ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΑΛΓΕΒΡΑ

ΗΛΙΑ Β. ΝΤΖΙΩΡΑ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΑΘΗΝΑ 1978

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Μέ ἀπόφαση τῆς Ἑλληνικῆς Κυβερνήσεως τά διδακτικά βιβλία τοῦ Δημοτικοῦ, Γυμνασίου καί Λυκείου τυπώνονται ἀπό τόν Ὀργανισμό Ἐκδόσεως Διδακτικῶν Βιβλίων καί μοιράζονται Δ Ω Ρ Ε Α Ν.

Τό βιβλίο μεταγλωττίστηκε ἀπό τό συγγραφέα σέ συνεργασία μέ τούς Ε. Πλατή Γεν. Ἐπιθεωρητή Μ.Ε., Ἰορδ. Παπαδόπουλο καθηγητή Μ.Ε. καί Β. Θεοδωρακόπουλο Εἰσηγητή τοῦ ΚΕΜΕ.

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟ

ΑΞΙΩΜΑΤΑ ΤΟΥ PEANO-ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΠΑΓΩΓΗ

*ΚΕΦΑΛΑΙΟ I

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΠΟ ΤΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ ΚΑΙ ΤΑ ΣΥΝΟΛΑ

ΕΠΑΝΑΛΗΨΕΙΣ ΚΑΙ ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΕΙΣ

Σκοπός αὐτοῦ τοῦ Κεφαλαίου εἶναι νὰ ἐπαναλάβουμε τὶς πιὸ βασικὲς ἔννοιες ἀπὸ τὴ Μαθηματικὴ προτασιακὴ Λογικὴ καὶ τὰ Σύνολα, ποὺ μάθαμε στὴν προηγούμενη τάξη, καὶ νὰ διευκρινίσουμε τὴ σημασία τῶν λογικῶν λέξεων καὶ συμβόλων, τὰ ὁποῖα πρόκειται νὰ χρησιμοποιήσουμε παρακάτω, ὥστε οἱ ὁρισμοὶ καὶ οἱ προτάσεις ποὺ ὑπάρχουν σ' αὐτὸ τὸ βιβλίο νὰ μποροῦν νὰ διατυπωθοῦν μὲ συντομία καὶ μὲ σαφήνεια.

§ 1. Προτασιακοὶ τύποι - Προτάσεις.— Οἱ ἔννοιες: *προτασιακὸς τύπος, πρόταση* μᾶς εἶναι γνωστὲς ἀπὸ τὴν προηγούμενη τάξη. Ἐκεῖ μάθαμε ὅτι: Μία μαθηματικὴ ἔκφραση ποὺ περιέχει ἕνα σύμβολο x τὴ λέμε **προτασιακὸ τύπο τῆς μεταβλητῆς x** καὶ τὴν παριστάνουμε μὲ p(x). Ἂν τώρα στὸν προτασιακὸ τύπο p(x) ἀντικαταστήσουμε τὴ μεταβλητὴ *(ἀκαθόριστο σύμβολο)* x μὲ μία συγκεκριμένη ἔννοια, ἔστω λ, τότε τὴν ἔκφραση ποὺ θὰ προκύψει τὴ λέμε **λογικὴ πρόταση** ἢ ἁπλῶς **πρόταση** καὶ τὴν παριστάνουμε μὲ p(λ) ἢ ἁπλούστερα μὲ p.

Στὰ μαθηματικὰ καὶ γενικὰ στὴ λογικὴ (κλασικὴ λογική) μὲ τὸν ὅρο **«πρόταση»** *ἐννοοῦμε μία ἔκφραση μὲ αὐτοτελὲς νόημα, ἡ ὁποία ἐπιδέχεται ἕναν ἀκριβῶς ἀπὸ τοὺς δύο χαρακτηρισμούς:* **«ἀληθής», «ψευδής»** καὶ μὲ τὴν ἴδια πάντοτε σημασία.

Παράδειγμα. Ἔστω ὁ προτασιακὸς τύπος:

p(x) : *«ὁ x εἶναι ἄρτιος ἀριθμός»*.

Ἡ πρόταση: p(2) : *«ὁ 2 εἶναι ἄρτιος ἀριθμός»* εἶναι **ἀληθής**, ἐνῶ ἡ πρόταση:

p(3) : *«ὁ 3 εἶναι ἄρτιος ἀριθμός»* εἶναι **ψευδής**.

Οἱ χαρακτηρισμοὶ *ἀληθής, ψευδής* λέγονται **τιμὲς ἀλήθειας** τῆς προτάσεως p καὶ συμβολίζονται μὲ α, ψ ἀντιστοίχως. Τὶς διάφορες (λογικὲς) προτάσεις, ὅπως ξέρουμε καὶ ἀπὸ τὰ μαθήματα τῆς προηγούμενης τάξεως, τὶς παριστάνουμε γενικὰ μὲ μικρὰ γράμματα τοῦ λατινικοῦ ἀλφαβήτου καὶ κατὰ προτίμηση μὲ p, q, r, . . .

Ὅταν τό περιεχόμενο μιᾶς προτάσεως p εἶναι ἀληθές, τότε λέμε ὅτι ἡ πρόταση ἔχει **τιμή ἀλήθειας α** καί γράφουμε τ(p) = α, ἐνῶ ὅταν τό περιεχόμενο τῆς p εἶναι ψευδές, τότε λέμε ὅτι ἡ p ἔχει **τιμή ἀλήθειας ψ** καί γράφουμε τ(p)= ψ. Ὥστε:

$$\tau(p) \underset{\text{ορσ}}{\overset{*}{=\!=}} \begin{cases} \alpha, \text{ ἄν } p \text{ ἀληθής} \\ \psi, \text{ ἄν } p \text{ ψευδής.} \end{cases}$$

Ἡ συγκεκριμένη ἔννοια λ, μέ τήν ὁποία ἀντικαθιστοῦμε τή μεταβλητή x τοῦ προτασιακοῦ τύπου p(x) γιά νά προκύψει πρόταση, τή λέμε **τιμή** τῆς μεταβλητῆς. Τό σύνολο Ω τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς τό λέμε **σύνολο ἀναφορᾶς** τοῦ ἀντίστοιχου προτασιακοῦ τύπου καί τό σύνολο τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς, γιά τίς ὁποῖες ὁ προτασιακός τύπος γίνεται πρόταση ἀληθής, τό λέμε: **σύνολο τιμῶν ἀλήθειας** τοῦ προτασιακοῦ τύπου.

§ 2. Ποσοδεῖκτες.—Σύμφωνα μέ αὐτά πού εἴπαμε πιό πάνω, ἄν ἡ μεταβλητή ἑνός προτασιακοῦ τύπου ἀντικατασταθεῖ μέ ἕνα ὁρισμένο στοιχεῖο τοῦ συνόλου ἀναφορᾶς του, τότε ὁ προτασιακός τύπος γίνεται μία (λογική) πρόταση. Εἶναι δυνατό ὅμως ἀπό ἕναν προτασιακό τύπο νά λάβουμε μία λογική πρόταση, ἄν τοῦ προτάξουμε διάφορες ἐκφράσεις, ὅπως: *«ὑπάρχει (τουλάχιστο) ἕνα...», «γιά μερικά», «γιά κάθε», «γιά ἕνα ἀκριβῶς», «γιά ἕνα τό πολύ», «γιά κανένα»* κ.ἄ., αὐτές λέγονται **ποσοδεῖκτες.** Ἀπό τούς πιό πάνω ποσοδεῖκτες οἱ: *«ὑπάρχει (τουλάχιστο) ἕνα»* καί *«γιά κάθε»*, ὅπως ξέρουμε καί ἀπό τήν Α' τάξη, ἔχουν ἰδιαίτερη σημασία στά Μαθηματικά καί λέγονται **ὑπαρξιακός,** καί ἀντίστοιχα **καθολικός, ποσοδείκτης.** Ὁ πρῶτος συμβολίζεται μέ τό σύμβολο ∃ καί ὁ δεύτερος μέ τό ∀. Οἱ ποσοδεῖκτες, ὅπως εἴπαμε καί πιό πάνω, μπαίνουν μπροστά** στούς προτασιακούς τύπους. Ἔτσι οἱ ἐκφράσεις:

α) «$\exists x \in \Omega,\ p(x)$» (διαβάζουμε: *«ὑπάρχει (τουλάχιστο) ἕνα x στό Ω, ὥστε νά ἰσχύει p(x)»*· ἤ καί ἀλλιῶς: *«γιά ἕνα (τουλάχιστο) x∈Ω ἰσχύει p(x)»*).

β) «$\forall\ x \in \Omega,\ p(x)$» (διαβάζουμε: *«γιά κάθε x∈Ω ἰσχύει p(x)»*) εἶναι λογικές προτάσεις καί μάλιστα ἡ πρώτη λέγεται **ὑπαρξιακή** καί ἡ δεύτερη **καθολική πρόταση.** Ἀπό αὐτά πού εἴπαμε, συμπεραίνουμε τώρα ὅτι : **Κάθε ὑπαρξιακή,** καί ἀντίστοιχα **κάθε καθολική, πρόταση εἶναι πάντοτε λογική πρόταση.**

Σημείωση. Ἡ ἔκφραση : *«ὑπάρχει ἀκριβῶς ἕνα»* ἤ ἀλλιῶς *«ὑπάρχει ἕνα καί μόνο ἕνα»* παριστάνεται συμβολικά μέ ἕνα ἀπό τά σύμβολα: «$\exists!$», «$\exists'$», «Ⓔ».

§ 3. Λογικοί σύνδεσμοι—Σύνθετες προτάσεις.—Στή Μαθηματική Λογική, ὅπως καί στήν καθημερινή ὁμιλία, δέ χρησιμοποιοῦμε μόνο ἁπλές προτάσεις. Συνήθως τίς ἁπλές προτάσεις τίς συνδέουμε μεταξύ τους μέ διάφορες λέξεις καί ἐκφράσεις (συνδετικά), τίς ὁποῖες ὀνομάζουμε **λογικούς συνδέσμους,** καί σχηματίζουμε μ' αὐτό τόν τρόπο νέες (συνθετότερες) προτάσεις. Τίς προτάσεις αὐτές

---

* Τό σύμβολο $\underset{\text{ορσ}}{=\!=}$ σημαίνει, ὅπου συναντᾶται ἐδῶ, «ἴσον ἐξ ὁρισμοῦ».

** Στά ἑπόμενα, γιά εὐκολία στό γράψιμο, οἱ ποσοδεῖκτες θά ἀκολουθοῦν πολλές φορές τούς προτασιακούς τύπους.

τίς λέμε **σύνθετες προτάσεις.** Στή λογική τῶν προτάσεων ὡς λογικοί σύνδεσμοι θεωροῦνται οἱ ἑξῆς ἐκφράσεις: *«καί», «εἴτε», «ἤ», «ἄν . . ., τότε», «τότε καί μόνο τότε, ἄν»*· ἐπίσης ἡ ἔκφραση *«ὄχι (δέν)»*, ὅταν μπαίνει μπροστά ἀπό μιά πρόταση. Ἀμέσως παρακάτω θά δοῦμε μέ ποιόν τρόπο ἐπιδροῦν στή σημασία τῶν προτάσεων οἱ λογικοί σύνδεσμοι.

§ 4. Πράξεις μεταξύ λογικῶν προτάσεων.— Ἔστω L τό σύνολο τῶν (ἁπλῶν) λογικῶν προτάσεων καί μία συνάρτηση τ μέ πεδίο ὁρισμοῦ τό σύνολο L καί πεδίο τιμῶν τό (διμελές) σύνολο $\{\alpha, \psi\}$, δηλαδή:

$$\boxed{\tau\colon L \rightarrow \{\alpha, \psi\}\colon p \rightarrow \tau(p) \in \{\alpha, \psi\}.}$$

Οἱ διάφοροι τρόποι, σύμφωνα μέ τούς ὁποίους συνδέονται οἱ ἁπλές προτάσεις γιά νά σχηματίσουν μία σύνθετη πρόταση, ἀποτελοῦν τίς **λογικές πράξεις** μεταξύ τῶν προτάσεων. Μέ τή βοήθεια, λοιπόν, τῶν λογικῶν συνδέσμων ἐφοδιάζουμε τό σύνολο L τῶν ἁπλῶν προτάσεων μέ λογικές πράξεις. Εἶναι φανερό τώρα ὅτι γιά κάθε σύνθετη πρόταση ὁρίζεται ἀκριβῶς μία τιμή στό $\{\alpha, \psi\}$. Ἡ τιμή τῆς σύνθετης προτάσεως στό $\{\alpha, \psi\}$, ἡ ὁποία λέγεται καί **τιμή ἀλήθειας τῆς σύνθετης προτάσεως,** ὁρίζεται ἐπακριβῶς ἀπό τίς τιμές ἀλήθειας τῶν ἁπλῶν προτάσεων πού τήν ἀποτελοῦν καί ἀπό τόν τρόπο πού συνδέονται αὐτές γιά τό σχηματισμό τῆς σύνθετης προτάσεως.

Οἱ θεμελιώδεις λογικές πράξεις καί οἱ τιμές ἀλήθειας τῶν σύνθετων προτάσεων πού σχηματίζονται μ' αὐτό τόν τρόπο, ὅπως ξέρουμε καί ἀπό τά μαθήματα τῆς προηγούμενης τάξεως, εἶναι οἱ ἑξῆς:

1. Σύζευξη. Σύζευξη *δύο προτάσεων* p, q *ὀνομάζουμε τήν πρόταση* «p **καί** q», (συμβολικά «p ∧ q»), *τήν ὁποία δεχόμαστε ἀληθή, μόνο ὅταν καί οἱ δύο προτάσεις p, q εἶναι ἀληθεῖς, καί ψευδή σέ κάθε ἄλλη περίπτωση*· δηλαδή:

$$\boxed{\tau(p \wedge q) \underset{\text{ορσ}}{=\!=} \begin{cases} \alpha, \text{ ἄν } \tau(p) = \alpha = \tau(q) \\ \psi, \text{ σέ κάθε ἄλλη περίπτωση} \end{cases}} \tag{1}$$

2. Ἐγκλειστική διάζευξη. Ἐγκλειστική διάζευξη *δύο προτάσεων* p, q *ὀνομάζουμε τήν πρόταση* «p **εἴτε** q» (συμβολικά «p ∨ q»), *τήν ὁποία δεχόμαστε ψευδή μόνο ὅταν καί οἱ δυό προτάσεις p, q εἶναι ψευδεῖς, καί ἀληθή σέ κάθε ἄλλη περίπτωση*· δηλαδή:

$$\boxed{\tau(p \vee q) \underset{\text{ορσ}}{=\!=} \begin{cases} \psi, \text{ ἄν } \tau(p) = \psi = \tau(q) \\ \alpha, \text{ σέ κάθε ἄλλη περίπτωση} \end{cases}} \tag{2}$$

3. Ἀποκλειστική διάζευξη. Ἀποκλειστική διάζευξη *δύο προτάσεων* p, q *ὀνομάζουμε τήν πρόταση* «p **ἤ** q» ἤ ἀλλιῶς «**ἤ μόνο** p **ἤ μόνο** q» (συμβολικά «p $\underline{\vee}$ q»), *τήν ὁποία δεχόμαστε ψευδή, ὅταν οἱ δύο προτάσεις p καί q ἔχουν τήν ἴδια τιμή ἀλήθειας, καί ἀληθή, ὅταν οἱ p καί q ἔχουν διαφορετικές τιμές ἀλήθειας*·

δηλαδή:

$$\tau(p \,\underline{\vee}\, q) \underset{\text{ορσ}}{=\!=} \begin{cases} \psi, & \text{ἄν } \tau(p) = \tau(q) \\ \alpha, & \text{ἄν } \tau(p) \neq \tau(q) \end{cases} \tag{3}$$

4. Ἄρνηση. **Ἄρνηση** *μιᾶς προτάσεως* p *ὀνομάζουμε τήν πρόταση* **«ὄχι** p» (συμβολικά «$\sim$p»), *τήν ὁποία δεχόμαστε ἀληθή, ὅταν ἡ p εἶναι ψευδής, καί ψευδή ὅταν ἡ p εἶναι ἀληθής*· δηλαδή:

$$\tau(\sim p) \underset{\text{ορσ}}{=\!=} \begin{cases} \alpha, & \text{ἄν } \tau(p) = \psi \\ \psi, & \text{ἄν } \tau(p) = \alpha \end{cases} \tag{4}$$

Ἀπό τήν (4) συμπεραίνουμε ὅτι οἱ τιμές ἀλήθειας τῶν p καί $\sim$p εἶναι πάντοτε *ἀντίθετες*.

5. Συνεπαγωγή. Συνεπαγωγή *δύο προτάσεων* p, q *ὀνομάζουμε τήν πρόταση* **«ἄν** p, **τότε** q» ἤ ἀλλιῶς «p **συνεπάγεται** q» (συμβολικά «p $\Longrightarrow$ q»), *τήν ὁποία δεχόμαστε ψευδή, μόνο ὅταν ἡ p εἶναι ἀληθής καί ἡ q ψευδής, καί ἀληθή σέ κάθε ἄλλη περίπτωση*· δηλαδή:

$$\tau(p \Rightarrow q) \underset{\text{ορσ}}{=\!=} \begin{cases} \psi, & \text{ἄν } \tau(p) = \alpha \text{ καί } \tau(q) = \psi \\ \alpha, & \text{σέ κάθε ἄλλη περίπτωση} \end{cases} \tag{5}$$

Παρατηρήσεις: α). Ἄλλοι τρόποι διατυπώσεως τῆς συνεπαγωγῆς p$\Longrightarrow$q εἶναι καί οἱ ἑξῆς:

1. *«p εἶναι ἱκανή συνθήκη γιά q»*
2. *«q εἶναι ἀναγκαία συνθήκη γιά p».*

β). Ἄν ἡ πρόταση p εἶναι ψευδής, τότε ἡ συνεπαγωγή p$\Longrightarrow$q εἶναι πάντοτε ἀληθής γιά κάθε τιμή ἀλήθειας τῆς προτάσεως q. Ἄν ὅμως ἡ συνεπαγωγή p$\Longrightarrow$q εἶναι ἀληθής, τότε **δέν** ἕπεται ὅτι ὁπωσδήποτε οἱ προτάσεις p καί q εἶναι ἀληθεῖς.

γ). Ἡ συνεπαγωγή q$\Longrightarrow$p λέγεται **ἀντίστροφη** τῆς: p$\Longrightarrow$q καί ἡ συνεπαγωγή: $\sim$p$\Rightarrow$ $\sim$q λέγεται **ἀντίθετη** τῆς: p$\Longrightarrow$q. Τέλος ἡ συνεπαγωγή: $\sim$q$\Rightarrow$ $\sim$p λέγεται **ἀντιστροφοαντίθετη** τῆς: p$\Rightarrow$ q.

6. Λογική ἰσοδυναμία. Λογική ἰσοδυναμία *δύο προτάσεων* p,q *ὀνομάζουμε τήν πρόταση* «p **τότε καί μόνο τότε, ἄν** q» ἤ ἀλλιῶς «p **συνεπάγεται** q **καί ἀντιστρόφως**» (συμβολικά «p$\Longleftrightarrow$q»), *τήν ὁποία δεχόμαστε ἀληθή, μόνο ὅταν καί οἱ δύο προτάσεις p, q ἔχουν τήν ἴδια τιμή ἀλήθειας, καί ψευδή, ὅταν οἱ p καί q ἔχουν διαφορετικές τιμές ἀλήθειας*· δηλαδή:

$$\tau(p \Longleftrightarrow q) \underset{\text{ορσ}}{=\!=} \begin{cases} \alpha, & \text{ἄν } \tau(p) = \tau(q) \\ \psi, & \text{ἄν } \tau(p) \neq \tau(q) \end{cases} \tag{6}$$

Ἀπό τόν ὁρισμό τῆς ἰσοδυναμίας εὔκολα διαπιστώνουμε τώρα ὅτι:

1. $p \Longleftrightarrow p$, **2.** $(p \Longleftrightarrow q) \Longleftrightarrow (q \Longleftrightarrow p)$, **3.** $(p \Longleftrightarrow q \wedge q \Longleftrightarrow r) \Rightarrow (p \Longleftrightarrow r)$

Σημείωση: Όταν θέλουμε νά δηλώσουμε ὅτι ἡ ἰσοδυναμία $p \Longleftrightarrow q$ δύο προτάσεων ὑπάρχει ἐξ ὁρισμοῦ χρησιμοποιοῦμε τό σύμβολο $\underset{ορσ}{\Longleftrightarrow}$, δηλ. γράφουμε $p \underset{ορσ}{\Longleftrightarrow} q$.

Ἀνακεφαλαίωση. Οἱ τιμές ἀλήθειας τῶν προηγούμενων λογικῶν πράξεων (συνδέσεων) πού ἀπορρέουν ἀπό τούς ὁρισμούς (1) - (6) ἀποδίδονται συνοπτικά μέ τόν ἀκόλουθο **πίνακα τιμῶν ἀληθείας**:

p	q	Σύζευξη	Ἐγκλ. Διάζ.	Ἀπ. Διάζ.	Συνεπαγωγή	Ἰσοδυναμία	Ἄρνηση	
		$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \veebar q$	$p \Rightarrow q$	$p \Longleftrightarrow q$	$\sim p$	$\sim q$
α	α	α	α	ψ	α	α	ψ	ψ
α	ψ	ψ	α	α	ψ	ψ	ψ	α
ψ	α	ψ	α	α	α	ψ	α	ψ
ψ	ψ	ψ	ψ	ψ	α	α	α	α

§ 5. Ταυτολογίες - ταυτολογικές ἰσοδυναμίες καί ἀντιλογίες.

—Μία σύνθετη πρόταση, ἡ ὁποία σχηματίζεται ἀπό ἕνα «πεπερασμένο*» πλῆθος ἁπλῶν προτάσεων p, q, r, . . ., πού συνδέονται μεταξύ τους μέ τά σύμβολα (λογικούς συνδέσμους) $\wedge, \vee, \veebar, \sim, \Longrightarrow$ καί $\Longleftrightarrow$ τήν ὀνομάζουμε, ὅπως μάθαμε καί στήν προηγούμενη τάξη, **λογικό τύπο.** Ἔτσι, λ.χ., ἡ ἔκφραση:

$[(p \Longrightarrow q) \wedge \sim q] \Longrightarrow \sim p$ εἶναι ἕνας λογικός τύπος.

Δίνουμε τώρα τούς ἀκόλουθους ὁρισμούς:

1. *Θά λέμε ὅτι ἕνας λογικός τύπος P εἶναι* **ταυτολογία,** *τότε καί μόνο τότε, ἄν ἔχει τιμή ἀλήθειας α γιά κάθε συνδυασμό τιμῶν ἀλήθειας τῶν προτάσεων πού τόν συνθέτουν.*

Ἄν P εἶναι μία ταυτολογία, τότε γράφουμε: $\vdash P$ καί διαβάζουμε: ἡ πρόταση P εἶναι ταυτολογία.

Ὁρισμένες ταυτολογίες, ἐπειδή ἔχουν καθολική ἰσχύ, λέγονται **ἀρχές** ἤ **νόμοι.** Τέτοιες ταυτολογίες εἶναι οἱ **νόμοι τοῦ Ἀριστοτέλη**:

1. *Νόμος τῆς ταυτότητας:* $\vdash p \Rightarrow p$
2. *Νόμος τῆς μή ἀντιφάσεως:* $\vdash \sim[p \wedge (\sim p)]$
3. *Νόμος τοῦ ἀποκλεισμοῦ τοῦ τρίτου:* $\vdash p \veebar (\sim p)$.

Σημείωση. Φραστικά οἱ δύο τελευταῖοι νόμοι διατυπώνονται ὡς ἑξῆς:
Νόμος τῆς μή ἀντιφάσεως: *«μία πρόταση καί ἡ ἄρνησή της δέν μπορεῖ νά εἶναι καί οἱ δυό ἀληθεῖς».* Νόμος τοῦ ἀποκλεισμοῦ τοῦ τρίτου: *«κάθε πρόταση καί ἡ ἄρνησή της ἀποκλείονται ἀμοιβαῖα».*

Ἄλλες ἀξιόλογες ταυτολογίες εἶναι καί οἱ ἑξῆς:

4. $p \Longleftrightarrow \sim(\sim p)$ *(νόμος διπλῆς ἀρνήσεως)*
5. $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ *(νόμος συλλογισμοῦ).*

2. *Θά λέμε ὅτι ἕνας λογικός τύπος P εἶναι* **ταυτολογικά ἰσοδύναμος** *μέ ἕναν*

---

* δηλ. τό πλῆθος τους νά ἐκφράζεται μέ ἕνα φυσικό ἀριθμό ($\geqq 2$).

ἄλλο λογικό τύπο Q, καί θά γράφουμε $P \equiv Q$, *τότε καί μόνο τότε, ἄν ἔχουν πάντοτε τήν ἴδια τιμή ἀλήθειας, δηλ. ἄν ἡ ἰσοδυναμία* $P \Longleftrightarrow Q$ *εἶναι ταυτολογία.*

Ἀπό τόν ὁρισμό αὐτό συνάγεται ὅτι οἱ συμβολισμοί: $P \equiv Q$ καί $\vdash (P \Longleftrightarrow Q)$ εἶναι ταυτόσημοι. Ὥστε:

$$\boxed{P \equiv Q \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} \vdash (P \Longleftrightarrow Q)}$$

Παρατήρηση. Ὁ συμβολισμός $P \equiv Q$ δέν εἶναι ταυτόσημος μέ τόν: $P \Longleftrightarrow Q$, γιατί ὁ πρῶτος δηλώνει ὅτι ὁ λογικός τύπος P βρίσκεται στή σχέση «$\equiv$» μέ τόν Q, ἐνῶ $P \Longleftrightarrow Q$ δηλώνει μία λογική πρόταση.

Ἀξιόλογα παραδείγματα ἰσοδυναμιῶν, πού εἶναι ταυτολογίες, εἶναι οἱ γνωστοί ἀπό τήν προηγούμενη τάξη **νόμοι τοῦ De Morgan:**

$$\sim(p \wedge q) \Longleftrightarrow (\sim p) \vee (\sim q)$$
$$\sim(p \vee q) \Longleftrightarrow (\sim p) \wedge (\sim q).$$

Τό ὅτι οἱ παραπάνω ἰσοδυναμίες εἶναι ταυτολογίες ἀποδεικνύεται μέ τή βοήθεια τῶν ἀντίστοιχων πινάκων ἀλήθειας.

Σημείωση. Ἐπειδή $\vdash (P \Longleftrightarrow Q)$ καί $P \equiv Q$ εἶναι, ὅπως εἴπαμε πιό πάνω, ταυτόσημοι συμβολισμοί, γι' αὐτό οἱ νόμοι τοῦ De Morgan μπορεῖ νά διατυπωθοῦν καί ἔτσι:

$$[\sim(p \wedge q)] \equiv [(\sim p) \vee (\sim q)], \quad [\sim(p \vee q)] \equiv [(\sim p) \wedge (\sim q)].$$

Ἀξιοσημείωτες ἐπίσης εἶναι καί οἱ γνωστές ἀπό τήν Α' τάξη ἰσοδυναμίες:

1. $(p \Longrightarrow q) \equiv (\sim p) \vee q$
2. $(p \Longleftrightarrow q) \equiv [(\sim p) \vee q] \wedge [p \vee (\sim q)]$
3. $(p \veebar q) \equiv [(\sim p) \wedge q] \vee [p \wedge (\sim q)]$.

Παρατήρηση. Ἀπό τίς τρεῖς τελευταῖες ταυτολογίες συμπεραίνουμε ὅτι μέ τίς λογικές πράξεις: $\sim, \vee, \wedge$ μποροῦμε νά ἐκφράσουμε τίς ἄλλες λογικές πράξεις, δηλαδή τή συνεπαγωγή ($\Longrightarrow$), τήν ἰσοδυναμία ($\Longleftrightarrow$) καί τήν ἀποκλειστική διάζευξη ($\veebar$)· ἑπομένως ὁποιοσδήποτε λογικός τύπος μπορεῖ νά διατυπωθεῖ **μόνο** μέ τά τρία συνδετικά: $\wedge, \vee, \sim$. Ἐξάλλου ἀπό τόν πρῶτο νόμο τοῦ De Morgan ἔχουμε: $p \wedge q \equiv \sim[(\sim p) \vee (\sim q)]$.

Ἄρα μποροῦμε ὁποιοδήποτε λογικό τύπο νά τόν ἐκφράσουμε **μόνο** μέ τούς λογικούς συνδέσμους: $\vee, \sim$.

3. *Θά λέμε ὅτι ἕνας λογικός τύπος Q εἶναι* **ἀντιλογία** *(ἤ ἀλλιῶς:* **ἀντίφαση***), τότε καί μόνο τότε, ἄν ἡ ἄρνησή του* $\sim Q$ *εἶναι ταυτολογία,* δηλαδή *ἄν ἔχει τιμή ἀλήθειας ψ γιά κάθε συνδυασμό τιμῶν ἀλήθειας τῶν προτάσεων πού τόν συνθέτουν·*

Μία ἀντιλογία συμβολίζεται μέ πρόταξη τοῦ συμβόλου: $\sim\vdash$.

Παράδειγμα. Νά δείξετε ὅτι ὁ λογικός τύπος $Q(p, q)$: $(p \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow (p \wedge \sim q)$ εἶναι ἀντιλογία.

Λύση. Αὐτό συνάγεται ἀμέσως ἀπό τόν ἀκόλουθο πίνακα:

p	q	~q	p ⟹ q	p ∧ ~q	Q(p, q)	~Q(p, q)
α	α	ψ	α	ψ	ψ	α
α	ψ	α	ψ	α	ψ	α
ψ	α	ψ	α	ψ	ψ	α
ψ	ψ	α	α	ψ	ψ	α

Γενική παρατήρηση. Αὐτά πού μέχρι τώρα ἀναπτύξαμε σχετικά μέ τό λογισμό τῶν προτάσεων ἰσχύουν καί γιά προτασιακούς τύπους (ἀνοιχτές προτάσεις), μέ τή μόνη διαφορά ὅτι ὁ χαρακτηρισμός *«ἀληθής»* ἤ *«ψευδής»* θά ἀναφέρεται στό σύνολο τιμῶν τῆς μεταβλητῆς ἤ τῶν μεταβλητῶν τῶν ἀντίστοιχων προτασιακῶν τύπων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάδα Α΄. 1. Νά βρεῖτε τίς τιμές ἀλήθειας τῶν ἀκόλουθων σύνθετων προτάσεων:

α) $(5 > 7) \wedge (9 = 3^2)$, β) $(4 < 3) \vee (8 = 7 + 1)$, γ) $(17 = 8 + 7) \underline{\vee} (5^2 = 25)$,
δ) $(2 > 5) \Longrightarrow (3 = 4)$, ε) $(2 > 5) \Longleftrightarrow (4^2 = 9)$, στ) $(7 = 4 + 3) \Longleftrightarrow (2 = 5)$.

2. Νά βρεῖτε ποιές ἀπό τίς ἑπόμενες προτάσεις εἶναι ταυτολογίες καί ποιές ἀντιλογίες:

α) $[p \wedge (p \Longrightarrow q)] \Longrightarrow q$, β) $(p \underline{\vee} q) \wedge [(\sim p) \wedge (\sim q)]$, γ) $p \vee (p \wedge q) \Longleftrightarrow p$
δ) $\sim (p \wedge q) \Longleftrightarrow \sim [(\sim p) \vee (\sim q)]$, ε) $[p \underline{\vee} (\sim p)] \wedge [q \vee (\sim q)]$.

3. Νά ἀποδείξετε ὅτι $\forall\, p$, $\forall\, q$ καί $\forall\, r$ ἀπό τό σύνολο L ἰσχύουν:

α) $[p \wedge (q \vee r)] \equiv [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$, β) $p \vee (p \wedge r) \equiv p \equiv p \wedge (p \vee r)$
γ) $[(p \Longrightarrow q) \wedge (r \Longrightarrow q)] \equiv [(p \vee r) \Longrightarrow q]$, δ) $[(p \underline{\vee} q) \underline{\vee} (p \wedge q)] \equiv (p \vee q)$
ε) $[(p \wedge q) \vee [(\sim p) \wedge (\sim q]] \equiv [p \Longleftrightarrow q]$, στ) $[p \Longrightarrow q] \equiv \sim [p \wedge (\sim q)] \equiv [(\sim p) \vee q]$.

Ὁμάδα Β΄. 4. Ἄν γιά κάθε πρόταση q εἶναι $\tau[(\sim p) \Rightarrow q] = \alpha$, νά ἀποδείξετε ὅτι: $\tau(p) = \alpha$.

5. Νά βρεῖτε τίς τιμές ἀλήθειας $\tau(p)$, $\tau(q)$, ἄν εἶναι γνωστό ὅτι:

α) $\tau[(p \Longrightarrow q) \wedge (q \vee p)] = \alpha$, β) $\tau[(p \underline{\vee} q) \wedge (q \Rightarrow p)] = \psi$.

6. Ἄν $\tau(p \Longleftrightarrow q) = \psi$, νά βρεῖτε τήν τιμή ἀλήθειας $\tau(P)$, ὅπου τό P παριστάνει μία ἀπό τίς ἀκόλουθες (σύνθετες) προτάσεις:

α) $[p \Longleftrightarrow (\sim q)] \wedge [(\sim p) \Longleftrightarrow q]$, β) $[p \Rightarrow (q \vee p)] \wedge [q \underline{\vee} p]$.

§ 6. Ἡ ἔννοια τοῦ συνόλου — Ἔννοιες συναφεῖς μέ αὐτή.— α).

Ἡ ἔννοια τοῦ **συνόλου** πού μᾶς εἶναι γνωστή ἀπό τίς προηγούμενες τάξεις, εἶναι σήμερα μία ἀπό τίς πιό βασικές καί χρήσιμες ἔννοιες στά Μαθηματικά. Ἡ ἔννοια αὐτή, ὅπως ἀκριβῶς καί ἡ ἔννοια τῆς (ἁπλῆς) προτάσεως, θεωρεῖται στά Μαθηματικά ὡς *«ἀρχική»* ἔννοια, δηλαδή ὡς ἔννοια πού δέν ἐπιδέχεται ὁρισμό, ὡς ἔννοια πού δέν μπορεῖ νά ἀναχθεῖ σέ ἄλλη ἔννοια.

Τή λέξη **σύνολο,** ὅπως μάθαμε καί στήν Α΄ τάξη, τή χρησιμοποιοῦμε ὅταν θέλουμε νά ἀναφερθοῦμε σέ ἀντικείμενα *τελείως ὁρισμένα* καί *«διακεκριμένα*»*, πού τά θεωροῦμε ὡς μία *«ὁλότητα»*.

Ἀκριβολογώντας περισσότερο, μποροῦμε νά ποῦμε ὅτι:

Στά Μαθηματικά δεχόμαστε ὅτι ἐπιτρέπεται «π ο λ λ ά» ἀντικείμενα πού εἶναι ἐντελῶς καθορισμένα καί διακεκριμένα μεταξύ τους νά τά θεωροῦμε ὡς ἕνα ν έ ο ἀντικείμενο, πού τό λέμε τό ***σύνολο*** *τῶν ἀντικειμένων αὐτῶν.*

Αὐτά τά ἀντικείμενα τά λέμε συνήθως **στοιχεῖα** τοῦ συνόλου.

Μερικές φορές, κυρίως σέ μερικά θέματα γεωμετρικῆς φύσεως, ἀντί γιά τόν ὅρο «σύνολο» χρησιμοποιεῖται ὁ ὅρος «**χῶρος**» καί τότε ἀντί νά λέμε στοιχεῖο τοῦ συνόλου, λέμε «**σημεῖο**» τοῦ χώρου.

---

* πού ξεχωρίζουν τό ἕνα ἀπό τό ἄλλο.

Τά σύνολα συμβολίζονται συνήθως μέ τά κεφαλαῖα γράμματα: Α, Β, Γ,... καί τά στοιχεῖα τους μέ τά μικρά γράμματα: α, β, γ,...

Γιά νά δηλώσουμε ὅτι *τό στοιχεῖο x ἀνήκει στό σύνολο A*, γράφουμε: $x \in A$· ἐνῶ ὅταν τό στοιχεῖο x *δέν* ἀνήκει στό Α, γράφουμε: $x \notin A$.

Γιά κάθε στοιχεῖο x καί κάθε σύνολο A ἰσχύει μία, καί μόνο μία, ἀπό τίς ἑξῆς δύο σχέσεις: $x \in A$, $x \notin A$.

β). Βασική ἰσότητα συνόλου. Σύμφωνα μέ ὅσα εἴπαμε παραπάνω, τά ἀντικείμενα πού προορίζονται νά ἀποτελέσουν ἕνα σύνολο, ὀφείλουν νά διακρίνονται τό ἕνα ἀπό τό ἄλλο. Αὐτό σημαίνει ὅτι: ἄν πάρουμε δύο ὁποιαδήποτε ἀπ' αὐτά τά ἀντικείμενα, πρέπει νά μποροῦμε νά ποῦμε μέ βεβαιότητα ὅτι τά ἀντικείμενα αὐτά εἶναι διαφορετικά μεταξύ τους ἤ ὄχι. Ἀκριβέστερα, ἄν α, β παριστάνουν δύο ὁποιαδήποτε στοιχεῖα ἑνός συνόλου Σ, τότε εἶναι βέβαιο καί μέ τήν ἴδια πάντοτε σημασία, ὅτι τά α καί β παριστάνουν ἤ δέν παριστάνουν τό ἴδιο στοιχεῖο τοῦ Σ. Ἔτσι, βλέπουμε ὅτι ἡ ἔννοια τοῦ συνόλου συνδέεται στενά μέ τήν ἔννοια μιᾶς *«σχέσεως ἰσότητας»* πού ὁρίζεται μεταξύ τῶν στοιχείων του, μέ τήν ὁποία μποροῦμε νά τά διακρίνουμε. Αὐτή τήν ἰσότητα, πού τη συμβολίζουμε μέ «=», τή λέμε **βασική ἰσότητα** τοῦ συνόλου, γιά νά τήν ἀντιδιαστείλουμε πρός κάθε ἄλλη «ἰσότητα» πού μπορεῖ νά εἰσαχθεῖ μεταξύ τῶν στοιχείων τοῦ συνόλου. Ἔτσι, γιά νά δηλώσουμε ὅτι τά α καί β παριστάνουν τό ἴδιο στοιχεῖο ἑνός συνόλου Σ, γράφουμε $\alpha = \beta$, ἐνῶ ἄν τά α καί β δέν παριστάνουν τό ἴδιο στοιχεῖο τοῦ Σ, γράφουμε $\alpha \neq \beta$. Π.χ. στό σύνολο **N** τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν ἔχουμε:

$$7 = 5 + 2, \qquad 5 = 4 + 1, \qquad 3 \neq 2, \qquad 8 \neq 5 + 4.$$

γ). Παραδείγματα: Ἀξιοσημείωτα σύνολα ἀριθμῶν, μέ τά ὁποῖα ἔχουμε ἤδη ἀσχοληθεῖ καί πού θά τά συναντήσουμε στά ἑπόμενα κεφάλαια, εἶναι τά ἀκόλουθα:

N : *τό σύνολο τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν:* 1, 2, 3, ...
$\mathbf{N_0}$: *τό σύνολο τῶν ἀκεραίων τῆς ἀριθμητικῆς:* 0, 1, 2, 3, ...
Z : *τό σύνολο τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν:* ..., −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, ...
Q : *τό σύνολο τῶν ρητῶν ἀριθμῶν.*
R : *τό σύνολο τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.*
$\mathbf{R^+}, \mathbf{R_0^+}$: *τό σύνολο τῶν θετικῶν, ἀντιστοίχως μή ἀρνητικῶν, πραγματικῶν ἀριθμῶν.*
C : *τό σύνολο τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν.*

§ 7. Τρόποι παραστάσεως ἑνός συνόλου.

—Μάθαμε στίς προηγούμενες τάξεις ὅτι ἕνα σύνολο εἶναι ἐντελῶς καθορισμένο ὅταν δίνονται ὅλα του τά στοιχεῖα εἴτε ὅταν δίνεται μία ἰδιότητα πού χαρακτηρίζει τά στοιχεῖα του. Ἔτσι οἱ πιό συνηθισμένοι τρόποι παραστάσεως ἑνός συνόλου εἶναι:

α). Παράσταση συνόλου μέ ἀναγραφή τῶν στοιχείων του. Σ' αὐτή τήν περίπτωση ἀναγράφουμε ὅλα τά στοιχεῖα τοῦ συνόλου ἀνάμεσα σέ δυό ἀντικριστά ἄγκιστρα. Ὁ τρόπος βέβαια αὐτός δέν εἶναι πάντοτε πρακτικός καί γι' αὐτό μερικές φορές ἕνα σύνολο παριστάνεται μέ ἀναγραφή, μέσα σέ ἄγκιστρα, ὁρισμένων ἀπό τά στοιχεῖα του σέ συνδυασμό μέ τελεῖες (συνήθως τρεῖς) μέ τίς ὁποῖες ἀφήνουμε νά ἐννοηθοῦν ὅλα τά στοιχεῖα πού παραλείψαμε στήν ἀναγραφή. Ἔτσι, π.χ., τό σύνολο **N** τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν μπορεῖ νά παρασταθεῖ μέ: $\{1, 2, 3, \ldots\}$.

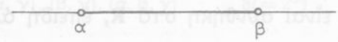
Σημειώνουμε ἐδῶ ὅτι, ἐπειδή ἡ ἔννοια τοῦ συνόλου δέ συνεπάγεται καμιά διάταξη γιά τά στοιχεῖα του, μποροῦμε κατά τήν ἀναγραφή νά γράφουμε τά σύμβολα τῶν στοιχείων του μέ ὅποια τάξη θέλουμε.

β). Παράσταση συνόλου μέ περιγραφή χαρακτηριστικῆς ἰδιότητας τῶν στοιχείων του. Ἔστω ἕνας προτασιακός τύπος p(x) μέ σύνολο ἀναφορᾶς τό Ω. Τά διάφορα στοιχεῖα τοῦ Ω πού ἔχουν τήν *«ἰδιότητα»* p (δηλ. οἱ τιμές τῆς μεταβλητῆς, μέ τίς ὁποῖες ὁ προτασιακός τύπος γίνεται πρόταση ἀληθής) ἀποτελοῦν (προσδιορίζουν) ἕνα σύνολο. Τό σύνολο αὐτό συμβολίζεται ὡς ἑξῆς: $\{x \in \Omega$: x *ἔχει τήν ἰδιότητα* p$\}$ ἤ $\{x \in \Omega: p(x)$ *ἀληθής*$\}$ ἤ ἁπλούστερα, ὅταν εἶναι γνωστό ὅτι πρόκειται γιά τό σύνολο ἀναφορᾶς Ω, ἁπλῶς μέ: $\{x: p(x)\}$. Μέ τήν παραπάνω σημασία θά θεωροῦμε στά ἑπόμενα τό συμβολισμό: $\{x \in \Omega: p(x)\}$. Ἑπομένως, ἄν $A = \{x \in \Omega: p(x)\}$, τότε ὁ προτασιακός τύπος p(x) *«περιγράφει»* τά στοιχεῖα τοῦ συνόλου A. Πράγματι·

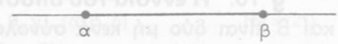
$$(\forall x)\ x \in A \Longleftrightarrow p(x) \text{ ἀληθής.}$$

Ἀξιοσημείωτα σύνολα πραγματικῶν ἀριθμῶν πού περιγράφονται μέ προτασιακούς τύπους εἶναι τά ἀκόλουθα, γνωστά ὡς **διαστήματα** πραγμ. ἀριθμῶν :

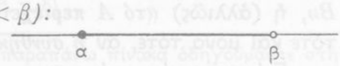
1. **Ἀνοικτό** *διάστημα μέ ἄκρα α, β (α < β):*

   $(\alpha, \beta) = \{x \in \mathbf{R}: \alpha < x < \beta\}$, 

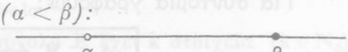
2. **Κλειστό** *διάστημα μέ ἄκρα α, β (α < β):*

   $[\alpha, \beta] = \{x \in \mathbf{R}: \alpha \leq x \leq \beta\}$, 

3. **Ἡμι-ανοικτό ἀπό δεξιά** *μέ ἄκρα α, β (α < β):*

   $[\alpha, \beta) = \{x \in \mathbf{R}: \alpha \leq x < \beta\}$, 

4. **Ἡμι-ανοικτό ἀπό ἀριστερά** *μέ ἄκρα α, β (α < β):*

   $(\alpha, \beta] = \{x \in \mathbf{R}: \alpha < x \leq \beta\}$. 

§ 8. Ἐπέκταση τῆς ἔννοιας τοῦ συνόλου. Σύνολα μονομελή. Τό κενό σύνολο.—Ἀπό τόν τρόπο πού ἔχει χρησιμοποιηθεῖ μέχρι τώρα ἡ ἔννοια τοῦ συνόλου, συμπεραίνεται ὅτι κάθε σύνολο ἔχει δύο τουλάχιστο στοιχεῖα.

Στή Θεωρία τῶν Συνόλων εἰσάγουμε καί σύνολα πού ἔχουν ἕνα μόνο στοιχεῖο καί τά λέμε **μονομελή σύνολα** ἤ μέ μιά λέξη **μονοσύνολα.** Ἕνα τέτοιο σύνολο μέ (μοναδικό) στοιχεῖο τό α, συμβολίζεται μέ $\{\alpha\}$. Τονίζουμε ἐδῶ τή διαφορά πού ὑπάρχει ἀνάμεσα στό α καί στό $\{\alpha\}$: τό πρῶτο συμβολίζει ἕνα στοιχεῖο κάποιου συνόλου, ἐνῶ τό δεύτερο εἶναι σύνολο μέ μοναδικό στοιχεῖο τό α. Ἔτσι ἔχουμε: $\alpha \in \{\alpha\}$ καί $\alpha \neq \{\alpha\}$.

Τό κενό σύνολο. Ἔστω ἕνας προτ. τύπος p(x), ὁ ὁποῖος γιά κάθε τιμή τῆς μεταβλητῆς x γίνεται ψευδής πρόταση, π.χ., ὁ προτασιακός τύπος:

$$p(x)\text{: } x \text{ εἶναι φυσικός ἀριθμός διάφορος τοῦ } x.$$

Γεννᾶται τό ἐρώτημα: ποιό εἶναι τότε τό σύνολο $\{x: p(x)\}$;

Εἶναι ἀμέσως φανερό ὅτι **γιά κανένα** $\mathbf{x \in N}$ δέ γίνεται ἀληθής πρόταση ὁ p(x)· ἄρα τό {x: p(x)} εἶναι ἕνα *«σύνολο» μέ κανένα στοιχεῖο* (!)

Τέτοιο ἐπίσης εἶναι καί τό σύνολο: $\{x \in \mathbf{R}: x^2 + 1 \leq 0\}$.

Ἀπό τά προηγούμενα παραδείγματα γίνεται φανερή ἡ ἀνάγκη νά παραδεχθοῦμε ἕνα σύνολο πού νά μήν ἔχει κανένα στοιχεῖο. Αὐτό τό σύνολο ἀντιστοιχεῖ στούς προτ. τύπους p(x), πού γίνονται **ψευδεῖς** προτάσεις **γιά κάθε στοιχεῖο x** τοῦ συνόλου ἀναφορᾶς τους. Ἔτσι φθάνουμε νά δεχθοῦμε *τήν ὕπαρξη ἑνός καί μοναδικοῦ συνόλου, πού δέν ἔχει στοιχεῖα* (!) Αὐτό τό λέμε, ὅπως ξέρουμε, **«τό κενό σύνολο»** καί τό παριστάνουμε μέ $\varnothing$ ἤ μέ { }.

Σημείωση. Δέν πρέπει νά συγχέουμε τά σύμβολα: { 0 }, { $\varnothing$ }, $\varnothing$. Τά δύο πρῶτα παριστάνουν ἀπό ἕνα μονομελές σύνολο μέ στοιχεῖο τό 0, ἀντιστοίχως τό $\varnothing$, ἐνῶ τό τελευταῖο παριστάνει τό **κενό** σύνολο. Ἐπίσης σημειώνουμε ὅτι $\{0\} \neq 0$ (γιατί;).

§ 9. Συνθήκη καί ταυτότητα σέ σύνολο. — Κάθε προτασιακός τύπος p(x), τοῦ ὁποίου ἡ μεταβλητή x λαμβάνει ὡς τιμές τά στοιχεῖα ἑνός συνόλου A, λέγεται **συνθήκη στό A.** Θά λέμε ὅτι *ἕνα στοιχεῖο α τοῦ A ἱκανοποιεῖ τή συνθήκη p(x)*, τότε καί μόνο τότε, ἄν ἡ πρόταση p(x) εἶναι ἀληθής.

Μία συνθήκη p(x), πού ἀληθεύει γιά κάθε $x \in A$, λέγεται **ταυτότητα στό A.** Ἔτσι, π.χ., ὁ προτ. τύπος p(x): «$x^2 + 1 > 0$» εἶναι ταυτότητα στό **R**, ἐπειδή αὐτός ἀληθεύει γιά κάθε $x \in \mathbf{R}$, ἐνῶ ὁ προτ. τύπος q(x): «$x + 1 > 0$» εἶναι συνθήκη στό **R**, ἐπειδή ἀληθεύει μόνο γιά $x > -1$.

§ 10. Ἡ ἔννοια τοῦ ὑποσυνόλου. Ἰσότητα δύο συνόλων.—Ἔστω ὅτι A καί B εἶναι δύο μή κενά σύνολα. Θά λέμε ὅτι *«τό σύνολο A εἶναι* **ὑποσύνολο** *τοῦ B»*, ἤ (ἀλλιῶς) *«τό A* **περιέχεται** *στό B»*, καί θά τό συμβολίζουμε μέ: $A \subseteq B$, τότε καί μόνο τότε, ἄν *ἡ συνθήκη $x \in A$ συνεπάγεται τήν $x \in B$.*

Γιά συντομία γράφουμε:

$$\boxed{\mathbf{A \subseteq B \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} (\forall\, x : x \in A \Longrightarrow x \in B)}}$$

Ἀντί $A \subseteq B$ γράφουμε ἰσοδύναμα καί $B \supseteq A$· ὁπότε διαβάζουμε: B εἶναι **ὑπερσύνολο** τοῦ A ἤ τό B **περιέχει** τό A.

Τό $\varnothing$ θεωρεῖται ὑποσύνολο κάθε συνόλου καί ὑπερσύνολο μόνο τοῦ ἴδιου· δηλ. $\varnothing \subseteq B$ γιά κάθε σύνολο B καί **μόνο** $\varnothing \supseteq \varnothing$.

Ἡ *ἰσότητα* δύο συνόλων καί ἡ ἔννοια τοῦ *γνήσιου ὑποσυνόλου* (πού συμβολίζεται μέ $\subset$) ὁρίζονται, ὅπως ξέρουμε, ὡς ἑξῆς:

$$A = B \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} A \subseteq B \text{ καί } B \subseteq A$$

$$A \subset B \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} A \subseteq B \text{ καί } A \neq B.$$

Παρατήρηση. Πρέπει νά γίνεται διάκριση μεταξύ τῶν συμβόλων «$\in$», τό ὁποῖο λέγεται σύμβολο τοῦ *«ἀνήκει σέ . . .»*, καί «$\subseteq$», τό ὁποῖο λέγεται *σύμβολο ἐγκλεισμοῦ*. Γιατί τό $\in$ συσχετίζει στοιχεῖο μέ σύνολο, ἐνῶ τό $\subseteq$ συσχετίζει σύνολο μέ σύνολο, καί στή Θεωρία τῶν Συνόλων στοιχεῖο καί σύνολο παίζουν διαφορετικούς ρόλους.

§ 11. Δυναμοσύνολο ἑνός συνόλου.—Ὅταν δοθεῖ ἕνα σύνολο, μποροῦμε νά θεωροῦμε τό σύνολο τῶν ὑποσυνόλων του. Τό σύνολο τῶν ὑποσυνόλων ἑνός συνόλου Ε συμβολίζεται μέ $\mathscr{P}(E)$. Ὥστε:

$$\mathscr{P}(E) = \{X: X \subseteq E\} = \{X: x \in X \Rightarrow x \in E\}.$$

Τό $\varnothing$ καί τό Ε εἶναι προφανῶς ὑποσύνολα τοῦ Ε, ἄρα εἶναι στοιχεῖα τοῦ $\mathscr{P}(E)$. Ἑπομένως ἰσχύουν: $\varnothing \in \mathscr{P}(E)$ καί $E \in \mathscr{P}(E)$.

Ἐξάλλου ἔχουμε τίς λογικές ἰσοδυναμίες:

$$A \in \mathscr{P}(E) \Longleftrightarrow A \subseteq E$$
$$\{\alpha\} \in \mathscr{P}(E) \Longleftrightarrow \alpha \in E.$$

Σημείωση. Ὁ παρακάτω πίνακας κινεῖ τήν προσοχή μας σ' ἕναν τύπο, ὁ ὁποῖος συσχετίζει τόν ἀριθμό τῶν ὑποσυνόλων ἑνός συνόλου μέ τόν ἀριθμό, πού ἐκφράζει τό πλῆθος τῶν στοιχείων τοῦ συνόλου. Τόν ἀριθμό, πού ἐκφράζει τό πλῆθος τῶν στοιχείων ἑνός συνόλου Ε, ὅπως ξέρουμε καί ἀπό τίς προηγούμενες τάξεις, τόν ὀνομάζουμε **πληθικό ἀριθμό** καί τόν συμβολίζουμε μέ $\nu(E)$.

σύνολο Ε	ν(Ε)	Ὑποσύνολα τοῦ Ε	$\nu(\mathscr{P}(E))$
$\varnothing$	0	$\varnothing$	$1(=2^0)$
$\{\alpha\}$	1	$\varnothing, \{\alpha\}$	$2(=2^1)$
$\{\alpha, \beta\}$	2	$\varnothing, \{\alpha\}, \{\beta\}, \{\alpha, \beta\}$	$4(=2^2)$
$\{\alpha, \beta, \gamma\}$	3	$\varnothing, \{\alpha\}, \{\beta\}, \{\gamma\}, \{\alpha, \beta\}, \{\alpha, \gamma\}, \{\beta, \gamma\}, \{\alpha, \beta, \gamma\}$	$8(=2^3)$
$\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$	4	$\varnothing, \{\alpha\}, \{\beta\}, \{\gamma\}, \{\delta\}, \{\alpha, \beta\}, \{\alpha, \gamma\}, \{\alpha, \delta\}$ $\{\beta, \gamma\}, \{\beta, \delta\}, \{\gamma, \delta\}, \{\alpha, \beta, \gamma\}, \{\alpha, \beta, \delta\}$ $\{\alpha, \gamma, \delta\}, \{\beta, \gamma, \delta\}, \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$	$16(=2^4)$

Ἀπό τούς ἀριθμούς τῆς τελευταίας στήλης τοῦ παραπάνω πίνακα ὁδηγούμαστε στήν εἰκασία ὅτι: *ἕνα σύνολο μέ k στοιχεῖα ἔχει 2^k ὑποσύνολα.*

Ἰσοδύναμα ἀποδεικνύεται* ὅτι: **Ἄν τό σύνολο Ε ἔχει k στοιχεῖα ($k \in N_0$), τότε τό σύνολο $\mathscr{P}(E)$ τῶν ὑποσυνόλων του θά ἔχει 2^k στοιχεῖα.**

Δηλαδή: $\boxed{\nu(E) = k \Rightarrow \nu(\mathscr{P}(E)) = 2^k}$

Γι' αὐτό, τό σύνολο $\mathscr{P}(E)$ λέγεται καί **δυναμοσύνολο τοῦ Ε** καί συμβολίζεται πολλές φορές στή διεθνή βιβλιογραφία μέ 2^E.

§ 12. Βασικό σύνολο ἤ σύνολο ἀναφορᾶς.— Στά μαθηματικά προκειμένου νά ἐπεξεργασθοῦμε ἕνα θέμα ξεκινᾶμε ἀπό ἕνα ὁρισμένο σύνολο, ἔστω $\Omega \neq \varnothing$, καί κατόπιν μέ βάση τά στοιχεῖα του καί τά διάφορα ὑποσύνολά του προχωροῦμε στήν ἀνάπτυξη τοῦ θέματος. Ἕνα τέτοιο σύνολο Ω, πού τά στοιχεῖα του καί τά ὑποσύνολά του ἐμφανίζονται ἀποκλειστικά κατά τήν ἐπεξεργασία τοῦ θέματος λέγεται **βασικό σύνολο** ἤ **σύνολο ἀναφορᾶς** (ἐπειδή σ' αὐτό, κατά τήν ἐπεξεργασία τοῦ θέματος, ἀναφέρονται ὅλα τά ἄλλα σύνολα).

* Ἡ ἀπόδειξη θά δοθεῖ σ' ἕνα ἀπό τά ἑπόμενα Κεφάλαια (βλ. Κεφ. IX § 185).

Τό βασικό σύνολο γενικά διαφέρει ἀπό θέμα σέ θέμα. Πολλές φορές μάλιστα δέν ἀναφέρουμε ἰδιαίτερα τό βασικό σύνολο, ἄν αὐτό καθορίζεται ἀπό τό περιεχόμενο τοῦ θέματος.

Σημείωση. Σ' ἕνα διάγραμμα τοῦ Venn τό βασικό σύνολο παριστάνεται συνήθως μέ ὀρθογώνιο, ὁπότε κάθε ὑποσύνολό του πρέπει νά σχεδιάζεται μέσα σ' αὐτό τό ὀρθογώνιο.

§ 13. Καρτεσιανό γινόμενο συνόλων. — Ἄς θεωρήσουμε δύο μή κενά σύνολα A καί B ὡς ὑποσύνολα ἑνός βασικοῦ συνόλου Ω. Ἀπό αὐτά τά δύο σύνολα σχηματίζεται (ὁρίζεται) ἕνα νέο σύνολο, τό ὁποῖο λέγεται **καρτεσιανό γινόμενο** *μέ πρῶτο παράγοντα τό A καί δεύτερο παράγοντα τό B* καί συμβολίζεται μέ $A \times B$. Αὐτό τό καινούργιο σύνολο ὁρίζεται ὡς ἑξῆς:

$$\boxed{\mathbf{A \times B} \underset{\text{ορσ}}{=} \{(\alpha, \beta): \alpha \in A \quad \textbf{καί} \quad \beta \in B\}}$$

Τό στοιχεῖο $(\alpha, \beta) \in A \times B$ λέγεται *«διατεταγμένο ζεῦγος»*. Τά στοιχεῖα α καί β τοῦ ζεύγους λέγονται ἀντιστοίχως *πρώτη* καί *δεύτερη συντεταγμένη* (ἤ *προβολή*) *τοῦ ζεύγους*. Ἡ *βασική ἰσότητα* ὁρίζεται στό $A \times B$ ὡς ἑξῆς:

$$(\alpha, \beta) = (\alpha', \beta') \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} (\alpha = \alpha' \text{ καί } \beta = \beta').$$

Δεχόμαστε ἐξ ὁρισμοῦ ὅτι: ἄν $A = \varnothing$ εἴτε $B = \varnothing$, τότε $A \times B = \varnothing$. Ἔχουμε τώρα τίς ἰσοδυναμίες:

$$A \times B = \varnothing \Longleftrightarrow (A = \varnothing \text{ εἴτε } B = \varnothing)$$
$$A \times B \neq \varnothing \Longleftrightarrow (A \neq \varnothing \text{ καί } B \neq \varnothing).$$

Στήν περίπτωση πού εἶναι $A = B$, τότε τό καρτεσιανό γινόμενο $A \times A$ συμβολίζεται μέ A^2, ὁπότε τό σύνολο τῶν ζευγῶν (α, α) μέ $\alpha \in A$ συμβολίζεται μέ Δ καί λέγεται *ἡ διαγώνιος* τοῦ A^2. Προφανῶς εἶναι: $\Delta \subseteq A^2$.

Ὑπενθυμίζουμε ἀκόμη ὅτι: **στό καρτεσιανό γινόμενο δύο συνόλων δέν ἐπιτρέπεται ἡ ἀντιμετάθεση τῶν παραγόντων,** δηλαδή, γενικά, εἶναι: $A \times B \neq B \times A$.

§ 14. Πράξεις μεταξύ συνόλων.—Στά ἑπόμενα ὑποθέτουμε ὅτι τά σύνολα πού παίρνουμε εἶναι ὑποσύνολα ἑνός ὁρισμένου βασικοῦ συνόλου $\Omega \neq \varnothing$, δηλαδή στοιχεῖα τοῦ $\mathscr{P}(\Omega)$. Ὅπως ξέρουμε καί ἀπό τίς προηγούμενες τάξεις, μεταξύ τῶν στοιχείων τοῦ $\mathscr{P}(\Omega)$ μποροῦμε νά ὁρίσουμε μερικές **πράξεις.**

Ὑπενθυμίζουμε μέ συντομία αὐτές τίς πράξεις:

α). **Τομή δύο συνόλων.** Σέ κάθε ζεῦγος $(A, B) \in \mathscr{P}(\Omega) \times \mathscr{P}(\Omega)$ ἀντιστοιχεῖ ἕνα ὑποσύνολο τοῦ Ω, πού λέγεται **τομή** τῶν A καί B, συμβολίζεται μέ $A \cap B$ καί ὁρίζεται ὡς ἑξῆς:

$$\boxed{\mathbf{A \cap B} \underset{\text{ορσ}}{=} \{x \in \Omega: \ x \in A \ \textbf{καί} \ x \in B\}.}$$

Δύο σύνολα A καί B λέγονται **ξένα μεταξύ τους,** τότε καί μόνο τότε, ἄν $A \cap B = \varnothing$.

Τό κενό σύνολο εἶναι ξένο μέ ὁποιοδήποτε σύνολο A, ἐπειδή ἰσχύει:

$$A \cap \varnothing = \varnothing \quad \text{καί} \quad \varnothing \cap A = \varnothing.$$

β). Ἕνωση δύο συνόλων. Σέ κάθε ζεῦγος $(A, B) \in \mathscr{P}(\Omega) \times \mathscr{P}(\Omega)$ ἀντιστοιχεῖ ἕνα ὑποσύνολο τοῦ Ω, πού λέγεται **ἕνωση** τῶν συνόλων A καί B, συμβολίζεται μέ $A \cup B$ καί ὁρίζεται ὡς ἑξῆς:

$$\boxed{A \cup B \underset{\text{ορσ}}{=\!=} \{x \in \Omega : x \in A \ \text{εἴτε}\ x \in B\}.}$$

Προφανῶς ἔχουμε: $A \cup B = \varnothing \Longrightarrow (A = \varnothing \text{ καί } B = \varnothing)$.

Σημείωση. Ὑπενθυμίζουμε πώς τό *«εἴτε»* σημαίνει ὅτι ἕνα ὁποιοδήποτε στοιχεῖο x τῆς ἑνώσεως ἀνήκει ἤ μόνο στό A ἤ μόνο στό B ἤ ἀνήκει καί στά δύο σύνολα A καί B.

γ). Διαφορά δύο συνόλων (συνολοθεωρητική διαφορά). Σέ κάθε ζεῦγος $(A, B) \in \mathscr{P}(\Omega) \times \mathscr{P}(\Omega)$ ἀντιστοιχεῖ ἕνα ὑποσύνολο τοῦ Ω, πού λέγεται **διαφορά τοῦ συνόλου B ἀπό τό σύνολο A**, συμβολίζεται μέ $A - B$ καί ὁρίζεται ὡς ἑξῆς:

$$\boxed{A - B \underset{\text{ορσ}}{=\!=} \{x \in \Omega : x \in A \ \text{καί}\ x \notin B\}}$$

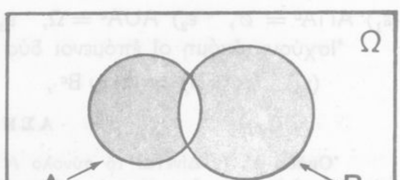
Εἶναι προφανές ὅτι γιά ὁποιοδήποτε σύνολο A ἔχουμε:

$$A - A = \varnothing, \quad A - \varnothing = A \quad \text{καί} \quad \varnothing - A = \varnothing.$$

δ). Συμμετρική διαφορά δύο συνόλων. Σέ κάθε ζεῦγος $(A, B) \in \mathscr{P}(\Omega) \times \mathscr{P}(\Omega)$ ἀντιστοιχεῖ ἕνα ὑποσύνολο τοῦ Ω, πού λέγεται **συμμετρική διαφορά τῶν A καί B**, συμβολίζεται μέ $A \dotplus B$ καί ὁρίζεται ὡς ἑξῆς:

$$\boxed{A \dotplus B \underset{\text{ορσ}}{=\!=} \{x \in \Omega : (x \in A \ \text{καί}\ x \notin B) \ \text{εἴτε}\ (x \in B \ \text{καί}\ x \notin A\}.}$$

Ἀπό τόν πιό πάνω ὁρισμό συνάγουμε ὅτι: $A \dotplus B = (A - B) \cup (B - A)$.



Στό διάγραμμα τοῦ Venn, πού βρίσκεται δεξιά, παριστάνεται ἡ συμμετρική διαφορά $A \dotplus B$ ἀπό τό σκιασμένο μέρος τῶν συνόλων A καί B.

Εἶναι φανερό ὅτι: ἄν $A \cap B = \varnothing$, τότε ἰσχύει: $A \dotplus B = A \cup B$.

ε). Συμπλήρωμα συνόλου. Ὀνομάζουμε **συμπλήρωμα ἑνός συνόλου A** *ὡς πρός τό ὑπερσύνολο Ω* καί τό συμβολίζουμε μέ A^c ἤ A', τό σύνολο πού ὁρίζεται ὡς ἑξῆς:

$$\boxed{A^c \underset{\text{ορσ}}{=\!=} \{x \in \Omega : x \notin A\} = \Omega - A.}$$

Ἄμεση συνέπεια τοῦ πιό πάνω ὁρισμοῦ εἶναι οἱ ἰσότητες:

$$\varnothing^c = \Omega \quad \text{καί} \quad \Omega^c = \varnothing.$$

Ἐπίσης γιά ὁποιοδήποτε σύνολο A ἰσχύουν οἱ συνεπαγωγές:

$$\forall x, x \in A \Longrightarrow x \notin A^c \quad \text{καί} \quad \forall x, x \in A^c \Longrightarrow x \notin A.$$

§ 15. **Ἰδιότητες τῶν πράξεων τῶν συνόλων.**—Μεταξύ τῶν πράξεων τῶν συνόλων ἰσχύουν οἱ ἀκόλουθες ἰδιότητες (ταυτότητες στό $\mathscr{P}(\Omega)$), πού μᾶς εἶναι γνωστές καί ἀπό τά μαθήματα τῶν προηγούμενων τάξεων:

α) τῆς τομῆς:	**β) τῆς ἑνώσεως:**
$\alpha_1)$ $A \cap B = B \cap A$	$\beta_1)$ $A \cup B = B \cup A$
$\alpha_2)$ $A \cap (B \cap \Gamma) = (A \cap B) \cap \Gamma$	$\beta_2)$ $A \cup (B \cup \Gamma) = (A \cup B) \cup \Gamma$
$\alpha_3)$ $A \cap A = A$	$\beta_3)$ $A \cup A = A$
$\alpha_4)$ $A \cap B \subseteq A,\ A \cap B \subseteq B$	$\beta_4)$ $A \subseteq A \cup B,\ B \subseteq A \cup B$
$\alpha_5)$ $A \subseteq B \iff A \cap B = A$	$\beta_5)$ $A \subseteq B \iff A \cup B = B.$

Ἰσχύουν ἀκόμη οἱ ἑπόμενες δύο *ἐπιμεριστικές* ἰδιότητες:

$$A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$$
$$A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma).$$

Παρατήρηση. Οἱ ἰδιότητες (α_1), (β_1) εἶναι γνωστές ὡς νόμοι *τῆς ἀντιμεταθέσεως*, οἱ (α_2), (β_2) ὡς νόμοι *τῆς προσεταιριστικότητας* καί οἱ (α_3), (β_3) ὡς νόμοι *τοῦ ἀδυνάμου* τῶν πράξεων $\cup$ καί $\cap$. Τέλος, ἀπό τίς ἰδιότητες (α_4), (β_4) προκύπτει ὅτι καθένα ἀπό τά σύνολα A, B εἶναι ὑπερσύνολο τῆς τομῆς $A \cap B$ καί ὑποσύνολο τῆς ἑνώσεως $A \cup B$, δηλαδή:

$$A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B, \qquad A \cap B \subseteq B \subseteq A \cup B.$$

γ) τῆς διαφορᾶς:	**δ) τῆς συμμετρικῆς διαφορᾶς:**
$\gamma_1)$ $A - B = A \cap B^c$	$\delta_1)$ $A \dotplus B = B \dotplus A$
$\gamma_2)$ $A - B = (A \cup B) - B = A - (A \cap B)$	$\delta_2)$ $A \dotplus (B \dotplus \Gamma) = (A \dotplus B) \dotplus \Gamma$
$\gamma_3)$ $(A - B) \cap B = \varnothing,\ (A - B) \cup B = A \cup B$	$\delta_3)$ $A \dotplus B = (A \cup B) - (A \cap B)$
$\gamma_4)$ $A \subseteq B \iff A - B = \varnothing$	$\delta_4)$ $A \cap (B \dotplus \Gamma) = (A \cap B) \dotplus (A \cap \Gamma)$

ε) τοῦ συμπληρώματος:

$\varepsilon_1)$ $A \cap A^c = \varnothing$, $\quad \varepsilon_2)$ $A \cup A^c = \Omega$, $\quad \varepsilon_3)$ $(A^c)^c = A$, $\quad \varepsilon_4)$ $A \subseteq B \iff B^c \subseteq A^c$.

Ἰσχύουν ἀκόμη οἱ ἑπόμενοι δύο τύποι **(νόμοι τοῦ De Morgan)**:

(ε_5) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$, $\qquad (\varepsilon_6)$ $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ (*)

Ὁμάδα Α΄. 7. Δίνεται τό σύνολο $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$. Νά βρεῖτε ποιός ἀπό τούς παρακάτω συμβολισμούς εἶναι σωστός καί ποιός λανθασμένος καί γιατί;

1) $\{\alpha\} \in A$, 2) $\alpha \subset A$, 3) $\{\gamma\} \subset A$, 4) $\{\alpha, \beta\} \in A$, 5) $\{\varnothing, A, \{\alpha, \beta\}\} \subset A$.

8. Τό δυναμοσύνολο ἑνός συνόλου E ἔχει 32 στοιχεῖα. Πόσα στοιχεῖα ἔχει τό E;

9. Ἄν $\alpha \in \mathbf{R}$, $\beta \in \mathbf{R}$, νά προσδιορίσετε τούς πραγμ. ἀριθμούς x, y, ὥστε νά ἰσχύει:

$$\{x^2 - y^2, x + y\} \subseteq \{\alpha, \beta\}.$$

10. Ἔστω $A = \{x \in \mathbf{R}: -3 < x < 3\}$ καί $B = \{x \in \mathbf{R}: 1 < x < 2\}$. Νά πάρετε ἕνα ὀρθοκανονικό σύστημα ἀξόνων xOy καί νά παραστήσετε στό ἐπίπεδο xOy τά καρτεσιανά γινόμενα $A \times B$, $B \times A$.

Σημ. Ὑπενθυμίζουμε ὅτι ἕνα σύστημα ἀξόνων λέγεται **ὀρθοκανονικό**, ἄν εἶναι ὀρθογώνιο καί ἄν οἱ μονάδες, πού ἔχουν ὁρισθεῖ πάνω στούς ἄξονες, ἔχουν ἴσα μήκη.

---

* Ἀπό τίς προτεινόμενες γιά λύση ἀσκήσεις αὐτοῦ τοῦ Κεφαλαίου νά δοθοῦν ὅσες κατά τήν κρίση τοῦ διδάσκοντος ἀρκοῦν γιά τήν ἐμπέδωση κάθε ἑνότητας.

Ὁμάδα Β΄. 11. Ἂν Α, Β, Γ εἶναι ὑποσύνολα ἑνὸς βασικοῦ συνόλου Ω, νὰ δείξετε ὅτι :

1) $A\cap(A\cup B)=A=A\cup(A\cap B)$, 2) $A-(B\cup \Gamma)=(A-B)\cap(A-\Gamma)$

3) $(A-B)\cup(A-B^c)=A$, 4) $A\dotplus B=(A\cap B^c)\cup(B\cap A^c)$

5) $(A-B)-(A-\Gamma)=A\cap\Gamma\cap B^c$, 6) $A-(B-\Gamma)=(A-B)\cup(B\cap\Gamma)$.

12. Νά δείξετε ὅτι γιά ὁποιαδήποτε σύνολα Α, Β, Γ, στοιχεῖα τοῦ $\mathscr{P}(\Omega)$, ἰσχύουν:

1) $(A\cap B)\cap(A\cap\Gamma)^c=A\cap B\cap\Gamma^c$, 2) $A\dotplus(A\cap B)=A-B$

3) $(A-B)\cup\Gamma=(A\cup\Gamma)\cap(B^c\cup\Gamma)$, 4) $A-(A-B)=A\cap B$

5) $A\subseteq B\Longleftrightarrow \Gamma-B\subseteq\Gamma-A$, 6) $A-(B\cap\Gamma)=(A-B)\cup(A-\Gamma)$.

13. Ἂν Α, Β, Γ, Δ εἶναι στοιχεῖα τοῦ $\mathscr{P}(\Omega)$, νά δείξετε ὅτι ἰσχύουν οἱ τύποι:

1) $A\subseteq\Gamma\wedge B\subseteq\Delta\Rightarrow A\times B\subseteq\Gamma\times\Delta$, 2) $A\times(B\cap\Gamma)=(A\times B)\cap(A\times\Gamma)$

3) $(A\times B)\cap(\Gamma\times\Delta)=(A\cap\Gamma)\times(B\cap\Delta)$, 4) $A\times(B\cup\Gamma)=(A\times B)\cup(A\times\Gamma)$

5) $(A-B)\times(\Gamma-\Delta)=(A\times\Gamma)\cap(B^c\times\Delta^c)$, 6) $(A-B)\times\Gamma=(A\times\Gamma)-(B\times\Gamma)$.

14. Ἂν Α, Β εἶναι ὑποσύνολα ἑνὸς βασικοῦ συνόλου Ω, νά δείξετε ὅτι:

1) $A\subseteq B\Longleftrightarrow\mathscr{P}(A)\subseteq\mathscr{P}(B)$, 2) $\mathscr{P}(A\cap B)=\mathscr{P}(A)\cap\mathscr{P}(B)$, 3) $\mathscr{P}(A)\cup\mathscr{P}(B)\subseteq\mathscr{P}(A\cup B)$.

15. Νά δείξετε, ὅτι γιά ὁποιαδήποτε σύνολα Α, Β, Γ, Δ ἰσχύουν οἱ παρακάτω τύποι:

1) $(\Gamma\times\Delta)-(A\times B)=[(\Gamma-A)\times\Delta]\cup[\Gamma\times(\Delta-B)]$

2) $(A\times B)^c=(A^c\times B^c)\cup(A^c\times B)\cup(A\times B^c)$.

16. Ἂν Α, Β, Χ, Ψ εἶναι στοιχεῖα τοῦ $\mathscr{P}(\Omega)$, νά ἀποδείξετε τίς συνεπαγωγές:

1) $B\subseteq X\subseteq B\cup A^c\Rightarrow A\cap X=A\cap B$, 2) $A^c\cap B\subseteq\Psi\subseteq B\Rightarrow A\cup\Psi=A\cup B$.

17. Ἂν Α, Β, Γ εἶναι δεδομένα σύνολα, νά βρεῖτε τήν ἱκανή καί ἀναγκαία συνθήκη, ὥστε νά ὑπάρχουν σύνολα Χ γιά τά ὁποῖα θά εἶναι: $A\cap X=B$ καί $A\cup X=\Gamma$. Κατόπιν νά προσδιορίσετε αὐτά τά σύνολα Χ συναρτήσει τῶν Α, Β, Γ.

*ΚΕΦΑΛΑΙΟ II

ΑΞΙΩΜΑΤΑ PEANO—ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ἢ ΤΕΛΕΙΑ ΕΠΑΓΩΓΗ

§ 16. Εἰσαγωγή.—Γιά τούς διαφόρους κλάδους τῶν Μαθηματικῶν ἔχουν κατασκευασθεῖ συστήματα ἀπό *«χαρακτηριστικές»* (θεμελιώδεις) ἰδιότητες, στίς ὁποῖες στηρίζεται ὁλόκληρη ἡ θεωρία. Ἔτσι, γιά κάθε κλάδο δίνεται ἕνας ἐλάχιστος ἀριθμός χαρακτηριστικῶν ἰδιοτήτων, ἀπό τίς ὁποῖες κατόπιν προκύπτει ὁποιαδήποτε ἄλλη ἰδιότητα. Δηλαδή ἄν θεωρήσουμε ἀληθεῖς αὐτές τίς (χαρακτηριστικές) ἰδιότητες, μποροῦμε νά ἀποδείξουμε, μέ αὐστηρό μαθηματικό τρόπο, ὁποιαδήποτε ἄλλη ἰδιότητα. Αὐτές τίς «χαρακτηριστικές» ἰδιότητες τίς ὀνομάζουμε **ἀξιώματα**.

Στά Μαθηματικά γιά νά εἶναι ἕνα τέτοιο σύστημα ἀξιωμάτων «παραδεκτό», πρέπει νά ἔχει τά ἑξῆς τρία γνωρίσματα:

α). Νά εἶναι **πλῆρες,** δηλαδή πρέπει νά στηρίζει καί νά καλύπτει ὁλόκληρη τή θεωρία γιά τήν ὁποία ἔχει κατασκευασθεῖ.

β). Νά εἶναι **ἀνεξάρτητο,** δηλ. δέν πρέπει κανένα ἀπό τά ἀξιώματά του νά εἶναι συνέπεια ἄλλων ἀξιωμάτων τοῦ συστήματος, καί

γ). Νά εἶναι **ἐλεύθερο ἀντιφάσεων,** δηλ. ἄν μία πρόταση εἶναι συνέπεια τῶν ἀξιωμάτων τοῦ συστήματος, δέν πρέπει καί ἡ ἄρνησή της νά εἶναι συνέπεια ἐπίσης τῶν ἴδιων ἀξιωμάτων. Μέ ἄλλα λόγια, ὅταν τό σύστημα αὐτό δέν ὁδηγεῖ σέ μία ἀντίφαση τῆς μορφῆς: *«p εἶναι ἀληθής καί p εἶναι ψευδής»*.

Ἕνα τέτοιο σύστημα ἀξιωμάτων, μέ τό ὁποῖο εἰσάγονται στά Μαθηματικά οἱ φυσικοί ἀριθμοί εἶναι τό ἑξῆς:

§ 17. Ἀξιώματα τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν κατά Peano*. — Οἱ φυσικοί ἀριθμοί, πού τό σύνολό τους συμβολίζουμε μέ $\mathbf{N}$, ἔχουν τίς ἀκόλουθες *«χαρακτηριστικές»* ἰδιότητες (**ἀξιώματα**):

$\mathbf{P_1}$: *Ὑπάρχει ἕνας τουλάχιστο φυσικός ἀριθμός,* **ὁ 1,** δηλ. $1 \in \mathbf{N}$.

$\mathbf{P_2}$: *Κάθε φυσικός ἀριθμός ν ἔχει ἕναν* **«ἑπόμενο»** *φυσικό ἀριθμό,* πού τόν συμβολίζουμε μέ $\nu + 1$, δηλ. ἄν $\nu \in \mathbf{N}$, τότε καί $\nu + 1 \in \mathbf{N}$.

$\mathbf{P_3}$: *Δέν ὑπάρχει φυσικός ἀριθμός πού νά ἔχει ἑπόμενο τόν 1,* δηλ. γιά κάθε $\nu \in \mathbf{N}$ εἶναι $\nu + 1 \neq 1$.

$\mathbf{P_4}$: *Δέν ὑπάρχουν διαφορετικοί μεταξύ τους φυσικοί ἀριθμοί πού νά ἔχουν*

---

* G. Peano (1858 - 1932). Ἰταλός μαθηματικός καί φιλόσοφος.

τόν ἴδιο ἑπόμενο, δηλ. ἄν $\mu \in N$, $\nu \in N$ καί $\mu + 1 = \nu + 1$, τότε εἶναι $\mu = \nu$.

P_5 : *Ἄν γιά ἕνα ὑποσύνολο* S *τοῦ* N, *ἰσχύουν:*

(i) $1 \in S$,

(ii) *ἄν* $\nu \in S$, *τότε καί* $(\nu+1) \in S$,

τότε *τό σύνολο* S *συμπίπτει μέ τό σύνολο* **N** *τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, δηλ.* $S = N$.

Οἱ παραπάνω πέντε ἰδιότητες P_1 - P_5 τοῦ συνόλου N εἶναι γνωστές ὡς: **τά ἀξιώματα τοῦ Peano** γιά τό σύνολο N τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν.

Τό ἀξίωμα P_5 λέγεται: **«ἡ ἀρχή τῆς τέλειας (ἤ μαθηματικῆς) ἐπαγωγῆς»** καί διατυπώνεται συμβολικά ὡς ἑξῆς:

$$\left(\begin{array}{c} 1 \in S \\ \nu \in S \implies \nu + 1 \in S \end{array}\right) \implies S = N.$$

Σ' αὐτή τήν ἀρχή στηρίζεται, ὅπως θά δοῦμε παρακάτω, μιά γενική μέθοδος ἀποδείξεως πού χρησιμοποιεῖται στά Μαθηματικά προκειμένου νά ἀποδειχθεῖ ὅτι ἕνας προτ. τύπος $p(\nu)$, πού ἐκφράζεται μέ τή βοήθεια κάποιου φυσικοῦ ἀριθμοῦ ν, ἔχει ἰσχύ γιά ὅλες γενικά τίς τιμές τοῦ φυσικοῦ ἀριθμοῦ ν. Ἡ μέθοδος αὐτή εἶναι γνωστή ὡς: *μέθοδος ἀποδείξεως μέ τέλεια ἤ μαθηματική ἐπαγωγή* ἤ ἀλλιῶς: *μέθοδος τῆς ἐπαγωγικῆς ἀποδείξεως*.

Σχόλια: 1). Τό ἀξίωμα P_1 μᾶς ἐξασφαλίζει ὅτι τό σύνολο **N** εἶναι διάφορο ἀπό τό κενό, περιέχει τό φυσικό ἀριθμό **ἕνα** (*συμβολικά:* **1**).

2). Τό ἀξίωμα P_2 δίνει τή γενική μέθοδο τῆς κατασκευῆς τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν. Ἔτσι μέ ἀφετηρία τό φυσικό ἀριθμό 1, γιά τόν ὁποῖο ἔγινε λόγος στό προηγούμενο ἀξίωμα, κατασκευάζεται κάθε ἄλλος φυσικός ἀριθμός. Ἄν τόν ἑπόμενο τοῦ 1 συμβολίσουμε μέ 2, τόν ἑπόμενο τοῦ 2 μέ 3, τόν ἑπόμενο τοῦ 3 μέ 4 κ.ο.κ. θά ἔχουμε ὅτι:

$$N = \{1, 2, 3, \ldots, \nu, \nu + 1, \ldots\}$$

Πράγματι, ἄν καλέσουμε S τό σύνολο $\{1, 2, 3, \ldots, \nu, \nu + 1, \ldots\}$, ἔχουμε: $S \subseteq N$. Ἐξάλλου $1 \in S$ καί ἄν $k \in S$, τότε θά εἶναι καί $k+1 \in S$, ἐπειδή ἔτσι κατασκευάσαμε τό σύνολο S. Τότε ὅμως, σύμφωνα μέ τήν ἀρχή τῆς τέλειας ἐπαγωγῆς, θά εἶναι $N = S = \{1, 2, \ldots, \nu, \nu + 1, \ldots\}$.

3). Ἀπό τά ἀξιώματα P_2 καί P_3 συνάγεται ὅτι οἱ φυσικοί ἀριθμοί ν καί $\nu + 1$ εἶναι διαδοχικοί, δηλ. μεταξύ τους δέν ὑπάρχει ἄλλος φυσικός ἀριθμός, ἄρα κάθε φυσικός ἀριθμός ἔχει **ἀκριβῶς** ἕναν *«ἑπόμενο»* (γιατί;). Ἐξάλλου γιά τό φυσικό ἀριθμό 1 ἔχουμε: $1 \leqq \nu$ γιά κάθε $\nu \in N$, γι' αὐτό καί ὁ 1 λέγεται **ὁ ἐλάχιστος ἀπό τούς φυσικούς ἀριθμούς** (δηλ. *μικρότερος ἀπ' ὅλους τούς φυσικούς ἀριθμούς*).

4). Μέ $=$ συμβολίζουμε στό P_4 τή *«βασική ἰσότητα»* στό N, δηλαδή τήν ἰσότητα πού ἐπιτρέπει νά διακρίνουμε τά στοιχεῖα τοῦ **N** μεταξύ τους.

§ 18. Ἡ μέθοδος ἀποδείξεως μέ μαθηματική ἤ τέλεια ἐπαγωγή.—Πρίν διατυπώσουμε τό θεώρημα ἀπό τό ὁποῖο ἀπορρέει ἡ μέθοδος ἀποδείξεως μέ τέλεια ἐπαγωγή (*μέθοδος τῆς τέλειας ἐπαγωγῆς*) θά ἀναφερθοῦμε σ' ἕνα παράδειγμα:

Παράδειγμα: Νά ἀποδείξετε ὅτι γιά κάθε φυσικό ἀριθμό ν ἰσχύει ὁ τύπος:

$$1+3+5+\ldots+(2\nu-3)+(2\nu-1) = \nu^2 \qquad (\tau)$$

Πράγματι· γιά $\nu = 1$ ὁ προηγούμενος τύπος γράφεται: $1 = 1^2$, τό ὁποῖο εἶναι ἀληθές. Ἄς δεχθοῦμε τώρα ὅτι ὁ τύπος αὐτός ἰσχύει γιά $\nu = k$ $(k \in N)$, δηλ. ὅτι ἰσχύει:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k-3) + (2k-1) = k^2$$

τότε, ἄν προσθέσουμε καί στά δύο μέλη της τό $2k+1$, θά ἔχουμε:

$$[1 + 3 + 5 + \cdots + (2k-1)] + (2k+1) = k^2 + (2k+1).$$

Ἀλλά: $[1 + 3 + \cdots + (2k-1)] + (2k+1) = 1 + 3 + \cdots + [2(k+1)-3] + 2(k+1) - 1 \cdot$

ἐξάλλου: $k^2 + (2k+1) = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$

καί ἑπομένως: $1 + 3 + 5 + \cdots + [2(k+1)-3] + [2(k+1)-1] = (k+1)^2$.

Ὥστε ἀποδείξαμε ὅτι: ὑποθέτοντας ὅτι ὁ τύπος (τ) ἰσχύει γιά $\nu = k$, ἀποδεικνύεται ὅτι αὐτός ἰσχύει καί γιά $\nu = k+1$. Ἑπομένως, ἐπειδή ἤδη ἔχει διαπιστωθεῖ ὅτι ὁ τύπος (τ) ἰσχύει γιά $\nu = 1$, θά ἰσχύει γιά $\nu = 2$. Ὁμοίως ἀφοῦ ἰσχύει γιά $\nu = 2$, θά ἰσχύει ὁ (τ) καί γιά τόν ἑπόμενό του, δηλ. γιά $\nu = 3$ καί διαδοχικά γιά $\nu = 4$, $\nu = 5, \ldots$, δηλ. γιά κάθε φυσικό ἀριθμό ν.

Τό ἀκόλουθο θεώρημα θεμελιώνει τήν ἀποδεικτική μέθοδο, πού ἀκολουθήσαμε στό προηγούμενο παράδειγμα.

§ 19. Θεώρημα *(πρώτη μορφή τῆς τέλειας ἐπαγωγῆς)*.**— Ἄν p(ν) εἶναι ἕνας προτασιακός τύπος μέ σύνολο ἀναφορᾶς τό σύνολο N τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, τέτοιος ὥστε :**

α) νά εἶναι ἀληθής ἡ πρόταση p(1), καί

β) νά εἶναι ἀληθής ἡ πρόταση : $\forall k \in N,\ p(k) \Longrightarrow p(k+1)$,

τότε (δηλ. ὅταν συμβαίνουν τά α) καί β)) **ὁ προτασιακός τύπος p(ν) εἶναι ἀληθής (ἰσχύει) γιά κάθε** $\nu \in N$.

Ἀπόδειξη. Ἔστω S τό σύνολο, τό ὁποῖο περιγράφει ὁ προτασιακός τύπος $p(\nu)$, δηλαδή: $S = \{\nu \in N:\ p(\nu)\}$.

Γιά τήν ἀπόδειξη τοῦ θεωρήματος ἀρκεῖ νά ἀποδείξουμε ὅτι τό σύνολο S ἔχει τίς ἰδιότητες **(i)** καί **(ii)** τοῦ ἀξιώματος $\mathbf{P_5}$ τοῦ Peano. Πράγματι,

(i) $1 \in S$, γιατί ἡ πρόταση $p(1)$ εἶναι ἀπό τήν ὑπόθεση (α) ἀληθής. Ἐπίσης γιά κάθε $k \in S \Longrightarrow p(k) \Longrightarrow$ (ἀπό τή **β**)) $p(k+1) \Longrightarrow (k+1) \in S$, δηλαδή: **(ii)** ἄν $\nu \in S$, τότε καί $(\nu+1) \in S$.

Τότε ὅμως, σύμφωνα μέ τό ἀξίωμα $\mathbf{P_5}$ τοῦ Peano, θά εἶναι $S = N$, δηλ. τό σύνολο τιμῶν ἀλήθειας τοῦ προτασιακοῦ τύπου $p(\nu)$ εἶναι τό N, πού σημαίνει ὅτι ὁ $p(\nu)$ γιά κάθε $\nu \in N$ εἶναι μιά πρόταση ἀληθής.

Σημείωση. Ἡ ἐφαρμογή τῆς μεθόδου τῆς μαθηματικῆς ἤ τέλειας ἐπαγωγῆς γίνεται στήν πράξη σέ τρία στάδια, ὡς ἐξῆς:

α). Ἐπαλήθευση. Ἀποδεικνύουμε ὅτι ἡ πρόταση $p(1)$ εἶναι ἀληθής.

β). Βῆμα ἀπό τό k στό k + 1. Θεωροῦμε ἕναν (ὁποιοδήποτε) φυσικό ἀριθμό k καί μέ τήν ὑπόθεση ὅτι ἡ πρόταση $p(k)$ εἶναι ἀληθής, ἀποδεικνύουμε, τότε, ὅτι καί ἡ πρόταση $p(k+1)$ εἶναι ἀληθής.

γ). Συμπέρασμα. Συνδυάζοντας τά α) καί β) συμπεραίνουμε, σύμφωνα μέ τό παραπάνω θεώρημα τῆς τέλειας ἐπαγωγῆς, ὅτι: $p(\nu)$ ἀληθής (ἰσχύει) γιά κάθε $\nu \in \mathbf{N}$.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1η : Νά ἀποδείξετε ὅτι γιά κάθε φυσικό ἀριθμό ν ἰσχύει ὁ τύπος :

$$p(\nu): \qquad 1+2+3+\cdots+\nu = \frac{\nu(\nu+1)}{2} \qquad (1)$$

Ἀπόδειξη α) Γιά $\nu = 1$ ἡ (1) γίνεται : $1 = \frac{1(1+1)}{2}$, ἀληθής.

β) Ἄς δεχθοῦμε ὅτι ἡ (1) ἰσχύει γιά $\nu = k$ ($k \in N$), δηλ. ὅτι:

$$1+2+3+\cdots+k = \frac{k(k+1)}{2} \qquad (2)$$

Θά ἀποδείξουμε τώρα ὅτι ἡ (1) ἰσχύει καί γιά $\nu = k+1$, δηλ. ὅτι:

$$1+2+3+\cdots+k+(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2} \qquad (3)$$

Πράγματι, ἄν προσθέσουμε καί στά δύο μέλη τῆς (2) τό $(k+1)$ ἔχουμε:

$$(1+2+3+\cdots+k)+(k+1) = \frac{k(k+1)}{2}+(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2},$$ δηλαδή ἡ (3) ἰσχύει.

γ) Συμπέρασμα : Στό α) ἀποδείξαμε ὅτι $p(1)$ εἶναι ἀληθής. Στό β) ἀποδείξαμε ὅτι: ἄν $p(k)$ εἶναι ἀληθής, τότε καί ἡ πρόταση $p(k+1)$ εἶναι ἀληθής *. Συνεπῶς, σύμφωνα μέ τό θεώρημα τῆς τέλειας ἐπαγωγῆς, ἡ (1) ἰσχύει γιά κάθε $\nu \in N$.

2η : Ἄν α εἶναι ἕνας πραγμ. ἀριθμός μέ $\alpha \geqq -1$, τότε γιά κάθε φυσικό ἀριθμό ν ἰσχύει:

$$q(\nu): \qquad (1+\alpha)^\nu \geqq 1+\nu\alpha \qquad \textit{(ἀνισότητα τοῦ Bernoulli).}$$

Ἀπόδειξη. α) Γιά $\nu = 1$, ἡ παραπάνω σχέση ἰσχύει ὡς ἰσότητα.

β) Ἔστω ὅτι ἰσχύει γιά $\nu = k$ ($k \in N$), δηλ. ὅτι:

$$(1+\alpha)^k \geqq 1+k\alpha \qquad (1)$$

Θά ἀποδείξουμε ὅτι ὁ $q(\nu)$ ἰσχύει καί γιά $\nu = k+1$, δηλ. ὅτι:

$$(1+\alpha)^{k+1} \geqq 1+(k+1)\alpha. \qquad (2)$$

Πράγματι, ἄν πολλαπλασιάσουμε καί τά δύο μέλη τῆς (1) ἐπί $1+\alpha$ (τό $1+\alpha$ εἶναι μή ἀρνητικός ἀριθμός, ἐπειδή $\alpha \geqq -1$) ἔχουμε:

$$(1+\alpha)^{k+1} \geqq (1+\alpha)(1+k\alpha) = 1+k\alpha+\alpha+k\alpha^2 \geqq 1+(k+1)\alpha, \text{ γιατί: } k\alpha^2 \geqq 0.$$

Ἄρα ἡ (2) ἰσχύει. Συνεπῶς, σύμφωνα μέ τό θεώρημα τῆς τέλειας ἐπαγωγῆς, ἡ ἀνισότητα τοῦ Bernoulli ἰσχύει γιά κάθε φυσικό ἀριθμό ν, (μέ τήν ὑπόθεση φυσικά ὅτι $\alpha \geqq -1$).

Ἄσκηση. Νά ἐξετάσετε γιά ποιές τιμές τῶν α καί ν ὁ προτ. τύπος $q(\nu)$ ἰσχύει μέ τό ἴσον;

3η : Νά προσδιορίσετε ἕνα φυσικό ἀριθμό ν_0, ὥστε νά ἀληθεύει ἡ συνεπαγωγή :

$$\nu \geqq \nu_0 \Longrightarrow 3^\nu > 100 \qquad (\nu \in N).$$

Λύση. Ἐφαρμόζοντας τήν ἀνισότητα τοῦ Bernoulli μέ $\alpha = 2$ ἔχουμε:

$$3^\nu = (1+2)^\nu \geqq 1+2\nu.$$

Γιά νά εἶναι $3^\nu > 100$ ἀρκεῖ: $1+2\nu > 100 \Longleftrightarrow 2\nu > 99$ καί $\nu \geqq \nu_0 = 50 \Longrightarrow 3^\nu > 100$.

Ἀξιόλογη παρατήρηση. Πολλές φορές συμβαίνει ἕνας προτασιακός τύπος $p(\nu)$ νά ἔχει ὡς σύνολο ἀναφορᾶς ἕνα γνήσιο ὑποσύνολο τοῦ συνόλου N. Στήν περίπτωση αὐτή τό θεώρημα τῆς τέλειας ἐπαγωγῆς ἰσχύει (προφανῶς) μέ τήν ἑξῆς ὅμως διατύπωση:

Ἄν $p(\nu)$ εἶναι ἕνας προτασιακός τύπος μέ σύνολο ἀναφορᾶς τό $N_0 \equiv \{\nu \in N: \nu \geqq \nu_0\}$, ὅπου $\nu_0 \in N$, τέτοιος ὥστε :

---

* Εἶναι φανερό ὅτι στήν ἀπόδειξη δέν ἔπαιξε ρόλο ποιός ἦταν ὁ k.

α) νά εἶναι ἀληθής ἡ πρόταση $p(\nu_0)$, καί

β) νά εἶναι ἀληθής ἡ πρόταση: $\forall\ k \in N_{\nu_0},\ p(k) \implies p(k+1)$,

τότε ὁ προτασιακός τύπος $p(\nu)$ ἰσχύει γιά κάθε φυσικό ἀριθμό ν μέ $\nu \geqq \nu_0$.

Ἐφαρμογή. Νά δείξετε ὅτι γιά κάθε φυσικό ἀριθμό $\nu \geqq 3$ ἰσχύει: $3^\nu > (\nu+1)^2$ (1)

Ἀπόδειξη. α) Γιά $\nu_0 = 3$ ἡ (1) γίνεται: $3^3 > (3+1)^2$, δηλ. $27 > 16$, ἀληθής.

β) Ἔστω ὅτι γιά $\nu = k$ ($k \in N$, $k \geqq 3$) ἡ (1) ἰσχύει, δηλ. ὅτι: $3^k > (k+1)^2$ (2)

Θά δείξουμε ὅτι ἡ (1) ἰσχύει καί γιά $\nu = k+1$, δηλ. ὅτι: $3^{k+1} > (k+2)^2$ (3)

Πράγματι, ἐπειδή ἀπό τή (2) ἔχουμε:

$$3 . 3^k > 3(k+1)^2, \text{ δηλ. } 3^{k+1} > 3(k+1)^2 \qquad (4)$$

ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι: $3(k+1)^2 > (k+2)^2 \iff 3k^2 + 6k + 1 > k^2 + 4k + 4$, δηλ.

ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι: $2k^2 + 2k > 1 \iff 2k(k+1) > 1$.

Ἡ τελευταία ὅμως ἀνισότητα ἰσχύει, γιατί $k \geqq 3$.

Ἄρα ἡ (3) ἰσχύει. Συνεπῶς, σύμφωνα μέ τήν προηγούμενη παρατήρηση, ἡ (1) ἰσχύει γιά κάθε φυσικό ἀριθμό $\nu \geqq 3$.

Σχόλια: 1) Ἡ ἐπαλήθευση μιᾶς προτάσεως γιά διάφορες διαδοχικές τιμές τοῦ φυσικοῦ ἀριθμοῦ ν, π.χ. γιά $\nu = 1, 2, 3, \ldots, \nu_0$ **δέν ἀρκεῖ** γιά νά συμπεράνουμε ὅτι ἡ πρόταση ἰσχύει γιά κάθε $\nu \in N$ *(ἀτελής ἐπαγωγή)*.

Ἀντιπαράδειγμα: Ἄν ν φυσικός ἀριθμός, τότε ὁ ἀριθμός $(\nu^2 + \nu + 41)$ εἶναι πρῶτος;

Ἐδῶ παρατηροῦμε ὅτι γιά τίς πρῶτες τριάντα ἐννιά τιμές τοῦ ν ἡ πρόταση ἀληθεύει, δηλ. γιά $\nu = 1,2,3,\ldots,39$ ὁ ἀριθμός $(\nu^2+\nu+41)$ εἶναι πρῶτος (δηλ. δέν ἔχει ἄλλο διαιρέτη ἐκτός ἀπό τόν ἑαυτό του καί τή μονάδα)· ὅμως γιά $\nu = 40$ ὁ ἀριθμός: $40^2+40+41 = 41^2$ δέν εἶναι πρῶτος.

2) Ἡ ἀπόδειξη μιᾶς προτάσεως γιά $\nu = k+1$, μέ τήν προϋπόθεση ὅτι αὐτή ἰσχύει γιά $\nu = k$ ($k \in N$), **δέν ἐξασφαλίζει** πάντοτε τήν ἀλήθεια τῆς προτάσεως $\forall\ \nu \in N$. Πρέπει ὁπωσδήποτε νά κάνουμε τήν ἐπαλήθευση γιά $\nu = 1$ (ἤ, ἄν δέν ἔχει νόημα γιά $\nu = 1$, πρέπει νά κάνουμε τήν ἐπαλήθευση γιά $\nu = \nu_0$, ὅπου ν_0 ὁ ἐλάχιστος φυσικός ἀριθμός γιά τόν ὁποῖο ἔχει νόημα ἡ πρόταση).

Ἀντιπαράδειγμα: Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι ἡ ἰσότητα: «$\nu = \nu + 17$» ἰσχύει γιά $\nu = k$, χωρίς νά ἔχουμε προηγουμένως ἐξακριβώσει ἄν αὐτή ἰσχύει γιά $\nu = 1$, δηλ. ἔστω ὅτι: $k = k + 17$. Μποροῦμε, τότε, εὔκολα νά δείξουμε ὅτι αὐτή ἡ ἰσότητα ἰσχύει καί γιά $\nu = k+1$.

Πράγματι, ἔχουμε:

$$k = k + 17 \iff k + 1 = (k + 17) + 1 \iff k + 1 = (k + 1) + 17.$$

Αὐτό ὅμως δέν ἀρκεῖ γιά νά συμπεράνουμε ὅτι ἡ ἰσότητα: $\nu = \nu + 17$ ἰσχύει γιά κάθε $\nu \in N$ (στό παράδειγμά μας μάλιστα διαπιστώνουμε ἀμέσως πώς δέν ὑπάρχει καμιά τιμή τοῦ ν γιά τήν ὁποία ἀληθεύει ἡ ἰσότητα).

§ 20. Δεύτερη μορφή τῆς τέλειας ἤ μαθηματικῆς ἐπαγωγῆς.

— Μία ἄλλη μορφή ἀποδεικτικῆς μεθόδου πού στηρίζεται ἐπίσης στήν ἀρχή τῆς μαθηματικῆς ἐπαγωγῆς θεμελιώνεται μέ τό ἑπόμενο:

Θεώρημα *(δεύτερη μορφή τῆς τέλειας ἐπαγωγῆς)*.— **Ἄν $p(\nu)$ εἶναι ἕνας προτασιακός τύπος μέ σύνολο ἀναφορᾶς τό σύνολο N τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν τέτοιος, ὥστε:**

α) νά εἶναι ἀληθεῖς οἱ προτάσεις: $p(1), p(2)$, καί

β) γιά κάθε $k \in N$ μέ $k > 2$, $\ p(k-2) \wedge p(k-1) \implies p(k)$,

τότε ὁ προτασιακός τύπος $p(\nu)$ εἶναι ἀληθής (ἰσχύει) γιά κάθε $\nu \in N$.

Ὑπόδειξη. Νά πάρετε τό σύνολο $S=\{\nu\in\mathbf{N}: \nu=1$ ἤ $(p(\nu-2) \wedge p(\nu-1)\}$ καί νά ἀποδείξετε ὅτι τό S ἔχει τίς ἰδιότητες **(i)** καί **(ii)** τοῦ ἀξιώματος $\mathbf{P}_5$ τοῦ Peano. Ἄρα...

Θά δώσουμε καί μία ἄλλη ἀπόδειξη τοῦ παραπάνω θεωρήματος, στηριζόμενοι ὅμως στήν ἑξῆς πρόταση πού ἀποδεικνύεται στά Μαθηματικά:

Πρόταση *(ἀρχή τοῦ ἐλάχιστου φυσικοῦ ἀριθμοῦ)*.— **Ἄν S εἶναι ἕνα μή κενό ὑποσύνολο τοῦ N, τότε τό S ἔχει ἕνα ἐλάχιστο στοιχεῖο, δηλ. τότε ὑπάρχει ἕνας (ἀκριβῶς) φυσικός ἀριθμός $\nu_0 \in S$ μέ τήν ἰδιότητα: $\nu_0 \leqq \nu$ γιά κάθε $\nu \in S$.**

Ἀπόδειξη τοῦ θεωρήματος. Ἔστω T τό σύνολο, τό ὁποῖο περιγράφει ὁ προτ. τύπος: $\sim p(\nu)$, δηλαδή: $T=\{\nu\in\mathbf{N}: \sim p(\nu)\}$. Εἶναι φανερό πώς γιά κάθε $\nu\in T$ ἡ ἀντίστοιχη πρόταση $p(\nu)$ δέν εἶναι ἀληθής. Προφανῶς $1\notin T$ καθώς καί $2\notin T$. Ἄς δεχτοῦμε ὅτι τό T δέν εἶναι τό κενό σύνολο· τότε, σύμφωνα μέ τήν παραπάνω πρόταση, τό T ἔχει ἐλάχιστο στοιχεῖο, ἔστω τό $\nu_0\in T$. Τότε ἔχουμε: $\nu_0>2$ καί ἡ πρόταση $p(\nu_0)$ δέν εἶναι ἀληθής, ἐνῶ γιά κάθε $\nu\in\mathbf{N}$ μέ $\nu<\nu_0$ ἡ ἀντίστοιχη πρόταση $p(\nu)$ εἶναι ἀληθής. Εἶναι ὅμως: $2\leqq\nu_0-1<\nu_0$ καί $1\leqq\nu_0-2<\nu_0$ καί συνεπῶς οἱ προτάσεις $p(\nu_0-2)$ καί $p(\nu_0-1)$ εἶναι ἀληθεῖς. Τότε ὅμως, σύμφωνα μέ τήν ὑπόθεση β) τοῦ θεωρήματος, θά εἶναι ἀληθής ἡ $p(\nu_0)$· αὐτό ὅμως εἶναι ἄτοπο, γιατί $\nu_0\in T$. Εἶναι λοιπόν $T=\varnothing$ καί συνεπῶς ὁ $p(\nu)$ εἶναι ἀληθής (ἰσχύει) γιά κάθε $\nu\in\mathbf{N}$.

