Κ. ΙΟΡΔΑΝΙΔΗΣ - Δ. Λ. ΚΑΡΑΓΕΩΡΓΟΣ - Κ. ΚΩΣΤΑΚΗΣ
Α. ΜΑΚΡΙΔΗΣ - Β. ΝΑΣΟΠΟΥΛΟΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΥΛΗ ΕΠΙΛΟΓΗΣ

ΤΕΥΧΟΣ Β΄

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΑΘΗΝΑ 1979

19507

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΥΛΗ ΕΠΙΛΟΓΗΣ

Κ. ΙΟΡΔΑΝΙΔΗΣ - Δ. Λ. ΚΑΡΑΓΕΩΡΓΟΣ - Κ. ΚΩΣΤΑΚΗΣ
Α. ΜΑΚΡΙΔΗΣ - Β. ΝΑΣΟΠΟΥΛΟΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΥΛΗ ΕΠΙΛΟΓΗΣ

ΤΕΥΧΟΣ Β'

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΑΘΗΝΑ 1979

ΚΕΦΑΛΑΙΟ III

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ ΑΡΙΘΜΩΝ

1, Διαιρετότητα στό σύνολο Z

2. Ἀκέραιες λύσεις τῆς ἐξισώσεως $\alpha x + \beta y = \gamma$ $(\alpha, \beta, \gamma \in Z)$

3. Σύντομη ἀνακεφαλαίωση

4. Ἀσκήσεις γιά ἐπανάληψη

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ ΑΡΙΘΜΩΝ

Ἡ θεωρία τῶν ἀριθμῶν εἶναι ἕνας κλάδος τῶν Μαθηματικῶν, πού ἡ ἱστορία του ἀρχίζει τήν ἐποχή πού τά μυστικά τῶν ἀριθμῶν ἀπασχόλησαν γιά πρώτη φορά τούς ἀνθρώπους.

Γνωστότερος ἀπό τούς ἀρχαίους πού ἀσχολήθηκαν μέ τούς ἀριθμούς εἶναι ὁ Πυθαγόρας (500 π.Χ.). Κατά τούς χρόνους τοῦ Εὐκλείδη (300 π.Χ.) ἡ μελέτη τῶν ἀριθμῶν ἔγινε περισσότερο συστηματική καί ἡ βασική θεωρία τῶν ἀριθμῶν ἀναφέρεται στό ἔνατο βιβλίο τῶν «Στοιχείων» του. Ἀργότερα ὁ Ἐρατοσθένης (230 π.Χ.) ἔδωσε μέθοδο εὑρέσεως πρώτων ἀριθμῶν (κόσκινο τοῦ Ἐρατοσθένη).

Ὁ Διόφαντος ὁ Ἀλεξανδρινός (350 μ.Χ.) στό ἔργο του «Ἀριθμητικά», πού ἀπό τούς 13 τόμους σώζονται μόνο οἱ ἕξη, ἀσχολήθηκε μέ προβλήματα ἐξισώσεων.

Ἡ σύγχρονη θεωρία τῶν ἀριθμῶν ἀρχίζει μέ τίς ἐργασίες τοῦ P. Fermat (1601-1665 μ.Χ.), πού μέ τό φωτεινό μυαλό του πρόσφερε πολλά στή μαθηματική ἐπιστήμη καί ἰδιαίτερα στόν κλάδο τῆς θεωρίας ἀριθμῶν.

Οἱ μεγαλύτεροι μαθηματικοί τῶν τελευταίων αἰώνων ἐκτός τῶν ἄλλων ἀσχολήθηκαν καί μέ τή θεωρία ἀριθμῶν, ὅπως π.χ. ὁ L. Euler (1707-1763), ὁ K. Gauss (1777-1855) κ.ἄ.

1. ΔΙΑΙΡΕΤΟΤΗΤΑ ΣΤΟ ΣΥΝΟΛΟ Z.

Στήν παράγραφο αὐτή θά μελετήσουμε τήν ἔννοια τῆς διαιρετότητας στό σύνολο τῶν ἀκεραίων:

$$\mathbf{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Συχνά θά χρησιμοποιοῦμε καί τά παρακάτω ὑποσύνολα τοῦ $\mathbf{Z}$:

τό σύνολο τῶν μή μηδενικῶν ἀκεραίων: $\mathbf{Z}^* = \mathbf{Z} - \{0\}$
τό σύνολο τῶν μή ἀρνητικῶν ἀκεραίων: $\mathbf{Z}_+ = \{x \mid x \in \mathbf{Z}$ μέ $x \geq 0\}$
τό σύνολο τῶν θετικῶν ἀκεραίων: $\mathbf{Z}_+^* = \{x \mid x \in \mathbf{Z}$ μέ $x > 0\}$

Ἐπιπλέον θά χρησιμοποιήσουμε τό ἀκόλουθο ἀξίωμα.

Ἀξίωμα. Κάθε μή κενό ὑποσύνολο Α τοῦ συνόλου τῶν θετικῶν ἀκεραίων ἔχει ἐλάχιστο στοιχεῖο, δηλαδή ὑπάρχει στό Α μοναδικό στοιχεῖο, πού εἶναι μικρότερο ἀπό ὅλα τά ἄλλα στοιχεῖα τοῦ Α.

1.1. Ἡ ἔννοια τῆς διαιρετότητας στὸ Z.

Ἡ ἐξίσωση $-3x = 11$ δέν ἔχει ρίζα στό **Z**, γιατί δέν ὑπάρχει ἀκέραιος πού, ἄν πολλαπλασιαστεῖ μέ τό -3, νά δίνει γινόμενο 11. Ἡ ἐξίσωση ὅμως $-3x = 12$ ἔχει ρίζα στό σύνολο **Z** τόν ἀκέραιο -4, γιατί $-3(-4) = 12$. Στήν περίπτωση αὐτή λέμε ὅτι ὁ 12 *διαιρεῖται* μέ τό -3 ἤ ὅτι ὁ -3 *διαιρεῖ* τό 12.

Δίνουμε τώρα τόν παρακάτω ὁρισμό.

Ὁρισμός. Ἄν $\alpha, \beta \in \mathbf{Z}$, τότε θά λέμε ὅτι ὁ α **διαιρεῖται** μέ τό β ἤ ὅτι ὁ β **διαιρεῖ** τόν α καί θά γράφουμε $\beta|\alpha$, ὅταν καί μόνο ὅταν ὑπάρχει ἀκέραιος γ τέτοιος, ὥστε νά ἰσχύει

$$\alpha = \beta\gamma.$$

Στήν περίπτωση αὐτή θά λεμε ἐπίσης ὅτι

(i) ὁ α εἶναι **πολλαπλάσιο** τοῦ β καί

(ii) ὁ β εἶναι **διαιρέτης** ἤ **παράγοντας τοῦ α.**

Παραδείγματα:

1. Ἀπό τήν ἰσότητα $-35 = 7.(-5)$ ἔπεται ὅτι

$$7|-35 \quad \text{καί} \quad -5|-35.$$

2. Τό σύνολο τῶν πολλαπλασίων τοῦ 5 εἶναι

$$\{5.\gamma \mid \gamma \in \mathbf{Z}\},$$

δηλαδή

$$\{\ldots, -15, -10, -5, 0, 5, 10, 15, \ldots\}$$

Παρατηρήσεις

1. Ἐπειδή γιά κάθε $\beta \in \mathbf{Z}$ ἰσχύει $0 = \beta\ .\ 0$, ἔπεται ὅτι:

κάθε ἀκέραιος διαιρεῖ τό μηδέν.

2. Ἄν $0|\alpha$, τότε ὑπάρχει $\gamma \in \mathbf{Z}$ μέ τήν ἰδιότητα $\alpha = 0.\gamma$, δηλαδή $\alpha = 0$. Ἄρα:

τό μηδέν εἶναι διαιρέτης μόνο τοῦ ἑαυτοῦ του.

3. Ἀπό τίς προφανεῖς ἰσότητες

$$\alpha = (+1)\cdot\alpha \quad \text{καί} \quad \alpha = (-1)\,(-\alpha)$$

ἔπεται ὅτι:

κάθε ἀκέραιος α διαιρεῖται πάντα μέ τούς ± 1 καί $\pm\alpha$.

4. Ἄν γιά τρεῖς ἀκέραιους α,β καί γ ἰσχύει $\alpha = \beta\gamma$, τότε προφανῶς ἰσχύουν καί οἱ σχέσεις

$$-\alpha = \beta(-\gamma)\ , \quad \alpha = (-\beta)\,(-\gamma) \quad \text{καί} \quad -\alpha = (-\beta)\gamma.$$

Ἄρα:

ἄν $\beta|\alpha$, τότε $\beta|-\alpha$, $-\beta|\alpha$ καί $-\beta|-\alpha$.

5. Ἐπειδή, λόγω τῆς προηγούμενης παρατηρήσεως, ἰσχύει

$$\beta|\alpha \Leftrightarrow -\beta|\alpha,$$

τό σύνολο τῶν διαιρετῶν τοῦ α καθορίζεται πλήρως, ὅταν εἶναι γνωστό τό σύνολο τῶν **θετικῶν** διαιρετῶν του, πού θά τό συμβολίζουμε μέ $\Delta(\alpha)$.

6. Ἀπό τήν παρατήρηση 4 συμπεραίνουμε ἐπίσης ὅτι

$$\beta|\alpha \Leftrightarrow \beta|-\alpha,$$

δηλαδή **δύο ἀντίθετοι ἀκέραιοι α καί –α ἔχουν τούς ἴδιους διαιρέτες** καί ἑπομένως

$$\Delta(\alpha) = \Delta(-\alpha) = \Delta(|\alpha|).$$

Ἔτσι

$\Delta(-8) = \Delta(8) = \{1,2,4,8\}$, $\Delta(-9) = \Delta(9) = \{1,3,9\}$ καί

$\Delta(0) = \{x \mid x \in \mathbf{Z} \text{ μέ } x > 0\} = \mathbf{Z}^*_+$.

Στή συνέχεια θά ἀποδείξουμε δύο χρήσιμες προτάσεις.

Πρόταση 1. Ἄν $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbf{Z}$, τότε ἰσχύουν οἱ ἀκόλουθες ἰδιότητες:

(i) Ἄν $\alpha|\beta$, τότε γιά κάθε $\kappa \in \mathbf{Z}$ ἰσχύει $\alpha|\kappa\beta$.

(ii) Ἄν $\alpha|\beta$ καί $\beta|\gamma$, τότε $\alpha|\gamma$.

(iii) Ἄν $\alpha|\beta$ καί $\alpha|\gamma$, τότε $\alpha|\beta+\gamma$.

(iv) Ἄν $\alpha|\beta$ καί $\beta \neq 0$, τότε $|\alpha| \leq |\beta|$.

Ἀπόδειξη.

(i) Ἄν $\alpha|\beta$, τότε ὑπάρχει ἀκέραιος λ τέτοιος, ὥστε $\beta = \alpha \cdot \lambda$ καί ἑπομένως $\kappa\beta = \alpha(\lambda\kappa)$, πού σημαίνει ὅτι $\alpha|\kappa\beta$.

(ii) Ἄν $\alpha|\beta$ καί $\beta|\gamma$, τότε ὑπάρχουν ἀκέραιοι μ,ν τέτοιοι, ὥστε

$$\beta = \alpha \cdot \mu \quad \text{καί} \quad \gamma = \beta \cdot \nu,$$

ὁπότε

$$\gamma = \beta \cdot \nu = (\alpha \cdot \mu) \cdot \nu = \alpha(\mu \cdot \nu),$$

δηλαδή $\alpha|\gamma$.

(iii) Ἄν $\alpha|\beta$ καί $\alpha|\gamma$, τότε ὑπάρχουν ἀκέραιοι λ,μ τέτοιοι, ὥστε

$$\beta = \alpha\lambda \quad \text{καί} \quad \gamma = \alpha \cdot \mu,$$

ὁπότε

$$\beta + \gamma = \alpha(\lambda + \mu),$$

πού σημαίνει ὅτι $\alpha|\beta+\gamma$.

(iv) Ἄν $\alpha|\beta$, τότε ὑπάρχει ἀκέραιος λ τέτοιος, ὥστε $\beta = \alpha \cdot \lambda$. Ἐξάλλου, ἀφοῦ $\beta \neq 0$, θά εἶναι $\lambda \neq 0$ καί ἑπομένως

$$|\lambda| \geq 1.$$

Πολλαπλασιάζοντας καί τά δύο μέλη αὐτῆς τῆς ἀνισότητας μέ $|\alpha|$ παίρνουμε

$$|\alpha\lambda| \geq |\alpha|$$

καί ἄρα $|\beta| \geq |\alpha|$.

III. 1.2.

Λόγω τῆς ἰδιότητας (iv) τῆς προηγούμενης προτάσεως κάθε θετικός διαιρέτης x τοῦ $\beta \in \mathbf{Z}^*$ ἱκανοποιεῖ τή σχέση $1 \leq x \leq |\beta|$, δηλαδή

$$\boxed{x \in \Delta(\beta) \Rightarrow 1 \leq x \leq |\beta|} \qquad (1)$$

Ἀπό τήν (1) καί τήν παρατήρηση 4 ἔχουμε τό ἀκόλουθο πόρισμα.

Πόρισμα 1. Οἱ μοναδικοί διαιρέτες τοῦ 1 εἶναι οἱ ± 1.

Ἐξάλλου λόγω τῆς προτάσεως 1 καί τῆς παρατηρήσεως 3 ἔχουμε τό ἀκόλουθο πόρισμα.

Πόρισμα 2. Ἡ σχέση "|" μέσα στό σύνολο τῶν θετικῶν ἀκεραίων εἶναι σχέση μερικῆς διατάξεως (δηλαδή ἀνακλαστική, μεταβατική καί ἀντισυμμετρική).

Τέλος ἀπό τήν (1) ἔχουμε τό ἀκόλουθο πόρισμα.

Πόρισμα 3. Τό σύνολο τῶν θετικῶν διαιρετῶν ἑνός ἀκεραίου $\beta \in \mathbf{Z}^*$ εἶναι πεπερασμένο.

Πρόταση 2. Ἄν $\alpha \in Z$, $\beta \in \mathbf{Z}^*$ καί $\beta|\alpha$, τότε ὑπάρχει μοναδικός ἀκέραιος γ μέ τήν ἰδιότητα $\alpha = \beta \cdot \gamma$.

Ἀπόδειξη. Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι ὑπάρχουν $\gamma, \gamma_1 \in \mathbf{Z}$ τέτοιοι, ὥστε

$$\alpha = \beta\gamma \quad \text{καί} \quad \alpha = \beta\gamma_1.$$

Τότε λόγω τῆς μεταβατικῆς ἰδιότητας τῆς ἰσότητας παίρνουμε

$$\beta\gamma = \beta\gamma_1$$

καί ἑπομένως $\gamma = \gamma_1$, ἀφοῦ $\beta \neq 0$.

Ἄν $\beta \in \mathbf{Z}^*$ καί $\beta|\alpha$, τότε ἡ πράξη, μέ τήν ὁποία βρίσκεται ὁ μοναδικός (λόγω τῆς προτ. 2) ἀκέραιος γ μέ τήν ἰδιότητα $\alpha = \beta\gamma$, εἶναι ἡ γνωστή μας τέλεια διαίρεση καί ὁ ἀκέραιος γ εἶναι τό ἀκέραιο πηλίκο αὐτῆς τῆς διαιρέσεως.

1.2. Πρῶτοι καί σύνθετοι ἀριθμοί.

Μιά ἀπό τίς πιό βασικές ἔννοιες στή θεωρία ἀριθμῶν εἶναι ἡ ἔννοια τοῦ *πρώτου ἀριθμοῦ*. Γιά νά κατανοήσουμε τήν ἔννοια αὐτή, ἄς πάρουμε τό σύνολο

$$A = \mathbf{Z} - \{-1, +1\}.$$

Κάθε στοιχεῖο α τοῦ συνόλου Α ἔχει, λόγω τῆς παρατηρήσεως 3 τῆς 1.1, τουλάχιστον δύο θετικούς διαρέτες, τούς 1 καί $|\alpha|$. Π.χ.

$$\Delta(3) = \{1,3\}, \quad \Delta(-4) = \{1,2,4\}, \quad \Delta(-5) = \{1,5\}$$

$$\Delta(6) = \{1, 2, 3, 6\}, \quad \Delta(7) = \{1,7\}.$$

Παρατηροῦμε ὅτι κάθε ἕνας ἀπό τούς ἀριθμούς 3, –5, 7 ἔχει σύνολο θετικῶν διαιρετῶν μέ *δύο ἀκριβῶς* στοιχεῖα. Τέτοιοι ἀριθμοί, ὅπως οἱ 3, –5 καί 7, ὀνομάζονται *πρῶτοι ἀριθμοί*. Ἔτσι ἔχουμε τόν ἀκόλουθο ὁρισμό.

Ὁρισμός. Ἕνας ἀκέραιος p ὀνομάζεται **πρῶτος ἀριθμός**, ὅταν καί μόνο ὅταν $p \neq \pm 1$ καί οἱ μοναδικοί θετικοί διαιρέτες του εἶναι οἱ ἀριθμοί $|p|$ καί 1, δηλαδή $\Delta(p) = \{1, |p|\}$.

Κάθε ἀκέραιος $\alpha \in \mathbf{Z} - \{-1, +1\}$, πού δέν εἶναι πρῶτος ἀριθμός, ὀνομάζεται **σύνθετος ἀριθμός**.

Ἔτσι κάθε στοιχεῖο τοῦ συνόλου $A = \mathbf{Z} - \{-1, +1\}$ εἶναι ἤ πρῶτος ἀριθμός ἤ σύνθετος. Οἱ ἀριθμοί -1 καί $+1$ (πού δέν ἀνήκουν στό A) εἶναι οἱ μόνοι ἀκέραιοι, πού τό σύνολο τῶν θετικῶν διαιρετῶν τους εἶναι μονομελές. (Πόρισμα 1 τῆς 1.1). Μέ βάση τόν προηγούμενο ὁρισμό οἱ ἀριθμοί -1 καί $+1$ οὔτε πρῶτοι ἀριθμοί εἶναι οὔτε σύνθετοι.

Παρατηρήσεις

1. Ἄν p εἶναι πρῶτος ἀριθμός, τότε, ἀφοῦ $\Delta(p) = \Delta(-p)$, θά εἶναι καί ὁ $-p$ πρῶτος ἀριθμός.
2. Ἄν p_1, p_2 εἶναι **θετικοί** πρῶτοι ἀριθμοί καί $p_1 | p_2$, τότε, ἀφοῦ $\Delta(p_2) = \{1, p_2\}$, θά εἶναι $p_1 = p_2$.

Παραδείγματα.

1. Ὁ ἀκέραιος 2 εἶναι πρῶτος ἀριθμός, γιατί $\Delta(2) = \{1,2\}$.
2. Ὁ ἀκέραιος -9 εἶναι σύνθετος ἀριθμός, γιατί $\Delta(-9) = \{1,3,9\}$.
3. Ὁ ἀκέραιος 5 εἶναι πρῶτος ἀριθμός, γιατί $\Delta(5) = \{1,5\}$.

1.3. Ἡ ἔννοια τῆς ἀλγοριθμικῆς διαιρέσεως.

Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι ἔχουμε τούς ἀκέραιους 32 καί 5. Τό 5 δέν εἶναι διαιρέτης τοῦ 32, ἀφοῦ δέν ὑπάρχει ἀκέραιος α μέ τήν ἰδιότητα $32 = 5\cdot\alpha$. Ὁ ἀκέραιος ὅμως 32 μπορεῖ νά ἀναλυθεῖ κατά πολλούς τρόπους σέ ἄθροισμα ἑνός πολλαπλασίου τοῦ 5 καί ἑνός *θετικοῦ* ἀκεραίου, ὅπως δείχνουν οἱ παρακάτω ἰσότητες(1):

$$\begin{array}{ll} 32 = 5\cdot 6 + 2 & 32 = 5\cdot 2 + 22 \\ 32 = 5\cdot 5 + 7 & 32 = 5\cdot 1 + 27 \\ 32 = 5\cdot 4 + 12 & 32 = 5\cdot 0 + 32 \\ 32 = 5\cdot 3 + 17 & 32 = 5\cdot(-1) + 37 \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Γράφουμε τώρα τίς προηγούμενες ἰσότητες μέ τόν ἀκόλουθο τρόπο:

$$\begin{array}{ll} 32-5\cdot 6 = 2 & 32-5\cdot 2 = 22 \\ 32-5\cdot 5 = 7 & 32-5\cdot 1 = 27 \\ 32-5\cdot 4 = 12 & 32-5\cdot 0 = 32 \\ 32-5\cdot 3 = 17 & 32-5(-1) = 37 \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Τά δεύτερα μέλη στίς προηγούμενες ἰσότητες σχηματίζουν ἕνα σύνολο ἀπό μή ἀρνητικούς ἀκεραίους, καί ὁ *ἐλάχιστος* ἀπό αὐτούς εἶναι ὁ ἀκέραιος 2, πού εἶναι καί ὁ *μοναδικός* πού περιέχεται μεταξύ τοῦ 0 καί τοῦ 5.

Θά ἀποδείξουμε τώρα ὅτι ἡ ὕπαρξη καί ἡ μοναδικότητα ἑνός τέτοιου ἀριθμοῦ, ὅπως τοῦ 2 στό προηγούμενο παράδειγμα, ἰσχύει γενικά.

1. Σημειῶστε ὅτι $32 \equiv 2 \pmod 5$, $32 \equiv 7 \pmod 5$, $32 \equiv 12 \pmod 5$ κ.τ.λ.

Θεώρημα. Ἄν $\alpha \in \mathbf{Z}$ καί $\beta \in \mathbf{Z}^*$, τότε ὑπάρχουν μοναδικοί ἀκέραιοι π καί υ τέτοιοι, ὥστε

$$\alpha = \beta\pi + \upsilon \qquad \text{καί} \qquad 0 \leq \upsilon < |\beta|$$

Ἀπόδειξη. Διακρίνουμε τίς ἀκόλουθες περιπτώσεις:

I. $\alpha \in \mathbf{Z}_+$ καί $\beta > 0$. Ἄς θεωρήσουμε τό σύνολο A ὅλων τῶν ἀκεραίων τῆς μορφῆς $\alpha - \beta x$, ὅπου x εἶναι ἕνας ἀκέραιος τέτοιος, ὥστε νά ἰσχύει $\alpha - \beta x \geq 0$, δηλαδή

$$A = \{\alpha - \beta x \mid x \in \mathbf{Z} \quad \text{καί} \quad \alpha - \beta x \geq 0\}.$$

Τό σύνολο αὐτό δέν εἶναι κενό. Πράγματι, ἀφοῦ εἶναι $\beta \geq 1$, πολλαπλασιάζοντας καί τά δύο μέλη της μέ $\alpha \in \mathbf{Z}_+$ βρίσκουμε $\alpha\beta \geq \alpha$ καί ἐπομένως $\alpha + \alpha\beta \geq \geq \alpha + \alpha \geq 0$, δηλαδή $\alpha + \alpha\beta \geq 0$. Ἔτσι, ἄν πάρουμε $x = -\alpha$, συμπεραίνουμε ὅτι ὁ μή ἀρνητικός ἀκέραιος $\alpha + \alpha\beta$ ἀνήκει στό σύνολο A. Σύμφωνα μέ τό ἀξίωμα τῆς παραγράφου 1 τό σύνολο A ἔχει ἐλάχιστο στοιχεῖο, ἔστω υ. Ἀφοῦ $\upsilon \in A$, θά ὑπάρχει ἀκέραιος π τέτοιος, ὥστε νά ἰσχύει $\alpha - \beta\pi = \upsilon$. Ἑπομένως

$$\alpha = \beta\pi + \upsilon \qquad \text{καί} \qquad 0 \leq \upsilon.$$

Θά ἀποδείξουμε τώρα ὅτι $\upsilon < \beta$. Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι $\upsilon \geq \beta$. Τότε εἶναι $\upsilon - \beta \geq 0$ καί, ἐπειδή ἰσχύει

$$\upsilon - \beta = (\alpha - \pi\beta) - \beta = \alpha - (\pi + 1)\beta,$$

συμπεραίνουμε ὅτι τό $\upsilon - \beta$ ἀνήκει στό A. Αὐτό ὅμως εἶναι ἄτοπο, γιατί τό $\upsilon - \beta$ εἶναι μικρότερο ἀπό τό υ, ἐνῶ συγχρόνως τό υ εἶναι τό ἐλάχιστο στοιχεῖο τοῦ A. Ἑπομένως $\upsilon < \beta$ καί ἔτσι ἔχουμε ἀποδείξει ὅτι ὑπάρχουν ἀκέραιοι π καί υ τέτοιοι, ὥστε

$$\alpha = \beta\pi + \upsilon \qquad \text{καί} \qquad \alpha \leq \upsilon < \beta \tag{1}$$

Μένει ν' ἀποδείξουμε ὅτι οἱ ἀκέραιοι π καί υ εἶναι μοναδικοί. Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι ὑπάρχουν ἀκέραιοι π' καί υ' τέτοιοι, ὥστε $\alpha = \beta\pi' + \upsilon'$ καί $0 \leq \upsilon' < \beta$. Χωρίς νά βλάψουμε τή γενικότητα μποροῦμε νά ὑποθέσουμε ὅτι $\pi' \leq \pi$. Ἐπειδή εἶναι $\alpha = \beta\pi + \upsilon$, ἔχουμε $\beta\pi + \upsilon = \beta\pi' + \upsilon'$ ἤ

$$\beta\,(\pi - \pi') = \upsilon' - \upsilon. \tag{2}$$

Προσθέτοντας τώρα κατά μέλη τίς σχέσεις $0 \leq \upsilon$ καί $\upsilon' < \beta$ βρίσκουμε $\upsilon' < \beta + \upsilon$ ἤ $\upsilon' - \upsilon < \beta$, ὁπότε ἡ (1) γράφεται

$$\beta\,(\pi - \pi') < \beta$$

ἤ, ἀφοῦ $\beta > 0$,

$$\pi - \pi' < 1.$$

Ἔτσι γιά τόν **ἀκέραιο** $\pi - \pi'$ ἰσχύουν οἱ σχέσεις

$$0 \leq \pi - \pi' \qquad \text{καί} \qquad \pi - \pi' < 1$$

καί ἐπομένως $\pi - \pi' = 0$, δηλαδή $\pi = \pi'$. Τώρα ἡ (2) δίνει $\upsilon' = \upsilon$. Ἄρα τό θεώρημα ἰσχύει στήν περίπτωση αὐτή.

II. $\alpha<0$ καί $\beta>0$. Ἡ ἀπόδειξη στήν περίπτωση αὐτή γίνεται, ὅπως στήν περίπτωση I, ἀρκεῖ νά διαπιστωθεῖ ὅτι τό $\alpha-\beta\alpha$ εἶναι στοιχεῖο τοῦ συνόλου A·

III. $\alpha\in\mathbf{Z}$ καί $\beta<0$. Στήν περίπτωση αὐτή θέτουμε στίς σχέσεις (1) ὅπου β τό $|\beta|$, ὁπότε παίρνουμε

$$\alpha=|\beta|\pi+\upsilon \quad \text{καί} \quad 0\leq\upsilon<|\beta|$$

ἤ

$$\alpha=\beta(-\pi)+\upsilon \quad \text{καί} \quad 0\leq\upsilon<|\beta|$$

ἤ

$$\alpha=\beta\pi'+\upsilon \quad \text{καί} \quad 0\leq\upsilon<|\beta|,$$

ὅπου $\pi'=-\pi$.

Σύμφωνα μέ τό προηγούμενο θεώρημα σέ κάθε διατεταγμένο ζεῦγος (α,β) τοῦ $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}^*$ ἀντιστοιχεῖ μοναδικό διατεταγμένο ζεῦγος (π,υ) τοῦ $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}_+$ τέτοιο, ὥστε νά ἰσχύουν οἱ σχέσεις $\alpha=\beta\pi+\upsilon$ καί $0\leq\upsilon<|\beta|$.

Δηλαδή ἔχουμε μία πράξη τοῦ $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}^*$ στό $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}_+$. Ἡ πράξη αὐτή ὀνομάζεται **ἀλγοριθμική διαίρεση.** Οἱ ἀριθμοί α, $\beta(\neq0)$, π καί υ ὀνομάζονται ἀντιστοίχως **διαιρετέος, διαιρέτης, πηλίκο** καί **ὑπόλοιπο τῆς (ἀλγοριθμικῆς) διαιρέσεως τοῦ α μέ τό β.** Ἡ σχέση $\alpha=\beta\pi+\upsilon$ (ὅπου $0\leq\upsilon<|\beta|$) ὀνομάζεται **ἰσότητα τῆς (ἀλγοριθμικῆς) διαιρέσεως τοῦ α μέ τό β.**

Παρατήρηση. Εἶναι φανερό ὅτι, ἄν στήν ἰσότητα τῆς ἀλγοριθμικῆς διαιρέσεως τοῦ α μέ τό β εἶναι $\upsilon=0$, τότε ὁ β εἶναι παράγοντας τοῦ α.

Παραδείγματα.

1. Ἡ ἀλγοριθμική διαίρεση τοῦ -35 μέ τό 6 δίνει πηλίκο $\pi=-6$ καί ὑπόλοιπο $\upsilon=1$:
$$-35=6(-6)+1$$
2. Ἡ σχέση $-14=4(-5)+5$ δέν εἶναι ἰσότητα τῆς διαιρέσεως τοῦ -14 μέ τό 4 οὔτε τῆς διαιρέσεως τοῦ -14 μέ τό -5, γιατί εἶναι $5>4$ καί $5\geq|-5|$.
3. Ἄν $\alpha\in\mathbf{Z}$, τότε τά δυνατά ὑπόλοιπα τῆς διαιρέσεως τοῦ α μέ τό 5 εἶναι 0,1,2,3 ἤ 4, γιατί τό ὑπόλοιπο υ αὐτῆς τῆς διαιρέσεως ἱκανοποιεῖ τή σχέση $0\leq\upsilon<5$.

Ἡ ἀλγοριθμική διαίρεση ἑνός ἀκεραίου μέ τό 2 εἶναι δυνατό νά δώσει ὑπόλοιπο 0 ἤ 1. Εἶναι γνωστό ὅτι στήν πρώτη περίπτωση ὁ ἀκέραιος ὀνομάζεται *ἄρτιος*, ἐνῶ στή δεύτερη *περιττός*. Ἔτσι ἕνας ἄρτιος ἀκέραιος ἔχει τή μορφή $2k$, ἐνῶ ἕνας περιττός τή μορφή $2k+1$, ὅπου $k\in\mathbf{Z}$.

Οἱ ἀκέραιοι -8, 4, -6, 10 εἶναι ἄρτιοι, ἐνῶ οἱ 5, -7, 9, -15 περιττοί.

Ἡ ἀλγοριθμική διαίρεση τοῦ 32 μέ τό 12 δίνει ὑπόλοιπο 8. Παρατηροῦμε ὅτι ὁ ἀκέραιος 2, πού εἶναι κοινός διαιρέτης τῶν 32 καί 12, εἶναι διαιρέτης καί τοῦ ὑπόλοιπου 8 καί ἐπιπλέον ὁ ἀκέραιος 4, πού εἶναι κοινός διαιρέτης τοῦ 12 καί τοῦ ὑπόλοιπου 8, εἶναι διαιρέτης καί τοῦ διαιρετέου 32. Οἱ ἰδιότητες αὐτές ἰσχύουν γενικά, ὅπως δείχνει ἡ παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 1. Ἄν υ εἶναι τό ὑπόλοιπο τῆς ἀλγοριθμικῆς διαιρέσεως τοῦ α μέ τό β καί $\delta\in\mathbf{Z}$, τότε ἰσχύουν

(i) $\delta|\alpha$ καί $\delta|\beta\Rightarrow\delta|\upsilon$,

(ii) $\delta|\beta$ καί $\delta|\upsilon\Rightarrow\delta|\alpha$.

᾿Απόδειξη. (i) ᾿Από τήν ἰσότητα τῆς ἀλγοριθμικῆς διαιρέσεως τοῦ α μέ τό β παίρνουμε

$$\alpha - \beta\pi = \upsilon \qquad (1)$$

᾿Αφοῦ $\delta|\alpha$ καί $\delta|\beta$, λόγω τῆς προτάσεως 1 τῆς 1.1 ὁ δ εἶναι διαιρέτης τοῦ πρώτου μέλους τῆς (1) καί ἑπομένως $\delta|\upsilon$.

(ii) ᾿Αποδεικνύεται ὅμοια.

Παρατήρηση. Στό παράδειγμα πού ἀναφέραμε πρίν ἀπό τήν πρόταση 1 ὁ ἀκέραιος 8 εἶναι κοινός διαιρέτης τοῦ 32 καί τοῦ ὑπόλοιπου 8, ἀλλά δέν εἶναι διαιρέτης τοῦ 12. ῎Ετσι στήν πρόταση 1 **δέν** ἰσχύει ἡ συνεπαγωγή:

$$\delta|\alpha \quad \text{καί} \quad \delta\,|\,\upsilon \Rightarrow \delta\,|\,\beta.$$

Πρόταση 2. ῎Εστω $\alpha, \beta \in \mathbf{Z}$ καί $\gamma \in \mathbf{Z}^*$. Τότε οἱ διαιρέσεις τῶν α καί β μέ τό γ δίνουν τό ἴδιο ὑπόλοιπο, ὅταν καί μόνο ὅταν ἡ διαφορά $\alpha - \beta$ εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ γ.

᾿Απόδειξη. ῎Αν οἱ διαιρέσεις τῶν α καί β μέ τό γ δίνουν τό ἴδιο ὑπόλοιπο, τότε ἔχουμε

$$\alpha = \gamma\pi_1 + \upsilon \quad \text{καί} \quad \beta = \gamma\pi_2 + \upsilon \quad (\text{ὅπου} \quad 0 \leq \upsilon < |\gamma|),$$

ὁπότε μέ ἀφαίρεση κατά μέλη παίρνουμε

$$\alpha - \beta = \gamma\,(\pi_1 - \pi_2),$$

πού σημαίνει ὅτι τό $\alpha - \beta$ εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ γ, ἀφοῦ $\pi_1 - \pi_2 \in \mathbf{Z}$.

᾿Αντίστροφα, ἄν εἶναι $\alpha - \beta = \gamma . \lambda$, τότε ἔχοντας ὑπόψη τήν ἰσότητα τῆς διαιρέσεως τοῦ β μέ τό γ, δηλαδή τήν

$$\beta = \gamma\pi + \upsilon \qquad (\text{ὅπου } 0 \leq \upsilon < |\gamma|),$$

βρίσκουμε

$$\alpha - (\gamma\pi + \upsilon) = \gamma \cdot \lambda$$

ἤ

$$\alpha = \gamma\,(\lambda + \pi) + \upsilon.$$

᾿Επειδή εἶναι $0 \leq \upsilon < |\gamma|$, ἡ τελευταία σχέση εἶναι ἡ ἰσότητα τῆς διαιρέσεως τοῦ α μέ τό γ καί ἑπομένως τό ὑπόλοιπό της εἶναι υ.

1.4. ᾿Ασκήσεις.

1. ῎Αν $\alpha \equiv \beta \pmod 2$, δεῖξτε ὅτι ὁ ἀκέραιος $\alpha + \beta$ εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ 2.
2. ῎Αν $\nu = 4\kappa + 1$, ὅπου $\kappa \in \mathbf{Z}$, δεῖξτε ὅτι $4 \mid \nu^3 + 2\nu + 1$.
3. ῎Αν $\alpha_1 \equiv \alpha_2 \pmod \nu$ καί $\beta_1 \equiv \beta_2 \pmod \nu$, δεῖξτε ὅτι $\alpha_1 + \beta_2 \equiv \alpha_2 + \beta_2 \pmod \nu$ καί $\alpha_1\beta_1 \equiv \alpha_2\beta_2 \pmod \nu$.
4. Δεῖξτε ὅτι τό γινόμενο δύο διαδοχικῶν ἀκεραίων εἶναι ἄρτιος ἀριθμός καί ἔπειτα ὅτι τό τετράγωνο ἑνός περιττοῦ ἀριθμοῦ εἶναι τῆς μορφῆς $8\kappa + 1$, ὅπου $\kappa \in \mathbf{Z}$.
5. ῎Αν α, β, x εἶναι ἀκέραιοι τέτοιοι, ὥστε $\alpha \equiv \beta \pmod 2$ καί $x = \alpha^2 + \beta^2$, δεῖξτε ὅτι τό $\frac{x}{2}$ εἶναι ἄθροισμα τετραγώνων δύο ἀκεραίων ἀριθμῶν.

6. Δεῖξτε ὅτι γιά κάθε $\lambda \in \mathbf{Z}$ ὁ ἀκέραιος $\lambda(\lambda^2+2)$ εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ 3.
7. Ἄν δύο ἀκέραιοι δέν εἶναι πολλαπλάσια τοῦ 3, δεῖξτε ὅτι τό ἄθροισμα ἤ ἡ διαφορά τους διαιρεῖται μέ τό 3.
8. Ἄν ἕνας ἀκέραιος δέν εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ 3, δεῖξτε ὅτι τό τετράγωνό του εἶναι τῆς μορφῆς $3\lambda+1$, ὅπου $\lambda \in \mathbf{Z}$.
9. Ἄν $\kappa \in \mathbf{Z}$, δεῖξτε ὅτι $6 \mid \kappa(\kappa+1)(2\kappa+1)$.
10. Ἄν ἕνας ἀκέραιος α δέν εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ 5, δεῖξτε ὅτι ἡ διαίρεση τοῦ α^2 μέ τό 5 δίνει ὑπόλοιπο 1 ἤ 4. Στή συνέχεια δεῖξτε ὅτι, ἄν οἱ ἀκέραιοι x καί y δέν εἶναι πολλαπλάσια τοῦ 5, τότε $5 \mid x^4-y^4$.
11. Ἡ διαίρεση ἑνός ἀκεραίου α μέ τό 65 δίνει πηλίκο ἕναν ἄρτιο ἀριθμό λ καί ὑπόλοιπο λ^3. Προσδιορίστε τούς ἀκεραίους α.
12. Ἄν ν εἶναι φυσικός ἀριθμός, δεῖξτε ὅτι $9 \mid 2^{4\nu+1}-2^{2\nu}-1$.
13. Δεῖξτε ὅτι γιά κάθε φυσικό ἀριθμό ν ἰσχύουν

    α) $5 \mid 3^{3\nu+2} + 2^{\nu+4}$ β) $7 \mid 3^{2\nu+1} + 2^{\nu+2}$

    γ) $11 \mid 3^{2\nu+2} + 2^{6\nu+1}$ δ) $17 \mid 3.5^{2\nu-1} + 2^{3\nu-2}$.
14. Ἄν $\alpha,\beta,\rho \in \mathbf{Z}$ καί οἱ ἀκέραιοι $\alpha^2-\beta$ καί $\beta^2-\alpha$ εἶναι πολλαπλάσια τοῦ ρ, δεῖξτε ὅτι οἱ διαιρέσεις τῶν $\alpha\beta^2+\alpha^2\beta$ καί $\alpha^2+\beta^2$ μέ τό ρ δίνουν τό ἴδιο ὑπόλοιπο.
15. Βρεῖτε τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως τοῦ $9^{30} + 17^{10}$ μέ τό 8.
16. Ἄν ρ,λ εἶναι ἀκέραιοι μέ $4\rho+1 = 3\lambda$, βρεῖτε τό γενικό τύπο τοῦ ρ.

1.5. Μέγιστος κοινός διαιρέτης ἀκεραίων. — Ἀλγόριθμος τοῦ Εὐκλείδη.

Ἄν α καί β εἶναι δύο ἀκέραιοι, τότε τό σύνολο $\Delta(\alpha) \cap \Delta(\beta)$ περιέχει ὅλους τούς κοινούς θετικούς διαιρέτες τῶν α καί β, ἕνας ἀπό τούς ὁποίους εἶναι καί ὁ ἀκέραιος 1. Στήν περίπτωση πού ἕνας τουλάχιστον ἀπό τούς α καί β εἶναι $\neq 0$, τό σύνολο $\Delta(\alpha) \cap \Delta(\beta)$ εἶναι πεπερασμένο (Πορ. 3 τῆς 1.1.) καί ἑπομένως ἔχει μέγιστο στοιχεῖο. Τό μέγιστο αὐτό στοιχεῖο τοῦ $\Delta(\alpha) \cap \Delta(\beta)$ ὀνομάζεται **ὁ μέγιστος κοινός διαιρέτης (ΜΚΔ) τῶν α καί β** καί συμβολίζεται μέ (α,β).

Ἔτσι ὁ μέγιστος κοινός διαιρέτης δύο ἀκεραίων α καί β (πού ἕνας τουλάχιστον εἶναι $\neq 0$) εἶναι ὁ μοναδικός **θετικός** ἀκέραιος δ, πού ἱκανοποιεῖ τίς ἰδιότητες:

(i) $\delta|\alpha$ καί $\delta|\beta$,

(i)) $\gamma|\alpha$ καί $\gamma|\beta \Rightarrow \gamma \leq \delta$.

Ἐπειδή τό σύνολο

$$\Delta(0) \cap \Delta(0) = \mathbf{Z}_+^*$$

δέν ἔχει μέγιστο στοιχεῖο, μέγιστος κοινός διαιρέτης τῶν $\alpha=0$ καί $\beta=0$ δέν ὁρίζεται. Ἔτσι, ὅταν στά ἑπόμενα ἀναφερόμαστε στό μέγιστο κοινό διαιρέτη δύο ἀκεραίων, θά ὑποθέτουμε ὅτι ἕνας τουλάχιστον ἀπό αὐτούς εἶναι $\neq 0$.

Παραδείγματα.

1. Ἐπειδή $\Delta(-8) = \{1,2,4,8\}$ καί $\Delta(20) = \{1,2,4,5,10,20\}$, ἔχουμε $\Delta(-8) \cap \Delta(20) = \{1,2,4\}$ καί ἑπομένως $(-8, 20) = 4$.

2. Ἐπειδή ὁ μόνος κοινός θετικός διαιρέτης τῶν 4 καί 9 εἶναι ἡ μονάδα, ἔχουμε $(4,9) = 1$.

Παρατηρήσεις

1. Ἐπειδή $\Delta(\alpha) = \Delta(|\alpha|)$ καί $\Delta(\beta) = \Delta(|\beta|)$ (Παρατ. 6 τῆς 1.1), ἔχουμε
$$\Delta(\alpha) \cap \Delta(\beta) = \Delta(|\alpha|) \cap \Delta(|\beta|)$$
καί ἑπομένως
$$\boxed{(\alpha,\beta) = (|\alpha|, |\beta|)}$$

2. Ἄν $\alpha \in \mathbf{Z}^*$, τότε ὁ $|\alpha|$ εἶναι ὁ μέγιστος διαιρέτης τοῦ α (Προτ. 1 (iv) τῆς 1.1). Ἐπειδή ἐπιπλέον ἰσχύει $\Delta(\alpha) \cap \Delta(0) = \Delta(\alpha)$, ἔχουμε
$$(\alpha,0) = |\alpha|$$

3. Ἄν $\beta \in \mathbf{Z}^*$ καί $\beta|\alpha$, τότε, ἀφοῦ ὁ μέγιστος διαιρέτης τοῦ β εἶναι ὁ ἀκέραιος $|\beta|$ καί $|\beta| \in \Delta(\alpha)$, ἔχουμε $(\alpha,\beta) = |\beta|$.

Ἔστω
$$\alpha = \beta\pi + \upsilon \quad (\text{ὅπου } 0 \leq \upsilon < \beta)$$
ἡ ἰσότητα τῆς ἀλγοριθμικῆς διαιρέσεως τοῦ α μέ τό $\beta(\neq 0)$.

Ἔχουμε μάθει (Προτ. 1 τῆς 1.3) ὅτι κάθε κοινός διαιρέτης τῶν α καί β εἶναι διαιρέτης τοῦ υ καί κάθε κοινός διαιρέτης τῶν β καί υ εἶναι διαιρέτης τοῦ α. Ἑπομένως τά σύνολα $\Delta(\alpha) \cap \Delta(\beta)$ καί $\Delta(\beta) \cap \Delta(\upsilon)$ ταυτίζονται, πού σημαίνει ὅτι $(\alpha,\beta) = (\beta,\upsilon)$. Ἔτσι ἔχουμε τήν ἀκόλουθη πρόταση.

Πρόταση 1. Ἄν υ εἶναι τό ὑπόλοιπο τῆς ἀλγοριθμικῆς διαιρέσεως τοῦ α μέ τό β $(\neq 0)$, τότε
$$(\alpha,\beta) = (\beta,\upsilon).$$

Μέ τή βοήθεια τῆς προηγούμενης προτάσεως θά ἐξηγήσουμε μιά μέθοδο, μέ τήν ὁποία θά μποροῦμε νά ὑπολογίζουμε τό μέγιστο κοινό διαιρέτη δύο θετικῶν ἀκεραίων. Ἡ μέθοδος αὐτή ὀνομάζεται **ἀλγόριθμος τοῦ Εὐκλείδη**.

Ἄς δοῦμε πρῶτα τή μέθοδο αὐτή μέ ἕνα παράδειγμα.

Παράδειγμα 3. Θέλουμε νά ὑπολογίσουμε τό ΜΚΔ τῶν 306 καί 108. Γράφουμε τήν ἰσότητα τῆς ἀλγοριθμικῆς διαιρέσεως τοῦ 306 μέ τό 108:
$$306 = 108 \,.\, 2 + 90,$$
ἔπειτα τήν ἰσότητα τῆς διαιρέσεως τοῦ 108 μέ τό 90:
$$108 = 90 \,.\, 1 + 18$$
καί τέλος τήν ἰσότητα τῆς διαιρέσεως τοῦ 90 μέ τό 18:
$$90 = 18.5 + 0.$$
Λόγω τῆς προηγούμενης προτάσεως ἔχουμε
$$(306, 108) = (108, 90) = (90, 18) = (18,0) = 18.$$

Ἄς ἐξετάσουμε τώρα τή μέθοδο αὐτή γενικά. Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι ἔχουν δοθεῖ δύο μή μηδενικοί ἀκέραιοι α καί β καί θέλουμε νά βροῦμε τό (α,β). Ἐπειδή $(\alpha,\beta) = (|\alpha|, |\beta|)$ (Παρατ. 1) μποροῦμε νά ὑποθέσουμε ὅτι οἱ α,β εἶναι θετικοί ἀκέραιοι.

Γιά τή διαίρεση τοῦ α μέ τό β ἔχουμε:

$$\alpha = \beta\pi + \upsilon \quad \text{καί} \quad 0 \leq \upsilon < \beta.$$

Ἄν εἶναι $\upsilon = 0$, τότε $\beta|\alpha$, καί ἑπομένως $(\alpha,\beta) = \beta$ (Παρατ. 3).
Ἄν εἶναι $\upsilon \neq 0$, τότε γιά τή διαίρεση τοῦ β μέ τό υ ἔχουμε:

$$\beta = \upsilon\pi_1 + \upsilon_1 \quad \text{καί} \quad 0 \leq \upsilon_1 < \upsilon.$$

Ἄν εἶναι $\upsilon_1 \neq 0$, τότε γιά τή διαίρεση τοῦ υ μέ τό υ_1 ὅμοια ἔχουμε:

$$\upsilon = \upsilon_1\pi_2 + \upsilon_2 \quad \text{καί} \quad 0 \leq \upsilon_2 < \upsilon_1$$

καί συνεχίζουμε αὐτή τή διαδικασία μέχρι νά βροῦμε ὑπόλοιπο μηδέν· τοῦτο συμβαίνει, γιατί γιά τούς μή ἀρνητικούς ἀκεραίους $\upsilon, \upsilon_1, \upsilon_2, \ldots$ ἰσχύει

$$\beta > \upsilon > \upsilon_1 > \upsilon_2 > \ldots$$

καί τό πλῆθος τους εἶναι τό πολύ β. Ἔστω $\upsilon_{\nu+1} = 0$. Τότε ἔχουμε τίς ἀκόλουθες ἰσότητες

$$\begin{array}{ll}
\alpha = \beta\pi + \upsilon & (\mathrm{I}_0) \\
\beta = \upsilon\pi_1 + \upsilon_1 & (\mathrm{I}_1) \\
\upsilon = \upsilon_1\pi_2 + \upsilon_2 & (\mathrm{I}_2) \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots \\
\upsilon_{\nu-2} = \upsilon_{\nu-1}\pi_\nu + \upsilon_\nu & (\mathrm{I}_\nu) \\
\upsilon_{\nu-1} = \upsilon_\nu\pi_{\nu+1} + 0 & (\mathrm{I}_{\nu+1})
\end{array}$$

Τό τελευταῖο μή μηδενικό ὑπόλοιπο υ_ν εἶναι ὁ ΜΚΔ τῶν α καί β, γιατί σύμφωνα μέ τήν πρόταση 1 ἔχουμε

$$(\alpha,\beta) = (\beta,\upsilon) = (\upsilon,\upsilon_1) = \ldots = (\upsilon_{\nu-2}, \upsilon_{\nu-1}) = (\upsilon_{\nu-1},\upsilon_\nu) = (\upsilon_\nu, 0) = \upsilon_\nu$$

Ἄν χρησιμοποιήσει κανείς τίς ἰσότητες $(\mathrm{I}_0) - (\mathrm{I}_{\nu+1})$ τοῦ παραπάνω ἀλγόριθμου τοῦ Εὐκλείδη, μπορεῖ νά ἀποδείξει τήν ἀκόλουθη πρόταση.

Πρόταση 2. Ἄν δύο ἀκέραιοι διαιρεθοῦν μέ ἕνα θετικό κοινό διαιρέτη τους γ, τότε ὁ μέγιστος κοινός διαιρέτης τους διαιρεῖται μέ τό γ.

Πόρισμα. Ἄν $(\alpha,\beta) = \delta$, τότε

$$\left(\frac{\alpha}{\delta}, \frac{\beta}{\delta}\right) = 1.$$

Ἰδιαίτερο ἐνδιαφέρον παρουσιάζουν ἐκεῖνοι οἱ ἀκέραιοι α καί β, γιά τούς ὁποίους ἰσχύει $(\alpha,\beta) = 1$. Στήν περίπτωση αὐτή ὁ μόνος θετικός κοινός διαιρέτης τῶν α καί β εἶναι ἡ μονάδα. Δύο ἀκέραιοι, πού ἔχουν μέγιστο κοινό διαιρέτη τή μονάδα, ὀνομάζονται **πρῶτοι μεταξύ τους** ἤ **σχετικῶς πρῶτοι ἀριθμοί.** Π.χ. οἱ ἀκέραιοι 6 καί 5 εἶναι σχετικῶς πρῶτοι ἀριθμοί, γιατί $(6,5) = 1$.

Τό προηγούμενο πόρισμα μπορεῖ τώρα νά διατυπωθεῖ μέ τόν ἀκόλουθο τρόπο:

Ἄν δύο ἀκέραιοι ἀριθμοί διαιρεθοῦν μέ τό μέγιστο κοινό διαιρέτη τους, γίνονται σχετικῶς πρῶτοι ἀριθμοί.

Θά δοῦμε τώρα ὅτι ὁ ΜΚΔ δ δύο ἀκεραίων α καί β μπορεῖ νά γραφτεῖ σάν γραμμικός συνδυασμός τῶν α καί β, δηλαδή

$$\delta = \alpha\alpha' + \beta\beta' \qquad (1),$$

ὅπου $\alpha', \beta' \in \mathbf{Z}$.

Ἄς δοῦμε πρῶτα ἕνα παράδειγμα προσδιορισμοῦ ἑνός ζεύγους ἀκεραίων α' καί β', ὥστε νά ἱκανοποιεῖται ἡ σχέση (1).

Παράδειγμα 4. Στό παράδειγμα 3 βρήκαμε ὅτι $(306,108) = 18$. Ὁ ἀλγόριθμος τοῦ Εὐκλείδη ἔδωσε ἐκεῖ τίς ἀκόλουθες ἰσότητες:

$$306 = 108\,.\,2 + 90, \quad 108 = 90.1 + 18, \quad 90 = 18.5$$

Ἡ πρώτη ἀπό αὐτές δίνει $90 = 306{-}108.2$, ὁπότε ἀπό τή δεύτερη βρίσκουμε

$$18 = 108{-}90.1 = 108{-}(306{-}108.2).1 = 306.(-1) + 108.3,$$

δηλαδή $18 = 360\,(-1) + 108.3$. Ἄρα $\alpha' = -1$ καί $\beta' = 3$.

Ἄν ἐργαστεῖ κανείς ὅπως στό προηγούμενο παράδειγμα, μπορεῖ, χρησιμοποιώντας τίς ἰσότητες (I_o)–(I_v) τοῦ ἀλγόριθμου τοῦ Εὐκλείδη, νά ἀποδείξει τήν προηγούμενη σχέση (1) γενικά.

Στή συνέχεια ὅμως θά ἀποδείξουμε, ἀνεξάρτητα ἀπό τόν ἀλγόριθμο τοῦ Εὐκλείδη, τήν παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 3. Ἄν $\delta = (\alpha, \beta)$, τότε ὑπάρχουν ἀκέραιοι α' καί β' τέτοιοι, ὥστε νά ἰσχύει:

$$\delta = \alpha\alpha' + \beta\beta'$$

καί ὁ δ εἶναι ὁ μικρότερος θετικός ἀκέραιος, πού μπορεῖ νά γραφτεῖ σάν γραμμικός συνδυασμός τῶν α καί β.

Ἀπόδειξη. Θεωροῦμε τό σύνολο A ὅλων τῶν *θετικῶν* ἀκεραίων τῆς μορφῆς $\alpha x + \beta y$ μέ $x, y \in \mathbf{Z}$, δηλαδή

$$A = \{\alpha x + \beta y \mid x, y \in \mathbf{Z} \;\text{ καί }\; \alpha x + \beta y > 0\}$$

Ἄν πάρουμε $x = \alpha$ καί $y = \beta$, τότε ἔχουμε $\alpha x + \beta y = \alpha^2 + \beta^2 > 0$ (ἀφοῦ ἕνας ἀπό τούς α,β εἶναι $\neq 0$). Ἔτσι τό σύνολο A εἶναι $\neq \emptyset$, ὁπότε σύμφωνα μέ τό ἀξίωμα τῆς παραγράφου 1 ἔχει ἐλάχιστο στοιχεῖο, ἔστω δ'. Ἀφοῦ $\delta' \in A$, θά ὑπάρχουν ἀκέραιοι α' καί β' τέτοιοι, ὥστε

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' = \delta' \qquad (1)$$

Θά ἀποδείξουμε ὅτι ὁ *θετικός* ἀκέραιος δ' εἶναι διαιρέτης τοῦ α. Σύμφωνα μέ τό θεώρημα τῆς 1.3 ὑπάρχουν ἀκέραιοι π καί υ τέτοιοι, ὥστε

$$\alpha = \delta'\pi + \upsilon \quad \text{καί} \quad 0 \leq \upsilon < \delta'.$$

Τότε ἔχουμε

$$\upsilon = \alpha - \delta'\pi = \alpha - \pi\,(\alpha\alpha' + \beta\beta') = \alpha\,(1 - \pi\alpha') + \beta(-\pi\beta'),$$

δηλαδή

$$\upsilon = \alpha\,(1 - \pi\alpha') + \beta\,(-\pi\beta').$$

Ἄν εἶναι $υ > 0$, πότε ἀπό τήν τελευταία ἰσότητα συμπεραίνουμε ὅτι $υ \in A$. Ἀλλά αὐτό εἶναι ἄτοπο, ἀφοῦ ἰσχύει $υ < δ'$ καί τό $δ'$ εἶναι τό ἐλάχιστο στοιχεῖο τοῦ A. Ἑπομένως εἶναι $υ = 0$ καί ἄρα $α = δ'π$, πού σημαίνει ὅτι $δ'|α$. Μέ ὅμοιο τρόπο μποροῦμε νά ἀποδείξουμε ὅτι $δ'|β$. Ἄρα ὁ $δ'$ εἶναι κοινός διαιρέτης τῶν α καί β. Ἄν τώρα γ εἶναι ἕνας κοινός διαιρέτης τῶν α καί β, τότε ἀπό τήν ἰσότητα (1) καί τήν πρόταση 1 τῆς 1.1 συμπεραίνουμε ὅτι ὁ γ εἶναι διαιρέτης τοῦ $δ'$ καί ἑπομένως $γ \leq δ'$. Ἄρα $δ' = δ = (α,β)$.

Στήν ἀπόδειξη τῆς προηγούμενης προτάσεως εἴδαμε ὅτι κάθε κοινός διαιρέτης τῶν α καί β εἶναι ἐπίσης διαιρέτης τοῦ $δ' = δ$ καί ἑπομένως.

$$Δ(α) \cap Δ\,(β) \subseteq Δ\,(δ).$$

Ἀντίστροφα, ἄν $x \in Δ(δ)$, τότε $x|δ$ καί, ἀφοῦ $δ|α$ καί $δ|β$, λόγω τῆς μεταβατικῆς ἰδιότητας ἔχουμε $x|α$ καί $x|β$, ὁπότε $x \in Δ(α) \cap Δ(β)$ καί ἄρα $Δ(δ) \subseteq Δ(α) \cap Δ(β)$ Ἔτσι ἔχουμε τήν ἀκόλουθη πρόταση.

Πρόταση 4. Ἄν $δ = (α,β)$, τότε

$$Δ(δ) = Δ(α) \cap Δ(β).$$

Σημείωση. Ἀξίζει νά τονίσουμε ὅτι ἡ πρόταση 3 δέ δηλώνει ὅτι οἱ ἀκέραιοι $α'$ καί $β'$ εἶναι μοναδικοί. Στό παράδειγμα 1 εἴδαμε ὅτι $(-8, 20) = 4$. Ἡ πρόταση 3 ἐξασφαλίζει ὅτι ὑπάρχουν ἀκέραιοι $α'$ καί $β'$ τέτοιοι, ὥστε

$$-8α' + 20β' = 4.$$

Εἶναι εὔκολο νά διαπιστώσουμε ὅτι ἡ ἐξίσωση αὐτή ἐπαληθεύεται γιά $α' = 2$ καί $β' = 1$ ἤ γιά $α' = -3$ καί $β' = -1$. Στήν παράγραφο 2 θά μάθουμε ὅτι ὑπάρχουν καί ἄλλα ζεύγη ἀκεραίων ἀριθμῶν, πού ἐπαληθεύουν τήν παραπάνω ἐξίσωση.

Ἡ ἔννοια τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτη γενικεύεται καί γιά περισσότερους ἀπό δύο ἀκεραίους. Ἐδῶ θά ἐνδιαφερθοῦμε μόνο γιά τό μέγιστο κοινό διαιρέτη τριῶν ἀκεραίων. Ἄν α,β,γ εἶναι τρεῖς ἀκέραιοι, πού ἕνας τουλάχιστον εἶναι $\neq 0$, τότε τό μέγιστο στοιχεῖο τοῦ (πεπερασμένου) συνόλου $Δ(α) \cap Δ(β) \cap Δ(γ)$ τῶν κοινῶν θετικῶν διαιρετῶν τους ὀνομάζεται **ὁ μέγιστος κοινός διαιρέτης τῶν α,β καί γ** καί συμβολίζεται μέ $(α,β,γ)$. Στήν περίπτωση πού εἶναι $(α,β,γ) = 1$, οἱ ἀκέραιοι α,β καί γ θά ὀνομάζονται ἐπίσης *πρῶτοι μεταξύ τους* ἤ *σχετικῶς πρῶτοι ἀριθμοί.*

Ἄν ὑποθέσουμε ὅτι ἕνας ἀπό τούς β,γ εἶναι $\neq 0$ καί ὀνομάσουμε δ τό ΜΚΔ τους, δηλαδή $δ = (β,γ)$, τότε λόγω τῆς προτάσεως 4 ἔχουμε

$$Δ(α) \cap Δ(β) \cap Δ(γ) = Δ(α) \cap [Δ(β) \cap Δ(γ)] = Δ(α) \cap Δ(δ)$$

καί ἑπομένως

$$(α,β,γ) = (α,\,δ)$$

Ἄρα

$$\boxed{(α,\,β,\,γ) = (α,\,(β,γ))} \qquad (2)$$

Ἔτσι ἔχουμε

$$(12, 4, -8) = (12, (4, -8)) = (12, 4) = 3,$$
$$(-3, 5, 9) = (-3, (5, 9)) = (-3, 1) = 1,$$
$$(-8, 0, 0) = (0, -8, 0) = (0, (-8, 0)) = (0,8) = 8$$

Μέ τή βοήθεια τῆς (2) καί τῆς προτάσεως 2 μπορεῖ νά ἀποδείξει κανείς ὅτι

$$\boxed{(\alpha, \beta, \gamma) = \delta \Rightarrow \left(\frac{\alpha}{\delta}, \frac{\beta}{\delta}, \frac{\gamma}{\delta}\right) = 1}$$

1.6. Προτάσεις μέ πρώτους καί σχετικῶς πρώτους ἀριθμούς.

