamma^2$, τότε ὑπάρχει τόξο $\omega \in [0,2\pi)$ τέτοιο, ὥστε

$$\text{ημ}\omega = \frac{\gamma}{\alpha}\text{συν}\theta \qquad (4)$$

Ὁπότε ἡ (2) γίνεται:

$$\text{ημ}(x+\theta) = \text{ημ}\omega$$

Ἀπό τήν τελευταία παίρνουμε τίς λύσεις

$$\left\{\begin{array}{l} x+\theta=2\kappa\pi+\omega,\ \kappa\in\mathbf{Z} \\ \qquad\text{ἤ} \\ x+\theta=(2\kappa+1)\pi-\omega,\ \kappa\in\mathbf{Z} \end{array}\right. \quad \text{ἤ} \quad \left\{\begin{array}{ll} x=2\kappa\pi+\omega-\theta, & \kappa\in\mathbf{Z} \\ \qquad\text{ἤ} & \\ x=(2\kappa+1)\pi-\omega-\theta, & \kappa\in\mathbf{Z} \end{array}\right.$$

Μέ αὐτό τόν τρόπο ἐπιλύουμε συνήθως τίς γραμμικές τριγωνομετρικές ἐξισώσεις (1), ὅταν τό τόξο θ, γιά τό ὁποῖο εἶναι $\text{εφ}\theta=\frac{\beta}{\alpha}$, εἶναι γνωστό τόξο. Ὅταν αὐτό δέ συμβαίνει χρησιμοποιοῦμε τόν ἀκόλουθο τρόπο.

2ος τρόπος: Γνωρίζουμε ὅτι $\text{ημ}x=\dfrac{2\text{εφ}\frac{x}{2}}{1+\text{εφ}^2\frac{x}{2}}$ καί $\text{συν}x=\dfrac{1-\text{εφ}^2\frac{x}{2}}{1+\text{εφ}^2\frac{x}{2}}$

$$\text{μέ } \frac{x}{2} \neq \kappa\pi+\frac{\pi}{2},\ \text{δηλ. } x \neq 2\kappa\pi+\pi,\ \kappa\in\mathbf{Z},$$

ὁπότε ἡ (1) γράφεται:

$$\alpha.\ \frac{2\text{εφ}\frac{x}{2}}{1+\text{εφ}^2\frac{x}{2}}+\beta.\frac{1-\text{εφ}^2\frac{x}{2}}{1+\text{εφ}^2\frac{x}{2}}=\gamma \quad \text{καί μετά τίς πράξεις:}$$

$$(\beta+\gamma)\text{εφ}^2\frac{x}{2}-2\alpha\text{εφ}\frac{x}{2}+(\gamma-\beta)=0,\ \text{μέ } x\neq 2\kappa\pi+\pi,\ \kappa\in\mathbf{Z} \qquad (2')$$

Τονίζουμε ἐδῶ ὅτι ἡ (1) δέν εἶναι ἰσοδύναμη μέ τή (2') γιατί ἡ (2'), δέν ἔχει λύσεις τῆς μορφῆς $x=2\kappa\pi+\pi$, $\kappa\in\mathbf{Z}$, ἐνῶ δέν ἀποκλείεται αὐτές νά εἶναι λύσεις τῆς (1).

Ἡ (2') ἐπιλύεται τώρα εὔκολα

i) Ἄν $\beta+\gamma=0$, δηλ. $\gamma=-\beta$ ἡ (2') γίνεται $\text{εφ}\frac{x}{2}=-\frac{\beta}{\alpha}$, ἡ ὁποία εἶναι βασική τριγωνομετρική ἐξίσωση.

ii) Ἄν $\beta+\gamma\neq 0$, τότε ἡ (2') ἔχει λύση, ὅταν καί μόνον ὅταν $\Delta\geq 0$, δηλ.

$$\Delta=4\alpha^2-4(\beta+\gamma)\cdot(\gamma-\beta)\geq 0, \text{ δηλ. } \alpha^2+\beta^2\geq\gamma^2,$$

ὁπότε $\text{εφ}\frac{x}{2}=\frac{2\alpha\pm\sqrt{\Delta}}{2(\beta+\gamma)}$, ἀπό ὅπου ὑπολογίζουμε τά τόξα x.

Στήν (1) ἐξετάζουμε ἄν ἔχει καί ρίζες τῆς μορφῆς $x=2\kappa\pi+\pi$, $\kappa\in\mathbf{Z}$

3. Νά ἐπιλυθεῖ ἡ ἐξίσωση (συμμετρική ὡς πρός ημx καί συνx)

$$\text{ημ}x+\text{συν}x-\text{ημ}^2x\,\text{συν}x-\text{ημ}x\,\text{συν}^2x=1 \qquad (1)$$

Ἐπίλυση: Ἡ ἐξίσωση (1) εἶναι συμμετρική ὡς πρός ημx καί συνx, δηλ. δέ μεταβάλλεται ἄν θέσουμε ὅπου ημx τό συνx καί ὅπου συνx τό ημx. Τίς συμμετρικές ἐξισώσεις μποροῦμε πάντοτε νά τίς ἐκφράσουμε μέ ὅρους τά ημx+συνx καί ημx·συνx. Ἔτσι ἡ ἐξίσωση (1) γράφεται

$$(\text{ημ}x+\text{συν}x)-\text{ημ}x\text{συν}x(\text{ημ}x+\text{συν}x)=1, \text{ δηλ. } (\text{ημ}x+\text{συν}x)\,(1-\text{ημ}x\text{συν}x)=1 \quad (2)$$

Θέτουμε τώρα

$$\text{ημ}x+\text{συν}x=t, \text{ ὁπότε } \text{ημ}^2x+\text{συν}^2x+2\text{ημ}x\text{συν}x=t^2, \text{ δηλ. } \text{ημ}x.\text{συν}x=\frac{t^2-1}{2}. \quad (3)$$

Ὁ μετασχηματισμός ημx+συνx=t γράφεται:

$$\sqrt{2}\text{συν}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=t \text{ ἤ } \text{συν}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{t}{\sqrt{2}},$$

Γιά νά ἔχει νόημα ἡ τελευταία ἰσότητα πρέπει:

$$\left|\frac{t}{\sqrt{2}}\right|\leq 1, \quad \text{δηλ.} \quad -\sqrt{2}\leq t\leq\sqrt{2} \qquad (4)$$

Ἑπομένως ἡ ἐξίσωση (2) γράφεται:

$$t\left(1-\frac{t^2-1}{2}\right)=1 \quad \text{ἤ} \quad t\left(\frac{2-t^2+1}{2}\right)=1, \quad \text{δηλαδή}$$

$$t^3-3t+2=0, \quad \text{μέ} \quad -\sqrt{2}\leq t\leq\sqrt{2} \qquad (5)$$

Ἡ (5) εἶναι 3ου βαθμοῦ ὡς πρός t καί ἐπιλύεται μέ ἕναν ἀπό τούς γνωστούς τρόπους. Ἀπό τούς διαιρέτες τοῦ σταθεροῦ ὅρου βλέπουμε ἀμέσως ὅτι τό +1 εἶναι ρίζα της.

Ἔτσι ἡ (5) γίνεται:

$$(t-1)\,(t^2+t-2)=0, \quad \text{μέ} \quad -\sqrt{2}\leq t\leq\sqrt{2} \qquad (6)$$

Ἡ (6) ἔχει ρίζες t=1 (διπλή) καί t=–2, ἡ ὁποία ἀπορρίπτεται, γιατί δέν ἱκανοποιεῖ τόν περιορισμό.

Ἑπομένως ἔχουμε:

$$\text{ημ}x+\text{συν}x=1 \Leftrightarrow \sqrt{2}\text{συν}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1 \Leftrightarrow \text{συν}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{συν}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \text{συν}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\text{συν}\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x-\frac{\pi}{4}=2\kappa\pi\pm\frac{\pi}{4}, \quad \kappa\in\mathbf{Z}.$$

Ἀπό τήν τελευταία παίρνουμε τίς λύσεις:

$$\left\{\begin{array}{c} x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2},\ \kappa\in\mathbf{Z} \\ \text{ἤ} \\ x=2\kappa\pi,\ \ \kappa\in\mathbf{Z} \end{array}\right.$$

6.4. Ἀσκήσεις.

1. Νά ὁριστεῖ ὁ πραγματικός ἀριθμός λ, ὥστε οἱ ρίζες τῆς ἐξισώσεως
$$(\lambda-2)x^2+(2\lambda+1)x+\lambda=0$$
νά εἶναι: α) πραγματικές καί ἄνισες β) πραγματικές καί ἴσες
γ) ἀντίστροφες, δ) μιγαδικές καί ε) ἡ ἀπόλυτη τιμή τῆς διαφορᾶς τους μικρότερη ἀπό τό 2.

2. Βρεῖτε τίς πραγματικές καί τίς μιγαδικές ρίζες τῆς ἐξισώσεως
$$x^2+8x+|x|+20=0$$

3. Νά διερευνηθεῖ γιά ὅλες τίς πραγματικές τιμές τοῦ λ ἡ ἐξίσωση:
$$(\lambda^2+3\lambda+4)x^2+2(\lambda-1)x+9\lambda-9=0$$

4. Στήν ἐξίσωση $x^4-5\lambda x^2+\lambda-2$, νά ὁριστεῖ ὁ λ, ὥστε νά ἔχει τέσσερις ρίζες πραγματικές.

5. Νά ἐπιλυθεῖ καί νά διερευνηθεῖ ἡ ἀνίσωση
$$(\lambda-3)x^2-4x-2\lambda<0.$$

6. Νά ἐπιλυθεῖ καί νά διερευνηθεῖ ἡ ἐξίσωση
$$(\lambda-1)x^4+3\lambda x^3+x^2-3\lambda x+(\lambda-1)=0$$

7. Νά ἐπιλυθεῖ καί νά διερευνηθεῖ ἡ ἀνίσωση: $\dfrac{\lambda(x+1)}{x-1}>1$

8. Νά ἐπιλυθοῦν οἱ ἐξισώσεις α) $\sigma\upsilon\nu^2 x-\frac{3}{2}\sigma\upsilon\nu x+\frac{1}{2}=0$,
β) $(1+\sqrt{3})\eta\mu x+(1-\sqrt{3})\sigma\upsilon\nu x=1+\sqrt{3}$, γ) $\eta\mu x+\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu x=\sqrt{2}$ καί
δ) $\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x=1$.

9. Νά ἐπιλυθοῦν καί νά διερευνηθοῦν οἱ ἐξισώσεις:
α) $\eta\mu 2x=\lambda\eta\mu 3x$ καί β) $\eta\mu x+(\lambda-1)\sigma\upsilon\nu x=1-2\lambda,\ \lambda\in\mathbf{Z}$

10. Νά ἐπιλυθεῖ καί νά διερευνηθεῖ ἡ ἐξίσωση
$$\lambda(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)-\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x=1.$$

11. Νά βρεθεῖ ἡ ἱκανή καί ἀναγκαία συνθήκη, γιά νά ἔχει ἡ ἐξίσωση
$$\mu\sigma\upsilon\nu x-(2\mu+1)\eta\mu x=\mu$$
δύο ρίζες x_1, x_2, μέ $x_1-x_2\neq 2\kappa\pi,\ \kappa\in\mathbf{Z}$, τέτοιες, ὥστε

α) $|x_1-x_2|=\dfrac{\pi}{2}$

καί β) $x_1+x_2=\dfrac{3\pi}{2}$

7. ΣΥΝΤΟΜΗ ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

1. Κάθε παράσταση τῆς μορφῆς

$$\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0,$$

μέ $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_\nu \in \mathbf{C}$ καί $\nu \in \mathbf{N}_0$ ὀνομάζεται **πολυώνυμο τοῦ x** καί συμβολίζεται μέ $f(x)$, $g(x)$, κ.ἄ.

2. Στό σύνολο $\mathbf{C}_{[x]}$ τῶν πολυωνύμων ὁρίζουμε δυό πράξεις, τήν πρόσθεση «+» καί τόν πολλαπλασιασμό «·». **Ἡ δομή $(\mathbf{C}_{[x]}, +, \cdot)$ εἶναι ἀντιμεταθετικός δακτύλιος μέ μοναδιαῖο στοιχεῖο.**

3. Ἄν $f(x)$ καί $g(x)$ εἶναι πολυώνυμα τοῦ $\mathbf{C}_{[x]}$ μέ $g(x) \neq \mathbf{0}$, τότε ὑπάρχει μοναδικό ζεῦγος πολυωνύμων $\pi(x)$ καί $\upsilon(x)$ τοῦ $\mathbf{C}_{[x]}$, μέ $\upsilon(x) = \mathbf{0}$ ἤ βαθμ. $\upsilon(x) <$ $<$βαθμ. $g(x)$ τέτοιο, ὥστε

$$f(x) = g(x)\pi(x) + \upsilon(x) \tag{1}$$

4. Ἄν στήν (1) εἶναι $\upsilon(x) = \mathbf{0}$, τότε τό $g(x)$ εἶναι διαιρέτης τοῦ $f(x)$.

5. Κάθε συνάρτηση

$$f : A \to A$$

μέ τύπο

$$\mathbf{f(x)} = \boldsymbol{\alpha}_\nu x^\nu + \boldsymbol{\alpha}_{\nu-1} x^{\nu-1} + \ldots + \boldsymbol{\alpha}_1 x + \boldsymbol{\alpha}_0$$

ὅπου $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_\nu \in A$ καί A ἕνα ἀπό τά $\mathbf{R}, \mathbf{C}$, ὀνομάζεται **πολυωνυμική συνάρτηση τοῦ x.**

Ὁ ἀριθμός

$$f(\rho) = \alpha_\nu \rho^\nu + \alpha_{\nu-1}\rho^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 \rho + \alpha_0,$$

πού εἶναι εἰκόνα τοῦ ρ μέσω τῆς f, ὀνομάζεται **ἀριθμητική τιμή τῆς πολυωνυμικῆς συναρτήσεως f γιά x=ρ** ἤ καί **ἀριθμητική τιμή τοῦ πολυωνύμου**

$$\mathbf{f(x)} = \boldsymbol{\alpha}_\nu x^\nu + \boldsymbol{\alpha}_{\nu-1} x^{\nu-1} \ldots + \boldsymbol{\alpha}_1 x + \boldsymbol{\alpha}_0, \ \textbf{γιά } x = \boldsymbol{\rho}.$$

Ἄν $f(\rho) = 0$, τότε λέμε ὅτι ὁ ρ εἶναι **ρίζα τοῦ πολυωνύμου f(x).**

Ἡ εὕρεση ὅλων τῶν ἀριθμῶν ρ γιά τούς ὁποίους εἶναι

$$f(\rho) = \alpha_\nu \rho^\nu + \alpha_{\nu-1}\rho^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 \rho + \alpha_0 = 0$$

ὀνομάζεται **ἐπίλυση τῆς πολυωνυμικῆς ἐξισώσεως**

$$f(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0.$$

6. **Κάθε πολυώνυμο $f(x) \in \mathbf{C}_{[x]}$, βαθμοῦ $\nu \in \mathbf{N}_0$, ἔχει ν ἀκριβῶς ρίζες, ὅταν κάθε ρίζα μετριέται τόσες φορές ὅσος εἶναι ὁ βαθμός πολλαπλότητάς της.**

7. Οἱ πολυωνυμικές ἐξισώσεις μέχρι καί 4ου βαθμοῦ ἐπιλύονται πάντοτε. Ἐξισώσεις ἀνωτέρου τοῦ 4ου βαθμοῦ ἐπιλύονται μόνο σέ εἰδικές περιπτώσεις.

8. Στίς παραμετρικές ἐξισώσεις ἤ ἀνισώσεις κάνουμε πάντοτε διερεύνηση.

8. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

1. Δεῖξτε ὅτι τό πολυώνυμο $f(x)=(συνφ+xημφ)^ν-συν(νφ)-xημ(νφ)$, ὅπου $ν\in \mathbf{N}$, εἶναι διαιρετό μέ τό πολυώνυμο $g(x)=x^2+1$.

2. Δεῖξτε ὅτι τό πολυώνυμο $f(x)=x^ν ημφ-ρ^{ν-1}xημ(νφ)+ρ^ν ημ(ν-1)φ$, ὅπου $ν\in \mathbf{N}$, εἶναι διαιρετό μέ τό πολυώνυμο $g(x)=x^2-2ρxσυνφ+ρ^2$.

3. Βρεῖτε τά α καί β, ὥστε τό πολυώνυμο
$$f(x)=αx^{ν+1}+βx^ν+1 \text{ νά διαιρεῖται μέ τό } (x-1)^2.$$

4. Ἄν τό πολυώνυμο $f(x)=α_ν x^ν+α_{ν-1}x^{ν-1}+α_{ν-2}x^{ν-2}+\ldots+α_1x+α_0$ διαιρεῖται μέ τό $(x-1)^2$, δεῖξτε ὅτι τό πολυώνυμο
$g(x)=να_ν x^{ν-1}+(ν-1)α_{ν-1}x^{ν-2}+\ldots+α_1$ διαιρεῖται μέ τό $x-1$.

5. Ἕνα πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο μέ $x-α$ ἔχει πηλίκο x^2-3x+4 καί διαιρούμενο μέ $x-β$ ἔχει πηλίκο x^2-4x+2. Νά βρεῖτε τό $P(x)$ καί τά α καί β, ἄν γνωρίζετε ὅτι ὁ σταθερός ὅρος τοῦ $P(x)$ εἶναι ἴσος μέ 1.

6. Δίνονται τά πολυώνυμα $f_1(x)$ καί $f_2(x)$ καί τά πηλίκα $π_1(x)$ καί $π_2(x)$ τῶν διαιρέσεων τοῦ $f_1(x)$ μέ τό $(x-α)$ καί τοῦ $f_2(x)$ μέ τό $(x-β)$. Δεῖξτε ὅτι τό ὑπόλοιπο $υ(x)$ τῆς διαιρέσεως τοῦ πολυωνύμου $f_1(x)\cdot f_2(x)$ μέ τό $(x-α)\cdot(x-β)$ μέ $α\neq β$ δίνεται ἀπό τόν τύπο
$$υ(x)=f_2(β)π_1(β)\,(x-α)+f_1(α)π_2(α)\,(x-β)+f_1(α)\cdot f_2(β)$$

7. Βρεῖτε γιά ποιές τιμές τῶν μ καί ν τό πολυώνυμο x^4+1 διαιρεῖται μέ τό $x^2+μx+ν$.

8. Ἄν $α+β+γ=0$ καί $α^μ+β^μ+γ^μ=S_μ$, δεῖξτε ὅτι
$2S_4=S_2^2,\ 6S_5=5S_2S_3,\ 6S_7=7S_3S_4,\ 10S_7=7S_2S_5,\ 25S_5S_3=215S_5^2$
$50S_7^2=49S_4S_5^2,\qquad S_{ν+3}=αβγS_ν+\dfrac{1}{2}S_2S_{ν+1}.$

9. Ἄν τό πολυώνυμο $f(x)=x^ν+α_{ν-1}x^{ν-1}+α_{ν-2}x^{ν-2}+\ldots+α_1x+α_0$ ἔχει ρίζες πραγματικές, δεῖξτε ὅτι $(α^2_{ν-1}-2α_{ν-2})\cdot ν\geq α^2_{ν-1}$

10. Βρεῖτε τή σχέση μεταξύ τῶν συντελεστῶν τοῦ πολυωνύμου $f(x)=αx^3+βx^2+γx+δ$ ὥστε οἱ ρίζες του $ρ_1,ρ_2,ρ_3$ νά ἱκανοποιοῦν τή συνθήκη $ρ_1+ρ_3=2ρ_2$.

11. Βρεῖτε τήν ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη μεταξύ τῶν συντελεστῶν τοῦ πολυωνύμου $f(x)=x^3-αx^2+βx-γ$, μέ $α\neq 0$, ὥστε μία ρίζα του νά εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν δύο ἄλλων.

12. Ἄν δύο ἀπό τίς ρίζες τοῦ πολυωνύμου $f(x)=x^3+αx^2+βx$ εἶναι ἀντίθετες, δεῖξτε ὅτι ἕνας τουλάχιστο τῶνσυντελεστῶν α,β εἶναι μηδέν καί ἀντίστροφα.

13. Ἄν τό πολυώνυμο $f(x)=x^3+αx^2+βx+γ$ ἔχει πραγματικούς συντελεστές, μέ $γ\neq 0$ καί οἱ ρίζες του $ρ_1,ρ_2,ρ_3$ ἱκανοποιοῦν τίς ἰσότητες $|ρ_1|=2|ρ_2|=3|ρ_3|$, δεῖξτε ὅτι: $|αβ|\leq 11|γ|$.

14. Νά ἀποδειχτοῦν οἱ ἰσότητες

α) $x^{2ν}-1=(x^2-1)\prod\limits_{κ=1}^{ν-1}\left(x^2-2xσυν\dfrac{κπ}{ν}+1\right),$

β) $x^{2ν+1}-1=(x-1)\prod\limits_{κ=1}^{ν}\left(x^2-2xσυν\dfrac{2κπ}{2ν+1}+1\right),$

ὅπου $κ\in \mathbf{Z}$ καί $ν\in \mathbf{N}$ καί στή συνέχεια νά δείξετε ὅτι
$$ημ\frac{π}{2ν}ημ\frac{2π}{2ν}\ldots ημ\frac{(ν-1)π}{2ν}=\frac{\sqrt{ν}}{2^{ν-1}}$$

15. Καθορίστε τόν $\nu \in \mathbf{N}$ γιά τόν όποῖο τό πολυώνυμο
$f(x)=x^{2\nu-2}+x^{2\nu-4}+\ldots+x^4+x^2+1$ είναι διαιρετό μέ τό πολυώνυμο
$g(x)=x^{\nu-1}+x^{\nu-2}+\ldots+x^2+x+1$.

