ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Ὀλυμπίας Μακρῆ

Τάξεις Ε΄ - ΣΤ΄

8

ΕΚΔΟΣΕΙΣ
Ν
„ΝΙΚΟΔΗΜΟΣ"

ΒΑΣΙΛΕΙΟΝ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΝ ΕΘΝ. ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚ)ΤΩΝ

Γεν. Δ)νσις Γεν. Ἐκπαιδεύσεως

Δ)νσις Διδακτικῶν Βιβλίων

Ἀριθ. πρωτ. 136323

Ἐν Ἀθήναις τῇ 27—9—1967

Ἐν συνεχείᾳ τῆς ὑπ' ἀριθ. 103901)21-7-67 ἐγκυκλίου ἐπιτρέπομεν τὴν χρησιμοποίησιν ὑπὸ τῶν μαθητῶν τῆς Εη καὶ ΣΤη τάξεως Δημοτικῆς Ἐκπαιδεύσεως μόνον διὰ τὸ προσεχὲς σχολικὸν ἔτος τῶν κάτωθι βοηθητικῶν βιβλίων.

ΔΙΑ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

1.

8. Ὀλυμπίας Μακρῆ

Κοινοποίησις :
Δ)σιν Διδ. Βιβλίων

Ἀκριβὲς ἀντίγραφον
Ὁ Διευθυντὴς
Γ. ΤΟΥΝΤΑΣ

Ὁ Ὑπουργὸς
Κ. ΚΑΛΑΜΠΟΚΙΑΣ

Ὀλυμπίας Π. Μακρῆ

ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΔΙΑ ΤΗΝ Ε΄ ΚΑΙ ΣΤ΄ ΤΑΞΙΝ

ΒΑΣΙΛΕΙΟΝ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΝ ΕΘΝ. ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚ)ΤΩΝ

Γεν. Δ)νσις Γεν. Ἐκπαιδεύσεως

Δ)νσις Διδακτικῶν Βιβλίων

Ἀριθ. πρωτ. 136323

Ἐν Ἀθήναις τῇ 27–9–196

Ἐν συνεχείᾳ τῆς ὑπ' ἀριθ' 103901)21–7–67 ἐγκυκλίου ἐπιτρέπομεν τὴν χρησιμοποίησιν ὑπὸ τῶν μαθητῶν τῆς Εη καὶ ΣΤη τάξεως Δημοτικῆς Ἐκπαιδεύσεως μόνον διὰ τὸ προσεχὲς σχολικὸν ἔτος τῶν κάτωθι βοηθητικῶν βιβλίων.

ΔΙΑ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

1.

8. Ὀλυμπίας Μακρῆ

Κοινοποίησις :	Ἀκριβὲς ἀντίγραφον	Ὁ Ὑπουργὸς
Δ)σιν Διδ. Βιβλίων	Ὁ Διευθυντὴς	Κ. ΚΑΛΑΜΠΟΚΙΑΣ
	Γ. ΤΟΥΝΤΑΣ	

ΤΑΞΙΣ Ε'

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ

ΚΥΒΟΣ

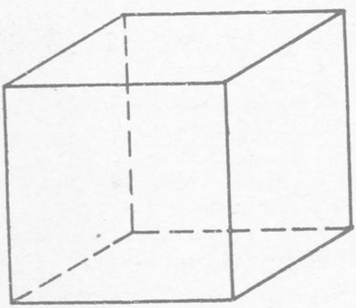
1. ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΤΟΥ ΚΥΒΟΥ

Ἐ π ι φ ά ν ε ι α τ ο ῦ κ ύ β ο υ. Ἡ πρώτη εἰκὼν εἶναι εἰκὼν ἑνὸς κύβου (εἰκ. 1). Ἂν ἔχωμεν ἕνα κύβον ἀπὸ χαρτόνι ἢ ἀπὸ ξύλον ἢ ἀπὸ ἄλλο ὑλικὸν καὶ θέσωμεν τὰ χέρια μας γύρω - γύρω εἰς τὸ ἔξω μέρος του, τότε ἐγγίζομεν αὐτό, τὸ ὁποῖον λέγεται ἐπιφάνεια τοῦ κύβου.

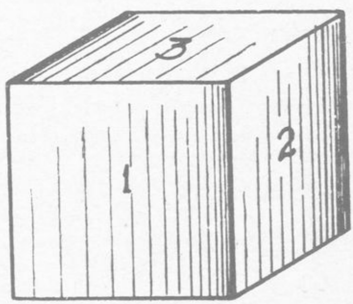
Ὥ σ τ ε ἐ π ι φ ά ν ε ι α τ ο ῦ κ ύ β ο υ λ έ γ ε τ α ι τ ὸ ἐ ξ ω τ ε ρ ι κ ὸ ν μ έ ρ ο ς τ ο υ, α ὐ τ ὸ τ ὸ ὁ π ο ῖ ο ν β λ έ π ο μ ε ν κ α ὶ ἠ μ π ο ρ ο ῦ μ ε ν ν ὰ ἐ γ γ ί σ ω μ ε ν.

2. ΕΔΡΑΙ — ΑΚΜΑΙ — ΚΟΡΥΦΑΙ ΤΟΥ ΚΥΒΟΥ

Ἕ δ ρ α ι τ ο ῦ κ ύ β ο υ. Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κύβου βλέπομεν ὅτι ἀποτελεῖται ἀπὸ τμήματα. Τὰ τμήματα αὐτὰ ὀνομάζονται ἕ δ ρ α ι.



1



2

Πόσας ἕδρας ἔχει ὁ κύβος; Μετρῶντες τὰς ἕδρας τοῦ κύβου εὑρίσκομεν ὅτι ὁ κύβος ἔχει 6 ἕδρας.

Εἰς τὴν εἰκόνα 2 φαίνονται μόνον αἱ τρεῖς ἕδραι. Αἱ ἄλλαι τρεῖς δὲν φαίνονται.

Ἀ κ μ α ί. Αἱ ἕδραι τοῦ κύβου, ὅπως βλέπομεν, συναντῶνται.

Ἐκεῖ ὅπου μία ἕδρα συναντᾷ ἄλλην ἕδραν, σχηματίζεται γραμμή. Ἡ γραμμὴ αὐτὴ λέγεται ἀ κ μ ὴ τοῦ κύβου.

Μετρῶντες τὰς ἀκμὰς τοῦ κύβου, εὑρίσκομεν ὅτι ὁ κύβος ἔχει :

4 ἀκμὰς ἐπάνω,

4 ἀκμὰς κάτω,

καὶ 4 ἀκμὰς εἰς τὰ πλάγια, δηλαδὴ ὅλαι μαζὶ αἱ ἀκμαὶ εἶναι 4+4+4=12.

Κ ο ρ υ φ α ί. Αἱ ἀκμαὶ τοῦ κύβου συναντῶνται. Ἐκεῖ ὅπου μία ἀκμὴ τοῦ κύβου συναντᾷ ἄλλας δυὸ ἀκμάς, σχηματίζεται κ ο ρ υ φ ή.

Πόσας κορυφὰς ἔχει ὁ κύβος; Μετρῶντες τὰς κορυφὰς τοῦ κύβου, εὑρίσκομεν ὅτι ὁ κύβος ἔχει 4 κορυφὰς ἐπάνω καὶ 4 κορυφὰς κάτω, δηλ. ὁ κύβος ἔχει ὅλας - ὅλας 8 κορυφὰς (εἰκ. 3).

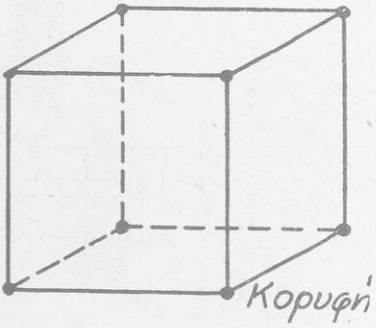
Σ η μ ε ῖ ο ν. Ἑκάστη κορυφὴ τοῦ κύβου λέγομεν ὅτι εἶναι σημεῖον.

Σ η μ ε ῖ ο ν λέγεται τὸ μέρος, ὅπου συναντῶνται δύο ἢ περισσότεραι γραμμαί.

Τὸ σημεῖον παριστῶμεν μὲ μίαν κοκκίδα.

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς :

Ἂν καταλάβατε ὅσα εἴπαμε, θὰ ἠμπορέσετε νὰ συμπληρώσετε τὰς ἑξῆς φράσεις:



3

1. Τὸ ἔξω μέρος τοῦ κύβου λέγεται...

2. Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κύβου ἀποτελεῖται ἀπ

3. Ὁ κύβος ἔχει . . . ἕδρας.

4. Αἱ ἕδραι τοῦ κύβου σχηματίζουν...

5. Ὁ κύβος ἔχει . . . ἀκμάς.

Θ έ σ ι ς τ ῶ ν ἑ δ ρ ῶ ν τ ο ῦ κ ύ β ο υ. Βάλετε τώρα τὸν κύβον ἐπάνω εἰς τὸ τραπέζι. Βλέπομεν ὅτι:

Ἡ ἕδρα, ἡ ὁποία εὑρίσκεται εἰς τὸ ἐπάνω μέρος τοῦ κύβου καὶ ἡ ἕδρα, ἡ ὁποία εὑρίσκεται εἰς τὸ κάτω μέρος του, ἔχουν θέσιν ὁ ρ ι ζ ο ν τ ί α ν.

Ἰδέτε τώρα καλὰ μίαν ἀπὸ τὰς πλαγινὰς ἕδρας. Ἡ ἕδρα αὐτὴ ἔχει θέσιν ὁριζοντίαν;

Ὄχι. Ἡ θέσις της λέγεται κ α τ α κ ό ρ υ φ ο ς.

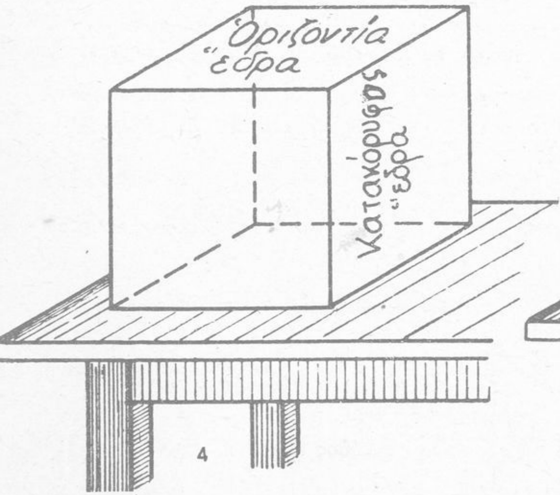
Κατακόρυφον θέσιν ἔχουν ὅλαι αἱ πλαγιναὶ ἕδραι τοῦ κύβου (εἰκ. 4).

Θέσις τῶν ἀκμῶν τοῦ κύβου. Αἱ 8 ἀκμαὶ τοῦ κύβου, αἱ ὁποῖαι εἶναι γύρω εἰς τὰς ὁριζοντίας ἕδρας, ἔχουν θέσιν ἐπίσης ὁριζοντίαν.

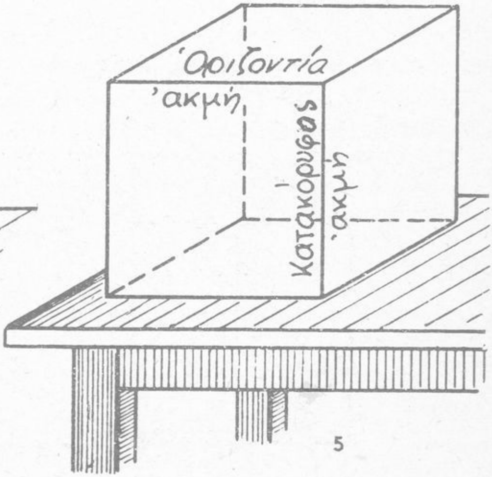
Αἱ ἄλλαι 4 ἀκμαὶ εἶναι κατακόρυφοι (εἰκ. 5).

Ἀσκήσεις:

6. Πόσας ὁριζοντίας ἕδρας ἔχει ὁ κύβος ὁ ὁποῖος εὑρίσκεται εἰς τὸ τραπέζι;
7. Πόσας ἕδρας κατακορύφους ἔχει ὁ ἴδιος κύβος;
8. Πόσαι εἶναι αἱ ὁριζόντιαι ἀκμαί του;
9. Πόσαι εἶναι αἱ κατακόρυφοι ἀκμαί του;



4



5

Σχέσις τῶν ἑδρῶν τοῦ κύβου μεταξύ των. Ἡ ἕδρα, ἡ ὁποία εἶναι ἐπάνω καὶ ἡ ἕδρα ἡ ὁποία εἶναι κάτω εἶναι ἀντικρυναὶ καὶ δὲν συναντῶνται. Ὅσο καὶ ἂν μεγαλώσωμεν τὰς ἕδρας αὐτὰς μὲ τὴν φαντασίαν μας, δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ συναντηθῶσιν (εἰκ. 6).

Αἱ ἕδραι αἱ ὁποῖαι δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ συναντηθῶσι λέγονται παράλληλοι.

Ἂς ἐξετάσωμεν τώρα καὶ τὰς κατακορύφους ἕδρας.

Ἀπὸ τὰς 4 κατακορύφους ἕδρας αἱ ἀντικρυναὶ εἶναι ἐπίσης παράλληλοι.

Γενικὰ αἱ ἀντικρυναὶ ἕδραι τοῦ κύβου εἶναι παράλληλοι.

10. Βάλε ἀριθμὸν εἰς τὰς ἕδρας τοῦ κύβου: 1, 2, 3, 4, 5, 6 καὶ εὕρε κάθε μία ἀπὸ τὰς ἕδρας αὐτὰς μὲ ποίαν ἄλλην ἕδραν εἶναι παράλληλος.

11. Δεῖξε μὲ τὸ χέρι σου ποίαν διεύθυνσιν λέγομεν κατακόρυφον.

12. Ὅταν ἕνας ἄνθρωπος ἵσταται ὄρθιος, ποίαν διεύθυνσιν ἔχει τὸ σῶμα του;

13. Πότε ἕνας ἄνθρωπος ἔχει ὁριζοντίαν θέσιν;

14. Κράτησε τὸ μολύβι σου, ὥστε νὰ εἶναι κατακόρυφον.

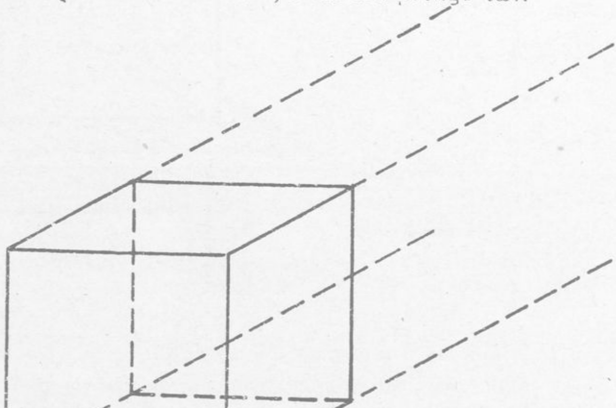
15. Κράτησε τὸ μολύβι σου, ὥστε νὰ εἶναι ὁριζόντιον.

16. Βάλε νερὸ μέσα εἰς ποτήρι. Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ νεροῦ εἶναι κατακόρυφος ἢ ὁριζοντία;

Σχῆμα τῶν ἑδρῶν τοῦ κύβου καὶ μέγεθος αὐτῶν: Ὅπως βλέπομεν ὅλαι αἱ ἕδραι τοῦ κύβου, ἔχουν τὸ ἴδιον σχῆμα.

Τὸ σχῆμα, τὸ ὁποῖον ἔχει κάθε ἕδρα τοῦ κύβου, λέγεται σχῆμα τετράγωνον.

Θέτομεν χαρτὶ εἰς τὴν μίαν ἕδραν τοῦ κύβου καὶ τὸ κόπτομεν γύρω-γύρω, ὥστε νὰ πάρῃ τὸ μέγεθος τῆς ἕδρας. Τώρα, ἂν βάλωμεν αὐτὸ τὸ χαρτὶ ἐπάνω εἰς τὰς ἄλλας ἕδρας, βλέπομεν ὅτι ἐφαρμόζει εἰς ὅλας ἀκριβῶς. Ὥστε ὅλαι αἱ ἕδραι τοῦ ἰδίου κύβου, ἔχουν τὸ ἴδιον μέγεθος. Δηλ. ὅλα τὰ τετράγωνα, τὰ ὁποῖα εἶναι ἕδραι τοῦ ἰδίου κύβου, εἶναι ἴσα μεταξύ των.



6

3. ΠΛΕΥΡΑΙ ΤΕΤΡΑΓΩΝΟΥ — ΣΧΕΣΕΙΣ ΑΥΤΩΝ

Ἡ εἰκὼν (εἰκ. 7) δεικνύει ἓν τετράγωνον. Βλέπομεν ὅτι γύρω - γύρω ἔχει 4 γραμμάς.

Βλέπετε εἰς τὸ κάτω μέρος τοῦ τετραγώνου τὸ γράμμα Α.

Ἂν προχωρήσωμεν δεξιά, θὰ φθάσωμεν εἰς τὸ τέρμα τῆς γραμμῆς, ὅπου εἶναι τὸ γράμμα Β.

Ἡ γραμμὴ τὴν ὁποίαν ἠκολουθήσαμεν ἀπὸ τὸ Α εἰς τὸ Β, λέγεται πλευρὰ τοῦ τετραγώνου.

Ὅπως βλέπομεν, τὸ τετράγωνον ἔχει γύρω - γύρω 4 πλευράς. Ἡ μία πηγαίνει ἀπὸ τὸ Α εἰς τὸ Β, ἡ ἄλλη ἀπὸ τὸ Β εἰς τὸ Γ, ἡ ἄλλη ἀπὸ τὸ Γ εἰς τὸ Δ καὶ ἡ τελευταία ἀπὸ τὸ Δ εἰς τὸ Α.

Πῶς εἶναι αἱ πλευραὶ τοῦ τετραγώνου; Εἶναι ὅλαι ἴσαι ἢ εἶναι ἡ μία μεγαλυτέρα ἀπὸ τὴν ἄλλην;

Πρὶν δώσωμεν τὴν ἀπάντησιν, ἂς τὰς μετρήσωμεν.

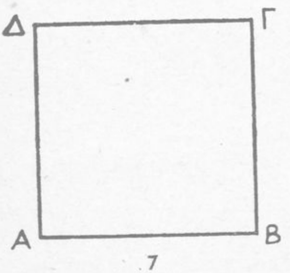
Παίρνομεν ἓν χαρτὶ καὶ σημειώνομεν ἐπάνω εἰς αὐτὸ πόση εἶναι ἡ ΑΒ. Ὕστερα μετρῶμεν μὲ αὐτὸ τὸ χαρτὶ τὰς τρεῖς ἄλλας πλευράς. Εὑρίσκομεν ὅτι ὅλαι εἶναι ἴσαι.

Ὥστε αἱ 4 πλευραὶ τοῦ τετραγώνου εἶναι ἴσαι μεταξύ των.

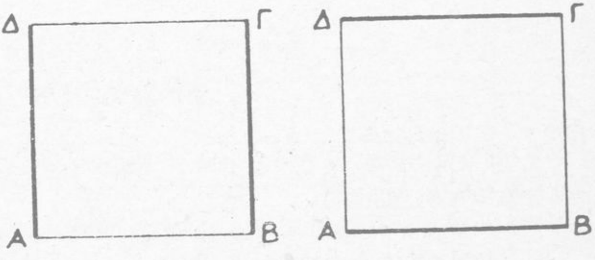
Ἂς παρατηρήσωμεν τώρα ἂν αἱ πλευραὶ τοῦ τετραγώνου εἶναι παράλληλοι.

Βλέπομεν ὅτι παράλληλοι εἶναι ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΔΓ καὶ ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΒΓ.

Ὥστε παράλληλοι μεταξύ των εἶναι αἱ ἀντικρυναὶ πλευραὶ τοῦ τετραγώνου (εἰκ. 8).



7



8

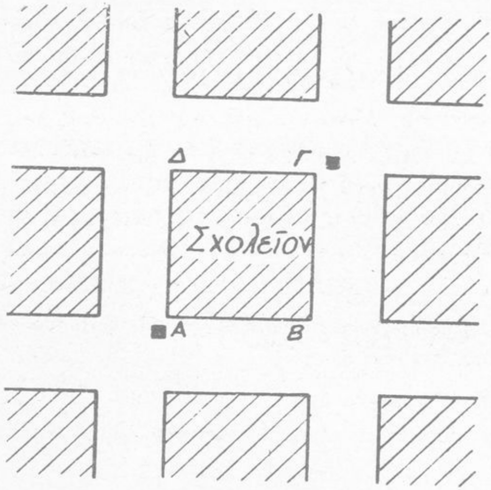
Γενικὰ αἱ πλευραὶ τοῦ τετραγώνου εἶναι ἴσαι καὶ αἱ ἀντικρυναὶ εἶναι παράλληλοι.

Ἀσκήσεις:

17. Ποῖαι ἕδραι λέγονται παράλληλοι;
18. Ποῖαι γραμμαὶ λέγονται παράλληλοι;
19. Τὸ τετράγωνον πόσας πλευρὰς ἔχει;

20. Ποῖαι πλευραὶ τοῦ τετραγώνου εἶναι παράλληλοι μεταξύ των;

21. Σχολεῖον ἐκτείνεται εἰς ἓν τετράγωνον, ὅπως φαίνεται εἰς τὴν εἰκ. 9. Εἰς τὴν ἄκραν Α τοῦ τετραγώνου αὐτοῦ εἶναι ἓν περίπτερον καὶ εἰς τὴν ἄκραν Γ ἓν ἄλλο περίπτερον. Ὁ Τάκης ἐπῆγε εἰς τὸ περίπτερον Α καὶ δὲν εὗρῆκε μολύβια. Τώρα πρέπει νὰ ὑπάγῃ εἰς τὸ περίπτερον Γ, ἀλλὰ γρήγορα, διότι θὰ κτυπήσῃ τὸ κουδούνι. Ποῖον δρόμον πρέπει νὰ ἀκολουθήσῃ ὡς συντομώτερον; τὸν ΑΔΓ ἢ τὸν ΑΒΓ; Διατί;



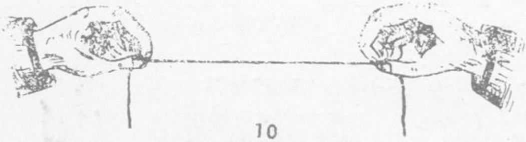
9

4. ΑΙ ΓΡΑΜΜΑΙ

Εὐθεῖα γραμμή. Ἑκάστη πλευρὰ τοῦ τετραγώνου ἔχει τὸ σχῆμα εὐθείας γραμμῆς.

Διὰ νὰ καταλάβωμεν πῶς εἶναι ἡ εὐθεῖα γραμμή, τεντώνομεν ἓν νῆμα.

Ὅσον περισσότερον λεπτὸν εἶναι τὸ τεντωμένον νῆμα, τόσον περισσότερον ὁμοιάζει μὲ εὐθεῖαν γραμμὴν (εἰκ. 10).



10

Ἡ εὐθεῖα γραμμὴ εἶναι ὁ συντομώτερος δρόμος ἀνάμεσα εἰς δύο σημεῖα. Ἂν δύο σημεῖα εὑρίσκωνται μακρυὰ τὸ ἓν ἀπὸ τὸ ἄλλο καὶ πρόκειται νὰ ὑπάγωμεν ἀπὸ τὸ ἓν εἰς τὸ ἄλλο, ὁ συντομώτερος δρόμος εἶναι νὰ ἀκολουθήσωμεν τὴν εὐθεῖαν γραμμήν, ἡ ὁποία τὰ ἑνώνει.

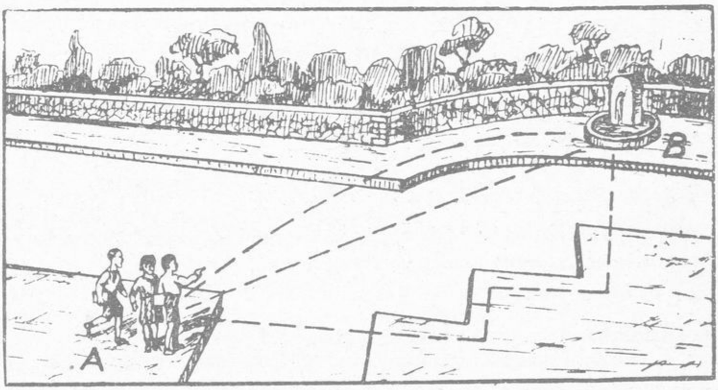
Τρία παιδιά, ὁ Νῖκος, ὁ Τάκης καὶ ἡ Ἀννούλα, εὑρίσκονται εἰς τὸ πεζοδρόμιον Α καὶ πρόκειται νὰ ὑπάγουν εἰς τὴν ἀπέναντι βρύσην Β, διὰ νὰ πιοῦν νερὸ (εἰκ. 11).

Ὁ Νῖκος πηγαίνει κατ' εὐθεῖαν, ἀκολουθῶν τὴν εὐθεῖαν ΑαΒ.

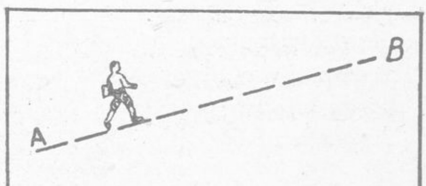
Ὁ Τάκης περνᾶ εἰς τὸ ἀπέναντι πεζοδρόμιον καὶ ἔπειτα πηγαίνει εἰς τὴν βρύσην, ἀκολουθῶν τὴν γραμμὴν ΑβΒ.

Ἡ Ἀννούλα πηγαίνει ἀκολουθοῦσα τὴν γραμμὴν ΑγΒ.

Ὁ Νῖκος ἐπῆγε γρηγορώτερα διότι ἠκολούθησε τὸν συντομώτερον δρόμον. Ἠκολούθησε τὴν εὐθεῖαν γραμμήν, ἡ ὁποία ἑνώνει τὸ πεζοδρόμιον Α μὲ τὴν βρύσην Β. Ἐπῆγε, ὅπως λέγομεν «κατ' εὐθεῖαν».



11



Ἀπόστασις μεταξὺ δύο σημείων. Ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα γραμμὴ εἶναι ὁ συντομώτερος δρόμος μεταξὺ δύο σημείων, διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ἀπόστασιν δύο σημείων, μετρῶμεν τὴν εὐθεῖαν γραμμὴν ἡ ὁποία τὰ ἑνώνει.

Μῆκος τῆς πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου. Ἡ ἀπόστασις μεταξὺ δύο σημείων τὰ ὁποῖα εὑρίσκονται εἰς τὰ ἄκρα τοῦ τετραγώνου, λέγεται μῆκος τῆς πλευρᾶς τετραγώνου.

Περίμετρος τοῦ τετραγώνου. Ἂν βάλωμεν ὅλα τὰ μήκη τῶν πλευρῶν τοῦ τετραγώνου μαζί, εὑρίσκομεν ἓν μῆκος τὸ ὁποῖον λέγεται περίμετρος τοῦ τετραγώνου.

Δηλαδὴ εἰς τὸ τετράγωνον τῆς εἰκόνος 7 περίμετρος εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν μηκῶν τῶν πλευρῶν τοῦ τετραγώνου.

Περίμετρος $= AB + B\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta A$.

Ἀσκήσεις:

22. Δεῖξε μὲ ἓν νῆμα πῶς εἶναι ἡ εὐθεῖα γραμμή.
23. Τί σχῆμα ἔχουν αἱ ἕδραι τοῦ κύβου;
24. Ποῖον σχῆμα λέγεται τετράγωνον;
25. Μέτρησε τὴν ἀπόστασιν μεταξὺ δύο σημείων μὲ νῆμα καὶ ἐξήγησε διατὶ τὸ νῆμα πρέπει νὰ εἶναι τεντωμένον.

Πῶς γράφομεν μὲ εὐκολίαν εὐθεῖαν γραμμήν. Διὰ νὰ γράψωμεν μὲ εὐκολίαν εὐθεῖαν γραμμὴν ἐπάνω εἰς χαρτὶ ἢ ἐπάνω εἰς τὸν πίνακα, χρησιμοποιοῦμεν τὸν χάρακα.

Διὰ νὰ εἶναι καλὸς ἕνας χάρακας, πρέπει αἱ ἀκμαί του νὰ σχηματίζουν εὐθείας γραμμάς.

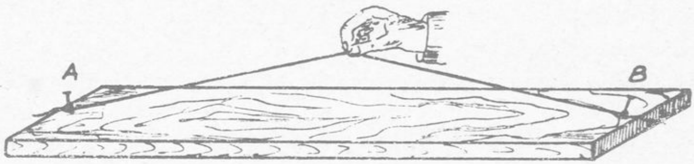
Διὰ νὰ καταλάβωμεν, ἂν μία ἀκμὴ τοῦ χάρακος εἶναι εὐθεῖα γραμμή, θέτομεν τὸν χάρακα εἰς τὸ χαρτὶ καὶ σύρομεν γραμμήν, προσέχοντες τὸ μολύβι μας νὰ ἐγγίζῃ πάντοτε τὴν ἀκμὴν τοῦ χάρακος. Ἔπειτα θέτομεν τὴν ἀκμὴν αὐτὴν ἀντιστρόφως (ὅπου ἦτο ἡ ἄκρα της Α, θέτομεν τὴν ἄκρα της Β) καὶ γράφομεν νέαν γραμμήν. Ἂν αἱ δύο γραμμαί, τὰς ὁποίας ἐγράψαμεν συμπίπτουν, σημαίνει ὅτι ἡ ἀκμὴ τοῦ χάρακος, τὸν ὁποῖον ἐδοκιμάσαμεν εἶναι εὐθύγραμμος (εἰκ. 12).

12

Ὅταν ἡ ἀκμὴ τοῦ χάρακος εἶναι εὐθύγραμμος, εἴμεθα βέβαιοι ὅτι ἡ γραμμή, τὴν ὁποίαν γράφομεν μὲ τὴν ἀκμὴν αὐτήν, εἶναι εὐθεῖα.

Διὰ νὰ γράψωμεν μίαν μεγάλην εὐθεῖαν, π.χ. εἰς μίαν μακρυὰν σανίδαν, ἐπειδὴ ὁ χάρακας εἶναι μικρός, οἱ τεχνῖται κάμνουν τὸ ἑξῆς: Στερεώνουν μὲ μεγάλα καρφιὰ τὰς ἄκρας τοῦ νήματος εἰς τὰ δύο σημεῖα, τὰ ὁποῖα θέλουν νὰ ἑνώνωνται μὲ εὐθεῖαν. Τὸ νῆμα τὸ τεντώνουν καλά, διὰ νὰ πάρῃ ἀκριβῶς τὸ σχῆμα εὐθείας γραμμῆς. Προηγουμένως ἔχουν χρωματίσει τὸ νῆμα μὲ χρῶμα (συνήθως κόκκινο). Ἔπειτα ἀνασηκώνουν μὲ τὰ δάκτυλα τὸ μέσον τοῦ νήματος καὶ ἀποτόμως τὸ ἀφήνουν, ὥστε νὰ πέσῃ καὶ νὰ κτυπήσῃ εἰς τὴν σανίδα (εἰκ. 13). Τότε θὰ γράψῃ ἐπάνω εἰς αὐτὴν μίαν κόκκινην εὐθεῖαν. (Θέτουν κόκκινο χρῶμα, διότι αὐτὸ διακρίνεται καλύτερα).

Ὅταν θέλουν νὰ χαράξουν μίαν εὐθεῖαν εἰς τὸ ἔδαφος, τότε εἰς τὰ σημεῖα τὰ ὁποῖα θέλουν νὰ ἑνώνωνται μὲ εὐθεῖαν ἐμπήγουν δυὸ πασσάλους. Δένουν εἰς αὐτοὺς ἓν λεπτὸν σχοινὶ ὥστε νὰ δεικνύῃ εὐθεῖαν γραμμήν. Ἔπειτα ἀκολουθοῦν ἀκριβῶς τὴν διεύθυνσιν τοῦ σχοινίου καὶ χαράσσουν ἐπάνω εἰς τὸ ἔδαφος εὐθεῖαν γραμμήν. Οὕτω κάμνουν ὅταν θέλουν νὰ φυτεύσουν φυτὰ εἰς εὐθεῖαν γραμμήν, ὅταν ἀνοίγουν θεμέλια κλπ.



13

Ἀσκήσεις:

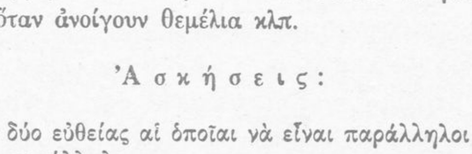
26. Γράψετε δύο εὐθείας αἱ ὁποῖαι νὰ εἶναι παράλληλοι καὶ δύο εὐθείας, αἱ ὁποῖαι δὲν εἶναι παράλληλοι.

27. Αἱ γραμμαὶ τοῦ τραίνου εἶναι παράλληλοι; Διατί; (εἰκ. 14).

28. Τέντωσε μὲ τὰ δύο χέρια σου ἓν νῆμα, ὥστε νὰ σχηματίζῃ εὐθεῖαν γραμμὴν ὁριζοντίαν.

29. Κράτησε ἓν τεντωμένο νῆμα, ὥστε νὰ σχηματίζῃ εὐθεῖαν γραμμὴν κατακόρυφον.

30. Μέτρησε μὲ νῆμα τεντωμένο τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς τετραγώνου καὶ εὗρε πόσας φορὰς τὸ μῆκος μιᾶς πλευρᾶς κάμνει τὴν περίμετρον τοῦ τετραγώνου.



Τεθλασμένη γραμμή: Τεθλασμένη γραμμὴ λέγεται ἡ γραμμή, ἡ ὁποία ἀποτελεῖται ἀπὸ εὐθείας, ἀλλὰ ὅλη μαζὶ δὲν εἶναι εὐθεῖα γραμμή.

Ἡ περίμετρος τετραγώνου εἶναι τεθλασμένη γραμμὴ κλειστή, διότι ἡ ἄκρα της ἑνώνεται μὲ τὴν ἀρχήν της.

Ἠμπορεῖ ὅμως μία τεθλασμένη γραμμὴ νὰ εἶναι ἀνοικτή. Π.χ. τὸ ξύλινον μέτρον τῶν μαραγκῶν, τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖται ἀπὸ πολλὰ τεμάχια, δίδει μίαν εἰκόνα τῆς ἀνοικτῆς τεθλασμένης γραμμῆς.

Ἀσκήσεις:

31. Γράψε μίαν τεθλασμένην γραμμὴν κλειστὴν καὶ μίαν τεθλασμένην γραμμὴν ἀνοικτήν.

32. Εἰς τὴν εἰκόνα 11 ἡ ἄκρα τοῦ πεζοδρομίου τί εἴδους γραμμὴν σχηματίζει;

5. ΑΙ ΓΩΝΙΑΙ

Γωνία. Ἂς παρατηρήσωμεν ἓν ὡρολόγιον. Οἱ δεῖκται του εἶναι εὐθεῖαι γραμμαὶ καὶ ἀρχίζουν ἀπὸ τὸ ἴδιον σημεῖον.

Εἰς τὴν εἰκόνα 15 οἱ δύο δεῖκται του φαίνονται εἰς τὴν ἰδίαν εὐθεῖαν γραμμήν.

Ὅταν περάσουν ὀλίγα λεπτά, οἱ δεῖκται του δὲν εἶναι εἰς τὴν ἰδίαν εὐθεῖαν γραμμήν, ἀλλὰ σχηματίζουν ἀνάμεσά των μίαν γωνίαν (εἰκ. 16).

Γωνία δηλ. σχηματίζεται, ὅταν ἀπὸ ἓν σημεῖον ἀρχίζουν δύο εὐθεῖαι γραμμαί, αἱ ὁποῖαι ὅμως δὲν κάμνουν μαζὶ εὐθεῖαν γραμμήν.

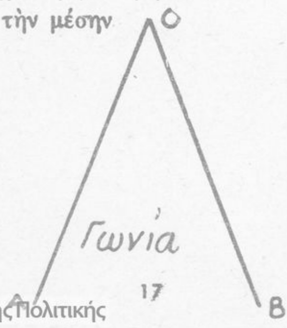
Ἡ εἰκὼν 17 δεικνύει γωνίαν. Τὸ σημεῖον Ο, ἀπὸ τὸ ὁποῖον ἀρχίζουν αἱ δύο εὐθεῖαι γραμμαί, ὀνομάζεται κορυφὴ τῆς γωνίας.

Αἱ εὐθεῖαι γραμμαί, αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν μίαν γωνίαν λέγονται πλευραὶ τῆς γωνίας.

Ἑκάστην γωνίαν σημειώνομεν μὲ τρία γράμματα, π.χ. λέγομεν ἡ γωνία ΑΟΒ. Τὸ γράμμα τῆς κορυφῆς τὸ βάλλομεν πάντοτε εἰς τὴν μέσην


15


16



17

Μ έ γ ε θ ο ς   γ ω ν ί α ς. Ὅταν τὸ ὡρολόγιον δεικνύῃ 9 παρὰ 10 λεπτά, ἡ γωνία ἀνάμεσα εἰς τοὺς δείκτας εἶναι μικρά.

Ὅταν δεικνύῃ 9 παρὰ πέντε λεπτά, ἡ γωνία εἶναι μεγαλυτέρα.

Ὅταν περάσουν ἀκόμη 5 λεπτά, τὸ ὡρολόγιον δεικνύει 9 καὶ ἡ γωνία εἶναι ἀκόμη μεγαλυτέρα (εἰκ. 18).

18

Προσέξατε. Ὅταν λέγωμεν μέγεθος γωνίας ἐννοοῦμεν τὸ ἄνοιγμα τῆς γωνίας. Τὸ μέγεθος γωνίας δὲν ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ μῆκος τῶν πλευρῶν της.

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς :

33. Σχεδίασε μίαν γωνίαν.

34. Σχεδίασε μίαν μικρὰν γωνίαν μὲ μεγάλας πλευρὰς καὶ μίαν μεγάλην γωνίαν μὲ μικρὰς πλευράς.

35. Ἀπὸ τί ἐξαρτᾶται τὸ μέγεθος γωνίας καὶ ἀπὸ τί δὲν ἐξαρτᾶται;

Ὀ ρ θ ὴ   γ ω ν ί α. Ὅταν τὸ ὡρολόγιον δεικνύῃ 9, ἡ γωνία ἡ ὁποία σχηματίζεται ἀνάμεσα εἰς τοὺς δείκτας του, ἔχει ἰδιαίτερον ὄνομα. Λέγεται ὀρθὴ γωνία (εἰκ. 19).

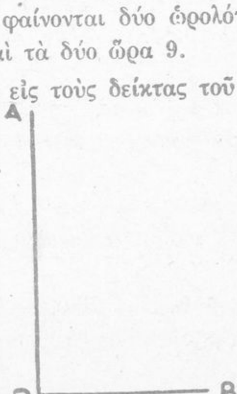
Εἰς τὴν ὀρθὴν γωνίαν αἱ πλευραὶ εἶναι κάθετοι μεταξύ των (εἰκ. 20).

Ὅταν δύο εὐθεῖαι εἶναι κάθετοι μεταξύ των καὶ τέμνονται, σχηματίζουν γύρω ἀπὸ τὸ σημεῖον Ο τῆς τομῆς των 4 γωνίας ἴσας. Κάθε μία ἀπὸ τὰς 4 αὐτὰς ἴσας γωνίας εἶναι ὀρθὴ (εἰκ. 21).

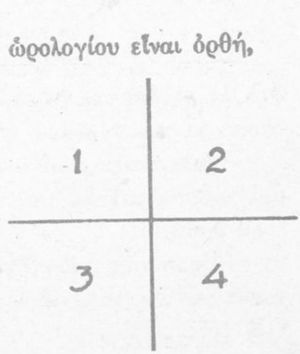
Εἰς τὴν εἰκόνα 22 φαίνονται δύο ὡρολόγια. Ἓν μεγάλο καὶ ἓν μικρὸν τοῦ χεριοῦ. Δεικνύουν καὶ τὰ δύο ὥρα 9.

Ἡ γωνία ἀνάμεσα εἰς τοὺς δείκτας τοῦ μεγάλου ὡρολογίου εἶναι ὀρθή,

19



20



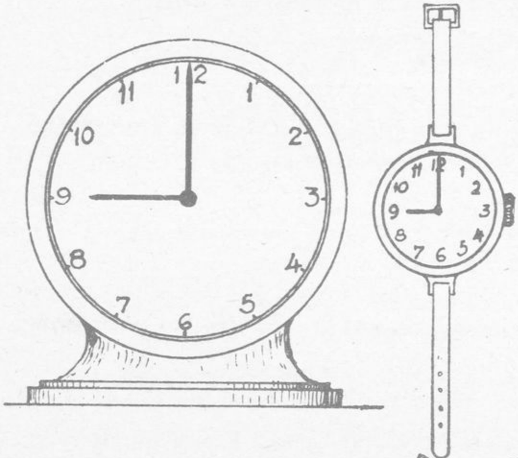
21

ἀλλὰ καὶ ἡ ἄλλη γωνία ἀνάμεσα εἰς τοὺς δεικτας του μικροῦ ὡρολογίου εἶνα ἐπίσης ὀρθή. Αἱ δύο αὐταὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι.

