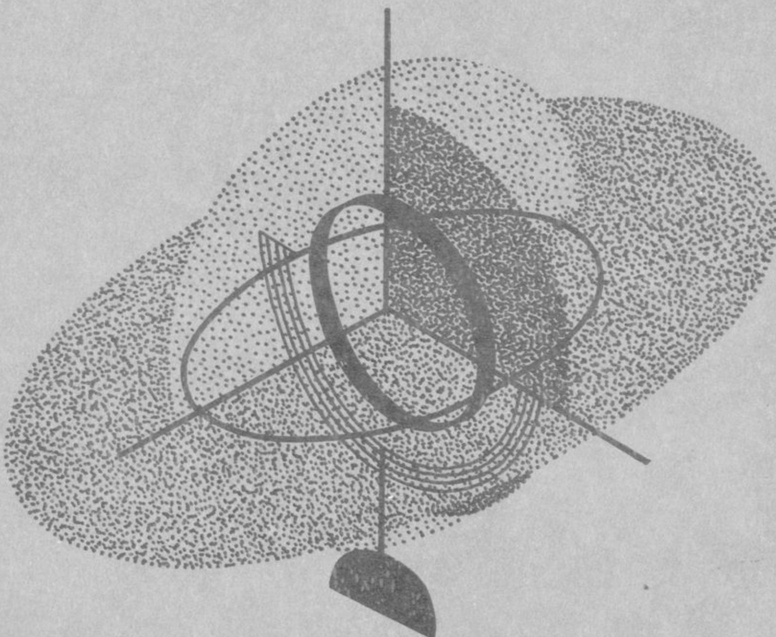
ΑΛΚΙΝΟΟΥ Ε. ΜΑΖΗ

ΦΥΣΙΚΗ

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑ



ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ ΑΘΗΝΑ 1979

Διπλό ↑ 9616
copy 2

ΦΥΣΙΚΗ

ΑΛΚΙΝΟΟΥ Ε. ΜΑΖΗ

ΦΥΣΙΚΗ

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑ

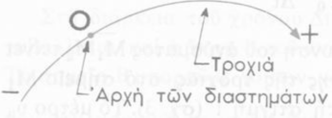
ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΑΘΗΝΑ 1979

ΜΗΧΑΝΙΚΗ

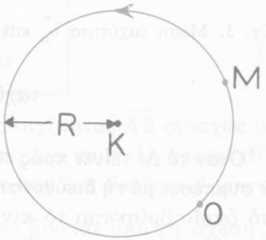
Καμπυλόγραμμη κίνηση

1. Καμπυλόγραμμη κίνηση

Ἕνα ὑλικό σημεῖο κινεῖται πάνω σέ *καμπύλη τροχιά* (σχ. 1), πού τή θεωροῦμε ὡς ἀκίνητο σύστημα ἀναφορᾶς. Ὁρίζουμε ἕνα σημεῖο Ο τῆς τροχιᾶς ὡς ἀρχή τῶν διαστημάτων καί τή θετική φορά. Τότε ἡ θέση Μ τοῦ κινητοῦ πάνω στήν τροχιά του προσδιορίζεται ἀπό τό μέτρο καί τή φορά τοῦ τόξου $\widehat{OM} = s$. Ἄν εἶναι γνωστή ἡ μορφή τῆς τροχιᾶς τοῦ ὑλικοῦ σημείου καί ἡ ἐξίσωση τῆς κινήσεώς του $s = f(t)$, τότε προσδιορίζεται τελείως ἡ κίνηση τοῦ ὑλικοῦ σημείου.



Σχ. 1. Καμπυλόγραμμη κίνηση ὑλικοῦ σημείου.



Σχ. 2. Κυκλική κίνηση ὑλικοῦ σημείου.

Ἔστω π.χ. ὅτι ἕνα ὑλικό σημεῖο Μ κινεῖται πάνω σέ κυκλική τροχιά πού ἔχει ἀκτίνα R (σχ. 2). Ἡ ἐξίσωση τῆς κινήσεως εἶναι $s = 3t^2 - 2t + 4$. Τότε σέ κάθε τιμή τοῦ χρόνου t ἀντιστοιχεῖ ὁρισμένη θέση τοῦ κινητοῦ πάνω στήν τροχιά του.

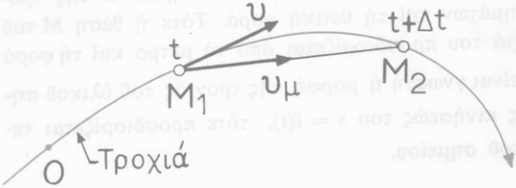
2. Ταχύτητα στήν καμπυλόγραμμη κίνηση

Στίς χρονικές στιγμές t καί $t + \Delta t$ *τό ὑλικό σημεῖο* Μ βρίσκεται ἀντίστοιχα στίς θέσεις M_1 καί M_2 (σχ. 3) καί οἱ ἀποστάσεις του ἀπό τήν ἀρχή Ο τῶν διαστημάτων εἶναι $OM_1 = s_1$ καί $OM_2 = s_2$. Στή διάρκεια τοῦ χρόνου Δt τό κινητό διατρέχει τό τόξο M_1M_2, πού ἔχει μέτρο $\Delta s = s_2 - s_1$.

Ὀνομάζουμε *μέση ταχύτητα* ($\vec{\upsilon}_\mu$) τοῦ κινητοῦ στή διάρκεια τοῦ χρόνου Δt τό ἄνυσμα:

$$\text{μέση ταχύτητα} \quad \vec{\upsilon}_\mu = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{\Delta t}$$

ὅπου $\overrightarrow{M_1M_2}$ εἶναι ἡ χορδή τοῦ τόξου M_1M_2. Ἡ μέση ταχύτητα δέν ἔχει καμιά φυσική σημασία, γιατί ἡ μετατόπιση M_1M_2, πού ἀναφέρεται στόν παραπάνω ὁρισμό, διαφέρει ἀπό τό διάστημα, πού στήν πραγματικότητα διατρέχει τό κινητό.



Σχ. 3. Μέση ταχύτητα $\vec{\upsilon}_\mu$ καί στιγμαία ταχύτητα $\vec{\upsilon}$.

Ὀνομάζουμε *ταχύτητα* ($\vec{\upsilon}$) τοῦ κινητοῦ στή χρονική στιγμή t τό ὅριο πρός τό ὁποῖο τείνει ἡ μέση ταχύτητα στή διάρκεια τοῦ χρόνου Δt, ὅταν τό Δt τείνει πρός τό μηδέν.

$$\text{ταχύτητα} \quad \vec{\upsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{\Delta t}$$

Ὅταν τό Δt τείνει πρός τό μηδέν, ἡ διεύθυνση τοῦ ἀνύσματος $\overrightarrow{M_1M_2}$ τείνει νά συμπέσει μέ τή διεύθυνση τῆς *ἐφαπτομένης* τῆς τροχιᾶς στό σημεῖο M_1 στό ὁποῖο βρίσκεται τό κινητό στή χρονική στιγμή t (σχ. 3). Τό μέτρο υ_μ τῆς μέσης ταχύτητας τείνει πρός ἕνα ὅριο υ, πού εἶναι τό μέτρο τῆς ταχύτητας τοῦ κινητοῦ Μ στή χρονική στιγμή t. Ὥστε:

Στήν καμπυλόγραμμη κίνηση ἡ ταχύτητα τοῦ κινητοῦ σέ μιά ὁρισμένη χρονική στιγμή t εἶναι ἄνυσμα $\vec{\upsilon}$, πού ἔχει ἀρχή τό κινητό, φορέα τήν ἐφαπτομένη στό ἀντίστοιχο σημεῖο τῆς τροχιᾶς, φορά τή φορά τῆς κινήσεως τοῦ κινητοῦ καί μέτρο υ, πού δίνεται ἀπό τή σχέση:

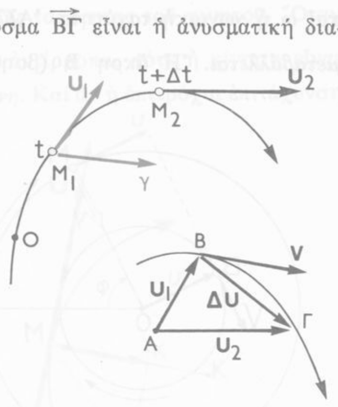
$$\boxed{\text{ταχύτητα} \quad \upsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}} \tag{1}$$

3. Ἐπιτάχυνση στήν καμπυλόγραμμη κίνηση

Στίς χρονικές στιγμές t καί t+Δt τό ὑλικό σημεῖο Μ ἔχει ἀντίστοιχα ταχύτητα $\vec{\upsilon}_1$ καί $\vec{\upsilon}_2$ (σχ. 4). Σέ ἕνα σημεῖο Α τοῦ ἐπιπέδου ἐφαρμόζουμε δύο ἀνύσματα $\vec{AB} = \vec{\upsilon}_1$ καί $\vec{A\Gamma} = \vec{\upsilon}_2$. Τό ἄνυσμα $\vec{B\Gamma}$ εἶναι ἡ ἀνυσματική διαφορά τῆς ταχύτητας τοῦ κινητοῦ στή διάρκεια τοῦ χρόνου Δt, δηλαδή εἶναι $\vec{\Delta\upsilon} = \vec{\upsilon}_2 - \vec{\upsilon}_1$. Ὀνομάζουμε *μέση ἐπιτάχυνση* $\vec{\gamma}$ τό ἄνυσμα:

$$\text{μέση ἐπιτάχυνση} \quad \vec{\gamma}_\mu = \frac{\vec{B\Gamma}}{\Delta t}$$

Ὅταν ὁ χρόνος Δt τείνει πρός τό μηδέν, ἡ μέση ἐπιτάχυνση $\vec{\gamma}_\mu$ τείνει πρός ἕνα ἀνυσματικό ὅριο $\vec{\gamma}$, πού εἶναι *ἡ ἐπιτάχυνση* τοῦ κινητοῦ Μ στή χρονική στιγμή t.



Σχ. 4. Ἐπιτάχυνση $\vec{\gamma}$ στήν καμπυλόγραμμη κίνηση ὑλικοῦ σημείου.

$$\boxed{\text{ἐπιτάχυνση} \quad \vec{\gamma} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{B\Gamma}}{\Delta t}} \qquad (1)$$

Στή διάρκεια τοῦ χρόνου Δt τό ἄνυσμα τῆς ταχύτητας $\vec{AB}$ συνεχῶς μεταβάλλεται καί ἡ ἄκρη Β τοῦ ἀνύσματος διαγράφει μιά καμπύλη γραμμή ΒΓ. Τό σημεῖο Β μποροῦμε λοιπόν νά τό θεωρήσουμε σάν ἕνα *βοηθητικό κινητό*, πού στή χρονική στιγμή t ἔχει *ταχύτητα* $\vec{V}$ πού δίνεται ἀπό τή σχέση:

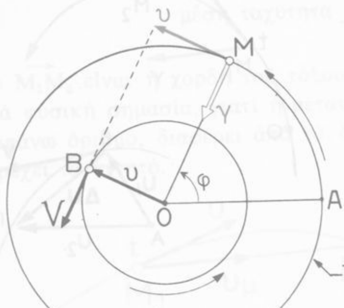
$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{B\Gamma}}{\Delta t} \qquad \text{ἄρα εἶναι} \qquad \vec{V} = \vec{\gamma}$$

Τό ἄνυσμα $\vec{V}$ ἔχει τή διεύθυνση τῆς ἐφαπτομένης τῆς καμπύλης ΒΓ στό σημεῖο Β (σχ. 4). Παρατηροῦμε ὅτι τό ἄνυσμα $\vec{\gamma}$ τῆς ἐπιταχύνσεως βρίσκεται πάντοτε στήν κοιλότητα τῆς τροχιᾶς OM_2.

Ἐφαρμογή. Θά ἐφαρμόσουμε τήν παραπάνω μέθοδο γιά νά προσδιορίσουμε τήν ἐπιτάχυνση σέ μιά ἁπλή καμπυλόγραμμη κίνηση. Ἕνα ὑλικό σημεῖο Μ ἐκτελεῖ κυκλική ὁμαλή κίνηση (σχ. 5). Ὅπως ξέρουμε, τό μέτρο τῆς ταχύτητας εἶναι *σταθερό* καί ἴσο μέ:

$$\upsilon = \frac{2\pi R}{T} \qquad \text{ἤ} \qquad \upsilon = \omega \cdot R$$

ὅπου R εἶναι ἡ ἀκτίνα τῆς κυκλικῆς τροχιᾶς, T ἡ περίοδος τῆς κινήσεως καί ω ή γωνιακή ταχύτητα. Ἀλλά ἡ διεύθυνση τῆς ταχύτητας $\vec{\upsilon}$ συνεχῶς *μεταβάλλεται.* Ἡ ἄκρη Β (βοηθητικό κινητό) τοῦ ἀνύσματος $\overrightarrow{OB} = \vec{\upsilon}$ σέ χρόνο Τ διαγράφει ὁλόκληρη περιφέρεια, πού ἔχει μῆκος $s = 2\pi\upsilon$.



Τό ἄνυσμα $\vec{V}$ τῆς ταχύτητας τοῦ σημείου Β εἶναι ἐφαπτόμενο τῆς περιφέρειας, ἄρα πάντοτε εἶναι *κάθετο* στό ἄνυσμα τῆς ταχύτητας $\vec{\upsilon}$ καί τό μέτρο V τῆς ταχύτητας τοῦ σημείου Β εἶναι ἴσο μέ:

$$V = \frac{2\pi\upsilon}{T}$$

Σχ. 5. Γιά τόν προσδιορισμό τῆς ἐπιταχύνσεως $\vec{\gamma}$ στήν ὁμαλή κυκλική κίνηση τοῦ ὑλικοῦ σημείου Μ.

Ἐπειδή εἶναι $\vec{V} = \vec{\gamma}$, ἔπεται ὅτι τό ἄνυσμα τῆς ἐπιταχύνσεως τῆς κινήσεως τοῦ κινητοῦ Μ ἔχει *φορέα* τήν ἐπιβατική ἀκτίνα ΟΜ, *φορά* πρός τό κέντρο Ο τῆς κυκλικῆς τροχιᾶς τοῦ κινητοῦ καί *μέτρο* γ ἴσο μέ:

$$\gamma = V \quad \text{ἄρα} \quad \gamma = \frac{2\pi\upsilon}{T}$$

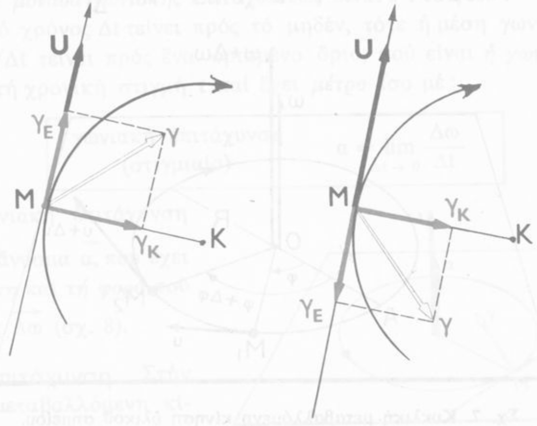
Ἀπό τήν ἐξίσωση $\upsilon = \frac{2\pi R}{T}$ ἔχουμε $\frac{\upsilon}{R} = \frac{2\pi}{T}$

Ὥστε ἡ *κεντρομόλος ἐπιτάχυνση* (γ_K) τοῦ κινητοῦ Μ ἔχει μέτρο:

$$\boxed{\text{κεντρομόλος ἐπιτάχυνση} \quad \gamma_K = \frac{\upsilon^2}{R} \quad \text{ἤ} \quad \gamma_K = \omega^2 \cdot R}$$

α. Ἐπιτρόχια καί κεντρομόλος ἐπιτάχυνση. Ἀναλύουμε τήν ἐπιτάχυνση $\vec{\gamma}$ σέ δύο συνιστῶσες, μιά κατά τή διεύθυνση τῆς ἐφαπτομένης τῆς τροχιᾶς καί τήν ἄλλη κατά διεύθυνση κάθετη στήν ἐφαπτομένη (σχ. 6).

Ἡ *ἐπιτρόχια ἐπιτάχυνση* $\vec{\gamma}_E$ χαρακτηρίζει τή μεταβολή τοῦ μέτρου τῆς ταχύτητας $\vec{\upsilon}$ τοῦ κινητοῦ. Ἡ *κεντρομόλος ἐπιτάχυνση* $\vec{\gamma}_K$ χαρακτηρίζει τή μεταβολή τῆς διευθύνσεως τοῦ ἀνύσματος $\vec{\upsilon}$ τῆς ταχύτητας τοῦ κινητοῦ. Ὅταν τά ἀνύσματα $\vec{\upsilon}$ καί $\vec{\gamma}_E$ εἶναι ὁμόρροπα ἤ ἀντίρροπα, τότε ἡ κίνηση εἶναι ἀντίστοιχα *ἐπιταχυνόμενη* ἤ *ἐπιβραδυνόμενη*. Καί ἄν ἡ ἐπιτρόχια ἐπιτάχυνση



Σχ. 6. Ἐπιτρόχια ἐπιτάχυνση $\vec{\gamma}_E$ καί κεντρομόλος ἐπιτάχυνση $\vec{\gamma}_K$.

$\vec{\gamma}_E$ εἶναι διαρκῶς ἴση μέ μηδέν ($\vec{\gamma}_E = 0$), τότε τό μέτρο υ τῆς ταχύτητας διατηρεῖται σταθερό καί ἡ κίνηση εἶναι *ὁμαλή*. Ὥστε:

Στήν καμπυλόγραμμη κίνηση ἡ ἐπιτάχυνση $\vec{\gamma}$ εἶναι συνισταμένη τῆς ἐπιτρόχιας ἐπιταχύνσεως $\vec{\gamma}_E$ καί τῆς κεντρομόλου ἐπιταχύνσεως $\vec{\gamma}_K$.

ἐπιτάχυνση $\vec{\gamma} = \vec{\gamma}_E + \vec{\gamma}_K$ καί $\gamma = \sqrt{\gamma_E^2 + \gamma_K^2}$

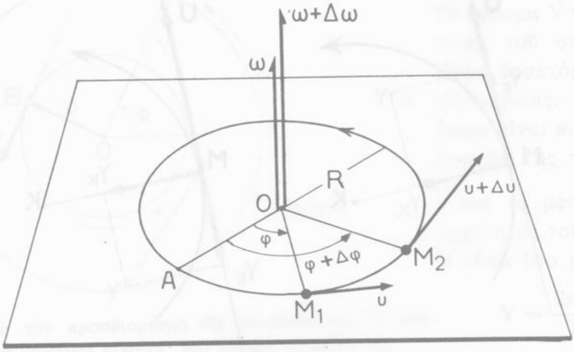
4. Κυκλική μεταβαλλόμενη κίνηση

Ἕνα ὑλικό σημεῖο Μ κινεῖται μέ *μεταβαλλόμενη κίνηση* πάνω σέ περιφέρεια, πού ἔχει ἀκτίνα R, καί στήν ἀρχή τῶν χρόνων (t = 0) βρίσκεται στήν ἀρχή τῶν ἀπομακρύνσεων Α (σχ. 7). Στίς χρονικές στιγμές t καί t+Δt τό κινητό βρίσκεται ἀντίστοιχα στίς θέσεις M_1 καί M_2 καί ἔχει:

χρόνος t	γωνιακή ταχύτητα ω	ταχύτητα υ
χρόνος t+Δt	γωνιακή ταχύτητα ω+Δω	ταχύτητα υ+Δυ

α. Γωνιακή ταχύτητα. Στή διάρκεια τοῦ χρόνου Δt ἡ ἐπιβατική ἀκτίνα διαγράφει τή γωνία Δφ καί ἑπομένως στή διάρκεια τοῦ χρόνου Δt ἡ *μέση γωνιακή ταχύτητα* ω_μ ἔχει *μέτρο*:

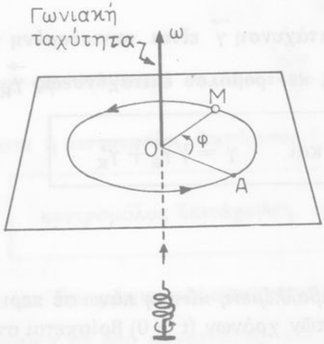
$$\text{μέση γωνιακή ταχύτητα} \qquad \omega_\mu = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$



Σχ. 7. Κυκλική μεταβαλλόμενη κίνηση ὑλικοῦ σημείου.

Ὅταν ὁ χρόνος Δt τείνει πρός τό μηδέν, ἡ μέση γωνιακή ταχύτητα Δφ/Δt τείνει πρός ἕνα ὁρισμένο ὅριο, πού εἶναι *ἡ γωνιακή ταχύτητα* ω στή χρονική στιγμή t καί ἔχει *μέτρο* ἴσο μέ:

$$\boxed{\text{γωνιακή ταχύτητα (στιγμιαία)} \qquad \omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}}$$



Σχ. 7α. Ἡ φορά τοῦ ἀνύσματος $\vec{\omega}$.

Ὅπως στήν κυκλική ὁμαλή κίνηση ἔτσι καί στήν κυκλική μεταβαλλόμενη κίνηση τό ἄνυσμα $\vec{\omega}$ τῆς γωνιακῆς ταχύτητας ἔχει ἀρχή τό κέντρο τῆς κυκλικῆς τροχιᾶς, διεύθυνση κάθετη στό ἐπίπεδο τῆς τροχιᾶς καί φορά πού καθορίζεται μέ τόν κανόνα τοῦ δεξιόστροφου κοχλία (σχ. 7α).

β. Γωνιακή ἐπιτάχυνση. Στή διάρκεια τοῦ χρόνου Δt ἡ γωνιακή ταχύτητα μεταβάλλεται κατά Δω καί ἑπομένως στή διάρκεια τοῦ χρόνου Δt τό κινητό ἔχει *μέση γωνιακή ἐπιτάχυνση* α_μ πού ἔχει *μέτρο* ἴσο μέ:

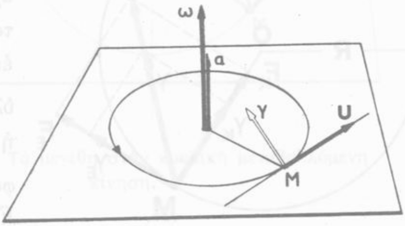
μέση γωνιακή ἐπιτάχυνση $\qquad \alpha_\mu = \dfrac{\Delta\omega}{\Delta t}$

Ἂν σ' αὐτή τήν ἐξίσωση βάλουμε $\Delta\omega = 1$ rad/sec καί $\Delta t = 1$ sec, βρίσκουμε ὅτι *μονάδα γωνιακῆς ἐπιταχύνσεως* εἶναι: 1 rad/sec².

Ὅταν ὁ χρόνος Δt τείνει πρός τό μηδέν, τότε ἡ μέση γωνιακή ἐπιτάχυνση $\Delta\omega/\Delta t$ τείνει πρός ἕνα ὁρισμένο ὅριο, πού εἶναι *ἡ γωνιακή ἐπιτάχυνση* α στή χρονική στιγμή t καί ἔχει *μέτρο* ἴσο μέ:

γωνιακή ἐπιτάχυνση (στιγμιαία)	$\alpha = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\omega}{\Delta t}$

Ἡ γωνιακή ἐπιτάχυνση εἶναι ἕνα ἄνυσμα $\vec{\alpha}$, πού ἔχει *τή διεύθυνση* καί *τή φορά* τοῦ ἀνύσματος $\vec{\Delta\omega}$ (σχ. 8).



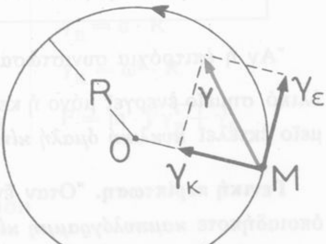
Σχ. 8. Γωνιακή ἐπιτάχυνση $\vec{\alpha}$.

γ. Ἐπιτάχυνση. Στήν κυκλική μεταβαλλόμενη κίνηση *ἡ ἐπιτάχυνση* $\vec{\gamma}$ εἶναι σέ κάθε στιγμή ἡ συνισταμένη δύο κάθετων μεταξύ τους συνιστωσῶν (σχ. 9), οἱ ὁποῖες εἶναι *ἡ ἐπιτρόχια ἐπιτάχυνση* $\vec{\gamma}_E$ καί *ἡ κεντρομόλος ἐπιτάχυνση* $\vec{\gamma}_K$.

ἐπιτάχυνση (στιγμιαία)	$\vec{\gamma} = \vec{\gamma}_E + \vec{\gamma}_K$

Ἐπειδή τά ἀνύσματα $\vec{\gamma}_E$ καί $\vec{\gamma}_K$ εἶναι πάντοτε κάθετα μεταξύ τους ἔπεται ὅτι σέ κάθε στιγμή *τό μέτρο* γ τῆς ἐπιταχύνσεως εἶναι ἴσο μέ:

ἐπιτάχυνση (στιγμιαία)	$\gamma = \sqrt{\gamma_E^2 + \gamma_K^2}$

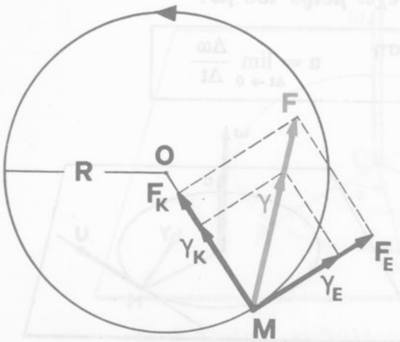


Σχ. 9. Οἱ δύο συνιστῶσες $\vec{\gamma}_E$ καί $\vec{\gamma}_K$ τῆς ἐπιταχύνσεως γ.

Τό μέτρο τῆς ἐπιτρόχιας καί τῆς κεντρομόλου ἐπιταχύνσεως εἶναι:

ἐπιτρόχια ἐπιτάχυνση	$\gamma_E = \alpha \cdot R$	κεντρομόλος ἐπιτάχυνση	$\gamma_K = \omega^2 \cdot R$

δ. Ἐφαρμογή τῆς ἐξισώσεως $\vec{F} = m \cdot \vec{\gamma}$ στήν κυκλική μεταβαλλόμενη κίνηση. Ἕνα ὑλικό σημεῖο M ἔχει μάζα m καί ἐκτελεῖ *κυκλική μεταβαλλόμενη κίνηση* πάνω σέ τροχιά, πού ἔχει ἀκτίνα R (σχ. 10). Σέ μιά χρονική στιγμή t τό κινητό ἔχει ἐπιτάχυνση $\vec{\gamma}$. Σύμφωνα μέ τό θεμελιώδη νόμο τῆς Δυναμικῆς ἐκείνη τή στιγμή ἐνεργεῖ πάνω στό ὑλικό σημεῖο δύναμη $\vec{F} = m \cdot \vec{\gamma}$, ἡ ὁποία ἔχει τή διεύθυνση καί τή φορά τῆς ἐπιταχύνσεως $\vec{\gamma}$ καί μέτρο $F = m \cdot \gamma$. Ἡ διεύθυνση τῆς δυνάμεως $\vec{F}$ βρίσκεται πάνω στό ἐπίπεδο τῆς κυκλικῆς τροχιᾶς.



Σχ. 10. Στό ὑλικό σημεῖο ἐνεργεῖ ἡ δύναμη $\vec{F} = m \cdot \vec{\gamma}$.

Ἡ δύναμη $\vec{F}$ μπορεῖ νά ἀναλυθεῖ σέ δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστῶσες:

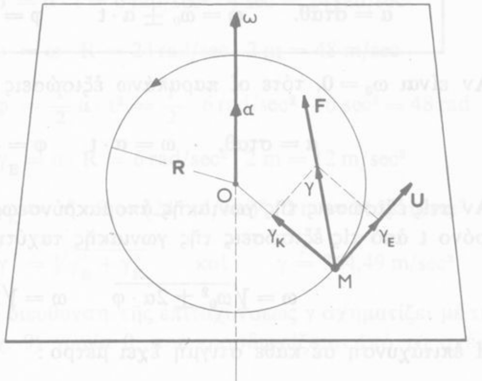
τήν ἐπιτρόχια συνιστῶσα	$\vec{F}_E = m \cdot \vec{\gamma}_E$
καί τήν κεντρομόλο συνιστῶσα	$\vec{F}_K = m \cdot \vec{\gamma}_K$

Ἄν ἡ ἐπιτρόχια συνιστῶσα $\vec{F}_E$ εἶναι ἴση μέ μηδέν ($F_E = 0$), τότε στό ὑλικό σημεῖο ἐνεργεῖ μόνο ἡ κεντρομόλος συνιστῶσα $\vec{F}_K$ καί τό ὑλικό σημεῖο ἐκτελεῖ *κυκλική ὁμαλή κίνηση*.

Γενική περίπτωση. Ὅταν ἕνα ὑλικό σημεῖο, πού ἔχει μάζα m, ἐκτελεῖ ὁποιαδήποτε *καμπυλόγραμμη κίνηση*, τότε σέ κάθε χρονική στιγμή t τό κινητό ἔχει *ἐπιτάχυνση* $\vec{\gamma}$ καί στό ὑλικό σημεῖο ἐνεργεῖ *ἡ δύναμη*:

$$\boxed{\vec{F} = m \cdot \vec{\gamma}}$$

ε. Ἀνακεφαλαίωση γιά τήν κυκλική μεταβαλλόμενη κίνηση. Ὅταν ἕνα ὑλικό σημεῖο Μ μέ μάζα m ἐκτελεῖ κυκλική μεταβαλλόμενη κίνηση, τότε σέ κάθε στιγμή ἡ κινητική κατάστασή του προσδιορίζεται ἀπό τά μεγέθη (σχ. 10α) πού ἀναφέρονται στόν παρακάτω πίνακα.



Σχ. 10α. Τά μεγέθη στήν κυκλική μεταβαλλόμενη κίνηση.

Κυκλική μεταβαλλόμενη κίνηση

θέση τοῦ κινητοῦ	$s = f(t)$	$\varphi = f(t)$
γωνιακή ταχύτητα	$\vec{\omega}$	$\omega = f(t)$
γωνιακή ἐπιτάχυνση	$\vec{\alpha}$	$\alpha = f(t)$
ταχύτητα (γραμμική)	$\vec{\upsilon}$	$\upsilon = f(t)$
ἐπιτάχυνση	$\vec{\gamma}$	$\sqrt{\gamma_E^2 + \gamma_K^2}$
ἐπιτρόχια ἐπιτάχυνση	$\vec{\gamma}_E$	$\gamma_E = \alpha \cdot R$
κεντρομόλος ἐπιτάχυνση	$\vec{\gamma}_K$	$\gamma_K = \omega^2 R$
δύναμη	$\vec{F} = m \cdot \vec{\gamma}$	$F = m \cdot \sqrt{\gamma_E^2 + \gamma_K^2}$

5. Κυκλική ὁμαλά μεταβαλλόμενη κίνηση

Ἄν τό μέτρο τῆς γωνιακῆς ἐπιταχύνσεως α διατηρεῖται σταθερό (α = σταθ.), τότε τό ὑλικό σημεῖο Μ ἐκτελεῖ *κυκλική ὁμαλά μεταβαλλόμενη κίνηση* πού μπορεῖ νά εἶναι ὁμαλά ἐπιταχυνόμενη ($\alpha > 0$) ἤ ὁμαλά ἐπιβραδυνόμενη ($\alpha < 0$). Ἄν τό κινητό ἔχει ἀρχική γωνιακή ταχύτητα ω_0 καί ξεκινάει ἀπό τήν ἀρχή τῶν ἀπομακρύνσεων, τότε ἰσχύουν οἱ ἐξισώσεις:

$$\boxed{\alpha = \text{σταθ.} \qquad \omega = \omega_0 \pm \alpha \cdot t \qquad \varphi = \omega_0 \cdot t \pm \frac{1}{2}\alpha \cdot t^2}$$

Ἄν εἶναι $\omega_0 = 0$, τότε οἱ παραπάνω ἐξισώσεις γράφονται:

$$\alpha = \text{σταθ.} \qquad \omega = \alpha \cdot t \qquad \varphi = \frac{1}{2}\alpha \cdot t^2$$

Ἄν στίς ἐξισώσεις τῆς γωνιακῆς ἀπομακρύνσεως φ ἀντικαταστήσουμε τό χρόνο t ἀπό τίς ἐξισώσεις τῆς γωνιακῆς ταχύτητας ω, βρίσκουμε:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 \pm 2\alpha \cdot \varphi} \qquad \omega = \sqrt{2\alpha \cdot \varphi}$$

Ἡ ἐπιτάχυνση σέ κάθε στιγμή ἔχει μέτρο:

$$\gamma = \sqrt{\gamma_E^2 + \gamma_K^2} \qquad \text{ὅπου} \qquad \gamma_E = \alpha \cdot R \qquad \gamma_K = \omega^2 \cdot R$$

Ἡ ταχύτητα σέ κάθε στιγμή ἔχει μέτρο:

$$\upsilon = \gamma_E \cdot t \qquad \text{ἤ} \qquad \upsilon = \omega \cdot R$$

Ἡ δύναμη πού ἐνεργεῖ στό ὑλικό σημεῖο ἔχει σέ κάθε στιγμή μέτρο:

$$F = m \cdot \gamma \qquad F = m\sqrt{\gamma_E^2 + \gamma_K^2}$$

Ἄν τό ὑλικό σημεῖο Μ ἔχει ἀρχική γωνιακή ἀπομάκρυνση φ_0, τότε εἶναι:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 \cdot t \pm \frac{1}{2}\alpha \cdot t^2$$

Παρατήρηση. Οἱ παραπάνω ἐξισώσεις εἶναι ἀνάλογες μέ τίς ἐξισώσεις πού ἔχουμε γιά τήν εὐθύγραμμη ὁμαλά μεταβαλλόμενη κίνηση.

Μερική περίπτωση. Ἄν ἡ γωνιακή ἐπιτάχυνση εἶναι ἴση μέ μηδέν ($\alpha = 0$), τότε ἡ γωνιακή ταχύτητα ω διατηρεῖται *σταθερή* ($\omega =$ σταθ.) καί τό κινητό ἐκτελεῖ *κυκλική ὁμαλή κίνηση*. Τότε ἡ ἐπιτρόχια ἐπιτάχυνση εἶναι ἴση μέ μηδέν ($\gamma_E = 0$) καί ἡ ταχύτητα εἶναι *σταθερή* ($\upsilon =$ σταθ.).

Σ' αὐτή τήν περίπτωση ὑπάρχει μόνο ἡ κεντρομόλος ἐπιτάχυνση $\vec{\gamma}_K$ πού ἔχει μέτρο $\gamma_K = \omega^2 \cdot R = \upsilon^2/R$.

Παράδειγμα. Ἕνα ὑλικό σημεῖο, ξεκινάει ἀπό τήν ἠρεμία καί ἐκτελεῖ κυκλική ὁμαλά ἐπιταχυνόμενη κίνηση μέ σταθερή γωνιακή ἐπιτάχυνση

$\alpha = 6\,\text{rad/sec}^2$. Ἡ ἀκτίνα τῆς τροχιᾶς εἶναι $R = 2\,\text{m}$. Στή χρονική στιγμή $t = 4\,\text{sec}$ τό κινητό ἔχει:

γωνιακή ταχύτητα $\omega = \alpha \cdot t = 6\,\text{rad/sec}^2 \cdot 4\,\text{sec} = 24\,\text{rad/sec}$

ταχύτητα $\upsilon = \omega \cdot R = 24\,\text{rad/sec} \cdot 2\,\text{m} = 48\,\text{m/sec}$

γωνιακή ἀπομάκρυνση $\varphi = \frac{1}{2}\alpha \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot 6\,\text{rad/sec}^2 \cdot 16\,\text{sec}^2 = 48\,\text{rad}$

ἐπιτρόχια ἐπιτάχυνση $\gamma_E = \alpha \cdot R = 6\,\text{rad/sec}^2 \cdot 2\,\text{m} = 12\,\text{m/sec}^2$

κεντρομόλο ἐπιτάχυνση $\gamma_K = \omega^2 \cdot R = (24\,\text{rad/sec})^2 \cdot 2\,\text{m} = 1152\,\text{m/sec}^2$

ἐπιτάχυνση $\gamma = \sqrt{\gamma_E^2 + \gamma_K^2}$ καί $\gamma \doteq 364{,}49\,\text{m/sec}^2$

Τή στιγμή $t = 4\,\text{sec}$ ἡ διεύθυνση τῆς ἐπιταχύνσεως γ σχηματίζει μέ τήν ἐπιβατική ἀκτίνα ΟΜ (σχ. 9) γωνία θ, πού προσδιορίζεται ἀπό τή σχέση $\varepsilon\varphi\,\theta = \gamma_E/\gamma_K$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Ἕνα ὑλικό σημεῖο κινεῖται πάνω σέ κυκλική τροχιά ἀκτίνας $R=20\,\text{cm}$ μέ σταθερή γωνιακή ἐπιτάχυνση $\alpha=2\,\text{rad/sec}^2$. Στή χρονική στιγμή $t=3\,\text{sec}$ νά βρεθεῖ: α) ἡ γωνιακή ταχύτητα ω· β) ἡ ταχύτητα υ· γ) ἡ κεντρομόλος γ_K καί ἡ ἐπιτρόχια ἐπιτάχυνση γ_E καί δ) ἡ ἐπιτάχυνση γ. Εἶναι $\omega_0 = 0$.

2. Ἕνα ὑλικό σημεῖο κινεῖται σέ κυκλική τροχιά ἀκτίνας $R = 0{,}2\,\text{m}$ καί σέ μιά χρονική στιγμή ἡ κεντρομόλος γ_K καί ἐπιτρόχια ἐπιτάχυνση γ_E εἶναι ἴσες. Ἐκείνη τή στιγμή ἡ ἐπιτάχυνση ἔχει μέτρο $\gamma = 4\,\text{m/sec}^2$. Νά βρεθεῖ: α) τό μέτρο τῆς γ_E καί τῆς γ_K· β) ἡ γωνιακή ταχύτητα ω καί ἡ γωνιακή ἐπιτάχυνση α· γ) ἡ γωνία θ πού σχηματίζει ἡ διεύθυνση τῆς ἐπιταχύνσεως γ μέ τήν ἐπιβατική ἀκτίνα· καί δ) ἡ ταχύτητα υ.

3. Ἕνα ὑλικό σημεῖο ἔχει μάζα $m = 2\,\text{kgr}$, κινεῖται πάνω σέ κυκλική τροχιά ἀκτίνας $R = 0{,}4\,\text{m}$ μέ σταθερή γωνιακή ἐπιτάχυνση $\alpha = 3\,\text{rad/sec}^2$. Νά βρεθεῖ πόσο εἶναι τό μέτρο F τῆς δυνάμεως, πού ἐνεργεῖ πάνω στό ὑλικό σημεῖο στή χρονική στιγμή $t = 10\,\text{sec}$. Εἶναι $\omega_0 = 0$.

4. Ἕνα ὑλικό σημεῖο ἔχει μάζα $m = 100\,\text{gr}$, εἶναι δεμένο στήν ἄκρη νήματος πού ἔχει μῆκος $R = 1\,\text{m}$ καί διαγράφει κατακόρυφο κύκλο. Σέ μιά στιγμή πού τό σῶμα κατεβαίνει, τό νῆμα σχηματίζει γωνία $\theta = 30^0$ μέ τήν κατακόρυφο πού περνάει ἀπό τό κέντρο τοῦ κύκλου. Ἐκείνη τή στιγμή τό ὑλικό σημεῖο ἔχει ταχύτητα $\upsilon = 2$ m/sec. Νά βρεθεῖ : α) ἡ κεντρομόλος γ_K καί ἡ ἐπιτρόχια ἐπιτάχυνση γ_E καθώς καί ἡ ἐπιτάχυνση γ ἐκείνη τή στιγμή· β) ἡ γωνιακή ἐπιτάχυνση α· καί γ) ἡ γωνία φ πού σχηματίζει ἡ διεύθυνση τῆς ἐπιταχύνσεως γ μέ τό νῆμα. $g = 10$ m/sec^2.

5. Ἕνα ὑλικό σημεῖο ἔχει μάζα $m = 600$ gr καί κινεῖται πάνω σέ κυκλική τροχιά ἀκτίνας $R = 6$ m. Σέ μιά χρονική στιγμή τό ὑλικό σημεῖο ἔχει ταχύτητα $\upsilon = 48$ m/sec καί ἡ δύναμη πού ἐνεργεῖ πάνω στό ὑλικό σημεῖο ἔχει μέτρο $F = 230{,}5$ N. Νά βρεθεῖ : α) ἡ ἐπιτάχυνση γ καί ἡ γωνιακή ταχύτητα ω· β) ἡ κεντρομόλος γ_K καί ἡ ἐπιτρόχια ἐπιτάχυνση γ_E· καί γ) ἡ γωνιακή ἐπιτάχυνση α καί ὁ χρόνος t πού κινήθηκε τό ὑλικό σημεῖο.

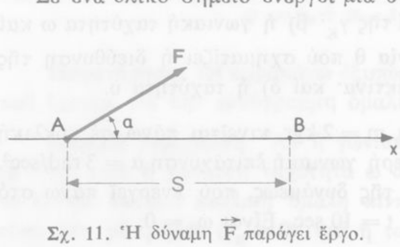
6. Ἕνα ὑλικό σημεῖο ἔχει μάζα $m = 4$ kgr καί ἐκτελεῖ ὁμαλή κυκλική κίνηση μέ σταθερή ταχύτητα $\upsilon = 10$ m/sec πάνω σέ κυκλική τροχιά, ἀκτίνας $R = 2{,}5$ m. Σέ μιά χρονική στιγμή ἐφαρμόζεται πάνω στό ὑλικό σημεῖο μιά δύναμη πού δίνει στό ὑλικό σημεῖο ἐπιτρόχια ἐπιβράδυνση ἴση μέ $\gamma_E = 2{,}25$ m/sec^2. Πόσο εἶναι τό μέτρο τῆς δυνάμεως F πού ἐνεργεῖ ἐκείνη τή στιγμή πάνω στό ὑλικό σημεῖο;

Μερικές περιπτώσεις παραγωγῆς ἔργου

6. Ἡ παραγωγή ἔργου

Σέ ἕνα ὑλικό σημεῖο ἐνεργεῖ μιά *σταθερή δύναμη* $\vec{F}$, ἡ ὁποία μετακινεῖ τό ὑλικό σημεῖο κατά διάστημα s (σχ. 11). Ὅπως ξέρουμε, σ' αὐτή τήν περίπτωση λέμε ὅτι *ἡ δύναμη παράγει ἔργο* W ἴσο μέ:

$$W = F \cdot s \cdot \text{συν}\,\alpha \qquad (1)$$



Σχ. 11. Ἡ δύναμη $\vec{F}$ παράγει ἔργο.

ὅπου α εἶναι ἡ γωνία πού σχηματίζει ἡ διεύθυνση τῆς δυνάμεως μέ τή διεύθυνση τῆς μετατοπίσεως.

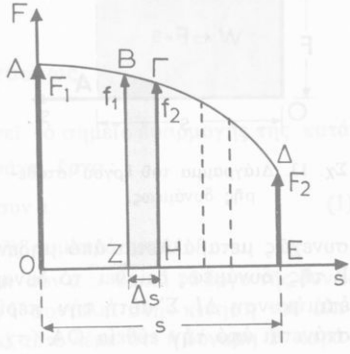
Ἄν εἶναι $\alpha = 0^0$, τότε ἡ δύναμη μετατοπίζει τό ὑλικό σημεῖο κατά τή διεύθυνσή της καί ἡ ἐξίσωση (1) γράφεται :

$$W = F \cdot s \qquad (2)$$

7. Ἔργο μεταβλητῆς δυνάμεως

Μιά δύναμη $\vec{F}$ ἔχει σταθερή διεύθυνση καί φορά καί μετακινεῖ πάνω στή διεύθυνσή της τό σημεῖο ἐφαρμογῆς κατά διάστημα s, ἀλλά στή διάρκεια αὐτῆς τῆς μετακινήσεως τό μέτρο τῆς δυνάμεως *συνεχῶς μεταβάλλεται.*

Ἡ μεταβολή τῆς δυνάμεως σέ συνάρτηση μέ τή μετατόπιση s παριστάνεται ἀπό μιά καμπύλη γραμμή ΑΒΓΔ (σχ. 12). Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι ἡ μετατόπιση s ἀποτελεῖται ἀπό πολλές στοιχειώδεις μετατοπίσεις Δs. Τότε μποροῦμε νά δεχτοῦμε ὅτι στή διάρκεια μιᾶς στοιχειώδους μετατοπίσεως τό ἀντίστοιχο τμῆμα ΒΓ τῆς καμπύλης τῶν μεταβολῶν τῆς δυνάμεως εἶναι *σταθερό* καί κατά μέσο ὅρο ἴσο μέ $f = \frac{f_1+f_2}{2}$. Ἑπομένως τό στοιχειῶδες ἔργο (ΔW) πού παράγεται κατά τή στοιχειώδη μετατόπιση Δs εἶναι ἴσο μέ:



Σχ. 12. Γιά τόν ὑπολογισμό τοῦ ἔργου μεταβλητῆς δυνάμεως.

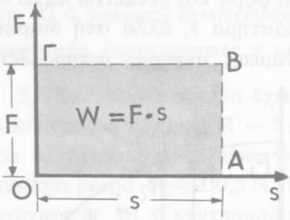
$$\Delta W = f \cdot \Delta s \quad \text{ἤ} \quad \Delta W = \frac{f_1+f_2}{2} \cdot \Delta s$$

Αὐτό τό στοιχειῶδες ἔργο *ἀριθμητικά εἶναι ἴσο μέ τό ἐμβαδό τῆς ἐπιφάνειας* ἑνός στοιχειώδους τραπεζίου ΖΒΓΗ. Τό ὁλικό ἔργο (W), πού παράγει ἡ μεταβλητή δύναμη, εἶναι ἀριθμητικά ἴσο μέ τό ἄθροισμα τῶν στοιχειωδῶν ἐμβαδῶν, στά ὁποῖα χωρίζεται ἡ ἐπιφάνεια ΟΑΔΕ. Ὅταν τό Δs τείνει πρός τό μηδέν, τό ἄθροισμα τῶν στοιχειωδῶν ἐμβαδῶν τείνει πρός τό ἐμβαδό τῆς ἐπιφάνειας ΟΑΔΕ. Ἀπό τά παραπάνω συνάγεται τό ἀκόλουθο συμπέρασμα:

Τό ἔργο, πού παράγεται ἀπό μεταβλητή δύναμη, ἀριθμητικά εἶναι ἴσο μέ τό ἐμβαδό τῆς ἐπιφάνειας πού ὁρίζεται ἀπό τήν καμπύλη τῶν μεταβολῶν τῆς δυνάμεως καί τόν ἄξονα τῆς μετατοπίσεως (διάγραμμα τοῦ ἔργου).

Ἄν ἡ δύναμη F εἶναι σταθερή καί μετακινεῖ τό σημεῖο ἐφαρμογῆς της κατά τή διεύθυνσή της κατά διάστημα s, τότε *τό διάγραμμα τοῦ ἔργου* εἶναι ἕνα ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο (σχ. 13).

α. Ἔργο τάσεως. Γιά νά ἐπιμηκύνουμε τό ἐλατήριο τοῦ δυναμομέτρου, ἐφαρμόζουμε σ' αὐτό μιά δύναμη πού ἔχει σταθερή διεύθυνση καί φορά, ἀλλά τό μέτρο της *αὐξάνεται ἀνάλογα* μέ τήν ἐπιμήκυνση τοῦ ἐλατηρίου. Ἡ μεταβολή λοιπόν τῆς δυνάμεως εἶναι *γραμμική συνάρτηση* τῆς ἐπιμηκύνσεως καί ἡ σχέση αὐτή ἐκφράζεται μέ τήν ἐξίσωση $F = k \cdot \Delta l$, ὅπου Δl εἶναι ἡ ἐπιμήκυνση τοῦ ἐλατηρίου καί k μιά σταθερή, πού ἐξαρτᾶται ἀπό τή φύση καί τίς διαστάσεις τοῦ ἐλατηρίου καί ὀνομάζεται *σκληρότητα τοῦ ἐλατηρίου*. Ἐφαρμόζοντας συνεχῶς μιά δύναμη προκαλοῦμε ἐπιμήκυνση τοῦ ἐλατηρίου, δηλαδή μετατόπιση τοῦ σημείου ἐφαρμογῆς τῆς δυνάμεως ἴση μέ Δl. Στή διάρκεια αὐτῆς τῆς μετατοπίσεως ἡ δύναμη συνεχῶς μεταβάλλεται ἀπό μηδέν ὡς μιά τιμή F. Αὐτή τήν τελική τιμή F τῆς δυνάμεως δείχνει τό δυναμόμετρο, ὅταν ἔχουμε προκαλέσει τήν ἐπιμήκυνση Δl. Σ' αὐτή τήν περίπτωση ἡ μεταβολή τῆς δυνάμεως παριστάνεται ἀπό τήν εὐθεία ΟΑ (σχ. 14) καί ἑπομένως τό ἔργο πού παράγει ἡ *μεταβλητή δύναμη* ἀριθμητικά εἶναι ἴσο μέ τό ἐμβαδό τοῦ ὀρθογώνιου τριγώνου ΟΑΒ. Τό ἔργο αὐτό ὀνομάζεται *ἔργο τάσεως* καί εἶναι ἴσο μέ:

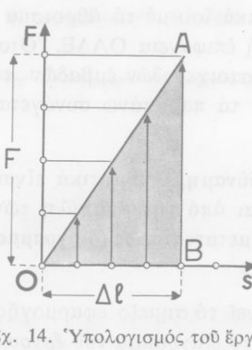


Σχ. 13. Διάγραμμα τοῦ ἔργου σταθερῆς δυνάμεως.

ἔργο τάσεως $W = \frac{1}{2} F \cdot \Delta l$ ἤ $W = \frac{1}{2} k \cdot (\Delta l)^2$

Αὐτό τό ἔργο πού ξοδεύτηκε γιά τήν ἐλαστική παραμόρφωση τοῦ ἐλατηρίου μένει *ἀποταμιευμένο* μέσα στό παραμορφωμένο ἐλατήριο μέ τή μορφή *δυναμικῆς ἐνέργειας*, πού ὀνομάζεται *δυναμική ἐνέργεια ἐλαστικότητας* (γιατί ὀφείλεται στήν ἐλαστική παραμόρφωση).

* Εἶναι $k = F/\Delta l$. Ἄν εἶναι $\Delta l = 1$, τότε εἶναι $k = F$. Ὥστε ἡ σταθερή k ἐκφράζει τή δύναμη, πού πρέπει νά ἐφαρμόσουμε στό ἐλατήριο, γιά νά προκαλέσουμε ἐπιμήκυνσή του ἴση μέ μιά μονάδα μήκους. Στό σύστημα MKS ἡ σταθερή k μετριέται σέ N/m.



Σχ. 14. Ὑπολογισμός τοῦ ἔργου τάσεως.

Παράδειγμα. Στό ἐλατήριο τοῦ δυναμομέτρου ἐφαρμόζουμε μιά μεταβλητή δύναμη καί προκαλοῦμε ἐπιμήκυνση τοῦ ἐλατηρίου κατά $\Delta l = 2$ cm. Ἐκείνη τή στιγμή τό δυναμόμετρο δείχνει ὅτι ἡ δύναμη εἶναι ἴση μέ $F = 60$ N. Τό ἔργο πού καταβάλαμε, γιά νά προκαλέσουμε τήν ἐπιμήκυνση τοῦ ἐλατηρίου, δηλαδή τό *ἔργο τάσεως* εἶναι ἴσο μέ:

$$W = \frac{1}{2} \cdot 60\ \mathrm{N} \cdot 0{,}02\ \mathrm{m} \quad \text{καί} \quad W = 0{,}60\ \mathrm{Joule}$$

8. Ἔργο κινητήριο καί ἔργο ἀντιστάσεως

Ὅταν μιά σταθερή δύναμη $\vec{F}$ μετακινεῖ τό σημεῖο ἐφαρμογῆς της κατά διάστημα s (σχ. 15), τότε ἡ δύναμη παράγει ἔργο:

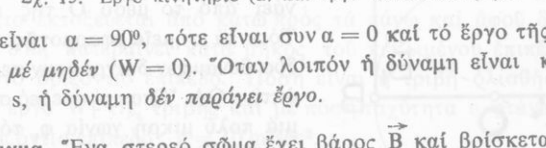
$$W = F \cdot s \cdot \text{συν}\, \alpha \qquad (1)$$

Ἀπό τήν ἐξίσωση (1) συνάγονται τά ἑξῆς συμπεράσματα:

α) Ὅταν εἶναι $0^0 \leqslant \alpha < 90^0$, τότε εἶναι συν $\alpha > 0$ καί τό ἔργο τῆς δυνάμεως F εἶναι *θετικό* ($W > 0$). Ἡ δύναμη F συντελεῖ στήν κίνηση τοῦ ὑλικοῦ σημείου, πάνω στό ὁποῖο ἐνεργεῖ καί τότε λέμε ὅτι ἡ δύναμη F παράγει *κινητήριο ἔργο*.

Ὅταν εἶναι $\alpha = 0^0$, τό ἔργο ἔχει τή μέγιστη τιμή $W = F \cdot s$.

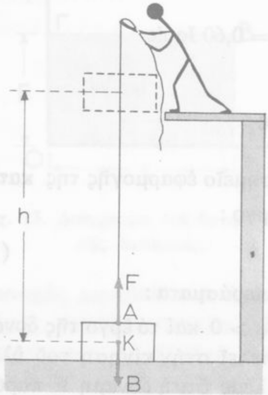
β) Ὅταν εἶναι $90^0 < \alpha \leqslant 180^0$, τότε εἶναι συν $\alpha < 0$ καί τό ἔργο τῆς δυνάμεως F εἶναι *ἀρνητικό* ($W < 0$). Ἡ δύναμη F ἀντιδρᾶ στήν κίνηση τοῦ ὑλικοῦ σημείου καί τότε λέμε ὅτι ἡ δύναμη F παράγει *ἔργο ἀντιστάσεως* (σχ. 15).



Σχ. 15. Ἔργο κινητήριο (α) καί ἔργο ἀντιστάσεως (β).

γ) Ἄν εἶναι $\alpha = 90^0$, τότε εἶναι συν $\alpha = 0$ καί τό ἔργο τῆς δυνάμεως F εἶναι *ἴσο μέ μηδέν* ($W = 0$). Ὅταν λοιπόν ἡ δύναμη εἶναι κάθετη στή μετατόπιση s, ἡ δύναμη *δέν παράγει ἔργο*.

Παράδειγμα. Ἕνα στερεό σῶμα ἔχει βάρος $\vec{B}$ καί βρίσκεται σέ ὕψος h πάνω ἀπό τό ἔδαφος. Ὅταν ἀφήσουμε ἐλεύθερο τό σῶμα, αὐτό πέφτει κατακόρυφα μέ τήν ἐπίδραση τοῦ βάρους του. Τότε τό βάρος $\vec{B}$ τοῦ σώματος παράγει *κινητήριο ἔργο* ἴσο μέ $W_B = B \cdot h$. Ἕνας ἐργάτης, γιά νά ἀνεβάσει τό ἴδιο σῶμα ἀπό τό ἔδαφος ὡς τό ὕψος h, ἐφαρμόζει στό σῶμα μιά κατακόρυφη σταθερή δύναμη $\vec{F}$ (σχ. 16). Τότε πάνω στό σῶμα ἐνεργοῦν οἱ δύο δυνάμεις $\vec{F}$ καί $\vec{B}$ πού ἔχουν τήν ἴδια διεύθυνση, ἀλλά ἀντίθετη φορά. Τά σημεῖα ἐφαρμογῆς τῶν δύο δυνάμεων μετακινοῦνται *ταυτόχρονα* πάνω στήν ἴδια κατακόρυφο. Σ' αὐτή τήν περίπτωση ἡ δύναμη $\vec{F}$ εἶναι κινητήρια δύναμη καί παράγει *κινητήριο ἔργο* ἴσο μέ $W_F = F \cdot h$. Κατά τήν ἀνύψωση τοῦ σώματος τό βάρος του $\vec{B}$ *ἀντιδρᾶ* στή μετακίνηση τοῦ σώματος, δηλαδή ἐνεργεῖ σάν *ἀντίσταση* καί παράγει *ἔργο ἀντιστάσεως* κατ' ἀπόλυτη τιμή ἴσο μέ $W_{αντ} = B \cdot h$. Ὥστε, ὅταν ἕνα σῶμα πέφτει ἐλεύθερα, τό βάρος του $\vec{B}$ παράγει *κινητήριο ἔργο*, ἐνῶ, ὅταν τό ἴδιο σῶμα ἀνυψώνεται, τό βάρος του $\vec{B}$ παράγει *ἔργο ἀντιστάσεως*.

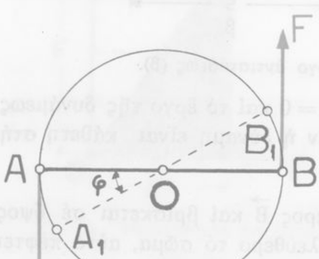


Σχ. 16. Τό βάρος $\vec{B}$ παράγει ἔργο ἀντιστάσεως.

Γενικά οἱ δυνάμεις πού χαρακτηρίζονται ὡς *ἀντιστάσεις*, ὅπως π.χ. ἡ τριβή ὀλισθήσεως, παράγουν *ἔργο ἀντιστάσεως*.

9. Ἔργο ζεύγους δυνάμεων

Σέ ἕνα στερεό ἐνεργεῖ ζεῦγος δυνάμεων, πού οἱ δυνάμεις του $\vec{F}$ καί $\vec{F}$ εἶναι πάντοτε κάθετες στήν εὐθεία AB, ἡ ὁποία συνδέει τά σημεῖα ἐφαρμογῆς τῶν δύο δυνάμεων (σχ. 17). Τό στερεό στρέφεται γύρω ἀπό ἄξονα πού εἶναι κάθετος στό ἐπίπεδο τοῦ ζεύγους καί περνάει ἀπό τό μέσο O τῆς εὐθείας AB. Τότε τά σημεῖα ἐφαρμογῆς A καί B τῶν δύο δυνάμεων διαγράφουν περιφέρεια μέ ἀκτίνα OA. Ὅταν τό στερεό στραφεῖ κατά μιά πολύ μικρή γωνία φ, τότε τά στοιχειώδη τόξα AA_1 καί BB_1 μποροῦν νά θεωρηθοῦν κατά προσέγγιση ὡς εὐθύγραμμα τμήματα πού ἔχουν τή διεύθυνση τῶν δύο δυνάμεων. Κάθε στοιχειῶδες τόξο ἔχει μῆκος $\widehat{AA_1} = OA \cdot φ$, ὅπου ἡ



Σχ. 17. Ἔργο τοῦ ζεύγους δυνάμεων.

γωνία φ μετριέται σέ ἀκτίνια. Ὅταν τό στερεό στρέφεται κατά τή μικρή γωνία φ, τό ζεῦγος παράγει ἔργο, ἴσο μέ:

$W = F \cdot \widehat{AA_1} + F \cdot \widehat{BB_1}$ ἤ $W = F \cdot 2(OA) \cdot \varphi$ καί $W = F \cdot (AB) \cdot \varphi$ (1)

Ἡ ροπή τοῦ ζεύγους ἔχει μέτρο $M = F \cdot (AB)$. Ἄρα ἡ ἐξίσωση (1) φανερώνει ὅτι:

Τό ἔργο ζεύγους (W) εἶναι ἴσο μέ τό γινόμενο τῆς ροπῆς τοῦ ζεύγους (M) ἐπί τή γωνία (φ) πού στράφηκε τό σῶμα.

$$\boxed{\text{ἔργο ζεύγους} \quad W = M \cdot \varphi}$$

ὅπου ἡ γωνία φ μετριέται σέ ἀκτίνια.

Παράδειγμα. Ἕνας τροχός στρέφεται μέ τήν ἐπίδραση ζεύγους, πού ἔχει ροπή $M = 30$ N · m. Ὅταν ὁ τροχός στρέφεται κατά γωνία $\varphi = 60^0 = \pi/3$ rad, τό ζεῦγος παράγει ἔργο: $W = 30$ N · m · $\pi/3$ rad $= 31{,}4$ Joule.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

7. Ἕνα αὐτοκίνητο ἔχει μάζα $m = 600$ kgr καί ἀρχίζει νά κατεβαίνει ἕναν εὐθύγραμμο κατηφορικό δρόμο, πού ἔχει κλίση $5^0/_0$, μέ σβυσμένη τή μηχανή του καί λυμένα τά φρένα του. Οἱ ἀντιστάσεις πού ὀφείλονται στόν ἀέρα καί στό ἔδαφος ἔχουν συνισταμένη $F_{αντ} = 70$ N πού ἔχει τή διεύθυνση τῆς κινήσεως, ἀλλά φορά ἀντίθετη μέ τή φορά τῆς κινήσεως. α) Πόση εἶναι ἡ δύναμη πού κινεῖ τό αὐτοκίνητο; β) Πόσο εἶναι τό κινητήριο ἔργο καί πόσο τό ἔργο ἀντιστάσεων, ὅταν τό αὐτοκίνητο διατρέξει διάστημα $s = 300$ m πάνω σ' αὐτό τό δρόμο; Πόση εἶναι τότε ἡ ταχύτητα υ τοῦ αὐτοκινήτου; $g = 10$ m/sec².

8. Ἕνα κιβώτιο ἔχει μάζα $m = 5$ kgr καί ἐκτοξεύεται μέ ἀρχική ταχύτητα $\upsilon_0 = 20$ m/sec κατά μῆκος ἑνός κεκλιμένου ἐπιπέδου, πού ἔχει κλίση 30^0. Τό κιβώτιο ἐκτοξεύεται ἀπό κάτω πρός τά πάνω καί ἀφοῦ διατρέξει διάστημα $s = 8$ m, κατεβαίνει κατά μῆκος τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου καί ξαναγυρίζει στό ὁριζόντιο ἐπίπεδο. Πόση εἶναι ἡ τριβή ὀλισθήσεως T, πόσο εἶναι τό ἔργο W_T τῆς τριβῆς καί μέ πόση ταχύτητα υ φτάνει τό κιβώτιο στό ὁριζόντιο ἐπίπεδο; $g = 10$ m/sec².

9. Ἕνα αὐτοκίνητο ἔχει μάζα $m = 1000$ kgr καί ἀρχίζει νά ἀνεβαίνει μέ σταθερή ταχύτητα $\upsilon = 8$ m/sec ἕναν εὐθύγραμμο ἀνηφορικό δρόμο, πού ἔχει κλίση 5 %. Οἱ ἀντιστάσεις, πού ὀφείλονται στόν ἀέρα καί στό ἔδαφος ἔχουν συνισταμένη ἴση μέ $F_{αντ} = 120$ N, ἡ ὁποία ἔχει τή διεύθυνση τῆς κινήσεως, φορά ἀντίθετη μέ τή φορά τῆς κινήσεως καί εἶναι ἀνεξάρτητη ἀπό τήν ταχύτητα. α) Πόση εἶναι ἡ δύναμη F πού ἀντιδρᾶ στήν κίνηση τοῦ αὐτοκινήτου καί πόσο τό ἔργο τῆς συνισταμένης τῶν ἀντιστάσεων κατά δευτερόλεπτο; β) Πόση εἶναι ἡ δύναμη ἕλξεως $F_{\kappa\iota\nu}$ καί ἡ ἰσχύς P, πού ἀναπτύσσει ὁ κινητήρας; $g = 10\ m/sec^2$.

10. Ἕνα φορτηγό αὐτοκίνητο ἔχει μάζα $m = 20\ tn$ καί κινεῖται μέ ταχύτητα $\upsilon_0 = 20\ m/sec$. Σέ μιά στιγμή ἀρχίζει νά κατεβαίνει ἕναν κατηφορικό δρόμο εὐθύγραμμο, πού ἔχει κλίση 3%. Ἡ μηχανή δέν ἀναπτύσσει καμιά ἕλξη. Οἱ διάφορες ἀντιστάσεις ἔχουν συνισταμένη ἴση μέ 80 N κατά τόνο. Πόσο εἶναι τό ἔργο τῶν ἀντιστάσεων, ὅταν τό αὐτοκίνητο διατρέξει διάστημα $s = 400\ m$ πάνω σ' αὐτό τό δρόμο καί πόση εἶναι ἡ ταχύτητα υ τοῦ αὐτοκινήτου; $g = 10\ m/sec^2$.

11. Ἕνα σῶμα ἔχει μάζα $m = 1\ kgr$ καί μπορεῖ νά κινεῖται πάνω σέ οριζόντιο ἐπίπεδο μέ τήν ἐπίδραση μιᾶς ὁριζόντιας δυνάμεως $F = 6\ N$. Ὁ συντελεστής τριβῆς ὀλισθήσεως εἶναι $\eta = 25$. α) Πόσο εἶναι τό ἔργο ἀντιστάσεως, ἐξαιτίας τῆς τριβῆς ὀλισθήσεως T, ὅταν τό σῶμα διατρέξει διάστημα $s = 3\ m$ πάνω στό ὁριζόντιο ἐπίπεδο; β) Πόση τελικά κινητική ἐνέργεια E ἔχει τό σῶμα; $g = 10/sec^2$.

12. Ἕνα αὐτοκίνητο ἔχει μάζα $m = 3000\ kgr$ καί κινεῖται μέ ταχύτητα $\upsilon = 10\ m/sec$ πάνω σέ ὁριζόντιο δρόμο. Κάποια στιγμή θά ἀρχίσει νά ἀνεβαίνει ἕναν ἀνηφορικό δρόμο πού παρουσιάζει ἀνύψωση 0,5 m γιά κάθε διάστημα ἴσο μέ 10 m. Οἱ ἀντιστάσεις καί στίς δύο περιπτώσεις εἶναι ἴδιες. Πόση πρόσθετη ἰσχύ P_1 πρέπει νά ἀναπτύξει ὁ κινητήρας, γιά νά ἀνεβαίνει τό αὐτοκίνητο μέ τήν ἴδια ταχύτητα τόν ἀνηφορικό δρόμο; $g = 10\ m/sec^2$.

13. Ἕνα ὑλικό σημεῖο μετακινεῖται κατά διάστημα $s = 120\ cm$ μέ τήν ἐπίδραση δυνάμεως, ἡ ὁποία μεταβάλλεται ὡς ἑξῆς: α) Στό πρῶτο 1/3 τοῦ διαστήματος ἡ δύναμη αὐξάνεται γραμμικά ἀπό 0 ὥς 10 N. β) Στό ἑπόμενο 1/3 τοῦ διαστήματος ἡ δύναμη διατηρεῖται σταθερή. γ) Στό τελευταῖο 1/3 τοῦ διαστήματος ἡ δύναμη ἐλαττώνεται γραμμικά ἀπό 10 N ὥς 0. Πόσο εἶναι τό ὁλικό ἔργο τῆς δυνάμεως;

14. Ἕνα ὑλικό σημεῖο μετακινεῖται κατά διάστημα s μέ τήν ἐπίδραση μιᾶς μεταβλητῆς δυνάμεως, πού οἱ μεταβολές της σέ συνάρτηση μέ τή μετατόπιση παριστάνονται ἀπό τόξο ἡμιπεριφέρειας, πού ἔχει διάμετρο τό διάστημα s. Πόσο εἶναι τό ἔργο αὐτῆς τῆς μεταβλητῆς δυνάμεως; Ἐφαρμογή: $s = 4\ m$.

15. Ὅταν, τραβώντας, ἐπιμηκύνουμε τό ἐλατήριο ἑνός δυναμομέτρου κατά $\Delta l = 2,5\ cm$, τό δυναμόμετρο δείχνει ὅτι ἐφαρμόζουμε δύναμη $F = 60\ N$. Πόσο ἔργο ξοδέψαμε, γιά νά ἐπιμηκύνουμε τό ἐλατήριο;

16. Γιά νά συμπιέσουμε ἕνα ἐλατήριο κατά $\Delta l = 3$ cm, καταβάλλουμε ἔργο ἴσο μέ W = 1,8 Joule. Πόση εἶναι ἡ μέγιστη τιμή τῆς δυνάμεως F πού ἐφαρμόσαμε στό ἐλατήριο;

17. Στό ἐλατήριο δυναμομέτρου ἐφαρμόζουμε δύναμη $F_1 = 50$ N καί τότε τό ἐλατήριο ἐπιμηκύνεται κατά Δl_1. Στό ἐλατήριο τοῦ δυναμομέτρου ἐφαρμόζουμε μαζί μέ τή δύναμη F_1 καί μιά ἄλλη δύναμη F = 80 N πού προκαλεῖ αὔξηση τῆς ἐπιμηκύνσεως τοῦ ἐλατηρίου κατά $\Delta l = 20$ cm. α) Πόσο ἔργο παράγεται κατά τή δεύτερη ἐπιμήκυνση τοῦ ἐλατηρίου; β) Πόση εἶναι ἡ ὁλική δυναμική ἐνέργεια τοῦ τεντωμένου ἐλατηρίου;

18. Μιά τροχαλία ἔχει ἀκτίνα R = 10 cm καί στρέφεται μέ ἕνα λουρί πού τά δύο τμήματά του εἶναι κάθετα στίς ἄκρες μιᾶς διαμέτρου τῆς τροχαλίας. Ὅταν ἡ τροχαλία κάνει 6 στροφές, τότε παράγεται ἔργο ἴσο μέ W = 226,08 Joule. Πόση εἶναι ἡ καθεμιά δύναμη τοῦ ζεύγους πού ἐνεργεῖ πάνω στήν τροχαλία;

19. Μιά τροχαλία ἔχει ἀκτίνα R = 10 cm καί στρέφεται μέ τήν ἐπίδραση ζεύγους δυνάμεων, πού καθεμιά εἶναι ἴση μέ F = 30 N καί εἶναι πάντοτε κάθετη στήν ἄκρη τῆς ἴδιας διαμέτρου. Σέ χρόνο t = 10 sec ἡ τροχαλία ἐκτελεῖ 80 στροφές. Πόση εἶναι ἡ ἰσχύς πού ἀναπτύσσει τό ζεῦγος τῶν δυνάμεων;

Κίνηση τῶν βλημάτων

10. Ἡ κίνηση τῶν βλημάτων

Ὅταν ἕνα βλῆμα κινεῖται μέσα στόν ἀέρα, τότε πάνω στό βλῆμα ἐνεργοῦν δύο ἐξωτερικές δυνάμεις, *τό βάρος* $\vec{B}$ τοῦ βλήματος καί *ἡ ἀντίσταση τοῦ ἀέρα* $\vec{F}_{\alpha\nu\tau}$. Ἡ ἐπίδραση πού ἐξασκεῖ ἡ ἀντίσταση τοῦ ἀέρα πάνω στήν κίνηση τοῦ βλήματος, εἶναι ἀρκετά πολύπλοκη καί γι' αὐτό στή στοιχειώδη μελέτη τῆς κινήσεως τῶν βλημάτων παραλείπουμε τήν ἀντίσταση τοῦ ἀέρα καί ὑποθέτουμε ὅτι τά βλήματα *κινοῦνται στό κενό*. Τότε πάνω στό βλῆμα ἐπιδροῦν δύο αἴτια κινήσεως, *τό βάρος* $\vec{B}$ τοῦ βλήματος καί *ἡ ἀρχική ταχύτητα* $\vec{\upsilon}_0$ πού δίνουμε στό βλῆμα, καί τό βλῆμα ἐκτελεῖ μιά *συνισταμένη κίνηση*, πού προκύπτει ἀπό τή σύνθεση δύο εὐθύγραμμων κινήσεων. Ἡ κίνηση τοῦ βλήματος ἀνάγεται στήν κίνηση πού ἔχει τό κέντρο βάρος του, δηλαδή τό βλῆμα θεωρεῖται ὡς *ὑλικό σημεῖο*, πού ἔχει μάζα m ἴση μέ τή μάζα τοῦ βλήματος.

11. Κατακόρυφη βολή

Ὅταν ἕνα βλῆμα (ὑλικό σημεῖο) ἐκτοξεύεται *κατακόρυφα πρός τά πάνω* μέ ἀρχική ταχύτητα $\vec{\upsilon}_0$, τότε τό βλῆμα ἐκτελεῖ ταυτόχρονα δύο εὐθύγραμμες κινήσεις: α) ἐξαιτίας τῆς ἀρχικῆς ταχύτητας $\vec{\upsilon}_0$ ἐκτελεῖ *εὐθύγραμμη ὁμαλή κίνηση πρός τά πάνω* καί β) ἐξαιτίας τοῦ βάρους του $\vec{B} = m\vec{g}$ τό βλῆμα *πέφτει κατακόρυφα* μέ σταθερή ἐπιτάχυνση $\vec{g}$. Γιά τήν ταχύτητα καί τήν ἐπιτάχυνση θεωροῦμε θετική φορά τή φορά ἀπό κάτω πρός τά πάνω. Ἄν τό βλῆμα κινηθεῖ ἐπί χρόνο t, ἀποκτᾶ ταχύτητα υ, πού εἶναι συνισταμένη τῆς ἀρχικῆς ταχύτητας υ_0 καί τῆς ταχύτητας $\upsilon_{\pi\tau\acute{\omega}\sigma\epsilon\omega\varsigma} = -gt$, πού ἀποκτᾶ ἐξαιτίας τῆς πτώσεώς του. Ὥστε στή χρονική στιγμή t *ἡ συνισταμένη ταχύτητα εἶναι κατακόρυφη* καί ἔχει μέτρο ἴσο μέ:

$$\upsilon = \upsilon_0 - g \cdot t \tag{1}$$

Στή διάρκεια τοῦ χρόνου t τό βλῆμα, ἐξαιτίας τῆς ἀρχικῆς ταχύτητάς του υ_0, θά ἀνέβαινε σέ ὕψος $\upsilon_0 t$, ἀλλά ταυτόχρονα, ἐξαιτίας τοῦ βάρους του B, θά ἔπεφτε κατά $-gt^2$. Ἄρα στή χρονική στιγμή t τό βλῆμα βρίσκεται σέ ὕψος h ἴσο μέ:

$$h = \upsilon_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2 \tag{2}$$

Ἀπό τίς ἐξισώσεις (1) καί (2) συνάγεται ὅτι ἡ κατακόρυφη βολή πρός τά πάνω εἶναι *εὐθύγραμμη ὁμαλά ἐπιβραδυνόμενη κίνηση.*

Ἡ ἄνοδος τοῦ βλήματος συνεχίζεται, ὅσο ἡ συνισταμένη ταχύτητα υ ἔχει *θετική τιμή* ($\upsilon > 0$). Ἡ ταχύτητα γίνεται ἴση μέ μηδέν στή χρονική στιγμή:

$$\boxed{\text{διάρκεια ἀνόδου} \qquad t_{\alpha\nu o\delta} = \frac{\upsilon_0}{g}} \tag{3}$$

Βάζοντας αὐτή τήν τιμή τοῦ χρόνου στήν ἐξίσωση (2) βρίσκουμε ὅτι τό βλῆμα φτάνει σέ ὕψος:

$$\boxed{\text{μέγιστο ὕψος} \qquad h_{\mu\epsilon\gamma} = \frac{\upsilon_0^2}{2g}} \tag{4}$$

Ὅταν ὁ χρόνος εἶναι $t < \frac{\upsilon_0}{g}$, ἡ ταχύτητα εἶναι *θετική* ($\upsilon > 0$) καί τό βλῆμα *ἀνεβαίνει*.

Ὅταν ὁ χρόνος γίνει $t > \frac{\upsilon_0}{g}$, ἡ ταχύτητα εἶναι *ἀρνητική* ($\upsilon < 0$), δηλαδή ἔχει φορά πρός τά κάτω καί τό βλῆμα *κατεβαίνει*.

Ὥστε στή χρονική στιγμή $t = \frac{\upsilon_0}{g}$ *ἀντιστρέφεται* ἡ φορά τῆς κινήσεως τοῦ βλήματος καί τό βλῆμα ἀρχίζει νά πέφτει ἐλεύθερα χωρίς ἀρχική ταχύτητα.

Τό βλῆμα φτάνει στό ἔδαφος μέ ταχύτητα υ' ἴση μέ:

$$\upsilon' = \sqrt{2g \cdot h_{\mu\varepsilon\gamma}} = \sqrt{2g \cdot \frac{\upsilon_0^2}{2g}} \quad \text{ἤ} \quad \boxed{\upsilon' = \upsilon_0}$$

Ἡ διάρκεια τῆς καθόδου εἶναι:

$$t_{\kappa\alpha\theta} = \sqrt{\frac{2h_{\mu\varepsilon\gamma}}{g}} = \sqrt{\frac{2}{g} \cdot \frac{\upsilon_0^2}{2g}} = \frac{\upsilon_0}{g} \quad \text{ἤ} \quad \boxed{t_{\kappa\alpha\theta} = t_{\alpha\nu o\delta}}$$

Ὥστε ἡ κάθοδος τοῦ βλήματος διαρκεῖ, ὅσο καί ἡ ἄνοδός του καί τό βλῆμα ἐπιστρέφει στό ἔδαφος μέ ταχύτητα, πού τό μέτρο της (υ') εἶναι ἴσο μέ τό μέτρο τῆς ἀρχικῆς ταχύτητας (υ_0). Τό συμπέρασμα αὐτό εἶναι συνέπεια *τῆς ἀρχῆς τῆς διατηρήσεως τῆς ἐνέργειας*, γιατί ἡ ἀρχική κινητική ἐνέργεια τοῦ βλήματος στό ὕψος h ἔχει μεταβληθεῖ σέ δυναμική ἐνέργεια, ἡ ὁποία κατά τήν κάθοδο τοῦ βλήματος μεταβάλλεται πάλι σέ κινητική ἐνέργεια. Ὥστε ἰσχύει ἡ ἐξίσωση:

$$\frac{1}{2} m \cdot \upsilon_0^2 = m \cdot g \cdot h$$

Ὅταν τό βλῆμα ἐκτοξεύεται *κατακόρυφα πρός τά κάτω* μέ ἀρχική ταχύτητα υ_0, τότε τό σῶμα ἐκτελεῖ μιά συνισταμένη κίνηση, πού εἶναι *εὐθύγραμμη ὁμαλά ἐπιταχυνόμενη κίνηση* καί ἰσχύουν οἱ ἐξισώσεις:

$$\upsilon = \upsilon_0 + g \cdot t \qquad \text{καί} \qquad h = \upsilon_0 \cdot t + \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

Παρατήρηση. Ἄν στήν ἐξίσωση (2) βάλουμε τήν τιμή τοῦ t ἀπό τήν ἐξίσωση (1), βρίσκουμε:

$$h = \frac{\upsilon_0^2 - \upsilon^2}{2g} \qquad \text{ἄρα} \qquad \upsilon = \pm \sqrt{\upsilon_0^2 - 2gh} \tag{5}$$

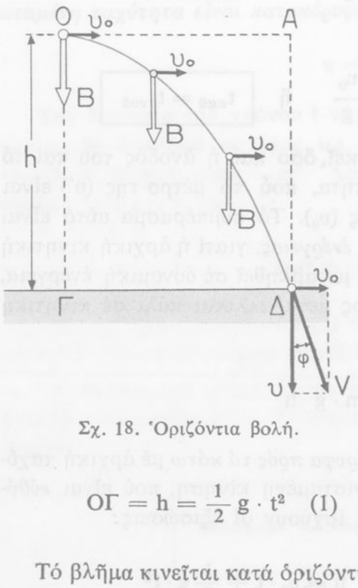
Ἡ ἐξίσωση (5) φανερώνει ὅτι τό βλῆμα περνάει δύο φορές ἀπό ἕνα σημεῖο Μ τῆς κατακορύφου, πού βρίσκεται σέ ὕψος h, καί τή μιά φορά τό βλῆμα ἔχει ταχύτητα θετική (+υ), ἐνῶ τήν ἄλλη φορά ἔχει ταχύτητα ἀρνητική (−υ). Ὥστε στό σημεῖο Μ ἡ ταχύτητα τοῦ βλήματος ἔχει *τήν ἴδια ἀπόλυτη τιμή*.

12. Ὁριζόντια βολή

Ἀπό ἕνα σημεῖο Ο πού βρίσκεται σέ ὕψος h πάνω ἀπό τό ὁριζόντιο ἐπίπεδο τοῦ ἐδάφους, ἐκτοξεύεται μέ *ὁριζόντια ἀρχική ταχύτητα* υ_0 ἕνα βλῆμα (ὑλικό σημεῖο), πού ἔχει βάρος $B = mg$ (σχ. 18). Τότε τό βλῆμα ἐκτελεῖ ταυτόχρονα δύο εὐθύγραμμες κινήσεις:

α) ἐξαιτίας τῆς ἀρχικῆς ταχύτητας $\vec{\upsilon}_0$ ἐκτελεῖ *ὁριζόντια ὁμαλή κίνηση*·

β) ἐξαιτίας τοῦ βάρους του $\vec{B}$ τό βλῆμα *πέφτει κατακόρυφα* μέ σταθερή ἐπιτάχυνση $\vec{g}$.



Σχ. 18. Ὁριζόντια βολή.

Ἡ συνισταμένη κίνηση εἶναι μιά *καμπυλόγραμμη κίνηση* καί τό βλῆμα διαγράφοντας ἕνα τόξο *ἡμιπαραβολῆς* (ΟΔ) φτάνει στό σημεῖο Δ, πού εἶναι ἡ τέταρτη κορυφή τοῦ παραλληλογράμμου, πού ὁρίζεται ἀπό τούς δύο δρόμους:

$$\mathrm{O\Gamma} = h = \frac{1}{2} g \cdot t^2 \quad (1) \qquad \text{καί} \qquad \mathrm{OA} = \Gamma\Delta = s = \upsilon_0 \cdot t \quad (2)$$

Τό βλῆμα κινεῖται κατά ὁριζόντια διεύθυνση, ὅσο χρόνο διαρκεῖ ἡ ἐλεύθερη πτώση του. Ὥστε *ἡ διάρκεια* τῆς κινήσεως τοῦ βλήματος προσδιορίζεται ἀπό τήν ἐξίσωση (1) καί εἶναι:

$$\boxed{\text{διάρκεια κινήσεως} \quad t = \sqrt{\frac{2h}{g}}}$$

Ἑπομένως τό διάστημα s, πού διανύει τό βλῆμα κινούμενο ὁριζόντια, εἶναι :

βεληνεκές (ὁριζόντια μετατόπιση)	$s = \upsilon_0 \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}}$	(3)

Ἡ ἐξίσωση (3) δίνει τήν ἀπόσταση τοῦ σημείου Δ τοῦ ἐδάφους ἀπό τήν κατακόρυφο ΟΓ, δηλαδή δίνει *τό βεληνεκές* τοῦ βλήματος. Τό βλῆμα φτάνοντας στό σημεῖο Δ ἔχει τήν ἀρχική ὁριζόντια ταχύτητα υ_0 καί τήν κατακόρυφη ταχύτητα $\upsilon = gt$, πού ἀπόκτησε κατά τήν πτώση του. Ὥστε τό βλῆμα φτάνει στό σημεῖο Δ μέ ταχύτητα $\vec{V}$, πού εἶναι *ἡ συνισταμένη* τῶν ταχυτήτων τῶν δύο συνιστωστῶν κινήσεων ($\vec{V} = \vec{\upsilon}_0 + \vec{\upsilon}$), ἔχει τή διεύθυνση τῆς ἐφαπτομένης τῆς τροχιᾶς τοῦ βλήματος στό σημεῖο Δ καί μέτρο ἴσο μέ :

$$V = \sqrt{\upsilon_0^2 + \upsilon^2} \quad \text{ἤ} \quad V = \sqrt{\upsilon_0^2 + 2gh}$$

Τό βλῆμα συναντᾶ τό ἔδαφος μέ μιά γωνία φ πού προσδιορίζεται ἀπό τή σχέση :

$$\text{εφ}\,\varphi = \frac{\upsilon_0}{\upsilon} \quad \text{ἤ} \quad \text{εφ}\,\varphi = \frac{\upsilon_0}{\sqrt{2gh}}$$

Ἡ τελική ταχύτητα V τοῦ βλήματος βρίσκεται εὔκολα καί ἄν ἐφαρμόσουμε τήν ἀρχή τῆς διατηρήσεως τῆς ἐνέργειας. Στό σημεῖο Ο τό βλῆμα ἔχει ὁλική μηχανική ἐνέργεια :

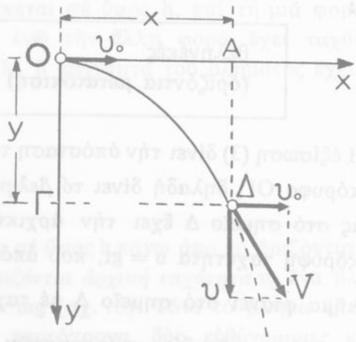
$$E_{\text{ολ}} = m \cdot g \cdot h + \frac{1}{2} m \cdot \upsilon_0^2$$

Ὅταν τό βλῆμα φτάνει στό σημεῖο Δ, ὅλη ἡ ἀρχική ἐνέργεια τοῦ βλήματος ἔχει μεταβληθεῖ σέ κινητική ἐνέργεια καί ἔχουμε τήν ἐξίσωση :

$$\frac{1}{2} m \cdot V^2 = m \cdot g \cdot h + \frac{1}{2} m \cdot \upsilon_0^2 \quad \text{ἄρα} \quad V = \sqrt{\upsilon_0^2 + 2gh}$$

Ὅταν ἕνα ἀεροπλάνο ἀφήνει μιά βόμβα νά πέσει, τότε συμβαίνει ὁριζόντια βολή, γιατί τή στιγμή πού ἀφήνεται ἐλεύθερη ἡ βόμβα, αὐτή ἔχει ὁριζόντια ταχύτητα υ_0 ἴση μέ τήν ταχύτητα τοῦ ἀεροπλάνου. Γι' αὐτό ἡ βόμβα ἀφήνεται ἐλεύθερη νά πέσει πρίν φτάσει τό ἀεροπλάνο πάνω ἀπό τό στόχο.

Προσδιορισμός τῆς τροχιᾶς. Θεωροῦμε τούς δύο ὀρθογώνιους ἄξονες Οx καί Οy (σχ. 19). Στή χρονική στιγμή t τό βλῆμα βρίσκεται στό σημεῖο Δ πού ὁρίζεται ἀπό τά διαστήματα ΟΑ = x καί ΟΓ = y πού εἶναι:



$$x = \upsilon_0 \cdot t \quad \text{καί} \quad y = \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

Ἐπειδή εἶναι:

$$t = \frac{x}{\upsilon_0} \quad \text{ἔχουμε} \quad y = \frac{g}{2\upsilon_0^{\,2}} \cdot x^2$$

Ἡ ἐξίσωση πού βρήκαμε, παριστάνει μιά *παραβολή* πού ἔχει ἄξονα τόν Οy.

Σχ. 19. Ἡ τροχιά ΟΔ εἶναι τόξο παραβολῆς.

Παράδειγμα. Ἕνα ἀεροπλάνο κινεῖται μέ σταθερή ὁριζόντια ταχύτητα υ σέ ὕψος h = 2000 m καί σέ κάποια στιγμή ἀφήνει ἐλεύθερη νά πέσει μιά βόμβα. Αὐτή φτάνει σέ ἕνα σημεῖο τοῦ ἐδάφους πού ἀπέχει s = 5000 m ἀπό τήν κατακόρυφο πού περνάει ἀπό τό σημεῖο στό ὁποῖο ἦταν τό ἀεροπλάνο τή στιγμή πού ἄφησε τή βόμβα ἐλεύθερη. Πόση εἶναι ἡ ταχύτητα υ τοῦ ἀεροπλάνου: $g = 10\ \text{m/sec}^2$.

Ἡ βόμβα κινεῖται ἐπί χρόνο: $t = \sqrt{\dfrac{2h}{g}} = \sqrt{\dfrac{2 \cdot 2000\ \text{m}}{10\ \text{m/sec}^2}} = 20\ \text{sec}$

Ὥστε εἶναι: $\upsilon = \dfrac{s}{t} = \dfrac{5000\ \text{m}}{20\ \text{sec}} = 250\ \text{m/sec}$

13. Πλάγια βολή

Ἀπό ἕνα σημεῖο Ο τοῦ ὁριζόντιου ἐδάφους ἐκτοξεύεται ἕνα βλῆμα (ὑλικό σημεῖο) μέ ἀρχική ταχύτητα υ_0, πού ἡ διεύθυνσή της σχηματίζει γωνία α μέ τό ὁριζόντιο ἐπίπεδο (σχ. 20). Τό βλῆμα ἔχει βάρος B = mg. Ἀναλύουμε τήν ταχύτητα υ_0 σέ δύο συνιστῶσες, *τήν ὁριζόντια συνιστῶσα* υ_x καί *τήν κατακόρυφη συνιστῶσα* υ_y, πού ἀντίστοιχα ἔχουν μέτρο:

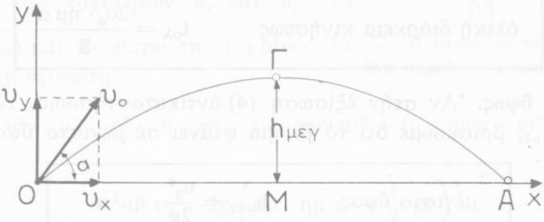
$$\upsilon_x = \upsilon_0 \cdot \text{συν}\,\alpha \qquad \text{καί} \qquad \upsilon_y = \upsilon_0 \cdot \text{ημ}\,\alpha$$

Ὥστε τό βλῆμα ἐκτελεῖ ταυτόχρονα *δύο εὐθύγραμμες κινήσεις*, μιά ὁρι-

ζόντια ὁμαλή κίνηση μέ ταχύτητα $υ_x$ καί μιά *κατακόρυφη ὁμαλά ἐπιβραδυνόμενη* κίνηση μέ ἀρχική ταχύτητα $υ_y$ (δηλαδή κατακόρυφη βολή πρός τά πάνω). Τό βλῆμα ξεκινάει στή χρονική στιγμή $t = 0$ καί στή χρονική στιγμή t ἔχει:

$$\text{οριζόντια ταχύτητα} \qquad υ_x = υ_0 \cdot συν\,α \tag{1}$$

$$\text{κατακόρυφη ταχύτητα} \qquad υ_y = υ_0 \cdot ημ\,α - gt \tag{2}$$



Σχ. 20. Πλάγια βολή.

Στή διάρκεια τοῦ χρόνου t τό βλῆμα ἔχει διανύσει κατά τίς διευθύνσεις Ox καί Oy τά διαστήματα:

$$\text{οριζόντια} \qquad x = υ_x \cdot t \qquad ἤ \qquad x = υ_0 t \cdot συν\,α \tag{3}$$

$$\text{κατακόρυφα} \qquad y = υ_y t - \frac{1}{2} gt^2 \qquad ἤ \qquad y = υ_0 t \cdot ημ\,α - \frac{1}{2} gt^2 \tag{4}$$

Οἱ ἐξισώσεις (1) καί (2) προσδιορίζουν *τήν ταχύτητα* τοῦ βλήματος σέ συνάρτηση μέ τό χρόνο καί οἱ ἐξισώσεις (3) καί (4) προσδιορίζουν σέ κάθε χρονική στιγμή *τή θέση* τοῦ βλήματος πάνω στό κατακόρυφο ἐπίπεδο xOy στό ὁποῖο κινεῖται τό βλῆμα.

Σχῆμα τῆς τροχιᾶς. Ἄν στήν ἐξίσωση (4) ἀντικαταστήσουμε τήν τιμή τοῦ t ἀπό τήν ἐξίσωση (3) βρίσκουμε:

$$\boxed{\text{ἐξίσωση τῆς τροχιᾶς} \qquad y = x \cdot εφ\,α - \frac{g}{2υ_0^2 \cdot συν^2 α} \cdot x^2} \tag{5}$$

Αὐτή ἡ ἐξίσωση εἶναι τῆς μορφῆς $y = α\,x + β\,x^2$, ὅπου α καί β εἶναι σταθεροί συντελεστές, δηλαδή εἶναι ἐξίσωση παραβολῆς. Ὥστε ἡ τροχιά τοῦ βλήματος εἶναι *παραβολή*, πού ὁ ἄξονάς της εἶναι κατακόρυφος.

Διάρκεια τῆς κινήσεως. Τό βλῆμα κινεῖται, ὅσο διαρκεῖ *ἡ κατακόρυφη κίνησή του*, δηλαδή ἡ ἄνοδος καί ἡ κάθοδός του. Ἀπό τήν ἐξίσωση (2) βρίσκουμε ὅτι ἡ διάρκεια τῆς ἀνόδου εἶναι:

$$\text{διάρκεια ἀνόδου} \qquad t_{\alpha\nu o\delta} = \frac{\upsilon_0 \cdot \eta\mu\,\alpha}{g}$$

Τόση εἶναι καί ἡ διάρκεια τῆς καθόδου (§ 11) καί ἑπομένως *ἡ ὁλική διάρκεια* ($t_{o\lambda}$) τῆς κινήσεως εἶναι:

$$\boxed{\text{ὁλική διάρκεια κινήσεως} \qquad t_{o\lambda} = \frac{2\upsilon_0 \cdot \eta\mu\,\alpha}{g}}$$

Μέγιστο ὕψος. Ἄν στήν ἐξίσωση (4) ἀντικαταστήσουμε τό t μέ τήν τιμή τοῦ $t_{\alpha\nu o\delta}$, βρίσκουμε ὅτι τό βλῆμα φτάνει σέ μέγιστο ὕψος:

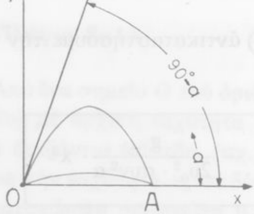
$$\boxed{\text{μέγιστο ὕψος} \qquad h_{\mu\epsilon\gamma} = \frac{\upsilon_0^2}{2g} \cdot \eta\mu^2\,\alpha}$$

Βεληνεκές. Ἡ ὁριζόντια κίνηση τοῦ βλήματος διαρκεῖ, ὅσο καί ἡ κατακόρυφη κίνησή του (ἄνοδος καί κάθοδος). Ἄν στήν ἐξίσωση (3) ἀντικαταστήσουμε τό t μέ τήν τιμή τοῦ $t_{o\lambda}$ βρίσκουμε ὅτι τό *βεληνεκές* (s) εἶναι:

$$\boxed{\text{βεληνεκές} \qquad s = \frac{\upsilon_0^2}{g} \cdot \eta\mu\,2\alpha} \qquad (6)$$

Ἄν τό μέτρο (υ_0) τῆς ἀρχικῆς ταχύτητας διατηρεῖται σταθερό, τό βεληνεκές ἔχει τή μέγιστη δυνατή τιμή του, ὅταν εἶναι ημ 2α = 1, ἄρα 2α = 90° καί α = 45°. Τότε ἔχουμε:

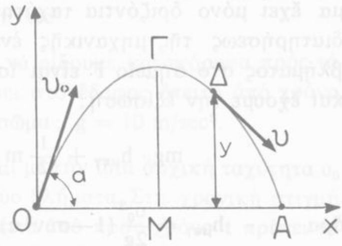
$$\boxed{\text{μέγιστο βεληνεκές} \qquad s_{\mu\epsilon\gamma} = \frac{\upsilon_0^2}{g}}$$



Σχ. 21. Δύο γωνίες βολῆς μέ τό ἴδιο βεληνεκές.

Ἀπό τήν ἐξίσωση (6) φαίνεται ὅτι σέ δύο συμπληρωματικές γωνίες (α καί 90°—α) ἀντιστοιχεῖ *τό ἴδιο βεληνεκές* (s), γιατί τότε ἡ τιμή τοῦ ημ 2α ἀντιστοιχεῖ σέ δύο παραπληρωματικές γωνίες (σχ.21). Ἡ βολή, πού ἀντιστοιχεῖ στή μικρότερη γωνία, ὀνομάζεται *εὐθύφορη*, ἐνῶ ἐκείνη, πού ἀντιστοιχεῖ στή μεγαλύτερη γωνία, ὀνομάζεται *ἐπισκηπτική*.

Ταχύτητα τοῦ βλήματος σέ ὁρισμένο ὕψος. Σέ μιά χρονική στιγμή t τό βλῆμα βρίσκεται στό σημεῖο Δ τῆς τροχιᾶς του, δηλαδή σέ ὕψος y πάνω ἀπό τό ὁριζόντιο ἐπίπεδο Ox (σχ. 22). Ἐκείνη τή στιγμή ἡ ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ τοῦ βλήματος ἔχει τή διεύθυνση τῆς ἐφαπτομένης τῆς τροχιᾶς στό σημεῖο Δ. εἶναι ἡ συνισταμένη τῶν ταχυτήτων $\vec{\upsilon}_x$ καί $\vec{\upsilon}_y$ ($\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_x + \vec{\upsilon}_y$) καί τό μέτρο της (υ) δίνεται ἀπό τήν ἐξίσωση:



Σχ. 22. Ἡ ταχύτητα τοῦ βλήματος σέ ἕνα σημεῖο τῆς τροχιᾶς του.

$$\upsilon^2 = \upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 \quad ἤ \quad \upsilon^2 = (\upsilon_0 \cdot συν\,\alpha)^2 + (\upsilon_0 \cdot ημ\,\alpha - g)^2$$

καί

$$\upsilon^2 = \upsilon_0{}^2 - 2g\left(\upsilon_0 t \cdot ημ\,\alpha - \frac{1}{2}gt\right)^2$$

Ἀπό τήν τελευταία ἐξίσωση καί τήν ἐξίσωση (4) βρίσκουμε ὅτι εἶναι:

ταχύτητα στό ὕψος y	$\upsilon = \sqrt{\upsilon_0{}^2 - 2gy}$

α. Ἄλλος τρόπος μελέτης τῆς πλάγιας βολῆς. Τό βλῆμα κινεῖται πάνω στό κατακόρυφο ἐπίπεδο xOy (σχ. 23). Ἡ ἐξίσωση (5) τῆς τροχιᾶς τοῦ βλήματος γράφεται καί ἔτσι:

$$y = x\left(εφ\,\alpha - \frac{g}{2\upsilon_0{}^2 \cdot συν^2\,\alpha} \cdot x\right) \tag{7}$$

Ὅταν τό βλῆμα βρίσκεται στό ἔδαφος (σημεῖα O καί A), εἶναι y = 0, καί τότε σύμφωνα μέ τήν ἐξίσωση (7) εἶναι:

$$x = 0 \quad ἤ \quad εφ\,\alpha - \frac{g}{2\upsilon_0{}^2\, συν^2\,\alpha} \cdot x = 0 \tag{8}$$

Ὅταν εἶναι x = 0 καί y = 0, τό βλῆμα βρίσκεται στήν ἀρχή O τῶν ἀξόνων. Ἄρα ἡ δεύτερη τιμή τοῦ x, πού βρίσκουμε ἀπό τήν ἐξίσωση (8) ἀντιστοιχεῖ στό σημεῖο A τοῦ ἐδάφους καί φανερώνει τό βεληνεκές OA = s πού εἶναι ἴσο μέ:

$$x = \frac{2\upsilon_0{}^2 \cdot συν^2\,\alpha \cdot εφ\,\alpha}{g} \quad ἄρα \quad s = \frac{\upsilon_0{}^2}{g} \cdot ημ\,2\alpha$$

Στήν κορυφή Γ τῆς παραβολῆς, δηλαδή στό μέγιστο ὕψος ($h_{μεγ}$), τό βλῆμα ἔχει μόνο ὁριζόντια ταχύτητα $υ_x = υ_0 \cdot συν\,α$. Σύμφωνα μέ τήν ἀρχή διατηρήσεως τῆς μηχανικῆς ἐνέργειας ἡ ὁλική μηχανική ἐνέργεια τοῦ βλήματος στό σημεῖο Γ εἶναι ἴση μέ τήν ἀρχική κινητική ἐνέργειά του καί ἔχουμε τήν ἐξίσωση:

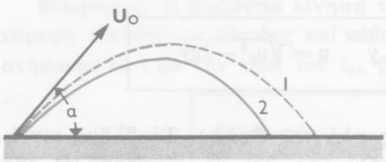
$$mg \cdot h_{μεγ} + \frac{1}{2} m \cdot (υ_0 \cdot συν\,α)^2 = \frac{1}{2} m \cdot υ_0^2$$

ἄρα $\quad h_{μεγ} = \frac{υ_0^2}{2g}(1 - συν^2 α) \quad$ καί $\quad h_{μεγ} = \frac{υ_0^2}{2g} \cdot ημ^2 α$

Στό σημεῖο Δ τῆς τροχιᾶς, πού βρίσκεται σέ ὕψος h, τό μέτρο υ τῆς ταχύτητας τοῦ βλήματος βρίσκεται ἀπό τήν ἐξίσωση:

$$mg \cdot y + \frac{1}{2} m \cdot υ^2 = \frac{1}{2} m \cdot υ_0^2 \qquad ἄρα \qquad υ = \sqrt{υ_0^2 - 2gy}$$

6. Τροχιά τοῦ βλήματος στόν ἀέρα. Ὅταν τό βλῆμα κινεῖται μέσα στόν ἀέρα, τότε στό βλῆμα ἐνεργοῦν *δύο ἐξωτερικές δυνάμεις*, τό βάρος του $\vec{B}$ καί ἡ ἀντίσταση τοῦ ἀέρα $\vec{F}_{αντ}$, πού ἐπηρεάζει τήν κίνηση τοῦ βλήματος. Μέσα στόν ἀέρα τό βλῆμα διαγράφει μιά ἀσύμμετρη καμπύλη τροχιά, πού ὀνομάζεται *βλητική τροχιά* (σχ. 23).



Σχ. 23. Τροχιά τοῦ βλήματος χωρίς ἀντίσταση τοῦ ἀέρα (1) καί μέ ἀντίσταση τοῦ ἀέρα (2).

Τό μέγιστο ὕψος καί τό βεληνεκές εἶναι μικρότερα ἀπό ἐκεῖνα πού ἀντιστοιχοῦν στήν ἰδανική παραβολική τροχιά. Ἐκτός ὅμως ἀπό τήν ἀντίσταση τοῦ ἀέρα ἐπιδροῦν στό βλῆμα καί ἄλλα αἴτια (π. χ. ἡ περιστροφική κίνηση τῆς Γῆς), πού ἐπηρεάζουν τή διαμόρφωση τῆς βλητικῆς τροχιᾶς.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

20. Ἕνα βλῆμα ἐκτοξεύεται κατακόρυφα πρός τά πάνω μέ ἀρχική ταχύτητα $υ_0 = 80$ m/sec. Νά βρεθεῖ πόσο διαρκεῖ ἡ ἄνοδος τοῦ βλήματος, σέ πόσο μέγιστο ὕψος θά φτάσει καί πόση ταχύτητα υ ἔχει στή χρονική στιγμή $t = 12$ sec · $g = 10$ m/sec².

21. Ἕνα παιδί ρίχνει κατακόρυφα πρός τά πάνω σφαῖρες μέ τήν ἴδια ἀρχική ταχύτητα $υ_0$. Κάθε σφαίρα τή ρίχνει, ὅταν ἡ ἀμέσως προηγούμενη φτάσει στό μέγιστο ὕψος. Σέ πόσο ὕψος φτάνουν οἱ σφαῖρες, ἄν ρίχνονται δύο σφαῖρες κατά δευτερόλεπτο ; $g = 10 \ m/sec^2$.

22. Μέ πόση ἀρχική ταχύτητα πρέπει νά ρίξουμε κατακόρυφα πρός τά πάνω ἕνα σῶμα, ὥστε αὐτό νά ξαναγυρίσει στό ἔδαφος ἔπειτα ἀπό χρόνο $t = 20$ sec ; Σέ πόσο ὕψος θά φτάσει τό σῶμα ; $g = 10 \ m/sec^2$.

23. Ἀπό τό ἴδιο σημεῖο τοῦ ἐδάφους καί μέ τήν ἴδια ἀρχική ταχύτητα $υ_0$ ἐκτοξεύουμε κατακόρυφα πρός τά πάνω δύο βλήματα. Στή χρονική στιγμή $t = 0$ ἐκτοξεύουμε τό πρῶτο βλῆμα Α. Ἔπειτα ἀπό πόσο χρόνο t πρέπει νά ἐκτοξεύσουμε τό δεύτερο βλῆμα Β, ὥστε τά δύο βλήματα νά συναντηθοῦν στό μέσο τοῦ μέγιστου ὕψους στό ὁποῖο ἔφτασε τό βλῆμα Α ;

24. Ἀπό ἕνα σημεῖο Ο τοῦ ἐδάφους στή χρονική στιγμή $t = 0$ ἐκτοξεύουμε κατακόρυφα πρός τά πάνω ἕνα βλῆμα μέ ἀρχική ταχύτητα $υ_1 = 100$ m/sec. Τήν ἴδια χρονική στιγμή ἀπό ἕνα σημεῖο Μ τῆς κατακορύφου πού περνάει ἀπό τό σημεῖο Ο ἐκτοξεύουμε ἕνα ἄλλο βλῆμα Β μέ ἀρχική ταχύτητα $υ_2 = 60$ m/sec. Ἡ ἀπόσταση ΟΜ εἶναι ἴση μέ $α = 120$ m. Ἔπειτα ἀπό πόσο χρόνο t θά συναντηθοῦν τά δύο βλήματα καί σέ πόσο ὕψος ; $g = 10 \ m/sec^2$.

25. Ἕνα ἀεροπλάνο πετάει ὁριζόντια σέ ὕψος $h = 1125$ m μέ σταθερή ταχύτητα 360 km/h καί ἀφήνει ἐλεύθερη νά πέσει μιά βόμβα πάνω σέ ἕνα στόχο Δ πού βρίσκεται στό ἔδαφος. Ἐκείνη τή στιγμή τό ἀεροπλάνο βρίσκεται πάνω σέ μιά κατακόρυφο ΑΓ. Νά βρεθεῖ ἡ ὀξεία γωνία ΓΑΔ. $g = 10 \ m/sec^2$.

26. Στό ἔδαφος ὑπάρχει ἕνας στόχος Σ, πού βρίσκεται πάνω στήν κατακόρυφο ΚΣ. Ἕνα ἀεροπλάνο πού κινεῖται μέ ταχύτητα $υ = 360$ km/h ὁρμάει πρό τό στόχο ἔτσι, ὥστε ἡ τροχιά του νά σχηματίζει γωνία $α = 9^0$ μέ τήν κατακόρυφο ΚΣ. Ἀπό ποιό ὕψος πρέπει νά ἀφήσει ἐλεύθερη τή βόμβα, ὥστε νά πέσει σέ ἀπόσταση ἀπό τό σημεῖο Σ μικρότερη ἀπό 156 m; $g = 10 \ m/sec^2$.

27. Πόση πρέπει νά εἶναι ἡ ἐλάχιστη ταχύτητα $υ_0$ ἑνός βλήματος πού τό βεληνεκές του θέλουμε νά εἶναι s μέτρα ;
Ἐφαρμογή : $s = 9000$ m. $g = 10 \ m/sec^2$.

28. Νά βρεθεῖ πόση πρέπει νά εἶναι ἡ γωνία βολῆς α, ὥστε τό βεληνεκές s νά εἶναι ν φορές μεγαλύτερο ἀπό τό μέγιστο ὕψος h πού φτάνει τό βλῆμα.
Ἐφαρμογή : $ν = 6$.

29. Ἀπό ἕνα σημεῖο Α πού βρίσκεται σέ ὕψος $h_1 = 50$ m πάνω ἀπό τό ὁριζόντιο ἐπίπεδο τοῦ ἐδάφους ἐκτοξεύουμε βλῆμα μέ ἀρχική ταχύτητα

$υ_0 = 60$ m/sec καί μέ γωνία βολῆς $α = 30^0$. Τό βλῆμα φτάνει σέ ἕνα σημεῖο Γ τοῦ ἐδάφους. Νά βρεθεῖ ἡ ἀπόσταση τοῦ σημείου Γ ἀπό τήν κατακόρυφο πού περνάει ἀπό τό σημεῖο Α καί ἡ ταχύτητα πού ἔχει τό βλῆμα, ὅταν φτάνει στό ἔδαφος. $g = 10$ m/sec².

30. Ἀπό ἕνα σημεῖο Ο τοῦ ὁριζόντιου ἐδάφους ρίχνουμε ἕνα σῶμα πλάγια πρός τά πάνω μέ ἀρχική ταχύτητα $υ_0 = 50$ m/sec. Νά βρεθεῖ πόση πρέπει νά εἶναι ἡ γωνία βολῆς, ὥστε τό βεληνεκές νά εἶναι ἴσο μέ $s = 125$ m. $g = 10$ m/sec².

31. Ἀπό ἕνα σημεῖο Ο τοῦ ὁριζόντιου ἐδάφους ἐκτοξεύεται βλῆμα μέ ἀρχική ταχύτητα $υ_0$. Νά βρεθεῖ πόση πρέπει νά εἶναι ἡ γωνία βολῆς φ, γιά νά φτάσει τό βλῆμα σέ ἕνα σημεῖο Μ τοῦ κατακόρυφου ἐπιπέδου xOy, ὅταν οἱ συντεταγμένες τοῦ σημείου Μ εἶναι $x = α$ καί $y = β$. Θά λάβουμε $εφ\, φ = z$.

32. Στό σημεῖο Ο τοῦ ὁριζόντιου ἐδάφους ὑπάρχει ἕνα ἀντιαεροπορικό πυροβόλο. Στή χρονική στιγμή $t = 0$ ἕνα ἀεροπλάνο, κινούμενο μέ σταθερή ταχύτητα υ καί σέ σταθερό ὕψος h, βρίσκεται πάνω στήν κατακόρυφο Oy. Τήν ἴδια χρονική στιγμή $t = 0$ τό πυροβόλο ρίχνει ἕνα βλῆμα μέ ἀρχική ταχύτητα $υ_0$ πού ἡ διεύθυνσή του σχηματίζει γωνία α μέ τήν κατακόρυφο Oy. Νά βρεθεῖ: α) πόση πρέπει νά εἶναι ἡ γωνία α, γιά νά συναντήσει τό βλῆμα τό ἀεροπλάνο, καί β) ποιές χρονικές στιγμές θά γίνει αὐτή ἡ συνάντηση.

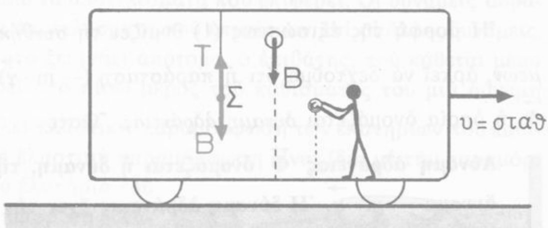
Κινούμενα συστήματα ἀναφορᾶς

14. Κινούμενο σύστημα ἀναφορᾶς

Ὅταν ἐξετάζουμε τά φαινόμενα τῆς κινήσεως, θεωροῦμε ὅτι ὁ παρατηρητής εἶναι ἀκίνητος, δηλαδή συνδέεται μέ τό *ἀκίνητο σύστημα ἀναφορᾶς*. Συνήθως ὡς ἀκίνητο σύστημα ἀναφορᾶς παίρνουμε τή Γῆ πού τή θεωροῦμε ἀκίνητη. Σέ πολλές ὅμως περιπτώσεις ὁ παρατηρητής βρίσκεται μέσα σέ *κινούμενο σύστημα ἀναφορᾶς* καί ὁ ἴδιος μετέχει στήν κίνηση, π.χ. ὅταν βρίσκεται μέσα σέ ὀχήματα, σέ ἀνελκυστῆρες κ.ἄ. Ὅλη τή ζωή μας τή ζοῦμε μέσα σέ ἕνα σύστημα ἀναφορᾶς πού περιστρέφεται γύρω ἀπό ἄξονα (περιστροφή τῆς Γῆς). Θά ἐξετάσουμε ποιά ἐπίδραση ἔχει στά φαινόμενα πού παρατηροῦμε ἡ *μεταφορική κίνηση τοῦ συστήματος ἀναφορᾶς*.

15. Σύστημα ἀναφορᾶς μέ εὐθύγραμμη ὁμαλή κίνηση

Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι ἕνα ὄχημα, πού κινεῖται εὐθύγραμμα καί ὁμαλά (υ = σταθ.) πάνω σέ ὁριζόντιο ἐπίπεδο (σχ. 24), ἔχει ἀδιαφανή τοιχώματα ὥστε οἱ παρατηρητές, πού εἶναι μέσα στό ὄχημα, δέν μποροῦν νά ἀναφερθοῦν στά σώματα πού βρίσκονται ἔξω ἀπό τό ὄχημα. Ἕνα νῆμα τῆς στάθμης, πού βρίσκεται μέσα στό ὄχημα, εἶναι κατακόρυφο, γιατί στό σφαιρίδιό του ἐνεργοῦν δύο ἀντίθετες ἐξωτερικές δυνάμεις, τό βάρος $\vec{B}$ τοῦ σφαιριδίου καί ἡ τάση $\vec{T}$ τοῦ νήματος. Τό σφαιρίδιο κινεῖται μέ τήν ταχύτητα $\vec{υ}$ πού ἔχει τό ὄχημα καί καμιά ἐξωτερική δύναμη δέν ἐνεργεῖ στό σφαιρίδιο, ἡ ὁποία θά μποροῦσε νά μεταβάλει τήν ταχύτητά του. Ἄν οἱ παρατηρητές, πού εἶναι μέσα στό ὄχημα, ἐξετάσουν πειραματικά τήν ἐλεύθερη πτώση τῶν σωμάτων, θά βροῦν ὅτι ἡ ἐλεύθερη πτώση τῶν σωμάτων μέσα στό κινούμενο ὄχημα ἀκολουθεῖ ἀκριβῶς τούς ἴδιους νόμους, πού ἰσχύουν γιά τήν ἐλεύθερη πτώση τῶν σωμάτων μέσα στό ἀκίνητο ἐργαστήριό μας. Ὥστε οἱ νόμοι τῆς ἐλεύθερης πτώσεως τῶν σωμάτων *ἰσχύουν ἀμετάβλητοι* γιά τό *ἀκίνητο* ἐργαστήριό μας καί γιά τό ὄχημα πού *κινεῖται εὐθύγραμμα καί ὁμαλά* σχετικά μέ τήν ἐπιφάνεια τῆς Γῆς. Στό ἴδιο συμπέρασμα καταλήγουμε, ἄν μέσα στό ὁμαλά κινούμενο ὄχημα ἐξετάσουμε πειραματικά ὁποιοδήποτε *μηχανικό φαινόμενο*. Ἀπό τά παραπάνω συνάγεται ὅτι παρατηρητές πού βρίσκονται μέσα σέ θάλαμο, χωρίς καμιά ἐπικοινωνία μέ τό ἐξωτερικό περιβάλλον, μέ κανένα *μηχανικό πείραμα* δέν μποροῦν νά ἀποδείξουν ὅτι ὁ θάλαμός τους *ἠρεμεῖ* ἤ ὅτι *κινεῖται εὐθύγραμμα καί ὁμαλά* σχετικά μέ ἄλλο ἀκίνητο σύστημα ἀναφορᾶς.



Σχ. 24. Σύστημα ἀναφορᾶς μέ εὐθύγραμμη ὁμαλή κίνηση.

Ὁ Einstein ἀπέδειξε ὅτι γιά ὅλα γενικά τά φυσικά φαινόμενα ἰσχύει ἡ ἑξῆς *γενική ἀρχή*:

Οἱ νόμοι τῆς Φυσικῆς, πού ἰσχύουν σέ ἕνα ἀκίνητο σύστημα ἀναφορᾶς Α, ἰσχύουν ἀμετάβλητοι καί σέ κάθε ἄλλο σύστημα ἀναφορᾶς Β, πού κινεῖται εὐθύγραμμα καί ὁμαλά ὡς πρός τό σύστημα Α.

Αὐτό τό γενικό συμπέρασμα εἶναι βασική ἀρχή τῆς *εἰδικῆς θεωρίας τῆς σχετικότητας*.

16. Δύναμη ἀδράνειας

Σέ ἕνα σῶμα πού ἔχει μάζα m ἐνεργεῖ δύναμη $\vec{F}$, ἡ ὁποία μπορεῖ νά εἶναι συνισταμένη πολλῶν δυνάμεων ἐφαρμοσμένων σ' αὐτό τό σῶμα. Τότε ἡ μάζα m ἀποκτᾶ ἐπιτάχυνση $\vec{\gamma}$. Τά ἀνύσματα $\vec{F}$ καί $\vec{\gamma}$ ἔχουν τήν ἴδια διεύθυνση καί φορά καί ἰσχύει ὁ θεμελιώδης νόμος τῆς Δυναμικῆς :

$$\vec{F} = m \cdot \vec{\gamma}$$

Ἡ ἐξίσωση αὐτή μπορεῖ νά γραφεῖ καί ὡς ἑξῆς :

$$\vec{F} - (m \cdot \vec{\gamma}) = 0 \quad \text{ἤ καί} \quad \vec{F} + (-m \cdot \vec{\gamma}) = 0 \qquad (1)$$

Ἡ μορφή τῆς ἐξισώσεως (1) θυμίζει τή *συνθήκη ἰσορροπίας δύο δυνάμεων*, ἀρκεῖ νά δεχτοῦμε ὅτι ἡ παράσταση $(-m \cdot \vec{\gamma})$ φανερώνει μιά δύναμη $\vec{\Phi}$, ἡ ὁποία ὀνομάζεται *δύναμη ἀδράνειας*. Ὥστε :

Δύναμη ἀδράνειας $\vec{\Phi}$ ὀνομάζεται ἡ δύναμη, τήν ὁποία παριστάνει τό ἄνυσμα $-m \cdot \vec{\gamma}$. Ἡ δύναμη ἀδράνειας ἔχει τήν ἴδια διεύθυνση μέ τή διεύθυνση τοῦ ἀνύσματος τῆς ἐπιταχύνσεως $\vec{\gamma}$, ἀλλά φορά ἀντίθετη μέ τή φορά τοῦ ἀνύσματος τῆς ἐπιταχύνσεως καί μέτρο ἴσο μέ τό γινόμενο τῆς μάζας (m) ἐπί τήν ἐπιτάχυνση (γ).

$$\boxed{\text{δύναμη ἀδράνειας} \quad \vec{\Phi} = -m \cdot \vec{\gamma}}$$

Ὅταν λοιπόν ἕνα σῶμα ἔχει μάζα m καί μέ τήν ἐπίδραση ἐξωτερικῆς δυνάμεως $\vec{F}$ κινεῖται μέ ἐπιτάχυνση $\vec{\gamma}$, τότε ἰσχύει ἡ ἀκόλουθη *ἀρχή τοῦ d'Alembert* :

Ἡ ἐξωτερική δύναμη $\vec{F}$ πού ἐνεργεῖ σέ ἕνα σῶμα καί ἡ δύναμη ἀδράνειας $-m \cdot \vec{\gamma}$ ἀποτελοῦν σέ κάθε στιγμή σύστημα δυνάμεων, πού ἔχουν συνισταμένη ἴση μέ μηδέν.

$$\boxed{\text{ἀρχή τοῦ d'Alembert} \quad \vec{F} - m \cdot \vec{\gamma} = 0} \qquad (2)$$

Ἡ ἐξίσωση (2) περιλαμβάνει *ὅλες τίς δυνατές κινητικές καταστάσεις ἑνός σώματος*. Γιατί, ἄν εἶναι $\vec{\gamma} = 0$, τότε εἶναι καί $\vec{F} = 0$, ἄρα στό σῶμα δέν ἐνεργεῖ ἐξωτερική δύναμη καί τό σῶμα ἤ ἠρεμεῖ ἤ κινεῖται εὐθύγραμμα καί ὁμαλά. Σ' αὐτή τήν περίπτωση ἡ δύναμη ἀδράνειας εἶναι ἴση μέ μηδέν, $\vec{\Phi} = 0$. Ἡ *δύναμη ἀδράνειας ἐμφανίζεται, μόνο ὅταν τό σῶμα κινεῖται μέ ἐπιτάχυνση.* Οἱ δυνάμεις ἀδράνειας μᾶς βοηθοῦν νά ἑρμηνεύσουμε πολλά φαινόμενα πού παρατηροῦμε μέσα σέ κινούμενα συστήματα ἀναφορᾶς.

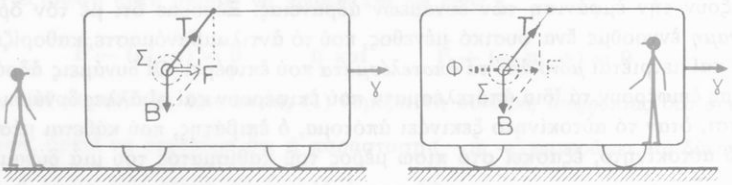
Ἡ ἐμφάνιση δυνάμεων ἀδράνειας. Ἀπό τόν ὁρισμό τῆς δυνάμεως ἀδράνειας μπορεῖ νά θεωρηθεῖ ὅτι ἡ δύναμη ἀδράνειας εἶναι μιά ἔννοια χωρίς φυσική ὑπόσταση. Μερικές ὅμως ἁπλές παρατηρήσεις μποροῦν νά μᾶς δείξουν τήν ἐμφάνιση τῶν δυνάμεων ἀδράνειας. Ξέρουμε ὅτι μέ τόν ὅρο *δύναμη* ἐννοοῦμε ἕνα φυσικό μέγεθος, πού τό ἀντιλαμβανόμαστε, καθορίζεται καί μετριέται *μόνο ἀπό τά ἀποτελέσματα* πού ἐπιφέρει. Οἱ δυνάμεις ἀδράνειας ἐπιφέρουν τά ἴδια ἀποτελέσματα πού ἐπιφέρουν καί οἱ ἄλλες δυνάμεις. Ἔτσι, ὅταν τό αὐτοκίνητο ξεκινάει ἀπότομα, ὁ ἐπιβάτης, πού κάθεται μέσα στό αὐτοκίνητο, ἐξασκεῖ στό πίσω μέρος τοῦ καθίσματός του μιά δύναμη $-m\vec{\gamma}$, ἡ ὁποία προκαλεῖ ἐλαστική παραμόρφωση τῶν ἐλατηρίων τοῦ καθίσματος (σχ. 25). Αὐτή ἡ ἐλαστική παραμόρφωση εἶναι ἴδια μέ τήν παραμόρφωση πού προκαλεῖ στά ἐλατήρια τοῦ καθίσματος καί μιά συνηθισμένη δύναμη, πού ἔχει φορά πρός τά πίσω. Αὐτό τό παράδειγμα δείχνει ὅτι ἡ δύναμη ἀδράνειας $\vec{\Phi} = -m\vec{\gamma}$ ἐμφανίζεται ὡς μιά ἀντίδραση τῆς μάζας m τοῦ ἐπιβάτη στό νά ἀποκτήσει ἐπιτάχυνση, δηλαδή ὡς ἀντίδραση τῆς μάζας m στό νά μεταβληθεῖ ἡ ταχύτητά της. Ὥστε μποροῦμε νά ποῦμε ὅτι *οἱ ἐκδηλώσεις τῆς ἀδράνειας μιᾶς μάζας* m *ἰσοδυναμοῦν μέ ἀποτελέσματα δυνάμεων,* τίς ὁποῖες γι' αὐτό τίς ὀνομάζουμε *δυνάμεις ἀδράνειας.* Ἐπειδή ἐκδηλώσεις τῆς ἀδράνειας ἔχουμε, μόνο ὅταν ὑπάρχει ἐπιτάχυνση (δηλαδή μεταβολή τῆς ταχύτητας), γι' αὐτό *οἱ δυνάμεις ἀδράνειας ἐμφανίζονται, μόνο ὅταν μιά μάζα κινεῖται μέ ἐπιτάχυνση.*

Σχ. 25. Γιά τόν ἐπιβάτη ἐμφανίζεται ἡ δύναμη ἀδρανείας $\vec{\Phi}$.

17. Σύστημα ἀναφορᾶς κινούμενο εὐθύγραμμα μέ ἐπιτάχυνση

Ξέρουμε ὅτι ἡ *ἠρεμία* ἤ ἡ *κίνηση* ἑνός σώματος εἶναι *σχετική* καί συνδέεται πάντοτε μέ ὁρισμένο σύστημα ἀναφορᾶς, πού *αὐθαίρετα τό θεωροῦμε ἀκίνητο.* Θά ἐξετάσουμε δύο συνηθισμένες περιπτώσεις συστημάτων ἀναφορᾶς, πού κινοῦνται *εὐθύγραμμα μέ σταθερή ἐπιτάχυνση* (γ = σταθ.).

α. Ὄχημα κινούμενο εὐθύγραμμα πάνω σέ ὁριζόντιο ἐπίπεδο. Ἕνα ὄχημα κινεῖται εὐθύγραμμα πάνω σέ ὁριζόντιο ἐπίπεδο μέ *σταθερή ὁριζόντια ἐπιτάχυνση* $\vec{\gamma}$ (σχ. 26). Ἕνας *ἀκίνητος* παρατηρητής στέκεται στό ἔδαφος (ἀκίνητο σύστημα ἀναφορᾶς) καί μπορεῖ νά παρατηρεῖ ὅ,τι συμβαίνει μέσα στό ὄχημα. Ἕνας ἄλλος παρατηρητής εἶναι ἀκίνητος μέσα στό ὄχημα, δηλαδή *μετέχει* στήν κίνηση τοῦ ὀχήματος, πού αὐτός ὁ παρατηρητής τό παίρνει ὡς σύστημα ἀναφορᾶς (κινούμενο σύστημα ἀναφορᾶς).



Σχ. 26. Σύστημα ἀναφορᾶς κινούμενο εὐθύγραμμα μέ σταθερή ὁριζόντια ἐπιτάχυνση.