16. Βρεῖτε τό εἶδος τῶν ριζῶν τοῦ πολυωνύμου

$f(x)=x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma$, ἄν $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbf{R}$ καί $\dfrac{\alpha^2-|\beta|}{|\alpha\beta|}\cdot\sqrt{2\beta}<1$.

17. Δεῖξτε ὅτι τό πολυώνυμο $f(x)=(1-x^\nu)(1+x)-2\nu x^\nu(1-x)-\nu^2x^\nu(1-x)^2$ εἶναι διαιρετό μέ τό $(1-x^3)$.

18. Ἄν ρ εἶναι ρίζα τοῦ πολυωνύμου $f(x)=x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma$ μέ $|\alpha|\geq|\beta|\geq|\gamma|$, δεῖξτε ὅτι $|\rho|<1+|\alpha|$.

19. Ἄν ρ εἶναι ρίζα τοῦ πολυωνύμου $f(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_0$, μέ $|\rho|\geq 1$,
δεῖξτε ὅτι: $|\alpha_\nu|\leq|\alpha_{\nu-1}|+|\alpha_{\nu-2}|+\ldots+|\alpha_1|+|\alpha_0|$.

20. Ἄν ρ εἶναι ρίζα τοῦ $f(x)=x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1x+\alpha_0$, δεῖξτε ὅτι:

$$|\rho|<1+|\alpha_{\nu-1}|+\ldots+|\alpha_1|+|\alpha_0|.$$

21. Νά ὁριστεῖ ὁ πραγματικός ἀριθμός α, ὥστε ἡ ἐξίσωση $(\alpha-1)x^4-(\alpha+1)x^2+\alpha-2=0$ νά ἔχει α) τέσσερις ρίζες πραγματικές, β) δύο πραγματικές καί δύο μιγαδικές καί γ) τέσσερις ρίζες μιγαδικές.

22. Δίνεται τό πολυώνυμο

$$f(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1x+\alpha_0,\ \alpha_\nu\neq 0 \text{ καί } \alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_\nu\in\mathbf{Z}.$$

Ἄν τό πολυώνυμο αὐτό παίρνει τήν τιμή 3 γιά τέσσερις διαφορετικές ἀκέραιες τιμές, τότε δεῖξτε ὅτι δέν ὑπάρχει ἀκέραιος κ τέτοιος, ὥστε $f(\kappa)=5$.

23. Νά ἐπιλυθεῖ ἡ ἐξίσωση

$$x^3-x^2+9\alpha x-\alpha=0,$$

ἄν γνωρίζουμε ὅτι ἔχει ρίζες θετικές, καί ἔπειτα νά προσδιοριστεῖ ἡ τιμή τῆς παραμέτρου α.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ V

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

1. Τριγωνομετρικά συστήματα
2. Τριγωνομετρικές ἀνισώσεις
3. Σύντομη ἀνακεφαλαίωση
4. Ἀσκήσεις γιά ἐπανάληψη

1. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

1.1. Εἰσαγωγή.

Ἕνα σύστημα ἐξισώσεων, πού ὅλοι οἱ ἄγνωστοι εἶναι τόξα (ἤ γωνίες) καί μία τουλάχιστον ἀπό τίς ἐξισώσεις εἶναι τριγωνομετρική, ὀνομάζεται **τριγωνομετρικό σύστημα.**

Ἐπίλυση ἑνός τριγωνομετρικοῦ συστήματος εἶναι ἡ εὕρεση ὅλων τῶν τόξων πού τό ἐπαληθεύουν. Ἡ ἐπίλυση καί ἡ διερεύνηση ἑνός τριγωνομετρικοῦ συστήματος ἀνάγεται στήν ἐπίλυση καί διερεύνηση μιᾶς τριγωνομετρικῆς ἐξισώσεως.

Στά τριγωνομετρικά συστήματα, ὅπως καί στά ἀλγεβρικά συστήματα ἐξισώσεων, δέν ὑπάρχει πάντοτε μία γενική μέθοδος γιά τήν ἐπίλυσή τους. Μποροῦμε ὅμως νά ξεχωρίσουμε μερικές κατηγορίες τριγωνομετρικῶν συστημάτων, τά ὁποῖα ἐπιλύονται μέ ἕναν ὁρισμένο τρόπο. Τονίζουμε ἐδῶ ὅτι γιά τήν ἐπίλυση ἑνός τριγωνομετρικοῦ συστήματος ἐπιδιώκουμε πάντοτε νά βροῦμε ἕνα ἰσοδύναμό του ἀλγεβρικό γιά τόν προσδιορισμό τῶν ἄγνωστων τόξων.

1.2. Τριγωνομετρικά συστήματα μέ δύο ἐξισώσεις καί δύο ἄγνωστα τόξα.

I. Ἡ μιά ἐξίσωση τοῦ συστήματος εἶναι ἀλγεβρική καί ἡ ἄλλη τριγωνομετρική.

Στήν κατηγορία αὐτή ἀνήκουν καί τά ἀκόλουθα συστήματα, πού μποροῦμε νά τά ἐπιλύσουμε εὔκολα.

$$\left.\begin{array}{l} x\pm y=\alpha \\ \eta\mu x\pm\eta\mu y=\beta \end{array}\right\},\quad \left.\begin{array}{l} x\pm y=\alpha \\ \sigma\upsilon\nu x\pm\sigma\upsilon\nu y=\beta \end{array}\right\},\quad \left.\begin{array}{l} x\pm y=\alpha \\ \varepsilon\varphi x\pm\varepsilon\varphi y=\beta \end{array}\right\},\quad \left.\begin{array}{l} x\pm y=\alpha \\ \sigma\varphi x\pm\sigma\varphi y=\beta \end{array}\right\},$$

$$\left.\begin{array}{l} x\pm y=\alpha \\ \eta\mu x\cdot\eta\mu y=\beta \end{array}\right\},\quad \left.\begin{array}{l} x\pm y=\alpha \\ \sigma\upsilon\nu x\cdot\sigma\upsilon\nu y=\beta \end{array}\right\},\quad \left.\begin{array}{l} x\pm y=\alpha \\ \sigma\upsilon\nu x\cdot\eta\mu y=\beta \end{array}\right\},\quad \left.\begin{array}{l} x\pm y=\alpha \\ \varepsilon\varphi x\cdot\varepsilon\varphi y=\beta \end{array}\right\},\quad \left.\begin{array}{l} x\pm y=\alpha \\ \varepsilon\varphi x\cdot\sigma\varphi y=\beta \end{array}\right\},$$

$$\left.\begin{array}{l} x\pm y=\alpha \\ \dfrac{\eta\mu x}{\eta\mu y}=\beta \end{array}\right\},\quad \left.\begin{array}{l} x\pm y=\alpha \\ \dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu y}=\beta \end{array}\right\},\quad \left.\begin{array}{l} x\pm y=\alpha \\ \dfrac{\varepsilon\varphi x}{\varepsilon\varphi y}=\beta \end{array}\right\}.$$

Ἐδῶ προσπαθοῦμε νά μετασχηματίσουμε τήν τριγωνομετρική ἐξίσωση σέ ἀλγεβρική, ὁπότε τό σύστημα ἀνάγεται στήν ἐπίλυση ἑνός ἁπλοῦ ἀλγεβρικοῦ συστήματος.

V 1.2.

Μέ παραδείγματα θά δοῦμε πῶς ἐργαζόμαστε στήν πράξη.

Παράδειγμα 1. Νά ἐπιλυθεῖ τό σύστημα $\left.\begin{array}{r} x+y=\dfrac{2\pi}{3} \\ \eta\mu x+\eta\mu y=\dfrac{3}{2} \end{array}\right\}.$

Ἐπίλυση: Τό σύστημα ἰσοδύναμα γράφεται:

$$\left.\begin{array}{l} x+y=\dfrac{2\pi}{3} \\ 2\eta\mu\dfrac{x+y}{2}\sigma\upsilon\nu\dfrac{x-y}{2}=\dfrac{3}{2} \end{array}\right\}\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x+y=\dfrac{2\pi}{3} \\ 2\eta\mu\dfrac{\pi}{3}\sigma\upsilon\nu\dfrac{x-y}{2}=\dfrac{3}{2} \end{array}\right\}\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x+y=\dfrac{2\pi}{3} \\ 2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sigma\upsilon\nu\dfrac{x-y}{2}=\dfrac{3}{2} \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x+y=\dfrac{2\pi}{3} \\ \sigma\upsilon\nu\dfrac{x-y}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\}\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x+y=\dfrac{2\pi}{3} \\ \sigma\upsilon\nu\dfrac{x-y}{2}=\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{6} \end{array}\right\}\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x+y=\dfrac{2\pi}{3} \\ \dfrac{x-y}{2}=2k\pi\pm\dfrac{\pi}{6},\ k\in\mathbf{Z} \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x+y=\dfrac{2\pi}{3} \\ x-y=4k\pi\pm\dfrac{\pi}{3},\ k\in Z \end{array}\right\}$$

Ἑπομένως ἔχουμε νά ἐπιλύσουμε τά ἀκόλουθα ἁπλά ἀλγεβρικά συστήματα.

$$\left.\begin{array}{l} x+y=\dfrac{2\pi}{3} \\ x-y=4k\pi+\dfrac{\pi}{3},\ k\in Z \end{array}\right\}(\Sigma_1), \qquad \left.\begin{array}{l} x+y=\dfrac{2\pi}{3} \\ x-y=4k\pi-\dfrac{\pi}{3},\ k\in Z \end{array}\right\}(\Sigma_2)$$

Τό σύστημα (Σ_1) ἔχει τίς λύσεις:

$$x=2k\pi+\frac{\pi}{2},\quad y=-2k\pi+\frac{\pi}{6},\quad k\in Z \quad (1)$$

ἐνῶ τό σύστημα (Σ_2) ἔχει τίς λύσεις:

$$x=2k\pi+\frac{\pi}{6},\quad y=-2k\pi+\frac{\pi}{2},\quad k\in Z \quad (2)$$

Οἱ (1) καί (2) εἶναι οἱ λύσεις τοῦ ἀρχικοῦ συστήματος.

Παράδειγμα 2. Νά ἐπιλυθεῖ τό σύστημα $\left.\begin{array}{r} x-y=\dfrac{\pi}{3} \\ \sigma\upsilon\nu x\sigma\upsilon\nu y=\dfrac{3}{4} \end{array}\right\}$

Ἐπίλυση: Τό σύστημα ἰσοδύναμα γράφεται:

$$\left.\begin{array}{l} x-y=\dfrac{\pi}{3} \\ 2\sigma\upsilon\nu x\sigma\upsilon\nu y=\dfrac{3}{2}\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x-y=\dfrac{\pi}{3} \\ \sigma\upsilon\nu(x+y)+\sigma\upsilon\nu(x-y)=\dfrac{3}{2}\end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x-y=\dfrac{\pi}{3} \\ \sigma\upsilon\nu(x+y)+\sigma\upsilon\nu\,\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{3}{2}\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x-y=\dfrac{\pi}{3} \\ \sigma\upsilon\nu(x+y)=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}\end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x-y=\dfrac{\pi}{3} \\ \sigma\upsilon\nu(x+y)=1\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x-y=\dfrac{\pi}{3} \\ x+y=2k\pi,\ k\in Z\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x=k\pi+\dfrac{\pi}{6} \\ \qquad\qquad, k\in Z, \\ y=k\pi-\dfrac{\pi}{6}\end{array}\right\}$$

πού εἶναι οἱ λύσεις τοῦ τριγωνομετρικοῦ συστήματος.

Παράδειγμα 3. Νά ἐπιλυθεῖ τό σύστημα $\left.\begin{array}{l} x-y=\dfrac{\pi}{6} \\ \dfrac{\varepsilon\varphi x}{\varepsilon\varphi y}=3\end{array}\right\} \left(\begin{array}{c} x,y\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},\ k\in Z \\ y\neq\rho\pi,\ \rho\in Z\end{array}\right)$

Ἐπίλυση: Τό σύστημα ἰσοδύναμα γράφεται:

$$\left.\begin{array}{l} x-y=\dfrac{\pi}{6} \\ \dfrac{\varepsilon\varphi x+\varepsilon\varphi y}{\varepsilon\varphi x-\varepsilon\varphi y}=\dfrac{3+1}{3-1}\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x-y=\dfrac{\pi}{6} \\ \dfrac{\dfrac{\eta\mu(x+y)}{\sigma\upsilon\nu x\cdot\sigma\upsilon\nu y}}{\dfrac{\eta\mu(x-y)}{\sigma\upsilon\nu x\ \sigma\upsilon\nu y}}=\dfrac{4}{2}\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x-y=\dfrac{\pi}{6} \\ \dfrac{\eta\mu(x+y)}{\eta\mu(x-y)}=2\end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x-y=\dfrac{\pi}{6} \\ \eta\mu(x+y)=2\eta\mu(x-y)\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x-y=\dfrac{\pi}{6} \\ \eta\mu(x+y)=2\eta\mu\dfrac{\pi}{6}\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x-y=\dfrac{\pi}{6} \\ \eta\mu(x+y)=1\end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x-y=\dfrac{\pi}{6} \\ x+y=2k\pi+\dfrac{\pi}{2},\ k\in Z\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x=k\pi+\dfrac{\pi}{3} \\ \qquad\qquad k\in Z \\ y=k\pi+\dfrac{\pi}{6}\end{array}\right\}$$

Παράδειγμα 4. Νά ἐπιλυθεῖ καί νά διερευνηθεῖ τό σύστημα:

$$\left.\begin{array}{ll} x+y=\alpha & \alpha,\beta\in R \\ \dfrac{\eta\mu x}{\eta\mu y}=\beta, & \psi\neq\mu\pi,\ \mu\in Z\end{array}\right\}\ (\Sigma)$$

V 1.2.

Ἐπίλυση:

Στό σύστημα αὐτό ἔχουμε καί τίς παραμέτρους α, β καί θά πρέπει νά ἐξετάσουμε, γιά τίς διάφορες τιμές τους, πότε τό σύστημα ἔχει λύση, πότε εἶναι ἀόριστο καί πότε εἶναι ἀδύνατο.

1. Ἄν $\beta=1$, τό σύστημα ἰσοδύναμα γράφεται:

$$\left.\begin{array}{l} x+y=\alpha \\ \eta\mu x=\eta\mu y \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x+y=\alpha \\ x=2k\pi+y \text{ εἴτε } x=(2\lambda+1)\pi-y,\ (k,\lambda\in Z), \end{array}\right\}$$

ὁπότε ἔχουμε νά ἐπιλύσουμε τά δυό ἁπλά ἀλγεβρικά συστήματα:

$$\left.\begin{array}{l} x+y=\alpha \\ x=2k\pi+y,\ k\in Z \end{array}\right\} (\Sigma_1) \quad \left.\begin{array}{l} x+y=\alpha \\ x=(2\lambda+1)\pi-y,\quad \lambda\in Z \end{array}\right\} (\Sigma_2)$$

2. Ἄν $\beta\neq 1$, τότε τό σύστημα (Σ) γίνεται:

$$\left.\begin{array}{l} x+y=\alpha \\ \dfrac{\eta\mu x+\eta\mu y}{\eta\mu x-\eta\mu y}=\dfrac{\beta+1}{\beta-1} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x+y=\alpha \\ \dfrac{2\eta\mu\frac{x+y}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{x-y}{2}}{2\eta\mu\frac{x-y}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{x+y}{2}}=\dfrac{\beta+1}{\beta-1} \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x+y=\alpha \\ \varepsilon\varphi\dfrac{x+y}{2}\sigma\varphi\dfrac{x-y}{2}=\dfrac{\beta+1}{\beta-1} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x+y=\alpha \\ \varepsilon\varphi\dfrac{\alpha}{2}\sigma\varphi\dfrac{x-y}{2}=\dfrac{\beta+1}{\beta-1} \end{array}\right\} (\Sigma_3), \quad \text{ὁπότε}$$

i) ἄν $\varepsilon\varphi\dfrac{\alpha}{2}\neq 0$, δηλ. $\alpha\neq 2k\pi$, $k\in Z$, τό σύστημα (Σ_3) ἰσοδύναμα γράφεται:

$$\left.\begin{array}{l} x+y=\alpha \\ \sigma\varphi\dfrac{x-y}{2}=\dfrac{\beta+1}{\beta-1}\sigma\varphi\dfrac{\alpha}{2} \end{array}\right\}.$$ Ὑπάρχει πάντοτε τόξο θ μέ $0<\theta<\pi$ καί $\sigma\varphi\theta=\dfrac{\beta+1}{\beta-1}\sigma\varphi\dfrac{\alpha}{2}$

Ἔτσι τό τελευταῖο σύστημα γράφεται: $\left.\begin{array}{l} x+y=\alpha \\ \sigma\varphi\dfrac{x-y}{2}=\sigma\varphi\theta \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x+y=\alpha \\ \dfrac{x-y}{2}=k\pi+\theta, k\in Z \end{array}\right\}$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x+y=\alpha \\ x-y=2k\pi+2\theta,\ k\in Z \end{array}\right\}$$

Τό τελευταῖο σύστημα ἐπιλύεται εὔκολα.

ii) Ἄν $\varepsilon\varphi\dfrac{\alpha}{2}=0$, δηλ. $\alpha=2k\pi$, $k\in Z$, τότε τό σύστημα (Σ_3) εἶναι ἀδύνατο, ὅταν $\beta\neq -1$, καί ἀόριστο ὅταν $\beta=-1$. Στήν τελευταία περίπτωση ὁποιαδήποτε τόξα x,y μέ $x-y=\theta$ καί $\theta\neq 2\rho\pi$, $\rho\in Z$ ἐπαληθεύουν τή δεύτερη ἐξίσωση τοῦ (Σ_3), ὁπότε ἔχουμε νά ἐπιλύσουμε τό σύστημα:

$$\left.\begin{array}{l} x+y=\alpha \\ x-y=\theta \end{array}\right\}$$

Παράδειγμα 5. Νά ἐπιλυθεῖ καί νά διερευνηθεῖ τό σύστημα:

$$\left.\begin{array}{ll} x-y=\alpha & \alpha,\beta\in R \\ \varepsilon\varphi x+\varepsilon\varphi y=\beta, & x,y\neq k\pi+\frac{\pi}{2},\ k\in Z \end{array}\right\}\ (\Sigma)$$

Ἐπίλυση: Τό σύστημα (Σ) γίνεται

$$\left.\begin{array}{l} x-y=\alpha \\ \dfrac{\eta\mu(x+y)}{\sigma\upsilon\nu x\sigma\upsilon\nu y}=\beta \end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l} x-y=\alpha \\ \eta\mu(x+y)=\beta\sigma\upsilon\nu x\sigma\upsilon\nu y \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l} x-y=\alpha \\ 2\eta\mu(x+y)=\beta[\sigma\upsilon\nu(x-y)+\sigma\upsilon\nu(x+y)] \end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l} x-y=\alpha \\ 2\eta\mu(x+y)-\beta\sigma\upsilon\nu(x+y)=\beta\sigma\upsilon\nu\alpha \end{array}\right\}$$

Ἡ δεύτερη ἐξίσωση τοῦ τελευταίου συστήματος εἶναι γραμμική καί ἐπομένως ἐπιλύεται κατά τά γνωστά.

Τό σύστημα (Σ) ἔχει λύση, ὅταν καί μόνο ὅταν ἡ ἐξίσωση αὐτή ἔχει λύση, δηλαδή ὅταν $4+\beta^2\geq\beta^2\sigma\upsilon\nu^2\alpha \Leftrightarrow 4+\beta^2(1-\sigma\upsilon\nu^2\alpha)\geq 0 \Leftrightarrow 4+\beta^2\eta\mu^2\alpha\geq 0$.

Ἡ συνθήκη $4+\beta^2\eta\mu^2\alpha\geq 0$ ἀληθεύει πάντοτε καί ἐπομένως τό σύστημα (Σ) ἔχει πάντοτε λύση.

II. Ὅλες οἱ ἐξισώσεις τοῦ συστήματος εἶναι τριγωνομετρικές

Θά δοῦμε ἐδῶ μέ παραδείγματα συστήματα αὐτῆς τῆς κατηγορίας πού ἀνάγονται ἀμέσως σέ ἀλγεβρικά συστήματα (παραδ. 1) καθώς καί συστήματα συμμετρικά ὡς πρός τά τόξα (παραδ. 2), ὅπως π.χ. εἶναι τά ἀκόλουθα:

$$\left.\begin{array}{l} \eta\mu x+\eta\mu y=\alpha \\ \sigma\upsilon\nu x\,\sigma\upsilon\nu y=\beta \end{array}\right\},\quad \left.\begin{array}{l} \eta\mu x\cdot\eta\mu y=\alpha \\ \sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu y=\beta \end{array}\right\},\quad \left.\begin{array}{l} \varepsilon\varphi x+\varepsilon\varphi y=\alpha \\ \sigma\upsilon\nu x\,\sigma\upsilon\nu y=\beta \end{array}\right\}$$

τά ὁποῖα ἐπίσης ἀνάγονται τελικά σέ ἀλγεβρικά.