Σημείωση. Γιά νά ἀποδείξουμε μία πρόταση τῆς μορφῆς $(\forall\ \nu\in\mathbf{N},\ p(\nu))$ στηριζόμενοι στό προηγούμενο θεώρημα, ἐκτελοῦμε τά ἑξῆς τρία βήματα:

α). Ἀποδεικνύουμε ὅτι καθεμία ἀπό τίς προτάσεις $p(1)$ καί $p(2)$ εἶναι ἀληθής.

β). Θεωροῦμε ἕνα (ὁποιοδήποτε) φυσικό ἀριθμό k, $(k>2)$, καί μέ τήν ὑπόθεση ὅτι καθεμία ἀπό τίς προτάσεις $p(k-2)$ καί $p(k-1)$ εἶναι ἀληθής, ἀποδεικνύουμε ὅτι καί ἡ πρόταση $p(k)$ εἶναι ἀληθής.

γ). Συνδυάζοντας τά α) καί β) συμπεραίνουμε, σύμφωνα μέ τό παραπάνω θεώρημα, ὅτι: $p(\nu)$ ἀληθής (ἰσχύει) γιά κάθε $\nu\in\mathbf{N}$.

Ἐφαρμογή. Νά ἀποδείξετε ὅτι γιά κάθε φυσικό ἀριθμό ν ἰσχύει:

$$p(\nu):\qquad (3+\sqrt{5})^{\nu}+(3-\sqrt{5})^{\nu}=\text{πολ. } 2^{\nu}.$$

Ἀπόδειξη. Θέτουμε $S_\nu=(3+\sqrt{5})^{\nu}+(3-\sqrt{5})^{\nu}$. Γιά $\nu=1$ καί $\nu=2$ ἔχουμε ἀντιστοίχως:

$$S_1=(3+\sqrt{5})+(3-\sqrt{5})=6=3.2^1=\text{πολ. } 2^1$$
$$S_2=(3+\sqrt{5})^2+(3-\sqrt{5})^2=28=7.2^2=\text{πολ. } 2^2.$$

Ἄρα καθεμία ἀπό τίς προτάσεις $p(1)$ καί $p(2)$ εἶναι ἀληθής.

Ἔστω ὅτι καθεμία ἀπό τίς προτάσεις $p(k-2)$ καί $p(k-1)$, ὅπου $k\in\mathbf{N}$ μέ $k>2$, εἶναι ἀληθής, δηλαδή ἔστω ὅτι:

$$S_{k-2}=(3+\sqrt{5})^{k-2}+(3-\sqrt{5})^{k-2}=\text{πολ. } 2^{k-2}\quad\text{καί}\tag{1}$$
$$S_{k-1}=(3+\sqrt{5})^{k-1}+(3-\sqrt{5})^{k-1}=\text{πολ. } 2^{k-1}\tag{2}$$

Θά ἀποδείξουμε ὅτι καί ἡ πρόταση $p(k)$ εἶναι ἀληθής. Πράγματι, ἄς σχηματίσουμε τήν ἐξίσωση β' βαθμοῦ πού ἔχει ρίζες τούς ἀριθμούς: $x_1=3+\sqrt{5}$ καί $x_2=3-\sqrt{5}$.

Αὐτή εἶναι ἡ: $\quad x^2-6x+4=0$

Ἔχουμε τότε:

$$(3+\sqrt{5})^2-6(3+\sqrt{5})+4=0\tag{3}$$
$$(3-\sqrt{5})^2-6(3-\sqrt{5})+4=0\tag{4}$$

Ἀπό τίς (3) καί (4), ἄν πολλαπλασιάσουμε καί τά δύο μέλη τους μέ $x_1^{k-2}=(3+\sqrt{5})^{k-2}$, $x_2^{k-2}=(3-\sqrt{5})^{k-2}$, ἀντιστοίχως, λαμβάνουμε:

$$(3+\sqrt{5})^k-6(3+\sqrt{5})^{k-1}+4(3+\sqrt{5})^{k-2}=0 \qquad (3')$$

$$(3-\sqrt{5})^k-6(3-\sqrt{5})^{k-1}+4(3-\sqrt{5})^{k-2}=0 \qquad (4')$$

Ἄν προσθέσουμε τίς (3′) καί (4′) κατά μέλη καί λάβουμε ὑπόψη καί τίς (1) καί (2), βρίσκουμε ὅτι:

$$S_k-6S_{k-1}+4S_{k-2}=0$$

Ἄρα:
$$S_k=6S_{k-1}-4S_{k-2} \qquad (5)$$

Ἡ (5), ἄν λάβουμε ὑπόψη τίς (1) καί (2), γίνεται:

$$S_k=6.\text{πολ } 2^{k-1}-4.\text{πολ } 2^{k-2}=3.\text{πολ } 2^k-\text{πολ } 2^k=\text{πολ } 2^k,$$

δηλ. ἡ $p(k)$ εἶναι ἀληθής. Συνεπῶς, σύμφωνα μέ τό προηγούμενο θεώρημα, ὁ $p(\nu)$ ἰσχύει γιά κάθε $\nu\in\mathbf{N}$.

Παρατήρηση. Μερικές φορές συμβαίνει ἕνας προτασιακός τύπος $p(\nu)$ νά ἔχει ὡς σύνολο ἀναφορᾶς ἕνα γνήσιο ὑποσύνολο τοῦ $\mathbf{N}$. Τότε ἡ δεύτερη μορφή τῆς τέλειας ἐπαγωγῆς ἐφαρμόζεται ὡς ἑξῆς:

α). Ἀποδεικνύουμε τήν ἀλήθεια τῶν προτάσεων $p(\nu_0)$, $p(\nu_0+1)$, ὅπου $\nu_0\in\mathbf{N}$.

β). Ἀποδεικνύουμε ὅτι ἡ ἀλήθεια τῶν $p(k)$ καί $p(k+1)$ συνεπάγεται τήν ἀλήθεια τῆς $p(k+2)$, ὅπου k ὁ ὁποιοσδήποτε φυσικός ἀριθμός $\geqq\nu_0$.

γ). Ἀπό τά (α) καί (β) προκύπτει, τότε, ἡ ἀλήθεια τῆς $p(\nu)$ γιά κάθε φυσικό ἀριθμό $\nu\geqq\nu_0$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάδα Α΄. 18. Μέ τή μέθοδο τῆς μαθηματικῆς ἐπαγωγῆς νά ἀποδείξετε ὅτι γιά κάθε $\nu\in\mathbf{N}$ ἰσχύει:

α) $2+4+6+\ldots+2\nu=\nu(\nu+1)$

β) $1^2+2^2+3^2+\ldots+\nu^2=\dfrac{1}{6}\,\nu(\nu+1)(2\nu+1)$

γ) $1^3+2^3+3^3+\ldots+\nu^3=(1+2+3+\ldots+\nu)^2=\dfrac{1}{4}\,\nu^2(\nu+1)^2$.

δ) $2^3+4^3+6^3+\ldots+(2\nu)^3=2\nu^2(\nu+1)^2$.

ε) $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\ldots+\nu(\nu+1)=\dfrac{1}{3}\,\nu(\nu+1)(\nu+2)$.

19. Ἄν $0<\alpha_i\neq1$ γιά κάθε $i=1,2,\ldots,\nu$, νά ἀποδείξετε μέ ἐπαγωγή ὅτι:

$$(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\ldots(1+\alpha_\nu)>2^\nu\cdot\sqrt{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_\nu} \qquad (\forall\,\nu\in\mathbf{N}).$$

20. Νά ἀποδείξετε ὅτι γιά κάθε φυσικό ἀριθμό $\nu\geqq4$ ἰσχύει:

$$\text{(i)}\ \left(\frac{3}{2}\right)^\nu>\nu+1,\quad \text{(ii)}\ 3^{\nu-1}>\nu^2,\quad \text{(iii)}\ \sqrt[3]{3}>\sqrt[\nu]{\nu}.$$

21. Μέ τή μέθοδο τῆς τέλειας ἐπαγωγῆς νά ἀποδείξετε ὅτι: ἄν $\alpha\in\mathbf{R}$ μέ $0\leqq\alpha\leqq1$, τότε γιά κάθε φυσικό ἀριθμό ν ἰσχύει:

$$1)\ (1-\alpha)^\nu\geqq1-\nu\alpha,\qquad 2)\ (1-\alpha)^\nu\leqq\frac{1}{1+\nu\alpha}.$$

22. Ἄν $\alpha>1$, νά ἀποδείξετε ὅτι γιά κάθε φυσικό ἀριθμό $\nu\geqq2$ ἰσχύει:

$$0<\sqrt[\nu]{\alpha}-1<\frac{1}{\nu}(\alpha-1).$$

23. Ἄν $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu \in \mathbf{R}^+$ καί $\sigma_\nu = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\nu$, νά ἀποδείξετε ὅτι:

1) $(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\cdots(1+\alpha_\nu) \geqq 1 + \sigma_\nu \quad \forall\, \nu \in \mathbf{N}$

2) $(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\nu)\left(\dfrac{1}{\alpha_1} + \dfrac{1}{\alpha_2} + \cdots + \dfrac{1}{\alpha_\nu}\right) \geqq \nu^2 \quad \forall\, \nu \in \mathbf{N}.$

Ὁμάδα Β΄. 24. Νά ἀποδείξετε, ἐφαρμόζοντας τήν ἀρχή τῆς τέλειας ἐπαγωγῆς, ὅτι: ἄν γιά ἕνα ὑποσύνολο Κ τοῦ συνόλου **N** τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν ἰσχύουν:

(i) $1 \notin K$ καί **(ii)** ἄν $\nu \notin K$, τότε καί $(\nu+1) \notin K$,

τότε τό Κ εἶναι τό κενό σύνολο (δηλ. $K = \varnothing$).

25. Νά ἀποδείξετε ὅτι ὁ προτ. τύπος $p(\nu)$: $2 + 2^2 + \cdots + 2^\nu = 2^{\nu+1}$ δέν εἶναι ἀληθής, ἄν καί ἀπό τήν ἀλήθεια τῆς $p(k)$ συνεπάγεται ἡ ἀλήθεια τῆς $p(k+1)$. Κατόπιν νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ ἄρνηση τοῦ προτ. τύπου $p(\nu)$ εἶναι πρόταση ἀληθής γιά κάθε $\nu \in \mathbf{N}$.

26. Ἄν $\theta \in \mathbf{R}$ μέ $\theta \geqq 1$, τότε γιά κάθε $\nu \in \mathbf{N}$, νά ἀποδείξετε ὅτι ἰσχύει:

(i) $\theta^\nu \geqq \nu(\theta - 1)$, (ii) $\theta^{\nu+1} \geqq (\nu+1)\theta - \nu$.

27. Μέ τή μέθοδο τῆς τέλειας ἐπαγωγῆς νά ἀποδείξετε ὅτι ὁ ἀριθμός:

$$\alpha_\nu = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^\nu - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^\nu\right]$$

εἶναι φυσικός γιά κάθε $\nu \in \mathbf{N}$.

28. Ἄν $\alpha^2 - \beta^2 \cdot \gamma =$ πολ.4, ὅπου $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{Z}$ μέ $\gamma \geqq 0$, τότε νά ἀποδείξετε, ἐφαρμόζοντας τή δεύτερη μορφή τῆς τέλειας ἐπαγωγῆς, ὅτι γιά κάθε $\nu \in \mathbf{N}$ ἰσχύει:

$$S_\nu \equiv (\alpha + \beta\sqrt{\gamma})^\nu + (\alpha - \beta\sqrt{\gamma})^\nu = \text{πολ. } 2^\nu.$$

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟ

ΑΛΓΕΒΡΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΕΩΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ III

ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΚΑΙ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

Ι. ΟΡΙΣΜΟΙ – ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

§ 21. Ἀπόλυτη τιμή πραγματικοῦ ἀριθμοῦ.— Ἡ ἔννοια τῆς ἀπόλυτης τιμῆς πραγματικοῦ ἀριθμοῦ μᾶς εἶναι γνωστή ἀπό τήν προηγούμενη τάξη. Ἐκεῖ μάθαμε ὅτι: **ἀπόλυτη τιμή** (ἤ **μέτρο**) *ἑνός πραγματικοῦ ἀριθμοῦ α*, πού τήν εἴχαμε συμβολίσει μέ $|\alpha|$, *εἶναι ὁ ἴδιος ὁ ἀριθμός α, ἄν εἶναι θετικός ἤ μηδέν καί ὁ ἀντίθετός του —α, ἄν ὁ ἀριθμός εἶναι ἀρνητικός.*

Ὥστε:
$$\boxed{|\alpha| \underset{\text{ορσ}}{=} \begin{cases} \alpha, & \text{ἄν } \alpha \geqq 0 \\ -\alpha, & \text{ἄν } \alpha < 0 \end{cases}}$$

Παραδείγματα: $|+8| = 8,\ |-4| = -(-4) = 4,\ \left|-\frac{3}{4}\right| = -\left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4}.$

Ἀπό τόν προηγούμενο ὁρισμό συμπεραίνουμε ὅτι ἡ παράσταση $|\alpha|$ δέ γίνεται ποτέ ἀρνητική· εἶναι, ὅπως λέμε, ἕνας **μή ἀρνητικός ἀριθμός** καί μάλιστα:

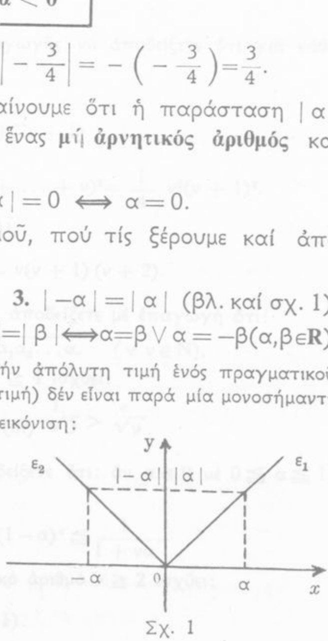
$$|\alpha| > 0 \iff \alpha \neq 0 \quad \text{καί} \quad |\alpha| = 0 \iff \alpha = 0.$$

Ἄμεσες συνέπειες τοῦ πιό πάνω ὁρισμοῦ, πού τίς ξέρουμε καί ἀπό τήν προηγούμενη τάξη, εἶναι καί οἱ ἑξῆς:

1. $|\alpha| = \alpha \iff \alpha \geqq 0$, **2.** $|\alpha| = -\alpha \iff \alpha \leqq 0$, **3.** $|-\alpha| = |\alpha|$ (βλ. καί σχ. 1),
4. $|\alpha - \beta| = |\beta - \alpha|$ γιά κάθε $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, **5.** $|\alpha| = |\beta| \iff \alpha = \beta \vee \alpha = -\beta (\alpha, \beta \in \mathbf{R})$.

Παρατήρηση: Ἀπό τόν τρόπο πού ὁρίσαμε τήν ἀπόλυτη τιμή ἑνός πραγματικοῦ ἀριθμοῦ x, γίνεται φανερό ὅτι αὐτή (δηλ. ἡ ἀπόλυτη τιμή) δέν εἶναι παρά μία μονοσήμαντη ἀπεικόνιση τοῦ $\mathbf{R}$ ἐπάνω στό $\mathbf{R}_0^+$, ἀκριβέστερα ἡ ἀπεικόνιση:

$$|\ |: \mathbf{R} \to \mathbf{R}_0^+ : \quad x \to |x| \underset{\text{ορσ}}{=} \begin{cases} x, & \text{ἄν } x > 0 \\ 0, & \text{ἄν } x = 0 \\ -x, & \text{ἄν } x < 0 \end{cases}$$



Σχ. 1

Ἡ γραφική παράσταση τῆς $y = |x|$ ἀποδίδεται μέ τίς δύο ἡμιευθεῖες ε_1 καί ε_2 πού διχοτομοῦν τίς γωνίες τῶν ἀξόνων (βλ. σχ. 1).

§ 22. Ἰδιότητα Ι.— Γιά κάθε πραγματικό ἀριθμό α ἔχουμε :

$$-|\alpha| \leqq \alpha \leqq |\alpha|.$$

Ἀπόδειξη. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(i) $\alpha \geqq 0 \Rightarrow |\alpha| = \alpha$ καί ἑπομένως: $-|\alpha| \leqq \alpha = |\alpha|$.

Ἄρα καί: $-|\alpha| \leqq \alpha \leqq |\alpha|$.

(ii) $\alpha < 0 \Rightarrow |\alpha| = -\alpha$ καί ἑπομένως: $-|\alpha| = \alpha < |\alpha|$.

Ἄρα καί: $-|\alpha| \leqq \alpha \leqq |\alpha|$.

Ὥστε: $\boxed{\forall \alpha \in \mathbf{R},\ -|\alpha| \leqq \alpha \leqq |\alpha|}$

Παρατήρηση: Ἀπό τήν πιό πάνω ἰδιότητα ἔχουμε:

Γιά κάθε $x \in \mathbf{R}$ **εἶναι :** $|x| + x \geqq 0$ **καί** $|x| - x \geqq 0$.

Ποτέ ὅμως δέν ἔχουμε ταυτόχρονα τή διπλή ἀνισότητα: $-|x| < x < |x|$.

§ 23. Ἰδιότητα ΙΙ.— Γιά κάθε πραγματικό ἀριθμό α ἔχουμε : $|\alpha|^2 = \alpha^2$.

Ἀπόδειξη. Ἄν $\alpha \geqq 0$, τότε $|\alpha| = \alpha$ καί ἄρα $|\alpha|^2 = \alpha^2$. Ἄν $\alpha < 0$, τότε $|\alpha| = -\alpha$ καί συνεπῶς $|\alpha|^2 = (-\alpha)^2 = \alpha^2$.

Ὥστε: $\boxed{\forall \alpha \in \mathbf{R},\ |\alpha|^2 = \alpha^2}$

Ἀξιόλογη παρατήρηση. Ἄν $\alpha \notin \mathbf{R}$, τότε $|\alpha|^2 \neq \alpha^2$, ὅπως θά δοῦμε ἀργότερα. Ἑπομένως ἡ ἰσότητα $|\alpha|^2 = \alpha^2$ συνάγεται ὅτι $\alpha \in \mathbf{R}$.

Στήν προηγούμενη τάξη ἀποδείξαμε τήν ἑπόμενη πιό γενική πρόταση:

§ 24. Ἰδιότητα ΙΙΙ.— Γιά κάθε $\alpha \in \mathbf{R}$ **καί κάθε** $\nu \in \mathbf{N}$ **ἰσχύουν :**

$$\text{(i)}\quad |\alpha|^{2\nu} = \alpha^{2\nu}, \quad \text{(ii)}\quad |\alpha|^{2\nu+1} = \begin{cases} \alpha^{2\nu+1}, & \text{ἄν } \alpha \geqq 0 \\ -\alpha^{2\nu+1}, & \text{ἄν } \alpha < 0. \end{cases}$$

Πόρισμα.— Γιά κάθε $\alpha \in \mathbf{R}$ **καί** $\nu \in \mathbf{N}$ **ἰσχύει :** $\sqrt[2\nu]{\alpha^{2\nu}} = |\alpha|$.

Ἔτσι στήν εἰδική περίπτωση γιά $\nu = 1$ θά γράφουμε: $\sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$.

§ 25. Ἰδιότητα IV.—Γιά πραγματικούς ἀριθμούς x, ε μέ ε > 0 ἰσχύουν οἱ λογικές ἰσοδυναμίες :

$$\boxed{|x| \leqq \varepsilon \Longleftrightarrow -\varepsilon \leqq x \leqq \varepsilon \Longleftrightarrow x^2 \leqq \varepsilon^2}$$

Ἀπόδειξη. Ἔχουμε τήν ἰσοδυναμία:

$$|x| \leqq \varepsilon \Longleftrightarrow -\varepsilon \leqq |x| \leqq \varepsilon \quad (\text{γιατί: } -\varepsilon < 0)$$

Ἀλλά: $-\varepsilon \leqq |x| \leqq \varepsilon \Longleftrightarrow -\varepsilon \leqq x \leqq \varepsilon$ ἤ $-\varepsilon \leqq -x \leqq \varepsilon$,

δηλαδή: $-\varepsilon \leqq |x| \leqq \varepsilon \Longleftrightarrow -\varepsilon \leqq x \leqq \varepsilon$.

Ὥστε: $|x| \leqq \varepsilon \Longleftrightarrow -\varepsilon \leqq x \leqq \varepsilon$.

Έχουμε επίσης τήν ισοδυναμία: $|x| \leqq \varepsilon \iff |x|^2 \leqq \varepsilon^2 \iff x^2 \leqq \varepsilon^2$.

Ώστε: $\forall x \in \mathbf{R}$ καί $\varepsilon > 0$ ισχύει: $|x| \leqq \varepsilon \iff -\varepsilon \leqq x \leqq \varepsilon \iff x^2 \leqq \varepsilon^2$.

Σημείωση. Ἰσχύει: $|x| \leqq \varepsilon \iff x \in [-\varepsilon, +\varepsilon]$ (βλ. καί § 7, β).

Πόρισμα. — Ἄν $\varepsilon > 0$ καί $\alpha \in \mathbf{R}$, τότε γιά κάθε $x \in \mathbf{R}$ ἔχουμε τίς ἰσοδυναμίες:

$$|x - \alpha| \leqq \varepsilon \iff \alpha - \varepsilon \leqq x \leqq \alpha + \varepsilon \iff x \in [\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon].$$

Παρατήρηση. Μέ τόν ἴδιο τρόπο ἀποδεικνύονται οἱ (λογικές) ἰσοδυναμίες:

1η: $|x| < \varepsilon \iff -\varepsilon < x < \varepsilon \iff x \in (-\varepsilon, +\varepsilon)$

2η: $|x| > \varepsilon \iff (x > \varepsilon \lor x < -\varepsilon)$. $\quad (\varepsilon > 0)$

Ἐφαρμογές: 1η: Νά ἀποδείξετε τήν ἰσοδυναμία :

$$2 \leqq x \leqq 8 \iff |x - 5| \leqq 3.$$

Ἔχουμε: $2 \leqq x \leqq 8 \iff 2 - 5 \leqq x - 5 \leqq 8 - 5 \iff -3 \leqq x - 5 \leqq 3 \iff |x - 5| \leqq 3$.

2η: Ἄν $\alpha < x < \beta$, νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ παράσταση:

$$y = \big|\, |\alpha - x| + |\beta - x| \,\big|$$

δέν ἐξαρτᾶται ἀπό τό x.

Ἀπόδειξη. Ἐπειδή $\alpha < x < \beta$ ἔχουμε:

$$\left.\begin{matrix} \alpha - x < 0 \\ \beta - x > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} |\alpha - x| = x - \alpha \\ |\beta - x| = \beta - x \end{matrix}\right\} \Rightarrow y = |x - \alpha + \beta - x| = |\beta - \alpha| = \beta - \alpha.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάδα Α΄. 29. Νά βρεῖτε τίς ἀκέραιες τιμές τοῦ x, γιά τίς ὁποῖες εἶναι:

1) $|x| < 3{,}2$, 2) $|x| > 1{,}8$ καί $|x| \leqq 5$, 3) $\left|x - \frac{1}{2}\right| < 3$.

30. Νά ἀποδείξετε ὅτι γιά κάθε $x, y \in \mathbf{R}$ ἰσχύει: $|x^2 - 3y + 1| = |3y - x^2 - 1|$.

31. Ἄν $x \in \mathbf{R}$ καί $|2x + 9| = 3|x + 2|$ νά ἀποδείξετε ὅτι: $|x| = 3$.

32. Ἄν $x, y \in \mathbf{R}$ καί $y\sqrt{x^2} - x\sqrt{y^2} + x|x| - y|y| = 0$, νά ἀποδείξετε ὅτι: $|x| = |y|$.

33. Ἄν $\alpha < \beta < \gamma < \delta$, νά βρεῖτε τίς ἐκφράσεις τῆς παραστάσεως:

$$y = |\alpha - x| + |\beta - x| + |\gamma - x| + |\delta - x|$$

χωρίς τό σύμβολο τῆς ἀπόλυτης τιμῆς, γιά τίς διάφορες πραγματικές τιμές τοῦ x. Ὑπάρχουν διαστήματα πού παίρνει τιμές τό x, στά ὁποῖα ἡ παράσταση y δέν ἐξαρτᾶται ἀπό τό x;

34. Νά κάνετε τό ἴδιο γιά τήν: $y = |x - 5| + |3x + 1| + |2x - 3|$.

★ **Ὁμάδα Β΄. 35.** Δίνεται ἡ συνάρτηση f μέ τύπο: $f(x) = \dfrac{|x + 1| - |x - 1|}{|x + 1| + |x - 1|}$.

Νά ἀποδείξετε ὅτι:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ἄν } |x| < 1 \\ \dfrac{1}{x}, & \text{ἄν } |x| > 1. \end{cases}$$

36. Ἄν $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ μέ $\alpha < \beta$, νά γράψετε μέ τήν πιό ἁπλή δυνατή μορφή τόν τύπο τῆς ἀπεικονίσεως $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, ὅπου:

$$f(x) = \big|\, |x - \alpha| - |x - \beta| \,\big|.$$

37. Γιά ποιές πραγματικές τιμές τοῦ x ἔχει νόημα πραγματικοῦ ἀριθμοῦ ἡ παράσταση:

$$y = \sqrt[\nu]{\frac{x}{|x|} - \frac{\sqrt{x^2}}{x}} + \sqrt[2\nu]{2 - |x| + 2x^2 - |x|^3}, \quad (\nu \in \mathbf{N} - \{1\})$$

38. Ἂν μᾶς δοθοῦν οἱ πραγμ. ἀριθμοί $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$, τότε ὁ πιό μεγάλος ἀπ' αὐτούς συμβολίζεται μέ: $\max(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu)$ *) καί ὁ πιό μικρός μέ: $\min(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu)$ *). Ἔτσι, π.χ., ἄν α καί β εἶναι δύο ὁποιοιδήποτε πραγματικοί ἀριθμοί, θά εἶναι:

$$\max(\alpha,\beta) \underset{\text{ορσ}}{=} \begin{cases} \alpha, & \text{ἄν } \alpha \geqq \beta \\ \beta, & \text{ἄν } \beta > \alpha \end{cases} \quad \text{καί} \quad \min(\alpha,\beta) \underset{\text{ορσ}}{=} \begin{cases} \alpha, & \text{ἄν } \alpha < \beta \\ \beta, & \text{ἄν } \beta \leqq \alpha. \end{cases}$$

Νά ἀποδείξετε τώρα ὅτι:

1) $\max(\alpha,\beta) = \dfrac{\alpha+\beta+|\beta-\alpha|}{2}$, 2) $|\alpha| = \max(\alpha,-\alpha)$, 3) $\min(\alpha,\beta) = \dfrac{\alpha+\beta-|\beta-\alpha|}{2}$

4) $|\alpha-\beta| = \max(\alpha,\beta) - \min(\alpha,\beta)$, 5) $\max(0,2x) - \min(0,2x) = 2|x|$.

39. Ἀφοῦ λάβετε ὑπόψη τήν προηγούμενη ἄσκηση, νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ παράσταση: $y = 2|\beta-\gamma| + \big|2\alpha-\beta-\gamma-|\beta-\gamma|\big| + |2\alpha-\beta-\gamma+|\beta-\gamma||$, ὅπου $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$, εἶναι ἴση μέ: $4\cdot[\max(\alpha,\beta,\gamma) - \min(\alpha,\beta,\gamma)]$.

ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ – ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ – ΠΗΛΙΚΟΥ ΠΡΑΓΜ. ΑΡΙΘΜΩΝ

§ 26. Ἰδιότητα V.— Ἡ ἀπόλυτη τιμή τοῦ ἀθροίσματος δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν εἶναι μικρότερη ἤ ἴση μέ τό ἄθροισμα τῶν ἀπόλυτων τιμῶν τῶν προσθετέων.

Δηλαδή: $\boxed{|\alpha+\beta| \leqq |\alpha| + |\beta|}$ $(\forall\ \alpha,\beta\in\mathbf{R})$ (1)

Ἀπόδειξη. Ἂν λάβουμε ὑπόψη τίς ἰδιότητες I καί IV, ἔχουμε τίς συνεπαγωγές:

$$\left.\begin{array}{l} -|\alpha| \leqq \alpha \leqq |\alpha| \\ -|\beta| \leqq \beta \leqq |\beta| \end{array}\right\} \Longrightarrow -(|\alpha|+|\beta|) \leqq \alpha+\beta \leqq (|\alpha|+|\beta|) \Longrightarrow |\alpha+\beta| \leqq |\alpha|+|\beta|.$$

Σημείωση: Ἡ σχέση: $|\alpha+\beta| \leqq |\alpha| + |\beta|$ λέγεται καί **τριγωνική ἀνισότητα.**

Πόρισμα 1ο.—Ἡ ἀπόλυτη τιμή τῆς διαφορᾶς δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν εἶναι μικρότερη ἤ ἴση μέ τό ἄθροισμα τῶν ἀπόλυτων τιμῶν τους.

Δηλαδή: $\boxed{|\alpha-\beta| \leqq |\alpha| + |\beta|}$ $(\forall\alpha,\beta\in\mathbf{R})$ (2)

Πράγματι, ἔχουμε:

$$|\alpha-\beta| = |\alpha+(-\beta)| \leqq |\alpha| + |-\beta| = |\alpha| + |\beta|.$$

Πόρισμα 2ο.—Ἂν $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu \in \mathbf{R}$, τότε γιά κάθε $\nu\in\mathbf{N}$ μέ $\nu\geqq 2$ ἰσχύει:

$$\boxed{|\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_\nu| \leqq |\alpha_1| + |\alpha_2| + \cdots + |\alpha_\nu|} \qquad (3)$$

Ἡ ἀπόδειξη γίνεται εὔκολα μέ τή μέθοδο τῆς τέλειας ἐπαγωγῆς, ἀφοῦ εἶναι γνωστό ὅτι γιά $\nu=2$, ἰσχύει, σύμφωνα μέ τήν προηγούμενη ἰδιότητα.

Σημείωση: Γιά τήν πιό σύντομη γραφή ἑνός ἀθροίσματος χρησιμοποιεῖται διεθνῶς τό ἑλληνικό γράμμα Σ. Ἔτσι γράφουμε: $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_\nu = \sum\limits_{k=1}^{\nu}\alpha_k$ (διαβάζουμε: *«ἄθροισμα ἀπό k=1 μέχρι ν τῶν* α_k *»*). Μ' αὐτό τό συμβολισμό ἡ σχέση (3) γράφεται πιό σύντομα ὡς ἑξῆς:

* max, min εἶναι, ἀντίστοιχα, συντομογραφία τῶν λέξεων: maximum (= μέγιστο), minimum (= ἐλάχιστο).

$$\left|\sum_{k=1}^{\nu} \alpha_k\right| \leqq \sum_{k=1}^{\nu} |\alpha_k| \qquad (3').$$

§ 27. Ἰδιότητα VI.— Γιά κάθε α καί β τοῦ R ἔχουμε τήν ἀνισότητα:

$$\boxed{\big||\alpha|-|\beta|\big| \leqq |\alpha \pm \beta|} \qquad (\forall \alpha,\beta \in \mathbf{R}) \qquad (4)$$

Ἀπόδειξη: Πρῶτα-πρῶτα βλέπουμε ὅτι ἡ σχέση αὐτή παραμένει ἀμετάβλητη, ἄν ἀντιμεταθέσουμε τά α καί β. Μποροῦμε λοιπόν νά ὑποθέσουμε ὅτι $|\alpha| \geqq |\beta|$, ὁπότε $|\alpha|-|\beta| \geqq 0$. Θέτουμε $\alpha \pm \beta = \gamma$, ὁπότε:

$$\alpha=\gamma\mp\beta \Longrightarrow |\alpha|=|\gamma\mp\beta| \leqq |\gamma|+|\beta| \Longrightarrow |\alpha|-|\beta| \leqq |\gamma|$$

καί ἐπειδή $|\alpha|-|\beta| \geqq 0$, ἡ τελευταία ἀνισότητα γίνεται:

$$\big||\alpha|-|\beta|\big| \leqq |\gamma| = |\alpha \pm \beta|.$$

Οἱ σχέσεις (1), (2) καί (4) περιέχονται στήν:

$$\boxed{\big||\alpha|-|\beta|\big| \leqq |\alpha \pm \beta| \leqq |\alpha|+|\beta|} \qquad (\forall \alpha,\beta \in \mathbf{R}) \qquad (5)$$

Ἀξιόλογη παρατήρηση. Γιά τό πότε ἰσχύει ἡ (5) μέ τό *«ἴσον»* διατυπώνουμε τόν ἑξῆς μνημονικό κανόνα: *Ὁποιαδήποτε ἀπό τίς σχέσεις τῆς (5) πού ἔχει τά ἴδια* (ἀντιστ. *διαφορετικά) πρόσημα ἰσχύει μέ τό ἴσον, τότε καί μόνο τότε, ἄν: $\alpha\beta \geqq 0$* (ἀντιστ. *$\alpha\beta \leqq 0$*). (Βλ. σχετική ἀπόδειξη στό πρῶτο παράδειγμα τῆς σελίδας 33).

Ἔχοντας τώρα ὑπόψη καί τήν ἰδιότητα I, γράφουμε τήν (5) πιό γενικά:

$$\boxed{|\alpha|-|\beta| \leqq \big||\alpha|-|\beta|\big| \leqq |\alpha \pm \beta| \leqq |\alpha|+|\beta|} \qquad (\forall \alpha,\beta \in \mathbf{R}) \qquad (6)$$

§ 28. Ἰδιότητα VII.— Ἡ ἀπόλυτη τιμή τοῦ γινομένου δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἴση μέ τό γινόμενο τῶν ἀπόλυτων τιμῶν τῶν παραγόντων.

Δηλαδή: $$\boxed{|\alpha\cdot\beta| = |\alpha|\cdot|\beta|} \qquad (\forall \alpha,\beta \in \mathbf{R}) \qquad (7)$$

Ἀπόδειξη. Εἶναι γνωστό (§ 24, πόρισμα) ὅτι ἰσχύει: $\sqrt{x^2}=|x|$. Ἄρα:

$$|\alpha\beta| = \sqrt{(\alpha\beta)^2} = \sqrt{\alpha^2\cdot\beta^2} = \sqrt{\alpha^2}\cdot\sqrt{\beta^2} = |\alpha|\cdot|\beta|.$$

Πόρισμα 1ο.— Ἄν $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu \in \mathbf{R}$, τότε γιά κάθε $\nu \in \mathbf{N}$ μέ $\nu \geqq 2$ ἰσχύει:

$$\boxed{|\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot\alpha_3\cdots\alpha_{\nu-1}\cdot\alpha_\nu| = |\alpha_1|\cdot|\alpha_2|\cdot|\alpha_3|\cdots|\alpha_{\nu-1}|\cdot|\alpha_\nu|} \qquad (8)$$

Ἡ ἀπόδειξη γίνεται εὔκολα μέ τή μέθοδο τῆς τέλειας ἐπαγωγῆς, ἀφοῦ εἶναι γνωστό ὅτι ἡ (8) ἰσχύει γιά ν=2, σύμφωνα μέ τήν παραπάνω ἰδιότητα.

Σημείωση: Γιά νά παραστήσουμε πιό σύντομα ἕνα γινόμενο χρησιμοποιοῦμε τό κεφαλαῖο γράμμα Π. Ἔτσι γράφουμε: $\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot\alpha_3\cdots\alpha_\nu = \prod_{k=1}^{\nu}\alpha_k$ (διαβάζουμε: *«τό γινόμενο ἀπό k=1 μέχρι ν τῶν αk»*). Μ' αὐτό τό συμβολισμό ἡ σχέση (8) γράφεται πιό σύντομα ὡς ἑξῆς:

$$\left|\prod_{k=1}^{\nu}\alpha_k\right| = \prod_{k=1}^{\nu}|\alpha_k| \qquad (8')$$

Πόρισμα 2ο.— Γιά κάθε $\alpha \in \mathbf{R}$ καί κάθε $\nu \in \mathbf{N}$ ἰσχύει: $|\alpha^\nu| = |\alpha|^\nu$.

Αὐτό προκύπτει ἀμέσως, ἄν στήν (8) θέσουμε: $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_\nu = \alpha$.

§ 29. Ἰδιότητα VIII.— Ἡ ἀπόλυτη τιμή τοῦ πηλίκου δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἴση μέ τό πηλίκο τῶν ἀπόλυτων τιμῶν τους.

Δηλαδή: $$\boxed{\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}} \qquad (\forall\ \alpha,\beta \in \mathbf{R},\ \beta \neq 0) \qquad (9)$$

Ἀπόδειξη. Μέ $\beta \neq 0$ ἔχουμε:

$$|\alpha| = \left|\frac{\alpha}{\beta}\cdot\beta\right| = \left|\frac{\alpha}{\beta}\right|\cdot|\beta| \Longrightarrow \left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}.$$

Σημείωση: Ἡ ἀπόδειξη τῆς παραπάνω ἰδιότητας μπορεῖ νά γίνει καί ὡς ἑξῆς:

$$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \sqrt{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2} = \sqrt{\frac{\alpha^2}{\beta^2}} = \frac{\sqrt{\alpha^2}}{\sqrt{\beta^2}} = \frac{|\alpha|}{|\beta|},\quad (\beta \neq 0).$$

Πόρισμα.— Γιά κάθε $\alpha \in \mathbf{R}$ μέ $\alpha \neq 0$ καί $k \in \mathbf{Z}$ ἰσχύει: $|\alpha^k| = |\alpha|^k$.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Παράδειγμα 1ο: Ἄν $\alpha,\beta \in \mathbf{R}$, νά ἀποδείξετε ὅτι:

$$\big||\alpha| - |\beta|\big| = |\alpha + \beta| \Longleftrightarrow \alpha\beta \leqq 0.$$

Ἀπόδειξη. Ἔχουμε:

$$\big||\alpha| - |\beta|\big| = |\alpha + \beta| \Longleftrightarrow \big||\alpha| - |\beta|\big|^2 = |\alpha + \beta|^2 \Longleftrightarrow (|\alpha| - |\beta|)^2 = (\alpha + \beta)^2 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow |\alpha|^2 - 2|\alpha|\cdot|\beta| + |\beta|^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$$
$$\Longleftrightarrow \alpha^2 - 2|\alpha\beta| + \beta^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 \Longleftrightarrow |\alpha\beta| = -\alpha\beta \Longleftrightarrow \alpha\beta \leqq 0.$$

Σημείωση. Ἄν ἐργαστοῦμε μέ τόν ἴδιο τρόπο, βρίσκουμε τίς ἰσοδυναμίες:

1. $|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta| \Longleftrightarrow \alpha\beta \geqq 0$, 2. $|\alpha - \beta| = |\alpha| + |\beta| \Longleftrightarrow \alpha\beta \leqq 0$.

Παράδειγμα 2ο: Νά ἀποδείξετε ὅτι: $|x^2 + 4x - 2| \leqq 23$ γιά $x \in \mathbf{R}$ μέ: $-2 \leqq x \leqq 3$.

Ἀπόδειξη. Γιά κάθε $x \in \mathbf{R}$ ἔχουμε (βλ. Πόρ. 2ο, § 26):

$$|x^2 + 4x - 2| \leqq |x^2| + 4|x| + 2 = x^2 + 4|x| + 2.$$

Ἐξάλλου ἔχουμε:

$$-2 \leqq x \leqq 3 \Longrightarrow -3 \leqq x \leqq 3 \Longrightarrow |x| \leqq 3 \text{ καί } x^2 \leqq 9.$$

Συνεπῶς: $|x^2 + 4x - 2| \leqq x^2 + 4|x| + 2 \leqq 9 + 12 + 2 = 23.$

Παράδειγμα 3ο: Ἄν $\alpha,\beta \in \mathbf{R}$ μέ $\beta(\alpha + 2\beta) \neq 0$, νά ἀποδείξετε ὅτι καθεμιά ἀπό τίς ἑπόμενες ἀνισότητες:

$$\left|\frac{2\alpha + \beta}{\alpha + 2\beta}\right| < 1 \ \ (1), \qquad \left|\frac{\alpha}{\beta}\right| < 1 \ \ (2), \qquad \left|\frac{\alpha\beta + 2\alpha^2}{\alpha\beta + 2\beta^2}\right| < 1 \ \ (3)$$

συνεπάγεται τίς ἄλλες δύο.

Ἀπόδειξη. Ἔχουμε:

$$(1)\quad \left|\frac{2\alpha + \beta}{\alpha + 2\beta}\right| < 1 \Longleftrightarrow |2\alpha + \beta| < |\alpha + 2\beta| \Longleftrightarrow (2\alpha + \beta)^2 < (\alpha + 2\beta)^2 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow 4\alpha^2 + 4\alpha\beta + \beta^2 < \alpha^2 + 4\alpha\beta + 4\beta^2 \Longleftrightarrow 3\alpha^2 < 3\beta^2$$
$$\Longleftrightarrow |\alpha| < |\beta| \Longleftrightarrow \left|\frac{\alpha}{\beta}\right| < 1 \ (2) \ (\text{ἐπειδή } |\beta| > 0).$$

Ὥστε: $(1) \Longleftrightarrow (2)$

Ἐπίσης ἔχουμε:

$$(3)\left|\frac{\alpha\beta+2\alpha^2}{\alpha\beta+2\beta^2}\right|<1 \Longleftrightarrow |\alpha\beta+2\alpha^2|<|\alpha\beta+2\beta^2| \Longleftrightarrow (\alpha\beta+2\alpha^2)^2<(\alpha\beta+2\beta^2)^2 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \alpha^2\beta^2+4\alpha^3\beta+4\alpha^4<\alpha^2\beta^2+4\alpha\beta^3+4\beta^4$$

$$\Longleftrightarrow \alpha\beta(\alpha^2-\beta^2)+(\alpha^2-\beta^2)(\alpha^2+\beta^2)<0 \Longleftrightarrow (\alpha^2-\beta^2)(\alpha\beta+\alpha^2+\beta^2)<0$$

$$\Longleftrightarrow \alpha^2-\beta^2<0 \text{ (ἐπειδή } \alpha^2+\beta^2+\alpha\beta=\frac{\alpha^2+\beta^2+(\alpha+\beta)^2}{2}>0, \text{ ἀφοῦ } \beta^2>0)$$

$$\Longleftrightarrow \alpha^2<\beta^2 \Longleftrightarrow |\alpha|<|\beta| \Longleftrightarrow \left|\frac{\alpha}{\beta}\right|<1 \qquad (2)$$

Ὥστε: $(3) \Longleftrightarrow (2)$ καί ἐπειδή $(2) \Longleftrightarrow (1)$ ἔχουμε: $(1) \Longleftrightarrow (2) \Longleftrightarrow (3)$.

ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάδα Α΄. 40. Ἄν $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ νά ἀποδείξετε τίς ἰσοδυναμίες:

1. $\big||\alpha|-|\beta|\big|=|\alpha-\beta| \Longleftrightarrow \alpha\beta \geqq 0$
2. $\alpha|\beta|-\beta|\alpha|=0 \Longleftrightarrow |\alpha+\beta| \geqq |\alpha-\beta|$.

41. Νά ἀποδείξετε ὅτι: ἄν $x \in \mathbf{R}$ καί $|x| \leqq 1$, τότε $|2x^3+5x^2-7| \leqq 14$.

42. Ἄν $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ καί $|\alpha|>1$, νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ ἰσότητα: $\beta=\dfrac{\alpha}{1-|\alpha|}$ συνεπάγεται τίς σχέσεις: $|\beta|>1$ καί $\alpha=\dfrac{\beta}{1-|\beta|}$.

43. Ἄν $\alpha\beta \neq 0$ καί $\alpha^2<16\beta^2$, νά ἀποδείξετε ὅτι: $\left|\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right|-\left|\dfrac{\beta}{\alpha}\right|\right|<\dfrac{15}{4}$.

44. Ἄν $x, y \in \mathbf{R}$ μέ $xy \neq 0$, νά ἀποδείξετε ὅτι ἰσχύει:

$$\frac{\sqrt{x^2y^2}}{xy}+\frac{\sqrt{(x-y)^2}}{x-y}\left[\frac{\sqrt{x^2}}{x}-\frac{\sqrt{y^2}}{y}\right]=1.$$

Ὑπόδειξη. Νά διακρίνετε τίς περιπτώσεις: **i)** x καί y ὁμόσημοι, **ii)** x καί y ἑτερόσημοι.

45. Ἡ συνάρτηση $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, ὅπου $\mathbf{R}$ τό σύνολο τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, ὁρίζεται γιά κάθε x ἀπό τόν τύπο: $f(x)=|x+1|\cdot|x-2|$.

α) Νά γράψετε τόν τύπο της σέ ὅλες τίς δυνατές μορφές (χωρίς τό σύμβολο τῆς ἀπόλυτης τιμῆς), πού καθορίζονται ἀπό τή θέση τοῦ ἀριθμοῦ x ὡς πρός τούς: $-1, 2$.

β) Νά ἐξετάσετε πῶς μεταβάλλεται ἡ f γιά τίς διάφορες πραγμ. τιμές τοῦ x.

γ) Νά παραστήσετε γραφικά τήν f, παίρνοντας ἕνα ὀρθοκανονικό σύστημα ἀξόνων xOy.

Ὑπόδειξη. Ὑπενθυμίζουμε πρῶτα-πρῶτα ὅτι ἕνα σύστημα ἀξόνων λέγεται **ὀρθοκανονικό**, ἄν εἶναι ὀρθογώνιο καί οἱ μονάδες, πού ἔχουν ὁρισθεῖ πάνω στούς ἄξονες, ἔχουν ἴσα μήκη.

Γιά νά παραστήσουμε τώρα γραφικά μία συνάρτηση τῆς μορφῆς $y=|\varphi(x)|$, ἀρκεῖ νά χαράξουμε τή γραφική παράσταση τῆς $y=\varphi(x)$ καί κατόπιν τά μέρη τῆς γραμμῆς (πού θά προκύψει), τά ὁποῖα βρίσκονται κάτω ἀπό τόν ἄξονα Ox, τά φέρουμε ἀπό πάνω, παίρνοντας τά συμμετρικά τους ὡς πρός τόν ἄξονα Ox.

46. Ἄν $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ νά ἀποδείξετε ὅτι:

$$2\beta(1+|\alpha|)=1+\alpha+|\alpha| \Longleftrightarrow \begin{cases}|2\beta-1|<1\\ \alpha(1-|2\beta-1|)=2\beta-1.\end{cases}$$

47. Ἄν $\alpha, \beta, x, y \in \mathbf{R}$ μέ $\alpha\beta \neq 0$ καί ἰσχύουν οἱ σχέσεις:

$$x=\alpha(|\alpha|+|\beta|) \quad \text{καί} \quad y=\beta(|\alpha|+|\beta|),$$

τότε θά ἰσχύουν καί οἱ σχέσεις:

$$\alpha=\frac{x}{\sqrt{|x|+|y|}}, \quad \beta=\frac{y}{\sqrt{|x|+|y|}}$$

καί ἀντιστρόφως, οἱ δύο τελευταῖες σχέσεις συνεπάγονται τίς δύο πρῶτες.

★ **Ὁμάδα Β΄. 48.** Ἄν $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ μέ $\alpha^2 \neq \beta^2$, νά ἀποδείξετε ὅτι:

$$\frac{|\alpha|-|\beta|}{\big||\alpha|-|\beta|\big|}+\frac{\big||\alpha|-|\beta|\big|}{|\alpha-\beta|}+\frac{|\alpha+\beta|}{|\alpha|+|\beta|} \leqq 3 .$$

49. Ἄν $x, y \in \mathbf{R}$ μέ $2x+y+4=0$, νά ἀποδείξετε ὅτι: $|x|+|y| \geqq 2$.

50. Νά προσδιορίσετε τούς θετικούς ἀριθμούς θ καί ε, ὥστε νά ἰσχύει:

$$\theta \leqq \left|\frac{x+2}{x-5}\right| \leqq \varepsilon$$

γιά ὅλα τά x πού ἱκανοποιοῦν τήν ἀνισότητα: $|x-2| \leqq 1$.

51. Ἄν $\eta>1$ καί $|\xi| \geqq 2\eta$, νά ἀποδείξετε ὅτι οἱ ρίζες x_1 καί x_2 τῆς ἐξισώσεως : $x^2+\xi x+\eta=0$ ἱκανοποιοῦν τή σχέση: $\dfrac{1}{|x_1|}+\dfrac{1}{|x_2|} \geqq 2$.

52. Ἄν $x, y \in \mathbf{R}$ μέ $x(3x+2y) \neq 0$, νά ἀποδείξετε ὅτι καθεμιά ἀπό τίς ἑπόμενες σχέσεις:

$$\left|\frac{2x+3y}{3x+2y}\right|<1, \quad \left|\frac{y}{x}\right|<1, \quad \left|\frac{2xy+3y^2}{3x^2+2xy}\right|<1$$

συνεπάγεται τίς ἄλλες δύο.

53. Ἄν $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, νά ἀποδείξετε ὅτι:

$$\frac{|\alpha+\beta|}{1+|\alpha+\beta|} \leqq \frac{|\alpha|}{1+|\alpha|}+\frac{|\beta|}{1+|\beta|}.$$

Πότε ἡ σχέση αὐτή ἰσχύει μέ τό ἴσον;

54. Δίνεται ἡ ἐξίσωση: $x^2-2\alpha x+\beta=0$ μέ $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ καί ρίζες ρ_1, ρ_2. Ἄν $|\rho_2| \leqq |\rho_1|$ νά ἀποδείξετε ὅτι: $\quad |\alpha|+\sqrt{\alpha^2+|\beta|} \leqq (1+\sqrt{2})\,|\rho_1|$.

55. Νά βρεῖτε τά ζεύγη τῶν ἀκεραίων x, y πού ἐπαληθεύουν τίς σχέσεις:

$$y-|x^2-2x|+\frac{1}{2}>0 \quad \text{καί} \quad y+|x-1|<2.$$

56. Νά βρεῖτε τά διαστήματα μεταβολῆς τοῦ x καί τίς ἀντίστοιχες τιμές τοῦ λ, γιά νά εἶναι ἀνεξάρτητη ἀπό τό x ἡ παράσταση:

$$y=|\lambda^2 x+1|+|2\lambda x+3|.$$

57. Ἔστω ὅτι οἱ συντελεστές τοῦ τριωνύμου: $x^2-2\alpha x+\beta$ εἶναι ἀριθμοί πραγματικοί μέ $\beta \neq 0$ καί $|\rho_1| \neq |\rho_2|$, ὅπου ρ_1, ρ_2 εἶναι οἱ ρίζες του. Ὀνομάζουμε:

$$M \equiv \max\left(\left|\frac{\rho_1}{\rho_2}\right|, \left|\frac{\rho_2}{\rho_1}\right|\right), \qquad m \equiv \min\left(\left|\frac{\rho_1}{\rho_2}\right|, \left|\frac{\rho_2}{\rho_1}\right|\right) \quad \text{καί} \quad \lambda=2\left|\frac{2\alpha^2-\beta}{\beta}\right|.$$

Νά ἀποδείξετε ὅτι:

α) Οἱ ρίζες τοῦ τριωνύμου εἶναι ἀριθμοί πραγματικοί καί ἄνισοι.

β) Ἰσχύουν οἱ σχέσεις: **1)** $\lambda-1<M<\lambda$, **2)** $\lambda>2$, **3)** $\dfrac{1}{\lambda}<m<\dfrac{1}{\lambda-1}$.

58. Ἄν οἱ ρίζες τῆς ἐξισώσεως: $x^2+\xi x+\eta=0$ εἶναι πραγματικές καί οἱ συντελεστές ξ καί η ἱκανοποιοῦν τή σχέση: $\xi^2-2\eta^2<\xi|\eta|$, νά ἀποδείξετε ὅτι οἱ ρίζες ρ_1, ρ_2 τῆς ἐξισώσεως: $\eta x^2+\xi x+1=0$ ἐπαληθεύουν τήν: $|\rho_1|-|\rho_2|<2$.

★ **§ 30. Ἀπόλυτη τιμή ἢ μέτρο μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ.**—Ἡ ἔννοια τῆς ἀπόλυτης τιμῆς μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ μᾶς εἶναι ἐπίσης γνωστή ἀπό τήν προηγούμενη τάξη. Ἐκεῖ μάθαμε ὅτι: *ὀνομάζεται* **ἀπόλυτη τιμή** *ἢ* **μέτρο** *ἑνός μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ* $z = \alpha + \beta i$, ($\alpha, \beta \in \mathbf{R}$) καί συμβολίζεται μέ $|z| = |\alpha+\beta i|$, *ὁ μή ἀρνητικός (πραγματικός) ἀριθμός:* $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$.

Ὥστε:
$$\boxed{|\mathbf{z}| = |\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\mathbf{i}| \underset{\text{ορσ}}{=} \sqrt{\boldsymbol{\alpha}^2+\boldsymbol{\beta}^2}} \qquad (1)$$

Ὁρίζεται ἔτσι μία ἀπεικόνιση $|\ |: \mathbf{C} \to R_0^+ : z \to |z| \underset{\text{ορσ}}{=} \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$.

Παραδείγματα:

$|3+4i| = \sqrt{9+16} = 5, \qquad |1-i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}, \qquad |1+i\sqrt{3}| = \sqrt{1+3} = 2.$

Ἄμεσες συνέπειες τοῦ πιό πάνω ὁρισμοῦ, πού τίς ξέρουμε καί ἀπό τήν προηγούμενη τάξη, εἶναι:

1. $|z| \geqq 0 \ \forall z \in \mathbf{C}$ καί $|z| = 0 \Longleftrightarrow z = 0$, **2.** $|\bar{z}| = |z| = |-z| = |-\bar{z}|$.

Παρατηροῦμε ὅτι: ἄν $z \in \mathbf{R}$, ὁπότε $\beta = 0$, τότε: $|z| = |\alpha + 0i| = \sqrt{\alpha^2+0^2} = |\alpha|$. Δηλαδή, ἄν $z \in \mathbf{R}$, τότε ὁ παραπάνω ὁρισμός τῆς ἀπόλυτης τιμῆς μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ περιέχει ὡς εἰδική περίπτωση τόν ὁρισμό τῆς ἀπόλυτης τιμῆς πραγματικοῦ ἀριθμοῦ πού δώσαμε στήν ἀρχή αὐτοῦ τοῦ Κεφαλαίου.

Ἐξάλλου, ἄν $z = \alpha+\beta i$, τότε $\bar{z} = \alpha - \beta i$ καί συνεπῶς $z\bar{z} = \alpha^2+\beta^2$. Αὐτό μᾶς ἐπιτρέπει συχνά στά ἑπόμενα νά γράφουμε:

$$\boxed{|\mathbf{z}| = \sqrt{\mathbf{z}\cdot\bar{\mathbf{z}}} \iff |\mathbf{z}|^2 = \mathbf{z}\bar{\mathbf{z}}} \qquad (2)$$

Ἔστω τώρα ὁ μιγαδικός ἀριθμός $z = x+iy$ ($x, y \in \mathbf{R}$). Ὁ πραγμ. ἀριθμός x λέγεται, ὅπως ξέρουμε, **τό πραγματικό μέρος** τοῦ z καί συμβολίζεται μέ: $\mathrm{Re}(z)$ καί ὁ ἀριθμός y λέγεται **τό φανταστικό μέρος** τοῦ z καί συμβολίζεται μέ: $\mathrm{Im}(z)$ *. Ἡ εἰσαγωγή τῆς ἔννοιας τοῦ συζυγοῦς μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ z μᾶς ἐπιτρέπει νά ἐκφράσουμε τό $\mathrm{Re}(z)$ καί $\mathrm{Im}(z)$ μέ τούς τύπους:

$$\boxed{\mathbf{x} = \mathbf{Re(z)} = \frac{\mathbf{z}+\bar{\mathbf{z}}}{\mathbf{2}}} \quad \text{καί} \quad \boxed{\mathbf{y} = \mathbf{Im(z)} = \frac{\mathbf{z}-\bar{\mathbf{z}}}{\mathbf{2i}}} \qquad (3)$$

Εὔκολα τώρα ἀπό τούς προηγούμενους τύπους ἔχουμε:

1. $z = \bar{z} \Longleftrightarrow z \in \mathbf{R}$, **2.** $z + \bar{z} = 0 \Longleftrightarrow$ (z φανταστικός ἀριθμός).

Ἐφόσον $|z|^2 = |\mathrm{Re}(z)|^2 + |\mathrm{Im}(z)|^2 \Longrightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}(z) \leqq |\mathrm{Re}(z)| \leqq |z| \\ \mathrm{Im}(z) \leqq |\mathrm{Im}(z)| \leqq |z| \end{cases} \qquad (4)$

---

* Ὁ συμβολισμός αὐτός προέρχεται ἀπό συντομογραφία τῶν λέξεων Réel = πραγματικός καί Imaginaire = φανταστικός. Μέ τό πρῶτο γράμμα τῆς λέξεως imaginaire παριστάνουμε τό σύμβολο: $\sqrt{-1}$ (= i).

Οἱ ἰδιότητες πού ἀναφέραμε στίς παραγράφους 22 καί 25 αὐτοῦ τοῦ κεφαλαίου δέν διατυπώνονται γιά μιγαδικούς ἀριθμούς, ἐπειδή καμία σχέση διατάξεως δέν ἔχει ὁρισθεῖ στό σύνολο **C** τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν.

Ἐπίσης ἡ ἰδιότητα II τῆς § 23 δέν ἰσχύει ἄν $z \notin \mathbf{R}$. Ἀκριβέστερα ἔχουμε:

$|z|^2 = z^2 \iff z \in \mathbf{R}$ καί συνεπῶς $|z|^2 \neq z^2 \iff z \in \mathbf{C}$ μέ $\text{Im}(z) \neq 0$.

Πράγματι: $|z|^2 = z^2 \iff z \cdot \bar{z} = z^2 \iff z(\bar{z} - z) = 0 \iff z = 0 \lor \bar{z} = z \iff z \in \mathbf{R}$.

Ἀντίθετα ἡ ἀπόλυτη τιμή μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ ἔχει ἰδιότητες τελείως ἀνάλογες μέ ἐκεῖνες τῆς ἀπόλυτης τιμῆς πραγματικοῦ ἀριθμοῦ πού ἀποδείξαμε στίς παραγράφους 26 ἕως 29.

Διατυπώνουμε παρακάτω τίς σπουδαιότερες ἀπ' αὐτές τίς ἰδιότητες:

*** § 31. Ἄν $z_1, z_2, \ldots, z_\nu$ εἶναι μιγαδικοί ἀριθμοί, τότε ἰσχύουν οἱ ἑπόμενες σχέσεις:**

1. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$, **2.** $|z_1 \cdot z_2 \cdots z_\nu| = |z_1| \cdot |z_2| \cdots |z_\nu|$,

3. $|z^\nu| = |z|^\nu \ \forall \nu \in \mathbf{N}$, **4.** $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$ μέ $z_2 \neq 0$,

5. $|z_1 + z_2| \leqq |z_1| + |z_2|$, **6.** $\left|\sum\limits_{k=1}^{\nu} z_k\right| \leqq \sum\limits_{k=1}^{\nu} |z_k|$,

7. $\big||z_1| - |z_2|\big| \leqq |z_1 \pm z_2| \leqq |z_1| + |z_2|$.

Ἀπόδειξη. 1) Ἔχουμε: $|z_1 \cdot z_2|^2 = (z_1 z_2) \cdot (\overline{z_1 z_2}) = (z_1 z_2)(\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2) =$
$= (z_1 \bar{z}_1)(z_2 \bar{z}_2) = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2 \Longrightarrow |z_1 \cdot z_2|^2 = (|z_1| \cdot |z_2|)^2 \Longrightarrow |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

2) Ἡ ἀπόδειξη εἶναι εὔκολη μέ τή μέθοδο τῆς Μαθηματικῆς ἐπαγωγῆς.

3) Γιά $z_1 = z_2 = \cdots = z_\nu = z$ ἡ 2) δίνει: $|z^\nu| = |z|^\nu \ \forall \ \nu \in \mathbf{N}$.

4) Μέ $z_2 \neq 0$ ἔχουμε: $z_1 = \dfrac{z_1}{z_2} \cdot z_2 \Longrightarrow |z_1| = \left|\dfrac{z_1}{z_2} \cdot z_2\right| = \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| \cdot |z_2| \Longrightarrow \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$.

5) Ἔχουμε:
$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) \\ &= z_1 \bar{z}_1 + z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 + \bar{z}_2 z_2 \\ &= |z_1|^2 + 2\text{Re}(z_1 \bar{z}_2) + |z_2|^2 \quad [\text{ἀπό τήν (3) τῆς § 30}] \\ &\leqq |z_1|^2 + 2|z_1 \bar{z}_2| + |z_2|^2 \quad [\text{ἀπό τήν (4) τῆς § 30}] \\ &= |z_1|^2 + 2|z_1| \cdot |z_2| + |z_2|^2 \\ &= (|z_1| + |z_2|)^2. \end{aligned}$$

Ἄρα: $|z_1 + z_2| \leqq |z_1| + |z_2|$.

6) Ἡ ἀπόδειξη εἶναι εὔκολη μέ τή μέθοδο τῆς Μαθηματικῆς ἐπαγωγῆς.

7) Θά δείξουμε πρῶτα ὅτι ἰσχύει: $\big||z_1| - |z_2|\big| \leqq |z_1 - z_2|$.

Πράγματι, ἔχουμε: $|z_1-z_2|^2=(z_1-z_2)(\overline{z_1-z_2})=(z_1-z_2)(\bar{z}_1-\bar{z}_2)$

$$=z\bar{z}_1-(z_1\bar{z}_2+z_2\bar{z}_1)+z_2\bar{z}_2$$

$$=|z_1|^2-2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)+|z_2|^2$$

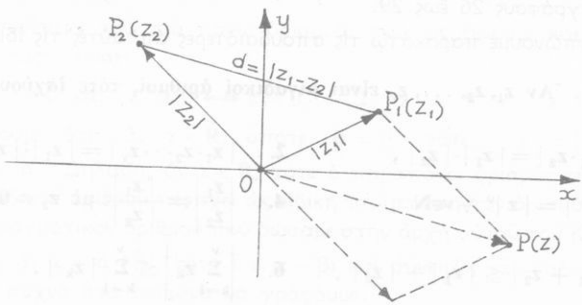
$$\geqq |z_1|^2-2|z_1 z_2|+|z_2|^2=(|z_1|-|z_2|)^2.$$

Ἄρα: $\quad |z_1-z_2|\geqq \big|\,|z_1|-|z_2|\,\big|.$

Τότε: $\quad |z_1+z_2|=|z_1-(-z_2)|\geqq \big|\,|z_1|-|-z_2|\,\big|=\big|\,|z_1|-|z_2|\,\big|$

Ἐξάλλου: $\quad |z_1-z_2|=|z_1+(-z_2)|\leqq |z_1|+|-z_2|=|z_1|+|z_2|.$

Ἀξιοσημείωτη παρατήρηση. Ἄς θεωρήσουμε δύο μιγαδικούς ἀριθμούς



Σχ. 2

z_1, z_2 μέ ἀντίστοιχες εἰκόνες P_1, P_2 στό μιγαδικό ἐπίπεδο (βλ. σχ. 2). Τότε ἡ εἰκόνα τοῦ $z=z_1-z_2=z_1+(-z_2)$ εἶναι τό πέρας (ἄκρο) P τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{OP}$. Ἀπό τό παραλληλόγραμμο OPP_1P_2 τοῦ σχήματος ἔχουμε:

$$|\overrightarrow{P_1P_2}|=|\overrightarrow{OP}|=|z_1-z_2|.$$

Δηλαδή: *ἡ ἀπόλυτη τιμή τῆς διαφορᾶς δύο μιγαδικῶν ἀριθμῶν ἐκφράζει γεωμετρικά* **τήν ἀπόσταση d** *τῶν εἰκόνων τῶν δύο ἀριθμῶν.* Ὥστε:

$$\boxed{\mathbf{d(P_1,\,P_2)\equiv d(z_1,\,z_2)=|\,z_1-z_2\,|}}$$

Ἐπειδή $|z|=|z-0|$, ἕπεται ὅτι ἡ $|z|$ ἐκφράζει τήν ἀπόσταση τοῦ σημείου P ἀπό τήν ἀρχή O τῶν ἀξόνων. Δηλαδή:

$$|z|=|z-0|=d(z,0)\equiv d(P,O)=|\overrightarrow{OP}|.$$

Ἔχοντας τώρα ὑπόψη τήν παραπάνω παρατήρηση, ἀντιλαμβανόμαστε ὅτι ἡ σχέση:

$$\big|\,|z_1|-|z_2|\,\big|<|z_1-z_2|<|z_1|+|z_2|$$

ἐκφράζει τή γνωστή ἀπό τή γεωμετρία πρόταση: *Κάθε πλευρά τριγώνου* *εἶναι μικρότερη ἀπό τό ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων καί μεγαλύτερη ἀπό τή διαφορά τους* (βλ. σχ. 2).

Ἄν τά z_1, z_2 εἶναι πραγματικοί ἀριθμοί, τότε οἱ ἀντίστοιχες εἰκόνες τους εἶναι σημεῖα τοῦ ἄξονα τῶν x, ὁπότε ἡ $|z_1 - z_2|$ παριστάνει **τήν ἀπόσταση τοῦ πραγματικοῦ ἀριθμοῦ z_1 ἀπό τόν πραγματικό ἀριθμό z_2.** Εἶναι φανερό ὅμως ὅτι $d(z_1, z_2) = d(z_2, z_1)$, γι' αὐτό ἡ $d(z_1, z_2) \underset{\text{ορσ}}{=} |z_1 - z_2|$ λέγεται καί **ἀπόσταση τῶν z_1, z_2.**

Σημείωση. Σύμφωνα μέ τόν προηγούμενο ὁρισμό τῆς ἀποστάσεως δύο μιγαδικῶν ἀριθμῶν, ἄν $z_0 \in \mathbf{C}$ καί $\rho \in \mathbf{R}$ μέ $\rho > 0$, τό σημειοσύνολο: $\{z \in \mathbf{C}: |z - z_0| = \rho\}$ ἀποτελεῖται ἀπό τά σημεῖα P(z) πού ἔχουν τή χαρακτηριστική ἰδιότητα: *ἀπέχουν ἀπό τό σταθερό σημεῖο $K(z_0)$ σταθερή ἀπόσταση ἴση μέ ρ.* Τά σημεῖα ὅμως αὐτά, ὅπως ξέρουμε, βρίσκονται πάνω στόν κύκλο πού ἔχει κέντρο τό $K(z_0)$ καί ἀκτίνα ρ. Στήν εἰδική περίπτωση πού ὁ κύκλος ἔχει κέντρο τήν ἀρχή Ο καί ἀκτίνα $\rho = 1$, δηλαδή τό σημειοσύνολο: $\{z \in \mathbf{C}: |z| = 1\}$, λέγεται **μοναδιαῖος κύκλος.** Εἶναι φανερό τώρα ὅτι τό σημειοσύνολο: $\{z \in \mathbf{C}: |z - z_0| < \rho, \rho > 0\}$, παριστάνει τό *«ἐσωτερικό»* τοῦ κύκλου $\{z \in \mathbf{C}: |z - z_0| = \rho, \rho > 0\}$.

Σχόλιο. Ἀξίζει ἐδῶ νά τονίσουμε τή διαφορά πού ὑπάρχει στή σχέση $|z| = \rho$, ἄν $z \in \mathbf{R}$ καί $|z| = \rho$, ἄν $z \in \mathbf{C}$. Ἔτσι στήν πρώτη περίπτωση ἔχουμε: $\{z \in \mathbf{R}: |z| = \rho, \rho > 0\} = \{\rho, -\rho\}$, ἐνῶ στή δεύτερη περίπτωση τό σημειοσύνολο $\{z \in \mathbf{C}: |z| = \rho, \rho > 0\}$ **δέν** εἶναι διμελές, ἀλλά **ἀπειροσύνολο**, ἀκριβέστερα *ἀποτελεῖται ἀπό ὅλους ἐκείνους τούς μιγαδικούς ἀριθμούς, πού οἱ εἰκόνες τους βρίσκονται πάνω στόν κύκλο πού ἔχει κέντρο τήν ἀρχή Ο καί ἀκτίνα ρ.* Συνεπῶς ἡ γνωστή ἰδιότητα πού ἰσχύει γιά πραγματικούς ἀριθμούς, σύμφωνα μέ τήν ὁποία: $|\alpha| = |\beta| \Longrightarrow \alpha = \beta$ εἴτε $\alpha = -\beta$, δέν ἰσχύει ἄν $\alpha \in \mathbf{C}$ εἴτε $\beta \in \mathbf{C}$, ὅπως φαίνεται ἐξάλλου καί ἀπό τό παράδειγμα πού δίνουμε ἀμέσως παρακάτω.

Παράδειγμα: Οἱ ἀριθμοί: $4 + 3i$, $4 - 3i$, $3 + 4i$, $3 - 4i$, -5 ἔχουν ὅλοι τήν ἴδια ἀπόλυτη τιμή, 5, καί ὅμως ἄν ληφθοῦν ἀνά δύο, δέν εἶναι οὔτε ἴσοι οὔτε ἀντίθετοι μεταξύ τους.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1η: Νά ἀποδείξετε ὅτι γιά κάθε $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$ ἰσχύουν οἱ ἰσότητες:

α) $|z_1 \pm z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 \pm 2\mathrm{Re}(z_1 \cdot \bar{z}_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2 \pm 2\mathrm{Re}(\bar{z}_1 \cdot z_2)$.

β) $|z_1 - z_2|^2 + |z_1 + z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$.

Ἀπόδειξη:

α) Ἔχουμε: $|z_1 \pm z_2|^2 = (z_1 \pm z_2)(\bar{z}_1 \pm \bar{z}_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2 \pm (z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2) =$

$= |z_1|^2 + |z_2|^2 \pm (z_1\bar{z}_2 + \overline{z_1\bar{z}_2}) =$

$= |z_1|^2 + |z_2|^2 \pm 2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)$ (καί ἐπειδή $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(\bar{z}) = x$)

$= |z_1|^2 + |z_2|^2 \pm 2\mathrm{Re}(\bar{z}_1 z_2)$, γιατί $\bar{z}_1 z_2 = \overline{z_1\bar{z}_2}$.

β) Ἔχουμε: $|z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)$

καί $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)$

Ὁπότε: $|z_1 - z_2|^2 + |z_1 + z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$.

Ἄσκηση: Ποιό γεωμετρικό θεώρημα ἐκφράζει ἡ τελευταία σχέση;

2η: Ἄν $z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C}$ μέ $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ καί $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, νά ἀποδείξετε ὅτι τά σημεῖα $P_1(z_1)$, $P_2(z_2)$, $P_3(z_3)$ εἶναι κορυφές ἰσόπλευρου τριγώνου ἐγγεγραμμένου στό μοναδιαῖο κύκλο.

Ἀπόδειξη. Ἔστω $z_k = \overrightarrow{OP_k}$, $k = 1, 2, 3$. Ἀφοῦ $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ ἔπεται $|\overrightarrow{OP_1}| = |\overrightarrow{OP_2}| = |\overrightarrow{OP_3}| = 1$, δηλ. τά σημεῖα $P_1(z_1)$, $P_2(z_2)$, $P_3(z_3)$ βρίσκονται πάνω στόν κύκλο πού ἔχει κέντρο τό Ο καί ἀκτίνα 1 (βλ. σχ. 3). Στό τρίγωνο $P_1P_2P_3$ ἔχουμε: $\overrightarrow{P_1P_2} = z_2 - z_1$,

$\overrightarrow{P_2P_3} = z_3 - z_2$, $\overrightarrow{P_3P_1} = z_1 - z_3$. Θά ἀποδείξουμε τώρα ὅτι: $|z_2 - z_1| = |z_3 - z_2| = |z_1 - z_3|$.

Ἄς ἐπαληθεύσουμε πρῶτα τήν:

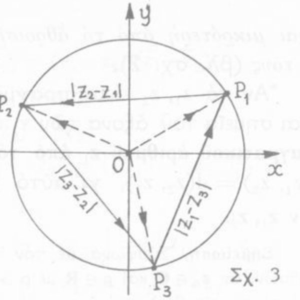
$$|z_2 - z_1| = |z_1 - z_3|.$$

Πράγματι, ἀπό τήν $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ ἕπεται $z_1 = -(z_2 + z_3)$, ὁπότε ἡ $|z_2 - z_1| = |z_1 - z_3|$ εἶναι ἰσοδύναμη μέ τήν: $|2z_2 + z_3| = |2z_3 + z_2|$

$\iff (2z_2 + z_3)(2\bar{z}_2 + \bar{z}_3) = (2z_3 + z_2)(2\bar{z}_3 + \bar{z}_2)$

$\iff z_2\bar{z}_2 = z_3\bar{z}_3 \iff |z_2|^2 = |z_3|^2 \iff |z_2| = |z_3|$.

Τό τελευταῖο ὅμως ἰσχύει, ἐπειδή $|z_2| = |z_3| = 1$.



Σχ. 3

Ἐργαζόμενοι μέ τόν ἴδιο τρόπο, ἀποδεικνύουμε ὅτι: $|z_2 - z_1| = |z_3 - z_2|$.

Ἄρα τό τρίγωνο $P_1P_2P_3$ εἶναι ἰσόπλευρο.

Ἀνακεφαλαίωση. Οἱ ὁρισμοί καί οἱ κυριότερες ἰδιότητες τῆς ἀπόλυτης τιμῆς πραγματικῶν καί μιγαδικῶν ἀριθμῶν πού ἀπορρέουν ἀπό τίς προηγούμενες παραγράφους συνοψίζονται στόν ἑπόμενο πίνακα:

ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜ.	ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ
α) Ὁρισμός:	**α′) Ὁρισμός:**
$\lvert x\rvert \underset{ορσ}{=} \begin{cases} x, & ἄν\ x \geqq 0 \\ -x, & ἄν\ x \leqq 0. \end{cases}$	$\lvert z\rvert = \lvert α + βi\rvert \underset{ορσ}{=} \sqrt{α^2 + β^2}$
Ὁρίζεται ἔτσι ἡ ἀκόλουθη ἀπεικόνιση:	Ὁρίζεται ἔτσι ἡ ἀκόλουθη ἀπεικόνιση:
$\lvert\ \rvert: \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}_0^+ : x \longrightarrow \lvert x\rvert \in R_0^+$	$\lvert\ \rvert: \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{R}_0^+ : z \longrightarrow \lvert z\rvert = \sqrt{α^2 + β^2}$.
β) Ἰδιότητες:	**β′) Ἰδιότητες:**
1. $\lvert x\rvert \geqq 0$ καί $\lvert x\rvert = 0 \iff x = 0$	1′. $\lvert z\rvert \geqq 0$ καί $\lvert z\rvert = 0 \iff z = 0$
2. $\lvert -x\rvert = \lvert x\rvert$	2′. $\lvert -z\rvert = \lvert z\rvert = \lvert \bar{z}\rvert = \lvert -\bar{z}\rvert$
3. $\lvert x\rvert = \lvert y\rvert \iff x = y \vee x = -y$	3′. **Προσέξτε!** ΔΕΝ ἰσχύει ἀνάλ. ἰδ. στό **C**
4. $-\lvert x\rvert \leqq x \leqq \lvert x\rvert$	4′. » » » » »
5. $\lvert x\rvert \leqq ε \iff -ε \leqq x \leqq ε \iff x^2 \leqq ε^2$	5′. » » » » »
6. $\lvert x\rvert^2 = x^2$	6′. **Προσέξτε!** $\lvert z\rvert^2 = z \cdot \bar{z}$
7. $\lvert x\rvert = \sqrt{x^2}$	7′. $\lvert z\rvert = \sqrt{α^2 + β^2} = \sqrt{z\bar{z}}$
8. $\big\lvert \lvert x\rvert - \lvert y\rvert \big\rvert \leqq \lvert x \pm y\rvert \leqq \lvert x\rvert + \lvert y\rvert$	8′. $\big\lvert \lvert z_1\rvert - \lvert z_2\rvert \big\rvert \leqq \lvert z_1 \pm z_2\rvert \leqq \lvert z_1\rvert + \lvert z_2\rvert$
9. $\lvert x_1 + x_2 + \cdots + x_ν\rvert \leqq \lvert x_1\rvert + \cdots + \lvert x_ν\rvert$	9′. $\lvert z_1 + z_2 + \cdots + z_ν\rvert \leqq \lvert z_1\rvert + \cdots + \lvert z_ν\rvert$
10. $\lvert x \cdot y\rvert = \lvert x\rvert \cdot \lvert y\rvert$	10′. $\lvert z_1 \cdot z_2\rvert = \lvert z_1\rvert \cdot \lvert z_2\rvert$
11. $\lvert x_1 \cdot x_2 \cdots x_ν\rvert = \lvert x_1\rvert \cdot \lvert x_2\rvert \cdots \lvert x_ν\rvert$	11′. $\lvert z_1 \cdot z_2 \cdots z_ν\rvert = \lvert z_1\rvert \cdot \lvert z_2\rvert \cdots \lvert z_ν\rvert$
12. $\left\lvert \dfrac{x}{y} \right\rvert = \dfrac{\lvert x\rvert}{\lvert y\rvert}$ μέ $y \neq 0$	12′. $\left\lvert \dfrac{z_1}{z_2} \right\rvert = \dfrac{\lvert z_1\rvert}{\lvert z_2\rvert}$ μέ $z_2 \neq 0$
13. $\lvert x^k\rvert = \lvert x\rvert^k$ μέ $x \neq 0$ καί $k \in \mathbf{Z}$	13′. $\lvert z^k\rvert = \lvert z\rvert^k$ μέ $z \neq 0$ καί $k \in \mathbf{Z}$
14. $\lvert x \pm y\rvert^2 = x^2 + y^2 \pm 2xy$	14′. $\lvert z_1 \pm z_2\rvert^2 = \lvert z_1\rvert^2 + \lvert z_2\rvert^2 \pm 2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)$
γ) Ἀπόσταση τῶν x, y:	**γ′) Ἀπόσταση τῶν z_1, z_2:**
$d(x, y) \underset{ορσ}{=} \lvert x - y\rvert$	$d(z_1, z_2) \underset{ορσ}{=} \lvert z_1 - z_2\rvert$
Ὁρίζεται ἔτσι ἡ ἀκόλουθη ἀπεικόνιση:	Ὁρίζεται ἔτσι ἡ ἀκόλουθη ἀπεικόνιση:
$d: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}_0^+ : (x, y) \to d(x, y) = \lvert x - y\rvert$.	$d: \mathbf{C}^2 \to \mathbf{R}_0^+ : (z_1, z_2) \to d(z_1, z_2) = \lvert z_1 - z_2\rvert$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάδα Α΄. 59. Νά βρεῖτε τά: $\bar{z}$, $\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(z)$ καί $|z|$ ἄν:

α) $z = 3 + 2i$, β) $z = -3i$, γ) $z = 2(1-i) + 3(2+i)$.

60. Τί παριστάνουν γεωμετρικά τά παρακάτω ὑποσύνολα τοῦ $\mathbf{C}$:

α) $\{z \in \mathbf{C}: |z - 1| \leqq 2\}$, β) $\{z \in \mathbf{C}: |z - z_0| > \rho$, μέ $\rho > 0$ καί $z_0 \in \mathbf{C}\}$.

61. Νά παραστήσετε γεωμετρικά τά σημεῖα τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου γιά τά ὁποῖα ἔχουμε:

α) $|z| < 1$ καί $|z - i| < 1$, β) $|z - 1| < 1$ καί $|z - i| > 1$.

62. Ἔστω μία ἀπεικόνιση $d: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ μέ τίς ἀκόλουθες τρεῖς ἰδιότητες:

$$d_1 : d(x, y) \geqq 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbf{R}^2 \text{ καί } d(x, y) = 0 \iff x = y$$
$$d_2 : d(x, y) = d(y, x) \quad \forall (x, y) \in \mathbf{R}^2$$
$$d_3 : d(x, y) \leqq d(x, z) + d(z, y) \quad \forall x, y, z \in \mathbf{R}.$$

1) Νά δώσετε ἕνα παράδειγμα μιᾶς τέτοιας ἀπεικονίσεως.

2) Θέτουμε: $d^*(x, y) \underset{\text{ορσ}}{=} \dfrac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$ γιά κάθε $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Ὁρίζεται τότε ἡ ἀπεικόνιση: $d^*: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$. Νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ d^* ἔχει ἐπίσης τίς ἰδιότητες d_1, d_2, d_3.

63. Νά ἀπεικονίσετε στό μιγαδικό ἐπίπεδο τά παρακάτω ὑποσύνολα τοῦ $\mathbf{C}$:

$$A = \{z \in \mathbf{C}: |z - i| = 1\}, \quad B = \{w \in \mathbf{C}: |w - 7| = 4\}$$

καί κατόπιν νά βρεῖτε τήν ἐλάχιστη καί τή μέγιστη ἀπόσταση τῶν ἀντίστοιχων σημειοσυνόλων

* **Ὁμάδα Β΄. 64.** Ἔστω ὅτι: $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$, $\alpha\gamma \neq 0$ καί $|\rho_1| \neq |\rho_2|$, ὅπου ρ_1, ρ_2 εἶναι οἱ ρίζες τῆς ἐξισώσεως: $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$. Θέτουμε $M = \max\left\{\left|\dfrac{\rho_1}{\rho_2}\right|, \left|\dfrac{\rho_2}{\rho_1}\right|\right\}$. Νά ἀποδείξετε ὅτι:

i) $2\left|1 - \dfrac{\beta^2}{2\alpha\gamma}\right| - 1 < M < 2\left|1 - \dfrac{\beta^2}{2\alpha\gamma}\right|$

ii) $1 < \left|1 - \dfrac{\beta^2}{2\alpha\gamma}\right|$

iii) Εἶναι δυνατό μέ τίς ὑποθέσεις πού κάναμε νά εἶναι $\beta = 0$;

65. Ἄν $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$ νά ἀποδείξετε ὅτι:

$$|z_1 - z_2|^2 \leqq (1 + |z_1|^2)(1 + |z_2|^2).$$

66. Ἄν $z_1, z_2, \ldots, z_\nu \in \mathbf{C}$ μέ $|z_1| = |z_2| = \ldots = |z_\nu| = 1$ νά ἀποδείξετε ὅτι:

$$|z_1 + z_2 + \cdots + z_\nu| = \left|\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \ldots + \frac{1}{z_\nu}\right|.$$

67. Νά ἀποδείξετε ὅτι γιά κάθε $z \in \mathbf{C}$ ἰσχύει: $|\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)| \leq \sqrt{2} \cdot |z|$.

68. Ἄν $z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C}$ νά ἀποδείξετε τίς συνεπαγωγές:

α) $(z_1 + z_2 + z_3 = 0 \wedge z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0) \Longrightarrow |z_1| = |z_2| = |z_3|$

β) $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1 \Longrightarrow |z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|$.

II. ΕΠΙΛΥΣΗ ΣΤΟ R ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΕΣ ΤΙΜΕΣ ΤΟΥ ΑΓΝΩΣΤΟΥ

Στίς ἑπόμενες παραγράφους θά ἐκθέσουμε σέ γενικές γραμμές τόν τρόπο μέ τόν ὁποῖο ἐπιλύονται, μέσα στό $\mathbf{R}$, μερικές ἁπλές μορφές ἐξισώσεων, στίς ὁποῖες ὁ ἄγνωστος ἐμφανίζεται μέσα στό σύμβολο τῆς ἀπόλυτης τιμῆς.

§ 32. Ἐπίλυση ἐξισώσεων τῆς μορφῆς: $\alpha|x|+\beta=0$ μέ $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ καί $\alpha \neq 0$.—Ἄν ὑπάρχει κάποια λύση, ἔστω $x \in \mathbf{R}$, τῆς $\alpha|x|+\beta=0$ (1), τότε γι' αὐτή θά ἰσχύει: ἤ $x \geqq 0$ ἤ $x<0$.

Εἰδικά γιά νά εἶναι τό μηδέν λύση τῆς (1) θά πρέπει: $\beta=0$. Ἐξάλλου παρατηροῦμε ὅτι: ἄν ὁ x_0 εἶναι λύση τῆς (1), τότε καί ὁ $-x_0$ εἶναι ἐπίσης λύση της, γιατί ἔχουμε: $\alpha|-x_0|+\beta=\alpha|x_0|+\beta=0$.

Ἔστω $x \in \mathbf{R}$ λύση τῆς (1), τότε ἔχουμε:

$$\alpha|x|+\beta=0 \Longleftrightarrow |x|=-\frac{\beta}{\alpha} \tag{2}$$

Διακρίνουμε τώρα δύο περιπτώσεις:

i) ἄν: $-\frac{\beta}{\alpha} \geqq 0 \Longleftrightarrow \alpha\beta \leqq 0$, τότε ἀπό τή (2) παίρνουμε: $x=\pm\frac{\beta}{\alpha}$.

ii) ἄν: $-\frac{\beta}{\alpha}<0 \Longleftrightarrow \alpha\beta>0$, τότε ἀπό τή (2) παίρνουμε: $|x|<0$, πράγμα ἀδύνατο, ἀφοῦ γιά κάθε $x \in \mathbf{R}$ ἔχουμε πάντοτε: $|x| \geqq 0$. Στήν περίπτωση αὐτή λοιπόν ἡ ἐξίσωση (1) δέν ἔχει λύση στό $\mathbf{R}$· εἶναι, ὅπως ἀλλιῶς λέμε, **ἀδύνατη.**

Συνοψίζουμε τώρα τά προηγούμενα συμπεράσματα στόν ἀκόλουθο πίνακα:

Πίνακας διερευνήσεως τῆς: $\alpha\|x\|+\beta=0$, $\alpha \neq 0$	
$\beta=0$	$\alpha\|x\|+\beta=0 \Rightarrow x=0$
$\alpha\beta<0$	$\alpha\|x\|+\beta=0 \Rightarrow x=\pm\frac{\beta}{\alpha}$
$\alpha\beta>0$	$\alpha\|x\|+\beta=0$ ἀδύνατη

Ἐφαρμογές. 1η: Νά ἐπιλυθεῖ στό R ἡ ἐξίσωση: $2|x|-3=0$.

Λύση. Ἔχουμε: $2|x|-3=0 \Longleftrightarrow 2|x|=3 \Longleftrightarrow |x|=\frac{3}{2} \Longleftrightarrow x=\pm\frac{3}{2}$.

2η: Νά ἐπιλυθεῖ στό R ἡ ἐξίσωση: $4|x|+7=0$.

Λύση. Ἔχουμε: $4|x|+7=0 \Longleftrightarrow 4|x|=-7 \Longleftrightarrow |x|=-\frac{7}{4}$. Ἀλλά $|x| \geqq 0$ γιά κάθε $x \in \mathbf{R}$, ἐνῶ $-\frac{7}{4}<0$. Ἡ ἐξίσωση λοιπόν $|x|=-\frac{7}{4}$, συνεπῶς καί ἡ ἀρχική $4|x|+7=0$, εἶναι ἀδύνατη, δέν ἔχει λύση στό $\mathbf{R}$.

§ 33. Ἐπίλυση ἐξισώσεων τῆς μορφῆς: $\alpha|x|+\beta x+\gamma=0$ μέ $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$ καί $\alpha \neq 0$.—Παρατηροῦμε, πρῶτα-πρῶτα, ὅτι: ἄν $\beta=0$, τότε ἔχουμε τή μορφή $\alpha|x|+\gamma=0$, πού μελετήσαμε στήν προηγούμενη παράγραφο.

Ἄν λοιπόν ὑπάρχει κάποια λύση, ἔστω $x \in \mathbf{R}$, τῆς $\alpha|x| + \beta x + \gamma = 0$ (ε) τότε γι' αὐτή θά ἰσχύει: ἤ $x \geqq 0$ ἤ $x < 0$.

Εἰδικά γιά νά εἶναι τό μηδέν λύση τῆς (ε), θά πρέπει: $\gamma = 0$.

Γιά τήν ἐπίλυση ἑπομένως τῆς (ε) διακρίνουμε τίς ἑξῆς περιπτώσεις:

A) Ἀναζητοῦμε τίς μή ἀρνητικές λύσεις τῆς (ε), δηλαδή $x \geqq 0$.

Σ' αὐτή τήν περίπτωση ἔχουμε τότε νά ἐπιλύσουμε τό σύστημα:

$$(\Sigma_1): \quad \left.\begin{array}{r} \alpha|x| + \beta x + \gamma = 0 \\ x \geqq 0 \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{r} (\alpha+\beta)x = -\gamma \\ x \geqq 0 \end{array}\right\}$$

α_1) Ἄν $\boldsymbol{\alpha + \beta \neq 0}$, τότε ἀπό τήν ἐξίσωση τοῦ συστήματος ἔχουμε: $x = -\dfrac{\gamma}{\alpha+\beta}$ (1). Ἡ λύση αὐτή θά εἶναι λύση τοῦ συστήματος, *ἑπομένως καί τῆς (ε)*, ἄν:

$$-\frac{\gamma}{\alpha+\beta} \geqq 0 \iff \frac{\gamma}{\alpha+\beta} \leqq 0 \iff \gamma(\alpha+\beta) \leqq 0,$$

ἐνῶ ἄν:
$$-\frac{\gamma}{\alpha+\beta} < 0 \iff \frac{\gamma}{\alpha+\beta} > 0 \iff \gamma(\alpha+\beta) > 0$$

ἡ (1) δέν εἶναι δεκτή γιά τήν (ε), δηλαδή ἡ (ε) δέν ἔχει λύση στό $\mathbf{R}_0^+$.

α_2) Ἄν $\boldsymbol{\alpha + \beta = 0}$, τότε ἔχουμε: $0x = -\gamma$ καί ἑπομένως:

ἄν $\gamma \neq 0$, ἡ ἐξίσωση (ε) εἶναι ἀδύνατη στό $\mathbf{R}_0^+$, ἐνῶ

ἄν $\gamma = 0$, ἡ ἐξίσωση (ε) εἶναι ἀόριστη (ταυτότητα) στό $\mathbf{R}_0^+$.

B) Ἀναζητοῦμε τίς ἀρνητικές λύσεις τῆς (ε), δηλαδή $x < 0$.

Τότε ἔχουμε νά ἐπιλύσουμε τό σύστημα:

$$(\Sigma_2): \quad \left.\begin{array}{r} \alpha|x| + \beta x + \gamma = 0 \\ x < 0 \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{r} -\alpha x + \beta x = -\gamma \\ x < 0 \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{r} (\alpha-\beta)x = \gamma \\ x < 0 \end{array}\right\}$$

β_1) Ἄν $\boldsymbol{\alpha - \beta \neq 0}$, τότε ἀπό τήν ἐξίσωση τοῦ συστήματος ἔχουμε:

$$x = \frac{\gamma}{\alpha-\beta} \tag{2}$$

Ἡ λύση αὐτή θά εἶναι λύση τοῦ συστήματος (Σ_2), ἑπομένως καί τῆς (ε), ἄν:

$$\frac{\gamma}{\alpha-\beta} < 0 \iff \gamma(\alpha-\beta) < 0,$$

ἐνῶ ἄν:
$$\frac{\gamma}{\alpha-\beta} \geqq 0 \iff \gamma(\alpha-\beta) \geqq 0$$

ἡ (2) δέν εἶναι λύση τοῦ συστήματος (Σ_2), ἄρα τότε ἡ (ε) δέν ἔχει λύση στό $\mathbf{R}^-$.

β_2) Ἄν $\boldsymbol{\alpha - \beta = 0}$, τότε ἡ ἐξίσωση τοῦ συστήματος γίνεται: $0x = \gamma$ καί ἑπομένως: ἄν $\gamma \neq 0$, τότε τό σύστημα [*ἄρα καί ἡ* (ε)] εἶναι ἀδύνατο στό $\mathbf{R}^-$, ἐνῶ ἄν $\gamma = 0$, ἡ ἐξίσωση (ε) εἶναι ἀόριστη (ταυτότητα) στό $\mathbf{R}^-$.

Παρατήρηση. Εἰδική μορφή τῆς (ε) εἶναι ἡ ἐξίσωση: $|x| = x + k$, ὅπου $k \in \mathbf{R}$. Ἡ ἐπίλυσή της γίνεται καί μέ τόν ἑξῆς τρόπο:

Ἡ ἐξίσωση $|x| = x + k$ εἶναι ἰσοδύναμη μέ τήν: $|x| - x = k$. Ἄρα $k \geq 0$ (§ 22).

i) Γιά $k = 0$ ἔχουμε: $|x| - x = 0 \iff |x| = x$ καί ἀληθεύει γιά κάθε $x \in \mathbf{R}_0^+$.

ii) Γιά $k > 0$ πρέπει: $|x| > x$ καί ἄρα $x < 0$. Τότε ὅμως ἡ ἐξίσωση γίνεται:

$$-2x = k \Rightarrow x = -\frac{k}{2}.$$

Ἐφαρμογή: Νά ἐπιλυθεῖ στό R ἡ ἐξίσωση: $3|x| + 2x - 4 = 0$.

Λύση. Παρατηροῦμε ἀμέσως ὅτι τό μηδέν δέν εἶναι λύση τῆς $3|x| + 2x - 4 = 0$ (1) Ἑπομένως, ἄν ὑπάρχει κάποια λύση, ἔστω $x \in \mathbf{R}$, τῆς (1), τότε γι' αὐτή θά ἰσχύει:

$$\text{ἤ } x > 0 \quad \text{ἤ } x < 0$$

(α) Στήν πρώτη περίπτωση ἔχουμε νά λύσουμε τό σύστημα:

$$(\Sigma_1) \quad \left.\begin{array}{r} 3|x| + 2x - 4 = 0 \\ x > 0 \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{l} 5x = 4 \\ x > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{4}{5}$$

Αὐτή ἡ λύση τοῦ συστήματος εἶναι καί λύση τῆς ἐξισώσεως (1).

(β) Στή δεύτερη περίπτωση ἔχουμε νά λύσουμε τό σύστημα:

$$(\Sigma_2) \quad \left.\begin{array}{r} 3|x| + 2x - 4 = 0 \\ x < 0 \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{r} -3x + 2x - 4 = 0 \\ x < 0 \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{l} x = -4 \\ x < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x = -4.$$

Αὐτή ἡ λύση τοῦ συστήματος (Σ_2) εἶναι καί λύση τῆς (1).

Ἄρα ἡ (1) ἔχει λύσεις τίς: $x_1 = \frac{4}{5}$, $x_2 = -4$ καί μόνο αὐτές.

§ 34. Ἐπίλυση ἐξισώσεων τῆς μορφῆς: $\alpha x^2 + \beta|x| + \gamma = 0$ (1)

μέ $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$ καί $\alpha \neq 0$.— Ἐπειδή γιά κάθε $x \in \mathbf{R}$ εἶναι: $x^2 = |x|^2$, ἡ (1) γράφεται: $\alpha|x|^2 + \beta|x| + \gamma = 0$.

Θέτουμε τώρα $|x| = y$, $y \geq 0$, καί ἡ ἐξίσωση (1) εἶναι ἰσοδύναμη μέ τό σύστημα:

$$(\Sigma): \quad \left.\begin{array}{r} \alpha y^2 + \beta y + \gamma = 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$

Ἑπομένως γιά νά λύσουμε τήν (1) ἀρκεῖ νά βροῦμε τίς **μή ἀρνητικές** ρίζες τῆς:

$$\alpha y^2 + \beta y + \gamma = 0 \qquad (2)$$

Ἄ σ κ η σ η. Ἀφοῦ ἐξετάσετε τό πρόσημο τῶν ριζῶν τῆς (2), νά βρεῖτε τό πλῆθος τῶν πραγματικῶν ριζῶν τῆς (1).

Ἐφαρμογή. Νά ἐπιλυθεῖ στό R ἡ ἐξίσωση: $x^2 - 5|x| + 6 = 0$. (1)

Λύση. Ἡ (1) γράφεται: $|x|^2 - 5|x| + 6 = 0$. Θέτουμε $|x| = y \geq 0$ καί ἡ (1) εἶναι ἰσοδύναμη μέ τό σύστημα:

$$(\Sigma) \quad \left.\begin{array}{r} y^2 - 5y + 6 = 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} y_1 = 2 \\ y_2 = 3 \end{array}\right.$$

Τότε ἔχουμε: $|x| = 2$ καί $|x| = 3$, ἀπό τίς ὁποῖες βρίσκουμε: $x = \pm 2$ καί $x = \pm 3$.

Ἄρα ἡ (1) ἔχει λύσεις τίς: $x_1 = 2$, $x_2 = -2$, $x_3 = 3$, $x_4 = -3$ καί μόνο αὐτές.

Παρατήρηση. Γενικότερη μορφή τῆς (1) εἶναι οἱ ἐξισώσεις τῆς μορφῆς:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma|x| + \delta = 0, \ \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbf{R} \text{ μέ } \alpha\beta \neq 0.$$

Παράδειγμα. Νά ἐπιλυθεῖ στό R ἡ ἐξίσωση: $x^2 - 3x + 2|x| - 6 = 0$ (1)

Λύση. Τό μηδέν δέν εἶναι λύση τῆς (1). Ἄρα ἄν ὑπάρχει κάποια λύση, ἔστω $x \in \mathbf{R}$, τῆς (1), τότε γι' αὐτή θά ἰσχύει: ἤ $x > 0$ ἤ $x < 0$.

(α) Στήν πρώτη περίπτωση ἔχουμε νά λύσουμε τό σύστημα:

$$(\Sigma_1) \quad \left.\begin{aligned} x^2 - 3x + 2|x| - 6 &= 0 \\ x &> 0 \end{aligned}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{aligned} x^2 - x - 6 &= 0 \\ x &> 0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow x = 3.$$

Ἡ ἄλλη ρίζα $x = -2$ τῆς ἐξισώσεως τοῦ συστήματος (Σ_1), δέν ἀποτελεῖ λύση τοῦ συστήματος [ἄρα καί τῆς (1)], γιατί εἶναι: $-2 < 0$.

(β) Στή δεύτερη περίπτωση ἔχουμε νά λύσουμε τό σύστημα:

$$(\Sigma_2) \quad \left.\begin{aligned} x^2 - 3x + 2|x| - 6 &= 0 \\ x &< 0 \end{aligned}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{aligned} x^2 - 5x - 6 &= 0 \\ x &< 0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow x = -1.$$

Ἄρα ἡ (1) ἔχει πραγματικές λύσεις τίς: $x_1 = 3$, $x_2 = -1$ καί μόνο αὐτές.

∗ § 35. Ἐπίλυση ἐξισώσεων τῆς μορφῆς: $|A(x)|+|B(x)|+\cdots+|P(x)|+ Q(x)=0$ (1), ὅπου $A(x)$, $B(x)$, $\cdots$, $P(x)$, $Q(x)$ ἀκέραια πολυώνυμα τοῦ x μέ πραγματικούς συντελεστές.

—Γιά νά βροῦμε τίς πραγματικές λύσεις τῆς (1) ἐξετάζουμε τά πρόσημα τῶν $A(x)$, $B(x)$, ..., $P(x)$, δηλαδή τῶν πολυωνύμων πού βρίσκονται **μέσα** στό σύμβολο τῆς ἀπόλυτης τιμῆς, γιά τίς διάφορες πραγματικές τιμές τοῦ x. Κατόπιν, μέ βάση αὐτά τά πρόσημα, ἐξαλείφουμε τά ἀπόλυτα καί ἔτσι βρίσκουμε σέ κάθε διάστημα μεταβολῆς τοῦ x καί μία ἰσοδύναμη ἐξίσωση μέ τήν (1) χωρίς ἀπόλυτες τιμές. Οἱ λύσεις τῶν ἐξισώσεων πού προκύπτουν, ἐφόσον βρίσκονται κάθε φορά στό ἀντίστοιχο διάστημα μεταβολῆς τοῦ x, εἶναι καί λύσεις τῆς (1)· ἀλλιῶς ἀπορρίπτονται.

Παράδειγμα. Νά ἐπιλυθεῖ ἡ ἐξίσωση: $-2x + |x| - 3|x - 2| + 5|x + 1| = -5$ (1)

Λύση. Ἡ (1) γράφεται: $|x| - 3|x-2| + 5|x+1| - 2x + 5 = 0$ (2)

Βρίσκουμε τίς ρίζες τῶν ἐξισώσεων: $x = 0$, $x - 2 = 0$, $x + 1 = 0$, τίς ὁποῖες ἄν τίς διατάξουμε στόν πραγματικό ἄξονα, θά ἔχουμε:

$$-\infty \quad\quad -1 \quad\quad 0 \quad\quad 2 \quad\quad +\infty$$

Τώρα κάνουμε τήν ἑξῆς σκέψη: ἄν ὑπάρχει κάποια λύση, ἔστω $x \in \mathbf{R}$, τῆς (2), τότε γι' αὐτή θά ἰσχύει:

$$ἤ\ x < -1 \quad ἤ\ -1 \leq x < 0 \quad ἤ\ 0 \leq x < 2 \quad ἤ\ 2 \leqq x.$$

Ἔτσι ἔχουμε νά λύσουμε τά ἑπόμενα τέσσερα συστήματα:

$$\Sigma_1: \left.\begin{aligned} |x|-3|x-2|+5|x+1|-2x+5&=0 \\ x &< -1 \end{aligned}\right\}, \quad \Sigma_2: \left.\begin{aligned} |x|-3|x-2|+5|x+1|-2x+5&=0 \\ -1 \leq x &< 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\Sigma_3: \left.\begin{aligned} |x|-3|x-2|+5|x+1|-2x+5&=0 \\ 0 \leqq x &< 2 \end{aligned}\right\}, \quad \Sigma_4: \left.\begin{aligned} |x|-3|x-2|+5|x+1|-2x+5&=0 \\ x &\geqq 2 \end{aligned}\right\}$$

Ἡ ἐπίλυση τῶν συστημάτων αὐτῶν γίνεται συντομότερα, ἄν καταρτίσουμε τόν ἀκόλουθο πίνακα:

x	x−2	x	x+1	$\|x\|-3\|x-2\|+5\|x+1\|-2x+5=0$	Συμπεράσματα
$-\infty$					
	−	−	−	$-x+3(x-2)-5(x+1)-2x+5=0$	$\Longrightarrow x=-\frac{6}{5}\in(-\infty,-1)$, δεκτή.
-1			0		
	−	−	+	$-x+3(x-2)+5(x+1)-2x+5=0$	$\Longrightarrow x=-\frac{4}{5}\in[-1,0)$, δεκτή.
0		0			
	−	+	+	$+x+3(x-2)+5(x+1)-2x+5=0$	$\Longrightarrow x=-\frac{4}{5}\notin[0,2)$, ἀπορριπτ.
2	0				
$+\infty$	+	+	+	$x-3(x-2)+5(x+1)-2x+5=0$	$\Longrightarrow x=-16\notin[2,+\infty)$, ἀπορρ.

Ἀπό τόν πίνακα βλέπουμε πώς ἡ (1) ἔχει δύο λύσεις, τίς: $x_1=-\frac{6}{5}$, $x_2=-\frac{4}{5}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάδα Α΄. 69. Νά ἐπιλύσετε στό **R** τίς ἐξισώσεις:

1. $3|x|-5=0$, **2.** $|3x|-2=|x|+8$, **3.** $-6|x|+5=0$,

4. $-2|x|+x+1=0$, **5.** $\frac{2}{3}|x|-2x=7$, **6.** $2|x|+7x-3=0$,

7. $x^2-7|x|+12=0$, **8.** $x^2-10|x|-24=0$, **9.** $x^2-3|x|+2x-6=0$

10. $x^2-8|x|+7=0$, **11.** $x^2+10|x|+24=0$, **12.** $x^2-4x+2|x|-3=0$

70. Νά ἐπιλύσετε τίς παρακάτω ἐξισώσεις γιά διάφορες τιμές τοῦ $\lambda\in\mathbf{R}$:

1. $2x+3|x|=\lambda x+2$, **2.** $\lambda|x|+3x=-1$.

* **Ὁμάδα Β΄. 71.** Νά ἐπιλύσετε στό **R** τίς ἐξισώσεις:

1. $|x|^3-5x^2-17|x|+21=0$, **2.** $|2x-1|-3|x-1|=1$,

3. $|x^2-3x+2|+|x-4|-13=0$ **4.** $|x^2-5x+6|-2|x-1|+2x-3=0$,

5. $\frac{1}{|x-1|}-\frac{2}{|x-2|}+\frac{1}{|x-3|}=0$.