Ἀπό τήν ὀροφή τοῦ ὀχήματος εἶναι κρεμασμένη μέ νῆμα μιά μεταλλική σφαίρα Σ, πού ἔχει μάζα m καί βάρος $B = mg$. Γιά τόν *ἀκίνητο* στό ἔδαφος παρατηρητή τό ὄχημα καί ἡ σφαίρα ἔχουν πάντοτε τήν ἴδια ἐπιτάχυνση ὡς πρός τό ἔδαφος. Σ' αὐτή τήν περίπτωση τό πείραμα δείχνει ὅτι τό νῆμα σχηματίζει μιά *σταθερή γωνία* θ μέ τήν κατακόρυφο (σχ. 26α). Γιά τόν *ἀκίνητο παρατηρητή* στή σφαίρα ἐνεργοῦν μόνο δύο ἐξωτερικές δυνάμεις, τό *βάρος* $\vec{B}$ τῆς σφαίρας καί ἡ *τάση* $\vec{T}$ τοῦ νήματος. Γιά νά κινεῖται ὅμως ἡ σφαίρα μέ σταθερή ὁριζόντια ἐπιτάχυνση $\vec{\gamma}$, πρέπει νά ἐνεργεῖ στή σφαίρα μιά σταθερή ὁριζόντια δύναμη $\vec{F}$, πού ἔχει τή φορά τῆς ἐπιταχύνσεως. Αὐτή ἡ δύναμη $\vec{F}$ εἶναι ἡ συνισταμένη τῶν δυνάμεων $\vec{B}$ καί $\vec{T}$ καί γι' αὐτό τό νῆμα ἐκτρέπεται ἀπό τήν κατακόρυφο καί σχηματίζει μέ αὐτή γωνία θ, ἡ ὁποία ἐξαρτᾶται ἀπό τήν ἐπιτάχυνση. Ὥστε γιά τόν ἀκίνητο παρατηρητή ἡ *σφαίρα κινεῖται* σύμφωνα μέ τή θεμελιώδη ἐξίσωση :

$$\vec{F} = \vec{m} \cdot \vec{\gamma} \qquad \text{καί ἡ δύναμη F εἶναι} \qquad \vec{F} = \vec{B} + \vec{T}$$

Ὁ *παρατηρητής πού μετέχει* στήν κίνηση τοῦ ὀχήματος παρατηρεῖ ὅτι ἡ *σφαίρα ἰσορροπεῖ* σέ ὁρισμένη θέση ὡς πρός τό ὄχημα καί ὅτι τό νῆμα σχηματίζει *σταθερή γωνία* θ μέ τήν κατακόρυφο (σχ. 26β). Αὐτός ὁ παρατηρητής, γιά νά ἑρμηνεύσει τή *σχετική ἰσορροπία τῆς σφαίρας* ὡς πρός τό ὄχημα, πρέπει νά δεχτεῖ ὅτι στή σφαίρα ἐνεργοῦν οἱ ἑξῆς τρεῖς δυνάμεις : τό *βάρος* $\vec{B}$ τῆς σφαίρας, ἡ *τάση* $\vec{T}$ τοῦ νήματος καί ἡ *δύναμη ἀδράνειας* $\vec{\Phi}$. Αὐτές οἱ τρεῖς δυνάμεις ἔχουν συνισταμένη ἴση μέ μηδέν, ἄρα ἡ καθεμιά εἶναι ἀντίθετη μέ τή συνισταμένη τῶν δύο ἄλλων δυνάμεων καί ἑπομένως ἡ δύναμη ἀδράνειας $\vec{\Phi}$ εἶναι ἀντίθετη μέ τή συνισταμένη $\vec{F}$ τῶν δυνάμεων $\vec{B}$ καί $\vec{T}$, δηλαδή εἶναι $\vec{F} + \vec{\Phi} = 0$. Ὥστε γιά τόν παρατηρητή, πού μετέχει στήν κίνηση, ἡ *σχετική ἰσορροπία τῆς σφαίρας* ὡς πρός τό ὄχημα ἐξασφαλίζεται, γιατί σέ κάθε στιγμή ἡ συνισταμένη $\vec{F}$ τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων ($\vec{B}$ καί $\vec{T}$) καί ἡ δύναμη ἀδράνειας $\vec{\Phi}$ ἀποτελοῦν σύστημα δυνάμεων πού ἔχει συνισταμένη ἴση μέ μηδέν, δηλαδή ἰσχύει ἡ ἐξίσωση $\vec{F} - m\vec{\gamma} = 0$. Γιά τόν παρατηρητή, πού εἶναι μέσα στό ὄχημα, ἡ δύναμη ἀδράνειας ἔχει τά ἴδια χαρακτηριστικά πού ἔχουν καί οἱ ἄλλες δυνάμεις. Ἔτσι, ἄν ὁ παρατηρητής αὐτός ἀφήσει νά πέσει ἐλεύθερα ἕνα σῶμα, αὐτό δέν πέφτει κατακόρυφα, ἀλλά διαγράφει μιά ἄλλη τροχιά. Ἄν τό ὄχημα ἠρεμεῖ, ἤ κινεῖται ὁμαλά ($\vec{\gamma} = 0$), τότε ἡ δύναμη ἀδράνειας εἶναι ἴση μέ μηδέν ($\vec{\Phi} = 0$) καί τό νῆμα εἶναι κατακόρυφο.

Συμπέρασμα. Καί οἱ δύο παρατηρητές διαπιστώνουν ὅτι κατά τήν κίνηση τοῦ ὀχήματος μέ σταθερή ἐπιτάχυνση $\vec{\gamma}$ τό νῆμα ἐκτρέπεται ἀπό τήν κατακόρυφο, σχηματίζει μέ αὐτή μιά σταθερή γωνία θ καί ἡ *σφαίρα ἰσορροπεῖ* σέ ὁρισμένη θέση ὡς πρός τό ὄχημα. Αὐτό τό φαινόμενο ὁ ἀκίνητος στό ἔδαφος παρατηρητής τό ἑρμηνεύει σύμφωνα μέ τό θεμελιώδη νόμο τῆς *Δυναμικῆς*, ἐνῶ ὁ παρατηρητής πού μετέχει στήν κίνηση τό ἑρμηνεύει σύμφωνα μέ τό νόμο τῆς *Στατικῆς* γιά τήν ἰσορροπία τριῶν δυνάμεων, παραδεχόμενος ὅτι ἡ τρίτη δύναμη εἶναι ἡ δύναμη ἀδράνειας $\vec{\Phi}$. Καί οἱ δύο τρόποι ἑρμηνείας εἶναι σύμφωνοι μέ τούς νόμους τῆς Μηχανικῆς.

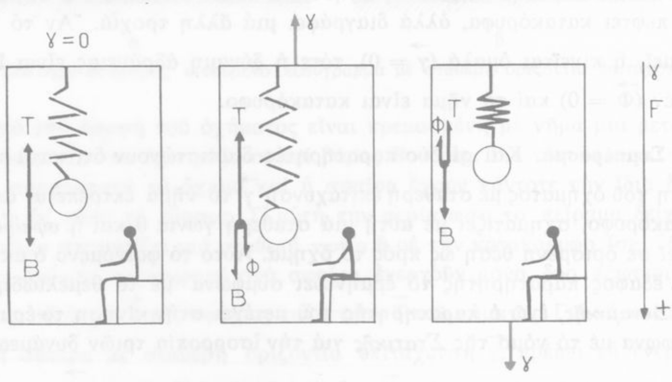
β. Ἀνελκυστήρας κινούμενος μέ σταθερή ἐπιτάχυνση. Στήν ὀροφή ἑνός ἀνελκυστήρα, πού κινεῖται κατακόρυφα, εἶναι στερεωμένο δυναμόμετρο, ἀπό τό ὁποῖο κρέμεται μιά σφαίρα πού ἔχει βάρος $B = mg$ (σχ. 27). Ὡς θετική φορά τῶν κατακόρυφων ἐπιταχύνσεων καί δυνάμεων θεωροῦμε τή φορά ἀπό πάνω πρός τά κάτω. Ὁ ἀνελκυστήρας κινεῖται μέ ἐπιτάχυνση πού ἔχει σταθερό μέτρο γ. Ὅταν ὁ ἀνελκυστήρας ἠρεμεῖ στό ἔδαφος ($\gamma = 0$), ὁ ἀκίνητος παρατηρητής, πού βρίσκεται στό ἔδαφος καί ὁ παρατηρητής, πού εἶναι μέσα στόν ἀνελκυστήρα, διαπιστώνουν ὅτι στή σφαίρα ἐνεργοῦν δύο δυνάμεις, τό *βάρος* $\vec{B}$ τῆς σφαίρας καί ἡ *τάση* $\vec{T}$ τοῦ ἐλατηρίου, οἱ ὁποῖες ἔχουν συνισταμένη ἴση μέ μηδέν. Τότε τό δυναμόμετρο δείχνει τό *πραγματικό βάρος* Β τῆς σφαίρας.

Γιά τόν ἀκίνητο στό ἔδαφος παρατηρητή ὁ ἀνελκυστήρας καί ἡ σφαίρα ἔχουν πάντοτε τήν ἴδια κατακόρυφη ἐπιτάχυνση $\vec{\gamma}$ σχετικά μέ τό ἔδαφος καί ἐπομένως ἡ σφαίρα κινεῖται μέ τήν ἐπίδραση μιᾶς κατακόρυφης δυνάμεως $\vec{F} = m \cdot \vec{\gamma}$, πού εἶναι συνισταμένη τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων $\vec{B}$ καί $\vec{T}$. Γι' αὐτό τόν παρατηρητή ἰσχύει ἡ ἀλγεβρική ἐξίσωση :

$$F = m \cdot \gamma \quad \text{ἤ} \quad B - T = m \cdot \gamma \quad \text{καί} \quad m \cdot g - T = m \cdot \gamma$$

Ἀπό τήν τελευταία ἐξίσωση βρίσκουμε ὅτι σέ κάθε στιγμή ἡ τάση Τ τοῦ ἐλατηρίου εἶναι :

$$\boxed{T = m(g - \gamma)} \qquad (1)$$



Σχ. 27. Κατακόρυφη κίνηση ἀνελκυστήρα μέ σταθερή ἐπιτάχυνση.

Ἡ ἐξίσωση (1) δείχνει ὅτι τό *φαινομενικό βάρος* Τ τῆς σφαίρας μέσα στόν κινούμενο ἀνελκυστήρα ἐξαρτᾶται ἀπό τήν ἐπιτάχυνση τῆς κινήσεως. Θά ἐξετάσουμε τίς ἐνδείξεις τοῦ δυναμομέτρου, δηλαδή τό φαινομενικό βάρος Τ τῆς σφαίρας, σύμφωνα μέ τήν ἐξίσωση (1) κατά τίς διάφορες φάσεις τῆς κινήσεως τοῦ ἀνελκυστήρα.

1. *Ἄνοδος*. Τότε εἶναι $\gamma < 0$ ἄρα

$$T = m[g - (-\gamma)] = m(g + \gamma) \quad \text{καί} \quad T > B$$

2. *Κίνηση ὁμαλή*. Τότε εἶναι $\gamma = 0$ ἄρα

$$T = m(g - 0) = m \cdot g \quad \text{καί} \quad T = B$$

3. *Κάθοδος*. Τότε εἶναι $\gamma > 0$ ἄρα

$$T = m(g - \gamma) \quad \text{καί} \quad T < B$$

4. *Κάθοδος μέ ἐπιτάχυνση* $\gamma = g$. Τότε εἶναι

$$T = m(g - g) \quad \text{ἄρα} \quad T = 0$$

Τό φαινομενικό βάρος εἶναι *ἴσο μέ μηδέν*. Ἐπειδή ὁ ἀνελκυστήρας καί ἡ σφαίρα πέφτουν ἐλεύθερα, γι' αὐτό ἡ σφαίρα δέν ἔχει φαινομενικό βάρος. Ἄν τότε ἕνα σῶμα ἀφεθεῖ ἐλεύθερο μέσα στόν ἀνελκυστήρα αὐτό *δέ θά πέσει* σχετικά μέ τό θάλαμο τοῦ ἀνελκυστήρα, γιατί ὁ θάλαμος καί ὅσα σώματα βρίσκονται μέσα σ' αὐτόν πέφτουν ἐλεύθερα μέ ἐπιτάχυνση g. Τό σῶμα, πού ἀφέθηκε ἐλεύθερο, διατηρεῖται μετέωρο μέσα στό θάλαμο *σάν νά ἔχασε τό βάρος του*.

Ἀπό τά παραπάνω συνάγεται ὅτι τό δυναμόμετρο δείχνει σέ κάθε στιγμή τό *φαινομενικό βάρος* T τῆς σφαίρας, πού ἀντιστοιχεῖ σέ μιά *φαινομενική ἐπιτάχυνση βαρύτητας*:

$$g' = g \pm \gamma$$

Γιά *τόν παρατηρητή πού μετέχει στήν κίνηση* ἡ σφαίρα πάντοτε *ἠρεμεῖ* σχετικά μέ τό θάλαμο. Αὐτός ὁ παρατηρητής ἑρμηνεύει τήν *ἰσορροπία τῆς σφαίρας* σύμφωνα μέ τούς νόμους τῆς Στατικῆς, δηλαδή δέχεται ὅτι οἱ δυνάμεις πού ἐφαρμόζονται στή σφαίρα *ἔχουν συνισταμένη ἴση μέ μηδέν*. Θά ἐξετάσουμε τίς ἐνδείξεις τοῦ δυναμομέτρου πού βλέπει αὐτός ὁ παρατηρητής κατά τίς διάφορες φάσεις τῆς κινήσεως τοῦ ἀνελκυστήρα.

1. *Ἄνοδος*. Βλέπει ὅτι εἶναι $T > B$, ἄρα ἰσχύει *ἡ συνθήκη ἰσορροπίας*:

$$B + \Phi - T = 0 \quad \text{ἤ} \quad T = B + \Phi = m \cdot g + m \cdot \gamma$$

$$\text{καί} \quad T = m(g + \gamma)$$

Ἡ τελευταία ἐξίσωση εἶναι ἴδια μέ τήν ἐξίσωση πού βρίσκει σ' αὐτή τήν περίπτωση καί ὁ ἀκίνητος παρατηρητής.

2. *Κίνηση ὁμαλή*. Τότε εἶναι $T = B$

3. *Κάθοδος*. Ὁ παρατηρητής βλέπει ὅτι εἶναι $T < B$, ἄρα ἰσχύει ἡ συνθήκη ἰσορροπίας:

$$B - (T + \Phi) = 0 \quad \text{ἤ} \quad T = B - \Phi \quad \text{καί} \quad T = m(g - \gamma)$$

Ἡ ἐξίσωση εἶναι ἴδια μέ ἐκείνη πού βρίσκει καί ὁ ἀκίνητος παρατηρητής.

4. *Κάθοδος μέ ἐπιτάχυνση* $\gamma = g$. Τότε εἶναι $T = 0$, ἀλλά ὁ παρατηρητής βλέπει ὅτι ἡ σφαίρα, ἄν καί δέν ἔχει βάρος, ἐξακολουθεῖ νά ἰσορροπεῖ σέ ὁρισμένη θέση σχετικά μέ τό θάλαμο. Σ' αὐτή τήν περίπτωση ἰσχύει ἡ συνθήκη ἰσορροπίας $\Phi = B$. Γιά τόν παρατηρητή μέσα στό θάλαμο ἐπικρατοῦν τότε *συνθῆκες ἐλλείψεως βαρύτητας.*

γ. Συμπέρασμα. Ἀπό τά παραπάνω δύο παραδείγματα γίνεται φανερό ὅτι ἡ δύναμη ἀδράνειας $\vec{\Phi}$ ἐμφανίζεται μόνο στόν παρατηρητή πού βρίσκεται μέσα στό κινούμενο σύστημα ἀναφορᾶς πού κινεῖται μέ ἐπιτάχυνση $\vec{\gamma}$. Μέ τή δύναμη ἀδράνειας $\vec{\Phi}$ ὁ παρατηρητής αὐτός ἑρμηνεύει τή *σχετική ἰσορροπία* τῆς σφαίρας ὡς πρός τό κινούμενο σύστημα ἀναφορᾶς. Σύμφωνα μέ τούς νόμους τῆς Στατικῆς ἡ δύναμη ἀδράνειας $\vec{\Phi}$ ἰσορροπεῖ σέ κάθε στιγμή τή *συνισταμένη* $\vec{F}$ τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων πού ἐνεργοῦν πάνω στή σφαίρα.

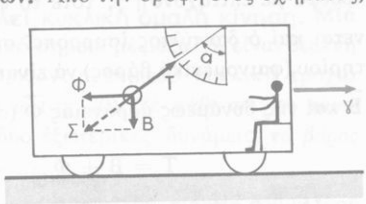
Ἀπό τά παραπάνω παραδείγματα συνάγεται ἐπίσης τό συμπέρασμα ὅτι, ἄν τό σύστημα ἀναφορᾶς (ὄχημα, θάλαμος ἀνελκυστήρα) *κινεῖται ὁμαλά* ($\gamma = 0$), ὁ παρατηρητής ἔχει τήν ἐντύπωση ὅτι τό σύστημα ἀναφορᾶς του εἶναι ἀκίνητο. Ἄν ὅμως ὁ παρατηρητής διαπιστώσει ὅτι στό σύστημα ἀναφορᾶς του ἐμφανίζονται δυνάμεις ἀδράνειας, τότε συμπεραίνει ὅτι τό σύστημά του *κινεῖται μέ ἐπιτάχυνση*, πού μπορεῖ νά τήν ὑπολογίσει ἀπό τή δύναμη ἀδράνειας $\Phi = m \cdot \gamma$. Ὥστε:

Ὅταν δέν ἔχουμε ἀκίνητο σύστημα ἀναφορᾶς, εἶναι ἀδύνατο νά ὑπολογίσουμε τήν ταχύτητα μέ τήν ὁποία κινεῖται τό σύστημα ἀναφορᾶς μας. Μποροῦμε μόνο νά διαπιστώσουμε τή μεταβολή πού παθαίνει ἡ ταχύτητά μας, δηλαδή μποροῦμε νά διαπιστώσουμε τήν ἐπιτάχυνση τῆς κινήσεώς μας.

18. Μετρητές ἐπιταχύνσεως

Ὅταν ἕνα σύστημα ἀναφορᾶς κινεῖται μέ ἐπιτάχυνση $\vec{\gamma}$, τότε ἕνας παρατηρητής, πού μετέχει στήν κίνηση, διαπιστώνει ὅτι ἐμφανίζονται *δυνάμεις ἀδράνειας*, πού ἔχουν τή διεύθυνση τῆς ἐπιταχύνσεως, φορά ἀντίθετη μέ τή φορά τῆς ἐπιταχύνσεως καί μέτρο κατά ἀπόλυτη τιμή ἴσο μέ $\Phi = m\gamma$. Ἔτσι αὐτός ὁ παρατηρητής ἀπό τίς δυνάμεις ἀδράνειας μπορεῖ νά προσδιορίσει τή διεύθυνση, τή φορά καί τό μέτρο τῆς ἐπιταχύνσεως. Σ' αὐτή τήν ἀρχή στηρίζεται ἡ λειτουργία τῶν *μετρητῶν ἐπιταχύνσεως*. Ἀναφέρουμε δύο ἁπλούς τύπους τέτοιων μετρητῶν, μέ τούς ὁποίους μποροῦμε νά μετρήσουμε ὁριζόντιες ἤ κατακόρυφες ἐπιταχύνσεις.

α. Μετρητής ὁριζόντιων ἐπιταχύνσεων. Ἀπό τήν ὀροφή ἑνός ὀχήματος, πού κινεῖται εὐθύγραμμα πάνω σέ ὁριζόντιο ἐπίπεδο, κρέμεται ἕνα ἁπλό ἐκκρεμές (σχ. 28). Ὅταν τό ὄχημα κινεῖται μέ ὁριζόντια ἐπιτάχυνση $\vec{\gamma}$, τό νῆμα τοῦ ἐκκρεμοῦς σχηματίζει γωνία α μέ τήν κατακόρυφο καί γιά τόν παρατηρητή, πού εἶναι μέσα στό ὄχημα, ἡ σφαίρα *ἰσορροπεῖ* μέ τή ἐπίδραση τῶν τριῶν ὁμοεπίπεδων δυνάμεων $\vec{B}$, $\vec{T}$ καί $\vec{Φ}$. Τότε ἰσχύει ἡ ἐξίσωση:

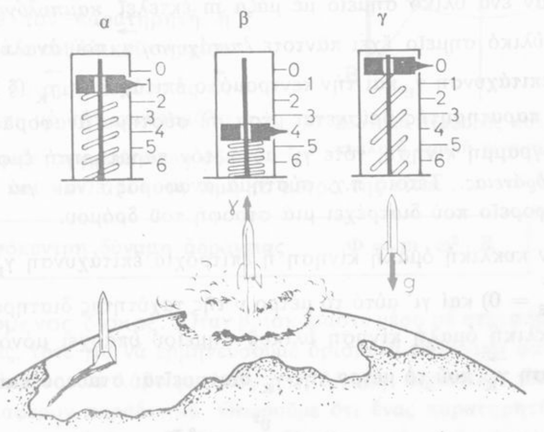


Σχ. 28. Μετρητής ὁριζόντιων ἐπιταχύνσεων.

$$Φ = B \cdot εφ\,α \quad ἤ \quad m \cdot γ = m \cdot g \cdot εφ\,α \quad ἄρα \quad γ = g \cdot εφ\,α$$

Ὥστε ἡ μέτρηση τῆς ἐπιταχύνσεως γ ἀνάγεται σέ μέτρηση τῆς γωνίας α. Τό νῆμα μετακινεῖται ἐμπρός ἀπό τόξο, στό ὁποῖο ἀναγράφονται οἱ ἀντίστοιχες τιμές τῆς ἐπιταχύνσεως γ.

β. Μετρητής κατακόρυφων ἐπιταχύνσεων. Ὁ μετρητής αὐτός ἀποτελεῖται ἀπό ἕνα συμπαγή μεταλλικό δακτύλιο, πού στηρίζεται πάνω σέ ἐλατήριο καί μπορεῖ νά μετακινεῖται ἐλεύθερα κατά μῆκος μιᾶς κατακόρυφης ράβδου (σχ. 29). Ἄς θεωρήσουμε ὅτι ὁ μετρητής βρίσκεται μέσα σέ ἕναν πύραυλο πού εἶναι *ἀκίνητος* στό ἔδαφος. Τότε ἡ τάση Τ τοῦ ἐλατηρίου εἶναι ἀντίθετη μέ τό πραγματικό βάρος $B = mg$ τοῦ δακτυλίου καί ὁ δείκτης τοῦ ὀργάνου δείχνει τή διαίρεση 1 (σχ. 29α). Ὅταν ὁ πύραυλος *ἀνεβαίνει κατα-*



Σχ. 29. Μετρητής κατακόρυφων ἐπιταχύνσεων.

κόρυφα μέ ἐπιτάχυνση γ, τότε τό φαινομενικό βάρος τοῦ δακτυλίου αὐξάνεται καί ὁ δακτύλιος ἰσορροπεῖ σέ τέτοια θέση, ὥστε ἡ τάση $\vec{T}$ τοῦ ἐλατηρίου (φαινομενικό βάρος) νά εἶναι ἀντίθετη μέ τή συνισταμένη τοῦ βάρους $\vec{B}$ καί τῆς δυνάμεως ἀδράνειας $\vec{\Phi}$ (σχ. 29β) καί τότε ἰσχύει ἡ σχέση :

$$T = B + \Phi \qquad ἤ \qquad T = m\,(g + \gamma) \tag{1}$$

Ἄν τότε ὁ δείκτης τοῦ ὀργάνου δείχνει π.χ. τή διαίρεση 4, αὐτό σημαίνει ὅτι τό φαινομενικό βάρος T τοῦ δακτυλίου εἶναι 4 φορές μεγαλύτερο ἀπό τό πραγματικό βάρος $B = mg$, πού ἔχει ὁ δακτύλιος, ὅταν εἶναι ἀκίνητος στό ἔδαφος. Ὥστε, ἄν στήν ἐξίσωση (1) βάλουμε $T = 4\,mg$, βρίσκουμε $\gamma = 3g$.

Ἄν ὁ πύραυλος *πέφτει ἐλεύθερα* πρός τή Γῆ, τό φαινομενικό βάρος τοῦ δακτυλίου γίνεται ἴσο μέ μηδέν (συνθῆκες ἐλλείψεως βαρύτητας) καί ὁ δείκτης δείχνει τότε τή διαίρεση μηδέν (σχ. 29γ). Ἔτσι ὁ παρατηρητής μπορεῖ νά μετρήσει τήν ἐπιτάχυνση πού ἔχει ἡ κατακόρυφη κίνησή του. Σήμερα χρησιμοποιοῦνται τελειοποιημένοι μετρητές ἐπιταχύνσεως, πού ἀναφέρονται στή μέτρηση τῆς ἐπιταχύνσεως γ ἀπό τά ἀποτελέσματα πού ἐπιφέρει ἡ ἀναπτυσσόμενη δύναμη ἀδράνειας :

$$\vec{\Phi} = -\,m \cdot \vec{\gamma}$$

19. Στρεφόμενο σύστημα ἀναφορᾶς

Ὅταν ἕνα ὑλικό σημεῖο μέ μάζα m ἐκτελεῖ *καμπυλόγραμμη κίνηση*, τότε τό ὑλικό σημεῖο ἔχει πάντοτε *ἐπιτάχυνση* $\vec{\gamma}$, πού ἀναλύεται στήν ἐπιτρόχια ἐπιτάχυνση $\vec{\gamma}_E$ καί τήν κεντρομόλο ἐπιτάχυνση $\vec{\gamma}_K$ (§ 3). Ἑπομένως, ἄν ἕνας παρατηρητής βρίσκεται μέσα σέ σύστημα ἀναφορᾶς, πού ἐκτελεῖ καμπυλόγραμμη κίνηση, τότε γι᾿ αὐτό τόν παρατηρητή ἐμφανίζονται *δυνάμεις ἀδράνειας*. Τέτοιο π.χ. σύστημα ἀναφορᾶς εἶναι γιά τούς ἐπιβάτες ἕνα λεωφορεῖο πού διατρέχει μιά στροφή τοῦ δρόμου.

Στήν κυκλική ὁμαλή κίνηση ἡ ἐπιτρόχια ἐπιτάχυνση $\vec{\gamma}_E$ εἶναι ἴση μέ μηδέν ($\vec{\gamma}_E = 0$) καί γι᾿ αὐτό τό μέτρο υ τῆς ταχύτητας διατηρεῖται σταθερό. Στήν κυκλική ὁμαλή κίνηση ὑλικοῦ σημείου ὑπάρχει μόνο κεντρομόλος ἐπιτάχυνση $\vec{\gamma}_K$ πού τό μέτρο της γ_K διατηρεῖται σταθερό καί ἴσο μέ :

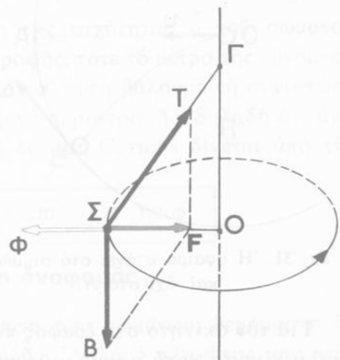
$$\gamma_K = \frac{\upsilon^2}{R} = \omega^2 R$$

α. Σύστημα ἀναφορᾶς πού ἐκτελεῖ κυκλική ὁμαλή κίνηση. Μιά μικρή σφαίρα Σ, πού τή θεωροῦμε ὡς ὑλικό σημεῖο μέ μάζα m, εἶναι δεμένη σέ ἕνα νῆμα καί διαγράφει πάνω σέ ὁριζόντιο ἐπίπεδο κυκλική τροχιά ἀκτίνας R μέ σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω (σχ. 30). Σέ κάθε στιγμή πάνω στό ὑλικό σημεῖο ἐφαρμόζονται μόνο δύο ἐξωτερικές δυνάμεις, *τό βάρος* $\vec{B}$ τοῦ ὑλικοῦ σημείου καί *ἡ τάση* $\vec{T}$ τοῦ νήματος.

Γιά *τόν ἀκίνητο στό ἔδαφος παρατηρητή* ἡ κυκλική κίνηση τοῦ ὑλικοῦ σημείου ὀφείλεται στήν ὁριζόντια κεντρομόλο δύναμη $\vec{F} = m \cdot \vec{\gamma}_K$, ἡ ὁποία εἶναι συνισταμένη τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων $\vec{B}$ καί $\vec{T}$ καί ἔχει μέτρο ἴσο μέ :

κεντρομόλος δύναμη $\qquad F = m \cdot \omega^2 \cdot R$

Γιά *τόν παρατηρητή πού μετέχει στήν κίνηση*, δηλαδή πού συνδέεται μέ τό κινούμενο σύστημα ἀναφορᾶς, τό ὑλικό σημεῖο Σ βρίσκεται σέ *σχετική ἰσορροπία* ὡς πρός αὐτό τό σύστημα ἀναφορᾶς. Τό ὑλικό σημεῖο Σ *ἰσορροπεῖ* πάνω στήν κυκλική τροχιά του, γιατί σέ κάθε στιγμή ἡ συνισταμένη $\vec{F}$ τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων καί ἡ ***δύναμη ἀδράνειας*** $\vec{\Phi}$ ἀποτελοῦν σύστημα δυνάμεων πού ἔχει συνισταμένη ἴση μέ μηδέν, δηλαδή εἶναι $\vec{F} - m \cdot \vec{\gamma} = 0$. Ὥστε γι' αὐτό τόν παρατηρητή ἡ σχετική ἰσορροπία τοῦ ὑλικοῦ σημείου ὀφείλεται στή δύναμη ἀδράνειας $\vec{\Phi}$, πού εἶναι ***ἀντίθετη*** μέ τήν κεντρομόλο δύναμη $\vec{F}$, ὀνομάζεται *φυγόκεντρη δύναμη ἀδράνειας* καί κατ' ἀπόλυτη τιμή τό μέτρο της εἶναι :



Σχ. 30. Σύστημα ἀναφορᾶς πού ἐκτελεῖ κυκλική ὁμαλή κίνηση.

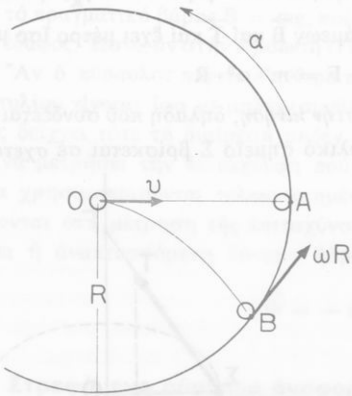
$$\boxed{\text{φυγόκεντρη δύναμη ἀδράνειας} \qquad \Phi = m \cdot \omega^2 \cdot R}$$

β. Στρεφόμενος δίσκος. Ὅταν βρισκόμαστε μέσα σέ στρεφόμενο σύστημα ἀναφορᾶς, τότε γιά νά ἑρμηνεύσουμε ὁρισμένα μηχανικά φαινόμενα εἴμαστε ὑποχρεωμένοι νά λάβουμε ὑπόψη τή *δύναμη ἀδράνειας*. Θά ἐξετάσουμε ἕνα ἐνδιαφέρον παράδειγμα. Θεωροῦμε ὅτι ἕνας παρατηρητής εἶναι ἀκίνητος στό κέντρο Ο ἑνός ὁριζόντιου δίσκου, πού στήν ἀρχή ἠρεμεῖ (σχ. 31). Στήν περιφέρεια εἶναι στερεωμένος ἕνας στόχος σέ σχῆμα τόξου.

Ὅταν ὁ δίσκος ἠρεμεῖ, ὁ παρατηρητής ἐκτοξεύει ὁριζόντια μιά σφαίρα μέ ἀρχική ταχύτητα $\vec{\upsilon}$. Τριβές δέν ὑπάρχουν. Ἡ σφαίρα ἐκτελεῖ *εὐθύγραμμη ὁμαλή* κίνηση καί στή διάρκεια τοῦ χρόνου t διατρέχει τήν ἀκτίνα $OA = R$ τοῦ δίσκου καί φτάνει στό σημεῖο Α τοῦ στόχου. Τότε ἰσχύει ἡ ἐξίσωση :

$$R = \upsilon \cdot t$$

Ἔστω ὅτι ὁ δίσκος *στρέφεται μέ σταθερή γωνιακή ταχύτητα* ω γύρω ἀπό κατακόρυφο ἄξονα, πού περνάει ἀπό τό κέντρο Ο τοῦ δίσκου. Ὁ παρατηρητής ἐκτοξεύει πάλι τή σφαίρα μέ τήν ἴδια ὁριζόντια ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ καί κατά τήν ἴδια διεύθυνση ΟΑ. Ὁ παρατηρητής βλέπει ὅτι ἡ σφαίρα διαγράφει *καμπύλη τροχιά* ΟΒ καί φτάνει στό σημεῖο Β τοῦ στόχου. Ὁ παρατηρητής, γιά νά ἐξηγήσει αὐτή τήν κίνηση τῆς σφαίρας, δέχεται ὅτι στή διάρκεια τῆς κινήσεως ἐνεργεῖ πάνω στή σφαίρα *μιά δύναμη* $\vec{F}$ πού *ἐκτρέπει* τή σφαίρα ἀπό τήν εὐθύγραμμη τροχιά της. Αὐτή ἡ δύναμη $\vec{F}$ ὀνομάζεται *δύναμη Coriolis* καί εἶναι δύναμη ἀδράνειας.



Σχ. 31. Ἡ σφαίρα φτάνει στό σημεῖο Β καί ὄχι στό Α.

Γιά τόν ἀκίνητο στό ἔδαφος παρατηρητή ἡ σφαίρα ἐκτελεῖ εὐθύγραμμη ὁμαλή κίνηση κατά μῆκος μιᾶς στρεφόμενης ἀκτίνας τοῦ δίσκου.

Ὑπολογισμός τῆς δυνάμεως Coriolis. Ἡ δύναμη Coriolis $\vec{F}$ εἶναι κάθετη στή διεύθυνση τῆς ταχύτητας $\vec{\upsilon}$ καί στόν ἄξονα περιστροφῆς, ἄρα εἶναι κάθετη στή διεύθυνση τοῦ ἀνύσματος τῆς γωνιακῆς ταχύτητας $\vec{\omega}$. Βρήκαμε παραπάνω τήν ἐξίσωση $R = \upsilon \cdot t$. Ὅταν ὁ δίσκος στρέφεται, τότε στή διάρκεια τοῦ χρόνου t ἕνα σημεῖο τῆς περιφέρειας τοῦ δίσκου, κινούμενο μέ γραμμική ταχύτητα ωR, διαγράφει τόξο πού ἀντιστοιχεῖ στή γωνία κατά τήν ὁποία στράφηκε ὁ δίσκος στή διάρκεια τοῦ χρόνου t. Τό μῆκος τοῦ τόξου $\widehat{AB}$ εἶναι :

$$\widehat{AB} = \omega R \cdot t = \omega \cdot (\upsilon t) \cdot t \qquad \text{καί} \qquad \widehat{AB} = \omega \cdot \upsilon \cdot t^2 \qquad (1)$$

Ἡ δύναμη Coriolis $\vec{F}$ δίνει στή μάζα m τῆς σφαίρας ἐπιτάχυνση $\vec{\gamma}$ καί ἰσχύει ἡ ἐξίσωση $\vec{F} = m \cdot \vec{\gamma}$. Στή διάρκεια τοῦ χρόνου t ἡ δύναμη $\vec{F}$ προκαλεῖ μετατόπιση τῆς σφαίρας ἴση μέ:

$$\widehat{AB} = \frac{1}{2}\gamma \cdot t^2 \tag{2}$$

Ἀπό τίς ἐξισώσεις (1) καί (2) βρίσκουμε ὅτι ἡ ἐπιτάχυνση ἔχει μέτρο $\gamma = 2\omega \cdot \upsilon$. Ἄρα ἡ δύναμη Coriolis ἔχει μέτρο:

$$\boxed{\text{δύναμη Coriolis} \qquad F = 2m \cdot \omega \cdot \upsilon} \tag{3}$$

Στό παραπάνω παράδειγμα θεωρήσαμε ὅτι ἡ σφαίρα φεύγει ἀπό ἕνα σημεῖο O τοῦ ἄξονα περιστροφῆς καί ὅτι κινεῖται κάθετα στόν ἄξονα περιστροφῆς. Ὁποιοδήποτε ὅμως εἶναι τό σημεῖο ἀναχωρήσεως τοῦ σώματος καί ὁποιαδήποτε εἶναι ἡ διεύθυνση τῆς κινήσεώς του πάντοτε ἐνεργεῖ πάνω στό σῶμα ἡ δύναμη Coriolis ἡ ὁποία ἐκτρέπει τό σῶμα ἀπό τήν εὐθύγραμμη τροχιά του. Ἄν ἡ διεύθυνση τῆς ταχύτητας $\vec{\upsilon}$ τοῦ σώματος σχηματίζει γωνία φ μέ τόν ἄξονα περιστροφῆς, τότε τό μέτρο τῆς δυνάμεως Coriolis βρίσκεται ἀπό τήν ἐξίσωση (3), ἄν σ' αὐτή βάλουμε τή συνιστώσα τῆς ταχύτητας πού εἶναι κάθετη στόν ἄξονα περιστροφῆς, δηλαδή ἄν ἀντί υ βάλουμε $\upsilon_K = \upsilon \cdot \eta\mu\, \varphi$. Ἄρα γενικά ἡ δύναμη Coriolis δίνεται ἀπό τήν ἐξίσωση:

$$\boxed{\text{δύναμη Coriolis} \qquad F = 2m \cdot \upsilon \cdot \omega \cdot \eta\mu\, \varphi}$$

20. Ἡ Γῆ ὡς στρεφόμενο σύστημα ἀναφορᾶς

Συνήθως, ὅταν ἐξετάζουμε τήν κίνηση τῶν σωμάτων, δεχόμαστε ὅτι ἡ Γῆ εἶναι ἕνα ἀκίνητο σύστημα ἀναφορᾶς. Ἀλλά ὁ πλανήτης μας περιστρέφεται γύρω ἀπό τόν ἄξονά του μέ γωνιακή ταχύτητα ω καί ἑπομένως σέ ὅλη τή ζωή μας βρισκόμαστε μέσα σέ ἕνα *στρεφόμενο σύστημα ἀναφορᾶς*. Ἔτσι σέ ὁρισμένα γήινα μηχανικά φαινόμενα μᾶς ἐμφανίζεται ἡ *δράση τῶν δυνάμεων ἀδράνειας*, δηλαδή ἐμφανίζονται ἡ φυγόκεντρη δύναμη ἀδράνειας καί ἡ δύναμη Coriolis. Ἀναφέρουμε δύο σημαντικά γήινα μηχανικά φαινόμενα.

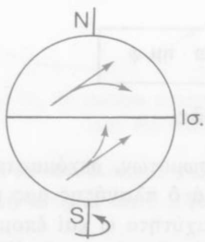
1. Ἐξαιτίας *τῆς φυγόκεντρης δυνάμεως ἀδράνειας* ἡ τιμή τοῦ g συνεχῶς *αὐξάνεται* ὅσο προχωροῦμε ἀπό τόν ἰσημερινό πρός τούς πόλους καί σέ γεωγραφικό πλάτος φ ἡ τιμή τοῦ g εἶναι:

$$\boxed{g_\varphi = g_{90} - \omega^2 \cdot R \cdot \sigma\upsilon\nu^2\, \varphi}$$

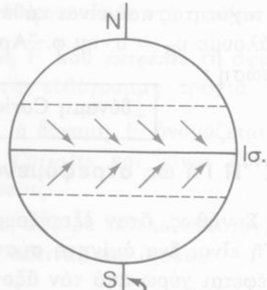
ὅπου R εἶναι ἡ ἀκτίνα τῆς Γῆς πού τήν θεωροῦμε σφαιρική.

2. Ἐξαιτίας *τῆς δυνάμεως Coriolis* κάθε κινούμενο σῶμα ἐκτρέπεται ἀπό τή διεύθυνση τῆς κινήσεώς του. Αὐτή ἡ ἐκτροπή γίνεται ἰδιαίτερα αἰσθητή, ὅταν ἡ ταχύτητα τοῦ σώματος εἶναι μεγάλη ἤ ὅταν ἡ κίνησή του διαρκεῖ γιά πολύ χρονικό διάστημα, ὥστε ἡ δράση τῆς δυνάμεως Coriolis νά ἔχει μεγάλη διάρκεια. Ἔτσι ἡ δράση τῆς δυνάμεως Coriolis γίνεται αἰσθητή στήν κίνηση *τῶν βλημάτων* καί στήν κίνηση *τῶν ἀνέμων* καί *τῶν θαλάσσιων ρευμάτων*.

Ἀληγεῖς καί ἀνταληγεῖς ἄνεμοι. Στό παράδειγμα τοῦ στρεφόμενου δίσκου (σχ. 31) ἡ φορά τῆς περιστροφῆς του εἶναι ἀντίθετη μέ τή φορά τῆς κινήσεως τῶν δεικτῶν τοῦ ρολογιοῦ. Σ' αὐτή τήν περίπτωση ἡ δύναμη Coriolis προκαλεῖ ἐκτροπή τοῦ κινούμενου σώματος πρός *τά δεξιά* σχετικά μέ τή διεύθυνση τῆς κινήσεως του. Γιά ἕναν παρατηρητή, πού βρίσκεται στό *βόρειο ἡμισφαίριο* ἡ Γῆ στρέφεται ἀντίθετα μέ τούς δεῖκτες τοῦ ρολογιοῦ (ὅπως ὁ δίσκος) καί ἐπομένως κάθε σῶμα πού κινεῖται ὁριζόντια, ἐξαιτίας τῆς δυνάμεως Coriolis ἐκτρέπεται πρός *τά δεξιά* τῆς κινήσεώς του. Ἀντίστροφα στό νότιο ἡμισφαίριο τό σῶμα ἐκτρέπεται πρός *τά ἀριστερά* τῆς κινήσεώς του (σχ. 32).



Σχ. 32. Ἐκτροπή τοῦ κινούμενου σώματος στό βόρειο καί στό νότιο ἡμισφαίριο.



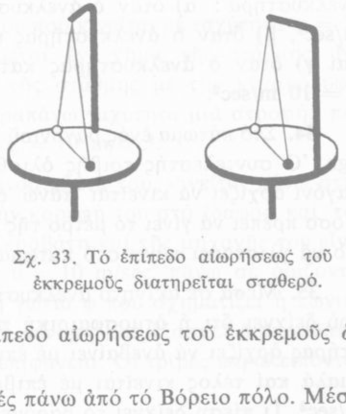
Σχ. 32α. Ἐκτροπή τῶν ἀληγῶν ἀνέμων στά δύο ἡμισφαίρια τῆς Γῆς.

Ἕνα ὡραῖο παράδειγμα τῆς δράσεως τῆς δυνάμεως Coriolis ἔχουμε στούς *ἀληγεῖς* καί *ἀνταληγεῖς* ἀνέμους. *Οἱ ἀληγεῖς ἄνεμοι* εἶναι μάζες ἀέρα πού κινοῦνται κοντά στήν ἐπιφάνεια τῆς Γῆς ἀπό τή ζώνη τῶν ψηλῶν τροπικῶν πιέσεων (γεωγραφικό πλάτος περίπου 30^0) πρός τή ζώνη τῶν χαμηλῶν πιέσεων τοῦ ἰσημερινοῦ. Αὐτά τά ρεύματα τοῦ ἀέρα ἔχουν στό βόρειο ἡμισφαίριο φορά ἀπό Βορρά πρός Νότο. Καθώς ὅμως κατεβαίνουν πρός τόν ἰσημερινό, διαρκῶς ἐκτρέπονται πρός τά δεξιά τῆς κινήσεώς τους καί ἔτσι στά κατώτερα γεωγραφικά πλάτη γίνονται ἄνεμοι βορειοανατολικοί (σχ. 32α). Στό νότιο ἡμισφαίριο οἱ ἀληγεῖς ἄνεμοι καταντοῦν νοτιοανατολικοί ἄνεμοι. Ἀντίστοιχο φαινόμενο παρατηρεῖται καί στούς *ἀνταληγεῖς ἀνέμους*. Αὐτοί εἶναι μάζες ἀέρα πού στά ἀνώτερα ὕψη κινοῦνται ἀπό τόν ἰσημερινό πρός τούς δύο τροπικούς, δηλαδή ἀντίθετα μέ τούς ἀληγεῖς.

Τό ἴδιο ἀποτέλεσμα ἐπιφέρει ἡ δύναμη Coriolis σέ κάθε ρεῦμα ἀέρα καί γι' αὐτό ρεύματα πού συγκλίνουν πρός ἕνα κέντρο χαμηλῶν πιέσεων (*κυκλώνας*) ἤ φεύγουν ἀπό ἕνα κέντρο ψηλῶν πιέσεων (*ἀντικυκλώνας*) δέν διατάσσονται ἀκτινωτά, ἀλλά σχηματίζουν τόξα.

Ὅμοια ἐκτροπή παθαίνουν καί τά θαλάσσια ρεύματα. Ἔτσι τό ρεῦμα τοῦ κόλπου (golf stream) καθώς ἀνεβαίνει πρός Βορρά ἐκτρέπεται συνεχῶς πρός τά δεξιά καί φτάνει στίς δυτικές ἀκτές τῆς Βρετανίας.

Στροφή τοῦ ἐπιπέδου αἰωρήσεως τοῦ ἐκκρεμοῦς. Σέ ἕναν ὁριζόντιο δίσκο, πού μπορεῖ νά στρέφεται γύρω ἀπό κατακόρυφο ἄξονα, βρίσκεται ἕνα ἐκκρεμές πού τό νῆμα του εἶναι στερεωμένο στό σημεῖο ἀπό τό ὁποῖο περνάει ὁ ἄξονας περιστροφῆς τοῦ δίσκου (σχ. 33). Τό ἐκκρεμές μπορεῖ νά αἰωρεῖται πάνω σέ ὁποιοδήποτε κατακόρυφο ἐπίπεδο, πού περνάει ἀπό τό σημεῖο στηρίξεως τοῦ νήματος. Τό ἐκκρεμές αἰωρεῖται ἐξαιτίας τοῦ βάρους τῆς σφαίρας, δηλαδή μιᾶς κατακόρυφης δυνάμεως. Ἔτσι στό ἐκκρεμές δέν ἐνεργεῖ καμιά δύναμη κάθετα στό ἐπίπεδο αἰωρήσεως καί ἑπομένως, ὅταν ὁ δίσκος στρέφεται, τό ἐπίπεδο αἰωρήσεως τοῦ ἐκκρεμοῦς *δέ μεταβάλλεται*.



Σχ. 33. Τό ἐπίπεδο αἰωρήσεως τοῦ ἐκκρεμοῦς διατηρεῖται σταθερό.

Ἄς φανταστοῦμε ἕνα τέτοιο ἐκκρεμές πάνω ἀπό τό Βόρειο πόλο. Μέσα σέ μιά ἀστρική ἡμέρα ἡ Γῆ στρέφεται κατά γωνία 2π rad καί κατά φορά ἀντίθετη μέ τή φορά τῆς κινήσεως τῶν δεικτῶν τοῦ ρολογιοῦ. Τότε καμιά δύναμη δέν ἀναγκάζει τό ἐπίπεδο αἰωρήσεως τοῦ ἐκκρεμοῦς νά παρακολουθήσει τήν περιστροφή τῆς Γῆς. Ἀλλά ὁ παρατηρητής πού βρίσκεται πάνω στή Γῆ, βλέπει ὅτι τό ἐπίπεδο αἰωρήσεως τοῦ ἐκκρεμοῦς *στρέφεται* κατά τή φορά τῆς κινήσεως τῶν δεικτῶν τοῦ ρολογιοῦ, δηλαδή βλέπει ὅτι ἡ σφαίρα σέ κάθε μετάβαση καί ἐπιστροφή της *ἐκτρέπεται **πρός τά δεξιά***. Αὐτή ἡ ἐκτροπή τῆς σφαίρας ὀφείλεται στή δύναμη Coriolis καί παρατηρεῖται σέ ὅλα τά γεωγραφικά πλάτη. Γενικά ἀποδείχνεται ὅτι :

Σέ γεωγραφικό πλάτος φ τό ἐπίπεδο αἰωρήσεως τοῦ ἐκκρεμοῦς μέσα σέ 24 ὧρες στρέφεται κατά γωνία β πού εἶναι ἴση μέ :

$$\boxed{\beta = 360^0 \cdot \eta\mu\, \varphi}$$

Στόν πόλο ($\varphi = 90^0$) στή διάρκεια μιᾶς ἡμέρας τό ἐπίπεδο αἰωρήσεως τοῦ ἐκκρεμοῦς στρέφεται κατά 360^0, ἐνῶ στόν ἰσημερινό ($\varphi = 0^0$) ἡ γωνία στροφῆς αὐτοῦ τοῦ ἐπιπέδου εἶναι ἴση μέ μηδέν. Ὁ Foucault, στηριζόμενος στό παραπάνω φαινόμενο, ἀπέδειξε μέ τό ἐκκρεμές *τήν περιστροφή* τῆς Γῆς γύρω ἀπό τόν ἄξονά της *(ἐκκρεμές τοῦ Foucault)*.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

33. Στό πάτωμα ἑνός ἀνελκυστήρα βρίσκεται ἕνα κιβώτιο πού ἔχει βάρος $B = 200$ N. Νά βρεθεῖ πόση δύναμη ἐξασκεῖ τό σῶμα στό πάτωμα τοῦ ἀνελκυστήρα : α) ὅταν ὁ ἀνελκυστήρας ἀνεβαίνει μέ ἐπιτάχυνση $\gamma = 1$ m/sec², β) ὅταν ὁ ἀνελκυστήρας κατεβαίνει μέ ἐπιτάχυνση $\gamma = 1$ m/sec², καί γ) ὅταν ὁ ἀνελκυστήρας κατεβαίνει μέ ἐπιβράδυνση $\gamma = 2$ m/sec². $g = 10$ m/sec².

34. Στό πάτωμα ἑνός βαγονιοῦ βρίσκεται κιβώτιο πού ἔχει μάζα $m = 100$ kgr. Ὁ συντελεστής τριβῆς ὀλισθήσεως τοῦ κιβωτίου εἶναι $\eta = 0{,}2$. Τό βαγόνι ἀρχίζει νά κινεῖται πάνω σέ ὁριζόντιο ἐπίπεδο μέ ἐπιτάχυνση γ. Πόσο πρέπει νά γίνει τό μέτρο τῆς ἐπιταχύνσεως γ, γιά νά ἀρχίσει τό κιβώτιο νά γλιστράει πάνω στό πάτωμα τοῦ βαγονιοῦ ; $g = 10$ m/sec².

35. Μέσα σέ ἀκίνητο ἀνελκυστήρα βρίσκεται ὑδραργυρικό βαρόμετρο, πού δείχνει ὅτι ἡ ἀτμοσφαιρική πίεση εἶναι $p_0 = 76$ cm Hg. Ὁ ἀνελκυστήρας ἀρχίζει νά ἀνεβαίνει μέ ἐπιτάχυνση $\gamma_1 = 1$ m/sec², ἔπειτα κινεῖται ὁμαλά καί τέλος κινεῖται μέ ἐπιβράδυνση πού ἔχει ἀπόλυτη τιμή $\gamma_2 = 2$ m/sec². Τί πίεση δείχνει τό βαρόμετρο κατά τίς τρεῖς φάσεις τῆς κινήσεως τοῦ ἀνελκυστήρα ; $g = 10$ m/sec².

36. Ἕνα αὐτοκίνητο κινεῖται πάνω σέ ὁριζόντιο δρόμο μέ σταθερή ταχύτητα $\upsilon = 20$ m/sec. Γιά νά σταματήσει ἀρχίζει νά φρενάρει καί τότε ἕνα νῆμα τῆς στάθμης, πού κρέμεται ἀπό τήν ὀροφή τοῦ αὐτοκινήτου, γέρνει πρός τά ἐμπρός κατά μιά γωνία φ, γιά τήν ὁποία εἶναι $\varepsilon\varphi\, \varphi = 0{,}2$. Ἔπειτα ἀπό πόσο χρόνο θά σταματήσει τό αὐτοκίνητο ;

37. Ἕνα σπειροειδές ἐλατήριο ἔχει ἀσήμαντη μάζα καί μῆκος $l = 0{,}25$ m. Ἡ σταθερή τοῦ ἐλατηρίου εἶναι $k = 200$ N/m. Τό ἐλατήριο εἶναι στερεω-

μένο στήν ὀροφή λεωφορείου καί ἀπό τήν ἄκρη τοῦ ἐλατηρίου κρέμεται μεταλλική σφαίρα πού ἔχει βάρος $F = 0{,}5$ N. Τό λεωφορεῖο κινεῖται μέ σταθερή ὁριζόντια ἐπιτάχυνση πού ἔχει μέτρο γ καί τότε τό ἐλατήριο σχηματίζει γωνία $\alpha = 15^0$ μέ τήν κατακόρυφο. Πόση εἶναι ἡ ἐπιτάχυνση καί πόσο εἶναι τότε τό μῆκος τοῦ ἐλατηρίου;
$g = 10\ m/sec^2$. εφ $15^0 \simeq 0{,}27$. συν $15^0 \simeq 0{,}96$.

38. Ἕνας γυάλινος σωλήνας ΑΒΓΔ μέ σταθερή διάμετρο ἔχει σχῆμα Ц (ἀναποδογυρισμένου Π) καί εἶναι ἀνοιχτός στίς δύο ἄκρες του. Μέσα στό σωλήνα ὑπάρχει ἕνα ὑγρό καί οἱ ἐλεύθερες ἐπιφάνειές του βρίσκονται στό ἴδιο ὁριζόντιο ἐπίπεδο ΟΟ′. Τό ὁριζόντιο τμῆμα ΒΓ τοῦ σωλήνα ἔχει μῆκος $l = 20$ cm. Ἡ διάταξη αὐτή τοποθετεῖται στό ὁριζόντιο πάτωμα αὐτοκινήτου ἔτσι, ὥστε τό εὐθύγραμμο τμῆμα ΒΓ νά εἶναι παράλληλο μέ τή διεύθυνση τῆς κινήσεως τοῦ αὐτοκινήτου. Ὅταν τό αὐτοκίνητο κινεῖται μέ ὁριζόντια ἐπιτάχυνση $\gamma = 0{,}5$ g ἤ ἐπιβράδυνση $\gamma = 0{,}5$ g, τότε ἡ στάθμη τοῦ ὑγροῦ μέσα στό σωλήνα ΑΒ ἀντίστοιχα ἀνεβαίνει κατά h ἤ κατεβαίνει κατά h. Νά ὑπολογιστεῖ αὐτή ἡ μεταβολή τῆς στάθμης h.

39. Ἀπό τήν ὀροφή ἑνός λεωφορείου πού κινεῖται μέ ταχύτητα $\upsilon = 20$ m/sec πάνω σέ ὁριζόντιο ἐπίπεδο, κρέμεται ἕνα νῆμα τῆς στάθμης. Νά βρεθεῖ ἡ γωνία πού σχηματίζει τό νῆμα τῆς στάθμης μέ τήν κατακόρυφο, ὅταν τό λεωφορεῖο διατρέχει μέ τήν παραπάνω ταχύτητα μιά στροφή, πού ἔχει ἀκτίνα καμπυλότητας $R = 1$ km. $g = 10\ m/sec^2$.

40. Ἕνας ἀκροβάτης, πάνω στή ματοσικλέτα του, κινεῖται πάνω στήν ἐσωτερική ἐπιφάνεια κώνου, πού ἔχει τήν κορυφή του στό ἔδαφος καί τόν ἄξονά του κατακόρυφο. Τό βάρος τοῦ ἀκροβάτη καί τῆς μηχανῆς του εἶναι $B = 900$ N καί κινεῖται μέ ταχύτητα $\upsilon = 10$ m/sec πάνω σέ ὁριζόντια τροχιά ἀκτίνας $R = 20$ m. Νά βρεθεῖ ἡ γωνία φ πού σχηματίζει ἡ κωνική ἐπιφάνεια μέ τό ὁριζόντιο ἐπίπεδο καί ἡ δύναμη πού ἐξασκεῖ ὁ ἀκροβάτης μέ τή μηχανή του πάνω στήν κωνική ἐπιφάνεια. Οἱ τριβές παραλείπονται. $g = 10\ m/sec^2$.

41. Μιά ράβδος Οx στρέφεται μέ σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω γύρω ἀπό κατακόρυφο ἄξονα Οy, σχηματίζοντας μέ αὐτόν γωνία φ. Ἡ ράβδος Οx διαγράφει ἐπιφάνεια κώνου, πού ἡ κορυφή του εἶναι πρός τά κάτω στό σημεῖο Ο. Πάνω στή ράβδο μπορεῖ νά κινεῖται χωρίς τριβή ἕνα ὑλικό σημεῖο Σ πού ἔχει μάζα m. Νά βρεθεῖ σέ ποιά θέση ΟΣ = x μπορεῖ νά ἰσορροπεῖ τό ὑλικό σημεῖο Σ. Τί θά συμβεῖ, ἄν αὐξηθεῖ ἤ ἐλαττωθεῖ αὐτή ἡ ἀπόσταση x; Ἐφαρμογή: $\varphi = 60^0$. Συχνότητα περιστροφῆς τῆς ράβδου Οx: $\nu = 2$ Hz. $g = 10\ m/sec^2$.

42. Στήν ἐπιφάνεια τῆς θάλασσας καί σέ γεωγραφικό πλάτος $\varphi = 45^0$

ἡ ἐπιτάχυνση τῆς βαρύτητας ἔχει μέτρο $g = 9{,}811\ m/sec^2$. Δεχόμαστε ὅτι τό βάρος ἑνός σώματος εἶναι ἡ συνισταμένη τῆς ἕλξεως, πού ἐξασκεῖ ἡ Γῆ, καί τῆς φυγόκεντρης δυνάμεως ἀδράνειας, πού ὀφείλεται στήν περιστροφή τῆς Γῆς. Θεωροῦμε τή Γῆ σφαιρική μέ ἀκτίνα $R = 6370$ km. Ὁ χρόνος μιᾶς περιστροφῆς τῆς Γῆς γύρω ἀπό τόν ἄξονα της εἶναι $T = 86\,164$ sec. Νά βρεθεῖ ἡ τιμή τοῦ g στόν πόλο καί στόν ἰσημερινό. Ἄν μιά γωνία α εἶναι πολύ μικρή, τότε θά πάρουμε κατά προσέγγιση συν $\alpha = 1$.

43. Ὅταν ἕνας τεχνητός δορυφόρος βρίσκεται ἀκίνητος πάνω στό ἔδαφος, στερεώνουμε στήν ὀροφή του μέσα στό θάλαμο τή μιά ἄκρη σπειροειδοῦς ἐλατηρίου καί στήν ἄλλη ἄκρη του στερεώνουμε μιά μάζα m. Τότε τό ἐλατήριο ἐπιμηκύνεται κατά $l = \alpha$. Ἡ σταθερή τοῦ ἐλατηρίου εἶναι k. Ὅταν ὁ δορυφόρος θά κινεῖται γύρω ἀπό τή Γῆ πάνω στήν κυκλική τροχιά του, πόση θά εἶναι ἡ ἐπιμήκυνση τοῦ ἐλατηρίου ; Ἐπιτάχυνση τῆς βαρύτητας στό ἔδαφος $g_0 = 10\ m/sec^2$.

Ἐφαρμογές τῆς διατηρήσεως τῆς ὁρμῆς

21. Ἡ ὁρμή ὑλικοῦ σημείου

Ἕνα ὑλικό σημεῖο, πού ἔχει μάζα m καί κινεῖται μέ σταθερή ταχύτητα $\vec{\upsilon}$, ἔχει ὁρμή $\vec{J} = m \cdot \vec{\upsilon}$ πού τό μέτρο της εἶναι ἴσο μέ $J = m \cdot \upsilon$.

Ἄν στό ὑλικό σημεῖο ἐνεργήσει ἐπί χρόνο Δt μιά σταθερή δύναμη $\vec{F}$, τότε ἡ ταχύτητα τοῦ ὑλικοῦ σημείου μεταβάλλεται κατά $\overrightarrow{\Delta\upsilon}$ καί σύμφωνα μέ τό θεμελιώδη νόμο τῆς Δυναμικῆς ἰσχύει ἡ ἐξίσωση :

$$\vec{F} = m \cdot \frac{\overrightarrow{\Delta\upsilon}}{\Delta t} \quad \text{ἄρα} \quad \boxed{\vec{F} \cdot \Delta t = m \cdot \overrightarrow{\Delta\upsilon}} \qquad (1)$$

Τό γινόμενο $m \cdot \overrightarrow{\Delta\upsilon}$ ἐκφράζει *τή μεταβολή τῆς ὁρμῆς* τοῦ ὑλικοῦ σημείου καί τό γινόμενο $\vec{F} \cdot \Delta t$ ἐκφράζει *τήν ὤθηση δυνάμεως* πού δέχτηκε τό ὑλικό σημεῖο.

Στό σύστημα μονάδων MKS εἶναι :

μονάδα ὁρμῆς 1 kgr · m/sec· μονάδα ὠθήσεως δυνάμεως 1 N · sec.

Ἡ ἐξίσωση (1) φανερώνει ὅτι :

Ἡ μεταβολή τῆς ὁρμῆς ὑλικοῦ σημείου εἶναι ἴση μέ τήν ὤθηση τῆς δυνάμεως.

α. Ὁρμή στερεοῦ σώματος πού ἔχει μεταφορική κίνηση. Ὅταν ἕνα στερεό σῶμα ἔχει *μεταφορική κίνηση*, τότε σέ κάθε στιγμή ὅλα τά ὑλικά σημεῖα τοῦ σώματος ἔχουν τήν ἴδια ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ καί ἑπομένως ἡ ὁρμή τοῦ στερεοῦ εἶναι :

$$\vec{J} = (m_1 + m_2 + m_3 + \cdots) \cdot \vec{\upsilon} \quad \text{ἤ} \quad \boxed{\vec{J} = m \cdot \vec{\upsilon}}$$

ὅπου m εἶναι *ἡ ὁλική μάζα* του στερεοῦ.

'Αποδείχνεται ὅτι :

Ἡ ὁρμή ἑνός ὑλικοῦ συστήματος εἶναι ἴση μέ τήν ὁρμή ἑνός ὑλικοῦ σημείου, πού συμπίπτει μέ τό κέντρο βάρους τοῦ συστήματος καί ἔχει μάζα m ἴση μέ τήν ὁλική μάζα τοῦ συστήματος.

Ἄν λοιπόν σέ κάποια χρονική στιγμή τό κέντρο βάρους τοῦ συστήματος ἔχει ταχύτητα $\vec{\upsilon}$, τότε ἡ *ὁρμή τοῦ ὑλικοῦ συστήματος* εἶναι :

$$\boxed{\text{ὁρμή ὑλικοῦ συστήματος} \qquad \vec{J} = m \cdot \vec{\upsilon}}$$

Ἕνα στερεό σῶμα θεωρεῖται ὡς σύστημα ὑλικῶν σημείων.

22. Ἡ ἀρχή τῆς διατηρήσεως τῆς ὁρμῆς

Γιά ἕνα ὑλικό σύστημα ἰσχύει ἡ ἐξίσωση :

$$\vec{F} \cdot \Delta t = m \cdot \overrightarrow{\Delta\upsilon}$$

Τό $\overrightarrow{\Delta\upsilon}$ εἶναι ἡ μεταβολή τῆς ταχύτητας τοῦ κέντρου βάρους τοῦ συστήματος, ὅπου θεωρεῖται συγκεντρωμένη ὅλη ἡ μάζα m τοῦ συστήματος. Ἡ συνισταμένη $\vec{F}$ τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων ἐφαρμόζεται στό κέντρο βάρους τοῦ συστήματος.

Ἡ κίνηση τοῦ κέντρου βάρους τοῦ συστήματος *προσδιορίζεται μόνο ἀπό τή συνισταμένη* $\vec{F}$ *τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων* πού ἐνεργοῦν στό σύστημα. Ἡ κίνηση τοῦ κέντρου βάρους *δέν ἐξαρτᾶται ἀπό τίς ἐσωτερικές δυνάμεις* τοῦ συστήματος.

Ἄν λοιπόν στό ὑλικό σύστημα δέν ἐνεργεῖ καμιά ἐξωτερική δύναμη ἤ ἡ συνισταμένη τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων εἶναι ἴση μέ μηδέν, δηλαδή ἄν εἶναι $\vec{F} = 0$, τότε καί ἡ *μεταβολή τῆς ὁρμῆς* $m \cdot \overrightarrow{\Delta\upsilon}$ τοῦ κέντρου βάρους τοῦ συστήματος εἶναι *ἴση μέ μηδέν*. Ἑπομένως τό κέντρο βάρους τοῦ συστήματος ἤ ἠρεμεῖ ($\vec{\upsilon} = 0$) ἤ ἐκτελεῖ εὐθύγραμμη ὁμαλή κίνηση ($\vec{\upsilon} =$ σταθ.). Σ' αὐτή τήν περίπτωση ἡ *ὁρμή* τοῦ ὑλικοῦ συστήματος *διατηρεῖται σταθερή.*

Ἕνα ὑλικό σύστημα λέγεται *μονωμένο*, ὅταν δέν ἐπιδρᾶ πάνω του καμιά *ἐξωτερική δύναμη*. Τότε ἰσχύει ἡ ἑξῆς *ἀρχή τῆς διατηρήσεως τῆς ὁρμῆς* :

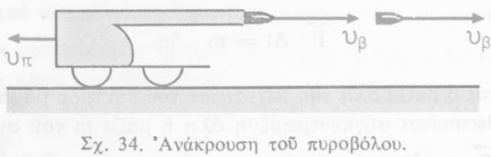
Ἡ ὁλική ὁρμή ἑνός μονωμένου συστήματος μαζῶν διατηρεῖται σταθερή.

ἀρχή διατηρήσεως τῆς ὁρμῆς	$m \cdot \vec{\upsilon} =$ σταθ.

ὅπου m εἶναι *ἡ ὁλική μάζα* τοῦ συστήματος, πού τή θεωροῦμε συγκεντρωμένη στό κέντρο βάρους τοῦ συστήματος καί $\vec{\upsilon}$ εἶναι ἡ *ταχύτητα* τοῦ κέντρου βάρους τοῦ συστήματος.

23. Ἐφαρμογή τῆς ἀρχῆς διατηρήσεως τῆς ὁρμῆς στήν κίνηση τοῦ πυραύλου

Μιά πολύ σημαντική ἐφαρμογή τῆς διατηρήσεως τῆς ὁρμῆς ἔχουμε στήν κίνηση τοῦ πυραύλου. Ἄς φανταστοῦμε ὅτι πάνω σέ λεῖο ὁριζόντιο ἐπίπεδο μπορεῖ νά κινεῖται ἕνα ἐλαφρό πυροβόλο, πού ἔχει μάζα m_π (σχ. 34). Τό βάρος $\vec{B}$ τοῦ πυροβόλου καί ἡ ἀντίδραση $\vec{A}$ τοῦ λείου ἐπιπέδου ἔχουν συνισταμένη $\vec{F}$ ἴση μέ μηδέν ($\vec{F} = 0$). Ὥστε τό σύστημα θεωρεῖται *μονωμένο*.



Σχ. 34. Ἀνάκρουση τοῦ πυροβόλου.

Τό βλῆμα ἔχει μάζα m_β καί βγαίνει ἀπό τό πυροβόλο μέ ταχύτητα $\vec{\upsilon}_\beta$. Ἀπό τήν ἀνάφλεξη τῆς ἐκρηκτικῆς ὕλης παράγονται μέσα σέ μικρό χῶρο πολύ θερμά ἀέρια πού ἔχουν πολύ μεγάλη πίεση. Ἔτσι ἀπό τήν πίεση τῶν ἀερίων ἀναπτύσσονται *μεγάλες δυνάμεις* πάνω στό βλῆμα καί στά ἐσωτερικά τοιχώματα τοῦ σωλήνα τοῦ πυροβόλου. Αὐτές οἱ δυνάμεις εἶναι *ἐσωτερικές δυνάμεις* τοῦ μονωμένου συστήματος.

Ἀνάκρουση τοῦ πυροβόλου. Ἀρχικά ἡ ὁρμή τοῦ μονωμένου συστήματος εἶναι *ἴση μέ μηδέν*. Ὅταν τό βλῆμα βγαίνει ἀπό τό πυροβόλο μέ ταχύτητα $\vec{\upsilon}_\beta$, τότε τό βλῆμα ἀπόκτησε ὁρμή $m_\beta \cdot \vec{\upsilon}_\beta$. Τό πυροβόλο ὀπισθοχωρεῖ (*ἀνάκρουση*) μέ ταχύτητα $\vec{\upsilon}_\pi$, ὥστε σύμφωνα μέ τήν ἀρχή τῆς διατηρήσεως τῆς ὁρμῆς νά ἰσχύει ἡ ἐξίσωση :

$$m_\pi \cdot \vec{\upsilon}_\pi + m_\beta \cdot \vec{\upsilon}_\beta = 0 \quad \text{ἄρα} \quad \upsilon_\pi = -\upsilon_\beta \cdot \frac{m_\beta}{m_\pi}$$

Οἱ ταχύτητος $\vec{\upsilon}_\pi$ καί $\vec{\upsilon}_\beta$ ἔχουν τήν ἴδια διεύθυνση, ἀλλά ἀντίθετη φορά. Τό πυροβόλο κινεῖται μέ φορά ἀντίθετη μέ τή φορά τῆς κινήσεως τοῦ βλήματος.

Κίνηση τοῦ πυραύλου. Στήν ἀρχή τῆς διατηρήσεως τῆς ὁρμῆς στηρίζεται *ἡ κίνηση τοῦ πυραύλου*. 'Αντί γιά βλῆμα, ἐκτοξεύεται *συνεχῶς μάζα ἀερίων*, πού εἶναι πολύ θερμά, ἔχουν μεγάλη πίεση καί παράγονται ἀπό τήν καύση ἑνός καύσιμου ὑλικοῦ. Τό ἀπαιτούμενο γιά τήν καύση ὀξυγόνο ἤ ὑπάρχει μέσα στόν πύραυλο ἤ παίρνεται ἀπό τήν ἀτμόσφαιρα. 'Η πίεση τῶν ἀερίων δημιουργεῖ *μεγάλες δυνάμεις*, πού πιέζουν τά ἐσωτερικά τοιχώματα τοῦ πυραύλου. Αὐτές οἱ δυνάμεις ἔχουν μιά *συνισταμένη* $\vec{F}$, πού ἔχει τή διεύθυνση τῆς κινήσεως τῶν ἀερίων, ἀλλά φορά ἀντίθετη μέ τή φορά τῆς κινήσεως τῶν ἀερίων. Ἔτσι ἀναπτύσσεται πάνω στόν πύραυλο μιά πολύ μεγάλη *προωστική δύναμη*.

Οἱ πύραυλοι εἶναι *κινητῆρες* μεγάλης ἰσχύος *(κινητῆρες ἀντιδράσεως)* καί τούς χρησιμοποιοῦμε γιά τήν κίνηση τῶν πυραύλων πού μεταφέρουν τεχνητούς δορυφόρους, γιά τήν κίνηση διαστημοπλοίων καθώς καί γιά τήν κίνηση ἀεροπλάνων (ἀεριωθούμενα) καί διηπειρωτικῶν βλημάτων. Ἡ μελέτη τῆς κινήσεως τῶν πυραύλων εἶναι πολύπλοκο πρόβλημα, γιατί ἐπεμβαίνουν πολλοί παράγοντες (π.χ. ἡ ἕλξη τῆς Γῆς, ἡ ἀντίσταση τοῦ ἀέρα, ἡ γρήγορη ἐλάττωση τῆς μάζας τοῦ πυραύλου κ.ἄ.).

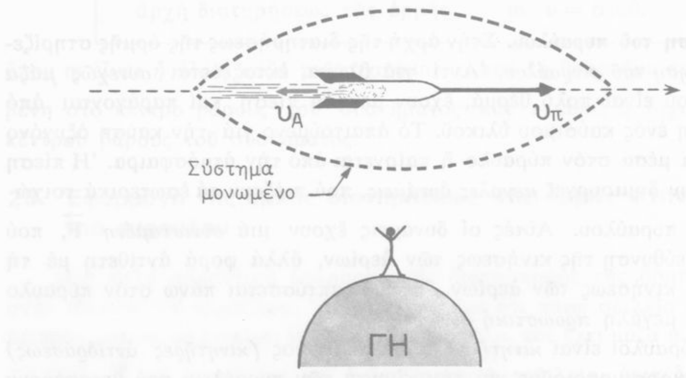
α. 'Επιτάχυνση τοῦ πυραύλου. Γιά εὐκολία θεωροῦμε ὅτι ὁ πύραυλος εἶναι *μονωμένο σύστημα* στό ὁποῖο δέν ἐνεργεῖ καμιά ἐξωτερική δύναμη (ἀντίσταση τοῦ ἀέρα, ἕλξεις ἀστρικῶν σωμάτων). Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι ὁ πύραυλος κινεῖται εὐθύγραμμα (σχ. 35) καί ὅτι στή χρονική στιγμή t ἔχει ταχύτητα υ *σχετικά μέ τή Γῆ*. Ἄν τά ἀέρια ξεφεύγουν ἀπό τόν πύραυλο μέ σταθερή ταχύτητα υ_A σχετικά μέ τόν πύραυλο, τότε ἡ ταχύτητα τῆς μάζας τῶν ἀερίων *σχετικά μέ τή Γῆ* εἶναι $\upsilon_\pi - \upsilon_A$.

Κατά τήν κίνηση τοῦ πυραύλου ἡ *μάζα* δ τῶν ἀερίων, πού ξεφεύγουν ἀπό τόν πύραυλο *κατά μονάδα* χρόνου, διατηρεῖται σταθερή.

Τή στιγμή πού ὁ πύραυλος ἀρχίζει νά κινεῖται $(t = 0)$, *ἡ ὁλική ἀρχική μάζα του* εἶναι m_0. Στή χρονική στιγμή t ὁ πύραυλος ἔχει ταχύτητα υ_π, μάζα m (ὅπου $m < m_0$) καί ἑπομένως τό μονωμένο σύστημα (δηλαδή ὁ πύραυλος) ἔχει *ὁρμή* $m \cdot \upsilon_\pi$. Σέ μιά ἑπόμενη χρονική στιγμή $t + \Delta t$ ἡ μάζα τοῦ πυραύλου εἶναι $m - \Delta m$, γιατί στή διάρκεια τοῦ χρόνου Δt ξέφυγε μάζα ἀερίων Δm. Τήν ἴδια αὐτή χρονική στιγμή $t + \Delta t$ ὁ πύραυλος ἔχει ταχύτητα $\upsilon_\pi + \Delta\upsilon_\pi$. Ἑπομένως στή χρονική στιγμή $t + \Delta t$ *ἡ ὁλική ὁρμή* τοῦ μονωμένου συστήματος εἶναι ἴση μέ τό ἄθροισμα τῶν ἑξῆς ὁρμῶν :

ὁρμή τοῦ πυραύλου $(m - \Delta m) \cdot (\upsilon_\pi + \Delta\upsilon_\pi)$

ὁρμή τῶν ἀερίων πού ξέφυγαν $\Delta m \cdot (\upsilon_\pi - \upsilon_A)$



Σχ. 35. Ὁ πύραυλος ὡς μονωμένο σύστημα.

Ἐπειδή τό σύστημα εἶναι μονωμένο, ἡ ὁλική ὁρμή τοῦ συστήματος *διατηρεῖται σταθερή* καί ἑπομένως ἔχουμε τήν ἐξίσωση :

$$\underbrace{(m - \Delta m) \cdot (\upsilon_\pi + \Delta\upsilon_\pi) + \Delta m \cdot (\upsilon_\pi - \upsilon_A)}_{\text{ὁρμή τή στιγμή } t + \Delta t} - \underbrace{m \cdot \upsilon_\pi}_{\text{ὁρμή τή στιγμή } t} = 0$$

Ἄν ἐκτελέσουμε τίς πράξεις, βρίσκουμε :

$$m \cdot \Delta\upsilon_\pi - \Delta m \cdot \Delta\upsilon_\pi - \Delta m \cdot \upsilon_A = 0$$

Ὁ ὅρος $\Delta m \cdot \Delta\upsilon_\pi$ εἶναι πολύ μικρός σχετικά μέ τούς δύο ἄλλους ὅρους καί μποροῦμε νά τόν παραλείψουμε. Ὥστε εἶναι :

$$m \cdot \Delta\upsilon_\pi - \Delta m \cdot \upsilon_A = 0 \qquad \text{ἤ} \qquad m \cdot \Delta\upsilon_\pi = \Delta m \cdot \upsilon_A$$

Ἄν διαιρέσουμε καί τά δύο μέλη τῆς τελευταίας ἐξισώσεως διά Δt, παίρνουμε τήν ἐξίσωση :

$$m \cdot \frac{\Delta\upsilon_\pi}{\Delta t} = \frac{\Delta m}{\Delta t} \cdot \upsilon_A \qquad \text{ἄρα} \qquad \frac{\Delta\upsilon_\pi}{\Delta t} = \frac{\Delta m}{\Delta t} \cdot \frac{\upsilon_A}{m} \qquad (1)$$

Τό $\frac{\Delta m}{\Delta t} = \delta$ ἐκφράζει τή μάζα τῶν ἀερίων πού ξεφεύγει ἀπό τόν πύραυλο κατά μονάδα χρόνου. Τό $\frac{\Delta \upsilon_\pi}{\Delta t}$ εἶναι *ἡ μέση ἐπιτάχυνση* στή διάρκεια τοῦ ἐλάχιστου χρόνου Δt καί, ὅταν αὐτός ὁ χρόνος Δt τείνει πρός τό μηδέν, τό $\frac{\Delta \upsilon_\pi}{\Delta t}$ τείνει πρός μιά ὁριακή τιμή πού εἶναι *ἡ ἐπιτάχυνση* γ τοῦ πυραύλου στή χρονική στιγμή t. Ἄρα :

$$\text{ἐπιτάχυνση τοῦ πυραύλου (στή στιγμή t)} \qquad \gamma = \frac{\delta \cdot \upsilon_A}{m}$$

Στή χρονική στιγμή t ἡ μάζα m τοῦ πυραύλου εἶναι $m = m_0 - \delta \cdot t$. Ἄρα ἡ ἐπιτάχυνση τοῦ πυραύλου σέ συνάρτηση μέ τό χρόνο τῆς κινήσεως του δίνεται ἀπό τήν ἐξίσωση :

$$\boxed{\text{ἐπιτάχυνση πυραύλου (στή στιγμή t)} \qquad \gamma = \frac{\delta \cdot \upsilon_A}{m_0 - \delta \cdot t}} \qquad (2)$$

Τό γινόμενο $\delta \cdot \upsilon_A$ εἶναι θετικό. Τό γινόμενο $\delta \cdot t$ ἐκφράζει τήν ἐλάττωση τῆς μάζας τοῦ πυραύλου καί ἑπομένως πάντοτε εἶναι $m_0 > \delta \cdot t$. Ὥστε ἡ διαφορά $m_0 - \delta \cdot t$ εἶναι θετική, ἀλλά μέ τό πέρασμα τοῦ χρόνου αὐτή ἡ διαφορά συνεχῶς ἐλαττώνεται καί τελικά γίνεται ἴση μέ $m_{\tau\varepsilon\lambda}$, πού ἐκφράζει τή μάζα τοῦ πυραύλου, ὅταν ἐξαντληθεῖ ὅλο τό καύσιμο ὑλικό. Ὅσο λοιπόν διαρκεῖ ἡ ἐνεργητική προώθηση τοῦ πυραύλου, *ἡ ἐπιτάχυνση* γ εἶναι πάντοτε θετική καί *συνεχῶς αὐξάνεται*. Σ' αὐτή τή φάση τῆς κινήσεως τοῦ πυραύλου ἡ ταχύτητά του διαρκῶς αὐξάνεται, ὥσπου νά ἐξαντληθεῖ τό καύσιμο ὑλικό. Ἀπό τά παραπάνω συνάγεται ὅτι :

Ὅταν ἡ μάζα (δ) τῶν ἀερίων, πού ξεφεύγουν κατά μονάδα χρόνου, διατηρεῖται σταθερή, ἡ ἐπιτάχυνση (γ) τοῦ πυραύλου συνεχῶς αὐξάνεται, ὥσπου νά ἐξαντληθεῖ τό καύσιμο ὑλικό.

β. Προωστική δύναμη τοῦ πυραύλου. Ἡ προώθηση τοῦ πυραύλου ὀφείλεται σέ μιά δύναμη $\vec{F}$ πού ἔχει μέτρο $F = m \cdot \gamma$. Στή χρονική στιγμή t ἡ μάζα τοῦ πυραύλου εἶναι :

$$m = m_0 - \delta \cdot t$$

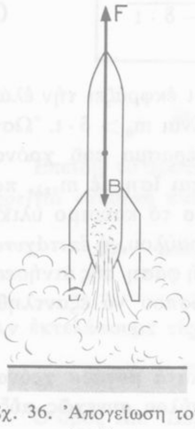
Τό μέτρο τῆς ἐπιταχύνσεως γ στή χρονική στιγμή t δίνεται ἀπό τήν ἐξίσωση (2). Ἑπομένως στή χρονική στιγμή t *ἡ προωστική δύναμη* (F) τοῦ πυραύλου ἔχει μέτρο :

$$\boxed{\text{προωστική δύναμη} \qquad F = \delta \cdot \upsilon_A} \qquad (3)$$

Ἡ προωστική δύναμη (F), πού ἀναπτύσσεται στόν πύραυλο εἶναι ἀνάλογη μέ τή μάζα (δ) τῶν ἀερίων πού ξεφεύγουν κατά μονάδα χρόνου καί ἀνάλογη μέ τήν ταχύτητα (υ_A) ἐξόδου τῶν ἀερίων ἀπό τόν πύραυλο.

Τά μεγέθη δ καί υ_A εἶναι δύο σταθερές πού ἐξαρτῶνται ἀπό τήν κατασκευή τοῦ πυραύλου καί ἐπομένως *ἡ προωστική δύναμη* F τοῦ πυραύλου εἶναι *σταθερή* καί ἐξαρτᾶται ἀπό τήν κατασκευή του. Γι' αὐτό οἱ κινητῆρες ἀντιδράσεως τῶν ἀεροπλάνων χαρακτηρίζονται συνήθως ἀπό τήν προωστική δύναμη πού ἀναπτύσσουν.

Ἀπογείωση τοῦ πυραύλου. Οἱ συνθῆκες, πού ἐπικρατοῦν κατά τήν ἀπογείωση τοῦ πυραύλου, διαφέρουν ἀπό τίς συνθῆκες πού θεωρήσαμε παραπάνω (κίνηση στό κενό, ἔλλειψη τῆς ἕλξεως τῆς Γῆς). Ἡ ἀπογείωση τοῦ πυραύλου συνήθως γίνεται σέ κατακόρυφη θέση (σχ. 36). Ἔστω ὅτι ὁ πύραυλος βρίσκεται ἀκόμη ἀκίνητος στό ἔδαφος, ἀλλά ὁ κινητήρας του ἄρχισε νά λειτουργεῖ καί ἐκτοξεύει κατακόρυφα πρός τά κάτω μιά μάζα δ ἀερίων μέ ταχύτητα υ_A. Τότε ἀναπτύσσεται πάνω στόν πύραυλο κατακόρυφη προωστική δύναμη, πού ἔχει φορά πρός τά πάνω καί μέτρο $F = \delta \cdot \upsilon_A$. Γιά νά ἀποσπαστεῖ ὁ πύραυλος ἀπό τό ἔδαφος, πρέπει ἡ προωστική δύναμη F νά γίνει μεγαλύτερη ἀπό τό βάρος B τοῦ πυραύλου, δηλαδή πρέπει νά γίνει $F > B$. Τότε ὁ πύραυλος ἀρχίζει νά ἀνεβαίνει μέ τήν ἐπίδραση τῆς δυνάμεως $F - B$. Ἄρα τή στιγμή τῆς ἀπογειώσεώς του ὁ πύραυλος ἔχει *ἀρχική ἐπιτάχυνση* γ_0 ἴση μέ :



Σχ. 36. Ἀπογείωση τοῦ πυραύλου.

$$\text{ἀρχική ἐπιτάχυνση} \qquad \gamma_0 = \frac{F - B}{m_0}$$

ὅπου m_0 εἶναι ἡ ἀρχική μάζα τοῦ πυραύλου.

Ὅσο χρόνο ὁ πύραυλος κινεῖται μέσα στήν ἀτμόσφαιρα καί κοντά στή Γῆ, ἐνεργοῦν πάνω του δύο σημαντικές *ἐξωτερικές δυνάμεις*, δηλαδή τό *βάρος* του, πού ἐλαττώνεται μέ τό ὕψος καί ἡ *ἀντίσταση τοῦ ἀέρα*, πού ἐξαρτᾶται ἀπό τήν ταχύτητα τοῦ πυραύλου καί τό ὕψος στό ὁποῖο βρίσκεται. Σ' αὐτή τήν πρώτη φάση τῆς κινήσεώς του, ὁ πύραυλος δέν μπορεῖ νά θεωρηθεῖ ὡς μονωμένο σύστημα καί ὁ νόμος τῆς κινήσεώς του εἶναι πολύπλοκος. Ὅταν ὅμως ὁ πύραυλος βγεῖ ἔξω ἀπό τήν ἀτμόσφαιρα καί ἀπομακρυνθεῖ πολύ ἀπό τή Γῆ, τότε ὁ πύραυλος μπορεῖ νά θεωρηθεῖ ὡς *μονωμένο σύστημα*, δηλαδή σύστημα στό ὁποῖο δέν ἐνεργοῦν ἐξωτερικές δυνάμεις. Σ' αὐτή τή φάση τῆς κινήσεως τοῦ πυραύλου ὁ νόμος τῆς κινήσεώς του ἁπλοποιεῖται.

Ἀπόρριψη ὀρόφων. Σέ μιά χρονική στιγμή t ἡ ἐπιτάχυνση τοῦ πυραύλου εἶναι $\gamma = \delta \cdot \upsilon_A / m$, δηλαδή εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογη μέ τή μάζα m πού ἔχει ὁ πύραυλος ἐκείνη τή στιγμή. Ὁ πύραυλος ἀποτελεῖται ἀπό πολλούς ὀρόφους. Γιά νά μή μεταφέρει ὁ πύραυλος ἄχρηστη μάζα, γι' αὐτό οἱ ὄροφοί του *ἀποσπῶνται διαδοχικά* ἀπό τόν πύραυλο, ὅσο προχωρεῖ ἡ ἐξάντληση τοῦ καύσιμου ὑλικοῦ.

Παράδειγμα. Ἕνας πύραυλος τύπου V_2 ἔχει ἀρχική μάζα $m_0 = 12 \cdot 10^3$ kgr καί ἐκτοξεύει μάζα ἀερίων $\delta = 100$ kgr/sec μέ ταχύτητα $\upsilon_A = 1800$ m/sec. Ἡ προωστική δύναμη F πού ἀναπτύσσει ὁ κινητήρας ἔχει μέτρο :

$$F = \delta \cdot \upsilon_A = 100 \text{ kgr/sec} \cdot 1800 \text{ m/sec} \qquad \text{καί} \qquad F = 18 \cdot 10^4 \text{ N}$$

Τό ἀρχικό βάρος τοῦ πυραύλου εἶναι :

$$B = m_0 \cdot g = 12 \cdot 10^3 \text{ kgr} \cdot 10 \text{ m/sec}^2 \qquad \text{καί} \qquad B = 12 \cdot 10^4 \text{ N}$$

Ἡ ἀρχική ἐπιτάχυνση γ_0 τοῦ πυραύλου εἶναι :

$$\gamma_0 = \frac{F - B}{m_0} = \frac{6 \cdot 10^4 \text{ N}}{12 \cdot 10^3 \text{ kgr}} \qquad \text{καί} \qquad \gamma_0 = 5 \text{ m/sec}^2$$

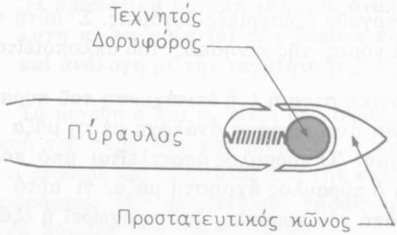
γ. Ἐκτόξευση βλήματος ἀπό πύραυλο. Ὅταν ὁ πύραυλος ἐξαντλήσει τό καύσιμο ὑλικό, ἐξακολουθεῖ νά κινεῖται μέ σταθερή ταχύτητα υ_0, ἄν πάνω στόν πύραυλο δέν ἐνεργεῖ καμιά ἐξωτερική δύναμη. Τότε ἀπό τόν πύραυλο μπορεῖ νά ἐκτοξευθεῖ ἕνα βλῆμα, π.χ. ἕνας τεχνητός δορυφόρος τῆς Γῆς. Ἡ ἐκτόξευση μπορεῖ νά γίνει μέ τή βοήθεια ἑνός συμπιεσμένου ἐλατηρίου, πού ἀπότομα ἐκτείνεται (σχ. 37). Ἔστω ὅτι ὁ πύραυλος ἔχει μάζα m_π καί ὁ τεχνητός δορυφόρος ἔχει μάζα m_Δ. Πρίν ἀπό τήν ἐκτόξευση τοῦ δορυφόρου τό σύστημα ἔχει :

$$\text{μάζα} \qquad m_\pi + m_\Delta \qquad \text{καί ταχύτητα} \qquad \upsilon_0$$

Μετά τήν ἐκτόξευση ὁ πύραυλος καί ὁ δορυφόρος ἔχουν ἀντίστοιχα ταχύτητα $υ_π$ καί $υ_Δ$. Θεωροῦμε ὅτι τό σύστημα εἶναι *μονωμένο* καί ἑπομένως ἰσχύει ἡ ἀρχή τῆς διατηρήσεως τῆς ὁρμῆς :

$$(m_π + m_Δ) \cdot υ_0 = m_π \cdot υ_π + m_Δ \,.\, υ_Δ$$

$$\text{ἤ} \qquad m_π (υ_0 - υ_π) = m_Δ (υ_Δ - υ_0) \tag{4}$$



Σχ. 37. Ἐκτόξευση τεχνητοῦ δορυφόρου ἀπό πύραυλο.

Τά μεγέθη $m_π$ καί $m_Δ$ ἔχουν θετικές τιμές. Ἄρα ἡ ταχύτητα $υ_Δ$ τοῦ δορυφόρου εἶναι *μεγαλύτερη* ἀπό τήν ταχύτητα $υ_π$ τοῦ πυραύλου. Ὥστε κατά τήν ἐκτόξευση τοῦ δορυφόρου ἡ ταχύτητα τοῦ πυραύλου *ἐλαττώνεται* ἀπό $υ_0$ σέ $υ_π$.

Παράδειγμα. Ἕνας πύραυλος ἔχει μάζα $m_π = 2700$ kgr καί φέρνει πάνω του τεχνητό δορυφόρο, πού ἔχει μάζα $m_Δ = 90$ kgr. Ἀπό τίς παρατηρήσεις βρήκαμε ὅτι μετά τήν ἐκτόξευση τοῦ δορυφόρου ἡ ταχύτητά του αὐξήθηκε κατά 2 m/sec. Θά βροῦμε πόσο ἐλαττώθηκε ἡ ταχύτητα τοῦ πυραύλου. Ἀπό τήν ἐξίσωση (4) ἔχουμε :

$$(υ_0 - υ_π) = \frac{m_Δ}{m_π} \cdot (υ_Δ - υ_0) = \frac{90 \text{ kgr}}{2700 \text{ kgr}} \cdot 2 \text{ m/sec}$$

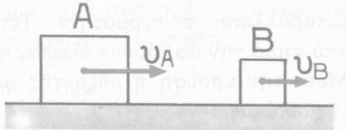
$$\text{καί} \qquad υ_0 - υ_π \simeq 0{,}066 \text{ m/sec}$$

Ἡ διαφορά μεταξύ τῶν ταχυτήτων $υ_Δ$ καί $υ_π$ εἶναι περίπου ἴση μέ 2 m/sec. Αὐτή ἡ διαφορά, ἄν καί εἶναι μικρή, εἶναι ὅμως ἀρκετή, ὥστε ἔπειτα ἀπό μερικές περιφορές γύρω ἀπό τή Γῆ ὁ φορέας πύραυλος καί ὁ δορυφόρος διακρίνονται ἀπό ἕναν παρατηρητή, πού βρίσκεται στή Γῆ, σάν δύο ξεχωριστά σώματα πού κινοῦνται στό διάστημα.

24. Κρούση δύο στερεῶν σωμάτων

Δύο στερεά σώματα Α καί Β κινοῦνται χωρίς τριβή πάνω σέ λεῖο οριζόντιο ἐπίπεδο (σχ. 32) κατά τήν ἴδια διεύθυνση καί φορά μέ ἀντίστοιχες σταθερές ταχύτητες $υ_A$ καί $υ_B$. Τό καθένα σῶμα ἐκτελεῖ μεταφορική κίνηση καί ἐπειδή εἶναι $υ_A > υ_B$ τά δύο σώματα θά συγκρουστοῦν. Ἡ *κρούση* δύο στερεῶν σωμάτων εἶναι ἕνα φαινόμενο πού διαρκεῖ *ἐλάχιστο χρόνο*, ἀλλά στή διάρκεια αὐτοῦ τοῦ χρόνου συμβαίνει *ἀπότομη μεταβολή τῆς ταχύτητας* τῶν δύο σωμάτων.

α. Διατήρηση τῆς ὁρμῆς κατά τήν κρούση. Τό φαινόμενο τῆς κρούσεως ἀρχίζει καί τελειώνει σέ δύο διαφορετικές χρονικές στιγμές t_1 καί t_2. Τό πείραμα δείχνει ὅτι στήν ἐλάχιστη διάρκεια τῆς κρούσεως $\Delta t = t_2 - t_1$ συμβαίνουν *πολύ μεγάλες μεταβολές τῆς ταχύτητας* τῶν δύο σωμάτων καί ἑπομένως στή διάρκεια τοῦ χρόνου Δt ἐμφανίζονται *τεράστιες ἐπιταχύνσεις*, πού ὀφείλονται σέ *πολύ μεγάλες δυνάμεις*. Σχετικά μέ αὐτές τίς δυνάμεις ὅλες οἱ ἄλλες δυνάμεις, πού ἐνεργοῦν στά δύο σώματα, θεωροῦνται *ἀσήμαντες* καί γι' αὐτό, τό σύστημα τῶν δύο σωμάτων πού συγκρούονται τό θεωροῦμε ὡς *μονωμένο σύστημα*. Στή διάρκεια τῆς κρούσεως λαβαίνουμε ὑπόψη μόνο τίς τεράστιες δυνάμεις πού ἐμφανίζονται στά σημεῖα ἐπαφῆς τῶν δύο στερεῶν σωμάτων. Τό πείραμα δείχνει ὅτι :

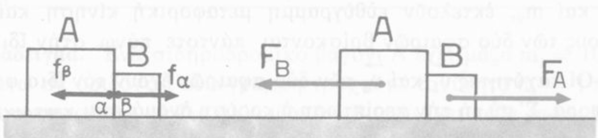


Σχ. 38. Κρούση δύο στερεῶν σωμάτων.

Κατά τήν κρούση δύο στερεῶν σωμάτων (μονωμένο σύστημα) ἡ ὁλική ὁρμή τοῦ συστήματος διατηρεῖται σταθερή.

Μεταξύ τῶν χρονικῶν στιγμῶν t_1 καί t_2 τά παραπάνω δύο στερεά σώματα βρίσκονται σέ ἐπαφή (σχ. 39). Τότε ἕνα ὑλικό σημεῖο α τοῦ σώματος Α ἐξασκεῖ σέ ἕνα σημεῖο β τοῦ σώματος Β μιά *δύναμη* f_α, ἀλλά καί τό σημεῖο β ἐξασκεῖ στό σημεῖο α μιά *ἀντίδραση* f_β, ἀντίθετη μέ τή δύναμη f_α. Ὥστε στή διάρκεια τοῦ χρόνου $t_2 - t_1$ τῆς κρούσεως ἐφαρμόζονται στά σώματα Α καί Β ἀντίστοιχα οἱ ἀντίθετες δυνάμεις :

$$F_A = \sum f_\alpha \qquad \text{καί} \qquad F_B = \sum f_\beta$$



Σχ. 39. Στή διάρκεια τῆς κρούσεως ἐμφανίζονται πολύ μεγάλες δυνάμεις.

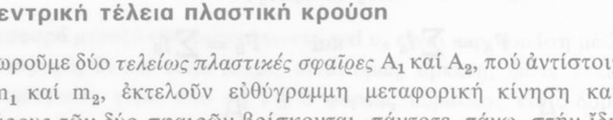
β. Ἀνελαστική καί ἐλαστική κρούση. Ὅταν συμβαίνει κρούση δύο στερεῶν σωμάτων, *ἡ ὁλική ὁρμή* τοῦ συστήματος *διατηρεῖται σταθερή*, ἀλλά σχεδόν πάντοτε ἕνα μέρος τῆς κινητικῆς ἐνέργειας τοῦ συστήματος μετατρέπεται σέ θερμότητα καί γι' αὐτό *ἡ ὁλική κινητική ἐνέργεια* τοῦ συστήματος *δέ διατηρεῖται σταθερή*. Ἐνδιαφέρουσες εἶναι δύο ἀκραῖες περιπτώσεις. Σέ ὁρισμένες κρούσεις τά δύο σώματα *κολλᾶνε* τό ἕνα μέ τό ἄλλο καί μετά τήν κρούση ἀποτελοῦν ἕνα σῶμα. Κατά τήν κρούση αὐτή, πού ὀνομάζεται *ἀνελαστική* ἤ *πλαστική κρούση*, πάντοτε συμβαίνει ἐλάττωση τῆς κινητικῆς ἐνέργειας τοῦ συστήματος, γιατί ἕνα μέρος αὐτῆς τῆς ἐνέργειας μεταβάλλεται σέ θερμότητα. Τέτοια κρούση συμβαίνει, ὅταν μιά σφαίρα ἀπό πηλό τήν ἀφήσουμε ἐλεύθερη νά πέσει πάνω σέ μιά πλάκα ἀπό πηλό. Μετά τήν κρούση ἡ μάζα τῆς σφαίρας εἶναι ἐνσωματωμένη μέ τή μάζα τῆς πλάκας.

Ἀντίθετα, σέ μερικές κρούσεις τά δύο στερεά σώματα, μετά τή σύγκρουσή τους, πάντοτε *ἀποχωρίζονται* τό ἕνα ἀπό τό ἄλλο. Κατά τήν κρούση αὐτή, πού ὀνομάζεται *ἐλαστική κρούση*, συμβαίνει πολύ μικρή ἐλάττωση τῆς κινητικῆς ἐνέργειας τοῦ συστήματος. Καί ἄν τά συγκρουόμενα σώματα εἶναι τελείως ἐλαστικά, τότε συμβαίνει *τέλεια ἐλαστική κρούση* καί ἡ ὁλική κινητική ἐνέργεια τοῦ συστήματος *διατηρεῖται σταθερή*. Τέτοια κρούση συμβαίνει, ὅταν ἀπό ὁρισμένο ὕψος h ἀφήσουμε μιά σφαίρα ἀπό χάλυβα νά πέσει ἐλεύθερα πάνω σέ μιά πλάκα ἀπό χάλυβα. Τότε ἡ σφαίρα μετά τήν κρούση ἀνεβαίνει στό ἴδιο ὕψος h, γιατί ἡ μηχανική ἐνέργεια τῆς σφαίρας *διατηρεῖται σταθερή*. Οἱ κρούσεις τῶν στερεῶν σωμάτων παρουσιάζουν διάφορες μορφές, ἀπό τήν τέλεια ἀνελαστική ὥς τήν τέλεια ἐλαστική κρούση. Ὥστε :

Κατά τήν κρούση ἡ ὁλική ὁρμή τοῦ συστήματος διατηρεῖται σταθερή, ἐνῶ ἡ ὁλική κινητική ἐνέργεια τοῦ συστήματος διατηρεῖται σταθερή, μόνο ὅταν συμβαίνει τέλεια ἐλαστική κρούση.

25. Κεντρική τέλεια πλαστική κρούση

Θεωροῦμε δύο *τελείως πλαστικές σφαῖρες* A_1 καί A_2, πού ἀντίστοιχα ἔχουν μάζες m_1 καί m_2, ἐκτελοῦν εὐθύγραμμη μεταφορική κίνηση καί τά κέντρα βάρους τῶν δύο σφαιρῶν βρίσκονται πάντοτε πάνω στήν ἴδια εὐθεία (σχ. 40). Οἱ ταχύτητες $\vec{\upsilon}_1$ καί $\vec{\upsilon}_2$ τῶν δύο σφαιρῶν ἔχουν τόν ἴδιο φορέα καί τήν ἴδια φορά. Σ' αὐ τή τήν περίπτωση ἡ κρούση ὀνομάζεται *κεντρική κρούση*



Σχ. 40. Κεντρική κρούση δύο τελείως πλαστικῶν σφαιρῶν Α καί Β.

Κατά τή σύγκρουσή τούς οἱ δύο σφαῖρες κολλᾶνε ἡ μιά μέ τήν ἄλλη καί ἀποτελοῦν ἕνα σῶμα Β, πού ἔχει μάζα $m_1 + m_2$ καί ταχύτητα $\vec{\upsilon}$, ἡ ὁποία ἔχει τή διεύθυνση καί τή φορά τῶν ταχυτήτων $\vec{\upsilon}_1$ καί $\vec{\upsilon}_2$. Ἀλλά κατά τήν κρούση αὐτή συμβαίνει πάντοτε παραμόρφωση τῶν σωμάτων, γιά τήν ὁποία ἀπαιτεῖται *δαπάνη ἐνέργειας*. Ἡ ὁλική ὁρμή τοῦ συστήματος *διατηρεῖται σταθερή* καί ἑπομένως ἰσχύει ἡ ἀκόλουθη ἀλγεβρική ἐξίσωση :

$$(m_1 \cdot \upsilon_1 + m_2 \cdot \upsilon_2) - (m_1 + m_2) \cdot \upsilon = 0$$

ἄρα
$$\boxed{\upsilon = \frac{m_1 \cdot \upsilon_1 + m_2 \cdot \upsilon_2}{m_1 + m_2}} \qquad (1)$$

Ἄν οἱ ταχύτητες $\vec{\upsilon}_1$ καί $\vec{\upsilon}_2$ ἔχουν τήν ἴδια διεύθυνση, ἀλλά ἀντίθετη φορά, τότε στήν ἐξίσωση (1) οἱ ταχύτητες υ_1 καί υ_2 εἶναι ἑτερόσημες. Ὅταν οἱ ταχύτητες $\vec{\upsilon}_1$ καί $\vec{\upsilon}_2$ ἔχουν διαφορετικές διευθύνσεις, τότε ἡ ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ τοῦ νέου σώματος προσδιορίζεται ἀπό τήν ἀνυσματική ἐξίσωση :

$$m_1 \vec{\upsilon}_1 + m_2 \vec{\upsilon}_2 = (m_1 + m_2) \vec{\upsilon}$$

Γενικά κατά τήν κρούση τῶν πλαστικῶν σφαιρῶν Α καί Β συμβαίνει *ἐλάττωση* τῆς κινητικῆς ἐνέργειας τοῦ συστήματος κατά ΔΕ, ἡ ὁποία ὑπολογίζεται εὔκολα ἀπό τήν ἐξίσωση :

$$\Delta E = \left(\frac{1}{2} m_1 \upsilon_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \upsilon_2^2\right) - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\upsilon^2 \qquad \text{ἄρα}$$

$$\boxed{\text{ἐλάττωση κινητικῆς ἐνέργειας} \qquad \Delta E = \frac{m_1 m_2 (\upsilon_1 - \upsilon_2)^2}{2(m_1 + m_2)}}$$

Παράδειγμα. Ἕνα σιδηροδρομικό βαγόνι Α ἔχει μάζα $m_1 = 10^4$ kgr, κινεῖται πάνω σέ ὁριζόντια εὐθύγραμμη τροχιά μέ ταχύτητα $\upsilon_1 = 1$ m/sec. Τό βαγόνι Α συγκρούεται μέ ἕνα ἄλλο βαγόνι Β, πού ἔχει μάζα $m_2 = 15 \cdot 10^3$ kgr καί εἶναι σταματημένο πάνω στή γραμμή μέ λυμένα τά φρένα του. Κατά τή σύγκρουση τά δύο βαγόνια συνδέονται τό ἕνα μέ τό ἄλλο καί ἀποτελοῦν ἕνα σύστημα πού κινεῖται μέ ταχύτητα υ. Τό βαγόνι Β ἀρχικά εἶχε ταχύτητα $\upsilon_2 = 0$. Ἀπό τήν ἐξίσωση (1) ἔχουμε :

$$\upsilon = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot \upsilon_1 = \frac{10^4 \text{ kgr}}{25 \cdot 10^3 \text{ kgr}} \cdot 1 \frac{\text{m}}{\text{sec}} = 0{,}40 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$$

Ἡ μεταβολή τῆς κινητικῆς ἐνέργειας εἶναι :

$$\Delta E = \frac{10^4 \text{ kgr} \cdot 15 \cdot 10^3 \text{ kgr}}{2 \cdot 25 \cdot 10^3 \text{ kgr}} \cdot 1 \frac{\text{m}^2}{\text{sec}^2} = \frac{150 \cdot 10^6}{50 \cdot 10^3} \text{ Joule} = 3000 \text{ Joule}$$

26. Κεντρική τέλεια ἐλαστική κρούση

Ὅταν συμβαίνει *τέλεια ἐλαστική κρούση* προκαλοῦνται στά δύο σώματα *ἐλαστικές παραμορφώσεις*, πού διαρκοῦν ἐλάχιστο χρόνο. Σ' αὐτό τόν ἐλάχιστο χρόνο τά δύο *τελείως ἐλαστικά σώματα* ξαναπαίρνουν τό ἀρχικό σχῆμα τους, καί μεταξύ τῶν δύο σωμάτων ἀναπτύσσονται ἰσχυρές δυνάμεις, πού ἀναγκάζουν τά σώματα *νά ἀπομακρυνθοῦν* τό ἕνα ἀπό τό ἄλλο.

Ἄς θεωρήσουμε δύο τελείως ἐλαστικές σφαῖρες A_1 καί A_2, πού ἀντίστοιχα ἔχουν μάζες m_1 καί m_2, ἐκτελοῦν εὐθύγραμμη μεταφορική κίνηση καί τά κέντρα βάρους τῶν δύο σφαιρῶν βρίσκονται πάντοτε πάνω στήν ἴδια εὐθεία (σχ. 41). Οἱ ταχύτητες $\vec{\upsilon}_1$ καί $\vec{\upsilon}_2$ τῶν δύο σφαιρῶν ἔχουν τόν ἴδιο φορέα, τήν ἴδια φορά καί ἡ κρούση τῶν δύο σφαιρῶν εἶναι κεντρική. Μετά τήν κρούση οἱ σφαῖρες A_1 καί A_2 ἔχουν ἀντίστοιχες ταχύτητες $\vec{V}_1$ καί $\vec{V}_2$, πού ἔχουν τήν ἴδια διεύθυνση καί φορά μέ τίς ταχύτητες $\vec{\upsilon}_1$ καί $\vec{\upsilon}_2$. Κατά τήν τέλεια ἐλαστική κρούση *ἡ ὁλική ὁρμή* καί *ἡ ὁλική κινητική ἐνέργεια* τοῦ συστήματος *διατηροῦνται σταθερές* καί ἑπομένως ἰσχύουν οἱ ἀκόλουθες ἀλγεβρικές ἐξισώσεις :

$$m_1 \cdot \upsilon_1 + m_2 \cdot \upsilon_2 = m_1 \cdot V_1 + m_2 \cdot V_2$$

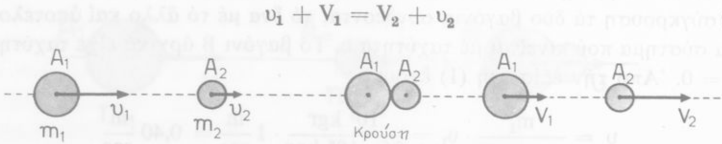
$$\text{ἤ} \qquad m_1(\upsilon_1 - V_1) = m_2(V_2 - \upsilon_2) \tag{1}$$

$$\frac{1}{2} m_1 \cdot \upsilon_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot \upsilon_2^2 = \frac{1}{2} m_1 \cdot V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot V_2^2$$

$$\text{ἤ} \qquad m_1(\upsilon_1^2 - V_1^2) = m_2(V_2^2 - \upsilon_2^2) \tag{2}$$

Ἄν διαιρέσουμε κατά μέλη τίς ἐξισώσεις (1) καί (2) ἔχουμε :

$$\upsilon_1 + V_1 = V_2 + \upsilon_2 \tag{3}$$



Σχ. 41. Κεντρική κρούση δύο τελείως ἐλαστικῶν σφαιρῶν Α καί Β.

Ἀπό τίς ἐξισώσεις (1) καί (3) βρίσκουμε ὅτι μετά τήν κρούση οἱ σφαῖρες A_1 καί A_2 ἔχουν ἀντίστοιχες ταχύτητες:

$$\boxed{V_1 = \frac{2m_2\upsilon_2 + (m_1 - m_2)\,\upsilon_1}{m_1 + m_2}} \quad (4) \qquad \boxed{V_2 = \frac{2m_1\upsilon_1 + (m_2 - m_1)\,\upsilon_2}{m_1 + m_2}} \quad (5)$$

Ὅταν οἱ ταχύτητες $\vec{\upsilon}_1$ καί $\vec{\upsilon}_2$ ἔχουν διαφορετικές διευθύνσεις τότε γιά νά ἐκφράσουμε τό νόμο τῆς διατηρήσεως τῆς ὁρμῆς, ἐκλέγουμε κατάλληλους ἄξονες καί πάνω σ' αὐτούς προβάλλουμε τά ἀνύσματα τῶν ὁρμῶν πρίν καί μετά τήν κρούση.

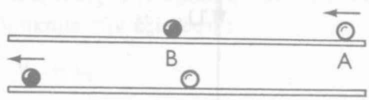
α. Μερικές περιπτώσεις. **1. Σφαῖρες μέ ἴσες μάζες.** Ἄν οἱ παραπάνω δύο τελείως ἐλαστικές σφαῖρες A_1 καί A_2 ἔχουν ἴσες μάζες $m_1 = m_2 = m$, τότε ἀπό τίς ἐξισώσεις (4) καί (5) βρίσκουμε:

$$V_1 = \frac{2m\cdot\upsilon_2}{2m} \quad ἤ \quad V_1 = \upsilon_2 \quad καί \quad V_2 = \frac{2m\cdot\upsilon_1}{2m} \quad ἤ \quad \boxed{V_2 = \upsilon_1}$$

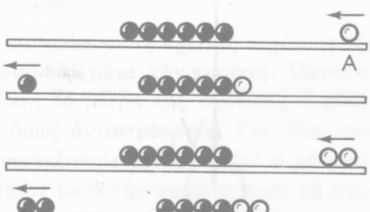
Κατά τήν κεντρική κρούση δύο τελείως ἐλαστικῶν σφαιρῶν, πού ἔχουν ἴσες μάζες, οἱ σφαῖρες ἀνταλλάσσουν τίς ταχύτητές τους.

Ἄν λοιπόν ἡ μιά ἀπό τίς δύο σφαῖρες, π.χ. ἡ Β, (σχ. 42) ἀρχικά εἶναι ἀκίνητη ($\upsilon_2 = 0$), τότε *μετά τήν κρούση* ἡ σφαίρα Α μένει ἀκίνητη ($V_1 = 0$), ἐνῶ ἡ σφαίρα Β ἀποκτᾶ τήν ταχύτητα πού εἶχε ἡ σφαίρα Α ($V_2 = \upsilon_1$).

Ἡ ὁρμή καί ἡ κινητική ἐνέργεια τῆς σφαίρας Α μποροῦν νά μεταδοθοῦν στήν ἀκίνητη σφαίρα Β καί διά μέσου μιᾶς σειρᾶς ἀπό ἴσες ἐλαστικές σφαῖρες, πού ἐφάπτονται ἡ μιά μέ τήν ἄλλη (σχ. 43).



Σχ. 42. Οἱ δύο ἴσες σφαῖρες ἀνταλλάσσουν τίς ταχύτητές τους.



Σχ. 43. Μετάδοση τῆς ὁρμῆς καί τῆς κινητικῆς ἐνέργειας.

2. Κρούση πάνω σέ τελείως ἐλαστικό τοίχωμα. Μιά τελείως ἐλαστική σφαίρα, πού ἔχει μάζα m_1 καί ταχύτητα υ_1, συγκρούεται *κάθετα* μέ ἕνα τελείως ἐλαστικό τοίχωμα πού ἠρεμεῖ (σχ. 44). Τότε εἶναι:

$$m_2 = \infty \quad καί \quad \upsilon_2 = 0.$$

Μετά τήν κρούση τό μέτρο V_1 τῆς

ταχύτητας πού ἔχει ἡ σφαίρα εἶναι :

$$V_1 = \frac{2m_2\upsilon_2 + (m_1 - m_2)\,\upsilon_1}{m_1 + m_2}$$

Ἄν διαιρέσουμε καί τούς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος διά m_2 καί βάλουμε $\upsilon_2 = 0$, ἔχουμε :

$$V_1 = \frac{\left(\frac{m_1}{m_2} - 1\right)\cdot \upsilon_1}{\left(\frac{m_1}{m_2} + 1\right)} \qquad \text{ἄρα} \qquad \boxed{V_1 = -\upsilon_1}$$

γιατί εἶναι $m_1/m_2 = 0$. Ὥστε :

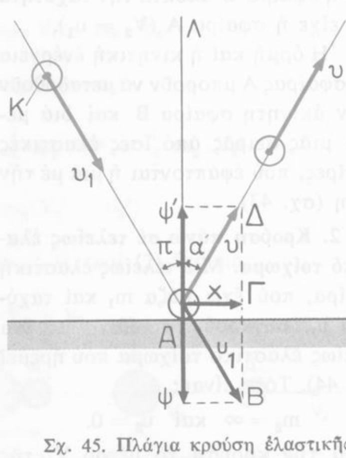
Ὅταν μιά τελείως ἐλαστική σφαίρα χτυπάει κάθετα πάνω σέ τελείως ἐλαστικό τοίχωμα, ἡ σφαίρα ἀνακλᾶται μέ ἀντίθετη ταχύτητα.

Κατά τήν κρούση αὐτή ἡ *μεταβολή τῆς ὁρμῆς* ἔχει μέτρο :

$$\Delta J = m_1(\upsilon_1 - V_1) = m_1[\upsilon_1 - (-\upsilon_1)] \qquad \text{ἤ} \qquad \Delta J = 2m_1\upsilon_1$$

Ἄν ἡ τελείως ἐλαστική σφαίρα χτυπάει *πλάγια* πάνω στό ἀκίνητο ἐλαστικό τοίχωμα (σχ. 45), τότε ἡ διεύθυνση τῆς κινήσεως τοῦ κέντρου βάρους Κ τῆς σφαίρας σχηματίζει γωνία π μέ τήν κάθετο στό σημεῖο Α

Σχ. 44. Κάθετη κρούση ἐλαστικῆς σφαίρας.



Σχ. 45. Πλάγια κρούση ἐλαστικῆς σφαίρας.

(σημεῖο προσπτώσεως). Ἡ τροχιά τοῦ κέντρου βάρους Κ τῆς σφαίρας βρίσκεται πάνω στό ἐπίπεδο ΚΑΛ *(ἐπίπεδο προσπτώσεως)*, πού εἶναι κάθετο στό τοίχωμα. Τή στιγμή πού ἡ σφαίρα χτυπάει πάνω στό τοίχωμα ἀναλύουμε τήν ταχύτητά της $\vec{\upsilon}_1$ σέ δύο συνιστῶσες $\vec{\chi}$ καί $\vec{\psi}$. Κατά τήν κρούση ἡ συνιστώσα $\vec{\chi}$ διατηρεῖται σταθερή, ἐνῶ ἡ συνιστώσα $\vec{\psi}$ μετατρέπεται στήν ἀντίθετη συνιστώσα $\vec{\psi}'$. Ἔτσι *μετά τήν κρούση* ἡ ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ τῆς σφαίρας εἶναι ἡ συνισταμένη ταχυτήτων $\vec{\chi}$ καί $\vec{\psi}'$. Τώρα τό *μέτρο τῆς ταχύτητας* υ *εἶναι ἴσο* μέ τό μέτρο τῆς ταχύτητας υ_1. Ἡ διεύθυνση τῆς ταχύτητας υ σχηματίζει γωνία α μέ τήν κάθετο ΛΑ *(γωνία ἀνακλάσεως)*. Μετά τήν κρούση ἡ τροχιά τοῦ κέντρου βάρους Κ τῆς σφαίρας βρίσκεται πάλι *πάνω στό ἐπίπεδο προσπτώσεως* ΚΑΛ. Ἀπό τά σχηματιζόμενα ἴσα τρίγωνα εὔκολα βρίσκουμε ὅτι *ἡ γωνία προσπτώσεως* π *εἶναι ἴση μέ τή γωνία ἀνακλάσεως* α. Σ' αὐτή τήν περίπτωση *ἡ μεταβολή τῆς ὁρμῆς* τῆς σφαίρας ἔχει μέτρο:

$$\Delta J = 2m_1 \psi \quad \text{ἤ} \quad \Delta J = 2m_1 \upsilon_1 \cdot \text{συν}\, \pi$$

Ἀπό τά παραπάνω συνάγεται ὅτι μιά τελείως ἐλαστική σφαίρα, ὅταν συγκρούεται μέ τελείως ἐλαστικό τοίχωμα εἴτε κάθετα εἴτε πλάγια, τότε τό μέτρο τῆς ταχύτητας δέ μεταβάλλεται καί ἑπομένως κατά τήν κρούση *ἡ σφαίρα δέ χάνει κινητική ἐνέργεια.*

β. Συντελεστής κρούσεως. Ἐξετάζοντας τήν κρούση τῶν δύο τελείως ἐλαστικῶν σφαιρῶν A_1 καί A_2 βρήκαμε τήν ἐξίσωση:

$$\upsilon_1 + V_1 = V_2 + \upsilon_2$$

ἀπό τήν ὁποία ἔχουμε τήν ἐξίσωση:

$$\underbrace{\upsilon_1 - \upsilon_2}_{\text{πρίν ἀπό τήν κρούση}} = -\underbrace{(V_1 - V_2)}_{\text{μετά τήν κρούση}}$$

Αὐτές οἱ δύο διαφορές ταχυτήτων φανερώνουν *τή σχετική ταχύτητα* τῆς σφαίρας A_1 σχετικά μέ τή σφαίρα A_2 πρίν καί μετά τήν κρούση. Παρατηροῦμε ὅτι στήν τελείως ἐλαστική κρούση τό μέτρο τῆς σχετικῆς ταχύτητας διατηρεῖται σταθερό, ἡ φορά της ὅμως ἀντιστρέφεται. Γιά δύο σώματα πού συγκρούονται, ὀνομάζεται *συντελεστής κρούσεως* (u) ὁ μέ ἀντίθετο σημεῖο λόγος τῆς σχετικῆς ταχύτητας μετά τήν κρούση πρός τή σχετική ταχύτητα πρίν ἀπό τήν κρούση.

$$\text{συντελεστής κρούσεως} \qquad u = -\frac{V_1 - V_2}{\upsilon_1 - \upsilon_2}$$

Στήν τέλεια ἐλαστική κρούση εἶναι $u = 1$, ἐνῶ στήν τέλεια ἀνελαστική κρούση εἶναι $u = 0$. Γενικά ὁ συντελεστής κρούσεως παίρνει τιμές ἀπό μηδέν ὡς τή μονάδα.

Μιά σφαίρα ἀφήνεται ἐλεύθερη νά πέσει ἀπό ὕψος h_1. Ὅταν ἡ σφαίρα φτάσει στό ἔδαφος ἡ σχετική ταχύτητά της σχετικά μέ τήν ἐπιφάνεια τῆς Γῆς εἶναι $\upsilon_1 = \sqrt{2gh_1}$. Μετά τήν κρούση ἡ σφαίρα ἀνεβαίνει σέ ὕψος h_2 καί ἑπομένως μετά τήν κρούση ἡ σχετική ταχύτητα τῆς σφαίρας σχετικά μέ τήν ἐπιφάνεια τῆς Γῆς εἶναι $\upsilon_2 = -\sqrt{2gh_2}$ (τήν πρός τά κάτω φορά τῆς ταχύτητας θεωρήσαμε ὡς θετική φορά). Σ' αὐτή τήν περίπτωση *ὁ συντελεστής κρούσεως* εἶναι :

$$u = -\frac{\upsilon_2}{\upsilon_1} = -\frac{-\sqrt{2gh_2}}{\sqrt{2gh_1}} \quad \text{καί} \quad u = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}}$$

Παράδειγμα. Στήν Πυρηνική Φυσική ἔχουν ἰδιαίτερη σημασία οἱ κρούσεις τῶν στοιχειωδῶν σωματιδίων (π.χ. τῶν νετρονίων) μέ ἀτομικούς πυρῆνες. Γιά παράδειγμα παίρνουμε τήν κεντρική ἐλαστική κρούση τοῦ *νετρονίου μέ ἕνα δευτερόνιο* (εἶναι ὁ πυρήνας τοῦ ἀτόμου τοῦ βαριοῦ ὑδρογόνου). Τό νετρόνιο ἔχει μάζα m_N, ταχύτητα υ_1 καί κινητική ἐνέργεια $E_1 = \frac{1}{2} m_N \upsilon_1^2$. Τό δευτερόνιο ἔχει μάζα $m_\Delta = 2m_N$ καί ἀρχικά ἠρεμεῖ ($\upsilon_2 = 0$). Τό νετρόνιο καί τό δευτερόνιο τά θεωροῦμε ὡς τελείως ἐλαστικές σφαῖρες καί ἡ κρούση τους εἶναι κεντρική. Ἄρα ἡ ταχύτητα V_1 τοῦ νετρονίου μετά τή σύγκρουσή του μέ τό δευτερόνιο (ἐξίσωση 4) εἶναι :

$$V_1 = \frac{2m_\Delta \upsilon_2 + (m_N - m_\Delta)\upsilon_1}{m_N + m_\Delta} = \frac{(m_N - 2m_N)\upsilon_1}{3m_N} \quad \text{ἤ} \quad V_1 = -\frac{\upsilon_1}{3}$$

Μετά τήν κρούση τό νετρόνιο ἔχει κινητική ἐνέργεια :

$$E_1 = \frac{1}{2} m_N \cdot V_1^2 = \frac{1}{2} m_N \cdot \left(-\frac{\upsilon_1}{3}\right)^2 \quad \text{ἤ} \quad E_N = \frac{1}{9} E_1$$

Ὥστε κατά τήν κρούση τό νετρόνιο *ἀποβάλλει* τά $^8/_9$ τῆς ἀρχικῆς κινητικῆς ἐνέργειάς του. Αὐτή τήν ἐνέργεια τήν παίρνει τό δευτερόνιο. Ἔτσι τό νετρόνιο *ἐπιβραδύνεται* καί γι' αὐτό λέμε ὅτι τό βαρύ ὑδρογόνο εἶναι ἕνας *ἐπιβραδυντής νετρονίων*.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

44. Μιά βάρκα εἶναι ἀκίνητη πάνω στήν ἤρεμη ἐπιφάνεια μιᾶς λίμνης. Ἡ βάρκα ἔχει μῆκος $l = 3$ m. Ἕνας ἄνθρωπος, πού ἦταν ἀκίνητος πάνω στή βάρκα, ἀρχίζει νά βαδίζει ἀπό τήν πλώρη πρός τήν πρύμνη. Κατά πόσο διάστημα θά μετακινηθεῖ ἡ βάρκα, ἄν ἡ μάζα τοῦ ἀνθρώπου εἶναι $m_A = 60$ kgr καί τῆς βάρκας εἶναι $m_B = 120$ kgr ; Ἡ ἀντίσταση τοῦ νεροῦ παραλείπεται.

45. Ἕνα σφυρί ἔχει μάζα $m = 2$ kgr καί χτυπάει πάνω στό κεφάλι καρφιοῦ, πού θέλουμε νά χωθεῖ μέσα σέ ξύλο. Πόση δύναμη F ἐνεργεῖ πάνω στό καρφί, ἄν μέσα σέ χρόνο $\Delta t = 0{,}01$ sec ἡ ταχύτητα τοῦ σφυριοῦ μεταβάλλεται ἀπό $\upsilon = 5$ m/sec σέ μηδέν ;

46. Ἕνα πυροβόλο ἔχει μάζα $m_\Pi = 300$ kgr καί ρίχνει βλῆμα πού ἔχει μάζα $m_B = 5$ kgr καί μέ γωνία βολῆς $\alpha = 30^0$ σχετικά μέ τό ὁριζόντιο ἐπίπεδο. Τό βλῆμα ἔχει ταχύτητα $\upsilon_B = 500$ m/sec καί τό πυροβόλο βρίσκεται πάνω στό ὁριζόντιο ἔδαφος. Πόση εἶναι ἡ ὁριζόντια ταχύτητα ἀνακρούσεως τοῦ πυροβόλου ;

47. Ἕνας δοκιμαστικός σωλήνας ἔχει μάζα M καί κλείνεται μέ φελλό πού ἔχει μάζα m. Ὁ σωλήνας περιέχει λίγες σταγόνες αἰθέρα καί εἶναι στερεωμένος σέ ὁριζόντια θέση στήν ἄκρη μιᾶς κατακόρυφης ράβδου πού μπορεῖ νά στρέφεται γύρω ἀπό ὁριζόντιο ἄξονα O πού περνάει ἀπό τήν πάνω ἄκρη τῆς ράβδου. Ἡ μάζα τῆς ράβδου θεωρεῖται ἀσήμαντη. Ὅταν θερμάνουμε ἐλαφρά τό σωλήνα, παράγονται ἀτμοί αἰθέρα μέ πίεση καί ὁ φελλός ἐκτοξεύεται. Πόση ἀρχική ταχύτητα υ πρέπει νά ἀποκτήσει ὁ φελλός, γιά νά διαγράψει ὁ σωλήνας ὁλόκληρη κυκλική τροχιά γύρω ἀπό τόν ἄξονα O ;

48. Ἕνας πύραυλος ἔχει μάζα $m = 200$ tn καί τά ἀέρια ξεφεύγουν μέ ταχύτητα $\upsilon = 24$ km/sec σχετικά μέ τόν πύραυλο. Νά βρεθεῖ πόση μάζα δ ἀερίων πρέπει νά ξεφεύγει κατά δευτερόλεπτο : α) γιά νά ἀρχίσει ὁ πύραυλος νά ἀνεβαίνει καί β) γιά νά ἀνεβαίνει μέ ἐπιτάχυνση $\gamma = 5$ m/sec^2. $g = 10$ m/sec^2.

49. Σέ ἕναν πύραυλο, πού ἡ ἀρχική μάζα του εἶναι $m_0 = 18$ tn, ἐφαρμόζεται μιά σταθερή κατακόρυφη προωστική δύναμη $F = 3 \cdot 10^5$ N. Ἡ μάζα δ τῶν ἀερίων πού ξεφεύγουν κατά δευτερόλεπτο εἶναι σταθερή. Στό τέλος τοῦ χρόνου $t_1 = 90$ sec ἡ ὁλική μάζα τοῦ πυραύλου εἶναι $m_{\tau\varepsilon\lambda} = 6$ tn καί ὅλο τό καύσιμο ὑλικό ἔχει ἐξαντληθεῖ. Νά βρεθεῖ ἡ ἐπιτάχυνση γ τοῦ πυραύλου σέ μιά χρονική στιγμή t, ὅπου $0 \leqslant t \leqslant 90$ sec. $g = 10$ m/sec^2.

50. Ὁ τελευταῖος ὄροφος ἑνός πυραύλου βρίσκεται πολύ μακριά ἀπό τή Γῆ, ὥστε θεωρεῖται μονωμένο σύστημα, ἔχει μάζα m καί ἀπομακρύνεται ἀπό τή Γῆ μέ ταχύτητα $\upsilon = 1500$ m/sec. Ξαφνικά συμβαίνει ἔκρηξη καί αὐτό τό κινητό χωρίζεται σέ δύο κομμάτια A καί B. Ἡ μάζα m_2 τοῦ B εἶναι τά 3/5 τῆς μάζας m_1 τοῦ A. Τό κομμάτι A ἐξακολουθεῖ νά ἀπομακρύνεται μέ ταχύτητα $υ_1 = 1700$ m/sec καί ἡ διεύθυνση τῆς κινήσεώς του σχηματίζει γωνία $α = 45^0$ μέ τή διεύθυνση τῆς ἀρχικῆς κινήσεως. 1) Νά βρεθεῖ σέ συνάρτηση μέ τή μάζα m καί νά παρασταθεῖ γραφικά ἡ ὁρμή $\vec{J}$ τοῦ πυραύλου πρίν ἀπό τήν ἔκρηξη καί ἡ ὁρμή $\vec{J_1}$ τοῦ κομματιοῦ Α μετά τήν ἔκρηξη. 2) Νά προσδιοριστεῖ ἡ ὁρμή $\vec{J_2}$ τοῦ κομματιοῦ Β, ἡ διεύθυνση τῆς κινήσεώς του καί τό μέτρο $υ_2$ τῆς ταχύτητάς του.

