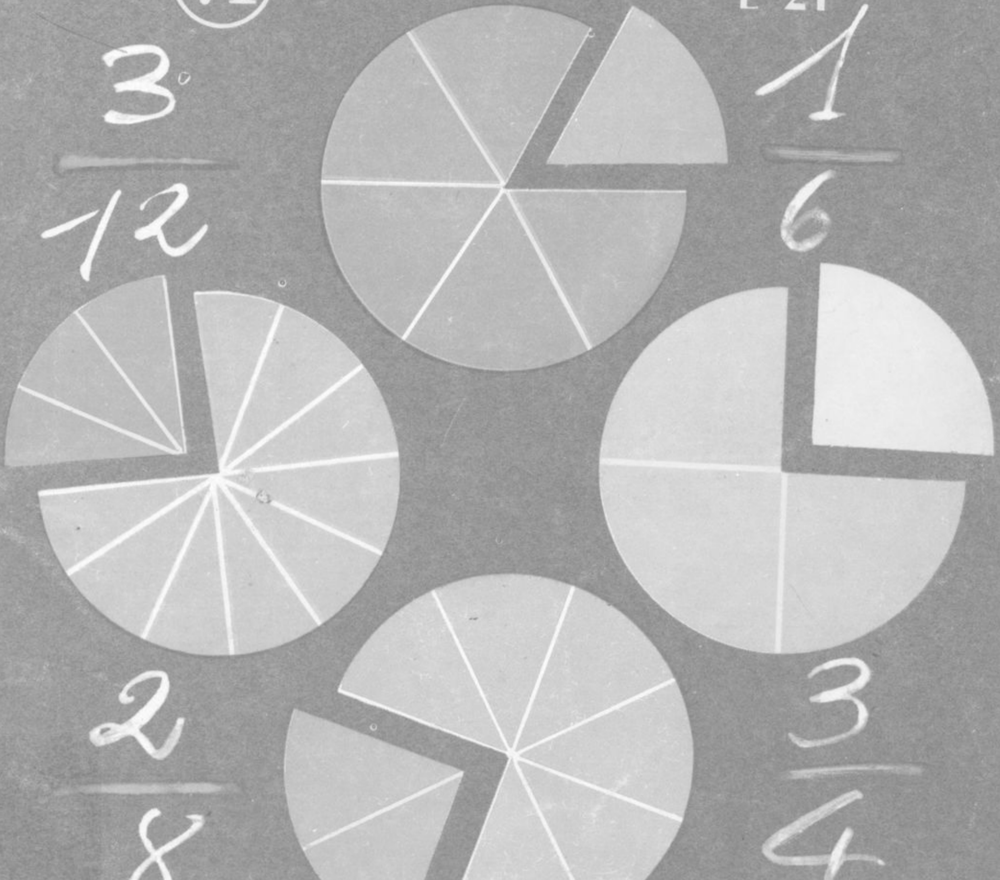
ΣΠΥΡ. Δ. ΡΑΛΛΗ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

71

ΤΑΞΙΣ
Ε΄-ΣΤ΄



[ΕΚΔ]ΟΣΕΙΣ: Μ. ΠΕΧΛΙΒΑΝΙΔΗΣ & ΣΙΑ Α.Ε. — ΑΤΛΑΝΤΙΣ — ΟΔΟΣ ΚΟΡΑΗ ΑΡ. 8 – ΑΘΗΝΑΙ

19612

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

ΣΠΥΡ. Δ. ΡΑΛΛΗ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ
ΚΑΙ
ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

ΔΙΑ ΤΗΝ Ε' ΚΑΙ ΣΤ' ΤΑΞΙΝ
ΤΟΥ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ ΣΧΟΛΕΙΟΥ

ΜΕ ΝΕΑ ΜΕΤΡΑ ΚΑΙ ΣΤΑΘΜΑ

★

ΕΚΔΟΣΕΙΣ: Μ. ΠΕΧΛΙΒΑΝΙΔΗΣ & ΣΙΑ, Α. Ε.
"ΑΤΛΑΝΤΙΣ" ΚΟΡΑΗ 8 – ΑΘΗΝΑΙ

ΒΑΣΙΛΕΙΟΝ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΝ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
Γεν. Διεύθυνσις Γεν. Ἐκπαιδεύσεως
Διεύθυνσις Διδακτικῶν Βιβλίων

Ἀριθ. πρωτ. 136323

ΠΡΟΣ

Τοὺς κ. κ. Γενικοὺς Ἐπιθεωρητὰς καὶ Ἐπιθεωρητὰς τῶν δημοτικῶν σχολείων τοῦ Κράτους, Διευθυντὰς τῶν Προτύπων δημοτικῶν σχολείων τῶν Παιδαγωγικῶν Ἀκαδημιῶν καὶ τῶν Πειραματικῶν σχολείων τῶν Πανεπιστημίων Ἀθηνῶν — Θεσσαλονίκης καὶ Διευθυντὰς τῶν δημοτικῶν σχολείων τοῦ Κράτους (Διὰ τῶν οἰκείων Ἐπιθεωρητῶν δημ/κῶν σχολείων).

Ἀποφασίζομεν

Ἐν συνεχείᾳ πρὸς τὴν ὑπ' ἀριθ. 103901/21-7-67 Ἐγκύκλιόν μας, ἐπιτρέπομεν τὴν χρησιμοποίησιν ὑπὸ μαθητῶν Ε' & ΣΤ' τάξεων Δημοτικῆς Ἐκπαιδεύσεως διὰ μόνον τὸ προσεχὲς σχολικὸν Ἔτος καὶ τῶν κάτωθι Βοηθητικῶν Βιβλίων.

«Αἱ Ἤπειροι — Γεωγραφία» Ε' τάξεως δημοτικοῦ σχολείου καὶ Α' ἔτος συνδιδασκαλίας Ε' καὶ ΣΤ' τάξ., **Ν. Παπασπύρου.**

«Φυσικὴ καὶ Χημεία» Ε' τάξεως δημοτικοῦ σχολείου, **Μ. Παπαδάκη.**

«Φυσικὴ Ἱστορία» ΣΤ' τάξεως δημ. σχολ., **Στρ. Παπαδάκη - Μ. Παπαδάκη.**

«Γεωγραφία Εὐρώπης ΣΤ' τάξεως δημοτικοῦ σχολείου καὶ Β' ἔτος συνδιδασκαλίας Ε' καὶ ΣΤ' τάξ., **Ν. Παπασπύρου.**

«Φυσικὴ καὶ Χημεία» ΣΤ' τάξεως δημοτικοῦ σχολείου **Ἀλ. Μπάμπαλη.**

«Ἀριθμητική» Ε' καὶ ΣΤ' τάξ. δημ. σχολ. (Α' καὶ Β' ἔτος συνδ/λίας), **Σπ. Ράλλη.**

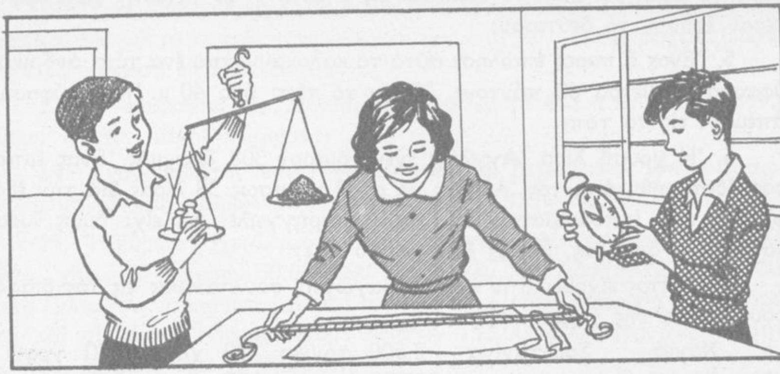
«Φυσικὴ καὶ Χημεία» Ε' καὶ ΣΤ' τάξεως δημ. σχολ., (Α' ἔτος συνδ/λίας), **Α. Μπάμπαλη - Μ. Παπάδακη.**

«Φυσικὴ καὶ Χημεία» Ε' καὶ ΣΤ' τάξεως δημ. σχολ., (Β' ἔτος συνδ/λίας), **Μ. Παπαδάκη - Α. Μπάμπαλη.**

«Γεωμετρία» Ε' καὶ ΣΤ' τάξεως δημ. σχολ., (Α' καὶ Β' ἔτος συνδ/λίας), **Μπάμπαλη - Βουρνᾶ.**

Ἐν Ἀθήναις τῇ 27-9-1967

Ὁ Ὑπουργὸς
Κ. ΚΑΛΑΜΠΟΚΙΑΣ



ΕΙΣΑΓΩΓΗ

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Ὁ πατέρας τοῦ Τάκη εἶναι κτηνοτρόφος. Ἐπώλησε προχθὲς τὸ Σάββατον εἰς τὸν κρεοπώλην τοῦ χωρίου πέντε κατσίκια. Τὸ πρῶτον ἐβγῆκε καθαρὸν κρέας 7 χιλιόγραμμα *, τὸ δεύτερον 8 χλγρ. 400 γραμμάρια, τὸ τρίτον 6 χλγρ. 150 γραμ., τὸ τέταρτον 9 χλγρ. 450 γραμ. καὶ τὸ πέμπτον 10 χλγρ. Ὁ κρεοπώλης ὑπελόγισε τὸ κρέας πρὸς 24 δρχ. τὸ χιλιόγραμμον. Πόσα χρήματα ἐπῆρε ὁ πατέρας τοῦ Τάκη;

2. Ὁ κ. Νῖκος, ὁ ξυλουργός, κατεσκεύασε τὴν στέγην, τὴν ὀροφήν, τὰς θύρας καὶ τὰ παράθυρα τοῦ σχολείου. Μετέφερε τρεῖς φορὰς ξυλείαν. Τὴν πρώτην φορὰν μετέφερε 4 κυβικὰ ξυλείας καὶ τὰ ἐπλήρωσε πρὸς 1.850 δρχ. τὸ κυβικόν. Τὴν δευτέραν φορὰν μετέφερε 6 κυβικὰ ξυλείας πρὸς 2.000 τὸ κυβικόν, καὶ τὴν τρίτην, 2 κυβικὰ πρὸς 1.935 δρχ. τὸ κυβικόν. Διὰ μεταφορικὰ ἐπλήρωσε 500 δρχ. Πόσα χρήματα ἔδωσε;

3. Τρεῖς κτηνοτρόφοι ἥνωσαν τὰ πρόβατά των. Ὁ πρῶτος εἶχε 145 πρόβατα, ὁ δεύτερος 207 καὶ ὁ τρίτος 256, καὶ τὰ ἔδωσαν εἰς ἕνα βοσκὸν νὰ τὰ βόσκῃ. Πόσα πρόβατα βόσκει ὁ βοσκός;

4. Ὁ Γιῶργος καὶ ὁ Τάκης ἐξεκίνησαν ἀπὸ τὰς Ἀθήνας διὰ τὴν Κόρινθον μὲ διαφορετικὸν αὐτοκίνητον. Τὸ πρῶτον διέτρεξε τὴν ἀπόστα-

*ΣΗΜ. Τὸ χιλιόγραμμον λέγεται καὶ κιλόν.

σιν εἰς 2 ὥρας 35′ 28″. Τὸ δεύτερον εἰς 3 ὥρας 7′ 15″. Πόσην ὥρα ἀργότερον ἔφθασε τὸ δεύτερον;

5. Ἕνας ἔμπορος ἐπώλησε αὐτὸ τὸ καλοκαίρι ἀπὸ ἕνα τόπι ἀνδρικὸν ὕφασμα 27 μέτρα 60 πόντους. Ὅλον τὸ τόπι ἦτο 40 μ. Πόσον ὕφασμα ἀπέμεινε εἰς τὸ τόπι;

6. Ἡ χρυσῆ λίρα Ἀγγλίας ἔχει σήμερον 308 δραχμάς. Ἕνας ἔμπορος εἰδοποιήθη ἀπὸ τὰς Ἀθήνας νὰ στείλῃ ἀμέσως 38 λίρας διὰ τὴν ἐξόφλησιν τῶν ἐμπορευμάτων τὰ ὁποῖα παρήγγειλε. Δὲν εἶχε ὅμως λίρας καὶ ἔστειλε δραχμάς. Πόσας δραχμὰς ἔστειλε;

7. Ἐφέτος εἴχομεν τὴν ἑξῆς παραγωγὴν σουλτανίνας εἰς τὰς διαφόρους πόλεις τῆς χώρας μας:

α′.	Χανιὰ	Σουλτανίνα	2.500	τόννοι	70	χλγρ.	240	γραμ.
β′.	Ἡράκλειον	»	33.000	»	150	»	320	»
γ′.	Σητεία	»	1.500	»	40	»	80	»
δ′.	Κόρινθος	»	6.350	»	90	»	200	»
ε′.	Κιᾶτον	»	580	»	360	»	290	»
στ′.	Ξυλόκαστρον	»	165	»	600	»	320	»
ζ′.	Αἴγιον	»	5.300	»	120	»	550	»

(ΣΗΜ. 1 τόννος = 1000 χλγρ., 1 χλγρ. = 1000 γραμμάρια).

Πόση εἶναι ἡ παραγωγὴ ὅλης τῆς χώρας εἰς σουλτανίναν;

8. Διὰ νὰ ράψῃ ἡ μητέρα εἰς τὰ τέσσαρα παιδιά της ὑποκάμισα, ἐχρειάσθη διὰ κάθε ὑποκάμισον 3,50 μ. Πόσον ὕφασμα θὰ χρειασθῇ καὶ πόσα χρήματα θὰ πληρώσῃ, ἂν τὸ κάθε μέτρον ἔχῃ 20 δραχμάς;

9. Ἡ μητέρα σου, σοῦ ἔδωσε 50 δραχμὰς διὰ νὰ πᾶς εἰς τὴν ἀγορὰν νὰ ψωνίσῃς. Ἠγόρασες 2 χλγρ. τομάτες πρὸς 3,50 δρχ. τὸ χλγρ., 3 χλγρ. πατάτες πρὸς 4,60 δρχ. τὸ χλγρ., 3 λεμόνια πρὸς 0,40 δρχ. τὸ ἕνα. Μὲ τὰ ὑπόλοιπα ἠγόρασες 14 σοκολάτας. Πόσας δραχμὰς ἔδωσες εἰς τὰ ψώνια καὶ πόσον ἐστοίχισε κάθε σοκολάτα;

10. Ὁ κῆπος τοῦ σχολείου μας ἔχει μῆκος 86,40 μ. Αἱ μαθητικαὶ ὁμάδες κήπου εἶναι 5. Πόσα μέτρα μῆκος σχολικοῦ κήπου ἀναλογεῖ εἰς κάθε ὁμάδα;

11. Ὁ κ. Ἠλίας, ὁ κτηνοτρόφος, ἐπώλησε 52,5 δοχεῖα μὲ βούτυρον. Τὸ κάθε δοχεῖον ζυγίζει 16 χιλγρ. Ἐπώλησε τὸ βούτυρον πρὸς 40 δρχ. τὸ χλγρ. Μὲ τὰ χρήματα αὐτὰ ἠγόρασε ζωοτροφὰς διὰ τὸν χειμῶνα: 500 χλγρ. βαμβακόπιτταν πρὸς 10 δρχ. τὸ χλγρ., 350 χλγρ. κτηνοτροφικὰ κουκιὰ πρὸς 5 δρχ. τὸ χλγρ. καὶ 675 χλγρ. λαθούρια πρὸς 4,50 δρχ. τὸ χλγρ. Ὅσα χρήματα ἐπῆρε ἀπὸ τὸ βούτυρον τὰ ἔδωσε ὅλα, ἢ τοῦ ἐπερίσσευσαν καὶ πόσα;

12. Ἕνας ἐλαιοπαραγωγὸς παρήγαγε τὸ παρελθὸν ἔτος 248.60 χλγρ. λάδι καὶ διὰ νὰ τὸ τοποθετήσῃ κατεσκεύασε 6 μεγάλα ὅμοια δοχεῖα. Πόσον λάδι θὰ χωρέσῃ εἰς κάθε δοχεῖον;

13. Ἡ ναυμαχία τῆς Σαλαμῖνος ἔγινε εἰς τὰ 480 π.Χ. Πόσα χρόνια ἔχουν περάσει μέχρι σήμερον;

14. Ἕνας μαθητὴς ἐγεννήθη εἰς τὰς 14 Δεκεμβρίου 1947. Πόσων ἐτῶν, μηνῶν καὶ ἡμερῶν εἶναι σήμερον;

15. Ἡ Εὐρώπη ἔχει ἔκτασιν 10.000.000 τετρ. χλμ., ἡ Ἀσία 44.000.000 τετρ. χλμ., ἡ Ἀφρικὴ 30.000.000 τετρ. χλμ., ἡ Αὐστραλία 9.000.000 τετρ. χλμ. Ἂν προσθέσωμεν καὶ τὴν ἔκτασιν τῆς Ἀμερικῆς θὰ ἴδωμεν ὅτι καὶ αἱ πέντε Ἤπειροι ἔχουν ἔκτασιν 133.000.000 τετρ. χλμ. Πόσην, λοιπόν, ἔκτασιν ἔχει ἡ Ἀμερική;

16. Ἕνας σταφιδοπαραγωγὸς ἐφόρτωσε εἰς τὸ ζῶον του 83,5 χλμ. σταφίδα καὶ τὴν ἐπώλησε πρὸς 6,5 δρχ. τὸ χλγρ. Μὲ τὰ χρήματα αὐτὰ ἠγόρασε 12,50 χλγρ. πατάτες πρὸς 3,50 δρχ. τὸ χλγρ., 6,50 χλγρ. βακαλάον πρὸς 11 δρχ. τὸ χλγρ. Μὲ τὰ ὑπόλοιπα ἠγόρασε τρία ζεύγη πέδιλα διὰ τὰ παιδιά του. Πόσα ἐπῆρε ἀπὸ τὴν σταφίδα, πόσα ἔδωσε εἰς τὰ ψώνια καὶ πόσα ἐστοίχισε κάθε ζεῦγος πέδιλα;

17. Ὅταν εἰσέρχεται ξένος στόλος εἰς τὸν λιμένα τοῦ Πειραιῶς ρίπτει κανονιές. Ἐνῷ πλέουν, ρίπτουν καὶ ἀπὸ μίαν κανονιάν. Πρῶτον βλέπω τὴν λάμψιν καὶ κατόπιν ἀκούω τὸν ἦχον. Γνωρίζω ὅτι ὁ ἦχος τρέχει 340 μέτρα εἰς τὸ δευτερόλεπτον, ἐνῷ τὴ λάμψιν τὴν βλέπω ἀμέσως. Ὑπολογίζω, λοιπόν, κρατῶ τὸ ὡρολόγιόν μου εἰς τὸ χέρι, πόσον μακρὰν εἶναι τὸ καράβι ἀπὸ ἐμένα, κάθε φορὰ ποὺ ρίπτει κανονιάν. Τὴν πρώτην κανονιὰν τὴν ἤκουσα ἔπειτα ἀπὸ 12'', τὴν δευτέραν ἔπειτα ἀπὸ 9'', τὴν τρίτην ἔπειτα ἀπὸ 7'', τὴν τετάρτην ἔπειτα ἀπὸ 4'' καὶ τὰς ὑπολοίπους ἕως τὰς εἴκοσι μίαν, τὰς ἤκουον πάντοτε ἔπειτα ἀπὸ 2''. Πόσα μέτρα μακρὰν μου ἦτο κάθε φορὰ τὸ πλοῖον;

18. Ὁ κρεοπώλης τῆς συνοικίας μας ἔσφαξε τρία μοσχάρια καὶ εἰσέπραξε 1.380 δρχ. Τὸ κρέας ἐπωλήθη 30 δρχ. τὸ χλγρ. Πόσα χλγρ. ἦτο τὸ βάρος ὅλου τοῦ κρέατος;

19. Ἕνας βιβλιοπώλης ἐπώλησεν ἐφέτος 17.600 βιβλία πρὸς 10 δρχ. τὸ ἕνα. Ἀπ' αὐτὰ ἦσαν ἔξοδα χαρτιοῦ, τυπογραφείου καὶ ἐκπτώσεων 6,20 δρχ. κάθε βιβλίον. Πόσον ἦτο τὸ κέρδος του ἀπὸ τὰ βιβλία ποὺ ἐπώλησε;

20. Μία χωρικὴ μετέφερε εἰς τὴν ἀγορὰν 300 αὐγὰ καὶ τὰ ἐπώλησε πρὸς 2 δρχ. τὸ ζεῦγος. Πόσα χρήματα ἐπῆρε;

21. Ἀπὸ τὸν Πειραιᾶ μέχρι τῆς Θεσσαλονίκης ἡ σιδηροδρομικὴ ἀπόστασις εἶναι 520 χλμ. Πόσον κάμνει ὁ σιδηρόδρομος νὰ φθάσῃ εἰς τὴν Θεσσαλονίκην, ὅταν τρέχῃ μὲ 40 χλμ. τὴν ὥραν;

22. Ἕνας ἔμπορος εἰσήγαγεν ἀπὸ τὴν Τσεχοσλοβακίαν 225 γυαλιὰ ἁλιείας πυριάντοχα, τὰ ὁποῖα ἐστοίχισαν 1.200 δολλάρια. Τὸ δολλάριον ἔχει 30 ἑλληνικὰς δραχμάς. Ἐπλήρωσε φόρον εἰς τὸ τελωνεῖον 18.000. Πόσον πρέπει νὰ πωλήσῃ κάθε γυαλί, διὰ νὰ κερδίσῃ εἰς τὸ καθὲν 20 δρχ.;

23. Εἰς ἕνα ἐλαιοπαραγωγικὸν χωρίον τὸ Κοινοτικὸν Συμβούλιον ἐπέβαλε φόρον εἰς τὸ λάδι 1,20 δρχ. τὸ χλγρ. Ὅλον τὸ χωρίον παρήγαγε 36.000 χλγρ. Πόσον φόρον θὰ εἰσπράξῃ ἡ Κοινότης;

24. Εἰς τὴν ἑβδομαδιαίαν ἀγορὰν μιᾶς πόλεως οἱ χωρικοὶ τοποθετοῦν τὰ κάστανα πρὸς πώλησιν. Εἰς κάθε χλγρ. πληρώνουν φόρον εἰς τὸν Δῆμον 0,2 δρχ. Τὸ περασμένον Σάββατον ὁ Δῆμος τῆς πόλεως εἰσέπραξε 246 δρχ. Πόσα χλγρ. κάστανα ἦλθον εἰς τὴν ἀγοράν;

25. Ἕνας ἔμπορος μήλων ἐφόρτωσε 105.840 χλγρ. μῆλα καὶ τὰ ἐπλήρωσε 0,05 τὸ χλγρ. καὶ διὰ νὰ τὰ μεταφέρῃ ἐπλήρωσε 1,30 δρχ. τὸ χιλγρ. Εἶχεν ὅμως ζημίας. Τοῦ ἐσάπισαν 2.120 χλγρ. μῆλα. Τὰ ὑπόλοιπα τὰ ἐπώλησε χονδρικῶς καὶ εἰσέπραξε 793.800 δρχ. Ἐζημιώθη ἀπὸ τὸ ἐμπόριον, ἢ ἐκέρδισε καὶ πόσα;

26. Μία ὑφάντρια ὑφαίνει 9 μέτρα ὕφασμα τὴν ἡμέραν. Ἐργάζεται 26 ἡμέρας τὸν μῆνα καὶ εἰς κάθε μέτρον παίρνει 4,50 δρχ. ὑφαντικά. Πόσα χρήματα κερδίζει ὅλον τὸν μῆνα;

27. Ἡ τιμὴ ἀσφαλείας τοῦ σιταριοῦ ὡρίσθη εἰς 2,80 δρχ. τὸ χιλγρ. Ἡ Ἀγροτικὴ Τράπεζα θὰ συγκεντρώσῃ μὲ αὐτὴν τὴν τιμὴν 100.000 τόνους σίτου ἀπὸ τοὺς παραγωγούς. Ἂν συγκεντρωθῇ ὅλη ἡ ποσότης, πόσα χρήματα θὰ πάρουν οἱ παραγωγοί; (1 τόννος = 1.000 χλγρ.).

28. Τὰ περασμένα Χριστούγγενα ἠγόρασα 2,90 μ. μάλλινον ὕφασμα πρὸς 280 τὸ μέτρον. Πόσα ἐπλήρωσα;

29. Ἐπλήρωσα εἰς τὴν Ἑταιρείαν Ὑδάτων Ἀθηνῶν διὰ κατανάλωσιν νεροῦ τῆς προηγουμένης τριμηνίας δρχ. 83,65. Ἡ Ἑταιρεία ὑπολογίζει τὸ νερὸν πρὸς 4,35 δρχ. τὸ κυβικὸν μέτρον. Πόσα κ.μ. νερὸν ἐξώδευσα τὴν προηγουμένην τριμηνίαν;

30. Ἡ Ἠλεκτρικὴ Ἑταιρεία Ἀθηνῶν-Πειραιῶς ὥρισε τὴν τιμὴν τοῦ συνηθισμένου ρεύματος πρὸς 1,50 δρχ. τὸ κιλοβάτ. Εἰς τὸ σπίτι μας κατηναλώσαμεν τὸν προηγούμενον μῆνα 29 κιλοβάτ. Πόσα θὰ πληρώσωμεν εἰς τὴν Ἑταιρείαν;

31. Ἡ λίμνη τοῦ Μαραθῶνος εἰς τὰς 9 Ἀπριλίου 1959 περιεῖχε 17.355 000 κυβικὰ μέτρα ὕδατος, ἐνῷ εἰς τὰς 9 Ἀπριλίου 1958 περιεῖχε 15.790. 000 κυβικά. Πόση εἶναι ἡ διαφορὰ τοῦ ὕδατος ἀπὸ τὴν μίαν ἡμερομηνίαν εἰς τὴν ἄλλην;

32. Ἕνα ταχυδρομικὸν γραφεῖον ἐπώλησε σήμερον: 150 γραμματόσημα τῶν 2,50 δρχ., 120 γραμματόσημα τῶν 0,50 δρχ., 100 γραμματόσημα τῶν 0,20 δρχ. καὶ 460 γραμματόσημα τῶν 1,50 δρχ. Ἐπίσης εἰσέπραξεν ἀπὸ τὴν ἀποστολὴν ταχυδρομικῶν δεμάτων 680 δρχ. Πόσαι εἶναι αἱ σημεριναὶ εἰσπράξεις αὐτοῦ τοῦ ταχυδρομικοῦ γραφείου;

33. Παραμονὴ ἑορτῆς. Τὸ κρεοπωλεῖον τῆς συνοικίας μου ἔκαμε τὴν ἑξῆς πώλησιν: 126 χλγρ. κρέας ἀμνοῦ πρὸς 34 δρχ. τὸ χιλγρ., 93,5 χιλγρ. κρέατος μόσχου πρὸς 30 δρχ. τὸ χιλγρ. Πόσα χρήματα εἰσέπραξε;

34. Μεγάλην, ἐπίσης, κίνησιν ἔχουν καὶ τὰ παντοπωλεῖα. Τὸ παντοπωλεῖον τῆς συνοικίας μας ἔκαμε τὴν ἑξῆς πώλησιν: Βούτυρον γάλακτος 24,5 χλγρ. πρὸς 40 δρχ. τὸ χλγρ., 18,4 χλγρ. τυρὶ φέτα πρὸς 20 δρχ. τὸ χλγρ. καὶ 12,7 χλγρ. κασέρι πρὸς 25 δρχ. τὸ χλγρ. Πόσα εἰσέπραξε;

35. Ἀκόμη μεγαλυτέραν κίνησιν εἶχεν ἕνα κατάστημα παιδικῶν παιγνιδιῶν: Ἐπώλησε 56 κοῦκλες πρὸς 25 δρχ. τὴν μίαν, 47 παιδικὰ ἁμαξάκια πρὸς 48 δρχ. τὸ ἕνα, 27 σιδηροδρόμους πρὸς 150 δρχ. τὸν ἕνα. Πόσα εἰσέπραξε;

36. Τὰ παιδιὰ τοῦ σχολείου μας εἶπαν πέρυσι τὰ κάλανδα καὶ συνεκέντρωσαν 1.786 δρχ. τὰς ὁποίας ἐμοίρασαν ὡς ἑξῆς: Διὰ γλυκὰ εἰς τὸ Νοσοκομεῖον Παίδων δρχ. 325 καὶ διὰ τὴν βιβλιοθήκην τοῦ σχολείου 765 δρχ. Μὲ τὰ ὑπόλοιπα ἠγόρασαν 6 ζεύγη ὑποδημάτων διὰ τὰ πτωχὰ παιδιὰ τοῦ σχολείου. Πόσον ἐστοίχισε κάθε ζεῦγος ὑποδημάτων;

37. Ὁ Ἐρυθρὸς Σταυρὸς Νεότητος ἔχει σήματα ΕΣΝ μὲ 0,50 δρχ. τὸ ἕνα. Ἐστείλαμεν 196,50 δρχ. Πόσα σήματα θὰ μᾶς στείλῃ;

38. Ὁ σῖτος στοιχίζει 3 δρχ. τὸ χιλγρ. Τὸ ἄλευρον στοιχίζει 4,50 δρχ. τὸ χιλγρ. Ἔχω 675 δρχ. Πόσα χιλγρ σίτου, ἢ πόσα χιλγρ. ἀλεύρου ἠμπορῶ νὰ ἀγοράσω μὲ αὐτὰ τὰ χρήματα;

39. Εἰσπράττω κάθε μῆνα 2.800 δρχ. καὶ ἐξοδεύω 1.752 δρχ. Εἰς πόσους μῆνας θὰ ἔχω οἰκονομίας 5.470 δρχ.;

40. Ἡ χρυσῆ λίρα Ἀγγλίας ἔχει σήμερον 308 δρχ. Πόσας δρχ. θὰ πάρω, ἂν ἐξαργυρώσω 8 λίρες καὶ 15 σελίνια;

41. Ἕνας ἐμπορορράπτης εἶχε ἕνα τόπι ὕφασμα μάλλινον, μήκους 40,6 μέτρων. Διὰ κάθε ἀνδρικὴν ἐνδυμασίαν ἀπαιτοῦνται 2,9 μέτρα ὑφάσματος.

'Η ἀξία τοῦ ὑφάσματος καὶ τῶν ραπτικῶν ἀνέρχεται εἰς 1.650 δρχ. Πόσας ἐνδυμασίας ἔβγαλε ὁ ράπτης ἀπὸ ὅλον τὸ τόπι τοῦ ὑφάσματος καὶ πόσα χρήματα εἰσέπραξε;

42. Ἕνας συνεταιρισμὸς ἐλαιοπαραγωγῶν συνεκέντρωσεν εἰς τὰς ἀποθήκας του πέρυσι 17.000 χλγρ. ἐλαιῶν τὸ ὁποῖον ἐπώλησε πρὸς 18,50 τὸ χλγρ. 'Αλλ' ἐκράτησε διὰ ἔξοδα ἀποθήκης, κλπ. 25.500 δρχ. Πόσα χρήματα ἔδωσεν εἰς τοὺς παραγωγούς;

43. Ἕνας ἔλαβεν ἀπὸ τὴν 'Αμερικὴν ἕνα τσὲκ 35 δολλαρίων. Πόσας δραχμὰς θὰ πάρῃ, ὅταν ἐξαργυρώσῃ τὸ τσὲκ πρὸς 30 δρχ. τὸ δολλάριον;

44. Τὸ σχολεῖον μας παρήγγειλεν εἰς τὸν σιδηρουργὸν τὴν σιδηρᾶν ἐξώθυραν τῆν αὐλῆς, ἡ ὁποία ζυγίζει 157 χλγρ. καὶ τὴν ὁποίαν ἐπληρώσαμεν πρὸς 11 δρχ. τὸ χλγρ. Πόσα χρήματα θὰ πληρώσῃ τὸ σχολικὸν ταμεῖον διὰ τὴν ἐξώθυραν;

45. Τὰ μαθήματα καὶ διαλείμματα εἰς τὸ σχολεῖον μας ἔχουν αὐτὰς τὰς ὥρας: Πρῶτον μάθημα 8 ἕως 8,50. Δεύτερον μάθημα 9 ἕως 9 καὶ 10'. Τρίτον μάθημα 10 καὶ 5' ἕως 10 καὶ 55'. Τέταρτον μάθημα 11 καὶ 10' ἕως 12. Πέμπτον μάθημα 12 καὶ 10' ἕως 12 καὶ 55'. Πόσας ὥρας κάμνομεν μάθημα καὶ πόσας ὥρας διαρκοῦν τὰ διαλείμματα;

46. Ἕνα σιδηροῦν βαρέλιον πετρελαίου τὸ ὁποῖον περιεῖχε 144 χλγρ. πετρελαίου τὸ ἐκενώσαμεν, καὶ ἐβάλαμεν τὸ πετρέλαιον εἰς δοχεῖα τὰ ὁποῖα παίρνουν 16 χιλγρ. Πόσα δοχεῖα ἐχρησιμοποιήσαμεν;

47. Ἕνας ἔμπορος ἐτοποθέτησε 314,5 χλγρ. μῆλα εἰς κιβώτια. Τὸ κάθε κιβώτιον χωρεῖ 18,5 χλγρ. μῆλα. Πόσα κιβώτια ἐγέμισε;

48. Διὰ τὰ 314,5 χλγρ. μῆλα ἐπλήρωσε 1.572,5 δρχ. Πόσα δηλαδή, ἐπλήρωσε τὸ χλγρ;

49. 'Ο Ραδιοφωνικὸς Σταθμὸς 'Αθηνῶν ἀρχίζει τὰς ἐκπομπάς του εἰς τὰς 7 τὸ πρωῒ καὶ διακόπτει εἰς τὰς 10 καὶ 35'. 'Επαναρχίζει εἰς τὰς 12 καὶ 30' καὶ σταματᾷ εἰς τὰς 24. Πόσας ὥρας τὸ εἰκοσιτετράωρον ἐργάζεται καὶ πόσας κάμνει διακοπήν;

50. Τὸ σχολικὸν ἔτος ἀρχίζει εἰς τὰς 10 Σεπτεμβρίου. Τὰ μαθήματα διακόπτονται ἀπὸ τὰς 23 Δεκεβρίου ἕως τὰς 7 'Ιανουαρίου. 'Επαναρχίζουν εἰς τὰς 8 'Ιανουαρίου καὶ διακόπτονται ἀπὸ τὴν Μεγάλην Δευτέραν μέχρι τῆς Κυριακῆς τοῦ Θωμᾶ. 'Επαναρχίζουν τὴν Δευτέραν τοῦ Θωμᾶ ἕως τὰς 30 'Ιουνίου. Διακόπτονται πάλιν τὰ μαθήματα διὰ τὰς θερινὰς διακοπὰς μέχρι τῆς 9 Σεπτεμβρίου. Πόσους μῆνας εἰς κάθε σχολικὸν ἔτος γίνονται μαθήματα καὶ πόσους μῆνας ἔχομεν διακοπάς;

51. 'Η Κοινοπραξία Συνεταιριστικῶν 'Οργανώσεων Σταφιδοπαρα-

γωγῶν μιᾶς περιοχῆς τῆς χώρας μας συνεκέντρωσεν εἰς τὰς ἀποθήκας τὰς κατωτέρω ποσότητας σταφίδος :

α'	ἡμέρα	650.000	χλγρ.
β'	»	147.334	χλγρ.
γ'	»	422.650	»
δ'	»	316.182	»
ε'	»	269.314	»

Πόσα χιλγρ. σταφίδος συνεκέντρωσεν εἰς τὰς ἀποθήκας της εἰς αὐτὸ τὸ χρονικὸν διάστημα; Πόσοι τόννοι εἶναι αὐτὰ τὰ χιλιόγραμμα;

52. Ἕνας καπνέμπορος συνεκέντρωσεν εἰς τὰς ἀποθήκας του ἐφέτος 125.210 χλγρ. καπνά. Τὰ ἠγόρασε πρὸς 22 δρχ. τὸ χιλγρ. Κατὰ τὴν ἐπεξεργασίαν εἶχε φύραν 5.840 χλγρ. Τὰ καπνὰ τὰ ἐπώλησε πρὸς 40 δρχ. τὸ χλγρ. Ἐζημιώθη, ἢ ἐκέρδισε, καὶ ποῖον ποσόν;

53. Ἕνας βιβλιοπώλης εἶχε τὴν πρώτην Ὀκτωβρίου τὴν ἑξῆς πώλησιν:

α' Ἀλφαβητάρια		120	πρὸς	8,50	δρχ. τὸ ἓν
β' Ἀναγνωστικὰ	Β'	75	πρὸς	9	» » »
γ' »	Γ'	82	»	9,50	» » »
δ' »	Δ'	28	»	10	» » »
ε' »	Ε'	35	»	10,50	» » »
στ' »	ΣΤ'	64	»	11	» » »

Πόσα χρήματα εἰσέπραξε τὴν ἡμέραν ἐκείνην;

54. Εἰς τὴν γειτονιάν μου εἶναι ἓν μικρὸν ἀνθρακοπωλεῖον. Ὁ ἰδιοκτήτης ἠγόρασε 2.000 χλγρ. ξυλοκάρβουνα πρὸς 2,80 δρχ. τὸ χιλγρ. Ἀλλὰ τὸ κάρβουνον εἶχε μέσα 250 χιλγρ. καρβουνόσκονην. Τὴν καρβουνόσκονην τὴν ἐπώλησε πρὸς 1,30 δρχ. τὸ χιλγρ. καὶ τὰ καλὰ κάρβουνα τὰ ἐπώλησε πρὸς 3,60 δρχ. τὸ χλγρ. Ἐζημιώθη ἢ ἐκέρδισε, καὶ πόσα;

55. Ἕνας αὐγοπώλης ἔφερεν ἀπὸ τὴν ὕπαιθρον πρὸς πώλησιν εἰς τὴν ἀγορὰν τοῦ Πειραιῶς 15.000 αὐγά, τὰ ὁποῖα ἠγόρασε πρὸς 1,80 τὸ ζεῦγος. Ὅταν τὰ ἔβγαζε ἀπὸ τὰ κιβώτια τοῦ ἔσπασαν 850 αὐγά. Ἀπὸ τὰ ὑπόλοιπα, τὰ μισὰ τὰ ἐπώλησε πρὸς 3 δρχ. τὸ ζεῦγος καὶ τὰ ἄλλα μισὰ πρὸς 3,40 δρχ. τὸ ζεῦγος. Ἐζημιώθη ἢ ἐκέρδισε, καὶ ποῖον ποσόν;

56. Ἕνα πετρελαιοκίνητον μετέφερεν ἀπὸ τὰ Βάτικα εἰς τὸν Πειραιᾶ 23 τόννους καὶ 500 χλγρ. κρεμμύδια. Εἰς τὸ ταξίδι ὅμως ἔπιασε φοβερὰ τρκυμία καὶ ἠναγκάσθη νὰ ρίψῃ εἰς τὴν θάλασσαν 7.850 χλγρ. κρεμμύδια. Ποῖον φορτίον ἔφερεν εἰς τὸν Πειραιᾶ;

57. Ἓν ἐργοστάσιον ἐπεξεργασίας χυμοῦ πορτοκαλιῶν ὑπολογίζει ὅτι εἰς 3,5 χλγρ. πορτοκάλια ἐξάγει ἓν χιλγρ. χυμὸν πορτοκαλιοῦ. Τὸν περασμένον χειμῶνα ἠγόρασε 17.5000 χλγρ. πορτοκάλια πρὸς 3 δρχ. τὸ χλγρ. Τὸν χυμὸν τοῦ πορτοκαλιοῦ ποὺ ἔβγαλε ἀπὸ τὴν ποσότητα αὐτήν, τὸν ἐπώλησε πρὸς 18 δρχ. τὸ χλγρ. Ἂν ἀφαιρέσῃ 37.500 δρχ. διὰ ἔξοδα (μισθοὺς ἐργατῶν, φιάλας, κλπ.) ποῖον κέρδος εἶχε;

58. Εἰς κάθε 7 χλγρ. γάλακτος νωποῦ βγάζουν ἓν χλγρ. γάλακτος συμπεπυκνωμένου. Εἰς ἓν ἐργοστάσιον τῆς Ὁλλανδίας συνεκέντρωσαν μίαν ἡμέραν 10.5000 χλγρ. νωπὸν γάλα, ἔκαμαν τὴν ἐπεξεργασίαν καὶ ἐτοποθέτησαν τὸ συμπεπυκνωμένον γάλα εἰς κουτιὰ τῶν 250 γραμμαρίων. Πόσα κουτιὰ ἐγέμισαν;

59. Οἱ τυροκόμοι, εἰς κάθε 16 χιλγρ. γάλακτος βγάζουν ἓν χλγρ. βουτύρου. Εἰς ἓν τυροκομεῖον συνεκέντρωσαν 576 χλγρ. γάλακτος. Πόσον βούτυρον ἔβγαλαν;

60. Εἰς τὸν μύλον κρατοῦν ἀλεστικὰ δικαιώματα 6 χλγρ. εἰς τὰ 100. Ὁ πατέρας ἑνὸς μαθητοῦ ἐπῆγε εἰς τὸν μύλον 250 χλγρ σίτου. Πόσα χλγρ. θὰ τοῦ κρατήσῃ ὁ μυλωνᾶς καὶ πόσον ἄλευρον θὰ μεταφέρῃ εἰς τὸ σπίτι;

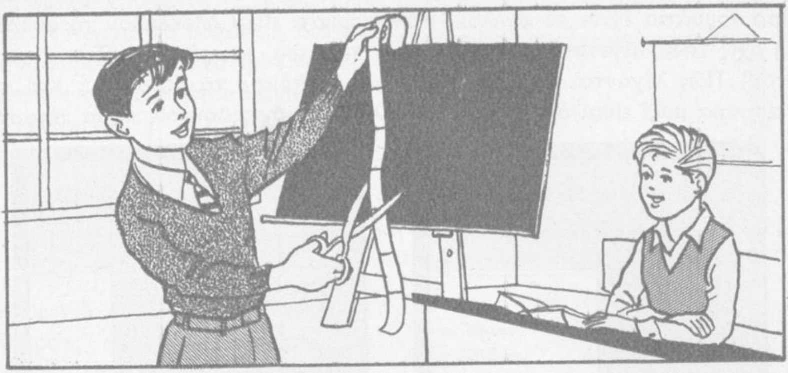
61. Ἀπὸ μίαν σιδηρόβεργαν μήκους 4,380 μέτρα ὁ σιδηρουργὸς ἔκοψε 2,896 μέτρα. Τὸ ὑπόλοιπον τὸ ἔκαμε τέσσαρας μικρὰς βέργας ἴσας. Πόσον μῆκος εἶχε κάθε μικρὰ σιδηρόβεργα;

62. Ἕνας ὑπάλληλος παίρνει μισθὸν 2.380δρχ. τὸν μῆνα. Αὐτὸν τὸ μῆνα εἶχε τὰ ἑξῆς ἔξοδα:

α') Διὰ φαγητὸν	1.214,50	δρχ.	
β') Διὰ ἐνοίκιον	560	δρχ.	
γ') Διὰ φῶς	24,40	δρχ.	
δ')Διὰ νερὸν	52,80	δρχ.	
ε') Διὰ ἐνδύματα	163	δρχ.	καὶ
στ') Διὰ ὑποδήματα	98	δρχ.	

Πόσα ἦσαν ὅλα τὰ ἔξοδα καὶ πόσα τοῦ ἐπερίσσευσαν;

63. Οἱ κάτοικοι ἑνὸς χωρίου παρήγαγον ἐφέτος 723.200 χλγρ. σταφίδος. Εἰς τὴν Κοινοπραξίαν Συνεταιρισμῶν παρέδωσαν 650 τόννους. Πόση σταφὶς ἔμεινεν ἀκόμη εἰς χεῖρας τῶν παραγωγῶν τοῦ χωρίου;

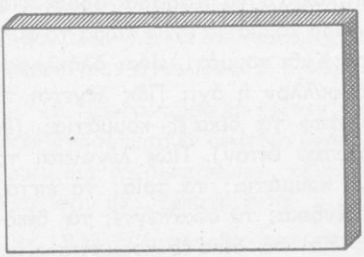


ΚΛΑΣΜΑΤΑ

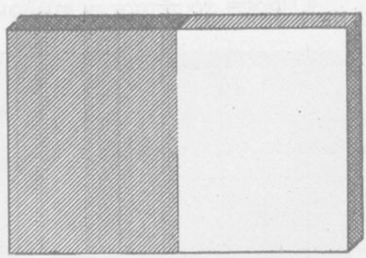
1. Αἰσθητοποίησις $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$.

(Ὑλικόν : τέσσαρα φύλλα χάρτου ὅμοια)

1. Πάρετε ὅλοι εἰς τὰ χέρια σας ἕνα φύλλον χαρτί. Διπλώσατέ το εἰς τὴν μέσην. Πόσα ἴσα κομμάτια ἔγινε τὸ φύλλον; Κάθε κομμάτι εἶναι ὁλόκληρον φύλλον ἢ ὄχι; Πῶς λέγεται τὸ ἓν ἀπὸ τὰ δύο κομμάτια; (ἥμισυ



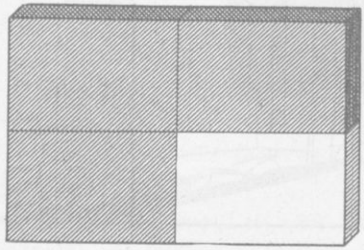
1. Ὁλόκληρον



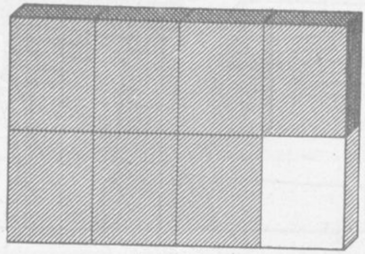
2. Ἥμισυ ἢ δεύτερον

ἢ ἓν δεύτερον). Πῶς λέγεται τὸ ἓν ἀπὸ τὰ δύο κομμάτια;; Καὶ τὰ δύο μαζί, εἶναι ὁλόκληρον τὸ φύλλον ἢ ὄχι; Λοιπὸν, πόσα δεύτερα εἶναι τὸ φύλλον; Αὐτὸ γράψατέ το: ὁλόκληρον τὸ φύλλον εἶναι..... δεύτερα.

2. Πάρετε τὸ δεύτερον φύλλον καὶ διπλώσατέ το δύο φοράς. Πόσα ἴσα κομμάτια ἔγινε τὸ φύλλον; Κάθε κομμάτι εἶναι ὁλόκληρον τὸ φύλλον ἢ ὄχι; Πῶς λέγεται τὸ ἓν ἀπὸ τὰ τέσσαρα κομμάτια ; (ἕνα τέταρτον). Πῶς λέγονται τὰ δύο κομμάτια ; τὰ τρία ; τὰ τέσσαρα ; Καὶ τὰ τέσσαρα μαζὶ εἶναι ὁλόκληρον τὸ φύλλον; ἢ ὄχι; Λοιπόν, πόσα τέταρτα



3. Τέταρτον

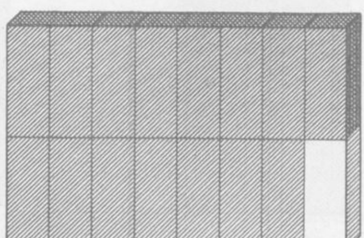


4. Ὄγδοον

εἶναι ὁλόκληρον τὸ φύλλον; Αὐτό, γράψατέ το: ὁλόκληρον τὸ φύλλον εἶναι....τέταρτα.

3. Πάρετε τὸ τρίτον φύλλον καὶ διπλώσατέ το τρεῖς φοράς. Πόσα ἴσα κομμάτια ἔγινε τώρα τὸ φύλλον; Κάθε κομμάτι, εἶναι ὁλόκληρον τὸ φύλλον ἢ ὄχι; Πῶς λέγονται τὸ ἕνα ἀπὸ τὰ ὀκτὼ κομμάτια; (ἓν ὄγδοον). Πῶς λέγονται τὰ δύο κομμάτια; τὰ τρία; τὰ τέσσαρα; τὰ πέντε; τὰ ἕξ ; τὰ ἑπτά; τὰ ὀκτώ; Καὶ τὰ ὀκτὼ κομμάτια εἶναι ὁλόκληρον τὸ φύλλον ἢ ὄχι; Λοιπόν, πόσα ὄγδοα εἶναι ὁλόκληρον τὸ φύλλον; Αὐτὸ γράψατέ το: ὁλόκληρον τὸ φύλλον εἶναι...ὄγδοα.

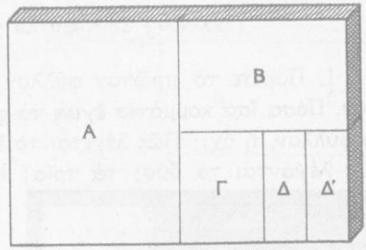
4. Πάρετε τὸ τέταρτον φύλλον καὶ διπλώσατέ το τέσσαρας φοράς. Πόσα ἴσα κομμάτια ἔγινε τώρα τὸ φύλλον; Κάθε κομμάτι, εἶναι ὁλόκληρον τὸ φύλλον ἢ ὄχι; Πῶς λέγεται τὸ ἓν ἀπὸ τὰ δέκα ἓξ κομμάτια; (ἓν δέκατον ἕκτον). Πῶς λέγονται τὰ δύο κομμάτια; τὰ τρία; τὰ ἑπτά; τὰ ἕνδεκα; τὰ δεκαπέντε; τὰ δέκαεξ; Καὶ τὰ δέκα ἓξ κομμάτια εἶναι ὁλόκληρον τὸ φύλλον, ἢ ὄχι; Λοιπόν, πόσα δέκατα ἕκτα εἶναι ὁλόκληρον τὸ φύλλον; Αὐτό, γράψατέ το: ὁλόκληρον τὸ φύλλον εἶναι.... δέκατα ἕκτα.



5. Δέκατον ἕκτον

5. Πάρετε, τώρα, ὅπως τὰ ἐδιπλώσαμεν, τὸ πρῶτον καὶ τὸ δεύτερον φύλ-

λον. Βάλετε ἐπάνω εἰς τὸ ἓν δεύτερον, τὸ ἓν τέταρτον. Τὸ ἐσκέπασε, ἢ ὄχι; Πόσα τέταρτα θὰ βάλωμεν, διὰ νὰ σκεπάσωμεν τὸ ἓν δεύτερον; Αὐτὸ γράψατέ το: ἓν δεύτερον εἶναι ἴσον μέ....τέταρτα.



6. Σύγκρισις

Α = Ἥμισυ = Τέταρτον
Γ = Ὄγδοον Δ, Δ΄ = Δέκατον ἕκτον

6. Πάρετε τώρα, ἔτσι ὅπως εἶναι διπλωμένα, τὸ πρῶτον καὶ τὸ τρίτον φύλλον. Βάλετε ἐπάνω εἰς τὸ ἓν δεύτερον, τὸ ἓν ὄγδοον. Τὸ ἐσκέπασε ἢ ὄχι; Πόσα ὄγδοα θὰ βάλωμεν διὰ νὰ σκεπάσωμεν τὸ ἓν δεύτερον; Αὐτό, γράψατέ το: ἓν δεύτερον εἶναι ἴσον μέ...ὄγδοα... ..

7. Πάρετε τώρα, πάλιν ἔτσι ὅπως εἶναι διπλωμένα, τὸ πρῶτον καὶ τὸ τέταρτον φύλλον. Βάλετε ἐπάνω εἰς τὸ ἓν δεύτερον, τὸ ἓν δέκατον ἕκτον. Τὸ ἐσκέπασε ἢ ὄχι; Πόσα δέκατα ἕκτα θὰ βάλωμεν, διὰ νὰ σκεπάσωμεν τὸ ἓν δεύτερον; Αὐτό, γράψατέ το: ἓν δεύτερον εἶναι ἴσον μέ... δέκατα ἕκτα... ..

8. Πάρετε τώρα τὸ δεύτερον καὶ τὸ τρίτον φύλλον. Βάλετε ἐπάνω εἰς τὸ ἓν τέταρτον, τὸ ἓν ὄγδοον. Τὸ ἐσκέπασε ἢ ὄχι; Πόσα ὄγδοα θὰ βάλωμεν διὰ νὰ σκεπάσωμεν τὸ ἓν τέταρτον; Αὐτό, γράψατέ το: ἓν τέταρτον εἶναι ἴσον μέ....ὄγδοα.

9. Πάρετε τώρα τὸ δεύτερον καὶ τὸ τέταρτον φύλλον. Βάλετε ἐπάνω εἰς ἓν τέταρτον, τὸ ἓν δέκατον ἕκτον. Τὸ ἐσκέπασε, ἢ ὄχι; Πόσα δέκατα ἕκτα θὰ βάλωμεν διὰ νὰ σκεπάσωμεν τὸ ἓν τέταρτον; Αὐτό, γράψατέ το: ἓν τέταρτον ἴσον εἶναι ἴσον μέ....δέκατα ἕκτα.

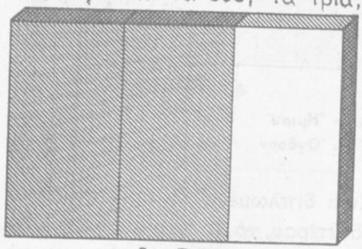
10. Πάρετε τώρα τὸ τρίτον καὶ τὸ τέταρτον φύλλον. Βάλετε ἐπάνω εἰς τὸ ἓν ὄγδοον, τὸ ἓν δέκατον ἕκτον. Τὸ ἐσκέπασε; Πόσα δέκατα ἕκτα θὰ βάλωμεν διὰ νὰ σκεπάσωμεν τὸ ἓν ὄγδοον; Αὐτό, γράψατέ το: ἓν ὄγδοον εἶναι ἴσον μέ... δέκατα ἕκτα.

11. Βάλετε ἔμπροσθέν σας τὰ φύλλα τοῦ χάρτου ἔτσι ὅπως εἶναι διπλωμένα: Πρῶτον, τὸ πρῶτον πλησίον του τὸ δεύτερον, πλησίον εἰς αὐτὸ τὸ τρίτον καὶ πλησίον εἰς τὸ τρίτον τὸ τέταρτον. Ποῖον εἶναι μεγαλύτερον κομμάτι; Ὀνομάσατέ τα μὲ τὴν σειρὰν ἀπὸ τὸ μεγαλύτερον ἕως τὸ μικρότερον καὶ γράψατέ τα ἔτσι: Τὸ μεγαλύτερον εἶναι τό . . . Μικρότερον ἀπὸ αὐτὸ εἶναι τὸ . . . κλπ.

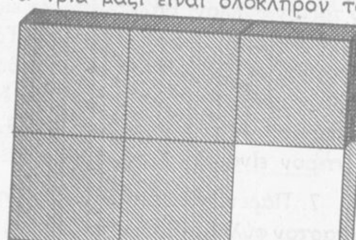
2. Αἰσθητοποίησις $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{12}$.

(Ὑλικόν : Τρία φύλλα χάρτου ὅμοια μὲ τὰ πρῶτα)

1. Πάρετε τὸ πρῶτον φύλλον εἰς τὸ χέρι καὶ διπλώσταέ το εἰς τὰ τρία. Πόσα ἴσα κομμάτια ἔγινε τὸ φύλλον; Κάθε κομμάτι εἶναι ὁλόκληρον τὸ φύλλον, ἢ ὄχι; Πῶς λέγεται τὸ ἓν ἀπὸ τὰ τρία κομμάτια; (ἓν τρίτον). Πῶς λέγονται τὰ δύο; τὰ τρία; Καὶ τὰ τρία μαζὶ εἶναι ὁλόκληρον τὸ φύλλον, ἢ ὄχι; Πόσα τρίτα εἶναι τὸ φύλλον; Γράψατέ το : ὁλόκληρον τὸ φύλλον εἶναι . . . τρίτα.

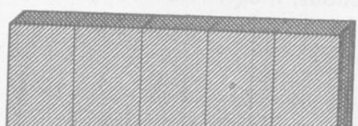


7. Τρίτον



8. Ἕκτον

2. Πάρετε τὸ δεύτερον φύλλον καὶ διπλώσατέ το εἰς τὰ τρία καὶ ἔτσι ὅπως εἶναι διπλώσατέ το εἰς τὸ μέσον. Πόσα ἴσα κομμάτια ἔγινε τὸ φύλλον; Κάθε κομμάτι εἶναι ὁλόκληρον τὸ φύλλον, ἢ ὄχι; Πῶς λέγεται τὸ ἓν ἀπὸ τὰ ἕξ; (ἓν ἕκτον). Πῶς λέγονται τὰ δύο; τρία; τέσσαρα; πέντε; ἕξ; Καὶ τὰ ἕξ μαζὶ εἶναι ὁλόκληρον τὸ φύλλον ἢ ὄχι; Πόσα ἕκτα εἶναι τὸ φύλλον; Γράψατέ το : ὁλόκληρον τὸ φύλλον εἶναι . . . ἕκτα.

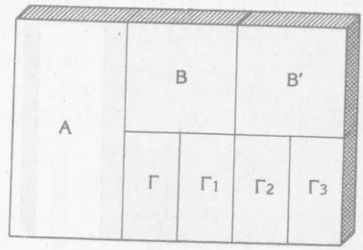


9. Δωδέκατον

3. Πάρετε τὸ τρίτον φύλλον. Διπλώσατέ το ὅπως ἐδιπλώσατε τὸ δεύτερον, πρῶτον εἰς τὰ τρία, κατόπιν εἰς τὸ μέσον, καὶ τώρα, ὅπως εἶναι διπλωμένον δίπλωσέ το πάλιν εἰς τὸ μέσον. Πόσα ἴσα κομμάτια ἔγινε τὸ φύλλον; Πῶς λέγεται τὸ ἓν ἀπὸ τὰ δώδεκα; (ἓν δωδέκατον). Πῶς λέγονται τὰ δύο; τρία; πέντε; ἐννέα; ἕνδεκα; δώδεκα; Καὶ τὰ δώδεκα, εἶναι ὁλόκληρον τὸ φύλλον, ἢ ὄχι; Πόσα δωδέκατα, λοιπόν, εἶναι τὸ φύλλον; Γράψατέ το : ὁλόκληρον τὸ φύλλον εἶναι . . . δωδέκατα.

4. Πάρετε τώρα ὅπως τὰ ἐδιπλώσαμεν, τὸ πρῶτον καὶ τὸ δεύτερον φύλλο. Βάλετε ἐπάνω εἰς τὸ ἓν τρίτον, τὸ ἓν ἕκτον. Τὸ ἐσκέπασε, ἢ ὄχι; Πόσα ἕκτα θὰ βάλωμεν διὰ νὰ σκεπάσωμεν τὸ ἓν τρίτον; τὰ δύο τρίτα; Γράψατέ το:

— Τὸ ἓν τρίτον εἶναι ἴσον μὲ . . . ἕκτα.
— Τὰ δύο τρίτα εἶναι ἴσα μὲ . . . ἕκτα.



10. Σύγκρισις

A Τρίτον, B, B′ = ἕκτα
Γ, $Γ_1$, $Γ_2$, $Γ_3$ = δωδέκατα

5. Πάρετε τὸ πρῶτον καὶ τὸ τρίτον φύλλον, διπλωμένα. Βάλετε ἐπάνω εἰς τὸ ἓν τρίτον, τὸ ἓν δωδέκατον. Τὸ ἐσκέπασε ἢ ὄχι; Πόσα δωδέκατα θὰ βάλωμεν διὰ νὰ σκεπάσωμεν τὸ ἓν τρίτον; τὰ δύο τρίτα; Αὐτό, γράψατέ το:

— Τὸ ἓν τρίτον εἶναι ἴσον μὲ . . . . . . δωδέκατα.
— Τὰ δύο τρίτα εἶναι ἴσα μὲ . . . . . . δωδέκατα.

6. Πάρετε τὸ δεύτερον καὶ τὸ τρίτον φύλλον, διπλωμένα. Βάλετε ἐπάνω εἰς τὸ ἓν ἕκτον, τὸ ἓν δωδέκατον. Τὸ ἐσκέπασε; Πόσα δωδέκατα θὰ βάλωμεν διὰ νὰ σκεπάσωμεν τὸ ἓν ἕκτον; τὰ δύο; τὰ τρία; τὰ τέσσαρα; τὰ πέντε; Αὐτό, γράψατέ το:

— Τὸ ἓν ἕκτον εἶναι ἴσον μὲ . . . . δωδέκατα.
— Τὰ δύο ἕκτα εἶναι ἴσα μὲ . . . . δωδέκατα.
— Τὰ τρία ἕκτα εἶναι ἴσα μὲ . . . . δωδέκατα.
— Τὰ τέσσαρα ἕκτα εἶναι ἴσα μὲ . . . . δωδέκατα.
— Τὰ πέντε ἕκτα εἶναι ἴσα μὲ . . . . δωδέκατα.