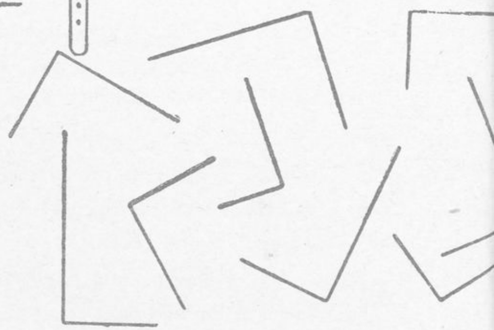
Προσέξατε. Δὲν ὑπάρχουν ὀρθαὶ γωνίαι μικραὶ καὶ ὀρθαὶ γωνίαι μεγάλαι.

Ὅλαι αἱ ὀρθαὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι (εἰκ. 22).

Εἰς τὴν εἰκόνα 23 ὅλαι αἱ γωνίαι εἶναι ὀρθαὶ (εἰκ. 23).



22



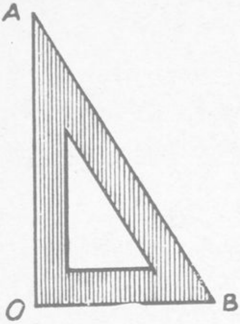
23

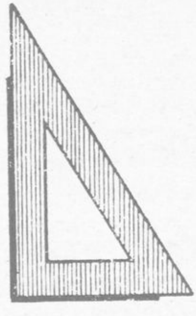
Πῶς σχεδιάζομεν ὀρθὰς γωνίας εὐκόλως.

Διὰ νὰ σχεδιάσωμεν ὀρθὰς γωνίας εὐκόλως, χρησιμοποιοῦμεν ἓν ὄργανον, τὸ ὁποῖον λέγεται γνώμων (εἰκ. 24).

Δύο πλευραὶ τοῦ γνώμονος, ἡ πλευρὰ ΟΑ καὶ ἡ πλευρὰ ΟΒ εἶναι γραμμαὶ κάθετοι μεταξύ των. Δι' αὐτὸ ἡ γωνία, ἀνάμεσα εἰς τὰς πλευρὰς αὐτάς, εἶναι ὀρθή.

Γράφομεν μιὰ εὐθεῖαν γραμμὴν μὲ τὴν πλευρὰν ΟΑ τοῦ γνώμονος καὶ χωρὶς νὰ τὸν μετακινήσωμεν γράφομεν δευτέραν εὐθεῖαν μὲ τὴν πλευράν του ΟΒ (εἰκ. 25).





24 25

Οὕτω ἐπειδὴ αἱ πλευραὶ τοῦ γνώμονος ΟΑ καὶ ΟΒ εἶναι κάθετοι μεταξύ των, καὶ ἡ γωνία, ἡ ὁποία σχηματίζεται ἀπὸ τὰς εὐθείας γραμμάς, τὰς ὁποίας ἐγράψαμεν, εἶναι ὀρθὴ γωνία.

Σημασία τῆς λέξεως «κάθετος» καὶ σημασία τῆς λέξεως «κατακόρυφος». Ἡ λέξις κάθετος ἔχει διαφορετικὴν σημασίαν ἀπὸ τὴν λέξιν κατακόρυφος.

Κάθετος λέγεται μία εὐθεῖα πρὸς ἄλλην εὐθεῖαν, ὅταν σχηματίζῃ μὲ τὴν ἄλλην εὐθεῖαν γωνίαν ὀρθήν. Ἐξακριβώνομεν, ἂν μία εὐθεῖα εἶναι κάθετος πρὸς ἄλλην, μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ γνώμονος.

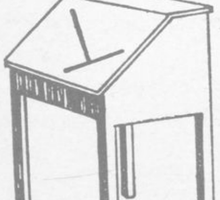
Κατακόρυφος εἶναι ἡ διεύθυνσις τὴν ὁποίαν ἔχομεν, ὅταν ἱστάμεθα ὄρθιοι.

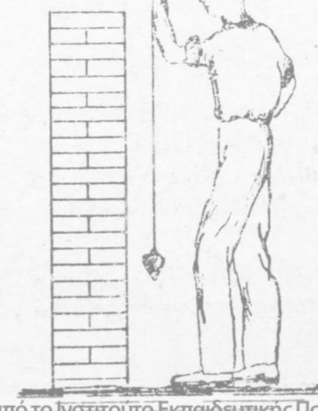
Διὰ νὰ ἐξακριβώσωμεν, ἂν ἕνας τοῖχος ἢ ἓν μηχάνημα εἶναι ἀκριβῶς κατακόρυφον, χρησιμοποιοῦμεν τὸ νῆμα τῆς στάθμης (εἰκ. 26).

Τὸ νῆμα τῆς στάθμης εἶναι ἓν νῆμα, τὸ ὁποῖον εἰς τὸ ἄκρον του ἔχει κρεμασμένο βαρύδι. Τὸ νῆμα τῆς στάθμης παίρνει πάντοτε διεύθυνσιν κατακόρυφον, ὅταν τὸ ἀφήσωμεν ἐλεύθερον.

Ἠμπορεῖ μία εὐθεῖα νὰ εἶναι κάθετος πρὸς ἄλλην, νὰ μὴ εἶναι ὅμως κατακόρυφος οὔτε ἡ μία οὔτε ἡ ἄλλη (εἰκ. 27).

26 27





Ἀσκήσεις:

36. Ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ἡ ὁποία σχηματίζεται ἀπὸ λαμπτῆρα, ποὺ κρέμμεται, λέγεται κατακόρυφος ἢ κάθετος;

37. Ἐπάνω εἰς τὸ πάτωμα ἠμπορεῖς νὰ γράψῃς γραμμήν, ἡ ὁποία νὰ εἶναι κατακόρυφος;

Γωνίαι τοῦ τετραγώνου. Ἂν θέσωμεν τὴν ὀρθὴν γωνίαν τοῦ γνώμονος ἐπάνω ἀπὸ κάθε γωνίαν τοῦ τετραγώνου, εὑρίσκομεν ὅτι ὅλαι αἱ γωνίαι ἔχουν ἄνοιγμα ὅσον ἡ ὀρθὴ γωνία τοῦ γνώμονος.

Ὥστε ὅλαι αἱ γωνίαι τοῦ τετραγώνου εἶναι ὀρθαί.

Ἀριθμὸς τῶν ὀρθῶν γωνιῶν τῆς ἐπιφανείας τοῦ κύβου. Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κύβου, ὅπως ξεύρομεν, ἀποτελεῖται ἀπὸ 6 τετραγώνους ἕδρας:

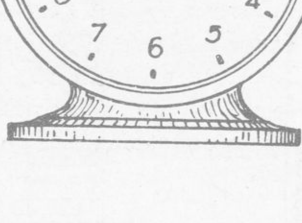
Ἡ ἕδρα ἀριθ. 1 ἔχει 4 ὀρθὰς γωνίας.
Ἡ ἕδρα ἀριθ. 2 ἔχει 4 ὀρθὰς γωνίας.
Ἡ ἕδρα ἀριθ. 3 ἔχει 4 ὀρθὰς γωνίας.
Ἡ ἕδρα ἀριθ. 4 ἔχει 4 ὀρθὰς γωνίας.
Ἡ ἕδρα ἀριθ. 5 ἔχει 4 ὀρθὰς γωνίας.
Ἡ ἕδρα ἀριθ. 6 ἔχει 4 ὀρθὰς γωνίας.
Αἱ 6 ἕδραι μαζὶ ἔχουν 24 ὀρθὰς γωνίας.

Ἀσκήσεις:

38. Πῶς λέγεται ἡ γωνία, τὴν ὁποίαν σχηματίζει ὁ ὡροδείκτης μὲ τὸν λεπτοδείκτην, ὅταν τὸ ὡρολόγιον δεικνύῃ ὥραν 3 ἀκριβῶς;

39. Πόσας ἴσας πλευρὰς ἔχει ἓν τετράγωνον;

40. Πόσας ὀρθὰς γωνίας ἔχει ἓν τετράγωνον;



6. ΠΩΣ ΣΧΕΔΙΑΖΟΜΕΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΟΝ

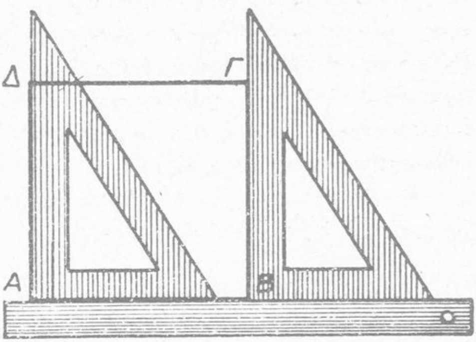
Π ῶ ς σ χ ε δ ι ά ζ ο μ ε ν τ ε τ ρ ά γ ω ν ο ν. Διὰ νὰ σχεδιάσωμεν ἐπάνω εἰς τὸν πίνακα ἢ ἐπάνω εἰς χαρτὶ τετράγωνον, γράφομεν μὲ χάρακα μίαν εὐθεῖαν, τὴν ΑΒ, ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ μῆκος ὅσον μῆκος θέλομεν νὰ ἔχῃ ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου.

Ὕστερα μὲ τὴν βοήθειαν γνώμονος φέρομεν εἰς τὸ σημεῖον Α καὶ εἰς τὸ σημεῖον Β δύο καθέτους εὐθείας ἐπάνω εἰς τὴν εὐθεῖαν ΑΒ.

Μετρῶμεν ἐπάνω εἰς ἑκάστην κάθετον τόσον μῆκος, ὅσον μῆκος ἔχει ἡ ΑΒ. Οὕτω εὑρίσκομεν ποῦ ἀκριβῶς πρέπει νὰ εἶναι τὰ σημεῖα Δ καὶ Γ.

Ἑνώνομεν μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ χάρακος τὸ σημεῖον Δ μὲ τὸ σημεῖον Γ.

Τότε ἔχομεν σχῆμα, τοῦ ὁποίου ὅλαι αἱ πλευραὶ εἶναι ἴσαι καὶ ὅλαι αἱ γωνίαι εἶναι ὀρθαί. Τὸ σχῆμα αὐτὸ εἶναι τετράγωνον (εἰκ. 28).



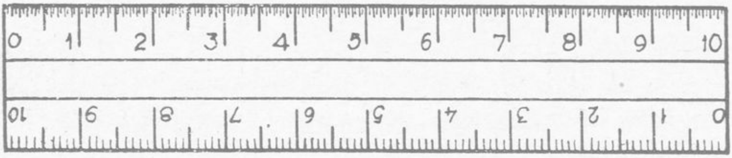
28

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς :

41. Σχεδίασε μὲ χάρακα καὶ γνώμονα τετράγωνα τόσα ὅσα ἀποτελοῦν τὴν ἐπιφάνειαν ἑνὸς κύβου.

Π ῶ ς ε ὑ ρ ί σ κ ο μ ε ν π ό σ ο ν ε ἶ ν α ι τ ὸ μ ῆ κ ο ς π λ ε υ ρ ᾶ ς τ ο ῦ τ ε τ ρ α γ ώ ν ο υ. Πόσον μεγάλη εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου τὸ ὁποῖον ἐσχεδιάσαμεν, ἠμποροῦμεν νὰ εὕρωμεν χρησιμοποιοῦντες τὸ ὑ π ο δ ε κ ά μ ε τ ρ ο ν (εἰκ. 29).

Εἰς τὸ ὑποδεκάμετρον εἶναι σημειωμένοι πόντοι (ἑκατοστὰ) καὶ χιλιοστόμετρα. Οὕτω εὑρίσκομεν τὸ μῆκος εἰς πόντους καὶ χιλιοστόμετρα.



29

Ἂν μία πλευρὰ τοῦ τετραγώνου ἔχῃ μῆκος 12 πόντους, ἑκάστη ἀπὸ τὰς ἄλλας πλευρὰς ἔχει ἐπίσης μῆκος 12 πόντους, διότι ὅλαι αἱ πλευραὶ τοῦ τετραγώνου εἶναι ἴσαι.

7. ΜΟΝΑΔΕΣ ΜΗΚΟΥΣ

Μονάδες μήκους. Διὰ νὰ εὕρωμεν πόσον μῆκος ἔχει μία εὐθεῖα, χρησιμοποιοῦμεν ὡς μονάδα συνήθως τὸν πόντον, ἂν ἡ εὐθεῖα εἶναι μικρά. Ἂν ἡ εὐθεῖα εἶναι κάπως μεγαλυτέρα χρησιμοποιοῦμεν τὸ μέτρον.

Ὁ πόντος ἔχει μῆκος ὅσον ἔχει τὸ 1)100 τοῦ μέτρου.

Διὰ μεγάλας ἀποστάσεις, π.χ. διὰ τὴν ἀπόστασιν ἀπὸ τὰς Ἀθήνας εἰς τὸν Πειραιᾶ, χρησιμοποιοῦμεν ὡς μονάδα μήκους τὸ χιλιόμετρον.

Τὸ χιλιόμετρον ἔχει μῆκος, ὅσον μῆκος ἔχουν 1000 μέτρα, τοποθετημένα εἰς εὐθεῖαν γραμμήν, τὸ ἓν κατόπιν τοῦ ἄλλου.

Ἀσκήσεις:

42. Σύρε εἰς τὸ τετράδιόν σου μίαν εὐθεῖαν γραμμὴν καὶ μὲ τὸ μάτι χώρισέ την εἰς τὸ μέσον. Τώρα μέτρησε μὲ τὸ ὑποδεκάμετρον, νὰ ἰδῇς ἂν τὴν ἐχώρισες σωστά.

43. Ἡ λεωφόρος Συγγροῦ ἀπὸ τὰς στήλας τοῦ Ὀλυμπίου Διὸς ἕως τὴν θάλασσαν ἔχει μῆκος 5 χιλιόμετρα. Τὰ πέντε χιλιόμετρα πόσα μέτρα κάμνουν;

44. Μέτρησε πόσοι πόντοι ἀποτελοῦν ἓν μέτρον.

45. Πόσους πόντους μῆκος ἔχει τὸ θρανίον;

46. Πόσους πόντους ὕψος ἔχεις ἐσύ;

47. Κόψε μίαν λωρίδα ἀπὸ χαρτόνι, ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ μῆκος 20 πόντους. Χώρισε ἐπάνω εἰς αὐτὴν τοὺς πόντους καὶ τὰ χιλιοστόμετρα μὲ ἀκρίβειαν.

48. Μία πλευρὰ τετραγώνου ἔχει μῆκος 18 πόντους. Πόσον μῆκος ἔχει ἡ περίμετρός του;

49. Ἡ περίμετρος τετραγώνου ἔχει μῆκος 60 πόντους. Πόσον μῆκος ἔχει ἡ πλευρά του;

50. Σύρε εἰς τὸ τετράδιόν σου μίαν εὐθεῖαν γραμμὴν καὶ χώρισε ἐπάνω εἰς αὐτὴν μὲ τὸ μάτι 7 πόντους, 4 πόντους, 2 πόντους. Μέτρησε μὲ τὸ ὑποδεκάμετρον. Τὴν ἐχώρισες σωστά;

Κατασκευὴ μέτρου. Μέτρον κατασκευάζουν ἀπὸ ξύλον, μέταλλον ἢ κορδέλλαν.

Διὰ νὰ εἶναι καλὸν ἓν μέτρον, πρέπει ἡ ἀπόστασις ἀπὸ τὴν μίαν ἄκραν του εἰς τὴν ἄλλην νὰ εἶναι ἀκριβῶς 1 μέτρον. Πρέπει ἀκόμη νὰ εἶναι εὐθύ, ὥστε ὅταν μετρῶμεν μὲ αὐτό, νὰ σχηματίζεται εὐθεῖα γραμμὴ ἀπὸ τὴν μίαν ἄκραν του εἰς τὴν ἄλλην. Αὐτὸ εἶναι ἀπαραίτητον, διότι, ὅπως εἴπομεν, τὴν ἀπόστασιν ἀνάμεσα εἰς δύο σημεῖα τὴν μετρῶμεν μὲ τὴν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία ἑνώνει τὰ σημεῖα αὐτά.

Ὅταν τὸ μέτρον εἶναι ἀπὸ κορδέλλαν, πρέπει ὅταν τὸ χρησιμοποιοῦμεν ἡ κορδέλλα νὰ εἶναι καλὰ τεντωμένη, διὰ νὰ σχηματίζῃ γραμμὴν εὐθεῖαν.

Ἄλλαι μονάδες μήκους. Ἄλλοτε εἰς τὴν Ἑλλάδα ἐμετροῦσαν τὸ μῆκος ὑφασμάτων, μὲ τὸν πῆχυν. Ὁ πῆχυς ἔχει τόσον μῆκος ὅσον 64 πόντοι.

Διὰ νὰ μετροῦν τὸ μῆκος εἰς οἰκόπεδα, χρησιμοποιοῦν ὡς μονάδα τὸν τεκτονικὸν πῆχυν. Ὁ τεκτονικὸς πῆχυς ἔχει μῆκος ὅσον 75 πόντοι.

Εἰς τὴν Ἀγγλίαν μετροῦν τὸ μῆκος μὲ τὴν ὑάρδαν. Δι' αὐτὸ τὰ ἀγγλικὰ ὑφάσματα, τὰ ὁποῖα ἔρχονται εἰς τὴν Ἑλλάδα εἶναι μετρημένα μὲ ὑάρδας. Μία ὑάρδα ἔχει μῆκος 91 πόντους.

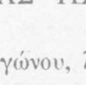
Ἀσκήσεις:

51. Μέτρησε μὲ μέτρον πόσον μῆκος ἔχει ἡ πλευρὰ ἑνὸς τραπεζίου.
52. Πάρε σπάγγο. Εἰς κάθε 10 πόντους δέσε κόμπον καὶ σχημάτησε ἓν μέτρον.
53. Κάμε ἀπὸ σπάγγον ἕναν πῆχυν καὶ διπλώνων χώρισέ τον εἰς 8 ἴσα μέρη, ὥστε κάθε μέρος νὰ ἀντιστοιχῇ πρὸς 1 ρούπι.
54. Ἰδὲς τὸ παράθυρο καὶ εἰπὲ πόσο ὕψος ἔχει. Μέτρησε ἔπειτα αὐτὸ μὲ μέτρον, διὰ νὰ εὕρῃς ἂν τὸ ἐκτίμησες ὀρθῶς.
55. Πόσα μέτρα εἶναι ἀπὸ τὸ πάτωμα ἕως τὸ ταβάνι τῆς τάξεως;
56. Μέτρησε πόσους πόντους ὑψηλότερα εἶναι ἓν σκαλοπάτι ἀπὸ ἄλλο.
57. Ἡ ὑάρδα εἶναι μεγαλυτέρα ἢ τὸ μέτρον;
58. Ὁ πῆχυς εἶναι μεγαλύτερος ἢ τὸ μέτρον;
59. Κόψε ἓν τεμάχιον σπάγγου τόσον, ὅσον μῆκος ἔχει μία ὑάρδα.

8. ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ ΤΕΤΡΑΓΩΝΟΥ

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ἐπιφάνειαν τετραγώνου, λαμβάνομεν ὡς μονάδα τὸν τετραγωνικὸν πόντον.

Ὁ τετραγωνικὸς πόντος εἶναι ἓν μικρὸν τετράγωνον τοῦ ὁποίου κάθε πλευρὰ ἔχει μῆκος 1 πόντον (εἰκ. 31).

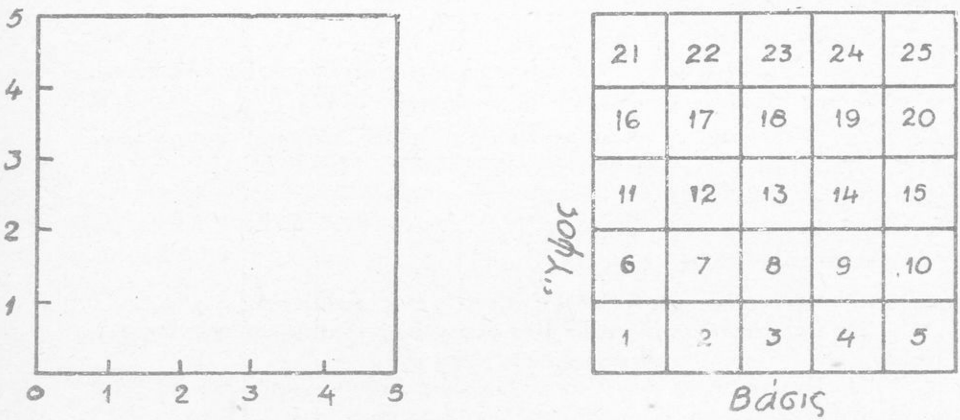


31.

Τὸ τετράγωνον τὸ ὁποῖον δεικνύει ἡ εἰκὼν (εἰκ. 32) ἔχει πλευρὰς μήκους 5 πόντων.

Διαιροῦμεν τὴν μίαν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου εἰς 5 ἴσα μέρη καὶ τὴν κάθετον πρὸς αὐτὴν ἐπίσης εἰς 5 ἴσα μέρη (ἕκαστον μέρος ἔχει μῆκος 1 πόντον). Ἀπὸ τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως φέρομεν εὐθείας γραμμὰς παραλλήλους. Βλέπομεν ὅτι οὕτω διαιρεῖται τὸ τετράγωνον εἰς τετραγωνικοὺς πόντους. Οἱ τετραγωνικοὶ πόντοι αὐτοῦ τοῦ τετραγώνου εἶναι 25 (εἰκ. 32).

Ἠμποροῦμεν νὰ εὕρωμεν τὸ 25 ἀμέσως, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸ μῆκος τῆς μιᾶς πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου (5 πόντ.) ἐπὶ τὸ μῆκος τῆς ἄλλης πλευρᾶς (5 πόντους).



32

$$5 \times 5 = 25$$

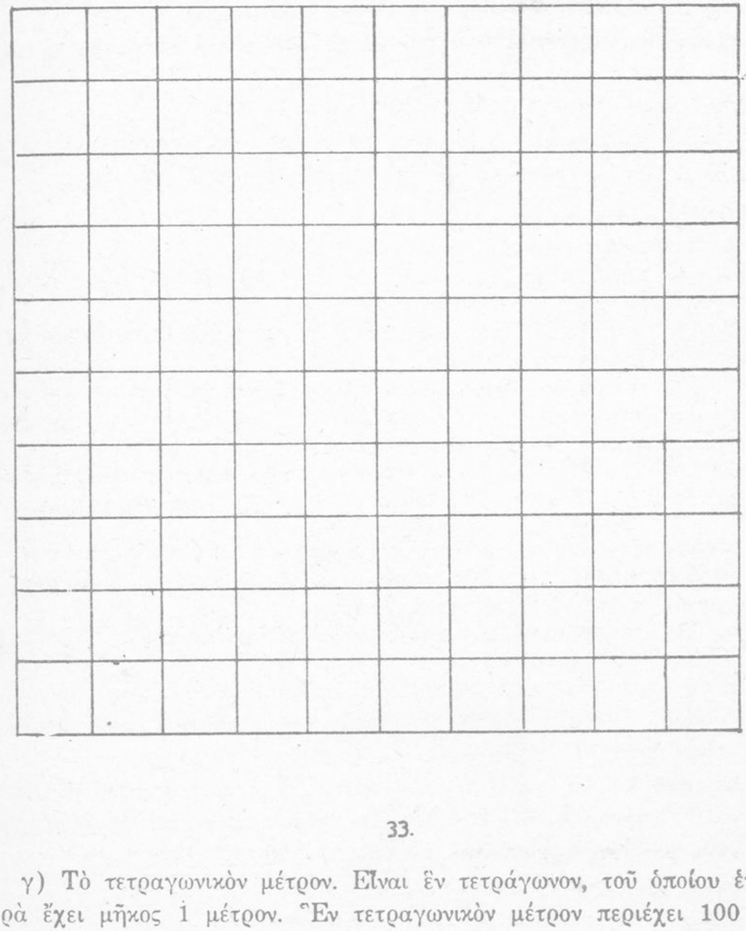
Ἡ κάτω πλευρὰ τοῦ τετραγώνου εἶναι ἡ βάσις τοῦ τετραγώνου. Ἡ ἄλλη πλευρὰ εἶναι τὸ ὕψος του. Δι' αὐτὸ ἠμποροῦμεν νὰ εἴπωμεν ὅτι εὑρίσκομεν τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ τετραγώνου, πολλαπλασιάζοντες τὴν βάσιν ἐπὶ τὸ ὕψος του. Εἰς τὸ τετράγωνον ἡ βάσις καὶ τὸ ὕψος εἶναι ἴσα μεταξύ των.

Μονάδες διὰ τὴν μέτρησιν ἐπιφανείας. Μονάδες, μὲ τὰς ὁποίας μετροῦμεν τὴν ἐπιφάνειαν εἶναι:

α) Ὁ τετραγωνικὸς πόντος. Ὅταν ἡ ἐπιφάνεια εἶναι μικρά. Ὁ τετραγωνικὸς πόντος εἶναι ἓν τετράγωνον μὲ πλευρὰν 1 πόντον. (Ἰδὲς τὴν εἰκόνα 31).

β) Ἡ τετραγωνικὴ παλάμη εἶναι ἓν τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἑκάστη πλευρὰ ἔχει μῆκος 1 παλάμην, δηλαδὴ 10 πόντους.

Σχεδιάζοντες μίαν τετραγωνικὴν παλάμην βλέπομεν ὅτι περιέχει 100 τετρ. πόντους (εἰκ. 34).



33.

γ) Τὸ τετραγωνικὸν μέτρον. Εἶναι ἓν τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἑκάστη πλευρὰ ἔχει μῆκος 1 μέτρον. Ἓν τετραγωνικὸν μέτρον περιέχει 100 τετρ. παλάμας.

δ) Διὰ μεγάλας ἐπιφανείας, π.χ., χωραφιῶν, χρησιμοποιοῦμεν ὡς μονάδα ἐπιφανείας τὸ στρέμμα. Τὸ στρέμμα εἶναι μία μεγάλη ἐπιφάνεια. Μέσα εἰς τὸ στρέμμα περιέχονται 1000 τετρ. μέτρα.

ε) Διὰ μεγαλυτέρας ἐπιφανείας, π.χ. κρατῶν, χρησιμοποιοῦν ὡς μονάδα ἐπιφανείας, τὸ τετραγωνικὸν χιλιόμετρον. Τὸ τετραγωνικὸν χιλιόμετρον εἶναι τετράγωνον, τοῦ ὁποίου κάθε πλευρὰ ἔχει 1 χιλιόμετρον. Μέσα εἰς τὸ τετρα-

γωνικὸν χιλιόμετρον περιέχονται 1.000.000 τετρ. μέτρα. Π.χ. ἡ Ἑλλὰς ἔχ
ἐπιφάνειαν 132.000 τετραγωνικὰ χιλιόμετρα.

Π ρ ο σ ο χ ή. Πολλαπλασιάζοντες πόντους ἐπὶ πόντους εὑρίσκομ
τετραγωνικοὺς πόντους.

Πολλαπλασιάζοντες μέτρα ἐπὶ μέτρα εὑρίσκομεν τετραγωνικὰ μέτρ

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς:

60. Νὰ εὕρῃς κάμνων σχῆμα πόσην ἐπιφάνειαν ἔχει ἓν τετράγωνον, το
ὁποίου ἡ πλευρὰ ἔχει μῆκος 7 πόντους.

61. Ἓν τετράγωνον ἔχει πλευρὰν μήκους 10 πόντων. Πόσοι τετραγω
νικοὶ πόντοι εἶναι ἡ ἐπιφάνειά του;

62. Ἓν τετράγωνον ἔχει περίμετρον 20 μέτρα. Πόσα τετραγωνικὰ μέ
τρα εἶναι ἡ ἐπιφάνειά του;

63. Ἓν τετράγωνον ἔχει πλευρὰν μήκους 110 πόντ. Πόσοι τετραγωνικο
πόντοι εἶναι ἡ ἐπιφάνειά του; Ἡ ἐπιφάνειά του εἶναι μεγαλυτέρα ἢ μικροτέρ
ἀπὸ τὴν ἐπιφάνειαν 1 τεραγωνικοῦ μέτρου;

64. Σχεδίασε ἓν τετράγωνον, τοῦ ὁποίου τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς εἶναι 2
πόντοι καὶ ἓν ἄλλο τοῦ ὁποίου τὸ μῆκος εἶναι 4 πόντοι. Χώρισέ τα εἰς τετραγω
νικοὺς πόντους καὶ νὰ εὕρῃς πόση εἶναι ἡ ἐπιφάνεια ἑκάστου τετραγώνου. Δο-
κίμασε νὰ εὕρῃς πόσας φορὰς ἓν τετράγωνον μήκους πλευρᾶς 2 πόντ. χωρεῖ εἰ
ἓν τετράγωνον τὸ ὁποῖον ἔχει πλευρὰν 4 πόντους.

65. Ἂν πολλαπλασιάσωμεν χιλιόμετρα ἐπὶ χιλιόμετρα τί εὑρίσκομεν

Ἐ π ι φ ά ν ε ι α ι τ ε τ ρ α γ ω ν ι κ α ί. Ἔχομεν ἓν χαρτὶ τοῦ ὁποίου
καὶ αἱ τέσσαρες πλευραὶ ἔχουν τὸ ἴδιον μῆκος π.χ. 20 πόντους, καὶ ὅλαι αἱ γω-
νίαι του εἶναι ὀρθαί. Τὸ χαρτὶ αὐτὸ ἔχει ἐπιφάνειαν τετραγωνικήν.

Ἓν τραπέζιον ἂν ἔχῃ ὅλας τὰς πλευράς του ἴσας (π.χ. κάθε πλευρά του
ἔχει μῆκος 110 πόντους), καὶ ἂν ἔχῃ καὶ τὰς τέσσαρας γωνίας του ὀρθάς, τότε
ἡ ἐπιφάνειά του εἶναι τετραγωνική.

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς

66. Διὰ νὰ εἴπωμεν ὅτι μία ἐπιφάνεια εἶναι τετραγωνικὴ τί πρέπει νὰ
ἔχῃ;

67. Σχεδίασε ἓν τετράγωνον, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ πλευρὰν 8 πόντους κα
κόψε το μὲ ψαλίδι γύρω - γύρω.

68. Κατασκεύασε ἀπὸ χαρτὶ ἓν τετραγωνικὸν μέτρον καὶ χώρισέ το εἰ
τετραγωνικὰς παλάμας. Ἀρίθμησε μὲ ἀριθμοὺς τὰς τετραγωνικὰς παλάμας του
Πόσας τετραγωνικὰς παλάμας ἔχει ἓν τετραγωνικὸν μέτρον;

69. Κατασκεύασε χωριστὰ μίαν τετραγωνικὴν παλάμην καὶ χώρισέ την ἰς τετραγωνικοὺς πόντους. Μέτρησε πόσοι τετραγωνικοὶ πόντοι ἀποτελοῦν ιίαν τετραγωνικὴν παλάμην.

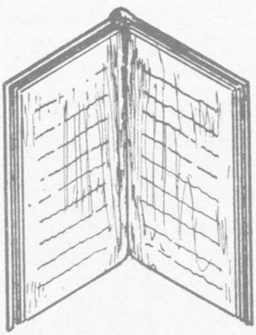
9. ΔΙΕΔΡΟΙ ΚΑΙ ΣΤΕΡΕΑΙ ΓΩΝΙΑΙ

Δίεδροι γωνίαι τοῦ κύβου. Ὅπως ξεύρομεν τὰ τεράγωνα, ἀπὸ τὰ ὁποῖα ἀποτελεῖται ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κύβου, λέγονται ἕδραι τοῦ κύβου.

Δύο ἕδραι τοῦ κύβου, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἡ μία κοντὰ εἰς τὴν ἄλλην, σχηματίζουν γωνίαν, ἡ ὁποία λέγεται δίεδρος. Ὀνομάζεται δίεδρος διότι σχηματίζεται ἀπὸ δύο ἕδρας.

Βιβλίον ἡμιανοιγμένον μᾶς δίδει εἰκόνα διέδρου γωνίας.

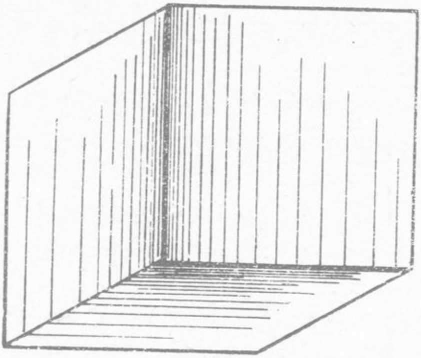
Λογαριάζοντες εὑρίσκομεν ὅτι ὁ κύβος ἔχει 12 διέδρους γωνίας. Ἔχει 12 διέδρους γωνίας, διότι ἔχει 12 ἀκμάς. Εἰς κάθε ἀκμὴν τέμνονται δύο ἕδραι καὶ ἀποτελοῦν δίεδρον γωνίαν.



Στερεαὶ γωνίαι τοῦ κύβου. Ἐξετάζοντες τὸν κύβον, βλέπομεν ὅτι ἀπὸ ἑκάστην κορυφήν του περνοῦν τρεῖς ἕδραι.

Τὸ σχῆμα, τὸ ὁποῖον σχηματίζουν αἱ τρεῖς ἕδραι, λέγεται στερεὰ γωνία τοῦ κύβου (εἰκ. 34).

Στερεὰ γωνία σχηματίζεται εἰς ἑκάστην ἀπὸ τὰς 8 κορυφὰς τοῦ κύβου. Δι' αὐτὸ ὁ κύβος ἔχει 8 στερεὰς γωνίας.



34

Εἰς τὴν εἰκόνα 34 φαίνεται ἡ πίσω ἀριστερὰ στερεὰ γωνία τοῦ κύβο

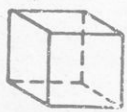
10. Ο ΟΓΚΟΣ ΤΟΥ ΚΥΒΟΥ

Ὄ γ κ ο ς **τοῦ κύβου** λέγεται τὸ μέρος τοῦ χώρου, τὸ ὁποῖο κατέχει ὁ κύβος. Ἕνας μεγάλος κύβος ἔχει μεγάλον ὄγκον. Ἕνας μικρὸς κύβος ἔχει μικρὸν ὄγκον.

Διὰ νὰ καταλάβωμεν καλύτερα τί εἶναι ὄγκος, ἠμποροῦμεν νὰ φαντασθῶμεν ἕνα τοῖχον κατασκευασμένον ἀπὸ τοῦβλα. Ἂν ἦτο δυνατὸν νὰ βγάλωμεν ἀπὸ τὸν τοῖχον ἓν τοῦβλον, εἰς τὸ μέρος ἐκεῖνο θὰ ἔμενε ἓν κενόν. Τ κενὸν αὐτὸ δεικνύει τὸν ὄγκον, ποὺ ἔχει τὸ τοῦβλον.

Μ ο ν ὰ ς δ ι ὰ τ ὴ ν μ έ τ ρ η σ ι ν μ ι κ ρ ο ῦ ὄ γ κ ο υ. Δι μικρὸν ὄγκον χρησιμοποιοῦμεν ὡς **μονάδα** τὸν κυβικὸν πόντον.

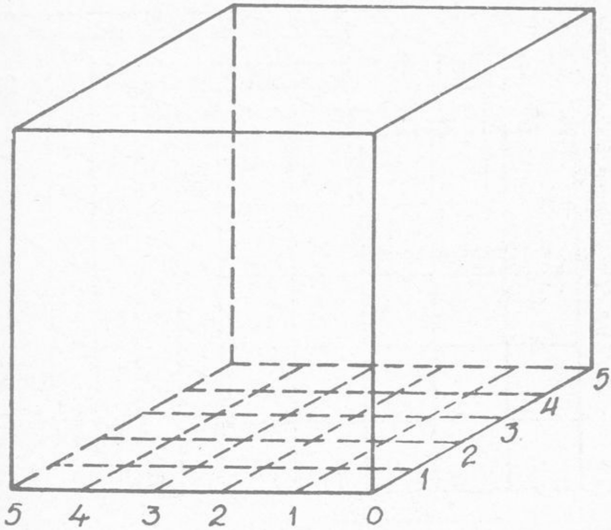
Ὁ κυβικὸς πόντος εἶναι ἕνας κύβος, τοῦ ὁποίου ἑκάστη ἀκμὴ ἔχει μῆκο 1 πόντον (εἰκ. 35).



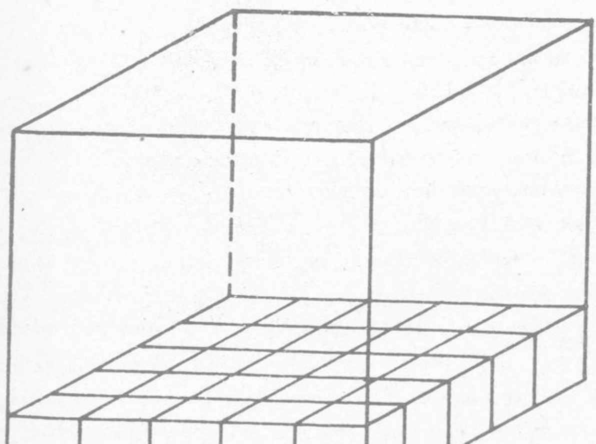
35

Ὑ π ο λ ο γ ι σ μ ὸ ς τ ο ῦ ὄ γ κ ο υ ἑ ν ὸ ς κ ύ β ο υ. Ἔχομε ἕνα κύβον π.χ., τοῦ ὁποίου ἑκάστη ἀκμὴ ἔχει μῆκος 5 πόντων. Παίρνομεν τ τετράγωνον, τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖ τὴν βάσιν τοῦ κύβου. Ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου ἔχει μῆκος 5 πόντων, ὥστε ἡ ἐπιφάνεια τῆς βάσεως τοῦ κύβου εἶναι 2 τετρ. πόντοι (εἰκ. 36).

Τοποθετοῦντες κυβ. πόντους ἐπάνω εἰς αὐτὴν τὴν ἐπιφάνειαν, βλέπομε



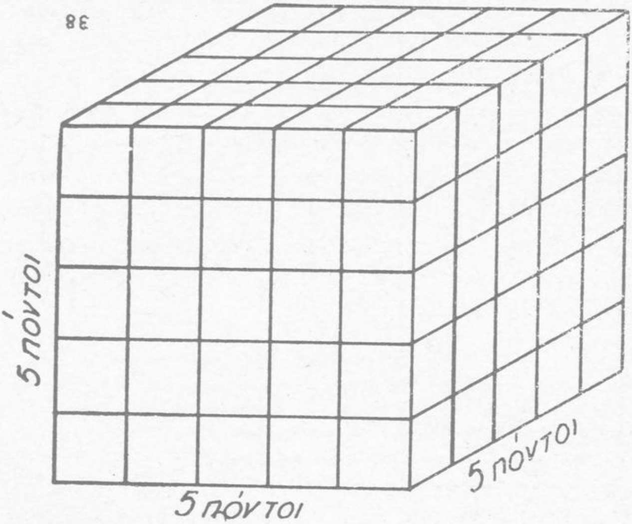
36



37

ὅτι ἠμποροῦμεν νὰ βάλωμεν 25 κυβικοὺς πόντους. Σχηματίζομεν οὕτω μίαν στρῶσιν (εἰκ. 37).

Τοιαῦται στρώσεις ἠμποροῦν νὰ χωρέσουν εἰς τὸν κύβον 5, ἐπειδὴ 5



πόντοι εἶναι τὸ ὕψος τοῦ κύβου, τὸν ὁποῖον ἐπήραμεν. Ὥστε βλέπομεν ὅτι ὁ ὁ κύβος ἠμπορεῖ νὰ χωρέσῃ 25 × 5 = 125 κυβ. πόντ. (εἰκ. 38). Ἀπὸ τὸν τὸν λογαριασμὸν εὑρίσκομεν ὅτι ὁ κύβος, τὸν ὁποῖον ἐπήραμεν, ἔχει ὄγ 125 κυβ. πόντους.

Γενικῶς διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον ἑνὸς κύβου, πολλαπλασιάζομεν ἐπιφάνειαν τῆς βάσεως τοῦ κύβου ἐπὶ τὸ ὕψος του. Εἰς τὸν κύβον, τὸν ὁπο ἐπήραμεν, ἡ ἐπιφάνεια τῆς βάσεως εἶναι 25 τετρ. πόντοι. Τὸ ὕψος του εἶ 5 πόντ. Ὁ ὄγκος του εἶναι 25 × 5 = 125 κυβ. πόντοι.

Ἂν εἰς ἄλλον κύβον ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου του ἔχῃ μῆκος 7 πό ἡ ἐπιφάνεια τῆς βάσεώς του εἶναι 7 × 7 = 49 τετρ. πόντοι. Τὸ ὕψος εἶναι 7 πόντοι. Ὁ ὄγκος τοῦ κύβου εἶναι 49 × 7 = 343 κυβ. πόντοι.

Μονάδες ὄγκου: α) Ὁ κυβικὸς πόντος. (Ἰ τὴν εἰκόνα 35). Ὅταν ὁ ὄγκος, τὸν ὁποῖον θέλομεν νὰ μετρήσωμεν εἶναι μικρ

β) Ἡ κυβικὴ παλάμη. Ἡ κυβ. παλάμη εἶναι ἕνας κύβ τοῦ ὁποίου κάθε ἀκμὴ ἔχει μῆκος 1 παλάμην (= 10 πόντοι).