51. Ἀπό ὕψος $h = 10$ m ἀφήνουμε ἐλεύθερη νά πέσει μιά σφαίρα πού ἔχει μάζα $m_1 = 30$ gr. Ἡ σφαίρα πέφτει πάνω σέ πλάκα μολύβδου πού ἔχει μάζα $m_2 = 500$ gr καί διατηρεῖται ὁριζόντια, κρεμασμένη ἀπό κατακόρυφα σπειροειδή ἐλατήρια. Μετά τήν κρούση ἡ σφαίρα μένει ἐνσωματωμένη μέσα στήν πλάκα τοῦ μολύβδου. Πόση εἶναι μετά τήν κρούση ἡ ταχύτητα $υ_1$ τοῦ συστήματος πλάκα - σφαίρα καί πόση ἡ ἐλάττωση τῆς κινητικῆς ἐνέργειας ; $g = 10$ m/sec^2.

52. Ἕνα βλῆμα, πού ἔχει μάζα $m_1 = 15$ gr κινεῖται μέ ὁριζόντια ταχύτητα $υ_1$ καί συγκρούεται μέ ἕνα κομμάτι ξύλου, πού ἔχει μάζα $m_2 = 3$ kgr καί κρέμεται ἀκίνητο ἀπό ἕνα μακρύ κατακόρυφο σχοινί. Τό βλῆμα σφηνώνεται μέσα στό ξύλο καί ἀμέσως μετά τήν κρούση τό κέντρο βάρους τοῦ ξύλου ἀνεβαίνει κατά $h = 20$ cm ψηλότερα ἀπό τήν ἀρχική θέση του. Νά βρεθεῖ τό μέτρο $υ_1$ τῆς ταχύτητας τοῦ βλήματος. $g = 10$ m/sec^2.

53. Δύο ἀπόλυτα πλαστικές σφαῖρες Α καί Β ἔχουν ἀντίστοιχα μάζες m_1 καί m_2 καί τό ἄθροισμα τῶν μαζῶν τους εἶναι $M = 200$ kgr. Ἡ σφαίρα Α κινεῖται μέ ταχύτητα $υ_1 = 80$ m/sec, ἐνῶ ἡ σφαίρα Β κινεῖται κατά τήν ἀντίθετη φορά μέ ταχύτητα $υ_2 = 45$ m/sec. Μετά τήν κεντρική κρούση τους οἱ δύο σφαῖρες ἀποτελοῦν ἕνα σῶμα Γ πού κινεῖται μέ ταχύτητα $υ = 30$ m/sec κατά τή φορά τῆς κινήσεως τῆς σφαίρας Α. Νά βρεθεῖ ἡ μάζα τῆς κάθε σφαίρας καί ἡ ἀπώλεια κινητικῆς ἐνέργειας πού σημειώθηκε κατά τήν κρούση.

54. Πάνω στήν ὁριζόντια ἐπιφάνεια μιᾶς παγωμένης λίμνης βρίσκεται ἀκίνητη μιά πέτρα Α πού ἔχει μάζα $m_1 = 3$ kgr. Πάνω της χτυπάει μιά ἄλλη πέτρα Β, πού ἔχει μάζα $m_2 = 5$ kgr. Οἱ δύο πέτρες θεωροῦνται ὡς μή ἐλαστικά σώματα καί ἡ κρούση εἶναι κεντρική. Μετά τή σύγκρουση ἡ πέτρα Α διατρέχει πάνω στόν πάγο διάστημα $s = 60$ m. Ὁ συντελεστής τριβῆς ὀλισθήσεως εἶναι $η = 0{,}02$. Πόση ταχύτητα εἶχε ἡ πέτρα Β τή στιγμή πού ἔγινε ἡ σύγκρουση ; $g = 10$ m/sec^2.

55. Μιά σφαίρα Α ἔχει μάζα $m_1 = 100$ gr καί κινεῖται ὁριζόντια μέ ταχύτητα $υ_1 = 20$ cm/sec. Μιά ἄλλη σφαίρα Β πού ἔχει μάζα $m_2 = 25$ gr κινεῖται κατακόρυφα ἀπό κάτω πρός τά πάνω μέ ταχύτητα $υ_2 = 50$ cm/sec. Οἱ δύο σφαῖρες συγκρούονται κεντρικά καί ἀποτελοῦν ἕνα σῶμα Γ. Νά βρεθεῖ κατά ποιά διεύθυνση καί μέ πόση ταχύτητα υ κινεῖται τό νέο σῶμα Γ.

56. Δύο ἀπόλυτα ἐλαστικές σφαῖρες Α καί Β ἔχουν ἀντίστοιχα μάζα m_1 καί $m_2 = 2\,m_1$ καί κρέμονται ἀπό κατακόρυφο νῆμα, πού ἔχει μῆκος $l = 1$ m. Οἱ ἀκτίνες τῶν δύο σφαιρῶν θεωροῦνται ἀσήμαντες. Ἀρχικά οἱ δύο σφαῖρες ἐφάπτονται ἡ μιά μέ τήν ἄλλη. Ἀπομακρύνουμε τή σφαίρα Α ἀπό τή θέση ἰσορροπίας της, ὥστε τό νῆμα νά σχηματίσει γωνία $α = 60^0$ μέ τήν κατακόρυφο πού περνάει ἀπό τό σημεῖο στηρίξεως τοῦ νήματος καί ἀφήνουμε τή σφαίρα ἐλεύθερη, χωρίς ἀρχική ταχύτητα. Νά βρεθεῖ ἡ ταχύτητα $υ_1$ καί $υ_2$ ἀντίστοιχα τῶν σφαιρῶν Α καί Β μετά τήν κρούση. $g = 10$ m/sec^2.

57. Δύο ὅμοιες σφαῖρες Α καί Β πού ἡ καθεμιά ἔχει μάζα $m = 20$ gr, ἠρεμοῦν πάνω στήν ὁριζόντια ἐπιφάνεια μιᾶς παγωμένης λίμνης. Ἡ σφαίρα Α ρίχνεται πάνω στήν ἄλλη σφαίρα Β μέ ταχύτητα $υ_1 = 50$ cm/sec. Ἄν ὁ συντελεστής κρούσεως μεταξύ τῶν δύο σφαιρῶν εἶναι $u = 0{,}75$, νά βρεθοῦν οἱ ταχύτητες V_A καί V_B τῶν δύο σφαιρῶν μετά τήν κρούση.

58. Ἐμπρός ἀπό ἕνα ἀνένδοτο κατακόρυφο τοίχωμα ΔΕ βρίσκονται δύο σημεῖα Α καί Β, πού οἱ ἀποστάσεις τους ἀπό τό τοίχωμα εἶναι ἀντίστοιχα $α = 2{,}75$ m καί $β = 4$ m. Ἡ ἀπόσταση τῶν δύο σημείων εἶναι $AB = γ = 10$ m. Ἀπό τό σημεῖο Α ἐκτοξεύεται πρός τό τοίχωμα μιά ἐλαστική σφαίρα, πού κινεῖται πάνω στό ὁριζόντιο ἐπίπεδο χωρίς τριβή. Νά βρεθεῖ πόσο εἶναι τό μῆκος s τοῦ δρόμου πού διατρέχει ἡ σφαίρα, γιά νά πάει ἀπό τό σημεῖο Α στό σημεῖο Β, ἀφοῦ πρῶτα ἀνακλαστεῖ ἡ σφαίρα πάνω στό τοίχωμα.

59. Ἀπό ἕνα σημεῖο Α, πού βρίσκεται σέ ὕψος h πάνω ἀπό τό ὁριζόντιο ἔδαφος, ἀρχίζει νά κινεῖται μιά σφαίρα κατά μῆκος κεκλιμένου ἐπιπέδου, πού ἔχει μῆκος $l = h/3$ καί κλίση 30^0 σχετικά μέ τό ὁριζόντιο ἐπίπεδο. Ἡ σφαίρα φτάνει στήν ἄκρη Γ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου καί ἀπό ἐκεῖ πέφτει πάνω στήν ἀνένδοτη ὁριζόντια ἐπιφάνεια τοῦ ἐδάφους. Ἡ κρούση θεωρεῖται ἐλαστική. Σέ πόσο ὕψος H ἀνεβαίνει ἡ σφαίρα μετά τήν κρούση ;

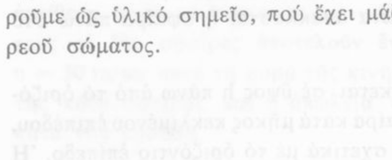
60. Μιά μικρή σφαίρα Α, πού ἔχει μάζα m_1 καί κινεῖται μέ ταχύτητα $υ_1$, συγκρούεται κεντρικά μέ μιά ἄλλη μικρή σφαίρα Β, πού ἔχει μάζα m_2 καί εἶναι ἀκίνητη ($υ_2 = 0$). Ἡ κρούση εἶναι ἐλαστική. α) Νά βρεθεῖ ποιά τιμή πρέπει νά ἔχει ὁ λόγος m_1/m_2 τῶν μαζῶν τῶν δύο σφαιρῶν, ὥστε : 1) ἡ μάζα m_1 νά μεταδώσει στή μάζα m_2 πολύ μικρό μέρος τῆς κινητικῆς ἐνέργειάς της καί 2) ἡ μάζα m_1 νά μεταδώσει στή μάζα m_2 τό μεγαλύτερο μέρος τῆς κινητικῆς ἐνέργειάς της. β) Πῶς μπορεῖ νά ἐφαρμοστεῖ τό παραπάνω φαινόμενο τῆς κρούσεως γιά τό φρενάρισμα νετρονίων πού ἔχουν μεγάλη ταχύτητα ; (μάζα νετρονίου m_n = μάζα πρωτονίου m_p).

61. Δύο μικρές σφαῖρες A καί B θεωροῦνται ὡς ὑλικά σημεῖα καί ἔχουν τήν ἴδια μάζα m. Ἡ σφαίρα A κινεῖται κατά τή διεύθυνση τοῦ ἄξονα x μέ ταχύτητα $\upsilon_1 = 300$ m/sec καί συγκρούεται μέ τή σφαῖρα B πού εἶναι ἀκίνητη ($\upsilon_2 = 0$). Μετά τήν κρούση οἱ διευθύνσεις τῆς κινήσεως τῶν σφαιρῶν A καί B σχηματίζουν μέ τόν ἄξονα x ἀντίστοιχα γωνίες θ_1 καί $\theta_2 = 30^0$. Νά βρεθοῦν ἡ γωνία θ_1 καί οἱ ταχύτητες V_1 καί V_2 τῶν σφαιρῶν μετά τήν κρούση.

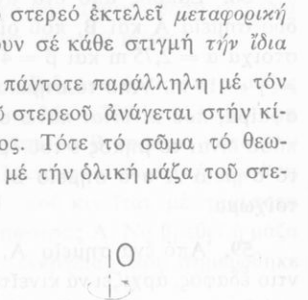
Στροφική κίνηση στερεοῦ

27. Στροφική κίνηση στερεοῦ

Ἕνα στερεό σῶμα ἀποτελεῖται ἀπό στοιχειώδεις μάζες $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_\nu$ πού τίς θεωροῦμε σάν ὑλικά σημεῖα. Ὅταν τό στερεό ἐκτελεῖ *μεταφορική κίνηση*, ὅλα τά ὑλικά σημεῖα τοῦ στερεοῦ ἔχουν σέ κάθε στιγμή *τήν ἴδια ταχύτητα* $\vec{\upsilon}$ καί μιά εὐθεία τοῦ στερεοῦ μένει πάντοτε παράλληλη μέ τόν ἑαυτό της (σχ. 46). Ἡ μεταφορική κίνηση τοῦ στερεοῦ ἀνάγεται στήν κίνηση πού ἐκτελεῖ τό *κέντρο βάρους* τοῦ σώματος. Τότε τό σῶμα τό θεωροῦμε ὡς ὑλικό σημεῖο, πού ἔχει μάζα m ἴση μέ τήν ὁλική μάζα τοῦ στερεοῦ σώματος.



Σχ. 46. Μεταφορική κίνηση στερεοῦ.



Σχ. 46α. Στροφική κίνηση στερεοῦ.

῎Αν τό ἴδιο στερεό στρέφεται γύρω ἀπό ἕνα *σταθερό ἄξονα* ΟΟ′, τότε τά ὑλικά σημεῖα τοῦ στερεοῦ, πού ἀποτελοῦν τόν *ἄξονα περιστροφῆς*, παραμένουν *ἀκίνητα* (σχ. 46α). ῞Ολα τά ἄλλα ὑλικά σημεῖα τοῦ στερεοῦ ἔχουν σέ κάθε στιγμή *τήν ἴδια γωνιακή ταχύτητα* $\vec{\omega}$ καί διαγράφουν κυκλικές τροχιές, πού τά ἐπίπεδά τους εἶναι κάθετα στόν ἄξονα περιστροφῆς. Τότε λέμε ὅτι τό στερεό σῶμα ἐκτελεῖ *στροφική κίνηση*. ῎Αν ἡ γωνιακή ταχύτητα ω τοῦ στερεοῦ διατηρεῖται σταθερή, τό στερεό ἐκτελεῖ *ὁμαλή στροφική κίνηση*. ῾Υποθέτουμε ὅτι τό στερεό δέ γλιστράει κατά μῆκος τοῦ ἄξονα περιστροφῆς.

28. Κινητική ἐνέργεια στρεφόμενου στερεοῦ

῞Ενα στερεό σῶμα, πού ἔχει μάζα m, στρέφεται γύρω ἀπό σταθερό ἄξονα (σχ. 46α) μέ σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω. ῞Ενα ὑλικό σημεῖο τοῦ σώματος ἔχει μάζα m_1, βρίσκεται σέ ἀπόσταση r_1 ἀπό τόν ἄξονα περιστροφῆς, διαγράφει τήν κυκλική τροχιά του μέ ταχύτητα πού ἔχει μέτρο $\upsilon_1 = \omega \cdot r_1$ καί ἐπομένως ἔχει κινητική ἐνέργεια:

$$E_1 = \frac{1}{2} m_1 \cdot \upsilon_1^2 \qquad \text{ἤ} \qquad E_1 = \frac{1}{2} m_1 \cdot \omega^2 \cdot r_1^2$$

῾Η ὁλική κινητική ἐνέργεια ($E_{\kappa\iota\nu}$) τοῦ στρεφόμενου στερεοῦ σώματος εἶναι ἴση μέ τό ἄθροισμα τῶν κινητικῶν ἐνεργειῶν ὅλων τῶν ὑλικῶν σημείων τοῦ σώματος, δηλαδή εἶναι:

$$E_{\kappa\iota\nu} = \frac{1}{2} (m_1 \cdot r_1^2 + m_2 \cdot r_2^2 + \cdots + m_\nu \cdot r_\nu^2) \cdot \omega^2$$

Τό ἄθροισμα, πού εἶναι μέσα στήν παρένθεση, ὀνομάζεται *ροπή ἀδράνειας* (Θ) τοῦ στερεοῦ ὡς πρός τόν ἄξονα περιστροφῆς πού πήραμε. ῞Ωστε:

ροπή ἀδράνειας $\Theta = \sum m \cdot r^2$	κινητική ἐνέργεια $E_{\kappa\iota\nu} = \frac{1}{2} \Theta \cdot \omega^2$

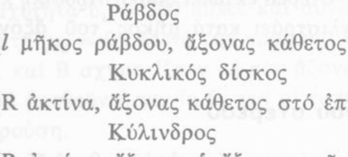
῾Η ροπή ἀδράνειας εἶναι *μονόμετρο* μέγεθος καί στό σύστημα μονάδων MKS *μονάδα ροπῆς ἀδράνειας* εἶναι 1 kgr · m².

῾Η ροπή ἀδράνειας στερεοῦ. Στή στροφική κίνηση τοῦ στερεοῦ σώματος σημασία ἔχει *τό πῶς κατανέμεται ἡ μάζα* τοῦ σώματος γύρω ἀπό τόν ἄξονα περιστροφῆς. ᾿Από αὐτή τήν κατανομή τῆς μάζας m τοῦ σώματος *ἐξαρτᾶται* ἡ ροπή ἀδράνειας τοῦ σώματος. ῎Αν τό στερεό σῶμα εἶναι *ὁμογενές* καί ἔχει ἁπλό γεωμετρικό σχῆμα, τότε ἔχει καί *ἄξονα συμμετρίας*. Σ᾿ αὐτή τήν περίπτωση ὑπολογίζεται ἡ ροπή ἀδράνειας τοῦ σώματος ὡς πρός τόν ἄξονα συμμετρίας του.

Ροπή ἀδράνειας μερικῶν στερεῶν σωμάτων. Θεωροῦμε ὁμογενή στερεά σώματα, πού ἔχουν γεωμετρικό σχῆμα, ἔχουν μάζα m καί ὁ ἄξονας περιστροφῆς περνάει ἀπό τό κέντρο βάρους τοῦ καθενός σώματος καί εἶναι ἄξονας συμμετρίας. Στόν παρακάτω πίνακα δίνεται ἡ ροπή ἀδράνειας Θ γιά μερικά στερεά.

Στερεό	Ροπή ἀδράνειας
Ράβδος (*l* μῆκος ράβδου, ἄξονας κάθετος στή ράβδο)	$\Theta = \frac{1}{12} m \cdot l^2$
Κυκλικός δίσκος (R ἀκτίνα, ἄξονας κάθετος στό ἐπίπεδο τοῦ δίσκου)	$\Theta = \frac{1}{2} m \cdot R^2$
Κύλινδρος (R ἀκτίνα, ἄξονας ὁ ἄξονας τοῦ κυλίνδρου)	$\Theta = \frac{1}{2} m \cdot R^2$
Σφαίρα (R ἀκτίνα)	$\Theta = \frac{2}{5} m \cdot R^2$
Σφόνδυλος (R ἀκτίνα, μάζα στήν περιφέρεια)	$\Theta = m \cdot R^2$
Κυκλικός δίσκος (ἄξονας μιά διάμετρος 2R)	$\Theta = \frac{1}{4} m \cdot R^2$

Παράδειγμα. Μιά ὁμογενής σφαίρα ἔχει μάζα m, ἀκτίνα R καί βάρος B = mg. Ἀφήνουμε τή σφαίρα ἐλεύθερη πάνω σέ λεῖο κεκλιμένο ἐπίπεδο πού σχηματίζει γωνία α μέ τό ὁριζόντιο ἐπίπεδο (σχ. 47). Τριβές δέν ὑπάρχουν. Ἡ σφαίρα θά κινηθεῖ ἐλεύθερα μέ τήν ἐπίδραση τῆς συνιστώσας τοῦ βάρους πού εἶναι παράλληλη μέ τό κεκλιμένο ἐπίπεδο καί ἴση μέ F = mg · ημ α. Ἡ σφαίρα ἐκτελεῖ ταυτόχρονα τίς ἑξῆς δύο κινήσεις :



Σχ. 47. Ἐφαρμογή τῆς ἀρχῆς τῆς διατηρήσεως τῆς ἐνέργειας.

1. *Μεταφορική κίνηση*, γιατί τό κέντρο βάρους της κινεῖται εὐθύγραμμα.
2. *Περιστροφική κίνηση*, γιατί περιστρέφεται γύρω ἀπό ἄξονα πού περνάει ἀπό τό κέντρο βάρους της καί εἶναι παράλληλος μέ τό κεκλιμένο ἐπίπεδο.

Ὅταν ἡ σφαίρα ἔχει διατρέξει ἕνα διάστημα KK′ = s, τότε τό κέντρο βάρους της ἔχει ἀποκτήσει μιά μεταφορική ταχύτητα υ καί ἐξαιτίας τῆς περιστροφῆς της ἡ σφαίρα ἔχει ἀποκτήσει καί μιά γωνιακή ταχύτητα ω. Ἑπομένως στή θέση K′ ἡ σφαίρα ἔχει κινητική ἐνέργεια :

— ἐξαιτίας τῆς μεταφορικῆς κινήσεώς της $\frac{1}{2} m \cdot \upsilon^2$

— ἐξαιτίας τῆς περιστροφικῆς κινήσεώς της $\frac{1}{2} \Theta \cdot \omega^2$

Ἡ ὁλική κινητική ἐνέργεια τῆς σφαίρας εἶναι ἴση μέ τό ἔργο F · s τῆς δυνάμεως πού κινεῖ τή σφαίρα. Ἔτσι ἔχουμε τήν ἐξίσωση :

$$\frac{1}{2} m \cdot \upsilon^2 + \frac{1}{2} \Theta \cdot \omega^2 = mg \cdot s \cdot \eta\mu\, \alpha \qquad (1)$$

Ἡ ροπή ἀδράνειας τῆς σφαίρας εἶναι $\Theta = \frac{2}{5} m \cdot R^2$. Ἐπειδή ἡ σφαίρα κυλιέται, χωρίς νά δλισθαίνει, εἶναι $\upsilon = \omega \cdot R$. Ἄρα $\omega = \upsilon / R$. Ὥστε ἡ ἐξίσωση (1) γράφεται :

$$\frac{1}{2} m \cdot \upsilon^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} m \cdot R^2 \cdot \frac{\upsilon^2}{R^2} = mg \cdot s \cdot \eta\mu\, \alpha$$

ἄρα $$\boxed{\upsilon = \sqrt{\frac{10}{7} gs \cdot \eta\mu\, \alpha}}$$

Ἡ μεταφορική κίνηση τῆς σφαίρας εἶναι ὁμαλά ἐπιταχυνόμενη κίνηση στήν ὁποία ἰσχύει ἡ ἐξίσωση :

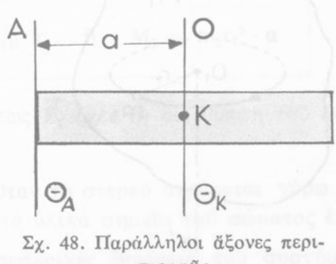
$$\upsilon = \sqrt{2\gamma \cdot s}$$

ὅπου γ εἶναι ἡ ἐπιτάχυνση τῆς μεταφορικῆς κινήσεως τῆς σφαίρας. Ἄρα εἶναι :

$$\sqrt{2\gamma \cdot s} = \sqrt{\frac{10}{7} gs \cdot \eta\mu\, \alpha} \qquad \text{καί} \qquad \boxed{\gamma = \frac{5}{7} g \cdot \eta\mu\, \alpha}$$

Ἡ γωνιακή ταχύτητα ω τῆς σφαίρας βρίσκεται ἀπό τήν ἐξίσωση $\omega = \frac{\upsilon}{R}$

α. Παράλληλοι ἄξονες περιστροφῆς. Ἡ ροπή ἀδράνειας ἑνός στερεοῦ σώματος ἐξαρτᾶται ἀπό τό πῶς κατανέμεται ἡ μάζα m τοῦ σώματος γύρω ἀπό τόν ἄξονα περιστροφῆς. Ἐάν ὁ ἄξονας περιστροφῆς μετατεθεῖ παράλληλα μέ τόν ἑαυτό του, τότε ἡ ροπή ἀδράνειας τοῦ σώματος *μεταβάλλεται*. Ἄς θεωρήσουμε ἕνα στερεό σῶμα (σχ. 48) καί *δύο παράλληλους ἄξονες* περιστροφῆς, τόν ἄξονα Ο πού περνάει ἀπό τό κέντρο βάρους Κ τοῦ σώματος καί τόν ἄξονα Α, πού ἡ ἀπόστασή του ἀπό τόν ἄξονα Ο εἶναι α. Ἐάν



Σχ. 48. Παράλληλοι ἄξονες περιστροφῆς.

Θ_K εἶναι ἡ ροπή ἀδράνειας τοῦ σώματος ὡς πρός τόν ἄξονα Ο καί Θ_A ἡ *ροπή ἀδράνειας τοῦ σώματος ὡς πρός τόν ἄξονα* Α ἀποδείχνεται ὅτι ἰσχύει ἡ ἐξίσωση :

παράλληλοι ἄξονες περιστροφῆς	$\Theta_A = \Theta_K + m \cdot \alpha^2$

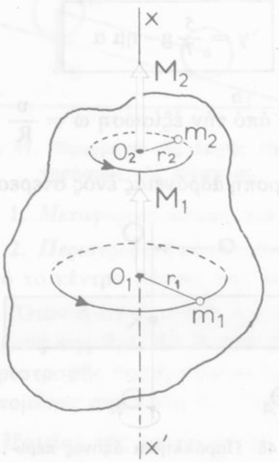
Παράδειγμα. Ἡ ροπή ἀδράνειας ὁμογενοῦς ράβδου (σχ. 48) ὡς πρός τόν ἄξονα Ο εἶναι $\Theta_K = \frac{1}{12} m \cdot l^2$, ὅπου l εἶναι τό μῆκος τῆς ράβδου. Ἡ ροπή ἀδράνειας τῆς ράβδου ὡς πρός ἄξονα Α κάθετο στή ράβδο καί πού περνάει ἀπό τήν ἄκρη τῆς ράβδου εἶναι :

$$\Theta_A = \Theta_K + m \cdot \alpha^2 \qquad \text{ἤ} \qquad \Theta_A = \frac{1}{12} m \cdot l^2 + m \cdot \frac{l^2}{4}$$

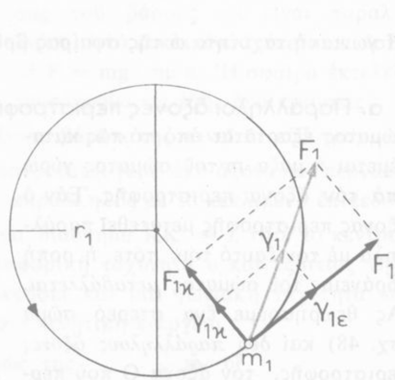
$$\text{καί} \qquad \Theta_A = \frac{1}{3} m \cdot l^2$$

29. Ἐξίσωση τῆς στροφικῆς κινήσεως τοῦ στερεοῦ

Ὅταν τό στερεό στρέφεται γύρω ἀπό σταθερό ἄξονα (σχ. 49), ὅλα τά ὑλικά σημεῖα τοῦ στερεοῦ διαγράφουν κυκλικές τροχιές, πού τά ἐπίπεδά τους εἶναι κάθετα στόν ἄξονα περιστροφῆς. Σέ κάθε στιγμή ὅλα τά ὑλικά σημεῖα τοῦ στερεοῦ ἔχουν τήν ἴδια γωνιακή ταχύτητα ω καί τήν ἴδια γωνιακή ἐπιτάχυνση α.



Σχ. 49. Στροφική κίνηση στερεοῦ.



Σχ. 50. Κυκλική κίνηση ἑνός ὑλικοῦ σημείου τοῦ στερεοῦ.

Κίνηση ἑνός ὑλικοῦ σημείου τοῦ στερεοῦ. Ἕνα ὑλικό σημεῖο τοῦ στερεοῦ ἔχει μάζα m_1 καί βρίσκεται σέ ἀπόσταση r_1 ἀπό τόν ἄξονα περιστροφῆς. Ἄν τό ὑλικό σημεῖο ἐκτελεῖ *κυκλική μεταβαλλόμενη κίνηση*, τότε σέ μιά χρονική στιγμή t τό ὑλικό σημεῖο ἔχει:

γωνιακή ταχύτητα ω ταχύτητα $\upsilon_1 = \omega \cdot r_1$

γωνιακή ἐπιτάχυνση α ἐπιτάχυνση γ_1

Ἡ ἐπιτάχυνση $\vec{\gamma}_1$ ἀναλύεται σέ δύο συνιστῶσες, τήν κεντρομόλο ἐπιτάχυνση $\vec{\gamma}_{1K}$ καί τήν ἐπιτρόχια ἐπιτάχυνση $\vec{\gamma}_{1E}$ (σχ. 50). Σύμφωνα μέ τή θεμελιώδη ἐξίσωση $\vec{F} = m \cdot \vec{\gamma}$ στό ὑλικό σημεῖο ἐνεργεῖ μιά δύναμη $\vec{F}_1$ πού ἔχει τή διεύθυνση καί τή φορά τῆς ἐπιταχύνσεως $\vec{\gamma}_1$ καί μέτρο ἴσο μέ $F_1 = m_1 \cdot \gamma_1$. Ἡ δύναμη $\vec{F}_1$ βρίσκεται πάνω στό ἐπίπεδο τῆς κυκλικῆς τροχιᾶς τοῦ ὑλικοῦ σημείου καί ἀναλύεται σέ δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστῶσες, *τήν κεντρομόλο συνιστῶσα* $\vec{F}_{1K}$ καί *τήν ἐπιτρόχια συνιστῶσα* $\vec{F}_{1E}$, πού ἀντίστοιχα ἔχουν μέτρο:

$$F_{1K} = m_1 \cdot \gamma_{1K} \quad \text{ἤ} \quad F_{1K} = m_1 \cdot \omega^2 \cdot r_1$$

$$F_{1E} = m_1 \cdot \gamma_{1E} \quad \text{ἤ} \quad F_{1E} = m_1 \cdot \alpha \cdot r_1$$

Ἡ ροπή τῆς δυνάμεως $\vec{F}_1$ ὡς πρός τόν ἄξονα περιστροφῆς εἶναι ἴση μέ τό ἄθροισμα τῶν ροπῶν τῶν δύο συνιστωσῶν $\vec{F}_{1K}$ καί $\vec{F}_{1E}$ ὡς πρός τόν ἴδιο ἄξονα. Ἐπειδή ὅμως ἡ διεύθυνση τῆς κεντρομόλου συνιστῶσας $\vec{F}_{1K}$ συναντᾶ τόν ἄξονα περιστροφῆς, ἡ ροπή τῆς $\vec{F}_{1K}$ εἶναι ἴση μέ μηδέν. Ἄρα ἡ ροπή $\vec{M}_1$ τῆς δυνάμεως $\vec{F}_1$ ὡς πρός τόν ἄξονα περιστροφῆς εἶναι ἴση μέ τή ροπή τῆς ἐπιτρόχιας συνιστῶσας $\vec{F}_{1E}$ ὡς πρός τόν ἴδιο ἄξονα καί ἔχει μέτρο:

$$\boxed{\text{ροπή δυνάμεως } F_1 \qquad M_1 = F_{1E} \cdot r_1 \quad \text{ἤ} \quad M_1 = m_1 r_1^2 \cdot \alpha} \qquad (1)$$

Τό ἄνυσμα $\vec{M}_1$ τῆς ροπῆς τῆς δυνάμεως $\vec{F}_1$ ἔχει τή διεύθυνση τοῦ ἄξονα περιστροφῆς (σχ. 49).

Στροφική κίνηση τοῦ στερεοῦ. Ὅταν τό στερεό στρέφεται γύρω ἀπό τόν ἄξονα, τότε σέ κάθε στιγμή ὅλα τά ὑλικά σημεῖα τοῦ σώματος ἔχουν *τήν ἴδια γωνιακή ἐπιτάχυνση* $\vec{\alpha}$. Οἱ ἐσωτερικές δυνάμεις τοῦ συστήματος τῶν ὑλικῶν σημείων δέν ἐπηρεάζουν τήν κίνηση τοῦ στερεοῦ, γιατί κατά ζεύγη εἶναι ἀντίθετες (δράση-ἀντίδραση) καί ἐπομένως τό ἄθροισμα τῶν ροπῶν ὅλων τῶν ἐσωτερικῶν δυνάμεων τοῦ συστήματος ὡς πρός τόν ἄξονα περιστροφῆς εἶναι ἴσο μέ μηδέν. Οἱ ροπές *τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων*, πού ἐφαρμόζονται στά διάφορα ὑλικά σημεῖα τοῦ στερεοῦ, ὡς πρός τόν ἄξονα περιστροφῆς ἔχουν μέτρο:

$$M_1 = m_1 r_1^2 \cdot \alpha \qquad M_2 = m_2 r_2^2 \cdot \alpha \cdots\cdots\cdots M_\nu = m_\nu r_\nu^2 \cdot \alpha$$

Τό ἀλγεβρικό ἄθροισμα ὅλων αὐτῶν τῶν ροπῶν εἶναι ἴσο μέ τό μέτρο M τῆς ροπῆς *τῆς συνισταμένης τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων* ὡς πρός τόν ἄξονα περιστροφῆς τοῦ στερεοῦ. Ἄρα ἔχουμε τήν ἐξίσωση:

$$M = (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \cdots + m_\nu r_\nu^2) \cdot \alpha \quad \text{ἤ} \quad \boxed{M = \Theta \cdot \alpha}$$

Εἶναι φανερό ὅτι τά ἀνύσματα τῶν στοιχειωδῶν ροπῶν ἔχουν φορέα τόν ἄξονα περιστροφῆς καί ὅλα ἔχουν τήν ἴδια φορά. Ὥστε τό ἄνυσμα $\vec{M}$ τῆς ροπῆς τῆς συνισταμένης τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων ἔχει τή διεύθυνση τοῦ ἄξονα περιστροφῆς, δηλαδή τή διεύθυνση τῆς γωνιακῆς ἐπιταχύνσεως $\vec{\alpha}$. Ἀπό τά παραπάνω καταλήγουμε στό ἀκόλουθο συμπέρασμα:

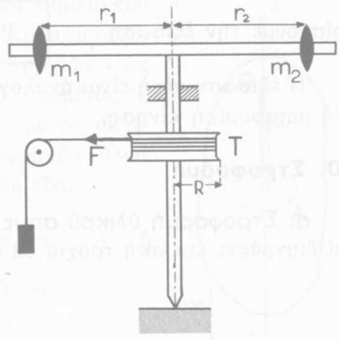
Ὅταν ἕνα στερεό σῶμα στρέφεται γύρω ἀπό ἄξονα, ἡ ροπή $\vec{M}$ τῆς συνισταμένης τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων ὡς πρός τόν ἄξονα περιστροφῆς δίνεται ἀπό τήν ἐξίσωση:

ἐξίσωση στροφικῆς κινήσεως στερεοῦ	$\vec{M} = \Theta \cdot \vec{\alpha}$

Ἡ ἐξίσωση $\vec{M} = \Theta \cdot \vec{\alpha}$ εἶναι ἀνάλογη μέ τή θεμελιώδη ἐξίσωση $\vec{F} = m \cdot \vec{\gamma}$ τῆς μεταφορικῆς κινήσεως καί δείχνει ὅτι τό αἴτιο τῆς στροφικῆς κινήσεως εἶναι *ἡ ροπή* $\vec{M}$. Ἡ ἀντίσταση τοῦ στερεοῦ στή μεταβολή τῆς ταχύτητάς του ἐκδηλώνεται μέ *τή ροπή ἀδράνειας* Θ τοῦ σώματος καί ἡ ὁποία ἐξαρτᾶται ἀπό τό πῶς κατανέμεται ἡ μάζα m τοῦ σώματος γύρω ἀπό τόν ἄξονα περιστροφῆς.

Ἄν στό στερεό σῶμα δέν ἐφαρμόζεται καμιά ροπή ($\vec{M} = 0$), τότε δέν ὑπάρχει γωνιακή ἐπιτάχυνση ($\vec{\alpha} = 0$) καί τό σῶμα ἤ ἠρεμεῖ ($\vec{\omega} = 0$) ἤ ἐκτελεῖ ὁμαλή στροφική κίνηση ($\vec{\omega}$ = σταθ.).

Πειραματική ἐπαλήθευση τῆς ἐξισώσεως $M = \Theta \cdot \alpha$. Μέ τή διάταξη τοῦ σχήματος 51 ἐπαληθεύουμε πειραματικά τήν ἐξίσωση $M = \Theta \cdot \alpha$. Ἡ δύναμη F ἀναπτύσσει στήν τροχαλία τή ροπή $F \cdot R$ καί αὐτή δίνει γωνιακή ἐπιτάχυνση α στό σύστημα τῶν δύο ἴσων μαζῶν m_1 καί m_2, πού μπορεῖ νά περιστρέφεται γύρω ἀπό κατακόρυφο ἄξονα. Μεταβάλλοντας τήν ἀπόσταση τῶν δύο μαζῶν ἀπό τόν ἄξονα περιστροφῆς, μεταβάλλουμε τή ροπή ἀδράνειας (Θ) τοῦ συστήματος. Παρατηροῦμε ὅτι, ὅσο μεγαλύτερη γίνεται ἡ ροπή ἀδράνειας (Θ), τόσο μικρότερη γίνεται ἡ γωνιακή ἐπιτάχυνση α τοῦ συστήματος.

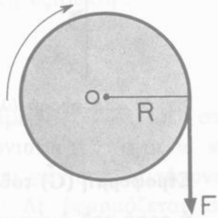


Σχ. 51. Σχηματική διάταξη γιά τήν πειραματική ἀπόδειξη τῆς ἐξισώσεως $M = \Theta \cdot \alpha$

Παράδειγμα. Ἕνας μεταλλικός δίσκος ἔχει διάμετρο $2R = 1$ m, μάζα $m = 6$ kgr καί στρέφεται γύρω ἀπό ἄξονα, πού εἶναι κάθετος στό ἐπίπεδο τοῦ δίσκου καί περνάει ἀπό τό κέντρο βάρους του (σχ. 52). Ὁ δίσκος ἀρχίζει νά στρέφεται ($t = 0$) μέ τήν ἐπίδραση μιᾶς δυνάμεως $F = 3$ N, πού ἐφαρμόζεται στήν περιφέρεια τοῦ δίσκου καί ἡ διεύθυνσή της εἶναι πάντοτε ἐφαπτομένη τοῦ δίσκου. Τότε ἔχουμε:

$$M = \Theta \cdot \alpha \quad \text{ἤ} \quad F \cdot R = \frac{1}{2} m \cdot R^2 \cdot \alpha \quad \text{ἄρα}$$

$$\alpha = \frac{2F}{m \cdot R} = \frac{2 \cdot 3\ \mathrm{N}}{6\ \mathrm{kgr} \cdot 0{,}6\ \mathrm{m}} = 2\ \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{sec}^2}$$



Σχ. 52. Περιστροφή δίσκου.

Στό τέλος τοῦ χρόνου $t = 10$ sec ὁ δίσκος ἔχει ἀποκτήσει γωνιακή ταχύτητα $\omega = \alpha \cdot t$ ἄρα $\omega = 20$ rad/sec καί ἔχει κινητική ἐνέργεια:

$$E_{\kappa\iota\nu} = \frac{1}{2}\Theta \cdot \omega^2 = \frac{1}{4} m \cdot R^2 \cdot \omega^2 \quad \text{καί} \quad E_{\kappa\iota\nu} = 150\ \text{Joule}$$

α. Ὁμαλή λειτουργία μηχανῆς. Σέ μιά μηχανή, πού λειτουργεῖ κανονικά, ὁ σφόνδυλος (ἤ ἄξονας τῆς μηχανῆς) στρέφεται μέ *σταθερή γωνιακή ταχύτητα* ω καί ἡ ἰσχύς P, τήν ὁποία προσφέρει ἡ μηχανή στό σφόνδυλο, ξοδεύεται ὡς ἔργο ἀντιστάσεων. Ἡ μηχανή ἀναπτύσσει στό σφόνδυλο μιά ροπή M, ἡ ὁποία σέ χρόνο t παράγει ἔργο:

$$W = M \cdot \varphi \quad \text{ἄρα} \quad W = M \cdot \omega \cdot t$$

Ἐπειδή εἶναι $W = P \cdot t$

βρίσκουμε τήν ἐξίσωση $\boxed{P = M \cdot \omega}$

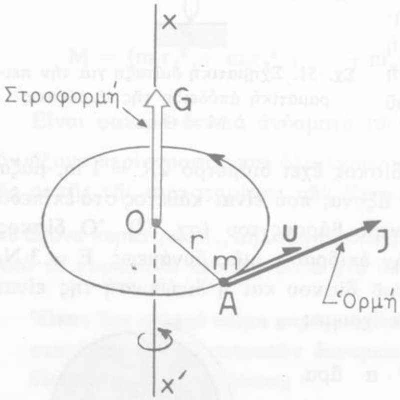
Ἡ ἐξίσωση αὐτή εἶναι ἀνάλογη μέ τήν ἐξίσωση $P = F \cdot \upsilon$ πού ἔχουμε στή μεταφορική κίνηση.

30. Στροφορμή

α. Στροφορμή ὑλικοῦ σημείου. Ἕνα ὑλικό σημεῖο Α ἔχει μάζα m καί διαγράφει κυκλική τροχιά μέ ἀκτίνα r γύρω ἀπό ἄξονα x΄x, πού εἶναι κάθετος στό ἐπίπεδο τῆς κυκλικῆς τροχιᾶς στό κέντρο τοῦ κύκλου (σχ. 53). Σέ μιά χρονική στιγμή t ἡ γωνιακή ταχύτητα τοῦ ὑλικοῦ σημείου ἔχει μέτρο ω καί ἑπομένως ἡ στιγμιαία ταχύτητα τοῦ ὑλικοῦ σημείου ἔχει μέτρο $\upsilon = \omega \cdot r$. Στή χρονική στιγμή t τό ὑλικό σημεῖο ἔχει *ὁρμή*, ἡ ὁποία παριστάνεται μέ ἄνυσμα $\vec{J}$, πού ἔχει τή διεύθυνση καί τή φορά τῆς ταχύτητας $\vec{\upsilon}$ καί μέτρο ἴσο μέ:

$$J = m \cdot \upsilon \quad \text{ἤ} \quad J = m \cdot \omega \cdot r$$

Σ' αὐτή τήν περίπτωση ἔχουμε τόν ἑξῆς *ὁρισμό*:



Σχ. 53. Σροφορμή ὑλικοῦ σημείου.

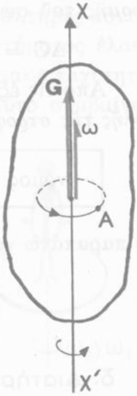
Στροφορμή ($\vec{G}$) τοῦ ὑλικοῦ σημείου Α ὡς πρός τόν ἄξονα x΄x ὀνομάζεται ἡ ροπή τοῦ ἀνύσματος $\vec{J}$ ὡς πρός τόν ἴδιο ἄξονα.

Τό ἄνυσμα $\vec{G}$ τῆς στροφορμῆς ἔχει *ἀρχή* τό κέντρο Ο τῆς κυκλικῆς τροχιᾶς, *φορέα* τόν ἄξονα περιστροφῆς, *φορά* πού καθορίζεται ἀπό τόν κανόνα τοῦ δεξιόστροφου κοχλία καί *μέτρο* G ἴσο μέ:

στροφορμή ὑλικοῦ σημείου	$G = m\upsilon \cdot r \quad \text{ἤ} \quad G = mr^2 \cdot \omega$	(1)

Ἀπό τήν ἐξίσωση (1) βρίσκουμε ὅτι στό σύστημα μονάδων MKS *μονάδα στροφορμῆς* εἶναι $1\ kgr \cdot m^2 \cdot sec^{-1}$.

β. Στροφορμή στερεοῦ σώματος. Ἕνα στερεό σῶμα στρέφεται γύρω ἀπό σταθερό ἄξονα (σχ. 54). Ὅλα τά ὑλικά σημεῖα τοῦ στερεοῦ σέ κάθε στιγμή ἔχουν τήν ἴδια γωνιακή ταχύτητα ω καί τά ἐπίπεδα τῶν κυκλικῶν τροχιῶν τους εἶναι κάθετα στόν ἄξονα περιστροφῆς. Ἑπομένως ἡ *στροφορμή τοῦ στερεοῦ* ἔχει μέτρο G ἴσο μέ τό ἀλγεβρικό ἄθροισμα τῶν μέτρων τῶν στροφορμῶν ὅλων τῶν ὑλικῶν σημείων τοῦ στερεοῦ, δηλαδή εἶναι:



Σχ. 54. Στροφορμή στερεοῦ σώματος.

$$G = m_1 \cdot r_1^2 \cdot \omega + m_2 \cdot r_2^2 \cdot \omega + \dots + m_\nu \cdot r_\nu^2 \cdot \omega \quad \text{ἤ}$$

$$G = (m_1 \cdot r_1^2 + m_2 \cdot r_2^2 + \dots + m_\nu \cdot r_\nu^2) \cdot \omega$$

Ἀπό τήν τελευταία ἐξίσωση βρίσκουμε:

$$\boxed{\text{στροφορμή στερεοῦ σώματος} \qquad G = \Theta \cdot \omega} \qquad (2)$$

Τά ἀνύσματα $\vec{G}$ καί $\vec{\omega}$ ἔχουν φορέα τόν ἄξονα περιστροφῆς τοῦ στερεοῦ. Ἡ ἐξίσωση (2) ἐκφράζεται μέ τήν ἀνυσματική ἐξίσωση:

$$\boxed{\vec{G} = \Theta \cdot \vec{\omega}}$$

γ. Μεταβολή τῆς στροφορμῆς στερεοῦ σώματος. Τό στερεό στίς χρονικές στιγμές t καί t + Δt ἔχει ἀντίστοιχα γωνιακή ταχύτητα ω καί ω + Δω. Στή διάρκεια τοῦ χρόνου Δt τό στερεό ἔχει γωνιακή ἐπιτάχυνση α = Δω/Δt καί ἑπομένως στή διάρκεια τοῦ χρόνου Δt ἐφαρμόζεται στό στερεό μιά *ροπή* πού ἔχει μέτρο M καί ἰσχύει ἡ ἐξίσωση:

$$M = \Theta \cdot \alpha \quad \text{ἤ} \quad M = \Theta \cdot \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \quad \text{καί} \quad M \cdot \Delta t = \Theta \cdot \Delta\omega \qquad (3)$$

Τό γινόμενο τῆς ροπῆς M ἐπί τό χρόνο Δt, πού ἐνεργεῖ ἡ ροπή πάνω στό σῶμα, ὀνομάζεται *ὤθηση τῆς ροπῆς* στή διάρκεια τοῦ χρόνου Δt. Ἡ ὤθηση ροπῆς εἶναι ἀνυσματικό μέγεθος $\vec{M} \cdot \Delta t$, ἀνάλογο μέ τήν ὤθηση δυνάμεως $\vec{F} \cdot \Delta t$ καί ἔχει μέτρο ἴσο μέ $M \cdot \Delta t$.

Στό σύστημα μονάδων MKS *μονάδα ὠθήσεως ροπῆς* εἶναι 1 N · m · sec.

Ἡ ροπή ἀδράνειας Θ τοῦ στερεοῦ ὡς πρός τόν ἄξονα περιστροφῆς εἶναι μέγεθος σταθερό. Στή διάρκεια τοῦ χρόνου Δt ἡ *μεταβολή τῆς στροφορμῆς* τοῦ σώματος ἔχει μέτρο:

$$\Delta G = \Theta \cdot (\omega + \Delta\omega) - \Theta \cdot \omega \quad \text{ἄρα} \quad \Delta G = \Theta \cdot \omega \qquad (4)$$

Ἀπό τίς ἐξισώσεις (3) καί (4) συνάγεται ὁ ἀκόλουθος *νόμος τῆς μεταβολῆς τῆς στροφορμῆς*:

νόμος μεταβολῆς τῆς στροφορμῆς	$\Delta G = M \cdot \Delta t$

Ὁ παραπάνω νόμος ἐκφράζεται μέ τήν ἀνυσματική ἐξίσωση:

$$\boxed{\overrightarrow{\Delta G} = \vec{M} \cdot \Delta t}$$

δ. Διατήρηση τῆς στροφορμῆς. **Στερεό σῶμα,** Ἀπό τήν ἐξίσωση $\Delta G = M \cdot \Delta t$ συνάγεται ὅτι, ἄν στό στρεφόμενο στερεό δέν ἐνεργεῖ καμιά ροπή ($M = 0$), τότε καί ἡ μεταβολή τῆς στροφορμῆς τοῦ στερεοῦ εἶναι ἴση μέ μηδέν ($\Delta G = 0$) καί ἑπομένως ἡ στροφορμή τοῦ στερεοῦ *διατηρεῖται σταθερή* ($G =$ σταθ.). Σ' αὐτή τήν περίπτωση τό στερεό σῶμα ἤ ἠρεμεῖ ($G = 0$) ἤ ἐκτελεῖ ὁμαλή στροφική κίνηση ($G =$ σταθ.). Γενικά ἰσχύει ὁ ἀκόλουθος *νόμος τῆς διατηρήσεως τῆς στροφορμῆς*:

Ὅταν σέ ἕνα στερεό σῶμα, πού μπορεῖ νά στρέφεται γύρω ἀπό σταθερό ἄξονα, δέν ἐνεργεῖ καμιά ροπή, ἡ στροφορμή τοῦ σώματος διατηρεῖται σταθερή.

Ὁ παραπάνω νόμος μποροῦμε νά ποῦμε ὅτι ἐκφράζει τήν ἀρχή τῆς ἀδράνειας στήν περίπτωση τῆς στροφικῆς κινήσεως.

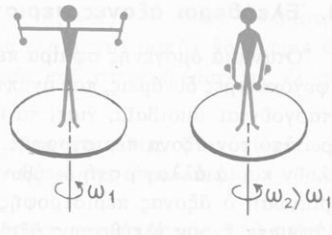
Μονωμένο σύστημα. Θεωροῦμε ἕνα *μονωμένο σύστημα*, δηλαδή σύστημα μαζῶν στό ὁποῖο δέν ἐφαρμόζονται ἐξωτερικές δυνάμεις ἤ ἐφαρμόζονται ἐξωτερικές δυνάμεις, ἀλλά *ἡ συνισταμένη τῶν ροπῶν τους* ὡς πρός τόν ἄξονα περιστροφῆς τοῦ συστήματος εἶναι *ἴση μέ μηδέν*. Ὅπως στή μεταφορική κίνηση (§ 22) ἔτσι καί στή στροφική κίνηση ἰσχύει *ἡ ἀρχή τῆς διατηρήσεως τῆς στροφορμῆς*:

Ἡ ὁλική στροφορμή ἑνός μονωμένου συστήματος μαζῶν διατηρεῖται σταθερή.

Παράδειγμα. Ἕνας ὁριζόντιος δίσκος μπορεῖ νά στρέφεται μέ ἀσήμαντη τριβή γύρω ἀπό κατακόρυφο ἄξονα (σχ. 55). Πάνω στό δίσκο στέκεται ἄνθρωπος πού στά δύο τεντωμένα χέρια του κρατεῖ ἁλτῆρες. Βάζουμε τό σύστημα δίσκος - ἄνθρωπος σέ ὁμαλή στροφική κίνηση μέ γωνιακή ταχύτητα ω_1. Τότε ἡ στροφορμή τοῦ συστήματος εἶναι $G_1 = \Theta_1 \cdot \omega_1$. Ὅταν τό σύστημα στρέφεται, ὁ ἄνθρωπος φέρνει ἀπότομα τούς δύο ἀλτῆρες κοντά στόν ἄξονα περιστροφῆς. Τότε ἡ ροπή ἀδράνειας τοῦ συστήματος ἐλαττώνεται ἀπότομα καί γίνεται $\Theta_2 < \Theta_1$. Παρατηροῦμε ὅτι ἡ γωνιακή ταχύτητα τοῦ συστήματος αὐξάνεται ἀπότομα καί γίνεται $\omega_2 > \omega_1$. Αὐτό συμβαίνει γιατί τό σύστημα εἶναι μονωμένο καί ἑπομένως *ἡ στροφορμή του διατηρεῖται σταθερή*, δηλαδή εἶναι:

$$\Theta_1 \cdot \omega_1 = \Theta_2 \cdot \omega_2 \quad \text{ἄρα} \quad \omega_2 = \frac{\Theta_1}{\Theta_2} \cdot \omega_1$$

Ἡ τελευταία ἐξίσωση δείχνει ὅτι, ἄν ἡ ροπή ἀδράνειας τοῦ συστήματος ἐλαττωθεῖ ($\Theta_2 < \Theta_1$), τότε ἡ γωνιακή ταχύτητα τοῦ συστήματος αὐξάνεται ($\omega_2 > \omega_1$) καί ἀντίστροφα.



Σχ. 55. Διατήρηση τῆς στροφορμῆς.

Ἀντιστοιχία τῶν μεγεθῶν τῆς μεταφορικῆς καί τῆς στροφικῆς κινήσεως. Μελετώντας τή *μεταφορική* καί τή *στροφική κίνηση* τοῦ στερεοῦ σώματος βρήκαμε διάφορα φυσικά μεγέθη πού εἶναι ἀπόλυτα ἀντίστοιχα στίς δύο αὐτές κινήσεις, ὅπως φαίνεται στόν παρακάτω πίνακα.

Ἀντιστοιχία μεταφορικῆς καί στροφικῆς κινήσεως

Μεταφορική κίνηση		Στροφική κίνηση	
Διάστημα	s	Γωνία στροφῆς	φ
Ταχύτητα	υ	Γωνιακή ταχύτητα	ω
Ἐπιτάχυνση	γ	Γωνιακή ἐπιτάχυνση	α
Δύναμη	F	Ροπή	M
Μάζα	m	Ροπή ἀδράνειας	Θ
Θεμελιώδης ἐξίσωση	$F = m \cdot \gamma$	Θεμελιώδης ἐξίσωση	$M = \Theta \cdot \alpha$
Ἔργο	$W = F \cdot \Delta s$	Ἔργο	$W = M \cdot \Delta\varphi$
Κινητική ἐνέργεια	$E = \frac{1}{2} m \cdot \upsilon^2$	Κινητική ἐνέργεια	$E = \frac{1}{2} \Theta \cdot \omega^2$
Ὁρμή	$J = m \cdot \upsilon$	Στροφορμή	$G = \Theta \cdot \omega$
Ὤθηση δυνάμεως	$F \cdot \Delta t$	Ὤθηση ροπῆς	$M \cdot \Delta t$
Μεταβολή ὁρμῆς	$\Delta J = F \cdot \Delta t$	Μεταβολή στροφορμῆς	$\Delta G = M \cdot \Delta t$

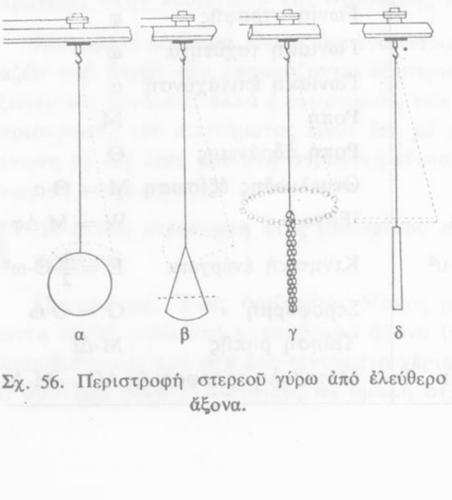
Σχέσεις πού συνδέουν τή μεταφορική μέ τή στροφική κίνηση

Μῆκος τόξου καί γωνία στροφῆς	$s = R \cdot \varphi$
Ταχύτητα καί γωνιακή ταχύτητα	$\upsilon = \omega \cdot R$
Κεντρομόλος ἐπιτάχυνση	$\gamma_K = \omega^2 \cdot R$
Ἐπιτρόχια ἐπιτάχυνση	$\gamma_E = \alpha \cdot R$

31. Ἐλεύθεροι ἄξονες περιστροφῆς

Ὅταν μιά ὁμογενής σφαίρα περιστρέφεται γύρω ἀπό μιά διάμετρό της, οἱ φυγόκεντρες δυνάμεις, πού ἀναπτύσσονται στά ὑλικά σημεῖα τῆς σφαίρας, καταργοῦνται ἀμοιβαῖα, γιατί τά ὑλικά σημεῖα διατάσσονται συμμετρικά γύρω ἀπό τόν ἄξονα περιστροφῆς. Ἔτσι οἱ φυγόκεντρες δυνάμεις δέν προκαλοῦν καμιά ἀλλαγή στή διεύθυνση τοῦ ἄξονα περιστροφῆς. Σ' αὐτή τήν περίπτωση ὁ ἄξονας περιστροφῆς λέγεται *ἐλεύθερος ἄξονας*. Γενικά ὅλα τά σώματα ἔχουν ἐλεύθερους ἄξονες, πού περνοῦν ἀπό τό κέντρο βάρους τοῦ σώματος. Ἡ σφαίρα ἔχει ἄπειρους ἐλεύθερους ἄξονες. Σέ κάθε ἄλλο ὅμως σῶμα ὑπάρχουν τουλάχιστον *τρεῖς ἐλεύθεροι ἄξονες*, πού ὁ καθένας εἶναι κάθετος στό ἐπίπεδο τῶν δύο ἄλλων.

Ὅταν ἕνα στερεό, πού περιστρέφεται γρήγορα, *μπορεῖ νά ἐκλέξει* ἀνάμεσα στούς διάφορους ἐλεύθερους ἄξονές του, τότε τό σῶμα προτιμᾶ ἐκεῖνο τόν ἐλεύθερο ἄξονα, ὡς πρός τόν ὁποῖο τό σῶμα ἀποκτᾶ *τή μεγαλύτερη ροπή ἀδράνειας*. Σ' αὐτή τήν περίπτωση παρατηροῦμε ὅτι οἱ στοιχειώδεις μάζες τοῦ στερεοῦ σώματος προσπαθοῦν *νά ἀπομακρυνθοῦν*, ὅσο μποροῦν περισσότερο ἀπό τόν ἄξονα περιστροφῆς. Αὐτό φαίνεται στό ἑξῆς πείραμα. Ἕνας ὁμογενής κυκλικός δίσκος εἶναι στερεωμένος στή μιά ἄκρη σύρματος, πού ἡ προέκτασή του συμπίπτει μέ μιά διάμετρο τοῦ δίσκου (ἄξονας συμμετρίας). Ὅταν τό σύρμα στρέφεται πολύ γρήγορα γύρω ἀπό τόν κατά μῆκος ἄξονά του (σχ. 56α), ὁ δίσκος παίρνει ὁριζόντια θέση καί ἐξακολουθεῖ νά στρέφεται γύρω ἀπό ἕναν ἐλεύθερο ἄξονα, πού περνάει ἀπό τό κέντρο βάρους τοῦ δίσκου καί εἶναι κάθετος στό ἐπίπεδο τοῦ δίσκου. Ἄν διαταράξουμε γιά λίγο τό στρεφόμενο δίσκο,

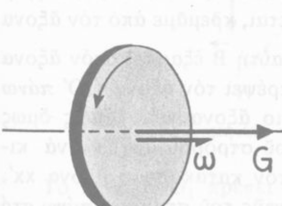


Σχ. 56. Περιστροφή στερεοῦ γύρω ἀπό ἐλεύθερο ἄξονα.

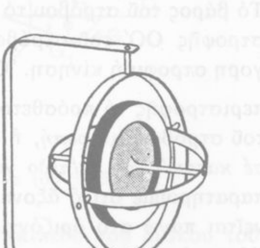
αὐτός ξανάρχεται στήν ὁριζόντια θέση. Γι' αὐτό λέμε ὅτι αὐτός ὁ ἐλεύθερος ἄξονας εἶναι *εὐσταθής ἐλεύθερος ἄξονας*. Τό στερεό σῶμα ὡς πρός αὐτό τόν ἄξονα ἔχει *τή μέγιστη ροπή ἀδράνειας*. Τό ἴδιο φαινόμενο παρατηροῦμε καί ὅταν περιστρέφεται γρήγορα ἕνας κῶνος, μιά θηλιά ἀπό ἁλυσίδα, ἕνας κύλινδρος (σχ. 56β, γ, δ). Ἡ περιστροφή τοῦ στερεοῦ γύρω ἀπό ἐλεύθερο ἄξονα μέγιστης ροπῆς ἀδράνειας δημιουργεῖ κατάσταση *εὐσταθοῦς* περιστροφῆς τοῦ στερεοῦ *(εὐσταθής ἐλεύθερος ἄξονας)*. Ἀντίθετα ἡ περιστροφή τοῦ στερεοῦ γύρω ἀπό ἐλεύθερο ἄξονα ἐλάχιστης ροπῆς ἀδράνειας δημιουργεῖ κατάσταση *ἀσταθοῦς* περιστροφῆς τοῦ στερεοῦ *(ἀσταθής ἐλεύθερος ἄξονας)*. Ὥστε :

Ἡ περιστροφή στερεοῦ σώματος εἶναι εὐσταθής, ὅταν γίνεται γύρω ἀπό τόν ἐλεύθερο ἄξονα τῆς μέγιστης ροπῆς ἀδράνειας.

α. Στρόβος. Διατήρηση τοῦ ἄξονα περιστροφῆς τοῦ στρόβου. Ὀνομάζεται *στρόβος* ἕνας κυκλικός δίσκος πού ἔχει μεγάλη μάζα καί περιστρέφεται πολύ γρήγορα γύρω ἀπό ἄξονα, πού περνάει ἀπό τό κέντρο βάρους τοῦ δίσκου καί εἶναι κάθετος στό ἐπίπεδο τοῦ δίσκου (σχ. 57). Ὁ ἄξονας αὐτός εἶναι ἄξονας συμμετρίας, ἐλεύθερος ἄξονας καί ἄξονας τῆς μέγιστης ροπῆς ἀδράνειας. Μιά βαριά σβούρα, πού στρέφεται πολύ γρήγορα, ἀποτελεῖ στρόβο. Τά ἀνύσματα τῆς γωνιακῆς ταχύτητας $\vec{\omega}$ καί τῆς στροφορμῆς $\vec{G}$ ἔχουν φορέα τόν ἄξονα περιστροφῆς τοῦ στρόβου. Ὅταν στό στρεφόμενο στρόβο δέν ἐνεργεῖ ἐξωτερική ροπή, τό ἄνυσμα τῆς στροφορμῆς του $\vec{G}$ *διατηρεῖται σταθερό* (κατά διεύθυνση, φορά καί μέτρο). Ἔτσι ὁ στρεφόμενος στρόβος *διατηρεῖ ἀμετάβλητη τή διεύθυνση τοῦ ἄξονά του*. Αὐτό δείχνεται πειραματικά μέ τή διάταξη τοῦ σχήματος 58. Ὁ ἄξονας τοῦ στρόβου στηρίζεται σέ σύστημα δακτυλίων, πού οἱ ἄξονες περιστροφῆς τους



Σχ. 57. Στρόβος.

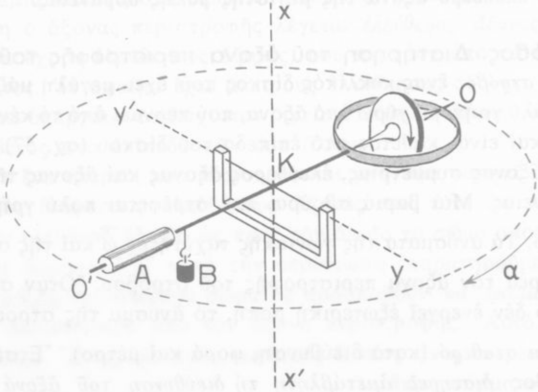


Σχ. 58. Ἡ διεύθυνση τοῦ ἄξονα περιστροφῆς διατηρεῖται σταθερή.

εἶναι κάθετοι μεταξύ τους (διάταξη Cardan). Ὅταν ὁ στρόβος στρέφεται γρήγορα, παρατηροῦμε ὅτι ὁπωσδήποτε καί ἄν μετακινήσουμε τή διάταξη αὐτή, ὁ ἄξονας τοῦ στρόβου *δέν ἀλλάζει διεύθυνση*. Ὥστε :

Ὅταν στό στρόβο δέν ἐνεργεῖ ἐξωτερική ροπή, ὁ στρόβος διατηρεῖ σταθερή τή διεύθυνση τοῦ ἄξονα περιστροφῆς του.

β. Γυροσκόπιο. Γιά νά μελετήσουμε τίς ἐνδιαφέρουσες ἰδιότητες τῆς κινήσεως τοῦ στρόβου χρησιμοποιοῦμε *τό γυροσκόπιο* (σχ. 59). Αὐτό ἀποτελεῖται ἀπό μεταλλικό δίσκο *(στρόβο)*, πού ἔχει μεγάλη μάζα καί στρέφεται πολύ γρήγορα γύρω ἀπό ἄξονα ΟΟ′. Ὁ ἄξονας αὐτός μπορεῖ νά στρέφεται γύρω ἀπό τόν κατακόρυφο ἄξονα xx′ καί γύρω ἀπό τόν ὁριζόντιο ἄξονα yy′.



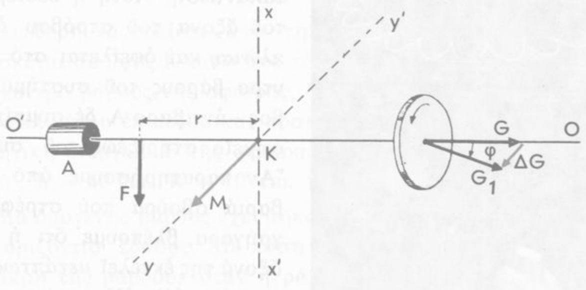
Σχ. 59. Σχηματική παράσταση τοῦ γυροσκοπίου.

Τό βάρος τοῦ στρόβου τό ἰσορροποῦμε μέ ἀντίβαρο Α, ὥστε ὁ ἄξονας περιστροφῆς ΟΟ′ τοῦ στρόβου νά εἶναι *ὁριζόντιος*. Δίνουμε στό στρόβο γρήγορη στροφική κίνηση. Ὅταν ὁ στρόβος στρέφεται, κρεμᾶμε ἀπό τόν ἄξονα περιστροφῆς τό πρόσθετο βάρος Β. Ἡ δύναμη αὐτή $\vec{B}$ ἐξασκεῖ στόν ἄξονα τοῦ στρόβου μιά *ροπή*, ἡ ὁποία τείνει νά περιστρέψει τόν ἄξονα ΟΟ′ *πάνω σέ κατακόρυφο ἐπίπεδο* γύρω ἀπό τόν ὁριζόντιο ἄξονα yy′. Ἐμεῖς ὅμως παρατηροῦμε ὅτι ὁ ἄξονας ΟΟ′ περιστροφῆς τοῦ στρόβου ἀρχίζει νά κινεῖται πάνω στό ὁριζόντιο ἐπίπεδο γύρω ἀπό τόν κατακόρυφο ἄξονα xx′. Ἡ φορά τῆς κινήσεως τοῦ ἄξονα ΟΟ′ περιστροφῆς τοῦ στρόβου *πάνω στό ὁριζόντιο ἐπίπεδο* εἶναι *ἴδια μέ τή φορά τῆς περιστροφῆς τοῦ στρόβου* γύρω ἀπό τόν ἄξονά του. Αὐτή ἡ κίνηση τοῦ ἄξονα τοῦ στρόβου ὀνομάζεται *μετάπτωση*. Ὥστε :

Ὅταν πάνω στό στρόβο ἐνεργεῖ συνεχῶς μιά ροπή, πού τείνει νά περιστρέψει τόν ἄξονά του, τότε ὁ ἄξονας τοῦ στρόβου ἐκτρέπεται κατά ὀρθή γωνία καί ἐκτελεῖ μιά κίνηση πού ὀνομάζεται μετάπτωση.

Ἑρμηνεία τῆς μεταπτώσεως. Τό κέντρο βάρους Κ τοῦ συστήματος στρόβος - ἀντίβαρο Α βρίσκεται στήν τομή τῶν τριῶν ἀξόνων (ΟΟ′, xx′, yy′). Σέ μιά χρονική στιγμή t ἡ στροφορμή τοῦ στρόβου ἔχει μέτρο G καί τό ἄνυσμά της ἔχει φορέα *τόν ὁριζόντιο ἄξονα* περιστροφῆς τοῦ στρόβου (σχ. 60). Ἐκείνη τή στιγμή ἐφαρμόζουμε στόν ἄξονα περιστροφῆς τοῦ στρόβου *τήν κατακόρυφη δύναμη* $\vec{F}$ σέ ἀπόσταση r ἀπό τόν ἄξονα xx′. Ἡ δύναμη $\vec{F}$ ἐξασκεῖ στόν ἄξονα περιστροφῆς τοῦ στρόβου μιά *ροπή* $\vec{M}$ πού τείνει νά περιστρέψει τόν ἄξονα ΟΟ′ γύρω ἀπό τόν ὁριζόντιο ἄξονα yy′. Τό ἄνυσμα τῆς ροπῆς $\vec{M}$ εἶναι *ὁριζόντιο* καί κάθετο στόν ἄξονα περιστροφῆς τοῦ στρόβου (ΟΟ′). Στή διάρκεια χρόνου Δt ἡ ροπή $\vec{M}$ *προκαλεῖ μεταβολή τῆς στροφορμῆς* τοῦ στρόβου ἴση μέ $\vec{\Delta G}$ καί ἰσχύει ἡ ἐξίσωση $\vec{M} \cdot \Delta t = \vec{\Delta G}$. Τό ἄνυσμα $\vec{\Delta G}$ τῆς μεταβολῆς τῆς στροφορμῆς εἶναι παράλληλο καί τῆς ἴδιας φορᾶς μέ τό ἄνυσμα τῆς ροπῆς $\vec{M}$. Ἄρα τή χρονική στιγμή t + Δt ἡ καινούρια στροφορμή τοῦ στρόβου εἶναι:

$$\vec{G_1} = \vec{G} + \vec{\Delta G}$$



Σχ. 60. Ἑρμηνεία τῆς μεταπτώσεως τοῦ ἄξονα τοῦ στρόβου.

Τό ἄνυσμα $\vec{G_1}$ πρέπει νά εἶναι κάθετο στό ἐπίπεδο τοῦ δίσκου τοῦ στρόβου καί γι᾽ αὐτό ὁ ἄξονας περιστροφῆς τοῦ στρόβου (ΟΟ′) στρέφεται καί παίρνει τή διεύθυνση τοῦ ἀνύσματος τῆς καινούριας στροφορμῆς $\vec{G_1}$. Ἔτσι δημιουργεῖται συνεχής μετακίνηση τοῦ ἄξονα περιστροφῆς ΟΟ′ πάνω σέ ὁριζόντιο ἐπίπεδο, δηλαδή *προκαλεῖται ἡ μετάπτωση* τοῦ ἄξονα τοῦ στρόβου.

Ἐάν στή διάρκεια τοῦ χρόνου Δt ὁ ἄξονας περιστροφῆς τοῦ στρόβου στραφεῖ κατά μιά πολύ μικρή γωνία φ, τότε ἀπό τό σχηματιζόμενο ὀρθογώνιο τρίγωνο ἔχουμε τήν ἐξίσωση :

$$\Delta G = G \cdot \varepsilon\varphi\, \varphi \quad \text{ἤ} \quad \Delta G = G \cdot \varphi$$

Ἄρα ἡ ἐξίσωση $\Delta G = M \cdot \Delta t$ γράφεται καί ἔτσι :

$$G \cdot \varphi = M \cdot \Delta t \quad \text{ἤ} \quad \frac{\varphi}{\Delta t} = \frac{M}{G}$$

Ἀλλά $\varphi/\Delta t$ εἶναι ἡ *γωνιακή ταχύτητα μεταπτώσεως* ($\omega_{\mu\varepsilon\tau}$), δηλαδή εἶναι:

$$\omega_{\mu\varepsilon\tau} = \frac{M}{G} \quad \text{ἤ} \quad \omega_{\mu\varepsilon\tau} = \frac{M}{\Theta \cdot \omega} \quad \text{καί} \quad \omega_{\mu\varepsilon\tau} = \frac{M}{\Theta \cdot 2\pi\nu}$$

ὅπου ν εἶναι ἡ συχνότητα περιστροφῆς τοῦ στρόβου.

Κλόνιση τοῦ ἄξονα τοῦ στρόβου. Στό παραπάνω πείραμα μέ τό γυροσκόπιο βλέπουμε ὅτι ὁ ἄξονας τοῦ στρόβου ἐκτελεῖ *μετάπτωση*, ἀλλά ταυτόχρονα ἐκτελεῖ καί μιά μικρή ταλάντωση. Αὐτή ἡ δεύτερη κίνηση τοῦ ἄξονα τοῦ στρόβου ὀνομάζεται *κλόνιση* καί ὀφείλεται στό ὅτι τό κέντρο βάρους τοῦ συστήματος στρόβος - ἀντίβαρο Α δέ συμπίπτει μέ τό σημεῖο στηρίξεως τοῦ συστήματος. Ἄν παρατηρήσουμε ἀπό πάνω μιά βαριά σβούρα πού στρέφεται πολύ γρήγορα, βλέπουμε ὅτι ἡ ἄκρη τοῦ ἄξονά της ἐκτελεῖ *μετάπτωση* καί *κλόνιση* (σχ. 61). Ἡ μετάπτωση προκαλεῖται ἀπό τό βάρος $\vec{B}$ τῆς σβούρας, τό ὁποῖο τείνει νά κατεβάσει τόν ἄξονα περιστροφῆς. Τότε ὁ ἄξονας ἐκτρέπεται κατά ὀρθή γωνία καί διαγράφει *κωνική ἐπιφάνεια*.

Σχ. 61. Μετάπτωση καί κλόνιση τοῦ ἄξονα τῆς σβούρας.

γ. Ἐφαρμογές τῶν ἰδιοτήτων τοῦ στρόβου. Σέ πολλές ἐφαρμογές *ἐκμεταλλευόμαστε* τίς ἰδιότητες τοῦ στρόβου.

1. *Στή δισκοβολία* δίνουμε στό δίσκο ὅσο μποροῦμε πιό γρήγορη περιστροφική κίνηση καί τότε ὁ δίσκος εἶναι στρόβος, πού διατηρεῖ σταθερή τή διεύθυνση τοῦ ἄξονά του.

2. *Στή βλητική* δίνουμε στό βλῆμα γρήγορη περιστροφική κίνηση μέ ἕνα σύστημα ἑλικώσεων, πού ὑπάρχουν στά ἐσωτερικά τοιχώματα τῆς κάνης.

3. *Στήν ἀεροπορία* χρησιμοποιοῦμε τό γυροσκόπιο γιά *τήν αὐτόματη πλοήγηση*.

4. *Στή ναυπηγική* χρησιμοποιοῦμε γυροσκόπια, γιά νά ἐξασφαλίσουμε μεγαλύτερη εὐστάθεια τοῦ πλοίου.

5. *Ἡ γυροσκοπική πυξίδα* εἶναι στρόβος, πού διατηρεῖ πάντοτε τόν ἄξονά του παράλληλο μέ τόν ἄξονα τῆς Γῆς.

6. *Ἡ Γῆ εἶναι τεράστιος στρόβος*, πού ὁ ἄξονάς του ἐκτελεῖ μετάπτωση καί κλόνιση. Ἡ μετάπτωση ὀφείλεται στήν ἕλξη τοῦ Ἡλίου καί ἡ κλόνιση ὀφείλεται στήν ἕλξη τῆς Σελήνης.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

62. Μιά σφαίρα ἔχει ἀκτίνα R, μάζα m καί ροπή ἀδράνειας ὡς πρός ἄξονα πού περνάει ἀπό τό κέντρο της ἴση μέ $\Theta = \frac{2}{5} m \cdot R^2$. Ἀφήνουμε τή σφαίρα ἐλεύθερη νά κυλίσει ἀπό τήν κορυφή κεκλιμένου ἐπιπέδου, ἡ ὁποία βρίσκεται σέ ὕψος h πάνω ἀπό τό ὁριζόντιο ἐπίπεδο. Πόση ταχύτητα υ ἔχει τό κέντρο βάρους τῆς σφαίρας, ὅταν αὐτή φτάνει στό κατώτερο σημεῖο τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου καί πόση εἶναι τότε ἡ γωνιακή ταχύτητα ω καί ἡ κινητική ἐνέργεια Ε τῆς σφαίρας ;
Ἐφαρμογή : $h = 40$ cm. $R = 10$ cm. $m = 3$ kgr. $g = 10$ m/sec².

63. Μιά ὁμογενής ράβδος ἔχει μῆκος $l = 2$ m καί στέκεται κατακόρυφη πάνω σέ ὁριζόντιο ἔδαφος. Μέ πόση ταχύτητα υ φτάνει στό ἔδαφος ἡ ἀνώτερη ἄκρη τῆς ράβδου, ὅταν ἡ ράβδος ἀνατρέπεται ; Ἡ ροπή ἀδράνειας τῆς ράβδου ὡς πρός ἄξονα κάθετο στή ράβδο καί ὁ ὁποῖος περνάει ἀπό τήν ἄκρη τῆς ράβδου εἶναι $\Theta = \frac{1}{3} m \cdot l^2$, ὅπου m ἡ μάζα τῆς ράβδου. $g = 10$ m/sec².

64. Ὁ κινητήριος ἄξονας ἑνός αὐτοκινήτου ἐκτελεῖ 3000 στροφές τό λεπτό καί μεταδίδει ἀπό τή μηχανή στούς πίσω τροχούς ἰσχύ $P = 60$ kW. Πόση εἶναι ἡ ροπή πού ἀναπτύσσει ἡ μηχανή πάνω στόν ἄξονα ;

65. Ἕνας δμογενής δίσκος ἔχει διάμετρο $2R = 40$ cm, μάζα $m = 3$ kgr καί στρέφεται γύρω ἀπό ἄξονα πού περνάει ἀπό τό κέντρο τοῦ δίσκου καί εἶναι κάθετος στό ἐπίπεδο τοῦ δίσκου. Ἡ ροπή ἀδράνειας τοῦ δίσκου ὡς πρός αὐτό τόν ἄξονα εἶναι $\Theta = \frac{1}{2} m \cdot R^2$. Στήν περιφέρεια τοῦ δίσκου καί κάθετα στήν ἴδια πάντοτε ἀκτίνα ἐφαρμόζεται δύναμη F. Πόσο πρέπει νά εἶναι τό μέτρο αὐτῆς τῆς δυνάμεως, ὥστε ὁ δίσκος νά στρέφεται μέ γωνιακή ἐπιτάχυνση $\alpha = 2$ rad/sec^2 ; Πόση κινητική ἐνέργεια E ἔχει ὁ δίσκος μετά χρόνο $t = 4$ sec ἀπό τή στιγμή πού ξεκίνησε ἀπό τήν ἠρεμία ;

66. Μιά ἕλικα ἀεροπλάνου ἔχει μάζα $m = 50$ kgr, πού τή θεωροῦμε συγκεντρωμένη σέ ἀπόσταση $R = 60$ cm ἀπό τόν ἄξονα περιστροφῆς. Ὅταν ἡ ἕλικα στρέφεται μέ γωνιακή ἐπιτάχυνση $\alpha = 15$ rad/sec^2, πόση εἶναι ἡ ροπή M πού ἐφαρμόζεται πάνω στήν ἕλικα ;

67. Ἕνας σφόνδυλος ἀρχίζει νά στρέφεται μέ γωνιακή ἐπιτάχυνση $\alpha = 3$ rad/sec^2 καί στή χρονική στιγμή t ἔχει ἀποκτήσει συχνότητα $\nu = 24$ Hz. Νά βρεθεῖ ὁ χρόνος t καί πόσες στροφές N ἔκανε ὁ σφόνδυλος, ὥσπου νά ἀποκτήσει αὐτή τή συχνότητα.

68. Ἕνας δμογενής δίσκος ἔχει διάμετρο $2R = 1{,}20$ m, μάζα $m = 300$ kgr καί στρέφεται χωρίς τριβές γύρω ἀπό ἄξονα κάθετο στό ἐπίπεδο τοῦ δίσκου καί ὁ ὁποῖος περνάει ἀπό τό κέντρο βάρους τοῦ δίσκου. Ἡ ροπή ἀδράνειας τοῦ δίσκου ὡς πρός αὐτό τόν ἄξονα εἶναι $\Theta = \frac{1}{2} m \cdot R^2$. α) Πόση γωνιακή ἐπιτάχυνση α ἀποκτᾶ ὁ δίσκος, ὅταν ἐνεργεῖ πάνω του συνεχῶς μιά ροπή ἴση μέ $M = 378$ N·m ; β) Ἄν ὁ δίσκος στρέφεται ὁμαλά μέ συχνότητα $\nu = 20$ Hz, πόση ροπή M_1 πρέπει νά ἐνεργήσει συνεχῶς πάνω στό δίσκο, ὥστε αὐτός νά σταματήσει στή διάρκεια τοῦ χρόνου $t = 180$ sec ;

69. Μιά δμογενής σφαίρα ἔχει μάζα m, ἀκτίνα R καί ἀφήνεται ἐλεύθερη νά κυλίσει κατά μῆκος κεκλιμένου ἐπιπέδου, πού ἔχει κλίση $\varphi = 30^0$. α) Ὅταν τό κέντρο βάρους τῆς σφαίρας ἔχει μεταφορική ταχύτητα υ, νά βρεθεῖ ὅτι ἡ ὁλική κινητική ἐνέργεια τῆς σφαίρας δίνεται ἀπό τήν ἐξίσωση $E = \frac{7}{10} m \cdot \upsilon^2$. β) Νά βρεθεῖ ἡ ταχύτητα υ τοῦ κέντρου βάρους τῆς σφαίρας, ὅταν αὐτή θά ἔχει διατρέξει πάνω στό κεκλιμένο ἐπίπεδο διάστημα $s = 2$ m στίς ἑξῆς περιπτώσεις : 1) ὅταν δέν ὑπάρχουν τριβές καί 2) ὅταν ὑπάρχουν τριβές, πού ἡ συνισταμένη τους T ἐφαρμόζεται στό κέντρο βάρους τῆς σφαίρας καί εἶναι ἴση μέ τό 1/80 τῆς δυνάμεως F πού προκαλεῖ τήν κάθοδο τῆς σφαίρας. Ἡ ροπή ἀδράνειας τῆς σφαίρας ὡς πρός ἄξονα πού περνάει ἀπό τό κέντρο της, εἶναι $\Theta = \frac{2}{5} m \cdot R^2$. $g = 10\ m/sec^2$.

70. Μιά μάζα $m = 100$ gr μπορεῖ νά γλιστράει χωρίς τριβή πάνω σέ μιά ὁριζόντια ράβδο ΑΒ. Ἡ ράβδος ΑΒ εἶναι στερεωμένη στό κέντρο της Ο πάνω σέ κατακόρυφο ἄξονα (Δ). Ἡ μάζα m θεωρεῖται ὡς ὑλικό σημεῖο καί ἀρχικά ἰσορροπεῖ σέ ἀπόσταση $ΟΓ = l = 16$ cm. Ἕνα λεπτό νῆμα συνδέει τή μάζα m μέ τό σημεῖο Ο. Τό τμῆμα ΟΑ τῆς ράβδου ἔχει μῆκος $ΟΑ = L = 32$ cm. Ἡ ροπή ἀδράνειας τῆς ὁμογενοῦς ράβδου ΑΒ ὡς πρός τόν ἄξονα (Δ) εἶναι $\Theta = 10^{-2}\ kgr \cdot m^2$. Δίνουμε στό σύστημα μιά γωνιακή ταχύτητα $\omega_1 = 5$ rad/sec καί ἔπειτα τό ἀφήνουμε ἐλεύθερο. Τό νῆμα σπάζει καί ἡ μάζα m πετάγεται στήν ἄκρη Α τῆς ράβδου. Πόση εἶναι ἡ νέα γωνιακή ταχύτητα ω_2 τοῦ συστήματος ;

71. Δύο ἴσες μάζες $m_1 = m_2 = 2$ gr εἶναι στερεωμένες στίς ἄκρες μιᾶς ράβδου ΑΒ, πού ἔχει ἀσήμαντη μάζα, μῆκος $2l = 60$ cm καί στρέφεται χωρίς τριβή μέ συχνότητα $\nu = 2$ Hz γύρω ἀπό ὁριζόντιο ἄξονα, πού περνάει ἀπό τό μέσο Ο τῆς ράβδου. α) Νά βρεθεῖ ἡ στροφορμή G τοῦ συστήματος. β) Μέ μιά διάταξη, πού δέ δημιουργεῖ ἐξωτερικές δυνάμεις, μετακινοῦμε ταυτόχρονα τίς δύο μάζες m_1 καί m_2 καί τίς φέρνουμε σέ ἀπόσταση $l_1 = 10$ cm ἀπό τό σημεῖο Ο. Νά βρεθεῖ ἡ νέα γωνιακή ταχύτητα ω_1 τοῦ συστήματος καί ἡ νέα συχνότητα ν_1.

Νόμος τῆς παγκόσμιας ἕλξεως

32. Πεδίο βαρύτητας

α. Ὁ νόμος τῆς παγκόσμιας ἕλξεως. Ὁ Νεύτωνας ἀπέδειξε ὅτι δύο σώματα *ἕλκονται* μεταξύ τους καί μέ δύναμη (F) πού εἶναι ἀνάλογη μέ τό γινόμενο τῶν μαζῶν τους (m_1 καί m_2) καί ἀντιστρόφως ἀνάλογη μέ τό τετράγωνο τῆς ἀποστάσεώς τους (d).

$$\boxed{F = k \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{d^2}} \qquad (1)$$

ὅπου k εἶναι *ἡ σταθερή τῆς παγκόσμιας ἕλξεως*. Ἄν στήν ἐξίσωση (1) βάλουμε $m_1 = m_2 = 1$ καί $d = 1$, βρίσκουμε $F = k$. Ὥστε ἡ σταθερή τῆς παγκόσμιας ἕλξεως k ἐκφράζει τή δύναμη μέ τήν ὁποία ἕλκονται μεταξύ τους δύο μάζες, πού καθεμιά εἶναι ἴση μέ μιά μονάδα μάζας, ὅταν ἡ μεταξύ τους ἀπόσταση εἶναι ἴση μέ μιά μονάδα μήκους. Ἀπό τίς μετρήσεις βρήκαμε ὅτι εἶναι :

$$\boxed{k = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2/kgr^2}$$

Τό αἴτιο πού δημιουργεῖ τήν ἀμοιβαία ἕλξη μεταξύ τῶν δύο μαζῶν ὀνομάζεται *βαρύτητα.*

β. Πεδίο βαρύτητας. Ἡ μάζα M τοῦ Ἡλίου ἐξασκεῖ ἕλξη πάνω στή μάζα m τοῦ κάθε πλανήτη. Ἔτσι ὁ χῶρος γύρω ἀπό τόν Ἥλιο ἔχει τήν ἑξῆς *φυσική ἰδιότητα* : πάνω σέ κάθε μάζα m πού βρίσκεται μέσα σ' αὐτό τό χῶρο ἐξασκεῖται ἀπό τή μάζα M τοῦ Ἡλίου μιά ἕλξη σύμφωνα μέ τό νόμο τῆς παγκόσμιας ἕλξεως *(νευτώνεια ἕλξη).* Γενικά ἔχουμε τόν ἀκόλουθο ὁρισμό :

Πεδίο βαρύτητας ὀνομάζεται ἕνας χῶρος, ὅταν σέ κάθε μάζα πού ὑπάρχει μέσα σ' αὐτό τό χῶρο ἐξασκεῖται νευτώνεια ἕλξη.

Ἔτσι ἡ μάζα M τοῦ Ἡλίου δημιουργεῖ γύρω της *τό πεδίο βαρύτητας τοῦ Ἡλίου* καί γι' αὐτό πάνω σέ μιά μάζα m, πού βρίσκεται σέ ἀπόσταση d ἀπό τό κέντρο τοῦ Ἡλίου, ἐνεργεῖ νευτώνεια ἕλξη :

$$F = k \cdot \frac{M \cdot m}{d^2} \qquad (2)$$

Σύμφωνα μέ τήν ἐξίσωση (2) ἡ νευτώνεια ἕλξη F γίνεται ἴση μέ μηδέν (F = 0), ὅταν ἡ ἀπόσταση d γίνει ἄπειρη ($d = \infty$). Ἄρα ἕνα πεδίο βαρύτητας ἐκτείνεται ὥς *τό ἄπειρο.*

Κάθε ἀπλανής ἀστέρας περιβάλλεται ἀπό ἕνα πεδίο βαρύτητας. Ἐπίσης κάθε πλανήτης καί κάθε δορυφόρος δημιουργεῖ γύρω του τό δικό του πεδίο βαρύτητας.

γ. Δυναμικό πεδίο. Γενικά ὁ χῶρος, πού μέσα σ' αὐτόν ἀναπτύσσονται δράσεις ἀπό ἀπόσταση, ὀνομάζεται *δυναμικό πεδίο.* Εἶναι γνωστά τά ἑξῆς δυναμικά πεδία :

1. *Τό πεδίο βαρύτητας* πού δημιουργεῖται γύρω ἀπό μιά μάζα.
2. *Τό ἠλεκτρικό πεδίο* πού δημιουργεῖται γύρω ἀπό ἕνα ἠλεκτρικό φορτίο.
3. *Τό μαγνητικό πεδίο* πού δημιουργεῖται γύρω ἀπό ἕνα μαγνητικό πόλο ἤ γύρω ἀπό ἠλεκτρικό ρεῦμα (δηλαδή γύρω ἀπό κινούμενο ἠλεκτρικό φορτίο).

Ὁ Einstein στή *γενική θεωρία τῶν πεδίων* ἀπέδειξε ὅτι :

Τά δυναμικά πεδία διαδίδονται μέ τήν ταχύτητα τοῦ φωτός στό κενό ($c_0 = 3 \cdot 10^8$ m/sec).

Στά παραπάνω τρία δυναμικά πεδία ἡ ἀναπτυσσόμενη ἀπό ἀπόσταση δύναμη F δίνεται ἀπό ἀνάλογους νόμους (βλ. πίνακα).

Νόμοι τῶν δυναμικῶν πεδίων

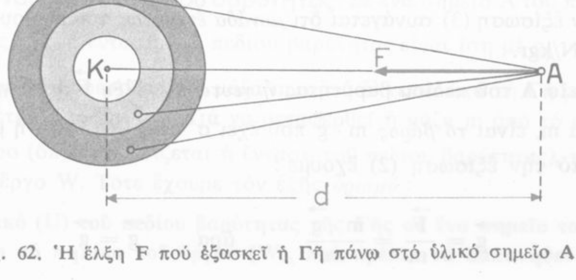
πεδίο βαρύτητας	$F = k \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{d^2}$
ἠλεκτρικό πεδίο	$F = K_{\eta\lambda} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{d^2}$
μαγνητικό πεδίο	$F = K_{\mu\alpha\gamma\nu} \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{d^2}$

Ὡς παράδειγμα πεδίου βαρύτητας θά ἐξετάσουμε *τό πεδίο βαρύτητας τῆς Γῆς*.

33. Πεδίο βαρύτητας τῆς Γῆς

Ἡ μάζα τῆς Γῆς δημιουργεῖ γύρω της *τό πεδίο βαρύτητας τῆς Γῆς*. Ἄν κατά προσέγγιση θεωρήσουμε ὅτι ἡ Γῆ εἶναι σφαίρα, μέ ἀκτίνα R, καί ὅτι ἀποτελεῖται ἀπό ὁμογενή ὁμόκεντρα στρώματα (σχ. 62), τότε ἀποδείχνεται ὅτι:

Ἡ ἕλξη (F) πού ἐξασκεῖ ἡ μάζα τῆς Γῆς πάνω σέ ἕνα ὑλικό σημεῖο μάζας m πού βρίσκεται σέ ἀπόσταση d ἀπό τό κέντρο τῆς Γῆς, δίνεται ἀπό τό νόμο τῆς παγκόσμιας ἕλξεως, ἄν θεωρήσουμε ὅτι ὅλη ἡ μάζα M τῆς Γῆς εἶναι συγκεντρωμένη στό κέντρο τῆς Γῆς.



Σχ. 62. Ἡ ἕλξη F πού ἐξασκεῖ ἡ Γῆ πάνω στό ὑλικό σημεῖο A.

Ἑπομένως στήν περίπτωση τοῦ πεδίου βαρύτητας τῆς Γῆς δεχόμαστε ὅτι ἡ Γῆ συμπεριφέρεται σάν ὑλικό σημεῖο πού συμπίπτει μέ τό κέντρο τῆς Γῆς καί ἔχει μάζα M ἴση μέ ὅλη τή μάζα τῆς Γῆς. Ἔτσι ἔχουμε τήν ἐξίσωση :

ἕλξη πού ἐξασκεῖ ἡ Γῆ	$F = k \cdot \frac{M \cdot m}{d^2}$

(1)

Στό πεδίο βαρύτητας τῆς Γῆς (ὅπως καί σέ κάθε ἄλλο πεδίο βαρύτητας) διακρίνουμε ὁρισμένα στοιχεῖα του.

α. Ἔνταση τοῦ πεδίου βαρύτητας. Ἕνα σημεῖο A τοῦ πεδίου βαρύτητας τῆς Γῆς βρίσκεται σέ ἀπόσταση d ἀπό τό κέντρο τῆς Γῆς. Ὅταν στό σημεῖο A φέρουμε μιά μάζα m, τότε αὐτή ἡ μάζα ἕλκεται ἀπό τή μάζα M τῆς Γῆς μέ δύναμη $\vec{F}$ πού τό μέτρο της δίνεται ἀπό τήν ἐξίσωση (1). Σ' αὐτή τήν περίπτωση ἔχουμε τόν ἀκόλουθο *ὁρισμό* :

Ἔνταση $\vec{g}$ τοῦ πεδίου βαρύτητας τῆς Γῆς σέ ἕνα σημεῖο του A ὀνομάζεται τό πηλίκο τῆς δυνάμεως $\vec{F}$ πού ἐνεργεῖ στή μάζα m (πού βρίσκεται στό σημεῖο A) διά τῆς μάζας m.

ἔνταση τοῦ πεδίου βαρύτητας	$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m}$

(2)

Ἡ ἔνταση τοῦ πεδίου βαρύτητας εἶναι *ἄνυσμα* $\vec{g}$ πού ἔχει φορέα καί φορά τό φορέα καί τή φορά τῆς δυνάμεως $\vec{F}$ καί *μέτρο* ἴσο μέ τό πηλίκο :

$$g = \frac{F}{m} \tag{3}$$

Ἀπό τήν ἐξίσωση (3) συνάγεται ὅτι *μονάδα ἐντάσεως* τοῦ πεδίου βαρύτητας εἶναι 1 N/kgr.

Στό σημεῖο A τοῦ πεδίου βαρύτητας *ἡ νευτώνεια ἕλξη* $\vec{F}$ πού ἐνεργεῖ πάνω στή μάζα m, εἶναι *τό βάρος* $m \cdot \vec{g}$ πού ἔχει σ' αὐτή τή θέση ἡ μάζα m. Ἔτσι ἀπό τήν ἐξίσωση (2) ἔχουμε :

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{m \cdot \vec{g}}{m} \quad \text{ἄρα} \quad \vec{g} = \vec{g}$$

Ἡ σχέση πού βρήκαμε φανερώνει ὅτι :

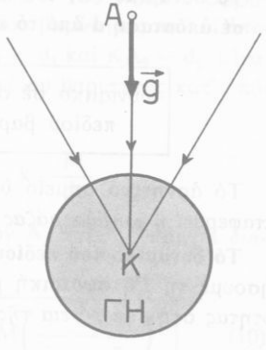
Σέ ἕνα σημεῖο τοῦ πεδίου βαρύτητας τῆς Γῆς ἡ ἔνταση τοῦ πεδίου βαρύτητας καί ἡ ἐπιτάχυνση τῆς ἐλεύθερης πτώσεως ἔχουν τήν ἴδια ἀριθμητική τιμή (σχ. 63).

Ἀπό τήν ἐξίσωση (1) βρίσκουμε ὅτι τό πηλίκο $g = F/m$ εἶναι ἴσο μέ :

$$\boxed{g = k \cdot \frac{M}{d^2}} \qquad (4)$$

Ἀπό τήν ἐξίσωση (4) συνάγεται ὅτι :

Ἡ ἔνταση τοῦ πεδίου βαρύτητας μεταβάλλεται ἀντιστρόφως ἀνάλογα μέ τό τετράγωνο τῆς ἀποστάσεως ἀπό τό κέντρο τῆς Γῆς.



Σχ. 63. Ἡ ἐπιτάχυνση τῆς βαρύτητας $\vec{g}$ εἶναι κατακόρυφη.

β. Δυναμική γραμμή τοῦ πεδίου βαρύτητας. Σέ μιά μάζα m, πού ἔρχεται στό σημεῖο A τοῦ πεδίου βρύτητας, ἐνεργεῖ ἡ νευτώνεια ἕλξη $\vec{F}$ πού ἀναγκάζει τή μάζα m νά κινηθεῖ.

Δυναμική γραμμή τοῦ πεδίου βαρύτητας ὀνομάζεται ἡ τροχιά πού διαγράφει μιά μάζα μέ τήν ἐπίδραση τοῦ πεδίου βαρύτητας.

Ἡ δυναμική γραμμή ἔχει *διεύθυνση* καί *φορά* τή διεύθυνση καί τή φορά τῆς ἐντάσεως τοῦ πεδίου βαρύτητας (σχ. 63). Ὥστε οἱ δυναμικές γραμμές τοῦ πεδίου βαρύτητας τῆς Γῆς εἶναι *εὐθεῖες γραμμές* πού συγκλίνουν πρός τό κέντρο τῆς Γῆς.

γ. Δυναμικό τοῦ πεδίου βαρύτητας. Σέ ἕνα σημεῖο A τοῦ πεδίου βαρύτητας τῆς Γῆς ἡ ἔνταση τοῦ πεδίου βαρύτητας εἶναι ἴση μέ $g_A = k \cdot \frac{M}{d^2}$. Ἄν στό σημεῖο A φέρουμε μιά μάζα m, αὐτή ἕλκεται ἀπό τή Γῆ μέ δύναμη πού ἔχει μέτρο $F = m \cdot g_A$. Γιά νά μεταφερθεῖ ἡ μάζα m ἀπό τό σημεῖο A ὥς τό ἄπειρο (ὅπου μηδενίζεται ἡ ἔνταση τοῦ πεδίου βαρύτητας), πρέπει νά δαπανηθεῖ ἔργο W. Τότε ἔχουμε τόν ἑξῆς *ὁρισμό* :

Δυναμικό (U) τοῦ πεδίου βαρύτητας τῆς Γῆς σέ ἕνα σημεῖο του A ὀνομάζεται τό πηλίκο τοῦ ἔργου (W), πού πρέπει νά δαπανηθεῖ κατά τή

μεταφορά τῆς μάζας m ἀπό τό θεωρούμενο σημεῖο ὡς τό ἄπειρο, διά τῆς μάζας m.

δυναμικό σέ σημεῖο τοῦ πεδίου βαρύτητας	$U = \frac{W}{m}$

(5)

Τό δυναμικό εἶναι *μονόμετρο* μέγεθος. Ἀπό τήν ἐξίσωση (5) συνάγεται ὅτι *μονάδα δυναμικοῦ* τοῦ πεδίου βαρύτητας εἶναι 1 Joule/kgr. Ἀποδείχνεται ὅτι :

Τό δυναμικό (U) τοῦ πεδίου βαρύτητας σέ ἕνα σημεῖο, πού βρίσκεται σέ ἀπόσταση d ἀπό τό κέντρο τῆς Γῆς, δίνεται ἀπό τήν ἐξίσωση :

δυναμικό σέ σημεῖο τοῦ πεδίου βαρύτητας	$U = -k \cdot \frac{M}{d}$

(6)

Τό ἀρνητικό σημεῖο ὑποδηλώνει ὅτι πρέπει *νά δαπανηθεῖ ἔργο*, γιά νά μεταφερθεῖ *ἡ μονάδα μάζας* ἀπό τό θεωρούμενο σημεῖο ὡς τό ἄπειρο.

Τό δυναμικό τοῦ πεδίου βαρύτητας στήν ἐπιφάνεια τῆς Γῆς. Ἄν θεωρήσουμε τή Γῆ σφαιρική μέ ἀκτίνα R, τότε τό δυναμικό τοῦ πεδίου βαρύτητας στήν *ἐπιφάνεια τῆς Γῆς* δίνεται ἀπό τήν ἐξίσωση :

$$U_0 = -k \cdot \frac{M}{R} \tag{7}$$

Ἄν στήν ἐξίσωση (7) βάλουμε : $k = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2 \cdot kgr^{-2}$, $M = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kgr καί $R = 6370 \cdot 10^3$ m βρίσκουμε :

δυναμικό τοῦ πεδίου βαρύτητας στήν ἐπιφάνεια τῆς Γῆς	$U_0 \simeq -6 \cdot 10^7$ Joule/kgr

ἤ ἀκριβέστερα $U_0 = -6{,}248 \cdot 10^7$ Joule/kgr

Ὥστε, γιά νά μεταφερθεῖ ἕνα σῶμα μέ μάζα m ἀπό τήν ἐπιφάνεια τῆς Γῆς ὡς τό ἄπειρο, πρέπει νά δαπανηθεῖ ἔργο κατ' ἀπόλυτη τιμή ἴσο μέ $m \cdot U_0$. Ἄν τό σῶμα αὐτό εἶναι βλῆμα καί τοῦ δώσουμε τόση κινητική ἐνέργεια, ὥστε νά ἰσχύει ἡ ἐξίσωση :

$$\frac{1}{2} m \cdot \upsilon_0^2 = m \cdot U_0 \tag{8}$$

τότε τό βλῆμα *θά διαφύγει* ἀπό τήν ἕλξη τῆς Γῆς.

Θεωροῦμε ἀσήμαντη τήν ἀντίσταση τοῦ ἀέρα. Ἀπό τήν ἐξίσωση (8) βρίσκουμε ὅτι σ' αὐτή τήν περίπτωση πρέπει νά δώσουμε στό βλῆμα ἀρχική ταχύτητα υ_0 πού ὀνομάζεται *ταχύτητα διαφυγῆς* καί εἶναι ἴση μέ :

$$\upsilon_0 = \sqrt{2U_0} \qquad (9)$$

Ἄν στήν ἐξίσωση αὐτή βάλουμε τήν τιμή τοῦ U_0, βρίσκουμε :

$$\boxed{\text{ταχύτητα διαφυγῆς} \qquad \upsilon_0 \simeq 11{,}2 \text{ km/sec}}$$

δ. Διαφορά δυναμικοῦ μεταξύ δύο σημείων τοῦ πεδίου βαρύτητας. Θεωροῦμε δύο σημεῖα A_1 καί A_2 τοῦ πεδίου βαρύτητας πού οἱ ἀποστάσεις τους ἀπό τό κέντρο K τῆς Γῆς εἶναι $KA_1 = d_1$ καί $KA_2 = d_2$. Εἶναι $d_1 < d_2$. Στά δύο αὐτά σημεῖα τό δυναμικό τοῦ πεδίου βαρύτητας κατ' ἀπόλυτη τιμή εἶναι ἀντίστοιχα :

$$U_1 = k \cdot \frac{M}{d_1} \qquad \text{καί} \qquad U_2 = k \cdot \frac{M}{d_2}$$

Εἶναι $U_1 > U_2$. Ἄρα μεταξύ τῶν δύο σημείων A_1 καί A_1 ὑπάρχει *διαφορά δυναμικοῦ* :

$$\boxed{\text{διαφορά δυναμικοῦ} \qquad U_1 - U_2 = kM\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)} \qquad (10)$$

Παρατήρηση. Ἡ διαφορά δυναμικοῦ $U_1 - U_2$ ἐκφράζει τό ἔργο πού πρέπει νά δαπανηθεῖ γιά νά μεταφερθεῖ *ἡ μονάδα μάζας* ἀπό τό A_1 στό A_2 ἤ καί ἀντίστροφα τό ἔργο πού παράγεται ἀπό τό πεδίο βαρύτητας, ὅταν *ἡ μονάδα μάζας* πέφτει ἐλεύθερα ἀπό τό A_2 στό A_1.

34. Μεταβολή τῆς τιμῆς τοῦ g μέ τό ὕψος

Ἄν θεωρήσουμε ὅτι ἡ Γῆ εἶναι σφαιρική μέ ἀκτίνα R, τότε στήν ἐπιφάνεια τῆς Γῆς ἡ ἐπιτάχυνση τῆς βαρύτητας ἔχει μέτρο :

$$g_0 = k \cdot \frac{M}{R^2} = \text{σταθ.} \qquad (1)$$

Στήν ἐπιφάνεια τῆς θάλασσας καί σέ γεωγραφικό πλάτος 45^0 ἡ ἐπιτάχινση τῆς βαρύτητας εἶναι :

$$g_0 = 9{,}81 \text{ m/sec}^2$$

7

Σέ ὕψος h πάνω ἀπό τήν ἐπιφάνεια τῆς θάλασσας εἶναι:

$$g_h = k \cdot \frac{M}{(R+h)^2} \qquad (2)$$

Ἄν διαιρέσουμε κατά μέλη τίς ἐξισώσεις (1) καί (2) βρίσκουμε:

$$\boxed{\text{τιμή τοῦ g στό ὕψος h} \qquad g_h = g_0 \left(\frac{R}{R+h} \right)^2} \qquad (3)$$

Ἄν τό ὕψος h εἶναι μικρό σχετικά μέ τήν ἀκτίνα R τῆς Γῆς, ἀπό τήν ἐξίσωση (3) βρίσκουμε:

$$\boxed{\text{τιμή τοῦ g στό ὕψος h} \qquad g_h = g_0 \left(1 - \frac{2h}{R} \right)} \qquad (4)$$

Ὅταν λοιπόν ἀνεβαίνουμε σέ ὕψος h πάνω ἀπό τήν ἐπιφάνεια τῆς θάλασσας *ἡ ἐλάττωση* τῆς τιμῆς τοῦ g εἶναι:

$$\Delta g = g_0 - g_h \quad \text{καί} \quad \boxed{\Delta g = \frac{2h}{R} \cdot g_0} \qquad (5)$$

Ἕνα σῶμα, πού στήν ἐπιφάνεια τῆς θάλασσας ἔχει βάρος $B_0 = m \cdot g_0$, σέ ὕψος h ἔχει βάρος $B_h = m \cdot g_h$. Ἡ ἐλάττωση τοῦ βάρους εἶναι $\Delta B = B_0 - B_h$ ἄρα:

$$\Delta B = m(g_0 - g_h) = mg_0 \cdot \frac{2h}{R} \quad \text{καί} \quad \Delta B = B_0 \cdot \frac{2h}{R}$$

Ἄν π.χ. εἶναι $B_0 = 10^3$ N, $R \simeq 6400$ km καί $h = 4$ km, τότε ἡ ἐλάττωση τοῦ βάρους εἶναι $\Delta B = 1{,}25$ N.

α. Πειραματική ἐπαλήθευση τῆς μεταβολῆς τοῦ g μέ τό ὕψος.

Τό ἐκκρεμές ἑνός ρολογιοῦ στήν ἐπιφάνεια τῆς θάλασσας καί σέ ὕψος h ἔχει ἀντίστοιχα περίοδο T_0 καί T_h, πού δίνονται ἀπό τίς ἐξισώσεις:

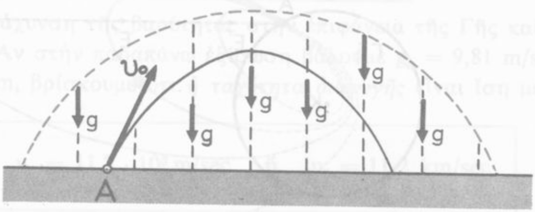
$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g_0}} \quad \text{καί} \quad T_h = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g_h}} \quad \text{ἄρα} \quad \frac{T_h}{T_0} = \sqrt{\frac{g_0}{g_h}}$$

$$\text{ἤ} \quad \frac{T_h}{T_0} = \sqrt{\left(\frac{R+h}{R} \right)^2} = 1 + \frac{h}{R} \quad \text{καί} \quad T_h = T_0 \left(1 + \frac{h}{R} \right) \qquad (6)$$

Ἐπειδή εἶναι $g_h < g_0$ ἔπεται ὅτι εἶναι $T_h > T_0$. Ἡ ἐξίσωση (6) ἐπαληθεύεται, ἄν στό ὕψος h μετρήσουμε πόσο καθυστερεῖ τό ρολόι στή διάρκεια μιᾶς ἡμέρας.

35. Ἡ πραγματική τροχιά τῶν βλημάτων

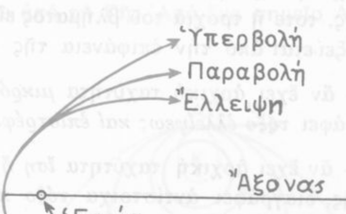
Ὅταν ἀπό ἕνα σημεῖο Α τῆς ἐπιφάνειας τῆς Γῆς ἐκτοξεύουμε ἕνα βλῆμα μέ ἀρχική ταχύτητα $υ_0$ καί μέ ὁρισμένη γωνία βολῆς (σχ. 64), βρίσκουμε ὅτι ἡ τροχιά τοῦ βλήματος εἶναι παραβολή (§ 13) καί ἕνα σημεῖο της εἶναι τό σημεῖο Α. Σ' αὐτή τήν περίπτωση θεωροῦμε ὅτι ἡ Γῆ εἶναι *ἐπίπεδη* καί ὅτι ἡ ἐπιτάχυνση τῆς βαρύτητας g *δέ μεταβάλλεται* μέ τό ὕψος. Αὐτή ἡ ἁπλοποιημένη ἐξέταση τῶν βλημάτων ἰσχύει γιά τά βλήματα τῶν πυροβόλων μας, γιατί τό βεληνεκές τῶν βλημάτων καί τό ὕψος πού φτάνουν εἶναι μικρά σχετικά μέ τήν ἀκτίνα τῆς Γῆς (R = 6366 km).



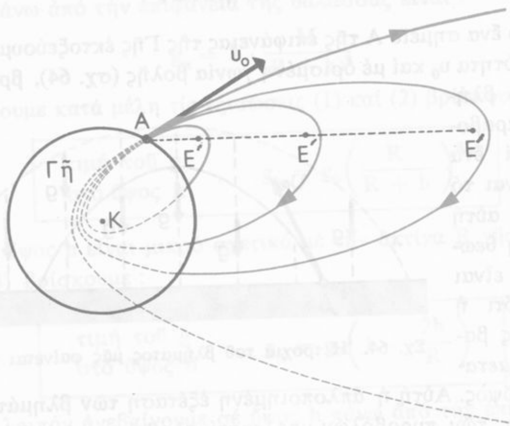
Σχ. 64. Ἡ τροχιά τοῦ βλήματος μᾶς φαίνεται παραβολή.

Ἀποδείχνεται ὅτι ἡ πραγματική τροχιά τοῦ βλήματος μέσα στό γήινο πεδίο βαρύτητας εἶναι τόξο *ἐλλείψεως*, πού ἡ μιά ἑστία της βρίσκεται στό κέντρο τῆς Γῆς. Ἐπειδή στά συνηθισμένα βλήματα τῶν πυροβόλων μας τό βεληνεκές εἶναι πολύ μικρό σχετικά μέ τήν ἀκτίνα τῆς Γῆς, γι' αὐτό ἡ τροχιά τοῦ βλήματος μᾶς φαίνεται τόξο παραβολῆς, πού δέν μποροῦμε νά τό ξεχωρίσουμε ἀπό τόξο ἐλλείψεως (σχ. 65).

α. Ἐκτόξευση βλήματος ἀπό τήν ἐπιφάνεια τῆς Γῆς. Ἀπό ἕνα σημεῖο Α τοῦ ἐδάφους ἐκτοξεύουμε βλήματα μέ τήν ἴδια γωνία βολῆς, ἀλλά μέ διαφορετική ἀρχική ταχύτητα $υ_0$. Ὅταν ἡ ἀρχική ταχύτητα $υ_0$ συνεχῶς αὐξάνεται, τότε οἱ τροχιές τῶν βλημάτων εἶναι τόξα *ἐλλείψεων*, πού ὅλες ἔχουν κοινό σημεῖο ἐπαφῆς τους τό σημεῖο Α, ἔχουν *μιά κοινή ἑστία* Ε πού βρίσκεται στό κέντρο τῆς Γῆς καί μιά δεύτερη ἑστία Ε' πού βρίσκεται πάνω σέ μιά εὐθεία πού περνάει ἀπό τό σημεῖο Α (σχ. 66). Ὅταν προοδευτικά αὐξάνεται ἡ ἀρχική ταχύτητα $υ_0$, ἡ δεύ-



Σχ. 65. Δέν ξεχωρίζουμε τό τόξο παραβολῆς ἀπό τό τόξο ἐλλείψεως.



Σχ. 66. Τό βλῆμα διαγράφει τόξο ἐλλείψεως, παραβολῆς ἤ ὑπερβολῆς.

τερη ἑστία Ε′ τῶν ἐλλείψεων συνεχῶς ἀπομακρύνεται, *ἀλλά τό βλῆμα διαγράφοντας ἕνα τόξο ἐλλείψεως πάντοτε ξαναγυρίζει στήν ἐπιφάνεια τῆς Γῆς.*

Ὅταν ὅμως ἡ ἀρχική ταχύτητα λάβει μιά ὁρισμένη τιμή, πού ὀνομάζεται *ταχύτητα διαφυγῆς* (velocity of escape), τότε ἡ δεύτερη ἑστία Ε′ τῆς ἐλλείψεως ἀπομακρύνεται στό ἄπειρο καί ἡ τροχιά τοῦ βλήματος εἶναι *παραβολή*, πού ἡ ἑστία της Ε βρίσκεται στό κέντρο τῆς Γῆς. Καί ἄν ἡ ἀρχική ταχύτητα τοῦ βλήματος γίνει *μεγαλύτερη* ἀπό τήν ταχύτητα διαφυγῆς, τότε ἡ τροχιά τοῦ βλήματος εἶναι *ὑπερβολή*. Ὥστε ἕνα βλῆμα πού ἐκτοξεύεται ἀπό τήν ἐπιφάνεια τῆς Γῆς:

— ἄν ἔχει ἀρχική ταχύτητα *μικρότερη* ἀπό τήν ταχύτητα διαφυγῆς, διαγράφει *τόξο ἐλλείψεως καί ἐπιστρέφει στήν ἐπιφάνεια τῆς Γῆς*·

— ἄν ἔχει ἀρχική ταχύτητα *ἴση ἤ μεγαλύτερη* ἀπό τήν ταχύτητα διαφυγῆς, διαγράφει ἀντίστοιχα *τόξο παραβολῆς ἤ ὑπερβολῆς καί φεύγει γιά πάντα στό διάστημα.*

Ἀπό τά παραπάνω συνάγεται τό ἑξῆς γενικό συμπέρασμα:

Ἕνα βλῆμα πού ἐκτοξεύεται ἀπό τήν ἐπιφάνεια τῆς Γῆς μέ ὁποιαδήποτε γωνία βολῆς ἤ ἐπιστρέφει στήν ἐπιφάνεια τῆς Γῆς ἤ ἐλευθερώνεται ἀπό τήν ἕλξη τῆς Γῆς καί φεύγει γιά πάντα στό διάστημα.

β. Ἡ ταχύτητα διαφυγῆς. Ἀποδείχνεται ὅτι *ἡ ταχύτητα διαφυγῆς* υ_0 δίνεται ἀπό τήν ἐξίσωση :

$$\boxed{\text{ταχύτητα διαφυγῆς} \quad \upsilon_0 = \sqrt{2g_0R}}$$

ὅπου g_0 εἶναι ἡ ἐπιτάχυνση τῆς βαρύτητας στήν ἐπιφάνεια τῆς Γῆς καί R ἡ ἀκτίνα τῆς Γῆς. Ἄν στήν παραπάνω ἐξίσωση βάλουμε $g_0 = 9{,}81$ m/sec² καί $R = 6370 \cdot 10^3$ m, βρίσκουμε ὅτι *ἡ ταχύτητα διαφυγῆς* εἶναι ἴση μέ :

$$\boxed{\text{ταχύτητα διαφυγῆς} \quad \upsilon_0 = 11{,}2 \cdot 10^3\ \text{m/sec} \quad \text{ἤ} \quad \upsilon_0 = 11{,}2\ \text{km/sec}}$$

Τήν ἴδια τιμή βρήκαμε (§ 33) καί ἀπό τήν ἐξίσωση :

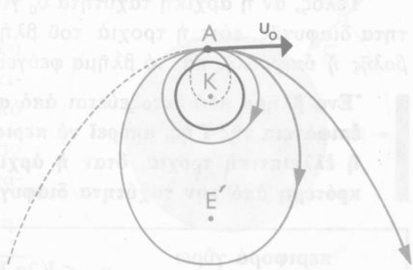
$$\upsilon_0 = \sqrt{2U_0}$$

Ἀνακεφαλαιώνοντας τά παραπάνω γιά ἕνα βλῆμα πού ἐκτοξεύεται *ἀπό τήν ἐπιφάνεια τῆς Γῆς* ἔχουμε :

ἐπιστροφή στή Γῆ (τροχιά ἔλλειψη)	$\upsilon_0 < 11{,}2$ km/sec
διαφυγή στό διάστημα (τροχιά παραβολή ἤ ὑπερβολή)	$\upsilon_0 \geqslant 11{,}2$ km/sec

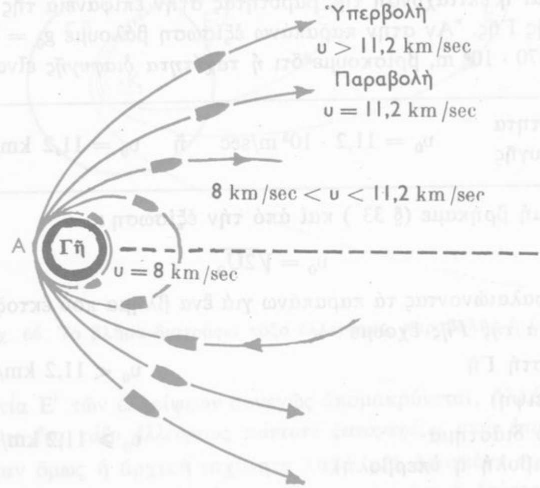
36. Περιφορά βλήματος γύρω ἀπό τή Γῆ. Τεχνητός δορυφόρος

Εἴδαμε ὅτι ἀπό τήν ἐπιφάνεια τῆς Γῆς εἶναι ἀδύνατο νά ἐκτοξεύσουμε ἕνα βλῆμα, πού νά περιφέρεται γύρω ἀπό τή Γῆ. Ἀπό ἕνα σημεῖο Α, πού βρίσκεται *πάνω ἀπό τήν ἐπιφάνεια τῆς Γῆς* ἐκτοξεύουμε ἕνα βλῆμα μέ ἀρχική ταχύτητα υ_0 (σχ. 67). Ὅταν *ἡ ὁριζόντια ἀρχική ταχύτητα* εἶναι μικρή, τό βλῆμα διαγράφει *τόξο ἐλλείψεως* καί ξαναπέφτει στήν ἐπιφάνεια τῆς Γῆς. Ἡ μιά ἑστία Ε τῆς ἐλλείψεως βρίσκεται στό κέντρο τῆς Γῆς καί ἡ ἄλλη ἑστία Ε′ βρίσκεται ἀνάμεσα στό κέντρο τῆς Γῆς καί τό σημεῖο Α. Ὅταν ἡ ἀρχική ταχύτητα υ_0 συνεχῶς αὐξάνεται ἡ δεύτερη ἑστία Ε′ τῆς ἐλ-



Σχ. 67. Ἐκτόξευση βλήματος ἀπό σημεῖο πάνω ἀπό τήν ἐπιφάνεια τῆς Γῆς.

λείψεως συνεχῶς πλησιάζει πρός τό κέντρο Κ τῆς Γῆς καί ὅταν οἱ δύο ἑστίες τῆς ἐλλείψεως συμπέσουν μέ τό κέντρο τῆς Γῆς, τότε ἡ τροχιά τοῦ βλήματος γίνεται *κυκλική* καί τό βλῆμα δέν ἐπιστρέφει στήν ἐπιφάνεια τῆς Γῆς, ἀλλά *περιφέρεται γύρω ἀπό τή Γῆ*, δηλαδή γίνεται ἕνας *τεχνητός δορυφόρος τῆς Γῆς* (σχ. 68).



Σχ. 68. Οἱ τροχιές πού μπορεῖ νά διαγράψει τό βλῆμα.

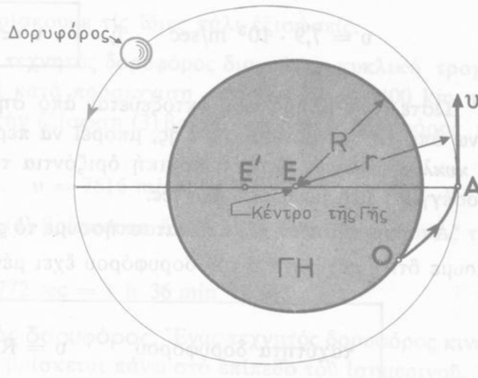
Ἄν συνεχίσουμε τήν αὔξηση τῆς ἀρχικῆς ταχύτητας $υ_0$, τό βλῆμα *ἐξακολουθεῖ νά περιφέρεται γύρω ἀπό τή Γῆ*, ἀλλά τώρα ἡ τροχιά τοῦ βλήματος εἶναι *ἔλλειψη*, πού ἡ δεύτερη ἑστία της Ε΄ ἔχει μετατοπιστεῖ πέρα ἀπό τό κέντρο Κ τῆς Γῆς.

Τέλος, ἄν ἡ ἀρχική ταχύτητα $υ_0$ γίνει *ἴση ἤ μεγαλύτερη* ἀπό τήν ταχύτητα διαφυγῆς, τότε ἡ τροχιά τοῦ βλήματος εἶναι ἀντίστοιχα *τόξο παραβολῆς ἤ ὑπερβολῆς* καί τό βλῆμα φεύγει γιά πάντα στό διάστημα. Ὥστε:

Ἕνα βλῆμα πού ἐκτοξεύεται ἀπό σημεῖο, πού βρίσκεται πάνω ἀπό τήν ἐπιφάνεια τῆς Γῆς, μπορεῖ νά περιφέρεται γύρω ἀπό τή Γῆ σέ κυκλική ἤ ἐλλειπτική τροχιά, ὅταν ἡ ἀρχική ὁριζόντια ταχύτητα $υ_0$ εἶναι μικρότερη ἀπό τήν ταχύτητα διαφυγῆς.

περιφορά γύρω ἀπό τή Γῆ	$υ_0 < \sqrt{2g_0R}$	ἤ	$υ_0 < 11,2$ km/sec

α. Κυκλική κίνηση τεχνητοῦ δορυφόρου. Ἕνα σῶμα μπορεῖ νά περιφέρεται γύρω ἀπό τή Γῆ σέ κυκλική ἤ ἐλλειπτική τροχιά, δηλαδή μπορεῖ τό σῶμα αὐτό νά γίνει *τεχνητός δορυφόρος* τῆς Γῆς, ἄν ἐκτοξεύσουμε τό σῶμα ἀπό ἕνα σημεῖο πού βρίσκεται πάνω ἀπό τήν ἐπιφάνεια τῆς Γῆς καί μέ ὁριζόντια ἀρχική ταχύτητα υ_0 μικρότερη ἀπό τήν ταχύτητα διαφυγῆς. Γιά νά τοποθετήσουμε τό δορυφόρο στήν προκαθορισμένη τροχιά του, ἐφαρμόζουμε τήν ἑξῆς μέθοδο: Ἕνας πύραυλος διαγράφει βλητική τροχιά καί φέρνει τό δορυφόρο στό σημεῖο Α τῆς κυκλικῆς ἤ ἐλλειπτικῆς τροχιᾶς πού θέλουμε νά διαγράφει ὁ δορυφόρος (σχ. 69). Στό σημεῖο Α ὁ δορυφόρος δέχεται μιά κατάλληλη ὤθηση καί ξεφεύγει ἀπό τόν πύραυλο μέ τήν ἀπαιτούμενη ἀρχική ταχύτητα υ_0 πού ἔχει τή διεύθυνση τῆς ἐφαπτομένης τῆς τροχιᾶς στό σημεῖο Α.



Σχ. 69. Τοποθέτηση τεχνητοῦ δορυφόρου στήν τροχιά του.

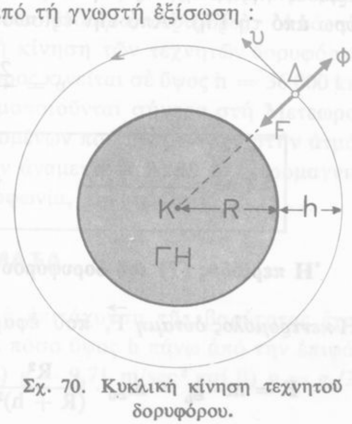
Ἐξισώσεις τῆς κινήσεως τοῦ δορυφόρου. Ὁ δορυφόρος ἔχει μάζα m καί θά διαγράφει *κυκλική τροχιά* σέ ὕψος h πάνω ἀπό τήν ἐπιφάνεια τῆς Γῆς, δηλαδή σέ ἀπόσταση R + h ἀπό τό κέντρο τῆς Γῆς (σχ. 70). Στό ὕψος h ἡ ἐπιτάχυνση τῆς βαρύτητας g_h δίνεται ἀπό τή γνωστή ἐξίσωση:

$$g_h = g_0 \cdot \frac{R^2}{(R+h)^2} \qquad (1)$$

Ὁ δορυφόρος, πού ἔχει ἀρχική ὁριζόντια ταχύτητα υ, μπορεῖ νά κινεῖται σέ κυκλική τροχιά γύρω ἀπό τή Γῆ, ὅταν *τό βάρος του* $\vec{B}$ εἶναι ἴσο μέ τήν ἀπαιτούμενη *κεντρομόλο δύναμη* $\vec{F}$, δηλαδή ὅταν ἰσχύει ἡ ἐξίσωση:

$$\frac{m \cdot \upsilon^2}{(R+h)} = m \cdot g_h$$

$$\text{ἄρα} \qquad \upsilon = \sqrt{g_h \cdot (R+h)} \qquad (2)$$



Σχ. 70. Κυκλική κίνηση τεχνητοῦ δορυφόρου.

Ἄν ὑποθέσουμε ὅτι ἕνα σῶμα ἐκτοξεύεται ἀπό σημεῖο πού βρίσκεται λίγο πιό πάνω ἀπό τήν ἐπιφάνεια τῆς Γῆς, τότε ἡ ἐξίσωση (2) γράφεται :

$$\upsilon = \sqrt{g_0 \cdot R} \qquad (2')$$

Ἄν στήν ἐξίσωση (2') βάλουμε $g_0 = 9{,}81$ m/sec² καί $R = 6366 \cdot 10^3$ m, βρίσκουμε :

$$\upsilon = 7{,}9 \cdot 10^3 \text{ m/sec} \qquad \text{ἤ} \qquad \boxed{\upsilon \simeq 8 \text{ km/sec}}$$

Ὥστε, ἕνα βλῆμα πού ἐκτοξεύεται ἀπό σημεῖο, πού βρίσκεται λίγο πάνω ἀπό τήν ἐπιφάνεια τῆς Γῆς, μπορεῖ νά περιφέρεται γύρω ἀπό τή Γῆ σέ *κυκλική τροχιά*, ὅταν ἡ ἀρχική ὁριζόντια ταχύτητά του υ εἶναι κατά προσέγγιση ἴση μέ $\upsilon \simeq 8$ km/sec.

Ἄν στήν ἐξίσωση (2) ἀντικαταστήσουμε τό g_h ἀπό τήν ἐξίσωση (1) βρίσκουμε ὅτι *ἡ ταχύτητα* υ τοῦ δορυφόρου ἔχει μέτρο ἴσο μέ :

$$\boxed{\text{ταχύτητα δορυφόρου} \qquad \upsilon = R\sqrt{\frac{g_0}{R+h}}} \qquad (3)$$

Ἡ ταχύτητα (υ) τοῦ δορυφόρου εἶναι ἀνεξάρτητη ἀπό τή μάζα τοῦ δορυφόρου καί ἐλαττώνεται, ὅταν αὐξάνεται τό ὕψος (h).