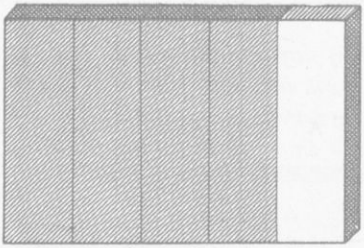
7. Βάλετε ἔμπροσθέν σας καὶ τὰ τρία φύλλα, ὅπως εἶναι διπλωμένα. Ποῖον εἶναι μεγαλύτερον κομμάτι; Ὀνομάσατέ τα μὲ τὴν σειράν, ἀπὸ τὸ μεγαλύτερον ἕως τὸ μικρότερον καὶ γράψατέ τα ἔτσι: Τὸ μεγαλύτερον εἶναι τό . . ., μικρότερον ἀπὸ αὐτὸ εἶναι τὸ . . . κλπ.

3. Αἰσθητοποίησις $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$.

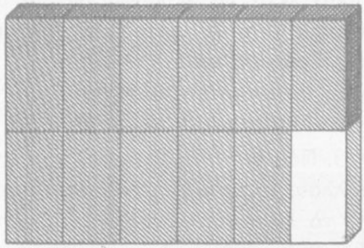
(Ὑλικόν : δύο φύλλα χάρτου ὅμοια μὲ τὰ πρῶτα)

1. Πάρετε τὸ πρῶτον φύλλον καὶ διπλώσατέ το ἔτσι, ὥστε νὰ χωρισθῇ εἰς πέντε ἴσια κομμάτια. Κάθε κομμάτι εἶναι ὁλόκληρον τὸ φύλλον; Πῶς λέγεται τὸ ἓν ἀπὸ τὰ πέντε; (ἓν πέμπτον). Πῶς λέγονται τὰ δύο;

τρία; τέσσαρα; πέντε; Πόσα πέμπτα εἶναι ὁλόκληρον τὸ φύλλον; Γράψατέ το: ὁλόκληρον τὸ φύλλον εἶναι . . . πέμπτα.

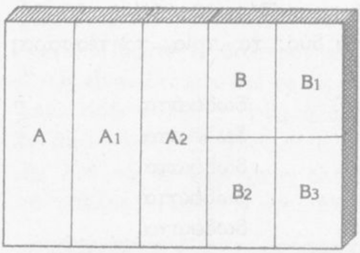


11. Πέμπτον



12. Δέκατον

2. Πάρετε τὸ δεύτερον φύλλον καὶ διπλώσατέ το ὅπως καὶ τὸ πρῶτον, ὥστε νὰ γίνουν πέντε ἴσα κομμάτια καὶ κατόπιν διπλώσατέ το εἰς τὸ μέσον. Πόσα ἴσα κομμάτια ἔγιναν; Κάθε κομμάτι, εἶναι ὁλόκληρον τὸ φύλλον; Πῶς λέγεται τὸ ἓν ἀπὸ τὰ δέκα; (ἓν δέκατον). Πῶς λέγονται τὰ δύο; τρία; ἕξ; ἐννέα; δέκα; Πόσα δέκατα εἶναι ὁλόκληρον τὸ φύλλον; Γράψατέ το: ὁλόκληρον τὸ φύλλον εἶναι . . . δέκατα.



13. Σύγκρισις
A, A_1, A_2 = Πέμπτα
B, B_1, B_2, B_3 = Δέκατα

3. Πάρετε τώρα καὶ τὰ δύο φύλλα διπλωμένα καὶ βάλετε, ἐπάνω εἰς τὸ ἓν πέμπτον, τὸ ἓν δέκατον. Τὸ ἐσκέπασε; Πόσα δέκατα θὰ βάλωμεν διὰ νὰ σκεπάσωμεν τὸ ἓν πέμπτον; τὰ δύο; τὰ τρία; τὰ τέσσαρα; Γράψατέ το:

— Ἓν πέμπτον εἶναι ἴσον μὲ . . . . δέκατα.
— Δύο πέμπτα εἶναι ἴσα μὲ . . . . δέκατα.
— Τρία πέμπτα εἶναι ἴσα μὲ . . . . δέκατα.
— Τέσσαρα πέμπτα εἶναι ἴσα μὲ . . . . δέκατα.

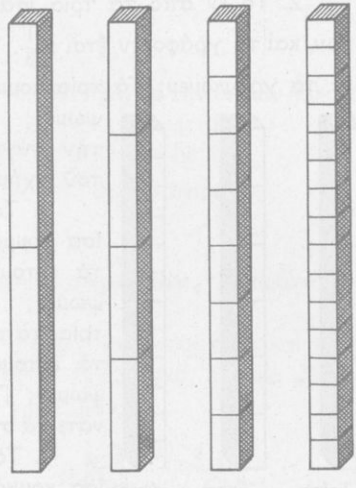
4. Βάλετε τώρα ἔμπροσθέν σας καὶ τὰ δύο φύλλα ἔτσι διπλωμένα. Ποῖον εἶναι μεγαλύτερον κομμάτι; Ὀνομάσατέ τα, μὲ τὴν σειράν, ποῖον εἶναι μεγαλύτερον καὶ ποῖον μικρότερον καὶ γράψατέ τα ἔτσι:

— Μεγαλύτερον κομμάτι εἶναι τό . . ., μικρότερον εἶναι τό . . .

4. Σύγκρισις τῶν διαφόρων κομματιῶν τοῦ χάρτου.

1. Ὅσα φύλλα χάρτου ἐδιπλώσαμεν ἀπὸ τὴν ἀρχήν, τοποθετήσατέ τα ἔμπροσθέν σας ἀνοιγμένα, ὄχι διπλωμένα. Ὅλα τὰ φύλλα, βεβαίως, εἶναι ἴσα: Καὶ αὐτὸ τὸ ὁποῖον εἶναι χωρισμένον εἰς τὰ δύο, καὶ αὐτὸ τὸ ὁποῖον εἶναι χωρισμένον εἰς τὰ τρία, εἰς τὰ τέσσαρα, κλπ. κομμάτια, ἕως αὐτὸ τὸ ὁποῖον εἶναι χωρισμένον εἰς δέκα ἓξ κομμάτια. Ὥστε τὸ φύλλον χάρτου, ποὺ εἶναι χωρισμένον εἰς δύο δεύτερα, εἶναι ἴσον καὶ μὲ αὐτὸ τὸ ὁποῖον εἶναι χωρισμένον εἰς τρία τρίτα, καθὼς καὶ μὲ ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον εἶναι χωρισμένον εἰς τέσσαρα τέταρτα, καὶ ἔτσι πηγαίνομεν ἕως τὸ τελευταῖον φύλλον. Ὥστε, ἢ δύο δεύτερα εἴπωμεν, ἢ τρία τρίτα, ἢ πέντε πέμπτα, ἢ δέκα δέκατα, ἢ δέκα ἓξ δέκατα ἕκτα εἶναι τὸ ἴδιον πρᾶγμα. Πάντοτε, δηλαδή, ὁμιλοῦμεν διὰ ἕνα ὁλόκληρον φύλλον χάρτου.

2. Κόψατε ἀπὸ κάθε φύλλον χαρτιοῦ, ὅπως τὰ εἴχομεν διπλώσει, τὸ ἕνα κομμάτι. Βάλετέ τα μὲ τὴν σειράν, τὸ ἓν δίπλα εἰς τὸ ἄλλο, ἀρχίζοντες ἀπὸ τὸ μεγαλύτερον ἕως τὸ μικρότερον. Ὀνομάσατέ τα. Κολλήσατέ τα εἰς τὸ τετράδιον τῆς Ἀριθμητικῆς, ἔτσι, μὲ τὴν σειράν, καὶ γράψατε κάτω ἀπὸ καθένα τί κομμάτι εἶναι.



14. Σύγκρισις

3. Κάμετε τὴν ἰδίαν σύγκρισιν μὲ τὰ σχέδια τοῦ σχήματος 14.

Ὁρισμοὶ

1. Κλασματικὴ μονὰς λέγεται καθὲν ἀπὸ τὰ ἴσα μέρη, εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται ἡ ἀκεραία μονάς.

2. Κλάσμα λέγεται ἓν πλῆθος ἀπὸ ἰδίας κλασματικὰς μονάδας, ἢ καὶ μία μόνη κλασματικὴ μονάς.

3. Προσθέτοντες εἰς τὴν μίαν κλασματικὴν μονάδα ἄλλην μίαν ἰδίαν, καὶ εἰς αὐτὰς τρίτην, τετάρτην, πέμπτην, κλπ. σχηματίζομεν πλῆθος ἀπὸ κλασματικὰς μονάδας, ὅπως ἀπὸ πλῆθος ἀκεραίων μονάδων σχηματίζομεν τοὺς ἀκεραίους ἀριθμούς.

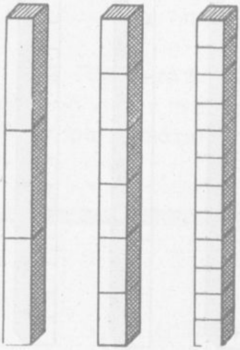
5. Γραφὴ κλασμάτων

1. Ὅσα εἴπομεν ἕως τώρα μὲ τὰ λόγια θὰ μάθωμεν νὰ τὰ γράφωμεν μὲ τοὺς ἀριθμούς. Τὸ ἓν ἀπὸ τὰ δύο ἴσα κομμάτια τῆς κόλλας, τὸ εἴπομεν ἓν δεύτερον, καὶ τὸ γράφομεν ἔτσι : $\frac{1}{2}$. Τὰ δύο κομμάτια τῆς κόλλας, πῶς τὰ εἴπομεν καὶ πῶς θὰ τὰ γράψωμεν; Γράψατέ τα.

2. Τὸ ἓν ἀπὸ τὰ τρία ἴσα κομμάτια τῆς κόλλας τὸ εἴπομεν ἓν τρίτον, καὶ τὸ γράφομεν ἔτσι : $\frac{1}{3}$. Τὰ δύο κομμάτια πῶς τὰ εἴπομεν, καὶ πῶς θὰ τὰ γράψωμεν; Τὰ τρία κομμάτια πῶς τὰ εἴπομεν καὶ πῶς θὰ τὰ γράψωμεν; Γράψατέ τα. Κάμετε τὴν σύγκρισιν μὲ τὰ σχέδια τοῦ σχήματος 15.

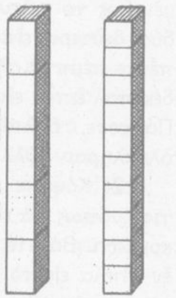
3. Τὸ ἓν ἀπὸ τὰ τέσσαρα ἴσα κομμάτια τῆς κόλλας πῶς τὰ εἴπομεν; Πῶς θὰ τὸ γράψωμεν; Ἐπίσης τὰ δύο, τὰ τρία, τὰ τέσσαρα κομμάτια πῶς τὰ εἴπομεν; Πῶς θὰ τὰ γράψωμεν; Γράψατέ τα. Συγκρίνατε τὰ σχέδια εἰς τὸ σχῆμα 14.

4. Τὸ ἓν ἀπὸ τὰ πέντε ἴσα κομμάτια τῆς κόλλας πῶς τὸ εἴπομεν καὶ πῶς θὰ τὸ γράψωμεν; Ἐπίσης τὰ δύο, τρία, τέσσαρα, πέντε κομμάτια πῶς τὰ εἴπομεν καὶ πῶς θὰ τὰ γράψωμεν; Γράψατέ τα. Συγκρίνατε τὰ σχέδια εἰς τὸ σχῆμα 16.



Τρίτα Ἕκτα Δωδέκατα

15. Σύγκρισις



Πέμπτα Δέκατα

16. Σύγκρισις

5. Τὸ ἓν ἀπὸ τὰ ἓξ ἴσα κομμάτια τῆς κόλλας πῶς τὸ εἴπομεν καὶ πῶς θὰ τὸ γράψωμεν; Ὀνόμασε καὶ γράψε τὰ δύο, τρία, τέσσαρα, πέντε, ἓξ κομμάτια. Σύγκρινε τὰ σχέδια εἰς τὸ σχῆμα 15.

6. Τὸ ἓν ἀπὸ τὰ ὀκτὼ ἴσα κομμάτια τῆς κόλλας πῶς τὸ εἴπομεν καὶ πῶς θὰ τὸ γράψωμεν; Ὀνόμασε καὶ γράψε τὰ δύο, τρία, τέσσαρα, πέντε ἕξ, ἑπτά, ὀκτὼ κομμάτια. Σύγκρινε τὰ σχέδια εἰς τὸ σχῆμα 14.

7. Τὸ ἓν ἀπὸ τὰ δέκα ἴσα κομμάτια τῆς κόλλας πῶς τὸ εἴπομεν καὶ πῶς θὰ τὸ γράψωμεν; Ὀνόμασε καὶ γράψε τὰ δύο, τρία, τέσσαρα κλπ. ἕως τὰ δέκα κομμάτια. Σύγκρινε τὰ σχέδια εἰς τὸ σχῆμα 16.

8. Τὸ ἓν ἀπὸ τὰ δώδεκα ἴσα κομμάτια τῆς κόλλας πῶς τὸ εἴπομεν;

Γράψατέ το. Ἐπίσης ὀνομάσατε καὶ γράψατε τὰ δύο, τρία κλπ. ἕως τὰ δέκα ἓξ κομμάτια. Συγκρίνατε τὰ σχέδια εἰς τὰ σχήματα 15 καὶ 16.

9. Εἰς τὸ τετράδιόν μας εἴχομεν κολλήσει μὲ τὴν σειράν, ἀπὸ τὸ μεγαλύτερον ἕως τὸ μικρότερον, τὰ κομμάτια τὰ ὁποῖα εἴχομεν κόψει ἀπὸ τὰς κόλλας. Εἴχομεν εἴπει μάλιστα, νὰ γράψωμεν καὶ μὲ τὰ λόγια ἐκεῖ ποὺ πρέπει: ἓν δεύτερον, ἓν τρίτον, ἓν τέταρτον κλπ.

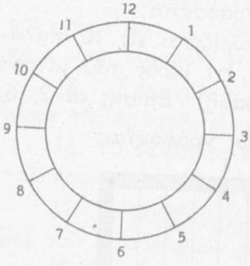
Τώρα νὰ γράψετε, κάτω ἀπὸ τὰ γράμματα, καὶ μὲ τοὺς ἀριθμοὺς τὸ κάθε κομμάτι, ἔτσι: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$,

10. Ὁ Κωστάκης δὲν ἐγνώριζε νὰ τὰ τοποθετήσῃ μὲ τὴν σειρὰν καὶ τὰ ἔγραφε ἀνακατωμένα. Ἰδού, ἔτσι: $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{5}$.

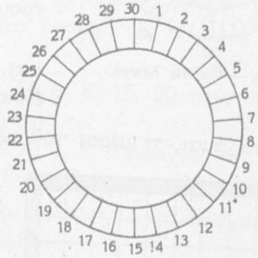
Σεῖς ἠμπορεῖτε νὰ τὰ τοποθετήσετε εἰς τὴν ὀρθὴν σειράν;

6. Κλάσματα χρόνου, μέτρων, χρημάτων, βαρῶν

1. Τὸ ἔτος ἔχει 12 μῆνας. Ὁ εἷς μὴν τί μέρος τοῦ ἔτους εἶναι καὶ πῶς θὰ τὸ γράψωμεν; Ἐπίσης οἱ τρεῖς, πέντε, ἑπτά, ὀκτώ, δέκα, δώδεκα μῆνες, τί μέρος τοῦ ἔτους εἶναι καὶ πῶς θὰ τὸ γράψωμεν;



17. Ἔτος — Μῆνες

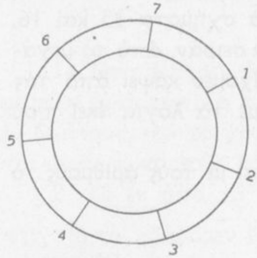


18. Μὴν — Ἡμέραι

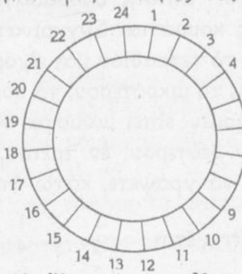
2. Εἰς τὴν Ἀριθμητικήν, ὁ μὴν ὑπολογίζεται εἰς 30 ἡμέρας. Ἡ μία ἡμέρα, τί μέρος τοῦ μηνὸς εἶναι; Ἐπίσης αἱ πέντε, ὀκτώ, εἴκοσι, τριάκοντα ἡμέραι, τί μέρος τοῦ μηνὸς εἶναι καὶ πῶς θὰ τὸ γράψωμεν;

3. Ἡ ἑβδομὰς ἔχει 7 ἡμέρας. Ἡ μία ἡμέρα, τί μέρος τῆς ἑβδομάδος εἶναι; Πῶς θὰ τὸ γράψωμεν; Αἱ δύο, τρεῖς, πέντε, ἑπτὰ ἡμέραι τί μέρος τῆς ἑβδομάδος εἶναι καὶ πῶς θὰ τὸ γράψωμεν;

4. Τὸ ἡμερονύκτιον ἔχει 24 ὥρας. Ἡ μία ὥρα, τί μέρος τοῦ ἡμερονυ-



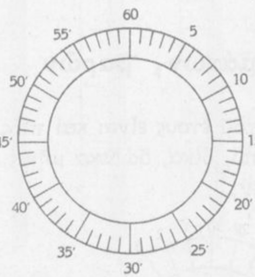
19. Ἑβδομὰς — Ἡμέραι



20. Ἡμερονύκτιον — Ὧραι

κτίου εἶναι; Πῶς τὸ γράφομεν; Ἐπίσης αἱ ἕξ, δώδεκα, εἴκοσι τέσσαρες ὧραι τί μέρος τοῦ ἡμερονυκτίου εἶναι καὶ πῶς θὰ τὸ γράψωμεν;

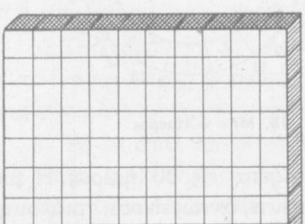
5. Ἡ ὥρα ἔχει 60 πρῶτα λεπτά. Τὸ ἓν πρῶτον λεπτόν, τί μέρος τῆς ὥρας εἶναι; Πῶς γράφεται; Τὰ 15, 30, 45, 60 πρῶτα λεπτά, τί μέρος τῆς ὥρας εἶναι καὶ πῶς γράφονται;

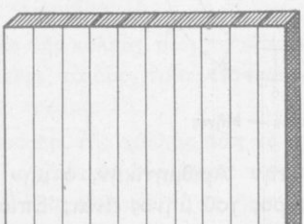


21. Ὧρα — Πρῶτα λεπτὰ

6. Ἓν μέτρον χωρίζεται εἰς 100 δακτύλους ἢ πόντους. Ὁ εἷς δάκτυλος, τί μέρος τοῦ μέτρου εἶναι; Πῶς γράφεται; Οἱ 7, 10, 35, 50, 100 δάκτυλοι, τί μέρος τοῦ μέτρου εἶναι καὶ πῶς γράφονται;

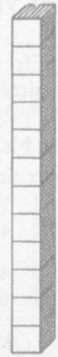
7. Ἓν μέτρον χωρίζεται εἰς 10 παλάμας. Ἡ μία παλάμη, τί μέρος τοῦ μέτρου εἶναι καὶ πῶς θὰ γραφῇ; Ἐπίσης αἱ 2, 6, 9, 10 παλάμαι, τί μέρος τοῦ μέτρου εἶναι καὶ πῶς γράφονται;


22. Μέτρον — Δάκτυλοι


23. Μέτρον — Παλάμαι

8. Ἓν μέτρον χωρίζεται εἰς 1000 γραμμάς. Ἡ μία γραμμή, τί μέρος τοῦ μέτρου εἶναι καὶ πῶς θὰ γραφῇ; Ἐπίσης αἱ 4, 10, 50, 100, 500, 1000 γραμμαί, τί μέρος τοῦ μέτρου εἶναι καὶ πῶς γράφονται;

9. Εἰς τὸ ἐμπόριον πολλὰ εἴδη, ὅπως αἱ κάλτσαι, τὰ μανδήλια, αἱ πετσέται, πωλοῦνται μὲ τὴν δωδεκάδα. Μία δωδεκὰς εἶναι 12 μανδήλια. Τὸ ἓν μανδήλιον τί μέρος τῆς δωδεκάδος εἶναι καὶ πῶς θὰ γραφῇ; Ἐπίσης τὰ 2, 5, 7, 10, 11, 12 μανδήλια, τί μέρος τῆς δωδεκάδος εἶναι καὶ πῶς γράφονται ;



Δωδεκὰς

10. Ἡ δραχμὴ ἔχει 100 λεπτά. Τὸ ἓν λεπτὸν τί μέρος τῆς δραχμῆς εἶναι; Πῶς γράφεται; Ἐπίσης τὰ 5, 10, 20, 50, 100 λεπτά, τί μέρος εἶναι καὶ πῶς γράφονται;

11. Τὸ δίδραχμον ἔχει δύο δραχμάς. Ἡ μία δραχμή, τί μέρος τοῦ διδράχμου εἶναι καὶ πῶς γράφεται; Ἐπίσης αἱ δύο δραχμαὶ τί μέρος τοῦ διδράχμου εἶναι καὶ πῶς γράφονται;

12. Ἡ δραχμὴ ἔχει δύο πεντηκοντάλεπτα. Τὸ ἓν πεντηκοντάλεπτον, τί μέρος τῆς δραχμῆς εἶναι; Πῶς γράφεται; Τὰ δύο πεντηκοντάλεπτα τί μέρος τῆς δραχμῆς εἶναι καὶ πῶς γράφονται;

13. Ἡ δραχμὴ ἔχει πέντε εἰκοσάλεπτα. Τὸ ἓν εἰκοσάλεπτον, τί μέρος τῆς δραχμῆς εἶναι καὶ πῶς γράφεται; Ἐπίσης τὰ δύο, τρία, τέσσαρα, πέντε εἰκοσάλεπτα, τί μέρος τῆς δραχμῆς εἶναι καὶ πῶς γράφονται;

14. Ἡ δραχμὴ ἔχει 10 δεκάλεπτα. Τὸ ἓν δεκάλεπτον, τί μέρος τῆς δραχμῆς εἶναι; Τὰ δύο, πέντε, ἐννέα, δέκα δεκάλεπτα, τί μέρος τῆς δραχμῆς εἶναι καὶ πῶς γράφονται;

15. Ἡ δραχμὴ ἔχει 20 πεντάλεπτα. Τὰ 6, 8, 15, 20 πεντάλεπτα, τί μέρος τῆς δραχμῆς εἶναι καὶ πῶς γράφονται;

16. Τὸ τάλληρον ἔχει πέντε δραχμάς. Αἱ 2, 3, 5 δραχμαὶ τί μέρος τοῦ ταλλήρου εἶναι καὶ πῶς γράφονται;

17. Τὸ δεκάδραχμον ἔχει 10 δραχμάς. Αἱ 1, 4, 7, 10 δραχμαὶ τί μέρος τοῦ δεκαδράχμου εἶναι καὶ πῶς γράφονται;

18. Τὸ εἰκοσάδραχμον ἔχει 20 δραχμάς. Αἱ 1, 6, 11, 17, 20 δρχ., τί μέρος τοῦ εἰκοσαδράχμου εἶναι καὶ πῶς γράφονται;

19. Τὸ πεντηκοντάδραχμον ἔχει 50 δραχμάς. Αἱ 1, 10, 30, 45, 50 δρχ., τί μέρος τοῦ πεντηκονταδράχμου εἶναι καὶ πῶς γράφονται;

20. Τὸ ἑκατοντάδραχμον ἔχει 100 δραχμάς. Αἱ 1, 25, 50, 75, 100 δρχ., τί μέρος τοῦ ἑκατονταδράχμου εἶναι καὶ πῶς γράφονται;

21. Τὸ πεντακοσιόδραχμον ἔχει 500 δρχμάς. Αἱ 1, 10, 50, 100, 300, 500 δραχμαὶ τί μέρος τοῦ πεντακοσιοδράχμου εἶναι καὶ πῶς γράφονται;

22. Τὸ χιλιόδραχμον ἔχει 1000 δραχμάς. Αἱ 1, 2, 5, 10, 100, 500, 1000 δραχμαὶ τί μέρος τοῦ χιλιοδράχμου εἶναι καὶ πῶς γράφονται;

23. Τὸ χιλιόγραμμον (ἢ κιλὸν) ἔχει 1000 γραμμάρια. Τί μέρος τοῦ χιλιογράμμου εἶναι τὰ 1, 10, 50, 100, 999, 1000 γραμμάρια καὶ πῶς θὰ τὰ γράψωμεν;

7. Σύγκρισις κλασμάτων

Εἰς τὴν ἀριθμητικήν, κάθε κομμάτι, κάθε μέρος, ἀπὸ μίαν ὁλόκληρον ἀκεραίαν μονάδα, ἢ ἀπὸ μίαν ὁλόκληρον ποσότητα, τὸ λέγομεν κλάσμα.

Γράψατε εἰς τὸ τετράδιόν σας καὶ ἐκτελέσατε τὰς κατωτέρω ἀσκήσεις:

1. Μελετήσατε καλὰ τὰς πρώτας ἀσκήσεις, ποὺ ἐκάμαμεν μὲ τὰ διπλωμένα φύλλα καὶ εἴπετέ μας ποῖον εἶναι, εἰς κάθε σειράν, τὸ μεγαλύτερον κλάσμα.

α′) $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{4}{8}, \frac{8}{16}$, β′) $\frac{1}{3}, \frac{2}{6}, \frac{4}{12}$

γ′) $\frac{3}{2}, \frac{4}{6}, \frac{8}{12}$ δ′) $\frac{1}{5}, \frac{2}{10}$

ε′) $\frac{2}{5}, \frac{4}{10}$ στ′) $\frac{3}{5}, \frac{6}{10}$ ζ′) $\frac{4}{5}, \frac{8}{10}$

2. Ἀφοῦ ἐξετελέσατε τὰς ἀνωτέρω ἀσκήσεις, τώρα νὰ εὕρητε:

α) Πόσαι δραχμαὶ εἶναι τὸ $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{4}{8}, \frac{8}{16}$ τοῦ χιλιογράμμου;

β) Πόσαι ἡμέραι εἶναι τὸ $\frac{1}{3}, \frac{2}{6}, \frac{4}{12}$ τοῦ μηνός;

γ) Πόσοι μῆνες εἶναι τὰ $\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{8}{12}$ τοῦ ἔτους;

δ) Πόσα γραμμάρια εἶναι τὸ $\frac{1}{5}, \frac{2}{10}$, τοῦ χιλιογράμμου;

ε) Πόσοι δάκτυλοι εἶναι τὰ $\frac{2}{5}, \frac{4}{10}$, τοῦ μέτρου;

στ) Πόσαι δραχμαὶ εἶναι τὰ $\frac{3}{5}, \frac{6}{10}$, τοῦ χιλιοδράχμου;

ζ) Πόσαι δραχμαὶ εἶναι τὰ $\frac{4}{5}, \frac{8}{10}$, τοῦ ἑκατονταδράχμου;

3. Ἀφοῦ προσέξετε καλὰ αὐτὰς τὰς ἀσκήσεις, νὰ εὕρητε τὰς παρακάτω, μελετῶντες, ἄλλην μίαν φοράν, πολὺ καλὰ τὰς ἀσκήσεις, ποὺ ἐκάμαμεν μὲ τὰ διπλωμένα φύλλα.

Νὰ εὕρητε ποῖον εἶναι, εἰς κάθε σειράν, τὸ μεγαλύτερον κλάσμα.

α) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$, β) $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}$, γ) $\frac{1}{5}, \frac{1}{10}$.

4. Ἀφοῦ εὑρήκατε ποῖον εἶναι τὸ μεγαλύτερον νὰ εὕρητε τώρα :

α) Πόσαι δραχμαὶ εἶναι τὸ $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ τοῦ χιλιοδράχμου ;

β) Πόσαι ἡμέραι εἶναι τὸ $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$ τοῦ μηνός ;

γ) Πόσα γραμμάρια εἶναι τὸ $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$ τοῦ χιλιογράμμου ;

5. Ἀφοῦ εὕρετε αὐτὰς τὰς ἀσκήσεις καὶ ἀφοῦ μελετήσετε πάλιν τὰς ἀσκήσεις ποὺ ἐκάμαμεν εἰς τὴν ἀρχὴν μὲ τὰ διπλωμένα φύλλα, νὰ εὕρητε ποῖον εἶναι, εἰς κάθε σειράν, τὸ μεγαλύτερον κλάσμα.

α) $\frac{2}{2}$, $\frac{4}{4}$, $\frac{8}{8}$, $\frac{16}{16}$ β) $\frac{3}{3}$, $\frac{6}{6}$, $\frac{12}{12}$ γ) $\frac{5}{5}$, $\frac{10}{10}$

6. Τώρα νὰ εὕρητε :

α) Πόσαι δραχμαὶ εἶναι τὰ $\frac{2}{2}$, $\frac{4}{4}$, $\frac{8}{8}$, $\frac{16}{16}$ τοῦ χιλιοδράχμου ; δηλαδὴ πόσα χιλιόδραχμα ;

β) Πόσαι ἡμέραι εἶναι τὰ $\frac{3}{3}$, $\frac{6}{6}$, $\frac{12}{12}$ τοῦ μηνός ; δηλαδὴ πόσοι μῆνες ;

γ) Πόσα γραμμάρια εἶναι τὰ $\frac{5}{5}$, $\frac{10}{10}$ τοῦ χιλιογράμμου ; δηλαδὴ πόσα χιλιόγραμμα ;

Ὅροι τοῦ κλάσματος

Ἄς κάμωμεν τώρα καὶ ὀλίγην διδασκαλίαν :

Διὰ νὰ γράψωμεν ἓν κλάσμα, σύρομεν τὴν εὐθεῖαν γραμμὴν (—), ἡ ὁποία λέγεται ***κλασματικὴ γραμμή***. Ὁ ἀριθμός, ποὺ γράφομεν ἐπάνω ἀπὸ τὴν κλασματικὴν γραμμὴν φανερώνει πόσα κομμάτια ἐπήραμεν ἀπὸ τὴν ἀκεραίαν μονάδα, ποὺ ἐκόψαμεν, καὶ λέγεται ***ἀριθμητής***. Ὁ ἀριθμός, ποὺ γράφομεν κάτω ἀπὸ τὴν κλασματικὴν γραμμήν, φανερώνει σὲ πόσα κομμάτια ἐκόψαμεν τὴν ἀκεραίαν μονάδα καὶ λέγεται ***παρονομαστής***. Καὶ οἱ δύο μαζὶ λέγονται ***ὅροι τοῦ κλάσματος***.

8. Σύγκρισις τῶν κλασμάτων μὲ τὴν ἀκεραίαν μονάδα.

1. Ὁ Γιῶργος ἔχει 100 δραχμάς. Πόσα δεύτερα τοῦ ἑκατονταδράχμου εἶναι αἱ 100 δραχμαί; Γράψατέ το.

2. Ὁ Τάκης ἔχει καὶ αὐτὸς 100 δραχμάς. Πόσα τέταρτα τοῦ ἑκατονταδράχμου εἶναι αἱ 100 δραχμαί;

3. Ἡ Ἑλενίτσα ἔχει καὶ αὐτὴ 100 δραχμάς. Πόσα ὄγδοα τοῦ ἑκατονταδράχμου εἶναι αἱ 100 δραχμαί;

Ὥστε ἔχομεν : $\frac{2}{2}$ = 1 ἑκατοντάδραχμον

$\frac{4}{4}$ = 1 ἑκατοντάδραχμον

$\frac{8}{8}$ = 1 ἑκατοντάδραχμον

Παρατηρήσατε τὸν ἀριθμητὴν καὶ τὸν παρονομαστὴν καθενὸς ἀπὸ τὰ παραπάνω κλάσματα. Τί βλέπετε;

Ὥστε: Ὅταν ὁ ἀριθμητὴς καὶ ὁ παρονομαστὴς τοῦ κλάσματος εἶναι...... τὸ κλάσμα εἶναι ἴσον μέ...... ἀκεραίαν μονάδα.

4. Ὁ Μανωλάκης ἔχει 50 δραχμάς. Πόσα δεύτερα τοῦ ἑκατονταδράχμου εἶναι αἱ 50 δραχμαί;

5. Ἡ Κατίνα ἔχει καὶ αὐτὴ 50 δραχμάς. Πόσα τέταρτα τοῦ ἑκατονταδράχμου εἶναι αἱ 50 δραχμαί;

6. Καὶ ὁ Γιαννάκης ἔχει 50 δραχμάς. Πόσα ὄγδοα τοῦ ἑκατονταδράχμου εἶναι αἱ 50 δραχμαί;

Ὥστε ἔχομεν: $\frac{1}{2}$ τοῦ ἑκατονταδράχμου = 50 δραχμαὶ

$\frac{2}{4}$ τοῦ ἑκατονταδράχμου = 50 δραχμαὶ

$\frac{4}{8}$ τοῦ ἑκατονταδράχμου = 50 δραχμαὶ

Παρατηρήσατε τὸν ἀριθμητὴν καὶ τὸν παρονομαστὴν καθενὸς ἀπὸ τὰ παραπάνω κλάσματα. Τί βλέπετε;

Ὥστε: Ὅταν ὁ ἀριθμητὴς εἶναι....... ἀπὸ τὸν παρονομαστήν, τὸ κλάσμα εἶναι......... ἀπὸ μίαν ἀκεραίαν μονάδα καὶ λέγεται γνήσιον.

7. Ἡ Σοφία ἔχει 150 δραχμάς. Πόσα δεύτερα τοῦ ἑκατονταδράχμου εἶναι αἱ 150 δραχμαί;

8. Ἡ Παρασκευὴ ἔχει καὶ αὐτὴ 150 δραχμάς. Πόσα τέταρτα τοῦ ἑκατονταδράχμου εἶναι αἱ 150 δραχμαί;

9. Καὶ ὁ Βασίλειος ἔχει 150 δραχμάς. Πόσα ὄγδοα τοῦ ἑκατονταδράχμου εἶναι αἱ 150 δραχμαί;

Ὥστε ἔχομεν: $\frac{3}{2}$ τοῦ ἑκατονταδράχμου = 150 δρχ. (περισσότεραι ἀπὸ ἕνα ἑκατοντάδραχμον)

$\frac{6}{4}$ τοῦ » = 150 δρχ. »

$\frac{12}{8}$ τοῦ » = 150 δρχ. »

Παρατηρήσατε τὸν ἀριθμητὴν καὶ τὸν παρονομαστὴν καθενὸς ἀπὸ τὰ παραπάνω κλάσματα. Τί βλέπετε;

Ὥστε: Ὅταν ὁ ἀριθμητὴς εἶναι........ἀπὸ τὸν παρονομαστὴν τὸ κλάσμα εἶναι....... ἀπὸ μίαν ἀκεραίαν μονάδα καὶ λέγεται καταχρηστικόν.

Ἀσκήσεις

Ἀπὸ τὰ παρακάτω κλάσματα νὰ ξεχωρίσῃς: α') Ποῖα εἶναι γνήσια, β') Ποῖα εἶναι ἴσα μὲ μίαν ἀκεραίαν μονάδα καὶ γ') Ποῖα εἶναι καταχρηστικά.

1.— $\frac{4}{10}, \frac{20}{20}, \frac{15}{12}, \frac{1}{4}, \frac{6}{5}, \frac{3}{3}, \frac{10}{20}, \frac{500}{100}, \frac{1000}{1000}, \frac{4}{2}$.

2.— $\frac{35}{100}, \frac{10}{10}, \frac{60}{50}, \frac{10}{100}, \frac{40}{40}, \frac{7}{5}, \frac{2}{3}, \frac{5}{5}, \frac{6}{4}, \frac{11}{12}, \frac{7}{7}$

3.— $\frac{4}{3}, \frac{3}{3}, \frac{2}{3}, \frac{8}{10}, \frac{12}{10}, \frac{10}{10}, \frac{6}{6}, \frac{3}{6}, \frac{9}{6}$.

9. Ἐξαγωγὴ ἀκεραίων μονάδων ἀπὸ τὰ καταχρηστικὰ κλάσματα

1. Εἴπομεν ὅτι: Ἡ Σοφία ἔχει $\frac{3}{2}$ τοῦ ἑκατονταδράχμου δηλ. $1\frac{1}{2}$ ἑκατ.

Ἡ Παρασκευὴ ἔχει $\frac{6}{4}$ τοῦ » δηλ. $1\frac{2}{4}$ ἑκατ.

Ὁ Βασίλης ἔχει $\frac{12}{8}$ τοῦ » δηλ $4\frac{4}{8}$ ἑκατ.

Γνωρίζομεν ὅτι $\frac{2}{2}$ εἶναι 1 ἑκατοντάδραχμον. Ἕως τὰ $\frac{3}{2}$ περισσεύει ἀκόμη $\frac{1}{2}$. Ἔτσι ἔχομεν: $\frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$ τοῦ ἑκατονταδράχμου.

'Επίσης γνωρίζομεν ὅτι $\frac{4}{4}$ εἶναι 1 ἑκατοντάδραχμον. Ἕως τὰ $\frac{6}{4}$ περισεύουν ἀκόμη $\frac{2}{4}$. Ἔτσι ἔχομεν: $\frac{6}{4} = 1\frac{2}{4}$ τοῦ ἑκατονταδράχμου.

'Επίσης γνωρίζομεν ὅτι $\frac{8}{8}$ εἶναι 1 ἑκατοντάδραχμον. Ἕως τὰ $\frac{12}{8}$ περισσεύουν ἀκόμη $\frac{4}{8}$. Ἔτσι ἔχομεν: $\frac{12}{8} = 1\frac{4}{8}$ τοῦ ἑκατονταδράχμου.

Ὅταν κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον σκεπτώμεθα, ἠμποροῦμεν εὐκόλως νὰ κάμωμεν ἐξαγωγὴν τῶν ἀκεραίων μονάδων ἀπὸ τὰ καταχρηστικὰ κλάσματα. Μόνοι σας ἠμπορεῖτε νὰ ἐξαγάγετε τὰς ἀκεραίας μονάδας ἀπὸ τὰ παρακάτω κλάσματα.

$\frac{15}{6} =$, $\frac{8}{4} =$, $\frac{25}{6} =$, $\frac{30}{10} =$, $\frac{4}{3} =$, $\frac{28}{7} =$, $\frac{16}{5} =$,

$\frac{1000}{100} =$, $\frac{70}{30} =$, $\frac{450}{80} =$, $\frac{9}{4} =$, $\frac{70}{50} =$, $\frac{36}{9} =$, $\frac{10}{3} =$, $\frac{60}{25} =$

Μὲ ἕνα εὔκολον τρόπον ἠμποροῦμεν νὰ ἐξαγάγωμεν τὰς ἀκεραίας μονάδας:

$$\frac{15}{6} = \begin{array}{r|l} 15 & 6 \\ \hline 3 & 2 \end{array} = 2\frac{3}{6}$$

Διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητὴν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ. Τὸ πηλίκον φανερώνει τὰς ἀκεραίας μονάδας. Τὸ ὑπόλοιπον εἶναι κλάσμα.

10. Μικτοὶ ἀριθμοὶ

Ὁ ἀριθμὸς $2\frac{3}{6}$ καθὼς καὶ οἱ ἄλλοι ἀριθμοὶ ποὺ εὑρήκατε, ὅταν ἐκάματε τὴν ἐξαγωγὴν τῶν ἀκεραίων μονάδων ἀπὸ τὰ καταχρηστικὰ κλάσματα τῆς παραπάνω ἀσκήσεως, δὲν εἶναι μόνον ἀκέραιοι ἀριθμοί, ἢ μόνον κλάσματα. Ἀποτελοῦνται ἀπὸ ἀκέραιον καὶ ἀπὸ κλάσμα καὶ λέγονται **μικτοὶ ἀριθμοί.**

1. Γράψατε μὲ μικτοὺς ἀριθμοὺς τὰ ἑξῆς ποσά:

— 15 μέτρα καὶ 35 δάκτυλοι =
— 28 μέτρα καὶ 6 δάκτυλοι =
— 20 δραχμὰς καὶ 50 λεπτὰ =
— 125 χιλιόγραμμα καὶ 250 γραμμάρια =
— 6 ἔτη καὶ 3 μῆνες =
— 18 ἔτη καὶ 9 μῆνες =
— 8 μῆνες καὶ 25 ἡμέραι =
— 11 μῆνες καὶ 20 ἡμέραι =
— 4 ὧραι καὶ 20 πρῶτα λεπτὰ =

11. Τροπὴ μικτῶν εἰς κλάσματα

Ὁ ἀριθμὸς $7\frac{2}{10}$ μέτρα εἶναι μικτὸς ἀριθμός. Διὰ νὰ τὸν τρέψωμεν εἰς κλάσμα, λέγομεν ὅτι τὸ κάθε μέτρον ἔχει $\frac{10}{10}$, τὰ 7 μέτρα ἔχουν 7 φορὰς περισσότερα δέκατα, δηλαδὴ $\frac{70}{10}$. Καὶ $\frac{2}{10}$ τὸ κλάσμα, γίνονται ὅλα $\frac{72}{10}$.

Λοιπὸν $7\frac{2}{10} = \frac{72}{10}$.

Ἀλλὰ διὰ τὴν εὐκολίαν μας, κάθε φορὰν ποὺ ἔχομεν ἕνα μικτὸν νὰ τὸν τρέψωμεν εἰς κλάσμα, θὰ λέγωμεν: Δέκατα θὰ γίνῃ; $10 \times 7 = 70$ καὶ 2 κλασματικὰς μονάδας ποὺ ἔχει ὁ ἀριθμητής, γίνονται 72. Ὁ ἀριθμὸς 72 θὰ γραφῇ ὡς ἀριθμητής. Καὶ ὡς παρονομαστὴς θὰ γραφῇ ὁ παρονομαστὴς τοῦ κλάσματος.

Ὥστε: Διὰ νὰ τρέψωμεν ἕνα μικτὸν εἰς κλάσμα, πῶς σκεπτόμεθα καὶ ποίας ἐνεργείας κάμνομεν; Γράψατε μόνοι σας τὸ συμπέρασμα εἰς τὸ τετράδιον.

Ἀσκήσεις

1. Οἱ παρακάτω μικτοὶ νὰ τραποῦν εἰς κλάσματα.

α') $12\frac{1}{5} =$, $30\frac{2}{3} =$, $25\frac{1}{4} =$, $16\frac{4}{10} =$, $100\frac{1}{10} =$, $53\frac{2}{8} =$

β') $6\frac{1}{2} =$, $29\frac{4}{7} =$, $50\frac{3}{15} =$, $18\frac{7}{12} =$, $31\frac{6}{40} =$, $11\frac{1}{20} =$

γ') $14\frac{4}{25} =$, $27\frac{15}{60} =$, $150\frac{3}{9} =$, $2\frac{50}{200} =$, $7\frac{10}{1000} =$, $4\frac{10}{500} =$

12. Τροπὴ ἀκεραίων εἰς κλάσματα

Γνωρίζομεν ὅτι μία ἀκεραία μονὰς εἶναι ἴση μὲ $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{4}$, $\frac{5}{5}$, $\frac{6}{6}$, $\frac{10}{10}$, $\frac{100}{100}$, κλπ.

Ἂν τώρα, 2 ἀκεραίας μονάδας τὰς κάμωμεν δεύτερα, θὰ γίνουν $\frac{4}{2}$.

Ἂν 6 ἀκεραίας μονάδας τὰς κάμωμεν τρίτα, θὰ γίνουν $\frac{18}{3}$.

Ἂν 10 ἀκεραίας μονάδας τὰς κάμωμεν δέκατα, θὰ γίνουν $\frac{100}{10}$.

Ἂν 5 ἀκεραίας μονάδας τὰς κάμωμεν ἑκατοστά, θὰ γίνουν $\frac{500}{100}$.

Ἀσκήσεις

Τὰς παρακάτω ἀκεραίας μονάδας νὰ τὰς κάμετε κλάσματα:

α) Αἱ ἀκέραιαι μονάδες 9, 16, 5, 8, 27 νὰ γίνουν τρίτα.
β) Αἱ » » 100, 7, 25, 90, 10 νὰ γίνουν δέκατα.
γ) Αἱ » » 12, 4, 50, 15, 40 νὰ γίνουν ὄγδοα.
δ) Αἱ » » 6, 52, 3, 17, 28 νὰ γίνουν ἑκατοστά.
ε) Αἱ » » 23, 14, 60, 51, 32 νὰ γίνουν τέταρτα.

13. Ἰδιότητες τῶν κλασμάτων

1. Γράψατε εἰς τὸ τετράδιόν σας τὰ κλάσματα:

$\frac{2}{100}$, $\frac{4}{100}$, $\frac{8}{100}$, $\frac{16}{100}$, $\frac{32}{100}$, $\frac{64}{100}$.

Τὸ κλάσμα $\frac{4}{100}$ εἶναι μικρότερον, ἴσον, ἢ μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ κλάσμα $\frac{2}{100}$; Ἂν εἶναι μεγαλύτερον, πόσας φορὰς εἶναι μεγαλύτερον;

Τὸ κλάσμα $\frac{8}{100}$ εἶναι μικρότερον, ἴσον, ἢ μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ κλάσμα $\frac{2}{100}$ καὶ πόσας φοράς;

Κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον νὰ συγκρίνητε μέχρι τέλους ὅλα τὰ κλάσματα μὲ τὸ πρῶτον καὶ νὰ μᾶς εἰπῆτε πόσας φορὰς μεγαλύτερον εἶναι, τὸ καθὲν ἀπὸ αὐτά, ἀπὸ τὸ κλάσμα $\frac{2}{100}$.

Εὑρήκαμεν προηγουμένως ὅτι τὸ κλάσμα $\frac{4}{100}$ εἶναι δύο φορὰς μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ κλάσμα $\frac{2}{100}$. Προσέξατε: ὁ ἀριθμητὴς 4 πόσας φορὰς μεγαλύτερος εἶναι ἀπὸ τὸν ἀριθμητὴν 2;

Ἐπίσης εὑρήκαμεν ὅτι τὸ κλάσμα $\frac{8}{100}$ εἶναι τέσσαρας φορὰς μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ κλάσμα $\frac{2}{100}$. Ὁ ἀριθμητὴς 8 εἶναι τέσσαρας φορὰς μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν ἀριθμητὴν 2.

Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον, συγκρίνοντες ὅλα τὰ κλάσματα, βλέπομεν ὅτι:

Ὅταν πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμητὴν ἑνὸς κλάσματος ἐπὶ 2, 4, 8, 16, 32, τὸ κλάσμα γίνεται 2, 4, 8, 16, 32 φορὰς μεγαλύτερον: $\frac{2X16}{100} = \frac{32}{100}$.

Γράψατε αὐτὸν τὸν κανόνα. Εἶναι ἡ πρώτη ἰδιότης τῶν κλασμάτων.

Ἀσκήσεις

1. Τὰ παρακάτω κλάσματα νὰ τὰ κάμετε μεγαλύτερα, πολλαπλασιάζοντες τὸν ἀριθμητήν:

α) $\frac{2}{10}, \frac{1}{6}, \frac{5}{8}, \frac{7}{10}$ τὸ καθὲν νὰ γίνῃ 4 φορὰς μεγαλύτερον.

β) $\frac{3}{50}, \frac{6}{15}, \frac{3}{4}, \frac{16}{100}$ τὸ καθὲν νὰ γίνῃ 6 φορὰς μεγαλύτερον.

γ) $\frac{4}{100}, \frac{15}{60}, \frac{8}{12}, \frac{17}{40}$ τὸ καθὲν νὰ γίνῃ 10 φορὰς μεγαλύτερον.

2. Γράψατε εἰς τὸ τετράδιόν σας τὰ παρακάτω κλάσματα:

$$\frac{2}{4}, \frac{2}{8}, \frac{2}{16}, \frac{2}{32}, \frac{2}{64}$$

Συγκρίνατε τὸ κλάσμα $\frac{2}{8}$ μὲ τὸ $\frac{2}{4}$ καὶ νὰ εἰπῆτε ποῖον εἶναι μικρότερον καὶ πόσας φοράς. Συγκρίνατε τὸν παρονομαστὴν 8 καὶ τὸν παρονομαστὴν 4 καὶ νὰ εἰπῆτε ποῖος εἶναι μεγαλύτερος;
Ὥστε τὸ κλάσμα $\frac{2}{8}$ εἶναι 2 φορὰς μικρότερον ἀπὸ τὸ κλάσμα $\frac{2}{4}$. Καὶ ὁ παρονομαστής του εἶναι δύο φορὰς μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν παρονομαστὴν τοῦ πρώτου κλάσματος.

Συγκρίνατε ὅλα τὰ κλάσματα μὲ τὸ πρῶτον καὶ νὰ εἰπῆτε πόσας φορὰς μικρότερον εἶναι τὸ καθὲν ἀπὸ τὸ πρῶτον καὶ πόσας φορὰς μεγαλύτερος εἶναι ὁ παρονομαστής του.

Ἔτσι φθάνομεν εἰς τὸ συμπέρασμα:

Ὅταν πολλαπλασιάσωμεν τὸν παρονομαστὴν ἑνὸς κλάσματος ἐπὶ 2, 4, 8, 16, τὸ κλάσμα γίνεται 2, 4, 8, 16 φορὰς μικρότερον: $\frac{2}{4 X 8} = \frac{2}{32}$.

Γράψατε αὐτὸν τὸν κανόνα. Εἶναι ἡ δευτέρα ἰδιότης τῶν κλασμάτων.

Ἀσκήσεις

1. Τὰ παρακάτω κλάσματα νὰ τὰ κάμετε μικρότερα, πολλαπλασιάζοντες τὸν παρονομαστήν :

α) $\frac{3}{6}, \frac{1}{4}, \frac{5}{8}, \frac{7}{15}$ τὸ καθὲν νὰ γίνῃ 6 φορὰς μικρότερον.

β) $\frac{4}{10}, \frac{3}{5}, \frac{1}{3}, \frac{2}{9}$ τὸ καθὲν νὰ γίνῃ 10 φορὰς μικρότερον.

γ) $\frac{5}{25}, \frac{4}{7}, \frac{18}{20}, \frac{12}{50}$ τὸ καθὲν νὰ γίνῃ 4 φορὰς μικρότερον.

2. Γράψατε εἰς τὸ τετράδιόν σας τὰ παρακάτω κλάσματα:

$$\frac{80}{100}, \frac{40}{100}, \frac{20}{100}, \frac{10}{100}, \frac{5}{100}.$$

Συγκρίνατε τὸ πρῶτον καὶ τὸ δεύτερον κλάσμα. Ποῖον εἶναι μικρότερον καὶ πόσας φοράς; Ποῖος ἀριθμητὴς εἶναι μικρότερος καὶ πόσας φοράς ;

Συγκρίνατε ἐπίσης ὅλα τὰ ὑπόλοιπα κλάσματα μὲ τὸ πρῶτον καὶ νὰ εἰπῆτε πόσας φορὰς μικρότερον ἀπὸ τὸ πρῶτον εἶναι κάθε κλάσμα καὶ πόσας φορὰς μικρότερος εἶναι ὁ ἀριθμητής του ἀπὸ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ πρώτου κλάσματος.

Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον φθάνομεν εἰς τὸ συμπέρασμα :

Ὅταν διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμητὴν ἑνὸς κλάσματος διὰ 2, 4, 8, 16 τὸ κλάσμα γίνεται 2, 4, 8, 16 φορὰς μικρότερον.

$$\frac{80 : 8}{100} = \frac{10}{100}$$

Γράψατε αὐτὸν τὸν κανόνα. Εἶναι ἡ τρίτη ἰδιότης τῶν κλασμάτων.

Ἀσκήσεις

1. Τὰ παρακάτω κλάσματα νὰ τὰ κάμετε μικρότερα, διαιροῦντες τὸν ἀριθμητήν :

α) $\frac{18}{100}, \frac{27}{50}, \frac{300}{1000}, \frac{51}{60}$ τὸ καθὲν νὰ γίνῃ 3 φορὰς μικρότερον.

β) $\frac{25}{40}, \frac{60}{70}, \frac{15}{20}, \frac{80}{100}$ τὸ καθὲν νὰ γίνῃ 5 φορὰς μικρότερον.

γ) $\frac{48}{60}, \frac{24}{30}, \frac{16}{25}, \frac{128}{200}$ τὸ καθὲν νὰ γίνῃ 8 φορὰς μικρότερον.

2. Γράψατε εἰς τὸ τετράδιόν σας τὰ παρακάτω κλάσματα :

$$\frac{4}{80}, \frac{4}{40}, \frac{4}{20}, \frac{4}{10}, \frac{4}{5}.$$

Συγκρίνατε τὸ πρῶτον καὶ τὸ δεύτερον κλάσμα. Ποῖον εἶναι μεγαλύτερον καὶ πόσας φοράς; Ποῖος παρονομαστὴς εἶναι μικρότερος καὶ πόσας φοράς;

Συγκρίνατε, ἐπίσης, ὅλα τὰ ὑπόλοιπα κλάσματα μὲ τὸ πρῶτον καὶ νὰ εἰπῆτε πόσας φορὰς μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ πρῶτον εἶναι τὸ καθέν, καὶ πόσας φορὰς μικρότερος εἶναι ὁ παρονομαστής του ἀπὸ τὸν παρονομαστὴν τοῦ πρώτου κλάσματος.

Ἔτσι καταλήγομεν εἰς τὸ ἑξῆς συμπέρασμα :

Ὅταν διαιρέσωμεν τὸν παρονομαστὴν ἑνὸς κλάσματος διὰ 2, 4, 8, 16 τὸ κλάσμα γίνεται 2, 4, 8, 16 φορὰς μεγαλύτερον.

$$\frac{4}{80:8} = \frac{4}{10}$$

Γράψατε αὐτὸν τὸν κανόνα. Εἶναι ἡ τετάρτη ἰδιότης τῶν κλασμάτων :

Ἀσκήσεις

1. Νὰ κάμετε τὰ παρακάτω κλάσματα μεγαλύτερα, διαιροῦντες τὸν παρονομαστήν :

α) $\frac{3}{70}, \frac{4}{35}, \frac{5}{42}, \frac{14}{105}$ τὸ καθὲν νὰ γίνῃ 7 φορὰς μεγαλύτερον.

β) $\frac{6}{48}, \frac{15}{120}, \frac{8}{96}, \frac{4}{24}$ τὸ καθὲν νὰ γίνῃ 12 φορὰς μεγαλύτερον.

γ) $\frac{4}{60}, \frac{8}{240}, \frac{3}{45}, \frac{1}{30}$ τὸ καθὲν νὰ γίνῃ 15 φορὰς μεγαλύτερον.

2. Γράψατε εἰς τὸ τετράδιον τὰ παρακάτω κλάσματα :

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{4}{8}, \frac{8}{16}, \frac{16}{32}.$$

Συγκρίνατε τὸ πρῶτον καὶ τὸ δεύτερον κλάσμα. Ποῖον εἶναι μεγαλύτερον, ἢ μικρότερον; Συγκρίνατε τοὺς ἀριθμητὰς καὶ τοὺς παρονομαστάς των. Συγκρίνατε, ἐπίσης τὸ καθὲν ἀπὸ τὰ ὑπόλοιπα κλάσματα μὲ τὸ πρῶτον, καὶ νὰ εἰπῆτε πόσας φορὰς μεγαλύτερον, ἢ μικρότερον ἀπὸ τὸ πρῶτον εἶναι τὸ καθὲν ἀπὸ αὐτά. Κάθε φοράν, νὰ παρατηρῆτε καλὰ καὶ τοὺς δύο ὅρους τῶν κλασμάτων ποὺ συγκρίνετε.

Εἰς ποῖον συμπέρασμα καταλήγετε;

Ὅταν πολλαπλασιάσωμεν καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος μὲ τὸν ἴδιον ἀριθμόν, τὸ κλάσμα ποὺ εὑρίσκομεν εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ πρῶτον : $\frac{1\times 8}{2\times 8} = \frac{8}{16}$.

Γράψατε αὐτὸν τὸν κανόνα. Εἶναι ἡ πέμπτη ἰδιότης τῶν κλασμάτων.

ΣΗΜ. : Τὰ κλάσματα ποὺ εἶναι ἴσα, ποὺ ἔχουν ἴσην δύναμιν, λέγονται ἰσοδύναμα.

Ἀσκήσεις

1. Εἰς τὰ παρακάτω κλάσματα νὰ πολλαπλασιάσετε καὶ τοὺς δύο ὅρους :

α) $\frac{2}{5}, \frac{1}{4}, \frac{8}{10}, \frac{6}{15}$ ἐπὶ 8

β) $\frac{4}{12}, \frac{25}{100}, \frac{9}{25}, \frac{3}{8}$ ἐπὶ 10

γ) $\frac{60}{80}, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{9}{30}$ ἐπὶ 5

2. Γράψατε εἰς τὸ τετράδιον τὰ παρακάτω κλάσματα :

$$\frac{32}{80}, \frac{16}{40}, \frac{8}{20}, \frac{4}{10}, \frac{2}{5}$$

Συγκρίνατε τὸ πρῶτον καὶ τὸ δεύτερον κλάσμα. Ποῖον εἶναι μεγαλύτερον, ἢ μικρότερον; Συγκρίνατε καὶ τοὺς δύο ὅρους κάθε κλάσματος. Συγκρίνατε, ἐπίσης, τὸ καθὲν ἀπὸ τὰ ὑπόλοιπα κλάσματα μὲ τὸ πρῶτον καὶ τί παρατηρεῖτε, δίδοντες κάθε φορὰν ἰδιαιτέραν προσοχὴν καὶ εἰς τοὺς δύο ὅρους τῶν κλασμάτων, ποὺ κάθε φορὰν συγκρίνετε.

Ποῖον εἶναι τὸ συμπέρασμά σας;

Ὅταν διαιρέσωμεν καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος μὲ τὸν ἴδιον ἀριθμόν, τὸ κλάσμα ποὺ εὑρίσκομεν εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ πρῶτον: $\frac{32:8}{80:8} = \frac{4}{10}$.

Γράψατε καὶ αὐτὸν τὸν κανόνα. Εἶναι ἡ ἕκτη ἰδιότης τῶν κλασμάτων.

Σᾶς συμβουλεύω νὰ μελετήσετε πολλὰς φορὰς τὰς ἰδιότητας τῶν κλασμάτων. Θὰ σᾶς βοηθήσουν πολὺ εἰς τὸ νὰ κατανοήσετε τὴν ὑπόλοιπον ὕλην.

Ἀσκήσεις

1. Εἰς τὰ παρακάτω κλάσματα νὰ διαιρέσητε καὶ τοὺς δύο ὅρους :

α) $\frac{35}{40}, \frac{80}{120}, \frac{75}{200}, \frac{5}{10}$ διὰ 5

β) $\frac{50}{100}, \frac{125}{500}, \frac{400}{1000}, \frac{75}{225}$ διὰ 25

γ) $\frac{81}{90}, \frac{36}{63}, \frac{90}{180}, \frac{45}{72}$ διὰ 9

14. Ἁπλοποίησις τῶν κλασμάτων

Ἁπλοποιῶ εἰς τὴν κυριολεξίαν θὰ εἰπῇ : κάμνω ἓν πρᾶγμα περισσότερον ἁπλοῦν. Ἁπλοποιῶ ἓν κλάσμα θὰ πῇ : κάμνω ἓν κλάσμα περισσότερον ἁπλοῦν, ὥστε νὰ κατανοῶ τὴν ἀξίαν του καλύτερον.

Εἰς τὰς παραπάνω ἀσκήσεις, ὅταν διῃρούσαμεν καὶ τοὺς δύο ὅρους τῶν πρώτων κλασμάτων διὰ 5, τῶν δευτέρων διὰ 25 καὶ τῶν τρίτων διὰ 9, δὲν ἐκάμναμεν τίποτε ἄλλο ἀπὸ ἁπλοποίησιν. Καὶ ὅπως εἴπομεν, τὰ κλάσματα ποὺ εὑρίσκαμεν, διαιροῦντες καὶ τοὺς δύο ὅρους κάθε κλάσματος μὲ τὸν ἴδιον ἀριθμόν, ἦσαν ἰσοδύναμα μὲ τὰ ἁπλοποιούμενα· εἶχον, δηλαδή, τὴν ἰδίαν ἀξίαν.