Παράδειγμα 1. Νά ἐπιλυθεῖ τό σύστημα:

$$\left.\begin{array}{l} \eta\mu x-\eta\mu y=\dfrac{1}{2} \\ \eta\mu^2x+\eta\mu^2y=\dfrac{5}{4} \end{array}\right\}(\Sigma)$$

Ἐπίλυση: Ἄν θέσουμε ημx=ω, ημy=φ τό σύστημα (Σ) γράφεται:

$$\left.\begin{array}{l} \omega-\varphi=\dfrac{1}{2} \\ \omega^2+\varphi^2=\dfrac{5}{4} \end{array}\right\}$$

τό ὁποῖο εἶναι ἀλγεβρικό.

Ἐπιλύοντας τό σύστημα αὐτό βρίσκουμε τίς λύσεις

V 1.2.

$$\left(\omega=1,\ \varphi=\frac{1}{2}\right),\ \left(\omega=-\frac{1}{2},\ \varphi=-1\right)$$

Ἔτσι ἔχουμε νά ἐπιλύσουμε τά ἀκόλουθα τριγωνομετρικά συστήματα:

$$\left.\begin{array}{l} ημx=1 \\ ημy=\dfrac{1}{2} \end{array}\right\}(\Sigma_1),\quad \left.\begin{array}{l} ημx=-\dfrac{1}{2} \\ ημy=-1 \end{array}\right\}(\Sigma_2)$$

Τό σύστημα (Σ_1) ἔχει τίς λύσεις:

$$\left.\begin{array}{l} x=2k\pi+\dfrac{\pi}{2} \\ y=2\lambda\pi+\dfrac{\pi}{6} \end{array},\ \kappa,\lambda\in Z\right\},\quad \left.\begin{array}{l} x=2k\pi+\dfrac{\pi}{2} \\ y=(2\lambda+1)\pi-\dfrac{\pi}{6} \end{array},\ k,\lambda\in Z\right\}$$

Τό σύστημα (Σ_2) ἔχει τίς λύσεις:

$$\left.\begin{array}{l} x=2k\pi+\dfrac{7\pi}{6} \\ y=2\lambda\pi+\dfrac{3\pi}{2},\ k,\ \lambda\in Z \end{array}\right\},\quad \left.\begin{array}{l} x=(2k+1)\pi-\dfrac{7\pi}{6} \\ y=2\lambda\pi+\dfrac{3\pi}{2},\ k,\ \lambda\in Z \end{array}\right\}$$

Παράδειγμα 2. Νά ἐπιλυθεῖ τό σύστημα $\left.\begin{array}{l} ημx+ημy=1 \\ συνx\,συνy=\dfrac{3}{4} \end{array}\right\}(\Sigma)$

Ἐπίλυση: Τό σύστημα αὐτό εἶναι συμμετρικό ὡς πρός τά τόξα x καί y. Αὐτό γράφεται ἰσοδύναμα:

$$\left.\begin{array}{l} 2ημ\dfrac{x+y}{2}συν\dfrac{x-y}{2}=1 \\ συν(x-y)+συν(x+y)=\dfrac{3}{2} \end{array}\right\}\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} ημ\dfrac{x+y}{2}συν\dfrac{x-y}{2}=\dfrac{1}{2} \\ 2συν^2\dfrac{x-y}{2}-1+1-2ημ^2\dfrac{x+y}{2}=\dfrac{3}{2} \end{array}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} ημ\dfrac{x+y}{2}συν\dfrac{x-y}{2}=\dfrac{1}{2} \\ συν^2\dfrac{x-y}{2}-ημ^2\dfrac{x+y}{2}=\dfrac{3}{4} \end{array}\right\}$$

Ἄν θέσουμε $ημ\dfrac{x+y}{2}=\omega$ καί $συν\dfrac{x-y}{2}=\varphi$, παίρνουμε τό ἀλγεβρικό σύστημα:

$$\left.\begin{array}{l} \omega\varphi=\dfrac{1}{2} \\ \varphi^2-\omega^2=\dfrac{3}{4} \end{array}\right\}$$

Τό τελευταῖο σύστημα ἔχει τίς λύσεις:

$$\left(\omega=\frac{1}{2},\ \varphi=1\right)\ ,\ \left(\omega=-\frac{1}{2},\ \varphi=-1\right).$$

Ἔτσι ἔχουμε νά ἐπιλύσουμε τά ἀκόλουθα τριγωνομετρικά συστήματα:

$$\left.\begin{aligned}&\eta\mu\frac{x+y}{2}=\frac{1}{2}\\&\sigma\upsilon\nu\frac{x-y}{2}=1\end{aligned}\right\}(\Sigma_1)\ ,\quad \left.\begin{aligned}&\eta\mu\frac{x+y}{2}=-\frac{1}{2}\\&\sigma\upsilon\nu\frac{x-y}{2}=-1\end{aligned}\right\}(\Sigma_2)$$

Τό σύστημα (Σ_1) ἰσοδύναμα γίνεται:

$$\left.\begin{aligned}&\eta\mu\frac{x+y}{2}=\eta\mu\frac{\pi}{6}\\&\sigma\upsilon\nu\frac{x-y}{2}=\sigma\upsilon\nu 0\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{aligned}&\frac{x+y}{2}=2k\pi+\frac{\pi}{6}\ \text{εἴτε}\ \frac{x+y}{2}=(2k+1)\pi-\frac{\pi}{6}\\&\frac{x-y}{2}=2\lambda\pi\quad ,\ k.\lambda\in Z\end{aligned}\right\}$$

Ἔχουμε ἔτσι τά δυό ἀλγεβρικά συστήματα

$$\left.\begin{aligned}&x+y=4k\pi+\frac{\pi}{3}\\&x-y=4\lambda\pi\quad ,\ k,\lambda\in Z\end{aligned}\right\}\ ,\ \left.\begin{aligned}&x+y=2(2k+1)\pi-\frac{\pi}{3}\\&x-y=4\lambda\pi\quad ,\ k,\lambda\in Z\end{aligned}\right\}$$

τά ὁποῖα ἐπιλύονται εὔκολα.

Ἀπό τό σύστημα (Σ_2) παίρνουμε δυό ἀκόμα ἀλγεβρικά συστήματα, τά ὁποῖα ἐπιλύονται κατά τά γνωστά.

1.3. Τριγωνομετρικά συστήματα μέ τρεῖς ἐξισώσεις καί τρία ἄγνωστα τόξα.

Γενική μέθοδος γιά τήν ἐπίλυση καί τέτοιων συστημάτων δέν ὑπάρχει. Θά δώσουμε ἐδῶ ἕνα παράδειγμα, πού παρουσιάζει ἐνδιαφέρον γιά τήν ἐπίλυση καί τή διερεύνησή του.

Παράδειγμα. Νά ἐπιλυθεῖ καί διερευνηθεῖ τό σύστημα

$$\left.\begin{aligned}&x+y+z=\pi\\&\frac{\eta\mu x}{\alpha}=\frac{\eta\mu y}{\beta}=\frac{\eta\mu z}{\gamma},\quad \alpha.\beta.\gamma\neq 0\end{aligned}\right\}(\Sigma)$$

Ἐπίλυση: Τό σύστημα (Σ) γράφεται:

$$\Leftrightarrow\left.\begin{aligned}&x+y+z=\pi\\&\frac{\eta\mu x}{\alpha}=\frac{\eta\mu y}{\beta}=\frac{\eta\mu z}{\gamma}=\lambda,\ \alpha\cdot\beta\cdot\gamma\neq 0\end{aligned}\right\}$$

$$\Leftrightarrow\quad \{x+y+z=\pi,\quad \eta\mu x=\lambda\alpha,\quad \eta\mu y=\lambda\beta,\quad \eta\mu z=\lambda\gamma,\quad \alpha\beta\gamma\neq 0\}\quad (\Sigma_1)$$

i) Ἄν $\lambda=0$, τότε τό σύστημα (Σ_1) γίνεται:

V 1.3.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=\pi \\ x=k_1\pi,\ y=k_2\pi,\ z=k_3\pi,\ k_1,k_2,k_3\in Z \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} k_1\pi+k_2\pi+k_3\pi=\pi \\ x=k_1\pi,\ y=k_2\pi,\ z=k_3\pi, k_1,k_2,k_3\in Z \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} k_1+k_2+k_3=1 \\ x=k_1,\pi,\ y=k_2\pi,\ z=k_3\pi,\ k_1,k_2,k_3\in Z \end{array}\right\}.$$

ii) Ἄν $\lambda\neq 0$, τότε ἀπό τήν ἐξίσωση $x+y+z=\pi$ παίρνουμε $x=\pi-(y+z)$, ἡ ὁποία δίνει $\eta\mu x=\eta\mu[\pi-(y+z)]=\eta\mu(x+y)$ καί τό σύστημα (Σ_1) γίνεται

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=\pi \\ \eta\mu(y+z)=\lambda\alpha \\ \eta\mu(x+z)=\lambda\beta \\ \eta\mu(x+y)=\lambda\gamma \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=\pi \\ \eta\mu y\sigma\upsilon\nu z+\eta\mu z\sigma\upsilon\nu y=\lambda\alpha \\ \eta\mu x\sigma\upsilon\nu z+\eta\mu z\sigma\upsilon\nu x=\lambda\beta \\ \eta\mu x\sigma\upsilon\nu y+\eta\mu y\sigma\upsilon\nu x=\lambda\gamma \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=\pi \\ \lambda\beta\sigma\upsilon\nu z+\lambda\gamma\sigma\upsilon\nu y=\lambda\alpha \\ \lambda\alpha\sigma\upsilon\nu z+\lambda\gamma\sigma\upsilon\nu x=\lambda\beta \\ \lambda\alpha\sigma\upsilon\nu y+\lambda\beta\sigma\upsilon\nu x=\lambda\gamma \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=\pi \\ \beta\sigma\upsilon\nu z+\gamma\sigma\upsilon\nu y=\alpha \\ \alpha\sigma\upsilon\nu z+\gamma\sigma\upsilon\nu x=\beta \\ \alpha\sigma\upsilon\nu y+\beta\sigma\upsilon\nu x=\gamma \end{array}\right\} \quad (\Sigma_2)$$

Ἄν πολλαπλασιάσουμε τίς τρεῖς τελευταῖες ἐξισώσεις τοῦ (Σ_2) ἀντίστοιχα μέ $\alpha,\beta,-\gamma$ καί προσθέσουμε τά ἐξαγόμενα κατά μέλη παίρνουμε:

$$\alpha^2+\beta^2-\gamma^2=2\alpha\beta\sigma\upsilon\nu z,\ \text{δηλ.}\ \sigma\upsilon\nu z=\frac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}{2\alpha\beta} \qquad (1)$$

Ὅμοια παίρνουμε:

$$\sigma\upsilon\nu x=\frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma} \qquad (2)$$

$$\sigma\upsilon\nu y=\frac{\alpha^2+\gamma^2-\beta^2}{2\alpha\gamma} \qquad (3)$$

Ἔτσι ἔχουμε τό σύστημα

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=\pi \\ \sigma\upsilon\nu x=\dfrac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma} \\ \sigma\upsilon\nu y=\dfrac{\alpha^2+\gamma^2-\beta^2}{2\alpha\gamma} \\ \sigma\upsilon\nu z=\dfrac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}{2\alpha\beta} \end{array}\right\} \quad (\Sigma_3)$$

Τό σύστημα (Σ_3) ἔχει λύση, ὅταν $\left|\dfrac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}\right|\leq 1$ καί $\left|\dfrac{\alpha^2+\gamma^2-\beta^2}{2\alpha\gamma}\right|\leq 1$

καί $\left|\dfrac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}{2\alpha\beta}\right|\leq 1$

Τότε ὑπάρχουν ἐλάχιστα θετικά τόξα $\theta_1,\theta_2,\theta_3$ γιά τά ὁποῖα εἶναι:

$$\sigma\upsilon\nu\theta_1=\frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma},\quad \sigma\upsilon\nu\theta_2=\frac{\alpha^2+\gamma^2-\beta^2}{2\alpha\gamma}\quad \text{καί}\quad \sigma\upsilon\nu\theta_3=\frac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}{2\alpha\beta},$$ ὁπότε οἱ

τιμές τῶν x,y,z εἶναι:

$$x=2k_1\pi\pm\theta_1,\quad y=2k_2\pi\pm\theta_2,\quad z=2k_3\pi\pm\theta_3.$$

Ἀπό τίς τιμές αὐτές λύσεις τοῦ ἀρχικοῦ συστήματος εἶναι οἱ τριάδες (x,y,z) γιά τίς ὁποῖες ἱκανοποιεῖται ἡ $x+y+z=\pi$.

Γιά νά πετύχουμε τέτοιες λύσεις, ἐκλέγουμε δυό ἀπό τούς ἀκέραιους k_1, k_2,k_3 αὐθαίρετα, ὁπότε ὁρίζουμε τόν τρίτο ἔτσι, ὥστε νά ἱκανοποιεῖται ἡ $x+y+z=\pi$.

1.4. Τριγωνομετρικὴ ἀπαλοιφή.

Ὅταν ἕνα παραμετρικό τριγωνομετρικό σύστημα ἔχει περισσότερες ἐξισώσεις ἀπό τούς ἀγνώστους (ἀπό τά ἄγνωστα τόξα), τότε βρίσκουμε μία (ἤ περισσότερες) σχέση μεταξύ τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων καί τῶν σταθερῶν ὅρων τῶν ἐξισώσεων, γιά νά συναληθεύουν ὅλες οἱ ἐξισώσεις τοῦ συστήματος. Ἡ σχέση αὐτή, ὅπως καί στήν ἄλγεβρα, ὀνομάζεται **ἀπαλείφουσα.**

Δηλαδή ἡ ἀπαλείφουσα εἶναι ἡ **ἀναγκαία** συνθήκη, γιά νά ἔχει τό σύστημα λύση. Ἡ ἐργασία, μέ τήν ὁποία βρίσκουμε τήν ἀπαλείφουσα, ὀνομάζεται **ἀπαλοιφή.**

Δίνουμε ἐδῶ δύο παραδείγματα τριγωνομετρικῆς ἀπαλοιφῆς.

Παράδειγμα 1. Νά βρεθεῖ ἡ ἀπαλείφουσα τοῦ συστήματος:

$$\left.\begin{aligned}\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu 2x&=\alpha\\ \eta\mu x+\eta\mu 2x&=\beta\end{aligned}\right\}\ (\Sigma)$$

Λύση: Ἐδῶ ἔχουμε ἕνα σύστημα δύο τριγωνομετρικῶν ἐξισώσεων μέ ἕνα ἄγνωστο τόξο x. Ἑπομένως θά βροῦμε τήν ἀπαλείφουσα, δηλ. τήν ἀναγκαία συνθήκη, ὥστε νά ἔχουν κοινή λύση οἱ ἐξισώσεις αὐτές.

Ἄν x_0 εἶναι μία λύση τοῦ συστήματος (Σ), τότε ἔχουμε διαδοχικά:

$$\left.\begin{aligned}\sigma\upsilon\nu x_0+\sigma\upsilon\nu 2x_0&=\alpha\\ \eta\mu x_0+\eta\mu 2x_0&=\beta\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}2\sigma\upsilon\nu\frac{3x_0}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{x_0}{2}&=\alpha\\ 2\eta\mu\frac{3x_0}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{x_0}{2}&=\beta\end{aligned}\right\}(\Sigma_1)\Rightarrow\left.\begin{aligned}4\sigma\upsilon\nu^2\frac{3x_0}{2}\sigma\upsilon\nu^2\frac{x_0}{2}&=\alpha^2\\ 4\eta\mu^2\frac{3x_0}{2}\sigma\upsilon\nu^2\frac{x_0}{2}&=\beta^2\end{aligned}\right\}(\Sigma_2)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τίς δυό αὐτές ἐξισώσεις παίρνουμε:

$$4\sigma\upsilon\nu^2\frac{x_0}{2}=\alpha^2+\beta^2 \quad (1).$$

Ἡ πρώτη ἀπό τίς ἐξισώσεις τοῦ (Σ_1) γράφεται

$$2\left(4\sigma\upsilon\nu^3\frac{x_0}{2}-3\sigma\upsilon\nu\frac{x_0}{2}\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{x_0}{2}=\alpha\Rightarrow 8\sigma\upsilon\nu^4\frac{x_0}{2}-6\sigma\upsilon\nu^2\frac{x_0}{2}=\alpha \qquad (2)$$

'Από (1) καί (2) ἔχουμε: $8\cdot\left(\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{4}\right)^2-6\cdot\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{4}=\alpha\Rightarrow$

$$(\alpha^2+\beta^2)^2-3(\alpha^2+\beta^2)=2\alpha, \text{ ἤ } (\alpha^2+\beta^2)(\alpha^2+\beta^2-3)=2\alpha.$$

Ἡ τελευταία σχέση εἶναι ἡ ζητούμενη ἀπαλείφουσα τοῦ (Σ).

Παράδειγμα 2. Νά βρεθεῖ ἡ ἀπαλείφουσα τοῦ συστήματος:

$$\left.\begin{aligned}\sigma\varphi\omega(1+\eta\mu\omega)&=4\alpha\\ \sigma\varphi\omega(1-\eta\mu\omega)&=4\beta\end{aligned}\right\}\ (\Sigma)$$

Ἄν ω_0 εἶναι μιά λύση τοῦ συστήματος (Σ), τότε θά ἔχουμε:

$$\left.\begin{aligned}\sigma\varphi\omega_0(1+\eta\mu\omega_0)&=4\alpha\\ \sigma\varphi\omega_0(1-\eta\mu\omega_0)&=4\beta\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}\sigma\varphi\omega_0+\sigma\upsilon\nu\omega_0&=4\alpha\\ \sigma\varphi\omega_0-\sigma\upsilon\nu\omega_0&=4\beta\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}\sigma\varphi\omega_0&=2\alpha+2\beta\\ \sigma\upsilon\nu\omega_0&=2\alpha-2\beta\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\sigma\upsilon\nu\omega_0}{\eta\mu\omega_0}&=2\alpha+2\beta\\ \sigma\upsilon\nu\omega_0&=2\alpha-2\beta\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}&\eta\mu\omega_0=\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\ ,\quad \alpha^2\neq\beta^2\\ &\sigma\upsilon\nu\omega_0=2\alpha-2\beta\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$\eta\mu^2\omega_0+\sigma\upsilon\nu^2\omega_0=\left(\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\right)^2+(2\alpha-2\beta)^2\Rightarrow\left(\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\right)^2+4(\alpha-\beta)^2=1 \text{ ἤ } \alpha\beta=(\alpha^2-\beta^2)^2.$$

Ἡ σχέση $\alpha\beta=(\alpha^2-\beta^2)^2$ εἶναι ἡ ζητούμενη ἀπαλείφουσα.

1.5. Ἀσκήσεις.

1. Νά ἐπιλυθοῦν τά τριγωνομετρικά συστήματα:

α) $\begin{aligned}x+y&=\frac{\pi}{2}\\ \eta\mu x-\eta\mu y&=\frac{\sqrt{3}+1}{2}\end{aligned}$ β) $\begin{aligned}x+y&=\frac{2\pi}{3}\\ \sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu y&=-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$, γ) $\begin{aligned}x+y&=\frac{2\pi}{3}\\ \eta\mu x\ \eta\mu y&=\frac{3}{4}\end{aligned}$,

δ) $\begin{aligned}x-y&=\frac{2\pi}{3}\\ \sigma\upsilon\nu x\cdot\sigma\upsilon\nu y&=-\frac{1}{2}\end{aligned}$, ε) $\begin{aligned}x+y&=\frac{\pi}{2}\\ \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu y}&=-\sqrt{3}\end{aligned}$, στ') $\begin{aligned}x+y&=\frac{\pi}{4}\\ \varepsilon\varphi x+\varepsilon\varphi y&=1\end{aligned}$, ζ') $\begin{aligned}x+y&=\frac{\pi}{4}\\ \eta\mu^2x+\eta\mu^2y&=\frac{3+\sqrt{3}}{4}\end{aligned}$

2. Βρεῖτε τίς τιμές τῶν τόξων x,y πού ἐπαληθεύουν τό σύστημα: $\begin{aligned}&x-y=\frac{\pi}{6}\\ &4\eta\mu x\ \sigma\upsilon\nu y=3\\ &\pi<x<3\pi,\pi<y<3\pi\end{aligned}$

3. Νά ἐπιλυθοῦν τά συστήματα:

α) $\begin{aligned}2\eta\mu x+3\sigma\upsilon\nu y&=-2\\ 6\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu y&=4\end{aligned}$ β) $\begin{aligned}x+2y&=\frac{\pi}{2}\\ \eta\mu x+\eta\mu 3y&=\frac{3}{2}\end{aligned}$, γ) $\begin{aligned}\eta\mu x+\eta\mu y&=\frac{3}{2}\\ \sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu y&=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$

4. Νά ἐπιλυθεῖ καί διερευνηθεῖ τό σύστημα:

$$\begin{aligned}\varepsilon\varphi x+\sigma\varphi y&=\alpha\\ \sigma\varphi x+\varepsilon\varphi y&=\beta\end{aligned}$$

5. Βρεῖτε τήν ἀπαλείφουσα τῶν συστημάτων:

α) $\begin{matrix} \alpha_1 \, \eta\mu x + \beta_1 \sigma\upsilon\nu x = \gamma_1, \\ \alpha_2 \eta\mu x + \beta_2 \sigma\upsilon\nu x = \gamma_2 \end{matrix}$, μέ $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0$,

β) $\mu^3 \eta\mu x + \nu^3 \sigma\upsilon\nu x = \lambda^3 \eta\mu x \sigma\upsilon\nu x$,
$\mu^3 \sigma\upsilon\nu x - \nu^3 \eta\mu x = \lambda^3 \sigma\upsilon\nu 2\chi$

γ) $x + y = \alpha$
$\varepsilon\varphi x + \varepsilon\varphi y = \varepsilon\varphi\beta$
$\sigma\varphi x + \sigma\varphi y = \sigma\varphi\gamma$

2. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

2.1. Ὁρισμοί. Τριγωνομετρική ἀνίσωση ὡς πρός ἕνα τόξο x ὀνομάζεται κάθε ἀνίσωση, πού περιέχει τριγωνομετρικούς ἀριθμούς τοῦ τόξου x. Ἔτσι π.χ. οἱ ἀνισώσεις:

$$\eta\mu x < -\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2} \cdot \eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu x > 0, \quad \varepsilon\varphi x - 1 > 0, \quad \eta\mu x - 1 < 0,$$

εἶναι τριγωνομετρικές ἀνισώσεις.