Ὁ πρῶτος ἀριθμός 3 δέ διαιρεῖ τό 10. Παρατηροῦμε ὅτι οἱ ἀριθμοί αὐτοί εἶναι σχετικῶς πρῶτοι, δηλαδή $(3,10) = 1$. Ἡ ἰδιότητα αὐτή ἰσχύει γενικά, ὅπως φαίνεται στήν παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 1. Ἄν p εἶναι πρῶτος ἀριθμός καί $\alpha \in \mathbf{Z}^*$, τότε ὁ p δέ διαιρεῖ τόν α, ὅταν καί μόνο ὅταν $(\alpha, p) = 1$.

Ἀπόδειξη. Ἄν ὁ p δέ διαιρεῖ τόν α, τότε καί ὁ $|p|$ δέν διαιρεῖ τόν α καί ἀφοῦ $\Delta(p) = \{1, |p|\}$, ὁ μόνος κοινός θετικός διαιρέτης τῶν α καί p εἶναι τό 1. Ἄρα $(\alpha, p) = 1$. Ἀντιστρόφως, ἄν $(\alpha, p) = 1$, τότε ὁ p δέν μπορεῖ νά εἶναι διαιρέτης τοῦ α, γιατί στήν ἀντίθετη περίπτωση θά ἔπρεπε νά διαιρεῖ τό μέγιστο κοινό διαιρέτη τους 1, πού εἶναι ἄτοπο, ἀφοῦ $p \neq \pm 1$.

Θά ἀποδείξουμε τώρα μιά πολύ χρήσιμη πρόταση, πού σχετίζεται μέ σχετικῶς πρώτους ἀριθμούς.

Πρόταση 2. Ἄν $\alpha, \beta, \kappa \in \mathbf{Z}^*$ μέ $(\alpha, \beta) = 1$ καί $\alpha | \beta\kappa$, τότε $\alpha | \kappa$.

Ἀπόδειξη. Ἀφοῦ $(\alpha, \beta) = 1$, ὑπάρχουν ἀκέραιοι α′ καί β′ τέτοιοι, ὥστε νά ἰσχύει ἡ ἰσότητα

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' = 1,$$

ὁπότε πολλαπλασιάζοντας καί τά δύο μέλη της μέ $\kappa \neq 0$ βρίσκουμε

$$\alpha\kappa\alpha' + \beta\kappa\beta' = \kappa. \qquad (1)$$

Ἀφοῦ ὁ α εἶναι διαιρέτης τοῦ βκ, θά διαιρεῖ καί τούς δύο ὅρους τοῦ πρώτου μέλους τῆς (1) καί ἑπομένως $\alpha | \kappa$.

Παράδειγμα. Ἄν $x, y \in \mathbf{Z}$ μέ $3x = 8y$, τότε σύμφωνα μέ τήν πρόταση 2 ἔχουμε $3 | y$ καί $8 | x$, ἀφοῦ $(3,8) = 1$.

Μποροῦμε τώρα νά ἀποδείξουμε τήν ἀκόλουθη πρόταση.

Πρόταση 3. Ἄν $\alpha, \beta \in \mathbf{Z}^*$ καί ὁ πρῶτος ἀριθμός p διαιρεῖ τό γινόμενο $\alpha . \beta$, τότε ὁ p διαιρεῖ ἕναν ἀπό τούς α,β.

Ἀπόδειξη. Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι ὁ p δέ διαιρεῖ τόν α. Τότε σύμφωνα μέ τήν πρόταση 1 ἔχουμε $(\alpha, p) = 1$ καί ἑπομένως λόγω τῆς προτάσεως 2 ὁ p εἶναι διαιρέτης τοῦ β.

Μέ τή μέθοδο τῆς τελείας ἐπαγωγῆς μπορεῖ νά ἀποδειχτεῖ τό ἀκόλουθο πόρισμα.

Πόρισμα. Ἄν $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu \in \mathbf{Z}^*$ καί ὁ πρῶτος ἀριθμός p διαιρεῖ τό γινόμενο $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \ldots \alpha_\nu$, τότε διαιρεῖ ἕναν ἀπό τούς $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$.

Παρατήρηση. Ἡ πρόταση 3 δέν ἀληθεύει κατ' ἀνάγκη, ὅταν ὁ p δέν εἶναι πρῶτος ἀριθμός. Π.χ. ὁ 8 διαιρεῖ τό γινόμενο 4.6, ἀλλά κανέναν ἀπό τούς 4 καί 6 δέ διαιρεῖ.

1.7. Ἐλάχιστο κοινό πολλαπλάσιο ἀκεραίων.

Ἄς συμβολίσουμε μέ $\Pi(\alpha)$ τό σύνολο τῶν θετικῶν πολλαπλασίων ἑνός ἀκεραίου α. Τότε $\Pi(0) = \varnothing$ καί

$$\Pi(\alpha) = \Pi(-\alpha) = \Pi(|\alpha|),$$

γιατί δύο ἀντίθετοι ἀριθμοί ἔχουν τά ἴδια πολλαπλάσια.

Ἄν δοθοῦν δύο ἀκέραιοι α καί β μέ $\alpha \cdot \beta \neq 0$, τότε τό σύνολο $\Pi(\alpha) \cap \Pi(\beta)$ τῶν κοινῶν θετικῶν πολλαπλασίων τῶν α καί β δέν εἶναι τό κενό, γιατί περιέχει τό στοιχεῖο $|\alpha| \cdot |\beta|$. Ἑπομένως τό σύνολο $\Pi(\alpha) \cap \Pi(\beta)$ ἔχει ἐλάχιστο στοιχεῖο, τό ὁποῖο ὀνομάζεται **τό ἐλάχιστο κοινό πολλαπλάσιο (ΕΚΠ) τῶν α καί β** καί συμβολίζεται μέ $[\alpha, \beta]$.

Ἔτσι τό ἐλάχιστο κοινό πολλαπλάσιο δύο ἀκεραίων α καί β μέ $\alpha \cdot \beta \neq 0$ εἶναι ὁ μοναδικός **θετικός** ἀκέραιος ε, πού ἱκανοποιεῖ τίς ἰδιότητες:

(i) $\alpha | \varepsilon$ καί $\beta | \varepsilon$,

(ii) ἄν $\alpha | \gamma$, $\beta | \gamma$ καί $\gamma \in \mathbf{Z}^*_+$, τότε $\varepsilon \leq \gamma$.

Παραδείγματα.

1. Ἐπειδή

$$\Pi(3) = \{3, 6, 9, \underline{12}, \ldots, 3\lambda, \ldots\} \text{ καί}$$
$$\Pi(4) = \{4, 8, \underline{12}, \ldots, 4\lambda, \ldots\},$$

ἔχουμε $[3,4] = 12$

2. Ὅμοια βρίσκουμε ὅτι

$$[4, -10] = 20, \quad [5,10] = 10 \quad \text{καί} \quad [-3,4] = 12$$

Παρατηρήσεις

1. Ἐπειδή ἰσχύει $\Pi(\alpha) \cap \Pi(\beta) = \Pi(|\alpha|) \cap \Pi(|\beta|)$, ἔχουμε

$$\boxed{[\alpha, \beta] = [|\alpha|, |\beta|]} \quad (\alpha, \beta \in \mathbf{Z}^*).$$

2. Ἄν $\alpha, \beta \in \mathbf{Z}^*$ καί $\beta | \alpha$, τότε, ἀφοῦ τό ἐλάχιστο θετικό πολλαπλάσιο τοῦ α εἶναι τό $|\alpha|$ καί ἐπιπλέον $|\alpha| \in \Pi(\beta)$, ἔχουμε $[\alpha, \beta] = |\alpha|$.

Θά ἐξετάσουμε τώρα ἀναλυτικά τή μορφή, πού ἔχουν τά κοινά θετικά πολλαπλάσια δύο ἀκεραίων α καί β μέ $\alpha . \beta \neq 0$. Γιά τό σκοπό αὐτό ἄς πάρουμε ἕνα κοινό θετικό πολλαπλάσιο μ τῶν α καί β. Ἀφοῦ $|\alpha| | \mu$, ὑπάρχει θετικός ἀκέραιος λ μέ τήν ἰδιότητα

$$\mu = |\alpha| \cdot \lambda \tag{1}$$

Ἐξάλλου, ἐπειδή $|\beta| \mid \mu$, ὁ ἀριθμός

$$\frac{\mu}{|\beta|} = \frac{|\alpha|\ \lambda}{|\beta|} \tag{2}$$

εἶναι ἕνας θετικός ἀκέραιος. Ἄν θέσουμε τώρα $(\alpha,\beta) = (|\alpha|, |\beta|) = \delta$, τότε ὑπάρχουν θετικοί ἀκέραιοι α_1 καί β_1 τέτοιοι, ὥστε $|\alpha| = \alpha_1 . \delta$, $|\beta| = \beta_1 \delta$ καί $(\alpha_1,\beta_1) = 1$. Τότε λόγω τῆς (2) ἔχουμε

$$\frac{\mu}{|\beta|} = \frac{\alpha_1 \lambda}{\beta_1}.$$

Ἐπειδή ὁ $\frac{\mu}{|\beta|}$ εἶναι ἀκέραιος, ἀπό τήν τελευταία ἰσότητα συμπεραίνουμε ὅτι ὁ β_1 εἶναι διαιρέτης τοῦ $\alpha_1\lambda$ καί, ἀφοῦ $(\alpha_1,\beta_1) = 1$, ὁ β_1 εἶναι διαιρέτης τοῦ λ (προτ. 2 τῆς 1.6) Ἑπομένως ὑπάρχει *θετικός* ἀκέραιος κ τέτοιος, ὥστε

$$\lambda = \beta_1 \cdot \kappa = \frac{|\beta|}{\delta}\, \kappa$$

Ἔτσι λόγω τῆς (1) τό κοινό θετικό πολλαπλάσιο μ τῶν α καί β ἔχει τή μορφή

$$\mu = \frac{|\alpha|\ |\beta|}{\delta}\, \kappa, \tag{3}$$

ὅπου κ θετικός ἀκέραιος. Ἀντιστρόφως, κάθε ἀκέραιος τῆς μορφῆς $\frac{|\alpha|\ |\beta|}{\delta}\, \kappa$ μέ κ θετικό ἀκέραιο εἶναι φανερό ὅτι εἶναι ἕνα κοινό θετικό πολλαπλάσιο τῶν α καί β. Ἄρα.

$$\Pi(\alpha) \cap \Pi(\beta) = \left\{ \frac{|\alpha|\ |\beta|}{\delta}\, \kappa \mid \kappa \text{ θετικός ἀκέραιος} \right\}.$$

Τό ἐλάχιστο στοιχεῖο αὐτοῦ τοῦ συνόλου προκύπτει γιά $\kappa = 1$ καί εἶναι τό

$$\varepsilon = \frac{|\alpha|\ |\beta|}{\delta}$$

Ἀπό τήν (3) συμπεραίνουμε τώρα ὅτι ἕνα κοινό πολλαπλάσιο μ τῶν α καί β ἔχει τή μορφή:

$$\mu = \varepsilon \cdot \kappa \qquad (\text{ὅπου } \kappa \text{ θετικός ἀκέραιος}),$$

Ἔτσι ἔχουμε ἀποδείξει τίς ἀκόλουθες δύο προτάσεις.

Πρόταση 1. Ἄν $\alpha, \beta \in \mathbf{Z}^*$ καί $[\alpha,\beta] = \varepsilon$, τότε

$$\Pi(\varepsilon) = \Pi(\alpha) \cap \Pi(\beta),$$

δηλαδή τό σύνολο τῶν κοινῶν θετικῶν πολλαπλασίων τῶν α καί β ταυτίζεται μέ τό σύνολο τῶν θετικῶν πολλαπλασίων τοῦ ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου τους.

Πρόταση 2. Τό ἐλάχιστο κοινό πολλαπλάσιο ε δύο ἀκεραίων α καί β μέ $\alpha\beta \neq 0$ δίνεται ἀπό τόν τύπο

$$\boxed{[\alpha,\beta] = \frac{|\alpha|\,|\beta|}{(\alpha,\beta)}}$$

Πόρισμα Ἰσχύει: $(\alpha,\beta) = 1 \Rightarrow [\alpha,\beta] = |\alpha|\,|\beta|$.

Λόγω τῆς προτάσεως 2 ἔχουμε:

$$[12, 8] = \frac{12\cdot 8}{(12,8)} = \frac{12\cdot 8}{4} = 24,$$

$$[-36, 14] = \frac{|-36|\cdot 14}{(-36,14)} = \frac{36\cdot 14}{2} = 252.$$

Ἡ ἔννοια τοῦ ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου γενικεύεται καί γιά περισσότερους ἀπό δύο ἀκεραίους. Ἐδῶ θά ἐνδιαφερθοῦμε μόνο γιά τό ἐλάχιστο κοινό πολλαπλάσιο τριῶν ἀκεραίων. Ἄν $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbf{Z}$ μέ $\alpha\cdot\beta\cdot\gamma \neq 0$, τότε τό ἐλάχιστο στοιχεῖο τοῦ συνόλου $\Pi(\alpha) \cap \Pi(\beta) \cap \Pi(\gamma)$ (πού εἶναι $\neq \varnothing$, ἀφοῦ περιέχει τό $|\alpha|\,|\beta|\,|\gamma|$) τῶν κοινῶν θετικῶν πολλαπλασίων τους ὀνομάζεται **τό ἐλάχιστο κοινό πολλαπλάσιο τῶν α,β καί γ** καί συμβολίζεται μέ $[\alpha,\beta,\gamma]$.

Ἄν $\varepsilon = [\alpha,\beta]$, τότε λόγω τῆς προτάσεως 1 ἔχουμε

$$\Pi(\alpha) \cap \Pi(\beta) \cap \Pi(\gamma) = (\Pi(\alpha) \cap \Pi(\beta)) \cap \Pi(\gamma) = \Pi(\varepsilon) \cap \Pi(\gamma)$$

καί ἑπομένως

$$[\alpha, \beta, \gamma] = [\varepsilon, \gamma].$$

Ἄρα

$$\boxed{[\alpha, \beta, \gamma)] = [[\alpha,\beta],\gamma]} \qquad (\alpha\cdot\beta\cdot\gamma \neq 0).$$

Ἔτσι ἔχουμε

$$[3, 4, 5] = [[3,4], 5] = [12,5] = 60.$$

1.8. Ἀνάλυση θετικῶν[1] ἀκεραίων σέ γινόμενο θετικῶν πρώτων παραγόντων.

Ἡ ἀνάλυση ἑνός θετικοῦ ἀκεραίου σέ γινόμενο θετικῶν πρώτων παραγόντων στηρίζεται στήν ἀκόλουθη πρόταση.

Πρόταση 1. Κάθε θετικός ἀκέραιος $\neq 1$ ἔχει διαιρέτη ἕναν πρῶτο ἀριθμό.

Ἀπόδειξη. Ἔστω $\alpha \in Z^*$ μέ $\alpha > 1$. Τότε τό σύνολο Α τῶν θετικῶν διαιρετῶν τοῦ α, πού εἶναι $\neq 1$, δέν εἶναι τό κενό, γιατί $\alpha \in A$. Ἑπομένως τό Α θά ἔχει ἐλάχιστο στοιχεῖο, ἔστω ρ. Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι ὁ ρ εἶναι σύνθετος ἀριθμός. Τότε ὁ ρ θά ἔχει διαιρέτη ἕνα θετικό ἀκέραιο β, διαφορετικό ἀπό 1 καί ρ. Ἀφοῦ

1. Μιά ἀνάλυση ἀρνητικοῦ ἀκεραίου σέ γινόμενο πρώτων παραγόντων ἀνάγεται στήν ἀνάλυση τοῦ ἀντιθέτου του σέ γινόμενο θετικῶν πρώτων παραγόντων.

$\beta|p$ καί $p|\alpha$, ἔχουμε $\beta|\alpha$ καί ἐπομένως $\beta \in A$. Αὐτό ὅμως εἶναι ἄτοπο, γιατί εἶναι $\beta < p$ καί τό p εἶναι τό ἐλάχιστο στοιχεῖο τοῦ A. Ἄρα ὁ p εἶναι πρῶτος ἀριθμός.

Παρατήρηση. Ἀπό τήν ἀπόδειξη τῆς προηγούμενης προτάσεως εἶναι φανερό ὅτι ὁ μικρότερος ἀπό τούς θετικούς διαιρέτες τοῦ α, πού εἶναι μεγαλύτεροι ἀπό τή μονάδα, εἶναι πρῶτος ἀριθμός.

Γενικά, ἕνας θετικός ἀκέραιος ($\neq 1$) μπορεῖ νά γραφτεῖ σάν γινόμενο θετικῶν παραγόντων κατά διάφορους τρόπους. Π.χ.

$$60 = 10 \cdot 6 = 12 \cdot 5.$$

Συχνά κάθε ἕνας ἀπό τούς παράγοντες αὐτούς μπορεῖ νά γραφτεῖ σάν γινόμενο θετικῶν παραγόντων καί αὐτό μπορεῖ νά συνεχιστεῖ, ὥσπου ὅλοι οἱ παράγοντες νά εἶναι πρῶτοι ἀριθμοί. Ἔτσι

$$60 = 10 \cdot 6 = (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 3) = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3$$
$$60 = 12 \cdot 5 = (6 \cdot 2) \cdot 5 = (3 \cdot 2 \cdot 2) \cdot 5 = 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5.$$

Παρατηροῦμε ὅτι καί στίς δύο περιπτώσεις οἱ (θετικοί) πρῶτοι παράγοντες τοῦ 60 εἶναι ἴδιοι. Ἡ ἰδιότητα αὐτή ἰσχύει γενικά καί ἐκφράζεται μέ ἕνα πολύ σπουδαῖο θεώρημα, πού ὀνομάζεται *θεμελιῶδες θεώρημα τῆς Ἀριθμητικῆς*.

Θεώρημα. Κάθε σύνθετος θετικός ἀριθμός ἀναλύεται σέ γινόμενο θετικῶν πρώτων ἀριθμῶν κατά μοναδικό τρόπο.

Ἀπόδειξη. Ἔστω α ἕνας θετικός σύνθετος ἀριθμός. Ἄν p_1 εἶναι ὁ μικρότερος θετικός πρῶτος διαιρέτης του (Πρόταση 1), τότε ἔχουμε

$$\alpha = p_1 \cdot \alpha_1 \quad , \quad \alpha_1 < \alpha$$

Ἄν ὁ α_1 εἶναι πρῶτος ἀριθμός, τότε ὁ α ἔχει ἀναλυθεῖ σέ γινόμενο θετικῶν πρώτων ἀριθμῶν. Ἄν ὁ α_1 εἶναι σύνθετος καί ὀνομάσουμε p_2 τό μικρότερο θετικό πρῶτο διαιρέτη του, τότε ἔχουμε

$$\alpha_1 = p_2 \cdot \alpha_2 \qquad \alpha_2 < \alpha_1.$$

Ἄν ὁ α_2 εἶναι πρῶτος, τότε ὁ α ἔχει ἀναλυθεῖ σέ γινόμενο θετικῶν πρώτων ἀριθμῶν: $\alpha = p_1 \cdot p_2 \cdot \alpha_2$. Ἄν ὁ α_2 εἶναι σύνθετος, ἐπαναλαμβάνουμε τήν ἴδια ἐργασία, μέχρι νά φθάσουμε σέ κάποιον πρῶτο ἀριθμό p_ν, ὁπότε $\alpha_{\nu-1} = p_\nu$.

Πολλαπλασιάζοντας ὅλες αὐτές τίς ἰσότητες καί ἁπλοποιώντας παίρνουμε τήν παρακάτω ἀνάλυση τοῦ α σέ γινόμενο πρώτων παραγόντων.

$$\alpha = p_1 p_2 \cdots p_\nu.$$

(ii) Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι ὑπάρχει μιά δεύτερη ἀνάλυση τοῦ ἴδιου ἀκεραίου α, σέ γινόμενο θετικῶν πρώτων παραγόντων: $\alpha = q_1 \cdot q_2 \cdots q_\mu$.

Τότε ἔχουμε

$$p_1 p_2 \cdots p_\nu = q_1 \cdot q_2 \cdots q_\mu \qquad (1)$$

Τό πρῶτο μέλος τῆς (1) διαιρεῖται μέ τό q_1, ὁπότε σύμφωνα μέ τό πόρισμα τῆς 1·6 τουλάχιστον ἕνας ἀπό τούς παράγοντες τοῦ πρώτου μέλους τῆς (1) πρέπει νά διαιρεῖται μέ τό q_1. Ἔστω $q_1|p_1$. Τότε σύμφωνα μέ τήν παρατήρηση 2 τῆς 1.2 εἶναι $q_1 = p_1$. Ἄν διαιρέσουμε καί τά δύο μέλη τῆς (1) μέ q_1, παίρνουμε τήν ἰσότητα

$$p_2p_3 \cdots p_\nu = q_2q_3 \cdots q_\mu \qquad (2)$$

Ἄν ἐργαστοῦμε ὅμοια καί στήν (2), βρίσκουμε $p_3 \cdot p_4 \cdots p_\nu = q_3 \cdot q_4 \cdots q_\mu$ κτλ, ὥσπου τελικά νά βροῦμε ὅτι ὅλοι οἱ παράγοντες τοῦ ἑνός μέλους, π.χ. τοῦ πρώτου, ἔχουν ἁπλοποιηθεῖ, ὁπότε θά εἶναι $\nu < \mu$. Ἀλλά τότε πρέπει καί οἱ παράγοντες τοῦ δεύτερου μέλους νά ἔχουν ἁπλοποιηθεῖ, γιατί ἀλλιῶς θά εἴχαμε τήν ἰσότητα

$$1 = q_{\nu+1}\, q_{\nu+2} \cdots q_\mu \,,$$

πού γιά θετικούς πρώτους ἀριθμούς δέν μπορεῖ νά ἰσχύει.

Ἄρα ἡ δεύτερη ἀνάλυση σέ γινόμενο πρώτων παραγόντων ταυτίζεται μέ τήν πρώτη.

Ἄμεσες συνέπειες τοῦ παραπάνω θεωρήματος εἶναι τά ἀκόλουθα πορίσματα.

Πόρισμα 1. Κάθε θετικός ἀκέραιος $\nu \neq 1$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ὡς ἑξῆς:

$$\nu = p_1^{\alpha_1}\, p_2^{\alpha_2} \cdots p_\kappa^{\alpha_\kappa} \,,$$

ὅπου $p_1, p_2, \ldots, p_\kappa$ εἶναι θετικοί πρῶτοι ἀριθμοί διαφορετικοί μεταξύ τους καί $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\kappa$ εἶναι φυσικοί ἀριθμοί.

Παραδείγματα:

1. Ἡ ἀνάλυση τοῦ 720 σέ γινόμενο θετικῶν πρώτων παραγόντων εἶναι:

$$720 = 2^4 . 3^2 . 5$$

2. Ἡ ἀνάλυση τοῦ 2400 εἶναι

$$2400 = 2^5 \,.\, 3 \,.\, 5^2.$$

Πόρισμα 2. Κάθε διαιρέτης τοῦ ἀκεραίου

$$\nu = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_\kappa^{\alpha_\kappa}$$

εἶναι τῆς μορφῆς

$$p_1^{\beta_1}\, p_2^{\beta_2} \cdots p_\kappa^{\beta_\kappa} \quad , \quad \text{ὅπου} \quad 0 \leq \beta_i \leq \alpha_i \,, \quad i = 1,2,\ldots,\kappa$$

καί ἀντιστρόφως.

Μποροῦμε τώρα νά χρησιμοποιήσουμε τά προηγούμενα, γιά νά πάρουμε μιά δεύτερη μέθοδο εὑρέσεως τοῦ Μ.Κ.Δ. (θετικῶν ἀκεραίων).

Πρόταση 2. Ἄν α καί β εἶναι θετικοί ἀκέραιοι $\neq 1$ τέτοιοι, ὥστε

$$\alpha = p_1^{\nu_1} \cdot p_2^{\nu_2} \cdots p_\lambda^{\nu_\lambda}$$

$$\beta = p_1^{\mu_1}\, p_2^{\mu_2} \cdots p_\lambda^{\mu_\lambda} \,,$$

ὅπου $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_\lambda$ καί $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\lambda$ μή ἀρνητικοί ἀκέραιοι, τότε

$$(\alpha,\beta) = p_1^{\kappa_1}\, p_2^{\kappa_2} \cdots p_\lambda^{\kappa_\lambda} \,,$$

όπου $\kappa_i = \min(\nu_i, \mu_i)$ γιά κάθε $i \in \{1,2,\ldots,\lambda\}$

'Απόδειξη. Θά άποδείξουμε ότι ή παράσταση $p_1^{\kappa_1} p_2^{\kappa_2} \cdots p_\lambda^{\kappa_\lambda} = A$ ίκανοποιεῖ τίς ίδιότητες τοῦ Μ.Κ.Δ.

(1) 'Επειδή $\kappa_i \leq \nu_i$ γιά κάθε $i \in \{1,2,\ldots,\lambda\}$, ἕπεται ὅτι τό Α διαιρεῖ τό α.
'Επειδή $\kappa_i \leq \mu_i$ γιά κάθε $i \in \{1,2,\ldots,\lambda\}$, τό Α διαιρεῖ καί τό β.

(2) "Αν γ εἶναι διαιρέτης τοῦ α, πρέπει σύμφωνα μέ τό πόρισμα 2 νά γράφεται ὡς ἀκολούθως

$$\gamma = p_1^{\rho_1} p_2^{\rho_2} \cdots p_\lambda^{\rho_\lambda},$$

όπου $0 \leq \rho_i \leq \nu_i$ γιά κάθε $i \in \{1,2,\ldots,\lambda\}$. "Αν τό γ εἶναι καί διαιρέτης τοῦ β, ἐπίσης ἔχουμε $0 \leq \rho_i \leq \mu_i$ γιά κάθε $i \in \{1,2,\ldots,\lambda\}$.
"Αρα $0 \leq \rho_i \leq \min(\nu_i, \mu_i) = \kappa_i$ καί ἑπομένως τό γ εἶναι διαιρέτης τοῦ Α.
"Αρα $(\alpha,\beta) = A$.

Παράδειγμα. 'Ο ΜΚΔ τῶν ἀκεραίων

$$72 = 2^3 \cdot 3^2$$
$$270 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5$$

εἶναι: $(72,270) = 2 \cdot 3^2$. 'Επειδή $[72, 270] = \dfrac{72 \cdot 270}{(72, 270)}$, ἔχουμε

$$[72, 270] = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5$$

1.9. 'Ασκήσεις

1. Βρεῖτε τό ΜΚΔ τῶν 27 καί 20 καί ἔπειτα προσδιορίστε ἀκεραίους x καί y τέτοιους, ὥστε
$$(27, 20) = 27x + 20y.$$
2. Οἱ διαιρέσεις τῶν 253 καί 525 μέ ἕνα θετικό ἀκέραιο α δίνουν ὑπόλοιπο 15. Ποιές εἶναι οἱ δυνατές τιμές τοῦ α;
3. Μέ ποιό θετικό ἀκέραιο πρέπει νά διαιρεθοῦν οἱ 1268 καί 1802 γιά νά πάρουμε ἀντίστοιχα ὑπόλοιπα 8 καί 17;
4. Κατά τήν ἐφαρμογή τοῦ ἀλγόριθμου τοῦ Εὐκλείδη γιά τόν ὑπολογισμό τοῦ ΜΚΔ δύο θετικῶν ἀκεραίων α καί β βρίσκουμε διαδοχικά πηλίκα 1,2,1,20 καί 4. Βρεῖτε τούς α καί β, ἄν εἶναι γνωστό ὅτι $(\alpha,\beta) = 4$.
5. Ποιοί θετικοί ἀκέραιοι α,β ἔχουν ἄθροισμα 283 καί ΜΚΔ 24;
6. Βρεῖτε τό ΜΚΔ καί τό ΕΚΠ τῶν 90, 96, 140.
7. "Αν $(\alpha,\beta,\gamma) = \delta$, δεῖξτε ὅτι ὑπάρχουν ἀκέραιοι x,y,z τέτοιοι, ὥστε $\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$. Προσδιορίστε ἀκεραίους x,y καί z, ὥστε
$$(32, 48, 72) = 32x + 48y + 72z.$$
8. Βρεῖτε ὅλους τούς διαιρέτες τοῦ 120.
9. Ποιοί θετικοί ἀκέραιοι ἐπαληθεύουν τήν ἐξίσωση $x^2 - y^2 = 36$;
10. Δεῖξτε ὅτι
(i) $(\alpha,\beta) = (5\alpha+4\beta, \alpha+\beta)$ (ii) $(\alpha,\beta) = (3\alpha+4\beta, 2\alpha+3\beta)$
(iii) $(\alpha,\beta) = (\alpha+\beta\gamma, \beta)$ (iv) $(\alpha,\beta,\gamma) = ((\alpha,\beta), (\beta,\gamma))$
11. "Αν $(\alpha,\beta) = \delta$ καί $\delta = \alpha x + \beta y$, δεῖξτε ὅτι $(x,y) = 1$.
12. "Αν $\kappa \in \mathbf{Z}_+^*$, δεῖξτε ὅτι

(i) $\kappa(\alpha,\beta) = (\kappa\alpha, \kappa\beta)$,
(ii) $\kappa[\alpha,\beta] = [\kappa\alpha, \kappa\beta]$.

13. Ἄν $\alpha \mid \gamma$, $\beta \mid \gamma$ καί $(\alpha,\beta) = 1$, δεῖξτε ὅτι $\alpha\beta \mid \gamma$.

14. Σέ καθεμιά ἀπό τίς παρακάτω περιπτώσεις ὑπολογίστε τούς θετικούς ἀκεραίους α καί β:
(i) $\alpha\beta = 2400$ καί $(\alpha,\beta) = 10$,
(ii) $\alpha+\beta = 36\,(\alpha,\beta)$ καί $[\alpha,\beta] = 3850$,
(iii) $(\alpha,\beta) = 26$ καί $[\alpha,\beta] = 4784$.

15. Ἄν δύο ἀκέραιοί εἶναι πρῶτοι μεταξύ τους, δεῖξτε ὅτι κάθε διαιρέτης τοῦ ἑνός εἶναι πρῶτος μέ τόν ἄλλο.
Στή συνέχεια δεῖξτε τή συνεπαγωγή
$$(\alpha,\kappa) = 1 \Rightarrow (\alpha,\beta) = (\alpha, \kappa\beta).$$

16. Ἄν ἕνας ἀκέραιος εἶναι πρῶτος μέ ἕνα γινόμενο ἀκεραίων, τότε εἶναι πρῶτος μέ κάθε παράγοντα τοῦ γινομένου καί ἀντιστρόφως.
Ἐφαρμογές: Δεῖξτε
(i) $(\alpha,\beta) = 1 \Leftrightarrow (\alpha,\beta^\nu) = 1 \quad (\nu \in \mathbf{N})$
(ii) $(\alpha,\beta) = 1 \Leftrightarrow (\alpha^\mu, \beta^\nu) = 1 \quad (\nu, \mu \in \mathbf{N})$.

17. Ἄν $(\alpha,\beta) = 1$, δεῖξτε
(i) $(\alpha+\beta, \alpha) = 1 = (\alpha+\beta, \beta)$,
(ii) $(\alpha-\beta, \alpha) = 1 = (\alpha-\beta, \beta)$,
(iii) $(\alpha+\beta, \alpha\beta) = 1 = (\alpha-\beta, \alpha\beta)$.

18. Ἄν α,β,γ εἶναι περιττοί ἀκέραιοι, δεῖξτε ὅτι
$$(\alpha, \beta, \gamma) = \left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{\alpha+\gamma}{2}, \frac{\beta+\gamma}{2}\right).$$

2. ΑΚΕΡΑΙΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΣ $\alpha x+\beta y=\gamma$ $(\alpha,\beta,\gamma \in \mathbf{Z})$

2.1. Εἰσαγωγή

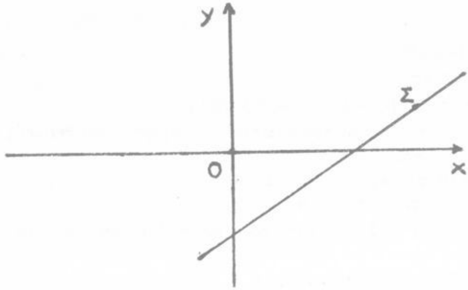
Στήν παράγραφο αὐτή θά ἀσχοληθοῦμε μέ τό πρόβλημα[1] ὑπάρξεως καί εὑρέσεως ἀκέραιων λύσεων τῆς γραμμικῆς ἐξισώσεως

$$\alpha x + \beta y = \gamma \qquad (\alpha,\beta,\gamma \in Z) \tag{1}$$

Ἀκέραια λύση τῆς ἐξισώσεως (1) εἶναι κάθε ζεῦγος (x_0, y_0) ἀπό ἀκέραιους ἀριθμούς πού τήν ἐπαληθεύει.

Ἄς δοῦμε ποιά εἶναι ἡ γεωμετρική ἑρμηνεία τοῦ προβλήματος αὐτοῦ. Εἶναι γνωστό ὅτι ἡ ἐξίσωση (1) παριστάνει μιά εὐθεία πάνω στό καρτεσιανό ἐπίπεδο (Σχ. 1), πού φυσικά οἱ συντεταγμένες (x,y) κάθε σημείου της ἐπαληθεύουν τήν ἐξίσωση (1). Τό πρόβλημα τώρα εἶναι: ὑπάρχουν σημεῖα Σ πάνω στήν εὐθεία αὐτή μέ ἀκέραιες συντεταγμένες καί, ἄν ὑπάρχουν, ποιά εἶναι αὐτά; Ὅπως θά

1. Μέ τό πρόβλημα αὐτό πρῶτος ἀσχολήθηκε ὁ Ἕλληνας μαθηματικός Διόφαντος ὁ Ἀλεξανδρινός στό ἔργο του «Ἀριθμητικά» (360 μ.Χ.).



Σχ. 1

δοῦμε παρακάτω ἡ ἐξίσωση $2x - 4y = 5$ δέν ἔχει ἀκέραιες λύσεις, πού σημαίνει ὅτι ἡ εὐθεία μέ ἐξίσωση $2x - 4y = 5$ δέν ἔχει σημεῖα μέ ἀκέραιες συντεταγμένες, ἐνῶ ἡ ἐξίσωση $2x - 5y = 3$ ἔχει ἄπειρες ἀκέραιες λύσεις, πού σημαίνει ὅτι ἡ εὐθεία μέ ἐξίσωση $2x - 5y = 3$ ἔχει ἄπειρα σημεῖα μέ ἀκέραιες συντεταγμένες.

Στά ἑπόμενα θά ἐφαρμόσουμε τά συμπεράσματα τῆς παραγράφου 1, γιά νά μελετήσουμε γενικά τό πρόβλημα αὐτό.

2.2. Ὕπαρξη καί εὕρεση ἀκέραιων λύσεων τῆς $\alpha x + \beta y = \gamma (\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{Z})$

Εἶναι φανερό ὅτι, ἄν οἱ συντελεστές α, β, γ τῆς ἐξισώσεως

$$\alpha x + \beta y = \gamma \qquad (\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{Z}) \qquad (1)$$

ἔχουν μέγιστο κοινό διαιρέτη δ, τότε τό σύνολο τῶν ἀκέραιων λύσεών της ταυτίζεται μέ τό σύνολο τῶν ἀκέραιων λύσεων τῆς ἐξισώσεως

$$\frac{\alpha}{\delta} x + \frac{\beta}{\delta} y = \frac{\gamma}{\delta},$$

πού οἱ συντελεστές της εἶναι σχετικῶς πρῶτοι ἀριθμοί. Ἔτσι στά ἑπόμενα μποροῦμε νά ὑποθέτουμε ὅτι οἱ συντελεστές α, β, γ τῆς (1) εἶναι **σχετικῶς πρῶτοι ἀριθμοί,** δηλαδή $(\alpha, \beta, \gamma) = 1$.

Ἡ ἑπόμενη πρόταση ἐξηγεῖ γιατί ἡ ἐξίσωση $2x - 4y = 5$, πού ἀναφέραμε στήν εἰσαγωγή, δέν ἔχει ἀκέραιες λύσεις.

Πρόταση 1. Ἄν $(\alpha, \beta, \gamma) = 1$ καί $(\alpha, \beta) = \lambda > 1$, τότε ἡ ἐξίσωση (1) δέν ἔχει ἀκέραιες λύσεις.

Ἀπόδειξη: Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι ἡ (1) ἔχει μιά ἀκέραια λύση (x_0, y_0). Τότε

$$\alpha x_0 + \beta y_0 = \gamma.$$

Ἀφοῦ $\lambda | \alpha$ καί $\lambda | \beta$, ὁ λ εἶναι διαιρέτης τῶν ἀκεραίων αx_0 καί βy_0 τοῦ πρώτου μέλους τῆς παραπάνω ἰσότητας καί ἄρα ὁ λ εἶναι διαιρέτης τοῦ γ. Ἀφοῦ ὁ λ εἶναι κοινός διαιρέτης τῶν α, β, γ καί $(\alpha, \beta, \gamma) = 1$, πρέπει $\lambda | 1$, δηλαδή $\lambda = 1$ ἤ $\lambda = -1$, πού εἶναι ἄτοπο γιατί ἀπό τήν ὑπόθεση εἶναι $\lambda > 1$. Ἄρα ἡ (1) δέν ἔχει ἀκέραιες λύσεις.

Λόγω αὐτῆς τῆς προτάσεως μένει νά ἐξεταστεῖ ἡ ἐξίσωση (1) στήν περίπτωση πού οἱ συντελεστές α,β εἶναι σχετικῶς πρῶτοι ἀριθμοί, δηλαδή $(\alpha,\beta)=1$, ὁπότε καί $(\alpha,\beta,\gamma)=1$.

Πρόταση 2. Ἄν $(\alpha,\beta)=1$, τότε ἡ ἐξίσωση (1) ἔχει μία τουλάχιστον ἀκέραια λύση.

Ἀπόδειξη. Ἄν εἶναι $\gamma=0$, τότε ἡ ἐξίσωση (1) γράφεται

$$\alpha x+\beta y=0$$

καί εἶναι φανερό ὅτι μιά ἀκέραια λύση της εἶναι ἡ $(x_o,y_o)=(0,0)$.

Ἔστω $\gamma\neq 0$. Ἀφοῦ $(\alpha,\beta)=1$, ὑπάρχουν ἀκέραιοι α' καί β' τέτοιοι, ὥστε

$$\alpha\alpha'+\beta\beta'=1,$$

ὁπότε πολλαπλασιάζοντας καί τά δύο μέλη της μέ $\gamma\neq 0$ βρίσκουμε

$$\alpha(\alpha'\gamma)+\beta(\beta'\gamma)=\gamma,$$

πού σημαίνει ὅτι μιά ἀκέραια λύση τῆς (1) εἶναι ἡ $(x_1,y_1)=(\alpha'\gamma,\ \beta'\gamma)$.

Παρατήρηση. Ἀπό τίς δύο προηγούμενες προτάσεις συμπεραίνουμε τήν ἀκόλουθη ἰσοδυναμία.

$$\boxed{(\text{Ἡ (1) ἔχει μία τουλάχιστον ἀκέραια λύση}) \text{ καί } (\alpha,\beta,\gamma)=1 \Leftrightarrow (\alpha,\beta)=1}$$

Θά ἀποδείξουμε τώρα τήν ἀκόλουθη πρόταση.

Πρόταση 3. Ἄν ἡ ἐξίσωση (1) ἔχει μιά ἀκέραια λύση $(x_o,\ y_o)$, τότε τό σύνολο τῶν ἀκέραιων λύσεών της εἶναι

$$A=\{(x,y)|(x,y)\in\mathbf{Z}\times\mathbf{Z},\quad x=x_o+\beta\kappa,\ y=y_o-\alpha\kappa \ \text{ καί } \ \kappa\in\mathbf{Z}\},$$

δηλαδή ἔχει ἄπειρες σέ πλῆθος ἀκέραιες λύσεις τῆς μορφῆς

$$\boxed{(x,y)=(x_o+\beta\kappa,\quad y_o-\alpha\kappa),\ \text{ὅπου } \kappa\in\mathbf{Z}}$$

Ἀπόδειξη. Ἀφοῦ ἡ (1) ἔχει μιά ἀκέραια λύση (x_o,y_o) καί μποροῦμε νά ὑποθέσουμε ὅτι $(\alpha,\beta,\gamma)=1$, σύμφωνα μέ τήν παραπάνω παρατήρηση θά ἔχουμε $(\alpha,\beta)=1$. Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι (x_1,y_1) εἶναι μιά ἀκέραια λύση τῆς (1). Τότε ἀφαιρώντας κατά μέλη τίς ἰσότητες $\alpha x_1+\beta y_1=\gamma$ καί $\alpha x_o+\beta y_o=\gamma$ παίρνουμε

$$\alpha(x_1-x_o)=-\beta(y_1-y_o) \qquad (*)$$

Ἐπειδή $(\alpha,\beta)=1$, ἀπό τή σχέση (*) λόγω τῆς προτάσεως 2 τῆς 1.6 ἔπεται ὅτι $\beta|x_1-x_o$, ὁπότε ὑπάρχει ἀκέραιος κ μέ τήν ἰδιότητα $x_1-x_o=\beta\kappa$ ἤ $x_1=x_o+\beta\kappa$. Τότε ἀπό τήν (*) βρίσκουμε διαδοχικά

$$\alpha\beta\kappa=-\beta(y_1-y_o) \quad \text{ἤ} \quad -\alpha\kappa=y_1-y_o \quad \text{ἤ} \quad y_1=y_o-\alpha\kappa$$

Ἄρα $(x_1,y_1)\in A$. Ἀντιστρόφως κάθε στοιχεῖο τοῦ συνόλου A εἶναι μιά ἀκέραια λύση τῆς (1). Πράγματι, τό $(x_o+\beta\kappa,\ y_o-\alpha\kappa)$ ἐπαληθεύει τήν (1), γιατί

$$\alpha(x_o+\beta\kappa) + \beta(y_o-\alpha\kappa) = \alpha x_o+\alpha\beta\kappa+\beta y_o-\alpha\beta\kappa = \alpha x_o+\beta y_o = \gamma.$$

Ἄρα, ἄν (x_o,y_o) εἶναι μιά ἀκέραια λύση τῆς (1), τότε ὅλες οἱ ἀκέραιες λύσεις της (x,y) ὑπολογίζονται ἀπό τούς τύπους:

$$\boxed{x = x_o+\beta\kappa \quad \text{καί} \quad y=y_o-\alpha\kappa, \text{ ὅπου } \kappa\in\mathbf{Z}} \qquad (T)$$

Σημείωση. Πολλές φορές στήν πράξη θέλουμε νά βροῦμε μή ἀρνητικές ἀκέραιες λύσεις τῆς (1) [μέ $(\alpha,\beta) = 1$], δηλαδή ἀκέραιες λύσεις (x,y) μέ $x\geq0$ καί $y\geq0$. Αὐτές βρίσκονται ἀπό τούς τύπους (T), ἄν στόν **ἀκέραιο** κ δώσουμε τιμές, πού νά συναληθεύουν οἱ ἀνισώσεις ὡς πρός κ:

$$x_o + \beta\kappa \geq 0 \quad \text{καί} \quad y_o-\alpha\kappa \geq 0.$$

2.3. Μέθοδοι εὑρέσεως μιᾶς ἀκέραιας λύσεως τῆς $\alpha x+\beta y=\gamma$ μὲ $(\alpha,\beta)=1$.

Γιά νά χρησιμοποιήσουμε τούς τύπους (T), εἶναι ἀρκετό νά γνωρίζουμε μία ἀκέραια λύση (x_o,y_o) τῆς ἐξισώσεως

$$\alpha x + \beta y = \gamma \quad \text{μέ} \quad (\alpha,\beta) = 1 \qquad (1)$$

Μιά λύση τῆς (1) μποροῦμε νά βροῦμε μέ μιά ἀπό τίς παρακάτω μεθόδους.

Μέθοδος 1η. Μποροῦμε νά ὑποθέσουμε ὅτι στήν (1) εἶναι $\alpha>0$, γιατί ἀλλιῶς ἀλλάζουμε τά πρόσημα στήν ἐξίσωση. Λύνοντας τήν (1) ὡς πρός x βρίσκουμε

$$x = \frac{\gamma-\beta y}{\alpha} \qquad (*)$$

Ἄν δώσουμε στό y τίς τιμές $0,1,2,\ldots, \alpha-1$, πού εἶναι α σέ πλῆθος, βρίσκουμε τίς ἀκόλουθες λύσεις τῆς (*) στό σύνολο $\mathbf{Q}\times\mathbf{Z}$:

$$\left(\frac{\gamma}{\alpha}, 0\right), \left(\frac{\gamma-\beta}{\alpha}, 1\right), \left(\frac{\gamma-2\beta}{\alpha}, 2\right), \ldots, \left(\frac{\gamma-\beta(\alpha-1)}{\alpha}, \alpha-1\right)$$

Θά δοῦμε ὅτι μία ἀπό αὐτές τίς λύσεις εἶναι ἀκέραια λύση τῆς (1). Ἄς ὀνομάσουμε $\pi_o, \pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_{\alpha-1}$ τά πηλίκα καί $\upsilon_o, \upsilon_1, \upsilon_2, \ldots, \upsilon_{\alpha-1}$ τά ὑπόλοιπα τῶν ἀλγοριθμικῶν διαιρέσεων τῶν ἀκεραίων γ, $(\gamma-\beta)$, $(\gamma-2\beta), \ldots, [\gamma-\beta(\alpha-1)]$ μέ τό α ἀντιστοίχως. Ἐπειδή, λόγω τοῦ θεωρήματος τῆς 1.3, οἱ δυνατές τιμές τῶν παραπάνω ὑπολοίπων εἶναι οἱ $0,1,2,\ldots, \alpha-1$, ἄν τά ὑπόλοιπα αὐτά εἶναι διαφορετικά μεταξύ τους, τότε, ἀφοῦ εἶναι α σέ πλῆθος, κάποιο ἀπό αὐτά, ἄς ποῦμε τό υ_ρ, θά εἶναι ἴσο μέ μηδέν, ὁπότε ὁ ρητός $\dfrac{\alpha-\rho\beta}{\alpha}$ θά εἶναι ἀκέραιος. Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι $\upsilon_\kappa = \upsilon_\lambda$. Τά ὑπόλοιπα αὐτά ἀντιστοιχοῦν σέ ἐκεῖνες τίς διαιρέσεις, πού στό y ἔχουμε δώσει ἀντίστοιχες τιμές κ καί λ, καί ἔστω $0 \leq \kappa<\lambda<\alpha$. Τότε ἀφαιρώντας κατά μέλη τίς ἰσότητες

$$\gamma-\beta\kappa = \alpha\pi_\kappa+\upsilon_\kappa, \quad \gamma-\beta\lambda = \alpha\pi_\lambda + \upsilon_\lambda$$

βρίσκουμε

$$β(λ-κ) = α\ (π_κ-π_λ),$$

ὁπότε, ἀφοῦ $(α,β) = 1$, λόγω τῆς προτάσεως 2 τῆς 1.6 ὁ α εἶναι διαιρέτης τοῦ λ—κ. Ἀλλά αὐτό εἶναι ἄτοπο, γιατί ὁ θετικός ἀκέραιος λ—κ εἶναι μικρότερος ἀπό τόν α. Ἔτσι μποροῦμε νά ὑπολογίζουμε μιά ἀκέραια λύση τῆς (1)

Γιά τή μέθοδο αὐτή ἀπαιτοῦνται τό πολύ α σέ πλῆθος δοκιμές, ὅσες τιμές δηλαδή δίνουμε στό y. Γιά τό λόγο αὐτό προτιμοῦμε νά λύνουμε τήν ἐξίσωση (1) ὡς πρός ἐκεῖνον τόν ἄγνωστο, πού ἔχει κατ' ἀπόλυτο τιμή μικρότερο συντελεστή.

Στήν περίπτωση πού οἱ συντελεστές τῆς ἐξισώσεως (1) εἶναι μεγάλοι ἀριθμοί ἡ παραπάνω μέθοδος εἶναι κουραστική, γι' αὐτό χρησιμοποιοῦμε τήν ἑπόμενη μέθοδο.

Μέθοδος 2η. Ἡ μέθοδος αὐτή στηρίζεται σέ ὅσα ἀναφέραμε στήν ἀπόδειξη τῆς προτάσεως 2 τῆς 2.2. Ἐπειδή $(|α|, |β|) = (α,β) = 1$, μποροῦμε νά ὑποθέσουμε, ὅτι οἱ α,β εἶναι θετικοί ἀκέραιοι, ὁπότε μέ τόν ἀλγόριθμο τοῦ Εὐκλείδη μποροῦμε νά προσδιορίσουμε, ὅπως εἴδαμε στό παράδειγμα 4 τῆς 1.5, δύο ἀκεραίους α' καί β' τέτοιους, ὥστε

$$αα' + ββ' = 1.$$

Τώρα πολλαπλασιάζοντας καί τά δύο μέλη μέ $γ \neq 0$ (γιατί, ἄν $γ = 0$, μιά ἀκέραια λύση τῆς (1) ὑπολογίζεται ἀμέσως) βρίσκουμε

$$α(α'γ) + β(β'γ) = γ$$

καί ἄρα τό $(x_o,y_o) = (α'γ,\ β'γ)$ εἶναι μία ἀκέραια λύση τῆς (1).

Παραδείγματα:

1. Νά βρεθοῦν οἱ μή ἀρνητικές ἀκέραιες λύσεις τῆς ἐξισώσεως

$$3x + 4y = 37.$$

Ἐπίλυση. Ἐδῶ ἔχουμε $(α,β) = (3,4) = 1$ καί ἄρα ἡ ἐξίσωση ἔχει ἀκέραιες λύσεις. Θά ἐφαρμόσουμε τήν πρώτη μέθοδο. Λύνοντας ὡς πρός x ἔχουμε $x = \frac{37-4y}{3}$. Τώρα σ' αὐτή θέτουμε διαδοχικά $y = 0, 1, 2,$ μέχρι νά βροῦμε ἀκέραια τιμή τοῦ x. Γιά $y = 0$ βρίσκουμε $x = \frac{37}{3}$. Γιά $y = 1$ βρίσκουμε $x = \frac{37-4}{3} = 11 \in \mathbf{Z}$. Ἄρα μία ἀκέραια λύση τῆς δεδομένης ἐξισώσεως εἶναι ἡ $(x_o,y_o) = (11,1)$ καί ἑπομένως οἱ ἀκέραιες λύσεις της βρίσκονται ἀπό τούς τύπους (T) καί εἶναι τά ζεύγη (x,y) μέ

$$\begin{aligned} x &= 11 + 4κ \\ y &= 1 - 3κ \end{aligned} \qquad \text{καί} \quad κ \in \mathbf{Z}$$

Οἱ μή ἀρνητικές ἀκέραιες λύσεις της θά βρεθοῦν, ἄν στούς παραπάνω τύπους δώσουμε στόν **ἀκέραιο** κ τιμές, πού νά συναληθεύουν τίς ἀνισώσεις

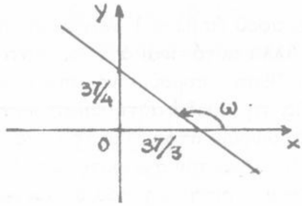
$$11 + 4κ \geq 0 \quad \text{καί} \quad 1-3κ \geq !0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ κ \geq -\frac{11}{4} \ \text{καί}\ κ \leq \frac{1}{3} \Leftrightarrow -2{,}75 \leq κ \leq \frac{1}{3}$$

Ἄρα $κ = -2, -1, 0$. Οἱ μή ἀρνητικές ἀκέραιες λύσεις εἶναι οἱ (3,7), (7,4), (11,1) (βλ. πίνακα τοῦ Σχ. 2) .

κ	x	y
−2	3	7
−1	7	4
0	11	1

Σχ. 2



Σχ. 3

Ὅπως βλέπουμε, οἱ μή ἀρνητικές ἀκέραιες λύσεις τῆς ἐξισώσεως $3x+4y = 37$ εἶναι τρεῖς, δηλ. πεπερασμένες σέ πλῆθος. Ἄς δοῦμε πῶς ἐξηγεῖται αὐτό γεωμετρικά. Ἡ ἐξίσωση αὐτή παριστάνει πάνω στό καρτεσιανό ἐπίπεδο μιά εὐθεία μέ κλίση[1] ἀρνητική (Σχ. 3). Ἐπειδή μόνο ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα τῆς εὐθείας αὐτῆς βρίσκεται στό τεταρτημόριο I, εἶναι φυσικό νά ἔχει ἡ ἐξίσωση πεπερασμένες σέ πλῆθος μή ἀρνητικές ἀκέραιες λύσεις.

Ἄς ἐπιλύσουμε τώρα τήν ἴδια ἐξίσωση μέ τή δεύτερη μέθοδο. Ἀφοῦ $(3,4) = 1$, ὑπάρχουν ἀκέραιοι α′ καί β′ μέ

$$3\alpha' + 4\beta' = 1.$$

Χωρίς τόν ἀλγόριθμο τοῦ Εὐκλείδη βρίσκουμε ὅτι οἱ τιμές $\alpha' = -1$ καί $\beta' = 1$ ἐπαληθεύουν τήν ἰσότητα αὐτή, δηλαδή

$$3(-1) + 4.1 = 1$$

Πολλαπλασιάζοντας καί τά δύο μέλη μέ 37 βρίσκουμε

$$3\,(-37) + 4.37 = 37,$$

πού σημαίνει ὅτι ἡ $(x_1,y_1) = (-37,\ 37)$ εἶναι μία ἀκέραια λύση τῆς ἐξισώσεως. Ἄρα οἱ ἀκέραιες λύσεις της δίνονται ἀπό τούς τύπους

$$\begin{aligned} x &= -37 + 4\lambda \\ y &= 37 - 3\lambda \end{aligned} \qquad \lambda \in \mathbf{Z},$$

πού διαφέρουν ἀπό τούς προηγούμενους, ἀλλά γιά κατάλληλες τιμές τῶν κ καί λ βρίσκουμε τίς ἴδιες λύσεις. Οἱ μή ἀρνητικές ἀκέραιες λύσεις φαίνονται στόν πίνακα τοῦ σχήματος 4, πού, ὅπως βλέπουμε, εἶναι ἴδιες μέ αὐτές πού βρήκαμε καί προηγουμένως.

$\frac{37}{4} \le \lambda \le \frac{37}{3}$		
λ	x	y
10	3	7
11	7	4
12	11	1

Σχ. 4

2. Νά βρεθοῦν οἱ μή ἀρνητικές ἀκέραιες λύσεις τῆς ἐξισώσεως

$$34x - 71y = 3.$$

---

1. Κλίση τῆς εὐθείας μέ ἐξίσωση $y = \lambda x + \mu$ ὀνομάζεται ὁ ἀριθμός λ καί ἐκφράζει τήν ἐφαπτομένη τῆς θετικῆς γωνίας ἀπό τό θετικό ἡμιάξονα τῶν x μέχρι τήν εὐθεία. Στό παράδειγμά μας εἶναι $\text{εφ}\omega = -3/4$.

'Επίλυση: Θά χρησιμοποιήσουμε τή δεύτερη μέθοδο. 'Εδῶ ἔχουμε $\alpha = 34$ καί $\beta = -71$. 'Επειδή $(34, -71) = (34,71)$, θά βροῦμε τό μέγιστο κοινό διαιρέτη τῶν 34, 71. 'Ο ἀλγόριθμος τοῦ Εὐκλείδη δίνει τίς ἰσότητες

$$71 = 34 . 2 + 3,$$
$$34 = 3 . 11 + 1,$$
$$3 = 1 . 3 + 0.$$

"Αρα $(34, -71) = (34,71) = 1$ καί συνεπῶς ἡ δεδομένη ἐξίσωση ἔχει ἀκέραιες λύσεις. 'Από τίς προηγούμενες ἰσότητες ἡ δεύτερη λόγω τῆς πρώτης γράφεται:

$$1 = 34 - 3.11 = 34 - (71 - 34.2)11 = 34.23 + 71(-11)$$

ἤ $\quad 34(23.3) - 71(11.3) = 3 \quad$ ἤ $\quad 34.(69) - 71(33) = 3,$

πού σημαίνει ὅτι μία ἀκέραια λύση τῆς δεδομένης ἐξισώσεως εἶναι ἡ $(x_0, y_0) = (69,33)$.
"Αρα οἱ ἀκέραιες λύσεις της δίνονται ἀπό τούς τύπους

$$\begin{aligned} x &= 69 - 71\kappa \\ y &= 33 - 34\kappa \end{aligned} \qquad \kappa \in \mathbf{Z}.$$

Γιά νά βροῦμε τίς μή ἀρνητικές ἀκέραιες λύσεις, συναληθεύουμε τίς ἀνισώσεις

$$69 - 71\kappa \geq 0 \quad \text{καί} \quad 33 - 34\kappa \geq 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \kappa \leq \frac{69}{71} \quad \text{καί} \quad \kappa \leq \frac{33}{34} \Leftrightarrow \kappa \leq \frac{33}{34} \quad \left(\text{ἀφοῦ } \frac{33}{34} < \frac{69}{71}\right)$$

"Αρα μέ τίς δυνατές ἀκέραιες τιμές τοῦ κ: $0, -1, -2, \ldots$ καί τούς παραπάνω τύπους βρίσκουμε τίς μή ἀρνητικές ἀκέραιες λύσεις τῆς ἐξισώσεως.(Δῶστε γεωμετρική ἑρμηνεία γιατί ἡ ἐξίσωση ἔχει ἄπειρες τέτοιες λύσεις).

2.4. 'Ασκήσεις

1. Νά βρεθοῦν οἱ ἀκέραιες λύσεις τῆς ἐξισώσεως $2x - 5y = 3$.
2. Νά βρεθοῦν οἱ μή ἀρνητικές ἀκέραιες λύσεις τῶν ἐξισώσεων
   (i) $455x + 519y = 2$ (ii) $119x + 29y = 2$.
3. Θέλουμε νά μετατρέψουμε ἕνα χαρτονόμισμα τῶν 100 δρχ σέ κέρματα τῶν 2 καί 5 δρχ. Μέ πόσους τρόπους μποροῦμε νά τό πετύχουμε αὐτό;
4. Βρεῖτε τίς θετικές ἀκέραιες λύσεις τῶν ἐξισώσεων:
   (i) $3x + 4y = 34$, (iii) $34x + 71y = 772$,
   (ii) $9x + 5y = 100$, (iv) $41x + 73y = 561$.
5. "Ενας μαθητής θέλει νά ἀγοράσει τετράδια τῶν 9 δρχ. τό ἕνα καί μολύβια τῶν 7 δρχ. τό ἕνα. "Αν ξοδέψει ἀκριβῶς 100 δρχ., βρεῖτε πόσα τετράδια καί πόσα μολύβια μπορεῖ νά ἀγοράσει.
6. "Ενας χρυσοχόος θέλει νά κατασκευάσει δύο εἴδη κοσμημάτων. "Αν γιά τήν κατασκευή ἑνός κοσμήματος ἀπό κάθε εἶδος ἀπαιτοῦνται ἀντίστοιχα 5 γραμ. καί 8 γραμ. χρυσοῦ, βρεῖτε πόσα κοσμήματα ἀπό κάθε εἶδος μπορεῖ νά κατασκευάσει χρησιμοποιώντας ἀκριβῶς 134 γραμ. χρυσοῦ.
   "Αν ἀπό ἕνα κόσμημα τοῦ α' εἴδους κερδίζει 600 δρχ. καί ἀπό ἕνα τοῦ β' εἴδους 750 δρχ., βρεῖτε σέ ποιά περίπτωση θά ἔχει μέγιστο κέρδος.
7. Βρεῖτε δύο θετικούς ἀκεραίους πού ἔχουν ἄθροισμα 37, ἄν εἶναι γνωστό ὅτι ἡ διαίρεση τοῦ πρώτου μέ τό 5 δίνει ὑπόλοιπο 2 καί ἡ διαίρεση τοῦ δεύτερου μέ τό 7 δίνει ὑπόλοιπο 4.