Διὰ ν' ἁπλοποιήσωμεν οἱονδήποτε κλάσμα ὀφείλομεν, κατ' ἀρχήν, νὰ γνωρίζωμεν πολὺ καλὴν διαίρεσιν. Κατόπιν θὰ εὑρίσκωμεν μὲ ποῖον ἀριθμὸν διαιροῦνται ἀκριβῶς (νὰ μὴ ἀφήνουν ὑπόλοιπον) καὶ οἱ δύο ὅροι τοῦ κλάσματος. Αὐτὸς ὁ ἀριθμὸς εἶναι ὁ κοινὸς διαιρέτης καὶ τῶν δύο ὅρων τοῦ κλάσματος. Δυνατὸν νὰ ὑπάρχῃ καὶ ἄλλος κοινὸς διαιρέτης. Δυνατόν, ἀκόμη, νὰ ὑπάρχῃ καὶ τρίτος καὶ τέταρτος κοινὸς διαιρέτης. Συμφέρον μας εἶναι, ὅταν κάμνωμεν ἁπλοποίησιν κλασμάτων, νὰ εὑρίσκωμε τὸν πλέον μεγάλον, τὸν ***μέγιστον,*** ὅπως λέγομεν, κοινὸν διαιρέτην.

Ἕ ν π α ρ ά δ ε ι γ μ α :

Ἔχομεν ν' ἁπλοποιήσωμεν τὸ κλάσμα $\frac{150}{300}$. Καὶ οἱ δύο ὅροι τοῦ κλάσματος διαιροῦνται μὲ τοὺς παρακάτω ἀριθμούς : 2, 3, 5, 6, 10, 15, 25, 30, 50, 150. Ὅλοι αὐτοὶ οἱ ἀριθμοὶ εἶναι κοινοὶ διαιρέται καὶ τῶν δύο ὅρων τοῦ κλάσματος, καὶ τοῦ 150 καὶ τοῦ 300. Διὰ νὰ κάμωμεν ὅμως τὴν ἁπλοποίησιν θὰ πάρωμεν τὸν ***Μέγιστον Κοινὸν Διαιρέτην*** (Μ.Κ.Δ.): τὸν ἀριθμὸν 150. Ἔτσι ἔχομεν : $\frac{150:150}{300:150} = \frac{1}{2}$.

Τὸ κλάσμα $\frac{1}{2}$ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ κλάσμα $\frac{150}{300}$, διότι γνωρίζομεν ἀπὸ τὰς ἰδιότητας τῶν κλασμάτων ὅτι : ὅταν διαιρέσωμεν καὶ τοὺς δύο ὅρους τοὺς κλάσματος μὲ τὸν ἴδιον ἀριθμόν, τὸ κλάσμα ποὺ εὑρίσκομεν εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ πρῶτον. Οἱ ὅροι τοῦ κλάσματος $\frac{1}{2}$ δὲν ἁπλοποιοῦνται περισσότερον, διότι δὲν ὑπάρχει ἄλλος ἀριθμός, ποὺ νὰ διαιρῇ καὶ τοὺς δύο ὅρους. Τὸ κλάσμα λέγεται ***ἀνάγωγον,*** καὶ οἱ ὅροι του εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Ἀσκήσεις

1. Ν' ἁπλοποιηθοῦν τὰ παρακάτω κλάσματα μὲ τὸν Μ.Κ.Δ.

$$\frac{24}{60}, \frac{15}{75}, \frac{40}{200}, \frac{18}{72}, \frac{6}{10}, \frac{16}{40}, \frac{100}{350}, \frac{42}{63}, \frac{25}{100}, \frac{90}{135}, \frac{40}{50}, \frac{32}{96}, \frac{48}{80},$$

$$\frac{75}{175}, \frac{30}{120}, \frac{100}{1000}, \frac{500}{800}, \frac{45}{75}, \frac{240}{400}, \frac{225}{300}, \frac{63}{105}, \frac{42}{70}, \frac{250}{450}, \frac{57}{95}, \frac{4}{8}$$

Ἂν δυσκολεύεσθε, κάμετε δύο καὶ τρεῖς ἁπλοποιήσεις, συνεχῶς, διὰ κάθε κλάσμα, ὥσπου νὰ φθάσετε εἰς κλάσμα ἀνάγωγον.

Μερικὰς ὑποδείξεις διὰ νὰ εὐκολυνώμεθα εἰς τὴν ταχεῖαν διαίρεσιν:

—Ἕνας ἀριθμὸς διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ 2, ὅταν λήγῃ εἰς 0, 2, 4, 6, 8.

—Ἕνας ἀριθμὸς διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ 3, 9, ὅταν τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν ψηφίων τοῦ ἀριθμοῦ διαιρῆται διὰ 3, 9.

—Ἕνας ἀριθμὸς διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ 4, ὅταν λήγῃ εἰς 00, ἢ ὅταν τὰ δύο τελευταῖα ψηφία του ἀποτελοῦν ἀριθμὸν ποὺ διαιρεῖται διὰ 4.

—Ἕνας ἀριθμὸς διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ 5, ὅταν λήγῃ εἰς 0 ἢ 5.

—Ἕνας ἀριθμὸς διαιρεῖται διὰ 6, ὅταν διαιρῆται τοὐλάχιστον καὶ μὲ τὸ 2 καὶ μὲ τὸ 3.

—Ἕνας ἀριθμὸς διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ 8, ὅταν λήγῃ εἰς 000 ἢ τὰ τρία τελευταῖα του ψηφία ἀποτελοῦν ἀριθμὸν ποὺ διαιρεῖται διὰ 8.

—Ἕνας ἀριθμὸς διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ 10, ὅταν λήγῃ τοὐλάχιστον εἰς 0.

—Ἕνας ἀριθμὸς διαρεῖται ἀκριβῶς διὰ 100, ὅταν λήγῃ τοὐλάχιστον εἰς 00.

—Ἕνας ἀριθμὸς διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ 1000, ὅταν λήγῃ τοὐλάχιστον εἰς 000.

Ἀσκήσεις

1. Ἀπὸ τοὺς παρακάτω ἀριθμοὺς νὰ ξεχωρίσετε ποῖοι διαιροῦνται ἀκριβῶς διὰ 2, 4, 3, 9:

4617, 5892, 8904, 15435, 476, 261, 9342, 7000.

2. Νὰ ξεχωρίσετε ποῖοι ἀριθμοὶ διαιροῦνται ἀκριβῶς διὰ 5, 6:

830, 2316, 593, 3815, 928, 7590, 3618, 7384.

3. Νὰ ξεχωρίσετε ποῖοι ἀριθμοὶ διαιροῦνται ἀκριβῶς διὰ 10, 100, 1000:

8310, 6710, 90300, 65120, 3000, 7690, 3800, 14000.

15. Κλάσματα ὁμώνυμα

1. Γράψατε εἰς τὸ τετράδιον τὰ παρακάτω κλάσματα:

$$\frac{10}{20}, \frac{3}{20}, \frac{8}{20}, \frac{5}{20}, \frac{14}{20}, \frac{9}{20}, \frac{18}{20}, \frac{2}{20}$$

Αὐτὰ τὰ κλάσματα ὁμοιάζουν εἰς τίποτε; Παρατηρήσατε καὶ εἰπέτε μου.

Αὐτὰ τὰ κλάσματα ἔχουν τὸ ἴδιον ὄνομα, ὅπως πολλὰ παιδιὰ ἀπὸ σᾶς ἔχουν τὸ ἴδιον ἐπώνυμον, καὶ τὰ λέγομεν ***ὁμώνυμα*** κλάσματα.

Ἀπὸ τί τὸ καταλαβαίνομεν ὅτι δύο, ἢ περισσότερα κλάσματα εἶναι ὁμώνυμα;

Γράψατε αὐτὸν τὸν κανόνα εἰς τὸ τετράδιον, ἀφοῦ πρῶτον τὸν συμπληρώσετε:

Ἑτερώνυμα κλάσματα λέγονται τὰ κλάσματα τὰ ὁποῖα ......

....

2. Εἰς τὰ ὁμώνυμα κλάσματα εὔκολα καταλαβαίνομεν ποῖον κλάσμα εἶναι μεγαλύτερον καὶ ποῖον μικρότερον.

Σεῖς ἠμπορεῖτε νὰ κατατάξετε τὰ παραπάνω κλάσματα μὲ τὴν σειράν, ἀρχίζοντες ἀπὸ τὸ μικρότερον ἕως τὸ μεγαλύτερον καὶ ἀπὸ τὸ μεγαλύτερον ἕως τὸ μικρότερον; Κάμετε αὐτὰς τὰς δύο ἀσκήσεις. (Σημ. Ὅταν λέγωμεν $\frac{2}{20}$ τοῦ μήλου καὶ $\frac{18}{20}$ τοῦ μήλου καταλαβαίνομεν ὅτι τὰ $\frac{2}{20}$ εἶναι μικρότερον κομμάτι ἀπὸ τὰ $\frac{18}{20}$).

Ἀσκήσεις

1. Ἀπὸ τὰ παρακάτω κλάσματα νὰ ταξινομήσετε εἰς κατηγορίας τὰ ὁμώνυμα καὶ νὰ τὰ κατατάξετε εἰς τὴν σειράν, ἀρχίζοντες ἀπὸ τὸ μικρότερον ἕως τὸ μεγαλύτερον.

$$\frac{3}{8}, \frac{1}{3}, \frac{8}{15}, \frac{4}{20}, \frac{5}{8}, \frac{16}{20}, \frac{1}{5}, \frac{7}{12}, \frac{9}{15}, \frac{4}{5}, \frac{2}{3},$$

$$\frac{19}{20}, \frac{6}{8}, \frac{3}{3}, \frac{9}{12}, \frac{4}{15}, \frac{2}{8}, \frac{3}{5}, \frac{2}{12}, \frac{8}{15}, \frac{14}{20}, \frac{7}{8},$$

$$\frac{5}{20}, \frac{2}{8}, \frac{6}{100}, \frac{15}{20}, \frac{25}{100}, \frac{6}{8}, \frac{90}{100}, \frac{3}{30}, \frac{13}{15}, \frac{11}{12}, \frac{10}{20}.$$

16. Κλάσματα ἑτερώνυμα

1. Γράψατε εἰς τὸ τετράδιον τὰ παρακάτω κλάσματα:

$$\frac{10}{15}, \frac{3}{4}, \frac{9}{10}, \frac{2}{3}, \frac{8}{20}, \frac{17}{50}, \frac{2}{5}, \frac{1}{8}$$

Αὐτὰ τὰ κλάσματα ὁμοιάζουν εἰς τίποτε; Παρατηρήσατε καὶ εἰπέτε. Αὐτὰ δὲν ἔχουν τὸ ἴδιον ὄνομα. Ἔχουν ***ἕτερον*** (διαφορετικὸν) ὄνομα τὸ καθέν, δι' αὐτὸ λέγονται ***ἑτερώνυμα***.

Ἀπὸ τί καταλαβαίνομεν ὅτι δύο ἢ περισσότερα κλάσματα εἶναι ἑτερώνυμα; Γράψατε τὸν παρακάτω κανόνα εἰς τὸ τετράδιον, ἀφοῦ πρῶτον τὸν συμπληρώσετε:

Ἑτερώνυμα κλάσματα λέγονται τὰ κλάσματα, τὰ ὁποῖα..... ....

2. Γράψατε εἰς τὸ τετράδιον τὰ παρακάτω ἑτερώνυμα κλάσματα:

$$\frac{1}{7}, \frac{1}{4}, \frac{1}{20}, \frac{1}{15}, \frac{1}{8}, \frac{1}{3}, \frac{1}{100}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{50}, \frac{1}{6}.$$

Καὶ εἰς αὐτὰ τὰ ἑτερώνυμα κλάσματα, εἰς τὰ ὁποῖα ὁ ἀριθμητὴς εἶναι ὁ ἴδιος, εὔκολα ἠμποροῦμεν νὰ καταλάβωμεν ποῖον εἶναι τὸ μεγαλύτερον καὶ ποῖον εἶναι τὸ μικρότερον.

Σεῖς ἠμπορεῖτε νὰ κατατάξετε τὰ παραπάνω κλάσματα μὲ τὴν σειράν, ἀρχίζοντες ἀπὸ τὸ μικρότερον ἕως τὸ μεγαλύτερον, καὶ ἀπὸ τὸ μεγαλύτερον ἕως τὸ μικρότερον; Κάμετε αὐτὰς τὰς δύο ἀσκήσεις. (Σημ. Ὅταν λέγωμεν $\frac{1}{7}$ τοῦ μήλου καὶ $\frac{1}{100}$ τοῦ μήλου, καταλαβαίνομεν ὅτι, ἂν δύο μῆλα τὰ κόψωμεν, τὸ πρῶτον εἰς ἑπτὰ κομμάτια καὶ τὸ δεύτερον εἰς ἑκατὸν κομμάτια, τὸ $\frac{1}{7}$ θὰ εἶναι πολὺ μεγαλύτερον κομμάτι ἀπὸ τὸ $\frac{1}{100}$).

Ἀσκήσεις

1. Τὰ παρακάτω ἑτερώνυμα κλάσματα νὰ τὰ ταξινομήσετε εἰς κατηγορίας καὶ νὰ τὰ κατατάξετε εἰς τὴν σειράν, ἀρχίζοντες ἀπὸ τὸ μικρότερον κλάσμα ἕως τὸ μεγαλύτερον, καὶ ἀπὸ τὸ μεγαλύτερον ἕως τὸ μικρότερον. (Πρώτη ταξινόμησις, ὅσα κλάσματα ἔχουν ἀριθμητὴν 1· δευτέρα, ὅσα ἔχουν ἀριθμητὴν 2, κλπ.).

$$\frac{3}{20}, \frac{1}{4}, \frac{10}{100}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \frac{3}{12}, \frac{10}{50}, \frac{1}{8}, \frac{4}{15}, \frac{10}{60}, \frac{3}{30}, \frac{1}{3}, \frac{4}{8},$$

$$\frac{10}{35}, \frac{3}{9}, \frac{4}{25}, \frac{1}{2}, \frac{10}{16}, \frac{4}{80}, \frac{1}{45}, \frac{3}{75}, \frac{10}{500}, \frac{3}{65}.$$

17. Τροπὴ ἑτερωνύμων κλασμάτων εἰς ὁμώνυμα

1. Γράψατε εἰς τὸ τετράδιον τὰ παρακάτω ἑτερώνυμα κλάσματα:

$$\frac{2}{4}, \ \frac{3}{12}.$$

Αὐτὰ τὰ κλάσματα διὰ νὰ γίνουν ὁμώνυμα, ἢ πρέπει νὰ γίνουν δωδέκατα, ὅπως λέγει ὁ μεγαλύτερος παρονομαστής, ἢ κάτι παραπάνω. Τὸ πρῶτο κλάσμα, διὰ νὰ γίνῃ δωδέκατα, δὲν ἔχομεν παρὰ νὰ κάμωμεν τὸν παρονομαστήν του τρεῖς φορὰς μεγαλύτερον. Διὰ νὰ μὴ χάσῃ ὅμως τὸ κλάσμα τὴν ἀξίαν του, πρέπει καὶ ὁ ἀριθμητὴς νὰ γίνῃ τρεῖς φορὰς μεγαλύτερος, διότι γνωρίζομεν ἀπὸ τὰς ἰδιότητας τῶν κλασμάτων ὅτι «ὅταν πολλαπλασιάσωμεν καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος μὲ τὸν ἴδιον ἀριθμόν, τὸ κλάσμα ποὺ εὑρίσκομεν εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ πρῶτον».

Ἔχομεν οὕτω: $\frac{2}{4}, \ \frac{3}{12} = \left(\frac{2 \times 3}{4 \times 3}\right), \ \frac{3}{12} = \frac{6}{12}, \ \frac{3}{12}.$

Τώρα ἔγιναν καὶ τὰ δύο ὁμώνυμα.

2. Γράψατε εἰς τὸ τετράδιον τὰ παρακάτω ἑτερώνυμα κλάσματα:

$$\frac{4}{5}, \ \frac{3}{8}, \ \frac{2}{4}, \ \frac{6}{10}.$$

Ἐδῶ ἔχομεν τέσσαρα ἑτερώνυμα κλάσματα νὰ γίνουν ὁμώνυμα. Διὰ νὰ εὐκολυνθῶμεν, πρέπει νὰ εὕρωμεν ἕνα ἀριθμόν, ποὺ νὰ εἶναι κοινὸν πολλαπλάσιον ὅλων τῶν παρονομαστῶν. Ποῖος εἶναι αὐτὸς ὁ ἀριθμός;

1. Προσέξατε πῶς θὰ τὸν εὕρωμεν. Παίρνομεν τὸν μεγαλύτερον ἀπὸ τοὺς τέσσαρας παρονομαστάς. Εἶναι τὸ 10. Ὁ ἀριθμὸς 10 εἶναι κοινὸν πολλαπλάσιον ὅλων τῶν παρονομαστῶν; Ὄχι! Εἶναι μόνον τοῦ 5 ($2 \times 5 = 10$) καὶ τοῦ 10 ($1 \times 10 = 10$).

Τότε διπλασιάζομεν τὸ 10 καὶ γίνεται 20. Ὁ ἀριθμὸς 20 εἶναι κοινὸν πολλαπλάσιον ὅλων τῶν παρονομαστῶν; Ὄχι! Εἶναι μόνον τοῦ 5 ($4 \times 5 = 20$), τοῦ 4 ($5 \times 4 = 20$) καὶ τοῦ 10 ($2 \times 10 = 20$).

Τότε τριπλασιάζομεν τὸ 10 καὶ γίνεται 30. Ὁ ἀριθμὸς 30 εἶναι κοινὸν πολλαπλάσιον μόνον δύο παρονομαστῶν. Τότε τετραπλασιάζομεν τὸ 10 καὶ γίνεται 40. Ὁ ἀριθμὸς 40 εἶναι κοινὸν πολλαπλάσιον ὅλων τῶν παρονομαστῶν ($8 \times 5 = 40$), ($5 \times 8 = 40$), ($10 \times 4 = 40$) καὶ ($4 \times 10 = 40$).

Ἀλλὰ δὲν εἶναι μόνον τὸ 40. Εἶναι καὶ τὸ 80, καὶ τὸ 120, καὶ τὸ 160, καὶ τὸ 200 καὶ πλῆθος ἄλλα. Τὸ 40 ὅμως εἶναι τὸ μικρότερον, τὸ ἐλάχιστον, ὅπως λέγομεν, κοινὸν πολλαπλάσιον (Ε. Κ. Π.) τῶν ἀριθμῶν 5, 8, 4, 10. Αὐτό, λοιπόν, συμφέρει νὰ πάρωμεν καὶ ἡμεῖς.

Ἡ ἐργασία, ἀπὸ ἐδῶ καὶ πέραν, εἶναι ἁπλῆ καὶ εὔκολος. Γράφομεν, πέραν ἀπὸ τὰ κλάσματα, τὰ γράμματα Ε. Κ. Π. = 40. Σύρομεν καμπύλας γραμμὰς ἐπάνω ἀπὸ τοὺς ἀριθμητὰς καὶ κατόπιν λέγομεν: Ὁ ἀριθμὸς 5 εἰς τὸ 40 χωρεῖ 8 φοράς. Τὸν ἀριθμὸν 8, τὸν γράφομεν ἐπάνω ἀπὸ τὴν καμπύλην γραμμὴν τοῦ κλάσματος $\frac{4}{5}$. Τὸ ἴδιον κάμνομεν δι' ὅλα τὰ κλάσματα, καὶ κατόπιν πολλαπλασιάζομεν καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ πρώτου κλάσματος μὲ τὸν ἀριθμὸν ποὺ εὑρίσκεται ἐπάνω ἀπὸ τὴν καμπύλην γραμμήν. Τὸ ἴδιον κάμνομεν καὶ μὲ τὰ ὑπόλοιπα κλάσματα. Κάθε νέον κλάσμα ποὺ εὑρίσκομεν εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ ἀντίστοιχόν του. Γνωρίζετε τὸν λόγον, ἀπὸ τὴν σχετικὴν ἰδιότητα τῶν κλασμάτων. Εἰπέτε τὴν ἰδιότητα αὐτήν.

Ἔτσι ἔχομεν: $\overbrace{\frac{4}{5}}^{8}, \overbrace{\frac{3}{8}}^{5}, \overbrace{\frac{2}{4}}^{10}, \overbrace{\frac{6}{10}}^{4}$ Ε.Κ.Π. = 40

$$\frac{32}{40}, \frac{15}{40}, \frac{20}{40}, \frac{24}{40}$$

Τὰ κλάσματα ἔγιναν ὁμώνυμα, χωρὶς νὰ χάσουν τὴν ἀξίαν των.

2. Καὶ μὲ ἄλλον τρόπον ἠμποροῦμεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον. Ὁ τρόπος αὐτὸς ἐφαρμόζεται προπαντός, ὅταν ἔχωμεν μεγάλους παρονομαστάς.

Ὁ τρόπος αὐτὸς εἶναι ὁ ἑξῆς: Θὰ τὸν γράψωμεν πρῶτον καὶ θὰ τὸν ἐξηγήσωμεν ἀμέσως. Παίρνομεν τοὺς ἰδίους παρονομαστὰς τῶν προηγουμένων κλασμάτων καὶ τοὺς γράφομεν:

$$\begin{array}{cccc|c} 5 & 8 & 4 & 10 & 2 \\ 5 & 4 & 2 & 5 & 2 \\ 5 & 2 & 1 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & \end{array}$$

$2 \times 2 \times 5 \times 1 \times 2 \times 1 \times 1 = 40$ Ε.Κ.Π. = 40

Κατόπιν σύρομεν μίαν κατακόρυφον γραμμήν. Παρατηροῦμεν τώρα ἂν ὑπάρχουν δύο, τοὐλάχιστον, ἀριθμοί, ποὺ νὰ διαιροῦνται διὰ 2. Ὑπάρχουν. Γράφομεν τὸν διαιρέτην 2 δίπλα, ἐκεῖ εἰς κατακόρυφον γραμμήν, καὶ λέγομεν: Ὁ ἀριθμὸς 5 δὲν διαιρεῖται ἀκριβῶς μὲ τὸ 2. Γράφομεν πάλιν τὸ 5 εἰς τὴν δευτέραν σειράν. Ὁ ἀριθμὸς 8 διαιρεῖται διὰ 2. Τὸ 2 εἰς τὸ 8 χωρεῖ 4 φοράς. Τὸν ἀριθμὸν 4 τὸν γράφομεν κάτω ἀπὸ τὸ 8. Συνεχίζομεν κατόπιν:

Ὁ ἀριθμὸς 4 τῆς πρώτης σειρᾶς διαιρεῖται διὰ 2. Τὸ 2 εἰς τὸ 4 χωρεῖ 2 φοράς. Τὸ 2 τὸ γράφομεν κάτω ἀπὸ τὸ 4 τῆς πρώτης σειρᾶς. Ὁ ἀριθμὸς 10 διαιρεῖται διὰ 2. Τὸ 2 εἰς τὸ 10 χωρεῖ 5 φοράς. Γράφομεν τὸ 5 κάτω ἀπὸ τὸ 10.

Εἰς τὴν δευτέραν σειρὰν ἔχομεν τοὺς ἀριθμοὺς 5, 4, 2, 5. Ἔχομεν πάλιν δύο, τοὐλάχιστον, ἀριθμοὺς οἱ ὁποῖοι διαιροῦνται διὰ 2. Γράφομεν δίπλα εἰς τὴν κατακόρυφον γραμμήν, καὶ κάτω ἀπὸ τὸ πρῶτον, τὸ δεύτερον 2, καὶ λέγομεν : Τὸ 5 δὲν διαιρεῖται διὰ 2. Τὸ ξαναγράφομεν ἀπὸ κάτω. Τὸ 2 εἰς τὸ 4 χωρεῖ 2 φοράς. Τὸ γράφομεν κάτω ἀπὸ τὸ 4. Τὸ 2 εἰς 2 χωρεῖ 1 φοράν. Τὸ γράφομεν κάτω ἀπὸ τὸ 2. Τὸ 5 δὲν διαιρεῖται διὰ 2. Τὸ γράφομεν πάλιν ἀπὸ κάτω.

Εἰς τὴν τρίτην σειρὰν ἔχομεν τοὺς ἀριθμοὺς 5, 2, 1, 5. Ἐδῶ, δὲν ἔχομεν δύο τοὐλάχιστον ἀριθμοὺς ποὺ νὰ διαιροῦνται διὰ 2, ἢ διὰ 3, ἢ διὰ 4. Ἔχομεν δύο ἀριθμούς, ποὺ διαιροῦνται διὰ 5. Τὸν ἀριθμὸν 5 γράφομεν δίπλα εἰς τὴν κατακόρυφον στήλην καὶ κάτω ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 2 καὶ 2, καὶ συνεχίζομεν. Τὸ 5 εἰς τὸ 5 χωρεῖ 1 φοράν. Τὸ πηλίκον 1 τὸ γράφομεν κάτω ἀπὸ τὸ 5. Ξαναγράφομεν τὸ 2 καὶ τὸ 1 εἰς τὴν τετάρτην σειράν, διότι δὲν διαιροῦνται διὰ 5, καὶ συνεχίζομεν : Τὸ 5 εἰς τὸ 5 χωρεῖ 1 φοράν. Τὸ πηλίκον 1, τὸ γράφομεν κάτω ἀπὸ τὸ 5.

Εἰς τὴν τετάρτην σειρὰν ἔχομεν τοὺς ἀριθμοὺς 1, 2, 1, 1. Ἄλλη διαίρεσις δὲν γίνεται. Τότε πολλαπλασιάζομεν τοὺς ἀριθμούς, ποὺ εὑρήκαμεν δεξιὰ ἀπὸ τὴν κατακόρυφον στήλην καὶ τοὺς ἀριθμοὺς ποὺ εὑρήκαμεν εἰς τὴν τελευταίαν σειράν.

Ἔτσι ἔχομεν : $2 \times 2 \times 5 \times 1 \times 2 \times 1 \times 1 = 40$. Ε.Κ.Π. $= 40$

3. Ὅταν δύο ἢ περισσότεροι ἀριθμοὶ ἔχουν κοινὸν διαιρέτην τὴν μονάδα, τότε οἱ ἀριθμοὶ αὐτοὶ εἶναι **πρῶτοι** πρὸς ἀλλήλους καὶ τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον εἶναι τὸ γινόμενον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ αὐτῶν τῶν ἀριθμῶν.

Ἔχομεν π.χ. τὰ ἑτερώνυμα κλάσματα $\frac{3}{4}, \frac{2}{7}, \frac{6}{9}$.

Οἱ παρονομασταὶ 4, 7, 9 ἔχουν κοινὸν διαιρέτην μόνον τὴν μονάδα. Ἑπομένως Ε.Κ.Π. τῶν τριῶν αὐτῶν ἀριθμῶν εἶναι τὸ γινόμενόν των : $4 \times 7 \times 9 = 252$.

Ἔτσι ἔχομεν : $\frac{\overset{63}{\frown}3}{4}, \frac{\overset{36}{\frown}2}{7}, \frac{\overset{28}{\frown}6}{9}$ Ε.Κ.Π. $= 252$

$$\frac{189}{252}, \frac{72}{252}, \frac{168}{252}$$

Τὸν ἴδιον ἀριθμὸν — 252 — θὰ εὑρίσκαμεν, ἂν ἐπεχειρούσαμεν νὰ τὸν εὕρωμεν καὶ μὲ τὸν τρόπον ποὺ ὑπεδείξαμεν εἰς τὴν παραπάνω παράγραφον.

2. Δοκιμάσατε μόνοι σας.

Ἀσκήσεις

1. Νὰ γίνουν ὁμώνυμα τὰ παρακάτω ἑτερώνυμα κλάσματα ;

α) $\frac{4}{6}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{2}{3}$

β) $\frac{6}{15}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{10}$, $\frac{9}{12}$

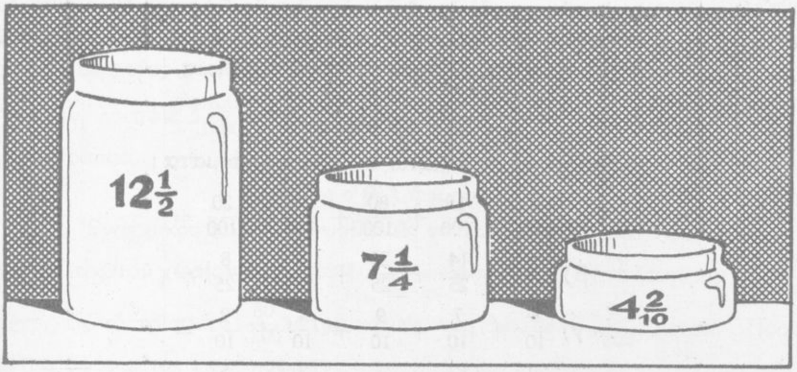
γ) $\frac{10}{20}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{7}{16}$, $\frac{2}{5}$

Προβλήματα

1. Ὁ Τάκης φοιτᾷ εἰς τὴν Πέμπτην τάξιν. Γνωρίζει καλὰ τὰ κλάσματα. Διὰ νὰ πειράξῃ ὅμως τὸν ἀδελφόν του καὶ τὰ δύο ἐξαδέλφια του, τοὺς λέγει: Θὰ κόψω ἓν μῆλον : εἰς τὸν πρῶτον θὰ δώσω τὸ $\frac{1}{5}$, εἰς τὸν δεύτερον τὰ $\frac{3}{8}$ καὶ εἰς τὸν τρίτον τὰ $\frac{6}{20}$. Ἐκεῖνοι κλαίουν καὶ δὲν γνωρίζουν ποῖος θὰ πάρῃ τὸ μεγαλύτερον κομμάτι. Νὰ τὸ εὕρετε σεῖς.

2. Δῶσέ μου $\frac{8}{10}$ τῆς δραχμῆς διὰ τὸ σέλινον ποὺ ἠγόρασες, λέγει ὁ λαχανοπώλης εἰς τὸν Κωστάκην. Ὁ Κωστάκης ὅμως γνωρίζει καλὰ τὰ κλάσματα, καὶ διὰ νὰ τὸν πειράξῃ, τοῦ λέγει : — Θὰ σᾶς δώσω μόνον $\frac{4}{5}$ τῆς δραχμῆς, διότι δὲν ἔχω ἄλλα. Ὁ λαχανοπώλης ἐθύμωσε. Τί λέγετε ; Εἶχε δίκαιον νὰ θυμώσῃ;

3. Ὁ Χρῖστος ἠγόρασεν ἐφέτος τέσσαρα βιβλία : α) Ἀριθμητικὴν καὶ ἔδωσε $\frac{4}{5}$ τοῦ δεκαδράχμου, β) Ἱστορίαν καὶ ἔδωσε $\frac{9}{10}$ τοῦ δεκαδράχμου. γ) Φυσικὴν Πειραματικὴν καὶ ἔδωσε $\frac{3}{4}$ τοῦ δεκαδράχμου καὶ δ) Θρησκευτικὰ καὶ ἔδωσε $\frac{1}{2}$ τοῦ δεκαδράχμου. Ποῖον ἦτο τὸ ἀκριβώτερον βιβλίον ;



ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

1. Πρόσθεσις ὁμωνύμων κλασμάτων

1. Ἕνας ἔμπορος ἐπώλησεν ἀπὸ ἕνα τόπι ὕφασμα τὴν πρώτην ἡμέραν τὰ $\frac{4}{20}$, τὴν δευτέραν ἡμέραν τὰ $\frac{7}{20}$, τὴν τρίτην ἡμέραν τὰ $\frac{2}{20}$ καὶ τὴν τετάρτην ἡμέραν τὰ $\frac{5}{20}$. Πόσον ὕφασμα ἐπώλησε;

Λύσις

Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα πρέπει νὰ κάμωμεν πρόσθεσιν :

$$\frac{4}{20} + \frac{7}{20} + \frac{2}{20} + \frac{5}{20}$$

Καὶ τὰ τέσσαρα κλάσματα εἶναι ὁμώνυμα. Ἠμποροῦμεν, λοιπόν, ἀμέσως νὰ κάμωμεν τὴν πρόσθεσιν. Ὅπως θὰ ἐλέγομεν, 4 μέτρα καὶ 7 μέτρα καὶ 2 μέτρα καὶ 5 μέτρα ὑφάσματος, κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον θὰ εἴπωμεν :

$$\boxed{\frac{4}{20} + \frac{7}{20} + \frac{2}{20} + \frac{5}{20} = \frac{18}{20} \text{ τοῦ ὑφάσματος}}$$

Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμητῶν ποῦ τὸ ἐγράψαμεν; Παρονομαστὴν ποῖον ἐγράψαμεν; Ἠμπορούσαμεν νὰ γράψωμεν ἄλλον παρονομαστήν; Διατί;

Ἑπομένως, καταλήγομεν εἰς τὸ συμπέρασμα : Συμπληρώσατέ το :

Ὅταν ἔχωμεν νὰ προσθέσωμεν ὁμώνυμα κλάσματα........

..

Καμμίαν φορὰν οἱ προσθετέοι δυνατὸν νὰ μᾶς δώσουν ἄθροισμα ἓν καταχρηστικὸν κλάσμα. Θὰ κάμωμεν ἀμέσως ἐξαγωγὴν τῶν ἀκεραίων μονάδων, ὅπως ἐμάθομεν εἰς τὰ προηγούμενα κεφάλαια.

Ἀσκήσεις

1. Νὰ προσθέσετε τὰ παρακάτω ὁμώνυμα κλάσματα :

α) $\frac{4}{100} + \frac{15}{100} + \frac{80}{100} + \frac{35}{100} + \frac{20}{100} =$

β) $\frac{6}{25} + \frac{14}{25} + \frac{20}{25} + \frac{15}{25} + \frac{8}{25} =$

γ) $\frac{8}{10} + \frac{7}{10} + \frac{9}{10} + \frac{4}{10} + \frac{2}{10} =$

δ) $\frac{7}{15} + \frac{12}{15} + \frac{6}{15} + \frac{3}{15} + \frac{5}{15} =$

2. Πρόσθεσις μικτῶν καὶ κλασμάτων μὲ ὁμώνυμα κλάσματα

1. Ἕνας κηπουρὸς συνέλεξε αὐτὴν τὴν ἑβδομάδα ἀπὸ τὸ περιβόλι του διαφόρους ποσότητας φασολάκια. Τὴν Δευτέραν $3\frac{100}{1000}$ χλγρ., τὴν Τρίτην μόνον $\frac{500}{1000}$ χλγρ., τὴν Πέμπτην $5\frac{300}{1000}$ χλγρ., τὴν Παρασκευὴν μόνον $\frac{700}{1000}$ χλγρ. καὶ τὸ Σάββατον $\frac{800}{1000}$ χλγρ. Πόσα χιλιόγραμμα φασολάκια συνέλεξε ὅλην τὴν ἑβδομάδα;

Λύσις

Οἱ ἀριθμοὶ ποὺ ἔχομεν νὰ προσθέσωμεν εἶναι μικτοὶ καὶ κλασματικοί. Ὅλα τὰ κλάσματα εἶναι ὁμώνυμα. Ἂν ὑπῆρχον μόνον ἀκέραιοι, τί θὰ ἐκάμναμεν; Εἰς αὐτούς, λοιπὸν τοὺς ἀριθμούς, ποὺ ὑπάρχουν καὶ ἀκέραιοι καὶ κλάσματα, ποίας ἐνεργείας θὰ κάμωμεν;

Καταλήξατε εἰς τὸ συμπέρασμα πῶς γίνεται ἡ πρόσθεσις μικτῶν καὶ κλασμάτων, ὅταν ὅλα τὰ κλάσματα εἶναι ὁμώνυμα, καὶ γράψατέ το κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον, ἀλλ' ἀφοῦ τὸ συμπληρώσητε :

Ὅταν ἔχωμεν νὰ προσθέσωμεν μικτοὺς ἀριθμοὺς καὶ κλασματικοὺς μὲ κλάσματα ὁμώνυμα, πρῶτον προσθέτομεν.......... καὶ κατόπιν ....

Ἂν εἰς τὸν μικτὸν τοῦ ἀθροίσματος ἔχωμεν καταχρηστικὸν κλάσμα τότε θὰ βγάλωμεν τὰς ἀκεραίας μονάδας τὰς ὁποίας θὰ προσθέσωμεν εἰς τὰς ἄλλας ἀκεραίας μονάδας, ποὺ ἔχομεν εὕρη.

Ἔχομεν, λοιπόν: $3\frac{100}{1000}+\frac{500}{1000}+5\,\frac{300}{1000}+\frac{700}{1000}+7\,\frac{800}{1000}=15\frac{2400}{1000}=17\frac{400}{1000}$ χιλιόγραμμα.

Προβλήματα

1. Ἕνας μικροπωλητὴς γυρίζει εἰς τὰ χωριὰ καὶ πωλεῖ ὑφάσματα: Εἰς τὸ πρῶτον χωρίον ἐπώλησε $16\,\frac{25}{100}$ μ. ὑφάσματος, εἰς τὸ δεύτερον $22\,\frac{40}{100}$ μέτρ., εἰς τὸ τρίτον $11\frac{80}{100}$ μέτρα καὶ εἰς τὸ τέταρτον $20\,\frac{50}{100}$ μέτρα. Πόσα μέτρα ὑφάσματος ἐπώλησε καὶ εἰς τὰ τέσσαρα χωρία;

2. Ἄλλος μικροπωλητὴς γυρίζει εἰς τὴν συνοικίαν μας καὶ πωλεῖ ψιλικά. Ἀπὸ τὸ πρῶτον σπίτι εἰσέπραξε $18\,\frac{4}{5}$ δραχμάς, ἀπὸ τὸ δεύτερον $15\,\frac{2}{5}$ δρχ., ἀπὸ τὸ τρίτον $24\,\frac{3}{5}$ δρχ., καὶ ἀπὸ τὸ τέταρτον $17\,\frac{1}{5}$ δρχ. Πόσας δραχμὰς εἰσέπραξεν ἐν ὅλῳ;

3. Εἰς τὴν γωνίαν τῆς ἀγορᾶς κάθηται εἷς γέρων καὶ πωλεῖ σιγάρα, σπίρτα, κλπ. εἴδη. Προχθὲς εἰσέπραξε $65\,\frac{1}{4}$ δραχμάς., χθὲς εἰσέπραξε $10\,\frac{3}{4}$ δραχ., καὶ σήμερον εἰσέπραξε $30\,\frac{2}{4}$ δραχ. Πόσα εἰσέπραξε καὶ τὰς τρεῖς ἡμέρας;

4. Ἕνας παραγωγὸς ἐπώλησε, κατὰ διαστήματα, τὰς παρακάτω ποσότητας σταφίδος: Τὴν πρώτην φορὰν ἐπώλησεν $150\,\frac{5}{10}$ χλγρμ., τὴν δευτέραν φορὰν $240\,\frac{7}{10}$ χλγρ., τὴν τρίτην φορὰν ἐπώλησεν $195\,\frac{6}{10}$ χλγρ. καὶ τὴν τετάρτην φορὰν ἐπώλησε $310\,\frac{8}{10}$ χλγρ. Πόσην σταφίδα ἐπώλησεν ἐν ὅλῳ;

3. Πρόσθεσις ἑτερωνύμων κλασμάτων

1. Τέσσαρες χωρικαὶ εἰσῆλθον εἰς ἓν κατάστημα νὰ ψωνίσουν βαφὰς διὰ τὰς μαλλίνας κουβέρτας των. Ἡ πρώτη ἠγόρασε $\frac{200}{1000}$ τοῦ χλγρ. ἡ δευτέρα $\frac{4}{10}$ τοῦ χλγρ., ἡ τρίτη $\frac{3}{4}$ τοῦ χλγρ. καὶ ἡ τετάρτη $\frac{1}{2}$ τοῦ χλγ. Πόσον ἦτο τὸ ὁλικὸν βάρος τῆς βαφῆς ποὺ ἠγόρασαν καὶ αἱ τέσσαρες χωρικαί;

Λύσις

Ἐδῶ, ἔχομεν νὰ προσθέσωμεν ἑτερώνυμα κλάσματα. Ἠμποροῦν, ὅμως, νὰ προστεθοῦν προτοῦ νὰ γίνουν ὁμώνυμα; Ὄχι! Λοιπόν, ἡ πρώτη μας ἐργασία εἶναι νὰ κάμωμεν τὰ κλάσματα ὁμώνυμα. Ὅλοι γνωρίζομεν πῶς θὰ γίνουν ὁμώνυμα. Ἐγὼ γράφω μόνον τὴν ἄσκησιν καὶ σεῖς νὰ τὴν δικαιολογήσετε.

$$\overset{1}{\frac{200}{1000}} + \overset{100}{\frac{4}{10}} + \overset{250}{\frac{3}{4}} + \overset{500}{\frac{1}{2}} = \quad \text{Ε.Κ.Π.} = 1000$$

$$= \frac{200}{1000} + \frac{400}{1000} + \frac{750}{1000} + \frac{500}{1000} = \frac{1850}{1000} = 1\frac{850}{1000} \text{ χλγρ.}$$

Ἔτσι καταλήγομεν εἰς τὸν ἑξῆς κανόνα, τὸν ὁποῖον, ἀφοῦ συμπληρώσετε, νὰ γράψετε εἰς τὸ τετράδιον:

Διὰ νὰ προσθέσωμεν ἑτερώνυμα κλάσματα, πρῶτον θὰ τὰ ....
.... καὶ κατόπιν θὰ ....

2. Νὰ γράψετε προβλήματα μὲ λόγια, μὲ βάσιν τοὺς παρακάτω ἀριθμούς:

α) $\frac{2}{10}$ δραχ. + $\frac{3}{4}$ δραχ. + $\frac{10}{20}$ δραχ. + $\frac{50}{100}$ δραχ. =

β) $\frac{7}{10}$ μέτρ. + $\frac{3}{4}$ μέτρ. + $\frac{1}{5}$ μέτρ. =

γ) $\frac{45}{60}$ ὥρας + $\frac{2}{4}$ ὥρας + $\frac{1}{2}$ ὥρας =

δ) $\frac{70}{100}$ χλγρ. + $\frac{9}{10}$ χλγρ. + $\frac{3}{4}$ χλγρ. =

ε) $\frac{3}{4}$ ἔτη + $\frac{6}{12}$ ἔτη + $\frac{1}{2}$ ἔτη =

4. Πρόσθεσις μικτῶν καὶ κλασματικῶν ἀριθμῶν μὲ κλάσματα ἑτερώνυμα

1. Ἕνας παντοπώλης ἔλαβε χθὲς ἀπὸ τὸ Κρανίδι τρία βαρέλια ἐλαίου καὶ δύο φιάλας ἐλαίου διὰ δεῖγμα. Τὸ πρῶτον βαρέλι περιεῖχε $63\frac{3}{4}$ χλγρ. ἐλαίου, τὸ δεύτερον $68\frac{5}{10}$ χλγρ. ἐλαίου, καὶ τὸ τρίτον $64\frac{1}{2}$ χλγρ. ἐλαίου. Ἐπί-

σης ἡ πρώτη φιάλη περιεῖχε $\frac{3}{5}$ χλγρ. ἐλαίου καὶ ἡ δευτέρα $\frac{50}{100}$ χγλρ. ἐλαίου. Πόσα χλγρ. ἐλαίου ἔλαβεν ἐν ὅλῳ ὁ παντοπώλης;

Λύσις

Οἱ ἀριθμοί, ποὺ ἔχομεν νὰ προσθέσωμεν, εἶναι μικτοὶ καὶ κλασματικοί, μὲ κλάσματα ἑτερώνυμα. Ἂν εἴχομεν μόνον ἑτερώνυμα κλάσματα, τί θὰ ἐκάμναμεν; Τώρα ποὺ ἔχομεν καὶ ἀκεραίους καὶ ἑτερώνυμα κλάσματα, πῶς θὰ γίνῃ ἡ ἐργασία μας;

Ἐγὼ κάμνω τὴν ἄσκησιν καὶ σεῖς νὰ τὴν δικαιολογήσετε.

$$63\overbrace{\frac{3}{4}}^{25} + 68\overbrace{\frac{5}{10}}^{10} + 64\overbrace{\frac{1}{2}}^{50} + \overbrace{\frac{3}{5}}^{20} + \overbrace{\frac{50}{100}}^{1} = \quad \text{Ε.Κ.Π.} = 100$$

$$= 63\frac{75}{100} + 68\frac{50}{100} + 64\frac{50}{100} + \frac{60}{100} + \frac{50}{100} = 195\frac{285}{100} = 197\frac{85}{100}$$

Ὀλίγη προσοχή. Ὅταν κάμνωμεν τὰ κλάσματα ὁμώνυμα, τοὺς ἀκεραίους τοὺς ἀφήνομεν ὅπως εἶναι. Ὅταν ὁ μικτὸς τοῦ ἀθροίσματος τύχῃ νὰ ἔχῃ κλάσμα καταχρηστικόν, τότε ἐξάγομεν τὰς ἀκεραίας μονάδας καὶ τὰς προσθέτομεν εἰς τὰς ἄλλας ἀκεραίας. Τὸ ὑπόλοιπον - ἂν ὑπάρχῃ - τὸ γράφομεν ὡς κλάσμα.

Προβλήματα

1. Ἀπὸ τὸ ἡμερολόγιον ἑνὸς τυροκομείου ἀντιγράφω:

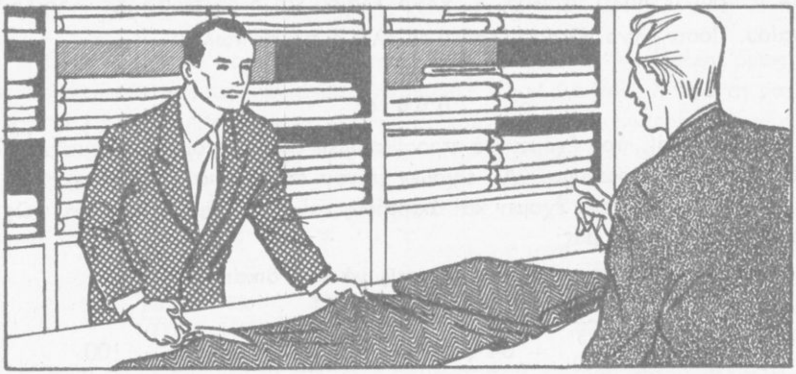
25 Μαΐου 1960. Παραγωγή: $75\frac{1}{2}$ χλγρ. τυροῦ $28\frac{2}{5}$ χλγρ. βουτύρου $12\frac{3}{10}$ χλγρ. μυζήθρας.

26 Μαΐου 1960. Παραγωγή: $84\frac{1}{5}$ χλγρ. τυροῦ $16\frac{5}{20}$ χλγρ. βουτύρου, $14\frac{50}{100}$ χλγρ. μυζήθρας.

27 Μαΐου 1960. Παραγωγή: $60\frac{15}{20}$ χλγρ. τυροῦ $20\frac{5}{8}$ χλγρ. βουτύρου, $18\frac{3}{5}$ χλγρ. μυζήθρας.

Πόσα χιλιόγραμμα τυροῦ, πόσα βουτύρου καὶ πόσα μυζήθρας, χωριστά, παρήγαγε τὸ τυροκομεῖον εἰς αὐτὰς τὰς τρεῖς ἡμέρας;

2. Συντάξατε μόνοι σας τοιαῦτα προβλήματα ἀπὸ τὴν ζωὴν τοῦ σπιτιοῦ σας, τῶν συγγενῶν σας, τοῦ σχολείου σας.



ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

Ἡ ἀφαίρεσις τῶν κλασμάτων ἔχει πολλὰς περιπτώσεις· δώσατε μόνον περισσοτέραν προσοχὴν καὶ δὲν θὰ δοκιμάσετε καμμίαν δυσκολίαν.

1. Ἀφαίρεσις ὁμωνύμων κλασμάτων καὶ μικτῶν μὲ ὁμώνυμα κλάσματα

1. Ὁ Τάσος εἶχε $\frac{80}{100}$ τῆς δραχμῆς καὶ ἔδωσε διὰ καραμέλλας τὰ $\frac{50}{100}$ Πόσα τοῦ ἔμειναν;

Λύσις

Ἡ σκέψις μᾶς λέγει ὅτι τοῦ ἔμειναν $\frac{30}{100}$. Καὶ οἱ ἀριθμοὶ τὸ ἴδιον πρέπει νὰ δείξουν:

$$\frac{80}{100} - \frac{50}{100} = \frac{30}{100} \text{ τῆς δραχμῆς.}$$

Ποῦ ἐγράψαμεν τὸ ὑπόλοιπον ἀπὸ τὴν ἀφαίρεσιν τῶν δύο ἀριθμητῶν; Ποῖον ἀριθμὸν ἐγράψαμεν ὡς παρονομαστήν; Ἦτο δυνατὸν νὰ γράψωμεν ἄλλον παρονομαστήν; Ναί, ἢ ὄχι καὶ διατί;

Τὸ συμπέρασμα νὰ τὸ ἀντιγράψετε, συμπληρωμένον, εἰς τὸ τετράδιον.

Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν κλάσμα ἀπὸ ἄλλο κλάσμα ὁμώνυμον ἀφαιροῦμεν ....

ΣΗΜ.: Ὅταν τελειώνῃ κάθε πρᾶξις νὰ κάμετε τὴν δοκιμήν, προσθέτοντες τὸ ὑπόλοιπον καὶ τὸν ἀφαιρετέον καὶ εὑρίσκοντες τὸν μειωτέον.

2. Διὰ νὰ συντομεύωμεν τὰς περιπτώσεις:

$$16\frac{5}{8} - \frac{3}{8} = 16\frac{2}{8}.$$

Τὸ κλάσμα $\frac{3}{8}$ ἀφαιρεῖται ἀπὸ τὸ $\frac{5}{8}$. Ὁ ἀκέραιος μένει ὅπως εἶναι. Κάμετε τὴν δοκιμήν.

$$3.\quad 24\frac{2}{4} - \frac{3}{4} = 23\frac{6}{4} - \frac{3}{4} = 23\frac{3}{4}.$$

Τὸ κλάσμα $\frac{3}{4}$ δὲν ἀφαιρεῖται ἀπὸ τὸ κλάσμα $\frac{2}{4}$. Παίρνομεν μίαν ἀκεραίαν μονάδα ἀπὸ τὰς 24 καὶ μένουν 23. Τὴν ἀκεραίαν μονάδα τὴν κάμνομεν $\frac{4}{4}$ καὶ $\frac{2}{4}$ ποὺ ἔχομεν εἰς τὸν μειωτέον, γίνονται $\frac{6}{4}$. Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ὁ ἀριθμὸς $24\frac{2}{4}$ ἔγινε $23\frac{6}{4}$, πρᾶγμα ποὺ εἶναι τὸ ἴδιον, διότι τὸ κλάσμα $\frac{6}{4}$ εἶναι $1\frac{2}{4}$. Ἂν ἐπαναπροστεθῇ, λοιπόν, εἰς τὸν ἀκέραιον 23, τότε γίνεται πάλιν ὁ ἀρχικὸς μειωτέος. Ἀπὸ τὸν ἀριθμόν, λοιπόν, $23\frac{6}{4}$ ἀφαιρεῖται τὸ κλάσμα $\frac{3}{4}$. Ὁ ἀκέραιος θὰ μείνῃ ὅπως εἶναι, καὶ ἔτσι θὰ ἔχωμεν ὑπόλοιπον $23\frac{3}{4}$.

Κάμετε τὴν δοκιμήν.

$$4.\quad 50\frac{4}{5} - 25\frac{1}{5} = 25\frac{3}{5}.$$

Ὁ ἀκέραιος ἀπὸ τὸν ἀκέραιον ἀφαιρεῖται καὶ τὸ κλάσμα ἀπὸ τὸ κλάσμα ἀφαιρεῖται. Ἡ πρᾶξις δὲν παρουσιάζει καμμίαν δυσκολίαν.

Κάμετε τὴν δοκιμήν.

$$5.\quad 17\frac{2}{10} - 8\frac{4}{10} = 16\frac{12}{10} - 8\frac{4}{10} = 8\frac{8}{10}.$$

Ὁ ἀκέραιος ἀπὸ τὸν ἀκέραιον ἀφαιρεῖται, ἀλλὰ τὸ κλάσμα ἀπὸ τὸ κλάσμα δὲν ἀφαιρεῖται. Παίρνομεν μίαν ἀκεραίαν μονάδα ἀπὸ τὰς 17 καὶ μένουν 16. Τὴν ἀκεραίαν μονάδα τὴν κάμνομεν $\frac{10}{10}$ καὶ $\frac{2}{10}$ ποὺ ἔχομεν εἰς τὸν μειωτέον, γίνονται $\frac{12}{10}$. Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ὁ ἀριθμὸς $17\frac{2}{10}$ ἔγινε $16\frac{12}{10}$, πρᾶγμα ποὺ εἶναι τὸ ἴδιον, ὅπως διεπιστώσαμεν καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν 3. Ὅπως ἔγιναν οἱ ἀριθμοί, ὁ ἀκέραιος ἀπὸ τὸν ἀκέραιον ἀφαιρεῖται καὶ τὸ κλάσμα ἀπὸ τὸ κλάσμα ἀφαιρεῖται.

Κάμετε τὴν δοκιμὴν καὶ εὕρετε τὸν ἀρχικὸν μειωτέον.

$$6.\quad 25 - \frac{3}{4} = 24\frac{4}{4} - \frac{3}{4} = 24\frac{1}{4}$$

Διὰ νὰ γίνῃ αὐτὴ ἡ ἀφαίρεσις πρέπει καὶ ὁ μειωτέος ν' ἀποκτήσῃ ἓν κλάσμα. Παίρνομεν μίαν ἀκεραίαν μονάδα ἀπὸ τὰς 25 καὶ τὴν κάμνομεν $\frac{4}{4}$ διότι καὶ τὸ ἄλλο κλάσμα εἶναι τέταρτα. Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον, ὁ ἀκέραιος 25 ἔγινεν ὁ μικτὸς $24\frac{4}{4}$ ποὺ εἶναι τὸ ἴδιον, ὅπως διεπιστώσαμεν καὶ εἰς τὰς περιπτώσεις 3 καὶ 5. Ἡ πρᾶξις τώρα δὲν παρουσιάζει καμμίαν δυσκολίαν. Θὰ γίνῃ ὅπως εἰς τὴν περίπτωσιν 2.

Κάμετε τὴν δοκιμὴν καὶ εὕρετε τὸν ἀρχικὸν μειωτέοον.

$$7.\quad 40 - 20\frac{2}{6} = 39\frac{6}{6} - 20\frac{2}{6} = 19\frac{4}{6}.$$

Διὰ νὰ γίνῃ ἡ ἀφαίρεσις πρέπει ὁ μειωτέος νὰ γίνῃ μικτός, ἀφοῦ καὶ ὁ ἀφαιρετέος εἶναι μικτός. Ὁ ἀκέραιος θὰ γίνῃ μικτὸς ὅπως ἀκριβῶς ἀνεφέραμεν εἰς τὴν παραπάνω περίπτωσιν. Κατόπιν ἡ ἀφαίρεσις γίνεται ὅπως εἰς τὴν περίπτωσιν 4 χωρὶς καμμίαν δυσκολίαν.

Κάμετε τὴν δοκιμὴν καὶ εὕρετε τὸν ἀρχικὸν μειωτέον.

$$8.\quad 25\frac{5}{10} - 15 = 15\frac{5}{10}.$$

Ἀφαιροῦμεν τὸν ἀκέραιον ἀπὸ τὸν ἀκέραιον καὶ κατόπιν γράφομεν καὶ τὸ κλάσμα τοῦ μειωτέου.

Κάμετε τὴν δοκιμήν.

Προβλήματα

1. Ἀπὸ $24\frac{400}{1000}$ χλγρ. ἐλαίου ποὺ εἴχομεν εἰς τὸ σπίτι κατηναλώσαμεν αὐτὸν τὸν μῆνα $5\frac{600}{1000}$ χλγρ. Πόσον ἔλαιον ἀπέμεινε;

2. Εἰς τὴν πανήγυριν τοῦ Συνοικισμοῦ ὁ Βαγγελάκης ἀπὸ τὰς 20 δρχ. ποὺ τοῦ ἔδωσε ὁ πατέρας του, ἐξώδευσε διὰ καραμέλλας καὶ λουκούμια $7\frac{1}{4}$ δρχ. Πόσαι δραχμαὶ τοῦ ἔμειναν;

3. Εἰς τὸν κουμπαρᾶν της ἡ Ἀφροδίτη εἶχεν $145\frac{3}{10}$ δρχ., ἔδωσεν ὅμως διὰ τὰ βιβλία της $126\frac{4}{10}$ δραχ. Πόσαι δραχμαὶ ἀπέμειναν;

4. Ἀπὸ ἕνα τόπι ὑφάσματος $24\frac{1}{4}$ μέτρων ἐπωλήθησαν $\frac{3}{4}$ τοῦ μέτρου. Πόσον ὕφασμα ἀπέμεινε;

5. Ἡ Κικὴ ἠγόρασε $2\frac{90}{100}$ μέτρα κορδέλλας καὶ ἡ Ἄννα $7\frac{50}{100}$ μέτρα κορδέλλας. Πόσα μέτρα περισσοτέρας κορδέλλας ἀπὸ τὴν Κικὴν ἠγόρασεν ἡ Ἄννα;

2. Ἀφαίρεσις ἑτερωνύμων κλασμάτων καὶ μικτῶν μὲ ἑτερώνυμα κλάσματα

Εἰς τὴν προηγουμένην παράγραφον συνηντήσαμεν ὀκτὼ περιπτώσεις ἀφαιρέσεως. Ἀλλὰ εἰς τὴν ἀφαίρεσιν ἑτερωνύμων κλασμάτων καὶ μικτῶν μὲ ἑτερώνυμα κλάσματα, θὰ συναντήσωμεν πέντε περιπτώσεις. Εἰς τὰς περιπτώσεις αὐτάς, προτοῦ γίνῃ ἡ ἀφαίρεσις, πρέπει τὰ κλάσματα νὰ γίνουν ὁμώνυμα. Κατόπιν, εἰς κάθε περίπτωσιν θὰ συμβουλευώμεθα τί ἐκάμαμεν μὲ τὰ ὁμώνυμα κλάσματα.

Ἄς λύσωμεν μαζὶ ἕνα πρόβλημα:

1. Ἕνας ἔμπορος ἐπώλησε χθὲς ἀπὸ ἓν τόπι ὑφάσματος μήκους $40\frac{1}{2}$ μέτρων, τὰ $17\frac{3}{4}$ μέτρα. Πόσον ὕφασμα ἀπέμεινε;

Λύσις

$$40\frac{\overset{2}{\frown}\,1}{2} - 17\frac{\overset{1}{\frown}\,3}{4} = \qquad \text{Ε.Κ.Π.} = 4$$

$$= 40\frac{2}{4} - 17\frac{3}{4} = 39\,\frac{6}{4} - 17\frac{3}{4} = 22\frac{3}{4}$$

Ἐδῶ ἔχομεν νὰ ἀφαιρέσωμεν μικτὸν ἀπὸ μικτὸν μὲ κλάσματα ἑτερώνυμα. Διὰ νὰ γίνῃ ἡ ἀφαίρεσις πρέπει τὰ κλάσματα νὰ γίνουν ὁμώνυμα. Διὰ νὰ γίνουν ὁμώνυμα, πρέπει νὰ εὕρωμεν τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον παίρνομεν τὸν μεγαλύτερον παρονομαστὴν καὶ βλέπομεν ἂν διαιρῆται μὲ τὸν ἄλλον παρονομαστήν. Ἂν δὲν διαιρῆται, τὸν διπλασιάζομεν, ἢ τὸν τριπλασιάζομεν, κλπ. ἕως ὅτου εὕρωμεν τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον καὶ τῶν δύο παρονομαστῶν. Ἂν διαιρῆται, ὅπως τοῦτο συμβαίνει εἰς τὸ πρόβλημά μας, τότε τὸν γράφομεν ὡς Ε.Κ.Π. Κατόπιν κάμνομεν τὰ κλάσματα ὁμώνυμα. Ἀφοῦ γίνουν τὰ κλάσματα ὁμώνυμα, προσέχομεν νὰ ἴδωμεν ἂν τὸ κλάσμα τοῦ ἀφαιρετέου ἀφαιρῆται ἀπὸ τὸ κλάσμα τοῦ μειωτέου. Ἂν ἀφαιρῆται, τότε προχωροῦμεν κανονικῶς εἰς τὴν ἀφαίρεσιν ἀφαιροῦντες, πρῶτον, ἀκέραιον ἀπὸ ἀκέραιον καὶ κατόπιν κλάσμα ἀπὸ κλάσμα.