Μιά τριγωνομετρική ἀνίσωση μπορεῖ νά ἔχει ὁρισμένες λύσεις ἤ μπορεῖ νά ἐπαληθεύεται γιά κάθε τιμή τοῦ τόξου πού περιέχει (μόνιμη ἀνίσωση) ἤ μπορεῖ νά μήν ὑπάρχουν τόξα x πού νά τήν ἐπαληθεύουν (ἀδύνατη ἀνίσωση).

Κάθε τόξο θ, πού ἐπαληθεύει μιά τριγωνομετρική ἀνίσωση, λέγεται **μερική λύση** τῆς ἀνισώσεως αὐτῆς.

Π.χ. στήν τελευταία ἀπό τίς παραπάνω ἀνισώσεις τό τόξο $\theta = \frac{\pi}{6}$ εἶναι μιά μερική λύση της. Τό σύνολο τῶν μερικῶν λύσεων μιᾶς τριγωνομετρικῆς ἀνισώσεως ὀνομάζεται **γενική λύση** της. Ἡ εὕρεση τῆς γενικῆς λύσεως μιᾶς τριγωνομετρικῆς ἀνισώσεως ὀνομάζεται **ἐπίλυση τῆς ἀνισώσεως.**

Τό σύνολο τῶν μερικῶν λύσεων τῆς ἀνισώσεως στό διάστημα $[0,2\pi)$ ὀνομάζεται **εἰδική λύση** τῆς ἀνισώσεως.

Κατά τήν ἐπίλυση μιᾶς τριγωνομετρικῆς ἀνισώσεως πρέπει νά λαβαίνουμε ὑπόψη μας τούς γνωστούς περιορισμούς τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τῶν τόξων, ὅπως π.χ. $|\eta\mu x| \leq 1$, $|\sigma\upsilon\nu x| \leq 1$.

2.2. Βασικές τριγωνομετρικές ἀνισώσεις.

Γιά νά ἐπιλύσουμε μιά τριγωνομετρική ἀνίσωση, προσπαθοῦμε μέ κατάλληλους μετασχηματισμούς νά τή φέρουμε σέ μιά ἀπό τίς παρακάτω μορφές:

(i) $\eta\mu x > \alpha$ ἤ $\eta\mu x < \alpha$
(ii) $\sigma\upsilon\nu x > \alpha$ ἤ $\sigma\upsilon\nu x < \alpha$
(iii) $\varepsilon\varphi x > \alpha$ ἤ $\varepsilon\varphi x < \alpha$
(iv) $\sigma\varphi x > \alpha$ ἤ $\sigma\varphi x < \alpha$,

ὅπου α γνωστός πραγματικός ἀριθμός.

Τίς τριγωνομετρικές αὐτές ἀνισώσεις τίς ὀνομάζουμε **βασικές ἤ θεμελιώδεις.**

Θά δώσουμε ἐδῶ μερικά παραδείγματα ἐπιλύσεως τριγωνομετρικῶν ἀνισώσεων.

Παράδειγμα 1. Νά ἐπιλυθεῖ ἡ ἀνίσωση ημ$x>\alpha$, $\alpha\in R$.

Γιά νά ἐπιλύσουμε αὐτή τήν ἀνίσωση, διακρίνουμε τίς ἑξῆς περιπτώσεις:

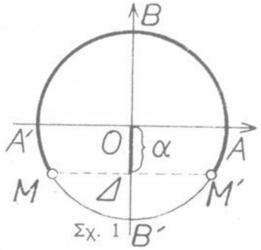
i) Ἄν $\alpha<-1$, ἡ ἀνίσωση ἐπαληθεύεται ἀπό κάθε τόξο x (μόνιμη ἀνίσωση).

ii) Ἄν $\alpha=-1$, ἡ ἀνίσωση ἐπαληθεύεται ἀπό κάθε τόξο x, ἐκτός ἀπό τά τόξα $x=2k\pi-\frac{\pi}{2}$, $k\in\mathbf{Z}$.

iii) Ἄν $\alpha\geq 1$, ἡ ἀνίσωση εἶναι ἀδύνατη.

iv) Τέλος, ἄν εἶναι: $-1<\alpha<1$, τότε ἔχουμε δύο περιπτώσεις.

α) Ἄν $-1<\alpha<0$, λύνουμε πρῶτα τήν ἀνίσωση γραφικά πάνω στόν τριγωνομετρικό κύκλο. Αὐτό γίνεται μέ τόν ἀκόλουθο τρόπο. Παίρνουμε πάνω στόν ἄξονα τῶν ἡμιτόνων ΒΒ' σημεῖο Δ τέτοιο, ὥστε $\overline{O\Delta}=\alpha$. Ἀπό τό Δ φέρνουμε παράλληλη πρός τόν ἄξονα ΑΑ' τῶν συνημιτόνων καί παίρνουμε τά σημεῖα τομῆς της Μ,Μ' μέ τόν τριγωνομετρικό κύκλο. Εἶναι φανερό ὅτι κάθε τόξο τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου πού ἔχει πέρας ἕνα σημεῖο τῶν τόξων $\overset{\frown}{ABM}$ ἤ $\overset{\frown}{M'A}$ (ἐκτός τῶν Μ καί Μ') ἱκανοποιεῖ τήν ἀνίσωση (σχ. 1). Ἄν τώρα τά μέτρα τῶν τόξων τοῦ $[0,2\pi)$, πού ἐπαληθεύουν τήν ἐξίσωση ημ$x=\alpha$, εἶναι θ_1 καί θ_2, $(\theta_1<\theta_2)$, δηλ. $(\overset{\frown}{ABM})=\theta_1$ καί $(\overset{\frown}{ABM'})=\theta_2$, τότε, ἡ εἰδική λύση τῆς ἀνισώσεως ημ$x>\alpha$, $-1<\alpha<0$, εἶναι ὅλα τά τόξα x μέ:



Σχ. 1

$$\mathbf{0\leq x<\theta_1} \quad \text{εἴτε} \quad \mathbf{\theta_2<x<2\pi}$$

Ἡ γενική λύση τῆς ἀνισώσεως αὐτῆς εἶναι τώρα ὅλα τά τόξα x μέ:

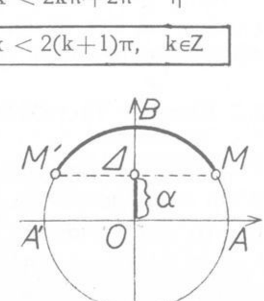
$$2k\pi\leq x<2k\pi+\theta_1 \quad \text{εἴτε} \quad 2k\pi+\theta_2<x<2k\pi+2\pi \quad \text{ἤ}$$

$$\boxed{2k\pi\leq x<2k\pi+\theta_1 \quad \text{εἴτε} \quad 2k\pi+\theta_2<x<2(k+1)\pi,\quad k\in Z}$$

β) Ἄν $0\leq\alpha<1$, τότε σκεφτόμενοι ὅπως παραπάνω καί χρησιμοποιώντας τό σχ. 2 βλέπουμε ὅτι τήν ημ$x>\alpha$ τήν ἐπαληθεύουν ὅλα τά τόξα πού τά πέρατά τους εἶναι ἐσωτερικά σημεῖα τοῦ τόξου $\overset{\frown}{MBM'}$ μέ $(\overset{\frown}{AM})=\theta$ καί $(\overset{\frown}{ABM'})=\pi-\theta$. Ἔτσι ἡ εἰδική λύση τῆς ἀνισώσεως εἶναι ὅλα τά τόξα x μέ $\theta<x<\pi-\theta$ καί ἡ γενική λύση της εἶναι:

$$2k\pi+\theta<x<2k\pi+(\pi-\theta) \quad \text{ἤ}$$

$$\boxed{2k\pi+\theta<x<(2k+1)\pi-\theta,\quad k\in\mathbf{Z}}$$

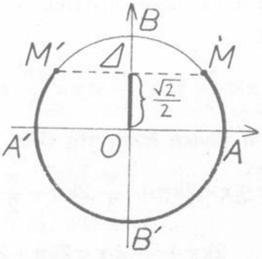


Σχ. 2

Παρόμοια ἐπιλύουμε ὅλες τίς βασικές τριγωνομετρικές ἀνισώσεις. Γιά ἐμπέδωση ἄς δοῦμε μερικά συγκεκριμένα παραδείγματα.

Παράδειγμα 2. Νά ἐπιλυθεῖ ἡ ἀνίσωση: $\eta\mu x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$

Ἐπίλυση: Τά τόξα x μέ $0 \leq x < 2\pi$ πού ἔχουν $\eta\mu x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ εἶναι $x_1 = \frac{\pi}{4}$ καί $x_2 = \frac{3\pi}{4}$ δηλ. τά πέρατά τους εἶναι τά σημεῖα Μ καί Μ΄. Εἶναι φανερό τώρα ὅτι ὅλα τά τόξα πού τά πέρατά τους εἶναι σημεῖα τῶν τόξων $\overset{\frown}{AM}$ καί $\overset{\frown}{M'B'A}$ ἐπαληθεύουν τή δοθεῖσα ἀνίσωση (σχ. 3).



Σχ. 3

Ἔτσι ἔχουμε τήν εἰδική λύση:

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \quad \text{εἴτε} \quad \frac{3\pi}{4} \leq x < 2\pi,$$

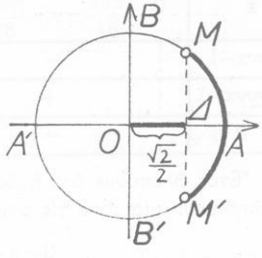
ἀπό τήν ὁποία εὔκολα παίρνουμε τή γενική λύση

$$2k\pi \leq x \leq 2k\pi + \frac{\pi}{4} \quad \text{εἴτε} \quad 2k\pi + \frac{3\pi}{4} \leq x < 2k\pi + 2\pi, \quad k \in Z$$

Παράδειγμα 3. Νά ἐπιλυθεῖ ἡ ἀνίσωση $\sigma\upsilon\nu x > \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ἐπίλυση: Τά τόξα x μέ $0 \leq x < 2\pi$ πού ἐπαληθεύουν τήν ἐξίσωση $\sigma\upsilon\nu x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ εἶναι $x_1 = \frac{\pi}{4}$ καί $x_2 = \frac{7\pi}{4}$, δηλαδή τά πέρατά τους εἶναι τά σημεῖα Μ καί Μ΄ τοῦ τριγ. κύκλου.

Βλέπουμε τώρα ὅτι ὅλα τά τόξα x, πού ἐπαληθεύουν τή δοθεῖσα ἀνίσωση, πρέπει νά λήγουν σέ σημεῖα τῶν τόξων $\overset{\frown}{AM}$ καί $\overset{\frown}{M'A}$, ἐκτός ἀπό τά Μ,Μ΄. Ἔτσι ἡ εἰδική λύση τῆς ἀνισώσεως εἶναι τά τόξα x μέ



Σχ. 4

$$0 \leq x < \frac{\pi}{4} \quad \text{εἴτε} \quad \frac{7\pi}{4} < x < 2\pi,$$

καί ἡ γενική λύση της εἶναι τά τόξα x μέ

$$2k\pi \leq x < 2k\pi + \frac{\pi}{4} \quad \text{εἴτε} \quad 2k\pi + \frac{7\pi}{4} < x < 2k\pi + 2\pi, \quad k \in Z.$$

Παράδειγμα 4. Νά ἐπιλυθεῖ ἡ ἀνίσωση: $\varepsilon\varphi x < \sqrt{3}$

Ἐπίλυση: Τά τόξα x, πού ἐπαληθεύουν τήν $\varepsilon\varphi x = \sqrt{3}$ μέ $0 \leq x < 2\pi$, εἶναι, τά $x_1 = \frac{\pi}{3}$ καί $x_2 = \frac{4\pi}{3}$.

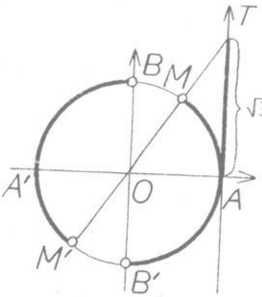
Εἶναι φανερό ὅτι τά τόξα x, πού ἐπαληθεύουν τή δοθείσα ἀνίσωση λήγουν σέ σημεῖα τῶν τόξων $\overset{\frown}{AM}$, $\overset{\frown}{BA'M'}$ καί $\overset{\frown}{B'A}$, ἐκτός ἀπό τά M,B,M',B'. Ἔτσι ἡ εἰδική λύση εἶναι τά τόξα x μέ

$$0 \leq x < \frac{\pi}{3} \text{ εἴτε } \frac{\pi}{2} < x < \frac{4\pi}{3} \text{ εἴτε } \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$$

καί ἡ γενική λύση της εἶναι τά τόξα x μέ

$$2k\pi \leq x < 2k\pi + \frac{\pi}{3}, 2k\pi + \frac{\pi}{2} < x < 2k\pi + \frac{4\pi}{3},$$

$$2k\pi + \frac{3\pi}{2} < x < 2k\pi + 2\pi, \quad k \in Z.$$



Σχ. 5

2.3. Γενικές τριγωνομετρικές ἀνισώσεις

Παράδειγμα 1. Νά ἐπιλυθεῖ ἡ ἀνίσωση: $2\sigma\upsilon\nu^2 x - 3\sigma\upsilon\nu x + 1 < 0$

Ἐπίλυση: Ἡ δοθείσα ἀνίσωση γράφεται: $(\sigma\upsilon\nu x - 1)\cdot(2\sigma\upsilon\nu x - 1) < 0$.

Παίρνοντας τόν τριγωνομετρικό κύκλο καί μελετώντας τά πρόσημα τῶν παραγόντων $\sigma\upsilon\nu x - 1$ καί $2\sigma\upsilon\nu x - 1$ στό διάστημα $[0,2\pi)$, σχηματίζουμε τόν ἀκόλουθο πίνακα γιά τό γινόμενο $P = (\sigma\upsilon\nu x - 1)(2\sigma\upsilon\nu x - 1)$.

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{3}$		2π
$\sigma\upsilon\nu x - 1$		−		−		−	
$2\sigma\upsilon\nu x - 1$		+		−		+	
P		−		+		−	

Ἔτσι βλέπουμε ὅτι ἡ δοθείσα ἀνίσωση ἔχει εἰδική λύση τά τόξα x πού ἐπαληθεύουν μία ἀπό τίς ἀνισώσεις

$$0 < x < \frac{\pi}{3} \text{ εἴτε } \frac{5\pi}{3} < x < 2\pi.$$

Ἄρα ἡ γενική λύση της εἶναι τά τόξα x μέ $2k\pi < x < 2k\pi + \frac{\pi}{3}$ εἴτε

$$2k\pi + \frac{5\pi}{3} < x < (2k+1)\pi, \quad k \in Z.$$

Παράδειγμα 2. Νά ἐπιλυθεῖ ἡ ἀνίσωση: $\sigma\upsilon\nu 3x < \frac{\sqrt{3}}{2}$ μέ $0 \le x < 2\pi$

Ἐπίλυση: Θέτουμε $3x=y$, ὁπότε ἔχουμε νά ἐπιλύσουμε τήν ἀνίσωση

$$\sigma\upsilon\nu y < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ἡ τελευταία ἀνίσωση ἔχει τήν εἰδική λύση $\frac{\pi}{6} < y < \frac{11\pi}{6}$, ὁπότε ἡ γενική λύση της εἶναι:

$$2k\pi + \frac{\pi}{6} < y < 2k\pi + \frac{11\pi}{6}, \quad k \in Z.$$

Ἔτσι ἡ γενική λύση τῆς ἀρχικῆς δίνεται ἀπό τήν

$$2k\pi + \frac{\pi}{6} < 3x < 2k\pi + \frac{11\pi}{6}, \quad k \in Z$$

καί εἶναι
$$\frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{18} < x < \frac{2k\pi}{3} + \frac{11\pi}{18}, \quad k \in Z \qquad (1)$$

Ἐπειδή ὅμως $k=3\lambda+\upsilon$, $\lambda \in Z$ καί $\upsilon \in \{0,1,2\}$ ἡ (1) γράφεται:

$$2\lambda\pi + \frac{2\upsilon\pi}{3} + \frac{\pi}{18} < x < 2\lambda\pi + \frac{2\upsilon\pi}{3} + \frac{11\pi}{18} \quad (2)$$

Ἀπό τή (2) γιά $\upsilon=0$ παίρνουμε: $2\lambda\pi + \frac{\pi}{18} < x < 2\lambda\pi + \frac{11\pi}{18}$ (3)

γιά $\upsilon=1$ παίρνουμε: $2\lambda\pi + \frac{13\pi}{18} < x < 2\lambda\pi + \frac{23\pi}{18}$ (4)

καί γιά $\upsilon=2$ παίρνουμε: $2\lambda\pi + \frac{25\pi}{18} < x < 2\lambda\pi + \frac{35\pi}{18}$ (5)

Ἀπό τίς (3), (4) καί (5) βλέπουμε ὅτι οἱ ζητούμενες λύσεις στό $[0,2\pi)$ εἶναι τά τόξα x μέ:

$$\frac{\pi}{18} < x < \frac{11\pi}{18}, \quad \frac{13\pi}{18} < x < \frac{23\pi}{18}, \quad \frac{25\pi}{18} < x < \frac{35\pi}{18}.$$

2.4. Ἀσκήσεις.

1. Νά ἐπιλυθοῦν οἱ ἀνισώσεις

$$\alpha)\ \eta\mu x < -\frac{1}{2}, \quad \beta)\ \sigma\upsilon\nu x < \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \gamma)\ \sigma\varphi x > \frac{\sqrt{3}}{3} \ \text{ καί } \ \delta)\ \varepsilon\varphi x > \frac{\sqrt{3}}{3}$$

2. Νά ἐπιλυθεῖ ἡ ἀνίσωση

$$2\eta\mu^2 x - 3\eta\mu x + 1 > 0$$

3. Νά ἐπιλυθεῖ ἡ ἀνίσωση

$$(\sqrt{3} - 2\eta\mu x)\ (2\sigma\upsilon\nu x - 1) \cdot (2\varepsilon\varphi x - 2) \cdot (\eta\mu^2 x + \eta\mu x + 1) > 0$$

4. Νά ἐπιλυθοῦν οἱ ἀνισώσεις

$$\alpha)\ \varepsilon\varphi 3x > \sqrt{3}, \quad \beta)\ \eta\mu 5x > \frac{\sqrt{3}}{2}$$

5. Νά ἐπιλυθεῖ ἡ ἀνίσωση $\dfrac{(3\eta\mu x - 1)\ (6\eta\mu^2 x - 5\eta\mu x + 1)}{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x} > 0$

3. ΣΥΝΤΟΜΗ ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

1. Τά τριγωνομετρικά συστήματα τά διακρίνουμε κυρίως σέ δύο κατηγορίες:
   α) Σέ τριγωνομετρικά συστήματα, στά ὁποῖα ἡ μία τουλάχιστον ἐξίσωση εἶναι ἀλγεβρική ὡς πρός τά ἄγνωστα τόξα.
   β) Σέ τριγωνομετρικά συστήματα, στά ὁποῖα ὅλες οἱ ἐξισώσεις εἶναι τριγωνομετρικές.
2. Δέν ὑπάρχουν γενικές μέθοδοι ἐπιλύσεως τριγωνομετρικῶν συστημάτων.
3. Στά παραμετρικά τριγωνομετρικά συστήματα μέ μ ἐξισώσεις καί ν ἀγνώστους, $\mu > \nu$, κάνουμε **τριγωνομετρική ἀπαλοιφή**. Βρίσκουμε δηλαδή τήν ἀναγκαία συνθήκη (ἀπαλείφουσα τοῦ συστήματος), γιά νά ἔχει τό σύστημα λύση.
4. Σέ μιά τριγωνομετρική ἀνίσωση διακρίνουμε
   α) **μερική λύση**, πού εἶναι ἕνα τόξο πού τήν ἐπαληθεύει,
   β) **εἰδική λύση**, πού εἶναι τό σύνολο τῶν μερικῶν λύσεων στό $[0,2\pi)$
   γ) **γενική λύση**, πού εἶναι ὅλα τά τόξα πού τήν ἐπαληθεύουν.
5. Ἡ ἐπίλυση κάθε τριγωνομετρικῆς ἀνισώσεως ἀνάγεται τελικά στήν ἐπίλυση μιᾶς ἤ περισσότερων ἀπό τίς θεμελιώδεις τριγωνομετρικές ἀνισώσεις.

4. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

1. Νά ἐπιλυθοῦν καί διερευνηθοῦν τά συστήματα

α) $\begin{cases} \varepsilon\varphi x + \varepsilon\varphi y = \alpha \\ \eta\mu x \cdot \eta\mu y = \beta \end{cases}$ β) $\begin{cases} \eta\mu x + \eta\mu y = 2\lambda\eta\mu\alpha \\ \sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu y = 2\lambda\sigma\upsilon\nu\alpha \end{cases}$

2. Νά ἐπιλυθοῦν τά συστήματα:

α) $\begin{cases} \eta\mu^2 x + \eta\mu^2 y = 1 + \eta\mu z \\ \eta\mu^2 y + \eta\mu^2 z = 1 + \eta\mu x \\ \eta\mu^2 z + \eta\mu^2 x = 1 + \eta\mu y \end{cases}$ β) $\begin{cases} \varepsilon\varphi x + \varepsilon\varphi y = 1 \\ \sigma\upsilon\nu x \cdot \sigma\upsilon\nu y = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ γ) $\begin{cases} x + y + \omega = \pi \\ \dfrac{\varepsilon\varphi x}{1} = \dfrac{\varepsilon\varphi y}{2} = \dfrac{\varepsilon\varphi\omega}{3} \end{cases}$

3. Βρεῖτε τήν ἀπαλείφουσα στά παρακάτω συστήματα:

α) $\begin{cases} \alpha\sigma\upsilon\nu x + \beta\eta\mu x = \sqrt{\alpha^2+\beta^2} \\ \dfrac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{\mu} + \dfrac{\eta\mu^2 x}{\nu} = \dfrac{1}{\alpha^2+\beta^2} \end{cases}$ β) $\begin{cases} \lambda\sigma\upsilon\nu 2x = \sigma\upsilon\nu(x+\theta) \\ \lambda\eta\mu 2x = 2\eta\mu(x+\theta) \end{cases}$

γ) $\begin{cases} \sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu 2x = \dfrac{\alpha}{\beta} \\ \eta\mu x + \eta\mu 2x = \dfrac{\gamma}{\delta} \end{cases}, \quad \beta \cdot \delta \neq 0$ δ) $\begin{cases} \dfrac{\alpha}{\eta\mu x} + \dfrac{\beta}{\sigma\upsilon\nu x} = 1 \\ \alpha\sigma\upsilon\nu x - \beta\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu 2x \end{cases}, \quad \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x \neq 0$

4. Νά ἐπιλυθοῦν οἱ ἀνισώσεις

α) $\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x + \sqrt{2}(1-\sqrt{2})\eta\mu 2x > 1$, β) $2\sigma\upsilon\nu\dfrac{x}{3} - \eta\mu\dfrac{x}{2} - 2 > 0$.

γ) $(2\sigma\upsilon\nu x - 1) \cdot (x-2) > 0, \quad 0 < x < 2\pi$.

5. Νά ἐπιλυθεῖ ἡ ἀνίσωση

$$\log_5(\eta\mu x) > \log_{125}(3\eta\mu x - 2)$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Ὑποδείξεις γιά τή λύση τῶν ἀσκήσεων-Ἀπαντήσεις

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι

(Ὑπ.=Ὑπόδειξη Ἀπ.=Ἀπάντηση)

1.4. **1.** Ὑπ. $i^0=1$, $i^1=i$, $i^2=-1$ κ.τ.λ. **2.** Ὑπ. Ἀρκεῖ $3\alpha+14\beta=7$ καί $2\alpha-\beta=-1$. Ἀπ. $\alpha=-\frac{7}{31}$ $\beta=+\frac{17}{31}$. **3.** Ὑπ. Πρέπει $\alpha+\beta=5\gamma$ καί $-\gamma=\alpha-\beta$. **4.** Ὑπ. Ἀρκεῖ νά δειχθεῖ ὅτι $2(\alpha+\beta)=$ $=5\alpha$ καί $(\beta-\alpha)\gamma=1$. **5.** Ἀπ. α) $-2i$, β) $\frac{9}{5}+\frac{8}{5}i$, γ) $\frac{4213}{5103}+\frac{2187\sqrt{3}+70\sqrt{2}}{5103}i$ καί δ) $\frac{586}{1300}-\frac{252}{1300}i$ **6.** Ὑπ. $\left(3\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4=\frac{81}{4}$ καί $(1+i)^4=(-1+i)^4=\ldots=-4$. **7.** Ὑπ. Νά πάρετε $z_1=\alpha_1+\beta_1 i$, $z_2=\alpha_2+\beta_2 i$ καί $z_3=\alpha_3+\beta_3 i$.

1.7. **1.** Ὑπ. Πρέπει $z_1=\bar{z}_2$. Ἀπ. $x=2$, $y=1$. **2.** Ἀπ. α) $z=0+yi$, $y\in\mathbf{R}$, β) $z=0$ καί γ) $z\in\left\{0,\ -1,\ \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$. **3.** Ὑπ. Ἄν $z_1=x_1+y_1 i$ καί $z_2=x_2+y_2 i$, τότε δεῖξτε ὅτι $x_1=y_1=0 \vee x_2=y_2=0$. **4.** Ὑπ. Θέστε $\frac{z_1}{z_2}=z_3\in\mathbf{C}$, δηλ. $z_1=z_2z_3$ κτλ. **5.** Ὑπ. Ἄν $z=x+yi$, τότε ἡ δοθεῖσα δίνει $xy=0$. **6.** Ἀπ. $x=\frac{1}{4}$ καί $y=-1$. **7.** Ἀπ. $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$. **8.** Ἀπ. $\pm[\sqrt{\sqrt{2}+1}+\sqrt{\sqrt{2}-1}.i]$. **9.** Ἀπ. $x=1$, $y=2$. **10.** Ὑπ. Ἡ δοθεῖσα γίνεται: $[2+4+6+\ldots+2(\nu-1)]+[1+3+5+\ldots+(2\nu-1)]i$. **11.** Ἀπ. $z_1=2-i$ καί $z_2=1+2i$.

1.9. **1.** Ὑπ. Χρησιμοποιῆστε ἕνα ἀπό τούς ὑποδειχθέντες τρόπους ἤ τή μαθηματική ἐπαγωγή. **2.** Ὑπ. Νά θέσετε στήν ἰδιότητα (γ) ὅπου z_2 τό $-z_2$. **3.** Ἀπ. α) $\sqrt{\frac{41}{5}}$ β) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$, γ) $\frac{3^4.2^{10}}{19^2}$. **4.** Ἀπ. 1. **5.** Ἀπ. $z=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}i$. **6.** Ἀπ. $4x+2y+3=0$. **7.** Ὑπ. Νά πάρετε $z=x+yi$ καί νά ἐκτελέσετε πράξεις. Ἀπ. $z_1=0+0i$, $z_2=0+i$, $z_3=0-i$. **8.** Ὑπ. Νά θέσετε $z=x+yi$, $x\in\mathbf{R}$, $y\in\mathbf{R}$ καί νά ἐπιλύσετε σύστημα ὡς πρός x καί y. Ἀπ. $z_{1,2}=\alpha+(-1\pm$ $\pm\sqrt{1-\alpha^2-2\alpha})i$ μέ $0\leq\alpha\leq-1+\sqrt{2}$. **9.** Ὑπ. Νά λάβετε ὑπόψη ὅτι $|z_1+z_2|^2\leq(|z_1|+$ $+|z_2|)^2$ καί $|z_4|^2\leq1-|z_3|^2$ κ.τ.λ. **10.** Ὑπ. Ἡ $|z_1+z_2|=|z_1|=|z_2|$ γίνεται $\left|1+\frac{z_2}{z_1}\right|=1=$ $=\left|\frac{z_2}{z_1}\right|$. Θέστε $\frac{z_2}{z_1}=x+yi$ καί ὑπολογίστε τά x,y.

2.3. **1.** Ὑπ. Ἀπεικονίστε τά ζεύγη (2,3), (2,−3) κ.τ.λ. **2.** Ὑπ. Βρεῖτε τίς εἰκόνες τῶν $(z_1+z_2)+$ $+z_3$ καί $(z_1+z_2)-z_3$. **3.** Ὑπ. Ἐργαστεῖτε ὅπως στήν ἐφαρμογή τῆς παραγράφου 2.2.

3.3. **1.** Ὑπ. $|z-z_0|^2=\alpha^2 \Leftrightarrow (z-z_0).(\overline{z-z_0})=\alpha^2$ κ.τ.λ. **2.** Ἀπ. Εἶναι τά σημεῖα τοῦ κύκλου κέντρου (2,−3) καί ἀκτίνας 5. **3.** Ὑπ. Ἐργαστεῖτε ὅπως στήν ἐφαρμογή 3. **4.** Ὑπ. Βρεῖτε z, τέτοια ὥστε $|z-2|=|z|$ καί ἔπειτα τά z μέ $|z-2|<|z|$. **5.** Ὑπ. Βρεῖτε τά z μέ $|z-1|=|z+1|$ καί ἔπειτα τά z μέ $|z-1|<|z+1|$. **6.** Ὑπ. $|z-8|^2=4|z-2|^2 \Leftrightarrow (\overline{z-8})(z-8)=4(z-2).(\overline{z-2})$ κ.τ.λ.

7. Ὑπ. Παρατηρῆστε ὅτι οἱ διανυσματικές ἀκτίνες τῶν z, γιά τά ὁποῖα $|z|=3$, πολλαπλασιάζονται ἐπί -2 κ.τ.λ. 8. Ὑπ. Βρεῖτε τά z: $|z+i|=3$ καί $|z+i|=4$ κ.τ.λ. 9. Ὑπ. Ἐργαστεῖτε ὅπως στήν ἐφαρμογή 4. 10. Ὑπ. Ἐπιλύστε τό σύστημα $9\cdot|z-12|^2=25\cdot|z-8i|^2$, $|z-4|^2=|z-8|^2$ κ.τ.λ. Ἀπ. $z_1=6+17i$, $z_2=6+8i$.

4.3. 1. Ἀπ. $(3,0)$, $\left(3\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$, $\left(3, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(3\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$, $(3,\pi)$, $\left(3\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4}\right)$, $\left(3, \frac{3\pi}{2}\right)$, $\left(3\sqrt{2}, \frac{7\pi}{4}\right)$. 2. Ἀπ. $\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i$, $-2+0i$, $-\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}i$, $0-i$. 3. Ἀπ. Ἄν $z_1=\alpha+\beta i$, τότε $\alpha=\rho$ συνθ καί $\beta=\rho$ημθ, ὁπότε $z_1=\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i$. Ὅμοια βρίσκουμε $z_2=1+\sqrt{3}i$. Ὑπολογίστε τά $z_1 . z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$ καί ἔπειτα βρεῖτε τά μέτρα καί τά ὁρίσματά τους. Ἀπ. $\left(6, \frac{2\pi}{3}\right)$, $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$.

5.3. 1. Ἀπ. $\text{συν}\,\frac{5\pi}{3}+i\text{ημ}\frac{5\pi}{3}$, $4\left(\text{συν}\,\frac{\pi}{3}+i\text{ημ}\,\frac{\pi}{3}\right)$, $2\left(\text{συν}\frac{5\pi}{6}+i\text{ημ}\,\frac{5\pi}{6}\right)$.

2. Ὑπ. Παρατηρῆστε ὅτι $(\text{συν}\theta+i\text{ημ}\theta)^{-\kappa}=\frac{1}{(\text{συν}\theta+i\text{ημ}\theta)^{\kappa}}=(\text{συν}\theta-i\text{ημ}\theta)^{\kappa}=\text{συν}(-\kappa\theta)+i\text{ημ}(-\kappa\theta)$. 3. Ὑπ. $\sqrt{3}+i=2\left(\text{συν}\frac{\pi}{6}+i\text{ημ}\,\frac{\pi}{6}\right)$, $1+i=\sqrt{2}\left[\text{συν}\frac{\pi}{4}+i\text{ημ}\,\frac{\pi}{4}\right]$, $1-i=\sqrt{2}\left[\text{συν}\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\text{ημ}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$κτλ.

4. Ὑπ. Χρησιμοποιῆστε τό Θ. De Moivre $\text{συν}(\nu\theta)+i\text{ημ}(\nu\theta)=(\text{συν}\theta+i\text{ημ}\theta)^{\nu}$ γιά $\nu=5$.

5. Ὑπ. Σχηματίστε τό $\frac{1}{z}$ καί ἔπειτα τά $z+\frac{1}{z}$, $z-\frac{1}{z}$.

6.3. 1. $(\alpha)z^3=8 \Leftrightarrow z^3=8\ (\text{συν}0+i\text{ημ}0) \Rightarrow z_\kappa=\sqrt[3]{2}\left(\text{συν}\frac{2\kappa\pi}{3}+i\text{ημ}\frac{2\kappa\pi}{3}\right)$, $\kappa=0,1,2$.

Παρόμοια ἐπιλύονται καί οἱ ὑπόλοιπες. 2. Ὑπ. $\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{2\nu}=-1$, δηλ. $\frac{1+z}{1-z}=\text{συν}\frac{2\kappa\pi+\pi}{2\nu}+i\text{ημ}\,\frac{2\kappa\pi+\pi}{2\nu}$, $\kappa=0,1,2,\ldots,2\nu-1$ 3. Ὑπ. $z^5=-\sqrt{3}+i=2\left(\text{συν}\frac{5\pi}{6}+i\text{ημ}\,\frac{5\pi}{6}\right)$ κ.τ.λ. 4. (β) Παρατηρῆστε ὅτι $z^3_1-1=0 \Leftrightarrow (z_1-1)\ (z^2_1+z_1+1)=0$ κ.τ.λ., (δ) $z^2_1+z_1+1=0 \Leftrightarrow 1+z_1=-z^2_1$ κ.τ.λ. 5. Ὑπ. $\kappa=\text{εφ}\frac{\theta}{2}$, $\frac{\theta}{2}\in\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. 6. Ὑπ. (α) Ἐκτελέστε πράξεις καί λάβετε ὑπόψη σας ὅτι $\omega^2+\omega+1=0$, $\omega^3=1$ κ.τ.λ. (β) Ἐργαστεῖτε παρόμοια. (γ) Χρησιμοποιῆστε τή (β). 7. Ὑπ. Ἐκτελέστε πράξεις καί λάβετε ὑπόψη σας ὅτι $1+\omega+\omega^2=0$. 8. Ὑπ. Τά z εἶναι οἱ μιγαδικές κυβικές ρίζες τῆς μονάδας, δηλ. $z^3=1$, $1+z+z^2=0$ κ.τ.λ. 9. Ὑπ. Ἄν $\kappa=2\nu$, $\nu\in\mathbf{N}$, τότε δεῖξτε ὅτι $2^{2\nu}=$πολ. $3+1$, $\nu\in\mathbf{N}$, ὅτι $1-\theta^{2^{2\nu-2}}+\theta^{2^{2\nu-1}}=-2\theta$ καί $1-\theta^{2^{2\nu-1}}+\theta^{2^{2\nu}}=-2\theta^2$ κ.τ.λ. 10. Ὑπ. Τά z εἶναι οἱ μιγαδικές κυβικές ρίζες τῆς μονάδας καί $\nu=3\lambda+\upsilon$, $\upsilon=0,1,2$.

8. 1. Ὑπ. Νά θέσετε $z=x+yi$ καί νά φέρετε τόν $\frac{z-1}{z+1}$ στή μορφή $\alpha+\beta i$. 2. Ὑπ. Νά θέσετε $z=x+yi$ καί νά ἐπιλύσετε σύστημα ὡς πρός x καί y. Ἀπ. Γιά $\alpha=1$ εἶναι $z=-1-i$.

Γιά $\alpha=\sqrt{2}$ είναι $z=-2-i$. Γιά $1<\alpha<\sqrt{2}$ είναι $z=\frac{-\alpha^2-\alpha\sqrt{2-\alpha^2}}{\alpha^2-1}-i \vee z=\frac{-\alpha^2+\alpha\sqrt{2-\alpha^2}}{\alpha^2-1}-i$. Γιά $\alpha>\sqrt{2}$ δέν έχει λύσεις. **3**. Ύπ. Έργασθεῖτε ὅπως στήν προηγούμενη ἄσκηση. **4**. Ύπ. $z^3=-\omega^5$ καί $z^2=\frac{1}{\bar{\omega}^4}$. Παίρνουμε $\omega^{10}\cdot\bar{\omega}^{12}=1$, ἀπό ὅπου $|\omega|=1$ καί $\bar{\omega}^2=1$ κ.τ.λ. **5**. Ύπ. Χρησιμοποιῆστε τίς ἰδιότητες τοῦ μέτρου. **6**. Ύπ. Χρησιμοποιῆστε τίς ἰδιότητες τοῦ μέτρου. **7**. Ύπ. Εἶναι $|z-z_1|^2=\lambda^2|z-z_2|^2 \Leftrightarrow (z-z_1)(\bar{z}-\bar{z}_1)=$ $=\lambda^2(\bar{z}-\bar{z}_2).(z-z_2)$. Στή συνέχεια συμβουλευθεῖτε τά παραδείγματα καί τήν ἄσκηση 1 τῆς 3.3. **8**. Ύπ. Έργασθεῖτε ὅπως στήν ἄσκηση 6 τῆς 3.3. **9**. Άπ. $(0,0)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$. **10**. Ύπ. Θέστε $z=x+yi$ καί ἐκτελέστε πράξεις. **11**. Ύπ. Άν $z^2+z+1=0$, τότε $(\alpha^2+\alpha-\beta^2+1)+\beta(1+2\alpha)i=0$ κ.τ.λ. **12**. Ύπ. Εἶναι $z=2\,\sigma\upsilon\nu\frac{\theta+\alpha}{2}\left[\sigma\upsilon\nu\frac{\theta-\alpha}{2}+i\eta\mu\frac{\theta-\alpha}{2}\right]$ καί $|z|=\left|2\sigma\upsilon\nu\frac{\theta+\alpha}{2}\right|$. **13**. Ύπ. Έργασθεῖτε ὅπως στήν ἄσκηση 6 τῆς 3.3. **14**. Άπ. $x^2+y^2=\frac{(\alpha^2+\beta^2)(\alpha^2+\gamma^2)}{4\alpha^2+(\beta+\gamma)^2}$, $(x-\alpha)^2+y^2=\frac{(\alpha^2+\beta\gamma)^2}{4\alpha^2+(\beta+\gamma)^2}$, $\mathrm{Re}z=\frac{x(2\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)}{4\alpha^2+(\beta+\gamma)^2}$. **15**. Ύπ. Σχηματίστε $|\zeta|^2-1=\zeta\bar{\zeta}-1$ καί λάβετε ὑπόψη ὅτι $|\alpha|<1$ κ.τ.λ. **16**. Ύπ. $\zeta^2=1+$ $+z^2$, τότε $\zeta^2-z^2=1$, δηλ. $(\zeta-z).(\zeta+z)=1$, ἔτσι $\zeta-z=\frac{1}{\zeta+z}$ κ.τ.λ. **17**. Ύπ. $|z_1-z_2|^2=$ $=(z_1-z_2)(\bar{z}_1-\bar{z}_2)$ κ.τ.λ. **18**. Ύπ. Δεῖξτε ὅτι $\frac{y_1-y_3}{x_1-x_3}=\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}$, ὅπου $z_1=x_1+iy_1$, κ.τ.λ. **19**. Ύπ. $|z_1-z_2|^2=(z_1-z_2).(\bar{z}_1-\bar{z}_2)$ καί $|1-\bar{z}_1z_2|^2=(1-\bar{z}_1z_2).(1-z_1.\bar{z}_2)$ κ.τ.λ. **20**. Ύπ. Θέστε $z_1=x_1+y_1i$, $z_2=x_2+y_2i$ καί ἐκτελέστε πράξεις. **21**. Ύπ. Άν $z_\nu=x_\nu+y_\nu i$, τότε $\left|\frac{z_\nu-i}{z_\nu+i}\right|<1 \Rightarrow \sqrt{x_\nu^2+(y_\nu-1)^2}<\sqrt{x_\nu^2+(y_\nu+1)^2}$ κ.τ.λ. **22**. Ύπ. Θέστε $z=\sigma\upsilon\nu\theta+i\eta\mu\theta$, σχηματίστε τό μιγαδικό $\Sigma+i\Sigma'$ κ.τ.λ. **23**. Ύπ. Σχηματίστε τό μιγαδικό $\Sigma+i\Sigma'$. **24**. Ύπ. Εἶναι $|A_0|^2+|A_1|^2+\ldots+|A_{\nu-1}|^2=A_0\bar{A}_0+A_1\bar{A}_1+\ldots+A_{\nu-1}\bar{A}_{\nu-1}$. **25**. Ύπ. Θέστε $\lambda=\varepsilon\varphi\,\frac{\theta}{2}$ μέ $\theta=\mathrm{Arg}z$. **26**. Ύπ. Ή δοθεῖσα γράφεται $\left(\frac{z^2-1}{2z}\right)^4=\sigma\upsilon\nu\alpha+i\eta\mu\alpha$ κ.τ.λ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ II

1.8. **1**. Ύπ. Χρησιμοποιῆστε τόν ὁρισμό 2 τῆς 1.1. **2**. Άπλή. Άπ. Όχι. **3**. Ύπ. Χρησιμοποιῆστε τό θεώρημα τῆς 1.2. **4**. Ύπ. Χρησιμοποιῆστε τόν ὁρισμό: $\widehat{\alpha}*\widehat{\beta}=\widehat{\alpha*\beta}$. **5**. Άπ. $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$. **6**. Ύπ. Χρησιμοποιῆστε τήν εἰς ἄτοπο ἀπαγωγή. **7**. Ύπ. Έφαρμόστε τούς ἀντίστοιχους ὁρισμούς. **8**. Ύπ. Θεωρῆστε τήν ἐξίσωση $x^2x'^2+x'+x=0$. **9**. Ύπ. Χρησιμοποιῆστε τούς ἀντίστοιχους ὁρισμούς Άπ. (ii) Ναί τό 0 (iii) Κάθε $z\neq$ $\neq 1$ ἔχει συμμετρικό στοιχεῖο. **10**. Ύπ. Στή δοθεῖσα σχέση νά ἀντικαταστήσετε μερικά ἀπό τά $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ μέ κατάλληλα στοιχεῖα.