72. Νά ἐπιλύσετε τίς πιό κάτω ἐξισώσεις γιά διάφορες τιμές τοῦ $\lambda\in\mathbf{R}$:

1. $\big|2x-|2x-1|\big|=-\lambda^2x$, **2.** $|x-3|-\lambda|x-1|=2$, **3.** $|\lambda-1|x+(\lambda-1)|x|=\lambda^2-1$.

73. Νά βρεῖτε τή σχέση πού συνδέει τούς συντελεστές τῆς ἐξισώσεως:

$$\alpha|x|^3+\beta x^2+\beta|x|+\alpha=0$$

ὥστε αὐτή νά ἔχει τό μέγιστο δυνατό πλῆθος πραγματικῶν ριζῶν.

74. Ἔστω ἡ ἐξίσωση: $x^2+x+\lambda|x|+1=0$. Νά βρεῖτε τό λ, ὥστε αὐτή νά ἔχει τέσσερις ρίζες πραγματικές καί ἄνισες.

* III. ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΕΣ ΤΙΜΕΣ ΤΟΥ ΑΓΝΩΣΤΟΥ

§ 36. Γιά νά ἐπιλύσουμε ἀνισώσεις μέ ἀπόλυτες τιμές τοῦ ἀγνώστου, ἐργαζόμαστε κάθε φορά μέ τρόπο ἀνάλογο μ' ἐκεῖνο πού ἀκολουθήσαμε γιά τήν ἐπίλυση ἐξισώσεων τῆς ἀντίστοιχης μορφῆς.

Ὅπως στίς ἐξισώσεις μέ ἀπόλυτες τιμές τοῦ ἀγνώστου, ἔτσι καί στίς ἀνισώσεις, βρίσκουμε σέ κάθε διάστημα μεταβολῆς τοῦ ἀγνώστου καί μία ἀνίσωση χωρίς ἀπόλυτες τιμές πού εἶναι ἰσοδύναμη μ' ἐκείνη πού μᾶς ἔχει δοθεῖ.

Οἱ τομές τῶν διαστημάτων (λύσεων) κάθε ἰσοδύναμης ἀνισώσεως μέ τό ἀντίστοιχο διάστημα μεταβολῆς τοῦ ἀγνώστου ἀποτελοῦν τίς λύσεις τῆς ἀνισώσεως πού μᾶς ἔχει δοθεῖ.

Γιά νά γίνουν κατανοητά τά παραπάνω θά δώσουμε δύο παραδείγματα ἐπιλύσεως ἀνισώσεων διαφόρων μορφῶν.

Παράδειγμα 1ο: Νά ἐπιλυθεῖ ἡ ἀνίσωση: $\dfrac{|x|-5}{3} > \dfrac{x-8}{4}$ (1)

Λύση. Ἔχουμε: α) ἄν $x \geqq 0$, τότε $|x| = x$, ὁπότε ἡ (1) εἶναι ἰσοδύναμη μέ τό σύστημα:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{x-5}{3} > \dfrac{x-8}{4}\\ \\ x \geqq 0\end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x > -4\\ x \geqq 0\end{array}\right\} \Longleftrightarrow x \geqq 0 \qquad (2)$$

β) ἄν $x < 0$, τότε $|x| = -x$, ὁπότε ἡ (1) εἶναι ἰσοδύναμη μέ τό σύστημα:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{-x-5}{3} > \dfrac{x-8}{4}\\ \\ x < 0\end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -7x > -4\\ x < 0\end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x < \dfrac{4}{7}\\ \\ x < 0\end{array}\right\} \Longleftrightarrow x < 0 \qquad (3)$$

Ἀπό τίς (2) καί (3) συμπεραίνουμε ὅτι ἡ (1) ἐπαληθεύεται ἀπό κάθε $x \in \mathbf{R}$.

Παράδειγμα 2ο: Νά ἐπιλυθεῖ ἡ ἀνίσωση: $|x+1| - 2|x| + |x-1| - \dfrac{2x+4}{5} > 0$ **(1)**

Λύση. Οἱ τιμές τοῦ x πού μηδενίζουν τίς παραστάσεις πού βρίσκονται μέσα στό σύμβολο τῆς ἀπόλυτης τιμῆς εἶναι μέ τή σειρά: $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$.

Θέτουμε: $A \equiv x + 1$, $B \equiv x$, $\Gamma \equiv x - 1$ $\Longrightarrow$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
A		$-$		$+$	

x	$-\infty$		0		$+\infty$
B		$-$		$+$	

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Γ		$-$		$+$	

Ἄν ἐργαστοῦμε τώρα ὅπως καί στό παράδειγμα τῆς § 35 καταρτίζουμε τόν ἀκόλουθο πίνακα:

x	A	B	Γ	$\lvert x+1\rvert-2\lvert x\rvert+\lvert x-1\rvert-\dfrac{2x+4}{5}>0$	Συμπεράσματα
$-\infty$					
	$-$	$-$	$-$	$-(x+1)+2x-(x-1)-\dfrac{2x+4}{5}>0$	$\Rightarrow x<-2$. Ἄρα: $x \in (-\infty,-2)\cap(-\infty,-1)=(-\infty,-2)$
-1	0				
	$+$	$-$	$-$	$(x+1)+2x-(x-1)-\dfrac{2x+4}{5}>0$	$\Rightarrow x>-\dfrac{3}{4}$. Ἄρα: $x \in \left(-\dfrac{3}{4},+\infty\right)\cap[-1,0)=\left(-\dfrac{3}{4},0\right)$
0		0			
	$+$	$+$	$-$	$(x+1)-2x-(x-1)-\dfrac{2x+4}{5}>0$	$\Rightarrow x<\dfrac{1}{2}$. Ἄρα: $x \in \left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right)\cap[0,1)=\left[0,\dfrac{1}{2}\right)$
1			0		
	$+$	$+$	$+$	$(x+1)-2x+(x-1)-\dfrac{2x+4}{5}>0$	$\Rightarrow x<-2$. Ἄρα: $x \in (-\infty,-2)\cap[1,+\infty)=\varnothing$.
$+\infty$					

ἀπό τόν ὁποῖο βλέπουμε πώς ἡ (1) ἀληθεύει, ὅταν $x<-2$ καί $-\dfrac{3}{4}<x<\dfrac{1}{2}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάδα Α΄. 75. Νά ἐπιλύσετε τίς ἑπόμενες ἀνισώσεις:

1. $|3x|-2>|x|+8$, **2.** $2|x|+x>10$, **3.** $\frac{3|x|+1}{4}-\frac{4-x}{3}>1$,

4. $|x|^3-4x^2+|x|+6>0$, **5.** $3|x|+4|x-1|>5$, **6.** $|2x+1|+|6x|>9$.

76. Νά ἀποδείξετε ὅτι γιά κάθε πραγματική τιμή τοῦ x ἰσχύει ἡ σχέση:

$$|x-2|+|2x-1|\geqq\frac{3}{2}.$$

Πότε ἡ σχέση αὐτή ἰσχύει μέ τό «ἴσον»;

77. Νά ἐπιλύσετε τίς ἀνισώσεις:

1. $|2x+1|-4|x-3|-|x-4|>3$, **2.** $\big||x|+x\big|-\big||x|-x\big|<|x-2|$

3. $|x-1|+|x-2|+|x-3|<x+1$, **4.** $\frac{|2x^2-5|}{3|x|}>\frac{|x|+1}{2}$.

Ὁμάδα Β΄. 78. Γιά ποιές πραγματικές τιμές τοῦ x ἔχει νόημα στό **R** καθεμία ἀπό τίς ἑπόμενες παραστάσεις:

$$A\equiv\sqrt{3x^2-10|x|+3},\qquad B=\sqrt{|x^2+8x-9|-24}.$$

79. Ἄν $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$ καί $|x|=\alpha x+\beta x+1$, νά βρεῖτε γιά ποιές τιμές τοῦ x εἶναι: $|\alpha+\beta|<1$.

80. Ἔστω ἡ συνάρτηση $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ μέ τύπο:

$$f(x)=\left|x+\frac{3}{2}\right|+\left|x-\frac{1}{2}\right|+|x-2|.$$

α) Νά βρεῖτε τίς ἐκφράσεις της χωρίς τό σύμβολο τῆς ἀπόλυτης τιμῆς γιά $x\in\mathbf{R}$.
β) Πῶς μεταβάλλεται ἡ f στό πεδίο ὁρισμοῦ της;
γ) Νά δώσετε τή γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως, ὅταν: $-\infty<x<+\infty$.
δ) Νά ἀποδείξετε ὅτι: $f(x)\geqq\frac{7}{2}\ \forall\ x\in\mathbf{R}$. Γιά ποιές τιμές τοῦ x ἰσχύει τό ἴσον;

81. Ἔστω ἡ ἀπεικόνιση $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ μέ τύπο:

$$f(x)=|x-2|+|2x-1|.$$

Νά δικαιολογήσετε γιατί ἡ f δέν εἶναι μία ἀμφιμονοσήμαντη ἀπεικόνιση τοῦ **R** πάνω στό **R** καί κατόπιν νά ἀποδείξετε ὅτι: ἄν $x_1\geqq 2$ καί $x_1+x_2=2$, τότε θά εἶναι: $f(x_1)=f(x_2)$.

Τέλος νά δώσετε τή γραφική παράσταση τῆς f, ὅταν: $-\infty<x<+\infty$ καί ἀπό τή γραφική της παράσταση νά συμπεράνετε ὅτι: $\min f(x)=f\left(\frac{1}{2}\right)$.

* IV. ΕΠΙΛΥΣΗ ΣΤΟ R ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΕΣ ΤΙΜΕΣ ΤΩΝ ΑΓΝΩΣΤΩΝ

§ 37. Ἐπίλυση συστημάτων τῆς μορφῆς: $\begin{cases}\alpha|x|+\beta|y|=\gamma\\ \alpha'|x|+\beta'|y|=\gamma'\end{cases}$ (1)

ὅπου α, β, γ, α΄, β΄, γ΄ εἶναι πραγμ. ἀριθμοί ἀνεξάρτητοι ἀπό τά x, y.

Θέτουμε: $|x|=x_1$, $|y|=y_1$ καί τό σύστημα (1) παίρνει τή μορφή:

$$\begin{aligned}\alpha x_1+\beta y_1&=\gamma\\ \alpha' x_1+\beta' y_1&=\gamma'\end{aligned}\qquad(2)$$

Τό σύστημα (2), ὅπως μᾶς εἶναι γνωστό ἀπό τήν προηγούμενη τάξη, ἔχει τή λύση:

$$x_1 = \frac{\gamma\beta' - \gamma'\beta}{\alpha\beta' - \alpha'\beta} \quad , \quad y_1 = \frac{\alpha\gamma' - \alpha'\gamma}{\alpha\beta' - \alpha'\beta}, \ (\alpha\beta' - \alpha'\beta \neq 0).$$

Ἐπειδή γιά ὁποιαδήποτε τιμή τῶν x καί y εἶναι: $|x| \geqq 0$, $|y| \geqq 0$, τό σύστημα (1) θά ἔχει λύση, ὅταν καί μόνο, ὅταν:

$$\frac{\gamma\beta' - \gamma'\beta}{\alpha\beta' - \alpha'\beta} \geqq 0 \quad , \quad \frac{\alpha\gamma' - \alpha'\gamma}{\alpha\beta' - \alpha'\beta} \geqq 0.$$

Μ' αὐτή τήν προϋπόθεση λαμβάνουμε ὡς λύσεις τοῦ συστήματος (1), τίς λύσεις τοῦ ζεύγους τῶν ἐξισώσεων:

$$|x| = \frac{\gamma\beta' - \gamma'\beta}{\alpha\beta' - \alpha'\beta} \quad , \quad |y| = \frac{\alpha\gamma' - \alpha'\gamma}{\alpha\beta' - \alpha'\beta},$$

τίς ὁποῖες βρίσκουμε σύμφωνα μέ ὅσα εἴπαμε στήν § 32.

Ἐφαρμογή. Νά ἐπιλυθεῖ στό R τό σύστημα:

$$(\Sigma): \quad \begin{cases} 3|x| - 2|y| = 10 \\ 5|x| + 3|y| = 23 \end{cases} \qquad (1)$$

Λύση. Θέτουμε $|x| = x_1$, $|y| = y_1$ καί τό σύστημα (1) παίρνει τή μορφή:

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 - 2y_1 &= 10 \\ 5x_1 + 3y_1 &= 23 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ y_1 = 1 \end{cases} \qquad (2)$$

Τότε οἱ λύσεις τοῦ συστήματος (1) εἶναι οἱ λύσεις τοῦ ζεύγους τῶν ἐξισώσεων:

$$\left.\begin{aligned} |x| &= 4 \\ |y| &= 1 \end{aligned}\right\}, \text{ ἀπό τίς ὁποῖες βρίσκουμε: } x = \pm 4 \text{ καί } y = \pm 1.$$

Ἄρα οἱ λύσεις τοῦ συστήματος (1) εἶναι τά τέσσερα ζεύγη:

$(x = 4, y = 1)$, $(x = 4, y = -1)$, $(x = -4, y = 1)$, $(x = -4, y = -1)$.

§ 38. Ἐπίλυση συστημάτων τῆς μορφῆς: $\begin{cases} \alpha|x| + \beta|y| + \gamma x + \delta y = k \\ \alpha'|x| + \beta'|y| + \gamma' x + \delta' y = k' \end{cases}$ (1)

ὅπου οἱ συντελεστές τῶν ἀγνώστων καί οἱ σταθεροί ὅροι εἶναι πραγματικοί ἀριθμοί πού δέν ἐξαρτῶνται ἀπό τά x, y.

Γιά τήν ἐπίλυση τοῦ συστήματος (1) διακρίνουμε τίς ἑξῆς τέσσερις περιπτώσεις:

α) $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, ὁπότε $|x| = x$, $|y| = y$ καί τό σύστημα (1) παίρνει τή μορφή:

$$\left.\begin{aligned} (\alpha + \gamma)x + (\beta + \delta)y &= k \\ (\alpha' + \gamma')x + (\beta' + \delta')y &= k' \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Τότε οἱ μή ἀρνητικές λύσεις τοῦ (2) εἶναι λύσεις τοῦ συστήματος (1).

Συνεχίζουμε τήν ἐπίλυση μέ τίς ἀκόλουθες, ἀκόμη, περιπτώσεις:

β) $x \geqq 0$, $y < 0$, γ) $x < 0$, $y \geqq 0$, δ) $x < 0$, $y < 0$.

Ἐφαρμογή. Νά ἐπιλυθεῖ στό R τό σύστημα: $\begin{cases} |x| - 2y = 3 \\ x + |y| = 6 \end{cases}$ (Σ)

Λύση. Ἄν ὑπάρχει λύση τοῦ (Σ), ἔστω $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, τότε γι' αὐτή θά ἰσχύει: ἤ

α) $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, ὁπότε $|x| = x$, $|y| = y$ καί τό σύστημα γράφεται:

$$\left.\begin{array}{l} x - 2y = 3 \\ x + y = 6 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 5 \\ y = 1. \end{array}\right.$$

Τό ζεῦγος $(x = 5, y = 1)$ εἶναι λύση τοῦ (Σ), ἀφοῦ $x = 5 \geqq 0$, $y = 1 \geqq 0$.

β) $x \geqq 0$, $y < 0$, ὁπότε $|x| = x$, $|y| = -y$ καί τό σύστημα γράφεται:

$$\left.\begin{array}{l} x - 2y = 3 \\ x - y = 6 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 9 \\ y = 3. \end{array}\right.$$

Τό ζεῦγος ὅμως $(x = 9, y = 3)$ δέν εἶναι λύση τοῦ (Σ), γιατί: $y = 3 > 0$.

γ) $x < 0$, $y \geqq 0$, ὁπότε $|x| = -x$, $|y| = y$ καί τό σύστημα γράφεται:

$$\left.\begin{array}{l} -x - 2y = 3 \\ x + y = 6 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 15 \\ y = -9. \end{array}\right.$$

Πάλι ὅμως τό ζεῦγος $(x = 15, y = -9)$ δέν εἶναι λύση τοῦ (Σ), γιατί $x = 15 > 0$, $y = -9 < 0$.

δ) $x < 0$, $y < 0$, ὁπότε $|x| = -x$, $|y| = -y$ καί τό σύστημα γράφεται:

$$\left.\begin{array}{l} -x - 2y = 3 \\ x - y = 6 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 3 \\ y = -3. \end{array}\right.$$

Τό ζεῦγος ὅμως $(x = 3, y = -3)$ δέν εἶναι λύση τοῦ (Σ), γιατί $x = 3 > 0$.

Ἄρα ἡ μοναδική λύση τοῦ συστήματος εἶναι τό ζεῦγος: $(\mathbf{x = 5, y = 1})$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάδα Α'. 82. Νά ἐπιλύσετε στό **R** τά ἑπόμενα συστήματα:

1. $\begin{array}{l} 2|x| + 3|y| = 11 \\ 3|x| - 5|y| = 7 \end{array}$ **2.** $\begin{array}{l} |x| + |y| = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{array}$ **3.** $\begin{array}{l} 3x - 5|y| = 1 \\ x|y| + y|x| = 4 \end{array}$

4. $\begin{array}{l} |2x - 3y| = 12 \\ 3x + y = 7 \end{array}$ **5.** $\begin{array}{l} |x| - |y| = 2 \\ y + y|x| = 6 \end{array}$ **6.** $\begin{array}{l} |x| + |y| = \alpha \\ \alpha y = x^2 \end{array}$ $(\alpha \in \mathbf{R})$.

83. Τό ἴδιο νά κάνετε γιά τά συστήματα:

1. $\begin{array}{l} 4|x - 2| + |y - 1| = 5 \\ 4x - 3y = 6 \end{array}$ **2.** $\begin{array}{l} |x - 2y| + |x + y - 1| = 2 \\ x + 3y = 2 \end{array}$ **3.** $\begin{array}{l} |x| + |y - 1| = 3 \\ |x| + |y - 2| = 4. \end{array}$

Ὁμάδα Β'. 84. Νά ἐπιλύσετε τά παρακάτω συστήματα γιά τίς διάφορες τιμές τοῦ $\alpha \in \mathbf{R}$:

(i) $\begin{array}{l} |\alpha x + y| = 2x \\ 3x + 5y = 2 \end{array}$ **(ii)** $\begin{array}{l} |x| + |y| = \alpha \\ x^2 + y^2 = 1. \end{array}$

85. Νά βρεῖτε τίς ἀκέραιες λύσεις τοῦ συστήματος:

$$x^2 = yz \wedge |y + z| > x^2 + 1,$$

ὅταν οἱ z, y ἔχουν τίς ἐλάχιστες ἀπόλυτες τιμές.

86. Νά ἐπιλύσετε στό **R** τό σύστημα:

$$x^2 = \frac{z^2}{2|yz| - y^2} \ (1), \quad 0 < x \leqq \frac{3}{3 + |y + 2|} \ (2)$$

87. Νά βρεῖτε τίς ἀκέραιες λύσεις τοῦ συστήματος:

$$\left\{(x^2 + 4y^2)(z^2 + 4) = (xz + 4y)^2 \wedge 16z^2 - 56\left|\frac{x}{y}\right| + 45 < 0 \wedge x^2 + y^2 + |xy| < 64\right\}.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ IV

ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

I. ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ – ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

§ 39. Ἡ ἔννοια τῆς ἀκολουθίας.— Στήν Γ' τάξη τοῦ Γυμνασίου μάθαμε ὅτι: *κάθε συνάρτηση* $\alpha: \mathbf{N} \to E: \nu \xrightarrow{\alpha} \alpha(\nu) \in E$ *μέ πεδίο ὁρισμοῦ τό σύνολο* $\mathbf{N}$ *τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν καί τιμές σ' ἕνα μή κενό σύνολο* E, δηλαδή *ἡ ἀπεικόνιση, πού ὁρίζεται ἀπό τήν ἀντιστοιχία:*

$$\begin{array}{cccccc} 1 \;, & 2 \;, & 3 \;, & \ldots \;, & \nu \;, & \ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ \alpha(1), & \alpha(2), & \alpha(3), & \ldots \;, & \alpha(\nu), & \ldots \end{array} \tag{1}$$

λέγεται **ἀκολουθία στοιχείων τοῦ συνόλου E.**

Στήν παραπάνω ἀντιστοιχία τά πρότυπα (ἀρχέτυπα), δηλ. οἱ φυσικοί ἀριθμοί, λέγονται καί *δεῖκτες*, ἐνῶ οἱ εἰκόνες τους, δηλ. οἱ τιμές τῆς ἀκολουθίας $\alpha: \mathbf{N} \ni \nu \to \alpha(\nu) \in E$, λέγονται καί *ὅροι* τῆς ἀκολουθίας. Ἡ ἔκφραση $\alpha(\nu)$ συμβολίζεται συνήθως μέ α_ν καί λέγεται **ὁ νιοστός** ἤ **ὁ γενικός ὅρος** τῆς ἀκολουθίας. Ἔτσι ἔχουμε:

$$\boxed{\alpha_\nu \underset{\text{ορσ}}{=} \alpha(\nu) \quad , \quad \forall\ \nu \in \mathbf{N}}$$

Στήν ἀντιστοιχία (1) συνήθως παραλείπεται ἡ πρώτη γραμμή καί γράφονται μόνο οἱ εἰκόνες. Γράφουμε δηλαδή: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_\nu, \ldots$ (2)

Εἰδικά ὁ α_1 λέγεται π ρ ῶ τ ο ς ὅ ρ ο ς τῆς ἀκολουθίας (2), ὁ α_2 δ ε ύ τ ε ρ ο ς ὅ ρ ο ς κ.ο.κ.

Συντομότερα τήν ἀκολουθία (2) θά τή συμβολίζουμε ὡς ἑξῆς: α_ν, $\nu \in \mathbf{N}$, ἤ α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$, ἀκόμη μέ: (α_ν), $\nu \in \mathbf{N}$ καί ἀκόμη πιό σύντομα μέ: (α_ν).

Στήν εἰδική περίπτωση πού τό $E \subset \mathbf{R}$, ἡ ἀκολουθία $\alpha: \mathbf{N} \to E$ λέγεται *ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν.* Ὥστε:

Ὁρισμός. *Ὀνομάζουμε* **ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν** *κάθε* (μονοσήμαντη) *ἀπεικόνιση τοῦ συνόλου* **N** *τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν στό σύνολο* **R** *τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.*

Στά ἑπόμενα θά ἀσχοληθοῦμε **μόνο** μέ ἀκολουθίες πραγματικῶν ἀριθμῶν.

Ἔτσι στό ἑξῆς μέ τόν ὅρο: *«ἀκολουθία»* θά ἐννοοῦμε : *«ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν»*, δηλαδή: $\alpha: \mathbf{N} \to \mathbf{R}: \nu \to \alpha_\nu \in \mathbf{R}$.

Παραδείγματα: 1. *Ἡ ἀκολουθία τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν,* δηλ. ἡ ἀκολουθία: $1, 2, 3, \ldots, \nu, \ldots$ τῆς ὁποίας ὁ γενικός (νιοστός) ὅρος εἶναι ὁ ἀριθμός ν, δηλ. $\alpha_\nu = \nu$.

2. Ἡ ἀκολουθία: $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \ldots, \dfrac{1}{\nu}, \ldots$ μέ γενικό ὅρο: $\alpha_\nu = \dfrac{1}{\nu}$.

3. Ἡ ἀκολουθία: $-1, \dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{3}, \ldots, (-1)^\nu \dfrac{1}{\nu} \ldots$ μέ γενικό ὅρο: $\alpha_\nu = (-1)^\nu \dfrac{1}{\nu}$.

4. Ἄν ἀπεικονίσουμε τούς περιττούς φυσικούς ἀριθμούς στόν ἀριθμό 0 καί τούς ἄρτιους φυσικούς στόν ἀριθμό 1, θά πάρουμε τήν ἀκολουθία: $0, 1, 0, 1, \ldots, 0, 1, \ldots$

Ἡ ἀκολουθία αὐτή συνήθως συμβολίζεται ὡς ἑξῆς:

$$\mathbf{N} \ni \nu \to \alpha_\nu = \begin{cases} 0, & \text{ἄν } \nu \text{ περιττός} \\ 1, & \text{ἄν } \nu \text{ ἄρτιος.} \end{cases}$$

5. Ἡ ἀκολουθία μέ γενικό ὅρο $\alpha_\nu = 1 + (-1)^\nu$, δηλαδή ἡ ἀκολουθία:

$$0, 2, 0, 2, \ldots, 0, 2, \ldots$$

Αὐτή ἡ ἀκολουθία μέ ἀκριβέστερη διατύπωση γράφεται:

$$\alpha_\nu = \begin{cases} 2, & \text{ἄν } \nu = 2k \ (k \text{ φυσικός}) \\ 0, & \text{ἄν } \nu = 2k+1 \ (k \text{ ἀκέραιος} \geqq 0). \end{cases}$$

6. Θεωροῦμε τήν ἀκολουθία $\alpha_\nu = \dfrac{2\nu}{\nu+3}$, $\nu = 1, 2, \ldots$ Ὁρίζεται ἔτσι μία ἀπεικόνιση:

$$\alpha: \mathbf{N} \to \mathbf{R}: \nu \to \alpha_\nu \in \mathbf{R}.$$

Δίνοντας στό ν διαδοχικά τίς θετικές ἀκέραιες τιμές, παίρνουμε τούς ὅρους της. Πιό ἀναλυτικά ἡ παραπάνω ἀκολουθία συμβολίζεται μέ τίς διαδοχικές τιμές της:

$$\frac{2}{4}, \frac{4}{5}, \frac{6}{6}, \frac{8}{7}, \ldots, \frac{2\nu}{\nu+3}, \ldots$$

*** Παρατηρήσεις. 1)** Ἀπό τά προηγούμενα παραδείγματα βλέπουμε ὅτι μία ἀκολουθία α_ν, $\nu \in \mathbf{N}$ εἶναι *τελείως ὁρισμένη,* ὅταν ἔχουμε μία συνάρτηση $f: \mathbf{N} \to \mathbf{R}$, πού ἐκφράζει ρητά τό γενικό ὅρο α_ν τῆς ἀκολουθίας, δηλ. ὅταν διαθέτουμε τόν τύπο: $\alpha_\nu = f(\nu)$, ὅπου f ἡ γνωστή συνάρτηση τοῦ ν.

2) Μία ἀκολουθία εἶναι ἐπίσης γνωστή, ὅταν δίνονται *ἐπαρκεῖς* πρῶτοι ὅροι τῆς ἀκολουθίας καί ἕνας **ἀναγωγικός τύπος (ἀναδρομική σχέση)** πού ἐπιτρέπει νά βρίσκουμε τόν ἑπόμενο ὅρο $\alpha_{\nu+1}$ κάθε ὅρου α_ν ἀπό τόν προηγούμενό του ἤ γενικότερα ἀπό ὁρισμένους ἀπό τούς προηγούμενούς του. Ἔτσι ἔχουμε ἀκολουθίες τῆς μορφῆς $\alpha_1 = \alpha$ καί $\alpha_{\nu+1} = f(\alpha_\nu)$, ἤ γενικότερα τῆς μορφῆς: $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = \beta$ καί $\alpha_{\nu+1} = f(\alpha_\nu, \alpha_{\nu-1})$.

Ἀξίζει ὅμως ἐδῶ νά τονίσουμε τά ἑξῆς: *Γιά νά ὁρίσουμε πλήρως μία ἀκολουθία α_ν, $\nu \in \mathbf{N}$ μέ μία ἀναδρομική σχέση δέν ἀρκεῖ μόνο ὁ ἀναγωγικός τύπος, ἀλλά εἶναι ἀπαραίτητο νά ξέρουμε καί ἱκανό ἀριθμό πρώτων ὅρων της.* Γιατί ἄν οἱ τιμές αὐτῶν τῶν πρώτων ὅρων τῆς ἀκολουθίας ἀλλάξουν, τότε ἀλλάζει καί ἡ ἀκολουθία, ἄν καί ὁ ἀναγωγικός της τύπος παραμένει ὁ ἴδιος. Ἐπίσης πολλές φορές **δέν** εἶναι ἀρκετό νά ὁρίσουμε ἁπλῶς ἱκανό ἀριθμό ἀπό πρώτους ὅρους μιᾶς ἀκολουθίας. Εἶναι ἀναγκαῖο νά θέσουμε καί τίς συνθῆκες ἐκεῖνες πού θά μᾶς ἐπιτρέπουν νά βρίσκουμε, μέ τήν ἀναδρομική σχέση καί τίς «ἀρχικές» συνθῆκες, ὅσους ὅρους τῆς ἀκολουθίας α_ν, $\nu \in \mathbf{N}$ θέλουμε (βλ. σχετικά καί ἄσκηση 89).

3) Μερικές φορές τό δείκτη ν τοῦ α_ν τόν παίρνουμε ἔτσι, ὥστε νά δέχεται τίς τιμές: $0, 1, 2, \ldots$, ὁπότε ἡ ἀκολουθία γράφεται: $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{\nu-1}, \ldots$ Σ' αὐτή τήν περίπτωση ὁ νιοστός ὅρος τῆς ἀκολουθίας εἶναι ὁ $\alpha_{\nu-1}$.

4) Τό πλῆθος τῶν ὅρων μιᾶς ἀκολουθίας α_ν, $\nu \in \mathbf{N}$ δέν εἶναι πεπερασμένο, ἐνῶ **τό σύνολο τῶν ὅρων** της εἶναι δυνατό νά εἶναι πεπερασμένο. Τό σύνολο αὐτό τό συμβολίζουμε μέ $\alpha(\mathbf{N})$ καί τό *ὁρίζουμε ὡς τό σύνολο τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν x, οἱ ὁποῖοι εἶναι ἴσοι μέ κάποιο ὅρο τῆς ἀκολουθίας*, δηλαδή $\alpha(\mathbf{N}) \underset{\text{ορσ}}{=\!=} \{x \in \mathbf{R} : \text{ὑπάρχει } \nu \in \mathbf{N} \text{ μέ } \alpha_\nu = x\}$.

Στό παράδειγμα 4 τῆς §39, π.χ., τό σύνολο τῶν ὅρων τῆς ἀκολουθίας εἶναι $\alpha(\mathbf{N}) = \{0, 1\}$, ἐνῶ τό πλῆθος τῶν ὅρων της εἶναι ἄπειρο.

Ἐπίσης στό παράδειγμα 5 εἶναι $\alpha(\mathbf{N}) = \{0, 2\}$, ἐνῶ τό πλῆθος τῶν ὅρων της εἶναι ἄπειρο.

Σημαντική παρατήρηση. Ὅπως ξέρουμε ἀπό τίς προηγούμενες τάξεις, τό σύνολο τῶν ρητῶν (σύμμετρων) καί ἄρρητων (ἀσύμμετρων) ἀριθμῶν λέγεται **σύνολο R τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν**. Τό σύνολο αὐτό λέγεται καί **εὐθεία τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν,** ἄν θέλουμε νά ἐκφραστοῦμε μέ *τή «γλώσσα»* τῆς Γεωμετρίας· οἱ πραγμ. ἀριθμοί θεωροῦνται τότε ὡς σημεῖα τῆς εὐθείας, γι᾿ αὐτό γιά τά σημεῖα χρησιμοποιοῦμε τά ἴδια σύμβολα μέ αὐτά πού χρησιμοποιοῦμε γιά νά παραστήσουμε τούς πραγμ. ἀριθμούς. Αὐτή ἡ ταυτοποίηση τῶν πραγμ. ἀριθμῶν μέ τά σημεῖα ἑνός ἄξονα βασίζεται σ᾿ ἕνα ἀξίωμα, σύμφωνα μέ τό ὁποῖο: *μεταξύ τῶν πραγμ. ἀριθμῶν καί τῶν σημείων ἑνός ἄξονα ὑπάρχει μία ἀμφιμονοσήμαντη ἀντιστοιχία.* Δηλαδή σέ κάθε πραγματικό ἀριθμό ἀντιστοιχεῖ ἕνα καί μόνο σημεῖο τοῦ ἄξονα καί ἀντιστρόφως. Ἡ ἀμφιμονοσήμαντη αὐτή ἀντιστοιχία τοῦ **R** μέ τά σημεῖα ἑνός ἄξονα, μᾶς ἐπιτρέπει νά θεωροῦμε τούς ὅρους μιᾶς ἀκολουθίας ὡς τετμημένες τῶν σημείων ἑνός ἄξονα (βλ. ἔναντι σχῆμα) καί νά ἀντιμετωπίζουμε ἔτσι τίς ἀκολουθίες πραγμ. ἀριθμῶν ὡς ἀκολουθίες σημείων τοῦ ἄξονα. Ἡ γεωμετρική αὐτή ἐποπτεία θά μᾶς διευκολύνει πολύ παρακάτω γιά νά κατανοήσουμε μερικές καινούργιες ἔννοιες καί ἀποδείξεις ὁρισμένων προτάσεων πού θά διατυπώσουμε.

§ 40. Πράξεις μεταξύ ἀκολουθιῶν.

—Ἔστω $\mathscr{A}$ τό σύνολο ὅλων τῶν ἀκολουθιῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Ἡ *βασική ἰσότητα* στό $\mathscr{A}$ ὁρίζεται ὡς ἑξῆς:

$$\forall\, (\alpha_\nu), (\beta_\nu) \in \mathscr{A},\ (\alpha_\nu) = (\beta_\nu) \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} \alpha_\nu = \beta_\nu \text{ γιά κάθε } \nu \in \mathbf{N}.$$

Μεταξύ τῶν στοιχείων τοῦ $\mathscr{A}$ μποροῦμε νά ὁρίσουμε τό *ἄθροισμα*, τή *διαφορά*, τό *γινόμενο* καί τό *πηλίκο*, ὡς μία ἐπίσης ἀκολουθία πραγμ. ἀριθμῶν, δηλ. ὡς ἕνα στοιχεῖο τοῦ $\mathscr{A}$. Ἔτσι ἄν (α_ν) καί (β_ν) εἶναι δύο ἀκολουθίες, τότε:

Ὀνομάζουμε **ἄθροισμα** τῶν (α_ν) καί (β_ν) τήν ἀκολουθία $(\alpha_\nu + \beta_\nu)$,

δηλαδή τήν: $\alpha_1 + \beta_1,\ \alpha_2 + \beta_2, \ldots, \alpha_\nu + \beta_\nu, \ldots$

Ὥστε: $(\alpha_\nu) + (\beta_\nu) = (\alpha_\nu + \beta_\nu),\ \nu \in \mathbf{N}$.

Ὀνομάζουμε **διαφορά** τῆς (α_ν) μεῖον τή (β_ν) τήν ἀκολουθία $(\alpha_\nu - \beta_\nu)$,

δηλαδή τήν: $\alpha_1 - \beta_1, \alpha_2 - \beta_2, \ldots, \alpha_\nu - \beta_\nu, \ldots$

Ὥστε: $(\alpha_\nu) - (\beta_\nu) = (\alpha_\nu - \beta_\nu),\ \nu \in \mathbf{N}$.

Ὀνομάζουμε **γινόμενο** ἑνός πραγμ. ἀριθμοῦ λ ἐπί τήν (α_ν) τήν ἀκολουθία

$(\lambda\alpha_\nu)$, δηλ. τήν: $\quad \lambda\alpha_1,\ \lambda\alpha_2,\ \ldots,\ \lambda\alpha_\nu,\ \ldots$

῞Ωστε: $\quad \lambda(\alpha_\nu) = (\lambda\alpha_\nu),\ \nu \in \mathbf{N}.$

᾿Ονομάζουμε **γινόμενο** τῶν (α_ν) καί (β_ν) τήν ἀκολουθία $(\alpha_\nu \cdot \beta_\nu)$, δηλαδή τήν: $\quad \alpha_1\beta_1,\ \alpha_2\beta_2,\ \ldots,\ \alpha_\nu\beta_\nu,\ \ldots$

῞Ωστε: $\quad (\alpha_\nu)\cdot(\beta_\nu) = (\alpha_\nu \cdot \beta_\nu),\ \nu \in \mathbf{N}.$

᾿Ονομάζουμε **πηλίκο** τῆς (α_ν) διά τῆς (β_ν) μέ $\beta_\nu \neq 0\ \forall\ \nu \in \mathbf{N}$, τήν ἀκολ. $\left(\dfrac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}\right)$, δηλ. τήν: $\quad \dfrac{\alpha_1}{\beta_1},\ \dfrac{\alpha_2}{\beta_2},\ \ldots,\ \dfrac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}$

῞Ωστε: $\quad (\alpha_\nu) : (\beta_\nu) = (\alpha_\nu : \beta_\nu),\ \nu \in \mathbf{N}.$

᾿Ονομάζουμε **ἀπόλυτη τιμή** τῆς (α_ν) τήν ἀκολουθία $(|\alpha_\nu|)$, δηλαδή τήν: $\quad |\alpha_1|,\ |\alpha_2|,\ \ldots,\ |\alpha_\nu|,\ \ldots$

῞Ωστε: $\quad |(\alpha_\nu)| = (|\alpha_\nu|),\ \nu \in \mathbf{N}.$

᾿Ονομάζουμε **τετραγωνική ρίζα** μιᾶς ἀκολουθίας (α_ν) μέ $\alpha_\nu \geqq 0\ \forall\ \nu \in \mathbf{N}$, τήν ἀκολ. $(\sqrt{\alpha_\nu})$, δηλ. τήν:

$$\sqrt{\alpha_1},\ \sqrt{\alpha_2},\ \ldots,\ \sqrt{\alpha_\nu},\ \ldots$$

῞Ωστε: $\quad \sqrt{(\alpha_\nu)} = (\sqrt{\alpha_\nu}),\ \nu \in \mathbf{N}.$

᾿Ανάλογα ὁρίζουμε τή ρίζα k-τάξεως $(k > 2)$ μιᾶς ἀκολουθίας. ῎Ετσι ἔχουμε: $\quad \sqrt[k]{(\alpha_\nu)} = (\sqrt[k]{\alpha_\nu}),\ \nu \in \mathbf{N}\quad (k > 2).$

Παρατήρηση. Οἱ παραπάνω ὁρισμοί μποροῦν νά γενικευθοῦν καί γιά τίς περιπτώσεις, καί μόνο γι' αὐτές, πού ἔχουμε πεπερασμένο πλῆθος ἀκολουθιῶν.

§ 41. Ἡ ἔννοια τῆς φραγμένης ἀκολουθίας.— ῎Εστω α_ν, $\nu \in \mathbf{N}$ μία ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν. Δίνουμε τούς ἑπόμενους ὁρισμούς:

Ὁρισμός 1. *Θά λέμε ὅτι ἡ ἀκολουθία* α_ν, $\nu \in \mathbf{N}$ *εἶναι* ***ἄνω φραγμένη,*** *τότε καί μόνο τότε, ἄν ὑπάρχει πραγματικός ἀριθμός s τέτοιος, ὥστε:* $\alpha_\nu \leqq s$ *γιά κάθε* $\nu \in \mathbf{N}$.

Ὁ ἀριθμός s καθώς καί κάθε ἄλλος πραγμ. ἀριθμός πού εἶναι μεγαλύτερος ἀπό τό s λέγεται τότε **ἄνω φράγμα** τῆς ἀκολουθίας α_ν, $\nu \in \mathbf{N}$.

Ὁρισμός 2. *Θά λέμε ὅτι ἡ ἀκολουθία* α_ν, $\nu \in \mathbf{N}$ *εἶναι* ***κάτω φραγμένη,*** *τότε καί μόνο τότε, ἄν ὑπάρχει πραγματικός ἀριθμός σ τέτοιος, ὥστε :* $\sigma \leqq \alpha_\nu$ *γιά κάθε* $\nu \in \mathbf{N}$.

Ὁ ἀριθμός σ καθώς καί κάθε ἄλλος πραγμ. ἀριθμός πού εἶναι μικρότερος ἀπό τό σ, λέγεται τότε **κάτω φράγμα** τῆς ἀκολουθίας α_ν, $\nu \in \mathbf{N}$.

Ὁρισμός 3. *Θά λέμε ὅτι ἡ ἀκολουθία* α_ν, $\nu \in \mathbf{N}$ *εἶναι* ***φραγμένη,*** *τότε καί μόνο τότε, ἄν εἶναι ἄνω καί κάτω φραγμένη,* δηλαδή *ἄν ὑπάρχουν πραγμ. ἀριθμοί σ, s* $(\sigma \leqq s)$ *τέτοιοι, ὥστε:* $\quad \sigma \leqq \alpha_\nu \leqq s$ *γιά κάθε* $\nu \in \mathbf{N}$.

Δηλ. μία ἀκολουθία α_ν, $\nu \in \mathbf{N}$ εἶναι φραγμένη, τότε καί μόνο τότε, ἄν ὑπάρχει κλειστό διάστημα $[\sigma, s]$ στό ὁποῖο ἀνήκουν ὅλοι οἱ ὅροι της. Ἔτσι, π.χ. ἡ ἀκολουθία $\alpha_\nu = \dfrac{1}{\nu}$, $\nu \in \mathbf{N}$ εἶναι φραγμένη, ἐπειδή ἰσχύει:

$$0 \leqq \alpha_\nu = \frac{1}{\nu} \leqq 1 \quad \forall\ \nu \in \mathbf{N}$$

δηλαδή ὅλοι οἱ ὅροι της ἀνήκουν στό κλειστό διάστημα $[0, 1]$.

Ὁρισμός 4. *Θά λέμε ὅτι ἡ ἀκολουθία α_ν, $\nu \in \mathbf{N}$ εἶναι* **ἀπολύτως φραγμένη,** *τότε καί μόνο τότε, ἄν ὑπάρχει (θετικός) πραγματικός ἀριθμός θ τέτοιος, ὥστε:*

$$|\alpha_\nu| \leqq \theta \ \forall\ \nu \in \mathbf{N}.$$

Τό θ λέγεται τότε **ἕνα ἀπόλυτο φράγμα** τῆς α_ν, $\nu \in \mathbf{N}$. Εἶναι φανερό ὅτι, ἄν θ εἶναι ἕνα ἀπόλυτο φράγμα, τότε καί κάθε ἄλλος θετικός ἀριθμός $\varphi > \theta$ εἶναι ἐπίσης ἕνα ἀπόλυτο φράγμα τῆς α_ν, $\nu \in \mathbf{N}$.

ελάχιστο
άνω φράγμα

Συνοψίζοντας τά παραπάνω ἔχουμε:

1. (α_ν) ἄνω φραγμένη $\overset{}{\underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow}}$ $(\exists\ s \in \mathbf{R}, \forall\ \nu \in \mathbf{N}, \alpha_\nu \leqq s)$
2. (α_ν) κάτω φραγμένη $\underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow}$ $(\exists\ \sigma \in \mathbf{R}, \forall\ \nu \in \mathbf{N}, \sigma \leqq \alpha_\nu)$
3. (α_ν) φραγμένη $\underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow}$ $(\exists\ \sigma \in \mathbf{R}, \exists\ s \in \mathbf{R}, \forall\ \nu \in \mathbf{N}, \sigma \leqq \alpha_\nu \leqq s)$
4. (α_ν) ἀπολ. φραγμένη $\underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow}$ $(\exists\ \theta \in \mathbf{R}^+, \forall\ \nu \in \mathbf{N}, |\alpha_\nu| \leqq \theta)$.

και μέγιστο
κάτω φράγμα

Ἰσχύει ἡ ἑξῆς ἰσοδυναμία:

$$(\alpha_\nu)\ \textbf{φραγμένη} \Longleftrightarrow (\alpha_\nu)\ \textbf{ἀπολύτως φραγμένη.}$$

Πράγματι, ἀρκεῖ νά λάβουμε: $\theta = \max(|\sigma|, |s|)$.

Παρατήρηση: Ἐξαιτίας τῆς πιό πάνω ἰσοδυναμίας στά ἑπόμενα οἱ ὅροι **φραγμένη** καί **ἀπολύτως φραγμένη** θά χρησιμοποιοῦνται μέ τήν ἴδια σημασία, χωρίς διάκριση.

Παραδείγματα: 1. Ἡ ἀκολουθία $\alpha_\nu = \dfrac{\eta\mu\nu}{\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots$ εἶναι φραγμένη, ἐπειδή:

$$|\alpha_\nu| = \left|\frac{\eta\mu\nu}{\nu}\right| \leqq \frac{1}{\nu} \leqq 1 \ \forall\ \nu \in \mathbf{N}.$$

2. Ἡ ἀκολουθία $\alpha_\nu = (-1)^\nu \cdot \dfrac{1}{\nu^2}$, $\nu \in \mathbf{N}$ εἶναι φραγμένη, ἐπειδή $|\alpha_\nu| = \dfrac{1}{\nu^2} \leqq 1 \ \forall \nu \in \mathbf{N}$.

3. Ἡ ἀκολουθία $\alpha_\nu = \dfrac{\nu\sigma\upsilon\nu\nu}{\nu+1}$, $\nu = 1, 2 \cdots$ εἶναι φραγμένη, ἐπειδή:

$$|\alpha_\nu| = \frac{|\nu\sigma\upsilon\nu\nu|}{|\nu+1|} \leqq \frac{\nu}{\nu+1} \leqq 1 \ \forall\ \nu \in \mathbf{N}.$$

4. Ἡ ἀκολουθία $\alpha_\nu = \dfrac{\nu^2\sigma\upsilon\nu(3\nu) + \sqrt{\nu}\cdot\eta\mu\nu}{5\nu^2+1}$, $\nu = 1, 2, \ldots$ εἶναι φραγμένη.

Ἀρκεῖ νά ἀποδείξουμε ὅτι ἡ α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ εἶναι ἀπολύτως φραγμένη. Πράγματι, γιά κάθε $\nu \in \mathbf{N}$ ἔχουμε:

$$|\alpha_\nu| = \frac{|\nu^2\sigma\upsilon\nu(3\nu) + \sqrt{\nu}\cdot\eta\mu\nu|}{5\nu^2+1} \leqq \frac{|\nu^2\sigma\upsilon\nu(3\nu)| + |\sqrt{\nu}\cdot\eta\mu\nu|}{5\nu^2+1} \leqq \frac{\nu^2 + \sqrt{\nu}}{5\nu^2+1} \leqq \frac{\nu^2+\nu^2}{5\nu^2+1} < \frac{2\nu^2}{5\nu^2} = \frac{2}{5}$$

δηλαδή: $\quad |\alpha_\nu| < \dfrac{2}{5} \ \forall\ \nu \in \mathbf{N}$.

§ 42. Ἡ ἔννοια τῆς μονότονης ἀκολουθίας.— Ἔστω α_ν, $\nu\in\mathbf{N}$ μία ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν. Δίνουμε τούς ἑπόμενους ὁρισμούς:

Ὁρισμός 1. *Θά λέμε ὅτι ἡ ἀκολουθία* α_ν, $\nu\in\mathbf{N}$ *εἶναι* **αὔξουσα**, συμβολ. $(\alpha_\nu)\uparrow$, *τότε καί μόνο τότε, ἄν ἰσχύει:* $\alpha_\nu\leqq\alpha_{\nu+1}$ *γιά κάθε* $\nu\in\mathbf{N}$.

Ὁρισμός 2. *Θά λέμε ὅτι ἡ ἀκολουθία* α_ν, $\nu\in\mathbf{N}$ *εἶναι* ***γνησίως αὔξουσα***, συμβολ. (α_ν)↥, *τότε καί μόνο τότε, ἄν ἰσχύει:* $\alpha_\nu<\alpha_{\nu+1}$ *γιά κάθε* $\nu\in\mathbf{N}$.

Ὁρισμός 3. *Θά λέμε ὅτι ἡ ἀκολουθία* α_ν, $\nu\in\mathbf{N}$ *εἶναι* **φθίνουσα**, συμβολ. $(\alpha_\nu)\downarrow$, *τότε καί μόνο τότε, ἄν ἰσχύει:* $\alpha_\nu\geqq\alpha_{\nu+1}$ *γιά κάθε* $\nu\in\mathbf{N}$.

Ὁρισμός 4. *Θά λέμε ὅτι ἡ ἀκολουθία* α_ν, $\nu\in\mathbf{N}$ *εἶναι* ***γνησίως φθίνουσα***, συμβολ. (α_ν)↧, *τότε καί μόνο τότε, ἄν ἰσχύει:* $\alpha_\nu>\alpha_{\nu+1}$ *γιά κάθε* $\nu\in\mathbf{N}$.

Ὁρισμός 5. *Θά λέμε ὅτι ἡ ἀκολουθία* α_ν, $\nu\in\mathbf{N}$ *εἶναι* **σταθερή**, *τότε καί μόνο τότε, ἄν ἰσχύει:* $\alpha_{\nu+1}=\alpha_\nu$ *γιά κάθε* $\nu\in\mathbf{N}$.

Μία ἀκολουθία α_ν, $\nu\in\mathbf{N}$ πού ἀνήκει σέ μία ἀπό τίς παραπάνω κατηγορίες λέγεται **μονότονη ἀκολουθία.** Εἰδικότερα, ἄν ἡ ἀκολουθία εἶναι γνησίως αὔξουσα ἤ γνησίως φθίνουσα, τότε λέγεται **γνησίως μονότονη ἀκολουθία.**

Παρατηρήσεις. 1. Κάθε γνησίως μονότονη ἀκολουθία εἶναι καί μονότονη, δέν ἰσχύει ὅμως καί τό ἀντίστροφο (γιατί;).

2. Ἄν $(\alpha_\nu)\uparrow$, τότε $\alpha_\nu\geqq\alpha_1$ γιά κάθε $\nu\in\mathbf{N}$, δηλ. τότε ἡ ἀκολουθία (α_ν) εἶναι κάτω φραγμένη μέ ἕνα κάτω φράγμα τόν πρῶτο ὅρο της. Ὅμοια, ἄν $(\alpha_\nu)\downarrow$, τότε $\alpha_\nu\leqq\alpha_1$ γιά κάθε $\nu\in\mathbf{N}$, δηλ. τότε ἡ (α_ν) εἶναι ἄνω φραγμένη μέ ἕνα ἄνω φράγμα τόν πρῶτο ὅρο της.

3. Γιά νά καθορίσουμε τό εἶδος μονοτονίας μιᾶς ἀκολουθίας (α_ν), τίς πιό πολλές φορές, ἐργαζόμαστε μέ μία ἀπό τίς ἑπόμενες μεθόδους:

(α) Ἐξετάζουμε τό πρόσημο τῆς διαφορᾶς: $\Delta_\nu=\alpha_{\nu+1}-\alpha_\nu$.

(β) Ἄν οἱ ὅροι τῆς (α_ν) διατηροῦν πρόσημο, τότε, συνήθως, συγκρίνουμε τό λόγο $\dfrac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}$ μέ τή μονάδα. Ἀπό τή σύγκριση αὐτή ἐξάγουμε συμπεράσματα γιά τή μονοτονία τῆς ἀκολουθίας.

(γ) Βρίσκουμε μεταξύ δύο ἤ τριῶν πρώτων ὅρων τῆς ἀκολουθίας τή σχέση, ἀπό τήν ὁποία ἔχουμε μιά ἔνδειξη μονοτονίας καί ἔπειτα, μέ τή μέθοδο τῆς τέλειας ἐπαγωγῆς, ἀποδεικνύουμε τήν ἀνισοτική σχέση, ἡ ὁποία θά καθορίσει τελικά τό εἶδος τῆς μονοτονίας τῆς (α_ν).

Παραδείγματα: 1. Ἡ ἀκολουθία $\alpha_\nu=\dfrac{1}{\nu}$, $\nu=1,2,\ldots$ εἶναι γνησίως φθίνουσα, ἐπειδή:

$$\alpha_{\nu+1}=\frac{1}{\nu+1}<\frac{1}{\nu}=\alpha_\nu\ \forall\ \nu\in\mathbf{N}.$$

2. Ἡ ἀκολουθία $\alpha_\nu=\nu^2$, $\nu=1,2,\ldots$ εἶναι γνησίως αὔξουσα, ἐπειδή:

$$\alpha_{\nu+1}=(\nu+1)^2>\nu^2=\alpha_\nu,\ \forall\ \nu\in\mathbf{N}.$$

3. Ἡ ἀκολουθία $\alpha_\nu=\dfrac{\nu}{\nu+1}$, $\nu=1,2,\ldots$ εἶναι γνησίως αὔξουσα, ἐπειδή ἄν σχηματίσουμε τή διαφορά $\Delta_\nu=\alpha_{\nu+1}-\alpha_\nu$ ἔχουμε:

$$\Delta_\nu=\alpha_{\nu+1}-\alpha_\nu=\frac{\nu+1}{\nu+2}-\frac{\nu}{\nu+1}=\frac{1}{(\nu+1)\,(\nu+2)}>0\ \forall\ \nu\in\mathbf{N},$$

δηλαδή:

$$\alpha_{\nu+1}>\alpha_\nu\ \forall\ \nu\in\mathbf{N}.$$

★ 4. Νά ἐξετάσετε ὡς πρός τή μονοτονία τήν ἀκολουθία πού ὁρίζεται ἀπό τήν ἀναδρομική σχέση:

$$\alpha_{\nu+1}=\alpha+\alpha_\nu^2\quad\textbf{καί}\quad\alpha_1=\alpha>0.$$

$\alpha_1 > 0 \quad \alpha_1 = \alpha > 0.$

Λύση: Πρῶτα–πρῶτα μέ ἐπαγωγή ἀποδεικνύουμε ὅτι: $\alpha_\nu > 0 \ \forall \ \nu \in \mathbf{N}$. Ἐξάλλου ἀμέσως βλέπουμε ὅτι: $\alpha_1 = \alpha < \alpha + \alpha_1^2$, δηλ. $\alpha_1 < \alpha_2$. Ἄρα, ἄν ἡ ἀκολουθία (α_ν) εἶναι μονότονη, θά πρέπει νά εἶναι γνησίως αὔξουσα. Ἔστω λοιπόν ὅτι: $\alpha_k < \alpha_{k+1}$, τότε $\alpha_k^2 < \alpha_{k+1}^2$, ὁπότε $\alpha + \alpha_k^2 < \alpha + \alpha_{k+1}^2$, δηλαδή $\alpha_{k+1} < \alpha_{k+2}$. Ἄρα $(\alpha_\nu) \uparrow$

Γιά τίς μονότονες ἀκολουθίες φυσικῶν ἀριθμῶν ἰσχύει ἡ ἑξῆς χρήσιμη πρόταση:

★ **Πρόταση. Ἄν k_ν, $\nu \in \mathbf{N}$ εἶναι μία γνησίως αὔξουσα ἀκολουθία φυσικῶν ἀριθμῶν, τότε ἰσχύει: $k_\nu \geqq \nu$ γιά κάθε $\nu \in \mathbf{N}$.**

Ἀπόδειξη. *(Μέ ἐπαγωγή).* Γιά $\nu = 1$ ἰσχύει, ἐπειδή $k_1 \in \mathbf{N}$, ἄρα $k_1 \geqq 1$. Ἔστω ὅτι ἰσχύει γιά $\nu = \mu$ $(\mu \in \mathbf{N})$, δηλ. ὅτι: $k_\mu \geqq \mu$. Τότε $k_{\mu+1} > k_\mu \geqq \mu$, ἄρα $k_{\mu+1} > \mu$. Ἀπό τήν τελευταία ἀνισότητα, ἐπειδή οἱ $k_{\mu+1}$ καί μ εἶναι φυσικοί ἀριθμοί, ἕπεται ὅτι: $k_{\mu+1} \geqq \mu + 1$.

Ὥστε: $k_\mu \geqq \mu \Longrightarrow k_{\mu+1} \geqq \mu + 1$. Ἄρα $k_\nu \geqq \nu$ γιά κάθε $\nu \in \mathbf{N}$.

§ 43. Ἡ ἔννοια τῆς ὑπακολουθίας.— Ἔστω α_ν, $\nu \in \mathbf{N}$ μία ἀκολουθία πραγμ. ἀριθμῶν. Ἔστω ἀκόμη μία γνησίως αὔξουσα ἀκολουθία φυσικῶν ἀριθμῶν (k_ν), δηλαδή:

$$k_1 < k_2 < \cdots < k_\nu < k_{\nu+1} < \cdots$$

$\alpha_{k_\nu} = \alpha(k_\nu)$

Τότε ὁρίζεται μία ἀκολουθία (β_ν) μέ τύπο: $\beta_\nu = \alpha_{k_\nu} \ \forall \ \nu \in \mathbf{N}$, δηλαδή ἡ ἀκολουθία:

$$\alpha_{k_1}, \quad \alpha_{k_2}, \quad \ldots, \quad \alpha_{k_\nu}, \ \ldots \tag{1}$$

Ἡ ἀκολουθία (1) λέγεται **ὑπακολουθία** τῆς (α_ν).

Παραδείγματα: Ἔστω ἡ ἀκολουθία α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ καί ἡ γνησίως αὔξουσα ἀκολουθία τῶν ἄρτιων φυσικῶν ἀριθμῶν $k_\nu = 2\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots$. Τότε ὁρίζεται ἡ ἀκολουθία $\alpha_{k_\nu} = \alpha_{2\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots$, δηλ. ἡ ἀκολουθία: $\alpha_2, \alpha_4, \alpha_6, \ldots, \alpha_{2\nu}, \ldots$, ἡ ὁποία ἀποτελεῖται ἀπό ἐκείνους τούς ὅρους τῆς α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ πού ἔχουν ἄρτιο δείκτη. Ἡ ἀκολουθία αὐτή εἶναι μία ὑπακολουθία τῆς (α_ν) καί λέγεται **ὑπακολουθία τῶν ἄρτιων δεικτῶν**. Ὅμοια ὁρίζεται καί ἡ **ὑπακολουθία τῶν περιττῶν δεικτῶν** τῆς α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$, δηλαδή ἡ ἀκολουθία:

$$\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_{2\nu-1}, \ldots$$

Ἔτσι, π.χ. ἄν $\alpha_\nu = (-1)^\nu \dfrac{1}{\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots$, τότε ἡ ὑπακολουθία τῶν ἄρτιων δεικτῶν

εἶναι ἡ: $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{6}, \ldots, \dfrac{1}{2\nu}, \ldots$

καί τῶν περιττῶν δεικτῶν εἶναι ἡ: $-1, -\dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{5}, \ldots, -\dfrac{1}{2\nu-1}, \ldots$

Ἐπίσης μία ἄλλη ὑπακολουθία τῆς $\alpha_\nu = (-1)^\nu \cdot \dfrac{1}{\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots$ εἶναι ἡ ἀκολουθία:

$\alpha_{k_\nu} = \alpha_{2^\nu} = \dfrac{1}{2^\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots$ δηλ. ἡ $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2^2}, \dfrac{1}{2^3}, \ldots, \dfrac{1}{2^\nu}, \ldots$

Προφανῶς μία ἀκολουθία ἔχει, γενικά, ἄπειρες ὑπακολουθίες.

Ἀξιόλογη παρατήρηση. Ἐπειδή, σύμφωνα μέ τήν παραπάνω πρόταση, ἰσχύει: $k_\nu \geqq \nu \ \forall \ \nu \in \mathbf{N}$ θά ἔχουμε: $\nu > \nu_0 \Longrightarrow k_\nu > \nu_0$.

★ **§ 44. Ἡ ἔννοια: ἀκέραιο μέρος πραγματικοῦ ἀριθμοῦ.** — Ἔστω x ἕνας πραγματικός ἀριθμός. Δίνουμε τόν ἑξῆς ὁρισμό:

Ὁρισμός. *Ὀνομάζουμε* **ἀκέραιο μέρος τοῦ x** *καί τό συμβολίζουμε μέ [x], τόν πιό μεγάλο ἀκέραιο ἀριθμό πού δέν ὑπερβαίνει τό x.*

Ἔτσι ἔχουμε:

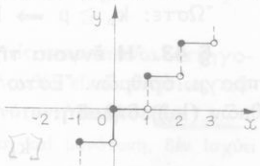
$$[3{,}95]=3,\ [-2]=-2,\ [0{,}14]=0,\ [-3{,}2]=-4,\ [\sqrt{3}]=1,\ \left[\frac{5}{2}\right]=2\cdot$$

Τό ἀκέραιο μέρος ἑνός πραγμ. ἀριθμοῦ x ἀποδεικνύεται ὅτι εἶναι μοναδικό. Ἀκριβέστερα ἀποδεικνύεται στά Μαθηματικά ἡ ἑξῆς:

Πρόταση. *(Θεώρημα τοῦ ἀκέραιου μέρους).*—**Γιά κάθε πραγματικό ἀριθμό x ὑπάρχει ἕνας καί μόνο ἕνας ἀκέραιος α μέ : $\alpha \leqq x < \alpha + 1$.**

Ἡ παραπάνω πρόταση μᾶς λέγει ὅτι: *γιά κάθε x ἀπό τό* **R** *ὑπάρχει ἕνα καί μόνο ἕνα διάστημα τῆς μορφῆς [α, α + 1) μέ α ἀκέραιο ἀριθμό, στό ὁποῖο ἀνήκει ὁ x.*

Ὁρίζεται συνεπῶς ἡ ἀπεικόνιση:



Σχ. 4

$$[\ ]:\ \mathbf{R}\to\mathbf{Z}:\ x \xrightarrow{[\ ]} [x]=\begin{cases}\nu, \text{ ἄν } \nu\leqq x<\nu+1\\ -\nu, \text{ ἄν } -\nu\leqq x<-\nu+1,\end{cases}$$

ὅπου ν φυσικός ἀριθμός ἤ τό μηδέν (βλ. σχ. 4).

Ἀπό τά προηγούμενα ἔχουμε, λοιπόν, ὅτι:

$$\boxed{\forall\ x\in\mathbf{R},\quad [x]\leqq x<[x]+1} \qquad (1)$$

Ἄμεσες συνέπειες τῆς (1) εἶναι οἱ ἑξῆς ἰδιότητες τοῦ ἀκέραιου μέρους:

α) $x=[x]+\theta,\ \forall x\in\mathbf{R}$ καί $0\leqq\theta<1$. **β)** $[x+k]=[x]+k,\ \forall x\in\mathbf{R},\ \forall k\in\mathbf{Z}$.

Πράγματι, ἀπό τήν (1) ἔχουμε: $0\leqq x-[x]<1$ καί ἄν θέσουμε $x-[x]=\theta$, τότε εἶναι: $x=[x]+\theta$ μέ $0\leqq\theta<1$. Γιά νά ἀποδείξουμε τή β) παρατηροῦμε ὅτι: ἐπειδή $x=[x]+\theta,\ 0\leqq\theta<1$ ἔχουμε: $x+k=[x]+k+\theta,\ 0\leqq\theta<1$ καί συνεπῶς $[x+k]=[([x]+k)+\theta]=[x]+k$, ἀφοῦ τό $([x]+k)\in\mathbf{Z}$.

Σημείωση. Ἀπό τήν (1) ἔχουμε: $\forall\ x\in\mathbf{R},\ x-1<[x]\leqq x$.

§ 45. Ἡ ἔννοια: ἡ συνθήκη p(ν), ν∈N ἰσχύει τελικά γιά κάθε ν∈N.— Ἔστω p(ν) μία συνθήκη στό **N** (βλ. σχετ. Κεφ. I, § 9). Συμφωνοῦμε νά λέμε στά ἑπόμενα ὅτι:

Ἡ συνθήκη p(ν), ν ∈ N **ἰσχύει τελικά γιά κάθε ν∈N,** *τότε καί μόνο τότε, ἄν ὑπάρχει δείκτης $\nu_0\in\mathbf{N}$, δηλ. ἄν ὑπάρχει ἕνας φυσικός ἀριθμός ν_0 τέτοιος, ὥστε ἡ συνθήκη p(ν) εἶναι μία ταυτότητα στό σύνολο:* $\mathbf{N}_{\nu_0}=\{\nu\in\mathbf{N}:\ \nu\geqq\nu_0\}$. Πιό σύντομα: *ἄν γιά κάθε $\nu\geqq\nu_0$ ἡ συνθήκη p(ν) εἶναι μία ἀληθής πρόταση.*

Εἰδικότερα θά λέμε ὅτι ἡ συνθήκη ἤ ἡ ἰδιότητα p πού ἀναφέρεται σέ μία ἀκολουθία (α_ν). ἰσχύει *τελικά γιά ὅλους τούς δείκτες*, ἰσοδύναμα: *τελικά ὅλοι οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας (α_ν) πληροῦν τή συνθήκη p*, τότε καί μόνο τότε, ἄν ὑπάρχει ἕνας φυσικός ἀριθμός ν_0 τέτοιος, ὥστε ἡ ἀκολουθία $\alpha_{\nu_0+\nu}$, $\nu=0, 1, 2, \cdots,$

δηλαδή ἡ: $\alpha_{\nu_0}, \alpha_{\nu_0+1}, \cdots, \alpha_{\nu_0+\nu}, \ldots$ νά ἔχει τήν ἰδιότητα p. Ἔτσι, ἄν π.χ. $\alpha_\nu = \frac{1}{\nu}$, $\nu = 1, 2, \cdots$ εἶναι μία ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν καί $p(\nu)$ ἡ συνθήκη: $\alpha_\nu < \frac{2}{10^3}$, τότε διαπιστώνουμε ἀμέσως ὅτι ἡ συνθήκη $p(\nu)$ ἰσχύει *τελικά γιά ὅλους τούς δεῖκτες*, δηλαδή *τελικά ὅλοι οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας* $\alpha_\nu = \frac{1}{\nu}, \nu = 1, 2, \cdots$ *πληροῦν τή συνθήκη:* $\alpha_\nu < \frac{2}{10^3}$. Πράγματι, ἀρκεῖ νά λάβουμε ὡς $\nu_0 = 501$ (γιατί;), ὁπότε ἔχουμε: γιά κάθε $\nu \in \mathbf{N}$ μέ $\nu \geqq \nu_0 = 501$: $\alpha_\nu = \frac{1}{\nu} \leqq \frac{1}{\nu_0} = \frac{1}{501} < \frac{1}{500} = \frac{2}{1000} = \frac{2}{10^3}$. Ἡ ἀκολουθία λοιπόν $\alpha_{501+\nu}$, $\nu = 0, 1, 2, \cdots$ ἔχει τήν ἰδιότητα: ὅλοι οἱ ὅροι της εἶναι μικρότεροι ἀπό τό $\frac{2}{10^3}$. Συνεπῶς ἡ ἀκολουθία $\alpha_\nu = \frac{1}{\nu}$, $\nu = 1, 2, \cdots$ ἔχει *τελικά* ὅλους τούς ὅρους της μικρότερους ἀπό τό $\frac{2}{10^3}$. Αὐτό μέ ἁπλά λόγια σημαίνει ὅτι: *ἄν ἐξαιρέσουμε ἕνα πεπερασμένο πλῆθος ὅρων τῆς ἀκολουθίας* $\alpha_\nu = \frac{1}{\nu}, \nu = 1, 2, \cdots$ *ἀπό τήν ἀρχή, δηλαδή τούς:* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{500}$ **ἀπό ἐκεῖ καί πέρα** *ὅλοι οἱ ὅροι της εἶναι μικρότεροι ἀπό τό* $\frac{2}{10^3}$.

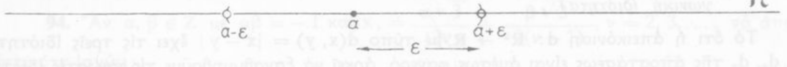
Ἀξιοσημείωτες παρατηρήσεις. 1) Ἄν μία συνθήκη $p(\nu)$, $\nu \in \mathbf{N}$ ἰσχύει τελικά γιά κάθε $\nu \in \mathbf{N}$, τότε ὑπάρχει ἕνα π ε π ε ρ α σ μ έ ν ο σύνολο δεικτῶν, στό ὁποῖο ἡ $p(\nu)$, $\nu \in \mathbf{N}$ **δέν** ἰσχύει. Ἔτσι στό προηγούμενο παράδειγμα, ἄν $\nu \in \{1, 2, 3, \ldots, 500\}$, τότε ἡ :

$p(\nu)$: $\alpha_\nu = \frac{1}{\nu} < \frac{2}{10^3}$ **δέν** ἰσχύει.

2) Ἄν μία συνθήκη $p(\nu)$, $\nu \in \mathbf{N}$ εἶναι ταυτότητα στό $\mathbf{N}$, δηλ. ἰσχύει γιά κάθε $\nu \in \mathbf{N}$, τότε, προφανῶς, ἰσχύει καί τελικά γιά κάθε $\nu \in \mathbf{N}$· τό ἀντίστροφο ὅμως δέν εἶναι ἀληθές.

§ 46. Ἡ ἔννοια τῆς περιοχῆς ἤ γειτονιᾶς σημείου τοῦ R. —

Ἔστω ἕνας πραγματικός ἀριθμός α ($\alpha \in \mathbf{R}$) καί ἕνας θετικός ἀριθμός ε ($\varepsilon > 0$)· τότε ὁρίζεται τό ἀνοικτό διάστημα * τῆς μορφῆς : $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$, τό ὁποῖο λέγεται **περιοχή ἤ γειτονιά τοῦ σημείου α μέ κέντρο τό α καί ἀκτίνα ε** (βλ. ἀμέσως παρακάτω σχῆμα):



Γενικότερα: **περιοχή ἤ γειτονιά ἑνός σημείου α** *ὀνομάζεται κάθε ἀνοικτό διά-*

* Ὑπενθυμίζουμε (βλ. Κεφ. Ι, § 7) ὅτι **ἀνοικτό διάστημα** (α, β) τῆς εὐθείας τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν εἶναι τό σύνολο: $(\alpha, \beta) = \{x \in \mathbf{R}: \alpha < x < \beta\}$.

στημα (γ, δ), τό ὁποῖο περιέχει τό σημεῖο α, δηλαδή $\alpha \in (\gamma, \delta)$. Ἔτσι π.χ. τό διάστημα $(1, 2)$ εἶναι περιοχή τοῦ $\sqrt{2}$, ἐπειδή $\sqrt{2} \in (1, 2)$.

Ἡ περιοχή μέ κέντρο τό σημεῖο α καί μέ ἀκτίνα ε θά συμβολίζεται μέ $\pi(\alpha, \varepsilon)$.

Ὥστε: $\pi(\alpha, \varepsilon) \equiv (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon) = \{x \in \mathbf{R}\colon \alpha - \varepsilon < x < \alpha + \varepsilon\}$.

Ἄν $\alpha = 0$, τότε $\pi(0, \varepsilon) \equiv (-\varepsilon, +\varepsilon) = \{x \in \mathbf{R}\colon -\varepsilon < x < \varepsilon\}$ καί λέγεται **περιοχή** ἤ **γειτονιά τοῦ μηδενός.**

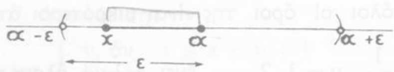
Μία πολύ χρήσιμη πρόταση εἶναι ἡ ἑξῆς: $(\forall x)\ \mathbf{x \in \pi(\alpha, \varepsilon) \Longleftrightarrow |x - \alpha| < \varepsilon}$.

Πράγματι·

$(\forall x)\ x \in \pi(\alpha, \varepsilon) \Longleftrightarrow x \in (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon) \Longleftrightarrow \alpha - \varepsilon < x < \alpha + \varepsilon \Longleftrightarrow |x - \alpha| < \varepsilon$.

Σημ. Κάνετε ἀπολύτως κτῆμα σας τίς παραπάνω ἰσοδυναμίες. Θά τίς χρησιμοποιοῦμε πολύ συχνά ἀπό ἐδῶ καί πέρα. Γιά νά βεβαιωθεῖτε προσέξτε καί τήν ἑπόμενη παράσταση:

|x−α| < |α−(α−ε)|
|x−α| < |±ε| = ε



Εἰδικά γιά α=0 ἔχουμε: $(\forall x)\ x \in \pi(0, \varepsilon) \Longleftrightarrow x \in (-\varepsilon, +\varepsilon) \Longleftrightarrow -\varepsilon < x < \varepsilon \Longleftrightarrow |x| < \varepsilon$.

Σημαντική παρατήρηση. Ἔχοντας τώρα ὑπόψη καί τήν προηγούμενη παράγραφο, θά λέμε ὅτι: **τελικά ὅλοι οἱ ὅροι** *μιᾶς ἀκολουθίας α_ν, $\nu = 1, 2, \cdots$ βρίσκονται στήν περιοχή $\pi(\alpha, \varepsilon)$ ἑνός σημείου α, τότε καί μόνο τότε, ἄν ὑπάρχει δείκτης $\nu_0 \in \mathbf{N}$ τέτοιος, ὥστε: γιά κάθε $\nu \geqq \nu_0$ ἰσχύει: $\alpha_\nu \in \pi(\alpha, \varepsilon)$, δηλ.* $|\alpha_\nu - \alpha| < \varepsilon$. Αὐτό, σύμφωνα μέ τήν πρώτη παρατήρηση τῆς § 45, εἶναι πάλι ἰσοδύναμο μέ: «*ὑπάρχει ἕνα π ε π ε ρ α σ μ έ ν ο πλῆθος* ὅρων τῆς *ἀκολουθίας α_ν, $\nu = 1, 2, \cdots$ πού βρίσκονται* **ἐκτός** *τῆς περιοχῆς* $\pi(\alpha, \varepsilon)$, δηλ. ἐκτός τοῦ διαστήματος $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$.

Σημείωση. Ὅπως μάθαμε καί στό προηγούμενο Κεφάλαιο, ἄν $x \in \mathbf{R}$, $y \in \mathbf{R}$, τότε ἡ $|x - y|$ παριστάνει **τήν ἀπόσταση** d τοῦ πραγματικοῦ ἀριθμοῦ x ἀπό τόν πραγμ. ἀριθμό y. Ὁρίζεται ἔτσι ἡ ἀκόλουθη ἀπεικόνιση:

$$d\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}\colon (x, y) \xrightarrow{d} d(x, y) \underset{\text{ορσ}}{=\!=} |x - y|$$

μέ τίς παρακάτω ἰδιότητες:

$\mathbf{d_1}$: $d(x, y) \geqq 0\ \forall\ (x, y) \in \mathbf{R}^2$ καί $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$ (δηλ. *ἡ ἀπόσταση στό* $\mathbf{R}$ *εἶναι μή ἀρνητική).*

$\mathbf{d_2}$: $d(x, y) = d(y, x)\ \forall\ (x, y) \in \mathbf{R}^2$ (δηλ. *ἡ ἀπόσταση στό* $\mathbf{R}$ *εἶναι συμμετρική).*

$\mathbf{d_3}$: $d(x, y) \leqq d(x, z) + d(z, y)\ \forall\ x, y, z \in \mathbf{R}$ (δηλ. *ἡ ἀπόσταση στό* $\mathbf{R}$ *ἔχει τήν τριγωνική ἰδιότητα).*

Τό ὅτι ἡ ἀπεικόνιση $d\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ μέ τύπο $d(x, y) = |x - y|$ ἔχει τίς τρεῖς ἰδιότητες d_1, d_2, d_3 τῆς ἀποστάσεως εἶναι ἀμέσως φανερό, ἀρκεῖ νά ξαναθυμηθοῦμε τίς γνωστές ἰδιότητες τῆς ἀπόλυτης τιμῆς. Ἔτσι, π.χ., γιά τήν d_3 ἔχουμε:

$d(x, y) = |x - y| = |(x - z) + (z - y)| \leqq |x - z| + |z - y| = d(x, z) + d(z, y)$.

Ἔχοντας τώρα ὑπόψη τήν παραπάνω σημείωση καί τήν προηγούμενη παρατήρηση διατυπώνουμε τήν ἑξῆς χρήσιμη πρόταση:

Πρόταση. $\alpha_\nu \in \pi(\alpha, \varepsilon) \Longleftrightarrow d(\alpha_\nu, \alpha) < \varepsilon$ **γιά κάθε** $\nu \in \mathbf{N}$ **μέ** $\nu \geq \nu_0$.

Ἡ παραπάνω πρόταση μέ λόγια διατυπώνεται ὡς ἑξῆς: *τελικά ὅλοι οἱ ὅροι μιᾶς ἀκολουθίας α_ν, $\nu \in \mathbf{N}$ βρίσκονται στήν περιοχή $\pi(\alpha, \varepsilon)$ ἑνός σημείου α, τότε καί μόνο τότε, ἄν οἱ ὅροι της πού ἔχουν δείκτη $\nu \geq \nu_0$ ἀπέχουν ἀπό τό κέντρο α ἀπόσταση μικρότερη ἀπό τήν ἀκτίνα ε.*

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάδα Α΄. 88. Νά γράψετε τούς πέντε πρώτους ὅρους τῶν ἀκολουθιῶν:

α) $1 + \dfrac{1}{\nu}, \nu = 1, 2, \ldots$, β) $\dfrac{2\nu + 1}{\nu^2}, \nu = 1, 2, \ldots$, γ) $\dfrac{\nu}{\sqrt{1+\nu^2}}, \nu = 1, 2, \ldots$,

δ) $\alpha + (\nu-1)\omega, \nu = 1, 2, \ldots$, ε) $\alpha \cdot \omega^{\nu-1}, \nu = 1, 2, \ldots$, στ) $\dfrac{(-1)^\nu}{\nu} + \dfrac{\nu}{2\nu+1}, \nu = 1, 2, \ldots$

ζ) $(-1)^\nu \cdot \dfrac{\nu+1}{\nu}, \nu = 1, 2, \ldots$, η) $\dfrac{(-1)^{\nu-1}}{2\nu - 1}, \nu = 1, 2, \ldots$

89. Νά γράψετε τούς δέκα πρώτους ὅρους τῆς ἀκολουθίας πού ὁρίζεται ἀπό τήν ἀναδρομική σχέση:
$$\alpha_{\nu+1} = 1 + \frac{1}{\alpha_\nu} \quad \text{καί} \quad \alpha_1 = -\frac{13}{21}.$$

Τί παρατηρεῖτε;

90. Νά ἀποδείξετε ὅτι οἱ ἀκολουθίες α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$, πού ὁρίζονται ἀπό τούς παρακάτω τύπους, εἶναι μονότονες καί φραγμένες:

1) $\alpha_\nu = \dfrac{1}{\nu^2}$, 2) $\alpha_\nu = \dfrac{\nu+1}{\nu}$, 3) $\alpha_\nu = \dfrac{2\nu}{\nu^2+1}$, 4) $\alpha_\nu = \dfrac{2\nu - 1}{\nu + 1}$.

* **Ὁμάδα Β΄. 91.** Ποιές ἀπό τίς ἑπόμενες ἀκολουθίες α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$, πού ὁρίζονται ἀπό τούς παρακάτω τύπους, εἶναι φραγμένες καί ποιές δέν εἶναι:

1) $\alpha_\nu = \dfrac{\nu \cdot \eta\mu 3\nu}{\nu^2+1}$, 2) $\alpha_\nu = \dfrac{1}{\nu}\eta\mu\dfrac{\pi\nu}{2}$, 3) $\alpha_\nu = \dfrac{\nu^2+1}{2\nu}$, όχι 4) $\alpha_\nu = \nu . 3^{-\nu}$,

5) $\alpha_\nu = \dfrac{2\nu+5}{3^\nu}$, 6) $\alpha_\nu = \dfrac{\nu^2}{\nu + 2\sigma\upsilon\nu^2\nu}$, 7) $\alpha_\nu = \dfrac{\eta\mu\nu + \sigma\upsilon\nu^3 5\nu}{\nu^3 . \sqrt{\nu}}$.

92. Στήν προηγούμενη ἄσκηση ποιές ἀκολουθίες εἶναι μονότονες καί ποιές δέν εἶναι. Γιά τίς μονότονες νά καθορίσετε τό εἶδος τῆς μονοτονίας τους.

93. Νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ ἀκολουθία $\alpha_\nu = \left(1 + \dfrac{1}{\nu}\right)^\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots$ εἶναι γνησίως αὔξουσα, ἐνῶ ἡ ἀκολουθία $\beta_\nu = \left(1 + \dfrac{1}{\nu}\right)^{\nu+1}$, $\nu = 1, 2, \ldots$ εἶναι γνησίως φθίνουσα.

Ὑπόδειξη. Νά ἀποδείξετε ὅτι ἰσχύει $\alpha_\nu > \alpha_{\nu-1}$ (ἀντίστοιχα: $\beta_{\nu-1} > \beta_\nu$) γιά κάθε $\nu = 2, 3, \ldots$, ἀφοῦ ἐφαρμόσετε κατάλληλα καί τή γνωστή ἀνισότητα τοῦ Bernoulli (βλ. ἐφαρμογές, Κεφ. II).

94. Ἄν $\alpha, \beta \in \mathbf{Z}$ μέ $\alpha\beta = -1$ καί $x_\nu = \dfrac{\alpha\sqrt{3}}{2\nu} + \dfrac{\beta\sqrt{3}}{2(\nu-1)}$, $\nu = 2, 3, \ldots$ νά ἀποδείξετε ὅτι ἰσχύει:
$$|x_\nu| \leq \frac{\sqrt{3}}{40} \text{ γιά κάθε } \nu \geq 5,$$

δηλαδή ἡ ἀκολουθία x_ν, $\nu = 2, 3, \cdots$ εἶναι **τελικά** φραγμένη.

§ 47. Ἡ ἔννοια τοῦ ὁρίου ἀκολουθίας.—Ἄς θεωρήσουμε τήν ἀκολουθία α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ μέ γενικό ὅρο: $\alpha_\nu = \dfrac{\nu+1}{\nu}$, δηλαδή τήν ἀκολουθία:

$$2,\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{3},\ \frac{5}{4}, \ldots, \frac{\nu+1}{\nu}, \ldots \tag{1}$$

Γιά τήν ἀκολουθία αὐτή παρατηροῦμε ὅτι ἰσχύει τό ἑξῆς:

Ἄν μᾶς δοθεῖ ἕνας *θετικός ἀριθμός*, π.χ. ὁ $0{,}2\left(=\dfrac{2}{10}\right)$ καί θεωρήσουμε τήν ἀπόσταση τοῦ α_ν ἀπό τό 1, δηλ. τήν $|\alpha_\nu - 1| = \left|\dfrac{\nu+1}{\nu} - 1\right| = \dfrac{1}{\nu}$, τότε ἔχουμε:

$$|\alpha_\nu - 1| < 0{,}2 \iff \frac{1}{\nu} < \frac{2}{10} \iff \nu > 5,$$

δηλαδή: ἡ ἀπόσταση $d(\alpha_\nu, 1) \equiv |\alpha_\nu - 1| < 0{,}2$ γιά κάθε $\nu = 6, 7, 8, \ldots$

ἤ ἀλλιῶς: $\alpha_\nu \in \left(1 - \dfrac{2}{10},\ 1 + \dfrac{2}{10}\right)$ γιά κάθε $\nu \geqq 6$,

εἴτε ἀκόμη: $1 - \dfrac{2}{10} < \alpha_\nu < 1 + \dfrac{2}{10}$ γιά κάθε $\nu \geqq 6$.

Ἄν τώρα μᾶς δοθεῖ ἕνας ἄλλος θετικός ἀριθμός, π.χ. ὁ $0{,}05\left(=\dfrac{5}{100}\right)$ καί θεωρήσουμε καί πάλι τήν ἀπόσταση τοῦ α_ν ἀπό τό 1, θά ἔχουμε:

$$|\alpha_\nu - 1| < 0{,}05 \iff \frac{1}{\nu} < \frac{5}{100} \iff \nu > 20$$

δηλαδή: $1 - \dfrac{5}{100} < \alpha_\nu < 1 + \dfrac{5}{100}$ γιά κάθε $\nu \geqq 21$.

Σέ ἀνάλογο συμπέρασμα θά καταλήξουμε ἄν λάβουμε, π.χ. 0,75, ἤ 2,25 καί γενικά ἕναν ὁποιοδήποτε θετικό ἀριθμό. Ἀκριβέστερα: ἄν ἀντί τοῦ 0,2 ἤ τοῦ 0,05 κτλ. πάρουμε *ἕναν ὁποιοδήποτε ἀριθμό* $\varepsilon > 0$, τότε θά καταλήξουμε σέ ἀνάλογο συμπέρασμα, δηλ. ἰσχύει τό ἑξῆς: *«ὑπάρχει δείκτης ν_0 τέτοιος, ὥστε νά ἰσχύει: $|\alpha_\nu - 1| < \varepsilon$ γιά κάθε $\nu \geqq \nu_0$»*.

Πράγματι, ἔχουμε: $|\alpha_\nu - 1| = \dfrac{1}{\nu} < \varepsilon \iff \nu > \dfrac{1}{\varepsilon}$

Ἀρκεῖ λοιπόν ὡς ν_0 νά λάβουμε ἕναν ὁποιοδήποτε φυσικό ἀριθμό μεγαλύτερο ἀπό τόν $\dfrac{1}{\varepsilon}$ (τέτοιοι φυσικοί ἀριθμοί ὑπάρχουν,

π.χ. ὁ $\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]^* + 1,\ \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 2,\ \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 3$, κτλ.).

---

* Ὑπενθυμίζουμε ὅτι $[x]$ παριστάνει τό **ἀκέραιο μέρος** τοῦ x. Ἰσχύει: $[x] \leqq x < [x] + 1$.

Παρατηροῦμε τώρα ὅτι σέ κάθε ἐκλογή τοῦ θετικοῦ ἀριθμοῦ ε, ὁ δείκτης ν_0, ἀπό τόν ὁποῖο καί μετά οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας (1) πληροῦν τήν $|\alpha_\nu - 1| < \varepsilon$ ἤ ἰσοδύναμα τήν: $1 - \varepsilon < \alpha_\nu < 1 + \varepsilon$, ἐξαρτᾶται γενικά ἀπό τό ε, γι' αὐτό στά ἑπόμενα συχνά θά γράφουμε $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon)$. Ἔτσι, γιά $\varepsilon = 0{,}2$ ἔχουμε, ὅπως εἴδαμε παραπάνω $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon) = 6$, ἐνῶ γιά $\varepsilon = 0{,}05$ ἔχουμε: $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon) = 21$.

Ἀπό τά προηγούμενα βλέπουμε πώς ἡ ἀκολουθία (1) ἔχει τήν ἰδιότητα: Γιά κάθε $\varepsilon > 0$ ὑπάρχει δείκτης $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon)$ (δηλ. πού ἐξαρτᾶται ἀπό τόν ε) τέτοιος, ὥστε: ἡ ἀπόσταση $|\alpha_\nu - 1|$ τοῦ ὅρου α_ν ἀπό τόν ἀριθμό 1 εἶναι μικρότερη ἀπό τό ε γιά κάθε δείκτη $\nu \geqq \nu_0 = \nu_0(\varepsilon)$, δηλαδή τελικά *ὅλοι οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας* $\alpha_\nu = \dfrac{\nu+1}{\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots$ *βρίσκονται σέ* **κάθε** *περιοχή τοῦ 1.*

Τήν ἀκολουθία (1) πού ἔχει τήν παραπάνω ἰδιότητα τή λέμε **συγκλίνουσα ἀκολουθία** καί τόν ἀριθμό 1 στόν ὁποῖο αὐτή συγκλίνει τό λέμε **ὅριο** ἤ **ὁριακή τιμή** τῆς ἀκολουθίας $\alpha_\nu = \dfrac{\nu+1}{\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots$

Ἀπό τά προηγούμενα ὁδηγούμαστε τώρα στό νά δώσουμε τόν ἑξῆς γενικό ὁρισμό:

Ὁρισμός. *Θά λέμε ὅτι ἡ ἀκολουθία* α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ **συγκλίνει** *στόν πραγματικό ἀριθμό α ἤ ὅτι* **τείνει** *στόν πραγμ. ἀριθμό α ἤ ὅτι* **τό ὅριο** *τῆς ἀκολουθίας* (α_ν) *εἶναι ὁ πραγμ. ἀριθμός α* καί αὐτό θά τό συμβολίζουμε μέ $\alpha_\nu \to \alpha$ ἤ $\lim \alpha_\nu = \alpha$, *τότε καί μόνο τότε, ἄν γιά κάθε* $\varepsilon > 0$ *ὑπάρχει δείκτης* $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon)$ (πού ἐξαρτᾶται, γενικά, ἀπό τό ε) *τέτοιος, ὥστε νά ἰσχύει*:

$$|\alpha_\nu - \alpha| < \varepsilon \quad \text{γιά κάθε } \nu \geqq \nu_0(\varepsilon).$$

Θεμελιώδης ὁρισμός

Συμβολικά ὁ παραπάνω ὁρισμός διατυπώνεται ὡς ἑξῆς:

$$\boxed{\alpha_\nu \to \alpha \underset{\text{ορσ}}{\iff} \forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \nu_0 = \nu_0(\varepsilon) : |\alpha_\nu - \alpha| < \varepsilon \quad \forall\, \nu \geqq \nu_0} \quad (1)$$

Ὁ ἀριθμός α, ὅπως εἴπαμε καί παραπάνω, λέγεται **ὅριο** ἤ **ὁριακή τιμή** τῆς ἀκολουθίας α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ Σημειώνουμε: $\textbf{ορ}\boldsymbol{\alpha_\nu} = \boldsymbol{\alpha}$ ἤ πιό συχνά: $\mathbf{lim}^*\boldsymbol{\alpha_\nu} = \boldsymbol{\alpha}$ ἤ ἁπλούστερα $\alpha_\nu \to \alpha$ καί διαβάζουμε ἀντίστοιχα: *ὅριο* α_ν ἴσο μέ α ἤ α_ν *τείνει (συγκλίνει)* στό α.

Στήν εἰδική περίπτωση πού εἶναι $\boldsymbol{\alpha = 0}$, δηλ. $\mathbf{lim}\,\boldsymbol{\alpha_\nu} = \mathbf{0}$, ἡ ἀκολουθία α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ ὀνομάζεται **μηδενική.** Τότε ὁ παραπάνω ὁρισμός διατυπώνεται σύντομα ὡς ἑξῆς:

$$\boxed{\alpha_\nu \to 0 \underset{\text{ορσ}}{\iff} \forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \nu_0 = \nu_0(\varepsilon) : |\alpha_\nu| < \varepsilon \quad \forall\, \nu \geqq \nu_0} \quad (2)$$

Ἔτσι, π.χ. *ἡ ἀκολουθία* $\alpha_\nu = \dfrac{1}{\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots$ *εἶναι μηδενική*, γιατί ἄν ε

* Τό σύμβολο «lim» εἶναι συντομογραφία τῆς Λατινικῆς λέξεως: limes (= ὅριο) καί χρησιμοποιεῖται διεθνῶς στά Μαθηματικά.

εἶναι ἕνας ὁποιοσδήποτε θετικός ἀριθμός, τότε ἄν συμβολίσουμε μέ ν_0 τό μικρότερο ἀπό τούς φυσικούς (θετικούς ἀκεραίους) ἀριθμούς πού εἶναι μεγαλύτεροι ἀπό τό $\frac{1}{\varepsilon}$, δηλ. ἄν $\nu_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 \equiv \nu_0(\varepsilon)$ ἔχουμε:

γιά κάθε $\quad \nu \geqq \nu_0 \Longrightarrow \nu > \frac{1}{\varepsilon} \Longleftrightarrow \frac{1}{\nu} < \varepsilon$, δηλ. $|\alpha_\nu| = \left|\frac{1}{\nu}\right| < \varepsilon.$

Ἄρα:
$$\alpha_\nu = \frac{1}{\nu} \to 0.$$

Σημ. Ἡ ἀκολουθία $\alpha_\nu = \frac{1}{\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots$ θυμίζει τίς ἀναπηδήσεις πού κάνει μία ἐλαστική σφαίρα (τόπι) πάνω σ' ἕνα ἐπίπεδο. Τό ὕψος στό ὁποῖο φθάνει ἡ σφαίρα κάθε φορά πού ἀναπηδᾶ εἶναι μικρότερο ἀπό τά προηγούμενα καί **τελικά** ἡ σφαίρα ἰσορροπεῖ πάνω στό ἐπίπεδο *(ὕψος ἀναπηδήσεως μηδέν)*.

Ὁμοίως *ἡ ἀκολουθία* $\alpha_\nu = (-1)^\nu \frac{1}{\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots$ *εἶναι μηδενική.*

Πράγματι: $|\alpha_\nu| = \left|(-1)^\nu . \frac{1}{\nu}\right| = \frac{1}{\nu} < \varepsilon \Longleftrightarrow \nu > \frac{1}{\varepsilon}.$

Ἄρα:
$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \nu_0 = \nu_0(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 : |\alpha_\nu| < \varepsilon\ \forall\ \nu \geqq \nu_0(\varepsilon).$$

Συνεπῶς:
$$\alpha_\nu \to 0.$$

Σημ. Ἡ ἀκολουθία $\alpha_\nu = (-1)^\nu \frac{1}{\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots$, ἀναλυτικά ἡ: $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ θυμίζει τίς αἰωρήσεις ἑνός ἐκκρεμοῦς, τῶν ὁποίων τό πλάτος συνεχῶς ἐλαττώνεται μέχρι νά μηδενισθεῖ.

Ἐπίσης *ἡ ἀκολουθία* $\alpha_\nu = \frac{1}{\sqrt{\nu}}$, $\nu = 1, 2, \ldots$ *εἶναι μηδενική.*

Πράγματι: $|\alpha_\nu| = \frac{1}{\sqrt{\nu}} < \varepsilon \Longleftrightarrow \nu > \frac{1}{\varepsilon^2}.$

Ἄρα: $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \nu_0 = \nu_0(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon^2}\right] + 1 : \forall\ \nu \geqq \nu_0 > \frac{1}{\varepsilon^2}$ ἰσχύει:
$$|\alpha_\nu| = \frac{1}{\sqrt{\nu}} \leqq \frac{1}{\sqrt{\nu_0}} < \varepsilon.$$

Ὥστε:
$$\alpha_\nu = \frac{1}{\sqrt{\nu}} \to 0.$$

Παρατηροῦμε τώρα ὅτι: ἄν $\lim \alpha_\nu = \alpha$, τότε ἀπό τή σύγκριση τῶν ὁρισμῶν (1) καί (2) προκύπτει ὅτι: *ἡ ἀκολουθία* $\delta_\nu = (\alpha_\nu - \alpha)$, $\nu = 1, 2, \ldots$ *εἶναι μηδενική καί ἀντιστρόφως.* Ὥστε:

$$\boxed{\lim \alpha_\nu = \alpha \Longleftrightarrow \lim(\alpha_\nu - \alpha) = 0} \qquad (3)$$

Έτσι, π.χ. έχουμε: $\lim \frac{3\nu+1}{\nu}=3$, ἐπειδή $\lim\left(\frac{3\nu+1}{\nu}-3\right)=\lim\frac{1}{\nu}=0$.

Ἀπό τήν (3) ἕπεται ὅτι ὁ γενικός ὅρος μιᾶς ἀκολουθίας (α_ν), ἡ ὁποία συγκλίνει πρός τόν ἀριθμό α μπορεῖ πάντοτε νά γραφεῖ ὡς ἑξῆς: $\alpha_\nu=\alpha+\delta_\nu$, ὅπου δ_ν ὁ γενικός ὅρος μιᾶς μηδενικῆς ἀκολουθίας.

Παρατηρήσεις. α). Ἄν γιά μία ἀκολουθία (α_ν) ἰσχύει: $\alpha_\nu=\alpha$, γιά κάθε $\nu \geqq \nu_0 \in \mathbf{N}$, δηλ. ἡ (α_ν) εἶναι **τελικά σταθερή**, τότε ἡ (α_ν) συγκλίνει καί ἔχει ὅριο τόν α. Προφανῶς, ἄν $\alpha_\nu=\alpha$, $\forall\ \nu\in\mathbf{N}$, τότε: $\lim\alpha_\nu=\alpha$.

Εἰδικότερα ἡ σταθερή ἀκολουθία $\alpha_\nu=0\ \forall\ \nu\in\mathbf{N}$ εἶναι μηδενική ἀκολουθία.

Προσέξτε! Ἄν (α_ν) εἶναι μηδενική ἀκολουθία, δέ σημαίνει ὅτι οἱ ὅροι της εἶναι ἴσοι μέ μηδέν. Μάλιστα πολλές φορές συμβαίνει: $\alpha_\nu\to 0$ καί ὅμως $\alpha_\nu\neq 0\ \forall\ \nu\in\mathbf{N}$. Π.χ., ἡ ἀκολουθία $\alpha_\nu=\frac{1}{\nu}$, $\nu=1,2,\ldots$

β). Ξεκινώντας ἀπό τίς ἰσοδυναμίες:

$$|\alpha_\nu-\alpha|<\varepsilon \iff \alpha-\varepsilon<\alpha_\nu<\alpha+\varepsilon \iff \alpha_\nu\in(\alpha-\varepsilon,\alpha+\varepsilon)\equiv\pi(\alpha,\varepsilon)$$

καί ἔχοντας ὑπόψη τήν παρατήρηση τῆς § 46 συμπεραίνουμε ἀπό τήν (1) ὅτι: *σέ* **κάθε** *περιοχή τοῦ ὁρίου α μιᾶς συγκλίνουσας ἀκολουθίας (α_ν) βρίσκονται τελικά ὅλοι οἱ ὅροι της, ἐνῶ πεπερασμένου πλήθους ὅροι της,* ἐνδεχομένως καί κανένας, *βρίσκονται ἐκτός τῆς περιοχῆς $\pi(\alpha,\varepsilon)$.* Ἑπομένως: *ἄν ἡ ἀκολουθία (α_ν) συγκλίνει στόν πραγματικό ἀριθμό $\alpha\neq 0$, τότε ἀπό κάποιο δείκτη καί πέρα ὅλοι οἱ ὅροι τῆς (α_ν) εἶναι διάφοροι τοῦ μηδενός* (γιατί;).

γ). Ὅπως εἴπαμε καί στήν ἀρχή αὐτοῦ τοῦ Κεφαλαίου κατά τή θεώρηση μιᾶς ἀκολουθίας πολλές φορές ἐπικαλούμαστε τή γεωμετρική ἐποπτεία. Ἔτσι μέχρι τώρα πολλές φορές θεωρούσαμε τούς ὅρους μιᾶς ἀκολουθίας ὡς τετμημένες τῶν σημείων ἑνός ἄξονα καί μέ αὐτό τόν τρόπο ἀντιμετωπίζαμε τίς ἀκολουθίες πραγματικῶν ἀριθμῶν ὡς ἀκολουθίες σημείων τοῦ ἄξονα. Ἐπειδή ὅμως ἕνας πραγμ. ἀριθμός ἐνδέχεται νά παρουσιάζεται περισσότερες ἀπό μία φορές ὡς ὅρος μιᾶς ἀκολουθίας, ἕπεται ὅτι ἕνα σημεῖο τοῦ ἄξονα ἐνδέχεται νά παρουσιάζεται περισσότερες ἀπό μία φορές. Γι' αὐτό τό λόγο, πολλές φορές παρακάτω γιά τή γεωμετρική παράσταση τῆς ἀκολουθίας (α_ν), χρησιμοποιοῦμε ἕναν ἄλλο τρόπο ἀπεικονίσεως: *ἀπεικονίζουμε, στό καρτεσιανό ἐπίπεδο* $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$, *τόν ὅρο της* α_ν *στό σημεῖο* $M_\nu(\nu,\alpha_\nu)$.

Ἡ γεωμετρική παράσταση τῆς ἀκολουθίας εἶναι τότε ἕνα σύνολο ἀπό *«μεμονωμένα»* σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου (βλ. σχ. 5).

δ). Ἔστω μία μηδενική ἀκολουθία α_ν, $\nu=1,2,\ldots$ Π.χ. ἡ ἀκολουθία πού ὁρίζεται ἀπό τήν ἀπεικόνιση:

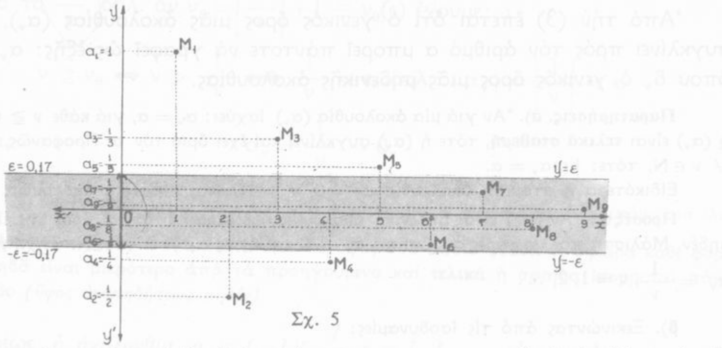
$$\alpha\colon \mathbf{N}\to\mathbf{R}\colon \nu\to\alpha_\nu=(-1)^{\nu-1}\cdot\frac{1}{\nu}.$$

Παρατηροῦμε ὅτι: $\alpha(\mathbf{N})=\left\{1,-\frac{1}{2},\frac{1}{3},-\frac{1}{4},\ldots,(-1)^{\nu-1}\frac{1}{\nu},\ldots\right\}$.

Ἔχοντας τώρα ὑπόψη τήν προηγούμενη παρατήρηση ἡ γεωμετρική παράσταση αὐτῆς τῆς ἀκολουθίας ἀποτελεῖται ἀπό *«μεμονωμένα»* σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου, ὅπως φαίνεται στό σχῆμα 5 τῆς ἑπομένης σελίδας.

Ὁ ὁρισμός (2) πού δώσαμε γιά τή μηδενική ἀκολουθία ἐπιδέχεται τώρα τήν ἑξῆς γεωμετρική ἑρμηνεία: Ἄς πάρουμε ἕνα **θετικό ἀριθμό** ε, π.χ. τόν $\varepsilon=0{,}17$ καί τίς εὐθεῖες μέ ἐξισώσεις $y=\varepsilon=0{,}17$ καί $y=-\varepsilon=-0{,}17$ πού εἶναι παράλληλες μέ τόν ἄξονα τῶν x καί ὁρίζουν στό ἐπίπεδο μία *«ταινία»* (βλ. Σχ. 5).

Παρατηροῦμε στό παρακάτω σχῆμα ὅτι τά σημεῖα M_1, M_2, M_3, M_4 καί M_5 βρίσκονται ἔξω ἀπό τήν ταινία, ἐνῶ τά σημεῖα πού ἔχουν δείκτη $\nu \geqq \nu_0 = 6$, δηλ. τά σημεῖα M_6, M_7, M_8, M_9, ... βρίσκονται ὅλα μέσα στήν ταινία τῶν δύο παραλλήλων. Αὐτό σημαίνει πώς



Σχ. 5

οἱ τεταγμένες τῶν σημείων αὐτῶν, δηλ. οἱ ὅροι: $\alpha_6, \alpha_7, \alpha_8, \alpha_9, \ldots$ τῆς ἀκολουθίας πού πήραμε βρίσκονται στό ἀνοικτό διάστημα $(-\varepsilon, +\varepsilon)$, δηλ. σέ μιά περιοχή τοῦ μηδενός. Ὥστε:

$$-\varepsilon < \alpha_\nu < +\varepsilon \iff |\alpha_\nu| < \varepsilon \ \forall \ \nu \geqq \nu_0 = 6 \qquad (\varepsilon = 0{,}17).$$

Ἄν τώρα πάρουμε ἕναν ἄλλο θετικό ἀριθμό ε πιό μικρό ἀπό τόν προηγούμενο π.χ. τόν $\varepsilon = 0{,}09$ καί ἐπαναλάβουμε τά παραπάνω, τότε βλέπουμε πώς τά σημεῖα M_{12}, M_{13}, ..., M_ν, ... βρίσκονται μέσα στήν ταινία πού ὁρίζουν οἱ εὐθεῖες $y = \varepsilon = 0{,}09$ καί $y = -\varepsilon = -0{,}09$ καί αὐτό σημαίνει πάλι ὅτι οἱ τεταγμένες τῶν σημείων αὐτῶν, δηλαδή οἱ ὅροι $\alpha_{12}, \alpha_{13}, \ldots, \alpha_\nu, \ldots$ τῆς ἀκολουθίας πού πήραμε βρίσκονται ὅλοι στό διάστημα $(-\varepsilon, +\varepsilon)$. Ἄρα ἰσχύει:

$$-\varepsilon < \alpha_\nu < +\varepsilon \iff |\alpha_\nu| < \varepsilon \ \forall \ \nu \geqq \nu_0 = 12 \qquad (\varepsilon = 0{,}09).$$

Στό ἴδιο συμπέρασμα καταλήγουμε καί ἄν πάρουμε ὡς ε ὁποιοδήποτε θετικό ἀριθμό, μόνο πού γιά κάθε ε ἀλλάζει ὁ δείκτης ν_0 (παραπάνω εἴδαμε ὅτι γιά $\varepsilon = 0{,}17$ ἔχουμε ὡς ν_0 τό 6, ἐνῶ γιά $\varepsilon = 0{,}09$, τό 12).

Ὥστε: *σέ κάθε ἐκλογή τοῦ θετικοῦ ἀριθμοῦ ε ὑπάρχει ἕνας δείκτης ν_0, ὁ ὁποῖος ἐξαρτᾶται ἀπό τόν ε, δηλαδή $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon)$.*

Στό παραπάνω σχῆμα 5, παρατηροῦμε ἀκόμη ὅτι: καθώς τό ν *«αὐξάνει ἀπεριόριστα»* τό διάγραμμα τῶν σημείων $M_1(1, 1)$, $M_2\left(2, -\frac{1}{2}\right)$, $M_3\left(3, \frac{1}{3}\right)$, ... ὅλο καί περισσότερο *«πλησιάζει»* καί τελικά *«τείνει νά πέσει πάνω στόν ἄξονα Ox»*. Γι' αὐτό τήν ἀκολουθία αὐτή α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ μέ $\alpha_\nu = (-1)^{\nu-1} \cdot \frac{1}{\nu}$ πού ἱκανοποιεῖ τά παραπάνω, τή χαρακτηρίζουμε ὡς *μηδενική ἀκολουθία*.