Ἂν ὅμως τὸ κλάσμα τοῦ ἀφαιρετέου δὲν ἀφαιρῆται ἀπὸ τὸ κλάσμα τοῦ μειωτέου, ὅπως τοῦτο συμβαίνει εἰς τὸ πρόβλημά μας, τότε δανειζόμεθα μίαν ἀκεραίαν μονάδα ἀπὸ τὸν ἀκέραιον τοῦ μειωτέου καὶ μένουν 39. Τὴν ἀκεραίαν μονάδα τὴν κάμνομεν $\frac{4}{4}$ καὶ $\frac{2}{4}$ ποὺ ἔχει ὁ μειωτέος γίνονται $\frac{6}{4}$. Ὁ μειωτέος $40\frac{2}{4}$ ἔγινε τώρα $39\frac{6}{4}$, πρᾶγμα ποὺ εἶναι τὸ ἴδιον, ὅπως ἀπεδείξαμεν εἰς προηγουμένας περιπτώσεις. Τώρα ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὸν $39\frac{6}{4}$ τὸν ἀφαιρετέον $17\frac{3}{6}$ καὶ ἔχομεν ὑπόλοιπον ὑφάσματος $22\frac{3}{4}$ μέτρα.

Κάμετε τὴν δοκιμὴν καὶ νὰ φθάσετε εἰς τὸν ἀρχικὸν μειωτέον.

Ὅταν πρόκειται νὰ κάμετε ἀφαίρεσιν μικτοῦ ἀπὸ μικτόν, ἢ κλάσματος ἀπὸ μικτόν, ἢ κλάσματος ἀπὸ κλάσμα, μὲ κλάσματα, ἐννοεῖται, ἑτερώνυμα, ν' ἀκολουθῆτε τὴν παραπάνω σκέψιν. Αὐτὴ ἡ σκέψις μᾶς βοηθεῖ νὰ φθάσωμεν ἀπὸ τὴ μίαν ἄκρην τοῦ προβλήματος εἰς τὴν ἄλλην καὶ νὰ ἐπιστρέψωμεν ἐκεῖ ἀπ' ὅπου ἐξεκινήσαμεν, διὰ νὰ ἐπιτύχωμεν, μὲ αὐτὸν τὸν τρόπον, τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος.

Προβλήματα

1. Ὁ Νῖκος εἰργάσθη $\frac{3}{4}$ τῆς ὥρας, ἐνῶ ὁ Γιῶργος εἰργάσθη $\frac{30}{60}$ τῆς ὥρας. Ποῖος ἀπὸ τοὺς δύο εἰργάσθη περισσότερον καὶ πόσον;

2. Ἀπὸ ἕνα σάκκον ἀλεύρου ποὺ ζυγίζει $50\frac{3}{10}$ χλγρ. ἐπώλησεν ὁ παντοπώλης τὸ $\frac{1}{2}$ χλγρ. Πόσον ἄλευρον ἔμεινεν ἀκόμη εἰς τὸν σάκκον;

3. Ἓν αὐτοκίνητον τρέχει μὲ $45\frac{80}{100}$ χλμ. τὴν ὥραν, ἐνῷ ἓν δεύτερον αὐτοκίνητον τρέχει μὲ $60\frac{1}{4}$ χλμ. τὴν ὥραν. Πόσα χλμ. τὴν ὥραν περισσότερον τρέχει τὸ δεύτερον αὐτοκίνητον;

4. Δύο ἀδελφοὶ ἔχουν τὴν ἑξῆς ἡλικίαν: ὁ πρῶτος εἶναι $11\frac{3}{4}$ ἐτῶν, ἐνῷ ὁ δεύτερος εἶναι $8\frac{6}{12}$ ἐτῶν. Πόση ἡ διαφορὰ ἡλικίας τοῦ πρώτου ἀπὸ τὸν δεύτερον;

6. Τὸ δοχεῖον πετρελαίου περιέχει $16\frac{7}{10}$ χλγρ. Ἐχρησιμοποιήσαμεν εἰς τὴν μηχανὴν $\frac{2}{4}$ τοῦ χλγρ. πετρελαίου. Πόσον πετρέλαιον ἀπέμεινεν εἰς τὸ δοχεῖον;

3. Προβλήματα μὲ πρόσθεσιν καὶ ἀφαίρεσιν

1. Ὁ πατέρας τῆς Ἑλένης ἐπῆγεν εἰς τὴν ἀγορὰν νὰ ψωνίσῃ. Εἶχεν εἰς τὸ πορτοφόλι του $84\frac{1}{2}$ δραχ. Ἔδωσε διὰ κρέας $32\frac{1}{4}$ δρχ., διὰ ὄρυζαν $7\frac{2}{10}$ δραχ., διὰ μπάμιας $5\frac{4}{5}$ δραχ. καὶ διὰ τομάτας $4\frac{10}{100}$ δραχ. Πόσα ἔδωσε εἰς τὰ ψώνια καὶ πόσα τοῦ ἔμειναν;

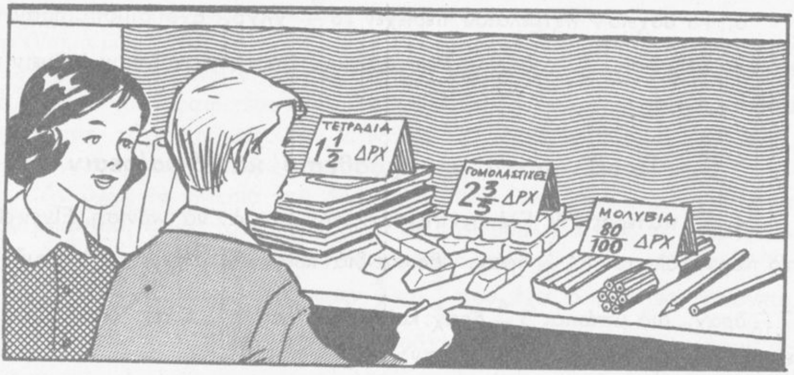
2. Ἕνας παντοπώλης διὰ νὰ κάμῃ ἓν μῖγμα μαγειρικοῦ λίπους 100 χλγρ., ἀνέμιξε $36\frac{1}{4}$ χλγρ. λίπους, $53\frac{2}{5}$χλγρ. μαργαρίνης καὶ τὸ ὑπόλοιπον ἕως τὰ 100 χλγρ. ἦτο βούτυρον. Πόσον βάρος εἶχε τὸ βούτυρον;

3. Ἓν μεγάλον δοχεῖον τοματοπελτὲ ζυγίζει $22\frac{6}{10}$ χλγρ. Ὁ παντοπώλης ἐπώλησε τὴν μίαν ἡμέραν $2\frac{1}{2}$ χιλγρ. καὶ τὴν ἄλλην $6\frac{3}{5}$ χλγρ. τοματοπελτέ. Πόσον εἶναι τὸ βάρος τοῦ τοματοπελτὲ ποὺ ἀπέμεινεν εἰς τὸ δοχεῖον;

4. Ἠγοράσαμεν διὰ τὰς ἀνάγκας τοῦ σπιτιοῦ ἓν δοχεῖον ἐλαίου βάρους $16\frac{3}{4}$ χλγρ. Τὴν πρώτην ἑβδομάδα ἐξωδεύσαμεν $2\frac{1}{5}$ χλγρ., τὴν δευτέραν ἑβδομάδα $1\frac{1}{4}$ χλγρ., τὴν τρίτην ἑβδομάδα $3\frac{6}{10}$ χλγρ. καὶ τὴν τετάρτην ἑβδομάδα $2\frac{50}{100}$ χλγρ. Πόσα χλγρ. ἐλαίου ἀπέμειναν εἰς τὸ δοχεῖον;

5. Ἀπὸ τὸν Πειραιᾶ ἕως τὴν Θεσσαλονίκην κάμνομεν, σιδηροδρομικῶς, $14\frac{30}{60}$ ὥρας. Ἀπὸ τὸν Πειραιᾶ ἕως τὴν Λαμίαν ἐκάμαμεν $7\frac{1}{4}$ ὥρας. Ἀπὸ τὴν Λαμίαν ἕως τὴ Λάρισαν ἐκάμαμεν $3\frac{10}{20}$ ὥρας. Πόσας ὥρας θὰ ταξιδεύωμεν ἀκόμη, διὰ νὰ φθάσωμεν εἰς τὴν Θεσσαλονίκην;

6. Ἕνας μεγαλέμπορος ἔκαμεν εἰσαγωγὴν 5.000 τόννων σακχάρεως. Ἔστειλεν εἰς τοὺς ἀντιπροσώπους του τὰς παρακάτω ποσότητας: Θεσσαλονίκην $163\frac{1}{5}$ τόννους, Λάρισαν $72\frac{3}{4}$ τόννους, Ἰωάννινα $87\frac{6}{10}$ τόννους, Κόρινθον $26\frac{10}{20}$ τόννους καὶ Πάτρας $98\frac{15}{40}$ τόννους. Πόσοι τόννοι σακχάρεως ἀπέμειναν εἰς τὴν κεντρικὴν ἀποθήκην του;



ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

(Ὑλικά: Τετράδια, μολύβια, πένναι, γομολάστιχαι, καραμέλλαι, σοκολάται, κονδυλοφόροι, κόλλαι διαγωνισμοῦ. Ἕνας μαθητὴς εἶναι πωλητὴς καὶ ἄλλος ἀγοραστής. Κάθε φοράν, ἀγοραστὴς καὶ πωλητὴς ἀλλάσσουν).

1. Ὁ Παῦλος ἔρχεται ν' ἀγοράσῃ 5 μολύβια. Τὸ κάθε μολύβι ἔχει $\frac{80}{100}$ τῆς δραχμῆς. Πόσα χρήματα θὰ δώσῃ;

Σκέψις

Ὁ πωλητὴς σκέπτεται. Γνωρίζει πόσον ἔχει τὸ ἓν μολύβι καὶ θέλει νὰ εὕρῃ πόσον ἔχουν τὰ πολλά. Θὰ κάμῃ πολλαπλασιασμόν. Πρῶτον, τὸ κάμνει μὲ τὴν σκέψιν του καὶ λέγει: Τὸ ἓν μολύβι ἔχει ὀγδοήκοντα ἑκατοστὰ τῆς δραχμῆς, τὰ δύο ἔχουν ἑκατὸν ἑξήκοντα, τὰ τρία ἔχουν διακόσια σαράντα, τὰ τέσσαρα ἔχουν τριακόσια εἴκοσι καὶ τὰ πέντε μολύβια ἔχουν τετρακόσια ἑκατοστὰ τῆς δραχμῆς. Ἡ μία δραχμὴ ἔχει ἑκατὸν ἑκατοστά, ἐπομένως τὰ τετρακόσια ἑκατοστὰ εἶναι τέσσαρες δραχμαί.

Τώρα πιάνει τὸ χαρτὶ καὶ τὸ μολύβι. Ὁ ἀγοραστὴς γράφει εἰς τὸν πίνακα καὶ οἱ ὑπόλοιποι μαθηταὶ εἰς τὰ τετράδια:

Λύσις

$$\frac{80}{100} \times 5 = \frac{400}{100} = 4 \text{ δραχμαί.}$$

Πρέπει, δηλαδή, τὸ κλάσμα $\frac{80}{100}$ νὰ γίνῃ 5 φορὰς μεγαλύτερον. Γνωρίζομεν ἀπὸ τὰς ἰδιότητας τῶν κλασμάτων ὅτι ἕνα κλάσμα γίνεται μεγαλύτερον, ἂν πολλαπλασιάσωμε τὸν ἀριθμητήν του.

Τὸ γινόμενον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, ποῦ τὸ ἐγράψαμεν; Ποῖον ἀριθμὸν ἐγράψαμεν ὡς παρονομαστήν;

Συμπληρώσατε τὸν παρακάτω κανόνα καὶ γράψατέ τον εἰς τὸ τετράδιον.

Ὅταν ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν κλάσμα ἐπὶ ἀκέραιον, πολλαπλασιάζομεν ....

2. Ἡ Χρυσάνθη ἔρχεται ν' ἀγοράσῃ $\frac{5}{10}$ τῆς σοκολάτας, διότι δὲν ἔχει πολλὰ χρήματα. Κάθε σοκολάτα ἔχει 5 δραχμάς. Πόσα χρήματα θὰ δώσῃ;

Σκέψις

Ὁ πωλητὴς σκέπτεται : ὁλόκληρος ἡ σοκολάτα, ἢ τὰ δέκα δέκατα, ἔχουν πέντε δραχμάς. Τὸ ἓν δέκατον ἔχει δέκα φορὰς ὀλιγώτερον, δηλαδὴ ἔχει πεντήκοντα λεπτά. Ἑπομένως τὰ πέντε δέκατα ἔχουν διακόσια πεντήκοντα λεπτά, ἢ δύο καὶ ἡμίσειαν δραχμάς.

Μετὰ τὴν σκέψιν, εἰς ἐνέργειαν τετράδια, μολύβια, κιμωλίαι :

Λύσις

$$5 \times \frac{5}{10} = \frac{25}{10} = 2\frac{5}{10} \text{ δραχμαί.}$$

Πῶς ἔγινεν ὁ πολλαπλασιασμός; Ποῦ ἐγράφη κάθε ποσόν; Τί ἀριθμοὶ εἶναι ὁ πολλαπλασιαστέος καὶ ὁ πολλαπλασιαστής;

Συμπληρώσατε τὸν κανόνα καὶ ἀντιγράψατέ τον εἰς τὸ τετράδιον.

Ὅταν ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀκέραιον ἐπὶ κλάσμα, πολλαπλασιάζομεν ....

ΣΗΜ. : Προσέξατε αὐτὰς τὰς δύο περιπτώσεις : Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν ἐγνωρίζομεν πόσον ἔχει τὸ ἓν μολύβι καὶ ἠθέλομεν νὰ μάθωμεν πόσον ἔχουν τὰ πολλά. Ἐκάμαμεν πολλαπλασιασμόν. Εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν ἐγνωρίζομεν πόσον ἔχει ἡ μία σοκολάτα καὶ ἠθέλομεν νὰ μάθωμεν πόσον ἔχει ἓν μέρος τῆς σοκολάτας. Ἐκάμαμεν πολλαπλασιασμόν.

῞Ωστε: Πολλαπλασιασμὸν κάμνομεν, ὅταν γνωρίζωμεν τὴν τιμὴν τῆς μιᾶς μονάδος καὶ ζητοῦμεν τὴν τιμὴν τῶν πολλῶν μονάδων, ἢ ἑνὸς μέρους τῆς μονάδος.

Μὴ λησμονῆτε τὸν ἀνωτέρω κανόνα!

3. Ὁ Νῖκος ἔρχεται ν' ἀγοράσῃ 6 γομολάστιχας. Ἡ κάθε γομολάστιχα ἔχει $2\frac{3}{5}$ δραχμάς. Πόσα χρήματα θὰ δώσῃ;

Σκέψις

Ὁ πωλητὴς σκέπτεται: Μὲ δύο δραχμὰς ἡ μία, αἱ ἓξ γομολάστιχαι κοστίζουν δώδεκα δραχμάς. Μὲ τρία πέμπτα ἡ μία, αἱ ἓξ γομολάστιχαι κοστίζουν δέκα ὀκτὼ πέμπτα, δηλαδὴ τρεῖς δραχμὰς καὶ τρία πέμπτα. Ἔχομεν, λοιπόν: δώδεκα δραχμὰς καὶ τρεῖς δραχμὰς καὶ τρία πέμπτα, γίνονται ὅλαι δέκα πέντε δραχμαὶ καὶ τρία πέμπτα.

Ἐτελείωσεν ἡ σκέψις του. Ὅλοι πιάνουν τὸ χαρτὶ καὶ τὸ μολύβι καὶ ὁ ἀγοραστὴς τὴν κιμωλίαν.

Λύσις

$$2\frac{3}{5} \times 6 = 12\frac{18}{5} = 15\frac{3}{5} \text{ δραχμαί.}$$

Ἕνας μαθητὴς λέγει: Ἐγὼ τὸ λύω καὶ μὲ ἄλλον τρόπον: Ἰδού, ἔτσι:

Λύσις

$$3\frac{3}{5} \times 6 = \frac{13}{5} \times 6 = \frac{78}{5} = 15\frac{3}{5} \text{ δραχμαί.}$$

Πῶς ἔγινεν ἡ πρώτη λύσις, καὶ πῶς ἡ δευτέρα; Τί ἀριθμοὶ εἶναι ὁ πολλαπλασιαστέος καὶ ὁ πολλαπλασιαστής;

Συμπληρώσατε τὸν παρακάτω κανόνα καὶ ἀντιγράψατέ τον εἰς τὸ τετράδιον.

Ὅταν ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν μικτὸν ἐπὶ ἀκέραιον χρησιμοποιοῦμεν δύο τρόπους:
α) Πολλαπλασιάζομεν ....
β) Τρέπομεν τὸν μικτὸν εἰς κλάσμα καὶ πολλαπλασιάζομεν ....

4. Ὁ Παναγιώτης ἔχει ἀνάγκην ἀπὸ $7\frac{1}{2}$ δεκάρια χαρτί. Τὸ κάθε δεκάρι ἔχει 3 δραχμάς. Πόσα χρήματα πρέπει νὰ δώσῃ;

Σκέψις

Ὁ πωλητὴς σκέπτεται: τὰ ἑπτὰ δεκάρια μὲ τρεῖς δραχμὰς τὸ ἓν κοστίζουν εἴκοσι μίαν δραχμάς. Τὸ ἓν δεύτερον τοῦ δεκαριοῦ κοστίζει μίαν καὶ ἡμίσειαν δραχμήν. Ἑπομένως, ὅλα μαζὶ γίνονται εἴκοσι δύο καὶ ἡμίσεια δραχμαί.

Ὅλοι γράφουν:

Λύσις

$$3 \times 7\frac{1}{2} = 21\frac{3}{2} = 22\frac{1}{2} \text{ δραχμαί.}$$

Μιὰ μαθήτρια λέγει: Ὑπάρχει καὶ ἄλλος τρόπος λύσεως, ὁ ἑξῆς:

Λύσις

$$3 \times 7\frac{1}{2} = 3 \times \frac{15}{2} = \frac{45}{2} = 22\frac{1}{2} \text{ δραχμαί.}$$

Πῶς ἔγινεν ἡ πρώτη λύσις καὶ πῶς ἡ δευτέρα; Τί ἀριθμοὶ εἶναι ὁ πολλαπλασιαστέος καὶ ὁ πολλαπλασιαστής;

Συμπληρώσατε τὸν παρακάτω κανόνα καὶ ἀντιγράψατέ τον εἰς τὸ τετράδιον.

Ὅταν ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀκέραιον ἐπὶ μικτόν, χρησιμοποιοῦμεν δύο τρόπους:
α) Πολλαπλασιάζομεν ....
β) Τρέπομεν τὸν μικτὸν εἰς κλάσμα καὶ πολλαπλασιάζομεν ....

Ἡ λύσις τοῦ τετάρτου προβλήματος ὁμοιάζει μὲ τὴν λύσιν τοῦ τρίτου; Ὁ κανὼν τοῦ τετάρτου προβλήματος ὁμοιάζει μὲ τὸν κανόνα τοῦ τρίτου; Ἂν ὑπάρχῃ, ἀνάμεσα εἰς τὰς δύο περιπτώσεις, διαφορά, ποία εἶναι ἡ διαφορὰ αὐτή;

5. Ἡ Κούλα ἔχει ἰδιαιτέραν συμπάθειαν εἰς τὰς σοκολάτας. Οὔτε πολλὰς θέλει, οὔτε καὶ ἀκριβάς. Προτιμᾷ $\frac{1}{10}$ τῆς σοκολάτας ἀπὸ αὐτὰς ποὺ ἔχουν $\frac{1}{10}$ τοῦ δεκαδράχμου ἡ μία. Πόσα χρήματα θὰ δώσῃ;

Σκέψις

Ὁ πωλητὴς συλλογίζεται. Αἰσθάνεται μίαν μικρὰν δυσκολίαν. Θὰ τὴν ξεπεράσῃ. Μία ὁλόκληρος σοκολάτα ἔχει ἓν δέκατον τοῦ δεκαδράχμου, δηλαδὴ ἔχει μίαν δραχμήν. Τὸ ἓν δέκατον τῆς σοκολάτας θὰ ἔχῃ δέκα φορὰς ὀλιγώτερον, δηλαδὴ θὰ ἔχῃ δέκα λεπτὰ τῆς δραχμῆς.

Μετὰ τὴν σκέψιν, ὅλοι γράφουν :

Λύσις

$$\frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{100} \text{ τοῦ δεκαδράχμου} = 10 \text{ λεπτά.}$$

Πῶς ἔγινεν ὁ πολλαπλασιασμός; Τί ἀριθμοὶ ἦσαν καὶ ὁ πολλαπλασιαστέος καὶ ὁ πολλαπλασιαστής;

Συμπληρώσατε τὸν παρακάτω κανόνα καὶ ἀντιγράψατέ τον.

Ὅταν ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν κλάσμα ἐπὶ κλάσμα, πολλαπλασιάζομεν..

6. Ὁ Γιῶργος ἔχει ἀνάγκην ἀπὸ ἓν τετράδιον περιλήψεως μὲ εἴκοσι πέντε φύλλα. Ὑπολογίζει ὅτι θὰ τοῦ χρειασθοῦν $12\frac{1}{2}$ κόλλαι. Ἐπροτίμησε ν' ἀγοράσῃ ἀπὸ τὰς κόλλας ποὺ ἔχουν $\frac{1}{10}$ τῆς δραχμῆς ἡ μία. Πόσα χρήματα θὰ δώσῃ;

Σκέψις

Ὁ πωλητής, ὁ ἀγοραστὴς καὶ ὅλα τὰ παιδιὰ σκέπτονται: Αἱ δώδεκα κόλλαι ἀπὸ ἓν δέκατον τῆς δραχμῆς ἡ μία, κοστίζουν δώδεκα δέκατα τῆς δραχμῆς, δηλαδὴ μίαν δραχμὴν καὶ δύο δέκατα. Ἀφοῦ ἡ μία κόλλα ἔχει ἓν δέκατον τῆς δραχμῆς, ἡ μισὴ κόλλα θὰ ἔχῃ τὰ μισὰ λεπτά. Τὸ μισὸν τοῦ ἑνὸς δεκάτου, ἢ τῆς μιᾶς δεκάρας, εἶναι μία πεντάρα ἢ ἓν εἰκοστὸν τῆς δραχμῆς. Ἔχομε, λοιπόν: μίαν δραχμὴ καὶ δύο δέκατα καὶ ἄλλο ἓν εἰκοστὸν τῆς δραχμῆς: Ἀλλά, διὰ νὰ προσθέσωμεν τὰ δύο δέκατα καὶ τὸ ἓν εἰκοστόν, πρέπει νὰ τρέψωμεν καὶ τὰ δέκατα εἰς εἰκοστά. Δύο δέκατα εἶναι τέσσαρα εἰκοστά. (Γνωρίζομεν ἀπὸ τὰς ἰδιότητας τῶν κλασμάτων ὅτι, ὅταν πολλαπλασιάσωμεν καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος μὲ τὸν ἴδιον ἀριθμόν, τὸ κλάσμα, ποὺ εὑρίσκομεν εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ πρῶτον. Ἀλλὰ καὶ πρακτικῶς σκεπτόμενοι, γνωρίζομεν ὅτι δύο δεκάραι (δέκατα) εἶναι ἴσαι μὲ τέσσαρας πεντάρας (εἰκοστὰ τῆς δραχμῆς).

Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ἔχομεν ἄθροισμα μίαν δραχμὴν καὶ πέντε εἰκοστά, ἢ μίαν δραχμὴν καὶ εἴκοσι πέντε λεπτὰ (ἀφοῦ γνωρίζομεν ὅτι μία πεντάρα εἶναι πέντε λεπτά).

Ὅλοι γράφουν :

Λύσις

$$\frac{1}{10} \times 12\frac{1}{2} = \left(\frac{1}{10} \times 12 = \frac{12}{10} = 1\frac{2}{10}\right) + \left(\frac{1}{10} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{20}\right) =$$

$$= 1\frac{\overset{2}{\smile}\,2}{10} + \frac{\overset{1}{\smile}\,1}{20} = \text{Ε.Κ.Π.} = 20$$

$$= 1\frac{4}{20} + \frac{1}{20} = 1\frac{5}{20} \text{ δραχμαί.}$$

Βλέπετε πόσας ἐνεργείας ἐκάμαμεν ;

Ἕνας μαθητὴς λέγει: «Ἠμπορῶ νὰ κάμω ἄλλως τὰς πράξεις.» Ἐπῆγεν εἰς τὸν πίνακα καὶ ἔγραψε :

Λύσις

$$\frac{1}{10} \times 12\frac{1}{2} = \frac{1}{10} \times \frac{25}{2} = \frac{25}{20} = 1\frac{5}{20} \text{ δραχμαί.}$$

Συμφωνεῖτε; Ἂν συμφωνῆτε, παρατηρήσατε τί ἀριθμοὶ εἶναι ὁ πολλαπλασιαστέος καὶ ὁ πολλαπλασιαστὴς καί, ἀφοῦ συμπληρώσετε τὸν παρακάτω κανόνα, νὰ τὸν ἀντιγράψετε εἰς τὸ τετράδιόν σας :

Ὅταν ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν κλάσμα ἐπὶ μικτόν, χρησιμοποιοῦμεν δύο τρόπους :
α) Πολλαπλασιάζομεν ....
β) Τρέπομεν τὸν πολλαπλασιαστὴν εἰς..................

7. Ἡ Καίτη, ποὺ τώρα ἔχει πολλὰ χρήματα, ἔρχεται ν' ἀγοράσῃ $24\frac{5}{10}$ κόλλας κυανᾶς καὶ αὐτὰς ποὺ ἔχουν $2\frac{1}{2}$ δραχμάς. Πόσα χρήματα θὰ δώσῃ;

Σκέψις

Ὅλοι ἔχουν πέσει εἰς βαθεῖαν σκέψιν :

α) Αἱ εἴκοσι τέσσαρες κόλλαι μὲ δύο δραχμὰς ἡ μία, κοστίζουν σαράντα ὀκτὼ δραχμάς.

β) Αἱ εἴκοσι τέσσαρες κόλλαι μὲ ἓν δεύτερον τῆς δραχμῆς ἡ μία, κοστίζουν εἴκοσι τέσσαρα δεύτερα, ἢ δώδεκα δραχμάς.

γ) Τὰ πέντε δέκατα τῆς κόλλας, δηλαδὴ ἡ μισὴ κόλλα, μὲ δύο δραχμὰς ἡ κόλλα, στοιχίζουν τὰ μισὰ χρήματα, δηλαδὴ στοιχίζουν μίαν δραχμήν.

δ) Τὰ πέντε δέκατα τῆς κόλλας, δηλαδὴ ἡ μισὴ κόλλα, μὲ ἓν δεύτερον τῆς δραχμῆς ἡ μία, κοστίζουν τὰ μισὰ χρήματα, δηλαδὴ κοστίζουν εἴκοσι πέντε λεπτά.

Τώρα τὰ προσθέτομεν ὅλα μαζί : σαράντα ὀκτὼ δραχμὰς καὶ δώδεκα δραχμὰς καὶ μίαν δραχμὴν καὶ εἴκοσι πέντε λεπτά, γίνονται ὅλα: ἑξήκοντα μία δραχμὴ καὶ εἴκοσι πέντε λεπτά.

Τὸ μολύβι καὶ τὸ χαρτὶ καὶ ἡ κιμωλία εἰς τὸν πίνακα θ' ἀποδείξουν ἂν ἐκάμαμεν ὀρθὴν σκέψιν :

Γράφουν, λοιπόν, ὅλοι :

$$2\frac{1}{2}\times 24\frac{5}{10} = (2 \times 24 = 48) + \left(2 \times \frac{5}{10} = \frac{10}{10} = 1\right) + \frac{1}{2}\times 24 = \frac{24}{2} = 12)$$

$$+\left(\frac{1}{2}\times\frac{5}{10}=\frac{5}{20}\right) = 48 + 12 + 1 + \frac{5}{20} = 61\frac{5}{20}\left(\frac{5}{20}\text{ τῆς δραχμῆς} = \frac{25}{100}\right)$$

Εἴδατε πόσας ἐνεργείας ἐκάμαμεν; Ὁ Σπῦρος ὅμως λέγει: «Ἐγὼ ἠμπορῶ νὰ τὸ λύσω καὶ μὲ ἄλλον τρόπον!» Πλησιάζει εἰς τὸν πίνακα καὶ γράφει :

Λύσις

$$2\frac{1}{2} \times 24\frac{5}{10} = \frac{5}{2} \times \frac{245}{10} = \frac{1225}{20} = 61\,\frac{5}{20}\text{ δραχμαί.}$$

Συμφωνεῖτε; Εἴδατε καὶ τοὺς δύο τρόπους; Ποῖος εἶναι ὁ συντομώτερος; Ἐγὼ προτιμῶ νὰ γνωρίζετε καὶ τοὺς δύο. Ὁ δεύτερος εἶναι, βεβαίως, σύντομος, ὁ πρῶτος ὅμως κεντρίζει τὸν νοῦν.

Τί εἶναι οἱ ἀριθμοὶ ποὺ ἐπολλαπλασιάσαμεν, τοὺς γνωρίζετε.

Συμπληρώσατε τὸν παρακάτω κανόνα καὶ ἀντιγράψατέ τον εἰς τὸ τετράδιον :

Ὅταν ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν μικτὸν ἐπὶ μικτόν, χρησιμοποιοῦμεν δύο τρόπους.

1) Πολλαπλασιάζομεν : α') ....β') ....κλπ.

2) Τρέπομεν τοὺς μικτοὺς εἰς.............................

Προβλήματα

1. Τὸ πρατήριον τῆς Ἑταιρείας ΕΒΓΑ εἰς τὴν συνοικίαν μας πωλεῖ κάθε πρωὶ 236 φιάλας γάλακτος. Ἡ κάθε φιάλη περιέχει $\frac{1}{2}$ τοῦ χλγρ. γάλακτος. Πόσα χλγρ. γάλακτος πωλεῖ κάθε πρωὶ τὸ πρατήριον;

2. Εἰς τὸ σπίτι μας τρώγομεν κάθε ἡμέραν $2\frac{1}{4}$ χλγρ. ἄρτου. Πόσα χλγρ. ἄρτου τρώγομεν ὅλον τὸν μῆνα; (30 ἡμέρας;)

3. Ἕνας ὑδρόμυλος ἀλέθει τὴν ὥραν $82\frac{1}{5}$ χλγρ. σίτου. Πόσα χλγρ. σίτου θὰ ἀλέσῃ εἰς $7\frac{3}{4}$ ὥρας;

4. Ὅλοι οἱ κάτοικοι ἑνὸς Συνοικισμοῦ εἶναι 4.0000. Ἕκαστος χρειάζεται κατὰ μέσον ὅρον $2\frac{1}{4}$ χλγρ. μακαρονίων τὸν μῆνα. Πόσα χιλιόγραμμα μακαρονίων καταναλίσκουν ὅλοι οἱ κάτοικοι κάθε μῆνα ; Πόσα χιλιόγραμμα τὸ ἔτος ;

5. Ἕνας δενδροκόμος ἐψέκασε τὰς 120 μηλέας του, καὶ διὰ κάθε μίαν ἐχρειάσθη $\frac{20}{60}$ τῆς ὥρας. Εἰς πόσας ὥρας ἐτελείωσεν ὁ ψεκασμός;

6. Ἐπεσκέφθημεν ἓν ἐργοστάσιον κονσερβοποιΐας καὶ μὲ τὴν εὐκαιρίαν αὐτὴν ἐκάμαμεν τοὺς ἑξῆς λογαριασμούς :

α) Κάθε μικρὸν δοχεῖον τοματοπελτὲ ζυγίζει $3\frac{1}{2}$ χλγρ. Πόσον ζυγίζουν τὰ 300 δοχεῖα;

β) Κάθε δοχεῖον μὲ μπάμιας ζυγίζει $\frac{9}{10}$ τοῦ χλγρ. Πόσον ζυγίζουν τὰ 160 δοχεῖα;

γ). Κάθε δοχεῖον μὲ φασολάκια ζυγίζει $\frac{4}{5}$ τοῦ χλγρ. Πόσον ζυγίζουν 180 δοχεῖα;

7. Ἓν λεωφορεῖον τρέχει μὲ $52\frac{3}{5}$ χλμ. τὴν ὥραν. Πόσα χλμ. θὰ τρέξῃ εἰς $3\frac{1}{2}$ ὥρας;

8. Ἓν ὑπερωκεάνειον πλέει μὲ ταχύτητα $22\frac{5}{10}$ μίλλια τὴν ὥραν Πόσα μίλλια θὰ πλεύσῃ εἰς $\frac{1}{2}$ ὥρας; Πόσα εἰς 15 ὥρας; Ποσα εἰς $20\frac{3}{4}$ ὥρας;

9. Ἕνας παντοπώλης ἐψώνισε διὰ τὸ παντοπωλεῖόν του τὰ παρακάτω εἴδη :

α) Σάκχαριν $15\frac{1}{2}$ χλγρ. πρὸς 10 δρχ. τὸ χλγρ. β) Μακαρόνια $20\frac{2}{5}$ χλγρ. πρὸς $8\frac{1}{10}$ δρχ. τὸ χλγρ. γ) Καφφὲν $\frac{8}{10}$ τοῦ χλγρ. πρὸς $70\frac{10}{100}$ δρχ. τὸ χλγρ. καὶ δ) ὄρυζαν $12\frac{1}{4}$ χλγρ. πρὸς $10\frac{1}{20}$ δρχ. τὸ χλγρ. Πόσα ἔδωσε δι' ὅλα τὰ ψώνια;

10. Εἰς τοὺς ὑπαλλήλους ἑνὸς Κ.Τ.Ε.Λ. ἔγινε διανομὴ $2\frac{9}{10}$ μέτρων ὑφάσματος δι' ἐνδυμασίαν τοῦ καθενός. Οἱ ὑπάλληλοι εἶναι 160. Πόσα μέτρα ὑφάσματος ἐμοιράσθησαν εἰς τοὺς ὑπαλλήλους αὐτούς;

11. Συντάξατε μόνοι σας δέκα σχετικὰ προβλήματα ἀπὸ τὴν ζωὴν τοῦ σπιτιοῦ σας καὶ τοῦ σχολείου σας.

ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

(Ὑλικὰ διὰ τὴν διδασκαλίαν τῆς διαιρέσεως κλασμάτων. Ἡ τάξις γίνεται μικρὸν παντοπωλεῖον μὲ μικροποσὰ ἀπὸ ζάχαριν, ὄρυζαν, μακαρόνια, καφφέν, τέιον, φασόλια, κουκιά, καραμέλλας καὶ διάφορα εἴδη γραφικῆς ὕλης. Μία μικρὴ ζυγαριὰ μὲ τὰ σταθμά της, καθὼς καὶ πραγματικὰ χρήματα, κρίνονται ἀπαραίτητα. Εἴπομεν ὅτι κάθε φορὰ ἀλλάσσουν οἱ πωληταὶ καὶ οἱ ἀγορασταί).

Ὅταν γνωρίζωμεν πόσον ἔχουν αἱ πολλαὶ μονάδες, ἢ μέρος τῆς μονάδος καὶ ζητοῦμεν νὰ εὕρωμεν πόσον ἔχει ἡ μία μονάς, τότε κάμνομεν διαίρεσιν.

1. Ἡ Ἀσημίνα πλησιάζει καὶ μὲ $\frac{5}{10}$ τῆς δραχμῆς ἀγοράζει 5 καραμέλλας. Πόσον ἔχει ἡ μία καραμέλλα;

Σκέψις

Ὁ πωλητής, ὁ ἀγοραστὴς καὶ ὅλα τὰ παιδιὰ σκέπτονται: ἀφοῦ γνωρίζωμεν πόσον ἔχουν αἱ πολλαὶ καραμέλλαι καὶ θέλομεν νὰ μάθωμεν πόσον ἔχει ἡ μία, πρέπει νὰ κάμωμεν διαίρεσιν. Ἐδῶ ἔχομεν νὰ διαιρέσωμεν τὰ πέντε δέκατα διὰ πέντε. Γνωρίζομεν ἀπὸ τὰς ἰδιότητας τῶν κλασμάτων ὅτι: ἓν κλάσμα γίνεται μικρότερον, ἂν διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμητήν, ἢ πολλαπλασιάσωμεν τὸν παρονομαστήν του. Ὁ ἀριθμητὴς τοῦ κλάσματος πέντε δέκατα διαιρεῖται διὰ πέντε, καὶ ἔχομεν πηλίκον ἓν δέκατον. Ἑπομένως, ἡ κάθε μία καραμέλλα κοστίζει ἓν δέκατον τῆς δραχμῆς, ἢ δέκα λεπτά.

Μετὰ τὴν σκέψιν, ὅλοι γράφουν:

Λύσις

$$\frac{5}{10} : 5 = \frac{1}{10} \text{ τῆς δραχμῆς} = 10 \text{ λεπτὰ τῆς δραχμῆς.}$$

Τί ἀριθμὸς εἶναι ὁ διαιρετέος καὶ τί ὁ διαιρέτης; Πῶς ἔγινεν ἡ διαίρεσις;

Ὅταν ἔχωμεν νὰ διαιρέσωμεν κλάσμα δι' ἀκεραίου, μὲ ἀριθμητὴν διαιρούμενον διὰ τοῦ ἀκεραίου, τότε.................

Μόλις τελειώνῃ κάθε πρᾶξις, νὰ κάμνετε ἀμέσως τὴν δοκιμὴν τῆς διαιρέσεως, πολλαπλασιάζοντες τὸ πηλίκον ἐπὶ τὸν διαιρέτην καὶ εὑρίσκοντες τὸν διαιρετέον.

2. Ὁ Θανασάκης πλησιάζει καὶ μὲ $\frac{8}{10}$ τῆς δραχμῆς ἀγοράζει 10 χαρτοφάκελλα. Πόσον ἔχει τὸ ἓν χαρτοφάκελλον;

Σκέψις

Ἀφοῦ γνωρίζωμεν πόσον ἔχουν τὰ πολλὰ καὶ ζητοῦμεν νὰ εὕρωμεν πόσον ἔχει τὸ ἕν, θὰ κάμωμεν διαίρεσιν, ἀλλὰ ἐδῶ δὲν διαιρεῖται ὁ ἀριθμητὴς τοῦ κλάσματος διὰ τοῦ ἀκεραίου. Τότε θὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος ἐπὶ τὸν ἀκέραιον, ὅπως ἀνεφέραμεν καὶ παραπάνω. Πρακτικῶς ἂν σκεφθῶμεν, θὰ φθάσωμεν εἰς τὸ ἑξῆς συμπέρασμα: ἀφοῦ τὰ δέκα χαρτοφάκελλα ἔχουν ὀκτὼ δέκατα ἢ ὀκτὼ δεκάρας, ποὺ εἶναι ὀγδοήκοντα λεπτὰ τῆς δραχμῆς, τὸ ἓν χαρτοφάκελλον θὰ ἔχῃ δέκα φορὰς ὀλιγώτερον, δηλαδὴ θὰ ἔχῃ ὀκτὼ λεπτὰ (ἢ ἑκατοστὰ) τῆς δραχμῆς.

Ὅλοι γράφουν :

Λύσις

$$\frac{8}{10} : 10 = \frac{8}{100} \text{ τῆς δραχμῆς.}$$

Τί ἀριθμὸς εἶναι ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης ; Ὁμοιάζει ἡ προηγουμένη περίπτωσις μὲ αὐτὴν ἐδῶ, ἢ διαφέρει καὶ εἰς τί διαφέρει ; Πῶς ἔγινεν ἡ διαίρεσις ;

Συμπληρώσατε τὸν κανόνα καὶ ἀντιγράψατέ τον :

Ὅταν ἔχωμεν νὰ διαιρέσωμεν κλάσμα δι' ἀκεραίου, μὲ ἀριθμητὴν μὴ διαιρούμενον διὰ τοῦ ἀκεραίου, τότε.............

Κάμετε τὴν δοκιμήν. Πολλαπλασιάσατε τὸ πηλίκον ἐπὶ τὸν διαιρέτην καὶ εὕρετε τὸν διαιρετέον. Προσέξατε: γνωρίζομεν ἀπὸ τὰς ἰδιότητας τῶν κλασμάτων ὅτι ἓν κλάσμα γίνεται μεγαλύτερον, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμητήν του, ἢ διαιρέσωμεν τὸν παρονομαστήν του. Προσέξατε αὐτὴν τὴν ἰδιότητα, εἰς τὴν δοκιμὴν αὐτῆς ἐδῶ τῆς διαιρέσεως.

3. Ἡ Ντίνα μὲ $24\frac{6}{10}$ δραχμὰς ἠγόρασε 3 χλγρ. μακαρονίων. Πόσον ἔχει τὸ χιλιόγραμμον;

Σκέψις

α) Τὰ τρία χλγρ. ἔχουν εἴκοσι τέσσαρας δραχμάς. Τὸ ἓν χλγρ. ἔχει ὀκτὼ δραχμάς.

β) Τὰ τρία χλγρ. ἔχουν ἓξ δέκατα τῆς δραχμῆς, τὸ ἓν ἔχει δύο δέκατα τῆς δραχμῆς. Ὅλα - ὅλα γίνονται ὀκτὼ δραχμαὶ καὶ δύο δέκατα τῆς δραχμῆς. Τόσον κοστίζει τὸ ἓν χιλιόγραμμον τὰ μακαρόνια.

Ὅλοι γράφουν :

Λύσις

$$24\frac{6}{10} : 3 = 8\,\frac{2}{10} \text{ δραχμαί.}$$

Τί ἀριθμοὶ εἶναι ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης; Πῶς ἔγινεν ἡ διαίρεσις; Τί πρέπει νὰ προσέξωμεν διὰ νὰ μὴ ζαλισθῶμεν; Νὰ σᾶς βοηθήσω : Ὁ ἀκέραιος 24, διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ 3; Ὁ ἀριθμητὴς 6, διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ 3;

Μὴ λησμονῆτε νὰ κάμνετε πάντοτε τὴν δοκιμὴν τῆς διαιρέσεως.

Συμπληρώσατε τὸν κανόνα καὶ ἀντιγράψατέ τον :

Ὅταν ἔχωμεν νὰ διαιρέσωμεν μικτὸν δι᾽ ἀκεραίου, μὲ ἀκέραιον καὶ ἀριθμητὴν διαιρουμένους ἀκριβῶς διὰ τοῦ διαιρέτου, τότε διαιροῦμεν ....

4. Ὁ Σταῦρος μὲ $40\frac{2}{5}$ δραχμὰς ἀγοράζει 4 χλγρ. ὀρύζης. Πόσον ἔχει τὸ χιλιόγραμμον;

Σκέψις

Ὅλοι σκέπτονται : τὰ τέσσαρα χλγρ. ἔχουν τεσσαράκοντα δραχμάς. Τὸ ἓν χλγρ. ἔχει δέκα δραχμάς. Τὰ τέσσαρα χλγρ. ἔχουν δύο πέμπτα τῆς δραχμῆς ἢ τέσσαρας δεκάρας, ἢ ὀκτὼ πεντάρας. Τὸ ἓν χλγρ. ἔχει μίαν δεκάραν, ἢ δύο πεντάρας. Ὅλα - ὅλα, τὸ ἓν χλγρ. ἔχει δέκα δραχμὰς καὶ δύο πεντάρας (δύο εἰκοστὰ τῆς δραχμῆς).

Ὅλοι γράφουν :

$$40\frac{2}{5} : 4 = 10\frac{2}{20} \text{ δραχμάς.}$$

Τί ἀριθμοὶ εἶναι ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης; Συγκρίνατε τὴν προηγουμένην περίπτωσιν μὲ αὐτὴν ἐδῶ. Πῶς ἔγινεν εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα ἡ διαίρεσις; Πῶς ἔγινεν ἐδῶ; Διατί, ἀντὶ νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος, ἐπολλαπλασιάσαμεν τὸν παρονομαστήν του; Εἰς ποίαν ἰδιότητα τῶν κλασμάτων στηρίζεται ἡ ἐνέργειά μας αὐτή; Δικαιολογήσατε τὴν ἐνέργειάν μας, συμπληρώσατε τὸν κανόνα καὶ ἀντιγράψατέ τον :

Ὅταν ἔχωμεν νὰ διαιρέσωμεν μικτὸν δι' ἀκεραίου, μὲ ἀκέραιον τοῦ διαιρετέου διαιρούμενον, ἀλλὰ μὲ ἀριθμητὴν κλάσματος μὴ διαιρούμενον διὰ τοῦ ἀκεραίου, τότε........................

5. Ἡ Γεωργία μὲ $31\frac{2}{4}$ δραχμὰς ἠγόρασε 3 χλγρ. φασολίων. Πόσον ἔχει τὸ χιλιόγραμμον;

Σκέψις

Ἂν ἐδίδομεν μόνον τριάκοντα μίαν δραχμάς, τότε διὰ κάθε χιλιόγραμμον θ' ἀναλογοῦσαν δέκα δραχμαὶ καὶ θὰ ἐπερίσσευε καὶ μία δραχμή. Ἡ μία δραχμὴ εἶναι τέσσαρα τέταρτα καὶ δύο τέταρτα ποὺ ἔχομεν ἀκόμη εἰς τὸν διαιρετέον, γίνονται ἓξ τέταρτα. Τὰ τρία χλγρ. ἔχουν ἓξ τέταρτα, τὸ ἓν χλγρ. ἔχει δύο τέταρτα. Ὅλα - ὅλα γίνονται δέκα δραχμαὶ καὶ δύο τέταρτα τῆς δραχμῆς. Τόσον κοστίζει τὸ ἓν χιλιόγραμμον.

Ὅλοι γράφουν :

Λύσις

$$31\frac{2}{4} : 3 = \frac{126}{4} : 3 = \frac{42}{4} = 10\frac{2}{4} \text{ δραχμαί.}$$

Ἐνῷ μὲ τὴν σκέψιν ἠκολουθήσαμεν ἄλλον δρόμον, μὲ τὸ μολύβι ἠκολουθήσαμεν τοῦτον τὸν τρόπον λύσεως. Διατί; Παρατηρήσατε, ἂν διαιρῆται ὁ ἀκέραιος τοῦ διαιρετέου μὲ τὸν διαιρέτην. Ἐφ' ὅσον δὲν διαιρεῖται, τότε ὁ μικτὸς θὰ γίνῃ κλάσμα. Ἐφ' ὅσον ὁ ἀριθμητὴς τοῦ νέου κλάσματος διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ διαιρετέου, θὰ προχωρήσωμεν κανονικῶς εἰς τὴν διαίρεσιν, ἄλλως θὰ ἀφήσωμεν τὸν ἴδιον ἀριθμητὴν καὶ θὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν παρονομαστήν. Ὥστε; . . . Ἀντιγράψατε τὸν κανόνα :

Ὅταν ἔχωμεν νὰ διαιρέσωμεν μικτὸν δι' ἀκεραίου, καὶ ὁ ἀκέραιος τοῦ διαιρετέου δὲν διαιρῆται, τότε τρέπομεν τὸν μικτὸν εἰς κλάσμα, καί, ἂν διαιρῆται ὁ ἀριθμητής, προχωροῦμεν εἰς τὴν διαίρεσιν, ἄλλως πολλαπλασιάζομεν τὸν παρονομαστήν.

Μελετήσατε τὰς περιπτώσεις 3, 4 καὶ 5 καὶ συντάξατε ἕνα γενικὸν κανόνα, τί κάμνομεν, ὅταν ἔχωμεν νὰ διαιρέσωμεν μικτὸν δι' ἀκεραίου.

6. Ὁ Ἀνδρέας πλησιάζει καὶ μὲ $\frac{4}{5}$ τοῦ δεκαδράχμου, ἀγοράζει $\frac{8}{10}$ τοῦ χιλιογράμμου σάκχαριν. Πόσον ἔχει τὸ χιλιόγραμμον;

Σκέψις

Ἐδῶ χρειάζεται ὀλίγη προσοχή :

Ἀφοῦ τὰ $\frac{8}{10}$ τοῦ χλγρ. κοστίζουν $\frac{4}{5}$ τοῦ δεκαδράχμου, τὸ $\frac{1}{10}$ τοῦ χλγρ. κοστίζει ὀκτὼ φορὰς ὀλιγώτερον : δηλαδὴ $\frac{4}{5} : 8 = \frac{4}{5 \times 8}$.

(Ἂς ἐνθυμηθῶμεν τὴν σχετικὴν ἰδιότητα τῶν κλασμάτων: ὅταν δὲν διαιρῆται ὁ ἀριθμητής, πολλαπλασιάζομεν τὸν παρονομαστήν).

Τὰ $\frac{10}{10}$ (δηλ. τὸ 1 χλγρ.) κοστίζουν $\frac{4 \times 10}{5 \times 8} = \frac{40}{40} = 1$ δεκάδρχ. $=10$ δραχ.

Ἀπὸ τὴν σκέψιν αὐτὴν καταλήγομεν εἰς τὴν ἑξῆς λύσιν :

Ὅλοι γράφουν :

Λύσις

$$\frac{4}{5} : \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \times \frac{10}{8} = \frac{40}{40} = 1 \text{ δεκάδραχμον.}$$

Πῶς διαιροῦμεν, λοιπόν, κλάσμα διὰ κλάσματος; Συμπληρώσατε τὸν κανόνα καὶ ἀντιγράψατέ τον :

Ὅταν ἔχωμεν νὰ διαιρέσωμεν κλάσμα διὰ κλάσματος, τότε ἀντιστρέφομεν τοὺς ὅρους τοῦ διαιρέτου καὶ ἀντὶ διαιρέσεως.....
...

Προσοχή: Διαιρετέος θὰ θεωρῆται πάντοτε τὸ κλάσμα ποὺ παριστάνει τὴν τιμήν. Μὴ ξεγελασθῆτε ἀπὸ τὴν σύμπτωσιν τοῦ παραπάνω παραδείγματος, ποὺ ὁποιονδήποτε κλάσμα καὶ ἂν γράψωμεν ὡς διαιρετέον θὰ φθάσωμεν εἰς τὸ ἴδιον ἀποτέλεσμα. Εἰς ἄλλας περιπτώσεις δὲν συμβαίνει τὸ ἴδιον.

7. Ὁ Γιαννάκης μὲ $53\frac{4}{10}$ δραχμὰς ἀγοράζει $\frac{3}{4}$ τοῦ χιλγρ. καφφέ. Πόσον ἔχει τὸ χιλιόγραμμον;

Σκέψις

Ἡ περίπτωσις αὐτὴ ὁμοιάζει μὲ τὴν προηγουμένην. Διὰ νὰ μὴ ἀργοποροῦμεν, λοιπόν, καὶ διὰ νὰ εὐκολυνθῶμεν, εἰς τὴν διαίρεσιν, θὰ τρέψωμεν τὸν μικτὸν εἰς κλάσμα. Ἔτσι θὰ ἔχωμεν νὰ διαιρέσωμεν κλάσμα διὰ κλάσματος. Θὰ ἀντιστρέψωμεν τοὺς ὅρους τοῦ διαιρέτου καὶ ἀντὶ διαιρέσεως θὰ κάμωμεν πολλαπλασιασμόν.

Ὅλοι γράφουν :

Λύσις

$$53\frac{4}{10} : \frac{3}{4} = \frac{534}{10} : \frac{3}{4} = \frac{534}{10} \times \frac{4}{3} = \frac{2136}{30} = 71\frac{6}{30}$$ δρχ. τὸ χιλιόγραμμον.

Συμπληρώσατε καὶ ἀντιγράψατε τὸν κανόνα :

Ὅταν ἔχωμεν νὰ διαιρέσωμεν μικτὸν διὰ κλάσματος, τότε

....

8. Ὁ Στρατῆς μὲ 56 δραχμὰς ἀγοράζει 5 χλγρ. μακαρονίων. Πόσον ἔχει τὸ χιλιόγραμμον;

Σκέψις

Ἐδῶ ἔχομεν νὰ διαιρέσωμεν μικτὸν διὰ μικτοῦ. Θὰ τρέψωμεν τοὺς μικτοὺς εἰς κλάσματα. Κατόπιν θὰ ἀντιστρέψωμεν τοὺς ὅρους τοῦ διαιρέτου καὶ ἀντὶ διαιρέσεως θὰ κάμωμεν πολλαπλασιασμόν.

Αὐτὸς εἶναι ὁ κανών. Ἀντιγράψατέ τον.

Λύσις

$$56\frac{1}{10} : 5\frac{1}{2} = \frac{561}{10} : \frac{11}{2} = \frac{561}{10} \times \frac{2}{11} = \frac{1122}{110} = 10\frac{22}{110} = 10\frac{1}{5}$$ δραχ. τὸ χλγρ.

9. Ἡ Ἰσμήνη μὲ 4 δραχμὰς ἠγόρασεν $\frac{8}{10}$ τοῦ μέτρου κορδέλλαν διὰ τὰ μαλλιά της. Πόσον ἔχει τὸ μέτρον;

Σκέψις

Ὅλοι σκέπτονται:

Ἀφοῦ τὰ $\frac{8}{10}$ τοῦ μέτρου κοστίζουν 4 δραχμάς, τὸ $\frac{1}{10}$ τοῦ μέτρου θὰ κοστίζῃ 8 φορὰς ὀλιγώτερον: δηλαδὴ $\frac{4}{8}$. Τὰ $\frac{10}{10}$ (δηλαδὴ τὸ 1 μέτρον) θὰ κοστίζουν 10 φορὰς περισσότερον: δηλαδὴ $\frac{4 \times 10}{8} = \frac{40}{8} = 5$ δραχμάς.

Ἀπὸ τὴν σκέψιν αὐτήν, καταλήγομεν εἰς τὴν ἑξῆς λύσιν:

Λύσις

$$4 : \frac{8}{10} = 4 \times \frac{10}{8} = 5 \text{ δραχμαί.}$$

Πῶς διαιροῦμεν, λοιπόν, ἀκέραιον διὰ κλάσματος; Συμπληρώσατε τὸν παρακάτω κανόνα καὶ ἀντιγράψατέ τον:

Ὅταν ἔχωμεν νὰ διαιρέσωμεν ἀκέραιον διὰ κλάσματος, τότε ....

Κάμετε τὴν δοκιμὴν νὰ ἴδητε, ἂν θὰ εὕρητε τὸν διαιρετέον: Θὰ πολλαπλασιάσετε τὸ πηλίκον - 5 - ἐπὶ τὸν διαιρέτην $\frac{8}{10}$ καὶ πρέπει νὰ εὕρητε τὸν διαιρετέον - 4 -.

10. Ἡ Ρούλα, μὲ 14 δραχμὰς ἠγόρασε $2\frac{2}{4}$ μέτρα δαντέλλαν. Πόσον ἔχει τὸ μέτρον;

Σκέψις

Ἐδῶ, διὰ νὰ εὐκολυνθῶμεν, πρέπει ὁ μικτὸς $2\frac{2}{4}$ νὰ γίνῃ κλάσμα. Ἔπειτα καταλήγομεν εἰς τὴν ἰδίαν περίπτωσιν μὲ τὸ πρόβλημα - 9 -. Θὰ λυθῇ, λοιπόν, κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον:

Λύσις

$$14 : 2\frac{2}{4} = 14 : \frac{10}{4} = 14 \times \frac{4}{10} = \frac{56}{10} = 5\frac{6}{10} \text{ δραχμαί.}$$

Πῶς διαιροῦμεν, λοιπόν, ἀκέραιον, διὰ μικτοῦ; Συμπληρώσατε τὸν κατωτέρω κανόνα καὶ ἀντιγράψατέ τον:

"Οταν ἔχωμεν νὰ διαιρέσωμεν ἀκέραιον διὰ μικτοῦ, τότε....
....

Προβλήματα

1. Ἐμοιράσαμεν $16\frac{8}{10}$ χλγρ. τυροῦ τοῦ συσσιτίου εἰς 24 παιδιά. Πόσα χιλιόγραμμα τυροῦ ἀναλογεῖ εἰς κάθε παιδί;

2. Ἐμοιράσαμεν $63\frac{3}{5}$ δρχ. εἰς 6 παιδιά. Πόσα θὰ πάρῃ ἕκαστον;

3. Ἓν δοχεῖον πετρελαίου βάρους $16\frac{1}{2}$ χλγρ. κοστίζει $53\frac{1}{2}$ δρχ. Πόσον κοστίζει τὸ χιλιόγραμμον;

4. Μὲ $61\frac{1}{8}$ δραχμὰς ἀγοράζω $\frac{3}{4}$ τοῦ χλγρ. καφφέ. Πόσον ἔχει τὸ χιλιόγραμμον;

5. Πόσα χλγρ. σταφυλῶν ἀγοράζω μὲ $24\frac{1}{2}$, ὅταν τὸ κάθε χλγρ. κοστίζῃ $3\frac{1}{2}$ δραχμάς;

6. Πόσα κυτία συμπεπυκνωμένου γάλακτος ἀγοράζω μὲ $67\frac{1}{5}$ δρχ., ὅταν τὸ κάθε κυτίον κοστίζῃ $5\frac{3}{5}$ δραχμάς;

7. Μὲ $\frac{9}{10}$ τοῦ δεκαδράχμου ἀγοράζω $\frac{6}{8}$ τοῦ χλγρ. σάκχαριν. Πόσον ἔχει τὸ χιλιόγραμμον;

8. Μὲ $\frac{5}{10}$ τῆς δραχμῆς ἀγοράζω ἓν λεμόνιον. Πόσα λεμόνια θ' ἀγοράσω μὲ $4\frac{1}{2}$ δραχμάς;

9. Γράψατε καὶ μόνοι σας ὅμοια προβλήματα ἀπὸ τὴν ζωὴν τοῦ σχολείου καὶ τοῦ σπιτιοῦ σας.