Ἡ *γωνιακή ταχύτητα* τοῦ δορυφόρου εἶναι $\omega = 2\pi/T$, ὅπου T εἶναι ἡ *περίοδος* τῆς κινήσεως (δηλαδή ὁ χρόνος μιᾶς περιφορᾶς τοῦ δορυφόρου γύρω ἀπό τή Γῆ). Ἀπό τήν ἐξίσωση :

$$\upsilon = \frac{2\pi(R+h)}{T} \quad \text{ἔχουμε}$$

$$\boxed{T = \frac{2\pi(R+h)}{\upsilon} \qquad \text{ἤ} \qquad T = \frac{2\pi}{R}\sqrt{\frac{(R+h)^3}{g_0}}} \qquad (4)$$

Ἡ περίοδος (T) τοῦ δορυφόρου αὐξάνεται, ὅταν αὐξάνεται τό ὕψος (h).

Ἡ *κεντρομόλος δύναμη* $\vec{F}$, πού ἐφαρμόζεται στό δορυφόρο, ἔχει μέτρο :

$$F = m \cdot g_h = mg_0 \cdot \frac{R^2}{(R+h)^2} = \frac{m \cdot \upsilon^2}{R+h} = \frac{4\pi^2 \cdot m \cdot (R+h)}{T^2}$$

Γιά τόν ἀστροναύτη, πού βρίσκεται μέσα στό δορυφόρο, ἡ σχετική ἰσορροπία τοῦ δορυφόρου ἐξασφαλίζεται πάνω στήν τροχιά του ἀπό τή φυγόκεντρη δύναμη ἀδράνειας $\vec{\Phi}$ πού εἶναι ἀντίθετη μέ τό βάρος $\vec{B}$ τοῦ δορυφόρου στό ὕψος h, δηλαδή ἰσχύει ἡ ἐξίσωση:

$$\frac{m \cdot \upsilon^2}{(R+h)} = m \cdot g_h$$

Ἀπό τήν ἐξίσωση αὐτή βρίσκουμε τίς ἴδιες πάλι ἐξισώσεις.

Παράδειγμα. Ἄν ἕνας τεχνητός δορυφόρος διαγράφει κυκλική τροχιά σέ ὕψος $h = 600$ km καί κατά προσέγγιση πάρουμε $R = 6400$ km καί $g_0 = 10$ m/sec², τότε ἀπό τήν ἐξίσωση (3) βρίσκουμε ὅτι ὁ δορυφόρος κινεῖται μέ ταχύτητα:

$$\upsilon = 7616 \text{ m/sec}$$

Καί ἀπό τήν ἐξίσωση (4) βρίσκουμε ὅτι ἡ περίοδος τῆς κινήσεως τοῦ δορυφόρου εἶναι:

$$T = 5772 \text{ sec} = 1 \text{ h } 36 \text{ min } 12 \text{ sec}$$

6. Στάσιμος τεχνητός δορυφόρος. Ἕνας τεχνητός δορυφόρος κινεῖται σέ κυκλική τροχιά πού βρίσκεται πάνω στό ἐπίπεδο τοῦ ἰσημερινοῦ. Ἡ γωνιακή ταχύτητα ($\omega = 2\pi/T$) τοῦ δορυφόρου εἶναι ἴση μέ τή γωνιακή ταχύτητα τῆς περιστροφικῆς κινήσεως τῆς Γῆς καί ἑπομένως ἡ περίοδος (T) τῆς κινήσεως τοῦ δορυφόρου εἶναι ἴση μέ τό χρόνο μιᾶς περιστροφῆς τῆς Γῆς γύρω ἀπό τόν ἄξονά της, δηλαδή εἶναι T = 24 ὧρες. Τότε ὁ δορυφόρος βρίσκεται πάντοτε στό ἐπίπεδο *τοῦ ἴδιου μεσημβρινοῦ* καί ὁ δορυφόρος παραμένει πάντοτε πάνω ἀπό *τό ἴδιο σημεῖο* τῆς ἐπιφάνειας τῆς Γῆς, δηλαδή μᾶς φαίνεται ἀκίνητος καί γι' αὐτό ὀνομάζεται *στάσιμος δορυφόρος*. Ἀπό τίς ἐξισώσεις πού ἰσχύουν γιά τήν κυκλική κίνηση τῶν τεχνητῶν δορυφόρων εὔκολα βρίσκουμε ὅτι ὁ στάσιμος δορυφόρος κινεῖται σέ ὕψος h = 36 000 km περίπου. Οἱ στάσιμοι δορυφόροι χρησιμοποιοῦνται σήμερα στή Μετεωρολογία γιά τήν παρακολούθηση τῶν φαινομένων πού συμβαίνουν στήν ἀτμόσφαιρα καί στίς τηλεπικοινωνίες γιά τήν ἀναμετάδοση τῶν ἠλεκτρομαγνητικῶν κυμάτων (ραδιοτηλεφωνία, ραδιοφωνία, τηλεόραση).

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

72. Στήν ἐπιφάνεια τῆς θάλασσας ἡ ἐπιτάχυνση τῆς βαρύτητας ἔχει τήν τιμή $g_0 = 9{,}81$ m/sec². Νά βρεθεῖ σέ πόσο ὕψος h πάνω ἀπό τήν ἐπιφάνεια τῆς θάλασσας ἡ τιμή τοῦ g εἶναι: α) $g = 9{,}71$ m/sec² καί β) $g = g_0/2$. Ἡ ἀκτίνα τῆς Γῆς εἶναι R = 6370 km.

73. Στήν ἐπιφάνεια τῆς θάλασσας ἡ ἐπιτάχυνση τῆς βαρύτητας ἔχει τήν τιμή $g_0 = 9{,}81\ m/sec^2$. 1) Νά βρεθεῖ ἡ τιμή τοῦ g σέ ἀπόσταση 60 R ἀπό τό κέντρο τῆς Γῆς, ὅπου R εἶναι ἡ ἀκτίνα τῆς Γῆς, R = 6370 km. 2) Ἡ Σελήνη περιφέρεται πάνω σέ σχεδόν κυκλική τροχιά γύρω ἀπό τή Γῆ καί σέ ἀπόσταση 60 R ἀπό τό κέντρο τῆς Γῆς. Ἀπό τό ἐξαγόμενο πού βρήκαμε παραπάνω, μποροῦμε νά βροῦμε πόση εἶναι ἡ κεντρομόλος ἐπιτάχυνση γ_K τῆς κυκλικῆς κινήσεως τῆς Σελήνης ;

74. Ἕνας τεχνητός δορυφόρος, πού ἔχει μάζα m = 1000 kgr ἐκτελεῖ κυκλική ὁμαλή κίνηση σέ ὕψος h = 1600 km πάνω ἀπό τήν ἐπιφάνεια τῆς Γῆς. 1) Πόση ταχύτητα υ ἔχει ὁ δορυφόρος καί πόση εἶναι ἡ διάρκεια Τ μιᾶς περιφορᾶς του γύρω ἀπό τή Γῆ ; 2) Πόση εἶναι ἡ κινητική ἐνέργεια ($E_{κιν}$) τοῦ δορυφόρου ; 3) Ἄν ὑποθέσουμε ὅτι ἡ ἐπιτάχυνση τῆς βαρύτητας ἀπό τό ὕψος 0 ὥς τό ὕψος 1600 km ἔχει κατά μέσο ὅρο τή σταθερή τιμή $g_μ = 8\ m/sec^2$, νά βρεθεῖ ἡ δυναμική ἐνέργεια ($E_{δυν}$) πού ἔχει ὁ δορυφόρος, ὅταν βρίσκεται πάνω στήν τροχιά του. 4) Νά βρεθεῖ ἡ ὁλική μηχανική ἐνέργεια ($E_{ολ}$) τοῦ δορυφόρου. Ἀκτίνα τῆς Γῆς R = 6400 km. Τιμή τοῦ g στήν ἐπιφάνεια τῆς θάλασσας $g_0 = 10\ m/sec^2$. Τιμή τοῦ g σέ ὕψος h :

$$g_h = g_0\left(\frac{R}{R+h}\right)^2$$

75. Ἕνας τεχνητός δορυφόρος διαγράφει γύρω ἀπό τή Γῆ ἐλλειπτική τροχιά. Τό σημεῖο Π τῆς ἐλλείψεως εἶναι τό πιό κοντινό σημεῖο της μέ τήν ἐπιφάνεια τῆς Γῆς καί βρίσκεται σέ ὕψος $h_Π$ πάνω ἀπό τήν ἐπιφάνεια τῆς Γῆς. Τό σημεῖο Α τῆς ἐλλείψεως εἶναι τό πιό μακρινό σημεῖο της ἀπό τήν ἐπιφάνεια τῆς Γῆς καί βρίσκεται σέ ὕψος h_A πάνω ἀπό τήν ἐπιφάνεια τῆς Γῆς. Ὑποθέτουμε ὅτι ἀπό τό ὕψος 0 ὥς τό ὕψος h_A ἡ ἐπιτάχυνση τῆς βαρύτητας ἔχει κατά μέσο ὅρο τή σταθερή τιμή $g_μ = 8\ m/sec^2$. 1) Νά βρεθεῖ ἡ διαφορά τῶν ταχυτήτων $υ_Π^2 - υ_A^2$, τίς ὁποῖες ἔχει ὁ δορυφόρος στά σημεῖα Π καί Α τῆς τροχιᾶς του. 2) Ἄν εἶναι $h_A - h_Π = 600$ km καί ἡ ταχύτητα τοῦ δορυφόρου στό σημεῖο Π εἶναι $υ_Π = 8000$ m/sec, νά βρεθεῖ ἡ ταχύτητα $υ_A$ τοῦ δορυφόρου στό σημεῖο Α.

76. Ἕνας τεχνητός δορυφόρος ἔχει μάζα m = 100 kgr καί κινεῖται πάνω σέ κυκλική τροχιά σέ ὕψος h = 2000 km πάνω ἀπό τήν ἐπιφάνεια τῆς Γῆς. 1) Πόση εἶναι ἡ ταχύτητα υ τοῦ δορυφόρου, ἡ περίοδος Τ τῆς κινήσεώς του καί ἡ κινητική ἐνέργειά του ($E_{κιν}$) ; 2) Βρήκαμε ὅτι στό ὕψος h = 2000 km ἡ τιμή τοῦ g εἶναι ἴση μέ $g = 5{,}80\ m/sec^2$. Νά βρεθεῖ ἡ δυναμική ἐνέργεια ($E_{δυν}$) τοῦ δορυφόρου στό ὕψος h καί ἡ ὁλική μηχανική ἐνέργειά του ($E_{ολ}$). 3) Στό ὕψος $h_1 = 1000$ km ἡ τιμή τοῦ g εἶναι ἴση μέ $g_1 = 7{,}50\ m/sec^2$.

Ὁ δορυφόρος, ἔπειτα ἀπό ὁρισμένο χρόνο, πέφτει σιγά-σιγά καί τότε διαγράφει κυκλική τροχιά σέ ὕψος $h_1 = 1000$ km. Νά βρεθεῖ ἡ ταχύτητα $υ_1$, ἡ περίοδος T_1, ἡ κινητική, ἡ δυναμική καί ἡ ὁλική ἐνέργεια τοῦ δορυφόρου στό ὕψος h_1. 4) Νά συγκριθοῦν τά διάφορα στοιχεῖα τῆς κινήσεως τοῦ δορυφόρου στά δύο ὕψη. $g_0 = 10$ m/sec². $R = 6370$ km.

77. Θέλουμε νά τοποθετήσουμε ἕνα στάσιμο δορυφόρο στήν κυκλική τροχιά του, πού τό ἐπίπεδό της θά συμπίπτει μέ τό ἐπίπεδο τοῦ ἰσημερινοῦ τῆς Γῆς. Ὁ δορυφόρος αὐτός θά βρίσκεται σέ κάθε στιγμή πάνω ἀπό τό ἴδιο σημεῖο τῆς ἐπιφάνειας τῆς Γῆς. 1) Σέ πόσο ὕψος h πρέπει νά τοποθετηθεῖ ὁ δορυφόρος ; 2) Πόση ἀρχική ταχύτητα υ πρέπει νά δώσουμε στό δορυφόρο (ὅταν τόν φέρουμε στό ὕψος h), γιά νά ἀρχίσει νά κινεῖται πάνω στήν τροχιά του ;

$g_0 = 10$ m/sec². $R = 6400$ km. $\pi^2 = 10$.
$291{,}6 = (6{,}63)^3$. $864 = 64 \cdot 13{,}5$.

Νόμοι τῆς ροῆς

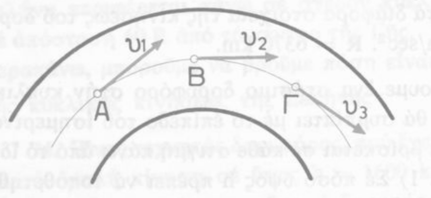
37. Ἰδανικά ρευστά

Τά ὑγρά καί τά ἀέρια ὀνομάζονται *ρευστά* καί ὅταν ἠρεμοῦν, ἔχουν πολλές κοινές ἰδιότητες (π.χ. δέν ἔχουν ὁρισμένο σχῆμα, ἰσχύουν καί γιά τά ὑγρά καί τά ἀέρια ἡ ἀρχή τοῦ Pascal καί ἡ ἀρχή τοῦ Ἀρχιμήδη), ἔχουν ὅμως καί σημαντικές διαφορές (π.χ. τά ὑγρά ἀντίθετα μέ τά ἀέρια ἔχουν ὁρισμένο ὄγκο). Ὅταν τά ὑγρά καί τά ἀέρια κινοῦνται, τότε ἔχουν *ἀπόλυτα ἴδιες ἰδιότητες*. Σέ πολλές περιπτώσεις μποροῦμε νά δεχτοῦμε ὅτι τό κινούμενο ρευστό (ὑγρό ἤ ἀέριο) εἶναι *ἀσυμπίεστο* καί ὅτι *δέν ἔχει ἐσωτερική τριβή*. Αὐτό τό ρευστό ὀνομάζεται *ἰδανικό ρευστό*. Ὥστε :

Τά ἰδανικά ρευστά εἶναι ἀσυμπίεστα καί δέν ἔχουν ἐσωτερική τριβή.

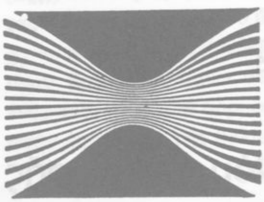
38. Ὁρισμοί

Ὁ χῶρος, πού μέσα σ' αὐτόν κινεῖται τό ρευστό, ὀνομάζεται *πεδίο ροῆς*. Ἕνα πεδίο ροῆς καθορίζεται τελείως, ὅταν σέ κάθε χρονική στιγμή εἶναι γνωστή ἡ ταχύτητα τοῦ ρευστοῦ γιά ὅλα τά σημεῖα τοῦ πεδίου. Ἡ τροχιά πού διαγράφει ἕνα μόριο τοῦ ρευστοῦ ὀνομάζεται *ρευματική γραμμή* (σχ. 71). Ἡ ταχύτητα υ τοῦ μορίου τοῦ ρευστοῦ εἶναι πάντοτε ἐφαπτομένη τῆς ρευματικῆς γραμμῆς. Μποροῦμε νά παρατηρήσουμε τίς ρευματικές γραμμές, ἄν μέσα στό ρευστό ὑπάρχουν ὁρατά σωματίδια (π.χ. κομματάκια χρωματιστοῦ χαρτιοῦ, σκόνη ἀλουμινίου). Τό σχῆμα 72 δείχνει τήν πύκνωση τῶν ρευματικῶν γραμμῶν σέ μιά στένωση τοῦ σωλήνα.



Σχ. 71. Ρευματική γραμμή.

Ἄν σέ κάθε σημεῖο τοῦ πεδίου ροῆς ἡ ταχύτητα *δέ μεταβάλλεται* μέ τό χρόνο, τότε ἡ ροή ὀνομάζεται *στρωτή ροή*. Ἀντίθετα, ἄν σέ κάθε σημεῖο τοῦ πεδίου ροῆς ἡ ταχύτητα μεταβάλλεται μέ τό χρόνο, τότε ἡ ροή ὀνομάζεται *στροβιλώδης ροή*. Στά παρακάτω θά ἐξετάσουμε τή στρωτή ροή, πού ἔχει ἰδιαίτερη σημασία γιά πολλές πρακτικές ἐφαρμογές (δίκτυα ὑδρεύσεως ἤ φωταερίου, πετρελαιοαγωγοί, τροφοδότηση ὑδροστροβίλων κ.ἄ.).



Σχ. 72. Παρατήρηση ρευματικῶν γραμμῶν.

Παροχή τοῦ σωλήνα. Στή διάρκεια τοῦ χρόνου t ἀπό μιά τομή τοῦ σωλήνα περνάει ὄγκος V ρευστοῦ. Ὀνομάζουμε *παροχή* (Π) τοῦ σωλήνα τό πηλίκο τοῦ ὄγκου V τοῦ ρευστοῦ, πού περνάει ἀπό τήν τομή τοῦ σωλήνα διά τοῦ ἀντίστοιχου χρόνου t.

$$\boxed{\text{παροχή} \qquad \Pi = \frac{V}{t}}$$

Στό σύστημα MKS *μονάδα παροχῆς* εἶναι 1 m^3/sec.

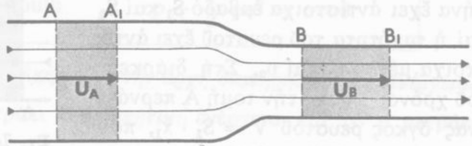
Τό ἐμβαδό τῆς τομῆς τοῦ σωλήνα εἶναι S καί τό ρευστό κινεῖται μέσα στό σωλήνα μέ ταχύτητα πού τό μέτρο της υ εἶναι σταθερό. Στή διάρκεια τοῦ χρόνου t τό ρευστό διανύει μέσα στό σωλήνα διάστημα $x = \upsilon \cdot t$ καί ἑπομένως ἀπό τήν τομή τοῦ σωλήνα περνάει ὄγκος ρευστοῦ ἴσος μέ $V = S \cdot x$ ἤ $V = S \cdot \upsilon \cdot t$. Ἄρα ἡ παροχή τοῦ σωλήνα εἶναι :

$$\text{παροχή} \qquad \Pi = \frac{V}{t} = \frac{S \cdot \upsilon \cdot t}{t} \quad \text{καί} \quad \boxed{\Pi = S \cdot \upsilon}$$

Ἡ παροχή (Π) τοῦ σωλήνα εἶναι ἴση μέ τό γινόμενο τοῦ ἐμβαδοῦ (S) τῆς τομῆς τοῦ σωλήνα ἐπί τήν ταχύτητα ροῆς (υ) τοῦ ρευστοῦ.

39. Νόμος τῆς συνέχειας

Μέσα σ' ἕναν ὁριζόντιο σωλήνα, πού ἡ τομή του δέν ἔχει σταθερό ἐμβαδό, κινεῖται *μέ στρωτή ροή ἕνα ἰδανικό ρευστό* (σχ. 73). Ἄν ὑποθέσουμε ὅτι στή διάρκεια τοῦ χρόνου Δt ἀπό τήν τομή Α περνάει ὄγκος ρευστοῦ μεγαλύτερος ἀπό ἐκεῖνο, πού στόν ἴδιο χρόνο Δt περνάει ἀπό τήν τομή Β, τότε στό χῶρο πού ὑπάρχει ἀνάμεσα στίς δύο τομές τοῦ σωλήνα θά αὐξανόταν τό περιεχόμενο ρευστό. Αὐτό ὅμως εἶναι ἀδύνατο, γιατί τό ρευστό εἶναι *ἀσυμπίεστο*. Ἄρα στό χρόνο Δt ἀπό τίς τομές Α καί Β τοῦ σωλήνα περνάει ὁ ἴδιος ὄγκος V ρευστοῦ καί ἑπομένως στίς δύο τομές *ἡ παροχή εἶναι ἴδια καί ἴση μέ* $\Pi = V/\Delta t$. Τό συμπέρασμα αὐτό τό ἐκφράζει *ὁ νόμος τῆς συνέχειας*:



Σχ. 73. Γιά τήν ἀπόδειξη τοῦ νόμου τῆς συνέχειας.

Ὅταν μέσα σέ σωλήνα ρέει ἰδανικό ρευστό, ἡ παροχή εἶναι σταθερή σέ κάθε τομή τοῦ σωλήνα.

Οἱ τομές Α καί Β ἔχουν ἀντίστοιχα ἐμβαδό S_A καί S_B. Ἡ ταχύτητα τοῦ ρευστοῦ στίς τομές Α καί Β εἶναι ἀντίστοιχα υ_A καί υ_B. Ἐπειδή κατά μῆκος τοῦ σωλήνα ἡ παροχή εἶναι σταθερή, ὁ νόμος τῆς συνέχειας ἐκφράζεται μέ τήν ἀκόλουθη ἐξίσωση:

νόμος τῆς συνέχειας	$S_A \cdot \upsilon_A = S_B \cdot \upsilon_B$

Ἀπό τήν παραπάνω ἐξίσωση συνάγεται τό ἀκόλουθο συμπέρασμα:

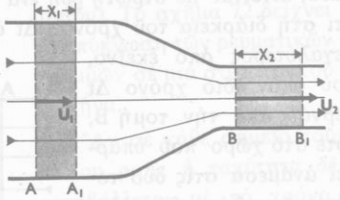
Ὅταν μέσα σέ σωλήνα μεταβλητῆς τομῆς ρέει ἰδανικό ρευστό, οἱ ταχύτητες τοῦ ρευστοῦ στίς τομές τοῦ σωλήνα εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογες μέ τά ἐμβαδά αὐτῶν τῶν τομῶν.

σχέση ταχύτητας καί ἐμβαδοῦ τομῆς	$\dfrac{\upsilon_A}{\upsilon_B} = \dfrac{S_B}{S_A}$

Ὥστε *στή στένωση* τοῦ σωλήνα ἀντιστοιχεῖ *μεγαλύτερη ταχύτητα* τοῦ ρευστοῦ καί ἀντίστροφα *στή διαπλάτυνση* τοῦ σωλήνα ἀντιστοιχεῖ *μικρότερη ταχύτητα* τοῦ ρευστοῦ.

40. Νόμος τοῦ Bernoulli

Μέσα σέ ὁριζόντιο σωλήνα, πού ἡ τομή του δέν ἔχει σταθερό ἐμβαδό, κινεῖται μέ στρωτή ροή ἕνα ἰδανικό ρευστό πού ἔχει πυκνότητα ρ (σχ. 74). Στά σημεῖα Α καί Β ἡ τομή τοῦ σωλήνα ἔχει ἀντίστοιχα ἐμβαδό S_1 καί S_2 καί ἡ ταχύτητα τοῦ ρευστοῦ ἔχει ἀντίστοιχα μέτρο $υ_1$ καί $υ_2$. Στή διάρκεια τοῦ χρόνου Δt ἀπό τήν τομή Α περνάει ἕνας ὄγκος ρευστοῦ $V = S_1 \cdot x_1$, πού ἔχει μάζα $m = V \cdot ρ$. Ἐπειδή ἡ παροχή τοῦ σωλήνα εἶναι σταθερή σέ κάθε τομή του, ἀπό τή μικρότερη τομή Β στή διάρκεια τοῦ ἴδιου χρόνου Δt περνάει ὁ ἴδιος ὄγκος ρευστοῦ πού εἶναι $V = S_2 \cdot x_2$. Ἄρα ἔχουμε τή σχέση :



Σχ. 74. Γιά τήν ἀπόδειξη τοῦ νόμου τοῦ Bernoulli.

$$V = S_1 \cdot x_1 = S_2 \cdot x_2$$

Στή μικρότερη τομή Β τό ρευστό ἔχει ταχύτητα $υ_2 > υ_1$. Ὥστε, ὅταν ἡ μάζα m τοῦ ρευστοῦ μετακινεῖται ἀπό τή θέση $ΑΑ_1$ στή θέση $ΒΒ_1$, ἡ *κινητική ἐνέργεια* τῆς μάζας m αὐξάνεται κατά :

$$\Delta E = \frac{1}{2} m υ_2^2 - \frac{1}{2} m υ_1^2 = \frac{1}{2} m(υ_2^2 - υ_1^2)$$

καί $$\Delta E = \frac{1}{2} Vρ\,(υ_2^2 - υ_1^2) \qquad (1)$$

Αὐτή ἡ αὔξηση τῆς κινητικῆς ἐνέργειας τῆς μάζας m τοῦ ρευστοῦ κατά ΔΕ ὀφείλεται *στό ἔργο δυνάμεων,* οἱ ὁποῖες δημιουργοῦνται ἀπό *τήν πίεση* πού ἐπικρατεῖ μέσα στό ρευστό. Ὥστε στίς τομές Α καί Β τοῦ σωλήνα ἐπικρατοῦν ἀντίστοιχα πιέσεις p_1 καί p_2. Αὐτές οἱ πιέσεις δημιουργοῦν δυνάμεις, πού εἶναι κάθετες στό ἐπίπεδο τῆς τομῆς καί ἀντίστοιχα ἔχουν μέτρο $F_1 = p_1 \cdot S_1$ καί $F_2 = p_2 \cdot S_2$. Ἐπειδή δέν ὑπάρχουν τριβές, *ἡ διαφορά τοῦ ἔργου* τῶν δύο δυνάμεων εἶναι ἴση *μέ τή μεταβολή τῆς κινητικῆς ἐνέργειας* ΔΕ τῆς μάζας m τοῦ ρευστοῦ, ὅταν αὐτή μεταφέρεται ἀπό τή θέση $ΑΑ_1$ στή θέση $ΒΒ_1$. Ἄρα ἔχουμε :

$$\Delta E = F_1 \cdot x_1 - F_2 \cdot x_2 \quad ἤ \quad \Delta E = p_1 \cdot S_1 \cdot x_1 - p_2 \cdot S_2 \cdot x_2$$

$$ἤ \quad \Delta E = p_1 \cdot V - p_2 \cdot V \quad καί \quad \Delta E = V\,(p_1 - p_2) \qquad (2)$$

Ἀπό τίς ἐξισώσεις (1) καί (2) βρίσκουμε :

$$\frac{1}{2} Vρ\,(υ_2^2 - υ_1^2)) = V\,(p_1 - p_2) \quad καί \quad p_1 + \frac{1}{2} ρυ_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} ρυ_2^2$$

Ἡ τελευταία ἐξίσωση ἐκφράζει τόν ἀκόλουθο *νόμο τοῦ Bernoulli*:

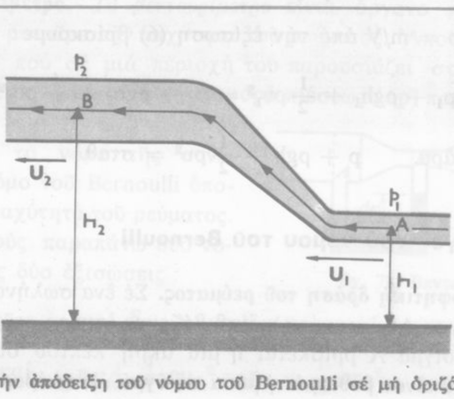
Κατά μῆκος ὁριζόντιου σωλήνα τό ἄθροισμα τῆς πιέσεως (p) τοῦ ρευστοῦ καί τῆς κινητικῆς ἐνέργειας τῆς μάζας (ρ) τοῦ ρευστοῦ, πού περιέχεται στή μονάδα ὄγκου, εἶναι σταθερό.

νόμος τοῦ Bernoulli	$p + \frac{1}{2}\rho\upsilon^2 = \sigma\tau\alpha\theta.$	(3)

Ὁ νόμος τοῦ Bernoulli ἐκφράζει *τήν ἀρχή διατηρήσεως τῆς ἐνέργειας* σέ ἕνα ρεῦμα. Τό $\frac{1}{2}\rho\upsilon^2$ μετράει *τήν κινητική* ἐνέργεια καί τό p μετράει *τή δυναμική* ἐνέργεια τῆς μάζας πού περιέχεται μέσα στή μονάδα ὄγκου τοῦ κινούμενου ρευστοῦ. Ἑπομένως, ὅπου αὐξάνεται ἡ ταχύτητα (υ) τοῦ ρευστοῦ, ἐλαττώνεται ἡ πίεση (p) τοῦ ρευστοῦ καί ἀντίστροφα. Τό p ὀνομάζεται *στατική πίεση* καί τό $\frac{1}{2}\rho\upsilon^2$ ὀνομάζεται *δυναμική πίεση*. Τό σταθερό ἄθροισμα $p_{o\lambda}$ τῆς στατικῆς καί τῆς δυναμικῆς πιέσεως ὀνομάζεται *ὁλική πίεση*.

Μή ὁριζόντιος σωλήνας. Ἕνας σωλήνας δέν εἶναι ὁριζόντιος καί σέ δύο θέσεις Α καί Β (σχ. 75), πού βρίσκονται ἀντίστοιχα σέ ὕψος h_1 καί h_2 πάνω ἀπό τό ὁριζόντιο ἐπίπεδο, ἡ πίεση τοῦ ρευστοῦ ἀντίστοιχα εἶναι p_1 καί p_2 καί ἡ ταχύτητα τοῦ ρευστοῦ εἶναι υ_1 καί υ_2. Τό ρευστό ἔχει πυκνότητα ρ. Σ' αὐτή τή γενική περίπτωση ἀποδείχνεται ὅτι *ὁ νόμος τοῦ Bernoulli* ἐκφράζεται ἀπό τήν ἐξίσωση:

νόμος τοῦ Bernoulli	$p + \rho g h + \frac{1}{2}\rho\upsilon^2 = \sigma\tau\alpha\theta.$	(4)



Σχ. 75. Γιά τήν ἀπόδειξη τοῦ νόμου τοῦ Bernoulli σέ μή ὁριζόντιο σωλήνα.

ὅπου $h = h_2 - h_1$ εἶναι ἡ κατακόρυφη ἀπόσταση τῶν δύο θέσεων A καί B τοῦ ρευστοῦ. Ἄν εἶναι $h = 0$, ὁ σωλήνας εἶναι ὁριζόντιος καί τότε εἶναι:

$$p + \frac{1}{2}\rho\upsilon^2 = \sigma\tau\alpha\theta.$$

Τό γινόμενο ρgh ὀνομάζεται *ὑψομετρική πίεση*. Ὥστε *ὁ νόμος τοῦ Bernoulli* μπορεῖ γενικά νά διατυπωθεῖ ὡς ἑξῆς:

Κατά μῆκος σωλήνα τό ἄθροισμα τῆς στατικῆς πιέσεως p, τῆς ὑψομετρικῆς πιέσεως ρgh καί τῆς δυναμικῆς πιέσεως $\frac{1}{2}\rho\upsilon^2$ τοῦ ρευστοῦ εἶναι σταθερό.

Ἀπόδειξη τῆς ἐξισώσεως (4). Γιά τή μάζα m τοῦ ρευστοῦ, πού πηγαίνει ἀπό τή θέση A στή θέση B, *ἡ μεταβολή τῆς ὁλικῆς μηχανικῆς ἐνέργειας* (δυναμική + κινητική) τῆς μάζας m εἶναι:

$$\Delta E = (mgh_2 - mgh_1) + \left(\frac{1}{2}m\upsilon_2^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_1^2\right)$$

$$\text{ἤ} \qquad \Delta E = mg(h_2 - h_1) + \frac{1}{2}m(\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2) \qquad (5)$$

Αὐτή ἡ μεταβολή τῆς μηχανικῆς ἐνέργειας τῆς μάζας m εἶναι ἴση μέ τό ἔργο πού παράγουν οἱ δυνάμεις, οἱ ὁποῖες δημιουργοῦνται ἀπό τίς πιέσεις (ἐξίσωση 2), καί ἑπομένως ἔχουμε τήν ἐξίσωση:

$$V(p_1 - p_2) = mg(h_2 - h_1) + \frac{1}{2}m(\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2)$$

$$\text{ἤ} \qquad p_1 - p_2 = \frac{m}{V}g(h_2 - h_1) + \frac{1}{2}\frac{m}{V}(\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2) \qquad (6)$$

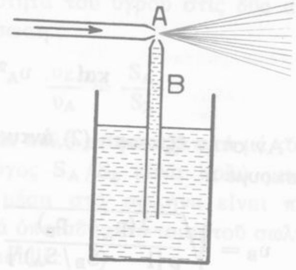
Ἐπειδή εἶναι $\rho = m/V$ ἀπό τήν ἐξίσωση (6) βρίσκουμε:

$$p_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 = p_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2$$

$$\text{ἄρα} \qquad p + \rho g h + \frac{1}{2}\rho\upsilon^2 = \sigma\tau\alpha\theta.$$

41. Ἐφαρμογές τοῦ νόμου τοῦ Bernoulli

1. Ἀναρροφητική δράση τοῦ ρεύματος. Σέ ἕνα σωλήνα, πού καταλήγει σέ στενό ἄνοιγμα A (*ἀκροφύσιο*), διαβιβάζουμε ἰσχυρό ρεῦμα ἀέρα (σχ. 76). Κοντά στό ἄνοιγμα A βρίσκεται ἡ μιά ἄκρη λεπτοῦ σωλήνα B πού ἡ ἄλλη ἄκρη του εἶναι βυθισμένη μέσα σέ ὑγρό. Ἡ φλέβα τοῦ ἀέρα βγαίνει ἀπό τό στενό ἄνοιγμα Α *μέ μεγάλη ταχύτητα*, ἔπειτα ὅμως ἡ φλέβα τοῦ ἀέρα ἀπότομα διαπλατύνεται καί ἡ πίεση τοῦ ἀέρα γίνεται ἴση μέ τήν ἀτμοσφαιρική πίεση. Ἑπομένως στή θέση Α ἐπικρατεῖ *πίεση μικρότερη ἀπό τήν ἀτμοσφαιρική*. Τότε τό ὑγρό ἀνεβαίνει στό σωλήνα Β, παρασύρεται ἀπό τό ρεῦμα τοῦ ἀέρα καί διαχωρίζεται σέ πολύ μικρά σταγονίδια (ψεκασμός). Σ' αὐτή τήν ἀρχή στηρίζεται ἡ λειτουργία τοῦ *ψεκαστήρα* καί τῆς *ἀντλίας μέ ροή ὑγροῦ ἤ ἀτμῶν ὑδραργύρου*.

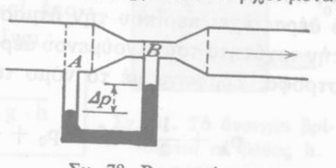


Σχ. 76. Ἀναρροφητική δράση ρεύματος.

Ὅταν ὁ ἄνεμος εἶναι πολύ ἰσχυρός, τότε πάνω ἀπό τή στέγη τοῦ σπιτιοῦ συμβαίνει *πύκνωση* τῶν ρευματικῶν γραμμῶν (σχ. 77). Ἑπομένως πάνω ἀπό τή στέγη ἡ ταχύτητα τοῦ ἀέρα αὐξάνεται, ἐνῶ ἡ πίεσή του ἐλαττώνεται καί γίνεται *μικρότερη* ἀπό τήν ἀτμοσφαιρική πίεση, πού ἐπικρατεῖ μέσα στό σπίτι. Ὅταν ἡ ταχύτητα τοῦ ἀνέμου εἶναι μεγάλη, τότε ἡ *διαφορά* μεταξύ τῶν παραπάνω δύο πιέσεων δημιουργεῖ *ἰσχυρές δυνάμεις*, πού ἔχουν φορά ἀπό κάτω πρός τά πάνω καί ἡ στέγη ἀποσπᾶται ἀπό τήν οἰκοδομή (*ἁρπαγή στέγης*).

Σχ. 77. Ἁρπαγή στέγης.

2. Βεντουρίμετρο. *Τό βεντουρίμετρο* εἶναι ὄργανο πού τό χρησιμοποιοῦμε γιά νά μετρᾶμε τήν ταχύτητα τοῦ ρεύματος. Ἀποτελεῖται ἀπό ὁριζόντιο σωλήνα πού σέ μιά περιοχή του παρουσιάζει στένωση (σχ. 78). Μέ ἕνα μανόμετρο βρίσκουμε τή διαφορά πιέσεως (Δp) πού ὑπάρχει μεταξύ δύο τομῶν (Α καί Β) τοῦ σωλήνα. Ἐφαρμόζοντας τό νόμο τῆς συνέχειας καί τό νόμο τοῦ Bernoulli ὑπολογίζουμε τήν ταχύτητα τοῦ ρεύματος. Σύμφωνα μέ τούς παραπάνω δύο νόμους ἔχουμε τίς δύο ἐξισώσεις :



Σχ. 78. Βεντουρίμετρο.

$$S_A \cdot \upsilon_A = S_B \cdot \upsilon_B \tag{1}$$

$$\text{καί} \quad p_A + \frac{1}{2}\rho \upsilon_A^2 = p_B + \frac{1}{2}\rho \upsilon_B^2 \tag{2}$$

Θά ὑπολογίσουμε τίς ταχύτητες υ_A καί υ_B. Ἀπό τήν ἐξίσωση (1) ἔχουμε :

$$\upsilon_A = \frac{S_B}{S_A} \cdot \upsilon_B \qquad (3)$$

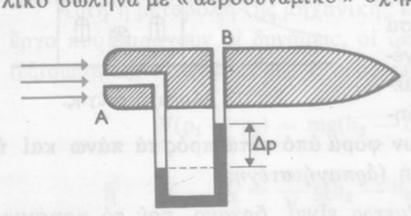
$$\text{καί} \qquad \upsilon_A{}^2 = \left(\frac{S_B}{S_A}\right)^2 \cdot \upsilon_B{}^2 \qquad (4)$$

Ἄν στήν ἐξίσωση (2) ἀντικαταστήσουμε τό $\upsilon_A{}^2$ ἀπό τήν ἐξίσωση (4) βρίσκουμε :

$$\upsilon_B = \sqrt{\frac{2\,(p_A - p_B)}{\rho\,[1 - (S_B/S_A)^2]}} \qquad \text{ἤ} \qquad \upsilon_B = \sqrt{\frac{2\,\Delta p}{\rho\,[1 - (S_B/S_A)^2]}}$$

Τό S_B / S_A εἶναι μιά σταθερή τοῦ ὀργάνου. Ἡ ταχύτητα υ_A βρίσκεται ἀπό τήν ἐξίσωση (3).

3. Σωλήνας Pitot. *Ὁ σωλήνας Pitot* χρησιμεύει γιά τή μέτρηση τῆς ταχύτητας ἑνός ρεύματος ἀέρα, ἤ ἀντίστροφα γιά τή μέτρηση τῆς ταχύτητας τοῦ ἀεροπλάνου πού κινεῖται μέσα σέ ἀκίνητο ἀέρα. Ἀποτελεῖται ἀπό μεταλλικό σωλήνα μέ « ἀεροδυναμικό » σχῆμα (σχ. 79) καί στά σημεῖα A καί B ὑπάρχουν ἀνοίγματα πού συγκοινωνοῦν μέ μανόμετρο. Τά μόρια τοῦ ἀέρα πού κινοῦνται πρός τό σημεῖο A, ἐπιβραδύνονται καί τελικά ἡ ταχύτητά τους γίνεται ἴση μέ μηδέν, ὥστε εἶναι $\upsilon_A = 0$. Στό σημεῖο A (*σημεῖο ἀνακοπῆς* τοῦ ρεύματος) συμβαίνει στίβαγμα τοῦ ἀέρα καί ἡ πίεση p_A γίνεται μεγαλύτερη ἀπό τήν ἀτμοσφαιρική πίεση p_0, πού ἐπικρατεῖ ἐκείνη τή στιγμή. Στά πλάγια τοῦ σωλήνα (σημεῖο B) ὁ ἀέρας ἔχει περίπου τήν ἀτμοσφαιρική πίεση p_0 καί ταχύτητα υ, δηλαδή τήν ταχύτητα τοῦ κινούμενου ἀέρα σχετικά μέ τό ἀκίνητο ὄργανο ἤ ἀντίστροφα. Σύμφωνα μέ τό νόμο τοῦ Bernoulli ἔχουμε τήν ἐξίσωση :



Σχ. 79. Σωλήνας Pitot.

$$p_A + \frac{1}{2}\rho\upsilon_A{}^2 = p_0 + \frac{1}{2}\rho\upsilon^2 \qquad \text{ἤ} \qquad p_A = p_0 + \frac{1}{2}\rho\upsilon^2$$

γιατί εἶναι $\upsilon_A = 0$. Ἔτσι βρίσκουμε ὅτι εἶναι :

$$\upsilon = \sqrt{\frac{2(p_A - p_0)}{\rho}} \qquad \text{ἤ} \qquad \upsilon = \sqrt{\frac{2\,\Delta p}{\rho}}$$

8

4. Ταχύτητα ἐκροῆς ὑγροῦ. Ἀπό τό ἄνοιγμα A ὁριζόντιου σωλήνα ἐκρέει ὑγρό (σχ. 80). Ἐάν οἱ τομές τοῦ σωλήνα καί τοῦ ἀνοίγματος A ἔχουν ἀντίστοιχα ἐμβαδό S_Σ καί S_A καί ἡ ταχύτητα τοῦ ὑγροῦ στίς δύο αὐτές τομές εἶναι υ_Σ καί υ_A, τότε ἰσχύει ἡ ἐξίσωση :

$$S_A \cdot \upsilon_A = S_\Sigma \cdot \upsilon_\Sigma \qquad \text{ἄρα} \qquad \frac{\upsilon_\Sigma}{\upsilon_A} = \frac{S_A}{S_\Sigma}$$

Ἄν τό ἐμβαδό S_A τοῦ ἀνοίγματος εἶναι πολύ μικρό σχετικά μέ τό ἐμβαδό S_Σ τῆς τομῆς τοῦ σωλήνα, τότε ὁ λόγος S_A/S_Σ εἶναι πολύ μικρός καί ἑπομένως ἡ ταχύτητα υ_Σ τοῦ ὑγροῦ μέσα στό σωλήνα εἶναι πολύ μικρή σχετικά μέ τήν ταχύτητα υ_A. Γιά μιά ὁποιαδήποτε τομή τοῦ σωλήνα καί τό ἄνοιγμα A ἰσχύει ὁ νόμος τοῦ Bernoulli :

$$p_\Sigma + \frac{1}{2}\rho\upsilon_\Sigma^2 = p_A + \frac{1}{2}\rho\upsilon_A^2$$

Ἐπειδή ἡ ταχύτητα υ_Σ εἶναι πολύ μικρή σχετικά μέ τήν ταχύτητα υ_A, μποροῦμε κατά προσέγγιση νά θεωρήσουμε ὅτι εἶναι $\upsilon_\Sigma = 0$ καί ἑπομένως ἀπό τήν παραπάνω ἐξίσωση ἔχουμε :

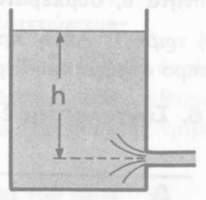
$$p_\Sigma = p_A + \frac{1}{2}\rho\upsilon_A^2 \quad \text{καί}$$

$$\upsilon_A = \sqrt{\frac{2(p_\Sigma - p_A)}{\rho}}$$

$$\text{ἤ} \quad \upsilon_A = \sqrt{\frac{2\,\Delta p}{\rho}}$$

Σχ. 80. Ἐκροή ὑγροῦ.

Ἐάν τό ὑγρό ἐκρέει ἀπό ἄνοιγμα πού βρίσκεται σέ ἀπόσταση h κάτω ἀπό τήν ἐλεύθερη ἐπιφάνεια τοῦ ὑγροῦ (σχ. 81), τότε ἡ διαφορά πιέσεως Δp εἶναι ἴση μέ $\Delta p = h \cdot \rho \cdot g$ καί ἑπομένως ἡ ταχύτητα ἐκροῆς τοῦ ὑγροῦ εἶναι :



$$\upsilon_A = \sqrt{\frac{2\,h \cdot \rho \cdot g}{\rho}} \qquad \text{καί} \qquad \boxed{\upsilon = \sqrt{2\,g \cdot h}}$$

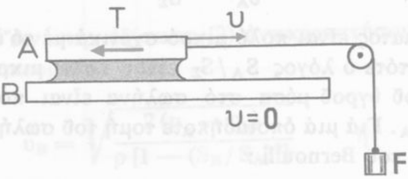
Σχ. 81. Τό ἄνοιγμα βρίσκεται σέ βάθος h.

Ἡ τελευταία ἐξίσωση ἐκφράζει τόν ἀκόλουθο *νόμο τοῦ Torricelli :*

Ἡ ταχύτητα (υ) ἐκροῆς ὑγροῦ ἀπό ἄνοιγμα, πού βρίσκεται σέ βάθος h κάτω ἀπό τήν ἐλεύθερη ἐπιφάνεια τοῦ ὑγροῦ, εἶναι ἴση μέ τήν ταχύτητα πού θά εἶχε τό ὑγρό, ἄν ἔπεφτε ἐλεύθερα ἀπό τό ὕψος h.

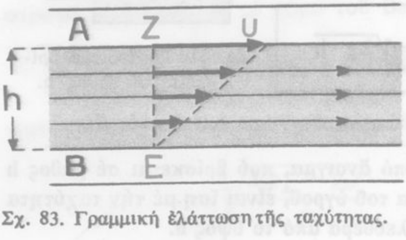
42. Ἐσωτερική τριβή τῶν ρευστῶν

α. Ἐσωτερική τριβή τῶν ὑγρῶν. Ἀπό τήν καθημερινή ζωή ξέρουμε ὅτι τά διάφορα ὑγρά (π.χ. ὁ αἰθέρας, τό νερό, ἡ γλυκερίνη) δέν ἔχουν τήν ἴδια *ρευστότητα*. Ἡ παρατήρηση αὐτή δείχνει ὅτι κατά τήν κίνηση ἑνός ὑγροῦ ἀνάμεσα σέ δύο γειτονικά στρώματά του ἀναπτύσσεται *ἀντίσταση*, πού ὀνομάζεται *ἐσωτερική τριβή*. Ἄς θεωρήσουμε ὅτι ἀνάμεσα σέ δύο ὁριζόντιες πλάκες Α καί Β, πού ἔχουν μεγάλη ἐπιφάνεια, ὑπάρχει ἕνα στρῶμα ὑγροῦ (σχ. 82). Ἡ κάτω πλάκα Β εἶναι ἀκίνητη $(\upsilon = 0)$.



Σχ. 82. Ἀπόδειξη τῆς ἐσωτερικῆς τριβῆς τῶν ρευστῶν.

Γιά νά κινήσουμε τήν πάνω πλάκα Α μέ μικρή σταθερή ταχύτητα υ, ἐφαρμόζουμε μιά *ὁριζόντια δύναμη* $\vec{F}$. Τότε μέσα στό ὑγρό διαμορφώνεται ἕνα σύστημα ροῆς, πού ἀποτελεῖται *ἀπό λεπτά ἐπάλληλα στρώματα*. Τό πρῶτο ἀπό αὐτά τά στρώματα, πού βρίσκεται σέ ἐπαφή μέ τήν πλάκα Α, κινεῖται μέ ταχύτητα υ. Τό στρῶμα αὐτό ἀναγκάζει νά κινηθεῖ τό δεύτερο στρῶμα, πού βρίσκεται ἀμέσως κάτω ἀπό τό πρῶτο στρῶμα. Τό δεύτερο στρῶμα ἀποκτᾶ ταχύτητα *μικρότερη* ἀπό τήν ταχύτητα υ. Τό δεύτερο στρῶμα ἀναγκάζει νά κινηθεῖ τό τρίτο στρῶμα κ.ο.κ. Ὥστε ἀνάμεσα στά στρώματα τοῦ ὑγροῦ ἀναπτύσσονται *ὁριζόντιες δυνάμεις*. Ἐπειδή τό πρῶτο λεπτό στρῶμα τοῦ ὑγροῦ, πού βρίσκεται σέ ἐπαφή μέ τήν πλάκα Α, κινεῖται μέ σταθερή ταχύτητα υ, συμπεραίνουμε ὅτι ἡ δύναμη $\vec{F}$ εἶναι ἀντίθετη μέ *τήν ἐσωτερική τριβή* $\vec{T}$. Αὐτή προέρχεται ἀπό τήν ἀντίσταση πού παρουσιάζει τό δεύτερο στρῶμα τοῦ ὑγροῦ στό νά παρασυρθεῖ σέ κίνηση.

β. Συντελεστής ἐσωτερικῆς τριβῆς. Στή διάταξη πού δείχνει τό σχῆμα 82, ὅταν ἡ πλάκα Α κινεῖται, μέσα στό ὑγρό διαμορφώνεται ἕνα σύστημα ἀπό ὁριζόντιες ρευματικές γραμμές (σχ. 83). Σέ μιά κατακόρυφη τομή ΕΖ τοῦ ὑγροῦ οἱ ταχύτητές του ἔχουν ὁριζόντια διεύθυνση, ἀλλά τό μέτρο τους *αὐξάνει γραμμικά* ἀπό μηδέν ὥς υ, ὅσο προχωροῦμε κατά μῆκος τῆς κατακο-

Σχ. 83. Γραμμική ἐλάττωση τῆς ταχύτητας.

ρύφου ΕΖ. Τό στρῶμα τοῦ ὑγροῦ πού εἶναι ἀνάμεσα στίς πλάκες Α καί Β, ἔχει πάχος h. Ἐάν ἡ πλάκα Α ἔχει ἐμβαδό S, τότε ἡ ἐπιφάνεια τοῦ καθενός ἀπό τά μετακινούμενα ἐπάλληλα στρώματα τοῦ ὑγροῦ, ἔχει ἔμβαδό S. Στά σημεῖα Ε καί Ζ τοῦ ὑγροῦ, πού ἡ κατακόρυφη ἀπόστασή τους εἶναι h, ἀντιστοιχεῖ *μεταβολή τῆς ταχύτητας* ἴση μέ $\Delta\upsilon = \upsilon - 0 = \upsilon$. Τό πηλίκο $\Delta\upsilon/h$ ὀνομάζεται *πτώση ταχύτητας*. Τό πείραμα δείχνει ὅτι ἰσχύει ὁ ἀκόλουθος *νόμος τῆς ἐσωτερικῆς τριβῆς* :

Ἡ ἐσωτερική τριβή (Τ) τοῦ ὑγροῦ εἶναι ἀνάλογη μέ τό ἐμβαδό (S), πού ἔχει ἡ ἐπιφάνεια ἐπαφῆς τῶν μετακινούμενων ἐπάλληλων στρωμάτων, ἀνάλογη μέ τήν πτώση ταχύτητας (Δυ/h) καί ἐξαρτᾶται ἀπό τή φύση τοῦ ὑγροῦ.

νόμος ἐσωτερικῆς τριβῆς τῶν ρευστῶν $$\boxed{T = \eta \cdot S \cdot \frac{\Delta\upsilon}{h}} \qquad (1)$$

ὅπου η εἶναι συντελεστής πού ἐξαρτᾶται ἀπό τή φύση τοῦ ρευστοῦ καί ὀνομάζεται *συντελεστής ἐσωτερικῆς τριβῆς* τοῦ ρευστοῦ. Ἀπό τήν ἐξίσωση (1) βρίσκουμε ὅτι εἶναι :

συντελεστής ἐσωτερικῆς τριβῆς ρευστῶν $$\eta = \frac{T \cdot h}{S \cdot \Delta\upsilon}$$

Στό σύστημα MKS *μονάδα συντελεστῆ ἐσωτερικῆς τριβῆς* εἶναι :

$$1\ N \cdot sec \cdot m^{-2}$$

Ἐσωτερική τριβή τῶν ὑγρῶν. Ὅταν ἡ θερμοκρασία τοῦ ὑγροῦ *αὐξάνεται*, τότε ὁ συντελεστής του ἐσωτερικῆς τριβῆς (η) *ἐλαττώνεται.*

Ἐσωτερική τριβή τῶν ἀερίων. Γενικά ἡ ἐσωτερική τριβή τῶν ἀερίων εἶναι μικρή σέ σύγκριση μέ τά ὑγρά. Ἀντίθετα μέ τά ὑγρά, ὅταν ἡ θερμοκρασία τοῦ ἀερίου *αὐξάνεται*, τότε ὁ συντελεστής του ἐσωτερικῆς τριβῆς (η) *αὐξάνεται.*

Συντελεστές ἐσωτερικῆς τριβῆς (η) τοῦ νεροῦ καί τοῦ ἀέρα
(σέ $N \cdot sec \cdot m^{-2}$)

Θερμοκρασία	0^0C	20^0C	40^0C
Νερό	$1{,}79 \cdot 10^{-3}$	$1{,}01 \cdot 10^{-3}$	$0{,}66 \cdot 10^{-3}$
Ἀέρας	$1{,}71 \cdot 10^{-5}$	$1{,}81 \cdot 10^{-5}$	$1{,}90 \cdot 10^{-5}$

Παρατηροῦμε τήν ἐπίδραση τῆς θερμοκρασίας στό ὑγρό καί στό ἀέριο.

Παράδειγμα. Θεωροῦμε δύο παράλληλα στρώματα νεροῦ πού κινοῦνται μέ ἀντίστοιχες ταχύτητες $\upsilon_1 = 3$ cm/sec καί $\upsilon_2 = 2$ cm/sec. Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κάθε στρώματος ἔχει ἐμβαδό $S = 5\ cm^2$ καί ἡ ἀπόστασή τους εἶναι $h = 2$ mm. Ὁ συντελεστής ἐσωτερικῆς τριβῆς τοῦ νεροῦ εἶναι $\eta = 1{,}8 \cdot 10^{-3}\ N \cdot sec \cdot m^{-2}$. Ἡ ἐσωτερική τριβή πού ἀναπτύσσεται μεταξύ αὐτῶν τῶν δύο στρωμάτων εἶναι :

$$T = \eta\ S\ \frac{\Delta\upsilon}{h} = 1{,}8 \cdot 10^{-3} \frac{N \cdot sec}{m^2} \cdot 5 \cdot 10^{-4}\ m^2 \cdot \frac{10^{-2}\ m/sec}{2 \cdot 10^{-3}\ m}$$

$$\text{καί} \qquad T = 9 \cdot 10^{-6}\ N$$

γ. Κίνηση στερεοῦ μέσα σέ ρευστό. Ὅταν ἕνα στερεό κινεῖται μέσα σέ ἀκίνητο ρευστό (ὑγρό, ἀέριο) ἤ τό ρευστό κινεῖται σχετικά μέ τό ἀκίνητο στερεό καί ἡ ταχύτητα υ εἶναι μικρή, τότε ἀναπτύσσεται πάνω στό σῶμα μιά δύναμη τριβῆς T, πού εἶναι ἀνάλογη μέ τήν ταχύτητα υ, ἔχει τή διεύθυνση τῆς ταχύτητας, ἀλλά φορά ἀντίθετη μέ αὐτή καί μέτρο ἴσο μέ :

$$T = k \cdot \eta \cdot \upsilon$$

ὅπου k εἶναι συντελεστής πού ἐξαρτᾶται ἀπό τό σχῆμα τοῦ σώματος. Ἰδιαίτερα ἐνδιαφέρουσα εἶναι ἡ περίπτωση σώματος μέ σφαιρικό σχῆμα. Τότε ἡ ροή γύρω ἀπό τή σφαίρα εἶναι στρωτή καί οἱ ρευματικές γραμμές εἶναι συνεχεῖς. Γιά τό σφαιρικό σχῆμα ὁ συντελεστής k βρέθηκε πειραματικά ὅτι ἔχει τήν τιμή $k = 6\pi R$, ὅπου R εἶναι ἡ ἀκτίνα τῆς σφαίρας. Ἔτσι *ἡ τριβή*, πού ἀναπτύσσεται πάνω σέ μιά σφαίρα, δίνεται ἀπό τόν ἀκόλουθο *νόμο τοῦ Stokes* :

$$\boxed{\text{νόμος τοῦ Stokes} \qquad T = 6\pi R \cdot \eta \cdot \upsilon}$$

Πτώση σώματος μέσα σέ ἀκίνητο ρευστό. Μιά σφαίρα, πού ἔχει πυκνότητα ρ, πέφτει ἐξαιτίας τοῦ βάρους της $B = mg$ καί κινεῖται μέσα σέ ρευστό, πού ἔχει πυκνότητα ρ_0. Τότε πάνω στή σφαίρα ἐνεργοῦν οἱ ἑξῆς τρεῖς ἐξωτερικές δυνάμεις :

τό βάρος τῆς σφαίρας $\quad B = m \cdot g \quad$ ἤ $\quad B = \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \rho \cdot g$

ἡ ἄνωση $\quad A = V \cdot \rho_0 \cdot g \quad$ ἤ $\quad A = \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \rho_0 \cdot g$

ἡ τριβή $\quad T = 6\pi R \cdot \eta \cdot \upsilon$

Ἡ σφαίρα κινεῖται μέ τήν ἐπίδραση τῆς συνισταμένης F τῶν τριῶν δυνάμεων B, A, T καί δίνει στή σφαίρα ἐπιτάχυνση γ, σύμφωνα μέ τήν ἐξίσωση $F = m \cdot \gamma$. Ἄρα ἔχουμε τήν ἐξίσωση:

$$F = B - (T + A) \quad \text{ἤ} \quad m\gamma = mg - (T + A) \quad \text{καί} \quad \gamma = g - \frac{T + A}{m}$$

Ἐπειδή ἡ ταχύτητα υ συνεχῶς αὐξάνεται, ἡ τριβή T αὐξάνεται καί ἑπομένως ἡ δύναμη F συνεχῶς ἐλαττώνεται καί κάποια στιγμή γίνεται ἴση μέ μηδέν ($F = 0$). Τότε γίνεται καί $\gamma = 0$ καί ἑπομένως τό μέτρο τῆς ταχύτητας διατηρεῖται *σταθερό*, υ = σταθ. Ἡ σφαίρα ἐξακολουθεῖ νά κινεῖται ὁμαλά μέ *τήν ὁριακή ταχύτητα* $\upsilon_{o\rho}$, πού τήν ὑπολογίζουμε ἀπό τήν ἐξίσωση:

$$B - (T + A) = 0$$

$$\text{ἤ} \quad \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \rho \cdot g = 6\pi R \cdot \eta \cdot \upsilon_{o\rho} + \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \rho_0 \cdot g \quad \text{ἄρα}$$

$$\boxed{\text{ὁριακή ταχύτητα} \quad \upsilon_{o\rho} = \frac{2}{9} \cdot \frac{R^2 \cdot g}{\eta} \cdot (\rho - \rho_0)}$$

Παράδειγμα. Μιά γυάλινη σφαίρα ἔχει ἀκτίνα $R = 1$ mm καί πέφτει μέσα σέ ἕνα λάδι (κικινέλαιο, κοινῶς ρετσινόλαδο) μέ ὁριακή ταχύτητα $\upsilon = 3$ mm/sec. Ἡ πυκνότητα τοῦ γυαλιοῦ εἶναι $\rho = 2{,}6$ gr/cm³ καί τοῦ λαδιοῦ εἶναι $\rho_0 = 0{,}97$ gr/cm³. Θά βροῦμε τό συντελεστή ἐσωτερικῆς τριβῆς τοῦ λαδιοῦ. Εἶναι:

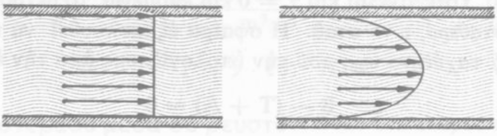
$$\rho = 2600 \text{ kgr/m}^3 \qquad \rho_0 = 970 \text{ kgr/m}^3 \qquad g = 9{,}81 \text{ m/sec}^2$$

Ἀπό τήν παραπάνω ἐξίσωση βρίσκουμε:

$$\eta = \frac{2}{9} \cdot \frac{R^2 \cdot g}{\upsilon}(\rho - \rho_0) = \frac{2}{9} \cdot \frac{10^{-6} \text{ m}^2 \cdot 9{,}81 \text{ m/sec}^2}{3 \cdot 10^{-3} \text{ m/sec}} \cdot 1{,}63 \cdot 10^3 \frac{\text{kgr}}{\text{m}^3}$$

$$\text{καί} \qquad \eta = 1{,}18 \text{ N} \cdot \text{sec} \cdot \text{m}^{-2}$$

δ. Στρωτή ροή φυσικοῦ ὑγροῦ. Ἕνα *ἰδανικό ὑγρό* δέν ἔχει ἐσωτερική τριβή καί ὅταν ρέει μέσα σέ ὁριζόντιο κυλινδρικό σωλήνα μέ σταθερή διατομή, τότε σέ μιά χρονική στιγμή ὅλα τά μόρια τοῦ ὑγροῦ, πού περνοῦν ἀπό μιά τομή τοῦ σωλήνα, ἔχουν *τήν ἴδια ταχύτητα* (σχ. 84α). Ἕνα ὅμως *φυσικό ὑγρό* ἔχει πάντοτε ἐσωτερική τριβή καί, ὅταν ρέει μέσα στόν ὁριζόντιο σωλήνα, τότε σέ μιά τομή τοῦ σωλήνα ἡ ταχύτητα τοῦ ὑγροῦ εἶναι *μέγιστη* κατά τή διεύθυνση τοῦ ἄξονα τοῦ σωλήνα, ἀλλά ἀπό ἐκεῖ καί πέρα ἐλαττώνεται συνεχῶς καί στά τοιχώματα τοῦ σωλήνα γίνεται *ἴση μέ μηδέν* (σχ. 84β). Μέσα στό σωλήνα τό ὑγρό κινεῖται σχηματίζοντας λεπτά ὁμοαξονικά κυλινδρικά στρώματα, πού γλιστροῦν τό ἕνα πάνω στό ἄλλο. Τό κεντρικό κυλινδρικό στρῶμα τρέχει πιό γρήγορα ἀπό τά ἄλλα στρώματα, ἐνῶ ἐκεῖνο τό στρῶμα, πού ἐφάπτεται μέ τά τοιχώματα τοῦ σωλήνα, παραμένει ἀκίνητο.



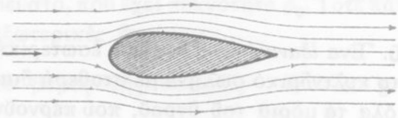
Σχ. 84. Στρωτή ροή ἰδανικοῦ ὑγροῦ (α) καί φυσικοῦ ὑγροῦ (β).

Ὅταν ἡ ταχύτητα ροῆς ξεπερνάει μιά ὁρισμένη τιμή, πού λέγεται *κρίσιμη ταχύτητα*, ἡ ροή τοῦ ὑγροῦ μέσα στό σωλήνα παύει νά εἶναι στρωτή ροή. Τότε οἱ ρευματικές γραμμές δέν εἶναι παράλληλες μέ τόν ἄξονα τοῦ σωλήνα, ἀλλά σχηματίζουν στροβίλους καί σέ κάθε σημεῖο μιᾶς τομῆς τοῦ σωλήνα ἡ ταχύτητα μεταβάλλεται σέ κάθε χρονική στιγμή. Αὐτή ἡ ροή λέγεται *στροβιλώδης ροή*.

43. Κίνηση σώματος μέσα στόν άέρα

Ὅταν ἕνα σῶμα κινεῖται μέσα σέ ἀκίνητο ἀέρα, ἤ ἀντίστροφα ὁ ἀέρας κινεῖται σχετικά μέ τό ἀκίνητο σῶμα, τότε στό σῶμα ἐξασκεῖται μιά δύναμη, πού τήν ὀνομάζουμε *ἀντίσταση τοῦ ἀέρα* καί ἐξαρτᾶται ἀπό τρεῖς κυρίως παράγοντες : α) τό ἐμβαδό (S) τῆς μετωπικῆς ἐπιφάνειας, β) τό σχῆμα τοῦ σώματος, καί γ) τήν ταχύτητα (υ) τοῦ σώματος (*).

Ὅταν ἡ ταχύτητα εἶναι μικρή, ἡ ροή τοῦ ἀέρα γύρω ἀπό τό σῶμα εἶναι *στρωτή* καί ἡ ἀντίσταση τοῦ ἀέρα εἶναι μικρή. Ὅταν ἡ ταχύτητα τοῦ σώματος εἶναι μεγάλη, τότε στό πίσω μέρος τοῦ σώματος σχηματίζονται *στρόβιλοι*. Ἐκεῖ ἡ ταχύτητα τοῦ ἀέρα εἶναι μεγάλη καί ἑπομένως ἡ πίεση εἶναι μικρή (νόμος



Σχ. 85. Τό ἀεροδυναμικό σχῆμα ἐμποδίζει νά σχηματιστοῦν στρόβιλοι.

* Φυσική Α΄ Λυκείου

τοῦ Bernoulli). Ἔτσι ἀνάμεσα στό ἐμπρόσθιο καί στό πίσω μέρος τοῦ σώματος δημιουργεῖται μιά *διαφορά πιέσεως*, πού εἶναι τό σπουδαιότερο αἴτιο τῆς ἀντιστάσεως τοῦ ἀέρα. Γιά νά μή σχηματίζονται πίσω ἀπό τό σῶμα οἱ ἀνεπιθύμητοι στρόβιλοι, δίνουμε στό σῶμα σχῆμα «ἀεροδυναμικό» καί τότε οἱ ρευματικές γραμμές γύρω ἀπό τό σῶμα εἶναι *συνεχεῖς γραμμές* (σχ. 85).

α. Ἐπίδραση τῆς ταχύτητας. Τό σῶμα πού κινεῖται μέσα στόν ἀέρα, συγκρούεται μέ τά μόρια τοῦ ἀέρα καί ἑπομένως προκαλεῖ μιά *μεταβολή* στήν πίεση τοῦ ἀέρα. Αὐτή ἡ μεταβολή τῆς πιέσεως διαδίδεται μέσα στόν ἀέρα πρός ὅλες τίς διευθύνσεις *μέ τήν ταχύτητα* διαδόσεως τοῦ ἤχου (γιατί ὁ ἦχος εἶναι διάδοση μιᾶς μεταβολῆς πού προκλήθηκε στήν πίεση τοῦ ἀέρα). Στή συνηθισμένη θερμοκρασία ἡ ταχύτητα διαδόσεως τοῦ ἤχου εἶναι $υ_H = 340$ m/sec ἤ $υ_H = 1200$ km/h.

Ἡ ἀεροδυναμική ἔρευνα ἀπέδειξε ὅτι *ἡ ἀντίσταση τοῦ ἀέρα* ἐξαρτᾶται ἀπό *τό λόγο* τῆς ταχύτητας τοῦ σώματος (υ) πρός τήν ταχύτητα τοῦ ἤχου ($υ_H$) στόν ἀέρα. Αὐτός ὁ λόγος ὀνομάζεται *ἀριθμός τοῦ Mach.*

$$\boxed{\text{ἀριθμός τοῦ Mach (M)} = \frac{\text{ταχύτητα σώματος}}{\text{ταχύτητα ἤχου}} \qquad M = \frac{υ}{υ_H}}$$

Μέ βάση τόν ἀριθμό τοῦ Mach χωρίζουμε τίς ταχύτητες στίς ἑξῆς τρεῖς κατηγορίες :

— *ὑποηχητικές ταχύτητες*

$M < 0{,}8$ ἤ $υ < 1000$ km/sec

— *ἠχητικές ταχύτητες*

$0{,}8 < M < 1{,}2$ ἤ $1000 \text{ km/h} < υ < 1400 \text{ km/h}$

— *ὑπερηχητικές ταχύτητες*

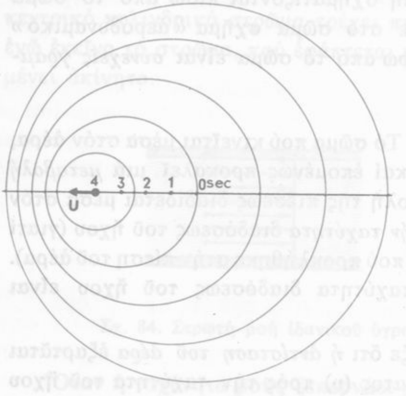
$M > 1{,}2$ ἤ $υ > 1400$ km/h

Τά συνηθισμένα μεταφορικά μέσα (αὐτοκίνητα, σιδηρόδρομοι καί τά περισσότερα ἀεροπλάνα) κινοῦνται μέ ὑποηχητικές ταχύτητες. Σ' αὐτή τήν περίπτωση ἡ ἀντίσταση τοῦ ἀέρα (F) εἶναι ἀνάλογη μέ *τό τετράγωνο τῆς ταχύτητας* (υ) τοῦ σώματος καί δίνεται ἀπό τή γνωστή ἐξίσωση :

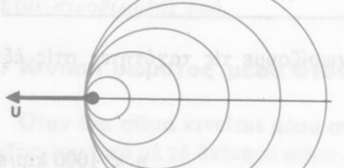
$$F = k \cdot S \cdot υ^2$$

ὅπου k εἶναι *ὁ συντελεστής ἀντιστάσεως*, πού ἐξαρτᾶται ἀπό τό σχῆμα τοῦ σώματος.

β. Ὑπερηχητικές ταχύτητες. Ὅταν ἡ ταχύτητα (υ) τοῦ σώματος, π.χ. τοῦ ἀεροπλάνου, εἶναι *μικρότερη* ἀπό τήν ταχύτητα ($υ_H$) τοῦ ἤχου, τά ἠχητικά κύματα τρέχουν πιό γρήγορα ἀπό τό ἀεροπλάνο καί ἔτσι *δέν ἐπηρεάζουν* τήν κίνηση τοῦ ἀεροπλάνου (σχ. 86). Ὅταν ὅμως ἡ ταχύτητα τοῦ ἀεροπλάνου γίνει *ἴση* μέ τήν ταχύτητα τοῦ ἤχου, τότε τό ἀεροπλάνο καί τά ἠχητικά κύματα κινοῦνται μαζί καί στό ἐμπρόσθιο μέρος τοῦ ἀεροπλάνου συμβαίνει *πύκνωση* τῶν ἠχητικῶν κυμάτων, πού ὀνομάζεται *κῦμα κρούσεως* (σχ. 87). Μέσα σ' αὐτή τήν πύκνωση δημιουργοῦνται νέες συνθῆκες, οἱ ὁποῖες ἐπηρεάζουν τήν κίνηση τοῦ ἀεροπλάνου. Τά σύγχρονα ἀεροπλάνα ἔχουν διαμορφωθεῖ κατάλληλα, ὥστε εὔκολα μποροῦν νά περνοῦν μέσα ἀπό «τό τεῖχος τοῦ ἤχου», ὅταν μεταβαίνουν ἀπό τήν ὑποηχητική στήν ὑπερηχητική πτήση.



Σχ. 86. Κίνηση τοῦ σώματος μέ ὑποηχητική ταχύτητα.

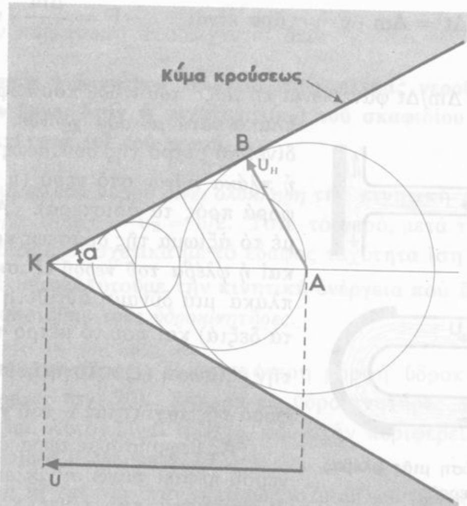


Σχ. 87. Κίνηση τοῦ σώματος μέ ἠχητική ταχύτητα.

Ὅταν ἡ ταχύτητα τοῦ ἀεροπλάνου γίνει *μεγαλύτερη* ἀπό τήν ταχύτητα τοῦ ἤχου, τότε τό ἀεροπλάνο ἀφήνει πίσω του τά ἠχητικά κύματα (σχ. 88).

Στή διάρκεια ἑνός δευτερολέπτου τό ἀεροπλάνο διατρέχει τό διάστημα ΑΚ. Στό τέλος αὐτοῦ τοῦ χρόνου (δηλαδή τοῦ 1 sec) ὅλα τά ἠχητικά κύματα, πού ἔφυγαν ἀπό τά σημεῖα τῆς εὐθείας ΑΚ, ἀποτελοῦν μιά *ἐπιφάνεια κώνου* μέ κορυφή τό σημεῖο Κ. Μέσα σ' αὐτό τόν κῶνο βρίσκεται ἡ ζώνη τοῦ ἀέρα πού διαταράχτηκε ἀπό τό πέρασμα τοῦ ἀεροπλάνου.

Κατά τήν ὑπερηχητική πτήση τοῦ ἀεροπλάνου τροποποιοῦνται ὁρισμένες συνθῆκες τῆς πτήσεως, π.χ. ἀλλάζει ἡ κατανομή τῶν πιέσεων πάνω στίς ἐπιφάνειες τοῦ ἀεροπλάνου, αὐξάνεται σημαντικά ἡ δυναμική ἀντίσταση, μετατοπίζεται τό σημεῖο ἐφαρμογῆς τῆς δυναμικῆς ἀνώσεως κ. ἄ. Μέ τίς ἐργαστηριακές μετρήσεις μπορέσαμε νά λύσουμε ἀρκετά ἀπό τά προβλήματα πού παρουσιάζει ἡ ὑπερηχητική πτήση.



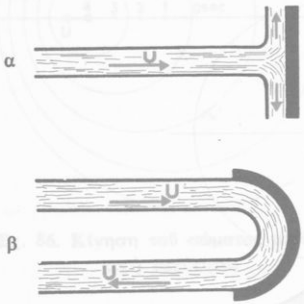
Σχ. 88. Κίνηση τοῦ σώματος μέ ὑπερηχητική ταχύτητα.

44. Ὑδροκινητῆρες

α. Ἐκμετάλλευση τῆς κινητικῆς ἐνέργειας τοῦ νεροῦ. Ὅταν μιά φλέβα νεροῦ συγκρουστεῖ μέ μιά ἀκλόνητη πλάκα, τότε κατά μεγάλη προσέγγιση αὐτή ἡ κρούση εἶναι *τέλεια πλαστική κρούση* (§ 25) καί ὅπως ξέρουμε σ᾽ αὐτή τήν περίπτωση συμβαίνει *παραμόρφωση* τοῦ ἑνός ἤ καί τῶν δύο σωμάτων πού συγκρούονται. Κατά τήν πλαστική κρούση μέρος ἤ καί ὁλόκληρη ἡ *κινητική ἐνέργεια* τῶν δύο σωμάτων ξοδεύεται γιά νά γίνει ἡ παραμόρφωση. Ἄς θεωρήσουμε μιά φλέβα νεροῦ, πού πέφτει κάθετα πάνω σέ μιά *ἀκλόνητη ἐπίπεδη πλάκα* (σχ. 89α). Τό νερό ἔχει ταχύτητα $\vec{\upsilon}$. Κατά τήν κρούση τό νερό τῆς φλέβας ἁπλώνεται καί ρέει πάνω στήν ἐπιφάνεια τῆς πλάκας. Στή διάρκεια τοῦ χρόνου Δt πέφτει πάνω στήν πλάκα μιά μάζα νεροῦ Δm, πού πρίν ἀπό τήν κρούση ἡ ὁρμή της εἶχε μέτρο $\Delta m \cdot \upsilon$. Μετά τήν κρούση ἡ ταχύτητα τοῦ νεροῦ εἶναι ἴση μέ μηδέν ($\upsilon = 0$). Ὥστε κατά τήν κρούση συμβαίνει *μεταβολή τῆς ὁρμῆς* ἴση μέ $\Delta m \cdot \upsilon$. Αὐτή ἡ μεταβολή τῆς ὁρμῆς εἶναι ἴση μέ *τήν ὤθηση μιᾶς δυνάμεως* $\vec{F}$ στή διάρκεια τοῦ χρόνου Δt καί ἑπομένως ἰσχύει ἡ ἐξίσωση :

$$F \cdot \Delta t = \Delta m \cdot \upsilon \qquad \text{ἄρα εἶναι} \qquad F = \frac{\Delta m}{\Delta t} \cdot \upsilon \qquad (1)$$

Τό πηλίκο $\Delta m/\Delta t$ φανερώνει *τή μάζα τοῦ νεροῦ* πού πέφτει πάνω στήν πλάκα *κατά μονάδα χρόνου*. Ἡ ἐξίσωση (1) δίνει τό μέτρο τῆς δυνάμεως F πού ἐξασκεῖ *ἡ πλάκα πάνω* στό νερό (ἡ δύναμη F ἔχει φορά πρός τά ἀριστερά). Ἀλλά σύμφωνα μέ τό ἀξίωμα τῆς δράσεως καί ἀντιδράσεως καί *ἡ φλέβα τοῦ νεροῦ* ἐξασκεῖ πάνω στήν πλάκα μιά δύναμη ἀντίθετη (μέ φορά πρός τά δεξιά) καί πού τό μέτρο της δίνεται ἀπό τήν ἐξίσωση (1). Αὐτή ἡ δύναμη $\vec{F}$ ἔχει τή φορά τῆς ταχύτητας $\vec{\upsilon}$ τοῦ νεροῦ.



Σχ. 89. Κρούση μιᾶς φλέβας νεροῦ.

Ἄς θεωρήσουμε τώρα ὅτι ἡ φλέβα τοῦ νεροῦ πέφτει πάνω *σέ ἀκλόνητη πλάκα*, πού ἡ ἐπιφάνειά της εἶναι κοίλη (σχ. 89β). Ἡ πλάκα μέ αὐτή τή μορφή ἀποτελεῖ ἕνα *σκαφίδιο*. Δεχόμαστε ὅτι δέν ὑπάρχουν τριβές. Ἡ φλέβα τοῦ νεροῦ ρέει ὁμαλά κατά μῆκος τῆς κοίλης ἐπιφάνειας τοῦ σκαφιδίου καί τότε συμβαίνει τέλεια ἀναστροφή τῆς κινήσεως τοῦ νεροῦ, ἑπομένως συμβαίνει *τέλεια ἀναστροφή τῆς ταχύτητας τοῦ νεροῦ*. Σ' αὐτή τήν περίπτωση, στή διάρκεια τοῦ χρόνου Δt, *ἡ μεταβολή τῆς ὁρμῆς* τῆς μάζας Δm τοῦ νεροῦ ἔχει μέτρο ἴσο μέ :

$$\Delta J = \Delta m\,[\upsilon - (-\upsilon)] \qquad \text{ἄρα} \qquad \Delta J = 2\Delta m \cdot \upsilon$$

Ἑπομένως *ἡ δύναμη* $\vec{F}$ πού ἐξασκεῖ ἡ φλέβα τοῦ νεροῦ πάνω στό ἀκλόνητο σκαφίδιο ἔχει μέτρο :

$$F = 2\,\frac{\Delta m}{\Delta t} \cdot \upsilon$$

Ἄν τό σκαφίδιο, ἐξαιτίας τῆς δυνάμεως F, ἀρχίσει νά κινεῖται μέ ταχύτητα υ_Σ, τότε *ἡ σχετική ταχύτητα* τοῦ νεροῦ ὡς πρός τό σκαφίδιο εἶναι

$υ - υ_Σ$ καί ἡ δύναμη, πού ἐξασκεῖ τό νερό πάνω στό σκαφίδιο, ἔχει μέτρο :

$$F = 2 \frac{\Delta m}{\Delta t} \cdot (υ - υ_Σ)$$

Σ' αὐτή τήν περίπτωση ἀποδείχνεται ὅτι :

Ὁλόκληρη ἡ κινητική ἐνέργεια μιᾶς φλέβας νεροῦ μετατρέπεται σέ ὠφέλιμο ἔργο, ὅταν ἡ ταχύτητα ($υ_Σ$) τοῦ σκαφιδίου εἶναι ἴση μέ τή μισή ταχύτητα (υ) τοῦ νεροῦ.

Ὥστε μιά φλέβα νεροῦ *δίνει ὁλόκληρη* τήν κινητική ἐνέργειά της, ὅταν εἶναι $υ_Σ = υ/2$, ἄρα $υ - υ_Σ = υ/2$. Τότε τό νερό, μετά τή σύγκρουσή του μέ τό σκαφίδιο, ἔχει σχετικά μέ τό ἔδαφος ταχύτητα ἴση μέ μηδέν.

Γιά νά ἐκμεταλλευτοῦμε τήν κινητική ἐνέργεια πού ἔχει ἕνα ρεῦμα νεροῦ, χρησιμοποιοῦμε *τούς ὑδροκινητῆρες*.

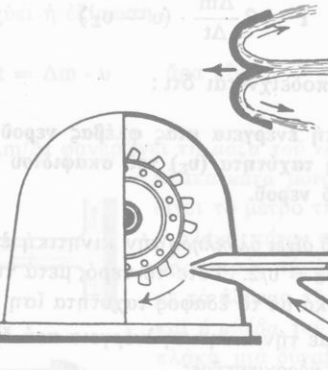
β. Ὑδροκινητῆρες. Ἡ ἀρχαιότερη μορφή ὑδροκινητήρων εἶναι *ὁ ὑδραυλικός τροχός* (σχ. 90). Σήμερα ὡς ὑδροκινητῆρες χρησιμοποιοῦνται *οἱ ὑδροστρόβιλοι*. Αὐτοί εἶναι τροχοί, πού στήν περιφέρειά τους εἶναι στερεωμένα σκαφίδια ἤ πτερύγια.

Τό σχῆμα 91 δείχνει ἕναν τύπο ὑδροστροβίλου (*ὑδροστρόβιλος Pelton*). Τό νερό βγαίνει μέ μεγάλη ταχύτητα ἀπό ἕναν ἤ περισσότερους στενούς σωλῆνες (ἀκροφύσια) καί συγκρούεται μέ τά σκαφίδια, πού ἔχουν διαμορφωθεῖ κατάλληλα, ὥστε νά γίνεται τέλεια ἀναστροφή τῆς φλέβας τοῦ νεροῦ (ἐπομένως καί τέλεια ἀναστροφή τῆς ταχύτητας τοῦ νεροῦ).

Σήμερα οἱ ὑδροστρόβιλοι ἔχουν μεγάλη σημασία, γιατί μέ αὐτούς ἐκμεταλλευόμαστε τήν κινητική ἐνέργεια τοῦ νεροῦ καί τή μετατρέπουμε

Σχ. 90. Ὑδραυλικοί τροχοί.

σέ ἠλεκτρική ἐνέργεια *(ὑδροηλεκτρική ἐγκατάσταση)*. Οἱ ὑδροστρόβιλοι ἔχουν μεγάλη ἀπόδοση (ὥς 95%) καί ἀναπτύσσουν μεγάλη ἰσχύ.



Σχ. 91. Ὑδροστρόβιλος Pelton.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

78. Μέσα σέ ὁριζόντιο σωλήνα, πού τό ἐμβαδό τῆς τομῆς του εἶναι $S_1 = 25\ cm^2$, ρέει νερό μέ ταχύτητα $υ_1 = 0{,}60$ m/sec καί πίεση $p_1 = 4 \cdot 10^4$ N/m². Ὁ σωλήνας παρουσιάζει στένωση, πού ἡ τομή της ἔχει ἐμβαδό $S_2 = 5\ cm^2$. Πόση εἶναι ἡ ταχύτητα $υ_1$ καί ἡ πίεση p_1 τοῦ νεροῦ στή στένωση;

79. Ἕνα χωνί ἀπό διηθητικό χαρτί σφηνώθηκε μέσα σέ γυάλινο χωνί. Μποροῦμε νά διώξουμε τό χαρτί, φυσώντας ἀέρα ἀπό τή στενή ἄκρη τοῦ σωλήνα;

80. Μέσα σέ ὁριζόντιο σωλήνα ρέει νερό. Σέ δύο τομές Α καί Β τοῦ σωλήνα τό ἐμβαδό εἶναι ἀντίστοιχα $S_1 = 4\ cm^2$ καί $S_2 = 1\ cm^2$. Στίς τομές Α καί Β εἶναι στερεωμένοι δύο κατακόρυφοι λεπτοί σωλῆνες καί στόν πρῶτο ἀπό αὐτούς (τομή Α) τό νερό σχηματίζει στήλη, πού ἔχει ὕψος $h_1 = 15$ cm. Ἡ ταχύτητα τοῦ νεροῦ στήν τομή Β εἶναι $υ_2 = 0{,}8$ m/sec. Νά βρεθεῖ πόσο εἶναι τό ὕψος h_1 τῆς στήλης τοῦ νεροῦ στό δεύτερο σωλήνα. Πυκνότητα τοῦ νεροῦ $ρ = 10^3$ kgr/m³. $g = 10$ m/sec².

81. Ἕνας ὁριζόντιος σωλήνας, πού οἱ τομές σέ δύο σημεῖα του ἔχουν λόγο $S_1/S_2 = 3$, διαρρέεται ἀπό ὑγρό πυκνότητας ρ. Ἄν στή μεγαλύτερη τομή S_1 ἡ ταχύτητα τοῦ ὑγροῦ εἶναι $υ_1$, νά ἐκφραστεῖ ἡ διαφορά πιέσεως Δp μεταξύ τῶν δύο τομῶν σέ συνάρτηση μέ τήν ταχύτητα $υ_1$.

82. Σέ ἕνα βεντουρίμετρο πού διαρρέεται ἀπό νερό, ἡ μεγαλύτερη τομή τοῦ σωλήνα ἔχει ἀκτίνα R_1 καί ἡ μικρότερη τομή ἔχει ἀκίνα $R_2 = R_1/2$. Μεταξύ αὐτῶν τῶν δύο τομῶν ὑπάρχει διαφορά πιέσεως $\Delta p = 10^4$ N/m². Πόση εἶναι ἡ ταχύτητα τοῦ νεροῦ στή μεγαλύτερη τομή τοῦ σωλήνα ; Πυκνότητα τοῦ νεροῦ $\rho = 10^3$ kgr/m³. $g = 10$ m/sec².

83. Ἕνα ἀεροπλάνο πετάει σέ ὕψος 3000 m, ὅπου ἡ πυκνότητα τοῦ ἀέρα εἶναι $\rho = 0{,}887$ kgr/m³. Στό σωλήνα Pitot βλέπουμε τότε μιά διαφορά πιέσεως $\Delta p = 4{,}78$ cm Hg. Πόση εἶναι ἡ ταχύτητα τοῦ ἀεροπλάνου ; Πυκνότητα ὑδραργύρου $\rho = 13{,}6 \cdot 10^3$ kgr/m³. $g = 10$ m/sec².

84. Μέ πόση ταχύτητα θά βγαίνει τό νερό ἀπό μιά τρύπα τοῦ ἀτμολέβητα, ἄν ἡ πίεση μέσα στόν ἀτμολέβητα εἶναι μεγαλύτερη ἀπό τήν ἐξωτερική πίεση κατά $\Delta p = 25$ at ; Πυκνότητα τοῦ νεροῦ $\rho = 10^3$ kgr/m³.

85. Μιά ἀντλία ἀνυψώνει μάζα νεροῦ $m = 1400$ kgr σέ ὕψος $h = 7$ m καί τό ἀναγκάζει νά συγκεντρωθεῖ ὑπό πίεση $p = 3$ at. Πόσο ἔργο ἐκτελεῖ ἡ ἀντλία ; Πυκνότητα τοῦ νεροῦ $\rho = 10^3$ kgr/m³. $g = 10$ m/sec².

86. Στό τοίχωμα δεξαμενῆς καί σέ βάθος $h = 10$ m κάτω ἀπό τήν ἐλεύθερη ἐπιφάνεια τοῦ νεροῦ ὑπάρχει κυκλικό ἄνοιγμα πού ἔχει ἐμβαδό $S = 6$ cm². Πόσος ὄγκος νεροῦ βγαίνει ἀπό τή δεξαμενή κατά λεπτό ;

87. Ἀπό τό ἄνοιγμα μιᾶς δεξαμενῆς βγαίνει ὄγκος νεροῦ $V = 2$ lt/sec, ὅταν τό ἄνοιγμα βρίσκεται σέ βάθος $h = 3{,}6$ m κάτω ἀπό τήν ἐλεύθερη ἐπιφάνεια τοῦ νεροῦ τῆς δεξαμενῆς. Πόσος ὄγκος V_1 νεροῦ θά βγαίνει κατά δευτερόλεπτο ἀπό τή δεξαμενή, ὅταν στήν ἐλεύθερη ἐπιφάνεια τοῦ νεροῦ ἐξασκεῖται μιά πρόσθετη πίεση ἴση μέ $p_1 = 8$ at ; Πυκνότητα τοῦ νεροῦ $\rho = 10^3$ kgr/m³. $g = 10$ m/sec².

88. Στό πάτωμα βρίσκεται ἕνα κατακόρυφο κυλινδρικό δοχεῖο πού περιέχει νερό. Πάνω στήν ἴδια γενέτειρα τοῦ κυλίνδρου ὑπάρχουν δύο μικρές τρύπες, βουλωμένες. Ἡ πάνω τρύπα βρίσκεται σέ ὕψος $h_1 = 10$ cm καί ἡ κάτω τρύπα βρίσκεται σέ ὕψος $h_2 = 3{,}6$ cm ἀπό τόν ὁριζόντιο πυθμένα τοῦ δοχείου. Ὅταν ξεβουλώσουμε ταυτόχρονα τίς δύο τρύπες, σχηματίζονται δύο καμπυλόγραμμες λεπτές φλέβες νεροῦ, πού πέφτουν στό ἴδιο σημεῖο τοῦ πατώματος. Σέ πόσο ὕψος h πάνω ἀπό τόν πυθμένα τοῦ δοχείου βρίσκεται ἡ ἐλεύθερη ἐπιφάνεια τοῦ νεροῦ ἐκείνη τή στιγμή ;

89. Ἕνα δοχεῖο περιέχει νερό καί μπορεῖ νά γλιστράει χωρίς τριβή πάνω στό λεῖο ὁριζόντιο ἐπίπεδο πού ἀκουμπάει ὁ ὁριζόντιος πυθμένας τοῦ δοχείου. Σέ μιά κατακόρυφη ἕδρα τοῦ δοχείου καί σέ βάθος $h = 1$ m κάτω ἀπό τήν ἐλεύθερη ἐπιφάνεια τοῦ νεροῦ ὑπάρχει μιά μικρή τρύπα βουλωμένη

μέ φελλό. Ξαφνικά ὁ φελλός φεύγει καί τό νερό ἀρχίζει νά βγαίνει ἀπό τή μικρή τρύπα, πού ἔχει διάμετρο $\delta = 1$ cm. Τότε τό δοχεῖο ἀρχίζει νά κινεῖται. Νά βρεθεῖ πόση εἶναι ἡ δύναμη F πού κινεῖ τό δοχεῖο.
Πυκνότητα νεροῦ $\rho = 10^3$ kgr/m^3 · $g = 10$ m/sec^2.

90. Δύο λεπτά παράλληλα στρώματα γλυκερίνης, πού ἡ μεταξύ τους ἀπόσταση εἶναι $h = 2$ mm, κινοῦνται μέ ταχύτητες ἀντίστοιχα $\upsilon_1 = 3$ cm/sec καί $\upsilon_2 = 2$ cm/sec. Κάθε στρῶμα ἔχει ἐπιφάνεια $S = ,5$ cm^2. Ὁ συντελεστής ἐσωτερικῆς τριβῆς τῆς γλυκερίνης εἶναι $\eta = 0{,}83$ N · sec · m^{-2}. Νά βρεθεῖ ἡ ἐσωτερική τριβή T πού ἀναπτύσσεται ἀνάμεσα σ' αὐτά τά δύο στρώματα γλυκερίνης.

91. Μιά σφαίρα ἀπό χάλυβα, μέ ἀκτίνα $R = 2$ mm, ἀφήνεται ἐλεύθερη νά πέσει μέσα σέ γλυκερίνη. Πόση εἶναι ἡ ὁριακή ταχύτητα $\upsilon_{o\rho}$ πού ἀποκτᾶ ἡ σφαίρα;
Πυκνότητες: χάλυβας $\rho = 7{,}9 \cdot 10^3$ kgr/m^3, γλυκερίνη $\rho_0 = 1{,}3 \cdot 10^3$ kgr/m^3.
Συντελεστής ἐσωτερικῆς τριβῆς γλυκερίνης $\eta = 0{,}83$ N · sec · m^{-2}.
$g = 10$ m/sec^2.

92. Μιά σφαίρα ἀπό χάλυβα, μέ ἀκτίνα $R = 2$ mm, ἀφήνεται ἐλεύθερη νά πέσει μέσα σέ ἕνα ὑγρό, πού ἔχει πυκνότητα $\rho_0 = 800$ kgr/m^3. Βρίσκουμε ὅτι ἡ σφαίρα ἀποκτᾶ ὁριακή ταχύτητα $\upsilon_{o\rho} = 3 \cdot 10^{-3}$ m/sec. Νά βρεθεῖ ὁ συντελεστής ἐσωτερικῆς τριβῆς η τοῦ ὑγροῦ.
Πυκνότητα χάλυβα $\rho = 7800$ kgr/m^3. $g = 10$ m/sec^2.

93. Σέ ἕναν ὑδροστρόβιλο τό κάθε πτερύγιό του ἀποτελεῖται ἀπό δύο σκαφίδια. Πάνω στόν ὑδροστρόβιλο πέφτει μιά παροχή νεροῦ $\Pi = 0{,}0981$ m^3/sec μέ ἀπόλυτη ταχύτητα $\upsilon_1 = 30$ m/sec. Τό πτερύγιο κινεῖται κατά τή φορά πού ἔχει καί τό νερό, πού πέφτει πάνω στό σκαφίδιο. Τό πτερύγιο ἔχει ἀπόλυτη ταχύτητα $\upsilon = 10$ m/sec. Τό νερό φεύγει ἀπό τό πτερύγιο μέ ἀπόλυτη ταχύτητα υ_2 πού ἔχει ἀντίθετη φορά μέ τή υ_1. Θεωροῦμε ὅτι δέν ὑπάρχουν τριβές. Νά βρεθεῖ: α) ἡ τιμή τῆς ταχύτητας υ_2· β) ἡ δύναμη F, μέ τήν ὁποία τό νερό σπρώχνει τό πτερύγιο· γ) ἡ ἰσχύς σέ kW τοῦ νεροῦ πού πέφτει πάνω στό πτερύγιο· δ) ἡ ἰσχύς σέ kW τῆς δυνάμεως F, πού κινεῖ τό πτερύγιο· καί ε) πόση θά ἔπρεπε νά εἶναι ἡ ταχύτητα υ τοῦ πτερυγίου, γιά νά μεταδοθεῖ στό πτερύγιο ὅλη ἡ ἰσχύς, τήν ὁποία ἔχει τό νερό πού πέφτει πάνω στό πτερύγιο. $g = 10$ m/sec^2.

ΘΕΡΜΟΤΗΤΑ

Ἰδανικά ἀέρια

45. Οἱ νόμοι τῶν ἰδανικῶν ἀερίων

Ἕνα ἰδανικό ἀέριο ἔχει *μάζα* m καί *μοριακή μάζα* μ. Ἡ κατάσταση τῆς μάζας m τοῦ ἀερίου προσδιορίζεται ἀπό τρία φυσικά μεγέθη, *τήν πίεση* p, *τόν ὄγκο* V καί *τήν ἀπόλυτη θερμοκρασία* T τοῦ ἀερίου. Τά παραπάνω χαρακτηριστικά μεγέθη τοῦ ἀερίου συνδέονται μεταξύ τους μέ ὁρισμένες σχέσεις, οἱ ὁποῖες εἶναι οἱ ἑξῆς:

α. Ἡ ἐξίσωση τῶν ἰδανικῶν ἀερίων

$$\boxed{\frac{p \cdot V}{T} = \text{σταθ.}}$$

β. Ἡ καταστατική ἐξίσωση τῶν ἰδανικῶν ἀερίων

$$\boxed{p \cdot V = \frac{m}{\mu} \cdot R \cdot T}$$

ὅπου R εἶναι *ἡ παγκόσμια σταθερή τῶν ἰδανικῶν ἀερίων* καί ἡ ὁποία εἶναι:

$$R = \frac{p_0 \cdot V_{mol}}{T_0}$$

Στήν τελευταία ἐξίσωση εἶναι p_0 ἡ κανονική ἀτμοσφαιρική πίεση (76 cm Hg), V_{mol} εἶναι ὁ γραμμομοριακός ὄγκος τῶν ἀερίων (22,4 lt) καί T_0 εἶναι ἡ θερμοκρασία $T_0 = 273^0$ K (δηλαδή 0^0 C). Ἡ σταθερή R ἔχει τήν τιμή:

$$R = 8{,}31 \text{ Joule} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{grad}^{-1}$$

46. Οἱ δυνατές μεταβολές τῆς καταστάσεως ἑνός ἀερίου

Θεωροῦμε δύο καταστάσεις μιᾶς μάζας m ἀερίου:

ἀρχική κατάσταση	p_1	V_1	T_1
τελική κατάσταση	p_2	V_2	T_2

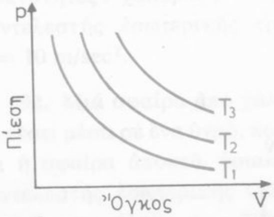
Οἱ δύο αὐτές καταστάσεις τοῦ ἀερίου συνδέονται μεταξύ τους μέ τήν ἐξίσωση :

$$\frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{p_2 \cdot V_2}{T_2} \quad \text{ἄρα} \quad \boxed{\frac{p_1 \cdot V_1}{p_2 \cdot V_1} = \frac{T_1}{T_2}} \qquad (1)$$

Θά ἐξετάσουμε κατά πόσους τρόπους μπορεῖ νά μεταβληθεῖ ἡ κατάσταση ἑνός ἀερίου.

α. Ἰσόθερμη μεταβολή τοῦ ἀερίου. Ἡ θερμοκρασία τοῦ ἀερίου διατηρεῖται *σταθερή* (T = σταθ.) καί τότε ἀπό τήν ἐξίσωση (1) προκύπτει ὁ *νόμος Boyle - Mariotte* :

ἰσόθερμη μεταβολή (T = σταθ.) $\qquad p_1 \cdot V_1 = p_2 \cdot V_2 = \text{σταθ.} \qquad (2)$



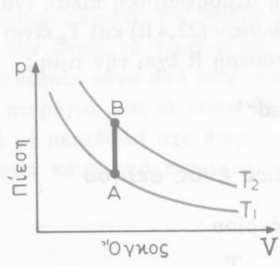
Σχ. 92. Ἰσόθερμες καμπύλες.

Ἄν λάβουμε δύο ὀρθογώνιους ἄξονες (σχ. 92), τότε γιά μιά ὁρισμένη θερμοκρασία T_1 ἡ ἐξίσωση $p_1 \cdot V_1 =$ σταθ. παριστάνεται ἀπό μιά καμπύλη, πού λέγεται *ἰσόθερμη*. Τό διάγραμμα πού παίρνουμε, λέγεται *διάγραμμα* p · V. Σέ μιά ἄλλη ψηλότερη θερμοκρασία T_2 ἀντιστοιχεῖ μιά ἄλλη ἰσόθερμη καμπύλη T_2, πού βρίσκεται ψηλότερα ἀπό τήν ἰσόθερμη T_1.

β. Ἰσόχωρη μεταβολή τοῦ ἀερίου. Ὁ ὄγκος τοῦ ἀερίου διατηρεῖται *σταθερός* (V = σταθ.) καί τότε ἀπό τήν ἐξίσωση (1) ἔχουμε :

ἰσόχωρη μεταβολή (V = σταθ.) $\qquad \dfrac{p_1}{p_2} = \dfrac{T_1}{T_2} \qquad (3)$

Στό διάγραμμα p · V ἡ ἐξίσωση (3) παριστάνεται ἀπό τό εὐθύγραμμο τμῆμα AB (σχ. 93), πού εἶναι παράλληλο μέ τόν ἄξονα τῶν πιέσεων. Τά σημεῖα A καί B ἀντιστοιχοῦν στήν ἀρχική καί στήν τελική κατάσταση τοῦ ἀερίου.

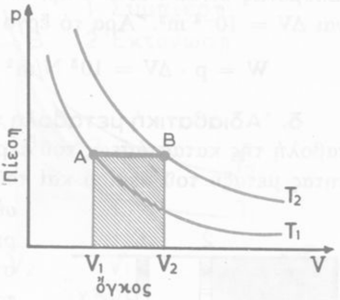


Σχ. 93. Ἡ AB παριστάνει ἰσόχωρη μεταβολή.

γ. Ἰσοβαρής μεταβολή τοῦ ἀερίου. Ἡ πίεση τοῦ ἀερίου διατηρεῖται *σταθερή* (p = σταθ.) καί τότε ἀπό τήν ἐξίσωση (1) ἔχουμε :

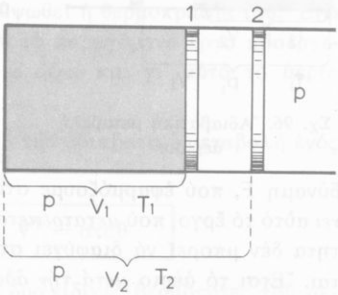
ἰσοβαρής μεταβολή (p = σταθ.) $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{T_1}{T_2}$ (4)

Στό διάγραμμα p · V ἡ ἐξίσωση (4) παριστάνεται ἀπό τό εὐθύγραμμο τμῆμα AB (σχ. 94), πού εἶναι παράλληλο μέ τόν ἄξονα τῶν ὄγκων. Τά σημεῖα A καί B ἀντιστοιχοῦν στήν ἀρχική καί στήν τελική κατάσταση τοῦ ἀερίου.



Σχ. 94. Ἡ AB παριστάνει ἰσοβαρή μεταβολή.

Θεωροῦμε μιά μάζα m ἀερίου πού βρίσκεται μέσα σέ κύλινδρο (σχ. 95). Αὐτός κλείνεται μέ ἔμβολο πού ἔχει ἐμβαδό S καί κινεῖται χωρίς τριβή. Ἀρχικά τό ἀέριο ἔχει ὄγκο V_1, θερμοκρασία T_1 καί πίεση p ἴση μέ τήν ἐξωτερική ἀτμοσφαιρική πίεση. Ἄν θερμάνουμε τό ἀέριο σέ θερμοκρασία T_2, τότε τό ἀέριο διαστέλλεται, ὁ ὄγκος του γίνεται V_2, ἀλλά ἡ πίεσή του p διατηρεῖται σταθερή καί ἴση μέ τήν ἐξωτερική ἀτμοσφαιρική πίεση. Γενικά ἡ διαστολή ἑνός ἀερίου λέγεται *ἐκτόνωση*. Τό ἔμβολο μετακινεῖται κατά διάστημα Δx ἀπό τή θέση 1 στή θέση 2 μέ τήν ἐπίδραση μιᾶς δυνάμεως F = p · S, ἡ ὁποία ἀναπτύσσεται *κατά τή θέρμανση* τοῦ ἀερίου ἀπό T_1 σέ T_2. Ὥστε κατά τήν ἰσοβαρή θέρμανσή του τό ἀέριο *παράγει ἔργο*, τό ὁποῖο στό διάγραμμα p · V ἀριθμητικά εἶναι ἴσο μέ τό ἐμβαδό τῆς γραμμοσκιασμένης ἐπιφάνειας (σχ. 94). Τό παραγόμενο ἔργο ἔχει μέτρο :



Σχ. 95. Κατά τήν ἰσοβαρή μεταβολή του τό ἀέριο παράγει ἔργο.

$$W = F \cdot \Delta x \quad \text{ἤ} \quad W = p \cdot S \cdot \Delta x$$

Ἐπειδή ἡ αὔξηση τοῦ ὄγκου τοῦ ἀερίου εἶναι ΔV = S · Δx, βρίσκουμε ὅτι :

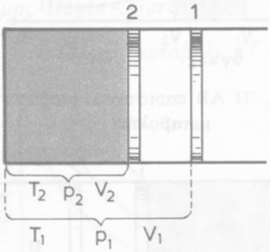
Τό ἔργο (W), πού παράγει τό ἀέριο κατά τήν ἰσοβαρή ἐκτόνωσή του, εἶναι ἴσο μέ τό γινόμενο τῆς πιέσεως (p) τοῦ ἀερίου ἐπί τήν αὔξηση τοῦ ὄγκου του (ΔV).

ἔργο κατά τήν ἰσοβαρή ἐκτόνωση ἀερίου $\boxed{W = p \cdot \Delta V}$

Παράδειγμα. Κατά τήν ἰσοβαρή ἐκτόνωση ἑνός ἀερίου ὑπό τή σταθερή πίεση $p = 1$ at ὁ ὄγκος τοῦ ἀερίου αὐξάνεται κατά $\Delta V = 100\ cm^3$. Θά ὑπολογίσουμε τό παραγόμενο ἔργο, παίρνοντας κατά προσέγγιση $1\ kp = 10$ N. Ἑπομένως εἶναι $1\ at = 1\ kp/cm^2 = 10^5\ N/m^2$. Ἡ μεταβολή τοῦ ὄγκου εἶναι $\Delta V = 10^{-4}\ m^3$. Ἄρα τό ἔργο εἶναι ἴσο μέ :

$$W = p \cdot \Delta V = 10^5\ N/m^2 \cdot 10^{-4}\ m^3 \quad \text{καί} \quad W = 10\ \text{Joule}$$

δ. Ἀδιαβατική μεταβολή τοῦ ἀερίου. Ὀνομάζεται *ἀδιαβατική* ἡ μεταβολή τῆς καταστάσεως τοῦ ἀερίου, ὅταν δέ συμβαίνει ἀνταλλαγή θερμότητας μεταξύ τοῦ ἀερίου καί τοῦ περιβάλλοντος, δηλαδή ὅταν τό ἀέριο *οὔτε παίρνει* ἀπέξω, *οὔτε ἀποβάλλει* στό περιβάλλον θερμότητα. Σ' αὐτή τήν περίπτωση τό ἀέριο βρίσκεται μέσα σέ δοχεῖο μέ τοιχώματα ἀπό ὑλικό, πού εἶναι τέλειος θερμικός μονωτής. Θεωροῦμε μιά μάζα m ἀερίου, πού βρίσκεται θερμικά μονωμένο μέσα σέ κύλινδρο, ὁ ὁποῖος κλείνεται μέ ἔμβολο (σχ. 96). Ἀρχικά τό ἀέριο ἔχει :



Σχ. 96. Ἀδιαβατική μεταβολή ἀερίου.

θερμοκρασία T_1 πίεση p_1 ὄγκο V_1

Συμπιέζουμε τό ἀέριο μετακινώντας τό ἔμβολο ἀπό τή θέση 1 στή θέση 2. Τότε ἡ δύναμη F, πού ἐφαρμόζουμε στό ἔμβολο, *παράγει ἔργο* W. Τό ἀέριο *παίρνει* αὐτό τό ἔργο, πού *μετατρέπεται σέ θερμότητα* Q. Ἐπειδή ὅμως ἡ θερμότητα δέν μπορεῖ νά διαφύγει στό περιβάλλον, γι' αὐτό τό ἀέριο *θερμαίνεται*. Ἔτσι τό ἀέριο *μετά τήν ἀδιαβατική συμπίεση* ἔχει :

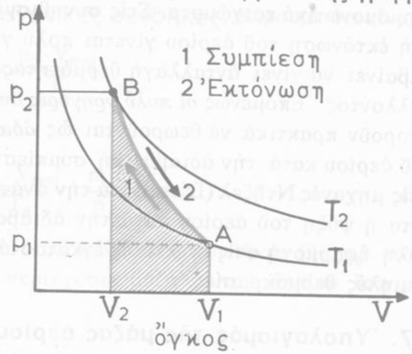
θερμοκρασία $T_2 > T_1$ πίεση $p_2 > p_1$ ὄγκο $V_2 < V_1$

Ἀντίθετα, ὅταν τό ἀέριο διαστέλλεται καί μετακινεῖ τό ἔμβολο ἀπό τή θέση 2 στή θέση 1, τότε *τό ἀέριο παράγει ἔργο* W. Αὐτό τό ἔργο προέρχεται ἀπό μιά ποσότητα θερμότητας Q τοῦ ἀερίου, ἡ ὁποία μετατρέπεται σέ ἔργο W. Ἐπειδή τό ἀέριο δέν μπορεῖ νά πάρει ἀπό τό περιβάλλον θερμότητα, γιά νά ἀναπληρώσει ἐκείνη πού μετατράπηκε σέ ἔργο, γι' αὐτό τό ἀέριο *ψύχεται*. Ἔτσι τό ἀέριο *μετά τήν ἀδιαβατική ἐκτόνωση* ἔχει :

θερμοκρασία T_1 πίεση p_1 ὄγκο V_1

Στό διάγραμμα $p \cdot V$ ἡ ἀδιαβατική μεταβολή τοῦ ἀερίου παριστάνεται ἀπό τό τόξο AB (σχ. 97) μιᾶς καμπύλης, πού λέγεται *ἀδιαβατική*. Τό τόξο AB τέμνει τίς δύο ἰσόθερμες T_1 καί T_2. Τό ἔργο W, πού ξοδεύεται γιά τήν ἀδιαβατική συμπίεση τοῦ ἀερίου, ἢ πού παράγεται ἀπό τό ἀέριο κατά τήν ἀδιαβατική ἐκτόνωσή του, ἀριθμητικά εἶναι ἴσο μέ τό ἐμβαδό τῆς γραμμοσκιασμένης ἐπιφάνειας. Ὥστε :

Τό ἔργο πού παράγει τό ἀέριο κατά τήν ἀδιαβατική ἐκτόνωσή του, προέρχεται ἀπό τή θερμότητα πού κλείνει μέσα του τό ἀέριο, καί γι' αὐτό τό ἀέριο ψύχεται.



Σχ. 97. Τό τόξο AB παριστάνει ἀδιαβατική μεταβολή τοῦ ἀερίου.

Γενικά ἕνα ἀέριο παράγει ἔργο κατά τήν ἐκτόνωσή του, ἰσοβαρή ἤ ἀδιαβατική. Ἀλλά κατά τήν ἰσοβαρή ἐκτόνωση τοῦ ἀερίου (σχ. 94) τό παραγόμενο ἔργο προέρχεται ἀπό τή θερμότητα πού *προσφέρεται ἀπέξω* στό ἀέριο, γιά νά ὑψωθεῖ ἡ θερμοκρασία του. Ἐνῶ κατά τήν ἀδιαβατική μεταβολή τοῦ ἀερίου τό παραγόμενο ἔργο προέρχεται ἀπό τή θερμότητα πού *ἔχει μέσα του τό ἀέριο* καί γι' αὐτό τό ἀέριο ψύχεται.

Νόμος τοῦ Poisson. Ἀποδείχνεται ὅτι γιά τήν ἀδιαβατική μεταβολή ἑνός ἀερίου ἰσχύει ὁ ἑξῆς *νόμος τοῦ Poisson* :

$$\boxed{\text{νόμος τοῦ Poisson} \qquad p \cdot V^{\gamma} = \text{σταθ.}}$$

ὅπου γ εἶναι ὁ γνωστός λόγος πού ἔχουν οἱ δύο εἰδικές θερμότητες τοῦ ἀερίου $\gamma = c_p / c_V$. Ὥστε γιά τό ἀέριο, πού εἴχαμε παραπάνω μέσα στόν κύλινδρο, ἡ ἀρχική καί ἡ τελική κατάσταση συνδέονται μέ τήν ἐξίσωση :

$$p_1 \cdot V_1^{\gamma} = p_2 \cdot V_2^{\gamma} \tag{5}$$

Ἐπίσης γιά τή μεταβολή τοῦ ἀερίου ἰσχύει καί ἡ ἐξίσωση τῶν ἰδανικῶν ἀερίων :

$$\frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{p_2 \cdot V_2}{T_2} \tag{6}$$

Ἄν διαιρέσουμε κατά μέλη τίς ἐξισώσεις (5) καί (6), βρίσκουμε :

$$T_1 \cdot V_1^{\gamma-1} = T_2 \cdot V_2^{\gamma-1} \tag{7}$$

Οἱ ἐξισώσεις (5) καί (7) συνδέουν τήν *ἀρχική* καί τήν *τελική* κατάσταση τοῦ ἀερίου κατά τήν ἀδιαβατική μεταβολή του.

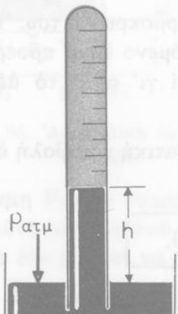
Ἐφαρμογή τῆς ἀδιαβατικῆς μεταβολῆς. Γιά νά πραγματοποιήσουμε ἀδιαβατική μεταβολή, πρέπει τό ἀέριο νά βρίσκεται μέσα σέ δοχεῖο μέ τελείως θερμομονωτικά τοιχώματα. Στίς συνηθισμένες ἐφαρμογές, ὅταν ἡ συμπίεση ἤ ἡ ἐκτόνωση τοῦ ἀερίου γίνεται πολύ γρήγορα, τότε πρακτικά δέν προλαβαίνει νά γίνει ἀνταλλαγή θερμότητας μεταξύ τοῦ ἀερίου καί τοῦ περιβάλλοντος. Ἑπομένως *οἱ πολύ γρήγορες συμπιέσεις* ἤ *ἐκτονώσεις* ἑνός ἀερίου μποροῦν πρακτικά νά θεωροῦνται ὡς *ἀδιαβατικές μεταβολές*. Ἡ θέρμανση τοῦ ἀερίου κατά τήν ἀδιαβατική συμπίεσή του βρίσκει μεγάλη ἐφαρμογή στίς μηχανές Ντῆζελ (Diesel) γιά τήν ἀνάφλεξη τοῦ καύσιμου ὑλικοῦ. Ἀντίθετα ἡ ψύξη τοῦ ἀερίου κατά τήν ἀδιαβατική ἐκτόνωσή του βρίσκει μεγάλη ἐφαρμογή στίς ψυκτικές ἐγκαταστάσεις μέ τίς ὁποῖες δημιουργοῦμε χαμηλές θερμοκρασίες.

47. Ὑπολογισμός τῆς μάζας ἀερίου

Ἕνα ἀέριο ἔχει γνωστή μοριακή μάζα μ. Ἄν τό ἀέριο ἔχει ὄγκο V, πίεση p, καί θερμοκρασία T, τότε *ἡ μάζα* m τοῦ ἀερίου μπορεῖ νά ὑπολογιστεῖ ἀπό τήν καταστατική ἐξίσωση τῶν ἰδανικῶν ἀερίων :

$$p \cdot V = \frac{m}{\mu} \cdot R \cdot T$$

ἄρα $$\boxed{m = \frac{\mu \cdot p \cdot V}{R \cdot T}} \qquad (1)$$



Σχ. 98. Μέτρηση τῆς μάζας ἀερίου. Τό ἀέριο ἔχει ὄγκο V, θερμοκρασία T τοῦ περιβάλλοντος καί πίεση $p = p_{\alpha\tau\mu} - h$ cm Hg.

Αὐτή τή μέθοδο ὑπολογισμοῦ τῆς μάζας ἀερίου ἐφαρμόζουμε στά χημεῖα (σχ. 98).

48. Εὕρεση τῆς μοριακῆς μάζας καί τῆς πυκνότητας τοῦ ἀερίου

α. Μοριακή μάζα τοῦ ἀερίου. *Ἡ μοριακή μάζα* μ τοῦ ἀερίου μπορεῖ νά ὑπολογιστεῖ ἀπό τήν καταστατική ἐξίσωση τῶν ἰδανικῶν ἀερίων :

$$p \cdot V = \frac{m}{\mu} \cdot R \cdot T \quad \text{ἄρα} \quad \boxed{\mu = R \cdot \frac{m \cdot T}{p \cdot V}} \qquad (1)$$

Αὐτή ἡ μέθοδος ὑπολογισμοῦ τῆς μοριακῆς μάζας ἐφαρμόζεται στή Χημεία.

β. Πυκνότητα ἀερίου σέ κανονικές συνθῆκες. Ξέρουμε ὅτι εἶναι:

$$R = \frac{p_0 \cdot V_{mol}}{T_0}$$

Ἑπομένως ἡ ἐξίσωση (1) γράφεται:

$$\mu = \frac{p_0 \cdot V_{mol}}{T_0} \cdot \frac{m \cdot T}{p \cdot V} \qquad (2)$$

Ἄν ρ_0 εἶναι ἡ πυκνότητα τοῦ ἀερίου σέ κανονικές συνθῆκες (T_0, p_0), τότε μέσα στόν ὄγκο V_{mol} τοῦ ἀερίου περιέχεται μάζα μ τοῦ ἀερίου ἴση μέ ἕνα γραμμομόριο, δηλαδή εἶναι:

$$\mu = \rho_0 \cdot V_{mol} \qquad (3)$$

Ἄν ἐξισώσουμε τά δεύτερα μέλη τῶν ἐξισώσεων (2) καί (3), ἔχουμε:

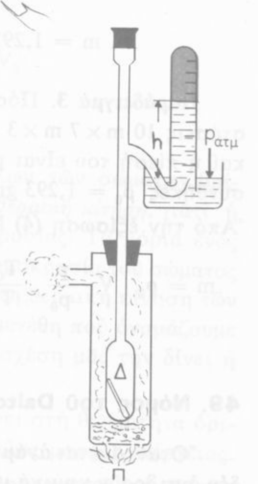
$$\rho_0 \cdot V_{mol} = \frac{p_0 \cdot V_{mol}}{T_0} \cdot \frac{m \cdot T}{p \cdot V} \quad \text{ἄρα}$$

πυκνότητα ἀερίου (σέ p_0, T_0)	$\rho_0 = \frac{p_0}{p} \cdot \frac{T}{T_0} \cdot \frac{m}{V}$ (4)

Ἄν στήν ἐξίσωση (3) ἀντικαταστήσουμε τό ρ_0 ἀπό τήν ἐξίσωση (4), βρίσκουμε:

μοριακή μάζα ἀερίου	$\mu = m \cdot \frac{p_0}{p} \cdot \frac{T}{T_0} \cdot \frac{V_{mol}}{V}$ (5)

Ἡ ἐξίσωση (5) μπορεῖ νά ἐφαρμοστεῖ καί στήν περίπτωση *ἀτμῶν*. Ἑπομένως μποροῦμε νά βρίσκουμε *τή μοριακή μάζα ὑγρῶν*, πού εὔκολα μεταβάλλονται σέ ἀτμούς (σχ. 99).



Σχ. 99. Σχηματική διάταξη γιά τή μέτρηση τῆς μοριακῆς μάζας ἀτμῶν. Τό ὑγρό πού εἶναι μέσα στό φιαλίδιο μεταβάλλεται σέ ἀτμό, ὁ ὁποῖος διώχνει ἀπό τό δοχεῖο Δ ἕναν ὄγκο V ἀέρα ἴσο μέ τόν ὄγκο V τοῦ ἀτμοῦ πού σχηματίστηκε.

Παράδειγμα 1. Πόσο ὄγκο ἔχει μιά μάζα ὀξυγόνου m = 0,05 gr ὑπό πίεση p_0 = 76 cm Hg σέ θερμοκρασία θ = —40°C; Πυκνότητα ὀξυγόνου σέ κανονικές συνθῆκες ρ_0 = 0,001 43 gr/cm³.

Ἀπό τήν ἐξίσωση (4) ἔχουμε :

$$V = \frac{1}{\rho_0} \cdot \frac{p_0}{p} \cdot \frac{T}{T_0} \cdot m \qquad \text{ἤ} \qquad V = \frac{1}{\rho_0} \cdot \frac{T}{T_0} \cdot m$$

γιατί εἶναι $p = p_0$. Ἄρα εἶναι :

$$V = \frac{1}{0{,}001\,43\ \text{gr/cm}^3} \cdot \frac{233\ \text{grad}}{273\ \text{grad}} \cdot 0{,}05\ \text{gr} = 29{,}9\ \text{cm}^3$$

Παράδειγμα 2. Πόση εἶναι ἡ μάζα m ἀέρα πού ἔχει ὄγκο V = 20 lt, θερμοκρασία $\theta = 0^0$ C καί πίεση p = 100 Atm ; Πυκνότητα ἀέρα σέ κανονικές συνθῆκες $\rho_0 = 1{,}293$ gr/lt.

Ἀπό τήν ἐξίσωση (4) ἔχουμε :

$$m = \rho_0 \cdot V \cdot \frac{p}{p_0} \cdot \frac{T_0}{T} \qquad \text{ἤ} \qquad m = \rho_0 \cdot V \cdot \frac{p}{p_0}$$

$$m = 1{,}293\ \text{gr/lt} \cdot 20\ \text{lt} \cdot \frac{100\ \text{Atm}}{1\ \text{Atm}} = 2586\ \text{gr}$$

Παράδειγμα 3. Πόση μάζα m ἔχει ὁ ἀέρας ἑνός δωματίου πού ἔχει διαστάσεις 10 m × 7 m × 3 m, ὅταν ἡ θερμοκρασία τοῦ ἀέρα εἶναι $\theta = 17^0$ C καί ἡ πίεσή του εἶναι p = 72 cm Hg ; Πυκνότητα τοῦ ἀέρα σέ κανονικές συνθῆκες $\rho_0 = 1{,}293$ gr/lt.

Ἀπό τήν ἐξίσωση (4) ἔχουμε :

$$m = \rho_0 \cdot V \cdot \frac{p}{p_0} \cdot \frac{T_0}{T} = 1{,}293\ \text{kgr/m}^3 \cdot 210\ \text{m}^3 \cdot \frac{72\ \text{cm Hg}}{76\ \text{cm Hg}} \cdot \frac{273\ \text{grad}}{290\ \text{grad}}$$

$$\text{καί} \qquad m = 242{,}18\ \text{kgr}$$

49. Νόμος τοῦ Dalton

Ὅταν γίνεται ἀνάμιξη ἀερίων, πού ἔχουν διαφορετική θερμοκρασία καί δέν ἀντιδροῦν χημικά μεταξύ τους, τότε ἰσχύει ὁ ἑξῆς *νόμος τοῦ Dalton :*

Ἡ πίεση ($p_{ολ}$) τοῦ μίγματος τῶν ἀερίων εἶναι ἴση μέ τό ἄθροισμα τῶν μερικῶν πιέσεων, πού θά εἶχε τό καθένα ἀπό τά ἀέρια τοῦ μίγματος, ἄν μόνο του ἀποκτοῦσε τόν ὄγκο τοῦ μίγματος στή θερμοκρασία τοῦ μίγματος.

Θεωροῦμε τρία διαφορετικά ἀέρια Α, Β, Γ, πού ἡ ἀρχική τους κατάσταση εἶναι :

τοῦ Α : p_1, V_1, T_1 τοῦ Β : p_2, V_2, T_2 τοῦ Γ : p_3, V_3, T_3

Τά τρία ἀέρια σχηματίζουν μίγμα, πού ἔχει ὄγκο V καί θερμοκρασία T. Ἄν τό καθένα ἀπό αὐτά τά ἀέρια ἀποκτοῦσε μόνο του ὄγκο V καί θερμοκρασία T, τότε τό καθένα ἀέριο θά εἶχε ἀντίστοιχα πίεση p_A, p_B, p_Γ καί θά ἴσχυε ἡ ἀντίστοιχη ἐξίσωση :

$$\frac{p_A \cdot V}{T} = \frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} \qquad \frac{p_B \cdot V}{T} = \frac{p_2 \cdot V_2}{T_2} \qquad \frac{p_\Gamma \cdot V}{T} = \frac{p_3 \cdot V_3}{T_3}$$

Ἄν λύσουμε αὐτές τίς ἐξισώσεις ὡς πρός p_A, p_B, p_Γ καί ἀντικαταστήσουμε αὐτές τίς τιμές στήν ἐξίσωση $p_{o\lambda} = p_A + p_B + p_\Gamma$ βρίσκουμε τελικά τήν ἐξίσωση :

νόμος τοῦ Dalton $$\boxed{\frac{p \cdot V}{T} = \frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} + \frac{p_2 \cdot V_2}{T_2} + \frac{p_3 \cdot V_3}{T_3}}$$

Ἄν εἶναι $T_1 = T_2 = T_3 = T$ τότε εἶναι :

$$p \cdot V = p_1 \cdot V_1 + p_2 \cdot V_2 + p_3 \cdot V_3$$

50. Μηχανική θεωρία τῆς θερμότητας

Ἡ πειραματική ἔρευνα ἀπέδειξε ὅτι τά μόρια ὅλων τῶν σωμάτων βρίσκονται σέ ἀδιάκοπη κίνηση, ἡ ὁποία ὀνομάζεται *θερμική κίνηση*, γιατί ἡ ταχύτητα τῶν μορίων εἶναι συνάρτηση τῆς θερμοκρασίας. Τά μόρια ἑνός σώματος θά ἦταν ἀκίνητα, μόνο ἄν ἦταν δυνατό ἡ θερμοκρασία τοῦ σώματος νά γίνει ἴση μέ τό ἀπόλυτο μηδέν (0^0 K). Ἡ ἀδιάκοπη θερμική κίνηση τῶν μορίων ἑνός σώματος ἔχει πολύ στενή σχέση μέ τά μεγέθη πού ὀνομάζουμε θερμότητα καί θερμοκρασία τοῦ σώματος. Αὐτή τή σχέση μᾶς τήν δίνει **ἡ μηχανική θεωρία τῆς θερμότητας.**

Ἡ ἀδιάκοπη καί ἄτακτη κίνηση τῶν μορίων δίνει στή θερμότητα ὁρισμένες ἰδιότητες, οἱ ὁποῖες δέ χαρακτηρίζουν τίς ἄλλες μορφές ἐνέργειας.

Ἡ μηχανική θεωρία τῆς θερμότητας μπορεῖ νά ἐφαρμοστεῖ πιό εὔκολα στήν περίπτωση ἑνός ἰδανικοῦ ἀερίου.

α. Σχέση τῆς πιέσεως τοῦ ἀερίου μέ τήν ταχύτητα τῶν μορίων.