Ἄσκηση. Νά δώσετε ἀντίστοιχη γεωμετρική ἑρμηνεία τοῦ ὁρισμοῦ (1) γιά τή συγκλίνουσα ἀκολουθία: $\alpha_\nu = \frac{\nu+1}{\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1ο. Νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ ἀκολουθία $\alpha_\nu = \frac{\nu}{\nu+1}$, $\nu = 1, 2, \ldots$ ἔχει ὅριο τή μονάδα.

Λύση. Πράγματι, γιά κάθε $\varepsilon > 0$ ἔχουμε:

$$|\alpha_\nu - 1| = \left|\frac{\nu}{\nu+1} - 1\right| = \frac{1}{\nu+1} < \frac{1}{\nu} < \varepsilon \iff \nu > \frac{1}{\varepsilon}\,.$$

Ἄρα:

$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \nu_0 = \nu_0(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 : \forall\ \nu \geqq \nu_0 > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow |\alpha_\nu - 1| < \varepsilon$, συνεπῶς $\alpha_\nu \to 1$.

2ο. Ἔστω $\alpha_\nu = \frac{2\nu - 1}{3\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots$ Νά ἀποδείξετε ὅτι: $\lim \alpha_\nu = \frac{2}{3}$.

Λύση. Πράγματι:

$$\left|\alpha_\nu - \frac{2}{3}\right| = \left|\frac{2\nu - 1}{3\nu} - \frac{2}{3}\right| = \left|-\frac{1}{3\nu}\right| = \frac{1}{3\nu} < \varepsilon \Longleftrightarrow \nu > \frac{1}{3\varepsilon}.$$

Ἄρα:

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \nu_0 = \nu_0(\varepsilon) = \left[\frac{1}{3\varepsilon}\right] + 1 : \left|\alpha_\nu - \frac{2}{3}\right| < \varepsilon\ \forall\ \nu \geqq \nu_0(\varepsilon),\ \text{συνεπῶς}\ \lim \alpha_\nu = \frac{2}{3}.$$

3ο. Ἔστω $\alpha_\nu = \frac{\nu^2 - \nu}{\nu^2 + 1}$, $\nu = 1, 2, \ldots$ Νά ἀποδείξετε ὅτι: $\lim \alpha_\nu = 1$.

Λύση. Πράγματι: $|\alpha_\nu - 1| = \left|\frac{\nu^2 - \nu}{\nu^2 + 1} - 1\right| = \frac{\nu + 1}{\nu^2 + 1} < \frac{2\nu}{\nu^2} = \frac{2}{\nu} < \varepsilon \Longleftrightarrow \nu > \frac{2}{\varepsilon}$.

Δηλαδή γιά ὁποιοδήποτε θετικό ἀριθμό ε ὑπάρχει δείκτης $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon)$ (ἀρκεῖ ὡς ν_0 νά λάβουμε ὁποιοδήποτε φυσικό ἀριθμό μεγαλύτερο ἀπό τό $\frac{2}{\varepsilon}$ καί τέτοιοι φυσικοί ἀριθμοί ὑπάρχουν, π.χ., ὁ $\left[\frac{2}{\varepsilon}\right] + 1$, $\left[\frac{2}{\varepsilon}\right] + 2$, $\left[\frac{2}{\varepsilon}\right] + 3$, κτλ.) τέτοιος, ὥστε γιά κάθε $\nu \geqq \nu_0(\varepsilon) > \frac{2}{\varepsilon}$ ἰσχύει: $|\alpha_\nu - 1| < \varepsilon$, συνεπῶς $\lim \alpha_\nu = 1$.

4ο. Νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ ἀκολουθία $\alpha_\nu = (\sqrt{\nu + 1} - \sqrt{\nu})$, $\nu = 1, 2, \ldots$ εἶναι μηδενική.

Λύση. Πράγματι:

$$|\alpha_\nu - 0| = |\alpha_\nu| = |\sqrt{\nu + 1} - \sqrt{\nu}| = \frac{(\sqrt{\nu + 1} - \sqrt{\nu})(\sqrt{\nu + 1} + \sqrt{\nu})}{(\sqrt{\nu + 1} + \sqrt{\nu})} =$$

$$= \frac{(\nu + 1) - \nu}{\sqrt{\nu + 1} + \sqrt{\nu}} = \frac{1}{\sqrt{\nu + 1} + \sqrt{\nu}} < \frac{1}{\sqrt{\nu}} < \varepsilon \Longleftrightarrow \nu > \frac{1}{\varepsilon^2}.$$

Ἄρα:

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \nu_0 = \nu_0(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon^2}\right] + 1 : |\alpha_\nu| < \varepsilon\ \forall\ \nu \geqq \nu_0 > \frac{1}{\varepsilon^2}.\ \text{Ὥστε}\ \alpha_\nu \to 0.$$

Θά δώσουμε τώρα καί ἕνα παράδειγμα ἀκολουθίας πού **δέ** συγκλίνει στό **R**.

*** 5ο. Νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ ἀκολουθία $\alpha_\nu = (-1)^\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots$ δέ συγκλίνει στό R.**

Ἀπόδειξη. Ἄς ὑποθέσουμε (ἄτοπος ἀπαγωγή) ὅτι ἡ ἀκολουθία (α_ν) συγκλίνει σέ κάποιο πραγματικό ἀριθμό x. Δηλαδή ἔστω ὅτι: $\lim \alpha_\nu = x$ ($x \in \mathbf{R}$). Τότε γιά κάθε $\varepsilon > 0$, ἄρα καί γιά $\varepsilon = 1/2$, ὑπάρχει δείκτης $\nu_0 \in \mathbf{N}$ τέτοιος, ὥστε νά ἰσχύει:

$$|(-1)^\nu - x| < \frac{1}{2}\quad \forall\ \nu \geqq \nu_0.$$

Εἰδικά:

$$|(-1)^{\nu_0} - x| < \frac{1}{2} \quad \text{καί} \quad |(-1)^{\nu_0 + 1} - x| < \frac{1}{2},$$

ἐπειδή $\nu_0 \geqq \nu_0$ καί $\nu_0 + 1 \geqq \nu_0$. Τότε ὅμως ἔχουμε:

$$|(-1)^{\nu_0} - (-1)^{\nu_0+1}| = |(-1)^{\nu_0} - x + x - (-1)^{\nu_0+1}| \leqq |(-1)^{\nu_0} - x| + |x - (-1)^{\nu_0+1}| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Δηλαδή: $\qquad |(-1)^{\nu_0} - (-1)^{\nu_0+1}| < 1 \qquad (1)$

Ἀλλά: $\qquad |(-1)^{\nu_0} - (-1)^{\nu_0+1}| = 2 \qquad (2)$

'Από τίς (1) καί (2) λαμβάνουμε ὅτι $2<1$, πράγμα πού εἶναι ἄτοπο. Ὥστε ἡ ὑπόθεση πού κάναμε γιά τήν ἀκολουθία $\alpha_\nu=(-1)^\nu$, $\nu=1,2,\dots$ ὅτι συγκλίνει σέ κάποιο πραγματικό ἀριθμό ὁδηγεῖ σέ ἄτοπο. Ἄρα ἡ ἀκολουθία $(-1)^\nu$, $\nu=1,2,\dots$ δέ συγκλίνει στό $\mathbf{R}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάδα Α΄. 95. Γιά $\varepsilon>0$ νά προσδιορίσετε δείκτη $\nu_0=\nu_0(\varepsilon)$, ὥστε γιά $\nu\geqq\nu_0(\varepsilon)$ νά εἶναι: $|\alpha_\nu|<\varepsilon$, ὅπου α_ν, $\nu=1,2,\dots$ εἶναι:

1) $\alpha_\nu=\dfrac{2}{\nu^2+\nu}$, 2) $\alpha_\nu=\dfrac{3}{4\nu^2-2\nu}$, 3) $\alpha_\nu=\dfrac{\eta\mu\nu+\sigma\upsilon\nu^3\nu}{\sqrt{\nu}}$, 4) $\alpha_\nu=\dfrac{3}{\sqrt{\nu^2+2}}$.

96. Ἔστω $\alpha_\nu=\dfrac{3\nu-5}{4\nu}$, $\nu=1,2,\dots$ Νά ἀποδείξετε ὅτι: $\lim\alpha_\nu=\dfrac{3}{4}$.

97. Γιά $\varepsilon>0$ νά προσδιορίσετε δείκτη $\nu_0=\nu_0(\varepsilon)$, ὥστε γιά $\nu\geqq\nu_0(\varepsilon)$ νά εἶναι:

$$\left|\frac{\nu^2+1}{\nu^2-1}-1\right|<\varepsilon.$$

98. Νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ ἀκολουθία: $\alpha_\nu=\sqrt{\nu^2+2}-\sqrt{\nu^2+1}$, $\nu=1,2,\dots$ εἶναι μηδενική.

✱ **Ὁμάδα Β΄. 99.** Γιά $\varepsilon>0$, νά προσδιορίσετε δείκτη $\nu_0=\nu_0(\varepsilon)$, ὥστε γιά $\nu\geqq\nu_0(\varepsilon)$ νά εἶναι: $|\alpha_\nu|<\varepsilon$,
ὅπου α_ν, $\nu=1,2,\dots$ εἶναι:

1) $\alpha_\nu=\dfrac{1}{2\nu+1}$, 2) $\alpha_\nu=\dfrac{\nu-1}{\nu^2+1}$, 3) $\alpha_\nu=\dfrac{\eta\mu\nu+2\sigma\upsilon\nu5\nu}{\sqrt{\nu}}$, 4) $\alpha_\nu=\sqrt{\nu^2+\nu+1}-\sqrt{\nu^2+\nu+2}$

Ἐφαρμογή γιά $\varepsilon=10^{-6}$.

100. Γιά $\varepsilon>0$ νά προσδιορίσετε δείκτη $\nu_0=\nu_0(\varepsilon)$, ὥστε γιά $\nu\geqq\nu_0(\varepsilon)$ νά εἶναι:

$$\left|\alpha_\nu-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon,$$

ὅπου $\alpha_\nu=\sqrt{\nu}(\sqrt{\nu+1}-\sqrt{\nu})$, $\nu=1,2,\dots$

101. Νά ἀποδείξετε ὅτι: ἄν ἡ ἀκολουθία α_ν, $\nu=1,2,\dots$ εἶναι μηδενική, τότε θά εἶναι μηδενική καί ἡ ἀκολουθία: $\beta_\nu \underset{\text{ορσ}}{=} \sqrt{|\alpha_\nu|}$, $\nu=1,2,\dots$

III. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΓΙΑ ΤΙΣ ΣΥΓΚΛΙΝΟΥΣΕΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

Σέ ὅλες τίς παρακάτω ἰδιότητες οἱ ἀκολουθίες θεωροῦνται πραγματικές καί τά ὅριά τους ἀριθμοί πραγματικοί, κι ὅταν ἀκόμη δέν τό τονίζουμε ἰδιαίτερα.

§ 48. Ἰδιότητα I. *(Τό μονοσήμαντο τοῦ ὁρίου).*—**Τό ὅριο συγκλίνουσας ἀκολουθίας α_ν, $\nu=1,2,\dots$ εἶναι μονοσημάντως ὁρισμένο.**

Δηλαδή : $\boxed{\left.\begin{array}{l}\alpha_\nu\to\alpha\\ \alpha_\nu\to\alpha'\end{array}\right\}\Longrightarrow\alpha=\alpha'}$

Ἀπόδειξη. Ἔστω (ἀπαγωγή σέ ἄτοπο) ὅτι $\alpha_\nu\to\alpha$ καί $\alpha_\nu\to\alpha'$, ὅπου α καί α' ἀριθμοί πραγματικοί μέ $\alpha\neq\alpha'$. Τότε $\dfrac{|\alpha-\alpha'|}{2}>0$. Ἄρα γιά $\varepsilon=\dfrac{|\alpha-\alpha'|}{2}>0$ ὑπάρχουν δεῖκτες ν_0', ν_0'' τέτοιοι, ὥστε:

$$|\alpha_\nu - \alpha| < \frac{|\alpha - \alpha'|}{2}, \ \forall\ \nu \geqq \nu_0' \tag{1}$$

$$|\alpha_\nu - \alpha'| < \frac{|\alpha - \alpha'|}{2}, \ \forall\ \nu \geqq \nu_0'' \tag{2}$$

Τότε ὅμως γιά κάθε $\nu \geqq \nu_0 = \max\{\nu_0', \nu_0''\}$ ἰσχύουν συγχρόνως οἱ (1), (2) καί συνεπῶς, προσθέτοντας κατά μέλη, λαμβάνουμε:

$$|\alpha_\nu - \alpha| + |\alpha_\nu - \alpha'| < |\alpha - \alpha'|.$$

Ὥστε γιά κάθε $\nu \geqq \nu_0$ ἔχουμε:

$$|\alpha - \alpha'| = |(\alpha_\nu - \alpha) - (\alpha_\nu - \alpha')| \leqq |\alpha_\nu - \alpha| + |\alpha_\nu - \alpha'| < |\alpha - \alpha'|.$$

Αὐτό ὅμως εἶναι ἄτοπο, ἐπειδή δέν μπορεῖ νά εἶναι $|\alpha - \alpha'| < |\alpha - \alpha'|$.

*** § 49. Ἰδιότητα ΙΙ.— Κάθε ὑπακολουθία συγκλίνουσας ἀκολουθίας ἔχει τό ἴδιο μ' αὐτή ὅριο.**

Δηλαδή :

$$\boxed{\alpha_\nu \to \alpha \implies \alpha_{k_\nu} \to \alpha}$$

Ἀπόδειξη. Ἔστω μία ἀκολουθία (α_ν) πού συγκλίνει στόν πραγματικό ἀριθμό α καί (α_{k_ν}) μία ὑπακολουθία της. Τότε ἔχουμε: γιά κάθε $\varepsilon > 0$ ὑπάρχει δείκτης $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon)$ τέτοιος, ὥστε νά ἰσχύει: $|\alpha_\nu - \alpha| < \varepsilon \ \forall\ \nu \geqq \nu_0$ (1)

Ἔστω τώρα ἕνας φυσικός ἀριθμός $\nu \geqq \nu_0$, τότε, σύμφωνα μέ τήν πρόταση τῆς § 42, ἔχουμε $k_\nu \geqq \nu$, ὅπου k_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ εἶναι μία γνησίως αὔξουσα ἀκολουθία φυσικῶν ἀριθμῶν καί συνεπῶς $k_\nu \geqq \nu_0$ (βλ. καί παρατήρ. τῆς § 43).

Τότε ὅμως ἀπό τήν (1) παίρνουμε: $|\alpha_{k_\nu} - \alpha| < \varepsilon, \ \forall\ \nu \geqq \nu_0$. Ὥστε ἰσχύει: $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \nu_0 = \nu_0(\varepsilon)$: $|\alpha_{k_\nu} - \alpha| < \varepsilon\ \forall\ \nu \geqq \nu_0$ καί γιά κάθε ἀκολουθία $(k_\nu)\uparrow$ φυσικῶν ἀριθμῶν. Συνεπῶς $\alpha_{k_\nu} \to \alpha$.

Παρατηρήσεις. α) Τό ἀντίστροφο τῆς παραπάνω προτάσεως δέν ἰσχύει πάντοτε, δηλ. ἄν $\alpha_{k_\nu} \to \alpha$, δέν ἕπεται κατ' ἀνάγκη ὅτι καί $\alpha_\nu \to \alpha$, ὅπως ἐξάλλου φαίνεται στό παράδειγμα: $\alpha_\nu = (-1)^\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots$, $\alpha_{2\nu} = (-1)^{2\nu} = 1 \to 1$ καί ὅμως ἡ ἀκολουθία $\alpha_\nu = (-1)^\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots$ δέ συγκλίνει (βλ. παρδ. 5, σελ. 67).

β) Ἄν μία ὑπακολουθία μιᾶς ἀκολουθίας α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ δέ συγκλίνει, τότε καί ἡ ἀκολουθία α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ δέ συγκλίνει (γιατί;).

γ) Ἄν ὑπάρχουν δυό ὑπακολουθίες μιᾶς ἀκολουθίας α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ πού συγκλίνουν, ἀλλά σέ διαφορετικά ὅρια, τότε ἡ (α_ν) δέ συγκλίνει (γιατί;). Ἔτσι, π.χ., ἡ ἀκολουθία $\alpha_\nu = (-1)^\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots$ δέ συγκλίνει, γιατί ἡ ὑπακολουθία τῶν ὅρων της μέ ἄρτιο δείκτη εἶναι: $\alpha_{2\nu} = 1 \to 1$ καί ἡ ὑπακολουθία τῶν ὅρων της μέ περιττό δείκτη εἶναι: $\alpha_{2\nu+1} = -1 \to -1$.

*** § 50. Ἰδιότητα ΙΙΙ.— Ἄν $\rho \in \mathbf{N}$ καί $\alpha \in \mathbf{R}$, τότε ἰσχύει :**

$$\boxed{\alpha_\nu \to \alpha \iff \alpha_{\nu+\rho} \to \alpha}$$

Ἀπόδειξη. Ἡ ἀκολουθία $(\alpha_{\nu+\rho})$ εἶναι ὑπακολουθία τῆς (α_ν). Ἄρα

$$\alpha_\nu \to \alpha \implies \alpha_{\nu+\rho} \to \alpha.$$

Θά ἀποδείξουμε τώρα ὅτι: ἄν $\alpha_{\nu+\rho} \to \alpha$, τότε $\alpha_\nu \to \alpha$.

Πράγματι, ἀφοῦ $\alpha_{\nu+\rho} \to \alpha$ γιά $\varepsilon > 0$ ὑπάρχει δείκτης ν_1: $|\alpha_{\nu+\rho} - \alpha| < \varepsilon$, $\forall\ \nu \geqq \nu_1$ (1). Θέτουμε: $\nu_0 = \rho + \nu_1$. Τότε γιά κάθε φυσικό ἀριθμό $\nu \geqq \nu_0 = \rho + \nu_1$ ἔχουμε: $\nu - \rho \geqq \nu_1$ καί συνεπῶς ἀπό τήν (1) παίρνουμε: $|\alpha_{(\nu-\rho)+\rho} - \alpha| < \varepsilon$, δηλαδή $|\alpha_\nu - \alpha| < \varepsilon$ γιά κάθε $\nu \geqq \nu_0$. Ἄρα: $\alpha_\nu \to \alpha$.

Σημείωση. Ἡ ἰδιότητα ΙΙΙ διατυπώνεται μέ λόγια πιό γενικά ὡς ἑξῆς: **Ἡ «διαγραφή» ἤ ἡ «προσθήκη» ὅρων πού ἀντιστοιχοῦν σέ πεπερασμένο πλῆθος δεικτῶν δέν ἐπηρεάζει τή σύγκλιση μιᾶς ἀκολουθίας.** Αὐτό συμβαίνει, γιατί ἡ ἰδιότητα τῆς συγκλίσεως μιᾶς ἀκολουθίας ἀνήκει στίς ἰδιότητες πού ἰσχύουν «τελικά». Εὔκολα κανείς μπορεῖ νά διαπιστώσει ὅτι ἀπό μιά τάξη καί μετά, γιά τήν πρώτη ἀκολουθία, οἱ ὅροι τῶν ἀκολουθιῶν (α_ν) καί $(\alpha_{\nu+\rho})$ θά συμπίπτουν.

§ 51. Ἰδιότητα IV.—Κάθε συγκλίνουσα ἀκολουθία εἶναι φραγμένη.

Δηλαδή: $\boxed{\alpha_\nu \to \alpha \implies \alpha_\nu,\ \nu = 1, 2, \dots \text{ φραγμένη}}$

Ἀπόδειξη. Ἔστω μία ἀκολουθία (α_ν) μέ $\alpha_\nu \to \alpha$ καί ἕνας $\varepsilon = \varepsilon_0 > 0$. Τότε ἰσχύει: $|\alpha_\nu - \alpha| < \varepsilon_0$ γιά κάθε $\nu \geqq \nu_0 = \nu_0(\varepsilon_0)$ καί συνεπῶς:

$$|\alpha_\nu| = |\alpha_\nu - \alpha + \alpha| \leqq |\alpha_\nu - \alpha| + |\alpha| < \varepsilon_0 + |\alpha|,\ \forall\ \nu \geqq \nu_0 \qquad (1)$$

Διακρίνουμε τώρα τίς περιπτώσεις:

(i) Ἄν εἶναι $\nu_0 = 1$, τότε $|\alpha_\nu| < |\alpha| + \varepsilon_0 \equiv \varphi$, $\forall\ \nu \in \mathbf{N}$ καί συνεπῶς ἡ (α_ν) εἶναι ἀπολύτως φραγμένη, ἄρα καί φραγμένη.

(ii) Ἄν $\nu_0 > 1$, τότε θεωροῦμε τούς ὅρους: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{\nu_0-1}$ καί θέτουμε:

$$\varphi \equiv \max\{|\alpha_1|, |\alpha_2|, \dots, |\alpha_{\nu_0-1}|, \varepsilon_0 + |\alpha|\} \qquad (2)$$

Τότε ἀπό τίς (1) καί (2) λαμβάνουμε:

$$|\alpha_\nu| \leqq \varphi, \quad \forall\ \nu \in \mathbf{N}.$$

Ἄρα ἡ ἀκολουθία α_ν, $\nu = 1, 2, \dots$ εἶναι πάλι φραγμένη.

Σχόλιο. Μιά πιό ἁπλή καί σύντομη ἀπόδειξη εἶναι καί ἡ ἑξῆς: Ἀφοῦ $\alpha_\nu \to \alpha$, ἕπεται ὅτι: γιά $\varepsilon = 1 > 0$ ὑπάρχει $\nu_0 = \nu_0(1)$: $|\alpha_\nu - \alpha| < 1$, $\forall\ \nu \geqq \nu_0$.

Ὁπότε: $|\alpha_\nu| = |\alpha_\nu - \alpha + \alpha| \leqq |\alpha_\nu - \alpha| + |\alpha| < 1 + |\alpha|$, $\forall\ \nu \geqq \nu_0$.

Ἔστω: $\theta = |\alpha_1| + |\alpha_2| + \dots + |\alpha_{\nu_0-1}| + (1 + |\alpha|)$.

Τότε: $|\alpha_\nu| \leqq \theta$, $\forall\ \nu \in \mathbf{N}$. Ἄρα α_ν, $\nu = 1, 2, \dots$ εἶναι φραγμένη.

Παρατήρηση. Τό ἀντίστροφο δέν ἰσχύει πάντοτε, δηλαδή ὑπάρχουν φραγμένες ἀκολουθίες πού δέ συγκλίνουν. Π.χ. ἡ ἀκολουθία $\alpha_\nu = (-1)^\nu$, $\nu = 1, 2, \dots$, ἄν καί εἶναι φραγμένη, ἀφοῦ $|\alpha_\nu| = |(-1)^\nu| = 1 \leqq 1$, $\forall\ \nu \in \mathbf{N}$, δέ συγκλίνει (βλ. πρδ. 5, § 47).

Εἶναι ἐπίσης φανερό ὅτι: Ἄν μία ἀκολουθία (α_ν) δέν εἶναι φραγμένη, τότε ἡ (α_ν) δέ συγκλίνει (γιατί;).

§ 52. Ἰδιότητα V.— Τό γινόμενο μηδενικῆς ἀκολουθίας ἐπί φραγμένη εἶναι μηδενική ἀκολουθία.

Δηλαδή: $\boxed{\left.\begin{array}{l} \alpha_\nu \to 0 \\ (\beta_\nu) \text{ φραγμένη} \end{array}\right\} \implies \alpha_\nu \beta_\nu \to 0}$

Ἀπόδειξη. Ἀφοῦ ἡ (β_ν) εἶναι φραγμένη, ἕπεται ὅτι εἶναι καί ἀπολύτως φραγμένη καί συνεπῶς ὑπάρχει $\theta > 0$: $|\beta_\nu| \leq \theta, \ \forall \ \nu \in \mathbf{N}$. (1)

Ἐξάλλου, ἀφοῦ ἡ $\alpha_\nu \to 0$, ἕπεται ὅτι γιά κάθε $\varepsilon > 0$, ἄρα καί γιά $\frac{\varepsilon}{\theta} > 0$, ὑπάρχει δείκτης $\nu_0 = \nu_0\left(\frac{\varepsilon}{\theta}\right)$ τέτοιος, ὥστε νά ἰσχύει:

$$|\alpha_\nu| < \frac{\varepsilon}{\theta}, \ \forall \ \nu \geq \nu_0. \tag{2}$$

Τότε ὅμως, γιά κάθε $\nu \geq \nu_0$ ἀπό τίς (1) καί (2) λαμβάνουμε:

$$|\alpha_\nu\beta_\nu| = |\alpha_\nu|\,|\beta_\nu| < \frac{\varepsilon}{\theta}\cdot\theta = \varepsilon.$$

Ἄρα: $\alpha_\nu\beta_\nu \to 0$.

Πόρισμα 1ο: $\left.\begin{array}{l}\alpha_\nu \to 0\\ k \in R\end{array}\right\} \Rightarrow k\alpha_\nu \to 0$

Πόρισμα 2ο: $\left.\begin{array}{l}\alpha_\nu \to \alpha\\ k \in R\end{array}\right\} \Rightarrow k\alpha_\nu \to k\alpha$

Τό πρῶτο πόρισμα εἶναι ἄμεση συνέπεια τῆς προηγούμενης ἰδιότητας, ἄν θεωρήσουμε ὡς (β_ν) τή σταθερή ἀκολουθία $\beta_\nu = k, \ \forall \ \nu \in \mathbf{N}$.

Τό πόρισμα 2 εἶναι ἄμεση συνέπεια τοῦ πορίσματος 1, ἀφοῦ $(\alpha_\nu - \alpha) \to 0$.

Παρατηρήσεις. 1) Ἀπό τό πόρισμα 2 γιά $k=-1$ ἔχουμε: $\alpha_\nu \to \alpha \Rightarrow -\alpha_\nu \to -\alpha$. **2)** Ἀπό τό συμπέρασμα τοῦ πορίσματος 2 συνάγεται ὅτι: $\lim(k\alpha_\nu) = k\cdot\lim\alpha_\nu, \ \forall k \in R$

§ 53. Ἰδιότητα VI.—Ἄν ἡ (β_ν) εἶναι μηδενική ἀκολουθία καί ἡ (α_ν) ἀκολουθία τέτοια, ὥστε : γιά κάθε $\nu \geq \nu_1 \in \mathbf{N}$ νά ἰσχύει :

$$|\alpha_\nu| \leq k\cdot|\beta_\nu|, \quad (k > 0)$$

τότε ἡ (α_ν) εἶναι ἐπίσης μηδενική ἀκολουθία.

Δηλαδή: $\boxed{\left.\begin{array}{l}|\alpha_\nu| \leq k\cdot|\beta_\nu|, \forall \ \nu \geq \nu_1\\ k > 0, \ \beta_\nu \to 0\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha_\nu \to 0}$

Ἀπόδειξη. Ἀφοῦ $\beta_\nu \to 0$ ἕπεται: γιά κάθε $\varepsilon > 0$, ἄρα καί γιά $\frac{\varepsilon}{k} > 0$, ὑπάρχει δείκτης $\nu_2 = \nu_2\left(\frac{\varepsilon}{k}\right)$ τέτοιος, ὥστε νά ἰσχύει: $|\beta_\nu| < \frac{\varepsilon}{k}$ γιά κάθε $\nu \geq \nu_2$.

Τότε ὅμως γιά κάθε $\nu \geq \nu_0 = \max\{\nu_1, \nu_2\}$ θά ἰσχύουν συγχρόνως οἱ:

$$|\alpha_\nu| \leq k\cdot|\beta_\nu| \quad \text{καί} \quad |\beta_\nu| < \frac{\varepsilon}{k}$$

καί συνεπῶς:

$$|\alpha_\nu| \leq k\cdot|\beta_\nu| < k\cdot\frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon \quad \forall \ \nu \geq \nu_0.$$

Ἄρα: $\alpha_\nu \to 0$.

Πόρισμα.— $\left.\begin{array}{l}|\alpha_\nu| \leqq |\beta_\nu|,\ \forall\ \nu \in N \\ \beta_\nu \to 0\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha_\nu \to 0.$

Ἐφαρμογή. Νά ἀποδείξετε ὅτι: $\alpha_\nu = \frac{\eta\mu 3\nu}{\nu^2+\nu+1} \to 0.$

Λύση. Ἔχουμε:

$$|\alpha_\nu| = \left|\frac{\eta\mu 3\nu}{\nu^2+\nu+1}\right| \leqq \frac{1}{\nu^2+\nu+1} < \frac{1}{\nu^2+\nu} < \frac{1}{\nu} \to 0. \text{ Ἄρα } \alpha_\nu \to 0.$$

§ 54. Ἰδιότητα VII.(*Ἰδιότητα τῶν ἰσοσυγκλινουσῶν ἀκολουθιῶν*).—Ἰσχύει:

$$\boxed{\left.\begin{array}{l}\beta_\nu \leqq \alpha_\nu \leqq \gamma_\nu,\ \forall\ \nu \geqq \nu_1 \\ \beta_\nu \to \alpha \ \text{ καί } \ \gamma_\nu \to \alpha\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha_\nu \to \alpha}$$

Ἀπόδειξη. Ἀφοῦ $\beta_\nu \to \alpha$ ἕπεται: γιά κάθε $\varepsilon > 0$ ὑπάρχει δείκτης $\nu_2 = \nu_2(\varepsilon)$ τέτοιος, ὥστε νά ἰσχύει:

$$|\beta_\nu - \alpha| < \varepsilon \Longleftrightarrow \alpha - \varepsilon < \beta_\nu < \alpha + \varepsilon,\ \forall\ \nu \geqq \nu_2(\varepsilon) \qquad (1)$$

Ἐπίσης, ἀφοῦ $\gamma_\nu \to \alpha$ ἕπεται ὅτι ὑπάρχει δείκτης $\nu_3 = \nu_3(\varepsilon)$ τέτοιος, ὥστε:

$$|\gamma_\nu - \alpha| < \varepsilon \Longleftrightarrow \alpha - \varepsilon < \gamma_\nu < \alpha + \varepsilon,\ \forall\ \nu \geqq \nu_3(\varepsilon) \qquad (2)$$

Ἔτσι, γιά κάθε $\nu \geqq \nu_0 = \max\{\nu_1, \nu_2, \nu_3\}$ θά ἔχουμε:

$$\alpha - \varepsilon < \beta_\nu \leqq \alpha_\nu \leqq \gamma_\nu < \alpha + \varepsilon$$

δηλαδή: $\alpha - \varepsilon < \alpha_\nu < \alpha + \varepsilon \Longleftrightarrow |\alpha_\nu - \alpha| < \varepsilon,\ \forall\ \nu \geqq \nu_0.$

Ἄρα: $\alpha_\nu \to \alpha.$

Παρατήρηση. Μία εἰδική περίπτωση τῆς παραπάνω ἰδιότητας πού τή συναντοῦμε συχνά εἶναι ἡ ἑξῆς:

ἄν $\beta_\nu \to 0$ καί $|\alpha_\nu| \leqq \beta_\nu$, τότε $\alpha_\nu \to 0$ (βλ. καί Πόρισμα, § 53).

Πράγματι· $|\alpha_\nu| \leqq \beta_\nu \Longleftrightarrow -\beta_\nu \leqq \alpha_\nu \leqq \beta_\nu$ καί ἀφοῦ $\beta_\nu \to 0 \Longrightarrow -\beta_\nu \to 0.$

Ἄρα: $\alpha_\nu \to 0.$

§ 55. Ἰδιότητα VIII.— Ἄν δύο ἀκολουθίες (α_ν) καί (β_ν) συγκλίνουν καί ἰσχύει $\alpha_\nu < \beta_\nu$, $\forall\ \nu \in N$, τότε θά ἔχουμε: $\lim \alpha_\nu \leqq \lim \beta_\nu$.

Δηλαδή: $\boxed{\left.\begin{array}{l}\alpha_\nu \to \alpha,\ \beta_\nu \to \beta \\ \alpha_\nu < \beta_\nu,\ \forall\ \nu \in N\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha \leqq \beta}$

Ἀπόδειξη. Τήν ἰδιότητα αὐτή τή δείχνουμε μέ τή μέθοδο τῆς *«εἰς ἄτοπον»* ἀπαγωγῆς. Ἔστω ὅτι εἶναι $\alpha > \beta$. Τότε $\frac{\alpha - \beta}{2} > 0$ καί ἐπειδή $\alpha_\nu \to \alpha$, $\beta_\nu \to \beta$ ὑπάρχουν $\nu_1, \nu_2 \in N$ μέ:

$$|\alpha_\nu - \alpha| < \frac{\alpha - \beta}{2},\ \forall\ \nu \geqq \nu_1 \quad \text{καί} \qquad (1)$$

$$|\beta_\nu-\beta| < \frac{\alpha-\beta}{2}\ ,\ \forall\ \ \nu \geqq \nu_2 \tag{2}$$

Ἄρα, γιά κάθε $\nu \geqq \nu_0 = \max\{\nu_1, \nu_2\}$ θά ἰσχύουν συγχρόνως οἱ (1) καί (2) καί συνεπῶς προσθέτοντας κατά μέλη λαμβάνουμε:

$$|\alpha_\nu-\alpha| + |\beta_\nu-\beta| < \alpha-\beta \tag{3}$$

Ἀλλά: $\quad \beta_\nu-\beta-\alpha_\nu+\alpha \leqq |\beta_\nu-\beta-\alpha_\nu+\alpha| \leqq |\beta_\nu-\beta| + |\alpha_\nu-\alpha| \quad (4)$

Ἔτσι, γιά κάθε $\nu \geqq \nu_0$ ἀπό τίς (3) καί (4) παίρνουμε:

$$\beta_\nu-\beta-\alpha_\nu+\alpha < \alpha-\beta, \text{ δηλαδή: } \quad \beta_\nu < \alpha_\nu, \quad \forall \quad \nu \geqq \nu_0.$$

Αὐτό ὅμως εἶναι ἄτοπο, γιατί $\beta_\nu > \alpha_\nu,\ \forall\ \nu \in \mathbf{N}$.

Ἄρα: $\qquad \alpha \leqq \beta.$

Πόρισμα 1ο: $\left.\begin{array}{l} \alpha_\nu \to \alpha \\ \alpha_\nu < s\ ,\ \ \forall\ \nu\in\mathbf{N} \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha \leqq s$

Πόρισμα 2ο: $\left.\begin{array}{l} \beta_\nu \to \beta \\ \sigma < \beta_\nu\ ,\ \forall\ \nu\in\mathbf{N} \end{array}\right\} \Rightarrow \sigma \leqq \beta$

Ἀπόδειξη. Ἄμεσες συνέπειες τῆς προηγούμενης ἰδιότητας, ἀρκεῖ νά πάρουμε τή σταθερή ἀκολουθία (β_ν) μέ $\beta_\nu = s$, ἀντίστοιχα τή σταθερή ἀκολουθία (α_ν) μέ $\alpha_\nu = \sigma$.

Σημείωση. Προσέξτε ἰδιαίτερα τίς περιπτώσεις $s = 0$ καί $\sigma = 0$.

✱ § 56. Ἰδιότητα IX.—Γιά κάθε ἀκολουθία πραγμ. ἀριθμῶν (α_ν) ἰσχύει:

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} \alpha_{2\nu} \to \alpha \\ \alpha_{2\nu-1} \to \alpha \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \alpha_\nu \to \alpha}$$

Ἀπόδειξη. Ἔστω ὅτι $\alpha_{2\nu}\to\alpha$ καί $\alpha_{2\nu-1} \to \alpha$. Τότε $\forall\ \varepsilon > 0$ ὑπάρχουν δεῖκτες $\nu_1, \nu_2 \in \mathbf{N}$ μέ:

$$|\alpha_{2\nu}-\alpha| < \varepsilon, \forall\ \nu \geqq \nu_1 \text{ καί } |\alpha_{2\nu-1}-\alpha| < \varepsilon,\ \forall\ \nu \geqq \nu_2.$$

Θέτουμε: $\nu_0 = \max\{2\nu_1, 2\nu_2-1\}$ καί παρατηροῦμε ὅτι: κάθε φυσικός ἀριθμός ν θά εἶναι $\nu = 2k$ (ἄρτιος) ἤ $\nu = 2k-1$ (περιττός). Ὁπότε:

(i) ἄν ν εἶναι ἄρτιος ($\nu = 2k$), τότε γιά $\nu \geqq \nu_0$ ἔχουμε: $2k \geqq 2\nu_1 \Longrightarrow k \geqq \nu_1 \Longrightarrow |\alpha_2k-\alpha| < \varepsilon$, δηλαδή: $\qquad |\alpha_\nu-\alpha| < \varepsilon$

(ii) ἄν ν εἶναι περιττός ($\nu = 2k-1$), τότε γιά $\nu \geqq \nu_0$ ἔχουμε: $2k-1 \geqq 2\nu_2 - 1 \Longrightarrow k \geqq \nu_2 \Longrightarrow |\alpha_{2k-1}-\alpha| < \varepsilon$, δηλαδή: $\qquad |\alpha_\nu-\alpha| < \varepsilon$.

Ὥστε: $\forall\ \ \nu \geqq \nu_0$ ἔπεται ὅτι: $|\alpha_\nu-\alpha| < \varepsilon$ καί συνεπῶς $\alpha_\nu \to \alpha$.

Τό ἀντίστροφο εἶναι ἀμέσως φανερό ἀπό τήν ἰδιότητα II τῆς § 49.

IV. ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΣΥΓΚΛΙΝΟΥΣΩΝ ΑΚΟΛΟΥΘΙΩΝ
Η ΑΛΓΕΒΡΑ ΤΩΝ ΟΡΙΩΝ

Ἄν (α_ν) καί (β_ν) εἶναι ἀκολουθίες πραγματικῶν ἀριθμῶν, τότε, ὅπως μάθαμε καί στήν ἀρχή αὐτοῦ τοῦ Κεφαλαίου, τό ἄθροισμα, ἡ διαφορά, τό γινόμενο καί τό πηλίκο τους εἶναι ἀντιστοίχως οἱ ἀκολουθίες:

$$(\alpha_\nu + \beta_\nu), \quad (\alpha_\nu - \beta_\nu), \quad (\alpha_\nu\beta_\nu) \quad \text{καί} \quad \left(\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}\right)$$

ὅπου στήν τελευταία περίπτωση ὑποτίθεται ὅτι: $\beta_\nu \neq 0, \ \forall \ \nu \in \mathbf{N}$.

Ἡ σύγκλιση τῶν τελευταίων ἀκολουθιῶν καί τά ὅριά τους ἐξαρτῶνται ἀπό τή σύγκλιση καί τά ὅρια τῶν ἀκολουθιῶν (α_ν) καί (β_ν).

Ἀκριβέστερα ἰσχύουν οἱ ἑπόμενες προτάσεις:

§ 57. Ἰδιότητα X. *(ὅριο ἀθροίσματος).*—**Ἄν $\lim \alpha_\nu = \alpha$ καί $\lim \beta_\nu = \beta$, τότε ὑπάρχει τό $\lim(\alpha_\nu + \beta_\nu)$ καί ἰσοῦται μέ $\alpha + \beta$.**

Δηλαδή: $\boxed{\lim(\alpha_\nu + \beta_\nu) = \lim \alpha_\nu + \lim \beta_\nu}$

Ἀπόδειξη. Ἀφοῦ $\lim \alpha_\nu = \alpha$ ἕπεται ὅτι: γιά κάθε $\varepsilon > 0$, ἄρα καί γιά $\frac{\varepsilon}{2} > 0$,

ὑπάρχει δείκτης $\nu_1 = \nu_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \equiv \nu_1(\varepsilon)$ τέτοιος, ὥστε νά ἰσχύει:

$$|\alpha_\nu - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall \ \nu \geq \nu_1 \tag{1}$$

Ἐπίσης, ἀφοῦ $\lim \beta_\nu = \beta$, ὑπάρχει δείκτης $\nu_2 = \nu_2(\varepsilon)$ ὥστε νά ἰσχύει:

$$|\beta_\nu - \beta| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall \ \nu \geq \nu_2 \tag{2}$$

Τότε ὅμως, γιά κάθε $\nu \geq \nu_0 = \max\{\nu_1, \nu_2\}$ θά ἰσχύουν συγχρόνως οἱ (1) καί (2) καί συνεπῶς θά ἔχουμε:

$$\forall \ \varepsilon > 0 \text{ καί } \forall \ \nu \geq \nu_0 \implies |(\alpha_\nu + \beta_\nu) - (\alpha + \beta)| = |(\alpha_\nu - \alpha) + (\beta_\nu - \beta)| \leq$$

$$\leq |\alpha_\nu - \alpha| + |\beta_\nu - \beta| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

δηλαδή: $\forall \ \varepsilon > 0 \ \exists \ \nu_0 = \nu_0(\varepsilon): |(\alpha_\nu + \beta_\nu) - (\alpha + \beta)| < \varepsilon, \ \forall \ \nu \geq \nu_0$.

Αὐτό σημαίνει ὅτι ὑπάρχει τό $\lim(\alpha_\nu + \beta_\nu)$ καί ὅτι ἰσχύει:

$$\lim(\alpha_\nu + \beta_\nu) = \alpha + \beta = \lim \alpha_\nu + \lim \beta_\nu.$$

Σημείωση. Μποροῦμε νά διατυπώσουμε καί μέ λόγια τήν παραπάνω ἰδιότητα ὡς ἑξῆς: **Τό ὅριο τοῦ ἀθροίσματος δύο συγκλινουσῶν ἀκολουθιῶν εἶναι ἴσο μέ τό ἄθροισμα τῶν ὁρίων τους.**

Παρατηρήσεις. 1) Ἡ παραπάνω ἰδιότητα ἐπεκτείνεται καί στήν περίπτωση ἑνός πεπερασμένου πλήθους συγκλινουσῶν ἀκολουθιῶν. Δηλαδή τότε ἰσχύει:

$$\lim(\alpha_\nu + \beta_\nu + \cdots + x_\nu) = \lim \alpha_\nu + \lim \beta_\nu + \cdots + \lim x_\nu \tag{1}$$

2) Προσέξτε! ἡ (1) δέν ἰσχύει ἄν τό πλῆθος τῶν προσθετέων δέν εἶναι πεπερασμένο. Αὐτό φαίνεται καί ἀπό τό ἀκόλουθο ἀντιπαράδειγμα*: Ἔστω ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα AB μέ μῆκος ἴσο μέ τή μονάδα, τό ὁποῖο διαιροῦμε σέ ν ἴσα μέρη $(\nu \in \mathbf{N})$. Τότε ἔχουμε:

$$\frac{1}{\nu} + \frac{1}{\nu} + \cdots + \frac{1}{\nu} = 1 \tag{2}$$

Ἄν ἀλήθευε ἡ (1) γιά ὁποιοδήποτε πλῆθος προσθετέων θά παίρναμε ἀπό τή (2):

$$1 = \lim\left(\frac{1}{\nu} + \frac{1}{\nu} + \cdots + \frac{1}{\nu}\right) = \lim \frac{1}{\nu} + \lim \frac{1}{\nu} + \cdots + \lim \frac{1}{\nu} = 0 \ \textit{(ψευδές)}.$$

* Ἕνα παράδειγμα μέ τό ὁποῖο ἀποδεικνύεται ὅτι μία πρόταση p εἶναι ψευδής, ὀνομάζεται **ἀντιπαράδειγμα** τῆς p.

3) Τό ἀντίστροφο τῆς ἰδιότητας Χ δέν ἀληθεύει πάντοτε, δηλαδή ἄν τό ἄθροισμα δυό ἀκολουθιῶν εἶναι συγκλίνουσα ἀκολουθία, αὐτό δέ συνεπάγεται κατ' ἀνάγκη ὅτι καθεμιά ἀπ' αὐτές εἶναι συγκλίνουσα ἀκολουθία. Εἶναι δυνατό μάλιστα νά μή συγκλίνει οὔτε ἡ μία οὔτε ἡ ἄλλη. Π.χ. γιά τίς ἀκολουθίες: $\alpha_\nu = (-1)^\nu$, $\nu = 1, 2, \dots$ καί $\beta_\nu = (-1)^{\nu+1}$, $\nu = 1, 2, \dots$ ἰσχύει:

$\alpha_\nu + \beta_\nu = (-1)^\nu + (-1)^{\nu+1} = (-1)^\nu [1 + (-1)] = 0 \to 0$ καί ὅμως καμία δέ συγκλίνει.

Ἔχοντας τώρα ὑπόψη καί τήν παρατήρηση 1 τῆς § 52 ἰσχύει:

§ 58. Ἰδιότητα XI. *(ὅριο διαφορᾶς).*—**Ἄν $\lim \alpha_\nu = \alpha$ καί $\lim \beta_\nu = \beta$, τότε ὑπάρχει τό $\lim (\alpha_\nu - \beta_\nu)$ καί ἰσοῦται μέ $\alpha - \beta$.**

Δηλαδή: $\boxed{\lim (\alpha_\nu - \beta_\nu) = \lim \alpha_\nu - \lim \beta_\nu}$

Ἀπόδειξη. Ἔχουμε:

$$\left.\begin{matrix}\alpha_\nu \to \alpha \\ \beta_\nu \to \beta\end{matrix}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{matrix}\alpha_\nu \to \alpha \\ -\beta_\nu \to -\beta\end{matrix}\right\} \Longrightarrow \alpha_\nu + (-\beta_\nu) \to \alpha + (-\beta), \text{ δηλ. } \alpha_\nu - \beta_\nu \to \alpha - \beta.$$

§ 59. Πόρισμα.—Γιά κάθε $\xi, \eta \in \mathbf{R}$ ἰσχύει:

$$\boxed{\left.\begin{matrix}\alpha_\nu \to \alpha \\ \beta_\nu \to \beta\end{matrix}\right\} \Longrightarrow (\xi\alpha_\nu + \eta\beta_\nu) \to \xi\alpha + \eta\beta.}$$

Ἡ ἀπόδειξη εἶναι ἄμεση συνέπεια τῆς ἰδιότητας Χ καί τοῦ πορίσματος 2 τῆς § 52. Εἰδικά γιά $\xi = 1$ καί $\eta = -1$ παίρνουμε τήν ἰδιότητα XI.

§ 60. Ἰδιότητα XII. *(ὅριο γινομένου).*—**Ἄν $\lim \alpha_\nu = \alpha$ καί $\lim \beta_\nu = \beta$, τότε ὑπάρχει τό $\lim (\alpha_\nu \cdot \beta_\nu)$ καί ἰσοῦται μέ $\alpha\beta$.**

Δηλαδή: $\boxed{\lim(\alpha_\nu \cdot \beta_\nu) = (\lim\alpha_\nu) \cdot (\lim\beta_\nu).}$

Ἀπόδειξη. Ἔχουμε:

$$\alpha_\nu\beta_\nu - \alpha\beta = \alpha_\nu\beta_\nu - \alpha_\nu\beta + \alpha_\nu\beta - \alpha\beta = \alpha_\nu(\beta_\nu - \beta) + \beta(\alpha_\nu - \alpha). \quad (1)$$

Οἱ ἀκολουθίες $(\beta_\nu - \beta)$ καί $(\alpha_\nu - \alpha)$ εἶναι μηδενικές καί ἡ (α_ν) εἶναι φραγμένη (γιατί εἶναι συγκλίνουσα). Τότε ὅμως ἔχουμε:

$$(\S\ 52, \text{ Ἰδ. V}): \left.\begin{matrix}\beta_\nu - \beta \to 0 \\ (\alpha_\nu) \text{ φραγμένη}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \alpha_\nu(\beta_\nu - \beta) \to 0$$

$$(\S\ 52, \text{ Πόρ. } 1): \left.\begin{matrix}\alpha_\nu - \alpha \to 0 \\ \beta \in \mathbf{R}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \beta \cdot (\alpha_\nu - \alpha) \to 0.$$

Ἄρα, ἀπό τήν ἰδιότητα Χ: $\alpha_\nu(\beta_\nu - \beta) + \beta(\alpha_\nu - \alpha) \to 0$. Δηλ. $\alpha_\nu\beta_\nu - \alpha\beta \to 0$

καί συνεπῶς: $\alpha_\nu\beta_\nu \to \alpha\beta$.

Ὥστε: $\lim(\alpha_\nu \cdot \beta_\nu) = \alpha \cdot \beta = (\lim\alpha_\nu) \cdot (\lim\beta_\nu)$.

Σημείωση: Μέ λόγια ἡ παραπάνω ἰδιότητα διατυπώνεται ὡς ἑξῆς : **Τό ὅριο τοῦ γινομένου δύο συγκλινουσῶν ἀκολουθιῶν εἶναι ἴσο μέ τό γινόμενο τῶν ὁρίων τους.**

Παρατηρήσεις. 1) Ἡ παραπάνω ἰδιότητα ἐπεκτείνεται καί στήν περίπτωση ἑνός πεπερασμένου πλήθους συγκλινουσῶν ἀκολουθιῶν. Δηλαδή τότε ἰσχύει:

$$\lim(\alpha_\nu \cdot \beta_\nu \cdot \gamma_\nu \ldots x_\nu) = \lim\alpha_\nu \cdot \lim\beta_\nu \cdot \lim\gamma_\nu \ldots \lim x_\nu \quad (1)$$

Εἰδικότερα, ἄν k ἀκολουθίες εἶναι ἴσες, τότε ἰσχύει:

$$\alpha_\nu \to \alpha \Rightarrow \lim(\alpha_\nu)^k = (\lim\alpha_\nu)^k = \alpha^k \quad (k \in \mathbf{N}). \quad (2)$$

2) Προσέξτε! ἡ (1) δέν ἰσχύει ἄν τό πλῆθος τῶν παραγόντων δέν εἶναι πεπερασμένο. Ἐπίσης τό ἀντίστροφο τῆς παραπάνω ἰδιότητας γενικά δέν ἰσχύει (παράδειγμα;).

§ 61. Ἰδιότητα XIII *(ὅριο πηλίκου)*.—**Ἄν $\lim\alpha_\nu = \alpha$ καί $\lim\beta_\nu = \beta \neq 0$ καί ἀκόμη ἄν $\beta_\nu \neq 0$, $\forall\ \nu \in \mathbf{N}$, τότε ὑπάρχει τό $\lim\left(\dfrac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}\right)$ καί ἰσοῦται μέ $\dfrac{\alpha}{\beta}$.**

Δηλαδή: $$\boxed{\lim \frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} = \frac{\lim \alpha_\nu}{\lim \beta_\nu}}$$

Ἀπόδειξη. Ἔστω ὅτι $0 \neq \beta_\nu \to \beta \neq 0$. Παρατηροῦμε πρῶτα-πρῶτα ὅτι: $\dfrac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} = \alpha_\nu \cdot \dfrac{1}{\beta_\nu}$. Ἄρα ἀρκεῖ νά ἀποδείξουμε ὅτι: $\dfrac{1}{\beta_\nu} \to \dfrac{1}{\beta}$, δηλαδή ὅτι:

$$\frac{1}{\beta_\nu} - \frac{1}{\beta} \to 0.$$

Πράγματι, γιά κάθε $\nu \in \mathbf{N}$ ἔχουμε:

$$\left|\frac{1}{\beta_\nu} - \frac{1}{\beta}\right| = \frac{|\beta - \beta_\nu|}{|\beta_\nu| \cdot |\beta|} = \frac{|\beta_\nu - \beta|}{|\beta_\nu|\,|\beta|} = \frac{1}{|\beta_\nu|\,|\beta|} \cdot |\beta_\nu - \beta| \quad (1)$$

Ἐξάλλου, ἀφοῦ $\beta_\nu \to \beta \neq 0 \Rightarrow \forall\ \varepsilon > 0$, ἄρα καί γιά $\varepsilon = \dfrac{|\beta|}{2} > 0$, ὑπάρχει δείκτης $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon)$ τέτοιος, ὥστε νά ἰσχύει: $|\beta_\nu - \beta| < \dfrac{|\beta|}{2}$, $\forall\ \nu \geqq \nu_0$.

Ἀλλά: $\quad |\beta| - |\beta_\nu| \leqq |\beta - \beta_\nu| = |\beta_\nu - \beta| \quad$ (§ 27)

ὁπότε: $|\beta| - |\beta_\nu| < \dfrac{|\beta|}{2}$, δηλαδή: $|\beta_\nu| > |\beta| - \dfrac{|\beta|}{2} = \dfrac{|\beta|}{2}$, $\forall\ \nu \geqq \nu_0$

καί συνεπῶς: $$\frac{1}{|\beta_\nu|} < \frac{2}{|\beta|}, \ \forall\ \nu \geqq \nu_0$$

Ἄρα: $$\frac{1}{|\beta_\nu|\,|\beta|} < \frac{2}{|\beta|^2} = \frac{2}{\beta^2}, \ \forall\ \nu \geqq \nu_0 \quad (2)$$

Ἑπομένως, ἀπό τίς (1) καί (2), τελικά εἶναι:

$$\left|\frac{1}{\beta_\nu} - \frac{1}{\beta}\right| < \frac{2}{\beta^2} \cdot |\beta_\nu - \beta|, \ \forall\ \nu \geqq \nu_0 \quad (3)$$

Ἀλλά $\beta_\nu - \beta \to 0$ (γιατί $\beta_\nu \to \beta$) καί $\dfrac{2}{\beta^2} \equiv k > 0$. Συνεπῶς (βλ. § 53)

$$\frac{1}{\beta_\nu} - \frac{1}{\beta} \to 0 \Rightarrow \frac{1}{\beta_\nu} \to \frac{1}{\beta}, \text{ δηλ. } \lim \frac{1}{\beta_\nu} = \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\lim \beta_\nu}.$$

Τότε ὅμως ἔχουμε:

$$\lim \frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} = \lim \left(\alpha_\nu \cdot \frac{1}{\beta_\nu}\right) = (\lim\alpha_\nu)\cdot\left(\lim \frac{1}{\beta_\nu}\right) = (\lim\alpha_\nu)\cdot\frac{1}{\lim \beta_\nu} = \frac{\lim \alpha_\nu}{\lim \beta_\nu}.$$

Παρατηρήσεις. 1) Τό ἀντίστροφο τῆς παραπάνω προτάσεως γενικά δέν ἀληθεύει. Δηλαδή ἡ ὕπαρξη τοῦ $\lim\left(\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}\right)$ δέ συνεπάγεται πάντοτε τήν ὕπαρξη καθενός ἀπό τά $\lim\alpha_\nu$, $\lim\beta_\nu$. **Παράδειγμα**: Ἄς πάρουμε ὡς $\alpha_\nu = (-1)^\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots$ καί $\beta_\nu = (-1)^{\nu+1}$, $\nu=1, 2, \ldots$, τότε $\lim\left(\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}\right) = -1$, ἐνῶ καμία ἀπ' αὐτές τίς ἀκολουθίες δέ συγκλίνει.

2) Προσέξτε! στίς ἐφαρμογές γιά νά κάνουμε χρήση τῆς παραπάνω ἰδιότητας πρέπει προηγουμένως νά ἔχουμε ἐξασφαλίσει τήν ὕπαρξη τῶν ὁρίων τῶν ἀκολουθιῶν τοῦ ἀριθμητῆ καί παρονομαστῆ καί ἀκόμη ὅτι τό ὅριο τῆς ἀκολουθίας τοῦ παρονομαστῆ εἶναι διάφορο ἀπό τό μηδέν (βλ. πρῶτο παράδειγμα στή σελίδα 78).

3) Γιά κάθε ἀκέραιο ἀριθμό k ἰσχύει:

$$0 \neq \beta_\nu \to \beta \neq 0 \Rightarrow \lim(\beta_\nu)^k = (\lim\beta_\nu)^k = \beta^k \qquad (k\in\mathbf{Z})$$

Ἡ παραπάνω συνεπαγωγή ἀποτελεῖ γενίκευση τῆς (2) πού διατυπώνουμε στήν πρώτη παρατήρηση τῆς § 60.

§ 62. Ἰδιότητα XIV.— Ἄν $\lim \alpha_\nu = \alpha$, τότε ὑπάρχει τό $\lim|\alpha_\nu|$ καί ἰσοῦται μέ $|\alpha|$.

Δηλαδή : $$\boxed{\alpha_\nu \to \alpha \;\Rightarrow\; |\alpha_\nu| \to |\alpha|}$$

Ἀπόδειξη. Ξέρουμε ἀπό τό προηγούμενο Κεφάλαιο ὅτι: $\forall$ x, y$\in\mathbf{R}$ ἰσχύει:

$$\big||x|-|y|\big| \leqq |x-y|, \text{ ὁπότε ἔχουμε :}$$

$$\big||\alpha_\nu|-|\alpha|\big| \leqq |\alpha_\nu - \alpha|,\ \forall\ \nu\in\mathbf{N} \text{ καί } (\alpha_\nu - \alpha)\to 0, \text{ ἀφοῦ } \alpha_\nu \to \alpha.$$

Ἄρα (§ 53, Πόρισμα): $(|\alpha_\nu| - |\alpha|) \to 0$ καί συνεπῶς $|\alpha_\nu| \to |\alpha|$.

Ὥστε: $$\lim|\alpha_\nu| = |\alpha| = |\lim \alpha_\nu|.$$

Σημείωση. Μέ λόγια ἡ παραπάνω ἰδιότητα διατυπώνεται ὡς ἑξῆς: **Τό ὅριο τῆς ἀπόλυτης τιμῆς μιᾶς ἀκολουθίας εἶναι ἴσο μέ τήν ἀπόλυτη τιμή τοῦ ὁρίου της.**

Παρατηρήσεις. 1) Τό ἀντίστροφο τῆς παραπάνω προτάσεως δέν ἰσχύει, ἐκτός ἄν $\alpha = 0$, δηλαδή ἄν $\lim|\alpha_\nu| = |\alpha| \neq 0$, δέν ἔπεται καί $\lim\alpha_\nu = \alpha$, καί αὐτό γιατί εἶναι δυνατό μία ἀκολουθία νά συγκλίνει ἀπολύτως, χωρίς ὅμως ἡ ἴδια νά συγκλίνει, ὅπως ἀμέσως φαίνεται ἀπό τό ἀκόλουθο ἀντιπαράδειγμα: Ἔστω $\alpha_\nu = (-1)^\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots$ Ἔχουμε:

$|\alpha_\nu| = |(-1)^\nu| = 1 \to 1$ καί ὅμως ἡ $\alpha_\nu = (-1)^\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots$ δέ συγκλίνει.

2) Εἰδικά γιά $\alpha = 0$ ἰσχύει ἡ ἀκόλουθη ἰσοδυναμία :

$$\boxed{\alpha_\nu \to 0 \iff -\alpha_\nu \to 0 \iff |\alpha_\nu| \to 0.}$$

Ἡ ἀπόδειξή της εἶναι ἀμέσως φανερή ἀρκεῖ νά θυμηθοῦμε ὅτι: $|\alpha_\nu| = |-\alpha_\nu| = \big||\alpha_\nu|\big|$.

§ 63. Ἰδιότητα XV *(ὅριο ρίζας)*.— Ἄν $\lim \alpha_\nu = \alpha$, τότε ἰσχύει :

$$\boxed{\lim\sqrt{|\alpha_\nu|} = \sqrt{|\alpha|} = \sqrt{\lim \alpha_\nu}}$$

Ἀπόδειξη. (i) Ἄν $\alpha = 0$, ζητᾶμε νά δείξουμε ὅτι $\sqrt{|\alpha_\nu|} \to 0$. Πράγματι, ἀφοῦ $\alpha_\nu \to 0$ ἔπεται ὅτι: $\forall\ \varepsilon > 0$, ἄρα καί γιά $\varepsilon^2 > 0\ \exists\ \nu_0 = \nu_0(\varepsilon)$: $|\alpha_\nu| < \varepsilon^2$

$\forall\ \nu \geqq \nu_0$. Ἀπό τήν: $|\alpha_\nu| < \varepsilon^2 \Rightarrow \sqrt{|\alpha_\nu|} < \varepsilon,\ \forall\ \nu \geqq \nu_0$. Ἄρα $\sqrt{|\alpha_\nu|} \to 0$.

(ii) Ἔστω τώρα $\alpha \neq 0$. Ἀφοῦ $\alpha_\nu \to \alpha$ ἔχουμε: $|\alpha_\nu| \to |\alpha|$, ὁπότε:

$$|\alpha_\nu| - |\alpha| \to 0.$$

Ἐξάλλου ἰσχύει:

$$\left|\sqrt{|\alpha_\nu|} - \sqrt{|\alpha|}\right| = \frac{\big||\alpha_\nu| - |\alpha|\big|}{\sqrt{|\alpha_\nu|} + \sqrt{|\alpha|}} < \frac{1}{\sqrt{|\alpha|}} \cdot \left(\big||\alpha_\nu| - |\alpha|\big|\right) \to 0 \ (\S\ 52)$$

Τότε ὅμως (§ 53) εἶναι: $\sqrt{|\alpha_\nu|} - \sqrt{|\alpha|} \to 0$ καί συνεπῶς $\sqrt{|\alpha_\nu|} \to \sqrt{|\alpha|}$.

Παρατηρήσεις. 1) Ἀπό τήν παραπάνω ἰδιότητα συμπεραίνουμε ὅτι: **τά σύμβολα lim καί $\sqrt{\ }$ ἐπιτρέπεται νά ἐναλλάσσονται ἀριστερά ἀπό τήν ἀκολουθία α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$**

2) Πιό γενικά ἰσχύει: ἄν $\alpha_\nu \geqq 0,\ \forall\ \nu \in \mathbf{N}$ καί $\lim \alpha_\nu = \alpha$, τότε:

$$\lim \sqrt[k]{\alpha_\nu} = \sqrt[k]{\lim \alpha_\nu} \quad (k \in \mathbf{N}).$$

Οἱ ἰδιότητες πού ἀποδείξαμε στίς προηγούμενες παραγράφους μᾶς ἐπιτρέπουν νά βρίσκουμε τίς ὁριακές τιμές ὁρισμένων ἀκολουθιῶν ὄχι βάσει τοῦ ὁρισμοῦ, ἀλλά ὑπολογιστικά ἀναλύοντας τό γενικό τους ὅρο, ὅπως φαίνεται στά ἑπόμενα παραδείγματα:

Παράδειγμα 1ο. **Νά ἀποδείξετε ὅτι: $\lim \dfrac{2\nu^2 + 4\nu - 7}{3\nu^2 + 1} = \dfrac{2}{3}$.**

Λύση. Ἔχουμε:

$$\frac{2\nu^2 + 4\nu - 7}{3\nu^2 + 1} = \frac{\nu^2\left(2 + \frac{4}{\nu} - \frac{7}{\nu^2}\right)}{\nu^2\left(3 + \frac{1}{\nu^2}\right)} = \frac{2 + \frac{4}{\nu} - \frac{7}{\nu^2}}{3 + \frac{1}{\nu^2}}.$$

Οἱ ἀκολουθίες ὅμως $\dfrac{4}{\nu} = 4 \cdot \dfrac{1}{\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots$, $\dfrac{1}{\nu^2} = \dfrac{1}{\nu} \cdot \dfrac{1}{\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots$ καί $\dfrac{7}{\nu^2} = 7 \cdot \dfrac{1}{\nu^2}$, $\nu = 1, 2, \ldots$ εἶναι ὅλες μηδενικές ἀκολουθίες. Συνεπῶς ἔχουμε:

$$\lim\left(2 + \frac{4}{\nu} - \frac{7}{\nu^2}\right) = 2 + 0 - 0 = 2 \text{ καί } \lim\left(3 + \frac{1}{\nu^2}\right) = 3 + 0 = 3 \neq 0.$$

Τότε ὅμως, σύμφωνα μέ τήν ἰδιότητα XIII τῆς § 61, ἔχουμε:

$$\lim \frac{2\nu^2 + 4\nu - 7}{3\nu^2 + 1} = \lim \frac{2 + \frac{4}{\nu} - \frac{7}{\nu^2}}{3 + \frac{1}{\nu^2}} = \frac{\lim\left(2 + \frac{4}{\nu} - \frac{7}{\nu^2}\right)}{\lim\left(3 + \frac{1}{\nu^2}\right)} = \frac{2}{3}.$$

Τί παρατηρεῖτε;

Παράδειγμα 2ο. Νά ἀποδείξτε ὅτι: $\lim \dfrac{\nu^3 - \nu^2 + 1}{\nu^5 + 2\nu^4 - 3} = 0$.

Λύση. Ἔχουμε:

$$\frac{\nu^3 - \nu^2 + 1}{\nu^5 + 2\nu^4 - 3} = \frac{\nu^3\left(1 - \frac{1}{\nu} + \frac{1}{\nu^3}\right)}{\nu^5\left(1 + \frac{2}{\nu} - \frac{3}{\nu^5}\right)} = \frac{1}{\nu^2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{\nu} + \frac{1}{\nu^3}}{1 + \frac{2}{\nu} - \frac{3}{\nu^5}}.$$

Ἀλλά: $\lim \frac{1}{\nu^2} = 0$ καί $\lim \frac{1 - \frac{1}{\nu} + \frac{1}{\nu^3}}{1 + \frac{2}{\nu} - \frac{3}{\nu^5}} = \frac{1 - 0 + 0}{1 + 0 - 0} = \frac{1}{1} = 1.$

Ἄρα: $\lim \frac{\nu^3 - \nu + 1}{\nu^5 + 2\nu^4 - 3} = \lim \frac{1}{\nu^2} \cdot \lim \frac{1 - \frac{1}{\nu} + \frac{1}{\nu^5}}{1 + \frac{2}{\nu} - \frac{3}{\nu^5}} = 0 \cdot 1 = 0.$

Σημείωση. Ἀπό τά δύο προηγούμενα παραδείγματα παρατηροῦμε κάτι πού ἰσχύει γενικά στίς συγκλίνουσες ἀκολουθίες: *Ὅταν ὁ βαθμός τοῦ ἀριθμητῆ εἶναι ἴσος μέ τό βαθμό τοῦ παρονομαστῆ, τότε τό κλάσμα ἔχει ὅριο ἕναν ἀριθμό πού εἶναι ὁ λόγος τῶν συντελεστῶν τῶν μεγιστοβάθμιων ὅρων ἀριθμητῆ καί παρονομαστῆ, ἐνῶ ὅταν ὁ βαθμός τοῦ ἀριθμητῆ εἶναι μικρότερος ἀπό τό βαθμό τοῦ παρονομαστῆ, τότε τό κλάσμα ἔχει ὅριο τό μηδέν.*

§ 64. Μερικές ἀξιοσημείωτες καί χρήσιμες ἐφαρμογές.—Σ' αὐτή τήν παράγραφο μελετᾶμε μερικές ἀκολουθίες πού θά μᾶς εἶναι πολύ χρήσιμες στά ἑπόμενα, γι' αὐτό συνιστοῦμε στόν ἀναγνώστη νά δώσει ἰδιαίτερη προσοχή.

1η. Νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ ἀκολουθία $\alpha_\nu = \omega^\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots$, ὅπου ω ἀριθμός πραγματικός μέ $|\omega| < 1$, εἶναι μηδενική.

Δηλαδή: $\boxed{|\omega| < 1 \implies \alpha_\nu \equiv \omega^\nu \to 0}$

Ἀπόδειξη. α) Ἄν $\omega = 0$, τότε $\alpha_\nu = \omega^\nu = 0$, $\forall\ \nu \in N$ καί συνεπῶς $\alpha_\nu \to 0$.

β) Ἄν $\omega \neq 0$, τότε $0 < |\omega| < 1$, ὁπότε $\frac{1}{|\omega|} > 1$, δηλαδή $\frac{1}{|\omega|} - 1 > 0$. Θέτουμε:

$\frac{1}{|\omega|} - 1 = \theta$, ὅπου $\theta > 0$. Τότε, ἀπό τή γνωστή ἀνισότητα τοῦ Bernoulli, ἔχουμε:

$$\frac{1}{|\omega|} = 1 + \theta \implies \frac{1}{|\omega|^\nu} = (1+\theta)^\nu \geqq 1 + \nu\theta > \nu\theta \Rightarrow |\omega|^\nu = |\omega^\nu| < \frac{1}{\theta\nu} = \frac{1}{\theta} \cdot \frac{1}{\nu}$$

Ὥστε: $$|\alpha_\nu| = |\omega^\nu| < \frac{1}{\theta} \cdot \frac{1}{\nu}, \ \forall\ \nu \in N.$$

Ἄρα, ἐπειδή $\frac{1}{\nu} \to 0$, ἀπό τήν ἰδιότητα VI προκύπτει ὅτι καί ἡ ἀκολουθία $\alpha_\nu = \omega^\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots$ $(0 < |\omega| < 1)$ εἶναι μηδενική.

Ὥστε: $\forall\ \omega \in \mathbf{R}$ μέ $-1 < \omega < 1$ ἰσχύει: $\lim \omega^\nu = 0$.

✱ 2η. Ἔστω μία ἀκολουθία α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ μέ $\alpha_\nu \neq 0\ \forall\ \nu \in N$. Νά ἀποδείξετε ὅτι:

$$\boxed{\lim \left|\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}\right| = k < 1 \implies \alpha_\nu \to 0}$$

Ἀπόδειξη. Ἀφοῦ $\left|\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}\right| \to k$, $(0 \leqq k < 1)$ ἕπεται ὅτι : $\forall \varepsilon > 0$, ἄρα καί γιά $0 < \varepsilon < 1 - k$,

ὑπάρχει δείκτης $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon)$: $\left| \left|\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}\right| - k \right| < \varepsilon \ \forall\ \nu \geqq \nu_0$.

Ἔτσι γιά κάθε $\nu \geqq \nu_0$ ἔχουμε:

$$\frac{|\alpha_{\nu+1}|}{|\alpha_\nu|} = \left| \frac{|\alpha_{\nu+1}|}{|\alpha_\nu|} - k + k \right| \leqq \left| \left|\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}\right| - k \right| + k < \varepsilon + k \equiv \omega, \text{ ὅπου } 0 < \omega < 1$$

Ἄρα: $$|\alpha_{\nu+1}| \leqq \omega \cdot |\alpha_\nu|, \ \forall\ \nu \geqq \nu_0 \quad (0 < \omega < 1).$$

Ἄν τώρα στήν τελευταία σχέση θέσουμε $\nu=\nu_0, \nu_0+1, \ldots, \nu_0+\rho-1$, $\rho\in N$ καί πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη τίς σχέσεις πού θά προκύψουν, βρίσκουμε, ὕστερα ἀπό τίς σχετικές ἀπλοποιήσεις, ὅτι:

$$|\alpha_{\nu_0+\rho}| \leqq \omega^{\rho}\cdot|\alpha_{\nu_0}| \qquad (\rho\in N)$$

Ἐπειδή $0<\omega<1$, εἶναι $\omega^{\rho}\to 0$ (σύμφωνα μέ τήν ἐφαρμογή **1**) καί συνεπῶς : $\lim \omega^{\rho}|\alpha_{\nu_0}|=0$. Τότε ὅμως θά εἶναι καί $\alpha_{\nu_0+\rho}\to 0 \Longrightarrow \alpha_\nu\to 0$ (βλ. § 50).

✱ 3η. Νά ἀποδείξετε ὅτι : ἄν $\omega\in R$ καί $|\omega|<1$, τότε : $\alpha_\nu=\nu^k\cdot\omega^\nu\to 0$, $(k\in Z)$.

Ἀπόδειξη. Ἄν $\omega=0$, τότε $\nu^k.\omega^\nu=0\to 0$. Ἔστω ὅτι $\omega\neq 0$, τότε $\alpha_\nu\neq 0\ \forall\ \nu\in N$. Ἐφαρμόζοντας τώρα τή **2** ἔχουμε:

$$\left|\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}\right|=\left|\frac{(\nu+1)^k\cdot\omega^{\nu+1}}{\nu^k\cdot\omega^\nu}\right|=\left(\frac{\nu+1}{\nu}\right)^k\cdot|\omega|=\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^k\cdot|\omega|\to 1\cdot|\omega|=|\omega|<1.$$

Ἄρα $\alpha_\nu\to 0$, δηλαδή: $\nu^k\cdot\omega^\nu\to 0$.

Σημείωση. Γιά $k=0$ ἔχουμε: $\alpha_\nu=\omega^\nu\to 0$ (βλ. Ἐφαρμογή 1).

✱ 4η. Γιά κάθε $x\in R$ νά ἀποδείξετε ὅτι : $\lim\dfrac{x^\nu}{\nu!}=0$.

Σημείωση. Τό σύμβολο $\nu!$ διαβάζεται *ν παραγοντικό* καί ὁρίζεται ὡς ἑξῆς:
$1!=1$ καί $\nu!=1\cdot 2\cdot 3\cdots\nu$ (γιά $\nu>1$). Προφανῶς $(\nu+1)!=\nu!(\nu+1)$.

Ἀπόδειξη. Ἄν $x=0$, τότε $\dfrac{x^\nu}{\nu!}=0\to 0$. Ἔστω ὅτι $x\neq 0$. Θέτουμε $\alpha_\nu=\dfrac{x^\nu}{\nu!}$ καί ἔχουμε :

$$\left|\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}\right|=\frac{|x|^{\nu+1}}{(\nu+1)!}:\frac{|x|^\nu}{\nu!}=\frac{|x|^{\nu+1}\cdot\nu!}{|x|^\nu\cdot(\nu+1)!}=\frac{|x|}{\nu+1}\to 0<1.$$

Ἄρα: $\alpha_\nu\to 0$, δηλαδή $\dfrac{x^\nu}{\nu!}\to 0$.

✱ 5η. Νά ἀποδείξετε ὅτι : ἄν $\alpha\in R^+$, τότε $\alpha_\nu=\sqrt[\nu]{\alpha}\to 1$.

Ἀπόδειξη. Διακρίνουμε τίς περιπτώσεις: **(i)** $\alpha=1$, **(ii)** $\alpha>1$ καί **(iii)** $0<\alpha<1$

(i) $\alpha=1$, τότε $\alpha_\nu=\sqrt[\nu]{1}=1\to 1$.

(ii) $\alpha>1$, τότε $\alpha_\nu=\sqrt[\nu]{\alpha}>1$, $\forall\ \nu\in N$. Θέτουμε $\alpha_\nu=\sqrt[\nu]{\alpha}=1+\delta_\nu$, ὅπου $\delta_\nu>0$, $\forall\ \nu\in N$.

Ἀρκεῖ λοιπόν νά ἀποδείξουμε ὅτι: $\delta_\nu\to 0$, ὁπότε $\alpha_\nu=\sqrt[\nu]{\alpha}\to 1$.

Πράγματι, ἔχουμε:

$$\sqrt[\nu]{\alpha}=1+\delta_\nu\Longrightarrow\alpha=(1+\delta_\nu)^\nu\geqq 1+\nu\cdot\delta_\nu>\nu\cdot\delta_\nu\Longrightarrow\delta_\nu<\alpha\cdot\frac{1}{\nu},\ \forall\ \nu\in N.$$

Ὥστε: $0<\delta_\nu<\alpha\dfrac{1}{\nu}$, $\forall\ \nu\in N$ καί ἐπειδή $\alpha\cdot\dfrac{1}{\nu}\to 0$, ἕπεται: $\delta_\nu\to 0$.

(iii) $0<\alpha<1$, τότε $\dfrac{1}{\alpha}>1$ καί σύμφωνα μέ τήν **(ii)** ἔχουμε:

$$\sqrt[\nu]{\frac{1}{\alpha}}\to 1,\ \text{δηλαδή}\ \frac{1}{\sqrt[\nu]{\alpha}}\to 1,\ \text{ὁπότε καί}\ \sqrt[\nu]{\alpha}\to 1.$$

Ὥστε: $\boxed{\alpha_\nu=\sqrt[\nu]{\alpha}\to 1,\ \forall\ \alpha>0}$

★ **6η. Νά ἀποδείξετε ὅτι:** $\boxed{\lim \sqrt[\nu]{\nu} = 1.}$

Ἀπόδειξη. Γιά κάθε $\nu \in \mathbf{N}$ ἔχουμε: $\nu \geqq 1 \Longrightarrow \sqrt[2\nu]{\nu} \geqq 1$, ἄρα $\sqrt[2\nu]{\nu} - 1 \geqq 0$.

Θέτουμε: $\delta_\nu = \sqrt[2\nu]{\nu} - 1$, $\nu = 1, 2, \ldots$, ὁπότε $\delta_\nu \geqq 0$, $\forall\ \nu \in \mathbf{N}$ καί

$$\sqrt[2\nu]{\nu} = 1 + \delta_\nu \Longrightarrow \sqrt{\nu} = (1 + \delta_\nu)^\nu \geqq 1 + \nu \cdot \delta_\nu > \nu \cdot \delta_\nu \Longrightarrow \delta_\nu < \frac{\sqrt{\nu}}{\nu} = \frac{1}{\sqrt{\nu}},\ \forall\ \nu \in \mathbf{N}.$$

Ὥστε: $0 \leqq \delta_\nu < \dfrac{1}{\sqrt{\nu}}$, $\forall\ \nu \in \mathbf{N}$ καί ἐπειδή $\dfrac{1}{\sqrt{\nu}} \to 0$, ἕπεται: $\delta_\nu \to 0$.

Ἔχουμε ὅμως: $\sqrt[2\nu]{\nu} = 1 + \delta_\nu \Longrightarrow \sqrt[\nu]{\nu} = (1 + \delta_\nu)^2$.

Ἄρα: $\sqrt[\nu]{\nu} = (1 + \delta_\nu)^2 \to (1 + 0)^2 = 1$.

Ὥστε: $$\lim \sqrt[\nu]{\nu} = 1.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάδα Α΄. 102. Νά ἀποδείξετε ὅτι οἱ ἑπόμενες ἀκολουθίες εἶναι μηδενικές:

1) $\dfrac{\nu}{\nu^3 + \nu + 1}$, 2) $\dfrac{(-1)^\nu}{(\nu+1)^2}$, 3) $\dfrac{1 + \sqrt{\nu}}{\nu^3}$, 4) $\sqrt{\nu^2 + 3} - \sqrt{\nu^2 + 1}$.

103. Νά βρεῖτε, ἄν ὑπάρχουν, τά ὅρια τῶν ἀκολουθιῶν μέ γενικό ὅρο:

1) $\alpha_\nu = \dfrac{\nu^2 + 3}{2\nu^2 - 5\nu + 7}$, 2) $\alpha_\nu = \sqrt{1 + \dfrac{4}{\nu}}$, 3) $\alpha_\nu = \dfrac{\nu}{\nu^2 + 3}$,

4) $\alpha_\nu = \left(2 + \dfrac{1}{\nu}\right)^2$, 5) $\alpha_\nu = \dfrac{2\nu^3 - 3\nu + 2}{5\nu^3 + 7}$, 6) $\alpha_\nu = \sqrt[3]{\dfrac{8\nu^2 + 5}{64\nu^2 + \nu + 1}}$.

104. Νά ἀποδείξετε ὅτι:

1) $\lim \sqrt{\dfrac{9\nu^2}{\nu^2 + 3}} = 3$, 2) $\lim \sqrt[3]{\dfrac{\nu^2 + \nu - 1}{27\nu^2 - 4}} = \dfrac{1}{3}$, 3) $\lim \sqrt{\dfrac{3\nu^2 + 2}{4\nu^2 + \nu + 1}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

105. Νά ἀποδείξετε ὅτι: ἄν ἡ ἀκολουθία α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ εἶναι φραγμένη, τότε καί ἡ ἀκολουθία $\beta_\nu = \dfrac{1}{\nu} \cdot \alpha_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots$ εἶναι φραγμένη καί ἰσχύει:

$$\lim \beta_\nu \equiv \lim \left(\frac{1}{\nu} \cdot \alpha_\nu\right) = 0.$$

106. Νά ἀποδείξετε ὅτι: $\lim \dfrac{\nu^4 - 4\nu^3 + \nu + 6}{2\nu^4 + 7\nu^2 + 2\nu - 1} = \dfrac{1}{2}$.

107. Νά ἀποδείξετε ὅτι οἱ ἀκολουθίες μέ γενικούς ὅρους:

$$\alpha_\nu = \frac{2\nu^2 - 1}{3\nu^2 + 2}, \quad \beta_\nu = \frac{2\nu + 3}{3\nu - 2}, \quad \gamma_\nu = \sqrt{\frac{4\nu - 3}{9\nu + 5}},$$

ἔχουν τό ἴδιο ὅριο, τό ὁποῖο καί θά βρεῖτε.

108. Νά βρεῖτε ποῦ μεταβάλλεται ὁ πραγματικός ἀριθμός x, ἄν:

$$\left|\lim \frac{\nu^2 + 3}{2\nu^2 - 1} + x\right| < \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

109. Ἄν $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^+$, νά ἀποδείξετε ὅτι:

$$\lim(\sqrt{(\nu+\alpha)(\nu+\beta)}-\nu)=\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

110. Ἄν $x \in \mathbf{R}$, $x \neq -1$ νά μελετήσετε ὡς πρός τή σύγκλιση τήν ἀκολουθία $\alpha_\nu=\dfrac{x^\nu-1}{x^\nu+1}$, $\nu=1, 2, \ldots$ καί κατόπιν νά κάνετε τή γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως f, μέ τύπο :

$$f(x)=\lim\alpha_\nu \equiv \lim\frac{x^\nu-1}{x^\nu+1}$$

Ὑπόδειξη. Νά διακρίνετε τίς περιπτώσεις: **(i)** $|x|<1$, **(ii)** $x=1$ καί **(iii)** $|x|>1$.

★ **Ὁμάδα Β΄. 111.** Νά ἀποδείξετε ὅτι οἱ ἀκολουθίες, μέ τούς ἑπόμενους γενικούς ὅρους, εἶναι μηδενικές:

1) $\dfrac{\eta\mu\nu+\sigma\upsilon\nu^6\nu}{\sqrt{\nu}}$, 2) $\nu^{3/2}.(\sqrt{\nu^4+4}-\nu^2)$, 3) $\sqrt[3]{\nu+1}-\sqrt[3]{\nu}$, 4) $\nu\cdot(\sqrt{\nu^4+4}-\nu^2)$.

112. Νά ὑπολογίσετε τά ὅρια τῶν ἀκολουθιῶν μέ τούς ἑπόμενους γενικούς ὅρους:

1) $\alpha_\nu=\dfrac{1+2+\cdots+\nu}{\nu^2}$, 2) $\beta_\nu=\dfrac{1^2+2^2+\cdots+\nu^2}{\nu^3}$, 3) $\gamma_\nu=\dfrac{1^3+2^3+\cdots+\nu^3}{\nu^4}$.

Ὑπόδειξη. Ὑπενθυμίζουμε τούς τύπους: $1+2+\cdots+\nu=\dfrac{\nu(\nu+1)}{2}$,

$$1^2+2^2+\cdots+\nu^2=\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}, \qquad 1^3+2^3+\cdots+\nu^3=\frac{\nu^2(\nu+1)^2}{4}.$$

113. Νά ὑπολογίσετε τά ὅρια τῶν ἀκολουθιῶν μέ τούς ἑπόμενους γενικούς ὅρους:

1) $\alpha_\nu=\dfrac{2\nu^2+3\nu-1}{5\nu^3-\nu+7}$, 2) $\alpha_\nu=\dfrac{\nu^4+2}{\nu^2-4}-\dfrac{2\nu^5-3\nu^3}{2\nu^3+1}$, 3) $\alpha_\nu=\sqrt{(\nu+2)(\nu+3)}-\nu$

4) $\alpha_\nu=(\sqrt{\nu+1}-\sqrt{\nu})\cdot\sqrt{\nu+\dfrac{1}{2}}$, 5) $\alpha_\nu=\sqrt{\nu+\sqrt{\nu}}-\sqrt{\nu-\sqrt{\nu}}$.

Ὑπόδειξη. Στίς 3, 4 καί 5 πολλαπλασιάζουμε καί διαιροῦμε καθένα ἀπ' αὐτούς τούς γενικούς ὅρους μέ κατάλληλη παράσταση.

114. Νά ἀποδείξετε ὅτι:

$$\lim\left[\frac{1}{\sqrt{\nu^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{\nu^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{\nu^2+\nu}}\right]=1.$$

Ὑπόδειξη. Νά προσθέσετε κατά μέλη τίς προφανεῖς ἀνισότητες:

$$\frac{1}{\sqrt{\nu^2+\nu}} \leqq \frac{1}{\sqrt{\nu^2+k}} \leqq \frac{1}{\sqrt{\nu^2+1}}, \quad k=1, 2, \ldots, \nu$$

καί νά ἐφαρμόσετε τήν ἰδιότητα VII, § 54.

115. Νά ἀποδείξετε ὅτι οἱ ἀκολουθίες, μέ τούς ἑπόμενους γενικούς ὅρους, εἶναι μηδενικές:

1) $\alpha_\nu=\dfrac{2^\nu}{\nu!}$, 2) $\alpha_\nu=\dfrac{\nu!}{\nu^\nu}$, 3) $\alpha_\nu=\dfrac{2^\nu.\nu!}{(3\nu)^\nu}$,

ὅπου τό σύμβολο ν! (ν παραγοντικό) παριστάνει τό γινόμενο: $1\cdot 2\cdot 3\cdots\nu \equiv \nu!$

Ὑπόδειξη. Μπορεῖτε νά στηριχτεῖτε καί στή 2η ἐφαρμογή τῆς § 64.

116. Ἄν θεωρηθεῖ γνωστό ὅτι $\lim\left(1+\dfrac{1}{\nu}\right)^\nu=e$, νά ὑπολογίσετε τά ὅρια τῶν ἀκολουθιῶν μέ τούς ἑπόμενους γενικούς ὅρους:

1) $\alpha_\nu=\left(1+\frac{1}{2\nu}\right)^\nu$, 2) $\alpha_\nu=\left(1+\frac{2}{\nu}\right)^\nu$, 3) $\alpha_\nu=\left(1-\frac{1}{\nu}\right)^\nu$, 4) $\alpha_\nu=\left(\frac{2\nu+1}{2\nu-1}\right)^\nu$

117. Νά ἀποδείξετε ὅτι: $\lim \sqrt[\nu]{\nu^2+\nu}=1.$

Ὑπόδειξη. Βλ. § 64, 5η καί 6η ἐφαρμογή καί ἐπιπλέον μπορεῖ νά χρησιμεύσει καί ἡ ἰδιότητα VII τῆς § 54.

118. Ἄν γιά μία ἀκολουθία α_ν, $\nu=1,2,\ldots$ ἰσχύει $\lim\alpha_\nu=\alpha$, τότε νά ἀποδείξετε ὅτι:

$$\lim\beta_\nu=\alpha, \quad \text{ὅπου} \quad \beta_\nu=\frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_\nu}{\nu},\ \nu=1,2,\ldots$$

Ἰσχύει τό ἀντίστροφο;

Ὑπόδειξη. Ἔχουμε $\alpha_\nu\to\alpha \iff \forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \nu_0=\nu_0(\varepsilon): |\alpha_\nu-\alpha|<\frac{\varepsilon}{2}\ \forall\ \nu\geqq\nu_0.$

Κατόπιν νά σχηματίσετε τή διαφορά: $\beta_\nu-\alpha$ καί νά ἀποδείξετε ὅτι τελικά ἰσχύει:

$|\beta_\nu-\alpha|<\frac{A}{\nu}+\frac{\nu-\nu_0+1}{\nu}\cdot\frac{\varepsilon}{2}$, ὅπου $A\equiv|(\alpha_1-\alpha)+(\alpha_2-\alpha)+\cdots+(\alpha_{\nu_0-1}-\alpha)|$. Ἄρα...

Γιά νά ἐξετάσετε ἄν ἰσχύει τό ἀντίστροφο νά πάρετε ὡς $\alpha_\nu=(-1)^\nu$, $\nu=1,2,\ldots$

119. Νά ἀποδείξετε ὅτι: ἄν $\lim(\alpha_\nu-\alpha_{\nu-1})=\alpha$, τότε $\lim\frac{\alpha_\nu}{\nu}=\alpha$.

Ὑπόδειξη. Νά ἐφαρμόσετε τό συμπέρασμα τῆς προηγούμενης ἀσκήσεως.

⋆ V. ΜΟΝΟΤΟΝΕΣ ΚΑΙ ΦΡΑΓΜΕΝΕΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

§ 65. Τό μονότονο καί ἡ σύγκλιση ἀκολουθίας.—Στήν ἀρχή αὐτοῦ τοῦ Κεφαλαίου (§42) ὁρίσαμε τήν ἔννοια τῆς μονότονης ἀκολουθίας. Ἐπαναλαμβάνοντας μέ συντομία τά ὅσα ἀναπτύξαμε στήν § 42 γιά τίς μονότονες ἀκολουθίες ἔχουμε:

1. $(\alpha_\nu)\uparrow$ **(αὔξουσα)** $\underset{\text{ορσ}}{\iff} (\forall\ \nu\in N,\ \alpha_\nu\leqq\alpha_{\nu+1})$
$\iff (\alpha_1\leqq\alpha_2\leqq\cdots\leqq\alpha_\nu\leqq\alpha_{\nu+1}\leqq\cdots)$

2. $(\alpha_\nu)\Uparrow$ **(γνησίως αὔξουσα)** $\underset{\text{ορσ}}{\iff} (\forall\ \nu\in N,\ \alpha_\nu<\alpha_{\nu+1})$
$\iff (\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_\nu<\alpha_{\nu+1}<\cdots)$

3. $(\alpha_\nu)\downarrow$ **(φθίνουσα)** $\underset{\text{ορσ}}{\iff} (\forall\ \nu\in N,\ \alpha_\nu\geqq\alpha_{\nu+1})$
$\iff (\alpha_1\geqq\alpha_2\geqq\cdots\geqq\alpha_\nu\geqq\alpha_{\nu+1}\geqq\cdots)$

4. $(\alpha_\nu)\Downarrow$ **(γνησίως φθίνουσα)** $\underset{\text{ορσ}}{\iff} (\forall\ \nu\in N,\ \alpha_\nu>\alpha_{\nu+1})$
$\iff (\alpha_1>\alpha_2>\ldots>\alpha_\nu>\alpha_{\nu+1}>\ldots)$.

Ὑπενθυμίζουμε (βλ. παρατήρηση 2 τῆς § 42) ὅτι γιά μιά αὔξουσα ἤ γνησίως αὔξουσα ἀκολουθία οἱ ἐκφράσεις: *«ἡ ἀκολουθία εἶναι φραγμένη»* καί *«ἡ ἀκολουθία εἶναι φραγμένη ἄνω»* εἶναι ἰσοδύναμες· γιατί βέβαια, ἀφοῦ εἶναι αὔξουσα ἤ γνησίως αὔξουσα εἶναι κάτω φραγμένη. Ένα κάτω φράγμα της εἶναι ὁ πρῶτος ὅρος της. Ἀνάλογα ἔχουμε ὅτι γιά μιά φθίνουσα ἤ γνησίως φθίνουσα ἀκολουθία οἱ ἐκφράσεις: *«ἡ ἀκολουθία εἶναι φραγμένη»* καί *«ἡ ἀκολουθία εἶναι φραγμένη κάτω»* εἶναι ἰσοδύναμες.

῎Εστω τώρα ἡ ἀκολουθία $\alpha_\nu = \nu^2$, $\nu = 1, 2, \ldots$, δηλαδή ἡ: $1, 4, 9, \ldots, \nu^2, \ldots$ ᾿Επίσης ἔστω ἡ ἀκολουθία $\beta_\nu = \frac{\nu}{\nu+1}$, $\nu = 1, 2, \ldots$, δηλαδή ἡ: $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{\nu}{\nu+1}, \ldots$ Παρατηροῦμε ὅτι καί οἱ δύο εἶναι αὔξουσες καί μάλιστα γνησίως αὔξουσες ἀκολουθίες. ᾿Απ' αὐτές ἡ πρώτη δέν εἶναι φραγμένη οὔτε καί συγκλίνει σέ πραγματικό ἀριθμό (βλ. παρατήρ. τῆς § 51). ᾿Αντίθετα ἡ δεύτερη εἶναι φραγμένη, ἀφοῦ $|\beta_\nu| = \left|\frac{\nu}{\nu+1}\right| = \frac{\nu}{\nu+1} \leqq 1$ γιά κάθε $\nu \in \mathbf{N}$. ᾿Ακόμη παρατηροῦμε ὅτι ἡ ἀκολουθία β_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ συγκλίνει καί μάλιστα εἶναι $\lim \beta_\nu = \lim \frac{\nu}{\nu+1} = 1$.

Τό γεγονός ὅτι ἡ αὔξουσα καί φραγμένη ἀκολουθία $\beta_\nu = \frac{\nu}{\nu+1}$, $\nu \in \mathbf{N}$ συγκλίνει σέ πραγματικό ἀριθμό τό δεχόμαστε ὅτι ἰσχύει γενικότερα γιά κάθε αὔξουσα καί φραγμένη ἀκολουθία.

᾿Ακριβέστερα δεχόμαστε τό ἀκόλουθο ἀξίωμα:

§ 66. ᾿Αξίωμα.—Κάθε μονότονη καί φραγμένη ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν συγκλίνει σέ κάποιο πραγματικό ἀριθμό.

Σημείωση. Τό παραπάνω ἀξίωμα τό συναντᾶμε στά ᾿Ανώτερα Μαθηματικά ὡς θεώρημα. ῾Η ἀπόδειξή του ὅμως ἐκεῖ στηρίζεται σέ κάποιο ἄλλο ἀξίωμα.

Σχόλια: α). Τό παραπάνω ἀξίωμα, ἄν καί ἀφορᾶ μόνο τίς μονότονες ἀκολουθίες, δίνει μία **ἱκανή** συνθήκη *«ὑπάρξεως»* ὁρίου ἀκολουθίας. Φυσικά, πληροφορίες γιά τή σύγκλιση ἀκολουθίας καί γιά τό ὅριό της, ἄν ὑπάρχει, μᾶς δίνουν πολλές ἀπό τίς προτάσεις πού ἀποδείξαμε στίς προηγούμενες παραγράφους καί κυρίως οἱ προτάσεις πού ἀναφέρονται στήν ἑνότητα: *῎Αλγεβρα τῶν ὁρίων*. Παρατηροῦμε ὅτι τό ἀξίωμα αὐτό ἐξασφαλίζει τήν ὕπαρξη στό $\mathbf{R}$ τοῦ ὁρίου μιᾶς ἀκολουθίας μέ ὁρισμένες ὑποθέσεις, ἀλλά δέ μᾶς δίνει καμιά ἔνδειξη γιά τό πῶς βρίσκουμε τό ὅριο· ὁπωσδήποτε ὅμως εἶναι σημαντικό νά ξέρουμε ὅτι μία ἀκολουθία συγκλίνει στό $\mathbf{R}$, γιατί τότε δέν ἀποκλείεται ἡ *«ὕπαρξη»* τῆς ὁριακῆς της τιμῆς νά ὁδηγήσει καί στήν *«εὕρεσή»* της. Αὐτό φαίνεται καλύτερα στίς ἐφαρμογές πού διαπραγματευόμαστε στήν ἑπόμενη παράγραφο.

β). ῎Εχοντας ὑπόψη τό παραπάνω ἀξίωμα καί τίς προτάσεις πού ἀποδείξαμε στίς προηγούμενες παραγράφους, συμπεραίνουμε ἀμέσως ὅτι:

῎Αν $M = \{(\alpha_\nu) : (\alpha_\nu)$ *μονότονη ἀκολουθία*$\}$, $\Phi = \{(\alpha_\nu) : (\alpha_\nu)$ *φραγμένη ἀκολουθία*$\}$ $\Sigma = \{(\alpha_\nu) : (\alpha_\nu)$ *συγκλίνουσα ἀκολουθία*$\}$ *καί* $\Sigma_0 = \{(\alpha_\nu) : (\alpha_\nu)$ *μηδενική ἀκολουθία*$\}$, *τότε ἰσχύουν οἱ ἑξῆς σχέσεις ἐγκλεισμοῦ:*

i) $\Sigma_0 \subset \Sigma \subset \Phi$, ii) $M \cap \Phi \subset \Sigma$.

῎Αμεσες τώρα συνέπειες τοῦ παραπάνω ἀξιώματος καί τῶν πορισμάτων 1 καί 2 τῆς § 55 εἶναι οἱ ἑπόμενες δύο προτάσεις:

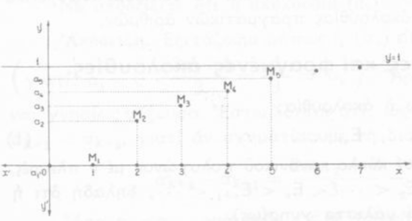
α). *῎Αν μία ἀκολουθία* α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ *εἶναι αὔξουσα καί ἔχει ὡς ἕνα ἄνω φράγμα τόν ἀριθμό* s, *τότε εἶναι συγκλίνουσα καί ἰσχύει :* $\lim \alpha_\nu \leqq s$.

Δηλαδή: $\boxed{\left.\begin{array}{l}(\alpha_\nu)\uparrow\\ \alpha_\nu < s\end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha_\nu \to \alpha \leq s}$

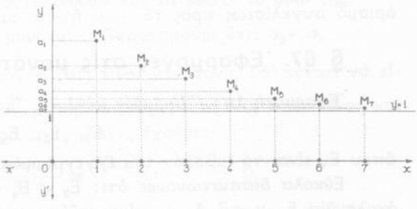
β). *Ἄν μία ἀκολουθία α_ν $\nu=1,2\ldots$ εἶναι φθίνουσα καί ἔχει ὡς ἕνα κάτω φράγμα τόν ἀριθμό σ, τότε εἶναι συγκλίνουσα καί ἰσχύει : $\sigma \leq \lim \alpha_\nu$.*

Δηλαδή: $\boxed{\left.\begin{array}{l}(\alpha_\nu)\downarrow\\ \alpha_\nu > \sigma\end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha_\nu \to \alpha \geq \sigma}$

Ἔτσι, π.χ., ἡ ἀκολουθία $\alpha_\nu = \dfrac{\nu-1}{\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots$ ἡ ὁποία, ὅπως εὔκολα διαπιστώνουμε, εἶναι αὔξουσα καί ἔχει ὡς ἕνα ἄνω φράγμα τόν ἀριθμό 1 $\left(\text{γιατί: } \alpha_\nu = \dfrac{\nu-1}{\nu} = 1 - \dfrac{1}{\nu} < 1, \ \forall\ \nu \in \mathbf{N}\right)$ συγκλίνει σ' ἕναν ἀριθμό πού εἶναι μικρότερος ἤ ἴσος μέ τό 1. Στό παρακάτω σχῆμα δίνουμε τούς πέντε πρώτους ὅρους τῆς ἀκολουθίας $\alpha_\nu = \dfrac{\nu-1}{\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots$



Σχ. 6



Σχ. 7

Ἐπίσης ἡ ἀκολουθία: $1 + \dfrac{1}{\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots$ ἡ ὁποία εἶναι φθίνουσα καί φραγμένη μέ ἕνα κάτω φράγμα τόν ἀριθμό 1 $\left(\text{γιατί: } 1 < 1 + \dfrac{1}{\nu}, \ \forall \nu \in \mathbf{N}\right)$ συγκλίνει σ' ἕναν ἀριθμό πού εἶναι μεγαλύτερος ἤ ἴσος μέ τό 1. Στό σχῆμα 7 δίνουμε τούς ἑφτά πρώτους ὅρους τῆς ἀκολουθίας $\alpha_\nu = 1 + \dfrac{1}{\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots$

Σημαντική παρατήρηση. Ξέρουμε (βλ. παρατήρηση τῆς § 51) ὅτι μία ἀκολουθία α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ πού δέν εἶναι φραγμένη, δέ συγκλίνει σέ πραγματικό ἀριθμό, γιατί ἀλλιῶς, δηλαδή ἄν αὐτή συνέκλινε σέ πραγματικό ἀριθμό, τότε, σύμφωνα μέ τήν ἰδιότητα IV τῶν συγκλινουσῶν ἀκολουθιῶν, θά ἦταν φραγμένη, πράγμα πού εἶναι ἄτοπο. Στήν περίπτωση, ὅπου ἡ μή φραγμένη ἀκολουθία α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ εἶναι καί αὔξουσα, ὅπως π.χ. ἡ ν^2, $\nu = 1, 2, \ldots$ λέμε ὅτι αὐτή *«ἀπειρίζεται θετικά»* ἤ ἀλλιῶς *«συγκλίνει στό $+\infty$»* ἤ ἀκόμη *«τείνει στό $+\infty$»* (τό σύμβολο $+\infty$ τό διαβάζουμε *«σύν ἄπειρο»*). Γράφουμε συμβολικά: $\lim \alpha_\nu = +\infty$ ἤ πιό ἁπλά $\alpha_\nu \to +\infty$ καί διαβάζουμε: ὅριο α_ν ἴσο μέ $+\infty$ ἤ α_ν τείνει στό $+\infty$.

Στήν περίπτωση, ὅπου ἡ μή φραγμένη ἀκολουθία α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ εἶναι καί φθίνουσα, ὅπως π.χ. ἡ ἀκολουθία: $-\nu^2$, $\nu = 1, 2, \ldots$ λέμε ὅτι αὐτή *«ἀπειρίζεται ἀρνητικά»* ἤ ἀλλιῶς *«συγκλίνει στό $-\infty$»* ἤ ἀκόμη *«τείνει στό $-\infty$»* καί γράφουμε συμβολικά: $\lim \alpha_\nu = -\infty$ ἤ πιό ἁπλά $\alpha_\nu \to -\infty$ (τό σύμβολο $-\infty$ τό διαβάζουμε *«πλὴν ἄπειρο»*).

Ἀξίζει νά παρατηρήσουμε ἐδῶ ὅτι ἡ ἀντίθετη ἀκολουθία τῆς $\alpha_\nu = -\nu^2$, $\nu = 1, 2, \ldots$ δηλαδή ἡ: $-(-\nu^2) = \nu^2$, $\nu = 1, 2, \ldots$ ἀπειρίζεται θετικά. Αὐτό ὅμως ἰσχύει γιά κάθε ἀκολουθία πού ἀπειρίζεται θετικά ἤ ἀρνητικά. Ἀκριβέστερα ἰσχύει ἡ ἰσοδυναμία:

$$\boxed{\lim \alpha_\nu = -\infty \iff \lim(-\alpha_\nu) = +\infty}$$

Σημείωση. Ὅταν μία ἀκολουθία ἀπειρίζεται θετικά ἤ ἀρνητικά δέ λέγεται συγκλίνουσα. **Προσέξτε!** μόνο ὅταν τό ὅριό της εἶναι ἀριθμός πραγματικός, τότε ἡ ἀκολουθία λέγεται συγκλίνουσα.

Στήν ἄλλη τάξη θά μάθουμε πώς καί ἄλλες ἀκολουθίες, ἐκτός ἀπό τίς μονότονες καί μή φραγμένες, ἀπειρίζονται θετικά ἀντιστοίχως ἀρνητικά καί ἐκεῖ θά δώσουμε ἕνα γενικό ὁρισμό συγκλίσεως πρός τό $+\infty$ ἤ $-\infty$ μιᾶς ἀκολουθίας πραγματικῶν ἀριθμῶν.

§ 67. Ἐφαρμογές στίς μονότονες καί φραγμένες ἀκολουθίες.

Ἐφαρμογή 1η: *(Ἐμβαδόν κύκλου).* Ἔστω ἡ ἀκολουθία:

$$E_3,\ E_4,\ E_5,\ \ldots,\ E_\nu,\ \ldots \tag{1}$$

ὅπου E_ν εἶναι τό ἐμβαδόν τοῦ ἐγγεγραμμένου σέ κύκλο κανονικοῦ πολυγώνου μέ ν πλευρές.

Εὔκολα διαπιστώνουμε ὅτι: $E_3 < E_4 < E_5 < \cdots < E_\nu < E_{\nu+1} < \cdots$, δηλαδή ὅτι ἡ ἀκολουθία E_ν, $\nu = 3, 4, \ldots$ εἶναι αὔξουσα (καί μάλιστα γνησίως).

Ἐξάλλου ἡ ἀκολουθία αὐτή εἶναι καί πρός τά ἄνω φραγμένη. Ἕνα ἄνω φράγμα της εἶναι ὁ ἀριθμός πού παριστάνει τό ἐμβαδόν ἑνός ὁποιουδήποτε περιγεγραμμένου στόν κύκλο κυρτοῦ πολυγώνου. Ἡ ἀκολουθία λοιπόν E_ν, $\nu = 3, 4, \ldots$ εἶναι (γνησίως) αὔξουσα καί φραγμένη, ἑπομένως (§ 66) ἡ ἀκολουθία (1) συγκλίνει σ' ἕναν πραγματικό ἀριθμό. Ὅπως εἶναι γνωστό ἀπό τή Γεωμετρία αὐτόν τόν πραγματικό ἀριθμό —δηλαδή τό ὅριο τῆς ἀκολουθίας E_ν, $\nu = 3, 4, \ldots$— τό λέμε **ἐμβαδόν τοῦ κύκλου.**

Ἐφαρμογή 2η: Ἔστω ἡ ἀκολουθία α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ γιά τήν ὁποία ἔχουμε:

$$\alpha_1 = \sqrt{2} \quad \text{καί} \quad \alpha_{\nu+1} = \sqrt{2+\alpha_\nu} \ \text{γιά κάθε}\ \nu \in \mathbb{N}.$$

Νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ (α_ν) εἶναι μονότονη καί φραγμένη καί ὅτι $\lim \alpha_\nu = 2$.