1. Προβλήματα ὅλων τῶν πράξεων τῶν κλασμάτων

1. Ἡ μητέρα μου εἶχε $280\frac{2}{20}$ δραχμὰς καὶ ἐπῆγεν εἰς τὴν ἀγορὰν νὰ ψωνίσῃ. Ἠγόρασε 4 φανέλλας πρὸς $18\frac{1}{4}$ δρχ. τὴν μίαν, 5 ζεύγη καλτσῶν πρὸς $17\frac{2}{10}$ δρχ. τὸ ζεῦγος, $6\frac{2}{10}$ μέτρα λινὸν πρὸς $14\frac{1}{2}$ δρχ. τὸ μέτρον. Μὲ τὰ ὑπόλοιπα ἠγόρασε 3 χλγρ. ὀρύζης. Πόσα ἔδωσε εἰς τὰ ψώνια καὶ πόσα ἐκόστισε τὸ χλγρ. ἡ ὄρυζα;

2. Ἕνας παραγωγὸς ἐπώλησεν 140 χλγρ. γεώμηλα πρὸς $3\frac{1}{2}$ δρχ. τὸ χλγρ. Μὲ τὰ χρήματα ἠγόρασε $4\frac{1}{2}$ χλγρ. μακαρόνια πρὸς $10\frac{1}{5}$ δρχ. τὸ χλγρ., $\frac{1}{2}$ χλγρ. ὄρυζαν πρὸς $11\frac{1}{4}$ δρχ. τὸ χλγρ. καὶ 5 χλγρ. σάπωνος πρὸς $12\frac{2}{5}$ δρχ. τὸ χλγρ. Μὲ τὰ ὑπόλοιπα ἠγόρασε 2 ζεύγη ὑποδημάτων διὰ τὰ παιδιά του. Πόσα ἐπῆρεν ἀπὸ τὰ γεώμηλα, πόσα ἔδωσεν εἰς τὰ ψώνια καὶ πόσα ἐκόστισε κάθε ζεῦγος ὑποδημάτων;

3. Ἕνας ἔμπορος διέθεσε 350 χρυσᾶς λίρας Ἀγγλίας καὶ ἠγόρασε διάφορα ὑφάσματα διὰ τὸ ἐμπορικόν του κατάστημα. Ἀπὸ τὸ ἐργοστάσιον Δημητριάδη ἐπῆρε $6\frac{1}{2}$ τόπια ὕφασμα πρὸς $18\frac{1}{2}$λίρας τὸ τόπι. Ἀπὸ τὸ ἐργοστάσιον Λαναρᾶ ἐπῆρε $4\frac{1}{2}$ τόπια ὕφασμα πρὸς 16 λίρας τὸ τόπι. Μὲ τὰς ὑπολοίπους λίρας ἐπῆρεν ἀπὸ τὸ ἐργοστάσιον «Μπριτάνια» 16 τόπια ὕφασμα. Πόσας λίρας ἔδωσεν εἰς τὰ δύο πρῶτα ἐργοστάσια καὶ πόσας λίρας ἐκόστισε κάθε τόπι ὑφάσματος τοῦ τελευταίου ἐργοστασίου;

4. Ἕνας ἐκδοτικὸς οἶκος διέθεσεν ἐφέτος διὰ τὴν ἀγορὰν χάρτου διὰ τὴν ἐκτύπωσιν τῶν βιβλίων 20.000 δρχ. Ἠγόρασε $10\frac{1}{2}$ δεσμίδας χάρτου πρὸς 240 δρχ. τὴν δεσμίδα, $50\frac{1}{2}$ δεσμίδας πρὸς $200\frac{1}{5}$ δρχ. τὴν δεσμίδα καὶ $5\frac{1}{2}$ δεσμίδας πρὸς 300 δρχ. τὴν μίαν. Μὲ τὰ ὑπόλοιπα ἠγόρασε 15 δεσμίδας χαρτὶ διὰ ἐξώφυλλα. Πόσα ἔδωσεν εἰς τὰς τρεῖς ποσότητας τοῦ χάρτου καὶ πόσα ἐκόστισε κάθε δεσμὶς ἐξωφύλλου;

5. Ἕνας πατέρας ἄφησε διαθήκην νὰ κληρονομήσουν τὰ πέντε παιδιά του τὰ 84 στρέμματα τῆς περιουσίας του ὡς ἑξῆς : ὁ πρῶτος νὰ πάρῃ τὰ $\frac{2}{7}$, ὁ δεύτερος τὸ $\frac{1}{4}$, ὁ τρίτος τὰ $\frac{5}{14}$ καὶ οἱ δύο τελευταῖοι νὰ μοιρασθοῦν τὰ ὑπόλοιπα ἀπὸ μισὰ ὁ καθείς. Πόσα στρέμματα ἐκληρονόμησε ὁ καθείς;

6. Ἕνας μεγάλος ἐλαιοπαραγωγὸς παρήγαγεν ἐφέτος 41.976 χλγρ. ἐλαίου. Ἐτοποθέτησεν εἰς 4 μεγάλας δεξαμενὰς ἀπὸ $8350\frac{1}{2}$ χλγρ. ἐλαίου εἰς κάθε μίαν. Εἰς 16 μεγάλα βαρέλια ἀπὸ $250\frac{1}{8}$ χλγρ. εἰς τὸ καθέν. Εἰς 100 δοχεῖα ἀπὸ $16\frac{1}{4}$ χλγρ. εἰς τὸ καθὲν καὶ τὸ ὑπόλοιπον τὸ ἐτακτοποίησεν εἰς 32 σιδηροβάρελα. Πόσον ἔλαιον ἐτοποθέτησεν εἰς τὰς δεξαμενάς, εἰς τὰ βαρέλια καὶ εἰς τὰ δοχεῖα καὶ πόσα χλγρ. ἐλαίου εἰς κάθε σιδηροβάρελον;

ΤΡΟΠΗ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ ΕΙΣ ΔΕΚΑΔΙΚΟΝ ΚΑΙ ΔΕΚΑΔΙΚΟΥ ΕΙΣ ΚΛΑΣΜΑ

1. Κάθε διαίρεσιν ἑνὸς ἀριθμοῦ δι' ἑνὸς ἄλλου ἀριθμοῦ ἠμποροῦμεν νὰ τὴν παραστήσωμεν ὡς κλάσμα μὲ ἀριθμητὴν τὸν διαιρετέον καὶ παρονομαστὴν τὸν διαιρέτην. Τὸ ἀντίστροφον συμβαίνει εἰς κλάσμα. Π.χ. τὸ κλάσμα $\frac{3}{4}$ θὰ εἰπῇ, νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμητὴν 3 διὰ τοῦ παρονομαστοῦ 4. Ἂς κάμωμεν τὴν διαίρεσιν:

$$\begin{array}{r|l} 30 & 4 \\ \cline{2-2} 20 & 0{,}75 \\ 0 & \end{array}$$

Εἴδομεν ὅτι τὸ 4 εἰς τὸ 3 δὲν εἰσχωρεῖ. Βάζομεν - 0 - εἰς τὸ πηλίκον, καὶ διὰ νὰ προχωρήσωμεν εἰς τὴν εὕρεσιν δεκαδικῶν, βάζομεν ὑποδιαστολὴν εἰς τὸ - 0 -, ποὺ εἶναι ἀκέραιος, καὶ προχωροῦμεν διὰ δέκατα, γράφοντες ἓν μηδὲν εἰς τὸ τέλος τοῦ 3. Κατόπιν, διὰ νὰ εὕρωμεν ἑκατοστὰ προσθέτομεν καὶ ἄλλο μηδὲν εἰς τὸ τέλος τοῦ ὑπολοίπου. Ἂν ἔχωμεν ὑπόλοιπον μηδέν, σταματῶμεν· ἄλλως προσθέτομεν καὶ ἄλλο μηδὲν καὶ προχωροῦμεν διὰ χιλιοστά. Ἂν δὲν θέλωμεν νὰ προχωρήσωμεν, τότε σταματῶμεν ἕως ἐκεῖ καὶ λέγομεν ὅτι τὸ κλάσμα $\frac{5}{8}$, π.χ., εἶναι ἴσον μὲ τὸν δεκαδικὸν 0,714 κατὰ προσέγγισιν ἑνὸς χιλιοστοῦ.

Εἰς τὴν ἀνωτέρω μετατροπὴν εἴχομεν $\frac{3}{4} = 0{,}75$.

2. Ἂν εἴχομεν τὸν μικτὸν $8\frac{1}{5}$ νὰ τὸν κάμωμεν δεκαδικόν, θὰ ἐκάμνομεν πρῶτον τὸ κλάσμα δεκαδικόν, κατόπιν θὰ προσεθέτομεν καὶ τὸν ἀκέραιον - 8 - καὶ θὰ εἴχομεν:

$$\begin{array}{r|l} 10 & 5 \\ \hline 0 & 0{,}2 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 8 + 0{,}2 = 8{,}2 \\ 8\frac{1}{5} = 8{,}2 \end{array}$$

3. Τὰ κλάσματα τὰ ὁποῖα ἔχουν παρονομαστὴν δέκατα, ἑκατοστά, χιλιοστά, κλπ. εἶναι εὔκολον νὰ τὰ τρέψωμεν ἀμέσως εἰς δεκαδικοὺς ἀριθμούς, διότι γνωρίζομεν πῶς γράφονται τὰ δεκαδικὰ ψηφία τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν. Γνωρίζομεν, π.χ., ὅτι τὰ δέκατα εἶναι τὸ πρῶτον ψηφίον, τὰ ἑκατοστὰ τὸ δεύτερον, τὰ χιλιοστὰ τὸ τρίτον ψηφίον, κλπ., μετὰ τὴν ὑποδιαστολήν, ἡ ὁποία χωρίζει τὸν ἀκέραιον ἀπὸ τὰ δεκαδικὰ ψηφία.

α) Τὸ κλάσμα, π.χ., $\frac{4}{10}$ εἶναι ἴσον πρὸς 0,4, ἐνῷ ὁ μικτὸς $5\frac{4}{10}$ εἶναι ἴσος πρὸς τὸν δεκαδικὸν ἀριθμὸν 5,4.

β) Τὸ κλάσμα $\frac{15}{100}$ εἶναι ἴσον πρὸς τὸν δεκαδικὸν ἀριθμὸν 0,15, ἐνῷ ὁ μικτὸς $20\frac{15}{100}$ εἶναι ἴσος πρὸς τὸν δεκαδικὸν 20,15.

γ) Τὸ κλάσμα $\frac{48}{1000}$ εἶναι ἴσον πρὸς τὸν δεκαδικὸν ἀριθμὸν 0,048, ἐνῷ ὁ μικτὸς ἀριθμὸς $250\frac{48}{100}$ εἶναι ἴσος πρὸς τὸν δεκαδικὸν ἀριθμὸν 250, 048.

4. Ἡ τροπὴ ἑνὸς δεκαδικοῦ εἰς κλάσμα εἶναι ἀκόμη εὐκολωτέρα.

α) Ὁ δεκαδικὸς 0,75 εἶναι ἴσος μὲ τὸ κλάσμα $\frac{75}{100}$. Ὁ ἀριθμὸς 75 θὰ γραφῇ ὡς ἀριθμητής, ἐνῷ τὸ ἑκατὸν θὰ γραφῇ ὡς παρονομαστής. Τὸ μηδὲν ἀκέραιος, ἐφ' ὅσον εἶναι μηδὲν δὲν γράφεται πρὸ τοῦ κλάσματος, ἐφ'ὅσον γνωρίζομεν ὅτι $\frac{75}{100}$ εἶναι μικρότερον ἀπὸ μίαν ἀκεραίαν μονάδα.

β) Ὁ δεκαδικὸς 15,75 εἶναι ἴσος πρὸς τὸν μικτὸν ἀριθμὸν $15\frac{75}{100}$.

γ) Οἱ δεκαδικοὶ 0,4 καὶ 5,4 εἶναι ἴσοι πρὸς τὸ κλάσμα $\frac{4}{10}$ καὶ τὸν μικτὸν $5\frac{4}{10}$.

δ) Οἱ δεκαδικοὶ 0,15 καὶ 20,15 εἶναι ἴσοι πρὸς τὸ κλάσμα $\frac{15}{100}$ καὶ τὸν μικτὸν $20\frac{15}{108}$.

ε) Οἱ δεκαδικοὶ 0,048 καὶ 250,048 εἶναι ἴσοι πρὸς τὸ κλάσμα $\frac{48}{100}$ καὶ τὸν μικτὸν $250\frac{48}{1000}$.

Συγκρίνατε τὰς περιπτώσεις α, β, γ τῆς ἀσκήσεως - 3 - μὲ τὰς περιπτώσεις γ, δ, ε, τῆς ἀσκήσεως - 4 - καὶ νὰ εἰπῆτε τί διαπιστώνετε.

Ὁ Ἀσκήσεις

1. Οἱ παρακάτω κλασματικοὶ καὶ μικτοί, νὰ γίνουν δεκαδικοί.

$$\frac{24}{100},\ \frac{3}{5},\ 12\frac{7}{8},\ 39\frac{5}{10},\ \frac{65}{1000},\ 14\frac{1}{4},\ \frac{8}{10},\ \frac{40}{50}$$

2. Οἱ παρακάτω δεκαδικοὶ νὰ γίνουν κλασματικοὶ καὶ μικτοί.

18,4	0,27	56,08	23,800	0,005	39,6	0,02

Προβλήματα μὲ κλασματικοὺς καὶ δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς

(Διὰ νὰ λυθοῦν αὐτὰ τὰ προβλήματα, ἢ ὅλοι οἱ ἀριθμοὶ πρέπει νὰ γίνουν κλασματικοί, ἢ ὅλοι δεκαδικοί).

Δ. 1. Ἡ μητέρα μου τὴν Πρωτοχρονιὰν ἔκαμεν ἓν γλύκυσμα καὶ ἐχρησιμοποίησεν αὐτὰ τὰ ὑλικά: Ἄλευρον $1\frac{3}{4}$ χλγρ., γάλα 0,75 χλγρ., βούτυρον $\frac{4}{8}$ χλγρ., χυμὸν πορτοκαλλιοῦ 0,125 χλγρ. Πόσον ἦτο ὅλον τὸ βάρος τῶν ὑλικῶν;

Δ 2. Ἓν μέτρον μεταξωτοῦ ὑφάσματος κοστίζει 28,50 δραχμάς. Πόσον κοστίζουν τὰ $7\frac{4}{10}$ μέτρα;

Κ 3. Ἀπὸ ἓν βαρέλιον τυροῦ βάρους $44\frac{2}{4}$ χλγρ. ὁ παντοπώλης ἐπώλησε τὴν πρώτην ἡμέραν $5\frac{1}{4}$ χλγρ. καὶ τὴν δευτέραν ἡμέραν 12,60 χλγρ. Πόσα χλγρ. τυροῦ ἀπέμειναν εἰς τὸ βαρέλιον;

Κ 4. Ἓν αὐτοκίνητον διέτρεξε μίαν ἀπόστασιν $135\frac{1}{2}$ χλμ. εἰς 3,50 ὥρας; Μὲ πόσα χιλιόμετρα τὴν ὥραν ἔτρεχε τὸ αὐτοκίνητον;

Πῶς εὑρίσκομεν μὲ πόσας μονάδας ἰσοῦται ἓν κλάσμα τοῦ ἀκεραίου

1. Πόσαι δραχμαὶ εἶναι τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ χιλιοδράχμου ;

Λύσις

$$1000 \times \frac{3}{4} = \frac{3000}{4} = 750 \text{ δραχμαί.}$$

2. Πόσα γραμμάρια εἶναι τὰ $\frac{5}{8}$ τοῦ χιλιογράμμου ;

Λύσις

$$1000 \times \frac{5}{8} = \frac{5000}{8} = 625 \text{ γραμμάρια.}$$

3. Πόσαι δραχμαὶ εἶναι τὰ $\frac{6}{30}$ τοῦ δεκαδράχμου ;

Λύσις

$$10 \times \frac{6}{30} = \frac{60}{30} = 2 \text{ δραχμαί.}$$

4. Ἀπὸ μίαν ποσότητα 1500 χλγρ. ἀλεύρου ἐζύμωσαν εἰς ἓν ἀρτοποιεῖον τὰ $\frac{2}{10}$. Πόσα χλγρ. ἀλεύρου ἀπέμεινε ;

Λύσις

$$1500 \times \frac{2}{10} = \frac{3000}{10} = 3000 \text{ χλγρ.} \qquad \begin{array}{r} 1500- \\ 300 \\ \hline 1200 \end{array} \text{ χλγρ.}$$

5. Πόσοι μῆνες εἶναι τὰ $\frac{15}{60}$ τοῦ ἔτους ;

Λύσις

$$12 \times \frac{15}{60} = \frac{180}{60} = 3 \text{ μῆνες.}$$

Ἀσκήσεις

Συντάξατε δέκα παρόμοια προβλήματα καὶ εὕρετε τὴν λύσιν των. Δικαιολογήσατε διατί κάμνομεν πολλαπλασιασμόν. Ἐνθυμηθῆτε πότε κάμνομεν πολλαπλασιασμόν.

ΑΝΑΓΩΓΗ ΕΙΣ ΤΗΝ ΜΟΝΑΔΑ

1. 24 τετράδια ἔχουν 36 δραχμάς. Πόσον ἔχουν τὰ 15 τετράδια;

Σκέψις

α) Ἐδῶ ἔχομεν νὰ λύσωμεν ἓν πρόβλημα ποὺ δὲν ὁμοιάζει μὲ ὅσα προβλήματα ἐλύσαμεν ἕως τώρα. Ἐδῶ μᾶς λέγει τὸ πρόβλημα πόσον ἔχουν τὰ πολλὰ τετράδια καὶ μᾶς ζητοῦν νὰ εὕρωμεν πόσον ἔχουν τὰ πολλά, ἐπίσης, τετράδια, ἀδιάφορον ἂν εἶναι περισσότερα, ἢ ὀλιγώτερα ἀπὸ τὸ πρῶτον ποσόν.

Ἡ σκέψις μας, λοιπόν, πρέπει νὰ εἶναι διαφορετική. Γνωρίζομεν πόσον ἔχουν τὰ πολλὰ τετράδια. Διὰ νὰ εὕρωμεν πόσον ἔχουν ἐπίσης τὰ πολλά, πρέπει ἀπαραιτήτως νὰ εὕρωμεν πρῶτον πόσον ἔχει τὸ ἕν. Γμωρίζομεν ὅτι, ὅταν εἶναι γνωστὴ ἡ τιμὴ τῶν πολλῶν, διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν τοῦ ἑνὸς κάμνομεν διαίρεσιν. Γνωρίζομεν, ἐπίσης, ὅτι ὅταν εἶναι γνωστὴ ἡ τιμὴ τοῦ ἑνός, διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν τῶν πολλῶν κάμνομεν πολλαπλασιασμόν.

Ὥστε, εἰς τὸ παραπάνω πρόβλημα ὀφείλομεν νὰ πραγματοποιήσωμεν δύο πράξεις : μίαν διαίρεσιν διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν τοῦ ἑνὸς τετραδίου : $36 : 24 = 1{,}50$. Καὶ ἕνα πολλαπλασιασμόν, διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν τῶν 15 τετραδίων : $1{,}50 \times 15 = 22{,}50$ δραχμαί.

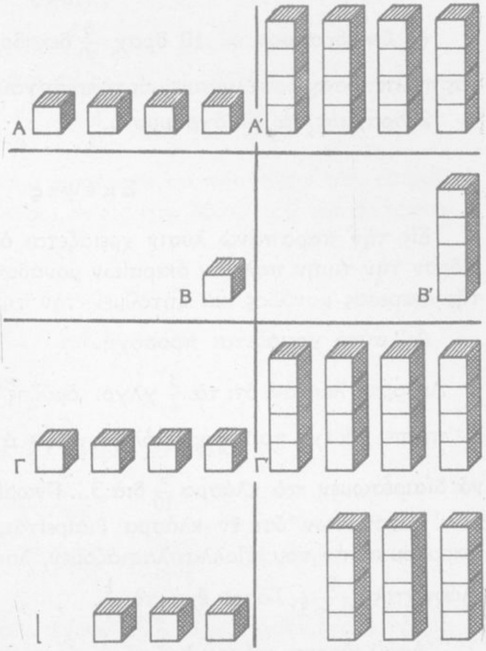
β) Ἐκτὸς ὅμως ἀπὸ τὸν παραπάνω τρόπον λύσεως τοῦ προβλήματος, ὑπάρχει καὶ ἄλλος τρόπος, ὁ ὁποῖος ὀνομάζεται ***ἀναγωγὴ εἰς τὴν*** μονάδα. Δηλαδή, ἀπὸ τὴν τιμὴν τῶν πολλῶν ἀναγόμεθα — πηγαίνομεν νὰ εὕρωμεν — τὴν τιμὴν τῆς μονάδος, τοῦ ἑνός. Καὶ ὅταν εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τοῦ ἑνός, εὑρίσκεται καὶ ἡ τιμὴ τῶν πολλῶν.

Εἰς τὴν ἀναγωγὴν εἰς τὴν μονάδα κάμνομεν τὴν ἰδίαν σκέψιν ποὺ ἐκάμναμεν. Λέγομεν, λοιπόν:

Γνωρίζομεν ὅτι τὰ εἴκοσι τέσσαρα τετράδια ἔχουν τριάκοντα ἓξ δραχ. Τὸ ἓν τετράδιον ἔχει εἴκοσι τέσσαρας φορὰς ὀλιγώτερον. Πρέπει, λοιπόν, νὰ διαιρέσωμεν τὸ τριάκοντα ἓξ διὰ εἴκοσι τέσσαρα. Αὐτὸ ὅμως ἠμποροῦμεν νὰ τὸ γράψωμεν ὡς κλάσμα μὲ ἀριθμητὴν τὸ τριάκοντα ἓξ καὶ παρονομαστὴν τὸ εἴκοσι τέσσαρα: $\frac{36}{24}$. Τόσον ἔχει τὸ ἓν τετράδιον.

Τώρα τὰ δέκα πέντε τετράδια ἔχουν δέκα πέντε φορὰς περισσότερον ἀπὸ ὅσα ἔχει τὸ ἕν. Ἔτσι ἔχομεν: $\frac{36}{24} \times 15 = \frac{540}{24} =$ 22,50 δραχμάς.

Εὕρομεν τὸ ἴδιον ἀποτέλεσμα, διότι καὶ εἰς τὴν ἀναγωγὴν εἰς τὴν μονάδα δὲν κάμνομεν τίποτε ἄλλο ἀπὸ μίαν διαίρεσιν καὶ ἕνα πολλαπλασιασμόν.



26. Ἀναγωγὴ εἰς τὴν μονάδα

γ) Εἰς τὴν μέθοδον τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα, ἡ κατάταξις λαμβάνει τὴν κατωτέρω μορφήν:

Τὰ 24 τετράδια κοστίζουν 36 δραχ.

Τὸ 1 τετράδιον κοστίζει 36 : 24 ἢ $\frac{36}{24}$ δραχ.

Τὰ 15 τετράδια κοστίζουν $\frac{36}{24} \times 15 = \frac{540}{24} = 22{,}50$ δραχ.

2. Μὲ $\frac{9}{10}$ τοῦ δεκαδράχμου ἀγοράζομεν $\frac{3}{4}$ τοῦ χλγρ. ὀρύζης. Πόσον ἔχει τὸ χιλιόγραμμον;

Λύσις

Τὰ $\frac{3}{4}$ χλγρ. ὀρύζης κοστίζουν $\frac{9}{10}$ δραχ.

Τὸ $\frac{1}{4}$ » » » $\frac{9}{10 \times 3}$ »

Τὰ $\frac{4}{4}$ » » » $\frac{9 \times 4}{10 \times 3} = \frac{36}{30} = 1\,\frac{6}{30}$ τοῦ δεκαδρχ.

(1 δεκάδραχμον = 10 δραχ. $\frac{6}{30}$ δεκαδράχμου = 2 δραχ.᾿Ενθυμηθῆτε τὰς περιπτώσεις ποὺ ἐλύσαμεν εἰς τὸ προηγούμενον κεφάλαιον. $1\frac{6}{30}$ δεκαδρ. = 12 δραχμὰς τὸ χιλιόγραμμον).

Σκέψις

Εἰς τὴν παραπάνω λύσιν χρειάζεται ὀλίγη προσοχή. ᾿Εδῶ δὲν μᾶς δίδουν τὴν τιμὴν πολλῶν ἀκεραίων μονάδων, ἀλλὰ τὴν τιμὴν κλάσματος τῆς ἀκεραίας μονάδος καὶ ζητοῦμεν τὴν τιμὴν τῆς μονάδος.

Δι᾿ αὐτὸ χρειάζεται προσοχή.

Λέγομεν, λοιπόν, ὅτι τὰ $\frac{3}{4}$ χλγρ. ὀρύζης κοστίζουν $\frac{9}{10}$ τῆς δραχμῆς. Τὸ $\frac{1}{4}$ πρέπει νὰ ἔχῃ τρεῖς φορὰς ὀλιγώτερον ἀπὸ τὰ $\frac{3}{4}$. ῾Επομένως, πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὸ κλάσμα $\frac{9}{10}$ διὰ 3... Γνωρίζομεν ὅμως ἀπὸ τὰς ἰδιότητας τῶν κλασμάτων ὅτι ἓν κλάσμα διαιρεῖται, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸν παρονομαστήν του. Πολλαπλασιάζομεν, λοιπόν, τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος $\frac{9}{10 \times 3}$. Τόσον ἔχει τὸ $\frac{1}{4}$.

᾿Αφοῦ εὕρομεν πόσον ἔχει τὸ $\frac{1}{4}$, ἠμποροῦμεν νὰ εὕρωμεν πόσον ἔχει ὁλόκληρον τὸ χιλιόγραμμον, τὸ ὁποῖον ἰσοδυναμεῖ μὲ $\frac{4}{4}$. Τὰ $\frac{4}{4}$ ἔχουν τέσσαρας φορὰς περισσότερον ἀπ᾿ ὅσον ἔχει τὸ ἕν. Θὰ πολλαπλασιάσωμεν τὴν τιμὴν τοῦ ἑνὸς τετάρτου, ἡ ὁποία εἶναι $\frac{9}{10 \times 3}$. ῎Ετσι ἔχομεν : $\frac{9 \times 4}{10 \times 3} = \frac{36}{30} = 1\,\frac{6}{30}$ τοῦ δεκαδράχμου = 12 δραχμαί.

3. Μὲ $18\frac{4}{10}$ δρχ. ἀγοράζομεν $5\frac{3}{4}$ μέτρα κορδέλλας. Πόσον ἔχει τὸ μέτρον ; ($18\frac{4}{10} = \frac{184}{10}$, $5\frac{3}{4} = \frac{23}{4}$).

Τὰ $\frac{23}{4}$ κορδέλλας κοστίζουν $\frac{184}{10}$ δρχ.

Τὸ $\frac{1}{4}$ » » $\frac{184}{10 \times 23}$ δρχ.

Τὰ $\frac{4}{4}$ (1 μ.) » » $\frac{184 \times 4}{10 \times 23} = \frac{736}{230} = 3\frac{46}{230} = 3\frac{1}{5}$ δρχ.

4. Μὲ $36\frac{8}{10}$ δρχ. ἀγοράζω $11\frac{2}{4}$ μέτρα δαντέλλας. Πόσα μέτρα θὰ ἀγοράσω μὲ $44\frac{4}{5}$ δρχ.

Λύσις

$$\left(36\frac{8}{10} = \frac{368}{10},\ 11\frac{2}{4} = \frac{46}{4},\ 44\frac{4}{5} = \frac{224}{5}\right)$$

Ἐπειδὴ τὰ δύο κλάσματα ποὺ παριστάνουν τὴν τιμὴν τῶν μέτρων εἶναι ἑτερώνυμα, διὰ νὰ προχωρήσωμεν εἰς τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος πρέπει νὰ γίνουν ὁμώνυμα.

$$\overset{1}{\frac{368}{10}},\quad \overset{2}{\frac{224}{5}} \qquad \text{Ε.Κ.Π.} = 10$$

$$\frac{368}{10},\quad \frac{448}{10}$$

Μὲ $\frac{368}{10}$ δρχ. ἀγοράζω $\frac{46}{4}$ μέτρα δαντέλλα

μὲ $\frac{1}{10}$ » » $\frac{46}{4 \times 368}$

μὲ $\frac{448}{10}$ » » $\frac{46 \times 448}{4 \times 368} = \frac{20608}{1472} = 14$ μέτρα.

5. Τὰ $4\frac{1}{2}$ χλγρ. λαχανικῶν ἔχουν $28\frac{4}{5}$ δρχ. Πόσον ἔχουν τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ χιλιογράμμου ;

$$\left(4\frac{1}{2} = \frac{9}{2},\ 28\frac{4}{5} = \frac{144}{5},\ \frac{3}{4}\right)$$

Ἐδῶ μᾶς ἐνδιαφέρουν τὰ κλάσματα τῶν χιλιογράμμων, τὰ ὁποῖα εἶναι ἑτερώνυμα καὶ τὰ ὁποῖα, διὰ νὰ προχωρήσωμεν εἰς τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος, πρέπει νὰ γίνουν ὁμώνυμα.

$$\overset{2}{\frac{9}{2}},\quad \overset{1}{\frac{3}{4}} \qquad \text{Ε.Κ.Π.} = 4$$

$$\frac{18}{4},\quad \frac{3}{4}$$

Λύσις

Τὰ $\frac{18}{4}$ χλγρ. λαχανικῶν κοστίζουν $\frac{144}{5}$ δρχ.

τὸ $\frac{1}{4}$ » » » $\frac{144}{5 \times 18}$

τὰ $\frac{3}{4}$ » » » $\frac{144 \times 3}{5 \times 18} = \frac{432}{90} = 4\frac{72}{90} = 4\frac{8}{10}$ δρχ.

6. Ἡ περιουσία ἑνὸς ἀποθανόντος ἦτο 30.000. δρχ. Τὴν ἐκληρονόμησαν οἱ τρεῖς υἱοί του. Ὁ πρῶτος ἔλαβε τὰ $\frac{4}{15}$ τοῦ ποσοῦ, ὁ δεύτερος τὰ $\frac{3}{10}$ καὶ ὁ τρίτος τὰ ὑπόλοιπα. Πόσα ἔλαβεν ἕκαστος ;

Σκέψις

Διὰ νὰ προχωρήσωμεν εἰς τὴν λύσιν, πρέπει τὰ κλάσματα νὰ γίνουν ὁμώνυμα.

$$\overset{2}{\frac{4}{15}}, \quad \overset{3}{\frac{3}{10}} \qquad \text{Ε.Κ.Π.} = 30$$

$$\frac{8}{30}, \quad \frac{9}{30}$$

Ὁ α′ θὰ λάβῃ $\frac{8}{30}$, ὁ β′ $\frac{9}{30}$ καὶ ὁ τρίτος τὰ ὑπόλοιπα $\frac{13}{30}$.

Λύσις

Ὁ πρῶτος: Τὰ $\frac{30}{30}$ τῆς περιουσίας εἶναι 30.000

τὸ $\frac{1}{30}$ » » » $\frac{30.000}{30}$

τὰ $\frac{8}{30}$ » » » $\frac{30.000}{30} \times 8 = \frac{240.000}{30} = 8.000$

Ὁ δεύτερος: Τὰ $\frac{30}{30}$ τῆς περιουσίας εἶναι 30.000

τὸ $\frac{1}{30}$ » » » $\frac{30.000}{30}$

τὰ $\frac{9}{30}$ » » » $\frac{30.000}{30} \times 9 = \frac{270.000}{30} = 9.000$

'Ο τρίτος: Τὰ $\frac{30}{30}$ τῆς περιουσίας εἶναι 30.000

τὸ $\frac{1}{30}$ » » » $\frac{30.000}{30}$

τὰ $\frac{13}{30}$ » » » $\frac{30.000}{30} \times 13 = \frac{390.000}{30} = 13.000$

Προβλήματα

1. 5 βιβλία ἀριθμητικῆς κοστίζουν 62,50 δραχ. Πόσον ἔχουν τὰ 24 βιβλία;

2. 16 χλγρ. σίτου ἔχουν 51,20 δραχ. Πόσον ἔχουν τὰ 45 χλγρ.;

3. Μὲ $63\frac{1}{4}$ δραχ. ἀγοράζομεν $5\frac{1}{2}$ χλγρ. ὀρύζης. Πόσον ἔχουν τὰ $12\frac{1}{4}$ χιλιόγραμμα;

4. Μὲ $107\frac{8}{10}$ δραχ. ἀγοράζω $3\frac{1}{2}$ χλγρ. κρέατος. Πόσον κρέας ἀγοράζω μὲ $246\frac{4}{10}$ δραχμάς;

5. Ἕνας κτηματίας ἄφησεν εἰς τὰ παιδιά του 960 ἐλαιόδενδρα καὶ ἔγραψεν εἰς τὴν διαθήκην του νὰ πάρουν, ὁ πρῶτος τὰ $\frac{4}{24}$ τῶν ἐλαιοδένδρων, ὁ δεύτερος τὰ $\frac{3}{8}$, ὁ τρίτος τὰ $\frac{3}{12}$ καὶ ὁ τέταρτος τὰ ὑπόλοιπα. Πόσα ἀναλογοῦν εἰς τὸν καθένα;

6. Τρεῖς ἀδελφοὶ ἐδέχθησαν ἀπὸ τὸν πατέρα τους 100 δραχ. μὲ τὴν προϋπόθεσιν νὰ πάρουν ὁ πρῶτος τὰ $\frac{6}{20}$, ὁ δεύτερος τὰ $\frac{2}{5}$ καὶ ὁ τρίτος τὰ ὑπόλοιπα. Πόσας δραχμὰς ἐπῆρεν ὁ καθείς;

7. 56 μολύβια ἔχουν 84 δραχμάς. Πόσον ἔχουν τὰ 42 μολύβια;

8. Μὲ $\frac{24}{50}$ τοῦ πεντηκονταδράχμου ἀγοράζομεν $\frac{3}{4}$ τοῦ χιλιογράμ. κρέας. Πόσον κοστίζουν τὰ $\frac{7}{8}$ τοῦ χιλιογράμμου;

9. Ἡ ἀπόστασις ἀπὸ τὰς Ἀθήνας ἕως τὴν Κόρινθον εἶναι 81 χλμ. Ἕως τὰ Μέγαρα τὸ αὐτοκίνητον ἔχει διανύσει τὰ $\frac{4}{9}$ τῆς ἀποστάσεως. Πόσα χλμ. εἶναι ἀπὸ τὰς Ἀθήνας ἕως τὰ Μέγαρα;

10. Ὁ ἦχος τρέχει 340 μέτρα εἰς τὸ δευτερόλεπτον. Πόσην ἀπόστασιν τρέχει εἰς $\frac{4}{20}$ τοῦ δευτερολέπτου;

63,

11. Νὰ ἐκτελέσετε πρῶτον ἀπὸ μνήμης καὶ κατόπιν γραπτῶς τὰς κατωτέρω ἀσκήσεις :

$\frac{3}{4}$ τῆς ὥρας, πόσα πρῶτα λεπτὰ εἶναι;

$\frac{2}{5}$ τοῦ χιλιομέτρου, πόσα μέτρα εἶναι;

$\frac{1}{4}$ τοῦ μέτρου, πόσοι δάκτυλοι εἶναι;

$\frac{3}{10}$ τοῦ ἰσημερινοῦ, πόσα χλμ. εἶναι; (ἰσημερινὸς = 40.000 χλμ.)

$\frac{7}{12}$ τοῦ εἰκοσιτετραώρου, πόσαι ὧραι εἶναι;

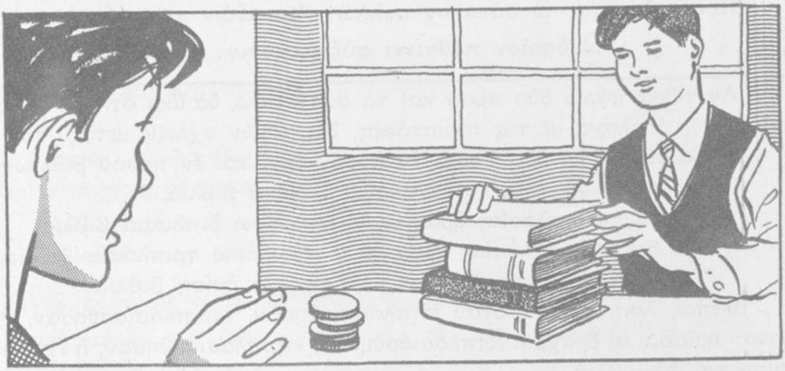
$\frac{6}{15}$ τοῦ μηνός, πόσαι ἡμέραι εἶναι; (1 μὴν = 30 ἡμέραι)

$\frac{4}{5}$ τοῦ χιλιογράμμου, πόσα γραμμάρια εἶναι;

$\frac{15}{20}$ τοῦ ἑκατονταδράχμου, πόσαι δραχμαὶ εἶναι;

$\frac{6}{10}$ τῆς δραχμῆς, πόσα λεπτὰ εἶναι;

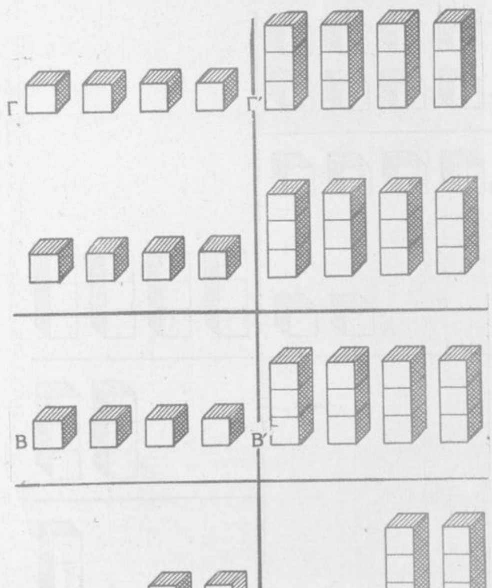
$\frac{9}{10}$ τῆς λίρας, πόσα σελίνια εἶναι; (1 λίρα = 20 σελίνια)



ΠΟΣΑ ΚΑΙ ΣΧΕΣΕΙΣ ΠΟΣΩΝ

1. Ἓν σύνολον πολλῶν ὁμοειδῶν πραγμάτων λέγομεν ὅτι ἀποτελεῖ ἓν ποσόν. Ἔχοντες 500 δραχμὰς λέγομεν ὅτι ἔχομεν ἓν ποσὸν δραχμῶν. Ἂν εἰς αὐτὸ τὸ ποσὸν προσθέσω καὶ ἄλλας 300 δρχ., τότε τὸ ποσόν μου θὰ αὐξηθῇ καὶ θὰ γίνῃ 800 δραχμαί. Ἂν ὅμως ἀπὸ τὸ ποσὸν τῶν 500 δραχ. ἀφαιρέσω τὰς 300 δραχ., τότε τὸ ποσόν μου θὰ μειωθῇ. Τὴν πρώτην φορὰν ἔπαθεν αὔξησιν, ἐνῷ τὴν δευτέραν φορὰν ἔπαθε μείωσιν.

Αὐτὴ εἶναι μία ἰδιότης τοῦ ποσοῦ: νὰ παθαίνῃ αὐξομείωσιν. Πλέον συγκεκριμένως, λοιπόν:



26. Ποσὰ εὐθέως ἀνάλογα.

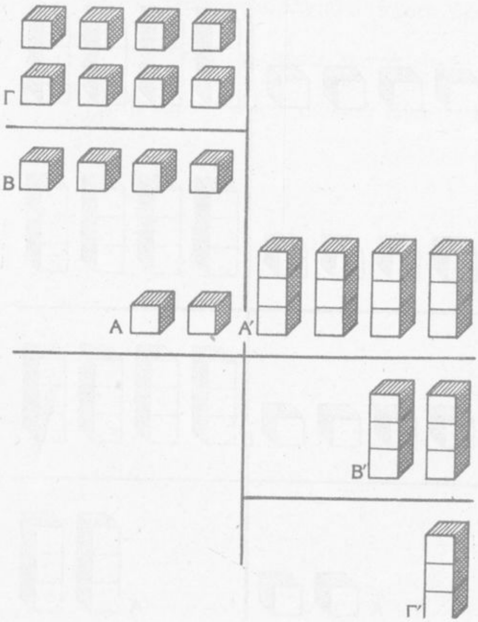
Ποσὸν λέγεται τὸ σύνολον πολλῶν ὁμοειδῶν πραγμάτων, τὸ ὁποῖον παθαίνει αὐξομείωσιν.

Ἂν τώρα πάρω δύο ποσὰ καὶ τὰ συσχετίσω, θὰ ἴδω ὅτι καὶ αὐτὰ ἀποκτοῦν, ἀνάλογα μὲ τὰς περιστάσεις, δύο εἰδῶν σχέσεις μεταξύ των.

α) Παίρνω π.χ., δύο ποσά: ἓν ποσὸν δρχ. καὶ ἓν ποσὸν βιβλίων.
Δίδω 100 δραχμὰς καὶ ἀγοράζω 8 ὅμοια βιβλία.
Ἂν δώσω διπλασίας δραχμὰς θ' ἀγοράσω διπλάσια βιβλία.
Ἂν δώσω τριπλασίας δραχμὰς θ' ἀγοράσω τριπλάσια βιβλία.
Ἂν δώσω ἡμισείας δραχμὰς θ' ἀγοράσω ἡμίση βιβλία.

Βλέπω, λοιπόν, ὅτι, ὅταν ἐδιπλασιάσθησαν, ἐτριπλασιάσθησαν, ἢ ἔγιναν ἡμίσειαι αἱ δραχμαὶ ἐδιπλασιάσθησαν, ἐτριπλασιάσθησαν, ἢ ἔγιναν ἡμίση καὶ τὰ βιβλία.

Λέγομεν, συνεπῶς, ὅτι μεταξὺ αὐτῶν τῶν δύο ποσῶν ὑπάρχει ***εὐθεῖα*** ἀναλογία. Λέγομεν, ἐπίσης, ὅτι αὐτὰ τὰ δύο ποσὰ εἶναι ***εὐθέως ἀνάλογα.***



27. Ποσὰ ἀντιστρόφως ἀνάλογα.

Ἀντιγράψατε τὸν κατωτέρω κανόνα:

Δύο ποσὰ λέγονται εὐθέως ἀνάλογα, ὅταν, πολλαπλασιαζομένου, ἢ διαιρουμένου τοῦ ἑνὸς μὲ ἕνα ἀριθμόν, πολλαπλασιάζεται, ἢ διαιρεῖται καὶ τὸ ἄλλο μὲ τὸν ἴδιον ἀριθμόν.

β) Παίρνω τώρα δύο ἄλλα ποσά: ἓν ποσὸν ἐργατῶν καὶ ἓν ποσὸν ἡμερῶν.

8 ἐργάται σκάπτουν τὸ κτῆμά μου εἰς 10 ἡμέρας.

Ἂν πάρω διπλασίους ἐργάτας θὰ σκάψουν τὸ κτῆμά μου εἰς ἡμισείας ἡμέρας.

Ἂν πάρω ἡμίσεις ἐργάτας θὰ σκάψουν τὸ κτῆμά μου εἰς διπλασίας ἡμέρας.

Ἐδῶ διαπιστώνω ὅτι, ὅταν οἱ ἐργάται ἔγιναν διπλάσιοι, αἱ ἡμέραι ἔγιναν ἡμίσειαι. Καὶ ὅταν οἱ ἐργάται ἔγιναν ἡμίσεις, αἱ ἡμέραι ἐδιπλασιάσθησαν.

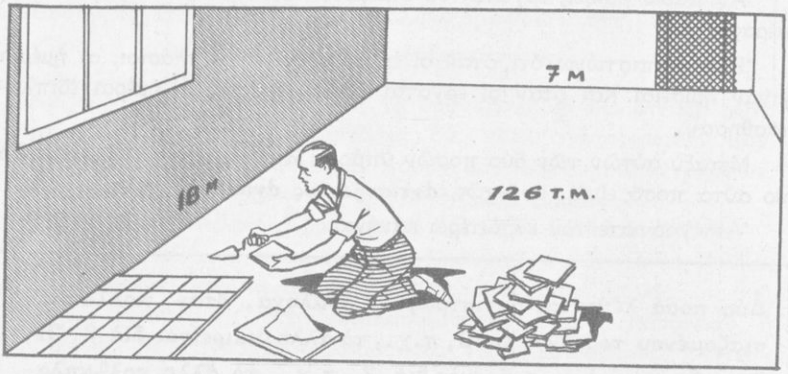
Μεταξὺ αὐτῶν τῶν δύο ποσῶν ὑπάρχει ***ἀντίστροφος ἀναλογία.*** Τὰ δύο αὐτὰ ποσὰ εἶναι, συνεπῶς, ***ἀντιστρόφως ἀνάλογα.***

Ἀντιγράψατε τὸν κατωτέρω κανόνα :

Δύο ποσὰ λέγονται ἀντιστρόφως ἀνάλογα, ὅταν, πολλαπλασιαζομένου τοῦ ἑνὸς ἐπὶ 2, π.χ., τὸ ἄλλο διαιρεῖται διὰ 2. Ἤ, ὅταν διαιρουμένου τοῦ ἑνὸς διὰ 2, π.χ., τὸ ἄλλο πολλαπλασιάζεται ἐπὶ 2.

Ἀσκήσεις

1. Εὕρετε πέντε περιπτώσεις ποσῶν εὐθέως ἀναλόγων.
2. Εὕρετε πέντε περιπτώσεις ποσῶν ἀντιστρόφως ἀναλόγων.



ΑΠΛΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΤΡΙΩΝ

Ὅσα προβλήματα ἐλύσαμεν μὲ τὴν ἀναγωγὴν εἰς τὴν μονάδα, ἠμποροῦμεν νὰ τὰ λύσωμεν μὲ μίαν νέαν μέθοδον, ἡ ὁποία ὀνομάζεται ***ἁπλῆ μέθοδος τῶν τριῶν***. Εἰς αὐτὴν τὴν μέθοδον μᾶς δίδουν τρεῖς ἀριθμοὺς καὶ ζητοῦμεν νὰ εὕρωμεν ἕνα τέταρτον, ***ἄγνωστον*** ἀριθμόν. Ὁ ἄγνωστος ἀριθμὸς παίρνει, εἰς τὴν Ἀριθμητικήν, τὸ ὄνομα ***Χι*** καὶ γράφεται μὲ τὸ κεφαλαῖον γράμμα Χ.

Ἂς πάρωμεν ἓν πρόβλημα καὶ ἂς τὸ λύσωμεν μὲ τὴν παραπάνω μέθοδον.

1. Μὲ 56 δραχμὰς ἀγοράζω 4 μέτρα λινοῦ. Μὲ 140 δραχμὰς πόσα μέτρα λινοῦ ἀγοράζω;

Σκέψις

Τὸ πρόβλημα αὐτὸ ἠμπορεῖ νὰ λυθῇ μὲ τρεῖς τρόπους. Ὁ πρῶτος εἶναι : μὲ διαίρεσιν νὰ εὕρω πόσον ἔχει τὸ ἓν μέτρον καὶ κατόπιν νὰ εὕρω πόσα μέτρα θ' ἀγοράσω μὲ τὰς 140 δραχμάς.

$56 : 4 = 14$ δρχ. $\qquad 140 : 14 = 10$ μέτρα.

Ὁ δεύτερος τρόπος εἶναι νὰ λύσω τὸ πρόβλημα μὲ τὴν ἀναγωγὴν εἰς τὴν μονάδα :

Μὲ 56 δρχ. ἀγοράζω 4 μ.

μὲ 1 » » $\frac{4}{56}$ μ.

μὲ 140 » » $\frac{4}{56} \times 140 = \frac{560}{56} = 10$ μ.

Καὶ ὁ τρίτος τρόπος εἶναι μὲ τὴν ***ἁπλῆν μέθοδον τῶν τριῶν.***

Μὲ $\underline{56}$ δρχ. ἀγοράζω $\underline{4}$ μ. λινοῦ ὑφάσματος
μὲ 140 » » Χ; μ. » »

Αὐτὴ ἡ πρώτη φάσις τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος, ὀνομάζεται κατάταξις τῶν ποσῶν.

Ἐδῶ ἔχω δύο ποσά: δραχμαὶ καὶ μέτρα λινοῦ ὑφάσματος.

Τὰς 140 δρχ. τὰς ἔγραψα κάτω ἀπὸ τὰς 56 δραχ. καὶ κάτω ἀπὸ τὸ 4 ἔγραψα τὸν ἄγνωστον, διότι αὐτὸς εἶναι ὁ ἄγνωστος: πόσα μέτρα λινοῦ ὑφάσματος θ' ἀγοράσω.

Ἡ δευτέρα φάσις τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος εἶναι ἡ σύγκρισις τῶν ποσῶν, μὲ τὴν ὁποίαν εἶναι ἀνάγκη νὰ διαπιστώσω ποία σχέσις ὑπάρχει μεταξὺ τῶν δύο ποσῶν: εἶναι εὐθέως ἢ ἀντιστρόφως ἀνάλογα; Συγκρίνω λοιπόν:

Μὲ 56 δραχμὰς ἀγοράζω 4 μέτρα λινοῦ ὑφάσματος.
Μὲ διπλασίας δραχμὰς θ' ἀγοράσω διπλάσια μέτρα ὑφάσματος.
Μὲ ἡμισείας δραχμὰς θ' ἀγοράσω ἡμίση μέτρα ὑφάσματος.
Ἑπομένως ,τὰ ποσὰ εἶναι εὐθέως ἀνάλογα.

Τώρα ἀρχίζει ἡ τελικὴ φάσις τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος.

Ἀφοῦ διεπίστωσα ὅτι τὰ ποσὰ εἶναι εὐθέως ἀνάλογα, διὰ νὰ εὑρεθῇ ὁ ἄγνωστος ἀριθμὸς θὰ πολλαπλασιάσω τὸν ἀριθμὸν ποὺ εὑρίσκεται ἐπάνω ἀπὸ τὸ - Χ - ἐπὶ τὸ κλάσμα τοῦ ἄλλου ποσοῦ ***ἀντεστραμμένον.***

Γράφω πάλιν, λοιπόν, τὰ ποσά:

Λύσις

Μὲ $\underline{56}$ δραχ. ἀγοράζω $\underline{4}$ μ. λινοῦ ὑφάσματος.
Μὲ 140 Χ; μ.

$$X = 4 \times \frac{140}{56} = \frac{560}{56} = 10 \text{ μ.}$$

Συγκρίνατε τοῦτο τὸ τελευταῖον σημεῖον μὲ τὴν τελικὴν λύσιν τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα. Δὲν κατελήξαμεν εἰς τὸ ἴδιον ἀποτέλεσμα;

Ὅταν σᾶς παρουσιάζωνται τοιούτου εἴδους προβλήματα νὰ προτιμᾶτε νὰ τὰ λύετε καὶ μὲ τοὺς τρεῖς τρόπους. Μὲ αὐτὸ τὸ σύστημα ἐπαληθεύετε κάθε φορὰν τὴν ὀρθότητα τοῦ ἀποτελέσματος.

2. 32 μαθηταὶ σκάπτουν τὸν σχολικὸν κῆπον εἰς 6 ὥρας. 48 μαθηταὶ εἰς πόσας ὥρας θὰ σκάψουν τὸν κῆπον;

Σκέψις

α) 32 μαθηταὶ σκάπτουν τὸν κῆπον εἰς 6 ὥρας.

Διπλάσιοι μαθηταὶ θὰ σκάψουν τὸν κῆπον εἰς ἡμισείας ὥρας.

Ἡμίσεις μαθηταὶ θὰ σκάψουν τὸν κῆπον εἰς διπλασίας ὥρας.

β) Ἐπομένως, τὰ ποσὰ εἶναι ***ἀντιστρόφως ἀνάλογα.***

γ) Διὰ νὰ εὑρεθῇ ὁ ἄγνωστος ἀριθμός, θὰ πολλαπλασιάσω τὸν ἀριθμὸν ποὺ εἶναι ἐπάνω ἀπὸ τὸ - Χ - ἐπὶ τὸ κλάσμα τοῦ ἄλλου ποσοῦ, ***ὅπως εἶναι.***

Λύσις

32 μαθηταὶ σκάπτουν τὸν κῆπον εἰς 6 ὥρας.
48 » » » » » Χ; »

$$X = 6 \times \frac{32}{48} = \frac{192}{48} = 4 \text{ ὧραι.}$$

Προσοχή:

1. Ὅταν τὰ ποσὰ εἶναι εὐθέως ἀνάλογα, ὁ ἄγνωστος ἀριθμὸς εὑρίσκεται, ὅταν πολλαπλασιάσω τὸν ἀριθμὸν ποὺ εἶναι ἐπάνω ἀπὸ τὸ -Χ- ἐπὶ τὸ κλάσμα τοῦ ἄλλου ποσοῦ ἀντεστραμμένον.

2. Ὅταν τὰ ποσὰ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα, ὁ ἄγνωστος ἀριθμὸς εὑρίσκεται, ὅταν πολλαπλασιάσω τὸν ἀριθμὸν ποὺ εἶναι ἐπάνω ἀπὸ τὸ -Χ- ἐπὶ τὸ κλάσμα τοῦ ἄλλου ποσοῦ, ὅπως εἶναι.

Προβλήματα

1. 9 μέτρα κασμηρίου ἀξίζουν 2.520 δραχμάς. Πόσον ἀξίζουν τὰ 24 μέτρα;

2. 56 χλγρ. μακαρονίων ἀξίζουν 560 χλγρ. Πόσον ἀξίζουν τὰ 80 χιλιόγραμμα;

3. 100 χλγρ. ἀλεύρου γίνονται 135 χλγρ. ἄρτου. Τὰ 75 χλγρ. ἀλεύρου πόσος ἄρτος θὰ γίνῃ;

Απλ.μ. 4. Ὁ ἐργολάβος ποὺ ἔκτισεν ἓν σχολεῖον, ἐπληρώθη, εἰς τὰ 15 κυβικὰ μέτρα τοιχοποιίας, 1800 δραχμάς. Πόσα χρήματα θὰ πάρῃ εἰς τὰ 216 κυβικὰ μέτρα, ποὺ εἶναι ὅλη ἡ τοιχοποιία τοῦ σχολείου;

Αναγωγ. Μ. 5. Ὁ ξυλουργός, ποὺ κατεσκεύασε τὴν ὀροφὴν τοῦ σχολείου, ἐπληρώθη, εἰς τὰ 7 τετρ. μέτρα, 126 δραχμάς. Πόσα χρήματα θὰ πάρῃ διὰ τὰ 189 τετρ. μέτρα τῆς ὀροφῆς;

6. Ὁ ἀμμοκονιαστής, διὰ 25 τ.μ. ἀμμοκονίαμα, ἐπῆρε 312,50 δρχ. Πόσα χρήματα θὰ πάρῃ εἰς τὰ 378 τ.μ. ἀμμοκονιάματος;

7. Ἐστρώσαμεν τὸ δάπεδον τοῦ σχολείου μὲ πλακάκια. Κάθε 3 τετρ. μέτρα ἐτοποθετήσαμεν 75 πλακάκια. Πόσα πλακάκια θὰ τοποθετηθοῦν εἰς τὰ 126 τ. μέτρα; Δύο τρόπους

8. Διὰ τοὺς ὑαλοπίνακας τοῦ διδακτηρίου ἐπληρώσαμεν, εἰς κάθε 5 τετρ. μέτρα, 210 δραχμάς. Πόσα θὰ πληρώσωμεν διὰ τὰ 60 τ.μ. ὑαλοπινάκων;

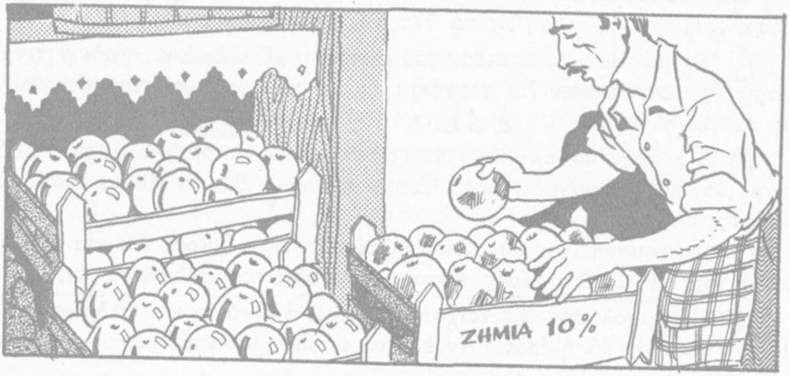
9. Εἰς τὸ μαθητικὸν συσσίτιον διαθέτομεν εἰς 6 ἡμέρας 9 κυτία σκόνης γάλακτος. Εἰς τὰς 26 ἡμέρας, πόσα κυτία γάλακτος θὰ διαθέσωμεν;

10. Ὁ ἐργολάβος τῆς τοιχοποιίας εἶχεν 8 ἐργάτας καὶ ἐτελείωσε τὴν τοιχοποιίαν εἰς 36 ἡμέρας. Ἂν ἐχρησιμοποίει 12 ἐργάτας, εἰς πόσας ἡμέρας θὰ ἐτελείωνεν ἡ τοιχοποιία;

11. Ὁ ξυλουργὸς ποὺ κατεσκεύασε τὴν ὀροφὴν εἰργάζετο 8 ὥρας τὴν ἡμέραν καὶ ἐτελείωσε τὴν ἐργασίαν εἰς 20 ἡμέρας. Ἂν εἰργάζετο 10 ὥρας τὴν ἡμέραν, εἰς πόσας ἡμέρας θὰ ἐτελείωνε τὴν ἐργασίαν αὐτήν;

12. Ἕνας κτηματίας ἐχρησιμοποίησεν 6 ἐργάτας ποὺ ἔσκαψαν τὰ κτήματά του εἰς 21 ἡμέρας. Ἂν ἐχρησιμοποίει 9 ἐργάτας, εἰς πόσας ἡμέρας θὰ ἔσκαπτον τὰ κτήματά του;

15
216



ΠΕΡΙ ΠΟΣΟΣΤΩΝ

Α΄ Περίπτωσις

Τὰ ἐργοστάσια, αἱ ἐπιχειρήσεις, αἱ βιομηχανίαι, αἱ ἀποθῆκαι ὑφασμάτων καὶ ἐμπορευμάτων, αἱ ἀποθῆκαι τροφίμων, τὰ μεγάλα καταστήματα, τὰ μεγάλα ἐμπορικά, ὅταν πωλοῦν τὰ εἴδη εἰς μικρότερα καταστήματα διὰ μεταπώλησιν, κάμνουν ὑπὲρ τοῦ ἀγοραστοῦ μίαν ἔκπτωσιν, δηλαδὴ ἐλαττώνουν τὴν τιμὴν τῶν ἐμπορευμάτων κατὰ ἕνα ποσοστὸν 15% —30%.

Ὅλα τὰ βιβλιοπωλεῖα ποὺ ἐκδίδουν τὰ βιβλία ποὺ διαβάζομεν, κάμνουν εἰς τοὺς βιβλιοπώλας τῶν ἐπαρχιῶν μίαν ἔκπτωσιν ἀπὸ 20% - 30%.

Κάθε κατάστημα, εὑρισκόμενον εἰς τὴν ἐπαρχίαν προσθέτει, ἐπὶ τῆς ἀξίας τῶν εἰδῶν, ποὺ ἠγόρασεν ἀπὸ τὰς μεγάλας ἀποθήκας τῶν Ἀθηνῶν, ἓν ποσοστὸν ἀπὸ 10% - 30% δι' ἔξοδα μεταφορᾶς, φύρας κλπ.

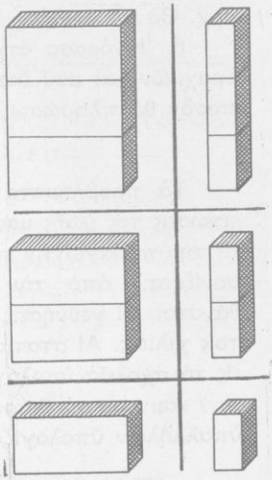
Ἡ ἔκπτωσις αὐτή, ἢ ἡ ἐπιβάρυνσις τῆς τιμῆς, λέγεται ***ποσοστὸν ἐπὶ τοῖς ἑκατόν.*** 10% διαβάζεται δέκα τοῖς ἑκατὸν καὶ σημαίνει, ὅτι, εἰς τὰς 100 δραχμὰς γίνεται ἔκπτωσις, ἢ ἐπιβάρυνσις δέκα δραχμῶν.

Διατί ὅμως οἱ ἄνθρωποι ἐδιάλεξαν τὰς - 100 - δραχμὰς ἐπὶ τῶν ὁποίων νὰ κάμουν τὰς ἐκπτώσεις, ἢ καὶ τὰς - 1000 - δραχ. καμμίαν φοράν, καὶ δὲν ἐδιάλεξαν τὰς 35, ἢ τὰς 67, ἢ τὰς 97, ἢ τὰς 468 κλπ; Διότι ὅταν χρησιμοποιοῦμεν τοὺς ἀριθμοὺς 100 ἢ 1.000, γίνεται εὐκολώτερον ὁ ὑπολογισμὸς τῆς ἐκπτώσεως, ὅταν τὸν κάμνωμεν μὲ τὴν σκέψιν. Ἀλλὰ καὶ εἰς τὸ χαρτὶ παρουσιάζει μεγάλην εὐκολίαν κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πράξεων.

Τὰ παρουσιαζόμενα προβλήματα λύονται εὐκόλως μὲ τὴν σκέψιν. Καὶ ὅταν χρησιμοποιήσωμεν τὸ μολύβι, λύονται μὲ τὴν ἁπλῆν μέθοδον τῶν τριῶν.