Ἂν συγκρίνωμεν τὸν κυβ. πόντον μὲ τὴν κυβ. παλάμην, εὑρίσκομεν μία σειρὰ εἰς τὴν κυβ. παλάμην χωρεῖ 10 κυβ. πόντους. Μία στρῶσις τῆς κ παλάμης χωρεῖ 100 κυβ. πόντους. Ὁλόκληρος ἡ κυβ. παλάμη, ἐπειδὴ ἔχει τοιαύτας στρώσεις, χωρεῖ 1000 κυβ. πόντους. Δηλ. ἡ κυβ. παλάμη ἰσοδυνα μὲ 1000 κυβ. πόντους (εἰκ. 39).

γ) Τ ὸ κ υ β ι κ ὸ ν μ έ τ ρ ο ν. Τὸ κυβ. μέτρον εἶναι κύβος, ·οῦ ὁποίου ἡ ἀκμὴ ἔχει μῆκος 1 μέτρον. Μετρῶντες πόσαι κυβ. παλάμαι χωροῦν μέσα εἰς τὸ κυβ. μέτρον, εὑρίσκομεν ὅτι:

Εἰς μίαν σειρὰν τοῦ κυβ. μέτρου χωροῦν 10 κυβ. παλάμαι.

Εἰς μίαν στρῶσιν τοῦ κυβ. μέτρου χωροῦν 100 κυβ. παλάμαι.

Εἰς ὁλόκληρον τὸ κυβ. μέτρον (ποὺ ἔχει 10 τοιαύτας στρώσεις) χωροῦν 1000 κυβ. παλάμαι. Δηλ. τὸ κυβ. μέτρ. ἰσοδυναμεῖ μὲ 1000 κυβ. παλάμας.

Π ρ ο σ ο χ ή. Πολλαπλασιάζοντες ἐπιφάνειαν ἐπὶ μῆκος εὑρίσκομεν ·γκον. Π.χ. πολλαπλασιάζοντες ἐπιφάνειαν 25 τετρ. πόντων ἐπὶ μῆκος 5 ·όντ. εὑρίσκομεν ὄγκον 125 κυβ. πόντων.

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς:

70. Ὅταν λέγωμεν «ὄγκος τοῦ κύβου», τί ἐννοοῦμεν;

71. Ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου ἑνὸς κύβου ἔχει μῆκος 12 πόντους. Πόση ·ἶναι ἡ ἐπιφάνεια της βάσεως τοῦ κύβου αὐτοῦ καὶ πόσος εἶναι ὁ ὄγκος του;

72. Ὑπολόγισε πόσον ὄγκον ἔχει ὁ κύβος, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκμὴ ἔχει μῆκος · πόντους.

73. Λογάριασε πόσους κυβ. πόντους χωρεῖ 1 κυβικὴ παλάμη.

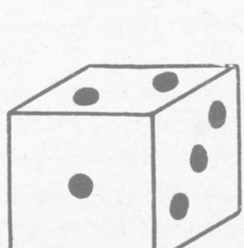
74. Λογάριασε πόσας κυβ. παλάμας χωρεῖ 1 κυβικὸν μέτρον.

75. Τὸ κυβ. μέτρον ξεύρεις τί εἶναι; Τί ἄραγε νὰ εἶναι τὸ κυβ. χιλιό·ετρον;

11. ΚΥΒΙΚΑ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΑ

Τὰ ζάρια τοῦ ταβλιοῦ ἔχουν σχῆμα κύβου. Εἰς τὴν μίαν ἕδραν ἔχουν · τελείαν, εἰς τὴν δευτέραν 2 τελείας κλπ. Εἰς τὴν ἕκτην ἕδραν ἔχουν 6 τε·είας (εἰκ. 40).

40



Σχῆμα κύβου ἔχουν καὶ μερικὰ δωμάτια σπιτιῶν. Ἂν π.χ. ὅλαι αἱ ἕδ ἑνὸς δωματίου (ταβάνι, πάτωμα, 4 τοῖχοι) εἶναι τετράγωνα ἴσα, τὸ δωμά αὐτὸ θὰ ἔχη σχῆμα κύβου.

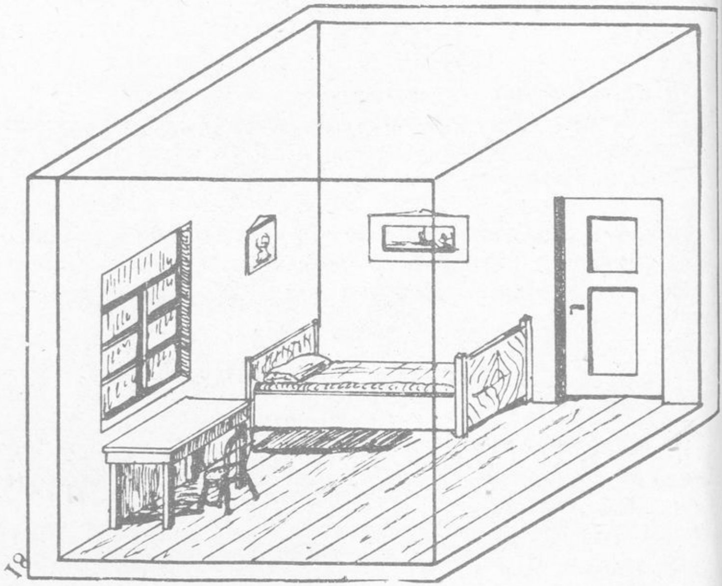
Κυβικὸν δωμάτιον. Ὅταν εὑρισκώμεθα μέσα εἰς ἓν κυβι δωμάτιον, οἱ γύρω - γύρω τοῖχοι εἶναι τετράγωνα, τὰ ὁποῖα ἀποτελοῦν τὰ κατακορύφους ἕδρας τοῦ κύβου (εἰκ. 41).

Τὸ ταβάνι εἶναι ὁριζοντία ἕδρα τοῦ κύβου.

Τὸ πάτωμα εἶναι ἐπίσης ὁριζοντία ἕδρα.

Οὕτω ὅλαι αἱ ἕδραι εἶναι $4 + 1 + 1 = 6$.

Κάθε ἕνας ἀπὸ τοὺς κατακορύφους τοίχους σχηματίζει μὲ τὸν ἄ



41.

ποὺ εἶναι κοντά του, μίαν ἀκμήν. Οὕτω ἔχομεν εἰς τὰς 4 ἄκρας τοῦ δωματ 4 ἀκμάς.

Τὸ ταβάνι σχηματίζει μὲ κάθε κατακόρυφον τοῖχον ἐπίσης ἀκμήν. Ο εἰς τὰ ἄκρα τοῦ ταβανιοῦ σχηματίζονται ἄλλαι 4 ἀκμαί.

Τὸ πάτωμα σχηματίζει μὲ κάθε κατακόρυφον τοῖχον μίαν ἀκμήν. Ὥ ἔχομεν καὶ εἰς τὰ ἄκρα τοῦ πατώματος ἄλλας 4 ἀκμάς.

Τὸ ὅλον μέσα εἰς ἓν κυβικὸν δωμάτιον ἔχομεν $4 + 4 + 4 = 12$ ἀκ

Τοῖχος μὲ τοῖχον σχηματίζει δίεδρον γωνίαν. Οὕτω οἱ κατακόρυ τοῖχοι σχηματίζουν 4 διέδρους γωνίας. Τὸ ταβάνι σχηματίζει μὲ κάθε κ

κόρυφον τοῖχον 4 διέδρους γωνίας. Τὸ πάτωμα σχηματίζει μὲ κάθε τοῖχον ἐπίσης 4 διέδρους γωνίας. Ὥστε ἔχομεν σύνολον 4 + 4 + 4 = 12 διέδρους γωνίας, ὅσαι εἶναι αἱ ἀκμαὶ τοῦ κύβου.

Δύο τοῖχοι, οἱ ὁποῖοι συναντῶνται καὶ τὸ ταβάνι σχηματίζουν μίαν στερεὰν γωνίαν. Οὕτω ἔχομεν εἰς τὸ ἐπάνω μέρος τοῦ δωματίου 4 στερεὰς γωνίας.

Δύο τοῖχοι καὶ τὸ πάτωμα σχηματίζουν ἐπίσης στερεὰν γωνίαν. Οὕτω ἔχομεν καὶ εἰς τὸ κάτω μέρος τοῦ δωματίου ἄλλας 4 στερεὰς γωνίας.

Συνολικὰ ἔχει τὸ δωμάτιον αὐτὸ 4 + 4 = 8 στερεὰς γωνίας.

Ἔχομεν ἐπίσης 4 κορυφὰς εἰς τὰ ἄκρα τοῦ ταβανιοῦ καὶ 4 κορυφὰς εἰς τὰ ἄκρα τοῦ πατώματος, δηλαδὴ σύνολον 8 κορυφάς.

Ὑπολογισμὸς τῆς ἐπιφανείας τῶν ἑδρῶν τοῦ κυβικοῦ δωματίου. Ἂν ἑκάστη πλευρὰ τοῦ τετραγώνου τοῦ κυβικοῦ δωματίου ἔχῃ μῆκος 4 μέτρα, τὸ πάτωμα ἔχει ἐπιφάνειαν 4 × 4 = 16 τετρ. μέτρα.

Τόσην ἀκριβῶς ἐπιφάνειαν ἔχει τὸ ταβάνι.

Ἐπίσης τόσην ἐπιφάνειαν ἔχει καὶ κάθε ἕνας ἀπὸ τοὺς τέσσαρας τοίχους.

Ἂν π.χ. πρόκειται νὰ ἀσβεστωθοῦν οἱ τέσσαρες τοῖχοι καὶ μᾶς ζητοῦν 5 δραχμὰς δι' ἕκαστον τετραγωνικὸν μέτρον κάμνομεν τὸν λογαριασμὸν ὡς ἑξῆς:

Ὁ ἕνας τοῖχος ἔχει ἐπιφάνειαν 16 τετρ. μέτρα.

Οἱ 4 τοῖχοι ἔχουν ἐπιφάνειαν 16 τετρ. μέτρα × 4 = 64 τετραγωνικὰ μέτρα.

Ἀπὸ 5 δραχμὰς διὰ τὸ ἀσβέστωμα τοῦ ἑνὸς τετραγωνικοῦ μέτρου, πρέπει νὰ δώσωμεν 320 δραχμάς.

Ἂν πρόκειται νὰ ἀσβεστωθοῦν οἱ τέσσαρες τοῖχοι καὶ τὸ ταβάνι, ὁ λογαριασμὸς γίνεται ὡς ἑξῆς:

Οἱ 4 τοῖχοι ἔχουν ἐπιφάνειαν	64 τετρ. μέτρα
Τὸ ταβάνι ἔχει ἐπιφάνειαν	16 » »
Οἱ 4 τοῖχοι μαζὶ καὶ τὸ ταβάνι	80 » »

Ἀπὸ 5 δρχ. τὸ τετραγωνικὸν μέτρον, 400 δρχ. κοστίζει τὸ ἀσβέστωμα τῶν τοίχων καὶ τοῦ ταβανιοῦ μαζί.

Ὑπολογισμὸς τοῦ ὄγκου τοῦ κυβ. δωματίου.

Ἂν τὸ κυβ. δωμάτιον ἔχῃ ἀκμὰς τὴν κάθε μίαν 4 μέτρα, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πατώματος εἶναι 16 τετρ. μέτρα. Ἐπάνω εἰς αὐτὴν θὰ ἠμποροῦσαν νὰ τοποθετηθοῦν 16 κυβ. μέτρα. Αὐτὰ θὰ ἦσαν εἰς μίαν στρῶσιν. Τοιαῦται στρώσεις χωροῦν 4, διότι τὸ ὕψος τοῦ δωματίου εἶναι 4 μέτρα. Οὕτω ἔχομεν σύνολον κυβ. μέτρων 16 κυβ. μέτρα × 4 = 64 κυβ. μέτρα.

Ὁ ὄγκος λοιπὸν τοῦ δωματίου αὐτοῦ εἶναι 64 κυβ. μέτρα.

Ἀσκήσεις:

76. Πόσα κυβ. μέτρα ἀέρος χωρεῖ ἓν κυβ. δωμάτιον τοῦ ὁποίου ἡ ἀκμὴ ἔχει μῆκος 4 μέτρα;

77. Ἓν κυβ. δωμάτιον ἔχει ἀκμὴν 5 μέτρα. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐπιφάνεια ἑκάστης ἕδρας του.

78. Μία κυβ. δεξαμενὴ ἔχει ἀκμὴν 3 μέτρα. Πόσα κυβ. μέτρα νερὸ ἠμπορεῖ νὰ χωρέσῃ;

79. Ἓν μικρὸν κυβικὸν κουτὶ ἔχει ἀκμὴν 3 πόντ. Πόσοι τετραγωνικοὶ πόντοι εἶναι ἡ ἐπιφάνεια κάθε ἕδρας του;

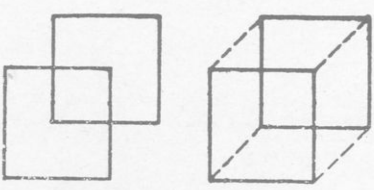
80. Πόσοι τετραγωνικοὶ πόντ. εἶναι ὅλη ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἰδίου κουτιοῦ;

81. Πόσοι κυβ. πόντοι χωροῦν εἰς μίαν στρῶσιν τοῦ ἰδίου κουτιοῦ;

82. Πόσοι κυβ. πόντοι κάμνουν μίαν στρῶσιν κάτω - κάτω εἰς τὸ ἴδιον κουτί;

83. Πόσαι στρώσεις μὲ κυβ. πόντους ἠμποροῦν νὰ χωρέσουν εἰς τὸ ἴδιον κουτί;

Ἰχνογράφησις τοῦ κύβου. Σχεδιάζομεν ἓν τετράγωνον καὶ ἐμπρός του ἓν ἄλλο, ἴσον μὲ τὸ προηγούμενον. Ἔπειτα ἑνώνομεν μὲ εὐθείας τὰς κορυφὰς τῶν τετραγώνων ἀνὰ δύο, ὅπως δεικνύει ἡ εἰκ. 42.



42

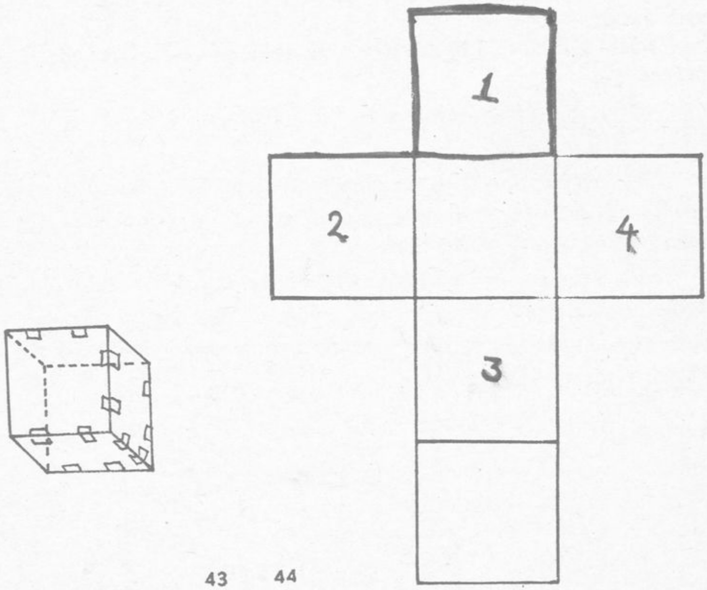
Κατασκευὴ κύβου. Ἠμποροῦμεν νὰ κατασκευάσωμεν κύβον ἀπὸ χαρτόνι ὡς ἑξῆς:

Παίρνομεν ἓν μεγάλο χαρτόνι καὶ σχεδιάζομεν εἰς τὴν μέσην του ἓν τετράγωνον. Αὐτὸ τὸ τετράγωνον θὰ εἶναι ἡ βάσις τοῦ κύβου.

Γύρω ἀπὸ αὐτὸ τὸ τετράγωνον σχεδιάζομεν 4 ἄλλα τετράγωνα ἴσα μὲ τὸ πρῶτον (τὰ 1, 2, 3, 4). Τὰ τετράγωνα αὐτὰ εἶναι αἱ κατακόρυφοι ἕδραι τοῦ κύβου.

Συνέχεια μὲ ἕνα ἀπὸ τὰ τετράγωνα αὐτὰ σχεδιάζομεν ἄλλο τετράγωνον ἐπίσης ἴσον μὲ τὸ πρῶτον. Τὸ τετράγωνον αὐτὸ θὰ εἶναι ἡ ἐπάνω ἕδρα τοῦ κύβου. Οὕτω ἔχομεν σύνολον 6 τετράγωνα, ὅσαι εἶναι αἱ ἕδραι τοῦ κύβου (εἰκ. 43, 44).

Κόβομεν τὸ σχῆμα αὐτὸ ἀπὸ τὸ ἄλλο χαρτόνι καὶ τσακίζομεν τὸ σχέ-



43 44

διον ἀκριβῶς εἰς τὰς πλευρὰς τῶν τετραγώνων. Ἔπειτα κολλῶμεν τὰ ἄκρα τῶν τετραγώνων μεταξύ των, π.χ. μὲ λευκοπλάστ. Οὕτω ὁ κύβος εἶναι ἕτοιμος.

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς:

84. Κατασκεύασε ἓν τετράγωνον, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ πλευρὰν 6 πόντους.
85. Κατασκεύασε ἀπὸ χαρτόνι ἕνα κύβον.
86. Νὰ κατασκευάσῃς ἄλλον κύβον, ὁ ὁποῖος νὰ ἔχῃ ἀκμὴν 15 πόντους.
87. Κατασκεύασε μὲ χονδρὸ σύρμα 6 ἴσα τετράγωνα καὶ ἕνωσέ τα μὲ λεπτὸν σύρμα, ὥστε νὰ σχηματισθῇ κύβος.
88. Κόψε ἀπὸ ξύλο 6 ἴσα τετράγωνα καὶ κάρφωσέ τα, ὥστε νὰ σχηματισθῇ κύβος.
89. Κατασκεύασε κύβον μὲ πηλόν.
90. Κατασκεύασε κύβον μὲ ὅτι ὑλικὸν θέλεις.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

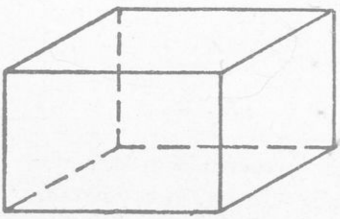
ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΝ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΠΙΠΕΔΟΝ

1. ΣΧΗΜΑ — ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ — ΕΔΡΑΙ — ΑΚΜΑΙ — ΚΟΡΥΦΑΙ

Ἡ εἰκὼν 45 παριστάνει ἓν ὀ ρ θ ο γ ώ ν ι ο ν π α ρ α λ λ η λ ε π ί π ε δ ο ν.

Τὸ ὄνομά του εἶναι μεγάλον καὶ δύσκολον, ἀλλὰ τὸ σχῆμα του εἶναι ἁπλοῦν. Πάρετε ἓν κουτὶ τῶν σπίρτων εἰς τὰ χέρια σας. Αὐτὸ ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου.

Ἂν ἔχωμεν ἓν ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ἀπὸ χαρτόνι ἢ ἄλλο ὑλικόν, καὶ θέσωμεν τὰ χέρια μας γύρω - γύρω εἰς τὸ ἔξω μέρος του, ἐγγίζομεν τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου. Ἐ π ι φ ά ν ε ι α δηλαδὴ εἶναι τὸ ἐξωτερικὸν μέρος του.



45

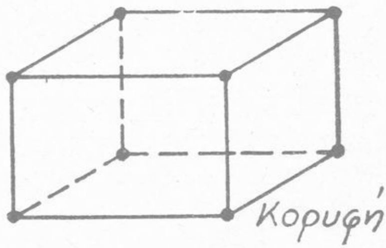
Ἕ δ ρ α ι — Ἀ κ μ α ὶ — Κ ο ρ υ φ α ί. Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ἀποτελεῖται ἀπὸ ἕδρας. Μετρῶντες τὰς ἕδρας τοῦ κυτίου τῶν σπίρτων, εὑρίσκομεν ὅτι τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ἔχει 6 ἕδρας.

Τεντώνομεν ἓν νῆμα, διὰ νὰ ἔχωμεν εὐθεῖαν γραμμὴν καὶ ἐγγίζομεν τὸ τεντωμένο νῆμα ἐπάνω εἰς ἑκάστην ἕδραν τοῦ παραλληλεπιπέδου. Βλέπομεν ὅτι, ὅπως καὶ ἂν στρέψωμεν τὸ τεντωμένο νῆμα, τοῦτο ἐφαρμόζει εἰς ἑκάστην ἕδραν παντοῦ. Λέγομεν δι' αὐτὸ ὅτι ἑκάστη ἕδρα εἶναι ἐπίπεδος.

'Εκεῖ ὅπου μία ἕδρα τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου συναντᾷ ἄλλην ἕδραν, σχηματίζεται γραμμὴ εὐθεῖα. Ἡ εὐθεῖα αὐτὴ γραμμὴ λέγεται ἀ κ μ ὴ τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου.

Μετρῶντες τὰς ἀκμὰς εὑρίσκομεν ὅτι εἶναι 4 ἀκμαὶ ἐπάνω, 4 ἀκμαὶ κάτω καὶ 4 ἀκμαὶ εἰς τὰ πλάγια, δηλ. ὅλαι αἱ ἀκμαὶ τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι $4 + 4 + 4 = 12$.

'Εκεῖ ὅπου μία ἀκμὴ τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου συναντᾷ ἄλλας δύο ἀκμάς, σχηματίζεται κ ο ρ υ φ ή. Μετρῶντες τὰς κορυφάς, εὑρίσκομεν ὅτι ἔχει 4 κορυφὰς ἐπάνω καὶ 4 κορυφὰς κάτω, δηλ. τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ἔχει ὅλο - ὅλο $4 + 4 = 8$ κορυφὰς (εἰκ. 46).



46

'Α σ κ ή σ ε ι ς:

"Αν καταλάβατε καλὰ ὅσα εἴπαμεν, θὰ ἠμπορέσετε νὰ συμπληρώσετε τὰς φράσεις:

91. Τὸ ἐξωτερικὸν μέρος τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου λέγεται... ....τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου.

92. 'Επιφάνεια εἶναι κάτι, τὸ ὁποῖον ἠμποροῦμεν νὰ ......ἢ κάτι ποὺ ἠμπροῦμεν νά ....

93. Ἑκάστη ἕδρα τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι .... διότι μία...γραμμὴ ἐφαρμόζει εἰς ὅλα τὰ μέρη τῆς ἕδρας.

94. Τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ἔχει...ἕδρας.

95. Τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ἔχει...ἀκμάς.

96. Τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ἔχει...κορυφάς.

97. "Οταν λέγωμεν ἕδρα, ἐννοοῦμεν...

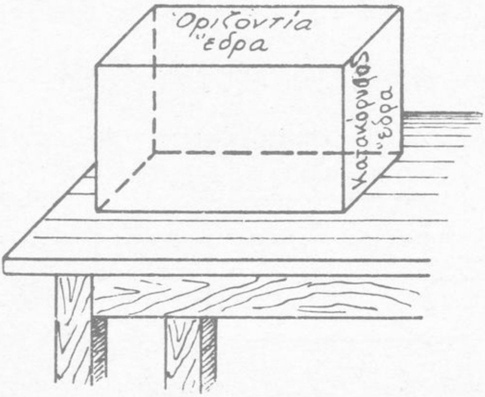
98. "Οταν λέγωμεν ἀκμή, ἐννοοῦμεν...

99. "Οταν λέγωμεν κορυφή, ἐννοοῦμεν...

Θέσις τῶν ἑδρῶν. Θέτομεν τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ἐπάνω εἰς τραπέζιον, τοῦ ὁποίου ἡ ἐπιφάνεια εἶναι ὁριζοντία.

Βλέπομεν ὅτι ἡ ἕδρα, ἡ ὁποία εἶναι κάτω καὶ ἀκουμβᾶ εἰς τὴν ὁριζοντίαν ἐπιφάνειαν τοῦ τραπεζίου, ἔχει διεύθυνσιν ὁριζοντίαν. Ὁριζοντίαν ἐπίσης διεύθυνσιν ἔχει ἡ ἐπάνω ἕδρα τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου.

Αἱ 4 ἕδραι τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, αἱ ὁποῖαι εἶναι εἰς τὰ πλάγια, ἔχουν θέσιν κατακόρυφον (εἰκ. 48).



48

Θέσις τῶν ἀκμῶν. Αἱ τέσσαρες ἐπάνω ἀκμαὶ καὶ αἱ τέσσαρες κάτω, αἱ ὁποῖαι εἶναι γύρω εἰς τὰς ὁριζοντίας ἕδρας του, ἔχουν θέσιν ὁριζοντίαν.

Αἱ ἄλλαι ἀκμαί, αἱ ὁποῖαι εἶναι εἰς τὰ πλάγια τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ἔχουν θέσιν κατακόρυφον.

Σχέσις τῶν ἑδρῶν. Ἡ ἕδρα, ἡ ὁποία εἶναι ἐπάνω καὶ ἡ ἕδρα, ἡ ὁποία εἶναι κάτω, ὅσον καὶ ἂν τὰς μεγαλώσωμεν δὲν συναντῶνται. Εἶναι δηλαδὴ παράλληλοι μεταξύ των.

Ἀπὸ τὰς ἕδρας, αἱ ὁποῖαι εἶναι κατακόρυφοι, ἐπίσης εἶναι παράλληλοι αὐταί, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἀπέναντι ἡ μία εἰς τὴν ἄλλην.

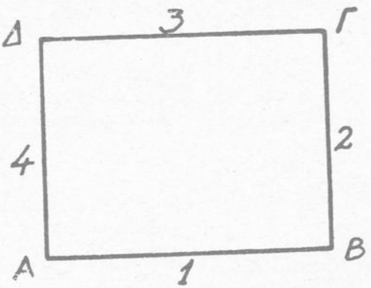
Δηλαδὴ τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ἔχει τὰς ἀντικρυνὰς ἕδρας του παραλλήλους.

Σχῆμα τῶν ἑδρῶν. Λαμβάνομεν τὸ ὑποδεκάμετρον καὶ μετρῶμεν πόσον μῆκος ἔχουν αἱ ἀκμαὶ τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου.

Βλέπομεν ὅτι ὅλαι αἱ ἀκμαὶ δὲν ἔχουν τὸ ἴδιον μῆκος. Ἀπὸ αὐτὸ συμπεραίνομεν ὅτι αἱ ἕδραι τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου δὲν εἶναι τετράγωνα, ὅπως εἶναι αἱ ἕδραι τοῦ κύβου.

2. ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΝ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟΝ

Τὸ σχῆμα, τὸ ὁποῖον ἔχει κάθε ἕδρα τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, ὀνομάζεται ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον (εἰκ. 49). Τοιοῦτον σχῆμα ἔχουν καὶ αἱ σελίδες τοῦ βιβλίου.



49

Π λ ε υ ρ α ὶ κ α ὶ γ ω ν ί α ι τ ο ῦ ὀ ρ θ ο γ ω ν ί ο υ π α ρ α λ λ η λ ο γ ρ ά μ μ ο υ. Πόσας πλευρὰς ἔχει τὸ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον; Βλέπομεν ὅτι τὸ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον ἔχει 4 πλευράς.

Μετρῶμεν μὲ νῆμα ἢ μὲ ὑποδεκάμετρον τὸ μῆκος των, βλέπομεν ὅτι ἡ πλευρὰ 1 εἶναι ἴση μὲ τὴν πλευρὰν 3 καὶ ὅτι ἡ πλευρὰ 2 εἶναι ἴση μὲ τὴν πλευρὰν 4.

Ὥστε αἱ πλευραί του δὲν εἶναι ὅλαι ἴσαι. Εἰς τὸ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον ἴσαι πλευραὶ εἶναι μόνον αἱ ἀντικρυναί.

Ὅπως ξεύρομεν παράλληλοι λέγονται δύο πλευραὶ ὅταν δὲν συναντῶνται, ὅσον καὶ ἂν τὰς μεγαλώσωμεν.

Τὸ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον ἔχει παραλλήλους πλευράς; Ναί. Ἡ πλευρὰ 1 εἶναι παράλληλος μὲ τὴν πλευρὰν 3 καὶ ἡ πλευρὰ 2 εἶναι παράλληλος μὲ τὴν πλευρὰν 4. Δηλαδὴ αἱ ἀντικρυναὶ πλευραὶ εἶναι καὶ παράλληλοι.

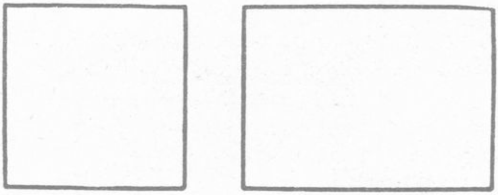
Ἂς ἐξετάσωμεν τώρα τὰς γωνίας τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου. Ὅπως βλέπομεν ἔχει 4 γωνίας: Α, Β, Γ, Δ. Ὅλαι αἱ γωνίαι εἶναι ὀρθογώνιοι.

Τὸ σχῆμα αὐτὸ λέγεται ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον διὰ δύο λόγους

α) Ὀρθογώνιον. Διότι ὅλαι αἱ γωνίαι του εἶναι ὀρθαί.

β) Παραλληλόγραμμον. Διότι αἱ ἀντικρυναὶ πλευραί του εἶναι ἴσ
καὶ **παράλληλοι μεταξύ των.**

Σύγκρισις ὀρθογωνίου παραλληλογράμμο
καὶ τετραγώνου. Τὸ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον ὁμοιάζει μ
τὸ τετράγωνον, ἀλλὰ καὶ διαφέρει ἀπὸ αὐτὸ (εἰκ. 50).



50

Τετράγωνον — Ὀρθ. παραλληλόγραμμο

Ὁμοιότητες.

Τετράγωνον	Ὀρθ. παραλληλόγραμμον
Ἔχει 4 πλευράς.	Ἔχει 4 πλευράς.
Ἔχει 4 γωνίας ὀρθάς.	Ἔχει 4 γωνίας ὀρθάς.
Αἱ ἀντικρυναὶ πλευραί του εἶναι παράλληλοι.	Αἱ ἀντικρυναὶ πλευραί του εἶναι παράλληλοι.

Διαφοραί.

Τετράγωνον	Ὀρθ. παραλληλόγραμμον
Αἱ πλευραί του εἶναι ὅλαι ἴσαι μεταξύ των.	Αἱ πλευραί του δὲν εἶναι ὅλαι ἴσαι. Ἴσαι εἶναι μόνον αἱ ἀντικρυναὶ πλευραί.

Ἀσκήσεις:

Νὰ συμπληρωθοῦν αἱ φράσεις:

100. Τοῦ τετραγώνου ὅλαι αἱ γωνίαι εἶναι ... καὶ ὅλαι αἱ πλευρ
εἶναι...

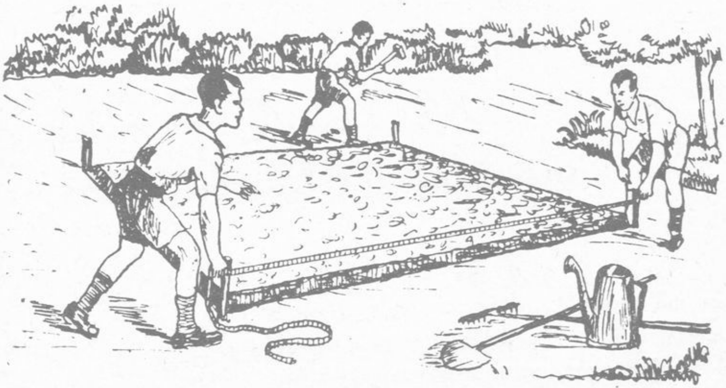
101. Τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου ὅλαι οἱ γωνίαι εἶναι... Ὅλ
αἱ πλευραὶ δὲν εἶναι...Αἱ ἀντικρυναὶ πλευραί του εἶναι...

Ἀπάντησε εἰς τὰς ἐρωτήσεις.

102. Ἠμπορεῖς νὰ σχηματίσῃς ἓν ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον μὲ
σπίρτα; Ἠμπορεῖς μὲ 6 σπίρτα;

103. Ἓν ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον ἔχει πλευρὰς τὴν μίαν 12 πόντους, τὴν ἄλλην 7 πόντους. Πόσους πόντους μῆκος ἔχει ἡ περίμετρός του;

104. Θέλομεν νὰ βάλωμεν σύρμα γύρω - γύρω εἰς ἓν κηπάκι, τὸ ὁποῖον ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου. Πῶς θὰ εὕρωμεν πόσον σύρμα πρέπει νὰ ἀγοράσωμεν; (εἰκ. 51).



51

105. Ἓν ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον ἔχει περίμετρον 40 πόντους. Μία πλευρά του ἔχει μῆκος 12 πόντους. Πόσον εἶναι τὸ μῆκος κάθε μιᾶς ἀπὸ τὰς ἄλλας πλευράς του;

106. Ἕνας κορνιζοποιὸς ἔχει βέργαν μήκους 80 πόντ. Πρόκειται νὰ κατασκευάση κορνίζαν σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου καὶ θέλει νὰ μὴ περισσέψη διόλου ὑλικό. Ἡ μία πλευρὰ τῆς κορνίζας πρέπει νὰ ἔχη μῆκος 25 πόντους. Πόσον μῆκος θὰ ἔχη κάθε μία ἀπὸ τὰς ἄλλας πλευρὰς τῆς κορνίζας;

107. Ἑνὸς σχήματος ἡ μία πλευρὰ ἔχει μῆκος 12 πόντους, ἡ ἄλλη 8 πόντους, ἡ ἄλλη 12 πόντους. Πόσον μῆκος πρέπει νὰ ἔχη ἡ ἄλλη πλευρά, ὥστε τὸ σχῆμα νὰ εἶναι ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον;

3. ΠΩΣ ΣΧΕΔΙΑΖΟΜΕΝ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΝ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟΝ

Διὰ νὰ σχεδιάσωμεν ἓν ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον, πρέπει νὰ βάλωμεν εἰς τὸν νοῦν μας:

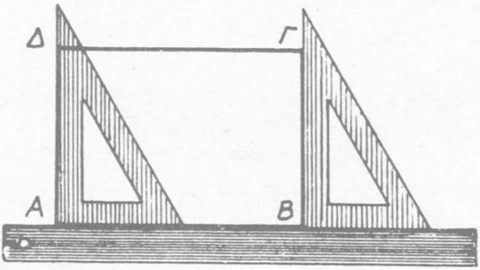
Πρῶτον ὅτι τὸ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον ἔχει 4 γωνίας ὀρθάς.

Δεύτερον ὅτι αἱ ἀντικρυναὶ πλευραί του εἶναι παράλληλοι καὶ ἴσαι.

Δι' αὐτὸ πρῶτα ἀπ' ὅλα πρέπει νὰ σχηματίσωμεν τὰς ὀρθὰς γωνίας.

Σχεδιάζομεν μὲ τὸν χάρακα μίαν εὐθεῖαν ΑΒ καὶ ἔπειτα μὲ τὴν βοήθειαν γνώμονος εἰς τὰς ἄκρας τῆς εὐθείας σύρομεν καθέτους πρὸς τὴν εὐθεῖαν, ὥστε νὰ σχηματισθοῦν ὀρθαὶ γωνίαι (εἰκ. 52).

Ὕστερα μετρῶμεν εἰς κάθε κάθετον εὐθεῖαν τόσον μῆκος, ὅσον μῆκος



52

θέλομεν νὰ ἔχῃ ἡ ἄλλη πλευρὰ τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου. Οὕτω εὑρίσκομεν ποῦ ἀκριβῶς πρέπει νὰ εὑρίσκωνται τὰ σημεῖα Δ καὶ Γ.

Ἑνώνομεν μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ χάρακος τὸ σημεῖον Δ μὲ τὸ σημεῖον Γ καὶ οὕτω τὸ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον εἶναι σχεδιασμένον.

Τὸ σχῆμα εἶναι ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον, διότι αἱ 4 γωνίαι του εἶναι ὀρθαὶ καὶ αἱ ἀντικρυναὶ πλευραί του εἶναι παράλληλοι καὶ ἴσαι μεταξύ των

Ἀσκήσεις:

108. Ἂν αἱ 4 γωνίαι σχήματος εἶναι ὀρθαὶ καὶ αἱ 4 πλευραί του εἶναι ἴσαι, τί σχῆμα εἶναι;

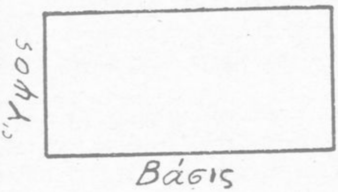
109. Σχεδίασε ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον. Ἡ μία πλευρὰ νὰ ἔχῃ μῆκος 10 πόντους καὶ ἡ ἄλλη 8 πόντους.

110. Σχεδίασε ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον καὶ μέτρησε τὸ μῆκος τῶν πλευρῶν του.

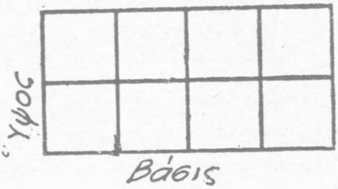
4. ΕΥΡΕΣΙΣ ΤΗΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ ΤΟΥ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΥ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟΥ

Ἔχομεν π.χ. ἓν ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις ἔχει μῆκος 4 πόντ. καὶ τὸ ὕψος του 2 πόντους (εἰκ. 53).

Διὰ νὰ εὕρωμεν πόσοι τετραγωνικοὶ πόντοι εἶναι ἡ ἐπιφάνειά του, κάμνομεν τὸ ἑξῆς:



53



54

Παίρνομεν το ὑποδεκάμετρον καὶ σημειώνομεν τοὺς 4 πόντους ἐπάνω εἰς τὴν βάσιν καὶ τοὺς 2 πόντους ἐπάνω εἰς τὸ ὕψος. Ἀπὸ τὰ σημεῖα,, ποὺ δεικνύουν τοὺς πόντους, σύρομεν παραλλήλους εὐθείας πρὸς τὴν βάσιν καὶ πρὸς τὸ ὕψος.

Κάμνοντες αὐτὸ βλέπομεν ὅτι τὸ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον διαιρεῖται εἰς τετραγωνικοὺς πόντους. Οἱ τετραγωνικοὶ αὐτοὶ πόντοι εἶναι ὅλοι - ὅλοι 8 (εἰκ. 54). Ἡ ἐπιφάνεια λοιπὸν αὐτοῦ τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου εἶναι 8 τετραγωνικοὶ πόντοι.

Ἠμποροῦμεν νὰ εὕρωμεν τὸ 8, χωρὶς νὰ χωρίσωμεν τὴν ἐπιφάνειαν εἰς τετραγωνικοὺς πόντους, ἀλλὰ ἀμέσως μὲ ἕνα πολλαπλασιασμόν. Πολλαπλασιάζομεν τὸ 4 ἐπὶ τὸ 2. Δηλαδὴ $4 \times 2 = 8$.

Τὸ 4 εἶναι ἡ βάσις τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου.

Τὸ 2 εἶναι τὸ ὕψος τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου.

Ἀπὸ αὐτὸ ἐξάγεται τὸ συμπέρασμα ὅτι, διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου, πολλαπλασιάζομεν τὴν βάσιν του ἐπὶ τὸ ὕψος του.

Τὸ ἴδιο εὑρήκαμεν, ὅταν ἐξετάζαμεν τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ τετραγώνου (σελ. 22). Μόνον ὅτι εἰς τὸ τετράγωνον ἡ βάσις καὶ τὸ ὕψος εἶναι ἴσα μεταξύ των.

Ἀσκήσεις:

111. Ἰχνογράφησε ἓν ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον, τὸ ὁποῖον ἔχει πλευρὰς μήκους 7 καὶ 4 πόντους. Χώρισε τὴν ἐπιφάνειάν του εἰς τετραγωνικοὺς πόντους, διὰ νὰ εὕρῃς πόσοι τετραγωνικοὶ πόντοι εἶναι ἡ ἐπιφάνειά του. Πῶς ἄλλως ἠμπορεῖς νὰ εὕρῃς τὸ ἴδιον ἀποτέλεσμα;

112. Μέτρησε πόσον μῆκος ἔχει ἡ μία πλευρὰ τοῦ βιβλίου σου, πόσον μῆκος ἡ ἄλλη καὶ νὰ εὕρῃς πόσοι τετραγωνικοὶ πόντοι εἶναι ἡ ἐπιφάνειά του.

113. Κάμε τὴν ἰδίαν μέτρησιν εἰς ἓν ἀπὸ τὰ τετράδιά σου.

114. Κάμε τὴν ἰδίαν μέτρησιν εἰς ἓν τραπέζιον.

115. Ἕν οἰκόπεδον ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου. Ἡ μία πλευρά του ἔχει μῆκος 15 μέτρα, ἡ ἄλλη 8 μέτρα. Πόσα τετραγωνικὰ μέτρα εἶναι ἡ ἐπιφάνειά του;

116. Ἕν κτῆμα ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου μὲ πλευρὰς 85 καὶ 60 μέτρα. Νὰ εὕρῃς πόσα τετραγωνικὰ μέτρα εἶναι ἡ ἐπιφάνειά του.

117. Νὰ εὕρῃς πόσα τετραγωνικὰ μέτρα ἐπιφάνειαν ἔχει τὸ πάτωμα τῆς τάξεώς σου.