Ἀπόδειξη. Πρῶτα-πρῶτα γεννᾶται τό ἐρώτημα, ἄν ἡ ἀκολουθία πού μᾶς δόθηκε ὁρίστηκε καλά, δηλαδή ἄν γιά κάθε φυσικό ἀριθμό ν εἶναι $2 + \alpha_\nu \geqq 0$. Αὐτό ὅμως συμβαίνει, γιατί, ὅπως πολύ εὔκολα προκύπτει μέ τέλεια ἐπαγωγή, ἰσχύει: $\alpha_\nu > 0$ γιά κάθε $\nu \in \mathbb{N}$. Πράγματι: $\alpha_1 = \sqrt{2} > 0$ καί ἄν γιά κάποιο φυσικό ἀριθμό ν εἶναι $\alpha_\nu > 0$, τότε καί $\alpha_{\nu+1} = \sqrt{2 + \alpha_\nu} > \sqrt{2} > 0$.

Ἐξετάζουμε τώρα τήν (α_ν) ὡς πρός τό μονότονο. Παρατηροῦμε ὅτι: $\alpha_1 < \alpha_2$. Ἄρα, ἄν ἡ ἀκολουθία (α_ν) εἶναι μονότονη, θά πρέπει νά εἶναι γνησίως αὔξουσα. Ἔστω λοιπόν ὅτι: $\alpha_k < \alpha_{k+1}$, τότε $2 + \alpha_k < 2 + \alpha_{k+1}$, ὁπότε $\sqrt{2 + \alpha_k} < \sqrt{2 + \alpha_{k+1}}$, δηλαδή $\alpha_{k+1} < \alpha_{k+2}$.

Ἄρα, σύμφωνα μέ τό θεώρημα τῆς τέλειας ἐπαγωγῆς, θά ἔχουμε: $α_ν < α_{ν+1}$ γιά κάθε $ν \in \mathbf{N}$, δηλαδή ἡ ἀκολουθία $(α_ν)$ εἶναι αὔξουσα καί μάλιστα γνησίως.

Θά δείξουμε τώρα ὅτι ἡ $(α_ν)$ εἶναι φραγμένη. Ἀρκεῖ βεβαίως νά δείξουμε ὅτι ἡ ἀκολουθία $(α_ν)$ εἶναι φραγμένη ἄνω, μιά καί ὅπως δείξαμε παραπάνω ἡ $(α_ν)$ εἶναι γνησίως αὔξουσα. Γιά νά προσδιορίσουμε ἕνα ἄνω φράγμα τῆς ἀκολουθίας $(α_ν)$ κάνουμε τήν ἑξῆς σκέψη: Δέν ξέρουμε ἀπό τήν ἀρχή ἄν ἡ $(α_ν)$ εἶναι συγκλίνουσα, ἄν ὅμως εἶναι καί καλέσουμε α τό ὅριό της, τότε ἀπό τήν ἰσότητα $α_{ν+1} = \sqrt{2+α_ν}$, μέ ἐφαρμογή τῶν ἰδιοτήτων τῶν ὁρίων, παίρνουμε: $\lim α_{ν+1} = \lim\sqrt{2+α_ν} = \sqrt{2+\lim α_ν}$. Ἀλλά $\lim α_{ν+1} = \lim α_ν = α$ (§ 50). Ἄρα: $α = \sqrt{2+α}$ καί συνεπῶς $α^2 - α - 2 = 0$ ἤ $(α-2)(α+1) = 0$. Ἐπειδή ὅμως ὅλα τά $α_ν > 0$, ἀποκλείεται νά εἶναι ἀρνητικό τό α. Ἄρα $α = 2$. Τότε ὅμως τό 2, ὅπως καί κάθε ἀριθμός μεγαλύτερός του, θά εἶναι ἕνα **πιθανό** ἄνω φράγμα τῆς ἀκολουθίας $(α_ν)$. Ἐλέγχουμε τώρα ἄν ἰσχύει $α_ν < 2$ γιά κάθε $ν \in \mathbf{N}$. Αὐτό ὅμως συμβαίνει, γιατί, ὅπως πολύ εὔκολα προκύπτει μέ τέλεια ἐπαγωγή, ἔχουμε: $α_1 = \sqrt{2} < 2$ καί ἄν γιά κάποιο φυσικό ἀριθμό ν εἶναι $α_ν < 2$, τότε καί $α_{ν+1} = \sqrt{2+α_ν} < \sqrt{4} = 2$.

Ἡ ἀκολουθία λοιπόν $(α_ν)$ εἶναι (γνησίως) αὔξουσα καί ἄνω φραγμένη. Ἄρα εἶναι συγκλίνουσα καί ὅπως εἴδαμε παραπάνω εἶναι: $\lim α_ν = 2$.

Ἐφαρμογή 3η: Ἔστω ἡ ἀκολουθία $α_ν$, $ν = 1, 2, \dots$ μέ $α_1 = 0$ καί

$$α_{ν+1} = \frac{2α_ν + 4}{3} \quad \text{γιά κάθε } ν \in \mathbf{N}.$$

Νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ ἀκολουθία $(α_ν)$ εἶναι συγκλίνουσα καί νά βρεῖτε τό ὅριό της.

Ἀπόδειξη. Ἐξετάζουμε μήπως ἡ $(α_ν)$ εἶναι μονότονη. Παρατηροῦμε ὅτι: $α_1 < α_2$ $\left(\text{γιατί: } α_1 = 0 < \frac{2α_1+4}{3} = \frac{4}{3} = α_2\right)$. Ἄρα, ἄν ἡ $(α_ν)$ εἶναι μονότονη, θά πρέπει νά εἶναι γνησίως αὔξουσα. Ἔστω λοιπόν ὅτι: $α_k < α_{k+1}$, δηλαδή $α_{k+1} - α_k > 0$, τότε εἶναι καί $α_{k+1} < α_{k+2}$, γιατί ἄν σχηματίσουμε τή διαφορά $α_{k+2} - α_{k+1}$ ἔχουμε:

$$α_{k+2} - α_{k+1} = \frac{2α_{k+1} + 4}{3} - \frac{2α_k + 4}{3} = \frac{2(α_{k+1} - α_k)}{3} > 0.$$

Ἄρα $α_ν < α_{ν+1}$ γιά κάθε $ν \in \mathbf{N}$, δηλαδή ἡ ἀκολουθία $(α_ν)$ εἶναι αὔξουσα καί μάλιστα γνησίως.

Θά δείξουμε τώρα ὅτι ἡ $(α_ν)$ εἶναι ἄνω φραγμένη. Ἕνα **πιθανό** ἄνω φράγμα τῆς $(α_ν)$ εἶναι κάθε ἀριθμός μεγαλύτερος ἤ ἴσος μέ τό 4 (τό 4 εἶναι ρίζα τῆς ἐξισώσεως: $x = \frac{2x+4}{3}$, στήν ὁποία καταλήξαμε κάνοντας συλλογισμό ἀνάλογο μέ αὐτόν πού κάναμε στήν προηγούμενη ἐφαρμογή), π.χ. ὁ 5. Ἐλέγχουμε τώρα ἄν ἰσχύει: $|α_ν| < 5$ γιά κάθε $ν \in \mathbf{N}$. Αὐτό ὅμως συμβαίνει, γιατί, ὅπως πολύ εὔκολα προκύπτει μέ τέλεια ἐπαγωγή, ἔχουμε: $|α_1| = 0 < 5$ καί ἄν γιά κάποιο φυσικό ἀριθμό ν εἶναι $|α_ν| < 5$, τότε:

$$|α_{ν+1}| = \left|\frac{2α_ν+4}{3}\right| \leq \frac{2|α_ν|+4}{3} < \frac{2 \cdot 5 + 4}{3} = \frac{14}{3} < 5.$$

Ἡ ἀκολουθία λοιπόν $(α_ν)$ εἶναι (γνησίως) αὔξουσα καί ἄνω φραγμένη. Ἄρα, σύμφωνα μέ τό ἀξίωμα τῆς § 66, ἡ ἀκολουθία $(α_ν)$ συγκλίνει σέ ἕναν πραγματικό ἀριθμό, ἔστω α. Θά ἰσχύει ἑπομένως $α_ν \to α$ καί $α_{ν+1} \to α$. Τότε ἀπό τήν ἰσότητα $α_{ν+1} = \frac{2α_ν + 4}{3}$ προκύπτει, ἄν μεταβοῦμε στό ὅριο, $α = \frac{2α+4}{3}$ ἤ $3α = 2α + 4$, δηλαδή $α = 4$.

Ἄρα: $\lim α_ν = 4$.

Παρατήρηση. Σ' αὐτή τήν ἐφαρμογή μποροῦμε νά ἐργαστοῦμε καί ὡς ἑξῆς: Δέν ξέρουμε ἄν ἡ $(α_ν)$ συγκλίνει σέ πραγματικό ἀριθμό, ἄν ὅμως αὐτό συμβαίνει καί καλέσουμε α τό ὅριό της, τότε ἀπό τήν ἰσότητα: $\alpha_{\nu+1}=\dfrac{2\alpha_\nu+4}{3}$ προκύπτει, ἄν μεταβοῦμε στό ὅριο, $\alpha=\dfrac{2\alpha+4}{3}$, δηλαδή $\alpha=4$.

Σχηματίζουμε τώρα τή διαφορά:

$$\alpha_{\nu+1}-4=\frac{2\alpha_\nu+4}{3}-4=\frac{2\alpha_\nu-8}{3}=\frac{2}{3}(\alpha_\nu-4) \qquad (1)$$

Ἄν στήν (1) θέσουμε $\nu=1,2,\ldots,\nu$ καί πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη τίς ἰσότητες πού θά προκύψουν, βρίσκουμε, ὕστερα ἀπό τίς σχετικές ἁπλοποιήσεις, ὅτι:

$$\alpha_{\nu+1}-4=\left(\frac{2}{3}\right)^\nu\cdot(\alpha_1-4)=-4\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^\nu.$$

Ἀλλά $\left(\dfrac{2}{3}\right)^\nu\to 0$ (βλ. § 64, 1η ἐφαρμογή). Ἄρα $\alpha_{\nu+1}\to 4$ καί συνεπῶς $\alpha_\nu\to 4$.

Σημείωση. Ἀπό τή σχέση: $\alpha_{\nu+1}-4=-4\left(\dfrac{2}{3}\right)^\nu$ λαμβάνουμε:

$$\alpha_{\nu+1}=4-4\left(\frac{2}{3}\right)^\nu=4\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^\nu\right] \text{ καί συνεπῶς } \alpha_\nu=4\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^{\nu-1}\right] \text{ γιά } \nu=2,3,\ldots$$

(ἰσχύει καί γιά $\nu=1$). Παρατηροῦμε ὅτι στήν τελευταία σχέση ἔχουμε τήν ἔκφραση τοῦ γενικοῦ ὅρου τῆς ἀκολουθίας πού μᾶς δόθηκε συναρτήσει τοῦ ν.

Ἐφαρμογή 4η: Νά μελετήσετε ὡς πρός τό μονότονο καί τή σύγκλιση τήν ἀκολουθία (α_ν) γιά τήν ὁποία εἶναι:

$$\alpha_1=\frac{1}{2}\left(\theta+\frac{3}{\theta}\right), \text{ ὅπου } \theta>0, \text{ καί}$$

$$\alpha_{\nu+1}=\frac{1}{2}\left(\alpha_\nu+\frac{3}{\alpha_\nu}\right) \text{ γιά κάθε } \nu\in\mathbb{N}.$$

Στή συνέχεια νά βρεῖτε, ἄν ὑπάρχει, τό ὅριό της.

Λύση: Πρῶτα–πρῶτα πρέπει νά βεβαιωθοῦμε ὅτι γιά ὅλους τούς φυσικούς ἀριθμούς ν εἶναι $\alpha_\nu\neq 0$. Πράγματι, αὐτό συμβαίνει γιατί, ὅπως πολύ εὔκολα προκύπτει μέ τέλεια ἐπαγωγή εἶναι: $\alpha_\nu>0$ γιά κάθε $\nu\in\mathbb{N}$.

Ἐξάλλου, σύμφωνα μέ τή γνωστή ἀνισότητα: $\dfrac{x+y}{2}\geqq\sqrt{xy}$, ὅπου $x, y>0$, ἔχουμε:

$$\alpha_\nu=\frac{1}{2}\left(\alpha_{\nu-1}+\frac{3}{\alpha_{\nu-1}}\right)\geqq\sqrt{\alpha_{\nu-1}\frac{3}{\alpha_{\nu-1}}}=\sqrt{3}, \text{ δηλαδή } \alpha_\nu\geqq\sqrt{3}, \quad \forall\ \nu\in\mathbb{N}.$$

Ἐξετάζουμε τώρα μήπως ἡ ἀκολουθία (α_ν) εἶναι μονότονη. Ἔχουμε γιά κάθε $\nu\in\mathbb{N}$:

$$\alpha_{\nu+1}-\alpha_\nu=\frac{1}{2}\left(\alpha_\nu+\frac{3}{\alpha_\nu}\right)-\alpha_\nu=\frac{3-\alpha_\nu^2}{2\alpha_\nu}\leqq 0 \quad (\text{γιατί: } \alpha_\nu^2\geqq 3 \iff 3-\alpha_\nu^2\leqq 0).$$

Ἄρα: $\alpha_{\nu+1}\leqq\alpha_\nu$ γιά κάθε $\nu\in\mathbb{N}$, δηλαδή ἡ ἀκολουθία (α_ν) εἶναι φθίνουσα καί ἐπειδή $\alpha_\nu\geqq\sqrt{3}$ γιά κάθε $\nu\in\mathbb{N}$, ἡ ἀκολουθία (α_ν) φράσσεται κάτω καί τό $\sqrt{3}$ εἶναι ἕνα κάτω φράγμα της.

Ὥστε ἡ ἀκολουθία (α_ν) εἶναι φθίνουσα καί φραγμένη κάτω. Ἄρα εἶναι συγκλίνουσα. Ἔστω x τό ὅριό της. Τότε $\alpha_\nu\to x$ καί $\alpha_{\nu+1}\to x$ (βλ. §50, ἰδ. III). Θά εἶναι $x\neq 0$, γιατί ὅλα τά α_ν εἶναι $\geqq\sqrt{3}$, ἐπομένως $x\geqq\sqrt{3}>0$. Τότε ἀπό τήν ἰσότητα:

$$\alpha_{\nu+1}=\frac{1}{2}\left(\alpha_\nu+\frac{3}{\alpha_\nu}\right) \text{ συνάγεται ὅτι:}$$

$$x=\lim\alpha_{\nu+1}=\frac{1}{2}\left(\lim\alpha_\nu+\frac{3}{\lim\alpha_\nu}\right)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{3}{x}\right)$$

δηλαδή: $x^2 = 3$. Ἐπειδή ὅμως ὅλα τά $\alpha_\nu > 0$, ἀποκλείεται νά εἶναι ἀρνητικό τό ὅριο. Ἄρα $x = \sqrt{3}$. Συνεπῶς: $\lim \alpha_\nu = \sqrt{3}$.

Ἐφαρμογή 5η: Νά ἀποδείξετε ὅτι γιά κάθε πραγματικό ἀριθμό x ἰσχύει:

$$\lim x^\nu = \begin{cases} 0, & \text{ἄν } |x|<1 \\ +\infty, & \text{ἄν } x>1 \\ 1, & \text{ἄν } x=1 \\ \nexists, & \text{ἄν } x \leqq -1. \end{cases}$$

Ἀπόδειξη. α). Ἄν $|x| < 1$, τότε $\lim x^\nu = 0$ (βλ. § 64, ἐφαρμογή 1η). Ἐδῶ μποροῦμε νά ἐργαστοῦμε καί ὡς ἑξῆς: Ἐπειδή $|x| < 1$ ἔχουμε: $|x|^{\nu+1} = |x|.|x|^\nu \leqq |x|^\nu$, δηλ. ἡ ἀκολουθία $(|x|^\nu)$ εἶναι φθίνουσα καί προφανῶς φραγμένη. Ἄρα εἶναι συγκλίνουσα. Ἔστω α τό ὅριό της. Τότε ἔχουμε: $\lim |x|^{\nu+1} = |x| \cdot \lim |x|^\nu$, δηλ. $\alpha = |x|.\alpha$ ἤ $\alpha(1-|x|) = 0$ καί ἐπειδή $1-|x| \neq 0$ εἶναι: $\alpha = 0$.

Ὥστε: $\lim |x|^\nu = 0$, ὁπότε καί $\lim x^\nu = 0$ (βλ. § 62, παρατήρηση 2).

β). Ἄν $x > 1$, τότε $x^{\nu+1} > x^\nu$, $\forall\ \nu \in \mathbf{N}$, δηλαδή ἡ ἀκολουθία (x^ν) εἶναι γνησίως αὔξουσα. Ἐάν ἦταν καί φραγμένη, τότε θά ὑπῆρχε τό $\lim x^\nu$, ἔστω α ($\alpha \geqq 1$). Τότε ὅμως θά εἴχαμε: $\lim x^{\nu+1} = x \cdot \lim x^\nu$, δηλ. $\alpha = x \cdot \alpha$ ἤ $\alpha(1-x) = 0$, ὁπότε $\alpha = 0$ (γιατί: $x > 1$). Αὐτό ὅμως εἶναι ἄτοπο, γιατί $\alpha \geqq 1$. Ἄρα ἡ ἀκολουθία (x^ν) εἶναι (γνησίως) αὔξουσα καί μή φραγμένη, ὁπότε, σύμφωνα μέ τήν παρατήρηση τῆς προηγούμενης παραγράφου, ἰσχύει:

$$\lim x^\nu = +\infty.$$

γ). Ἄν $x = 1$, τότε $x^\nu = 1 \to 1$.

δ). Γιά $x = -1$, ἔχουμε τήν ἀκολουθία: $x^\nu = (-1)^\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots$, ἡ ὁποία, ὅπως ξέρουμε (βλ. παραδ. 5, σελ. 67) δέ συγκλίνει.

ε). Ἄν $x < -1$ πάλι ἡ ἀκολουθία x^ν, $\nu \in \mathbf{N}$ δέ συγκλίνει. Πράγματι, ἀφοῦ $x < -1$ ἔχουμε $|x| > 1$ καί $x = -|x|$. Θέτουμε $\alpha_\nu = x^\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots$, τότε ἔχουμε:

$\alpha_\nu = x^\nu = (-1)^\nu.|x|^\nu$. Ἐπειδή $|x| > 1$, σύμφωνα μέ τήν περίπτωση (β), ἰσχύει: $|x|^\nu \to +\infty$ καί συνεπῶς: $|x|^{2\nu} \to +\infty$ καί $|x|^{2\nu-1} \to +\infty$. Παρατηροῦμε τώρα ὅτι:

$$\alpha_{2\nu} = (-1)^{2\nu}.|x|^{2\nu} = |x|^{2\nu} \to +\infty \quad \text{καί} \quad \alpha_{2\nu-1} = (-1)^{2\nu-1}.|x|^{2\nu-1} = -|x|^{2\nu-1} \to -\infty.$$

Συνεπῶς ἡ ἀκολουθία $\alpha_\nu = x^\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots$ δέ συγκλίνει.

Ὥστε: ἄν $x \leqq -1$, τότε τό $\lim x^\nu$ **δέν** ὑπάρχει.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάδα Α΄. 120. Ἔστω ἡ ἀκολουθία α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ μέ:

$$\alpha_1 = 1 \quad \text{καί} \quad \alpha_{\nu+1} = \sqrt{1+\alpha_\nu} \ \text{γιά κάθε } \nu \in \mathbf{N}.$$

Νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ (α_ν) εἶναι γνησίως αὔξουσα, φραγμένη καί ὅτι: $\lim \alpha_\nu = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

121. Νά μελετήσετε ὡς πρός τό μονότονο καί τή σύγκλιση τήν ἀκολουθία (α_ν) γιά τήν ὁποία εἶναι: $\alpha_1 = 1$ καί $\alpha_{\nu+1} = \sqrt{2\alpha_\nu}$ γιά κάθε $\nu \in \mathbf{N}$. Στή συνέχεια νά βρεῖτε, ἄν ὑπάρχει, τό ὅριό της.

Ὑπόδειξη. Ὅμοια ἐργασία μ' αὐτή πού ἀκολουθήσαμε στήν ἐφαρμογή 2 τῆς § 67.

122. Νά μελετήσετε ὡς πρός τό μονότονο καί τή σύγκλιση τήν ἀκολουθία (α_ν) γιά τήν ὁποία εἶναι: $\alpha_1 = 5$ καί $\alpha_{\nu+1} = \sqrt{4\alpha_\nu + 3}$. Ὕστερα νά βρεῖτε, ἄν ὑπάρχει, τό ὅριό της.

Ὑπόδειξη. Ἐργαζόμαστε ὅπως στήν προηγούμενη ἄσκηση. Ἴσως παρουσιαστεῖ ἡ ἀνάγκη νά διαπιστώσουμε ὅτι: $\alpha_\nu > \sqrt{3}$ γιά κάθε $\nu \in \mathbf{N}$.

123. Ἔστω ἡ ἀκολουθία α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ μέ $\alpha_1 = 0$ καί

$$\alpha_{\nu+1} = \frac{3\alpha_\nu + 1}{4} \ \text{γιά κάθε } \nu \in \mathbf{N}$$

Νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ ἀκολουθία (α_ν) εἶναι συγκλίνουσα καί νά βρεῖτε τό ὅριό της. Στή συνέχεια νά ἐκφράσετε τό νιοστό ὅρο της α_ν συναρτήσει τοῦ ν.

Ὑπόδειξη. Ὅμοια ἐργασία μ' αὐτή πού ἀκολουθήσαμε στήν ἐφαρμογή 3 τῆς § 67.

Ὁμάδα Β'. 124. Ἔστω ἡ ἀκολουθία α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ μέ $\alpha_1 = \theta > 0$ καί

$$\alpha_{\nu+1} = \frac{1}{2}\left(\alpha_\nu + \frac{\lambda^2}{\alpha_\nu}\right),\ \forall\ \nu \in \mathbf{N},\ \text{ὅπου } 0 < \lambda < \theta.$$

Νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ ἀκολουθία (α_ν) εἶναι συγκλίνουσα καί νά βρεῖτε τό ὅριό της.

Ὑπόδειξη. Ὅμοια ἐργασία μ' αὐτή πού ἀκολουθήσαμε στήν ἐφαρμογή 4 τῆς § 67.

125. Νά μελετήσετε ὡς πρός τό μονότονο καί τή σύγκλιση τήν ἀκολουθία (α_ν) γιά τήν ὁποία εἶναι: $\alpha_1 = -3$ καί $\alpha_{\nu+1} = \dfrac{3\alpha_\nu - 4}{5}$ γιά κάθε $\nu \in \mathbf{N}$. Στή συνέχεια νά βρεῖτε, ἄν ὑπάρχει, τό ὅριό της.

Ὑπόδειξη. Ἀφοῦ πρῶτα δείξετε ὅτι ἡ (α_ν) εἶναι αὔξουσα, ὕστερα νά βρεῖτε τό ὅριο πού θά ἔχει, ἄν συμβαίνει νά εἶναι συγκλίνουσα καί στή συνέχεια νά ἀποδείξετε ὅτι ὁ ἀριθμός πού βρέθηκε σάν πιθανό ὅριό της εἶναι ἄνω φράγμα της. Ἄρα ... κτλ.

126. Ἔστω ἡ ἀκολουθία α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ μέ γενικό ὅρο:

$$\alpha_\nu = \sqrt{\nu}\,(\sqrt{\nu+1} - \sqrt{\nu}).$$

Νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ (α_ν) εἶναι γνησίως αὔξουσα, φραγμένη καί ὅτι: $\lim \alpha_\nu = \dfrac{1}{2}$.

Ὑπόδειξη. Πρῶτα ἀπ' ὅλα νά ἀποδείξετε ὅτι: $\alpha_\nu = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\nu}} + 1}$.

127. Νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ ἀκολουθία α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ γιά τήν ὁποία εἶναι:

$$\alpha_{\nu+1} = \alpha + \alpha_\nu^2 \quad \text{καί} \quad \alpha_1 = \alpha,\ \text{ὅπου } 0 < \alpha \leqq \frac{1}{4},$$

εἶναι γνησίως αὔξουσα καί ὅτι συγκλίνει στή μικρότερη ρίζα τῆς ἐξισώσεως: $t^2 - t + \alpha = 0$.

Ὑπόδειξη. Ἐργαζόμαστε ὅπως καί στήν ἄσκηση 125 μόνο πού γιά νά ἀποδείξουμε ὅτι ἡ (α_ν) εἶναι ἄνω φραγμένη, θά παρουσιαστεῖ ἴσως ἡ ἀνάγκη νά διαπιστώσουμε, μέ ἐπαγωγή, ὅτι ὅλα τά α_ν εἶναι $\leqq \dfrac{1}{2}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ V

ΕΙΔΙΚΕΣ ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΩΝ

(ΠΡΟΟΔΟΙ - ΣΕΙΡΕΣ)

§ 68. Εἰσαγωγή.— Στό προηγούμενο κεφάλαιο ὁρίσαμε τήν ἔννοια τῆς ἀκολουθίας καί ἀποδείξαμε τίς κυριότερες ἰδιότητες τῶν ἀκολουθιῶν. Σ' αὐτό τό κεφάλαιο θά μελετήσουμε τέσσερις εἰδικές κατηγορίες ἀκολουθιῶν πού παρουσιάζουν ἰδιαίτερο ἐνδιαφέρον στά Μαθηματικά. Σέ καθεμιά ἀπό τίς κατηγορίες αὐτές ἀνήκουν ἀκολουθίες πού δύο διαδοχικοί τους ὅροι συνδέονται μεταξύ τους μέ μία ἀναδρομική σχέση, ἡ ὁποία περιγράφει τή χαρακτηριστική ἰδιότητα πού ἔχουν οἱ ὅροι τους. Ἀνάλογα μέ τή χαρακτηριστική αὐτή ἰδιότητα διακρίνουμε τίς ἀκολουθίες πού ἀνήκουν στίς κατηγορίες αὐτές σέ: *ἀριθμητικές, ἁρμονικές, γεωμετρικές* **προόδους** καί **στίς σειρές.**

I. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΠΡΟΟΔΟΙ

§ 69. Ὁρισμοί.— Ἄς θεωρήσουμε τήν ἀκολουθία:

$$3,\ 7,\ 11,\ 15,\ 19,\ \ldots$$

Παρατηροῦμε ὅτι κάθε ὅρος της, ἀπό τό δεύτερο καί μετά, προκύπτει ἄν προσθέσουμε στόν προηγούμενό του ἕνα σταθερό ἀριθμό ,πού στήν προκειμένη περίπτωση εἶναι ὁ ἀριθμός 4.

Ἐπίσης, ἄν θεωρήσουμε τήν ἀκολουθία:

$$10,\ 7,\ 4,\ 1,\ -2,\ -5,\ \ldots$$

παρατηροῦμε πάλι πώς κάθε ὅρος της —ἐκτός φυσικά ἀπό τόν πρῶτο— προκύπτει ἄν προσθέσουμε στόν προηγούμενό του τόν ἀριθμό: -3.

Βλέπουμε λοιπόν πώς ὑπάρχουν ἀκολουθίες μέ τήν ἰδιότητα: Κάθε ὅρος τους, ἀπό τό δεύτερο καί μετά, προκύπτει ἄν προσθέσουμε στόν προηγούμενό του ἕνα σταθερό ἀριθμό πού τόν λέμε **λόγο** καί τόν συμβολίζουμε συνήθως μέ τό γράμμα ω. Τίς ἀκολουθίες μέ αὐτή τήν ἰδιότητα τίς ὀνομάζουμε **ἀριθμητικές προόδους.** Πιό γενικά μποροῦμε νά ποῦμε τώρα ὅτι: *Μία ἀκολουθία:*

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_\nu,\ \alpha_{\nu+1},\ \ldots \qquad (1)$$

θά λέμε ὅτι εἶναι μία **ἀριθμητική πρόοδος,** *τότε καί μόνο τότε, ἄν ὑπάρχει ἀριθμός ω τέτοιος, ὥστε νά ἰσχύει:*

$$\boxed{\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + \omega, \quad \text{γιά κάθε } \nu = 1, 2, \ldots} \qquad (2)$$

Οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας (1) λέγονται *διαδοχικοί ὅροι* τῆς ἀριθμητικῆς προόδου καί ὁ α_ν λέγεται *νιοστός ὅρος* ἤ *ὅρος ν-τάξεως* τῆς προόδου.

Μία ἀριθμητική πρόοδος λέγεται ἐπίσης καί **πρόοδος κατά διαφορά,** γιατί ἀπό τή (2) ἔχουμε:

$$\alpha_2-\alpha_1=\alpha_3-\alpha_2=\alpha_4-\alpha_3=\cdots=\alpha_{\nu+1}-\alpha_\nu=\cdots=\omega \text{ (σταθερό)} \qquad (3)$$

Ἡ (3) μᾶς ὁδηγεῖ νά δώσουμε γιά τήν ἀριθμητική πρόοδο καί τόν ἑξῆς ἰσοδύναμο ὁρισμό:

Ἀριθμητική πρόοδος (ἤ **πρόοδος κατά διαφορά)** *εἶναι μία ἀκολουθία ἀριθμῶν, πού δυό ὁποιοιδήποτε διαδοχικοί της ὅροι διαφέρουν κατά τόν ἴδιο ἀριθμό ω, ὁ ὁποῖος λέγεται* **λόγος** *τῆς ἀριθμ. προόδου.*

Ἀπό τόν παραπάνω ὁρισμό συμπεραίνουμε τώρα τά ἑξῆς:

α). Ἄν $\boldsymbol{\omega>0}$, τότε $\alpha_{\nu+1}-\alpha_\nu>0$, δηλ. $\alpha_{\nu+1}>\alpha_\nu$, $\forall\ \nu\in\mathbf{N}$. Συνεπῶς, ἄν $\omega>0$ ἡ ἀριθμ. πρόοδος (1) εἶναι **γνησίως αὔξουσα** (ἄρα καί αὔξουσα).

β). Ἄν $\boldsymbol{\omega<0}$, τότε $\alpha_{\nu+1}-\alpha_\nu<0$, δηλ. $\alpha_{\nu+1}<\alpha_\nu$, $\forall\ \nu\in\mathbf{N}$ καί συνεπῶς ἡ (1) εἶναι **γνησίως φθίνουσα** (ἄρα καί φθίνουσα).

γ). Ἄν $\boldsymbol{\omega=0}$, τότε $\alpha_{\nu+1}=\alpha_\nu$ γιά κάθε $\nu\in\mathbf{N}$, δηλαδή ἡ ἀριθμητική πρόοδος εἶναι μία σταθερή ἀκολουθία καί συνεπῶς ἡ (1) εἶναι τότε **συγχρόνως καί αὔξουσα καί φθίνουσα.**

Ἔτσι, π.χ., ἡ πρόοδος: $3, 7, 11, 15, 19, \ldots$ εἶναι γνησίως αὔξουσα, ἐπειδή $\omega=4>0$, ἐνῶ ἡ πρόοδος: $10, 7, 4, 1, -2, -5, \ldots$ εἶναι γνησίως φθίνουσα, γιατί ἐδῶ εἶναι: $\omega=-3<0$.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΠΡΟΟΔΟΥ

§ 70. Ἰδιότητα Ι.—Ὁ νιοστός ὅρος α_ν σέ μία ἀριθμητική πρόοδο, πού ἔχει πρῶτο ὅρο τό α_1 καί λόγο ω, βρίσκεται ἄν στόν πρῶτο της ὅρο προσθέσουμε τό γινόμενο τοῦ λόγου ἐπί τόν ἀριθμό, ὁ ὁποῖος ἐκφράζει τό πλῆθος τῶν προηγουμένων του ὅρων.

Δηλαδή:

$$\boxed{\forall\ \nu\in\mathbf{N},\quad \alpha_\nu=\alpha_1+(\nu-1)\omega} \qquad (1)$$

Ἀπόδειξη. Ἀπό τήν ἀναδρομική σχέση (2) γιά $\nu=2, 3, \ldots, (\nu-1)$ λαμβάνουμε: $\alpha_2=\alpha_1+\omega$, $\alpha_3=\alpha_2+\omega$, $\alpha_4=\alpha_3+\omega, \ldots, \alpha_\nu=\alpha_{\nu-1}+\omega$.

Ἄν τώρα τίς σχέσεις αὐτές τίς προσθέσουμε κατά μέλη καί διαγράψουμε τούς κοινούς ὅρους πού ἐμφανίζονται στά δύο μέλη προκύπτει ἡ (1).

Σημείωση. Μία πιό αὐστηρή ἀπόδειξη γίνεται μέ τή μέθοδο τῆς τέλειας ἐπαγωγῆς, ὡς ἑξῆς: Γιά $\nu=1$ ἡ (1) προφανῶς ἰσχύει. Ἔστω ὅτι ἰσχύει ἡ (1) γιά $\nu=k$, δηλ. ἔστω ὅτι ἰσχύει:

$$\alpha_k=\alpha_1+(k-1)\cdot\omega$$

Προσθέτουμε καί στά δύο μέλη τῆς τελευταίας σχέσεως τό ω καί ἔχουμε:

$$\alpha_k+\omega=\alpha_1+(k-1)\omega+\omega$$

Ἀλλά: $\alpha_k+\omega=\alpha_{k+1}$,

ὁπότε ἔχουμε: $\alpha_{k+1}=\alpha_1+k\omega=\alpha_1+[(k+1)-1]\omega$

δηλ. ἡ (1) ἰσχύει καί γιά $\nu = k + 1$. Ἄρα, σύμφωνα μέ τό θεώρημα τῆς τέλειας ἐπαγωγῆς, ἡ (1) ἰσχύει γιά κάθε $\nu \in \mathbf{N}$.

Ἐφαρμογή. Νά βρεῖτε τό 15ο ὅρο τῆς ἀριθμ. προόδου : 7, 15, 23, 31, . . .

Λύση. Ἔχουμε: $\alpha_1 = 7$, $\omega = 15 - 7 = 23 - 15 = 31 - 23 = 8$, $\nu = 15$, $\alpha_{15} = ;$

Ἐφαρμόζοντας τόν τύπο (1) βρίσκουμε:

$$\alpha_{15} = 7 + (15 - 1)\cdot 8 = 7 + 14\cdot 8 = 119.$$

Παρατηρήσεις. 1) Ἀπό τήν ἰδιότητα I συμπεραίνουμε ὅτι: μία ἀριθμ. πρόοδος εἶναι τελείως ὁρισμένη, ὅταν δίνονται ὁ πρῶτος ὅρος της $\alpha_1 = \alpha$ καί ὁ λόγος της ω, γιατί τότε οἱ ὅροι της θά εἶναι:

1ος ὅρος,	2ος ὅρος,	3ος ὅρος,	4ος ὅρος,	5ος ὅρος,	. . .
α	$\alpha + \omega$	$\alpha + 2\omega$	$\alpha + 3\omega$	$\alpha + 4\omega$,	. . .

2) Ἀπό τόν τύπο: $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$ συνάγεται ὅτι: ἄν γνωρίζουμε τούς τρεῖς ἀπό τούς ἀριθμούς α_ν, α_1, ν καί ω μποροῦμε νά προσδιορίσουμε καί τόν τέταρτο, ἀρκεῖ νά ἐπιλύσουμε μίαν ἐξίσωση πρώτου βαθμοῦ. Ἔτσι ἔχουμε τόν παρακάτω πίνακα:

α_1, ν, ω	α_ν, ν, ω	$\alpha_\nu, \alpha_1, \nu$	$\alpha_\nu, \alpha_1, \omega$
$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$	$\alpha_1 = \alpha_\nu - (\nu - 1)\omega$	$\omega = \dfrac{\alpha_\nu - \alpha_1}{\nu - 1}$	$\nu = \dfrac{\alpha_\nu - \alpha_1 + \omega}{\omega}$

3) Ἄν γιά μία ἀκολουθία α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ ἰσχύει: $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$, $\forall\ \nu \in \mathbf{N}$, τότε ἡ (α_ν) εἶναι μία ἀριθμητική πρόοδος. Πράγματι, τότε θά ἔχουμε:

$$\forall\ \nu \in \mathbf{N},\ \ \alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega \implies \left\{\begin{matrix} \forall\ \nu \in \mathbf{N},\ \alpha_{\nu+1} = \alpha_1 + \nu\omega \\ \forall\ \nu \in \mathbf{N},\ \alpha_\nu + \omega = \alpha_1 + \nu\omega \end{matrix}\right\} \implies \forall \nu \in \mathbf{N},\ \alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + \omega.$$

4) Ἔχοντας ὑπόψη τήν παρατήρηση 3, ἡ ἰδιότητα I διατυπώνεται πιό γενικά ὡς ἑξῆς: *Ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη γιά νά εἶναι ἀριθμητική πρόοδος μέ λόγο ω μία ἀκολουθία* α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$, *εἶναι ἡ*: $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$, $\forall\ \nu \in \mathbf{N}$.

§ 71. Πόρισμα.—Ἄν μία ἀκολουθία α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ εἶναι ἀριθμητική πρόοδος μέ λόγο ω, τότε γιά κάθε ν, $\mu \in \mathbf{N}$ μέ $\mu < \nu$ ἰσχύουν :

i) $\alpha_{1+\mu} = \alpha_1 + \mu\omega$

ii) $\alpha_\nu = \alpha_{\nu-\mu} + \mu\omega$

iii) $\alpha_{\nu-\mu} = \alpha_\nu - \mu\omega$.

Ἡ ἀπόδειξη τῆς (i) προκύπτει ἀμέσως ἀπό τή σχέση $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$, ἀρκεῖ νά θέσουμε $\nu = 1 + \mu$. Γιά νά ἀποδείξουμε τίς (ii) καί (iii) παρατηροῦμε ὅτι: $\alpha_{\nu-\mu} = \alpha_1 + (\nu - \mu - 1)\omega = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega - \mu\omega = \alpha_\nu - \mu\omega$, δηλαδή ἡ (iii), καί συνεπῶς: $\alpha_\nu = \alpha_{\nu-\mu} + \mu\omega$, δηλαδή ἡ (ii).

§ 72. Ἰδιότητα II.— Ἄν μία ἀκολουθία α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ εἶναι ἀριθμητική πρόοδος μέ λόγο ω, τότε γιά κάθε ν, $\mu \in \mathbf{N}$ μέ $\mu < \nu$ ἰσχύει :

$$\boxed{\alpha_{1+\mu} + \alpha_{\nu-\mu} = \alpha_1 + \alpha_\nu}$$

Ἀπόδειξη. Ἄμεση συνέπεια τῶν (i) καί (iii) τοῦ παραπάνω πορίσματος.

Παρατήρηση. Ἡ παραπάνω ἰδιότητα διατυπώνεται συχνά ὡς ἑξῆς: *Σέ πεπερασμένο πλῆθος διαδοχικῶν ὅρων μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου, τό ἄθροισμα δύο ὅρων πού «ἰσαπέχουν» ἀπό τούς «ἄκρους» ὅρους εἶναι ἴσο μέ τό ἄθροισμα τῶν «ἄκρων» ὅρων.*

Πραγματικά, ἄν πάρουμε τούς ν πρώτους ὅρους: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\mu, \alpha_{\mu+1}, \ldots, \alpha_x, \ldots, \alpha_{\nu-2}, \alpha_{\nu-1}, \alpha_\nu$ τῆς ἀριθμητικῆς προόδου (α_ν) πού ἔχει λόγο ω, τότε οἱ ὅροι α_1 καί α_ν εἶναι οἱ «ἄκροι» ὅροι, ἐνῶ οἱ ὅροι $\alpha_{1+\mu} \equiv \alpha_{\mu+1}$ καί $\alpha_{\nu-\mu}$, γιά κάθε $\mu = 1, 2, \ldots, \nu-2$ εἶναι αὐτοί πού «ἰσαπέχουν» ἀπό τούς «ἄκρους» ὅρους. Αὐτό συμβαίνει, γιατί ἄν ὀνομάσουμε $\alpha_{1+\mu}$ καί α_x τούς ὅρους τῆς προόδου (α_ν) πού «ἰσαπέχουν» ἀπό τούς «ἄκρους» ὅρους α_1 καί α_ν ἀντιστοίχως, τότε τό πλῆθος τῶν ὅρων πού εἶναι μετά ἀπό τόν ὅρο α_x εἶναι: $\nu - x$, ἐνῶ τό πλῆθος τῶν ὅρων πού προηγεῖται ἀπό τόν ὅρο $\alpha_{1+\mu}$ εἶναι: μ. Ἄρα θά πρέπει: $\nu - x = \mu$ καί συνεπῶς $x = \nu - \mu$. Ὥστε οἱ ὅροι πού ἰσαπέχουν ἀπό τούς ἄκρους ὅρους α_1 καί α_ν εἶναι ἀντιστοίχως οἱ: $\alpha_{1+\mu}$ καί $\alpha_{\nu-\mu}$. Ἔτσι, π.χ. οἱ ὅροι α_2 καί $\alpha_{\nu-1}$ ἰσαπέχουν ἀπό τούς α_1 καί α_ν ἀντιστοίχως. Ἐπίσης οἱ: α_3 καί $\alpha_{\nu-2}$, α_4 καί $\alpha_{\nu-3}$ κ.ο.κ. Ἰσχύει λοιπόν:

$$\alpha_2 + \alpha_{\nu-1} = \alpha_3 + \alpha_{\nu-2} = \alpha_4 + \alpha_{\nu-3} = \cdots = \alpha_1 + \alpha_\nu.$$

Προσέξτε! Τό ἀντίστροφο τῆς ἰδιότητας II δέν ἰσχύει πάντοτε. Ἔτσι, ἐνῶ γιά τή διαδοχή 2, 7, 5, 10 ἰσχύει: $7 + 5 = 2 + 10$, ὅμως οἱ ἀριθμοί: 2, 7, 5, 10 δέν εἶναι ὅροι ἀριθμητικῆς προόδου.

Σημείωση. Ἄν τό πλῆθος τῶν ν πρώτων ὅρων τῆς ἀριθμητικῆς προόδου εἶναι περιττό, τότε ὑπάρχει **«μεσαῖος ὅρος»**, δηλαδή ὅρος ἀπό τόν ὁποῖο προηγεῖται καί ἕπεται τό ἴδιο πλῆθος ὅρων. Σ' αὐτή τήν περίπτωση τό ἄθροισμα τῶν ἄκρων ὅρων ἰσοῦται μέ τό διπλάσιο τοῦ μεσαίου ὅρου. Ἔτσι, ἄν θεωρήσουμε τούς πέντε ὅρους 3, 5, 7, 9, 11 μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου, ἔχουμε: $3 + 11 = 5 + 9 = 2 \cdot 7$.

§ 73. Ἰδιότητα III.—Ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη γιά νά εἶναι μία ἀκολουθία α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ ἀριθμητική πρόοδος εἶναι ἡ:

$$\boxed{2\alpha_\nu = \alpha_{\nu-1} + \alpha_{\nu+1}} \qquad (\nu = 2, 3, \ldots)$$

Ἀπόδειξη. Ἔστω ὅτι ἡ ἀκολουθία (α_ν) εἶναι μία ἀριθμητική πρόοδος μέ λόγο ω, τότε ,σύμφωνα μέ τόν ὁρισμό πού δώσαμε στήν § 69, γιά κάθε $\nu \geqq 2$ θά ἔχουμε:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu &= \omega \\ \alpha_\nu - \alpha_{\nu-1} &= \omega \end{aligned}\right\} \Rightarrow \alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = \alpha_\nu - \alpha_{\nu-1} \Rightarrow 2\alpha_\nu = \alpha_{\nu-1} + \alpha_{\nu+1} \qquad (1)$$

Ἀντίστροφα, ἔστω ὅτι ἰσχύει ἡ (1), θά ἀποδείξουμε ὅτι ἡ ἀκολουθία (α_ν) εἶναι μία ἀριθμητική πρόοδος. Πράγματι, ἀπό τήν (1) ἔχουμε:

$$\alpha_\nu - \alpha_{\nu-1} = \alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu \text{ γιά κάθε } \nu = 2, 3, \ldots$$

Τότε ὅμως, σύμφωνα μέ τό δεύτερο ὁρισμό πού δώσαμε γιά τήν ἀριθμητική πρόοδο, ἡ ἀκολουθία (α_ν) εἶναι ἀριθμητική πρόοδος.

Ἄμεση συνέπεια τῆς παραπάνω προτάσεως εἶναι τό ἑπόμενο πόρισμα:

§ 74. Πόρισμα.—Ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη, γιά νά εἶναι τρεῖς ἀριθμοί α, β, γ διαδοχικοί ὅροι μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου εἶναι ἡ:

$$\boxed{2\beta = \alpha + \gamma} \qquad (1)$$

Σ' αὐτή τήν περίπτωση ὁ $\beta = \dfrac{\alpha + \gamma}{2}$ λέγεται **ἀριθμητικός μέσος** τῶν α καί γ.

Πιό γενικά: *ἂν ἔχουμε ν ἀριθμούς* $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\nu$ *ὀνομάζουμε* **ἀριθμητικό μέσο** *τῶν ν αὐτῶν ἀριθμῶν καί τόν παριστάνουμε μέ* M_A, *τόν πραγματικό ἀριθμό :*

$$\boxed{M_A = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\nu}{\nu}} \qquad (2)$$

Ἐφαρμογή. Νά προσδιορίσετε τόν ἀριθμό k, ὥστε οἱ τρεῖς ἀριθμοί :

$$3k - 7,\ k + 2,\ 12 - 2k$$

νά εἶναι διαδοχικοί ὅροι ἀριθμητικῆς προόδου.

Λύση. Σύμφωνα μέ τό παραπάνω πόρισμα πρέπει νά ἰσχύει:

$2(k+2) = (3k-7) + (12-2k)$ ἀπό τήν ὁποία βρίσκουμε: $k = 1$.

Γιά $k = 1$ βρίσκουμε ὅτι τρεῖς ὅροι τῆς προόδου εἶναι: $-4, 3, 10$.

§ 75. Ἰδιότητα IV.—Τό ἄθροισμα $\Sigma_\nu = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\nu$ τῶν ν πρώτων ὅρων μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου μᾶς τό δίνει ὁ τύπος :

$$\boxed{\Sigma_\nu = \frac{(\alpha_1 + \alpha_\nu)\cdot \nu}{2}} \qquad (1)$$

Ἀπόδειξη. Γιά νά ἀποδείξουμε τήν ἰδιότητα αὐτή, θά στηριχτοῦμε στήν ἰδιότητα II (§ 72, παρατήρηση).

Γράφουμε πρῶτα: $\Sigma_\nu = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_{\nu-2} + \alpha_{\nu-1} + \alpha_\nu$

καί ἔπειτα: $\Sigma_\nu = \alpha_\nu + \alpha_{\nu-1} + \alpha_{\nu-2} + \cdots + \alpha_3 + \alpha_2 + \alpha_1$.

Προσθέτοντας τίς δύο αὐτές ἰσότητες κατά μέλη λαμβάνουμε:

$$2\Sigma_\nu = (\alpha_1 + \alpha_\nu) + (\alpha_2 + \alpha_{\nu-1}) + \cdots + (\alpha_{\nu-1} + \alpha_2) + (\alpha_\nu + \alpha_1)$$

ἤ ἐπειδή $\alpha_1 + \alpha_\nu = \alpha_2 + \alpha_{\nu-1} = \cdots = \alpha_{\nu-1} + \alpha_2 = \alpha_\nu + \alpha_1$ (σύμφωνα μέ τήν ἰδιότ. II) καί οἱ παρενθέσεις εἶναι ν, θά ἔχουμε:

$$2\Sigma_\nu = (\alpha_1 + \alpha_\nu)\cdot \nu \Longrightarrow \Sigma_\nu = \frac{(\alpha_1 + \alpha_\nu)\cdot \nu}{2}.$$

Ἄσκηση. Νά ἀποδείξετε τόν παραπάνω τύπο (1) μέ τή μέθοδο τῆς τέλειας ἐπαγωγῆς.

Πόρισμα.— Τό ἄθροισμα Σ_ν τῶν ν πρώτων ὅρων μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου συναρτήσει τοῦ πρώτου ὅρου $\alpha_1 = \alpha$, τοῦ λόγου ω καί τοῦ πλήθους ν τῶν ὅρων, μᾶς τό δίνει ὁ τύπος :

$$\boxed{\Sigma_\nu = \frac{[2\alpha + (\nu - 1)\omega]\cdot \nu}{2}} \qquad (2)$$

Παρατήρηση. Οἱ δύο τύποι:

$$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega \quad \text{καί} \quad \Sigma_\nu = \frac{(\alpha_1 + \alpha_\nu)\cdot \nu}{2}$$

περιέχουν πέντε ἀγνώστους, τούς: $\alpha_1, \alpha_\nu, \omega, \nu, \Sigma_\nu$.

Ἄν, λοιπόν, μᾶς δοθοῦν οἱ τρεῖς ἀπ' αὐτούς τούς ἀριθμούς, τότε οἱ δύο παραπάνω τύποι ἀποτελοῦν σύστημα δύο ἐξισώσεων μέ δύο ἀγνώστους. Λύνοντας αὐτό τό σύστημα βρίσκουμε τούς ἄλλους δύο ἀριθμούς.

Ἐφαρμογή. Ὁ πρῶτος ὅρος μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου εἶναι 2 καί ὁ ἑνδέκατος 92. Νά βρεθεῖ ἡ πρόοδος αὐτή καί τό ἄθροισμα τῶν 20 πρώτων ὅρων της.

Λύση. Ἔχουμε: $\alpha_1 = 2,\ \alpha_{11} = 92,\ \omega = ;,\ \Sigma_{20} = ;$

Ἀπό τόν τύπο $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\omega$ ἔχουμε γιά $\nu=11$, $92=2+10\cdot\omega$, ἀπό τό ὁποῖο: $\omega=9$.

Ἄρα ἡ πρόοδος εἶναι: $2, 11, 20, 29, 38, \dots$

Ἐξάλλου ἀπό τόν τύπο: $\Sigma_\nu = \dfrac{[2\alpha + (\nu-1)\omega]\cdot\nu}{2}$ γιά $\nu=20$ λαμβάνουμε:

$$\Sigma_{20} = \frac{(4+19\cdot 9)\cdot 20}{2} = 1750.$$

§ 76. Παρεμβολή ἀριθμητικῶν ἐνδιαμέσων. — α) Ὁρισμοί.

Δίνονται δύο ἀριθμοί α καί β. *Οἱ μ ἀριθμοί $x_1, x_2, \dots, x_\mu$ λέγονται* **ἀριθμητικοί ἐνδιάμεσοι** *τῶν α καί β, τότε καί μόνο τότε, ἄν οἱ ἀριθμοί:*

$$\alpha,\ x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_\mu,\ \beta$$

εἶναι διαδοχικοί ὅροι ἀριθμητικῆς προόδου.

Παρεμβολή μ ἀριθμητικῶν ἐνδιαμέσων μεταξύ τῶν ἀριθμῶν α καί β ὀνομάζουμε τήν εὕρεση μ ἀριθμῶν: $x_1, x_2, \dots, x_\nu$ τέτοιων, ὥστε οἱ: $\alpha, x_1, x_2, \dots, x_\nu, \beta$ νά εἶναι διαδοχικοί ὅροι ἀριθμ. προόδου.

β) Τό πρόβλημα τῆς ἀριθμητικῆς παρεμβολῆς. *Νά παρεμβληθοῦν μ ἀριθμητικοί ἐνδιάμεσοι μεταξύ τῶν ἀριθμῶν α καί β.*

Ἐπίλυση. Γιά νά βροῦμε τούς μ ἀριθμητικούς ἐνδιαμέσους εἶναι φανερό ὅτι ἀρκεῖ νά ὑπολογίσουμε τό λόγο ω′ τῆς ἀριθμ. προόδου, στήν ὁποία ἀνήκουν οἱ ἀριθμοί: $\alpha, x_1, x_2, \dots, x_\mu, \beta$.

Ὁ β κατέχει τήν τάξη $\nu = \mu + 2$ καί συνεπῶς (§ 70) θά ἔχουμε:

$$\beta = \alpha + (\mu+2-1)\omega' = \alpha + (\mu+1)\omega' \Rightarrow \boxed{\omega' = \frac{\beta-\alpha}{\mu+1}} \quad (1)$$

Ὁ τύπος (1) ὀνομάζεται **τύπος παρεμβολῆς ἀριθμητικῶν ἐνδιαμέσων** ἤ πιό σύντομα **τύπος τῆς ἀριθμητικῆς παρεμβολῆς.**

Ἀφοῦ, ἀπό τόν τύπο (1), ὁρίσαμε τό *«λόγο παρεμβολῆς»* ω′, οἱ ἀριθμοί πού ζητᾶμε εἶναι:

$$x_1 = \alpha + \frac{\beta-\alpha}{\mu+1},\quad x_2 = \alpha + 2\,\frac{\beta-\alpha}{\mu+1},\ \dots,\ x_\nu = \alpha + \mu\,\frac{\beta-\alpha}{\mu+1}.$$

Ἐφαρμογή. Νά παρεμβάλετε 7 ἀριθμητικούς ἐνδιαμέσους μεταξύ τῶν ἀριθμῶν 9 καί 41.

Λύση. Ὁ τύπος (1) τῆς § 76 μέ $\beta = 41,\ \alpha = 9,\ \mu = 7$ δίνει:

$$\omega' = \frac{41-9}{7+1} = 4$$

καί ἔτσι οἱ ἀριθμοί: 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, 37, 41 εἶναι διαδοχικοί ὅροι ἀριθμητικῆς προόδου.

§ 77. Συμμετρική παράσταση ἑνός πεπερασμένου πλήθους ὅρων μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου.

—Γιά νά περιορίσουμε τούς ἀγνώστους πού ἐμφανίζονται σέ διάφορα προβλήματα ἀριθμητικῶν προόδων, ἰδιαίτερα ὅταν μᾶς δίνεται τό ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν πού εἶναι διαδοχικοί ὅροι μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου, εἶναι σκόπιμο νά ἔχουμε ὑπόψη τίς ἑξῆς δύο περιπτώσεις:

Περίπτωση 1η : Τό πλῆθος τῶν ἄγνωστων ὅρων εἶναι περιττό.

Ὅταν ζητεῖται νά βροῦμε ἕνα περιττό πλῆθος ἀριθμῶν, ἔστω $2\nu + 1$, $(\nu \in \mathbf{N})$ πού νά εἶναι διαδοχικοί ὅροι ἀριθμητικῆς προόδου, τότε συμφέρει νά τούς συμβολίσουμε ὡς ἑξῆς:

$$x - \nu\omega, \ldots, x - 2\omega, x - \omega, x, x + \omega, x + 2\omega, \ldots, x + \nu\omega,$$

ὅπου x εἶναι ὁ «μ ε σ α ῖ ο ς» καί ω ὁ λόγος τῆς ἀριθμ. προόδου.

Περίπτωση 2η : Τό πλῆθος τῶν ἄγνωστων ὅρων εἶναι ἄρτιο.

Ὅταν ζητεῖται νά βροῦμε ἕνα ἄρτιο πλῆθος ἀριθμῶν, ἔστω 2ν, $(\nu \in \mathbf{N})$ πού νά εἶναι διαδοχικοί ὅροι ἀριθμητικῆς προόδου, τότε, ἐπειδή ὑπάρχουν δύο «μεσαῖοι» ὅροι τούς ὁποίους παριστάνουμε μέ: $x - \lambda$ καί $x + \lambda$, ὁπότε ὁ λόγος ω τῆς προόδου εἶναι: $\omega = (x + \lambda) - (x - \lambda) = 2\lambda$, συμβολίζουμε τούς ἀριθμούς ὡς ἑξῆς:

$$x - (2\nu - 1)\lambda, \ldots, x - 3\lambda, x - \lambda, x + \lambda, x + 3\lambda, \ldots, x + (2\nu - 1)\lambda.$$

Προσέξτε! Σ' αὐτή τήν περίπτωση **ὁ x δέν εἶναι ὅρος** τῆς ἀριθμητικῆς προόδου.

Ἐφαρμογή : Νά βρεῖτε τρεῖς ἀριθμούς πού νά εἶναι διαδοχικοί ὅροι ἀριθμητικῆς προόδου, ἄν τό ἄθροισμά τους εἶναι 33 καί τό γινόμενό τους εἶναι 1287.

Λύση. Ἄν παραστήσουμε μέ x τό μεσαῖο ἀριθμό καί μέ ω τό λόγο τῆς προόδου, τότε οἱ τρεῖς ἀριθμοί θά εἶναι: $x - \omega, x, x + \omega$. Συνεπῶς θά ἔχουμε:

$$\left.\begin{aligned}(x-\omega) + x + (x+\omega) &= 33\\ (x-\omega)\cdot x\cdot(x+\omega) &= 1287\end{aligned}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{aligned} 3x &= 33 \quad &(1)\\ x(x^2-\omega^2) &= 1287 \quad &(2)\end{aligned}\right.$$

Ἡ (1) δίνει ἀμέσως $x = 11$. Τότε, λύνοντας τή (2) ὡς πρός ω, ἔχουμε: $\omega = \pm 2$. Ἄρα οἱ ἀριθμοί πού ζητᾶμε εἶναι: **9, 11, 13** ἤ **13, 11, 9.**

§ 78. Μερικά ἀξιοσημείωτα καί χρήσιμα ἀθροίσματα.

— Σ' αὐτή τήν παράγραφο ὑπολογίζουμε μερικά ἀξιοσημείωτα ἀθροίσματα καί συγκεκριμένα τό ἄθροισμα τῶν k δυνάμεων $(k \in \mathbf{N})$ τῶν ν πρώτων φυσικῶν ἀριθμῶν. Τά ἀθροίσματα αὐτά θά μᾶς εἶναι πολύ χρήσιμα στά ἑπόμενα, γι' αὐτό συνιστοῦμε στόν ἀναγνώστη νά δώσει ἰδιαίτερη προσοχή.

Θέτουμε:

$$\boxed{\Sigma_k \underset{\text{ορσ}}{=} 1^k + 2^k + 3^k + \cdots + \nu^k} \qquad (k \in \mathbf{N}).$$

Νά ὑπολογισθοῦν τά $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$.

α). Ὑπολογισμός τοῦ Σ_1. Εἶναι : $\Sigma_1 = 1 + 2 + 3 + \cdots + \nu$. Παρατηροῦμε ἀμέσως ὅτι τό Σ_1 εἶναι τό ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων τῆς ἀριθμ. προόδου μέ $\alpha_1 = 1$, $\omega = 1$ καί $\alpha_\nu = \nu$.

Ἄρα: $\Sigma_1 = \dfrac{(\alpha_1 + \alpha_\nu)\nu}{2} = \dfrac{(1+\nu)\nu}{2} = \dfrac{\nu(\nu+1)}{2}$.

Ὥστε: $$\boxed{\Sigma_1 = 1 + 2 + 3 + \cdots + \nu = \frac{\nu(\nu+1)}{2}} \qquad (1)$$

β). Ὑπολογισμός τοῦ Σ_2. Εἶναι: $\Sigma_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + \nu^2$. Θεωροῦμε τήν ταυτότητα : $(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$, ἀπό τήν ὁποία γιά $x = 1, 2, 3, \cdots, \nu$ παίρνουμε:

$$\left.\begin{aligned}2^3 &= 1^3 + 3\cdot 1^2 + 3\cdot 1 + 1\\ 3^3 &= 2^3 + 3\cdot 2^2 + 3\cdot 2 + 1\\ 4^3 &= 3^3 + 3\cdot 3^2 + 3\cdot 3 + 1\\ &\cdots\cdots\cdots\\ (\nu+1)^3 &= \nu^3 + 3\cdot\nu^2 + 3\cdot\nu + 1\end{aligned}\right\}$$

Ἄν προσθέσουμε τίς ἰσότητες αὐτές κατά μέλη καί διαγράψουμε τούς κοινούς ὅρους πού ἐμφανίζονται στά δύο μέλη, βρίσκουμε: $(\nu+1)^3 = 3(1^2 + 2^2 + \cdots + \nu^2) + 3(1 + 2 + \cdots + \nu) + (\nu+1)$, ὁπότε: $(\nu+1)^3 - (\nu+1) = 3\cdot\Sigma_2 + 3\cdot\Sigma_1$.

Ἀπό τήν τελευταία σχέση, ἄν λάβουμε ὑπόψη καί τήν (1), βρίσκουμε ὅτι:

$$\boxed{\Sigma_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + \nu^2 = \frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}} \qquad (2)$$

γ). **Ὑπολογισμός τοῦ Σ_3.** Εἶναι: $\Sigma_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + \nu^3$. Θεωροῦμε τήν ταυτότητα: $(x+1)^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$, ἀπό τήν ὁποία γιά $x = 1, 2, \ldots, \nu$ παίρνουμε:

$$\left.\begin{array}{l} 2^4 = 1^4 + 4\cdot 1^3 + 6\cdot 1^2 + 4\cdot 1 + 1 \\ 3^4 = 2^4 + 4\cdot 2^3 + 6\cdot 2^2 + 4\cdot 2 + 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (\nu+1)^4 = \nu^4 + 4\cdot\nu^3 + 6\cdot\nu^2 + 4\cdot\nu + 1 \end{array}\right\}$$

Ἄν προσθέσουμε τίς ἰσότητες αὐτές κατά μέλη βρίσκουμε:

$(\nu+1)^4 = 1 + 4\Sigma_3 + 6\Sigma_2 + 4\Sigma_1 + \nu$, ὁπότε:

$(\nu+1)^4 - (\nu+1) = 4\Sigma_3 + 6\Sigma_2 + 4\Sigma_1$

Ἀπό τήν τελευταία σχέση, ἄν λάβουμε ὑπόψη τίς (1) καί (2), βρίσκουμε ὅτι:

$$\boxed{\Sigma_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + \nu^3 = \left(\frac{\nu(\nu+1)}{2}\right)^2 = \Sigma_1^2} \qquad (3)$$

Ἄν ἐργαστοῦμε ὅπως καί προηγουμένως μποροῦμε νά ὑπολογίσουμε τό Σ_4, ὕστερα τό Σ_5 κ.ο.κ.

Σημείωση. Οἱ τύποι (1), (2) καί (3), ὅπως εἴδαμε στό κεφάλαιο ΙΙ, μποροῦν νά ἀποδειχτοῦν καί μέ τή μέθοδο τῆς τέλειας ἐπαγωγῆς (βλ. ἀσκ. 18/β, γ).

Ἐφαρμογή. Νά ὑπολογίσετε τό ἄθροισμα:

$$\Sigma = \alpha^2 + (\alpha+\omega)^2 + (\alpha+2\omega)^2 + \cdots + [\alpha + (\nu-1)\omega]^2$$

Λύση. Ἔχουμε:

$$\Sigma = \nu\alpha^2 + 2\alpha\omega[1 + 2 + \cdots + (\nu-1)] + \omega^2[1^2 + 2^2 + \cdots + (\nu-1)^2] \qquad (*)$$

Ἀλλά: $1 + 2 + \cdots + (\nu-1) = \frac{1}{2}\,\nu(\nu-1)$

καί $1^2 + 2^2 + \cdots + (\nu-1)^2 = \frac{1}{6}\,\nu(\nu-1)(2\nu-1)$ (γιατί;)

καί συνεπῶς ἡ (*) γίνεται:

$$\Sigma = \nu\alpha^2 + \nu(\nu-1)\alpha\omega + \frac{1}{6}\,\nu(\nu-1)(2\nu-1)\omega^2 \qquad (4)$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάδα Α΄. 128. Νά γράψετε τούς ὀκτώ πρώτους ὅρους τῆς ἀριθμητικῆς προόδου, τῆς ὁποίας ὁ πρῶτος ὅρος καί ὁ λόγος εἶναι ρίζες τῆς ἐξισώσεως: $x^2 - 5x + 6 = 0$.

129. Νά βρεῖτε τό λόγο ω τῆς ἀριθμητικῆς προόδου, ἄν $\alpha_1 = 3$ καί $\alpha_{12} = 80$.

130. Στήν ἀριθμητική πρόοδο: 3, 7, 11, ..., α_ν, ... εἶναι $\alpha_\nu = 79$. Νά βρεῖτε τό ν καί κατόπιν νά ὑπολογίσετε τά Σ_{20} καί Σ_{30}.

131. Νά ἀποδείξετε ὅτι τό ἄθροισμα τῶν ν πρώτων περιττῶν ἀριθμῶν εἶναι ἴσο μέ τό τετράγωνο τοῦ πλήθους τους.

132. Νά βρεῖτε τούς πέντε πρώτους ὅρους τῆς ἀριθμητικῆς προόδου, ἄν ξέρουμε ὅτι:

$$\alpha_9 = 15 \text{ καί } \Sigma_{12} = 165.$$

133. Νά προσδιορίσετε τό k ὥστε οἱ ἑπόμενοι ἀριθμοί νά ἀποτελοῦν διαδοχικούς ὅρους ἀριθμητικῆς προόδου: **(i)** $3k, k+4, k-1$, **(ii)** $4-k, 3+2k, 6+7k$.

134. Νά ἀποδείξετε ὅτι: ἄν οἱ ἀριθμοί α, β, γ εἶναι διαδοχικοί ὅροι ἀριθμ. προόδου, τότε καί οἱ ἀριθμοί: $x = \alpha^2 - \beta\gamma$, $y = \beta^2 - \alpha\gamma$, $z = \gamma^2 - \alpha\beta$ εἶναι διαδοχικοί ὅροι ἀριθμητικῆς προόδου. Τί λόγο ἔχουν οἱ λόγοι τῶν δύο προόδων;

135. Νά ἀποδείξετε ὅτι: ἄν οἱ ἀριθμοί $\frac{1}{\alpha+\beta}$, $\frac{1}{\beta+\gamma}$, $\frac{1}{\gamma+\alpha}$ εἶναι διαδοχικοί ὅροι μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου, τότε τό ἴδιο συμβαίνει καί γιά τούς ἀριθμούς: $\beta^2, \alpha^2, \gamma^2$.

136. Ἀνάμεσα στούς ἀριθμούς 9 καί 34 νά παρεμβάλετε ἄλλους ἀριθμούς ὥστε νά προκύψουν 11 διαδοχικοί ὅροι μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου.

137. Σέ μία ἀριθμητική πρόοδο (α_ν) ὁ 2ος καί ὁ 8ος ὅρος της διαφέρουν κατά 24, ἐνῶ τό ἄθροισμα τοῦ 4ου καί τοῦ 12ου ὅρου της εἶναι 70. Νά βρεῖτε τήν πρόοδο (α_ν), ἄν: **(i)** (α_ν) - αὔξουσα, **(ii)** (α_ν) - φθίνουσα. Ὕστερα νά ὑπολογίσετε τό ἄθροισμα τῶν ὅρων της πού βρίσκονται ἀνάμεσα στόν ὄγδοο καί εἰκοστό πέμπτο ὅρο της.

138. Ἄν ὁ ὅρος πού κατέχει τήν k τάξη σέ μία ἀριθμ. πρόοδο εἶναι α, αὐτός πού κατέχει τή λ τάξη εἶναι β καί αὐτός πού κατέχει τή μ τάξη εἶναι γ, νά ἀποδείξετε ὅτι:

$$\alpha(\lambda-\mu)+\beta(\mu-k)+\gamma(k-\lambda)=0.$$

139. Σέ μία ἀριθμ. πρόοδο τό ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων της εἶναι Α, τῶν 2ν πρώτων ὅρων της εἶναι Β καί τῶν 3ν πρώτων ὅρων της εἶναι Γ. Νά ἀποδείξετε ὅτι ἰσχύει:

$$3A-3B+\Gamma=0.$$

140. Τά ψηφία ἑνός τετραψήφιου ἀριθμοῦ εἶναι διαδοχικοί ὅροι ἀριθμητικῆς προόδου. Ἄν τό τελευταῖο ψηφίο εἶναι τετραπλάσιο τοῦ πρώτου, νά βρεθεῖ ὁ ἀριθμός.

141. Νά βρεθοῦν τέσσερις ἀριθμοί πού νά εἶναι διαδοχικοί ὅροι μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου καί συγχρόνως τό ἄθροισμά τους νά εἶναι 26 καί τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τους νά εἶναι 214.

142. Νά βρεθεῖ ἡ ἀριθμ. πρόοδος τῆς ὁποίας ὁ τέταρτος καί ὁ ὄγδοος ὅρος ἔχουν ἄθροισμα 18, ἐνῶ οἱ κύβοι τους ἔχουν ἄθροισμα 3402.

143. Νά βρεῖτε πέντε ἀριθμούς πού νά εἶναι διαδοχικοί ὅροι μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου καί συγχρόνως τό ἄθροισμά τους νά εἶναι 30 καί τό ἄθροισμα τῶν ἀντιστρόφων τους νά εἶναι $\frac{137}{120}$.

144. Πόσους ἀριθμ. ἐνδιαμέσους πρέπει νά παρεμβάλουμε ἀνάμεσα στούς ἀριθμούς 1 καί 19, ὥστε ὁ λόγος τοῦ δεύτερου ἐνδιάμεσου πρός τόν τελευταῖο ἐνδιάμεσο νά εἶναι ἴσος μέ $\frac{1}{6}$.

145. Νά ὑπολογίσετε τό παρακάτω ἄθροισμα:

$$\Sigma = 1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+\cdots+\nu(\nu+1)(\nu+2).$$

Ὑπόδειξη. Νά παρατηρήσετε ὅτι: $\nu(\nu+1)(\nu+2)=\nu^3+3\nu^2+2\nu$ κ.τ.λ.

* **Ὁμάδα Β΄. 146.** Γιά ποιές τιμές τῶν α καί β οἱ ἀριθμοί: $\alpha\beta-\frac{1}{\alpha\beta}$, $\beta-\frac{1}{\beta}$, $\frac{\beta}{\alpha}-\frac{\alpha}{\beta}$ ἀποτελοῦν διαδοχικούς ὅρους ἀριθμητικῆς προόδου; Ποιός ὁ λόγος τῆς προόδου σέ κάθε περίπτωση;

147. Τό ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων μιᾶς ἀκολουθίας (α_ν) εἶναι: $3\nu^2+\nu$. Νά βρεῖτε τό νιοστό ὅρο της καί νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ ἀκολουθία (α_ν) εἶναι ἀριθμητική πρόοδος. Ὕστερα νά βρεῖτε τήν τάξη τοῦ ὅρου, πού εἶναι ἴσος μέ 100.

148. Νά ἀποδείξετε ὅτι σέ κάθε ἀριθμ. πρόοδο ἰσχύει: $\Sigma_\mu=\Sigma_\nu \Longrightarrow \Sigma_{\mu+\nu}=0$, $(\mu\neq\nu)$.

149. Ἔστω μία ἀριθμ. πρόοδος μέ πρῶτο ὅρο τό α καί λόγο τό ω. Ἄν τό ἄθροισμα Σ_p τῶν p πρώτων ὅρων της ἰσοῦται μέ q καί τό ἄθροισμα Σq τῶν q πρώτων ὅρων της ἰσοῦται μέ p, νά ἀποδείξετε ὅτι:

(i) $\Sigma_{p+q}=-(p+q)$, **(ii)** $\Sigma_{p-q}=\frac{(p-q)(2q+1)}{2}$.

150. Νά ἀποδείξετε ὅτι τρεῖς ἀριθμοί α, β, γ γιά νά εἶναι ὅροι μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου (χωρίς ἀπαραίτητα νά εἶναι καί διαδοχικοί), πρέπει καί ἀρκεῖ ἡ ἐξίσωση:

$$\frac{\beta-\alpha}{x+1}=\frac{\gamma-\beta}{y+1}$$

νά ἔχει ἀκέραιη καί θετική λύση ὡς πρός x, y, ὅπου x εἶναι τό πλῆθος τῶν ὅρων τῆς ἀριθμητικῆς προόδου, οἱ ὁποῖοι βρίσκονται ἀνάμεσα στά α καί β, καί y εἶναι τό πλῆθος τῶν ὅρων πού βρίσκονται ἀνάμεσα στά β καί γ.

151. Νά ἐξετάσετε ἄν οἱ ἀριθμοί: $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$ ἀποτελοῦν ὅρους ὁποιασδήποτε τάξεως μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου.

152. Νά ὑπολογίσετε τό ἄθροισμα τῶν μ ἀριθμητικῶν ἐνδιαμέσων πού παρεμβάλλονται ἀνάμεσα στούς ἀριθμούς 1 καί μ^2.

153. Ἄν οἱ ὅροι πού κατέχουν τίς τάξεις p, q, r σέ μία ἀριθμητική πρόοδο εἶναι ἀντιστοίχως ἴσοι μέ r, p, q, νά ἀποδείξετε ὅτι: $p^3+q^3+r^3=3pqr$.

154. Νά ἀποδείξετε ὅτι: ἄν τά μήκη τῶν πλευρῶν ἑνός ὀρθογώνιου τριγώνου εἶναι διαδοχικοί ὅροι μιᾶς ἀριθμ. προόδου, τότε ὁ λόγος τῆς προόδου ἰσοῦται μέ τήν ἀκτίνα τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

155. Δίνεται ἡ ἐξίσωση: $x^2-\alpha x+\beta=0$ μέ ρίζες ρ_1, ρ_2 καί ἡ: $x^2-(5\alpha-4)x+\beta=0$ μέ ρίζες ρ_3, ρ_4. Νά προσδιορίσετε τά α καί β ἔτσι, ὥστε οἱ ρίζες $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$, μ' αὐτή τή σειρά, νά εἶναι διαδοχικοί ὅροι μιᾶς ἀριθμ. προόδου.

156. Τήν ἀκολουθία τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν τή χωρίζουμε σέ ὁμάδες ὡς ἑξῆς:

$$(1),\ (2,3,4,5),\ (6,7,8,\ldots,12),\ (13,14,\ldots,22),\ (23,24,\ldots),\ \ldots$$

Νά βρεῖτε τόν πρῶτο ὅρο τῆς νιοστῆς ὁμάδας καί νά ἀποδείξετε ὅτι τό ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν πού περιλαμβάνονται στή νιοστή ὁμάδα εἶναι:

$$(3\nu-2)\cdot\left[(\nu-1)^2+\frac{\nu^2+1}{2}\right].$$

157. Χωρίζουμε 4200 ἀντικείμενα σέ $(\nu+1)$ ὁμάδες ἔτσι, ὥστε ἡ πρώτη ὁμάδα νά περιλαμβάνει 5 ἀντικείμενα, ἡ δεύτερη 8, ἡ τρίτη 11, κ.ο.κ. Νά βρεῖτε τό μέγιστο πλῆθος τῶν ὁμάδων πού μποροῦμε νά σχηματίσουμε καί τό πλῆθος τῶν ἀντικειμένων πού ἴσως θά θέλαμε γιά νά σχηματίσουμε μία ἀκόμη ὁμάδα.

158. Ἄν S εἶναι τό ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου μέ λόγο ω καί Σ τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ν πρώτων ὅρων της, νά ἀποδείξετε ὅτι ἰσχύει:

$$\Sigma=\frac{S^2}{\nu}+\frac{1}{12}\,\nu(\nu^2-1)\omega^2.$$

II. ΑΡΜΟΝΙΚΕΣ ΠΡΟΟΔΟΙ

§ 79. Ὁρισμοί.— Ἄς θεωρήσουμε τήν ἀκολουθία:

$$\frac{1}{3},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{7},\ \frac{1}{9},\ \ldots,\ \frac{1}{2\nu+1},\ \ldots$$

Γι' αὐτή τήν ἀκολουθία παρατηροῦμε τό ἑξῆς: ἄν πάρουμε, μέ τήν ἴδια τάξη, τούς ἀντίστροφους τῶν ὅρων της, θά ἔχουμε τήν ἀκολουθία:

$$3,\ 5,\ 7,\ 9,\ \ldots,\ (2\nu+1),\ \ldots$$

ἡ ὁποία εἶναι μία ἀριθμητική πρόοδος (μέ λόγο $\omega=2$).

Ἐπίσης, ἄν θεωρήσουμε τήν ἀκολουθία: 6, 3, 2, ... παρατηροῦμε πάλι πώς ἡ ἀκολουθία: $\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \ldots$ εἶναι μία ἀριθμητική πρόοδος $\left(\text{μέ } \omega = \frac{1}{6}\right)$.

Βλέπουμε λοιπόν ὅτι ὑπάρχουν ἀκολουθίες ἀριθμῶν μέ τήν ἰδιότητα: Ἄν πάρουμε τούς ἀντίστροφους τῶν ὅρων τους, μέ τήν ἴδια βέβαια τάξη, προκύπτει μία νέα ἀκολουθία, ἡ ὁποία εἶναι ἀριθμητική πρόοδος. Τίς ἀκολουθίες μέ αὐτή τήν ἰδιότητα τίς ὀνομάζουμε **ἁρμονικές προόδους**. Πιό αὐστηρά μποροῦμε νά ποῦμε τώρα ὅτι : *Μία ἀκολουθία ἀριθμῶν* :

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_\nu,\ \ldots \tag{1}$$

θά λέμε ὅτι εἶναι μία **ἁρμονική πρόοδος,** *τότε καί μόνο τότε, ἄν ἰσχύει:*
$\alpha_\nu \neq 0 \ \forall\ \nu \in \mathbf{N}$ *καί ἡ ἀκολουθία:*

$$\frac{1}{\alpha_1},\ \frac{1}{\alpha_2},\ldots,\frac{1}{\alpha_\nu},\ldots \tag{2}$$

εἶναι ἀριθμητική πρόοδος, δηλαδή *ἄν ὑπάρχει ἀριθμός ω τέτοιος, ὥστε νά ἰσχύει:*

$$\boxed{\frac{1}{\alpha_{\nu+1}} = \frac{1}{\alpha_\nu} + \omega, \text{ γιά κάθε } \nu = 1, 2, \ldots} \tag{3}$$

Οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας (1) λέγονται *διαδοχικοί ὅροι* τῆς ἁρμονικῆς προόδου καί ὁ α_ν λέγεται *νιοστός ὅρος* ἤ *ὅρος ν-τάξεως* τῆς προόδου. Ἡ ἀκολουθία (2) λέγεται *ἡ ἀντίστοιχη ἀριθμητική πρόοδος* τῆς ἁρμονικῆς προόδου (1).

Ἀπό τόν παραπάνω ὁρισμό τῆς ἁρμονικῆς προόδου συμπεραίνουμε ὅτι ζητήματα πού ἀφοροῦν μία ἁρμονική πρόοδο ἀνάγονται σέ ἐπίλυση ζητημάτων πού ἀφοροῦν τήν ἀντίστοιχη ἀριθμητική πρόοδο. Γιά τό λόγο αὐτό θά μελετήσουμε στά ἑπόμενα τίς κυριότερες ἰδιότητες τῶν ἁρμονικῶν προόδων ὡς ἐφαρμογές τῶν ἰδιοτήτων τῶν ἀριθμητικῶν προόδων.

§ 80. Εὕρεση τοῦ νιοστοῦ ὅρου μιᾶς ἁρμονικῆς προόδου.— Ἔστω ἡ ἁρμονική πρόοδος: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu, \ldots$. Ἄν ω εἶναι ὁ λόγος τῆς ἀντίστοιχης ἀριθμητικῆς προόδου: $\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \ldots, \frac{1}{\alpha_\nu}, \ldots$, τότε, σύμφωνα μέ τόν τύπο (1) τῆς § 70, θά ἔχουμε:

$$\frac{1}{\alpha_\nu} = \frac{1}{\alpha_1} + (\nu-1)\omega \implies \boxed{\alpha_\nu = \frac{\alpha_1}{1 + (\nu - 1)\omega\, \alpha_1}} \tag{1}$$

Σημείωση. Ἄν δύο πρῶτοι ὅροι μιᾶς ἁρμονικῆς προόδου εἶναι γνωστοί, τότε ὁ λόγος $\omega = \frac{1}{\alpha_2} - \frac{1}{\alpha_1}$ καί συνεπῶς ὁ νιοστός ὅρος τῆς ἁρμονικῆς προόδου εἶναι ὁ:

$$\boxed{\alpha_\nu = \frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1(\nu-1) - \alpha_2(\nu-2)}} \tag{1'}$$

Σχόλιο. Δέν ὑπάρχει τύπος πού νά δίνει τό ἄθροισμα Σ_ν τῶν ν πρώτων ὅρων ἁρμονικῆς προόδου.

§ 81. Συνθήκη γιά νά εἶναι διαδοχικοί ὅροι μιᾶς ἁρμονικῆς προόδου οἱ ἀριθμοί α, β, γ. — Ἀφοῦ οἱ ἀριθμοί α, β, γ εἶναι, μέ τή σειρά πού δίνονται, διαδοχικοί ὅροι ἁρμονικῆς προόδου, οἱ ἀντίστροφοί τους: $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ εἶναι διαδοχικοί ὅροι ἀριθμητικῆς προόδου καί συνεπῶς (§ 74):

$$2\cdot\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\gamma} \Longrightarrow \beta=\frac{2}{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\gamma}} \Longrightarrow \boxed{\beta=\frac{2\alpha\gamma}{\alpha+\gamma}} \qquad (1)$$

Ἀντιστρόφως, ἄν ἰσχύει ἡ (1), τότε $\beta=\frac{2\alpha\gamma}{\alpha+\gamma}$ καί συνεπῶς $\frac{2}{\beta}=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\gamma}$, δηλαδή οἱ $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ εἶναι διαδοχικοί ὅροι ἀριθμ. προόδου, ὁπότε οἱ ἀριθμοί α, β, γ εἶναι διαδοχικοί ὅροι ἁρμονικῆς προόδου.

Ὥστε: *Ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη γιά νά εἶναι τρεῖς ἀριθμοί α,β,γ (≠0) διαδοχικοί ὅροι ἁρμονικῆς προόδου εἶναι ἡ ἰσότητα (1).*

Σ' αὐτή τήν περίπτωση ὁ ἀριθμός β λέγεται **ἁρμονικός μέσος** τῶν α καί γ.

Γενικότερα: *ἄν ἔχουμε ν ἀριθμούς $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$, διάφορους τοῦ μηδενός, ὀνομάζουμε* **ἁρμονικό μέσο** *αὐτῶν, καί τόν συμβολίζουμε μέ M_H, τόν ἀριθμό:*

$$\boxed{M_H=\frac{\nu}{\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\cdots+\frac{1}{\alpha_\nu}}} \qquad (2)$$

Παρατηρήσεις. α) Ἡ (1) γράφεται: $\frac{2}{\beta}=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\gamma} \Longleftrightarrow \frac{1}{\beta}-\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\beta}$

$$\Longleftrightarrow \frac{\alpha-\beta}{\alpha\beta}=\frac{\beta-\gamma}{\beta\gamma} \Longleftrightarrow \frac{\alpha\beta}{\beta\gamma}=\frac{\alpha-\beta}{\beta-\gamma} \Longleftrightarrow \boxed{\frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\alpha-\beta}{\beta-\gamma}} \qquad (3)$$

Ἡ ἰσότητα (3) λέγεται **ἁρμονική ἀναλογία.**

Ἀπό τήν (3) συμπεραίνουμε ὅτι: *Γιά νά εἶναι οἱ διάφοροι μεταξύ τους ἀριθμοί α,β,γ μέ τή σειρά πού δίνονται, διαδοχικοί ὅροι ἁρμονικῆς προόδου πρέπει καί ἀρκεῖ οἱ ἀριθμοί αὐτοί νά εἶναι διάφοροι τοῦ μηδενός καί νά βρίσκονται σέ ἁρμονική ἀναλογία.*

β) Ἔχοντας ὑπόψη τήν ἰδιότητα III (§ 73) τῶν ἀριθμητικῶν προόδων, ἡ προηγούμενη συνθήκη (1) διατυπώνεται πιό γενικά ὡς ἑξῆς: *Ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη γιά νά εἶναι μία ἀκολουθία α_ν, $\nu=1, 2, \ldots$* ($\alpha_\nu \neq 0$, $\forall\, \nu\in\mathbb{N}$) *ἁρμονική πρόοδος εἶναι ἡ:*

$$\boxed{\frac{2}{\alpha_\nu}=\frac{1}{\alpha_{\nu-1}}+\frac{1}{\alpha_{\nu+1}}} \quad (\nu=2, 3, \ldots) \qquad (4)$$

Νά συγκρίνετε τήν παραπάνω σχέση (4) μέ τή γνωστή ἀπό τή Γεωμετρία σχέση τοῦ συζυγοῦς ἁρμονικοῦ: $\frac{2}{\overline{AB}}=\frac{1}{\overline{A\Gamma}}+\frac{1}{\overline{A\Delta}}$.

§ 82. Παρεμβολή ἁρμονικῶν ἐνδιαμέσων.—α) Ὁρισμοί. Δίνονται δύο ἀριθμοί α καί β (α, β $\neq 0$). *Οἱ μ ἀριθμοί $x_1, x_2, \ldots, x_\mu$ λέγονται* **ἁρμονικοί ἐνδιάμεσοι** *τῶν α καί β, τότε καί μόνο τότε, ἄν οἱ ἀριθμοί: $\alpha, x_1, x_2, \ldots, x_\mu, \beta$ εἶναι διαδοχικοί ὅροι ἁρμονικῆς προόδου.*

Παρεμβολή μ ἁρμονικῶν ἐνδιαμέσων μεταξύ τῶν ἀριθμῶν α καί β ὀνομάζουμε τήν εὕρεση μ ἀριθμῶν: $x_1, x_2, \ldots, x_\mu$ τέτοιων, ὥστε: οἱ $\alpha, x_1, x_2, \ldots, x_\mu, \beta$ νά εἶναι διαδοχικοί ὅροι ἁρμονικῆς προόδου.

β) Τό πρόβλημα τῆς ἁρμονικῆς παρεμβολῆς. *Νά παρεμβληθοῦν μ ἁρμονικοί ἐνδιάμεσοι μεταξύ τῶν ἀριθμῶν α καί β.*

Ἐπίλυση. Ἀρκεῖ νά παρεμβάλουμε μ ἀριθμητικούς ἐνδιάμεσους μεταξύ τῶν ἀριθμῶν $\frac{1}{\alpha}$ καί $\frac{1}{\beta}$, ὁπότε οἱ ἀντίστροφοί τους θά εἶναι οἱ μ ἁρμονικοί ἐνδιάμεσοι τῶν α καί β. Ἀπό τόν τύπο τῆς ἀριθμητικῆς παρεμβολῆς (§ 76) ἔχουμε:

$$\omega' = \frac{\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha}}{\mu + 1} = \frac{\alpha - \beta}{\alpha\beta(\mu + 1)}, \text{ δηλαδή: } \boxed{\omega' = \frac{\alpha - \beta}{(\mu + 1)\alpha\beta}} \quad (1)$$

Ὁ τύπος (1) λέγεται **τύπος τῆς ἁρμονικῆς παρεμβολῆς.**

Ἐφαρμογή. Μεταξύ τῶν ἀριθμῶν $\frac{5}{2}$ καί $\frac{5}{11}$ νά παρεμβάλετε 5 ἁρμονικούς ἐνδιάμεσους.

Λύση. Ἀρκεῖ νά παρεμβάλουμε 5 ἀριθμητικούς ἐνδιάμεσους μεταξύ τῶν ἀριθμῶν $\frac{2}{5}$ καί $\frac{11}{5}$. Ὁ τύπος (1) γιά $\beta = \frac{5}{11}$, $\alpha = \frac{5}{2}$, $\mu = 5$ δίνει: $\omega' = \frac{3}{10}$. Τότε οἱ 5 ἀριθμητικοί ἐνδιάμεσοι τῶν ἀριθμῶν $\frac{2}{5}$ καί $\frac{11}{5}$ εἶναι οἱ: $\frac{7}{10}, 1, \frac{13}{10}, \frac{8}{5}, \frac{19}{10}$, ὁπότε οἱ ἀντίστροφοί τους θά εἶναι οἱ 5 ἁρμονικοί ἐνδιάμεσοι τῶν ἀριθμῶν $\frac{5}{2}$ καί $\frac{5}{11}$ πού ζητᾶμε. Ἔτσι ἔχουμε: $x_1 = \frac{10}{7}$, $x_2 = 1$, $x_3 = \frac{10}{13}$, $x_4 = \frac{5}{8}$, $x_5 = \frac{10}{19}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάδα Α΄. 159. Νά βρεῖτε τόν 31ο ὅρο τῆς ἁρμονικῆς προόδου: $\frac{1}{25}, \frac{1}{33}, \frac{1}{41}, \ldots$ καί τόν ὄγδοο ὅρο τῆς προόδου: $1, \frac{3}{8}, \frac{3}{13}, \ldots$

160. Νά βρεῖτε τό 12ο ὅρο μιᾶς ἁρμονικῆς προόδου, τῆς ὁποίας ὁ τρίτος ὅρος εἶναι ὁ ἀριθμός $\frac{1}{4}$ καί ὁ ὄγδοος ὅρος της εἶναι ὁ ἀριθμός $\frac{3}{8}$.

161. Νά προσδιορίσετε τόν ἀριθμό k, ὥστε οἱ ἀριθμοί: $1 + k$, $3 + k$, $9 + k$ νά εἶναι διαδοχικοί ὅροι ἁρμονικῆς προόδου.

162. Δίνονται τρεῖς ἀριθμοί α, β, γ. Νά βρεθεῖ ὁ ἀριθμός x, ὥστε οἱ ἀριθμοί $\alpha + x$,

$\beta + x$, $\gamma + x$ νά εἶναι διαδοχικοί ὅροι ἁρμονικῆς προόδου. Τί συμβαίνει ἄν οἱ α, β, γ εἶναι διαδοχικοί ὅροι ἀριθμητικῆς προόδου;

163. Νά προσδιορίσετε τούς ἀριθμούς α καί β, ἄν εἶναι γνωστό ὅτι οἱ ἀριθμοί: α, 12, 3, $1\frac{5}{7}$, β εἶναι διαδοχικοί ὅροι ἁρμονικῆς προόδου.

164. Ἄν οἱ α, β, γ εἶναι διαδοχικοί ὅροι μιᾶς ἁρμονικῆς προόδου, νά ἀποδείξετε ὅτι:

i) $\dfrac{\beta+\alpha}{\beta-\alpha}+\dfrac{\beta+\gamma}{\beta-\gamma}=2$, **(ii)** $\dfrac{2}{\beta}=\dfrac{1}{\beta-\alpha}+\dfrac{1}{\beta-\gamma}$.

165. Τό ἄθροισμα τριῶν διαδοχικῶν ὅρων μιᾶς ἁρμονικῆς προόδου εἶναι $\frac{33}{40}$, ἐνῶ τό ἄθροισμα τῶν ἀντιστρόφων τους εἶναι 15. Νά βρεῖτε αὐτούς τούς ὅρους.

166. Νά ἀποδείξετε ὅτι : ἄν οἱ ἀριθμοί: $\dfrac{\alpha+\beta}{1-\alpha\beta}$, β, $\dfrac{\beta+\gamma}{1-\beta\gamma}$ εἶναι διαδοχικοί ὅροι ἀριθμ. προόδου, τότε οἱ ἀριθμοί : α, $\frac{1}{\beta}$, γ εἶναι διαδοχικοί ὅροι ἁρμονικῆς προόδου.

167. Μεταξύ τῶν ἀριθμῶν 0,25 καί 0,025 νά παρεμβληθοῦν 18 ἀριθμοί ἔτσι, ὥστε μαζί μέ τούς ἀριθμούς 0,25 καί 0,025 νά ἀποτελοῦν διαδοχικούς ὅρους ἁρμονικῆς προόδου.

168. Ἄν οἱ ἀριθμοί α, β, γ εἶναι ὅροι μιᾶς ἁρμονικῆς προόδου τάξεων λ, μ, ν ἀντιστοίχως, νά ἀποδείξετε ὅτι:

$$(\mu-\nu)\beta\gamma+(\nu-\lambda)\gamma\alpha+(\lambda-\mu)\alpha\beta=0.$$

★ **Ὁμάδα Β΄. 169.** Ἄν οἱ ἀριθμοί α, β, γ εἶναι διαδοχικοί ὅροι μιᾶς ἁρμονικῆς προόδου, τότε τό ἴδιο συμβαίνει καί γιά τούς ἀριθμούς:

$$\frac{\alpha}{\beta+\gamma-\alpha},\quad \frac{\beta}{\gamma+\alpha-\beta},\quad \frac{\gamma}{\alpha+\beta-\gamma}.$$

170. Ἄν οἱ ὁμόσημοι ἀριθμοί α, β, γ εἶναι διαδοχικοί ὅροι μιᾶς ἁρμονικῆς προόδου νά ἀποδείξετε ὅτι:

i) $\dfrac{\alpha+\beta}{2\alpha-\beta}+\dfrac{\gamma+\beta}{2\gamma-\beta}>4$, **(ii)** $\beta^2(\alpha-\gamma)^2=2[\gamma^2(\beta-\alpha)^2+\alpha^2(\gamma-\beta)^2]$.

171. Ἄν οἱ διάφοροι μεταξύ τους ἀνά δύο ἀριθμοί $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ εἶναι διαδοχικοί ὅροι μιᾶς ἁρμονικῆς προόδου, νά ἀποδείξετε ὅτι γιά κάθε $\nu \in \mathbf{N}$ μέ $\nu \geqq 2$ ἰσχύει:

$$(\nu-1)\alpha_1\alpha_\nu=\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\cdots+\alpha_{\nu-1}\alpha_\nu.$$

172. Ἀνάμεσα στούς ἀριθμούς 2 καί 3 νά παρεμβάλετε 19 ἀριθμητικούς ἐνδιάμεσους καί 19 ἁρμονικούς ἐνδιάμεσους. Ἄν ξ εἶναι ἕνας ἀριθμ. ἐνδιάμεσος καί η ὁ ἀντίστοιχος ἁρμονικός, νά ἀποδείξετε ὅτι: $\xi+\dfrac{6}{\eta}=5$.

173. Νά βρεῖτε δυό ἀριθμούς x καί y, ἄν εἶναι γνωστό ὅτι διαφέρουν κατά 3 καί ὅτι : $M_A - M_H = \dfrac{3}{14}$.

174. Ἄν α, β, γ, δ εἶναι διαδοχικοί ὅροι μιᾶς ἁρμονικῆς προόδου, νά ἀποδείξετε ὅτι:

$$\frac{5\alpha-3\beta}{\alpha\beta}=\frac{\gamma+\delta}{\gamma\delta}.$$

175. Νά ἀποδείξετε ὅτι: ἄν τά μήκη α, β, γ τῶν πλευρῶν ἑνός τριγώνου εἶναι διαδοχικοί ὅροι μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου, τότε οἱ ἀκτίνες ρ_1, ρ_2, ρ_3 τῶν ἀντίστοιχων παρεγγεγραμμένων στό τρίγωνο κύκλων εἶναι διαδοχικοί ὅροι ἁρμονικῆς προόδου.

176. Νά βρεῖτε τή συνθήκη γιά νά εἶναι τρεῖς ἀριθμοί α, β, γ ὅροι ἁρμονικῆς προόδου, ὄχι ἀπαραίτητα διαδοχικοί. Κατόπιν μέ βάση τή συνθήκη πού βρήκατε νά ἐξετάσετε ἄν οἱ ἀριθμοί : $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{15}$, $\frac{1}{32}$ εἶναι ὅροι ἁρμονικῆς προόδου καί ποιᾶς ;

§ 83. Ὁρισμοί.— Ἄς θεωρήσουμε τήν ἀκολουθία:

$$1\,,\ \frac{1}{2}\,,\ \frac{1}{4}\,,\ \frac{1}{8}\,,\ \frac{1}{16}\,,\ \dots$$

Παρατηροῦμε ὅτι κάθε ὅρος της, ἀπό τό δεύτερο καί μετά, προκύπτει ἄν πολλαπλασιάσουμε τόν προηγούμενό του μέ ἕνα σταθερό ἀριθμό, πού στήν προκειμένη περίπτωση εἶναι ὁ ἀριθμός $\frac{1}{2}$.

Ἐπίσης, ἄν θεωρήσουμε τήν ἀκολουθία: $2, -4, 8, -16, 32, -64, \dots$, βλέπουμε πάλι πώς κάθε ὅρος της —ἐκτός φυσικά ἀπό τόν πρῶτο— προκύπτει ἄν πολλαπλασιάσουμε τόν προηγούμενό του μέ τό -2.

Παρατηροῦμε λοιπόν πώς ὑπάρχουν ἀκολουθίες μέ τήν ἰδιότητα: κάθε ὅρος τους, ἀπό τό δεύτερο καί μετά, προκύπτει ἄν πολλαπλασιάζουμε τόν προηγούμενό του ἐπί ἕνα σταθερό ἀριθμό πού τόν λέμε **λόγο** καί τόν συμβολίζουμε συνήθως καί ἐδῶ μέ τό γράμμα ω. Τίς ἀκολουθίες μέ αὐτή τήν ἰδιότητα τίς ὀνομάζουμε **γεωμετρικές προόδους.** Πιό γενικά μποροῦμε νά ποῦμε τώρα ὅτι:

Μία ἀκολουθία ἀριθμῶν: $\qquad \alpha_1,\ \alpha_2\,,\ \dots,\ \alpha_\nu\,,\ \alpha_{\nu+1}\,,\ \dots \qquad (1)$

θά λέμε ὅτι εἶναι μία ***γεωμετρική πρόοδος,*** *τότε καί μόνο τότε, ἄν ὑπάρχει ἀριθμός ω τέτοιος, ὥστε νά ἰσχύει:*

$$\boxed{\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu \cdot \omega, \quad \text{γιά κάθε } \nu = 1, 2, \dots} \qquad (2)$$

Οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας (1) λέγονται *διαδοχικοί ὅροι* τῆς γεωμετρικῆς προόδου καί ὁ α_ν λέγεται *νιοστός ὅρος* ἤ *ὅρος ν-τάξεως* τῆς προόδου.

Μία γεωμετρική πρόοδος μέ ὅρους διαφορετικούς ἀπό τό μηδέν λέγεται ἐπίσης καί **πρόοδος κατά πηλίκο,** γιατί ἀπό τή (2) ἔχουμε:

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{\alpha_3}{\alpha_2} = \frac{\alpha_4}{\alpha_3} = \dots = \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = \dots = \omega \ (\text{σταθ.}) \qquad (3)$$

Ἡ (3) μᾶς ὁδηγεῖ νά δώσουμε γιά τή γεωμετρική πρόοδο καί τόν ἑξῆς ὁρισμό:

Γεωμετρική πρόοδος (ἤ **πρόοδος κατά πηλίκο**) *εἶναι μία ἀκολουθία ἀριθμῶν, διαφόρων τοῦ μηδενός, τῆς ὁποίας τό πηλίκο* $\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}$ *δύο ὁποιωνδήποτε διαδοχικῶν ὅρων της εἶναι σταθερό.* Τό σταθερό αὐτό πηλίκο εἶναι ὁ **λόγος** τῆς γεωμετρικῆς προόδου.

Δίνουμε τώρα καί τόν ἑξῆς ὁρισμό:

Μία γεωμετρική πρόοδος καί γενικότερα μία ἀκολουθία α_ν, $\nu = 1, 2, \dots$ λέγεται **ἀπολύτως αὔξουσα,** ἄν ἡ ἀκολουθία $|\alpha_\nu|$, $\nu = 1, 2, \dots$ εἶναι αὔξουσα, δηλ. ἄν ἰσχύει: $\qquad |\alpha_{\nu+1}| > |\alpha_\nu|\,,\ \forall\ \nu \in \mathbf{N}$

καί **ἀπολύτως φθίνουσα,** ἄν ἰσχύει: $\quad |\alpha_{\nu+1}| < |\alpha_\nu|\ \forall\ \nu \in \mathbf{N}.$

'Από τόν παραπάνω ὁρισμό καί τήν (3) ἔχουμε ὅτι:

α). Ἄν $|\omega| > 1$, τότε ἡ γεωμ. πρόοδος (1) εἶναι **ἀπολύτως αὔξουσα**.

β). Ἄν $0 < |\omega| < 1$, τότε ἡ γεωμ. πρόοδος (1) εἶναι **ἀπολύτως φθίνουσα.**

Ἔτσι, π.χ. ἡ πρόοδος: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$ εἶναι ἀπολύτως φθίνουσα, ἐπειδή $|\omega| = \frac{1}{2} < 1$, ἐνῶ ἡ γεωμ. πρόοδος: $2, -4, 8, -16, \ldots$ εἶναι ἀπολύτως αὔξουσα, ἐπειδή: $|\omega| = |-2| = 2 > 1$.

Παρατήρηση. Ἄν $|\omega| = 1$, δηλαδή $\omega = \pm 1$ ἔχουμε:

(i). Γιά $\omega = 1$ ἡ γεωμ. πρόοδος εἶναι μία σταθερή ἀκολουθία, ἐπειδή τότε θά ἔχουμε: $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu$ γιά κάθε $\nu = 1, 2, \ldots$ Ὡς σταθερή ἀκολουθία ἡ γεωμ. πρόοδος (1) εἶναι τότε συγχρόνως καί αὔξουσα καί φθίνουσα.

(ii). Γιά $\omega = -1$ ἡ γεωμ. πρόοδος εἶναι ἀπολύτως σταθερή, ἐπειδή τότε θά ἔχουμε: $|\alpha_{\nu+1}| = |\alpha_\nu \cdot \omega| = |\alpha_\nu| \cdot |\omega| = |\alpha_\nu| \cdot |-1| = |\alpha_\nu| = |\alpha_1|$, γιά κάθε $\nu \in \mathbf{N}$. Σ' αὐτή τήν περίπτωση, δηλ. ἄν $\omega = -1$, ἡ γεωμ. πρόοδος εἶναι συγχρόνως καί ἀπολύτως αὔξουσα καί ἀπολύτως φθίνουσα.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗΣ ΠΡΟΟΔΟΥ

§ 84. Ἰδιότητα I.— Ὁ νιοστός ὅρος α_ν σέ μία γεωμετρική πρόοδο πού ἔχει πρῶτο ὅρο τό α_1 καί λόγο τό $\omega \neq 0$, βρίσκεται ἄν πολλαπλασιάσουμε τόν πρῶτο της ὅρο (α_1) μέ δύναμη τοῦ λόγου ω, ἡ ὁποία ἔχει ἐκθέτη τόν ἀριθμό πού φανερώνει τό πλῆθος τῶν ὅρων πού προηγοῦνται τοῦ α_ν.

Δηλαδή : $$\boxed{\forall\ \nu \in \mathbf{N}, \quad \alpha_\nu = \alpha_1 \cdot \omega^{\nu-1}} \qquad (1)$$

Ἀπόδειξη. Ἀπό τήν ἀναδρομική σχέση (2) τῆς § 83 γιά $\nu = 1, 2, \ldots, \nu - 1$, λαμβάνουμε: $\alpha_2 = \alpha_1\omega,\ \alpha_3 = \alpha_2\omega,\ \alpha_4 = \alpha_3\omega,\ \ldots,\ \alpha_\nu = \alpha_{\nu-1}\omega$.

Ἄν τώρα τίς σχέσεις αὐτές τίς πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη καί ἁπλοποιήσουμε μέ τούς κοινούς παράγοντες πού ἐμφανίζονται στά δύο μέλη προκύπτει ἡ (1).

* **Σημείωση.** Μία πιό αὐστηρή ἀπόδειξη γίνεται μέ τή μέθοδο τῆς τέλειας ἐπαγωγῆς ὡς ἑξῆς:

Γιά $\nu = 1$ ἡ (1) προφανῶς ἰσχύει.

Ἔστω ὅτι ἰσχύει ἡ (1) γιά $\nu = k$ ($k \in \mathbf{N}$), δηλ. ἔστω ὅτι ἰσχύει: $\alpha_k = \alpha_1 \omega^{k-1}$

Ἀπό τήν τελευταία προκύπτει: $\alpha_k . \omega = \alpha_1 . \omega^{k-1} . \omega = \alpha_1 \omega^k$. Ἀλλά $\alpha_k . \omega = \alpha_{k+1}$, ὁπότε ἔχουμε: $\alpha_{k+1} = \alpha_1 . \omega^k = \alpha_1 . \omega^{(k+1)-1}$

δηλ. ἡ (1) ἰσχύει καί γιά $\nu = k + 1$. Συνεπῶς, σύμφωνα μέ τό θεώρημα τῆς τέλειας ἐπαγωγῆς, ἡ (1) ἰσχύει γιά κάθε $\nu \in \mathbf{N}$.

Ἐφαρμογές. 1η: Νά βρεῖτε τόν 7ο ὅρο τῆς γεωμ. προόδου: $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, . . .

Λύση. Ἔχουμε: $\alpha_1 = \frac{1}{2}$, $\omega = 2$, $\nu = 7$, $\alpha_7 = ;$

Ἐφαρμόζοντας τόν τύπο (1) γι' αὐτές τίς τιμές τῶν α_1, ω καί ν βρίσκουμε:

$$\alpha_7 = \alpha_1 . \omega^6 = \frac{1}{2} . 2^6 = 2^5 = 32.$$

2η : Σέ μία γεωμετρική πρόοδο είναι $\alpha_1 = 6$, $\omega = 2$ καί $\alpha_\nu = 3072$. Νά βρεῖτε τό ν.