Προβλήματα

1. Ἕνας βιβλιοπώλης ἠγόρασεν ἀπὸ τὰς Ἀθήνας βιβλία ἀξίας 850 δραχμῶν καὶ τοῦ ἔκαμαν ἔκπτωσιν 30%. Πόση εἶναι ἡ ἔκπτωσις καὶ πόσα χρήματα θὰ πληρώσῃ;



28. Εἰς τὰ προβλήματα Ποσοστῶν καὶ τὰ δύο ποσὰ εἶνα μεταξύ των εὐθέως ἀνάλογα

Σκέψις

α) Εἰς τὰς 100 δραχ. γίνεται ἔκπτωσις 30 δρχ. Εἰς τὰς διπλασίας δραχμὰς θὰ γίνῃ ἔκπτωσις διπλασία (εὐθέως ἀνάλογα).
Εἰς τὰς 850 δραχ. ποὺ εἶναι 8 φορὰς περισσότεραι, θὰ γίνῃ καὶ 8 φορὰς μεγαλυτέρα ἔκτωσις. Θὰ γίνῃ ἔκπτωσις 225 δραχμῶν.

β) Ἂν ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὰς 850, τὰς 225 δραχ θὰ μείνουν 595 δραχμαί. Αὐτὸ τὸ ποσὸν θὰ πληρώσῃ.

Λύσις

Ἡ ὅλη ἐργασία θ' ἀκολουθήσῃ τὴν διαδικασίαν τῆς λύσεως διὰ τὴν ἁπλῆς μεθόδου τῶ τριῶν: κατάταξις ποσῶν, σύγκρισις ποσῶν καὶ εὕρεσις ἀγνώστου.

Εἰς τὰς $\underline{100}$ δραχ. ἔκπτωσις $\underline{30}$ δρχ.
Εἰς τὰς 850 » » X »

$$X = 30 \times \frac{850}{100} = \frac{25500}{100} = 255 \text{ δραχ.}$$

$$\begin{array}{r} 850- \\ 255 \\ \hline 595 \end{array}$$

Κάμετε μόνοι σας τὰς ἐνεργείας ποὺ ἀνέφερα καὶ δικαιολογήσατε τὸ ἀποτέλεσμα.

(ΣΗΜ. Εἰς ὅλα τὰ προβλήματα τῶν ποσοστῶν, τὰ ποσὰ εἶναι εὐθέως ἀνάλογα· ἑπομένως, ὁ ἄγνωστος ἀριθμὸς θὰ εὑρίσκεται πάντοτε, ἀφοῦ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν ποὺ εἶναι ἐπάνω ἀπὸ τὸ -X- ἐπὶ τὸ κλάσμα τοῦ ἄλλου ποσοῦ ἀντεστραμμένον. Τὰ προβλήματα, νὰ τὰ λύετε πρῶτον ἀπὸ μνήμης καὶ ὕστερον γραπτῶς).

2. Ἕνας ἄλλος βιβλιοπώλης ἐπρομηθεύθη βιβλία ἀξίας 3.200 δρχ. Διὰ ἔξοδα μεταφορᾶς, κλπ., θὰ πωλήσῃ τὰ βιβλία μὲ κέρδος 15%. Τί πο-

σὸν θὰ εἰσπράξῃ ἀπὸ τὴν πώλησιν ὅλων τῶν βιβλίων;

3. Ἕνας παντοπώλης ἐπρομηθεύθη διὰ τὸ παντοπωλεῖόν του τρόφιμα ἀξίας 2.500 δραχμῶν καὶ τοῦ ἔκαμαν ἔκπτωσιν 12%. Πόση εἶναι ἡ ἔκπτωσις καὶ τί ποσὸν θὰ πληρώσῃ;

4. Ἓν ἐμπορικὸν κατάστημα ἠγόρασεν ὑφάσματα ἀξίας 16.400 δρχ., τὰ ὁποῖα θὰ μεταπωλήσῃ μὲ κέρδος 18%. Πόσον θὰ εἶναι τὸ κέρδος καὶ πόσα θὰ εἰσπράξῃ ἐν ὅλῳ;

5. Ἕνας παντοπώλης ἠγόρασεν ἔλαιον Κρήτης καὶ ἐπλήρωσε 10.000 δρχ. Θὰ τὸ πωλήσῃ μὲ κέρδος 15%. Πόσον θὰ εἶναι τὸ κέρδος του;

6. Ἠγόρασα ἀπὸ τὸ ἐργοστάσιον ἓν κιβώτιον σάπωνος ἀξίας 450 δραχμῶν καὶ μοῦ ἔκαμαν ἔκπτωσιν 12%. Πόση εἶναι ἡ ἔκπτωσις καὶ τί ποσὸν θὰ πληρώσω;

Β' Περίπτωσις

Τὰ προβλήματα τῶν ποσοστῶν παρουσιάζονται εἰς ἀπείρους περιπτώσεις τῆς ζωῆς μας. Οἱ Δῆμοι καὶ αἱ Κοινότητες ἐπιβάλλουν φορολογίαν εἰς τὴν παραγωγὴν τῶν προϊόντων. Ἡ φορολογία εἰς τὰ εἰσοδήματα κανονίζεται ἀπὸ τὴν Ἐφορίαν κατὰ ποσοστὸν ἐπὶ τοῖς ἑκατόν. Οἱ θάνατοι, αἱ γεννήσεις ὑπολογίζονται εἰς ποσοστὰ ἐπὶ τοῖς ἑκατόν, ἢ ἐπὶ τοῖς χιλίοις. Αἱ στατιστικαὶ εἰς τὰς ἑταιρίας, εἰς τὰς δημοσίας ὑπηρεσίας, εἰς τὰ σχολεῖα ὑπολογίζονται εἰς ποσοστὰ ἐπὶ τοῖς ἑκατόν. Αἱ κρατήσεις ποὺ κάμνουν τὰ διάφορα ταμεῖα ἀπὸ τοὺς μισθοὺς τῶν ἐργατῶν καὶ τῶν ὑπαλλήλων ὑπολογίζονται εἰς ποσοστὰ ἐπὶ τῶν ἑκατὸν δραχμῶν, κλπ.

Προβλήματα

1. Τὸ εἰσιτήριον εἰς τὸ θέατρον τῆς Ἐπιδαύρου εἶναι: Α' θέσις δρχ. 120, Β' θέσις δρχ. 40, Γ' θέσις δρχ. 20 καὶ Δ' θέσις δρχ. 10. Ὁ φόρος ποὺ εἰσπράττει τὸ κράτος εἶναι 45%. Πόσον φόρον εἰσπράττει τὸ κράτος ἀπὸ κάθε εἰσιτήριον εἰς κάθε θέσιν τοῦ θεάτρου;

2. Εἰς ἓν Δημοτικὸν Σχολεῖον φοιτοῦν 380 μαθηταί. Πέρυσι ἔμειναν εἰς τὴν ἰδίαν τάξιν 5%. Πόσοι ἀπερρίφθησαν καὶ πόσοι προήχθησαν;

3. Ἓν Κοινοτικὸν Συμβούλιον ἐπέβαλε φορολογίαν ἐπὶ τῆς παραγωγῆς τοῦ ἐλαίου 3‰ (τρία τοῖς χιλίοις). Ὅλον τὸ χωρίον εἶχε παραγωγὴν 658.000 χλγρ. ἐλαίου. Πόση εἶναι ἡ φορολογία τῆς Κοινότητος;

4. Ὁ πληθυσμὸς τῆς Κορίνθου εἶναι 20.000. Τὸ προηγούμενον ἔτος εἴχομεν γεννήσεις 2%. Πόσα παιδιὰ ἐγεννήθησαν;

5. Ἕνας ὑπάλληλος παίρνει μισθὸν 1.500 δρχ. Τοῦ κρατοῦν διὰ τὸ Μετοχικὸν Ταμεῖον 3%. Πόσα εἶναι τὰ χρήματα ποὺ τοῦ κρατοῦν διὰ τὸ Ταμεῖον αὐτό;

6. Ἡ πατρίδα μας ἔχει ἔκτασιν 132.000 τετρ. χιλιομέτρων. Τὰ ἑλληνικὰ δάση καταλαμβάνουν τὰ 10% τῆς ἐκτάσεως, αἱ πεδιάδες τὰ 21% καὶ αἱ φυτεῖαι (καπνοῦ - βάμβακος) 9%. Πόσων τετρ. χλμ. ἔκτασιν καταλαμβάνουν τὰ δάση, αἱ πεδιάδες, αἱ φυτεῖαι;

7. Ὅλη ἡ ἔκτασις τῆς Γῆς εἶναι περίπου 540 ἑκατομμύρια τετρ. χλμ. Ἡ ξηρὰ καταλαμβάνει τὰ 25% τῆς ὅλης ἐκτάσεως. Πόσα, δηλαδή, τετραγωνικὰ χιλιόμετρα εἶναι ἡ ἔκτασις τῆς ξηρᾶς;

Γ' Περίπτωσις

Πολλὰς φορὰς μᾶς δίδουν τὰ ποσὰ καὶ μᾶς ζητοῦν νὰ εὕρωμεν τὸ ποσοστόν.

1. Εἰς ἓν Δημοτικὸν Σχολεῖον φοιτοῦν 300 μαθηταί. Πέρυσι ἀπερρίφθησαν 15. Πόσον εἶναι τὸ ποσοστὸν τῶν ἀπορριφθέντων;

Σκέψις

Ἀφοῦ εἰς τοὺς 300 μαθητὰς ἀπερρίφθησαν 15 μαθηταί, εἰς τοὺς 100 μαθητάς, ποὺ εἶναι τρεῖς φορὰς ὀλιγώτεροι θὰ ἀπερρίφθησαν καὶ τρεῖς φορές ὀλιγώτεροι. Ἑπομένως, ἀπερρίφθησαν 5 μαθηταί. Τὸ ποσοστόν, λοιπόν, τῶν ἀπορριφθέντων εἶναι 5%. Τὰ ποσὰ εἶναι εὐθέως ἀνάλογα.

Λύσις

Εἰς τοὺς 300 μαθητὰς ἀπερρίφθησαν 15 μαθηταί
Εἰς τοὺς 100 » » X; »

$$\times = 15 \times \frac{100}{300} = \frac{1500}{300} = 5\%$$

2. Εἰς ἓν σχολεῖον φοιτοῦν 160 μαθηταί. Οἱ νεοεγγραφέντες εἶναι 32. Τί ποσοστὸν νέων μαθητῶν ἦλθεν εἰς τὸ σχολεῖον;

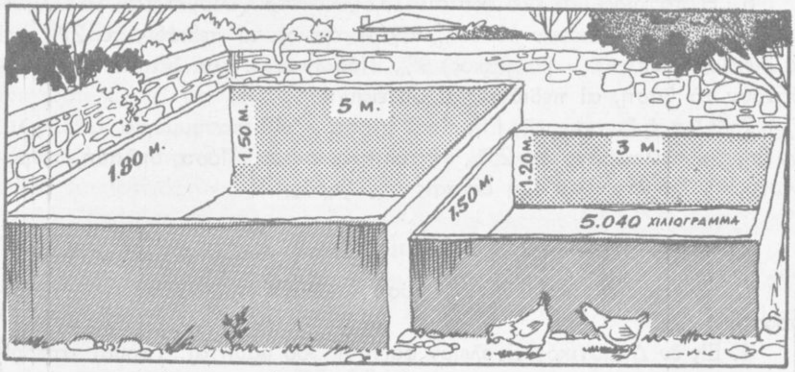
3. Ἕνας μικρέμπορος μετέφερε 1.800 αὐγά. Τοῦ ἔσπασαν ὅμως 54 αὐγά. Πόσον εἶναι τὸ ποσοστὸν τῶν σπασμένων αὐγῶν;

4. Ἓν σχολεῖον ἔχει 310 μαθητὰς καὶ ἠσθένησαν ἀπὸ γρίππην 124. Ποῖον εἶναι τὸ ποσοστὸν τῶν ἀσθενησάντων μαθητῶν;

5. Ἡ μαθητική μας Κοινότης ἔχει εἰς τὸ ταμεῖόν της 520 δραχμάς. Προσέφερεν εἰς τὰ πτωχὰ παιδιὰ 390 δρχ. Τί ποσοστὸν χρημάτων προσέφερε;

6. Ἕνας ἔμπορος λαχανικῶν μετέφερεν εἰς τὴν ἀγορὰν τῶν Ἀθηνῶν 400 χλγρ. τομάτας. Ἀπὸ αὐτὰς ἐπέταξε 20 χλγρ. Τί ποσοστὸν τομάτας ἐσάπισε;

7. Εἰς τὰ 408 χλγρ. γάλακτος βγαίνουν 24,48 χλγρ. βουτύρου. Τί ποσοστὸν βουτύρου βγαίνει;



ΣΥΝΘΕΤΟΣ ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΤΡΙΩΝ

Εἰς ὅσα προβλήματα ἐλύσαμεν μὲ τὴν ἀναγωγὴν εἰς τὴν μονάδα καὶ μὲ τὴν ἁπλῆν μέθοδον τῶν τριῶν συνηντήσαμεν πάντοτε δύο ποσά. Ὑπάρχουν, ὅμως, καὶ προβλήματα μὲ τρία καὶ τέσσαρα ποσά. Αὐτὰ τὰ προβλήματα τὰ λύομεν μὲ τὴν ***σύνθετον μέθοδον τῶν τριῶν.***

Κατὰ τὴν διαδικασίαν τῆς μεθόδου αὐτῆς κάμνομεν τὰς ἰδίας ἐνεργείας μὲ τὴν ἁπλῆν μέθοδον: κατάταξιν τῶν ποσῶν, σύγκρισιν καὶ εὕρεσιν τοῦ ἀγνώστου.

Ἀπαιτεῖται μόνον ὀλίγη προσοχὴ εἰς τὸν τρόπον τῆς συγκρίσεως. Ἐπειδὴ τὰ ποσὰ εἶναι περισσότερα ἀπὸ δύο, ἡ σύγκρισις θὰ γίνεται ἀνὰ δύο. Κάθε φοράν, δηλαδή, θὰ συγκρίνωμεν τὸν ἄγνωστον μὲ ἓν ἀπὸ τ' ἄλλα ποσά. Κατὰ τὴν διενέργειαν τῆς συγκρίσεως τὰ ὑπόλοιπα ποσὰ δὲν θὰ ***αὐξομειοῦνται,*** ἀλλὰ θὰ παραμένουν σταθερά. Κατόπιν θὰ πάρωμεν τὸ δεύτερον ποσὸν καὶ θὰ τὸ συγκρίνωμεν μὲ τὸν ἄγνωστον. Μὲ τὴν σειράν του τώρα τὸ πρῶτον ποσὸν θὰ παραμένῃ σταθερόν. Κατόπιν, θὰ πάρωμε τὸ τρίτον ποσόν, ἂν ὑπάρχῃ καὶ θὰ συνεχισθῇ ἡ ἰδία ἐργασία.

Ἡ σύγκρισις γίνεται, ὅπως γνωρίζομεν, διὰ νὰ διαπιστώσωμεν τὴν εὐθεῖαν, ἢ ἀντίστροφον ἀναλογίαν μεταξὺ τῶν ποσῶν. Ὅπου, λοιπόν, διαπιστώσωμεν ὅτι τὰ ποσὰ εἶναι εὐθέως ἀνάλογα, τὸ κλάσμα κατὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ ἀγνώστου, θὰ γράφεται ἀντεστραμμένον, καὶ ὅπου διαπιστώσωμεν ὅτι τὰ ποσὰ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα, τὸ κλάσμα θὰ γράφεται ὅπως εἶναι.

Προβλήματα

1. 10 ἐργάται ἐργαζόμενοι 8 ὥρας τὴν ἡμέραν τελειώνουν τὸ κτίσιμον μιᾶς οἰκοδομῆς εἰς 30 ἡμέρας. Ἂν ἦσαν 16 ἐργάται καὶ εἰργάζοντο 5 ὥρας τὴν ἡμέραν, εἰς πόσας ἡμέρας θὰ ἐτελείωνον τὸ κτίσιμον τῆς οἰκοδομῆς;

Λύσις

(Κατάταξις) $\dfrac{10 \text{ ἐργάται}}{16 \quad »}$ $\quad \dfrac{8 \text{ ὧραι}}{5 \quad »}$ $\quad \dfrac{30 \text{ ἡμέραι}}{\times\,; \quad »}$

Σύγκρισις α) 10 ἐργάται τελειώνουν τὴν ἐργασίαν εἰς 30 ἡμέρας. Διπλάσιοι ἐργάται τελειώνουν τὴν ἐργασίαν εἰς ἡμισείας ἡμ. Ἡμίσεις ἐργάται τελειώνουν τὴν ἐργασίαν εἰς διπλασίας ἡμ. — Τὰ ποσὰ ἐργάται καὶ ἡμέραι εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα.
(Πῶς θὰ γραφῇ τὸ κλάσμα;)

Σύγκρισις β) Οἱ ἐργάται ἐργαζόμενοι 8 ὥρας τὴν ἡμ. τελειώνουν εἰς 30 ἡμ. Ἂν ἐργασθοῦν ἡμισείας ὥρας τὴν ἡμ. θὰ τελ. εἰς διπλασίας ἡμέρας.
— Τὰ ποσὰ ὧραι καὶ ἡμέραι εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα.
(Πῶς θὰ γραφῇ τὸ κλάσμα;)

Ἡ σύγκρισις ἐτελείωσε. Βλέπετε ὅτι κάθε φορὰν ἐλάμβανον δύο ποσά.

Ἀφοῦ διεπιστώσαμεν ποῖαι σχέσεις ὑπάρχουν μεταξὺ τοῦ ἀγνώστου καὶ καθενὸς ἀπὸ τ'ἄλλα ποσά, προχωροῦμεν εἰς τὴν εὕρεσιν τοῦ ἀγνώστου, ὁ ὁποῖος θὰ εὑρεθῇ, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμόν, ποὺ εἶναι ἐπάνω ἀπὸ τὸ - X - ἐπὶ τὸ κλάσμα τοῦ πρώτου ποσοῦ ὅπως εἶναι (διατί;) καὶ ἐπὶ τὸ κλάσμα τοῦ δευτέρου ποσοῦ ὅπως εἶναι (διατί;).

Λύσις

Οἱ 10 ἐργ.	ἐργαζόμενοι	8	ὥρας	τελ.	εἰς 30	ἡμ.
οἱ 16 ἐργ.	»	5	ὥρας	»	» X;	»

$$\times = 30 \times \frac{10}{16} \times \frac{8}{5} = \frac{2400}{86} = \text{ἡμέραι.}$$

2. Εἰς ἓν ἐργοστάσιον ὑφαντουργίας ἐργάζονται 125 ἐργάτριαι 8 ὥρας τὴν ἡμέραν καὶ παράγουν 1250 μέτρα ὑφάσματος. Ἂν αἱ ἐργάτριαι γίνουν 180 καὶ ἐργάζωνται 6 ὥρας τὴν ἡμέραν, πόσα μέτρα ὑφάσματος θὰ παραγάγουν;

3. Διὰ τὴν κατασκευὴν τῆς ὀροφῆς ἑνὸς δωματίου ὁ ξυλουργὸς ἐχρησιμοποίησε 360 μικρὰς σανίδας μήκους 3 μ. καὶ πλάτους 0,05 μ. Ἂν αἱ σανίδες εἶχον μῆκος 4 μ. καὶ πλάτος 0,06, πόσας σανίδας θὰ ἐχρησιμοποίει;

4. Ἓν δοχεῖον ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον πλάτους 1,50 μ., ὕψους 1,20 καὶ μήκους 3 μ. χωρεῖ μέσα 5.400 χλγρ. ὕδατος. Ἂν τὸ δοχεῖον εἶχε πλάτος 1,80 μ., ὕψος 1,50 μ. καὶ μῆκος 5 μ., πόσα χλγρ. ὕδατος θὰ ἐχώρει;

5. Μία αἴθουσα τοῦ σχολείου μας ποὺ ἔχει μῆκος 9 μ. πλάτος 7 μ. καὶ ὕψος 4 μ. ἔχει χωρητικότητα 252 κυβικὰ μέτρα ἀέρος. Μία ἄλλη αἴθουσα ἔχει μῆκος 7 μ. πλάτος 5 μ. καὶ ὕψος 4 μ. Πόσην χωρητικότητα ἀέρος ἔχει;

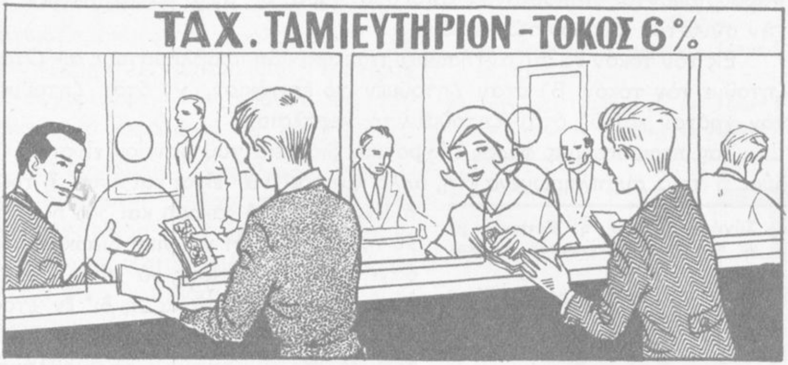
6. Διὰ νὰ πλακοστρώσωμεν τὸ δάπεδον τοῦ σχολείου μας ποὺ ἔχει μῆκος 18 μ. καὶ πλάτος 7 μ., ἐπληρώσαμεν 6.300 δραχμάς. Ἂν τὸ δάπεδον εἶχε μῆκος 54 μέτρα καὶ πλάτος 6 μέτρα, πόσα χρήματα θὰ ἐπληρώνομεν;

7. Εἰς τὸν σχολικὸν κῆπον ποὺ ἔχει μῆκος 38 μ. καὶ πλάτος 3 μ. ἐφυτεύσαμεν 456 καλλωπιστικὰ φυτά. Ἂν ὁ κῆπος εἶχε μῆκος 70 μ. καὶ πλάτος 2,50 μ. πόσα καλλωπιστικὰ φυτὰ θὰ ἐφυτεύομεν;

8. Εἰς ἓν σχολεῖον φοιτοῦν 100 μαθηταὶ καὶ διὰ τὸ συσσίτιόν των διατίθεται, ἐπὶ 10 ἡμέρας, τυρὸς βάρους 2,5 χλγρ. Εἰς ἓν ἄλλο σχολεῖον ὅπου φοιτοῦν 250 μαθηταὶ πόσος τυρὸς θὰ διατεθῇ ἐπὶ 15 ἡμέρας;

9. Τὸ φιλόπτωχον ταμεῖον τῆς ἐνορίας μας διέθεσεν εἰς 120 πτωχὰ παιδιὰ 480 μ. ὕφασμα πλάτους 0,90 μ. διὰ φορεματάκια. Ἂν διέθετεν 720 μ. ὕφασμα πλάτους 1,20 μ. εἰς πόσα πτωχὰ παιδιὰ θὰ ἐμοίραζεν ἀπὸ ἓν φόρεμα;

10. Εἰς ἓν ἐργοστάσιον, 86 ἐργάται ἐργαζόμενοι 8 ὥρας τὴν ἡμέραν παράγουν 172 κ.μ. τσιμέντου. Πόσοι ἐργάται ἐργαζόμενοι 10 ὥρας τὴν ἡμέραν θὰ παρῆγον 500 κ.μ. τσιμέντου;



ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΗΣΙΣ ΚΕΦΑΛΑΙΩΝ

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΟΚΟΥ

Ὅταν ἐνοικιάζῃ κανεὶς τὴν οἰκίαν του εἰς ἄλλον, παίρνει, ἀπὸ τὸν ἐνοικιαστήν, κάποιον κέρδος, τὸ ὁποῖον λέγεται ἐνοίκιον. Κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον, ὅταν δανείζῃ κανεὶς χρήματα εἰς ἄλλον, παίρνει ἀπὸ αὐτὸν κάποιον κέρδος, ὡς εἶδος ἐνοικίου τῶν χρημάτων, ποὺ ἐδάνεισε. Τὸ κέρδος αὐτὸ ὀνομάζεται ***τόκος***.

Ὁ τόκος ὑπολογίζεται ἐπὶ τῶν ἑκατὸν δραχμῶν καὶ δι' ἓν ἔτος. Ἂν ἕνας, π.χ., δανεισθῇ χρήματα ἀπὸ κάποιον ἄλλον, ἢ ἀπὸ τὴν Τράπεζαν, ὀφείλει νὰ συμφωνήσῃ μαζί της πόσον τόκον θὰ πληρώνῃ εἰς κάθε 100 δραχμὰς καὶ δι' ἓν ἔτος. Συνεφώνησαν, π.χ., ὅτι θὰ πληρώνῃ 10% (δέκα τοῖς ἑκατόν): ὁ τόκος τῶν 100 δραχμῶν δι' ἓν ἔτος ὀνομάζεται ***ἐπιτόκιον***.

Ὅλον τὸ ποσὸν τῶν χρημάτων ποὺ δανείζομεν, ἢ δανειζόμεθα, λέγεται ***κεφάλαιον***. Τὸ χρονικὸν διάστημα, διὰ τὸ ὁποῖον δανείζομεν, ἢ δανειζόμεθα τὰ χρήματα, λέγεται ***χρόνος***.

Πολλοὶ ἄνθρωποι συνηθίζουν νὰ καταθέτουν ὅσα χρήματα τοὺς περισσεύουν, εἰς τὸ Ταχυδρομικὸν Ταμιευτήριον, ἢ εἰς τὰς Τραπέζας. Τὸ Ταχ. Ταμιευτήριον, ἢ αἱ Τράπεζαι δίδουν εἰς τὸ τέλος τοῦ ἔτους ἕνα ὡρισμένον τόκον.

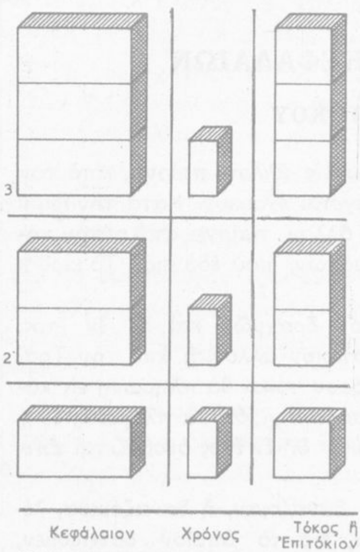
Τὰ προβλήματα ποὺ μᾶς παρουσιάζονται εἰς τὴν χρησιμοποίησιν τῶν κεφαλαίων τὰ λέγομεν ***προβλήματα τόκου***. Εἰς αὐτὰ τὰ προβλήματα παρουσιάζονται περισσότερα ἀπὸ δύο ποσά, δι' αὐτὸ θὰ τὰ λύωμεν μὲ τὴν σύνθετον μέθοδον τῶν τριῶν.

Εἰς τὸν τόκον θὰ συναντήσωμεν τέσσαρα εἴδη προβλημάτων: α) Ὅταν ζητοῦμε τὸν τόκον, β) ὅταν ζητοῦμεν τὸ ἐπιτόκιον, γ) ὅταν ζητοῦμεν τὸν χρόνον καὶ δ) ὅταν ζητοῦμεν τὸ κεφάλαιον.

Τὰς περισσοτέρας φορὰς ἡ χρονικὴ διάρκεια τοῦ δανείου εἶναι ἕν, ἢ δύο, ἢ τρία συμπληρωμένα ἔτη, ἀλλὰ ἠμπορεῖ νὰ εἶναι καὶ ἕνας, ἢ τρεῖς ἢ δέκα μῆνες, ἢ ἀκόμη καὶ 30, ἢ 60, ἢ 90 ἡμέραι κλπ. Ἡ χρονικὴ διάρκεια τοῦ δανείου μπορεῖ ἐπίσης νὰ εἶναι δι' ἓν ἔτος καὶ ὀλίγους μῆνας, ἢ δι' ἓν ἔτος, ὀλίγους μῆνας καὶ ὀλίγας ἡμέρας. Πάντως, θὰ ὑπολογίζωμεν εἰς τὰ προβλήματα ὅτι: 1 ἔτος = 12 μῆνες, 1 ἔτος = 360 ἡμέραι, 1 μὴν = 30 ἡμέραι. Ἐπίσης θὰ λαμβάνωμεν πάντοτε ὑπ' ὄψιν ὅτι ὁ τόκος τῶν 100 δραχμῶν, δηλαδὴ τὸ ἐπιτόκιον ὑπολογίζεται εἰς 1 ἔτος, ἢ εἰς 12 μῆνας, ἢ εἰς 360 ἡμέρας.

α) Σύγκρισις Τόκου ἢ Ἐπιτοκίου μὲ τὸ Κεφάλαιον (Ἄγνωστος ὁ τόκος ἢ τὸ Ἐπιτόκιον).

β) Σύγκρισις Κεφαλαίου μὲ τὸν Τόκον ἢ τὸ Ἐπιτόκιον (Ἄγνωστον τὸ Κεφάλαιον).



29. Ὅταν ζητῆται ὁ Τόκος : Κεφάλαιον καὶ Τόκος = ποσὰ εὐθέως ἀνάλογα.

Ὅταν ζητῆται τὸ Κεφάλαιον : Τόκος καὶ Κεφάλαιον = ποσὰ εὐθέως ἀνάλογα.

Ὅταν ζητῆται τὸ Ἐπιτόκιον: Κεφάλαιον καὶ Ἐπιτόκιον = ποσὰ εὐθέως ἀνάλογα.

(ΣΗΜ. Αὐξομειοῦται ὁ τόκος (τὸ ἐπιτόκιον), ἢ τὸ κεφάλαιον, ἐνῷ ὁ χρόνος παραμένει ὁ ἴδιος. Αἱ ἴδιαι ἀναλογίαι ἰσχύουν καὶ διὰ τὰ προβλήματα τῆς Ὑφαιρέσεως).

Α' Περίπτωσις:
Πῶς εὑρίσκομεν τὸν τόκον

1. Ἕνας γεωργὸς ἐπῆρεν ἀπὸ τὴν Ἀγροτικὴν Τράπεζαν καλλιεργητικὸν δάνειον 800 δρχ. πρὸς 12 %. Πόσον τόκον θὰ πληρώσῃ εἰς 3 ἔτη;

Σκέψις

Σύγκρισις: α) Εἰς τὰς 100 δραχ. εἰς 1 ἔτος δίδει τόκον 12 δρχ. εἰς τὰς 800 δρχ. εἰς 1 ἔτος δίδει τόκον 12 × 8 = 96 δρχ.

β) Ἀφοῦ εἰς 1 ἔτος δίδει τόκον 96 δρχ. εἰς 3 ἔτη δίδει τόκον 96 × 3 = 288.

Λύσις

	Κ.	Χ.	Τ.
α) Κατάταξις	100 δρχ.	1 ἔτος	12 δρχ.
	800 δρχ.	3 ἔτη	Χ; δρχ.

Ἄγνωστος εἶναι ὁ τόκος. Θὰ συγκρίνωμεν πρῶτον τὸ κεφάλαιον καὶ τὸν τόκον (ὁ χρόνος θὰ μένῃ ἴδιος). Ὕστερον θὰ συγκρίνωμεν τὸν χρόνον καὶ τὸν τόκον (τὸ κεφάλαιον θὰ μένῃ ἴδιον).

β) Σύγκρισις 1. Κεφάλαιον 100 δρχ. εἰς 1 ἔτος δίδει 12 δρχ. τόκον. Διπλάσιον κεφάλαιον εἰς 1 ἔτος δίδει διπλάσιον τόκον. Τριπλάσιον κεφάλαιον εἰς 1 ἔτος δίδει τριπλάσιον τόκον. Ἥμισυ κεφάλαιον εἰς 1 ἔτος δίδει ἥμισυν τόκον.

Ἑπομένως κεφάλαιον καὶ τόκος εἶναι ποσὰ εὐθέως ἀνάλογα. (Διατί;)

2. Κεφάλαιον 100 δρχ. εἰς 1 ἔτος δίδει 12 δρχ. τόκον. Τὸ ἴδιον κεφάλαιον εἰς 2 ἔτη δίδει διπλάσιον τόκον. Τὸ ἴδιον κεφάλαιον εἰς 3 ἔτη δίδει τριπλάσιον τόκον. Τὸ ἴδιον κεφάλαιον εἰς ἥμισυ ἔτος δίδει ἥμισυν τόκον.

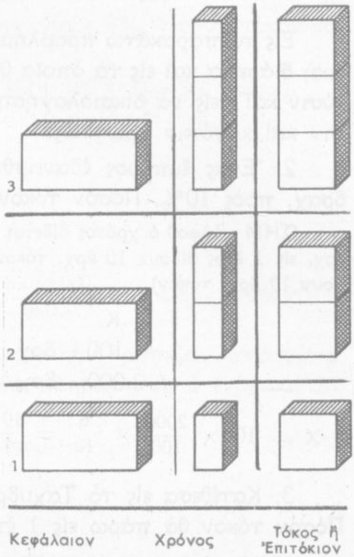
Ἑπομένως, χρόνος καὶ τόκος εἶναι ποσὰ εὐθέως ἀνάλογα. (διατί;)

γ) Εὕρεσις ἀγνώστου : Ὅταν ζητοῦμεν τὸν τόκον.

Κανών : Ἀφοῦ κεφάλαιον καὶ τόκος, καθὼς ἐπίσης χρόνος καὶ τόκος εἶναι ποσὰ εὐθέως ἀνάλογα, διὰ νὰ εὑρεθῇ ὁ ἄγνωστος ἀριθμός, θὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν ποὺ εὑρίσκεται ἐπάνω ἀπὸ τὸ -Χ- ἐπὶ τὸ κλάσμα τοῦ κεφαλαίου ἀντεστραμμένον καὶ ἐπὶ τὸ κλάσμα τοῦ χρόνου ἀντεστραμμένον.

α) Σύγκρισις Τόκου ἢ Ἐπιτοκίου μὲ τὸν Χρόνον (Ἄγνωστος ὁ Τόκος ἢ τὸ Ἐπιτόκιον).

β) Σύγκρισις Χρόνου μὲ τὸν Τόκον ἢ τὸ Ἐπιτόκιον (Ἄγνωστος Χρόνος).



30. Ὅταν ζητῆται ὁ Τόκος : Χρόνος καὶ Τόκος = ποσὰ εὐθέως ἀνάλογα.

Ὅταν ζητῆται ὁ Χρόνος : Τόκος καὶ Χρόνος = ποσὰ εὐθέως ἀνάλογα.

Ὅταν ζητῆται τὸ Ἐπιτόκιον : Χρόνος καὶ Ἐπιτόκιον = ποσὰ εὐθέως ἀνάλογα.

(ΣΗΜ. Αὐξομειοῦται ὁ Τόκος (τὸ Ἐπιτόκιον), ἢ ὁ Χρόνος, ἐνῷ τὸ Κεφάλαιον παραμένει τὸ ἴδιον.

Αἱ ἴδιαι ἀναλογίαι ἰσχύουν καὶ διὰ τὰ προβλήματα Ὑφαιρέσεως).

Ὁ κανὼν αὐτὸς ἰσχύει δι' ὅλα τὰ προβλήματα τῆς εὑρέσεως τοῦ τόκου.

Λύσις

Κ.	Χ.	Τ.
100 δρχ.	1 ἔτος	12 δρχ.
800	3 ἔτη	Χ;

$$X = 12 \times \frac{800}{100} \times \frac{3}{1} = \frac{12 \times 800 \times 3}{100 \times 1} = \frac{28800}{100} = 288 \text{ δρχ. τόκον}$$

Εἰς τὰ παρακάτω προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα θ' ἀλλάσσῃ μόνον ἡ χρονικὴ διάρκεια καὶ εἰς τὰ ὁποῖα θὰ ζητῆται ὁ τόκος, θὰ δώσωμεν μόνον τὴν λύσιν καὶ σεῖς νὰ δικαιολογήσητε τὰς ἐνεργείας μας, πρῶτον μὲ τὴν σκέψιν καὶ κατόπιν γραπτῶς.

2. Ἕνας ἔμπορος ἐδανείσθη ἀπὸ τὴν Ἐμπορικὴν Τράπεζαν 2.000 δραχ. πρὸς 10%. Πόσον τόκον θὰ δώσῃ εἰς 6 μῆνας;

(ΣΗΜ : Ἀφοῦ ὁ χρόνος δίδεται εἰς μῆνας, τότε ἀντὶ νὰ γράψωμεν ὅτι : αἱ 100 δρχ. εἰς 1 ἔτος δίδουν 10 δρχ. τόκον, θὰ γράψωμεν ὅτι : αἱ 100 δρχ. εἰς 12 μῆνας δίδουν 10 δρχ. τόκον).

Κ.	Χ.	Τ.
100 δρχ.	12 μ.	10 δρχ.
2.000 δρχ.	6 μ.	Χ;

$$X = 10 \times \frac{2000}{100} \times \frac{6}{12} = \frac{10 \times 2000 \times 6}{100 \times 12} = \frac{120.000}{1200} = 100 \text{ δρχ. τόκον.}$$

3. Κατέθεσα εἰς τὸ Ταχυδρομικὸν Ταμιευτήριον 500 δρχ. πρὸς 8%. Πόσον τόκον θὰ πάρω εἰς 1 ἔτος καὶ 6 μῆνας;

(ΣΗΜ. : 1 ἔτος 6 μῆνες = 18 μῆνες).

Λύσις

Κ.	Χ.	Τ.
100 δρχ.	12 μῆνες	8 δρχ.
500	18 μῆνες	Χ;

$$X = 8 \times \frac{500}{100} \times \frac{18}{12} = \frac{8 \times 500 \times 18}{100 \times 12} = \frac{72.000}{1200} = 60 \text{ δρχ. τόκον.}$$

4. Ἐδανείσθην ἀπὸ ἓν χρηματιστηριακὸν γραφεῖον 1500 δρχ. πρὸς 12%. Πόσον τόκον θὰ δώσω εἰς 120 ἡμέρας;

(ΣΗΜ. : Ἀφοῦ ὁ χρόνος δίδεται εἰς ἡμέρας, τότε ἀντὶ νὰ γράψωμεν : αἱ 100 δρχ. εἰς 1 ἔτος δίδουν 12 δρχ. τόκον, θὰ γράψωμεν ὅτι : αἱ 100 δρχ. εἰς 360 ἡμέρας δίδουν 12 δραχμὰς τόκον).

Λύσις

$$\begin{array}{llllll} \text{Κ.} & & \text{Χ.} & & \text{Τ.} & \\ 100 & \text{δρχ.} & 360 & \text{ἡμ.} & 12 & \text{δρχ.} \\ 1500 & \text{δρχ.} & 120 & \text{ἡμ.} & \text{Χ;} & \end{array}$$

$$\text{Χ} = 12 \times \frac{1500}{100} \times \frac{120}{360} = \frac{12 \times 1500 \times 120}{100 \times 360} = \frac{2160.000}{36.000} = 60 \text{ δρχ. τόκον.}$$

5. Κατέθεσα εἰς τὴν Τράπεζαν 1800 δρχ. πρὸς 9%. Πόσον τόκον θὰ πάρω εἰς 1 ἔτος 6 μῆνας καὶ 20 ἡμέρας;

(ΣΗΜ.: 1 ἔτος = 360 ἡμ. 6 μῆνες = 180 ἡμ. 360 + 180 + 20 = 560 ἡμέραι).

Λύσις

$$\begin{array}{llllll} \text{Κ.} & & \text{Χ.} & & \text{Τ.} & \\ 100 & \text{δρχ.} & 360 & \text{ἡμ.} & 9 & \text{δρχ.} \\ 1800 & \text{δρχ.} & 560 & \text{ἡμ.} & \text{Χ;} & \end{array}$$

$$\text{Χ} = 9 \times \frac{1800}{100} \times \frac{560}{360} = \frac{8 \times 1800 \times 560}{100 \times 360} = \frac{8.064.000}{36.000} = 224 \text{ δρχ. τόκον.}$$

6. Ἕνας κτηματίας ἐπῆρεν ἀπὸ τὴν Ἀγροτικὴν Τράπεζαν λιπάσματα ἀξίας 400 δρχ. πρὸς 12%. Πόσον τόκον θὰ πληρώσῃ εἰς 1 ἔτος καὶ 25 ἡμέρας;

(ΣΗΜ.: 1 ἔτος = 360 ἡμ. + 25 ἡμ. = 385 ἡμέραι).

Λύσις

$$\begin{array}{llllll} \text{Κ.} & & \text{Χ.} & & \text{Τ.} & \\ 100 & \text{δρχ.} & 360 & \text{ἡμ.} & 12 & \text{δρχ.} \\ 400 & & 385 & \text{ἡμ.} & \text{Χ;} & \end{array}$$

$$\text{Χ} = 12 = \frac{400}{100} \times \frac{385}{360} = \frac{12 \times 400 \times 385}{100 \times 360} = \frac{1.848.000}{36.000} = 51\frac{12}{36} = 51\frac{1}{3} = 51{,}33 \text{ δρ. τόκον.}$$

7. Κατέθεσα εἰς τὴν Τράπεζαν 1600 δρχ. πρὸς 8%. Πόσον τόκον θὰ πάρω εἰς 8 μῆνας καὶ 20 ἡμέρας;

(ΣΗΜ.: 8 μῆνες = 240 ἡμ. + 20 ἡμ. = 260 ἡμέραι).

Λύσις

$$\begin{array}{llllll} \text{Κ.} & & \text{Χ.} & & \text{Τ.} & \\ 100 & \text{δρχ.} & 360 & \text{ἡμ.} & 8 & \text{δρχ.} \\ 1600 & \text{δρχ.} & 260 & \text{ἡμ.} & \text{Χ;} & \end{array}$$

$$\text{Χ} = 8 \times \frac{1600}{100} \times \frac{260}{360} = \frac{8 \times 1600 \times 260}{100 \times 360} = \frac{3.328.000}{36.000} = 92\frac{16}{32} = 92\frac{1}{2} = 92{,}50 \text{ δρχ. τόκον.}$$

'Από τὰ ἑπτὰ προβλήματα ποὺ ἐλύσαμεν, θὰ ἐξαγάγωμεν τώρα ἕνα γενικὸν συμπέρασμα. Παρατηρήσατε ὅλα τὰ προβλήματα. Θὰ διαπιστώσετε ὅτι εἰς ὅλα ἐπολλαπλασιάσαμεν τὸ ***'Επιτόκιον*** (Ε.) ἐπὶ τὸ ***Κεφάλαιον*** (Κ.), ἐπὶ τὸν ***Χρόνον*** (Χ) καὶ διῃρέσαμεν : α) εἰς τὸ πρῶτον, ποὺ ὁ Χρόνος εἶναι εἰς ἔτη, διὰ 100, β) εἰς τὸ δεύτερον καὶ τρίτον, ποὺ ὁ Χρόνος εἶναι εἰς μῆνας, διὰ 1200, γ) καὶ εἰς τὰ τέσσαρα τελευταῖα, ποὺ ὁ Χρόνος εἶναι εἰς ἡμέρας, διὰ 36.000.

Αὐτὰ θὰ τὰ παραστήσωμεν μὲ ἕνα τύπον. ('Η τελεία, ἀνάμεσα εἰς τὰ γράμματα, ἀντικαθιστᾷ τὸ σημεῖον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ (ἐπὶ-Χ-).

α) 'Ο Χρόνος εἰς ἔτη $\quad$ β) 'Ο Χρόνος εἰς μῆνας $\quad$ γ) 'Ο Χρόνος εἰς ἡμέρας

$$T = \frac{E \cdot K \cdot X}{100} \qquad T = \frac{E \cdot K \cdot X}{1200} \qquad T = \frac{E \cdot K \cdot X}{36.000}$$

Προβλήματα

("Ολα τὰ προβλήματα νὰ λύωνται πρῶτον ἀπὸ μνήμης καὶ κατόπιν γραπτῶς).

1. "Ενας 'Εκδοτικὸς Οἶκος ἐδανείσθη ἀπὸ τὴν 'Εμπορικὴν Τράπεζαν 3.500 δρχ. πρὸς 12%. Πόσον τόκον θὰ πληρώσῃ εἰς 3 μῆνας;

2. 'Η 'Εταιρεία «Χρυσαλλὶς» κατέθεσεν εἰς τὴν 'Ιονικὴν Τράπεζαν 16.000 δρχ. πρὸς 9%. Πόσον τόκον θὰ πάρῃ εἰς 150 ἡμέρας;

3. "Ενας ὑπάλληλος τῆς 'Εθνικῆς ἐπῆρεν οἰκοδομικὸν δάνειον 20.000 δρχ. πρὸς 6%. Πόσον τόκον θὰ πληρώσῃ εἰς 5 ἔτη;

4. "Ενας δημοδιδάσκαλος ἐζήτησε δάνειον ἀπὸ τὸ Ταμεῖον 'Αλληλοβοηθείας δρχ. 4.000 πρὸς 3%. Πόσον τόκον θὰ πληρώσῃ εἰς 1 ἔτος καὶ 6 μῆνας;

5. "Ενας ἐδανείσθη ἀπὸ κάποιον τοκιστὴν 1.200 δρχ. πρὸς 18%. Πόσον τόκον θὰ πληρώσῃ εἰς 6 μῆνας ~~καὶ 20 ἡμέρας~~;

6. "Ενας μαθητὴς κατέθεσεν εἰς τὸ Ταμιευτήριον Νεότητος τῆς 'Εθνικῆς Τραπέζης δρχ. 400 πρὸς 9 %. Πόσον τόκον θὰ πάρῃ εἰς 3 ἔτη, 6 μῆνας καὶ 20 ἡμέρας; 1280

7. 'Η "Ενωσις Συνεταιρισμῶν Κιάτου ἐπέτυχε διὰ τοὺς συνεταίρους της τὴν χορήγησιν δανείου δρχ. 50.000 πρὸς 6%. Πόσον τόκον θὰ πληρώσῃ εἰς 2 ἔτη καὶ 20 ἡμέρας;

8. 'Εζήτησα οἰκοδομικὸν δάνειον ἀπὸ τὸ Ταχυδρ. Ταμιευτήριον 24.000 δρχ. πρὸς 10%. Πόσον τόκον θὰ πληρώσω εἰς 1 ἔτος καὶ 9 μῆνας;

9. "Ενας μικρέμπορος ἐδανείσθη ἀπὸ τὴν 'Εμπορικὴν Τράπεζαν 6.000 δρχ. πρὸς 12%. Πόσον τόκον θὰ πληρώσῃ εἰς 25 ἡμέρας;

10. Ἕνας ἰχθυέμπορος κατέθεσεν εἰς τὴν Τράπεζαν 3.000 δρχ. πρὸς 10%. Πόσον τόκον θὰ πάρῃ εἰς 2 μῆνας καὶ 12 ἡμέρας;

Β' Περίπτωσις. Πῶς εὑρίσκομεν τὸ Ἐπιτόκιον

(Ἴδετε σχήματα 28 καὶ 29)

Εἰς τὰ προβλήματα ποὺ ἐλύσαμεν ἕως ἐδῶ ἐζητοῦμεν τὸν Τόκον ὅλου τοῦ ποσοῦ εἰς ἓν ὡρισμένον χρονικὸν διάστημα. Τώρα θὰ ζητοῦμεν τὸν Τόκον τῶν 100 δραχμῶν εἰς 1 ἔτος, θὰ ζητοῦμεν, δηλαδή, τὸ Ἐπιτόκιον.

Ἡ διαδικασία τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος θὰ εἶναι ἡ ἰδία, ὅπως καὶ εἰς τὰ προβλήματα τῆς εὑρέσεως τοῦ Τόκου. Ἡ μόνη διαφορὰ θὰ εἶναι εἰς τὴν κατάταξιν.

1. Κατέθεσα εἰς τὸ Ταχυδρ. Ταμιευτήριον 500 δρχ. καὶ εἰς 6 μῆνας καὶ ἐπῆρα τόκον 15 δρχ. Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον ἐτοκίσθησαν τὰ χρήματα;

Σκέψις

Σύγκρισις : α) Εἰς τὰς 500 δρχ. εἰς 6 μῆνας ἐπῆρα 15 δρχ. τόκον
εἰς τὰς 100 δρχ. εἰς 6 μῆνας θὰ πάρω 3 δρχ. τόκον.

β) Εἰς τοὺς 6 μῆνας ἐπῆρα 3 δρχ. τόκον
εἰς τοὺς 12 μῆνας θὰ πάρω 6 δρχ. τόκον (6%).

Λύσις

α) Κατάταξις:

$$\begin{array}{lllll} \text{Κ.} & & \text{Χ.} & & \text{Τ.} \\ \underline{500} & \text{δρχ.} & \underline{6} & \text{μῆνες} & \underline{15} \ \text{δρχ.} \\ 100 & \text{δρχ.} & 12 & \text{μῆνες} & \text{Χ;} \end{array}$$

Ὅπως βλέπομεν, ἡ κατάταξις ἐδῶ ἤλλαξε μορφήν. Ὁλόκληρον τὸ Κεφάλαιον, ὁλόκληρος ἡ Χρονικὴ διάρκεια καὶ ὁλόκληρος ὁ Τόκος ἐγράφησαν εἰς τὸ ἐπάνω μέρος, διότι αὐτὰ εἶναι γνωστά, ἐνῷ κάτω ἀπὸ αὐτὰ ἐγράφη ὁ ἄγνωστος, ὁ ὁποῖος εἶναι ὁ τόκος τῶν 100 δραχμῶν εἰς ἓν ἔτος (ἢ 12 μῆνας, ἂν ἡ χρονικὴ διάρκεια εἶναι εἰς μῆνας, ἢ 360 ἡμέρας, ἂν ἡ χρονικὴ διάρκεια εἶναι εἰς ἡμέρας).

Ἡ σύγκρισις τῶν ποσῶν θὰ μᾶς ἀποδείξῃ ὅτι ὅλα τὰ ποσὰ εἶναι εὐθέως ἀνάλογα πρὸς τὸν τόκον. (Κάμετε τὴν σύγκρισιν).

Καὶ διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ Ἐπιτοκίου ἰσχύει ὁ ἴδιος κανὼν ποὺ ἰσχύει καὶ διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ τόκου.

"Οταν ζητοῦμεν τὸ Ἐπιτόκιον, διὰ νὰ εὑρεθῇ ὁ ἄγνωστος ἀριθμός, θὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν ποὺ εἶναι ἐπάνω ἀπὸ τὸ - Χ -, ἐπὶ τὸ κλάσμα τοῦ Κεφαλαίου ἀντεστραμμένον καὶ ἐπὶ τὸ κλάσμα τοῦ Χρόνου ἀντεστραμμένον.

Λύσις

Ἔτσι θὰ ἔχωμεν:

	Κ.	Χ.	Τ.
	500 δρχ.	6 μ.	15 δρχ.
	100 δρχ.	12 μ.	Χ; δρχ.

$$Χ = 15 \times \frac{100}{500} \times \frac{12}{6} = \frac{15 \times 100 \times 12}{50 \times 6} = \frac{18000}{3000} = 6\,\%.$$

Μὲ τὸν ἴδιον τρόπον θὰ λύσωμεν ὅλα τὰ σχετικὰ μὲ τὴν εὕρεσιν τοῦ ἐπιτοκίου προβλήματα. Ὅταν ὁ χρόνος εἶναι εἰς ἔτη, θὰ ζητοῦμεν τὸν τόκον τῶν 100 δραχ. εἰς 1 ἔτος. Ὅταν εἶναι εἰς μῆνας, θὰ ζητοῦμεν τὸν τόκον τῶν 100 δραχ. εἰς 12 μῆνας. Καὶ ὅταν εἶναι εἰς ἡμέρας, θὰ ζητοῦμεν τὸν τόκον τῶν 100 δραχ. εἰς 360 ἡμέρας.

Ἂς δώσωμεν, τώρα, τὸν τύπον, πῶς νὰ λύωμεν αὐτὰ τὰ προβλήματα. Παρατηρήσατε τὸ πρόβλημα: Ἐπολλαπλασιάσαμεν τὸν Τόκον ἐπὶ 1200 (διότι ὁ χρόνος ἦτο εἰς μῆνας) καὶ διῃρέσαμεν διὰ τοῦ Κεφαλαίου ἐπὶ τὸν Χρόνον.

Ὁ τύπος εἶναι ὁ ἑξῆς:

α) Ὁ χρόνος εἰς ἔτη $Ε = \frac{Τ \cdot 100}{Κ \cdot Χ}$

β) Ὁ χρόνος εἰς μῆνας $Ε = \frac{Τ \cdot 1200}{Κ \cdot Χ}$

γ) Ὁ χρόνος εἰς ἡμέρας $Ε = \frac{Τ \cdot 36000}{Κ \cdot Χ}$

Προβλήματα

(Νὰ λυθοῦν πρῶτον μὲ τὴν σκέψιν καὶ ὕστερον γραπτῶς)

1. Ἡ Ἀγροτικὴ Τράπεζα ἐκοινοποίησεν εἰς τοὺς ὀφειλέτας της νὰ ἐξοφλήσουν τὸν τόκον τῶν καλλιεργητικῶν δανείων ποὺ εἶχον πάρει κατὰ τὸν τελευταῖον καιρόν.

α) Α΄ Ὀφειλέτης δάνειον 700 δραχμῶν διὰ 9 μῆνας, θὰ πληρώσῃ τόκον 42 δρχ. Πρὸς πόσον τοῖς ἑκατὸν ὑπελογίσθη τὸ ἐπιτόκιον;

β) Β΄ Ὀφειλέτης δάνειον 640 δραχμῶν διὰ 1 ἔτος καὶ 3 μῆνας, θὰ πληρώσῃ τόκον 80 δρχ. Πόσον ἦτο τὸ ἐπιτόκιον;

γ) Γ' 'Οφειλέτης δάνειον 960 δραχμῶν διὰ 9 μῆνας καὶ 15 ἡμέρας, θὰ πληρώσῃ τόκον 91,20 δρχ. Ποῖον ἦτο τὸ ἐπιτόκιον;

δ) Δ' 'Οφειλέτης δάνειον 1200 δραχμῶν δι' 1 ἔτος, 4 μῆνας καὶ 20 ἡμέρας, θὰ πληρώσῃ τόκον 168 δρχ. Πρὸς πόσον τοῖς ἑκατὸν ὑπελογίσθη τὸ ἐπιτόκιον;

ε) Ε' 'Οφειλέτης δάνειον 900 δραχμῶν δι' 1 ἔτος καὶ 10 μῆνας, θὰ πληρώσῃ τόκον 132 δρχ. Ποῖον ἦτο τὸ ἐπιτόκιον;

στ) ΣΤ' 'Οφειλέτης δάνειον 500 δραχμῶν διὰ 2 ἔτη, θὰ πληρώσῃ τόκον 120 δρχ. Πόσον ἦτο τὸ ἐπιτόκιον;

Γ' Περίπτωσις : Πῶς εὑρίσκομεν τὸν Χρόνον

1. Ἕνας ἔμπορος ἐδανείσθη ἀπὸ τὴν Τράπεζαν 600 δραχμὰς πρὸς 12%. Εἰς πόσον χρόνον θὰ πληρώσῃ τόκον 144 δραχμάς;

Σκέψις

Σύγκρισις : α) Εἰς τὰς 100 δρχ. εἰς 1 ἔτος δίδει 12 δρχ. τόκον. Εἰς τὰς 600 δρχ. εἰς 1 ἔτος δίδει 72 δρχ. τόκον.

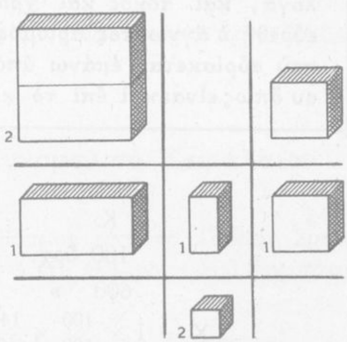
β) 'Αφοῦ εἰς 1 ἔτος δίδει 72 δραχ. τόκον, διὰ νὰ πληρώσῃ 144 δραχ. θὰ εἰπῇ ὅτι ἐπέρασαν 144:72=2 ἔτη.

Λύσις

	Κ.	Χ.	Τ.
α) Κατάταξις:	100 δρχ.	1 ἔτος	12 δρχ.
	600 »	Χ;	144 »

Ἄγνωστος εἶναι ὁ χρόνος. Θὰ συγκρίνωμεν πρῶτον τὸ Κεφάλαιον καὶ τὸν Χρόνον (ὁ Τόκος θὰ μένῃ ἴδιος). Ὕστερον θὰ συγκρίνωμεν τὸν Τόκον καὶ τὸν Χρόνον (τὸ Κεφάλαιον θὰ μένῃ ἴδιον).

Σύγκρισις Κεφαλαίου μὲ τὸν Χρόνον (Ἄγνωστος ὁ Χρόνος).



Κεφάλαιον Χρόνος Τόκος

31. Ὅταν ζητῆται ὁ Χρόνος : Χρόνος καὶ Κεφάλαιον εἶναι ποσὰ ἀντιστρόφως ἀνάλογα.

(ΣΗΜ. Αὐξομειοῦται ὁ Χρόνος, ἐνῷ ὁ Τόκος παραμένει ὁ ἴδιος.

Αἱ ἴδιαι ἀναλογίαι ἰσχύουν καὶ διὰ τὰ προβλήματα τῆς Ὑφαιρέσεως).

β) Σύγκρισις : 1. Αἱ 100 δραχμαὶ εἰς 1 ἔτος μᾶς δίδουν 12 δραχ. τόκον.

— Διπλάσιαι δραχμαί, διὰ νὰ μᾶς δώσουν τὸν ἴδιον τόκον, πρέπει νὰ περάσῃ ἥμισυς χρόνος.

— Τριπλάσιαι δραχμαί, διὰ νὰ μᾶς δώσουν τὸν ἴδιον τόκον, πρέπει νὰ περάσῃ τὸ ἓν τρίτον τοῦ χρόνου.

—Ἡμίσειαι δραχμαὶ διὰ νὰ μᾶς δώσουν τὸν ἴδιον τόκον, πρέπει νὰ περάσῃ διπλάσιος χρόνος.

—Ἑπομένως : Κεφάλαιον καὶ Χρόνος εἶναι ποσὰ ἀντιστρόφως ἀνάλογα. (Διατί;)

2. Αἱ 100 δραχμαὶ εἰς 1 ἔτος μᾶς δίδουν 12 δραχμὰς τόκον.
Αἱ 100 δραχμαὶ εἰς διπλάσια ἔτη μᾶς δίδουν διπλάσιον τόκον.
Αἱ 100 δραχμαὶ εἰς τριπλάσια ἔτη μᾶς δίδουν τριπλάσιον τόκον.
Αἱ 100 δραχμαὶ εἰς ἡμίση ἔτη μᾶς δίδουν ἥμισυν τόκον.

—Ἑπομένως Τόκος καὶ Χρόνος εἶναι ποσὰ εὐθέως ἀνάλογα. (Διατί;)

γ) Εὕρεσις ἀγνώστου : Ὅταν ζητοῦμεν τὸν χρόνον.

Κανών : Ἀφοῦ κεφάλαιον καὶ χρόνος εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα, καὶ τόκος καὶ χρόνος εἶναι εὐθέως ἀνάλογα, διὰ νὰ εὑρεθῇ ὁ ἄγνωστος ἀριθμός, θὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν ποὺ εὑρίσκεται ἐπάνω ἀπὸ τὸ -Χ- ἐπὶ τὸ κλάσμα τοῦ Κεφαλαίου ὅπως εἶναι καὶ ἐπὶ τὸ κλάσμα τοῦ Τόκου ἀντεστραμμένον.

Λύσις

Κ.	Χ.	Τ.
100 δρχ.	1 ἔτος	12 δρχ.
600 »	Χ; ἔτη	144 »

$$X = 1 \times \frac{100}{600} \times \frac{144}{12} = \frac{1 \times 100 \times 144}{600 \times 12} = \frac{14.400}{7.200} = 2 \text{ ἔτη}$$

Προσέξατε τώρα νὰ εὕρωμεν τὸν τύπον αὐτῶν τῶν προβλημάτων. Τί ἐκάμαμεν; Ἐπολλαπλασιάσαμεν τὸ 100 ἐπὶ τὸν Τόκον καὶ διῃρέσαμεν διὰ τοῦ Κεφαλαίου ἐπὶ τὸ Ἐπιτόκιον. (Τὸ 1 δὲν τὸ ἀναφέρομεν, διότι πολλαπλασιασμὸς ἐπὶ 1 δὲν αὐξάνει τὸ γινόμενον).

Ὁ τύπος, λοιπόν, τῆς εὑρέσεως τοῦ Χρόνου εἶναι :

$$X = \frac{100 \cdot T}{K \cdot E}$$

Προβλήματα

(Νὰ λυθοῦν ἀπὸ μνήμης καὶ κατόπιν γραπτῶς).