118. Νὰ εὕρῃς πόσα τετραγωνικὰ μέτρα ἐπιφάνειαν ἔχει ἕνας τοῖχος.

119. Διὰ νὰ τυπωθῇ μία εἰκὼν εἰς βιβλίον, πρέπει προηγουμένως νὰ κατασκευασθῇ ἀπὸ τσίγκον. Ὁ τσιγκογράφος παίρνει 0,40 δρχ. διὰ κάθε τετραγωνικὸν πόντον τῆς εἰκόνος. Πόσας δραχμὰς ἐπῆρε διὰ τὴν εἰκόνα 11;

5. ΓΕΝΙΚΑ ΠΕΡΙ ΚΛΙΜΑΚΟΣ

Ὅπως ξεύρομεν, ὁ γεωγραφικὸς χάρτης παριστάνει μίαν χώραν πολὺ μικροτέραν ἀπὸ ὅτι εἶναι.

Τὸ ἴδιον γίνεται εἰς τὸ σχέδιον μιᾶς πόλεως, ἑνὸς κτιρίου, ἑνὸς χωραφιοῦ.

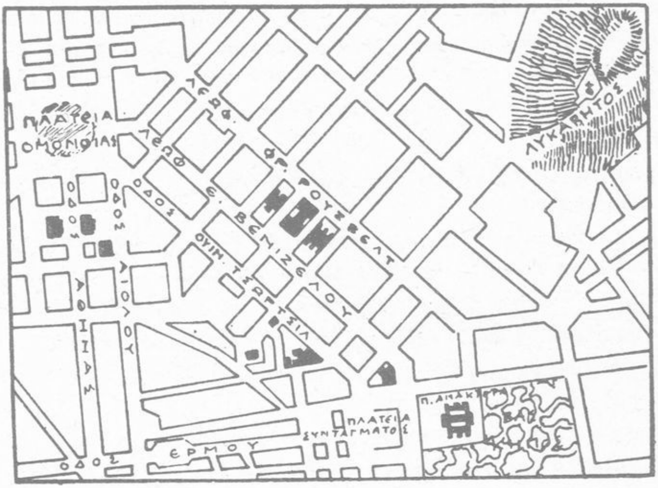
Ἡ εἰκὼν 55 παρουσιάζει τὸν χάρτην ἑνὸς μέρους τῶν Ἀθηνῶν (εἰκ. 55). Φαίνονται εἰς αὐτὸν αἱ βάσεις τῶν κτιρίων καὶ οἱ δρόμοι, διότι τὰ σχεδιάζουν ὅλα, ὡς νὰ τὰ βλέπουν ἀπὸ ἀεροπλάνον.

Ὅταν ἔχωμεν ἕνα χάρτην πρέπει νὰ ξεύρωμεν μία ἀπόστασις ἐπάνω εἰς τὸν χάρτην, μὲ πόσην ἀπόστασιν εἰς τὴν πραγματικότητα ἀντιστοιχεῖ. Αὐτὸ τὸ εὑρίσκομεν ἀπὸ τὴν κλίμακα, ἡ ὁποία εἶναι σημειωμένη ἐπάνω εἰς τὸν χάρτην.

Ἡ κλῖμαξ παριστάνεται μὲ ἕνα κλάσμα. Ὁ ἀριθμητὴς τοῦ κλάσματος δεικνύει ἀπόστασιν ἐπάνω εἰς τὸν χάρτην καὶ ὁ παρανομαστὴς δεικνύει ἡ ἀπόστασις αὐτὴ μὲ πόσην ἀπόστασιν ἀντιστοιχεῖ ἐπάνω εἰς τὴν γῆν.

Π.χ. Ὁ χάρτης τῆς εἰκόνος 55 εἶναι κατασκευασμένος ὑπὸ κλίμακα 1:20.000. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι ἀπόστασις 1 πόντου ἐπάνω εἰς τὸν χάρτην ἀντιστοιχεῖ μὲ ἀπόστασιν ἐπάνω εἰς τὴν γῆν 20.000 πόντων, δηλαδὴ 200 μ.

Ἐπάνω εἰς τὸν χάρτην ἡ λεωφόρος Ἐλ. Βενιζέλου ἔχει μῆκος 5 πόντ. Ἐπειδὴ 1 πόντος ἀντιστοιχεῖ μὲ ἀπόστασιν 200 μέτρων, οἱ 5 πόντοι παριστάνουν ἀπόστασιν 200 × 5 = 1000 μέτρων. Τόσον μῆκος ἔχει εἰς τὴν πραγματικότητα ἡ λεωφόρος Ἐλ. Βενιζέλου.



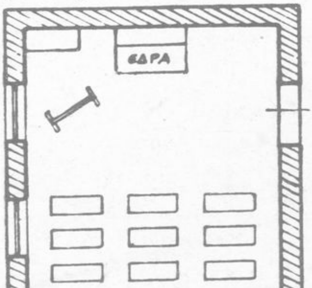
55

Σχέδιον τῆς αἰθούσης διδασκαλίας (εἰκ. 56). Διὰ νὰ κάμωμεν σχέδιον τῆς αἰθούσης διδασκαλίας, θέτομεν ἓν χαρτὶ ἐπάνω εἰς ἐπίπεδον σανίδα καὶ τοποθετοῦμεν τὴν σανίδα ὁριζοντίως μέσα εἰς τὴν αἴθουσαν.

Μετροῦμεν μὲ μέτρον πόσαι εἶναι αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ τὸν ἕνα τοῖχον εἰς τὸν ἄλλον. Π.χ. ἡ μία ἀπόστασις εἶναι 5,5 μέτρα καὶ ἡ ἄλλη 3,5 μέτρα.

Ἂς πάρωμεν κλίμακα 1:100. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι ἀπόστασις ἐπάνω εἰς τὸν χάρτην 1 πόντου θὰ παριστάνῃ ἀπόστασιν 100 πόντων, δηλαδὴ 1 μέτρον.

56



ΚΛΙΜΑΞ 1:100

Ἡ ἀπόστασις λοιπὸν τῶν 5,5 μέτρων θὰ παρασταθῇ μὲ **ἀπόστασιν 5,5** πόντων καὶ ἡ ἄλλη ἀπόστασις τῶν 3,5 μέτρων θὰ παρασταθῇ μὲ **ἀπόστασιν** 3,5 πόντων.

Τὸ σχῆμα τῆς αἰθούσης εἶναι ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον.

Σχεδιάζομεν τοὺς τοίχους εἰς τὸ σχέδιον, ὥστε νὰ εἶναι **παράλληλοι** μὲ τοὺς πραγματικοὺς καὶ δίδομεν εἰς τὸν ἕνα μῆκος **5,5 πόντων καὶ εἰς τὸν** ἄλλον 3,5 πόντων.

Οὕτω γίνεται ἡ περίμετρος τοῦ **σχεδίου τῆς αἰθούσης διδασκαλίας**.

Σχεδιάζομεν ἔπειτα τὰ παράθυρα. **Βλέπομεν ὅτι ὑπάρχουν 3 παράθυρα, ἕκαστον πλάτους 1 μέτρου. Ὥστε εἰς τὸ σχέδιόν μας ἕκαστον παράθυρον θὰ ἔχῃ πλάτος 1 πόντον.** Τὰ σχεδιάζομεν ἐκεῖ, ὅπου πρέπει.

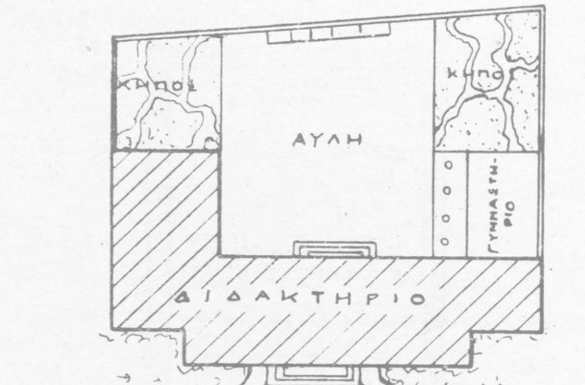
Εἰς τὸν ἀπέναντι τοῖχον ὑπάρχει πόρτα πλάτους ἐπίσης 1 μέτρου. Σχεδιάζομεν καὶ αὐτὴν ἐκεῖ ὅπου πρέπει.

Ἔπειτα μετροῦμεν τὸ μῆκος ἑκάστου θρανίου, τῆς ἕδρας κλπ. καὶ σχεδιάζομεν καὶ αὐτὰ μὲ τὴν ἰδίαν κλίμακα, εἰς τὴν ἀντίστοιχον θέσιν.

Σ χ έ δ ι ο ν τ ο ῦ σ χ ο λ ε ί ο υ. Ἡ εἰκὼν παριστάνει τὸ σχέδιον ἑνὸς σχολείου (εἰκ. 57).

Διὰ νὰ καταλάβωμεν ἀπὸ αὐτὸ τὰς πραγματικὰς ἀποστάσεις, πρέπει νὰ ἠξεύρωμεν τὴν κλίμακα. Εἶναι γραμμένη κάτω ἀριστερὰ 1:1000. Ὥστε πόντος εἰς τὸ σχέδιον ἀντιστοιχεῖ μὲ 1000 πόντους, δηλαδὴ 10 μέτρα.

Εἰς τὸ σχέδιον τὸ διδακτήριον ἔχει μῆκος 6 πόντους. **Αὐτὸ σημαίνει** ὅτι εἰς τὴν πραγματικότητα τὸ μῆκος του εἶναι $6 \times 10 = 60$ μέτρα.



57

'Α σ κ ή σ ε ι ς:

120. Μέτρησε τὰς ἀποστάσεις ἐπάνω εἰς τὸ σχέδιον τοῦ σχολείου καὶ νὰ εὕρῃς τὰς πραγματικὰς ἀποστάσεις τῆς αὐλῆς, τῶν κήπων, τοῦ γυμναστηρίου. Κλῖμαξ 1 : 1000.

121. Ἔχομεν ἕνα χάρτην μὲ κλίμακα 1 : 100.000. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι 1 πόντος ἐπάνω εἰς τὸν χάρτην ἀντιστοιχεῖ μὲ ἀπόστασιν 1000 μέτρων;

122. Κάμε σχέδιον ἑνὸς οἰκοπέδου, τὸ ὁποῖον ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου, μὲ κλίμακα 1 : 500. Ἡ μία πλευρὰ ἔχει μῆκος 20 μέτρα καὶ ἡ ἄλλη 15 μέτρα.

123. Κάμε σχέδιον τοῦ δωματίου σου μὲ ὁποιανδήποτε κλίμακα θέλεις.

6. ΑΙ ΓΩΝΙΑΙ ΤΟΥ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΥ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΠΙΠΕΔΟΥ

Α ἱ ὀ ρ θ α ὶ γ ω ν ί α ι τ ῆ ς ἐ π ι φ α ν ε ί α ς τ ο ῦ ὀ ρ θ ο γ ω ν ί ο υ π α ρ α λ λ η λ ε π ι π έ δ ο υ. Τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ἔχει ὅπως ξεύρομεν 6 ἕδρας.

Ἡ	1	ἕδρα	ἔχει	4	ὀρθὰς	γωνίας.
Ἡ	2	ἕδρα	ἔχει	4	ὀρθὰς	γωνίας.
Ἡ	3	ἕδρα	ἔχει	4	ὀρθὰς	γωνίας.
Ἡ	4	ἕδρα	ἔχει	4	ὀρθὰς	γωνίας.
Ἡ	5	ἕδρα	ἔχει	4	ὀρθὰς	γωνίας.
Ἡ	6	ἕδρα	ἔχει	4	ὀρθὰς	γωνίας.

Δηλ. ὅλαι αἱ ἕδραι ἔχουν 24 ὀρθὰς γωνίας.

Δ ί ε δ ρ ο ι γ ω ν ί α ι τ ο ῦ ὀ ρ θ ο γ ω ν ί ο υ π α ρ α λ λ η λ ε π ι π έ δ ο υ. Δίεδρος γωνία σχηματίζεται ἀνάμεσα εἰς δύο ἕδρας, ὅταν συναντᾶ ἡ μία τὴν ἄλλην.

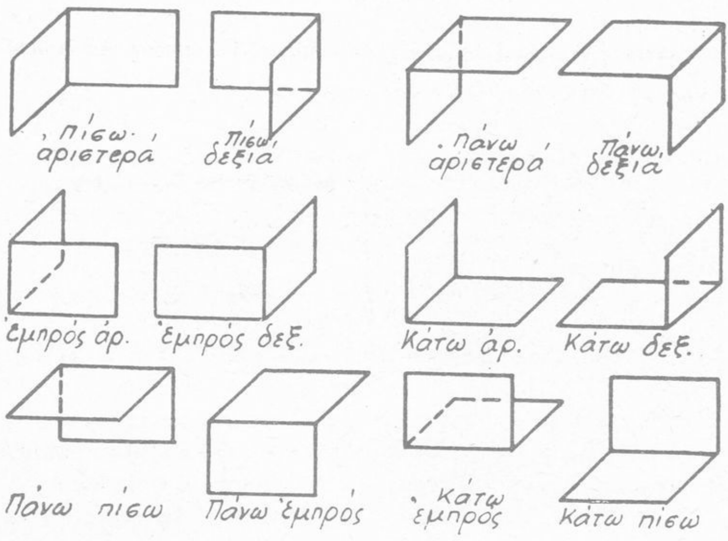
Ὅπως εἴπομεν ἓν βιβλίον ἡμιανοιγμένον δίδει εἰκόνα διέδρου γωνίας.

Λογαριάζοντες εὑρίσκομεν ὅτι αἱ ἕδραι τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου σχηματίζουν 12 διέδρους γωνίας (εἰκ. 58).

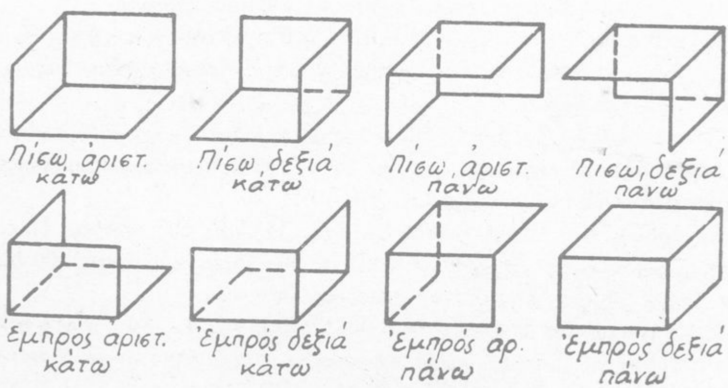
Τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ἔχει 12 διέδρους γωνίας, διότι ἔχει 12 ἀκμάς. Εἰς ἑκάστην ἀκμὴν ἑνώνονται αἱ δύο ἕδραι καὶ ἀποτελοῦν δίεδρον γωνίαν.

Σ τ ε ρ ε α ὶ γ ω ν ί α ι τ ο ῦ ὀ ρ θ ο γ ω ν ί ο υ π α ρ α λ λ η λ ε π ι π έ δ ο υ. Στερεὰ γωνία σχηματίζεται ἐκεῖ ὅπου συναντῶνται τρεῖς ἕδραι, δηλαδὴ εἰς τὴν κορυφήν.

Ἐπειδὴ τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ἔχει 8 κορυφάς, ἔχει καὶ 8 στερεὰς γωνίας (εἰκ. 59).


πίσω αριστερά
πίσω δεξιά
πάνω αριστερά
πάνω δεξιά
Έμπρός άρ.
Έμπρός δεξ.
Κάτω άρ.
Κάτω δεξ.
Πάνω πίσω
Πάνω έμπρός
Κάτω έμπρός
Κάτω πίσω

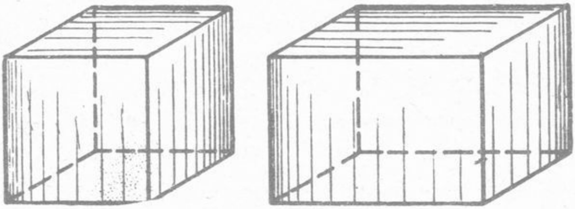
58


Πίσω αριστ. κάτω
Πίσω δεξιά κάτω
Πίσω, αριστ. πάνω
Πίσω, δεξιά πάνω
Έμπρός αριστ. κάτω
Έμπρός δεξιά κάτω
Έμπρός άρ. πάνω
Έμπρός δεξιά πάνω

59

7. ΣΥΓΚΡΙΣΙΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΥ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΠΙΠΕΔΟΥ ΚΑΙ ΚΥΒΟΥ

Συγκρίνομεν ἓν ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον μὲ ἕνα κύβον. Βλέπομεν ..ι ἔχουν ὁμοιότητας, ἀλλὰ καὶ διαφοράς.



60

Κύβος	Ὀρθογ. παραλληλεπίπεδον
	Ὁμοιότητες.
..Ἔχει 6 ἕδρας. Αἱ γωνίαι τῶν ἑδρῶν ..εἶναι ὅλαι ὀρθαί.	Ἔχει 6 ἕδρας. Αἱ γωνίαι τῶν ἑδρῶν εἶναι ὅλαι ὀρθαί.
	Διαφοραί.
Αἱ ἕδραι του εἶναι ..ὅλαι τετράγωνα ἴσα ..μεταξύ των.	Αἱ ἕδραι του εἶναι ὀρθογώνια παραλληλόγραμμα. Ἀπαραίτητον εἶναι αἱ ἀντικρυναὶ ἕδραι νὰ εἶναι ἴσαι μεταξύ των.

Ἀσκήσεις:

Νὰ συμπληρωθοῦν αἱ φράσεις

124. Ὁ κύβος ἔχει... ἀκμὰς καί... διέδρους γωνίας:

125. Τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ἔχει... ἀκμὰς καί... διέδρους γωνίας.

126. Ὁ κύβος ἔχει.... κορυφὰς καί.... στερεὰς γωνίας.

127. Τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ἔχει... κορυφὰς καί... στερεὰς γωνίας.

8. ΕΥΡΕΣΙΣ ΤΗΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ ΤΟΥ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΥ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΠΙΠΕΔΟΥ

Διὰ νὰ εὕρωμεν πόσην ἐπιφάνειαν ἔχει ἓν ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδο πρέπει νὰ προσθέσωμεν τὰς ἐπιφανείας τῶν 6 ἑδρῶν του.

Δὲν εἶναι ἀνάγκη νὰ εὕρωμεν τὴν ἐπιφάνειαν κάθε ἕδρας χωριστ διότι ἠξεύρομεν ὅτι αἱ ἀντικρυναὶ ἕδραι εἶναι ἴσαι.

Ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὴν ἐπιφάνειαν τῶν τριῶν ἑδρῶν ποὺ σχηματίζο μίαν στερεὰν γωνίαν. Π.χ. ἂν μία ἕδρα ἔχῃ μῆκος 10 πόντους καὶ ὕψος πόντους, τότε ἡ ἐπιφάνειά της εἶναι 10 × 5 = 50 τετρ. πόντοι. Καὶ μα μὲ τὴν ἀπέναντι ἕδραν ἔχουν ἐπιφάνειαν 50 × 2 = 100 τετραγωνικοὺς πό τους.

Ἂν ἡ ἄλλη ἕδρα ἔχῃ μῆκος 10 πόντους καὶ ὕψος 4 ποντ., τότε ἡ ἐπ φάνειά της εἶναι 10 × 4 = 40 τετρ. πόντοι καὶ μαζὶ μὲ τὴν ἀπέναντί τ ἔχουν ἐπιφάνειαν 40 × 2 = 80 τετρ. πόντους.

Ἂν ἡ ἄλλη ἕδρα ἔχῃ μῆκος 5 πόντ. καὶ ὕψος 4 πόντ., τότε ἡ ἐπιφάνει τῆς ἕδρας αὐτῆς εἶναι 5 × 4 = 20 τετρ. πόντοι. Καὶ μαζὶ μὲ τὴν ἀπέναν της ἔχουν ἐπιφάνειαν 20 × 2 = 40 τετρ. πόντους.

Προσθέτομεν τώρα ὅλας τὰς ἐπιφανείας: 100 τ.π. + 80 τ.π. + 40 τ. = 220 τετραγ. πόντοι εἶναι ὅλη ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ τοῦ ὀρθογωνίου παρα ληλεπιπέδου.

Μὲ τὸν ἴδιον τρόπον θὰ ἐργασθῶμεν διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ἐπιφάνεια ὁποιουδήποτε ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου.

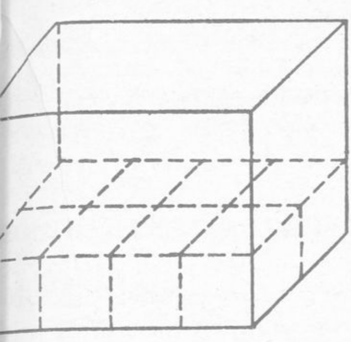
Ἀ σ κ ή σ ε ι ς:

129. Πόσαι ἕδραι ἀποτελοῦν δίεδρον γωνίαν;
130. Πόσαι ἕδραι σχηματίζουν μίαν στερεὰν γωνίαν;

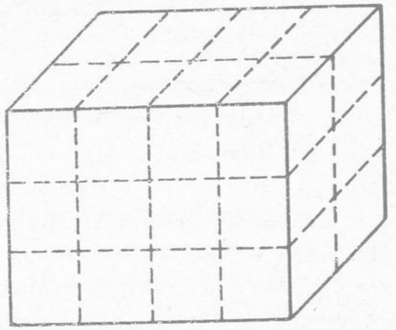
9. ΕΥΡΕΣΙΣ ΤΟΥ ΟΓΚΟΥ ΤΟΥ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΥ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΠΙΠΕΔΟΥ

Ἔχομεν ἓν ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον, τὸ ὁποῖον ἔχει ἀκμὰς μή κους τὴν μίαν 4 πόντων, τὴν ἄλλην 2 πόντων καὶ τὴν ἄλλην 3 πόντων. Τὸ θέ τομεν ἐπάνω εἰς τὸ τραπέζι, ὥστε νὰ στηρίζεται εἰς τὴν ἕδραν του, ἡ ὁποία ἔχει ἐπιφάνειαν 4 × 2 = 8 τετραγ. πόντους.

Ὅπως βλέπομεν, εἰς τὴν ἕδραν του, ἡ ὁποία ἔχει ἐπιφάνειαν 8 τετρα γωνικοὺς πόντους, ἠμποροῦμεν νὰ στηρίξωμεν 8 κυβικοὺς πόντους. Οἱ ὀκτὼ αὐ τοὶ κυβικοὶ πόντοι ἀποτελοῦν μίαν στρῶσιν (εἰκ. 61).



61



62

Τοιαῦται στρώσεις ἠμποροῦν νὰ χωρέσουν εἰς τὸ παραλληλεπίπεδον αὐτὸ 3. Ὥστε τὸ παραλληλεπίπεδον αὐτὸ χωρεῖ $8 \times 3 = 24$ κυβικοὺς πόντους.

Ὁ ὄγκος δηλαδὴ αὐτοῦ τοῦ παραλληλεπιπέδου, εἶναι 24 κυβικοὶ πόντοι (εἰκ. 62).

Προσέξατε τώρα πῶς ἄλλως ἠμποροῦμεν νὰ εὕρωμεν τὸ 24.

Εἰς τὸ παραλληλεπίπεδον αὐτὸ ἂς ὀνομάσωμεν βάσιν τὴν ἕδραν ἐπάνω εἰς τὴν ὁποίαν στηρίζεται. Αὐτὴν δηλ. ἡ ὁποία ἔχει ἐπιφάνειαν 8 τετραγωνικοὺς πόντους. Τότε τὸ ὕψος τοῦ παραλληλεπιπέδου θὰ εἶναι ἡ ἀκμή, ἡ ὁποία ἔχει μῆκος 3 πόντους. Ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὴν βάσιν 8 τετρ. π. ἐπὶ τὸ ὕψος 3, εὑρίσκομεν 24 τετρ. π., ὅσο εὑρήκαμε προηγουμένως ὅτι εἶναι ὁ ὄγκος αὐτοῦ τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου.

Ἀπὸ αὐτὰ συμπεραίνομεν ὅτι ἠμποροῦμεν νὰ εὑρίσκωμεν τὸν ὄγκον ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, πολλαπλασιάζοντες (προσέξετε) τὴν ἐπιφάνειαν τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος του.

Τὸν ὄγκον τοῦ κύβου, ὅπως εἴδομεν (σελ. 26) εὑρίσκομεν κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον, δηλαδὴ πολλαπλασιάζομεν τὴν ἐπιφάνειαν τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος του.

Π ρ ο σ ο χ ή. Ὅταν πολλαπλασιάζωμεν τετραγωνικοὺς πόντους ἐπὶ πόντους μήκους, εὑρίσκομεν κυβικοὺς πόντους.

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς

131. Ἔχομεν ἓν ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον, τοῦ ὁποίου αἱ ἀκμαὶ ἔχουν μῆκος: ἡ μία 20 πόντ., ἡ ἄλλη 10 πόντ. καὶ ἡ ἄλλη 8 πόντους. Τὸ θέτομεν ἐπάνω εἰς τὸ τραπέζι, ὥστε νὰ στηρίζεται ἐπὶ τῆς ἕδρας του, ἡ ὁποία ἔχει ἐπιφάνειαν $20 \times 10 = 200$ τετρ. πόντους.

Πόσοι κυβικοὶ πόντοι ἀποτελοῦν μίαν στρῶσιν;

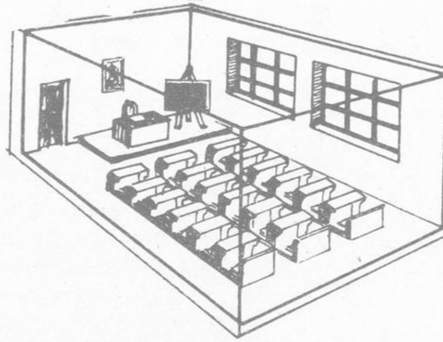
Πόσαι τοιαῦται στρώσεις ἠμποροῦν νὰ χωρέσουν εἰς τὸ παραλληλεπ-πεδον αὐτό;

Πόσους κυβικοὺς πόντους ὄγκον ἔχει αὐτὸ τὸ παραλληλεπίπεδον;

132. Πῶς ἄλλως ἠμποροῦμεν νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον αὐτοῦ τοῦ παρα-ληλεπιπέδου;

10. ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΑ ΣΧΗΜΑΤΟΣ ΟΡΘΟΓ. ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΠΙΠΕΔΟ

Πολλὰ πράγματα ἔχουν σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου. Π.χ. ἡ ξ-λίνη κασετίνα διὰ τὰ μολύβια, ἓν τοῦβλον, ὁ ντενεκὲς πετρελαίου, κιβώτιον δ-ἐμπορεύματα κλπ. Καὶ ἡ αἴθουσα διδασκαλίας ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παρα-ληλεπιπέδου (εἰκ. 66).



63

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς:

133. Ὅταν εὑρίσκεσαι μέσα εἰς ἓν δωμάτιον, πόσας διέδρους γωνία-βλέπεις νὰ σχηματίζουν οἱ 4 τοῖχοι;

134. Πόσας διέδρους γωνίας βλέπεις πλησίον εἰς τὸ ταβάνι;

135. Πόσας διέδρους γωνίας βλέπεις πλησίον εἰς τὸ πάτωμα;

136. Πόσας στερεὰς γωνίας βλέπεις πλησίον εἰς τὸ ταβάνι;

137. Πόσας στερεὰς γωνίας βλέπεις πλησίον εἰς τὸ πάτωμα;

138. Τί σχῆμα ἔχει μία βιβλιοθήκη;

139. Πότε ἓν δωμάτιον ἔχει σχῆμα κύβου καὶ πότε ἔχει σχῆμα ὀρθο-γωνίου παραλληλεπιπέδου;

140. Ἡ ἐπιφάνεια ἑνὸς τοίχου εἶναι ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον. Ἡ μία πλευρά του ἔχει μῆκος 5 μέτρα καὶ ἡ ἄλλη 4. Πόσα τετραγωνικὰ μέτρα εἶναι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ τοίχου;

141. Πρόκειται νὰ ἀσβεστωθοῦν οἱ 4 τοῖχοι μιᾶς αἰθούσης καὶ ὁ μάστορας ζητεῖ 2 δραχμὰς τὸ τετραγωνικὸν μέτρον.

Ὁ εἷς τοῖχος ἔχει μῆκος 12 μέτρα καὶ ὕψος 5 μέτρα. Εἰς τὸν τοῖχον αὐτὸν ὑπάρχουν δύο πόρτες μὲ ἐπιφάνειαν 2 τετραγωνικὰ μέτρα ἑκάστη.

Ὁ ἀπέναντι τοῖχος ἔχει 4 παράθυρα μὲ ἐπιφάνειαν 1,5 τετραγωνικὸν μέτρον ἕκαστον.

Ἕκαστος ἀπὸ τοὺς δύο ἄλλους τοίχους ἔχει μῆκος 8 μέτρα καὶ ὕψος 5 μέτρα.

Ὑπολόγισε πόσον θὰ κοστίσῃ τὸ ἀσβέστωμα.

142 Ὑπολόγισε πόσον θὰ κοστίσῃ τὸ ἀσβέστωμα τῆς τάξεώς σου. α) Ἂν ἀσβεστωθοῦν μόνον οἱ τοῖχοι. Τὰ κουφώματα (πόρτες, παράθυρα) θὰ ἀφαιρεθοῦν ἀπὸ τὸν λογαριασμόν. β) Ἂν ἀσβεστωθῇ καὶ τὸ ταβάνι.

143. Πρόκειται νὰ ἐπενδύσωμεν μὲ λαμαρίναν, τὸ ἐσωτερικὸν ἑνὸς ξυλίνου κιβωτίου, τὸ ὁποῖον ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου. Αἱ ἀκμαὶ εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ κιβωτίου ἔχουν μῆκος 120 πόντ. ἡ μία, 80 πόντους ἡ ἄλλη καὶ 50 πόντους ἡ τρίτη. Πόσους τετραγωνικοὺς πόντους ἐπιφάνειαν πρέπει νὰ ἔχῃ ἡ λαμαρίνα;

144. Πρόκειται νὰ κατασκευάσουν ἓν τεπόζιτο ἀπὸ λαμαρίναν. Θὰ ἔχῃ σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου. Ἡ μία ἀκμή του θὰ ἔχῃ μῆκος 90 πόντους, ἡ ἄλλη 70 πόντους καὶ ἡ τρίτη 60 πόντους. Νὰ ὑπολογισθῇ: 1) Πόσην ἐπιφάνειαν θὰ ἔχῃ κάθε μία ἀπὸ τὰς ἕδρας του. 2) Πόσους τετραγωνικοὺς πόντους ἐπιφάνειαν πρέπει νὰ ἔχῃ ἡ λαμαρίνα.

145. Ἡ ἀκμὴ κύβου ἔχει μῆκος 3 μέτρα. Νὰ ὑπολογισθῇ πόση εἶναι ὁλόκληρος ἡ ἐπιφάνειά του.

146. Ὁ πυθμὴν μιᾶς δεξαμενῆς εἶναι τετράγωνος καὶ ἔχει πλευρὰν 8 μέτρα. Τὸ βάθος της εἶναι 4 μέτρα. Νὰ ὑπολογισθῇ: 1) Πόσα κυβικὰ μέτρα χωρεῖ μία στρῶσις εἰς τὸν πυθμένα. 2) Πόσα κυβικὰ μέτρα ἠμποροῦν νὰ χωρέσουν εἰς ὁλόκληρον τὴν δεξαμενήν. 3) Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος της.

147. Πόσον ἔπρεπε νὰ εἶναι τὸ βάθος τῆς δεξαμενῆς αὐτῆς, διὰ νὰ ἔχῃ σχῆμα κύβου;

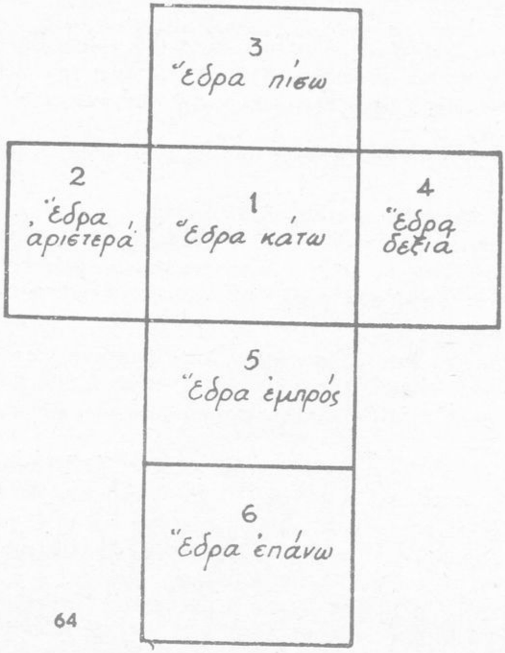
148. Πόσα κυβικὰ μέτρα ἀέρος περιέχει ἓν δωμάτιον, τοῦ ὁποίου τὸ πάτωμα ἔχει μίαν πλευρὰν μήκους 5 μέτρων, ἄλλην πλευρὰν μήκους 4 μέτρων καὶ τὸ ὕψος τοῦ δωματίου εἶναι 4 μέτρα;

Κατασκευὴ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου (εἰκ. 64). Διὰ νὰ κάμωμεν ἀπὸ χαρτόνι ἓν ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον, σχεδιάζομεν ἐπάνω εἰς χαρτόνι ἓν ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον, (τὸ 1). Μὲ βάσιν κάθε φοράν, τὴν μίαν ἀπὸ τὰς 4 πλευράς του σχεδιάζομεν τέσσαρα ἄλλα ὀρθογώνια παραλληλόγραμμα, ὅλα νὰ ἔχουν τὸ ἴδιον ὕψος (τὰ ὀρθογώνια παραλληλόγραμμα 2, 3, 4, 5).

Εἰς τὴν ἄκραν τοῦ ἑνὸς σχεδιάζομεν ἄλλο ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον (τὸ 6) ἴσον μὲ ἐκεῖνον ποὺ ἐσχεδιάσαμεν εἰς τὴν ἀρχήν.

Οὕτω ἔχομεν τὰς 6 ἕδρας τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου.

Διπλώνομεν τὸ χαρτόνι ἀκριβῶς εἰς τὰς πλευρὰς καὶ κολλῶμεν τὰς ἄκρας του.



64

Ἀσκήσεις

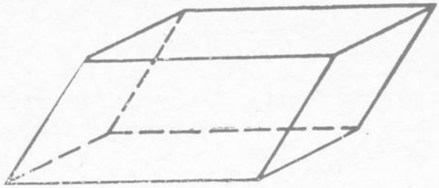
149. Ἰχνογράφησε ἓν ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον.
150. Κατασκεύασε ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ἀπὸ χαρτόνι.
151. Κατασκεύασε μὲ σύρμα ὀρθογώνια παραλληλόγραμμα καὶ σύνδεσέ τα, ὥστε νὰ γίνῃ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον.
152. Κατασκεύασε ἀπὸ σανίδι τὰς 6 ἕδρας ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου καὶ κάρφωσέ τας, ὥστε νὰ ἔχῃς ὀρθογ. παραλληλεπίπεδον.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ

ΠΛΑΓΙΟΝ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΠΙΠΕΔΟΝ

1. ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ — ΕΔΡΑΙ — ΑΚΜΑΙ — ΚΟΡΥΦΑΙ

Ἡ εἰκὼν (εἰκ. 65) δεικνύει πλάγιον παραλληλεπίπεδον.



65

Τὸ ἐξωτερικὸν μέρος του εἶναι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου.

Ἕ δ ρ α ι – Ἀ κ μ α ὶ – Κ ο ρ υ φ α ί. Ἡ ἐπιφάνειά του ἀποτελεῖται ἀπὸ 6 ἐπιπέδους ἕδρας.

Ἑκάστη ἕδρα συναντᾶ ἄλλας ἕδρας. Ἐκεῖ ὅπου μία ἕδρα συναντᾶ ἄλλην ἕδραν, σχηματίζονται ε ὐ θ ε ῖ α ι γ ρ α μ μ α ί.

Αὐταὶ εἶναι αἱ ἀκμαί.

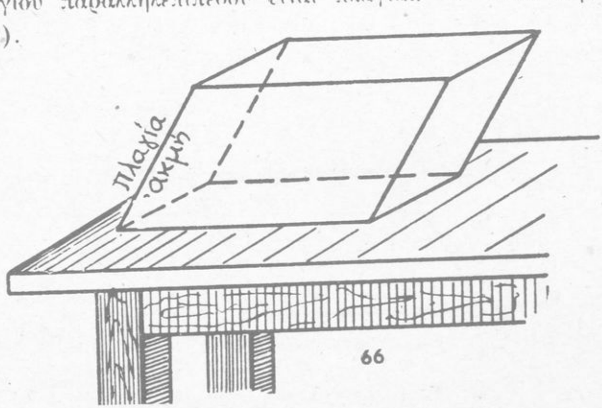
Μετρῶντες εὑρίσκομεν ὅτι τὸ πλάγιον παραλληλεπίπεδον ἔχει 4 ἀκμὰς ἐπάνω, 4 κάτω καὶ 4 εἰς τὰ πλάγια. Δηλαδὴ ὅλαι αἱ ἀκμαί του εἶναι $4 + 4 + 4 = 12$.

Ἐκεῖ, ὅπου συναντῶνται τρεῖς ἀκμαί, σχηματίζεται κορυφή. Μετρῶντες τὰς κορυφὰς εὑρίσκομεν ὅτι ἔχει 4 κορυφὰς ἐπάνω καὶ 4 κορυφὰς κάτω. Δηλαδὴ τὸ πλάγιον παραλληλεπίπεδον ἔχει ὅλας - ὅλας 8 κορυφάς.

Θ έ σ ι ς τ ῶ ν ἀ κ μ ῶ ν. Ὅπως ἔχομεν τὸ πλάγιον παραλληλεπίπεδον ἐπάνω εἰς τὸ τραπέζιον, βλέπομεν ὅτι αἱ ἀκμαί του ἔχουν θέσιν ὁριζοντίαν (ὅπως εἶναι ὁριζοντία ἡ ἐπιφάνεια τοῦ τραπεζίου).

Αἱ ἐπάνω ἀκμαί του εἶναι ἐπίσης ὁριζόντιαι.

Αἱ πλαγιναὶ ἀκμαί του δὲν εἶναι κατακόρυφοι, ὅπως εἶναι αἱ πλαγιναὶ ἀκμαὶ τοῦ κύβου καὶ τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου. Αἱ πλαγιναὶ ἀκμαὶ τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου εἶναι πλάγιαι. Δι' αὐτὸ λέγεται «πλάγιον» (εἰκ. 66).



66

Ἀσκήσεις:

153. Τί δίδει τὴν ὀνομασίαν εἰς τὸ πλάγιον παραλληλεπίπεδον;
154. Τί λέγεται ἐπιφάνεια τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου;
155. Μέτρησε ἀπὸ πόσας ἕδρας ἀποτελεῖται ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου
156. Μέτρησε πόσας ἀκμὰς καὶ πόσας κορυφὰς ἔχει ἓν πλάγιον παραλληλεπίπεδον.

Σχέσις τῶν ἑδρῶν. Ὅπως βλέπομεν, τὸ πλάγιον παραλληλεπίπεδον ἔχει τὰς ἀντικρυνὰς ἕδρας παραλλήλους.

Θέτομεν εἰς τὴν ἐπάνω ἕδραν τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου χαρτὶ καὶ τὸ κόβομεν εἰς τὸ μέγεθος αὐτῆς τῆς ἕδρας. Τὸ κομμένο αὐτὸ χαρτὶ ἐφαρμόζει εἰς τὴν κάτω ἕδραν, ἡ ὁποία εἶναι παράλληλός της.

Κάμνομεν τὸ ἴδιον εἰς τὰς πλαγινὰς ἕδρας. Βλέπομεν ὅτι καὶ ἀπὸ τὰς πλαγινὰς ἕδρας ἴσον μέγεθος ἔχουν αἱ παράλληλοι μεταξύ των.

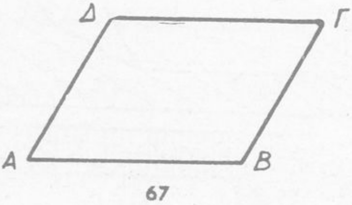
Ὥστε αἱ ἀντικρυναὶ ἕδραι τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι.

Σχῆμα τῶν ἑδρῶν. Αἱ ἕδραι τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου δὲν ἔχουν σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου, διότι η μία πλευρὰ ἑκάστης ἕδρας μὲ τὴν ἄλλην πλευρὰν δὲν σχηματίζει γωνίαν ὀρθήν.

Τὸ σχῆμα, τὸ ὁποῖον ἔχουν αἱ ἕδραι τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου, λέγεται πλάγιον παραλληλόγραμμον.

2. ΠΛΕΥΡΑΙ ΚΑΙ ΓΩΝΙΑΙ ΤΟΥ ΠΛΑΓΙΟΥ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟΥ

Πλευραὶ τοῦ πλαγίου παραλληλογράμμου καὶ σχέσις αὐτῶν. Ἂς ἐξετάσωμεν ἓν πλάγιον παραλληλόγραμμον (εἰκ. 67).