Λύση. Ἔχουμε: $\alpha_1 = 6$, $\omega = 2$, $\alpha_\nu = 3072$, $\nu = ;$

Ἐφαρμόζοντας τόν τύπο (1) γι' αὐτές τίς τιμές τῶν α_1, ω καί α_ν βρίσκουμε:

$$3072 = 6 . 2^{\nu-1}, \text{ δηλαδή: } 2^{\nu-1} = 512.$$

Ἀλλά $512 = 2^9$, ὁπότε ἡ τελευταία σχέση γράφεται:

$$2^{\nu-1} = 2^9. \text{ Ἄρα } \nu - 1 = 9 \text{ καί συνεπῶς } \nu = 10.$$

Παρατηρήσεις. 1) Ἀπό τήν παραπάνω ἰδιότητα συμπεραίνουμε ὅτι: μία γεωμ. πρόοδος εἶναι τελείως ὁρισμένη, ὅταν δίνονται ὁ πρῶτος της ὅρος $\alpha_1 = \alpha$ καί ὁ λόγος της ω. Τότε οἱ ὅροι τῆς προόδου θά εἶναι:

1ος ὅρος,	2ος ὅρος,	3ος ὅρος,	4ος ὅρος,	5ος ὅρος,	...
α	$\alpha\omega$	$\alpha\omega^2$	$\alpha\omega^3$	$\alpha\omega^4$	...

2) Ἀπό τόν τύπο: $\alpha_\nu = \alpha_1 . \omega^{\nu-1}$ συνάγεται ὅτι: ἄν ξέρουμε τούς τρεῖς ἀπό τούς ἀριθμούς α_ν, α_1, ω καί ν μποροῦμε νά προσδιορίσουμε καί τόν τέταρτο.

3) Ἄν γιά μιά ἀκολουθία α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ ἰσχύει: $\alpha_\nu = \alpha_1 . \omega^{\nu-1}$, $\forall\ \nu \in \mathbf{N}$, τότε ἡ ἀκολουθία (α_ν) εἶναι μία γεωμετρική πρόοδος. Πράγματι, τότε θά ἔχουμε:

$$\forall\ \nu \in \mathbf{N},\ \alpha_\nu = \alpha_1\omega^{\nu-1} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\forall\ \nu \in \mathbf{N}, \alpha_{\nu+1} = \alpha_1\omega^\nu \\ \forall\ \nu \in \mathbf{N}, \alpha_\nu \cdot \omega = \alpha_1\omega^\nu\end{array}\right\} \Rightarrow \forall\ \nu \in \mathbf{N}, \alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu \cdot \omega.$$

4) Ἔχοντας ὑπόψη τήν παρατήρηση 3 ἡ ἰδιότητα I διατυπώνεται πιό γενικά ὡς ἑξῆς: *Ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη γιά νά εἶναι γεωμετρική πρόοδος μέ λόγο ω μία ἀκολουθία α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ εἶναι ἡ : $\alpha_\nu = \alpha_1 . \omega^{\nu-1}$, $\forall\ \nu \in \mathbf{N}$.*

§ 85. Πόρισμα.—Ἄν μία ἀκολουθία α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ εἶναι γεωμετρική πρόοδος μέ λόγο $\omega (\neq 0)$, τότε γιά κάθε $\nu, \mu \in \mathbf{N}$ μέ $\mu < \nu$ ἰσχύουν :

$$\text{i)}\quad \alpha_{1+\mu} = \alpha_1 . \omega^\mu$$

$$\text{ii)}\quad \alpha_\nu = \alpha_{\nu-\mu} . \omega^\mu$$

$$\text{iii)}\quad \alpha_{\nu-\mu} = \alpha_\nu . \omega^{-\mu}.$$

Ἡ ἀπόδειξη τῆς (i) προκύπτει ἀμέσως ἀπό τή σχέση $\alpha_\nu = \alpha_1 \cdot \omega^{\nu-1}$, ἀρκεῖ νά θέσουμε $\nu = 1 + \mu$. Γιά νά ἀποδείξουμε τίς (ii) καί (iii) παρατηροῦμε ὅτι:

$$\alpha_{\nu-\mu} = \alpha_1 \cdot \omega^{\nu-\mu-1} = \alpha_1 \cdot \omega^{\nu-1} \cdot \omega^{-\mu} = \alpha_\nu \cdot \omega^{-\mu},$$

δηλαδή ἡ (iii), καί συνεπῶς:

$$\alpha_\nu = \alpha_{\nu-\mu} \cdot \omega^\mu, \text{ δηλαδή ἡ (ii).}$$

§ 86. Ἰδιότητα II.—Ἄν μία ἀκολουθία α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ εἶναι γεωμετρική πρόοδος μέ λόγο $\omega \neq 0$, τότε γιά κάθε $\nu, \mu \in \mathbf{N}$ μέ $\mu < \nu$ ἰσχύει :

$$\boxed{\alpha_{1+\mu} \cdot \alpha_{\nu-\mu} = \alpha_1 \cdot \alpha_\nu} \qquad (2)$$

Ἡ ἀπόδειξη τῆς (2) εἶναι ἄμεση συνέπεια τῶν (i) καί (iii) τοῦ προηγούμενου πορίσματος.

Παρατήρηση. Ἡ παραπάνω ἰδιότητα διατυπώνεται συχνά ὡς ἑξῆς: *Σέ πεπερασμένο* *πλῆθος διαδοχικῶν ὅρων μιᾶς γεωμετρικῆς προόδου, τό γινόμενο δύο ὅρων πού* **«ἰσαπέχουν»** *ἀπό τούς* **«ἄκρους»** *ὅρους εἶναι ἴσο μέ τό γινόμενο τῶν «ἄκρων» ὅρων.* Ἔτσι ἔχουμε:

$$\alpha_2 . \alpha_{\nu-1} = (\alpha_1 . \omega)\left(\frac{\alpha_\nu}{\omega}\right) = \alpha_1 \alpha_\nu$$

$$\alpha_3 . \alpha_{\nu-2} = (\alpha_1 \omega^2)\left(\frac{\alpha_\nu}{\omega^2}\right) = \alpha_1 \alpha_\nu \quad \text{κ.ο.κ.}$$

Εἰδικότερα στήν περίπτωση πού τό πλῆθος τῶν ὅρων εἶναι περιττό, ὁπότε ὑπάρχει **«μεσαῖος» ὅρος**, τότε *ὁ ὅρος αὐτός εἶναι μέσος ἀνάλογος τῶν ἄκρων ὅρων* (γιατί;).

Ἄμεση συνέπεια τῆς ἰδιότητας II εἶναι τό ἑπόμενο πόρισμα:

§ 87. Πόρισμα.— Τό γινόμενο $\Pi_\nu = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_\nu$ τῶν ν πρώτων ὅρων μιᾶς γεωμετρικῆς προόδου μᾶς τό δίνει ὁ τύπος:

$$\boxed{\Pi_\nu^2 = (\alpha_1 \cdot \alpha_\nu)^\nu} \qquad (1)$$

Σημείωση. Τόν τύπο (1) μποροῦμε νά τόν γράψουμε καί ὡς ἑξῆς:

$$\Pi_\nu = \alpha_1^\nu . \omega^{\frac{\nu(\nu-1)}{2}}, \text{ ὅπου ω εἶναι ὁ λόγος τῆς προόδου (γιατί;).} \qquad (2)$$

§ 88. Ἰδιότητα III.— Ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη γιά νά εἶναι μία ἀκολουθία (α_ν) μέ $\alpha_\nu \neq 0 \ \forall \ \nu \in N$ γεωμετρική πρόοδος εἶναι ἡ:

$$\boxed{\alpha_\nu^2 = \alpha_{\nu-1} \cdot \alpha_{\nu+1}} \qquad (\nu = 2, 3, \ldots)$$

Ἀπόδειξη. Ἔστω ὅτι ἡ ἀκολουθία (α_ν) εἶναι μία γεωμετρική πρόοδος μέ λόγο $\omega \neq 0$, τότε, σύμφωνα μέ τόν ὁρισμό πού δώσαμε στήν § 83, γιά κάθε $\nu \geqq 2$ θά ἔχουμε:

$$\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = \omega = \frac{\alpha_\nu}{\alpha_{\nu-1}}, \text{ ὁπότε: } \alpha_\nu^2 = \alpha_{\nu-1} \cdot \alpha_{\nu+1} \qquad (1)$$

Ἀντίστροφα, ἔστω ὅτι ἰσχύει ἡ (1) καί ὅτι $\alpha_\nu \neq 0, \ \forall \ \nu \in \mathbf{N}$. Τότε θά ἔχουμε:

$$\frac{\alpha_\nu}{\alpha_{\nu-1}} = \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} \text{ γιά κάθε } \nu = 2, 3, \ldots$$

καί σύμφωνα μέ τό δεύτερο ὁρισμό πού δώσαμε γιά τή γεωμετρική πρόοδο, ἡ ἀκολουθία (α_ν) εἶναι γεωμετρική πρόοδος.

Ἄμεση συνέπεια τῆς παραπάνω προτάσεως εἶναι τό ἑπόμενο πόρισμα

§ 89. Πόρισμα.— Ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη, γιά νά εἶναι τρεῖς ἀριθμοί α, β, γ, διαδοχικοί ὅροι μιᾶς γεωμετρικῆς προόδου, εἶναι:

$$\boxed{\beta^2 = \alpha\gamma} \qquad (1)$$

Σ' αὐτή τήν περίπτωση ὁ β λέγεται **γεωμετρικός μέσος** ἤ **μέσος ἀνάλογος** τῶν α καί γ.

Πιό γενικά: *Ἄν ἔχουμε ν ἀριθμούς $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$, ὀνομάζουμε* **γεωμετρικό μέσο** *αὐτῶν τῶν ν ἀριθμῶν καί τόν συμβολίζουμε μέ M_{Γ_ι}, τόν ἀριθμό:*

$$\boxed{M_\Gamma = \sqrt[\nu]{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_\nu}} \qquad (2)$$

§ 90. Ἰδιότητα IV.— Τό ἄθροισμα $\Sigma_\nu = \alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_\nu$ τῶν ν πρώτων ὅρων μιᾶς γεωμετρικῆς προόδου μέ λόγο $\omega \neq 1$ μᾶς τό δίνει ὁ τύπος:

$$\boxed{\Sigma_\nu = \frac{\alpha_\nu\omega - \alpha_1}{\omega - 1}} \qquad (1)$$

Ἀπόδειξη. Πολλαπλασιάζουμε καί τά δύο μέλη τῆς ἰσότητας:

$$\Sigma_\nu = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\nu \qquad (2)$$

ἐπί τό λόγο ω, ὁπότε ἔχουμε:

$$\omega\Sigma_\nu = \alpha_1\omega + \alpha_2\omega + \ldots + \alpha_\nu\omega \qquad (3)$$

Ἄν τώρα ἀφαιρέσουμε κατά μέλη ἀπό τήν (3) τή (2) καί λάβουμε ὑπόψη ὅτι: $\alpha_1\omega = \alpha_2$, $\alpha_2\omega = \alpha_3, \ldots, \alpha_{\nu-1}\omega = \alpha_\nu$, μετά τήν ἀναγωγή τῶν ὅμοιων ὅρων βρίσκουμε:

$$\omega\Sigma_\nu - \Sigma_\nu = \alpha_\nu\omega - \alpha_1 \Rightarrow (\omega-1)\Sigma_\nu = \alpha_\nu\omega - \alpha_1 \Rightarrow \Sigma_\nu = \frac{\alpha_\nu\omega - \alpha_1}{\omega - 1}, \ (\omega \neq 1).$$

Ἄσκηση. Νά ἀποδείξετε τόν τύπο (1) καί μέ τή μέθοδο τῆς τέλειας ἐπαγωγῆς.

§ 91. Πόρισμα.—Τό ἄθροισμα $\Sigma_\nu \equiv \alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_\nu$ τῶν ν πρώτων ὅρων μιᾶς γεωμετρικῆς προόδου μέ λόγο $\omega \neq 1$ δίνεται, συναρτήσει τοῦ πρώτου ὅρου α_1, τοῦ λόγου ω καί τοῦ πλήθους ν τῶν ὅρων του, ἀπό τόν τύπο:

$$\boxed{\Sigma_\nu = \frac{\alpha_1(\omega^\nu - 1)}{\omega - 1}} \qquad (1)$$

Ὁ τύπος (1) δίνει τό ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων τῆς γεωμ. προόδου, χωρίς νά εἶναι ἀνάγκη νά βροῦμε τό νιοστό της ὅρο.

Ἐφαρμογή. Νά ὑπολογίσετε τό ἄθροισμα τῶν ὀκτώ πρώτων ὅρων τῆς προόδου:

2, 6, 18, 54, ...

Λύση. Στόν τύπο (1) (§ 91) θέτοντας $\alpha_1 = 2$, $\omega = 3$, $\nu = 8$ ἔχουμε:

$$\Sigma_8 = \frac{2(3^8 - 1)}{3-1} = \frac{2(6561-1)}{2} = 6560.$$

Παρατηρήσεις: α'). Ἄν σέ μία γεωμετρική πρόοδο εἶναι $\omega = 1$, οἱ τύποι (1) τῶν § 90 καί 91 γιά τό Σ_ν δέν μποροῦν νά ἐφαρμοστοῦν (γιατί;). Σ' αὐτή τήν εἰδική περίπτωση, δηλ. ἄν $\omega = 1$, ἡ πρόοδος ἔχει ὅλους τούς ὅρους ἴσους μέ τόν πρῶτο ὅρο της καί συνεπῶς τό ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων της ἰσοῦται μέ:

$$\Sigma_\nu = \alpha_1 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_1 = \nu . \alpha_1, \text{ δηλαδή } \Sigma_\nu = \nu\alpha_1.$$

β'). Οἱ δύο τύποι:

$$\alpha_\nu = \alpha_1\omega^{\nu-1} \quad (1) \qquad \text{καί} \qquad \Sigma_\nu = \frac{\alpha_\nu\omega - \alpha_1}{\omega - 1} \quad (2)$$

περιέχουν πέντε ἀγνώστους (ἀριθμούς), τούς: $\alpha_1, \alpha_\nu, \omega, \nu, \Sigma_\nu$. Ἄν, λοιπόν, μᾶς δοθοῦν οἱ τρεῖς ἀπ' αὐτούς τούς ἀριθμούς, τότε μποροῦμε νά βροῦμε τούς ὑπόλοιπους δύο ἐπιλύοντας τό σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1) καί (2). Ἡ ἐπίλυση αὐτοῦ τοῦ συστήματος δέν εἶναι πάντοτε δυνατή. Μερικά ἀπό τά προβλήματα πού παρουσιάζονται ἐπιλύονται μέ τή βοήθεια τῶν λογαρίθμων, γιά τούς ὁποίους θά κάνουμε λόγο σ' ἕνα ἀπό τά ἑπόμενα κεφάλαια.

Ἐφαρμογές: 1η. Ὁ ὄγδοος ὅρος μιᾶς γεωμετρικῆς προόδου ἰσοῦται μέ 384 καί ὁ λόγος της μέ 2. Νά βρεῖτε τόν πρῶτο ὅρο της καί τό ἄθροισμα τῶν ὀκτώ πρώτων ὅρων της.

Λύση. Ἔστω ὅτι εἶναι α_1 ὁ πρῶτος ὅρος, ω ὁ λόγος καί α_ν ὁ νιοστός ὅρος τῆς γεωμ. προόδου. Ἀπό τούς τύπους $\alpha_\nu = \alpha_1\omega^{\nu-1}$ καί $\Sigma_\nu = \dfrac{\alpha_\nu\omega - \alpha_1}{\omega - 1}$ γιά $\omega = 2$, $\nu = 8$, $\alpha_\nu = 384$ ἔχουμε:

$$384 = \alpha_1 \cdot 2^7 \quad (1) \qquad \text{καί} \qquad \Sigma_8 = \frac{384\cdot 2 - \alpha_1}{2-1} \quad (2)$$

Ἀπό τήν (1) βρίσκουμε $\alpha_1 = 3$.

Ἄν ἀντικαταστήσουμε στή (2) τό α_1 μέ τό ἴσο του βρίσκουμε: $\Sigma_8 = \dfrac{384\cdot 2 - 3}{2-1} = 765.$

2η. Σέ μία γεωμετρική πρόοδο μέ πρῶτο ὅρο τό 5 ὁ ἕβδομος ὅρος της ἰσοῦται μέ 3645. Νά βρεῖτε τήν πρόοδο καί νά ὑπολογίσετε τό ἄθροισμα τῶν ἑπτά πρώτων ὅρων της.

Λύση. Ἀπό τούς τύπους $\alpha_\nu = \alpha_1\omega^{\nu-1}$ καί $\Sigma_\nu = \dfrac{\alpha_\nu\omega - \alpha_1}{\omega - 1}$, μέ $\alpha_1 = 5$, $\nu = 7$ καί $\alpha_7 = 3645$ λαμβάνουμε ἀντιστοίχως:

$$3645 = 5\cdot\omega^6 \quad (1) \qquad \text{καί} \qquad \Sigma_7 = \frac{3645\cdot\omega - 5}{\omega - 1} \quad (2)$$

Ἀπό τήν (1) ἔχουμε: $\omega^6 = 729$, ἀπ' ὅπου γιά $\omega \in \mathbf{R}$ βρίσκουμε: $\omega = \pm 3$.

Γιά $\omega = 3$ ἡ πρόοδος εἶναι: 5, 15, 45, 135, . . . (3)

Γιά $\omega = -3$ ἡ πρόοδος εἶναι: 5, −15, 45, −135, . . . (4)

Ἡ πρώτη εἶναι γνησίως αὔξουσα, ἐνῶ ἡ δεύτερη δέν εἶναι οὔτε αὔξουσα οὔτε φθίνουσα, εἶναι ὅμως ἀπολύτως αὔξουσα καί μάλιστα γνησίως.

Ἀπό τή (2) μέ ἀντικατάσταση τοῦ ω μέ τίς τιμές του +3 καί −3 βρίσκουμε ἀντιστοίχως:

$$\Sigma_7 = \frac{3645\cdot 3 - 5}{3-1} = 5465, \quad \Sigma'_7 = \frac{3645(-3) - 5}{-3-1} = 2735.$$

Τό πρῶτο ἄθροισμα ἀναφέρεται στήν πρόοδο (3) καί τό δεύτερο στήν πρόοδο (4).

§ 92. Παρεμβολή γεωμετρικῶν ἐνδιαμέσων. — α). Ὁρισμοί.

Δίνονται δύο ἀριθμοί α καί β (α, β ≠ 0). *Οἱ διαφορετικοί τοῦ μηδενός ἀριθμοί* $x_1, x_2, \ldots, x_\mu$ *λέγονται* ***γεωμετρικοί ἐνδιάμεσοι*** *τῶν α καί β, τότε καί μόνο τότε, ἄν οἱ ἀριθμοί:*

$$\alpha,\ x_1,\ x_2, \ldots,\ x_\mu,\ \beta$$

εἶναι διαδοχικοί ὅροι γεωμετρικῆς προόδου.

Παρεμβολή μ γεωμετρικῶν ἐνδιαμέσων μεταξύ τῶν ἀριθμῶν α καί β ὀνομάζουμε τήν εὕρεση μ ἀριθμῶν: $x_1, x_2, \ldots, x_\mu$, διαφορετικῶν ἀπό τό μηδέν, τέτοιων, ὥστε οἱ: $\alpha, x_1, x_2, \ldots, x_\mu, \beta$ νά εἶναι διαδοχικοί ὅροι γεωμετρικῆς προόδου.

β). Τό πρόβλημα τῆς γεωμετρικῆς παρεμβολῆς. *Νά παρεμβληθοῦν μ γεωμετρικοί ἐνδιάμεσοι μεταξύ τῶν ἀριθμῶν α καί β.*

Ἐπίλυση. Γιά νά βροῦμε τούς μ γεωμετρικούς ἐνδιάμεσους εἶναι φανερό ὅτι ἀρκεῖ νά ὑπολογίσουμε τό λόγο ω τῆς γεωμ. προόδου, στήν ὁποία ἀνήκουν οἱ ἀριθμοί: $\alpha, x_1, x_2, \ldots, x_\mu, \beta$. Ὁ β κατέχει τήν τάξη $\nu = \mu + 2$ καί συνεπῶς (§ 84) θά ἔχουμε:

$$\beta = \alpha \cdot \omega^{(\mu+2)-1} = \alpha \cdot \omega^{\mu+1}, \text{ δηλαδή: } \quad \boldsymbol{\alpha \cdot \omega^{\mu+1} - \beta = 0} \qquad (1)$$

Ὥστε γιά νά προσδιορίσουμε τό *«λόγο παρεμβολῆς»* ω ἀρκεῖ νά ἐπιλύσουμε τή διώνυμη ἐξίσωση (1). Ἡ ἐπίλυση τῆς (1) γίνεται μέ τή βοήθεια τοῦ τύπου τοῦ De Moivre, γιά τόν ὁποῖο κάνουμε λόγο στό ἑπόμενο κεφάλαιο.

Ἄν $\alpha, \beta \in \mathbf{R} - \{0\}$ καί ζητᾶμε μόνο τίς πραγματικές λύσεις τῆς (1), δηλαδή $\omega \in \mathbf{R}$, τότε:

i). Ἄν **μ ἄρτιος** φυσικός ἀριθμός (ὁπότε $\mu + 1$ περιττός), ἡ (1) δέχεται μία μόνο πραγματική λύση, τήν:

$$\boldsymbol{\omega} = \sqrt[\mu+1]{\frac{\boldsymbol{\beta}}{\boldsymbol{\alpha}}} \qquad (2)$$

καί εἶναι: $\omega > 0$, ἄν $\alpha\beta > 0$ καί $\omega < 0$, ἄν $\alpha\beta < 0$.

ii). Ἄν **μ περιττός** φυσικός ἀριθμός (ὁπότε $\mu + 1$ ἄρτιος) καί $\boldsymbol{\alpha\beta > 0}$, ἡ (1) δέχεται δύο πραγματικές λύσεις, τίς:

$$\boldsymbol{\omega} = \sqrt[\mu+1]{\frac{\boldsymbol{\beta}}{\boldsymbol{\alpha}}} \quad \text{καί} \quad \boldsymbol{\omega} = -\sqrt[\mu+1]{\frac{\boldsymbol{\beta}}{\boldsymbol{\alpha}}} \qquad (3)$$

iii). Ἄν **μ περιττός** καί $\boldsymbol{\alpha\beta < 0}$, δέν ὁρίζονται ἀπό τήν (1) $\omega \in \mathbf{R}$.

Οἱ παραπάνω τύποι (2) καί (3) συνοψίζονται στόν ἑπόμενο τύπο:

$$\boxed{\boldsymbol{\omega} = \varepsilon \cdot \sqrt[\mu+1]{\frac{\boldsymbol{\beta}}{\boldsymbol{\alpha}}}} \qquad (4)$$

ὅπου $\varepsilon = 1$, ὅταν μ ἄρτιος καί $\varepsilon = \pm 1$, ὅταν μ περιττός, γιά $\omega \in \mathbf{R}$.

Ὁ τύπος (4) ὀνομάζεται **τύπος παρεμβολῆς γεωμετρικῶν ἐνδιαμέσων** ἤ ἀλλιῶς **τύπος τῆς γεωμετρικῆς παρεμβολῆς.**

Ἀφοῦ ἀπό τόν τύπο (4) ὁρίσαμε τό λόγο ω, οἱ ἀριθμοί πού ζητούσαμε εἶναι: $\quad x_1 = \alpha\omega, \quad x_2 = \alpha\omega^2, \quad \ldots, \quad x_\mu = \alpha\omega^\mu$.

Ἐφαρμογή. Νά παρεμβάλετε τρεῖς πραγματικούς γεωμ. ἐνδιάμεσους μεταξύ τῶν ἀριθμῶν 3 καί 48.

Λύση. Ἀπό τόν τύπο (4) γιά $\alpha = 3, \beta = 48$ καί $\mu = 3$ λαμβάνουμε:

$$\omega = \pm\sqrt[4]{\frac{48}{3}} = \pm\sqrt[4]{16}, \text{ δηλαδή: } \omega = \pm 2.$$

Ἄρα: $\quad x_1 = 6,\ x_2 = 12,\ x_3 = 24$ καί $x'_1 = -6,\ x'_2 = 12,\ x'_3 = -24$.

§ 93. Συμμετρική παράσταση ἑνός πεπερασμένου πλήθους ὅρων μιᾶς γεωμετρικῆς προόδου.

—Γιά νά περιορίσουμε τούς ἀγνώστους πού ἐμφανίζονται σέ διάφορα προβλήματα γεωμετρικῶν προόδων, ἰδιαίτερα ὅταν ξέρουμε τό γινόμενο ἀριθμῶν οἱ ὁποῖοι εἶναι διαδοχικοί ὅροι μιᾶς γεωμετρικῆς προόδου, εἶναι σκόπιμο νά παραστήσουμε τούς ἀριθμούς αὐτούς ὡς ἑξῆς:

Περίπτωση 1η: Τό πλῆθος τῶν ἄγνωστων ὅρων εἶναι περιττό.

Ἄν τό πλῆθος τῶν ἄγνωστων ὅρων εἶναι περιττό, ἔστω $2k+1$, $k\in \mathbf{N}$, τότε ὑπάρχει *«μεσαῖος»* ὅρος, τόν ὁποῖο «συμφέρει» νά τόν συμβολίσουμε μέ x, ὁπότε, ἄν ὁ λόγος τῆς προόδου εἶναι $\omega \neq 0$, γράφουμε τούς ὅρους πού ζητᾶμε ὡς ἑξῆς:

$$\frac{x}{\omega^k}, \ldots, \frac{x}{\omega^2}, \frac{x}{\omega}, x, x\omega, x\omega^2, \ldots, x\omega^k \qquad (1)$$

Περίπτωση 2η: Τό πλῆθος τῶν ἄγνωστων ὅρων εἶναι ἄρτιο.

Ἄν τό πλῆθος τῶν ἄγνωστων ὅρων εἶναι ἄρτιο, ἔστω $2k$, $k \in \mathbf{N}$, τότε ὑπάρχουν δύο *«μεσαῖοι»* ὅροι καί τό γινόμενό τους εἶναι ἴσο μέ τό γινόμενο τῶν ἄκρων ὅρων. Στήν περίπτωση αὐτή γιά νά παραστήσουμε τούς ὅρους πού ζητᾶμε διακρίνουμε τίς ἑξῆς δύο ὑποπεριπτώσεις:

2α). *Ἀναζητᾶμε ἄν ὑπάρχουν γεωμ. πρόοδοι μέ λόγο* **θετικό,** στίς ὁποῖες ἀνήκουν οἱ $2k$ τό πλῆθος ἀριθμοί. Τότε «συμφέρει» νά συμβολίσουμε τούς δύο «μεσαίους» ὅρους μέ: $\frac{x}{\lambda}$ καί $x\lambda$, ὁπότε ὁ λόγος ω τῆς γεωμ. προόδου εἶναι: $\omega = x\lambda : \frac{x}{\lambda} = \lambda^2$ καί συνεπῶς ἔχουμε:

$$\ldots, \frac{x}{\lambda^5}, \frac{x}{\lambda^3}, \frac{x}{\lambda}, x\lambda, x\lambda^3, x\lambda^5, \ldots \qquad (2\alpha)$$

2β). *Ἀναζητᾶμε ἄν ὑπάρχουν γεωμ. πρόοδοι μέ λόγο* **ἀρνητικό,** στίς ὁποῖες ἀνήκουν οἱ $2k$ τό πλῆθος ἀριθμοί. Τότε «συμφέρει» νά συμβολίσουμε τούς δύο «μεσαίους» ὅρους μέ: $\frac{x}{\lambda}$ καί $-x\lambda$, ὁπότε ὁ λόγος ω τῆς γεωμ. προόδου εἶναι: $\omega = (-x\lambda) : \frac{x}{\lambda} = -\lambda^2$ καί συνεπῶς ἔχουμε:

$$\ldots, \frac{x}{\lambda^5}, -\frac{x}{\lambda^3}, \frac{x}{\lambda}, -x\lambda, x\lambda^3, -x\lambda^5, \ldots \qquad (2\beta).$$

Σχόλιο. Ὅταν παριστάνουμε τούς ὅρους μιᾶς γεωμ. προόδου μέ τούς συμβολισμούς (1), (2α) καί (2β) εἶναι φανερό ὅτι σιωπηρά ἔχουμε ὑποθέσει ὅτι ὁ λόγος ω τῆς προόδου εἶναι διάφορος ἀπό τό μηδέν. Ἄν τό ἀντίστοιχο πρόβλημα ἔχει καί λύση μέ $\omega = 0$, τότε εἶναι φανερό ὅτι τή λύση αὐτή θά πρέπει νά τήν ἀναζητήσουμε ἰδιαιτέρως, καθόσον ἡ γεωμ. πρόοδος τότε εἶναι: $\alpha, 0, 0, \ldots$

Ἐφαρμογές. 1η: Νά βρεῖτε τέσσερις πραγματικούς ἀριθμούς πού νά εἶναι διαδοχικοί ὅροι γεωμετρικῆς προόδου, ἄν εἶναι γνωστό ὅτι: τό γινόμενό τους ἰσοῦται μέ 729 καί ὁ τέταρτος ἰσοῦται μέ τό γινόμενο τῶν δύο μεσαίων.

Λύση. Πρῶτα ἀπ' ὅλα παρατηροῦμε ὅτι δέν ὑπάρχει λύση μέ λόγο τῆς προόδου τό μηδέν. Διακρίνουμε τώρα δύο περιπτώσεις:

i). Ἀναζητᾶμε ἄν ὑπάρχουν γεωμ. πρόοδοι μέ λόγο $\omega>0$. Τότε, σύμφωνα μέ τήν (2α), παριστάνουμε τούς τέσσερις ἀριθμούς ὡς ἑξῆς:

$$\frac{x}{\lambda^3}, \frac{x}{\lambda}, x\lambda, x\lambda^3 \qquad (x, \lambda\in\mathbf{R}).$$

Ἔχουμε τό σύστημα:

$$\left.\begin{array}{l} x^4 = 729 \\ x\lambda^3 = x^2 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{l} x^2 = 27 \\ \lambda^3 = x \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{l} x = \pm 3\sqrt{3} \\ \lambda^3 = x \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{l} x = \pm 3\sqrt{3} \\ \lambda^3 = \pm 3\sqrt{3} \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \begin{array}{l} x = \pm 3\sqrt{3} \\ \lambda = \pm \sqrt{3} \end{array}$$

Γιά $x = 3\sqrt{3}$ καί $\lambda = \sqrt{3}$ οἱ ἀριθμοί πού ζητᾶμε εἶναι: 1, 3, 9, 27.

Γιά $x=-3\sqrt{3}$ καί $\lambda=-\sqrt{3}$ βρίσκουμε πάλι τούς ἴδιους ἀριθμούς.

ii). Ἀναζητᾶμε τώρα ἄν ὑπάρχουν γεωμ. πρόοδοι μέ λόγο $\omega<0$. Τότε, σύμφωνα μέ τήν (2β), παριστάνουμε τούς τέσσερις ἀριθμούς ὡς ἑξῆς:

$$-\frac{x}{\lambda^3},\quad \frac{x}{\lambda},\ -x\lambda,\quad x\lambda^3 \qquad (x, \lambda \in \mathbf{R})$$

Ἔχουμε τότε τό σύστημα:

$$\left.\begin{aligned} x^4 &= 729 \\ x\lambda^3 &= -x^2 \end{aligned}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{aligned} x^2 &= 27 \\ \lambda^3 &= -x \end{aligned}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{aligned} x &= \pm 3\sqrt{3} \\ \lambda^3 &= -x \end{aligned}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{aligned} x &= \pm 3\sqrt{3} \\ \lambda^3 &= \mp 3\sqrt{3} \end{aligned}\right\} \Longleftrightarrow \begin{aligned} x &= \pm\sqrt{3} \\ \lambda &= \mp\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Γιά $x=3\sqrt{3}$ καί $\lambda=-\sqrt{3}$ οἱ ἀριθμοί πού ζητᾶμε εἶναι: $1, -3, 9, -27$.

Γιά $x=-3\sqrt{3}$ καί $\lambda=\sqrt{3}$ βρίσκουμε πάλι τούς ἀριθμούς: $1, -3, 9, -27$.

Ἄρα οἱ ἀριθμοί πού ζητᾶμε εἶναι οἱ: **1, 3, 9, 27** καί **1, –3, 9, –27**.

2η. Νά βρεῖτε γεωμετρική πρόοδο πού νά ἔχει τήν ἰδιότητα: τό ἄθροισμα τῶν τριῶν πρώτων ὅρων της νά ἰσοῦται μέ 1 καί τό διπλάσιο τοῦ δεύτερου ὅρου της σύν ἕνα νά ἰσοῦται μέ τόν πρῶτο ὅρο της.

Λύση. Σύμφωνα μέ τήν πρώτη περίπτωση παριστάνουμε τούς τρεῖς πρώτους ὅρους τῆς γεωμ. προόδου ὡς ἑξῆς: $\dfrac{x}{\omega}, x, x\omega$, ὅπου ὑποθέτουμε ὅτι $\omega \neq 0$.

Ἔχουμε τότε τό σύστημα:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{\omega}+x+x\omega &= 1 \\ 2x+1 &= \frac{x}{\omega} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \begin{aligned} x &= -\frac{3}{7} \\ \omega &= -3. \end{aligned}$$

Ἄρα μία λύση τοῦ προβλήματος εἶναι ἡ γεωμετρική πρόοδος:

$$\frac{1}{7},\ -\frac{3}{7},\ \frac{9}{7},\ \ldots,\ \frac{1}{7}(-3)^{\nu-1},\ \ldots$$

Ἐξετάζουμε τώρα μήπως τό πρόβλημα ἔχει καί λύση μέ $\omega=0$. Τότε μιά τέτοια γεωμ. πρόοδος θά ἦταν τῆς μορφῆς: $\alpha, 0, 0, \ldots$, ὅπου α ὁ πρῶτος ὅρος της. Ἀμέσως βρίσκουμε ὅτι μία τέτοια πρόοδος εἶναι ἡ: **1, 0, 0, ...**, ἡ ὁποία ἀποτελεῖ μία δεύτερη λύση τοῦ προβλήματος. Ἄλλη λύση δέν ὑπάρχει (γιατί;).

§ 94. Τό ἄθροισμα τῶν ἄπειρων ὅρων ἀπολύτως φθίνουσας γεωμετρικῆς προόδου.

— Ἔστω ἡ γεωμετρική πρόοδος:

$$\alpha_\nu = \alpha\omega^{\nu-1}, \quad \nu = 1, 2, \ldots \tag{1}$$

μέ πρῶτο ὅρο τόν $\alpha \neq 0$ καί λόγο ω μέ: $\mathbf{0<|\omega|<1}$.

Ὅπως εἴδαμε καί στήν § 83 ἡ (1) εἶναι τότε μία **ἀπολύτως φθίνουσα** γεωμετρική πρόοδος, καθόσον εἶναι: $|\alpha_{\nu+1}|<|\alpha_\nu|$ γιά κάθε $\nu=1, 2, \ldots$, ὅταν: $0<|\omega|<1$.

Ἄς συμβολίσουμε μέ Σ_ν τό ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων τῆς (1), τό ὁποῖο, ὅπως εἶναι γνωστό, μᾶς τό δίνει ὁ τύπος:

$$\Sigma_\nu = \frac{\alpha(\omega^\nu-1)}{\omega-1} \tag{2}$$

Ὁ τύπος (2) γράφεται: $\Sigma_\nu = \dfrac{\alpha\omega^\nu-\alpha}{\omega-1} = \dfrac{\alpha}{1-\omega} - \dfrac{\alpha}{1-\omega}\cdot\omega^\nu$.

Ἐπειδή $|\omega|<1$ ἔπεται ὅτι: $\lim \omega^\nu = 0$ (βλ. § 64, ἐφαρμ. 1) καί συνεπῶς:

$$\lim \Sigma_\nu = \lim\left[\frac{\alpha}{1-\omega} - \frac{\alpha}{1-\omega}\cdot\omega^\nu\right] = \frac{\alpha}{1-\omega} - \frac{\alpha}{1-\omega}\cdot\lim\omega^\nu = \frac{\alpha}{1-\omega}.$$

Ὥστε: $$\lim \Sigma_\nu = \frac{\alpha}{1-\omega} \qquad (3)$$

Τό παραπάνω ὅριο, δηλαδή *τόν πραγματικό ἀριθμό* $\dfrac{\alpha}{1-\omega}$ *στόν ὁποῖο συγκλίνει τό ἄθροισμα* Σ_ν *τῶν ν πρώτων ὅρων μιᾶς ἀπολύτως φθίνουσας γεωμ. προόδου* (α_ν), δηλαδή γεωμετρικῆς προόδου μέ λόγο ω: $0 < |\omega| < 1$, *τό ὀνομάζουμε* : **«ἄθροισμα τῶν ἄπειρων ὅρων τῆς ἀπολύτως φθίνουσας γεωμετρικῆς προόδου (1)»**.

Τό ἄθροισμα αὐτό τό συμβολίζουμε μέ Σ_∞ ἤ πιό ἁπλά μέ Σ. Ἔτσι ἔχουμε:

$$\Sigma_\infty \equiv \Sigma = \alpha + \alpha\omega + \alpha\omega^2 + \cdots + \alpha\omega^{\nu-1} + \cdots \underset{\text{ορσ}}{=} \lim \Sigma_\nu = \frac{\alpha}{1-\omega} \qquad (4)$$

Ὥστε: **τό ἄθροισμα Σ τῶν ἄπειρων ὅρων μιᾶς γεωμετρικῆς προόδου μέ πρῶτο ὅρο τόν α καί λόγο ω τέτοιο, ὥστε $0 < |\omega| < 1$ ἰσοῦται μέ:** $\dfrac{\alpha}{1-\omega}$.

Σημ. Ἄν $\alpha = 1$, τότε: $\Sigma = 1 + \omega + \omega^2 + \cdots + \omega^{\nu-1} + \cdots = \dfrac{1}{1-\omega}$.

Π.χ. $$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^\nu} + \cdots = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$$

Παρατήρηση. Ὁ τύπος (4) ἰσχύει καί γιά $\omega = 0$, γιατί τότε τό ἄθροισμα Σ θά εἶναι ἴσο μέ α καί ὅταν $\nu \to +\infty$. Ἐπίσης ὁ τύπος (4) ἰσχύει καί γιά $\alpha = 0$.

Ἐφαρμογή: Νά ὑπολογίσετε τό ἄθροισμα: $4 + \dfrac{4}{3} + \dfrac{4}{3^2} + \cdots + \dfrac{4}{3^\nu} + \cdots$

Λύση: Οἱ ἄπειροι προσθετέοι: $4, \dfrac{4}{3}, \dfrac{4}{3^2}, \ldots, \dfrac{4}{3^\nu}, \ldots$ εἶναι διαδοχικοί ὅροι μιᾶς γεωμετρικῆς προόδου πού ἔχει πρῶτο ὅρο $\alpha=4$ καί λόγο $\omega = \dfrac{1}{3}$. Ἑπομένως τό ἄθροισμα πού ζητᾶμε μᾶς τό δίνει ὁ τύπος (4), δηλαδή:

$$4 + \frac{4}{3} + \frac{4}{3^2} + \cdots + \frac{4}{3^\nu} + \cdots = \frac{4}{1-\frac{1}{3}} = 6.$$

Ἐφαρμογή 2η. Νά βρεῖτε τό κοινό κλάσμα, ἀπό τό ὁποῖο παράγεται τό δεκαδικό περιοδικό κλάσμα: 4,513513...

Λύση. Τό δεκαδικό περιοδικό κλάσμα 4,513513... γράφεται:

$$4 + \frac{513}{1000} + \frac{513}{1000^2} + \cdots$$

Ἀλλά: $$\frac{513}{1000} + \frac{513}{1000^2} + \frac{513}{1000^3} + \cdots = \frac{\frac{513}{1000}}{1-\frac{1}{1000}} = \frac{513}{999}.$$

Ἄρα: $\quad 4{,}513513\ldots = 4 + \dfrac{513}{999} = \dfrac{4509}{999}.$

Παρατηροῦμε λοιπόν ὅτι ὁ δεκαδικός ἀριθμός 4,513513..., ὅταν τό πλῆθος τῶν δεκαδικῶν του ψηφίων αὐξάνει ἀπεριόριστα, τείνει στό ρητό ἀριθμό $\dfrac{4509}{999}$.

Ἀνακεφαλαίωση. Οἱ ἰδιότητες τῶν ἀριθμητικῶν καί γεωμετρικῶν προόδων πού ἀπορρέουν ἀπό τίς προηγούμενες παραγράφους συνοψίζονται στόν ἑπόμενο πίνακα:

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ

Ἔστω μία ἀριθμητική πρόοδος:

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{\nu-2}, \alpha_{\nu-1}, \alpha_\nu, \alpha_{\nu+1}, \ldots \qquad (1)$

μέ πρῶτο ὅρο τό α_1 καί λόγο ω. **Τότε:**

1. Ὁ νιοστός ὅρος α_ν τῆς (1) δίνεται ἀπό τόν τύπο:

$$\boxed{\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega}$$

2. Ἄν εἶναι $\omega \neq 0$, τότε τό ἄθροισμα Σ_ν τῶν ν πρώτων ὅρων τῆς (1) δίνεται ἀπό τούς τύπους:

$$\text{(i):} \quad \Sigma_\nu = \frac{(\alpha_\nu + \alpha_1)\nu}{2}$$

$$\text{(ii)} \quad \Sigma_\nu = \frac{[2\alpha_1 + (\nu - 1)\omega]\nu}{2}$$

Σημ. Ἄν εἶναι $\omega = 0$, τότε: $\Sigma_\nu = \nu\alpha_1$.

3. Ἰσχύει:

$$\alpha_1 + \alpha_\nu = \alpha_2 + \alpha_{\nu-1} = \alpha_3 + \alpha_{\nu-2} = \ldots = \alpha_{1+\mu} + \alpha_{\nu-\mu}, \quad (\mu < \nu)$$

Εἰδικά: $\alpha_1 + \alpha_3 = 2\alpha_2,\ \alpha_2 + \alpha_4 = 2\alpha_3,$

$\alpha_3 + \alpha_5 = 2\alpha_4, \ldots, \alpha_\nu + \alpha_{\nu+2} = 2\alpha_{\nu+1}$

Συνέπεια: ἄν α, β, γ εἶναι διαδοχικοί ὅροι ἀριθμ. προόδου, τότε ἰσχύει:

$$\boxed{2\beta = \alpha + \gamma}$$

4. Μέσος ἀριθμητικός:

$$M_A = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\nu}{\nu}$$

5. Τύπος τῆς ἀριθμητικῆς παρεμβολῆς:

$$\omega' = \frac{\beta - \alpha}{\mu + 1}$$

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ

Ἔστω, μία γεωμετρική πρόοδος:

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{\nu-2}, \alpha_{\nu-1}, \alpha_\nu, \alpha_{\nu+1}, \ldots \qquad (1')$

μέ πρῶτο ὅρο τό α_1 καί λόγο ω. **Τότε:**

1΄. Ὁ νιοστός ὅρος α_ν τῆς (1΄) δίνεται ἀπό τόν τύπο:

$$\boxed{\alpha_\nu = \alpha_1 \cdot \omega^{\nu-1}}$$

2΄. Ἄν εἶναι $\omega \neq 1$, τότε τό ἄθροισμα Σ_ν τῶν ν πρώτων ὅρων τῆς (1΄) δίνεται ἀπό τούς τύπους:

$$\text{(i)} \quad \Sigma_\nu = \frac{\alpha_\nu\omega - \alpha_1}{\omega - 1}, \quad (\omega \neq 1)$$

$$\text{(ii)} \quad \Sigma_\nu = \frac{\alpha_1(\omega^\nu - 1)}{\omega - 1}, \quad (\omega \neq 1)$$

Σημ. Ἄν εἶναι $\omega = 1$, τότε: $\Sigma_\nu = \nu\alpha_1$.

3΄. Ἰσχύει:

$$\alpha_1 \cdot \alpha_\nu = \alpha_2 \cdot \alpha_{\nu-1} = \alpha_3 \cdot \alpha_{\nu-2} = \ldots = \alpha_{1+\mu} \cdot \alpha_{\nu-\mu}, \quad (\mu < \nu)$$

Εἰδικά: $\alpha_1\alpha_3 = \alpha_2^2,\ \alpha_2\alpha_4 = \alpha_3^2$

$\alpha_3 \cdot \alpha_5 = \alpha_4^2, \ldots, \alpha_\nu\alpha_{\nu+2} = \alpha_{\nu+1}^2$

Συνέπεια: ἄν α, β, γ εἶναι διαδοχικοί ὅροι γεωμ. προόδου, τότε ἰσχύει:

$$\boxed{\beta^2 = \alpha \cdot \gamma}$$

4΄. Μέσος γεωμετρικός:

$$M_\Gamma = \sqrt[\nu]{\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_\nu}$$

5΄. Τύπος τῆς γεωμετρικῆς παρεμβολῆς:

$$\omega' = \varepsilon \cdot \sqrt[\mu+1]{\frac{\beta}{\alpha}}, \quad (\varepsilon = \pm 1).$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάδα Α΄. 177. Νά ἐξετάσετε ἄν εἶναι μονότονες οἱ ἑπόμενες γεωμετρικές πρόοδοι καί νά καθορίσετε τό εἶδος μονοτονίας γιά τίς μονότονες ἀπ᾽ αὐτές:

α) $12, 6, 3, \ldots,$ β) $\frac{1}{9}, \frac{1}{3}, 1, 3, \ldots,$ γ) $3, -6, 12, \ldots,$ δ) $-4, \frac{8}{3}, -\frac{16}{9}, \ldots$

178. Δίνεται ἡ γεωμ. πρόοδος: 1, 3, 9, 27, 81, ... Νά ἀποδείξετε ὅτι οἱ διαφορές τῶν διαδοχικῶν ὅρων της σχηματίζουν μία νέα γεωμ. πρόοδο. Μήπως αὐτή ἡ ἰδιότητα ἰσχύει γενικά γιά κάθε γεωμ. πρόοδο;

179. Νά προσδιορίσετε τόν πραγματικό ἀριθμό x, ὅταν εἶναι γνωστό ὅτι οἱ παρακάτω ἀριθμοί εἶναι διαδοχικοί ὅροι γεωμετρικῆς προόδου:

α) $x-2, 2x, 7x+4,$ β) $2x-2, 3x+6, 12x+6.$

180. Νά προσδιορίσετε τόν πραγματικό ἀριθμό x, ὥστε οἱ ἀριθμοί: $\alpha+x, \beta+x, \gamma+x$ νά εἶναι διαδοχικοί ὅροι γεωμ. προόδου. Τί συμβαίνει ἄν οἱ α, β, γ εἶναι διαδοχικοί ὅροι ἀριθμητικῆς προόδου;

181. Νά βρεῖτε τό πλῆθος ν τῶν ὅρων πού πρέπει νά πάρουμε ἀπό μία γεωμ. πρόοδο, ἄν ξέρουμε ὅτι:

α) $\alpha_1 = 4, \omega = 4, \Sigma_\nu = 5460,$ β) $\alpha_4 = 13, \alpha_6 = 117, \alpha_\nu = 9477,$

γ) $\alpha_1 = 4, \alpha_\nu = 972, \Sigma_\nu = 1456,$ δ) $\alpha_\nu = 81, \omega = \frac{3}{4}, \Sigma_\nu = 781.$

182. Ἄν οἱ ἀριθμοί α, β, γ εἶναι διαδοχικοί ὅροι γεωμ. προόδου, νά ἀποδείξετε ὅτι:

$$\alpha^2\beta^2\gamma^2\left(\frac{1}{\alpha^3}+\frac{1}{\beta^3}+\frac{1}{\gamma^3}\right)=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3.$$

183. Ἄν α, β, γ, δ εἶναι διαδοχικοί ὅροι μιᾶς γεωμ. προόδου, νά ἀποδείξετε ὅτι:

1) $(\alpha+\delta)\cdot(\beta+\gamma)-(\alpha+\gamma)\cdot(\beta+\delta)=(\beta-\gamma)^2$

2) $(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2+(\delta-\beta)^2=(\alpha-\delta)^2.$

184. Ἄν $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^+$ καί M_A, M_Γ, M_H εἶναι ἀντιστοίχως ὁ μέσος ἀριθμητικός, μέσος γεωμετρικός καί μέσος ἁρμονικός τῶν α καί β, νά ἀποδείξετε ὅτι:

1) $M_\Gamma^2 = M_A \cdot M_H$ καί **2)** $M_A \geqq M_\Gamma \geqq M_H.$

185. Νά σχηματίσετε μία γεωμ. πρόοδο, ἡ ὁποία ἔχει ὡς πρῶτο ὅρο της τή μικρότερη ρίζα τῆς ἐξισώσεως: $x^3-2x^2-25x+50=0$ καί ὡς λόγο τή μεγαλύτερη ρίζα. Ὕστερα νά βρεῖτε τό ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων της, ἄν ὡς ν πάρουμε τό τριπλάσιο τῆς τρίτης ρίζας τῆς παραπάνω ἐξισώσεως.

186. Νά βρεῖτε τόν πρῶτο ὅρο καί τό λόγο μιᾶς γεωμ. προόδου ἄν εἶναι γνωστό ὅτι: τό ἄθροισμα τῶν 4 πρώτων ὅρων της εἶναι 40, ἐνῶ τό ἄθροισμα τῶν 8 πρώτων ὅρων της εἶναι 3280.

187. Νά βρεῖτε τίς διαστάσεις ἑνός ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ἄν εἶναι γνωστό ὅτι αὐτές εἶναι διαδοχικοί ὅροι γεωμ. προόδου καί ὅτι τό ἄθροισμα ὅλων τῶν ἀκμῶν του εἶναι 168 καί ὁ ὄγκος του εἶναι: 512.

188. Τρεῖς ἀριθμοί x, y, z ἔχουν ἄθροισμα 147. Ἄν οἱ x, y, z εἶναι διαδοχικοί ὅροι ἀριθμ. προόδου καί οἱ x, z, y γεωμ. προόδου, νά βρεῖτε αὐτούς τούς ἀριθμούς.

189. Ἄν οἱ διάφοροι τοῦ μηδενός ἀριθμοί α, β, γ εἶναι ὅροι μιᾶς γεωμ. προόδου τάξεως λ, μ καί ν ἀντιστοίχως, νά ἀποδείξετε ὅτι ἰσχύει:

$$\alpha^{\mu-\nu}\cdot\beta^{\nu-\lambda}\cdot\gamma^{\lambda-\mu}=1.$$

190. Ἀνάμεσα στίς ρίζες τῆς ἐξισώσεως: $2x^2-5x-3=0$ νά παρεμβάλετε 4 γεωμετρικούς ἐνδιάμεσους.

191. Σέ μία ἀπολύτως φθίνουσα γεωμ. πρόοδο ὁ πρῶτος ὅρος της εἶναι τό μισό τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἄπειρων ὅρων, ἐνῶ τό ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων ὅρων της εἶναι 20. Νά βρεῖτε τήν πρόοδο.

192. Τό ἄθροισμα τῶν 4 πρώτων ὅρων μιᾶς ἀπολύτως φθίνουσας γεωμ. προόδου εἶναι 65 καί τό ἄθροισμα τῶν ἄπειρων ὅρων της εἶναι 81. Νά βρεῖτε τήν πρόοδο.

193. Νά ὑπολογίσετε τά παρακάτω «ἀθροίσματα»:

α) $\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}+\dfrac{1}{2-\sqrt{2}}+\dfrac{1}{2}+\cdots,\quad$ β) $1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{27}+\cdots$

γ) $\alpha+\beta+\dfrac{\beta^2}{\alpha}+\dfrac{\beta^3}{\alpha^2}+\cdots\quad(\alpha>\beta>0).$

194. Ἄν $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_\nu$ εἶναι ἀντιστοίχως τά ἀθροίσματα τῶν ἄπειρων ὅρων τῶν γεωμ. προόδων, καθεμιά ἀπό τίς ὁποῖες ἔχει ὡς πρῶτο ὅρο ἀντιστοίχως τόν: $1, 2, 3, \ldots, \nu$ καί λόγο ἀντιστοίχως τόν: $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \ldots, \dfrac{1}{\nu+1}$, νά ἀποδείξετε ὅτι:

$$S_1+S_2+S_3+\cdots+S_\nu=\frac{\nu(\nu+3)}{2}.$$

✱ **Ὁμάδα Β΄. 195.** Ἄν $x, y, z \in \mathbf{R}^+$ καί M_A, M_Γ, M_H εἶναι ἀντιστοίχως ὁ ἀριθμητικός, γεωμετρικός καί ἁρμονικός μέσος τους, νά ἀποδείξετε ὅτι ἰσχύει:

$$M_A \geqq M_\Gamma \geqq M_H \quad \textbf{(ἀνισότητα τοῦ Cauchy)}$$

196. Ἄν $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, νά ἀποδείξετε ὅτι:

$$\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y \geqq x^{1/3}\cdot y^{2/3}$$

Πότε ἡ σχέση αὐτή ἰσχύει μέ τό ἴσον;

197. Ἄν οἱ α, β, γ εἶναι διαδοχικοί ὅροι μιᾶς γεωμ. προόδου καί ἰσχύει ἡ σχέση:

$$\alpha^\rho=\beta^\sigma=\gamma^\tau,$$

νά ἀποδείξετε ὅτι οἱ ἀριθμοί ρ, σ, τ εἶναι διαδοχικοί ὅροι μιᾶς ἁρμονικῆς προόδου.

198. Νά ἀποδείξετε ὅτι: ἄν οἱ πλευρές ἑνός τριγώνου εἶναι διαδοχικοί ὅροι μιᾶς γεωμ. προόδου μέ λόγο ω, τότε ἰσχύει: $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}<\omega<\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$.

199. Ἄν $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=0$ καί $\alpha^3+\beta^3=\gamma^3$, νά ἀποδείξετε ὅτι οἱ ἀριθμοί: $\alpha, \gamma, \beta\sqrt[3]{4}$ εἶναι διαδοχικοί ὅροι μιᾶς γεωμετρικῆς προόδου.

200. Νά βρεῖτε τό νιοστό ὅρο καί τό ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων τῆς ἀκολουθίας: 2, 3, 5, 9, 17, ...

Ὑπόδειξη. Νά πάρετε τίς διαφορές: $3-2, 5-3, 9-5, 17-9, \ldots$ Τί παρατηρεῖτε;

201. Ἄν οἱ α, β, γ, x, y, z εἶναι θετικοί ἀριθμοί καί ὁ α εἶναι μέσος ἀριθμητικός τῶν β καί γ, ἐνῶ ὁ x εἶναι μέσος ἁρμονικός τῶν y καί z, νά ἀποδείξετε ὅτι: ὁ αx εἶναι μέσος γεωμετρικός τῶν βy καί γz, τότε καί μόνο τότε, ἄν: $\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{y}=\dfrac{\beta}{\gamma}+\dfrac{\gamma}{\beta}$.

202. Νά ἐξετάσετε ἄν οἱ ἀριθμοί: $\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{7}$ εἶναι ὅροι (ὄχι ἀναγκαστικά διαδοχικοί) μιᾶς γεωμετρικῆς προόδου.

203. Τό ἄθροισμα τῶν ἄπειρων ὅρων μιᾶς ἀπολύτως φθίνουσας γεωμ. προόδου εἶναι 12 καί τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἄπειρων ὅρων της εἶναι 48. Νά βρεῖτε τήν πρόοδο.

204. Ἄν $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ μέ $|\alpha|<1$ καί $|\beta|<1$ καί ὀνομάσουμε:

$A=1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^\nu+\cdots$ καί $B=1+\beta+\beta^2+\cdots+\beta^\nu+\cdots,$

νά ἀποδείξετε ὅτι:

$$\Sigma=1+\alpha\beta+\alpha^2\beta^2+\cdots+\alpha^\nu\beta^\nu+\cdots=\frac{AB}{A+B-1}.$$

205. Δίνεται ἰσόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ μέ πλευρά α. Συνδέουμε τά μέσα τῶν πλευρῶν του A_1, B_1, $Γ_1$ καί σχηματίζουμε ἕνα νέο ἰσόπλευρο τρίγωνο. Τά μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ $A_1B_1Γ_1$ τά συνδέουμε καί παίρνουμε ἕνα νέο ἰσόπλευρο τρίγωνο. Ἐπαναλαμβάνουμε ἐπ' ἄπειρο τήν ἐργασία αὐτή. Νά ὑπολογίσετε τό ἄθροισμα τῶν περιμέτρων καί τό ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν ἄπειρων ἰσοπλεύρων τριγώνων πού σχηματίζονται.

206. Ἔστω ἡ ἀκολουθία (α_ν) μέ $\alpha_1 = \frac{3}{2}$ καί $\alpha_{\nu+1} = \frac{3\alpha_\nu + 4}{5}$ $\forall$ $\nu \in \mathbf{N}$. Νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ ἀκολουθία (β_ν) μέ γενικό ὅρο: $\beta_\nu = \alpha_\nu - 2$ εἶναι μία γεωμ. πρόοδος μέ λόγο $\omega = \frac{3}{5}$. Ὕστερα νά βρεῖτε τούς νιοστούς ὅρους β_ν καί α_ν τῶν ἀκολουθιῶν (β_ν) καί (α_ν) ἀντιστοίχως συναρτήσει τοῦ ν, καθώς καί τό ὅριο τῆς ἀκολουθίας (α_ν).

207. Ἔστω ἡ ἀκολουθία α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ μέ:

$$\alpha_\nu = \frac{1}{2}(\alpha_{\nu-1} + \alpha_{\nu-2}) \text{ καί } \alpha_1 = \alpha,\ \alpha_2 = \beta.$$

Νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ ἀκολουθία β_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ μέ γενικό ὅρο: $\beta_\nu = \alpha_\nu - \alpha_{\nu-1}$ εἶναι μία γεωμ. πρόοδος μέ λόγο $\omega = -\frac{1}{2}$. Στή συνέχεια νά ἐκφράσετε τό α_ν συναρτήσει τῶν α, β καί ν. Ποιό εἶναι τό $\lim \alpha_\nu$;

208. Ἔστω ἡ ἀκολουθία: α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ γιά τήν ὁποία εἶναι:

$$\alpha_{\nu+2} = \xi\alpha_{\nu+1} + \eta\alpha_\nu \ \forall \ \nu \in \mathbf{N} \ (\xi, \eta \in \mathbf{R}).$$

Νά ἀποδείξετε ὅτι:

Ἄν ὁ λόγος $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$, ὅπου $\alpha_1 \neq 0$, εἶναι ρίζα τῆς ἐξισώσεως:

$$x^2 - \xi x - \eta = 0,$$

τότε ἡ ἀκολουθία α_ν εἶναι μία γεωμετρική πρόοδος.

209. Ἄν S_ν εἶναι τό ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων γεωμετρικῆς προόδου, τῆς ὁποίας ὁ πρῶτος ὅρος εἶναι $\alpha = -5$ καί ὁ λόγος $\omega = -3/4$, νά ἀποδείξετε ὅτι:

$$\left(\forall\ \varepsilon > 0 \text{ καί } \forall\ \nu \in \mathbf{N} \text{ μέ } \nu > 3\left(\frac{20}{7\varepsilon} - 1\right)\right) \Rightarrow \left| -\frac{20}{7} - S_\nu \right| < \varepsilon.$$

Ποιό εἶναι τό $\lim S_\nu$;

★ IV. ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΠΟ ΤΙΣ ΣΕΙΡΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

§ 95. Προκαταρκτικά-Συμβολισμός ἀθροισμάτων.—Στό Κεφάλαιο III (§ 26, σημ.) μάθαμε ὅτι ἕνα ἄθροισμα τῆς μορφῆς: $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\nu$ παριστάνεται γιά συντομία μέ $\sum\limits_{k=1}^{\nu} \alpha_k$ καί διαβάζεται: *«ἄθροισμα τῶν* (ἀριθμῶν) α_k *ἀπό* $k = 1$ *μέχρι ν»*. Ἀκριβέστερα ὁρίζουμε:

$$\sum_{k=1}^{\nu} \alpha_k \underset{\text{ορσ}}{=} \begin{cases} \alpha_1, & \text{ἄν } \nu = 1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\nu, & \text{ἄν } \nu \geq 2. \end{cases} \quad (1)$$

Τό σύμβολο Σ σημαίνει ὅτι πρέπει νά προσθέσουμε ὅλους τούς ἀριθμούς πού θά πάρουμε ἄν δώσουμε στό δείκτη k τοῦ α_k διαδοχικά τίς τιμές: 1, 2, 3, . . ., ν. Εἶναι φανερό ὅτι ὁ δείκτης k μπορεῖ νά ἀντικατασταθεῖ μέ ὁποιοδήποτε ἄλλο γράμμα. Ἔτσι, π.χ. τό παραπάνω ἄθροισμα γράφεται:

$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_\nu=\sum_{\kappa=1}^{\nu}\alpha_k=\sum_{\lambda=1}^{\nu}\alpha_\lambda=\sum_{\rho=1}^{\nu}\alpha_\rho=\sum_{\nu=1}^{\nu}\alpha_\nu=\cdots \tag{2}$$

Εἶναι ἐπίσης εὔκολο νά δοῦμε ὅτι ἰσχύει:

$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_\nu=\sum_{\kappa=1}^{\nu}\alpha_\kappa=\sum_{\kappa=0}^{\nu-1}\alpha_{\kappa+1}=\sum_{\kappa=2}^{\nu+1}\alpha_{\kappa-1}=\sum_{\kappa=4}^{\nu+3}\alpha_{\kappa-3}=\cdots \tag{3}$$

Ἔχοντας τώρα ὑπόψη τό συμβολισμό (1) τά ἀξιοσημείωτα ἀθροίσματα Σ_1, Σ_2, Σ_3 τῆς § 78 γράφονται ὡς ἑξῆς:

$$\Sigma_1=1+2+3+\cdots+\nu\equiv\sum_{k=1}^{\nu}k=\frac{\nu(\nu+1)}{2}$$

$$\Sigma_2=1^2+2^2+3^2+\cdots+\nu^2\equiv\sum_{k=1}^{\nu}k^2=\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}$$

$$\Sigma_3=1^3+2^3+3^3+\cdots+\nu^3\equiv\sum_{k=1}^{\nu}k^3=\frac{\nu^2(\nu+1)^2}{4}=\left(\sum_{k=1}^{\nu}k\right)^2.$$

Μία γενίκευση τῆς *προσεταιριστικῆς ἰδιότητας* πού ξέρουμε εἶναι:

$$\sum_{\kappa=1}^{\nu}\alpha_\kappa=\sum_{\kappa=1}^{\rho}\alpha_\kappa+\sum_{\kappa=\rho+1}^{\nu}\alpha_\kappa \tag{4}$$

γιά κάθε $\rho=1,2,\ldots,\nu-1$, ἐνῶ μία γενίκευση τῆς *ἐπιμεριστικῆς ἰδιότητας* εἶναι:

$$\sum_{\kappa=1}^{\nu}(\xi\alpha_\kappa+\eta\beta_\kappa)=\xi\cdot\sum_{\kappa=1}^{\nu}\alpha_\kappa+\eta\cdot\sum_{\kappa=1}^{\nu}\beta_\kappa \tag{5}$$

ὅπου ξ καί η εἶναι πραγματικοί ἀριθμοί.

Ἀπό τήν (5) γιά $\xi=\eta=1$ ἔχουμε:

$$\sum_{\kappa=1}^{\nu}(\alpha_\kappa+\beta_\kappa)=\sum_{\kappa=1}^{\nu}\alpha_\kappa+\sum_{\kappa=1}^{\nu}\beta_\kappa, \tag{6}$$

ἐνῶ γιά $\xi=1$, $\eta=-1$ ἔχουμε:

$$\sum_{\kappa=1}^{\nu}(\alpha_\kappa-\beta_\kappa)=\sum_{\kappa=1}^{\nu}\alpha_\kappa-\sum_{\kappa=1}^{\nu}\beta_\kappa \tag{7}$$

Τέλος, ἀπό τήν (5) γιά $\eta=0$ λαμβάνουμε:

$$\sum_{\kappa=1}^{\nu}\xi\alpha_\kappa=\xi\cdot\sum_{\kappa=1}^{\nu}\alpha_\kappa \tag{8}$$

Ἡ (8) ἀποτελεῖ γενίκευση τῆς ἰδιότητας: $\xi\cdot(\alpha_1+\alpha_2)=\xi\alpha_1+\xi\alpha_2$.

Οἱ ἀποδείξεις τῶν παραπάνω ἰδιοτήτων εἶναι πολύ ἁπλές. Ἡ (6), π.χ., ἀποδεικνύεται ὡς ἑξῆς:

$$\sum_{\kappa=1}^{\nu}(\alpha_\kappa+\beta_\kappa)=(\alpha_1+\beta_1)+(\alpha_2+\beta_2)+\cdots+(\alpha_\nu+\beta_\nu)=$$

$$=(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu)+(\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_\nu)=\sum_{\kappa=1}^{\nu}\alpha_\kappa+\sum_{\kappa=1}^{\nu}\beta_\kappa.$$

Εἶναι φανερές ἀκόμη καί οἱ ἑπόμενες ἰδιότητες:

i) Ἄν $\alpha_\kappa = \alpha$, τότε ἰσχύει: $\sum\limits_{\kappa=1}^{\nu} \alpha_\kappa = \nu\alpha$. Εἰδικά γιά $\alpha = 1$ εἶναι: $\sum\limits_{\kappa=1}^{\nu} \alpha_\kappa = \nu$ (9)

ii) $\sum\limits_{\kappa=1}^{\nu} (\alpha + \alpha_\kappa) = \nu\alpha + \sum\limits_{\kappa=1}^{\nu} \alpha_\kappa$, iii) $\sum\limits_{\kappa=1}^{\nu} (\alpha_\kappa - \alpha_{\kappa+1}) = \alpha_1 - \alpha_{\nu+1}$ (10)

Ἐφαρμογή. Νά ὑπολογίσετε τό ἄθροισμα τῶν ν πρώτων περιττῶν ἀριθμῶν.

Λύση. Ξέρουμε ὅτι κάθε περιττός ἀριθμός εἶναι τῆς μορφῆς: $\alpha_\kappa = 2\kappa - 1$, $\kappa = 1, 2, \ldots$, ὁπότε ἔχουμε:

$$\sum_{\kappa=1}^{\nu} \alpha_\kappa = \sum_{\kappa=1}^{\nu} (2\kappa - 1) = \sum_{\kappa=1}^{\nu} 2\kappa - \sum_{\kappa=1}^{\nu} 1 = 2\sum_{\kappa=1}^{\nu} \kappa - \sum_{\kappa=1}^{\nu} 1 = 2 \cdot \frac{\nu(\nu+1)}{2} - \nu = \nu^2.$$

§ 96. Ἡ ἔννοια τῆς σειρᾶς - Ἔννοιες συναφεῖς μέ αὐτή.

—Ἔστω

$$\alpha_1, \ \alpha_2, \ \ldots, \ \alpha_\nu, \ \ldots \qquad (1)$$

μία ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν. Ἀπό τήν ἀκολουθία (1) σχηματίζουμε μία καινούργια ἀκολουθία σ_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ μέ τόν ἀκόλουθο τρόπο:

$$\left.\begin{array}{l} \sigma_1 = \alpha_1 \\ \sigma_2 = \sigma_1 + \alpha_2 = \alpha_1 + \alpha_2 \\ \sigma_3 = \sigma_2 + \alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \sigma_\nu = \sigma_{\nu-1} + \alpha_\nu = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\nu = \sum\limits_{\kappa=1}^{\nu} \alpha_\kappa \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} (2)$$

Τήν ἀκολουθία αὐτή, δηλαδή τήν ἀκολουθία (σ_ν), τῆς ὁποίας ὁ γενικός ὅρος δίνεται ἀπό τόν τύπο:

$$\sigma_\nu = \sum_{\kappa=1}^{\nu} \alpha_\kappa \qquad (3)$$

(ὑπενθυμίζουμε ὅτι: $\sum\limits_{\kappa=1}^{1} \alpha_\kappa \underset{\text{ορσ}}{=\!=} \alpha_1$), τήν ὀνομάζουμε **ἀκολουθία τῶν μερικῶν ἀθροισμάτων** τῆς ἀκολουθίας (α_ν).

Παρατηροῦμε ὅτι ἡ ἀκολουθία (σ_ν) εἶναι τελείως καθορισμένη ἀπό τήν ἀκολουθία (α_ν). Ἀλλά καί ἀντιστρόφως, ἄν θέσουμε:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 = \sigma_1 \\ \alpha_2 = \sigma_2 - \sigma_1 \\ \alpha_3 = \sigma_3 - \sigma_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \alpha_\nu = \sigma_\nu - \sigma_{\nu-1} \\ \cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} (4)$$

ἡ ἀκολουθία (α_ν) εἶναι τελείως καθορισμένη ἀπό τήν ἀκολουθία (σ_ν).

Ὥστε: ἄν μᾶς δοθεῖ ἡ μία ἀπό τίς δύο ἀκολουθίες (α_ν), (σ_ν), τότε ὁρίζουμε πάντοτε καί τήν ἄλλη. Λέμε τότε ὅτι οἱ δύο ἀκολουθίες (α_ν), (σ_ν) σχηματίζουν μία *σειρά πραγματικῶν ἀριθμῶν*. Πιό αὐστηρά δίνουμε τόν ἑπόμενο ὁρισμό.

Ὁρισμός. *Ὀνομάζουμε* **σειρά πραγματικῶν ἀριθμῶν** καί τή συμβολίζουμε μέ: $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\nu + \cdots$ ἤ $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots$ ἤ ἀκόμη πιό σύντομα μέ: $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ καί διαβάζουμε: ἄθροισμα τῶν α_ν ἀπό ν ἴσον ἕνα ἕως ἄπειρο, *τό διατεταγμένο ζεῦγος* $((\alpha_\nu), (\sigma_\nu))$, *ὅπου* (α_ν) *ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν καί*

$$\sigma_\nu = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\nu, \ \nu = 1, 2, \ldots$$

Ἀπό τόν παραπάνω ὁρισμό συνάγουμε τώρα ὅτι ἡ σειρά πραγματικῶν ἀριθμῶν: $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ εἶναι τό ζεῦγος τῶν δύο ἀπεικονίσεων:

$$\alpha\colon \mathbf{N} \to \mathbf{R}\colon \nu \to \alpha_\nu \tag{5}$$

$$\sigma\colon \mathbf{N} \to \mathbf{R}\colon \nu \to \sigma_\nu = \sum_{\kappa=1}^{\nu} \alpha_\kappa \tag{6}$$

Κάθε ὅρος τῆς ἀκολουθίας (α_ν) λέγεται **ὅρος** τῆς σειρᾶς, ἐνῶ κάθε ὅρος τῆς ἀκολουθίας (σ_ν) λέγεται **μερικό ἄθροισμα** ἤ **τμῆμα** τῆς σειρᾶς: $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$. Εἰδικότερα ὁ ὅρος α_ν, τάξεως ν, τῆς ἀκολουθίας (α_ν) λέγεται **νιοστός** ἤ **γενικός ὅρος** τῆς σειρᾶς $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$, ἐνῶ ὁ ὅρος σ_ν, τάξεως ν, τῆς ἀκολουθίας (σ_ν) λέγεται **νιοστό μερικό ἄθροισμα** τῆς σειρᾶς.

Στά ἑπόμενα θά ἀσχοληθοῦμε **μόνο** μέ σειρές πραγμ. ἀριθμῶν. Ἔτσι στό ἑξῆς μέ τόν ὅρο: «*σειρά*» θά ἐννοοῦμε: «*σειρά πραγματικῶν ἀριθμῶν*».

Σημείωση. Ὅταν σέ μία σειρά $((\alpha_\nu), (\sigma_\nu))$ ξεκινᾶμε ἀπό μία ἀκολουθία (α_ν) στήν ὁποία λαμβάνεται ὡς δείκτης καί τό 0, τότε ἡ σειρά αὐτή συμβολίζεται μέ $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu$. Ὥστε: $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu \equiv \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots$. Γενικότερα, ἄν ξεκινᾶμε ἀπό μία ἀκολουθία (α_ν) μέ δεῖκτες $\nu \geqq$ ἑνός δείκτη ν_0, τότε ἡ ἀντίστοιχη σειρά συμβολίζεται μέ $\sum\limits_{\nu=\nu_0}^{\infty} \alpha_\nu$ καί ἔχει νιοστό μερικό ἄθροισμα τό:

$$\sigma_\nu = \sum_{\kappa=\nu_0}^{\nu} \alpha_\kappa.$$

Παραδείγματα. 1. *Ἡ σειρά τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν*: Τό ζεῦγος τῶν δύο ἀκολουθιῶν:

$$(\alpha_\nu)\colon 1, 2, 3, \ldots, \nu, \ldots$$

$$(\sigma_\nu)\colon 1, 3, 6, \ldots, \frac{\nu(\nu+1)}{2}, \ldots$$

εἶναι μία σειρά, ἡ ὁποία παριστάνεται μέ $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \nu \equiv 1 + 2 + 3 + \cdots + \nu + \cdots$ καί λέγεται **σειρά τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν**. Τό νιοστό μερικό ἄθροισμα αὐτῆς τῆς σειρᾶς εἶναι:

$$\sigma_\nu = 1 + 2 + 3 + \cdots + \nu = \sum_{k=1}^{\nu} k = \frac{\nu(\nu+1)}{2}.$$

2. *Ἡ γεωμετρική σειρά.* Ἔστω μία σειρά τῆς ὁποίας οἱ ὅροι ἀποτελοῦν γεωμετρική πρόοδο μέ πρῶτο ὅρο τό α καί λόγο ω, δηλαδή ἔστω ἡ σειρά:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha\omega^{\nu} \equiv \alpha+\alpha\omega+\alpha\omega^2+\cdots$$

Ἡ παραπάνω σειρά λέγεται **γεωμετρική σειρά** καί τό νιοστό μερικό ἄθροισμά της εἶναι:

$$\sigma_\nu=\alpha+\alpha\omega+\alpha\omega^2+\cdots+\alpha\omega^\nu=\frac{\alpha(\omega^{\nu+1}-1)}{\omega-1}, \quad (\omega\neq 1)$$

Ἔτσι, π.χ., ἡ σειρά $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{2^\nu}\equiv 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots$ εἶναι μία γεωμετρική σειρά μέ γενικό ὅρο $\alpha_\nu=\frac{1}{2^\nu}$ καί νιοστό μερικό ἄθροισμα: $\sigma_\nu=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^\nu}=2-\frac{1}{2^\nu}$ (γιατί;).

3. *Ἡ ἀριθμητική σειρά.* Ἔστω μία σειρά τῆς ὁποίας οἱ ὅροι ἀποτελοῦν ἀριθμητική πρόοδο μέ πρῶτο ὅρο τό α καί λόγο ω, δηλαδή ἔστω ἡ σειρά:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}[\alpha+(\nu-1)\cdot\omega]\equiv\alpha+(\alpha+\omega)+(\alpha+2\omega)+\cdots$$

Ἡ παραπάνω σειρά λέγεται **ἀριθμητική σειρά** καί τό νιοστό μερικό ἄθροισμά της εἶναι:

$$\sigma_\nu=\alpha+(\alpha+\omega)+(\alpha+2\omega)+\cdots+[\alpha+(\nu-1)\omega]=\frac{2\alpha+(\nu-1)\omega}{2}\cdot\nu.$$

4. *Ἡ ἁρμονική σειρά.* Θεωροῦμε τή σειρά μέ γενικό ὅρο: $\alpha_\nu=\frac{1}{\nu}$, δηλαδή τή σειρά:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu}\equiv 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{\nu}+\cdots$$

Ἡ παραπάνω σειρά λέγεται **ἁρμονική σειρά**, γιατί κάθε ὅρος της (ἐκτός ἀπό τόν πρῶτο), δηλαδή κάθε ὅρος τῆς ἀκολουθίας (α_ν) εἶναι μέσος ἁρμονικός τοῦ ὅρου πού προηγεῖται καί τοῦ ὅρου πού ἕπεται· πράγματι, ἰσχύει: $\frac{2}{\alpha_\nu}=\frac{1}{\alpha_{\nu-1}}+\frac{1}{\alpha_{\nu+1}}$ γιά κάθε $\nu\geq 2$ (βλ. παρατ. β' τῆς § 81), καθόσον ἔχουμε: $2\nu=(\nu-1)+(\nu+1)$.

Τά μερικά ἀθροίσματα τῆς ἁρμονικῆς σειρᾶς εἶναι:

$$\sigma_1=1,\quad \sigma_2=1+\frac{1}{2},\quad \sigma_3=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3},\ldots,\ \sigma_\nu=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{\nu},\ldots$$

Σύμφωνα λοιπόν μέ τόν ὁρισμό πού δώσαμε γιά τίς σειρές, τό ζεῦγος τῶν ἀκολουθιῶν:

$$(\alpha_\nu):\ 1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\ldots,\frac{1}{\nu},\ldots$$

$$(\sigma_\nu):\ 1,\quad 1+\frac{1}{2},\quad 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3},\ldots,\ 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{\nu},\ldots$$

εἶναι ἡ ἁρμονική σειρά $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu}$.

5. Θεωροῦμε τή σειρά: $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu(\nu+1)}\equiv\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{\nu(\nu+1)}+\cdots$

Οἱ ὅροι της εἶναι: $\alpha_1=\frac{1}{1\cdot 2}$, $\alpha_2=\frac{1}{2\cdot 3}$, $\alpha_3=\frac{1}{3\cdot 4}$, ...

Ὁ γενικός της ὅρος εἶναι: $\alpha_\nu=\frac{1}{\nu(\nu+1)}=\frac{(\nu+1)-\nu}{\nu(\nu+1)}=\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\nu+1}$.

Τό νιοστό μερικό ἄθροισμά της εἶναι:

$$\sigma_\nu = \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\nu+1}\right)=1-\frac{1}{\nu+1}.$$

§ 97. Σύγκλιση μιᾶς σειρᾶς.— Ἄς θεωρήσουμε τή σειρά τοῦ παραδείγματος 2 τῆς προηγούμενης παραγράφου, δηλαδή τή σειρά:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{2^\nu} \equiv 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^\nu}+\cdots \qquad (1)$$

ἡ ὁποία, ὅπως εἴδαμε, ἔχει νιοστό μερικό ἄθροισμα: $\sigma_\nu = 2-\frac{1}{2^\nu}$.

Παρατηροῦμε τώρα ὅτι ἡ ἀκολουθία: $2-\frac{1}{2^\nu}$, $\nu=1,2,\ldots$ ἔχει ὅριο τόν ἀριθμό 2, γιατί $\lim\frac{1}{2^\nu}=0$ (βλ. πρδ. 1, § 64), καί συνεπῶς ἡ ἀκολουθία (σ_ν) συγκλίνει στόν ἀριθμό 2. Ὥστε: $\lim\sigma_\nu = 2$.

Ἀλλά τί θά μποροῦσε νά σημαίνει ἡ ἔκφραση:

$$\lim\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^\nu}\right)$$

ἀπό τήν ἄποψη τῆς ἔννοιας τοῦ ἀθροίσματος, καθόσον ὅταν λέμε στήν Ἄλγεβρα *«ἄθροισμα»* ἐννοοῦμε ὅτι ἔχουμε ἕνα *πεπερασμένο πλῆθος* προσθετέων, ἐνῶ ἀπό τόν τρόπο πού κατασκευάζεται ἡ ἀκολουθία (σ_ν) γίνεται φανερό ὅτι: *καθώς τό ν «αὐξάνει ἀπεριόριστα» τόσο καί «πιό πολλοί» ὅροι τῆς ἀκολουθίας* $\left(\frac{1}{2^\nu}\right)$ *προσθέτονται*. Παρατηροῦμε λοιπόν ὅτι στήν παραπάνω ἔκφραση ὑποκρύπτεται κάποια ἔννοια *«ἀπειροαθροίσματος»* ἤ ὅπως λέμε συνήθως *«ἀθροίσματος μέ ἄπειρους ὅρους»*. Ἐξάλλου ἡ ἔννοια αὐτή ἔχει κιόλας χρησιμοποιηθεῖ στήν § 94 ὅπου ὁρίσαμε τό ἄθροισμα τῶν ἄπειρων ὅρων μιᾶς ἀπολύτως φθίνουσας γεωμετρικῆς προόδου. Ἄς ἐφαρμόζουμε τώρα καί τόν τύπο (4) τῆς § 94 γιά νά βροῦμε τό «ἄθροισμα»: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^\nu}+\cdots$. Ἔχουμε:

$$\Sigma_\infty = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^\nu}+\cdots=\frac{\alpha}{1-\omega}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2=\lim\sigma_\nu \qquad (2)$$

Ἔτσι ἀπό τίς (1) καί (2) μποροῦμε νά γράψουμε:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{2^\nu}=2=\lim\sigma_\nu\equiv\lim\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^\nu}\right) \qquad (3)$$

Ὕστερα ἀπό τά παραπάνω εἶναι πιά φυσικό νά δώσουμε τόν ἑξῆς γενικό ὁρισμό γιά τή σύγκλιση σειρᾶς πραγματικῶν ἀριθμῶν:

Ὁρισμός. *Θά λέμε ὅτι μία σειρά* $\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu$ *συγκλίνει στόν πραγματικό ἀριθμό* σ καί θά γράφουμε $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu = \sigma$, *τότε καί μόνο τότε, ἄν ἡ ἀκολουθία* (σ_ν) *συγκλίνει στόν πραγματικό ἀριθμό* σ.

Γιά συντομία:

$$\boxed{\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu = \sigma \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} \lim \sigma_\nu = \lim(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_\nu) \equiv \lim \sum_{\kappa=1}^{\nu} \alpha_\kappa = \sigma}$$

Ὁ πραγματικός ἀριθμός σ λέγεται τότε **ἄθροισμα** τῆς σειρᾶς $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$.

Ὥστε: **ἄθροισμα** *μιᾶς συγκλίνουσας σειρᾶς* $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ *ὀνομάζεται ὁ ἀριθμός στόν ὁποῖο τείνει τό νιοστό μερικό ἄθροισμά της:* $\sigma_\nu = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\nu$.

Ἔτσι, π.χ., τό ἄθροισμα τῆς σειρᾶς τοῦ παραδείγματος 5 τῆς προηγούμενης παραγράφου εἶναι ὁ ἀριθμός 1, γιατί $\lim\sigma_\nu = 1 - \lim \dfrac{1}{\nu+1} = 1 - 0 = 1$, καί συνεπῶς γράφουμε: $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \dfrac{1}{\nu(\nu+1)} = 1$.

Ἀπό τά παραπάνω συμπεραίνουμε τώρα ὅτι: ὅταν γράφουμε: $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu = \sigma$, ἐννοοῦμε ὅτι ἡ σειρά $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ εἶναι συγκλίνουσα καί ὅτι τό ἄθροισμά της εἶναι ὁ πραγματικός ἀριθμός σ.

Ἄς θεωρήσουμε τώρα τή γεωμετρική σειρά:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} 2^\nu = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^\nu + \cdots$$

Τό νιοστό μερικό ἄθροισμα αὐτῆς τῆς σειρᾶς εἶναι:

$$\sigma_\nu = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^\nu = 2^{\nu+1} - 1$$

Παρατηροῦμε ὅτι: $\lim\sigma_\nu = +\infty$, καθόσον ἡ ἀκολουθία (σ_ν) εἶναι αὔξουσα καί μή φραγμένη. Σ' αὐτή τήν περίπτωση λέμε ὅτι «*ἡ σειρά* $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ *ἀπειρίζεται θετικά*» καί γράφουμε συμβολικά: $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu = +\infty$.

Ὥστε:

$$\boxed{\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu = +\infty \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} \lim \sigma_\nu = \lim(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_\nu) = \lim \sum_{k=1}^{\nu} \alpha_k = +\infty}$$

Μέ ἀνάλογο τρόπο ὁρίζουμε:

$$\boxed{\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu = -\infty \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} \lim \sigma_\nu = \lim(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_\nu) = \lim \sum_{k=1}^{\nu} \alpha_k = -\infty}$$

Στίς δύο τελευταῖες περιπτώσεις λέμε ὅτι *«ἡ σειρά* $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ *συγκλίνει κατ' ἐκδοχή»*.

Τέλος, ὑπάρχουν σειρές πού δέ συγκλίνουν σέ πραγματικό ἀριθμό, οὔτε ὅμως καί κατ' ἐκδοχή (δηλαδή σ' ἕνα ἀπό τά σύμβολα $+\infty$ ἤ $-\infty$). Στήν περίπτωση αὐτή λέμε ὅτι ἡ σειρά **ἀποκλίνει** ἤ **κυμαίνεται** (ταλαντεύεται).

Ἔτσι, π.χ., ἡ σειρά $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu+1} = 1-1+1-1+\cdots$ ἀποκλίνει, γιατί ἡ ἀκολουθία:

$$\sigma_\nu = (-1)^2 + (-1)^3 + \cdots + (-1)^{\nu+1} = \begin{cases} 1, & \text{ἄν } \nu \text{ περιττός} \\ 0, & \text{ἄν } \nu \text{ ἄρτιος} \end{cases}$$

δέ συγκλίνει σέ πραγματικό ἀριθμό (ἀφοῦ $\sigma_{2\nu} \to 0$ καί $\sigma_{2\nu-1} \to 1$) οὔτε ὅμως καί κατ' ἐκδοχή.

Ἀπό τά παραπάνω συμπεραίνουμε τώρα ὅτι:

Γιά ὁποιαδήποτε σειρά $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ *πραγματικῶν ἀριθμῶν ἰσχύει μία καί μόνο μία ἀπό τίς ἑπόμενες περιπτώσεις:*

α) *Ἡ σειρά ἔχει ἄθροισμα (δηλ. συγκλίνει σέ πραγματικό ἀριθμό)*

β) *Ἡ σειρά συγκλίνει κατ' ἐκδοχή (ἀπειρίζεται θετικά ἤ ἀρνητικά)*

γ) *Ἡ σειρά ἀποκλίνει.*

Ἀξιόλογη παρατήρηση. Ἄν $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu = \sigma$, τότε $\lim\alpha_\nu = 0$, γιατί $\alpha_\nu = \sigma_\nu - \sigma_{\nu-1}$ καί $\lim\sigma_\nu = \lim\sigma_{\nu-1} = \sigma$ (§ 50).

Πιό γενικά, ἄν θεωρήσουμε τήν ἀκολουθία (δ_ν) μέ:

$$\delta_\nu = \sigma_{2\nu} - \sigma_\nu = \alpha_{\nu+1} + \alpha_{\nu+2} + \cdots + \alpha_{2\nu}$$

καί ἡ σειρά $((\alpha_\nu), (\sigma_\nu))$ συγκλίνει στόν πραγματικό ἀριθμό σ, τότε ἰσχύει: $\lim\delta_\nu = \sigma - \sigma = 0$, γιατί ἡ $(\sigma_{2\nu})$ εἶναι μία ὑπακολουθία τῆς (σ_ν).

Αὐτή ἡ παρατήρηση μᾶς δίνει μία **ἀναγκαία** συνθήκη γιά νά συγκλίνει μία σειρά.

Σχόλια. 1. Ἀπό τά προηγούμενα γίνεται φανερό ὅτι ἡ ἔννοια: *σειρά πραγματικῶν ἀριθμῶν* ἀποτελεῖ γενίκευση τῆς ἀλγεβρικῆς ἔννοιας: *ἄθροισμα πραγματικῶν ἀριθμῶν* (μέ δύο, τρεῖς κτλ. ὅρους). Γι' αὐτό ἡ σειρά λέγεται πολλές φορές καί *«ἄθροισμα μέ ἄπειρους ὅρους»*. Δέν πρέπει ὅμως νά συγχέουμε τήν ἔννοια τῆς σειρᾶς μέ τήν ἀλγεβρική ἔννοια τοῦ ἀθροίσματος δύο ἤ περισσοτέρων πραγματικῶν ἀριθμῶν καί αὐτό γιατί τό ἄθροισμα ἑνός (πεπερασμένου) πλήθους πραγματικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἕνας **μονοσημάντως** ὁρισμένος πραγματικός ἀριθμός, ἐνῶ γιά μία σειρά τό *«ἄθροισμα»* δέν ὑπάρχει πάντοτε, καθόσον ἡ σειρά μπορεῖ νά συγκλίνει κατ'ἐκδοχή ἤ νά ἀποκλίνει. Ἀλλά κι ἄν ἀκόμα ἡ σειρά συγκλίνει, τό ἄθροισμά της δέ βρίσκεται ἀλγεβρικῶς, ἀλλά μέ τή βοήθεια μιᾶς «ἐξωαλγεβρικῆς» ἔννοιας, τῆς ἔννοιας τῆς συγκλίσεως ἀκολουθίας. Ὥστε ὁ ὅρος *«ἄθροισμα»* ἔχει γιά τίς σειρές μία πολύ εἰδική σημασία.

2. Ἐάν μία σειρά $((\alpha_\nu), (\sigma_\nu))$ συγκλίνει στόν πραγματικό ἀριθμό σ, τότε μέ τό σύμβολο $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ παριστάνουμε καί τή *σειρά* καί τό *ἄθροισμά* της. Δέν πρέπει ὅμως νά συγχέουμε αὐτές τὶς δύο ἔννοιες, γιατί μέ τόν ὅρο *«σειρά»* ἐννοοῦμε τό ζεῦγος τῶν ἀκολουθιῶν: (α_ν), (σ_ν), ἐνῶ μέ τόν ὅρο *«ἄθροισμα σειρᾶς»* ἐννοοῦμε τό ὅριο τῆς ἀκολουθίας (σ_ν), ἄν φυσικά τό ὅριο αὐτό ὑπάρχει. Ὥστε ὁ ρόλος τοῦ συμβόλου $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu$ εἶναι διπλός γιά μία συγκλίνουσα σειρά.

Ἔτσι, π.χ. ἄν μέ τό σύμβολο $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}\dfrac{1}{2^\nu}$ ἐννοοῦμε *«σειρά»* ἔχουμε: $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}\dfrac{1}{2^\nu}=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+$ $+\cdots+\dfrac{1}{2^\nu}+\cdots$, ἐνῶ, ἄν ἐννοοῦμε *«ἄθροισμα»*, ἔχουμε: $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}\dfrac{1}{2^\nu}=2$.

Τονίσαμε παραπάνω τή διπλή σημασία τοῦ συμβόλου $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu$, γιατί ἄν δέν προσέξουμε μποροῦμε εὔκολα νά φθάσουμε σέ ἐσφαλμένα συμπεράσματα, ὅπως ἐξάλλου φαίνεται καί ἀπό τό ἀκόλουθο παράδειγμα:

Ἄς θεωρήσουμε τή σειρά: $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu+1}=1-1+1-1+\cdots$. Ἄν εἴχαμε τό δικαίωμα νά θεωρήσουμε τό «ἄθροισμα» σ αὐτῆς τῆς σειρᾶς, τότε:

$$\sigma=1-1+1-1+\cdots$$

ἤ

$$\sigma=1-(1-1+1-1+\cdots)$$

δηλαδή $\sigma=1-\sigma$, ὁπότε $2\sigma=1$ καί συνεπῶς $\sigma=\dfrac{1}{2}$. Αὐτό ὅμως δέν εἶναι ἀληθές, γιατί ὅπως ἀποδείξαμε παραπάνω ἡ σειρά $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu+1}$ ἀποκλίνει.

§ 98. Μελέτη μερικῶν χαρακτηριστικῶν καί χρήσιμων σειρῶν.—

Σ' αὐτή τήν παράγραφο μελετᾶμε ὡς πρός τή σύγκλιση μερικές χαρακτηριστικές σειρές, πού θά μᾶς εἶναι πολύ χρήσιμες στά ἑπόμενα.

1η. *Ἀριθμητική σειρά.* **Νά μελετήσετε ὡς πρός τή σύγκλιση τή σειρά:**

$$\alpha+(\alpha+\omega)+(\alpha+2\omega)+\cdots+[\alpha+(\nu-1)\omega]+\cdots \qquad (\omega\neq 0)$$

γιά τίς διάφορες πραγματικές τιμές τοῦ ω.

Λύση. Ἔχουμε:

$$\sigma_\nu=\frac{[2\alpha+(\nu-1)\,\omega]\nu}{2}=\frac{1}{2}\nu^2\left[\omega-\frac{\omega}{\nu}+\frac{2\alpha}{\nu}\right]\Longrightarrow \lim\sigma_\nu=\begin{cases}+\infty, & \text{ἄν } \omega>0\\ -\infty, & \text{ἄν } \omega<0\,.\end{cases}$$

Ὥστε: *ἡ σειρά τῆς ὁποίας οἱ ὅροι ἀποτελοῦν ἀριθμητική πρόοδο συγκλίνει κατ' ἐκδοχή,* ἀκριβέστερα *ἀπειρίζεται θετικά, ἄν ἡ ἀντίστοιχη πρόοδος εἶναι αὔξουσα ($\omega>0$) καί ἀρνητικά ἄν ἡ πρόοδος εἶναι φθίνουσα ($\omega<0$).*

2η. *Γεωμετρική σειρά.* **Νά μελετήσετε ὡς πρός τή σύγκλιση τή σειρά:**

$$\alpha+\alpha\omega+\alpha\omega^2+\cdots+\alpha\omega^{\nu-1}+\cdots \qquad (\alpha\neq 0).$$

γιά τίς διάφορες πραγματικές τιμές τοῦ ω.

Λύση. Γιά τό ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων τῆς σειρᾶς αὐτῆς ἔχουμε:

$$\sigma_\nu=\alpha+\alpha\omega+\cdots+\alpha\omega^{\nu-1}=\begin{cases}\nu\alpha, & \text{ἄν } \omega=1\\ \alpha\cdot\dfrac{\omega^\nu-1}{\omega-1}, & \text{ἄν } \omega\neq 1.\end{cases}$$

Διακρίνουμε τώρα τίς παρακάτω περιπτώσεις:

α') Ἄν $|\omega|<1$, δηλαδή: $-1<\omega<1$, τότε $\omega^\nu\to 0$ καί συνεπῶς $\lim\sigma_\nu=\dfrac{\alpha}{1-\omega}$.

Ὥστε: *ἡ γεωμετρική σειρά τῆς ὁποίας οἱ ὅροι ἀποτελοῦν ἀπολύτως φθίνουσα γεωμετρική πρόοδο συγκλίνει στόν πραγματικό ἀριθμό* $\dfrac{\alpha}{1-\omega}$.

β') Ἄν $\omega > 1$, τότε ἐπειδή $\omega^\nu \to +\infty$ (βλ. πρδ. 5, § 67) καί $\omega - 1 > 0$ ἔχουμε:

$$\lim \sigma_\nu = \begin{cases} +\infty, & \text{ἄν } \alpha > 0 \\ -\infty, & \text{ἄν } \alpha < 0 \end{cases}$$

γ') Ἄν $\omega = 1$, τότε $\sigma_\nu = \nu\alpha$, ὁπότε $\lim \sigma_\nu = \begin{cases} +\infty, & \text{ἄν } \alpha > 0 \\ -\infty, & \text{ἄν } \alpha < 0 \end{cases}$

δ') Ἄν $\omega \leqq -1$, τότε δέν ὑπάρχει τό $\lim \omega^\nu$ (βλ. πρδ. 5, § 67), ὁπότε δέν ὑπάρχει καί τό $\lim \sigma_\nu$ καί συνεπῶς ἡ γεωμ. σειρά ἀποκλίνει.

Συνοψίζοντας τά παραπάνω ἔχουμε:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha\omega^{\nu-1} \equiv \alpha + \alpha\omega + \alpha\omega^2 + \cdots + \alpha\omega^{\nu-1} + \cdots = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{1-\omega}, & \text{ἄν } |\omega| < 1 \\ +\infty, & \text{ἄν } \omega \geqq 1 \text{ καί } \alpha > 0 \\ -\infty, & \text{ἄν } \omega \geqq 1 \text{ καί } \alpha < 0 \\ \text{ἀποκλίνει, ἄν } \omega \leqq -1. \end{cases}$$

Ἔτσι ἡ σειρά: $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \dfrac{1}{3^\nu} \equiv \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{27} + \ldots$, συγκλίνει στόν πραγματικό ἀριθμό:

$$\frac{\frac{1}{3}}{1-1/3} = \frac{1}{2}, \text{ ἐπειδή } |\omega| = \frac{1}{3} < 1.$$

Ἀντιθέτως ἡ σειρά:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu = 1 + (-1) + 1 + (-1) + \ldots, \text{ ἀποκλίνει, ἐπειδή } \omega = -1.$$

3η. *Ἁρμονική σειρά.* **Νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ ἁρμονική σειρά:**

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} \equiv 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{\nu} + \cdots$$

δέ συγκλίνει μέσα στό R.

Ἀπόδειξη. Ἔστω ὅτι ἡ ἁρμονική σειρά συγκλίνει σέ πραγματικό ἀριθμό, τότε, σύμφωνα μέ τήν παρατήρηση τῆς προηγούμενης παραγράφου, θά ἔχουμε: $\lim \delta_\nu = 0$, ὅπου $\delta_\nu = \sigma_{2\nu} - \sigma_\nu$ καί $\sigma_\nu = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{\nu}$.

Ἀλλά:

$$\delta_\nu = \sigma_{2\nu} - \sigma_\nu = \frac{1}{\nu+1} + \frac{1}{\nu+2} + \cdots + \frac{1}{2\nu} \geqq \frac{1}{2\nu} + \frac{1}{2\nu} + \cdots + \frac{1}{2\nu} = \nu \cdot \frac{1}{2\nu} = \frac{1}{2}$$

καί συνεπῶς: $\lim \delta_\nu = 0 \geqq \dfrac{1}{2}$. Αὐτό ὅμως δέν εἶναι ἀληθές.

Ἄρα ἡ ἁρμονική σειρά $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \dfrac{1}{\nu}$ δέ συγκλίνει σέ πραγματικό ἀριθμό.

Σημείωση. Γιά τήν ἁρμονική σειρά ἰσχύει: $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \dfrac{1}{\nu} = +\infty$. Πράγματι, ἡ ἀκολουθία: $\sigma_\nu = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots$ εἶναι μία γνησίως αὔξουσα ἀκολουθία θετικῶν όρων, καθόσον: $\sigma_{\nu+1} - \sigma_\nu = \frac{1}{\nu+1} > 0, \forall \nu \in \mathbf{N}$, Ἐξάλλου ἡ (σ_ν) δέν εἶναι φραγμένη ἄνω, γιατί ἀλλιῶς ἡ (σ_ν) ὡς μονότονη (γνησίως αὔξουσα) καί φραγμένη, σύμφωνα μέ τό γνωστό ἀξίωμα (§ 66), θά ἦταν συγκλίνουσα στό $\mathbf{R}$, ὁπότε καί ἡ σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu}$ θά ἔπρεπε νά συγκλίνει μέσα στό $\mathbf{R}$, πράγμα ὅμως πού δέν ἀληθεύει, ὅπως ἀποδείξαμε παραπάνω. Ἄρα ἡ (σ_ν) δέν εἶναι φραγμένη πρός τά ἄνω καί ἐπειδή εἶναι καί (γνησίως) αὔξουσα, ἕπεται ὅτι: $\sigma_\nu \to +\infty$.

Ἄρα: $$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} = \lim \sigma_\nu = \lim \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{\nu}\right) = +\infty.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάδα Α΄. 210. Νά ἐκφράσετε συναρτήσει τοῦ ν τά παρακάτω ἀθροίσματα:

α) $\sum_{k=1}^{\nu} k(k+1)$, β) $\sum_{k=1}^{\nu} (k^2 + 5k + 3)$, γ) $\sum_{k=1}^{\nu} k(k+2)(k+4)$.

211. Νά ἀποδείξετε ὅτι: $\sum_{k=1}^{\nu} k^3 = \frac{\nu^4}{4} + \frac{\nu^3}{2} + \frac{\nu^2}{4}$.

212. Νά γράψετε τούς ἑπτά πρώτους ὅρους τῶν παρακάτω σειρῶν:

α) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu}{\nu^2+1}$, β) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\nu}}$, γ) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1+\nu}{1+\nu^2}$, δ) $\sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu^2} \cdot \frac{\nu}{\nu(\nu+1)}$

213. Νά βρεῖτε τό ἄθροισμα τῶν ἑπόμενων σειρῶν:

α) $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{3^\nu}$, β) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^\nu$, γ) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^\nu$, δ) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{3}{10^\nu}$.

214. Νά προσδιορίσετε τή σειρά τῆς ὁποίας ἡ ἀκολουθία τῶν μερικῶν ἀθροισμάτων εἶναι: α) $\left(1 - \frac{1}{2^\nu}\right)$, $\nu = 1, 2, \ldots$, β) $\frac{\nu}{\nu+1}$, $\nu = 1, 2, \ldots$

215. Ἔχοντας ὑπόψη τήν ταυτότητα: $\frac{1}{\nu(\nu-1)} \equiv \frac{1}{\nu-1} - \frac{1}{\nu}$, $\forall \nu \geqq 2$ νά βρεῖτε τό ἄθροισμα τῆς σειρᾶς $\sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{1}{\nu(\nu-1)}$.

Ὁμάδα Β΄. 216. Ἄν $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ καί $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu$ εἶναι πραγματικοί ἀριθμοί, νά ἀποδείξετε τήν ἀνισότητα τῶν Cauchy - Schwarz:

$$\left(\sum_{k=1}^{\nu} \alpha_k \beta_k\right)^2 \leqq \left(\sum_{k=1}^{\nu} \alpha_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{\nu} \beta_k^2\right).$$

217. Ἄν $\nu \in \mathbf{N}$, νά ἀποδείξετε ὅτι:

$$\left[\sum_{k=1}^{\nu} \frac{1}{k}\right]^2 \leqq \nu\left(2 - \frac{1}{\nu}\right).$$

218. Ἔχοντας ὑπόψη τήν ταυτότητα: $\frac{1}{4\nu^2 - 1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\nu-1} - \frac{1}{2\nu+1}\right)$ νά ἀποδείξετε ὅτι: $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{4\nu^2-1} = \frac{1}{2}$.

219. Ἄν (α_ν) καί (β_ν) εἶναι δύο ἀκολουθίες τέτοιες, ὥστε: $\alpha_\nu = \beta_\nu - \beta_{\nu+1}$, $\forall \nu \in \mathbf{N}$, νά ἀποδείξετε ὅτι: ἡ σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ συγκλίνει, τότε καί μόνο τότε, ἄν ἡ ἀκολουθία (β_ν) συγκλίνει. Ἄν μάλιστα $\lim \beta_\nu = l$, τότε $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu = \beta_1 - l$.

220. Νά μελετήσετε ὡς πρός τό μονότονο καί τή σύγκλιση τήν ἀκολουθία (α_ν) μέ γενικό ὅρο: $\alpha_\nu = \sum_{k=1}^{\nu} \frac{1}{k^2+k}$.

Στή συνέχεια νά βρεῖτε, ἄν ὑπάρχει, τό ὅριό της. Τέλος, νά βρεῖτε ἕνα $\nu_0 \in \mathbf{N}$ τέτοιο, ὥστε γιά κάθε $\nu \geqq \nu_0$ νά ἰσχύει: $|\alpha_\nu - 1| < 0{,}01$.

Ὑπόδειξη. Νά παρατηρήσετε ὅτι : $\frac{1}{k^2+k} = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{(k+1)-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.

ΒΑΣΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΣΕΙΡΩΝ ΠΡΑΓΜ. ΑΡΙΘΜΩΝ

Ἀπό ὅσα ἀναπτύξαμε στίς προηγούμενες παραγράφους γιά τίς σειρές, γίνεται φανερό ὅτι ἡ σύγκλιση μιᾶς σειρᾶς $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ ἀνάγεται στή σύγκλιση τῆς ἀκολουθίας $\sigma_\nu = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\nu$, $\nu = 1, 2, \cdots$ Συνεπῶς ἀπό ἰδιότητες πού ἀναφέρονται στή σύγκλιση ἀκολουθιῶν θά προκύπτουν ἰδιότητες γιά τίς σειρές. Ἔτσι σ' αὐτή τήν ἑνότητα διατυπώνουμε καί ἀποδεικνύουμε προτάσεις πού οἱ πιό πολλές εἶναι ἄμεσες συνέπειες τῶν γνωστῶν ἰδιοτήτων πού ξέρουμε γιά τίς συγκλίνουσες ἀκολουθίες, γι' αὐτό οἱ πιό πολλές ἀποδείξεις δίνονται μέ κάποια συντομία.

§ 99. Ἰδιότητα I.—Ἔστω $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ μία σειρά πραγματικῶν ἀριθμῶν, τότε :

α΄) ἄν ἡ σειρά συγκλίνει, τότε $\lim \alpha_\nu = 0$,

β΄) ἄν $\lim \alpha_\nu \neq 0$, τότε ἡ σειρά δέ συγκλίνει στό R,

γ΄) ἄν ἡ σειρά συγκλίνει, τότε ἡ ἀκολουθία $\sigma_\nu = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots$ τῶν μερικῶν ἀθροισμάτων εἶναι φραγμένη.