Ἕνα ἀέριο σέ μιά ὁρισμένη θερμοκρασία T ἔχει πίεση p, ὄγκο V καί ἀποτελεῖται ἀπό N μόρια πού τό καθένα ἔχει μάζα m. Τότε ἡ πυκνότητα τοῦ ἀερίου εἶναι :

$$\rho = \frac{N \cdot m}{V} \tag{1}$$

Ἀποδείχνεται ὅτι :

Ἡ πίεση (p) ἑνός ἀερίου εἶναι ἀνάλογη μέ τήν πυκνότητα (ρ) τοῦ ἀερίου καί ἀνάλογη μέ τό τετράγωνο τῆς ταχύτητας (υ) τῶν μορίων τοῦ ἀερίου.

$$\boxed{\text{πίεση ἀερίου} \quad p = \frac{1}{3}\,\rho \cdot \upsilon^2} \tag{2}$$

β. Σχέση τῆς κινητικῆς ἐνέργειας τῶν μορίων τοῦ ἀερίου μέ τή θερμοκρασία. Ἄν στήν ἐξίσωση (2) ἀντικαταστήσουμε τήν τιμή τοῦ ρ ἀπό τήν ἐξίσωση (1), βρίσκουμε :

$$p \cdot V = \frac{1}{3}\,N \cdot m \cdot \upsilon^2 \tag{3}$$

Ἄν τό παραπάνω ἀέριο ἔχει μάζα ἴση μέ ἕνα *γραμμομόριο* (1 mol), τότε σ' αὐτή τή μάζα τοῦ ἀερίου ὑπάρχει σταθερός ἀριθμός μορίων ἴσος μέ N_0 καί ἡ ἐξίσωση (3) γράφεται :

$$p \cdot V = \frac{2}{3}\,N_0 \cdot \frac{m\upsilon^2}{2} \quad \text{ἤ} \quad p \cdot V = \frac{2}{3}\,N_0 \cdot E_{\kappa\iota\nu} \tag{4}$$

ὅπου $E_{\kappa\iota\nu} = m\upsilon^2/2$ εἶναι *ἡ μέση κινητική ἐνέργεια* ἑνός μορίου τοῦ ἀερίου. Γι' αὐτή τή μάζα τοῦ ἀερίου (πού εἶναι ἴση μέ ἕνα γραμμομόριο) ἰσχύει ἡ καταστατική ἐξίσωση τῶν ἰδανικῶν ἀερίων :

$$p \cdot V = R \cdot T \tag{5}$$

Ἐξισώνοντας τά δεύτερα μέλη τῶν ἐξισώσεων (4) καί (5) βρίσκουμε :

$$E_{\kappa\iota\nu} = \frac{3}{2} \cdot \frac{R}{N_0} \cdot T \quad \text{ἤ} \quad \boxed{E_{\kappa\iota\nu} = \frac{3}{2}\,k \cdot T} \tag{6}$$

ὅπου $k = R/N_0 =$ σταθ. εἶναι μιά σταθερή τῶν ἀερίων, πού ὀνομάζεται *σταθερή τοῦ Boltzman* (*). Ἡ ἐξίσωση (6) φανερώνει ὅτι :

Ἡ κινητική ἐνέργεια ($E_{\kappa\iota\nu}$) τῶν μορίων τοῦ ἀερίου εἶναι ἀνάλογη μέ τήν ἀπόλυτη θερμοκρασία (T) τοῦ ἀερίου.

Στή θερμοκρασία $T = 0^0$ K ἡ κινητική ἐνέργεια τῶν μορίων εἶναι ἴση μέ μηδέν, ἄρα εἶναι $\upsilon = 0$.

---

* **Εἶναι $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Joule · grad^{-1}**

γ. Γραμμομοριακή ἐνέργεια τῶν ἀερίων. Ἄν τό ἀέριο, πού πήραμε, ἔχει *μοριακή μάζα* μ, τότε *γιά τό ἕνα γραμμομόριο* τοῦ ἀερίου τό γινόμενο $N \cdot m$ στήν ἐξίσωση (3) ἐκφράζει τή μάζα μ ἑνός γραμμομορίου, δηλαδή εἶναι $\mu = N \cdot m$ καί ἡ ἐξίσωση (3) γράφεται :

$$p \cdot V = \frac{1}{3} \mu \cdot \upsilon^2 \quad \text{ἤ} \quad p \cdot V = \frac{2}{3} \frac{\mu\upsilon^2}{2} \qquad (7)$$

Τό $\mu\upsilon^2/2$ ἐκφράζει *τήν κινητική ἐνέργεια* τῶν μορίων, πού ὑπάρχουν μέσα σέ ἕνα γραμμομόριο (1 mol) τοῦ ἀερίου, καί ἡ ὁποία ὀνομάζεται *γραμμομοριακή ἐνέργεια* (E_{mol}) τοῦ ἀερίου. Ὥστε ἡ ἐξίσωση (7) γράφεται :

$$p \cdot V = \frac{2}{3} E_{mol} \qquad (8)$$

Ἐξισώνοντας τά δεύτερα μέλη τῶν ἐξισώσεων (5) καί (8) βρίσκουμε :

γραμμομοριακή ἐνέργεια ἀερίων	$E_{mol} = \frac{\mu\upsilon^2}{2} = \frac{3}{2} R \cdot T$	(9)

Ἡ ἐξίσωση (9) φανερώνει ὅτι :

Ι. Στήν ἴδια ἀπόλυτη θερμοκρασία (Τ) ἡ γραμμομοριακή ἐνέργεια (E_{mol}) εἶναι ἡ ἴδια γιά ὅλα τά ἀέρια.
ΙΙ. Ἡ γραμμομοριακή ἐνέργεια τῶν ἀερίων εἶναι ἀνάλογη μέ τήν ἀπόλυτη θερμοκρασία (Τ) τοῦ ἀερίου.

Ὑπολογισμός τῆς γραμμομοριακῆς ἐνέργειας τῶν ἀερίων. Ἀπό τήν ἐξίσωση (9) μποροῦμε νά ὑπολογίσουμε *τή σταθερή* γραμμομοριακή ἐνέργεια τῶν ἀερίων σέ μιά ὁρισμένη θερμοκρασία. Ἄς θεωρήσουμε *ἕνα γραμμομόριο* ἀπό ὁποιοδήποτε ἰδανικό ἀέριο, πού βρίσκεται σέ κανονικές συνθῆκες, δηλαδή εἶναι $p_0 = 76$ cm Hg καί $T = 273^0$ K ($\theta = 0^0$ C). Τότε, βάζοντας στήν ἐξίσωση (9) τίς τιμές τῶν μεγεθῶν R καί T, βρίσκουμε ὅτι *ἡ ὁλική κινητική ἐνέργεια* τῶν μορίων, πού περιέχονται μέσα στό ἕνα γραμμομόριο *κάθε ἀερίου*, εἶναι ἴση μέ :

$$E_{mol} \simeq 3400 \text{ Joule/mol}$$

Αὐτή ἡ ἐνέργεια ὀφείλεται *στή θερμική κίνηση* τῶν μορίων τοῦ ἀερίου.

δ. Ταχύτητα τῶν μορίων τοῦ ἀερίου. Ἀπό τήν ἐξίσωση :

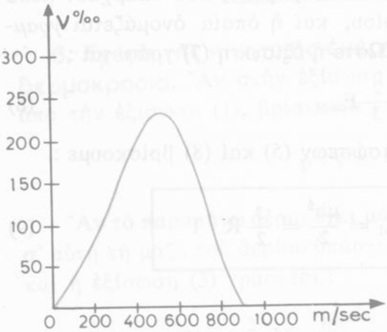
$$\frac{\mu\upsilon^2}{2} = \frac{3}{2} R \cdot T \quad \text{βρίσκουμε} \quad \upsilon = \sqrt{\frac{3R \cdot T}{\mu}} \qquad (10)$$

Μέ τήν ἐξίσωση (10) ὑπολογίζουμε τή μέση ταχύτητα (υ) τῶν μορίων ἑνός ἀερίου, πού ἔχει μοριακή μάζα μ καί ἀπόλυτη θερμοκρασία Τ.

Ἔτσι π.χ. γιά τό ὀξυγόνο ($\mu = 32$) βρίσκουμε ὅτι σέ κανονικές συνθῆκες ἡ *μέση ταχύτητα* τῶν μορίων του εἶναι:

$$\upsilon = \sqrt{\frac{3 \cdot 8{,}31 \text{ Joule} \cdot \text{grad}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot 273 \text{ grad}}{0{,}32 \text{ kgr} \cdot \text{mol}^{-1}}} \simeq 461 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$$

Παρατήρηση. Ἡ ταχύτητα πού βρήκαμε ἀπό τήν ἐξίσωση (10), εἶναι ἡ *μέση ταχύτητα* τῶν μορίων τοῦ ἀερίου. Στήν πραγματικότητα, ἐξαιτίας τῶν κρούσεων τῶν μορίων, οἱ ταχύτητές τους συνεχῶς μεταβάλλονται. Ἔτσι γιά μιά ὁρισμένη μάζα ἀερίου καί σέ μιά ὁρισμένη χρονική στιγμή οἱ ταχύτητες τῶν μορίων τοῦ ἀερίου ἔχουν ὅλες τίς δυνατές τιμές. Ὁ Maxwell προσδιόρισε θεωρητικά πῶς κατανέμονται οἱ ταχύτητες τῶν μορίων τοῦ ἀερίου σέ μιά ὁρισμένη χρονική στιγμή. Αὐτή ἡ κατανομή παριστάνεται γραφικά μέ τήν καμπύλη πού δείχνει τό σχῆμα 100 καί ἀναφέρεται σέ 1000 μόρια ὀξυγόνου θερμοκρασίας $T = 273^0$ K (μέση ταχύτητα 461 m/sec).



Σχ. 100. Κατανομή τῆς ταχύτητας 1000 μορίων ὀξυγόνου (ν ‰).

ε. Νόμος τοῦ Avogadro.

Ἀπό τήν ἐξίσωση (3) ἔχουμε:

$$p \cdot V = \frac{2}{3} N \cdot \frac{m\upsilon^2}{2} \quad \text{ἤ} \quad p \cdot V = \frac{2}{3} N \cdot E_{\kappa\iota\nu} \qquad (11)$$

Ἐπειδή εἶναι $E_{\kappa\iota\nu} = \frac{3}{2} k \cdot T$ (ἐξίσ. 6), ἡ παραπάνω ἐξίσωση (11) γράφεται:

$$p \cdot V = \frac{2}{3} N \cdot \frac{3}{2} k \cdot T \quad \text{ἄρα} \quad \boxed{N = \frac{p \cdot V}{k \cdot T}} \qquad (12)$$

Ἡ ἐξίσωση (12) ἐκφράζει τόν ἀκόλουθο *νόμο τοῦ Avogadro*:

Στήν ἴδια θερμοκρασία (T) καί μέ τήν ἴδια πίεση (p) σέ ἴσους ὄγκους (V) ἀπό διαφορετικά ἀέρια ὑπάρχει ὁ ἴδιος ἀριθμός (N) μορίων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

94. Ἕνας τριχοειδής σωλήνας ἔχει μῆκος 50 cm, εἶναι κλειστός στίς δύο ἄκρες του καί μιά στήλη ὑδραργύρου, πού ἔχει μῆκος 10 cm, χωρίζει τό σωλήνα σέ δύο τμήματα. Μέσα στό σωλήνα ὑπάρχει ξηρός ἀέρας. Ὅταν ὁ σωλήνας εἶναι ὁριζόντιος, ἡ στήλη τοῦ ἀέρα σέ κάθε τμῆμα τοῦ σωλήνα ἔχει μῆκος $l_0 = 20$ cm. Ὅταν ὁ σωλήνας εἶναι κατακόρυφος, ἡ κάτω στήλη τοῦ ἀέρα ἔχει ὕψος $l_1 = 15$ cm καί ἡ πάνω στήλη τοῦ ἀέρα ἔχει ὕψος $l_2 = 25$ cm. Πόση εἶναι ἡ πίεση p_0 τοῦ ἀέρα, ὅταν ὁ σωλήνας εἶναι ὁριζόντιος ; Ἡ θερμοκρασία διατηρεῖται σταθερή.

95. Στόν πυθμένα μιᾶς λίμνης σχηματίζονται φυσαλίδες ἀπό μεθάνιο, οἱ ὁποῖες, ὅταν φτάσουν στήν ἐπιφάνεια τοῦ νεροῦ, ἔχουν τετραπλάσιο ὄγκο. Ἡ θερμοκρασία στόν πυθμένα τῆς λίμνης καί στήν ἐπιφάνεια τοῦ νεροῦ εἶναι ἀντίστοιχα 10^0 C καί 20^0 C καί ἡ ἀτμοσφαιρική πίεση ἐκείνη τή στιγμή εἶναι $p_0 = 1$ kp/cm^2. Πόσο εἶναι τό βάθος h τῆς λίμνης ;

96. Ἕνας λεπτός γυάλινος σωλήνας, κλειστός στή μιά ἄκρη του, διατηρεῖται κατακόρυφος μέ τήν κλειστή ἄκρη του πρός τά κάτω. Μέσα στό σωλήνα ὑπάρχει ἀέρας καί μιά μικρή στήλη ὑδραργύρου, πού ἔχει μῆκος 3 cm. Ὅταν ἡ θερμοκρασία εἶναι 5^0 C, ἡ στήλη τοῦ ἀποκλεισμένου ἀέρα ἔχει ὕψος h = 30 cm. Πόσο θά μετακινηθεῖ ἡ κάτω ἄκρη τῆς μικρῆς στήλης τοῦ ὑδραργύρου, ὅταν ὁ σωλήνας ἀποκτήσει θερμοκρασία 100^0 C ;

97. Μιά ἀνοιχτή φιάλη περιέχει ἀέρα μέ τήν ἀτμοσφαιρική πίεση $p_0 = 1$ kp/cm^2. Θερμαίνουμε τή φιάλη σέ 100^0 C καί τήν κλείνουμε ἑρμητικά. Πόση εἶναι ἡ πίεση τοῦ ἀέρα, ὅταν ἡ φιάλη θά ἀποκτήσει τή θερμοκρασία τοῦ περιβάλλοντος 18^0 C ; Ἡ διαστολή τῆς φιάλης παραλείπεται.

98. Ἕνας βαρομετρικός σωλήνας, πού ἡ τομή του ἔχει ἐμβαδό S = 1 cm^2, περιέχει λίγο ἀέρα καί εἶναι βυθισμένος μέσα σέ βαθιά λεκάνη ὑδραργύρου τόσο, ὥστε σέ 17^0 C τό τμῆμα τοῦ σωλήνα πού εἶναι ἔξω ἀπό τή λεκάνη νά ἔχει μῆκος 35 cm. Τότε ἡ στήλη τοῦ ὑδραργύρου μέσα στό σωλήνα ἔχει ὕψος 25 cm. Ἡ ἀτμοσφαιρική πίεση εἶναι 76 cm Hg. 1) Πόση πρέπει νά γίνει ἡ θερμοκρασία, ὥστε ἡ στήλη τοῦ ὑδραργύρου μέσα στό σωλήνα νά κατέβει κατά 1 cm ; 2) Ὁ ἀέρας μέ τήν ἀρχική κατάστασή του θερμαίνεται ἀπό 17^0 C σέ 37^0 C. Πόσος γίνεται ὁ ὄγκος του ;

99. Ἕνα κυβικό δωμάτιο ἔχει ὕψος 4 m. Τό πρωί ὁ ἀέρας τοῦ δωματίου ἔχει θερμοκρασία $\theta_1 = 15^0$ C καί πίεση τήν ἀτμοσφαιρική πίεση $p_1 = 78$ cm Hg. Τό ἀπόγευμα ὁ ἀέρας τοῦ δωματίου ἔχει θερμοκρασία $\theta_2 = 20^0$ C καί πίεση τήν ἀτμοσφαιρική πίεση $p_0 = 76$ cm Hg. Νά βρεθεῖ πόση διαφορά ἔχουν οἱ μάζες m_1 καί m_2 τοῦ ἀέρα πού βρίσκεται μέσα στό δωμάτιο στίς παραπάνω δύο περιπτώσεις. Πυκνότητα τοῦ ἀέρα σέ κανονικές συνθῆκες $\rho_0 = 1{,}29$ kgr/m³.

100. Ἕνα σφαιρικό ἀερόστατο ἔχει ἀκτίνα $R = 3$ m καί εἶναι γεμάτο μέ ἀέρα θερμοκρασίας 100^0 C καί ὑπό πίεση τήν ἀτμοσφαιρική. Ὁ ἐξωτερικός ἀέρας ἔχει θερμοκρασία 0^0 C καί πίεση 76 cm Hg. Νά βρεθεῖ πόσο βάρος μπορεῖ νά συγκρατήσει αὐτό τό ἀερόστατο. Πυκνότητα τοῦ ἀέρα σέ κανονικές συνθῆκες $\rho_0 = 1{,}3$ kgr/m³. $g = 10$ m/sec².

101. Δύο ὅμοιοι κύλινδροι Α καί Α΄ βρίσκονται πάνω σέ ὁριζόντιο ἐπίπεδο, ἔχοντας τήν ἀνοιχτή βάση τους τή μιά ἀπέναντι στήν ἄλλη. Οἱ δύο κύλινδροι κλείνονται μέ δύο ἀντίστοιχα ἔμβολα Ε καί Ε΄ πού συνδέονται μεταξύ τους σταθερά μέ μιά ὁριζόντια ράβδο. Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κάθε ἐμβόλου ἔχει ἐμβαδό $S = 300$ cm² καί στήν ἀρχή ἡ ἀπόσταση κάθε ἐμβόλου ἀπό τή βάση τοῦ ἀντίστοιχου κυλίνδρου εἶναι 25 cm. Οἱ κύλινδροι περιέχουν ἀέρα μέ θερμοκρασία 0^0 C καί πίεση 76 cm Hg. Θερμαίνουμε τόν κύλινδρο Α σέ θερμοκρασία 150^0 C, ἐνῶ ὁ ἄλλος κύλινδρος Α΄ διατηρεῖται σέ σταθερή θερμοκρασία 0^0 C. Νά βρεθεῖ ἡ μετατόπιση τοῦ ἐμβόλου ΕΕ΄ καί ἡ πίεση πού ἐπικρατεῖ μέσα σέ κάθε κύλινδρο, ὅταν ἀποκατασταθεῖ ἰσορροπία.

102. Νά βρεθεῖ ἡ μάζα m τοῦ ὀξυγόνου πού ὑπάρχει μέσα σέ μιά μεταλλική φιάλη, ἄν ὁ ὄγκος τῆς φιάλης εἶναι $V = 100$ lt καί τό ἀέριο ἔχει θερμοκρασία $\theta = 15^0$ C καί πίεση $p = 50$ Atm. Πυκνότητα ὀξυγόνου σέ κανονικές συνθῆκες $\rho_0 = 1{,}43$ gr/lt.

103. Μέσα σέ τελείως κενό δοχεῖο, πού ἔχει σταθερό ὄγκο $V = 2$ lt, βάζουμε μάζα ὑδρογόνου ἴση μέ $m_1 = 0{,}1$ gr πού ἔχει θερμοκρασία $\theta_1 = 17^0$ C. Ἀργότερα ἀφαιροῦμε ἀπό τό δοχεῖο μιά μάζα m ὑδρογόνου. Τό ἀέριο, πού ἀπόμεινε στό δοχεῖο, σέ θερμοκρασία $\theta_2 = 10^0$ C ἔχει πίεση p_2 ἴση μέ τό 1/100 τῆς ἀρχικῆς πιέσεως p_1 τοῦ ἀερίου. Νά βρεθεῖ πόση εἶναι ἡ μάζα m τοῦ ὀξυγόνου πού ἀφαιρέσαμε. Πυκνότητα τοῦ ὑδρογόνου σέ κανονικές συνθῆκες $\rho_0 = 0{,}089$ gr/lt.

104. Ἕνας κύλινδρος ἀπό χάλυβα εἶναι κατακόρυφος ἔχει ὕψος 50 cm καί ἡ βάση του ἔχει ἐμβαδό 300 cm². Μέσα στόν κύλινδρο ὑπάρχει ἀτμοσφαιρικός ἀέρας, πού ἐκείνη τή στιγμή ἔχει θερμοκρασία 0^0 C καί πίεση 74,5 cm Hg. Στήν πάνω ἄκρη τοῦ κυλίνδρου, πού εἶναι ἀνοιχτή, ἐφαρμόζουμε ἕνα ἔμβολο πού κλείνει ἑρμητικά τόν κύλινδρο. Τό ἔμβολο ἔχει βάρος 6 kp καί κατεβαίνει μέσα στόν κύλινδρο. 1) Νά βρεθεῖ πόση μάζα ἀέρα ἀποκλείστηκε μέσα στόν κύλινδρο καί σέ πόσο ὕψος h πάνω ἀπό τή βάση τοῦ κυλίνδρου σταμάτησε τό ἔμβολο. 2) Θερμαίνουμε τόν κύλινδρο καί ἡ θερμοκρασία του γίνεται 30^0 C. Νά βρεθεῖ πόσο βάρος πρέπει νά προσθέσουμε πάνω στό ἔμβολο, γιά νά διατηρηθεῖ στήν ἴδια θέση του. Πυκνότητες σέ κανονικές συνθῆκες : τοῦ ἀέρα $\rho_0 = 1{,}293$ gr/lt, τοῦ ὑδραργύρου $\rho_\upsilon = 13{,}6$ gr/cm^3. Ἡ διαστολή τοῦ κυλίνδρου εἶναι ἀσήμαντη.

105. Πόσο ὄγκο ἔχει μιά μάζα ἰδανικοῦ ἀερίου ἴση μέ m = 1,2 mol σέ θερμοκρασία 67^0 C καί πίεση 72 cm Hg ; Πυκνότητα ὑδραργύρου $\rho = 13{,}6$ gr/cm^3. $g = 10$ m/sec^2 · $R = 8{,}31$ Joule · grad^{-1} · mol^{-1}.

106. Ἕνα ἰδανικό ἀέριο σέ θερμοκρασία 320^0 K καί ὑπό πίεση 3,5 at ἔχει ὄγκο 2 m^3. Πόσα γραμμομόρια τοῦ ἀερίου ὑπάρχουν μέσα σ' αὐτό τόν ὄγκο ;

107. Δύο κλειστά γυάλινα δοχεῖα A καί B ἔχουν ἀντίστοιχα ὄγκο $V = 0{,}7$ lt καί $V_2 = 0{,}3$ lt. Τά δύο δοχεῖα συγκοινωνοῦν μεταξύ τους μέ τριχοειδή σωλήνα καί περιέχουν ξηρό ἀέρα, πού ἀρχικά ἔχει θερμοκρασία $\theta = 20^0$ C καί πίεση $p_0 = 1$ at. Ἔπειτα διατηροῦμε τό δοχεῖο A σέ θερμοκρασία $\theta_1 = 100^0$ C καί τό δοχεῖο B σέ θερμοκρασία $\theta_2 = 0^0$ C. Νά βρεθεῖ πόση εἶναι τότε ἡ πίεση τοῦ ἀέρα μέσα σέ κάθε δοχεῖο. Ἡ διαστολή τῶν δοχείων παραλείπεται.

108. Ἔχουμε δύο γυάλινες σφαῖρες A καί B πού ἀντίστοιχα ἔχουν ὄγκο $V_1 = 200$ cm^3 καί $V_2 = 100$ cm^3. Κάθε σφαίρα κλείνεται μέ στρόφιγγα. Ἡ σφαίρα A περιέχει ξηρό ἀέρα, πού ἔχει θερμοκρασία $\theta_1 = 25^0$ C καί πίεση $p_1 = 1{,}5$ at. Ἡ σφαίρα B περιέχει ξηρό ὑδρογόνο, πού ἔχει θερμοκρασία $\theta_2 = 10^0$ C καί πίεση $p_2 = 2$ at. Συνδέουμε τίς δύο σφαῖρες μέ τριχοειδή σωλήνα καί φέρνουμε τό σύστημα τῶν ἑνωμένων δύο σφαιρῶν μέσα σέ χῶρο ὅπου ἡ θερμοκρασία εἶναι $\theta = 27^0$ C. Ἀνοίγουμε τίς στρόφιγγες. Πόση πίεση ἔχει τό μίγμα τῶν δύο ἀερίων μέσα σέ κάθε φιάλη ; Ὁ ὄγκος κάθε φιάλης διατηρεῖται σταθερός.

109. Ἀπό τήν καταστατική ἐξίσωση τῶν ἰδανικῶν ἀερίων νά βρεθεῖ πόση μάζα m ἔχει τό ὀξυγόνο πού περιέχεται μέσα σέ μιά μεταλλική φιάλη τῶν 50 lt σέ θερμοκρασία 27^0 C καί ὑπό πίεση 100 at. Μοριακή μάζα ὀξυγόνου $\mu = 32$. $g = 10$ m/sec^2.

110. Ἡ μηχανική θεωρία τῆς θερμότητας ἀποδείχνει ὅτι σέ ἀπόλυτη θερμοκρασία T ἡ ταχύτητα υ τῶν μορίων ἑνός ἀερίου, πού ἔχει μοριακή μάζα μ, δίνεται ἀπό τήν ἐξίσωση :

$$\upsilon = \sqrt{\frac{3\,R \cdot T}{\mu}}$$

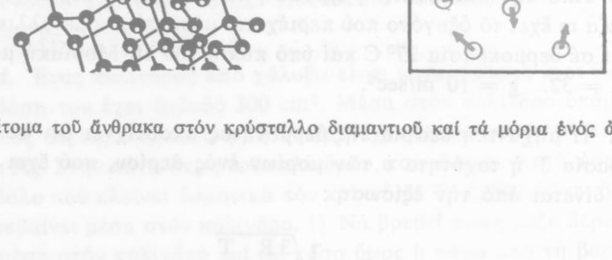
Ὅταν ὁ ἀέρας ἔχει θερμοκρασία 20^0 C, πόσος εἶναι ὁ λόγος τῆς ταχύτητας υ_O τῶν μορίων τοῦ ὀξυγόνου πρός τήν ταχύτητα υ_A τῶν μορίων τοῦ ἀζώτου;

111. Μέσα σ' ἕνα δοχεῖο ὑπάρχει ἀέρας σέ θερμοκρασία 20^0 C. Ἀραιώνουμε αὐτόν τόν ἀέρα, ὥστε ἡ πίεσή του νά γίνει ἴση μέ $p_1 = 10^{-10}$ Atm. Πόσα μόρια περιέχονται σέ 1 cm^3 ὑπό αὐτές τίς συνθῆκες καί πόση εἶναι τότε ἡ πυκνότητα τοῦ ἀέρα; Πυκνότητα τοῦ ἀέρα ὑπό κανονικές συνθῆκες $\rho_0 = 1{,}293$ gr/lt. $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ μόρια/mol.

112. Ἡ μηχανική θεωρία τῆς θερμότητας ἀποδείχνει ὅτι ἡ μέση κινητική ἐνέργεια ἑνός μορίου τοῦ ἀερίου εἶναι ἀνάλογη μέ τήν ἀπόλυτη θερμοκρασία T τοῦ ἀερίου:

$$\frac{1}{2}\, m \cdot \upsilon^2 = k \cdot T$$

ὅπου m εἶναι ἡ μάζα τοῦ μορίου. Νά βρεθεῖ ἡ τιμή τοῦ συντελεστῆ k γιά τό ὀξυγόνο πού τά μόριά του στή θερμοκρασία 0^0 C ἔχουν μέση ταχύτητα $\upsilon = 460$ m/sec.

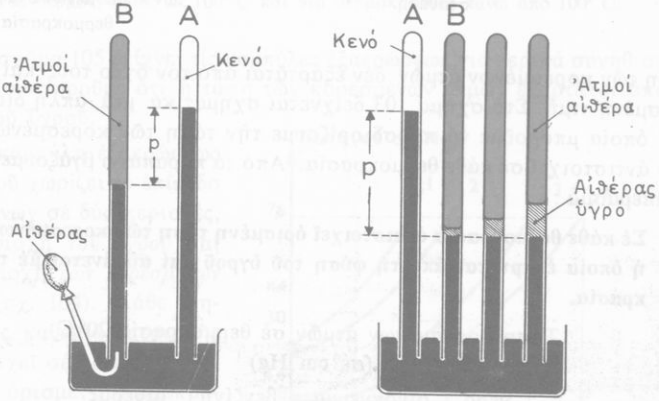


Τά ἄτομα τοῦ ἄνθρακα στόν κρύσταλλο διαμαντιοῦ καί τά μόρια ἑνός ἀερίου.

Κορεσμένοι καί ἀκόρεστοι ἀτμοί - Τριπλό σημεῖο

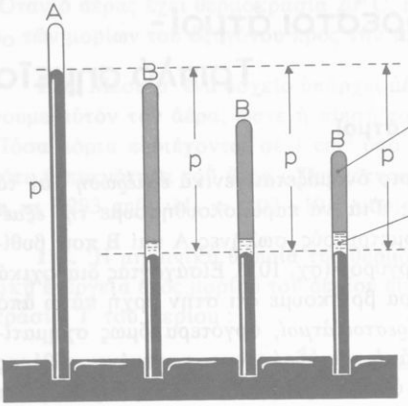
51. Κορεσμένοι καί ἀκόρεστοι ἀτμοί

Ἡ μεταβολή ἑνός ὑγροῦ σέ ἀέριο ὀνομάζεται γενικά *ἐξαέρωση* καί τό παραγόμενο ἀέριο ὀνομάζεται *ἀτμός*. Γιά νά παρακολουθήσουμε *τήν ἐξαέρωση στό κενό*, παίρνουμε δύο βαρομετρικούς σωλῆνες Α καί Β πού βυθίζονται μέσα στήν ἴδια λεκάνη ὑδραργύρου (σχ. 101). Εἰσάγοντας διαδοχικά μέσα στό σωλήνα Β σταγόνες αἰθέρα βρίσκουμε ὅτι στήν ἀρχή πάνω ἀπό τόν ὑδράργυρο σχηματίζονται *ἀκόρεστοι ἀτμοί*, ἀργότερα ὅμως σχηματίζονται *κορεσμένοι ἀτμοί* καί πάνω ἀπό τόν ὑδράργυρο παραμένει αἰθέρας σέ ὑγρή κατάσταση. Δηλαδή σέ μιά ὁρισμένη θερμοκρασία θ μποροῦν μέσα σέ ἕναν κλειστό χῶρο *νά συνυπάρχουν* τό ὑγρό καί οἱ κορεσμένοι ἀτμοί του.



Σχ. 101. Ἐξαέρωση στό κενό.

α. Ἰδιότητες τῶν κορεσμένων ἀτμῶν. Μέσα στό βαρομετρικό σωλήνα Β (σχ. 102) ὑπάρχουν κορεσμένοι ἀτμοί αἰθέρα καί λίγος αἰθέρας σέ ὑγρή κατάσταση. Ἄν κατεβάσουμε τό σωλήνα Β *ὁ ὄγκος* τῶν κορεσμένων ἀτμῶν *ἐλαττώνεται*, ἀλλά ἡ *τάση* p τῶν κορεσμένων ἀτμῶν διατηρεῖται *σταθερή*. Ταυτόχρονα παρατηροῦμε ὅτι αὐξάνεται ἡ ποσότητα τοῦ ὑγροῦ αἰθέρα, πού ὑπάρχει πάνω ἀπό τόν ὑδράργυρο. Ὥστε, ὅταν *ἐλαττώνεται* ὁ ὄγκος τῶν κορεσμένων ἀτμῶν, ἕνα μέρος ἀπό αὐτούς *ὑγροποιεῖται* καί ἀντίστροφα, ὅταν αὐξάνεται ὁ ὄγκος τῶν κορεσμένων ἀτμῶν ἕνα μέρος τοῦ ὑγροῦ ἐξαερώνεται. Ἀπό τά παραπάνω συνάγεται ὅτι *σέ μιά ὁρισμένη θερμοκρασία* ἡ



Σχ. 102. Ἡ τάση τῶν κορεσμένων ἀτμῶν διατηρεῖται σταθερή.

Σχ. 103. Μέτρηση τῆς τάσεως τῶν κορεσμένων ἀτμῶν σέ κάθε θερμοκρασία.

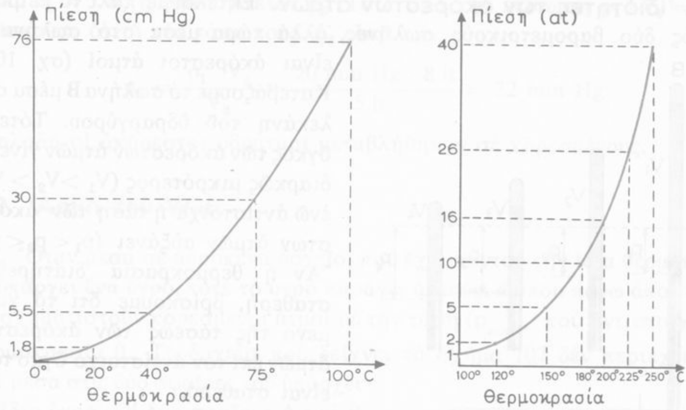
τάση τῶν κορεσμένων ἀτμῶν δέν ἐξαρτᾶται ἀπό τόν ὄγκο τους καί ἔχει μιά ὁρισμένη τιμή. Στό σχῆμα 103 δείχνεται σχηματικά μιά ἁπλή διάταξη μέ τήν ὁποία μποροῦμε νά προσδιορίζουμε τήν τάση τῶν κορεσμένων ἀτμῶν πού ἀντιστοιχεῖ σέ κάθε θερμοκρασία. Ἀπό τά παραπάνω βγάζουμε τό ἑξῆς συμπέρασμα :

Σέ κάθε θερμοκρασία ἀντιστοιχεῖ ὁρισμένη τάση τῶν κορεσμένων ἀτμῶν, ἡ ὁποία ἐξαρτᾶται ἀπό τή φύση τοῦ ὑγροῦ καί αὐξάνεται μέ τή θερμοκρασία.

Τάση κορεσμένων ἀτμῶν σέ θερμοκρασία 20^{0}C
(σέ cm Hg)

νερό	οἰνόπνευμα	βενζίνη	αἰθέρας
1,75	4,4	7,5	44,2

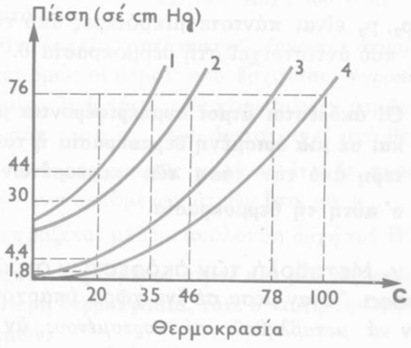
Καμπύλη ἐξαερώσεως. Παίρνουμε δύο ὀρθογώνιους ἄξονες, τόν ἄξονα τῶν θερμοκρασιῶν καί τόν ἄξονα τῶν πιέσεων (σχ. 104). Ἡ μεταβολή τῆς τάσεως τῶν κορεσμένων ἀτμῶν σέ συνάρτηση μέ τή θερμοκρασία παριστάνεται ἀπό μιά καμπύλη γραμμή, ἡ ὁποία ὀνομάζεται *καμπύλη ἐξαερώσεως*. Κάθε σημεῖο τῆς καμπύλης ἐξαερώσεως ἀντιστοιχεῖ σέ μιά *κατάσταση φυσικῆς ἰσορροπίας* μεταξύ τοῦ ὑγροῦ καί τῶν κορεσμένων ἀτμῶν του, δηλαδή κάθε σημεῖο τῆς καμπύλης ἐξαερώσεως δείχνει ὅτι *ὑπό ὁρισμένη πίεση καί σέ μιά ὁρισμένη ἀντίστοιχη θερμοκρασία μποροῦν νά συνυπάρχουν σέ κατάσταση ἰσορροπίας τό ὑγρό καί οἱ κορεσμένοι ἀτμοί του.*



Σχ. 104. Καμπύλη ἐξαερώσεως τοῦ νεροῦ.
Γιά θερμοκρασίες ὥς 100° C καί γιά θερμοκρασίες πάνω ἀπό 100° C.

Τό σχῆμα 105 δείχνει τίς καμπύλες ἐξαερώσεως γιά μερικά συνηθισμένα ὑγρά. Παρατηροῦμε ὅτι ἡ τάση τῶν κορεσμένων ἀτμῶν ἐξαρτᾶται ἀπό τή φύση τοῦ ὑγροῦ.

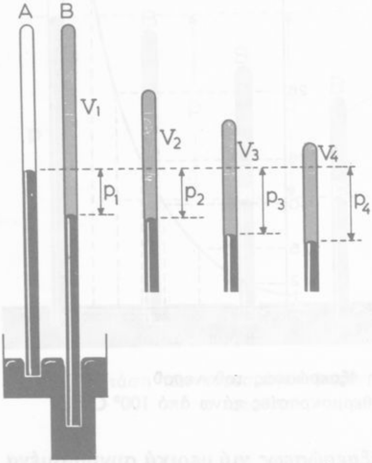
Ἡ καμπύλη ἐξαερώσεως τοῦ νεροῦ χωρίζει τό ἐπίπεδο τῶν ἀξόνων σέ δύο περιοχές, τήν περιοχή *τοῦ ὑγροῦ* καί τήν περιοχή *τῶν κορεσμένων ἀτμῶν* (σχ. 104). Κάθε σημεῖο τῆς καθεμιᾶς περιοχῆς ἀντιστοιχεῖ σέ ὁρισμένη πίεση καί ὁρισμένη θερμοκρασία. Μόνο σέ ὁρισμένες συνθῆκες πιέσεως καί θερμοκρασίας μποροῦν νά συνυπάρχουν σέ φυσική ἰσορροπία τό ὑγρό καί οἱ κορεσμένοι ἀτμοί του. Ὥστε :



Σχ. 105. Καμπύλες ἐξαερώσεως μερικῶν ὑγρῶν. 1. Αἰθέρας. 2. Διθειοῦχος ἄνθρακας. 3. Οἰνόπνευμα. 4. Νερό.

Ἡ καμπύλη ἐξαερώσεως ἑνός ὑγροῦ δείχνει πῶς μεταβάλλεται ἡ τάση τῶν κορεσμένων ἀτμῶν μέ τή θερμοκρασία καί δείχνει ἐπίσης σέ ποιές συνθῆκες θερμοκρασίας καί πιέσεως μποροῦν νά συνυπάρχουν σέ φυσική ἰσορροπία τό ὑγρό καί οἱ κορεσμένοι ἀτμοί του.

β. Ἰδιότητες τῶν ἀκόρεστων ἀτμῶν. Ἐκτελοῦμε πάλι τό πείραμα μέ τούς δύο βαρομετρικούς σωλῆνες, ἀλλά τώρα μέσα στό σωλήνα Β εἶναι ἀκόρεστοι ἀτμοί (σχ. 106). Κατεβάζουμε τό σωλήνα Β μέσα στή λεκάνη τοῦ ὑδραργύρου. Τότε ὁ ὄγκος τῶν ἀκόρεστων ἀτμῶν γίνεται διαρκῶς μικρότερος ($V_1 > V_2 > V_3$), ἐνῶ ἀντίστοιχα ἡ τάση τῶν ἀκόρεστων ἀτμῶν αὐξάνει ($p_1 < p_2 < p_3$). Ἄν ἡ θερμοκρασία διατηρεῖται σταθερή, βρίσκουμε ὅτι τό γινόμενο τῆς τάσεως τῶν ἀκόρεστων ἀτμῶν ἐπί τόν ἀντίστοιχο ὄγκο τους εἶναι σταθερό.



Σχ. 106. Ἡ τάση τῶν ἀκόρεστων ἀτμῶν μεταβάλλεται.

$$p_1 \cdot V_1 = p_2 \cdot V_2 = p_3 \cdot V_3 = \text{σταθ.}$$

Ἄρα οἱ ἀκόρεστοι ἀτμοί ἀκολουθοῦν τό νόμο Boyle - Mariotte.

Γιά μιά ὁρισμένη θερμοκρασία θ οἱ τάσεις τῶν ἀκόρεστων ἀτμῶν p_1, p_2, p_3 εἶναι πάντοτε μικρότερες ἀπό τήν τάση τῶν κορεσμένων ἀτμῶν $p_{κορ}$ πού ἀντιστοιχεῖ στή θερμοκρασία θ. Ὥστε:

Οἱ ἀκόρεστοι ἀτμοί συμπεριφέρονται μέ μεγάλη προσέγγιση ὡς ἀέρια καί σέ μιά ὁρισμένη θερμοκρασία ἡ τάση τους (p) εἶναι πάντοτε μικρότερη ἀπό τήν τάση τῶν κορεσμένων ἀτμῶν ($p_{κορ}$), πού ἀντιστοιχεῖ σ' αὐτή τή θερμοκρασία.

γ. Μεταβολή τῶν ἀκόρεστων ἀτμῶν σέ κορεσμένους καί ἀντίστροφα. Ὅταν μέσα σέ ἕνα χῶρο ὑπάρχουν ἀκόρεστοι ἀτμοί, αὐτοί μποροῦν *νά μεταβληθοῦν σέ κορεσμένους*, ἄν ἐλαττωθεῖ ὁ ὄγκος τῶν ἀκόρεστων ἀτμῶν ἤ ἄν ἐλαττωθεῖ ἡ θερμοκρασία τους.

Ἀντίστροφα, ὅταν μέσα σέ ἕνα χῶρο ὑπάρχουν κορεσμένοι ἀτμοί, αὐτοί μποροῦν *νά μεταβληθοῦν σέ ἀκόρεστους*, ἄν αὐξηθεῖ ὁ ὄγκος τῶν κορεσμένων ἀτμῶν ἤ ἄν αὐξηθεῖ ἡ θερμοκρασία τους.

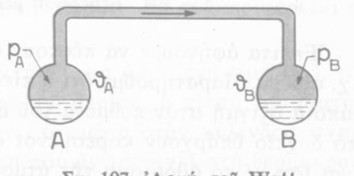
Παράδειγμα. Στή θερμοκρασία 30^0 C ἡ τάση τῶν κορεσμένων ὑδρατμῶν εἶναι $p_{30} \simeq 32$ mm Hg. Στή θερμοκρασία 30^0C ἀκόρεστοι ὑδρατμοί ἔχουν ὄγκο $V_1 = 8$ lt καί τάση $p_1 = 20$ mm Hg. Ἄν ὁ ὄγκος τους ἐλαττωθεῖ καί γίνει $V_2 = 5$ lt, ἡ τάση γίνεται p_2. Τότε ἀπό τήν ἐξίσωση $p_1 \cdot V_1 = p_2 \cdot V_2$ βρίσκουμε ὅτι ἡ νέα τάση τους p_2 εἶναι:

$$p_2 = \frac{p_1 \cdot V_1}{V_2} = \frac{20 \text{ mm Hg} \cdot 8 \text{ lt}}{5 \text{ lt}} = 32 \text{ mm Hg}$$

Δηλαδή οἱ ἀκόρεστοι ὑδρατμοί μεταβλήθηκαν σέ κορεσμένους.

52. Ἀρχή τοῦ Watt

Ὅταν μέσα σέ ἀερόκενο δοχεῖο, πού ἔχει παντοῦ τήν ἴδια θερμοκρασία θ, ὑπάρχει ἕνα ὑγρό, τότε τό ὑγρό παράγει ἀτμούς, ὥσπου πάνω ἀπό τό ὑγρό νά σχηματιστοῦν κορεσμένοι ἀτμοί μέ τήν τάση ($p_{κορ}$), πού ἀντιστοιχεῖ στή θερμοκρασία θ. Τό δοχεῖο πού δείχνει τό σχῆμα 107 δέν περιέχει ἀέρα καί μέσα στίς δύο σφαῖρες του ὑπάρχει τό ἴδιο ὑγρό. Οἱ δύο σφαῖρες Α καί Β διατηροῦνται *σέ δύο διαφορετικές θερμοκρασίες* καί εἶναι $θ_A > θ_B$. Τότε ἡ τάση τῶν κορεσμένων ἀτμῶν μέσα στίς δύο σφαῖρες εἶναι διαφορετική καί εἶναι $p_A > p_B$ (γιατί εἶναι $θ_A > θ_B$). Σέ αὐτή τήν περίπτωση, εἶναι ἀδύνατο νά ἀποκατασταθεῖ ἰσορροπία μέσα στό δοχεῖο, γιατί *συνεχῶς ἔρχονται ἀτμοί* ἀπό τή σφαίρα Α στή σφαίρα Β. Ἐκεῖ ὅμως οἱ ἀτμοί πού ἔρχονται, *ὑγροποιοῦνται ἀμέσως*, γιατί μέσα στή σφαίρα Β ἡ τάση τῶν κορεσμένων ἀτμῶν δέν μπορεῖ νά γίνει μεγαλύτερη ἀπό τήν τάση p_B, πού ἀντιστοιχεῖ στή θερμοκρασία $θ_B$. Μέσα στή σφαίρα Α τό ὑγρό *συνεχῶς παράγει ἀτμούς*, προσπαθώντας νά διατηρήσει τήν τάση τῶν κορεσμένων ἀτμῶν ἴση μέ p_A.



Σχ. 107. Ἀρχή τοῦ Watt.

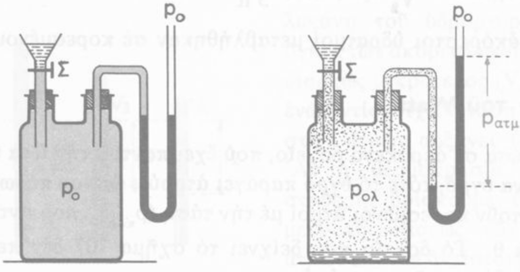
Τό φαινόμενο πού ἐξετάσαμε, ἐκφράζεται μέ τήν ἀκόλουθη *ἀρχή τοῦ Watt*:

Ὅταν μέσα σέ δοχεῖο ὑπάρχουν κορεσμένοι ἀτμοί καί μιά περιοχή τοῦ δοχείου διατηρεῖται σέ κατώτερη θερμοκρασία, τότε σ' αὐτή τήν περιοχή γίνεται ὑγροποίηση τῶν ἀτμῶν.

Ἡ ἀρχή τοῦ Watt ἐφαρμόζεται στήν ἀπόσταξη καί στό συμπυκνωτή τῶν ἀτμομηχανῶν.

53. Ἐξαέρωση μέσα σέ χῶρο μέ ἄλλο ἀέριο

Ὅταν ἕνα ὑγρό ἐξαερώνεται μέσα σέ χῶρο πού περιέχει ἄλλο ἀέριο, τότε ἡ παραγωγή ἀτμῶν *ἐπιβραδύνεται*, ἐξαιτίας τῆς παρουσίας τοῦ ἄλλου ἀερίου, ἀλλά δέν ἀναστέλλεται τελείως. Αὐτή τήν ἐξαέρωση τοῦ ὑγροῦ τήν ἐξετάζουμε πειραματικά μέ τή συσκευή πού δείχνει τό σχῆμα 108. Ἀρχικά ἡ στρόφιγγα Σ εἶναι ἀνοιχτή καί τότε μέσα στό δοχεῖο ὑπάρχει ἀέρας μέ πίεση ἴση μέ τήν ἀτμοσφαιρική πίεση.



Σχ. 108. Ἐξαέρωση μέσα σέ χῶρο μέ ἄλλο ἀέριο.

Ἔπειτα ἀφήνουμε νά πέφτουν ἀργά μέσα στό δοχεῖο σταγόνες ὑγροῦ, π.χ. αἰθέρα. Παρατηροῦμε ὅτι ἡ πίεση μέσα στό δοχεῖο συνεχῶς αὐξάνεται. Κάποια στιγμή στόν πυθμένα τοῦ δοχείου παρουσιάζεται ὑγρό. Τότε μέσα στό δοχεῖο ὑπάρχουν κορεσμένοι ἀτμοί καί ἡ ὁλική πίεση τοῦ μίγματος εἶναι ἴση μέ τό ἄθροισμα τῆς ἀτμοσφαιρικῆς πιέσεως καί τῆς τάσεως τῶν κορεσμένων ἀτμῶν, πού ἀντιστοιχεῖ στή θερμοκρασία τοῦ πειράματος.

$$p_{\text{μίγματος}} = p_{\text{ἀτμοσφαιρική}} + p_{\text{κορ. ἀτμῶν}}$$

Αὐτό τό ἐξαγόμενο τοῦ πειράματος εἶναι σύμφωνο μέ τό νόμο τοῦ Dalton καί φανερώνει ὅτι :

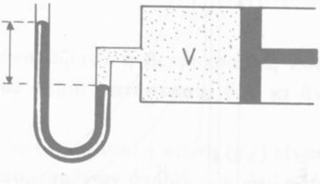
Ἡ ὁλική πίεση ἑνός μίγματος ἀερίου καί ἀτμοῦ εἶναι ἴση μέ τό ἄθροισμα τῶν μερικῶν πιέσεων, πού θά εἶχε τό καθένα ἀέριο τοῦ μίγματος, ἄν μόνο του ἦταν μέσα σ᾿ ὁλόκληρο τόν ὄγκο τοῦ μίγματος.

Ὥστε κατά τήν ἐξαέρωση ὑγροῦ μέσα σέ χῶρο πού ὑπάρχουν ἄλλα ἀέρια, ἡ τάση τῶν ἀτμῶν, πού παράγει τό ὑγρό, εἶναι *ἀνεξάρτητη* ἀπό τήν παρουσία τῶν ἄλλων ἀερίων ἤ ἄλλων ἀτμῶν.

54. Ὑγροποίηση τῶν ἀερίων

Ἡ *ὑγροποίηση* ἑνός ἀερίου εἶναι τό ἀντίστροφο φαινόμενο τῆς ἐξαερώσεως. Ὁ Andrews βρῆκε πειραματικά ποιές συνθῆκες πρέπει νά ἐπικρατοῦν γιά νά εἶναι δυνατή ἡ ὑγροποίηση ἑνός ἀερίου. Θά ἐπαναλάβουμε τό πείραμα τοῦ Andrews. Μέσα σέ ἕναν κύλινδρο ὑπάρχει ὁρισμένη μάζα m διοξειδίου τοῦ ἄνθρακα (σχ. 109). Μέ ἔμβολο μποροῦμε νά μεταβάλλουμε τόν ὄγκο τοῦ ἀερίου καί μέ μανόμετρο νά μετρᾶμε κάθε φορά τήν πίεσή του. Ὁ κύλινδρος διατηρεῖται σέ μιά σταθερή θερμοκρασία, π.χ. 13^0 C, καί ἑπομένως ἡ μεταβολή τοῦ ἀερίου εἶναι *ἰσόθερμη*.

Στήν ἀρχή τό ἀέριο ἔχει μεγάλο ὄγκο καί μικρή πίεση. Συμπιέζουμε πολύ ἀργά τό ἀέριο καί στό διάγραμμα p · V σημειώνουμε τίς ἀντίστοιχες τιμές τοῦ ὄγκου V καί τῆς πιέσεως p τοῦ ἀερίου. Τότε παρατηροῦμε τά ἑξῆς (σχ. 110):

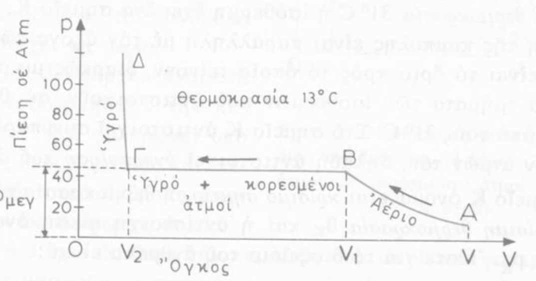


Σχ. 109. Πείραμα τοῦ Andrews.

α) Στήν ἀρχή ἡ μεταβολή τοῦ ὄγκου V τοῦ ἀερίου σέ συνάρτηση μέ τήν πίεσή του p ἀκολουθεῖ τό νόμο Boyle - Mariotte καί ἔτσι παίρνουμε *τό τόξο* AB. Τό διοξείδιο τοῦ ἄνθρακα σ' αὐτή τήν περίπτωση συμπεριφέρεται σάν ἀέριο ἤ ἀκόρεστος ἀτμός.

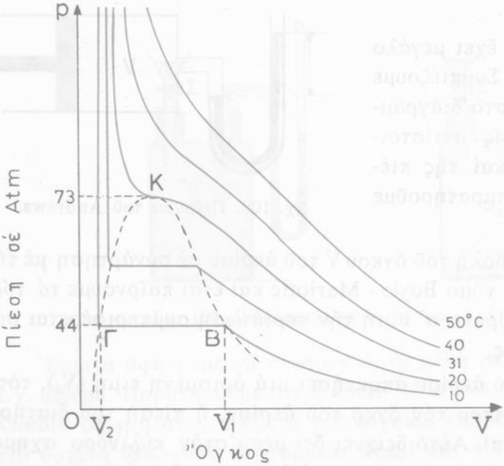
β) Ὅταν ὁ ὄγκος τοῦ ἀερίου ἀποκτήσει μιά ὁρισμένη τιμή (V_1), τότε, ἄν ἐλαττώσουμε περισσότερο τόν ὄγκο τοῦ ἀερίου, ἡ πίεσή του διατηρεῖ μιά *σταθερή τιμή* (44 Atm). Αὐτό δείχνει ὅτι μέσα στόν κύλινδρο σχηματίστηκαν *κορεσμένοι ἀτμοί* μέ τήν τάση πού ἀντιστοιχεῖ στή θερμοκρασία τῶν 13^0 C ($p_{κορ} = 44$ Atm). Ἡ ἐλάττωση τοῦ ὄγκου τοῦ ἀερίου γίνεται τώρα *ὑπό σταθερή πίεση* ($p_{κορ}$ = σταθ.). Ἡ συνεχής ἐλάττωση τοῦ ὄγκου τῶν κορεσμένων ἀτμῶν προκαλεῖ συνεχῶς *ὑγροποίηση* μέρους τῆς μάζας τους. Ἔτσι παίρνουμε τό εὐθύγραμμο τμῆμα ΒΓ, πού εἶναι παράλληλο μέ τόν ἄξονα τῶν ὄγκων.

γ) Ὅταν ὑγροποιηθοῦν ὅλοι οἱ κορεσμένοι ἀτμοί, τότε χρειάζεται πολύ μεγάλη πίεση, γιά νά ἐλαττωθεῖ περισσότερο ὁ ὄγκος, γιατί τά ὑγρά εἶναι ἀσυμπίεστα. Ἔτσι παίρνουμε *τό εὐθύγραμμο τμῆμα* ΓΔ, πού εἶναι σχεδόν παράλληλο μέ τόν ἄξονα τῶν πιέσεων.



Σχ. 110. Ἰσόθερμη στή θερμοκρασία 13^0 C.

α. Κρίσιμη θερμοκρασία. Μέ τήν παραπάνω μάζα m τοῦ διοξειδίου τοῦ ἄνθρακα ἐκτελοῦμε τό ἴδιο πείραμα σέ διαφορετικές θερμοκρασίες. Τότε βρίσκουμε ὅτι σέ κάθε θερμοκρασία ἀντιστοιχεῖ μιά ἰδιαίτερη ἰσόθερμη καμπύλη (σχ. 111). Ἔτσι παίρνουμε *τό διάγραμμα τῶν ἰσοθέρμων*, ἀπό τό ὁποῖο βγάζουμε τά ἑξῆς συμπεράσματα :



Σχ. 111. Ἰσόθερμες καί τό κρίσιμο σημεῖο K.

α) *Κάτω ἀπό τή θερμοκρασία* 31° C ὅλες οἱ ἰσόθερμες ἔχουν ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα (ΒΓ), παράλληλο μέ τόν ἄξονα τῶν ὄγκων. Ὅσο ὑψώνεται ἡ θερμοκρασία τό εὐθύγραμμο τμῆμα διαρκῶς γίνεται μικρότερο. Αὐτό τό τμῆμα κάθε ἰσόθερμης ἀντιστοιχεῖ σέ *ὑγροποίηση* καί φανερώνει ὅτι σ' αὐτή τή θερμοκρασία καί ὑπό ὁρισμένη ἀντίστοιχη πίεση *εἶναι δυνατή ἡ συνύπαρξη τοῦ ὑγροῦ καί τῶν κορεσμένων ἀτμῶν του.*

β) *Πάνω ἀπό τή θερμοκρασία* 31° C ὅλες οἱ ἰσόθερμες δέν ἔχουν εὐθύγραμμο τμῆμα καί ἑπομένως *ἀποκλείεται* ἡ συνύπαρξη τοῦ ὑγροῦ καί τῶν κορεσμένων ἀτμῶν του. Ἄρα πάνω ἀπό τή θερμοκρασία 31° C *ἀποκλείεται νά γίνει ὑγροποίηση* τοῦ διοξειδίου τοῦ ἄνθρακα, ὁσοδήποτε κι ἄν συμπιεστεῖ.

γ) *Στή θερμοκρασία* 31° C ἡ ἰσόθερμη ἔχει ἕνα σημεῖο K, στό ὁποῖο ἡ ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης εἶναι παράλληλη μέ τόν ἄξονα τῶν ὄγκων. Τό σημεῖο K εἶναι τό ὅριο πρός τό ὁποῖο τείνουν, διαρκῶς μικραίνοντας, τά εὐθύγραμμα τμήματα τῶν ἰσοθέρμων πού ἀντιστοιχοῦν σέ θερμοκρασίες κατώτερες ἀπό τούς 31° C. Στό σημεῖο K ἀντιστοιχεῖ συνύπαρξη ὑγροῦ καί κορεσμένων ἀτμῶν του, δηλαδή ἀντιστοιχεῖ *ὑγροποίηση τοῦ ἀερίου.*

Τό σημεῖο K ὀνομάζεται *κρίσιμο σημεῖο*, ἡ θερμοκρασία τῶν 31° C ὀνομάζεται *κρίσιμη θερμοκρασία* θ_K καί ἡ ἀντίστοιχη πίεση ὀνομάζεται *κρίσιμη πίεση* p_K. Ὥστε γιά τό διοξείδιο τοῦ ἄνθρακα εἶναι :

κρίσιμη θερμοκρασία $\theta_K = 31^\circ C$ κρίσιμη πίεση $p_K = 73$ Atm

Στό κρίσιμο σημεῖο Κ ἀντιστοιχεῖ καί δρισμένη πυκνότητα, πού ὀνομάζεται *κρίσιμη πυκνότητα* (ρ_K).

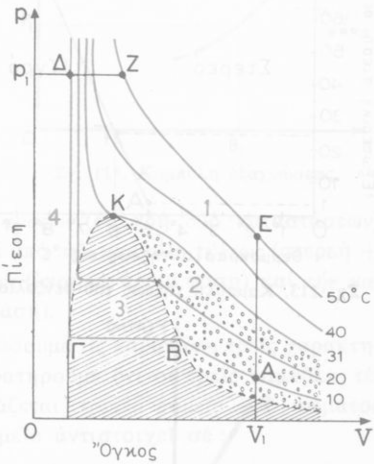
Ἔτσι ἀπό τήν πειραματική ἔρευνα καταλήξαμε στά ἀκόλουθα συμπεράσματα γιά τήν ὑγροποίηση τῶν ἀερίων :

I. Κρίσιμη θερμοκρασία ἑνός σώματος ὀνομάζεται ἡ θερμοκρασία, πού πάνω ἀπό αὐτή τό σῶμα ὑπάρχει μόνο σέ ἀέρια κατάσταση, ὅσο κι ἄν συμπιεστεῖ.

II. Στήν κρίσιμη θερμοκρασία (θ_K) καί ὑπό τήν κρίσιμη πίεση (p_K) εἶναι δυνατή ἡ συνύπαρξη τοῦ ὑγροῦ καί τῶν κορεσμένων ἀτμῶν του, δηλαδή εἶναι δυνατή ἡ ὑγροποίηση τοῦ ἀερίου.

III. Ὅταν ἡ θερμοκρασία τοῦ ἀερίου εἶναι κατώτερη ἀπό τήν κρίσιμη θερμοκρασία, τότε εἶναι δυνατή ἡ ὑγροποίηση τοῦ ἀερίου μέ συμπίεσή του.

6. Συνθῆκες γιά τήν ὕπαρξη μιᾶς φάσεως. Οἱ τρεῖς καταστάσεις, μέ τίς ὁποῖες μπορεῖ νά ὑπάρχει ἕνα σῶμα, ὀνομάζονται *φάσεις* καί λέμε ἡ *στερεή*, ἡ *ὑγρή* καί ἡ *ἀέρια φάση*. Θά ἐξετάσουμε τό διάγραμμα τῶν ἰσοθέρμων τοῦ διοξειδίου τοῦ ἄνθρακα (σχ. 112). Ἡ καμπύλη ΒΚΓ, πού περνάει ἀπό τό κρίσιμο σημεῖο Κ καί ἀπό τίς ἄκρες τῶν εὐθύγραμμων τμημάτων τῶν ἰσοθέρμων ὀνομάζεται *καμπύλη κορεσμοῦ*. Αὐτή ἡ καμπύλη καί ἡ *κρίσιμη ἰσόθερμη* (31^0 C) χωρίζουν τό ἐπίπεδο τοῦ διαγράμματος σέ τέσσερις περιοχές.



Σχ. 112. Οἱ διάφορες φάσεις τοῦ διοξειδίου τοῦ ἄνθρακα. (1 ἀέριο. 2 ἀκόρεστοι ἀτμοί. 3 κορεσμένοι ἀτμοί καί ὑγρό. 4 ὑγρό).

Ἡ περιοχή 1 ὑπάρχει πάνω ἀπό τήν κρίσιμη ἰσόθερμη καί φανερώνει ὑπό ποιές συνθῆκες θερμοκρασίας καί πιέσεως τό διοξείδιο τοῦ ἄνθρακα μπορεῖ νά ὑπάρχει *ὡς ἀέριο*.

Ἡ περιοχή 2 ὑπάρχει ἀνάμεσα στήν κρίσιμη ἰσόθερμη καί τήν καμπύλη κορεσμοῦ καί φανερώνει ὑπό ποιές συνθῆκες θερμοκρασίας καί πιέσεως τό διοξείδιο τοῦ ἄνθρακα μπορεῖ νά ὑπάρχει *ὡς ἀκόρεστος ἀτμός*.

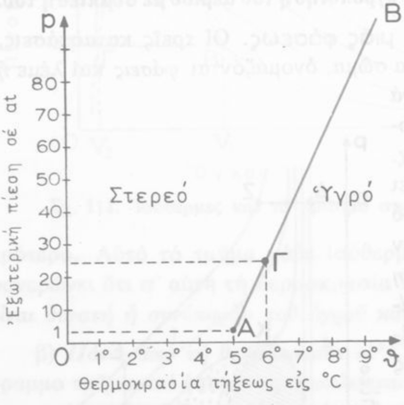
Ἡ περιοχή 3 ἔχει ὡς ὅρια τήν καμπύλη κορεσμοῦ καί φανερώνει ὑπό ποιές συνθῆκες μποροῦν *νά συνυπάρχουν ὑγρό καί κορεσμένος ἀτμός* διοξειδίου τοῦ ἄνθρακα.

Ἡ περιοχή 4 ἔχει ὡς ὅρια ἕνα τμῆμα τῆς καμπύλης κορεσμοῦ καί ἕνα τμῆμα τῆς κρίσιμης ἰσόθερμης. Αὐτή ἡ περιοχή ἀντιστοιχεῖ *σέ ὑγρό* διοξείδιο τοῦ ἄνθρακα.

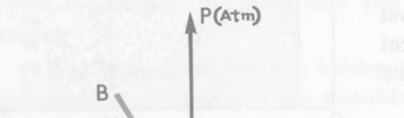
55. Τριπλό σημεῖο

Ἡ θερμότητα προκαλεῖ *μεταβολές τῆς καταστάσεως* τῶν σωμάτων καί ἔτσι παρατηροῦμε τά ἑξῆς τρία φαινόμενα, *τήν τήξη, τήν ἐξαέρωση* καί *τήν ἐξάχνωση*. Τήξη εἶναι ἡ μετάβαση ἑνός σώματος ἀπό τή στερεή στήν ὑγρή φάση. Ἐξαέρωση εἶναι ἡ μετάβαση ἀπό τήν ὑγρή στήν ἀέρια φάση. Ἐξάχνωση εἶναι ἡ μετάβαση ἀπό τή στερεή ἀπευθείας στήν ἀέρια φάση.

α. Καμπύλη τήξεως. Ξέρουμε ὅτι γιά τά περισσότερα σώματα ἡ θερμοκρασία τήξεως *ἀνεβαίνει*, ὅταν *αὐξάνεται* ἡ ἐξωτερική πίεση. Ἐξαίρεση ἀποτελεῖ ὁ πάγος καί λίγα ἄλλα σώματα. Ἡ μεταβολή τῆς θερμοκρασίας τήξεως εἶναι περίπου γραμμική συνάρτηση τῆς μεταβολῆς τῆς πιέσεως. Ἔτσι ἡ μεταβολή τῆς θερμοκρασίας τήξεως σέ συνάρτηση μέ τήν ἐξωτερική πίεση παριστάνεται γραφικά ἀπό *τήν καμπύλη τήξεως*. Στό σχῆμα 113 ἡ καμπύλη τήξεως ΑΒ ἀναφέρεται στό βενζόλιο, ἐκφράζει ὅμως τή μορφή τῆς καμπύλης τήξεως *γιά τά περισσότερα σώματα*. Τό σχῆμα 114 δείχνει τήν καμπύλη τήξεως τοῦ πάγου. Κάθε σημεῖο τῆς καμπύλης τήξεως, π.χ. τό σημεῖο Γ (σχ. 113), παριστάνει μιά ὁρισμένη *κατάσταση φυσικῆς ἰσορροπίας* μεταξύ τῆς στερεῆς καί τῆς ὑγρῆς φάσεως, δηλαδή φανερώνει ὅτι ὑπό ὁρισμένη ἐξωτερική πίεση καί σέ ὁρισμένη θερμοκρασία (θερμοκρασία τήξεως) μποροῦν *νά συνυπάρχουν ἡ στερεή καί ἡ ὑγρή φάση*.



Σχ. 113. Καμπύλη τήξεως τοῦ βενζολίου.



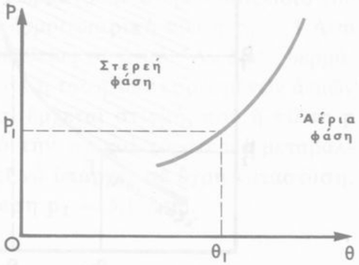
Σχ. 114. Καμπύλη τήξεως τοῦ πάγου.

Γιά ἕνα ὁρισμένο σῶμα ἡ καμπύλη τήξεως ἐκφράζει ὑπό ποιές συνθῆκες θερμοκρασίας καί πιέσεως μποροῦν νά συνυπάρχουν ἡ στερεή καί ἡ ὑγρή φάση τοῦ σώματος.

Μόνο ὑπό τίς συνθῆκες θερμοκρασίας καί πιέσεως, πού καθορίζει ἡ καμπύλη τήξεως, μπορεῖ νά συμβεῖ ἡ τήξη ἑνός σώματος.

β. Καμπύλη ἐξαερώσεως. Ἡ καμπύλη τήξεως εἶναι ἀνάλογη μέ *τήν καμπύλη ἐξαερώσεως*, πού, ὅπως εἴδαμε, ἐκφράζει ὑπό ποιές συνθῆκες θερμοκρασίας καί πιέσεως μποροῦν *νά συνυπάρχουν ἡ ὑγρή καί ἡ ἀέρια φάση τοῦ σώματος* (σχ. 104).

γ. Καμπύλη ἐξαχνώσεως. Ὅπως γιά τήν τήξη ἤ τήν ἐξαέρωση ἑνός σώματος ἔχουμε τήν ἀντίστοιχη καμπύλη τήξεως ἤ καμπύλη ἐξαερώσεως, ἔτσι καί γιά τήν ἐξάχνωση ἑνός σώματος ἔχουμε *τήν καμπύλη ἐξαχνώσεως*, ἡ ὁποία ἐκφράζει ὑπό ποιές συνθῆκες θερμοκρασίας καί πιέσεως *μποροῦν νά συνυπάρχουν ἡ στερεή καί ἡ ἀέρια φάση* (σχ. 115).



Σχ. 115. Καμπύλη ἐξαχνώσεως.

δ. Τριπλό σημεῖο. Οἱ συνθῆκες θερμοκρασίας καί πιέσεως ὑπό τίς ὁποῖες εἶναι δυνατή *ἡ συνύπαρξη δύο φάσεων* (δηλαδή δύο καταστάσεων) τοῦ σώματος καθορίζονται ἀντίστοιχα ἀπό *τήν καμπύλη τήξεως* (στερεή + + ὑγρή φάση), *τήν καμπύλη ἐξαερώσεως* (ὑγρή + ἀέρια φάση) καί *τήν καμπύλη ἐξαχνώσεως* (στερεή + ἀέρια φάση).

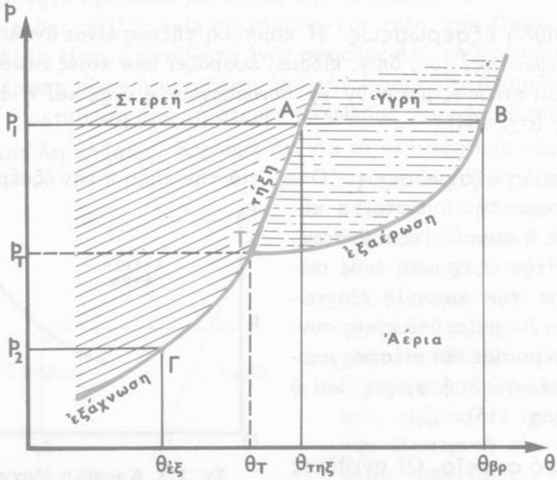
Ἄν στό ἴδιο διάγραμμα κατασκευάσουμε τίς παραπάνω τρεῖς χαρακτηριστικές καμπύλες ἑνός σώματος, παρατηροῦμε ὅτι οἱ τρεῖς καμπύλες τέμνονται σέ ἕνα σημεῖο Τ, πού ὀνομάζεται *τριπλό σημεῖο* τοῦ σώματος (σχ. 116). Γιά τό νερό τό τριπλό σημεῖο ἀντιστοιχεῖ σέ :

θερμοκρασία $\theta_T = 0{,}01^0\,C$ πίεση $p_T = 4{,}58$ mm Hg

Ἐπειδή τό τριπλό σημεῖο ἀνήκει καί στίς τρεῖς καμπύλες (τήξεως, ἐξαερώσεως καί ἐξαχνώσεως), συνάγεται ὅτι τό τριπλό σημεῖο καθορίζει τή συνθήκη θερμοκρασίας καί πιέσεως πού εἶναι ἀπαραίτητη, γιά νά μποροῦν *νά συνυπάρχουν* σέ φυσική ἰσορροπία *ἡ στερεή, ἡ ὑγρή* καί *ἡ ἀέρια φάση* τοῦ σώματος. Μόνο σέ μιά ὁρισμένη θερμοκρασία θ_T καί ὑπό μιά ὁρισμένη πίεση p_T εἶναι δυνατή *ἡ φυσική ἰσορροπία τῶν τριῶν φάσεων.*

Ἀπό τά παραπάνω καταλήγουμε στό ἑξῆς συμπέρασμα :

Οἱ καμπύλες τήξεως, ἐξαερώσεως καί ἐξαχνώσεως τέμνονται στό τριπλό σημεῖο, πού καθορίζει σέ ποιά θερμοκρασία (θ_T) καί ὑπό ποιά πίεση (p_T) μποροῦν νά συνυπάρχουν σέ κατάσταση φυσικῆς ἰσορροπίας οἱ τρεῖς φάσεις τοῦ σώματος (στερεή, ὑγρή καί ἀέρια).



Σχ. 116. Τριπλό σημεῖο (T).

ε. Συνθῆκες γιά τήν ὕπαρξη μιᾶς φάσεως ἤ τή συνύπαρξη περισσότερων φάσεων. Οἱ τρεῖς καμπύλες, τήξεως, ἐξαερώσεως καί ἐξαχνώσεως (σχ. 116), χωρίζουν τό ἐπίπεδο τοῦ διαγράμματος σέ τρεῖς περιοχές, πού καθεμιά ἀπό αὐτές ἀντιστοιχεῖ σέ *μιά σταθερή φάση* (κατάσταση) τοῦ σώματος, δηλαδή στή στερεή, στήν ὑγρή καί στήν ἀέρια φάση. Σέ κάθε σημεῖο μιᾶς περιοχῆς ἀντιστοιχοῦν ὁρισμένες συνθῆκες θερμοκρασίας καί πιέσεως. Ἔτσι καθεμιά φάση καθορίζεται ἀπό ὁρισμένα ὅρια. Τά σημεῖα, πού βρίσκονται πάνω σέ μιά ἀπό τίς τρεῖς καμπύλες, ἀντιστοιχοῦν *στή συνύπαρξη δύο φάσεων* (στερεή + ἀέρια, ἤ στερεή + ὑγρή ἤ ὑγρή + κορεσμένοι ἀτμοί). Μόνο τό τριπλό σημεῖο ἀντιστοιχεῖ στή συνύπαρξη καί τῶν τριῶν φάσεων (στερεή + ὑγρή + κορεσμένοι ἀτμοί).

Ἀπό τό διάγραμμα τοῦ σχήματος 116 φαίνεται ὅτι, ἄν ἕνα στερεό ὑπό πίεση p_1 *μεγαλύτερη* ἀπό τήν p_T θερμαίνεται συνεχῶς, ἔρχεται στιγμή πού τό σῶμα ἀποκτᾶ τή θερμοκρασία τήξεως $\theta_{τηξ}$ (σημεῖο A) καί τότε τό στερεό μεταβάλλεται σέ ὑγρό. Στό σημεῖο A συνυπάρχουν ἡ στερεή καί ἡ ὑγρή φάση. Ἄν ὑπό τήν ἴδια πίεση ($p_1 > p_T$) ἐξακολουθήσουμε νά θερμαίνουμε τό ὑγρό, πού σχηματίστηκε ἀπό τήν τήξη τοῦ στερεοῦ, ἔρχεται στιγμή πού τό ὑγρό ἀποκτᾶ τή θερμοκρασία βρασμοῦ $\theta_{\beta\rho}$ (σημεῖο Β) καί τό ὑγρό μεταβάλλεται σέ ἀέριο (κορεσμένους ἀτμούς). Στό σημεῖο Β συνυπάρχουν ἡ ὑγρή καί ἡ ἀέρια φάση.

Ἄν τό στερεό θερμαίνεται ὑπό πίεση p_2 *μικρότερη ἀπό τήν* p_T, τότε τό στερεό δέν μεταβάλλεται σέ ὑγρό, ἀλλά, ὅταν ἡ θερμοκρασία του φτάσει σέ ἕνα ὅριο $\theta_{\varepsilon\xi}$, τό στερεό μεταβάλλεται *ἀπευθείας σέ ἀέριο* (σημεῖο Γ). Τό φαινόμενο αὐτό τό παρατηροῦμε εὔκολα στό στερεό διοξείδιο τοῦ ἄνθρακα, γιά τό ὁποῖο εἶναι :

$$\theta_T = -56{,}6^0\ \mathrm{C} \qquad \text{καί} \qquad p_T = 5{,}1\ \mathrm{Atm}$$

δηλαδή ἡ πίεση p_T, πού ἀντιστοιχεῖ στό τριπλό σημεῖο, εἶναι μεγαλύτερη ἀπό τήν ἀτμοσφαιρική πίεση. Ἄν λοιπόν θερμάνουμε στερεό διοξείδιο τοῦ ἄνθρακα μέσα σέ ἀνοιχτό δοχεῖο ὑπό τήν ἀτμοσφαιρική πίεση $p_0 = 1$ Atm ($p_0 < p_T$), τότε τό σῶμα μεταβάλλεται ἀπευθείας σέ ἀτμό. Ἄν ὅμως θερμάνουμε τό σῶμα μέσα σέ κλειστό δοχεῖο, τότε ἡ τάση τῶν κορεσμένων ἀτμῶν του αὐξάνεται μέ τή θερμοκρασία καί ἔτσι ἔρχεται στιγμή, πού ἡ πίεση p μέσα στό δοχεῖο γίνεται μεγαλύτερη ἀπό τήν p_T καί τό στερεό μεταβάλλεται σέ ὑγρό (τήξη). Τό σῶμα δέν μπορεῖ νά ὑπάρχει σέ ὑγρή κατάσταση, ὅταν ἡ πίεση εἶναι μικρότερη ἀπό τήν πίεση $p_T = 5{,}1$ Atm.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

113. Μέσα σέ ἕνα δοχεῖο πού ἔχει ὄγκο $V = 1\ \mathrm{m}^3$ καί διατηρεῖται σέ σταθερή θερμοκρασία 100^0 C ρίχνουμε μιά μάζα νεροῦ ἴση μέ m = 200 gr. 1) Νά βρεθεῖ ἡ τάση p τῶν ὑδρατμῶν μέσα στό δοχεῖο καί ἄν οἱ ὑδρατμοί εἶναι ἀκόρεστοι ἤ κορεσμένοι. Πυκνότητα τῶν κορεσμένων ὑδρατμῶν σέ κανονικές συνθῆκες $\rho_0 = 0{,}81$ gr/lt. Ἡ τάση τῶν κορεσμένων ὑδρατμῶν σέ θερμοκρασία 100^0 C εἶναι $p_K = 1$ Atm. 2) Ἄν μέσα σ' αὐτό τό δοχεῖο βάζαμε μιά μάζα νεροῦ M = 2 kgr, τότε πόση θά ἦταν ἡ πίεση p_1 τῶν ὑδρατμῶν καί πόση θά ἦταν ἡ μάζα τους m_1 ;

114. Ἕνας βαρομετρικός σωλήνας, πού ἡ τομή του ἔχει ἐμβαδό 1 cm^2, περιέχει πάνω ἀπό τή στήλη τοῦ ὑδραργύρου λίγο ξηρό ἀέρα. Στή θερμοκρασία 17^0 C καί ὑπό τήν ἐξωτερική ἀτμοσφαιρική πίεση $p_0 = 76$ cm Hg ἡ στήλη τοῦ ἀέρα μέσα στό σωλήνα ἔχει ὕψος 10 cm καί ἡ στήλη τοῦ ὑδραργύρου ἔχει ὕψος 25 cm. Εἰσάγουμε διαδοχικά μέσα στό σωλήνα σταγόνες αἰθέρα. Πόσο θά γίνει τελικά τό ὕψος x τῆς στήλης τοῦ ὑδραργύρου μέσα στό σωλήνα ; Ἡ τάση τῶν κορεσμένων ἀτμῶν τοῦ αἰθέρα στή θερμοκρασία 17^0 C εἶναι $p_K = 41$ cm Hg.

115. Ἕνα μίγμα ἀπό κορεσμένους ὑδρατμούς καί κορεσμένους ἀτμούς βενζίνης ἔχει ὄγκο V, θερμοκρασία 70^0 C καί πίεση $p_0 = 76$ cm Hg. Ὅταν ψύξουμε αὐτό τό μίγμα, παίρνουμε μάζα νεροῦ ἴση μέ $m_N = 1$ gr καί μάζα βενζίνης ἴση μέ $m_B = 10$ gr. Στή θερμοκρασία τῶν 70^0 C ἡ τάση τῶν κορεσμένων ὑδρατμῶν εἶναι $p_{KN} = 23$ cm Hg. Νά βρεθεῖ ἡ μοριακή μάζα μ_B τῆς βενζίνης. Μοριακή μάζα τοῦ νεροῦ $\mu_N = 18$.

116. Μέσα σέ ἕναν κατακόρυφο κύλινδρο ὑπάρχουν 5 kgr νερό. Κλείνουμε τόν κύλινδρο μέ ἕνα ἔμβολο, πού ἔχει ἀσήμαντο βάρος, βρίσκεται σέ ἐπαφή μέ τήν ἐπιφάνεια τοῦ νεροῦ καί ἔχει ἐμβαδό 2500 cm². Ἡ ἀτμοσφαιρική πίεση εἶναι $p_0 = 1$ kp/cm². Θερμαίνουμε τό σύστημα κύλινδρος - νερό καί στή θερμοκρασία 100^0 C ἔχει ἐξαερωθεῖ μάζα νεροῦ ἴση ἴση μέ $m = 100$ gr. Νά βρεθεῖ πόσο θά μετατοπιστεῖ τό ἔμβολο πρός τά πάνω καί πόσο ἔργο παράγει ὁ ὑδρατμός σ' αὐτή τήν περίπτωση. Ἡ τάση τῶν κορεσμένων ὑδρατμῶν στή θερμοκρασία 100^0 C εἶναι $p_K = 1$ kp/cm². $g = 10$ m/sec².

117. Ἀπό τήν καταστατική ἐξίσωση τῶν ἰδανικῶν ἀερίων νά βρεθεῖ πόσο ὄγκο ἔχει σέ κυβικά μέτρα μιά μάζα $m = 1$ kgr ὑδρατμῶν σέ θερμοκρασία 700^0 K καί ὑπό πίεση 10 at. $g = 10$ m/sec².

118. Ἕνα μίγμα ἀπό ἀτμούς αἰθέρα καί διθειούχου ἄνθρακα ἔχει ὄγκο V καί ὁλική πίεση $p_{o\lambda} = 45{,}20$ cm Hg. Ὑγροποιοῦμε τελείως τό μίγμα καί τότε παίρνουμε μάζα διθειούχου ἄνθρακα $m_\Delta = 11{,}9$ gr καί μάζα αἰθέρα $m_\Delta = 100$ gr. Δεχόμαστε ὅτι οἱ ἀτμοί ἀκολουθοῦν τούς νόμους τῶν ἰδανικῶν ἀερίων. Νά βρεθεῖ ἡ μερική πίεση p_Δ τοῦ διθειούχου ἄνθρακα καί p_A τοῦ αἰθέρα στό ἀρχικό μίγμα. Μοριακές μάζες : τοῦ αἰθέρα $\mu_A = 74$, τοῦ διθειούχου ἄνθρακα $\mu_\Delta = 76$.

119. Μέσα σέ ἕνα κλειστό δοχεῖο ὑπάρχουν νερό, ὑδρατμοί καί ἀέρας. Τό δοχεῖο θερμαίνεται ἀπό 5^0 C σέ 40^0 C καί τότε ἡ πίεση μέσα στό δοχεῖο αὐξάνεται ἀπό 72,15 cm Hg σέ 86,01 cm Hg. Ἄν ἡ τάση τῶν κορεσμένων ὑδρατμῶν στή θερμοκρασία 5^0 C εἶναι 0,65 cm Hg, νά βρεθεῖ ἡ τάση τῶν κορεσμένων ὑδρατμῶν σέ θερμοκρασία 40^0 C.

120. Ἕνας ὄγκος ἀέρα $V_1 = 1000$ lt ἔχει θερμοκρασία $\theta_1 = 15^0$ C, πίεση 764 mm Hg καί περιέχει κορεσμένους ὑδρατμούς. Διατηρώντας σταθερή τήν πίεση αὐτοῦ τοῦ ἀέρα ὑψώνουμε τή θερμοκρασία ἀπό 15^0 C σέ 50^0 C, ἀλλά ταυτόχρονα εἰσάγουμε μέσα σ' αὐτό τόν ἀέρα τόση μάζα νεροῦ, ὥστε καί στή θερμοκρασία 50^0 C οἱ ὑδρατμοί νά εἶναι κορεσμένοι. Νά βρεθεῖ πόσος εἶναι ὁ νέος ὄγκος τοῦ ἀέρα καί πόση εἶναι ἡ μάζα τοῦ νεροῦ πού προσθέσαμε. Ἡ τάση τῶν κορεσμένων ὑδρατμῶν σέ 15^0 C εἶναι 12,7 mm Hg καί σέ 50^0 C εἶναι 92 mm Hg. Πυκνότητα τῶν κορεσμένων ὑδρατμῶν σέ κανονικές συνθῆκες $\rho_0 = 0{,}8$ gr/lt.

121. Ἕνας πολύ λεπτός γυάλινος σωλήνας εἶναι κλειστός στή μιά ἄκρη του καί διατηρεῖται ὁριζόντιος. Μέσα στό σωλήνα εἶναι ἀποκλεισμένη μιά μάζα ἀέρα, γιατί μέσα στό σωλήνα ὑπάρχει μιά μικρή στήλη νεροῦ. Ὅταν ἡ θερμοκρασία εἶναι 7^0 C ἡ στήλη τοῦ ἀέρα μέσα στό σωλήνα ἔχει μῆκος $l_1 = 15$ cm. Ἡ ἀτμοσφαιρική πίεση εἶναι 76 cm Hg. Πόσο εἶναι τό μῆκος l_2 τῆς στήλης τοῦ ἀέρα στή θερμοκρασία 17^0 C; Ἡ τάση τῶν κορεσμένων ὑδρατμῶν σέ 7^0 C εἶναι 0,75 cm Hg καί σέ 17^0 C εἶναι 1,42 cm Hg.

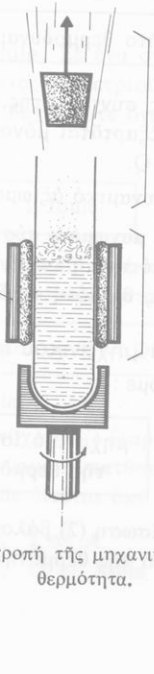
Θερμοδυναμική

56. Θερμότητα καί μηχανική ἐνέργεια

Ἡ καθημερινή πείρα δείχνει ὅτι στά σημεῖα ἑνός σώματος στά ὁποῖα ἀναπτύσσονται *δυνάμεις τριβῆς* (π.χ. στά φρένα τῶν αὐτοκινήτων), ἐμφανίζεται *θερμότητα*. Ἐπίσης κατά *τήν κρούση* δύο σωμάτων (π.χ. κατά τή σύγκρουση ἑνός βλήματος μέ ξύλο) ἐμφανίζεται θερμότητα. Ὥστε, ὅταν ἀναπτύσσεται δύναμη τριβῆς ἤ συμβαίνει κρούση, πάντοτε μηχανική ἐνέργεια *μετατρέπεται* σέ θερμότητα. Ἀντίστροφα, στίς θερμικές μηχανές (π. χ. στή μηχανή τοῦ αὐτοκινήτου) ξοδεύεται θερμότητα καί ἐμφανίζεται μηχανική ἐνέργεια. Ὥστε:

Ἡ θερμότητα καί ἡ μηχανική ἐνέργεια εἶναι δύο μορφές ἐνέργειας, πού μποροῦν νά μετατρέπονται ἡ μιά στήν ἄλλη.

Ἡ μετατροπή τῆς μηχανικῆς ἐνέργειας σέ θερμότητα φαίνεται στό ἑξῆς πείραμα (σχ. 117). Μέσα σέ μεταλλικό σωλήνα βάζουμε λίγο αἰθέρα καί κλείνουμε τό σωλήνα μέ φελλό.



Σχ. 117. Μετατροπή τῆς μηχανικῆς ἐνέργειας σέ θερμότητα.

Μέ κατάλληλη διάταξη ὁ σωλήνας ἐκτελεῖ ὁμαλή περιστροφική κίνηση, ἐνῶ ταυτόχρονα τρίβεται πάνω σέ λαβίδα, πού ἐνεργεῖ σάν φρένο. Στά σημεῖα ἐπαφῆς τοῦ φρένου μέ τό σωλήνα ἀναπτύσσονται δυνάμεις τριβῆς, πού *παράγουν ἔργο ἀντιστάσεως*. Αὐτό τό ἔργο μετατρέπεται σέ *θερμότητα* καί ὁ αἰθέρας θερμαίνεται καί ἐξαερώνεται. Ὅταν οἱ ἀτμοί τοῦ αἰθέρα ἀποκτήσουν μεγάλη πίεση, τότε ἀπότομα ἐκτοξεύουν τά φελλό μέ ὁρμή, ἀλλά ταυτόχρονα ψύχονται, γιατί μέρος ἀπό τή θερμότητα πού ἔχουν μέσα τους *μετατράπηκε* σέ μηχανική ἐνέργεια, δηλαδή σέ *κινητική ἐνέργεια* τοῦ φελλοῦ.

57. Ἰσοδυναμία θερμότητας καί μηχανικῆς ἐνέργειας

Ἡ θερμότητα καί ἡ μηχανική ἐνέργεια εἶναι *δύο μορφές ἐνέργειας*, πού μποροῦν νά μετατρέπονται ἡ μιά στήν ἄλλη. Ὅπως ἔδειξε τό πείραμα, ὅταν συμβαίνουν τέτοιες μετατροπές, ἰσχύει πάντοτε *ἡ ἀρχή τῆς διατηρήσεως τῆς ἐνέργειας*, πού σ' αὐτή τήν περίπτωση ἐκφράζεται μέ τό ἀκόλουθο **πρῶτο θερμοδυναμικό ἀξίωμα :**

Ὅταν μηχανική ἐνέργεια E μετατρέπεται σέ θερμότητα Q ἤ καί ἀντίστροφα, τότε οἱ δύο αὐτές ποσότητες ἐνέργειας εἶναι ἴσες.

πρῶτο θερμοδυναμικό ἀξίωμα $$E = J \cdot Q \quad (1)$$

ὅπου J εἶναι ἕνας συντελεστής, πού ὀνομάζεται **μηχανικό ἰσοδύναμο τῆς θερμότητας** καί ἐξαρτᾶται μόνο ἀπό τίς μονάδες μέ τίς ὁποῖες μετρᾶμε τά μεγέθη E καί Q.

Τό πρῶτο θερμοδυναμικό ἀξίωμα μπορεῖ νά διατυπωθεῖ καί ὡς ἑξῆς :

Ὅταν σέ ἕνα μονωμένο σύστημα συμβαίνει μετατροπή μηχανικῆς ἐνέργειας σέ θερμότητα ἤ καί ἀντίστροφα, τό ἄθροισμα τῆς μηχανικῆς ἐνέργειας καί τῆς θερμότητας διατηρεῖται σταθερό.

α. Τιμή τοῦ μηχανικοῦ ἰσοδυνάμου τῆς θερμότητας.

Ἀπό τήν ἐξίσωση (1) ἔχουμε :

μηχανικό ἰσοδύναμο τῆς θερμότητας $$J = \frac{E}{Q} \quad (2)$$

Ἄν στήν ἐξίσωση (2) βάλουμε Q = 1, βρίσκουμε J = E. Ὥστε τό μηχανικό ἰσοδύναμο τῆς θερμότητας J ἐκφράζει τή μηχανική ἐνέργεια, πού εἶναι *ἰσοδύναμη μέ μιά μονάδα θερμότητας*. Μέ διάφορες μεθόδους βρίσκουμε ὅτι :

Θερμότητα ἴση μέ μιά θερμίδα (1 cal) ἰσοδυναμεῖ μέ μηχανική ἐνέργεια 4,185 Joule (ἤ κατά προσέγγιση μέ 4,19 Joule).

$$J = 4{,}185 \text{ Joule/cal} \quad \text{ἤ} \quad J \simeq 4{,}19 \text{ Joule/cal}$$
$$\text{ἄρα} \quad 1 \text{ Joule} = 0{,}239 \text{ cal}$$

Παράδειγμα. Ἕνα βλῆμα ἔχει μάζα $m = 8{,}380$ kgr καί κινούμενο μέ ταχύτητα $\upsilon = 600$ m/sec πέφτει πάνω σ' ἕνα ἐμπόδιο καί τότε ὁλόκληρη ἡ κινητική ἐνέργεια τοῦ βλήματος μετατρέπεται σέ θερμότητα. Θά ὑπολογίσουμε αὐτή τή θερμότητα.

Τό βλῆμα ἔχει κινητική ἐνέργεια :

$$E = \frac{1}{2} m \cdot \upsilon^2 = \frac{1}{2} \cdot 8{,}380 \text{ kgr} \cdot \left(600 \frac{\text{m}}{\text{sec}}\right)^2 = 4{,}19 \cdot 36 \cdot 10^4 \text{ Joule}$$

Αὐτή ἡ μηχανική ἐνέργεια ἰσοδυναμεῖ μέ θερμότητα :

$$Q = \frac{E}{J} = \frac{4{,}19 \cdot 36 \cdot 10^4 \text{ Joule}}{4{,}19 \text{ Joule/cal}} \quad \text{καί} \quad Q = 36 \cdot 10^4 \text{ cal}$$

β. Μέτρηση τῆς θερμότητας σέ Joule. Σέ ἕνα σύστημα μονάδων πρέπει γιά ἁπλότητα ὅλες οἱ μορφές ἐνέργειας νά μετριοῦνται *μέ τήν ἴδια μονάδα*. Στό διεθνές σύστημα μονάδων (SI) δεχόμαστε ὅτι :

Μονάδα θερμότητας εἶναι τό 1 Joule

μονάδα θερμότητας	1 Joule

Ἔτσι στήν ἐξίσωση (1) ὁ συντελεστής J εἶναι ἴσος μέ τή μονάδα ($J = 1$) καί ἑπομένως τό πρῶτο θερμοδυναμικό ἀξίωμα ἐκφράζεται μέ τή σχέση :

πρῶτο θερμοδυναμικό ἀξίωμα	$E = Q$

ὅπου τά μεγέθη E καί Q μετριοῦνται σέ Joule.

Ὅταν ἕνα σύρμα ἔχει ἀντίσταση R καί ἐπί χρόνο t διαρρέεται ἀπό ἠλεκτρικό ρεῦμα ἐντάσεως I, τότε πάνω στό σύρμα ἀναπτύσσεται θερμότητα Q, πού σύμφωνα μέ τό γνωστό νόμο τοῦ Joule δίνεται ἀπό τήν ἐξίσωση :

$$Q = R \cdot I^2 \cdot t \quad \left\{ \begin{array}{ll} R \text{ σέ } \Omega, & I \text{ σέ A} \\ t \text{ σέ sec}, & Q \text{ σέ Joule} \end{array} \right.$$

όπου ή θερμότητα Q μετριέται σέ Joule. Στό φαινόμενο αὐτό συμβαίνει *μετατροπή τῆς ἠλεκτρικῆς ἐνέργειας σέ θερμότητα.*

Παρατήρηση. Ὅταν μετρᾶμε τή θερμότητα σέ Joule, τότε τροποποιοῦνται οἱ μονάδες τῶν γνωστῶν μας θερμικῶν μεγεθῶν. Ἔτσι στό *διεθνές σύστημα μονάδων* ἔχουμε τίς ἑξῆς μονάδες:

μονάδα εἰδικῆς θερμότητας	$1\ \mathrm{Joule \cdot kgr^{-1} \cdot grad^{-1}}$
μονάδα θερμοχωρητικότητας	$1\ \mathrm{Joule \cdot grad^{-1}}$
μονάδα θερμότητας τήξεως	$1\ \mathrm{Joule \cdot kgr^{-1}}$
μονάδα θερμότητας ἐξαερώσεως	$1\ \mathrm{Joule \cdot kgr^{-1}}$

Σ' αὐτή τήν περίπτωση ἀλλάζουν καί οἱ θερμικές σταθερές, πού χαρακτηρίζουν τό κάθε ὑλικό, π.χ. ἡ εἰδική θερμότητα τοῦ νεροῦ πού, ὅπως ξέρουμε, εἶναι ἴση μέ:

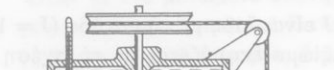
$1\ \mathrm{cal \cdot gr \cdot grad^{-1}}$ θά εἶναι ἴση μέ $4{,}19 \cdot 10^3\ \mathrm{Joule \cdot kgr^{-1} \cdot grad^{-1}}$

Σέ πολλές ὅμως ἐφαρμογές τῆς θερμότητας (θερμαντικές συσκευές, βιομηχανία κ.ἄ.) ἐξακολουθοῦμε νά μετρᾶμε τή θερμότητα σέ θερμίδες (cal) καί τότε, ἄν μεσολαβοῦν μετατροπές ἄλλων μορφῶν ἐνέργειας σέ θερμότητα ἤ ἀντίστροφα, ἐφαρμόζουμε τήν ἐξίσωση (1).

58. Μέτρηση τοῦ μηχανικοῦ ἰσοδυνάμου τῆς θερμότητας

Ἡ τιμή τοῦ μηχανικοῦ ἰσοδυνάμου τῆς θερμότητας μπορεῖ νά βρεθεῖ μέ διάφορες μεθόδους.

α. Μέθοδος τοῦ Joule. Πρῶτος ὁ Joule *μέτρησε πειραματικά* (1842 - 1850) τήν τιμή τοῦ μηχανικοῦ ἰσοδυνάμου τῆς θερμότητας (J). Ἀναφέρουμε μόνο τήν ἀρχή, στήν ὁποία βασίζεται ἡ μέθοδος τοῦ Joule.



Σχ. 118. Σχηματική διάταξη τῆς μεθόδου τοῦ Joule.

Μέσα σέ θερμιδόμετρο περιστρέφεται κατακόρυφος ἄξονας, πού πάνω του εἶναι στερεωμένα πτερύγια (σχ. 118). Ἡ περιστροφή τοῦ ἄξονα ἐξασφαλίζεται ἀπό ἕνα σῶμα, πού ἔχει βάρος $B = mg$ καί πέφτει ἀπό ὕψος h. Τό θερμιδόμετρο περιέχει ὑδράργυρο, ὁ ὁποῖος ἔχει μικρή εἰδική θερμότητα καί ἑπομένως μιά μικρή ποσότητα θερμότητας προκαλεῖ σημαντική ὕψωση τῆς θερμοκρασίας τοῦ ὑδραργύρου. Γιά νά μή δημιουργεῖται μέσα στό θερμιδόμετρο περιστροφική κίνηση τοῦ ὑγροῦ, ὑπάρχουν ἀκίνητα πτερύγια στά ἐσωτερικά τοιχώματα τοῦ θερμιδομέτρου. Ὅταν τό σῶμα πέφτει ἀπό τό ὕψος h, τότε ἕνα μέρος E ἀπό τή δυναμική ἐνέργεια τοῦ σώματος mgh μετατρέπεται σέ θερμότητα, ἐξαιτίας τῆς τριβῆς τοῦ ὑδραργύρου πάνω στά πτερύγια, καί τό ὑπόλοιπο ἀπό τή δυναμική ἐνέργεια μένει πάνω στό σῶμα μέ τή μορφή κινητικῆς ἐνέργειας. Τό σῶμα, ὅταν φτάνει στό κατώτερο σημεῖο τῆς διαδρομῆς του, ἔχει κινητική ἐνέργεια $\frac{1}{2}$ mυ². Ἑπομένως ἡ μηχανική ἐνέργεια E, πού μετατρέπεται σέ θερμότητα, εἶναι ἴση μέ :

$$E = m \cdot g \cdot h - \frac{1}{2}\, m \cdot \upsilon^2$$

Ἄν τό θερμιδόμετρο ἔχει θερμοχωρητικότητα K καί ἡ ὕψωση τῆς θερμοκρασίας του εἶναι $\Delta\theta$, τότε στό θερμιδόμετρο ἀναπτύσσεται θερμότητα $Q = K \cdot \Delta\theta$. Ἀπό τήν ἐξίσωση $J = \frac{E}{Q}$ ὑπολογίζεται ἡ τιμή πού ἔχει τό μηχανικό ἰσοδύναμο τῆς θερμότητας J.

Παρατήρηση. Ὁ Mayer (1842) σχεδόν ταυτόχρονα μέ τό Joule *ὑπολόγισε θεωρητικά* τήν τιμή τοῦ μηχανικοῦ ἰσοδυνάμου τῆς θερμότητας καί βρῆκε :

$$J = 4{,}19 \text{ Joule/cal}$$

β. Ἠλεκτρική μέθοδος. Μέσα σέ θερμιδόμετρο, πού ἔχει θερμοχωρητικότητα K, βυθίζουμε ἕνα σύρμα πού ἔχει ἀντίσταση R. Τό σύρμα διαρρέεται ἀπό ρεῦμα ἐντάσεως I ἐπί χρόνο t. Τότε πάνω στό σύρμα μετατρέπεται σέ θερμότητα Q ἠλεκτρική ἐνέργεια E ἴση μέ :

$$E = I^2 \cdot R \cdot t \qquad \begin{cases} I \text{ σέ A, } R \text{ σέ } \Omega \\ t \text{ σέ sec, } E \text{ σέ Joule} \end{cases}$$

Ἄν ἡ θερμοκρασία τοῦ θερμιδομέτρου ὑψώθηκε κατά $\Delta\theta$, τότε ἡ θερμότητα πού ἀναπτύχθηκε ἀπό τό ρεῦμα, εἶναι ἴση μέ $Q = K \cdot \Delta\theta$ cal. Ἔτσι βρίσκουμε ὅτι εἶναι :

$$J = \frac{E\ (\text{Joule})}{Q\ (\text{cal})} = 4{,}19 \text{ Joule/cal}$$

Ἡ μέθοδος αὐτή εἶναι πολύ ἀκριβής.

59. Ἀρχική καί τελική κατάσταση συστήματος

Ἕνα ἐλαστικό μπαλόνι, γεμάτο μέ ἀέρα, τό πλησιάζουμε σέ μιά ἠλεκτρική θερμάστρα (σχ. 119). Τότε παρατηροῦμε τά ἑξῆς :

α) Τό ἐλαστικό περίβλημα τοῦ μπαλονιοῦ καί ὁ περιεχόμενος ἀέρας θερμαίνονται. Ἑπομένως *τό σύστημα* (περίβλημα - ἀέρας) *παίρνει* ἀπό τό ἐξωτερικό περιβάλλον *θερμότητα* Q.

β) Τό σύστημα, ἐπειδή θερμαίνεται, διαστέλλεται καί σπρώχνει τόν ἀέρα πού βρίσκεται σέ ἐπαφή μέ τό μπαλόνι. Ἔτσι τό σύστημα ἀναπτύσσει δυνάμεις, πού παράγουν ἔργο. Ὥστε τό σύστημα *δίνει* στό ἐξωτερικό περιβάλλον *μηχανικό ἔργο* Ε.

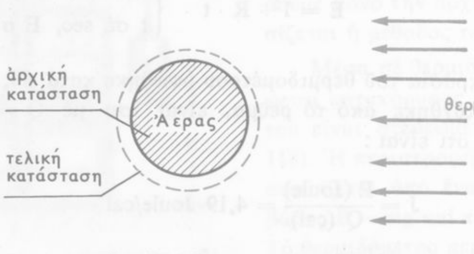
Τό μηχανικό ἔργο Ε καί ἡ θερμότητα Q μετριοῦνται μέ τίς ἴδιες μονάδες ἐνέργειας (π.χ. σέ Joule). Κατά συνθήκη θεωροῦμε *θετική* τήν ἐνέργεια (ἔργο ἤ θερμότητα) πού *παίρνει* τό σύστημα ἀπό τό ἐξωτερικό περιβάλλον καί *ἀρνητική* τήν ἐνέργεια πού *δίνει* τό σύστημα στό ἐξωτερικό περιβάλλον. Ἔτσι γιά τό παραπάνω παράδειγμα ἔχουμε :

θερμότητα $Q > 0$ μηχανικό ἔργο $E < 0$

Γιά τήν ἀρχική καί τήν τελική κατάσταση ἑνός συστήματος ἰσχύει ἡ ἑξῆς *γενική ἀρχή* :

Ὅταν ἕνα σύστημα ἀνταλλάσσει μέ τό ἐξωτερικό περιβάλλον μόνο μηχανικό ἔργο Ε καί θερμότητα Q καί πηγαίνει ἀπό μιά ἀρχική κατάσταση σέ μιά τελική κατάσταση, τότε τό ἀλγεβρικό ἄθροισμα $E + Q$ τοῦ ἔργου καί τῆς θερμότητας πού πῆρε τό σύστημα, ἐξαρτᾶται μόνο ἀπό τήν ἀρχική καί τήν τελική κατάστασή του καί ὄχι ἀπό τή σειρά τῶν ἐνδιάμεσων καταστάσεων ἀπό τίς ὁποῖες πέρασε.

α. Κλειστός θερμοδυναμικός κύκλος. Ἕνα σύστημα ἀνταλλάσσει μέ τό ἐξωτερικό περιβάλλον μόνο μηχανικό ἔργο καί θερμότητα. Στό σύστημα



Σχ. 119. Τό σύστημα παράγει ἔργο.

αὐτό συμβαίνουν διάφορες μεταβολές, ἀλλά μέ τέτοιο τρόπο, ὥστε στό τέλος τῶν μεταβολῶν τό σύστημα βρίσκεται στήν ἴδια ἀκριβῶς κατάσταση *(τελική κατάσταση)*, στήν ὁποία ἦταν, ὅταν ἄρχισε ἡ σειρά τῶν μεταβολῶν *(ἀρχική κατάσταση)*. Σ' αὐτή τήν περίπτωση λέμε ὅτι τό σύστημα διαγράφει ἕναν *κλειστό θερμοδυναμικό κύκλο* (ἤ καί πιό ἁπλά ἕναν *κύκλο*). Ὁποιαδήποτε σειρά μεταβολῶν καί ἄν συμβεῖ, τελικά τό σύστημα, ἀπό ἄποψη ἐνεργητική, δέν ἔχασε καί δέν κέρδισε τίποτε. Ἀποδείχνεται ὅτι:

Ὅταν ἕνα σύστημα διαγράφει κλειστό θερμοδυναμικό κύκλο καί ἀνταλλάσσει μέ τό περιβάλλον μόνο μηχανικό ἔργο E καί θερμότητα Q, τότε τό ἀλγεβρικό ἄθροισμα $E + Q$ τοῦ ἔργου καί τῆς θερμότητας εἶναι ἴσο μέ μηδέν.

$$\boxed{\text{κλειστός θερμοδυναμικός κύκλος} \qquad E + Q = 0} \tag{1}$$

ὅπου E καί Q μετριοῦνται σέ Joule. Ἄν ἡ θερμότητα μετριέται σέ θερμίδες, τότε ἡ ἐξίσωση (1) γράφεται $E + JQ = 0$.

Ἡ ἐξίσωση (1) μπορεῖ νά γραφεῖ καί ἔτσι:

$$\boxed{\text{κλειστός θερμοδυναμικός κύκλος} \qquad E = -Q} \tag{2}$$

Ἡ ἐξίσωση (2) φανερώνει ὅτι:

Ὅταν ἕνα σύστημα διαγράφει κλειστό θερμοδυναμικό κύκλο:
— ἄν τό σύστημα παίρνει ἔργο ($E > 0$), τότε δίνει θερμότητα ($Q < 0$)·
— ἄν τό σύστημα δίνει ἔργο ($E < 0$), τότε παίρνει θερμότητα ($Q > 0$)·
— οἱ ποσότητες τοῦ ἔργου καί τῆς θερμότητας, πού ἀνταλλάσσει τό σύστημα μέ τό περιβάλλον, εἶναι πάντοτε κατά ἀπόλυτη τιμή ἴσες.

60. Ἐσωτερική ἐνέργεια

α. Ὁρισμός. Θεωροῦμε ἕνα σύστημα πού ἀνταλλάσσει μέ τό περιβάλλον μόνο μηχανικό ἔργο καί θερμότητα. Τό σύστημα παθαίνει μιά μεταβολή καί πηγαίνει ἀπό μιά *ἀρχική κατάσταση* σέ μιά ἄλλη *τελική κατάσταση*. Στή διάρκεια αὐτῆς τῆς μεταβολῆς τό σύστημα παίρνει ἀπό τό ἐξωτερικό περιβάλλον ἔργο E καί θερμότητα Q, πού τό ἄθροισμά τους εἶναι *θετικό*, $E + Q > 0$, δηλαδή τό σύστημα παίρνει ἀπό τό ἐξωτερικό περιβάλλον ἐνέργεια περισσότερη ἀπό ὅση δίνει στό περιβάλλον. Ἑπομένως στό τέλος τῆς μεταβολῆς τό σύστημα ἔχει *ἀποταμιεύσει* μέσα του ἕνα ἀπόθεμα ἐνέργειας, ἴσο μέ $E + Q$. Αὐτή ἡ ἐνέργεια ἀποταμιεύεται μέσα στό σύστημα μέ μιά *εἰδική μορφή ἐνέργειας*, πού τήν ὀνομάζουμε *ἐσωτερική ἐνέργεια* τοῦ συστήματος.

Ὅταν εἶναι $E + Q > 0$, ἡ ἐσωτερική ἐνέργεια τοῦ συστήματος *αὐξάνεται*.

Ἀντίθετα, ὅταν εἶναι $E + Q < 0$, ἡ ἐσωτερική ἐνέργεια τοῦ συστήματος *ἐλαττώνεται*, γιατί σ' αὐτή τήν περίπτωση τό σύστημα δίνει στό ἐξωτερικό περιβάλλον ἐνέργεια περισσότερη ἀπό ὅση παίρνει ἀπό τό περιβάλλον.

Ἀπό τά παραπάνω συνάγεται ὁ ἑξῆς *ὁρισμός* :

Ἐσωτερική ἐνέργεια ἑνός συστήματος ὀνομάζεται μιά εἰδική μορφή ἐνέργειας πού κλείνει μέσα του κάθε σύστημα καί ἡ ὁποία αὐξάνεται ἤ ἐλαττώνεται, ὅταν τό σύστημα στή διάρκεια μιᾶς μεταβολῆς ἀντίστοιχα παίρνει ἀπό τό περιβάλλον ἤ δίνει στό περιβάλλον ἐνέργεια.

Παρατήρηση. Ἕνα σῶμα θεωρεῖται ὡς σύστημα ὑλικῶν σημείων.

β. Φύση καί ποσότητα τῆς ἐσωτερικῆς ἐνέργειας. Μᾶς εἶναι ἄγνωστη *ἡ φύση* τῆς ἐσωτερικῆς ἐνέργειας. Ἐπίσης δέν μποροῦμε νά ξέρουμε *τήν ποσότητα* τῆς ἐσωτερικῆς ἐνέργειας πού κλείνει μέσα του ἕνα σύστημα. Μποροῦμε ὅμως νά ὑπολογίζουμε μέ ἀκρίβεια *τίς μεταβολές* τῆς ἐσωτερικῆς ἐνέργειας ἑνός συστήματος.

γ. Μεταβολή τῆς ἐσωτερικῆς ἐνέργειας ἑνός σώματος. Ἕνα σῶμα στήν ἀρχική κατάστασή του ἔχει ἐσωτερική ἐνέργεια $U_{αρχ}$. Σ' αὐτό τό σῶμα *προσφέρουμε* θερμότητα Q καί τότε ἕνα μέρος ἀπό αὐτή τήν ἐνέργεια *ἀποταμιεύεται* μέσα στό σῶμα, ἐνῶ ἡ ὑπόλοιπη ἐνέργεια μετατρέπεται σέ μηχανική ἐνέργεια E, ἡ ὁποία *δίνεται* στό ἐξωτερικό περιβάλλον. Ἔτσι τό σῶμα στήν τελική κατάστασή του ἔχει ἐσωτερική ἐνέργεια $U_{τελ} > U_{αρχ}$. Σύμφωνα μέ τήν ἀρχή τῆς διατηρήσεως τῆς ἐνέργειας ἰσχύει ἡ ἐξίσωση :

$$Q = (U_{τελ} - U_{αρχ}) + E \quad \text{ἤ} \quad Q = \Delta U + E \tag{1}$$

ὅπου ὅλα τά μεγέθη μετριοῦνται σέ Joulre. Ἄν ἡ θερμότητα Q μετριέται σέ θερμίδες, τότε ἡ ἐξίσωση (1) γράφεται $JQ = \Delta U + E$.

Παρατήρηση. Ἡ παραπάνω ἐξίσωση (1) γράφεται καί ἔτσι :

$$Q - E = U_{τελ} - U_{αρχ}$$

Εἶναι $Q > 0$, γιατί τό σῶμα παίρνει θερμότητα ἀπό τό περιβάλλον.

Εἶναι $E < 0$, γιατί τό σῶμα δίνει μηχανική ἐνέργεια στό περιβάλλον.

δ. Παραδείγματα ὑπολογισμοῦ τῆς μεταβολῆς τῆς ἐσωτερικῆς ἐνέργειας σώματος. Θά ὑπολογίσουμε σέ δύο περιπτώσεις *τή μεταβολή* τῆς ἐσωτερικῆς ἐνέργειας ἑνός σώματος.

Πρῶτο παράδειγμα. Μέσα σέ ἕνα δοχεῖο ὑπάρχει μιά μάζα νεροῦ $m = 1000$ gr μέ θερμοκρασία 100^0 C. Στήν κανονική ἀτμοσφαιρική πίεση $p_0 = 10{,}13 \cdot 10^4\ N/m^2$ τό νερό θερμαίνεται καί μεταβάλλεται σέ ὑδρατμό μέ τήν ἴδια θερμοκρασία 100^0 C. Τότε τό νερό *παίρνει* ἀπό τό ἐξωτερικό περιβάλλον θερμότητα :

$$Q = 539 \cdot 10^3 \text{ cal} \quad \text{ἤ} \quad Q = 225{,}8 \cdot 10^4 \text{ Joule}$$

Ἄν θεωρήσουμε τόν ὑδρατμό ὡς ἰδανικό ἀέριο, τότε μάζα 18 gr ὑδρατμοῦ ὑπό κανονικές συνθῆκες θά εἶχε ὄγκο $V_0 = 22\,400$ cm³. Ἑπομένως ἡ μάζα $m = 1000$ gr ὑδρατμοῦ σέ 100^0 C καί ὑπό πίεση p_0 θά ἔχει ὄγκο V ἴσο μέ :

$$V = V_0 \cdot \frac{T}{T_0} = 22\,400 \frac{\text{cm}^3}{\text{mol}} \cdot \frac{1000 \text{ gr}}{18 \text{ gr/mol}} \cdot \frac{373 \text{ grad}}{273 \text{ grad}}$$

$$\text{καί} \quad V = 17 \cdot 10^5 \text{ cm}^3 = 1{,}7 \text{ m}^3$$

Ἄν παραλείψουμε ὡς ἀσήμαντο τόν ἀρχικό ὄγκο τοῦ νεροῦ, τότε ἡ μεταβολή τοῦ ὄγκου τοῦ νεροῦ εἶναι $\Delta V = 1{,}7$ m³. Κατά τήν ἐξαέρωση τοῦ νεροῦ ὁ ὑδρατμός *παράγει ἔργο* E πού δίνεται στό ἐξωτερικό περιβάλλον καί κατά ἀπόλυτη τιμή εἶναι ἴσο μέ :

$$E = p_0 \cdot \Delta V = 10{,}13 \cdot 10^4\ N/m^2 \cdot 1{,}7\ m^3 \quad \text{καί} \quad E = 17{,}2 \cdot 10^4 \text{ Joule}$$

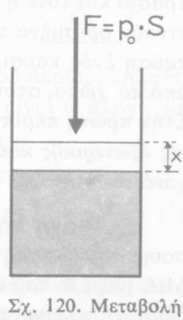
Ἡ θερμοκρασία τοῦ ὑδρατμοῦ δέν ὑψώνεται. Ἑπομένως σύμφωνα μέ τήν ἐξίσωση (1) συμβαίνει *αὔξηση τῆς ἐσωτερικῆς ἐνέργειας* τοῦ ὑδρατμοῦ κατά :

$$\Delta U = Q - E \quad \text{ἤ} \quad \Delta U = 208{,}6 \cdot 10^4 \text{ Joule}$$

Σ' αὐτή τήν περίπτωση ἡ αὔξηση (ΔU) τῆς ἐσωτερικῆς ἐνέργειας ὀφείλεται *μόνο σέ θερμότητα* πού δόθηκε στό σῶμα.

Δεύτερο παράδειγμα. Μέσα σέ κυλινδρικό δοχεῖο ὑπάρχει ἕνα κυλινδρικό κομμάτι πάγου πού ἔχει ἐμβαδό βάσεως S ἴσο μέ τό ἐμβαδό τῆς βάσεως τοῦ δοχείου (σχ. 120). Ὁ πάγος ἔχει μάζα $m = 1000$ gr καί θερμοκρασία 0^0 C. Ὑπό τήν κανονική ἀτμοσφαιρική πίεση ($p_0 = 10{,}13 \cdot 10^4\ N/m^2$) ὁ πάγος θερμαίνεται καί μεταβάλλεται σέ νερό μέ τήν ἴδια θερμοκρασία 0^0 C. Τότε ὁ πάγος παίρνει ἀπό τό ἐξωτερικό περιβάλλον θερμότητα :

$$Q = 8 \cdot 10^4 \text{ cal} \quad \text{ἤ} \quad Q = 335\,200 \text{ Joule}$$



Σχ. 120. Μεταβολή τῆς ἐσωτερικῆς ἐνέργειας τοῦ πάγου.

Κατά τήν τήξη τοῦ πάγου συμβαίνει ἐλάττωση τοῦ ὄγκου του κατά $\Delta V = 90\ cm^3 = 9 \cdot 10^{-5}\ m^3$. Ἑπομένως κατά τή διάρκεια αὐτῆς τῆς μεταβολῆς ἡ ἀτμοσφαιρική πίεση *παράγει ἔργο* Ε ἴσο μέ:

$$E = F \cdot x = p_0 \cdot S \cdot x = p_0 \cdot \Delta V$$

ἄρα $E = 10{,}13 \cdot 10^4\ N/m^2 \cdot 9 \cdot 10^{-5}\ m^3$

καί $E = 9{,}117$ Joule

Ὥστε ἡ μάζα m τοῦ νεροῦ *παίρνει ἀπό τό ἐξωτερικό περιβάλλον* τή θερμότητα Q καί τό ἔργο Ε. Ἡ θερμοκρασία τοῦ νεροῦ δέν ὑψώνεται. Ἑπομένως σύμφωνα μέ τήν ἐξίσωση (1) *ἡ αὔξηση τῆς ἐσωτερικῆς ἐνέργειας* τοῦ νεροῦ εἶναι:

$$\Delta U = Q + E \quad \text{ἤ} \quad \Delta U = 335\,209{,}117 \text{ Joule}$$

Σ' αὐτή τήν περίπτωση ἡ αὔξηση (ΔU) τῆς ἐσωτερικῆς ἐνέργειας ὀφείλεται *σέ θερμότητα* καί *σέ ἐξωτερικό ἔργο* πού δόθηκαν στό σῶμα.

ε. Ἐσωτερική ἐνέργεια μονωμένου συστήματος. Ἕνα θερμοδυναμικό σύστημα θεωρεῖται *μονωμένο*, ὅταν δέν μπορεῖ νά ἀνταλλάσσει οὔτε θερμότητα οὔτε μηχανική ἐνέργεια μέ τό ἐξωτερικό περιβάλλον. Σέ ἕνα τέτοιο σύστημα θά εἶναι Ε = 0 καί Q = 0 καί ἑπομένως εἶναι:

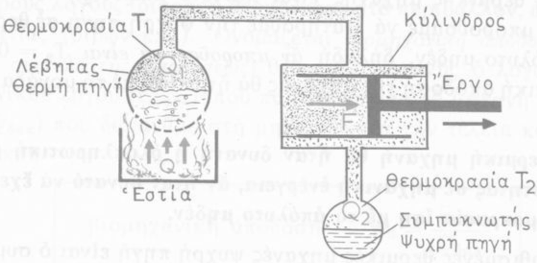
$$U_{\tau\epsilon\lambda} - U_{\alpha\rho\chi} = 0$$

Ἡ ἐσωτερική ἐνέργεια ἑνός μονωμένου συστήματος διατηρεῖται σταθερή.

61. Θερμικές μηχανές

Στίς θερμικές μηχανές γίνεται *μετατροπή* τῆς θερμότητας σέ μηχανική ἐνέργεια. Σέ κάθε θερμική μηχανή ὑπάρχει ἕνα ἀέριο μέ πολύ ψηλή θερμοκρασία καί τότε ἡ μεγάλη πίεση τοῦ ἀερίου δημιουργεῖ δυνάμεις, οἱ ὁποῖες κινοῦν ὁρισμένα τμήματα τῆς μηχανῆς. Ἡ θερμότητα προέρχεται ἀπό τήν καύση ἑνός καύσιμου ὑλικοῦ. Ἡ καύση τοῦ ὑλικοῦ μπορεῖ νά γίνεται ἔξω ἀπό τό χῶρο, στόν ὁποῖο παράγεται τό ἔργο, ἤ καί μέσα σ' αὐτό τό χῶρο. Στήν πρώτη περίπτωση οἱ μηχανές λέγονται *ἀτμομηχανές* ἤ *θερμικές μηχανές ἐξωτερικῆς καύσεως*, ἐνῶ στή δεύτερη περίπτωση λέγονται *θερμικές μηχανές ἐσωτερικῆς καύσεως*.

α. Ἀρχή τῆς λειτουργίας τῶν θερμικῶν μηχανῶν. Ἄς θεωρήσουμε τήν ἰδανική θερμική μηχανή (ἀτμομηχανή), πού δείχνει τό σχῆμα 121. Μιά μάζα m τοῦ ἀερίου (ὑδρατμός), ὅταν βρίσκεται στή *θερμή πηγή* (στό λέβητα), κλείνει μέσα της θερμότητα Q_1 καί ἔχει ἀπόλυτη θερμοκρασία T_1. Τό ἀέριο ἔρχεται στόν κύλινδρο (ἤ ἄλλο ἀνάλογο ὄργανο), ὅπου ἐκτονώ-



Σχ. 121. Σχηματική παράσταση ἰδανικῆς θερμικῆς μηχανῆς.

νεται. Τότε τό ἀέριο *ἀποβάλλει* μιά ποσότητα θερμότητας καί ταυτόχρονα *παράγει ἔργο* E. Τέλος ἡ μάζα m τοῦ ἀερίου ἔρχεται στήν *ψυχρή πηγή* (συμπυκνωτής ἤ ἀτμόσφαιρα), ὅπου ἐξακολουθεῖ νά κλείνει μέσα της θερμότητα Q_2 ($Q_2 < Q_1$) καί νά ἔχει ἀπόλυτη θερμοκρασία T_2 ($T_2 < T_1$).

Σ' αὐτή τήν ἁπλοποιημένη ἰδανική θερμική μηχανή *μετατρέπεται* σέ μηχανική ἐνέργεια E θερμότητα ἴση μέ τη διαφορά τῶν θερμοτήτων Q_1 καί Q_2, δηλαδή εἶναι:

$$E = Q_1 - Q_2$$

β. Θεωρητική ἀπόδοση θερμικῆς μηχανῆς. Ὀνομάζεται *θεωρητική ἀπόδοση* η_Θ (ἤ *θερμοδυναμικός συντελεστής ἀποδόσεως*) μιᾶς θερμικῆς μηχανῆς ὁ λόγος τῆς θερμότητας $Q_1 - Q_2$ πού μετατρέπεται σέ μηχανική ἐνέργεια, πρός τη θερμότητα Q_1 πού κλείνει μέσα του τό ἀέριο, ὅταν βρίσκεται στή θερμή πηγή.

$$\boxed{\text{θεωρητική ἀπόδοση} \quad \eta_\Theta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} \quad \text{ἤ} \quad \eta_\Theta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}}$$

Ξέρουμε ὅτι ἡ ὁλική κινητική ἐνέργεια τῶν μορίων τοῦ ἀερίου, δηλαδή ἡ θερμότητα πού κλείνει μέσα της ἡ μάζα m τοῦ ἀερίου, εἶναι ἀνάλογη μέ τήν ἀπόλυτη θερμοκρασία τοῦ ἀερίου. Ὥστε εἶναι:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2} \quad \text{ἤ} \quad \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \quad \text{ἄρα} \quad \boxed{\eta_\Theta = 1 - \frac{T_2}{T_1}} \qquad (1)$$

Ἡ ἐξίσωση (1) δείχνει ὅτι ἡ θεωρητική ἀπόδοση τῆς θερμικῆς μηχανῆς *ἐξαρτᾶται μόνο ἀπό τίς ἀπόλυτες θερμοκρασίες τῆς θερμῆς καί τῆς ψυχρῆς πηγῆς* (T_1 καί T_2). Ἐπειδή πάντοτε εἶναι $T_2 < T_1$, ἕπεται ὅτι ἡ θεωριτηκή ἀπόδοση μιᾶς θερμικῆς μηχανῆς *εἶναι πάντοτε μικρότερη ἀπό τή μονάδα* ($\eta_\Theta < 1$). Ἄν μπορούσαμε νά διατηροῦμε τήν ψυχρή πηγή σέ θερμοκρασία ἴση μέ τό ἀπόλυτο μηδέν, δηλαδή *ἄν μποροῦσε νά εἶναι* $T_2 = 0^0$ K, μόνο τότε ἡ θεωρητική ἀπόδοση τῆς μηχανῆς θά ἦταν ἴση μέ τή μονάδα ($\eta_\Theta = 1$). Ὥστε :

Σέ μιά θερμική μηχανή θά ἦταν δυνατή ἡ ὁλοκληρωτική μετατροπή τῆς θερμότητας σέ μηχανική ἐνέργεια, ἄν ἦταν δυνατό νά ἔχει ἡ ψυχρή πηγή θερμοκρασία ἴση μέ τό ἀπόλυτο μηδέν.

Στίς συνηθισμένες θερμικές μηχανές ψυχρή πηγή εἶναι ὁ συμπυκνωτής ἤ ἡ ἀτμόσφαιρα. Ἄν σέ μιά ἀτμομηχανή ὁ ἀτμός στό λέβητα ἔχει θερμοκρασία $T_1 = 453^0$ K (180^0 C) καί ὁ ἀτμός ξεφεύγει στήν ἀτμόσφαιρα μέ θερμοκρασία $T_2 = 373^0$ K (100^0 C), τότε ἡ θεωρητική ἀπόδοση τῆς μηχανῆς εἶναι :

$$\eta_\Theta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = \frac{80 \text{ grad}}{453 \text{ grad}} = 0{,}175 \quad \text{ἤ} \quad \eta_\Theta = 17{,}5\%$$

62. Δεύτερο θερμοδυναμικό ἀξίωμα

Ἀπό τή μελέτη τῆς λειτουργίας κάθε θερμικῆς μηχανῆς συνάγεται τό ἀκόλουθο γενικό συμπέρασμα, πού ἀποτελεῖ **τό δεύτερο θερμοδυναμικό ἀξίωμα :**

Μιά θερμική μηχανή μπορεῖ νά παράγει μηχανικό ἔργο, μόνο ὅταν ἕνας φορέας τῆς θερμότητας παίρνει θερμότητα Q_1 σέ μιά θερμή πηγή καί δίνει θερμότητα Q_2 σέ μιά ψυχρή πηγή. Σέ μηχανικό ἔργο μπορεῖ νά μετατραπεῖ μόνο θερμότητα ἴση μέ τή διαφορά $Q_1 - Q_2$.

Εἶναι λοιπόν ἀδύνατο νά ὑπάρξει θερμική μηχανή μέ μόνο θερμή πηγή. Ἔτσι ἡ τεράστια ποσότητα θερμότητας, πού κλείνει μέσα της *ἡ θάλασσα* (θερμή πηγή), δέν μπορεῖ νά μετατραπεῖ σέ ἔργο, ἄν δέν ὑπάρξει καί ψυχρή πηγή. Στήν προσπάθεια νά ἐκμεταλλευτοῦν τή θερμότητα τῆς θάλασσας σκέφτηκαν νά χρησιμοποιήσουν ὡς *θερμή πηγή* τό νερό τῆς ἐπιφάνειας τῶν τροπικῶν θαλασσῶν (20^0 ὥς 25^0 C) καί ὡς *ψυχρή πηγή* τό νερό πού ὑπάρχει στά μεγάλα βάθη τῆς θάλασσας (4^0 ὥς 8^0 C). Ἀκόμη ὅμως βρισκόμαστε στό στάδιο τῶν πειραματικῶν δοκιμῶν.

63. Βιομηχανική ἀπόδοση θερμικῆς μηχανῆς

Ἡ λειτουργία τῶν θερμικῶν μηχανῶν στηρίζεται στό δεύτερο θερμοδυναμικό ἀξίωμα. Ἀλλά ἀπό τή θερμότητα πού προσφέρουμε στή μηχανή ἀπό τήν καύση μιᾶς μάζας καύσιμου ὑλικοῦ, ἕνα σημαντικό μέρος χάνεται γιά διάφορους λόγους (διαρροή θερμότητας στό περιβάλλον, ἀπώλειες ἐνέργειας ἐξαιτίας τριβῶν κ.λ.). Ὀνομάζεται *βιομηχανική ἀπόδοση* η_B (ἤ *βιομηχανικός συντελεστής ἀποδόσεως*) θερμικῆς μηχανῆς ὁ λόγος τοῦ ὠφέλιμου μηχανικοῦ ἔργου ($E_{ωφελ}$) πού παίρνουμε ἀπό τή μηχανή, πρός τή θερμότητα ($Q_{δαπ}$) πού δαπανᾶμε στή μηχανή κατά τήν τέλεια καύση τοῦ καύσιμου ὑλικοῦ.

$$\boxed{\text{βιομηχανική ἀπόδοση} \qquad \eta_B = \frac{E_{ωφελ}}{Q_{δαπ}}}$$

Γενικά ἡ βιομηχανική ἀπόδοση τῶν θερμικῶν μηχανῶν εἶναι μικρή καί πάντοτε μικρότερη ἀπό τή θεωρητική ἀπόδοση τῆς μηχανῆς. Ἡ βιομηχανική ἀπόδοση στίς ἀτμομηχανές φτάνει ὥς 25%, στούς ἀτμοστροβίλους 35%, στούς βενζινοκινητῆρες 30% καί στίς μηχανές Diesel 38%.