67

Μετρῶντες τὸ μῆκος τῶν πλευρῶν εὑρίσκομεν:

α) Ὅτι ἡ πλευρὰ Α Β εἶναι ἴση μὲ τὴν πλευρὰν Δ Γ.

β) Ὅτι ἡ πλευρὰ Α Δ εἶναι ἴση μὲ τὴν πλευρὰν Β Γ.

Βλέπομεν ἀκόμη ὅτι:

α) Ἡ πλευρὰ Α Β εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν πλευρὰν Δ Γ.

β) Ἡ πλευρὰ Α Δ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν πλευρὰν Β Γ.

Δηλαδὴ εὑρίσκομεν ὅτι αἱ ἀντικρυναὶ πλευραὶ τοῦ πλαγίου παραλληλογράμμου εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι.

Π λ α γ ί α   ε ὐ θ ε ῖ α. Ἡ εὐθεῖα Α Δ εἶναι πλαγία ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν Α Β. Λέγομεν ὅτι εἶναι πλαγία, διότι τὴν τέμνει καὶ δὲν εἶναι κάθετος πρὸς αὐτήν.

Γ ω ν ί α ι   τ ο ῦ   π λ α γ ί ο υ   π α ρ α λ λ η λ ο γ ρ ά μ μ ο υ   κ α ὶ   σ χ έ σ ι ς   α ὐ τ ῶ ν. Κόπτομεν τὴν γωνίαν Α καὶ τὴν τοποθετοῦμεν ἐπάνω εἰς τὴν γωνίαν Γ. Βλέπομεν ὅτι αἱ πλευραί των ἐφαρμόζουν ἀκριβῶς. Ἀπὸ αὐτὸ καταλαμβάνομεν ὅτι αἱ γωνίαι Α καὶ Γ εἶναι ἴσαι μεταξύ των.

Ἂν κόψωμεν τὴν γωνίαν Β καὶ τὴν τοποθετήσωμεν ἐπάνω εἰς τὴν γωνίαν Δ, βλέπομεν ἐπίσης ὅτι αἱ γωνίαι Β καὶ Δ εἶναι ἴσαι.

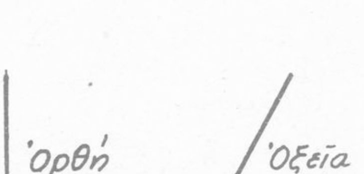
Τὸ πλάγιον λοιπὸν παραλληλόγραμμον:

α) Ἔχει τὴν γωνίαν Α ἴσην μὲ τὴν ἀπέναντί της γωνίαν Γ.

β) Ἔχει τὴν γωνίαν Β ἴσην μὲ τὴν ἀπέναντί της γωνίαν Δ.

Ὀ ξ ε ῖ α   γ ω ν ί α. Γωνία ὡς ἡ Α λέγεται ὀξεῖα γωνία. Μία γωνία λέγεται ὀξεῖα, ὅταν εἶναι μικροτέρα ἀπὸ τὴν ὀρθὴν γωνίαν (εἰκ. 68).

Εἰς τὴν εἰκόνα 67 ὀξεῖαι γωνίαι εἶναι ἡ γωνία Α καὶ ἡ γωνία Γ.



68

Ἀ μ β λ ε ῖ α   γ ω ν ί α. Μία γωνία ὡς ἡ Β εἰς τὴν εἰκόνα 67 εἶναι ἀμβλεῖα γωνία. Μία γωνία λέγεται ἀμβλεῖα, ὅταν εἶναι μεγαλυτέρα ἀπὸ τὴν ὀρθὴν γωνίαν (εἰκ. 69).

69

3. ΤΟ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟΝ

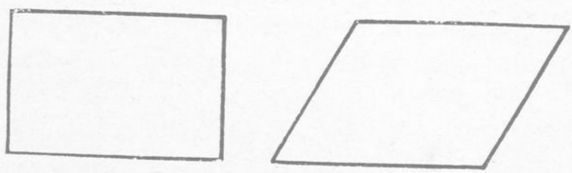
Παραλληλόγραμμον εἶναι τὸ σχῆμα, τὸ ὁποῖον ἔχει 4 πλευρὰς καί:

α) αἱ ἀντικρυναὶ πλευραί του εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι.

β) αἱ ἀντικρυναὶ γωνίαι του εἶναι ἴσαι.

Ἂν αἱ 4 γωνίαι του εἶναι ὀρθαί, λέγεται ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον.

Ἂν αἱ 2 γωνίαι του εἶναι ὀξεῖαι καὶ αἱ ἄλλαι ἀμβλεῖαι, λέγεται πλάγιον παραλληλόγραμμον.



70

Ὀρθογ. παρ/λόγραμμον Πλάγ. παρ/λόγραμμον

Ὁμοιότητες:

Ἔχει 4 πλευράς.
Ἔχει 4 γωνίας.

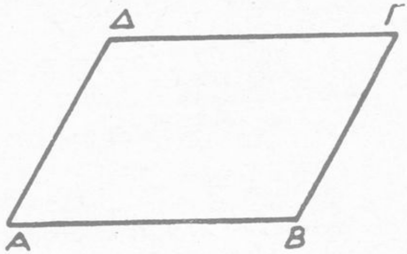
Ἔχει 4 πλευράς.
Ἔχει 4 γωνίας.

Διαφοραί:

Ὅλαι αἱ γωνίαι του εἶναι ὀρθαί.

Αἱ γωνίαι του δὲν εἶναι ὀρθαί.
Αἱ 2 ἀντικρυναὶ εἶναι ὀξεῖαι.
Αἱ 2 ἄλλαι ἀντικρυναὶ εἶναι ἀμβλεῖαι.

Κ α τ α σ κ ε υ ὴ π λ α γ ί ο υ π α ρ α λ λ η λ ο γ ρ ά μ μ ο υ. Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν πλάγιον παραλληλόγραμμον, γράφομεν μίαν εὐθεῖαν, τὴν Α Β. Ἔχει μῆκος π.χ. 4 πόντους. Εἰκὼν 71



71

Ἀπὸ τὸ σημεῖον Α φέρω μίαν εὐθεῖαν Α Δ, ὥστε νὰ σχηματισθῇ ἀνάμεσα εἰς τὰς εὐθείας Α Β καὶ Α Δ γωνία ὀξεῖα.

Ἀπὸ τὸ σημεῖον Β φέρω μίαν ἄλλην εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὴν εὐθεῖαν Α Δ. Τοιαύτη εὐθεῖα εἶναι ἡ Β Γ.

Μετρῶ ἐπάνω εἰς τὴν εὐθεῖαν Α Δ καὶ ἐπάνω εἰς τὴν εὐθεῖαν Β Γ τὸ ἴδιον μῆκος, π.χ. 3 πόντους. Οὕτω ὁρίζω ποῦ εἶναι ἀκριβῶς τὸ σημεῖον Γ καὶ τὸ σημεῖον Δ.

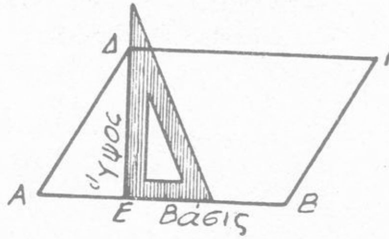
Ἑνώνω τὸ σημεῖον Δ μὲ τὸ σημεῖον Γ. Μετρῶντες τὴν Δ Γ εὑρίσκομεν ὅτι ἔχει μῆκος, ὅσον ἡ Α Β (δηλαδὴ 4 πόντους). Αἱ εὐθεῖαι Α Β καὶ Δ Γ εἶναι παράλληλοι μεταξύ των.

Τὸ σχῆμα Α Β Γ Δ, τὸ ὁποῖον ἐσχηματίσθη, εἶναι πλάγιον παραλληλόγραμμον.

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς:

157. Σχεδίασε ἓν πλάγιον παραλληλόγραμμον.
158. Σημείωσε ποῖαι γωνίαι του εἶναι ὀξεῖαι καὶ ἴσαι.
159. Σημείωσε ποῖαι γωνίαι του εἶναι ἀμβλεῖαι καὶ ἴσαι.
160. Σημείωσε ποῖαι πλευραί του εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι.
161. Ποία γωνία λέγεται ὀξεῖα καὶ ποία ἀμβλεῖα;
162. Ὅταν τὸ ὡρολόγιον δεικνύῃ 9 καὶ 5, τί γωνία σχηματίζεται ἀνάμεσα εἰς τοὺς δείκτας του; Ὅταν δεικνύῃ 12 καὶ 5, τί γωνία σχηματίζεται;

Β ά σ ι ς κ α ὶ ὕ ψ ο ς π λ α γ ί ο υ π α ρ α λ λ η λ ο γ ρ ά μ μ ο υ. Ὡς βάσιν τοῦ πλαγίου παραλληλογράμμου ἠμποροῦμεν νὰ θεωρήσωμεν μίαν ἀπὸ τὰς πλευράς του. Π.χ. ἠμποροῦμεν νὰ θεωρήσωμεν τὴν πλευράν του Α Β.



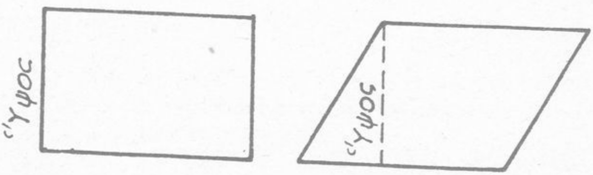
72

Ὡς ὕψος ὅμως δὲν ἠμποροῦμεν νὰ θεωρήσωμεν τὴν ἄλλην πλευράν του Α Δ. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ὕψος του φέρομεν μὲ τὸν γνώμονα ἀπὸ τὴν κορυφὴν Δ εὐθεῖαν κάθετον πρὸς τὴν βάσιν. Ἡ κάθετος αὐτὴ Δ Ε εἶναι τὸ ὕψος τοῦ πλαγίου παραλληλογράμμου.

Εὕρεσις τῆς ἐπιφανείας τοῦ πλαγίου παραλληλογράμμου. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ἐπιφάνειαν ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου, ὅπως ξεύρομεν (σελ. 41), πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὴν βάσιν του ἐπὶ τὸ ὕψος του.

Τὸ ἴδιον πρέπει νὰ κάμνωμεν καὶ ὅταν τὸ παραλληλόγραμμον εἶναι πλάγιον.

Ὅταν π.χ. ἡ βάσις ἑνὸς πλαγίου παραλληλογράμμου ἔχη μῆκος 3 πόντους καὶ τὸ ὕψος του ἔχη μῆκος 2 πόντους, ἡ ἐπιφάνειά του εἶναι $3 \times 2 = 6$ τετραγωνικοὶ πόντοι.



73

Προσέξατε. Εἰς τὸ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον ὕψος εἶναι μία πλευρά του. Εἰς τὸ πλάγιον παραλληλόγραμμον ὕψος δὲν εἶναι ἡ πλευρά του.

Ἀσκήσεις:

163. Κατασκεύασε ἀπὸ χαρτόνι ἓν πλάγιον παραλληλόγραμμον. Νὰ εὕρῃς πόσους πόντους μῆκος ἔχει ἡ βάσις του καὶ πόσους ἔχει τὸ ὕψος του. Ὑπολόγισε πόσοι τετραγωνικοὶ πόντοι εἶναι ἡ ἐπιφάνειά του.

4. ΓΩΝΙΑΙ — ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ — ΒΑΣΙΣ ΤΟΥ ΠΛΑΓΙΟΥ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΠΙΠΕΔΟΥ

Ἀριθμὸς τῶν ὀξειῶν καὶ τῶν ἀμβλειῶν γωνιῶν ἑνὸς πλαγίου παραλληλεπιπέδου. Παίρνομεν ἓν πλάγιον παραλληλεπίπεδον. Ὅλαι αἱ ἕδραι του εἶναι πλάγια παραλληλόγραμμα. Ἑκάστη ἕδρα αὐτοῦ τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου ἔχει, ὅπως βλέπομεν, 2 ὀξείας γωνίας καὶ 2 ἀμβλείας.

Τὸ πλάγιον παραλληλεπίπεδον ἔχει 6 ἕδρας.

Αἱ 6 αὐταὶ ἕδραι ἔχουν 2 × 6 = 12 ὀξείας γωνίας. Αἱ 6 ἴδιαι ἕδραι ἔχουν 2× 6 = 12 ἀμβλείας γωνίας.

Εὕρεσις τῆς ἐπιφανείας πλαγίου παραλληλεπιπέδου. Διὰ νὰ εὕρωμεν πόση εἶναι ἡ ἐπιφάνεια ἑνὸς πλαγίου παραλληλεπιπέδου, πρέπει νὰ προσθέσωμεν τὰς ἐπιφανείας τῶν 6 ἑδρῶν του.

Π.χ. ἡ κάτω ἕδρα ἔχει βάσιν 4 πόντους καὶ ὕψος 2,5 πόντους. Ἡ ἐπιφάνειά της εἶναι 4 × 2,50 = 10 τετραγωνικοὶ πόντοι. Ἄλλην τόσην ἐπιφάνειαν ἔχει ἡ ἀντικρυνὴ μὲ αὐτήν, δηλαδὴ ἡ ἐπάνω ἕδρα. Καὶ αἱ δύο μαζὶ ἔχουν ἐπιφάνειαν 20 τετραγωνικοὺς πόντους.

Τώρα πρέπει νὰ λογαριάσωμεν τὴν ἐπιφάνειαν τῶν ἄλλων ἑδρῶν.

Ἔχομεν ἀκόμη δύο ἕδρας παραλλήλους μεταξύ των καὶ ἄλλας δύο ἐπίσης παραλλήλους.

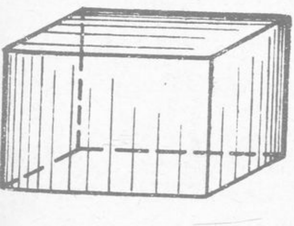
Αἱ δύο πρῶται ἔχουν βάσιν 4 καὶ ὕψος 9.

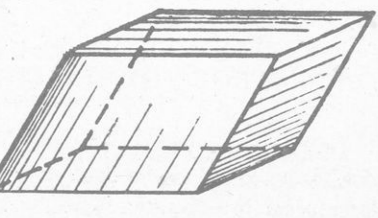
Αἱ ἄλλαι δύο ἔχουν βάσιν 2,5 καὶ ὕψος 9.

Ἡ μία ἀπὸ τὰς πρώτας ἔχει ἐπιφάνειαν 4 × 9 = 36 τετραγωνικοὺς πόντους. Καὶ αἱ δύο μαζὶ ἔχουν ἐπιφάνειαν 72 τετραγωνικοὺς πόντους.

Ἡ μία ἀπὸ τὰς ἄλλας ἔχει ἐπιφάνειαν 2,5 × 9 = 22,5 τετραγωνικοὺς πόντους. Καὶ αἱ δύο μαζὶ ἔχουν ἐπιφάνειαν 45 τετραγωνικοὺς πόντους.

Τώρα προσθέτομεν ὅλους τοὺς τετραγωνικοὺς πόντους τῶν ἑδρῶν : 20 + 72 + 45 = 137 τετραγωνικοὶ πόντοι. Τόση εἶναι ὁλόκληρος ἡ ἐπιφάνεια τοῦ παραλληλεπιπέδου.



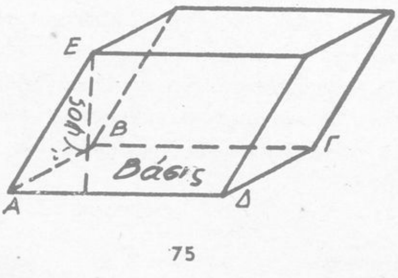


Σύγκρισις τοῦ πλαγίου μὲ τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον

Ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον	Πλάγιον παραλληλεπίπεδον
	Ὁμοιότητες:
Ἔχει 6 ἕδρας. Ἑκάστη ἕδρα ἔχει ἀπέναντί της ἄλλην ἴσην καὶ παράλληλον.	Ἔχει 6 ἕδρας. Ἑκάστη ἕδρα ἔχει ἀπέναντί της ἄλλην ἴσην καὶ παράλληλον.
	Διαφοραί:
Αἱ πλαγιναὶ ἀκμαὶ εἶναι κατακόρυφοι. Αἱ γωνίαι τῶν ἑδρῶν του εἶναι ὀρθαί.	Αἱ πλαγιναὶ ἀκμαὶ δὲν εἶναι κατακόρυφοι, ἀλλὰ πλάγιαι. Ἑκάστη ἕδρα του ἔχει 2 γωνίας ὀξείας καὶ 2 ἀμβλείας.

Βάσις καὶ ὕψος πλαγίου παραλληλεπιπέδου. Ὡς βάσιν πλαγίου παραλληλεπιπέδου ἠμποροῦμεν νὰ πάρωμεν μίαν ἀπὸ τὰς ἕδρας του. Π.χ. τὴν ἕδραν Α Β Γ Δ.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ὕψος του, πρέπει ἀπὸ μίαν ἀπὸ τὰς ἀπέναντι κορυφάς, π.χ. ἀπὸ τὴν κορυφὴν Ε, νὰ φέρωμεν εὐθεῖαν κάθετον πρὸς τὴν βάσιν.



75

5. ΟΓΚΟΣ ΤΟΥ ΠΛΑΓΙΟΥ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΠΙΠΕΔΟΥ

Διὰ νὰ λογαριάσωμεν πόσον ὄγκον ἔχει ἓν ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον, ὅπως ξεύρομεν, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὴν ἐπιφάνειαν τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του.

Τὸ ἴδιον πρέπει νὰ κάμωμεν καὶ ὅταν τὸ παραλληλεπίπεδον δὲν εἶναι ὀρθογώνιον, ἀλλὰ πλάγιον. Π.χ. ἂν ἡ βάσις πλαγίου παραλληλεπιπέδου ἔχη ἐπιφάνειαν 10 τετραγωνικοὺς πόντους, καὶ τὸ ὕψος του εἶναι 8 πόντοι, θὰ πολλαπλασιάσωμεν $10 \times 8 = 80$ κυβικοὶ πόντοι.

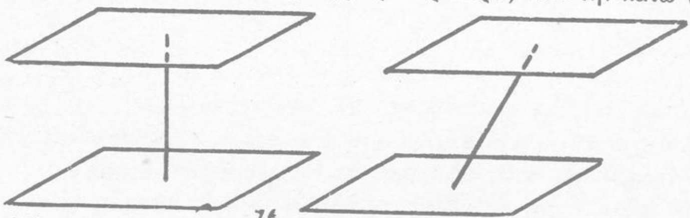
'Α σ κ ή σ ε ι ς:

164. Ἕν παραλληλεπίπεδον ἔχει βάσιν μὲ ἐπιφάνειαν 64 τετραγωνικὰ μέτρα καὶ τὸ ὕψος του εἶναι 2 μέτρα. Πόσα κυβικὰ μέτρα εἶναι ὁ ὄγκος του;

6. ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΠΛΑΓΙΟΥ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΠΙΠΕΔΟΥ

Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν πλάγιον παραλληλεπίπεδον, κόπτομεν ἀπὸ χαρτόνι δύο πλάγια παραλληλόγραμμα ἴσα. Αὐτὰ θὰ ἀποτελέσουν τὴν ἐπάνω ἕδραν καὶ τὴν κάτω ἕδραν.

Περνοῦμεν ἀπὸ τὸ μέσον των ἓν σύρμα. Εἰς τὴν ἀρχὴν τὸ σύρμα εἶναι κάθετον πρὸς τὰ παραλληλόγραμμα καὶ οὕτω τὸ ἓν εἶναι ἀκριβῶς ἐπάνω ἀπὸ τὸ ἄλλο. Σπρώχνομεν τὸ σύρμα ὀλίγον, διὰ νὰ γίνη πλάγιον, ὥστε ἡ ἐπάνω ἕδρα νὰ προχωρήση δεξιώτερα (ἢ ἀριστερώτερα) ἀπὸ τὴν κάτω (εἰκ. 76).



76

Τώρα πρέπει νὰ ἑτοιμάσωμεν τὰς πλαγινὰς ἕδρας του. Μετρῶμεν πῶς πρέπει νὰ εἶναι αἱ δύο ἀντικρυναὶ ἕδραι του καὶ κόπτομεν δύο παραλληλόγραμμα δι' αὐτά. Τὸ ἴδιον κάμνομεν διὰ τὰς ἄλλας δύο καὶ κόπτομεν ἄλλα δύο παραλληλόγραμμα.

Κολλῶμεν τὰ παραλληλόγραμμα αὐτὰ εἰς τὸ πλάϊ καὶ οὕτω τὸ πλάγιον παραλληλεπίπεδον εἶναι ἕτοιμον.

'Α σ κ ή σ ε ι ς:

165. Ἰχνογράφησε ἓν πλάγιον παραλληλεπίπεδον.

166. Πάρε μίαν μεγάλην πλάκα πράσινο σαπούνι, ἡ ὁποία ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου. Διάλεξέ την νὰ εἶναι μαλακή. Κόψε καταλλήλως τὰς 6 ἕδρας της, ὥστε νὰ πάρη τὸ σχῆμα πλαγίου παραλληλεπιπέδου.

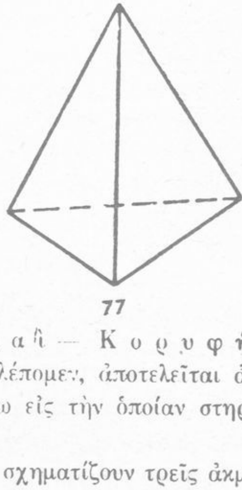
157. Κατασκεύασε ἓν πλάγιον παραλληλεπίπεδον ἀπὸ οἱανδήποτε ὕλην θέλεις.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ

ΤΡΙΓΩΝΙΚΗ ΠΥΡΑΜΙΣ

1. ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ — ΕΔΡΑΙ — ΑΚΜΑΙ — ΚΟΡΥΦΗ ΠΥΡΑΜΙΔΟΣ

Ἐ π ι φ ά ν ε ι α. Ἡ εἰκὼν (εἰκ. 77), δεικνύει τριγωνικὴν πυραμίδα. Τὸ ἔξω μέρος της, αὐτὸ τὸ ὁποῖον βλέπομεν καὶ ἠμποροῦμεν νὰ ἐγγίσωμεν, εἶναι ἡ ἐπιφάνειά της.



77

Ἕ δ ρ α ι — Ἀ κ μ α ί — Κ ο ρ υ φ ή. Ἡ ἐπιφάνεια τῆς τριγωνικῆς πυραμίδος , ὅπως βλέπομεν, ἀποτελεῖται ἀπὸ 4 ἕδρας.

Τὴν κάτω ἕδραν, ἐπάνω εἰς τὴν ὁποίαν στηρίζεται ἡ τριγωνικὴ πυραμίς, τὴν ὀνομάζομεν βάσιν.

Αἱ ἕδραι τέμνονται καὶ σχηματίζουν τρεῖς ἀκμὰς εἰς τὴν βάσιν καὶ τρεῖς ἀκμὰς εἰς τὰ πλάγια. Δηλαδὴ ὅλας - ὅλας ἔχομεν 6 ἀκμάς.

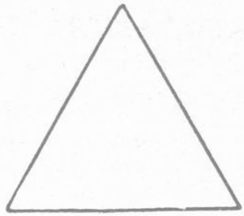
Τὸ σημεῖον, εἰς τὸ ὁποῖον συναντῶνται αἱ ἀκμαί, αἱ ὁποῖαι εἶναι εἰς τὰ πλάγια, λέγεται κορυφὴ τῆς πυραμίδος.

2. ΤΟ ΤΡΙΓΩΝΟΝ

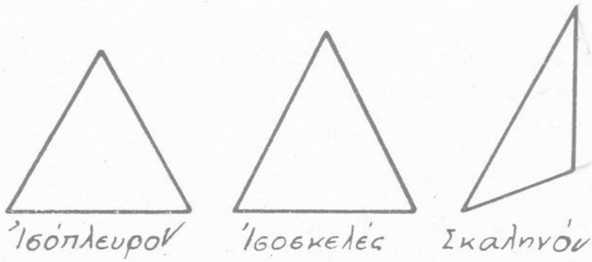
Σ χ ῆ μ α τ ῶ ν ἑ δ ρ ῶ ν. Τὸ σχῆμα, τὸ ὁποῖον ἔχουν αἱ ἕδραι τῆς τριγωνικῆς πυραμίδος, λέγεται τ ρ ί γ ω ν ο ν.

Τὸ τρίγωνον ἔχει γύρω - γύρω τρεῖς πλευράς. Μεταξὺ τῶν πλευρῶν σχηματίζονται τρεῖς γωνίαι (εἰκ. 78).

Ε ἴ δ η τ ρ ι γ ώ ν ο υ. Παρατήρησε τὴν εἰκόνα 79. Ὅλα τὰ σχήματα εἶναι τρίγωνα.



78



79

Μετρῶμεν τὸ μῆκος τῶν πλευρῶν των. Βλέπομεν ὅτι τὸ πρῶτον ἔχει καὶ τὰς τρεῖς πλευρὰς ἴσας μεταξύ των. Αὐτὸ λέγεται ἰσόπλευρον.

Τὸ ἄλλο ἔχει τὰς 2 πλευράς του ἴσας, δηλαδὴ τὰ δύο σκέλη του. Αὐτὸ λέγεται ἰσοσκελές. Τὴν τρίτην πλευρὰν δὲν τὴν ἔχει ἴσην μὲ τὰς ἄλλας.

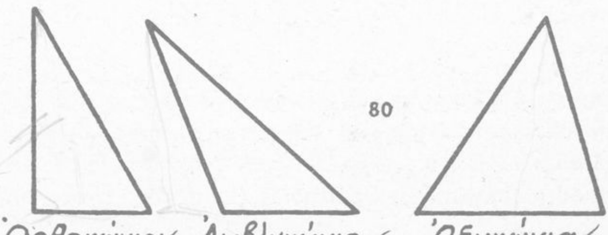
Τὸ τρίτον τρίγωνον δὲν ἔχει καμμίαν πλευρὰν ἴσην μὲ ἄλλην. Αὐτὸ λέγεται σκαληνόν.

Τώρα κοιτάξετε τὴν ἄλλην εἰκόνα 80 μὲ τὰ ἄλλα τρία τρίγωνα.

Τὸ πρῶτον ἔχει μίαν γωνίαν ὀρθήν. Δι' αὐτὸ λέγεται ὀρθογώνιον.

Τὸ δεύτερον ἔχει μίαν γωνίαν ἀμβλεῖαν καὶ τὸ ὀνομάζομεν ἀμβλυγώνιον.

Τὸ τρίτον ἔχει ὅλας τὰς γωνίας ὀξείας καὶ τὸ ὀνομάζομεν ὀξυγώνιον (εἰκ. 80).



80

Ἀσκήσεις:

168. Σχεδίασε τρίγωνον καὶ μέτρησε τὸ μῆκος τῆς περιμέτρου του.

169. Σχεδίασε ὁποιονδήποτε τρίγωνον. Μέτρησε μὲ ὑποδεκάμετρον τὰς πλευράς του καὶ εἰπὲ ἂν εἶναι ἰσόπλευρον, ἰσοσκελὲς ἢ σκαληνόν.

170. Σχεδίασε ἓν τρίγωνον σκαληνόν, τοῦ ὁποίου ἡ μία πλευρὰ νὰ ἔχῃ μῆκος 3 πόντους.

171. Ἡ περίμετρος ἑνὸς ἰσοπλεύρου τριγώνου εἶναι 36 μέτρα. Πόσα μέτρα εἶναι ἑκάστη πλευρά του;

172. Ἔχομεν ἓν τετράγωνον καὶ ἓν τρίγωνον ἰσόπλευρον. Καὶ τὰ δύο ἔχουν τὴν ἰδίαν περίμετρον 24 πόντους. Πόσους πόντους μῆκος ἔχει ἡ πλευρὰ τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου καὶ πόσους ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου;

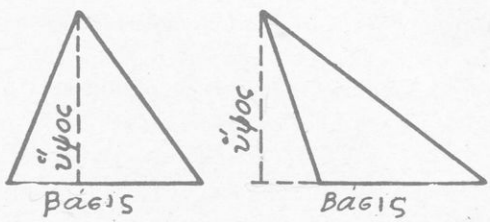
173. Σχεδίασε ἓν ὀρθογώνιον τρίγωνον, τὸ ὁποῖον εἶναι καὶ ἰσοσκελές.

Κορυφὴ — Βάσις καὶ ὕψος τριγώνου. Κορυφὴ τοῦ τριγώνου σχηματίζεται ἐκεῖ ὅπου συναντᾶται μία πλευρὰ μὲ ἄλλην πλευράν. Τὸ τρίγωνον ἔχει τρεῖς κορυφάς.

Ὡς βάσιν τοῦ τριγώνου ἠμποροῦμεν νὰ πάρωμεν ὁποιανδήποτε πλευράν του.

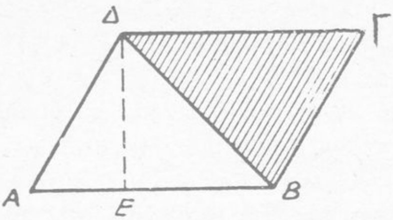
Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ὕψος του, πρέπει ἀπὸ ἐκείνην τὴν κορυφήν, ἡ ὁποία εἶναι ἀπέναντι εἰς τὴν βάσιν, νὰ φέρωμεν εὐθεῖαν γραμμὴν κάθετον πρὸς τὴν βάσιν. Τὸ μῆκος τῆς εὐθείας αὐτῆς ἀνάμεσα εἰς τὴν κορυφὴν καὶ εἰς τὴν βάσιν, εἶναι τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου.

Ἡ ἄκρα τῆς καθέτου γραμμῆς ἠμπορεῖ νὰ πίπτῃ ἢ ἐπάνω εἰς τὴν ἀπέναντι πλευρὰν ἢ ἔξω ἀπὸ αὐτήν, δηλαδὴ εἰς τὴν προέκτασίν της (εἰκ. 81).



81

Σχέσις ἐπιφανείας τριγώνου καὶ παραλληλογράμμου, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν ἰδίαν βάσιν καὶ τὸ ἴδιον ὕψος. Σχεδιάζομεν 2 τρίγωνα ἴσα ἐπάνω εἰς χαρτί, τὰ κόπτομεν καὶ τὰ θέτομεν τὸ ἓν πλησίον εἰς τὸ ἄλλο, ὅπως δεικνύει ἡ εἰκὼν 82.



82

Σχηματίζεται οὕτω ἓν παραλληλόγραμμον καὶ ἕκαστον τρίγωνον εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ παραλληλογράμμου.

Τὸ παραλληλόγραμμον Α Β Γ Δ ἔχει βάσιν τὴν Α Β καὶ ὕψος τὴν Δ Ε

Τὸ τρίγωνον Δ Α Β ἔχει τὴν ἰδίαν βάσιν Α Β καὶ τὸ ἴδιον ὕψος Δ Ε. Τὸ ἄλλο τρίγωνον, ἐπειδὴ εἶναι ἴσον μὲ τὸ πρῶτον, ἔχει ἴσην βάσιν καὶ ἴσον ὕψος μὲ αὐτό.

Ὥστε ἡ ἐπιφάνεια τριγώνου εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ἐπιφανείας παραλληλογράμμου, τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν ἰδίαν βάσιν καὶ τὸ ἴδιον ὕψος (εἰκ. 82).

Εὕρεσις τῆς ἐπιφανείας τριγώνου. Ὅπως εἴδομεν, ἡ ἐπιφάνεια ἑνὸς ἄλλου τριγώνου ἴσου μὲ αὐτὸ κάμνει ἓν παραλληλόγραμμον (ποὺ ἔχει τὴν ἰδίαν βάσιν καὶ τὸ ἴδιον ὕψος μὲ τὸ τρίγωνον). Δι' αὐτὸ διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ἐπιφάνειαν ἑνὸς τριγώνου, εὑρίσκομεν πρῶτον τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ παραλληλογράμμου, τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν ἰδίαν βάσιν καὶ τὸ ἴδιον ὕψος καὶ ὕστερα λαμβάνομεν τὸ ἥμισυ αὐτῆς τῆς ἐπιφανείας.

Ὅπως ξεύρομεν, διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ἐπιφάνειαν παραλληλογράμμου, πολλαπλασιάζομεν τὴν βάσιν του ἐπὶ τὸ ὕψος του.

Διὰ νὰ εὕρωμεν λοιπὸν τὴν ἐπιφάνειαν ἑνὸς τριγώνου, πολλαπλασιάζομεν τὴν βάσιν του ἐπὶ τὸ ὕψος του καὶ αὐτὸ ποὺ εὑρίσκομεν τὸ διαιροῦμεν διὰ 2.

Ἀσκήσεις:

174. Ἓν τρίγωνον ἔχει βάσιν 110 μέτρα καὶ ὕψος 60 μέτρα. Πόσα τετραγωνικὰ μέτρα εἶναι ἡ ἐπιφάνειά του;

175. Τριγωνικὸν κτῆμα ἔχει βάσιν 40 μέτρα καὶ τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου εἶναι τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς βάσεώς του. Πόσα τετραγωνικὰ μέτρα εἶναι ἡ ἐπιφάνειά του;

176. Κόψε ἀπὸ χαρτόνι τρία ἴσα τρίγωνα. Πάρε τὸ ἓν τρίγωνον. Λαμβάνων ὡς βάσιν τὴν μίαν πλευράν του μέτρησε τὸ ὕψος του καὶ εὗρε τὴν ἐπιφάνειάν του. Πάρε τὸ ἄλλο ἴσον τρίγωνον. Λαμβάνων ὡς βάσιν ἄλλην πλευράν, μέτρησε τὸ ὕψος του καὶ νὰ εὕρῃς τὴν ἐπιφάνειάν του. Πάρε τὸ τρίτον τρίγωνον καὶ κάμε τὸ ἴδιον. Εὑρίσκεις διαφορὰν εἰς τὰς ἐπιφανείας των;

177. Αἱ δύο κάθετοι πλευραὶ ὀρθογωνίου τριγώνου ἔχουν μῆκος ἡ μία 5 πόντους, ἡ ἄλλη 8 πόντους. Νὰ σχεδιασθῇ τὸ τρίγωνον αὐτὸ καὶ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐπιφάνειά του.

3. ΕΥΡΕΣΙΣ ΤΗΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ ΤΗΣ ΠΥΡΑΜΙΔΟΣ

Διὰ νὰ εὕρωμεν πόση εἶναι ἡ ἐπιφάνεια τῆς τριγωνικῆς πυραμίδος, πρέπει νὰ προσθέσωμεν τὰς ἐπιφανείας τῶν τριγώνων, αἱ ὁποῖαι τὴν ἀποτελοῦν. Π. χ.

Τὸ κάτω τρίγωνον ἔχει βάσιν 9 πόντους καὶ ὕψος 4 πόντους. Ἡ ἐπιφάνειά του εἶναι:

$$\frac{9 \times 4}{2} = 18 \text{ τετρ. πόντους.}$$

Ἀπὸ τὰ ἄλλα τρία γύρω - γύρω τρίγωνα:

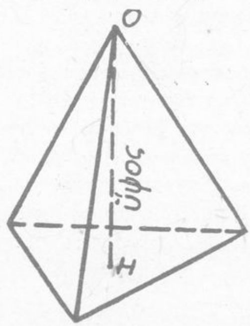
α) Τὸ ἕνα ἔχει βάσιν 9 πόντους καὶ ὕψος 20 πόντ. ἄρα ἔχει ἐπιφάνειαν $\frac{9 \times 20}{2} = 90$ τετρ. πόντους.

β) Τὸ ἄλλο ἔχει βάσιν 5,5 πόντους καὶ ὕψος 20 πόντ. ἄρα ἔχει ἐπιφάνειαν $\frac{5{,}5 \times 20}{2} = 55$ τετρ. πόντους.

γ) Τὸ τρίτον ἔχει βάσιν 7 πόντους καὶ ὕψος 20 πόντ. ἄρα ἔχει ἐπιφάνειαν $\frac{7 \times 20}{2} = 70$ τετρ. πόντους.

Προσθέτομεν τώρα τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κάτω τριγώνου καὶ τὰς ἐπιφανείας τῶν τριῶν γύρω - γύρω τριγώνων καὶ ἔχομεν $18 + 90 + 55 + 70 = 233$ τετραγ. πόντοι εἶναι ἡ ἐπιφάνεια τῆς τριγωνικῆς αὐτῆς πυραμίδος.

Ὕψος πυραμίδος. Διὰ νὰ εὕρωμεν πόσον εἶναι τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος, φέρομεν κάθετον εὐθεῖαν ἀπὸ τὴν κορυφὴν τῆς πυραμίδος πρὸς τὴν βάσιν της. Π.χ. ὕψος τῆς πυραμίδος τῆς εἰκόνος 83 εἶναι ἡ εὐθεῖα Ο Η (εἰκ. 83).



83

4. ΟΡΘΟΝ ΤΡΙΓΩΝΙΚΟΝ ΠΡΙΣΜΑ

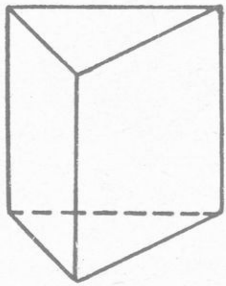
Ἡ εἰκὼν 84 δεικνύει ὀρθὸν τριγωνικὸν πρῖσμα.

Τὸ ὀρθὸν πρῖσμα ἔχει δύο ἕδρας ἴσας καὶ παραλλήλους, αἱ ὁποῖαι εἶναι τρίγωνα. Αἱ ἄλλαι ἕδραι του γύρω - γύρω εἶναι ὀρθογώνια παραλληλόγραμμα.

Ἡ κάτω τριγωνικὴ ἕδρα του λέγεται βάσις τοῦ πρίσματος. Ἡ ἐπάνω τριγωνικὴ ἕδρα λέγεται καὶ αὐτὴ βάσις.

Τὸ ὀρθὸν τριγωνικὸν πρῖσμα, ὅπως βλέπομεν, ἔχει γύρω - γύρω τρεῖς ἀκμάς. Ὅλαι αὐταὶ αἱ ἀκμαὶ εἶναι ἴσαι.

Ἡ ἀκμὴ εἶναι τὸ ὕψος τοῦ ὀρθοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος.



84

Ὄγκος ὀρθοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος. Ὅπως ξεύρομεν, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον παραλληλεπιπέδου, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὴν ἐπιφάνειαν τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του.

Τὸ ἴδιον πρέπει νὰ κάμωμεν διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον ὀρθοῦ πρίσματος, δηλαδὴ πολλαπλασιάζομεν τὴν ἐπιφάνειαν τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του.

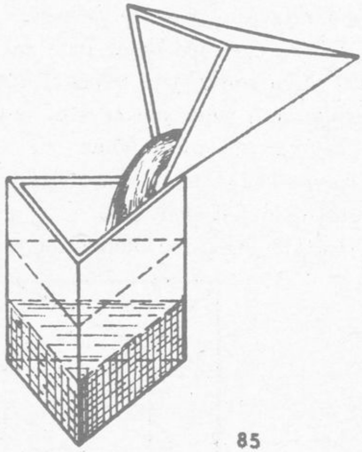
Π.χ. ἡ βάσις ὀρθοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος ἔχει ἐπιφάνειαν 12 τετρ. πόντους καὶ τὸ ὕψος του εἶναι 20 πόντ. Ὁ ὄγκος του εἶναι:

12 τετρ. πόντοι × 20 = 240 κυβικοὶ πόντοι.

Σχέσις πυραμίδος καὶ πρίσματος. Παίρνομεν ἓν ὀρθὸν τριγωνικὸν πρῖσμα καὶ μίαν τριγωνικὴν πυραμίδα, ποὺ ἔχουν καὶ τὰ δύο τὴν ἰδίαν βάσιν καὶ τὸ ἴδιον ὕψος. Εἶναι κατασκευασμένα ἀπὸ μέταλλον καὶ τὸ ἐσωτερικόν των εἶναι κενόν. Διὰ νὰ ἴδωμεν ποίαν σχέσιν ἔχει ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδος μὲ τὸν ὄγκον τοῦ πρίσματος, γεμίζομεν μὲ νερὸ τὴν τριγωνικὴν πυραμίδα καὶ ἀδειάζομεν τὸ νερό της εἰς τὸ τριγωνικὸν πρῖσμα.

Κάμνοντες αὐτὸ εὑρίσκομεν ὅτι 3 φορὰς πρέπει νὰ ἀδειάσωμεν τὸ νερό της εἰς τὸ τριγωνικὸν πρῖσμα.

Αὐτὸ φανερώνει ὅτι ὁ ὄγκος τῆς τριγωνικῆς πυραμίδος εἶναι τὸ ⅓ τοῦ ὄγκου τοῦ πρίσματος, τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν ἰδίαν βάσιν καὶ τὸ ἴδιον ὕψος (εἰκ. 85)



85

5. ΕΥΡΕΣΙΣ ΤΟΥ ΟΓΚΟΥ ΤΗΣ ΠΥΡΑΜΙΔΟΣ

Εὕρεσις τοῦ ὄγκου τῆς πυραμίδος. Ἐπειδὴ ὁ ὄγκος μιᾶς πυραμίδος εἶναι τὸ ⅓ τοῦ ὄγκου πρίσματος, τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν ἰδίαν βάσιν καὶ τὸ ἴδιον ὕψος μὲ τὴν πυραμίδα, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον πυραμίδος, εὑρίσκομεν τὸν ὄγκον ἀντιστοίχου πρίσματος καὶ ἀπὸ αὐτὸν παίρνομεν τὸ ⅓.