2.4. **1**. Ύπ. Έφαρμόστε σέ κάθε περίπτωση τόν ἀντίστοιχο ὁρισμό. **2**. Άπλή. **3**. Άπλή. Άπ. $x=\widehat{4}$. **4**. Ύπ. (i) Θεωρῆστε τήν ἰσότητα $\alpha^{-1}.(\alpha^{-1})^{-1}=e$ καί ἐφαρμόστε τήν ἰδιότητα 2 τῆς 2.3. (ii) Έφαρμόστε τόν ὁρισμό τῆς 1.5. (iii) καί (iv) Λάβετε ὑπόψη ὅτι ἡ πράξη εἶναι προσεταιριστική. **5**. Ύπ. Έφαρμόστε τόν ὁρισμό τῆς 2.2. **6**. Άπλή. **7**. Ύπ. Έφαρμόστε τόν ὁρισμό τῆς 2.2. **8**. Άπ. $x=\alpha'*\beta'*\beta'$, $y=\beta'$.

3.4. **1.** 'Υπ. 'Εφαρμόστε τόν ὁρισμό τῆς 3.1. 'Απ. Ἔχει μοναδιαῖο στοιχεῖο. **2.** 'Απ. (i) Εἶναι ἀντιμεταθετικός δακτύλιος. (ii) καί (iv) Δέν εἶναι δακτύλιοι (iii) Εἶναι ἀντιμεταθετικοί δακτύλιοι. **3.** 'Υπ. 'Εφαρμόστε τόν ὁρισμό τῆς 3.1. 'Απ. Ἔχει μοναδιαῖο στοιχεῖο. **4.** 'Υπ. Παρατηρῆστε ὅτι $\gamma \cdot \beta = (\beta + \delta) \cdot \beta$ κ.τ.λ. **5.** 'Υπ. Λάβετε τήν παράσταση $(-\alpha)[\beta + (-\beta)]$. **6.** 'Υπ. 'Εφαρμόστε σέ κάθε περίπτωση τόν ὁρισμό τῆς 3.3.

4.3. **1.** 'Απ. (i) Ὄχι, (ii) Ναί, (iii) Ναί, (iv) Ναί. **2.** 'Υπ. 'Εφαρμόστε τόν ὁρισμό τῆς 4.1. **3.** 'Απλή. **4.** 'Απ. $x = \widehat{2}$, $y = \widehat{1}$.

5.6. **1.** 'Υπ. 'Εφαρμόστε τόν ὁρισμό τῆς 5.1. **2.** 'Υπ. Πάρτε τήν παράσταση $\alpha \cdot [x + (-x)]$. **3.** 'Υπ. 'Εφαρμόστε τόν ὁρισμό τῆς 5.3. 'Απ. Ἔχει διάσταση 1. **4.** 'Υπ. 'Εφαρμόστε τόν ὁρισμό τῆς 5.3. 'Απ. Ἔχει διάσταση 1. **5.** 'Απ. Εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα. **6.** 'Απ. Ναί. **7.** 'Απ. Ἔχει διάσταση 2. **8.** 'Υπ. Πάρτε $x, y \in A \cap B$ καί δεῖξτε ὅτι $\alpha \cdot x + \beta \cdot y \in A \cap B$.

7. **1.** 'Υπ. 'Εφαρμόστε τούς ἀντίστοιχους ὁρισμούς 'Απ. (ii) Ἔχουν ἀντίστοιχα συμμετρικά στοιχεῖα τά $(1, -\alpha')$ καί $(-1, -\alpha')$. (iii) Τό συμμετρικό στοιχεῖο εἶναι $\left(-\alpha, \frac{1}{\alpha'}\right)$.

2. 'Υπ. Λάβετε ὑπόψη καί τήν ἰσότητα $\alpha'' = \alpha'' * e$. **3.** 'Υπ. α) Ἡ ἰσότητα $(\alpha \cdot \beta)^2 = \alpha^2 \cdot \beta^2$ γράφεται $(\alpha \cdot \beta) \cdot (\alpha \cdot \beta) = (\alpha \cdot \alpha) \cdot (\beta \cdot \beta)$. β) Χρησιμοποιῆστε τή μέθοδο τῆς μαθηματικῆς ἐπαγωγῆς. **4.** 'Υπ. 'Εφαρμόστε τόν ὁρισμό τῆς 4.1. **5.** 'Απ. $\alpha = \beta = 1$, $\gamma = -e$. **6.** 'Απ. Ἄν $x, y \in A_\nu$, τότε $x^\nu = 1$, $y^\nu = 1$, ὁπότε $(xy)^\nu = 1$ καί $y^{-\nu} = 1$ κτλ. **7.** 'Υπ. Δεῖξτε ἀρχικά ὅτι $\alpha \circ \alpha' = e$ καί ἔπειτα ὅτι τό e εἶναι τό οὐδέτερο στοιχεῖο ὡς πρός τήν πράξη ο. **8.** 'Υπ. 'Εφαρμόστε τόν ὁρισμό τῆς 2.2. **9.** 'Υπ. i) 'Υποθέστε ὅτι $x \cdot \alpha_\lambda = x \cdot \alpha_\mu$ μέ $\lambda \neq \mu$ καί καταλῆξτε σέ ἄτοπο. ii) Θεωρῆστε τήν $x\alpha_1 . x\alpha_2 \ldots x\alpha_\nu = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_\nu$. **10.** 'Απ. $x = \frac{1}{43}(18, -3, 2)$, $y = \frac{1}{43}(42, -7, 19)$.

11. 'Απ. $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. **12.** 'Υπ. 'Εφαρμόστε τόν ὁρισμό τῆς 5.4.

13. 'Απ. $\gamma(1,1,1) + (\beta - \gamma)(1,1,0) + (\alpha - \beta)(1,0,0)$. **14.** 'Υπ. Βρεῖτε τίς λύσεις τοῦ (Σ) καί ἐφαρμόστε τόν ὁρισμό τῆς 5.3. 'Απ. Μιά βάση τοῦ V ἀποτελεῖται μόνο ἀπό ἕνα διάνυσμα, π.χ. τό $(18, -1, -7)$. **15.** 'Υπ. Λάβετε ὑπόψη ὅτι τά β καί δ ἔχουν ἀντίστροφα στοιχεῖα. **16.** 'Υπ. 'Εφαρμόστε τόν ὁρισμό τῆς 3.1. 'Απ. $\frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma}(\delta, -\beta, -\gamma, \alpha)$ μέ $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. **17.** 'Υπ. (i) 'Εφαρμόστε τόν ὁρισμό τῆς 3.1. (ii) 'Εφαρμόστε τόν ὁρισμό 2 τῆς 1.1. 'Απ. Καί οἱ δύο δομές εἶναι ἀκέραιες περιοχές. **18.** 'Υπ. Παρατηρῆστε ὅτι $x - x \in A$ καί ἐφαρμόστε τόν ὁρισμό τῆς 2.2.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ III

1.4. **1**. Ύπ. Στό ἄθροισμα $\alpha+\beta$ προσθέστε καί ἀφαιρέστε τό β.

2. Ύπ. Δεῖξτε ὅτι τό $\nu^3+2\nu+1$ ἔχει παράγοντα τό 4.

3. Ύπ. Δεῖξτε ὅτι οἱ διαφορές $(\alpha_1+\beta_1)-(\alpha_2+\beta_2)$ καί $\alpha_1\beta_1-\alpha_2\beta_2$ εἶναι πολλαπλάσια τοῦ ν.

4. Ύπ. α) Λάβετε ὑπόψη σας ὅτι ἕνας ἀκέραιος εἶναι ἄρτιος ἤ περιττός. β) Ἀναπτύξτε τό τετράγωνο ἑνός περιττοῦ $2\lambda+1$ καί χρησιμοποιῆστε τό α).

5. Ύπ. Χρησιμοποιῆστε τίς ταυτότητες πού δίνουν τά ἀναπτύγματα τῶν $(\alpha+\beta)^2$ καί $(\alpha-\beta)^2$ καί λάβετε ὑπόψη σας ὅτι οἱ $\alpha+\beta$ καί $\alpha-\beta$ εἶναι ἄρτιοι.

6. Ύπ. Νά διακρίνετε τίς περιπτώσεις $\lambda=3\kappa$, $\lambda=3\kappa+1$, $\lambda=3\kappa+2$.

7. Ύπ. Νά συνδυάσετε τίς περιπτώσεις $x=3\kappa+1$, $x=3\kappa+2$ μέ τίς $y=3\lambda+1$, $y=3\lambda+2$ καί νά ἀποδείξετε τό ζητούμενο.

8. Ύπ. Νά διακρίνετε τίς περιπτώσεις $x=3\kappa+1$, $x=3\kappa+2$.

9. Ύπ. Νά διακρίνετε τίς περιπτώσεις $\kappa=6\lambda$, $\kappa=6\lambda+1,\ldots$, $\kappa=6\lambda+5$.

10. Ύπ. α) Νά διακρίνετε τίς περιπτώσεις $\alpha=5\kappa+1,\ldots$, $\alpha=5\kappa+4$. β) Νά παραγοντοποιήσετε κατάλληλα τό x^4-y^4 καί νά χρησιμοποιήσετε τό α).

11. Ύπ. Βρεῖτε τίς δυνατές τιμές τοῦ ὑπολοίπου λ^3 καί προσδιορίστε τό λ. Ἀπ. $\alpha=0$ ἤ $\alpha=138$ ἤ $\alpha=324$.

12. Ύπ. Παρατηρῆστε ὅτι $2^{4\nu+1}-2^{2\nu}-1=2^{4\nu}-2^{2\nu}+2^{4\nu}-1$ καί ἔπειτα παραγοντοποιῆστε τό δεύτερο μέλος. Τό ζητούμενο θά προκύψει ἄν θυμηθεῖτε πῶς παραγοντοποιοῦνται τά $\alpha^{\kappa}-1$ καί $\alpha^{2\kappa+1}+1$ $(\kappa\in N)$.

13. Ύπ. Χρησιμοποιῆστε τή μέθοδο τῆς μαθηματικῆς ἐπαγωγῆς.

14. Ύπ. Χρησιμοποιῆστε τήν πρόταση 2 τῆς 1.3.

15. Ύπ. Δεῖξτε ὅτι $9^{30}\equiv 1 \pmod 8$ καί $17^{10}\equiv 1 \pmod 8$ καί χρησιμοποιῆστε τήν ἄσκηση 3. Ἀπ. 2.

16. Ύπ. Παρατηρῆστε ὅτι τό $\frac{3}{4}\lambda-\frac{1}{4}$ πρέπει νά εἶναι ἀκέραιος. Ἀπ. $\rho=3\kappa+2$, $\kappa\in Z$.

1.9. **1**. Ύπ. Χρησιμοποιῆστε τόν ἀλγόριθμο τοῦ Εὐκλείδη. Ἀπ. $(27, 20)=1$, $1=27.3+$ $+20.(-4)$.

2. Ύπ. Νά γράψετε τίς δύο ἰσότητες τῆς διαιρέσεως καί νά συμπεράνετε ὅτι $\alpha|(238,510)$ καί $\alpha>15$. Ἀπ. $\alpha=17$ ἤ $\alpha=34$.

3. Ύπ. Ἐργαστεῖτε ὅπως στήν ἄσκηση 2. Ἀπ. 21, 35, 105.

4. Ύπ. Γράψτε τίς ἰσότητες τῶν διαδοχικῶν διαιρέσεων. Ἀπ. $\alpha=1344$, $\beta=1004$.

5. Ύπ. Ἄν α,β εἶναι οἱ ζητούμενοι ἀκέραιοι, τότε $\alpha=24\alpha'$, $\beta=24\beta'$, $(\alpha',\beta')=1$ καί $\alpha'+\beta'=12$. Ἀπ. 24,264 ἤ 120,168.

6. Ἀπ. 2, 10080.

7. Ύπ. Χρησιμοποιῆστε τή σχέση (2) καί τήν πρόταση 3 τῆς 1.5. Μπορεῖτε νά προσδιορίσετε μιά τριάδα (x,y,z), ἄν γράψετε $(32,48,72)=(32,(48,72))$ καί χρησιμοποιήσετε τόν ἀλγόριθμο τοῦ Εὐκλείδη. Ἀπ. $(32,48,72)=8=32.1+48.1+72.(-1)$.

8. Ὑπ. Ἀναλύστε τό 120 σέ γινόμενο (θετικῶν) πρώτων παραγόντων. Ἀπ. 1, 2, 2.3, 2.5, 2.3.5, 2^2, $2^2.3$, $2^2.5$, $2^2.3.5$, 2^3, $2^3.3$, $2^3.5$, $2^3.5$, $2^3.3.5$, 3,5, 3.5 (16 διαιρέτες).

9. Ὑπ. Παραγοντοποιῆστε τό πρῶτο μέλος τῆς ἐξισώσεως, βρεῖτε τό Δ (36) καί παρατηρῆστε ὅτι $x+y \equiv x-y \pmod 2$. Ἀπ. $x = 10$, $y=8$.

10. Ὑπ. (i) Νά θέσετε $(\alpha,\beta) = \delta$ καί $(5\alpha+4\beta, \alpha+\beta)=\delta'$ καί νά δείξετε μέ τή βοήθεια τῆς προτάσεως 4 τῆς 1.5 ὅτι $\delta|\delta'$ καί $\delta'|\delta$. Στίς (ii) (iii) καί (iv) νά ἐργαστῆτε μέ ὅμοιο τρόπο.

11. Ὑπ. Πάρτε ἕνα κοινό διαιρέτη λ τῶν x καί y καί δεῖξτε ὅτι $\lambda = \pm 1$.

12. Ὑπ. (i) Νά θέσετε $(\alpha,\beta)=\delta$, $(\kappa\alpha,\kappa\beta)=\delta'$ καί νά δείξετε ὅτι $\delta'|\kappa\delta$ καί $\kappa\delta|\delta'$. (ii) Χρησιμοποιῆστε τήν πρόταση 2 τῆς 1.7 καί τήν (i).

13. Ὑπ. Πολλαπλασιάστε καί τά δύο μέλη τῆς $\alpha\alpha'+\beta\beta'=1$ μέ γ καί δεῖξτε ὅτι τό πρῶτο μέλος της διαιρεῖται μέ τό $\alpha\cdot\beta$.

14. Ὑπ. Νά θέστε $(\alpha,\beta)=\delta$, $[\alpha,\beta]=\mu$, ὁπότε $\alpha=\alpha_1\delta$, $\beta=\beta_1\delta$, $(\alpha_1,\beta_1)=1$ καί $\alpha\beta=\mu.\delta$. Ἀπ. (i) $\alpha=10$, $\beta=240$ ἤ $\alpha=30$, $\beta=80$ ἤ $\alpha=80$, $\beta=30$ ἤ $\alpha=240$, $\beta=10$. (ii) $\alpha=154$, $\beta=350$ ἤ $\alpha=350$, $\beta=154$ ἤ $\alpha=110$, $\beta=3850$ ἤ $\alpha=3850$, $\beta = 110$. (iii) $\alpha=208$, $\beta=598$ ἤ $\alpha=598$, $\beta=208$ ἤ $\alpha=26$, $\beta=4784$ ἤ $\alpha=4784$, $\beta=26$.

15. Ὑπ. α) Ἀποδεῖξτε τό ζητούμενο μέ τήν εἰς ἄτοπο ἀπαγωγή. β) Νά θέσετε $(\alpha,\beta)=\delta$ καί $(\alpha, \kappa\beta)=\delta'$ καί νά δείξετε ὅτι $\delta|\delta'$ καί $\delta'|\delta$ χρησιμοποιώντας τό πρῶτο μέρος τῆς ἀσκήσεως καί τήν πρόταση 2 τῆς 1·6.

16. Ὑπ. Λάβετε ὑπόψη σας ὅτι κάθε παράγοντας ἑνός γινομένου ἀκεραίων εἶναι διαιρέτης τοῦ γινόμενου καί χρησιμοποιῆστε τό πρῶτο μέρος τῆς ἀσκήσεως 15. Ἀποδεῖξτε τό ἀντίστροφο χρησιμοποιώντας τή συνεπαγωγή τῆς ἀσκήσεως 15. Ἡ ἐφαρμογή (i) εἶναι ἄμεση συνέπεια τοῦ πρώτου μέρους τῆς ἀσκήσεως, ἐνῶ ἡ (ii) ἀποδεικνύεται μέ τή βοήθεια τῆς (i).

17. Ὑπ. Γιά τίς (i) καί (ii) δεῖξτε ὅτι $(\alpha\pm\beta,\alpha) = (\alpha,\beta)$, $(\alpha\pm\beta,\beta)=(\alpha,\beta)$. Γιά τήν ἀπόδειξη τῆς (iii) χρησιμοποιῆστε τίς (i) καί (ii) καί τήν ἄσκηση 16.

18. Ὑπ. Νά θέσετε $(\alpha,\beta,\gamma) = \delta$, $\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{\alpha+\gamma}{2}, \frac{\beta+\gamma}{2}\right)=\delta'$ καί νά δείξετε ὅτι $\delta|\delta'$ καί $\delta'|\delta$.

2.4. 1. Ἀπ $x=4-5\kappa$, $y=1-2\kappa$, $\kappa\in Z$.

2. Ὑπ. Ἐργαστεῖτε ὅπως στό παράδειγμα 2 τῆς 2.3 Ἀπ. Οἱ (i) καί (ii) ἔχουν μόνο ἀρνητικές ἀκέραιες λύσεις.

3. Ὑπ. Βρεῖτε τίς μή ἀρνητικές ἀκέραιες λύσεις τῆς $2x+5y=100$. Ἀπ. Μέ 11 τρόπους.

4. Ἀπ. (i) (10,1), (6,4), (2,7), (ii) (5,11), (10,2). (iii) (6,8) (iv) (3,6).

5. Ἀπ. 4 μολ. καί 8 τετρ. ἤ 13 μολ. καί 1 τετρ.

6. Ἀπ. α) (6,13), (14,8), (22,3) β) Μέγιστο κέρδος θά ἔχει, ἄν κατασκευάσει 22 κοσμήματα α' εἴδους καί 3 κοσμήματα β' εἴδους (μέγιστο κέρδος =15.450 δρχ.).

7. Ὑπ. Ἀπό τίς $x+y=37$, $x=5\pi+2$, $y=7\pi'+4$, προκύπτει $5\pi+7\pi'=31$. Ἀπ. $x=12$, $y=25$.

4. 1. Ὑπ. Θεωρῆστε τήν ἰσότητα $(\nu+7)(\nu-4)+33=\nu^2+3\nu+5$ καί δεῖξτε ὅτι $\nu+7 \equiv \nu-4 \pmod{11}$.

2. Ἁπλή.

3. Ὑπ. Ὀνομάστε $\nu-2$, $\nu-1$, ν, $\nu+1$, $\nu+2$ τούς διαδοχικούς ἀκεραίους καί δεῖξτε ὅτι ὁ ν^2+2 δέ διαιρεῖται μέ τό 5.

4. Ὑπ. Νά διακρίνετε τίς περιπτώσεις $\rho=6\kappa+1, \ldots, \rho=6\kappa+5$.

5. Ὑπ. Δεῖξτε ὅτι $p\geq 3$ καί συνεχίστε κατάλληλα.

6. Ὑπ. Δεῖξτε ὅτι πάντα ὁ ἕνας ἀπό αὐτούς διαιρεῖται μέ τό 3.

7. Ὑπ. Παραγοντοποιῆστε τήν παράσταση.

8. Ὑπ. Προσθέστε καί ἀφαιρέστε τό $4^{5555}+4^{2222}$.

9. Ὑπ. Δεῖξτε ὅτι $\beta^2-4\alpha\gamma=8\kappa+5$, $\kappa\in Z$, καί στή συνέχεια ὅτι τό $8\kappa+5$ δέν εἶναι τέλειο τετράγωνο.

10. Ἀπ. $x=3$, $y=4$ καί $z=2$.

11. Ὑπ. Χρησιμοποιῆστε τό θεώρημα τῆς 1.3.

12. Ὑπ. Θεωρῆστε τή διαφορά $(\alpha+\beta)(\nu+\rho)-2(\nu\alpha+\rho\beta)$.

13. Ὑπ. Γράψτε τό κλάσμα στή μορφή

$$\frac{(5\nu+1)(3\nu+1)+5}{2(15\nu^2+8\nu+6)+5\nu+1}$$

14. Ὑπ. Παρατηρῆστε ὅτι $A=\frac{2}{9}(10^{\nu}-1)$ καί $B=\frac{8}{9}(10^{\mu}-1)$.

15. Ὑπ. Δεῖξτε ὅτι ἕνας τουλάχιστον εἶναι μικρότερος ἀπό 4. Ἀπ. 2,4,4 ἤ 2,3,6 ἤ 3,3,3.