3. ΣΥΝΤΟΜΗ ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

1. Γιά δύο ἀκεραίους α,β μέ $\beta \neq 0$ ὑπάρχουν μοναδικοί ἀκέραιοι π καί υ τέτοιοι, ὥστε

$$\alpha = \beta\pi + \upsilon \quad \text{καί} \quad 0 \leq \upsilon < |\beta|$$

2. Ὁ ἀλγόριθμος τοῦ Εὐκλείδη εἶναι χρήσιμος γιὰ τὸν ὑπολογισμὸ τοῦ ΜΚΔ ἀκεραίων.
3. Ἄν $\delta = (\alpha, \beta)$, τότε ὑπάρχουν δύο ἀκέραιοι α' καί β' τέτοιοι, ὥστε

$$\delta = \alpha\alpha' + \beta\beta' \qquad (1)$$

Ὁ ἀλγόριθμος τοῦ Εὐκλείδη εἶναι χρήσιμος γιὰ τὸν ὑπολογισμὸ ἀκεραίων α' καί β', πού νά ἐπαληθεύουν τήν (1).
4. Ἄν $\alpha, \beta, \kappa \in \mathbf{Z}^*$ μέ $(\alpha, \beta) = 1$ καί $\alpha | \beta\kappa$, τότε $\alpha | \kappa$.
5. Ἄν $\alpha, \beta \in \mathbf{Z}^*$, τότε $[\alpha, \beta] . (\alpha, \beta) = |\alpha| \cdot |\beta|$.
6. Γιά τήν εὕρεση τοῦ Μ.Κ.Δ δύο θετικῶν ἀκεραίων α καί β, πού ἔχουν ἀναλυθεῖ σέ γινόμενο (θετικῶν) πρώτων παραγόντων, σχηματίζουμε τό γινόμενο πού περιέχει τούς κοινούς πρώτους παράγοντες τῶν α καί β τόν καθένα μέ τό μικρότερο ἐκθέτη. Γιά τήν εὕρεση τοῦ Ε.Κ.Π τους, σχηματίζουμε τό γινόμενο πού περιέχει τούς κοινούς καί μή κοινούς πρώτους παράγοντες τῶν α καί β τόν καθένα μέ τό μεγαλύτερο ἐκθέτη.
7. Ἄν $(\alpha, \beta) = 1$, τότε ἡ ἐξίσωση $\alpha x + \beta y = \gamma$ $(\alpha, \beta, \gamma \in Z)$ ἔχει ἄπειρες ἀκέραιες λύσεις (x, y), πού δίνονται ἀπό τούς τύπους

$$x = x_0 + \beta\kappa,$$
$$y = y_0 - \alpha\kappa,$$

ὅπου (x_0, y_0) εἶναι μιά ἀκέραια λύση αὐτῆς τῆς ἐξισώσεως καί $\kappa \in Z$.

4. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

1. Δεῖξτε ὅτι γιά κάθε $\nu \in \mathbf{Z}$ ὁ $\nu^2 + 3\nu + 5$ δέν διαιρεῖται μέ τό 121.
2. Δεῖξτε ὅτι ὁ $11^{10} - 1$ διαιρεῖται μέ 100.
3. Δεῖξτε ὅτι τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων πέντε διαδοχικῶν ἀκεραίων δέν εἶναι ἴσο μέ τό τετράγωνο ἀκεραίου.
4. Δεῖξτε ὅτι τό τετράγωνο κάθε πρώτου ἀριθμοῦ μεγαλύτερου ἀπό τό 3, ἄν διαιρεθεῖ μέ 12, δίνει ὑπόλοιπο 1.
5. Δεῖξτε ὅτι, ἄν ρ καί $8\rho - 1$ εἶναι θετικοί πρῶτοι ἀριθμοί, τότε ὁ $8\rho + 1$ εἶναι σύνθετος.
6. Δεῖξτε ὅτι οἱ $2^\nu - 1$ καί $2^\nu + 1$ δέν μπορεῖ νά εἶναι καί οἱ δύο πρῶτοι ἀριθμοί γιά καμιά τιμή τοῦ φυσικοῦ $\nu > 1$.
7. Δεῖξτε ὅτι γιά κάθε $\mu, \nu \in \mathbf{Z}$ ἡ παράσταση
$$\mu^5 + 3\mu^4\nu - 5\mu^3\nu^2 - 15\mu^2\nu^3 + 4\mu\nu^4 + 12\nu^5$$
δέν παίρνει τήν τιμή 33.
8. Δεῖξτε ὅτι
$$7 \mid 2222^{5555} + 5555^{2222}$$
9. Δεῖξτε ὅτι, ἄν ὅλοι οἱ συντελεστές τῆς ἐξισώσεως
$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$$
εἶναι περιττοί ἀκέραιοι ἀριθμοί, τότε οἱ ρίζες τῆς ἐξισώσεως δέν εἶναι ρητές.
10. Νά βρεῖτε τούς φυσικούς ἀριθμούς x,y καί z, ἄν
$$\frac{x}{7} + \frac{y}{11} + \frac{z}{13} = 0{,}946053\ 946053\ldots$$
11. Ἄν ἡ διαίρεση τοῦ 802 μέ ἕναν ἀκέραιο α δίνει πηλίκο 14, βρεῖτε τίς δυνατές τιμές τοῦ α καί τῶν ὑπολοίπων.
12. Ἄν $\alpha, \beta, \nu, \rho \in \mathbf{Z}$ καί $\nu - \rho \mid \nu\alpha + \rho\beta$, δεῖξτε ὅτι
$$\nu - \rho \mid (\alpha + \beta)(\nu + \rho).$$
13. Νά δεῖξτε ὅτι γιά κάθε $\nu \in \mathbf{Z}$ τό κλάσμα
$$\frac{15\nu^2 + 8\nu + 6}{30\nu^2 + 21\nu + 13}$$
εἶναι ἀνάγωγο.
14. Ἄν $A = 222\ldots2$ μέ ν τό πλῆθος ψηφία καί $B = 888\ldots8$ μέ μ τό πλῆθος ψηφία, δεῖξτε ὅτι
$$(A, B) = \frac{2}{9}(10^\xi - 1)$$
ὅπου $\xi = (\nu, \mu)$.
15. Τό ἄθροισμα τῶν ἀντιστρόφων τριῶν φυσικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἴσο μέ ἕνα. Ποιοί εἶναι οἱ ἀριθμοί;
16. Δεῖξτε ὅτι γιά κάθε $\kappa \in \mathbf{Z}$ οἱ ἀριθμοί $3\kappa + 1$, $14\kappa + 5$ εἶναι πρῶτοι μεταξύ τους. Ἄν $\kappa \neq$ $\neq 29\lambda + 10$ καί $\lambda \in Z$, δεῖξτε ὅτι
$$(3\kappa - 1,\quad 14\kappa + 5) = 1.$$
17. Γιά ποιές τιμές τοῦ φυσικοῦ ἀριθμοῦ ν οἱ ἀριθμοί $5^\nu + 1$ καί 39 εἶναι πρῶτοι μεταξύ τους;

III 4.

18. Ἂν $\beta \mid \alpha(\alpha-1)$, ὅπου $\alpha, \beta \in \mathbf{Z}$, δεῖξτε ὅτι

$$(2\alpha-1, \beta) = 1.$$

19. Ἂν α, β, A, B εἶναι ἀκέραιοι καί θέσουμε

$$\delta = (\alpha, \beta), \quad \Delta = (A, B), \quad \mu = [\alpha, \beta] \quad \text{καί} \quad M = [A, B],$$

δεῖξτε ὅτι

$$(\alpha A, \alpha B, \beta A, \beta B) = \delta . \Delta \quad \text{καί} \quad [\alpha A, \alpha B, \beta A, \beta B] = \mu . M.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ IV

ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

1. Τό σύνολο $C_{[x]}$ τῶν πολυωνύμων
2. Διαιρετότητα πολυωνύμων
3. Ἀριθμητική τιμή τῶν πολυωνύμων
4. Θεωρήματα σχετικά μέ τίς ρίζες τῶν πολυωνύμων
5. Ἐξισώσεις 3ου καί 4ου βαθμοῦ
6. Διερεύνηση ἐξισώσεων καί ἀνισώσεων
7. Σύντομη ἀνακεφαλαίωση
8. Ἀσκήσεις γιά ἐπανάληψη

1. ΤΟ ΣΥΝΟΛΟ $C_{[x]}$ ΤΩΝ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

1.1. Ὁρισμός τοῦ $C_{[x]}$.

Σέ προηγούμενες τάξεις ἔχουμε μιλήσει γιά πολυώνυμα μέ πραγματικούς συντελεστές καί ἔχουμε μάθει νά κάνουμε πράξεις μέ αὐτά. Ἐδῶ θά συμπληρώσουμε τίς γνώσεις μας αὐτές ἀναφερόμενοι καί σέ πολυώνυμα μέ μιγαδικούς συντελεστές. Ἔτσι,

κάθε παράσταση τῆς μορφῆς

$$\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x^1 + \alpha_0 x^0 \tag{1}$$

μέ $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_\nu \in C$ καί $\nu \in N_0$,

θά τήν ὀνομάζουμε καί πάλι **πολυώνυμο τοῦ x** καί θά τό συμβολίζουμε μέ $f(x)$, $g(x)$, $\varphi(x)$, κ.ἄ.

Τό πολυώνυμο (1) τό γράφουμε ἁπλούστερα

$$\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0 \tag{2}$$

θέτοντας ὅπου x^1 τό x καί ὅπου $\alpha_0 x^0$ τό α_0. Τά $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_\nu$ ὀνομάζονται **συντελεστές τοῦ πολυωνύμου** καί τά $\alpha_\kappa x^\kappa$, $k \in \{0,1,2,\ldots,\nu\}$ **ὅροι τοῦ πολυωνύμου.**

Είδικότερα οἱ ὅροι $\alpha_\kappa x^\kappa$ μέ $\alpha_\kappa = 0$ ὀνομάζονται **μηδενικοί ὅροι τοῦ πολυωνύμου** καί ὁ α_0 **σταθερός ὅρος τοῦ πολυωνύμου.**

Ἄν ὅλοι οἱ ὅροι ἑνός πολυωνύμου εἶναι μηδενικοί, τότε τό πολυώνυμο αὐτό ὀνομάζεται **μηδενικό πολυώνυμο.**

Ὁ «ἐκθέτης» τοῦ x σέ ἕνα μή μηδενικό ὅρο ἑνός πολυωνύμου ὀνομάζεται **βαθμός** αὐτοῦ **τοῦ ὅρου.** Γιά ἕνα μή μηδενικό πολυώνυμο ὁ μεγαλύτερος ἀπό τούς ἐκθέτες τῶν μή μηδενικῶν ὅρων του ὀνομάζεται **βαθμός τοῦ πολυωνύμου.** Π.χ. ἄν $f(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$, μέ $\alpha_\nu \neq 0$, τότε λέμε ὅτι τό $f(x)$ εἶναι νιοστοῦ βαθμοῦ καί γράφουμε βαθμ.$f(x) = \nu$. Ὁ ὅρος $\alpha_\nu x^\nu$ ὀνομάζεται τότε καί μεγιστοβάθμιος ὅρος τοῦ $f(x)$.

Στή γραφή ἑνός πολυωνύμου δεχόμαστε τίς ἑξῆς ἁπλοποιήσεις:

α) Παραλείπουμε τή μονάδα, ὅταν εἶναι συντελεστής κάποιου ὅρου, ἐκτός ἄν εἶναι ὁ σταθερός ὅρος.

β) Παραλείπουμε τό «+», ὅταν ἀκολουθεῖ ὅρος μέ συντελεστή τῆς μορφῆς $-\alpha$

γ) Παραλείπουμε τούς μηδενικούς ὅρους ἤ καί προσαρτοῦμε, ὅταν εἶναι ἀναγκαῖο, ὁσουσδήποτε ἀπό αὐτούς. Φυσικά σέ ἕνα μηδενικό πολυώνυμο δέν παραλείπουμε ὅλους τούς ὅρους του (γράφουμε τουλάχιστον ἕναν). Ἔτσι δύο πολυώνυμα μποροῦν νά γραφοῦν πάντοτε μέ τό ἴδιο πλῆθος ὅρων. Αὐτό γίνεται συχνά στά ἑπόμενα χωρίς νά τονίζεται ἰδιαίτερα.

Σύμφωνα μέ τίς παραδοχές πού κάναμε, τά πολυώνυμα $f(x) = \frac{4}{3}x^2 + (-5)x + i\sqrt{2}$ καί $g(x) = (2+i)x^3 + 1x^2 + 0x + 1$ γράφονται ἁπλούστερα $f(x) = \frac{4}{3}x^2 - 5x + i\sqrt{2}$ καί $g(x) = (2+i)x^3 + x^2 + 1$.

Τονίζουμε ὅτι τό πολυώνυμο $f(x) = \alpha_0$ ὀνομάζεται **σταθερό πολυώνυμο** καί ὅταν $\alpha_0 \neq 0$, εἶναι μηδενικοῦ βαθμοῦ, ἐνῶ ὅταν $\alpha_0 = 0$, εἶναι μηδενικό πολυώνυμο καί **δέν ἔχει βαθμό**[1].

Ὅταν στά ἑπόμενα λέμε ὅτι *«τό πολυώνυμο $f(x)$ εἶναι τό πολύ νιοστοῦ βαθμοῦ»* θά ἐννοοῦμε ὅτι τό $f(x)$ εἶναι μηδενικό πολυώνυμο ἤ βαθμ.$f(x) \leq \nu$.

Ἄν $f(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$ καί $g(x) = \beta_\nu x^\nu + \beta_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + \beta_1 x + \beta_0$, τότε θά λέμε ὅτι τά πολυώνυμα αὐτά εἶναι ἴσα καί θά γράφουμε $f(x) = g(x)$, ὅταν καί μόνο ὅταν εἶναι $\alpha_j = \beta_j$ γιά ὅλα τά $j \in \{0,1,2,\ldots,\nu\}$.

Εἶναι φανερό ὅτι ἡ ἰσότητα τῶν πολυωνύμων, ὅπως ὁρίστηκε, ἔχει τίς γνωστές μας ἰδιότητες τῆς ἰσότητας καί ἀκόμα ὅτι **δύο ἴσα πολυώνυμα δέν εἶναι δύο πολυώνυμα, ἀλλά ἕνα καί τό αὐτό πολυώνυμο.**

Ἀπό τόν ὁρισμό τῆς ἰσότητας τῶν πολυωνύμων συμπεραίνουμε ὅτι **ὑπάρχει μοναδικό μηδενικό πολυώνυμο.** Τό μοναδικό αὐτό μηδενικό πολυώνυμο θά τό συμβολίζουμε $0(x)$ ἤ $\mathbf{0}$.

Τό σύνολο τῶν πολυωνύμων μέ μιγαδικούς συντελεστές θά τό συμβολίζουμε μέ $\mathbf{C}_{[x]}$.

Στά ἑπόμενα θά ἀναφερόμαστε γενικά σέ πολυώνυμα τοῦ $\mathbf{C}_{[x]}$, καί ὅταν εἶναι ἀπαραίτητο νά ἔχουμε πολυώνυμα μέ μόνο πραγματικούς συντελεστές ἤ μόνο ρητούς, θά τό τονίζουμε ἰδιαίτερα καί τά σύνολά τους θά τά συμβολίζουμε ἀντιστοίχως μέ $\mathbf{R}_{[x]}$ καί $\mathbf{Q}_{[x]}$.

1.2. Ἐφαρμογές.

1. Νά προσδιοριστοῦν οἱ πραγματικοί ἀριθμοί α,β,γ,δ, ὥστε τό πολυώνυμο

$$f(x) = (\alpha-1)x^3 + (2\beta-\alpha+1)x^2 + (\alpha+\beta-\gamma)x + 2\alpha - \gamma + \beta + \delta$$

νά εἶναι τό μηδενικό πολυώνυμο.

Λύση: Σύμφωνα μέ τόν ὁρισμό τοῦ μηδενικοῦ πολυωνύμου ἔχουμε τό σύστημα

$$\alpha-1=0,\ 2\beta-\alpha+1=0,\ \alpha+\beta-\gamma=0,\ 2\alpha-\gamma+\beta+\delta=0,$$

τό ὁποῖο ἐπιλυόμενο δίνει:

$$\alpha=1,\ \beta=0,\ \gamma=1,\ \delta=-1.$$

---

1. Μερικές φορές στή βιβλιογραφία σέ ἕνα μηδενικό πολυώνυμο ἀποδίδεται ὁ βαθμός $-\infty$.

2. Νά προσδιοριστοῦν οἱ πραγματικοί ἀριθμοί α,β,γ, ὥστε τά πολυώνυμα

$$f(x)=(\alpha-\beta)x^2+\gamma x-2\alpha+\beta-1 \quad \text{καί} \quad g(x)=(\alpha+\beta+3)x^2+(2-\gamma)x+3\alpha-2$$

νά εἶναι ἴσα.

Λύση: Σύμφωνα μέ τόν ὁρισμό τῆς ἰσότητας τῶν πολυωνύμων ἔχουμε:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha-\beta=\alpha+\beta+3\\ \gamma=2-\gamma\\ -2\alpha+\beta-1=3\alpha-2\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l}-2\beta=3\\ 2\gamma=2\\ -5\alpha+\beta=-1\end{array}\right\}$$

Ἀπό τό τελευταῖο σύστημα παίρνουμε $\beta=-\dfrac{3}{2}$, $\gamma=1$, $\alpha=-\dfrac{1}{10}$.

1.3. Πρόσθεση στό $C_{[x]}$.

Ἄν $f(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0$ καί $g(x)=\beta_\nu x^\nu+\beta_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\beta_1 x+\beta_0$ εἶναι δύο πολυώνυμα τοῦ $C_{[x]}$, **τότε ὁρίζεται μονοσήμαντα τό πολυώνυμο**

$$\varphi(x)=\gamma_\nu x^\nu+\gamma_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\gamma_1 x+\gamma_0$$

μέ συντελεστές $\gamma_j=\alpha_j+\beta_j$ γιά ὅλα τά $j\in\{0,1,2,\ldots,\nu\}$, πού ὀνομάζεται ἄθροισμα τῶν $f(x)$ καί $g(x)$ καί συμβολίζεται μέ $f(x)+g(x)$. Ἡ πράξη, μέ τήν ὁποία στό ζεῦγος $(f(x), g(x))$ ἀντιστοιχίζεται τό πολυώνυμο $f(x)+g(x)$, **ὀνομάζεται πρόσθεση στό C[x].** Ἡ πρόσθεση αὐτή, ὅπως εἶναι φανερό, ἔχει ὅλες τίς ἰδιότητες τῆς προσθέσεως στό **C** καί γι' αὐτό

ἡ δομή $(C_{[x]},+)$ εἶναι ἀντιμεταθετική ὁμάδα,

μέ **οὐδέτερο στοιχεῖο** τό μηδενικό πολυώνυμο καί **ἀντίθετο** τοῦ $f(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0$ τό $-f(x)=-\alpha_\nu x^\nu-\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}-\ldots-\alpha_1 x-\alpha_0$.

Ἔτσι, ἄν $f(x)$ καί $g(x)$ εἶναι γνωστά πολυώνυμα, ἡ ἐξίσωση $f(x)+Y=g(x)$ ἔχει **μοναδική** λύση τήν $Y=g(x)+(-f(x))$, πού ὀνομάζεται διαφορά τοῦ πολυωνύμου $f(x)$ ἀπό τό $g(x)$ καί συμβολίζεται μέ $g(x)-f(x)$, δηλαδή

$$g(x)-f(x)=g(x)+(-f(x)).$$

1.4. Πολλαπλασιασμός πολυωνύμου ἐπί ἀριθμό λ∈C.

Ἄν $f(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0$ εἶναι ἕνα πολυώνυμο τοῦ $C_{[x]}$, τότε ὁρίζουμε στό $C_{[x]}$ μία **ἐξωτερική πράξη πολλαπλασιασμοῦ μέ τελεστές λ ἀπό τό σῶμα C,** ἀντιστοιχίζοντας στό ζεῦγος $(\lambda, f(x))$, τό πολυώνυμο:

$$\lambda f(x) \underset{\text{ορσ}}{=} (\lambda\alpha_\nu)x^\nu+(\lambda\alpha_{\nu-1})x^{\nu-1}+\ldots+(\lambda\alpha_1)x_1+(\lambda\alpha_0).$$

Ὁ πολλαπλασιασμός αὐτός, ὅπως ὁρίστηκε, εἶναι εὔκολο νά δειχθεῖ ὅτι ἔχει τίς γνωστές ἰδιότητες

α) $\lambda\cdot(f(x)+g(x)) = \lambda\cdot f(x)+\lambda\cdot g(x)$
β) $(\lambda+\kappa)\cdot f(x) = \lambda\cdot f(x)+\kappa\cdot f(x)$
γ) $(\lambda\kappa)\cdot f(x) = \lambda\cdot(\kappa\cdot f(x))$
δ) $1\cdot f(x) = f(x)$

γιά ὅλα τά $\lambda,\kappa\in$ **C**.

Ἔτσι τό C[x] ἐφοδιασμένο μέ τήν ἐσωτερική πράξη τῆς προσθέσεως καί τήν ἐξωτερική πράξη τοῦ πολλαπλασιασμοῦ μέ τελεστές ἀπό τό C εἶναι ἕνας διανυσματικός χῶρος πάνω στό σῶμα C.

Μετά τή διαπίστωση αὐτή τό πολυώνυμο $f(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$ εἶναι γραμμικός συνδυασμός τῶν πολυωνύμων $1, x, x^2, \ldots, x^{\nu-1}, x^\nu$ μέ συντελεστές ἀπό τό **C**, ὁπότε τό f(x) γράφεται $f(x) = \alpha_0 \cdot 1 + \alpha_1 \cdot x + \alpha_2 \cdot x^2 + \ldots + \alpha_{\nu-1} \cdot x^{\nu-1} + \alpha_\nu \cdot x^\nu$ καί μπορεῖ νά θεωρηθεῖ σάν ἄθροισμα τῶν ὅρων του.

1.5. Πολλαπλασιασμός στό $C_{[x]}$.

Ἄν $f(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$ καί

$$g(x) = \beta_\mu x^\mu + \beta_{\mu-1}x^{\mu-1} + \ldots + \beta_1 x + \beta_0$$

εἶναι δύο πολυώνυμα τοῦ $C_{[x]}$, τότε **ὀνομάζεται γινόμενο τοῦ f(x) ἐπί τό g(x)** καί συμβολίζεται μέ $f(x) \cdot g(x)$ **τό πολυώνυμο:**

$$\varphi(x) = \gamma_{\nu+\mu} x^{\nu+\mu} + \ldots + \gamma_\kappa x^\kappa + \ldots + \gamma_1 x + \gamma_0$$

μέ $\gamma_\kappa = \alpha_\kappa\beta_0 + \alpha_{\kappa-1}\beta_1 + \alpha_{\kappa-2}\beta_2 + \ldots + \alpha_2\beta_{\kappa-2} + \alpha_1\beta_{\kappa-1} + \alpha_0\beta_\kappa, \kappa \in \{0,1,2,\ldots,\nu+\mu\}$ (1)

Εἶναι φανερό ὅτι **τό f(x).g(x) εἶναι ἕνα πολυώνυμο τοῦ $C_{[x]}$ μοναδικό,** ὅταν δίνονται τά f(x) καί g(x), ἀφοῦ οἱ συντελεστές του ὁρίζονται μέ τή βοήθεια τῆς προσθέσεως καί τοῦ πολλαπλασιασμοῦ στό **C** τῶν συντελεστῶν τῶν f(x) καί g(x).

Ἡ πράξη, μέ τήν ὁποία σέ ἕνα ζεῦγος πολυωνύμων τοῦ $C_{[x]}$ ἀντιστοιχίζεται τό γινόμενό τους, **ὀνομάζεται πολλαπλασιασμός στό $C_{[x]}$.**

Τά πολυώνυμα f(x) καί g(x) ὀνομάζονται καί **παράγοντες** τοῦ γινομένου $f(x) \cdot g(x)$. Ἄν $f(x) = \mathbf{0}$, τότε $\mathbf{0} \cdot g(x) = \mathbf{0}$. Ἀπό τήν ἰσότητα αὐτή βλέπουμε ὅτι **τό 0 ἔχει γιά παράγοντα κάθε πολυώνυμο τοῦ $C_{[x]}$**. Ἐπίσης ἄν $f(x) = 1$, τότε $1 \cdot g(x) = g(x)$, δηλ. **κάθε πολυώνυμο εἶναι παράγοντας τοῦ ἑαυτοῦ του.**

Παρατήρηση: Ἄν $f(x) \in C_{[x]}$ καί λ εἶναι ἕνα σταθερό πολυώνυμο τοῦ $C_{[x]}$, **τότε τό γινόμενο λ.f(x) ταυτίζεται μέ τό γινόμενο τοῦ ἐξωτερικοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ f(x) ἐπί τό $\lambda \in C$**

Ἀπό τόν ὁρισμό τοῦ γινομένου $f(x) \cdot g(x)$ γίνεται φανερό ὅτι

ὁ βαθμός τοῦ γινομένου δύο μή μηδενικῶν πολυωνύμων εἶναι ἴσος μέ τό ἄθροισμα τῶν βαθμῶν τῶν δύο πολυωνύμων.

Ἀπό τήν (1) φαίνεται ὅτι **ἡ πράξη τοῦ πολλαπλασιασμοῦ εἶναι** πράξη **ἀντιμεταθετική** καί πράξη **ἐπιμεριστική ὡς πρός τήν πρόσθεση στό C[x].** Ἐπειδή $1 \cdot g(x) = g(x)$ καί ὁ πολλαπλασιασμός εἶναι πράξη ἀντιμεταθετική, θά ἰσχύει $1 \cdot g(x) = g(x) \cdot 1 = g(x)$, δηλ. ὁ πολλαπλασιασμός στό $C_{[x]}$ **ἔχει οὐδέτερο στοιχεῖο τό σταθερό πολυώνυμο f(x)=1.** Ἀποδεικνύεται ἀκόμα ὅτι ὁ πολλαπλασιασμός στό $C_{[x]}$ **εἶναι πράξη προσεταιριστική.** Δηλαδή

ἡ δομή ($C_{[x]}$,+,·) εἶναι ἀντιμεταθετικός δακτύλιος μέ μοναδιαῖο στοιχεῖο.

Ἂν ἀναζητήσουμε **τό ἀντίστροφο στοιχεῖο** γιά κάθε μή μηδενικό πολυώνυμο, θά δοῦμε ὅτι αὐτό **δέν ὑπάρχει παρά μόνο** γιά τά σταθερά πολυώνυμα.

Πράγματι· α) ἄν γιά ἕνα πολυώνυμο $f(x) \in \mathbf{C}_{[x]}$ μέ βαθμό $\nu \neq 0$ ὑπῆρχε τό ἀντίστροφό του $f^{-1}(x)$, τότε θά ἦταν $f(x) \cdot f^{-1}(x) = 1$. Ἂν ἑπομένως ὁ βαθμός τοῦ $f^{-1}(x)$ εἶναι $\mu \in \mathbf{N}_0$, τότε ὁ βαθμός τοῦ $f(x) \cdot f^{-1}(x)$ θά εἶναι $\nu + \mu > 0$, πράγμα ἄτοπο, ἀφοῦ τό β' μέλος τῆς $f(x) f^{-1}(x) = 1$ εἶναι τό πολυώνυμο 1 πού ἔχει βαθμό μηδέν.

β) Ἂν εἶναι $f(x) = \alpha_0 \neq \mathbf{0}$, τότε τό σταθερό πολυώνυμο $\dfrac{1}{\alpha_0}$ εἶναι τό ἀντίστροφο τοῦ $f(x)$, ἀφοῦ $\alpha_0 \cdot \dfrac{1}{\alpha_0} = 1$.

Ἔτσι βλέπουμε ὅτι **ἡ δομή $(C_{[x]}, +, .)$ δέν εἶναι σῶμα.** Γιά τή δομή ὅμως αὐτή ἰσχύει ἡ συνεπαγωγή $f(x) \cdot g(x) = \mathbf{0} \Rightarrow f(x) = \mathbf{0}$ εἴτε $g(x) = \mathbf{0}$, δηλαδή **ἡ δομή $(C[x], +, .)$ εἶναι ἀκέραια περιοχή.**

Πράγματι· ἄν ἦταν $f(x) \neq \mathbf{0}$ καί $g(x) \neq \mathbf{0}$ μέ μεγιστοβάθμιους ὅρους ἀντίστοιχα $\alpha_\nu x^\nu$ καί $\beta_\mu x^\mu$, τότε τό γινόμενο $f(x) \cdot g(x)$ θά εἶχε τόν ὅρο $\alpha_\nu \beta_\mu x^{\nu+\mu}$ μέ $\alpha_\nu \beta_\mu \neq 0$, τό ὁποῖο σημαίνει ὅτι τό γινόμενο δέ θά ἦταν τό μηδενικό πολυώνυμο.

Θά δείξουμε τώρα ὅτι **κάθε μή μηδενικό πολυώνυμο εἶναι ἁπλοποιήσιμο στοιχεῖο ὡς πρός τήν πράξη τοῦ πολλαπλασιασμοῦ στό $C_{[x]}$ (νόμος διαγραφῆς)**, πού εἶναι ἰδιότητα κάθε ἀκέραιας περιοχῆς. Δηλαδή θά δείξουμε ὅτι:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \cdot \varphi(x) = g(x) \cdot \varphi(x) \\ \qquad \varphi(x) \neq \mathbf{0} \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) = g(x)$$

Πράγματι· $\left.\begin{array}{l} f(x) \cdot \varphi(x) = g(x) \cdot \varphi(x) \\ \qquad \varphi(x) \neq \mathbf{0} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} (f(x) - g(x)) \cdot \varphi(x) = \mathbf{0} \\ \varphi(x) \neq \mathbf{0} \end{array}\right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(x) - g(x) = \mathbf{0} \Rightarrow f(x) = g(x).$$

Δυνάμεις μέ ἐκθέτη $\nu \in \mathbf{N}_0$ ἑνός πολυωνύμου $f(x) \in \mathbf{C}_{[x]}$ ὁρίζονται μέ τόν ἀκόλουθο τρόπο:

α) $[f(x)]^2 = f(x) \cdot f(x)$ καί $[f(x)]^{\kappa+1} = [f(x)]^\kappa \cdot f(x)$ μέ $\kappa \in \mathbf{N}$ καί $\kappa > 1$ (Ἐπαγωγικά).

β) $[f(x)]^1 = f(x)$ καί

γ) $[f(x)]^0 = 1$, ὅταν $f(x) \neq \mathbf{0}$

Μετά τόν ὁρισμό τῶν δυνάμεων, ἄν

$$f(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0 \neq \mathbf{0} \text{ καί}$$
$$\varphi(x) = \beta_\mu x^\mu + \beta_{\mu-1} x^{\mu-1} + \ldots + \beta_1 x + \beta_0 \neq \mathbf{0}$$

εἶναι δύο πολυώνυμα, τότε τό $f(\varphi(x))$ εἶναι τό πολυώνυμο

$$\alpha_\nu (\varphi(x))^\nu + \alpha_{\nu-1} (\varphi(x))^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 (\varphi(x)) + \alpha_0.$$

Τό πολυώνυμο αὐτό, μετά τήν ἐκτέλεση τῶν πράξεων, γίνεται ἕνα πολυώνυμο τοῦ x μέ βαθμό ἴσο μέ τό γινόμενο τῶν βαθμῶν τῶν f(x) καί φ(x). Ἄν τό φ(x) εἶναι τό σταθερό πολυώνυμο, π.χ. φ(x) = α, τότε τό f(α) θά εἶναι ἐπίσης σταθερό πολυώνυμο.

1.6. Παραδείγματα.

1. Νά προσδιοριστοῦν τά α,β,γ ὥστε νά ἰσχύει ἡ ἰσότητα

$$f(x).\varphi(x)=g(x)-\sigma(x), \text{ μέ } f(x)=x^2-2x+3, \quad \varphi(x)=x-1$$

$$g(x)=(\alpha+1)x^3+(\beta-2)x^2+(\gamma^2-20)x+2 \text{ καί } \sigma(x)=5x+5$$

Λύση: Ἐκτελώντας τίς πράξεις παίρνουμε:

$$f(x).\varphi(x)=(x^2-2x+3).(x-1)=x^3-3x^2+5x-3 \quad \text{καί}$$

$$g(x)-\sigma(x)=(\alpha+1)x^3+(\beta-2)x^2+(\gamma^2-25)x-3.$$

Ζητοῦνται τά α,β,γ, ὥστε νά ἰσχύει ἡ ἰσότητα

$$x^3-3x^2+5x-3=(\alpha+1)x^3+(\beta-2)x^2+(\gamma^2-25)x-3.$$

Γιά νά συμβαίνει αὐτό, ἀρκεῖ νά συναληθεύουν οἱ ἐξισώσεις

$$\alpha+1=1,\ \beta-2=-3,\ \gamma^2-25=5 \quad \text{καί} \quad -3=-3,$$

ἀπό τίς ὁποῖες εὔκολα παίρνουμε $\alpha=0$, $\beta=-1$ καί $\gamma=\pm\sqrt{30}$.

2. Ἄν $f(x)=2x^2-3x+1$, $\varphi(x)=x-1$ καί $g(x)=(\alpha-\beta)x^2-(2\alpha-\beta)x-\alpha+\beta-\gamma$ νά προσδιοριστοῦν τά $\alpha,\beta,\gamma\in R$, ὥστε νά ἰσχύει ἡ ἰσότητα $g(x)=f(\varphi(x))$.

Λύση: Εἶναι

$$\begin{aligned} f(\varphi(x)) &= 2(x-1)^2-3(x-1)+1 \\ &= 2(x^2-2x+1)-3(x-1)+1=2x^2-4x+2-3x+3+1=2x^2-7x+6 \end{aligned}$$

καί ζητεῖται νά εἶναι: $(\alpha-\beta)x^2-(2\alpha-\beta)x-\alpha+\beta-\gamma=2x^2-7x+6$

Γιά νά ἰσχύει ἡ τελευταία σχέση, ἀρκεῖ νά ἔχει λύση τό σύστημα:

$$\alpha-\beta=2,\ -2\alpha+\beta=-7,\ -\alpha+\beta-\gamma=6$$

Ἐπιλύοντας τό σύστημα αὐτό παίρνουμε $\alpha=5$, $\beta=3$, $\gamma=-8$.

1.7. Ἀσκήσεις

1. Ἄν ἡ διαφορά δύο πολυωνύμων εἶναι τό μηδενικό πολυώνυμο, δεῖξτε ὅτι τά πολυώνυμα αὐτά εἶναι ἴσα.
2. Ἄν ν καί μ εἶναι ἀντίστοιχα οἱ βαθμοί δύο πολυωνύμων f(x) καί g(x), μέ $\nu\geq\mu$, δεῖξτε ὅτι ὁ βαθμός τοῦ πολυωνύμου f(x)+g(x) εἶναι τό πολύ ἴσος μέ ν.
3. Νά προσδιοριστοῦν τά α καί β, ὥστε νά ἰσχύει ἡ ἰσότητα
$$4x^3+20x^2+33x=(2x+5)\ (2x+3).(\alpha x+\beta)+2x-15$$
4. Ἄν $f(x)=3x^3-2x^2+7x+6$ καί $g(x)=\alpha_3x^3+\alpha_2x^2+\alpha_1x+\alpha_0$, βρεῖτε τίς τιμές τῶν $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$, ὥστε ἡ διαφορά f(x)–g(x) νά εἶναι πολυώνυμο:
   i) 3ου βαθμοῦ, ii) τό πολύ 2ου βαθμοῦ, iii) 1ου βαθμοῦ
   iv) μηδενικοῦ βαθμοῦ καί v) τό μηδενικό.
5. Νά προσδιοριστοῦν οἱ πραγματικοί ἀριθμοί α,β,γ,δ, ὥστε τό πολυώνυμο $f(x)=x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+9$ νά εἶναι τό τετράγωνο τοῦ πολυωνύμου $g(x)=x^2+x+\delta$.
6. Δεῖξτε ὅτι οἱ συνθῆκες $\beta=\frac{\alpha^2}{4}+\frac{2\gamma}{\alpha}$ καί $\delta=\frac{\gamma^2}{\alpha^2}$ εἶναι ἀναγκαῖες καί ἱκανές, ὥστε τό

πολυώνυμο $f(x)=x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$, $\alpha\in\mathbf{R}-\{0\}$ καί $\beta,\gamma,\delta\in\mathbf{R}$ νά εἶναι τό τετράγωνο ἑνός πολυωνύμου $g(x)$ μέ πραγματικούς συντελεστές.

7. Δίνεται τό πολυώνυμο $f(x)=9x^4-30x^3+37x^2-14x-1$. Βρεῖτε δύο πολυώνυμα $g(x)$ καί $\pi(x)$, 2ου καί 1ου βαθμοῦ ἀντιστοίχως, ὥστε νά εἶναι $f(x)=(g(x))^2+\pi(x)$.
8. Δίνεται τό πολυώνυμο $f(x)=4x^4-8x^3+\alpha x+\beta$. Βρεῖτε πολυώνυμο $g(x)$, ὥστε ἡ διαφορά $f(x)-(g(x))^2$ νά εἶναι πολυώνυμο τό πολύ 1ου βαθμοῦ. Ἔπειτα νά προσδιορίσετε τά α καί β, ὥστε τό $f(x)$ νά εἶναι τέλειο τετράγωνο πολυωνύμου.
9. Ἄν εἶναι $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma$ καί $\alpha+\beta+\gamma\neq0$, ὅπου $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbf{R}$, δεῖξτε ὅτι τό πολυώνυμο $f(x)=\kappa(\alpha-\beta)x^2+\lambda(\beta-\gamma)x+\mu(\gamma-\alpha)$, μέ $\kappa,\lambda,\mu\in\mathbf{C}$ εἶναι τό μηδενικό πολυώνυμο.
10. Βρεῖτε ὅλα τά τριώνυμα $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, μέ $\alpha\neq0$, τά ὁποῖα ἱκανοποιοῦν τήν ἰσότητα $f(x+1)=f(-x)$.

2. ΔΙΑΙΡΕΤΟΤΗΤΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

Στήν παράγραφο αὐτή θά μελετήσουμε τήν ἔννοια τῆς διαιρετότητας στό $\mathbf{C}_{[x]}$ καί θά δοῦμε προτάσεις ἀνάλογες μέ ἐκεῖνες πού εἴδαμε στό κεφάλαιο τῶν ἀκέραιων ἀριθμῶν.

2.1. Ἡ ἔννοια τῆς διαιρετότητας στό $\mathbf{C}_{[x]}$.

Ἄν $f(x)$ καί $g(x)$ εἶναι δύο πολυώνυμα τοῦ $\mathbf{C}_{[x]}$ καί ὑπάρχει πολυώνυμο $\pi(x)$, ὥστε νά ἰσχύει

$$f(x)=g(x)\,\pi(x), \tag{1}$$

τότε λέμε ὅτι **τό $g(x)$ εἶναι παράγοντας τοῦ πολυωνύμου $f(x)$.** Φυσικά τότε καί **τό $\pi(x)$ εἶναι παράγοντας τοῦ $f(x)$.**

Ἄν ἔχουμε ἀκόμα ὅτι **$g(x)\neq0$, τότε** θά λέμε ὅτι:

τό $g(x)$ διαιρεῖ τό πολυώνυμο $f(x)$ ἤ εἶναι διαιρέτης τοῦ $f(x)$ (συμβολικά $g(x)|f(x)$) ἤ τό $f(x)$ διαιρεῖται μέ τό $g(x)$ ἤ ὅτι εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ $g(x)$.

Στήν περίπτωση αὐτή, ὅπως γνωρίζουμε, **τό $\pi(x)$ ὀνομάζεται καί πηλίκο τῆς τέλειας διαιρέσεως τοῦ $f(x)$ μέ τό $g(x)$ καί εἶναι μοναδικό.**

Τό τελευταῖο ἀποδεικνύεται ὅπως ἡ πρόταση 2 τῆς 1.1 τοῦ Κεφ. III καί τότε γράφουμε καί $\pi(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Παρατηρήσεις:

1. Ἄν $f(x).g(x)\neq\mathbf{0}$ καί βαθμ. $f(x)<$βαθμ. $g(x)$, τότε εἶναι φανερό ὅτι δέν ὑπάρχει πολυώνυμο $\pi(x)$ πού νά ἱκανοποιεῖ τήν (1).
2. Ἄν $f(x).g(x)\neq\mathbf{0}$ καί ὑπάρχει $\pi(x)$ πού ἱκανοποιεῖ τήν (1), τότε εἶναι: βαθμ. $\pi(x)$=βαθμ $f(x)$−βαθμ. $g(x)$

3. Ἄν τά f(x) καί g(x) ἔχουν πραγματικούς συντελεστές, τότε καί τό π(x) θά ἔχει πραγματικούς συντελεστές. Εἶναι ὅμως δυνατό ἕνα πολυώνυμο f(x) μέ πραγματικούς συντελεστές νά ἔχει διαιρέτες πολυώνυμα μέ μιγαδικούς συντελεστές. Αὐτό φαίνεται ἀμέσως ἀπό τήν ἰσότητα

$$x^2+1=(x+i).(x-i).$$

2.2. Ἰδιότητες τῆς διαιρετότητας τῶν πολυωνύμων τοῦ $\mathbf{C}_{[x]}$.

Ἐδῶ θά δοῦμε, χωρίς νά κάνουμε ὅλες τίς ἀποδείξεις, μερικές ἰδιότητες τῆς διαιρετότητας τῶν πολυωνύμων τοῦ $\mathbf{C}_{[x]}$. Πολλές ἀπό αὐτές εἶναι ὅμοιες μέ τίς ἰδιότητες τῆς διαιρετότητας τῶν ἀκέραιων ἀριθμῶν πού εἴδαμε στήν παράγραφο 1.1 τοῦ Κεφ. ΙΙΙ.

1. Ἡ σχέση τῆς διαιρετότητας δύο πολυωνύμων εἶναι μεταβατική, δηλαδή ἄν $g(x) \mid f(x)$ καί $f(x) \mid \varphi(x)$, τότε $g(x) \mid \varphi(x)$.
2. Ἄν $g(x)$ εἶναι διαιρέτης τῶν πολυωνύμων $f(x)$ καί $\varphi(x)$, τότε θά εἶναι ἐπίσης διαιρέτης τοῦ πολυωνύμου $f(x)+\varphi(x)$.
3. Ἄν $g(x)$ εἶναι διαιρέτης τοῦ $f(x)$, τότε τό $g(x)$ εἶναι διαιρέτης καί τοῦ γινομένου τοῦ $f(x)$ μέ κάθε πολυώνυμο $\varphi(x)$.

   Ἀπό τίς 2 καί 3 ἔχουμε τήν ἀκόλουθη ἰδιότητα.
4. Ἄν τό πολυώνυμο $g(x)$ εἶναι διαιρέτης καθενός ἀπό τά πολυώνυμα $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\ldots, f_\kappa(x)$, τότε τό $g(x)$ εἶναι ἐπίσης διαιρέτης τοῦ πολυωνύμου

   $$f_1(x)\ \varphi_1(x)+f_2(x)\cdot\varphi_2(x)+\ldots+f_\kappa(x)\cdot\varphi_\kappa(x),$$

   ὅπου $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_\kappa(x)$ εἶναι τυχόντα πολυώνυμα.
5. Κάθε πολυώνυμο $f(x)$ διαιρεῖται μέ κάθε πολυώνυμο μηδενικοῦ βαθμοῦ.

   Ἀπόδειξη: Ἄν $f(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1x+\alpha_0$ καί $g(x)=\kappa\neq \mathbf{0}$ (δηλ. μηδενικοῦ βαθμοῦ πολυώνυμο), τότε θά εἶναι

   $$f(x)=\kappa\cdot\left(\frac{\alpha_\nu}{\kappa}x^\nu+\frac{\alpha_{\nu-1}}{\kappa}.x^{\nu-1}+\ldots+\frac{\alpha_1}{\kappa}x+\frac{\alpha_0}{\kappa}\right)$$
6. Ἄν τό $g(x)$ εἶναι διαιρέτης τοῦ $f(x)$, τότε τό $\kappa\cdot g(x)$ (μέ κ τυχόντα μή μηδενικό ἀριθμό) εἶναι ἐπίσης διαιρέτης τοῦ $f(x)$.

   Ἀπόδειξη: Ἀφοῦ $f(x)=g(x)\,\pi(x)$, τότε

   $$f(x)=\kappa\cdot\frac{1}{\kappa}\cdot g(x)\,\pi(x)\Leftrightarrow f(x)=(\kappa g(x))\cdot(\kappa^{-1}\pi(x)).$$
7. Τά μοναδικά πολυώνυμα, τά ὁποῖα εἶναι διαιρέτες τοῦ $f(x)\neq\mathbf{0}$ καί ἔχουν τόν ἴδιο βαθμό μέ αὐτό, εἶναι τά $\kappa\cdot f(x)$, μέ $\kappa\neq 0$.

Ἀπόδειξη: α) Εἶναι $f(x)=\kappa\cdot\kappa^{-1}f(x)\Leftrightarrow f(x)=(\kappa f(x))\cdot\kappa^{-1}$, δηλαδή τό $\kappa f(x)$ εἶναι διαιρέτης τοῦ $f(x)$. β) Ἄν $g(x)$ εἶναι διαιρέτης τοῦ $f(x)$ καί $g(x)$ ἔχει τόν ἴδιο βαθμό μέ τό $f(x)$, τότε τό πηλίκο τῆς διαιρέσεως τοῦ $f(x)$ μέ τό $g(x)$ πρέπει νά εἶναι μηδενικοῦ βαθμοῦ πολυώνυμο, δηλαδή $f(x)=g(x)\cdot\lambda$, $\lambda\neq 0$. Ἀπό τήν τελευταία σχέση ἔχουμε $g(x)=\lambda^{-1}f(x)=\kappa f(x)$, $(\kappa=\lambda^{-1}\neq 0)$.

8. **Ἂν** τό g(x) εἶναι διαιρέτης τοῦ f(x) καί τό f(x) εἶναι διαιρέτης τοῦ g(x), τότε θά **εἶναι g(x)=κf(x), κ ≠ 0,** καί **θά λέμε ὅτι τά πολυώνυμα f(x) καί g(x) διαφέρουν κατά πολλαπλασιαστική σταθερά.**

Σημείωση: Ἀπό ὅλα τά πολυώνυμα κf(x), κ≠0 πού διαιροῦν τό f(x), παίρνουμε πολλές φορές ὡς **«ἀντιπρόσωπο»** ἐκεῖνο πού ἔχει συντελεστή τοῦ μεγιστοβάθμιου ὅρου τή μονάδα. Π.χ. ἄν $f(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0$, $\alpha_\nu\neq 0$, τότε μποροῦμε νά πάρουμε ὡς ἀντιπρόσωπο ὅλων τῶν κf(x), κ≠0, τό πολυώνυμο

$$g(x)=\frac{1}{\alpha_\nu}f(x)=x^\nu+\frac{\alpha_{\nu-1}}{\alpha_\nu}x^{\nu-1}+\ldots+\frac{\alpha_1}{\alpha_\nu}x+\frac{\alpha_0}{\alpha_\nu}.$$

Ἐπειδή ἡ σχέση τῆς διαιρετότητας δύο πολυωνύμων δέ μεταβάλλεται ἄν τό ἕνα ἀπό αὐτά (ἤ καί τά δύο) ἀντικατασταθεῖ ἀπό κάποιο ἄλλο, πού διαφέρει ἀπό αὐτό κατά πολλαπλασιαστική σταθερά, στά ἑπόμενα, ὅταν γράφουμε $\delta(x) \mid f(x)$ θά ἐννοοῦμε καί ὅλους τούς ἄλλους διαιρέτες τοῦ f(x) τῆς μορφῆς κ·δ(x) μέ κ≠0.

Ἔτσι, μέ τά $1 \mid f(x)$ καί $f(x) \mid f(x)$ μέ $f(x) \neq \mathbf{0}$ ἐννοοῦμε καί $\kappa \mid f(x)$, κ ≠ 0 καί $\kappa f(x) \mid f(x)$, κ ≠ 0.

Τά κ καί κ·f(x) μέ κ ≠ 0 ὀνομάζονται **προφανεῖς διαιρέτες τοῦ f(x).** Κάθε ἄλλος διαιρέτης τοῦ f(x) ὀνομάζεται **γνήσιος διαιρέτης** τοῦ f(x).

Ἂν ἕνα **μή σταθερό** πολυώνυμο f(x) ἔχει μόνο προφανεῖς διαιρέτες, τότε ὀνομάζεται **πρῶτο ἤ ἀνάγωγο πολυώνυμο.**

Τό νά εἶναι ἕνα πολυώνυμο f(x) ἀνάγωγο ἤ ὄχι ἐξαρτᾶται ἀπό τό σύνολο στό ὁποῖο τό ἐξετάζουμε. Π.χ. τό πολυώνυμο x^2+1 εἶναι ἀνάγωγο στό σύνολο $\mathbf{R}_{[x]}$, ἀλλά δέν εἶναι ἀνάγωγο στό $\mathbf{C}_{[x]}$, γιατί τά $(x\pm i)\in\mathbf{C}_{[x]}$ εἶναι γνήσιοι διαιρέτες του. Ἐπίσης τό x^2-2 εἶναι ἀνάγωγο στό σύνολο $\mathbf{Q}_{[x]}$, ἀλλά δέν εἶναι ἀνάγωγο στό $\mathbf{R}_{[x]}$, γιατί τά $(x\pm\sqrt{2})\in\mathbf{R}_{[x]}$ εἶναι γνήσιοι διαιρέτες του.

2.3. Ἡ ἀλγοριθμική διαίρεση.

Σέ μικρότερη τάξη μάθαμε νά ἐκτελοῦμε διαιρέσεις μεταξύ πολυωνύμων μέ πραγματικούς συντελεστές. Οἱ διαιρέσεις αὐτές μποροῦν νά ἐκτελεστοῦν καί μέ πολυώνυμα τοῦ $\mathbf{C}_{[x]}$ μέ τόν ἴδιο ἀκριβῶς τρόπο. Ἐδῶ θά ἀποδείξουμε τό ἀκόλουθο θεώρημα, πού εἶναι γνωστό ὡς **θεώρημα τῆς ἀλγοριθμικῆς ἤ Εὐκλείδειας διαιρέσεως.**

Θεώρημα: Ἂν f(x) καί g(x) εἶναι δύο πολυώνυμα τοῦ $C_{[x]}$ μέ g(x) ≠0, τότε ὑπάρχει ἕνα μοναδικό ζεῦγος πολυωνύμων π(x) καί υ(x) τοῦ $C_{[x]}$,μέ υ(x)=0 ἤ βαθμ.υ(x) <βαθμ. g(x), τέτοιο ὥστε

$$\mathbf{f(x)=g(x)\,\pi(x)+\upsilon(x)} \qquad (1)$$

Ἀπόδειξη: Θά ἀποδείξουμε πρῶτα ὅτι *ὑπάρχουν δύο πολυώνυμα π(x) καί υ(x) πού ἱκανοποιοῦν τό θεώρημα.*

Ἂν f(x) = **0**, τότε τά πολυώνυμα π(x) = **0** καί υ(x) = **0**, ἱκανοποιοῦν τό θεώρημα.

Ἂς ὑποθέσουμε τώρα ὅτι:

$$f(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1x+\alpha_0,\ \alpha_\nu\neq0 \quad \text{καί}$$
$$g(x)=\beta_\mu x^\mu+\beta_{\mu-1}x^{\mu-1}+\ldots+\beta_1x+\beta_0,\ \beta_\mu\neq0.$$

Τότε:

Ἄν $\nu<\mu$, τότε τά πολυώνυμα $\pi(x)=0$ καί $\upsilon(x)=f(x)$, ἱκανοποιοῦν τό θεώρημα.

Ἄν $\nu\geq\mu$, τότε θέτοντας

$$f(x)-\frac{\alpha_\nu}{\beta_\mu}x^{\nu-\mu}\cdot g(x)=\upsilon_1(x) \tag{B1}$$

παίρνουμε ἕνα πολυώνυμο $\upsilon_1(x)$ μέ τήν ἰδιότητα $\upsilon_1(x)=\mathbf{0}$ ἤ βαθμ. $\upsilon_1(x)=\nu_1<\nu$. Ἄν τώρα εἶναι $\upsilon_1(x)=\mathbf{0}$ ἤ $\nu_1<\mu$, τότε τά πολυώνυμα

$$\pi_1(x)=\frac{\alpha_\nu}{\beta_\mu}x^{\nu-\mu} \quad \text{καί} \quad \upsilon_1(x)$$

ἱκανοποιοῦν τό θεώρημα. Ἄν ὅμως εἶναι $\nu_1\geq\mu$ καί κ_1 εἶναι ὁ συντελεστής τοῦ μεγιστοβάθμιου ὅρου τοῦ $\upsilon_1(x)$, τότε θέτοντας

$$\upsilon_1(x)-\frac{\kappa_1}{\beta_\mu}x^{\nu_1-\mu}\cdot g(x)=\upsilon_2(x) \tag{B2}$$

παίρνουμε ἕνα πολυώνυμο $\upsilon_2(x)$ μέ τήν ἰδιότητα $\upsilon_2(x)=\mathbf{0}$ἤ βαθμ. $\upsilon_2(x)=\nu_2<\nu_1$. Ἄν λοιπόν εἶναι $\upsilon_2(x)=\mathbf{0}$ ἤ $\nu_2<\mu$, τότε τά πολυώνυμα

$$\pi_2(x)=\frac{\alpha_\nu}{\beta_\mu}x^{\nu-\mu}+\frac{\kappa_1}{\beta_\mu}x^{\nu_1-\mu} \quad \text{καί} \quad \upsilon_2(x)$$

ἱκανοποιοῦν τό θεώρημα, ἐνῶ ἄν εἶναι $\nu_2\geq\mu$ καί κ_2 ὁ συντελεστής τοῦ μεγιστοβάθμιου ὅρου τοῦ $\upsilon_2(x)$, τότε θέτουμε

$$\upsilon_2(x)-\frac{\kappa_2}{\beta_\mu}x^{\nu_2-\mu}\cdot g(x)=\upsilon_3(x) \tag{B3}$$

καί συνεχίζουμε τήν ἴδια διαδικασία.

Ἐπειδή οἱ βαθμοί $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \ldots$ τῶν πολυωνύμων $\upsilon_1(x), \upsilon_2(x), \upsilon_3(x), \ldots$ ἐλαττώνονται διαρκῶς (ἐκτός ἄν συμβεῖ $\upsilon_\rho(x)=\mathbf{0}$, ὁπότε τελειώνει ἐκεῖ ἡ διαδικασία), δηλαδή ἐπειδή εἶναι $\nu>\nu_1>\nu_2>\nu_3>\ldots$, θά φτάσουμε μετά ἀπό πεπερασμένο πλῆθος βημάτων $(B_1, B_2, \ldots, B_\lambda)$, σέ ἕνα πολυώνυμο $\upsilon_\lambda(x)$, πού ὁρίζεται ἀπό τήν ἰσότητα

$$\upsilon_{\lambda-1}(x)-\frac{\kappa_{\lambda-1}}{\beta_\mu}x^{\nu_{\lambda-1}-\mu}\cdot g(x)=\upsilon_\lambda(x) \tag{Bλ}$$

γιά τό ὁποῖο θά εἶναι $\upsilon_\lambda(x)=\mathbf{0}$ ἤ βαθμ$\cdot\upsilon_\lambda(x)<\mu$. Προσθέτοντας τότε τίς ἰσότητες (B1), (B2),...,(Bλ) κατά μέλη παίρνουμε τήν ἰσότητα

$$f(x)-\left[\frac{\alpha_\nu}{\beta_\mu}x^{\nu-\mu}+\frac{\kappa_1}{\beta_\mu}x^{\nu_1-\mu}+\ldots+\frac{\kappa_{\lambda-1}}{\beta_\mu}x^{\nu_{\lambda-1}-\mu}\right]g(x)=\upsilon_\lambda(x),$$

δηλαδή τήν $f(x)=\left[\frac{\alpha_\nu}{\beta_\mu}x^{\nu-\mu}+\frac{\kappa_1}{\beta_\mu}x^{\nu_1-\mu}+\ldots+\frac{\kappa_{\lambda-1}}{\beta_\mu}x^{\nu_{\lambda-1}-\mu}\right]\cdot g(x)+\upsilon_\lambda(x)$

πού φανερώνει ὅτι τά πολυώνυμα

$$\pi(x)=\frac{\alpha_\nu}{\beta_\mu}x^{\nu-\mu}+\frac{\kappa_1}{\beta_\mu}x^{\nu_1-\mu}+\ldots+\frac{\kappa_{\lambda-1}}{\beta_\mu}x^{\nu_{\lambda-1}-\mu} \quad \text{καί} \quad \upsilon(x)=\upsilon_\lambda(x)$$

ἱκανοποιοῦν τό θεώρημα.

Θά δείξουμε ὅτι *τά πολυώνυμα π(x) καί υ(x) εἶναι μοναδικά.*

Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι ἐκτός ἀπό τά π(x) καί υ(x), ὑπάρχουν καί τά πολυώνυμα π΄(x) καί υ΄(x) πού ἱκανοποιοῦν τό θεώρημα, δηλαδή ὅτι εἶναι:

$$f(x)=g(x)\cdot\pi'(x)+\upsilon'(x) \qquad (1')$$

μέ $\upsilon'(x)=\mathbf{0}$ ἤ βαθμ $\upsilon'(x)<$ βαθμ $g(x)$. Τότε θά ἔχουμε:

$$g(x)\cdot\pi(x)+\upsilon(x)=g(x)\,\pi'(x)+\upsilon'(x) \quad \text{ἤ}$$

$$g(x)\,[\pi(x)-\pi'(x)]=\upsilon'(x)-\upsilon(x) \qquad (2)$$

Ἡ (2) ἰσχύει μόνο στήν περίπτωση πού εἶναι $\pi(x)-\pi'(x)=\mathbf{0}$, ὁπότε θά εἶναι καί $\upsilon'(x)-\upsilon(x)=\mathbf{0}$. Γιατί, ἄν εἶναι $\pi(x)-\pi'(x)\neq\mathbf{0}$, τότε θά εἶναι

$$\text{βαθμ}\, g(x)\,[\pi(x)-\pi'(x)]=\text{βαθμ}\,(\upsilon'(x)-\upsilon(x))\geq\text{βαθμ}\, g(x)$$

ἐνῶ εἶναι συγχρόνως

$$\text{βαθμ}\,(\upsilon(x)-\upsilon'(x))<\text{βαθμ}\, g(x)$$

πράγμα ἄτοπο.

Ἄρα ἀποδείχτηκε ὅτι

$$\pi'(x)=\pi(x) \qquad \text{καί} \qquad \upsilon'(x)=\upsilon(x)$$

δηλαδή ὅτι τά π(x) καί υ(x) εἶναι μοναδικά.

Ἡ πορεία μέ τήν ὁποία ἀποδείχτηκε τό θεώρημα, μᾶς δείχνει καί τόν τρόπο μέ τόν ὁποῖο βρίσκουμε τά πολυώνυμα π(x) καί υ(x). Ἡ εὕρεση τῶν π(x) καί υ(x) ὀνομάζεται **ἀλγοριθμική ἤ Εὐκλείδεια διαίρεση τοῦ f(x) μέ τό g(x).** Τά πολυώνυμα **f(x), g(x), π(x)** καί **υ(x)** ὀνομάζονται ἀντίστοιχα **διαιρετέος, διαιρέτης, πηλίκο** καί **ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως τοῦ f(x) μέ τό g(x). Ἡ ἰσότητα (1)** μέ τίς προϋποθέσεις τοῦ θεωρήματος **ὀνομάζεται ἰσότητα τῆς ἀλγοριθμικῆς διαιρέσεως.**

Παρατηρήσεις:

1. Ἀπό τήν ἀπόδειξη τοῦ θεωρήματος, συμπεραίνουμε ὅτι οἱ συντελεστές τῶν πολυωνύμων π(x) καί υ(x) εἶναι πραγματικοί, ὅταν τά πολυώνυμα f(x) καί g(x) ἀνήκουν στό $\mathbf{R}_{[x]}$.
2. Εἶναι φανερό ὅτι, ὅταν εἶναι βαθμ $f(x)\geq$ βαθμ $g(x)$, τότε ἰσχύει:

$$\text{βαθμ}\,\pi(x)=\text{βαθμ}\, f(x)-\text{βαθμ}\, g(x)$$

3. Ἄν εἶναι $\upsilon(x)=\mathbf{0}$, τότε ἔχουμε τήν **τέλεια διαίρεση** πού ἀναφέραμε προηγουμένως.