Π.χ. πυραμὶς ἔχει βάσιν 12 τετρ. πόντ. καὶ ὕψος 20 πόντους.

Τὸ ἀντίστοιχον πρῖσμα θὰ ἔχῃ ὄγκον 12 τετρ. πόντους $\times$ 20 $=$ 240 κυβικοὺς πόντους.

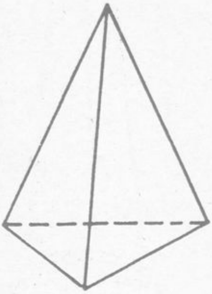
Ἡ πυραμὶς θὰ ἔχῃ ὄγκον 240 : 3 $=$ 80 κυβικοὺς πόντους.

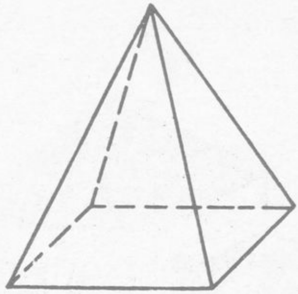
Εἴδη πυραμίδων καὶ ὄγκος αὐτῶν. Ὅταν ἡ βάσις τῆς πυραμίδος εἶναι τρίγωνον, τότε, ὅπως εἴπομεν, ἡ πυραμὶς λέγεται τριγωνική.

Ἠμπορεῖ ὅμως ἡ βάσις της νὰ μὴ εἶναι τρίγωνον.

Ὅταν ἡ βάσις τῆς πυραμίδος εἶναι π.χ. τετράγωνον (ἢ τετράπλευρον), ἡ πυραμὶς λέγεται τετραγωνική.

Ὁποιονδήποτε σχῆμα καὶ ἂν ἔχῃ ἡ βάσις τῆς πυραμίδος, τὸν ὄγκον της τὸν εὑρίσκομεν πάντοτε ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὴν ἐπιφάνειαν τῆς βάσεώς της ἐπὶ τὸ ὕψος καὶ λάβωμεν ἀπὸ αὐτὸ τὸ ⅓.





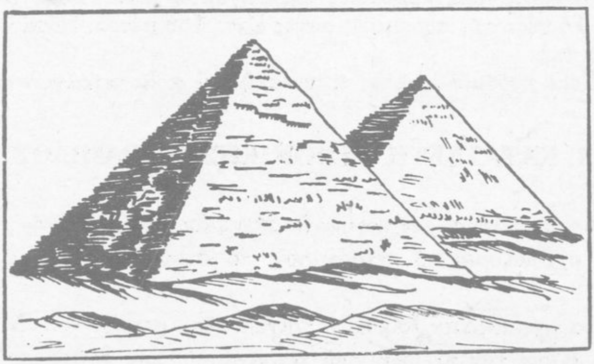
86

6. ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΑ ΣΧΗΜΑΤΟΣ ΠΥΡΑΜΙΔΟΣ

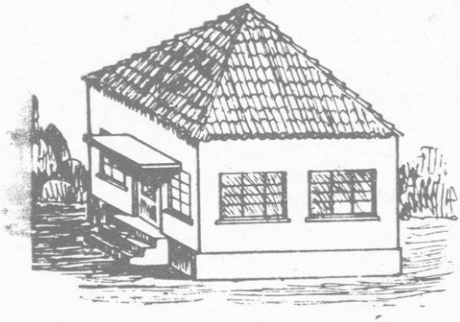
Σχῆμα πυραμίδος ἔχουν αἱ μεγάλαι πυραμίδες τῆς Αἰγύπτου. Αἱ πυραμίδες αὐταὶ ἔχουν βάσιν τετράγωνον. Τὸ ὕψος των εἶναι περισσότερον ἀπὸ 100 μέτρα καὶ εἶναι κτισμέναι ἀπὸ πέτρας (εἰκ. 87).

Σχῆμα πυραμίδος δίδουν εἰς στέγας σπιτιῶν σκεπασμένας μὲ κεραμίδια, διὰ νὰ φεύγουν εὐκόλως τὰ νερὰ τῆς βροχῆς (εἰκ. 88).

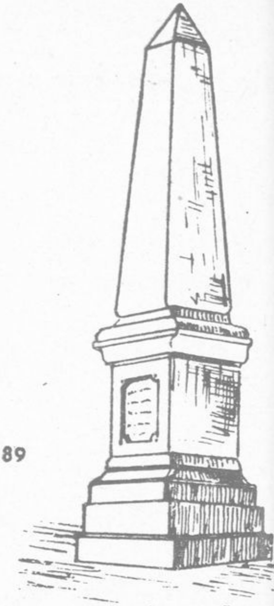
Εἰς πυραμίδα καταλήγουν καὶ μνημεῖα καὶ ἀναμνηστικαὶ στῆλαι.



87



88



89

'Α σ κ ή σ ε ι ς:

178. Πυραμὶς ἔχει βάσιν τετράγωνον μὲ πλευρὰν 20 πόντους. Τὸ ὕψος μιᾶς τριγωνικῆς ἕδρας της εἶναι 30 πόντοι. Πόσην ἐπιφάνειαν ἔχει ἡ βάσις της, πόσην αἱ τέσσαρες τριγωνικαὶ ἕδραι της καὶ πόση εἶναι ὅλη ἡ ἐπιφάνειά της;

179. Μία πυραμὶς ἔχει βάσιν 12 τετραγωνικοὺς πόντους καὶ τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος εἶναι 30 πόντοι. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος της;

180. Ἡ βάσις μιᾶς πυραμίδος τῆς Αἰγύπτου εἶναι τετράγωνον μὲ πλευρὰν 227 μέτρα. Ἂν τὸ ὕψος ἑνὸς τριγώνου ἀπὸ τὰ γύρω εἶναι 145 μέτρα, α) πόσα τετραγωνικὰ μέτρα εἶναι ἡ ἐπιφάνεια τῆς βάσεώς της, β) πόση εἶναι ἡ ἐπιφάνεια μιᾶς τριγωνικῆς ἕδρας της καὶ γ) πόσα τετραγωνικὰ μέτρα εἶναι ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος αὐτῆς;

181. Ἡ βάσις μιᾶς πυραμίδος τῆς Αἰγύπτου εἶναι τετράγωνον πλευρᾶς 227 μέτρων. Τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος αὐτῆς εἶναι 138 μέτρα. Πόσα κυβικὰ μέτρα εἶναι ὁ ὄγκος της;

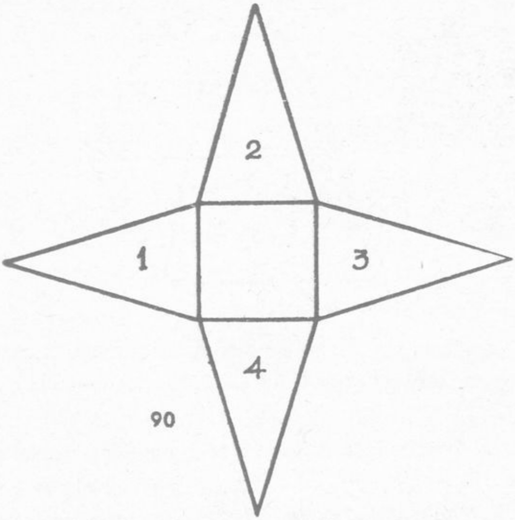
182. Ποία πυραμὶς λέγεται τριγωνικὴ καὶ ποία τετραγωνική;

7. ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΚΑΝΟΝΙΚΗΣ ΠΥΡΑΜΙΔΟΣ

Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν κανονικὴν πυραμίδα ἀπὸ χαρτόνι, μὲ βάσιν π.χ. τετράγωνον, σχεδιάζομεν τὸ τετράγωνον, τὸ ὁποῖον θὰ γίνῃ ἡ βάσις τῆς πυραμίδος.

Ὕστερα σχεδιάζομεν ἰσοσκελῆ τρίγωνα ἴσα μεταξύ των ἐκ τῶν ὁποίων ἕκαστον ἔχει βάσιν τὴν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου, ποὺ ἐπήραμε. Τὰ τρίγωνα αὐτὰ εἶναι 1, 2, 3, 4, (εἰκ. 90).

Διπλώνομεν τὸ χαρτόνι εἰς τὴν βάσιν τῶν τριγώνων καὶ κολλῶμεν τὰς πλευρὰς τῶν τριγώνων μεταξύ των. Οὕτω ἡ πυραμὶς εἶναι ἑτοίμη.



90

Τὸ ὕψος τῶν τριγώνων αὐτῶν πρέπει νὰ εἶναι μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου, διότι ἄλλως αἱ κορυφαὶ τῶν τριγώνων δὲν ἑνώνονται καὶ δὲν σχηματίζεται πυραμίς.

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς:

183. Κατασκεύασε πυραμίδα ἀπὸ χαρτόνι α) μὲ βάσιν τετράγωνον β) μὲ βάσιν ἰσόπλευρον τρίγωνον.

184. Κατασκεύασε πυραμίδα ἀπὸ ξύλον, ἢ ἀπὸ σύρμα ἢ ἀπὸ πηλόν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΕΜΠΤΟΝ

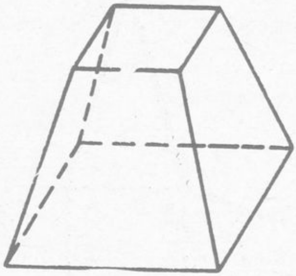
ΚΟΛΟΥΡΟΣ ΠΥΡΑΜΙΣ

1. ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ — ΑΚΜΑΙ — ΕΔΡΑΙ

Λαμβάνομεν μίαν πυραμίδα καὶ τὴν κόπτομεν κάτω ἀπὸ τὴν κορυφὴν καὶ παραλλήλως πρὸς τὴν βάσιν της. Γίνεται τότε δύο τεμάχια.

Τὸ τεμάχιον πρὸς τὴν κορυφὴν εἶναι πυραμὶς μικροτέρα ἀπὸ τὴν πρώτην.

Τὸ ἄλλο τεμάχιον πρὸς τὴν βάσιν λέγεται κόλουρος πυραμὶς (εἰκ. 91).



91

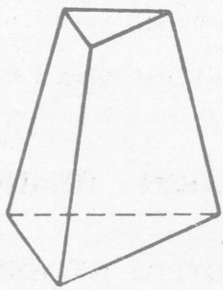
Ἐ π ι φ ά ν ε ι α. Ἡ ἐπιφάνεια τῆς κολούρου πυραμίδος ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο ἕδρας παραλλήλους τὴν ἐπάνω καὶ τὴν κάτω, καὶ ἀπὸ τὰς ἕδρας, ποὺ εἶναι γύρω - γύρω.

Ἡ ἕδρα, ἡ ὁποία εἶναι κάτω, εἶναι ἡ μεγάλη βάσις τῆς κολούρου πυραμίδος.

Ἡ ἕδρα, ἡ ὁποία εἶναι ἐπάνω, λέγεται μικρὰ βάσις τῆς κολούρου πυραμίδος.

Αἱ ἕδραι, αἱ ὁποῖαι εἶναι γύρω - γύρω, λέγονται παράπλευροι ἕδραι.

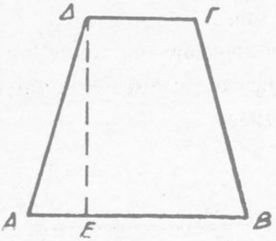
Μία κόλουρος τριγωνικὴ πυραμὶς ἔχει βάσεις δύο τρίγωνα, ἓν μεγάλον καὶ ἓν μικρόν. Παραπλεύρους ἕδρας ἔχει τρεῖς (εἰκ. 92).



92

Ἀ κ μ α ί. Μία τριγωνικὴ κόλουρος πυραμὶς εἰς τὴν κάτω βάσιν της ἔχει, ὅπως βλέπομεν, τρεῖς ἀκμάς, εἰς τὴν ἐπάνω βάσιν της ἄλλας τρεῖς ἀκμὰς καὶ εἰς τὴν παράπλευρον ἐπιφάνειάν της ἄλλας τρεῖς. Δηλαδὴ ὅλας — ὅλας ἔχει 9 ἀκμάς.

Σχῆμα τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν. Ἐξετάζοντες τὸ σχῆμα, τὸ ὁποῖον ἔχουν αἱ παράπλευροι ἕδραι, βλέπομεν ὅτι κάθε μία ἔχει τὸ σχῆμα, τὸ ὁποῖον δεικνύει ἡ εἰκὼν (εἰκ. 93). Τὸ σχῆμα αὐτὸ λέγεται τραπέζιον.



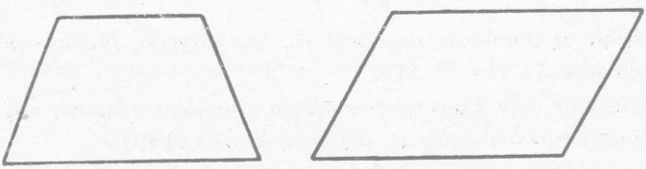
93

Πλευραὶ τοῦ τραπεζίου καὶ σχέσεις αὐτῶν. Τὸ τραπέζιον ἔχει ὅπως βλέπομεν τέσσαρας πλευράς. Αἱ δύο ἀπὸ αὐτὰς εἶναι παράλληλοι μεταξύ των καὶ αἱ ἄλλαι δύο δὲν εἶναι παράλληλοι.

Ἀπὸ τὰς δύο παραλλήλους πλευρὰς τοῦ τραπεζίου ἡ μία Α Β ἔχει μεγαλύτερον μῆκος ἀπὸ τὴν ἄλλην, τὴν Δ Γ.

Αἱ δύο παράλληλοι πλευραὶ λέγονται βάσεις τοῦ τραπεζίου.

Ἡ ἀπόστασις ἀπὸ τὴν μίαν βάσιν ἕως τὴν ἄλλην εἶναι τὸ ὕψος τοῦ τραπεζίου. Ὕψος τοῦ τραπεζίου εἶναι ἡ ΔΕ.



94

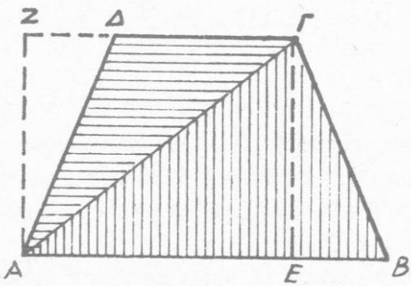
Σύγκρισις τραπεζίου καὶ παραλληλογράμμου

Τραπέζιον	Παραλληλόγραμμον
Ὁμοιότητες	
Ἔχει 4 πλευρὰς	Ἔχει 4 πλευράς.
Διαφοραὶ	
Αἱ 2 ἀντικρυναὶ πλευραὶ εἶναι παράλληλοι, ἀλλὰ ἄνισοι. Αἱ ἄλλαι 2 πλευραὶ δὲν εἶναι παράλληλοι. Αἱ ἀντικρυναὶ γωνίαι δὲν εἶναι ἴσαι.	Αἱ ἀντικρυναὶ πλευραὶ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι. Αἱ ἀντικρυναὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι.

3. ΕΥΡΕΣΙΣ ΤΗΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ ΤΟΥ ΤΡΑΠΕΖΙΟΥ

Ἔχομεν ἓν τραπέζιον καὶ ζητοῦμεν νὰ εὕρωμεν πόσοι τετραγωνικοὶ πόντοι εἶναι ἡ ἐπιφάνειά του.

Ἑνώνοντες τὴν μίαν κορυφὴν τοῦ τραπεζίου μὲ τὴν ἀπέναντί της, βλέπομεν ὅτι τὸ τραπέζιον χωρίζεται εἰς δύο ἄνισα τρίγωνα. Τὸ τρίγωνον ΓΑΒ καὶ τὸ τρίγωνον ΑΔΓ (εἰκ. 95).



95

Ἐπειδὴ τὸ τραπέζιον χωρίζεται εἰς δύο τρίγωνα, ἠμποροῦμεν νὰ εὕρωμεν τὴν ἐπιφάνειάν του ὡς ἑξῆς:

Εὑρίσκομεν τὴν ἐπιφάνειαν ἑκάστου τριγώνου χωριστὰ καὶ προσθέτομεν τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἑνὸς μὲ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἄλλου.

Π.χ. αἱ βάσεις τοῦ τραπεζίου εἶναι ἡ μία 5 πόντους καὶ ἡ ἄλλη 2,5 πόντους. Τὸ ὕψος του εἶναι 3 πόντοι.

Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει βάσιν τὴν ΑΒ καὶ ὕψος τὴν ΓΕ.

Τὸ τρίγωνον ΑΔΓ ἔχει βάσιν τὴν ΔΓ καὶ ὕψος τὴν ΑΖ.

Ἕκαστον τρίγωνον δηλαδὴ ἔχει ὕψος τὸ ὕψος τοῦ τραπεζίου.

Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ τριγώνου δεξιὰ εἶναι $\frac{5 \times 3}{2} = 7{,}5$ τετρ. πόντοι.

Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἄλλου τριγώνου εἶναι $\frac{2{,}5 \times 3}{2} = \frac{7{,}5}{2} = 3{,}75$ τετρ. πόντοι.

Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ τραπεζίου εἶναι $7{,}5 + 3{,}75 = 11{,}25$ τετρ. πόντοι.

'Α σ κ ή σ ε ι ς:

185. 'Αμπέλι ἔχει σχῆμα τραπεζίου. Αἱ παράλληλοι πλευραί του ἔχουν μῆκος ἡ μία 160, ἡ ἄλλη 140 μέτρα. Ἡ ἀπόστασις ἀνάμεσα εἰς τὰς δύο βάσεις εἶναι 86 μέτρα. Πόσα τετραγωνικὰ μέτρα ἐπιφάνειαν ἔχει τὸ ἀμπέλι;

186. Ἕν οἰκόπεδον ἔχει σχῆμα τραπεζίου. Ἡ μεγάλη βάσις ἔχει μῆκος 12 μέτρα. Ἡ ἄλλη βάσις ἔχει μῆκος τὰ 2/3 τῆς πρώτης. Τὸ ὕψος του εἶναι 5 μέτρα. Πόσα τετραγωνικὰ μέτρα εἶναι ἡ ἐπιφάνειά του;

187. Ἡ μικρὰ βάσις τραπεζίου ἔχει μῆκος 20 μέτρα. Τὸ ὕψος του εἶναι 18 μέτρα. Πόσα τετραγωνικὰ μέτρα εἶναι ἡ ἐπιφάνειά του;

4. ΕΥΡΕΣΙΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ ΚΟΛΟΥΡΟΥ ΠΥΡΑΜΙΔΟΣ

Ἔχομεν π.χ. μίαν τριγωνικὴν κόλουρον πυραμίδα καὶ θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὴν ἐπιφάνειάν της.

Ἡ ἐπιφάνεια τῆς κολούρου τριγωνικῆς πυραμίδος ἀποτελεῖται, ὅπως βλέπομεν, ἀπὸ τὴν ἐπιφάνειαν τῶν δύο βάσεών της, αἱ ὁποῖαι ἔχουν σχῆμα τριγώνου καὶ ἀπὸ τὴν ἐπιφάνειαν τριῶν τραπεζίων, τὰ ὁποῖα ἀποτελοῦν τὴν παράπλευρον ἐπιφάνειάν της.

Εὑρίσκομεν λοιπὸν τὴν ἐπιφάνειαν τῶν δύο βάσεών της καὶ προσθέτομεν τὴν ἐπιφάνεια τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν της. Π.χ. ἡ ἐπιφάνεια τῆς κάτω βάσεώς της εἶναι 38 τετρ. πόντοι. Ἡ ἐπιφάνεια τῆς ἐπάνω βάσεώς της εἶναι 10 τετρ. πόντοι. Ἡ ἐπιφάνεια τῶν τριῶν παραπλεύρων ἑδρῶν της εἶναι 217,5 τετρ. πόντοι.

Προσθέτοντες τὰς ἐπιφανείας αὐτὰς ἔχομεν 38+10+217,5=265,5 τ.π.

'Α σ κ ή σ ε ι ς:

188. Νὰ εὕρετε πόση εἶναι ἡ ἐπιφάνεια μιᾶς κολούρου πυραμίδος.

189. Πῶς εὑρίσκομεν τὴν ἐπιφάνειαν ἑνὸς τριγώνου; Διατί κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον;

190. Πῶς εὑρίσκομεν πόση εἶναι ἡ ἐπιφάνεια ἑνὸς τραπεζίου; Διατί κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον;

191. Νὰ σχεδιάσετε: α) ἕνα κύβον, β) ἓν ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον, γ) ἓν πλάγιον παραλληλεπίπεδον, δ) μίαν πυραμίδα καὶ ε) μίαν κόλουρον πυραμίδα.

5. ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΚΟΛΟΥΡΟΥ ΠΥΡΑΜΙΔΟΣ

Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν μίαν κόλουρον πυραμίδα ἀπὸ χαρτόνι, κατασκευάζομεν μίαν πυραμίδα ὅπως ἐμάθομεν καὶ κόπτομεν τὸ ἐπάνω μέρος της, ὥστε νὰ φύγη ἡ κορυφή της καὶ νὰ σχηματισθῆ μία ἕδρα παράλληλος μὲ τὴν βάσιν της. Ὕστερα κολλῶμεν ἐκεῖ ἓν χαρτόνι, τὸ ὁποῖον ἔχει τὸ σχῆμα τῆς βάσεως, διὰ νὰ σκεπάζη τὸ κενόν, τὸ ὁποῖον ἐδημιουργήθη.

Ἀσκήσεις:

192. Κατασκεύασε κόλουρον πυραμίδα ἀπὸ ξύλον, σύρμα, πηλὸν κλπ.

193. Πόσας ἕδρας ἔχει: α) ὁ κύβος, β) τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον, γ) τὸ πλάγιον παραλληλεπίπεδον;

194. Τί σχῆμα ἔχουν αἱ ἕδραι: α) τοῦ κύβου, β) τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, γ) τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου;

195. Τί διαφέρει ἓν τετράγωνον ἀπὸ ἓν ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον;

196. Τί διαφέρει ἓν πλάγιον παραλληλόγραμμον ἀπὸ ἓν ὀρθογώνιον;

197. Πῶς εὑρίσκομεν τὴν ἐπιφάνειαν: α) ἑνὸς τετραγώνου, β) ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου, γ) ἑνὸς πλαγίου παραλληλογράμμου;

198. Πῶς εὑρίσκομεν τὸν ὄγκον: α) ἑνὸς κύβου, β) ἑνὸς ὀρθογωνιου παραλληλεπιπέδου, γ) ἑνὸς πλαγίου πραραλληλεπιπέδου;

199. Πόσας ἕδρας ἔχει: α) μία τριγωνικὴ πυραμίς, β) μία τετραγωνικὴ πυραμίς;

200. Πῶς εὑρίσκομεν πόσον ὄγκον ἔχει μία πυραμίς;

201. Ποῖον σῶμα ἔχει τὰς παραπλεύρους ἕδρας του τραπέζια;

202. Πόσας ὁριζοντίας γραμμὰς ἠμπορεῖς νὰ σύρης ἀπὸ ἓν σημεῖον καὶ πόσας κατακορύφους;

203. Ἐπὶ ἑνὸς κατακορύφου ἐπιπέδου ἠμπορεῖς νὰ σύρης μίαν ὁριζοντίαν εὐθεῖαν γραμμήν.

204. Ὑπολόγισε μὲ τὸ μάτι σου τὸ μέσον εὐθείας γραμμῆς καὶ μέτρησε διὰ νὰ εὕρης ἂν τὸ ὑπελόγισες ὀρθά.

205. Θέσε τὸ βιβλίον σου εἰς τὸ τραπέζι καὶ κράτησε τὸ ἐξώφυλλόν του ὀλίγον ἀνοικτόν, ὥστε ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐξωφύλλου νὰ μὴ εἶναι ὁριζοντία. Ἠμπορεῖς νὰ γράφης ὁριζοντίας γραμμὰς ἐπάνω εἰς τὸ ἐξώφυλλον;

206. Ἠμπορεῖ ἡ ἐπάνω ἐπιφάνεια δοχείου νὰ μὴ εἶναι ὁριζοντία καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ νεροῦ τὸ ὁποῖον περιέχει νὰ εἶναι ὁριζοντία (εἰκ. 96) ;

207. Τί θὰ εἰπῆ ἐπίπεδος ἐπιφάνεια καὶ τί θὰ εἰπῆ ὁριζοντία ἐπιφάνεια;

208. Εὗρε μέσα εἰς τὸ δωμάτιον γραμμὰς κατακορύφους.

209. Πῶς ἠμπορεῖς νὰ εὕρης μὲ πείραμα, ἂν 2 σημεῖα εὑρίσκωνται ἐπὶ τῆς ἰδίας κατακορύφου γραμμῆς;

210. Εὗρε μέσα εἰς τὸ δωμάτιον ὁριζοντίας ἐπιφανείας.

211. Πόσας ἕδρας τοῦ κύβου ἠμπορεῖς νὰ βλέπης συγχρόνως;

212. Σχεδίασε τρίγωνον ὀρθογώνιον, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχη ἀνίσους πλευράς.

213. Γράψε δύο εὐθείας, αἱ ὁποῖαι διέρχονται ἀπὸ τὸ ἴδιον σημεῖον. Πόσαι γωνίαι σχηματίζονται;

214. Σχεδίασε μίαν κλειστὴν τεθλασμένην γραμμήν, ἡ ὁποία νὰ ἀποτελῆται ἀπὸ 4 ἴσας εὐθείας. Μεταξὺ τῶν εὐθειῶν νὰ σχηματίζωνται γωνίαι ὀρθαί. Τί σχῆμα γίνεται;

215. Ποία γραμμὴ ἀποτελεῖται ἀπὸ εὐθείας καὶ δὲν εἶναι εὐθεῖα;

216. Συμπλήρωσε τὸν ἑπόμενον πίνακα:

Σχῆμα	Ἀριθ. ἑδρῶν	Ἀριθ. ἀκμῶν	Ἀριθ. κορυφῶν
Κύβος	—	—	—
Τριγωνικὸν πρῖσμα	—	—	—
Τριγωνικὴ πυραμὶς	—	—	—
Ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον	—	—	—
Πλάγιον παραλληλεπίπεδον	—	—	—

217. Συμπληρώσατε τὰς φράσεις:

α) Δύο εὐθεῖαι γραμμαὶ εἶναι παράλληλοι, ὅταν...
β) Ἐκεῖ ὅπου συναντῶνται 3 ἀκμαὶ τοῦ κύβου σχηματίζεται...
γ) Τὸ μέγεθος γωνίας δὲν ἐξαρτᾶται ἀπό...
δ) Αἱ ἀντικρυναὶ ἕδραι τοῦ κύβου εἶναι...
ε) Ἡ περίμετρος τραπεζίου εἶναι γραμμή...

ΤΑΞΙΣ ΣΤ'

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ

ΚΥΛΙΝΔΡΟΣ

1. ΚΥΡΤΗ ΚΑΙ ΕΠΙΠΕΔΟΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΤΟΥ ΚΥΛΙΝΔΡΟΥ

Ἡ εἰκὼν δεικνύει ἕνα κύλινδρον (εἰκ. 97). Ὅταν ἔχωμεν ἕνα κύλινδρον καὶ θέσωμεν τὰ χέρια μας γύρω - γύρω εἰς τὸ ἔξω μέρος του, ἐγγίζομεν ἐπιφάνειαν, ἡ ὁποία εἶναι κυρτή.

Εἰς τὸ ἐπάνω μέρος καὶ εἰς τὸ κάτω μέρος τοῦ κυλίνδρου αἱ ἐπιφάνειαι εἶναι ἐπίπεδοι. Ἐπίπεδος εἶναι μία ἐπιφάνεια, ὅταν μία εὐθεῖα γραμμὴ ἐφαρμόζῃ παντοῦ εἰς ὅλα τὰ μέρη της.

Εἰς τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ἐφαρμόζει μόνον κατὰ τὴν μίαν διεύθυνσιν. Κατὰ τὴν ἄλλην διεύθυνσιν δὲν ἐφαρμόζει.

97

2. ΚΥΚΛΟΣ

Ἡ ἐπάνω ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου ἔχει τὸ σχῆμα τῆς εἰκόνος 98. Τὸ σχῆμα αὐτὸ λέγεται κύκλος.

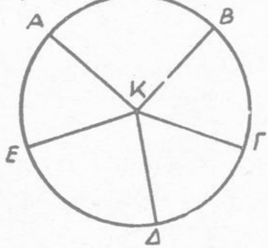
98

Κύκλος εἶναι μία ἐπίπεδος ἐπιφάνεια. Γύρω ἀπὸ αὐτὴν εἶναι μία κλειστὴ γραμμή, ἡ ὁποία λέγεται περιφέρεια τοῦ κύκλου.

Κέντρον κύκλου. Τὸ σημεῖον τὸ ὁποῖον εἶναι ἀκριβῶς εἰς τὸ μέσον τοῦ κύκλου, τὸ λέγομεν κέντρον.

Φέρομεν διαφόρους εὐθείας ἀπὸ τὸ κέντρον ἕως τὴν περιφέρειαν, ὅπως εἰς τὴν εἰκόνα 99, τὰς εὐθείας ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ, ΚΔ, ΚΕ. Παίρνομεν ἓν νῆμα καὶ τὰς μετρῶμεν. Βλέπομεν ὅτι ὅλαι εἶναι ἴσαι.

Ὥστε εἰς τὸν κύκλον ἡ ἀπόστασις ἀπὸ τὸ κέντρον ἕως τὴν περιφέρειαν εἶναι παντοῦ ἡ ἰδία (εἰκ. 99).



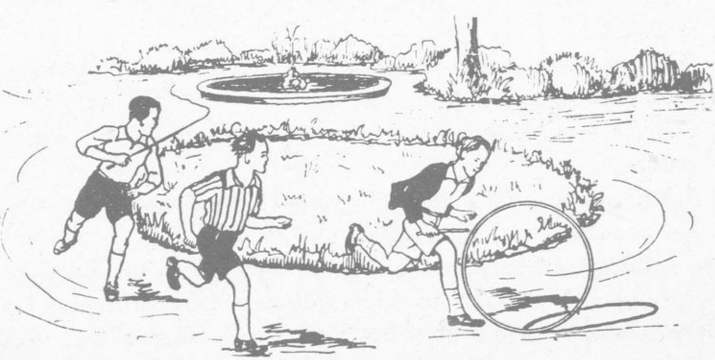
99

Περιφέρεια κύκλου. Περιφέρεια κύκλου εἶναι ἡ κλειστὴ καμπύλη γραμμή, ἡ ὁποία :

α) Εὑρίσκεται ἐπάνω εἰς ἐπίπεδον ἐπιφάνειαν.

β) Εἶναι τοιαύτη, ὥστε ὅλα τὰ σημεῖα της ἀπέχουν τὴν ἰδίαν ἀπόστασιν ἀπὸ ἓν σταθερὸν σημεῖον, τὸ ὁποῖον λέγεται κέντρον.

Τοιοῦτον σχῆμα ἔχει τὸ στεφάνι μὲ τὸ ὁποῖον παίζουν τὰ παιδιά, οἱ τροχοί, τὸ περιτείχισμα συντριβανιοῦ, κλπ. (εἰκ. 100).



100

Ἀ κ τ ί ς. Ἑκάστη εὐθεῖα γραμμή, ἡ ὁποία ἀρχίζει ἀπὸ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου καὶ τελειώνει εἰς ἓν σημεῖον τῆς περιφερείας λέγεται ἀκτίς.

Εἰς ἕκαστον κύκλον αἱ ἀκτῖνες εἶναι ἴσαι.

Γ ρ α φ ὴ π ε ρ ι φ ε ρ ε ί α ς. Διὰ νὰ γράψωμεν μίαν περιφέρειαν χρησιμοποιοῦμεν τὸν διαβήτην (εἰκ. 101).

Ἀνοίγομεν τὰ σκέλη τοῦ διαβήτου, ὥστε αἱ ἄκραι του νὰ ἀπέχουν τόσον, ὅσον θέλομεν νὰ εἶναι ἡ ἀκτίς.

101

Ἔχομεν ἐπίπεδον ἐπιφάνειαν. Στηρίζομεν τὴν μυτερὴν ἄκρην τοῦ διαβήτου εἰς τὸ σημεῖον, ὅπου θέλομεν νὰ εἶναι τὸ κέντρον. Τὸ ἄλλο ἄκρον τοῦ διαβήτου, τὸ ὁποῖον φέρει μολύβι, τὸ περιστρέφομεν ἐπάνω εἰς τὴν ἐπιφάνειαν, μέχρις ὅτου νὰ φθάσῃ ἐκεῖ, ἀπὸ ὅπου ἠρχίσαμεν. Προσέχομεν πολὺ νὰ μὴ ἀλλάξῃ τὸ ἄνοιγμα τοῦ διαβήτου.

Ἡ ἄκρα ἡ ὁποία περιστρέφεται, περνᾶ ἀπὸ σημεῖα, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ὅλα τὴν ἰδίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τὸ κέντρον.

Οὕτω ἡ ἄκρα αὐτὴ γράφει ἐπάνω εἰς τὴν ἐπίπεδον ἐπιφάνειαν περιφέρειαν κύκλου.

Διὰ νὰ γράψωμεν περιφέρειαν κύκλου εἰς τὸ ἔδαφος, στερεώνομεν εἰς τὸ χῶμα ἕνα πάσσαλον, ἐκεῖ ὅπου θέλομεν νὰ εἶναι τὸ κέντρον τῆς περιφερείας. Ἔπειτα παίρνομεν ἕνα σπάγγον καὶ δένομεν εἰς τὰ ἄκρα του ἀπὸ μίαν θηλειάν. Περνοῦμεν τὴν μίαν θηλειὰν εἰς τὸν πάσσαλον τὸν ὁποῖον ἐθέσαμεν διὰ κέντρον καὶ εἰς τὴν ἄλλην θηλειὰν περνοῦμεν ἕνα μυτερὸν σῶμα (ξύλο, καρφὶ κλπ.). Περιστρέφομεν τὸ μυτερὸ σῶμα ἐπάνω εἰς τὸ ἔδαφος γύρω ἀπὸ τὸ κέντρον, προσέχοντες ὥστε ὁ σπάγγος νὰ εἶναι διαρκῶς τεντωμένος. Τότε ἡ ἄκρα τοῦ λυτεροῦ σώματος, τὸ ὁποῖον περιστρέφομεν, θὰ χαράξῃ εἰς τὸ ἔδαφος περιφέρειαν κύκλου.

Κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον ἠμποροῦμεν νὰ γράψωμεν περιφέρειαν κύκλου ἐπὶ χάρτου. Ἀντὶ πασσάλου χρησιμοποιοῦμεν μίαν καρφίτσαν.

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς:

218. Ποία ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου εἶναι κυρτὴ καὶ ποία ἐπίπεδος;

219. Πῶς ἠμπορεῖς νὰ καταλάβῃς ἂν μία ἐπιφάνεια εἶναι ἢ δὲν εἶναι ἐπίπεδος;

220. Πῶς ἠμπορεῖς νὰ δείξῃς πῶς εἶναι μία εὐθεῖσα γραμμή;

221. Ποίαν γραμμὴν ὀνομάζομεν καμπύλην γραμμήν;

222. Γράψε μίαν περιφέρειαν κύκλου.

223. Γράψε μίαν περιφέρειαν κύκλου μὲ ἀκτῖνα 4 πόντων.

Δ ι ά μ ε τ ρ ο ς. Διάμετρος λέγεται ἡ εὐθεῖα γραμμή, ἡ ὁποία ἀρχίζει ἀπὸ ἓν ὁποιονδήποτε σημεῖον τῆς περιφερείας, περνᾶ ἀπὸ τὸ κέντρον καὶ τελειώνει εἰς τὸ ἀπέναντι σημεῖον τῆς περιφερείας.

Ὁ κύκλος ἔχει πολλὰς διαμέτρους.

Μετρῶντες πόσον μῆκος ἔχει ἡ ἀκτὶς καὶ πόσον μῆκος ἔχει ἡ διάμετρος, εὑρίσκομεν ὅτι ἡ διάμετρος ἔχει μῆκος διπλάσιον ἀπὸ τὸ μῆκος τῆς ἀκτῖνος (εἰκ. 102).

Ὅλαι αἱ διάμετροι τοῦ ἰδίου κύκλου εἶναι ἴσαι μεταξύ των.

102

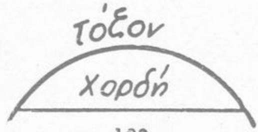
Ἀ σ κ ή σ ε ι ς:

224. Μία περιφέρεια κύκλου ἔχει ἀκτῖνα 4 πόντους. Πόσον μῆκος ἔχει ἡ διάμετρός του;

225. Ἡ διάμετρος ἑνὸς κύκλου ἔχει μῆκος 6 πόντους. Πόσον μῆκος ἔχει ἡ ἀκτίς του;

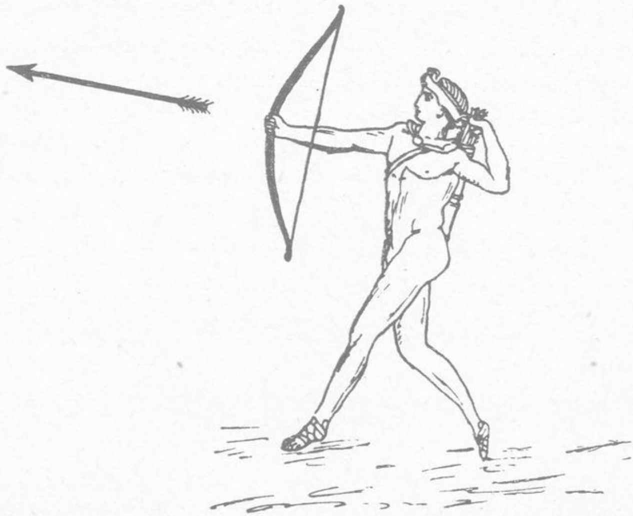
Τόξον. Τόξον λέγεται ἓν μέρος τῆς περιφερείας. Τὸ τόξον **εἶναι** καμπύλη γραμμή.

Χορδή. Χορδὴ εἶναι ἡ εὐθεῖα γραμμή, ἡ ὁποία ἑνώνει τὰ ἄκρα ἑνὸς τόξου (εἰκ. 103).



103

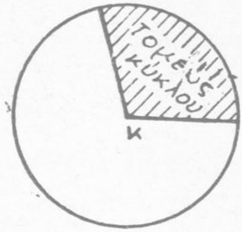
Τὴν παλαιὰν ἐποχὴν εἶχον ἓν ὅπλον, ὀνομαζόμενον τόξον. Αὐτὸς ὁ ὁποῖος τὸ ἐχρησιμοποίει ἐλέγετο τοξότης (εἰκ. 104). Μὲ τὸ τόξον ἔρριπταν βέλη. Τὸ τόξον ἦτο ἀπὸ βέργαν δένδρου, τὴν ὁποίαν ἐκαμπύλωναν. Τὴν ἐκαμπύλωναν δένοντες εἰς τὰ ἄκρα της ἀπεξηραμμένο ἔντερον ζώου, τὸ ὁποῖον ἐλέγετο χορδή. Ἀπὸ τὸ ὅπλον τόξον καὶ ἀπὸ τὴν χορδήν του ἔλαβε τὸ ὄνομα τὸ τόξον τῆς περιφερείας καὶ ἡ χορδή.



104

Τμῆμα κύκλου. Τμῆμα κύκλου λέγεται τὸ μέρος τοῦ κύκλου, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται μεταξὺ τόξου καὶ τῆς χορδῆς του (εἰκ. 105).

Τομεὺς κύκλου. Τομεὺς τοῦ κύκλου εἶναι τὸ μέρος τοῦ κύκλου, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται μεταξὺ ἑνὸς τόξου καὶ δύο ἀκτίνων, αἱ ὁποῖαι τελειώνουν εἰς τὰ ἄκρα τοῦ τόξου (εἰκ. 106).



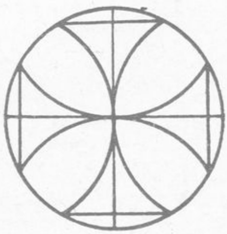
105 106

'Α σ κ ή σ ε ι ς:

226. Κατασκεύασε ἀπὸ χαρτόνι ἕνα κύκλον, κόψε αὐτὸν γύρω - γύρω μὲ ψαλίδι. Σημείωσε ἐπάνω του ἓν τόξον, μίαν χορδήν, ἕνα τομέα.

227. Πῶς λέγεται μία ἐπιφάνεια, ἡ ὁποία περικλείεται ἀπὸ μίαν καμπύλην γραμμὴν (ἡ ὁποία εἶναι τόξον) καὶ μίαν εὐθεῖαν γραμμὴν (ἡ ὁποία εἶναι χορδή);

228. Σχεδίασε μίαν περιφέρειαν καὶ δύο διαμέτρους, αἱ ὁποῖαι εἶναι κάθετοι μεταξύ των. Ἔπειτα τελείωσε τὸ σχῆμα ὅπως φαίνεται εἰς τὴν εἰκόνα 107. Ποῖαι γραμμαὶ εἶναι χορδαὶ καὶ ποῖαι εἶναι τόξα; (εἰκ. 107).