Παράδειγμα. Ὁ βενζινοκινητήρας αὐτοκινήτου καταναλώνει 340 gr βενζίνης τήν ὥρα καί γιά κάθε κιλοβατώριο ὠφέλιμου ἔργου. Ἡ θερμότητα καύσεως τῆς βενζίνης εἶναι 10^4 cal/gr. Μέσα σέ μιά ὥρα ἡ μηχανή παράγει ὠφέλιμο ἔργο $E_{ωφελ} = 1$ kWh $= 3{,}6 \cdot 10^6$ Joule. Ἀπό τήν τέλεια καύση τῆς βενζίνης μέσα σέ μιά ὥρα ἀναπτύσσεται θερμότητα ἴση μέ:

$$Q_{δαπ} = 34 \cdot 10^5 \text{ cal} \qquad \text{ἤ} \qquad Q \simeq 14 \cdot 10^6 \text{ Joule}$$

Ἄρα ἡ βιομηχανική ἀπόδοση τῆς μηχανῆς εἶναι:

$$\eta_B = \frac{E_{ωφελ}}{Q_{δαπ}} = \frac{3{,}6 \cdot 10^6 \text{ Joule}}{14 \cdot 10^6 \text{ Joule}} = 0{,}26 \qquad \text{ἤ} \qquad \eta_B = 26\%$$

64. Θεώρημα τοῦ Carnot

Ὁ Carnot βρῆκε ὅτι ἡ θεωρητική ἀπόδοση μιᾶς θερμικῆς μηχανῆς ἔχει *τή μέγιστη τιμή*, ὅταν ἡ μηχανή εἶναι *ἀντιστρεπτή*, δηλαδή ὅταν λειτουργεῖ μέ τέτοιο τρόπο, ὥστε σέ κάθε στιγμή νά βρίσκεται σχεδόν σέ ἰσορροπία· Αὐτό σημαίνει ὅτι πρέπει τό ἔμβολο νά κινεῖται πολύ ἀργά μέ τήν ἐπίδραση μιᾶς μικρῆς διαφορᾶς πιέσεως. Γιά *τή μέγιστη θεωρητική ἀπόδοση*, πού καμιά πραγματική μηχανή δέν μπορεῖ νά φτάσει, ἰσχύει τό ἀκόλουθο *θεώρημα τοῦ Carnot*:

I. Ἡ θεωρητική ἀπόδοση μιᾶς θερμικῆς μηχανῆς εἶναι μέγιστη, ὅταν ἡ μηχανή εἶναι ἀντιστρεπτή.

II. Ἡ μέγιστη θεωρητική ἀπόδοση (η_{max}) εἶναι ἀνεξάρτητη ἀπό τή φύση τοῦ ρευστοῦ, μέ τό ὁποῖο λειτουργεῖ ἡ μηχανή, ἐξαρτᾶται μόνο ἀπό τίς

ἀπόλυτες θερμοκρασίες T_1 καί T_2 τῆς θερμῆς καί τῆς ψυχρῆς πηγῆς καί δίνεται ἀπό τήν ἐξίσωση :

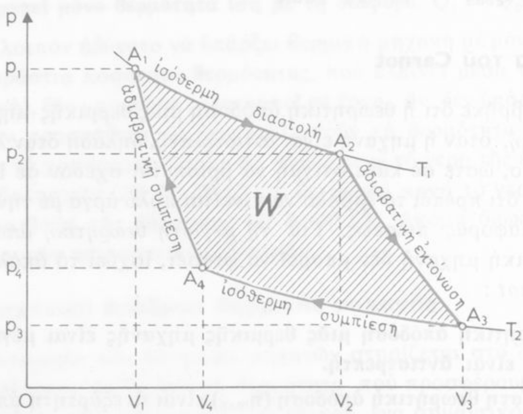
$$\boxed{\text{θεώρημα τοῦ Carnot} \qquad \eta_{max} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}}$$

Στήν πραγματικότητα καμιά θερμική μηχανή δέν μπορεῖ νά εἶναι ἀντιστρεπτή μηχανή, ὅπως ὁρίζει τό θεώρημα τοῦ Carnot, γιατί τά ἔμβολα κινοῦνται ταχύτατα μέ τήν ἐπίδραση μεγάλης διαφορᾶς πίέσεως.

Κύκλος Carnot. Λέμε ὅτι ἕνα ἀέριο παθαίνει *κυκλική μεταβολή*, ὅταν στό τέλος τῆς μεταβολῆς τό ἀέριο ξαναγυρίζει στήν *ἀρχική κατάσταση*, δηλαδή ἀποκτᾶ τόν ὄγκο, τήν πίεση καί τή θερμοκρασία πού εἶχε ἀρχικά. Ἄς θεωρήσουμε ὅτι μιά μάζα m *ἰδανικοῦ ἀερίου* βρίσκεται μέσα στόν κύλινδρο θερμικῆς μηχανῆς καί μπορεῖ νά ἀνταλλάσσει θερμότητα μέ τό περιβάλλον. Στό σχῆμα 122 τό σημεῖο A_1 παριστάνει τήν ἀρχική κατάσταση τοῦ ἀερίου.

α) Τό ἀέριο *διαστέλλεται ἰσόθερμα* ἀπό τήν κατάσταση A_1 (T_1, V_1, p_1) ὥς τήν κατάσταση A_2 (T_1, V_2, p_2). Τό ἀέριο, γιά νά διατηρήσει σταθερή τή θερμοκρασία του T_1, *παίρνει* ἀπό τό ἐξωτερικό περιβάλλον θερμότητα Q_1 πού εἶναι ἰσοδύναμη *μέ τό ἔργο τό ὁποῖο παράγει τό ἀέριο*. Αὐτό τό ἔργο παριστάνεται μέ τό ἐμβαδό τῆς ἐπιφάνειας $A_1A_2V_2V_1$.

β) Ἔπειτα τό ἀέριο παθαίνει *ἀδιαβατική ἐκτόνωση* ὥς τήν κατάσταση A_3 (T_2, V_3, p_3) καί *παράγει ἔργο* πού προέρχεται ἀπό *τή μετατροπή* μέρους



Σχ. 122. Κυκλική μεταβολή ἀερίου.

τῆς θερμότητας τοῦ ἀερίου σέ ἔργο καί ἑπομένως τό ἀέριο ψύχεται (ἀπό T_1 σέ T_2). Αὐτό τό ἔργο παριστάνεται ἀπό τό ἐμβαδό τῆς ἐπιφάνειας $A_2A_3V_3V_2$.

γ) Τό ἀέριο *συμπιέζεται ἰσόθερμα* ὥς τήν κατάσταση A_4 (T_2,V_4, p_4). Τό ἀέριο, γιά νά διατηρήσει σταθερή τή θερμοκρασία του T_2, *ἀποβάλλει* στό ἐξωτερικό περιβάλλον θερμότητα Q_2 ἡ ὁποία εἶναι ἰσοδύναμη *μέ τό ἔργο πού ξοδεύεται* γιά τή συμπίεση τοῦ ἀερίου. Αὐτό τό ἔργο παριστάνεται μέ τό ἐμβαδό τῆς ἐπιφάνειας $A_4A_3V_3V_4$.

δ) Τέλος τό ἀέριο παθαίνει *ἀδιαβατική συμπίεση* καί ξαναγυρίζει στήν ἀρχική του κατάσταση A_1 (T_1,V_1, p_1). Τό ἔργο πού ξοδεύεται γιά τή συμπίεση τοῦ ἀερίου *μεταβάλλεται σέ θερμότητα* πού προκαλεῖ ὕψωση τῆς θερμοκρασίας τοῦ ἀερίου (ἀπό T_2 σέ T_1). Αὐτό τό ἔργο παριστάνεται μέ τό ἐμβαδό τῆς ἐπιφάνειας $A_1A_4V_4V_1$.

Ἡ κυκλική μεταβολή πού ἐξετάσαμε λέγεται **κύκλος Carnot.** Τό ἀέριο *κατά τή διαστολή του παράγει ἔργο*, πού παριστάνεται ἀπό τό ἐμβαδό τῆς ἐπιφάνειας $A_1A_2A_3V_3V_1$ ἐνῶ *κατά τή συμπίεσή του* ξοδεύεται ἔργο πού παριστάνεται ἀπό τό ἐμβαδό τῆς ἐπιφάνειας $A_1A_4A_3V_3V_1$. Ἄρα, ὅταν συμβαίνει αὐτή ἡ κυκλική μεταβολή, τελικά *ἀπό τό ἀέριο παράγεται ἔργο* (W) πού παριστάνεται ἀπό τό ἐμβαδό τῆς ἐπιφάνειας πού ἔχει ὡς περίμετρο τήν καμπύλη $A_1A_2A_3A_4A_1$ (ἡ γραμμοσκιασμένη ἐπιφάνεια). Ἀποδείχνεται ὅτι :

Ὅταν ἰδανικό ἀέριο παθαίνει μεταβολή κατά κύκλο Carnot, τό ἀέριο δίνει στό περιβάλλον μηχανικό ἔργο W ἴσο μέ τή διαφορά τῆς θερμότητας Q_1 πού παίρνει τό ἀέριο στή θερμοκρασία T_1, καί τῆς θερμότητας Q_2 πού ἀποβάλλει τό ἀέριο στή θερμοκρασία T_2.

$$\boxed{W = Q_1 - Q_2}$$

Τό ἀέριο *παίρνει* τή θερμότητα Q_1, ὅταν παθαίνει *ἰσόθερμη μεταβολή* στή θερμοκρασία T_1. Ἐπίσης τό ἀέριο *ἀποβάλλει* τή θερμότητα Q_2, ὅταν παθαίνει *ἰσόθερμη μεταβολή* στή θερμοκρασία T_2.

Τό ἀέριο μπορεῖ νά πάθει κυκλική μεταβολή κατά διαφορετικούς τρόπους, ἀποδείχνεται ὅμως ὅτι :

Ἡ μεταβολή ἰδανικοῦ ἀερίου κατά κύκλο Carnot ἔχει τή μεγιστη ἀπόδοση σύμφωνα μέ τό θεώρημα τοῦ Carnot.

Εἶναι φανερό ὅτι οἱ πραγματικές θερμικές μηχανές ἀπέχουν πολύ ἀπό τόν τύπο τῆς τέλειας ἀντιστρεπτῆς μηχανῆς πού λειτουργεῖ κατά κύκλο Carnot καί μέ ἰδανικό ἀέριο.

65. Ἐντροπία

Θά ἐξετάσουμε τό ἀκόλουθο παράδειγμα. Ἔχουμε δύο μάζες $m_1 = 1$ gr καί $m_2 = 1$ gr ἑνός ὑγροῦ, πού ἀρχικά ἔχουν τήν ἴδια θερμοκρασία 0^0 C. Ἡ εἰδική θερμότητα τοῦ ὑγροῦ εἶναι $c = 0{,}2$ cal · gr^{-1} · grad^{-1}. Θερμαίνουμε τή μάζα m_1 σέ 20^0 C καί τή μάζα m_2 σέ 100^0 C. Τότε ἡ κάθεμιά μάζα τοῦ ὑγροῦ παίρνει ἀντίστοιχα θερμότητα :

ἡ μάζα m_1 $\quad Q_1 = 4$ cal $\quad$ ἡ μάζα m_2 $\quad Q_2 = 20$ cal

Ἀναμιγνύουμε τίς δύο μάζες τοῦ ὑγροῦ καί τότε παίρνουμε μάζα $m = 2$ gr, πού ἔχει τελική θερμοκρασία 60^0 C. Σχετικά μέ τή θερμοκρασία 0^0 C ἡ μάζα $m = 2$ gr, στή θερμοκρασία 60^0 C, κλείνει τώρα μέσα της περισσότερη θερμότητα, πού εἶναι ἴση μέ $Q = Q_1 + Q_2 = 24$ cal. Θά ἐξετάσουμε τί μεταβολή ἔπαθε τό πηλίκο Q/T, ὅταν ἔγινε αὐτή ἡ ἀνάμιξη.

Πρίν ἀπό τήν ἀνάμιξη εἶναι

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = \frac{4 \text{ cal}}{293 \text{ grad}} + \frac{20 \text{ cal}}{373 \text{ grad}} = 0{,}672 \frac{\text{cal}}{\text{grad}}$$

Μετά τήν ἀνάμιξη εἶναι

$$\frac{Q}{T} = \frac{24 \text{ cal}}{333 \text{ grad}} = 0{,}737 \frac{\text{cal}}{\text{grad}}$$

Ὁρισμός τῆς ἐντροπίας. Ἀπό τό παραπάνω παράδειγμα φαίνεται ὅτι τό πηλίκο Q/T εἶναι ἕνα ἰδιαίτερο φυσικό μέγεθος καί ἔχουμε τόν ἀκόλουθο *ὁρισμό* :

Ἐντροπία (S) ὀνομάζεται τό πηλίκο τῆς θερμότητας (Q), πού παίρνει ἤ ἀποβάλλει ἕνα σύστημα, διά τῆς ἀπόλυτης θερμοκρασίας (T) τοῦ συστήματος.

$$\boxed{\text{ἐντροπία} \qquad S = \frac{Q}{T}}$$

Ἡ μονάδα ἐντροπίας ὀνομάζεται Clausius (1 Cl) καί εἶναι *ἡ μιά θερμίδα κατά βαθμό* :

μονάδα ἐντροπίας $\qquad$ 1 Clausius (1 Cl) = 1 cal/grad

Ἄν ἡ θερμότητα Q μετριέται σέ Joule, τότε μονάδα ἐντροπίας εἶναι τό 1 Joule/grad.

Σημείωση. Ὁ ὅρος entropie = ἐντροπία εἶναι διεθνής καί προέρχεται ἀπό τίς ἑλληνικές λέξεις *τροπή* καί *ἔνδον* (= μέσα).

α. Οἱ μή ἀντιστρεπτές μεταβολές. Στό παράδειγμα πού ἐξετάσαμε, παρατηροῦμε ὅτι στό σύστημα πού τελικά σχηματίστηκε (δηλαδή στή μάζα $m = 2$ gr ὑγροῦ 60^0 C), ἡ ἐντροπία *αὐξήθηκε*. Ἡ ἀνάμιξη τῶν δύο μαζῶν m_1 καί m_2 τοῦ ὑγροῦ εἶναι μιά *μή ἀντιστρεπτή μεταβολή*, δηλαδή τό τελικό μίγμα εἶναι ἀδύνατο νά ξαναγυρίσει στήν ἀρχική του κατάσταση *χωρίς δαπάνη ἔργου*. Ἡ τελική κατάσταση εἶναι μιά *κατάσταση ἰσορροπίας*, στήν ὁποία ἔφτασε τό σύστημα τῶν δύο ἀρχικῶν μαζῶν m_1 καί m_2 σύμφωνα μέ τή θεμελιώδη ἀρχή ὅτι ἡ θερμότητα *αὐτόματα πάντοτε πηγαίνει* ἀπό ἕνα θερμότερο σέ ἄλλο ψυχρότερο σῶμα.

Γιά νά διευκρινίσουμε τήν ἔννοια τῆς ἐντροπίας θά θεωρήσουμε μιά μάζα m ἀερίου, πού ἔχει ἀπόλυτη θερμοκρασία Τ. Ἡ θερμότητα πού κλείνει μέσα του αὐτό τό σύστημα, εἶναι ἡ ἐκδήλωση τῶν ἄτακτων κινήσεων πού ἐκτελοῦν τά μόριά του. Αὐτές οἱ κινήσεις γίνονται σύμφωνα μέ *τό νόμο τῆς μέγιστης ἀταξίας*. Ἄν γιά μιά μόνο στιγμή κατορθώναμε νά ἐπιβάλουμε μιά τάξη στίς κινήσεις τῶν μορίων, αὐτή δέν θά μποροῦσε νά διατηρηθεῖ, γιατί, ἐξαιτίας τῶν διαδοχικῶν συγκρούσεων τῶν μορίων μεταξύ τους, τό σύστημα θά ξαναγύριζε ἀμέσως στήν κατάσταση τῆς ἀπόλυτης ἀταξίας, στήν ὁποία ἐπικρατεῖ *στατιστική ἰσορροπία*. Μποροῦμε λοιπόν νά βγάλουμε τό συμπέρασμα ὅτι εἶναι *πολύ ἀπίθανη* μιά κατάσταση αὐτοῦ τοῦ ἀερίου, στήν ὁποία θά ἐπικρατοῦσε κάποια τάξη στίς κινήσεις τῶν μορίων του. Ὥστε *ἡ πιό πιθανή* κατάσταση τοῦ ἀερίου εἶναι ἐκείνη, στήν ὁποία ἐπικρατεῖ ἡ μέγιστη δυνατή ἀταξία στίς κινήσεις τῶν μορίων του.

Σέ ἕνα σύστημα ἡ πιθανότητα μιᾶς καταστάσεως συνδέεται μέ τήν ἔννοια τῆς ἐντροπίας. Ὅταν σέ ἕνα σύστημα συμβαίνει *μή ἀντιστρεπτή μεταβολή*, τότε τό σύστημα μεταβαίνει *ἀπό μιά λιγότερο πιθανή σέ μιά περισσότερο πιθανή κατάσταση*. Ἡ πειραματική ἔρευνα βρῆκε ὅτι οἱ διάφορες μεταβολές, πού συμβαίνουν στή Φύση, ἀκολουθοῦν τόν ἑξῆς *νόμο* :

Ὅταν ἕνα σύστημα μεταβαίνει ἀπό μιά λιγότερο πιθανή σέ μιά περισσότερο πιθανή κατάσταση (μή ἀντιστρεπτή μεταβολή), ἡ ἐντροπία τοῦ συστήματος αὐξάνεται.

β. Ἡ ἐξέλιξη τῶν φαινομένων στή Φύση. Ἡ θερμότητα ἀπό τή Φύση της συνδέεται μέ τίς ἀπόλυτα ἄτακτες κινήσεις τῶν μορίων. Ἡ αὐτόματη λοιπόν μετατροπή τῶν ἄλλων μορφῶν ἐνέργειας σέ θερμότητα (δηλαδή *ἡ ὑποβάθμιση τῆς ἐνέργειας*) εἶναι μετάβαση ἀπό μιά κατάσταση σέ μιά ἄλλη *περισσότερο πιθανή κατάσταση*. Ὅλα τά φαινόμενα συμβαίνουν στή Φύση μέ τέτοιο τρόπο, ὥστε μιά λιγότερο πιθανή κατάσταση νά μεταβάλλεται σέ μιά περισσότερο πιθανή κατάσταση, δηλαδή ὅλα τά φαινόμενα, πού συμβαίνουν στή Φύση, εἶναι *μή ἀντιστρεπτές μεταβολές* καί ἔτσι ἡ ἐντροπία ἑνός συστήματος *συνεχῶς αὐξάνεται*.

Στή Φύση ποτέ δέν μπορεῖ νά συμβεῖ *ἀντιστρεπτή μεταβολή*, δηλαδή μετάβαση ἀπό μιά περισσότερο πιθανή σέ μιά λιγότερο πιθανή κατάσταση. Μόνο τεχνητά καί πάντοτε *μέ δαπάνη ἔργου* μποροῦμε νά πετύχουμε ἀντιστρεπτή μεταβολή καί τότε ἡ ἐντροπία ἑνός συστήματος *ἐλαττώνεται*. Ἐπίσης μποροῦμε τεχνητά νά ἐπιβραδύνουμε, ὄχι ὅμως καί νά καταργήσουμε τήν ἐξέλιξη τῶν καταστάσεων πρός τίς περισσότερο πιθανές καταστάσεις. Ὥστε μποροῦμε νά διατυπώσουμε τόν ἀκόλουθο *γενικότατο νόμο* :

Ὅλα τά φαινόμενα πού συμβαίνουν στή Φύση, εἶναι μή ἀντιστρεπτές μεταβολές, δηλαδή εἶναι μετάβαση ἀπό μιά λιγότερο πιθανή σέ μιά περισσότερο πιθανή κατάσταση, ὥστε ἡ ἐντροπία ἑνός συστήματος συνεχῶς νά αὐξάνεται.

Ὁ νόμος αὐτός φανερώνει ὅτι ὅλες οἱ μεταβολές στή Φύση ὁδηγοῦν σταθερά *πρός τήν πιό πιθανή κατάσταση, πού εἶναι ἡ ὑποβάθμιση τῆς ἐνέργειας*.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

122. Θά ἐπαναλάβουμε τό πείραμα πού ἔκαμε ὁ Joule. Ἀπό ὕψος $h = 2$ m ἀφήνουμε νά πέσει 20 φορές μιά μάζα ἴση μέ $m = 10$ kgr. Τό θερμιδόμετρο ἔχει θερμοχωρητικότητα $K = 1000$ cal/grad καί παρατηροῦμε ὅτι ἡ θερμοκρασία του ὑψώνεται κατά $\Delta\theta = 0{,}93^0$ C. Πόση εἶναι ἡ τιμή τοῦ μηχανικοῦ ἰσοδυνάμου J τῆς θερμότητας ; $g = 9{,}8$ m/sec^2.

123. Ἕνας τροχός ἀπό ἀλουμίνιο ἔχει ἀκτίνα $R = 10$ cm καί στρέφεται μέ συχνότητα $\nu = 3$ Hz. Ἕνα μέρος τῆς περιφέρειας τοῦ τροχοῦ περιβάλλεται ἀπό μιά ταινία. Ἡ μιά ἄκρη τῆς ταινίας στερεώνεται σέ δυναμόμετρο καί ἀπό τήν ἄλλη ἄκρη της κρέμεται ἕνα σῶμα πού ἔχει βάρος $B = 20$ N. Ὅταν ὁ τροχός στρέφεται, τό δυναμόμετρο δείχνει 16 N. Ἄν ὁλόκληρο τό ἔργο E τῆς τριβῆς μεταβάλλεται σέ θερμότητα Q, πόση εἶναι αὐτή ἡ θερμότητα ;

124. Μιά μάζα m ἀέρα ἔχει ὄγκο $V_0 = 10$ lt, θερμοκρασία 0^0C καί πίεση $p_0 = 76$ cm Hg. Ὅταν αὐτή ἡ μάζα τοῦ ἀέρα θερμαίνεται κατά $\Delta\theta = 1^0$ C ὑπό σταθερό ὄγκο, ξοδεύεται θερμότητα ἴση μέ $Q_1 = 2{,}174$ cal. Ἐνῶ, ὅταν αὐτή ἡ μάζα τοῦ ἀέρα θερμαίνεται ὑπό σταθερή πίεση, ξοδεύεται θερμότητα ἴση μέ $Q_2 = 3{,}070$ cal. Νά βρεθεῖ τό μηχανικό ἰσοδύναμο J τῆς θερμότητας. $g = 10$ m/sec^2.

125. Ἐκτελοῦμε τό πείραμα τοῦ Joule χρησιμοποιώντας ἕναν ἠλεκτροκινητήρα. Αὐτός κινεῖ τά πτερύγια πού εἶναι μέσα στό θερμιδόμετρο, καί μεταδίδει σ' αὐτά σταθερή ἰσχύ $P = 7{,}36$ kW. Τό θερμιδόμετρο ἔχει θερμοχωρητικότητα $K = 10^4$ cal/grad. Ἄν στή χρονική στιγμή $t = 0$ ἀρχίζει ἡ λειτουργία τοῦ κινητήρα καί ἡ ἀρχική θερμοκρασία τοῦ θερμιδομέτρου εἶναι τότε θ_0, νά βρεθεῖ ἐξίσωση πού νά δίνει τή θερμοκρασία τοῦ θερμιδομέτρου σέ συνάρτηση μέ τό χρόνο t.

126. Μιά μάζα νεροῦ ἴση μέ m = 1 kgr ἐξαερώνεται στή θερμοκρασία 150^0 C. Σ' αὐτή τή θερμοκρασία ἡ πίεση τῶν κορεσμένων ὑδρατμῶν εἶναι $p_K = 4{,}87$ at καί μάζα ἀτμοῦ ἴση μέ 1 kgr ἔχει ὄγκο 382 lt. Νά βρεθεῖ τό ἐξωτερικό ἔργο, πού παράγεται κατά τήν ἐξαέρωση αὐτή, καί μέ πόση θερμότητα σέ θερμίδες ἰσοδυναμεῖ αὐτό τό ἔργο. Ἡ πυκνότητα τοῦ νεροῦ στή θερμοκρασία 150^0 C θεωρεῖται ἴση μέ $\rho = 1$ gr/cm³. $g = 10$ m/sec².

127. Ἕνα ἀέριο ἔχει μάζα m = 1000 gr καί θερμοκρασία $\theta_1 = 20^0$ C. Τό ἀέριο παθαίνει ἀδιαβατική ἐκτόνωση καί ἡ τελική θερμοκρασία του γίνεται $\theta_2 = -10^0$ C. Ὅταν τό ἀέριο παθαίνει αὐτή τήν ἐκτόνωση, ἡ μεταβολή τῆς ἐσωτερικῆς ἐνέργειάς του εἶναι ἰσοδύναμη μέ τή θερμότητα πού θά ἔπαιρνε ἀπέξω τό ἀέριο, ἄν θερμαινόταν ὑπό σταθερό ὄγκο ἀπό θ_2 σέ θ_1. Νά βρεθεῖ τό ἔργο πού παράγεται κατά τήν ἐκτόνωση τοῦ ἀερίου. Εἰδική θερμότητα τοῦ ἀερίου ὑπό σταθερό ὄγκο $c_V = 0{,}15$ cal · gr⁻¹ · grad⁻¹.

128. Ὅταν μιά μάζα m ἀερίου θερμαίνεται κατά θ^0 C ὑπό σταθερή πίεση (τήν ἀτμοσφαιρική πίεση), ὁ ὄγκος τοῦ ἀερίου αὐξάνεται κατά $\Delta V = 0{,}25$ lt. Τότε δίνουμε στό ἀέριο θερμότητα Q = 21,8 cal. Ὅταν ἡ ἴδια μάζα m τοῦ ἀερίου θερμαίνεται κατά θ^0 C ὑπό σταθερό ὄγκο, τότε δίνουμε στό ἀέριο θερμότητα Q = 15,6 cal. Νά βρεθεῖ στίς δύο περιπτώσεις ἡ μεταβολή τῆς ἐσωτερικῆς ἐνέργειας τοῦ ἀερίου. Ἀτμοσφαιρική πίεση $p_0 = 76$ cm Hg. g = 10 m/sec².

129. Μιά θερμική μηχανή λειτουργεῖ μεταξύ τῶν θερμοκρασιῶν 177^0 C καί 27^0 C. Ὑποθέτουμε ὅτι ἡ μηχανή λειτουργεῖ μέ τή θεωρητική ἀπόδοση. Τό ρευστό παίρνει ἀπό τή θερμή πηγή κατά δευτερόλεπτο θερμότητα $Q_1 = 63 \cdot 10^3$ cal. Νά βρεθεῖ : 1) ἡ θεωρητική ἀπόδοση τῆς μηχανῆς· 2) ἡ θερμότητα Q_2 πού δίνει τό ρευστό στήν ψυχρή πηγή· καί 3) ἡ ἰσχύς τῆς μηχανῆς.

130. Μιά θερμική μηχανή λειτουργεῖ μεταξύ τῶν θερμοκρασιῶν 227^0 C καί 27^0 C καί μιά μάζα m τοῦ ρευστοῦ παίρνει ἀπό τή θερμή πηγή κατά δευτερόλεπτο θερμότητα $Q_1 = 10^5$ cal. 1) Πόση εἶναι ἡ θεωρητική ἀπόδοση τῆς μηχανῆς καί πόση θά ἔπρεπε νά εἶναι ἡ ἰσχύς τῆς μηχανῆς, ἄν αὐτή ἦταν ἰδανική μηχανή ; 2) Ὑπολογίσαμε ὅτι γιά τή λειτουργία αὐτῆς τῆς μηχανῆς προσφέρουμε στή μάζα m τοῦ ρευστοῦ θερμότητα $Q_{\delta\alpha\pi} = 12 \cdot 10^4$ cal/sec καί ἀπό αὐτή τή μάζα τοῦ ρευστοῦ παίρνουμε ὠφέλιμη ἐνέργεια $E_{\omega\varphi\varepsilon\lambda} = 7{,}542 \cdot 10^4$ Joule/sec. Πόση εἶναι ἡ βιομηχανική ἀπόδοση τῆς μηχανῆς ;

131. Ἕνα ἰδανικό ἀέριο παθαίνει μιά σειρά μεταβολῶν πού παριστάνονται ἀπό ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ. Ἡ πλευρά ΑΓ εἶναι παράλληλη μέ τόν ἄξονα τῶν ὄγκων καί ἡ πλευρά ΑΒ εἶναι παράλληλη μέ τόν ἄξονα τῶν πιέσεων. Ἡ πίεση καί ὁ ὄγκος πού ἀντιστοιχοῦν σέ κάθε κορυφή τοῦ τριγώνου εἶναι :

στήν Α : $p_A = 1\ kp/cm^2$ $V_A = 1\ m^3$

στή Β : $p_B = 2\ kp/cm^2$ $V_B = 1\ m^3$

στή Γ : $p_\Gamma = 1\ kp/cm^2$ $V_\Gamma = 3\ m^3$

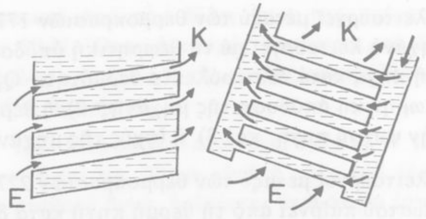
Νά βρεθεῖ τό ἔργο πού παράγεται ἀπό τό ἀέριο κατά τήν κυκλική αὐτή μεταβολή καί ἡ θερμότητα πού ξοδεύεται γι᾽ αὐτή τή μεταβολή. $g = 10\ m/sec^2$.

Θερμικές μηχανές

66. Ἀτμομηχανές

Στίς *ἀτμομηχανές* τό ἀέριο πού προκαλεῖ τήν κίνηση εἶναι *ὁ ὑδρατμός*. Αὐτός παράγεται μέσα σέ κατάλληλο *λέβητα* (καζάνι) πού θερμαίνεται μέ τή θερμότητα πού ἐλευθερώνεται κατά τήν καύση ἑνός καύσιμου ὑλικοῦ (γαιάνθρακα, πετρελαίου).

Ὁ λέβητας ἔχει τέτοια μορφή, ὥστε ἡ ἐπιφάνεια ἐπαφῆς μέ τά θερμά καυσαέρια νά εἶναι πολύ μεγάλη. Ἔτσι σέ ὁρισμένες ἀτμομηχανές τά καυσαέρια περνοῦν μέσα ἀπό σωλῆνες πού εἶναι βυθισμένοι μέσα στό νερό πού θέλουμε νά ἐξατμιστεῖ (σχ. 123α) καί τότε ἡ ἐπιφάνεια θερμάνσεως φτάνει σέ 25 m² κατά κυβικό μέτρο νεροῦ. Σέ ἄλλες περιπτώσεις ὁ λέβητας ἀποτελεῖται ἀπό σύστημα σωληνώσεων, πού περιβάλλονται ἀπό τά θερμά καυσαέρια (σχ. 123β) καί τότε ἡ ἐξαέρωση τοῦ νεροῦ γίνεται πολύ γρήγορα, γιατί ἡ ἐπιφάνεια θερμάνσεως ξεπερνάει τά 50 m² κατά κυβικό μέτρο νεροῦ. Ἡ πίεση μέσα στό λέβητα εἶναι ἴση μέ τήν τάση τῶν κορεσμένων ὑδρατμῶν, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ στή

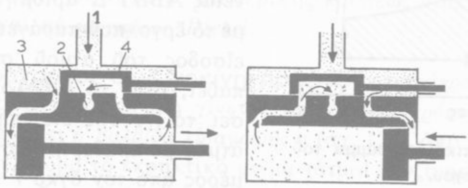


Σχ. 123. Μορφές τοῦ λέβητα (Ε ἑστία, Κ καπνοδόχος).

θερμοκρασία πού ἔχει τό νερό μέσα στό λέβητα (σχ. 124β). Ἀνάλογα μέ τόν τρόπο πού χρησιμοποιεῖται ὁ ἀτμός, οἱ ἀτμομηχανές διακρίνονται σέ *ἀτμομηχανές μέ ἔμβολο* καί σέ *ἀτμοστροβίλους*.

67. Ἀτμομηχανή μέ ἔμβολο

Σήμερα *ἡ ἀτμομηχανή μέ ἔμβολο* σχεδόν δέ χρησιμοποιεῖται, ἀλλά τήν ἀναφέρουμε, γιατί ἡ λειτουργία της δείχνει τήν ἐφαρμογή ὁρισμένων νόμων τῆς Θερμοδυναμικῆς. Τά κύρια μέρη τῆς ἀτμομηχανῆς εἶναι : α) *ὁ λέβητας* (ἡ θερμή πηγή), στόν ὁποῖο παράγεται ὑπέρθερμος ἀτμός· β) *ὁ κύλινδρος*, πού μέσα σ' αὐτόν κινεῖται παλινδρομικά ἕνα ἔμβολο· γ) τό σύστημα *πού μετατρέπει* τήν παλινδρομική κίνηση τοῦ ἐμβόλου σέ περιστροφική κίνηση· καί δ) *ὁ συμπυκνωτής* (ἡ ψυχρή πηγή) πού συνεχῶς ψύχεται ἀπό ψυχρό νερό, γιά νά ὑγροποιεῖται μέσα σ' αὐτόν ὁ ἀτμός πού ξεφεύγει ἀπό τόν κύλινδρο. Οἱ ἀτμομηχανές τῶν σιδηροδρόμων δέν ἔχουν συμπυκνωτή καί ὁ ἀτμός ξεφεύγει στήν ἀτμόσφαιρα (ἡ ψυχρή πηγή).



Σχ. 124. Τομή κυλίνδρου ἀτμομηχανῆς μέ ἔμβολο (1 εἴσοδος ἀτμοῦ. 2 ἔξοδος ἀτμοῦ. 3 θάλαμος ἀτμοῦ. 4 ἀτμοσύρτης).

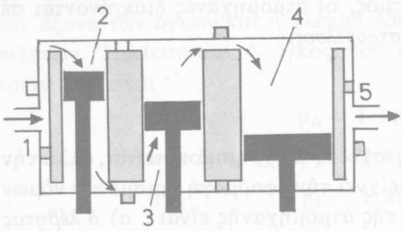
Μέσα στόν κύλινδρο ἡ παλινδρομική κίνηση τοῦ ἐμβόλου ἐξασφαλίζεται μέ τή βοήθεια ἑνός κινητοῦ συστήματος πού λέγεται *ἀτμοσύρτης* (σχ. 124). Ἔτσι διαδοχικά ὁ ἀτμός πιέζει πότε τή μιά καί πότε τήν ἄλλη ἐπιφάνεια τοῦ ἐμβόλου. Στό σχῆμα 125 φαίνεται τό σύστημα πού μετατρέπει τήν παλινδρομική κίνηση τοῦ ἐμβόλου σέ περιστροφική κίνηση τοῦ σφονδύλου.

Ἡ παραγωγή ἔργου. Ἡ εἴσοδος τοῦ ἀτμοῦ στόν κύλινδρο παύει ἀπότομα, ὅταν τό ἔμβολο ἔχει ἐκτελέσει ἕνα μικρό μόνο μέρος τῆς διαδρομῆς του (π.χ. τό 1/10 τῆς διαδρομῆς). Τότε συμβαίνει σχεδόν *ἀδιαβατική ἐκτόνωση* τοῦ ἀτμοῦ πού βρίσκε-

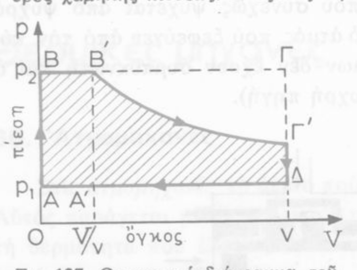
Σχ. 125. Μετατροπή τῆς παλινδρομικῆς κινήσεως τοῦ ἐμβόλου σέ περιστροφική κίνηση τοῦ σφονδύλου.

ται μέσα στόν κύλινδρο καί ὁ ἀτμός ψύχεται. Γιά νά ἀποδώσει ὁ ἀτμός ὅλο τό ἔργο πού μπορεῖ νά δώσει, χρησιμοποιοῦνται *σύνθετες μηχανές*, πού ἀποτελοῦνται ἀπό μιά σειρά κυλίνδρων (σχ. 126). Μέσα σ' αὐτούς ὁ ἴδιος ἀτμός ἐκτονώνεται διαδοχικά. Οἱ διαστάσεις αὐτῶν τῶν κυλίνδρων αὐξάνουν, ὅσο προχωρεῖ ἡ ἐκτόνωση.

Τό θεωρητικό διάγραμμα τοῦ ἔργου ἔχει τή μορφή πού δείχνει τό σχῆμα 127. Ἡ εὐθεία ΒΒ' ἀντιστοιχεῖ στήν ἀναρρόφηση τοῦ ἀτμοῦ, ἡ καμπύλη Β'Γ' στήν ἐκτόνωσή του καί τό ἐμβαδό τῆς ἐπιφάνειας ΑΒΒ'Γ'Δ ἀριθμητικά εἶναι ἴσο μέ τό ἔργο πού παράγει ὁ ἀτμός. Ἡ εἴσοδος τοῦ ἀτμοῦ στόν κύλινδρο παύει, ὅταν τό ἔμβολο ἔχει ἐκτελέσει τό 1/ν τῆς διαδρομῆς του καί ὁ ἀτμός μέ σταθερή πίεση γεμίζει ἕνα μέρος ἀπό τόν ὄγκο V τοῦ κυλίνδρου ἴσο μέ V/ν.



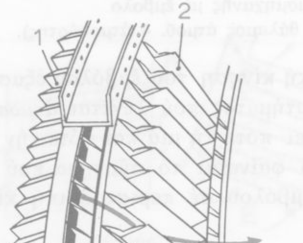
Σχ. 126. Σχηματική παράσταση σύνθετης μηχανῆς (1 εἴσοδος ἀτμοῦ. 2 κύλινδρος ψηλῆς πιέσεως. 3 κύλινδρος μέσης πιέσεως. 4 κύλινδρος χαμηλῆς πιέσεως. 5. ἔξοδος ἀτμοῦ).



Σχ. 127. Θεωρητικό διάγραμμα τοῦ ἔργου.

67α. Ἀτμοστρόβιλοι

Στούς *ἀτμοστροβίλους* (τουρμπίνες) ὁ ἀτμός μέ μεγάλη πίεση ἔρχεται στό μεριστή (σχ. 128), πού ἔχει μόνιμα πτερύγια. Ἐκεῖ ὁ ἀτμός ἐκτονώνεται, ἀποκτᾶ μεγάλη ταχύτητα καί ἑπομένως *μεγάλη κινητική ἐνέργεια*. Ὁ ἀτμός ἐκτοξεύεται πάνω στά πτερύγια ἑνός τροχοῦ, πού μπορεῖ νά περιστρέφεται γύρω ἀπό ἄξονα. Ἀπό ἐκεῖ ὁ ἀτμός ἔρχεται σέ δεύτερο ἤ καί τρίτο ἀτμοστρόβιλο, ὅπου παθαίνει νέες διαδοχικές ἐκτονώσεις. Οἱ ἀτμοστρόβιλοι



Σχ.128. Σχηματική παράσταση ἀτμοστροβίλου (1 εἴσοδος ἀτμοῦ. 2 πτερύγια τοῦ στρεπτοῦ μέρους τοῦ στροβίλου. 3 μεριστής. 4 τμῆμα τοῦ τροχοῦ τοῦ στροβίλου).

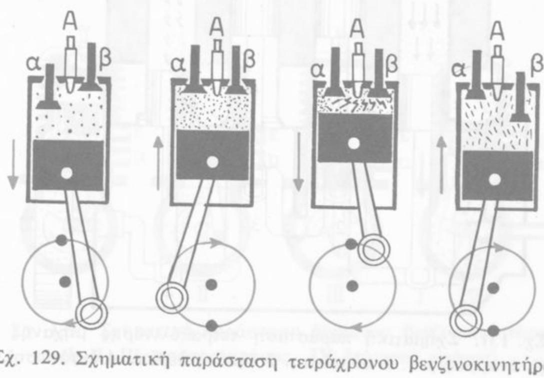
ἔχουν σχετικά μεγάλη ἀπόδοση, γιατί ἡ ἐνέργεια τοῦ ἀτμοῦ δίνει ἀμέσως περιστροφική κίνηση. Σήμερα χρησιμοποιοῦνται *ἀτμοστρόβιλοι ψηλῆς πιέσεως* (ἀρχική πίεση 200 at) πού λειτουργοῦν μέ ὑπέρθερμο ἀτμό (ὥς 600^0 C). Οἱ σύγχρονοι ἀτμοστρόβιλοι ἔχουν ἰσχύ ὥς 50 000 kW, μποροῦν νά ἐκτελοῦν 3000 στροφές τό λεπτό καί ἡ ἀπόδοσή τους φτάνει σέ 35%.

68. Θερμικές μηχανές ἐσωτερικῆς καύσεως

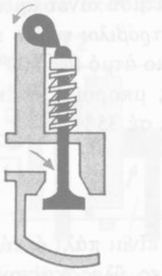
Σημαντικό μέρος τῶν μηχανῶν ἐσωτερικῆς καύσεως εἶναι πάλι *ὁ κύλινδρος*, πού μέσα σ' αὐτόν κινεῖται ἔμβολο. Οἱ καύσιμες ὕλες καίγονται *μέσα στόν κύλινδρο* καί τά θερμά καυσαέρια ἐνεργοῦν πάντοτε πάνω στήν ἴδια ἐπιφάνεια τοῦ ἐμβόλου. Μέ τίς μηχανές ἐσωτερικῆς καύσεως πετυχαίνουμε μεγαλύτερη ἀπόδοση, γιατί ἡ θερμότητα πού ἐλευθερώνεται κατά τήν καύση, συγκεντρώνεται μέσα στόν κύλινδρο καί τήν παίρνουν κυρίως τά καυσαέρια, τά ὁποῖα ἀποκτοῦν τότε ψηλή θερμοκρασία καί μεγάλη πίεση. Ὡς καύσιμες ὕλες χρησιμοποιοῦνται διάφορα ὑγρά ἤ ἀέρια καί κυρίως βενζίνη ἤ πετρέλαιο. Οἱ μηχανές ἐσωτερικῆς καύσεως διακρίνονται σέ *βενζινοκινητῆρες* καί σέ *κινητῆρες Diesel*.

α. Τετράχρονος βενζινοκινητήρας. Στόν *τετράχρονο βενζινοκινητήρα* ὁ κύκλος τῆς λειτουργίας του γίνεται σέ *τέσσερις χρόνους*. Στή βάση τοῦ κυλίνδρου ὑπάρχει *ἡ βαλβίδα εἰσαγωγῆς* α (σχ. 129), ἀπό τήν ὁποία μπαίνει μέσα στόν κύλινδρο τό ἐκρηκτικό μίγμα (ἀτμοί βενζίνης καί ἀέρας) καί *ἡ βαλβίδα ἐξαγωγῆς* ε, ἀπό τήν ὁποία βγαίνουν ἀπό τόν κύλινδρο τά καυσαέρια. Ἐπίσης ὑπάρχει *ὁ ἀναφλεκτήρας* (bougie), πού παράγει ἠλεκτρικό σπινθήρα μέσα στόν κύλινδρο.

1ος χρόνος. Ἀναρρόφηση. Ἡ βαλβίδα ἐξαγωγῆς ε εἶναι κλειστή, ἐνῶ ἡ



Σχ. 129. Σχηματική παράσταση τετράχρονου βενζινοκινητήρα.



Σχ. 130. Μηχανισμός τῆς λειτουργίας τῶν βαλβίδων.

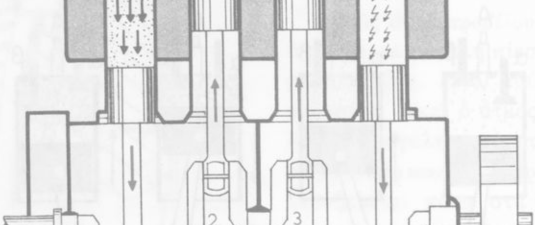
βαλβίδα εἰσαγωγῆς α εἶναι ἀνοιχτή καί καθώς τό ἔμβολο ἀπομακρύνεται ἀπό τή βάση τοῦ κυλίνδρου, γίνεται *ἀναρρόφηση* μίγματος ἀέρα καί ἀτμῶν βενζίνης.

2ος χρόνος. Συμπίεση. Οἱ δύο βαλβίδες εἶναι κλειστές καί τό ἔμβολο, ἐπιστρέφοντας πρός τή βάση τοῦ κυλίνδρου, *συμπιέζει* τό μίγμα.

3ος χρόνος. Ἔκρηξη καί ἐκτόνωση. Οἱ δύο βαλβίδες ἐξακολουθοῦν νά εἶναι κλειστές. Ὅταν τό ἔμβολο πλησιάζει στό τέλος τῆς διαδρομῆς του, τότε ὁ ἀναφλεκτήρας παράγει ἠλεκτρικό σπινθήρα καί ἡ βενζίνη ἀναφλέγεται καί καίγεται ἀπότομα *(ἔκρηξη)*. Ἐπειδή ἀναπτύσσεται ψηλή θερμοκρασία (περίπου 2000^0 C), τά καυσαέρια ἔχουν μεγάλη πίεση καί κατά *τήν ἐκτόνωσή τους* σπρώχνουν ἀπότομα τό ἔμβολο.

4ος χρόνος. Ἐξαγωγή. Ἡ βαλβίδα ἐξαγωγῆς ἀνοίγει καί τό ἔμβολο, ἐπιστρέφοντας πρός τή βάση τοῦ κυλίνδρου, *διώχνει* τά καυσαέρια στήν ἀτμόσφαιρα.

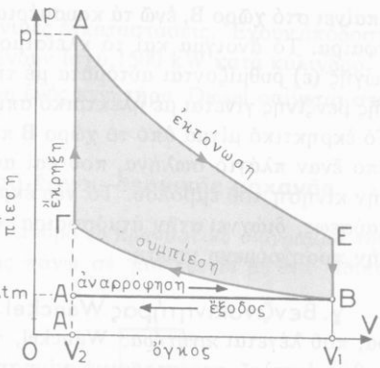
Παρατηροῦμε ὅτι ἀπό τίς τέσσερις διαδρομές τοῦ ἐμβόλου *ὠφέλιμο ἔργο* παράγεται μόνο κατά τήν ἐκτόνωση τῶν ἀερίων (3ος χρόνος). Τό ἄνοιγμα καί τό κλείσιμο τῶν βαλβίδων γίνεται αὐτόματα μέ κατάλληλη διάταξη (σχ. 130). Γιά νά ἔχουμε κινητῆρες μέ ὁμαλή κίνηση καί μεγάλη ἰσχύ



Σχ. 131. Σχηματική παράσταση τετρακύλινδρης μηχανῆς (1 ἀναρρόφηση. 2 συμπίεση. 3 ἔξοδος ἀερίων. 4 ἐκτόνωση).

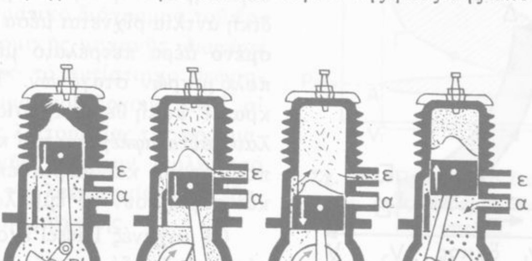
συνδυάζουμε περισσότερους κυλίνδρους καί τότε ὁ κινητήρας λέγεται τετρακύλινδρος, ἑξακύλινδρος κ.ο.κ. Ἔτσι σέ ἕναν τετρακύλινδρο κινητήρα κατά τούς τρεῖς παθητικούς χρόνους τῆς κινήσεως τοῦ ἐμβόλου τοῦ πρώτου κυλίνδρου συμβαίνει ἐκτόνωση σέ ἄλλο κύλινδρο τῆς μηχανῆς (σχ. 131).

Τό θεωρητικό διάγραμμα τοῦ ἔργου ἔχει τή μορφή πού δείχνει τό σχῆμα 132. Ἡ ἀναρρόφηση καί ἡ ἔξοδος τῶν ἀερίων γίνονται ὑπό τήν ἀτμοσφαιρική πίεση. Παρατηροῦμε ὅτι κατά τήν ἔναρξη τῆς ἀναρροφήσεως ὁ ὄγκος δέν εἶναι μηδέν (σημεῖο Α). Ὁ ὄγκος αὐτός V_2, πού ὑπάρχει ἀνάμεσα στό ἔμβολο καί τή βάση τοῦ κυλίνδρου, ἀντιστοιχεῖ στό θάλαμο ἀναφλέξεως.



Σχ. 132. Θεωρητικό διάγραμμα τοῦ ἔργου τετράχρονου βενζινοκινητήρα.

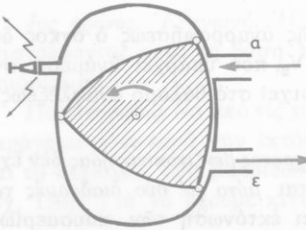
β. Δίχρονος βενζινοκινητήρας. Ὁ *δίχρονος βενζινοκινητήρας* δέν ἔχει βαλβίδες καί ἡ λειτουργία του ἐξασφαλίζεται *μόνο μέ δύο διαδρομές τοῦ ἐμβόλου*. Κατά τόν πρῶτο χρόνο συμβαίνει ἐκτόνωση τῶν καυσαερίων, ἐξαγωγή τῶν προϊόντων τῆς καύσεως καί ἀναρρόφηση νέου μίγματος ἀέρα καί ἀτμῶν βενζίνης. Κατά τό δεύτερο χρόνο γίνεται συμπίεση καί ἀνάφλεξη τῆς βενζίνης. Στό σχῆμα 133 δείχνεται ἡ λειτουργία ἑνός δίχρονου βενζινοκινητήρα. Τό μίγμα τοῦ ἀέρα καί τῶν ἀτμῶν τῆς βενζίνης ἀπό τή θυρίδα α



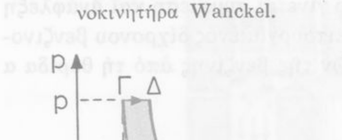
Σχ. 133. Σχηματική παράσταση δίχρονου βενζινοκινητήρα. (I, II, III, πρῶτος χρόνος. IV δεύτερος χρόνος).

μπαίνει στό χῶρο Β, ἐνῶ τά καυσαέρια βγαίνουν ἀπό τή θυρίδα ε στήν ἀτμόσφαιρα. Τό ἄνοιγμα καί τό κλείσιμο τῶν θυρίδων εἰσαγωγῆς (α) καί ἐξαγωγῆς (ε) ρυθμίζονται αὐτόματα μέ τήν κίνηση τοῦ ἐμβόλου. Ἡ ἀνάφλεξη τῆς βενζίνης γίνεται μέ ἠλεκτρικό σπινθήρα, ὅταν τό μίγμα ἔχει συμπιεστεῖ. Τό ἐκρηκτικό μίγμα ἀπό τό χῶρο Β περνάει στό χῶρο πού γίνεται ἡ καύση ἀπό ἕναν πλάγιο σωλήνα, πού καί αὐτός ἀνοίγει καί κλείνει αὐτόματα μέ τήν κίνηση τοῦ ἐμβόλου. Τό νέο ἐκρηκτικό μίγμα, πού ἔρχεται στό χῶρο καύσεως, διώχνει στήν ἀτμόσφαιρα τά καυσαέρια πού σχηματίστηκαν κατά τήν προηγούμενη καύση.

γ. Βενζινοκινητήρας Wanckel. Στόν καινούριο τύπο βενζινοκινητήρα, πού λέγεται *κινητήρας* Wanckel, τό ἔμβολο ἔχει τριγωνική μορφή καί καθώς ἐκτελεῖ περιστροφική κίνηση (σχ. 134) δημιουργεῖ τρεῖς χώρους. Καί σ' αὐτό τόν κινητήρα γίνεται ἀναρρόφηση, συμπίεση, ἔκρηξη, ἐκτόνωση καί ἐξαγωγή, ὅπως καί στούς συνηθισμένους βενζινοκινητῆρες.



Σχ. 134. Σχηματική παράσταση βενζινοκινητήρα Wanckel.



Σχ. 135. Θεωρητικό διάγραμμα κινητήρα Diesel (ΑΒ ἀναρρόφηση. ΑΓ συμπίεση τοῦ ἀέρα. ΓΔ βαθμιαία ἀνάφλεξη καί σπρώξιμο τοῦ ἐμβόλου. ΔΕ ἐκτόνωση. ΒΑ ἔξοδος τῶν ἀερίων).

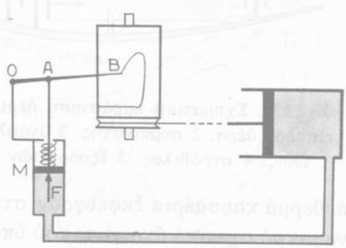
δ. Κινητῆρες Diesel. *Οἱ κινητῆρες* Diesel λειτουργοῦν ὅπως καί οἱ τετράχρονοι βενζινοκινητῆρες μέ τήν ἑξῆς ὅμως διαφορά. Κατά τόν πρῶτο χρόνο γίνεται *ἀναρρόφηση μόνο ἀτμοσφαιρικοῦ ἀέρα*. Ἔπειτα γίνεται ἀδιαβατική *συμπίεση* τοῦ ἀέρα (ὥς 50 at) καί ἔτσι ὁ ἀέρας ἀποκτᾶ ψηλή θερμοκρασία (ὥς 800^0 C). Ὅταν πλησιάζει νά συμπληρωθεῖ ἡ συμπίεση, τότε μέ εἰδική ἀντλία ρίχνεται μέσα στό συμπιεσμένο ἀέρα πετρέλαιο μέ τή μορφή πολύ μικρῶν σταγόνων. Ἐπειδή ἐπικρατεῖ ψηλή θερμοκρασία, τό πετρέλαιο *αὐταναφλέγεται* καί καίγεται. Τά πολύ θερμά καυσαέρια ἐκτονώνονται καί σπρώχνουν τό ἔμβολο.

Οἱ μηχανές Diesel ἔχουν τό πλεονέκτημα ὅτι δέ χρειάζονται ἰδιαίτερο σύστημα ἀναφλέξεως καί καῖνε πετρέλαιο, πού εἶναι πιό φτηνή καύσιμη ὕλη. Οἱ μηχανές Diesel χρησιμοποιοῦνται στά μεταφορικά μέσα (αὐτοκίνητα, σιδηρόδρομοι, πλοῖα) καί σέ μόνιμες ἐγκαταστάσεις. Ἔχουν ἀπόδοση ὥς 40% καί μερικές μηχανές Diesel δίνουν ἰσχύ 1500 kW κατά κύλινδρο.

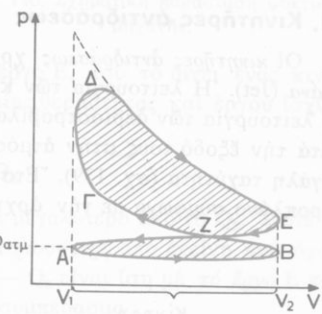
Τό θεωρητικό διάγραμμα τοῦ ἔργου ἑνός κινητήρα Diesel φαίνεται στό σχῆμα 135.

69. Τό πραγματικό διάγραμμα τοῦ ἔργου θερμικῆς μηχανῆς

Σέ μιά θερμική μηχανή πού ἔχει κύλινδρο *τό πραγματικό διάγραμμα τοῦ ἔργου* μπορεῖ νά καταγραφεῖ ἀπευθείας πάνω σέ μιά ταινία μέ ἕνα εἰδικό ὄργανο, πού λέγεται *ἐργοδείκτης τοῦ Watt*. Τό ὄργανο αὐτό εἶναι ἕνα αὐτογραφικό μανόμετρο, πού καταγράφει τήν πίεση πού ἔχουν σέ κάθε στιγμή τά ἀέρια μέσα στόν κύλινδρο (σχ. 136). Ἔτσι καταγράφεται μιά κλειστή γραμμή. Κάθε σημεῖο τῆς γραμμῆς ἀντιστοιχεῖ σέ ὁρισμένη πίεση καί ὁρισμένο ὄγκο τῶν ἀερίων μέσα στόν κύλινδρο. Τό σχῆμα 137 δείχνει τό πραγματικό διάγραμμα τοῦ ἔργου τετράχρονου βενζινοκινητήρα. Ὅταν ἡ ταχύτητα τοῦ ἐμβόλου εἶναι μεγάλη, χρησιμοποιοῦμε *ἠλεκτρονικούς μανογράφους*, γιά νά πάρουμε τό πραγματικό διάγραμμα τοῦ ἔργου τῆς μηχανῆς.



Σχ. 136. Σχηματική παράσταση τοῦ ἐργοδείκτη τοῦ Watt.

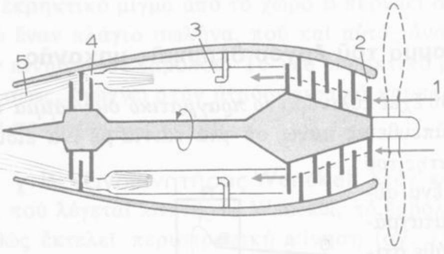


Σχ. 137. Πραγματικό διάγραμμα τοῦ ἔργου ἑνός τετράχρονου βενζινοκινητήρα.

Τό πραγματικό διάγραμμα τοῦ ἔργου μιᾶς θερμικῆς μηχανῆς *διαφέρει σημαντικά* ἀπό τό ἀντίστοιχο θεωρητικό διάγραμμα τοῦ ἔργου, γιατί οἱ συνθῆκες τῆς λειτουργίας τῆς πραγματικῆς μηχανῆς ἀπέχουν πολύ ἀπό τίς συνθῆκες τῆς λειτουργίας μιᾶς ἰδανικῆς θερμικῆς μηχανῆς.

70. Ἀεριοστρόβιλοι

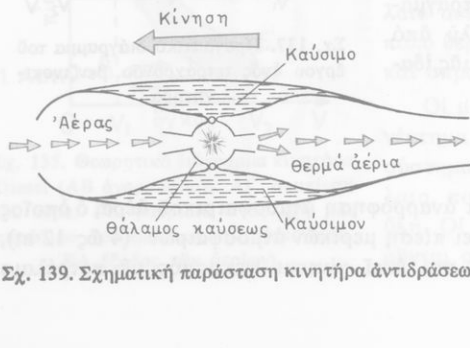
Στόν *ἀεριοστρόβιλο* γίνεται ἀναρρόφηση ἀτμοσφαιρικοῦ ἀέρα, ὁ ὁποῖος ἀφοῦ συμπιεστεῖ καί ἀποκτήσει πίεση μερικῶν ἀτμοσφαιρῶν (4 ὥς 12 at), ἔρχεται στό θάλαμο καύσεως καί ἐκεῖ γίνεται ψεκασμός μέ πετρέλαιο (σχ.138). Ἐξαιτίας τῆς καύσεως τό μίγμα τῶν καυσαερίων καί τοῦ ἀέρα, πού δέν χρησιμοποιήθηκε γιά τήν καύση, ἔχει ψηλή θερμοκρασία (περίπου 600° C). Αὐτό τό μίγμα ἔρχεται στόν ἀεριοστρόβιλο (πού εἶναι ἀνάλογος μέ τόν ἀτμοστρόβιλο), ἐκεῖ ἐκτονώνεται καί ἔτσι ὁ ἄξονας τῆς μηχανῆς ἀναγκάζεται νά περιστρέφεται καί νά κινεῖ ἕλικα ἀεροπλάνου ἤ ἠλεκτρογεννήτρια. Μέ τόν ἄξονα τῆς μηχανῆς συνδέεται καί ὁ συμπιεστής, ὁ ὁποῖος γιά τή λειτουργία του καταναλώνει ἕνα μικρό μέρος ἀπό τήν ἰσχύ πού δίνει ὁ ἀεριοστρόβιλος. Στά ἀεροπλάνα τά θερμά καυσαέρια ξεφεύγουν στήν ἀτμόσφαιρα μέ μεγάλη ταχύτητα ἀπό ἕνα μικρό σχετικά ἄνοιγμα, πού ὑπάρχει στό πίσω μέρος τῆς μηχανῆς. Ἔτσι, σύμφωνα μέ τήν ἀρχή τῆς διατηρήσεως τῆς ὁρμῆς, προσαυξάνεται ἡ ταχύτητα τοῦ ἀεροπλάνου.



Σχ. 138. Σχηματική παράσταση ἀεριοστροβίλου (1 εἴσοδος ἀέρα. 2 συμπιεστής. 3 ἀνάφλεξη καύσιμης ὕλης. 4 στρόβιλος. 5 ἔξοδος τῶν ἀερίων).

71. Κινητῆρες ἀντιδράσεως

Οἱ *κινητῆρες ἀντιδράσεως* χρησιμοποιοῦνται στά *ἀεριωθούμενα ἀεροπλάνα* (Jet). Ἡ λειτουργία τῶν κινητήρων ἀντιδράσεως εἶναι ἀνάλογη μέ τή λειτουργία τῶν ἀεριοστροβίλων μέ τή διαφορά ὅτι τά θερμά καυσαέρια κατά τήν ἔξοδό τους στήν ἀτμόσφαιρα ἐκτονώνονται καί ἀποκτοῦν πολύ μεγάλη ταχύτητα (σχ. 139). Ἔτσι ἡ προωστική δύναμη ἀναπτύσσεται στό ἀεροπλάνο σύμφωνα μέ τήν ἀρχή τῆς διατηρήσεως τῆς ὁρμῆς. Στά ἀεριωθούμενα ἀεροπλάνα τό ὀξυγόνο πού χρειάζεται γιά τήν καύση, τό προσφέρει ὁ ἀέρας πού μπαίνει στή μηχανή. Οἱ κινητῆρες ἀντιδράσεως χρησιμοποιοῦνται καί γιά τήν κίνηση *τῶν πυραύλων*, ἀλλά τότε στόν πύραυλο ὑπάρχει, ἐκτός ἀπό τήν καύσιμη ὕλη, καί τό ἀπαιτούμενο γιά τήν καύση ὀξυγόνο.

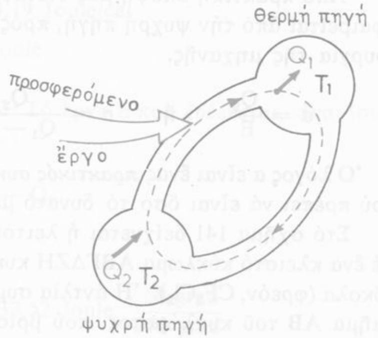


Σχ. 139. Σχηματική παράσταση κινητῆρα ἀντιδράσεως.

72. Ψυκτικές μηχανές

Οἱ διάφορες *ψυκτικές μηχανές* εἶναι *ἀντλίες θερμότητας*, γιατί *ἀφαιροῦν* θερμότητα ἀπό ἕνα σῶμα (ψυχρή πηγή) καί *τή δίνουν* σέ ἕνα ἄλλο σῶμα (θερμή πηγή). Ἔτσι π.χ. τό ἠλεκτρικό ψυγεῖο ἀφαιρεῖ θερμότητα ἀπό τά σώματα πού βρίσκονται μέσα σέ κλειστό χῶρο (ἀέρας, τρόφιμα, τοιχώματα) καί τήν ἀποβάλλει στήν ἀτμόσφαιρα. Γιά τή λειτουργία τῶν ψυκτικῶν μηχανῶν χρησιμοποιεῖται ἕνα πτητικό ὑγρό (ἀμμωνία ἤ φρεόν) πού, γιά τήν ἐξαέρωσή του, *ἀφαιρεῖ θερμότητα* ἀπό τά γειτονικά σώματα.

Γιά *τή μεταφορά* τῆς θερμότητας ἀπό τήν ψυχρή στή θερμή πηγή πάντοτε *ξοδεύεται ἔργο*. Ἕνα ρευστό ἔρχεται σέ ἐπαφή μέ τήν ψυχρή πηγή πού ἔχει θερμοκρασία T_2, καί τότε τό ρευστό *παίρνει* θερμότητα Q_2 (σχ. 140). Ἔπειτα τό ρευστό ἔρχεται στή θερμή πηγή πού ἔχει θερμοκρασία T_1 καί ἐκεῖ τό ρευστό *δίνει* θερμότητα Q_1. Ἀπό τή θερμή πηγή τό ρευστό ἐπιστρέφει στήν ψυχρή πηγή καί ἔτσι διαγράφει ἕναν κύκλο. Κατά τή διάρκεια αὐτοῦ τοῦ κύκλου τό ρευστό *παίρνει ἀπέξω* ἔργο Ε, πού τό δίνει ἕνας κινητήρας. Σύμφωνα μέ τήν ἀρχή τῆς ἰσοδυναμίας θερμότητας καί ἔργου ἰσχύει ἡ ἐξίσωση :



Σχ. 140. Σχηματική παράσταση ψυκτικῆς μηχανῆς.

$$E = Q_1 - Q_2$$

Τό ἔργο Ε εἶναι θετικό καί τό Q_1 εἶναι μεγαλύτερο ἀπό τό Q_2. Ὥστε τό ρευστό *δίνει* στή θερμή πηγή θερμότητα *περισσότερη* ἀπό ἐκείνη πού *ἀφαιρεῖ* ἀπό τήν ψυχρή πηγή. Ἡ διαφορά $Q_1 - Q_2$ εἶναι ἴση μέ *τό ἔργο* Ε πού ξοδεύτηκε. Ἔτσι βγάζουμε τό ἀκόλουθο συμπέρασμα :

Σέ μιά ψυκτική μηχανή, γιά τή μεταφορά θερμότητας ἀπό τήν ψυχρή στή θερμή πηγή, ξοδεύεται ἔργο Ε πού μετατρέπεται σέ θερμότητα, ἡ ὁποία δίνεται στή θερμή πηγή.

Q_2	+	E	=	Q_1
θερμότητα πού ἀφαιρεῖται ἀπό τήν ψυχρή πηγή		ἔργο πού προσφέρεται ἀπέξω		θερμότητα πού δίνεται στή θερμή πηγή

Ἡ ψυκτική μηχανή εἶναι μιά θερμική μηχανή, πού λειτουργεῖ *ἀντίστροφα*. Ἄν θεωρήσουμε τήν ψυκτική μηχανή ὡς ἀντιστρεπτή μηχανή, τότε ἰσχύει ἡ γνωστή ἐξίσωση :

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1} \qquad \text{ἄρα} \qquad \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2} = \frac{T_2}{T_1 - T_2} \qquad (1)$$

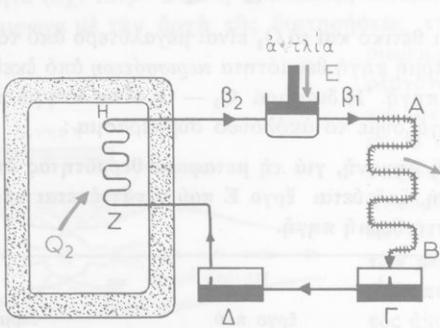
Ἡ διαφορά $Q_1 - Q_2$ ἐκφράζει τή θερμότητα, ἡ ὁποία εἶναι ἴση μέ τό ἔργο Ε, πού ξοδεύουμε γιά τή λειτουργία τῆς μηχανῆς.

Ἀπό πρακτική ἄποψη μᾶς ἐνδιαφέρει ὁ λόγος τῆς θερμότητας Q_2, πού ἀφαιρεῖται ἀπό τήν ψυχρή πηγή, πρός τό ἔργο Ε, πού ξοδεύεται γιά τή λειτουργία τῆς μηχανῆς.

$$\alpha = \frac{Q_2}{E} \qquad \text{ἤ} \qquad \alpha = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2} \qquad \text{ἄρα} \qquad \alpha = \frac{T_2}{T_1 - T_2}$$

Ὁ λόγος α εἶναι ἕνας *πρακτικός συντελεστής* (*coefficient of performance*) πού πρέπει νά εἶναι ὅσο τό δυνατό μεγαλύτερος.

Στό σχῆμα 141 δείχνεται ἡ λειτουργία τοῦ ἠλεκτρικοῦ ψυγείου. Μέσα σέ ἕνα κλειστό κύκλωμα ΑΒΓΔΖΗ κυκλοφορεῖ ἕνα ἀέριο, πού ὑγροποιεῖται εὔκολα (φρεόν, CF_2Cl_2). Ἡ ἀντλία συμπιέζει τό ἀέριο καί τό διοχετεύει στό τμῆμα ΑΒ τοῦ κυκλώματος, πού βρίσκεται σέ ἐπαφή μέ τήν ἀτμόσφαιρα. Στό τμῆμα ΑΒ τοῦ κυκλώματος τό ἀέριο ψύχεται καί ὑγροποιεῖται καί τότε τό ρευστό *ἀποβάλλει* στήν ἀτμόσφαιρα θερμότητα Q_1. Τό ὑγρό συγκεντρώνεται μέσα στό δοχεῖο Γ καί ἀπό ἐκεῖ ἔρχεται στό δοχεῖο Δ. Ἐπειδή μέσα στό δοχεῖο Δ ἐπικρατεῖ μικρή πίεση, τό ὑγρό ἀρχίζει νά ἐξατμίζεται. Ἡ ἐξάτμιση ὁλοκληρώνεται στό τμῆμα ΖΗ τοῦ κυκλώματος, ὅπου τό ὑγρό *παίρνει θερμότητα* Q_2 ἀπό τά γειτονικά σώματα. Τό ἀέριο, πού σχηματίζεται, τό ἀναρροφᾶ συνεχῶς ἡ ἀντλία, τό συμπιέζει καί ἔτσι διαγράφει ἕναν κύκλο.



Σχ. 141. Σχηματική παράσταση τῆς λειτουργίας τοῦ ἠλεκτρικοῦ ψυγείου.

Παράδειγμα. Μιά ψυκτική μηχανή παραγωγῆς πάγου λειτουργεῖ μεταξύ τῶν θερμοκρασιῶν 0^0 C καί 60^0 C καί παράγει 100 kgr πάγου τήν ὥρα. Θά ὑπολογίσουμε τήν ἐλάχιστη ἰσχύ, πού πρέπει νά ἔχει ὁ κινητήρας, γιά νά λειτουργήσει ἡ μηχανή.

Γιά νά παραχθεῖ μάζα πάγου ἴση μέ $m = 100$ kgr πρέπει ἀπό τό νερό θερμοκρασίας 0^0 C *νά ἀφαιρεθεῖ* θερμότητα:

$$Q_2 = 80 \text{ cal/gr} \cdot 10^5 \text{ gr} = 8 \cdot 10^6 \text{ cal}$$

ἤ

$$Q_2 = 8 \cdot 10^6 \text{ cal} \cdot 4{,}19 \text{ Joule/cal}$$

καί

$$Q_2 = 33{,}52 \cdot 10^6 \text{ Joule}$$

Εἶναι $T_1 = 333^0$ K καί $T_2 = 273^0$ K. Τό ἔργο E πού *ξοδεύεται*, εἶναι ἴσο μέ τή διαφορά $Q_1 - Q_2$, δηλαδή εἶναι:

$$E = Q_1 - Q_2$$

Ἀπό τήν ἐξίσωση (1) ἔχουμε:

$$E = Q_2 \cdot \frac{T_1 - T_2}{T_2} = 33{,}52 \text{ Joule} \cdot \frac{60 \text{ grad}}{273 \text{ grad}}$$

ἄρα

$$E = 7{,}36 \cdot 10^6 \text{ Joule}$$

Ἡ ἐλάχιστη ἰσχύς P_{min} τοῦ κινητήρα πρέπει νά εἶναι:

$$P_{min} = \frac{7{,}36 \cdot 10^6 \text{ Joule}}{3600 \text{ sec}} \quad \text{καί} \quad P_{min} = 2044 \text{ Watt}$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

132. Ὁ τετρακύλινδρος βενζινοκινητήρας ἑνός αὐτοκινήτου καταναλώνει κατά δευτερόλεπτο μάζα βενζίνης $m = 2{,}1$ gr. Ἡ θερμότητα καύσεως τῆς βενζίνης εἶναι $11 \cdot 10^3$ cal/gr. Τά καυσαέρια πού παράγονται μέσα σέ κάθε κύλινδρο, ἔχουν θερμοκρασία $\theta_1 = 2000^0$ C καί βγαίνουν στήν ἀτμόσφαιρα μέ θερμοκρασία $\theta_2 = 800^0$ C. Ὁ κινητήρας μᾶς δίνει ὠφέλιμη ἰσχύ $P_{\omega\varphi\varepsilon\lambda} = 30$ kW. Πόση εἶναι ἡ θεωρητική ἀπόδοση καί πόση ἡ βιομηχανική ἀπόδοση αὐτοῦ τοῦ βενζινοκινητήρα;

133. Ὁ κινητήρας ἑνός αὐτοκινήτου ἀναπτύσσει ἰσχύ $P = 20$ CV καί ἔχει βιομηχανική ἀπόδοση $\eta_B = 0{,}30$. Τό αὐτοκίνητο κινεῖται μέ σταθερή ταχύτητα $\upsilon = 20$ m/sec καί διατρέχει μιά ἀπόσταση $s = 60$ km. Νά βρεθεῖ πόσα λίτρα βενζίνης ἔκαψε ὁ κινητήρας γι' αὐτή τή διαδρομή καί πόση εἶναι ἡ δαπάνη γιά καύσιμα κατά χιλιόμετρο. Θερμότητα καύσεως τῆς βενζίνης $\theta_K = 10^4$ cal/gr. Πυκνότητα τῆς βενζίνης $\rho = 0{,}7$ gr/cm^3. Τιμή βενζίνης 20 δρχ/lt.

134. Ἕνας βενζινοκινητήρας ἔχει βιομηχανική ἀπόδοση $\eta_B = 0{,}25$ καί καίει 1 λίτρο βενζίνης κάθε ὥρα. Πόση ἰσχύ μᾶς δίνει αὐτός ὁ κινητήρας ; Θερμότητα καύσεως τῆς βενζίνης $\theta_K = 10^4$ cal/gr. Πυκνότητα τῆς βενζίνης $\rho = 0{,}72$ gr/cm^3.

135. Μιά ἀτμομηχανή λειτουργεῖ μέ τίς συνθῆκες τῆς μέγιστης θεωρητικῆς ἀποδόσεως καί ἀποτελεῖται ἀπό θερμή πηγή (λέβητα), πού ἔχει θερμοκρασία $\theta_1 = 280^0$ C καί ἀπό ψυχρή πηγή (συμπυκνωτή) πού ἔχει θερμοκρασία $\theta_2 = 30^0$C. Ἡ μηχανή δίνει στή θερμή πηγή θερμότητα ἴση μέ $Q_1 = 14 \cdot 10^3$ cal/sec.

1) Νά βρεθεῖ πόση θερμότητα Q_2 ἀποδίδεται κατά δευτερόλεπτο στήν ψυχρή πηγή.

2) Νά ὑπολογιστεῖ ἡ μηχανική ἰσχύς τῆς μηχανῆς καί ἡ θεωρητική ἀπόδοσή της.

3) Ἄν καταργηθεῖ ὁ συμπυκνωτής καί ὁ ἀτμός φεύγει στήν ἀτμόσφαιρα, πόση γίνεται τότε ἡ θεωρητική ἀπόδοση τῆς μηχανῆς ;

136. Μιά παγοποιητική μηχανή λειτουργεῖ μεταξύ τῶν θερμοκρασιῶν -13^0 C καί 27^0 C.

1) Νά βρεθεῖ πόση ἐνέργεια ξοδεύεται γιά τήν παρασκευή 1 kgr πάγου. Θερμότητα τήξεως τοῦ πάγου 80 cal/gr.

2) Ἡ ἐνέργεια δίνεται ἀπό ἕναν ἠλεκτροκινητήρα. Ἄν ἡ ἀξία τῆς ἠλεκτρικῆς ἐνέργειας εἶναι 1,5 δρχ/kWh, πόσο κοστίζει ἡ παρασκευή τοῦ πάγου κατά χιλιόγραμμο ;

137. Μιά ἐπίπεδη ἐπιφάνεια, μαυρισμένη μέ καπνιά (αἰθάλη), δέχεται τήν ἡλιακή ἀκτινοβολία καί ἀπορροφᾶ θερμότητα ἴση μέ 1 cal κατά λεπτό καί κατά τετραγωνικό ἑκατοστόμετρο. Αὐτή ἡ θερμότητα χρησιμοποιεῖται γιά νά θερμαίνεται τό νερό ἑνός λέβητα, πού ἡ θερμορασία του διατηρεῖται σέ $\theta_1 = 100^0$ C · Ὁ ἀτμός τροφοδοτεῖ μιά ἰδανική θερμική μηχανή, πού ὁ συμπυκνωτής της διατηρεῖται σέ θερμοκρασία $\theta_2 = 30^0$ C. Ἡ μηχανή δίνει ὠφέλιμη ἰσχύ ἴση μέ $P = 1$ kW. Νά βρεθεῖ :

1) ἡ θεωρητική ἀπόδοση τῆς μηχανῆς·
2) ἡ θερμότητα πού δίνεται στό λέβητα κατά δευτερόλεπτο· καί
3) τό ἐμβαδό τῆς μαυρισμένης ἐπιφάνειας.

138. Ὁ βενζινοκινητήρας ἑνός αὐτοκινήτου εἶναι τετράχρονος καί ἀποτελεῖται ἀπό 4 ὅμοιους κυλίνδρους. Μέσα σέ κάθε κύλινδρο τό ἔμβολο παράγει ὠφέλιμο ἔργο κάθε 2 στροφές τοῦ ἄξονα τῆς μηχανῆς. Μέ τόν ἐργοδείκτη βρήκαμε ὅτι τό ἔμβολο ἑνός κυλίνδρου σέ μιά διαδρομή του δίνει ὠφέλιμο ἔργο W = 158,2 Joule. Ἄν ὁ ἄξονας τῆς μηχανῆς ἐκτελεῖ 2700 στροφές κατά λεπτό, νά βρεθεῖ ἡ ἰσχύς τῆς μηχανῆς σέ ἵππους. Εἶναι 1 CV = 736 W.

139. Σέ ἕνα μονοκύλινδρο τετράχρονο βενζινοκινητήρα τό ἔμβολο παράγει ὠφέλιμο ἔργο κάθε 2 στροφές τοῦ ἄξονα τῆς μηχανῆς. Μέ τόν ἐργοδείκτη βρήκαμε ὅτι στό διάγραμμα τοῦ ἔργου τό ὠφέλιμο ἔργο πού παίρνουμε, ἀντιστοιχεῖ σέ ἐπιφάνεια πού ἔχει ἐμβαδό S = 12 cm^2. Στόν ὁριζόντιο ἄξονα τοῦ διαγράμματος (ἄξονας τῶν ὄγκων) μῆκος 1 cm ἀντιστοιχεῖ σέ μεταβολή τοῦ ὄγκου κατά 250 cm^3. Στόν ἄξονα τῶν πιέσεων μῆκος 1 cm ἀντιστοιχεῖ σέ μεταβολή τῆς πιέσεως κατά 2,5 at. Ὁ ἄξονας τοῦ κινητήρα ἐκτελεῖ 600 στροφές κατά λεπτό. Πόση εἶναι ἡ ἰσχύς τοῦ κινητήρα ; 1 at = 10 N/cm^2.

140. Μέσα στόν κύλινδρο τοῦ βενζινοκινητήρα ἑνός αὐτοκινήτου ἡ ἀνάφλεξη τοῦ μίγματος εἶναι ἀκαριαία καί τά καυσαέρια πού σχηματίζονται ἔχουν θερμοκρασία $\theta_1 = 2243^0$ C καί πίεση $p_1 = 41{,}55$ at. Ἡ ἐκτόνωση τῶν ἀερίων εἶναι ἀδιαβατική καί ὁ ὄγκος τῶν ἀερίων πενταπλασιάζεται. Πόση εἶναι στό τέλος τῆς ἐκτονώσεως ἡ θερμοκρασία θ_2 καί ἡ πίεση p_2 τῶν ἀερίων; Γιά τά ἀέρια πού εἶναι μέσα στόν κύλινδρο εἶναι $\gamma = 1{,}36$.

ΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ

Ἐπιδράσεις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου

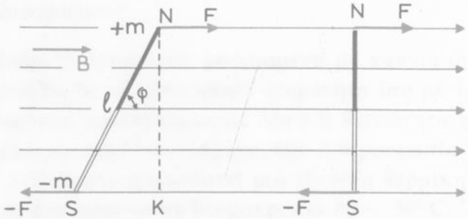
73. Ἐπίδραση ὁμογενοῦς μαγνητικοῦ πεδίου σέ μαγνητικό δίπολο

Ξέρουμε ὅτι σέ ἕνα *ὁμογενές μαγνητικό πεδίο* οἱ δυναμικές γραμμές εἶναι παράλληλες καί ἡ μαγνητική ἐπαγωγή B εἶναι σταθερή σέ ὅλα τά σημεῖα τοῦ πεδίου. Μέσα σέ ἕνα ὁμογενές μαγνητικό πεδίο, πού ἡ μαγνητική ἐπαγωγή του ἔχει μέτρο B, βρίσκεται εὐθύγραμμος μαγνήτης πού μπορεῖ νά στρέφεται γύρω ἀπό ἕναν ἄξονα, κάθετο στίς δυναμικές γραμμές τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου (σχ. 142). Οἱ δύο πόλοι τοῦ μαγνήτη ἔχουν ἀντίστοιχα ποσότητες μαγνητισμοῦ $+m$ καί $-m$ καί ἡ μεταξύ τους ἀπόσταση εἶναι l. Τότε σέ κάθε πόλο τοῦ μαγνήτη τό μαγνητικό πεδίο ἐξασκεῖ μιά δύναμη $\vec{F} = m \cdot \vec{B}$, πού ἔχει μέτρο $F = m \cdot B$. Ὅταν ὁ μαγνήτης σχηματίζει γωνία φ μέ τή διεύθυνση τῶν δυναμικῶν γραμμῶν, τότε πάνω στό μαγνήτη ἐνεργεῖ *ζεῦγος δυνάμεων*, πού τείνει νά περιστρέψει τό μαγνήτη καί νά κάνει τόν ἄξονά του παράλληλο μέ τίς δυναμικές γραμμές τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου. Ἡ ροπή M τοῦ ζεύγους πού ἐνεργεῖ πάνω στό μαγνήτη ἔχει μέτρο:

$$M = F \cdot (NK) \quad \text{ἤ} \quad M = m \cdot B \cdot l \cdot \text{ημ}\,\varphi \qquad (1)$$

Τό γινόμενο $m \cdot l$, δηλαδή τό γινόμενο τῆς ποσότητας μαγνητισμοῦ (m) τοῦ ἑνός πόλου τοῦ μαγνήτη ἐπί τήν ἀπόσταση (l) τῶν δύο πόλων του εἶναι μέγεθος *σταθερό* καί *χαρακτηριστικό* γι᾽ αὐτόν τό μαγνήτη καί ὀνομάζεται *μαγνητική ροπή* (M^*) τοῦ μαγνήτη.

$$\boxed{\text{μαγνητική ροπή μαγνήτη} \qquad M^* = m \cdot l} \qquad (2)$$



Σχ. 142. Στό μαγνητικό δίπολο ἀναπτύσσεται μηχανική ροπή.

Ἄρα ἡ ἐξίσωση (1) γράφεται :

ροπή πού ἐξασκεῖται σέ μαγνητικό δίπολο	$M = M^* \cdot B \cdot \etaμ\, φ$	(3)

Ὅταν ὁ ἄξονας τοῦ μαγνήτη εἶναι κάθετος στίς δυναμικές γραμμές ($φ = 90^0$), τότε ἡ ροπή τοῦ ζεύγους πού ἐνεργεῖ πάνω στό μαγνήτη, ἔχει τή μεγαλύτερη τιμή της $M = M^* \cdot B$. Ἐνῶ, ὅταν ὁ κατά μῆκος ἄξονας τοῦ μαγνήτη ἔχει τή διεύθυνση τῶν δυναμικῶν γραμμῶν ($φ = 0^0$), τότε ὁ μαγνήτης *ἰσορροπεῖ* μέ τήν ἐπίδραση τῶν δύο ἀντίθετων δυνάμεων πού ἐνεργοῦν πάνω στούς δύο πόλους του.

Ἡ μαγνητική ροπή ἑνός μαγνήτη εἶναι ἕνα *ἄνυσμα* $\vec{M}^*$, πού ἔχει *φορέα* τόν κατά μῆκος ἄξονα τοῦ μαγνήτη, *φορά* ἀπό τό νότιο πόλο S πρός τό βόρειο πόλο N τοῦ μαγνήτη καί μέτρο ἴσο μέ $M = m \cdot l$.
Ἀπό τά παραπάνω συνάγεται τό ἀκόλουθο συμπέρασμα :

Ὅταν ἕνα μαγνητικό δίπολο βρίσκεται μέσα σέ ὁμογενές μαγνητικό πεδίο μέ μαγνητική ἐπαγωγή $\vec{B}$, τότε τό μαγνητικό πεδίο τείνει νά περιστρέψει τό μαγνητικό δίπολο γύρω ἀπό ἄξονα κάθετο στίς δυναμικές γραμμές ἔτσι, ὥστε τό ἄνυσμα τῆς μαγνητικῆς ροπῆς $\vec{M}^*$ νά ἀποκτήσει τήν ἴδια διεύθυνση καί φορά μέ τό ἄνυσμα τῆς μαγνητικῆς ἐπαγωγῆς $\vec{B}$ τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου.

Μονάδα μαγνητικῆς ροπῆς. Ἄν στή ἐξίσωση (2) βάλουμε $m = 1\,A \cdot m$ καί $l = 1\,m$, βρίσκουμε ὅτι στό σύστημα μονάδων MKSA *μονάδα μαγνητικῆς ροπῆς* εἶναι :

μονάδα μαγνητικῆς ροπῆς	$1\,A \cdot m^2$

74. Μαγνήτιση

Ἕνα ὁμογενές μαγνητικό πεδίο ἔχει μαγνητική ἐπαγωγή, πού τό μέτρο της εἶναι B_0. Ἄν μέσα σ' αὐτό τό μαγνητικό πεδίο φέρουμε ἕνα εὐθύγραμμο κομμάτι σιδήρου, τότε ὁ σίδηρος *μαγνητίζεται*, δηλαδή γίνεται μαγνήτης καί ἀποκτᾶ ὁρισμένη *μαγνητική ροπή*, πού ἔχει μέτρο M^*.

Τά διάφορα ὑλικά, ὅταν βρίσκονται *ἔξω* ἀπό μαγνητικό πεδίο δέν παρουσιάζουν μαγνητικές ἰδιότητες (ἐξαίρεση ἀποτελοῦν οἱ μόνιμοι μαγνῆτες). Ὅταν ὅμως ἕνα ὑλικό τό φέρουμε *μέσα* σέ μαγνητικό πεδίο, τότε αὐτό τό ὑλικό μαγνητίζεται καί ἀποκτᾶ ὁρισμένη *μαγνητική ροπή*, πού ἔχει μέτρο M*.

Ὀνομάζεται μαγνήτιση ($\vec{J}$) ἑνός σώματος τό πηλίκο τῆς μαγνητικῆς ροπῆς ($\vec{M}^*$) διά τοῦ ὄγκου ($\vec{V}$) αὐτοῦ τοῦ σώματος.

$$\boxed{\text{μαγνήτιση} \quad \vec{J} = \frac{\vec{M}^*}{V}} \qquad (1)$$

Ἡ μαγνήτιση εἶναι ἕνα ἄνυσμα $\vec{J}$ πού ἔχει *τή διεύθυνση* καί *τή φορά* τοῦ ἀνύσματος τῆς μαγνητικῆς ροπῆς $\vec{M}^*$ καί *μέτρο* ἴσο μέ $J = M^*/V$.

Σύμφωνα μέ τόν παραπάνω ὁρισμό ἡ μαγνήτιση (J) ἐκφράζει τή μαγνητική ροπή πού ἀντιστοιχεῖ *στή μονάδα ὄγκου* τοῦ σώματος. Ἡ μαγνητική ροπή M* μιᾶς μαγνητισμένης ράβδου ἐξαρτᾶται ἀπό τίς γεωμετρικές διαστάσεις τῆς ράβδου, ἐνῶ ἡ μαγνήτιση χαρακτηρίζει τήν ξεχωριστή *μαγνητική συμπεριφορά* τοῦ ὑλικοῦ ἀπό τό ὁποῖο ἀποτελεῖται αὐτή ἡ ράβδος.

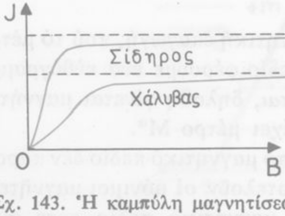
Μονάδα μαγνητίσεως. Ἄν στήν ἐξίσωση (1) βάλουμε $M^* = 1\ A \cdot m^2$ καί $V = 1\ m^3$, βρίσκουμε ὅτι στό σύστημα MKSA *μονάδα μαγνητίσεως* εἶναι :

$$\boxed{\text{μονάδα μαγνητίσεως} \quad 1\ A/m}$$

75. Μαγνητική ὑστέρηση

α. Καμπύλη μαγνητίσεως τοῦ σιδήρου. Ἡ παροδική μαγνήτιση τοῦ σιδήρου ἔχει πολλές ἐφαρμογές στήν τεχνική καί γι' αὐτό πρέπει νά ξέρουμε τή μαγνητική συμπεριφορά του.

Παίρνουμε ἕνα κομμάτι ἀπό σίδηρο ἤ χάλυβα, πού τό μαγνητίζουμε γιά *πρώτη φορά*. Ἀπό τίς μετρήσεις βρίσκουμε ὅτι, ὅταν αὐξάνεται ἡ μαγνητιτική ἐπαγωγή B τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου, πού προκαλεῖ τή μαγνήτιση, στήν ἀρχή αὐξάνεται καί ἡ μαγνήτιση J τοῦ σιδήρου ἤ τοῦ χάλυβα (σχ. 143). Ὅταν ὅμως ἡ μαγνητική ἐπαγωγή B ξεπεράσει μιά ὁρισμένη τιμή, τότε παύει νά αὐξάνεται ἡ μαγνήτιση J τοῦ σιδήρου ἤ τοῦ χάλυβα

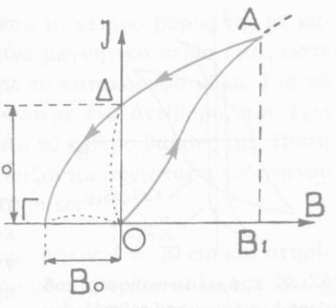


Σχ. 143. Ἡ καμπύλη μαγνητίσεως τοῦ σιδήρου καί τοῦ χάλυβα.

καί λέμε ὅτι ἡ μαγνήτιση τοῦ ὑλικοῦ ἀπόκτησε *τή μαγνήτιση κόρου*, δηλαδή τή μέγιστη δυνατή τιμή μαγνητίσεως. Στό καθένα ἀπό τά παραπάνω δύο ὑλικά ἀντιστοιχεῖ μιά ἰδιαίτερη μέγιστη τιμή μαγνητίσεως, πού ὀνομάζεται *μαγνήτιση κόρου* καί συμβαίνει, ὅταν ὅλοι οἱ μοριακοί μαγνῆτες τοῦ σιδήρου ἤ τοῦ χάλυβα τοποθετηθοῦν κατά τή διεύθυνση τοῦ ἐξωτερικοῦ μαγνητικοῦ πεδίου. Σ' αὐτή τήν περίπτωση δέν μπορεῖ νά προχωρήσει πιό πάνω ἡ μαγνήτιση τοῦ σιδήρου ἤ τοῦ χάλυβα. Ἡ καμπύλη πού δείχνει τή μεταβολή τῆς μαγνητίσεως J σέ συνάρτηση μέ τή μαγνητική ἐπαγωγή B τοῦ ἐξωτερικοῦ πεδίου, ὀνομάζεται *καμπύλη μαγνητίσεως*. Ὥστε :

Ἡ μαγνήτιση τοῦ σιδήρου ἤ τοῦ χάλυβα αὐξάνεται μέ τή μαγνητική ἐπαγωγή τοῦ πεδίου πού προκαλεῖ τή μαγνήτιση, ἀλλά δέν μπορεῖ νά γίνει μεγαλύτερη ἀπό μιά ὁρισμένη μέγιστη τιμή (μαγνήτιση κόρου).

β. Μαγνητική ὑστέρηση. Μαγνητίζουμε ἕνα κομμάτι σιδήρου γιά πρώτη φορά καί προοδευτικά αὐξάνουμε τή μαγνητική ἐπαγωγή τοῦ ἐξωτερικοῦ πεδίου ἀπό τήν τιμή 0 ὥς μιά ὁρισμένη τιμή B_1. Τότε ἡ μεταβολή τῆς μαγνητίσεως τοῦ σιδήρου παριστάνεται ἀπό τήν καμπύλη ΟΑ (σχ. 144). Ἄν ἔπειτα *ἐλαττώνουμε* προοδευτικά τή μαγνητική ἐπαγωγή B τοῦ ἐξωτερικοῦ μαγνητικοῦ πεδίου, τότε συμβαίνει προοδευτικά *ἀπομαγνήτιση* τοῦ σιδήρου, ἀλλά ἡ μαγνήτισή του J ἔχει πάντοτε τιμή *μεγαλύτερη* ἀπό ἐκείνη πού εἶχε κατά τή μαγνήτισή του σέ ὁρισμένη μαγνητική ἐπαγωγή τοῦ ἐξωτερικοῦ πεδίου. Ἔτσι ἡ ἀπομαγνήτιση τοῦ σιδήρου ἀκολουθεῖ τήν καμπύλη ΑΔ καί ὅταν ἡ μαγνητική ἐπαγωγή τοῦ ἐξωτερικοῦ πεδίου γίνει ἴση μέ μηδέν ($B = 0$), στό σίδηρο ἐξακολουθεῖ νά ὑπάρχει μιά μαγνήτιση $J_0 = ΟΔ$, ἡ ὁποία ὀνομάζεται *παραμένουσα μαγνήτιση*. Γιά νά ἐξαφανιστεῖ τελείως ἡ μαγνήτιση ἀπό τό σίδηρο, πρέπει νά ἐπιδράσει πάνω στό σίδηρο ἕνα ἐξωτερικό μαγνητικό πεδίο, πού νά ἔχει φορά ἀντίθετη μέ τή φορά πού εἶχε τό προηγούμενο μαγνητικό πεδίο. Ἡ κατάργηση τῆς μαγνητίσεως J_0 πού παρέμεινε πάνω στό σίδηρο, παριστάνεται ἀπό τό τμῆμα ΔΓ *τῆς καμπύλης ἀπομαγνητίσεως*. Ἡ μαγνητική ἐπαγωγή B_0 πού κατορθώνει νά ἐξαφανίσει τελείως τήν παραμένουσα μαγνήτιση τοῦ σιδήρου, ὀνομάζεται *συνεκτικό πεδίο* καί δείχνει πόσο ἰσχυρά συγκρατεῖ ὁ σίδηρος τήν παραμένουσα μα-

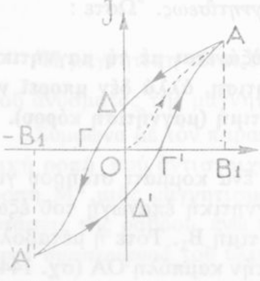


Σχ. 144. Καμπύλη μαγνητίσεως (ΟΑ) καί ἀπομαγνητίσεως (ΑΓ) τοῦ σιδήρου.

γνήτιση. Ἀπό τά παραπάνω καταλήγουμε στό ἀκόλουθο συμπέρασμα:

Ὅταν ἐλαττώνεται ἡ μαγνητική ἐπαγωγή (B) τοῦ ἐξωτερικοῦ μαγνητικοῦ πεδίου, ἡ μεταβολή τῆς μαγνητίσεως (J) τοῦ σιδήρου ἤ τοῦ χάλυβα ὑστερεῖ πάντοτε σχετικά μέ τή μεταβολή τῆς μαγνητικῆς ἐπαγωγῆς τοῦ ἐξωτερικοῦ πεδίου. Αὐτό τό φαινόμενο ὀνομάζεται μαγνητική ὑστέρηση.

γ. Βρόχος ὑστερήσεως. Ἄν ἡ μαγνητική ἐπαγωγή τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου πού προκάλεσε τήν ἀπομαγνήτιση τοῦ σιδήρου, φτάσει ὡς τήν τιμή $-B_1$, καί ἔπειτα μεταβληθεῖ ὡς τήν τιμή μηδέν, τότε ὁ σίδηρος ἀποκτᾶ παραμένουσα μαγνήτιση $-J_0 = O\Delta$ πού εἶναι ἴση καί ἀντίθετη μέ τήν προηγούμενη (σχ. 145). Ἄν ἀντιστραφεῖ ἡ φορά τοῦ ἐξωτερικοῦ πεδίου καί αὐξηθεῖ πάλι ἡ μαγνητική ἐπαγωγή του ὡς τήν τιμή B_1, τότε συμπληρώνεται μιά κλειστή καμπύλη γραμμή, πού ὀνομάζεται *βρόχος ὑστερήσεως*. Τά ὑλικά, γιά τά ὁποῖα ὁ βρόχος ὑστερήσεως ἔχει μεγάλη ἐπιφάνεια (σχ. 146), ὀνομάζονται *σκληρά μαγνητικά* (π.χ. ὁ χάλυβας), ἐνῶ τά ὑλικά, γιά τά ὁποῖα ὁ βρόχος ὑστερήσεως ἔχει μικρή ἐπιφάνεια, ὀνομάζονται *μαλακά μαγνητικά* (π.χ. ὁ μαλακός σίδηρος). Στίς ἐφαρμογές τοῦ ἠλεκτρομαγνητισμοῦ χρησιμοποιοῦνται *μαλακά μαγνητικά* ὑλικά (μαλακός σίδηρος), γιατί πρέπει νά γίνεται ταχύτατη μαγνήτιση καί ἀπομαγνήτιση. Ἀντίθετα οἱ μόνιμοι μαγνῆτες εἶναι σκληρά μαγνητικά ὑλικά, γιατί πρέπει νά ἔχουν μεγάλο συνεκτικό πεδίο.



Σχ. 145. Βρόχος ὑστερήσεως τοῦ μαλακοῦ σιδήρου.

Σχ. 146. Βρόχοι ὑστερήσεως τοῦ μαλακοῦ σιδήρου καί τοῦ χάλυβα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

141. Δύο εὐθύγραμμοι μαγνῆτες SN καί S′N′ ἔχουν τήν ἴδια μαγνητική ροπή $M^* = 2 \cdot 10^{-2}\ A \cdot m^2$ καί συνδέονται στό μέσο τους ἔτσι, ὥστε ἡ γωνία NON′ νά εἶναι ἴση μέ 60^0. Νά βρεθεῖ ἡ μαγνητική ροπή $M^*_{ολ}$ τοῦ συστήματος.

142. Ἕνα ὁμογενές μαγνητικό πεδίο ἔχει μαγνητική ἐπαγωγή $B = 5 \cdot 10^{-3}$ T καί οἱ δυναμικές γραμμές του εἶναι ὁριζόντιες. Μέσα στό μαγνητικό πεδίο τοποθετεῖται εὐθύγραμμος μαγνήτης, πού ἔχει μῆκος $l = 20$ cm, κάθε πόλος του ἔχει ποσότητα μαγνητισμοῦ $|m| = 10$ A · m καί κρέμεται ἀπό τό κέντρο βάρους του μέ κατακόρυφο σύρμα. Ὁ μαγνήτης στρέφεται καί ἰσορροπεῖ ὁριζόντιος ἔτσι, ὥστε ὁ ἄξονάς του SN νά σχηματίζει γωνία 45^0 μέ τή διεύθυνση τῶν δυναμικῶν γραμμῶν. Πόση ροπή ἀναπτύσσει τότε τό σύρμα πάνω στό μαγνήτη;

143. Μιά μικρή μαγνητική βελόνη ἔχει μαγνητική ροπή $M^* = 6 \cdot 10^{-3}$ A · m καί κρέμεται ἀπό τό κέντρο βάρους της μέ κατακόρυφο νῆμα. Γιά νά διατηρήσουμε τόν ἄξονα SN τῆς βελόνης κάθετο στίς δυναμικές γραμμές ἑνός ὁμογενοῦς μαγνητικοῦ πεδίου, ἐφαρμόζουμε ζεῦγος δυνάμεων πού ἔχει ροπή $M = 2 \cdot 10^{-5}$ N · m. Πόση εἶναι ἡ μαγνητική ἐπαγωγή B τοῦ πεδίου;

144. Ὅταν πάνω σέ μαγνητική βελόνη ἀποκλίσεως ἐφαρμόζουμε ροπή $M = 10^{-4}$ N · m, ἡ βελόνη ἰσορροπεῖ σέ τέτοια θέση, ὥστε ὁ ἄξονάς της SN νά σχηματίζει γωνία $\alpha = 30^0$ μέ τήν ὁριζόντια συνιστώσα τοῦ γήινου μαγνητικοῦ πεδίου, ἡ ὁποία εἶναι ἴση μέ $B_0 = 2 \cdot 10^{-5}$ T. Πόση εἶναι ἡ μαγνητική ροπή τῆς βελόνης;

145. Μιά μαγνητική βελόνη κρέμεται ἀπό τό κέντρο βάρος της μέ κατακόρυφο νῆμα καί ἰσορροπεῖ μέσα στό γήινο μαγνητικό πεδίο ἔτσι, ὥστε ὁ ἄξονάς της SN νά σχηματίζει γωνία 30^0 μέ τό κατακόρυφο νῆμα. Γιά νά διατηρήσουμε τή βελόνη ὁριζόντια, στερεώνουμε ἕνα ἀντίβαρο, πού ἔχει μάζα $m = 0{,}05$ gr, σέ ἀπόσταση $\alpha = 5$ cm ἀπό τό κέντρο βάρους της. Πόση εἶναι ἡ μαγνητική ροπή M^* τῆς βελόνης; Ὁριζόντια συνιστώσα τοῦ γήινου μαγνητικοῦ πεδίου $B_0 = 2 \cdot 10^{-5}$ T. $g = 10$ m/sec^2.

146. Ἕνας εὐθύγραμμος μαγνήτης SN ἔχει μῆκος $l = 20$ cm καί στηρίζεται κατακόρυφα πάνω σέ ὁριζόντιο ἐπίπεδο μέ τό βόρειο πόλο του N. Σέ ἕνα σημεῖο A, πού ἀπέχει 20 cm ἀπό τό σημεῖο στηρίξεως N τοῦ μαγνήτη, βρίσκουμε ὅτι ἡ μαγνητική ἐπαγωγή τοῦ πεδίου εἶναι ἴση μέ μηδέν. Πόση εἶναι ἡ μαγνητική ροπή τοῦ μαγνήτη; Ὁριζόντια συνιστώσα τοῦ γήινου μαγνητικοῦ πεδίου $B_0 = 2 \cdot 10^{-5}$ T.

147. Ἕνας εὐθύγραμμος μαγνήτης ἔχει μαγνητική ροπή $M^* = 0{,}8$ A · m^2 καί μπορεῖ νά στρέφεται γύρω ἀπό κατακόρυφο ἄξονα. Πόσο ἔργο ξοδεύουμε, ὅταν ἀπομακρύνουμε τό μαγνήτη κατά 60^0 ἀπό τή θέση τῆς ἰσορροπίας του; Ὁριζόντια συνιστώσα τοῦ γήινου μαγνητικοῦ πεδίου $B_0 = 2 \cdot 10^{-5}$ T.

148. Ἕνας κυλινδρικός μαγνήτης ἔχει διάμετρο $2r = 1$ cm, μῆκος $l = 10$ cm καί μαγνήτιση $J = 10$ A/m. Πόση εἶναι ἡ μαγνητική ροπή του M^* ;

149. Ὁ κάθε πόλος ἑνός εὐθύγραμμου μαγνήτη ἔχει ποσότητα μαγνητισμοῦ $m = 10$ A · m. Ὁ μαγνήτης ἔχει μῆκος $l' = 20$ cm καί ἡ διατομή του εἶναι τετράγωνο μέ πλευρά 1 cm. Πόση εἶναι ἡ μαγνήτισή του ;

150. Ἕνας εὐθύγραμμος μαγνήτης ἔχει μαγνήτισή $J = 5 \cdot 10^4$ A/m, μῆκος 15 cm καί ἐμβαδό διατομῆς 0,5 cm^2.

1) Νά βρεθεῖ ἡ μαγνητική ροπή M^* τοῦ μαγνήτη καί ἡ ποσότητα μαγνητισμοῦ m πού ὑπάρχει στόν κάθε πόλο του.

2) Σέ ἕνα σημεῖο Α, πού βρίσκεται στήν προέκταση τοῦ ἄξονα SN τοῦ μαγνήτη καί σέ ἀπόσταση $r = 5$ cm ἀπό τό βόρειο πόλο του N, πόση εἶναι ἡ μαγνητική ἐπαγωγή B τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου πού δημιουργεῖ ὁ βόρειος πόλος τοῦ μαγνήτη ;

ΗΛΕΚΤΡΙΣΜΟΣ

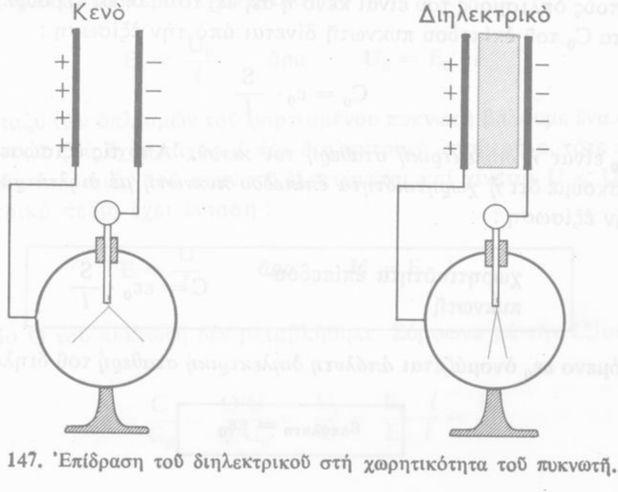
Στατικός ἠλεκτρισμός

76. Διηλεκτρική σταθερή ἑνός ὑλικοῦ

Ἕνας ἐπίπεδος πυκνωτής ἔχει πάνω στούς δύο ὁπλισμούς του τά ἠλεκτρικά φορτία $+Q$ καί $-Q$. Μεταξύ τῶν δύο ὁπλισμῶν του ὑπάρχει κενό ἤ στρῶμα *ἀέρα*, πού ἔχει πάχος l. Μέ ἕνα ἠλεκτρόμετρο μετρᾶμε τή διαφορά δυναμικοῦ U_0 πού ὑπάρχει μεταξύ τῶν δύο ὁπλισμῶν τοῦ πυκνωτῆ (σχ. 147). Τότε ἡ χωρητικότητα C_0 αὐτοῦ τοῦ πυκνωτῆ δίνεται ἀπό τήν ἐξίσωση :

$$C_0 = \frac{Q}{U_0} \quad \text{ἄρα} \quad Q = C_0 \cdot U_0$$

Μεταξύ τῶν δύο ὁπλισμῶν τοῦ πυκνωτῆ τοποθετοῦμε μιά πλάκα ἀπό *μονωτή*, π.χ. γυαλί, πού ἔχει πάχος l, ὅσο ἦταν προηγουμένως τό πάχος τοῦ στρώματος τοῦ ἀέρα. Παρατηροῦμε ὅτι ἡ διαφορά δυναμικοῦ μεταξύ τῶν δύο ὁπλισμῶν τοῦ πυκνωτῆ ἐλαττώνεται καί γίνεται $U < U_0$. Ἐπειδή τό φορτίο τοῦ πυκνωτῆ δέ μεταβλήθηκε, πρέπει νά συμπεράνουμε ὅτι *αὐξήθηκε* ἡ χωρητικότητα τοῦ πυκνωτῆ καί ἔγινε $C > C_0$. Ὁ λόγος C/C_0 ὀνομάζεται *διηλεκτρική σταθερή* (ε) τοῦ γυαλιοῦ, δέν ἔχει διαστάσεις καί εἶναι χαρακτηριστικό μέγεθος γιά κάθε μονωτικό ὑλικό. Γενικά οἱ μονωτές ὀνομάζονται



Σχ. 147. Ἐπίδραση τοῦ διηλεκτρικοῦ στή χωρητικότητα τοῦ πυκνωτῆ.

καί *διηλεκτρικά* ὑλικά. Ἀπό τά παραπάνω συνάγεται ὁ ἀκόλουθος ὁρισμός :

Διηλεκτρική σταθερή (ε) ἑνός ὑλικοῦ ὀνομάζεται ὁ λόγος τῆς χωρητικότητας (C) ἑνός πυκνωτῆ, πού ἔχει ὡς διηλεκτρικό αὐτό τό ὑλικό, πρός τή χωρητικότητα (C_0) τοῦ ἴδιου πυκνωτῆ, ὅταν ἔχει ὡς διηλεκτρικό τό κενό ἤ τόν ἀέρα.

$$\boxed{\text{διηλεκτρική σταθερή} \quad \varepsilon = \frac{C}{C_0}} \tag{1}$$

Γιά *τό κενό* καί κατά προσέγγιση γιά *τόν ἀέρα* ἡ διηλεκτρική σταθερή εἶναι ἴση μέ τή μονάδα (ε = 1). Ἡ διηλεκτρική σταθερή ε ὀνομάζεται *σχετική διηλεκτρική σταθερή* τοῦ διηλεκτρικοῦ ὑλικοῦ.

Διηλεκτρική σταθερή (ε) μερικῶν διηλεκτρικῶν

Κενό 1. Ἀέρας 1,0059. Παραφίνη 2. Γυαλί 2 - 16.

α. Χωρητικότητα ἐπιπέδου πυκνωτῆ μέ διηλεκτρικό. Ἀπό τήν ἐξίσωση (1) βρίσκουμε ὅτι *ἡ χωρητικότητα* (C) ἐπίπεδου πυκνωτῆ, ὅταν μεταξύ τῶν ὁπλισμῶν του ὑπάρχει μονωτής μέ διηλεκτρική σταθερή ε, εἶναι :

$$\text{χωρητικότητα ἐπίπεδου πυκνωτῆ} \qquad C = \varepsilon \cdot C_0 \tag{2}$$

ὅπου C_0 εἶναι ἡ χωρητικότητα τοῦ πυκνωτῆ, ὅταν μεταξύ τῶν ὁπλισμῶν του ὑπάρχει κενό ἤ ἀέρας. Ἄν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἑνός ὁπλισμοῦ τοῦ πυκνωτῆ ἔχει ἐμβαδό S, ἡ ἀπόσταση μεταξύ τῶν δύο ὁπλισμῶν του εἶναι l καί ἀνάμεσα στούς ὁπλισμούς του εἶναι κενό ἤ ἀέρας, τότε, ὅπως ξέρουμε, ἡ χωρητικότητα C_0 τοῦ ἐπίπεδου πυκνωτῆ δίνεται ἀπό τήν ἐξίσωση :

$$C_0 = \varepsilon_0 \cdot \frac{S}{l} \tag{3}$$

ὅπου ε_0 εἶναι *ἡ διηλεκτρική σταθερή τοῦ κενοῦ*. Ἀπό τίς ἐξισώσεις (2) καί (3) βρίσκουμε ὅτι *ἡ χωρητικότητα ἐπίπεδου πυκνωτῆ μέ διηλεκτρικό* δίνεται ἀπό τήν ἐξίσωση :

$$\boxed{\text{χωρητικότητα ἐπίπεδου πυκνωτῆ} \qquad C = \varepsilon\varepsilon_0 \cdot \frac{S}{l}}$$

Τό γινόμενο $\varepsilon\varepsilon_0$ ὀνομάζεται *ἀπόλυτη διηλεκτρική σταθερή* τοῦ διηλεκτρικοῦ.

$$\boxed{\varepsilon_{\text{ἀπόλυτη}} = \varepsilon\varepsilon_0}$$

β. Διηλεκτρική ἀντοχή. Μέσα ἀπό ἕνα διηλεκτρικό ὑλικό (μονωτής) δέν μποροῦν νά περάσουν τά ἠλεκτρικά φορτία. Αὐτό ὅμως ἰσχύει ὥς μιά μέγιστη τιμή τῆς ἐντάσεως τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου. Μεταξύ τῶν ὁπλισμῶν ἑνός ἐπίπεδου πυκνωτῆ ὑπάρχει ἕνα στρῶμα ἀπό διηλεκτρικό ὑλικό πού ἔχει πάχος l. Ἄν ἡ διαφορά δυναμικοῦ πού ἐφαρμόζεται στούς ὁπλισμούς τοῦ πυκνωτῆ εἶναι U, τότε τό μεταξύ τῶν ὁπλισμῶν τοῦ πυκνωτῆ ἠλεκτρικό πεδίο ἔχει ἔνταση $E = U/l$. Ἄν αὐξάνουμε προοδευτικά τή διαφορά δυναμικοῦ μεταξύ τῶν δύο ὁπλισμῶν τοῦ πυκνωτῆ, παρατηροῦμε ὅτι, μόλις ἡ διαφορά δυναμικοῦ φτάσει σέ μιά ὁρισμένη τιμή, σχηματίζεται μεταξύ τῶν δύο ὁπλισμῶν *ἠλεκτρικός σπινθήρας*, ὁ πυκνωτής ἐκφορτίζεται καί τό διηλεκτρικό τρυπιέται. Γιά νά παραχθεῖ ὁ ἠλεκτρικός σπινθήρας καί νά τρυπήσει τό διηλεκτρικό, χρειάζεται ὁρισμένη διαφορά δυναμικοῦ πού ἐξαρτᾶται ἀπό τή φύση καί τό πάχος τοῦ διηλεκτρικοῦ. Ἡ μέγιστη ἔνταση τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου, τήν ὁποία μπορεῖ νά ἀντέξει τό διηλεκτρικό χωρίς νά τρυπήσει, ὀνομάζεται *διηλεκτρική ἀντοχή* τοῦ διηλεκτρικοῦ.

Διηλεκτρική ἀντοχή μερικῶν ὑλικῶν

Ξηρός ἀέρας 32 kV/cm	Γυαλί 300 — 1500 kV/cm
Χαρτί παραφινωμένο 500 kV/cm	Μαρμαρυγίας 600 — 750 kV/cm

γ. Ἐπίδραση τοῦ διηλεκτρικοῦ στήν ἔνταση τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου. Ἕνας ἐπίπεδος πυκνωτής βρίσκεται στό *κενό* (ἤ στόν ἀέρα) καί ἡ ἀπόσταση μεταξύ τῶν δύο ὁπλισμῶν του εἶναι l. Ὅταν στούς ὁπλισμούς τοῦ πυκνωτῆ ἐφαρμόζεται τάση U_0, τότε τό μεταξύ τῶν ὁπλισμῶν του σχηματιζόμενο ἠλεκτρικό πεδίο ἔχει ἔνταση :

$$E_0 = \frac{U_0}{l} \qquad \text{ἄρα} \qquad U_0 = E_0 \cdot l$$

Ὅταν μεταξύ τῶν ὁπλισμῶν τοῦ φορτισμένου πυκνωτῆ βάλουμε ἕνα στρῶμα διηλεκτρικοῦ πού ἔχει πάχος l καί διηλεκτρική σταθερή ε, τότε ἡ τάση μεταξύ τῶν ὁπλισμῶν τοῦ πυκνωτῆ ἐλαττώνεται καί γίνεται $U < U_0$. Τότε τό ἠλεκτρικό πεδίο ἔχει ἔνταση :

$$E = \frac{U}{l} \qquad \text{ἄρα} \qquad U = E \cdot l$$

Τό φορτίο Q τοῦ πυκνωτῆ δέν μεταβλήθηκε. Σύμφωνα μέ τήν ἐξίσωση (1) ἔχουμε :

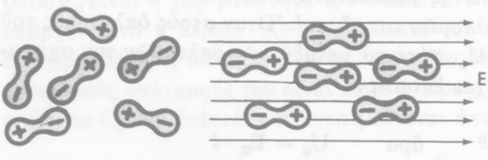
$$\varepsilon = \frac{C}{C_0} = \frac{Q/U}{Q/U_0} = \frac{U_0}{U} = \frac{E_0 \cdot l}{E \cdot l} = \frac{E_0}{E}$$

ἄρα ἔνταση ἠλεκτρικοῦ πεδίου $\boxed{E = \frac{E_0}{\varepsilon}}$ (4)

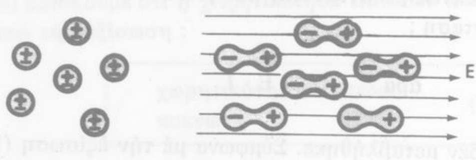
Τό διηλεκτρικό προκαλεῖ ἐλάττωση τῆς ἐντάσεως τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου (ἀπό E_0 σέ $E = E_0/\varepsilon$).

Ποῦ ὀφείλεται ἡ ἐλάττωση τῆς ἐντάσεως τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου. Ξέρουμε ὅτι τό μόριο τοῦ χλωριούχου νατρίου, NaCl, ἀποτελεῖται ἀπό ἕνα θετικό ἰόν νατρίου Na^+ καί ἀπό ἕνα ἀρνητικό ἰόν χλωρίου Cl^-. Καθένα ἀπό αὐτά τά ἰόντα ἔχει ἕνα στοιχειῶδες ἠλεκτρικό φορτίο. Ἔτσι τό μόριο τοῦ χλωριούχου νατρίου ἀποτελεῖ ἕνα στοιχειῶδες *ἠλεκτρικό δίπολο*, στό ὁποῖο ἐμφανίζεται ἀσύμμετρη κατανομή τῶν ἠλεκτρικῶν φορτίων. Τά μόρια πού ἀποτελοῦν ἠλεκτρικά δίπολα τά ὀνομάζουμε *πολικά μόρια*. Ἀντίθετα στά μόρια τοῦ ὑδρογόνου H_2, τοῦ ὀξυγόνου O_2, τοῦ ἀζώτου N_2 ὑπάρχει συμμετρική κατανομή τῶν ἠλεκτρικῶν φορτίων. Τά μόρια αὐτά τά ὀνομάζουμε *μή πολικά μόρια*.

Ἄν τό διηλεκτρικό ἀποτελεῖται ἀπό πολικά μόρια, αὐτά μέ τήν ἐπίδραση ἐξωτερικοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου προσανατολίζονται κατά μῆκος τῶν δυναμικῶν γραμμῶν τοῦ ἐξωτερικοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου (σχ. 147α). Ἄν τό διηλεκτρικό ἀποτελεῖται ἀπό μή πολικά μόρια, τότε μέ τήν ἐπίδραση τοῦ ἐξωτερικοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου συμβαίνουν μέσα σέ κάθε μόριο μικρές μετακινήσεις τῶν ἠλεκτρικῶν φορτίων καί ἔτσι κάθε μόριο ἐμφανίζεται ὡς στοιχειῶδες ἠλεκτρικό δίπολο πού προσανατολίζεται κατά μῆκος τῶν δυναμικῶν γραμμῶν τοῦ ἐξωτερικοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου (σχ. 147β).

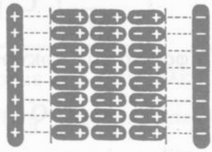


Σχ. 147α. Πολικά μόρια διηλεκτρικοῦ ὑλικοῦ (α ἔξω ἀπό ἠλεκτρικό πεδίο. β μέσα σέ ὁμογενές ἠλεκτρικό πεδίο).



Σχ. 147β. Μή πολικά μόρια διηλεκτρικοῦ ὑλικοῦ (α ἔξω ἀπό ἠλεκτρικό πεδίο. β μέσα σέ ὁμογενές ἠλεκτρικό πεδίο).

Ὥστε μέ τήν ἐπίδραση τοῦ ἐξωτερικοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου τά μόρια τοῦ διηλεκτρικοῦ συμπεριφέρονται σάν *στοιχειώδη ἠλεκτρικά δίπολα* καί διατάσσονται μέσα στό διηλεκτρικό κατά μῆκος τῶν δυναμικῶν γραμμῶν τοῦ ἐξωτερικοῦ πεδίου (σχ. 147γ). Στό ἐσωτερικό τοῦ διηλεκτρικοῦ τά ἠλεκτρικά φορτία δύο γειτονικῶν διπόλων ἐξουδετερώνονται ἀμοιβαῖα. Στίς δύο ὅμως ἐξωτερικές ἐπιφάνειες τοῦ διηλεκτρικοῦ ἐμφανίζονται ἴσα *ἑτερώνυμα ἠλεκτρικά φορτία* πού εἶναι *δεσμευμένα* μέσα στό κάθε μόριο τοῦ ἐπιφανειακοῦ στρώματος τοῦ διηλεκτρικοῦ. Αὐτή ἡ μεταβολή πού παθαίνει τό διηλεκτρικό, ὅταν βρεθεῖ μέσα σέ ἠλεκτρικό πεδίο, ὀνομάζεται *πόλωση* τοῦ διηλεκτρικοῦ.

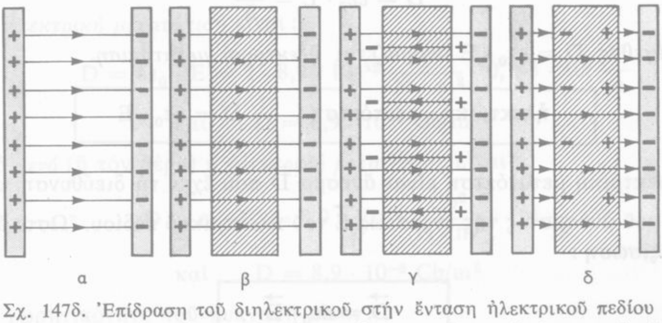


Σχ. 147γ. Πόλωση διηλεκτρικοῦ ὑλικοῦ πού βρίσκεται μέσα σέ ὁμογενές ἠλεκτρικό πεδίο.

Ὅταν μεταξύ τῶν ὁπλισμῶν τοῦ πυκνωτῆ τοποθετήσουμε τό διηλεκτρικό, τότε στίς δύο ἐπιφάνειές του ἀναπτύσσονται, ἐξαιτίας τῆς πολώσεως, ἴσα ἑτερώνυμα ἠλεκτρικά φορτία πού *δημιουργοῦν μέσα στό διηλεκτρικό ἕνα ἠλεκτρικό πεδίο* πού ἔχει φορά *ἀντίθετη* μέ τή φορά τοῦ ἐξωτερικοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου. Ἔτσι *μέσα στό διηλεκτρικό* τό ἐξωτερικό ἠλεκτρικό πεδίο *ἐξασθενίζει* καί ἡ ἔντασή του ἐλαττώνεται ἀπό E_0 σέ E (σχ. 147δ). Ὥστε :

Ἡ ἐλάττωση τῆς ἐντάσεως τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου μέσα στό διηλεκτρικό ὀφείλεται στήν πόλωση τοῦ διηλεκτρικοῦ, ἡ ὁποία δημιουργεῖ μέσα στό διηλεκτρικό ἕνα ἠλεκτρικό πεδίο πού ἔχει φορά ἀντίθετη μέ τή φορά τοῦ ἐξωτερικοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου.

δ. Ἠλεκτρική μετατόπιση (*). Θεωροῦμε ἕναν ἐπίπεδο πυκνωτή πού ὁ κάθε ὁπλισμός του ἔχει ἐμβαδό S καί ἡ ἀπόσταση τῶν ὁπλισμῶν του εἶναι l.



Σχ. 147δ. Ἐπίδραση τοῦ διηλεκτρικοῦ στήν ἔνταση ἠλεκτρικοῦ πεδίου α ἠλεκτρικό πεδίο στό κενό (ἤ στόν ἀέρα). β εἰσαγωγή τοῦ διηλεκτρικοῦ μέσα στό ἠλεκτρικό πεδίο. γ πόλωση τοῦ διηλεκτρικοῦ καί δημιουργία μέσα σ' αὐτό νέου ἠλεκτρικοῦ πεδίου. δ στό κενό τό ἠλεκτρικό πεδίο ἔχει ἔνταση E_0, ἡ πόλωση δημιουργεῖ ἠλεκτρικό πεδίο ἐντάσεως E′, καί τελικά μέσα στό διηλεκτρικό τό ἠλεκτρικό πεδίο ἔχει ἔνταση $E = E_0 - E'$.

* electric displacement, elektrische Verschiebung

Μεταξύ τῶν ὁπλισμῶν τοῦ πυκνωτῆ ὑπάρχει *κενό* καί στούς ὁπλισμούς του ἐφαρμόζεται τάση U_0. Τότε ἰσχύουν οἱ ἐξισώσεις :

$$C_0 = \varepsilon_0 \cdot \frac{S}{l} \quad \text{καί} \quad U_0 = E_0 \cdot l$$

Τό φορτίο τοῦ πυκνωτῆ εἶναι

$$Q = C_0 \cdot U_0 = \varepsilon_0 \cdot \frac{S}{l} \cdot E_0 \cdot l = \varepsilon_0 \cdot E_0 \cdot S \tag{5}$$

$$\text{ἄρα} \quad E_0 = \frac{Q}{\varepsilon_0 \cdot S} \tag{6}$$

Ὅταν μεταξύ τῶν ὁπλισμῶν τοῦ φορτισμένου πυκνωτῆ βάλουμε ἕνα στρῶμα *διηλεκτρικοῦ* πού ἔχει πάχος l καί διηλεκτρική σταθερή ε, τότε ἡ ἔνταση τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου γίνεται :

$$E = \frac{E_0}{\varepsilon} \quad \text{ἄρα} \quad E_0 = \varepsilon \cdot E$$

Τό φορτίο τοῦ πυκνωτῆ εἶναι πάλι Q καί ἀπό τήν ἐξίσωση (5) βρίσκουμε :

$$Q = \varepsilon\varepsilon_0 \cdot E \cdot S \quad \text{ἄρα} \quad E = \frac{Q}{\varepsilon\varepsilon_0 \cdot S} \tag{7}$$

Ἀπό τήν ἐξίσωση (7) ἔχουμε τή σχέση :

$$D = \varepsilon\varepsilon_0 \cdot E = \frac{Q}{S} \tag{8}$$

Τό μέγεθος $D = \varepsilon\varepsilon_0 \cdot E$ ὀνομάζεται *ἠλεκτρική μετατόπιση*.

$$\boxed{\text{ἠλεκτρική μετατόπιση} \qquad D = \varepsilon\varepsilon_0 \cdot E} \tag{9}$$

Ἡ ἠλεκτρική μετατόπιση εἶναι ἄνυσμα $\vec{D}$ πού ἔχει τή διεύθυνση καί τή φορά τοῦ ἀνύσματος τῆς ἐντάσεως $\vec{E}$ τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου. Ὥστε ἔχουμε τήν ἐξίσωση :

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \cdot \vec{E}}$$

Ὅταν τό ἠλεκτρικό πεδίο σχηματίζεται *στό κενό* (ε = 1) ἤ *στόν ἀέρα* (ε ≃ 1) τότε ἡ ἠλεκτρική μετατόπιση εἶναι :

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon_0 \cdot \vec{E}_0}$$

Μονάδα ἠλεκτρικῆς μετατοπίσεως. Ἀπό τήν ἐξίσωση (8) συνάγεται ὅτι *μονάδα ἠλεκτρικῆς μετατοπίσεως* εἶναι :

$$\boxed{\text{μονάδα ἠλεκτρικῆς μετατοπίσεως} \quad \frac{1\ \text{Cb}}{1\ \text{m}^2} \quad \text{ἤ} \quad 1\,\frac{\text{Cb}}{\text{m}^2}}$$

Παρατήρηση. Ἀπό τά παραπάνω συμπεραίνουμε ὅτι κάθε ἠλεκτρικό πεδίο χαρακτηρίζεται ἀπό δύο ἀνύσματα, *τήν ἔνταση ἠλεκτρικοῦ πεδίου* $\vec{E}$ καί *τήν ἠλεκτρική μετατόπιση* $\vec{D}$, πού εἶναι δύο διαφορετικά μεγέθη, γιατί ἡ ἔνταση ἠλεκτρικοῦ πεδίου μετριέται σέ V/m, ἐνῶ ἡ ἠλεκτρική μετατόπιση μετριέται σέ Cb/m^2.