16. Ὑπ. α) Δεῖξτε ὅτι ἕνας γραμμικός συνδυασμός τῶν $3\kappa+1$ καί $14\kappa+5$ εἶναι ἴσος μέ μονάδα. β) Λάβετε ὑπόψη τίς ἰσότητες $14\kappa+5=5(3\kappa-1)-(\kappa-10)$ καί $3\kappa-1=3(\kappa-10)+29$.

17. Ὑπ. Νά διακρίνετε τίς περιπτώσεις $\nu=4\kappa$, $\nu=4\kappa+1$, $\nu=4\kappa+2$, $\nu=4\kappa+3^{\kappa}$ καί παρατηρῆστε ὅτι $5^{4\kappa}=(26-1)^{2\kappa}=(24+1)^{2\kappa}$. Ἀπ. $\nu=4\kappa$.

18. Ὑπ. Νά θέσετε $(2\alpha-1,\beta)=\delta$ καί νά δείξετε ὅτι $\delta|1$.

19. Ὑπ. Εἶναι $(\alpha A, \alpha B, \beta A, \beta B)=((\alpha A, \alpha B), (\beta A, \beta B))$ καί $[\alpha A, \alpha B, \beta A, \beta B]=[[\alpha A, \alpha B], [\beta A, \beta B]]$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ IV

1.7. 1. Ὑπ. Ὑποθέστε ὅτι $f(x)=\alpha_\nu x^\nu+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0$ καί $g(x)=\beta_\mu x^\mu+\ldots+\beta_0$ εἶναι τά δύο πολυώνυμα καί σχηματίστε τή διαφορά τους.

2. Ὑπ. Νά διακρίνετε τίς περιπτώσεις $\nu>\mu$ καί $\nu=\mu$.

3. Ἀπ. $\alpha=1$, $\beta=1$.

4. Ἀπ. i) $\alpha_3\neq 3$, ii) $\alpha_3=3$, iii) $\alpha_3=3$, $\alpha_2=-2$ καί $\alpha_1\neq 7$, iv) $\alpha_3=3$, $\alpha_2=-2$, $\alpha_1=7$ καί $\alpha_0\neq -6$ καί v) $\alpha_3=3$, $\alpha_2=-2$, $\alpha_1=7$ καί $\alpha_0=-6$.

5. Ἀπ. $\alpha=2$, $\beta=7$, $\gamma=6$, $\delta=3$ ἤ $\alpha=2$, $\beta=-5$, $\gamma=-6$, $\delta=-3$.

6. Ὑπ. Τό $g(x)$ θά εἶναι: $g(x)=x^2+\mu x+\nu, \mu,\nu\in \mathbf{R}$, ὁπότε ἀπό τήν ἰσότητα $f(x)=(g(x))^2$ ἀποδεικνύουμε τό ζητούμενο.

7. Ὑπ. Νά πάρετε $g(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha\neq 0$ καί $\pi(x)=\delta x+\varepsilon$ μέ $\delta\neq 0$. Ἀπ. $g(x)=3x^2-5x+2$ καί $\pi(x)=6x-5$ ἤ $g(x)=-3x^2+5x-2$ καί $\pi(x)=6x-5$.

8. Ὑπ. Τό $g(x)$ θά εἶναι τό πολύ 2ου βαθμοῦ, δηλ. $g(x)=kx^2+\lambda x+\mu$. Σχηματίστε τό πολυώνυμο $f(x)-(g(x))^2$. Ἀπ. $g(x)=2x^2-2x-1$ ἤ $g(x)=-2x^2+2x+1$.

9. Ὑπ. Νά λάβετε ὑπόψη σας τήν ταυτότητα $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma=\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2]$.

10. Ἀπ. $f(x)=\alpha x^2-\alpha x+\gamma$, μέ $\alpha, \gamma\in \mathbf{C}$.

2.6. 1. Ὑπ. Εἶναι $f_1(x)=g_1(x)\pi_1(x)$ καί $f_2(x)=g_2(x)\pi_2(x)$

2. Ὑπ. Ὑποθέστε ὅτι $g(x)\mid f_\kappa^*(x)$, δηλ. $f_\kappa(x)=g(x)\cdot\pi(x)$.

3. Ὑπ. Ἐργασθεῖτε ὅπως στήν προηγούμενη ἄσκηση.

4. Ὑπ. Ὑποθέστε ὅτι $g(x)\mid f_1(x)$, ὁπότε $f_1(x)+f_2(x)=g(x)\pi(x)$ καί $f_1(x)=g(x)\pi_1(x)$.

5. Ἀπ. $x-1$.

6. Ἀπ. $\kappa=12$ καί $\lambda=30$.

7. 'Απ. $\kappa=1$.

8. 'Απ. $\lambda=\frac{1}{2}$ ἤ $\lambda=\frac{1}{3}$.

9. 'Υπ. Σχηματίστε τή διαφορά $f(x)-\varphi(x)$ καί δεῖξτε ὅτι $\varphi(x) \mid f(x)-\varphi(x)$.

10. 'Υπ. Στό $f(x)$ νά προσθέσετε καί νά ἀφαιρέσετε τόν ὅρο $\alpha^{\rho}x^{(\rho+1)\nu}$, ὥστε νά μπορέσετε νά τό κάμετε γινόμενο παραγόντων τοῦ $g(x)$ ἐπί κάποιο πολυώνυμο $\pi(x)$.

2.9. 1. 'Υπ. 'Αρκεῖ $g(x) \mid [f_1(x)\,\upsilon_2(x)-f_2(x)\upsilon_1(x)]$

2. 'Υπ. Εἶναι $(x-\alpha) \mid [f(x)-\upsilon]$ καί $(x-\beta) \mid [f(x)-\upsilon]$.

3.4. 1. 'Απ. α) $f(-2)=-23$, $f(5)=-1164$, β) $\varphi(-\sqrt{2})=-1-4\sqrt{2}$, γ) $g(1-i)=-3-2i$.

2. 'Απ. $\lambda=4$.

3. 'Απ. $\kappa=\frac{13}{4}$ καί $\lambda=-\frac{83}{2}$.

4. 'Υπ. πρέπει $f(-2)=6$ καί $f(1)=2$. 'Απ. $\alpha=\frac{5}{3}$ καί $\beta=-\frac{4}{3}$.

5. 'Απ. α) $\pi(x)=5x^2+14x+44$ καί $\upsilon=132$
β) $\pi(x)=x^4-2x^3+4x^2-8x+16$ καί $\upsilon=0$
γ) $\pi(x)=x^2-(2+3i)x+8+6i$ καί $\upsilon=-15-14i$
δ) $\pi(x)=x^3+3x^2+(6-2i)x+1-3i$ καί $\upsilon=-2-4i$
ε) $\pi(x)=4x^3+3x^2-\frac{3}{2}x-\frac{45}{4}$ καί $\upsilon=-\frac{275}{8}$

6. 'Υπ. Ἔχουμε $f(x)=(x-\alpha)\cdot\pi_1(x)+f(\alpha)$, ἡ ὁποία γιά $x=\beta$ δίνει $f(\beta)=(\beta-\alpha)\pi_1(\beta)+$ $+f(\alpha)$ κ.τ.λ.

7. 'Υπ. Τό ὑπόλοιπο εἶναι τό πολύ 2ου βαθμοῦ, δηλ. τῆς μορφῆς $\upsilon(x)=\kappa x^2+\lambda x+\mu$. Ἔτσι ἔχουμε $f(x)=[(x+1)\,(x-2)\,(x+3)]\pi(x)+\kappa x^2+\lambda x+\mu$, ἀλλά $f(-1)=2$ κ.τ.λ. 'Απ. $\upsilon(x)=x^2+2x+3$.

8. 'Υπ. i) Ἔχουμε $f(x)=(x-\alpha)\,(x-\beta)\,\pi(x)+\kappa x+\lambda$, ὁπότε $f(\alpha)=k\alpha+\lambda$ κ.τ.λ.
ii) Ἔχουμε $f(x)=(x-\alpha)\,\pi(x)+f(\alpha)$ καί $\pi(x)=(x-\alpha)\,\pi_1(x)+\pi(\alpha)$.

9. 'Υπ. Δεῖξτε τό ζητούμενο μέ τή μέθοδο τῆς μαθηματικῆς ἐπαγωγῆς.

10. 'Υπ. Νά πάρετε τό πολυώνυμο $f(x)=\kappa x^3+\lambda x^2+\mu x+\nu$ καί νά ὑπολογίσετε τά κ,λ,μ,ν, ὥστε νά ἰσχύουν οἱ ὑποθέσεις. 'Απ. $\kappa=\frac{1}{3}$, $\lambda=\frac{1}{2}$, $\mu=\frac{1}{6}$.

11. 'Υπ. 'Αρκεῖ νά δείξετε ὅτι $P(1)=0$. Νά σχηματίσετε τό $P(1)$ καί νά πάρετε τό $S_\nu=$ $=\frac{1}{\alpha_1\alpha_2}+\frac{1}{\alpha_2\alpha_3}+\ldots+\frac{1}{\alpha_{\nu-1}\alpha_\nu}$. Σχηματίστε τό γινόμενο ωS_ν(ω διαφορά τῆς ἀριθμ. προόδου) καί δεῖξτε ὅτι $S_\nu=\frac{\nu-1}{\alpha_1\alpha_\nu}$.

4.3. 1. 'Υπ. Δεῖξτε ὅτι τό πολυώνυμο $F(x)=f(x)-\lambda$ εἶναι τό μηδενικό πολυώνυμο.

2. 'Υπ. Νά λάβετε ὑπόψη ὅτι $x^2-2\rho x+\rho^2=(x-\rho)^2$.

3. 'Υπ. Νά λάβετε ὑπόψη σας ὅτι $f(x)=(x-\rho)^{\kappa}\pi_1(x)$, μέ $\pi_1(\rho)\neq 0$, $g(x)=(x-\rho)^{\lambda}\pi_2(x)$, μέ $\pi_2(\rho)\neq 0$ καθώς καί τόν ὁρισμό τοῦ Μ.Κ.Δ.

4. 'Υπ. Σχηματίστε τό πολυώνυμο $F(x)=f(x)-1$ καί δεῖξτε ὅτι εἶναι τό μηδενικό πολυώνυμο.

5. 'Υπ. Χρησιμοποιώντας διαδοχικά τό σχῆμα Horner δεῖξτε ὅτι ὁ ἀριθμός 2 εἶναι ρίζα μέ βαθμό πολλαπλότητας 2.

6. 'Υπ. Χρησιμοποιῆστε διαδοχικά τό σχῆμα Horner.

7. Ὑπ. Ἡ ἐξίσωση γράφεται: $(\lambda+1)(x^3-1)-(\lambda^2+5\lambda-5)x(x-1)=0$. Ἔτσι βλέπουμε ὅτι μία ρίζα της εἶναι τό 1.

8. Ἀπ. $x^3-2x^2-5x+6=0$.

9. Ὑπ. Ἄν x_1,x_2,x_3 εἶναι οἱ ρίζες τῆς ζητούμενης ἐξισώσεως καί ρ_1,ρ_2,ρ_3 οἱ ρίζες τῆς δοθείσας τότε $x_1=\rho_1^2$, $x_2=\rho_2^2$, $x_3=\rho_3^2$, ὁπότε $x_1+x_2+x_3=\rho_1^2+\rho_2^2+\rho_3^2$ κ.τ.λ.
Ἀπ. $x^3-(\alpha_1^2-2\alpha_2)x^2+(\alpha_2^2-2\alpha_1\alpha_3)x-\alpha_3^2=0$.

10. Ὑπ. i) Χρησιμοποιῆστε τούς τύπους Vieta. ii) Ἀφοῦ $\rho_1^2+\rho_2^2+\rho_3^2=-2\alpha<0$, ἔχουμε ὅτι οἱ ρ_1,ρ_2,ρ_3 δέν εἶναι ὅλες πραγματικές, ὁπότε, ἄν ρ_1 εἶναι ἡ κοινή πραγματική ρίζα, τότε $\rho_2,\rho_3\in \mathbf{C}$ μέ $|\rho_2|=|\rho_3|$.

11. Ὑπ. Ἄν $P(x)$ εἶναι τό α' μέλος τῆς ἐξισώσεως τότε $P(\alpha_1)=\alpha_1$, $P(\alpha_2)=\alpha_2,\ldots,P(\alpha_\nu)=\alpha_\nu$ Σχηματίστε τό πολυώνυμο $F(x)=P(x)-x$. Ἀπ. $x=\beta$.

12. Ὑπ. Δεῖξτε πρῶτα ὅτι οἱ ρίζες τοῦ $Q(x)$ εἶναι καί ρίζες τοῦ $P(x)$. Ὑπολογίστε ἔπειτα καί τήν τρίτη ρίζα τοῦ $P(x)$ καί γράψτε τό $P(x)$ μέ μορφή γινομένου.

13. Ὑπ. Σχηματίστε τό πολυώνυμο $F(x)=f(x)-f(0)$ καί δεῖξτε ὅτι εἶναι τό μηδενικό πολυώνυμο.

4.6. 1. Ἀπ. α) $-2,3,\ \frac{1}{2},-\frac{1}{2}$, β) $2,\frac{-3\pm i\sqrt{11}}{2}$, γ) $-1,2,3$

δ) $2,3,-\frac{1}{2}$, ε) $-2,\ \frac{5\pm i\sqrt{23}}{6}$, στ) 3(διπλῆ), $-\frac{1}{2}$, i, $-i$.

2. Ὑπ. Πιθανές ρητές ρίζες εἶναι οἱ διαιρέτες τοῦ 4. Ἀπ. $\kappa=2,-4,-13,-19$.

3. Ὑπ. Πιθανές ρητές ρίζες εἶναι οἱ ἀριθμοί $+1$ καί -1.

4. Ὑπ. Ἄν ρ εἶναι ἀκέραια ρίζα, τότε $\rho^3+k_1\rho^2+k_2\rho+k_3=0$ ἤ $k_1\rho^2+k_2\rho+k_3=-\rho^3$.

5. Ἀπ. $\rho_1=3-i$, $\rho_2=3+i$, $\rho_3=2$, $k=22$ καί $\lambda=-20$.

6. Ἀπ. $1+i,\ 1-i,\ \frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

7. Ἀπ. α) $f(x)=x^3-x^2+4x-4$, β) $f(x)=x^4-2x^3+3x^2-2x+2$

8. Ἀπ. α) $f(x)=(x-i)(x+i)\left(x-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$

β) $f(x)=(x+2-\sqrt{3}i)(x+2+\sqrt{3}i)(x+i\sqrt{3})(x-i\sqrt{3})$

9. Ἀπ. $f(x)=(x-2)(x-3)(2x+1)$.

10. Ὑπ. Νά λάβετε ὑπόψη ὅτι $\rho_1^{2\nu}+\alpha^\nu\rho_1^\nu+\beta^\nu=0$, $\rho_2^{2\nu}+\alpha^\nu\rho_2^\nu+\beta^\nu=0$, $\rho_1+\rho_2=-\alpha$ καί $\rho_1\rho_2=\beta$.

11. Ὑπ. Τό $f(x)=(f_1(x)+if_2(x))\cdot(f_1(x)-if_2(x))$ κ.τ.λ.

12. Ὑπ. Δεῖξτε ὅτι οἱ ρίζες τοῦ $\varphi(x)$ εἶναι καί ρίζες τοῦ $f(x)$.

13. Ὑπ. Ἀπό τά $f(\rho)=0$, $f(\alpha_0)=0$ καί $f(0)=\alpha_0$, ὑπολογίστε τό $g(\rho)$.

14. Ὑπ. Σχηματίστε τά $g(x)$, $f(x)-x$ καί $g(x)-x$ καί δεῖξτε ὅτι $g(\rho_1)-\rho_1=0$ κ.τ.λ.

15. Ὑπ. Δεῖξτε ὅτι δέν ὑπάρχει ρ, μέ $\rho\in Q^+$ καί $\sqrt{\rho}\in R-Q$: $f(\sqrt{\rho})=0$.

16. Ὑπ. Χρησιμοποιώντας τούς τύπους Vieta, δεῖξτε ὅτι τό γινόμενο $(\rho_1-\rho_2)^2\cdot(\rho_2-\rho_3)^2\cdot(\rho_3-\rho_1)^2<0$, ὁπότε τά ρ_1,ρ_2,ρ_3 δέν μπορεῖ νἆναι πραγματικοί ἀριθμοί. Στή συνέχεια δεῖξτε ὅτι τό $1-\rho_1<0$ καί $\sqrt{2}-\rho_1>0$.

17. Ὑπ. Δεῖξτε ὅτι τό $f(x)$ δέν ἔχει ρίζες τίς πιθανές ρητές ρίζες $\pm1,\pm2$, γιά $\lambda\in Z$.

18. Ὑπ. Σχηματίστε τό πολυώνυμο $Q(x)=P(x)-7$ καί δεῖξτε ὅτι μηδενίζεται γιά τέσσερις διαφορετικούς μεταξύ τους ἀκέραιους ἀριθμούς. Ἄν γιά $x=\tau$ ἰσχύει $P(\tau)=14$, δεῖξτε ὅτι δέν ἰσχύει ἡ σχέση $P(\tau)-7=7$.

5.4. 1. α) $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=2$, $x_3=2$

β) $x_1=2$, $x_2=\frac{-5-i\sqrt{3}}{2}$, $x_3=\frac{-5+i\sqrt{3}}{2}$

γ) $x_1=-1$, $x_2=2(1-i\sqrt{3})$, $x_3=2(1+i\sqrt{3})$

δ) $x_1=\sqrt[3]{3}\,(\sqrt[3]{3}+1)$, $x_2=\frac{\sqrt[3]{3}}{2}[(-1-\sqrt[3]{3})-(\sqrt[6]{3^5}-\sqrt{3})i]$, $x_3=\overline{x_2}$

2. α) $x_1=1-\sqrt{2}$, $x_2=1+\sqrt{2}$, $x_3=-i\sqrt{5}$, $x_4=i\sqrt{5}$

β) $x_1=-1-\sqrt{7}$, $x_2=-1+\sqrt{7}$, $x_3=1-3i$, $x_4=1+3i$

6.4. 1. Ἀπ. α) $\lambda>-\frac{1}{12}$, β) $\lambda=-\frac{1}{12}$, γ) ἀδύνατο, δ) $\lambda<-\frac{1}{12}$

ε) $|12\lambda+1|<4(\lambda-2)^2$

2. Ὑπ. Νά ἐξετάσετε τίς περιπτώσεις $x\in R$ καί $x\in C-R$. Στή δεύτερη περίπτωση νά θέσετε $x=\alpha+\beta i$

3. Ὑπ. Νά καθορίσετε τά πρόσημα τῶν Δ, P, S γιά τίς διάφορες πραγματικές τιμές τοῦ λ καί νά κάνετε πίνακα.

4. Ὑπ. Πρέπει ἡ ἐπιλύουσα τῆς δοθείσας νά ἔχει δύο ρίζες θετικές. Ἀπ. $\lambda>2$.

5. Ὑπ. Νά καθορίσετε τά πρόσημα τῶν Δ καί $\alpha=\lambda-1$ γιά τίς διάφορες πραγματικές τιμές τοῦ λ καί νά κάμετε πίνακα.

6. Ὑπ. Νά ἐπιλυθεῖ ὅπως οἱ ἀντίστροφες 4ου βαθμοῦ (δηλ. νά διαιρέσετε μέ τό x^2 καί νά θέσετε $x+\frac{1}{x}=y$).

7. Ὑπ. Ἡ δοθείσα εἶναι ἰσοδύναμη μέ τήν $(\lambda-1)x^2+2x-(\lambda+1)>0$, ὁπότε ἐργαζόμαστε ὅπως στήν ἄσκηση 5.

8. Ἀπ. α) $x=2k\pi$, $x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$, $k\in Z$, β) $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$, $x=2k\pi+\frac{2\pi}{3}$, $k\in Z$, γ) $x=2k\pi-\frac{\pi}{12}$, $x=2k\pi+\frac{5\pi}{12}$, $k\in Z$, δ) $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$, $x=2k\pi$, $k\in Z$.

9. Ὑπ. α) Ἡ δοθείσα εἶναι ἰσοδύναμη μέ τήν $\eta\mu x(4\lambda\sigma\upsilon\nu^2 x-2\sigma\upsilon\nu x-\lambda)=0$. β) Εἶναι γραμμική ἐξίσωση.

10. Ὑπ. Θέτουμε $\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x=t$, ὁπότε $\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x=\frac{t^2-1}{2}$, ὁπότε ἔχουμε τήν ἰσοδύναμη ἐξίσωση $t^2-2\lambda t+1=0$.

11. Ὑπ. Νά θέσετε $\varepsilon\varphi\omega=\frac{2\mu+1}{\mu}$, ὁπότε ἔχετε τήν ἰσοδύναμη ἐξίσωση $\sigma\upsilon\nu(\chi+\omega)=\sigma\upsilon\nu\omega$.

Ἄν x_1, x_2 εἶναι δύο ρίζες τῆς τελευταίας, τότε ἀπό $|x_1-x_2|=\frac{\pi}{2}$ νά ὑπολογίσετε τήν $\varepsilon\varphi\omega$.

8. 1. Ὑπ. Δεῖξτε ὅτι οἱ ρίζες τοῦ $g(x)$ εἶναι καί ρίζες τοῦ $f(x)$.

2. Ὑπ. Ἐργασθεῖτε ὅπως καί στήν προηγούμενη.

3. Ὑπ. Χρησιμοποιῆστε διαδοχικά τό σχ. Horner γιά νά βρεῖτε τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως τοῦ $f(x)$ μέ τό $x-1$ καί στή συνέχεια τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως τοῦ $\pi(x)$ (πηλίκο τῆς προηγούμενης διαιρέσεως) μέ τό $x-1$.