2.4. Μέγιστος κοινός διαιρέτης πολυωνύμων τοῦ $C_{[x]}$.

Ἐπειδή $x^2-5x+6=(x-2)\cdot(x-3)$ καί $x^2-4=(x-2)(x+2)$, τό πολυώνυμο $x-2$ διαιρεῖ καί τά δύο πολυώνυμα x^2-5x+6 καί x^2-4. Γενικά, **ἄν ἕνα πολυώνυμο g(x) διαιρεῖ δύο ἤ περισσότερα πολυώνυμα, τότε ὀνομάζεται κοινός διαιρέτης τῶν πολυωνύμων αὐτῶν.** Εἶναι φανερό ὅτι στούς κοινούς διαιρέτες δύο ἤ περισσότερων πολυωνύμων περιλαμβάνονται καί ὅλα τά πολυώνυμα μηδενικοῦ βαθμοῦ, δηλ. ὅλοι οἱ μιγαδικοί ἀριθμοί ἐκτός ἀπό τό μηδέν. Ἄν τά πολυώνυμα $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_\nu(x)$ δέν ἔχουν ἄλλους κοινούς διαιρέτες, ἐκτός ἀπό τά πολυώνυμα μηδενικοῦ βαθμοῦ, τότε θά **ὀνομάζονται πρῶτα μεταξύ τους.**

Εἶναι φανερό ἐπίσης ὅτι **κοινοί διαιρέτες τοῦ μηδενικοῦ πολυωνύμου καί ἑνός πολυωνύμου f(x) εἶναι ὅλοι οἱ διαιρέτες τοῦ f(x) καί,** σύμφωνα μέ τήν παρατήρηση 1 τῆς 2.1., **κανένας διαιρέτης ἑνός μή μηδενικοῦ πολυωνύμου δέν ἔχει βαθμό μεγαλύτερο ἀπό τό βαθμό αὐτοῦ τοῦ πολυωνύμου.**

Θά δείξουμε τώρα, μέ τήν πρόταση πού ἀκολουθεῖ, ὅτι *ἄν δοθοῦν δύο ἤ περισσότερα πολυώνυμα, ἀπό τά ὁποῖα τουλάχιστον τό ἕνα δέν εἶναι τό μηδενικό πολυώνυμο, μποροῦμε πάντοτε νά προσδιορίσουμε ἕνα πολυώνυμο πού τό σύνολο τῶν διαιρετῶν του ταυτίζεται μέ τό σύνολο τῶν κοινῶν διαιρετῶν τῶν πολυωνύμων, πού ἔχουν δοθεῖ.*

Ἡ πρόταση ἀναφέρεται σέ δύο μή μηδενικά πολυώνυμα, γιατί ἄν τό ἕνα εἶναι τό μηδενικό, τότε, σύμφωνα μέ ὅσα εἴπαμε παραπάνω, τό ἄλλο πολυώνυμο εἶναι τό ζητούμενο.

Πρόταση: Ἄν f(x) καί g(x) εἶναι δύο μή μηδενικά πολυώνυμα τοῦ $C_{[x]}$, μέ βαθμ. f(x) $\geq$ βαθμ. g(x) καί δ(x) εἶναι ἕνας κοινός διαιρέτης τους, τότε τό δ(x) θά εἶναι κοινός διαιρέτης καί τῶν πολυωνύμων g(x) καί υ(x), ὅπου υ(x) εἶναι τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως τοῦ f(x) μέ τό g(x), καί ἀντίστροφα.

Ἀπόδειξη. Ἄν π(x) καί υ(x) εἶναι τό πηλίκο καί τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως τοῦ f(x) μέ τό g(x), τότε θά ἔχουμε

$$f(x)=g(x)\,\pi(x)+\upsilon(x) \quad \text{ἤ} \quad f(x)-g(x)\,\pi(x)=\upsilon(x)$$

Ἀλλά τό δ(x) εἶναι διαιρέτης τοῦ πρώτου μέλους τῆς τελευταίας ἰσότητας, ὁπότε θά εἶναι καί διαιρέτης τοῦ υ(x). Ἄρα τό δ(x) εἶναι κοινός διαιρέτης τῶν πολυωνύμων g(x) καί υ(x).

Ἀντίστροφα: Ἄν εἶναι $\delta(x) \mid g(x)$ καί $\delta(x) \mid \upsilon(x)$, τότε θά εἶναι καί

$$\delta(x) \mid [g(x)\,\pi(x)+\upsilon(x)]=f(x),$$

δηλαδή τό δ(x) θά εἶναι κοινός διαιρέτης τῶν f(x) καί g(x).

Ἄρα *οἱ κοινοί διαιρέτες τῶν f(x) καί g(x) ταυτίζονται μέ τούς κοινούς διαιρέτες τῶν g(x) καί υ(x).*

Ἄν λοιπόν εἶναι $\upsilon(x)=\mathbf{0}$, τότε οἱ κοινοί διαιρέτες τῶν f(x) καί g(x) θά εἶναι οἱ διαιρέτες τοῦ $g(x)$. Ἄν ὅμως εἶναι $υ(x) \neq \mathbf{0}$, τότε οἱ κοινοί διαιρέτες τῶν $f(x)$ καί $g(x)$ θά εἶναι οἱ κοινοί διαιρέτες τῶν $υ(x)$ καί $υ_1(x)$, ὅπου $υ_1(x)$ τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως τοῦ $g(x)$ μέ τό $υ(x)$. Ἄν τώρα εἶναι $υ_1(x) = \mathbf{0}$, τότε οἱ κοινοί διαιρέτες τῶν $f(x)$ καί $g(x)$ θά εἶναι οἱ διαιρέτες τοῦ $υ(x)$, ἐνῶ ἄν εἶναι $υ_1(x) \neq \mathbf{0}$, συνεχίζουμε τήν ἴδια διαδικασία. Ἡ διαδικασία αὐτή, ἐπειδή εἶναι βαθμ $υ(x) >$ βαθμ $υ_1(x) > \ldots$, θά σταματήσει, ὅταν κάποιο ὑπόλοιπο, ἔστω τό $υ_λ(x)$, εἶναι τό μηδενικό πολυώνυμο. Τότε οἱ κοινοί διαιρέτες τῶν $f(x)$ καί $g(x)$ θά εἶναι οἱ διαιρέτες τοῦ $υ_{λ-1}(x)$.

Μποροῦμε τώρα γιά πολυώνυμα $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_ν(x)$, πού κανένα δέν εἶναι τό μηδενικό πολυώνυμο, νά προσδιορίσουμε ἕνα πολυώνυμο $δ(x)$, πού οἱ διαιρέτες του νά εἶναι οἱ κοινοί διαιρέτες τῶν $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_ν(x)$. Γι' αὐτό ἀρκεῖ νά ἐφαρμόσουμε τήν παραπάνω διαδικασία γιά τά $f_1(x)$ καί $f_2(x)$, μετά γιά τά $δ_1(x)$ καί $f_3(x)$, μετά γιά τά $δ_2(x)$ καί $f_4(x)$ κ.ο.κ., ὅπου τό $δ_1(x)$ ἔχει διαιρέτες τούς κοινούς διαιρέτες τῶν $f_1(x)$ καί $f_2(x)$, τό $δ_2(x)$ τούς κοινούς διαιρέτες τῶν $δ_1(x)$ καί $f_3(x)$ κ.τ.λ. (Ἄν μερικά ἀπό τά $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_ν(x)$ ἦταν ἴσα μέ τό μηδενικό πολυώνυμο, τότε αὐτά δέ μετέχουν στή διαδικασία καί γι' αὐτό πήραμε μή μηδενικά).

Τό πολυώνυμο $δ(x)$, πού προσδιορίζουμε μέ τήν παραπάνω διαδικασία, **μαζί μέ τά διαφέροντα ἀπό αὐτό κατά πολλαπλασιαστική σταθερά,** ὅπως εἶναι φανερό, **ἔχει τό μεγαλύτερο βαθμό ἀπό ὅλους τούς κοινούς διαιρέτες τῶν $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_ν(x)$ καί συγχρόνως διαιρεῖται μέ κάθε ἄλλον κοινό τους διαιρέτη,** γι' αὐτό **καί ὀνομάζεται μέγιστος κοινός διαιρέτης τῶν $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_ν(x)$.**

Τό πολυώνυμο πού εἶναι **«ἀντιπρόσωπος» τῶν πολυωνύμων $κδ(x)$, $κ \neq 0$ εἶναι** ἑπομένως **μοναδικό καί** λέμε ὅτι **εἶναι ὁ μέγιστος κοινός διαιρέτης (Μ.Κ.Δ.) τῶν πολυωνύμων $f_1(x), f_2(x), \ldots f_ν(x)$ καί τόν συμβολίζουμε μέ $< f_1(x), f_2(x), \ldots, f_ν(x) >$.**

Ἐπειδή, ὅταν βροῦμε ἕνα Μ.Κ.Δ. τῶν $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_ν(x)$, ἔχουμε συγχρόνως προσδιορίσει καί τόν ἀντιπρόσωπό τους πού εἶναι ὁ Μ.Κ.Δ. τους, μέ τό σύμβολο $<f_1(x), f_2(x), \ldots, f_ν(x)>$ θά συμβολίζουμε τόν Μ.Κ.Δ τους, ἀλλά καί κάθε ἄλλο πολυώνυμο πού διαφέρει ἀπό αὐτόν κατά πολλαπλασιαστική σταθερά. Ἔτσι ἄν τά $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_ν(x)$ εἶναι πρῶτα μεταξύ τους, θά ἔχουν Μ.Κ.Δ. κάθε μή μηδενικό σταθερό πολυώνυμο καί γράφουμε $<f_1(x), f_2(x), \ldots, f_ν(x)> = κ \neq \mathbf{0}$, ἀλλά μποροῦμε νά γράφουμε καί $<f_1(x), f_2(x), \ldots, f_ν(x)> = 1$.

Ἡ διαδικασία πού ἀναπτύξαμε προηγουμένως, μέ τή βοήθεια τῆς προτάσεως πού ἀποδείξαμε, ὁδηγεῖ στόν προσδιορισμό τοῦ Μ.Κ.Δ δύο μή μηδενικῶν πολυωνύμων καί ὀνομάζεται **Εὐκλείδειος ἀλγόριθμος,** ἐπειδή εἶναι ἴδια μέ τόν Εὐκλείδειο ἀλγόριθμο προσδιορισμοῦ τοῦ Μ.Κ.Δ. δύο ἀκέραιων ἀριθμῶν.

Γιά τά πολυώνυμα $2x^2-2$ καί $8x-8$, μέ τόν Εὐκλείδειο ἀλγόριθμο ἔχουμε

$$<2x^2-2, 8x-8> = <8x-8, \mathbf{0}> = 8x-8$$

Τό πολυώνυμο $8x-8$ εἶναι λοιπόν Μ.Κ.Δ. τῶν πολυωνύμων $2x^2-2$ καί $8x-8$, ὅπως Μ.Κ.Δ τους εἶναι καί τό πολυώνυμο $\frac{1}{4}(8x-8) = 2x-2 = 2(x-1)$ πού παίρναμε σέ προηγούμενες τάξεις, άλλά καί κάθε πολυώνυμο $\kappa\cdot(8x-8)$, $\kappa \neq 0$

Όμως ό Μ.Κ.Δ. τους είναι τό πολυώνυμο $\frac{1}{8}(8x-8) = x-1$, πού έχει συντελεστή τοῦ μεγιστοβάθμιου ὅρου του τή μονάδα καί είναι ό **«ἀντιπρόσωπος»** τῶν $\kappa(8x-8)$, $\kappa \neq 0$.

2.5. Ἐφαρμογές.

1. Ἄν $\varphi(x) \neq 0$ καί $g(x) | f(x)$, τότε θά εἶναι $g(x).\varphi(x) \mid f(x).\varphi(x)$ καί ἀντίστροφα.

Ἀπόδειξη: Εἶναι $g(x) \mid f(x)$, δηλ. $f(x)=g(x)\,\pi(x)$. Ἀλλά $\varphi(x) \neq \mathbf{0}$, ἄρα

$$f(x) = g(x)\,\pi(x) \Leftrightarrow f(x).\varphi(x) = g(x)\pi(x).\varphi(x)$$

Οἱ ἰσότητες αὐτές ἀποδεικνύουν τό ζητούμενο.

2. Ἄν $\delta(x)$ εἶναι Μ.Κ.Δ. τῶν πολυωνύμων $f(x)$ καί $g(x)$, τότε ὑπάρχουν δύο πολυώνυμα $A(x)$ καί $B(x)$, ὥστε νά ἰσχύει:

$$\delta(x)=A(x)f(x)+B(x)g(x) \tag{1}$$

Ἀπόδειξη: Ἀφοῦ $\delta(x)$ εἶναι Μ.Κ.Δ. τῶν $f(x)$ καί $g(x)$, τότε θά εἶναι $f(x) \neq \mathbf{0}$ εἴτε $g(x) \neq \mathbf{0}$. Ἄς εἶναι $f(x) \neq \mathbf{0}$. Τότε:

i) Ἄν $g(x)=\mathbf{0}$, θά εἶναι $<f(x),g(x)> = f(x)$ καί ἄρα θά ὑπάρχει $\kappa \in \mathbf{C}$, ὥστε νά εἶναι $\delta(x)=\kappa.f(x)$. Ἄρα τό πολυώνυμο $A(x)=\kappa$ μαζί μέ ὁποιοδήποτε $B(x) \in \mathbf{C}_{[x]}$ θά ἱκανοποιοῦν τήν (1).

ii) Ἄν $g(x) \neq \mathbf{0}$, τότε δέ βλάπτεται ἡ γενικότητα, ἄν ὑποθέσουμε ἀκόμα ὅτι βαθμ. $f(x) \geq$ $\geq$ βαθμ. $g(x)$. Θά εἶναι συνεπῶς

$$<f(x), g(x)> = <g(x), \upsilon_1(x)>$$

ὅπου $\upsilon_1(x)$ τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως τοῦ $f(x)$ μέ τό $g(x)$.

Ἄν τώρα εἶναι $\upsilon_1(x)=\mathbf{0}$, τότε τό ζεῦγος πολυωνύμων $A(x)=\mathbf{0}$ καί $B(x)=\kappa$, ὅπου $\kappa \in \mathbf{C}$ μέ $\kappa g(x)=\delta(x)$ ἱκανοποιεῖ τήν (1), ἀφοῦ τό $g(x)$ θά εἶναι ἐπίσης Μ.Κ.Δ. τῶν πολυωνύμων $f(x)$ καί $g(x)$. Ἄν ὅμως εἶναι $\upsilon_1(x) \neq \mathbf{0}$, τότε τό $\upsilon_1(x)$ μπορεῖ νά εἶναι διαιρέτης τοῦ $g(x)$ ὁπότε θά εἶναι καί Μ.Κ.Δ. τῶν $f(x)$ καί $g(x)$ ἤ μπορεῖ καί νά μήν εἶναι διαιρέτης του. Στήν περίπτωση πού $\upsilon_1(x) \mid g(x)$, ἐπειδή εἶναι

$$\upsilon_1(x) = f(x)-\pi_1(x)g(x) \quad \text{καί}$$

ὑπάρχει κατάλληλο $\kappa \in \mathbf{C}$, ὥστε νά εἶναι $\delta(x)=\kappa\cdot\upsilon_1(x)$, τά πολυώνυμα

$$A(x)=\kappa \quad \text{καί} \quad B(x)=-\kappa\cdot\pi_1(x) \text{ θά ἱκανοποιοῦν τήν (1).}$$

Στήν περίπτωση πού τό $\upsilon_1(x)$ δέν εἶναι διαιρέτης τοῦ $g(x)$, ἐπειδή

$$<g(x), \upsilon_1(x)> = <\upsilon_1(x), \upsilon_2(x)> \quad \text{θά ἔχουμε}$$

$$\upsilon_2(x)=g(x)-\upsilon_1(x)\cdot\pi_2(x) \Leftrightarrow \upsilon_2(x)=g(x)-[f(x)-g(x)\pi_1(x)]\pi_2(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \upsilon_2(x)=(-\pi_2(x))f(x)+[1+\pi_1(x)\pi_2(x)]g(x).$$

Ἔτσι ἄν $\upsilon_2(x)=<f(x), g(x)>$, τότε θά ὑπάρχει $\kappa \in \mathbf{C}$ μέ $\delta(x)=\kappa\cdot\upsilon_2(x)$, ὁπότε τά πολυώνυμα $A(x)=\kappa(-\pi_2(x))$ καί $B(x)=\kappa[1+\pi_1(x)\pi_2(x)]$ θά ἱκανοποιοῦν τήν (1), ἀλλοιῶς θά συνεχίσουμε τή διαδικασία ὥς τό κατάλληλο $\upsilon_j(x)$, ὥστε νά εἶναι $\upsilon_j(x)=<f(x),g(x)>$ καί θά προσδιορίσουμε τότε τά $A(x)$ καί $B(x)$.

3. Ἄν ἕνα πολυώνυμο $f(x)$ εἶναι πρῶτο πρός τά πολυώνυμα $\varphi(x)$ καί $\psi(x)$, τότε θά εἶναι πρῶτο καί πρός τό γινόμενό τους.

Ἀπόδειξη: Ἀφοῦ $<f(x), \varphi(x)>=1$, σύμφωνα μέ τήν προηγούμενη ἐφαρμογή, θά ὑπάρχουν πολυώνυμα $A(x)$ καί $B(x)$ τέτοια, ὥστε:

$$f(x)\cdot A(x)+\varphi(x)B(x)=1 \Leftrightarrow f(x)\cdot[A(x)\cdot\psi(x)]+[\varphi(x)\cdot\psi(x)]B(x)=\psi(x).$$

Ἄν τά πολυώνυμα $f(x)$ καί $\varphi(x)\cdot\psi(x)$ εἶχαν καί κοινό διαιρέτη ὄχι μηδενικοῦ βαθμοῦ, τότε αὐτός θά ἦταν καί διαιρέτης τοῦ $\psi(x)$, τό ὁποῖο εἶναι ἄτοπο, γιατί $<f(x), \psi(x)>=1$. Ἄρα τό $f(x)$ εἶναι πρῶτο πρός τό $\varphi(x)\cdot\psi(x)$.

4. **Ἄν τό $\varphi(x)$ διαιρεῖ τό γινόμενο τῶν $f(x)$ καί $g(x)$ καί εἶναι πρῶτο πρός τό $f(x)$, τότε θά διαιρεῖ τό $g(x)$.**

Ἀπόδειξη: Ἄν $g(x)=0$, τότε τό $\varphi(x)$ εἶναι διαιρέτης τοῦ $g(x)$. Ἔστω τώρα $g(x)\neq 0$, τότε ὅπως καί προηγουμένως ἔχουμε

$$f(x)\cdot A(x)+\varphi(x)\cdot B(x)=1 \Leftrightarrow [f(x)g(x)]\cdot A(x)+\varphi(x)\cdot[B(x)\cdot g(x)]=g(x).$$

Τό ἀριστερό μέλος διαιρεῖται μέ τό $\varphi(x)$, ἄρα $\varphi(x) \mid g(x)$.

5. **Ἄν δύο πολυώνυμα $\varphi(x)$ καί $\psi(x)$ εἶναι πρῶτα μεταξύ τους καί καθένα τους διαιρεῖ ἕνα τρίτο πολυώνυμο $f(x)$, τότε καί τό γινόμενό τους θά διαιρεῖ τό πολυώνυμο $f(x)$.**

Ἀπόδειξη: Εἶναι $f(x)=\varphi(x)\pi(x)$ καί ἐπειδή $\psi(x) \mid f(x)$, συμπεραίνουμε ὅτι $\psi(x)\mid\varphi(x)\cdot\pi(x)$, πού σημαίνει ὅτι $\psi(x) \mid \pi(x)$, ἀφοῦ $\psi(x)$ πρῶτο πρός τό $\varphi(x)$. Ἔτσι $\pi(x)=\psi(x)\cdot\pi_1(x)$, ὁπότε $f(x)=[\varphi(x)\cdot\psi(x)]\pi_1(x)$, πού ἀποδεικνύει τήν πρόταση.

2.6. Ἀσκήσεις

1. Ἄν $g_1(x) \mid f_1(x)$ καί $g_2(x) \mid f_2(x)$, δεῖξτε ὅτι $g_1(x)\cdot g_2(x) \mid f_1(x)\cdot f_2(x)$.
2. Ἄν τό $g(x)$ διαιρεῖ ἕνα ἀπό τά πολυώνυμα $f_1(x), f_2(x),\ldots,f_\nu(x)$, δεῖξτε ὅτι θά διαιρεῖ καί τό γινόμενό τους.
3. Ἄν τό $g(x)$ διαιρεῖ τό $f(x)$, τότε θά διαιρεῖ καί τό $[f(x)]^\nu$, $\nu\in N$.
4. Ἄν τό $g(x)$ διαιρεῖ τό $f_1(x)+f_2(x)$ καί ἕνα ἀπό τά $f_1(x)$, $f_2(x)$, δεῖξτε ὅτι θά διαιρεῖ καί τό ἄλλο.
5. Βρεῖτε τό Μ.Κ.Δ. τῶν πολυωνύμων $f(x)=2x^4+3x^3+x^2-3x-3$ καί $g(x)=x^3-1$.
6. Νά ἐκτελεστεῖ ἡ διαίρεση τοῦ πολυωνύμου $f(x)=x^4+3x^3-7x^2+\kappa x+\lambda$ μέ τό $g(x)=x^2-3x+5$ καί ἔπειτα νά ὁριστοῦν οἱ πραγματικοί ἀριθμοί κ καί λ, ὥστε ἡ διαίρεση αὐτή νά εἶναι τέλεια.
7. Νά ἐκτελεστεῖ ἡ διαίρεση τοῦ $f(x)=x^4+1$ μέ τό $g(x)=x^2-\sqrt{2}\,x+\kappa$ καί στή συνέχεια νά προσδιοριστεῖ ἡ πραγματική τιμή τοῦ κ, ὥστε ἡ διαίρεση νά εἶναι τέλεια.
8. Νά ὁριστεῖ ὁ πραγματικός ἀριθμός $\lambda\neq 0$, ὥστε τό πολυώνυμο $f(x)=x^3-5x^2+\dfrac{6}{\lambda}$ νά διαιρεῖται μέ τό πολυώνυμο $\lambda x-1$.
9. Δεῖξτε ὅτι τό πολυώνυμο

$$f(x)=x^{\nu\alpha_{\nu-1}+\nu-1}+x^{\nu\alpha_{\nu-2}+\nu-2}+\ldots+x^{\nu\alpha_1+1}+1$$

διαιρεῖται μέ τό πολυώνυμο

$$\varphi(x)=x^{\nu-1}+x^{\nu-2}+\ldots+x+1,$$

ὅπου ν, $\alpha_{\nu-1}$, $\alpha_{\nu-2},\ldots,\alpha_1$ εἶναι φυσικοί ἀριθμοί.

10. Δεῖξτε ὅτι τό πολυώνυμο

$$f(x)=(x^{\rho-1}+\alpha x^{\rho-2}+\ldots+\alpha^{\rho-1})x^{(\rho+1)\nu+1}+\alpha^{(\rho+1)\nu+\rho}$$

διαιρεῖται μέ τό πολυώνυμο

$$g(x)=x^\rho+\alpha x^{\rho-1}+\ldots+\alpha^{\rho-1}x+\alpha^\rho,$$

ὅπου α εἶναι ἀκέραιος ἀριθμός καί ρ,ν φυσικοί ἀριθμοί.

2.7. Προτάσεις γιά τά ὑπόλοιπα τῶν διαιρέσεων τῶν πολυωνύμων τοῦ $C_{[x]}$.

Δίνουμε ἐδῶ δύο χρήσιμες προτάσεις, πού ἀναφέρονται στά ὑπόλοιπα τῶν διαιρέσεων πολυωνύμων τοῦ $C_{[x]}$.

Πρόταση 1. Ἄν $f_1(x)$, $f_2(x)$ καί $\delta(x)$ εἶναι πολυώνυμα τοῦ $C_{[x]}$ μέ $\delta(x)\neq 0$, τότε οἱ διαιρέσεις τῶν $f_1(x)$ καί $f_2(x)$ μέ τό $\delta(x)$ δίνουν τό ἴδιο ὑπόλοιπο, ὅταν καί μόνο ὅταν ἡ διαφορά $f_1(x)-f_2(x)$ εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ $\delta(x)$.

Ἡ ἀπόδειξη τῆς προτάσεως αὐτῆς εἶναι ὅμοια μέ τήν ἀπόδειξη τῆς προτάσεως 2 τῆς 1.3 τοῦ Κεφ. III.

Πρόταση 2. Ἄν ὁ διαιρετέος $f(x)$ καί ὁ διαιρέτης $\varphi(x)$ μιᾶς διαιρέσεως πολλαπλασιαστοῦν μέ τό ἴδιο μή μηδενικό πολυώνυμο $g(x)$, τότε τό πηλίκο τῆς διαιρέσεως παραμένει τό ἴδιο, ἐνῶ τό ὑπόλοιπο πολλαπλασιάζεται μέ τό $g(x)$.

Ἀπόδειξη: Ἔχουμε $f(x)=\varphi(x)\cdot\pi(x)+\upsilon(x)$, μέ $\upsilon(x)=\mathbf{0}$ ἤ βαθμ $\upsilon(x)<$ $<$ βαθμ $\varphi(x)$, ὁπότε $f(x)\cdot g(x)=[\varphi(x)\,\pi(x)]g(x)+\upsilon(x)\cdot g(x)\Leftrightarrow$ $f(x)\cdot g(x)=[\varphi(x)\cdot g(x)]\cdot\pi(x)+\upsilon(x)\cdot g(x)$, ὅπου $\upsilon(x)\cdot g(x)=\mathbf{0}$, ἄν $\upsilon(x)=\mathbf{0}$ ἤ βαθμ $[\upsilon(x)\cdot g(x)]=$ βαθμ $\upsilon(x)+$ βαθμ $g(x)<$ βαθμ $\varphi(x)+$ βαθμ $g(x)$, δηλ. βαθμ $[\upsilon(x)\cdot g(x)]<$ βαθμ $[\varphi(x)\cdot g(x)]$.

Ἄρα ἡ πρόταση ἀποδείχτηκε.

2.8. Ἐφαρμογές.

1. **Ἄν $\upsilon_1(x),\upsilon_2(x),\ldots,\upsilon_\nu(x)$ εἶναι τά ὑπόλοιπα τῶν διαιρέσεων τῶν $f_1(x),f_2(x),\ldots,f_\nu(x)$ μέ τό $\delta(x)$, $(\delta(x)\neq 0)$, ἀντιστοίχως, τότε τά ὑπόλοιπα τῶν διαιρέσεων τῶν $[f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_\nu(x)]$ καί $[\upsilon_1(x)+\upsilon_2(x)+\ldots+\upsilon_\nu(x)]$ μέ τό $\delta(x)$ εἶναι ἴσα.**

   Λύση: Ἄν $\pi_1(x),\pi_2(x)\ldots,\pi_\nu(x)$ εἶναι τά ἀντίστοιχα πηλίκα τῶν διαιρέσεων τῶν $f_1(x)$, $f_2(x),\ldots,f_\nu(x)$ μέ τό $\delta(x)$, τότε ἔχουμε:

   $$\begin{aligned} f_1(x)&=\delta(x)\,\pi_1(x)+\upsilon_1(x)\\ f_2(x)&=\delta(x)\pi_2(x)+\upsilon_2(x)\\ &\ldots\ldots\ldots\\ f_\nu(x)&=\delta(x)\pi_\nu(x)+\upsilon_\nu(x). \end{aligned}$$

   Προσθέτοντας κατά μέλη τίς ἰσότητες αὐτές παίρνουμε:

   $$f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_\nu(x)=\delta(x)[\pi_1(x)+\pi_2(x)+\ldots+\pi_\nu(x)]+[\upsilon_1(x)+\upsilon_2(x)+\ldots+\upsilon_\nu(x)]$$
   $$\Leftrightarrow[f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_\nu(x)]-[\upsilon_1(x)+\upsilon_2(x)+\ldots+\upsilon_\nu(x)]=\delta(x)[\pi_1(x)+\pi_2(x)+\ldots+\pi_\nu(x)]$$

   πού σημαίνει ὅτι τό $\delta(x)$ εἶναι διαιρέτης τοῦ πρώτου μέλους. Αὐτό, σύμφωνα μέ τήν πρόταση 1, ἀποδεικνύει τό ζητούμενο.

2. **Ἡ διαίρεση ἑνός πολυωνύμου $f(x)$ μέ τό πολυώνυμο x^2+x+1 δίνει ὑπόλοιπο $2x+1$, ἐνῶ μέ τό x^2+1 δίνει ὑπόλοιπο $x+2$. Νά βρεθεῖ τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως τοῦ $f(x)$ μέ τό γινόμενο $(x^2+x+1).(x^2+1)$.**

   Λύση: Ἄν $\pi(x)$ καί $\upsilon(x)$ εἶναι τό πηλίκο καί τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως τοῦ $f(x)$ μέ τό $[(x^2+x+1)\cdot(x^2+1)]$, τότε ἔχουμε

   $f(x)=(x^2+x+1)\cdot(x^2+1)\pi(x)+\upsilon(x)$ (1) ἤ $f(x)-\upsilon(x)=(x^2+x+1)\cdot(x^2+1)\pi(x)$,

   δηλαδή τά πολυώνυμα x^2+x+1 καί x^2+1 εἶναι διαιρέτες τοῦ πολυωνύμου $[f(x)-\upsilon(x)]$. Αὐτό πάλι σημαίνει (πρόταση 1) ὅτι οἱ διαιρέσεις τῶν $f(x)$ καί $\upsilon(x)$ μέ τό x^2+x+1 δίνουν τό ἴδιο ὑπόλοιπο. Τό ἴδιο συμβαίνει καί μέ τίς διαιρέσεις τῶν $f(x)$ καί $\upsilon(x)$ μέ τό x^2+1.

Ἔτσι ὅμως ἡ διαίρεση τοῦ $υ(x)$ μέ τό x^2+x+1 δίνει ὑπόλοιπο $2x+1$ καί ἡ διαίρεση τοῦ $υ(x)$ μέ τό x^2+1 δίνει ὑπόλοιπο $x+2$.
Ἀπό τήν (1) ὅμως ἔχουμε ὅτι τό $υ(x)$ εἶναι τό πολύ 3ου βαθμοῦ, δηλ.
$υ(x)=αx^3+βx^2+γx+δ$
ὁπότε θά ἰσχύουν οἱ σχέσεις:

$$αx^3+βx^2+γx+δ=(x^2+x+1)π_1(x)+2x+1$$
$$αx^3+βx^2+γx+δ=(x^2+1)π_2(x)+x+2$$

ὅπου $π_1(x)=αx+κ$ καί $π_2(x)=αx+λ$.
Ἀπό τίς σχέσεις αὐτές παίρνουμε τό σύστημα

$$α+κ=β,\ α+κ+2=γ,\ κ+1=δ,\ β=λ,\ α+1=γ,\ λ+2=δ,$$

πού ἡ ἐπίλυσή του δίνει $α=-1$, $β=-2$ καί $γ=0$. Ἑπομένως $υ(x)=-x^3-2x^2$.

2.9. Ἀσκήσεις.

1. Ἄν $υ_1(x)$ καί $υ_2(x)$ εἶναι τά ὑπόλοιπα τῶν διαιρέσεων τῶν πολυωνύμων $f_1(x)$ καί $f_2(x)$ μέ τό $g(x)$ ἀντιστοίχως, δεῖξτε ὅτι οἱ διαιρέσεις τῶν πολυωνύμων $f_1(x)\,υ_2(x)$ καί $f_2(x)υ_1(x)$, μέ τό $g(x)$ ἔχουν ἴσα ὑπόλοιπα.
2. Ἄν οἱ διαιρέσεις τοῦ πολυωνύμου $f(x)$ μέ τά $x-α$ καί $x-β$, $α\neq β$, δίνουν τό ἴδιο ὑπόλοιπο $υ$, δεῖξτε ὅτι καί ἡ διαίρεση τοῦ $f(x)$ μέ τό πολυώνυμο $(x-α)\,(x-β)$ δίνει ἐπίσης τό ἴδιο ὑπόλοιπο $υ$.

3. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΤΙΜΗ ΤΩΝ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

3.1. Ἀριθμητική τιμή καί ρίζα πολυωνύμου.

Κάθε συνάρτηση $f\colon A\to A$ μέ τύπο

$$f(x)=α_νx^ν+α_{ν-1}x^{ν-1}+\ldots+α_1x+α_0, \qquad (1)$$

ὅπου $α_0,α_1,\ldots α_ν\in A$ καί A ἕνα ἀπό τά **R**, **C**, **ὀνομάζεται πολυωνυμική συνάρτηση τοῦ x.**

Ὁ ἀριθμός

$$f(ρ)=α_νρ^ν+α_{ν-1}ρ^{ν-1}+\ldots+α_1ρ+α_0 \qquad (2)$$

πού εἶναι ἡ εἰκόνα τοῦ ἀριθμοῦ ρ μέσω τῆς f, εἶναι **ἡ ἀριθμητική τιμή τῆς πολυωνυμικῆς συναρτήσεως γιά x=ρ.**

Στά ἑπόμενα θά λέμε ἐπίσης ὅτι **ὁ ἀριθμός f(ρ) εἶναι ἡ ἀριθμητική τιμή τοῦ πολυωνύμου** $f(x)=α_νx^ν+α_{ν-1}x^{ν-1}+\ldots+α_1x+α_0\in C_{[x]}$ **γιά** $x=ρ$.

Σημείωση: Μποροῦμε νά δοῦμε ἀμέσως τή βασική διαφορά πού ὑπάρχει στό ρόλο τοῦ x στό $f(x)\in C_{[x]}$ καί στήν πολυωνυμική συνάρτηση μέ τύπο $f(x)$. Στήν πρώτη περίπτωση τό x εἶναι τό πολυώνυμο τοῦ $C_{[x]}$ μέ $α_1=1$ καί $α_0=α_2=\ldots=α_ν=0$, ἐνῶ στή δεύτερη εἶναι ἡ μεταβλητή τῆς συναρτήσεως πού ἀπεικονίζεται στόν ἀριθμό $f(x)$.

Ἕνα σπουδαῖο πρόβλημα στίς πολυωνυμικές συναρτήσεις εἶναι νά βροῦμε τίς τιμές τῆς μεταβλητῆς x, οἱ ὁποῖες ἀπεικονίζονται στόν ἀριθμό μηδέν. Δηλαδή ἄν $\quad f(x)=α_νx^ν+α_{ν-1}x^{ν-1}+\ldots+α_1x+α_0$
εἶναι ὁ τύπος μιᾶς πολυωνυμικῆς συναρτήσεως, νά βροῦμε τίς τιμές $x\in$**C** γιά τίς ὁποῖες εἶναι

$$f(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0 \qquad (3)$$

Ἡ (3) ὀνομάζεται **πολυωνυμική ἐξίσωση.**

Κάθε ἀριθμός ρ πού ἐπαληθεύει τήν (3) ὀνομάζεται **ρίζα τῆς πολυωνυμικῆς ἐξισώσεως.** Θά ὀνομάζουμε **ρίζα τοῦ πολυωνύμου f(x)** κάθε ρίζα τῆς ἐξισώσεως $f(x) = 0$. Ἡ εὕρεση ὅλων τῶν ριζῶν ἑνός πολυωνύμου f(x), ἀνάγεται στήν ἐπίλυση τῆς πολυωνυμικῆς ἐξισώσεως $f(x)=0$ καί θά μᾶς ἀπασχολήσει στά ἑπόμενα. Ὁ βαθμός τοῦ πολυωνύμου $f(x) \neq 0$ ὀνομάζεται καί βαθμός τῆς πολυωνυμικῆς ἐξισώσεως $f(x) = 0$.

3.2. Σχῆμα Horner (Χόρνερ).

Ὁ σύντομος ὑπολογισμός τῆς ἀριθμητικῆς τιμῆς ἑνός πολυωνύμου f(x), δηλ. τῆς τιμῆς τῆς συναρτήσεως f γιά x=ρ, παρουσιάζει ἐνδιαφέρον, γιατί τά πολυώνυμα ἀξιοποιοῦνται γιά τίς διάφορες μαθηματικές ἀνάγκες. Ἐπίσης ἡ ἐπίλυση πολυωνυμικῶν ἐξισώσεων γίνεται πολλές φορές, ὅπως θά δοῦμε παρακάτω, μέ τόν ὑπολογισμό ἀριθμητικῶν τιμῶν πολυωνύμων.

Ἐδῶ θά δοῦμε μία σύντομη μέθοδο νά ὑπολογίζουμε τίς ἀριθμητικές τιμές πολυωνύμων.

Ἔστω ὅτι ἔχουμε νά βροῦμε τήν τιμή τῆς συναρτήσεως f μέ τύπο

$$f(x) = \alpha_5 x^5 + \alpha_4 x^4 + \alpha_3 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0 \quad \text{γιά } x=\rho.$$

Ἡ τιμή αὐτή θά εἶναι $f(\rho) = \alpha_5\rho^5 + \alpha_4\rho^4 + \alpha_3\rho^3 + \alpha_2\rho^2 + \alpha_1\rho + \alpha_0$, ἡ ὁποία μπορεῖ νά γραφεῖ

$$f(\rho) = [[((\alpha_5\rho + \alpha_4)\cdot\rho + \alpha_3)\rho + \alpha_2]\rho + \alpha_1]\rho + \alpha_0 \qquad (1)$$

Δηλαδή γιά τόν ὑπολογισμό τοῦ f(ρ) μποροῦμε νά ἀκολουθήσουμε τήν ἀκόλουθη σειρά ὑπολογισμῶν, πού ὑποδεικνύει ἡ (1).

1. Πολλαπλασιάζουμε τόν α_5 μέ τόν ρ — $\alpha_5 \cdot \rho$
2. Στό γινόμενο προσθέτουμε τόν α_4 — $\alpha_5 \cdot \rho + \alpha_4$
3. Πολλαπλασιάζουμε τό ἄθροισμα αὐτό μέ τόν ρ — $(\alpha_5 \cdot \rho + \alpha_4) \cdot \rho$
4. Στό γινόμενο αὐτό προσθέτουμε τόν α_3 — $(\alpha_5 \cdot \rho + \alpha_4) \cdot \rho + \alpha_3$
5. Πολλαπλασιάζουμε τό ἀποτέλεσμα μέ τόν ρ — $((\alpha_5 \cdot \rho + \alpha_4) \cdot \rho + \alpha_3) \cdot \rho$ κ.τ.λ.

Ἡ διαδικασία αὐτή τῶν ὑπολογισμῶν φαίνεται καλύτερα στό παρακάτω σχῆμα, πού εἶναι γνωστό σάν σχῆμα Horner.

Συντελεστές τοῦ f(x)	α_5	α_4	α_3	α_2 α_1	α_0
ρ	↓	$\alpha_5 \cdot \rho$	$(\alpha_5 \cdot \rho + \alpha_4)\rho$	.	
	$\underbrace{\alpha_5}_{\gamma_4}$	$\underbrace{\alpha_5\rho + \alpha_4}_{\gamma_3}$	$\underbrace{(\alpha_5 \cdot \rho + \alpha_4)\rho + \alpha_3}_{\gamma_2}$	. . .	$f(\rho)=[[((\alpha_5\rho+\alpha_4)\rho+\alpha_3)\rho+\alpha_2]\rho+\alpha_1]\rho+\alpha_0$

Πρίν δώσουμε ἕνα ἀριθμητικό παράδειγμα, θά δοῦμε ἀκόμα ὅτι τό σχῆμα Horner χρησιμεύει στήν εὕρεση τοῦ πηλίκου καί τοῦ ὑπολοίπου τῆς διαιρέσεως τοῦ f(x) μέ τό x−ρ.

Ἄν ἔχουμε νά διαιρέσουμε τό προηγούμενο πολυώνυμο $f(x)$ μέ τό διώνυμο $x-\rho$ (ὅπου ρ ὁ προηγούμενος ἀριθμός), τότε τό ὑπόλοιπο $\upsilon(x)$ θά εἶναι ἕνα σταθερό πολυώνυμο $\upsilon(x)=\upsilon\in\mathbf{C}_{[x]}$, ὁπότε

$$f(x)=(x-\rho)\,\pi(x)+\upsilon \qquad (2)$$

Γιά $x=\rho$ ἡ (2) δίνει $f(\rho)=\upsilon\in\mathbf{C}$, δηλαδή **τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως τοῦ $f(x)$ μέ τό $x-\rho$ εἶναι τό σταθερό πολυώνυμο πού ἀντιστοιχεῖ στήν ἀριθμητική τιμή τοῦ πολυωνύμου $f(x)$ γιά $x=\rho$** καί μ' αὐτόν τόν τρόπο τό βρίσκαμε καί σέ προηγούμενες τάξεις. **Ἄν** λοιπόν **εἶναι $f(\rho)=0$, τότε $(x-\rho)|f(x)$,** δηλαδή $f(x)=(x-\rho)\pi(x)$ **καί ἀντιστρόφως.** Αὐτό σημαίνει ὅτι, **ἄν ρ εἶναι μία ρίζα ἑνός πολυωνύμου $f(x)$, τότε τό $x-\rho$ εἶναι ἕνας παράγοντας τοῦ $f(x)$ καί ἀντιστρόφως.**

Σημειώνουμε ἐδῶ ὅτι ἕνα πολυώνυμο $f(x)$, πού ἔχει ρίζα τό ρ, εἶναι δυνατό νά διαιρεῖται, ἐκτός ἀπό τό $x-\rho$, καί ἀπό μία δύναμη κ τοῦ $x-\rho$. Γενικά εἶναι δυνατό ἕνα πολυώνυμο $f(x)$ νά διαιρεῖται μέ τό $(x-\rho)^\kappa$ καί νά μή διαιρεῖται μέ τό $(x-\rho)^{\kappa+1}$. Δηλαδή εἶναι δυνατό νά εἶναι

$$f(x)=(x-\rho)^\kappa\cdot\pi(x)$$

καί τό $\pi(x)$ νά μή διαιρεῖται μέ τό $(x-\rho)$ (δηλ. τό $\pi(x)$ νά μήν ἔχει ρίζα τό ρ). Σ' αὐτή τήν περίπτωση λέμε ὅτι **τό ρ εἶναι πολλαπλή ρίζα τοῦ $f(x)$ μέ βαθμό πολλαπλότητας κ** ἤ **ὅτι τό ρ εἶναι ρίζα τοῦ $f(x)$ μέ πολλαπλότητα κ.**

Ὅταν εἶναι $\kappa=1$, τότε τό ρ λέγεται καί **ἁπλή ρίζα τοῦ $f(x)$.**

Τό πηλίκο $\pi(x)$ τῆς προηγούμενης διαιρέσεως εἶναι ἕνα πολυώνυμο 4ου βαθμοῦ τῆς μορφῆς $\gamma_4x^4+\gamma_3x^3+\gamma_2x^2+\gamma_1x+\gamma_0$ καί βρίσκεται, ἄν ἐκτελέσουμε τή διαίρεση κατά τά γνωστά:

$$\begin{array}{r|l}
\alpha_5x^5+\alpha_4x^4+\alpha_3x^3+\alpha_2x^2+\alpha_1x+\alpha_0 & x-\rho \\ \hline
-\alpha_5x^5+\alpha_5\rho x^4 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad & \underbrace{\alpha_5}_{\gamma^4}x^4+\underbrace{(\alpha_5\rho+\alpha_4)}_{\gamma^3}x^3+[\underbrace{(\alpha_5\rho+\alpha_4)\rho+\alpha_3}_{\gamma_2}]x^2+\dots \\
(\alpha_5\rho+\alpha_4)x^4+\alpha_3x^3 \qquad\qquad\qquad & \\
-(\alpha_5\rho+\alpha_4)x^4+(\alpha_5\rho+\alpha_4)\rho x^3 \qquad & \\
[(\alpha_5\rho+\alpha_4)\rho+\alpha_3]x^3+\alpha_2x^2 & \\
\dots\dots\dots\dots &
\end{array}$$

Διαπιστώνουμε ἀμέσως ὅτι οἱ συντελεστές τοῦ πηλίκου εἶναι οἱ ἀριθμοί τῆς τρίτης σειρᾶς τοῦ σχήματος Horner, ἐκτός τοῦ τελευταίου ἀριθμοῦ πού εἶναι τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως, ὅπως εἴπαμε.

Στήν πράξη ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς:

Ἔστω ὅτι θέλουμε νά βροῦμε τό πηλίκο, $\pi(x)$, καί τό ὑπόλοιπο, $\upsilon(x)$, τῆς διαιρέσεως τοῦ $f(x)=-2x^5+3x^4-2x^2+5x-1$ μέ τό $g(x)=x+3=x-(-3)$.

Οἱ συντελεστές τοῦ $f(x)$ (διαιρετέου) γράφονται σέ μία σειρά (φροντίζοντας νά γράψουμε καί τό συντελεστή τοῦ x^3 πού εἶναι τό μηδέν), στή δεύτερη σειρά καί ἀριστερά γράφουμε τόν ἀριθμό $\rho=-3$ καί στήν τρίτη σειρά σχηματίζουμε τούς συντελεστές τοῦ πηλίκου, ὅπως εἴπαμε προηγουμένως, καθώς καί τό ὑπόλοιπο. Ἔτσι ἔχουμε τό ἀκόλουθο σχῆμα Horner.

IV 3.3.

Συντελεστές τοῦ f(x)	-2	3	$+\ 0$	-2	5	-1
$\rho=-3$	$\downarrow$	$(-2)\cdot(-3)$	-27	81	-237	696
	$\underbrace{-2}_{\gamma_4}$	$\underbrace{9}_{\gamma_3}$	$\underbrace{-27}_{\gamma_2}$	$\underbrace{79}_{\gamma_1}$	$\underbrace{-232}_{\gamma_0}$	$\underbrace{695}_{\upsilon(x)=\upsilon}$

Τό πηλίκο εἶναι $\pi(x)=\gamma_4x^4+\gamma_3x^3+\gamma_2x^2+\gamma_1x+\gamma_0$, δηλ.

$\pi(x)=-2x^4+9x^3-27x^2+79x-232$ καί τό ὑπόλοιπο $\upsilon(x)=695$, πού φυσικά εἶναι καί ἡ ἀριθμητική τιμή τοῦ $f(x)$ γιά $x=-3$.

3.3. Ἐφαρμογές.

1. Δίνεται ἡ πολυωνυμική συνάρτηση $f:R\to R$ τέτοια, ὥστε γιά κάθε $z\in R$ νά ἰσχύει $f(z)=\alpha z+\beta$ μέ α,β πραγματικούς ἀριθμούς καί $\beta\neq 0$. Δεῖξτε ὅτι γιά κάθε ζεῦγος πραγματικῶν ἀριθμῶν x,y ἰσχύει: $f(x+y)\neq f(x)+f(y)$.

Ἀπόδειξη: Ἀπό τόν τύπο τῆς συναρτήσεως ἔχουμε:

$f(x)=\alpha x+\beta,\quad f(y)=\alpha y+\beta$ καί $f(x+y)=\alpha(x+y)+\beta$,

ὁπότε $f(x)+f(y)=\alpha(x+y)+2\beta$. Ἀλλά ἐπειδή $\beta\neq 0$, θά εἶναι

$\alpha(x+y)+\beta\neq\alpha(x+y)+2\beta$, δηλ. $f(x+y)\neq f(x)+f(y)$.

2. Δίνεται μία πολυωνυμική συνάρτηση $f:R\to R$ τέτοια, ὥστε γιά κάθε $x\in R$ καί κάθε φυσικό ἀριθμό ρ νά ἰσχύει:

$$f(\rho x)=f(x)$$

Δεῖξτε ὅτι γιά κάθε $\nu\in N$ ἰσχύει: $f(\rho^\nu)=f(1)$ (1)

Ἀπόδειξη: Ἐπειδή ἰσχύει $f(\rho x)=f(x)$ γιά κάθε $x\in R$ καί $\rho\in N$, ἄν πάρουμε $x=1$, τότε γιά κάθε $\rho\in N$ ἰσχύει $f(\rho\cdot 1)=f(1)$, δηλαδή $f(\rho)=f(1)$.

Θά ἀποδείξουμε τό ζητούμενο μέ τή μέθοδο τῆς μαθηματικῆς ἐπαγωγῆς.

Πράγματι· γιά $\nu=1$ ἔχουμε: $f(\rho^1)=f(\rho)=f(1)$, δηλ. ἰσχύει ἡ (1).

Ἔστω ὅτι ἡ (1) ἰσχύει καί γιά $\nu=\kappa$, δηλ. ὅτι $f(\rho^\kappa)=f(1)$.

Θά δείξουμε τότε ὅτι ἰσχύει καί γιά $\nu=\kappa+1$, δηλ. ὅτι $f(\rho^{\kappa+1})=f(1)$.

Πράγματι· ἔχουμε $f(\rho^{\kappa+1})=f(\rho\cdot\rho^\kappa)=f(\rho^\kappa)=f(1)$. Ἑπομένως ἰσχύει $f(\rho^\nu)=f(1)$ γιά κάθε $\nu\in N$, δηλαδή ἀποδείχτηκε τό ζητούμενο.

3. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως ἑνός πολυωνύμου $f(x)$ μέ τό $x^2-\rho^2$, $\rho\neq 0$, εἶναι $\upsilon(x)=\dfrac{f(\rho)-f(-\rho)}{2\rho}x+\dfrac{f(\rho)+f(-\rho)}{2}$.

Ἀπόδειξη: Ἐπειδή ὁ διαιρέτης $x^2-\rho^2$ εἶναι δευτέρου βαθμοῦ, τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως θά εἶναι τό πολύ 1ου βαθμοῦ, δηλ. θά εἶναι $\upsilon(x)=\kappa x+\lambda$.

Ἔτσι θά ἔχουμε: $$f(x)=(x^2-\rho^2)\,\pi(x)+\kappa x+\lambda, \qquad (1)$$

ὅπου $\pi(x)$ εἶναι τό πηλίκο τῆς διαιρέσεως.

Ἀπό τήν (1) γιά $x=\rho$ καί $x=-\rho$ παίρνουμε ἀντιστοίχως:

$$f(\rho)=\kappa\rho+\lambda \quad\text{καί}\quad f(-\rho)=-\kappa\rho+\lambda.$$

Ἐπιλύοντας τό σύστημα τῶν δύο αὐτῶν ἐξισώσεων ὡς πρός κ καί λ βρίσκουμε

$\kappa=\dfrac{f(\rho)-f(-\rho)}{2\rho}$ καί $\lambda=\dfrac{f(\rho)+f(-\rho)}{2}$, ὁπότε τό ὑπόλοιπο εἶναι

$$\upsilon(x)=\frac{f(\rho)-f(-\rho)}{2\rho}\cdot x+\frac{f(\rho)+f(-\rho)}{2}.$$

4. Πολυώνυμο f(x) διαιρούμενο μέ τό $x+1$ δίνει ὑπόλοιπο 2 καί διαιρούμενο μέ τό $x-2$ δίνει ὑπόλοιπο -1. Νά βρεθεῖ τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως τοῦ f(x) μέ τό $g(x)=(x+1)(x-2)$.

Λύση: Ἀπό τήν ὑπόθεση ἔχουμε: $f(-1)=2$ καί $f(2)=-1$.

Τό πολυώνυμο f(x) ὅταν διαιρεῖται μέ τό g(x), τό ὁποῖο εἶναι δευτέρου βαθμοῦ, δίνει πηλίκο π(x) καί ὑπόλοιπο τό πολύ πρώτου βαθμοῦ. Ἔστω ὅτι εἶναι $υ(x)=κx+λ$. Τότε θά ἰσχύει:

$$f(x)=(x+1)\cdot(x-2)\cdot π(x)+(κx+λ). \tag{1}$$

Ἀπό τήν (1) παίρνουμε: $f(-1)=-κ+λ$ καί $f(2)=2κ+λ$, δηλαδή

$$-κ+λ=2 \quad \text{καί} \quad 2κ+λ=-1$$

Ἐπιλύοντας τό σύστημα τῶν δύο αὐτῶν ἐξισώσεων βρίσκουμε $κ=-1$ καί $λ=1$, ὁπότε τό ὑπόλοιπο εἶναι: $υ(x)=-x+1$.

5. Βρεῖτε τό πηλίκο καί τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως τοῦ $f(x)=ix^3-(2+i)x^2+4x-3-i$ μέ τό $g(x)=x-(1-i)$.

Λύση: Χρησιμοποιώντας τό σχῆμα Horner βρίσκουμε:

Συντελεστές τοῦ f(x)	i	$-(2+i)$	4	$-3-i$
$ρ=1-i$		$1+i$	$-1+i$	$4-2i$
	i	-1	$3+i$	$1-3i$

$π(x)=ix^2-x+3+i$ καί $υ(x)=1-3i$.

3.4. Ἀσκήσεις.

1. Μέ τό σχῆμα Horner νά ὑπολογίσετε τίς ζητούμενες τιμές τῶν πολυωνυμικῶν συναρτήσεων μέ τούς παρακάτω τύπους.
   α) $f(x)=-2x^4+3x^2+2x+1$, $\quad f(-2)=;\quad f(5)=;$
   β) $φ(x)=x^3-\sqrt{2}x^2-1$, $\quad φ(-\sqrt{2})=;$
   γ) $g(x)=x^3-ix^2+1$ $\quad g(1-i)=;$
2. Ἄν $f(x)=3x^2-λx+2$, βρεῖτε τό λ, ὥστε $f(-1)=-3-λ$
3. Ἄν $f(x)=2x^4-3x^2+κx+λ$, βρεῖτε τά κ καί λ, ὥστε $f(-2)=-25$ καί $f(2)=-18$.
4. Νά προσδιορίσετε τά α καί β, ὥστε τό πολυώνυμο $f(x)=αx^3-βx^2-5x+4$ διαιρούμενο μέ $x+2$ καί $x-1$ νά δίνει ἀντιστοίχως ὑπόλοιπα 6 καί 2.
5. Βρεῖτε τό πηλίκο καί τό ὑπόλοιπο τῶν διαιρέσεων:
   α) τοῦ $5x^3-x^2+2x$ μέ τό $x-3$, β) τοῦ x^5+32 μέ τό $x+2$,
   γ) τοῦ $x^3-3ix^2+4x+1-2i$ μέ τό $x+2$, δ) τοῦ $x^4+(1+i)x^3+ix^2+(-9+7i)x-1+3i$ μέ τό $x-2+i$ καί ε) τοῦ $4x^4+5x^3-12x-40$ μέ τό $x+\frac{1}{2}$.
6. Ἄν ἕνα πολυώνυμο f(x) διαιρούμενο μέ $x-α$ καί $x-β$ δίνει ἀντιστοίχως πηλίκα $π_1(x)$ καί $π_2(x)$, δεῖξτε ὅτι $π_1(β)=π_2(α)$, ὅταν $α\neq β$.
7. Ἕνα πολυώνυμο f(x) διαιρούμενο μέ τό $x+1$ δίνει ὑπόλοιπο 2, μέ τό $x-2$ δίνει ὑπόλοιπο 11 καί μέ τό $x+3$ δίνει ὑπόλοιπο 6. Βρεῖτε τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως τοῦ f(x) μέ τό $(x+1)\cdot(x-2)\cdot(x+3)$.
8. Δεῖξτε ὅτι: i) ἄν $α\neq β$, τότε τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως τοῦ πολυωνύμου f(x), βαθμ. $f(x)\geq 2$, μέ τό $φ(x)=(x-α)\cdot(x-β)$ εἶναι:
$$υ(x)=\frac{f(α)-f(β)}{α-β}\cdot x+\frac{βf(α)-αf(β)}{β-α}.$$

ii) Ἄν $\alpha=\beta$, τότε $\upsilon(x)=x\pi(\alpha)\cdot f(\alpha)-\alpha\pi(\alpha)$

9. Δίνεται μία πολυωνυμική συνάρτηση: f: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ τέτοια, ὥστε γιά κάθε $x\in\mathbf{R}$ νά ἰσχύει: $f(x)=f\left(\frac{x}{2}\right)$. Δεῖξτε ὅτι γιά κάθε $x\in\mathbf{R}$ καί κάθε $\nu\in\mathbf{N}$ ἰσχύει $f(x)=f\left(\frac{x}{2^\nu}\right)$.

10. Βρεῖτε ἕνα πολυώνυμο τρίτου βαθμοῦ $f(x)$ τέτοιο, ὥστε: $f(0)=0$ καί $f(x)-f(x-1)=x^2$. Στή συνέχεια ὑπολογίστε τό ἄθροισμα $\sigma_\nu=1^2+2^2+3^2+\ldots+\nu^2$, $\nu\in\mathbf{N}$.

11. Ἄν $\alpha_1,\ldots,\alpha_\nu$ εἶναι διαδοχικοί ὅροι ἀριθμητικῆς προόδου, δεῖξτε ὅτι τό

$$P(x)=\frac{x^\nu}{\alpha_1\alpha_2}+\frac{x^{\nu-1}}{\alpha_2\alpha_3}+\ldots+\frac{x^2}{\alpha_{\nu-1}\alpha_\nu}-\frac{\nu-1}{\alpha_1\alpha_\nu}$$

διαιρεῖται μέ τό $x-1$. Στή συνέχεια βρεῖτε τό πηλίκο τῆς διαιρέσεως τοῦ $P(x)$ μέ τό $x-1$.

4. ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΣΧΕΤΙΚΑ ΜΕ ΤΙΣ ΡΙΖΕΣ ΤΩΝ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

Ἐδῶ θά δοῦμε μερικά θεωρήματα σχετικά μέ τίς ρίζες τῶν πολυωνύμων, τά ὁποῖα εἶναι πολύ χρήσιμα γιά τήν ἐπίλυση πολυωνυμικῶν ἐξισώσεων. Τά θεωρήματα αὐτά θά τά ξεχωρίσουμε σέ δύο ὁμάδες. Σέ *γενικά* καί σέ *εἰδικά*. Τά πρῶτα ἀναφέρονται σέ ὅλα τά πολυώνυμα τοῦ $\mathbf{C}_{[x]}$, ἐνῶ τά δεύτερα σέ πολυώνυμα τοῦ $\mathbf{R}_{[x]}$ καί τοῦ $\mathbf{Q}_{[x]}$.

4.1. Γενικά Θεωρήματα.

Τό βασικό θεώρημα, σχετικά μέ τίς ρίζες τῶν πολυωνύμων, τό ὁποῖο ἀποδεικνύεται στήν Ἀνώτερη Ἄλγεβρα εἶναι τό ἀκόλουθο:

Θεώρημα 1. (Θεώρημα D'Alembert ἤ Θεμελιῶδες Θεώρημα τῆς Ἄλγεβρας). Κάθε πολυώνυμο $f(x)\in C_{[x]}$, βαθμοῦ $\nu\geq 1$, ἔχει μία τουλάχιστον μιγαδική ρίζα.

Τό θεώρημα αὐτό μᾶς ἐξασφαλίζει τήν ὕπαρξη ρίζας γιά κάθε πολυώνυμο βαθμοῦ $\nu\geq 1$, ἀλλά δέ μᾶς λέει τίποτε γιά τό πλῆθος τῶν ριζῶν τοῦ πολυωνύμου. Ἔτσι γιά τήν ἐξίσωση:

$$\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0=0 \qquad (1)$$

τό μόνο πού ξέρουμε εἶναι ὅτι ἔχει μία τουλάχιστο ρίζα.

Θά ἀποδείξουμε τώρα τό ἀκόλουθο θεώρημα, πού μᾶς ἐξασφαλίζει τό πλῆθος τῶν ριζῶν τῆς (1).

Θεώρημα 2. Κάθε πολυώνυμο $f(x)\in C_{[x]}$, βαθμοῦ $\nu\geq 1$, ἔχει ν ἀκριβῶς ρίζες, ὅπου κάθε ρίζα μετριέται τόσες φορές ὅσος εἶναι ὁ βαθμός πολλαπλότητάς της.