1. Τὸ Ταχυδρομικὸν Ταμιευτήριον εἰδοποίησε τοὺς ἑξῆς καταθέτας του νὰ προσέλθουν, διὰ νὰ πάρουν τοὺς τόκους τῶν χρημάτων ποὺ εἶχον καταθέσει πρὸς 10%.

α) Α΄ Καταθέτης μὲ κατάθεσιν 485 δραχ. νὰ πάρῃ τόκους 97 δραχ. Διὰ πόσα ἔτη ἦσαν οἱ τόκοι αὐτοί;

β) Β΄ Καταθέτης μὲ κατάθεσιν 580 δραχ. νὰ πάρῃ τόκους 29 δραχ. Διὰ πόσα ἔτη ἦσαν οἱ τόκοι αὐτοί;

γ) Γ΄ Καταθέτης μὲ κατάθεσιν 1.120 δρχ. νὰ πάρῃ τόκους 295 δρχ. Διὰ πόσα ἔτη ἦσαν οἱ τόκοι αὐτοί;

δ) Δ΄ Καταθέτης μὲ κατάθεσιν 596 δρχ. νὰ πάρῃ τόκους 178,80 δρχ. Διὰ πόσα ἔτη ἦσαν οἱ τόκοι αὐτοί;

ε) Ε΄ Καταθέτης μὲ κατάθεσιν 680 δρχ. νὰ πάρῃ τόκους 68 δρχ. Διὰ πόσα ἔτη ἦσαν οἱ τόκοι αὐτοί;

στ) ΣΤ΄ Καταθέτης μὲ κατάθεσιν 420 δρχ. νὰ πάρῃ τόκους 238 δρχ. Διὰ πόσα ἔτη ἦσαν οἱ τόκοι αὐτοί;

ζ) Ζ΄ Καταθέτης μὲ κατάθεσιν 750 δρχ. νὰ πάρῃ τόκους 25 δρχ. Διὰ πόσα ἔτη ἦσαν οἱ τόκοι αὐτοί;

Δ΄ Περίπτωσις : Πῶς εὑρίσκομεν τὸ Κεφάλαιον

1. Ἕνας συμβολαιογράφος ἐπῆρε δάνειον ἀπὸ τὸ Ταμεῖον Συντάξεων Νομικῶν πρὸς 8% καὶ ἔπειτα ἀπὸ 5 ἔτη ἐπλήρωσε 200 δρχ. τόκον. Πόσον κεφάλαιον εἶχε δανεισθῆ;

Σκέψις

Σύγκρισις : α) Εἰς τὰ 5 ἔτη ἐπλήρωσε τόκον 200 δρχ.
Εἰς τὸ 1 ἔτος θὰ πληρώσῃ τόκον 200 : 5 = 40 δρχ.

β) Ἀφοῦ 8 δρχ. τόκον πληρώνῃ, εἰς 1 ἔτος, εἰς τὰς 100 δρχ. 40 δρχ. τόκον τὰς πληρώνει, εἰς 1 ἔτος, εἰς πενταπλάσιον κεφάλαιον : 100 × 5 = 500 δρχ. Αὐτὸ εἶναι τὸ κεφάλαιον ποὺ εἶχε δανεισθῆ.

Λύσις

	Κ.	Χ.	Τ.
α) Κατάταξις :	100 δρ.	1 ἔτος	8 δρ.
	Χ ;	5 ἔτη	200 »

Ἄγνωστον εἶναι τὸ Κεφάλαιον. Θὰ συγκρίνωμεν πρῶτον τὸ Κεφάλαιον καὶ τὸν Τόκον (ὁ Χρόνος θὰ μένῃ ἴδιος). Ὕστερον θὰ συγκρίνωμεν τὸ Κεφάλαιον καὶ τὸν Χρόνον (ὁ Τόκος θὰ μένῃ ἴδιος).

β) Σύγκρισις : 1. Εἰς 1 ἔτος αἱ 100 δρχ. μᾶς δίδουν τόκον 8 δρχ.

— Εἰς 1 ἔτος διπλάσιον κεφάλαιον μᾶς δίδει διπλάσιον τόκον.

— Σὲ 1 ἔτος ἥμισυ κεφάλαιον μᾶς δίδει ἥμισυν τόκον.

— Ἑπομένως : κεφάλαιον καὶ τόκος εἶναι ποσὰ εὐθέως ἀνάλογα. (Διατί;)

2. Αἱ 100 δρχ. εἰς 1 ἔτος μᾶς δίδουν τόκον 8 δρχ.

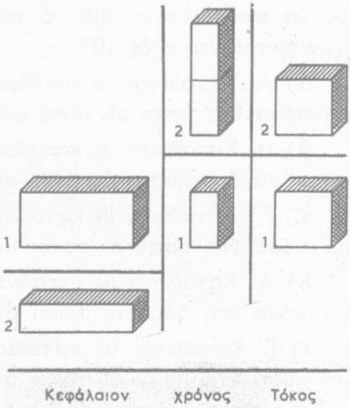
— Διὰ νὰ δώσω τὸν ἴδιον τόκον εἰς 2 ἔτη πρέπει νὰ δανεισθῶ ἥμισυ κεφάλαιον.

— Διὰ νὰ δώσω τὸν ἴδιον τόκον εἰς ἥμισυ ἔτος πρέπει νὰ δανεισθῶ διπλάσιον κεφάλαιον.

— Ἑπομένως κεφάλαιον καὶ χρόνος εἶναι ποσὰ ἀντιστρόφως ἀνάλογα. (Διατί;)

γ) Εὕρεσις ἀγνώστου : Ὅταν ζητοῦμεν τὸ Κεφάλαιον.

Σύγκρισις Χρόνου μὲ τὸ Κεφάλαιον (Ἄγνωστον τὸ Κεφάλαιον).



32. Ὅταν ζητῆται τὸ Κεφάλαιον : Κεφάλαιον καὶ Χρόνος εἶναι ποσὰ ἀντιστρόφως ἀνάλογα.

(ΣΗΜ. Αὐξομειοῦται τὸ Κεφάλαιον, ἐνῷ ὁ Τόκος παραμένει ὁ ἴδιος.

(Αἱ ἴδιαι ἀναλογίαι ἰσχύουν καὶ διὰ τὰ προβλήματα τῆς Ὑφαιρέσεως).

> **Κανών : Ἀφοῦ κεφάλαιον καὶ τόκος εἶναι εὐθέως ἀνάλογα καὶ κεφάλαιον καὶ χρόνος ἀντιστρόφως ἀνάλογα, διὰ νὰ εὑρεθῇ ὁ ἄγνωστος ἀριθμός, θὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν ποὺ εὑρίσκεται ἐπάνω ἀπὸ τὸ -Χ- ἐπὶ τὸ κλάσμα τοῦ χρόνου ὅπως εἶναι καὶ ἐπὶ τὸ κλάσμα τοῦ τόκου ἀντεστραμμμένον.**

Λύσις

Κ.		Χ.		Τ.
100	δρχ.	1	ἔτος	8
Χ;	δρχ.	5	ἔτη	200

$$X = 100 \times \frac{1}{5} \times \frac{200}{8} = \frac{100 \times 1 \times 200}{5 \times 8} = \frac{20.000}{40} = 500 \text{ δρχ. κεφάλαιον.}$$

Ἄς εὕρωμεν τώρα τὸν τύπον αὐτῶν τῶν προβλημάτων. Τί ἐκάμαμεν; Ἐπολλαπλασιάσαμεν τὸ 100 ἐπὶ 1 ἐπὶ τὸν Τόκον, καὶ διῃρέσαμεν διὰ τοῦ Χρόνου ἐπὶ τὸ Ἐπιτόκιον. Ὅταν ὁ Χρόνος εἶναι εἰς μῆνας, τότε θὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ $100 \times 12 = 1200$ ἐπὶ τὸν Τόκον καὶ θὰ διαιρέσωμεν διὰ τοῦ Χρόνου ἐπὶ τὸ Ἐπιτόκιον. Ὅταν ὁ χρόνος εἶναι εἰς ἡμέρας, τότε θὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ $100 \times 360 = 36.000$ ἐπὶ τὸν Τόκον καὶ θὰ διαιρέσωμεν διὰ τοῦ Χρόνου ἐπὶ τὸ Ἐπιτόκιον.

Ὁ τύπος εἶναι ὁ ἑξῆς :

α) Ὁ χρόνος εἰς ἔτη
$$K = \frac{100 \cdot T}{X \cdot E}$$

β) Ὁ χρόνος εἰς μῆνας
$$K = \frac{1200 \cdot T}{X \cdot E}$$

γ) Ὁ χρόνος εἰς ἡμέρας
$$K = \frac{36.000 \cdot T}{X \cdot E}$$

Προβλήματα

1. Ποῖον εἶναι τὸ κεφάλαιον ποὺ ἐδανείσθη ἀπὸ τὴν Τράπεζαν ἕνας ἔμπορος πρὸς 12% καὶ ἐπλήρωσε εἰς 3 μῆνας τόκον 120 δρχ.;

2. Ποῖον κεφάλαιον ἐδανείσθην ἀπὸ τὸ Μετοχικὸν Ταμεῖον πρὸς 10% καὶ ἐπλήρωσα εἰς 1 ἔτος καὶ 6 μῆνας τόκον 37,50 δρχ.;

3. Ποῖον κεφάλαιον ἐδανείσθη ἕνας διδάσκαλος ἀπὸ τὸ Ταμεῖον Ἀλληλοβοηθείας πρὸς 4% καὶ ἐπλήρωσεν ἔπειτα ἀπὸ 3 μῆνας καὶ 15 ἡμέρας 35 δρχ. τόκον;

4. Ποῖον κεφάλαιον ἐδανείσθη ἀπὸ τὴν Τράπεζαν ἕνας παραγωγὸς πρὸς 12% καὶ ἐπλήρωσε μετὰ 1 ἔτος 6 μῆνας καὶ 20 ἡμέρας 560 δραχμὰς τόκον;

5. Ποῖον κεφάλαιον κατέθεσα εἰς τὸ Ταχυδρ. Ταμιευτήριον πρὸς 8% καὶ εἰσέπραξα μετὰ 4 ἔτη 256 δρχ. τόκον;

6. Ποῖον κεφάλαιον κατετέθη διὰ μίαν ἄπορον κορασίδα πρὸς 8% καὶ εἰς 10 ἔτη θὰ εἰσπράξῃ τόκον 1600 δρχ.;

7. Ποῖον εἶναι τὸ κεφάλαιον ποὺ κατετέθη εἰς τὸ Ταμιευτήριον Νέων τῆς Ἐθνικῆς Τραπέζης πρὸς 8% καὶ εἰς 5 ἔτη καὶ 6 μῆνας θὰ δώσῃ τόκον 1320 δραχμάς;

150
20
3000

12
5
60

1320 | 66
=00 | 20

ΥΦΑΙΡΕΣΙΣ

('Ισχύουν αἱ ἴδιαι συγκρίσεις ποὺ ἔγιναν διὰ τὰ προβλήματα τόκου. Συμβουλευθῆτε τὰ σχήματα 29, 30, 31 καὶ 32)

Εἰς τὸ ἐμπόριον, ὅσοι ἔχουν οἰκονομικὴν εὐχέρειαν, πληρώνουν ἀμέσως τὰ ἐμπορεύματα ποὺ ἀγοράζουν. Ὅσοι ὅμως δυσκολεύονται νὰ ἐξοφλήσουν τὸν λογαριασμὸν ἐκείνην τὴν στιγμήν, ὑπογράφουν γραμμάτιον, ἢ συναλλαγματικήν, εἰς τὴν ὁποίαν δίδουν τὴν ὑπόσχεσιν ὅτι εἰς ὡρισμένον χρονικὸν διάστημα θὰ ἐξοφλήσουν τὸ ποσόν. Εἶναι ὅμως ὑποχρεωμένοι νὰ πληρώσουν καὶ τὸν τόκον τῶν χρημάτων.

Ἄς δώσωμεν ἓν παράδειγμα :

Ἕνας ἐκδότης βιβλίων ἠγόρασεν εἰς τὰς 20 Ἀπριλίου 1960 ἀπὸ ἕνα χαρτέμπορον τυπογραφικὸν χάρτην ἀξίας 3.000 δραχμῶν. Δὲν ἐπλήρωσεν, ὅμως, ἀμέσως τὴν ἀξίαν τοῦ τυπογραφικοῦ χάρτου καὶ ὑπεσχέθη νὰ τὴν πληρώσῃ μετὰ 6 μῆνας, δηλαδὴ εἰς τὰς 20 Ὀκτωβρίου 1960 καὶ μὲ τόκον 12%.

Προτοῦ συντάξουν τὸ γραμμάτιον, ἢ τὴν συναλλαγματικήν, ὑπελόγισαν πόσος τόκος ἀναλογεῖ εἰς τὰς 3.000 δρχ. πρὸς 12% διὰ 6 μῆνας καὶ εὗρον ὅτι εἶναι 180 δραχμαί. Ὁ τόκος αὐτὸς προσετέθη εἰς τὸ κεφάλαιον καὶ ἔγινε : 3.000 + 180 = 3.180.

Διὰ τὸ ποσὸν αὐτὸ θὰ συνταχθῇ τὸ γραμμάτιον, τὸ ὁποῖον ἔχει τὸν ἑξῆς τύπον :

'Εν 'Αθήναις τῇ 20ῇ 'Απριλίου 1960

Διὰ δραχμὰς 3.180

Μετὰ 6 μῆνας ἀπὸ σήμερον ὑπόσχομαι καὶ ὑποχρεοῦμαι νὰ πληρώσω εἰς τὸν κ. Π...., ἢ εἰς διαταγήν του, τρεῖς χιλιάδας ἑκατὸν ὀγδοήκοντα δραχμὰς (3.180), τὰς ὁποίας ἔλαβον παρ' αὐτοῦ εἰς ἐμπορεύματα.

'Υπογραφή

Λῆξις 20 'Οκτωβρίου 1968 Ε. Κ. ΖΑΦΕΙΡΙΟΥ

Τὸ ποσὸν ποὺ ἀναγράφεται εἰς τὸ γραμμάτιον λέγεται ***'Ονομαστικὴ ἀξία*** τοῦ γραμματίου. 'Η ἡμερομηνία κατὰ τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ πληρωθῇ τὸ γραμμάτιον λέγεται **λῆξις** τοῦ γραμματίου.

Τὰς περισσοτέρας, ὅμως, φορὰς ὁ δανειστὴς εὑρίσκεται εἰς τὴν ἀνάγκην νὰ προεξοφλήσῃ τὸ γραμμάτιον εἰς καμμίαν Τράπεζαν καὶ νὰ πάρῃ τὰ χρήματα. 'Η Τράπεζα τὸ προεξοφλεῖ, ἀλλὰ κρατεῖ ἓν ποσοστὸν 6%, ἢ 8%, ἢ 10%, δι' ἰδικόν της κέρδος, τὸ ὁποῖον ἀφαιρεῖ ἀπὸ τὴν ὀνομαστικὴν ἀξίαν τοῦ γραμματίου.

'Ο τόκος τῆς ὀνομαστικῆς ἀξίας τοῦ γραμματίου ὀνομάζεται ***ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις***, καὶ τὸ ποσὸν ποὺ ἀπομένει, μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν αὐτοῦ τοῦ τόκου, λέγεται ***πραγματικὴ ἀξία*** τοῦ γραμματίου.

Προεξόφλησις γραμματίου

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ παραπάνω γραμμάτιον τὸ ἐπῆγεν ὁ κ. Π... εἰς τὴν Τράπεζαν πρὸς προεξόφλησιν 4 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του. 'Η Τράπεζα τὸ προεξώφλησε καὶ ἐκράτησεν ἐξωτερικὴν ὑφαίρεσιν (ἢ τόκον ὅπως ἄλλως θὰ τὴν ἐλέγομεν) 8%. Πόσην ἐξωτερικὴν ὑφαίρεσιν ἐκράτησεν ἡ Τράπεζα καὶ ποῖον εἶναι τὸ ποσὸν τῆς πραγματικῆς ἀξίας, ποὺ ἔδωσεν εἰς τὸν κ. Π.;

Λύσις

'Ον. 'Αξ.	Χ.	'Εξ. 'Υφ.
100 δρχ.	12 μ.	8 δρχ.
3.100 δρχ.	4 μ.	Χ;

'Η κατάταξις τῶν ποσῶν, ἡ σύγκρισις καὶ ἡ εὕρεσις τοῦ ἀγνώστου ἀκολουθοῦν τὴν ἰδίαν διαδικασίαν ποὺ ἀκολουθοῦν καὶ τὰ προβλήματα τοῦ τόκου. Τὸ Κεφάλαιον τώρα λέγεται Ὀνομαστικὴ Ἀξία, ὁ Χρόνος παραμένει Χρόνος καὶ ὁ Τόκος λέγεται Ἐξωτερικὴ Ὑφαίρεσις.

Ἂν εἰς ἓν πρόβλημα εἶναι ἄγνωστος ἡ ἐξωτερικὴ Ὑφαίρεσις, τὸ πρόβλημα θὰ λυθῇ ὅπως καὶ τὰ προβλήματα τοῦ Τόκου εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται ὁ Τόκος. (Ἐπαναλάβατε τὸν κανόνα καὶ συντάξατε νέον).

Ἂν εἶναι ἄγνωστον τὸ Ἐπιτόκιον, τὸ πρόβλημα θὰ λυθῇ ὅπως καὶ τὰ προβλήματα τοῦ Τόκου, εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται τὸ Ἐπιτόκιον. (Ἐπαναλάβατε τὸν κανόνα καὶ συντάξατε νέον).

Ἂν εἶναι ἄγνωστος ἡ Ὀνομαστικὴ Ἀξία, τὸ πρόβλημα θὰ λυθῇ ὅπως καὶ τὰ προβλήματα τοῦ Τόκου, εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται τὸ Κεφάλαιον. (Ἐπαναλάβατε τὸν κανόνα καὶ συντάξατε νέον).

Ὑπάρχει καὶ ἄλλο εἶδος ὑφαιρέσεως, ποὺ λέγεται ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις. Αὐτὴ εἶναι δυσκολωτέρα, ἀλλὰ δικαιοτέρα. Οἱ ἔμποροι, ὅμως, προτιμοῦν δι' εὐκολίαν τὴν ἐξωτερικὴν ὑφαίρεσιν. Μὲ αὐτὴν θὰ λύωμεν καὶ ἡμεῖς τὰ σχετικὰ προβλήματα.

Καὶ τώρα ἐπανερχόμεθα εἰς τὸ πρόβλημά μας.

Ζητεῖται ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις.

Τὰ ποσὰ ὀνομαστικὴ ἀξία καὶ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις εἶναι εὐθέως ἀνάλογα. (Κάμετε τὴν σύγκρισιν).

Τὰ ποσὰ Χρόνος καὶ Ἐξωτερικὴ Ὑφαίρεσις εἶναι ἐπίσης εὐθέως ἀνάλογα. (Κάμετε τὴν σύγκρισιν).

Ἑπομένως: $X = 8 \times \frac{3180}{100} \times \frac{4}{12} = \frac{8 \times 3180 \times 4}{100 \times 12} = \frac{101760}{1200} = 84{,}80$ δρχ.

Ἀπὸ τὴν Ὀνομαστικὴν ἀξίαν 3180 δρχ. ἀφαιροῦμεν τὴν ἐξωτ. ὑφαίρεσιν 84,80 δρχ. καὶ ἔχομεν πραγματικὴν ἀξίαν 3.095,20 δρχ. Αὐτὸ τὸ ποσὸν θὰ πάρῃ εἰς τὰς χεῖρας του, κατὰ τὴν προεξόφλησιν τοῦ γραμματίου, ὁ κ. Π.

Προβλήματα

1. Γραμμάτιον ὀνομαστικῆς ἀξίας 460 δρχ. προεξωφλήθη 5 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 10%. Πόση εἶναι ἡ ἐξωτερική του ὑφαίρεσις;

2. Γραμμάτιον ὀνομαστικῆς ἀξίας 315 δρχ. προεξωφλήθη πρὸς 8% καὶ ἔδωσεν ἐξωτερικὴν ὑφαίρεσιν 8,40 δρχ. Πόσον χρόνον πρὸ τῆς λήξεώς του ἔγινεν ἡ προεξόφλησις;

3. Ἓν γραμμάτιον προεξωφλήθη, πρὸς 12%, 7 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του καὶ ἔδωσεν ἐξωτερικὴν ὑφαίρεσιν 42 δρχ. Πόση ἦτο ἡ ὀνομαστική του ἀξία;

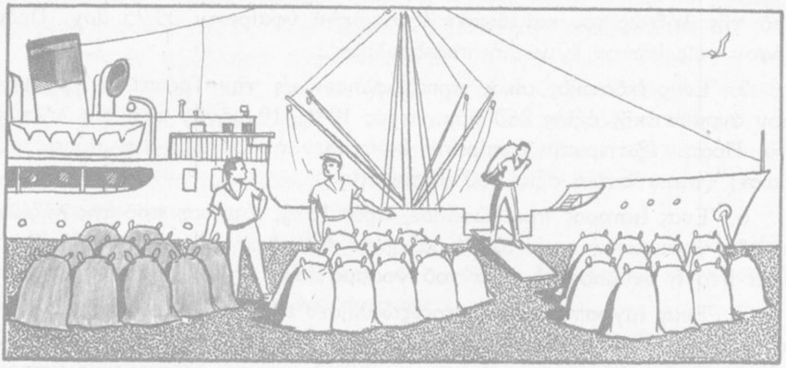
4. Γραμμάτιον ὀνομαστικῆς ἀξίας 450 δρχ. προεξωφλήθη 9 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του καὶ ἔδωσεν ἐξωτερικὴν ὑφαίρεσιν 33,75 δρχ. Πρὸς πόσον τοῖς ἑκατὸν ἔγινεν ἡ προεξόφλησις:

5. Ἕνας ἐκδοτικὸς οἶκος προεξώφλησεν εἰς τὴν Τράπεζαν γραμμάτιον ὀνομαστικῆς ἀξίας 860 δρχ., πρὸς 12%, 10 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του. Πόσην ἐξωτερικὴν ὑφαίρεσιν ἐκράτησεν ἡ Τράπεζα καὶ πόσα τοῦ ἔδωσε; (πραγματικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου).

6. Ἕνας ἔμπορος προεξώφλησε, πρὸς 15%, 3 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του ἓν γραμμάτιον καὶ τοῦ ἐκράτησαν ἐξωτερικὴν ὑφαίρεσιν 75 δρχ. Ποία ἦτο ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου;

7. Ἕνας ἐργοστασιάρχης προεξώφλησεν εἰς τὴν Τράπεζαν ἓν γραμμάτιον ὀνομαστικῆς ἀξίας 4.500 δρχ. 6 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του καὶ τοῦ ἐκράτησαν ἐξωτερικὴν ὑφαίρεσιν 225 δρχ. Πρὸς πόσον τοῖς ἑκατὸν ἔγινεν ἡ προεξόφλησις;

8. Ἕνας τυπογράφος προεξώφλησεν εἰς τὴν Τράπεζαν γραμμάτιον ὀνομαστικῆς ἀξίας 750 δρχ. πρὸς 12% καὶ τοῦ ἐκράτησαν ἐξωτερικὴν ὑφαίρεσιν 37,50 δρχ. Πόσον χρόνον πρὸ τῆς λήξεώς του προεξωφλήθη τὸ γραμμάτιον;



ΣΥΝΕΤΑΙΡΙΣΜΟΙ

Εἰς τὴν σημερινὴν δύσκολον ἐποχήν, οἱ περισσότεροι ἄνθρωποι καὶ ἰδιαιτέρως οἱ ἐργαζόμενοι, οἱ ὑπάλληλοι, οἱ παραγωγοὶ ἱδρύουν συνεταιρισμούς, διὰ νὰ διευκολυνθοῦν εἰς τὴν εὕρεσιν τῆς ἐργασίας, ἢ διὰ νὰ προμηθευθοῦν τρόφιμα, ὑπόδησιν καὶ εὐθηνὸν ρουχισμόν, ἢ διὰ νὰ διαθέσουν εἰς ἱκανοποιητικὰς τιμὰς τὰ προϊόντα των, νὰ προμηθευθοῦν λιπάσματα, νὰ συνάψουν δάνεια.

Τὰ μέλη κάθε συνεταιρισμοῦ λέγονται ***συνεταῖροι.*** Τὸ κέρδος ἀπὸ τὴν ἐργασίαν των, ἢ ἀπὸ τὰ εἴδη ποὺ ἐπρομηθεύθησαν, ἢ ἀπὸ τὰ προϊόντα ποὺ διέθεσαν, λέγεται ***μερίδιον*** ἢ ***μέρισμα*** καὶ μοιράζεται ἀναλόγως εἰς κάθε συνεταῖρον.

Τὰ προβλήματα ποὺ παρουσιάζονται εἰς τὰς παραπάνω περιπτώσεις λύονται μὲ τὴν ***μέθοδον τοῦ μερισμοῦ εἰς μέρη ἀνάλογα.***

Ἂς λύσωμεν μερικὰ προβλήματα :

1. Τέσσαρες ξυλουργοὶ ἵδρυσαν ἕνα συνεταιρισμόν. Τὴν περασμένην ἑβδομάδα εἰργάσθησαν, ὁ πρῶτος 48 ὥρας, ὁ δεύτερος 36 ὥρας, ὁ τρίτος 42 ὥρας καὶ ὁ τέταρτος 32 ὥρας. Εἰσέπραξαν ἀπὸ τὰς ξυλουργικὰς των ἐργασίας 1.264 δρχ. Τί ποσὸν ἀναλογεῖ εἰς κάθε συνεταῖρον;

Σκέψις

1. Ἂν οἱ τέσσαρες ξυλουργοὶ εἰργάζοντο τὰς ἰδίας ὥρας ὁ καθείς, τότε δὲν θὰ ὑπῆρχε καμμία δυσκολία εἰς τὴν κατανομὴν τοῦ ποσοῦ. Θὰ διῃρούσαμεν τὸ ποσὸν διὰ 4 καὶ ὁ καθεὶς θὰ ἔπαιρνεν ἀπὸ ἓν τέταρτον.

Ἀλλὰ τώρα τὸ ποσὸν θὰ μοιρασθῇ εἰς μερίδια, ἀνάλογα μὲ τὰς ὥρας ποὺ εἰργάσθη κάθε ξυλουργός.

2) Καὶ οἱ τέσσαρες ξυλουργοὶ εἰργάσθησαν $48 + 36 + 42 + 32 = 158$ ὥρας. Διὰ νὰ εὕρωμεν τί ποσὸν ἀναλογεῖ εἰς κάθε ὥραν ἐργασίας θὰ διαιρέσωμεν τὸ $1264 : 158 = 8$ δρχ.

3) Ἀφοῦ εἰς κάθε ὥραν ἐργασίας ἀναλογοῦν 8 δρχ.

α) Ὁ πρῶτος ποὺ εἰργάσθη	48 ὥρας	θὰ πάρῃ			$48 \times 8 = 384$ δρχ.
β) Ὁ δεύτερος »	»	36 »	»		$36 \times 8 = 288$ δρχ.
γ) Ὁ τρίτος »	»	42 »	»	»	$42 \times 8 = 336$ δρχ.
δ) Ὁ τέταρτος »	»	32 »	»	»	$32 \times 8 = 256$ δρχ.
				Σύνολον	$158 \times 8 = 1264$ δρχ.

Τὰ ποσὰ 384, 288, 336 καὶ 256 λέγομεν ὅτι εἶναι ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 48, 36, 42 καὶ 32 καὶ ὁ μερισμὸς ποὺ ἐκάμαμεν λέγεται, ὅπως εἴπομεν, μερισμὸς εἰς μέρη ἀνάλογα.

Αὐτὸς εἶναι ἕνας τρόπος νὰ λύωμεν τὰ προβλήματα αὐτοῦ τοῦ εἴδους. Ἄλλος τρόπος εἶναι ὁ ἑξῆς:

Λύσις

Προσθέτομεν ὅλας τὰς ὥρας ἐργασίας. Εἶναι 158. Ὁ πρῶτος, ποὺ εἰργάσθη 48 ὥρας, θὰ πάρῃ τὰ $\frac{48}{158}$ τοῦ ποσοῦ τῶν 1264 δρχ. Ὁ δεύτερος, ποὺ εἰργάσθη 36 ὥρας θὰ πάρῃ τὰ $\frac{36}{158}$ τοῦ ποσοῦ. Ὁ τρίτος, ποὺ εἰργάσθη 42 ὥρας, θὰ πάρῃ τὰ $\frac{42}{158}$ τοῦ ποσοῦ. Καὶ ὁ τέταρτος, ποὺ εἰργάσθη 32 ὥρας, θὰ πάρῃ τὰ $\frac{32}{158}$ τοῦ ποσοῦ.

Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον θὰ κάμωμεν πολλαπλασιασμὸν τοῦ ποσοῦ ἐπὶ κάθε κλάσμα:

$$\begin{array}{r} 48 \\ 36 \\ 42 \\ 32 \\ \hline 158 \end{array}$$

α) $1264 \times \frac{48}{158} = \frac{60.672}{158} = 384$ δρχ.

β) $1264 \times \frac{36}{158} = \frac{45.504}{158} = 288$ »

γ) $1264 \times \frac{42}{158} = \frac{53.088}{158} = 336$ »

δ) $1264 \times \frac{32}{158} = \frac{40.448}{158} = 256$ »

Σύνολον 1.264 δρχ.

2. Εἰς μίαν συνεργατικὴν ὑποδηματοποιῶν ἐργάζονται πέντε ὑποδη-

ματοποιοί. Τὴν περασμένην ἑβδομάδα εἰργάσθησαν ὁ πρῶτος $\frac{3}{5}$ τῶν συνολικῶν ὡρῶν ἐργασίας, ὁ δεύτερος $\frac{9}{10}$ τῶν ὡρῶν, ὁ τρίτος $\frac{3}{4}$ τῶν ὡρῶν ἐργασίας, ὁ τέταρτος $\frac{5}{8}$ τῶν ὡρῶν ἐργασίας καὶ ὁ πέμπτος $\frac{10}{20}$ τῶν ὡρῶν ἐργασίας. Ἀπὸ τὴν πώλησιν ὑποδημάτων εἰσέπραξαν 1350 δρχ. Τί ποσὸν ἀναλογεῖ εἰς καθένα ;

Σκέψις

Κατ' ἀρχὴν θὰ τρέψωμεν τὰ ἑτερώνυμα κλάσματα εἰς ὁμώνυμα.

$$\overbrace{\frac{3}{5}}^{8} + \overbrace{\frac{9}{10}}^{4} + \overbrace{\frac{3}{4}}^{10} + \overbrace{\frac{5}{8}}^{5} + \overbrace{\frac{10}{20}}^{2} = \qquad \text{Ε.Κ.Π.} = 40$$

$$= \frac{24}{40} + \frac{36}{40} + \frac{30}{40} + \frac{25}{40} + \frac{20}{40} = \frac{135}{40}$$

Ὁ πρῶτος, λοιπόν, θὰ πάρῃ τὰ 24 μέρη ἀπὸ τὰ 135, δηλαδὴ τὰ $\frac{24}{135}$, ὁ δεύτερος τά $\frac{36}{135}$, ὁ τρίτος τὰ $\frac{30}{135}$, ὁ τέταρτος τὰ $\frac{25}{135}$ καὶ ὁ πέμπτος τὰ $\frac{20}{135}$ τοῦ ποσοῦ τῶν 1350 δρχ.

Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον θὰ ἔχωμεν τὴν ἑξῆς λύσιν.

Λύσις

$$\begin{array}{r} 24 + \\ 36 \\ 30 \\ 25 \\ 20 \\ \hline 135 \end{array}$$

α) $1.350 \times \frac{24}{135} = \frac{32.400}{135} =$ 240 δραχ.

β) $1.350 \times \frac{36}{135} = \frac{48.600}{135} =$ 360 »

γ) $1.350 \times \frac{30}{135} = \frac{40.500}{135} =$ 300 »

δ) $1.350 \times \frac{25}{135} = \frac{33.750}{135} =$ 250 »

ε) $1.350 \times \frac{20}{135} = \frac{27.000}{135} =$ 200 »

Σύνολον 1.350 »

Προβλήματα

1. Ἕνας συνεταιρισμὸς ἀνθρακέων ἐδέχθη τὴν περασμένην ἑβδομάδα εἰς τὰς ἀποθήκας του τὰς ἑξῆς ποσότητας ξυλανθράκων ἀπὸ ἓξ συνεταίρους του. Ὁ πρῶτος ἔφερε 250 χλγρ., ὁ δεύτερος 180 χλγρ., ὁ τρίτος 340 χλγρ., ὁ τέταρτος 175 χλγρ., ὁ πέμπτος 420 χλγρ. καὶ ὁ ἕκτος 380

χλγρ. Ὁ ἔμπορος ποὺ προηγόρασε τὰς ποσότητας ἔδωσεν εἰς τὸν πρόεδρον τοῦ συνεταιρισμοῦ μίαν προκαταβολὴν ἀπὸ 2.792 δρχ. Τί ποσὸν ἀναλογεῖ εἰς κάθε συνεταῖρον;

2. Ὁ συνεταιρισμὸς δημοσίων ὑπαλλήλων μιᾶς ἐπαρχιακῆς πόλεως περιλαμβάνει 18 διδασκάλους, 2 δικαστικούς, 3 ἀγρονομικούς, 4 ταχυδρομικούς, 7 ταμειακοὺς καὶ 2 ἐφοριακοὺς ὑπαλλήλους. Ὁ συνεταιρισμὸς ἐπρομηθεύθη 432 χλγρ. ἐλαίου. Πόσα χλγρ. ἐλαίου ἀναλογοῦν εἰς κάθε ὑπαλληλικὸν κλάδον τοῦ συνεταιρισμοῦ αὐτοῦ;

3. Ἡ Ἕνωσις Συνεταιρισμῶν σταφιδοπαραγωγῶν μιᾶς περιοχῆς συνεκέντρωσεν εἰς τὰς ἀποθήκας της ἀπὸ διαφόρους συνεταιρισμοὺς τὰς ἑξῆς ποσότητας: Α΄ Συνεταιρισμὸς χλγρ. 3.750. Β΄ Συνεταιρισμὸς χλγρ. 6.140. Γ΄ Συνεταιρισμὸς χλγρ. 14.380. Δ΄ Συνεταιρισμὸς χλγρ. 7.150 καὶ Ε΄ Συνεταιρισμὸς χλγρ. 5.400. Ἡ Ἕνωσις ἔδωσε προκαταβολὴν 60.958 δρχ. Τί ποσὸν ἀναλογεῖ εἰς κάθε συνεταιρισμόν;

4. Πέντε κτῖσται ἐργάζονται συνεταιρικῶς εἰς μίαν οἰκοδομήν. Τὸν περασμένον μῆνα εἰργάσθησαν, ὁ πρῶτος 25 ἡμέρας, ὁ δεύτερος 19 ἡμέρας, ὁ τρίτος 22 ἡμέρας, ὁ τέταρτος 18 ἡμέρας καὶ ὁ πέμπτος 16 ἡμέρας. Ἀπὸ τὸν ἰδιοκτήτην ἐπῆραν 7.000 δρχ. Τί ποσὸν ἀναλογεῖ εἰς κάθε κτίστην;

5. Ὁ Σύλλογος ἀχθοφόρων τῆς περιφερείας μας ἔστειλε τέσσαρας ἀχθοφόρους νὰ ἐκφορτώσουν ἀπὸ τὸ αὐτοκίνητον τὰ τσιμέντα τοῦ σχολείου. Ὁ πρῶτος ἐξεφόρτωσε 45 σάκκους τσιμέντου, ὁ δεύτερος 38, ὁ τρίτος 51 καὶ ὁ τέταρτος 26. Τοὺς ἐδώσαμεν 240 δραχμάς. Τί ποσὸν ἀναλογεῖ εἰς κάθε ἀχθοφόρον;

6. Ὁ Ε.Ε.Σ.Ν. ἔστειλε τὰ ἑξῆς δῶρα διὰ τέσσαρα σχολεῖα τῆς περιφερείας μας: 930 μολύβια, 1.550 τετράδια, 620 γομολάστιχας καὶ 2480 χρώματα. Τὸ πρῶτον σχολεῖον ἔχει 108 Ἐρυθροσταυρίτας, τὸ δεύτερον ἔχει 39, τὸ τρίτον 91 καὶ τὸ τέταρτον 72. Τί ποσόν, ἀπὸ τὰ παραπάνω δῶρα, ἀναλογεῖ εἰς κάθε σχολεῖον;

7. Ἡ Ἐπιτροπὴ διαχειρίσεως χορτονομῆς ἑνὸς κοινοτικοῦ λειμῶνος ἐνοικίασεν ἐφέτος τὸν κοινοτικὸν λειμῶνα ἀντὶ 18.000 δρχ. εἰς τρεῖς κτηνοτρόφους. Ὁ πρῶτος εἶχε 689 πρόβατα, ὁ δεύτερος 734 καὶ ὁ τρίτος 577. Τί ποσὸν ἀναλογεῖ, εἰς κάθε κτηνοτρόφον, νὰ πληρώσῃ;

8. Εἰς μίαν σεισμοπαθῆ περιοχὴν διενεμήθησαν εἰς τέσσαρα χωρία 400.000 δρχ. ἀναλόγως τοῦ πληθυσμοῦ. Τὸ πρῶτον χωρίον ἔχει πληθυσμὸν 670 κατοίκους, τὸ δεύτερον 1310 κατοίκους, τὸ τρίτον 584 κατοίκους καὶ τὸ τέταρτον 1436 κατοίκους. Τί ποσὸν ἀναλογεῖ εἰς κάθε χωρίον;

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ

Εἴπομεν ὅτι πολλοὶ ἄνθρωποι ποὺ ἔχουν χρήματα, τὰ καταθέτουν εἰς τὰς Τραπέζας, ἢ εἰς τὸ Ταχυδρομικὸν Ταμιευτήριον, καὶ παίρνουν κάθε ἔτος τοὺς τόκους τῶν χρημάτων των. Πολλοί, ὅμως, ἄνθρωποι διαθέτουν τὰ χρήματά των εἰς τὸ ἐμπόριον. Ἐκτὸς τῶν ἐμπορικῶν ἐργασιῶν, ποὺ ἠμπορεῖ νὰ κάμῃ ἕκαστος μόνος του, ὑπάρχουν ἄνθρωποι, οἱ ὁποῖοι καταθέτουν, τρεῖς - τέσσαρες μαζί, τὰ χρήματά των καὶ ἱδρύουν μίαν Ἑταιρείαν.

Εἰς τὴν Ἑταιρείαν καταθέτει ἕκαστος ὅσα κεφάλαια θέλει. Εἰς τὸ τέλος τοῦ ἑξαμήνου, ἢ τοῦ ἔτους, συνέρχονται οἱ συνεταῖροι καὶ διαπιστώνουν ἂν εἶχον κέρδη, ἢ ζημίας καὶ εἰς τί ποσὸν ἀνέρχονται αὐταί. Τὰ κέρδη, ἢ αἱ ζημίαι κατανέμονται τότε εἰς τοὺς συνεταίρους, ἀναλόγως τοῦ ποσοῦ ποὺ ἔχει καταθέσει ἕκαστος, καθὼς καὶ ἀναλόγως τοῦ χρονικοῦ διαστήματος ποὺ εἶναι συνεταῖρος. Τὸ μερίδιον, ποὺ ἀναλογεῖ εἰς κάθε συνεταῖρον ἀπὸ τὸ κέρδος, ἢ τὴν ζημίαν, λέγεται **μέρισμα**.

Τὰ προβλήματα τῆς Ἑταιρείας λύονται μὲ τὴν μέθοδον τοῦ μερισμοῦ εἰς μέρη ἀνάλογα. Εἰς τὰ προβλήματα αὐτὰ συναντῶμεν τρεῖς διαφορετικὰς περιπτώσεις :

α) Ὅταν οἱ συνεταῖροι ἔχουν καταθέσει διαφορετικὰ ποσὰ διὰ τὸ ἴδιον χρονικὸν διάστημα.

β) Ὅταν οἱ συνεταῖροι ἔχουν καταθέσει τὰ ἴδια ποσὰ διὰ διαφορετικὸν χρονικὸν διάστημα.

γ) Ὅταν οἱ συνεταῖροι ἔχουν καταθέσει διαφορετικὰ ποσὰ εἰς διαφορετικὸν χρονικὸν διάστημα.

Θὰ λύσωμεν, τώρα, ἓν πρόβλημα ἀπὸ κάθε περίπτωσιν.

Α΄ Τὰ κεφάλαια διαφορετικά. Τὸ χρονικὸν διάστημα ἴδιον.

1. Τέσσαρες συνεταῖροι ἵδρυσαν μίαν Ἑταιρείαν. Ἀπὸ τὴν πρώτην στιγμὴν τῆς ἱδρύσεως κατέθεσαν ὁ α΄ 108 χρυσᾶς λίρας Ἀγγλίας, ὁ β΄ 75 λίρας ὁ γ΄ 215 λίρας καὶ ὁ δ΄ 102 λίρας. Εἰς τὸ τέλος τοῦ ἔτους ἔκαμαν ἰσολογισμὸν καὶ εἶδον ὅτι εἶχον κέρδος 250 χρυσᾶς λίρας. Τί μερίδιον κέρδους ἀναλογεῖ εἰς κάθε συνεταῖρον;

Σκέψις

Ἀφοῦ τὸ χρονικὸν διάστημα εἶναι τὸ ἴδιον, τότε τὸ κέρδος πρέπει νὰ κατανεμηθῇ εἰς μέρη ἀνάλογα τοῦ ποσοῦ τῶν λιρῶν ποὺ κατέθεσεν ἕκαστος. Τὸ ὅλον ποσὸν ποὺ κατετέθη ἀνέρχεται εἰς 500 λίρας. Ὁ α΄ δικαιοῦται νὰ πάρῃ τὰ $\frac{108}{500}$ τῶν 250 λιρῶν, ὁ β΄ τὰ $\frac{75}{500}$, ὁ γ΄ τὰ $\frac{215}{500}$ καὶ ὁ δ΄ τὰ $\frac{102}{500}$, ὅπως ἐδιδάχθημεν εἰς τὰ προβλήματα τοῦ συνεταιρισμοῦ.

Κατ᾽ αὐτὸν τὸν τρόπον θὰ ἔχωμεν τὴν ἑξῆς λύσιν :

Λύσις

$$\begin{array}{r} 108 \\ 75 \\ 215 \\ 102 \\ \hline 500 \end{array}$$

α) $250 \times \frac{108}{500} = \frac{27.000}{500} = 54$ λίρες

β) $250 \times \frac{75}{500} = \frac{18.750}{500} = 37{,}5$ »

γ) $250 \times \frac{215}{500} = \frac{53.750}{500} = 107{,}5$ »

δ) $250 \times \frac{102}{500} = \frac{25.500}{500} = 51$ »

Σύνολον 250 »

Β′ Τὰ κεφάλαια ἴδια.
Τὸ χρονικὸν διάστημα διαφορετικόν.

2. Ὁ διευθυντὴς ἑνὸς καταστήματος ἤρχισε τὰς ἐργασίας του μὲ κεφάλαιον 500 χρυσῶν λιρῶν. Μετὰ 6 μῆνας προσέλαβε συνεταῖρον, τὸν κ. Α. μὲ τὸ ἴδιον ποσόν. Καὶ 3 μῆνας μετὰ τὸν δεύτερον (δηλαδὴ εἰς 9 μῆνας, ἀφ' ὅτου ἤνοιξε τὸ κατάστημα) προσέλαβε συνεταῖρον καὶ τὸν κ. Σ. μὲ τὸ ἴδιον χρηματικὸν ποσόν. 24 μῆνας, ἀπὸ τὴν ἡμέραν, ποὺ ἤνοιξε τὸ κατάστημα, ἔκαμαν ἰσολογισμὸν καὶ εἶχον κέρδος 456 χρυσᾶς λίρας. Τί μέρισμα κέρδους ἀναλογεῖ εἰς κάθε συνεταῖρον;

Σκέψις

Ἀφοῦ τὸ κεφάλαιον εἶναι ἴδιον, τὸ κέρδος θὰ κατανεμηθῇ ἀναλόγως τοῦ χρονικοῦ διαστήματος, ποὺ εἶχε κατατεθειμένα τὰ χρήματά του ὁ κάθε συνεταῖρος. Ὁ πρῶτος εἶχε τὰ χρήματά του κατατεθειμένα ὅλον τὸ χρονικὸν διάστημα, δηλαδὴ 24 μῆνας. Ὁ δεύτερος 6 μῆνας ὀλιγώτερον, δηλαδὴ 18 μῆνας, καὶ ὁ τρίτος 9 μῆνας ὀλιγώτερον, δηλαδὴ 15 μῆνας. Τὸ ποσόν, λοιπόν, τοῦ κέρδους θὰ μερισθῇ εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν $24 + 18 + 15 = 57$. Ὁ πρῶτος θὰ πάρῃ τὰ $\frac{24}{57}$ τῶν 456 λιρῶν, ὁ δεύτερος τὰ $\frac{18}{57}$ τοῦ ποσοῦ καὶ ὁ τρίτος τὰ $\frac{15}{57}$.

Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον θὰ ἔχωμεν τὴν ἑξῆς λύσιν:

Λύσις

$$\begin{array}{r} 24 + \\ 18 \\ \underline{15} \\ 57 \end{array}$$

α) $456 \times \frac{24}{57} = \frac{10.944}{57} =$ 192 λίρες

β) $456 \times \frac{18}{57} = \frac{8.208}{57} =$ 144 »

γ) $456 \times \frac{15}{57} = \frac{6.840}{57} =$ 120 »

Σύνολον 456 »

Γ′ Τὰ κεφάλαια διαφορετικά.
Τὸ χρονικὸν διάστημα διαφορετικόν.

3. Ἕνας χαρτέμπορος ἤρχισε τὴν ἐπιχείρησίν του μὲ 250 χρυσᾶς λίρας. 3 μῆνας ἀπὸ τῆς ἐνάρξεως προσέλαβε συνεταῖρον τὸν κ. Β., ὁ ὁποῖος

κατέθεσε 320 λίρας καὶ 10 μῆνας ἀπὸ τῆς ἐνάρξεως προσέλαβε συνεταῖρον τὸν κ. Ν. ὁ ὁποῖος κατέθεσε 430 λίρας. Εἰς τοὺς 15 μῆνας ἀπὸ τῆς ἐνάρξεως ἔκαμαν ἰσολογισμὸν καὶ εἶχον κέρδος 974 λίρας. Τί μερίδιον ἀναλογεῖ εἰς κάθε συνεταῖρον;

Σκέψις

α) 1) Ὁ πρῶτος συνεταῖρος κατέθεσε τὰ χρήματα ἐπὶ 15 μῆνας
2) Ὁ δεύτερος » » » » » 12 μῆνας
3) Ὁ τρίτος » » » » » 5 μῆνας

β) 1) Ὁ πρῶτος κατέθεσε 250 λίρας × 15 μῆνας = 3.750
2) Ὁ δεύτερος » 320 » × 12 μῆνας = 3.840
3) Ὁ τρίτος » 430 » × 5 μῆνας = 2.150
Σύνολον 9.740

Τὸ κέρδος, λοιπόν, τῶν 974 λιρῶν πρέπει νὰ μερισθῇ εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 3.750, 3.840 καὶ 2.150.

Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον θὰ ἔχωμεν τὴν ἑξῆς λύσιν:

Λύσις

$$\begin{aligned} 250 \times 15 &= 3750 \; + \\ 320 \times 12 &= 3840 \\ 430 \times 5 &= 2150 \\ \hline & \, 9.740 \end{aligned}$$

α) $974 \times \frac{3.750}{9.740} = \frac{3.652,500}{9.740} =$ 375 λίραι

β) $974 \times \frac{3.840}{9.740} = \frac{3.740.160}{9.740} =$ 384 »

γ) $974 \times \frac{2.150}{9.740} = \frac{2.094.100}{9.740} =$ 215 »

Σύνολον 974 »

Προβλήματα

1. Εἰς τὴν Ἑταιρείαν τσιμέντων κατέθεσαν: ὁ κ. Α. 300 λίρας. 10 μῆνας ἀπὸ τῆς ἐνάρξεως ὁ κ. Μ. κατέθεσε τὸ ἴδιον ποσόν. Καὶ 15 μῆνας ἀπὸ τῆς ἐνάρξεως ὁ κ. Γ. κατέθεσε τὸ ἴδιον ποσόν. 24 μῆνας ἀπὸ τῆς ἐνάρξεως ἔγινεν ἰσολογισμὸς καὶ εὗρον κέρδος 141 λιρῶν. Τί μερίδιον κέρδους ἀναλογεῖ εἰς κάθε συνεταῖρον;

2. Τρεῖς χαρτέμποροι ἵδρυσαν μιὰν Ἑταιρείαν. Ὁ πρῶτος κατέθεσεν 365 λίρας, ὁ δεύτερος 287 λίρας καὶ ὁ τρίτος 248 λίρας. Μετὰ ἓν ἔτος ἔκαμαν ἰσολογισμὸν καὶ εὗρον ζημίαν 540 λίρας. Τί μερίδιον ζημίας ἀναλογεῖ εἰς κάθε συνεταῖρον;

3. Μία Ἑταιρεία ζαχαροπλαστικῆς ἱδρύθη μὲ τὰ ἑξῆς κεφάλαια: Ὁ κ. Γρ. κατέθεσεν 107 λίρας. 2 μῆνας ἀπὸ τῆς ἱδρύσεως ὁ κ. Δ. κατέθεσε 263 λίρας καὶ 6 μῆνας ἀπὸ τῆς ἱδρύσεως ὁ κ. Χρ. κατέθεσε 230 λίρας. Μετὰ 16 μῆνας ἀπὸ τῆς ἱδρύσεως τῆς Ἑταιρείας ἔκαμαν ἰσολογισμὸν καὶ εὗρον κέρδος 800 λιρῶν. Τί μερίδιον κέρδους ἀναλογεῖ εἰς κάθε συνεταῖρον;

4. Πέντε ἔμποροι ἵδρυσαν μίαν Ἑταιρείαν ἐκμεταλλεύσεως ἐλαιωδῶν προϊόντων. Κατέθεσαν : ὁ πρῶτος 5.800 δρχ. Μετὰ 1 μῆνα ἀπὸ τῆς ἱδρύσεως κατέθεσεν ὁ δεύτερος 6.700 δρχ. Μετὰ 3 μῆνας ἀπὸ τῆς ἱδρύσεως κατέθεσεν ὁ τρίτος 4.200 δρχ. Μετὰ 5 μῆνας ἀπὸ τῆς ἱδρύσεως κατέθεσεν ὁ τέταρτος 7.300 δρχ. Καὶ μετὰ 10 μῆνας ἀπὸ τῆς ἱδρύσεως κατέθεσεν ὁ πέμπτος 6.000 δρχ. Μετὰ 24 μῆνας ἀπὸ τῆς ἱδρύσεως ἔκαμαν ἰσολογισμὸν καὶ εὗρον ζημίαν 7.200 δρχ. Τί μερίδιον ζημίας ἀναλογεῖ εἰς κάθε συνεταῖρον;

5. Τρεῖς βιβλιοπῶλαι ἔκαμαν μίαν Ἑταιρείαν. Ὁ πρῶτος κατέθεσεν 25.000 δρχ., ὁ δεύτερος 36.000 δρχ. καὶ ὁ τρίτος 39.000 δρχ. Μετὰ 6 μῆνας ἀπὸ τῆς ἱδρύσεως ἔκαμαν ἰσολογισμὸν καὶ εὗρον κέρδος 50.000 δρχ. Πόσον μερίδιον ἀναλογεῖ εἰς κάθε συνεταῖρον;

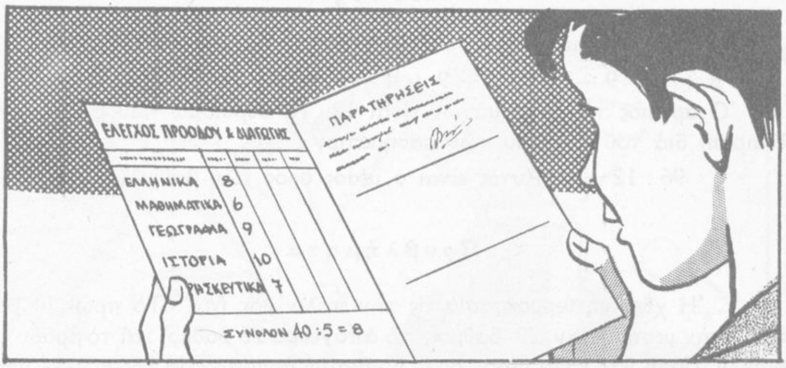
6. Μία μεγάλη Ἑταιρεία κλωστοβιομηχανίας ἱδρύθη μὲ τὰ ἑξῆς ποσά: Ὁ κ. Τσ. κατέθεσε 12.000 δρχ. Μετὰ 3 μῆνας ἀπὸ τῆς ἱδρύσεως ὁ κ. Δοξ. κατέθεσεν 60.000 δρχ. Μετὰ 8 μῆνας ἀπὸ τῆς ἱδρύσεως ὁ κ. Παπ. κατέθεσεν 180.000 δρχ. Μετὰ 12 μῆνας ἀπὸ τῆς ἱδρύσεως ἔκαμαν ἰσολογισμὸν καὶ εὗρον ζημίαν 180.000 δρχ. Τί μερίδιον ζημίας ἀναλογεῖ εἰς κάθε συνεταῖρον;

7. Μία ἀνώνυμος ἑταιρεία ἱδρύθη ἀπὸ τέσσαρας συνεταίρους οἱ ὁποῖοι κατέθεσαν ἕκαστος ἀπὸ 10.000 δρχ. ὁ πρῶτος διὰ 12 μῆνας, ὁ δεύτερος διὰ 10 μῆνας, ὁ τρίτος διὰ 8 μῆνας καὶ ὁ τέταρτος διὰ 6 μῆνας. Τὸ κέρδος των ἦτο 144.000. Τί μερίδιον κέρδους ἀναλογεῖ εἰς κάθε συνεταῖρον;

8. Τέσσαρες κτηνοτρόφοι ἥνωσαν τὰ ζῷά των. Ὁ α' εἶχεν 180 ζῷα ὁ β' 205, ὁ γ' 86 καὶ ὁ δ' 69. Εἰς τὸ τέλος τοῦ θέρους ἐπώλησαν τὸν τυρὸν καὶ ἐπῆραν 64.800 δραχμάς. Τί ποσὸν ἀναλογεῖ εἰς κάθε κτηνοτρόφον;

9. Ἕνας κτηνοτρόφος τυροκομεῖ μόνος του τὰ 120 πρόβατά του. Μετὰ 11 ἡμέρας ἀπὸ τῆς ἐνάρξεως, τοῦ φέρει ὁ κ. Κ. 32 ἰδικά του πρόβατα. Μετὰ 19 ἡμέρας, ἀπὸ τῆς ἐνάρξεως, τοῦ φέρει ὁ κ. Τσ. 28 ἰδικά του πρόβατα. 30 ἡμέρας, ἀπὸ τῆς ἐνάρξεως τῆς τυροκομίας, ἐπῆραν ἀπὸ τὴν πώλησιν τοῦ τυροῦ 9.000 δρχ. Τί μερίδιον ἀναλογεῖ εἰς κάθε συνεταῖρον;

30 19 11



ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΕΣΟΥ ΟΡΟΥ

Ἐρωτῶμεν τὸν διδάσκαλόν μας μὲ τί βαθμὸν θὰ προβιβασθῶμεν καὶ μᾶς λέγει : Κατὰ μέσον ὅρον μὲ 7. Τὸ θέρος μὲ τὴν πολλὴν ζέστην λέγομεν ὅτι : ὁ μέσος ὅρος τῆς θερμοκρασίας ἦτο σήμερον 26 βαθμοί. Τὸν χειμῶνα μὲ τὸ πολὺ κρύον, λέγομεν ὅτι : ὁ μέσος ὅρος τῆς θερμοκρασίας ἦτο σήμερον 8 βαθμοί. Τὸ αὐτοκίνητον, ὁ σιδηρόδρομος, ἡ μοτοσυκλέτα δὲν τρέχουν ὅλας τὰς ὥρας μὲ τὴν ἰδίαν ταχύτητα· λέγομεν ὅτι : κατὰ μέσον ὅρον τρέχουν μὲ 30, 40, 50 χιλιόμετρα τὴν ὥραν. Τὰ ἔξοδα ποὺ κάμνει μία οἰκογένεια διὰ νὰ ζήσῃ ἐπὶ ἕνα μῆνα, δὲν εἶναι τὰ ἴδια κάθε ἡμέραν, ἀλλ' ἄλλοτε εἶναι ὀλιγώτερα καὶ ἄλλοτε περισσότερα: λέγομεν ὅμως ὅτι ἡ οἰκογένεια αὐτὴ ἐξοδεύει κατὰ μέσον ὅρον 55 δραχμὰς τὴν ἡμέραν.

Βλέπομεν, λοιπόν, ὅτι πολὺ συχνὰ μεταχειριζόμεθα τὴν φρᾶσιν «κατὰ μέσον ὅρον».

Τὰ προβλήματα ποὺ παρουσιάζονται εἰς τὰς περιπτώσεις αὐτὰς εἶναι εὔκολα καὶ λύονται μὲ ἁπλοῦν τρόπον.

Ἂς λύσωμεν ἓν τοιοῦτον πρόβλημα :

1. Οἱ βαθμοὶ τοῦ Γιώργου εἰς τὰ διάφορα μαθήματα, εἶναι : Ἑλληνικὰ 8, Μαθηματικὰ 6, Γεωγραφία 9, Ἱστορία 10, Θρησκευτικὰ 7, Φυσικὴ Ἱστορία 9, Πειραματικὴ καὶ Χημεία 4, Ἰχνογραφία 9, Καλλιγραφία 6, Χειροτεχνία 10, Ὠδικὴ 5 καὶ Γυμναστικὴ 8. Ποῖος εἶναι ὁ μέσος ὅρος τῶν βαθμῶν του;

Λύσις

Θὰ προσθέσωμεν ὅλους τοὺς βαθμούς :

$$8 + 6 + 9 + 10 + 7 + 9 + 4 + 9 + 6 + 10 + 5 + 8 = 96$$

Ὁ ἀριθμὸς τῶν μαθημάτων εἶναι 12. Τὸ ἄθροισμα τῶν βαθμῶν θὰ διαιρεθῇ διὰ τοῦ συνόλου τῶν μαθημάτων :

96 : 12 = 8. Αὐτὸς εἶναι ὁ μέσος ὅρος τῶν βαθμῶν.