4. Ὑπ. Δεῖξτε ὅτι $g(1)=0$, ἀφοῦ γνωρίζετε ὅτι $f(1)=0$ καί $\pi(1)=0$ (ὅπου $\pi(x)$ τό πηλίκο τῆς διαιρέσεως τοῦ $f(x)$ μέ τό $x-1$).

5. Ὑπ. Νά λάβετε ὑπόψη ὅτι $(x-\alpha)(x^2-3x+4)+\upsilon_1=(x-\beta)(x^2-4x+2)+\upsilon_2$.

6. Ὑπ. Νά ὑπολογίσετε τά κ καί λ ἀπό τήν $f_1(x)\cdot f_2(x)=(x-\alpha)(x-\beta)\pi(x)+\kappa x+\lambda$

7. Ὑπ. Ὑποθέστε ὅτι $x^4+1=(x^2+\mu x+\nu)(x^2+\mu_1 x+\nu_1)$ καί προσδιορίστε τά μ ν,μ_1,ν_1.

8. Ὑπ. Ὑποθέστε ὅτι οἱ α,β,γ εἶναι ρίζες τῆς ἐξισώσεως $x^3+kx+\lambda=0$, δηλ.

$$\alpha^3+\kappa\beta+\lambda=0,\ \beta^3+\kappa\beta+\lambda=0 \text{ καί } \gamma^3+\kappa\gamma+\lambda=0.$$

9. Ὑπ. Ἡ ἀποδεικτέα γράφεται $[(\rho_1+\rho_2+\ldots+\rho_\nu)^2-2(\rho_1\rho_2+\rho_1\rho_3+\ldots+\rho_{\nu-1}\rho_\nu)]\cdot$ $\cdot\,\nu \geq (\rho_1+\rho_2+\ldots+\rho_\nu)^2$.

10. Ὑπ. Νά λάβετε ὑπόψη τούς τύπους Vieta καί τή σχέση πού δίνεται καί ἀπό αὐτές νά ἀπαλείψετε τά ρ_1,ρ_2,ρ_3. Ἀπ. $2\beta^3+27\alpha^2\delta=9\alpha\beta\gamma$.

11. Ἄν ρ_1 εἶναι ἡ μέση ἀνάλογος τῶν ρ_2,ρ_3, θά ἔχουμε $\rho_1^2=\rho_2\cdot\rho_3$. Ἔχουμε ἀκόμα καί τρεῖς σχέσεις μεταξύ τῶν ρ_1,ρ_2,ρ_3 ἀπό τούς τύπους Vieta, ὁπότε βρίσκουμε τήν ἀπαλείφουσα τῶν τεσσάρων αὐτῶν σχέσεων.

12. Ὑπ. Νά λάβετε ὑπόψη τούς τύπους Vieta καί νά ὑποθέστε ἀκόμα ὅτι $\rho_2=-\rho_3\neq 0$ ἤ $\rho_2=-\rho_3=0$.

13. Ὑπ. Ἄν ρ_1,ρ_2,ρ_3 εἶναι οἱ ρίζες τοῦ $f(x)$, τότε ἀπό τούς τύπους Vieta ἔχουμε $|\alpha|=|\rho_1+\rho_2+\rho_3|\leq|\rho_1|+|\rho_2|+|\rho_3|$, $|\beta|\leq|\rho_1|\cdot|\rho_2|+|\rho_2|\cdot|\rho_3|+|\rho_3|\cdot|\rho_1|$ κ.τ.λ.

14. Ὑπ. Οἱ μόνες ρητές ρίζες τῆς ἐξισώσεως $x^{2\nu}-1=0$ εἶναι οἱ ± 1. Ὅλες οἱ ρίζες της δίνονται ἀπό τόν τύπο $x_k=\sigma\upsilon\nu\dfrac{2k\pi}{2\nu}+i\eta\mu\dfrac{2k\pi}{2\nu}$, $k=0,1,2,\cdots,2\nu-1$ καί ἀνά δύο εἶναι συζυγεῖς μιγαδικές, ὁπότε $x^{2\nu}-1=(x^2-1)\cdot\prod\limits_{\kappa=1}^{\nu-1}(x-x_\kappa)\cdot(x-\overline{x_\kappa})$

15. Ὑπ. Νά λάβετε ὑπόψη ὅτι $1+x^2+x^4+\ldots+x^{2\nu-2}=\dfrac{x^{2\nu}-1}{x^2-1}$ κ.τ.λ.

16. Ὑπ. Ἀφοῦ $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbf{R}$ ἡ μία ρίζα εἶναι πραγματική. Ἀπό τή δοθεῖσα σχέση $\dfrac{\alpha^2-|\beta|}{|\alpha\beta|}$ $\cdot\sqrt{2\beta}<1$ προκύπτει $\alpha^2<2\beta$ καί ἀπό τήν τελευταία $\rho_1^2+\rho_2^2+\rho_3^2<0$.

17. Ὑπ. Σχηματίστε τή διαφορά $f_\nu(x)-f_{\nu-1}(x)$ καί δεῖξτε ὅτι εἶναι διαιρετή μέ τό $(1-x)^3$. Αὐτό συμβαίνει γιά $\nu=1$, $\nu=2,\ldots,\nu=\nu$.

18. Ὑπ. i) Ἄν $|\rho|\leq 1$ ἡ ἀποδεικτέα εἶναι φανερή. ii) Ἄν $|\rho|\geq 1$, τότε ἀπό τήν

$$f(\rho)=\rho^3+\alpha\rho^2+\beta\rho+\gamma=0 \text{ παίρνουμε } |\rho^3|\leq|\alpha\rho^2|+|\beta\rho|+|\gamma|$$

19. Ὑπ. Ἀπό τήν $f(\rho)=0$ παίρνουμε $\alpha_\nu\rho^\nu+\alpha_{\nu-1}\rho^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1\rho+\alpha_0=0$ ἤ

$$\alpha_{\nu-1}\rho^{\nu-1}+\alpha_{\nu-2}\rho^{\nu-2}+\ldots+\alpha_1\rho+\alpha_0=-\alpha_\nu\rho^\nu \text{ κ.τ.λ.}$$

20. Ὑπ. Νά λάβετε ὑπόψη ὅτι $\rho^\nu+\alpha_{\nu-1}\rho^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1\rho+\alpha_0=0$ ἤ $\alpha_{\nu-1}\rho^{\nu-1}+\ldots+$ $+\alpha_1\rho+\alpha_0=-\rho^\nu$

21. Ἀπ. α) $2<\alpha<\dfrac{7+2\sqrt{7}}{3}$, β) $1<\alpha<2$, γ) $\alpha<1$ ἤ $\alpha>\dfrac{1}{3}\cdot(7+2\sqrt{7})$

22. Ὑπ. Ἄν $f(\alpha)=f(\beta)=f(\gamma)=f(\delta)=3$, τότε σχηματίστε τό πολυώνυμο $F(x)=f(x)-3$ καί παρατηρῆστε ὅτι $(x-\alpha)\mid F(x)$, $(x-\beta)\mid F(x)$ κ.τ.λ.

23. Ὑπ. Ἄν ρ_1,ρ_2,ρ_3 εἶναι οἱ ρίζες, τότε χρησιμοποιῆστε τήν ταυτότητα τοῦ Lagrange γιά τίς τριάδες $\sqrt{\rho_1}$, $\sqrt{\rho_2}$, $\sqrt{\rho_3}$ καί $\sqrt{\dfrac{1}{\rho_1}}$, $\sqrt{\dfrac{1}{\rho_2}}$, $\sqrt{\dfrac{1}{\rho_3}}$ καί λάβετε ὑπόψη τούς τύπους Vieta.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ V

1.5.1. α) Ύπ. $\etaμx-\etaμy=\frac{\sqrt{3}+1}{2} \Leftrightarrow 2\etaμ\frac{x-y}{2}\sigmaυν\frac{x+y}{2}=\frac{\sqrt{3}+1}{2} \Leftrightarrow 2\etaμ\frac{x-y}{2}\sigmaυν\frac{\pi}{4} > \frac{\sqrt{3}+1}{2}$

Άπ. $\left\{\begin{array}{l} x=2k\pi+\frac{2\pi}{3} \\ y=-2k\pi-\frac{\pi}{6} \end{array} k\in Z\right\}$ είτε $\left\{\begin{array}{l} x=2k\pi+\frac{5\pi}{6} \\ y=-2k\pi-\frac{\pi}{3} \end{array}\right. k\in Z$

β) Ύπ. $\sigmaυνx-\sigmaυνy=-\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 2\etaμ\frac{x+y}{2}\etaμ\frac{x-y}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Άπ. $\left\{\begin{array}{l} x=2k\pi+\frac{\pi}{2} \\ y=-2k\pi+\frac{\pi}{6} \end{array}, k\in Z\right\}$ είτε $\begin{array}{l} x=2k\pi+\frac{7\pi}{6} \\ y=-2k\pi-\frac{\pi}{2} \end{array}, k\in Z$

γ) Ύπ. $\etaμx\ \etaμy=\frac{3}{4} \Leftrightarrow \sigmaυν(x-y)-\sigmaυν(x+y)=\frac{3}{2}$ Άπ. $\left\{\begin{array}{l} x=k\pi+\frac{\pi}{3} \\ y=-k\pi+\frac{\pi}{3} \end{array}\right., k\in Z$

δ) Ύπ. $\sigmaυνx \cdot \sigmaυνy=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sigmaυν(x+y)+\sigmaυν(x-y)=-1$.

Άπ. $\left\{\begin{array}{l} x=k\pi+\frac{2\pi}{3} \\ y=k\pi \end{array}\right., k\in Z$ είτε $\left\{\begin{array}{l} x=k\pi \\ y=k\pi-\frac{2\pi}{3} \end{array}\right., k\in Z$

ε) Ύπ. $\frac{\sigmaυνx}{\sigmaυνy}=-\sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{\sigmaυνx-\sigmaυνy}{\sigmaυνx+\sigmaυνy}=\frac{-\sqrt{3}-1}{-\sqrt{3}+1} \Leftrightarrow \left\{\frac{-2\etaμ\frac{x+y}{2}\etaμ\frac{x-y}{2}}{2\sigmaυν\frac{x+y}{2}\sigmaυν\frac{x-y}{2}}=\frac{-\sqrt{3}-1}{-\sqrt{3}+1}\right.$

Άπ. $\left\{\begin{array}{l} x=k\pi-\frac{\pi}{6} \\ y=-k\pi+\frac{2\pi}{3} \end{array}\right., k\in Z$

στ') Ύπ. $\varepsilonφx+\varepsilonφy=1 \Leftrightarrow \frac{\etaμ(x+y)}{\sigmaυνx\sigmaυνy}=1$.

Άπ. $\left\{\begin{array}{l} x=k\pi+\frac{\pi}{4} \\ y=-k\pi \end{array}\right., k\in Z$ είτε $\left\{\begin{array}{l} x=k\pi \\ y=-\kappa\pi+\frac{\pi}{4} \end{array}\right. k\in Z$

ζ') Ύπ. $\etaμ^2x+\etaμ^2y=\frac{3+\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow \frac{1-\sigmaυν2x}{2}+\frac{1-\sigmaυν2y}{2}=\frac{3+\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sigmaυν2x+\sigmaυν2y=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$.

'Απ. $\begin{cases} x=k\pi+\dfrac{5\pi}{12} \\ y=-k\pi-\dfrac{\pi}{6}\end{cases}$, $k\in Z$ εἴτε $\begin{cases} x=k\pi-\dfrac{\pi}{6} \\ y=-k\pi+\dfrac{5\pi}{12}\end{cases}$, $k\in Z$.

2. 'Υπ. $4\eta\mu x\sigma\upsilon\nu y=3 \Leftrightarrow \eta\mu(x+y)+\eta\mu(x-y)=\dfrac{3}{2}$ 'Απ. $\begin{cases} x=\dfrac{4\pi}{3} \\ y=\dfrac{7\pi}{6}\end{cases}$ εἴτε $\begin{cases} x=\dfrac{7\pi}{3} \\ y=\dfrac{13\pi}{6}\end{cases}$

3. α) 'Υπ. Εἶναι πρωτοβάθμιο σύστημα ὡς πρός ημx, συνy

β) 'Υπ. $\left.\begin{aligned} x+2y&=\frac{\pi}{2} \\ \eta\mu x+\eta\mu 3y&=\frac{3}{2}\end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} x&=\frac{\pi}{2}-2y \\ \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-2y\right)+\eta\mu 3y&=\frac{3}{2}\end{aligned}\right\} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left.\begin{aligned} x&=\frac{\pi}{2}-2y \\ \sigma\upsilon\nu 2y+\eta\mu 3y&=\frac{3}{2}\end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{aligned} x&=\frac{\pi}{2}-2y \\ 1-2\eta\mu^2 y+3\eta\mu y-4\eta\mu^3 y&\ \frac{3}{2}\end{aligned}$ κ.τ.λ.

γ) 'Υπ. $\left.\begin{aligned} \eta\mu x+\eta\mu y&=\frac{3}{2} \\ \sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu y&=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} 2\eta\mu\frac{x+y}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{x-y}{2}&=\frac{3}{2} \\ 2\sigma\upsilon\nu\frac{x+y}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{x-y}{2}&=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}\right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{aligned} 2\eta\mu\frac{x+y}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{x-y}{2}&=\frac{3}{2} \\ \varepsilon\varphi\frac{x+y}{2}&=\sqrt{3}\end{aligned}$ κ.λ.

4. 'Υπ. Νά θέσετε $\sigma\varphi x=\dfrac{1}{\varepsilon\varphi x}$ καί $\sigma\varphi y=\dfrac{1}{\varepsilon\varphi y}$,

5. α) 'Υπ. Εἶναι πρωτοβάθμιο σύστημα ὡς πρός ημx, συνx. 'Η ἀπαλείφουσα εἶναι $(\beta_2\gamma_1-\beta_1\gamma_2)^2+(\alpha_1\gamma_2-\alpha_2\gamma_1)^2=(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)^2$.

β) 'Υπ. 'Από τό πρωτοβάθμιο σύστημα ὡς πρός μ^3, ν^3 βρεῖτε τά ημx καί συνx. 'Η ἀπαλείφουσα εἶναι $\mu^2+\nu^2=\lambda^2$.

γ) 'Απ. 'Η ἀπαλείφουσα εἶναι $\varepsilon\varphi\alpha\cdot(\sigma\varphi\beta-\varepsilon\varphi\gamma)=1$.

2.4. **1**. α) 'Απ. $2k\pi+\dfrac{7\pi}{6}<x<2k\pi+\dfrac{11\pi}{6}$, $k\in Z$

β) 'Απ. $2k\pi+\dfrac{\pi}{4}<x<2k\pi+\dfrac{7\pi}{4}$, $k\in Z$

γ) 'Απ. $2k\pi<x<2k\pi+\dfrac{\pi}{3}$ εἴτε $(2k+1)\pi<x<2k\pi+\dfrac{4\pi}{3}$, $k\in Z$.

δ) 'Απ. $2k\pi+\dfrac{\pi}{6}<x<2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ εἴτε $2k\pi+\dfrac{7\pi}{6}<x<(2k+1)\pi+\dfrac{\pi}{2}$, $k\in Z$.

2. 'Υπ. 'Η δοθεῖσα γράφεται: $(\eta\mu x-1)\ (2\eta\mu x-1)>0$.

3. 'Υπ. Εἶναι $\eta\mu^2 x+\eta\mu x+1>0$ γιά ὅλα τά τόξα x. 'Εργασθεῖτε ὅπως στό παράδειγμα 1 τῆς 2.3.

4. α) Ἀπ. $x \in \left(\frac{2\pi}{18}, \frac{3\pi}{18}\right) \cup \left(\frac{8\pi}{18}, \frac{9\pi}{18}\right) \cup \left(\frac{14\pi}{18}, \frac{15\pi}{18}\right) \cup \left(\frac{20\pi}{18}, \frac{21\pi}{18}\right) \cup \left(\frac{26\pi}{18}, \frac{27\pi}{18}\right) \cup$

$\cup \left(\frac{32\pi}{18}, \frac{33\pi}{18}\right)$

β) Ἀπ. $x \in \left(\frac{\pi}{15}, \frac{2\pi}{15}\right) \cup \left(\frac{7\pi}{15}, \frac{8\pi}{15}\right) \cup \left(\frac{13\pi}{15}, \frac{14\pi}{15}\right) \cup \left(\frac{19\pi}{15}, \frac{20\pi}{15}\right) \cup \left(\frac{25\pi}{15}, \frac{26\pi}{15}\right)$

5. Ὑπ. Ἡ δοθεῖσα εἶναι ἰσοδύναμη μέ τήν

$$(3\eta\mu x-1)^2 \cdot (2\eta\mu x-1) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(x-\frac{\pi}{4}\right)>0, \quad x \neq k\pi+\frac{3\pi}{4},\ k \in Z$$

4. 1. α) Τό σύστημα εἶναι ἰσοδύναμο μέ τό

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{\eta\mu(x+y)}{\sigma\upsilon\nu x\ \sigma\upsilon\nu y}=\alpha \\ 2\eta\mu x\eta\mu y=2\beta \\ \sigma\upsilon\nu x \cdot \sigma\upsilon\nu y \neq 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \left\{\begin{array}{l} 2\eta\mu(x+y)=\alpha\sigma\upsilon\nu(x+y)+\alpha\sigma\upsilon\nu(x-y) \\ \sigma\upsilon\nu(x-y)-\sigma\upsilon\nu(x+y)=2\beta \end{array}\right\} \\ \sigma\upsilon\nu x \cdot \sigma\upsilon\nu y \neq 0 \end{array}$$

β) Τό σύστημα εἶναι συμμετρικό καί γίνεται ἰσοδύναμο μέ τό

$$\eta\mu\frac{x+y}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{x-y}{2}=\lambda\eta\mu\alpha$$
$$\varepsilon\varphi\frac{x+y}{2}=\varepsilon\varphi\alpha$$

2. α) Ἀφαιρώντας ἀπό τήν πρώτη τή δεύτερη καί ἀπό τή δεύτερη τήν τρίτη παίρνουμε τό ἰσοδύναμο σύστημα: $\eta\mu^2 x+\eta\mu^2 y=1+\eta\mu z$

$$(\eta\mu z-\eta\mu x)(\eta\mu x+\eta\mu z+1)=0$$
$$(\eta\mu y-\eta\mu x)(\eta\mu x+\eta\mu y+1)=0$$

β) Ἀπ. Οἱ λύσεις δίνονται ἀπό τά ἀλγεβρικά συστήματα

$$x+y=2k\pi+\frac{\pi}{4}$$
$$x-y=2\lambda\pi\pm\frac{\pi}{4}$$

γ) Ὑπ. Θέστε $\frac{\varepsilon\varphi x}{1}=\frac{\varepsilon\varphi y}{2}=\frac{\varepsilon\varphi\omega}{3}=\lambda$, ὁπότε εἶναι $\lambda=\pm 1$.

3. α) Ἀπ. $\frac{\alpha^2}{\mu}+\frac{\beta^2}{\nu}=1$

β) Ἀπ. $\left(\sqrt[3]{\frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{\lambda}}\right)^2+\left(\sqrt[3]{\frac{\eta\mu\theta}{\lambda}}\right)^2=1$

γ) Ἀπ. $\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha^2}{\beta^2}+\frac{\gamma^2}{\delta^2}\right)\cdot\left(\frac{\alpha^2}{\beta^2}+\frac{\gamma^2}{\delta^2}-3\right)=\frac{\alpha}{\beta}$

δ) Ἀπ. $27\alpha^2\beta^2=(1-\alpha^2-\beta^2)^3$

4. α) Ἀπ. $2k\pi+\frac{\pi}{2}<x<2k\pi+\frac{7\pi}{12}$, εἴτε $2k\pi+\frac{23\pi}{12}<x<(2k+1)\pi$, $k \in Z$

β) Ὑπ. Νά θέσετε $\frac{x}{6}=y$, ὁπότε ἡ δοθεῖσα γράφεται:

$$2\sigma\upsilon\nu 2y-\eta\mu 3y-2>0.$$

γ) Ὑπ. Βρεῖτε ποῦ συναληθεύουν οἱ ἀνισώσεις:

$$\left\{\begin{array}{l} 2\sigma\upsilon\nu x-1>0 \\ x-2>0 \end{array}\right. \quad \text{εἴτε} \quad \begin{array}{l} 2\sigma\upsilon\nu x-1<0 \\ x-2<0 \end{array}$$

5. Ὑπ. Ἡ δοθεῖσα εἶναι ἰσοδύναμη μέ τήν ἀνίσωση

$$\log_{125}(\eta\mu^3 x)>\log_{125}(3\eta\mu x-2) \Leftrightarrow \eta\mu^3 x>3\eta\mu x-2>0$$

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ III. Στοιχεῖα θεωρίας ἀριθμῶν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ IV Πολυώνυμα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ V Τριγωνομετρία

ΕΚΔΟΣΗ Γ΄ (V)1980 - ΑΝΤΙΤΥΠΑ 75.000 - ΣΥΜΒΑΣΗ 3404/28-4-80

ΕΚΤΥΠΩΣΗ - ΒΙΒΛΙΟΔΕΣΙΑ : ΑΘ. ΒΑΣΙΛΕΙΟΥ & ΥΙΟΣ Ο.Ε.

ΟΕ
ΔΒ