Ἀπόδειξη: Ἔστω $f(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0$, $\alpha_\nu\neq 0$ μέ $\nu\geq 1$. Κατά τό θεώρημα D'Alembert ὑπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα $\rho_1\in\mathbf{C}$ τοῦ $f(x)$, δηλαδή $f(\rho_1)=0$, ὁπότε ἰσχύει

$$f(x)=(x-\rho_1)f_{\nu-1}(x) \qquad (2)$$

ὅπου $f_{\nu-1}(x)$ εἶναι τό πηλίκο τῆς διαιρέσεως τοῦ $f(x)$ μέ τό $x-\rho_1$ καί βαθμ. $f_{\nu-1}(x)=\nu-1$. Κατά τό Θ. D'Alembert καί πάλι, τό πολυώνυμο $f_{\nu-1}(x)$, μέ $\nu-1\geq 1$, ἔχει τουλάχιστον μία ρίζα, ἔστω τόν $\rho_2 \in \mathbf{C}$. Τότε ἔχουμε:

$$f_{\nu-1}(x)=(x-\rho_2)f_{\nu-2}(x) \tag{3}$$

ὁπότε ἡ (2) γίνεται:

$$f(x)=(x-\rho_1)(x-\rho_2)f_{\nu-2}(x) \tag{4}$$

μέ βαθμ $f_{\nu-2}(x)=\nu-2$.

Ἀπό τήν (4) βλέπουμε ὅτι $f(\rho_2)=0$, δηλ. ὁ ἀριθμός ρ_2 εἶναι καί ρίζα τοῦ $f(x)$. Συνεχίζοντας κατά τόν ἴδιο τρόπο, κάθε νέο πηλίκο θά ἔχει βαθμό κατά μονάδα μικρότερο ἀπό τό προηγούμενό του καί κάθε φορά θά ὑπάρχει γι' αὐτό μία ρίζα, πού θά εἶναι καί ρίζα τοῦ πολυωνύμου $f(x)$.
Ἔτσι ὅμως θά φθάσουμε νά ἔχουμε:

$$f(x)=(x-\rho_1)(x-\rho_2)\ldots(x-\rho_{\nu-1})\cdot f_1(x) \tag{5}$$

ὅπου $f_1(x)$ πολυώνυμο 1ου βαθμοῦ, ἔστω $f_1(x)=\beta_1 x+\beta_0$, $\beta_1\neq 0$. Ἐπειδή $f_1(x)=\beta_1\left(x+\frac{\beta_0}{\beta_1}\right)$, ὁ ἀριθμός $\rho_\nu=-\frac{\beta_0}{\beta_1}$ θά εἶναι ρίζα τοῦ $f_1(x)$, δηλ. μία ἀκόμη ρίζα τοῦ $f(x)$, ὁπότε ἡ (5) γίνεται:

$$f(x)=\beta_1(x-\rho_1)(x-\rho_2)\ldots(x-\rho_{\nu-1})(x-\rho_\nu) \tag{6}$$

Ἄν κάνουμε τίς πράξεις στό β' μέλος τῆς (6), τότε εἶναι φανερό ὅτι ὁ μεγιστοβάθμιος ὅρος θά εἶναι ὁ $\beta_1 x^\nu$, ὁπότε $\beta_1=\alpha_\nu$, καί ἄρα ἡ (6) γράφεται:

$$f(x)=\alpha_\nu(x-\rho_1)(x-\rho_2)(x-\rho_3)\ldots(x-\rho_\nu) \tag{7}$$

Θά δείξουμε τώρα ὅτι ἡ μορφή (7) τοῦ $f(x)$ εἶναι μοναδική, ὅταν δέ μᾶς ἐνδιαφέρει ἡ διάταξη τῶν παραγόντων $(x-\rho_1)$, $(x-\rho_2)$, $\ldots$, $(x-\rho_\nu)$. Ἄς ὑποθέσουμε κατ' ἀρχήν ὅτι μέ τήν ἴδια διαδικασία βρήκαμε ὅτι εἶναι καί

$$f(x)=\alpha_\nu(x-\rho'_1)(x-\rho'_2)\ldots(x-\rho'_\nu) \tag{8}$$

Ἀπό τίς (7) καί (8) ἔχουμε τότε

$$(x-\rho_1)(x-\rho_2)\ldots(x-\rho_\nu)=(x-\rho'_1)(x-\rho'_2)\ldots(x-\rho'_\nu) \tag{9}$$

Ἄν ἔστω καί μία ἀπό τίς ρίζες $\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_\nu$ τοῦ $f(x)$, π.χ. ἡ ρ_κ, δέν εἶναι ἴση μέ κάποια ἀπό τίς $\rho'_1,\rho'_2,\ldots,\rho'_\nu$, τότε βάζοντας στήν (9) τήν τιμή $x=\rho_\kappa$ ὁδηγούμαστε σέ ἄτοπο, ἀφοῦ τό πρῶτο μέλος της μηδενίζεται καί τό δεύτερο εἶναι διαφορετικό ἀπό τό μηδέν. Ἔτσι βλέπουμε ὅτι δέν ὑπάρχει ἄλλη τιμή, ἐκτός ἀπό τίς $\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_\nu$, πού νά εἶναι ρίζα τοῦ πολυωνύμου $f(x)$. Αὐτό ὅμως δέν μᾶς ἀποδεικνύει ὅτι ἡ μορφή (7) τοῦ πολυωνύμου $f(x)$ εἶναι μοναδική, γιατί εἶναι δυνατό μία ρίζα ρ_j, ἀπό τίς $\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_\nu$, νά ἐπαναλαμβάνεται κ φορές στή μορφή (7) καί λ φορές στή μορφή (5) μέ $\kappa\neq\lambda$. Θά δείξουμε ὅτι καί αὐτό εἶναι ἄτοπο. Πράγματι· ἄν ὑποθέσουμε ὅτι εἶναι $\kappa\neq\lambda$, τότε, ἐπειδή κάθε μή μηδενικό πολυώνυμο εἶναι ἁπλοποιήσιμο στοιχεῖο ὡς πρός τόν πολλαπλασιασμό στό $C_{[x]}$, ἁπλοποιώντας τήν (9), θά ἔχουμε τόν παράγοντα $x-\rho$ στό ἕνα μέλος της χωρίς νά ὑπάρχει ἴσος παράγοντας στό ἄλλο. Αὐτό ὅμως εἶναι ἄτοπο, ὅπως ἀποδείχτηκε προηγουμένως. Ἔτσι βλέπουμε ὅτι ἡ μορφή (7) τοῦ πολυωνύμου $f(x)$ εἶναι μοναδική, ὅταν ἀδιαφοροῦμε γιά τή διάταξη τῶν $\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_\nu$, καί μάλιστα τό $f(x)$ μπορεῖ νά γραφεῖ καί μέ τή μορφή

$$f(x)=\alpha_\nu(x-\rho_1)^{\kappa_1}(x-\rho_2)^{\kappa_2}\ldots(x-\rho_\mu)^{\kappa_\mu} \tag{10}$$

ὅταν οἱ ἴσοι παράγοντες γραφοῦν μέ δυνάμεις. Στήν (10) εἶναι φανερό ὅτι εἶναι $\kappa_1+\kappa_2+\ldots+\kappa_\mu=\nu$ καί ἀκόμα ὅτι τά $\kappa_1,\kappa_2,\ldots,\kappa_\mu$ εἶναι οἱ πολλαπλότητες τῶν ἀντίστοιχων ριζῶν $\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_\mu$.

Μέ τήν παραπάνω διαδικασία ἀποδείχτηκε πλέον τό ζητούμενο.

Ἀπό τήν ἀπόδειξη τοῦ θεωρήματος προκύπτουν τά ἀκόλουθα συμπεράσματα.

1. Ἄν οἱ $\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_\nu$ εἶναι οἱ ρίζες τοῦ πολυωνύμου $f(x)$, νιοστοῦ βαθμοῦ, τότε αὐτό σύμφωνα μέ τήν (7) γράφεται $f(x)=\alpha_\nu(x-\rho_1)(x-\rho_2)\ldots(x-\rho_\nu)$, τό ὁποῖο ἀποτελεῖ τήν ἀνάλυσή του σέ γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων.
2. Ἐπειδή εἶναι φανερό ὅτι ἕνα πολυώνυμο μηδενικοῦ βαθμοῦ δέν ἔχει καμιά ρίζα (ἔχει δηλαδή μηδέν σέ πλῆθος ρίζες), συμπεραίνουμε ὅτι **κάθε μή μηδενικό πολυώνυμο δέν μπορεῖ νά ἔχει ρίζες περισσότερες ἀπό τό βαθμό του, ἐνῶ τό μηδενικό πολυώνυμο ἔχει ρίζες ὅλα τά $x\in C$.** Ἔτσι **ἄν ἕνα πολυώνυμο τό πολύ νιοστοῦ βαθμοῦ μηδενίζεται γιά $\nu+1$ διαφορετικές τιμές τοῦ x, τότε αὐτό εἶναι τό μηδενικό πολυώνυμο.**
3. Μετά τό προηγούμενο συμπέρασμα 2 ἔχουμε τώρα καί τό ἀκόλουθο:
Ἄν δύο πολυώνυμα $f(x)$ καί $g(x)$ εἶναι καί τά δύο τό πολύ νιοστοῦ βαθμοῦ καί παίρνουν ἴσες τιμές γιά $\nu+1$ διαφορετικές τιμές τοῦ x, τότε θά εἶναι ἴσα.

Πράγματι· Ἄν πάρουμε τό πολυώνυμο $F(x)=f(x)-g(x)$, τότε τό $F(x)$, ἐνῶ εἶναι τό πολύ νιοστοῦ βαθμοῦ, ἔχει $\nu+1$ διαφορετικές ρίζες, δηλ. εἶναι τό μηδενικό πολυώνυμο. Αὐτό σημαίνει ὅτι $f(x)-g(x)=0$, δηλ. εἶναι $f(x)=g(x)$.

4. **Τύποι τοῦ Vieta.** **Ἄν $\rho_1,\rho_2,\rho_3,\ldots,\rho_\nu$ εἶναι οἱ ν ρίζες τοῦ πολυωνύμου $f(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0$ μέ $\alpha_\nu\neq 0$, τότε ἰσχύουν οἱ σχέσεις:**

$$S_1=\rho_1+\rho_2+\rho_3+\ldots+\rho_{\nu-1}+\rho_\nu=-\frac{\alpha_{\nu-1}}{\alpha_\nu}$$

$$S_2=\rho_1\rho_2+\rho_1\rho_3+\ldots+\rho_1\rho_\nu+\rho_2\rho_3+\ldots+\rho_2\rho_\nu+\ldots+\rho_{\nu-1}\rho_\nu=\frac{\alpha_{\nu-2}}{\alpha_\nu}$$

$$S_3=\rho_1\rho_2\rho_3+\rho_1\rho_2\rho_4+\ldots+\rho_1\rho_2\rho_\nu+\rho_1\rho_3\rho_4+\ldots\rho_1\rho_3\rho_\nu+\ldots+\rho_{\nu-2}\rho_{\nu-1}\rho_\nu=-\frac{\alpha_{\nu-3}}{\alpha_\nu}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$S_\nu=\rho_1\cdot\rho_2\cdot\rho_3\cdots\rho_{\nu-1}\cdot\rho_\nu=(-1)^\nu\frac{\alpha_0}{\alpha_\nu}$$

Πράγματι· ἀπό τό προηγούμενο θεώρημα ἔχουμε

$$f(x)=\alpha_\nu(x-\rho_1)(x-\rho_2)\ldots(x-\rho_\nu), \text{ δηλαδή}$$

$$\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\alpha_{\nu-2}x^{\nu-2}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0=\alpha_\nu(x-\rho_1)(x-\rho_2)\ldots(x-\rho_\nu)$$

Διαιρώντας καί τά δύο μέλη τῆς τελευταίας μέ τό $\alpha_\nu\neq 0$ παίρνουμε

$$x^\nu+\frac{\alpha_{\nu-1}}{\alpha_\nu}x^{\nu-1}+\frac{\alpha_{\nu-2}}{\alpha_\nu}x^{\nu-2}+\ldots+\frac{\alpha_1}{\alpha_\nu}x+\frac{\alpha_0}{\alpha_\nu}=$$

$$x^\nu-\underbrace{(\rho_1+\rho_2+\ldots\rho_\nu)}_{S_1}x^{\nu-1}+\underbrace{(\rho_1\rho_2+\rho_1\rho_3+\ldots+\rho_{\nu-1}\rho_\nu)}_{S_2}x^{\nu-2}-\cdots+(-1)^\nu\underbrace{\rho_1\rho_2\ldots\rho_\nu}_{S_\nu}$$

Ἀπό τόν ὁρισμό τῆς ἰσότητας τῶν πολυωνύμων βρίσκουμε πλέον τίς ζητούμενες σχέσεις. Οἱ σχέσεις αὐτές, οἱ ὁποῖες συνδέουν τίς ρίζες καί τούς συντελεστές τοῦ πολυωνύμου $f(x)$ ὀνομάζονται **τύποι τοῦ Vieta.**

Δίνουμε τώρα καί μία πρόταση σχετική μέ τίς ρίζες τῶν πολυωνύμων.

Πρόταση. Ἄν τά πολυώνυμα $x-\rho_1, x-\rho_2,\ldots,x-\rho_\kappa$ διαιροῦν ἕνα πολυώνυμο $f(x)$ καί οἱ $\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_\kappa$ εἶναι ὅλοι διαφορετικοί μεταξύ τους, τότε τό πολυώνυμο $(x-\rho_1)(x-\rho_2)\ldots(x-\rho_\kappa)$ εἶναι παράγοντας τοῦ $f(x)$.

Ἀπόδειξη: α) Ἄν τό πολυώνυμο $f(x)$ εἶναι τό πολύ $\kappa-1$ βαθμοῦ, τότε ἀφοῦ οἱ ἀριθμοί $\rho_1,\rho_2,\ldots\rho_\kappa$ εἶναι ρίζες του, σύμφωνα μέ τήν παρατήρηση 2 θά εἶναι τό μηδενικό πολυώνυμο, δηλ. $f(x)=\mathbf{0}$ καί φυσικά θά διαιρεῖται μέ τό πολυώνυμο $(x-\rho_1)(x-\rho_2)\ldots(x-\rho_\kappa)$.

β) Ἄν εἶναι βαθμ $f(x)=\nu\geq\kappa$, τότε, σύμφωνα μέ τήν παρατήρηση 1, αὐτό θά γράφεται

$$f(x)=\alpha_\nu(x-\rho_1)(x-\rho_2)\ldots(x-\rho_\kappa)(x-\sigma_1)(x-\sigma_2)\ldots(x-\sigma_{\nu-\kappa}),$$

ὅπου $\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_{\nu-\kappa}$ εἶναι οἱ ὑπόλοιπες ρίζες του. Ἡ τελευταία σχέση ἀποδεικνύει τό ζητούμενο.

4.2. Παραδείγματα—Ἐφαρμογὲς

1. **Ἄν ἕνα πολυώνυμο $f(x)$ ἔχει τήν ἰδιότητα $f(x)=f(1-x)$, δεῖξτε ὅτι τό πολυώνυμο $g(x)=f(x)-f(0)$ διαιρεῖται μέ τό πολυώνυμο $x(x-1)$.**

Ἀπόδειξη:

Γιά νά διαιρεῖται τό πολυώνυμο $g(x)$ μέ τό $x(x-1)$, ἀρκεῖ νά διαιρεῖται χωριστά μέ τό x καί τό $x-1$, δηλαδή πρέπει νά εἶναι $g(0)=0$ καί $g(1)=0$. Οἱ ἰσότητες αὐτές ἰσχύουν, γιατί εἶναι $f(x)=f(1-x)$.

2. **Ἄν ἕνα πολυώνυμο $f(x)$ ἔχει τήν ἰδιότητα $f(x)=f(x-1)$, τότε τό πολυώνυμο αὐτό εἶναι ἕνα σταθερό πολυώνυμο.**

Ἀπόδειξη:

Θά δείξουμε μέ τή μαθηματική ἐπαγωγή ὅτι γιά ὅλα τά $\nu\in\mathbf{N}$ ἰσχύει $f(\nu)=f(0)$.
Πράγματι· γιά $\nu=1$, ἀπό τήν ὑπόθεση ἔχουμε $f(1)=f(0)$. Ἄν δεχθοῦμε τώρα ὅτι $f(\kappa)=f(0)$,

$\kappa \in N$, ἐπειδή ἔχουμε καί $f(\kappa+1)=f(\kappa)$ ἐξ ὑποθέσεως, θά εἶναι καί $f(\kappa+1)=f(0)$. Δηλαδή τό πολυώνυμο $f(x)$ παίρνει τήν ἴδια τιμή $f(0)$ γιά ὅλους τούς φυσικούς ἀριθμούς. Ἄρα θά εἶναι: $f(x)-f(0)=0$ ἤ $f(x)=f(0)=$σταθερό.

3. Δεῖξτε ὅτι τό πολυώνυμο

$$f(x)=\frac{x(x-\alpha)(x-\beta)}{\gamma(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}+\frac{x(x-\beta)(x-\gamma)}{\alpha(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\frac{x(x-\gamma)(x-\alpha)}{\beta(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)},$$

στό ὁποῖο εἶναι $\alpha\beta\gamma(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)\neq 0$, μπορεῖ νά πάρει τή μορφή

$$f(x)=\lambda(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)+1.$$

Προσδιορίστε κατόπιν τήν τιμή τοῦ λ.

Ἀπόδειξη:

Ἐπειδή εἶναι $f(\alpha)=f(\beta)=f(\gamma)=1$ ἤ $f(\alpha)-1=f(\beta)-1=f(\gamma)-1=0$, τό πολυώνυμο $f(x)-1$ θά ἔχει ρίζες τά α,β,γ καί συνεπῶς τό πολυώνυμο $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ θά εἶναι διαιρέτης τοῦ $f(x)-1$. Ἄρα θά εἶναι

$$f(x)-1=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\pi(x) \qquad (1)$$

Ἀλλά τά πολυώνυμα $f(x)-1$ καί $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ εἶναι 3ου βαθμοῦ καί συνεπῶς τό πηλίκο $\pi(x)$ θά εἶναι σταθερό πολυώνυμο. Ἄν $\pi(x)=\lambda$, τότε ἡ (1) γράφεται

$$f(x)=\lambda(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)+1 \qquad (2)$$

καί ἀποδεικνύει τό ζητούμενο.

Ἐπειδή ἀπό τήν ἀρχική μορφή τοῦ $f(x)$ βρίσκουμε $f(0)=0$, ἐνῶ ἀπό τή (2) εἶναι $f(0)=-\alpha\beta\gamma\lambda+1$, τελικά θά εἶναι

$$\lambda=\frac{1}{\alpha\beta\gamma}$$

4. Ἐξετάστε ἄν τό 3 εἶναι πολλαπλή ρίζα τοῦ $f(x)=2x^3-11x^2+12x+9$.

Λύση: Θά ἐξετάσουμε ἄν τό $x-3$ εἶναι παράγοντας τοῦ $f(x)$. Ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι $f(3)=0$. Ἀλλά αὐτό ἰσχύει. Ἔτσι ἔχουμε $f(x)=(x-3)\pi(x)$. Μέ τό σχῆμα Horner βρίσκουμε

$$\pi(x)=2x^2-5x-3, \quad \text{ὁπότε} \quad f(x)=(x-3)(2x^2-5x-3).$$

Παρατηροῦμε τώρα ὅτι $\pi(3)=0$, δηλ. τό $x-3$ εἶναι διαιρέτης τοῦ $\pi(x)$, ὁπότε $\pi(x)=(x-3)(2x+1)$ καί ἄρα $f(x)=(x-3)\cdot(x-3)\cdot(2x+1)=(x-3)^2\cdot(2x+1)$.

Ἡ τελευταία σχέση μᾶς λέει ὅτι τό 3 εἶναι διπλή ρίζα τοῦ $f(x)$.

Στό παράδειγμα αὐτό δίνεται καί ἕνας τρόπος νά ἐλέγχουμε ἄν ἕνας ἀριθμός ρ εἶναι πολλαπλή ρίζα ἑνός πολυωνύμου. Γενικά ἀποδεικνύεται ὅτι:

Ἕνα πολυώνυμο $f(x)$, βαθμοῦ $\nu\geq\kappa$, $\kappa\in N$ ἔχει τόν ἀριθμό ρ ρίζα πολλαπλότητας κ, ἄν $f(\rho)=0$, $\pi_1(\rho)=0$, $\pi_2(\rho)=0,\cdots,\pi_{\kappa-1}(\rho)=0$, ὅπου τά $\pi_1(x)$, $\pi_2(x),\cdots,\pi_{\kappa-1}(x)$ εἶναι ἀντιστοίχως τά πηλίκα τῶν διαιρέσεων τοῦ $f(x)$ μέ τό $x-\rho$, τοῦ $\pi_1(x)$ μέ τό $x-\rho$, τοῦ $\pi_2(x)$ μέ τό $x-\rho$ κ.ο.κ. καί συγχρόνως $\pi_\kappa(\rho)\neq 0$, ὅπου $\pi_\kappa(x)$ εἶναι τό πηλίκο τῆς διαιρέσεως τοῦ $\pi_{\kappa-1}(x)$ μέ τό $x-\rho$.

Ἕνας ὅμως πιό πρακτικός τρόπος γιά νά ἐλέγχουμε τήν πολλαπλότητα μιᾶς ρίζας ἑνός πολυωνύμου φαίνεται στό ἀκόλουθο παράδειγμα.

5. Δεῖξτε ὅτι τό πολυώνυμο $f(x)=2x^4-5x^3+3x^2+x-1$ ἔχει τόν ἀριθμό 1 ρίζα μέ πολλαπλότητα 3.

Λύση: Ἄν κάνουμε τό μετασχηματισμό

$$x-1=y \quad \text{ἤ} \quad x=y+1,$$

τότε τό $f(x)$ γίνεται $f(y+1)=2(y+1)^4-5(y+1)^3+3(y+1)^2+(y+1)-1$ ἤ

$$g(y)=f(y+1)=2y^4+y^3=y^3(2y+1).$$

Δηλαδή τό $g(y)$ ἔχει παράγοντα τό y^3 καί δέν ἔχει παράγοντα δύναμη τοῦ y μεγαλύτερη ἀπό 3, δηλ. τό $f(x)$ ἔχει παράγοντα τό $(x-1)^3$, ἀλλά ὄχι δύναμη τοῦ $x-1$ μεγαλύτερη ἀπό 3.

6. **Βρεῖτε τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων καί τῶν κύβων τῶν ριζῶν τοῦ πολυωνύμου**

$$f(x)=2x^3-6x^2+x-10$$

Λύση: Ἄν ρ_1, ρ_2, ρ_3 εἶναι οἱ ρίζες τοῦ f(x), τότε ἀπό τούς τύπους Vieta ἔχουμε

$$\rho_1+\rho_2+\rho_3=\frac{6}{2}=3, \quad \rho_1\rho_2+\rho_2\rho_3+\rho_3\rho_1=\frac{1}{2}, \quad \rho_1\rho_2\rho_3=\frac{10}{2}=5$$

Γνωρίζουμε ὅμως ὅτι: $\rho_1^2+\rho_2^2+\rho_3^2=(\rho_1+\rho_2+\rho_3)^2-2(\rho_1\rho_2+\rho_2\rho_3+\rho_3\rho_1)$,

ὁπότε $\rho_1^2+\rho_2^2+\rho_3^2=3^2-2\cdot\frac{1}{2}=8$ καί

$$(\rho_1+\rho_2+\rho_3)^3=\rho_1^3+\rho_2^3+\rho_3^3+3\rho_1^2(\rho_2+\rho_3)+3\rho_2^2(\rho_3+\rho_1)+3\rho_3^2(\rho_1+\rho_2)+6\rho_1\rho_2\rho_3 \text{ ἤ}$$

$$(\rho_1+\rho_2+\rho_3)^3=\rho_1^3+\rho_2^3+\rho_3^3+3\rho_1^2(3-\rho_1)+3\rho_2^2(3-\rho_2)+3\rho_3^2(3-\rho_3)+6\rho_1\rho_2\rho_3.$$

Ἀπό τήν τελευταία σχέση βρίσκουμε

$$\rho_1^3+\rho_2^3+\rho_3^3=\frac{75}{2}$$

7. **Νά κατασκευαστεῖ πολυώνυμο g(x), τοῦ ὁποίου οἱ ρίζες νά εἶναι τά ἀντίστροφα τῶν ριζῶν τοῦ πολυωνύμου**

$$f(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1x+\alpha_0, \quad \alpha_\nu\cdot\alpha_0\neq 0.$$

Λύση: Ἄν $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ εἶναι οἱ ρίζες τοῦ f(x), τότε οἱ ρίζες τοῦ g(x) θέλουμε νά εἶναι οἱ

$$\rho_1=\frac{1}{x_1}, \; \rho_2=\frac{1}{x_2}, \ldots, \rho_\nu=\frac{1}{x_\nu}$$

Σύμφωνα μέ τούς τύπους Vieta ἔχουμε:

$$S_1=x_1+x_2+\ldots+x_\nu=-\frac{\alpha_{\nu-1}}{\alpha_\nu}$$

$$S_2=x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_{\nu-1}x_\nu=\frac{\alpha_{\nu-2}}{\alpha_\nu}$$

$$\vdots$$

$$S_\nu=x_1\cdot x_2\ldots x_\nu=(-1)^\nu\frac{\alpha_0}{\alpha_\nu}$$

Τό πολυώνυμο g(x) θά εἶναι τό

$$g(x)=x^\nu-S'_1x^{\nu-1}+S'_2x^{\nu-2}+\ldots+(-1)^\nu S'_\nu$$

ὅπου

$$S_1'=\rho_1+\rho_2+\ldots+\rho_\nu=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_\nu}=$$

$$=\frac{x_2\cdot x_3\ldots x_\nu+x_1\cdot x_3\ldots x_\nu+\ldots+x_1x_2\ldots x_{\nu-1}}{x_1x_2\cdots x_\nu}=\frac{(-1)^{\nu-1}\frac{\alpha_1}{\alpha_\nu}}{(-1)^\nu\frac{\alpha_0}{\alpha_\nu}}=-\frac{\alpha_1}{\alpha_0}$$

$$S'_2=\rho_1\rho_2+\rho_1\rho_3+\ldots+\rho_{\nu-1}\rho_\nu=\frac{1}{x_1x_2}+\frac{1}{x_1x_3}+\ldots+\frac{1}{x_{\nu-1}x_\nu}=$$

$$=\frac{x_3x_4\ldots x_\nu+\ldots+x_1x_2\ldots x_{\nu-2}}{x_1x_2\ldots x_\nu}=\frac{(-1)^{\nu-2}\frac{\alpha_2}{\alpha_\nu}}{(-1)^\nu\frac{\alpha_0}{\alpha_\nu}}=\frac{\alpha_2}{\alpha_0}$$

. . . .

$$S'_\nu=\rho_1\rho_2\ldots\rho_\nu=\frac{1}{x_1x_2\ldots x_\nu}=\frac{1}{(-1)^\nu\frac{\alpha_0}{\alpha_\nu}}=(-1)^\nu\frac{\alpha_\nu}{\alpha_0}$$

Έτσι έχουμε $g(x)=x^{\nu}+\frac{\alpha_1}{\alpha_0}x^{\nu-1}+\frac{\alpha_2}{\alpha_0}x^{\nu-2}+\ldots+\frac{\alpha_\nu}{\alpha_0}$ ή

$$g(x)=\frac{1}{\alpha_0}(\alpha_0x^{\nu}+\alpha_1x^{\nu-1}+\alpha_2x^{\nu-2}+\ldots+\alpha_\nu).$$

8. **Ἄν τά πολυώνυμα $f(x)$, $g(x)$ εἶναι πρῶτα μεταξύ τους, τότε καί τά πολυώνυμα $(f(x))^{\kappa}$ καί $(g(x))^{\lambda}$, ὅπου $\kappa, \lambda \in N$, εἶναι πρῶτα μεταξύ τους.**

Ἀπόδειξη: Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι τό μή σταθερό πολυώνυμο $\sigma(x)$ εἶναι κοινός διαιρέτης τῶν $(f(x))^{\kappa}$ καί $(g(x))^{\lambda}$. Τότε $(f(x))^{\kappa}=\sigma(x)\,\pi_1(x)$ καί $(g(x))^{\lambda}=\sigma(x)\,\pi_2(x)$.
Ἄν τώρα ρ εἶναι ρίζα τοῦ $\sigma(x)$, ὁπότε $\sigma(\rho)=0$, θά εἶναι καί $(f(\rho))^{\kappa}=(g(\rho))^{\lambda}=0$, δηλ. $f(\rho)=g(\rho)=0$, πού σημαίνει ὅτι τά $f(x)$, $g(x)$ θά ἔχουν κοινό διαιρέτη τό μή σταθερό πολυώνυμο $x-\rho$. Αὐτό ὅμως εἶναι ἄτοπο, γιατί τά $f(x)$ καί $g(x)$ εἶναι πρῶτα μεταξύ τους.

4.3. Ἀσκήσεις

1. Ἄν ἕνα πολυώνυμο $f(x)\in \mathbf{C}[x]$, παίρνει τήν ἀριθμητική τιμή λ γιά ἄπειρες μιγαδικές τιμές τοῦ x, τότε δεῖξτε ὅτι τό πολυώνυμο αὐτό εἶναι τό σταθερό πολυώνυμο $\lambda\in\mathbf{C}[x]$.
2. Δεῖξτε ὅτι τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως τοῦ πολυωνύμου $f(x)$ μέ τό $x^2-2\rho x+\rho^2$ εἶναι τό $\pi(\rho)x+f(\rho)-\rho\pi(\rho)$, ὅπου $\pi(x)$ εἶναι τό πηλίκο τῆς διαιρέσεως τοῦ $[f(x)-f(\rho)]$ μέ τό $(x-\rho)$.
3. Ἄν τά πολυώνυμα $f(x)$ καί $g(x)$ ἔχουν τόν ἀριθμό ρ ρίζα μέ πολλαπλότητα κ καί λ ἀντιστοίχως, τότε ὁ Μ.Κ.Δ. τῶν $f(x)$ καί $g(x)$ ἔχει ἐπίσης ρίζα τόν ἀριθμό ρ μέ πολλαπλότητα $\nu=\min(\kappa,\lambda)$.
4. Δεῖξτε ὅτι τό πολυώνυμο $f(x)=\frac{(x-\alpha)(x-\beta)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}+\frac{(x-\beta)(x-\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\frac{(x-\gamma)(x-\alpha)}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)}$ μέ $(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)\neq 0$ εἶναι τό σταθερό πολυώνυμο $f(x)=1$.
5. Δεῖξτε ὅτι τό πολυώνυμο x^2-4x+4 εἶναι παράγοντας τοῦ πολυωνύμου
$$f(x)=x^4-4x^3+5x^2-4x+4.$$
6. Νά ἐξετάσετε ἄν τό πολυώνυμο $f(x)=x^5-11x^4+43x^3-74x^2+52x-8$ ἔχει τόν 2 ρίζα μέ πολλαπλότητα 3.
7. Δίνεται ἡ ἐξίσωση $(\lambda+1)x^3-(\lambda^2+5\lambda-5)x^2+(\lambda^2+5\lambda-5)x-(\lambda+1)=0$ μέ $\lambda\neq-1$
   α) Δεῖξτε ὅτι γιά κάθε τιμή τοῦ $\lambda(\lambda\neq-1)$ ἡ ἐξίσωση ἔχει ρίζες πού ἀποτελοῦν γεωμετρική πρόοδο. β) Ἄν ρ_2 εἶναι ἡ ρίζα της πού δέν ἐξαρτᾶται ἀπό τό λ, νά προσδιορίσετε τό λ, ὥστε οἱ ρίζες ρ_1,ρ_2,ρ_3 νά ἀποτελοῦν ἀριθμητική πρόοδο.
   γ) Δεῖξτε ὅτι γιά ὅλες τίς τιμές λ πού βρήκατε στήν προηγουμένη περίπτωση ἡ ἐξίσωση ἔχει τρεῖς ρίζες ἴσες.
8. Νά κατασκευάσετε ἐξίσωση τρίτου βαθμοῦ μέ ρίζες τούς ἀριθμούς 1,–2,3.
9. Βρεῖτε ἐξίσωση πού ἔχει ρίζες τά τετράγωνα τῶν ριζῶν τῆς $x^3+\alpha_1x^2+\alpha_2x+\alpha_3=0$.
10. Δίνονται τά πολυώνυμα $f(x)=x^3+\alpha x-\beta$ καί $g(x)=\beta x^3-\alpha x-1$, μέ $\alpha>0$, $\beta>0$. Ἄν ρ_1,ρ_2,ρ_3 εἶναι οἱ ρίζες τοῦ $f(x)$ καί τά $f(x)$ καί $g(x)$ ἔχουν μιά κοινή πραγματική ρίζα, τότε δεῖξτε ὅτι i) $\rho_1^2+\rho_2^2+\rho_3^2=-2\alpha$ καί ii) $|\rho_1|+|\rho_2|+|\rho_3|>2$
11. Ἄν $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_\nu$, $\nu\in\mathbf{N}$ μέ $\nu>1$, εἶναι ν διακεκριμένοι ἀριθμοί καί θέσουμε
$P_1(x)=(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_\nu)$
$P_2(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_3)\ldots(x-\alpha_\nu)$
. . . .
$P_\kappa(x)=(x-\alpha_1)\ldots(x-\alpha_{\kappa-1})(x-\alpha_{\kappa+1})\ldots(x-\alpha_\nu)$, $\kappa=2,3,\ldots,\nu-1$
. . . .
$P_\nu(x)=(x-\alpha_1)\ldots(x-\alpha_{\nu-1})$,

τότε ἐπιλύστε τήν ἐξίσωση

$$\alpha_1 \cdot \frac{P_1(x)}{P_1(\alpha_1)} + \alpha_2 \cdot \frac{P_2(x)}{P_2(\alpha_2)} + \ldots + \alpha_\nu \cdot \frac{P_\nu(x)}{P_\nu(\alpha_\nu)} = \beta, \text{ μέ } \beta \text{ σταθερό ἀριθμό.}$$

12. Δίνεται τό πολυώνυμο
$P(x)=\alpha\beta(\alpha-\gamma)x^3+(\alpha^3-\alpha^2\gamma+2\alpha\beta^2-\beta^2\gamma+\alpha\beta\gamma)x^2+(2\alpha^2\beta+\beta^2\gamma+\alpha^2\gamma+\beta^3-\alpha\beta\gamma)x+\alpha\beta(\beta+\gamma)$
ὅπου $\alpha,\beta,\gamma \neq 0$, $\alpha \neq \gamma$ καί $\alpha \neq \beta$.
Δεῖξτε ὅτι τό $P(x)$ διαιρεῖται ἀπό τό $Q(x)=\alpha\beta x^2+(\alpha^2+\beta^2)x+\alpha\beta$ καί στή συνέχεια δεῖξτε ὅτι ὁ ἀριθμός $P(x_0)$ διαιρεῖται μέ τό $(\alpha+\beta)^3$, ὅπου $x_0=(\alpha+\beta+1)^\nu$, $\nu \in \mathbf{N}$.
13. Ἄν γιά ἕνα πολυώνυμο $f(x) \in \mathbf{C}_{[x]}$ ἰσχύει $f(x)=f(x+1)$ γιά κάθε $x \in \mathbf{C}$, δεῖξτε ὅτι εἶναι ἕνα σταθερό πολυώνυμο.

4.4. Εἰδικά θεωρήματα.

Θεώρημα 1. Ἄν ἕνα μή μηδενικό πολυώνυμο μέ πραγματικούς συντελεστές ἔχει ρίζα τό μιγαδικό ἀριθμό $z=\alpha+\beta i$, ($\beta \neq 0$), τότε ἔχει ρίζα καί τόν συζυγή του, $\bar{z}=\alpha-\beta i$.

Ἀπόδειξη:

Ἄν τό $f(x)$ εἶναι πρώτου βαθμοῦ, τότε τό $f(x)$ δέν ἔχει μιγαδική ρίζα, ἀφοῦ ἔχει πραγματικούς συντελεστές. Ἄρα τό $f(x)$ εἶναι τουλάχιστον β' βαθμοῦ. Γιά νά δείξουμε ὅτι καί ὁ μιγαδικός ἀριθμός $\bar{z}=\alpha-\beta i$ εἶναι ρίζα τοῦ $f(x)$, ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι ἡ διαίρεση τοῦ $f(x)$ μέ τό πολυώνυμο $g(x)=(x-z)(x-\bar{z})=x^2-2\alpha x+\alpha^2+\beta^2$ εἶναι τέλεια. Ἀλλά τό $g(x)$ εἶναι δευτέρου βαθμοῦ καί ἄρα τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως τοῦ $f(x)$ μέ τό $g(x)$ θά εἶναι τό πολύ πρώτου βαθμοῦ· Ἄν λοιπόν εἶναι $\upsilon(x)=\kappa x+\lambda$ τό ὑπόλοιπο καί $\pi(x)$ τό πηλίκο αὐτῆς τῆς διαιρέσεως, τότε ἰσχύει:

$$f(x)=g(x)\cdot\pi(x)+\kappa x+\lambda \qquad (1)$$

Εἶναι ὅμως $f(\alpha+\beta i)=g(\alpha+\beta i)=0$ καί ἑπομένως γιά τήν τιμή $\alpha+\beta i$ τοῦ x ἡ ἰσότητα (1) δίνει

$$(\kappa+\alpha\beta i)+\lambda=0 \text{ ἤ } (\kappa\alpha+\lambda)+\kappa\beta i=0, \text{ ἤ } \kappa\alpha+\lambda=0 \text{ καί } \kappa\beta=0,$$

ἀφοῦ $\kappa, \lambda \in R$ σύμφωνα μέ τήν παρατήρηση 1 τῆς 2.4.
Ἐπειδή εἶναι $\beta \neq 0$ θά ἔχουμε $\kappa=0$, ὁπότε καί $\lambda=0$, δηλαδή ἡ (1) γίνεται

$$f(x)=g(x)\cdot\pi(x) \qquad (2)$$

πού ἀποδεικνύει τό ζητούμενο.

Πορίσματα.

1. **Ἄν ἕνα πολυώνυμο τοῦ $\mathrm{R}_{[x]}$, ἔχει ρίζα τό μιγαδικό ἀριθμό $z=\alpha+\beta i$, $\beta \neq 0$ μέ πολλαπλότητα κ, τότε καί ὁ $\bar{z}=\alpha-\beta i$ θά εἶναι ρίζα του μέ τήν ἴδια πολλαπλότητα.**
2. **Τό πλῆθος τῶν μιγαδικῶν ριζῶν ἑνός πολυωνύμου μέ πραγματικούς συντελεστές εἶναι ἄρτιο.**
3. **Κάθε πολυώνυμο περιττοῦ βαθμοῦ μέ πραγματικούς συντελεστές ἔχει τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα.**

Θεώρημα 2. Ἄν ἕνα μή μηδενικό πολυώνυμο μέ ρητούς συντελεστές ἔχει ρίζα τόν ἄρρητο $\alpha+\sqrt{\beta}$, $\alpha,\beta\in Q$, $\beta>0$, $\sqrt{\beta}\in R-Q$, τότε θά ἔχει ρίζα καί τόν $\alpha-\sqrt{\beta}$.

Τό θεώρημα αὐτό ἀποδεικνύεται ὅπως τό προηγούμενο καί συνάγονται ἀνάλογα πορίσματα μέ ἐκεῖνα τοῦ θεωρήματος 1.

Θεώρημα 3. Ἄν ἕνα πολυώνυμο $f(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1x+\alpha_0$, $\alpha_\nu.\alpha_0\neq0$, μέ ἀκέραιους συντελεστές, ἔχει γιά ρίζα του τό ρητό $\frac{\kappa}{\lambda}\neq0$, $(\kappa,\lambda)=1$, τότε ὁ κ θά εἶναι διαιρέτης τοῦ σταθεροῦ ὅρου α_0 τοῦ f(x) καί ὁ λ τοῦ συντελεστῆ α_ν τοῦ μεγιστοβάθμιου ὅρου του.

Ἀπόδειξη: Ἀπό τήν ὑπόθεση ἔχουμε:

$$f\left(\frac{\kappa}{\lambda}\right)=0 \Leftrightarrow \alpha_\nu\left(\frac{\kappa}{\lambda}\right)^\nu+\alpha_{\nu-1}\left(\frac{\kappa}{\lambda}\right)^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1\left(\frac{\kappa}{\lambda}\right)+\alpha_0=0$$

$$\Leftrightarrow \alpha_\nu\kappa^\nu+\alpha_{\nu-1}\kappa^{\nu-1}\lambda+\ldots+\alpha_1\kappa\lambda^{\nu-1}+\alpha_0\lambda^\nu=0$$

$$\Leftrightarrow \alpha_\nu\kappa^\nu=-\lambda(\alpha_{\nu-1}\kappa^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1\kappa\lambda^{\nu-2}+\alpha_0\lambda^{\nu-1}) \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \alpha_0\lambda^\nu=-\kappa(\alpha_\nu\kappa^{\nu-1}+\alpha_{\nu-1}\kappa^{\nu-2}\lambda+\ldots+\alpha_1\lambda^{\nu-1}) \quad (2)$$

Ἐπειδή οἱ παρενθέσεις στά δεύτερα μέλη τῶν (1) καί (2) εἶναι ἀκέραιοι ἀριθμοί, οἱ λ καί κ θά εἶναι ἀντιστοίχως διαιρέτες τῶν $\alpha_\nu\kappa^\nu$ καί $\alpha_0\lambda^\nu$. Εἶναι ὅμως $(\kappa,\lambda)=1$, ὁπότε θά εἶναι $(\kappa^\nu,\lambda)=1$ καί $(\kappa,\lambda^\nu)=1$[1]. Ἀφοῦ λοιπόν εἶναι $\lambda\mid\alpha_\nu\kappa^\nu$ καί $(\kappa^\nu,\lambda)=1$, θά εἶναι καί $\lambda\mid\alpha_\nu$. Ὅμοια καί $\kappa\mid\alpha_0$.

Πόρισμα. Ἄν τό πολυώνυμο $f(x)=x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1x+\alpha_0$, $\alpha_0\neq0$ μέ ἀκέραιους συντελεστές, ἔχει ρητές ρίζες, τότε αὐτές θά εἶναι ἀκέραιοι ἀριθμοί καί διαιρέτες τοῦ α_0.

4 5. Παραδείγματα—Ἐφαρμογές.

1. **Βρεῖτε ἕνα πολυώνυμο τετάρτου βαθμοῦ μέ ρητούς συντελεστές, τό ὁποῖο νά ἔχει δύο ρίζες του τούς ἀριθμούς i καί $1-\sqrt{3}$.**

Λύση: Ἀφοῦ τό ζητούμενο πολυώνυμο ἔχει ρητούς συντελεστές, θά ἰσχύουν γιά τίς μιγαδικές καί γιά τίς ἄρρητες ρίζες του τά θεωρήματα 1. καί 2. καί συνεπῶς οἱ ἀριθμοί –i καί $1+\sqrt{3}$ θά εἶναι δύο ἀκόμα ρίζες του. Ἄρα τό f(x) θά εἶναι τῆς μορφῆς

$$f(x)=\kappa(x-i)(x+i)[(x-1)+\sqrt{3}][(x-1)-\sqrt{3}],\ \kappa\in Q,\ \kappa\neq0$$

ἤ $f(x)=\kappa(x^2+1)(x^2-2x-2)$. Ἕνα ἀπό τά ζητούμενα πολυώνυμα εἶναι π.χ. τό

$$(x^2+1)(x^2-2x-2)=x^4-2x^3-x^2-2x-2$$

2. **Ἐπιλύστε τήν ἐξίσωση $x^3-4x^2+9x-10=0$, ἄν εἶναι γνωστό ὅτι ὁ μιγαδικός ἀριθμός $1+2i$ εἶναι ρίζα της.**

Ἐπίλυση: Ἀφοῦ τό πολυώνυμο τοῦ πρώτου μέλους τῆς ἐξισώσεως ἔχει πραγματικούς συντελεστές, τότε ἡ ἐξίσωση θά ἔχει ρίζα καί τόν ἀριθμό $1-2i$, ὁπότε τό πολυώνυμο αὐτό θά διαιρεῖται μέ τό πολυώνυμο $[x-(1+2i)]([x-(1-2i)]=x^2-2x+5$. Τό πηλίκο τῆς διαιρέσεώς τους βρίσκουμε ὅτι εἶναι τό $x-2$ καί ἄρα ἡ τρίτη ρίζα τῆς ἐξισώσεως εἶναι τό 2.

1. Βλέπε ἄσκηση 16 τῆς 1.9. τοῦ Κεφαλαίου ΙΙΙ.

3. **Ἐπιλύστε τήν ἐξίσωση $x^4+x^3-7x^2-x+6=0$**

Ἐπίλυση: Ἐπειδή οἱ συντελεστές τοῦ πρώτου μέλους εἶναι ἀκέραιοι καί ὁ συντελεστής τοῦ x^4 τό 1, ἄν ὑπάρχουν ρητές ρίζες, αὐτές θά εἶναι ἀκέραιες καί συγχρόνως διαιρέτες τοῦ σταθεροῦ ὅρου $+6$. Εὔκολα βρίσκουμε ὅτι οἱ ρίζες εἶναι οἱ ἀριθμοί $-3, -1, 1, 2$. (Χρησιμοποιῆστε π.χ. διαδοχικά τό σχῆμα Horner).

4. **Ἐπιλύστε τήν ἐξίσωση $2x^3+3x^2+8x+12=0$.**

Ἐπίλυση: Ἄν ὑπάρχουν ρητές ρίζες, αὐτές θά εἶναι ἀνάγωγα κλάσματα μέ ἀριθμητή διαιρέτη τοῦ 12 καί παρονομαστή διαιρέτη τοῦ 2. Βρίσκουμε ἔτσι ὅτι ὁ ἀριθμός $-\frac{3}{2}$ εἶναι μία ρίζα καί ἡ ἐξίσωση γίνεται:

$$\left(x+\frac{3}{2}\right)(2x^2+8)=0 \Leftrightarrow (2x+3)(x^2+4)=0 \Leftrightarrow (2x+3)(x+2i)(x-2i)=0.$$

Ἄρα οἱ ρίζες εἶναι $x_1=-\frac{3}{2}$, $x_2=-2i$ καί $x_3=2i$.

5. **Ἄν οἱ συντελεστές τοῦ πολυωνύμου $f_2(x)\in C_{[x]}$, εἶναι οἱ συζυγεῖς τῶν ἀντίστοιχων συντελεστῶν τοῦ πολυωνύμου $f_1(x)\in C_{[x]}$ καί ὁ βαθμός τῶν $f_1(x)$ καί $f_2(x)$ εἶναι ν, δεῖξτε ὅτι οἱ ρίζες τοῦ ἑνός εἶναι οἱ συζυγεῖς τῶν ριζῶν τοῦ ἄλλου.**

Ἀπόδειξη: Τά πολυώνυμα $f_1(x)$ καί $f_2(x)$ μποροῦν νά πάρουν τή μορφή $f_1(x)=\varphi_1(x)+i\varphi_2(x)$ καί $f_2(x)=\varphi_1(x)-i\varphi_2(x)$, ὅπου τά πολυώνυμα $\varphi_1(x)$ καί $\varphi_2(x)$ ἔχουν πραγματικούς συντελεστές. Ἄν λοιπόν ὁ μιγαδικός ἀριθμός $\kappa+\lambda i$ εἶναι μία ρίζα τοῦ $f_1(x)$, τότε θά εἶναι $f_1(\kappa+\lambda i)=0$ ἤ $\varphi_1(\kappa+\lambda i)+i\varphi_2(\kappa+\lambda i)=0$ ἤ μετά τίς πράξεις $(A+Bi)+i(\Gamma+\Delta i)=0$ ἤ τέλος $(A-\Delta)+(B+\Gamma)i=0$. (1)

Στήν ἐφαρμογή 2 τῆς 1.6. τοῦ Κεφαλαίου I, δείξαμε ὅτι $\overline{\varphi(z)}=\varphi(\overline{z})$ καί ἐπομένως ἡ ἀριθμητική τιμή τοῦ $f_2(x)$ γιά $x=\kappa-\lambda i$ εἶναι:

$f_2(\kappa-\lambda i)=\varphi_1(\kappa-\lambda i)-i\varphi_2(\kappa-\lambda i)=(A-Bi)-i(\Gamma-\Delta i)=(A-\Delta)-(B+\Gamma)i$, ὁπότε λόγω τῆς (1) ἔχουμε $f_2(\kappa-\lambda i)=0$. Τό $f_2(x)$ ἔχει ἐπομένως ρίζες τίς συζυγεῖς τῶν ριζῶν τοῦ $f_1(x)$.

4.6. Ἀσκήσεις

1. Ἐπιλύστε τίς παρακάτω ἐξισώσεις

α) $4x^4-4x^3-25x^2+x+6=0$ β) $x^3+x^2-x-10=0$

γ) $x^3-4x^2+x+6=0$ δ) $2x^3-9x^2+7x+6=0$

ε) $3x^3+x^2-5x+8=0$ στ) $2x^5-11x^4+14x^3-2x^2+12x+9=0$

2. Προσδιορίστε τούς ἀκέραιους κ, ὥστε ἡ ἐξίσωση

$$x^3-x^2+\kappa x+4=0$$

νά ἔχει μία τουλάχιστον ρητή ρίζα.

3. Δεῖξτε ὅτι ἡ ἐξίσωση

$$x^\nu-1=0,\quad \nu\in\mathbf{N}$$

ἔχει ἀκριβῶς δύο ρητές ρίζες, ἄν ν ἄρτιος, καί ἀκριβῶς μία ρητή ρίζα, ἄν ν περιττός.

4. Ἔστω ὅτι ὁ ἀκέραιος λ εἶναι πρῶτος ἀριθμός καί διαιρέτης τῶν $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3 \in \mathbf{Z}$. Δεῖξτε ὅτι ὁ λ εἶναι διαιρέτης κάθε ἀκέραιας ρίζας τῆς ἐξισώσεως

$$x^3+\kappa_1x^2+\kappa_2x+\kappa_3=0$$

Μέ τή βοήθεια αὐτοῦ τοῦ συμπεράσματος ἐπιλύστε τήν ἐξίσωση

$$x^3-4x^2-4x+16=0$$

5. Ἄν μία ρίζα τῆς ἐξισώσεως

$$x^3-8x^2+\kappa x+\lambda=0$$

εἶναι ὁ μιγαδικός ἀριθμός $3-i$, προσδιορίστε τούς πραγματικούς ἀριθμούς κ καί λ καί τίς ἄλλες ρίζες της.

6. Δεῖξτε ὅτι ὁ μιγαδικός ἀριθμός $1+i$ εἶναι ρίζα τῆς ἐξισώσεως

$$x^4-3x^3+3x^2-2=0$$

καί στή συνέχεια βρεῖτε τίς ἄλλες ρίζες της.

7. Ἄν $f(x)$ εἶναι πολυώνυμο μέ πραγματικούς συντελεστές καί συντελεστή τοῦ μεγιστοβάθμιου ὅρου τό 1, τότε προσδιορίστε τό $f(x)$ στίς ἀκόλουθες περιπτώσεις
α) Τό $f(x)$ ἔχει τρεῖς ρίζες ἀπό τίς ὁποῖες οἱ δύο εἶναι τό 1 καί τό $2i$.
β) Τό $f(x)$ ἔχει τέσσερις ρίζες ἀπό τίς ὁποῖες οἱ δύο εἶναι τό i καί τό $1+i$

8. Νά γίνει γινόμενο πρώτων παραγόντων καθένα ἀπό τά παρακάτω πολυώνυμα τοῦ $\mathbf{C}[x]$
α) $f(x)=x^4-x^3-x-1$, ἄν ἕνας παράγοντάς του εἶναι τά $x-i$.
β) $g(x)=x^4+4x^3+10x^2+12x+21$ ἄν ὁ ἕνας παράγοντας εἶναι τό $(x+2-\sqrt{3}i)$.

9. Νά γίνει γινόμενο πρώτων παραγόντων τό πολυώνυμο $f(x)=2x^3-9x^2+7x+6$ τοῦ $\mathbf{C}[x]$.

10. Ἄν ρ_1,ρ_2 εἶναι οἱ ρίζες τοῦ $\varphi(x)=x^2+\alpha x+\beta$, $\beta\neq 0$ καί ρίζες τοῦ πολυωνύμου $f(x)=x^{2\nu}+$ $+\alpha^\nu x^\nu+\beta^\nu$, ὅπου ν ἄρτιος φυσικός ἀριθμός, δεῖξτε ὅτι οἱ ἀριθμοί $\frac{\rho_1}{\rho_2}$, $\frac{\rho_2}{\rho_1}$ εἶναι ρίζες τοῦ πολυωνύμου $P(x)=x^\nu+1+(1+x)^\nu$.

11. Ἄν ὑποθέσουμε ὅτι $f(x)=(f_1(x))^2+(f_2(x))^2$, ὅπου $f_1(x)$, $f_2(x)$ πολυώνυμα νιοστοῦ βαθμοῦ μέ πραγματικούς συντελεστές, δεῖξτε ὅτι τό $f(x)$ μπορεῖ νά γραφεῖ ὡς γινόμενο ν δευτεροβάθμιων πολυωνύμων μέ πραγματικούς συντελεστές.

12. Δεῖξτε ὅτι τό πολυώνυμο $f(x)=x^\nu\,\eta\mu\alpha-x\eta\mu(\nu\alpha)+\eta\mu(\nu-1)\alpha$, ὅπου $\alpha\in\mathbf{R}$ καί $\nu\in\mathbf{N}$ μέ $\nu\geq 2$, διαιρεῖται μέ τό πολυώνυμο $\varphi(x)=x^2-2x\sigma\upsilon\nu\alpha+1$.

13. Ἄν τό πολυώνυμο $f(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0$ ἔχει ρίζα τόν ἀριθμό ρ καί εἶναι $f(\alpha_0)=0$, δεῖξτε ὅτι ὁ ρ εἶναι καί ρίζα τοῦ πολυωνύμου $g(x)=f(f(f(x)))$.

14. Ἄς εἶναι $f(x)=x^2+\alpha x+\beta$. Καλοῦμε $g(x)$ τό πολυώνυμο πού προκύπτει ἄν στό $f(x)$ θέσουμε ὅπου x τό $f(x)$. Δεῖξτε ὅτι ἄν ρ_1,ρ_2 εἶναι οἱ ρίζες τοῦ πολυωνύμου $f(x)-x$, τότε αὐτές εἶναι καί ρίζες τοῦ $g(x)-x$.

15. Νά ἐξετάσετε ἄν τό πολυώνυμο $f(x)=27x^3+26x^2+9x-2$ ἔχει ρίζες τῆς μορφῆς $\sqrt{\rho}$, ὅπου ρ θετικός ρητός καί $\sqrt{\rho}\in\mathbf{R}-\mathbf{Q}$.

16. Δεῖξτε ὅτι τό πολυώνυμο $f(x)=x^3-x-1$ ἔχει μία ἄρρητη ρίζα ρ_1 καί δύο συζυγεῖς μιγαδικές. Δεῖξτε ἀκόμα ὅτι $1<\rho_1<\sqrt{2}$.

17. Δεῖξτε ὅτι τό πολυώνυμο $f(x)=x^\nu+2\lambda x+2$, μέ $\nu\in\mathbf{N}$, $\nu\geq 2$ καί λ ἀκέραιο ἀριθμό, δέν ἔχει ρητές ρίζες.

18. Ἄν ἕνα πολυώνυμο νιοστοῦ βαθμοῦ, μέ $\nu>4$ καί ἀκέραιους συντελεστές, λαμβάνει τήν τιμή 7 γιά τέσσερις διαφορετικές μεταξύ τους ἀκέραιες τιμές τοῦ x, δεῖξτε ὅτι γιά καμιά ἀκέραια τιμή τοῦ x τό πολυώνυμο δέ λαμβάνει τήν τιμή 14.

5. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 3ου ΚΑΙ 4ου ΒΑΘΜΟΥ

5.1. Εἰσαγωγή.

Μέ τήν ἐπίλυση πολυωνυμικῶν ἐξισώσεων ἔχουμε ἀσχοληθεῖ ἀπό τήν πρώτη τάξη τοῦ γυμνασίου. Ἔτσι ὅλοι γνωρίζουμε νά ἐπιλύουμε πρωτοβάθμιες καί δευτεροβάθμιες ἐξισώσεις καί ἀκόμα εἰδικές μορφές ἐξισώσεων μέ βαθμό μεγαλύτερο ἀπό τό δεύτερο, ὅπως εἶναι οἱ διτετράγωνες, οἱ ἀντίστροφες, οἱ διώνυμες, οἱ τριώνυμες κ.ἄ. Μέ τή βοήθεια ἐξάλλου τῶν θεωρημάτων πού ἀναφέρονται στίς ρίζες τῶν πολυωνύμων, μποροῦμε ἐπίσης νά ἐπιλύουμε ὁρισμένες ἐξισώσεις. **Ἀποδεικνύεται** στά μαθηματικά ὅτι ἡ ἐπίλυση μιᾶς ἐξισώσεως γενικῆς μορφῆς μέ βαθμό μεγαλύτερο ἀπό τόν τέταρτο δέν εἶναι πάντοτε δυνατή. Ἔτσι οἱ μόνες ἐξισώσεις πού ἐπιλύονται πάντοτε εἶναι οἱ ἐξισώσεις μέχρι καί τετάρτου βαθμοῦ.

Θά δοῦμε ἀμέσως ἀπό ἕνα τρόπο ἐπιλύσεως ἐξισώσεων 3ου καί 4ου βαθμοῦ μέ συντελεστές ἀπό τό **C**. Στά παραδείγματα, γιά εὐκολία στό λογισμό, θά περιοριστοῦμε σέ ἐξισώσεις μέ πραγματικούς συντελεστές.

5.2. Ἐπίλυση τῆς ἐξισώσεως $x^3+3\alpha x^2+3\beta x+\gamma=0$ (1)

Ἡ ἐξίσωση (1) εἶναι γενική μορφή τριτοβάθμιας ἐξισώσεως, ἀφοῦ κάθε ἐξίσωση τῆς μορφῆς

$$\alpha_3 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0$$

παίρνει τή μορφή (1), ὅταν διαιρέσουμε τούς ὅρους της μέ α_3 καί θέσουμε

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_3}=3\alpha,\quad \frac{\alpha_1}{\alpha_3}=3\beta,\quad \frac{\alpha_0}{\alpha_3}=\gamma$$

Κάνοντας τό μετασχηματισμό

$$\boxed{x = y-\alpha} \qquad (M_1)$$

ἡ (1) παίρνει τή μορφή

$$\boxed{y^3+3py+q=0} \qquad (2)$$

ὅπου εἶναι $p=\beta-\alpha^2$ καί $q=2\alpha^3-3\alpha\beta+\gamma$.

Κάνοντας τώρα τό μετασχηματισμό

$$\boxed{y = z-\frac{p}{z}} \qquad (M_2)$$

ἡ (2) παίρνει τή μορφή

$$z^6 + qz^3 - p^3 = 0 \qquad (3)$$

πού εἶναι δευτεροβάθμια ἐξίσωση μέ ἄγνωστο τό z^3.

Ἄν ρ_1, ρ_2 εἶναι οἱ ρίζες τῆς δευτεροβάθμιας ὡς πρός z^3 ἐξισώσεως (3), τότε ἐπιλύοντας μία ἀπό τίς διώνυμες ἐξισώσεις

$$z^3=\rho_1 \quad , \quad z^3=\rho_2 \qquad (4)$$

βρίσκουμε τρεῖς τιμές z_1, z_2, z_3 γιά τό z.

Θέτοντας τίς τιμές αὐτές στό μετασχηματισμό (M_2), βρίσκουμε ἀντίστοιχες τιμές y_1, y_2, y_3 γιά τό y, ἀπό τίς ὁποῖες μέ τή βοήθεια τοῦ (M_1) βρίσκουμε τίς ρίζες x_1, x_2, x_3 τῆς ἀρχικῆς.

Παρατήρηση: Ὁποια ἐξίσωση ἀπό τίς (4) καί ἄν ἐπιλύσουμε, θά βροῦμε τελικά τίς ἴδιες τιμές γιά τίς ρίζες x_1, x_2, x_3 τῆς (1).

Παράδειγμα:

Νά ἐπιλυθεῖ ἡ ἐξίσωση $7x^3-12x^2-8=0$.