Προβλήματα

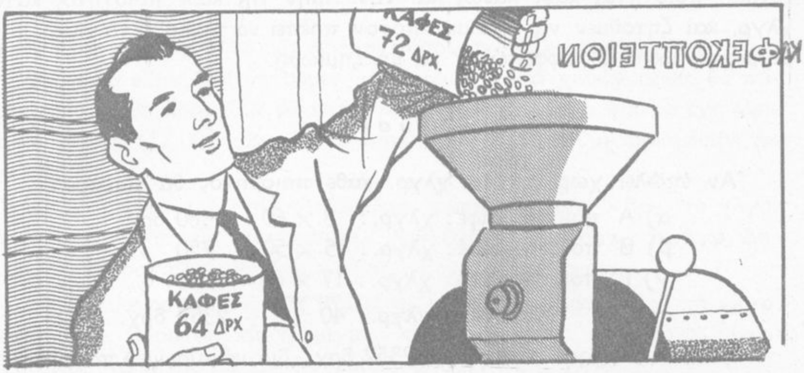
1. Ἡ χθεσινὴ θερμοκρασία εἰς τὴν πόλιν μας ἦτο : Τὸ πρωὶ 14 βαθμοί, τὴν μεσημβρίαν 22 βαθμοί, τὸ ἀπόγευμα 26 βαθμοὶ καὶ τὸ βράδυ 18 βαθμοί. Πόση ἦτο κατὰ μέσον ὅρον ἡ χθεσινὴ θερμοκρασία τῆς πόλεώς μας;

2. Ἡ οἰκογένειά μας ἐξώδευσε τὴν πρώτην ἑβδομάδα 286,20 δρχ., τὴν δευτέραν ἑβδομάδα 323,40 δρχ., τὴν τρίτην ἑβδομάδα 407,80 δρχ. καὶ τὴν τετάρτην ἑβδομάδα 305,60 δρχ. Πόσα ἐξώδευσε κατὰ μέσον ὅρον καθ' ἑβδομάδα;

3. Τὸ λεωφορεῖον Ἀθηνῶν - Πατρῶν διέτρεξε τὴν ἀπόστασιν εἰς πέντε ὥρας. Τὴν α' ὥραν ἔτρεχε μὲ 45 χλμ. τὴν ὥραν, τὴν β' ὥραν ἔτρεχε μὲ 63 χλμ., τὴν γ' μὲ 39 χλμ., τὴν δ' μὲ 58 χλμ. καὶ τὴν ε' ὥραν ἔτρεχε μὲ 70 χλμ. Μὲ πόσα χιλιόμετρα ἔτρεξε κατὰ μέσον ὅρον τὴν ὥραν;

4. Εἰς τὸ μαθητικόν μας συσσίτιον διεθέσαμεν τὸν προηγούμενον μῆνα τὰς παρακάτω ποσότητας γάλακτος : Τὴν α' ἑβδομάδα 36 χλγρ., τὴν β' ἑβδομάδα 32 χλγρ., τὴν γ' ἑβδομάδα 40 χλγρ. καὶ τὴν δ' ἑβδομάδα 28 χλγρ. Πόσα χιλιόγραμμα γάλακτος διεθέσαμεν κατὰ μέσον ὅρον καθ' ἑβδομάδα;

5. Εἰς τὰς Ἀθήνας κατὰ τὰς τέσσαρας τελευταίας ἡμέρας ἐγεννήθησαν : τὴν α' ἡμέραν 128 παιδιά, τὴν β' ἡμέραν 160, τὴν γ' ἡμέραν 200 καὶ τὴν δ' ἡμέραν 132. Πόσα παιδιὰ ἐγεννήθησαν κατὰ μέσον ὅρον αὐτὰς τὰς τέσσαρας ἡμέρας;



ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΙΞΕΩΣ

Ὅταν οἱ ἔμποροι ἔχουν διαφόρους ποιότητας ἀπὸ ἓν εἶδος τροφίμων, π.χ. ἀπὸ βούτυρον, ἔλαιον, καφέν, καὶ δὲν ἠμποροῦν νὰ πωλήσουν εὐκόλως κάθε ποιότητα χωριστά, διότι ἡ μία εἶναι ἀκριβὴ καὶ ἡ ἄλλη ὄχι καὶ τόσον καλή, ἢ ὅταν θέλουν νὰ κατασκευάσουν σκοπίμως ἓν εὐθηνὸν μῖγμα πρὸς κατανάλωσιν, τότε ἀναμιγνύουν διαφόρους ποιότητας καὶ οὕτω πωλοῦν εὐκολώτερον τὸ ἐμπόρευμά των.

Αὐτὰ τὰ προβλήματα λέγονται προβλήματα μίξεως καὶ χωρίζονται εἰς δύο κατηγορίας ἢ εἰς δύο εἴδη ὅπως λέγονται.

Ἂς λύσωμεν, τώρα, ἓν πρόβλημα ἀπὸ κάθε εἶδος, διὰ νὰ τὰ κατανοήσωμεν καλύτερον:

Α΄ Προβλήματα πρώτου εἴδους

1. Ἕνας καφεπώλης ἀνέμιξε τρεῖς ποιότητας καφέ. Ἀπὸ τὴν πρώτην ποιότητα, ἡ ὁποία ἐτιμᾶτο 60 δρχ. κατὰ χλγρ. ἐπῆρεν 8 χλγρ. Ἀπὸ τὴν δευτέραν, ἡ ὁποία ἐτιμᾶτο 52 δρχ. κατὰ χλγρ. ἐπῆρε 15 χλγρ. Καὶ ἀπὸ τὴν τρίτην ποιότητα, ἡ ὁποία ἐτιμᾶτο 66 δρχ. κατὰ χλγρ. ἐπῆρε 17 χλγρ. Πόσον πρέπει νὰ πωλήσῃ τὸ χλγρ. τοῦ μίγματος ὥστε νὰ μὴ ζημιωθῇ;

Σκέψις

Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο μᾶς δίδουν τὰς ποσότητας ἀπὸ τρεῖς διαφορετικὰς ποιότητας καφὲ καθὼς καὶ τὴν τιμὴν τῆς κάθε ποιότητος κατὰ χλγρ. καὶ ζητοῦμεν νὰ εὕρωμεν πόσον πρέπει νὰ πωληθῇ τὸ χλγρ. τοῦ μίγματος, ὥστε ὁ καφφεπώλης νὰ μὴ ζημιωθῇ.

Λύσις

Ἂν ἐπώλει χωριστὰ τὰ χλγρ. κάθε ποιότητος θὰ εἰσέπραττε:

α) Α′ ποιότης καφέ:	χλγρ.: $8 \times 60 =$	480	δρχ.
β) Β′ ποιότης καφέ:	χλγρ.: $15 \times 50 =$	750	»
γ) Γ′ ποιότης καφέ:	χλγρ.: $17 \times 66 =$	1122	»
Σύνολον:	χλγρ.: 40	2352	δρχ.

Ἀφοῦ τὰ 40 χλγρ. στοιχίζουν 2352 δρχ., διὰ νὰ εὕρωμεν πόσον πρέπει νὰ πωλῆται τὸ κάθε χλγρ. μίγματος, πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὸ 2352: 40=58,8 δρχ. τὸ χλγρ.

Αὐτὴ εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ μίγματος κατὰ χλγρ.

Προβλήματα

2. Ἕνας βουτυρέμπορος ἀνέμιξε τρία εἴδη βουτύρου. Ἀπὸ τὸ πρῶτον, ποὺ ἐτιμᾶτο κατὰ χλγρ. 35 δρχ. ἐπῆρε 12 χλγρ. Ἀπὸ τὸ δεύτερον, ποὺ ἐτιμᾶτο κατὰ χλγρ. 40 δρχ. ἐπῆρε 16 χλγρ. Ἀπὸ τὸ τρίτον ποὺ ἐτιμᾶτο κατὰ χλγρ. 42 δρχ. ἐπῆρε 10 χλγρ. Πόσον πρέπει νὰ πωλήσῃ τὸ χλγρ. τοῦ μίγματος ὥστε νὰ μὴ ζημιωθῇ;

3. Ἕνας ἔμπορος ἐλαίου ἠγόρασε διαφόρους ποσότητας καὶ ποιότητας ἐλαίου ἀπὸ διαφόρους ἐλαιοπαραγωγούς. Ἀπὸ τὸν πρῶτον ἠγόρασε 165 χλγρ. πρὸς 21 δρχ. τὸ χλγρ. Ἀπὸ τὸν δεύτερον 197 χλγρ. πρὸς 20 δρχ. τὸ χλγρ. Ἀπὸ τὸν τρίτον 180 χλγρ. πρὸς 20, 50 τὸ χλγρ. καὶ ἀπὸ τὸν τέταρτον 148 χλγρ. πρὸς 21,50 τὸ χλγρ. Αὐτὸ τὸ ἔλαιον τὸ ἔκαμε μῖγμα. Πόσον στοιχίζει τὸ χλγρ. τοῦ μίγματος;

Β′ Προβλήματα δευτέρου εἴδους

1. Οἱ ἀλευρόμυλοι Ἁγίου Γεωργίου κάμνουν ἓν μῖγμα ἀλεύρου ἀπὸ σῖτον καὶ κριθήν. Τὸ ἄλευρον τοῦ σίτου στοιχίζει 5 δρ. τὸ χλγρ., ἐνῷ τῆς κριθῆς στοιχίζει 2 δρχ. τὸ χλγρ. Πόσα χιλιόγραμμα ἀλεύρου πρέπει νὰ πάρουν ἀπὸ κάθε εἶδος, διὰ νὰ κάμουν ἓν μῖγμα 12.000 χλγρ. καὶ νὰ πωλῆται τὸ χλγρ. τοῦ μίγματος πρὸς 4 δρχ.;

Σκέψις

Εἰς τὸ πρόβλημα αὐτὸ μᾶς λέγουν πόσον στοιχίζει τὸ χλγρ. τοῦ ἀλεύρου ἀπὸ κάθε εἶδος, καὶ ζητοῦμεν νὰ εὕρωμεν πόσα χιλιόγραμμα θὰ πάρωμεν ἀπὸ κάθε εἶδος, διὰ νὰ κατασκευάσωμεν ἓν μῖγμα ποὺ νὰ ἔχῃ ὡρισμένον βάρος (12.000 χλγρ.), τὸ ὁποῖον νὰ πωληθῇ μὲ ὡρισμένην τιμὴν (4 δρχ.).

α) Τὸ ἄλευρον τοῦ σίτου πωλεῖται, χωριστά, πρὸς 5 δρχ. τὸ χλγρ. Ὅταν ὅμως προστεθῇ εἰς τὸ μῖγμα, πωλεῖται πρὸς 4 δρχ. τὸ χλγρ. Δηλαδή, τὸ ἐργοστάσιον θὰ ζημιώνεται 1 δρχ. κατὰ χλγρ.

β) Τὸ ἄλευρον τῆς κριθῆς πωλεῖται, χωριστά, πρὸς 2 δρχ. τὸ χλγρ. Ὅταν ὅμως, προστεθῇ εἰς τὸ μῖγμα, πωλεῖται πρὸς 4 δρχ. τὸ χλγρ. Ἑπομένως, τὸ ἐργοστάσιον θὰ κερδίζῃ 2 δρχ. κατὰ χλγρ.

γ) Ἂν πάρωμεν 2 χλγρ. ἀλεύρου σίτου (ὅσαι δηλαδή, εἶναι αἱ δραχμαὶ ποὺ κερδίζει εἰς κάθε χλγρ. ἀλεύρου κριθῆς), θὰ ἔχωμεν ζημίαν $2\times1=2$ δρχ.

δ) Ἂν πάρωμεν 1 χλγρ. ἀλεύρου κριθῆς (ὅσαι, δηλαδή, εἶναι αἱ δραχμαί ποὺ χάνει εἰς κάθε χλγρ. ἀλεύρου σίτου) θὰ ἔχωμεν κέρδος $1\times2=2$ δραχ.

Ὥστε, ὅταν πάρωμεν 2 χλγρ. ἀλεύρου σίτου καὶ 1 χλγρ. ἀλεύρου κριθῆς, οὔτε ζημίαν θὰ ἔχωμεν, οὔτε κέρδος.

Αὐτὸ ἠμποροῦμεν νὰ τὸ παραστήσωμεν μὲ τὸ παρακάτω σχῆμα:

Λύσις

Τιμὴ ἀλεύρου σίτου δρχ. 5 — 2 δρχ. κέρδος

: 4 δρχ. μῖγμα

Τιμὴ ἀλεύρου κριθ. δρχ. 2 — $\frac{1}{3}$ δρχ. ζημία

2 χλγρ. ἀλεύρου σίτου καὶ 1 χλγρ. ἀλεύρου κριθῆς=3 χλγρ. μῖγμα.

Τώρα μὲ τὴν ἁπλῆν μέθοδον τῶν τριῶν θὰ εὕρωμεν πόσα χλγρ. ἀλεύρου ἀπὸ κάθε εἶδος ἀναλογεῖ εἰς τὸ μῖγμα.

α) Ἄλευρον σίτου

Εἰς τὰ 3 χλγρ. μίγματος ἀναλογοῦν 2 χλγρ. ἀλεύρου σίτου

Εἰς τὰ 12.000 » » » Χ; » » »

Τὰ ποσὰ εἶναι εὐθέως ἀνάλογα.

$$\times = 2 \times \frac{12.000}{3} = \frac{24.000}{3} = 8.000$$ χλγρ. ἀλεύρου ἐκ σίτου.

β) Ἄλευρον κρθῆς.

Εἰς τὰ 3 χλγρ. μίγματος ἀναλογεῖ 1 χλγρ. ἀλεύρου κριθῆς

Εἰς τὰ 12.000 » » » Χ;

Καὶ ἐδῶ τὰ ποσὰ εἶναι εὐθέως ἀνάλογα.

$$\times = 1 \times \frac{12.000}{3} = \frac{12.000}{3} = 4.000$$ χλγρ. ἀλεύρου κριθῆς

Ἤ

α') $12.000 \times \frac{2}{3} = \frac{24.000}{3} = 8.000$ χλγρ. ἀλεύρου σίτου

β') $12.000 \times \frac{1}{3} = \frac{12.000}{3} = 4.000$ » » »

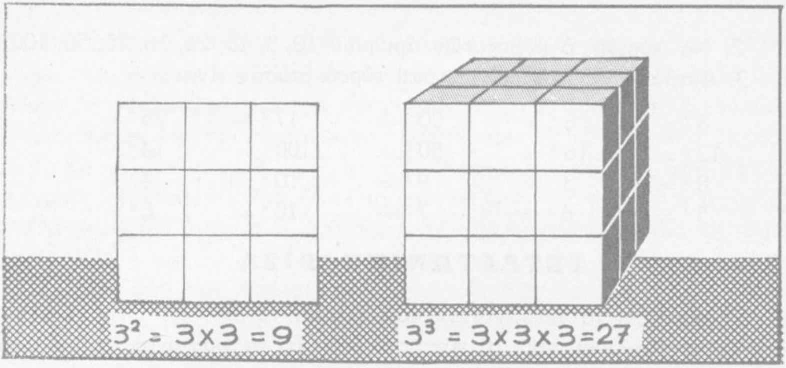
12.000

Προβλήματα

1. Ἕνας βουτυρέμπορος ἐπῆρε ζωικὸν βούτυρον καὶ μαγειρικὸν λῖπος καὶ ἔκαμεν ἓν μῖγμα. Τὸ βούτυρον κοστίζει 60 δρχ. τὸ χλγρ., ἐνῷ τὸ μαγειρικὸν λῖπος στοιχίζει 35 δρχ. τὸ χλγρ. Πόσα χλγρ. θὰ πάρῃ ἀπὸ κάθε εἶδος, διὰ νὰ κατασκευάσῃ μῖγμα 100 χλγρ. καὶ νὰ πωλῆται πρὸς 50 δρχ. τὸ χλγρ.;

2. Ἕνας ἐλαιέμπορος ἀνέμιξε δύο ποιότητας ἐλαίου. Ἡ πρώτη ποιότης στοιχίζει 22 δρχ. τὸ χλγρ. καὶ ἡ δευτέρα 18 δρχ. τὸ χλγρ. Πόσα χλγρ. πρέπει νὰ πάρῃ ἀπὸ κάθε ποιότητα, διὰ νὰ κάμῃ μῖγμα 400 χλγρ. καὶ τὸ μῖγμα νὰ πωλῆται 21 δρχ. τὸ χλγρ.;

3. Ἕνας καφεπώλης ἀνέμιξε δύο ποιότητας καφέ. Ἡ πρώτη τιμᾶται 100 δρχ. τὸ χλγρ. καὶ ἡ δευτέρα 72 δρχ. τὸ χλγρ. Πόσα χλγρ. πρέπει νὰ πάρῃ ἀπὸ κάθε ποιότητα, διὰ νὰ κάμῃ μῖγμα 140 χλγρ. καὶ τὸ μῖγμα νὰ πωλῆται 80 δρχ. τὸ χλγρ.;



ΜΕΡΙΚΑ ΠΕΡΙ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

Εἰς τὸν πολλαπλασιασμόν, ὅταν ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἕνα ἀριθμὸν ἐπὶ τὸν ἑαυτόν του, τὸ γινόμενον τὸ λέγομεν τετράγωνον τοῦ ἀριθμοῦ αὐτοῦ.

Π.χ. $5 \times 5 = 25$. Ὁ ἀριθμὸς 25 εἶναι τὸ τετράγωνον τοῦ ἀριθμοῦ 5. Τὸν πολλαπλασιασμὸν τοῦ 5 ἐπὶ τὸν ἑαυτόν του ἠμποροῦμεν νὰ τὸν παραστήσωμεν καὶ οὕτω: - 5^2 - τὸ ὁποῖον διαβάζεται: πέντε εἰς τὴν δευτέραν δύναμιν, ἢ πέντε εἰς τὸ τετράγωνον, δηλ. 5×5.

Ὅταν ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἕνα ἀριθμὸν ἐπὶ τὸν ἑαυτόν του καὶ πάλιν ἐπὶ τὸν ἑαυτόν του, τὸ γινόμενον τὸ λέγομεν κύβον τοῦ ἀριθμοῦ αὐτοῦ.

Π.χ. $5 \times 5 \times 5 = 125$. Ὁ ἀριθμὸς 125 εἶναι ὁ κύβος τοῦ ἀριθμοῦ 5. Τὸν πολλαπλασιασμὸν τοῦ 5 ἐπὶ τὸν ἑαυτόν του καὶ πάλιν ἐπὶ τὸν ἑαυτόν του ἠμποροῦμεν νὰ τὸν παραστήσωμε οὕτω: - 5^3 -, τὸ ὁποῖον διαβάζεται: Πέντε εἰς τὴν τρίτην δύναμιν, ἢ πέντε εἰς τὸν κύβον, δηλ. $5 \times 5 \times 5$.

Τὸν πολλαπλασιασμὸν τοῦ $5 \times 5 \times 5 \times 5$ τὸ λέγομεν 5^4 (ἢ πέντε εἰς τὴν τετάρτην δύναμιν).

Τὸν πολλαπλασιασμὸν τοῦ $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$ τὸ λέγομε 5^5 (ἢ πέντε εἰς τὴν πέμπτην δύναμιν, κλπ.).

Ἀσκήσεις

1. Νὰ εὑρεθῇ τὸ τετράγωνον τῶν ἀριθμῶν 9, 100, 25, 4, 12, 60, 15, 8, 20, 50, 14, 1.000.

2. Νὰ εὑρεθῇ ὁ κύβος τῶν ἀριθμῶν 10, 3, 15, 24, 16, 20, 50, 100.

3. Διαβάσατε τὰ παρακάτω καὶ εὕρετε πόσον εἶναι:

$8^2 =$	. $6^3 =$	. $20^2 =$	. $17^3 =$	$25^2 =$
$12^2 =$	. $16^3 =$	. $50^2 =$	. $100^3 =$	$14^3 =$
$8^4 =$	$3^5 =$	$9^6 =$	$10^5 =$	$4^4 =$
$5^4 =$	$6^4 =$	$7^5 =$	$10^6 =$	$6^5 =$

ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ ΡΙΖΑ

Εἴπομεν ὅτι τὸ τετράγωνον τοῦ 5 εἶναι τὸ 25.

Τὸ τετράγωνον τοῦ 10 εἶναι τὸ 100. Τὸ τετράγωνον τοῦ 7 εἶναι τὸ 49.

Ἀντιθέτως τώρα λέγομεν ὅτι: ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 25 εἶναι τὸ 5. Ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 100 εἶναι τὸ 10. Ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 49 εἶναι τὸ 7.

Τετραγωνικὴ ρίζα ἑνὸς ἀριθμοῦ, λέγεται ὁ ἀριθμὸς ἐκεῖνος ὁ ὁποῖος, πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν ἑαυτόν του, μᾶς δίδει τὸν πρῶτον ἀριθμόν.

Πῶς δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν ἑνὸς οἱουδήποτε ἀριθμοῦ;

Ἔστω ὁ ἀριθμὸς 4225. Ποία εἶναι ἡ τετραγωνικὴ ρίζα αὐτοῦ τοῦ ἀριθμοῦ;

Χωρίζομεν τὸν ἀριθμὸν κατὰ διψήφια τμήματα, ἀρχίζοντες ἀπὸ τὸ τέλος. Ἂν ὁ ἀριθμὸς ἔχῃ ζυγὰ ψηφία (δηλαδὴ 2, 4, 6, 8, 10 κ.λ.π.) τότε θὰ εἶναι ἀκριβῶς εἰς διψήφια τμήματα χωρισμένος. Ἂν ὅμως ὁ ἀριθμὸς ἔχῃ μονὰ ψηφία (δηλαδή, 1, 3, 5, 7, 9 κ.λ.π.) τότε τὸ πρῶτον ψηφίον θὰ εἶναι μόνον του.

Ἔχομεν λοιπόν:

```
4'2'25 √ 65              65 ×
6 25     125 ×           65
6 25       5            ----
-----    ---             325
= = =    625            390
                        ----
                        4225
```

Παίρνομεν τὸ πρῶτον διψήφιον τμῆμα: τὸ 42. Ποῖος ἀριθμὸς πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν ἑαυτόν του μᾶς δίδει γινόμενον 42 ἢ ὀλιγώτερον—ὄχι περισσότερον — ἀπὸ 42; Εἶναι ὁ ἀριθμὸς 6. Τὸν ἀριθμὸν 6 γράφομεν ἐπάνω ἀπὸ τὴν γραμμήν. Καὶ λέγομεν: $6 \times 6 = 36$, ἀπὸ 42 μένει ὑπόλοιπον 6 τὸ ὁποῖον γράφομεν κάτω ἀπὸ τὸ 42. Δίπλα εἰς τὸ ὑπόλοιπον 6 κατεβάζομεν καὶ τὸ ἄλλο διψήφιον τμῆμα τοῦ ἀριθμοῦ καὶ γίνεται

625. Τὸν ἀριθμὸν 6 ποὺ ἐγράψαμεν πάνω ἀπὸ τὴν γραμμήν, τὸν διπλασιάζομεν καὶ γίνεται 12. Τώρα λέγομεν τὸ 12 εἰς τὸ 62 χωρεῖ 5 φοράς. Τὸν ἀριθμὸν 5 τὸν γράφομεν δίπλα καὶ γίνεται 125. Τὸν ἀριθμὸν 125 τὸν πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸ ψηφίον ποὺ προσεθέσαμεν εἰς τὸ τέλος του, δηλαδὴ ἐπὶ 5. Τὸ γινόμενον τοῦ 125×5=625. Ἀφαιροῦμεν τὸ 625 ἀπὸ τὸ 625 καὶ ἔχομεν ὑπόλοιπον μηδέν. Ἂν ἐτύγχανε νὰ ἔχωμεν ὀλιγώτερον ἀπὸ 625 καὶ ἑπομένως δὲν ἐγίνετο ἡ ἀφαίρεσις, τότε θὰ ἐγράφομεν δίπλα εἰς τὸ 12, τὸν ἀριθμὸν 4 καὶ θὰ ἐπολλαπλασιάζομεν τὸ 124 ἐπὶ 4. Ἐδῶ ὅμως ἔχομεν ἀριθμὸν ἀπὸ τὸν ὁποῖον ἀφαιρεῖται ἀκριβῶς καὶ μάλιστα δὲν ἀφήνει ὑπόλοιπον. Τὸ 5, λοιπόν, ποὺ ἐγράψαμεν δίπλα εἰς τὸ 12, τώρα θὰ τὸ γράψωμεν δίπλα εἰς τὸ 6 καὶ θὰ γίνῃ 64. Ὁ ἀριθμὸς 65 εἶναι ἡ τετραγωγωνικὴ ρίζα τοῦ 4225. Κάμνομεν τὴν δοκιμήν, πολλαπλασιάζομεν 65×65 καὶ εὑρίσκομεν 4225. Ἑπομένως, ἡ πρᾶξίς μας εἶναι ὀρθή.

Ἓν δεύτερον παράδειγμα: Νὰ εὕρωμεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ 140.

	11,8		
140 √	21×	228×	11,8×
40	1	8	11,8
21	21	1824	944
1900			118
1824			118
76			139,24 +
			76
			140,00

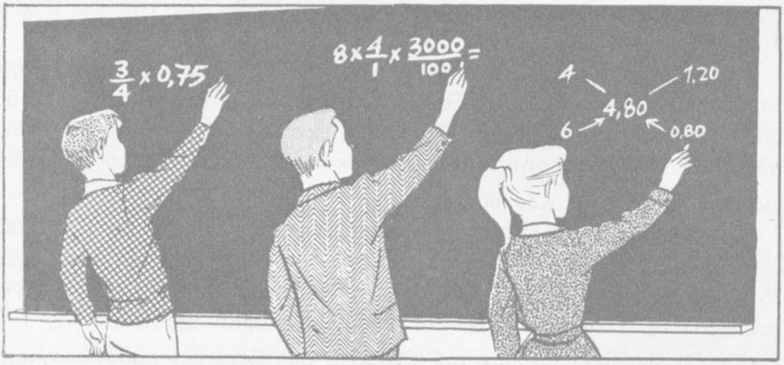
Χωρίζομεν τὸν ἀριθμὸν 140 εἰς διψήφια τμήματα, ἀρχίζοντες ἀπὸ τὸ τέλος. Εἰς τὴν ἀρχὴν ἀπομένει τὸ 1. Ποῖος ἀριθμός, πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν ἑαυτόν του μᾶς δίνει γινόμενον 1; Τὸ 1. Γράφομεν, λοιπόν, 1 ἐπάνω ἀπὸ τὴν γραμμήν. Καὶ λέγομεν: Ἓν ἐπὶ ἓν ἴσον ἕν, ἀπὸ ἓν μηδέν. Κατεβάζομεν καὶ τὸ διψήφιον τμῆμα, καὶ ἔχομεν 40. Τὸν ἀριθμὸν 1 τὸν διπλασιάζομεν καὶ γίνεται 2. Τὸ 2 τὸ γράφομεν κάτω ἀπὸ τὸ ἓν καὶ λέγομεν: Τὸ 2 εἰς τὸ 4 χωρεῖ 2, ἀλλ' ἂν τὸ 2 τὸ γράψωμεν δίπλα εἰς τὸ 2 θὰ γίνῃ 22 καὶ 2 φορὰς 22 γίνεται 44, ἐνῷ ἐδῶ ἔχομεν μόνον 40. Δι' αὐτὸ θὰ πάρω μόνον 1 φοράν. Τὸ 1 θὰ τὸ γράψωμεν δίπλα εἰς τὸ 2 καὶ θὰ γίνῃ 21. Αὐτὸ θὰ τὸ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 1. 1×21=21 ἀπὸ 40 μένουν 19. Γράφομεν τώρα τὸ δεύτερον 1 δίπλα εἰς τὸ πρῶτον, ἐπάνω ἀπὸ τὴν γραμμήν. Ἐδῶ ἔγινε τώρα 11. Διπλασιάζομεν τὸ 11 καὶ γίνεται 22 καὶ προχωροῦμεν διὰ δέκατα. Προσθέτομεν 2 μηδενικὰ εἰς τὸ 19 καὶ γίνεται 1900. Λέγομεν τώρα: τὸ 2 εἰς τὸ 19 χωρεῖ 9 φοράς, ἀλλὰ θὰ πάρωμεν 8. Γράφομεν τὸ 8 δίπλα εἰς τὸ 22 καὶ 1824, τὸ ὁποῖον ἀφαιρούμενον ἀπὸ τὸ 1900, ἀφήνει ὑπόλοιπον 76. Τώρα βάζομεν ὑποδιαστολὴν εἰς τὸ 11 καὶ γράφομεν τὸ τρίτον ψηφίον ποὺ εὕρομεν: τὸ 8. Ἂν θέλωμεν νὰ προχωρήσωμεν δι' ἑκατοστά, θὰ διπλασιάσωμεν τὸ 118, θὰ προσθέσωμεν δύο μηδενικὰ εἰς τὸ 76 καὶ θὰ προχωρήσωμεν ὅπως καὶ προηγουμένως.

Σταματῶμεν ἕως ἐδῶ καὶ λέγομεν ὅτι ὁ ἀριθμὸς 11,8 εἶναι ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 140, κατὰ προσέγγισιν ἑνὸς δεκάτου, διότι ὅπως εἴδομεν, ἡ πρᾶξις ἄφησεν ὑπόλοιπον.

Κάμνομεν τὴν δοκιμήν: πολλαπλασιάζομεν 11,8×11,8 καὶ εὑρίσκομεν 139,24 προσθέτομεν καὶ τὸ 76 τὰ ὁποῖα εἶναι καὶ αὐτὰ ἑκατοστὰ (διότι ὅπως ἐνθυμεῖσθε, προσεθέσαμεν δύο μηδενικὰ εἰς τὸ τέλος τοῦ ἀκεραίου 19), καὶ ἔχομεν ἄθροισμα 140.

Ἀσκήσεις

1. Εὕρετε τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τῶν ἀριθμῶν 625,225,14.400, 1890, 5640, 18, 39, 120, 3216, 23.104, 15, 10.



ΓΕΝΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ
ΕΦ' ΟΛΗΣ ΤΗΣ ΥΛΗΣ ΤΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ

1. Ἕνας ἔμπορος ἐπῆγεν εἰς τὴν Πορταριὰν διὰ τὴν ἀγορὰν μήλων. Εἶχε μαζὶ του 60.000 δρχ. Εἰς τὴν ἀρχὴν ἠγόρασε 1500 χλγρ. μῆλα πρὸς 3,85 δρχ. τὸ χλγρ. Ἀργότερον 2350 χλγρ. πρὸς 4,40 δρχ. τὸ χλγρ. καὶ ἀργότερον τρίτον ποσὸν ἐκ 4180 χλγρ. πρὸς 4,80 δρχ. τὸ χλγρ. Διὰ τὴν τοποθέτησιν τῶν μήλων εἰς τὰ κιβώτια ἐπλήρωσε 0,10 δρχ. τὸ χλγρ. Διὰ ἀγώγια μέχρι τῶν Ἀθηνῶν ἐπλήρωσε 0,70 δρχ. τὸ χλγρ. Εἰς τὰς Ἀθήνας ἐκαθάρισε τὰ σάπια καὶ εἶχε ζημίαν 5%.

Τὰ ὑπόλοιπα χρήματα, ἀπὸ τὰς 60.000 ποὺ εἶχε, τὰ ἐτόκισε πρὸς 12% διὰ 6 μῆνας.

Νὰ κάμετε ὅλους τοὺς λογαριασμοὺς καὶ νὰ εὕρετε πόσον πρέπει νὰ πωλήσῃ τὸ χλγρ., διὰ νὰ ἔχῃ κέρδος 0,50 δρχ. κατὰ χλγρ. Ἐπίσης νὰ εὕρετε πόσον τόκον θὰ πάρῃ ἀπὸ τὰ χρήματα ποὺ ἐτόκισε.

2. Εἰς τὴν συγκέντρωσιν σίτου τῆς Ἀγροτικῆς Τραπέζης ἕνας παραγωγὸς ἔστειλε 30.000 χλγρ. σίτου. Ἡ Τράπεζα θὰ τὸ πληρώσῃ πρὸς 3 δρχ. τὸ χλγρ. διὰ τὴν ἐξόφλησιν τῶν χρεῶν, καὶ 2,30 κατὰ χλγρ. θὰ πληρώσῃ τὸ ὑπόλοιπον. Ὁ παραγωγὸς αὐτὸς ὀφείλει εἰς τὴν Τράπεζαν 42.000 δρχ. Ἐπλήρωσε διὰ μεταφορικὰ 0,10 δρχ. κατὰ χλγρ. Πόσα χρήματα θὰ πάρῃ εἰς χεῖράς του ὁ παραγωγός; Ἂν τὰ καταθέσῃ εἰς τὸ Ταχυδ. Ταμιευτήριον πρὸς 8%, πόσον τόκον θὰ πάρῃ εἰς 8 μῆνας;

3. Ἕνας ὑπάλληλος μὲ βαθμὸν Εἰσηγητοῦ παίρνει μισθὸν 4.200 δρχ.

τὸν μῆνα. Ἀπὸ τὸν μισθὸν κρατοῦν 3% διὰ Μετοχικὸν Ταμεῖον, 2% διὰ Ταμεῖον Προνοίας.

Ἀπὸ τὰ ὑπόλοιπα ἐξοδεύει 70% διὰ διατροφήν, 8% διὰ ὑπόδησιν καὶ 15% διὰ ἔκτακτα ἔξοδα. Τὰ ὑπόλοιπα τὰ διαθέτει, διὰ νὰ ἐξοφλῇ ὅσα εἴδη ἔχει ἀγοράσει μὲ δόσεις. Πόσα τοῦ κρατοῦν διὰ κάθε ταμεῖον, πόσα πληρώνει διὰ διατροφήν, ὑπόδησιν, ἔκτακτα ἔξοδα καὶ πόσα διαθέτει διὰ τὴν πληρωμὴν τῶν δόσεων;

4. Ὁ προϋπολογισμὸς τοῦ Κράτους ἀνῆλθε πέρυσι εἰς 37.000.000.000. Ἀπὸ αὐτά, διὰ τὸν στρατὸν διατίθενται 30%, διὰ τοὺς ὑπαλλήλους 25%, διὰ τὴν Ἐκπαίδευσιν 17% καὶ τὰ ὑπόλοιπα διὰ τὰς ἄλλας ἀνάγκας τοῦ Κράτους. Τί ποσὸν διετέθη διὰ κάθε κατηγορίαν ἐξόδων;

5. Ἡ Σχολικὴ Ἐφορία τοῦ σχολείου μας ἔκαμε τὸν προϋπολογισμόν της. Τὰ ἔξοδα θ' ἀνέλθουν εἰς 50.000 δρχ. Ἀπ' αὐτὰ θὰ διατεθοῦν: 25% διὰ τὴν ἐπισκευὴν τοῦ διδακτηρίου, 4% διὰ γραφικὴν ὕλην, 8% διὰ καθαριότητα, 30% διὰ τὴν βιβλιοθήκην, 10% διὰ σχολικὸν κῆπον, 15% διὰ προμήθειαν διδακτικῶν ὀργάνων, 6% δι' ἀγορὰν ἐπίπλων καὶ 2% διὰ τὴν μαθητικὴν πρόνοιαν. Τί ποσὸν θὰ διατεθῇ διὰ κάθε ἄρθρον τοῦ προϋπολογισμοῦ;

6.Μία ἀντιπροσωπεία ραδιοφώνων διέθεσεν αὐτὸν τὸν μῆνα 8 ραδιόφωνα καὶ εἰσέπραξε 14.600 δρχ. Ὁ φόρος τοῦ κράτους εἰς τὰ ραδιόφωνα εἶναι 45%. Εἰς κάθε ραδιόφωνον ἡ ἀντιπροσωπεία ἐκέρδισε 300 δρχ. Πόσον ἐχρέωνε τὸ ἐργοστάσιον κάθε ραδιόφωνον;

7. Ἡ τιμὴ τοῦ δολλαρίου εἶναι 30 δρχ. Ἕνας φίλος μου ἀπὸ τὴν Ἀμερικὴν μοῦ ἔστειλεν ἕνα στυλογράφον ἀξίας 12 δολλαρίων καὶ μοῦ ἔγραψε νὰ δώσω τὴν ἀξίαν τοῦ στυλογράφου εἰς δραχμὰς εἰς τὸν ἐδῶ ἀδελφόν του. Πόσας δραχμὰς θὰ τοῦ δώσω;

8. Ἡ τιμὴ τῆς χρυσῆς λίρας Ἀγγλίας εἶναι 307 δρχ. Ἕνας ἔμπορος ἐχρεωστοῦσεν εἰς ἓν χρηματιστηριακὸν γραφεῖον 4.590 δρχ. καὶ τὰς ἔδωσεν εἰς χρυσᾶς λίρας. Πόσας λίρας ἔδωσε;

9. Ἓν ἐργοστάσιον ἠσφαλισμένον εἰς μίαν ἀσφαλιστικὴν ἑταιρείαν ἀντὶ 12.500 χρυσῶν λιρῶν, ἐκάη ἀπὸ πυρκαϊάν. Ἡ Ἑταιρεία τοῦ ἔδωσε προκαταβολὴν 280.000 δρχ. Πόσας λίρας τοῦ χρεωστεῖ ἀκόμη;

10. Τὸ Ὑπερωκεάνιον «Ὀλυμπία» ἔπλευσε τὸν τελευταῖον μῆνα 3150 ναυτικὰ μίλλια, ἐνῷ τὸ ὑπερωκεάνιον «Ἄννα Μαρία» ἔπλευσε τὸν ἴδιον καιρὸν 3240 ἀγγλικὰ μίλλια. Ποῖον ἀπὸ τὰ δύο πλοῖα ἔπλευσε περισσότεραν ἀπόστασιν;

(Ναυτικὸν μίλλιον=1852 μ. Ἀγγλικὸν μίλλιον=1608,64 μ.)

11. Ἡ βιβλιοθήκη τοῦ σχολείου μας ἔχει 160 βιβλία. Τὰ $\frac{5}{8}$ εἶναι παιδικὰ βιβλία. Πόσα εἶναι τὰ παιδικὰ βιβλία;

12. Λέγει ὁ Γιάννης εἰς τὸν Γιῶργον: εἶμαι 12 ἐτῶν. Ὁ Γιῶργος ἀπαντᾷ: ἐγὼ εἶμαι τὸ $\frac{1}{4}$ τῶν ἐτῶν σου μεγαλύτερος ἀπὸ σέ. Πόσων ἐτῶν εἶναι ὁ Γιῶργος;

13. Ο Τάκης κατέθεσεν εἰς τὸ Ταχυδρ. Ταμιευτήριον ἓν ποσὸν δι' 6 μῆνας πρὸς 8% καὶ ἐπῆρε τόκον 240 δρχ. Ὁ Βασίλης κατέθεσε καὶ αὐτὸς ἓν ποσὸν δι' 8 μῆνας πρὸς 6% καὶ ἐπῆρε καὶ ἐκεῖνος τόκον 240 δρχ. Ποῖος ἀπὸ τοὺς δύο κατέθεσε μεγαλύτερον ποσόν;

14. Εἰς τὸν Κωστάκην ἔδωσεν ἡ θεία του διὰ καραμέλλας $\frac{4}{5}$ τοῦ δεκαδράχμου, ἐνῷ εἰς τὴν Ἀφροδίτην ἔδωσε $\frac{4}{10}$ τοῦ εἰκοσαδράχμου. Ποῖος ἐπῆρε περισσότερα;

15. Τὸ ὡρολόγιόν μου λέγει 11.45', ἐνῷ τὸ ὡρολόγιον τοῦ σχολείου λέγει δώδεκα παρὰ τέταρτον. Ποῖον ἀπὸ τὰ δύο ὡρολόγια πηγαίνει ὀπίσω;

16. Ἕνας ἐγεννήθη τὴν 3 Ἀπριλίου 1882. Πόσων ἐτῶν εἶναι σήμερον;

17. Τρεῖς ἔμποροι ἔκαμαν ἔλεγχον τὸ βράδυ εἰς τὸ ταμεῖόν των καὶ εὗρον ὅτι εἰσέπραξαν: ὁ πρῶτος 35 λίρας, ὁ δεύτερος 700 σελίνια καί ὁ τρίτος 84000 πέννας. Ποῖος ἀπὸ τοὺς τρεῖς εἶχε τὴν μεγαλυτέραν εἴσπραξιν;

18. Ἓν φορτηγὸν αὐτοκίνητον μετέφερε 4 τόννους σταφυλῶν, ἐνῷ ἕν ἄλλο φορτηγὸν μετέφερε 4.000 χλγρ. Ποῖον ἀπὸ τὰ δύο αὐτοκίνητα μετέφερε περισσότερον βάρος;

19. Τέσσαρες φίλοι εὗρον ἓν 500δραχμον καὶ τὸ ἐμοίρασαν ἀνάλογα μὲ τὴν ἡλικίαν τους. Ὁ πρῶτος ἦτο 35 ἐτῶν, ὁ δεύτερος 20, ὁ τρίτος 27 καὶ ὁ τέταρτος 18 ἐτῶν. Τί μέρος τοῦ 500δράχμου ἐπῆρεν ὁ καθείς;

20. Εἰς τὸ πρῶτον ἑξάμηνον ἐπῆρες τοὺς βαθμούς σου : Ἀριθμητικὴν 10, Γεωμετρίαν 8, Ἑλληνικὰ 6, Ἱστορίαν 9, Θρησκευτικὰ 8, Φυσικὴν 6, Πειραματικὴν 7, Γεωγραφίαν 10, Ἰχνογραφίαν 6, Καλλιγραφίαν 8, Χειροτεχνίαν 9, Ὠδικὴν 8 καὶ Γυμναστικὴν 9. Ποῖος εἶναι ὁ μέσος ὅρος τῆς προόδου σου εἰς τὸ πρῶτον ἑξάμηνον;

21. Ἀπὸ 4 χλγρ. ἐλαιῶν ἐξάγεται ἓν χλγρ. ἐλαίου. Ἓν ἐλαιοτριβεῖον παρήγαγεν ἐφέτος 12.000 χλγρ. ἐλαίου ἀπὸ ἐλαίας ποὺ ἐπῆγαν οἱ παρα-

γωγοί. Ἓν ἄλλο ἐλαιοτριβεῖον ἤλεσεν 60.000 χλγρ. ἐλαιῶν. Πόσα χλγρ. ἐλαιῶν ἤλεσε τὸ πρῶτον καὶ πόσα χλγρ. ἐλαίου ἔβγαλε τὸ δεύτερον;

22. Εἰς τὰ ἐλαιοτριβεῖα κρατοῦν διὰ δικαιώματα 10% εἰς τὸ ἔλαιον. Ἀπ' αὐτὸ 5% παίρνει τὸ ἐλαιοτριβεῖον, 1% ὁ ἰδιοκτήτης τοῦ ἀλόγου ποὺ γυρίζει τὴν πέτραν καὶ τὰ ὑπόλοιπα τὰ μοιράζονται οἱ ἐργάται. Εἰς ἓν ἐλαιοτριβεῖον εἰργάσθησαν ἐφέτος 6 ἐργάται καὶ παρήγαγον 25.600 χλγρ. ἐλαίου. Ἀπ' αὐτὰ ἐκράτησαν, ὅπως γράφομεν, τὰ δικαιώματά των 10% καὶ τὰ ἐμοιράσθησαν. Νὰ εὕρετε πόσα χιλιόγραμμα ἐλαίου θὰ πάρῃ τὸ ἐλαιοτριβεῖον, πόσα ὁ ἰδιοκτήτης τοῦ ἀλόγου καὶ πόσα κάθε ἐργάτης.

23. Ἕνας τύπος ἀλεύρου γίνεται μὲ τὰ παρακάτω μίγματα: 78% σῖτος, 12% κριθή, 6% ἀραβόσιτος καὶ 4% σόγια. Πόσα χλγρ. ἀπὸ κάθε εἶδος χρειάζονται διὰ νὰ ἑτοιμασθοῦν 40 σάκκοι τῶν 50 χιλιογράμμων ὁ καθείς;

24. Διὰ τὴν παρασκευὴν τῆς σοκολάτας χρησιμοποιοῦνται τὰ ἑξῆς εἴδη: 45% γάλα, 15% σάκχαρις καὶ 40% κακάον. Πόσα χιλιόγραμμα ἀπὸ κάθε εἶδος πρέπει ν' ἀναμίξουν εἰς τὸ ἐργοστάσιον, διὰ νὰ παραγάγουν 2500 τεμάχια τῶν 100 γραμμαρίων;

25. Τὸ σπορέλαιον τιμᾶται 14 δρχ. τὸ χλγρ. Τὸ ἔλαιον τιμᾶται 20 δρχ. τὸ χλγρ. Πόσα χλγρ. ἀπὸ κάθε εἶδος πρέπει ν' ἀναμίξῃ ὁ ἔμπορος, διὰ νὰ κάμῃ μῖγμα 100 χλγρ. καὶ νὰ πωλῇ 18 δρχ. τὸ χλγρ.;

26. Εἰς τὸ Ταχυδρομ. Ταμιευτήριον εἶχον καταθέσει, εἰς τὰς 10 Μαρτίου 1960 δρχ. 1000 πρὸς 8%. Τὴν 10ην Ἰουνίου 1960 ἀπέσυρα 500 δρχ. Τὴν 10ην Σεπτεμβρίου 1960 κατέθεσα ἄλλας 1500 δρχ. Πόσους τόκους θὰ πάρω τὴν 10ην Μαρτίου 1961 δι' ὅλον τὸ ποσὸν ποὺ ἔχω καταθέσει;

27. Μία Ἀμερικανικὴ Ἑταιρεία ἀνέλαβε νὰ διορθώσῃ τοὺς δρόμους. Κατέθεσε κεφάλαια 5.916.300 δολλάρια. Ἀπὸ τὸ Κράτος μας ἐπῆρε ἀποζημίωσιν 2.250.000 χαρτίνας λίρας Ἀγγλίας. Ἀπὸ τὴν ἐπιχείρησιν αὐτὴν ἐκέρδισεν, ἢ ἐζημιώθη ἡ ἑταιρεία; Καὶ πόσα;

(Τιμὴ δολλαρίου = 30 δρχ. Τιμὴ χαρτίνης λίρας = 80 δρχ.).

28. Τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ $\frac{1}{4}$ τῆς περιουσίας τοῦ κ. Α. Ν. ἐπωλήθη ἀντὶ 2000 χαρτίνων λιρῶν Ἀγγλίας. Πόση εἶναι ἡ ἀξία τῆς ὅλης περιουσίας τοῦ κ. Α. Ν. εἰς δραχμάς;

29. Ὁ κ. Δ. Ε. ἐργάζεται μὲ ποσοστὰ εἰς τὰ καταστήματα τοῦ κ. Τ. Δικαιοῦται 25% ἐπὶ τῆς ἀξίας τῶν εἰδῶν, ποὺ πωλεῖ. Ἐφέτος ἐπώλησεν

εἴδη ἀξίας 10.000. Ἀπὸ τὰ ποσοστά του διέθεσε 50% διὰ διατροφήν, 20% διὰ ρουχισμὸν καὶ ὑπόδησιν καὶ τὰ ὑπόλοιπα τὰ διέθεσε διὰ τὴν ἐξόφλησιν τοῦ χρέους του. Πόσα διέθεσε διὰ κάθε κατηγορίαν ἐξόδων;

30. Ἡ ἀγορὰ ἑνὸς ὑφάσματος δι᾽ ἀνδρικὴν ἐνδυμασίαν ἐστοίχισε 12 χαρτίνας λίρας 5 σελλίνια καὶ 6 πέννας καὶ τὰ ραπτικὰ ἐστοίχισαν 30 δολλάρια. Πόσας δραχμὰς ἐστοίχισεν αὐτὴ ἡ ἐνδυμασία;

31. Τρεῖς νέοι ἵδρυσαν μίαν Ἑταιρείαν. Ὁ πρῶτος κατέθεσε 12.000 δρχ. Ὁ δεύτερος 7.000 δρχ. καὶ ὁ τρίτος 5.000 δρχ. Μετὰ τρεῖς μῆνας ἔκαμαν ἰσολογισμὸν καὶ εὗρον ὅτι εἶχον κέρδος 25% ἐπὶ τοῦ κεφαλαίου. Τί κέρδος ἀναλογεῖ εἰς κάθε συνεταῖρον;

32. Δύο ἄλλοι συνεταῖροι ποὺ ἵδρυσαν μίαν ἑταιρείαν μὲ κεφάλαια, ὁ πρῶτος 10.000 δρχ. καὶ ὁ δεύτερος μὲ κεφάλαια κατὰ $\frac{2}{5}$ ὀλιγώτερα ἀπὸ τὸν πρῶτον, εἶχον ζημίαν 15% ἐπὶ τῶν κεφαλαίων. Τί ζημία ἀναλογεῖ εἰς κάθε συνεταῖρον;

33. Ὁ παντοπώλης κ. Π. εἶχεν αὐτὴν τὴν ἑβδομάδα τὰς παρακάτω εἰσπράξεις : Δευτέρα 410,25 δρχ. Τρίτη 286,10 δρχ. Τετάρτη 307,90 δρχ. Πέμπτη 106 δρχ. Παρασκευὴ 372,45 δρχ. καὶ Σάββατον 2.185,39 δρχ. Πόσαι ἦσαν αἱ εἰσπράξεις κάθε ἡμέρας κατὰ μέσον ὅρον;

34. Ὁ ὑποδηματοποιὸς κ. Ν., ἀπὸ ἕνα δέρμα βάρους 12 χλγρ. καὶ 500 γραμμαρίων ἔβγαλε 36 ζεύγη σολλῶν τῶν 200 γραμμαρίων κάθε ζεῦγος. Πόσα χλγρ. δέρματος παραμένει ἄθικτον;

35. Τὸ λεωφορεῖον Ἀθηνῶν - Κιάτου ἐξεκίνησεν ἀπὸ τὰς Ἀθήνας τὴν 6.15′ τὸ πρωΐ. Μέχρι τῶν Μεγάρων ἔκαμε 1 ὥραν 6′ 30″. Ἀπὸ τὰ Μέγαρα ἕως τοὺς Ἁγίους Θεοδώρους ἔκαμεν 29′ 30″. Ἀπὸ τοὺς Ἁγίους Θεοδώρους ἕως τὴν Κόρινθον ἔκαμε 25′. Ἀπὸ τὴν Κόρινθον ἕως τὸ Κιᾶτον ἔκαμε 28′. Ποίαν ὥραν ἔφθασε τὸ λεωφορεῖον εἰς τὸ Κιᾶτον;

36. Δύο αὐτοκίνητα ἐξεκίνησαν μαζὶ ἀπὸ τὰς Ἀθήνας διὰ τὴν Λάρισαν τὴν 8ην πρωινήν. Ἡ ἀπόστασις Ἀθηνῶν - Λαρίσης εἶναι 400 χλμ. Τὸ πρῶτον αὐτοκίνητον τρέχει μὲ 40 χλμ. τὴν ὥραν, ἀλλ᾽ εἶχε τὰς ἑξῆς στάσεις : Εἰς τὰς Θήβας 30′ διὰ φαγητόν. Εἰς τὸν Μπράλλον 1 ὥραν 50′ δι᾽ ἐπιδιόρθωσιν, εἰς τὰ Φάρσαλα 10′. Τὸ δεύτερον αὐτοκίνητον τρέχει μὲ 32 χιλιόμετρα τὴν ὥραν. Ποῖον ἀπὸ τὰ δύο αὐτοκίνητα θὰ φθάσῃ πρῶτον εἰς τὴν Λάρισαν καὶ εἰς πόσας ὥρας;

37. Ἡ βιβλιοθήκη τοῦ σχολείου μας ἔχει 480 βιβλία. Ἀπὸ αὐτὰ 25% εἶναι διὰ τοὺς διδασκάλους, 40% διὰ τοὺς μεγάλους μαθητὰς καὶ

τὰ ὑπόλοιπα διὰ τοὺς μικροὺς μαθητάς. Πόσα βιβλία εἶναι διὰ τοὺς διδασκάλους, πόσα διὰ τοὺς μεγάλους μαθητὰς καὶ πόσα διὰ τοὺς μικροὺς μαθητάς;

38. Εἰς ἓν σχολεῖον φοιτοῦν 300 μαθηταί. Ὁ σχολίατρος ἐξήτασε τὰ παιδιὰ καὶ εὗρε : 150 μαθητὰς ὑγιεῖς, 25 ἀναιμικούς, 75 νὰ πάσχουν ἀπὸ τραχηλικοὺς ἀδένας, 10 τραχωματικοὺς καὶ 40 νὰ πάσχουν ἀπὸ διόγκωσιν σπληνός. Τί ποσοστὸν ἀντιπροσωπεύει κάθε κατηγορία μαθητῶν;

39. Τὸ σχολεῖόν μας κατέθεσεν εἰς τὸ Ταχ. Ταμιευτήριον 15.000 δρχ. πρὸς 8%. Ἔπειτα ἀπὸ ἓν ὡρισμένον χρονικὸν διάστημα ὁ Ταμίας τῆς Σχολικῆς Ἐφορείας ἐπῆρεν ὅλα τὰ χρήματα μαζὶ μὲ τοὺς τόκους καὶ ἦσαν ὅλα - ὅλα 16.200 δρχ. Πόσον χρονικὸν διάστημα ἔμειναν τὰ χρήματα εἰς τὸ Ταχ. Ταμιευτήριον;

40. 10 ἐργάται ἐργάζονται 6 ἡμέρας καὶ σκάπτουν 25 στρέμματα ἀμπέλου. Ἂν τὰ $\frac{2}{5}$ αὐτῶν τῶν ἐργατῶν ἐργασθοῦν τριπλασίας ἡμέρας, πόσα στρέμματα θὰ σκάψουν;

41. Τρεῖς ἀγορασταὶ εἰσῆλθον εἰς ἓν ἐμπορικὸν κατάστημα καὶ ἠγόρασαν : ὁ πρῶτος $4\frac{2}{8}$ μέτρα ὑφάσματος, ὁ δεύτερος 4,25 μέτρα ὑφάσματος καὶ ὁ τρίτος 4 μέτρα καὶ 25 πόντους ὑφάσματος. Ποῖος ἀπὸ τοὺς τρεῖς ἠγόρασε περισσότερον ὕφασμα;

42. Τέσσαρα παιδιὰ ἐκληρονόμησαν ἀπὸ τὸν πατέρα των περιουσίαν 300.000 δρχ. Ἡ διαθήκη τοῦ πατρὸς ἔγραφε νὰ πάρουν : ὁ πρῶτος τὰ $\frac{3}{15}$. ὁ δεύτερος τὰ $\frac{3}{4}$ ἀπ' ὅσα θὰ πάρῃ ὁ πρῶτος. Ὁ τρίτος τὰ $\frac{13}{14}$ ἀπ' ὅσα θὰ πάρουν οἱ δύο πρῶτοι μαζί. Καὶ ὁ τέταρτος νὰ πάρῃ τὰ ὑπόλοιπα. Τί μερίδιον ἐπῆρεν ἕκαστος;

43. Ποῖος ἀριθμὸς πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ 25 μᾶς δίδει γινόμενον 625;

44. Ποῖος ἀριθμὸς πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ 8 καὶ πάλιν ἐπὶ 8 μᾶς δίδει γινόμενον 512;

45. Μὲ ποίους ἀριθμοὺς διαιρεῖται ἀκριβῶς ὁ ἀριθμὸς 1000;

46. Μὲ ποίους ἀριθμοὺς διαιρεῖται ἀκριβῶς ὁ ἀριθμὸς 600;

47. Μὲ ποίους ἀριθμοὺς διαιρεῖται ἀκριβῶς ὁ ἀριθμὸς 490;

48. Γραμμάτιον προεξοφληθὲν πρὸς 15% 3 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του ἔδωσεν ἐξωτερικὴν ὑφαίρεσιν 112,50 δρχ. Πόση ἦτο ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου;

49. Ἂν ἀναμίξω καφὲν καὶ ἐρέβινθον, ποὺ κοστίζουν, ὁ πρῶτος 70 δρχ. καὶ ὁ δεύτερος 20 δρχ., πόσα χιλιόγραμμα πρέπει νὰ πάρω ἀπὸ κάθε εἶδος, διὰ νὰ κάμω μῖγμα 50 χιλιογράμμων καὶ νὰ πωλῆται τὸ μῖγμα 60 δρχ. τὸ χιλιόγραμμον;

50. Εὕρετε, ἂν ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ ἀριθμοῦ 47.056 εἶναι τὸ 74, ἢ ὄχι.

ΤΕΛΟΣ

Π Ε Ρ Ι Ε Χ Ο Μ Ε Ν Α

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

ΚΛΑΣΜΑΤΑ

ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

ΒΟΗΘΗΤΙΚΑ ΒΙΒΛΙΑ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ ΣΧΟΛΕΙΟΥ
ΝΕΑ ΣΕΙΡΑ

ΤΑΞΙΣ Α'

110 ΜΑΘΑΙΝΩ ΑΠ' ΟΛΑ (Πατριδογνωσία)
111 Η ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΜΟΥ

ΤΑΞΙΣ Β'

120 ΜΑΘΑΙΝΩ ΑΠ' ΟΛΑ (Πατριδογνωσία)
121 Η ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΜΟΥ

ΤΑΞΙΣ Γ'

130 ΠΑΛΑΙΑ ΔΙΑΘΗΚΗ
131 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ
132 ΙΣΤΟΡΙΑ (Μυθικὰ χρόνια)
33 ΓΡΑΜΜΑΤΙΚΗ
134 ΦΥΣΙΚΗ ΙΣΤΟΡΙΑ
135α ΠΑΤΡΙΔΟΓΝΩΣΙΑ—ΓΕΩΓΡΑΦΙΑ ('Αθήνα-Πειραιὰς 'Αττικὴ—Στερεὰ 'Ελλάδα)
ΤΕΤΡ. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ
ΝΕΟ ΕΙΚΟΝΟΓΡΑΦΗΜ.
ΤΕΤΡΑΔΙΟ ΕΚΘΕΣΕΩΝ

ΤΑΞΙΣ Δ'

40 ΚΑΙΝΗ ΔΙΑΘΗΚΗ
141 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ
142 ΙΣΤΟΡΙΑ ΑΡΧ. ΕΛΛΑΔΑΣ
43 ΓΡΑΜΜΑΤΙΚΗ
44 ΦΥΣΙΚΗ ΙΣΤΟΡΙΑ
45 ΓΕΩΓΡΑΦΙΑ ΕΛΛΑΔΑΣ
46 ΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ ΤΑ ΓΥΡΙΣΜΑΤΑ (Μικρὰ ἀναγνώσματα—'Εκθέσεις)
147 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ
148 ΙΣΤΟΡΙΑ ΑΡΧ. ΕΛΛΑΔΑΣ
ΤΕΤΡ. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ
ΝΕΟ ΕΙΚΟΝΟΓΡΑΦΗΜ.
ΤΕΤΡΑΔΙΟ ΕΚΘΕΣΕΩΝ

ΤΑΞΕΙΣ Γ'—Δ'
Συνδιδασκαλία

142α ΙΣΤΟΡΙΑ (Α' ἔτος συνδ/λίας)
142β ΙΣΤΟΡΙΑ (Β' ἔτος συνδ/λίας)
45 ΓΕΩΓΡΑΦΙΑ ΕΛΛΑΔΑΣ (Α' καὶ Β' ἔτος συνδ/λίας)

ΤΑΞΙΣ Ε'

50 ΕΚΚΛΗΣ.ΙΣΤΟΡΙΑ ('Εγκ.)
52 ΒΥΖΑΝΤΙΝΗ ΙΣΤΟΡΙΑ »
54 ΦΥΣΙΚΗ ΙΣΤΟΡΙΑ
55 ΓΕΩΓΡΑΦΙΑ ΗΠΕΙΡΩΝ (Παπασπύρου) »
55α ΓΕΩΓΡΑΦΙΑ ΗΠΕΙΡΩΝ (Οἰκονομίδη) »
57 ΦΥΣΙΚΗ & ΧΗΜΕΙΑ »
70 ΕΥΑΓ. ΠΕΡΙΚΟΠΑΙ »
71 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ »
78 ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ »
ΤΕΤΡΑΔ. ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ
ΤΕΤΡ. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ
ΝΕΟ ΕΙΚΟΝΟΓΡΑΦΗΜ.
ΤΕΤΡΑΔΙΟ ΕΚΘΕΣΕΩΝ

ΤΑΞΙΣ ΣΤ'

60 ΚΑΤΗΧ. ΛΕΙΤΟΥΡ. ('Εγκ.)
62 ΙΣΤ. ΝΕΩΤ. ΕΛΛΑΔΟΣ »
64 ΦΥΣΙΚΗ ΙΣΤΟΡΙΑ
65 ΓΕΩΓΡ. ΕΥΡΩΠΗΣ »
67 ΦΥΣΙΚΗ & ΧΗΜΕΙΑ »
70 ΕΥΑΓ. ΠΕΡΙΚΟΠΑΙ »
71 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ »
78 ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ »
ΤΕΤΡΑΔ. ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ
ΤΕΤΡ. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ
ΝΕΟ ΕΙΚΟΝΟΓΡΑΦΗΜ.
ΤΕΤΡΑΔΙΟ ΕΚΘΕΣΕΩΝ

ΤΑΞΕΙΣ Ε'—ΣΤ'
Συνδιδασκαλία

70 ΕΥΑΓ. ΠΕΡΙΚΟΠΑΙ ('Εγκ.)
71 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ »
74α ΦΥΣΙΚΗ ΙΣΤΟΡΙΑ (Α' ἔτος συνδιδασκαλίας)
74β ΦΥΣΙΚΗ ΙΣΤΟΡΙΑ (Β' ἔτος συνδιδασκαλίας)
77α ΦΥΣΙΚΗ & ΧΗΜΕΙΑ » (Α' ἔτος συνδιδασκαλίας)
77β ΦΥΣΙΚΗ & ΧΗΜΕΙΑ » (Β' ἔτος συνδιδασκαλίας)
78 ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ »

ΕΚΔΟΣΕΙΣ «ΑΤΛΑΝΤΙΔΟΣ» ΑΘΗΝΑΙ

71

ΑΤΛΑΝΤΙΣ