Παράδειγμα. Σέ ἕναν ἐπίπεδο πυκνωτή εἶναι $S = 100\ \text{cm}^2$ καί $l = 1$ cm. Ὅταν μεταξύ τῶν ὁπλισμῶν του δέν ὑπάρχει διηλεκτρικό, στούς ὁπλισμούς του ἐφαρμόζεται τάση $U_0 = 100$ V. Ἔπειτα μεταξύ τῶν ὁπλισμῶν τοῦ φορτισμένου πυκνωτῆ εἰσάγουμε πλάκα διηλεκτρικοῦ πού ἔχει πάχος $l = 1$ cm καί διηλεκτρική σταθερή $\varepsilon = 7$.

Στό *κενό* (ἤ τόν ἀέρα) *ἡ ἔνταση τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου* εἶναι :

$$E_0 = \frac{U_0}{l} = \frac{100\ \text{V}}{10^{-2}\ \text{m}} \qquad \text{καί} \qquad E_0 = 10^4\ \text{V/m}$$

Μέσα στό *διηλεκτρικό ἡ ἔνταση τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου* εἶναι :

$$E = \frac{E_0}{\varepsilon} = \frac{10^4\ \text{V/m}}{7} \qquad \text{καί} \qquad E = 0{,}143 \cdot 10^4\ \text{V/m}$$

Ἡ ἠλεκτρική μετατόπιση εἶναι :

$$D = \varepsilon\varepsilon_0 \cdot E = 7 \cdot 8{,}9 \cdot 10^{-12}\,\frac{\text{Cb}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2} \cdot 0{,}143 \cdot 10^4\,\frac{\text{V}}{\text{m}}$$

$$\text{καί} \qquad D = 8{,}9 \cdot 10^{-8}\ \text{Cb/m}^2$$

Στό *κενό* (ἤ τόν ἀέρα) *ἡ ἠλεκτρική μετατόπιση* εἶναι :

$$D = \varepsilon_0 \cdot E_0 = 8{,}9 \cdot 10^{-12}\,\frac{\text{Cb}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2} \cdot 10^4\,\frac{\text{V}}{\text{m}}$$

$$\text{καί} \qquad D = 8{,}9 \cdot 10^{-8}\ \text{Cb/m}^2$$

Ἡ χωρητικότητα τοῦ πυκνωτῆ εἶναι :

στό κενό

$$C_0 = \varepsilon_0 \cdot \frac{S}{l} \qquad \text{καί} \qquad C_0 = 8{,}9 \cdot 10^{-12}\ \text{F}$$

μέ τό διηλεκτρικό

$$C = \varepsilon \cdot C_0 \qquad \text{καί} \qquad C = 62{,}3 \cdot 10^{-12}\ \text{F}$$

ε. Ἠλεκτρικά φορτία μέσα σέ διηλεκτρικό. Ἕνα σημειακό ἠλεκτρικό φορτίο Q βρίσκεται στό *κενό* (ἤ τόν ἀέρα). Τότε σέ ἀπόσταση r ἀπό τό φορτίο Q ἡ ἔνταση E_0 καί τό δυναμικό U_0 τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου εἶναι :

$$E_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \qquad \text{καί} \qquad U_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r}$$

Ὅταν τό ἴδιο φορτίο Q βρίσκεται μέσα σέ *διηλεκτρικό* πού ἔχει διηλεκτρική σταθερή ε, τότε στήν ἴδια ἀπόσταση r ἀπό τό φορτίο Q ἡ ἔνταση E καί τό δυναμικό U τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου εἶναι :

$$E = \frac{E_0}{\varepsilon} \qquad \text{καί} \qquad \boxed{E = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}}$$

$$U = \frac{U_0}{\varepsilon} \qquad \text{καί} \qquad \boxed{U = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r}}$$

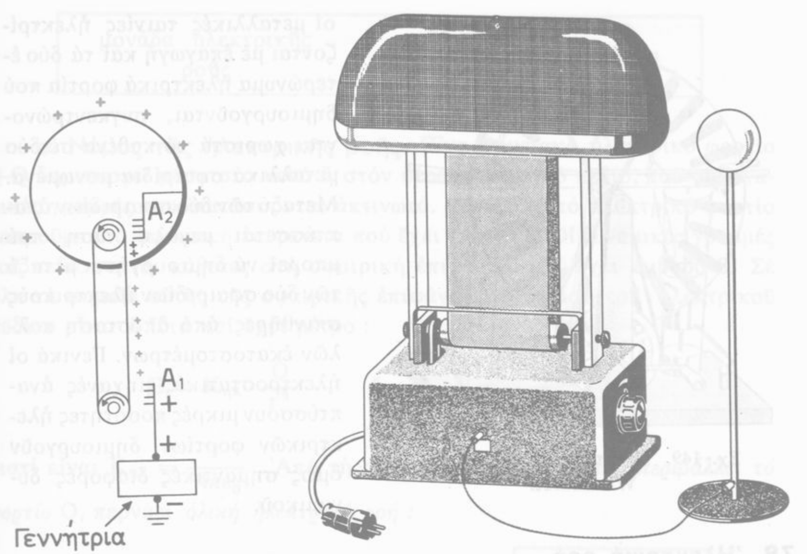
Ἄν στήν ἀπόσταση r ἀπό τό φορτίο Q φέρουμε ἕνα φορτίο Q_1, τότε πάνω στό φορτίο Q_1 ἐνεργεῖ *ἠλεκτροστατική δύναμη* :

$$F = E \cdot Q_1 \qquad \text{ἄρα} \qquad \boxed{F = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \cdot \frac{Q \cdot Q_1}{r^2}}$$

77. Ἠλεκτροστατικές μηχανές

Ὅλα τά σώματα, πού μᾶς ἐμφανίζονται οὐδέτερα, κλείνουν μέσα τους ἴσα ἑτερώνυμα ἠλεκτρικά φορτία. Μέ τριβή ἤ μέ ἐπαγωγή μποροῦμε νά διαχωρίσουμε πάνω σέ ἕνα σῶμα *θετικά* καί *ἀρνητικά* ἠλεκτρικά φορτία. Καί στίς δύο περιπτώσεις ἡ ἐμφάνιση τῶν ἠλεκτρικῶν φορτίων ὀφείλεται στήν ἰδιότητα πού ἔχουν τά *ἠλεκτρόνια* νά φεύγουν ἀπό ἕνα σῶμα καί νά πηγαίνουν σέ ἕνα ἄλλο σῶμα. Ὁρισμένες διατάξεις πού παράγουν ἠλεκτρικά φορτία μέ τριβή ἤ μέ ἐπαγωγή, ὀνομάζονται *ἠλεκτροστατικές μηχανές*. Σήμερα χρησιμοποιοῦμε δύο τύπους ἠλεκτροστατικῶν μηχανῶν, *τή μηχανή Van de Graaff* καί *τή μηχανή Wimshurst*.

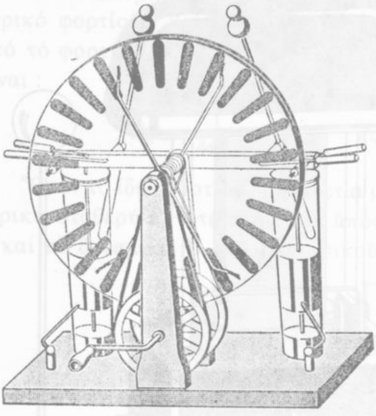
α. Μηχανή Van de Graaff. Ἡ λειτουργία τῆς μηχανῆς στηρίζεται στήν ἑξῆς ἀρχή : Ὅταν ἕνα φορτισμένο σφαιρίδιο ἔρχεται σέ ἐπαφή μέ τά ἐσωτερικά τοιχώματα μονωμένου κοίλου ἀγωγοῦ, τότε τό σφαιρίδιο δίνει στόν ἀγωγό ὅλο τό φορτίο του, πού ἔρχεται στήν ἐξωτερική ἐπιφάνεια τοῦ ἀγωγοῦ. Στή μηχανή Van de Graaff τά ἠλεκτρικά φορτία τά μεταφέρει στό ἐσωτερικό τοῦ κοίλου ἀγωγοῦ μιά συνεχής μονωτική ταινία πού κινεῖται μέ τή



Σχ. 148. Σχηματική παράσταση τῆς μηχανῆς Van de Graaff (α) καί μικρή γιά σχολικά ἐργαστήρια (β).

βοήθεια δύο τροχαλιῶν (σχ. 148). Τά φορτία δημιουργοῦνται πάνω στήν ταινία ὡς ἑξῆς: Ἡ ταινία περνάει πολύ κοντά ἀπό ἕνα σύστημα ἀκίδων (A_1) πού ἔχουν π.χ. θετικό φορτίο καί δημιουργοῦν ἰσχυρό ἠλεκτρικό πεδίο. Αὐτό προκαλεῖ ἰσχυρό ἰονισμό τοῦ ἀέρα γύρω ἀπό τήν ἀκίδα καί τά θετικά ἰόντα ἐκτοξεύονται πρός τήν ταινία. Αὐτή μεταφέρει τά θετικά φορτία μέσα στόν κοῖλο ἀγωγό καί, περνώντας πολύ κοντά ἀπό ἕνα ἄλλο σύστημα ἀκίδων (A_2), τίς ἠλεκτρίζει μέ ἐπαγωγή. Τά ἀρνητικά φορτία (ἠλεκτρόνια) φεύγουν ἀπό τίς ἀκίδες, ἔρχονται πάνω στήν ταινία καί ἐξουδετερώνουν τά θετικά φορτία της, ἐνῶ τά θετικά φορτία πού ἀναπτύχτηκαν μέ ἐπαγωγή πάνω στίς ἀκίδες, ἔρχονται στήν ἐξωτερική ἐπιφάνεια τοῦ κοίλου ἀγωγοῦ. Ἔτσι ὁ κοῖλος ἀγωγός ἀποκτᾶ μεγάλο δυναμικό, πού μπορεῖ νά φτάσει σέ ἑκατομμύρια βόλτ. Ἡ μηχανή Van de Graaff χρησιμοποιεῖται στά ἐργαστήρια Πυρηνικῆς Φυσικῆς, μικρές ὅμως τέτοιες μηχανές χρησιμοποιοῦνται καί στά σχολικά ἐργαστήρια.

β. Μηχανή Wimshurst. Ἡ μηχανή αὐτή ἔχει δύο δίσκους ἀπό μονωτικό ὑλικό, πού στρέφονται μέ ἀντίθετη φορά (σχ. 149). Κοντά στήν περιφέρεια κάθε δίσκου καί κατά τή διεύθυνση τῶν ἀκτίνων του εἶναι κολλημένες μικρές μεταλλικές ταινίες (ἀπό κασσίτερο). Ὅταν οἱ δίσκοι στρέφονται,



Σχ. 149. Ἠλεκτροστατική μηχανή Wimshurst.

οἱ μεταλλικές ταινίες ἠλεκτρίζονται μέ ἐπαγωγή καί τά δύο ἑτερώνυμα ἠλεκτρικά φορτία πού δημιουργοῦνται, συγκεντρώνονται χωριστά τό καθένα σέ δύο μεταλλικά σφαιρίδια μονωμένα. Μεταξύ τῶν δύο σφαιριδίων ἀναπτύσσεται μεγάλη τάση πού μπορεῖ νά δημιουργήσει μεταξύ τῶν δύο σφαιριδίων ἠλεκτρικούς σπινθῆρες ἀπό ἀπόσταση πολλῶν ἑκατοστομέτρων. Γενικά οἱ ἠλεκτροστατικές μηχανές ἀναπτύσσουν μικρές ποσότητες ἠλεκτρικῶν φορτίων, δημιουργοῦν ὅμως σημαντικές διαφορές δυναμικοῦ.

78. Ἠλεκτρική ροή

Μέσα σέ ὁμογενές ἠλεκτρικό πεδίο πού σχηματίζεται στό κενό (ἤ τόν ἀέρα), καί ἔχει ἔνταση E, τοποθετοῦμε μιά ἐπίπεδη ἐπιφάνεια πού ἔχει ἐμβαδό S (σχ. 150). Ἡ κάθετος στήν ἐπιφάνεια σχηματίζει γωνία α μέ τίς δυναμικές γραμμές. Τότε ἰσχύει ὁ ἑξῆς ὁρισμός στό σύστημα μονάδων MKSA:

Ὀνομάζουμε ἠλεκτρική ροή (Φ) τό φυσικό μέγεθος, πού τό μέτρο του δίνεται ἀπό τήν ἐξίσωση:

$$\boxed{\text{ἠλεκτρική ροή} \qquad \Phi = E \cdot S \cdot \text{συν}\, \alpha} \qquad (1)$$

Σχ. 150. Γιά τόν ὁρισμό τῆς ἠλεκτρικῆς ροῆς.

Ἄν ἡ ἐπιφάνεια εἶναι κάθετη στίς δυναμικές γραμμές τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου ($\alpha = 0^0$), τότε ἡ ἠλεκτρική ροή εἶναι:

$$\Phi = E \cdot S \qquad (2)$$

Μονάδα ἠλεκτρικῆς ροῆς. Ἄν στήν ἐξίσωση (2) βάλουμε $E = 1\,V/m$ καί $S = 1\,m^2$, βρίσκουμε ὅτι *μονάδα ἠλεκτρικῆς ροῆς* εἶναι: $1\,V \cdot m$.

μονάδα ἠλεκτρικῆς ροῆς	$1\dfrac{V}{m}\cdot 1\,m^2$ ἤ $1\,V\,m$

α. Νόμος τῆς ἠλεκτρικῆς ροῆς. Ἕνα σημειακό ἠλεκτρικό φορτίο $+Q$ δημιουργεῖ μέσα στό κενό ἤ στόν ἀέρα ἠλεκτρικό πεδίο, πού οἱ δυναμικές γραμμές του διατάσσονται ἀκτινωτά. Γύρω ἀπό τό ἠλεκτρικό φορτίο θεωροῦμε μιά σφαιρική ἐπιφάνεια πού ἔχει ἀκτίνα r. Οἱ δυναμικές γραμμές τοῦ πεδίου εἶναι κάθετες στή σφαιρική ἐπιφάνεια πού ἔχει ἐμβαδό S. Σέ ὅλα τά σημεῖα αὐτῆς τῆς σφαιρικῆς ἐπιφάνειας ἡ ἔνταση τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου εἶναι ἡ ἴδια καί ἔχει μέτρο:

$$E = K_{\eta\lambda}\cdot\frac{Q}{r^2} \qquad \text{ἤ} \qquad E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{r^2}$$

γιατί εἶναι $K_{\eta\lambda} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$. Ἀπό τή σφαιρική ἐπιφάνεια *πού περιβάλλει τό φορτίο* Q, περνάει *ὁλική ἠλεκτρική ροή*:

$$\Phi_{o\lambda} = E\cdot S = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{r^2}\cdot 4\pi r^2 \qquad \text{ἄρα} \qquad \boxed{\Phi_{o\lambda} = \frac{Q}{\varepsilon_0}} \qquad (3)$$

Ἡ ἐξίσωση (3) ἐκφράζει τόν ἀκόλουθο *νόμο τῆς ἠλεκτρικῆς ροῆς*:

Ἡ ἠλεκτρική ροή ($\Phi_{o\lambda}$) πού περνάει ἀπό μιά ἐπιφάνεια, ἡ ὁποία περιβάλλει ἕνα ἠλεκτρικό φορτίο, εἶναι ἀνάλογη μέ τό ἠλεκτρικό φορτίο Q, τό ὁποῖο παράγει τήν ἠλεκτρική ροή.

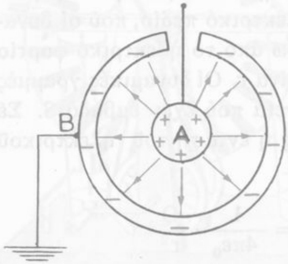
Ἡ ἐξίσωση (3) ἀναφέρεται σέ ἕνα σημειακό ἠλεκτρικό φορτίο Q. Γενικά ὅμως ἰσχύει γιά κάθε κλειστή ἐπιφάνεια ἡ ὁποία περικλείει ἕνα ἄθροισμα ἠλεκτρικῶν φορτίων $\sum Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \cdots + Q_\nu$. Ἔτσι ἔχουμε τή γενική ἐξίσωση:

$$\boxed{\text{νόμος τῆς ἠλεκτρικῆς ροῆς} \qquad \Phi_{o\lambda} = \frac{\sum Q}{\varepsilon_0}}$$

Ἡ ὁλική ἠλεκτρική ροή πού περνάει ἀπό μιά κλειστή ἐπιφάνεια εἶναι ἀνάλογη μέ τό ὁλικό ἠλεκτρικό φορτίο πού περικλείει αὐτή ἡ ἐπιφάνεια.

79. Σφαιρικός πυκνωτής

Ὁ σφαιρικός πυκνωτής ἀποτελεῖται ἀπό δύο ὁμόκεντρους σφαιρικούς ἀγωγούς A καί B, πού ἀντίστοιχα ἔχουν ἀκτίνες r καί R (σχ. 151) καί ἠλεκτρικά φορτία $+Q$ καί $-Q$. Ὁ πυκνωτής βρίσκεται στό κενό ἤ στόν ἀέρα.



Σχ. 151. Σφαιρικός πυκνωτής.

Ἕνας σφαιρικός ἀγωγός, πού ἔχει ἀκτίνα R καί φορτίο Q, δημιουργεῖ γύρω του ἠλεκτρικό πεδίο. Σέ ἀπόσταση d ἀπό τό κέντρο τοῦ ἀγωγοῦ τό δυναμικό εἶναι :

$$U = K_{\eta\lambda} \cdot \frac{Q}{d} \quad \text{ἤ} \quad U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{d} \qquad (1)$$

Ἄν εἶναι $d = R$ ἤ $d < R$, τότε οἱ παραπάνω δύο ἐξισώσεις δίνουν *τό δυναμικό ὁλόκληρου τοῦ σφαιρικοῦ ἀγωγοῦ.*

Στό σφαιρικό πυκνωτή στό κέντρο τῶν δύο σφαιρικῶν ὁπλισμῶν τό δυναμικό U εἶναι ἴσο μέ τό ἀλγεβρικό ἄθροισμα τῶν δυναμικῶν :

$$U = -K_{\eta\lambda} \cdot \frac{Q}{R} + K_{\eta\lambda} \cdot \frac{Q}{r}$$

$$\text{ἤ} \qquad U = K_{\eta\lambda} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right) \cdot Q$$

$$\text{καί} \qquad U = K_{\eta\lambda} \cdot Q \cdot \frac{R - r}{R \cdot r} \qquad (2)$$

Ὁ ἐσωτερικός ὁπλισμός A ἔχει δυναμικό U, αὐτό πού δίνει ἡ ἐξίσωση (2). Ὁ ἐξωτερικός ὁπλισμός B εἶναι προσγειωμένος καί ἑπομένως τό δυναμικό του εἶναι ἴσο μέ μηδέν. Ἔτσι ἡ διαφορά δυναμικοῦ μεταξύ τῶν δύο ὁπλισμῶν τοῦ πυκνωτῆ εἶναι ἴση μέ U. Ἡ χωρητικότητα C_0 τοῦ πυκνωτῆ εἶναι :

$$C_0 = \frac{Q}{U}$$

Ἔτσι ἀπό τήν ἐξίσωση (2) βρίσκουμε ὅτι *ἡ χωρητικότητα τοῦ σφαιρικοῦ πυκνωτῆ* εἶναι :

$$C_0 = \frac{Q}{U} = \frac{1}{K_{\eta\lambda}} \cdot \frac{R \cdot r}{R - r} \quad \text{ἤ} \quad C_0 = 4\pi\varepsilon_0 \cdot \frac{R \cdot r}{R - r}$$

καί $\boxed{C_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot \dfrac{4\pi Rr}{R - r}}$ $\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_0 \text{ σέ F/m} \\ R, r \text{ σέ m} \\ C_0 \text{ σέ F} \end{array} \right.$

80. Πειραματική ἀπόδειξη τοῦ στοιχειώδους ἠλεκτρικοῦ φορτίου

Ὁ Millican (1910) πέτυχε νά ἀποδείξει *πειραματικά* καί νά μετρήσει τό στοιχειῶδες ἠλεκτρικό φορτίο e μέ τήν ἑξῆς μέθοδο, πού μποροῦμε νά τήν ἐπαναλάβουμε. Μεταξύ δύο ὁριζόντιων μεταλλικῶν πλακῶν ὑπάρχει ὁμογενές ἠλεκτρικό πεδίο πού οἱ δυναμικές γραμμές του εἶναι κατακόρυφες καί ἡ ἔντασή του ἔχει μέτρο $E = U/l$, ὅπου U εἶναι ἡ διαφορά δυναμικοῦ μεταξύ τῶν δύο πλακῶν καί l ἡ ἀπόστασή τους (σχ. 152). Μέ ψεκασμό σχηματίζονται κοντά σέ μιά τρύπα τῆς πάνω πλάκας μικρά σταγονίδια λαδιοῦ (ὑγρό πού δέν ἐξατμίζεται καί μπορεῖ νά παραμείνει στόν ἀέρα ἀρκετό χρόνο). Κατά τόν ψεκασμό μερικά σταγονίδια ἠλεκτρίζονται μέ τριβή. Μέ μιά κατάλληλη διόπτρα ἐφοδιασμένη μέ μικρομετρική κλίμακα παρακολουθοῦμε τήν κίνηση τῶν σταγονιδίων μέσα στό ἠλεκτρικό πεδίο. Ἄς θεωρήσουμε ἕνα σταγονίδιο πού ἔχει μάζα m βάρος $B = mg$ καί ἠλεκτρικό φορτίο κατ' ἀπόλυτη τιμή ἴσο μέ q. Τότε πάνω στό σταγονίδιο ἐνεργεῖ ἐξαιτίας τοῦ ἠλεκτρικοῦ φορτίου του μιά ἠλεκτρική δύναμη, πού ἔχει μέτρο $F = Eq$ καί εἶναι κατακόρυφη. Ἄν ρυθμίσουμε κατάλληλα τήν τάση U κατορθώνουμε

Σχ. 152. Σχηματική παράσταση τοῦ πειράματος τοῦ Millican.

νά διατηρεῖται τό σταγονίδιο ἀκίνητο. Τότε τό βάρος $\vec{B}$ τοῦ σταγονιδίου καί ἡ ἠλεκτρική δύναμη $\vec{F}$ εἶναι ἀντίθετες (ἡ ἄνωση τοῦ ἀέρα πάνω στό σταγονίδιο θεωρεῖται ἀσήμαντη) καί ἰσχύει ἡ ἐξίσωση :

$$E \cdot q = m \cdot g \quad \text{ἤ} \quad \frac{U}{l} \cdot q = m \cdot g \quad \text{καί} \quad q = \frac{m \cdot g \cdot l}{U} \qquad (1)$$

Ἄν εἶναι γνωστή ἡ μάζα m τοῦ σταγονιδίου τότε ἀπό τήν ἐξίσωση (1) ὑπολογίζεται τό φορτίο q τοῦ σταγονιδίου. Ὁ Millican ἀπό πολλές ἀκριβεῖς μετρήσεις κατέληξε στό ἑξῆς γενικό συμπέρασμα :

Τό ἠλεκτρικό φορτίο (q) τῶν σταγονιδίων λαδιοῦ εἶναι πάντοτε ἀκέραιο πολλαπλάσιο ἑνός στοιχειώδους ἠλεκτρικοῦ φορτίου e, πού κατ' ἀπόλυτη τιμή εἶναι ἴσο μέ τό ἠλεκτρικό φορτίο τοῦ ἠλεκτρονίου 1,6 · 10⁻¹⁹ Cb.

ἠλεκτρικό φορτίο σταγονιδίου	$q = n \cdot e$
στοιχειῶδες ἠλεκτρικό φορτίο	$\lvert e \rvert = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Cb

Ὑπολογισμός τῆς μάζας m τοῦ σταγονιδίου. Ἄν τό σταγονίδιο ἔχει ἀκτίνα r, καί πυκνότητα ρ τότε ἡ μάζα του m εἶναι:

$$m = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 \cdot \rho \qquad (2)$$

Ὁ ἀέρας ἔχει συντελεστή ἐσωτερικῆς τριβῆς η καί τό σταγονίδιο πέφτοντας μέσα στόν ἀέρα ἀποκτᾶ ὁριακή ταχύτητα $\upsilon_{o\rho}$, πού ὅπως ξέρουμε (§ 42), δίνεται ἀπό τήν ἐξίσωση:

$$\upsilon_{o\rho} = \frac{2}{9} \cdot \frac{r^2 g}{\eta} \cdot (\rho - \rho_0) \qquad (3)$$

ὅπου ρ_0 εἶναι ἡ πυκνότητα τοῦ ἀέρα. Τήν ὁριακή ταχύτητα τή μετρᾶμε ὡς ἑξῆς: Ὅταν καταργηθεῖ τό ἠλεκτρικό πεδίο, τό σταγονίδιο ἀρχίζει νά πέφτει, γρήγορα ὅμως ἡ κίνησή του γίνεται ὁμαλή γιατί τό σταγονίδιο ἀποκτᾶ τήν ὁριακή ταχύτητα $\upsilon_{o\rho}$ τήν ὁποία μποροῦμε νά μετρήσουμε. Τότε ἀπό τήν ἐξίσωση (3) βρίσκουμε τήν ἀκτίνα r τοῦ σταγονιδίου καί ἔπειτα ἀπό τήν ἐξίσωση (2) βρίσκουμε τή μάζα m τοῦ σταγονιδίου.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

151. Ὁ καθένας ὁπλισμός ἑνός ἐπίπεδου πυκνωτῆ ἔχει ἐμβαδό $S = 10\ cm^2$ καί ἡ ἀπόσταση μεταξύ τῶν δύο ὁπλισμῶν εἶναι $l = 1$ mm. Νά βρεθεῖ ἡ χωρητικότητα τοῦ πυκνωτῆ, ὅταν ὡς διηλεκτρικό ἔχει τόν ἀέρα, καί ὅταν ἔχει ὡς διηλεκτρικό τό γυαλί, γιά τό ὁποῖο εἶναι $\varepsilon = 6$.

152. Μεταξύ τῶν ὁπλισμῶν ἑνός ἐπίπεδου πυκνωτῆ ὑπάρχει διηλεκτρικό πού ἔχει διηλεκτρική σταθερή $\varepsilon = 2{,}5$ καί διηλεκτρική ἀντοχή $5 \cdot 10^6$ V/m. Ἡ ἀπόσταση μεταξύ τῶν ὁπλισμῶν εἶναι $l = 2$ mm. 1) Πόση εἶναι ἡ μέγιστη τάση πού μποροῦμε νά ἐφαρμόσουμε στόν πυκνωτή; 2) Πόσο ἐμβαδό S πρέπει νά ἔχει ὁ καθένας ὁπλισμός τοῦ πυκνωτῆ γιά νά ἔχει ὁ πυκνωτής χωρητικότητα $C = 10^{-3}\ \mu F$;

153. Ἕνας φυλλωτός πυκνωτής ἀποτελεῖται ἀπό δύο μεταλλικές ταινίες, πού καθεμιά ἔχει ἐμβαδό $S = 4\ m^2$. Τό διηλεκτρικό εἶναι παραφινωμένο χαρτί πού ἔχει πάχος $l = 0{,}02$ mm καί διηλεκτρική σταθερή $\varepsilon = 2{,}3$. Ὁ πυκνωτής φορτίζεται ὑπό τάση $U = 1000$ V. Νά βρεθεῖ ἡ χωρητικότητα C τοῦ πυκνωτῆ, ἡ ἐνέργειά του $E_{\eta\lambda}$ καί ἡ ἔνταση E τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου.

154. Ἕνας φυλλωτός πυκνωτής ἀποτελεῖται ἀπό δύο λεπτές ταινίες ἀλουμινίου πού ἔχουν πλάτος $\alpha = 2$ cm καί ὡς διηλεκτρικό ἔχει παραφινωμένο χαρτί, πού ἔχει πάχος $l = 0{,}05$ mm καί διηλεκτρική σταθερή $\varepsilon = 2$. Πόσο μῆκος β πρέπει νά ἔχουν οἱ ταινίες, ἄν θέλουμε νά ἔχει ὁ πυκνωτής χωρητικότητα $C = 0{,}01\ \mu F$; Πόσο φορτίο θά ἔχει αὐτός ὁ πυκνωτής, ἄν ἐφαρμόσουμε σ' αὐτόν μιά τάση $U = 10$ V;

155. Ἕνας ἐπίπεδος πυκνωτής ἔχει χωρητικότητα $C = 1{,}6 \cdot 10^{-3}\ \mu F$ καί μεταξύ τῶν ὁπλισμῶν του ὑπάρχει ἕνα πλακίδιο ἀπό γυαλί. Ὅταν φορτίσουμε τόν πυκνωτή ὑπό τάση $U = 250\,000$ V, τό διηλεκτρικό τρυπιέται καί ἡ ἐκφόρτιση τοῦ πυκνωτῆ διαρκεῖ ἐπί χρονικό διάστημα $t = 0{,}1$ μsec. Πόσο εἶναι τό φορτίο τοῦ πυκνωτῆ καί πόση εἶναι κατά μέσο ὅρο ἡ ἰσχύς πού ἐμφανίζεται στή διάρκεια τοῦ χρόνου t;

156. Ἕνας πυκνωτής ἔχει χωρητικότητα $C_0 = 10$ pF, μεταξύ τῶν ὁπλισμῶν του ὑπάρχει ἀέρας καί στούς ὁπλισμούς του ἐφαρμόζεται τάση $U = 200$ V. 1) Πόσο εἶναι τό φορτίο Q_0 τοῦ πυκνωτῆ καί πόση ἡ ἐνέργειά του E_0; 2) Γεμίζουμε τό χῶρο πού ὑπάρχει μεταξύ τῶν ὁπλισμῶν τοῦ πυκνωτῆ μέ παραφίνη πού ἔχει διηλεκτρική σταθερή ἴση μέ $\varepsilon = 2$ καί φορτίζουμε πάλι τόν πυκνωτή ὑπό τάση $U = 200$ V. Πόσο εἶναι τώρα τό φορτίο Q καί ἡ ἐνέργεια E τοῦ πυκνωτῆ; Πόση εἶναι ἡ μεταβολή ΔQ τοῦ φορτίου καί ἡ μεταβολή ΔE τῆς ἐνέργειας τοῦ πυκνωτῆ;

157. Ἕνας σφαιρικός πυκνωτής ἀποτελεῖται ἀπό δύο ὁμόκεντρους σφαιρικούς ὁπλισμούς πού ἔχουν ἀκτίνες $R = 12$ cm καί $r = 10$ cm. 1) Πόση εἶναι ἡ χωρητικότητα τοῦ πυκνωτῆ; 2) Πόση γίνεται ἡ χωρητικότητα τοῦ πυκνωτῆ, ὅταν ἡ ἀκτίνα R γίνει πολύ μεγάλη σχετικά μέ τήν ἀκτίνα r;

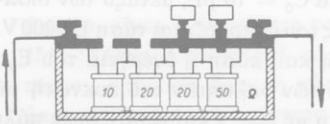
158. Οἱ ὁπλισμοί ἑνός σφαιρικοῦ πυκνωτῆ ἔχουν ἀκτίνες $R = 20$ cm καί $r = 10$ cm καί μεταξύ τῶν δύο ὁπλισμῶν ὑπάρχει διηλεκτρικό πού ἔχει $\varepsilon = 4{,}5$. 1) Πόση εἶναι ἡ χωρητικότητα τοῦ πυκνωτῆ; 2) Πόση πρέπει νά εἶναι ἡ τάση U πού θά ἐφαρμόσουμε στόν πυκνωτή, γιά νά ἔχει ὁ πυκνωτής φορτίο $Q = 0{,}2$ μCb; 3) Πόση εἶναι τότε ἡ ἐνέργεια τοῦ πυκνωτῆ;

159. Μιά σταγόνα λαδιοῦ ἔχει διάμετρο $2r = 2 \cdot 10^{-4}$ cm καί ἔχει πάνω της ἠλεκτρικό φορτίο κατ' ἀπόλυτη τιμή ἴσο μέ $Q = 5e$. Θέλουμε νά διατηρηθεῖ αἰωρούμενη μέσα στό ἠλεκτρικό πεδίο πού ὑπάρχει μεταξύ τῶν ὁπλισμῶν ἑνός πυκνωτῆ, πού ἡ μεταξύ τους ἀπόσταση εἶναι $l = 1$ cm. 1) Πόση τάση πρέπει νά ἐφαρμόσουμε στούς ὁπλισμούς τοῦ πυκνωτῆ ; 2) Πόσο πρέπει νά μεταβληθεῖ ἡ τάση, ἄν τό φορτίο τῆς σταγόνας γίνει $Q_1 = 6e$; Πυκνότητα λαδιοῦ $\rho = 0{,}9$ gr/cm³. $g = 9{,}81$ m/sec². $|e| = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Cb.

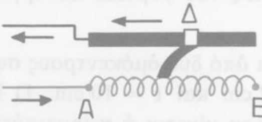
160. Μιά μηχανή Wimshurst δημιουργεῖ μεταξύ τῶν πόλων της διαφορά δυναμικοῦ U = 25 000 V. Συνδέουμε τούς πόλους τῆς μηχανῆς μέ τούς ὁπλισμούς ἑνός πυκνωτῆ, χωρητικότητας C = 0,05 μF καί παρατηροῦμε ὅτι ὁ πυκνωτής φορτίζεται καί ἡ διαφορά δυναμικοῦ μεταξύ τῶν ὁπλισμῶν του γίνεται ἴση μέ U = 25 000 V στή διάρκεια χρόνου t = 10 sec. 1) Πόσο φορτίο ἔδωσε ἡ μηχανή στόν πυκνωτή κατά δευτερόλεπτο ; 2) Πόση ἐνέργεια ἔδωσε ἡ μηχανή στόν πυκνωτή καί πόση εἶναι ἡ ἰσχύς τῆς μηχανῆς ;

Συνεχές ἠλεκτρικό ρεῦμα

81. Ρυθμιστικές ἀντιστάσεις



Σχ. 153. Κιβώτιο ἀντιστάσεων.



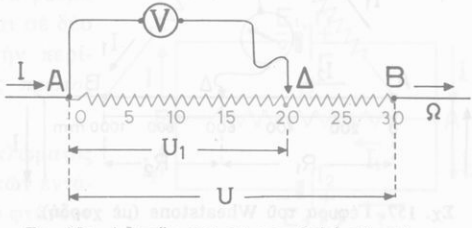
Σχ. 154. Ρυθμιστική ἀντίσταση μέ δρομέα.

Σχ. 155. Ρυθμιστική ἀντίσταση μέ μοχλό.

Σέ πολλές περιπτώσεις εἶναι ἀνάγκη νά μεταβάλλουμε τήν ἔνταση (I) τοῦ ρεύματος πού διαρρέει ἕναν ἀγωγό. Αὐτό μπορεῖ νά γίνει, ἄν μεταβληθεῖ ἡ ἀντίσταση (R) τοῦ κυκλώματος. Γι' αὐτό τό σκοπό χρησιμοποιοῦμε εἰδικά ὄργανα, πού ὀνομάζονται *ρυθμιστικές ἀντιστάσεις* καί μπαίνουν στό κύκλωμα κατά σειρά. Ἔχουμε διάφορους τύπους ρυθμιστικῶν ἀντιστάσεων. Τό σχῆμα 153 δείχνει ἕνα *κιβώτιο ἀντιστάσεων*. Ἀφαιρώντας ὁρισμένα μεταλλικά κομμάτια παρεμβάλλουμε τήν ἀντίσταση πού θέλουμε, π.χ. στό σχῆμα φαίνεται ὅτι αὐξήσαμε τήν ἀντίσταση τοῦ κυκλώματος κατά 30 Ω. Στό σχῆμα 154 φαίνεται μιά *ρυθμιστική ἀντίσταση μέ δρομέα* καί στό σχῆμα 155 μιά *ρυθμιστική ἀντίσταση μέ μοχλό*. Μετακινώντας τό δρομέα ἤ τό μοχλό αὐξάνουμε ἤ ἐλαττώνουμε τήν ἀντίσταση τοῦ κυκλώματος.

82. Ρυθμιστής τάσεως

Στίς ἄκρες ἑνός ὁμογενοῦς ἀγωγοῦ AB μέ σταθερή διατομή ἐφαρμόζεται σταθερή τάση U (σχ. 156). Ὁ ἀγωγός ἔχει ἀντίσταση R, διαρρέεται ἀπό ρεῦμα σταθερῆς ἐντάσεως I καί ἰσχύει ἡ ἐξίσωση $I = U/R$. Τό τμῆμα ΑΔ τοῦ ἀγωγοῦ ἔχει ἀντίσταση R_1. Σύμφωνα μέ τό νόμο τοῦ Ohm ἡ τάση στίς ἄκρες τοῦ ἀγωγοῦ ΑΔ εἶναι :



Σχ. 156. Διάταξη γιά τή μεταβολή τῆς τάσεως.

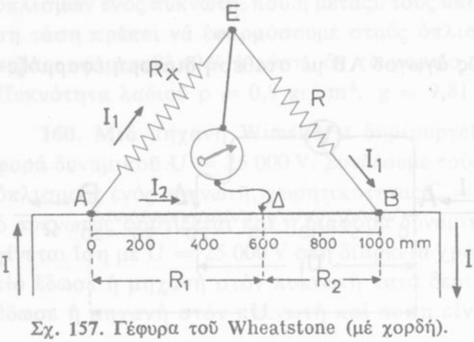
$$U_1 = I \cdot R_1 \quad \text{ἤ} \quad U_1 = \frac{U}{R} R_1$$

Ἄν μεταβάλλουμε τήν ἀντίσταση R_1, παίρνουμε διάφορες τιμές τῆς τάσεως U_1. Σ' αὐτή τήν ἀρχή στηρίζεται *ὁ ρυθμιστής τάσεως* ἤ *ποτενσιόμετρο*. Ἡ ἄκρη Α τοῦ ἀγωγοῦ συνδέεται μέ τόν ἕνα ἀκροδέκτη βολτομέτρου, ἐνῶ ὁ ἄλλος ἀκροδέκτης τοῦ βολτομέτρου συνδέεται μέ δρομέα Δ, πού μπορεῖ νά μετακινεῖται κατά μῆκος τοῦ ἀγωγοῦ AB. Ἔτσι, μετακινώντας τό δρομέα πάνω στόν ἀγωγό AB, παίρνουμε διάφορες τιμές τάσεων.

83. Μέτρηση ἀντιστάσεων

Ἡ μέτρηση τῆς ἀντιστάσεως R ἑνός ἀγωγοῦ μπορεῖ νά γίνει εὔκολα, ἄν μέ ἕνα βολτόμετρο μετρήσουμε τήν τάση πού ἐφαρμόζεται στίς ἄκρες τοῦ ἀγωγοῦ καί μέ ἕνα ἀμπερόμετρο μετρήσουμε τήν ἔνταση I τοῦ ρεύματος πού διαρρέει τόν ἀγωγό. Τότε σύμφωνα μέ *τό νόμο τοῦ Ohm ἡ ἀντίσταση* τοῦ ἀγωγοῦ εἶναι $R = U/I$.

α. Μέτρηση ἀντιστάσεως μέ τή γέφυρα τοῦ Wheatstone. Ἡ μέθοδος αὐτή εἶναι ἐφαρμογή τῶν νόμων πού ἰσχύουν γιά τά διακλαδιζόμενα ρεύματα. Πάνω ἀπό ἕναν κανόνα, πού ἔχει μῆκος 1 m καί εἶναι βαθμολογημένος σέ χιλιοστόμετρα, εἶναι τεντωμένο ἕνα σύρμα AB (σχ. 157). Ἡ ἄγνωστη ἀντίσταση R_X συνδέεται κατά σειρά μέ γνωστή ρυθμιστική ἀντίσταση R. Πάνω στό σύρμα μπορεῖ νά μετακινεῖται ἕνας δρομέας Δ, πού εἶναι στερεωμένος στήν ἄκρη σύρματος ΕΔ *(γέφυρα)* μέ τό ὁποῖο συνδέεται ἕνα γαλβανόμετρο. Στίς ἄκρες τῆς διακλαδώσεως ὑπάρχει ἡ σταθερή διαφορά δυναμικοῦ $U_A - U_B$. Κατά μῆκος τοῦ κάθε κλάδου τό δυναμικό ἐλαττώνε-



Σχ. 157. Γέφυρα τοῦ Wheatstone (μέ χορδή).

ται ἀπό U_A ὡς U_B. Στό σημεῖο Ε τό δυναμικό ἔχει μιά ὁρισμένη τιμή U_E, ἡ ὁποία εἶναι $U_A > U_E > U_B$. Μετακινοῦμε τό δρομέα πάνω στό σύρμα, ὥσπου νά βροῦμε ἕνα σημεῖο Δ τέτοιο, ὥστε νά μή παρατηροῦμε ἀπόκλιση τῆς βελόνης τοῦ γαλβανομέτρου. Τότε ἡ γέφυρα ΕΔ *δέ διαρρέεται ἀπό ρεῦμα* καί ἐπομένως τά σημεῖα Ε καί Δ ἔχουν *τό ἴδιο δυναμικό*, δηλαδή εἶναι $U_E = U_\Delta$.
Ἄν R_1 καί R_2 εἶναι οἱ ἀντιστάσεις τῶν τμημάτων ΑΔ καί ΔΒ τοῦ σύρματος, τότε ἔχουμε τίς ἐξισώσεις :

$$U_A - U_E = I_1 \cdot R_X = I_2 \cdot R_1$$

$$U_E - U_B = I_1 \cdot R = I_2 \cdot R_2$$

Ἄν διαιρέσουμε κατά μέλη τίς παραπάνω δύο ἐξισώσεις, βρίσκουμε :

$$\frac{R_X}{R} = \frac{R_1}{R_2} \quad \text{ἤ} \quad R_X = R \cdot \frac{R_1}{R_2} \qquad (1)$$

Οἱ ἀντιστάσεις R_1 καί R_2 τῶν δύο τμημάτων ΑΔ καί ΔΒ τοῦ σύρματος εἶναι ἀνάλογες μέ τά μήκη l_1 καί l_2 τῶν δύο τμημάτων τοῦ σύρματος. Ὥστε ἡ ἐξίσωση (1) γράφεται :

$$R_X = R \cdot \frac{l_1}{l_2}$$

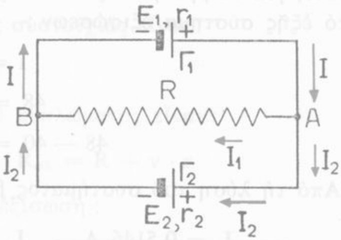
Ἄν π.χ. εἶναι $R = 32\ \Omega$, $l_1 = 60$ cm καί $l_2 = 40$ cm, τότε ἡ ἄγνωστη ἀντίσταση R_X εἶναι :

$$R_X = 32\ \Omega \cdot \frac{60\ \text{cm}}{40\ \text{cm}} = 48\ \Omega$$

84. Σύνθετο κύκλωμα

Ἕνα κύκλωμα ἀποτελεῖται ἀπό γεννήτριες καί ἀντιστάσεις. Στό κύκλωμα πού δείχνει τό σχῆμα 158 ὑπάρχουν δύο γεννήτριες Γ_1 καί Γ_2, πού συνδέονται *κατ' ἀντίθεση*, καί ἡ ἐξωτερική ἀντίσταση R. Οἱ γεννήτριες Γ_1 καί Γ_2 ἔχουν ἀντίστοιχα ἠλεκτρεγερτικές δυνάμεις E_1 καί E_2 καί ἐσωτερικές ἀντιστάσεις r_1 καί r_2. Οἱ ὑπόλοιποι ἀγωγοί τοῦ κυκλώματος ἔχουν ἀσήμαντη ἀντίσταση. Στά σημεῖα Α καί Β ὑπάρχουν δύο *κόμβοι* τοῦ κυκλώματος. Ἄς θεωρήσουμε ὅτι εἶναι γνωστή ἡ φορά τοῦ ρεύματος σ' αὐτό τό κύκλωμα. Τότε στόν κόμβο Α φτάνει ἕνα ρεῦμα ἐντάσεως I, πού διακλαδίζεται σέ δύο ρεύματα I_1 καί I_2. Σ' αὐτή τήν περίπτωση ἰσχύει ὁ ἀκόλουθος *πρῶτος κανόνας τοῦ Kirchhoff*:

Σέ κάθε κόμβο τοῦ κυκλώματος τό ἀλγεβρικό ἄθροισμα τῶν ἐντάσεων τῶν ρευμάτων πού φτάνουν στόν κόμβο καί φεύγουν ἀπό αὐτόν εἶναι ἴσο μέ μηδέν.



Σχ. 158. Σύνθετο κύκλωμα.

Ἐπομένως γιά τόν κόμβο Α ἔχουμε τήν ἐξίσωση :

πρῶτος κανόνας Kirchhoff	$I - I_1 - I_2 = 0$	(1)

Γιά νά ἐφαρμόσουμε τό νόμο τοῦ Ohm στό *σύνθετο κύκλωμα* πού πήραμε, στηριζόμαστε στό *δεύτερο κανόνα τοῦ Kirchhoff* πού διατυπώνεται ὡς ἑξῆς :

Σέ κάθε μερικό κύκλωμα ἑνός σύνθετου κυκλώματος τό ἀλγεβρικό ἄθροισμα τῶν ἠλεκτρεγερτικῶν δυνάμεων εἶναι ἴσο μέ τό ἀλγεβρικό ἄθροισμα τοῦ γινομένου κάθε ἀντιστάσεως ἐπί τήν ἔνταση τοῦ ρεύματος πού διαρρέει τήν ἀντίστοιχη ἀντίσταση.

δεύτερος κανόνας Kirchhoff	$\sum E = \sum IR$

Θά ἐφαρμόσουμε τόν παραπάνω κανόνα στό κύκλωμα πού πήραμε (σχ. 158). Αὐτό τό κύκλωμα χωρίζεται στά ἑξῆς δύο μερικά κυκλώματα :

α) Τό κύκλωμα $Γ_1ARBΓ_1$ στό ὁποῖο ἔχουμε :

$$E_1 = I \cdot r + I_1 \cdot R \quad (2)$$

β) Τό κύκλωμα $Γ_1AΓ_2BΓ_1$ στό ὁποῖο ἔχουμε :

$$E_1 - E_2 = I \cdot r_1 + I_2 \cdot r_2 \quad (3)$$

Ἔτσι βρίσκουμε ὅτι γιά τό σύνθετο κύκλωμα πού πήραμε, ἰσχύουν οἱ τρεῖς ἐξισώσεις (1), (2) καί (3).

Παράδειγμα. Ἄν στό παραπάνω κύκλωμα εἶναι:

$E_1 = 48$ V $E_2 = 40$ V $r_1 = 2{,}4\ \Omega$ $r_2 = 0{,}5\ \Omega$ καί $R = 80\ \Omega$

τότε, γιά νά βροῦμε τίς ἐντάσεις τῶν τριῶν ρευμάτων, πρέπει νά λύσουμε τό ἑξῆς σύστημα ἐξισώσεων:

$$I = I_1 + I_2 \quad (1)$$

$$48 = 2{,}4\ I + 80\ I_1 \quad (2)$$

$$48 - 40 = 2{,}4\ I + 0{,}5\ I_2 \quad (3)$$

Ἀπό τή λύση τοῦ συστήματος βρίσκουμε:

$I_1 = 0{,}5146$ A $I_2 = 2{,}3327$ A $I = 2{,}8473$ A

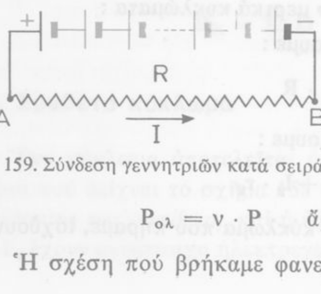
Σημείωση. Ἄν δέν εἶναι γνωστή ἡ φορά τῶν ρευμάτων στό κύκλωμα, τότε ὁρίζουμε αὐθαίρετα τή φορά τοῦ κάθε ρεύματος καί ἄν λύνοντας τό πρόβλημα βροῦμε ὅτι ἕνα ρεῦμα ἔχει ἀρνητική τιμή ἐντάσεως, αὐτό σημαίνει ὅτι ἡ φορά αὐτοῦ τοῦ ρεύματος εἶναι ἀντίθετη μέ τή φορά πού τοῦ ἀποδώσαμε αὐθαίρετα.

85. Σύνδεση γεννητριῶν

Ἄν συνδέσουμε μεταξύ τους πολλές γεννήτριες, σχηματίζουμε μιά *συστοιχία γεννητριῶν* (μπαταρία). Θεωροῦμε ὅτι ὅλες οἱ γεννήτριες μιᾶς συστοιχίας εἶναι ἴδιες καί καθεμιά ἔχει ἠλεκτρεγερτική δύναμη E καί ἐσωτερική ἀντίσταση r. Τίς γεννήτριες μποροῦμε νά τίς συνδέσουμε κατά διάφορους τρόπους.

α. Σύνδεση γεννητριῶν κατά σειρά.

Στή σύνδεση γεννητριῶν κατά σειρά ὁ ἀρνητικός πόλος κάθε γεννήτριας συνδέεται μέ τό θετικό πόλο τῆς ἑπόμενης γεννήτριας (σχ. 159). Τό ἐξωτερικό κύκλωμα ἀποτελεῖται μόνο ἀπό μιά ἀντίσταση R. Ἔχουμε ν ὅμοιες γεννήτριες καί τό κύκλωμα διαρρέεται ἀπό ρεῦμα ἐντάσεως I. Τότε κάθε γεννήτρια δίνει στό κύκλωμα ἰσχύ $P = E \cdot I$. Οἱ ν ὅμοιες γεννήτριες δίνουν στό κύκλωμα ὁλική ἰσχύ ($P_{ολ}$) ἴση μέ:



Σχ. 159. Σύνδεση γεννητριῶν κατά σειρά.

$$P_{ολ} = ν \cdot P \quad \text{ἄρα} \quad P_{ολ} = ν \cdot E \cdot I$$

Ἡ σχέση πού βρήκαμε φανερώνει ὅτι ἡ συστοιχία τῶν γεννητριῶν ἔχει *ὁλική ἠλεκτρεγερτική δύναμη* ($E_{ολ}$) ἴση μέ τό ἄθροισμα τῶν ἠλεκτρεγερτικῶν δυνάμεων τῶν γεννητριῶν τῆς συστοιχίας, δηλαδή εἶναι :

ἠλεκτρεγερτική δύναμη συστοιχίας $E_{ολ} = ν \cdot E$

Ἡ ὁλική ἐσωτερική ἀντίσταση ($r_{ολ}$) τῆς συστοιχίας εἶναι :

$$r_{ολ} = ν \cdot r$$

Ἑπομένως ἡ ὁλική ἀντίσταση ($R_{ολ}$) τοῦ κυκλώματος εἶναι :

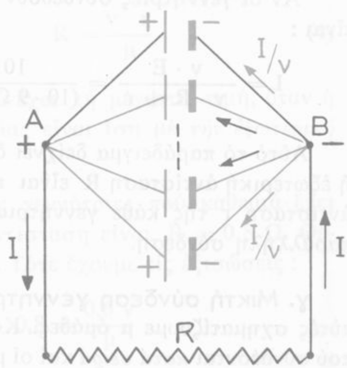
$$R_{ολ} = R + r_{ολ} \quad ἤ \quad R_{ολ} = R + ν \cdot r$$

Σύμφωνα μέ τό νόμο τοῦ Ohm ἰσχύει ἡ ἐξίσωση :

$$E_{ολ} = I \cdot R_{ολ} \quad ἄρα \quad I = \frac{E_{ολ}}{R_{ολ}} \quad καί \quad \boxed{I = \frac{ν \cdot E}{R + ν \cdot r}} \quad (1)$$

β. Παράλληλη σύνδεση γεννητριῶν. Στήν παράλληλη σύνδεση γεννητριῶν συνδέονται ὅλοι οἱ θετικοί πόλοι καί ἀποτελοῦν τό θετικό πόλο τῆς συστοιχίας καί ὅλοι οἱ ἀρνητικοί πόλοι πού ἀποτελοῦν τόν ἀρνητικό πόλο της (σχ. 160). Τό ἐξωτερικό κύκλωμα ἀποτελεῖται μόνο ἀπό μιά ἀντίσταση R, πού διαρρέεται ἀπό ρεῦμα ἐντάσεως I. Καθεμιά ἀπό τίς ὅμοιες γεννήτριες διαρρέεται ἀπό ρεῦμα ἐντάσεως I/ν καί δίνει στό κύκλωμα ἰσχύ $P = E \cdot \frac{I}{ν}$. Ἄρα οἱ ν ὅμοιες γεννήτριες δίνουν στό κύκλωμα ὁλική ἰσχύ ($P_{ολ}$) ἴση μέ :

$$P_{ολ} = ν \cdot P \quad ἤ \quad P_{ολ} = E \cdot I$$



Σχ. 160. Παράλληλη σύνδεση γεννητριῶν.

Ἡ σχέση πού βρήκαμε, φανερώνει ὅτι ἡ συστοιχία τῶν γεννητριῶν ἔχει *ὁλική ἠλεκτρεγερτική δύναμη* ($E_{ολ}$) ἴση μὲ τήν ἠλεκτρεγερτική δύναμη (E) τῆς μιᾶς γεννήτριας, δηλαδή εἶναι :

ἠλεκτρεγερτική δύναμη συστοιχίας $E_{ολ} = E$

Οἱ ν ἐσωτερικές ἀντιστάσεις τῶν γεννητριῶν συνδέονται παράλληλα καί ἑπομένως εἶναι :

ἐσωτερική ἀντίσταση συστοιχίας $r_{ολ} = r/ν$

Ἡ ὁλική ἀντίσταση τοῦ κυκλώματος εἶναι :

$$R_{ολ} = R + r_{ολ} \quad ἤ \quad R = R + \frac{r}{ν}$$

Σύμφωνα μέ τό νόμο τοῦ Ohm ἰσχύει ἡ ἐξίσωση :

$$E_{ολ} = I \cdot R_{ολ} \quad ἄρα \quad I = \frac{E_{ολ}}{R_{ολ}} \quad καί \quad \boxed{I = \frac{ν \cdot E}{ν \cdot R + r}} \quad (2)$$

Παράδειγμα. Ἔχουμε ν = 10 ὅμοιες γεννήτριες, πού καθεμιά ἔχει E = 2 V καί r = 0,1 Ω. Τό ἐξωτερικό κύκλωμα ἔχει ἀντίσταση R = 9 Ω.

Ἄν οἱ γεννήτριες συνδεθοῦν *κατά σειρά*, τότε ἡ ἔνταση τοῦ ρεύματος εἶναι :

$$I = \frac{ν \cdot E}{R + ν \cdot R} = \frac{10 \cdot 2\,V}{9\,Ω + (10 \cdot 0{,}1\,Ω)} \quad καί \quad I = 2\ A$$

Ἄν οἱ γεννήτριες συνδεθοῦν *παράλληλα*, τότε ἡ ἔνταση τοῦ ρεύματος εἶναι :

$$I = \frac{ν \cdot E}{ν \cdot R + r} = \frac{10 \cdot 2\,V}{(10 \cdot 9\,Ω) + 0{,}1\,Ω} \quad καί \quad I = 0{,}22\ A$$

Αὐτό τό παράδειγμα δείχνει ὅτι ἡ σύνδεση κατά σειρά συμφέρει, ὅταν ἡ ἐξωτερική ἀντίσταση R εἶναι πολύ μεγάλη σχετικά μέ τήν ἐσωτερική ἀντίσταση r τῆς κάθε γεννήτριας. Στήν ἀντίθετη περίπτωση συμφέρει ἡ παράλληλη σύνδεση.

γ. Μικτή σύνδεση γεννητριῶν. Ἔχουμε N ὅμοιες γεννήτριες καί μέ αὐτές σχηματίζουμε μ ὁμάδες. Κάθε ὁμάδα ἀποτελεῖται ἀπό ν γεννήτριες πού συνδέονται *κατά σειρά* καί οἱ μ ὁμάδες συνδέονται παράλληλα (σχ. 161). Τότε κάθε ὁμάδα ἔχει :

ἠλεκτρεγερτική δύναμη νE ἐσωτερική ἀντίσταση νr

Ἡ συστοιχία ἔχει :

ἠλεκτρεγερτική δύναμη $E_{ολ} = νE$ ἐσωτερική ἀντίσταση νr/μ

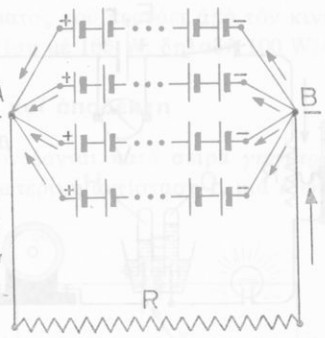
Ἡ ὁλική ἀντίσταση τοῦ κυκλώματος εἶναι :

$$R_{ολ} = R + \frac{νr}{μ}$$

Ἄρα ἡ ἔνταση τοῦ ρεύματος εἶναι:

$$I = \frac{E_{ολ}}{R_{ολ}} = \frac{\nu \cdot E}{R + \dfrac{\nu \cdot r}{\mu}}$$

καί
$$\boxed{I = \frac{N \cdot E}{\mu \cdot R + \nu \cdot r}} \qquad (3)$$



Σχ. 161. Μικτή σύνδεση γεννητριῶν.

γιατί εἶναι $N = \nu \cdot \mu$. Στήν ἐξίσωση (3) ὁ ἀριθμητής εἶναι σταθερός καί ὁ παρονομαστής ἀποτελεῖται ἀπό τούς δύο προσθετέους $\mu \cdot R$ καί $\nu \cdot r$, πού τό γινόμενό τους εἶναι σταθερό καί ἴσο μέ $N \cdot R \cdot r =$ σταθ. Ἡ ἔνταση I τοῦ ρεύματος θά ἔχει *τή μέγιστη* δυνατή τιμή, ὅταν ὁ παρονομαστής λάβει *τή μικρότερη* δυνατή τιμή. Αὐτό συμβαίνει, ὅταν οἱ δύο προσθετέοι εἶναι ἴσοι, δηλαδή ὅταν εἶναι:

$$\mu \cdot R = \nu \cdot r \qquad \text{ἄρα} \qquad R = \frac{\nu \cdot r}{\mu} \qquad (4)$$

Ἡ ἐξίσωση (4) δείχνει ὅτι τό ρεῦμα θά ἔχει τή μέγιστη τιμή, ὅταν ἡ *ἡ ἐσωτερική ἀντίσταση* ($\nu r/\mu$) τῆς συστοιχίας εἶναι ἴση μέ *τήν ἐξωτερική ἀντίσταση* (R).

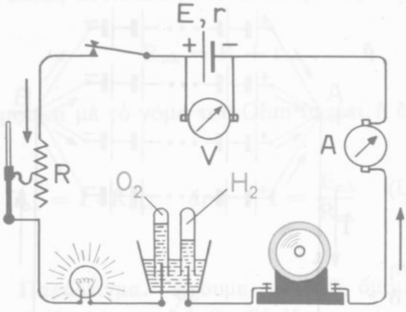
Παράδειγμα. Ἔχουμε $N = 10$ ὅμοιες γεννήτριες πού καθεμιά ἔχει $E = 2$ V καί $r = 0{,}6\ \Omega$. Ἡ ἐξωτερική ἀντίσταση εἶναι $R = 0{,}8\ \Omega$. Θέλουμε τό ρεῦμα νά ἔχει τή μεγιστη ἔνταση. Τότε ἔχουμε τίς ἐξισώσεις:

$$\mu \cdot \nu = 12 \qquad \text{καί} \qquad 0{,}8 = \frac{0{,}6\,\nu}{\mu}$$

Ὅταν λύσουμε αὐτό τό σύστημα τῶν ἐξισώσεων, βρίσκουμε $\nu = 4$ καί $\mu = 3$. Ὥστε πρέπει νά σχηματίσουμε 3 ὁμάδες, πού καθεμιά θά ἀποτελεῖται ἀπό 4 γεννήτριες συνδεόμενες κατά σειρά.

86. Ἀποδέκτες

Ἔχουμε τό κύκλωμα πού δείχνει τό σχῆμα 162. Ἡ γεννήτρια δίνει στό κύκλωμα *ἠλεκτρική ἐνέργεια*. Στό λαμπτήρα πυρακτώσεως καί πάνω στήν ἀντίσταση R ἡ ἠλεκτρική ἐνέργεια πού ξοδεύεται, μετατρέπεται ἀποκλειστικά *σέ θερμότητα*. Μιά τέτοια συσκευή λέμε ὅτι ἀποτελεῖ *νεκρή ἀντίσταση*.



Σχ. 162. Ἡ γεννήτρια δίνει στό κύκλωμα ἐνέργεια.

Στό βολτάμετρο ἤ στόν ἠλεκτροκινητήρα *ἕνα μέρος* τῆς ἠλεκτρικῆς ἐνέργειας πού ξοδεύεται, μετατρέπεται πάντοτε σέ *θερμότητα* ἐξαιτίας τοῦ φαινομένου Joule καί τό ὑπόλοιπο μέρος τῆς ἠλεκτρικῆς ἐνέργειας πού ξοδεύεται μετατρέπεται σέ *χημική ἐνέργεια* (στό βολτάμετρο) καί σέ *μηχανική ἐνέργεια* (στόν κινητήρα). Αὐτές οἱ συσκευές, στίς ὁποῖες ἡ ἠλεκτρική ἐνέργεια μετατρέπεται σέ ἄλλη μορφή ἐνέργειας, διαφορετική ἀπό τή θερμότητα, ὀνομάζονται *ἀποδέκτες*. Ἔτσι π.χ. ὁ ἀνεμιστήρας εἶναι ἀποδέκτης, πού μᾶς δίνει *ὠφέλιμη μηχανική ἐνέργεια*. Πειραματικά βρίσκουμε ὅτι:

Σέ ἕναν ἀποδέκτη ἡ ἠλεκτρική ἰσχύς (P′) πού μετατρέπεται σέ ὠφέλιμη μορφή ἐνέργειας, ἐκτός ἀπό θερμότητα, εἶναι ἀνάλογη μέ τήν ἔνταση (I) τοῦ ρεύματος πού περνάει ἀπό τόν ἀποδέκτη.

$$\boxed{\text{ἰσχύς ἀποδέκτη} \qquad P' = E' \cdot I} \qquad (1)$$

Ὁ συντελεστής E′ εἶναι μέγεθος χαρακτηριστικό τοῦ ἀποδέκτη καί ὀνομάζεται *ἀντηλεκτρεγερτική δύναμη* τοῦ ἀποδέκτη. Ἀπό τήν ἐξίσωση (1) προκύπτει ὁ ἑξῆς *ὁρισμός:*

Ἀντηλεκτρεγερτική δύναμη (E′) ἀποδέκτη ὀνομάζεται τό σταθερό πηλίκο τῆς ἠλεκτρικῆς ἰσχύος (P′) πού μετατρέπεται σέ ὠφέλιμη ἐνέργεια (ἐκτός ἀπό θερμότητα), διά τῆς ἐντάσεως (I) τοῦ ρεύματος πού περνάει ἀπό τόν ἀποδέκτη.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{ἀντηλεκτρεγερτική}\\ \text{δύναμη ἀποδέκτη}\end{array} \qquad E' = \frac{P'}{I}} \quad \left\{\begin{array}{l} P' \text{ σέ W} \\ I \text{ σέ A} \\ E' \text{ σέ W/A ἤ V} \end{array}\right. \qquad (2)$$

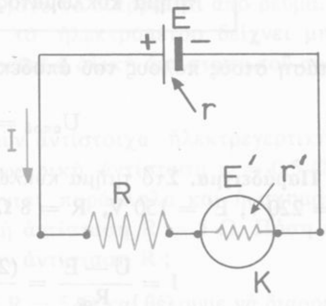
Παρατηροῦμε ὅτι *μονάδα ἀντηλεκτρεγερτικῆς δυνάμεως* εἶναι τό 1 Volt (1 V), ὅπως καί γιά τήν ἠλεκτρεγερτική δύναμη γεννήτριας.

Ἀπό τήν ἐξίσωση (2) προκύπτει ὅτι ἡ ἀντηλεκτρεγερτική δύναμη (E′) ἀποδέκτη ἐκφράζει τήν ὠφέλιμη ἰσχύ (P′) πού δίνει ὁ ἀποδέκτης γιά κάθε 1 Ampère τῆς ἐντάσεως τοῦ ρεύματος πού περνάει ἀπό τόν ἀποδέκτη. Ἄν π.χ.

ἕνας ἠλεκτροκινητήρας ἔχει ἀντηλεκτρεγερτική δύναμη $E' = 100$ V, τότε γιά κάθε 1 Ampère τῆς ἐντάσεως τοῦ ρεύματος πού περνάει ἀπό τόν κινητήρα, αὐτός δίνει ὠφέλιμη μηχανική ἰσχύ ἴση μέ 100 W, δηλαδή 100 W/A.

87. Κλειστό κύκλωμα μέ γεννήτρια καί ἀποδέκτη

Σέ ἕνα κλειστό κύκλωμα (σχ. 163) συνδέονται κατά σειρά *γεννήτρια*, πού ἔχει ἠλεκτρεγερτική δύναμη E καί ἐσωτερική ἀντίσταση r, μιά *ἐξωτερική ἀντίσταση* R καί ἕνας *ἀποδέκτης*, π.χ. κινητήρας πού ἔχει ἀντηλεκτρεγερτική δύναμη E′ καί ἐσωτερική ἀντίσταση r′. Τό κύκλωμα ἔχει ὁλική ἀντίσταση $R_{ολ} = R + r + r'$ καί διαρρέεται ἀπό ρεῦμα ἐντάσεως I. Τότε ἡ γεννήτρια *δίνει στό κύκλωμα* ἠλεκτρική ἰσχύ $P = E \cdot I$. Ὁ κινητήρας μᾶς δίνει *μηχανική ἰσχύ* $P' = E' \cdot I$. Ταυτόχρονα πάνω σέ ὅλες τίς ἀντιστάσεις τοῦ κυκλώματος *ἀναπτύσσεται θερμότητα* πού ἔχει ἰσχύ $P_{θερμ} = I^2 \cdot R_{ολ}$. Σύμφωνα μέ τήν ἀρχή τῆς διατηρήσεως τῆς ἐνέργειας εἶναι:



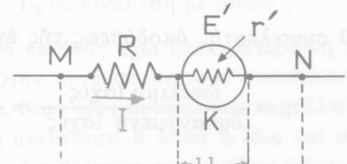
Σχ. 163. Κλειστό κύκλωμα μέ ἀποδέκτη (κινητήρα K).

$$P = P' + P_{θερμ} \qquad ἤ \qquad E \cdot I = E' \cdot I + I^2 \cdot R_{ολ}$$

Ἀπό τήν τελευταία ἐξίσωση βρίσκουμε τόν ἑξῆς *γενικό νόμο τοῦ κλειστοῦ κυκλώματος*:

γενικός νόμος κλειστοῦ κυκλώματος	$E = E' + I \cdot R_{ολ}$	E, E′ σέ V; I σέ A; R σέ Ω

α. Ἀποδέκτης σέ τμῆμα κυκλώματος. Μεταξύ δύο σημείων M καί N ἑνός κυκλώματος (σχ. 164) ὑπάρχει ἕνας ἀποδέκτης, π.χ. κινητήρας, πού ἔχει ἀντηλεκτρεγερτική δύναμη E′ καί ἐσωτερική ἀντίσταση r′. Μεταξύ τῶν σημείων M καί N ὑπάρχει τάση U καί τό ρεῦμα ἔχει ἔνταση I. Τότε ἡ ὁλική ἀντίσταση τοῦ κυκλώματος εἶναι $R_{ολ} = R + r$. Στό τμῆμα



Σχ. 164. Ἀποδέκτης (K) σέ τμῆμα κυκλώματος.

ΜΝ τοῦ κυκλώματος τό ρεῦμα *δίνει ἰσχύ* $P = U \cdot I$. Ὁ κινητήρας μᾶς *δίνει μηχανική ἰσχύ* $P' = E' \cdot I$ καί ταυτόχρονα πάνω στίς ἀντιστάσεις τοῦ κυκλώματος ΜΝ *ἀναπτύσσεται θερμότητα* πού ἔχει ἰσχύ $P_{\theta\varepsilon\rho\mu} = I^2 \cdot R_{o\lambda}$. Σύμφωνα μέ τήν ἀρχή τῆς διατηρήσεως τῆς ἐνέργειας εἶναι :

$$P = P' + P_{\theta\varepsilon\rho\mu} \quad \text{ἤ} \quad U \cdot I = E' \cdot I + I^2 \cdot R_{o\lambda} \quad \text{ἄρα}$$

ἀποδέκτης σέ τμῆμα κυκλώματος	$U = E' + I \cdot R_{o\lambda}$

Ἡ τάση στούς πόλους τοῦ ἀποδέκτη εἶναι :

$$U_{\alpha\pi o\delta} = E' + I \cdot r'$$

Παράδειγμα. Στό τμῆμα κυκλώματος πού δείχνει τό σχῆμα 164 εἶναι $U = 220\,V$, $E' = 150\,V$, $R = 8\,\Omega$ καί $r' = 2\,\Omega$. Τό ρεῦμα ἔχει ἔνταση :

$$I = \frac{U - E'}{R_{o\lambda}} = \frac{(220 - 150)\,V}{(8 + 2)\,\Omega} = 7\,A$$

Ἡ ἠλεκτρική ἰσχύς πού ξοδεύεται εἶναι :

$$P = U \cdot I = 220\,V \cdot 7\,A = 1540\,W$$

Ἡ μηχανική ἰσχύς πού μᾶς δίνει ὁ κινητήρας εἶναι :

$$P' = E' \cdot I = 150\,V \cdot 7\,A = 1050\,W$$

Ἡ τάση στούς πόλους τοῦ κινητήρα εἶναι :

$$U_{\alpha\pi o\delta} = E' + I \cdot r' = 150\,V + (7\,A \cdot 2\,\Omega) = 164\,V$$

Ὁ συντελεστής ἀποδόσεως τῆς ἐγκαταστάσεως εἶναι :

$$\eta = \frac{\text{ὠφέλιμη ἰσχύς}}{\text{δαπανώμενη ἰσχύς}} = \frac{P'}{P} = \frac{E' \cdot I}{U \cdot I} = \frac{E'}{U} = \frac{150\,V}{220\,V} = 0{,}68$$

Ὥστε τά 68% τῆς ἠλεκτρικῆς ἰσχύος μετατρέπονται σέ ὠφέλιμη μηχανική ἰσχύ καί τά 32% μετατρέπονται σέ θερμότητα πάνω σέ ὅλες τίς ἀντιστάσεις.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

161. Τέσσερις ἀντιστάσεις R, R_1, R_2 καί x ἔχουν τό ἴδιο μῆκος καί συνδέονται ἔτσι, ὥστε νά σχηματίζεται ὁ ρόμβος ΑΒΓΔ, στόν ὁποῖο εἶναι ΑΒ = R, ΒΓ = R_1, ΓΔ = R_2 καί ΔΑ = x. Μιά γεννήτρια διατηρεῖ μεταξύ τῶν κορυφῶν Α καί Γ τοῦ ρόμβου σταθερή διαφορά δυναμικοῦ $U_A - U_Γ =$ $= 4$ V. Τό ρεῦμα φτάνει στήν κορυφή Α τοῦ ρόμβου καί φεύγει ἀπό τήν κορυφή Γ. Μέ ἕνα ἠλεκτρόμετρο Η μετρᾶμε τή διαφορά δυναμικοῦ μεταξύ τῶν σημείων Β καί Δ, χωρίς ὅμως τό ὄργανο νά διαρρέεται ἀπό ρεῦμα. Ἄν εἶναι $R_1 = R_2 = 10$ Ω καί R = 20 Ω, τό ἠλεκτρόμετρο δείχνει μηδέν. 1) Πόση εἶναι ἡ ἀντίσταση x ; 2) Νά βρεθεῖ ἡ ὁλική ἀντίσταση τοῦ συστήματος τῶν τεσσάρων ἀντιστάσεων.

162. Δύο γεννήτριες $Γ_1$ καί $Γ_2$ ἔχουν ἀντίστοιχα ἠλεκτρεγερτική δύναμη $E_1 = 1{,}2$ V καί $E_2 = 2$ V καί ἐσωτερική ἀντίσταση $r_1 = 0{,}5$ Ω καί $r_2 = 0{,}1$ Ω. Οἱ δύο γεννήτριες συνδέονται παράλληλα καί ἡ σχηματιζόμενη συστοιχία συνδέεται μέ ἐξωτερική ἀντίσταση R = 5 Ω. Πόση εἶναι ἡ ἔνταση τοῦ ρεύματος πού διαρρέει τήν ἀντίσταση R ;

163. Ἕνα κύκλωμα ἔχει ἀντίσταση R = 5 Ω καί θέλουμε νά διαρρέεται ἀπό ρεῦμα πού νά ἔχει μέγιστη ἔνταση I = 8 A. Θά χρησιμοποιήσουμε συστοιχία συσσωρευτῶν, πού ὁ καθένας ἔχει ΗΕΔ E = 2 V καί ἐσωτερική ἀντίσταση r = 0,5 Ω. Πόσους συσσωρευτές χρειαζόμαστε καί πῶς θά τούς συνδέσουμε ;

164. Δύο γεννήτριες $Γ_1$ καί $Γ_2$ συνδέονται κατά σειρά, ἔχουν τήν ἴδια ἠλεκτρεγερτική δύναμη E = 6 V, ἀλλά ἐσωτερική ἀντίσταση ἡ $Γ_1$ ἔχει $r_1 = 2$ Ω, ἐνῶ ἡ $Γ_2$ ἔχει $r_2 = 3$ Ω. Τό ἐξωτερικό κύκλωμα ἔχει ἀντίσταση R = 15 Ω. 1) Πόση εἶναι ἡ ἔνταση τοῦ ρεύματος πού διαρρέει τό κύκλωμα καί πόση εἶναι ἡ διαφορά δυναμικοῦ μεταξύ τῶν δύο πόλων τῆς συστοιχίας ; 2) Πόση πρέπει νά εἶναι ἡ ἐξωτερική ἀντίσταση R, ὥστε ἡ διαφορά δυναμικοῦ μεταξύ τῶν πόλων τῆς γεννήτριας $Γ_2$ νά εἶναι ἴση μέ μηδέν ;

165. Ἔχουμε ν συσσωρευτές πού ὁ καθένας ἔχει ἠλεκτρεγερτική δύναμη E καί ἐσωτερική ἀντίσταση r. Ὅταν συνδέσουμε τούς συσσωρευτές κατά σειρά, τό ρεῦμα ἔχει ἔνταση I_1 ἐνῶ, ὅταν τούς συνδέσουμε παράλληλα, τό ρεῦμα ἔχει ἔνταση I_2. Ἡ ἐξωτερική ἀντίσταση R εἶναι ἡ ἴδια καί στίς δύο περιπτώσεις. 1) Ποιά συνθήκη εἶναι ἀπαραίτητη, γιά νά εἶναι ἡ ἔνταση τοῦ ρεύματος ἴδια καί στίς δύο περιπτώσεις; 2) Ἄν εἶναι E = 2 V, r = 0,2 Ω, ν = 11 καί R = 0,2 Ω, πόση εἶναι ἡ ἔνταση τοῦ ρεύματος σέ καθεμιά ἀπό τίς παραπάνω περιπτώσεις ;

166. Μιά γεννήτρια ἔχει ἠλεκτρεγερτική δύναμη $E = 220$ V, ἐσωτερική ἀντίσταση $r = 2\ \Omega$ καί συνδέεται κατά σειρά μέ ἕναν κινητήρα. Ὅταν ὁ κινητήρας δέ στρέφεται, ἡ τάση στούς πόλους τῆς γεννήτριας εἶναι $U_1 = 170$ V, ἐνῶ ὅταν ὁ κινητήρας στρέφεται ἡ τάση στούς πόλους τῆς γεννήτριας εἶναι $U_2 = 200$ V. 1) Πόση εἶναι ἡ ἐσωτερική ἀντίσταση r', ἡ ἀντηλεκτρεγερτική δύναμη E' καί ἡ ἰσχύς P' τοῦ κινητήρα; 2) Πόση εἶναι ἡ ἀπόδοση τῆς ἐγκαταστάσεως;

167. Ἕνα κλειστό κύκλωμα ἀποτελεῖται : α) ἀπό γεννήτρια πού ἔχει ἠλεκτρεγερτική δύναμη $E = 80$ V καί ἐσωτερική ἀντίσταση $r = 1\ \Omega$· β) ἀπό ἐξωτερική ἀντίσταση $R = 4\ \Omega$ καί γ) ἀπό κινητήρα. Ὅταν ὁ κινητήρας δέ στρέφεται, τό ρεῦμα ἔχει ἔνταση $I_1 = 8$ A, ἐνῶ, ὅταν ὁ κινητήρας στρέφεται, τό ρεῦμα ἔχει ἔνταση $I_2 = 2$ A. 1) Πόση εἶναι ἡ ἐσωτερική ἀντίσταση r', ἡ ἀντηλεκτρεγερτική δύναμη E' καί ἡ ἰσχύς τοῦ κινητήρα ; 2) Πόση εἶναι ἡ τάση στούς πόλους τῆς γεννήτριας καί στούς πόλους τοῦ κινητήρα ;

168. Ἕνας ἀνεμιστήρας λειτουργεῖ μέ τάση $U = 220$ V, ἔχει ἐσωτερική ἀντίσταση $r' = 60\ \Omega$ καί διαρρέεται ἀπό ρεῦμα ἐντάσεως $I = 2$ A. 1) Πόση εἶναι ἡ ἀντηλεκτρεγερτική δύναμη E' καί ἡ ἰσχύς P' τοῦ ἀνεμιστήρα ; 2) Πόση ἰσχύ δίνει τό ρεῦμα στόν ἀνεμιστήρα καί πόση ἀπό αὐτή τήν ἰσχύ γίνεται θερμότητα ;

169. Ἕνας κινητήρας λειτουργεῖ μέ τάση $U = 220$ V, διαρρέεται ἀπό ρεῦμα ἐντάσεως $I = 10$ A καί ἔχει ἀπόδοση 90%. Πόση εἶναι ἡ ἐσωτερική ἀντίσταση r', ἡ ἀντηλεκτρεγερτική δύναμη E' καί ἡ ἰσχύς P' τοῦ κινητήρα ;

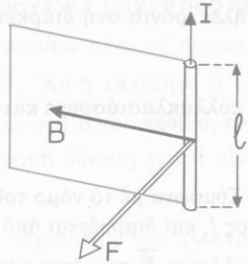
170. Μιά γεννήτρια ἔχει ἠλεκτρεγερτική δύναμη $E = 180$ V καί ἐσωτερική ἀντίσταση $r = 1\ \Omega$. Τό ἐξωτερικό κύκλωμα ἀποτελεῖται ἀπό δύο κλάδους A καί B. Ὁ κλάδος A ἀποτελεῖται ἀπό μιά ἀντίσταση $R = 20\ \Omega$ καί ὁ κλάδος B ἀποτελεῖται ἀπό ἕναν κινητήρα πού ἔχει ἀντηλεκτρεγερτική δύναμη E', ἐσωτερική ἀντίσταση $r' = 2\ \Omega$ καί διαρρέεται ἀπό ρεῦμα ἐντάσεως $I_B = 20$ A. 1) Πόση εἶναι ἡ ἔνταση I_A τοῦ ρεύματος στόν κλάδο A καί πόση εἶναι ἡ διαφορά δυναμικοῦ στούς πόλους τῆς γεννήτριας ; 2) Πόση εἶναι ἡ ἀντηλεκτρεγερτική δύναμη E' καί ἡ ἰσχύς P' τοῦ κινητήρα ; 3) Ὅταν ὁ κινητήρας δίνει τήν παραπάνω ἰσχύ P', στρέφεται μέ συχνότητα $\nu = 30$ Hz. Πόση εἶναι ἡ ροπή M τοῦ ζεύγους, πού δημιουργεῖ ὁ κινητήρας ;

171. Δύο γεννήτριες Γ_1 καί Γ_2 ἔχουν τήν ἴδια ἠλεκτρεγερτική δύναμη E καί ἐσωτερικές ἀντιστάσεις $r_1 = 1\ \Omega$ καί $r_2 = 2\ \Omega$. Οἱ γεννήτριες συνδέονται κατά σειρά καί ἡ ἐξωτερική ἀντίσταση εἶναι x. Πόση πρέπει νά εἶναι ἡ ἀντίσταση x, ὥστε ἡ ἐνέργεια, πού δίνει στό ἐξωτερικό κύκλωμα ἡ συστοιχία, νά εἶναι ἡ μέγιστη ;

Ἠλεκτρομαγνητισμός

88. Κίνηση ἠλεκτρονίου μέσα σέ ὁμογενές μαγνητικό πεδίο

Ἕνας εὐθύγραμμος ἀγωγός διαρρέεται ἀπό ρεῦμα ἐντάσεως Ι, βρίσκεται μέσα σέ ὁμογενές μαγνητικό πεδίο πού ἡ μαγνητική ἐπαγωγή του ἔχει μέτρο Β καί ὁ ἀγωγός σχηματίζει γωνία φ μέ τή διεύθυνση τῶν δυναμικῶν γραμμῶν. Τότε σύμφωνα μέ *τό νόμο τοῦ Laplace* σέ κάθε στοιχειῶδες τμῆμα Δl τοῦ ἀγωγοῦ ἀναπτύσσεται *ἠλεκτρομαγνητική δύναμη* $\vec{F}$, ἡ ὁποία ἐφαρμόζεται στή μέση τοῦ εὐθύγραμμου τμήματος Δl, εἶναι *κάθετη* στό ἐπίπεδο πού ὁρίζεται ἀπό τόν ἀγωγό καί τή διεύθυνση τῶν δυναμικῶν γραμμῶν (σχ. 165), ἔχει *φορά* πού καθορίζεται ἀπό τόν κανόνα τῶν τριῶν δαχτύλων καί *μέτρο* (F) πού δίνεται ἀπό τήν ἐξίσωση :



Σχ. 165. Ἡ ἠλεκρομαγνητική δύναμη F (φ = 90°).

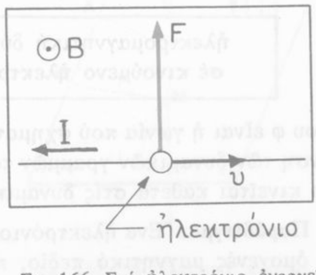
$$\boxed{\text{νόμος τοῦ Laplace} \quad F = \Delta l \cdot I \cdot B \cdot \eta\mu\,\varphi}$$

Ἄν ὁ ἀγωγός εἶναι κάθετος στίς δυναμικές γραμμές τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου ($\varphi = 90^0$), τότε ἡ ἠλεκτρομαγνητική δύναμη ἔχει τή μέγιστη τιμή της :

$$\boxed{F = \Delta l \cdot I \cdot B} \qquad \begin{cases} \Delta l \text{ σέ m, I σέ A} \\ \text{B σέ T, F σέ N} \end{cases}$$

α. Ἠλεκτρομαγνητική δύναμη πάνω σέ κινούμενο ἠλεκτρόνιο.

Ἕνα ἠλεκτρόνιο κινεῖται μέ ταχύτητα υ μέσα σέ ὁμογενές μαγνητικό πεδίο πού ἡ μαγνητική ἐπαγωγή του ἔχει μέτρο Β. Τό ἠλεκτρόνιο κινεῖται κάθετα στίς δυναμικές γραμμές τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου. Στό σχῆμα 166 οἱ δυναμικές γραμμές τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου εἶναι κάθετες στό ἐπίπεδο τοῦ σχήματος καί ἔχουν φορά ἀπό πίσω πρός τά ἐμπρός. Τό κινούμενο ἠλεκτρόνιο ἰσο-



Σχ. 166. Στό ἠλεκτρόνιο ἐνεργεῖ ἡ δύναμη F.

δυναμεῖ μέ *ἠλεκτρικό ρεῦμα*, πού ἔχει συμβατική φορά ἀντίθετη μέ τή φορά τῆς κινήσεως τοῦ ἠλεκτρονίου. Σ' αὐτή τήν περίπτωση μέσα ἀπό ἕναν ἀγωγό, πού ἔχει μῆκος l περνάει ἠλεκτρικό φορτίο $q = e$ (κατ' ἀπόλυτη τιμή) καί ἡ ἔνταση τοῦ ρεύματος, πού διαρρέει αὐτόν τόν ἀγωγό εἶναι :

$$I = \frac{q}{t} \quad \text{ἤ} \quad I = \frac{e}{t} \tag{1}$$

Τό ἠλεκτρόνιο στή διάρκεια τοῦ χρόνου t διατρέχει διάστημα :

$$l = \upsilon \cdot t \tag{2}$$

Ἄν πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη τίς ἐξισώσεις (1) καί (2), βρίσκουμε :

$$l \cdot I = e \cdot \upsilon \tag{3}$$

Σύμφωνα μέ τό νόμο τοῦ Laplace πάνω στό θεωρούμενο ἀγωγό, πού ἔχει μῆκος l, καί διαρρέεται ἀπό ρεῦμα ἐντάσεως I, ἀναπτύσσεται *ἠλεκτρομαγνητική δύναμη* $\vec{F}$ πού ἔχει μέτρο F ἴσο μέ :

$$\boxed{F = e \cdot \upsilon \cdot B} \quad \left\{ \begin{array}{l} e \text{ σέ Cb, } \upsilon \text{ σέ m/sec} \\ B \text{ σέ T, } F \text{ σέ N} \end{array} \right. \tag{4}$$

Ἡ *διεύθυνση* τῆς δυνάμεως $\vec{F}$ εἶναι κάθετη στίς διευθύνσεις τῶν ἀνυσμάτων $\vec{\upsilon}$ καί $\vec{B}$, δηλαδή βρίσκεται πάνω στό ἐπίπεδο τοῦ σχήματος. Ἡ *φορά* τῆς δυνάμεως $\vec{F}$ προσδιορίζεται ἀπό τόν ἐμπειρικό κανόνα τῶν τριῶν δακτύλων. Ἀπό τά παραπάνω συνάγεται τό ἀκόλουθο γενικό συμπέρασμα :

Πάνω σέ ἕνα ἠλεκτρόνιο (— e), πού κινεῖται μέ ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ μέσα σέ ὁμογενές μαγνητικό πεδίο μέ μαγνητική ἐπαγωγή $\vec{B}$, ἀναπτύσσεται ἠλεκτρομαγνητική δύναμη $\vec{F}$, ἡ ὁποία κατ' ἀπόλυτη τιμή ἔχει μέτρο :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{ἠλεκτρομαγνητική δύναμη} & \\ \text{σέ κινούμενο ἠλεκτρόνιο} & F = e \cdot \upsilon \cdot B \cdot \text{ημ}\,\varphi \end{array}} \tag{5}$$

ὅπου φ εἶναι ἡ γωνία πού σχηματίζει ἡ τροχιά τοῦ ἠλεκτρονίου μέ τή διεύθυνση τῶν δυναμικῶν γραμμῶν τοῦ πεδίου. Ἄν εἶναι $\varphi = 90^0$, τό ἠλεκτρόνιο κινεῖται κάθετα στίς δυναμικές γραμμές (ἐξίσ. 4).

Παράδειγμα. Ἕνα ἠλεκτρόνιο κινεῖται μέ ταχύτητα $\upsilon = 100$ km/sec μέσα σέ ὁμογενές μαγνητικό πεδίο, πού ἡ μαγνητική ἐπαγωγή του ἔχει μέτρο $B = 1{,}25$ T. Τό ἠλεκτρόνιο κινεῖται κάθετα στίς δυναμικές γραμμές τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου καί τότε ἀναπτύσσεται πάνω στό ἠλεκτρόνιο ἠλεκτρομαγνητική δύναμη πού ἔχει μέτρο :

$$F = e \cdot \upsilon \cdot B = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{Cb} \cdot 10^{5}\,\mathrm{m/sec} \cdot 1{,}25\,\mathrm{T}$$

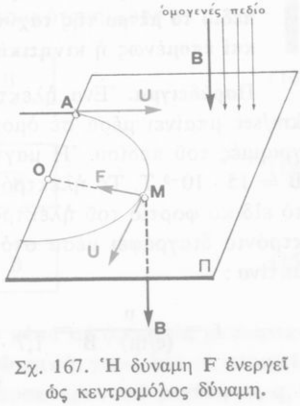
$$\text{καί} \qquad F = 2 \cdot 10^{-14}\,\mathrm{N}$$

6. Ἡ κίνηση τοῦ ἠλεκτρονίου μέσα στό ὁμογενές μαγνητικό πεδίο. Ἕνα ἠλεκτρόνιο, κινούμενο μέ ταχύτητα $\vec{\upsilon}$, *μπαίνει μέσα σέ ὁμογενές μαγνητικό πεδίο*, πού ἔχει μαγνητική ἐπαγωγή $\vec{B}$. Ἄν ἡ ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ τοῦ ἠλεκτρονίου εἶναι παράλληλη μέ τή μαγνητική ἐπαγωγή $\vec{B}$ τοῦ πεδίου, τότε στό ἠλεκτρόνιο δέν ἀναπτύσσεται ἠλεκτρομαγνητική δύναμη (γιατί εἶναι $\varphi = 0^0$ ἤ $\varphi = 180^0$, ἄρα ημ $\varphi = 0$).

Πολύ ἐνδιαφέρουσα εἶναι ἡ περίπτωση πού ἡ ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ τοῦ ἠλεκτρονίου εἶναι *κάθετη* στή μαγνητική ἐπαγωγή $\vec{B}$ τοῦ πεδίου ($\varphi = 90^0$). Τότε, μόλις τό ἠλεκτρόνιο μπεῖ μέσα στό μαγνητικό πεδίο, ἀμέσως ἀναπτύσσεται πάνω στό ἠλεκτρόνιο *ἡ ἠλεκτρομαγνητική δύναμη* $\vec{F}$, πού ἔχει μέτρο :

$$F = e \cdot \upsilon \cdot B \tag{7}$$

Ἡ ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ μένει πάντοτε πάνω στό ἐπίπεδο Π, πού εἶναι κάθετο στίς δυναμικές γραμμές τοῦ πεδίου, ἑπομένως εἶναι κάθετο καί στή μαγνητική ἐπαγωγή $\vec{B}$ (σχ. 167). Σύμφωνα μέ τό νόμο τοῦ Laplace ἡ ἠλεκτρομαγνητική δύναμη $\vec{F}$ εἶναι πάντοτε κάθετη στό ἐπίπεδο πού ὁρίζουν οἱ διευθύνσεις τῶν ἀνυσμάτων $\vec{B}$ καί $\vec{\upsilon}$. Ἄρα ἡ δύναμη $\vec{F}$ βρίσκεται πάντοτε πάνω στό ἐπίπεδο Π καί *εἶναι πάντοτε κάθετη στό ἄνυσμα τῆς ταχύτητας* $\vec{\upsilon}$. Αὐτή ὅμως εἶναι ἡ ἀπαραίτητη συνθήκη γιά τήν ὁμαλή κυκλική κίνηση ὑλικοῦ σημείου. Ὥστε ἡ ἠλεκτρομαγνητική δύναμη $\vec{F}$ ἐνεργεῖ πάνω στό ἠλεκτρόνιο ὡς *κεντρομόλος δύναμη* καί ἀναγκάζει τό ἠλεκτρόνιο νά διαγράψει μέσα στό μαγνητικό πεδίο μιά *κυκλική τροχιά* μέ ἀκτίνα r. Ἑπομένως ἰσχύει ἡ ἐξίσωση :



Σχ. 167. Ἡ δύναμη F ἐνεργεῖ ὡς κεντρομόλος δύναμη.

$$F = \frac{m \cdot \upsilon^2}{r} \qquad (8)$$

ὅπου m εἶναι ἡ μάζα τοῦ ἠλεκτρονίου. Ἐξισώνοντας τά δεύτερα μέλη τῶν ἐξισώσεων (7) καί (8) ἔχουμε :

$$\frac{m \cdot \upsilon^2}{r} = e \cdot \upsilon \cdot B \quad \text{ἄρα} \quad \boxed{r = \frac{m \cdot \upsilon}{e \cdot B}} \quad \left\{ \begin{array}{l} m \text{ σέ kgr, } \upsilon \text{ σέ m/sec} \\ e \text{ σέ Cb, B σέ T} \\ r \text{ σέ m} \end{array} \right. \qquad (9)$$

Συνήθως ἡ ἐξίσωση (9) γράφεται ἔτσι :

$$\boxed{\text{ἀκτίνα κυκλικῆς τροχιᾶς ἠλεκτρονίου} \quad r = \frac{\upsilon}{(e/m) \cdot B}} \qquad (10)$$

ὅπου τό πηλίκο e/m ὀνομάζεται *εἰδικό φορτίο* τοῦ ἠλεκτρονίου καί μετριέται σέ Cb/kgr.

Ἀπό τά παραπάνω συνάγονται τά ἑξῆς συμπεράσματα :

I. Ὅταν ἕνα ἠλεκτρόνιο κινεῖται μέ ταχύτητα υ μέσα σέ ὁμογενές μαγνητικό πεδίο, κάθετα στίς δυναμικές γραμμές τοῦ πεδίου, τότε ἡ ἠλεκτρομαγνητική δύναμη πού ἀναπτύσσεται πάνω στό ἠλεκτρόνιο ἐνεργεῖ ὡς σταθερή κεντρομόλος δύναμη καί τό ἠλεκτρόνιο διαγράφει μέσα στό πεδίο κυκλική τροχιά.

II. Ἡ ἀκτίνα (r) τῆς κυκλικῆς τροχιᾶς εἶναι ἀνάλογη μέ τήν ταχύτητα (υ) τοῦ ἠλεκτρονίου καί ἀντιστρόφως ἀνάλογη μέ τό εἰδικό φορτίο (e/m) τοῦ ἠλεκτρονίου καί τή μαγνητική ἐπαγωγή (B) τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου.

III. Κατά τήν κυκλική κίνηση τοῦ ἠλεκτρονίου μέσα στό μαγνητικό πεδίο τό μέτρο τῆς ταχύτητας (υ) τοῦ ἠλεκτρονίου διατηρεῖται σταθερό καί ἑπομένως ἡ κινητική ἐνέργεια τοῦ ἠλεκτρονίου δέ μεταβάλλεται.

Παράδειγμα. Ἕνα ἠλεκτρόνιο πού κινεῖται μέ ταχύτητα $\upsilon = 6 \cdot 10^4$ km/sec μπαίνει μέσα σέ ὁμογενές μαγνητικό πεδίο κάθετα στίς δυναμικές γραμμές τοῦ πεδίου. Ἡ μαγνητική ἐπαγωγή τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου εἶναι $B = 15 \cdot 10^{-3}$ T. Τό ἠλεκτρόνιο ἔχει μάζα $m = 9 \cdot 10^{-31}$ kgr καί ἑπομένως τό εἰδικό φορτίο τοῦ ἠλεκτρονίου εἶναι $e/m = 1{,}7 \cdot 10^{11}$ Cb/kgr. Τό ἠλεκτρόνιο διαγράφει μέσα στό μαγνητικό πεδίο κυκλική τροχιά, πού ἔχει ἀκτίνα :

$$r = \frac{\upsilon}{(e/m) \cdot B} = \frac{6 \cdot 10^7 \text{ m/sec}}{1{,}7 \cdot 10^{11} \text{ Cb/kgr} \cdot 15 \cdot 10^{-3} \text{ T}} = 0{,}023 \text{ m}$$

$$\text{ἤ} \quad r = 2{,}3 \text{ cm}$$

γ. Γωνιακή ταχύτητα καί περίοδος τῆς κυκλικῆς κινήσεως τοῦ ἠλεκτρονίου. Μέσα στό μαγνητικό πεδίο τό ἠλεκτρόνιο ἐκτελεῖ *ὁμαλή κυκλική κίνηση* μέ *σταθερή γωνιακή ταχύτητα* ω καί *περίοδο* T καί ἰσχύουν οἱ ἐξισώσεις :

$$\omega = \upsilon/r \quad \text{καί} \quad \omega = 2\pi/T$$

Ἀπό τήν ἐξίσωση $\omega = \upsilon/r$ καί τήν ἐξίσωση (10) βρίσκουμε :

$$\boxed{\omega = \frac{e}{m}\cdot B} \quad (11) \qquad \text{ἄρα} \qquad \boxed{T = \frac{2\pi}{(e/m)\cdot B}} \quad (12)$$

Οἱ ἐξισώσεις (11) καί (12) φανερώνουν ὅτι :

Ἡ γωνιακή ταχύτητα (ω) καί ἡ περίοδος (T) τῆς κυκλικῆς κινήσεως τοῦ ἠλεκτρονίου μέσα στό ὁμογενές μαγνητικό πεδίο εἶναι ἀνεξάρτητες ἀπό τήν ἀκτίνα (r) τῆς τροχιᾶς καί ἀπό τήν ταχύτητα (υ) τοῦ ἠλεκτρονίου.

δ. Κίνηση φορτισμένου σωματιδίου μέσα σέ ὁμογενές μαγνητικό πεδίο. Οἱ παραπάνω συλλογισμοί γιά τήν κίνηση ἠλεκτρονίου μέσα σέ ὁμογενές μαγνητικό πεδίο ἰσχύουν ὄχι μόνο γιά τό ἠλεκτρόνιο, ἀλλά *γιά κάθε σωματίδιο πού ἔχει ἠλεκτρικό φορτίο* q καί κινεῖται μέ ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ *κάθετα* στίς δυναμικές γραμμές τοῦ πεδίου. Τό σωματίδιο ἔχει μάζα m καί ἐπομένως *τό εἰδικό φορτίο του* εἶναι q/m. Ἔτσι οἱ ἐξισώσεις πού βρήκαμε παραπάνω γιά τό ἠλεκτρόνιο ἰσχύουν γιά κάθε φορτισμένο σωματίδιο (ἠλεκτρόνιο, πρωτόνιο, δευτερόνιο κ.α.) μέ τήν ἑξῆς γενικότερη μορφή :

ἠλεκτρομαγνητική δύναμη $\boxed{F = q\cdot\upsilon\cdot B}$ (13)

ἀκτίνα κυκλικῆς τροχιᾶς $\boxed{r = \dfrac{\upsilon}{(q/m)\cdot B}}$ (14)

γωνιακή ταχύτητα $\boxed{\omega = (q/m)\cdot B}$ (15)

Ἡ κίνηση ἑνός φορτισμένου σωματιδίου μέσα σέ ὁμογενές μαγνητικό πεδίο ἔχει μεγάλη ἐφαρμογή στήν Πυρηνική Φυσική, γιατί ἀπό τά στοιχεῖα τῆς κυκλικῆς κινήσεως προσδιορίζουμε τά χαρακτηριστικά μεγέθη m, q, υ ἑνός σωματιδίου. Ἐπίσης ἔχει μεγάλη ἐφαρμογή στούς *κυκλικούς ἐπιταχυντές*, μέ τούς ὁποίους δημιουργοῦμε βλήματα γιά νά βομβαρδίζουμε τούς ἀτομικούς πυρῆνες.

89. Προέλευση τῶν μαγνητικῶν πεδίων

Ὅταν ἕνας ἀγωγός (εὐθύγραμμος ἤ κυκλικός) διαρρέεται ἀπό ἠλεκτρικό ρεῦμα, τότε γύρω ἀπό τόν ἀγωγό δημιουργεῖται πάντοτε *μαγνητικό πεδίο*. Αὐτό τό φαινόμενο εἶναι γενικό καί ἑπομένως μποροῦμε νά διατυπώσουμε τό ἑξῆς γενικό συμπέρασμα :

Ὅλα τά μαγνητικά πεδία ὀφείλονται σέ ἠλεκτρικά ρεύματα, δηλαδή σέ κινούμενα ἠλεκτρικά φορτία.

α. Στοιχειώδη μαγνητικά δίπολα μέσα στό ἄτομο. Ἕνα κυκλικό ρεῦμα ἀποτελεῖ *μαγνητικό δίπολο* πού ἔχει *μαγνητική ροπή*, ὅπως καί ἕνας εὐθύγραμμος μαγνήτης. Τό ἄνυσμα $\vec{M}^*$ τῆς μαγνητικῆς ροπῆς εἶναι κάθετο στό ἐπίπεδο τοῦ κύκλου στό κέντρο του (σχ. 168). Στό ἄτομο ὑδρογόνου ἡ περιφορά τοῦ ἠλεκτρονίου γύρω ἀπό τόν πυρήνα ἰσοδυναμεῖ μέ κυκλικό ρεῦμα καί ἑπομένως δημιουργεῖ ἕνα *στοιχειῶδες μαγνητικό δίπολο* πού ἔχει ὁρισμένη μαγνητική ροπή. Μέσα σέ κάθε ἄτομο τά ἠλεκτρόνια διαγράφουν κλειστές τροχιές γύρω ἀπό τόν πυρήνα. Αὐτή ἡ κίνηση δημιουργεῖ μέσα στό ἄτομο *στοιχειώδη μαγνητικά δίπολα*. Ὥστε :

Σχ. 168. Μαγνητική ροπή μαγνήτη καί κυκλικοῦ ρεύματος.

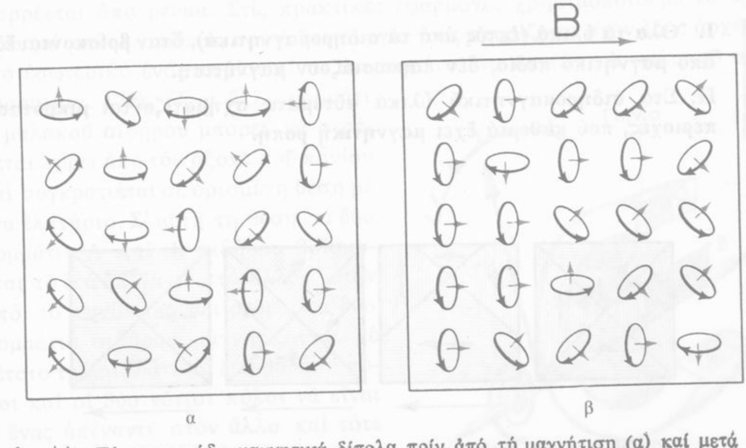
Ἡ περιφορά τῶν ἠλεκτρονίων γύρω ἀπό τόν πυρήνα τοῦ ἀτόμου δημιουργεῖ μέσα στό ἄτομο στοιχειώδη μαγνητικά δίπολα.
Ἡ μαγνητική ροπή ἑνός ἀτόμου εἶναι ἡ συνισταμένη τῶν μαγνητικῶν ροπῶν πού ἀντιστοιχοῦν στίς κινήσεις τῶν ἠλεκτρονίων του μέσα στό ἄτομο.

β. Ἡ ἐμφάνιση μαγνητικῶν πόλων. Σέ ἕνα σωληνοειδές, πού διαρρέεται ἀπό ρεῦμα, κάθε σπείρα του ἀποτελεῖ ἕνα μαγνητικό δίπολο, πού ἔχει ὁρισμένη μαγνητική ροπή, κάθετη στό ἐπίπεδο τῆς σπείρας. Ἡ ὁλική μαγνητική ροπή $\vec{M}^*$ τοῦ σωληνοειδοῦς εἶναι *ἡ συνισταμένη* τῶν μαγνητικῶν ροπῶν ὅλων τῶν σπειρῶν του. Τότε τό σωληνοειδές συμπεριφέρεται σάν εὐθύγραμμος μαγνήτης. Ἡ ἐμφάνιση *βόρειου* καί *νότιου* μαγνητικοῦ πόλου εἶναι *συνέπεια τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου* πού δημιουργεῖται ἀπό τό σωληνοειδές.

Ὅπως στό σωληνοειδές, ἔτσι καί σέ ἕναν εὐθύγραμμο μαγνήτη τά ἐπίπεδα τῶν στοιχειωδῶν μαγνητικῶν διπόλων εἶναι *παράλληλα* μεταξύ τους καί *κάθετα* στόν κατά μῆκος ἄξονα τοῦ μαγνήτη. *Ἡ μαγνητική ροπή* $\vec{M}^*$ τοῦ μαγνήτη εἶναι *ἡ συνισταμένη* τῶν μαγνητικῶν ροπῶν πού ἀντιστοιχοῦν στά στοιχειώδη μαγνητικά δίπολα τῶν ἀτόμων. Ἔτσι καί στόν εὐθύγραμμο μαγνήτη ἐμφανίζονται *βόρειος* καί *νότιος* μαγνητικός πόλος σάν συνέπεια τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου. Ὥστε :

Ἡ ἐμφάνιση δύο ἑτερώνυμων μαγνητικῶν πόλων εἶναι συνέπεια ἑνός συνισταμένου μαγνητικοῦ πεδίου.

Σέ ἕνα κομμάτι σιδήρου, πρίν ἀπό τή μαγνήτισή του, οἱ στοιχειώδεις μαγνητικές ροπές ἔχουν διάφορες διευθύνσεις (σχ. 169α). Ὅταν αὐτός ὁ σίδηρος τοποθετηθεῖ μέσα σέ ὁμογενές μαγνητικό πεδίο, τότε πολλές ἀπό τίς στοιχειώδεις μαγνητικές ροπές παίρνουν τή διεύθυνση καί τή φορά τῆς μαγνητικῆς ἐπαγωγῆς $\vec{B}$ τοῦ ἐξωτερικοῦ μαγνητικοῦ πεδίου. Ἔτσι προκύπτει μιά συνισταμένη μαγνητική ροπή $\vec{M}^*$ καί ὁ σίδηρος γίνεται μαγνήτης. Ὅταν ἡ μαγνητική ἐπαγωγή B τοῦ ἐξωτερικοῦ μαγνητικοῦ πεδίου ἀποκτήσει μιά ὁρισμένη τιμή, τότε *ὅλες* οἱ στοιχειώδεις μαγνητικές ροπές γίνονται παράλληλες καί ἡ μαγνήτιση $J = M^*/V$ τοῦ σιδήρου ἀποκτᾶ τή μέγιστη τιμή της *(μαγνήτιση κόρου)*.



Σχ. 169. Τά στοιχειώδη μαγνητικά δίπολα πρίν ἀπό τή μαγνήτιση (α) καί μετά τή μαγνήτιση (β).

γ. Μαγνητικές ἰδιότητες τῆς ὕλης. Ἀπό τά παραπάνω καταλήγουμε στό ἀκόλουθο γενικό συμπέρασμα:

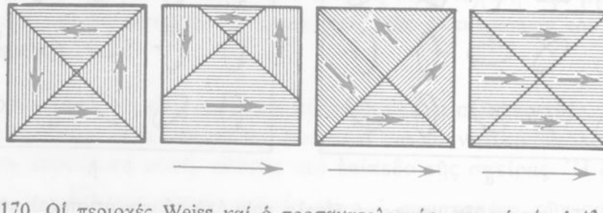
Οἱ μαγνητικές ἰδιότητες τῆς υλης ὀφείλονται στά στοιχειώδη μαγνητικά δίπολα πού δημιουργεῖ ἡ κίνηση τῶν ἠλεκτρονίων γύρω ἀπό τούς πυρῆνες τῶν ἀτόμων.

Ἡ μαγνητική ροπή ἑνός ἀτόμου (ἤ μορίου) εἶναι ἡ συνισταμένη τῶν μαγνητικῶν ροπῶν πού ἀντιστοιχοῦν στίς κινήσεις τῶν ἠλεκτρονίων τοῦ ἀτόμου. Αὐτή ἡ συνισταμένη ἐξαρτᾶται ἀπό *τή συμμετρία* τοῦ ἀτόμου καί ἀπό τό σχετικό *προσανατολισμό* τῶν ἠλεκτρονικῶν τροχιῶν. Ὅλα τά ὑλικά, ἐκτός ἀπό τά σιδηρομαγνητικά, ὅταν βρίσκονται ἔξω ἀπό μαγνητικό πεδίο, *δέν παρουσιάζουν μαγνήτιση*, γιατί οἱ στοιχειώδεις μαγνητικές ροπές ἔχουν τυχαῖο προσανατολισμό.

Ὅταν ἕνα σιδηρομαγνητικό ὑλικό, π.χ. ἕνα κομμάτι σιδήρου, βρίσκεται *ἔξω ἀπό μαγνητικό πεδίο*, τότε μέσα στό σίδηρο *αὐτόματα* σχηματίζονται μικροσκοπικές *περιοχές (περιοχές Weiss)* πού καθεμιά ἔχει *μαγνητική ροπή*. Μέσα σέ μιά τέτοια περιοχή ὑπάρχουν κατά μέσο ὅρο 10^{12} ἄτομα σιδήρου. Στό κομμάτι αὐτό τοῦ σιδήρου οἱ μαγνητικές ροπές τῶν διαφόρων περιοχῶν του ἔχουν τυχαῖο προσανατολισμό καί γι' αὐτό ὁ σίδηρος δέν παρουσιάζει μαγνήτιση. Ἄν ὅμως ὁ σίδηρος τοποθετηθεῖ *μέσα σέ ἐξωτερικό μαγνητικό πεδίο*, τότε οἱ περιοχές Weiss στρέφονται ἔτσι, ὥστε οἱ μαγνητικές ροπές τους νά ἔχουν τήν ἴδια διεύθυνση καί φορά μέ τή μαγνητική ἐπαγωγή B τοῦ ἐξωτερικοῦ μαγνητικοῦ πεδίου (σχ. 170). Ὥστε:

I. Ὅλα τά ὑλικά (ἐκτός ἀπό τά σιδηρομαγνητικά), ὅταν βρίσκονται ἔξω ἀπό μαγνητικό πεδίο, δέν παρουσιάζουν μαγνήτιση.

II. Στά σιδηρομαγνητικά ὑλικά αὐτόματα σχηματίζονται μικρότατες περιοχές, πού καθεμιά ἔχει μαγνητική ροπή.



Σχ. 170. Οἱ περιοχές Weiss καί ὁ προσανατολισμός τους μέ τήν ἐπίδραση ἐξωτερικοῦ μαγνητικοῦ πεδίου.

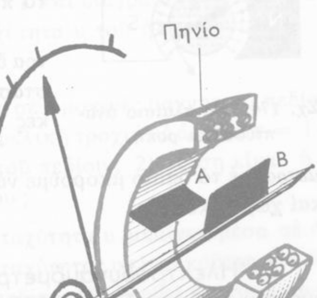
90. Ὄργανα ἠλεκτρικῶν μετρήσεων

Γιά τίς ἠλεκτρικές μετρήσεις χρησιμοποιοῦμε διάφορα ὄργανα. Στά ἐπιστημονικά ἐργαστήρια γιά μετρήσεις μέ μεγάλη ἀκρίβεια χρησιμοποιοῦμε *ἠλεκτροστατικά ὄργανα*, πού ἡ λειτουργία τους βασίζεται στίς δυνάμεις πού ἀναπτύσσονται μέσα στά ἠλεκτρικά πεδία. Περισσότερο συνηθισμένα εἶναι *τά θερμικά καί τά ἠλεκτρομαγνητικά ὄργανα.*

α. Θερμικά ὄργανα. Στά *θερμικά ὄργανα* τό ρεῦμα διαρρέει ἕνα σύρμα πού συνδέεται μέ ἐλατήριο (σχ. 171). Τό σύρμα θερμαίνεται καί ἐπιμηκύνεται. Αὐτή ἡ ἐπιμήκυνση προκαλεῖ στροφή μιᾶς τροχαλίας, πού πάνω της εἶναι στερεωμένος ὁ δείκτης τοῦ ὀργάνου. Ἡ θέρμανση τοῦ σύρματος καί ἑπομένως ἡ ἐπιμήκυνσή του εἶναι ἀνεξάρτητη ἀπό τή φορά τοῦ ρεύματος καί γι αὐτό τά θερμικά ὄργανα τά χρησιμοποιοῦμε *στά συνεχῆ* καί *στά ἐναλλασσόμενα* ρεύματα. Τά θερμικά ὄργανα τά χρησιμοποιοῦμε ὡς *ἀμπερόμετρα*, γιά τή μέτρηση τῆς ἐντάσεως τοῦ ρεύματος καί ὡς *βολτόμετρα*, γιά τή μέτρηση τῆς τάσεως.

Σχ. 171. Θερμικό ὄργανο.

β. Ἠλεκτρομαγνητικά ὄργανα. Ἡ λειτουργία τῶν *ἠλεκτρομαγνητικῶν ὀργάνων* βασίζεται στίς μαγνητικές ἰδιότητες πού ἔχει ἕνα κύκλωμα, ὅταν διαρρέεται ἀπό ρεῦμα. Στίς πρακτικές ἐφαρμογές χρησιμοποιοῦμε *τά ὄργανα μέ μαλακό σίδηρο*, πού ἡ λειτουργία τους στηρίζεται στήν ἑξῆς ἀρχή: Στό ἐσωτερικό ἑνός πηνίου εἶναι στερεωμένο ἕνα κομμάτι Α μαλακοῦ σιδήρου (σχ. 172). Ἕνα ἄλλο κομμάτι Β μαλακοῦ σιδήρου μπορεῖ νά στρέφεται γύρω ἀπό τόν ἄξονα τοῦ πηνίου καί συγκρατιέται σέ ὁρισμένη θέση μέ ἕνα ἐλατήριο. Σ' αὐτή τή θέση τά δύο κομμάτια Α καί Β σιδήρου βρίσκονται τό ἕνα ἀπέναντι στό ἄλλο. Ὅταν ἀπό τό πηνίο περνάει ρεῦμα, τά δύο κομμάτια σιδήρου μαγνητίζονται μέ τέτοιο τρόπο, ὥστε οἱ δύο βόρειοι πόλοι καί οἱ δύο νότιοι πόλοι νά εἶναι ὁ ἕνας ἀπέναντι στόν ἄλλο καί τότε τά δύο αὐτά κομμάτια σιδήρου ἀπωθοῦνται. Μέ τό κομμάτι Β συνδέεται ὁ

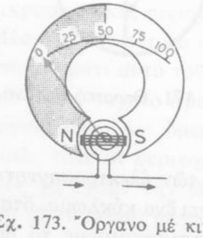


Σχ. 172. Ὄργανο μέ μαλακό σίδηρο.

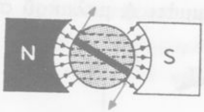
δείκτης τοῦ ὀργάνου. Ἄν ἀντιστραφεῖ ἡ φορά τοῦ ρεύματος, τότε ἀντιστρέφονται καί οἱ δύο πόλοι στά δύο κομμάτια σιδήρου, ἀλλά καί πάλι τά δύο κομμάτια σιδήρου ἀπωθοῦνται. Ἔτσι τά ὄργανα αὐτά μποροῦν νά χρησιμοποιηθοῦν στά *συνεχή* καί στά *ἐναλλασσόμενα* ρεύματα.

γ. Ἀμπερόμετρα καί βολτόμετρα. Ἐπειδή *τά ἀμπερόμετρα* μπαίνουν στό κύκλωμα κατά σειρά, γι᾽ αὐτό ἔχουν *πολύ μικρή ἐσωτερική ἀντίσταση*, ὥστε νά μή προκαλοῦν αἰσθητή μεταβολή στήν ἔνταση τοῦ ρεύματος πού διαρρέει τό κύκλωμα. Ἀντίθετα, ἐπειδή *τά βολτόμετρα* συνδέονται μέ δύο σημεῖα τοῦ κυκλώματος καί προκαλοῦν ἔτσι διακλάδωση τοῦ ρεύματος, γι᾽ αὐτό ἔχουν *πολύ μεγάλη ἐσωτερική ἀντίσταση*, ὥστε νά περνάει μέσα ἀπό τό ὄργανο ἕνα πολύ ἀσθενές ρεῦμα. Τά ἀμπερόμετρα καί τά βολτόμετρα εἶναι θερμικά ἤ ἠλεκτρομαγνητικά ὄργανα.

Τά ἀμπερόμετρα καί τά βολτόμετρα συνήθως εἶναι ὄργανα *μέ στρεφόμενο πλαίσιο*. Ἀποτελοῦνται ἀπό ἕνα μόνιμο πεταλοειδή μαγνήτη καί ἀπό ἕνα κινητό πλαίσιο πού διαρρέεται ἀπό τό ρεῦμα (σχ. 173). Ὅταν τό πλαίσιο διαρρέεται ἀπό τό ρεῦμα, τότε πάνω στό πλαίσιο ἀναπτύσσεται ἕνα ζεῦγος δυνάμεων πού τείνει νά στρέψει τό πλαίσιο ἔτσι, ὥστε οἱ σπεῖρες του νά γίνουν κάθετες στίς δυναμικές γραμμές τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου (σχ. 174). Τό πλαίσιο στρέφεται κατά μιά γωνία, ὥσπου ἡ ροπή τοῦ ζεύγους νά ἰσορροπηθεῖ ἀπό τή ροπή πού ἀναπτύσσεται στό ἐλατήριο μέ τό ὁποῖο συνδέεται τό πλαίσιο.



Σχ. 173. Ὄργανο μέ κινητό πλαίσιο.



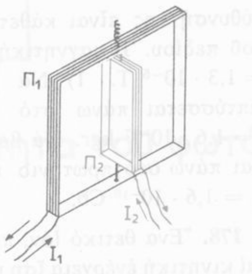
Σχ. 174. Στό πλαίσιο ἀναπτύσσεται ροπή.

Πολλά σύγχρονα ἀμπερόμετρα καί βολτόμετρα ἔχουν μέσα τους κατάλληλες βοηθητικές ἀντιστάσεις καί ἔτσι διαθέτουν περισσότερες κλίμακες γιά τίς μετρήσεις.

Ἕνα πολύ ἐνδιαφέρον ὄργανο εἶναι *τό πολύμετρο*, μέ τό ὁποῖο μποροῦμε νά μετρᾶμε ἔνταση ρεύματος, τάση, ἀντίσταση καί χωρητικότητα.

δ. Ἠλεκτροδυναμόμετρο. *Τό ἠλεκτροδυναμόμετρο* ἀποτελεῖται ἀπό δύο πηνία Π_1 καί Π_2 (σχ. 175). Τό πηνίο Π_2 μπορεῖ νά στρέφεται μέσα στό μαγνητικό πεδίο πού δημιουργεῖ τό ἀκίνητο πηνίο Π_1. Ἡ λειτουργία τοῦ ὀργάνου βασίζεται στίς δυνάμεις πού ἀναπτύσσονται μεταξύ δύο παράλληλων ρευμάτων.

Γιά νά μετρᾶμε *τήν ἠλεκτρική ἰσχύ* πού καταναλώνεται, χρησιμοποιοῦμε *τό βατόμετρο,* πού εἶναι ἕνα κατάλληλο ἠλεκτροδυναμόμετρο. Γιά νά μετρᾶμε *τήν ἠλεκτρική ἐνέργεια* πού καταναλώνεται, χρησιμοποιοῦμε εἰδικούς *μετρητές ἐνέργειας.* Ὑπάρχουν διάφοροι τύποι τέτοιων μετρητῶν. *Οἱ ἠλεκτροδυναμικοί μετρητές* εἶναι ὄργανα ἀνάλογα μέ τά ἠλεκτροδυναμόμετρα.



Σχ. 175. Ἠλεκτροδυναμόμετρο.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

172. Ἕνα ἠλεκτρόνιο κινούμενο μέ ταχύτητα $υ = 10^6$ m/sec μπαίνει μέσα σέ μαγνητικό πεδίο πού ἔχει μαγνητική ἐπαγωγή $B = 0{,}05$ T. Πόση δύναμη ἐνεργεῖ πάνω στό ἠλεκτρόνιο, ὅταν ἡ διεύθυνση τῆς ταχύτητάς του: α) εἶναι παράλληλη μέ τίς δυναμικές γραμμές; β) σχηματίζει γωνία 30^0 μέ τίς δυναμικές γραμμές τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου; $|e| = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Cb.

173. Ἕνα ἠλεκτρόνιο κινούμενο μέ ταχύτητα $υ = 10^8$ m/sec μπαίνει μέσα σέ ὁμογενές μαγνητικό πεδίο, πού ἔχει μαγνητική ἐπαγωγή $B = 2{,}8 \cdot 10^{-8}$ T. Ἡ διεύθυνση τῆς ταχύτητας υ εἶναι κάθετη στίς δυναμικές γραμμές τοῦ πεδίου. Νά βρεθεῖ ἡ ἀκτίνα r τῆς κυκλικῆς τροχιᾶς τοῦ ἠλεκτρονίου καί ἡ περίοδος τῆς κινήσεώς του. $m_e = 9 \cdot 10^{-31}$ kgr. $|e| = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Cb.

174. Ἕνα ἠλεκτρόνιο κινεῖται μέσα σέ ὁμογενές μαγνητικό πεδίο πού ἔχει μαγνητική ἐπαγωγή $B = 5 \cdot 10^{-3}$ T καί διαγράφει κυκλική τροχιά μέ ἀκτίνα $r = 7{,}5$ cm. Πόση εἶναι ἡ ταχύτητα υ τοῦ ἠλεκτρονίου; $|e| = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Cb. $m_e = 9 \cdot 10^{-31}$ kgr.

175. Ἕνα ἠλεκτρόνιο κινεῖται μέσα σέ ὁμογενές μαγνητικό πεδίο μέ ταχύτητα $υ = 10^5$ km/sec καί διαγράφει κυκλική τροχιά μέ ἀκτίνα $r = 1$ cm. 1) Πόση εἶναι ἡ μαγνητική ἐπαγωγή B τοῦ πεδίου; 2) Πόση εἶναι ἡ συχνότητα ν τῆς κινήσεως τοῦ ἠλεκτρονίου;

176. Ἕνα ἠλεκτρόνιο κινούμενο μέ ταχύτητα υ μπαίνει μέσα σέ ὁμογενές μαγνητικό πεδίο. Ἡ διεύθυνση τῆς ταχύτητας υ εἶναι κάθετη στή διεύθυνση τῆς μαγνητικῆς ἐπαγωγῆς B τοῦ πεδίου. Νά βρεθεῖ ἡ στροφορμή G τοῦ ἠλεκτρονίου.

177. Ἕνα πρωτόνιο $(+e)$ τῶν κοσμικῶν ἀκτίνων φτάνει κοντά στήν ἐπιφάνεια τῆς Γῆς μέ ταχύτητα πού ἔχει μέτρο $υ = 10^7$ m/sec καί ἡ διεύθυνσή της εἶναι κάθετη στίς δυναμικές γραμμές τοῦ γήινου μαγνητικοῦ πεδίου. Ἡ μαγνητική ἐπαγωγή τοῦ γήινου μαγνητικοῦ πεδίου εἶναι $B = 1{,}3 \cdot 10^{-5}$ T. 1) Νά βρεθεῖ ἡ ἠλεκτρομαγνητική δύναμη F πού ἀναπτύσσεται πάνω στό πρωτόνιο. 2) Ἡ μάζα τοῦ πρωτονίου εἶναι $m_p = 1{,}6 \cdot 10^{-27}$ kgr. Νά βρεθεῖ ἡ δύναμη βαρύτητας $F_{\beta\alpha\rho}$ πού ἀναπτύσσεται πάνω στό πρωτόνιο καί νά βρεθεῖ ὁ λόγος $F/F_{\beta\alpha\rho}$. $g = 10$ m/sec^2. $|e| = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Cb.

178. Ἕνα θετικό ἰόν, πού ἔχει φορτίο $q = +e$, κινεῖται μέ ταχύτητα υ καί κινητική ἐνέργεια ἴση μέ $E_{\kappa\iota\nu} = 1{,}92 \cdot 10^{-17}$ Joule. Τό ἰόν μπαίνει μέσα σέ ὁμογενές μαγνητικό πεδίο, ὅπου κινεῖται πάνω σέ κυκλική τροχιά μέ ἀκτίνα $r = 20$ cm. Ἡ μαγνητική ἐπαγωγή τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου εἶναι $B = 3{,}78 \cdot 10^{-2}$ T. Νά βρεθεῖ ἡ μάζα m τοῦ ἰόντος. $|e| = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Cb.

179. Ἕνα ἀμπερόμετρο ἔχει ἐσωτερική ἀντίσταση R_0. Παράλληλα μέ αὐτή τήν ἀντίσταση συνδέουμε μιά ἀντίσταση R_B(βοηθητική ἀντίσταση). 1) Πόση πρέπει νά εἶναι ἡ βοηθητική ἀντίσταση R_B ὥστε τό ρεῦμα, πού θά περνάει τώρα ἀπό τήν ἀντίσταση R_0 τοῦ ὀργάνου, νά ἔχει ἔνταση I_0 ἴση μέ τό I/n τῆς ἐντάσεως I τοῦ ρεύματος πού θά περνοῦσε ἀπό τό ὄργανο χωρίς τή βοηθητική ἀντίσταση ; 2) Ἄν εἶναι $R_0 = 950\ \Omega$ καί $n = 20$, πόση εἶναι ἡ βοηθητική ἀντίσταση R_B ; Ἄν εἶναι $I = 60$ A, τί ἔνδειξη θά δείχνει τότε τό ἀμπερόμετρο ;

180. Ἕνα βολτόμετρο ἔχει ἐσωτερική ἀντίσταση R_0 καί δείχνει τάση U_0. Κατά σειρά μέ αὐτή τήν ἀντίσταση R_0 συνδέουμε μιά βοηθητική ἀντίσταση $R_B = 9\,R_0$. Ἡ πτώση τάσεως πάνω στήν ἀντίσταση R_B εἶναι U_B. 1) Πόση εἶναι ἡ τάση U_B σέ συνάρτηση μέ τήν U_0 καί πόση εἶναι ἡ ὁλική τάση U πού ἐφαρμόζεται στίς ἄκρες τοῦ συστήματος τῶν δύο ἀντιστάσεων ; 2) Ἄν τότε τό βολτόμετρο δείχνει τάση $U_0 = 6{,}5$ V, πόση εἶναι ἡ τάση U ;

Λεπτή δέσμη ἠλεκτρονίων διαγράφει κυκλική τροχιά μέσα σέ μαγνητικό πεδίο.