Ἐπίλυση: Φέρνουμε τήν ἐξίσωση στή μορφή (1), δηλαδή γράφουμε τήν ἰσοδύναμή της

$$x^3+3\cdot\left(-\frac{4}{7}\right)x^2+3\cdot 0x+\left(-\frac{8}{7}\right)=0$$

Εἶναι λοιπόν $\alpha=-\frac{4}{7}$, $\beta=0$, $\gamma=-\frac{8}{7}$ καί ἄρα

$$p=-\frac{4^2}{7^2} \quad \text{καί} \quad q=-\frac{2^3\cdot 5\cdot 13}{7^3}$$

Ἡ (3) γίνεται $z^6-\frac{2^3\cdot 5\cdot 13}{7^3}z^3+\frac{4^6}{7^6}=0$

καί ἔχει λύσεις

$$z^3=\left(\frac{2}{7}\right)^3 \quad \text{εἴτε} \quad z^3=\left(\frac{8}{7}\right)^3$$

Ἀπό τήν $z^3=\left(\frac{2}{7}\right)^3$ παίρνουμε

$$z_1=\frac{2}{7},\quad z_2=\frac{-1+i\sqrt{3}}{7} \quad \text{καί} \quad z_3=\frac{-1-i\sqrt{3}}{7}$$

καί μέ τή βοήθεια τοῦ (M_2) βρίσκουμε

$$y_1=\frac{10}{7},\quad y_2=\frac{-5-3i\sqrt{3}}{7} \quad \text{καί} \quad y_3=\frac{-5+3i\sqrt{3}}{7}$$

ὁπότε μέ τή βοήθεια τοῦ (M_1) βρίσκουμε τίς ρίζες τῆς ἀρχικῆς πού εἶναι:

$$x_1=2,\quad x_2=\frac{-1-3i\sqrt{3}}{7},\quad x_3=\frac{-1+3i\sqrt{3}}{7}.$$

Σημείωση: Ἄν ἐπιλύσουμε τήν ἐξίσωση:

$$z^3=\left(\frac{8}{7}\right)^3$$

παίρνουμε $z_1=\frac{8}{7}$, $z_2=\frac{4(-1+i\sqrt{3})}{7}$ καί $z_3=\frac{4(-1-i\sqrt{3})}{7}$.

Βρίσκουμε λοιπόν τώρα

$$y_1=\frac{10}{7},\quad y_2=\frac{-5+3i\sqrt{3}}{7} \quad \text{καί} \quad y_3=\frac{-5-3i\sqrt{3}}{7}$$

ὁπότε καί πάλι εἶναι

$$x_1=2,\quad x_2=\frac{-1-3i\sqrt{3}}{7} \quad \text{καί} \quad x_3=\frac{-1+3i\sqrt{3}}{7}$$

Ἡ ἐξίσωση μποροῦσε νά ἐπιλυθεῖ καί μέ τή βοήθεια τοῦ θεωρήματος 3 τῆς 4.4.

5.3. Ἐπίλυση τῆς ἐξισώσεως $x^4+4\alpha x^3+6\beta x^2+4\gamma x+\delta=0$ (1)

Ἡ ἐξίσωση (1) εἶναι γενική μορφή τεταρτοβάθμιας ἐξισώσεως, ὅπως εὔκολα μποροῦμε νά διαπιστώσουμε.

Ἄν συμβολίσουμε μέ $\varphi(x)$ τό πρῶτο μέλος τῆς (1), τότε μποροῦμε νά τό γράψουμε σάν διαφορά τετραγώνων τῶν πολυωνύμων

$$\left.\begin{aligned} A(x) &= x^2+2\alpha x+\beta+2\lambda \\ B(x) &= 2\mu x+\nu \end{aligned}\right\} \qquad (M_1)$$

ὅπου τά λ,μ,ν εἶναι κατάλληλοι μιγαδικοί ἀριθμοί πού πρέπει νά τούς προσδιορίσουμε.

Πράγματι· γράφοντας

$$\varphi(x) = [A(x)]^2 - [B(x)]^2 \quad \text{ἤ}$$
$$[B(x)]^2 = [A(x)]^2 - \varphi(x)$$

μετά τίς πράξεις βρίσκουμε τήν ἰσότητα

$$(2\mu x+\nu)^2 = 4(\lambda+\alpha^2-\beta)x^2+4(\alpha\beta+2\alpha\lambda-\gamma)x+(\beta+2\lambda)^2-\delta \qquad (2)$$

Γιά νά μπορεῖ λοιπόν τό δεύτερο μέλος τῆς (2), πού εἶναι δευτεροβάθμιο τριώνυμο τοῦ x, νά γίνει τέλειο τετράγωνο, ἀρκεῖ νά προσδιορίσουμε τό λ, ὥστε νά μηδενίζεται ἡ διακρίνουσά του Δ. Μετά τίς πράξεις διαπιστώνουμε ὅτι ἡ ἐξίσωση $\Delta = 0$ εἶναι ἰσοδύναμη μέ τήν ἐξίσωση

$$4\lambda^3 - (\delta-4\alpha\gamma+3\beta^2)\lambda + \beta\delta+2\alpha\beta\gamma-\beta^3-\gamma^2-\alpha^2\delta=0 \qquad (3)$$

πού εἶναι τριτοβάθμια ὡς πρός λ καί ἐπιλύεται ὅπως ἡ (2) τῆς 5.2.

Μέ τή βοήθεια μιᾶς ἀπό τίς τρεῖς τιμές τοῦ λ, πού δίνει ἡ (3), ὑπολογίζουμε τό $[B(x)]^2$ ἀπό τήν (2) καί στή συνέχεια ἡ (1) λόγω τῆς $\varphi(x) = [A(x)]^2-[B(x)]^2$ ἰσοδυναμεῖ μέ τήν ἐξίσωση

$$[A(x) + B(x)]\,[A(x) - B(x)] = 0 \qquad (4)$$

πού ἐπιλύεται ἁπλά, γιατί ἀνάγεται σέ δύο δευτεροβάθμιες ἐξισώσεις.

Παρατηρήσεις

1. Ὁποια τιμή τοῦ λ, πού δίνει ἡ (3), καί ἄν βάλουμε στή (2) θά βροῦμε ἀντίστοιχα πολυώνυμα $A(x)$ καί $B(x)$ ἀπό τόν (M_1) πού δίνουν τίς λύσεις τῆς (1).
2. Ὁ σταθερός ὅρος τῆς (3) εἶναι τό ἀνάπτυγμα τῆς ὁρίζουσας τρίτης τάξεως

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix}$$

Παράδειγμα:

Νά ἐπιλυθεῖ ἡ ἐξίσωση $\varphi(x)=x^4+4x^3+12x^2+12x+27=0$

Ἐπίλυση:

Εἶναι $\alpha=1,\ \beta=2,\ \gamma=3,\ \delta=27.$

Ὁ σταθερός ὅρος τῆς (3) εἶναι $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 27 \end{vmatrix} = 54+6+6-8-9-27 = 22$

καί ὁ συντελεστής τοῦ πρωτοβάθμιου ὅρου της εἶναι

$$-(27-4\cdot 1\cdot 3+3\cdot 2^2) = -27.$$

Ἔχουμε λοιπόν τήν ἐξίσωση

$$4\lambda^3-27\lambda + 22 = 0$$

ἤ τήν ἰσοδύναμή της

$$\lambda^3+3\left(-\frac{9}{4}\right)\lambda+\frac{11}{2}=0$$

πού εἶναι ἡ (2) τῆς 5.2. μέ $p=-\dfrac{9}{4}$ καί $q=\dfrac{11}{2}$ καί ἔχει ρίζες

$$\lambda_1=2,\quad \lambda_2=\frac{-2+\sqrt{15}}{2} \quad \text{καί} \quad \lambda_3=\frac{-2-\sqrt{15}}{2}$$

Γιά $\lambda=2$ παίρνουμε ἀπό τόν (M_1)

$$A(x) = x^2+2x+6,$$

ὁπότε ἀπό τήν $[B(x)]^2 = [A(x)]^2-\varphi(x)$ ἤ ἀπό τήν (2) βρίσκουμε

$$[B(x)]^2 = (2x+3)^2$$

Οἱ ἐξισώσεις $A(x)+B(x)=0$, $A(x)-B(x)=0$ πού δίνει ἡ (4) γίνονται $(x^2+2x+6)+(2x+3)=0$, $(x^2+2x+6)-(2x+3)=0$ καί ἔχουμε ἀπό αὐτές τίς ρίζες τῆς ἀρχικῆς πού εἶναι οἱ

$$x_1=-2+i\sqrt{5},\quad x_2=-2-i\sqrt{5},\quad x_3=i\sqrt{3} \text{ καί } x_4=-i\sqrt{3}\cdot$$

5.4. 'Ασκήσεις.

1. 'Επιλύστε τίς ἐξισώσεις

α) $2x^3-9x^2+12x-4=0$ β) $x^3+3x^2-3x-14=0$

γ) $x^3-3x^2+12x+16=0$ δ) $x^3-9x-12=0$

2. 'Επιλύστε τίς ἐξισώσεις

α) $x^4-2x^3+4x^2-10x-5=0$

β) $x^4+32x-60=0$

6. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΚΑΙ ΑΝΙΣΩΣΕΩΝ

6.1. Εἰσαγωγή.

Οἱ ἐξισώσεις καί ἀνισώσεις μέ τίς ὁποῖες θά ἀσχοληθοῦμε ἐδῶ, θά ἔχουν πραγματικούς συντελεστές.

Διερεύνηση μιᾶς ἐξισώσεως, μέ ἄγνωστο $x \in \mathbf{C}$, κάνουμε

α) ὅταν ἀναζητοῦμε τό εἶδος καί τό πρόσημο τῶν ριζῶν της γιά τίς διάφορες πραγματικές τιμές τῶν συντελεστῶν της, ἤ

β) ὅταν ἀναζητοῦμε τίς τιμές τῶν συντελεστῶν γιά τίς ὁποῖες οἱ ρίζες τῆς ἐξισώσεως ἱκανοποιοῦν ὁρισμένες συνθῆκες.

Διερεύνηση μιᾶς ἀνισώσεως, μέ ἄγνωστο $x \in \mathrm{R}$, κάνουμε

α) ὅταν ἀναζητοῦμε τίς πραγματικές τιμές τοῦ x πού ἱκανοποιοῦν τήν ἀνίσωση γιά τίς διάφορες πραγματικές τιμές τῶν συντελεστῶν της, ἤ

β) ὅταν ἀναζητοῦμε τίς τιμές τῶν συντελεστῶν της γιά τίς ὁποῖες ἡ ἀνίσωση ἱκανοποιεῖται γιά δεδομένες τιμές τοῦ $x \in \mathrm{R}$.

Δίνουμε ἀμέσως μερικά ἐνδιαφέροντα παραδείγματα διερευνήσεων, πού φυσικά δέν ἐξαντλοῦν τό θέμα, ἀλλά μᾶς κατατοπίζουν σέ ἱκανοποιητικό βαθμό πάνω στά συνήθη προβλήματα διερευνήσεων.

6.2. Διερεύνηση ἐξισώσεων καί ἀνισώσεων.

1. Νά διερευνηθεῖ γιά τίς τιμές $\lambda \in R$ ἡ ἐξίσωση μέ ἄγνωστο x:

$$(\lambda-3)x^2-2(3\lambda-4)x+7\lambda-6=0 \quad (1)$$

Διερεύνηση:

α) Γιά $\lambda-3=0$ ἤ $\lambda=3$ ἡ (1) γίνεται $-10x+15=0$, δηλαδή πρωτοβάθμια, καί ἔχει τή λύση $x=\frac{3}{2}$.

β) Γιά $\lambda-3\neq0$ ἤ $\lambda\neq3$, ἡ (1) εἶναι δευτεροβάθμια. Θά ἐξετάσουμε λοιπόν τά πρόσημα τῶν Δ, P, S, ὅπου Δ ἡ διακρίνουσα, P τό γινόμενο τῶν ριζῶν καί S τό ἄθροισμά τους. Ἔχουμε:

i) $\Delta=4(2\lambda^2+3\lambda-2)$. Εἶναι $\Delta=0$ γιά $\lambda_1=-2$ καί $\lambda_2=\frac{1}{2}$

$\Delta>0$ ἤ $2\lambda^2+3\lambda-2>0$ γιά $\lambda<-2$ εἴτε $\lambda>\frac{1}{2}$

καί $\Delta<0$ γιά $-2<\lambda<\frac{1}{2}$.

ii) $P=\frac{7\lambda-6}{\lambda-3}$. Εἶναι $P=0$ γιά $\lambda=\frac{6}{7}$,

$P>0$ ἤ $(7\lambda-6)(\lambda-3)>0$ γιά $\lambda<\frac{6}{7}$ εἴτε $\lambda>3$

καί $P<0$ γιά $\frac{6}{7}<\lambda<3$

iii) $S=\frac{2(3\lambda-4)}{\lambda-3}$. Εἶναι $S=0$ γιά $\lambda=\frac{4}{3}$,

$S>0$ ἤ $2(3\lambda-4)(\lambda-3)>0$ γιά $\lambda<\frac{4}{3}$ εἴτε $\lambda>3$

καί $S<0$ γιά $\frac{4}{3}<\lambda<3$

Σ' ἕναν κοινό πίνακα βάζουμε τά παραπάνω μερικά συμπεράσματα καί βγάζουμε ἀπό τό συνδυασμό τους τά γενικά συμπεράσματα γιά τήν (1).

λ	Δ	P	S	$(\lambda-3)x^2-2(3\lambda-4)x+7\lambda-6=0$
$-\infty$				
	+	+	+	$0<\rho_1<\rho_2$
-2	0			$\rightarrow$ $\rho_1=\rho_2=2$
	−	+	+	$\rho_1,\rho_2\in C-R,\ \rho_1=\overline{\rho_2}$
$\frac{1}{2}$	0			$\rightarrow$ $\rho_1=\rho_2=1$
	+	+	+	$0<\rho_1<\rho_2$
$\frac{6}{7}$		0		$\rightarrow$ $\rho_1=0,\ \rho_2=\frac{1}{3}$
	+	−	+	$\rho_1<0<\rho_2,\quad \rho_2>\|\rho_1\|$
$\frac{4}{3}$			0	$\rightarrow$ $\rho_1=-\sqrt{2}=-\rho_2$
	+	−	−	$\rho_1<0<\rho_2,\quad \|\rho_1\|>\rho_2$
3		//	//	$\rightarrow$ πρωτοβάθμια $x=\frac{3}{2}$
$+\infty$	+	+	+	$0<\rho_1<\rho_2$

2. Νά διερευνηθεῖ γιά τίς τιμές $\lambda\in R$ μέ ἄγνωστο $x\in R$ ἡ ἀνίσωση

$$(\lambda+1)x^2-2(\lambda-1)x+2(\lambda-1)>0 \qquad (1)$$

Διερεύνηση. Θά ἀναζητήσουμε τό πρόσημο τοῦ $\alpha=\lambda+1$ καί τῆς διακρίνουσας $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$ γιά τίς διάφορες τιμές $\lambda\in \mathbf{R}$ καί θά σχηματίσουμε πίνακα γιά νά διερευνήσουμε τήν (1).

Ἔχουμε:

α) $\alpha=\lambda+1=0$ γιά $\lambda=-1$, $\alpha>0$ γιά $\lambda>-1$ καί $\alpha<0$ γιά $\lambda<-1$

β) $\Delta=-4\lambda^2-8\lambda+12$ καί εἶναι $\Delta=0$ γιά $\lambda_1=-3$ καί $\lambda_2=1$,
$\Delta>0$ ἤ $-\lambda^2-2\lambda+3>0$ ἤ $\lambda^2+2\lambda-3<0$ γιά $-3<\lambda<1$ καί
$\Delta<0$ γιά $\lambda<-3$ εἴτε $\lambda>1$

λ	α	Δ	Λύσεις τῆς $(\lambda+1)x^2-2(\lambda-1)x+2(\lambda-1)>0$
$-\infty$	−	−	Ἀδύνατη
-3		0	$\rightarrow$ Ἀδύνατη
	−	+	Λύσεις: $x\in \mathbf{R}$ μέ $\rho_1<x<\rho_2$
-1	0		$\rightarrow$ Πρωτοβάθμια. Λύσεις: $x\in \mathbf{R}$ μέ $x>1$
	+	+	Λύσεις: $x\in \mathbf{R}$ μέ $x<\rho_1<\rho_2$ εἴτε $\rho_1<\rho_2<x$
1		0	$\rightarrow$ Λύσεις: ὅλα τά $x\in \mathbf{R}$ μέ $x\neq 0$
	+	−	Λύσεις: ὅλα τά $x\in \mathbf{R}$
$+\infty$			

3. Νά διερευνηθεῖ γιά τίς τιμές $\lambda \in R$ μέ ἄγνωστο x ἡ ἐξίσωση

$$(4\lambda-1)x^4+2(2\lambda-3)x^2-(4\lambda+9)=0 \qquad (1)$$

Διερεύνηση: Ἀπό τή διερεύνηση τῆς ἐξισώσεως

$$(4\lambda-1)y^2+2(2\lambda-3)y-(4\lambda+9)=0 \qquad (2)$$

πού ὀνομάζεται ἐπιλύουσα τῆς (1) καί προκύπτει ἀπ' αὐτήν, ὅταν θέσουμε $x^2=y$, θά βγάλουμε τά συμπεράσματά μας γιά τήν (1).

Γιά $4\lambda-1=0$ ἤ $\lambda=\frac{1}{4}$ ἡ (2) γίνεται πρωτοβάθμια μέ λύση $y=-2$.

Γιά $4\lambda-1\neq 0$ ἤ $\lambda\neq\frac{1}{4}$ ἔχουμε:

α) $\Delta=80\lambda^2+80\lambda$ καί εἶναι $\Delta=0$ γιά $\lambda_1=0$ καί $\lambda_2=-1$,
$\Delta>0$ γιά $\lambda<-1$ εἴτε $\lambda>0$ καί $\Delta<0$ γιά $-1<\lambda<0$.

β) $P=\frac{-(4\lambda+9)}{4\lambda-1}$ καί εἶναι $P=0$ ἤ $4\lambda+9=0$ γιά $\lambda=-\frac{9}{4}$,

$P>0$ ἤ $-(4\lambda+9)(4\lambda-1)>0$ ἤ $(4\lambda+9)(4\lambda-1)<0$ γιά $-\frac{9}{4}<\lambda<\frac{1}{4}$

$P<0$ γιά $\lambda<-\frac{9}{4}$ εἴτε $\lambda>\frac{1}{4}$

γ) $S=\frac{-2(2\lambda-3)}{4\lambda-1}$ καί εἶναι $S=0$ γιά $\lambda=\frac{3}{2}$,

$S>0$ ἤ $-2(2\lambda-3)(4\lambda-1)>0$ ἤ $2(2\lambda-3)(4\lambda-1)<0$ γιά $\frac{1}{4}<\lambda<\frac{3}{2}$

$S<0$ γιά $\lambda<\frac{1}{4}$ εἴτε $\lambda>\frac{3}{2}$.

λ	Δ	P	S	Συμπεράσματα γιά τήν ἐπιλύουσα	Συμπεράσματα γιά τίς ρίζες τῆς $(4\lambda-1)x^4+2(2\lambda-3)x^2-(4\lambda+9)=0$
$-\infty$					
	+	−	−	$y_1<0<y_2$, $\lvert y_1\rvert>y_2$	$\rho_1=-\sqrt{y_2}$, $\rho_2=\sqrt{y_2}$, $\rho_3=-i\sqrt{-y_1}$, $\rho_4=i\sqrt{-y_1}$
$-\frac{9}{4}$		0		$y_1=-\frac{9}{4}$, $y_2=0$	$\rho_1=\rho_2=0$, $\rho_3=-\frac{3i}{2}$, $\rho_4=\frac{3i}{2}$
	+	+	−	$y_1<y_2<0$	$\rho_1=-i\sqrt{-y_1}$, $\rho_2=i\sqrt{-y_1}$, $\rho_3=-i\sqrt{-y_2}$, $\rho_4=i\sqrt{-y_2}$
-1	0			$y_1=y_2=-1$	$\rho_1=\rho_3=-i$ $\rho_2=\rho_4=i$
	−	+	−	$y_1, y_2\in C-R$ $y_1=\bar{y}_2$	$\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4\in C-R$
0	0			$y_1=y_2=-3$	$\rho_1=\rho_3=-i\sqrt{3}$ $\rho_2=\rho_4=i\sqrt{3}$
	+	+	−	$y_1<y_2<0$	$\rho_1=-i\sqrt{-y_1}$, $\rho_2=i\sqrt{-y_1}$, $\rho_3=-i\sqrt{-y_2}$, $\rho_4=i\sqrt{-y_2}$
$\frac{1}{4}$		//	//	Πρωτοβ. $y=-2$	$\rho_1=-i\sqrt{2}$, $\rho_2=i\sqrt{2}$
	+	−	+	$y_1<0<y_2$, $y_2>\lvert y_1\rvert$	$\rho_1=-i\sqrt{-y_1}$, $\rho_2=i\sqrt{-y_1}$, $\rho_3=-\sqrt{y_2}$, $\rho_4=\sqrt{y_2}$
$\frac{3}{2}$			0	$y_1=-\sqrt{3}$, $y_2=\sqrt{3}$	$\rho_1=-i\sqrt[4]{3}$, $\rho_2=i\sqrt[4]{3}$, $\rho_3=-\sqrt[4]{3}$, $\rho_4=\sqrt[4]{3}$
	+	−	−	$y_1<0<y_2$, $\lvert y_1\rvert>y_2$	$\rho_1=-i\sqrt{-y_1}$, $\rho_2=i\sqrt{-y_1}$, $\rho_3=-\sqrt{y_2}$, $\rho_4=\sqrt{y_2}$
$+\infty$					

4. Βρεῖτε τίς τιμές τοῦ $\lambda \in R$ γιά τίς ὁποῖες ἡ ἐξίσωση

$$(2\lambda+1)x^2-4x+2\lambda=0$$

ἔχει δύο ρίζες πραγματικές ἄνισες καί μικρότερες ἀπό τόν 3.

Λύση:

Γιά νά ἔχει ἡ ἐξίσωσή μας δύο πραγματικές καί ἄνισες ρίζες, ἀρκεῖ νά εἶναι

$2\lambda+1 \neq 0$ καί $\Delta' = \frac{1}{4}(\beta^2-4\alpha\gamma) = \left(\frac{\beta}{2}\right)^2 - \alpha\gamma > 0$, δηλαδή

$\lambda \neq -\frac{1}{2}$ καί $4-2\lambda(2\lambda+1)>0$ ἤ

$\lambda \neq -\frac{1}{2}$ καί $2\lambda^2+\lambda-2<0$ ἤ

$$\boxed{\lambda \neq -\frac{1}{2} \quad \text{καί} \quad \frac{-1-\sqrt{17}}{4} < \lambda < \frac{-1+\sqrt{17}}{4}} \qquad (1)$$

Γιά νά βρίσκεται ὁ 3 ἔξω ἀπό τό διάστημα τῶν ριζῶν, ἀρκεῖ, μέ τούς περιορισμούς (1), ἡ ἀριθμητική τιμή τοῦ τριωνύμου $f(x) = (2\lambda+1)x^2-4x+2\lambda$, γιά $x=3$, νά εἶναι ὁμόσημη τοῦ $\alpha=2\lambda+1$, δηλ. ἀρκεῖ $(2\lambda+1)f(3)>0$ ἤ $(2\lambda+1)(20\lambda-3)>0$ ἤ

$$\boxed{\lambda < -\frac{1}{2} \quad \text{εἴτε} \quad \lambda > \frac{3}{20}} \qquad (2)$$

Ἐπειδή θέλουμε ἀκόμα νά εἶναι καί

$\left.\begin{matrix}\rho_1<3\\ \rho_2<3\end{matrix}\right\}$, ἀρκεῖ μέ τούς περιορισμούς (1) καί (2)

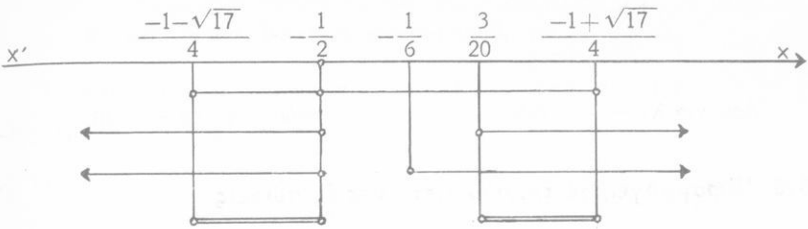
νά εἶναι ἀκόμα $\frac{\rho_1+\rho_2}{2}<3$ ἤ $-\frac{\beta}{2\alpha}<3$ ἤ $3+\frac{\beta}{2\alpha}>0$, δηλαδή

$$3-\frac{2}{2\lambda+1}>0 \quad \text{ἤ} \quad \frac{3(2\lambda+1)-2}{2\lambda+1}>0$$

$$\text{ἤ} \quad (6\lambda+1)(2\lambda+1)>0 \quad \text{ἤ}$$

$$\boxed{\lambda < -\frac{1}{2} \quad \text{εἴτε} \quad \lambda > -\frac{1}{6}} \qquad (3)$$

Μέ τή βοήθεια τῆς εὐθείας τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν βρίσκουμε εὔκολα ποιές τιμές τοῦ $\lambda \in \mathbf{R}$ ἱκανοποιοῦν τίς (1), (2), (3).



Ἄρα ἡ ἐξίσωση θά ἔχει δύο πραγματικές καί ἄνισες ρίζες καί μικρότερες ἀπό τόν 3

γιά $$\lambda \in \left(\frac{-1-\sqrt{17}}{4}, -\frac{1}{2} \right) \cup \left(\frac{3}{20}, \frac{-1+\sqrt{17}}{4} \right)$$

5. Γιά τήν προηγούμενη ἐξίσωση προσδιορίστε τούς $\lambda \in R$, γιά νά βρίσκεται ἡ μία ρίζα της στό διάστημα (—1,3).

Λύση:

Οἱ ἀριθμητικές τιμές τοῦ $f(x)$ γιά $x=-1$ καί γιά $x=3$ θά εἶναι ἡ μία ὁμόσημη τοῦ α καί ἡ ἄλλη ἑτερόσημη, ὁπότε ἀρκεῖ νά εἶναι

$$f(-1)f(3)<0. \qquad (1)$$

Ἡ συνθήκη αὐτή ἐξασφαλίζει συγχρόνως καί τήν ὕπαρξη πραγματικῶν καί ἄνισων ριζῶν, ὅταν εἶναι $\alpha \neq 0$ δηλ. $\lambda \neq -\frac{1}{2}$.

Ἡ (1) ἰσοδυναμεῖ μέ τήν ἀνίσωση

$$(4\lambda+5)(20\lambda-3)<0$$

πού ἀληθεύει γιά $$-\frac{5}{4} < \lambda < \frac{3}{20}$$

καί ἄρα ἡ ἐξίσωση γιά τίς τιμές

$\lambda \in \left(-\frac{5}{4}, -\frac{1}{2} \right) \cup \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{20} \right)$ θά ἔχει ρίζες πραγματικές καί ἄνισες, ἀπό τίς ὁποῖες ἡ μία θά ἀνήκει στό διάστημα (—1,3).

6. Βρεῖτε τούς $\lambda \in R$, ὥστε ἡ ἀνίσωση

$$\lambda x^2-2(\lambda+1)x+\lambda<0$$

νά ἀληθεύει γιά κάθε $x \in R$.

Λύση:

Ἐπειδή τό τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ διατηρεῖ τό ἴδιο πρόσημο γιά ὅλα τά $x \in \mathbf{R}$, μόνο ὅταν εἶναι $\Delta<0$, ἀρκεῖ νά εἶναι

$$\alpha=\lambda<0 \quad \text{καί} \quad \Delta'=\frac{1}{4}[[2(\lambda+1)]^2-4\lambda\cdot\lambda]<0 \quad \text{ἤ}$$

$$\lambda<0 \quad \text{καί} \quad (\lambda+1)^2-\lambda^2<0 \quad \text{ἤ}$$

$\lambda<0$ καί $2\lambda+1<0$ ή

$$\lambda<-\frac{1}{2}$$

Ἄρα γιά $\lambda<-\frac{1}{2}$ ἡ δεδομένη ἀνίσωση ἀληθεύει γιά ὅλα τά $x\in\mathbf{R}$.

6.3. Ἐφαρμογές σέ τριγωνομετρικές ἐξισώσεις.

1. Νά ἐπιλυθεῖ καί νά διερευνηθεῖ ἡ ἐξίσωση

$$\alpha\eta\mu^2x+\beta\eta\mu x+\gamma=0,\quad \alpha,\beta,\gamma\in\mathbf{R}\ \text{καί}\ \alpha\neq0 \tag{1}$$

Ἐπίλυση: Ἄν θέσουμε $\eta\mu x=t$ ἡ (1) γίνεται ἀλγεβρική ἐξίσωση ὡς πρός t:

$$f(t)=\alpha t^2+\beta t+\gamma=0,\quad \alpha\neq0 \tag{2}$$

Ἄν t_1,t_2 εἶναι οἱ ρίζες τῆς (2), τότε ἡ (1) ἔχει γιά γενική λύση ὅλες τίς λύσεις τῶν βασικῶν ἐξισώσεων

$$\eta\mu x=t_1\quad,\quad \eta\mu x=t_2 \tag{3}$$

Γιά νά ἔχει ἡ (1) λύση, πρέπει νά ἔχει λύση μία τουλάχιστον ἀπό τίς (3). Δηλαδή πρέπει οἱ ἀριθμοί t_1,t_2 νά εἶναι πραγματικοί καί ἕνας τουλάχιστον νά βρίσκεται στό διάστημα $[-1,1]$. Ἔτσι ἔχουμε τήν ἀκόλουθη διερεύνηση.

Διερεύνηση. α) Ἡ ἐξίσωση $f(t)=\alpha t^2+\beta t+\gamma=0$ ἔχει **μιά μόνο δεκτή ρίζα**, ὅταν:

i) Μιά μόνο ἀπό τίς ρίζες της t_1,t_2 (ἔστω $t_1<t_2$) ἀνήκει στό διάστημα $(-1,1)$, δηλαδή εἶναι $t_1<-1<t_2<1$ ἤ $-1<t_1<1<t_2$.

Ἡ ἱκανή καί ἀναγκαία συνθήκη γι' αὐτό εἶναι:

$\alpha f(-1)\cdot\alpha f(1)<0$ ἤ $\alpha^2 f(-1)\cdot f(1)<0$ ἤ $\mathbf{f(-1).f(1)<0}$, δηλ. $\mathbf{(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha-\beta+\gamma)<0}$

ii) Ἡ μιά ρίζα εἶναι 1 καί ἡ ἄλλη ἔξω ἀπό τό διάστημα $[-1,1]$. Αὐτό ἰσχύει ὅταν καί μόνο ὅταν

$$\mathbf{f(1)=0}\ \textbf{καί}\ \left|\frac{\gamma}{\alpha}\right|>\mathbf{1},\ \text{δηλ.}\ \mathbf{\alpha+\beta+\gamma=0}\ \textbf{καί}\ \left|\frac{\gamma}{\alpha}\right|>1$$

γιατί, ἀπό $t_1\cdot t_2=\frac{\gamma}{\alpha}$, ἄν ἡ μιά ρίζα εἶναι ὁ ἀριθμός 1 ἡ ἄλλη εἶναι ὁ $\frac{\gamma}{\alpha}$.

iii) Ἡ μιά ρίζα εἶναι τό -1 καί ἡ ἄλλη ἔξω ἀπό τό διάστημα $[-1,1]$. Αὐτό ἰσχύει, ὅταν καί μόνον ὅταν:

$$\mathbf{f(-1)=0}\ \textbf{καί}\ \left|\frac{\gamma}{\alpha}\right|>\mathbf{1},\ \text{δηλ.}\ \mathbf{\alpha-\beta+\gamma=0}\ \textbf{καί}\ \left|\frac{\gamma}{\alpha}\right|>\mathbf{1}$$

β) Ἡ ἐξίσωση $f(t)=\alpha t^2+\beta t+\gamma=0$ ἔχει δύο δεκτές ρίζες, $-1\leq t_1<t_2\leq1$, ὅταν καί μόνον ὅταν $\mathbf{\Delta>0,\ \alpha f(-1)\geq0,\ \alpha f(1)\geq0}$ καί $\mathbf{-1<-\frac{\beta}{2\alpha}<1}$, δηλαδή

$$\beta^2-4\alpha\gamma>0,\ \alpha(\alpha-\beta+\gamma)\geq 0,\ \alpha(\alpha+\beta+\gamma)\geq 0,\ \text{καί}\ \left|-\frac{\beta}{2\alpha}\right|<1$$

Ἡ τελευταία συνθήκη προκύπτει ἀπό τό ὅτι $-1\leq t_1<t_2\leq 1$ ἤ

$-1\leq t_1<\frac{t_1+t_2}{2}<t_2\leq 1$ καί $t_1+t_2=-\frac{\beta}{\alpha}$.

γ) Ἡ ἐξίσωση $f(t)=\alpha t^2+\beta t+\gamma=0$ ἔχει μιά διπλή ρίζα δεκτή, ὅταν καί μόνο ὅταν $\Delta=0$ καί $-1\leq t_1=t_2=\frac{t_1+t_2}{2}\leq 1$, δηλαδή $\beta^2-4\alpha\gamma=0$ καί $\left|-\frac{\beta}{2\alpha}\right|\leq 1$.

δ) Ἡ ἐξίσωση $f(t)=\alpha t^2+\beta t+\gamma=0$ δέν ἔχει καμιά ρίζα δεκτή ὅταν καί μόνο ὅταν

i) $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma<0$, δηλ. ἡ ἐξίσωση ἔχει ρίζες μιγαδικές.

ii) ἔχει δυό ρίζες μικρότερες ἀπό τό -1, ὁπότε θά ἰσχύουν

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma\geq 0,\ \alpha f(-1)>0\ \text{καί}\ t_1\leq\frac{t_1+t_2}{2}\leq t_2<-1,\ \text{δηλαδή}$$

$$\beta^2-4\alpha\gamma>0,\ \alpha(\alpha-\beta+\gamma)>0\ \text{καί}\ -\frac{\beta}{2\alpha}<-1.$$

iii) Ἔχει δυό ρίζες μεγαλύτερες ἀπό τό $+1$, ὁπότε θά ἰσχύουν

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma\geq 0,\ \alpha f(1)>0\ \text{καί}\ 1<t_1\leq\frac{t_1+t_2}{2}\leq t_2,\ \text{δηλαδή}$$

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma\geq 0,\ \alpha(\alpha+\beta+\gamma)>0\ \text{καί}\ -\frac{\beta}{2\alpha}>1.$$

iv) Ἔχει δυό ρίζες πραγματικές ἀπό τίς ὁποῖες ἡ μία εἶναι μικρότερη ἀπό τό -1 καί ἡ ἄλλη μεγαλύτερη ἀπό τό $+1$, ὁπότε θά ἰσχύουν:

$\alpha f(-1)<0$ καί $\alpha f(1)<0$, δηλαδή $\alpha(\alpha-\beta+\gamma)<0$ καί $\alpha(\alpha+\beta+\gamma)<0$

2. Νά ἐπιλυθεῖ καί νά διερευνηθεῖ ἡ ἐξίσωση (γραμμική τριγωνομετρική)

$$\alpha\eta\mu x+\beta\sigma\upsilon\nu x=\gamma,\quad \alpha.\beta.\gamma\neq 0 \tag{1}$$

Ἐπίλυση. 1ος τρόπος. Ἡ (1) γράφεται:

$\eta\mu x+\frac{\beta}{\alpha}\sigma\upsilon\nu x=\frac{\gamma}{\alpha}$, καί ἐπειδή ὑπάρχει πάντοτε τόξο $\theta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

τέτοιο, ὥστε $\varepsilon\varphi\theta=\frac{\beta}{\alpha}$ ἔχουμε:

$\eta\mu x+\varepsilon\varphi\theta\cdot\sigma\upsilon\nu x=\frac{\gamma}{\alpha}$ ἤ $\eta\mu x+\frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}\cdot\sigma\upsilon\nu x=\frac{\gamma}{\alpha}$ ἤ $\eta\mu x\sigma\upsilon\nu\theta+\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu x=$

$\frac{\gamma}{\alpha}\sigma\upsilon\nu\theta$ ἤ

$$\eta\mu(x+\theta)=\frac{\gamma}{\alpha}\sigma\upsilon\nu\theta \tag{2}$$

Ἡ (2) εἶναι βασική τριγωνομετρική ἐξίσωση καί **ἔχει λύση, ὅταν καί μόνο ὅταν**

$$\left|\frac{\gamma}{\alpha}\sigma\upsilon\nu\theta\right| \leq 1 \Leftrightarrow \frac{\gamma^2}{\alpha^2}\sigma\upsilon\nu^2\theta \leq 1 \Leftrightarrow \frac{\gamma^2}{\alpha^2} \leq \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta} \Leftrightarrow \frac{\gamma^2}{\alpha^2} \leq 1+\varepsilon\varphi^2\theta \Leftrightarrow \frac{\gamma^2}{\alpha^2} \leq 1+\frac{\beta^2}{\alpha^2} \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2+\beta^2 \geq \gamma^2 \qquad (3)$$

Δηλαδή, ἄν ἰσχύει $\alpha^2+\beta^2 \geq \gamma^2$, τότε ὑπάρχει τόξο $\omega \in [0,2\pi)$ τέτοιο, ὥστε

$$\eta\mu\omega = \frac{\gamma}{\alpha}\sigma\upsilon\nu\theta \qquad (4)$$

Ὁπότε ἡ (2) γίνεται:

$$\eta\mu\,(x+\theta) = \eta\mu\omega$$

Ἀπό τήν τελευταία παίρνουμε τίς λύσεις

$$\left\{\begin{array}{l} x+\theta=2\kappa\pi+\omega,\ \kappa\in\mathbf{Z} \\ \quad\text{ἤ} \\ x+\theta=(2\kappa+1)\pi-\omega,\ \kappa\in\mathbf{Z} \end{array}\right. \quad \text{ἤ} \quad \left\{\begin{array}{l} x=2\kappa\pi+\omega-\theta,\quad \kappa\in\mathbf{Z} \\ \quad\text{ἤ} \\ x=(2\kappa+1)\pi-\omega-\theta,\ \kappa\in\mathbf{Z} \end{array}\right.$$

Μέ αὐτό τόν τρόπο ἐπιλύουμε συνήθως τίς γραμμικές τριγωνομετρικές ἐξισώσεις (1), ὅταν τό τόξο θ, γιά τό ὁποῖο εἶναι $\varepsilon\varphi\theta=\frac{\beta}{\alpha}$, εἶναι γνωστό τόξο. Ὅταν αὐτό δέ συμβαίνει χρησιμοποιοῦμε τόν ἀκόλουθο τρόπο.

2ος τρόπος: Γνωρίζουμε ὅτι $\eta\mu x=\dfrac{2\varepsilon\varphi\frac{x}{2}}{1+\varepsilon\varphi^2\frac{x}{2}}$ καί $\sigma\upsilon\nu x=\dfrac{1-\varepsilon\varphi^2\frac{x}{2}}{1+\varepsilon\varphi^2\frac{x}{2}}$

$$\text{μέ } \frac{x}{2} \neq \kappa\pi+\frac{\pi}{2},\ \text{δηλ. } x\neq 2\kappa\pi+\pi,\ \kappa\in\mathbf{Z},$$

ὁπότε ἡ (1) γράφεται:

$$\alpha\cdot\frac{2\varepsilon\varphi\frac{x}{2}}{1+\varepsilon\varphi^2\frac{x}{2}}+\beta\cdot\frac{1-\varepsilon\varphi^2\frac{x}{2}}{1+\varepsilon\varphi^2\frac{x}{2}}=\gamma \quad \text{καί μετά τίς πράξεις:}$$

$$(\beta+\gamma)\varepsilon\varphi^2\frac{x}{2}-2\alpha\varepsilon\varphi\frac{x}{2}+(\gamma-\beta)=0,\ \text{μέ } x\neq 2\kappa\pi+\pi,\ \kappa\in\mathbf{Z} \qquad (2')$$

Τονίζουμε ἐδῶ ὅτι ἡ (1) δέν εἶναι ἰσοδύναμη μέ τή (2′) γιατί ἡ (2′), δέν ἔχει λύσεις τῆς μορφῆς $x=2\kappa\pi+\pi$, $\kappa\in\mathbf{Z}$, ἐνῶ δέν ἀποκλείεται αὐτές νά εἶναι λύσεις τῆς (1).

Ἡ (2′) ἐπιλύεται τώρα εὔκολα

i) Ἄν $\beta+\gamma=0$, δηλ. $\gamma=-\beta$ ἡ (2′) γίνεται $\varepsilon\varphi\frac{x}{2}=-\frac{\beta}{\alpha}$, ἡ ὁποία εἶναι βασική τριγωνομετρική ἐξίσωση.

ii) Ἄν $\beta+\gamma\neq 0$, τότε ἡ (2′) ἔχει λύση, ὅταν καί μόνον ὅταν $\Delta\geq 0$, δηλ.

$$\Delta=4\alpha^2-4(\beta+\gamma)\cdot(\gamma-\beta)\geq 0, \text{ δηλ. } \alpha^2+\beta^2\geq\gamma^2,$$

ὁπότε $\varepsilon\varphi\frac{x}{2}=\frac{2\alpha\pm\sqrt{\Delta}}{2(\beta+\gamma)}$, ἀπό ὅπου ὑπολογίζουμε τά τόξα x.

Στήν (1) ἐξετάζουμε ἄν ἔχει καί ρίζες τῆς μορφῆς $x=2\kappa\pi+\pi$, $\kappa\in\mathbf{Z}$

3. **Νά ἐπιλυθεῖ ἡ ἐξίσωση (συμμετρική ὡς πρός ημx καί συνx)**

$$\mathbf{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu^2 x\ \sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x\ \sigma\upsilon\nu^2 x=1} \qquad (1)$$

Ἐπίλυση: Ἡ ἐξίσωση (1) εἶναι συμμετρική ὡς πρός ημx καί συνx, δηλ. δέ μεταβάλλεται ἄν θέσουμε ὅπου ημx τό συνx καί ὅπου συνx τό ημx. Τίς συμμετρικές ἐξισώσεις μποροῦμε πάντοτε νά τίς ἐκφράσουμε μέ ὅρους τά ημx+συνx καί ημx·συνx. Ἔτσι ἡ ἐξίσωση (1) γράφεται

$$(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)-\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)=1, \text{ δηλ. } (\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)\ (1-\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x)=1 \quad (2)$$

Θέτουμε τώρα

$$\mathbf{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x=t}, \text{ ὁπότε } \eta\mu^2x+\sigma\upsilon\nu^2x+2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x=t^2, \text{ δηλ. } \mathbf{\eta\mu x.\sigma\upsilon\nu x=\frac{t^2-1}{2}}. \quad (3)$$

Ὁ μετασχηματισμός ημx+συνx=t γράφεται:

$$\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=t \text{ ἤ } \sigma\upsilon\nu\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{t}{\sqrt{2}},$$

Γιά νά ἔχει νόημα ἡ τελευταία ἰσότητα πρέπει:

$$\left|\frac{t}{\sqrt{2}}\right|\leq 1, \text{ δηλ. } -\sqrt{2}\leq t\leq\sqrt{2} \qquad (4)$$

Ἑπομένως ἡ ἐξίσωση (2) γράφεται:

$$t\left(1-\frac{t^2-1}{2}\right)=1 \text{ ἤ } t\left(\frac{2-t^2+1}{2}\right)=1, \text{ δηλαδή}$$

$$t^3-3t+2=0, \text{ μέ } -\sqrt{2}\leq t\leq\sqrt{2} \qquad (5)$$

Ἡ (5) εἶναι 3ου βαθμοῦ ὡς πρός t καί ἐπιλύεται μέ ἕναν ἀπό τούς γνωστούς τρόπους. Ἀπό τούς διαιρέτες τοῦ σταθεροῦ ὅρου βλέπουμε ἀμέσως ὅτι τό +1 εἶναι ρίζα της.

Ἔτσι ἡ (5) γίνεται:

$$(t-1)\ (t^2+t-2)=0, \text{ μέ } -\sqrt{2}\leq t\leq\sqrt{2} \qquad (6)$$

Ἡ (6) ἔχει ρίζες t=1 (διπλή) καί t=−2, ἡ ὁποία ἀπορρίπτεται, γιατί δέν ἱκανοποιεῖ τόν περιορισμό.

Ἑπομένως ἔχουμε:

$$\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x=1 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sigma\upsilon\nu\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x-\frac{\pi}{4}=2\kappa\pi\pm\frac{\pi}{4}, \quad \kappa\in\mathbf{Z}.$$

'Από τήν τελευταία παίρνουμε τίς λύσεις:

$$\begin{cases} x=2\kappa\pi+\dfrac{\pi}{2}, & \kappa\in\mathbf{Z} \\ \quad\text{ἤ} & \\ x=2\kappa\pi, & \kappa\in\mathbf{Z} \end{cases}$$

6.4. 'Ασκήσεις.

1. Νά ὁριστεῖ ὁ πραγματικός ἀριθμός λ, ὥστε οἱ ρίζες τῆς ἐξισώσεως

$$(\lambda-2)x^2+(2\lambda+1)x+\lambda=0$$

νά εἶναι: α) πραγματικές καί ἄνισες β) πραγματικές καί ἴσες

γ) ἀντίστροφες, δ) μιγαδικές καί ε) ἡ ἀπόλυτη τιμή τῆς διαφορᾶς τους μικρότερη ἀπό τό 2.

2. Βρεῖτε τίς πραγματικές καί τίς μιγαδικές ρίζες τῆς ἐξισώσεως

$$x^2+8x+|x|+20=0$$

3. Νά διερευνηθεῖ γιά ὅλες τίς πραγματικές τιμές τοῦ λ ἡ ἐξίσωση:

$$(\lambda^2+3\lambda+4)x^2+2(\lambda-1)x+9\lambda-9=0$$

4. Στήν ἐξίσωση $x^4-5\lambda x^2+\lambda-2$, νά ὁριστεῖ ὁ λ, ὥστε νά ἔχει τέσσερις ρίζες πραγματικές.

5. Νά ἐπιλυθεῖ καί νά διερευνηθεῖ ἡ ἀνίσωση

$$(\lambda-3)x^2-4x-2\lambda<0.$$

6. Νά ἐπιλυθεῖ καί νά διερευνηθεῖ ἡ ἐξίσωση

$$(\lambda-1)x^4+3\lambda x^3+x^2-3\lambda x+(\lambda-1)=0$$

7. Νά ἐπιλυθεῖ καί νά διερευνηθεῖ ἡ ἀνίσωση: $\dfrac{\lambda(x+1)}{x-1}>1$

8. Νά ἐπιλυθοῦν οἱ ἐξισώσεις α) $\text{συν}^2x-\dfrac{3}{2}\text{συν}x+\dfrac{1}{2}=0$,

β) $(1+\sqrt{3})\text{ημ}x+(1-\sqrt{3})\text{συν}x=1+\sqrt{3}$, γ) $\text{ημ}x+\sqrt{3}\,\text{συν}x=\sqrt{2}$ καί

δ) $\text{ημ}x+\text{συν}x-\text{ημ}x\text{συν}x=1$.

9. Νά ἐπιλυθοῦν καί νά διερευνηθοῦν οἱ ἐξισώσεις:

α) $\text{ημ}2x=\lambda\text{ημ}3x$ καί β) $\text{ημ}x+(\lambda-1)\text{συν}x=1-2\lambda,\ \lambda\in\mathbf{Z}$

10. Νά ἐπιλυθεῖ καί νά διερευνηθεῖ ἡ ἐξίσωση

$$\lambda(\text{ημ}x+\text{συν}x)-\text{ημ}x\cdot\text{συν}x=1.$$

11. Νά βρεθεῖ ἡ ἱκανή καί ἀναγκαία συνθήκη, γιά νά ἔχει ἡ ἐξίσωση

$$\mu\,\text{συν}x-(2\mu+1)\text{ημ}x=\mu$$

δύο ρίζες x_1, x_2, μέ $x_1-x_2\neq 2\kappa\pi$, $\kappa\in\mathbf{Z}$, τέτοιες, ὥστε

α) $|x_1-x_2|=\dfrac{\pi}{2}$

καί β) $x_1+x_2=\dfrac{3\pi}{2}$

7. ΣΥΝΤΟΜΗ ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

1. Κάθε παράσταση τῆς μορφῆς

$$\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0,$$

μέ $\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_\nu\in\mathbf{C}$ καί $\nu\in\mathbf{N}_0$ ὀνομάζεται **πολυώνυμο τοῦ x** καί συμβολίζεται μέ $f(x)$, $g(x)$, κ.ἄ.

2. Στό σύνολο $\mathbf{C}_{[x]}$ τῶν πολυωνύμων ὁρίζουμε δυό πράξεις, τήν πρόσθεση «+» καί τόν πολλαπλασιασμό «·». **Ἡ δομή ($\mathbf{C}_{[x]}$, +, ·) εἶναι ἀντιμεταθετικός δακτύλιος μέ μοναδιαῖο στοιχεῖο.**

3. Ἄν $f(x)$ καί $g(x)$ εἶναι πολυώνυμα τοῦ $\mathbf{C}_{[x]}$ μέ $g(x)\neq\mathbf{0}$, τότε ὑπάρχει μοναδικό ζεῦγος πολυωνύμων $\pi(x)$ καί $\upsilon(x)$ τοῦ $\mathbf{C}_{[x]}$, μέ $\upsilon(x)=\mathbf{0}$ ἤ βαθμ. $\upsilon(x)<$ $<$βαθμ. $g(x)$ τέτοιο, ὥστε

$$f(x)=g(x)\pi(x)+\upsilon(x) \qquad (1)$$

4. Ἄν στήν (1) εἶναι $\upsilon(x)=\mathbf{0}$, τότε τό $g(x)$ εἶναι διαιρέτης τοῦ $f(x)$.

5. Κάθε συνάρτηση

$$f: A\to A$$

μέ τύπο

$$\mathbf{f(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0}$$

ὅπου $\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_\nu\in A$ καί A ἕνα ἀπό τά $\mathbf{R},\mathbf{C}$, ὀνομάζεται **πολυωνυμική συνάρτηση τοῦ x.**

Ὁ ἀριθμός

$$f(\rho)=\alpha_\nu\rho^\nu+\alpha_{\nu-1}\rho^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1\rho+\alpha_0,$$

πού εἶναι εἰκόνα τοῦ ρ μέσω τῆς f, ὀνομάζεται **ἀριθμητική τιμή τῆς πολυωνυμικῆς συναρτήσεως f γιά x=ρ** ἤ καί **ἀριθμητική τιμή τοῦ πολυωνύμου**

$$\mathbf{f(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0}, \text{ **γιά** } \mathbf{x=\rho}.$$

Ἄν $f(\rho)=0$, τότε λέμε ὅτι ὁ ρ εἶναι **ρίζα τοῦ πολυωνύμου f(x)**.

Ἡ εὕρεση ὅλων τῶν ἀριθμῶν ρ γιά τούς ὁποίους εἶναι

$$f(\rho)=\alpha_\nu\rho^\nu+\alpha_{\nu-1}\rho^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1\rho+\alpha_0=0$$

ὀνομάζεται **ἐπίλυση τῆς πολυωνυμικῆς ἐξισώσεως**

$$f(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0=0.$$

6. **Κάθε πολυώνυμο $f(x)\in\mathbf{C}_{[x]}$, βαθμοῦ $\nu\in\mathbf{N}_0$, ἔχει ν ἀκριβῶς ρίζες, ὅταν κάθε ρίζα μετριέται τόσες φορές ὅσος εἶναι ὁ βαθμός πολλαπλότητάς της.**

7. Οἱ πολυωνυμικές ἐξισώσεις μέχρι καί 4ου βαθμοῦ ἐπιλύονται πάντοτε. Ἐξισώσεις ἀνωτέρου τοῦ 4ου βαθμοῦ ἐπιλύονται μόνο σέ εἰδικές περιπτώσεις.

8. Στίς παραμετρικές ἐξισώσεις ἤ ἀνισώσεις κάνουμε πάντοτε διερεύνηση.

8. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

1. Δεῖξτε ὅτι τό πολυώνυμο $f(x)=(\sigma\upsilon\nu\varphi+x\eta\mu\varphi)^{\nu}-\sigma\upsilon\nu(\nu\varphi)-x\eta\mu(\nu\varphi)$, ὅπου $\nu\in\mathbf{N}$, εἶναι διαιρετό μέ τό πολυώνυμο $g(x)=x^2+1$.

2. Δεῖξτε ὅτι τό πολυώνυμο $f(x)=x^{\nu}\eta\mu\varphi-\rho^{\nu-1}x\eta\mu(\nu\varphi)+\rho^{\nu}\eta\mu(\nu-1)\varphi$, ὅπου $\nu\in\mathbf{N}$, εἶναι διαιρετό μέ τό πολυώνυμο $g(x)=x^2-2\rho x\sigma\upsilon\nu\varphi+\rho^2$.

3. Βρεῖτε τά α καί β, ὥστε τό πολυώνυμο
$$f(x)=\alpha x^{\nu+1}+\beta x^{\nu}+1 \text{ νά διαιρεῖται μέ τό } (x-1)^2.$$

4. Ἄν τό πολυώνυμο $f(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\alpha_{\nu-2}x^{\nu-2}+\ldots+\alpha_1x+\alpha_0$ διαιρεῖται μέ τό $(x-1)^2$, δεῖξτε ὅτι τό πολυώνυμο
$g(x)=\nu\alpha_\nu x^{\nu-1}+(\nu-1)\alpha_{\nu-1}x^{\nu-2}+\ldots+\alpha_1$ διαιρεῖται μέ τό $x-1$.

5. Ἕνα πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο μέ $x-\alpha$ ἔχει πηλίκο x^2-3x+4 καί διαιρούμενο μέ $x-\beta$ ἔχει πηλίκο x^2-4x+2. Νά βρεῖτε τό $P(x)$ καί τά α καί β, ἄν γνωρίζετε ὅτι ὁ σταθερός ὅρος τοῦ $P(x)$ εἶναι ἴσος μέ 1.

6. Δίνονται τά πολυώνυμα $f_1(x)$ καί $f_2(x)$ καί τά πηλίκα $\pi_1(x)$ καί $\pi_2(x)$ τῶν διαιρέσεων τοῦ $f_1(x)$ μέ τό $(x-\alpha)$ καί τοῦ $f_2(x)$ μέ τό $(x-\beta)$. Δεῖξτε ὅτι τό ὑπόλοιπο $\upsilon(x)$ τῆς διαιρέσεως τοῦ πολυωνύμου $f_1(x)\cdot f_2(x)$ μέ τό $(x-\alpha)\cdot(x-\beta)$ μέ $\alpha\neq\beta$ δίνεται ἀπό τόν τύπο
$$\upsilon(x)=f_2(\beta)\pi_1(\beta)(x-\alpha)+f_1(\alpha)\pi_2(\alpha)(x-\beta)+f_1(\alpha)\cdot f_2(\beta)$$

7. Βρεῖτε γιά ποιές τιμές τῶν μ καί ν τό πολυώνυμο x^4+1 διαιρεῖται μέ τό $x^2+\mu x+\nu$.

8. Ἄν $\alpha+\beta+\gamma=0$ καί $\alpha^\mu+\beta^\mu+\gamma^\mu=S_\mu$, δεῖξτε ὅτι
$$2S_4=S_2^2,\ 6S_5=5S_2S_3,\ 6S_7=7S_3S_4,\ 10S_7=7S_2S_5,\ 25S_5S_3=215S_5^2$$
$$50S_7^2=49S_4S_5^2,\qquad S_{\nu+3}=\alpha\beta\gamma S_\nu+\frac{1}{2}S_2S_{\nu+1}.$$

9. Ἄν τό πολυώνυμο $f(x)=x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\alpha_{\nu-2}x^{\nu-2}+\ldots+\alpha_1x+\alpha_0$ ἔχει ρίζες πραγματικές, δεῖξτε ὅτι $(\alpha^2_{\nu-1}-2\alpha_{\nu-2})\cdot\nu\geq\alpha^2_{\nu-1}$

10. Βρεῖτε τή σχέση μεταξύ τῶν συντελεστῶν τοῦ πολυωνύμου $f(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$ ὥστε οἱ ρίζες του ρ_1,ρ_2,ρ_3 νά ἱκανοποιοῦν τή συνθήκη $\rho_1+\rho_3=2\rho_2$.

11. Βρεῖτε τήν ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη μεταξύ τῶν συντελεστῶν τοῦ πολυωνύμου $f(x)=x^3-\alpha x^2+\beta x-\gamma$, μέ $\alpha\neq0$, ὥστε μία ρίζα του νά εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν δύο ἄλλων.

12. Ἄν δύο ἀπό τίς ρίζες τοῦ πολυωνύμου $f(x)=x^3+\alpha x^2+\beta x$ εἶναι ἀντίθετες, δεῖξτε ὅτι ἕνας τουλάχιστο τῶνσυντελεστῶν α,β εἶναι μηδέν καί ἀντίστροφα.

13. Ἄν τό πολυώνυμο $f(x)=x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma$ ἔχει πραγματικούς συντελεστές, μέ $\gamma\neq0$ καί οἱ ρίζες του ρ_1,ρ_2,ρ_3 ἱκανοποιοῦν τίς ἰσότητες $|\rho_1|=2|\rho_2|=3|\rho_3|$, δεῖξτε ὅτι: $|\alpha\beta|\leq11|\gamma|$.

14. Νά ἀποδειχτοῦν οἱ ἰσότητες

α) $x^{2\nu}-1=(x^2-1)\prod_{\kappa=1}^{\nu-1}\left(x^2-2x\sigma\upsilon\nu\frac{\kappa\pi}{\nu}+1\right)$,

β) $x^{2\nu+1}-1=(x-1)\prod_{\kappa=1}^{\nu}\left(x^2-2x\sigma\upsilon\nu\frac{2\kappa\pi}{2\nu+1}+1\right)$,

ὅπου $\kappa\in\mathbf{Z}$ καί $\nu\in\mathbf{N}$ καί στή συνέχεια νά δείξετε ὅτι
$$\eta\mu\frac{\pi}{2\nu}\eta\mu\frac{2\pi}{2\nu}\ldots\eta\mu\frac{(\nu-1)\pi}{2\nu}=\frac{\sqrt{\nu}}{2^{\nu-1}}$$

15. Καθορίστε τόν $\nu \in \mathbf{N}$ γιά τόν όποιο τό πολυώνυμο
$f(x)=x^{2\nu-2}+x^{2\nu-4}+\ldots+x^4+x^2+1$ είναι διαιρετό μέ τό πολυώνυμο
$g(x)=x^{\nu-1}+x^{\nu-2}+\ldots+x^2+x+1$.

16. Βρεῖτε τό εἶδος τῶν ριζῶν τοῦ πολυωνύμου

$f(x)=x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma$, ἄν $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbf{R}$ καί $\dfrac{\alpha^2-|\beta|}{|\alpha\beta|}\cdot\sqrt{2\beta}<1$.

17. Δεῖξτε ὅτι τό πολυώνυμο $f(x)=(1-x^\nu)(1+x)-2\nu x^\nu(1-x)-\nu^2x^\nu(1-x)^2$ εἶναι διαιρετό μέ τό $(1-x^3)$.

18. Ἄν ρ εἶναι ρίζα τοῦ πολυωνύμου $f(x)=x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma$ μέ $|\alpha|\geq|\beta|\geq|\gamma|$, δεῖξτε ὅτι $|\rho|<1+|\alpha|$.

19. Ἄν ρ εἶναι ρίζα τοῦ πολυωνύμου $f(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_0$, μέ $|\rho|\geq 1$,
δεῖξτε ὅτι: $|\alpha_\nu|\leq|\alpha_{\nu-1}|+|\alpha_{\nu-2}|+\ldots+|\alpha_1|+|\alpha_0|$.

20. Ἄν ρ εἶναι ρίζα τοῦ $f(x)=x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1x+\alpha_0$, δεῖξτε ὅτι:

$$|\rho|<1+|\alpha_{\nu-1}|+\ldots+|\alpha_1|+|\alpha_0|.$$

21. Νά ὁριστεῖ ὁ πραγματικός ἀριθμός α, ὥστε ἡ ἐξίσωση $(\alpha-1)x^4-(\alpha+1)x^2+\alpha-2=0$ νά ἔχει α) τέσσερις ρίζες πραγματικές, β) δύο πραγματικές καί δύο μιγαδικές καί γ) τέσσερις ρίζες μιγαδικές.

22. Δίνεται τό πολυώνυμο

$$f(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1x+\alpha_0,\ \alpha_\nu\neq 0 \text{ καί } \alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_\nu\in\mathbf{Z}.$$

Ἄν τό πολυώνυμο αὐτό παίρνει τήν τιμή 3 γιά τέσσερις διαφορετικές ἀκέραιες τιμές, τότε δεῖξτε ὅτι δέν ὑπάρχει ἀκέραιος κ τέτοιος, ὥστε $f(\kappa)=5$.