Ἀπόδειξη.

α΄) Ἔστω $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu = \alpha$, τότε $\lim \sigma_\nu = \alpha$ καί $\alpha_\nu = \sigma_\nu - \sigma_{\nu-1}$, $\nu = 2, 3, \ldots$

Ὁπότε: $\lim \alpha_\nu = \lim(\sigma_\nu - \sigma_{\nu-1}) = \lim \sigma_\nu - \lim \sigma_{\nu-1} = \alpha - \alpha = 0$.

β΄) Ἔστω ὅτι $\lim \alpha_\nu \neq 0$ καί ὅτι ἡ σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ συγκλίνει, τότε, σύμφωνα μέ τήν α΄) θά εἴχαμε: $\lim \alpha_\nu = 0$. Αὐτό ὅμως εἶναι ἄτοπο.

γ΄) Ἄν ἡ σειρά συγκλίνει, τότε ἡ ἀκολουθία (σ_ν) ὡς συγκλίνουσα εἶναι φραγμένη (§ 51).

Παρατήρηση. Οἱ συνθῆκες α΄) καί γ΄) τῆς παραπάνω ἰδιότητας εἶναι **ἀναγκαῖες**, ὄχι ὅμως καί ἱκανές. Ἔτσι ὑπάρχουν σειρές πού δέ συγκλίνουν στό **R**, γιά τίς ὁποῖες ἡ α΄) ἤ ἡ γ΄) ἰσχύει. Π.χ. $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} = +\infty$, ἄν καί $\lim \alpha_\nu = \lim \frac{1}{\nu} = 0$. Ἐπίσης ἡ σειρά

$\sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ ἀποκλίνει, ἄν καί ἡ ἀκολουθία (σ_ν) τῶν μερικῶν ἀθροισμάτων της εἶναι φραγμένη, καθόσον $|\sigma_\nu| \leqq 1$, $\forall\ \nu \in \mathbf{N}$.

Προσέξτε! ἄν $\lim \alpha_\nu \neq 0$, τότε αὐτή εἶναι μία **ἱκανή συνθήκη** γιά νά **μή** συγκλίνει στό **R**

ἡ σειρά $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$. Ἑπομένως θά προχωρᾶμε στή μελέτη ὡς πρός τή σύγκλιση μιᾶς σειρᾶς μόνο ἐφόσον ὁ γενικός της ὅρος συγκλίνει στό μηδέν. Ἔτσι, π.χ. διακρίνουμε ἀμέσως ὅτι ἡ σειρά $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{2\nu+1}{3\nu+5}$ δέ συγκλίνει σέ πραγματικό ἀριθμό, ἐπειδή

$$\lim \alpha_\nu = \lim \frac{2\nu+1}{3\nu+5} = \frac{2}{3} \neq 0.$$

Σχόλιο. Ἡ πρόταση: $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ *συγκλίνει στό* $\mathbf{R} \Longrightarrow \alpha_\nu \to 0$ θά μᾶς εἶναι πολλές φορές χρήσιμη προκειμένου νά ἀποδείξουμε ὅτι μία ἀκολουθία (α_ν) εἶναι μηδενική. Γιά τό σκοπό αὐτό, δηλαδή γιά νά ἀποδείξουμε ὅτι $\alpha_\nu \to 0$, ἀρκεῖ νά ἀποδείξουμε ὅτι ἡ σειρά μέ γενικό ὅρο τό γενικό ὅρο τῆς ἀκολουθίας (α_ν) συγκλίνει στό $\mathbf{R}$, ὁπότε, σύμφωνα μέ τήν ἰδιότητα I, περίπτωση α'), θά εἶναι: $\lim\alpha_\nu = 0$.

§ 100. Ἰδιότητα II.—Ἄν $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu = \alpha$ καί $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu = \beta$, ὅπου $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, τότε ἰσχύει:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} (\xi\alpha_\nu + \eta\beta_\nu) = \xi\alpha + \eta\beta$$

γιά ὁποιουσδήποτε πραγματικούς ἀριθμούς ξ καί η.

Ἀπόδειξη. Ἡ ἀπόδειξη τῆς παραπάνω ἰδιότητας εἶναι ἄμεση συνέπεια τοῦ πορίσματος τῆς § 59 καί τῆς σχέσεως (5) τῆς § 95. Πράγματι, ἄν θέσουμε:

$$\sigma_\nu = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\nu = \sum_{k=1}^{\nu} \alpha_k, \quad \tau_\nu = \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_\nu = \sum_{k=1}^{\nu} \beta_k \text{ καί}$$

$$s_\nu = (\xi\alpha_1 + \eta\beta_1) + (\xi\alpha_2 + \eta\beta_2) + \cdots + (\xi\alpha_\nu + \eta\beta_\nu) = \sum_{k=1}^{\nu} (\xi\alpha_k + \eta\beta_k), \text{ ἔχουμε:}$$

$$s_\nu = \sum_{k=1}^{\nu} (\xi\alpha_k + \eta\beta_k) = \xi \sum_{k=1}^{\nu} \alpha_k + \eta \sum_{k=1}^{\nu} \beta_k = \xi\cdot\sigma_\nu + \eta\cdot\tau_\nu \text{ καί συνεπῶς:}$$

$$s_\nu \to \xi\alpha + \eta\beta, \text{ ἀφοῦ } \sigma_\nu \to \alpha \text{ καί } \tau_\nu \to \beta \Rightarrow \xi\sigma_\nu + \eta\tau_\nu \to \xi\alpha + \eta\beta.$$

Ἀπό τήν παραπάνω πρόταση παίρνουμε τίς ἑπόμενες *εἰδικές περιπτώσεις*:

(i) Γιά $\xi \in \mathbf{R}$ καί $\eta = 0$ ἰσχύει ἡ πρόταση:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu = \alpha \Longrightarrow \sum_{\nu=1}^{\infty} \xi\alpha_\nu = \xi\alpha = \xi \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu \tag{1}$$

(ii) Γιά $\xi = \eta = 1$ ἰσχύει ἡ πρόταση:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu = \alpha \wedge \sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu = \beta \Rightarrow \sum_{\nu=1}^{\infty} (\alpha_\nu + \beta_\nu) = \alpha + \beta = \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu + \sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu \tag{2}$$

(iii) Γιά $\xi = 1$ καί $\eta = -1$ ἰσχύει ἡ πρόταση:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu = \alpha \wedge \sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu = \beta \Longrightarrow \sum_{\nu=1}^{\infty} (\alpha_\nu - \beta_\nu) = \alpha - \beta = \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu - \sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu \tag{3}$$

Σημείωση. Οἱ σειρές: $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} (\alpha_\nu + \beta_\nu)$ καί $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} (\alpha_\nu - \beta_\nu)$ ὀνομάζονται ἀντιστοίχως **ἄθροισμα** καί **διαφορά** τῶν δύο σειρῶν $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ καί $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu$.

Σχόλιο. Ἀπό τίς εἰδικές περιπτώσεις (i), (ii) καί (iii) βλέπουμε ὅτι οἱ συγκλίνουσες σειρές συμπεριφέρονται ὅπως καί τά πεπερασμένα ἀθροίσματα. Ἔτσι οἱ (1), (2) καί (3) ἀποτελοῦν γενικεύσεις τῶν (8), (6) καί (7) ἀντιστοίχως τῆς § 95.

Παρατήρηση. Τό ἀντίστροφο τῆς ἰδιότητας II, ὅπως καί στίς ἀκολουθίες (βλ. παρατ. 3, § 57) δέν ἀληθεύει πάντοτε, δηλαδή ἄν τό ἄθροισμα δύο σειρῶν εἶναι συγκλίνουσα σειρά, αὐτό δέ συνεπάγεται κατ' ἀνάγκη ὅτι καθεμιά ἀπ' αὐτές εἶναι συγκλίνουσα σειρά. Εἶναι δυνατό μάλιστα νά μή συγκλίνει οὔτε ἡ μία οὔτε ἡ ἄλλη. Π.χ., ἄν πάρουμε τίς σειρές:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu} \text{ καί } \sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu-1} \text{ ἔχουμε: } \sum_{\nu=1}^{\infty}[(-1)^{\nu}+(-1)^{\nu-1}]=0$$

καί ὅμως καμία ἀπ' αὐτές δέ συγκλίνει.

§ 101. Ἰδιότητα III.—Ἄν ἡ σειρά $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu$ συγκλίνει στό R καί ἡ $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\beta_\nu$ δέ συγκλίνει στό R, τότε ἡ σειρά: $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}(\alpha_\nu+\beta_\nu)$ δέ συγκλίνει στό R.

Ὑπόδειξη. Ἡ ἀπόδειξη εἶναι ἄμεση συνέπεια τῆς εἰδικῆς περιπτώσεως (iii) τῆς προηγούμενης παραγράφου, ἀρκεῖ νά ὑποτεθεῖ ὅτι ἡ σειρά $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}(\alpha_\nu+\beta_\nu)$ συγκλίνει στό **R** καί νά ληφθεῖ ὑπόψη ὅτι: $\beta_\nu=(\alpha_\nu+\beta_\nu)-\alpha_\nu$.

Παράδειγμα. Ἡ σειρά $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\nu}+\frac{1}{2^\nu}\right)$ δέ συγκλίνει στό **R**, ἐπειδή ἡ σειρά $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu}$ ἀπειρίζεται θετικά καί ἡ σειρά $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{2^\nu}$ συγκλίνει.

Παρατήρηση. Ἄν οἱ σειρές $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu$ καί $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\beta_\nu$ δέ συγκλίνουν στό **R**, αὐτό δέ συνεπάγεται κατ' ἀνάγκη ὅτι καί ἡ σειρά $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}(\alpha_\nu+\beta_\nu)$ δέ συγκλίνει στό **R**. Αὐτό φαίνεται ἐξάλλου καί ἀπό τό παράδειγμα τῆς παρατηρήσεως τῆς § 100.

§ 102. Ἰδιότητα IV.—Ἄν μία σειρά $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu$ συγκλίνει καί ἔχει ἄθροισμα α, τότε καί ἡ σειρά $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\alpha_{\nu+\rho}\equiv\alpha_{\rho+1}+\alpha_{\rho+2}+\alpha_{\rho+3}+\cdots$, ἡ ὁποία προκύπτει ἀπό τήν $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu$ ἄν παραλείψουμε τούς ρ πρώτους ὅρους της, συγκλίνει ἀλλά τό ἄθροισμά της εἶναι ὁ ἀριθμός: $\alpha-(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_\rho)$.

Ἀπόδειξη. Ἔστω ὅτι εἶναι σ_ν καί τ_ν τά νιοστά μερικά ἀθροίσματα τῶν σειρῶν $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu$ καί $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\alpha_{\nu+\rho}$ ἀντιστοίχως. Γιά κάθε $\nu\in\mathbf{N}$ ἔχουμε:

$$\sigma_\nu=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_\nu \quad \text{καί} \quad \tau_\nu=\alpha_{\rho+1}+\alpha_{\rho+2}+\cdots+\alpha_{\rho+\nu} \qquad (1)$$

Παρατηροῦμε ὅτι:

$$\sigma_{\nu+\rho}=(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_\rho)+(\alpha_{\rho+1}+\alpha_{\rho+2}+\cdots+\alpha_{\rho+\nu})=s+\tau_\nu \qquad (2)$$

ὅπου s ἔχουμε ὀνομάσει τό (πεπερασμένο) ἄθροισμα: $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_\rho\equiv s$.

Ἀπό τή (2), γιά κάθε $\nu \in \mathbf{N}$, ἔχουμε: $\tau_\nu = \sigma_{\nu+\rho} - s$ (3)

Ἀπό τήν ὑπόθεση ἔχουμε ὅτι: $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu = \alpha$, ὁπότε $\lim \sigma_\nu = \alpha$ καί συνεπῶς (§50) $\lim \sigma_{\nu+\rho} = \alpha$. Τότε ὅμως ἀπό τήν (3) λαμβάνουμε:

$$\lim \tau_\nu = \lim(\sigma_{\nu+\rho} - s) = \lim \sigma_{\nu+\rho} - s = \alpha - s$$

δηλαδή: $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_{\nu+\rho} = \alpha - s$, ὅπου $s = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\rho$.

Παρατηρήσεις. α). Ἔχοντας ὑπόψη τήν ἰσοδυναμία (§ 50): $\sigma_\nu \to \alpha \Longleftrightarrow \sigma_{\nu+\rho} \to \alpha$ καί τή (2) ἀποδεικνύουμε ἀμέσως τό ἀντίστροφο τῆς παραπάνω ἰδιότητας, δηλαδή: *ἄν ἡ σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_{\nu+\rho}$ συγκλίνει στό R καί προσθέσουμε στήν ἀρχή της ἕνα πεπερασμένο πλῆθος ὅρων, τότε ἡ σειρά πού θά προκύψει θά συγκλίνει ἐπίσης στό R* (τό ἄθροισμα θά εἶναι βέβαια διαφορετικό).

Πιό γενικά ἰσχύει ἡ πρόταση:

Ἄν μία σειρά συγκλίνει στό R, τότε καί ἡ σειρά πού προκύπτει ἀπ' αὐτή ἄν διαγράψουμε ἤ ἐπισυνάψουμε ἕνα πεπερασμένο πλῆθος ὅρων (ὁποιουσδήποτε) συγκλίνει ἐπίσης στό R.

Πράγματι, ἄν ἀπό τή συγκλίνουσα σειρά: $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu + \ldots$ διαγράψουμε k ὁποιουσδήποτε ὅρους, οἱ ὅροι τῆς σειρᾶς αὐτῆς ἀπό κάποιο δείκτη ρ καί μετά θά παραμείνουν ἀμετάβλητοι καί συνεπῶς ἡ σειρά: $\alpha_\rho + \alpha_{\rho+1} + \cdots$ θά συγκλίνει στό **R**. Ἄν τώρα στήν τελευταία σειρά προσθέσουμε πρίν ἀπό τό α_ρ ὅσους ὅρους ἔμειναν μετά ἀπό τή διαγραφή τῶν k ὅρων, θά προκύψει μία σειρά, ἡ ὁποία, σύμφωνα μέ τά παραπάνω, θά συγκλίνει στό **R**.

β). Ἀποδεικνύεται ὅτι: *ἄν μία ἀπό τίς δύο σειρές $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ καί $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_{\nu+\rho}$ συγκλίνει κατ' ἐκδοχή ἤ ἀποκλίνει, τότε τό ἴδιο συμβαίνει καί γιά τήν ἄλλη.* Ἔτσι, π.χ. ἡ σειρά $\sum_{\nu=11}^{\infty} \frac{1}{\nu} = \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \ldots$, ἡ ὁποία προκύπτει ἀπό τήν ἁρμονική σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu}$ ἄν παραλείψουμε τούς δέκα πρώτους ὅρους της, ἀπειρίζεται θετικά.

§ 103. Σειρές μέ ὅρους μή ἀρνητικούς.

—Στίς ἑπόμενες παραγράφους αὐτοῦ τοῦ κεφαλαίου θά ἀσχοληθοῦμε εἰδικότερα μέ τή μελέτη σειρῶν, οἱ ὁποῖες προκύπτουν ἀπό ἀκολουθίες (α_ν) γιά τίς ὁποῖες ἰσχύει: $\alpha_\nu \geqq 0 \;\; \forall \; \nu \in \mathbf{N}$.

Σέ μιά τέτοια σειρά:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\nu + \cdots$$

ἡ ἀκολουθία (σ_ν) τῶν μερικῶν ἀθροισμάτων εἶναι **πάντοτε** αὔξουσα, γιατί:
$\sigma_{\nu+1} - \sigma_\nu = (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\nu + \alpha_{\nu+1}) - (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\nu) = \alpha_{\nu+1} \geqq 0, \; \forall \; \nu \in \mathbf{N}$.

Γιά τίς σειρές μέ ὅρους μή ἀρνητικούς ἰσχύουν οἱ ἑπόμενες προτάσεις:

§ 104. Πρόταση.— Ἔστω $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ μία σειρά μέ ὅρους μή ἀρνητικούς, τότε

α) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ συγκλίνει στό R $\Longleftrightarrow$ (σ_ν) εἶναι φραγμένη στό R

β) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ **ἀπειρίζεται θετικά** $\Longleftrightarrow$ **(σ_ν) δέν εἶναι φραγμένη στό R.**

Ἀπόδειξη. α) Ἄν ἡ σειρά συγκλίνει, τότε ἡ ἀκολουθία (σ_ν) εἶναι φραγμένη (§ 99, γ'). Ἔστω ὅτι ἡ ἀκολουθία (σ_ν) τῶν μερικῶν ἀθροισμάτων εἶναι φραγμένη στό **R**, τότε, ἐπειδή ἡ (σ_ν) εἶναι καί αὔξουσα, σύμφωνα μέ τό γνωστό ἀξίωμα (§ 66) ἡ (σ_ν) θά συγκλίνει σέ κάποιο πραγματικό ἀριθμό, ὁπότε καί ἡ σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ συγκλίνει στό **R**.

β) Ἄν $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu = +\infty$ καί ὑποθέσουμε ὅτι ἡ (σ_ν) εἶναι φραγμένη στό **R**, τότε, σύμφωνα μέ τό προηγούμενο θά ἔπρεπε ἡ $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ νά ἦταν συγκλίνουσα στό **R**. Αὐτό ὅμως εἶναι ἄτοπο.

Ἀντιστρόφως, ἄν ἡ (σ_ν) δέν εἶναι φραγμένη στό **R**, τότε ἐπειδή αὐτή εἶναι καί αὔξουσα, σύμφωνα μέ τήν παρατήρηση τῆς § 66 θά ἀπειρίζεται θετικά, ὁπότε καί ἡ $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ θά ἀπειρίζεται θετικά.

Ἀξιόλογη παρατήρηση. Ἀπό τήν παραπάνω πρόταση συμπεραίνουμε ὅτι: κάθε σειρά μέ ὅρους μή ἀρνητικούς ἤ θά συγκλίνει στό **R** (ἀκριβέστερα στό $\mathbf{R}_0^+$) ἤ θά ἀπειρίζεται θετικά. Ἄν τώρα γιά μία σειρά ἰσχύει: $\alpha_\nu \geqq 0$ **τελικά** γιά ὅλους τούς δεῖκτες, τότε θά ὑπάρχει δείκτης ρ, ὥστε νά ἰσχύει $\alpha_{\nu+\rho} \geqq 0 \ \forall \ \nu \in \mathbf{N}$, ὁπότε ἄν ἡ σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_{\nu+\rho} = +\infty$, τότε (βλ. παρατ. β', § 102) καί ἡ σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu = +\infty$. Ἄν ὅμως $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_{\nu+\rho} = \alpha$, ὅπου $\alpha \in \mathbf{R}$, τότε τό ἄθροισμά της $\alpha \geqq 0$, ἐνῶ τό ἄθροισμα τῆς $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu = \alpha + s$, ὅπου $s = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\rho$, μπορεῖ νά εἶναι καί ἀρνητικός ἀριθμός (γιατί;).

Προσέξτε τή διαφορά: ἄν $\alpha_\nu \geqq 0$ *τελικά* γιά ὅλους τούς δεῖκτες καί ὑπάρχει τό $\lim \alpha_\nu$, τότε ἰσχύει: $\lim \alpha_\nu \geqq 0$, ἐνῶ ἄν μία σειρά ἔχει, *τελικά*, τούς ὅρους της $\geqq 0$, τότε τό ἄθροισμά της δέν εἶναι ἀναγκαστικά $\geqq 0$.

Ἀποδεικνύουμε ἀμέσως πιό κάτω μία βασική πρόταση, μέ τή βοήθεια τῆς ὁποίας μποροῦμε νά ἐξακριβώνουμε σέ πολλές περιπτώσεις, ἄν μία σειρά μέ ὅρους μή ἀρνητικούς συγκλίνει ἤ ἀπειρίζεται θετικά **συγκρίνοντάς** την μέ ἄλλη, γνωστῆς φύσεως, σειρά.

§ 105. Πρόταση. *(Κριτήριο συγκρίσεως σειρῶν).*— **Ἄν $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ καί $\sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu$ εἶναι δύο σειρές τέτοιες, ὥστε: $0 \leqq \alpha_\nu \leqq \beta_\nu$, γιά κάθε $\nu \in \mathbf{N}$, τότε:**

α) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu$ **συγκλίνει στό R** $\Longrightarrow$ $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ **συγκλίνει στό R**

β) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu = +\infty \Longrightarrow \sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu = +\infty.$

Ἀπόδειξη. Ἔστω ὅτι εἶναι σ_ν καί τ_ν τά νιοστά μερικά ἀθροίσματα τῶν σειρῶν $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ καί $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu$ ἀντιστοίχως. Ἐπειδή $\alpha_\nu \leqq \beta_\nu \ \forall\ \nu \in \mathbf{N}$, ἔχουμε ὅτι:

$$\sigma_\nu = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\nu \leqq \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_\nu = \tau_\nu, \ \forall\ \nu \in \mathbf{N} \qquad (1)$$

α) Ἔστω ὅτι $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu = \beta \in \mathbf{R}$, τότε, σύμφωνα μέ τήν πρόταση α) τῆς προηγούμενης παραγράφου, ἡ ἀκολουθία (τ_ν) εἶναι φραγμένη στό $\mathbf{R}$· τότε, ὅμως, ἐπειδή $\sigma_\nu \leqq \tau_\nu$, $\forall\ \nu \in \mathbf{N}$, ἕπεται ὅτι καί ἡ (σ_ν) εἶναι φραγμένη στό $\mathbf{R}$ καί ἐπειδή $\alpha_\nu \geqq 0$, $\forall\ \nu \in \mathbf{N}$, σύμφωνα πάλι μέ τήν προηγούμενη πρόταση, ἡ σειρά $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ συγκλίνει στό $\mathbf{R}$.

β) Ἄν $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu = +\infty$ καί ὑποθέσουμε ὅτι ἡ $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu$ συγκλίνει στό $\mathbf{R}$, τότε, σύμφωνα μέ τό προηγούμενο, θά ἔπρεπε ἡ $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ νά ἦταν συγκλίνουσα στό $\mathbf{R}$. Αὐτό ὅμως εἶναι ἄτοπο. Ἡ $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu$, λοιπόν, ὡς σειρά μέ ὅρους μή ἀρνητικούς, ἀφοῦ δέ συγκλίνει στό $\mathbf{R}$, θά ἀπειρίζεται θετικά.

Παρατηρήσεις. 1) Στήν περίπτωση α) τῆς παραπάνω προτάσεως ὄχι μόνο ἡ $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ συγκλίνει στό $\mathbf{R}$, ἀλλά καί ἰσχύει: $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu \leqq \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu$ (γιατί;).

2) Ἡ παραπάνω πρόταση ἰσχύει καί στήν περίπτωση πού οἱ σχέσεις: $0 \leqq \alpha_\nu \leqq \beta_\nu$ ἰσχύουν (ὄχι γιά κάθε $\nu \in \mathbf{N}$, ἀλλά) **τελικά** γιά κάθε $\nu \in \mathbf{N}$.

§ 106. Πόρισμα. *(ὁριακό κριτήριο συγκρίσεως).*— **Ἄν $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ καί $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu$ εἶναι δύο σειρές μέ θετικούς ὅρους καί $\lim \dfrac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} = l$, ὅπου $0 < l < +\infty$, τότε:**

α) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu$ συγκλίνει στό $\mathbf{R} \Longleftrightarrow \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ συγκλίνει στό $\mathbf{R}$

β) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu = +\infty \Longleftrightarrow \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu = +\infty$.

Ἀπόδειξη. Ἔχουμε: $\dfrac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} \to l$, $(0 < l < +\infty)$, ὁπότε: γιά $\varepsilon = \dfrac{1}{2} l > 0$, ὑπάρχει δείκτης $\nu_0 \in \mathbf{N}$ τέτοιος, ὥστε: γιά κάθε $\nu \geqq \nu_0$ ἰσχύει:

$$\left|\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} - l\right| < \frac{l}{2} \Rightarrow 0 < l - \frac{l}{2} < \frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} < l + \frac{l}{2} \Rightarrow 0 < \frac{1}{2} l < \frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} < \frac{3}{2} l \qquad (1)$$

Ἀπό τήν (1), ἐπειδή $\beta_\nu > 0 \ \forall\ \nu \in \mathbf{N}$, ἔχουμε **τελικά** γιά κάθε $\nu \in \mathbf{N}$:

$$0 < \frac{1}{2} l \cdot \beta_\nu < \alpha_\nu < \frac{3}{2} l \cdot \beta_\nu \qquad (2)$$

Ἀπό τή (2), μέ ἐφαρμογή τοῦ κριτηρίου συγκρίσεως καί ἔχοντας ὑπόψη τήν παρατήρηση 2 τῆς § 105 καί τίς παρατηρήσεις τῆς § 102, ἀποδεικνύουμε ἀμέσως τίς προτάσεις α) καί β).

Ἐφαρμογές. 1η : Ἡ σειρά $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu}{2^{\nu}(\nu+1)}$ συγκλίνει, ἐπειδή: $\frac{\nu}{2^{\nu}(\nu+1)} < \frac{1}{2^{\nu}}$, $\nu = 1, 2, \ldots$ καί ἡ $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\nu}}$ συγκλίνει ὡς γεωμετρική σειρά μέ λόγο $\omega = \frac{1}{2} < 1$.

2η : Ἔστω μία ἀκολουθία (α_{ν}) μέ $\alpha_{\nu} > 0$ $\forall$ $\nu \in \mathbf{N}$. Νά ἀποδείξετε ὅτι : ἄν μία ἀπό τίς δύο σειρές $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \alpha_{\nu}$ καί $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{\alpha_{\nu}}{1+\alpha_{\nu}}$ συγκλίνει στό R (ἀντιστοίχως ἀπειρίζεται θετικά), τότε τό ἴδιο συμβαίνει καί γιά τήν ἄλλη.

Ἀπόδειξη. Πρῶτα-πρῶτα παρατηροῦμε ὅτι οἱ: $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \alpha_{\nu}$ καί $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \beta_{\nu}$, ὅπου $\beta_{\nu} \equiv \frac{\alpha_{\nu}}{1+\alpha_{\nu}}$ εἶναι σειρές μέ θετικούς ὅρους. Ἐξάλλου ἰσχύει: $0 < \beta_{\nu} = \frac{\alpha_{\nu}}{1+\alpha_{\nu}} < \alpha_{\nu}$, $\forall$ $\nu \in \mathbf{N}$.

α) Ἔστω ὅτι ἡ σειρά $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \alpha_{\nu}$ συγκλίνει στό **R**, τότε, σύμφωνα μέ τό κριτήριο συγκρίσεως σειρῶν, καί ἡ σειρά $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \beta_{\nu}$ θά συγκλίνει στό **R**, γιατί $0 < \beta_{\nu} < \alpha_{\nu}$ $\forall$ $\nu \in \mathbf{N}$.

β) Ἔστω ὅτι ἡ σειρά $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \beta_{\nu}$ συγκλίνει στό **R**, τότε:

$$\beta_{\nu} \to 0 \Rightarrow \frac{\alpha_{\nu}}{1+\alpha_{\nu}} \to 0 \Rightarrow \frac{1+\alpha_{\nu}-1}{1+\alpha_{\nu}} \to 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{1+\alpha_{\nu}} \to 0 \Rightarrow \frac{1}{1+\alpha_{\nu}} \to 1,$$

ὁπότε: $\lim(1+\alpha_{\nu}) = 1$.

Παρατηροῦμε τώρα ὅτι: $\lim \frac{\alpha_{\nu}}{\beta_{\nu}} = \lim(1+\alpha_{\nu}) = 1$, ὁπότε, σύμφωνα μέ τό ὁριακό κριτήριο συγκρίσεως (§ 106), καί ἐπειδή ἡ $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \beta_{\nu}$ συγκλίνει στό **R**, ἔπεται ὅτι καί ἡ σειρά $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \alpha_{\nu}$ θά συγκλίνει ἐπίσης στό **R**.

γ) Ἔστω ὅτι $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \alpha_{\nu} = +\infty$ καί ὅτι $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \beta_{\nu}$ συγκλίνει στό **R**, τότε, σύμφωνα μέ τό προηγούμενο θά ἔπρεπε ἡ σειρά $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \alpha_{\nu}$ νά συγκλίνει στό **R**. Αὐτό ὅμως εἶναι ἄτοπο.

δ) Ἔστω ὅτι $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \beta_{\nu} = +\infty$, τότε καί $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \alpha_{\nu} = +\infty$, γιατί $0 < \beta_{\nu} < \alpha_{\nu}$ $\forall$ $\nu \in \mathbf{N}$.

§ 107. Σειρές ἀπολύτως συγκλίνουσες.

—Ἔστω $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \alpha_{\nu}$ μία σειρά πραγματικῶν ἀριθμῶν μέ ὅρους ὄχι ὑποχρεωτικά μή ἀρνητικούς. Εἶναι φανερό ὅτι ἡ σειρά $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} |\alpha_{\nu}|$ ἔχει ὅλους τούς ὅρους της $\geqq 0$ καί συνεπῶς ἄν συμβαίνει: $|\alpha_{\nu}| \leqq \beta_{\nu}$ γιά κάθε $\nu \in \mathbf{N}$ καί ἐπιπλέον ἡ σειρά $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \beta_{\nu}$ συγκλίνει στό **R**, τότε, σύμφωνα μέ τό κριτήριο συγκρίσεως (§ 105), καί ή $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}|\alpha_\nu|$ θά συγκλίνει στό $\mathbf{R}$.

Γεννᾶται ὅμως τώρα τό ἐρώτημα: ἀπό τή σύγκλιση τῆς $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}|\alpha_\nu|$ μποροῦμε νά συμπεράνουμε ὅτι καί ἡ σειρά $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu$ συγκλίνει; Τήν ἀπάντηση στό ἐρώτημα αὐτό μᾶς τή δίνει ἡ παρακάτω βασική πρόταση.

Δίνουμε προηγουμένως ἕναν ὁρισμό.

Ὁρισμός. *Θά λέμε ὅτι μία σειρά* $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu = \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\cdots$ **συγκλίνει ἀπολύτως** *στό* $\mathbf{R}$, *τότε καί μόνο τότε ,ἄν ἡ σειρά* $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}|\alpha_\nu| = |\alpha_1|+|\alpha_2|+|\alpha_3|+\cdots$ *συγκλίνει στό* $\mathbf{R}$.

Γιά συντομία:

$$\boxed{\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu \text{ συγκλίνει ἀπολύτως} \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} \sum_{\nu=1}^{\infty}|\alpha_\nu| = \alpha\in\mathbf{R}}$$

Ἔτσι, π.χ., ἡ σειρά $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu+1}\cdot\dfrac{1}{2^\nu}$ συγκλίνει ἀπολύτως στό $\mathbf{R}$, ἐπειδή ἡ σειρά $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\left|(-1)^{\nu+1}\cdot\dfrac{1}{2^\nu}\right| = \sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^\nu}$ συγκλίνει, ὡς γεωμετρική σειρά μέ λόγο $\omega=\dfrac{1}{2}<1$. Ἀντίθετα ἡ σειρά $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu+1}\cdot\dfrac{1}{\nu}$ δέ συγκλίνει ἀπολύτως στό $\mathbf{R}$, γιατί ἡ σειρά $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\left|(-1)^{\nu+1}\cdot\dfrac{1}{\nu}\right| = \sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\dfrac{1}{\nu}$ δέ συγκλίνει στό $\mathbf{R}$.

Εἶναι φανερό ὅτι: ἄν $\alpha_\nu \geqq 0$ γιά κάθε $\nu\in\mathbf{N}$, τότε $|\alpha_\nu| = \alpha_\nu$ καί συνεπῶς: $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu$ συγκλίνει στό $\mathbf{R}$, τότε καί μόνο τότε, ἄν $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu$ συγκλίνει ἀπολύτως, δηλαδή στίς σειρές μέ ὅρους μή ἀρνητικούς ἡ ἁπλή σύγκλιση μιᾶς σειρᾶς καί ἡ ἀπόλυτη σύγκλιση ταυτίζονται. Ἄν ὅμως μία σειρά δέν ἔχει ὅλους τούς ὅρους της μή ἀρνητικούς, τότε οἱ ἔννοιες: *ἁπλή σύγκλιση* σειρᾶς καί *ἀπόλυτη σύγκλιση* εἶναι δύο ἔννοιες τελείως διαφορετικές.

Σχετικά ἰσχύει ἡ ἑπόμενη βασική πρόταση, ἀπό τήν ὁποία φαίνεται ὅτι ἡ ἔννοια τῆς ἀπόλυτης συγκλίσεως μιᾶς σειρᾶς εἶναι *«ἰσχυρότερη»* ἀπό τήν ἔννοια τῆς ἁπλῆς συγκλίσεως.

§ 108. Πρόταση.—Ἄν μία σειρά $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu$ εἶναι ἀπολύτως συγκλίνουσα στό R, εἶναι καί ἁπλῶς συγκλίνουσα. Τό ἀντίστροφο δέν ἀληθεύει πάντοτε.

Δηλαδή : $\boxed{\left(\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}|\alpha_\nu| \text{ συγκλίνει στό } \mathbf{R}\right) \Rightarrow \left(\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu \text{ συγκλίνει στό } \mathbf{R}\right)}$

Ἀπόδειξη. Ἔστω ὅτι ἡ $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ συγκλίνει ἀπολύτως, τότε $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} |\alpha_\nu| = \sigma \in \mathbf{R}$.

Θεωροῦμε τή σειρά $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu$ μέ γενικό ὅρο $\beta_\nu = |\alpha_\nu| - \alpha_\nu$. Ἔχουμε γιά κάθε $\nu \in \mathbf{N}$:

$$0 \leqq \beta_\nu = |\alpha_\nu| - \alpha_\nu \leqq |\alpha_\nu| + |\alpha_\nu| \leqq 2|\alpha_\nu| \qquad (1)$$

Ἀπό τήν (1), σύμφωνα μέ τό κριτήριο συγκρίσεως, προκύπτει ὅτι ἡ σειρά $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu$ συγκλίνει στό $\mathbf{R}$, γιατί ἡ $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} |\alpha_\nu|$, ἄρα καί ἡ $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} 2|\alpha_\nu|$, συγκλίνει στό $\mathbf{R}$. Τότε ὅμως καί ἡ σειρά $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ συγκλίνει στό $\mathbf{R}$, γιατί ἀπό τή $\beta_\nu = |\alpha_\nu| - \alpha_\nu$ ἔχουμε: $\alpha_\nu = |\alpha_\nu| - \beta_\nu$, γιά κάθε $\nu \in \mathbf{N}$ καί οἱ σειρές $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} |\alpha_\nu|$, $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu$ συγκλίνουν.

Τό ἀντίστροφο τῆς παραπάνω προτάσεως δέν ἀληθεύει πάντοτε. Δηλαδή, ἄν μία σειρά συγκλίνει στό $\mathbf{R}$, δέν ἕπεται ὅτι θά συγκλίνει καί ἀπολύτως στό $\mathbf{R}$. Ὥστε: *ἡ σύγκλιση στό* $\mathbf{R}$ *τῆς* $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ *δέ συνεπάγεται πάντοτε καί τή σύγκλιση στό* $\mathbf{R}$ *τῆς* $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} |\alpha_\nu|$. Αὐτό φαίνεται καί ἀπό τό ἑξῆς παράδειγμα: Ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ σειρά:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu+1} \cdot \frac{1}{\nu} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{\nu+1}\frac{1}{\nu} + \cdots$$

συγκλίνει στό $\mathbf{R}$, ἐνῶ ἡ σειρά: $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \left| (-1)^{\nu+1} \frac{1}{\nu} \right| = \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} = +\infty$.

Ἀπό τό παραπάνω παράδειγμα συμπεραίνουμε ἀκόμη πώς *ἀπό τή μή σύγκλιση στό* $\mathbf{R}$ *τῆς σειρᾶς* $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} |\alpha_\nu|$ *δέν ἕπεται ὅτι καί ἡ* $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ *δέ συγκλίνει στό* $\mathbf{R}$.

Παρατηρήσεις. 1) Ἄν ἡ σειρά $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ συγκλίνει ἀπολύτως στό $\mathbf{R}$, τότε ἰσχύει:

$$\left| \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu \right| \leqq \sum_{\nu=1}^{\infty} |\alpha_\nu| \qquad \text{(γιατί;)}$$

Ἡ τελευταία σχέση ἀποτελεῖ γενίκευση τῆς: $\left| \sum\limits_{\kappa=1}^{\nu} \alpha_\kappa \right| \leqq \sum\limits_{\kappa=1}^{\nu} |\alpha_\kappa|$ (βλ. § 26, σημ.)

2) Ἀπό τήν παραπάνω πρόταση προκύπτει ἀκόμη ὅτι: ἄν μία σειρά $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ δέ συγκλίνει στό $\mathbf{R}$, τότε καί ἡ σειρά $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} |\alpha_\nu|$ δέ συγκλίνει στό $\mathbf{R}$, καί ἡ τελευταία ὡς σειρά μέ ὅρους μή ἀρνητικούς ἀπειρίζεται θετικά. Ὥστε:

$$\left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu \text{ δέ συγκλίνει στό } \mathbf{R} \right) \Longrightarrow \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} |\alpha_\nu| = +\infty \right)$$

Ἐφαρμογή. Νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ σειρά $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{\text{ημ}\nu}{2^\nu}$ συγκλίνει στό R.

Ἀπόδειξη. Πράγματι, ἡ σειρά πού μᾶς δόθηκε εἶναι ἀπολύτως συγκλίνουσα, γιατί

$$0 \leqq \left|\frac{\eta\mu\nu}{2^\nu}\right| \leqq \frac{1}{2^\nu} \text{ γιά κάθε } \nu \in \mathbf{N}$$

καί ἡ σειρά $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2^\nu}$ συγκλίνει, ὡς γεωμετρική μέ λόγο $\omega = \frac{1}{2} < 1$. Τότε ὅμως, σύμφωνα μέ τήν παραπάνω πρόταση, ἡ σειρά εἶναι καί ἁπλῶς συγκλίνουσα στό **R**.

§ 109. Μία ἀξιοσημείωτη καί χρήσιμη ἐφαρμογή τοῦ κριτηρίου συγκρίσεως σειρῶν.

(Ἁρμονική σειρά ρ-τάξεως). — Σ' αὐτή τήν παράγραφο μελετᾶμε ὡς πρός τή σύγκλιση τή σειρά:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^\rho} = 1 + \frac{1}{2^\rho} + \frac{1}{3^\rho} + \dots + \frac{1}{\nu^\rho} + \dots \qquad (1)$$

ὅπου ρ εἶναι ἕνας ὁρισμένος ρητός ἀριθμός.

Ἡ σειρά (1) μαζί μέ τή γεωμετρική σειρά, τήν ὁποία μελετήσαμε ὡς πρός τή σύγκλιση στήν § 96, προσφέρονται συχνά στίς ἐφαρμογές τοῦ κριτηρίου συγκρίσεως, γι' αὐτό συνιστοῦμε στόν ἀναγνώστη νά θυμᾶται πότε αὐτές συγκλίνουν στό **R** καί πότε ἀπειρίζονται θετικά.

Ἐπειδή ἡ (1) εἶναι μία σειρά μέ θετικούς ὅρους, θά εἶναι: $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^\rho} = \sigma$, ὅπου $0 < \sigma \leqq +\infty$. Ἀκριβέστερα ἰσχύει ἡ ἑπόμενη πρόταση:

Πρόταση.–Γιά τήν ἁρμονική σειρά ρ-τάξεως ἰσχύει:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^\rho} = \begin{cases} +\infty, & \text{ἄν } \rho \leqq 1 \\ \text{συγκλίνει στό } \mathbf{R}, & \text{ἄν } \rho > 1 \end{cases} \qquad (\rho \in \mathbf{Q})$$

Ἀπόδειξη. α) Ἔστω ὅτι εἶναι: $\rho \leqq 1$. Εἰδικά γιά $\rho = 1$ ἡ πρόταση ἰσχύει (§ 98, ἐφ. 3). Ἄν $\rho < 1$, τότε γιά κάθε $\nu \in \mathbf{N}$ ἔχουμε: $\frac{1}{\nu} \leqq \frac{1}{\nu^\rho}$ καί ἐπειδή $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} = +\infty$ ἀπό τό κριτήριο συγκρίσεως συμπεραίνουμε ὅτι: $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^\rho} = +\infty$.

β) Ἔστω τώρα ὅτι $\rho > 1$. Χωρίζουμε τούς ὅρους τῆς σειρᾶς (1) σέ ὁμάδες ὡς ἑξῆς:

$$\underbrace{\frac{1}{1^\rho}}_{\beta_1} + \underbrace{\left(\frac{1}{2^\rho} + \frac{1}{3^\rho}\right)}_{\beta_2} + \underbrace{\left(\frac{1}{4^\rho} + \frac{1}{5^\rho} + \frac{1}{6^\rho} + \frac{1}{7^\rho}\right)}_{\beta_3} + \underbrace{\left(\frac{1}{8^\rho} + \frac{1}{9^\rho} + \dots + \frac{1}{15^\rho}\right)}_{\beta_4} + \dots \qquad (2)$$

δηλαδή κάθε ὁμάδα περιλαμβάνει ἕνα πλῆθος ὅρων τῆς σειρᾶς (1) πού εἶναι διπλάσιο ἀπό τό πλῆθος τῶν ὅρων τῆς προηγούμενης.

Ἐπειδή ἐξάλλου εἶναι:

$$\frac{1}{2^\rho} + \frac{1}{3^\rho} < \frac{1}{2^\rho} + \frac{1}{2^\rho} = \frac{2}{2^\rho} = \frac{1}{2^{\rho-1}},$$

$$\frac{1}{4^\rho} + \frac{1}{5^\rho} + \frac{1}{6^\rho} + \frac{1}{7^\rho} < \frac{1}{4^\rho} + \frac{1}{4^\rho} + \frac{1}{4^\rho} + \frac{1}{4^\rho} = \frac{4}{4^\rho} = \frac{1}{4^{\rho-1}} = \frac{1}{2^{2\rho-2}},$$

$$\frac{1}{8^\rho} + \frac{1}{9^\rho} + \dots + \frac{1}{15^\rho} < \frac{1}{8^\rho} + \frac{1}{8^\rho} + \dots + \frac{1}{8^\rho} = \frac{8}{8^\rho} = \frac{1}{8^{\rho-1}} = \frac{1}{2^{3\rho-3}}, \dots, \text{ κ.ο.κ.}$$

συμπεραίνουμε ὅτι ἡ νέα σειρά: $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \dots$ ἔχει ὅρους θετικούς καί μικρότερους (ἐκτός ἀπό τόν πρῶτο) ἀπό τούς ἀντίστοιχους ὅρους τῆς σειρᾶς:

$$1+\frac{1}{2^{\rho-1}}+\frac{1}{2^{2\rho-2}}+\frac{1}{2^{3\rho-3}}+\dots \qquad (3)$$

Ἡ σειρά (3), ἐπειδή εἶναι $\frac{1}{2^{\rho-1}}<1$, συγκλίνει (γιατί;) Τότε ὅμως, σύμφωνα μέ τό πρῶτο συμπέρασμα τοῦ κριτηρίου συγκρίσεως, θά συγκλίνει καί ἡ (2).

Ὥστε, γιά $\rho\in\mathbf{Q}$, $\rho>1$ ἡ σειρά $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^{\rho}}$ συγκλίνει στό $\mathbf{R}$.

Σχόλιο. Κατά τήν ἀπόδειξη τοῦ β' μέρους τῆς παραπάνω προτάσεως δεχθήκαμε σιωπηρά τήν ἑξῆς πρόταση: *ἄν χωρίσουμε τούς διαδοχικούς ὅρους μιᾶς συγκλίνουσας σειρᾶς σέ διαδοχικές ὁμάδες, τότε σχηματίζουμε μία καινούργια σειρά, ἡ ὁποία εἶναι ἐπίσης συγκλίνουσα καί ἀντιστρόφως.*

Σημείωση. Σ' ἕνα ἀπό τά ἑπόμενα κεφάλαια θά ὁρίσουμε τή δύναμη μέ ἐκθέτη πραγματικό ἀριθμό. Σ' αὐτή τήν περίπτωση πάλι ἡ σειρά $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^{\rho}}$, ὅπου ὅμως τώρα $\rho\in\mathbf{R}$, ὀνομάζεται **ἁρμονική σειρά ρ-τάξεως** καί ἀποδεικνύεται ὅτι καί στήν περίπτωση αὐτή ἡ προηγούμενη πρόταση ἰσχύει. Δηλαδή μέ $\rho\in\mathbf{R}$ ἰσχύει:

$$\boxed{\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^{\rho}}=\begin{cases}+\infty, & \text{ἄν } \rho\leqq 1\\ \text{συγκλίνει}, & \text{ἄν } \rho>1\end{cases}}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάδα Α'. 221. Νά βρεῖτε ποιές ἀπό τίς ἑπόμενες σειρές συγκλίνουν στό $\mathbf{R}$ καί ποιές δέ συγκλίνουν:

1. $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{\nu^2+1}{\nu^4}$, 2. $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{\nu+1}{2\nu}$, 3. $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{\nu^2-3\nu+2}{\nu^4}$

4. $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{\nu-1}{\nu^2}$, 5. $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{\sqrt{\nu+1}}{\nu^3}$, 6. $\sum\limits_{\nu=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[\nu]{\nu}}$

222. Νά ἀποδείξετε ὅτι οἱ παρακάτω σειρές:

α) $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{\nu}}-\frac{1}{3^{\nu}}\right)$, β) $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{5}{2^{\nu}}+\frac{7}{3^{\nu}}\right)$, γ) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{3^{\nu}+2^{\nu}}{6^{\nu}}$

συγκλίνουν στό $\mathbf{R}$ καί νά βρεῖτε τά ἀθροίσματά τους.

223. Ἄν $\lim\frac{\alpha_\nu-1}{\alpha_\nu+1}=0$, νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ σειρά $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu$ δέ συγκλίνει στό $\mathbf{R}$.

224. Μέ τή βοήθεια τοῦ ὁριακοῦ κριτηρίου συγκρίσεως σειρῶν (§ 106) νά μελετήσετε ὡς πρός τή σύγκλιση τίς ἑπόμενες σειρές:

1) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^2-2\nu-1}$ (**Ὑπόδειξη.** Νά πάρετε ὡς $\beta_\nu=\frac{1}{\nu^2}$)

2) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{\nu+3}{2\nu^2-1}$, 3) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{2\nu+2}{2\nu^3+\nu^2-1}$, 4) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{3\nu-1}{\nu^4+1}$.

225. Νά ἀποδείξετε ὅτι: ἄν μία σειρά $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu$ μέ ὅρους μή ἀρνητικούς συγκλίνει στό $\mathbf{R}$, τότε καί ἡ σειρά $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{\sqrt{\alpha_\nu}}{\nu}$ συγκλίνει ἐπίσης στό $\mathbf{R}$.

Ὑπόδειξη. Ἐπειδή $\alpha_\nu \geqq 0 \ \forall \ \nu \in \mathbf{N}$ θά ἰσχύει: $\alpha_\nu + \frac{1}{\nu^2} \geqq 2\sqrt{\alpha_\nu \cdot \frac{1}{\nu^2}}$, κτλ

226. Νά ἀποδείξετε ὅτι: ἄν μία σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ συγκλίνει στό **R**, τότε συγκλίνει στό **R** καί ἡ σειρά: $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\alpha_\nu}{\sqrt{\nu^3}}$.

Ὑπόδειξη. Ἡ (α_ν) ὡς μηδενική ἀκολουθία εἶναι φραγμένη. Στή συνέχεια νά ἐφαρμόσετε τό κριτήριο συγκρίσεως σειρῶν.

227. Νά βρεῖτε ποιές ἀπό τίς ἑπόμενες σειρές συγκλίνουν ἀπολύτως στό **R**:

1. $\sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu \cdot \frac{\nu-2}{\nu^3+1}$, 2. $\sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu \cdot \frac{1}{(2\nu)^2}$, 3. $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\text{συν}\,\nu}{1+\nu^2}$,

4. $\sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu \cdot \frac{1}{3\nu-1}$, 5. $\sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu \cdot \frac{\nu}{\nu+1}$, 6. $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\sqrt[\nu]{\nu}}$.

Ὁμάδα Β΄. 228. Νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^{\nu+2}}$ συγκλίνει στό **R**, ἐνῶ δέ συμβαίνει τό ἴδιο καί γιά τή σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[\nu]{\nu+1}}$.

229. Νά ἀποδείξετε ὅτι: ἄν ἡ σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} |\alpha_\nu|$ συγκλίνει στό **R**, τότε συγκλίνει στό **R** καί ἡ σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu^2$. Τό ἀντίστροφο δέν ἀληθεύει πάντοτε (παράδειγμα;).

230. Ἄν $\alpha_\nu > 0 \ \forall \ \nu \in \mathbf{N}$ καί $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu = \alpha$, $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu^2 = \beta$, νά ἀποδείξετε ὅτι: $\alpha^2 > \beta$.

231. Ἄν $\alpha_\nu > 0 \ \forall \ \nu \in \mathbf{N}$ καί $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu = \alpha$ $(\alpha \in \mathbf{R})$, νά ἀποδείξετε ὅτι καθεμία ἀπό τίς σειρές: $\sum_{\nu=1}^{\infty} (\alpha_\nu + \alpha_{\nu+1})$ καί $\sum_{\nu=1}^{\infty} \sqrt{\alpha_\nu \alpha_{\nu+1}}$ συγκλίνει στό **R**. Ὕστερα νά βρεῖτε τό ἄθροισμα τῆς σειρᾶς μέ γενικό ὅρο: $\beta_\nu = \frac{1}{2}(\alpha_\nu + \alpha_{\nu+1})$.

Ὑπόδειξη. Νά ἐφαρμόσετε τήν ἰδιότητα IV (§ 102) καί νά λάβετε ὑπόψη σας ὅτι:

$$\sqrt{\alpha_\nu \alpha_{\nu+1}} \leqq \frac{1}{2}(\alpha_\nu + \alpha_{\nu+1}), \ \forall \ \nu \in \mathbf{N}.$$

232. Νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ σειρά: $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\alpha_\nu}{\nu\sqrt{\nu}}$, ὅπου $\alpha_1 = \sqrt{2}$ καί $\alpha_{\nu+1} = \sqrt{2+\alpha_\nu}$ γιά κάθε $\nu \in \mathbf{N}$, συγκλίνει στό **R**. (**Ὑπόδειξη.** Νά λάβετε ὑπόψη σας τήν ἐφαρμογή 2 τῆς §67).

233. Ἔστω ἡ ἀκολουθία (α_ν) μέ $\alpha_1 = 5$ καί $\alpha_{\nu+1} = \sqrt{4\alpha_\nu + 3}$, $\forall \ \nu \in \mathbf{N}$. Νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ σειρά μέ γενικό ὅρο: $\beta_\nu = \nu^{-3/5} \cdot \alpha_\nu$ ἀπειρίζεται θετικά.

Ὑπόδειξη. Νά λάβετε ὑπόψη σας τήν ἄσκηση 122.

* Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο VI

ΑΚΕΡΑΙΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ ΜΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

Ι. ΒΑΣΙΚΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

§ 110. Ἡ ἔννοια τοῦ ἀκέραιου πολυωνύμου – Ἔννοιες συναφεῖς μέ αὐτή.— α) Εἰσαγωγή. Ἡ ἔννοια τοῦ ἀκέραιου πολυωνύμου μέ πραγματικούς συντελεστές μᾶς εἶναι γνωστή ἀπό τά μαθήματα τῆς Γ' τάξεως τοῦ Γυμνασίου. Ἐκεῖ ὅμως θεωρήσαμε τά ἀκέραια πολυώνυμα ὡς συναρτήσεις τῆς μεταβλητῆς * x, ἡ ὁποία ἔπαιρνε τιμές ἀπό ἕνα δοσμένο σύνολο $\Sigma \subseteq \mathbf{R}$. Σ' αὐτή τήν παράγραφο θά ὁρίσουμε πιό γενικά, ἀλλά καί πιό αὐστηρά – ἀπό Μαθηματική ἄποψη – τήν ἔννοια τοῦ ἀκέραιου πολυωνύμου μιᾶς μεταβλητῆς, μέ τέτοιο ὅμως τρόπο, ὥστε οἱ σχέσεις πού θά προκύψουν παρακάτω νά ἰσχύουν καί ὅταν στό x δίνουμε τιμές ἀπό ἕνα σύνολο ἀριθμῶν, δηλαδή ὅταν θεωροῦμε τά πολυώνυμα ὡς συναρτήσεις τοῦ x ἀφοῦ, ὅπως θά δοῦμε ἀμέσως παρακάτω, οἱ πράξεις ἐπί τῶν πολυωνύμων θά ὁρισθοῦν κατά τέτοιο τρόπο σάν νά ἦταν τό x στοιχεῖο τοῦ ἐν λόγω συνόλου.

β) Ἔννοια ἀκέραιου πολυωνύμου. Ἔστω **C** τό σύνολο τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν καί ἕνα σύμβολο x πού τό λέμε: ἡ **«μεταβλητή»** ἤ ὁ «ἀπροσδιόριστος» καί πού εἶναι στήν πραγματικότητα τό ἀρχικό πολυώνυμο πού σχηματίζουμε. Τό x, βέβαια, δέν παριστάνει κανένα πραγματικό ἤ γενικότερα μιγαδικό ἀριθμό, πλήν ὅμως μποροῦμε νά σημειώνουμε πράξεις τῶν στοιχείων τοῦ **C**, σάν νά ἦταν καί τό x ἕνας πραγματικός ἤ γενικότερα ἕνας μιγαδικός ἀριθμός. Ἔτσι ἡ ἔκφραση x^k, ὅπου k εἶναι φυσικός ἀριθμός, θά συμβολίζει ἁπλῶς μία μορφή γινομένου $x \cdot x \cdots x$, ὅπου τό x θά λαμβάνεται ὡς παράγοντας γινομένου k φορές. Ὁμοίως ἡ ἔκφραση: αx^k, ὅπου $\alpha \in \mathbf{C}$ καί $k \in \mathbf{N}$ θά συμβολίζει μία μορφή γινομένου τοῦ μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ α ἐπί τό σύμβολο x^k. Ὁρίζουμε ἀκόμη ὅτι $x^0 = 1$, ὁπότε $\alpha x^0 = \alpha$ γιά κάθε $\alpha \in \mathbf{C}$.

Δίνουμε τώρα τόν ἀκόλουθο ὁρισμό:

---

* Μέ τόν ὅρο **«μεταβλητή»** x ἐννοοῦμε ἕνα σύμβολο x, τό ὁποῖο μπορεῖ νά ἀντιπροσωπεύει τό ὁποιοδήποτε στοιχεῖο ἑνός συνόλου ἀριθμῶν. Ὑπάρχει διαφορά ἀνάμεσα στή μεταβλητή x καί στόν ἄγνωστο x πού συναντᾶμε στίς ἐξισώσεις· καί τοῦτο γιατί ἡ μεταβλητή εἶναι ἁπλῶς ἕνα σύμβολο καί συνεπῶς ἔχει ἀπροσδιόριστη τιμή, ἐνῶ ὁ ἄγνωστος x ἔχει τιμή πού προσδιορίζεται.

Ὁρισμός. *Ὀνομάζουμε* **ἀκέραιο πολυώνυμο τοῦ x** *κάθε ἔκφραση τῆς μορφῆς:*

$$\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0 \qquad (1)$$

ὅπου $\alpha_\nu, \alpha_{\nu-1}, \ldots, \alpha_1, \alpha_0 \in \mathbf{C}$, $\nu \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ *καί* $+$, x *σύμβολα ἀκαθόριστα.*

Οἱ ἀριθμοί $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_\nu$ ὀνομάζονται **συντελεστές** * τοῦ πολυωνύμου (1). Τό α_0 θεωρεῖται ὡς συντελεστής τοῦ x^0 καί λέγεται σταθερός ὅρος τοῦ πολυωνύμου. Οἱ ἐκφράσεις τῆς μορφῆς: $\alpha_k x^k$, ὅπου k ἀκέραιος $\geqq 0$, ὀνομάζονται **ἀκέραια μονώνυμα** τοῦ x καί ἀποτελοῦν τούς ὅρους τοῦ πολυωνύμου. Εἰδικά ὁ ὅρος $\alpha_\nu x^\nu$ (ἄν $\alpha_\nu \neq 0$) ὀνομάζεται πρῶτος ὅρος καί ὁ α_ν πρῶτος συντελεστής τοῦ πολυωνύμου.

Γιά νά παραστήσουμε ἕνα ἀκέραιο πολυώνυμο τῆς μορφῆς (1) χρησιμοποιοῦμε, συνήθως, τούς συμβολισμούς: f(x), φ(x), g(x), π(x), υ(x), κλπ., ὅπου γιά τό f(x), π.χ., διαβάζουμε *«f τοῦ x»* θέλοντας μέ αὐτό τόν τρόπο νά τονίσουμε τήν ἐξάρτηση τοῦ πολυωνύμου f ἀπό τό βασικό πολυώνυμο x. Ἔτσι γιά συντομία γράφουμε:

$$f(x) \equiv \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0 \qquad (2)$$

ὅπου τό σύμβολο: $\equiv$ σημαίνει ἐδῶ ὅτι: *μέ τό f(x) παριστάνουμε τό πολυώνυμο, τό ὁποῖο ἀναγράφεται στό β' μέλος,* ἰσοδύναμα σημαίνει ὅτι: *συντόμως συμβολίζουμε τό πολυώνυμο (1) μέ τό f(x).*

Τό σύνολο τῶν ἀκέραιων πολυωνύμων τοῦ x μέ μιγαδικούς συντελεστές θά τό παριστάνουμε μέ $\mathbf{C}[x]$. Τά στοιχεῖα τοῦ $\mathbf{C}[x]$, δηλαδή τά ἀκέραια πολυώνυμα τοῦ x, τά συμβολίζουμε, ὅπως εἴπαμε καί προηγουμένως, μέ: f(x), φ(x), g(x), π(x), υ(x) ... κλπ.

Θά ἔχουμε λοιπόν τήν ἰσοδυναμία:

$f(x) \in \mathbf{C}[x] \iff f(x)$ ἀκέραιο πολυώνυμο τοῦ x μέ μιγαδ. συντελεστές.

Ὅπως ξέρουμε οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοί, οἱ ρητοί, ἀλλά καί πιό γενικά οἱ πραγματικοί ἀριθμοί εἶναι στοιχεῖα τοῦ συνόλου $\mathbf{C}$ τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν καί μάλιστα ἰσχύουν οἱ παρακάτω σχέσεις ἐγκλεισμοῦ:

$$\mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C}. \qquad (3)$$

Τό σύνολο λοιπόν $\mathbf{C}[x]$ ἀποτελεῖ τήν εὐρύτερη κατηγορία πού περιλαμβάνει ὅλα τά ἀκέραια πολυώνυμα τοῦ x, ὁτιδήποτε ἀριθμοί καί ἄν εἶναι οἱ συντελεστές τους.

Εἰδικότερα ὅμως θά παριστάνουμε μέ:

$\mathbf{R}[x]$: *τό σύνολο τῶν ἀκέραιων πολυωνύμων μέ πραγματικούς συντελεστές*

$\mathbf{Q}[x]$: *τό σύνολο τῶν ἀκέραιων πολυωνύμων μέ ρητούς συντελεστές*

$\mathbf{Z}[x]$: *τό σύνολο τῶν ἀκέραιων πολυωνύμων μέ ἀκέραιους συντελεστές.*

Εἶναι φανερό τώρα ὅτι ἰσχύει:

$$\mathbf{Z}[x] \subset \mathbf{Q}[x] \subset \mathbf{R}[x] \subset \mathbf{C}[x]. \qquad (4)$$

---

* Γενικότερα οἱ συντελεστές μπορεῖ νά εἶναι παραστάσεις πού δέν περιέχουν τό x.

Ὅπως ξέρουμε (§ 6) ἡ ἔννοια τοῦ συνόλου συνδέεται στενά μέ τήν ἔννοια μιᾶς σχέσεως *βασικῆς ἰσότητας*, πού τή συμβολίζουμε μέ $=$. Ἡ βασική ἰσότητα ὁρίζεται στό $\mathbf{C}[x]$ ὡς ἑξῆς:

Ἄν $f(x), \varphi(x) \in \mathbf{C}[x]$ καί εἶναι:

$$f(x) \equiv \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$$
$$\varphi(x) \equiv \beta_\nu x^\nu + \beta_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + \beta_1 x + \beta_0,$$

τότε θά λέμε ὅτι: **τά πολυώνυμα f(x), φ(x) εἶναι ἴσα** καί θά γράφουμε $f(x)=\varphi(x)$, **τότε καί μόνο τότε, ἄν οἱ συντελεστές τῶν ἴσων «δυνάμεων» τοῦ x εἶναι ἴσοι.** Ὥστε:

$$\boxed{f(x) = \varphi(x) \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} \alpha_k = \beta_k \text{ γιά κάθε } k = 0, 1, 2, \ldots, \nu.} \tag{5}$$

Ἀπό τήν παραπάνω ἰσοδυναμία συμπεραίνουμε ὅτι ἡ συνθήκη $f(x) = \varphi(x)$ τῆς ἰσότητας δύο ἀκέραιων πολυωνύμων ἐκφράζεται μέ τήν ἰσοδύναμη συνθήκη τῆς ἰσότητας τῶν ἀντίστοιχων συντελεστῶν τῶν δύο πολυωνύμων. Αὐτό ἔχει σάν συνέπεια, ὅπως θά δοῦμε παρακάτω (βλ. § 114, μέθοδος τῶν προσδιοριστέων συντελεστῶν), νά ἀνάγει ἕνα πρόβλημα πολυωνύμων σέ ἰσοδύναμο πρόβλημα πού ἀναφέρεται στούς συντελεστές του.

Παραδείγματα ἀκέραιων πολυωνύμων: Οἱ παρακάτω ἐκφράσεις:

$$f(x) \equiv x^4 - 2x^3 + 5x^2 - (3 + 2i)x + 10i$$
$$\varphi(x) \equiv (2 + 3i)x^3 - \frac{4}{3}x^2 + (5 - \sqrt{3})x + 2$$
$$g(x) \equiv x^3 + 3\alpha x^2 + 3\beta x + \gamma, \quad \text{ὅπου } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R} \text{ ἤ } \mathbf{C}$$

εἶναι ὅλες ἀκέραια πολυώνυμα τοῦ x. Ἀπεναντίας οἱ ἐκφράσεις:

$$2x^3 - 5x^{-2} + 4x^{3/4} - 3x^{-1}, \quad 3x^{-2} - 2x^{-1} + 7, \quad 5x^2 + x + 4x^{2/3} + 1$$

δέν εἶναι ἀκέραια πολυώνυμα τῆς μεταβλητῆς x.

Σχόλια: α) Ἀπό τά παραπάνω παραδείγματα καί ἀπό τόν ὁρισμό πού δώσαμε γιά τό ἀκέραιο πολυώνυμο συμπεραίνουμε ὅτι ὁ χαρακτηρισμός ἑνός πολυωνύμου ὡς *«ἀκέραιου»* δέν ἔχει καμιά ἀπολύτως σχέση μέ τό ἄν εἶναι ἤ δέν εἶναι οἱ συντελεστές τοῦ πολυωνύμου ἀκέραιοι ἀριθμοί. Ἡ ἀπόδοση τοῦ ἐπιθέτου *«ἀκέραιο»* στόν ὅρο *«πολυώνυμο»* ὀφείλεται στό ἑξῆς: ὅπως θά δοῦμε στίς ἀμέσως ἑπόμενες παραγράφους, τό σύνολο $\mathbf{C}[x]$ τῶν ἀκέραιων πολυωνύμων τοῦ x ἔχει πολλές ἰδιότητες τελείως ἀνάλογες μέ ἐκεῖνες πού ἔχουμε συναντήσει στό σύνολο $\mathbf{Z}$ τῶν ἀκέραιων ἀριθμῶν. Ἔτσι, π.χ. στό σύνολο $\mathbf{C}[x]$ ἰσχύει ἡ ἰδιότητα τῆς διαγραφῆς, ἐπίσης ὁρίζεται στό σύνολο $\mathbf{C}[x]$ τέλεια διαίρεση, ἀλγοριθμική διαίρεση κλπ, μέ ἰδιότητες ἀνάλογες μέ ἐκεῖνες πού ἔχουμε μάθει στήν Α΄ τάξη τοῦ Γυμνασίου γιά τούς ἀκέραιους ἀριθμούς.

β) Ἡ ἔκφραση (1), δηλαδή ἡ: $\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$ δέ σημαίνει πρόσθεση οὔτε κάποια ἄλλη πράξη μεταξύ τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν α_k $(k = 0, 1, 2, \ldots, \nu)$ καί τῆς μεταβλητῆς x, ἀλλά εἶναι ἕνα νέο σύμβολο μέ τό x καί τό $+$ ἀκαθόριστα σύμβολα. Ἡ σημασία τῆς παραστάσεως (1), δηλαδή τοῦ ἀκέραιου πολυωνύμου μιᾶς μεταβλητῆς x, θά προκύψει παρακάτω κατόπιν ὁρισμένων ἰδιοτήτων, καθεμία ἀπό τίς ὁποῖες θά ὁρισθεῖ ἐπ' αὐτοῦ.

Γενική παρατήρηση. Σ' αὐτό τό βιβλίο πολλές φορές ἀντί νά λέμε *«ἀκέραιο πολυώνυμο»* θά λέμε, γιά συντομία, ἁπλῶς *«πολυώνυμο»* καί θά ἐννοοῦμε πάντοτε *«ἀκέραιο πολυώνυμο μιᾶς μεταβλητῆς»*.

γ) Τό μηδενικό πολυώνυμο. Ἄν σ' ἕνα πολυώνυμο ὅλοι οἱ συντελεστές του εἶναι μηδέν, δηλαδή μία ἔκφραση τῆς μορφῆς:

$$0x^{\nu} + 0x^{\nu-1} + \cdots + 0x + 0$$

ὀνομάζεται **μηδενικό πολυώνυμο τοῦ x** καί συμβολίζεται μέ **0(x)** ἤ πιό ἁπλά μέ **0**, ἄν δέν ὑπάρχει κίνδυνος γιά παρερμηνεία. Ὥστε:

$$0(x) \equiv 0x^{\nu} + 0x^{\nu-1} + \cdots + 0x + 0 \tag{6}$$

Ἄμεση συνέπεια τῆς ἰσότητας δύο πολυωνύμων εἶναι ἡ ἀκόλουθη βασική πρόταση:

Ἕνα πολυώνυμο $f(x) = \alpha_{\nu}x^{\nu} + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$ εἶναι ἴσο μέ τό μηδενικό πολυώνυμο, τότε καί μόνο τότε, ἄν: $\alpha_{\nu} = \alpha_{\nu-1} = \cdots = \alpha_1 = \alpha_0 = 0$.

Ὥστε:

$$\boxed{f(x) = 0(x) \iff \alpha_{\nu} = \alpha_{\nu-1} = \cdots = \alpha_1 = \alpha_0 = 0} \tag{7}$$

Προσέξτε! στήν παραπάνω ἰσοδυναμία τό = τοῦ ἀριστεροῦ μέλους παριστάνει τή βασική ἰσότητα στό σύνολο **C**[x], ἐνῶ τό = τοῦ δεξιοῦ μέλους παριστάνει τή βασική ἰσότητα στό σύνολο **C** τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν.

Γιά νά δηλώσουμε ὅτι τό πολυώνυμο f(x) δέν εἶναι τό μηδενικό πολυώνυμο γράφουμε: $f(x) \neq 0(x)$ ἤ πιό ἁπλά: $f(x) \neq 0$.

Ἀπό τήν (7) συμπεραίνουμε ἀμέσως ὅτι: $f(x) \neq 0(x)$, τότε καί μόνο τότε, ἄν ἕνας (τουλάχιστο) ἀπό τούς συντελεστές τοῦ f(x) εἶναι διάφορος ἀπό τό μηδέν.

δ) Βαθμός ἑνός μή μηδενικοῦ πολυωνύμου. *Ὀνομάζουμε* **βαθμό** *ἑνός ἀκέραιου πολυωνύμου $f(x) \neq 0$ τό μεγαλύτερο ἐκθέτη τῆς μεταβλητῆς x, τῆς ὁποίας ὁ συντελεστής εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός.*

Γιά νά δηλώσουμε τό βαθμό ἑνός πολυωνύμου f(x) θά γράφουμε: **βαθμ.f(x).**

Ἔτσι, ἄν $f(x) \equiv \alpha_{\nu}x^{\nu} + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$, ἔχουμε τήν ἰσοδυναμία:

$$\boxed{\text{βαθμ. } f(x) = \nu \underset{\text{ορσ}}{\iff} \alpha_{\nu} \neq 0} \tag{8}$$

ὅπου ν μή ἀρνητικός ἀκέραιος, δηλαδή $\nu \in \mathbf{N}_0$.

Ἔτσι, π.χ. τοῦ πολυωνύμου $f(x) \equiv 5x^3 - 2x^2 + 3x - 1$ ὁ βαθμός εἶναι 3, ἐνῶ τοῦ πολυωνύμου $\varphi(x) \equiv 0x^4 + 0x^3 - 5x^2 + \sqrt{3}x + 10i$ ὁ βαθμός εἶναι 2.

Ἡ ἰσοδυναμία (8) μᾶς ὁδηγεῖ νά δώσουμε γιά τό βαθμό ἑνός μή μηδενικοῦ πολυωνύμου καί τόν ἑξῆς ἰσοδύναμο ὁρισμό:

Βαθμός *ἑνός μή μηδενικοῦ πολυωνύμου f(x) ὀνομάζεται ὁ δείκτης ν τοῦ πρώτου συντελεστῆ α_{ν} ($\alpha_{\nu} \neq 0$) τοῦ πολυωνύμου.*

Στό μηδενικό πολυώνυμο $0(x) \equiv 0x^{\nu} + 0x^{\nu-1} + \cdots + 0x + 0$ **δέν** ἐπισυνάπτουμε βαθμό. Ἐξάλλου ἀπό τήν ἰσοδυναμία (8) συμπεραίνουμε ὅτι **πο-**

λυώνυμα μηδενικοῦ βαθμοῦ εἶναι τά σταθερά πολυώνυμα $f(x) \equiv \alpha_0$ μέ $\alpha_0 \neq 0$. Ἔτσι π.χ. τό (μοναδιαῖο) πολυώνυμο $f(x) \equiv 1$ εἶναι μηδενικοῦ βαθμοῦ. **Προσέξτε!** ὅλα τά σταθερά πολυώνυμα δέν ἔχουν βαθμό, καθόσον σ' αὐτά ὑπάγεται καί τό μηδενικό πολυώνυμο, στό ὁποῖο, ὅπως εἴπαμε, δέν ἀποδίδουμε βαθμό.

Ὥστε: *βαθμό ἔχουν ὅλα τά μή μηδενικά πολυώνυμα καί μόνο αὐτά.*

Σημείωση. Δέν πρέπει νά συγχέουμε τίς ἔννοιες : **μηδενικό πολυώνυμο** καί **πολυώνυμο μηδενικοῦ βαθμοῦ.** Ἐπίσης τίς ἔννοιες: **σταθερά** α_0 ($\alpha_0 \in \mathbf{C}$) καί **σταθερό πολυώνυμο** $\alpha_0 = \alpha_0 x^0$, καθόσον τό τελευταῖο εἶναι στοιχεῖο τοῦ $\mathbf{C}[x]$.

Μετά τήν εἰσαγωγή τῆς ἔννοιας τοῦ βαθμοῦ ἑνός πολυωνύμου, ὁ ὁρισμός τῆς ἰσότητας δύο πολυωνύμων διατυπώνεται πιό γενικά ὡς ἑξῆς:

Ὁρισμός. *Δύο ἀκέραια πολυώνυμα:*

$$f(x) \equiv \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$$
$$\varphi(x) \equiv \beta_\mu x^\mu + \beta_{\mu-1} x^{\mu-1} + \cdots + \beta_1 x + \beta_0$$

θά λέμε ὅτι εἶναι ἴσα καί θά γράφουμε : $\mathbf{f(x)=\varphi(x)}$, *τότε καί μόνο τότε, ἄν εἶναι καί τά δύο τό μηδενικό πολυώνυμο* $\mathbf{0(x)}$ *ἤ*

βαθμ. $\mathbf{f(x)}$ **= βαθμ.** $\boldsymbol{\varphi(x)}$, δηλ. $\boldsymbol{\nu = \mu}$ **καί** $\boldsymbol{\alpha_k = \beta_k}$ **γιά κάθε** $\mathbf{k = 0, 1, 2, \ldots, \nu}$.

Ἄν ὅλοι οἱ συντελεστές ἑνός πολυωνύμου:

$$f(x) \equiv \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0, \quad (\alpha_\nu \neq 0) \tag{9}$$

εἶναι διάφοροι ἀπό τό μηδέν, τότε τό $f(x)$, ὅπως ξέρουμε, ὀνομάζεται **«πλῆρες»** ἐνῶ ἄν ἕνας τουλάχιστο συντελεστής, διάφορος ἀπό τό α_ν, εἶναι μηδέν, τότε τό $f(x)$ ὀνομάζεται **«ἐλλιπές»**. Ἔτσι, π.χ. τό πολυώνυμο $f(x) \equiv 5x^3 - 2x^2 + 3x - 1$ εἶναι πλῆρες, ἐνῶ τό $\varphi(x) \equiv 3x^5 - 2x^3 + x^2 - 4$ εἶναι ἐλλιπές.

Τό πολυώνυμο (9) μπορεῖ ἐπίσης νά γραφεῖ καί ὡς ἑξῆς:

$$f(x) \equiv \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \alpha_\nu x^\nu, \quad (\alpha_\nu \neq 0) \tag{10}$$

δηλ. κατά τίς ἀνιοῦσες δυνάμεις τοῦ x.

Καθεμία ἀπό τίς ἐκφράσεις (9) καί (10) ὀνομάζεται *συνήθης μορφή* τοῦ $f(x)$ διατεταγμένου κατά τίς κατιοῦσες δυνάμεις τοῦ x (στήν (9)) ἤ κατά τίς ἀνιοῦσες δυνάμεις τοῦ x (στή (10)).

Κάθε πολυώνυμο μπορεῖ νά ἐπεκταθεῖ καί πέρα ἀπό τό βαθμό του, ἀρκεῖ γιά τό σκοπό αὐτό νά ἐπισυνάψουμε ὅρους πού ἔχουν συντελεστή τό μηδέν. Ἔτσι τό πολυώνυμο (10), βαθμοῦ ν, μπορεῖ νά γραφεῖ:

$$f(x) \equiv \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_\nu x^\nu + 0x^{\nu+1} + 0x^{\nu+2} + \cdots \tag{11}$$

Ἡ (11) μᾶς ὁδηγεῖ νά θεωρήσουμε, πιό γενικά, τά πολυώνυμα σάν ἐκφράσεις τῆς μορφῆς: $f(x) \equiv \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_\nu x^\nu + \cdots$ μέ $\alpha_k \in \mathbf{C}$, $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ καί $\nu \in \mathbf{N}_0$, *ὅπου ἕνα πεπερασμένο πλῆθος μόνο ἀπό τούς συντελεστές* $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_\nu, \ldots$ *εἶναι διάφοροι ἀπό τό μηδέν.*

Σημείωση. Ἀπό τά παραπάνω συμπεραίνουμε τώρα ὅτι: μποροῦμε νά γράφουμε πάντοτε δύο πολυώνυμα μέ τό ἴδιο πλῆθος ὅρων, ἐπισυνάπτοντας στό πολυώνυμο πού ἔχει τό μικρότερο βαθμό ὅρους μέ συντελεστή τό μηδέν.

Ἄς θεωρήσουμε τώρα ἕνα πολυώνυμο $f(x) \equiv \alpha x^2 + \beta x + \gamma$. Αὐτό ἀνάλογα μέ τό βαθμό του, μπορεῖ νά εἶναι:

i) δεύτερου βαθμοῦ, ἄν $\alpha \neq 0$. Εἰδικά τό $f(x)$ εἶναι τριώνυμο, ἄν: $\alpha\beta\gamma \neq 0$.

ii) πρώτου βαθμοῦ, ἄν $\alpha = 0$ καί $\beta \neq 0$.

iii) μηδενικοῦ βαθμοῦ, ἄν $\alpha = \beta = 0$ καί $\gamma \neq 0$.

iv) τό μηδενικό πολυώνυμο, ἄν $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Στά ἑπόμενα, ἀντί νά γράφουμε τίς περιπτώσεις (i) - (iv) θά λέμε, γιά συντομία, ὅτι τό $f(x) \equiv \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ εἶναι *πολυώνυμο βαθμοῦ τό πολύ δύο.*

Πιό γενικά: *Θά ὀνομάζουμε* **ἀκέραιο πολυώνυμο βαθμοῦ τό πολύ ν** $(\nu \in \mathbf{N}_0)$ *κάθε ἔκφραση τῆς μορφῆς:*

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_\nu x^\nu + \cdots \tag{12}$$

στήν ὁποία εἶναι: $\alpha_{\nu+1} = \alpha_{\nu+2} = \cdots = 0.$

Συνήθως σ' ἕνα τέτοιο πολυώνυμο οἱ ὅροι $\alpha_{\nu+1}x^{\nu+1}, \alpha_{\nu+2}x^{\nu+2}, \ldots$ παραλείπονται, ὁπότε ἡ γενική μορφή ἑνός ἀκέραιου πολυωνύμου $f(x)$ βαθμοῦ τό πολύ ν εἶναι:

$$f(x) \equiv \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_\nu x^\nu \tag{13}$$

ἤ ἰσοδύναμα:

$$f(x) \equiv \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0 \tag{14}$$

§ 111. Ἄλγεβρα (λογισμός) τῶν πολυωνύμων.

— Ἔστω $\mathbf{C}[x]$ τό σύνολο τῶν ἀκέραιων πολυωνύμων τοῦ x μέ συντελεστές μιγαδικούς ἀριθμούς.

Μεταξύ τῶν στοιχείων τοῦ $\mathbf{C}[x]$, δηλαδή μεταξύ τῶν ἀκέραιων πολυωνύμων, ἐκτελοῦνται πράξεις μέ ἐντελῶς ὅμοιες ἰδιότητες μέ ἐκεῖνες πού ξέρουμε γιά τήν πρόσθεση, τήν ἀφαίρεση καί τόν πολλαπλασιασμό τῶν ἀριθμῶν. Γι' αὐτό καί τίς πράξεις στό $\mathbf{C}[x]$ τίς ὀνομάζουμε: *πρόσθεση, ἀφαίρεση* καί *πολλαπλασιασμό* καί τίς παριστάνουμε ἀντίστοιχα μέ τά ἴδια σύμβολα $+, -, \cdot$. Ἔτσι μεταξύ τῶν στοιχείων τοῦ $\mathbf{C}[x]$ μποροῦμε νά ὁρίσουμε τό *ἄθροισμα* *, τή *διαφορά* καί τό *γινόμενο* δύο ἀκέραιων πολυωνύμων τοῦ x, ὡς ἕνα ἐπίσης ἀκέραιο πολυώνυμο τοῦ x, δηλ. ὡς ἕνα στοιχεῖο τοῦ $\mathbf{C}[x]$. Ἀκριβέστερα, ἄν $f(x)$, $\varphi(x)$ εἶναι δύο ὁποιαδήποτε στοιχεῖα τοῦ $\mathbf{C}[x]$, δηλ. δύο ἀκέραια πολυώνυμα τοῦ x, τότε **:

α) Ὀνομάζουμε **ἄθροισμα** τῶν πολυωνύμων:

$$f(x) \equiv \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0 \tag{1}$$

---

* Δέν πρέπει νά συγχέουμε τίς ἔννοιες: *πρόσθεση, ἀφαίρεση, πολλαπλασιασμός* μέ τίς ἔννοιες: *ἄθροισμα, διαφορά, γινόμενο.* Οἱ πρῶτες εἶναι **πράξεις,** ἐνῶ οἱ δεύτερες εἶναι **τό ἀποτέλεσμα** τῶν ἀντίστοιχων πράξεων (πολυώνυμο).

**Δεχόμαστε, χωρίς αὐτό νά περιορίζει τή γενικότητα, ὅτι τά πολυώνυμα $f(x)$ καί $\varphi(x)$ ἔχουν τό ἴδιο πλῆθος ὅρων. Ἄν τά $f(x)$, $\varphi(x)$ δέν ἔχουν τό ἴδιο πλῆθος ὅρων, τότε ἐπισυνάπτουμε στό πολυώνυμο μέ τό μικρότερο βαθμό ὅρους μέ συντελεστή μηδέν, ὥστε τά δύο πολυώνυμα νά ἔχουν τό ἴδιο πλῆθος ὅρων (βλ. καί Σημείωση § 110).

$$\varphi(x) \equiv \beta_\nu x^\nu + \beta_{\nu-1} x^{\nu-1} + \cdots + \beta_1 x + \beta_0 \qquad (2)$$

καί τό συμβολίζουμε μέ: $f(x) + \varphi(x)$, τό πολυώνυμο:

$$(\alpha_\nu + \beta_\nu)x^\nu + (\alpha_{\nu-1} + \beta_{\nu-1})x^{\nu-1} + \cdots + (\alpha_1 + \beta_1)x + (\alpha_0 + \beta_0) \qquad (3)$$

δηλαδή τό ἄθροισμα δύο πολυωνύμων εἶναι τό πολυώνυμο πού ἔχει συντελεστή τοῦ x^k $(k = 0, 1, \ldots, \nu)$ τό ἄθροισμα τῶν συντελεστῶν τοῦ x^k στά δύο πολυώνυμα.

β) Ὀνομάζουμε **ἀντίθετο** τοῦ πολυωνύμου $\varphi(x)$ καί τό συμβολίζουμε μέ: $-\varphi(x)$, τό πολυώνυμο πού ἔχει συντελεστές τούς ἀντίθετους τῶν συντελεστῶν τοῦ $\varphi(x)$. Ὥστε:

$$-\varphi(x) \equiv -\beta_\nu x^\nu - \beta_{\nu-1} x^{\nu-1} - \cdots - \beta_1 x - \beta_0 \qquad (4)$$

γ) Ὀνομάζουμε **διαφορά** τοῦ πολυωνύμου $\varphi(x)$ ἀπό τό πολυώνυμο $f(x)$ καί τή συμβολίζουμε μέ: $f(x) - \varphi(x)$, τό πολυώνυμο: $f(x) + [-\varphi(x)]$. Ὥστε:

$$f(x) - \varphi(x) \equiv (\alpha_\nu - \beta_\nu)x^\nu + (\alpha_{\nu-1} - \beta_{\nu-1})x^{\nu-1} + \cdots + (\alpha_1 - \beta_1)x + (\alpha_0 - \beta_0) \qquad (5)$$

Ἀπό τόν παραπάνω ὁρισμό καί τήν ἰσοδυναμία (7) τῆς προηγούμενης παραγράφου συμπεραίνουμε ἀμέσως ὅτι:

$$\boxed{f(x) = \varphi(x) \iff f(x) - \varphi(x) = 0(x)} \qquad (6)$$

δ) Ὀνομάζουμε **γινόμενο ἑνός ἀριθμοῦ** (πραγμ. ἤ μιγαδικοῦ) λ ἐπί τό πολυώνυμο $f(x)$ καί τό συμβολίζουμε μέ: $\lambda f(x)$, τό πολυώνυμο:

$$\lambda f(x) \equiv (\lambda\alpha_\nu)x^\nu + (\lambda\alpha_{\nu-1})x^{\nu-1} + \cdots + (\lambda\alpha_1)x + (\lambda\alpha_0) \qquad (7)$$

ε) Ὀνομάζουμε **γινόμενο** τοῦ πολυωνύμου $f(x)$ ἐπί τό πολυώνυμο $\varphi(x)$ καί τό συμβολίζουμε μέ: $f(x)\cdot\varphi(x)$, τό ἀκέραιο πολυώνυμο τοῦ x πού ἔχει συντελεστή τοῦ x^k $(k = 0, 1, \ldots, 2\nu)$ τό ἄθροισμα τῶν γινομένων τῶν συντελεστῶν τους μέ ἄθροισμα δεικτῶν ἴσο μέ k. Δηλαδή:

$$\left.\begin{aligned} f(x)\cdot\varphi(x) \equiv \alpha_0\beta_0 &+ (\alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0)x + (\alpha_0\beta_2 + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_0)x^2 + \cdots + \\ &+ (\alpha_0\beta_\nu + \alpha_1\beta_{\nu-1} + \cdots + \alpha_{\nu-1}\beta_1 + \alpha_\nu\beta_0)x^\nu + \cdots + \alpha_\nu\beta_\nu x^{2\nu} \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Ἀξιόλογη παρατήρηση. Ἐπειδή τά ἀκέραια μονώνυμα τοῦ x (βλ. § 110) εἶναι καί αὐτά ἐπίσης στοιχεῖα τοῦ $\mathbf{C}[x]$, δηλαδή ἀκέραια πολυώνυμα τοῦ x, συμπεραίνουμε, ὕστερα ἀπό τούς παραπάνω ὁρισμούς, ὅτι: *κάθε πολυώνυμο εἶναι «ἄθροισμα» τῶν ὅρων του καί κάθε ὅρος του εἶναι «γινόμενο» τοῦ συντελεστῆ του ἐπί παράγοντες ἴσους μέ x.*

Γιά τίς πράξεις τῆς προσθέσεως καί τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, πού ὁρίσαμε παραπάνω, ἰσχύουν, ὅπως εὔκολα διαπιστώνει κανείς, ὁ *ἀντιμεταθετικός, προσεταιριστικός* καί *ἐπιμεριστικός νόμος*. Ἐπιπλέον ὑπάρχει *οὐδέτερο στοιχεῖο γιά τήν πρόσθεση* καί αὐτό εἶναι τό μηδενικό πολυώνυμο $0(x) \equiv 0$, καθώς ἐπίσης ὑπάρχει *οὐδέτερο στοιχεῖο γιά τόν πολλαπλασιασμό* καί μάλιστα αὐτό εἶναι τό σταθερό πολυώνυμο 1. Τέλος, ὁ πολλαπλασιασμός $(\cdot)$ εἶναι μέσα στό $\mathbf{C}[x]$ πράξη *ἐπιμεριστική* καί ὡς πρός τήν ἀφαίρεση. Ἔτσι ἔχουμε:

$$f(x)[\varphi(x) - g(x)] = f(x)\cdot\varphi(x) - f(x)\cdot g(x).$$

στ) Ὀνομάζουμε **ν-οστή δύναμη** ἑνός πολυωνύμου $f(x) \neq 0(x)$ καί τή συμβολίζουμε μέ $[f(x)]^{\nu}$, τό πολυώνυμο:

$$[f(x)]^{\nu} \underset{\text{ορσ}}{=\!=} f(x) \cdot f(x) \cdots f(x), \tag{9}$$

ὅπου οἱ παράγοντες τοῦ δεύτερου μέλους εἶναι ν.

Ἀπό τόν παραπάνω ὁρισμό προκύπτει τώρα ὅτι:

1. $[f(x)]^{\nu} \cdot [f(x)]^{\mu} = [f(x)]^{\nu+\mu}$
2. $[[f(x)]^{\mu}]^{\nu} = [f(x)]^{\mu\nu}$
3. $[f(x) \cdot g(x)]^{\nu} = [f(x)]^{\nu} \cdot [g(x)]^{\nu}$.

Σχόλιο. Συνοψίζοντας τά παραπάνω ὑπογραμμίζουμε τά βασικότερα σημεῖα:

i) Ἡ πρόσθεση, ἡ ἀφαίρεση καί ὁ πολλαπλασιασμός πολυωνύμων εἶναι πράξεις *«κλειστές»* στό σύνολο $\mathbf{C}[x]$, καθόσον τό ἄθροισμα, ἡ διαφορά καί τό γινόμενο δύο ἀκέραιων πολυωνύμων εἶναι ἐπίσης ἀκέραιο πολυώνυμο.

ii) Τό οὐδέτερο στοιχεῖο τῆς προσθέσεως, δηλαδή τό μηδενικό πολυώνυμο, καθώς ἐπίσης καί τό οὐδέτερο στοιχεῖο τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, δηλαδή τό σταθερό πολυώνυμο 1, εἶναι ἀκέραια πολυώνυμα, δηλαδή $\mathbf{0}(x) \in \mathbf{C}(x]$ καί $1 \in \mathbf{C}[x]$. Ἐπίσης τό ἀντίθετο πολυώνυμο: $-f(x)$ ἑνός πολυωνύμου $f(x)$ εἶναι καί αὐτό ἀκέραιο πολυώνυμο τοῦ x.

iii) Οἱ πράξεις $(+)$ καί $(\cdot)$ εἶναι μέσα στό $\mathbf{C}[x]$ ἀντιμεταθετικές καί προσεταιριστικές. Ἐπιπλέον ἡ πράξη $(\cdot)$ εἶναι ἐπιμεριστική ὡς πρός τίς πράξεις $+$ καί $-$.

Ὅλα τά παραπάνω χαρακτηρίζουν τό σύνολο $\mathbf{C}[x]$ τῶν ἀκέραιων πολυωνύμων ὡς ἕνα **«δακτύλιο μέ μοναδιαῖο στοιχεῖο»**. Ὁ δακτύλιος αὐτός ὀνομάζεται: **ὁ δακτύλιος τῶν πολυωνύμων ἐπάνω στό C** καί συμβολίζεται μέ $\mathbf{C}[x]$.

Γιά τό βαθμό τοῦ ἀθροίσματος, τῆς διαφορᾶς καί τοῦ γινόμενου δύο ἀκέραιων πολυωνύμων $f(x)$ καί $\varphi(x)$, ὅπως εὔκολα διαπιστώνει κανείς, ἰσχύουν:

α) $\text{βαθμ.}[f(x) \pm \varphi(x)] \leq \max\{\text{βαθμ.}\, f(x), \text{βαθμ.}\, \varphi(x)\}$ (10)

β) $\text{βαθμ.}\, [\lambda f(x)] = \text{βαθμ.}\, f(x)$, γιά κάθε $\lambda \in \mathbf{C}$ μέ $\lambda \neq 0$ (11)

γ) $\text{βαθμ.}\, [f(x) \cdot \varphi(x)] = \text{βαθμ.}\, f(x) + \text{βαθμ.}\, \varphi(x)$. (12)

Εἶναι φανερό ὅτι οἱ παραπανω σχέσεις: (10), (11) καί (12) ἰσχύουν μέ τήν προϋπόθεση ὅτι: $f(x), \varphi(x), f(x) \pm \varphi(x)$, εἶναι ὅλα μή μηδενικά πολυώνυμα τοῦ x.

Ἄσκηση. Νά ἐξετάσετε πότε ἡ (10) ἰσχύει μέ τό ἴσον;

Ἡ γνωστή ἰδιότητα πού ξέρουμε γιά τούς ἀκέραιους, ἀλλά καί πιό γενικά γιά τούς πραγματικούς καί μιγαδικούς ἀριθμούς, σύμφωνα μέ τήν ὁποία: $\alpha \cdot \beta = 0 \Longrightarrow \alpha = 0$ εἴτε $\beta = 0$, ἰσχύει καί γιά ἀκέραια πολυώνυμα. Ἀκριβέστερα ἰσχύει ἡ πρόταση:

Πρόταση. Ἄν $f(x), \varphi(x)$ ἀκέραια πολυώνυμα καί $f(x) \cdot \varphi(x) = 0$, τότε ἕνα τουλάχιστο ἀπ' αὐτά θά εἶναι τό μηδενικό πολυώνυμο.

Ἡ ἀπόδειξη τῆς παραπάνω προτάσεως εἶναι ἁπλή, ἀρκεῖ νά ἐφαρμόσουμε τή μέθοδο τῆς *«εἰς ἄτοπον»* ἀπαγωγῆς καί νά παρατηρήσουμε ὅτι ὁ πρῶτος συντελεστής τοῦ γινομένου $f(x) \cdot \varphi(x)$ εἶναι τότε διάφορος ἀπό τό μηδέν. Ἄρα $f(x) \cdot \varphi(x) \neq 0$ (ἄτοπο).

Ἄμεσες συνέπειες τῆς παραπάνω προτάσεως εἶναι τά πορίσματα:

Πόρισμα 1ο.—Τό γινόμενο δύο μή μηδενικῶν πολυωνύμων ποτέ δέ μπορεῖ νά γίνει τό μηδενικό πολυώνυμο.

Δηλαδή: $$\boxed{f(x) \neq 0 \wedge g(x) \neq 0 \Rightarrow f(x)\cdot g(x) \neq 0} \qquad (13)$$

Πράγματι· ἄν ἦταν $f(x)\cdot g(x)=0$, τότε $f(x)=0 \vee g(x)=0$ (ἄτοπο).

Πόρισμα 2ο.(*Νόμος τῆς ἁπλοποιήσεως ἤ διαγραφῆς*).— **Ἄν $f(x)$, $g(x)$ καί $\varphi(x) \in C[x]$, τότε ἰσχύει ἡ συνεπαγωγή:**

$$\boxed{\varphi(x) \neq 0 \wedge f(x)\cdot\varphi(x) = g(x)\cdot\varphi(x) \Longrightarrow f(x) = g(x)} \qquad (14)$$

Ἀπόδειξη. Διαδοχικά ἔχουμε:

$f(x)\cdot\varphi(x) = g(x)\cdot\varphi(x) \Longrightarrow f(x)\,\varphi(x) - g(x)\cdot\varphi(x) = 0 \Longrightarrow \varphi(x)\cdot[f(x)-g(x)] = 0$ καί ἐπειδή $\varphi(x) \neq 0$, σύμφωνα μέ τήν προηγούμενη πρόταση, θά ἔχουμε:

$$f(x) - g(x) = 0(x) \text{ καί συνεπῶς } f(x) = g(x).$$

✶ **Σχόλιο.** Ὅπως θά δοῦμε σ' ἕνα ἀπό τά ἑπόμενα κεφάλαια (βλ. Κεφ. IX, § 188, παρατήρηση) ὑπάρχουν σύνολα στά ὁποῖα ἡ γνωστή ἰδιότητα: $\alpha\beta = 0 \Rightarrow \alpha=0 \vee \beta = 0$ **δέν** ἰσχύει. Πιό συγκεκριμένα: ὑπάρχουν σύνολα στά ὁποῖα τό γινόμενο δύο παραγόντων μπορεῖ νά εἶναι ἴσο μέ τό 0, ἄν καί οἱ δύο παράγοντες εἶναι διάφοροι τοῦ μηδενός.

Στοιχεῖα $\alpha \neq 0$ καί $\beta \neq 0$ μέ τήν ἰδιότητα $\alpha\beta = 0$ ὀνομάζονται **διαιρέτες τοῦ μηδενός** ἤ μέ μιά λέξη **μηδενοδιαιρέτες.**

Ἔχοντας τώρα ὑπόψη τήν προηγούμενη πρόταση καί κυρίως τό πόρισμα 1 συμπεραίνουμε ὅτι τό σύνολο $C[x]$ τῶν ἀκέραιων πολυωνύμων τοῦ x δέν ἔχει μηδενοδιαιρέτες. Ἐξάλλου, ὅπως εἴπαμε καί στό προηγούμενο σχόλιο, τό $C[x]$ εἶναι ἕνας ἀντιμεταθετικός δακτύλιος μέ μοναδιαῖο στοιχεῖο τό ἀκέραιο πολυώνυμο $f(x) = 1 = 1x^0$.

Ὅλα τά παραπάνω χαρακτηρίζουν τό σύνολο $C[x]$ τῶν ἀκέραιων πολυωνύμων ὡς μία **«ἀκέραια περιοχή»**. Ἡ ἔννοια τοῦ δακτύλιου καί τῆς ἀκέραιας περιοχῆς ἀποτελοῦν δύο θεμελιώδεις ἔννοιες τῆς μοντέρνας (σύγχρονης) Ἄλγεβρας.

§ 112. Πολυωνυμική συνάρτηση – Ἀριθμητική τιμή καί ρίζα ἀκέραιου πολυωνύμου.

α) Ὅπως εἴπαμε καί στήν ἀρχή αὐτοῦ τοῦ Κεφαλαίου, μποροῦμε νά θεωροῦμε τήν ἔκφραση ἑνός ἀκέραιου πολυωνύμου $f(x) \equiv \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$ σάν τύπο συναρτήσεως μέ ἀνεξάρτητη μεταβλητή τό x. Θεωροῦμε δηλαδή τή συνάρτηση:

$\widehat{f}: A \to C$, ὅπου $A \subset C$, μέ τύπο: $f(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$.

Ἀκριβέστερα θεωροῦμε τή (μονοσήμαντη) ἀπεικόνιση:

$$\widehat{f}: A \to C: x \xrightarrow{\widehat{f}} \widehat{f}(x) = f(x) \equiv \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0 \qquad (1)$$

ὅπου $A \subset C$ *καί* $f(x) \in C[x]$.

Οἱ συναρτήσεις τῆς μορφῆς (1) ὀνομάζονται **πολυωνυμικές συναρτήσεις τοῦ x** καί θά τίς παριστάνουμε στά ἑπόμενα μέ $f(x)$ ἀντί $\widehat{f}(x)$.

β) Ἄς θεωρήσουμε τώρα ἕνα ὁποιοδήποτε, ἀλλά σταθερό στοιχεῖο τοῦ A, π.χ. τό ξ. Ἡ εἰκόνα $f(\xi)$ τοῦ ξ κατά τήν ἀπεικόνιση (1), δηλαδή τό στοιχεῖο: $\alpha_\nu \xi^\nu + \alpha_{\nu-1}\xi^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1\xi + \alpha_0$ τοῦ C ὀνομάζεται **ἀριθμητική τιμή τῆς πο-**

λυωνυμικῆς συναρτήσεως (1) **γιά** $\mathbf{x = \xi}$. Συχνά ὅμως στά ἑπόμενα γιά συντομία θά λέμε ὅτι : *ἡ* $f(\xi)$ *εἶναι ἡ ἀριθμητική τιμή τοῦ πολυωνύμου* $f(x) \equiv \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$ *γιά* * $x = \xi$ καί θά γράφουμε:

$$f(\xi) = \alpha_\nu \xi^\nu + \alpha_{\nu-1}\xi^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 \xi + \alpha_0.$$

Προσέξτε! ἡ τιμή $f(\xi)$ δέν προκύπτει ἀπό τό πολυώνυμο γιά $x = \xi$, ἀλλά μέ ἀντικατάσταση τοῦ x ἀπό τό ξ καί ἐκτέλεση τῶν ἀντίστοιχων ἀριθμητικῶν πιά πράξεων καί ὄχι πράξεων μεταξύ πολυωνύμων.

Εἶναι τώρα ἀμέσως φανερό ὅτι: ἡ ἀριθμητική τιμή τοῦ ἀθροίσματος (ἀντ. τοῦ γινομένου) δύο πολυωνύμων ἰσοῦται μέ τό ἄθροισμα (ἀντ. τό γινόμενο) τῶν ἀριθμητικῶν τιμῶν τῶν πολυωνύμων.

Ἐπίσης ἡ ἀριθμητική τιμή τοῦ μηδενικοῦ πολυωνύμου εἶναι σταθερή καί ἴση μέ 0 γιά κάθε τιμή τῆς μεταβλητῆς x, δηλ. $0(x) = 0$, $\forall\ x \in \mathbf{C}$.

Τέλος, ἀπό τόν ὁρισμό τῆς ἰσότητας δύο πολυωνύμων καταλαβαίνουμε ἀμέσως ὅτι : *δύο πολυώνυμα ἴσα ἔχουν ἴσες ἀριθμητικές τιμές,* δηλαδή, ἄν $f(x) = \varphi(x)$, τότε ἰσχύει ἡ πρόταση:

$$\forall\ x \in \mathbf{C},\ f(x) = \varphi(x) \tag{2}$$

Στήν περίπτωση πού ἡ πρόταση (2) εἶναι ἀληθής, λέμε ἀκόμη ὅτι *τά πολυώνυμα* $f(x)$ *καί* $\varphi(x)$ *εἶναι* **«ἐκ ταυτότητος ἴσα»**, γράφουμε συμβολικά: $f(x) \equiv \varphi(x)$ καί διαβάζουμε: *f(x) ἐκ ταυτότητος ἴσο μέ τό φ(x).*

Στήν περίπτωση πού $f(x) = 0(x)$, ἰσχύει ἡ πρόταση:

$$\forall\ x \in \mathbf{C},\ f(x) = 0 \tag{3}$$

Ὅταν ἡ πρόταση (3) εἶναι ἀληθής, λέμε ὅτι τό $f(x)$ *«μηδενίζεται ἐκ ταυτότητος»* ἤ ἀλλιῶς τό $f(x)$ εἶναι **«ἐκ ταυτότητος ἴσο μέ τό μηδέν»**, γράφουμε συμβολικά: $f(x) \equiv 0$ καί διαβάζουμε: *f(x) ἐκ ταυτότητος μηδέν.*

Γιά τά «ἐκ ταυτότητος μηδέν» καί τά «ἐκ ταυτότητος ἴσα» πολυώνυμα ἰσχύει ἡ ἑπόμενη βασική πρόταση:

Πρόταση. Μέ $f(x) \in C[x]$, $\varphi(x) \in C[x]$ εἶναι ἀληθής καθεμία ἀπό τίς προτάσεις:

α). $$\mathbf{f(x) = 0(x) \iff f(x) \equiv 0} \tag{4}$$

β). $$\mathbf{f(x) = \varphi(x) \iff f(x) \equiv \varphi(x)} \tag{5}$$

Ἀπόδειξη τῆς α: (i) Ἔστω $f(x) = 0(x)$, τότε: $\forall\ x \in \mathbf{C}$, $f(x) = 0$, ἐπειδή ὅλοι οἱ συντελεστές τοῦ $f(x)$ εἶναι μηδέν. Ἄρα $f(x) \equiv 0$.

(ii) Ἔστω $f(x) \equiv 0$, δηλαδή: $\forall\ x \in \mathbf{C}$, $f(x) = 0$, τότε $f(x) = 0(x)$, γιατί ἀλλιῶς θά ὑπῆρχε ἕνας τουλάχιστο συντελεστής τοῦ $f(x)$, ἔστω ὁ α_k, πού θά ἦταν διάφορος ἀπό τό μηδέν. Τότε ὅμως μέ $x = \xi \neq 0$ θά εἴχαμε: $f(\xi) \neq 0$. Αὐτό ὅμως εἶναι ἄτοπο, ἐπειδή $f(x) = 0$, $\forall\ x \in \mathbf{C}$.

Ἀπόδειξη τῆς β: (i) Ἔστω $f(x) = \varphi(x)$, τότε: $\forall\ x \in \mathbf{C}$, $f(x) = \varphi(x)$, δηλ.

---

* Ὁ συμβολισμός: $x = \xi$ δέ σημαίνει ἰσότητα, καθόσον τό πολυώνυμο x δέν εἶναι σταθερό πολυώνυμο, ἄρα μέ καμιά σταθερά δέν μπορεῖ νά ἰσοῦται, ἀλλά ἁπλῶς σημαίνει τήν ἀντικατάσταση τοῦ x μέ τή σταθερά ξ τοῦ $A \subset \mathbf{C}$.

$f(x) \equiv \varphi(x)$. **(ii)** Ἔστω τώρα $f(x) \equiv \varphi(x)$ δηλαδή: $\forall\ x \in \mathbf{C}$, $f(x) = \varphi(x)$, τότε: $\forall\ x \in \mathbf{C}$, $f(x) - \varphi(x) = 0$, δηλαδή: $f(x) - \varphi(x) \equiv 0$ καί σύμφωνα μέ τήν (α): $f(x) - \varphi(x) = 0(x)$, ὁπότε: $f(x) = \varphi(x)$.

Γενική παρατήρηση. Ἐπειδή, ὅπως εἴδαμε στήν παραπάνω πρόταση οἱ ἰσοδυναμίες (4) καί (5) εἶναι *ταυτολογίες* (βλ. Κεφ. Ι, § 5), οἱ : $f(x) = 0(x)$ καί $f(x) \equiv 0$ εἶναι *ταυτολογικά ἰσοδύναμες* (βλ. Κεφ. Ι, § 5), γι' αὐτό στά ἑπόμενα οἱ ὅροι: **μηδενικό πολυώνυμο** καί **πολυώνυμο ἐκ ταυτότητος μηδέν** θά χρησιμοποιοῦνται μέ τήν ἴδια σημασία, χωρίς διάκριση. Τό ἴδιο θά ἰσχύει, λόγω τῆς ἰσοδυναμίας (5), καί γιά τούς ὅρους: **πολυώνυμα ἴσα** καί **πολυώνυμα ἐκ ταυτότητος ἴσα.**

Σημείωση. Γιά νά δηλώσουμε ὅτι τό $f(x)$ δέν εἶναι τό μηδενικό πολυώνυμο στά ἑπόμενα συχνά θά γράφουμε: $f(x) \not\equiv 0$.

γ) Ἔννοια τῆς ρίζας ἑνός ἀκέραιου πολυωνύμου. *Ἕνας ἀριθμός πραγματικός ἤ μιγαδικός, δηλ. ἕνα στοιχεῖο* ρ *τοῦ* **C** *ὀνομάζεται* **ρίζα** *ἑνός ἀκέραιου πολυωνύμου* $f(x) \in \mathbf{C}[x]$, *τότε καί μόνο τότε, ἄν ἡ ἀριθμητική τιμή τοῦ πολυωνύμου γιά* $x = \rho$ *εἶναι μηδέν,* δηλ. *ἄν:* $f(\rho) = 0$.