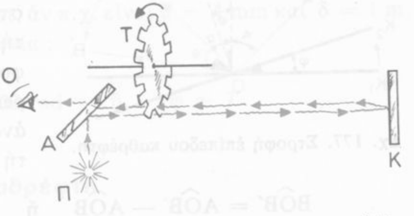
ΟΠΤΙΚΗ

Ταχύτητα τοῦ φωτός

91. Μέτρηση τῆς ταχύτητας τοῦ φωτός

Ἡ ταχύτητα διαδόσεως τοῦ φωτός εἶναι πολύ μεγάλη καί γι' αὐτό τό φῶς μέσα σέ ἐλάχιστο χρόνο διατρέχει πολύ μεγάλες ἀποστάσεις. Στήν ἐπιφάνεια τῆς Γῆς θά μπορέσουμε νά μετρήσουμε τήν ταχύτητα τοῦ φωτός, ἄν μπορέσουμε νά μετρήσουμε τόν ἐλάχιστο χρόνο πού χρειάζεται τό φῶς, γιά νά διατρέξει μιά γνωστή μικρή ἀπόσταση. Σ' αὐτή τήν ἀρχή στηρίχτηκε ὁ Fizeau, γιά νά μετρήσει (1849) τήν ταχύτητα διαδόσεως τοῦ φωτός μέ γήινο πείραμα. Θά ἐπαναλάβουμε τό πείραμα τοῦ Fizeau.

Μιά γυάλινη πλάκα Α (σχ. 176) σχηματίζει γωνία 45^0 μέ τό ὁριζόντιο ἐπίπεδο. Ἀπό τή φωτεινή πηγή Π μιά φωτεινή ἀκτίνα πέφτει πάνω στήν πλάκα Α μέ γωνία προσπτώσεως 45^0, ἀνακλᾶται καί κατευθύνεται ὁριζόντια πρός ἕναν κατακόρυφο καθρέφτη Κ. Ἐκεῖ ἡ φωτεινή ἀκτίνα παθαίνει δεύτερη ἀνάκλαση, ἐπιστρέφει πάλι ὁριζόντια, περνάει μέσα ἀπό τήν πλάκα Α καί φτάνει στό μάτι μας. Ἡ ἀπόσταση (s) τῆς πλάκας Α ἀπό τόν καθρέφτη Κ εἶναι λίγα μόνο χιλιόμετρα. Ἐμπρός ἀπό τήν πλάκα Α ὑπάρχει ἕνας κατακόρυφος ὁδοντωτός τροχός Τ πού μπορεῖ νά στρέφεται γύρω ἀπό ὁριζόντιο ἄξονα. Ὁ τροχός ἔχει τόσα δόντια, ὅσα εἶναι καί τά διάκενά του. Τό δόντι καί τό διάκενο ἔχουν τό ἴδιο πλάτος. Ἔστω ὅτι ὁ τροχός ἔχει μ δόντια καί μ διάκενα. Ὁ τροχός ἀρχίζει νά στρέφεται. Ὅταν ἡ συχνότητα τῆς στροφικῆς κινήσεως τοῦ τροχοῦ αὐξάνεται, ἔρχεται κάποια στιγμή πού δέ βλέπουμε τό φῶς πού ἐπιστρέφει ἀπό τόν καθρέφτη Κ. Αὐτό συμβαίνει, γιατί στή διάρκεια τοῦ χρόνου t, πού τό φῶς διέτρεξε τό διάστημα 2s, ἕνα δόντι τοῦ τροχοῦ μετακινήθηκε καί πῆρε τή θέση τοῦ προηγούμενου διάκενου. Ἀπό αὐτό τό διάκενο πέρασε τό φῶς πηγαίνοντας πρός τόν καθρέφτη Κ. Ἄν ἐκείνη τή στιγμή ἡ συχνότητα τῆς κινήσεως τοῦ τροχοῦ εἶναι ν, τότε ὁ χρόνος t



Σχ. 176. Σχηματική παράσταση τῆς μεθόδου τοῦ Fizeau.

εἶναι ἴσος μέ $t = \frac{1}{\nu \cdot 2\mu}$ καί ἑπομένως ἡ ταχύτητα c τοῦ φωτός στόν ἀέρα εἶναι:

$$c = \frac{2s}{t} = \frac{2s}{1/2\nu\mu} \quad \text{καί} \quad c = 4\nu \cdot \mu \cdot s$$

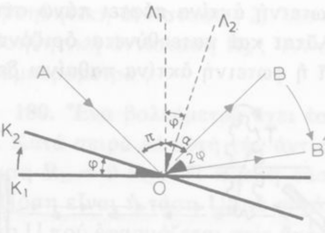
Μέ τή μέθοδο αὐτή ὁ Fizeau βρῆκε ὅτι *ἡ ταχύτητα τοῦ φωτός στόν ἀέρα* κατά μεγάλη προσέγγιση εἶναι:

$$c = 300\,000 \text{ km/sec} \quad \text{ἤ} \quad c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/sec}$$

Ἐπίπεδοι καί σφαιρικοί καθρέφτες

92. Στροφή ἐπίπεδου καθρέφτη

Ἡ φωτεινή ἀκτίνα ΑΟ (σχ. 177) πέφτει πάνω στόν καθρέφτη καί δίνει ἀνακλώμενη τήν ἀκτίνα ΟΒ. Τότε ἡ γωνία ΑΟΒ εἶναι ἴση μέ 2π (γιατί εἶναι π = α). Θεωροῦμε ἕναν ἄξονα πού εἶναι κάθετος στό ἐπίπεδο προσπτώσεως στό σημεῖο Ο. Διατηρώντας σταθερή τήν προσπίπτουσα ἀκτίνα ΑΟ στρέφουμε τόν καθρέφτη κατά γωνία φ γύρω ἀπό τόν ἄξονα πού πήραμε. Τότε ἡ ἀνακλώμενη ἀκτίνα στρέφεται κατά τή γωνία ΒΟΒ′ πού εἶναι:



Σχ. 177. Στροφή ἐπίπεδου καθρέφτη.

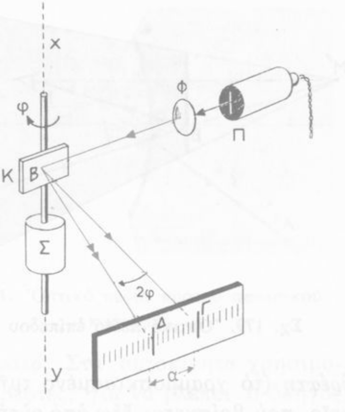
$$\widehat{BOB'} = \widehat{AOB'} - \widehat{AOB} \quad \text{ἤ} \quad \widehat{BOB'} = 2(\pi + \varphi) - 2\pi$$

$$\text{καί} \quad \widehat{BOB'} = 2\varphi$$

Ὥστε, ὅταν ὁ καθρέφτης στρέφεται κατά γωνία φ, *ἡ ἀνακλώμενη ἀκτίνα στρέφεται κατά διπλάσια γωνία* (2φ). Αὐτή τήν ἰδιότητα τοῦ ἐπίπεδου καθρέφτη τήν ἐφαρμόζουμε, γιά νά μετρᾶμε πολύ μικρές γωνίες.

α. Μέτρηση πολύ μικρῆς γωνίας. Πολλές φορές εἶναι ἀπαραίτητο νά μετρήσουμε μιά πολύ μικρή γωνία π.χ. τή γωνία στρέψεως ἑνός σύρματος σέ ἕνα ζυγό στρέψεως. Τότε ἐφαρμόζουμε τήν ἑξῆς μέθοδο *(μέθοδος Poggendorf)*: Τό κινητό σύστημα Σ (σχ. 178) στρέφεται γύρω ἀπό τόν ἄξονα xy. Πάνω στό κινητό σύστημα ἐφαρμόζεται ἕνας μικρός ἐπίπεδος καθρέφτης

Κ καί ἐμπρός ἀπό αὐτόν σέ ἀπόσταση δ τοποθετεῖται ἕνας κανόνας βαθμολογημένος. Πάνω στόν καθρέφτη πέφτει μιά λεπτή δέσμη φωτεινῶν ἀκτίνων πού προέρχεται ἀπό μιά πολύ φωτεινή σχισμή. Ἡ ἀνακλώμενη δέσμη σχηματίζει πάνω στόν κανόνα τό πραγματικό εἴδωλο Γ τῆς φωτεινῆς σχισμῆς. Ἡ ἀκτίνα ΒΓ εἶναι κάθετη στόν κανόνα. Ὅταν τό κινητό σύστημα στραφεῖ κατά μιά πολύ μικρή γωνία φ, ἡ ἀνακλώμενη ἀκτίνα στρέφεται κατά γωνία 2φ καί τό εἴδωλο τῆς φωτεινῆς σχισμῆς σχηματίζεται τώρα στή θέση Δ πάνω στόν κανόνα. Ἀπό τό σχηματιζόμενο ὀρθογώνιο τρίγωνο ἔχουμε τότε τή σχέση :



Σχ. 178. Μέτρηση μικρῆς περιστροφῆς.

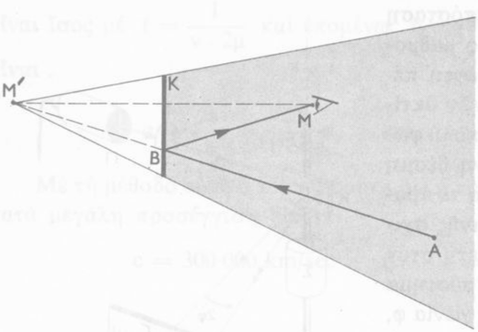
$$\text{εφ}\, 2\varphi = \frac{\Gamma\Delta}{\mathrm{B}\Gamma} = \frac{\alpha}{\delta} \quad \text{ἤ} \quad \text{κατά προσέγγιση} \quad \varphi = \frac{\alpha}{2\delta}\,\text{rad}$$

γιατί ἡ γωνία 2φ εἶναι πολύ μικρή καί ἀντί γιά τήν ἐφαπτομένη παίρνουμε τή γωνία μετρημένη σέ ἀκτίνια. Ἔτσι, ἄν π.χ. εἶναι $\alpha = 4$ mm καί $\delta = 1$ m, τότε τό σύστημα στράφηκε κατά γωνία :

$$\varphi = \frac{4}{2000}\,\text{rad} = 0{,}002\,\text{rad} \quad \text{ἤ} \quad \varphi \simeq 7'$$

93. Ὀπτικό πεδίο ἐπίπεδου καθρέφτη

Ὅταν τό μάτι μας βρίσκεται σέ ὁρισμένη θέση, ὀνομάζουμε *ὀπτικό πεδίο* τοῦ καθρέφτη τήν περιοχή τοῦ χώρου πού μπορεῖ ἀπό ἀνάκλαση νά βλέπει τό μάτι μας μέ τόν καθρέφτη. Ἄς θεωρήσουμε ἕνα φωτεινό σημεῖο Α (σχ. 179) καί μιά ἀκτίνα ΑΒ πού πέφτει πάνω στόν καθρέφτη. Ἡ ἀνακλώμενη ἀκτίνα ΒΜ μπαίνει στό μάτι μας καί ἔτσι βλέπουμε τό σημεῖο Α. Ἄν ὑποθέσουμε ὅτι τό φῶς ἀκολουθοῦσε τήν ἀντίστροφη πορεία, τότε ἡ ΜΒ θά ἦταν προσπίτουσα καί ἡ ΒΑ θά ἦταν ἀνακλώμενη καί θά φαινόταν ὅτι προέρχεται ἀπό τό σημεῖο Μ′ πού εἶναι τό εἴδωλο τοῦ ματιοῦ. Ὥστε *ἡ προέκταση τῆς ἀρχικῆς προσπίπτουσας ἀκτίνας* ΑΒ περνάει ἀπό τό σημεῖο Μ′. Κάθε λοιπόν ἀνακλώμενη ἀκτίνα, πού μπαίνει στό μάτι μας, ἀντιστοιχεῖ *σέ μιά προσπίτουσα ἀκτίνα, ἡ ὁποία συναντᾶ τόν καθρέφτη καί ἡ προέκτασή της*

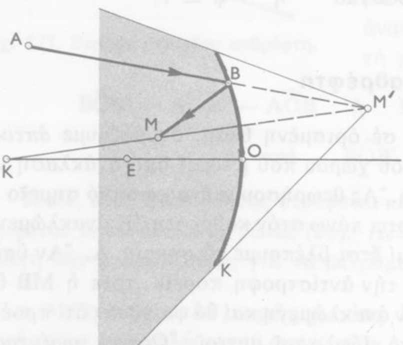


Σχ. 179. Ὀπτικό πεδίο ἐπίπεδου καθρέφτη.

περνάει ἀπό τό εἴδωλο Μ *τοῦ ματιοῦ*. Αὐτές ὅμως οἱ ποσπίπτουσες ἀκτίνες μποροῦν νά προέρχονται μόνο ἀπό φωτεινά σημεῖα πού βρίσκονται *μέσα στήν περιοχή, ἡ ὁποία ἔχει ὅρια τήν ἐπιφάνεια τοῦ καθρέφτη καί τήν ἐπιφάνεια πού διαγράφει μιά εὐθεία, ἡ ὁποία ἔχει ἀρχή τό σημεῖο* Μ′ *καί κινούμενη ἐφάπτεται πάντοτε στήν περιφέρεια τοῦ καθρέφτη* (τό γραμμοσκιασμένο τμῆμα στό σχῆμα). Κάθε ἄλλο φωτεινό σημεῖο, πού βρίσκεται ἔξω ἀπό αὐτή τήν περιοχή, *δέν τό βλέπει* τό μάτι μας. Εἶναι φανερό ὅτι τό ὀπτικό πεδίο ἑνός ἐπίπεδου καθρέφτη ἐξαρτᾶται ἀπό *τό σχῆμα* καί *τίς διαστάσεις τοῦ καθρέφτη* καθώς καί ἀπό *τή θέση τοῦ ματιοῦ* σχετικά μέ τόν καθρέφτη. Ὅταν τό μάτι πλησιάζει πρός τόν καθρέφτη, τό ὀπτικό πεδίο γίνεται μεγαλύτερο. Ὥστε :

Τό ὀπτικό πεδίο τοῦ ἐπιπέδου καθρέφτη εἶναι μιά περιοχή τοῦ χώρου, ἡ ὁποία προσδιορίζεται ἀπό τό σχῆμα τοῦ καθρέφτη, τίς διαστάσεις του καί τή θέση τοῦ ματιοῦ σχετικά μέ τόν καθρέφτη.

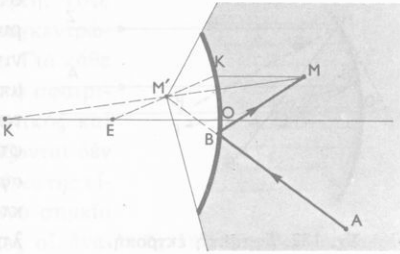
94. Ὀπτικό πεδίο σφαιρικοῦ καθρέφτη



Σχ. 180. Ὀπτικό πεδίο κοίλου σφαιρικοῦ καθρέφτη.

Τό μάτι μας Μ βρίσκεται ἐμπρός ἀπό ἕναν *κοῖλο σφαιρικό καθρέφτη* καί σέ ἀπόσταση μικρότερη ἀπό τήν ἑστιακή ἀπόσταση τοῦ καθρέφτη (σχ. 180). Τότε τό εἴδωλο Μ′ τοῦ ματιοῦ μας εἶναι φανταστικό. Μιά ἀκτίνα ΑΒ, πού προέρχεται ἀπό τό σημεῖο Α, ἀνακλᾶται πάνω στόν καθρέφτη καί ἡ ἀνακλώμενη ἀκτίνα ΒΜ μπαίνει στό μάτι μας. Ὅπως στόν ἐπίπεδο καθρέφτη, ἔτσι καί στόν κοῖλο σφαιρικό καθρέφτη, τό μάτι μας βλέπει ἀπό ἀνάκλαση τό σημεῖο Α, μόνο ὅταν ἡ *προέκταση τῆς προσπίπτουσας ἀκτίνας* ΑΒ *περνάει ἀπό τό εἴδωλο* Μ′ *τοῦ ματιοῦ.*

Τό ἴδιο συμβαίνει καί ὅταν τό μάτι μας βρίσκεται ἐμπρός ἀπό ἕναν *κυρτό σφαιρικό καθρέφτη* (σχ. 181). Ἐπειδή σ' αὐτή τήν περίπτωση τό εἴδωλο Μ′ τοῦ ματιοῦ σχηματίζεται κοντά στόν καθρέφτη (πάντοτε μεταξύ τῆς κύριας ἑστίας καί τοῦ καθρέφτη), γι' αὐτό τό ὀπτικό πεδίο τοῦ κυρτοῦ σφαιρικοῦ καθρέφτη εἶναι *πολύ μεγάλο*. Στά αὐτοκίνητα χρησιμοποιοῦνται συνήθως κυρτοί σφαιρικοί καθρέφτες, γιά νά βλέπει ὁ ὁδηγός τό τμῆμα τοῦ δρόμου πού εἶναι πίσω ἀπό τό αὐτοκίνητο.



Σχ. 181. Ὀπτικό πεδίο κυρτοῦ σφαιρικοῦ καθρέφτη.

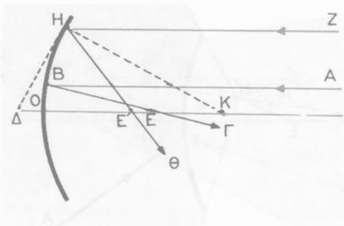
Ἀπό τά παραπάνω καταλήγουμε στό ἀκόλουθο συμπέρασμα :

Τό ὀπτικό πεδίο ἑνός σφαιρικοῦ καθρέφτη προσδιορίζεται ἀπό τήν ἐπιφάνεια πού διαγράφει μιά εὐθεία, ἡ ὁποία ἔχει ἀρχή τό εἴδωλο τοῦ ματιοῦ καί κινούμενη ἐφάπτεται πάντοτε στήν περιφέρεια τοῦ καθρέφτη.

95. Σφάλματα πού παρουσιάζουν οἱ σφαιρικοί καθρέφτες

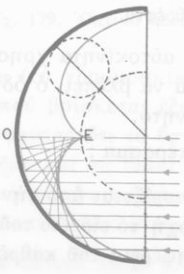
Ὅταν ἐξετάζουμε τούς σφαιρικούς καθρέφτες καί βρίσκουμε τίς ἐξισώσεις πού ἰσχύουν γι' αὐτούς ὑποθέτουμε ὅτι πραγματοποιοῦνται οἱ ἑξῆς δύο ὅροι : α) τό ἄνοιγμα τοῦ σφαιρικοῦ καθρέφτη εἶναι *πολύ μικρό* καί β) οἱ φωτεινές ἀκτίνες σχηματίζουν *μικρή γωνία* μέ τόν κύριο ἄξονα. Ὅταν ἕνας ἀπό αὐτούς τούς δύο ὅρους δέν πραγματοποιεῖται, τότε οἱ φωτεινές ἀκτίνες πού προέρχονται ἀπό ἕνα σημεῖο τοῦ φωτεινοῦ ἀντικειμένου, μετά τήν ἀνάκλασή τους πάνω στό σφαιρικό καθρέφτη, δέν συγκεντρώνονται σέ ἕνα σημεῖο καί γι' αὐτό τό εἴδωλο πού σχηματίζεται δέν εἶναι καθαρό.

α. Σφαιρική ἐκτροπή. Σέ ἕναν κοῖλο σφαιρικό καθρέφτη, πού ἔχει *μεγάλο ἄνοιγμα* (σχ. 182) ἡ ἀκτίνα ΖΗ, πού εἶναι παράλληλη μέ τόν κύριο ἄξονα καί πέφτει πάνω στόν καθρέφτη μακριά ἀπό τήν κορυφή Ο, δίνει τήν ἀνακλώμενη ἀκτίνα ΗΘ. Αὐτή ἡ ἀκτίνα τέμνει τόν κύριο ἄξονα σέ ἕνα σημεῖο Ε′ πού εἶναι τό μέσο τῆς εὐθείας ΚΔ. Ὅσο περισσότερο τό σημεῖο προσπτώσεως Η ἀπομακρύνεται ἀπό τήν κορυφή Ο, τόσο περισσότερο τό σημεῖο Ε′ (δηλαδή ἡ τομή τῆς ἀνακλώμενης ἀκτίνας μέ τόν κύριο ἄξονα) πλησιάζει πρός τήν κορυφή Ο. Ἔτσι γιά τίς ἀκτίνες πού πέφτουν πάνω



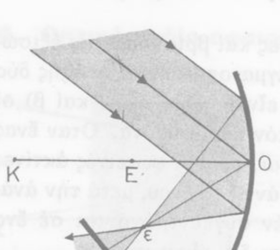
Σχ. 182. Σφαιρική ἐκτροπή.

στόν καθρέφτη μακριά ἀπό τήν κορυφή ἡ ἑστιακή ἀπόσταση f εἶναι γενικά *μικρότερη* ἀπό τή μισή ἀκτίνα καμπυλότητας R($f < R/2$). Αὐτό τό ἐλάττωμα πού ἔχουν οἱ σφαιρικοί καθρέφτες μέ μεγάλο ἄνοιγμα ὀνομάζεται *σφαιρική ἐκτροπή*. Οἱ ἀνακλώμενες ἀκτίνες εἶναι ἐφαπτόμενες μιᾶς καμπύλης ἐπιφάνειας πού λέγεται *ἑστιακή ἐπιφάνεια* (ἤ καί *καυστική ἐπιφάνεια*). Στό σχῆμα 183 φαίνεται μιά τομή τῆς ἑστιακῆς ἐπιφάνειας. Ἡ κύρια ἑστία Ε εἶναι ἡ κορυφή τῆς ἑστιακῆς ἐπιφάνειας.



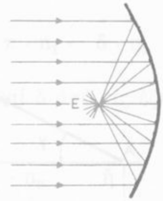
Σχ. 183. Τομή τῆς ἑστιακῆς ἐπιφάνειας.

β. Ἀστιγματική ἐκτροπή. Πάνω σέ σφαιρικό καθρέφτη, ἀδιάφορο ἄν ἔχει μικρό ἤ μεγάλο ἄνοιγμα, πέφτει μιά δέσμη ἀπό παράλληλες φωτεινές ἀκτίνες σχηματίζοντας *μεγάλη γωνία* μέ τόν κύριο ἄξονα (σχ. 184). Οἱ ἀνακλώμενες ἀκτίνες δέν σχηματίζουν κωνική δέσμη, δηλαδή δέν περνοῦν ὅλες ἀπό ἕνα σημεῖο, ἀλλά περνοῦν ἀπό δύο μικρές εὐθεῖες, πού εἶναι κάθετες μεταξύ τους καί δέ βρίσκονται στό ἴδιο ἐπίπεδο. Αὐτές οἱ δύο γραμμές ὀνομάζονται *ἑστιακές γραμμές*. Στό σχῆμα ἡ ἑστιακή γραμμή ε εἶναι κάθετη στό ἐπίπεδο τοῦ σχήματος, ἐνῶ ἡ ἄλλη ἑστιακή γραμμή ε΄ βρίσκεται πάνω στό ἐπίπεδο τοῦ σχήματος. Αὐτό τό ἐλάττωμα πού ἔχουν οἱ σφαιρικοί καθρέφτες ὀνομάζεται *ἀστιγματική ἐκτροπή* ἤ *ἀστιγματισμός*.



Σχ. 184. Ἀστιγματική ἐκτροπή.

γ. Ἀπλανητικοί καθρέφτες. Λέμε ὅτι ἕνας καθρέφτης εἶναι *ἀπλανητικός*, ὅταν ὅλες οἱ φωτεινές ἀκτίνες πού προέρχονται ἀπό ἕνα σημεῖο, μετά τήν ἀνάκλασή τους *συγκεντρώνονται σέ ἕνα σημεῖο*. *Ὁ ἐπίπεδος καθρέφτης* εἶναι ἀπλανητικός, ὁποιαδήποτε καί ἄν εἶναι ἡ θέση τοῦ φωτεινοῦ σημείου, ἀλλά τό εἴδωλο ἑνός πραγματικοῦ ἀντικειμένου εἶναι πάντοτε φανταστικό. *Ὁ σφαιρικός καθρέφτης* εἶναι ἀπλανητικός, μόνο ὅταν τό φωτεινό σημεῖο βρίσκεται στό κέντρο καμπυλότητας τοῦ καθρέφτη. Τότε ὅλες οἱ ἀνακλώμενες ἀκτίνες συγκεντρώνονται στό κέντρο καμπυλότητας. Γιά κάθε ἄλλη θέση τοῦ φωτεινοῦ σημείου ὁ σφαιρικός καθρέφτης δέν εἶναι ἀπλανητικός καί ἐπομένως τά εἴδωλα πού σχηματίζονται δέν εἶναι καθαρά. *Ὁ παραβολικός καθρέφτης εἶναι ἀπλανητικός*, ὅταν τό φωτεινό σημεῖο βρίσκεται στό ἄπειρο. Τότε ὅλες οἱ ἀνακλώμενες ἀκτίνες συγκεντρώνονται στήν ἑστία τῆς παραβολῆς (σχ. 185). Αὐτό συμβαίνει, γιατί οἱ φωτεινές ἀκτίνες σχηματίζουν μέ τήν ἐφαπτομένη τῆς παραβολῆς στό σημεῖο προσπτώσεως (ἐπομένως καί μέ τήν κάθετο) γωνίες ἴσες. Ὥστε οἱ παραβολικοί καθρέφτες δίνουν *καθαρά εἴδωλα* τῶν ἀντικειμένων πού βρίσκονται πολύ μακριά καί γι' αὐτό χρησιμοποιοῦνται στά *τηλεσκόπια*.



Σχ. 185. Παραβολικός καθρέφτης.

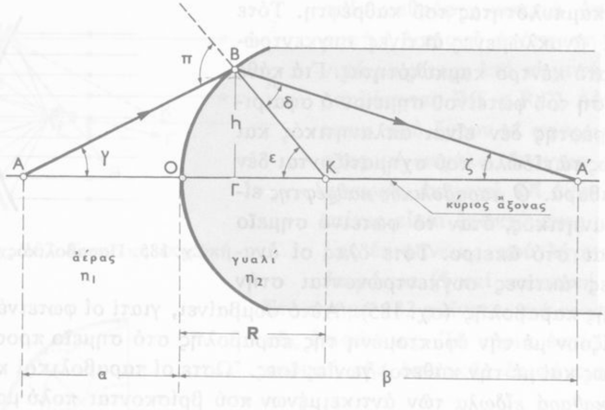
Φακοί

96. Εὕρεση τῆς ἐξισώσεως τῶν φακῶν

α. Διάθλαση τοῦ φωτός πάνω σέ σφαιρική ἐπιφάνεια. Δύο διαφανή, ὁμογενή καί ἰσότροπα μέσα, π.χ. ἀέρας καί γυαλί, χωρίζονται μέ *σφαιρική ἐπιφάνεια* (σχ. 186), ἡ ὁποία ἔχει *κέντρο καμπυλότητας* K καί *ἀκτίνα καμπυλότητας* $KB = R$. Τό μέσο O τῆς σφαιρικῆς ἐπιφάνειας θά τό λέμε *κορυφή* καί τήν εὐθεία πού περνάει ἀπό τό κέντρο καμπυλότητας K καί τήν κορυφή O θά τήν λέμε *κύριο ἄξονα*. Οἱ ἀπόλυτοι δεῖκτες διαθλάσεως τοῦ ἀέρα καί τοῦ γυαλιοῦ εἶναι ἀντίστοιχα n_1 καί n_2 καί εἶναι $n_2 > n_1$.

Ἕνα *φωτεινό σημεῖο* A βρίσκεται πάνω στόν κύριο ἄξονα. Θεωροῦμε ὅτι οἱ φωτεινές ἀκτίνες *πέφτουν κοντά στήν κορυφή* O καί τότε οἱ σχηματιζόμενες γωνίες εἶναι μικρές καί μποροῦμε ἀντί γιά τίς ἐφαπτόμενες καί τά ἡμίτονα, νά παίρνουμε τίς ἴδιες τίς γωνίες (σέ rad).

Ἡ φωτεινή ἀκτίνα AO πέφτει κάθετα πάνω στή σφαιρική ἐπιφάνεια καί μπαίνει μέσα στό γυαλί χωρίς νά πάθει ἐκτροπή. Ἡ φωτεινή ἀκτίνα AB παθαίνει διάθλαση πάνω στή σφαιρική ἐπιφάνεια καί μπαίνει μέσα στό γυαλί σχηματίζοντας γωνία διαθλάσεως $\delta < \pi$. Ἔτσι οἱ δύο φωτεινές ἀκτίνες, πού μπαίνουν μέσα στό γυαλί, τέμνονται στό σημεῖο A΄ τοῦ κύριου ἄξονα. Τό



Σχ. 186. Διάθλαση πάνω σέ κυρτή σφαιρική ἐπιφάνεια.

σημεῖο Α΄ εἶναι *τό πραγματικό εἴδωλο* τοῦ φωτεινοῦ σημείου Α. Οἱ ἀποστάσεις τῶν σημείων Α καί Α΄ ἀπό τήν κορυφή Ο εἶναι ἀντίστοιχα α καί β.

Στό τρίγωνο ΑΒΚ εἶναι $\pi = \gamma + \varepsilon$ (1)

Ἐπειδή θεωροῦμε ὅτι τό Β εἶναι πολύ κοντά στό Ο, μποροῦμε κατά προσέγγιση νά πάρουμε:

$$\mathrm{A\Gamma} = \mathrm{OA} = \alpha \quad \text{καί} \quad \mathrm{A'\Gamma} = \mathrm{OA'} = \beta$$

Στό τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι $\gamma = \dfrac{h}{\mathrm{A\Gamma}}$ ἤ $\gamma = \dfrac{h}{\alpha}$

Στό τρίγωνο ΚΒΓ εἶναι $\varepsilon = \dfrac{h}{\mathrm{KB}}$ ἤ $\varepsilon = \dfrac{h}{R}$

Ἑπομένως ἡ ἐξίσωση (1) γράφεται:

$$\pi = \frac{h}{\alpha} + \frac{h}{R} \quad \text{ἤ} \quad \pi = h\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{R}\right) \tag{2}$$

Στό τρίγωνο Α΄ΚΒ εἶναι $\varepsilon = \delta + \zeta$ (3)

Ὑπολογίζουμε τίς γωνίες δ καί ζ.

Στό τρίγωνο Α΄ΒΓ εἶναι $\zeta = \dfrac{h}{\mathrm{A'\Gamma}}$ ἤ $\zeta = \dfrac{h}{\beta}$

Ἀπό τήν ἐξίσωση (3) βρίσκουμε ὅτι ἡ γωνία διαθλάσεως δ εἶναι:

$$\delta = \varepsilon - \zeta = \frac{h}{R} - \frac{h}{\beta} \quad \text{ἤ} \quad \delta = h\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\beta}\right) \tag{4}$$

Σύμφωνα μέ τό νόμο τῆς διαθλάσεως εἶναι:

$$\frac{\eta\mu\,\pi}{\eta\mu\,\delta}=\frac{n_2}{n_1} \quad \text{ἤ} \quad \frac{\pi}{\delta}=\frac{n_2}{n_1} \quad \text{καί} \quad \pi\cdot n_1=\delta\cdot n_2 \tag{5}$$

Ἄν στήν ἐξίσωση (5) ἀντικαταστήσουμε τά π καί δ ἀπό τίς ἐξισώσεις (2) καί (4), ἔχουμε:

$$\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{R}\right)\cdot n_1=\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{\beta}\right)\cdot n_2 \quad \text{ἤ}$$

$$\boxed{\frac{n_1}{\alpha}+\frac{n_2}{\beta}=\frac{n_2-n_1}{R}} \tag{6}$$

Ἡ ἐξίσωση (6) εἶναι γενική μέ τόν ὅρο ὅτι:

— ἡ ἀκτίνα καμπυλότητας R θεωρεῖται *θετική* ($R>0$), ὅταν ἡ φωτεινή ἀκτίνα πέφτει πάνω σέ *κυρτή σφαιρική ἐπιφάνεια*·

— ἡ ἀκτίνα καμπυλότητας R θεωρεῖται *ἀρνητική* ($R<0$), ὅταν ἡ φωτεινή ἀκτίνα πέφτει πάνω σέ *κοίλη σφαιρική ἐπιφάνεια.*

β. Ἐξίσωση τοῦ ἀμφίκυρτου φακοῦ. Θεωροῦμε ἕναν *ἀμφίκυρτο φακό* (σχ. 187), πού οἱ σφαιρικές ἐπιφάνειές του ἔχουν ἀκτίνες καμπυλότητας $K_1O_1=R_1$ καί $K_2O_2=R_2$. Ἐπειδή ὁ φακός εἶναι λεπτός, μποροῦμε κατά προσέγγιση νά θεωρήσουμε ὅτι οἱ κορυφές O_1 καί O_2 τῶν δύο σφαιρικῶν ἐπιφανειῶν του συμπίπτουν μέ τό ὀπτικό κέντρο Ο τοῦ φακοῦ.

Ἕνα *φωτεινό σημεῖο* Α βρίσκεται πάνω στόν κύριο ἄξονα τοῦ φακοῦ. Ἡ φωτεινή ἀκτίνα AO_2 πέφτει κάθετα πάνω στίς δύο σφαιρικές ἐπιφάνειες τοῦ φακοῦ καί γι᾿ αὐτό βγαίνει ἀπό τό φακό χωρίς νά πάθει ἐκτροπή. Μιά ἄλλη φωτεινή ἀκτίνα ΑΒ παθαίνει διάθλαση πάνω στήν *κυρτή σφαιρική ἐπιφάνεια* καί τότε σχηματίζεται ἕνα *εἴδωλο* A_1 τοῦ φωτεινοῦ σημείου Α σέ ἀπόσταση O_2A_1, ἡ ὁποία κατά προσέγγιση εἶναι $O_2A_1=OA_1$. Τότε σύμφωνα μέ τήν ἐξίσωση (6) ἔχουμε:

$$\frac{n_1}{O_2A}+\frac{n_2}{O_2A_1}=\frac{n_2-n_1}{K_2O_2} \quad \text{ἤ} \quad \frac{n_1}{OA}+\frac{n_2}{OA_1}=\frac{n_2-n_1}{R_2} \tag{7}$$

Σχ. 187. Τό Α′ εἶναι τό πραγματικό εἴδωλο τοῦ Α.

Ἡ φωτεινή ἀκτίνα, πού εἶναι μέσα στό φακό, πέφτει πάνω στήν *κοίλη σφαιρική ἐπιφάνεια* τοῦ φακοῦ, ἐκεῖ παθαίνει δεύτερη διάθλαση καί βγαίνει στόν ἀέρα. Γι' αὐτή τή δεύτερη σφαιρική ἐπιφάνεια τοῦ φακοῦ τό εἴδωλο A_1 παίζει ρόλο *φανταστικοῦ ἀντικειμένου*. Ἔτσι ἡ δεύτερη σφαιρική ἐπιφάνεια σχηματίζει *τό τελικό εἴδωλο* A' σέ ἀπόσταση O_1A', ἡ ὁποία κατά προσέγγιση εἶναι $O_1A' = OA'$. Ἐφαρμόζοντας γιά τήν κοίλη σφαιρική ἐπιφάνεια ($R_1 < 0$) τήν ἐξίσωση (6) καί λαβαίνοντας ὑπόψη ὅτι τό ἀντικείμενο εἶναι φανταστικό ($O_1A_1 < 0$), ἔχουμε :

$$-\frac{n_2}{O_1A_1} + \frac{n_1}{O_1A'} = \frac{n_1 - n_2}{-K_1O_1} \quad \text{ἤ} \quad -\frac{n_2}{OA_1} + \frac{n_1}{OA'} = \frac{n_1 - n_2}{-R_1} \tag{8}$$

Ἄν στίς ἐξισώσεις (7) καί (8) βάλουμε $OA = \alpha$ καί $OA' = \beta$, ἔχουμε :

$$\frac{n_1}{\alpha} + \frac{n_2}{OA_1} = \frac{n_2 - n_1}{R_2} \tag{7'}$$

$$-\frac{n_2}{OA_1} + \frac{n_1}{\beta} = \frac{n_1 - n_2}{-R_1} \quad \text{ἤ} \quad -\frac{n_2}{OA_1} + \frac{n_1}{\beta} = \frac{n_2 - n_1}{R_1} \tag{8'}$$

Ὅταν προσθέσουμε κατά μέλη τίς ἐξισώσεις (7') καί (8'), βρίσκουμε τήν ἐξίσωση :

$$\frac{n_1}{\alpha} + \frac{n_1}{\beta} = (n_2 - n_1) \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \tag{9}$$

Ὁ ἀπόλυτος δείκτης διαθλάσεως n_1 τοῦ ἀέρα εἶναι ἴσος μέ τή μονάδα, δηλαδή εἶναι $n_1 = 1$. Τότε ὁ ἀπόλυτος δείκτης διαθλάσεως n_2 τοῦ γυαλιοῦ εἶναι ἴσος μέ τό σχετικό δείκτη διαθλάσεως n τοῦ γυαλιοῦ ὡς πρός τόν ἀέρα, δηλαδή εἶναι $n_2 = n$. Ἔτσι γιά *τόν ἀμφίκυρτο φακό* (συγκεντρωτικός φακός), ὅταν βρίσκεται μέσα στόν ἀέρα, ἰσχύει ἡ ἐξίσωση :

$$\text{ἀμφίκυρτος φακός} \qquad \boxed{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = (n - 1) \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)}$$

γ. Γενική ἐξίσωση τῶν φακῶν. Ἡ ἐξίσωση πού βρήκαμε εἶναι *γενική* καί ἰσχύει γιά ὅλα τά εἴδη τῶν φακῶν μέ τούς ἑξῆς ὅρους :

— τά μεγέθη α καί β ἔχουν *θετική τιμή*, ὅταν ἀντιστοιχοῦν σέ *πραγματικά σημεῖα*·

— οἱ ἀκτίνες καμπυλότητας R_1 καί R_2 ἔχουν *θετική τιμή*, ὅταν ἀντιστοιχοῦν σέ *κυρτές σφαιρικές ἐπιφάνειες*. Ὥστε :

$$\text{γενική ἐξίσωση φακῶν} \qquad \boxed{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = (n - 1) \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)} \tag{10}$$

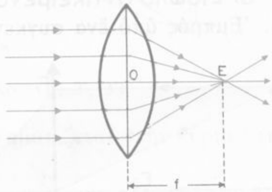
Ἄν ἡ μιά ἐπιφάνεια τοῦ φακοῦ εἶναι *ἐπίπεδη*, τότε εἶναι $R_2 = \infty$ καί ἡ ἐξίσωση τοῦ φακοῦ εἶναι :

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = (n - 1) \cdot \frac{1}{R_1}$$

δ. Κύρια ἑστία καί ἑστιακή ἀπόσταση τοῦ φακοῦ. Ἄν τό φωτεινό σημεῖο Α βρίσκεται *στό ἄπειρο* τότε εἶναι $\alpha = \infty$ καί οἱ φωτεινές ἀκτίνες πέφτουν πάνω στόν ἀμφίκυρτο φακό *παράλληλα* μέ τόν κύριο ἄξονά του (σχ. 188). Ἀπό τήν ἐξίσωση (10) βρίσκουμε ὅτι τό εἴδωλο σχηματίζεται σέ ἀπόσταση β ἀπό τό φακό, ἡ ὁποία δίνεται ἀπό τήν ἐξίσωση :

$$\frac{1}{\beta} = (n - 1) \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

γιατί εἶναι $1/\alpha = 0$. Ἡ ἀπόσταση $\beta = OE$ εἶναι γι' αὐτό τό φακό *σταθερή* καί ἀνεξάρτητη *ἀπό τή φορά* μέ τήν ὁποία τό φῶς πέφτει πάνω στό φακό. Τό σημεῖο Ε ὀνομάζεται *κύρια ἑστία* τοῦ φακοῦ καί ἡ σταθερή ἀπόσταση ΟΕ ὀνομάζεται *ἑστιακή ἀπόσταση* (f) τοῦ φακοῦ καί προσδιορίζεται ἀπό τήν ἐξίσωση :



Σχ. 188. Κύρια ἑστία συγκεντρωτικοῦ φακοῦ.

$$\boxed{\text{ἑστιακή ἀπόσταση} \quad \frac{1}{f} = (n - 1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)} \qquad (11)$$

Κάθε φακός ἔχει *δύο κύριες ἑστίες* πού εἶναι συμμετρικές ὡς πρός τό ὀπτικό κέντρο τοῦ φακοῦ.

Στούς συγκεντρωτικούς φακούς (συγκλίνοντες) εἶναι :

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} > 0 \qquad \text{ἄρα} \qquad f > 0$$

Στούς ἀποκεντρωτικούς φακούς (ἀποκλίνοντες) εἶναι :

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} < 0 \qquad \text{ἄρα} \qquad f < 0$$

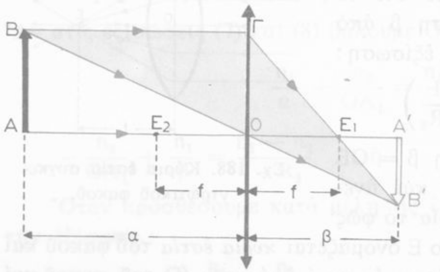
ε. Ἄλλη μορφή τῆς ἐξισώσεως τῶν φακῶν. Ἄν στή γενική ἐξίσωση (10) τῶν φακῶν ἀντικαταστήσουμε τό δεύτερο μέλος τῆς ἐξισώσεως μέ 1/f, σύμφωνα μέ τήν ἐξίσωση (11), βρίσκουμε ὅτι *ἡ γενική ἐξίσωση τῶν φακῶν* μπορεῖ νά λάβει καί τήν ἑξῆς μορφή :

$$\boxed{\text{γενική ἐξίσωση φακῶν} \quad \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{1}{f}} \qquad (12)$$

97. Ἐξισώσεις τοῦ φακοῦ σχετικές μέ τό εἴδωλο ἀντικειμένου

Γιά νά βροῦμε τή γενική ἐξίσωση τῶν φακῶν (§ 96), πήραμε ἕνα *φωτεινό σημεῖο* Α, πού βρίσκεται πάνω στόν κύριο ἄξονα τοῦ φακοῦ. Θά ἐξετάσουμε τή γενικότερη περίπτωση, πού ἐμπρός ἀπό τό φακό βρίσκεται ἕνα *ἀντικείμενο*. Γιά ἁπλότητα θά θεωρήσουμε ὅτι τό ἀντικείμενο εἶναι μιά φωτεινή εὐθεία ΑΒ, κάθετη στόν κύριο ἄξονα τοῦ φακοῦ.

α. Εἴδωλο ἀντικειμένου σχηματιζόμενο ἀπό συγκεντρωτικό φακό. Ἐμπρός ἀπό ἕνα συγκεντρωτικό φακό, ἑστιακῆς ἀποστάσεως f, βρίσκεται τό ἀντικείμενο ΑΒ σέ ἀπόσταση α ἀπό τό ὀπτικό κέντρο Ο τοῦ φακοῦ (σχ. 189). Οἱ ἀκτίνες ΒΟ καί ΒΓ, ὅταν βγοῦν ἀπό τό φακό, τέμνονται στό σημεῖο Β΄ πού εἶναι *τό πραγματικό εἴδωλο* τοῦ φωτεινοῦ σημείου Β. Τά εἴδωλα ὅλων τῶν ἄλλων σημείων τοῦ ἀντικειμένου ΑΒ βρίσκονται πάνω στήν εὐθεία Α΄Β΄, πού εἶναι κάθετη στόν κύριο ἄξονα. Τό εἴδωλο Α΄Β΄ εἶναι *πραγματικό, ἀντιστραμμένο* καί σχηματίζεται σέ ἀπόσταση β ἀπό τό ὀπτικό κέντρο τοῦ φακοῦ. Ἡ θέση τοῦ εἰδώλου (δηλαδή ἡ ἀπόσταση β) προσδιορίζεται ἀπό τή γενική ἐξίσωση τῶν φακῶν :



Σχ. 189. Πραγματικό εἴδωλο (Α΄Β΄) ἑνός ἀντικειμένου (ΑΒ).

$$\text{θέση τοῦ εἰδώλου} \qquad \boxed{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{1}{f}} \qquad (1)$$

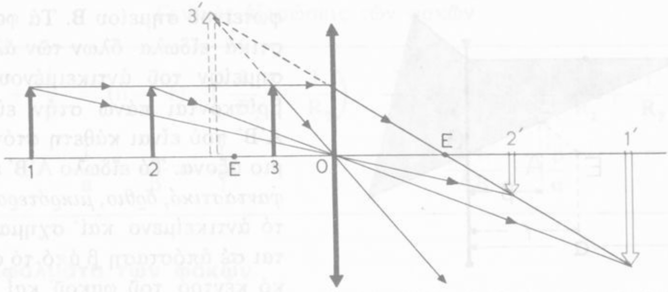
Ἀπό τά ὅμοια τρίγωνα ΟΑΒ καί ΟΑ΄Β΄ βρίσκουμε ὅτι εἶναι :

$$\text{γραμμική μεγέθυνση} \qquad \boxed{\frac{A'B'}{AB}=\frac{\beta}{\alpha}} \qquad (2)$$

Ἀπό τήν ἐξίσωση (2) μποροῦμε νά προσδιορίσουμε *τό μέγεθος* Α΄Β΄ τοῦ εἰδώλου.

Διερεύνηση τῆς ἐξισώσεως (1). Ἄν λύσουμε τήν ἐξίσωση (1) ὡς πρός β, ἔχουμε :

$$\beta=\frac{\alpha\cdot f}{\alpha-f} \quad \text{ἤ} \quad \beta=\frac{f}{1-\dfrac{f}{\alpha}} \qquad (3)$$



Σχ. 190. Διάφορες θέσεις τοῦ εἰδώλου (1΄, 2΄, 3΄).

1. $\alpha = \infty$. Τότε εἶναι $\beta = f$, τό εἴδωλο σχηματίζεται στήν κύρια ἑστία, εἶναι *πραγματικό*, ἀλλά εἶναι *ἕνα σημεῖο*.

2. $\alpha > f$. Τότε εἶναι $\beta > f$, τό εἴδωλο σχηματίζεται *πέρα* ἀπό τήν ἄλλη κύρια ἑστία, εἶναι *πραγματικό* καί *ἀντιστραμμένο* (σχ. 190).

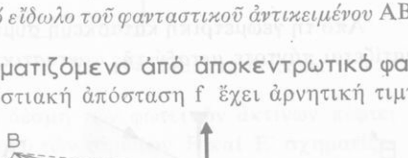
3. $\alpha = 2f$. Τότε εἶναι $\beta = 2f$, ἄρα $\beta = \alpha$. Τό εἴδωλο εἶναι *ἴσο* μέ τό ἀντικείμενο.

4. $\alpha = f$. Τότε εἶναι $\beta = \infty$, τό εἴδωλο σχηματίζεται στό ἄπειρο, δηλαδή *δέν ὑπάρχει εἴδωλο*.

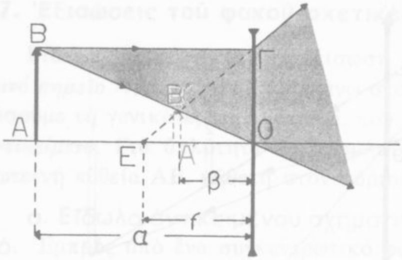
5. $\alpha < f$. Τότε εἶναι $\beta < 0$. Ἀπό τή γεωμετρική κατασκευή φαίνεται ὅτι τό εἴδωλο σχηματίζεται ἀπό τήν πλευρά τοῦ φακοῦ, πού βρίσκεται καί τό ἀντικείμενο, εἶναι *φανταστικό*, *ὀρθό* καί *μεγαλύτερο* ἀπό τό ἀντικείμενο.

Εἴδωλο φανταστικοῦ ἀντικειμένου. Ἄν πάνω στό συγκεντρωτικό φακό πέσει μιά δέσμη φωτεινῶν ἀκτίνων, πού συγκλίνει στό σημεῖο Β (σχ. 191), τότε ἡ φωτεινή δέσμη βγαίνοντας ἀπό τό φακό συγκεντρώνεται στό σημεῖο Β΄. Τό Α΄Β΄ εἶναι *τό πραγματικό εἴδωλο τοῦ φανταστικοῦ ἀντικειμένου* ΑΒ.

6. Εἴδωλο ἀντικειμένου σχηματιζόμενο ἀπό ἀποκεντρωτικό φακό. Στόν ἀποκεντρωτικό φακό ἡ ἑστιακή ἀπόσταση f ἔχει ἀρνητική τιμή ($f < 0$) καί ἡ κύρια ἑστία του Ε εἶναι φανταστική. Ἐμπρός ἀπό ἕναν ἀποκεντρωτικό φακό βρίσκεται τό ἀντικείμενο ΑΒ σέ ἀπόσταση α ἀπό τό ὀπτικό κέντρο τοῦ φακοῦ (σχ. 192). Οἱ ἀκτίνες ΒΟ καί ΒΓ, ὅταν βγοῦν ἀπό τό φακό *φαίνεται ὅτι προέρχονται* ἀπό τό σημεῖο Β΄, πού εἶναι *τό φανταστικό εἴδωλο* τοῦ



Σχ. 191. Πραγματικό εἴδωλο (Α΄Β΄) ἑνός φανταστικοῦ ἀντικειμένου (ΑΒ).



Σχ. 192. Φανταστικό εἴδωλο (A′B′) ἑνός πραγματικοῦ ἀντικειμένου (AB).

φωτεινοῦ σημείου B. Τά φανταστικά εἴδωλα ὅλων τῶν ἄλλων σημείων τοῦ ἀντικειμένου AB βρίσκονται πάνω στήν εὐθεία A′B′ πού εἶναι κάθετη στόν κύριο ἄξονα. Τό εἴδωλο A′B′ εἶναι *φανταστικό, ὄρθιο, μικρότερο* ἀπό τό ἀντικείμενο καί σχηματίζεται σέ ἀπόσταση β ἀπό τό ὀπτικό κέντρο τοῦ φακοῦ καί ἀπό τήν πλευρά τοῦ φακοῦ, πού βρίσκεται καί τό ἀντικείμενο.

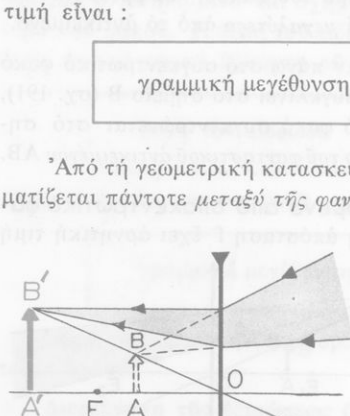
Ἡ θέση τοῦ εἰδώλου A′B′, δηλαδή ἡ ἀπόσταση β τοῦ εἰδώλου ἀπό τό ὀπτικό κέντρο τοῦ φακοῦ, προσδιορίζεται ἀπό τή γενική ἐξίσωση τῶν φακῶν, ἄν λάβουμε ὑπόψη ὅτι τά μεγέθη f καί β ἔχουν ἀρνητικές τιμές. Ἄρα ἔχουμε τήν ἐξίσωση :

θέση τοῦ εἰδώλου $\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} = -\frac{1}{f}$

Ἀπό τά ὅμοια τρίγωνα OAB καί OA′B′ βρίσκουμε ὅτι κατ' ἀπόλυτη τιμή εἶναι :

γραμμική μεγέθυνση $\frac{A'B'}{AB} = \frac{\beta}{\alpha}$

Ἀπό τή γεωμετρική κατασκευή συμπεραίνουμε ὅτι τό εἴδωλο A′B′ σχηματίζεται πάντοτε *μεταξύ τῆς φανταστικῆς κύριας ἑστίας* E *καί τοῦ φακοῦ*.



Σχ. 193. Πραγματικό εἴδωλο (A′B′) ἑνός φανταστικοῦ ἀντικειμένου (AB).

Εἴδωλο φανταστικοῦ ἀντικειμένου. Ἄν πάνω στόν ἀποκεντρωτικό φακό πέσει μιά δέσμη φωτεινῶν ἀκτίνων, πού συγκλίνει στό σημεῖο B (σχ. 193), τότε ἡ φωτεινή δέσμη βγαίνοντας ἀπό τό φακό ἐκτρέπεται καί συγκεντρώνεται στό σημεῖο B′. Τό A′B′ εἶναι *τό πραγματικό εἴδωλο τοῦ φανταστικοῦ ἀντικειμένου* AB.

Γενικές ἐξισώσεις τῶν φακῶν

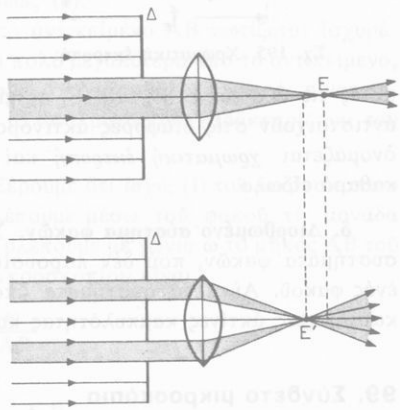
$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = (n-1)\cdot\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \qquad \frac{1}{f} = (n-1)\cdot\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{1}{f} \qquad \frac{A'B'}{AB} = \frac{\beta}{\alpha}$$

98. Σφάλματα τῶν φακῶν

Οἱ φακοί παρουσιάζουν ὁρισμένα σφάλματα, πού ὀνομάζονται *ἐκτροπές*.

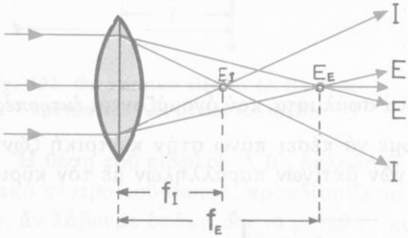
α. Σφαιρική ἐκτροπή. Ἀφήνουμε νά πέσει πάνω στήν κεντρική ζώνη τοῦ φακοῦ μιά λεπτή δέσμη φωτεινῶν ἀκτίνων παράλληλων μέ τόν κύριο ἄξονα (σχ. 194). Ἡ ἐξερχόμενη δέσμη συγκεντρώνεται στήν κύρια ἑστία Ε. Σκεπάζουμε τώρα τήν κεντρική ζώνη τοῦ φακοῦ καί ἀφήνουμε νά πέσουν οἱ παράλληλες φωτεινές ἀκτίνες πάνω στήν περιφερειακή ζώνη τοῦ φακοῦ. Οἱ ἐξερχόμενες ἀπό τό φακό ἀκτίνες συγκεντρώνονται σέ μιά ἄλλη κύρια ἑστία Ε΄, πού βρίσκεται πιό κοντά στό φακό. Αὐτό συμβαίνει, γιατί οἱ ἀκτίνες πού πέφτουν στήν περιφερειακή ζώνη τοῦ φακοῦ παθαίνουν μεγαλύτερη ἐκτροπή, ἐπειδή αὐτή ἡ ζώνη ἀντιστοιχεῖ σέ στοιχειώδη πρίσματα μέ μεγαλύτερη διαθλαστική γωνία. Ὅταν λοιπόν ἡ δέσμη τῶν φωτεινῶν ἀκτίνων πέφτει πάνω σ' ὁλόκληρο τό φακό, τότε μεταξύ τῶν σημείων Ε καί Ε΄ σχηματίζεται μιά σειρά ἀπό κύριες ἑστίες καί ἑπομένως δέν σχηματίζεται καθαρό εἴδωλο. Αὐτό τό ἐλάττωμα τῶν φακῶν ὀνομάζεται *σφαιρική ἐκτροπή*. Γιά νά περιορίσουμε τή σφαιρική ἐκτροπή, βάζουμε ἐμπρός ἀπό τό φακό διάφραγμα, πού ἔχει κυκλικό ἄνοιγμα καί ἀφήνει νά πέφτουν πάνω στό φακό μόνο κεντρικές ἀκτίνες.



Σχ. 194. Σφαιρική ἐκτροπή.

β. Ἀστιγματική ἐκτροπή. Ὅταν μιά λεπτή δέσμη φωτεινῶν ἀκτίνων, παράλληλων μέ ἕνα δευτερεύοντα ἄξονα, πέσει πάνω στό φακό σχηματίζοντας μεγάλη γωνία μέ τόν κύριο ἄξονα, τότε οἱ ἐξερχόμενες ἀπό τό φακό ἀκτίνες δέ συγκεντρώνονται στή δευτερεύουσα ἑστία, ἀλλά περνοῦν ἀπό δύο *ἑστιακές γραμμές*, πού εἶναι κάθετες μεταξύ τους καί δέ βρίσκονται πάνω στό ἴδιο ἐπίπεδο. Αὐτό τό ἐλάττωμα τῶν φακῶν ὀνομάζεται *ἀστιγματική ἐκτροπή* ἤ *ἀστιγματισμός*.

γ. Χρωματική ἐκτροπή. Τό λευκό φῶς, ὅταν περνάει μέσα ἀπό τό φακό, ἀναλύεται σέ πολλές ἀκτινοβολίες (χρώματα), πού καθεμιά ἔχει δικό της δείκτη διαθλάσεως. Ὅταν λοιπόν πάνω στό φακό, πέφτει μιά παράλληλη δέσμη ἀκτίνων *λευκοῦ φωτός*, τότε οἱ ἐξερχόμενες ἀπό τό φακό ἐρυθρές ἀκτίνες σχηματίζουν μιά κύρια ἑστία E_E, ἐνῶ οἱ ἰώδεις ἀκτίνες, πού παθαίνουν μεγαλύτερη ἐκτροπή, σχηματίζουν μιά ἄλλη κύρια ἑστία E_I (σχ. 195). Ἀνάμεσα σέ αὐτές τίς δύο ἑστίες E_E καί E_I σχηματίζονται πολλές κύριες ἑστίες, πού ἀντιστοιχοῦν στίς διάφορες ἀκτινοβολίες. Αὐτό τό ἐλάττωμα τῶν φακῶν ὀνομάζεται *χρωματική ἐκτροπή* καί συντελεῖ στό νά μή σχηματίζεται καθαρό εἴδωλο.

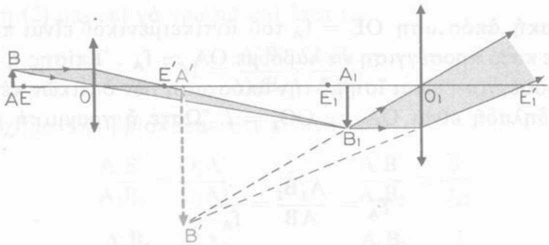


Σχ. 195. Χρωματική ἐκτροπή.

δ. Διορθωμένο σύστημα φακῶν. Στά ὀπτικά ὄργανα χρησιμοποιοῦμε συστήματα φακῶν, πού δέν παρουσιάζουν τά παραπάνω ἐλαττώματα τοῦ ἑνός φακοῦ. Αὐτά τά συστήματα ἀποτελοῦνται ἀπό πολλούς φακούς μέ κατάλληλες ἀκτίνες καμπυλότητας καί κατάλληλους δεῖκτες διαθλάσεως.

99. Σύνθετο μικροσκόπιο

Γιά τήν παρατήρηση πολύ μικρῶν ἀντικειμένων χρησιμοποιοῦμε *τό σύνθετο μικροσκόπιο* πού συνήθως τό λέμε *μικροσκόπιο*. Αὐτό ἀποτελεῖται βασικά ἀπό δύο συγκεντρωτικούς φακούς, πού εἶναι στερεωμένοι στίς δύο ἄκρες ἑνός σωλήνα. Ὁ ἕνας φακός ὀνομάζεται *ἀντικειμενικός* καί ἔχει πολύ μικρή ἑστιακή ἀπόσταση (f_A). Λίγο πέρα ἀπό τήν κύρια ἑστία του τοποθετοῦμε τό μικρό ἀντικείμενο AB πού θέλουμε νά παρατηρήσουμε (σχ. 196). Ὁ ἀντικειμενικός φακός δίνει τότε τό εἴδωλο A_1B_1, πού εἶναι *πραγματικό*, ἀντιστραμμένο καί μεγαλύτερο ἀπό τό ἀντικείμενο. Ὁ δεύτερος φακός ὀνομάζεται *προσοφθάλμιος* καί λειτουργεῖ ὡς ἁπλό μικροσκόπιο, γιατί τό πραγματικό εἴδωλο A_1B_1 σχηματίζεται μεταξύ τοῦ προσοφθάλμιου φακοῦ καί τῆς κύριας ἑστίας του.



Σχ. 196. Σύνθετο μικροσκόπιο.

Γιά τόν προσοφθάλμιο φακό τό πραγματικό εἴδωλο A_1B_1 παίζει ρόλο πραγματικοῦ ἀντικειμένου. Ἔτσι ὁ προσοφθάλμιος φακός δίνει τό εἴδωλο $A'B'$, πού εἶναι *φανταστικό*, ὄρθιο καί μεγαλύτερο ἀπό τό A_1B_1. Γιά νά βλέπουμε καθαρά τό τελικό εἴδωλο $A'B'$, πρέπει αὐτό νά σχηματίζεται στήν ἐλάχιστη ἀπόσταση εὐκρινοῦς ὁράσεως (δ).

Μέ τή βοήθεια ἑνός καθρέφτη τό ἀντικείμενο ΑΒ φωτίζεται ἰσχυρά, ὥστε τό τελικό εἴδωλο $A'B'$, πού εἶναι πολύ μεγαλύτερο ἀπό τό ἀντικείμενο, νά εἶναι φωτεινό. Ὁ ἀντικειμενικός καί ὁ προσοφθάλμιος φακός εἶναι συστήματα φακῶν, γιά νά ἀποφεύγονται τά σφάλματα πού χαρακτηρίζουν τόν ἕνα φακό.

α. Ἰσχύς τοῦ μικροσκοπίου. Ξέρουμε ὅτι *ἰσχύς* (Ι) τοῦ μικροσκοπίου ὀνομάζεται ἡ γωνία μέ τήν ὁποία βλέπουμε μέσω τοῦ φακοῦ τή μονάδα μήκους τοῦ ἀντικειμένου. Ἄν λοιπόν βλέπουμε μέ γωνία ω τό μῆκος ΑΒ τοῦ ἀντικειμένου, τότε ἡ ἰσχύς (Ι) τοῦ μικροσκοπίου εἶναι :

$$I = \frac{\omega}{AB}$$

Ἡ ἐξίσωση αὐτή γράφεται καί ἔτσι :

$$I = \frac{\omega}{A_1B_1} \cdot \frac{A_1B_1}{AB} \qquad (1)$$

Ἀλλά ω/A_1B_1 εἶναι *ἡ ἰσχύς* I_Π τοῦ προσοφθάλμιου φακοῦ. Αὐτός εἴδαμε ὅτι λειτουργεῖ ὡς ἁπλό μικροσκόπιο καί, ὅπως ξέρουμε, ἡ ἰσχύς του εἶναι $I_\Pi = \dfrac{1}{f_\Pi}$. Ὥστε εἶναι :

$$\frac{\omega}{A_1B_1} = \frac{1}{f_\Pi}$$

Στήν ἐξίσωση (1) ὁ λόγος A_1B_1/AB εἶναι *ἡ γραμμική μεγέθυνση* γ_A τοῦ ἀντικειμενικοῦ φακοῦ, ἡ ὁποία εἶναι :

$$\gamma_A = \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{OA_1}{OA}$$

Ἡ ἐστιακή ἀπόσταση $OE = f_A$ τοῦ ἀντικειμενικοῦ εἶναι πολύ μικρή καί μποροῦμε κατά προσέγγιση νά λάβουμε $OA \simeq f_A$. Ἐπίσης ἡ ἀπόσταση OA_1 κατά προσέγγιση εἶναι ἴση μέ τήν ἀπόσταση τῶν ὀπτικῶν κέντρων τῶν δύο φακῶν, δηλαδή εἶναι $OA_1 \simeq OO_1 = l$. Ὥστε ἡ γραμμική μεγέθυνση γ_A εἶναι :

$$\gamma_A = \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{l}{f_A}$$

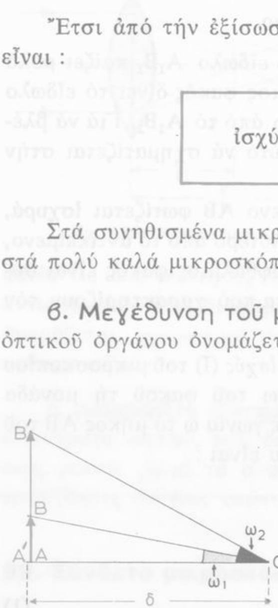
Ἔτσι ἀπό τήν ἐξίσωση (1) βρίσκουμε ὅτι *ἡ ἰσχύς τοῦ μικροσκοπίου* εἶναι :

$$\boxed{\text{ἰσχύς μικροσκοπίου} \quad I = \frac{l}{f_A \; f_\Pi}}$$

Στά συνηθισμένα μικροσκόπια ἡ ἰσχύς φτάνει ὥς 3000 διοπτρίες, ἐνῶ στά πολύ καλά μικροσκόπια φτάνει ὥς 10 000 διοπτρίες.

β. Μεγέθυνση τοῦ μικροσκοπίου. Ξέρουμε ὅτι *μεγέθυνση* (Μ) ἑνός ὀπτικοῦ ὀργάνου ὀνομάζεται ὁ λόγος τῆς γωνίας (ω_2), μέ τήν ὁποία βλέπουμε μέσω τοῦ ὀργάνου τό εἴδωλο (Α΄Β΄), πρός τήν γωνία (ω_1), μέ τήν ὁποία βλέπουμε τό ἀντικείμενο (ΑΒ) μέ γυμνό μάτι, ὅταν τό ἀντικείμενο βρίσκεται στήν ἐλάχιστη ἀπόσταση εὐκρινοῦς ὁράσεως (δ), δηλαδή εἶναι :

$$M = \frac{\omega_2}{\omega_1}$$



Σχ. 197. Μεγέθυνση $M = \omega_2/\omega_1$.

Ἄς θεωρήσουμε ὅτι τό ἀντικείμενο ΑΒ καί τό εἴδωλο Α΄Β΄ βρίσκονται στήν ἐλάχιστη ἀπόσταση εὐκρινοῦς ὁράσεως δ (σχ. 197). Τότε οἱ γωνίες ω_2 καί ω_1, ἄν ἀντί γιά τίς ἐφαπτόμενες λάβουμε τίς ἴδιες τίς γωνίες, εἶναι :

$$\omega_2 = \frac{A'B'}{\delta} \quad \text{καί} \quad \omega_1 = \frac{AB}{\delta}$$

Ἄρα ἡ μεγέθυνση τοῦ μικροσκοπίου εἶναι :

$$M = \frac{A'B'}{AB} \tag{2}$$

Ἡ ἐξίσωση (2) μπορεῖ νά γραφεῖ καί ἔτσι:

$$M = \frac{A'B'}{A_1B_1} \frac{A_1B_1}{AB} \tag{3}$$

Ἀπό τό σχῆμα 196 βρίσκουμε ὅτι εἶναι:

$$\frac{A'B'}{A_1B_1} = \frac{O_1A'}{O_1A_1} \quad \text{ἤ} \quad \frac{A'B'}{A_1B_1} \simeq \frac{\delta}{f_\Pi}$$

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{OA_1}{OA} \quad \text{ἤ} \quad \frac{A_1B_1}{AB} \simeq \frac{l}{f_A}$$

Ἔτσι ἀπό τήν ἐξίσωση (3) βρίσκουμε ὅτι *ἡ μεγέθυνση τοῦ μικροσκοπίου* εἶναι

μεγέθυνση μικροσκοπίου $\quad M = \dfrac{l \cdot \delta}{f_A \cdot f_\Pi}$

Κατά συνθήκη *ἡ ἐμπορική μεγέθυνση* τοῦ μικροσκοπίου ὁρίζεται μέ βάση τήν ἐλάχιστη ἀπόσταση εὐκρινοῦς ὁράσεως τοῦ κανονικοῦ ματιοῦ $\delta = 25$ cm.

Παράδειγμα. Σέ ἕνα μικροσκόπιο εἶναι:

$$l = 20 \text{ cm}, \quad f_A = 1 \text{ cm}, \quad f_\Pi = 2 \text{ cm}$$

Ἡ ἰσχύς αὐτοῦ τοῦ μικροσκοπίου εἶναι:

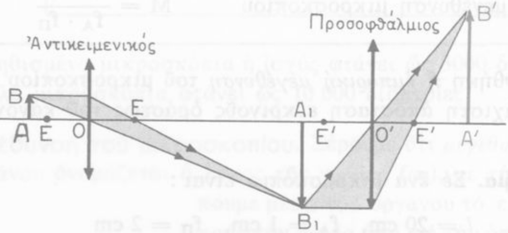
$$I = \frac{l}{f_A \cdot f_\Pi} = \frac{0{,}20 \text{ m}}{0{,}01 \text{ m} \cdot 0{,}02 \text{ m}} = 100 \text{ διοπτρίες } (m^{-1})$$

Ἄν τό μικροσκόπιο τό χρησιμοποιεῖ ἕνας παρατηρητής, πού ἔχει ἐλάχιστη ἀπόσταση εὐκρινοῦς ὁράσεως $\delta = 20$ cm, τότε γι' αὐτό τόν παρατηρητή ἡ μεγέθυνση τοῦ μικροσκοπίου εἶναι:

$$M = I \cdot \delta = 1000 \text{ m}^{-1} \cdot 0{,}20 \text{ m} = 200$$

γ. Διαχωριστική ἱκανότητα τοῦ μικροσκοπίου. Ὅσο αὐξάνεται ἡ μεγέθυνση τοῦ μικροσκοπίου, τόσο περισσότερες λεπτομέρειες διακρίνει τό μάτι μας πάνω στό μικροσκοπικό ἀντικείμενο πού παρατηρεῖ. Ἀλλά δύο σημεῖα δέν μπορεῖ νά διακρίνονται ὡς ξεχωριστά σημεῖα, ὅταν ἡ ἀπόστασή τους εἶναι μικρότερη ἀπό ἕνα ὅριο, πού ὀνομάζεται *διαχωριστική ἱκανότητα* (ἤ διακριτική ἱκανότητα). Ἄν ἡ ἀπόσταση τῶν δύο σημείων εἶναι μικρότερη ἀπό αὐτό τό ὅριο, τότε στό εἴδωλο, ἀντί γιά δύο ξεχωριστά σημεῖα, σχηματίζονται δύο μικροί φωτεινοί κύκλοι, πού ὁ ἕνας σκεπάζει ἕνα μέρος τοῦ ἄλλου. Αὐτό τό φαινόμενο ὀφείλεται στήν *περίθλαση* τοῦ φωτός, ἡ ὁποία εἶναι ἀποτέλεσμα τῆς κυματικῆς φύσεως τοῦ φωτός. Ὥστε ἡ διαχωριστική ἱκανότητα τοῦ μικροσκοπίου ἔχει ἕνα ὅριο, πού δέν μποροῦμε νά τό ξεπεράσουμε.

δ. Μικροφωτογραφία. Μποροῦμε νά ρυθμίσουμε τήν ἀπόσταση τῶν δύο φακῶν τοῦ μικροσκοπίου ἔτσι, ὥστε τό πραγματικό εἴδωλο A_1B_1, πού δίνει ὁ ἀντικειμενικός, νά σχηματίζεται ἐμπρός ἀπό τήν κύρια ἑστία τοῦ προσοφθάλμιου φακοῦ (σχ. 198). Τότε ὁ προσοφθάλμιος φακός δίνει *τό πραγματικό* εἴδωλο A′B′, πού μπορεῖ νά σχηματιστεῖ πάνω σέ διάφραγμα ἤ σέ φωτογραφική πλάκα (*μικροφωτογραφία*) ἤ σέ κινηματογραφική ταινία (*κινηματομικρογραφία*). Αὐτές οἱ κινηματογραφικές ταινίες προσφέρουν πολύτιμη βοήθεια στήν ἐπιστημονική ἔρευνα καί στή διδασκαλία.



Ἀχρωματικό σύστημα

100. Ἀχρωματικό σύστημα δύο πρισμάτων

Ἕνα λεπτό πρίσμα ἔχει διαθλαστική γωνία A καί δεῖκτες διαθλάσεως n_E γιά τήν ἐρυθρή ἀκτινοβολία καί n_I γιά τήν ἰώδη ἀκτινοβολία. Ὅταν πάνω στό πρίσμα πέφτει λευκό φῶς, τότε ἡ γωνία ἐκτροπῆς δ εἶναι:

γιά τίς ἐρυθρές ἀκτίνες $\delta_E = (n_E - 1) \cdot A$

γιά τίς ἰώδεις ἀκτίνες $\delta_I = (n_I - 1) \cdot A$

Οἱ ἐρυθρές καί οἱ ἰώδεις ἀκτίνες πού βγαίνουν ἀπό τό πρίσμα, σχηματίζουν μεταξύ τους μιά γωνία πού εἶναι ἴση μέ *τή διαφορά τῶν δύο γωνιῶν ἐκτροπῆς*, δηλαδή εἶναι:

$$\delta_I - \delta_E = (n_I - 1) \cdot A - (n_E - 1) \cdot A \quad \text{ἄρα} \quad \delta_I - \delta_E = (n_I - n_E) \cdot A$$

Πάνω στό διάφραγμα, πού βρίσκεται σέ ὁρισμένη ἀπόσταση ἀπό τό πρίσμα, παρατηροῦμε τό φάσμα τοῦ λευκοῦ φωτός. *Τό πλάτος τοῦ φάσματος* πού παρατηροῦμε, προσδιορίζεται ἀπό τή διαφορά $\delta_I - \delta_E$ τῶν γωνιῶν ἐκτροπῆς.

Γιά τή στεφανύαλο εἶναι $n_I - n_E = 0{,}02$ ἐνῶ γιά τήν πυριτύαλο εἶναι $n_I - n_E = 0{,}04$. Ὥστε γιά τήν ἴδια διαθλαστική γωνία A ἕνα πρίσμα ἀπό πυριτύαλο δίνει φάσμα πού ἔχει διπλάσιο πλάτος ἀπό τό φάσμα πού δίνει τό πρίσμα ἀπό στεφανύαλο.

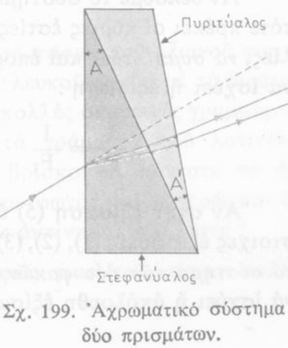
Συνθήκη ἀχρωματισμοῦ δύο πρισμάτων. Ἕνα λεπτό πρίσμα Σ ἔχει διαθλαστική γωνία A καί ἀντίστοιχους δεῖκτες διαθλάσεως γιά τίς ἐρυθρές καί τίς ἰώδεις ἀκτίνες n_E καί n_I. Τό φάσμα πού σχηματίζει αὐτό τό πρίσμα ἔχει πλάτος :

$$\delta_I - \delta_E = (n_I - n_E) \cdot A$$

Ἕνα ἄλλο πρίσμα Π ἔχει ἀντίστοιχους δεῖκτες διαθλάσεως γιά τίς ἐρυθρές καί τίς ἰώδεις ἀκτίνες n_E' καί n_I'. Ἄν τό πρίσμα Π ἔχει μιά κατάλληλη διαθλαστική γωνία A′, μπορεῖ αὐτό τό πρίσμα νά δώσει φάσμα πού νά ἔχει πλάτος ἴσο μέ τό πλάτος πού ἔχει τό φάσμα τοῦ πρίσματος Σ. Τότε θά εἶναι :

$$\delta_I - \delta_E = (n_I' - n_E') \cdot A'$$

Ἄν συνδυάσουμε τά δύο πρίσματα Σ καί Π, ὅπως φαίνεται στό σχῆμα 199, τότε τό δεύτερο πρίσμα *ἀναιρεῖ* τήν ἀνάλυση τοῦ φωτός πού προκάλεσε τό πρῶτο πρίσμα καί ἀπό τό δεύτερο πρίσμα βγαίνει μιά δέσμη ἀκτίνων *λευκοῦ φωτός*. Ὥστε τό λευκό φῶς, περνώντας μέσα ἀπό τό σύστημα τῶν δύο πρισμάτων *δέν παθαίνει ἀνάλυση*, ἀλλά μόνο ἐκτροπή. Τά δύο πρίσματα Σ καί Π ἀποτελοῦν ἕνα *ἀχρωματικό σύστημα πρισμάτων*. Ἀπό τά παραπάνω συμπεραίνουμε ὅτι, γιά νά ἀποτελέσουν δύο διαφορετικά πρίσματα ἕνα ἀχρωματικό σύστημα, πρέπει νά ἰσχύει ἡ ἀκόλουθη ἐξίσωση :



Σχ. 199. Ἀχρωματικό σύστημα δύο πρισμάτων.

συνθήκη ἀχρωματισμοῦ δύο πρισμάτων	$(n_I - n_E) \cdot A = (n_I' - n_E') \cdot A'$

101. Ἀχρωματικό σύστημα δύο φακῶν

Δύο φακοί A καί B ἔχουν ἀκτίνες καμπυλότητας, ὁ A φακός R_1, R_2 καί ὁ B φακός R_3, R_4. Οἱ δεῖκτες διαθλάσεως γιά τήν ἐρυθρή καί τήν ἰώδη ἀκτινοβολία εἶναι στόν A φακό n_E, n_I καί στό B φακό n_E', n_I'. Τότε γιά τόν καθένα φακό ἰσχύουν οἱ παρακάτω ἐξισώσεις:

γιά τό φακό A:

$$\frac{1}{f_E} = (n_E - 1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \quad (1) \quad \text{καί} \quad \frac{1}{f_I} = (n_I - 1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \quad (2)$$

γιά τό φακό B

$$\frac{1}{f_E'} = (n_E' - 1)\left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right) \quad (3) \quad \text{καί} \quad \frac{1}{f_I'} = (n_I' - 1)\left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right) \quad (4)$$

Ἄν οἱ δύο φακοί συνδεθοῦν καί ἀποτελέσουν ἕνα ὁμοαξονικό σύστημα, τότε *ἡ ἰσχύς τοῦ συστήματος* γιά τίς δύο ἀκραῖες ἀκτινοβολίες τοῦ φάσματος τοῦ λευκοῦ φωτός εἶναι:

γιά τήν ἐρυθρή ἀκτινοβολία $\quad \dfrac{1}{F_E} = \dfrac{1}{f_E} + \dfrac{1}{f_E'}$

γιά τήν ἰώδη ἀκτινοβολία $\quad \dfrac{1}{F_I} = \dfrac{1}{f_I} + \dfrac{1}{f_I'}$

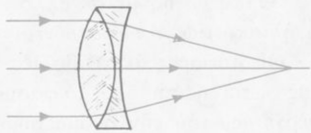
Ἄν θέλουμε τό σύστημα τῶν δύο φακῶν A καί B νά εἶναι *ἀχρωματικό*, τότε πρέπει οἱ κύριες ἑστίες, πού ἀντιστοιχοῦν στίς δύο ἀκραῖες ἀκτινοβολίες, *νά συμπίπτουν* καί ἑπομένως πρέπει νά εἶναι $F_E = F_I$, δηλαδή πρέπει νά ἰσχύει ἡ ἐξίσωση:

$$\frac{1}{F_E} = \frac{1}{F_I} \quad \text{ἤ} \quad \frac{1}{f_E} + \frac{1}{f_E'} = \frac{1}{f_I} + \frac{1}{f_I'} \quad (5)$$

Ἄν στήν ἐξίσωση (5) ἀντικαταστήσουμε τά κλάσματα ἀπό τίς ἀντίστοιχες ἐξισώσεις (1), (2), (3) καί (4), βρίσκουμε ὅτι, γιά νά εἶναι *ἀχρωματικό τό σύστημα τῶν δύο φακῶν* γιά τίς δύο θεωρούμενες ἀκτινοβολίες, πρέπει νά ἰσχύει ἡ ἀκόλουθη ἐξίσωση:

συνθήκη ἀχρωματισμοῦ

$$\boxed{(n_I - n_E)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = -(n_I' - n_E')\left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right)} \quad (6)$$



Σχ. 200. Ἀχρωματικό σύστημα δύο φακῶν.

Ἡ ἐξίσωση (6) φανερώνει ὅτι, γιά νά πραγματοποιήσουμε τό παραπάνω ἀχρωματικό σύστημα, πρέπει νά συνδυάσουμε ἕνα *συγκεντρωτικό* καί ἕναν *ἀποκεντρωτικό* φακό, πού νά ἀποτελοῦνται ἀπό *διαφορετικό εἶδος γυαλιοῦ*. Ἐπειδή οἱ δύο φακοί τοῦ συστήματος βρίσκονται σέ ἐπαφή, ἕπεται ὅτι οἱ δύο ἐφαπτόμενες ἐπιφάνειες ἔχουν τήν ἴδια ἀκτίνα καμπυλότητας, δηλαδή εἶναι $R_2 = R_3$ (σχ. 200). Τό ἀχρωματικό σύστημα μπορεῖ νά εἶναι συγκεντρωτικό ἤ ἀποκεντρωτικό. Ἡ ἑστιακή ἀπόσταση F τοῦ συστήματος προσδιορίζεται ἀπό τήν ἐξίσωση :

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{f_E} + \frac{1}{f_E'} = \frac{1}{f_I} + \frac{1}{f_I'}$$

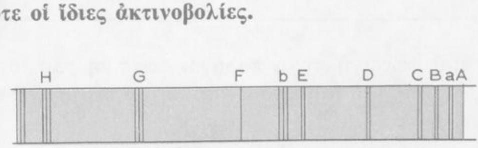
Μέ δύο μόνο φακούς δέν πετυχαίνουμε νά κατασκευάσουμε τελείως ἀχρωματικό σύστημα καί γι' αὐτό τά ἀχρωματικά συστήματα φακῶν ἔχουν περισσότερους ἀπό δύο φακούς.

Φωτεινή ἐνέργεια

102. Ἡλιακό φάσμα

Ἄν μέ τό φασματοσκόπιο ἐξετάσουμε *τό φάσμα τοῦ ἡλιακοῦ φωτός*, παρατηροῦμε ὅτι εἶναι ὅμοιο μέ τό φάσμα τοῦ λευκοῦ φωτός, μέ τή διαφορά ὅτι στό φάσμα τοῦ ἡλιακοῦ φωτός ὑπάρχουν πολλές σκοτεινές γραμμές. Οἱ πιό ζωηρές ἀπό αὐτές χαρακτηρίζονται μέ τά γράμματα τοῦ λατινικοῦ ἀλφάβητου (σχ. 201). Οἱ σκοτεινές γραμμές βρίσκονται πάντοτε σέ *ὁρισμένες θέσεις* σχετικά μέ τό φάσμα τοῦ λευκοῦ φωτός καί φανερώνουν ὅτι ἀπό τό ἡλιακό φῶς *λείπουν* πάντοτε ὁρισμένες ἀκτινοβολίες. Ὥστε :

Τό ἡλιακό φῶς δέν εἶναι τελείως λευκό φῶς, γιατί τοῦ λείπουν πολλές καί πάντοτε οἱ ἴδιες ἀκτινοβολίες.



Σχ. 201. Οἱ πιό ζωηρές σκοτεινές γραμμές τοῦ ἡλιακοῦ φάσματος.

Ὅπως θά δοῦμε σέ ἄλλο κεφάλαιο, οἱ ἀκτινοβολίες πού λείπουν ἀπό τό ἡλιακό φῶς *ἀπορροφοῦνται* ἀπό τή διάπυρη ἀτμόσφαιρα τοῦ Ἡλίου.

Οἱ διάφορες ἀκτινοβολίες πού ἀποτελοῦν τό φάσμα τοῦ λευκοῦ φωτός μιᾶς φωτεινῆς πηγῆς ἤ τό φάσμα τοῦ ἡλιακοῦ φωτός μεταφέρουν μιά μορφή ἐνέργειας, πού τήν ὀνομάζουμε *φωτεινή ἐνέργεια.*

103. Μηχανικό ἰσοδύναμο τοῦ φωτός

Σέ ὅλες τίς φωτεινές πηγές γιά *τήν παραγωγή τῆς φωτεινῆς ἐνέργειας* ξοδεύεται μιά ἄλλη μορφή ἐνέργειας. Ἔτσι π.χ. στόν ἠλεκτρικό λαμπτήρα ἡ ἠλεκτρική ἐνέργεια *μετατρέπεται* σέ φωτεινή ἐνέργεια καί ἰσχύει ἡ ἀρχή τῆς διατηρήσεως τῆς ἐνέργειας. Ἑπομένως ἠλεκτρική ἰσχύς P (Watt) μετατρέπεται σέ *ἰσοδύναμη* φωτεινή ροή Φ (lumen) καί ἰσχύει ἡ ἐξίσωση :

$$P = M \cdot \Phi$$

ὅπου M εἶναι συντελεστής πού ὀνομάζεται *μηχανικό ἰσοδύναμο τοῦ φωτός.* Ὥστε ἔχουμε τή σχέση :

μηχανικό ἰσοδύναμο τοῦ φωτός	$M = \dfrac{P\ (\text{Watt})}{\Phi\ (\text{lumen})}$	(1)

Ἄν στήν ἐξίσωση (1) εἶναι Φ = 1 lumen, τότε εἶναι M = P. Ὥστε :

Τό μηχανικό ἰσοδύναμο (M) τοῦ φωτός ἐκφράζει τήν ἰσχύ σέ Watt, ἡ ὁποία ἰσοδυναμεῖ μέ φωτεινή ροή ἴση μέ 1 lumen.

Ἡ μέτρηση τοῦ μηχανικοῦ ἰσοδυνάμου τοῦ φωτός ἀπαιτεῖ πολύ λεπτές μετρήσεις. Ἔτσι βρέθηκε ὅτι :

Στίς συνηθισμένες φωτεινές πηγές 1 lumen λευκοῦ φωτός ἰσοδυναμεῖ μέ ἰσχύ 0,01 Watt.

μηχανικό ἰσοδύναμο λευκοῦ φωτός	$M = 0{,}01 \dfrac{\text{Watt}}{\text{lumen}}$

Ἄν λοιπόν μιά φωτεινή πηγή παράγει φωτεινή ροή ἴση μέ Φ = 350 lumen, αὐτή ἡ φωτεινή ροή ἰσοδυναμεῖ μέ μηχανική ἰσχύ P ἴση μέ :

$$P = M \cdot \Phi = 0{,}01\ \frac{\text{Watt}}{\text{lumen}} \cdot 350\ \text{lumen} = 3{,}50\ \text{Watt}$$

104. Συντελεστής ἀποδόσεως φωτεινῆς πηγῆς

Ὅπως σέ ὅλες τίς περιπτώσεις πού μιά μορφή ἐνέργειας *μετατρέπεται* σέ ἄλλη, ἔτσι καί στήν περίπτωση τῶν φωτεινῶν πηγῶν ἰσχύει ὁ ἀκόλουθος *ὁρισμός* :

Ὀνομάζεται συντελεστής ἀποδόσεως (η) μιᾶς φωτεινῆς πηγῆς ὁ λόγος τῆς ὠφέλιμης ὁλικῆς φωτεινῆς ροῆς ($\Phi_{ολ}$) πού παράγεται πρός τή δαπανώμενη ἰσχύ.

συντελεστής ἀποδόσεως φωτεινῆς πηγῆς	$\eta = \dfrac{\Phi_{ολ}}{P_{δαπ}}$

Ἡ ὠφέλιμη ὁλική φωτεινή ροή μετρημένη σέ Watt εἶναι ἴση μέ :

$$P_{ωφελ} = M \cdot \Phi_{ολ}$$

Ἐπομένως ὁ συντελεστής ἀποδόσεως μιᾶς φωτεινῆς πηγῆς εἶναι :

$$\eta = \frac{P_{ωφελ}}{P_{δαπ}} \quad ἤ \quad \eta = \frac{M \cdot \Phi_{ολ}}{P_{δαπ}}$$

Ἕνας συνηθισμένος ἠλεκτρικός λαμπτήρας πυρακτώσεως πού ἔχει ἰσχύ καταναλώσεως $P_{δαπ} = 25$ Watt, δίνει ὁλική φωτεινή ροή $\Phi_{ολ} = 260$ lumen. Ἐπομένως ὁ συντελεστής ἀποδόσεως τοῦ λαμπτήρα εἶναι :

$$\eta = \frac{M \cdot \Phi_{ολ}}{P_{δαπ}} = \frac{0{,}01 \text{ Watt/lumen} \cdot 260 \text{ lumen}}{25 \text{ Watt}} \quad καί \quad \eta = 0{,}104$$

Αὐτός ὁ λαμπτήρας ἔχει *ἀπόδοση* 10,4%, δηλαδή σχεδόν μόνο τό 1/10 τῆς ἠλεκτρικῆς ἐνέργειας πού ξοδεύεται, μετατρέπεται *σέ ὠφέλιμη φωτεινή ἐνέργεια*. Ὅλες οἱ φωτεινές πηγές ἐκτός ἀπό τίς ὁρατές ἀκτινοβολίες ἐκπέμπουν καί πολλές ἀόρατες ἀκτινοβολίες, πού πρακτικά εἶναι ἄχρηστες, γιατί *ὠφέλιμη ἰσχύς* εἶναι μόνο οἱ ὁρατές ἀκτινοβολίες.

Γενικά ὅλες οἱ συνηθισμένες φωτεινές πηγές ἔχουν *πολύ μικρή ἀπόδοση*. Ἀπό τούς ἠλεκτρικούς λαμπτῆρες τή μεγαλύτερη ἀπόδοση ἔχουν οἱ λαμπτῆρες φθορισμοῦ. Γιά τήν ἴδια ἰσχύ καταναλώσεως π.χ. 40 Watt, ὁ λαμπτήρας πυρακτώσεως ἔχει ἀπόδοση 11,6%, ἐνῶ ὁ λαμπτήρας φθορισμοῦ ἔχει 58%.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

181. Ἕνας κανόνας, βαθμολογημένος σέ ἑκατοστόμετρα, ἔχει στή διαίρεση μηδέν μιά πολύ μικρή φωτεινή σχισμή Φ. Παράλληλα μέ τόν κανόνα καί σέ ἀπόσταση $\delta = 50$ cm ἀπό ἀπό αὐτόν εἶναι ἕνας μικρός ἐπίπεδος καθρέφτης, πού βρίσκεται πάνω στήν κάθετο στόν κανόνα στό σημεῖο Φ. Ὁ καθρέφτης στρέφεται κατά $\varphi_1 = 15^0$ καί ἔπειτα κατά $\varphi_2 = 30^0$. Σέ ποιά διαίρεση συναντᾶ τόν κανόνα ἡ ἀνακλώμενη ἀκτίνα ;.

182. Ἕνας ἐπίπεδος καθρέφτης ἔχει ὕψος 10 cm καί εἶναι κατακόρυφος. Ἐμπρός ἀπό τόν καθρέφτη καί σέ ὁριζόντια ἀπόσταση 20 cm βρίσκεται τό μάτι μας καί μέσα στόν καθρέφτη βλέπουμε τόν κατακόρυφο τοῖχο πού εἶναι πίσω μας καί σέ ἀπόσταση 2 m. Πόσο ὕψος τοῦ τοίχου βλέπουμε μέσα στόν καθρέφτη ;

183. Ἡ μιά βάση κυλινδρικῆς γυάλινης ράβδου ($n = 1{,}50$) εἶναι κυρτή σφαιρική ἐπιφάνεια μέ ἀκτίνα καμπυλότητας $R = 20$ mm. Σέ ἀπόσταση $\alpha = 80$ mm ἀπό τήν κορυφή Ο τῆς σφαιρικῆς ἐπιφάνειας καί πάνω στόν ἄξονα τῆς ράβδου βρίσκεται ἕνα φωτεινό σημεῖο Α. Νά βρεθεῖ σέ πόση ἀπόσταση β ἀπό τήν κορυφή Ο σχηματίζεται τό εἴδωλο Α΄ τοῦ σημείου Α, ὅταν ἡ ράβδος βρίσκεται μέσα στόν ἀέρα. Δείκτης διαθλάσεως τοῦ ἀέρα $n = 1$.

184. Ἕνας συγκεντρωτικός φακός ἔχει σχετικό δείκτη διαθλάσεως ὡς πρός τόν ἀέρα $n = 1{,}66$ καί ἑστιακή ἀπόσταση $f = 12{,}70$ cm, ὅταν βρίσκεται μέσα στόν ἀέρα. Ὅταν ὁ φακός βρίσκεται μέσα στό νερό, πόση εἶναι ἡ ἑστιακή ἀπόσταση f_1 τοῦ φακοῦ ; Σχετικός δείκτης διαθλάσεως τοῦ νεροῦ ὡς πρός τόν ἀέρα $n_1 = 1{,}33$.

185. Πάνω στόν κύριο ἄξονα ἑνός φακοῦ, σέ ἀπόσταση $\alpha = 150$ cm ἀπό τό ὀπτικό κέντρο του Ο, ὑπάρχει ἕνα φωτεινό σημεῖο Α. Ἀπό τό ἄλλο μέρος τοῦ φακοῦ καί κάθετα στόν ἄξονά του μετακινοῦμε ἕνα διάφραγμα. Ὅταν τό διάφραγμα ἀπέχει 100 cm ἀπό τό φακό, πάνω στό διάφραγμα σχηματίζεται ἕνας φωτεινός κύκλος πού ἔχει διάμετρο 2,5 cm. Ὅταν τό διάφραγμα ἔρθει σέ ἀπόσταση 125 cm ἀπό τό φακό, ἡ διάμετρος τοῦ φωτεινοῦ κύκλου γίνεται 5 cm. Νά βρεθεῖ τό εἶδος καί ἡ ἑστιακή ἀπόσταση f τοῦ φακοῦ.

186. Ἕνας συμμετρικός ἀμφίκυρτος φακός ἔχει δείκτη διαθλάσεως $n = 1{,}6$ καί ἐπιπλέει πάνω στήν ἐπιφάνεια ὑδραργύρου. Σέ ὕψος 30 cm πάνω ἀπό τό φακό καί πάνω στόν κύριο ἄξονά του βάζουμε ἕνα φωτεινό σημεῖο Α. Παρατηροῦμε ὅτι τό εἴδωλο αὐτοῦ τοῦ σημείου σχηματίζεται ἐκεῖ, πού βρίσκεται καί τό σημεῖο Α. Νά βρεθεῖ ἡ ἑστιακή ἀπόσταση f τοῦ φακοῦ.

187. Ἕνα φωτεινό ἀντικείμενο ἀπέχει $D = 1,80$ m ἀπό διάφραγμα. Νά ἀποδειχτεῖ ὅτι, ἄν μεταξύ τοῦ ἀντικειμένου καί τοῦ διαφράγματος τοποθετήσουμε ἕνα συγκεντρωτικό φακό, ὑπάρχουν δύο θέσεις τοῦ φακοῦ γιά τίς ὁποῖες σχηματίζεται πάνω στό διάφραγμα καθαρό εἴδωλο. Ἄν αὐτές οἱ δύο θέσεις τοῦ φακοῦ ἀπέχουν μεταξύ τους $d = 60$ cm, νά βρεθεῖ ἡ ἑστιακή ἀπόσταση f τοῦ φακοῦ.

188. Πάνω στήν ἐπίπεδη ἐπιφάνεια ἑνός λεπτοῦ ἐπιπεδόκυρτου φακοῦ καί κάθετα σ' αὐτήν πέφτει μιά δέσμη ἀκτίνων μονοχρωματικοῦ φωτός. Οἱ ἀκτίνες εἶναι παράλληλες μέ τόν κύριο ἄξονα τοῦ φακοῦ. Μέ ἕνα μικρό διάφραγμα διαπιστώνουμε ὅτι σχηματίζονται δύο φωτεινά σημειακά εἴδωλα. Τό ἕνα εἴδωλο εἶναι πολύ φωτεινό, σχηματίζεται πέρα ἀπό τήν κυρτή ἐπιφάνεια τοῦ φακοῦ καί σέ ἀπόσταση 30 cm ἀπό αὐτή. Τό ἄλλο εἴδωλο εἶναι πολύ λιγότερο φωτεινό, σχηματίζεται πρός τή μεριά τῆς ἐπίπεδης ἐπιφάνειας καί σέ ἀπόσταση 5 cm ἀπό αὐτή. Πῶς ἐξηγεῖται ὁ σχηματισμός τῶν δύο εἰδώλων; Ἀπό τά παραπάνω μεγέθη πού μετρήσαμε, νά ὑπολογιστεῖ ἡ ἀκτίνα καμπυλότητας R τῆς κυρτῆς ἐπιφάνειας τοῦ φακοῦ καί ὁ δείκτης διαθλάσεως τοῦ γυαλιοῦ.

189. Ἕνας ἐπιπεδόκυρτος φακός ἔχει ἑστιακή ἀπόσταση $f = 50$ cm. Πρός τή μεριά τῆς κυρτῆς ἐπιφάνειάς του καί σέ ἀπόσταση $\alpha = 75$ cm ἀπό τό φακό ὑπάρχει πάνω στόν ἄξονα τοῦ φακοῦ ἕνα φωτεινό σημεῖο Α. Πάνω στήν ἐπίπεδη ἐπιφάνεια τοῦ φακοῦ ἐφαρμόζουμε ἕναν ἐπίπεδο καθρέφτη. Ποῦ σχηματίζεται τό τελικό εἴδωλο; Μποροῦμε σ' αὐτή τήν περίπτωση νά ἀντικαταστήσουμε τό σύστημα φακός - καθρέφτης μέ ἕνα ἁπλούστερο σύστημα;

190. Ἕνας ἐπίπεδος καθρέφτης εἶναι κάθετος στόν κύριο ἄξονα ἑνός συγκεντρωτικοῦ φακοῦ πού ἔχει ἑστιακή ἀπόσταση $f = 20$ cm. Ὁ καθρέφτης βρίσκεται στό ἑστιακό ἐπίπεδο τοῦ φακοῦ. Ἀπό τήν ἄλλη μεριά τοῦ φακοῦ καί σέ ἀπόσταση $\alpha = 30$ cm ἀπό αὐτόν ὑπάρχει φωτεινή εὐθεία ΑΒ, κάθετη στόν ἄξονα τοῦ φακοῦ. Νά βρεθεῖ ἡ θέση καί τό μέγεθος τοῦ τελικοῦ εἰδώλου.

191. Ἕνας συγκεντρωτικός φακός ἑστιακῆς ἀποστάσεως f βρίσκεται ἀπέναντι ἀπό ἕναν κοῖλο σφαιρικό καθρέφτη, πού ἔχει ἀκτίνα καμπυλότητας $R = 10f$. Οἱ κύριοι ἄξονες τοῦ φακοῦ καί τοῦ καθρέφτη συμπίπτουν καί ἡ ἀπόσταση τοῦ ὀπτικοῦ κέντρου Ο τοῦ φακοῦ ἀπό τήν κορυφή O_1 τοῦ καθρέφτη εἶναι $OO_1 = 13f/2$. Ἐμπρός ἀπό τό φακό ὑπάρχει φωτεινή εὐθεία ΑΒ, κάθετη στόν κοινό κύριο ἄξονα καί τό σημεῖο Β τῆς εὐθείας ΑΒ συμπίπτει μέ τήν κύρια ἑστία τοῦ φακοῦ. Νά βρεθεῖ ἡ θέση καί τό μέγεθος τοῦ τελικοῦ εἰδώλου.

192. Δύο λεπτοί φακοί, ὁ Α συγκεντρωτικός καί ὁ Β ἀποκεντρωτικός, ἔχουν κοινό κύριο ἄξονα καί ἡ ἑστιακή ἀπόσταση τοῦ κάθε φακοῦ εἶναι κατ' ἀπόλυτη τιμή ἴση μέ 20 cm. Ἡ ἀπόσταση μεταξύ τῶν δύο φακῶν εἶναι 10 cm. Νά βρεθεῖ ἡ θέση τῆς κύριας ἑστίας τοῦ συστήματος, ὅταν μιά δέσμη ἀκτίνων παράλληλων μέ τόν κοινό κύριο ἄξονα : α) πέφτει πρῶτα πάνω στό φακό Α καί β) πέφτει πρῶτα πάνω στό φακό Β.

193. Σέ ἕνα σύνθετο μικροσκόπιο οἱ ἑστιακές ἀποστάσεις τοῦ ἀντικειμενικοῦ καί τοῦ προσοφθάλμιου φακοῦ ἀντίστοιχα εἶναι $f_A = 1$ cm καί $f_\Pi = 3$ cm. Ἡ ἀπόσταση τῶν ὀπτικῶν κέντρων τῶν φακῶν εἶναι $l = 15$ cm. Ὁ παρατηρητής ἔχει ἐλάχιστη ἀπόσταση εὐκρινοῦς ὁράσεως $\delta = 25$ cm. Νά βρεθεῖ ἡ ἀπόσταση x τοῦ ἀντικειμένου ΑΒ ἀπό τήν κύρια ἑστία τοῦ ἀντικειμενικοῦ φακοῦ.

194. Σέ ἕνα σύνθετο μικροσκόπιο οἱ ἑστιακές ἀποστάσεις τοῦ ἀντικειμενικοῦ καί τοῦ προσοφθάλμιου φακοῦ ἀντίστοιχα εἶναι $f_A = 0{,}5$ cm καί $f_\Pi = 2$ cm. Ἡ ἀπόσταση μεταξύ τῶν δύο φακῶν εἶναι σταθερή καί ἴση μέ $l = 15$ cm. Μέ τό μικροσκόπιο αὐτό θέλουμε νά προβάλουμε πάνω σέ διάφραγμα τό εἴδωλο ἑνός πολύ μικροῦ ἀντικειμένου πού φωτίζεται ἰσχυρά. Τό διάφραγμα ἀπέχει 2 m ἀπό τό ἀντικείμενο. Νά βρεθεῖ σέ πόση ἀπόσταση α ἀπό τόν ἀντικειμενικό φακό πρέπει νά τοποθετήσουμε τό ἀντικείμενο καί πόση εἶναι ἡ μεγέθυνση πού πετυχαίνουμε.

195. Ἕνας παρατηρητής μπορεῖ νά διακρίνει ὡς ξεχωριστά δύο σημεῖα, ὅταν τά βλέπει ὑπό γωνία τουλάχιστο ἴση μέ $3 \cdot 10^{-4}$ rad. Ἄν ὁ παρατηρητής χρησιμοποιεῖ μικροσκόπιο πού ἔχει ἰσχύ 900 dpt, πόσο εἶναι τό μέγεθος τοῦ μικρότερου ἀντικειμένου ΑΒ πού μπορεῖ ὁ παρατηρητής νά δεῖ μέ αὐτό τό μικροσκόπιο ;

196. Γιά τήν ἐρυθρή καί τήν ἰώδη ἀκτινοβολία οἱ δεῖκτες διαθλάσεως εἶναι :

στή στεφανύαλο	$n_E = 1{,}524$	$n_I = 1{,}544$
στήν πυριτύαλο	$n_E' = 1{,}627$	$n_I' = 1{,}671$

Θέλουμε νά κατασκευάσουμε ἕνα ἀχρωματικό σύστημα πρισμάτων γιά τίς ἀκραῖες ἀκτινοβολίες τοῦ φάσματος. Ἄν τό πρίσμα ἀπό στεφανύαλο ἔχει διαθλαστική γωνία $A = 25^0$ πόση πρέπει νά εἶναι ἡ διαθλαστική γωνία Α' τοῦ πρίσματος ἀπό πυριτύαλο ;

197. Γιά τίς ἀκραῖες ἀκτινοβολίες τοῦ ὁρατοῦ φάσματος οἱ δεῖκτες διαθλάσεως εἶναι :

στή στεφανύαλο	$n_E = 1{,}524$	$n_I = 1{,}544$
στήν πυριτύαλο	$n_E' = 1{,}627$	$n_I' = 1{,}671$

Θέλουμε νά κατασκευάσουμε ἀχρωματικό σύστημα φακῶν γιά τίς ἀκραῖες ἀκτινοβολίες τοῦ φάσματος, χρησιμοποιώντας ἕναν ἐπιπεδόκυρτο φακό μέ ἀκτίνα καμπυλότητας $R_1 = 10$ cm καί ἕναν ἐπιπεδόκοιλο φακό μέ ἀκτίνα καμπυλότητος R_4. Νά ὑπολογιστεῖ ἡ ἀκτίνα καμπυλότητας R_4 καί ἡ ἑστιακή ἀπόσταση F τοῦ συστήματος.

198. Ἕνας ἠλεκτρικός λαμπτήρας μέ σύρμα ἀπό βολφράμιο ἔχει ἰσχύ καταναλώσεως $P_{κατ} = 100$ Watt καί δίνει ὁλική φωτεινή ροή $Φ_{ολ} = 1580$ lumen. Πόση εἶναι ἡ ἔνταση I τῆς φωτεινῆς πηγῆς σέ candela; Πόσος εἶναι ὁ συντελεστής ἀποδόσεως τῆς φωτεινῆς πηγῆς καί πόση εἶναι ἡ ἰσχύς πού ξοδεύεται κατά candela;

199. Ἕνας ἠλεκτρικός λαμπτήρας πυρακτώσεως καί ἕνας φθορισμοῦ ἔχουν ἰσχύ καταναλώσεως P= 100 W καί δίνουν ἀντίστοιχα ὁλική φωτεινή ροή $Φ_1 = 1630$ lumen καί $Φ_2 = 4400$ lumen. Νά βρεθεῖ ὁ λόγος τῶν συντελεστῶν ἀποδόσεώς τους $η_2/η_1$.

200. Οἱ παραπάνω δύο λαμπτῆρες λειτουργοῦν ἐπί 100 ὧρες. Ἄν ἡ ἠλεκτρική ἐνέργεια πού ξοδεύεται γιά τή λειτουργία τους κοστίζει 2 δρχ/kWh, πόση εἶναι ἡ δαπάνη κατά candela γιά τόν καθένα ἀπό αὐτούς τούς λαμπτῆρες;

Θέλουμε νά κατασκευάσουμε ἀχρωματικό σύστημα φακῶν γιά τίς ἀκραῖες ἀκτινοβολίες τοῦ φάσματος, χρησιμοποιώντας ἕναν ἀμφίκυρτο φακό μέ ἀκτῖνα καμπυλότητος $R_1 = 10$ cm καί ἕναν ἐπιπεδόκοιλο φακό μέ ἀκτῖνα καμπυλότητος R_2. Νά ὑπολογισθεῖ ἡ ἀκτῖνα καμπυλότητος R_2 καί ἡ ἐστιακή ἀπόσταση F τοῦ συστήματος.

198. Ἕνας ἠλεκτρικός λαμπτήρας μέ νήμα ἀπό βολφράμιο ἔχει ἰσχύ καταναλώσεως $P_{ηλ} = 100$ Watt καί ἀποδίδει ὁλική φωτεινή ροή $Φ_{ολ} = 1580$ lumen. Πόση εἶναι ἡ ἔνταση I τῆς φωτεινῆς πηγῆς σέ candela ; Πόσος εἶναι ὁ συντελεστής ἀποδόσεως τῆς φωτεινῆς πηγῆς καί πόση εἶναι ἡ ἰσχύς πού ξοδεύεται κατά candela ;

199. Ἕνας ἠλεκτρικός λαμπτήρας πυρακτώσεως καί ἕνας φθορισμοῦ ἔχουν ἰσχύ καταναλώσεως P = 100 W καί δίνουν ἀντίστοιχα ὁλική φωτεινή ροή $Φ_1 = 1630$ lumen καί $Φ_2 = 4400$ lumen. Νά βρεθεῖ ὁ λόγος τῶν συντελεστῶν ἀποδόσεως τους $η_2/η_1$.

200. Οἱ παραπάνω δύο λαμπτῆρες λειτουργοῦν ἐπί 100 ὧρες. Ἄν ἡ ἠλεκτρική ἐνέργεια πού ξοδεύεται γιά τή λειτουργία τους κοστίζει 2 δρχ./kWh, πόση εἶναι ἡ δαπάνη κατά candela γιά τόν καθένα ἀπό αὐτούς τούς λαμπτῆρες;

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Ἡ ὕλη πού ἀναφέρεται στό Παράρτημα δέν εἶναι ὑποχρεωτική διδακτέα ὕλη, ἀλλά μπορεῖ νά μελετηθεῖ π ρ ο α ι ρ ε τ ι κ ά ἀπό τό μαθητή πού θέλει νά μάθει πῶς μποροῦμε νά ἐφαρμόσουμε τίς ἐξισώσεις πού βρήκαμε σχετικά μέ τήν κίνηση.

Ι. Ὑπολογισμός τοῦ μέτρου υ τῆς ταχύτητας

Βρήκαμε ὅτι τό μέτρο υ τῆς ταχύτητας τοῦ ὑλικοῦ σημείου Μ δίνεται ἀπό τήν ἐξίσωση :

$$\text{στιγμιαία ταχύτητα} \qquad υ = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \tag{1}$$

Θά ἐξετάσουμε πῶς μποροῦμε νά ἐφαρμόσουμε τήν ἐξίσωση (1) καί νά ὑπολογίσουμε τή στιγμιαία ταχύτητα ἑνός ὑλικοῦ σημείου.

Ἔστω ὅτι γιά τό ὑλικό σημεῖο Μ ἡ ἀπομάκρυνσή του s ἀπό τήν ἀρχή Ο τῶν ἀπομακρύνσεων σέ συνάρτηση μέ τό χρόνο t δίνεται ἀπό μιά ἐξίσωση πού ἔχει τή μορφή :

$$s = β + δt^2 \tag{2}$$

ὅπου β καί δ εἶναι δύο σταθερά μεγέθη τῆς κινήσεως.

Γιά $t = 0$ εἶναι $s = β$. Ὥστε τό μέγεθος β εἶναι *ἡ ἀρχική ἀπομάκρυνση* s_0 τοῦ κινητοῦ ἀπό τήν ἀρχή Ο τῶν ἀπομακρύνσεων καί ἑπομένως ἡ ἐξίσωση (2) γράφεται :

$$s = s_0 + δt^2 \tag{3}$$

Ὅταν ὁ χρόνος t αὐξάνεται κατά Δt, τότε καί ἡ ἀπομάκρυνση s μεταβάλλεται ἀντίστοιχα κατά Δs καί ἰσχύει ἡ ἐξίσωση :

$$s + \Delta s = s_0 + δ(t + \Delta t)^2$$

$$\text{ἤ} \qquad s + \Delta s = s_0 + δt^2 + 2δt\,(\Delta t) + δ\,(\Delta t)^2 \tag{4}$$

Ἄν ἀφαιρέσουμε τήν ἐξίσωση (3) ἀπό τήν ἐξίσωση (4) ἔχουμε :

$$\Delta s = 2δt\,(\Delta t) + δ\,(\Delta t)^2$$

$$\text{ἄρα} \qquad \frac{\Delta s}{\Delta t} = 2\,δ\,t + δ\,(\Delta t)$$

Ὅταν τό Δt συνεχῶς ἐλαττώνεται τό πηλίκο Δs/Δt συνεχῶς μεταβάλλεται. Καί ὅταν τό Δt τείνει νά γίνει ἴσο μέ μηδέν ($\Delta t \to 0$), τότε τό πηλίκο Δs/Δt τείνει νά λάβει *τήν ὁριακή τιμή* $2\,δ\,t$ ἡ ὁποία εἶναι *τό ὅριο* (lim) τοῦ Δs/Δt, ὅταν τό Δt τείνει πρός τό μηδέν. Αὐτό σημειώνεται ἔτσι :

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = 2\,δ\,t$$

Ἀλλά σύμφωνα μέ τήν ἐξίσωση (1) αὐτό τό ὅριο τοῦ $\Delta s/\Delta t$ εἶναι *τό μέτρο* υ τῆς ταχύτητας τοῦ ὑλικοῦ σημείου Μ κατά τή χρονική στιγμή t. Ἄρα εἶναι :

$$\text{στιγμιαία ταχύτητα} \quad \upsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = 2\,\delta\,t \tag{5}$$

Παράδειγμα. Ἄν π.χ. ἡ ἐξίσωση τῆς ἀπομακρύνσεως τοῦ ὑλικοῦ σημείου Μ (σέ μονάδες MKS) δίνεται ἀπό τήν ἐξίσωση :

$$s = 5 + 3\,t^2$$

τότε εἶναι $s_0 = 5$ m καί ἡ ταχύτητα τοῦ κινητοῦ σέ μιά χρονική στιγμή t ἔχει μέτρο :

$$\text{στιγμιαία ταχύτητα} \qquad \upsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \qquad \text{ἤ} \qquad \upsilon = 6\,t \text{ m/sec} \tag{6}$$

Ἀπό τήν ἐξίσωση (6) βρίσκουμε σέ κάθε χρονική στιγμή t τό μέτρο υ τῆς ταχύτητας τοῦ κινητοῦ. Ἔτσι π.χ. βρίσκουμε ὅτι :

γιά $t = 4$ sec εἶναι $\upsilon = 24$ m/sec

γιά $t = 4{,}01$ sec εἶναι $\upsilon = 24{,}06$ m/sec κ.ο.κ.

Γενίκευση. Ἐφαρμόζοντας τούς συλλογισμούς πού κάναμε γιά τήν ἐξίσωση (3) καί σέ ἄλλες ἐξισώσεις ἀνώτερου βαθμοῦ ὡς πρός t, βρίσκουμε ὅτι γενικά γιά τήν ἐξίσωση :

$$s = s_0 + \delta t^{\nu} \quad \text{εἶναι} \quad \boxed{\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \nu\,\delta\,t^{\nu-1}} \tag{7}$$

ΙΙ. Ὑπολογισμός τοῦ μέτρου ω τῆς γωνιακῆς ταχύτητας

Στήν κυκλική μεταβαλλόμενη κίνηση βρήκαμε ὅτι *τό μέτρο* ω τῆς γωνιακῆς ταχύτητας τοῦ ὑλικοῦ σημείου Μ δίνεται ἀπό τήν ἐξίσωση :

$$\text{στιγμιαία γωνιακή ταχύτητα} \qquad \omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} \tag{1}$$

Ἔστω ὅτι γιά τό ὑλικό σημεῖο Μ ἡ γωνιακή ἀπομάκρυνσή του φ σέ συνάρτηση μέ τό χρόνο t δίνεται ἀπό τήν ἐξίσωση :

$$\varphi = \varphi_0 + ut^2 \tag{2}$$

Σέ μιά αὔξηση τοῦ χρόνου t κατά Δt ἀντιστοιχεῖ μεταβολή τῆς γωνιακῆς ἀπομακρύνσεως φ κατά Δφ καί ἰσχύει ἡ ἐξίσωση :

$$\varphi + \Delta\varphi = \varphi_0 + u\,(t + \Delta t)^2$$

$$\text{ἤ} \qquad \varphi + \Delta\varphi = \varphi_0 + ut^2 + 2ut\,(\Delta t) + u\,(\Delta t)^2 \tag{3}$$

Ἀφαιρώντας τήν ἐξίσωση (2) ἀπό τήν ἐξίσωση (3) βρίσκουμε:

$$\Delta\varphi = 2ut\,(\Delta t) + u\,(\Delta t)^2$$

$$\text{ἄρα}\quad \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = 2\,u\,t + u\,(\Delta t)$$

Ὅταν τό Δt τείνει πρός τό μηδέν ($\Delta t \to 0$), τό πηλίκο $\Delta\varphi/\Delta t$ τείνει πρός ἕνα *ὅριο*, πού εἶναι τό 2 ut. Ὥστε εἶναι:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = 2\,u\,t$$

Ἀλλά σύμφωνα μέ τήν ἐξίσωση (1) αὐτό τό ὅριο τοῦ $\Delta\varphi/\Delta t$ εἶναι *τό μέτρο* ω τῆς γωνιακῆς ταχύτητας κατά τή χρονική στιγμή t. Ἄρα εἶναι:

$$\begin{matrix}\text{στιγμιαία γωνιακή} \\ \text{ταχύτητα}\end{matrix} \qquad \omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = 2\,u\,t$$

Παράδειγμα. Ἄν π.χ. ἡ ἐξίσωση τῆς γωνιακῆς ἀπομακρύνσεως τοῦ ὑλικοῦ σημείου Μ (σέ μονάδες MKS) δίνεται ἀπό τήν ἐξίσωση:

$$\varphi = 3 + 5t^2$$

τότε εἶναι $\varphi_0 = 3$ rad καί ἡ στιγμιαία γωνιακή ταχύτητα ἔχει μέτρο:

$$\begin{matrix}\text{στιγμιαία γωνιακή} \\ \text{ταχύτητα}\end{matrix} \qquad \omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \qquad \text{ἤ} \qquad \omega = 10\,t \text{ rad/sec} \tag{4}$$

Ἔτσι ἀπό τήν ἐξίσωση (4) βρίσκουμε π.χ. ὅτι:

γιά $t = 6$ sec εἶναι $\omega = 60$ rad/sec
γιά $t = 6{,}5$ sec εἶναι $\omega = 65$ rad/sec

Παρατήρηση. Καί ἐδῶ ἰσχύει ἡ γενίκευση πού ἀναφέραμε στήν παραπάνω § I.

III. Ὑπολογισμός τοῦ μέτρου α τῆς γωνιακῆς ἐπιταχύνσεως

Στήν κυκλική μεταβαλλόμενη κίνηση βρήκαμε ὅτι *τό μέτρο* α τῆς γωνιακῆς ἐπιταχύνσεως τοῦ ὑλικοῦ σημείου Μ δίνεται ἀπό τήν ἐξίσωση

$$\begin{matrix}\text{στιγμιαία γωνιακή} \\ \text{ἐπιτάχυνση}\end{matrix} \qquad \alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \tag{1}$$

Ἔστω ὅτι γιά τό ὑλικό σημεῖο Μ ἡ γωνιακή ταχύτητά του ω σέ συνάρτηση μέ τό χρόνο t δίνεται ἀπό τήν ἐξίσωση:

$$\omega = \omega_0 + \mu t^2 \tag{2}$$

Σέ μιά αὔξηση τοῦ χρόνου t κατά Δt ἀντιστοιχεῖ μεταβολή τῆς γωνιακῆς ταχύτητας ω κατά Δω καί ἰσχύει ἡ ἐξίσωση :

$$\omega + \Delta\omega = \omega_0 + \mu\,(t + \Delta t)^2$$

ἤ $$\omega + \Delta\omega = \omega_0 + \mu t^2 + 2\mu t\,(\Delta t) + \mu\,(\Delta t)^2 \qquad (3)$$

Ἀφαιρώντας τήν ἐξίσωση (2) ἀπό τήν ἐξίσωση (3) βρίσκουμε :

$$\Delta\omega = 2\mu t\,(\Delta t) + \mu\,(\Delta t)^2$$

ἄρα $$\frac{\Delta\omega}{\Delta t} = 2\mu t + \mu\,(\Delta t)$$

Ὅταν τό Δt τείνει πρός τό μηδέν ($\Delta t \to 0$), τό πηλίκο $\Delta\omega/\Delta t$ τείνει πρός ἕνα *ὅριο*, πού εἶναι τό $2\mu t$. Ὥστε εἶναι :

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = 2\mu t$$

Ἀλλά σύμφωνα μέ τήν ἐξίσωση (1) αὐτό τό ὅριο τοῦ $\Delta\omega/\Delta t$ εἶναι *τό μέτρο* α τῆς γωνιακῆς ἐπιταχύνσεως κατά τή χρονική στιγμή t. Ἄρα εἶναι :

στιγμιαία γωνιακή ἐπιτάχυνση $$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = 2\mu t$$

Παράδειγμα. Ἄν π.χ. ἡ ἐξίσωση τῆς γωνιακῆς ταχύτητας τοῦ ὑλικοῦ σημείου M (σέ μονάδες MKS) δίνεται ἀπό τήν ἐξίσωση :

$$\omega = 0{,}4 + 7t^2$$

τότε εἶναι $\omega_0 = 0{,}4$ rad/sec καί ἡ γωνιακή ἐπιτάχυνση ἔχει μέτρο :

στιγμιαία γωνιακή ἐπιτάχυνση $$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \quad \text{ἤ} \quad \alpha = 14\,t \text{ rad/sec}^2 \qquad (4)$$

Ἔτσι ἀπό τήν ἐξίσωση (4) βρίσκουμε π.χ. ὅτι :

γιά $t = 3$ sec εἶναι $\alpha = 42$ rad/sec^2

γιά $t = 5$ sec εἶναι $\alpha = 70$ rad/sec^2

Παρατήρηση. Καί ἐδῶ ἰσχύει ἡ γενίκευση πού ἀναφέραμε στήν παραπάνω § I.

IV. Εὐθύγραμμη μεταβαλλόμενη κίνηση

Ὅπως στήν καμπυλόγραμμη ἔτσι καί στήν εὐθύγραμμη κίνηση τό μέτρο τῆς στιγμιαίας ταχύτητας υ καί τῆς στιγμιαίας ἐπιταχύνσεως γ δίνονται ἀπό τίς ἀντίστοιχες ἐξισώσεις :

$$\text{στιγμιαία ταχύτητα} \qquad \upsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \tag{1}$$

$$\text{στιγμιαία ἐπιτάχυνση} \qquad \gamma = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \upsilon}{\Delta t} \tag{2}$$

Γιά τόν ὑπολογισμό τῶν μεγεθῶν υ καί γ ἰσχύουν οἱ ἴδιοι συλλογισμοί τού κάναμε παραπάνω. Ἄς θεωρήσουμε μιά εὐθύγραμμη μεταβαλλόμενη κίνηση ὑλικοῦ σημείου Μ πού ἡ ἀπομάκρυνσή του δίνεται ἀπό τήν ἐξίσωση :

$$s = s_0 + \delta t^2 + \varepsilon t^3 \tag{3}$$

Σέ μιά αὔξηση τοῦ χρόνου t κατά Δt ἀντιστοιχεῖ μεταβολή τοῦ s κατά Δs καί ἰσχύει ἡ ἐξίσωση :

$$s + \Delta s = s_0 + \delta(t + \Delta t)^2 + \varepsilon(t + \Delta t)^3$$

ἤ $$s + \Delta s = s_0 + \delta t^2 + 2\delta t(\Delta t) + \delta(\Delta t)^2 + \varepsilon t^3 + 3\varepsilon t(\Delta t)^2 + 3\varepsilon t^2(\Delta t) + \varepsilon(\Delta t)^3 \tag{4}$$

Ἀφαιρώντας τήν ἐξίσωση (3) ἀπό τήν ἐξίσωση (4) ἔχουμε:

$$\Delta s = 2\delta t(\Delta t) + \delta(\Delta t)^2 + 3\varepsilon t(\Delta t)^2 + 3\varepsilon t^2(\Delta t) + \varepsilon(\Delta t)^3$$

καί $$\frac{\Delta s}{\Delta t} = 2\delta t + \delta(\Delta t) + 3\varepsilon t(\Delta t) + 3\varepsilon t^2 + \varepsilon(\Delta t)^2$$

Ὅταν τό Δt τείνει πρός τό μηδέν (Δt → 0) τό πηλίκο Δs/Δt τείνει πρός τό ὅριο :

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = 2\,\delta t + 3\,\varepsilon t^2$$

Ὥστε σύμφωνα μέ τήν ἐξίσωση (1) ἔχουμε :

$$\text{στιγμιαία ταχύτητα} \qquad \upsilon = 2\,\delta\,t + 3\,\varepsilon\,t^2 \tag{5}$$

Σέ αὔξηση τοῦ χρόνου t κατά Δt ἀντιστοιχεῖ μεταβολή τῆς ταχύτητας υ κατά Δυ καί ἔχουμε τήν ἐξίσωση :

$$\upsilon + \Delta\upsilon = 2\delta(t + \Delta t) + 3\varepsilon(t + \Delta t)^2$$

ἤ $$\upsilon + \Delta\upsilon = 2\delta t + 2\delta(\Delta t) + 3\varepsilon t^2 + 6\varepsilon t(\Delta t) + 3\varepsilon(\Delta t)^2 \tag{6}$$

Ἀφαιρώντας τήν ἐξίσωση (5) ἀπό τήν ἐξίσωση (6) ἔχουμε :

$$\Delta\upsilon = 2\delta(\Delta t) + 6\varepsilon t(\Delta t) + 3\varepsilon(\Delta t)^2$$

καί $$\frac{\Delta\upsilon}{\Delta t} = 2\delta + 6\varepsilon t + 3\varepsilon(\Delta t)$$

Όταν τό Δt τείνει πρός τό μηδέν ($\Delta t \to 0$) τό πηλίκο $\Delta \upsilon / \Delta t$ τείνει πρός τό ὅριο :

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \upsilon}{\Delta t} = 2\delta + 6\varepsilon t$$

Ὥστε σύμφωνα μέ τήν ἐξίσωση (2) ἔχουμε :

στιγμιαία ἐπιτάχυνση $\gamma = 2\delta + 6\varepsilon t$ (6)

Παράδειγμα. Ἡ ἀπομάκρυνση s τοῦ ὑλικοῦ σημείου M (σέ μονάδες MKS) δίνεται ἀπό τήν ἐξίσωση :

στιγμιαία ἀπομάκρυνση $s = 4 + 7t^2 + 10t^3$ (7)

Σύμφωνα μέ τίς ἐξισώσεις (5) καί (6) ἔχουμε :

στιγμιαία ταχύτητα $\upsilon = 14t + 30t^2$ (8)

στιγμιαία ἐπιτάχυνση $\gamma = 14 + 60t$ (9)

Ἀπό τίς ἐξισώσεις (7), (8) καί (9) βρίσκουμε π.χ. ὅτι γιά $t = 2$ sec εἶναι :

$s = 111$ m $\quad \upsilon = 148$ m/sec $\quad \gamma = 134$ m/sec^2

Παρατήρηση. Οἱ ὑπολογισμοί πού κάναμε στά παραδείγματα τῶν παραγράφων I, II, III καί IV ἁπλουστεύονται, ἄν ἐφαρμόσουμε ἀμέσως τή γενική ἐξίσωση (7) πού ἀναφέρεται στήν § I.

Ἄν π.χ. γιά μιά κυκλική μεταβαλλόμενη κίνηση ὑλικοῦ σημείου M (σέ μονάδες MKS) ἡ γωνιακή ἀπομάκρυνσή δίνεται ἀπό τήν ἐξίσωση :

γωνιακή ἀπομάκρυνση $\varphi = 2 + 5t^2 + 7t^3$

τότε βρίσκουμε ἀμέσως ὅτι εἶναι :

γωνιακή ταχύτητα $\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = 10t + 21t^2$

γωνιακή ἐπιτάχυνση $\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = 10 + 42t$

Ὥστε π.χ. γιά $t = 2$ sec εἶναι :

$\varphi = 78$ rad $\quad \omega = 104$ rad/sec $\quad \alpha = 94$ rad/sec^2

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΜΗΧΑΝΙΚΗ

Νόμοι τῆς ροῆς

ΘΕΡΜΟΤΗΤΑ

Ἰδανικά ἀέρια

Κορεσμένοι καί ἀκόρεστοι ἀτμοί. Τριπλό σημεῖο

Θερμοδυναμική

Θερμικές μηχανές

ΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ

Ἐπιδράσεις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου

ΗΛΕΚΤΡΙΣΜΟΣ

ΟΠΤΙΚΗ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΕΚΔΟΣΗ Β΄ 1979 (VIII) – ΑΝΤΙΤΥΠΑ 75.000 – ΣΥΜΒΑΣΗ 3262/6-8-79

ΕΚΤΥΠΩΣΗ – ΒΙΒΛΙΟΔΕΣΙΑ : Π. ΟΚΤΩΡΑΤΟΣ – Κ. ΚΟΥΚΙΑΣ Ο.Ε.