23. Νά ἐπιλυθεῖ ἡ ἐξίσωση

$$x^3-x^2+9\alpha x-\alpha=0,$$

ἄν γνωρίζουμε ὅτι ἔχει ρίζες θετικές, καί ἔπειτα νά προσδιοριστεῖ ἡ τιμή τῆς παραμέτρου α.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ V

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

1. Τριγωνομετρικά συστήματα
2. Τριγωνομετρικές ἀνισώσεις
3. Σύντομη ἀνακεφαλαίωση
4. Ἀσκήσεις γιά ἐπανάληψη

1. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

1.1. Εἰσαγωγή.

Ἕνα σύστημα ἐξισώσεων, πού ὅλοι οἱ ἄγνωστοι εἶναι τόξα (ἤ γωνίες) καί μία τουλάχιστον ἀπό τίς ἐξισώσεις εἶναι τριγωνομετρική, ὀνομάζεται **τριγωνομετρικό σύστημα**.

Ἐπίλυση ἑνός τριγωνομετρικοῦ συστήματος εἶναι ἡ εὕρεση ὅλων τῶν τόξων πού τό ἐπαληθεύουν. Ἡ ἐπίλυση καί ἡ διερεύνηση ἑνός τριγωνομετρικοῦ συστήματος ἀνάγεται στήν ἐπίλυση καί διερεύνηση μιᾶς τριγωνομετρικῆς ἐξισώσεως.

Στά τριγωνομετρικά συστήματα, ὅπως καί στά ἀλγεβρικά συστήματα ἐξισώσεων, δέν ὑπάρχει πάντοτε μία γενική μέθοδος γιά τήν ἐπίλυσή τους. Μποροῦμε ὅμως νά ξεχωρίσουμε μερικές κατηγορίες τριγωνομετρικῶν συστημάτων, τά ὁποῖα ἐπιλύονται μέ ἕναν ὁρισμένο τρόπο. Τονίζουμε ἐδῶ ὅτι γιά τήν ἐπίλυση ἑνός τριγωνομετρικοῦ συστήματος ἐπιδιώκουμε πάντοτε νά βροῦμε ἕνα ἰσοδύναμό του ἀλγεβρικό γιά τόν προσδιορισμό τῶν ἄγνωστων τόξων.

1.2. Τριγωνομετρικά συστήματα μέ δύο ἐξισὼσεις καί δύο ἄγνωστα τόξα.

I. Ἡ μιά ἐξίσωση τοῦ συστήματος εἶναι ἀλγεβρική καί ἡ ἄλλη τριγωνομετρική.

Στήν κατηγορία αὐτή ἀνήκουν καί τά ἀκόλουθα συστήματα, πού μποροῦμε νά τά ἐπιλύσουμε εὔκολα.

$$\left.\begin{matrix} x\pm y=\alpha \\ \eta\mu x\pm\eta\mu y=\beta \end{matrix}\right\},\quad \left.\begin{matrix} x\pm y=\alpha \\ \sigma\upsilon\nu x\pm\sigma\upsilon\nu y=\beta \end{matrix}\right\},\quad \left.\begin{matrix} x\pm y=\alpha \\ \varepsilon\varphi x\pm\varepsilon\varphi y=\beta \end{matrix}\right\},\quad \left.\begin{matrix} x\pm y=\alpha \\ \sigma\varphi x\pm\sigma\varphi y=\beta \end{matrix}\right\},$$

$$\left.\begin{matrix} x\pm y=\alpha \\ \eta\mu x\cdot\eta\mu y=\beta \end{matrix}\right\},\quad \left.\begin{matrix} x\pm y=\alpha \\ \sigma\upsilon\nu x\cdot\sigma\upsilon\nu y=\beta \end{matrix}\right\},\quad \left.\begin{matrix} x\pm y=\alpha \\ \sigma\upsilon\nu x\cdot\eta\mu y=\beta \end{matrix}\right\},\quad \left.\begin{matrix} x\pm y=\alpha \\ \varepsilon\varphi x\cdot\varepsilon\varphi y=\beta \end{matrix}\right\},\quad \left.\begin{matrix} x\pm y=\alpha \\ \varepsilon\varphi x\cdot\sigma\varphi y=\beta \end{matrix}\right\},$$

$$\left.\begin{matrix} x\pm y=\alpha \\ \dfrac{\eta\mu x}{\eta\mu y}=\beta \end{matrix}\right\},\quad \left.\begin{matrix} x\pm y=\alpha \\ \dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu y}=\beta \end{matrix}\right\},\quad \left.\begin{matrix} x\pm y=\alpha \\ \dfrac{\varepsilon\varphi x}{\varepsilon\varphi y}=\beta \end{matrix}\right\}.$$

Ἐδῶ προσπαθοῦμε νά μετασχηματίσουμε τήν τριγωνομετρική ἐξίσωση σέ ἀλγεβρική, ὁπότε τό σύστημα ἀνάγεται στήν ἐπίλυση ἑνός ἁπλοῦ ἀλγεβρικοῦ συστήματος.

Μέ παραδείγματα θά δοῦμε πῶς ἐργαζόμαστε στήν πράξη.

Παράδειγμα 1. Νά ἐπιλυθεῖ τό σύστημα $\left.\begin{aligned} x+y&=\frac{2\pi}{3} \\ \eta\mu x+\eta\mu y&=\frac{3}{2} \end{aligned}\right\}.$

Ἐπίλυση: Τό σύστημα ἰσοδύναμα γράφεται:

$$\left.\begin{aligned} x+y&=\frac{2\pi}{3} \\ 2\eta\mu\frac{x+y}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{x-y}{2}&=\frac{3}{2} \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} x+y&=\frac{2\pi}{3} \\ 2\eta\mu\frac{\pi}{3}\sigma\upsilon\nu\frac{x-y}{2}&=\frac{3}{2} \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} x+y&=\frac{2\pi}{3} \\ 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{x-y}{2}&=\frac{3}{2} \end{aligned}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{aligned} x+y&=\frac{2\pi}{3} \\ \sigma\upsilon\nu\frac{x-y}{2}&=\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} x+y&=\frac{2\pi}{3} \\ \sigma\upsilon\nu\frac{x-y}{2}&=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6} \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} x+y&=\frac{2\pi}{3} \\ \frac{x-y}{2}&=2k\pi\pm\frac{\pi}{6},\ k\in\mathbf{Z} \end{aligned}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{aligned} x+y&=\frac{2\pi}{3} \\ x-y&=4k\pi\pm\frac{\pi}{3},\ k\in Z \end{aligned}\right\}$$

Ἑπομένως ἔχουμε νά ἐπιλύσουμε τά ἀκόλουθα ἁπλά ἀλγεβρικά συστήματα.

$$\left.\begin{aligned} x+y&=\frac{2\pi}{3} \\ x-y&=4k\pi+\frac{\pi}{3},\ k\in Z \end{aligned}\right\} (\Sigma_1), \qquad \left.\begin{aligned} x+y&=\frac{2\pi}{3} \\ x-y&=4k\pi-\frac{\pi}{3},\ k\in Z \end{aligned}\right\} (\Sigma_2)$$

Τό σύστημα (Σ_1) ἔχει τίς λύσεις:

$$x=2k\pi+\frac{\pi}{2},\quad y=-2k\pi+\frac{\pi}{6},\quad k\in Z \quad (1)$$

ἐνῶ τό σύστημα (Σ_2) ἔχει τίς λύσεις:

$$x=2k\pi+\frac{\pi}{6},\quad y=-2k\pi+\frac{\pi}{2},\quad k\in Z \quad (2)$$

Οἱ (1) καί (2) εἶναι οἱ λύσεις τοῦ ἀρχικοῦ συστήματος.

Παράδειγμα 2. Νά ἐπιλυθεῖ τό σύστημα $\left.\begin{aligned} x-y&=\frac{\pi}{3} \\ \sigma\upsilon\nu x\sigma\upsilon\nu y&=\frac{3}{4} \end{aligned}\right\}$

Ἐπίλυση: Τό σύστημα ἰσοδύναμα γράφεται:

$$\left.\begin{array}{l} x-y=\frac{\pi}{3} \\ 2\sigma\upsilon\nu x\sigma\upsilon\nu y=\frac{3}{2}\end{array}\right\}\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x-y=\frac{\pi}{3} \\ \sigma\upsilon\nu(x+y)+\sigma\upsilon\nu(x-y)=\frac{3}{2}\end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x-y=\frac{\pi}{3} \\ \sigma\upsilon\nu(x+y)+\sigma\upsilon\nu\,\frac{\pi}{3}=\frac{3}{2}\end{array}\right\}\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x-y=\frac{\pi}{3} \\ \sigma\upsilon\nu(x+y)=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x-y=\frac{\pi}{3} \\ \sigma\upsilon\nu(x+y)=1\end{array}\right\}\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x-y=\frac{\pi}{3} \\ x+y=2k\pi,\ k\in Z\end{array}\right\}\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x=k\pi+\frac{\pi}{6} \\ y=k\pi-\frac{\pi}{6}\end{array},\ k\in Z,\right\}$$

πού εἶναι οἱ λύσεις τοῦ τριγωνομετρικοῦ συστήματος.

Παράδειγμα 3. Νά ἐπιλυθεῖ τό σύστημα $\left.\begin{array}{l} x-y=\frac{\pi}{6} \\ \frac{\varepsilon\varphi x}{\varepsilon\varphi y}=3\end{array}\right\}\left(\begin{array}{l} x,y\neq k\pi+\frac{\pi}{2},\ k\in Z \\ y\neq\rho\pi,\ \rho\in Z\end{array}\right)$

Ἐπίλυση: Τό σύστημα ἰσοδύναμα γράφεται:

$$\left.\begin{array}{l} x-y=\frac{\pi}{6} \\ \frac{\varepsilon\varphi x+\varepsilon\varphi y}{\varepsilon\varphi x-\varepsilon\varphi y}=\frac{3+1}{3-1}\end{array}\right\}\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x-y=\frac{\pi}{6} \\ \dfrac{\frac{\eta\mu(x+y)}{\sigma\upsilon\nu x\cdot\sigma\upsilon\nu y}}{\frac{\eta\mu(x-y)}{\sigma\upsilon\nu x\ \sigma\upsilon\nu y}}=\frac{4}{2}\end{array}\right\}\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x-y=\frac{\pi}{6} \\ \frac{\eta\mu(x+y)}{\eta\mu(x-y)}=2\end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x-y=\frac{\pi}{6} \\ \eta\mu(x+y)=2\eta\mu(x-y)\end{array}\right\}\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x-y=\frac{\pi}{6} \\ \eta\mu(x+y)=2\eta\mu\frac{\pi}{6}\end{array}\right\}\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x-y=\frac{\pi}{6} \\ \eta\mu(x+y)=1\end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x-y=\frac{\pi}{6} \\ x+y=2k\pi+\frac{\pi}{2},\ k\in Z\end{array}\right\}\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x=k\pi+\frac{\pi}{3} \\ y=k\pi+\frac{\pi}{6}\end{array}\ k\in Z\right\}$$

Παράδειγμα 4. Νά ἐπιλυθεῖ καί νά διερευνηθεῖ τό σύστημα:

$$\left.\begin{array}{ll} x+y=\alpha & \alpha,\beta\in R \\ \frac{\eta\mu x}{\eta\mu y}=\beta, & \psi\neq\mu\pi,\ \mu\in Z\end{array}\right\}\ (\Sigma)$$

V 1.2.

Ἐπίλυση:

Στό σύστημα αὐτό ἔχουμε καί τίς παραμέτρους α,β καί θά πρέπει νά ἐξετάσουμε, γιά τίς διάφορες τιμές τους, πότε τό σύστημα ἔχει λύση, πότε εἶναι ἀόριστο καί πότε εἶναι ἀδύνατο.

1. Ἄν $\beta=1$, τό σύστημα ἰσοδύναμα γράφεται:

$$\left.\begin{array}{l} x+y=\alpha \\ \eta\mu x=\eta\mu y \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x+y=\alpha \\ x=2k\pi+y \text{ εἴτε } x=(2\lambda+1)\pi-y,\ (k,\lambda\in Z), \end{array}\right\}$$

ὁπότε ἔχουμε νά ἐπιλύσουμε τά δυό ἁπλά ἀλγεβρικά συστήματα:

$$\left.\begin{array}{l} x+y=\alpha \\ x=2k\pi+y,\ k\in Z \end{array}\right\} (\Sigma_1) \quad \left.\begin{array}{l} x+y=\alpha \\ x=(2\lambda+1)\pi-y,\quad \lambda\in Z \end{array}\right\} (\Sigma_2)$$

2. Ἄν $\beta\neq 1$, τότε τό σύστημα (Σ) γίνεται:

$$\left.\begin{array}{l} x+y=\alpha \\ \dfrac{\eta\mu x+\eta\mu y}{\eta\mu x-\eta\mu y}=\dfrac{\beta+1}{\beta-1} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x+y=\alpha \\ \dfrac{2\eta\mu\frac{x+y}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{x-y}{2}}{2\eta\mu\frac{x-y}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{x+y}{2}}=\dfrac{\beta+1}{\beta-1} \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x+y=\alpha \\ \varepsilon\varphi\dfrac{x+y}{2}\sigma\varphi\dfrac{x-y}{2}=\dfrac{\beta+1}{\beta-1} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x+y=\alpha \\ \varepsilon\varphi\dfrac{\alpha}{2}\sigma\varphi\dfrac{x-y}{2}=\dfrac{\beta+1}{\beta-1} \end{array}\right\} (\Sigma_3), \quad \text{ὁπότε}$$

i) ἄν $\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}\neq 0$, δηλ. $\alpha\neq 2k\pi$, $k\in Z$, τό σύστημα (Σ_3) ἰσοδύναμα γράφεται:

$$\left.\begin{array}{l} x+y=\alpha \\ \sigma\varphi\dfrac{x-y}{2}=\dfrac{\beta+1}{\beta-1}\sigma\varphi\dfrac{\alpha}{2} \end{array}\right\}.$$

Ὑπάρχει πάντοτε τόξο θ μέ $0<\theta<\pi$ καί $\sigma\varphi\theta=\dfrac{\beta+1}{\beta-1}\sigma\varphi\dfrac{\alpha}{2}$

Ἔτσι τό τελευταῖο σύστημα γράφεται:

$$\left.\begin{array}{l} x+y=\alpha \\ \sigma\varphi\dfrac{x-y}{2}=\sigma\varphi\theta \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x+y=\alpha \\ \dfrac{x-y}{2}=k\pi+\theta, k\in Z \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x+y=\alpha \\ x-y=2k\pi+2\theta,\ k\in Z \end{array}\right\}$$

Τό τελευταῖο σύστημα ἐπιλύεται εὔκολα.

ii) Ἄν $\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}=0$, δηλ. $\alpha=2k\pi$, $k\in Z$, τότε τό σύστημα (Σ_3) εἶναι ἀδύνατο, ὅταν $\beta\neq-1$, καί ἀόριστο ὅταν $\beta=-1$. Στήν τελευταία περίπτωση ὁποιαδήποτε τόξα x,y μέ $x-y=\theta$ καί $\theta\neq 2\rho\pi$, $\rho\in Z$ ἐπαληθεύουν τή δεύτερη ἐξίσωση τοῦ (Σ_3), ὁπότε ἔχουμε νά ἐπιλύσουμε τό σύστημα:

$$\left.\begin{array}{l} x+y=\alpha \\ x-y=\theta \end{array}\right\}$$

Παράδειγμα 5. Νά ἐπιλυθεῖ καί νά διερευνηθεῖ τό σύστημα:

$$\left.\begin{array}{ll} x-y=\alpha & \alpha,\beta\in R \\ \varepsilon\varphi x+\varepsilon\varphi y=\beta, & x,y\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},\ k\in Z \end{array}\right\}(\Sigma)$$

Ἐπίλυση: Τό σύστημα (Σ) γίνεται

$$\left.\begin{array}{l} x-y=\alpha \\ \dfrac{\eta\mu(x+y)}{\sigma\upsilon\nu x\sigma\upsilon\nu y}=\beta \end{array}\right\}\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x-y=\alpha \\ \eta\mu(x+y)=\beta\sigma\upsilon\nu x\sigma\upsilon\nu y \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x-y=\alpha \\ 2\eta\mu(x+y)=\beta[\sigma\upsilon\nu(x-y)+\sigma\upsilon\nu(x+y)] \end{array}\right\}\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x-y=\alpha \\ 2\eta\mu(x+y)-\beta\sigma\upsilon\nu(x+y)=\beta\sigma\upsilon\nu\alpha \end{array}\right\}$$

Ἡ δεύτερη ἐξίσωση τοῦ τελευταίου συστήματος εἶναι γραμμική καί ἐπομένως ἐπιλύεται κατά τά γνωστά.

Τό σύστημα (Σ) ἔχει λύση, ὅταν καί μόνο ὅταν ἡ ἐξίσωση αὐτή ἔχει λύση, δηλαδή ὅταν $4+\beta^2\geq\beta^2\sigma\upsilon\nu^2\alpha \Leftrightarrow 4+\beta^2(1-\sigma\upsilon\nu^2\alpha)\geq0 \Leftrightarrow 4+\beta^2\eta\mu^2\alpha\geq0$.

Ἡ συνθήκη $4+\beta^2\eta\mu^2\alpha\geq0$ ἀληθεύει πάντοτε καί ἐπομένως τό σύστημα (Σ) ἔχει πάντοτε λύση.

II. Ὅλες οἱ ἐξισώσεις τοῦ συστήματος εἶναι τριγωνομετρικές

Θά δοῦμε ἐδῶ μέ παραδείγματα συστήματα αὐτῆς τῆς κατηγορίας πού ἀνάγονται ἀμέσως σέ ἀλγεβρικά συστήματα (παραδ. 1) καθώς καί συστήματα συμμετρικά ὡς πρός τά τόξα (παραδ. 2), ὅπως π.χ. εἶναι τά ἀκόλουθα:

$$\left.\begin{array}{l} \eta\mu x+\eta\mu y=\alpha \\ \sigma\upsilon\nu x\,\sigma\upsilon\nu y=\beta \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} \eta\mu x\cdot\eta\mu y=\alpha \\ \sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu y=\beta \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} \varepsilon\varphi x+\varepsilon\varphi y=\alpha \\ \sigma\upsilon\nu x\,\sigma\upsilon\nu y=\beta \end{array}\right\}$$

τά ὁποῖα ἐπίσης ἀνάγονται τελικά σέ ἀλγεβρικά.

Παράδειγμα 1. Νά ἐπιλυθεῖ τό σύστημα:

$$\left.\begin{array}{l} \eta\mu x-\eta\mu y=\dfrac{1}{2} \\ \eta\mu^2x+\eta\mu^2y=\dfrac{5}{4} \end{array}\right\}(\Sigma)$$

Ἐπίλυση: Ἄν θέσουμε $\eta\mu x=\omega$, $\eta\mu y=\varphi$ τό σύστημα (Σ) γράφεται:

$$\left.\begin{array}{l} \omega-\varphi=\dfrac{1}{2} \\ \omega^2+\varphi^2=\dfrac{5}{4} \end{array}\right\}$$

τό ὁποῖο εἶναι ἀλγεβρικό.

Ἐπιλύοντας τό σύστημα αὐτό βρίσκουμε τίς λύσεις

$$\left(\omega=1,\ \varphi=\frac{1}{2}\right),\ \left(\omega=-\frac{1}{2},\ \varphi=-1\right)$$

Ἔτσι ἔχουμε νά ἐπιλύσουμε τά ἀκόλουθα τριγωνομετρικά συστήματα:

$$\left.\begin{array}{l}\etaμx=1\\ \etaμy=\dfrac{1}{2}\end{array}\right\}(\Sigma_1),\qquad \left.\begin{array}{l}\etaμx=-\dfrac{1}{2}\\ \etaμy=-1\end{array}\right\}(\Sigma_2)$$

Τό σύστημα (Σ_1) ἔχει τίς λύσεις:

$$\left.\begin{array}{l}x=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\\ y=2\lambda\pi+\dfrac{\pi}{6}\end{array},\ \kappa,\lambda\in Z\right\},\quad \left.\begin{array}{l}x=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\\ y=(2\lambda+1)\pi-\dfrac{\pi}{6}\end{array},\ k,\lambda\in Z\right\}$$

Τό σύστημα (Σ_2) ἔχει τίς λύσεις:

$$\left.\begin{array}{l}x=2k\pi+\dfrac{7\pi}{6}\\ y=2\lambda\pi+\dfrac{3\pi}{2},\ k,\ \lambda\in Z\end{array}\right\},\quad \left.\begin{array}{l}x=(2k+1)\pi-\dfrac{7\pi}{6}\\ y=2\lambda\pi+\dfrac{3\pi}{2},\ k,\ \lambda\in Z\end{array}\right\}$$

Παράδειγμα 2. Νά ἐπιλυθεῖ τό σύστημα $\left.\begin{array}{l}\etaμx+\etaμy=1\\ συνx\ συνy=\dfrac{3}{4}\end{array}\right\}(\Sigma)$

Ἐπίλυση: Τό σύστημα αὐτό εἶναι συμμετρικό ὡς πρός τά τόξα x καί y. Αὐτό γράφεται ἰσοδύναμα:

$$\left.\begin{array}{l}2\etaμ\dfrac{x+y}{2}συν\dfrac{x-y}{2}=1\\ συν(x-y)+συν(x+y)=\dfrac{3}{2}\end{array}\right\}\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l}\etaμ\dfrac{x+y}{2}συν\dfrac{x-y}{2}=\dfrac{1}{2}\\ 2συν^2\dfrac{x-y}{2}-1+1-2\etaμ^2\dfrac{x+y}{2}=\dfrac{3}{2}\end{array}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}\etaμ\dfrac{x+y}{2}συν\dfrac{x-y}{2}=\dfrac{1}{2}\\ συν^2\dfrac{x-y}{2}-\etaμ^2\dfrac{x+y}{2}=\dfrac{3}{4}\end{array}\right\}$$

Ἄν θέσουμε $\etaμ\dfrac{x+y}{2}=\omega$ καί $συν\dfrac{x-y}{2}=\varphi$, παίρνουμε τό ἀλγεβρικό σύστημα:

$$\left.\begin{array}{l}\omega\varphi=\dfrac{1}{2}\\ \varphi^2-\omega^2=\dfrac{3}{4}\end{array}\right\}$$

Τό τελευταῖο σύστημα ἔχει τίς λύσεις:

$$\left(\omega=\frac{1}{2},\ \varphi=1\right)\ ,\ \left(\omega=-\frac{1}{2},\ \varphi=-1\right).$$

Ἔτσι ἔχουμε νά ἐπιλύσουμε τά ἀκόλουθα τριγωνομετρικά συστήματα:

$$\left.\begin{aligned}\eta\mu\frac{x+y}{2}&=\frac{1}{2}\\ \sigma\upsilon\nu\frac{x-y}{2}&=1\end{aligned}\right\}(\Sigma_1)\quad,\quad\left.\begin{aligned}\eta\mu\frac{x+y}{2}&=-\frac{1}{2}\\ \sigma\upsilon\nu\frac{x-y}{2}&=-1\end{aligned}\right\}(\Sigma_2)$$

Τό σύστημα (Σ_1) ἰσοδύναμα γίνεται:

$$\left.\begin{aligned}\eta\mu\frac{x+y}{2}&=\eta\mu\frac{\pi}{6}\\ \sigma\upsilon\nu\frac{x-y}{2}&=\sigma\upsilon\nu 0\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{aligned}&\frac{x+y}{2}=2k\pi+\frac{\pi}{6}\ \text{εἴτε}\ \frac{x+y}{2}=(2k+1)\pi-\frac{\pi}{6}\\ &\frac{x-y}{2}=2\lambda\pi\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad,\ k.\lambda\in Z\end{aligned}\right\}$$

Ἔχουμε ἔτσι τά δυό ἀλγεβρικά συστήματα

$$\left.\begin{aligned}&x+y=4k\pi+\frac{\pi}{3}\\ &x-y=4\lambda\pi\qquad,\ k,\lambda\in Z\end{aligned}\right\}\ ,\ \left.\begin{aligned}&x+y=2(2k+1)\pi-\frac{\pi}{3}\\ &x-y=4\lambda\pi\qquad\qquad,\ k,\lambda\in Z\end{aligned}\right\}$$

τά ὁποῖα ἐπιλύονται εὔκολα.

Ἀπό τό σύστημα (Σ_2) παίρνουμε δυό ἀκόμα ἀλγεβρικά συστήματα, τά ὁποῖα ἐπιλύονται κατά τά γνωστά.

1.3. Τριγωνομετρικά συστήματα μέ τρεῖς ἐξισώσεις καί τρία ἄγνωστα τόξα.

Γενική μέθοδος γιά τήν ἐπίλυση καί τέτοιων συστημάτων δέν ὑπάρχει. Θά δώσουμε ἐδῶ ἕνα παράδειγμα, πού παρουσιάζει ἐνδιαφέρον γιά τήν ἐπίλυση καί τή διερεύνησή του.

Παράδειγμα. Νά ἐπιλυθεῖ καί διερευνηθεῖ τό σύστημα

$$\left.\begin{aligned}&x+y+z=\pi\\ &\frac{\eta\mu x}{\alpha}=\frac{\eta\mu y}{\beta}=\frac{\eta\mu z}{\gamma},\quad \alpha.\beta.\gamma\neq 0\end{aligned}\right\}(\Sigma)$$

Ἐπίλυση: Τό σύστημα (Σ) γράφεται:

$$\Leftrightarrow\left.\begin{aligned}&x+y+z=\pi\\ &\frac{\eta\mu x}{\alpha}=\frac{\eta\mu y}{\beta}=\frac{\eta\mu z}{\gamma}=\lambda,\ \alpha\cdot\beta\cdot\gamma\neq 0\end{aligned}\right\}$$

$$\Leftrightarrow\quad\{x+y+z=\pi,\quad \eta\mu x=\lambda\alpha,\quad \eta\mu y=\lambda\beta,\quad \eta\mu z=\lambda\gamma,\quad \alpha\beta\gamma\neq 0\}\quad(\Sigma_1)$$

i) Ἄν $\lambda=0$, τότε τό σύστημα (Σ_1) γίνεται:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=\pi \\ x=k_1\pi,\ y=k_2\pi,\ z=k_3\pi,\ k_1,k_2,k_3\in Z \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} k_1\pi+k_2\pi+k_3\pi=\pi \\ x=k_1\pi,\ y=k_2\pi,\ z=k_3\pi, k_1,k_2,k_3\in Z \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} k_1+k_2+k_3=1 \\ x=k_1\pi,\ y=k_2\pi,\ z=k_3\pi,\ k_1,k_2,k_3\in Z \end{array}\right\}.$$

ii) Ἄν $\lambda\neq 0$, τότε ἀπό τήν ἐξίσωση $x+y+z=\pi$ παίρνουμε $x=\pi-(y+z)$, ἡ ὁποία δίνει $\eta\mu x=\eta\mu[\pi-(y+z)]=\eta\mu(x+y)$ καί τό σύστημα (Σ_1) γίνεται

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=\pi \\ \eta\mu(y+z)=\lambda\alpha \\ \eta\mu(x+z)=\lambda\beta \\ \eta\mu(x+y)=\lambda\gamma \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=\pi \\ \eta\mu y\sigma\upsilon\nu z+\eta\mu z\sigma\upsilon\nu y=\lambda\alpha \\ \eta\mu x\sigma\upsilon\nu z+\eta\mu z\sigma\upsilon\nu x=\lambda\beta \\ \eta\mu x\sigma\upsilon\nu y+\eta\mu y\sigma\upsilon\nu x=\lambda\gamma \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=\pi \\ \lambda\beta\sigma\upsilon\nu z+\lambda\gamma\sigma\upsilon\nu y=\lambda\alpha \\ \lambda\alpha\sigma\upsilon\nu z+\lambda\gamma\sigma\upsilon\nu x=\lambda\beta \\ \lambda\alpha\sigma\upsilon\nu y+\lambda\beta\sigma\upsilon\nu x=\lambda\gamma \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=\pi \\ \beta\sigma\upsilon\nu z+\gamma\sigma\upsilon\nu y=\alpha \\ \alpha\sigma\upsilon\nu z+\gamma\sigma\upsilon\nu x=\beta \\ \alpha\sigma\upsilon\nu y+\beta\sigma\upsilon\nu x=\gamma \end{array}\right\} \quad (\Sigma_2)$$

Ἄν πολλαπλασιάσουμε τίς τρεῖς τελευταῖες ἐξισώσεις τοῦ (Σ_2) ἀντίστοιχα μέ $\alpha, \beta, -\gamma$ καί προσθέσουμε τά ἐξαγόμενα κατά μέλη παίρνουμε:

$$\alpha^2+\beta^2-\gamma^2=2\alpha\beta\sigma\upsilon\nu z, \text{ δηλ. } \sigma\upsilon\nu z=\frac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}{2\alpha\beta} \quad (1)$$

Ὅμοια παίρνουμε:

$$\sigma\upsilon\nu x=\frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma} \quad (2)$$

$$\sigma\upsilon\nu y=\frac{\alpha^2+\gamma^2-\beta^2}{2\alpha\gamma} \quad (3)$$

Ἔτσι ἔχουμε τό σύστημα

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=\pi \\ \sigma\upsilon\nu x=\dfrac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma} \\ \sigma\upsilon\nu y=\dfrac{\alpha^2+\gamma^2-\beta^2}{2\alpha\gamma} \\ \sigma\upsilon\nu z=\dfrac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}{2\alpha\beta} \end{array}\right\} (\Sigma_3)$$

Τό σύστημα (Σ_3) ἔχει λύση, ὅταν $\left|\dfrac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}\right|\leq 1$ καί $\left|\dfrac{\alpha^2+\gamma^2-\beta^2}{2\alpha\gamma}\right|\leq 1$

καί $\left|\dfrac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}{2\alpha\beta}\right|\leq 1$

Τότε ὑπάρχουν ἐλάχιστα θετικά τόξα $\theta_1,\theta_2,\theta_3$ γιά τά ὁποῖα εἶναι:

$\sigma\upsilon\nu\theta_1=\dfrac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma},\ \sigma\upsilon\nu\theta_2=\dfrac{\alpha^2+\gamma^2-\beta^2}{2\alpha\gamma}$ καί $\sigma\upsilon\nu\theta_3=\dfrac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}{2\alpha\beta}$, ὁπότε οἱ τιμές τῶν x,y,z εἶναι:

$$x=2k_1\pi\pm\theta_1,\quad y=2k_2\pi\pm\theta_2,\quad z=2k_3\pi\pm\theta_3.$$

Ἀπό τίς τιμές αὐτές λύσεις τοῦ ἀρχικοῦ συστήματος εἶναι οἱ τριάδες (x,y,z) γιά τίς ὁποῖες ἱκανοποιεῖται ἡ $x+y+z=\pi$.

Γιά νά πετύχουμε τέτοιες λύσεις, ἐκλέγουμε δυό ἀπό τούς ἀκέραιους k_1, k_2,k_3 αὐθαίρετα, ὁπότε ὁρίζουμε τόν τρίτο ἔτσι, ὥστε νά ἱκανοποιεῖται ἡ $x+y+z=\pi$.

1.4. Τριγωνομετρική ἀπαλοιφή.

Ὅταν ἕνα παραμετρικό τριγωνομετρικό σύστημα ἔχει περισσότερες ἐξισώσεις ἀπό τούς ἀγνώστους (ἀπό τά ἄγνωστα τόξα), τότε βρίσκουμε μία (ἤ περισσότερες) σχέση μεταξύ τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων καί τῶν σταθερῶν ὅρων τῶν ἐξισώσεων, γιά νά συναληθεύουν ὅλες οἱ ἐξισώσεις τοῦ συστήματος. Ἡ σχέση αὐτή, ὅπως καί στήν ἄλγεβρα, ὀνομάζεται **ἀπαλείφουσα.**

Δηλαδή ἡ ἀπαλείφουσα εἶναι ἡ **ἀναγκαία** συνθήκη, γιά νά ἔχει τό σύστημα λύση. Ἡ ἐργασία, μέ τήν ὁποία βρίσκουμε τήν ἀπαλείφουσα, ὀνομάζεται **ἀπαλοιφή.**

Δίνουμε ἐδῶ δύο παραδείγματα τριγωνομετρικῆς ἀπαλοιφῆς.

Παράδειγμα 1. Νά βρεθεῖ ἡ ἀπαλείφουσα τοῦ συστήματος:

$$\left.\begin{array}{l}\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu 2x=\alpha\\ \eta\mu x+\eta\mu 2x=\beta\end{array}\right\}(\Sigma)$$

Λύση: Ἐδῶ ἔχουμε ἕνα σύστημα δύο τριγωνομετρικῶν ἐξισώσεων μέ ἕνα ἄγνωστο τόξο x. Ἑπομένως θά βροῦμε τήν ἀπαλείφουσα, δηλ. τήν ἀναγκαία συνθήκη, ὥστε νά ἔχουν κοινή λύση οἱ ἐξισώσεις αὐτές.

Ἄν x_0 εἶναι μία λύση τοῦ συστήματος (Σ), τότε ἔχουμε διαδοχικά:

$$\left.\begin{array}{l}\sigma\upsilon\nu x_0+\sigma\upsilon\nu 2x_0=\alpha\\ \eta\mu x_0+\eta\mu 2x_0=\beta\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}2\sigma\upsilon\nu\dfrac{3x_0}{2}\sigma\upsilon\nu\dfrac{x_0}{2}=\alpha\\[2ex] 2\eta\mu\dfrac{3x_0}{2}\sigma\upsilon\nu\dfrac{x_0}{2}=\beta\end{array}\right|(\Sigma_1)\Rightarrow \left.\begin{array}{l}4\sigma\upsilon\nu^2\dfrac{3x_0}{2}\sigma\upsilon\nu^2\dfrac{x_0}{2}=\alpha^2\\[2ex] 4\eta\mu^2\dfrac{3x_0}{2}\sigma\upsilon\nu^2\dfrac{x_0}{2}=\beta^2\end{array}\right|(\Sigma_2)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τίς δυό αὐτές ἐξισώσεις παίρνουμε:

$$4\sigma\upsilon\nu^2\frac{x_0}{2}=\alpha^2+\beta^2 \qquad (1).$$

Ἡ πρώτη ἀπό τίς ἐξισώσεις τοῦ (Σ_1) γράφεται

$$2\left(4\sigma\upsilon\nu^3\frac{x_0}{2}-3\sigma\upsilon\nu\frac{x_0}{2}\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{x_0}{2}=\alpha\Rightarrow 8\sigma\upsilon\nu^4\frac{x_0}{2}-6\sigma\upsilon\nu^2\frac{x_0}{2}=\alpha \qquad (2)$$

'Από (1) καί (2) ἔχουμε: $8\cdot\left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{4}\right)^2-6\cdot\frac{\alpha^2+\beta^2}{4}=\alpha\Rightarrow$

$(\alpha^2+\beta^2)^2-3(\alpha^2+\beta^2)=2\alpha$, ἤ $(\alpha^2+\beta^2)(\alpha^2+\beta^2-3)=2\alpha$.

Ἡ τελευταία σχέση εἶναι ἡ ζητούμενη ἀπαλείφουσα τοῦ (Σ).

Παράδειγμα 2. Νά βρεθεῖ ἡ ἀπαλείφουσα τοῦ συστήματος:

$$\left.\begin{aligned}\sigma\varphi\omega(1+\eta\mu\omega)&=4\alpha\\ \sigma\varphi\omega(1-\eta\mu\omega)&=4\beta\end{aligned}\right\}(\Sigma)$$

Ἄν ω_0 εἶναι μιά λύση τοῦ συστήματος (Σ), τότε θά ἔχουμε:

$$\left.\begin{aligned}\sigma\varphi\omega_0(1+\eta\mu\omega_0)&=4\alpha\\ \sigma\varphi\omega_0(1-\eta\mu\omega_0)&=4\beta\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}\sigma\varphi\omega_0+\sigma\upsilon\nu\omega_0&=4\alpha\\ \sigma\varphi\omega_0-\sigma\upsilon\nu\omega_0&=4\beta\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}\sigma\varphi\omega_0&=2\alpha+2\beta\\ \sigma\upsilon\nu\omega_0&=2\alpha-2\beta\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\sigma\upsilon\nu\omega_0}{\eta\mu\omega_0}&=2\alpha+2\beta\\ \sigma\upsilon\nu\omega_0&=2\alpha-2\beta\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}\eta\mu\omega_0&=\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta},\ \alpha^2\neq\beta^2\\ \sigma\upsilon\nu\omega_0&=2\alpha-2\beta\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$\eta\mu^2\omega_0+\sigma\upsilon\nu^2\omega_0=\left(\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\right)^2+(2\alpha-2\beta)^2\Rightarrow\left(\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\right)^2+4(\alpha-\beta)^2=1 \text{ ἤ } \alpha\beta=(\alpha^2-\beta^2)^2.$$

Ἡ σχέση $\alpha\beta=(\alpha^2-\beta^2)^2$ εἶναι ἡ ζητούμενη ἀπαλείφουσα.

1.5. Ἀσκήσεις.

1. Νά ἐπιλυθοῦν τά τριγωνομετρικά συστήματα:

α) $\begin{cases}x+y=\frac{\pi}{2}\\ \eta\mu x-\eta\mu y=\frac{\sqrt{3}+1}{2}\end{cases}$ β) $\begin{cases}x+y=\frac{2\pi}{3}\\ \sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu y=-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$, γ) $\begin{cases}x+y=\frac{2\pi}{3}\\ \eta\mu x\ \eta\mu y=\frac{3}{4}\end{cases}$,

δ) $\begin{cases}x-y=\frac{2\pi}{3}\\ \sigma\upsilon\nu x\cdot\sigma\upsilon\nu y=-\frac{1}{2}\end{cases}$, ε) $\begin{cases}x+y=\frac{\pi}{2}\\ \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu y}=-\sqrt{3}\end{cases}$, στ') $\begin{cases}x+y=\frac{\pi}{4}\\ \varepsilon\varphi x+\varepsilon\varphi y=1\end{cases}$, ζ') $\begin{cases}x+y=\frac{\pi}{4}\\ \eta\mu^2x+\eta\mu^2y=\frac{3+\sqrt{3}}{4}\end{cases}$

2. Βρεῖτε τίς τιμές τῶν τόξων x,y πού ἐπαληθεύουν τό σύστημα: $\begin{cases}x-y=\frac{\pi}{6}\\ 4\eta\mu x\ \sigma\upsilon\nu y=3\\ \pi<x<3\pi,\ \pi<y<3\pi\end{cases}$

3. Νά ἐπιλυθοῦν τά συστήματα:

α) $\begin{cases}2\eta\mu x+3\sigma\upsilon\nu y=-2\\ 6\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu y=4\end{cases}$ β) $\begin{cases}x+2y=\frac{\pi}{2}\\ \eta\mu x+\eta\mu 3y=\frac{3}{2}\end{cases}$, γ) $\begin{cases}\eta\mu x+\eta\mu y=\frac{3}{2}\\ \sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu y=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$

4. Νά ἐπιλυθεῖ καί διερευνηθεῖ τό σύστημα:

$$\begin{cases}\varepsilon\varphi x+\sigma\varphi y=\alpha\\ \sigma\varphi x+\varepsilon\varphi y=\beta\end{cases}$$

5. Βρεῖτε τήν ἀπαλείφουσα τῶν συστημάτων:

α) α_1 ημx$+\beta_1$συνx$=\gamma_1$, α_2ημx$+\beta_2$συνx$=\gamma_2$, μέ $\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1\neq 0$,

β) μ^3ημx$+\nu^3$συνx$=\lambda^3$ημxσυνx, μ^3συνx$-\nu^3$ημx$=\lambda^3$συν2x

γ) $x+y=\alpha$, εφx$+$εφy$=$εφβ, σφx$+$σφy$=$σφγ

2. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

2.1. Ὁρισμοί. Τριγωνομετρική ἀνίσωση ὡς πρός ἕνα τόξο x ὀνομάζεται κάθε ἀνίσωση, πού περιέχει τριγωνομετρικούς ἀριθμούς τοῦ τόξου x. Ἔτσι π.χ. οἱ ἀνισώσεις:

$$\text{ημ}x<-\frac{1}{2},\quad \frac{1}{2}\cdot\text{ημ}^2x+\text{συν}x>0,\quad \text{εφ}x-1>0,\quad \text{ημ}x-1<0,$$

εἶναι τριγωνομετρικές ἀνισώσεις.

Μιά τριγωνομετρική ἀνίσωση μπορεῖ νά ἔχει ὁρισμένες λύσεις ἤ μπορεῖ νά ἐπαληθεύεται γιά κάθε τιμή τοῦ τόξου πού περιέχει (μόνιμη ἀνίσωση) ἤ μπορεῖ νά μήν ὑπάρχουν τόξα x πού νά τήν ἐπαληθεύουν (ἀδύνατη ἀνίσωση).

Κάθε τόξο θ, πού ἐπαληθεύει μιά τριγωνομετρική ἀνίσωση, λέγεται **μερική λύση** τῆς ἀνισώσεως αὐτῆς.

Π.χ. στήν τελευταία ἀπό τίς παραπάνω ἀνισώσεις τό τόξο $\theta=\frac{\pi}{6}$ εἶναι μιά μερική λύση της. Τό σύνολο τῶν μερικῶν λύσεων μιᾶς τριγωνομετρικῆς ἀνισώσεως ὀνομάζεται **γενική λύση** της. Ἡ εὕρεση τῆς γενικῆς λύσεως μιᾶς τριγωνομετρικῆς ἀνισώσεως ὀνομάζεται **ἐπίλυση τῆς ἀνισώσεως.**

Τό σύνολο τῶν μερικῶν λύσεων τῆς ἀνισώσεως στό διάστημα $[0,2\pi)$ ὀνομάζεται **εἰδική λύση** τῆς ἀνισώσεως.

Κατά τήν ἐπίλυση μιᾶς τριγωνομετρικῆς ἀνισώσεως πρέπει νά λαβαίνουμε ὑπόψη μας τούς γνωστούς περιορισμούς τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τῶν τόξων, ὅπως π.χ. $|\text{ημ}x|\leq 1$, $|\text{συν}x|\leq 1$.

2.2. Βασικές τριγωνομετρικές ἀνισώσεις.

Γιά νά ἐπιλύσουμε μιά τριγωνομετρική ἀνίσωση, προσπαθοῦμε μέ κατάλληλους μετασχηματισμούς νά τή φέρουμε σέ μιά ἀπό τίς παρακάτω μορφές:

(i) ημx $>\alpha$ ἤ ημx $<\alpha$

(ii) συνx $>\alpha$ ἤ συνx $<\alpha$

(iii) εφx $>\alpha$ ἤ εφx $<\alpha$

(iv) σφx $>\alpha$ ἤ σφx $<\alpha$,

ὅπου α γνωστός πραγματικός ἀριθμός.

Τίς τριγωνομετρικές αὐτές ἀνισώσεις τίς ὀνομάζουμε **βασικές ἤ θεμελιώδεις.**
Θά δώσουμε ἐδῶ μερικά παραδείγματα ἐπιλύσεως τριγωνομετρικῶν ἀνισώσεων.

Παράδειγμα 1. Νά ἐπιλυθεῖ ἡ ἀνίσωση ημx>α, α∈R.

Γιά νά ἐπιλύσουμε αὐτή τήν ἀνίσωση, διακρίνουμε τίς ἑξῆς περιπτώσεις:

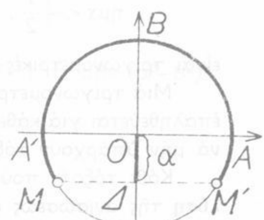
i) Ἄν $\alpha<-1$, ἡ ἀνίσωση ἐπαληθεύεται ἀπό κάθε τόξο x (μόνιμη ἀνίσωση).

ii) Ἄν $\alpha=-1$, ἡ ἀνίσωση ἐπαληθεύεται ἀπό κάθε τόξο x, ἐκτός ἀπό τά τόξα $x=2k\pi-\frac{\pi}{2}$, $k\in\mathbf{Z}$.

iii) Ἄν $\alpha\geq 1$, ἡ ἀνίσωση εἶναι ἀδύνατη.

iv) Τέλος, ἄν εἶναι: $-1<\alpha<1$, τότε ἔχουμε δύο περιπτώσεις.

α) Ἄν $-1<\alpha<0$, λύνουμε πρῶτα τήν ἀνίσωση γραφικά πάνω στόν τριγωνομετρικό κύκλο. Αὐτό γίνεται μέ τόν ἀκόλουθο τρόπο. Παίρνουμε πάνω στόν ἄξονα τῶν ἡμιτόνων BB′ σημεῖο Δ τέτοιο, ὥστε $\overline{O\Delta}=\alpha$. Ἀπό τό Δ φέρνουμε παράλληλη πρός τόν ἄξονα AA′ τῶν συνημιτόνων καί παίρνουμε τά σημεῖα τομῆς της M, M′ μέ τόν τριγωνομετρικό κύκλο. Εἶναι φανερό ὅτι κάθε τόξο τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου πού ἔχει πέρας ἕνα σημεῖο τῶν τόξων $\overset{\frown}{ABM}$ ἤ $\overset{\frown}{M'A}$ (ἐκτός τῶν M καί M′) ἱκανοποιεῖ τήν ἀνίσωση (σχ. 1). Ἄν τώρα τά μέτρα τῶν τόξων τοῦ $[0,2\pi)$, πού ἐπαληθεύουν τήν ἐξίσωση ημx=α, εἶναι θ_1 καί θ_2, $(\theta_1<\theta_2)$, δηλ. $(\overset{\frown}{ABM})=\theta_1$ καί $(\overset{\frown}{ABM'})=\theta_2$, τότε, ἡ εἰδική λύση τῆς ἀνισώσεως ημx>α, $-1<\alpha<0$, εἶναι ὅλα τά τόξα x μέ:



Σχ. 1

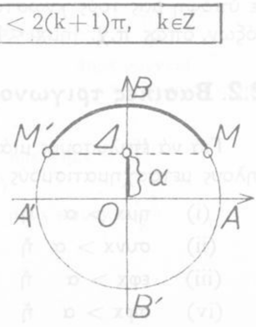
$$0\leq x<\theta_1 \quad \text{εἴτε} \quad \theta_2<x<2\pi$$

Ἡ γενική λύση τῆς ἀνισώσεως αὐτῆς εἶναι τώρα ὅλα τά τόξα x μέ:

$$2k\pi\leq x<2k\pi+\theta_1 \quad \text{εἴτε} \quad 2k\pi+\theta_2<x<2k\pi+2\pi \quad \text{ἤ}$$

$$\boxed{2k\pi\leq x<2k\pi+\theta_1 \quad \text{εἴτε} \quad 2k\pi+\theta_2<x<2(k+1)\pi, \quad k\in Z}$$

β) Ἄν $0\leq\alpha<1$, τότε σκεφτόμενοι ὅπως παραπάνω καί χρησιμοποιώντας τό σχ. 2 βλέπουμε ὅτι τήν ημx>α τήν ἐπαληθεύουν ὅλα τά τόξα πού τά πέρατά τους εἶναι ἐσωτερικά σημεῖα τοῦ τόξου $\overset{\frown}{MBM'}$ μέ $(\overset{\frown}{AM})=\theta$ καί $(\overset{\frown}{ABM'})=\pi-\theta$. Ἔτσι ἡ εἰδική λύση τῆς ἀνισώσεως εἶναι ὅλα τά τόξα x μέ $\theta<x<\pi-\theta$ καί ἡ γενική λύση της εἶναι:



Σχ. 2

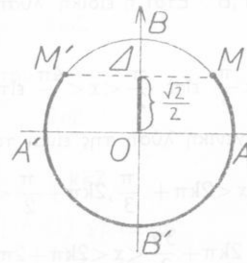
$$2k\pi+\theta<x<2k\pi+(\pi-\theta) \quad \text{ἤ}$$

$$\boxed{2k\pi+\theta<x<(2k+1)\pi-\theta, \quad k\in\mathbf{Z}}$$

Παρόμοια ἐπιλύουμε ὅλες τίς βασικές τριγωνομετρικές ἀνισώσεις. Γιά ἐμπέδωση ἄς δοῦμε μερικά συγκεκριμένα παραδείγματα.

Παράδειγμα 2. Νά ἐπιλυθεῖ ἡ ἀνίσωση: $\eta\mu x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$

Ἐπίλυση: Τά τόξα x μέ $0 \leq x < 2\pi$ πού ἔχουν $\eta\mu x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ εἶναι $x_1 = \frac{\pi}{4}$ καί $x_2 = \frac{3\pi}{4}$ δηλ. τά πέρατά τους εἶναι τά σημεῖα Μ καί Μ'. Εἶναι φανερό τώρα ὅτι ὅλα τά τόξα πού τά πέρατά τους εἶναι σημεῖα τῶν τόξων $\overset{\frown}{AM}$ καί $\overset{\frown}{M'B'A}$ ἐπαληθεύουν τή δοθεῖσα ἀνίσωση (σχ. 3).



Σχ. 3

Ἔτσι ἔχουμε τήν εἰδική λύση:

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \quad \text{εἴτε} \quad \frac{3\pi}{4} \leq x < 2\pi,$$

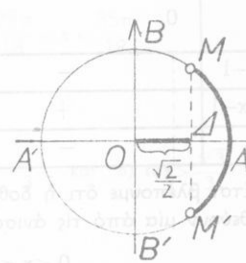
ἀπό τήν ὁποία εὔκολα παίρνουμε τή γενική λύση

$$2k\pi \leq x \leq 2k\pi + \frac{\pi}{4} \quad \text{εἴτε} \quad 2k\pi + \frac{3\pi}{4} \leq x < 2k\pi + 2\pi, \quad k \in Z$$

Παράδειγμα 3. Νά ἐπιλυθεῖ ἡ ἀνίσωση $\sigma\upsilon\nu x > \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ἐπίλυση: Τά τόξα x μέ $0 \leq x < 2\pi$ πού ἐπαληθεύουν τήν ἐξίσωση $\sigma\upsilon\nu x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ εἶναι $x_1 = \frac{\pi}{4}$ καί $x_2 = \frac{7\pi}{4}$, δηλαδή τά πέρατά τους εἶναι τά σημεῖα Μ καί Μ' τοῦ τριγ. κύκλου.

Βλέπουμε τώρα ὅτι ὅλα τά τόξα x, πού ἐπαληθεύουν τή δοθεῖσα ἀνίσωση, πρέπει νά λήγουν σέ σημεῖα τῶν τόξων $\overset{\frown}{AM}$ καί $\overset{\frown}{M'A}$, ἐκτός ἀπό τά Μ,Μ'. Ἔτσι ἡ εἰδική λύση τῆς ἀνισώσεως εἶναι τά τόξα x μέ



Σχ. 4

$$0 \leq x < \frac{\pi}{4} \quad \text{εἴτε} \quad \frac{7\pi}{4} < x < 2\pi,$$

καί ἡ γενική λύση της εἶναι τά τόξα x μέ

$$2k\pi \leq x < 2k\pi + \frac{\pi}{4} \quad \text{εἴτε} \quad 2k\pi + \frac{7\pi}{4} < x < 2k\pi + 2\pi, \quad k \in Z.$$

Παράδειγμα 4. Νά ἐπιλυθεῖ ἡ ἀνίσωση: εφx$<\sqrt{3}$

Ἐπίλυση: Τά τόξα x, πού ἐπαληθεύουν τήν εφx$=\sqrt{3}$ μέ $0 \leq x < 2\pi$, εἶναι, τά $x_1 = \frac{\pi}{3}$ καί $x_2 = \frac{4\pi}{3}$.

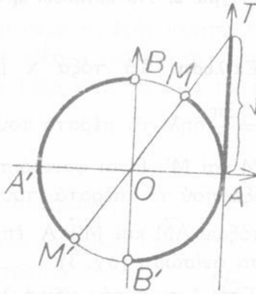
Εἶναι φανερό ὅτι τά τόξα x, πού ἐπαληθεύουν τή δοθείσα ἀνίσωση λήγουν σέ σημεῖα τῶν τόξων $\overset{\frown}{AM}$, $\overset{\frown}{BA'M'}$ καί $\overset{\frown}{B'A}$, ἐκτός ἀπό τά M,B,M′,B′. Ἔτσι ἡ εἰδική λύση εἶναι τά τόξα x μέ

$$0 \leq x < \frac{\pi}{3} \quad \text{εἴτε} \quad \frac{\pi}{2} < x < \frac{4\pi}{3} \quad \text{εἴτε} \quad \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$$

καί ἡ γενική λύση της εἶναι τά τόξα x μέ

$$2k\pi \leq x < 2k\pi + \frac{\pi}{3}, 2k\pi + \frac{\pi}{2} < x < 2k\pi + \frac{4\pi}{3},$$

$$2k\pi + \frac{3\pi}{2} < x < 2k\pi + 2\pi, \quad k \in Z.$$



Σχ. 5

2.3. Γενικές τριγωνομετρικές ἀνισώσεις

Παράδειγμα 1. Νά ἐπιλυθεῖ ἡ ἀνίσωση: $2συν^2x - 3συνx + 1 < 0$

Ἐπίλυση: Ἡ δοθείσα ἀνίσωση γράφεται: $(συνx-1)\cdot(2συνx-1)<0$.

Παίρνοντας τόν τριγωνομετρικό κύκλο καί μελετώντας τά πρόσημα τῶν παραγόντων συνx−1 καί 2συνx−1 στό διάστημα $[0,2\pi)$, σχηματίζουμε τόν ἀκόλουθο πίνακα γιά τό γινόμενο $P=(συνx-1)(2συνx-1)$.

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{3}$		2π
συνx−1		−		−		−	
2συνx−1		+		−		+	
P		−		+		−	

Ἔτσι βλέπουμε ὅτι ἡ δοθείσα ἀνίσωση ἔχει εἰδική λύση τά τόξα x πού ἐπαληθεύουν μία ἀπό τίς ἀνισώσεις

$$0 < x < \frac{\pi}{3} \quad \text{εἴτε} \quad \frac{5\pi}{3} < x < 2\pi.$$

Ἄρα ἡ γενική λύση της εἶναι τά τόξα x μέ $2k\pi < x < 2k\pi + \frac{\pi}{3}$ εἴτε

$$2k\pi + \frac{5\pi}{3} < x < (2k+1)\pi, \quad k \in Z.$$

Παράδειγμα 2. Νά ἐπιλυθεῖ ἡ ἀνίσωση: $\text{συν}3x < \frac{\sqrt{3}}{2}$ με $0 \leq x < 2\pi$

Ἐπίλυση: Θέτουμε $3x=y$, ὁπότε ἔχουμε νά ἐπιλύσουμε τήν ἀνίσωση

$$\text{συν}y < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ἡ τελευταία ἀνίσωση ἔχει τήν εἰδική λύση $\frac{\pi}{6} < y < \frac{11\pi}{6}$, ὁπότε ἡ γενική λύση της εἶναι:

$$2k\pi + \frac{\pi}{6} < y < 2k\pi + \frac{11\pi}{6}, \quad k \in Z.$$

Ἔτσι ἡ γενική λύση τῆς ἀρχικῆς δίνεται ἀπό τήν

$$2k\pi + \frac{\pi}{6} < 3x < 2k\pi + \frac{11\pi}{6}, \quad k \in Z$$

καί εἶναι $$\frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{18} < x < \frac{2k\pi}{3} + \frac{11\pi}{18}, \quad k \in Z \qquad (1)$$

Ἐπειδή ὅμως $k=3\lambda+\upsilon$, $\lambda \in Z$ καί $\upsilon \in \{0,1,2\}$ ἡ (1) γράφεται:

$$2\lambda\pi + \frac{2\upsilon\pi}{3} + \frac{\pi}{18} < x < 2\lambda\pi + \frac{2\upsilon\pi}{3} + \frac{11\pi}{18} \qquad (2)$$

Ἀπό τή (2) γιά $\upsilon=0$ παίρνουμε: $$2\lambda\pi + \frac{\pi}{18} < x < 2\lambda\pi + \frac{11\pi}{18} \qquad (3)$$

γιά $\upsilon=1$ παίρνουμε: $$2\lambda\pi + \frac{13\pi}{18} < x < 2\lambda\pi + \frac{23\pi}{18} \qquad (4)$$

καί γιά $\upsilon=2$ παίρνουμε: $$2\lambda\pi + \frac{25\pi}{18} < x < 2\lambda\pi + \frac{35\pi}{18} \qquad (5)$$

Ἀπό τίς (3), (4) καί (5) βλέπουμε ὅτι οἱ ζητούμενες λύσεις στό $[0,2\pi)$ εἶναι τά τόξα x μέ:

$$\frac{\pi}{18} < x < \frac{11\pi}{18}, \quad \frac{13\pi}{18} < x < \frac{23\pi}{18}, \quad \frac{25\pi}{18} < x < \frac{35\pi}{18}.$$

2.4. Ἀσκήσεις.

1. Νά ἐπιλυθοῦν οἱ ἀνισώσεις

   α) $\text{ημ}x < -\frac{1}{2}$, β) $\text{συν}x < \frac{\sqrt{2}}{2}$ γ) $\text{σφ}x > \frac{\sqrt{3}}{3}$ καί δ) $\text{εφ}x > \frac{\sqrt{3}}{3}$

2. Νά ἐπιλυθεῖ ἡ ἀνίσωση

   $$2\text{ημ}^2x - 3\text{ημ}x + 1 > 0$$

3. Νά ἐπιλυθεῖ ἡ ἀνίσωση

   $$(\sqrt{3} - 2\text{ημ}x)\ (2\text{συν}x - 1) \cdot (2\text{εφ}x - 2) \cdot (\text{ημ}^2x + \text{ημ}x + 1) > 0$$

4. Νά ἐπιλυθοῦν οἱ ἀνισώσεις

   α) $\text{εφ}3x > \sqrt{3}$, β) $\text{ημ}5x > \frac{\sqrt{3}}{2}$

5. Νά ἐπιλυθεῖ ἡ ἀνίσωση $\frac{(3\text{ημ}x - 1)\ (6\text{ημ}^2x - 5\text{ημ}x + 1)}{\text{ημ}x + \text{συν}x} > 0$

3. ΣΥΝΤΟΜΗ ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

1. Τά τριγωνομετρικά συστήματα τά διακρίνουμε κυρίως σέ δύο κατηγορίες:
   α) Σέ τριγωνομετρικά συστήματα, στά όποῖα ἡ μία τουλάχιστον ἐξίσωση εἶναι ἀλγεβρική ὡς πρός τά ἄγνωστα τόξα.
   β) Σέ τριγωνομετρικά συστήματα, στά ὁποῖα ὅλες οἱ ἐξισώσεις εἶναι τριγωνομετρικές.
2. Δέν ὑπάρχουν γενικές μέθοδοι ἐπιλύσεως τριγωνομετρικῶν συστημάτων.
3. Στά παραμετρικά τριγωνομετρικά συστήματα μέ μ ἐξισώσεις καί ν ἀγνώστους, $\mu > \nu$, κάνουμε **τριγωνομετρική ἀπαλοιφή**. Βρίσκουμε δηλαδή τήν ἀναγκαία συνθήκη (ἀπαλείφουσα τοῦ συστήματος), γιά νά ἔχει τό σύστημα λύση.
4. Σέ μιά τριγωνομετρική ἀνίσωση διακρίνουμε
   α) **μερική λύση**, πού εἶναι ἕνα τόξο πού τήν ἐπαληθεύει,
   β) **εἰδική λύση**, πού εἶναι τό σύνολο τῶν μερικῶν λύσεων στό $[0,2\pi)$
   γ) **γενική λύση**, πού εἶναι ὅλα τά τόξα πού τήν ἐπαληθεύουν.
5. Ἡ ἐπίλυση κάθε τριγωνομετρικῆς ἀνισώσεως ἀνάγεται τελικά στήν ἐπίλυση μιᾶς ἤ περισσότερων ἀπό τίς θεμελιώδεις τριγωνομετρικές ἀνισώσεις.

4. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

1. Νά ἐπιλυθοῦν καί διερευνηθοῦν τά συστήματα

α) $\begin{aligned} &\text{εφ}x+\text{εφ}y=\alpha \\ &\text{ημ}x\cdot\text{ημ}y=\beta \end{aligned}$ β) $\begin{aligned} &\text{ημ}x+\text{ημ}y=2\lambda\text{ημ}\alpha \\ &\text{συν}x+\text{συν}y=2\lambda\text{συν}\alpha \end{aligned}$

2. Νά ἐπιλυθοῦν τά συστήματα:

α) $\begin{aligned} &\text{ημ}^2x+\text{ημ}^2y=1+\text{ημ}z \\ &\text{ημ}^2y+\text{ημ}^2z=1+\text{ημ}x \\ &\text{ημ}^2z+\text{ημ}^2x=1+\text{ημ}y \end{aligned}$ β) $\begin{aligned} &\text{εφ}x+\text{εφ}y=1 \\ &\text{συν}x\cdot\text{συν}y=\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$ γ) $\begin{aligned} &x+y+\omega=\pi \\ &\frac{\text{εφ}x}{1}=\frac{\text{εφ}y}{2}=\frac{\text{εφ}\omega}{3} \end{aligned}$

3. Βρεῖτε τήν ἀπαλείφουσα στά παρακάτω συστήματα:

α) $\begin{aligned} &\alpha\text{συν}x+\beta\text{ημ}x=\sqrt{\alpha^2+\beta^2} \\ &\frac{\text{συν}^2x}{\mu}+\frac{\text{ημ}^2x}{\nu}=\frac{1}{\alpha^2+\beta^2} \end{aligned}$ β) $\begin{aligned} &\lambda\text{συν}2x=\text{συν}(x+\theta) \\ &\lambda\text{ημ}2x=2\text{ημ}(x+\theta) \end{aligned}$

γ) $\begin{aligned} &\text{συν}x+\text{συν}2x=\frac{\alpha}{\beta} \\ &\text{ημ}x+\text{ημ}2x=\frac{\gamma}{\delta} \end{aligned}$, $\beta\cdot\delta\neq 0$ δ) $\begin{aligned} &\frac{\alpha}{\text{ημ}x}+\frac{\beta}{\text{συν}x}=1 \\ &\alpha\text{συν}x-\beta\text{ημ}x=\text{συν}2x \end{aligned}$, $\text{ημ}x\cdot\text{συν}x\neq 0$

4. Νά ἐπιλυθοῦν οἱ ἀνισώσεις

α) $\text{ημ}x+\text{συν}x+\sqrt{2}(1-\sqrt{2})\text{ημ}2x>1$, β) $2\text{συν}\frac{x}{3}-\text{ημ}\frac{x}{2}-2>0$.

γ) $(2\text{συν}x-1)\cdot(x-2)>0$, $0<x<2\pi$.

5. Νά ἐπιλυθεῖ ἡ ἀνίσωση

$$\log_5(\text{ημ}x)>\log_{125}(3\text{ημ}x-2)$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Ὑποδείξεις γιά τή λύση τῶν ἀσκήσεων—Ἀπαντήσεις

ΚΕΦΑΛΑΙΟ III

1.4. 1. Ὑπ. Στό ἄθροισμα $\alpha+\beta$ προσθέστε καί ἀφαιρέστε τό β.

2. Ὑπ. Δεῖξτε ὅτι τό $\nu^3+2\nu+1$ ἔχει παράγοντα τό 4.

3. Ὑπ. Δεῖξτε ὅτι οἱ διαφορές $(\alpha_1+\beta_1)-(\alpha_2+\beta_2)$ καί $\alpha_1\beta_1-\alpha_2\beta_2$ εἶναι πολλαπλάσια τοῦ ν.

4. Ὑπ. α) Λάβετε ὑπόψη σας ὅτι ἕνας ἀκέραιος εἶναι ἄρτιος ἤ περιττός. β) Ἀναπτύξτε τό τετράγωνο ἑνός περιττοῦ $2\lambda+1$ καί χρησιμοποιῆστε τό α).

5. Ὑπ. Χρησιμοποιῆστε τίς ταυτότητες πού δίνουν τά ἀναπτύγματα τῶν $(\alpha+\beta)^2$ καί $(\alpha-\beta)^2$ καί λάβετε ὑπόψη σας ὅτι οἱ $\alpha+\beta$ καί $\alpha-\beta$ εἶναι ἄρτιοι.

6. Ὑπ. Νά διακρίνετε τίς περιπτώσεις $\lambda=3\kappa$, $\lambda=3\kappa+1$, $\lambda=3\kappa+2$.

7. Ὑπ. Νά συνδυάσετε τίς περιπτώσεις $x=3\kappa+1$, $x=3\kappa+2$ μέ τίς $y=3\lambda+1$, $y=3\lambda+2$ καί νά ἀποδείξετε τό ζητούμενο.

8. Ὑπ. Νά διακρίνετε τίς περιπτώσεις $x=3\kappa+1$, $x=3\kappa+2$.

9. Ὑπ. Νά διακρίνετε τίς περιπτώσεις $\kappa=6\lambda$, $\kappa=6\lambda+1,\ldots,\kappa=6\lambda+5$.

10. Ὑπ. α) Νά διακρίνετε τίς περιπτώσεις $\alpha=5\kappa+1,\ldots,\alpha=5\kappa+4$. β) Νά παραγοντοποιήσετε κατάλληλα τό x^4-y^4 καί νά χρησιμοποιήσετε τό α).

11. Ὑπ. Βρεῖτε τίς δυνατές τιμές τοῦ ὑπολοίπου λ^3 καί προσδιορίστε τό λ. Ἀπ. $\alpha=0$ ἤ $\alpha=138$ ἤ $\alpha=324$.

12. Ὑπ. Παρατηρῆστε ὅτι $2^{4\nu+1}-2^{2\nu}-1=2^{4\nu}-2^{2\nu}+2^{4\nu}-1$ καί ἔπειτα παραγοντοποιῆστε τό δεύτερο μέλος. Τό ζητούμενο θά προκύψει ἄν θυμηθεῖτε πῶς παραγοντοποιοῦνται τά $\alpha^{\kappa}-1$ καί $\alpha^{2\kappa+1}+1$ $(\kappa\in N)$.

13. Ὑπ. Χρησιμοποιῆστε τή μέθοδο τῆς μαθηματικῆς ἐπαγωγῆς.

14. Ὑπ. Χρησιμοποιῆστε τήν πρόταση 2 τῆς 1.3.

15. Ὑπ. Δεῖξτε ὅτι $9^{30}\equiv 1 \pmod 8$ καί $17^{10}\equiv 1 \pmod 8$ καί χρησιμοποιῆστε τήν ἄσκηση 3. Ἀπ. 2.

16. Ὑπ. Παρατηρῆστε ὅτι τό $\frac{3}{4}\lambda-\frac{1}{4}$ πρέπει νά εἶναι ἀκέραιος. Ἀπ. $\rho=3\kappa+2$, $\kappa\in Z$.

1.9. 1. Ὑπ. Χρησιμοποιῆστε τόν ἀλγόριθμο τοῦ Εὐκλείδη. Ἀπ. $(27,20)=1$, $1=27.3+20.(-4)$.

2. Ὑπ. Νά γράψετε τίς δύο ἰσότητες τῆς διαιρέσεως καί νά συμπεράνετε ὅτι $\alpha|(238,510)$ καί $\alpha>15$. Ἀπ. $\alpha=17$ ἤ $\alpha=34$.

3. Ὑπ. Ἐργαστεῖτε ὅπως στήν ἄσκηση 2. Ἀπ. 21, 35, 105.

4. Ὑπ. Γράψτε τίς ἰσότητες τῶν διαδοχικῶν διαιρέσεων. Ἀπ. $\alpha=1344$, $\beta=1004$.

5. Ὑπ. Ἄν α,β εἶναι οἱ ζητούμενοι ἀκέραιοι, τότε $\alpha=24\alpha'$, $\beta=24\beta'$, $(\alpha',\beta')=1$ καί $\alpha'+\beta'=12$. Ἀπ. 24,264 ἤ 120,168.

6. Ἀπ. 2, 10080.

7. Ὑπ. Χρησιμοποιῆστε τή σχέση (2) καί τήν πρόταση 3 τῆς 1.5. Μπορεῖτε νά προσδιορίσετε μιά τριάδα (x,y,z), ἄν γράψετε $(32,48,72)=(32,(48,72))$ καί χρησιμοποιήσετε τόν ἀλγόριθμο τοῦ Εὐκλείδη. Ἀπ. $(32,48,72)=8=32.1+48.1+72.(-1)$.

8. Ὑπ. Ἀναλύστε τό 120 σέ γινόμενο (θετικῶν) πρώτων παραγόντων. Ἀπ. 1, 2, 2.3, 2.5, 2.3.5, 2^2, $2^2.3$, $2^2.5$, $2^2.3.5$, 2^3, $2^3.3$, $2^3.5$, $2^3.5$, $2^3.3.5$, 3,5, 3.5 (16 διαιρέτες).

9. Ὑπ. Παραγοντοποιῆστε τό πρῶτο μέλος τῆς ἐξισώσεως, βρεῖτε τό Δ (36) καί παρατηρῆστε ὅτι $x+y \equiv x-y \pmod 2$). Ἀπ. $x = 10$, $y=8$.

10. Ὑπ. (i) Νά θέσετε $(\alpha,\beta) = \delta$ καί $(5\alpha+4\beta,\ \alpha+\beta)=\delta'$ καί νά δείξετε μέ τή βοήθεια τῆς προτάσεως 4 τῆς 1.5 ὅτι $\delta|\delta'$ καί $\delta'|\delta$. Στίς (ii) (iii) καί (iv) νά ἐργαστῆτε μέ ὅμοιο τρόπο.

11. Ὑπ. Πάρτε ἕνα κοινό διαιρέτη λ τῶν x καί y καί δεῖξτε ὅτι $\lambda = \pm 1$.

12. Ὑπ. (i) Νά θέσετε $(\alpha,\beta)=\delta$, $(\kappa\alpha,\kappa\beta)=\delta'$ καί νά δείξετε ὅτι $\delta'|\kappa\delta$ καί $\kappa\delta|\delta'$. (ii) Χρησιμοποιῆστε τήν πρόταση 2 τῆς 1.7 καί τήν (i).

13. Ὑπ. Πολλαπλασιάστε καί τά δύο μέλη τῆς $\alpha\alpha'+\beta\beta'=1$ μέ γ καί δεῖξτε ὅτι τό πρῶτο μέλος της διαιρεῖται μέ τό $\alpha\cdot\beta$.

14. Ὑπ. Νά θέστε $(\alpha,\beta)=\delta$, $[\alpha,\beta]=\mu$, ὁπότε $\alpha=\alpha_1\delta$, $\beta=\beta_1\delta$, $(\alpha_1,\beta_1)=1$ καί $\alpha\beta=\mu.\delta$. Ἀπ. (i) $\alpha=10$, $\beta=240$ ἤ $\alpha=30$, $\beta=80$ ἤ $\alpha=80$, $\beta=30$ ἤ $\alpha=240$, $\beta=10$. (ii) $\alpha=154$, $\beta=350$ ἤ $\alpha=350$, $\beta=154$ ἤ $\alpha=110$, $\beta=3850$ ἤ $\alpha=3850$, $\beta=110$. (iii) $\alpha=208$, $\beta=598$ ἤ $\alpha=598$, $\beta=208$ ἤ $\alpha=26$, $\beta=4784$ ἤ $\alpha=4784$, $\beta=26$.

15. Ὑπ. α) Ἀποδεῖξτε τό ζητούμενο μέ τήν εἰς ἄτοπο ἀπαγωγή. β) Νά θέσετε $(\alpha,\beta)=\delta$ καί $(\alpha,\kappa\beta)=\delta'$ καί νά δείξετε ὅτι $\delta|\delta'$ καί $\delta'|\delta$ χρησιμοποιώντας τό πρῶτο μέρος τῆς ἀσκήσεως καί τήν πρόταση 2 τῆς 1·6.

16. Ὑπ. Λάβετε ὑπόψη σας ὅτι κάθε παράγοντας ἑνός γινομένου ἀκεραίων εἶναι διαιρέτης τοῦ γινόμενου καί χρησιμοποιῆστε τό πρῶτο μέρος τῆς ἀσκήσεως 15. Ἀποδεῖξτε τό ἀντίστροφο χρησιμοποιώντας τή συνεπαγωγή τῆς ἀσκήσεως 15. Ἡ ἐφαρμογή (i) εἶναι ἄμεση συνέπεια τοῦ πρώτου μέρους τῆς ἀσκήσεως, ἐνῶ ἡ (ii) ἀποδεικνύεται μέ τή βοήθεια τῆς (i).

17. Ὑπ. Γιά τίς (i) καί (ii) δεῖξτε ὅτι $(\alpha\pm\beta,\alpha) = (\alpha,\beta)$, $(\alpha\pm\beta,\beta)=(\alpha,\beta)$. Γιά τήν ἀπόδειξη τῆς (iii) χρησιμοποιῆστε τίς (i) καί (ii) καί τήν ἄσκηση 16.

18. Ὑπ. Νά θέσετε $(\alpha,\beta,\gamma) = \delta$, $\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\ \dfrac{\alpha+\gamma}{2},\ \dfrac{\beta+\gamma}{2}\right)=\delta'$ καί νά δείξετε ὅτι $\delta|\delta'$ καί $\delta'|\delta$.

2.4. **1**. Ἀπ $x=4-5\kappa$, $y=1-2\kappa$, $\kappa\in Z$.

2. Ὑπ. Ἐργαστεῖτε ὅπως στό παράδειγμα 2 τῆς 2.3 Ἀπ. Οἱ (i) καί (ii) ἔχουν μόνο ἀρνητικές ἀκέραιες λύσεις.

3. Ὑπ. Βρεῖτε τίς μή ἀρνητικές ἀκέραιες λύσεις τῆς $2x+5y=100$. Ἀπ. Μέ 11 τρόπους.

4. Ἀπ. (i) (10,1), (6,4), (2,7), (ii) (5,11), (10,2). (iii) (6,8) (iv) (3,6).

5. Ἀπ. 4 μολ. καί 8 τετρ. ἤ 13 μολ. καί 1 τετρ.

6. Ἀπ. α) (6,13), (14,8), (22,3) β) Μέγιστο κέρδος θά ἔχει, ἄν κατασκευάσει 22 κοσμήματα α' εἴδους καί 3 κοσμήματα β' εἴδους (μέγιστο κέρδος =15.450 δρχ.).

7. Ὑπ. Ἀπό τίς $x+y=37$, $x=5\pi+2$, $y=7\pi'+4$, προκύπτει $5\pi+7\pi'=31$. Ἀπ. $x=12$, $y=25$.

4. **1**. Ὑπ. Θεωρῆστε τήν ἰσότητα $(\nu+7)(\nu-4)+33=\nu^2+3\nu+5$ καί δεῖξτε ὅτι $\nu+7 \equiv \nu-4 \pmod{11}$.

2. Ἁπλή.

3. Ὑπ. Ὀνομάστε $\nu-2$, $\nu-1$, ν, $\nu+1$, $\nu+2$ τούς διαδοχικούς ἀκεραίους καί δεῖξτε ὅτι ὁ ν^2+2 δέ διαιρεῖται μέ τό 5.

4. Ὑπ. Νά διακρίνετε τίς περιπτώσεις $\rho=6\kappa+1, \ldots, \rho=6\kappa+5$.

5. Ὑπ. Δεῖξτε ὅτι $p\geq 3$ καί συνεχίστε κατάλληλα.

6. Ὑπ. Δεῖξτε ὅτι πάντα ὁ ἕνας ἀπό αὐτούς διαιρεῖται μέ τό 3.

7. Ὑπ. Παραγοντοποιῆστε τήν παράσταση.

8. Ὑπ. Προσθέστε καί ἀφαιρέστε τό $4^{5555}+4^{2222}$.

9. 'Υπ. Δεῖξτε ὅτι $β^2-4αγ=8κ+5$, $κ\in Z$, καί στή συνέχεια ὅτι τό $8κ+5$ δέν εἶναι τέλειο τετράγωνο.

10. 'Απ. $x=3$, $y=4$ καί $z=2$.

11. 'Υπ. Χρησιμοποιῆστε τό θεώρημα τῆς 1.3.

12. 'Υπ. Θεωρῆστε τή διαφορά $(α+β)(ν+ρ)-2(να+ρβ)$.

13. 'Υπ. Γράψτε τό κλάσμα στή μορφή

$$\frac{(5ν+1)(3ν+1)+5}{2(15ν^2+8ν+6)+5ν+1}$$

14. 'Υπ. Παρατηρῆστε ὅτι $A=\frac{2}{9}(10^{ν}-1)$ καί $B=\frac{8}{9}(10^{μ}-1)$.

15. 'Υπ. Δεῖξτε ὅτι ἕνας τουλάχιστον εἶναι μικρότερος ἀπό 4. 'Απ. 2,4,4 ἤ 2,3,6 ἤ 3,3,3.

16. 'Υπ. α) Δεῖξτε ὅτι ἕνας γραμμικός συνδυασμός τῶν $3κ+1$ καί $14κ+5$ εἶναι ἴσος μέ μονάδα. β) Λάβετε ὑπόψη τίς ἰσότητες $14κ+5=5(3κ-1)-(κ-10)$ καί $3κ-1=3(κ-10)+29$.

17. 'Υπ. Νά διακρίνετε τίς περιπτώσεις $ν=4κ$, $ν=4κ+1$, $ν=4κ+2$, $ν=4κ+3^{κ}$ καί παρατηρῆστε ὅτι $5^{4κ}=(26-1)^{2κ}=(24+1)^{2κ}$. 'Απ. $ν=4κ$.

18. 'Υπ. Νά θέσετε $(2α-1,\ β)=δ$ καί νά δείξετε ὅτι $δ|1$.

19. 'Υπ. Εἶναι $(αA,\ αB,\ βA,\ βB)=((αA,\ αB),\ (βA,βB))$ καί $[αA,\ αB,\ βA,\ βB]=[[αA,\ αB],\ [βA,\ βB]]$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ IV

1.7. **1.** 'Υπ. 'Υποθέστε ὅτι $f(x)=α_νx^ν+\dots+α_1x+α_0$ καί $g(x)=β_μx^μ+\dots+β_0$ εἶναι τά δύο πολυώνυμα καί σχηματίστε τή διαφορά τους.

2. 'Υπ. Νά διακρίνετε τίς περιπτώσεις $ν>μ$ καί $ν=μ$.

3. 'Απ. $α=1$, $β=1$.

4. 'Απ. i) $α_3\neq3$, ii) $α_3=3$, iii) $α_3=3$, $α_2=-2$ καί $α_1\neq7$, iv) $α_3=3$, $α_2=-2$, $α_1=7$ καί $α_0\neq-6$ καί v) $α_3=3$, $α_2=-2$, $α_1=7$ καί $α_0=-6$.

5. 'Απ. $α=2$, $β=7$, $γ=6$, $δ=3$ ἤ $α=2$, $β=-5$, $γ=-6$, $δ=-3$.

6. 'Υπ. Τό $g(x)$ θά εἶναι: $g(x)=x^2+μx+ν$, $μ,ν\in\mathbb{R}$, ὁπότε ἀπό τήν ἰσότητα $f(x)=(g(x))^2$ ἀποδεικνύουμε τό ζητούμενο.

7. 'Υπ. Νά πάρετε $g(x)=αx^2+βx+γ$, $α\neq0$ καί $π(x)=δx+ε$ μέ $δ\neq0$. 'Απ. $g(x)=3x^2-5x+2$ καί $π(x)=6x-5$ ἤ $g(x)=-3x^2+5x-2$ καί $π(x)=6x-5$.

8. 'Υπ. Τό $g(x)$ θά εἶναι τό πολύ 2ου βαθμοῦ, δηλ. $g(x)=kx^2+λx+μ$. Σχηματίστε τό πολυώνυμο $f(x)-(g(x))^2$. 'Απ. $g(x)=2x^2-2x-1$ ἤ $g(x)=-2x^2+2x+1$.

9. 'Υπ. Νά λάβετε ὑπόψη σας τήν ταυτότητα $α^3+β^3+γ^3-3αβγ=\frac{1}{2}(α+β+γ)[(α-β)^2+(β-γ)^2+(γ-α)^2]$.

10. 'Απ. $f(x)=αx^2-αx+γ$, μέ $α,\ γ\in\mathbb{C}$.

2.6. **1.** 'Υπ. Εἶναι $f_1(x)=g_1(x)π_1(x)$ καί $f_2(x)=g_2(x)π_2(x)$

2. 'Υπ. 'Υποθέστε ὅτι $g(x)\mid f_κ(x)$, δηλ. $f_κ(x)=g(x)\cdot π(x)$.

3. 'Υπ. 'Εργασθεῖτε ὅπως στήν προηγούμενη ἄσκηση.

4. 'Υπ. 'Υποθέστε ὅτι $g(x)\mid f_1(x)$, ὁπότε $f_1(x)+f_2(x)=g(x)π(x)$ καί $f_1(x)=g(x)π_1(x)$.

5. 'Απ. $x-1$.

6. 'Απ. $κ=12$ καί $λ=30$.

7. 'Απ. $\kappa=1$.

8. 'Απ. $\lambda=\frac{1}{2}$ ή $\lambda=\frac{1}{3}$.

9. 'Υπ. Σχηματίστε τή διαφορά $f(x)-\varphi(x)$ καί δεῖξτε ὅτι $\varphi(x) \mid f(x)-\varphi(x)$.

10. 'Υπ. Στό $f(x)$ νά προσθέσετε καί νά ἀφαιρέσετε τόν ὅρο $\alpha^{\rho}x^{(\rho+1)\nu}$, ὥστε νά μπορέσετε νά τό κάμετε γινόμενο παραγόντων τοῦ $g(x)$ ἐπί κάποιο πολυώνυμο $\pi(x)$.

2.9. 1. 'Υπ. 'Αρκεῖ $g(x) \mid [f_1(x)\, \upsilon_2(x)-f_2(x)\upsilon_1(x)]$

2. 'Υπ. Εἶναι $(x-\alpha) \mid [f(x)-\upsilon]$ καί $(x-\beta) \mid [f(x)-\upsilon]$.

3.4. 1. 'Απ. α) $f(-2)=-23$, $f(5)=-1164$, β) $\varphi(-\sqrt{2})=-1-4\sqrt{2}$, γ) $g(1-i)=-3-2i$.

2. 'Απ. $\lambda=4$.

3. 'Απ. $\kappa=\frac{13}{4}$ καί $\lambda=-\frac{83}{2}$.

4. 'Υπ. πρέπει $f(-2)=6$ καί $f(1)=2$. 'Απ. $\alpha=\frac{5}{3}$ καί $\beta=-\frac{4}{3}$.

5. 'Απ. α) $\pi(x)=5x^2+14x+44$ καί $\upsilon=132$

β) $\pi(x)=x^4-2x^3+4x^2-8x+16$ καί $\upsilon=0$

γ) $\pi(x)=x^2-(2+3i)x+8+6i$ καί $\upsilon=-15-14i$

δ) $\pi(x)=x^3+3x^2+(6-2i)x+1-3i$ καί $\upsilon=-2-4i$

ε) $\pi(x)=4x^3+3x^2-\frac{3}{2}x-\frac{45}{4}$ καί $\upsilon=-\frac{275}{8}$

6. 'Υπ. Ἔχουμε $f(x)=(x-\alpha)\cdot\pi_1(x)+f(\alpha)$, ἡ ὁποία γιά $x=\beta$ δίνει $f(\beta)=(\beta-\alpha)\pi_1(\beta)+f(\alpha)$ κ.τ.λ.

7. 'Υπ. Τό ὑπόλοιπο εἶναι τό πολύ 2ου βαθμοῦ, δηλ. τῆς μορφῆς $\upsilon(x)=\kappa x^2+\lambda x+\mu$. Ἔτσι ἔχουμε $f(x)=[(x+1)\,(x-2)\,(x+3)]\pi(x)+\kappa x^2+\lambda x+\mu$, ἀλλά $f(-1)=2$ κ.τ.λ. 'Απ. $\upsilon(x)=x^2+2x+3$.

8. 'Υπ. i) Ἔχουμε $f(x)=(x-\alpha)\,(x-\beta)\,\pi(x)+\kappa x+\lambda$, ὁπότε $f(\alpha)=k\alpha+\lambda$ κ.τ.λ.

ii) Ἔχουμε $f(x)=(x-\alpha)\,\pi(x)+f(\alpha)$ καί $\pi(x)=(x-\alpha)\,\pi_1(x)+\pi(\alpha)$.

9. 'Υπ. Δεῖξτε τό ζητούμενο μέ τή μέθοδο τῆς μαθηματικῆς ἐπαγωγῆς.

10. 'Υπ. Νά πάρετε τό πολυώνυμο $f(x)=\kappa x^3+\lambda x^2+\mu x+\nu$ καί νά ὑπολογίσετε τά κ,λ,μ,ν, ὥστε νά ἰσχύουν οἱ ὑποθέσεις. 'Απ. $\kappa=\frac{1}{3}$, $\lambda=\frac{1}{2}$, $\mu=\frac{1}{6}$.

11. 'Υπ. 'Αρκεῖ νά δείξετε ὅτι $P(1)=0$. Νά σχηματίσετε τό $P(1)$ καί νά πάρετε τό $S_\nu=$ $=\frac{1}{\alpha_1\alpha_2}+\frac{1}{\alpha_2\alpha_3}+\ldots+\frac{1}{\alpha_{\nu-1}\alpha_\nu}$. Σχηματίστε τό γινόμενο ωS_ν(ω διαφορά τῆς ἀριθμ. προόδου) καί δεῖξτε ὅτι $S_\nu=\frac{\nu-1}{\alpha_1\alpha_\nu}$.

4.3. 1. 'Υπ. Δεῖξτε ὅτι τό πολυώνυμο $F(x)=f(x)-\lambda$ εἶναι τό μηδενικό πολυώνυμο.

2. 'Υπ. Νά λάβετε ὑπόψη ὅτι $x^2-2\rho x+\rho^2=(x-\rho)^2$.

3. 'Υπ. Νά λάβετε ὑπόψη σας ὅτι $f(x)=(x-\rho)^{\kappa}\pi_1(x)$, μέ $\pi_1(\rho)\neq 0$, $g(x)=(x-\rho)^{\lambda}\pi_2(x)$, μέ $\pi_2(\rho)\neq 0$ καθώς καί τόν ὁρισμό τοῦ Μ.Κ.Δ.

4. 'Υπ. Σχηματίστε τό πολυώνυμο $F(x)=f(x)-1$ καί δεῖξτε ὅτι εἶναι τό μηδενικό πολυώνυμο.

5. 'Υπ. Χρησιμοποιώντας διαδοχικά τό σχῆμα Horner δεῖξτε ὅτι ὁ ἀριθμός 2 εἶναι ρίζα μέ βαθμό πολλαπλότητας 2.

6. 'Υπ. Χρησιμοποιῆστε διαδοχικά τό σχῆμα Horner.

7. Ὑπ. Ἡ ἐξίσωση γράφεται: $(\lambda+1)(x^3-1)-(\lambda^2+5\lambda-5)x(x-1)=0$. Ἔτσι βλέπουμε ὅτι μία ρίζα της εἶναι τό 1.

8. Ἀπ. $x^3-2x^2-5x+6=0$.

9. Ὑπ. Ἄν x_1,x_2,x_3 εἶναι οἱ ρίζες τῆς ζητούμενης ἐξισώσεως καί ρ_1,ρ_2,ρ_3 οἱ ρίζες τῆς δοθείσας τότε $x_1=\rho_1^2$, $x_2=\rho_2^2$, $x_3=\rho_3^2$, ὁπότε $x_1+x_2+x_3=\rho_1^2+\rho_2^2+\rho_3^2$ κ.τ.λ.
Ἀπ. $x^3-(\alpha_1^2-2\alpha_2)x^2+(\alpha_2^2-2\alpha_1\alpha_3)x-\alpha_3^2=0$.

10. Ὑπ. i) Χρησιμοποιῆστε τούς τύπους Vieta. ii) Ἀφοῦ $\rho_1^2+\rho_2^2+\rho_3^2=-2\alpha<0$, ἔχουμε ὅτι οἱ ρ_1,ρ_2,ρ_3 δέν εἶναι ὅλες πραγματικές, ὁπότε, ἄν ρ_1 εἶναι ἡ κοινή πραγματική ρίζα, τότε $\rho_2,\rho_3\in \mathbf{C}$ μέ $|\rho_2|=|\rho_3|$.

11. Ὑπ. Ἄν $P(x)$ εἶναι τό α' μέλος τῆς ἐξισώσεως τότε $P(\alpha_1)=\alpha_1$, $P(\alpha_2)=\alpha_2,\dots,P(\alpha_\nu)=\alpha_\nu$. Σχηματίστε τό πολυώνυμο $F(x)=P(x)-x$. Ἀπ. $x=\beta$.

12. Ὑπ. Δεῖξτε πρῶτα ὅτι οἱ ρίζες τοῦ $Q(x)$ εἶναι καί ρίζες τοῦ $P(x)$. Ὑπολογίστε ἔπειτα καί τήν τρίτη ρίζα τοῦ $P(x)$ καί γράψτε τό $P(x)$ μέ μορφή γινομένου.

13. Ὑπ. Σχηματίστε τό πολυώνυμο $F(x)=f(x)-f(0)$ καί δεῖξτε ὅτι εἶναι τό μηδενικό πολυώνυμο.

4.6. 1. Ἀπ. α) $-2,3,\ \frac{1}{2},-\frac{1}{2}$, β) $2,\ \frac{-3\pm i\sqrt{11}}{2}$, γ) $-1,2,3$

δ) $2,3,-\frac{1}{2}$, ε) $-2,\ \frac{5\pm i\sqrt{23}}{6}$, στ) 3(διπλῆ), $-\frac{1}{2}$, i, $-i$.

2. Ὑπ. Πιθανές ρητές ρίζες εἶναι οἱ διαιρέτες τοῦ 4. Ἀπ. $\kappa=2,-4,-13,-19$.

3. Ὑπ. Πιθανές ρητές ρίζες εἶναι οἱ ἀριθμοί $+1$ καί -1.

4. Ὑπ. Ἄν ρ εἶναι ἀκέραια ρίζα, τότε $\rho^3+k_1\rho^2+k_2\rho+k_3=0$ ἤ $k_1\rho^2+k_2\rho+k_3=-\rho^3$.

5. Ἀπ. $\rho_1=3-i$, $\rho_2=3+i$, $\rho_3=2$, $k=22$ καί $\lambda=-20$.

6. Ἀπ. $1+i,\ 1-i,\ \frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

7. Ἀπ. α) $f(x)=x^3-x^2+4x-4$, β) $f(x)=x^4-2x^3+3x^2-2x+2$

8. Ἀπ. α) $f(x)=(x-i)(x+i)\left(x-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$

β) $f(x)=(x+2-\sqrt{3}i)(x+2+\sqrt{3}i)(x+i\sqrt{3})(x-i\sqrt{3})$

9. Ἀπ. $f(x)=(x-2)(x-3)(2x+1)$.

10. Ὑπ. Νά λάβετε ὑπόψη ὅτι $\rho_1^{2\nu}+\alpha^\nu\rho_1^\nu+\beta^\nu=0$, $\rho_2^{2\nu}+\alpha^\nu\rho_2^\nu+\beta^\nu=0$, $\rho_1+\rho_2=-\alpha$ καί $\rho_1\rho_2=\beta$.

11. Ὑπ. Τό $f(x)=(f_1(x)+if_2(x))\cdot(f_1(x)-if_2(x))$ κ.τ.λ.

12. Ὑπ. Δεῖξτε ὅτι οἱ ρίζες τοῦ $\varphi(x)$ εἶναι καί ρίζες τοῦ $f(x)$.

13. Ὑπ. Ἀπό τά $f(\rho)=0$, $f(\alpha_0)=0$ καί $f(0)=\alpha_0$, ὑπολογίστε τό $g(\rho)$.

14. Ὑπ. Σχηματίστε τά $g(x)$, $f(x)-x$ καί $g(x)-x$ καί δεῖξτε ὅτι $g(\rho_1)-\rho_1=0$ κ.τ.λ.

15. Ὑπ. Δεῖξτε ὅτι δέν ὑπάρχει ρ, μέ $\rho\in Q^+$ καί $\sqrt{\rho}\in R-Q$: $f(\sqrt{\rho})=0$.

16. Ὑπ. Χρησιμοποιώντας τούς τύπους Vieta, δεῖξτε ὅτι τό γινόμενο $(\rho_1-\rho_2)^2\cdot(\rho_2-\rho_3)^2\cdot(\rho_3-\rho_1)^2<0$, ὁπότε τά ρ_1,ρ_2,ρ_3 δέν μπορεῖ νἆναι πραγματικοί ἀριθμοί. Στή συνέχεια δεῖξτε ὅτι τό $1-\rho_1<0$ καί $\sqrt{2}-\rho_1>0$.

17. Ὑπ. Δεῖξτε ὅτι τό $f(x)$ δέν ἔχει ρίζες τίς πιθανές ρητές ρίζες $\pm1,\pm2$, γιά $\lambda\in Z$.

18. Ὑπ. Σχηματίστε τό πολυώνυμο $Q(x)=P(x)-7$ καί δεῖξτε ὅτι μηδενίζεται γιά τέσσερις διαφορετικούς μεταξύ τους ἀκέραιους ἀριθμούς. Ἄν γιά $x=\tau$ ἰσχύει $P(\tau)=14$, δεῖξτε ὅτι δέν ἰσχύει ἡ σχέση $P(\tau)-7=7$.

5.4. 1. α) $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=2$, $x_3=2$

β) $x_1=2$, $x_2=\frac{-5-i\sqrt{3}}{2}$, $x_3=\frac{-5+i\sqrt{3}}{2}$

γ) $x_1=-1$, $x_2=2(1-i\sqrt{3})$, $x_3=2(1+i\sqrt{3})$

δ) $x_1=\sqrt[3]{3}\,(\sqrt[3]{3}+1)$, $x_2=\frac{\sqrt[3]{3}}{2}[(-1-\sqrt[3]{3})-(\sqrt[6]{3^5}-\sqrt[3]{3})i]$, $x_3=\overline{x_2}$

2. α) $x_1=1-\sqrt{2}$, $x_2=1+\sqrt{2}$, $x_3=-i\sqrt{5}$, $x_4=i\sqrt{5}$

β) $x_1=-1-\sqrt{7}$, $x_2=-1+\sqrt{7}$, $x_3=1-3i$, $x_4=1+3i$

6.4. 1. Ἀπ. α) $\lambda>-\frac{1}{12}$, β) $\lambda=-\frac{1}{12}$, γ) ἀδύνατο, δ) $\lambda<-\frac{1}{12}$

ε) $|12\lambda+1|<4(\lambda-2)^2$

2. Ὑπ. Νά ἐξετάσετε τίς περιπτώσεις $x\in R$ καί $x\in C-R$. Στή δεύτερη περίπτωση νά θέσετε $x=\alpha+\beta i$

3. Ὑπ. Νά καθορίσετε τά πρόσημα τῶν Δ, P, S γιά τίς διάφορες πραγματικές τιμές τοῦ λ καί νά κάνετε πίνακα.

4. Ὑπ. Πρέπει ἡ ἐπιλύουσα τῆς δοθείσας νά ἔχει δύο ρίζες θετικές. Ἀπ. $\lambda>2$.

5. Ὑπ. Νά καθορίσετε τά πρόσημα τῶν Δ καί $\alpha=\lambda-1$ γιά τίς διάφορες πραγματικές τιμές τοῦ λ καί νά κάμετε πίνακα.

6. Ὑπ. Νά ἐπιλυθεῖ ὅπως οἱ ἀντίστροφες 4ου βαθμοῦ (δηλ. νά διαιρέσετε μέ τό x^2 καί νά θέσετε $x+\frac{1}{x}=y$).

7. Ὑπ. Ἡ δοθεῖσα εἶναι ἰσοδύναμη μέ τήν $(\lambda-1)x^2+2x-(\lambda+1)>0$, ὁπότε ἐργαζόμαστε ὅπως στήν ἄσκηση 5.

8. Ἀπ. α) $x=2k\pi$, $x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$, $k\in Z$, β) $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$, $x=2k\pi+\frac{2\pi}{3}, k\in Z$, γ) $x=$ $=2k\pi-\frac{\pi}{12}$, $x=2k\pi+\frac{5\pi}{12}, k\in Z$, δ) $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$, $x=2k\pi$, $k\in Z$.

9. Ὑπ. α) Ἡ δοθεῖσα εἶναι ἰσοδύναμη μέ τήν ημx$(4\lambda$συν$^2x-2$συν$x-\lambda)=0$. β) Εἶναι γραμμική ἐξίσωση.

10. Ὑπ. Θέτουμε ημx+συνx$=t$, ὁπότε ημx · συνx $=\frac{t^2-1}{2}$, ὁπότε ἔχουμε τήν ἰσοδύναμη ἐξίσωση $t^2-2\lambda t+1=0$.

11. Ὑπ. Νά θέσετε εφω$=\frac{2\mu+1}{\mu}$, ὁπότε ἔχετε τήν ἰσοδύναμη ἐξίσωση συν(χ+ω)=συνω.

Ἄν x_1, x_2 εἶναι δύο ρίζες τῆς τελευταίας, τότε ἀπό $|x_1-x_2|=\frac{\pi}{2}$ νά ὑπολογίσετε τήν εφω.

8. 1. Ὑπ. Δεῖξτε ὅτι οἱ ρίζες τοῦ $g(x)$ εἶναι καί ρίζες τοῦ $f(x)$.

2. Ὑπ. Ἐργασθεῖτε ὅπως καί στήν προηγούμενη.

3. Ὑπ. Χρησιμοποιῆστε διαδοχικά τό σχ. Horner γιά νά βρεῖτε τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως τοῦ $f(x)$ μέ τό $x-1$ καί στή συνέχεια τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως τοῦ $\pi(x)$ (πηλίκο τῆς προηγούμενης διαιρέσεως) μέ τό $x-1$.

4. Ὑπ. Δεῖξτε ὅτι $g(1)=0$, ἀφοῦ γνωρίζετε ὅτι $f(1)=0$ καί $\pi(1)=0$ (ὅπου $\pi(x)$ τό πηλίκο τῆς διαιρέσεως τοῦ $f(x)$ μέ τό $x-1$).

5. 'Υπ. Νά λάβετε ὑπόψη ὅτι $(x-\alpha)(x^2-3x+4)+\upsilon_1=(x-\beta)(x^2-4x+2)+\upsilon_2$.

6. 'Υπ. Νά ὑπολογίσετε τά κ καί λ ἀπό τήν $f_1(x)\cdot f_2(x)=(x-\alpha)(x-\beta)\pi(x)+\kappa x+\lambda$

7. 'Υπ. 'Υποθέστε ὅτι $x^4+1=(x^2+\mu x+\nu)(x^2+\mu_1 x+\nu_1)$ καί προσδιορίστε τά μ ν,μ_1,ν_1.

8. 'Υπ. 'Υποθέστε ὅτι οἱ α,β,γ εἶναι ρίζες τῆς ἐξισώσεως $x^3+kx+\lambda=0$, δηλ.

$$\alpha^3+\kappa\beta+\lambda=0,\ \beta^3+\kappa\beta+\lambda=0 \quad \text{καί} \quad \gamma^3+\kappa\gamma+\lambda=0.$$

9. 'Υπ. 'Η ἀποδεικτέα γράφεται $[(\rho_1+\rho_2+\ldots+\rho_\nu)^2-2(\rho_1\rho_2+\rho_1\rho_3+\ldots+\rho_{\nu-1}\rho_\nu)]\cdot$ $\cdot\nu\geq(\rho_1+\rho_2+\ldots+\rho_\nu)^2$.

10. 'Υπ. Νά λάβετε ὑπόψη τούς τύπους Vieta καί τή σχέση πού δίνεται καί ἀπό αὐτές νά ἀπαλείψετε τά ρ_1,ρ_2,ρ_3. 'Απ. $2\beta^3+27\alpha^2\delta=9\alpha\beta\gamma$.

11. "Αν ρ_1 εἶναι ἡ μέση ἀνάλογος τῶν ρ_2,ρ_3, θά ἔχουμε $\rho_1{}^2=\rho_2\cdot\rho_3$. "Εχουμε ἀκόμα καί τρεῖς σχέσεις μεταξύ τῶν ρ_1,ρ_2,ρ_3 ἀπό τούς τύπους Vieta, ὁπότε βρίσκουμε τήν ἀπαλείφουσα τῶν τεσσάρων αὐτῶν σχέσεων.

12. 'Υπ. Νά λάβετε ὑπόψη τούς τύπους Vieta καί νά ὑποθέστε ἀκόμα ὅτι $\rho_2=-\rho_3\neq0$ ἤ $\rho_2=-\rho_3=0$.

13. 'Υπ. "Αν ρ_1,ρ_2,ρ_3 εἶναι οἱ ρίζες τοῦ $f(x)$, τότε ἀπό τούς τύπους Vieta ἔχουμε $|\alpha|=|\rho_1+\rho_2+\rho_3|\leq|\rho_1|+|\rho_2|+|\rho_3|$, $|\beta|\leq|\rho_1|\cdot|\rho_2|+|\rho_2|\cdot|\rho_3|+|\rho_3|\cdot|\rho_1|$ κ.τ.λ.

14. 'Υπ. Οἱ μόνες ρητές ρίζες τῆς ἐξισώσεως $x^{2\nu}-1=0$ εἶναι οἱ ±1. "Ολες οἱ ρίζες της δίνονται ἀπό τόν τύπο $x_k=\sigma\upsilon\nu\dfrac{2k\pi}{2\nu}+i\eta\mu\dfrac{2k\pi}{2\nu}$, $k=0,1,2,\cdots,2\nu-1$ καί ἀνά δύο εἶναι συζυγεῖς μιγαδικές, ὁπότε $x^{2\nu}-1=(x^2-1)\cdot\prod\limits_{\kappa=1}^{\nu-1}(x-x_\kappa)\cdot(x-\overline{x}_\kappa)$

15. 'Υπ. Νά λάβετε ὑπόψη ὅτι $1+x^2+x^4+\ldots+x^{2\nu-2}=\dfrac{x^{2\nu}-1}{x^2-1}$ κ.τ.λ.

16. 'Υπ. 'Αφοῦ $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbf{R}$ ἡ μία ρίζα εἶναι πραγματική. 'Από τή δοθεῖσα σχέση $\dfrac{\alpha^2-|\beta|}{|\alpha\beta|}\cdot\sqrt{2\beta}<1$ προκύπτει $\alpha^2<2\beta$ καί ἀπό τήν τελευταία $\rho_1{}^2+\rho_2{}^2+\rho_3{}^2<0$.

17. 'Υπ. Σχηματίστε τή διαφορά $f_\nu(x)-f_{\nu-1}(x)$ καί δείξτε ὅτι εἶναι διαιρετή μέ τό $(1-x)^3$. Αὐτό συμβαίνει γιά $\nu=1$, $\nu=2,\ldots,\nu=\nu$.

18. 'Υπ. i) "Αν $|\rho|\leq1$ ἡ ἀποδεικτέα εἶναι φανερή. ii) "Αν $|\rho|\geq1$, τότε ἀπό τήν $f(\rho)=\rho^3+\alpha\rho^2+\beta\rho+\gamma=0$ παίρνουμε $|\rho^3|\leq|\alpha\rho^2|+|\beta\rho|+|\gamma|$

19. 'Υπ. 'Από τήν $f(\rho)=0$ παίρνουμε $\alpha_\nu\rho^\nu+\alpha_{\nu-1}\rho^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1\rho+\alpha_0=0$ ἤ

$$\alpha_{\nu-1}\rho^{\nu-1}+\alpha_{\nu-2}\rho^{\nu-2}+\ldots+\alpha_1\rho+\alpha_0=-\alpha_\nu\rho^\nu \quad \text{κ.τ.λ.}$$

20. 'Υπ. Νά λάβετε ὑπόψη ὅτι $\rho^\nu+\alpha_{\nu-1}\rho^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1\rho+\alpha_0=0$ ἤ $\alpha_{\nu-1}\rho^{\nu-1}+\ldots+$ $+\alpha_1\rho+\alpha_0=-\rho^\nu$

21. 'Απ. α) $2<\alpha<\dfrac{7+2\sqrt{7}}{3}$, β) $1<\alpha<2$, γ) $\alpha<1$ ἤ $\alpha>\dfrac{1}{3}\cdot(7+2\sqrt{7})$

22. 'Υπ. "Αν $f(\alpha)=f(\beta)=f(\gamma)=f(\delta)=3$, τότε σχηματίστε τό πολυώνυμο $F(x)=f(x)-3$ καί παρατηρῆστε ὅτι $(x-\alpha)\mid F(x)$, $(x-\beta)\mid F(x)$ κ.τ.λ.

23. 'Υπ. "Αν ρ_1,ρ_2,ρ_3 εἶναι οἱ ρίζες, τότε χρησιμοποιῆστε τήν ταυτότητα τοῦ Lagrange γιά τίς τριάδες $\sqrt{\rho_1}$, $\sqrt{\rho_2}$, $\sqrt{\rho_3}$ καί $\sqrt{\dfrac{1}{\rho_1}}$, $\sqrt{\dfrac{1}{\rho_2}}$, $\sqrt{\dfrac{1}{\rho_3}}$ καί λάβετε ὑπόψη τούς τύπους Vieta.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ V

1.5. 1. α) Ὑπ. $\eta\mu x-\eta\mu y=\frac{\sqrt{3}+1}{2}\Leftrightarrow 2\eta\mu\frac{x-y}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{x+y}{2}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}\Leftrightarrow 2\eta\mu\frac{x-y}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}>\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

Ἀπ. $\left\{\begin{array}{l} x=2k\pi+\frac{2\pi}{3} \\ y=-2k\pi-\frac{\pi}{6}\end{array}\right.$ $k\in Z$ εἴτε $\left\{\begin{array}{l} x=2k\pi+\frac{5\pi}{6} \\ y=-2k\pi-\frac{\pi}{3}\end{array}\right.$ $k\in Z$

β) Ὑπ. $\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu y=-\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow 2\eta\mu\frac{x+y}{2}\eta\mu\frac{x-y}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ἀπ. $\left\{\begin{array}{l} x=2k\pi+\frac{\pi}{2} \\ y=-2k\pi+\frac{\pi}{6}\end{array}\right.$, $k\in Z$ εἴτε $\begin{array}{l} x=2k\pi+\frac{7\pi}{6} \\ y=-2k\pi-\frac{\pi}{2}\end{array}$, $k\in Z$

γ) Ὑπ. $\eta\mu x\ \eta\mu y=\frac{3}{4}\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu(x-y)-\sigma\upsilon\nu(x+y)=\frac{3}{2}$ Ἀπ. $\left\{\begin{array}{l} x=k\pi+\frac{\pi}{3} \\ y=-k\pi+\frac{\pi}{3}\end{array}\right.$, $k\in Z$

δ) Ὑπ. $\sigma\upsilon\nu x\cdot\sigma\upsilon\nu y=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu(x+y)+\sigma\upsilon\nu(x-y)=-1$.

Ἀπ. $\left\{\begin{array}{l} x=k\pi+\frac{2\pi}{3} \\ y=k\pi\end{array}\right.$, $k\in Z$ εἴτε $\left\{\begin{array}{l} x=k\pi \\ y=k\pi-\frac{2\pi}{3}\end{array}\right.$, $k\in Z$

ε) Ὑπ. $\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu y}=-\sqrt{3}\Leftrightarrow\frac{\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu y}{\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu y}=\frac{-\sqrt{3}-1}{-\sqrt{3}+1}\Leftrightarrow\left\{\frac{-2\eta\mu\frac{x+y}{2}\eta\mu\frac{x-y}{2}}{2\sigma\upsilon\nu\frac{x+y}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{x-y}{2}}=\frac{-\sqrt{3}-1}{-\sqrt{3}+1}\right.$

Ἀπ. $\left\{\begin{array}{l} x=k\pi-\frac{\pi}{6} \\ y=-k\pi+\frac{2\pi}{3}\end{array}\right.$, $k\in Z$

στ') Ὑπ. $\epsilon\varphi x+\epsilon\varphi y=1\Leftrightarrow\frac{\eta\mu(x+y)}{\sigma\upsilon\nu x\sigma\upsilon\nu y}=1$.

Ἀπ. $\left\{\begin{array}{l} x=k\pi+\frac{\pi}{4} \\ y=-k\pi\end{array}\right.$, $k\in Z$ εἴτε $\left\{\begin{array}{l} x=k\pi \\ y=-k\pi+\frac{\pi}{4}\end{array}\right.$ $k\in Z$

ζ') Ὑπ. $\eta\mu^2x+\eta\mu^2y=\frac{3+\sqrt{3}}{4}\Leftrightarrow\frac{1-\sigma\upsilon\nu 2x}{2}+\frac{1-\sigma\upsilon\nu 2y}{2}=\frac{3+\sqrt{3}}{4}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu 2x+\sigma\upsilon\nu 2y=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$

'Απ. $\begin{cases} x=k\pi+\dfrac{5\pi}{12} \\ y=-k\pi-\dfrac{\pi}{6} \end{cases}$, $k\in Z$ εἴτε $\begin{cases} x=k\pi-\dfrac{\pi}{6} \\ y=-k\pi+\dfrac{5\pi}{12} \end{cases}$, $k\in Z$.

2. 'Υπ. $4\eta\mu x\sigma\upsilon\nu y=3 \Leftrightarrow \eta\mu(x+y)+\eta\mu(x-y)=\dfrac{3}{2}$ 'Απ. $\begin{cases} x=\dfrac{4\pi}{3} \\ y=\dfrac{7\pi}{6} \end{cases}$ εἴτε $\begin{cases} x=\dfrac{7\pi}{3} \\ y=\dfrac{13\pi}{6} \end{cases}$

3. α) 'Υπ. Εἶναι πρωτοβάθμιο σύστημα ὡς πρός ημx, συνy

β) 'Υπ. $\left.\begin{matrix} x+2y=\dfrac{\pi}{2} \\ \eta\mu x+\eta\mu 3y=\dfrac{3}{2} \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x=\dfrac{\pi}{2}-2y \\ \eta\mu\left(\dfrac{\pi}{2}-2y\right)+\eta\mu 3y=\dfrac{3}{2} \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x=\dfrac{\pi}{2}-2y \\ \sigma\upsilon\nu 2y+\eta\mu 3y=\dfrac{3}{2} \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \begin{matrix} x=\dfrac{\pi}{2}-2y \\ 1-2\eta\mu^2y+3\eta\mu y-4\eta\mu^3y\ \dfrac{3}{2} \end{matrix}$ κ.τ.λ.

γ) 'Υπ. $\left.\begin{matrix} \eta\mu x+\eta\mu y=\dfrac{3}{2} \\ \sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu y=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} 2\eta\mu\dfrac{x+y}{2}\sigma\upsilon\nu\dfrac{x-y}{2}=\dfrac{3}{2} \\ 2\sigma\upsilon\nu\dfrac{x+y}{2}\sigma\upsilon\nu\dfrac{x-y}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{matrix}\right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{matrix} 2\eta\mu\dfrac{x+y}{2}\sigma\upsilon\nu\dfrac{x-y}{2}=\dfrac{3}{2} \\ \varepsilon\varphi\dfrac{x+y}{2}=\sqrt{3} \end{matrix}$ κ.λ.

4. 'Υπ. Νά θέσετε $\sigma\varphi\chi=\dfrac{1}{\varepsilon\varphi\chi}$ καί $\sigma\varphi y=\dfrac{1}{\varepsilon\varphi y}$,

5. α) 'Υπ. Εἶναι πρωτοβάθμιο σύστημα ὡς πρός ημx, συνχ. 'Η ἀπαλείφουσα εἶναι $(\beta_2\gamma_1-\beta_1\gamma_2)^2+(\alpha_1\gamma_2-\alpha_2\gamma_1)^2=(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)^2$.

β) 'Υπ. 'Από τό πρωτοβάθμιο σύστημα ὡς πρός μ^3,ν^3 βρεῖτε τά ημx καί συνx. 'Η ἀπαλείφουσα εἶναι $\mu^2+\nu^2=\lambda^2$.

γ) 'Απ. 'Η ἀπαλείφουσα εἶναι $\varepsilon\varphi\alpha\cdot(\sigma\varphi\beta-\varepsilon\varphi\gamma)=1$.

2.4. 1. α) 'Απ. $2k\pi+\dfrac{7\pi}{6}<x<2k\pi+\dfrac{11\pi}{6}$, $k\in Z$

β) 'Απ. $2k\pi+\dfrac{\pi}{4}<x<2k\pi+\dfrac{7\pi}{4}$, $k\in Z$

γ) 'Απ. $2k\pi<x<2k\pi+\dfrac{\pi}{3}$ εἴτε $(2k+1)\pi<x<2k\pi+\dfrac{4\pi}{3}$, $k\in Z$.

δ) 'Απ. $2k\pi+\dfrac{\pi}{6}<x<2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ εἴτε $2k\pi+\dfrac{7\pi}{6}<x<(2k+1)\pi+\dfrac{\pi}{2}$, $k\in Z$.

2. 'Υπ. 'Η δοθεῖσα γράφεται: $(\eta\mu x-1)\ (2\eta\mu x-1)>0$.

3. 'Υπ. Εἶναι $\eta\mu^2x+\eta\mu x+1>0$ γιά ὅλα τά τόξα x. 'Εργασθεῖτε ὅπως στό παράδειγμα 1 τῆς 2.3.

4. α) Ἀπ. $x\in\left(\frac{2\pi}{18},\frac{3\pi}{18}\right)\cup\left(\frac{8\pi}{18},\frac{9\pi}{18}\right)\cup\left(\frac{14\pi}{18},\frac{15\pi}{18}\right)\cup\left(\frac{20\pi}{18},\frac{21\pi}{18}\right)\cup\left(\frac{26\pi}{18},\frac{27\pi}{18}\right)\cup$

$\cup\left(\frac{32\pi}{18},\frac{33\pi}{18}\right)$

β) Ἀπ. $x\in\left(\frac{\pi}{15},\frac{2\pi}{15}\right)\cup\left(\frac{7\pi}{15},\frac{8\pi}{15}\right)\cup\left(\frac{13\pi}{15},\frac{14\pi}{15}\right)\cup\left(\frac{19\pi}{15},\frac{20\pi}{15}\right)\cup\left(\frac{25\pi}{15},\frac{26\pi}{15}\right)$

5. Ὑπ. Ἡ δοθεῖσα εἶναι ἰσοδύναμη μέ τήν

$$(3\eta\mu x-1)^2\cdot(2\eta\mu x-1)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(x-\frac{\pi}{4}\right)>0,\quad x\neq k\pi+\frac{3\pi}{4},\ k\in Z$$

4. 1. α) Τό σύστημα εἶναι ἰσοδύναμο μέ τό

$$\left.\begin{array}{r}\dfrac{\eta\mu(x+y)}{\sigma\upsilon\nu x\ \sigma\upsilon\nu y}=\alpha\\ 2\eta\mu x\eta\mu y=2\beta\\ \sigma\upsilon\nu x\cdot\sigma\upsilon\nu y\neq0\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{r}2\eta\mu(x+y)=\alpha\sigma\upsilon\nu(x+y)+\alpha\sigma\upsilon\nu(x-y)\\ \sigma\upsilon\nu(x-y)-\sigma\upsilon\nu(x+y)=2\beta\end{array}\right\}\quad \sigma\upsilon\nu x\cdot\sigma\upsilon\nu y\neq0$$

β) Τό σύστημα εἶναι συμμετρικό καί γίνεται ἰσοδύναμο μέ τό

$$\eta\mu\frac{x+y}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{x-y}{2}=\lambda\eta\mu\alpha$$

$$\varepsilon\varphi\frac{x+y}{2}=\varepsilon\varphi\alpha$$

2. α) Ἀφαιρώντας ἀπό τήν πρώτη τή δεύτερη καί ἀπό τή δεύτερη τήν τρίτη παίρνουμε τό ἰσοδύναμο σύστημα: $\eta\mu^2x+\eta\mu^2y=1+\eta\mu z$

$$(\eta\mu z-\eta\mu x)\,(\eta\mu x+\eta\mu z+1)=0$$
$$(\eta\mu y-\eta\mu x)\,(\eta\mu x+\eta\mu y+1)=0$$

β) Ἀπ. Οἱ λύσεις δίνονται ἀπό τά ἀλγεβρικά συστήματα

$$x+y=2k\pi+\frac{\pi}{4}$$

$$x-y=2\lambda\pi\pm\frac{\pi}{4}$$

γ) Ὑπ. Θέστε $\frac{\varepsilon\varphi x}{1}=\frac{\varepsilon\varphi y}{2}=\frac{\varepsilon\varphi\omega}{3}=\lambda$, ὁπότε εἶναι $\lambda=\pm1$.

3. α) Ἀπ. $\frac{\alpha^2}{\mu}+\frac{\beta^2}{\nu}=1$

β) Ἀπ. $\left(\sqrt[3]{\frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{\lambda}}\right)^2+\left(\sqrt[3]{\frac{\eta\mu\theta}{\lambda}}\right)^2=1$

γ) Ἀπ. $\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha^2}{\beta^2}+\frac{\gamma^2}{\delta^2}\right)\cdot\left(\frac{\alpha^2}{\beta^2}+\frac{\gamma^2}{\delta^2}-3\right)=\frac{\alpha}{\beta}$

δ) Ἀπ. $27\alpha^2\beta^2=(1-\alpha^2-\beta^2)^3$

4. α) Ἀπ. $2k\pi+\frac{\pi}{2}<x<2k\pi+\frac{7\pi}{12}$, εἴτε $2k\pi+\frac{23\pi}{12}<x<(2k+1)\pi,\ k\in Z$

β) Ὑπ. Νά θέσετε $\frac{x}{6}=y$, ὁπότε ἡ δοθεῖσα γράφεται:

$$2\sigma\upsilon\nu2y-\eta\mu3y-2>0.$$

γ) Ὑπ. Βρεῖτε ποῦ συναληθεύουν οἱ ἀνισώσεις:

$$\left\{\begin{array}{r}2\sigma\upsilon\nu x-1>0\\ x-2>0\end{array}\right.\quad \text{εἴτε}\quad \begin{array}{r}2\sigma\upsilon\nu x-1<0\\ x-2<0\end{array}$$

5. Ὑπ. Ἡ δοθεῖσα εἶναι ἰσοδύναμη μέ τήν ἀνίσωση

$$\log_{125}(\eta\mu^3x)>\log_{125}(3\eta\mu x-2)\Leftrightarrow\eta\mu^3x>3\eta\mu x-2>0$$

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙΙ. Στοιχεῖα θεωρίας ἀριθμῶν·

ΚΕΦΑΛΑΙΟ IV Πολυώνυμα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ V Τριγωνομετρία

Διορθώσεις γιά τό τεῦχος Α΄

Σελίδα	Στίχος	ἀντί	γράφε
15	8_-	$2i\sqrt{3}$	$2i\sqrt{2}$
36	7^+	z^{κ}	z_{κ}
36	1_-	$z=\sigma\upsilon\nu\theta+i\eta\mu\theta$	$z=\sigma\upsilon\nu\theta+i\eta\mu\theta\neq-1$
37	8_-	τυχούσα μιγαδική	τυχούσα κυβική μιγαδική
37	3_-	μία μιγαδική	μία κυβική μιγαδική
40	3^+	$-1-x^2+y$	$-1-x^2+y^2$
46	1_-	πρότ. 3	πρότ. 2
63	6_-	ἕνας εἶναι	εἶναι ἕνας
65		Στήν ἄσκηση 6 νά διαγραφοῦν οἱ (i), (iii), (iv).	
66	15^+	$A=\{1,\ 2\}$	$A=\{0,\ 1\}$
80	6^+	$\alpha_\kappa+\alpha_\lambda=\alpha_{\hat{\kappa}+\hat{\lambda}}$ ....., ὁρίζουν	$\alpha_\kappa+\alpha_\lambda=\alpha_{\kappa\oplus\lambda}$, $\alpha_\kappa\cdot\alpha_\lambda=\alpha_{\kappa\odot\lambda}$, ὅπου $\oplus$, $\odot$ δύο πράξεις στό $\{0,1,2,3,4\}$ πού ὁρίζονται ἀπό τούς πίνακες

$\oplus$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

$\odot$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

ὁρίζουν

84	1^+	Δέν ....στοιχεῖο	Ἔχει μοναδιαῖο στοιχεῖο τό 2.
84	2^+	(ii) Εἶναι...δακτύλιοι	(ii) καί (iv) Δέν εἶναι δακτύλιοι (iii) Εἶναι ἀντιμεταθετικός δακτύλιος

024000019547

ΤΕΥΧΟΣ Β΄—ΕΚΔΟΣΗ Α΄, 1979 — ΑΝΤΙΤΥΠΑ 73.000 - ΣΥΜΒΑΣΗ 3166 8-2-79

ΕΚΤΥΠΩΣΗ - ΒΙΒΛΙΟΔΕΣΙΑ : ΑΦΟΙ ΡΟΗ Ε.Π.Ε.

ΟΕ
ΔΒ