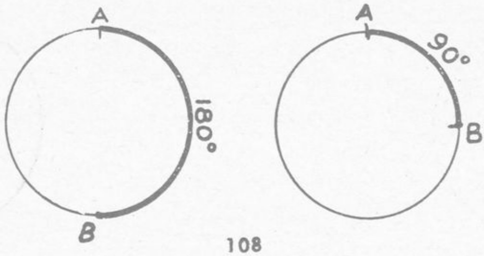


107

Δ ι α ί ρ ε σ ι ς τ ῆ ς π ε ρ ι φ ε ρ ε ί α ς. Ἀπὸ πολὺ παλαιὰν ἐποχὴν ἐχώρισαν τὴν περιφέρειαν εἰς 360 ἴσα μέρη. Κάθε μέρος ἀπὸ αὐτὰ ὀνομάζεται **μ ο ῖ ρ α**.

Τὰς μοίρας σημειώνουν μὲ ἓν μικρὸ μηδὲν (^{0}). Τὸ γράφουν δεξιὰ ἐπάνω ἀπὸ τὸν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος δεικνύει τὰς μοίρας. Π.χ. διὰ νὰ σημειώσουν 360 μοίρας, γράφουν 360^0.

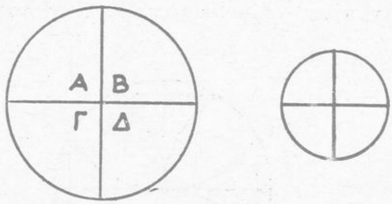
Ἀφοῦ ὅλη ἡ περιφέρεια εἶναι 360^0, τὸ ἥμισυ τῆς περιφερείας, δηλ. ἀπὸ τὸ Α ἕως τὸ Β, θὰ εἶναι 180^0, καὶ τὸ ¼ τῆς περιφερείας, δηλ. ἀπὸ τὸ Α ἕως τὸ Γ εἶναι 90^0 (εἰκ. 108).



108

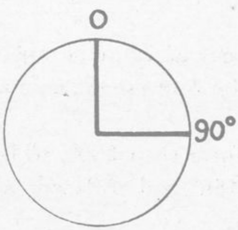
Πόσαι ὀρθαὶ γωνίαι ἀντιστοιχοῦν εἰς μίαν περιφέρειαν. Ἔχομεν μίαν περιφέρειαν κύκλου. Φέρομεν μίαν διάμετρον καὶ ἔπειτα μίαν ἄλλην κάθετον εἰς αὐτήν, ὅπως εἰς τὴν εἰκόνα 109. Βλέπομεν ὅτι ἐσχηματίσθηκαν 4 ὀρθαὶ γωνίαι, ἡ γωνία Α, ἡ γωνία Β, ἡ γωνία Γ καὶ ἡ γωνία Δ.

Καὶ εἰς μεγάλην περιφέρειαν καὶ εἰς μικρὰν περιφέρειαν, ἂν κάμωμεν τὸ ἴδιον, πάντοτε 4 ὀρθαὶ γωνίαι σχηματίζονται (εἰκ. 109). Εἰς κάθε περιφέρειαν λοιπὸν ἀντιστοιχοῦν 4 ὀρθαὶ γωνίαι.



109

Μοῖραι μιᾶς ὀρθῆς γωνίας. Ξεύρομεν ὅτι ἑκάστη περιφέρεια ἔχει 360^0 καὶ εὑρήκαμεν ὅτι εἰς ἑκάστην περιφέρειαν ἀντιστοιχοῦν 4 ὀρθαὶ γωνίαι. Ἀπὸ αὐτὸ συμπεραίνομεν ὅτι ἡ μία ὀρθὴ γωνία ἀντιστοιχεῖ μὲ $360^0 : 4 = 90^0$ (εἰκ. 110).

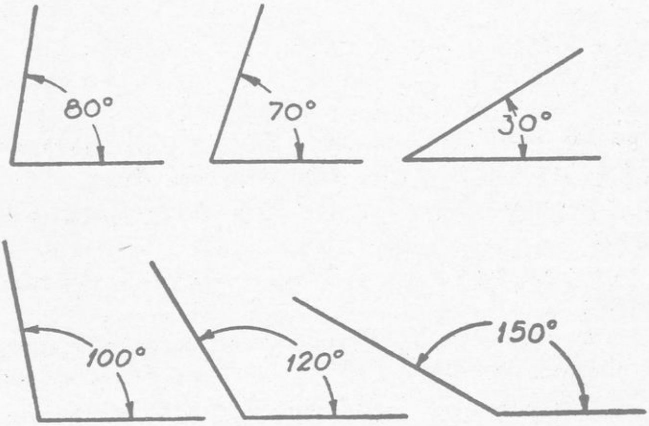


110

Μέτρησις γωνιῶν. Τὰς γωνίας, εἴτε εἶναι σχεδιασμέναι εἰς κύκλον εἴτε ὄχι, τὰς μετρῶμεν μὲ μοίρας. Ἡ ὀρθὴ γωνία εἶναι 90°.

Αἱ ὀξεῖαι γωνίαι εἶναι μικρότεραι ἀπὸ 90°. Π.χ. ὀξεῖαι γωνίαι εἶναι αἱ γωνίαι 80°, 70°, 30° κλπ.

Αἱ ἀμβλεῖαι γωνίαι εἶναι μεγαλύτεραι ἀπὸ 90°. Π.χ. ἀμβλεῖαι εἶναι αἱ γωνίαι 100°, 120°, 150° κλπ. (εἰκ. 111).



111

Ἀσκήσεις:

229. Μία γωνία 40° εἶναι ὀξεῖα ἢ εἶναι ἀμβλεῖα;
230. Πόσων μοιρῶν τὸ ὀλιγώτερον πρέπει νὰ εἶναι μία γωνία διὰ νὰ τὴν χαρακτηρίσωμεν ὡς ἀμβλεῖαν;

3. ΠΟΛΥΓΩΝΟΝ

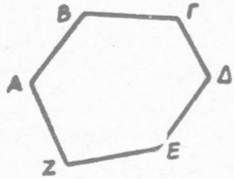
Πολύγωνον λέγεται ἡ ἐπίπεδος ἐπιφάνεια, ἡ ὁποία τελειώνει γύρω - γύρω εἰς εὐθείας γραμμάς.

Αἱ εὐθεῖαι γραμμαὶ λέγονται πλευραὶ τοῦ πολυγώνου.

Τὰ σημεῖα, εἰς τὰ ὁποῖα μία πλευρὰ συναντᾶ μίαν ἄλλην, λέγονται κορυφαὶ τοῦ πολυγώνου.

Αἱ πλευραὶ τοῦ πολυγώνου ἀνὰ δύο σχηματίζουν μίαν γωνίαν.

Ἂν προσθέσωμεν ὅλας τὰς πλευρὰς τοῦ πολυγώνου, εὑρίσκομεν τὴν περίμετρον τοῦ πολυγώνου. Περίμετρος τοῦ πολυγώνου εἰς τὴν εἰκόνα 112 εἶναι



112

τὸ ἄθροισμα ΑΒ + ΒΓ + ΓΔ + ΔΕ + ΕΖ + ΖΑ (εἰκ. 112).

Εἴδη πολυγώνου. Εἴδη πολυγώνου εἶναι :

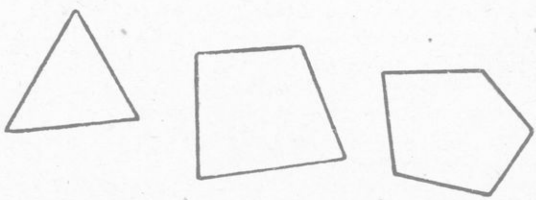
Τὸ τρίγωνον. Τρίγωνον εἶναι τὸ πολύγωνον, τὸ ὁποῖον ἔχει τρεῖς πλευράς.

Τὸ τετράπλευρον. Εἶναι τὸ πολύγωνον, τὸ ὁποῖον ἔχει τέσσαρας πλευράς.

Τὸ πεντάγωνον. Πεντάγωνον λέγεται τὸ πολύγωνον, τὸ ὁποῖον ἔχει πέντε πλευράς. 113

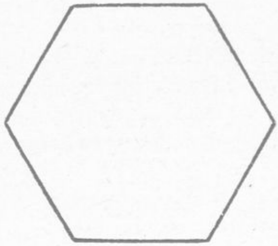
Τὸ ἑξάγωνον. Ἑξάγωνον λέγεται τὸ πολύγωνον, τὸ ὁποῖον ἔχει ἓξ πλευράς.

Τὸ ἑπτάγωνον, τὸ ὀκτάγωνον κλπ. εἶναι ἐπίσης πολύγωνα, τὰ ὁποῖα ἔχουν 7, 8 κλπ. πλευράς.



113

Κανονικὸν πολύγωνον. Κανονικὸν λέγεται ἓν πολύγωνον, ὅταν ὅλαι αἱ πλευραί του εἶναι ἴσαι μεταξύ των καὶ ὅλαι αἱ γωνίαι του ἐπίσης ἴσαι μεταξύ των. Π.χ. κανονικὸν πολύγωνον εἶναι ἓν ἰσόπλευρον τρίγωνον, ἓν τετράγωνον κλπ. (εἰκ. 114).



114

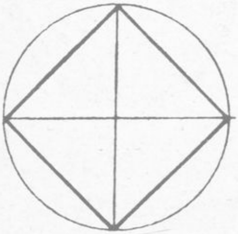
Πολύγωνον ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον. Πολύγωνον ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον λέγεται τὸ πολύγωνον, τοῦ ὁποίου ὅλαι αἱ κορυφαὶ εὑρίσκονται ἐπάνω εἰς περιφέρειαν κύκλου.

Νὰ ἐγγραφῇ εἰς κύκλον τετράγωνον. Ἐπειδὴ τὸ τετράγωνον ἔχει 4 πλευρὰς ἴσας, πρέπει αἱ κορυφαὶ τοῦ τετραγώνου νὰ ἐγγίζουν εἰς 4 σημεῖα τῆς περιφερείας, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἴσας ἀποστάσεις μεταξύ των.

Ἔχομεν τὴν περιφέρειαν. Φέρομεν δύο διαμέτρους καθέτους μεταξύ των. Αἱ διάμετροι αὐταὶ τέμνουν τὴν περιφέρειαν εἰς 4 σημεῖα, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν μεταξύ των ἴσας ἀποστάσεις.

Ἑνώνοντες μὲ εὐθείας τὰ 4 αὐτὰ σημεῖα, ἔχομεν ἓν τετράγωνον ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον (εἰκ. 115).

Ἀπὸ ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον τετράγωνον, ποῖον ἄλλο πολύγωνον εἶναι δυνατὸν νὰ σχεδιάσωμεν; Ἔχομεν ἓν τετράγωνον ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον. Κάθε τόξον, τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου, τὸ χωρίζομεν εἰς 2 ἴσα μέρη. Οὕτω σημειώνομεν ἐπάνω εἰς τὴν περιφέρειαν 8 σημεῖα. Ἑνώνοντες αὐτὰ μὲ εὐθείας, σχεδιάζομεν κανονικὸν ὀκτάγωνον (εἰκ. 116).



115

116

Ἀσκήσεις:

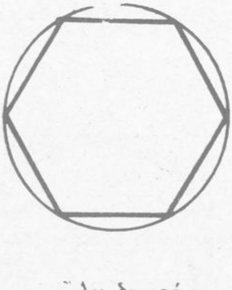
231. Ποῖον πολύγωνον λέγεται κανονικόν;
232. Ποῖον πολύγωνον λέγεται ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον;
233. Σχεδίασε ἓν τετράγωνον ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον;
234. Σχεδίασε ἓν ὀκτάγωνον ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον;
235. Ἀπὸ κανονικὸν ὀκτάγωνον ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον, ποῖα ἄλλα κανονικὰ πολύγωνα ἠμπορεῖς νὰ σχεδιάσης;
236. Σχεδίασε ἓν κανονικὸν δεκαεξάγωνον.
237. Σχεδίασε μὲ τὸν διαβήτην ἕνα κύκλον καὶ ὕστερα μὲ ἄνοιγμα τοῦ διαβήτου ὅση εἶναι ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου, χώρισε τὴν περιφέρειαν εἰς τόξα. Εἰς πόσα ἴσα τόξα θὰ χωρισθῇ;

Πῶς σχεδιάζομεν κανονικὸν ἑξάγωνον. Διὰ νὰ σχεδιάσωμεν κανονικὸν ἑξάγωνον, πρῶτον γράφομεν μίαν περιφέρειαν.

Ἔπειτα ἀρχίζομεν ἀπὸ ἓν ὁποιοδήποτε σημεῖον τῆς περιφερείας καὶ μὲ ἄνοιγμα τοῦ διαβήτου ὅση εἶναι ἡ ἀκτίς, χωρίζομεν τὴν περιφέρειαν εἰς τόξα. Βλέπομεν τότε ὅτι χωρίζεται οὕτω εἰς 6 ἴσα τόξα.

Ὥστε ἔχομεν 6 σημεῖα ἐπάνω εἰς τὴν περιφέρειαν, τῶν ὁποίων αἱ ἀποστάσεις εἶναι ἴσαι μεταξύ των. Ἑνώνοντες τὰ σημεῖα αὐτά, τὸ ἓν μὲ τὸ πλαγινό του, σχεδιάζομεν κανονικὸν ἑξάγωνον (εἰκ. 117).

Ἔχοντες κανονικὸν ἑξάγωνον ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον, ποῖα ἄλλα κανονικὰ πολύγωνα ἠμποροῦμε νὰ σχεδιάσωμεν ἀπὸ αὐτό; Ἂν διαιρέσωμεν τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς πλευρὰς τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου, εἰς δύο μέρη, εὑρίσκομεν τὰς κορυφὰς τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου, τὸ ὁποῖον ἔχει 12 πλευράς. Αὐτὸ λέγεται κανονικὸν δωδεκάγωνον (εἰκ. 118).



117

118

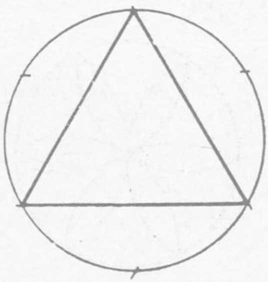
Ἂν διαιρέσωμεν τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς πλευρὰς κανονικοῦ δωδεκαγώνου εἰς δύο ἴσα μέρη, εὑρίσκομεν τὰς κορυφὰς κανονικοῦ πολυγώνου, τὸ ὁποῖον ἔχει 2πλάσιον ἀριθμὸν πλευρῶν.

Ἀσκήσεις

238. Σχεδίασε κανονικὸν ἑξάγωνον.
239. Σχεδίασε κανονικὸν 12γωνον.
240. Σχεδίασε κανονικὸν 24γωνον.
241. Πῶς ἠμπορεῖς νὰ σχεδιάσῃς κανονικὸν πολύγωνον, τὸ ὁποῖον ἔχει 48 πλευράς;
242. Ἀρχίζοντες ἀπὸ ποῖον πολύγωνον, ἠμποροῦμεν νὰ σχεδιάσωμεν κανονικὸν 16γωνον;
243. Σχεδίασε ἓν κανονικὸν πολύγωνον μὲ 32 πλευράς.

Πῶς ἐγγράφομεν εἰς κύκλον ἰσόπλευρον τρίγωνον; Ἀνοίγομεν τὰ σκέλη τοῦ διαβήτου τόσον, ὅση εἶναι ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου, τὸν ὁποῖον ἔχομεν, καὶ ἀρχίζοντες ἀπὸ ἓν σημεῖον τῆς περιφερείας σημειώνομεν ἐπάνω εἰς τὴν περιφέρειαν 6 σημεῖα. Οὕτω χωρίζεται ἡ περιφέρεια εἰς ἓξ ἴσα τόξα.

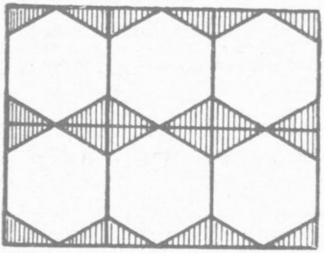
Ἔπειτα ἓν σημεῖον ἀπὸ αὐτὰ τὸ ἀφίνομεν καὶ τὸ ἑπόμενόν του τὸ σβήνομεν. Οὕτω μένουν εἰς τὴν περιφέρειαν 3 σημεῖα. Ἑνώνοντες αὐτὰ μὲ χορδάς, ἔχομεν τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον (εἰκ. 119).

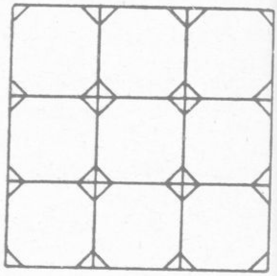


119

Ἀσκήσεις

244. Νὰ ἐγγράψῃς εἰς κύκλον ἰσόπλευρον τρίγωνον.
245. Ποίαν σχέσιν ἔχουν μεταξύ των αἱ γωνίαι ἰσοπλεύρου τριγώνου;
246. Ἔχομεν κύκλους, οἱ ὁποῖοι ἔχουν ἴσας διαμέτρους. Εἰς αὐτοὺς εἶναι ἐγγεγραμμένα κανονικὰ πολύγωνα, ἄλλα μὲ ὀλίγας πλευρὰς καὶ ἄλλα μὲ πολλάς. Νὰ εὕρῃς ποῖον ἀπὸ τὰ πολύγωνα ἔχει τὴν μεγαλυτέραν περίμετρον.
247. Τί σχήματα βλέπεις ἐπάνω εἰς τὰ πλακάκια τῆς εἰκόνος 120;
248. Πρόσεξε τί σχῆμα ἔχουν τὰ πλακάκια εἰς τὴν εἰκόνα 121.





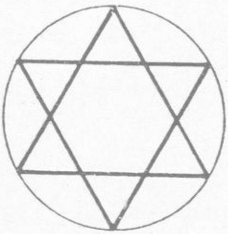
120 121

249. Σχεδίασε δύο ἰσόπλευρα τρίγωνα, ὅπως δεικνύει ἡ εἰκὼν 123.

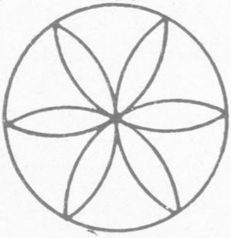
250. Γράφε περιφέρειαν κύκλου. Ἔπειτα πάρε ὡς κέντρον ἓν σημεῖον τῆς περιφερείας καὶ μὲ τὴν ἰδίαν ἀκτῖνα γράφε τόξον, ὥστε νὰ ἐγγίζῃ τὴν περιφέρειαν. Τὸ τόξον αὐτὸ τέμνει τὴν ἀρχικὴν περιφέρειαν εἰς δύο σημεῖα. Μὲ κέντρα τὰ δύο αὐτὰ σημεῖα καὶ μὲ τὴν ἰδίαν ἀκτῖνα γράφε νέα τόξα καὶ ἐξακολούθησε, διὰ νὰ γίνῃ τὸ σχῆμα τῆς εἰκόνος (εἰκ. 122).

251. Γράφε μίαν περιφέρειαν κύκλου καὶ γύρω - γύρω ἓν τετράγωνον. Μὲ κέντρα τὰς κορυφὰς τοῦ τετραγώνου καὶ ἀκτῖνα τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου γράφε τέσσαρα τόξα, διὰ νὰ γίνῃ σχῆμα ὅπως τῆς εἰκόνος (εἰκ. 125).

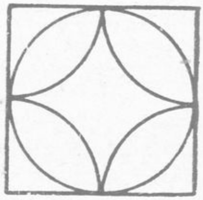
252. Σχεδίασε τετράγωνον. Διαίρεσέ το εἰς 4 μέρη καὶ εἰς κάθε ἓν γράφε μίαν περιφέρειαν κύκλου (εἰκ. 125).



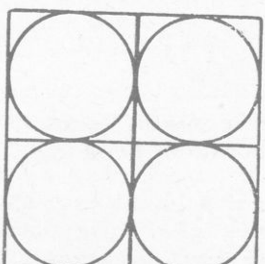
122



123



124



125

Κ έ ν τ ρ ο ν   κ α ν ο ν ι κ ο ῦ   π ο λ υ γ ώ ν ο υ. Κέντρον κανονικοῦ πολυγώνου λέγεται τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, εἰς τὸν ὁποῖον εἶναι ἐγγεγραμμένον τὸ πολύγωνον.

Ἀ π ό σ τ η μ α. Ἂν ἀπὸ τὸ κέντρον τοῦ πολυγώνου φέρωμεν εὐθεῖαν κάθετον πρὸς μίαν πλευράν του, τὸ μῆκος τῆς καθέτου αὐτῆς λέγεται ἀπόστημα (εἰκ. 126).

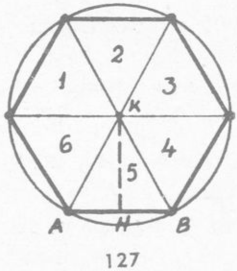
126

Π ῶ ς   ε ὑ ρ ί σ κ ο μ ε ν   π ό σ η   ε ἶ ν α ι   ἡ   ἐ π ι φ ά ν ε ι α   κ α ν ο ν ι κ ο ῦ   π ο λ υ γ ώ ν ο υ. Ἔχομεν π.χ. ἓν κανονικὸν ἑξάγωνον καὶ θέλομεν νὰ εὕρωμεν πόση εἶναι ἡ ἐπιφάνειά του.

Ἐπειδὴ ξεύρομεν κατὰ ποῖον τρόπον εὑρίσκομεν τὴν ἐπιφάνειαν τριγώνου, χωρίζομεν τὸ ἑξάγωνον εἰς τρίγωνα.

Φέρομεν δηλαδὴ εὐθείας ἀπὸ τὸ κέντρον πρὸς τὰς κορυφὰς τοῦ ἑξαγώνου. Τὸ ἑξάγωνον χωρίζεται οὕτω εἰς 6 ἴσα τρίγωνα.

Εὑρίσκοντες τὴν ἐπιφάνειαν τῶν 6 ἴσων αὐτῶν τριγώνων, ἔχομεν τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ πολυγώνου (εἰκ. 127).



127

Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἑνὸς τριγώνου εὑρίσκεται, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὴν βάσιν του ΑΒ ἐπὶ τὸ ὕψος του ΚΗ καὶ διαιρέσωμεν διὰ 2. Εἶναι δηλαδὴ $\frac{AB \times KH}{2}$

Ἡ ἐπιφάνεια τῶν 6 τριγώνων εἶναι 6 φορὰς μεγαλυτέρα, δηλαδὴ

Περίμετρος τοῦ πολυγώνου $4 \times 6 = 24$ μέτρα.

Τὸ ἥμισυ τοῦ ἀποστήματος $\frac{3,5}{2} = 1,75$ μέτρα.

Πολλαπλασιάζοντες τὴν περίμετρον (24) ἐπὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ἀποστήματος (1,75) ἔχομεν: $24 \times 1,75 = 42$ τετραγωνικὰ μέτρα.

Καὶ μὲ τοὺς δύο τρόπους εὑρίσκομεν τὸ ἴδιον ἐξαγόμενον.

Ἀσκήσεις:

253. Σχεδίασε ἓν μεγάλο κανονικὸν ἑξάγωνον καὶ νὰ εὕρῃς πόσην ἐπιφάνειαν ἔχει.

Ὅταν ἔχωμεν ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον κανονικὸν πολύγωνον μὲ πάρα πολλὰς πλευράς, ἡ περίμετρος τοῦ πολυγώνου αὐτοῦ πόσον μῆκος θὰ ἔχῃ;

Ἐγγράφομεν εἰς κύκλον ἑξάγωνον καὶ μετρῶντες εὑρίσκομεν πόσον μῆκος ἔχει ἡ περίμετρός του.

$\frac{6 \times AB \times KH}{2}$. Αὐτὸ ἠμποροῦμεν νὰ τὸ γράψωμεν καὶ ὡς ἑξῆς: $6 \times AB \times \frac{KH}{2}$

Ὅπως βλέπομεν εἰς τὸ σχῆμα, τὸ μῆκος $6 \times AB$ εἶναι ἡ περίμετρος τοῦ πολυγώνου. Τὸ $\frac{KH}{2}$ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ἀποστήματος.

Διὰ νὰ εὕρωμεν λοιπὸν τὴν ἐπιφάνειαν κανονικοῦ πολυγώνου, πολλαπλασιάζομεν τὴν περίμετρόν του ἐπὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ἀποστήματος.

Τώρα ἂς κάμωμεν τοὺς λογαριασμοὺς μὲ ἀριθμούς. Π.χ. $AB = 4$ μέτρα καὶ $KH = 3,5$ μέτρα.

Εὑρίσκοντες χωριστὰ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἑνὸς τριγώνου καὶ ὕστερα τῶν 6 τριγώνων ἔχομεν:

Ἐπιφάνεια τοῦ ἑνὸς τριγώνου εἶναι $\frac{4 \times 3,5}{2} = 7$ τ.μ.

Ἐπιφάνεια τῶν 6 τριγώνων εἶναι: $6 \times 7 = 42$ τ.μ.

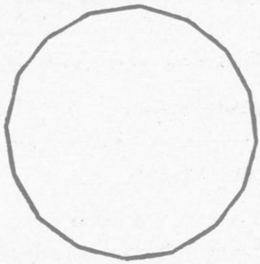
Δηλαδὴ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πολυγώνου εἶναι: 42 τετραγωνικὰ μέτρα.

Ἂν ἐφαρμόσωμεν τὸν κανόνα, ποὺ εὑρήκαμεν, ἔχομεν:

Εἰς τὸν ἴδιον κύκλον ἐγγράφομεν δωδεκάγωνον καὶ εὑρίσκομεν τὴν περίμετρόν του. Ἡ περίμετρος τοῦ δωδεκαγώνου εἶναι μεγαλυτέρα.

Εἰς τὸν ἴδιον κύκλον ἐγγράφομεν εἰκοσιτετράγωνον. Εὑρίσκομεν ὅτι αὐτὸ ἔχει ἀκόμη μεγαλυτέραν περίμετρον.

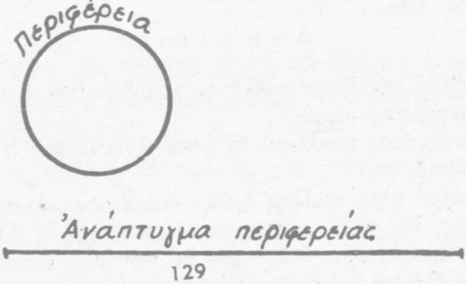
Ὅταν ἐγγράψωμεν εἰς κύκλον ἓν πολύγωνον μὲ πάρα πολλὰς πλευράς, ἡ περίμετρος τοῦ πολυγώνου αὐτοῦ θὰ εἶναι σχεδὸν ὅση ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου (εἰκ. 128).



128

Ἀνάπτυγμα περιφερείας κύκλου. Θέτομεν νῆμα γύρω — γύρω εἰς τὴν περιφέρειαν ἑνὸς κύκλου, π.χ. ἑνὸς τροχοῦ. Ἔπειτα τεντώνομεν τὸ νῆμα, ὥστε νὰ πάρῃ σχῆμα εὐθείας γραμμῆς. Ἡ εὐθεῖα αὐτὴ λέγεται ἀνάπτυγμα τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου.

Τὸ ἀνάπτυγμα τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου φυσικὰ ἔχει τόσον μῆκος, ὅσον ἔχει ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου (εἰκ. 129).



129

Σχέσις μήκους περιφερείας κύκλου καὶ μήκους τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου. Ἔχομεν περιφερείας κύκλου καὶ εὑρίσκομεν μὲ ἀκρίβειαν :

α) Πόσον μῆκος ἔχουν τὰ ἀναπτύγματα τῶν περιφερειῶν.

β) Πόσον μῆκος ἔχουν αἱ διάμετροι τῶν κύκλων.

Γράφομεν τοὺς ἀριθμούς, ποὺ εὑρίσκομεν. Οὕτω ἔχομεν :

Μῆκος περιφερείας κύκλου	Μῆκος διαμέτρου κύκλου
21,98	7
37,68	12

Ἂν διαιρέσωμεν τὸ μῆκος τῆς πρώτης περιφερείας, ἡ ὁποία εἶναι 21,98 διὰ τοῦ μήκους τῆς ἀντιστοίχου διαμέτρου (7), εὑρίσκομεν 3,14.

Ἂν διαιρέσωμεν τὸ μῆκος τῆς δευτέρας περιφερείας 37,68 διὰ τῆς ἀντιστοίχου διαμέτρου (12) εὑρίσκομεν τὸν ἴδιον ἀριθμὸν 3,14.

Ὅσον καὶ ἂν εἶναι τὸ μῆκος μιᾶς περιφερείας, ὅταν τὸ διαιρέσωμεν διὰ τῆς ἀντιστοίχου διαμέτρου, εὑρίσκομεν πάντοτε τὸν ἴδιον ἀριθμόν, 3,14. Ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς παριστάνεται εἰς τὰ βιβλία ὅλων τῶν ἐθνῶν μὲ τὸ ἑλληνικὸν γράμμα π.

Τὴν διαίρεσιν ἠμποροῦμεν νὰ γράψωμεν ὡς κλάσμα :

$$\frac{\text{Μῆκος περιφερείας κύκλου}}{\text{Μῆκος διαμέτρου κύκλου}} = 3{,}14 = \pi.$$

Πῶς εὑρίσκομεν τὸ μῆκος περιφερείας κύκλου. Πολλαπλασιάζομεν τὸ 3,14 ἐπὶ τὸ μῆκος τῆς διαμέτρου 7 τοῦ πρώτου κύκλου. Εὑρίσκομεν τὸ μῆκος τῆς περιφερείας τοῦ πρώτου κύκλου 21,98.

Πολλαπλασιάζομεν τὸ 3,14 ἐπὶ τὸ μῆκος τῆς διαμέτρου 12 τοῦ δευτέρου κύκλου. Εὑρίσκομεν τὸ μῆκος τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου 37,68.

Γενικὰ ἠμποροῦμεν νὰ εὑρίσκωμεν πόσον μῆκος ἔχει μία περιφέρεια κύκλου, χωρὶς νὰ εὕρωμεν τὸ ἀνάπτυγμά της, ἀρκεῖ νὰ μετρήσωμεν μόνον πόσον μῆκος ἔχει ἡ διάμετρος τῆς περιφερείας καὶ τὸν ἀριθμὸν αὐτὸν νὰ τὸν πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 3,14.

Ἀσκήσεις:

254. Τὸ μῆκος τῆς διαμέτρου ἑνὸς κύκλου εἶναι 5 πόντοι. Πόσον εἶναι τὸ μῆκος τῆς περιφερείας του;

255. Ἡ ἀκτὶς ἑνὸς κυκλικοῦ ἁλωνιοῦ ἔχει μῆκος 3 μέτρα. Πόσον μῆκος ἔχει ἡ περιφέρειά του;

256. Οἱ τροχοὶ μιᾶς ἁμάξης ἔχουν διάμετρον μήκους 125 πόντων καὶ ἔκαμαν 30 στροφάς. Εἰς πόσην ἀπόστασιν μετεκινήθη ἡ ἅμαξα;

257. Ἕνας τροχὸς ἔχει διάμετρον 90 πόντους. Πόσον μῆκος πρέπει νὰ ἔχῃ τὸ μεταλλικὸν ἔλασμα, τὸ ὁποῖον θὰ βάλουν γύρω - γύρω εἰς τὸν τροχόν;

4. ΕΥΡΕΣΙΣ ΤΗΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ ΚΥΚΛΟΥ

Ὁ κύκλος, ὅπως εἴδομεν, εἶναι ὡς ἓν κανονικὸν πολύγωνον, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ εἶναι πάρα πολὺ μικραί.

Ξεύρομεν ὅτι εὑρίσκομεν τὴν ἐπιφάνειαν κανονικοῦ πολυγώνου, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὴν περίμετρόν του ἐπὶ τὸ ½ τοῦ ἀποστήματος.

Περίμετρος τοῦ κύκλου εἶναι ἡ περιφέρειά του καὶ ἀπόστημα εἶναι ἡ ἀκτίς του.

Ἠμποροῦμεν λοιπὸν νὰ εὕρωμεν τὴν ἐπιφάνειαν κύκλου, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὴν περιφέρειάν του ἐπὶ τὸ ½ τῆς ἀκτῖνος.

$$\text{Ἐπιφάνεια κύκλου} = \text{Περιφέρεια} \times \frac{\text{Ἀκτὶς}}{2}$$

Π.χ. ἔχομεν ἕνα κύκλον, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς εἶναι 5 πόντοι. Ἡ διάμετρός του εἶναι 10 πόντοι.

Ἡ περιφέρειά του εἶναι	10 × 3,14	=	31,4 πόντοι
τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνοςεἶναι	5/2	=	2,5

Ἡ ἐπιφάνεια λοιπὸν αὐτοῦ τοῦ κύκλου εἶναι

31,4 × 2,5 = 78,5 τετραγωνικοὶ πόντοι.

Ἀσκήσεις

258. Νὰ ὑπολογίσετε τὴν ἐπιφάνειαν κύκλου, ὁ ὁποῖος ἔχει ἀκτῖνα 7 πόντους.

259. Ἕνας κύκλος ἔχει διάμετρον 9 πόντους. Πόση εἶναι ἡ ἐπιφάνειά του;

260. Ἡ διάμετρος ἑνὸς ἁλωνιοῦ εἶναι 8 μέτρα. Πόσα τετραγωνικὰ μέτρα εἶναι ἡ ἐπιφάνειά του;

261. Μία κυκλικὴ δεξαμενὴ ἔχει περιφέρειαν 14 μέτρα. Πόση εἶναι ἡ ἐπιφάνειά της;

5. ΕΥΡΕΣΙΣ ΤΗΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ ΚΥΛΙΝΔΡΟΥ

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ἐπιφάνειαν ἑνὸς κυλίνδρου πρέπει:

α) Νὰ εὕρωμεν τὴν ἐπιφάνειαν τῶν δύο κύκλων οἱ ὁποῖοι ἀποτελοῦν τὰς βάσεις τοῦ κυλίνδρου.

β) Νὰ εὕρωμεν τὴν ἐπιφάνειαν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του καὶ νὰ τὰ προσθέσωμεν.

Εὑρίσκομεν πρῶτον τὴν ἐπιφάνειαν τῶν δύο κύκλων. Ἂν ὁ κύκλος ἔχῃ διάμετρον 6 πόντους,

ἡ περιφέρειά του εἶναι	6 × 3,14 = 18,84 πόντοι
ἡ ἀκτὶς εἶναι	3 »
τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος	1,5 »

ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κύκλου εἶναι 18,84 × 1,5 = 28,26 τετραγων. πόντοι.

Ἡ ἐπιφάνεια καὶ τῶν δύο κύκλων μαζὶ εἶναι:

28,26 τετρ. πόντοι × 2 = 56,52 τετραγων. πόντοι.

Εὑρίσκομεν τώρα τὴν ἐπιφάνειαν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου.

Ἂν ἀνοίξωμεν τὸν κύλινδρον, βλέπομεν ὅτι ἡ κυρτὴ ἐπιφάνειά του γίνεται ἓν ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις ἔχει τόσον μῆκος, ὅσον μῆκος ἔχει ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου καὶ ὕψος, ὅσον ὕψος ἔχει ὁ κύλινδρος.

Ἡ περιφέρεια ἔχει μῆκος $6 \times 3{,}14 = 18{,}84$ πόντους.

Ἂν τὸ ὕψος τοῦ κυλίνδρου εἶναι 8 πόντοι, τὸ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον ἔχει ἐπιφάνειαν $18{,}84 \times 8 = 152{,}92$ τετραγωνικοὺς πόντους.

Ἔχομεν λοιπόν: Ἐπιφάνεια τῶν δύο κύκλων

28,26 τετραγ. πόντοι $\times$ 2 = 56,52 τετραγ. πόντοι.

Ἐπιφάνεια κυρτῆς ἐπιφανείας 152,92 τετραγ. πόντοι.

Ὥστε ἡ ἐπιφάνεια ὁλοκλήρου τοῦ κυλίνδρου εἶναι 209,44 τετραγ. πόντοι.

Ἀσκήσεις

262. Ἕνας κυλινδρικὸς στῦλος ἔχει διάμετρον εἰς τὴν βάσιν του 90 πόντους καὶ τὸ ὕψος του εἶναι 7 μέτρα. Πόση εἶναι ἡ ἐπιφάνειά του καὶ πόσον θὰ κοστίσῃ ὁ ἐλαιοχρωματισμὸς τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του πρὸς 30,40 δρχ. τὸ τετραγωνικὸν μέτρον;

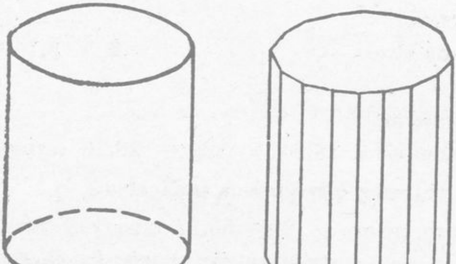
263. Πρόκειται νὰ κατασκευάσουν σωλῆνα διὰ θερμάστραν. Θὰ ἔχῃ διάμετρον 12 πόντους καὶ ὕψος 85 πόντους. Ἡ λαμαρίνα ποὺ θὰ χρειασθῇ, πόσον πλάτος πρέπει νὰ ἔχῃ καὶ πόσον ὕψος;

Σχέσις κυλίνδρου καὶ πρίσματος. Ἔχομεν πρῖσμα, τὸ ὁποῖον ἔχει βάσιν πολύγωνον μὲ πάρα πολλὰς πλευράς. Τὸ πολύγωνον εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον.

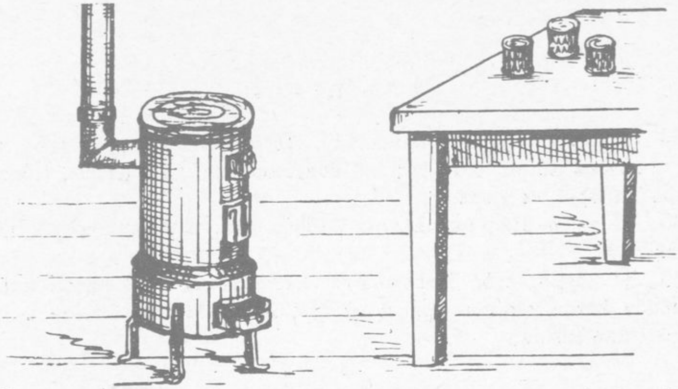
Ἔχομεν καὶ ἕνα κύλινδρον, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις ἔχει τόσον μέγεθος, ὅσον μέγεθος ἔχει ὁ κύκλος, εἰς τὸν ὁποῖον εἶναι ἐγγεγραμμένη ἡ βάσις τοῦ πολυγώνου.

Τὸ πρῖσμα καὶ ὁ κύλινδρος ἔχουν τὸ ἴδιον ὕψος.

Ἠμποροῦμεν νὰ εἴπωμεν ὅτι τὸ πρῖσμα αὐτὸ καὶ ὁ κύλινδρος αὐτὸς ἔχουν τὸν ἴδιον ὄγκον.



130


131

Διὰ νὰ ἔχουν τὸν ἴδιον ὄγκον, πρέπει καὶ τὰ ὕψη των νὰ εἶναι ἴσα καὶ αἱ βάσεις των νὰ εἶναι ἴσαι.

Τὰ ὕψη των εἶναι ἴσα.

Αἱ βάσεις των ἠμποροῦμεν νὰ εἴπωμεν ὅτι ἔχουν τὴν ἰδίαν ἐπιφάνειαν, διότι ὅσον μῆκος ἔχει ἡ περίμετρος τοῦ πολυγώνου, τόσον μῆκος ἔχει καὶ ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου. Γενικὰ ἠμποροῦμεν νὰ εἴπωμεν ὅτι ὁ κύλινδρος εἶναι ὡς ἓν πρῖσμα, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ τῶν βάσεών του εἶναι πάρα πολλαὶ (εἰκ. 130).

6. ΕΥΡΕΣΙΣ ΤΟΥ ΟΓΚΟΥ ΤΟΥ ΚΥΛΙΝΔΡΟΥ

Ὁ κύλινδρος εἶναι ὡς πρῖσμα, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ τῆς βάσεώς του εἶναι πάρα πολλαί.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον κύβου, ἢ παραλληλεπιπέδου, ἢ πρίσματος, πρέπει ὅπως ἐμάθωμεν, νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὴν ἐπιφάνειαν τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος.

Τὸ ἴδιον πρέπει νὰ κάμωμεν καὶ διὰ τὸν ὄγκον κυλίνδρου.

Π.χ. ἔχομεν κύλινδρον τοῦ ὁποίου ἡ ἐπιφάνεια τῆς βάσεώς του εἶναι 28,26 τετραγ. πόντοι καὶ τὸ ὕψος του 8 πόντοι.

Ὁ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου εἶναι:

28,26 τετραγ. πόντοι $\times$ 8 $=$ 226,08 κυβικοὶ πόντοι.

7. ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΑ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΑ

Κυλινδρικὰ ἀντικείμενα εἶναι πολλά. Π.χ. τὰ κουτιὰ τὰ περιέχοντα συμπυκνωμένο γάλα, οἱ σωλῆνες διὰ τὰς θερμάστρας κλπ. Καὶ ὁ κορμὸς πολλῶν δένδρων ἔχει περίπου τὸ σχῆμα κυλίνδρου (εἰκ. 131).

'Α σ κ ή σ ε ι ς:

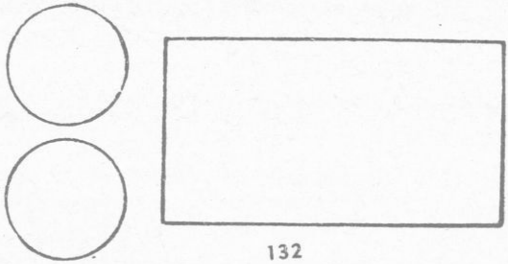
264. Ἔχομεν δοχεῖον κυλινδρικόν. Ἡ ἐπιφάνεια τῆς βάσεώς του εἶναι 1,80 τετραγωνικὰ μέτρα. Τὸ ὕψος τοῦ δοχείου εἶναι 1,25 μέτρα. Πόσα κυβικὰ μέτρα νερὸ ἠμπορεῖ νὰ χωρέσῃ;

265. Ἡ τομὴ μιᾶς μεταλλίνης ράβδου ἔχει σχῆμα κύκλου. Τί σχῆμα ἔχει ἡ ράβδος;

266. Ὁ κορμὸς ἑνὸς δένδρου ἔχει περιφέρειαν 1,20 μέτρα καὶ ὕψος 5 μέτρα. Πόσον ὄγκον περίπου πρέπει νὰ ἔχῃ ἡ ξυλεία, τὴν ὁποίαν ἠμποροῦμεν νὰ πάρωμεν ἀπὸ αὐτόν;

8. ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΚΥΛΙΝΔΡΟΥ

Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν κύλινδρον ἀπὸ χαρτόνι, πρέπει νὰ κατασκευάσωμεν δύο κύκλους ἴσους, οἱ ὁποῖοι θὰ εἶναι αἱ βάσεις τοῦ κυλίνδρου. Ἔπειτα ἓν ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον τὸ ὁποῖον θὰ τυλίξωμεν καὶ θὰ γίνῃ ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου (εἰκ. 132). Π.χ. ἂν θέλωμεν οἱ κύκλοι νὰ



132

ἔχουν ἀκτῖνα μήκους 3 πόντων, πρέπει νὰ γράψωμεν μὲ διαβήτην δύο κύκλους μὲ ἀκτῖνα 3 πόντους.

Τὸ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον πρέπει νὰ ἔχῃ βάσιν τόσην, ὅση εἶναι ἡ περιφέρεια κάθε κύκλου. Πρέπει δι' αὐτὸ νὰ ἔχῃ βάσιν ὅσον εἶναι τὸ γινόμενον τῆς διαμέτρου 6 ἐπὶ 3,14 δηλαδὴ 18,84 πόντ. Σχεδιάζομεν λοιπὸν ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις νὰ ἔχῃ μῆκος 18,84 πόντους. Ὕψος τοῦ δίδομεν τόσον, ὅσον ὕψος θέλομεν νὰ ἔχῃ ὁ κύλινδρος, π.χ. 15 πόντους.

Κόβομεν ἀπὸ τὸ χαρτόνι τοὺς δύο κύκλους καὶ τὸ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον.

Τυλίγοντες τὸ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον, ἔχομεν τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου, τὴν ὁποίαν κολλῶμεν. Ἐπάνω καὶ κάτω κολλῶμεν τοὺς κύκλους, ὥστε νὰ ἔχωμεν καὶ τὰς βάσεις τοῦ κυλίνδρου.

Ἀσκήσεις:

267. Νὰ κατασκευάσετε κύλινδρον ἀπὸ χαρτόνι, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις νὰ ἔχῃ διάμετρον 12 πόντους καὶ τὸ ὕψος του νὰ εἶναι 25 πόντοι.

268. Κατασκεύασε κύλινδρον ἀπὸ πηλόν.

269. Ἐπάνω εἰς ἓν χαρτὶ γράψε μίαν εὐθεῖαν γραμμήν. Ὕστερα γύρισε τὸ χαρτί, ὥστε νὰ γίνῃ κύλινδρος. Ἠμπορεῖ ἡ εὐθεῖα γραμμὴ νὰ μείνῃ εὐθεῖα;

270. Τί εἴδους ἐπιφάνειαν ἔχει ὁ σωλήν;

271. Σχεδίασε δύο περιφερείας αἱ ὁποῖαι νὰ ἔχουν τὸ ἴδιον κέντρον καὶ ἀκτῖνας διαφόρου μήκους.

272. Ἄνοιξε τὰ σκέλη διαβήτου, ὥστε τὰ ἄκρα του νὰ εὑρεθοῦν εἰς ἀπόστασιν 6 πόντων. Πόσην διάμετρον θὰ ἔχῃ ὁ κύκλος τὸν ὁποῖον θὰ γράψῃς;

273. Σχεδίασε περιφέρειαν μὲ ἀκτῖνα 4 πόντων καὶ τοποθέτησε χορδάς, κάθε μία νὰ ἔχῃ μῆκος 4 πόντους. Τί σχῆμα θὰ γίνῃ;

274. Ἕνα παιδὶ κουνιέται σὲ μία κούνια. Τί εἴδους γραμμὴν γράφει εἰς τὸν ἀέρα ἡ ἄκρα τοῦ παπουτσιοῦ του;

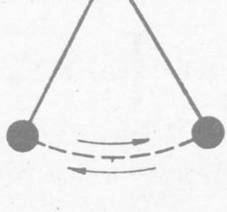
275. Μία κατσίκα εἶναι δεμένη μὲ σχοινὶ εἰς πάσσαλον. Ὅταν ἡ κατσίκα γυρίζῃ μὲ τεντωμένο σχοινί, τί εἴδους γραμμὴ σχηματίζεται;

276. Ἓν μεταλλικὸν νόμισμα εἶναι εἷς κύκλος ἢ εἷς κύλινδρος;

277. Ὅταν κινῆται ἓν ἐκκρεμές, μεταξὺ τῶν δύο ἄκρων θέσεών του τί σχῆμα σχηματίζεται (εἰκ. 133);

278. Ἡ βασιλόπιττα εἶναι εἷς στρογγυλὸ ταψί. Κόβομεν τεμάχια ἀπὸ τὸ κέντρον πρὸς τὴν περιφέρειαν. Τί σχῆμα ἔχει ἡ ἐπάνω ἐπιφάνεια ἑκάστου τεμαχίου;

279. Κάμε μὲ τὸν διαβήτην ἓν κύκλον, ὁ ὁποῖος νὰ ἔχῃ διάμετρον 5 πόντους καὶ σημείωσε ἐπάνω εἰς αὐτὸν μίαν χορδὴν μήκους 3 πόντων.



133

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΚΩΝΟΣ

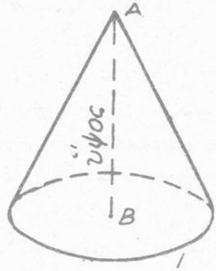
1. ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ — ΒΑΣΙΣ — ΚΟΡΥΦΗ — ΥΨΟΣ

Ἡ εἰκὼν 134 παριστάνει ἕνα κ ῶ ν ο ν.

Ὅταν ἔχωμεν ἕνα κῶνον, π.χ. ἀπὸ χαρτόνι, καὶ ψηλαφῶμεν τὴν γύρω - γύρω ἐπιφάνειάν του, ἐννοοῦμεν ὅτι ἡ ἐπιφάνεια αὐτὴ εἶναι κυρτή.

Ἡ βάσις τοῦ κώνου εἶναι ἐπιφάνεια ἐπίπεδος καὶ ἔχει σχῆμα κύκλου.

Ὕψος τοῦ κώνου εἶναι ἡ ἀπόστασις ἀπὸ τὴν κορυφὴν ἕως τὴν βάσιν, ἡ ΑΒ (εἰκ. 134).



134

Εἰς τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου ἐφαρμόζει εὐθεῖα γραμμὴ μόνον, ἂν τὴν θέσωμεν κατὰ τὴν διεύθυνσιν ἀπὸ τὴν κορυφὴν πρὸς τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεώς του. Κατ' ἄλλην διεύθυνσιν ἡ εὐθεῖα γραμμὴ δὲν ἐφαρμόζει.

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς:

280. Κατὰ ποίαν διεύθυνσιν ἐφαρμόζει εὐθεῖα γραμμὴ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας κυλίνδρου;

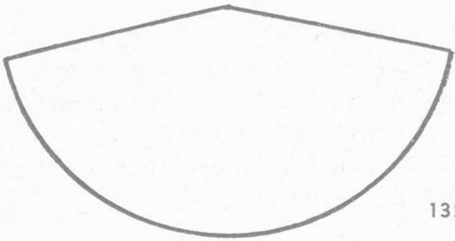
281. Πόσας κορυφὰς ἔχουν: α) ὁ κύλινδρος, β) ὁ κῶνος;

2. ΕΥΡΕΣΙΣ ΤΗΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ ΤΟΥ ΚΩΝΟΥ

Διὰ νὰ εὕρωμεν πόση εἶναι ἡ ἐπιφάνεια κώνου, πρέπει νὰ προσθέσωμεν τὴν ἐπιφάνειαν τῆς βάσεώς του, ἡ ὁποία εἶναι κύκλος, μὲ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του.

Π.χ. ἡ διάμετρος τῆς βάσεως κώνου ἀπὸ χαρτόνι ἔχει μῆκος 12 πόντ., τότε ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως εἶναι $3,14 \times 12 = 37,68$ πόντ. καὶ ἡ ἐπιφάνεια τῆς βάσεως εἶναι $37,68 \times 3 = 112,98$ τετραγ. πόντοι.

Τώρα πρέπει νὰ εὕρωμεν τὴν ἐπιφάνειαιν τοῦ κυρτοῦ μέρους του. Ἠμποροῦμεν μὲ ἓν ψαλίδι νὰ σχηματίσωμεν τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν ἀπὸ τὴν κορυφὴν ἕως ἓν σημεῖον τῆς περιφερείας καὶ νὰ τὴν ἀνοίξωμεν. Παρουσιάζεται τότε τὸ σχῆμα τομέως κύκλου (εἰκ. 135). Ὁ τομεὺς κύκλου εἶναι ὡς τρίγωνον.



135

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ἐπιφάνειάν του πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὴν βάσιν του ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀποστάσεως ἀπὸ τὴν κορυφὴν ἕως τὴν βάσιν.

Ἡ βάσις του ἔχει τόσον μῆκος ὅσον ἔχει ἡ περιφέρεια, δηλαδὴ 37,68 πόντους. Μετρῶμεν τὴν ἀπόστασιν ἀπὸ τὴν κορυφὴν ἕως τὴν βάσιν τοῦ τομέως. Εἶναι π.χ. 15 πόντοι. Τὸ ἥμισυ εἶναι 7,5 πόντους.

Πολλαπλασιάζοντες ἔχωμεν $37{,}68 \times 7{,}5 = 282{,}6$ τετραγ. πόντοι.

Προσθέτομεν τώρα τὴν ἐπιφάνειαν τῆς βάσεως, δηλαδὴ 112,98 τετ. πόντοι καὶ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας 282,6 τετ. πόντοι καὶ ἔχομεν $112{,}98 + 282{,}6 = 395{,}48$ τετραγ. πόντοι εἶναι ὁλόκληρος ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου αὐτοῦ.

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς:

282. Ποία ἐπιφάνεια τοῦ κώνου εἶναι ἐπίπεδος καὶ ποία κυρτή;

283. Τί πρέπει νὰ κάμωμεν, διὰ νὰ εὕρωμεν πόση εἶναι ὁλόκληρος ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου;

284. Νὰ ὑπολογίσετε πόση εἶναι ἡ ἐπιφάνεια κώνου. Ἡ διάμετρος τῆς βάσεώς του εἶναι 10 πόντοι. Ἡ ἀπόστασις ἐπὶ τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας ἀπὸ τὴν κορυφὴν ἕως τὴν περιφέρειαν εἶναι 20 πόντοι.

3. ΣΧΕΣΙΣ ΚΩΝΟΥ ΚΑΙ ΠΥΡΑΜΙΔΟΣ

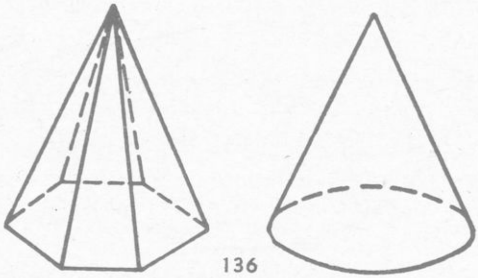
Ἔχομεν μίαν πυραμίδα, ἡ ὁποία βάσιν ἔχει ἓν κανονικὸν πολύγωνον μὲ πολλὰς πλευρὰς καὶ ὕψος ὡρισμένον.

Ἂν φαντασθῶμεν ὅτι αἱ πλευραὶ τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου γίνονται παρὰ πολλαί, τὸ πολύγωνον θὰ μετατραπῆ εἰς κύκλον καὶ ἡ πυραμὶς γίνεται οὕτω κῶνος τοῦ ἰδίου ὕψους.

Οὕτω ἠμποροῦμεν νὰ εἴπωμεν ὅτι εἷς κῶνος ἰσοδυναμεῖ μὲ μίαν πυραμίδα (εἰκ. 136). Ἀρκεῖ:

α) Νὰ ἔχουν καὶ τὰ δύο τὸ ἴδιον ὕψος.

β) Νὰ ἔχουν καὶ τὰ δύο τὴν ἰδίαν ἐπιφάνειαν εἰς τὴν βάσιν των.

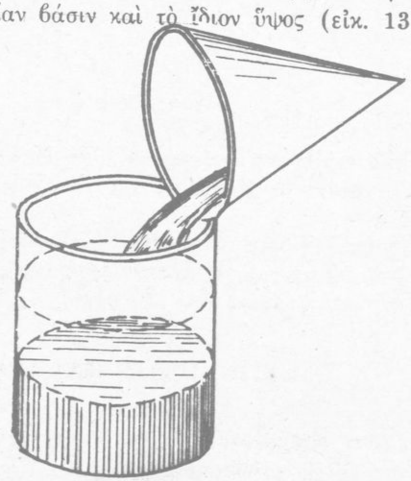


136

4. ΠΩΣ ΕΥΡΙΣΚΟΜΕΝ ΤΟΝ ΟΓΚΟΝ ΤΟΥ ΚΩΝΟΥ

Παίρνομεν ἕνα κύλινδρον καὶ ἕνα κῶνον, οἱ ὁποῖοι νὰ ἔχουν τὴν ἰδίαν βάσιν καὶ τὸ ἴδιον ὕψος. Γεμίζομεν μὲ ὕδωρ τὸν κῶνον καὶ τὸν ἀδειάζομεν εἰς τὸν κύλινδρον. Βλέπομεν ὅτι 3 φορὰς πρέπει νὰ ἀδειάσωμεν τὸν κῶνον, διὰ νὰ γεμίση ὁ κύλινδρος.

Αὐτὸ φανερώνει ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ κώνου εἶναι τὸ $1/3$ τοῦ ὄγκου τοῦ κυλίνδρου, ὁ ὁποῖος ἔχει τὴν ἰδίαν βάσιν καὶ τὸ ἴδιον ὕψος (εἰκ. 137).



137

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον κυλίνδρου, εἴδομεν ὅτι πρέπει νὰ **πολλαπλασιάσωμεν τὴν ἐπιφάνειαν τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του.**

Διὰ νὰ εὕρωμεν λοιπὸν τὸν ὄγκον κώνου, **πολλαπλασιάζομεν τὴν ἐπιφά-**

νειαν τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του καὶ λαμβάνομεν τὸ $\frac{1}{3}$, δηλαδὴ διαιροῦμεν αὐτὸ ποὺ εὑρήκαμε διὰ 3.

Τὸν ἴδιον κανόνα ἀκολουθοῦμεν, ὅπως ἐμάθαμεν εἰς τὴν Ε΄ τάξιν, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον πυραμίδος ἐκ τοῦ ὄγκου πρίσματος.

Ἔχομεν π.χ. ἕνα κῶνον μὲ ὕψος 10 πόντους καὶ ἡ βάσις του ἔχει ἐπιφάνειαν 77,5 τετραγ. πόντ. Θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον του.

Ὁ ὄγκος τοῦ ἀντιστοίχου κυλίνδρου εἶναι:

77,5 τ.π. × 10 π. = 775 κυβικ. πόντοι.

Ὁ ὄγκος τοῦ κώνου εἶναι:

775 κυβ. πόντοι: 3 = 258,3 κυβικ. πόντοι.

Ἀσκήσεις:

285. Κῶνος ἔχει ὕψος 13 πόντ. καὶ ἡ βάσις του ἔχει ἐπιφάνειαν 65 τετραγ. πόντους. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος του;

286. Ἡ ἐπιφάνεια τῆς βάσεως πυραμίδος εἶναι 3,5 τετρ. μέτρα. Τὸ ὕψος της εἶναι 8 μέτρα. Πόσα κυβικὰ μέτρα εἶναι ὁ ὄγκος της;

287. Κῶνος ἔχει ἐπιφάνειαν τῆς βάσεώς του, ὅσην ἐπιφάνειαν ἔχει ἡ βάσις πυραμίδος. Ποίαν σχέσιν ἔχουν οἱ ὄγκοι των;

288. Κῶνος ἔχει τὴν ἰδίαν βάσιν καὶ τὸ ἴδιον ὕψος μὲ κύλινδρον. Ὁ κύλινδρος χωρεῖ 30 κιλ. λάδι. Πόσο λάδι χωρεῖ ὁ κῶνος;

5. ΚΩΝΙΚΑ ΠΡΑΓΜΑΤΑ

Ὁ κῶνος καταλήγει εἰς μυτερὸν ἄκρον (τὴν κορυφὴν) καὶ οὕτω ἠμπορεῖ εὐκόλως νὰ τρυπᾶ τὸ χῶμα, τὸ ξύλον κλπ. Δι' αὐτὸ οἱ ἄνθρωποι ἔδωκαν σχῆμα κώνου εἰς πολλὰ ἐργαλεῖα.

Π.χ. ἔχει εἰς τὸ ἄκρον του σχῆμα κώνου, τὸ καρφί, ἡ βελόνη, τὸ σουβλὶ καὶ ἄλλα.

Κωνικὸν σχῆμα δίδουν καὶ εἰς σκηνὰς ἐκστρατείας (εἰκ. 138). Ἐπειδὴ


138

ἡ ἐξωτερική κυρτὴ ἐπιφάνειά των εἶναι πολὺ κατηφορική, φεύγει ἀμέσως τὸ ὕδωρ τῆς βροχῆς. Κωνικὸν σχῆμα δίδουν καὶ εἰς τὰς στέγας οἰκιῶν εἰς μέρη, ὅπου πίπτουν πολλαὶ βροχαί, διὰ τὸν ἴδιον λόγον.

Σχῆμα κώνου ἔχουν καὶ τὰ χωνιὰ καὶ τὰ χωνάκια, τὰ ὁποῖα τρώγουν τὰ παιδία μὲ παγωτὸν (εἰκ. 139). Ἐπίσης τὰ χωνάκια, τὰ ὁποῖα κάμνουν προχείρως μὲ χαρτί, διὰ νὰ θέτουν μέσα μικρὰς ποσότητας πραγμάτων. Τὸ σχῆμα χωνιοῦ γίνεται εὐκόλως.

139

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς:

289. Κατασκεύασε ἓν χωνὶ μικρό, ἓν μεγαλύτερο καὶ ἓν πολὺ μεγάλο.
290. Τί σχῆμα ἔχει τὸ μολύβι καὶ τί σχῆμα ἡ ξυσμένη ἄκρη του;
291. Ἰχνογράφησε ἕνα κῶνον καὶ μίαν κωνικὴν σκηνήν.

6. ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΚΩΝΟΥ

Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν κῶνον ἀπὸ χαρτόνιον, σχεδιάζομεν πρῶτον ἕνα τομέα κύκλου. Ὁ τομεὺς αὐτὸς θὰ ἀποτελέση τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου.

140

Βάσις τοῦ κώνου θὰ εἶναι εἷς κύκλος. Ὁ κύκλος αὐτὸς θὰ ἔχῃ μῆκος περιφερείας τόσον, ὅσον μῆκος ἔχει τὸ τόξον τοῦ τομέως κύκλου.

Γυρίζομεν τὸν τομέα κύκλου, ὥστε νὰ σχηματίσῃ τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου καὶ τὸν κολλῶμεν εἰς τὰς ἄκρας του. Ἀπὸ κάτω κολλῶμεν ἓν κύκλον καὶ τὸν κόπτομεν γύρω - γύρω διὰ νὰ μὴ ἐξέχῃ. Οὕτω ὁ κύκλος αὐτὸς ἀποτελεῖ τὴν βάσιν τοῦ κώνου.

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς:

292. Κατασκεύασε ἕνα κῶνον ἀπὸ χαρτόνι.
293. Κατασκεύασε ἕνα κῶνον ἀπὸ πηλόν.
294. Ἕνας ἔμπορος θέλει νὰ βάλῃ κρασὶ εἰς μποτίλιας. Ἡ μποτίλια ἔχει βάσιν 80 τετραγωνικοὺς πόντους καὶ ὕψος 30 πόντους. Ἓν κρασοπότηρο χωρεῖ 100 κυβικοὺς πόντους κρασί. Πόσα κρασοπότηρα θὰ γεμίσουν μὲ τὸ περιεχόμενον τῆς μποτίλιας;

141

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ

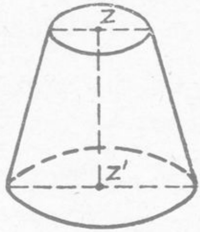
ΚΟΛΟΥΡΟΣ ΚΩΝΟΣ

1. ΠΩΣ ΓΙΝΕΤΑΙ Ο ΚΟΛΟΥΡΟΣ ΚΩΝΟΣ

Ἔχομεν ἕναν κῶνον ἀπὸ πηλόν.

Κόπτομεν τὸ ἐπάνω μέρος τοῦ κώνου πρὸς τὴν κορυφήν του, ὥστε νὰ ἔχωμεν ἐπίπεδον ἐπιφάνειαν παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν τοῦ κώνου. Τὸ ἐπάνω τμῆμα, τὸ ὁποῖον ἐκόψαμεν εἶναι πάλιν κῶνος. Τὸ ἄλλο τμῆμα, τὸ ὁποῖον μένει λέγεται κ ό λ ο υ ρ ο ς κ ῶ ν ο ς (εἰκ. 141).

Λαμβάνοντες ἕναν κόλουρον κῶνον εἰς τὰς χεῖρας μας καταλαμβάνομεν



141

ὅτι ἐπάνω καὶ κάτω ἔχει δύο κύκλους (ὁ εἷς εἶναι μικρότερος ἀπὸ τὸν ἄλλον). Ἡ ἄλλη ἐπιφάνειά του γύρω - γύρω εἶναι κυρτή.

Ὁ κόλουρος κῶνος δὲν ἔχει κορυφήν.

Διὰ νὰ εὕρωμεν πόσον εἶναι τὸ ὕψος τοῦ κολούρου κώνου, φέρομεν μίαν εὐθεῖαν γραμμὴν κάθετον πρὸς τὰς δύο βάσεις του, τὴν ZZ′ καὶ μετρῶμεν πόσον μῆκος ἔχει.

2. ΣΩΜΑΤΑ ΜΕ ΣΧΗΜΑ ΚΟΛΟΥΡΟΥ ΚΩΝΟΥ

Σχῆμα κολούρου κώνου ἔχουν πολλὰ πράγματα, τὰ ὁποῖα χρησιμοποιοῦμεν: ποτήρια, γλάστρες, μαγειρικὰ σκεύη, κουβάδες κλπ.

142

Ἀσκήσεις:

295. Κατασκεύασε κῶνον ἀπὸ ὁποιανδήποτε ὕλην καὶ μετάτρεψέ τον εἰς κόλουρον κῶνον.

296. Ἰχνογράφησε κόλουρον κῶνον καὶ σώματα τὰ ὁποῖα ἔχουν σχῆμα κολούρου κώνου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ

ΣΦΑΙΡΑ

1. ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΤΗΣ ΣΦΑΙΡΑΣ

Ἐπιφάνεια σφαίρας λέγεται τὸ μέρος τῆς σφαίρας, τὸ ὁποῖον βλέπομεν καὶ ἠμποροῦμεν νὰ ἐγγίσωμεν.

Ἡ σφαῖρα ἔχει μόνον κυρτὴν ἐπιφάνειαν. Ἐπὶ οὐδενὸς μέρους τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, ἠμπορεῖ νὰ ἐφαρμώσῃ εὐθεῖα γραμμή.

Ἕκαστον σημεῖον τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ἀπέχει τὴν ἰδίαν ἀπόστασιν, ἀπὸ ἓν σημεῖον, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς σφαίρας. Αὐτὸ τὸ σημεῖον εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς σφαίρας λέγεται κέντρον τῆς σφαίρας.

2. ΤΟΜΗ ΣΦΑΙΡΑΣ ΚΑΙ ΣΧΗΜΑ ΤΗΣ ΤΟΜΗΣ

Ἂν κόψωμεν μίαν σφαῖραν, παρουσιάζεται τομὴ τῆς σφαίρας, ἡ ὁποία ἔχει σχῆμα κύκλου.

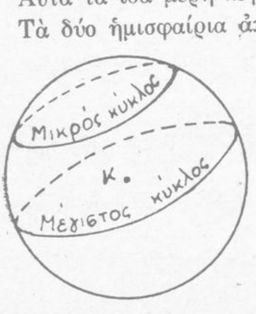
Ὅταν ἡ τομὴ γίνεται πλησίον εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας, ὁ κύκλος εἶναι μικρός. Ὅταν ἡ τομὴ γίνῃ μακρὰν ἀπὸ τὴν ἐπιφάνειαν, πλησίον εἰς τὸ κέντρον τῆς σφαίρας, ὁ κύκλος εἶναι μεγαλύτερος.

Μέγιστος κύκλος. Ὅταν ἡ τομὴ διέρχεται ἀκριβῶς ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας, ὁ κύκλος τῆς τομῆς εἶναι ὁ μεγαλύτερος ἀπὸ κάθε ἄλλον καὶ λέγεται μέγιστος κύκλος τῆς σφαίρας (εἰκ. 143).

Ἡμισφαίρια. Ὁ μέγιστος κύκλος σφαίρας διαιρεῖ τὴν σφαῖραν εἰς δύο μέρη ἀκριβῶς ἴσα μεταξύ των.

Αὐτὰ τὰ ἴσα μέρη λέγονται ἡμισφαίρια.

Τὰ δύο ἡμισφαίρια ἀποτελοῦν ὁλόκληρον σφαῖραν (εἰκ. 144).



143

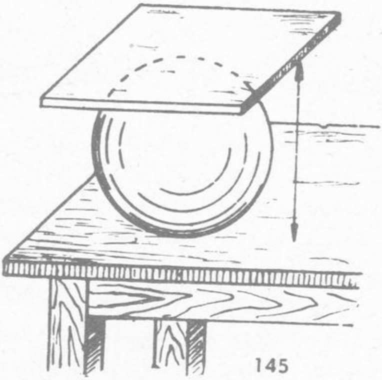
144

Ἀ κ τ ὶ ς σ φ α ί ρ α ς. Ἀκτὶς τῆς σφαίρας λέγεται ἡ ἀπόστασις ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας ἕως τὴν ἐπιφάνειάν της.

Δ ι ά μ ε τ ρ ο ς σ φ α ί ρ α ς. Διάμετρος τῆς σφαίρας λέγεται κάθε εὐθεῖα, ἡ ὁποία ἀρχίζει ἀπὸ ἓν σημεῖον τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας καὶ τελειώνει εἰς τὸ ἀπέναντι σημεῖον τῆς ἐπιφανείας της.

Ἡ διάμετρος ἔχει μῆκος, ὅσον μῆκος ἔχουν δύο ἀκτῖνες.

Π ῶ ς δ υ ν ά μ ε θ α ν ὰ ε ὕ ρ ω μ ε ν π ό σ ο ν μ ῆ κ ο ς ἔ χ ε ι ἡ δ ι ά μ ε τ ρ ο ς μ ι ᾶ ς σ φ α ί ρ α ς. Θέτομεν τὴν σφαῖραν ἐπάνω εἰς τραπέζιον, τοῦ ὁποίου ἡ ἐπιφάνεια εἶναι ἐπίπεδος. Ἐπάνω εἰς τὴν σφαῖραν θέτομεν ἓν ἐπίπεδον χαρτόνι, ὥστε τὸ χαρτόνι νὰ εἶναι παράλληλον μὲ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ τραπεζίου (εἰκ. 145).



145

Ὅπως βλέπομεν, ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀπόστασιν τῶν δύο ἐπιφανειῶν, δηλαδὴ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ τραπεζίου καὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ χαρτονίου.

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς:

297. Νὰ εὕρῃς πόση εἶναι ἡ διάμετρος μιᾶς σφαίρας.

298. Γνωρίζοντες πόση εἶναι ἡ διάμετρος μιᾶς σφαίρας, πῶς ἠμποροῦμεν νὰ εὕρωμεν πόση εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας;

299. Μία σφαῖρα ἔχει διάμετρον 12 πόντους. Πόσον μῆκος ἔχει ἡ ἀκτίς της;

300. Τί σχῆμα ἔχει μία ὁποιαδήποτε τομὴ τῆς σφαίρας;

301. Ποῖος κύκλος λέγεται μέγιστος κύκλος τῆς σφαίρας;

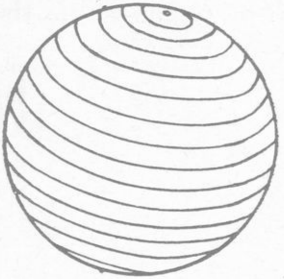
302. Νὰ εὕρῃς πόσον μῆκος ἔχει ἡ ἀκτὶς μιᾶς σφαίρας.

Π α ρ ά λ λ η λ ο ι   κ ύ κ λ ο ι. Ὅταν κάμνωμεν τομὰς τῆς σφαίρας μὲ ἐπίπεδα παράλληλα μεταξύ των, αἱ τομαὶ αὐταὶ εἶναι κύκλοι καὶ λέγονται παράλληλοι κύκλοι τῆς σφαίρας.

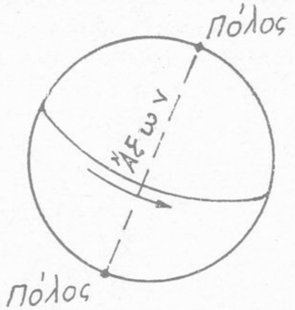
Τοιούτους κύκλους παριστᾶ ἡ εἰκὼν 146.

Ἄ ξ ω ν   κ α ὶ   π ό λ ο ι   τ ῆ ς   σ φ α ί ρ α ς. Ἂν φαντασθῶμεν μίαν διάμετρον τῆς σφαίρας καὶ γύρω ἀπὸ αὐτὴν νὰ περιστρέφεται ἡ σφαῖρα, ἡ διάμετρος αὐτὴ λέγεται ἄξων τῆς σφαίρας.

Τὰ σημεῖα, εἰς τὰ ὁποῖα ὁ ἄξων ἐγγίζει τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας, λέγονται πόλοι τῆς σφαίρας (εἰκ. 147).



146



147

3. ΕΥΡΕΣΙΣ ΤΗΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ ΤΗΣ ΣΦΑΙΡΑΣ

Ὁ Ἕλλην μαθηματικὸς Ἀρχιμήδης εὗρεν ὅτι διὰ νὰ καλύψωμεν ὅλην τὴν ἐπιφάνειαν μίας σφαίρας, χρειαζόμεθα τέσσαρας μεγίστους κύκλους της.

Δι' αὐτὸ διὰ νὰ εὕρωμεν πόση εἶναι ἡ ἐπιφάνεια μίας σφαίρας, εὑρίσκομεν τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ μεγίστου κύκλου της καὶ τὴν τετραπλασιάζομεν.

Π.χ. μέγιστος κύκλος σφαίρας ἔχει ἐπιφάνειαν 28,26 τετραγωνικοὺς πόντους. Ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας θὰ εἶναι:

28,26 τετραγωνικοὶ πόντοι × 4 = 113,04 τετραγωνικοὶ πόντοι.

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς:

303. Νὰ ὑπολογίσῃς τὴν ἐπιφάνειαν σφαίρας, τῆς ὁποίας ὁ μέγιστος κύκλος ἔχει ἐπιφάνειαν 400 τετραγωνικοὺς πόντους.

304. Ἡ διάμετρος μιᾶς σφαίρας εἶναι 20 πόντοι. Πόσον μῆκος ἔχει ἡ περιφέρεια ἑνὸς μεγίστου κύκλου της;

305. Ἡ περιφέρεια ἑνὸς μεγίστου κύκλου σφαίρας εἶναι 62,80 πόντοι. Πόσοι τετραγων. πόντοι εἶναι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ μεγίστου αὐτοῦ κύκλου;

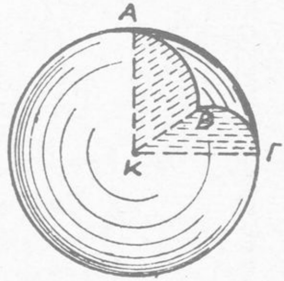
4. ΕΥΡΕΣΙΣ ΤΟΥ ΟΓΚΟΥ ΤΗΣ ΣΦΑΙΡΑΣ

Λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας μιᾶς σφαίρας 3 σημεῖα, τὰ ὁποῖα νὰ μὴ εὑρίσκωνται ἐπὶ τοῦ ἰδίου τόξου. Τὰ ἑνώνομεν μεταξύ των μὲ τόξα καὶ κόπτομεν ἀπὸ τὴν σφαῖραν τὸ μέρος αὐτὸ εἰς βάθος, ἕως τὸ κέντρον τῆς σφαίρας Κ. Ἔχομεν οὕτω ἓν τμῆμα ἀπὸ τὴν σφαῖραν, τὸ τμῆμα ΚΑΒΓ.

Τὸ τμῆμα αὐτὸ εἶναι ὡς τριγωνικὴ πυραμίς. Ἡ μόνη διαφορὰ εἶναι ὅτι ἡ βάσις του δὲν εἶναι ἐπίπεδος ὡς τῆς πυραμίδος, ἀλλὰ κυρτή, ὅπως εἶναι ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας.

Θεωροῦντες τὸ τμῆμα αὐτὸ ὡς πυραμίδα εὑρίσκομεν τὸν ὄγκον του.

Ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδος εὑρίσκεται, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὴν ἐπιφάνειαν τῆς βάσεώς της ἐπὶ τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος καὶ λάβωμεν τὸ ⅓ (τὸ ἐμάθαμεν εἰς τὴν Ε΄ τάξιν).



148

Ὁ ὄγκος τοῦ τμήματος ΚΑΒΓ τῆς σφαίρας θὰ εὑρεθῆ, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὴν ἐπιφάνειαν τῆς βάσεως ΑΒΓ ἐπὶ τὸ ⅓ τοῦ ὕψους. Τὸ ⅓ τοῦ ὕψους εἶναι τὸ ⅓ τῆς ἀκτῖνος τῆς σφαίρας.

Ἂν ὅλην τὴν σφαῖραν τὴν χωρίσωμεν εἰς πάρα πολλὰς τοιαύτας μικρὰς πυραμίδας, ὁ ὄγκος της θὰ εὑρεθῆ ὅταν τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν βάσεων τῶν πυραμίδων αὐτῶν, τὸ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸ ⅓ τῆς ἀκτῖνος τῆς σφαίρας.

Αἱ βάσεις ὅλων τῶν πυραμίδων μαζὶ ἀποτελοῦν τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας.

Διὰ νὰ εὕρωμεν λοιπὸν τὸν ὄγκον σφαίρας πολλαπλασιάζομεν τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας ἐπὶ τὸ ⅓ τῆς ἀκτῖνος.

Ἀσκήσεις:

306. Νὰ ὑπολογίσετε πόσον ὄγκον ἔχει μία σφαῖρα, τῆς ὁποίας ἡ ἐπιφάνεια εἶναι 1256 τετραγ. πόντοι καὶ ἡ ἀκτίς της 10 πόντοι.

5. ΣΩΜΑΤΑ ΣΦΑΙΡΙΚΑ

Σχῆμα σφαίρας ἔχουν οἱ βόλοι, τὰ τόπια, οἱ μπάλες τοῦ ποδοσφαίρου καὶ ἄλλα σώματα (εἰκ. 149).

149

Τὸ σχῆμα τῆς Γῆς ὁμοιάζει μὲ σχῆμα σφαίρας (εἰκ. 150).

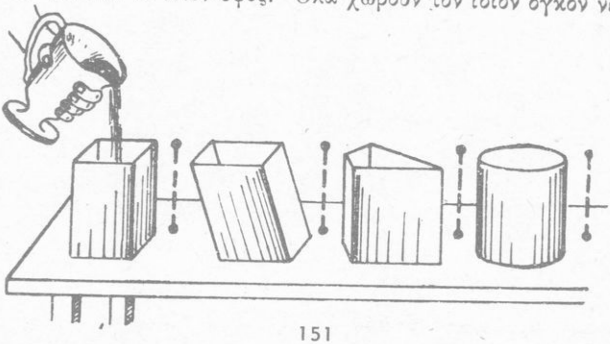
150

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς:

307. Ἰχνογράφησε μίαν σφαῖραν.
308. Κατασκεύασε σφαῖραν ἀπὸ πηλόν.
309. Εἶναι δυνατὸν νὰ σύρῃς εὐθεῖαν γραμμὴν εἰς τὴν ἐπιφάνειαν: α) σφαίρας, β) κώνου, γ) κυλίνδρου;
310. Ποῖα σώματα τὰ ὁποῖα τρώγονται γνωρίζεις νὰ ἔχουν ὅλο κυρτὴν ἐπιφάνειαν, ἀλλὰ ὄχι καὶ σχῆμα σφαίρας;
311. Ὀνόμασε δύο σώματα τὰ ὁποῖα ἔχουν ἐπίπεδον καὶ κυρτὴν ἐπιφάνειαν.

312. Μέσα εἰς ἕνα τόπι, εἶναι μία μικρὰ πέτρα. Ὅταν τὸ τόπι κυλᾷ, κινεῖται καὶ αὐτὴ μέσα ἀκουμβοῦσα εἰς τὰ τοιχώματα τοῦ τοπιοῦ. Τί σχῆμα ἔχει ἡ γραμμὴ ἡ ὁποία γίνεται ἀπὸ τὴν πέτραν;

313. Ἔχομεν ἓν ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον, ἓν πλάγιον παραλληλεπίπεδον, ἓν πρῖσμα καὶ ἕναν κύλινδρον. Ὅλα ἔχουν τὴν ἰδίαν ἐπιφάνειαν εἰς τὴν βάσιν των καὶ τὸ ἴδιον ὕψος. Ὅλα χωροῦν τὸν ἴδιον ὄγκον νεροῦ; Διατί;

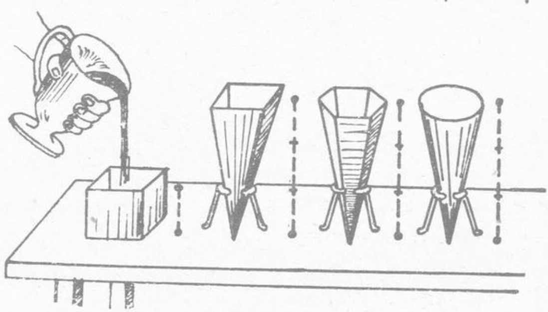


151

314. Ἔχομεν ἓν δοχεῖον σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου μὲ ὡρισμένην βάσιν καὶ ὡρισμένον ὕψος (εἰκ. 152).

Ἔχομεν ἀκόμη 3 ἄλλα δοχεῖα, μίαν πυραμίδα μὲ βάσιν τετράγωνον, μίαν μὲ βάσιν κανονικὸν ἑξάγωνον καὶ τὸ τρίτον ἔχει σχῆμα κώνου.

Τὰ τρία τελευταῖα δοχεῖα ἔχουν τὴν ἰδίαν βάσιν μὲ τὸ ὀρθογώνιον πα-



152

ραλληλεπίπεδον, ἀλλὰ ὕψος ἔχουν 3πλάσιον ἀπὸ τὸ ὕψος τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου. Ὅλα τὰ δοχεῖα χωροῦν τὸν ἴδιον ὄγκον νεροῦ. Διατί;

315. Ἔχομεν ἓν ἡμισφαίριον καὶ ἕνα κῶνον. Ἡ βάσις τοῦ κώνου ἔχει ἐπιφάνειαν ὅση εἶναι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ μεγίστου κύκλου τοῦ ἡμισφαιρίου. Τὸ ὕψος τοῦ κώνου εἶναι ὅσον ἡ διάμετρος τοῦ μεγίστου κύκλου. Χύνομεν νερὸ μέσα εἰς αὐτὸ καὶ εὑρίσκομεν ὅτι ὅσο νερὸ χωρεῖ τὸ ἡμισφαίριον, τόσον χωρεῖ καὶ ὁ κῶνος. Τί συμπέρασμα ἐξάγεις ἀπὸ αὐτό, διὰ τὸν ὄγκον ὅλης τῆς σφαίρας;

ΠΙΝΑΞ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΤΑΞΙΣ Ε΄

ΤΑΞΙΣ ΣΤ΄

024000019482