Ὥστε: $$\boxed{\text{Ὁ } \rho \text{ εἶναι ρίζα τοῦ } f(x) \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} f(\rho) = 0.} \qquad (6)$$

Ἔτσι, π.χ. τοῦ πολυωνύμου: $f(x) \equiv x^3 + 4x^2 + x - 6$ ρίζες εἶναι οἱ ἀριθμοί: $1, -2, -3$, καθόσον ἰσχύει: $f(1) = 0$, $f(-2) = 0$, $f(-3) = 0$. Ἐπίσης τοῦ πολυωνύμου: $\varphi(x) \equiv x^3 + 1$ ρίζες εἶναι οἱ ἀριθμοί:

$$-1, \quad \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Ἀπό τόν παραπάνω ὁρισμό τῆς ρίζας ἑνός πολυωνύμου καταλαβαίνουμε ἀμέσως ὅτι τό μηδενικό πολυώνυμο δέχεται σάν ρίζες ὅλους τούς μιγαδικούς ἀριθμούς. Ἀπεναντίας ἕνα σταθερό μή μηδενικό πολυώνυμο $f(x) \equiv \alpha(\neq 0)$, δηλ. ἕνα ἀκέραιο πολυώνυμο μηδενικοῦ βαθμοῦ δέ δέχεται κανένα μιγαδικό ἀριθμό σάν ρίζα του.

Τό σύνολο τῶν ριζῶν ἑνός πολυωνύμου $f(x) \in \mathbf{C}[x]$ ὀνομάζεται **σύνολο ἀλήθειας** τοῦ πολυωνύμου $f(x)$. Ἔτσι, ἄν μέ **P** συμβολίσουμε τό σύνολο ἀλήθειας τοῦ $f(x)$, θά ἔχουμε: $\mathbf{P} = \{z \in \mathbf{C}: f(z) = 0\}$ καί συνεπῶς: $\rho \in \mathbf{P} \Longleftrightarrow f(\rho) = 0$.

Εἶναι φανερό τώρα ὅτι: ἄν τό $f(x)$ εἶναι τό μηδενικό πολυώνυμο, τότε $\mathbf{P} = \mathbf{C}$, ἐνῶ ἄν βαθμ.$f(x) = 0$, τότε $\mathbf{P} = \varnothing$.

Μία ἐξίσωση τῆς μορφῆς: $f(x) = 0$, ὅπου $f(x)$ ἀκέραιο πολυώνυμο τοῦ $\mathbf{C}[x]$, ὀνομάζεται **ἀλγεβρική ἐξίσωση.**

Ὁ βαθμός τοῦ πολυωνύμου $f(x)$ ὀνομάζεται καί **βαθμός** τῆς ἀλγεβρικῆς ἐξισώσεως. **Ρίζα** ἤ **λύση** μιᾶς ἀλγεβρικῆς ἐξισώσεως λέγεται κάθε στοιχεῖο τοῦ συνόλου ἀλήθειας τοῦ $f(x)$, δηλαδή κάθε ρίζα τοῦ πολυωνύμου $f(x)$.

Μία ἀλγεβρική ἐξίσωση : $f(x) = 0$ λέγεται *ἀόριστη,* τότε καί μόνο τότε, ἄν τό $f(x)$ εἶναι τό μηδενικό πολυώνυμο καί *ἀδύνατη,* τότε καί μόνο τότε, ἄν τό f(x) εἶναι ἕνα σταθερό μή μηδενικό πολυώνυμο, δηλαδή ἄν βαθμ.f(x) = 0.

Ἡ ρίζα ἀλγεβρικῆς ἐξισώσεως μέ ρητούς συντελεστές ὀνομάζεται **ἀλγεβρικός ἀριθμός.** Ὥστε :

Ἕνας ἀριθμός $\zeta \in \mathbf{C}$ *ὀνομάζεται* **ἀλγεβρικός,** *τότε καί μόνο τότε, ἄν ὑπάρχει ἀκέραιο πολυώνυμο* $f(x) \in \mathbf{Q}[x]$, $f(x) \not\equiv 0$ *μέ* $f(\zeta) = 0$.

Ἔτσι, π.χ. οἱ ἀριθμοί: 3, i, $\sqrt{2}$ εἶναι ἀλγεβρικοί, γιατί ἱκανοποιοῦν ἀντίστοιχα τίς ἀλγεβρικές ἐξισώσεις μέ ρητούς συντελεστές: $x - 3 = 0$, $x^2 + 1 = 0$, $x^2 - 2 = 0$.

Ὑπάρχουν βέβαια καί ἀριθμοί πού δέν εἶναι ἀλγεβρικοί. Ἕνας μή ἀλγεβρικός ἀριθμός ὀνομάζεται **ὑπερβατικός.** Ἕνας τέτοιος, λ.χ., εἶναι ὁ γνωστός μας ἀπό τή Γεωμετρία ἀριθμός $\pi = 3{,}14159\ldots$ (λόγος μιᾶς περιφέρειας πρός τή διάμετρό της). Ὁ π εἶναι πραγματικός, ἀλλά δέν εἶναι ἀλγεβρικός ἀριθμός. Ὑπερβατικός ἐπίσης εἶναι ὁ ἀριθμός $e = 2{,}7182\ldots$ γιά τόν ὁποῖο κάνουμε λόγο στό ἑπόμενο κεφάλαιο.

Σημείωση. Δέν πρέπει νά συγχέουμε τίς ἔννοιες : **πολυώνυμο ἐκ ταυτότητος μηδέν** $[f(x) \equiv 0]$ καί **ἀλγεβρική ἐξίσωση** $[f(x) = 0]$· καί τοῦτο γιατί: $f(x) \equiv 0 \Longleftrightarrow \forall\, x \in \mathbf{C},\ f(x) = 0$, ἐνῶ στήν ἀλγεβρική ἐξίσωση: $f(x) = 0$ ζητᾶμε νά βροῦμε τά στοιχεῖα ἐκεῖνα τοῦ **C** γιά τά ὁποῖα μηδενίζεται τό πολυώνυμο $f(x)$.

Σχετικά μέ τίς ρίζες τῶν πολυωνύμων ὑπάρχει τό παρακάτω βασικό θεώρημα πού ἀποδεικνύεται στήν Ἀνώτερη Ἄλγεβρα καί τή Θεωρία τῶν Μιγαδικῶν Συναρτήσεων καί πού εἶναι γνωστό στή διεθνή βιβλιογραφία ὡς *θεμελιῶδες θεώρημα τῆς Ἄλγεβρας* ἤ *θεώρημα τοῦ D' Alembert* *, ἐπειδή αὐτός πρῶτος προσπάθησε, τό 1746, νά τό ἀποδείξει. Ἡ πρώτη ὅμως αὐστηρή ἀπόδειξη ὀφείλεται στόν Gauss** (1799).

§ 113. Θεώρημα τοῦ D' Alembert.

(Θεμελιῶδες θεώρημα τῆς Ἄλγεβρας).— **Κάθε ἀκέραιο πολυώνυμο, μέ πραγματικούς ἤ πιό γενικά μέ μιγαδικούς συντελεστές, βαθμοῦ $\nu \geqq 1$, ἔχει μία τουλάχιστο μιγαδική ρίζα.**

Δηλαδή : $\boxed{\forall\ f(x) \in \mathbf{C}[x] \text{ μέ βαθμ. } f(x) \geqq 1\ \exists\ \rho \in \mathbf{C} : f(\rho) = 0}$

Μία ἰσοδύναμη διατύπωση τοῦ θεμελιώδους θεωρήματος τῆς Ἄλγεβρας εἶναι καί ἡ ἑξῆς : *Τό σύνολο ἀλήθειας ἑνός ἀκέραιου πολυωνύμου* $f(x) \in \mathbf{C}[x]$ *βαθμοῦ* $\nu \geqq 1$, *εἶναι* $\neq \varnothing$.

Παρατηροῦμε ὅτι τό παραπάνω θεώρημα μᾶς ἐξασφαλίζει μὲν τὴν ὕπαρξη ρίζας (πραγματικῆς ἤ μιγαδικῆς) γιά κάθε πολυώνυμο βαθμοῦ $\nu \geqq 1$, δέ μᾶς λέει ὅμως τίποτε σχετικό οὔτε γιά τόν τρόπο πού θά τή βροῦμε, οὔτε γιά τό πλῆθος τῶν ριζῶν τοῦ πολυωνύμου.

Μέ ἄλλα λόγια τό πιό πάνω θεώρημα μᾶς ἐξασφαλίζει τήν ὕπαρξη μιᾶς τουλάχιστο λύσεως τῆς ἀλγεβρικῆς ἐξισώσεως:

---

* Jean D' Alembert (1717 - 1783). Γάλλος μαθηματικός καί φιλόσοφος.
** Karl Fr. Gauss (1777 - 1855). Πολύ μεγάλος Γερμανός μαθηματικός.

$$\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0 \qquad (1)$$

γιά όποιοδήποτε φυσικό ἀριθμό ν ($\nu \in \mathbb{N}$).

Σημείωση. Ἀποδεικνύεται ὅτι γιά $\nu = 2, 3, 4$ μποροῦμε νά ὑπολογίσουμε τίς λύσεις τῆς ἐξισώσεως (1) μέ τή βοήθεια κατάλληλου τύπου. Ὁ Abel ἀπόδειξε ὅτι δέν εἶναι δυνατό νά βρεθοῦν γενικοί τύποι πού νά δίνουν τίς λύσεις μιᾶς ἐξισώσεως τῆς μορφῆς (1) γιά $\nu \geq 5$.

§ 114. Ἐφαρμογές στά ἐκ ταυτότητος ἴσα πολυώνυμα – Μέθοδος τῶν προσδιοριστέων συντελεστῶν.

—Ὅπως εἴπαμε καί στήν § 110 ἡ συνθήκη $f(x) = \varphi(x)$ τῆς ἰσότητας δύο ἀκέραιων πολυωνύμων ἐκφράζεται μέ τήν ἰσοδύναμη συνθήκη τῆς ἰσότητας τῶν συντελεστῶν τῶν ἴσων δυνάμεων τοῦ x αὐτῶν τῶν δύο πολυωνύμων. Ἡ συνθήκη αὐτή μᾶς παρέχει τή δυνατότητα νά μποροῦμε νά προσδιορίζουμε τούς συντελεστές ἑνός πολυωνύμου, ἄρα καί τό πολυώνυμο ὅταν γνωρίζουμε τό βαθμό του, ὥστε τοῦτο νά ἱκανοποιεῖ ὁρισμένες συνθῆκες. Αὐτή ἡ μέθοδος εἶναι γνωστή ὡς *μέθοδος τῶν προσδιοριστέων συντελεστῶν*. Γιά τήν ἐφαρμογή αὐτῆς τῆς μεθόδου τά πολυώνυμα τοῦ προβλήματος ἐκφράζονται μέ τή μορφή (9) ἤ (10) τῆς § 110, δηλαδή μέ τή *συνήθη*, ὅπως λέμε, *μορφή* τους.

Ἄς δοῦμε τώρα πῶς αὐτή ἡ μέθοδος ἐφαρμόζεται σέ σύγκεκριμένα παραδείγματα:

Ἐφαρμογή 1η: Δίνονται τά πολυώνυμα:

$$f(x) \equiv 2x^3 + \alpha x^2 - 13x + \beta, \qquad \varphi(x) \equiv 2x^3 + (\gamma - 2)x^2 - (\gamma + 12)x - 6\gamma.$$

Νά προσδιορίσετε τούς συντελεστές α, β, γ, ὥστε νά ἔχουμε: $f(x) \equiv \varphi(x)$.

Λύση. Ὅπως ξέρουμε (§ 112): $f(x) \equiv \varphi(x) \Longleftrightarrow f(x) = \varphi(x)$ καί ὅπως εἴπαμε παραπάνω ἡ συνθήκη τῆς ἰσότητας δύο πολυωνύμων εἶναι ἰσοδύναμη μέ τή συνθήκη τῆς ἰσότητας τῶν συντελεστῶν τῶν ἴσων δυνάμεων τοῦ x τῶν πολυωνύμων $f(x)$ καί $\varphi(x)$. Ἔτσι παίρνουμε τό παρακάτω (γραμμικό) σύστημα:

$$\left.\begin{aligned} \gamma - 2 &= \alpha \\ -(\gamma + 12) &= -13 \\ -6\gamma &= \beta \end{aligned}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{aligned} \gamma - 2 &= \alpha \\ \gamma + 12 &= 13 \\ 6\gamma &= -\beta \end{aligned}\right\}$$

Ἀπό τήν ἐπίλυση τοῦ τελευταίου συστήματος βρίσκουμε:

$$\alpha = -1, \qquad \beta = -6, \qquad \gamma = 1.$$

Ἐφαρμογή 2η: Νά βρεῖτε ἀκέραιο πολυώνυμο τρίτου βαθμοῦ $f(x) \in C[x]$, τέτοιο, ὥστε: νά δέχεται ὡς ρίζα τόν ἀριθμό μηδέν καί νά ἱκανοποιεῖ τήν ταυτότητα: $f(x) - f(x-1) \equiv x^2$.

Στή συνέχεια νά βρεῖτε τό νιοστό μερικό ἄθροισμα σ_ν τῆς σειρᾶς $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ μέ $\alpha_\nu = \nu^2$.

Λύση. Τό πολυώνυμο πού ζητᾶμε θά εἶναι τῆς μορφῆς:

$$f(x) \equiv \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$$

ὅπου $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ συντελεστές πού πρέπει νά προσδιοριστοῦν. Ἐπειδή $f(0) = 0$ θά πρέπει $\delta = 0$ καί τό πολυώνυμο γίνεται: $f(x) \equiv \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x$.

Ἀπό τήν ὑπόθεση ἔχουμε:

$$f(x) - f(x-1) \equiv \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x - \alpha(x-1)^3 - \beta(x-1)^2 - \gamma(x-1) \equiv$$
$$\equiv 3\alpha x^2 - (3\alpha - 2\beta)x + (\alpha - \beta + \gamma) \equiv x^2.$$

Ἀπό τήν τελευταία σχέση, σύμφωνα μέ τόν ὁρισμό τῆς ἰσότητας δύο πολυωνύμων, λαμβάνουμε τό (γραμμικό) σύστημα:

$$\{3\alpha = 1 \wedge 3\alpha - 2\beta = 0 \wedge \alpha - \beta + \gamma = 0\}$$

τό ὁποῖο ἔχει τή μοναδική λύση: $\alpha = \frac{1}{3}$, $\beta = \frac{1}{2}$, $\gamma = \frac{1}{6}$.

Ἄρα: $$f(x) \equiv \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x. \qquad (1)$$

Τό νιοστό μερικό ἄθροισμα σ_ν τῆς σειρᾶς $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ μέ $\alpha_\nu = \nu^2$ εἶναι:

$$\sigma_\nu = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\nu = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + \nu^2 \qquad (2)$$

Ἀπό τήν ταυτότητα: $f(x) - f(x-1) \equiv x^2$ γιά $x = 1, 2, \cdots, \nu$ βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} f(1) - f(0) &= 1^2 \\ f(2) - f(1) &= 2^2 \\ f(3) - f(2) &= 3^2 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ f(\nu) - f(\nu-1) &= \nu^2. \end{aligned}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη αὐτές τίς ἰσότητες καί ἔχοντας ὑπόψη τίς (1), (2) καί ἀκόμη ὅτι $f(0) = 0$ τελικά βρίσκουμε:

$$\sigma_\nu = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + \nu^2 = f(\nu) = \frac{1}{3}\nu^3 + \frac{1}{2}\nu^2 + \frac{1}{6}\nu = \frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}.$$

Ἐφαρμογή 3η: Νά προσδιορίσετε τούς συντελεστές α, β, γ, δ ἑνός ἀκέραιου πολυωνύμου: $f(x) \equiv \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$, ὥστε νά ἰσχύει:

$$f(1) + f(2) + \cdots + f(\nu) \equiv \nu^4$$

Λύση. Ἀπό τή μορφή τοῦ $f(x)$ γιά $x = 1, 2, \ldots, \nu$ βρίσκουμε:

$$\left.\begin{aligned} f(1) &= \alpha\cdot 1^3 + \beta\cdot 1^2 + \gamma\cdot 1 + \delta \\ f(2) &= \alpha\cdot 2^3 + \beta\cdot 2^2 + \gamma\cdot 2 + \delta \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f(\nu) &= \alpha\cdot \nu^3 + \beta\cdot \nu^2 + \gamma\cdot \nu + \delta \end{aligned}\right\}$$

Προσθέτοντας τώρα κατά μέλη αὐτές τίς ἰσότητες καί λαμβάνοντας ὑπόψη τούς τύπους (1), (2) καί (3) τῆς § 78 ἔχουμε:

$$\alpha\,\frac{\nu^2(\nu+1)^2}{4} + \beta\,\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6} + \gamma\,\frac{\nu(\nu+1)}{2} + \nu\cdot\delta \equiv \nu^4$$

ἤ $$\frac{\alpha}{4}\nu^4 + \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{3}\right)\nu^3 + \left(\frac{\alpha}{4} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}\right)\nu^2 + \left(\frac{\beta}{6} + \frac{\gamma}{2} + \delta\right)\nu \equiv \nu^4.$$

Γιά νά εἶναι δύο πολυώνυμα ὡς πρός ν «ἐκ ταυτότητας ἴσα» θά πρέπει νά ἰσχύει:

$$\left\{\frac{\alpha}{4} = 1 \wedge \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{3} = 0 \wedge \frac{\alpha}{4} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = 0 \wedge \frac{\beta}{6} + \frac{\gamma}{2} + \delta = 0\right\}.$$

Ἀπό τήν ἐπίλυση τοῦ παραπάνω συστήματος βρίσκουμε:

$$\alpha = 4 \quad , \quad \beta = -6 \quad , \quad \gamma = 4 \quad , \quad \delta = -1.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάδα Α΄. 234. Νά προσδιορίσετε τούς συντελεστές α, β, γ ὥστε τό:

$$f(x) \equiv (2\alpha + 1)x^2 + (3\beta - 1)x + (2\gamma + \beta - \alpha)$$

νά εἶναι τό μηδενικό πολυώνυμο.

235. Νά ἐξετάσετε ἄν ὑπάρχουν πραγματικοί ἀριθμοί α καί β, ὥστε τό:

$$f(x) \equiv (\alpha-1)x^2 + (2\beta+2)x + (\alpha+\beta-3)$$

νά εἶναι τό μηδενικό πολυώνυμο.

236. Ἄν εἶναι $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$ καί $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$, ὅπου $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$, νά ἀποδείξετε ὅτι τό: $f(x) \equiv (\alpha-\beta)x^2 + (\beta-\gamma)x + (\gamma-\alpha)$ εἶναι τό μηδενικό πολυώνυμο.

237. Νά προσδιορίσετε τούς πραγματικούς ἀριθμούς α, β, γ ἄν ξέρουμε ὅτι αὐτοί ἱκανοποιοῦν τήν ἰσότητα: $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma$ καί ὅτι τό πολυώνυμο:

$f(x)=x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma$ ἔχει ἀριθμητική τιμή 7 γιά $x=1$.

238. Νά προσδιορίσετε τούς πραγματικούς ἀριθμούς α, β, γ, ὥστε τό πολυώνυμο: $f(x) \equiv x^4 - 2x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 4$ νά εἶναι τό τετράγωνο τοῦ τριωνύμου: $x^2 - x + \gamma$.

239. Νά βρεῖτε τήν ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη ὥστε τό πολυώνυμο $f(x) \equiv x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ νά εἶναι τετράγωνο ἄλλου πολυωνύμου.

240. Λέμε πώς ἕνα πολυώνυμο $f(x) \equiv \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ εἶναι τέλειος κύβος, τότε καί μόνο τότε, ἄν μπορεῖ νά πάρει τή μορφή: $\alpha(x+k)^3$, $k \in \mathbf{R}$. Νά ἀποδείξετε τώρα ὅτι: τό $f(x)$ εἶναι τέλειος κύβος, τότε καί μόνο τότε, ἄν: $\beta^3 = 27\alpha^2\delta \wedge \beta^2 = 3\alpha\gamma$. Στή συνέχεια, χρησιμοποιώντας τό προηγούμενο ἀποτέλεσμα, νά ἀποδείξετε ὅτι τό πολυώνυμο:

$8x^3 + 36x^2 + 54x + 27$ εἶναι τέλειος κύβος.

241. Ἄν εἶναι $\alpha+\beta+\gamma = 30$, νά προσδιορίσετε τούς πραγματικούς ἀριθμούς α, β, γ, ὥστε ἡ συνάρτηση f μέ τύπο:

$$f(x) = \frac{(\alpha-2)x^2 + (\beta-4)x + \gamma - 6}{x^2+2x+3}$$

νά εἶναι σταθερή γιά κάθε $x \in \mathbf{R}$.

Ὁμάδα Β΄. 242. Δίνονται τά πολυώνυμα:

$$f(x) \equiv \alpha x^3 + 4x^2 + \gamma x + \delta, \quad \varphi(x) \equiv 2x^3 + \beta x^2 + 3x + \delta.$$

Ποιές τιμές πρέπει νά πάρουν οἱ πραγματικοί ἀριθμοί α, β, γ, δ ὥστε τό πολυώνυμο:

$F(x) \equiv f(x) + \varphi(x)$ νά εἶναι:

i) βαθμοῦ 3, ii) βαθμοῦ τό πολύ 3, iii) μηδενικοῦ βαθμοῦ, iv) μηδενικό πολυώνυμο.

243. Νά βρεῖτε ὅλα τά πολυώνυμα δεύτερου βαθμοῦ (τριώνυμα) πού ἱκανοποιοῦν τή συνθήκη:

α) $\forall\, x \in \mathbf{R},\ f(x+1) = f(-x)$, **β)** $\forall\, x \in \mathbf{R},\ x^2 \cdot f\left(\dfrac{1}{x}\right) = f(x)$.

244. Νά προσδιορίσετε ἀκέραιο πολυώνυμο τέταρτου βαθμοῦ $f(x) \in \mathbf{R}[x]$ τέτοιο, ὥστε: νά δέχεται ὡς ρίζα τόν ἀριθμό μηδέν καί νά ἱκανοποιεῖ τή συνθήκη:

$$\forall\, x \in \mathbf{R},\ f(x) - f(x-1) = x^3.$$

Στή συνέχεια νά ὑπολογίσετε μέ τή βοήθεια αὐτοῦ τοῦ πολυωνύμου τό ἄθροισμα:

$$\Sigma_3 \equiv 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + \nu^3,\ (\nu \in \mathbf{N}).$$

245. Νά προσδιορίσετε ἀκέραιο πολυώνυμο τρίτου βαθμοῦ $f(x) \in \mathbf{R}[x]$ τέτοιο, ὥστε:

(i) $f(0) = 0$ καί (ii) $f(x+1) - f(x) \equiv x(x+1)$.

Στή συνέχεια νά βρεῖτε, μέ τή βοήθεια αὐτοῦ τοῦ πολυωνύμου, τό νιοστό μερικό ἄθροισμα τῆς σειρᾶς $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \nu(\nu+1)$.

246. Νά προσδιορίσετε τούς πραγματικούς ἀριθμούς α καί β ἔτσι, ὥστε ἡ ἐξίσωση: $x^3 - 24x - 72 = 0$ νά μπορεῖ νά πάρει τή μορφή: $\left(\dfrac{x-\alpha}{x-\beta}\right)^3 = \dfrac{\alpha}{\beta}$.

Κατόπιν νά βρεῖτε τό σύνολο ἀλήθειας τοῦ πολυωνύμου $f(x) \equiv x^3 - 24x - 72$.

247. Ἔστω ὅτι εἶναι $f(x), \varphi(x) \in \mathbf{R}[x]$ μέ σύνολα ἀλήθειας S, T ἀντιστοίχως. Ἄν A, καί Γ εἶναι ἀντιστοίχως τά σύνολα ἀλήθειας τῶν πολυωνύμων: $F(x) \equiv f(x) + \varphi(x)$ καί $G(x) \equiv f(x) \cdot \varphi(x)$, νά ἀποδείξετε ὅτι:

$$\text{(i) } \Gamma = S \cup T, \qquad \text{(ii) } S \cap T = \phi \implies A \cap \Gamma = \varnothing.$$

Ἐπιπλέον: ἄν Π, Ρ καί Σ εἶναι ἀντιστοίχως τά σύνολα τῶν πραγματικῶν ριζῶν τῶν πολυωνύμων: $f(x)$, $\varphi(x)$ καί $\sigma(x) \equiv f^2(x) + \varphi^2(x)$, νά ἀποδείξετε ὅτι: $\Sigma = \Pi \cap P$.

Τέλος, νά ἐξετάσετε ἄν μπορεῖ νά ἰσχύει: $\Sigma = \Pi \cap P$ καί στήν περίπτωση πού τά Π, Ρ καί Σ παριστάνουν τά σύνολα τῶν γνήσιων μιγαδικῶν ριζῶν τῶν πολυωνύμων $f(x)$, $\varphi(x)$ καί $\sigma(x) \equiv f^2(x) + \varphi^2(x)$ ἀντιστοίχως.

248. Ἔστω τό πολυώνυμο:

$$f(x) \equiv \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$$

i) Νά προσδιορίσετε τούς συντελεστές α, β, γ, δ ὥστε νά ἰσχύει:

$$p: \quad \forall\ \nu \in N,\ f(1) + f(2) + \cdots + f(\nu) = \nu^2(\nu^2 + 1).$$

ii) Ἀφοῦ προσδιορίσετε τούς συντελεστές τοῦ $f(x)$ νά ἀποδείξετε στή συνέχεια μέ τή μέθοδο τῆς τέλειας ἐπαγωγῆς τήν πρόταση p.

ΔΙΑΙΡΕΤΟΤΗΤΑ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

§ 115. Τέλεια διαίρεση.— Ἔστω ὅτι $f(x)$ καί $\varphi(x)$ εἶναι δύο ἀκέραια πολυώνυμα τοῦ $\mathbf{C}[x]$. Δίνουμε τούς ἑπόμενους ὁρισμούς:

Ὁρισμός 1. *Θά λέμε ὅτι τό $\varphi(x)$* **διαιρεῖ** *τό πολυώνυμο $f(x)$* καί συμβολίζουμε τοῦτο μέ $\varphi(x)/f(x)$, *τότε καί μόνο τότε, ἄν $\varphi(x) \not\equiv 0$ καί ὑπάρχει ἀκέραιο πολυώνυμο $\pi(x) \in \mathbf{C}[x]$ τέτοιο, ὥστε νά ἰσχύει:* $\mathbf{f(x) \equiv \varphi(x)\pi(x)}$.

Γιά συντομία λοιπόν γράφουμε:

$$\boxed{\varphi(x)/f(x) \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} \varphi(x) \not\equiv 0 \wedge \exists\ \pi(x) \in \mathbf{C}[x] : f(x) \equiv \varphi(x)\pi(x)} \qquad (1)$$

Σ' αὐτή τήν περίπτωση λέμε ἐπίσης ὅτι: τό $f(x)$ *διαιρεῖται* ἤ *εἶναι διαιρετό* ἀπό τό $\varphi(x)$, ἤ τό $f(x)$ εἶναι *πολλαπλάσιο* τοῦ $\varphi(x)$ ἤ ἀκόμη τό $\varphi(x)$ εἶναι *διαιρέτης* τοῦ $f(x)$.

Ἡ πράξη μέ τήν ὁποία βρίσκεται τό $\pi(x)$ λέγεται, ὅπως ξέρουμε, *τέλεια διαίρεση* τοῦ $f(x)$ διά τοῦ $\varphi(x) \not\equiv 0$ καί συμβολίζεται μέ $f(x) : \varphi(x)$.

Σέ μιά τέλεια διαίρεση τά πολυώνυμα $f(x)$, $\varphi(x)$ καί $\pi(x)$ ὀνομάζονται ἀντιστοίχως **διαιρετέος, διαιρέτης** καί **πηλίκο** τῆς $f(x) : \varphi(x)$.

Γιά νά δηλώσουμε ὅτι τό πολυώνυμο $\varphi(x) \not\equiv 0$ δέ διαιρεῖ τό $f(x)$ γράφουμε: $\varphi(x) \nmid f(x)$ καί διαβάζουμε: τό $\varphi(x)$ δέ διαιρεῖ τό (δέν εἶναι διαιρέτης τοῦ) $f(x)$.

Ἀπό τήν (1) συμπεραίνουμε ὅτι: ἄν $f(x) \equiv 0$ καί $\varphi(x) \not\equiv 0$, τότε $\varphi(x)/f(x)$ μέ $\pi(x) \equiv 0$. Δηλαδή: *τό μηδενικό πολυώνυμο διαιρεῖται ἀπό κάθε μή μηδενικό πολυώνυμο $\varphi(x)$ καί δίνει πηλίκο μηδέν.*

Προσέξτε! τό μηδενικό πολυώνυμο **δέ** διαιρεῖ κανένα πολυώνυμο.

Ἄμεσες συνέπειες τοῦ ὁρισμοῦ 1 εἶναι καθεμία ἀπό τίς ἑπόμενες ἀληθεῖς προτάσεις:

α) *Κάθε πολυώνυμο f(x) διαιρεῖται ἀπό κάθε σταθερό ἀλλά μή μηδενικό πολυώνυμο $\varphi(x) = c$ $(c \neq 0)$*.*

Πράγματι, ἄν $f(x) \equiv \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$, ἔχουμε τήν ταυτότητα:

$$\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0 \equiv c \cdot \left\{\frac{\alpha_\nu}{c}x^\nu + \frac{\alpha_{\nu-1}}{c}x^{\nu-1} + \cdots + \frac{\alpha_1}{c}x + \frac{\alpha_0}{c}\right\},$$

ὅπου τό ἀκέραιο πολυώνυμο μέσα στά ἄγκιστρα εἶναι τό πηλίκο.

β) *Κάθε πολυώνυμο $f(x) \not\equiv 0$ εἶναι διαιρέτης τοῦ ἑαυτοῦ του.*

γ) *Ὁ βαθμός τοῦ πηλίκου ἰσοῦται μέ τή διαφορά τῶν βαθμῶν διαιρετέου καί διαιρέτη.* Πράγματι, ἄν $\varphi(x)/f(x)$ καί εἶναι $f(x) \not\equiv 0$, τότε ἀπό τήν (1) ἔχουμε: $f(x) \equiv \varphi(x)\cdot\pi(x)$ καί $\pi(x) \not\equiv 0$. Τότε ὅμως, σύμφωνα μέ τή (12) τῆς § 111, θά ἔχουμε: βαθμ.f(x) = βαθμ.φ(x) + βαθμ.π(x) καί συνεπῶς:

$$\boxed{\text{βαθμ.}\pi(x) = \text{βαθμ.}f(x) - \text{βαθμ.}\varphi(x)} \qquad (2)$$

Σχόλιο. Ἀπό τή (2) καί ἐπειδή $\pi(x) \not\equiv 0$, ὁπότε βαθμ.π(x) ≥ 0, λαμβάνουμε: βαθμ.f(x) $\geq$ βαθμ.φ(x). Ἄν πάλι εἶναι $\pi(x) \equiv 0$, τότε καί $f(x) \equiv 0$.

Προσέξτε! ἡ μοναδική περίπτωση νά ἔχει ἕνα πολυώνυμο f(x), βαθμοῦ τό πολύ ν, διαιρέτη μέ βαθμό μεγαλύτερο τοῦ ν, εἶναι ὅταν $\mathbf{f(x) \equiv 0}$.

δ) *Ἄν $\varphi(x)/f(x)$, τότε $f(x) \equiv 0(x)$ ἤ βαθμ.$f(x) \geq$ βαθμ.$\varphi(x)$.*

Αὐτό προκύπτει ἀμέσως ἄν λάβουμε ὑπόψη τό παραπάνω σχόλιο.

ε) *Τό πηλίκο π(x) τῆς τέλειας διαιρέσεως f(x) : φ(x) εἶναι μοναδικό.*

Πράγματι, ἄν ὑπῆρχε καί ἄλλο πηλίκο $\pi_1(x) \in \mathbf{C}[x]$ τῆς τέλειας διαιρέσεως $f(x) : \varphi(x)$ θά εἴχαμε: $f(x) \equiv \varphi(x)\,\pi(x) \wedge f(x) \equiv \varphi(x)\,\pi_1(x)$. Ἀπ' αὐτή τή σύζευξη βρίσκουμε: $\varphi(x)\pi_1(x) \equiv \varphi(x)\,\pi(x)$ καί ἐπειδή $\varphi(x) \not\equiv 0$ θά εἶναι $\pi_1(x) \equiv \pi(x)$(βλ. Πόρισμα 2, § 111).

στ) *Ἡ σχέση τῆς διαιρετότητας δύο πολυωνύμων εἶναι μεταβατική.*

Δηλαδή: ἄν $\varphi(x)/f(x)$ καί $f(x)/g(x)$, τότε $\varphi(x)/g(x)$.

Πράγματι, ἀπό τή σύζευξη: $f(x) \equiv \varphi(x)\,\pi_1(x) \wedge g(x) \equiv f(x)\pi_2(x)$ ἕπεται: $g(x) \equiv \varphi(x)\,[\pi_1(x)\cdot\pi_2(x)]$.

ζ) *Γιά $\sigma(x) \not\equiv 0$ ἰσχύει: $\varphi(x)/f(x) \Longleftrightarrow \varphi(x)\sigma(x)/f(x)\sigma(x)$.*

Ἡ ἀπόδειξη εἶναι ἁπλή καί γι' αὐτό τήν παραλείπουμε.

Προσέξτε ἰδιαίτερα τήν περίπτωση: $\sigma(x) \equiv c \neq 0$.

η) *Ἄν $\varphi(x)/f(x)$, τότε $\varphi(x)/f(x)\cdot\sigma(x)$ $\forall$ $\sigma(x) \in \mathbf{C}[x]$.*

Πράγματι, ἀπό τήν: $f(x) \equiv \varphi(x)\pi(x)$, ἕπεται: $f(x)\sigma(x) \equiv \varphi(x)[\pi(x)\sigma(x)]$.

Παρατήρηση. Γιά $\sigma(x) \equiv c$ ἰσχύει: $\varphi(x)\,|f(x) \Rightarrow c\varphi(x)\,|c\cdot f(x)$, $c \in \mathbf{C}$. Ἐξάλλου γιά $\sigma(x) \equiv c \neq 0$ ἰσχύει: $\varphi(x)\,|f(x) \Longrightarrow c\cdot\varphi(x)\,|f(x)$.

θ) *Ἄν $\varphi(x)/f_1(x)$ καί $\varphi(x)/f_2(x)$, τότε: $\varphi(x)/f_1(x) \pm f_2(x)$.*

---

* Τό γράμμα c εἶναι τό πρῶτο γράμμα τῆς λέξεως constant = σταθερά καί δέν πρέπει νά συγχέεται μέ τό σύμβολο **C** πού παριστάνει τό σύνολο τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν (Complex numbers).

Πράγματι, ἀπό τή σύζευξη: $f_1(x) \equiv \varphi(x)\pi_1(x) \wedge f_2(x) \equiv \varphi(x)\pi_2(x)$ ἕπεται: $f_1(x) \pm f_2(x) \equiv \varphi(x)\cdot[\pi_1(x) \pm \pi_2(x)]$ καί ἐπειδή $\varphi(x) \not\equiv 0$ εἶναι:

$$\varphi(x)/f_1(x) \pm f_2(x).$$

Μέ τόν ἴδιο ἀκριβῶς τρόπο ἀποδεικνύεται καί ἡ πρόταση:

i) *Ἄν $\varphi_1(x)/f_1(x)$ καί $\varphi_2(x)/f_2(x)$, τότε: $\varphi_1(x)\varphi_2(x)/f_1(x)f_2(x)$.*

Ἄμεσες τώρα συνέπειες τῶν παραπάνω προτάσεων εἶναι οἱ ἑξῆς:

ια) *Ἄν τό $\varphi(x)$ διαιρεῖ καθένα ἀπό τά πολυώνυμα: $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_\nu(x)$, τότε $\varphi(x)/c_1f_1(x) + c_2f_2(x) + \cdots + c_\nu f_\nu(x)$, ὅπου $c_1, c_2, \cdots, c_\nu \in \mathbf{C}$.*

ιβ) *Ἄν $\varphi(x)/f_1(x) \pm f_2(x)$ καί $\varphi(x)/f_1(x)$, τότε $\varphi(x)/f_2(x)$.*

ιγ) *Ἄν $\varphi(x)/f_1(x)$ καί $\varphi(x)/f_2(x)$, τότε $\varphi(x)/f_1(x)\sigma_1(x) \pm f_2(x)\sigma_2(x)$, $\forall\ \sigma_1(x), \sigma_2(x) \in \mathbf{C}[x]$.*

ιδ) *$\varphi(x)/f_1(x) \vee \varphi(x)/f_2(x) \vee \cdots \vee \varphi(x)/f_\nu(x) \Rightarrow \varphi(x)/f_1(x)f_2(x)\cdots f_\nu(x)$.*

ιε) *Ἄν $\varphi(x)/f(x)$, τότε $\varphi(x)/[f(x)]^\nu\ \forall\ \nu \in \mathbf{N}$.*

Μία ἀξιόλογη πρόταση πάνω στή διαιρετότητα τῶν πολυωνύμων εἶναι ἡ ἑξῆς:

ιστ) *Ἄν $\varphi(x)/f(x)$ καί $f(x)/\varphi(x)$, τότε $f(x) \equiv c\cdot\varphi(x)$, ὅπου c κατάλληλη σταθερά διάφορη τοῦ μηδενός.*

Ἀπόδειξη. Πράγματι, ἀπό τή σύζευξη: $f(x) \equiv \varphi(x)\pi_1(x) \wedge \varphi(x) \equiv f(x)\pi_2(x)$ λαμβάνουμε: $f(x) \equiv f(x).\pi_1(x)\pi_2(x)$ καί ἐπειδή $f(x) \not\equiv 0$ εἶναι: $\pi_1(x)\pi_2(x) \equiv 1$. Τότε ὅμως: βαθμ.$\pi_1(x)$ + βαθμ.$\pi_2(x)$ = βαθμ.$1 = 0$. Ἀλλά βαθμ.$\pi_1(x) \geq 0$, βαθμ.$\pi_2(x) \geq 0$. Ἄρα βαθμ. $\pi_1(x)$ = βαθμ.$\pi_2(x) = 0$ καί συνεπῶς: $\pi_1(x) = c_1$ καί $\pi_2(x) = c_2$, ὅπου $c_1, c_2 \in \mathbf{C} - \{0\}$. Τότε ὅμως ἔχουμε:

$$f(x) \equiv c_1\cdot\varphi(x) \quad \text{καί} \quad \varphi(x) \equiv c_2\cdot f(x) \Longleftrightarrow f(x) \equiv \frac{1}{c_2}\varphi(x).$$

Δηλαδή:
$$f(x) \equiv c\cdot\varphi(x).$$

Ἀπό τίς παραπάνω προτάσεις συμπεραίνουμε τώρα ὅτι: διαιρέτες ἑνός ὁποιουδήποτε ἀκέραιου πολυωνύμου $f(x)$ εἶναι τά πολυώνυμα μηδενικοῦ βαθμοῦ, δηλ. τά $\neq 0$ στοιχεῖα τοῦ $\mathbf{C}$, ἐπίσης τό ἴδιο τό $f(x)$, ἄν $f(x) \not\equiv 0$ καθώς καί ὅλα τά πολυώνυμα τῆς μορφῆς: $cf(x)$, $(c \neq 0)$. Οἱ διαιρέτες αὐτοί ὀνομάζονται **προφανεῖς διαιρέτες** τοῦ $f(x)$. Κάθε ἄλλος διαιρέτης τοῦ $f(x)$ ὀνομάζεται **γνήσιος διαιρέτης** τοῦ πολυωνύμου $f(x)$.

Τελειώνοντας αὐτή τήν παράγραφο δίνουμε καί τούς ἑπόμενους ὁρισμούς:

Ὁρισμός 2. *Ἕνα πολυώνυμο $f(x) \in \mathbf{C}[x]$ βαθμοῦ $\nu > 0$ ὀνομάζεται* ***ἀνάγωγο,*** *τότε καί μόνο τότε, ἄν ἔχει μόνο προφανεῖς διαιρέτες.*

Γιά τήν Ἄλγεβρα τά ἀνάγωγα πολυώνυμα εἶναι ὅτι οἱ πρῶτοι ἀριθμοί στήν Ἀριθμητική. Στό σύνολο $\mathbf{C}[x]$ τά μόνα ἀνάγωγα πολυώνυμα εἶναι τά πολυώνυμα πρώτου βαθμοῦ: $\alpha x + \beta$, $\alpha \neq 0$, ἐνῶ στό σύνολο $\mathbf{R}[x]$ ἀνάγωγα πολυώνυμα εἶναι τά: $\alpha x + \beta$, μέ $\alpha \neq 0$ καθώς καί τά πολυώνυμα δεύτερου βαθμοῦ (τριώνυμα) μέ μιγαδικές ρίζες.

Ὁρισμός 3. *Ἕνα πολυώνυμο $\sigma(x) \in \mathbf{C}[x]$ ὀνομάζεται* ***κοινός διαιρέτης*** *τῶν πολυωνύμων $f(x)$, $g(x)$, τότε καί μόνο τότε, ἄν διαιρεῖ καί τά δύο πολυώνυμα $f(x), g(x)$.*

Ὁρισμός 4. *Ἕνα πολυώνυμο $\delta(x) \in \mathbf{C}[x]$ ὀνομάζεται* **μέγιστος κοινός διαιρέτης** (συντομ. ΜΚΔ) *δύο μή μηδενικῶν πολυωνύμων $f(x), g(x) \in \mathbf{C}[x]$, τότε καί μόνο τότε, ἄν:*

(i) *εἶναι κοινός διαιρέτης τῶν $f(x), g(x)$*

(ii) *τό $\delta(x)$ διαιρεῖται ἀπό κάθε ἄλλο κοινό διαιρέτη τῶν $f(x), g(x)$*

(iii) *ὁ πρῶτος συντελεστής του εἶναι τό 1.*

Εὔκολα τώρα μπορεῖ νά ἀποδείξει κανείς ὅτι: ὁ μέγιστος κοινός διαιρέτης δύο πολυωνύμων, ἄν ὑπάρχει, εἶναι μοναδικός.

Ἀπό τή συνθήκη (ii) τοῦ παραπάνω ὁρισμοῦ συμπεραίνουμε ὅτι ὁ βαθμός τοῦ $\delta(x)$ εἶναι ὁ πιό μεγάλος (μέγιστος) ἀνάμεσα στούς βαθμούς ὅλων τῶν κοινῶν διαιρετῶν τῶν πολυωνύμων $f(x), g(x)$. Σ' αὐτό ἀκριβῶς τό γεγονός ὀφείλεται καί ἡ ὀνομασία του: ΜΚΔ.

Τό μέγιστο κοινό διαιρέτη $\delta(x)$ δύο πολυωνύμων $f(x), g(x)$ τόν παριστάνουμε συνήθως ὡς ἑξῆς: $[f(x), g(x)]$.

Ὁρισμός 5. *Δύο μή μηδενικά πολυώνυμα $f(x), g(x)$ ὀνομάζονται* **«πρῶτα μεταξύ τους»**, *τότε καί μόνο τότε, ἄν ὁ ΜΚΔ τους $\delta(x)$ εἶναι ἴσος μέ τό 1.*

Ὥστε: $\boxed{\mathbf{f(x), g(x)} \text{ πρῶτα μεταξύ τους } \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} \mathbf{[f(x), g(x)] = 1}}$

§ 116. Ἡ ταυτότητα τῆς ἀλγοριθμικῆς διαιρέσεως.

—Γενικά ἡ διαίρεση δύο ἀκέραιων πολυωνύμων δέν εἶναι τέλεια. Ἕνας τρόπος γιά νά ἐλέγχουμε, ἄν ἕνα πολυώνυμο διαιρεῖ ἕνα ἄλλο, εἶναι ὁ ἀκόλουθος:

Ἔστω, π.χ., τά πολυώνυμα $2x^2 - 7x + 6$ καί $3x + 1$. Γιά νά διαιρεῖ τό δεύτερο πολυώνυμο τό πρῶτο, πρέπει νά ὑπάρχει ἀκέραιο πολυώνυμο $\pi(x)$ τέτοιο, ὥστε:

$$2x^2 - 7x + 6 \equiv (3x + 1) \cdot \pi(x) \qquad (1)$$

Ἐπειδή, ὅπως εἴπαμε (§ 115), ὁ βαθμός τοῦ πηλίκου ἰσοῦται μέ τή διαφορά τῶν βαθμῶν διαιρετέου καί διαιρέτη, συμπεραίνουμε ὅτι τό $\pi(x)$ πρέπει νά εἶναι πρώτου βαθμοῦ, δηλαδή νά ἔχει τή μορφή: $\alpha x + \beta$. Τότε ἡ (1) γίνεται:

$$2x^2 - 7x + 6 \equiv (3x + 1)(\alpha x + \beta) \equiv 3\alpha x^2 + (\alpha + 3\beta)x + \beta,$$

ὁπότε, σύμφωνα μέ τόν ὁρισμό τῆς ἰσότητας δύο πολυωνύμων, θά ἔχουμε:

$$\left.\begin{aligned} 3\alpha &= 2 \\ \alpha + 3\beta &= -7 \\ \beta &= 6. \end{aligned}\right|$$

Ἡ πρώτη ἀπ' αὐτές δίνει $\alpha = \frac{2}{3}$. Γιά $\alpha = \frac{2}{3}$ καί $\beta = 6$ ἡ δεύτερη δέν ἀληθεύει, ἐπειδή:

$$\frac{2}{3} + 3 \cdot 6 = \frac{2}{3} + 18 = 18\frac{2}{3} \neq -7.$$

Παρατηροῦμε λοιπόν ὅτι οἱ ἐξισώσεις τοῦ συστήματος δέν εἶναι συμβιβαστές καί συνεπῶς δέν ὑπάρχει ἀκέραιο πολυώνυμο $\pi(x)$ πού νά ἱκανοποιεῖ τήν (1). Ἄρα τό $3x + 1$ δέ διαιρεῖ τό $2x^2 - 7x + 6$.

Ἀπό τό παραπάνω παράδειγμα καταλαβαίνουμε ὅτι ἡ διαίρεση δύο ἀκέραιων πολυωνύμων γενικά δέν εἶναι τέλεια.

Ἔτσι, στή γενική περίπτωση, ἀντί γιά τήν ταυτότητα (1) τῆς § 115, ἰσχύει ἡ ταυτότητα τῆς ἀλγοριθμικῆς διαιρέσεως, τῆς ὁποίας ἡ μορφή δίνεται ἀπό τό παρακάτω σπουδαῖο θεώρημα, πού ἡ διατύπωσή του μᾶς εἶναι γνωστή ἀπό τά μαθήματα τῆς Γ' τάξως τοῦ Γυμνασίου. Ἐδῶ τώρα θά μάθουμε καί νά τό ἀποδεικνύουμε.

Θεώρημα *(τῆς ἀλγοριθμικῆς διαιρέσεως)*.— **Ἄν μᾶς δοθοῦν δύο ἀκέραια πολυώνυμα f(x), φ(x) τοῦ C[x] μέ φ(x) ≢ 0, τότε μποροῦμε πάντοτε νά βροῦμε δύο μονοσημάντως* ὁρισμένα πολυώνυμα π(x), υ(x) ∈ C[x] τέτοια, ὥστε :**

$$\boxed{f(x) \equiv \varphi(x)\cdot\pi(x) + \upsilon(x)} \qquad (\tau)$$

ὅπου υ(x) ≡ 0 ἤ βαθμ.υ(x) < βαθμ.φ(x).

Ἀπόδειξη. Ἔστω ὅτι εἶναι:

$$f(x) \equiv \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

$$\varphi(x) \equiv \beta_\mu x^\mu + \beta_{\mu-1}x^{\mu-1} + \dots + \beta_1 x + \beta_0 \quad \text{μέ} \quad \beta_\mu \neq 0.$$

Θά ἀποδείξουμε: **α)** Τήν ὕπαρξη τῶν π(x) καί υ(x) καί **β)** τό μονοσήμαντο (τή μοναδικότητα) τῶν πολυωνύμων π(x) καί υ(x), τά ὁποῖα ἱκανοποιοῦν τήν (τ).

α) Ὕπαρξη τῶν π(x) καί υ(x). Διακρίνουμε τίς περιπτώσεις:

α_1: Ἔστω ὅτι: **f(x) ≡ 0** ἤ **βαθμ.f(x) < βαθμ.φ(x).** Σ' αὐτή τήν περίπτωση τό θεώρημα ἰσχύει μέ π(x) ≡ 0 καί υ(x) ≡ f(x), καθόσον ἔχουμε:

$$f(x) \equiv 0\cdot\varphi(x) + f(x).$$

α_2: Ἔστω ὅτι: **βαθμ.f(x) = ν ≧ μ = βαθμ.φ(x),** τότε διαιρώντας τόν πρῶτο ὅρο $\alpha_\nu x^\nu$ τοῦ f(x) μέ τόν πρῶτο ὅρο $\beta_\mu x^\mu$ τοῦ φ(x) λαμβάνουμε ὡς πηλίκο τό ἀκέραιο μονώνυμο $\frac{\alpha_\nu}{\beta_\mu}x^{\nu-\mu}$, πού τό ὀνομάζουμε $\pi_1(x)$, δηλαδή:

$$\pi_1(x) \equiv \frac{\alpha_\nu}{\beta_\mu}x^{\nu-\mu}.$$

Πολλαπλασιάζοντας τώρα τό φ(x) ἐπί τό $\pi_1(x)$ λαμβάνουμε ὡς γινόμενο τό πολυώνυμο:

$$\varphi(x)\,\pi_1(x) \equiv \alpha_\nu x^\nu + \frac{\alpha_\nu}{\beta_\mu}\beta_{\mu-1}x^{\nu-1} + \frac{\alpha_\nu}{\beta_\mu}\beta_{\mu-2}x^{\nu-2} + \dots + \frac{\alpha_\nu}{\beta_\mu}\beta_0 x^{\nu-\mu},$$

τό ὁποῖο ἔχει μέ τό f(x) κοινό τόν πρῶτο ὅρο $\alpha_\nu x^\nu$.

Σχηματίζουμε τή διαφορά:

$$f(x) - \varphi(x)\cdot\pi_1(x) \equiv \left(\alpha_{\nu-1} - \frac{\alpha_\nu}{\beta_\mu}\beta_{\mu-1}\right)x^{\nu-1} + \left(\alpha_{\nu-2} - \frac{\alpha_\nu}{\beta_\mu}\beta_{\mu-2}\right)x^{\nu-2} + \dots \qquad (1)$$

Ἄν ὀνομάσουμε $\upsilon_1(x)$ τό πολυώνυμο τοῦ δεύτερου μέλους τῆς (1), ἔχουμε:

$$f(x) - \varphi(x)\pi_1(x) \equiv \upsilon_1(x)$$

ἤ $\quad f(x) \equiv \varphi(x)\pi_1(x) + \upsilon_1(x)$, μέ $\upsilon_1(x) \equiv 0$ ἤ βαθμ.$\upsilon_1(x) \leqq \nu - 1$. (2)

Τότε: (i) Ἄν $\upsilon_1(x) \equiv 0$ ἤ βαθμ.$\upsilon_1(x) \leqq \nu - 1 < \mu$, τότε ἡ (2) ἀποδεικνύει τό θεώρημα.

(ii) Ἄν βαθμ.$\upsilon_1(x) \geqq$ βαθμ.φ(x), ὁπότε ἀπό τήν (2) $\nu - 1 \geqq \mu$, τότε ἐργαζόμενοι ὅπως καί προηγουμένως (περίπτωση α_2), μέ τά πολυώνυμα $\upsilon_1(x)$ καί φ(x) βρίσκουμε ὅτι ὑπάρχει ζεῦγος πολυωνύμων $\pi_2(x)$, $\upsilon_2(x)$, ὥστε:

$$\upsilon_1(x) \equiv \varphi(x)\cdot\pi_2(x) + \upsilon_2(x), \text{ μέ } \upsilon_2(x) \equiv 0 \text{ ἤ βαθμ.} \upsilon_2(x) < \text{βαθμ.} \upsilon_1(x). \qquad (3)$$

---

* δηλαδή ὑπάρχει ἕνα καί **μόνο ἕνα** ζεῦγος πολυωνύμων π(x), υ(x)∈C[x].

Τότε: (i) ἄν $υ_2(x) \equiv 0$ ἤ βαθμ.$υ_2(x) <$ βαθμ.$φ(x)$ τό θεώρημα ἰσχύει, καθόσον ἄν προσθέσουμε κατά μέλη τίς (2) καί (3) λαμβάνουμε:

$$f(x) \equiv φ(x).\{π_1(x) + π_2(x)\} + υ_2(x) \qquad (3')$$

μέ $υ_2(x) \equiv 0$ ἤ βαθμ.$υ_2(x) <$ βαθμ.$φ(x)$.

(ii) Ἄν βαθμ.$υ_2(x) \geqslant μ$ (= βαθμ.$φ(x)$), τότε συνεχίζοντας τήν ἴδια ἐργασία στά $υ_2(x)$ καί $φ(x)$, θά καταλήξουμε σέ μία ταυτότητα τῆς μορφῆς:

$$υ_2(x) \equiv φ(x)\cdot π_3(x) + υ_3(x), \text{ μέ } υ_3(x) \equiv 0 \text{ ἤ βαθμ.} υ_3(x) < \text{βαθμ.} φ(x).$$

Οἱ βαθμοί τῶν $υ_1(x), υ_2(x), υ_3(x)$, ἄν δέν εἶναι μηδενικά πολυώνυμα, ἐλαττώνονται διαδοχικά, ἄρα θά φθάσουμε τελικά σ' ἕνα πολυώνυμο μέ βαθμό μικρότερο ἀπό τό βαθμό μ τοῦ $φ(x)$, ὁπότε καί θά σταματήσει ἡ ἐργασία αὐτή. Ἔτσι θά ἔχουμε τίς ἰσότητες:

$$\begin{aligned} f(x) &\equiv φ(x)π_1(x) + υ_1(x) \\ υ_1(x) &\equiv φ(x)π_2(x) + υ_2(x) \\ υ_2(x) &\equiv φ(x)π_3(x) + υ_3(x) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ υ_κ(x) &\equiv φ(x)π_{κ+1}(x) + υ_{κ+1}(x), \end{aligned} \qquad (4)$$

ὅπου τό $υ_{κ+1}(x)$ εἶναι τό μηδενικό πολυώνυμο ἤ πολυώνυμο μέ βαθμό μικρότερο ἀπό τό βαθμό μ τοῦ $φ(x)$.

Ἀθροίζοντας τίς ἰσότητες (4) κατά μέλη λαμβάνουμε μετά τίς ἁπλοποιήσεις:

$$f(x) \equiv φ(x)\left\{ π_1(x) + π_2(x) + \cdots + π_{κ+1}(x)\right\} + υ_{κ+1}(x).$$

Θέτοντας: $π_1(x) + π_2(x) + \cdots + π_{κ+1}(x) \equiv π(x)$ καί $υ_{κ+1}(x)=υ(x)$, φθάνουμε στήν ταυτότητα πού θέλαμε νά ἀποδείξουμε:

$$f(x) \equiv φ(x)π(x) + υ(x), \text{ μέ } υ(x) \equiv 0 \text{ ἤ βαθμ.} υ(x) < μ \ (\equiv \text{βαθμ.} φ(x)).$$

β) Τό μονοσήμαντο τῶν π(x) καί υ(x) στή (2)

Τό ζεῦγος τῶν πολυωνύμων $π(x)$ καί $υ(x)$ εἶναι τό μόνο γιά τό ὁποῖο ἰσχύει ἡ (τ), γιατί, ἄν εἶναι καί:

$$f(x) \equiv φ(x)\cdot π'(x) + υ'(x), \text{ μέ } υ'(x) \equiv 0 \text{ ἤ βαθμ.} υ'(x) < \text{βαθμ.} φ(x)$$

τότε: $π'(x) \equiv π(x)$ καί $υ'(x) \equiv υ(x)$.

Πράγματι, ἐπειδή:

$$φ(x)\cdot π(x) + υ(x) \equiv φ(x)\cdot π'(x) + υ'(x),$$

ἔχουμε: $$[π(x) - π'(x)]φ(x) \equiv υ'(x) - υ(x). \qquad (5)$$

Τά πολυώνυμα τῶν δύο μελῶν τῆς (5) δέν μπορεῖ νά εἶναι ἐκ ταυτότητας ἴσα παρά μόνο ἄν: $π(x) - π'(x) \equiv 0$, ὁπότε: $υ'(x) - υ(x) \equiv 0$, δηλαδή: $π(x) \equiv π'(x)$ καί $υ(x) \equiv$ $\equiv υ'(x)$, γιατί ἀλλιῶς, δηλαδή ἄν $π(x) \not\equiv π'(x)$, τότε ἐπειδή εἶναι $φ(x) \not\equiv 0$ ὁ βαθμός τοῦ πολυωνύμου τοῦ πρώτου μέλους τῆς (5) εἶναι $\geq$ βαθμ.$φ(x) = μ$, ἐνῶ τό πολυώνυμο τοῦ δεύτερου μέλους τῆς (5) εἶναι βαθμοῦ τό πολύ $(μ - 1)$. Αὐτό ὅμως, σύμφωνα μέ τό γενικό ὁρισμό τῆς ἰσότητας δύο πολυωνύμων (§ 110), εἶναι ἀδύνατο (βλ. καί σχόλιο τῆς § 115). Ἄρα $π(x) \equiv π'(x)$ καί συνεπῶς $υ(x) \equiv υ'(x)$.

Ἀξιόλογες παρατηρήσεις. 1) Ὁ τρόπος ἀποδείξεως τοῦ πρώτου μέρους τοῦ θεωρήματος πού ἀφοροῦσε τήν ὕπαρξη τῶν $π(x)$ καί $υ(x)$ μᾶς δείχνει ταυτόχρονα καί τόν τρόπο μέ τόν ὁποῖο μποροῦμε νά βροῦμε τά (μοναδικά) πολυώνυμα $π(x)$ καί $υ(x)$.

2) Ἡ εὕρεση τῶν $π(x)$ καί $υ(x)$ ὀνομάζεται **ἀλγοριθμική** ἤ **Εὐκλείδια διαίρεση** τοῦ $f(x)$ διά τοῦ $φ(x)$ [συμβ. $f(x) : φ(x)$]. Τά πολυώνυμα: $f(x)$, $φ(x)$, $π(x)$ καί $υ(x)$ γιά τά ὁποῖα ἰσχύει ἡ (τ), ἡ ὁποία ὀνομάζεται **ταυτότητα τῆς (ἀλγοριθμικῆς) διαιρέσεως** $f(x):φ(x)$, ὀνομάζονται ἀντίστοιχα: *διαιρετέος, διαιρέτης, ἀλγοριθμικό* ἤ *ἀκέραιο πηλίκο* (σύντομα: πηλίκο) καί *ὑπόλοιπο* τῆς διαιρέσεως $f(x) : φ(x)$.

Προσέξτε! σέ μία ἀλγοριθμική διαίρεση $f(x) : \varphi(x)$ τό $\varphi(x)$ ὀνομάζεται, ὅπως εἴπαμε, διαιρέτης τῆς διαιρέσεως καί ὄχι διαιρέτης τοῦ $f(x)$.

3) Ἄν $\upsilon(x) \equiv 0$, τότε καί μόνο τότε ἡ διαίρεση $f(x) : \varphi(x)$ λέγεται *τέλεια* (§ 115).

4) Ὁ βαθμός τοῦ ἀκέραιου πηλίκου τῆς διαιρέσεως $f(x) : \varphi(x)$ δύο μή μηδενικῶν πολυωνύμων ἰσοῦται μέ τή διαφορά τῶν βαθμῶν διαιρετέου καί διαιρέτη, δηλαδή

$$\beta\alpha\theta\mu.\pi(x) = \beta\alpha\theta\mu.f(x) - \beta\alpha\theta\mu.\varphi(x).$$

5) Ἀπό τήν (τ) προκύπτει: $\varphi(x) \mid f(x) - \upsilon(x)$.

6) Ἀπό τόν τρόπο ἀποδείξεως τοῦ παραπάνω θεωρήματος καί κυρίως ἀπό τίς σχέσεις (2) καί (3') καταλαβαίνουμε ὅτι: γιά νά συμπεράνουμε ἀπό τήν ταυτότητα: $f(x) \equiv \varphi(x)\cdot\pi(x) + \upsilon(x)$ ὅτι τά $\pi(x)$ καί $\upsilon(x)$ εἶναι ἀντιστοίχως τό πηλίκο καί τό ὑπόλοιπο τῆς $f(x) : \varphi(x)$ πρέπει ἀκόμη νά ξέρουμε ὅτι: $\upsilon(x) \equiv 0$ ἤ $\beta\alpha\theta\mu.\upsilon(x) < \beta\alpha\theta\mu.\varphi(x)$.

7) Τά πολυώνυμα $\pi_1(x), \pi_2(x), \ldots, \pi_{k+1}(x)$ πού παρουσιάζονται στίς σχέσεις (4) τοῦ παραπάνω θεωρήματος ὀνομάζονται **μερικά πηλίκα** καί τά $\upsilon_1(x), \upsilon_2(x), \ldots, \upsilon_k(x)$ ὀνομάζονται **μερικά ὑπόλοιπα** τῆς διαιρέσεως $f(x) : \varphi(x)$.

8) Ἄν τά $f(x), \varphi(x) \in \mathbf{R}[x]$ ἀντίστοιχα $Q[x]$, τότε καί τά $\pi(x), \upsilon(x) \in \mathbf{R}[x]$ ἀντίστοιχα $Q(x)$, ἐνῶ ἄν τά $f(x), \varphi(x) \in \mathbf{Z}[x]$ καί εἶναι $\beta_\mu = \pm 1$, τότε καί τά $\pi(x), \upsilon(x) \in \mathbf{Z}[x]$.

Ἄμεσες συνέπειες τοῦ θεωρήματος τῆς ἀλγοριθμικῆς διαιρέσεως εἶναι οἱ ἑπόμενες ἀληθεῖς προτάσεις:

Πόρισμα 1ο: Τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως ἑνός ἀκέραιου πολυωνύμου $f(x) \in C[x]$ διά τοῦ διωνύμου $x - \alpha$, $\alpha \in C$ εἶναι $f(\alpha)$ καί συνεπῶς ἔχουμε τήν ταυτότητα:

$$\boxed{f(x) \equiv (x - \alpha)\,\pi(x) + f(\alpha)} \qquad (1)$$

Ἀπόδειξη. Ἔχουμε: $f(x) \equiv (x - \alpha)\,\pi(x) + \upsilon(x)$ μέ $\upsilon(x) \equiv 0$ ἤ $\beta\alpha\theta\mu.\upsilon(x) < \beta\alpha\theta\mu.(x-\alpha) = 1$. Ἄρα $\upsilon(x) = c$. Ἔχουμε συνεπῶς: $\forall\ x \in C$, $f(x) = (x-\alpha)\,\pi(x) + c$. Ἀπ' αὐτή γιά $x = \alpha$ λαμβάνουμε: $c \doteq f(\alpha)$.

Ἄρα: $$f(x) \equiv (x-\alpha)\pi(x) + f(\alpha).$$

Σημείωση. Ἀπό τήν (1) ἔχουμε: $f(x) - f(\alpha) = (x-\alpha)\pi(x)$.

Μέ τόν ἴδιο τρόπο ἀποδεικνύεται καί ἡ ἑπόμενη, πιό γενική, πρόταση:

Πόρισμα 2ο: Τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως $f(x) : \alpha x + \beta$, μέ $\alpha \neq 0$ εἶναι:

$$\boxed{\upsilon = f\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)} \qquad (2)$$

Ἔχοντας τώρα ὑπόψη τόν ὁρισμό τῆς ρίζας ἑνός ἀκέραιου πολυωνύμου καί τό πιό πάνω πόρισμα 1 συμπεραίνουμε ἀμέσως τό ἑπόμενο πόρισμα:

Πόρισμα 3ο: Ἕνα πολυώνυμο $f(x) \in C[x]$ διαιρεῖται διά τοῦ διωνύμου $x - \rho$, $\rho \in C$, τότε καί μόνο τότε, ἄν τό ρ εἶναι ρίζα τοῦ $f(x)$.

Δηλαδή: $$\boxed{x - \rho / f(x) \iff f(\rho) = 0} \qquad (3)$$

Παρατήρηση. Ἔχοντας ὑπόψη καί τόν ὁρισμό 1 τῆς § 115 ἡ (3) γράφεται πιό γενικά ὡς ἑξῆς:

$$\boxed{f(\rho) = 0 \iff x-\rho/f(x) \iff f(x) \equiv (x-\rho)\pi(x)} \qquad (3')$$

ὅπου $\pi(x)$ ἀκέραιο πολυώνυμο τοῦ $C[x]$.

Ἀποδεικνύουμε παρακάτω δύο χαρακτηριστικές προτάσεις πού εἶναι ἄμεσες συνέπειες τοῦ θεωρήματος τῆς ἀλγοριθμικῆς διαιρέσεως καί τοῦ τελευταίου πορίσματος:

§ 117. Πρόταση Ι.—Ἄν $\upsilon_1(x)$ καί $\upsilon_2(x)$ εἶναι τά ὑπόλοιπα τῶν διαιρέσεων $f_1(x)$: $\delta(x)$ καί $f_2(x) : \delta(x)$, $\delta(x) \not\equiv 0$, ἀντιστοίχως, τότε ἰσχύει:

$$\delta(x)/f_1(x) - f_2(x) \iff \upsilon_1(x) \equiv \upsilon_2(x)$$

Ἀπόδειξη. Ἄν $\pi_1(x)$, $\pi_2(x)$ εἶναι ἀντιστοίχως τά πηλίκα τῶν διαιρέσεων $f_1(x) : \delta(x)$ καί $f_2(x) : \delta(x)$ θά ἔχουμε, σύμφωνα μέ τό προηγούμενο θεώρημα:

$$f_1(x) \equiv \delta(x)\pi_1(x) + \upsilon_1(x), \text{ μέ } \upsilon_1(x) \equiv 0 \text{ ἤ } \text{βαθμ.}\upsilon_1(x) < \text{βαθμ.}\delta(x) \qquad (1)$$

$$f_2(x) \equiv \delta(x)\pi_2(x) + \upsilon_2(x), \text{ μέ } \upsilon_2(x) \equiv 0 \text{ ἤ } \text{βαθμ.}\upsilon_2(x) < \text{βαθμ.}\delta(x) \qquad (2)$$

Ἀπό τίς (1) καί (2) λαμβάνουμε:

$$f_1(x) - f_2(x) \equiv \delta(x)[\pi_1(x) - \pi_2(x)] + \upsilon_1(x) - \upsilon_2(x) \qquad (3)$$

(i) Ἔστω τώρα ὅτι $\delta(x) \mid f_1(x) - f_2(x)$. Τότε (§ 115): $f_1(x) - f_2(x) \equiv \delta(x)\pi(x)$, (4) ὅπου $\pi(x) \in C[x]$. Ἀπό τήν (4) καταλαβαίνουμε ὅτι ἡ διαίρεση: $f_1(x) - f_2(x) : \delta(x)$ εἶναι τέλεια καί συνεπῶς (§ 116, παρατήρηση 3) $\upsilon_1(x) - \upsilon_2(x) \equiv 0$, ὁπότε: $\upsilon_1(x) \equiv \upsilon_2(x)$.

(ii) Ἔστω ὅτι $\upsilon_1(x) \equiv \upsilon_2(x)$, τότε ἀπό τήν (3) ἔχουμε:

$f_1(x) - f_2(x) \equiv \delta(x)\cdot[\pi_1(x) - \pi_2(x)]$ καί συνεπῶς (§ 115) : $\delta(x) \mid f_1(x) - f_2(x)$.

Πόρισμα.— Σέ κάθε ἀλγοριθμική διαίρεση $f(x)$: $\varphi(x)$ ὁ διαιρετέος $f(x)$ καί τό ὑπόλοιπο $\upsilon(x)$ ὅταν διαιρεθοῦν μέ τό διαιρέτη $\varphi(x)$ ἀφήνουν τό ἴδιο ὑπόλοιπο.

Αὐτό εἶναι ἄμεση συνέπεια τῆς παραπάνω προτάσεως καί τοῦ γεγονότος ὅτι ἰσχύει:

$$f(x) \equiv \varphi(x)\cdot\pi(x) + \upsilon(x) \iff f(x) - \upsilon(x) \equiv \varphi(x)\pi(x) \iff \varphi(x)/f(x) - \upsilon(x).$$

§ 118. Πρόταση ΙΙ.— Ἀκέραιο πολυώνυμο $f(x)$, βαθμοῦ $\geqq \nu$, $\nu \in N$ διαιρεῖται διά τοῦ $(x-\alpha)^\nu$, τότε καί μόνο τότε, ἄν:

$$f(\alpha) = 0, \quad f_1(\alpha) = 0, \quad f_2(\alpha) = 0, \ldots, f_{\nu-1}(\alpha) = 0,$$

ὅπου $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_{\nu-1}(x)$ εἶναι ἀντιστοίχως τά πηλίκα τῶν διαιρέσεων:

$$f(x) : (x-\alpha), \quad f_1(x) : (x-\alpha), \quad \ldots, \quad f_{\nu-2}(x) : (x-\alpha).$$

Ἀπόδειξη. Ἔστω $\varphi(x)$ τό πηλίκο τῆς διαιρέσεως τοῦ $f(x)$ διά τοῦ $(x-\alpha)^\nu$. Τότε ἔχουμε:

$$f(x) \equiv (x-\alpha)^\nu \cdot \varphi(x) \qquad (1)$$

Γιά $x = \alpha$ ἡ (1) δίνει $f(\alpha) = 0$, καί συνεπῶς (§ 116, Πόρισμα 3) τό $f(x)$ διαιρεῖται διά $x-\alpha$. Ἄν $f_1(x)$ εἶναι τό πηλίκο τῆς διαιρέσεως τοῦ $f(x)$ διά $x-\alpha$, τότε, διαιρώντας τά δύο μέλη τῆς (1) διά $x-\alpha$, λαμβάνουμε τήν ταυτότητα:

$$f_1(x) \equiv (x-\alpha)^{\nu-1}\cdot\varphi(x) \qquad (2)$$

Γιά $x = \alpha$ ἡ (2) δίνει $f_1(\alpha) = 0$, πού σημαίνει ὅτι τό $f_1(x)$ διαιρεῖται διά $x-\alpha$. Ἄν $f_2(x)$ εἶναι τό πηλίκο τῆς διαιρέσεως $f_1(x) : x-\alpha$, τότε, διαιρώντας τά δύο μέλη τῆς (2) διά $x-\alpha$, λαμβάνουμε τήν ταυτότητα: $\quad f_2(x) \equiv (x-\alpha)^{\nu-2}\cdot\varphi(x) \qquad (3)$

Γιά $x = \alpha$ ἡ (3) δίνει $f_2(\alpha) = 0$, πού σημαίνει ὅτι τό $f_2(x)$ διαιρεῖται διά $x - \alpha$.

Ἄν προχωρήσουμε μέ τόν ἴδιο τρόπο, βρίσκουμε ὅτι τό πηλίκο τῆς $\nu - 1$ τάξεως εἶναι:

$$f_{\nu-1}(x) \equiv (x - \alpha)\cdot\varphi(x) \qquad (\nu)$$

Γιά $x = \alpha$ ἡ (ν) γίνεται $f_{\nu-1}(\alpha) = 0$, δηλαδή τό πολυώνυμο $f_{\nu-1}(x)$ διαιρεῖται διά $x - \alpha$.

Ἀντιστρόφως: Ἐπειδή $f(\alpha) = 0$, $f_1(\alpha) = 0$, $\dots$, $f_{\nu-1}(\alpha) = 0$, σύμφωνα μέ τό πόρισμα 3 τῆς § 116 θά ἔχουμε:

$$\begin{aligned} f(x) &\equiv (x-\alpha)f_1(x) \\ f_1(x) &\equiv (x-\alpha)f_2(x) \\ f_2(x) &\equiv (x-\alpha)f_3(x) \\ &\dots\dots\dots \\ f_{\nu-1}(x) &\equiv (x-\alpha)f_\nu(x) \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζοντας τίς σχέσεις αὐτές κατά μέλη, λαμβάνουμε τήν ταυτότητα:

$$f(x) \equiv (x - \alpha)^\nu f_\nu(x),$$

πού φανερώνει ὅτι τό πολυώνυμο $f(x)$ διαιρεῖται διά $(x - \alpha)^\nu$.

Ἐφαρμογή. Ἄν ν εἶναι φυσικός ἀριθμός, νά ἀποδείξετε ὅτι τό πολυώνυμο:

$$f(x) = \nu x^{\nu+1} - (\nu + 1)x^\nu + 1$$

διαιρεῖται διά τοῦ $(x - 1)^2$.

Λύση. Γιά $x = 1$ ἔχουμε: $f(1) = \nu - (\nu + 1) + 1 = 0$. Ἄρα τό $f(x)$ διαιρεῖται διά τοῦ $(x - 1)$. Κάνοντας τή διαίρεση $f(x) : (x - 1)$ βρίσκουμε πηλίκο: $f_1(x) \equiv \nu x^\nu - (x^{\nu-1} + x^{\nu-2} + \dots + x + 1)$ καί συνεπῶς ἔχουμε τήν ταυτότητα:

$$f(x) \equiv (x - 1)\cdot f_1(x) \ . \qquad (1)$$

Παρατηροῦμε τώρα ὅτι: $f_1(1) = \nu - (1 + 1 + \dots + 1 + 1) = \nu - \nu = 0$. Ἄρα τό $f_1(x)$ διαιρεῖται διά τοῦ $(x - 1)$ καί συνεπῶς, ἄν $\pi(x)$ εἶναι τό πηλίκο τῆς τέλειας διαιρέσεως $f_1(x) : (x - 1)$, θά ἔχουμε τήν ταυτότητα:

$$f_1(x) \equiv (x - 1)\pi(x) \qquad (2)$$

Ἡ (1), λόγω τῆς (2), γίνεται: $f(x) \equiv (x - 1)^2\pi(x)$ πού φανερώνει ὅτι τό πολυώνυμο $f(x)$ πού μᾶς δόθηκε διαιρεῖται διά τοῦ $(x - 1)^2$.

Σημείωση. Οἱ συνθῆκες: $f(1) = 0 \wedge f_1(1) = 0$ ἐξασφαλίζουν ἐπίσης, σύμφωνα μέ τήν παραπάνω πρόταση (§ 118), ὅτι: $(x - 1)^2/f(x)$.

Παρατήρηση. Γιά νά ἀποδείξουμε ὅτι τό ἀκέραιο πολυώνυμο διαιρεῖται διά μιᾶς δυνάμεως τοῦ $x - \alpha$, πολλές φορές ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς:

Μέθοδος τῆς ἀντικαταστάσεως. Ἔστω ὅτι τό πολυώνυμο $f(x)$ διαιρεῖται διά $(x - \alpha)^2$. Τότε θά ἔχουμε τήν ταυτότητα:

$$f(x) \equiv (x - \alpha)^2\cdot\varphi(x) \qquad (1)$$

Θεωροῦμε τό μετασχηματισμό:

$$x - \alpha = y \Longleftrightarrow x = y + \alpha \qquad (2)$$

καί ἡ (1) γίνεται:

$$f(y + \alpha) \equiv y^2\cdot\varphi(y + \alpha), \qquad (3)$$

ὅπου $f(y + \alpha)$ καί $\varphi(y + \alpha)$ ἀκέραια πολυώνυμα τοῦ y.

Ἀπό τήν (3) προκύπτει ὅτι τό $f(y + \alpha)$ διαιρεῖται ἀκριβῶς διά τοῦ y^2. Γιά νά συμβαίνει ὅμως αὐτό ἀρκεῖ τό $f(y + \alpha)$ νά μήν ἔχει σταθερό καί πρωτοβάθμιο ὅρο, δηλ. νά εἶναι τῆς μορφῆς:

$$f(y + \alpha) \equiv \alpha_\nu y^\nu + \alpha_{\nu-1}y^{\nu-1} + \dots + \alpha_3y^3 + \alpha_2y^2.$$

Ὁμοίως, γιά νά διαιρεῖται τό $f(x)$ διά $(x - \alpha)^3$, πρέπει καί ἀρκεῖ τό $f(y + \alpha)$ νά διαιρεῖται διά y^3, δηλ. νά εἶναι τῆς μορφῆς: $f(y + \alpha) \equiv \alpha_\nu y^\nu + \alpha_{\nu-1}y^{\nu-1} + \dots + \alpha_4y^4 + \alpha_3y^3$, ἐπειδή μέ τό μετασχηματισμό (2) προκύπτει ὅτι:

$$f(x) \equiv (x - \alpha)^3\cdot\pi(x) \Longleftrightarrow f(y + \alpha) \equiv y^3\cdot\pi(y + \alpha).$$

Ἐφαρμογή : Νά ἀποδείξετε ὅτι τό πολυώνυμο :

$$f(x) = x^4 - 9x^3 + 25x^2 - 24x + 4$$

διαιρεῖται διά τοῦ $(x-2)^2$.

Ἀπόδειξη : Κάνουμε τήν ἀντικατάσταση: $x - 2 = y \iff x = y + 2$ καί ἔχουμε:

$$f(y+2) = (y+2)^4 - 9(y+2)^3 + 25(y+2)^2 - 24(y+2) + 4.$$

Ἐκτελώντας τώρα τίς πράξεις βρίσκουμε:

$$f(y+2) \equiv y^4 - y^3 - 5y^2 = y^2(y^2 - y - 5)$$

ἤ μέ τήν ἀντικατάσταση $y = x - 2$ ἔχουμε:

$$f(x) \equiv (x-2)^2 \cdot [(x-2)^2 - (x-2) - 5],$$

ἡ ὁποία φανερώνει ὅτι τό $f(x)$ διαιρεῖται διά τοῦ $(x-2)^2$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάδα Α΄. 249. Νά ἀποδείξετε ὅτι: ἄν τό ἀκέραιο πολυώνυμο $f(x)$ διαιρεῖται διά τοῦ $x - 3$, τότε τό πολυώνυμο $f(4x - 5)$ διαιρεῖται διά τοῦ $x - 2$.

250. Νά βρεῖτε τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως $f(x) : (x-2)(x-3)$, ἄν εἶναι γνωστό ὅτι τό πολυώνυμο $f(x)$ ὅταν διαιρεῖται μέ τό $x - 2$ ἀφήνει ὑπόλοιπο 12 καί ὅταν διαιρεῖται μέ τό $x - 3$ ἀφήνει ὑπόλοιπο 17.

251. Ἄν τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως τοῦ πολυωνύμου $f(x) \equiv \alpha x^4 + \beta x^3 - 18x^2 + 15x - 5$ διά τοῦ $\varphi(x) \equiv x^2 - 3x + 2$ εἶναι $\upsilon(x) \equiv 4x - 7$, νά βρεῖτε τούς ἀριθμούς α, β.

252. Νά ἀποδείξετε ὅτι τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως τοῦ πολυωνύμου $f(x)$ διά τοῦ $x^2 - \alpha^2$ εἶναι:

$$\upsilon(x) \equiv \frac{f(\alpha) - f(-\alpha)}{2\alpha} x + \frac{f(\alpha) + f(-\alpha)}{2}.$$

253. Νά ἀποδείξετε ὅτι τό πολυώνυμο: $f(x) \equiv x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 7x + 6$ διαιρεῖται διά τοῦ $(x-1)^2$.

Ὁμάδα Β΄. 254. Νά ἀποδείξετε ὅτι: ἄν τό πολυώνυμο $x^3 + \alpha x + \beta$ εἶναι διαιρετό διά τοῦ $(x-k)^2$, τότε οἱ συντελεστές α, β ἱκανοποιοῦν τήν:

$$\left(\frac{\alpha}{3}\right)^3 + \left(\frac{\beta}{2}\right)^2 = 0.$$

255. Νά ἀποδείξετε ὅτι: ἄν $\alpha \neq \beta$, τότε τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως τοῦ πολυωνύμου $f(x)$, βαθμ.$f(x) \geq 2$, διά τοῦ $\varphi(x) \equiv (x-\alpha)(x-\beta)$ εἶναι:

$$\upsilon(x) \equiv \frac{f(\alpha) - f(\beta)}{\alpha - \beta} x + \frac{\beta f(\alpha) - \alpha f(\beta)}{\beta - \alpha}$$

Ποιό εἶναι τό ὑπόλοιπο τῆς πιό πάνω διαιρέσεως, ὅταν $\alpha = \beta$;

256. Νά ἀποδείξετε ὅτι δέν μπορεῖ νά ὑπάρχουν τρία μή μηδενικά πολυώνυμα $\varphi(x)$, $\sigma(x)$ καί $\tau(x)$, βαθμοῦ ν, τά ὁποῖα ἱκανοποιοῦν τήν ταυτότητα:

$$\varphi(x)f^2(x) + \sigma(x)f(x) + \tau(x) \equiv 0,$$

ὅπου $f(x)$ μή μηδενικό πολυώνυμο μέ βαθμ.$f(x) > \nu$.

Ὑπόδειξη. Νά μελετήσετε ξανά τό σχόλιο τῆς § 115.

257. Νά βρεῖτε, συναρτήσει τοῦ ν, τούς συντελεστές α, β τοῦ πολυωνύμου $f(x) \equiv x^{\nu+1} + \alpha x + \beta$, ἄν ξέρουμε ὅτι ἡ διαίρεση $f(x) : (x-1)^2$ εἶναι τέλεια. Στή συνέχεια νά βρεῖτε τό ἀντίστοιχο πηλίκο.

258. Νά προσδιορίσετε τούς πραγματικούς ἀριθμούς α, β ὥστε τό πολυώνυμο: $f(x) \equiv \alpha x^{\nu+1} + \beta x^{\nu} + 1$ νά διαιρεῖται διά τοῦ $(x-1)^2$ καί κατόπιν νά βρεῖτε τό ἀντίστοιχο πηλίκο.

Σ' αὐτή τήν ἑνότητα θά ἀναφέρουμε προτάσεις (ἰδιότητες) πού ἰσχύουν γιά τά πολυῶνυμα μέ μιγαδικούς συντελεστές, δηλαδή γιά ὅλα τά πολυώνυμα. Στίς ἑπόμενες ἑνότητες μέ τίτλους: *ἀκέραια πολυώνυμα μέ πραγματικούς*, ἀντίστοιχα *ρητούς*, ἀντίστ. *ἀκέραιους συντελεστές*, θά ἀναφέρουμε ἐκεῖνες τίς προτάσεις (ἰδιότητες) πού δέν ἰσχύουν γιά κάθε ἀκέραιο πολυώνυμο, ἀλλά μόνο ὅταν τό πολυώνυμο ἀνήκει στό $\mathbf{R}[x]$, ἀντίστ. στό $\mathbf{Q}[x]$, ἀντίστ. στό $\mathbf{Z}[x]$.

§ 119. Ἰδιότητα Ι.— Ἂν ἕνα ἀκέραιο πολυώνυμο $f(x)$, $f(x) \in C[x]$, διαιρεῖται μέ καθένα ἀπό τά διώνυμα: $(x-\rho_1), (x-\rho_2), \cdots, (x-\rho_\nu)$, ὅπου $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\nu$ ἀριθμοί διαφορετικοί μεταξύ τους ἀνά δύο, τότε τό $f(x)$ θά διαιρεῖται καί μέ τό γινόμενο:

$$(x-\rho_1)(x-\rho_2)\cdots(x-\rho_\nu)$$

καί ἀντιστρόφως.

Ἀπόδειξη: Ἀπό τό πόρισμα 3 τῆς § 116 καί ἀπό τήν ὑπόθεση, λαμβάνουμε:

$$f(\rho_1)=0,\ f(\rho_2)=0, \ldots, f(\rho_\nu)=0 \tag{1}$$

Ἐξάλλου, ἐπειδή $(x-\rho_1)/f(x)$, θά εἶναι:

$$f(x) \equiv (x-\rho_1)\cdot f_1(x) \tag{2}$$

Ἡ (2) γιά $x=\rho_2$ γίνεται: $f(\rho_2)=(\rho_2-\rho_1)\cdot f_1(\rho_2)$. Ἀλλά $f(\rho_2)=0$ καί $\rho_1 \neq \rho_2$, ὁπότε $f_1(\rho_2)=0$. Τότε ὅμως, σύμφωνα μέ τό (ἴδιο) πόρισμα 3 τῆς §116, ἔχουμε $f_1(x) \equiv (x-\rho_2)\cdot f_2(x)$, ὁπότε ἡ (2) γίνεται:

$$f(x) \equiv (x-\rho_1)(x-\rho_2)\cdot f_2(x) \tag{3}$$

Μέ τόν ἴδιο τρόπο, ἡ (3) γιά $x=\rho_3$ γίνεται:

$$f(\rho_3)=(\rho_3-\rho_1)\cdot(\rho_3-\rho_2)\cdot f_2(\rho_3).$$

Ἀλλά $f(\rho_3)=0$ καί $\rho_3 \neq \rho_1$, $\rho_3 \neq \rho_2$, ὁπότε $f_2(\rho_3)=0$.
Ἄρα: $f_2(x) \equiv (x-\rho_3)\cdot f_3(x)$ καί συνεπῶς ἡ (3) γίνεται:

$$f(x) \equiv (x-\rho_1)(x-\rho_2)(x-\rho_3)f_3(x).$$

Ἂν ἐργαστοῦμε μέ ὅμοιο τρόπο καί μετά $\nu-3$ βήματα, τελικά λαμβάνουμε:

$$f(x) \equiv (x-\rho_1)(x-\rho_2)\cdots(x-\rho_\nu)f_\nu(x) \tag{ν}$$

Ἀπό τήν τελευταία ταυτότητα συμπεραίνουμε (§ 115) ὅτι:

$$(x-\rho_1)(x-\rho_2)\cdots(x-\rho_\nu)/f(x), \text{ ὅπου } \rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_\nu$$

ἀριθμοί διαφορετικοί μεταξύ τους ἀνά δύο.

Τό ἀντίστροφο εἶναι προφανές.

Ἄσκηση: Νά ἀποδείξετε τήν παραπάνω ἰδιότητα καί μέ τή μέθοδο τῆς τέλειας ἐπαγωγῆς.

Παρατήρηση. Μέ τή μέθοδο τῆς τέλειας ἐπαγωγῆς ἀποδεικνύεται ἡ ἑπόμενη πιό γενική πρόταση: **Ἂν ἕνα ἀκέραιο πολυώνυμο $f(x)$ διαιρεῖται μέ καθένα ἀπό τά πολυώνυμα: $(x-\rho_1)^{\lambda_1}, (x-\rho_2)^{\lambda_2}, \cdots, (x-\rho_\nu)^{\lambda_\nu}$, ὅπου $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_\nu \in \mathbf{N}$ καί $\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_\nu$ ἀριθμοί διαφορετικοί μεταξύ τους ἀνά δύο, τότε τό $f(x)$ θά διαιρεῖται καί μέ τό γινόμενό τους.**

Γιά $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_\nu = 1$ παίρνουμε τήν ἰδιότητα I.

Ἄμεση συνέπεια τῆς προηγούμενης ἰδιότητας εἶναι ἡ ἑξῆς:

§ 120. Ἰδιότητα II. *(τύπος παραγοντοποιήσεως)*.— **Ἄν τό ἀκέραιο πολυώνυμο:**

$$f(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0,$$

βαθμοῦ $\nu \geqq 1$, δέχεται ὡς ρίζες τούς ν διαφορετικούς μεταξύ τους ἀνά δύο ἀριθμούς: $\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_\nu$, τότε ἰσχύει ἡ ταυτότητα:

$$f(x) = \alpha(x - \rho_1)(x - \rho_2)\cdots(x - \rho_\nu) \tag{1}$$

Ἀπόδειξη. Ἐπειδή $f(\rho_1) = f(\rho_2) = \cdots = f(\rho_{\nu-1}) = f(\rho_\nu) = 0$, τό πολυώνυμο $f(x)$, σύμφωνα μέ τό πόρισμα 3 τῆς § 116, θά διαιρεῖται μέ καθένα ἀπό τά διώνυμα: $(x-\rho_1), (x-\rho_2), \ldots, (x-\rho_{\nu-1}), (x-\rho_\nu)$.

Ἐπειδή $\rho_1 \neq \rho_2 \neq \cdots \neq \rho_{\nu-1} \neq \rho_\nu \neq \rho_1$,

τό $f(x)$ θά διαιρεῖται τότε, σύμφωνα μέ τήν ἰδιότητα I, καί μέ τό γινόμενο:

$$(x-\rho_1)(x-\rho_2)\cdots(x-\rho_\nu).$$

Ἔτσι θά ἔχουμε (§ 115) τήν ταυτότητα:

$$f(x) \equiv (x-\rho_1)(x-\rho_2)\cdots(x-\rho_\nu)\cdot\pi(x) \tag{2}$$

ὅπου $\pi(x)$ τό πηλίκο τῆς διαιρέσεως $f(x) : (x-\rho_1)(x-\rho_2)\cdots(x-\rho_\nu)$.

Ἐπειδή ὁ διαιρετέος καί ὁ διαιρέτης εἶναι βαθμοῦ ν, τό πηλίκο $\pi(x)$ εἶναι βαθμοῦ 0 (γιατί;). Τό $\pi(x)$ λοιπόν δέν ἔχει ρίζα, εἶναι ἁπλῶς ἕνα σταθερό μή μηδενικό πολυώνυμο. Ἔστω λοιπόν ὅτι: $\pi(x) \equiv c$. Τότε ἡ (2) γίνεται:

$$f(x) \equiv c(x-\rho_1)(x-\rho_2) + \cdots (x-\rho_\nu) \tag{3}$$

Ἀλλά: $$f(x) \equiv \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0 \tag{4}$$

Ἀπό τήν (3) καί (4) ἄν ἐξισώσουμε τούς συντελεστές τοῦ x^ν βρίσκουμε $c = \alpha_\nu$.

Ἄρα: $$f(x) \equiv \alpha_\nu(x-\rho_1)(x-\rho_2)\cdots(x-\rho_\nu).$$

Παρατήρηση. Τό $f(x)$ γράφεται μέ τή μορφή (1) κατά ἕνα καί **μόνο ἕνα** τρόπο. Γιατί διαφορετικά, ἄν τό $f(x)$ γραφόταν καί μέ τή μορφή:

$$f(x) \equiv \alpha_\nu(x-\xi_1)(x-\xi_2)\cdots(x-\xi_\nu)$$

ὅπου οἱ ἀριθμοί $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\nu$ εἶναι διαφορετικοί μεταξύ τους ἀνά δύο, τότε θά ὑπῆρχε ἕνας (τουλάχιστο) ἀριθμός ξ_k, $k = 1, 2, \ldots, \nu$, διαφορετικός ἀπό ὅλους τούς ἀριθμούς: $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\nu$. Τότε ὅμως θά εἴχαμε ταυτόχρονα: $f(\xi_k) \neq 0$ καί $f(\xi_k) = 0$. Αὐτό ὅμως ἀποκλείεται νά συμβαίνει (βλ. Σημ. § 5).

Ἀπό τήν ἰδιότητα II προκύπτει ἀμέσως μέ ἄτοπο ἀπαγωγή τό παρακάτω

Πόρισμα.—Κάθε ἀκέραιο πολυώνυμο $f(x) \in C[x]$, βαθμοῦ $\nu \geqq 2$, ἔχει ν τό πολύ διαφορετικές (διακεκριμένες) ρίζες.

§ 121. Βαθμός πολλαπλότητας ρίζας πολυωνύμου. — Ἀπό τό πόρισμα 3 τῆς § 116 ἔχουμε ὅτι: ἄν ὁ ἀριθμός $\rho \in C$ εἶναι ρίζα τοῦ πολυωνύμου $f(x)$, τότε $x - \rho / f(x)$ καί συνεπῶς: $f(x) \equiv (x-\rho)\pi_1(x)$, ὅπου $\pi_1(x) \in C[x]$.

Ἐνδέχεται τώρα ὁ ἀριθμός ρ νά εἶναι καί ρίζα τοῦ $\pi_1(x)$, ὁπότε $\pi_1(x) \equiv \equiv (x-\rho)\pi_2(x)$ καί συνεπῶς $f(x) \equiv (x-\rho)^2\pi_2(x)$. Ἄν καί $\pi_2(\rho)=0$, τότε συνεχίζοντας θά καταλήξουμε στή σχέση: $f(x) \equiv (x-\rho)^k \cdot \pi_k(x)$ μέ $\pi_k(\rho) \neq 0$. Λέμε τότε ὅτι ὁ ἀριθμός $\rho \in \mathbf{C}$ εἶναι ρίζα τοῦ πολυωνύμου $f(x)$ **βαθμοῦ πολλαπλότητας k** $(k \geq 1)$.

Ἀκριβέστερα δίνουμε τόν ἑπόμενο ὁρισμό:

Ὁρισμός 1. *Θά λέμε ὅτι ὁ ἀριθμός* $\varrho \in \mathbf{C}$ *εἶναι* **ρίζα βαθμοῦ πολλαπλότητας k** $(k \geq 1)$ *τοῦ πολυωνύμου* $f(x)$, *τότε καί μόνο τότε, ἄν ὑπάρχει ἀκέραιο πολυώνυμο* $\varphi(x)$ *τέτοιο, ὥστε:*

$$f(x) \equiv (x-\varrho)^k \varphi(x) \wedge \varphi(\varrho) \neq 0 \tag{1}$$

Γιά τίς πολλαπλές ρίζες δίνουμε καί τόν ἑξῆς ὁρισμό:

Ὁρισμός 2. *Θά λέμε ὅτι ὁ ἀριθμός* $\varrho \in \mathbf{C}$ *εἶναι* **ρίζα βαθμοῦ πολλαπλότητας k** $(k \geq 1)$ *τοῦ πολυωνύμου* $f(x)$, *τότε καί μόνο τότε, ἄν:*

$$(x-\varrho)^k / f(x) \wedge (x-\varrho)^{k+1} \nmid f(x) \tag{2}$$

Οἱ ὁρισμοί 1 καί 2 εἶναι ἰσοδύναμοι:

Ἀπόδειξη. (1) ⇒ (2): Πράγματι· ἄν ἡ (1) ἰσχύει, τότε: $(x-\rho)^k/f(x)$.

Ἐξάλλου $(x-\rho)^{k+1} \nmid f(x)$, γιατί ἄν εἴχαμε καί $(x-\rho)^{k+1}/f(x)$, τότε:

$$f(x) \equiv (x-\rho)^{k+1}.g(x) \equiv (x-\rho)^k.[(x-\rho)\,g(x)] \tag{3}$$

Συγκρίνοντας τίς (1), (3) ἔχουμε: $\varphi(x) \equiv (x-\rho)\,g(x)$ (4)

Ἀλλά: $\varphi(\rho) = (\rho-\rho)g(\rho) = 0$. Αὐτό ὅμως, λόγω τῆς (1), εἶναι ἄτοπο.

(2) ⇒ (1): Πράγματι· ἄν ἡ (2) εἶναι ἀληθής, τότε: $f(x) \equiv (x-\rho)^k.\varphi(x)$. Ἐξάλλου $\varphi(\rho) \neq 0$, γιατί ἀλλιῶς, δηλ. ἄν $\varphi(\rho)=0$, τότε, σύμφωνα μέ τό πόρισμα 3 τῆς § 116, θά εἴχαμε: $\varphi(x) \equiv (x-\rho)\pi(x)$, ὁπότε: $f(x) \equiv (x-\rho)^{k+1}.\pi(x)$ καί συνεπῶς: $(x-\rho)^{k+1}/f(x)$, ἀλλ' αὐτό εἶναι ἄτοπο, λόγω τῆς (2).

Σημείωση. Ἄν $k=1$, τότε ἡ ρίζα ρ λέγεται **ἁπλή**, ἄν $k=2$, **διπλή** κ.ο.κ. Γενικά μία ρίζα ρ ἑνός πολυωνύμου $f(x)$ βαθμοῦ πολλαπλότητας $k \geq 2$ ὀνομάζεται **πολλαπλή** ρίζα τοῦ $f(x)$. Μία τέτοια ρίζα εἶναι τουλάχιστο διπλή.

Παρατηρήσεις. α) Ἄν ἕνα πολυώνυμο $f(x)$ ἔχει μία ρίζα πολλαπλή μέ βαθμό πολλαπλότητας k, τότε: βαθμ.$f(x) \geq k$.

β) Ἄν ξέρουμε μόνο ὅτι: $f(x) \equiv$ πολ.$(x-\rho)^k$, δηλαδή ἄν ἰσχύει μόνο ἡ πρώτη συνθήκη τῆς (2), συμπεραίνουμε ὅτι ὁ ἀριθμός ρ εἶναι ρίζα τοῦ $f(x)$ μέ βαθμό πολλαπλότητας τουλάχιστο k.

γ) Ἀπό τούς παραπάνω ἰσοδύναμους ὁρισμούς συμπεραίνουμε ὅτι: σέ κάθε ρίζα ἑνός ἀκέραιου πολυωνύμου $f(x)$ ἀντιστοιχεῖ ἀκριβῶς ἕνας μέγιστος ἀκέραιος ἀριθμός $k \geq 1$, πού ὅπως εἴδαμε ὀνομάζεται **βαθμός πολλαπλότητας** τῆς ρίζας.

Σχόλιο. Στήν ἑπόμενη τάξη θά ὁρίσουμε τήν ἔννοια τῆς παραγώγου ἑνός πολυωνύμου, ἀκριβέστερα τῆς παραγώγου μιᾶς πολυωνυμικῆς συναρτήσεως καί τότε εὔκολα κανείς, στηριζόμενος στούς παραπάνω ὁρισμούς, μπορεῖ νά ἀποδείξει τήν πρόταση: **Ρίζα βαθμοῦ πολλαπλότητας $k>1$ γιά ἕνα πολυώνυμο, εἶναι ρίζα βαθμοῦ πολλαπλότητας $k-1$ γιά τήν παράγωγό του.**

§ 122. Ἰδιότητα III.— Κάθε ἀκέραιο πολυώνυμο $f(x) \in C[x]$, βαθμοῦ $\nu \geq 1$, ἔχει ν ἀκριβῶς ρίζες (ἴσες ἤ διαφορετικές) μέσα στό σύνολο C τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν.

Ἀπόδειξη. Ἔστω $f(x) \equiv \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$ ἕνα ἀκέραιο πολυώνυμο μέ μιγαδικούς συντελεστές, βαθμοῦ $\nu \geqq 1$, ὁπότε (§ 110) $\alpha_\nu \neq 0$.

Σύμφωνα μέ τό θεμελιῶδες θεώρημα τῆς Ἄλγεβρας (§ 113) τό $f(x)$ ἔχει μία τουλάχιστο ρίζα στό σύνολο $\mathbf{C}$. Ἔστω ὅτι εἶναι: $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_\kappa$ ὅλες οἱ διαφορετικές μεταξύ τους ἀνά δύο ρίζες τοῦ $f(x)$ στό $\mathbf{C}$ μέ βαθμό πολλαπλότητας: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\kappa$ ἀντιστοίχως. Τότε ἔχουμε:

$$(x-\rho_1)^{\lambda_1}/f(x) \wedge (x-\rho_2)^{\lambda_2}/f(x) \wedge \cdots \wedge (x-\rho_\kappa)^{\lambda_\kappa}/f(x)$$

ὁπότε (βλ. παρατήρηση τῆς § 119) καί: $(x-\rho_1)^{\lambda_1}\cdot(x-\rho_2)^{\lambda_2}\cdots(x-\rho_\kappa)^{\lambda_\kappa}/f(x)$.

Ἄρα:
$$f(x) \equiv (x-\rho_1)^{\lambda_1}.(x-\rho_2)^{\lambda_2}\dots(x-\rho_\kappa)^{\lambda_\kappa}\pi(x) \tag{1}$$

ὅπου $\pi(x) \in \mathbf{C}[x]$ μέ $\pi(\rho_1) \neq 0 \wedge \pi(\rho_2) \neq 0 \wedge \cdots \wedge \pi(\rho_\kappa) \neq 0$.

Τό $\pi(x)$ δέν ἔχει ρίζα στό $\mathbf{C}$, γιατί ἀλλιῶς, δηλαδή ἄν τό $\pi(x)$ εἶχε ρίζα στό $\mathbf{C}$, τότε αὐτή θά ἦταν ρίζα καί τοῦ $f(x)$ καί ἐπειδή οἱ ἀριθμοί: $\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_\kappa$ εἶναι **ὅλες** οἱ διακεκριμένες ρίζες τοῦ $f(x)$ στό $\mathbf{C}$, τότε θά ὑπῆρχε ἕνας ἀπ' αὐτούς τούς ἀριθμούς, ἔστω ὁ ρ_λ, γιά τόν ὁποῖο θά εἴχαμε ταυτόχρονα: $\pi(\rho_\lambda) = 0$ καί $\pi(\rho_\lambda) \neq 0$. Αὐτό ὅμως εἶναι ἄτοπο.

Γιά τό $\pi(x)$ συνεπῶς δέν εἶναι δυνατό νά ἰσχύει: βαθμ.$\pi(x) \geqq 1$ (γιατί;) Θά εἶναι λοιπόν βαθμ.$\pi(x) = 0$, δηλαδή $\pi(x) \equiv c$, ὅπου $c \in \mathbf{C}$ μέ $c \neq 0$.

Τότε ἡ (1) γράφεται:

$$f(x) \equiv c\cdot(x-\rho_1)^{\lambda_1}(x-\rho_2)^{\lambda_2}\cdots(x-\rho_\kappa)^{\lambda_\kappa} \tag{2}$$

Ἀπό τή (2) ἔχουμε τώρα, ἄν λάβουμε ὑπόψη καί τή (12) τῆς § 111:

$$\text{βαθμ.}f(x) = \text{βαθμ.}c + \text{βαθμ.}(x-\rho_1)^{\lambda_1} + \cdots + \text{βαθμ.}(x-\rho_\kappa)^{\lambda_\kappa}$$

δηλαδή:
$$\nu = 0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_\kappa.$$

Ὥστε:
$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_\kappa = \nu \tag{3}$$

Ἡ (3) ἀποδεικνύει τήν παραπάνω ἰδιότητα.

Ἔχοντας τώρα ὑπόψη τή (2) καί ὅτι:

$$f(x) \equiv \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0,$$

βρίσκουμε, ἄν ἐξισώσουμε τούς συντελεστές τοῦ x^ν, ὅτι: $c = \alpha_\nu$, ὁπότε:

$$f(x) \equiv \alpha_\nu(x-\rho_1)^{\lambda_1}\cdot(x-\rho_2)^{\lambda_2}\cdots(x-\rho_\kappa)^{\lambda_\kappa} \tag{4}$$

ὅπου εἶναι: $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_\kappa = \nu \quad (\kappa \leqq \nu)$.

Ἀποδείξαμε λοιπόν συγχρόνως καί τήν ἑξῆς:

§ 123. Ἰδιότητα IV.— Ἄν τό ἀκέραιο πολυώνυμο:

$$\mathbf{f(x) \equiv \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0}$$

βαθμοῦ $\nu \geqq 1$, ἔχει μέσα στό C ρίζες τούς ἀριθμούς: $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_\kappa$ μέ βαθμούς πολλαπλότητας: $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_\kappa$ ἀντίστοιχως, τότε ἰσχύει ἡ ταυτότητα:

$$\mathbf{f(x) \equiv \alpha_\nu(x-\rho_1)^{\lambda_1}(x-\rho_2)^{\lambda_2}\cdots(x-\rho_\kappa)^{\lambda_\kappa}} \tag{1}$$

ὅπου εἶναι: $\mathbf{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_\kappa = \nu \quad (k \leqq \nu).}$

Παρατηρήσεις. α) Γιά $k = \nu$ καί $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_\nu = 1$ παίρνουμε τόν τύπο (1) τῆς § 120.

β) Τό $f(x)$ γράφεται μέ τή μορφή (1) κατά ἕνα καί μόνο ἕνα τρόπο. Ἡ παράσταση (1) πού ὅπως εἴπαμε εἶναι μονοσημάντως ὁρισμένη γιά κάθε πολυώνυμο $f(x)$, ἄν δέ λαμβάνεται ὑπόψη ἡ θέση τῶν παραγόντων σ' αὐτή, ὀνομάζεται *«ἀνάλυση τοῦ πολυωνύμου f(x) σέ γινόμενο πρώτων παραγόντων»*.

γ) Ἄν θέσουμε: $\xi_1 = \xi_2 = \cdots = \xi_{\lambda_1} = \rho_1$, $\xi_{\lambda_1+1} = \cdots = \xi_{\lambda_1+\lambda_2} = \rho_2$, κ.ο.κ. συμπεραίνουμε ὅτι: Κάθε ἀκέραιο πολυώνυμο $f(x) \equiv \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$, μέ $\alpha_\nu \neq 0$ μπορεῖ νά λάβει τή μορφή:

$$f(x) \equiv \alpha_\nu(x-\xi_1)(x-\xi_2)\cdots(x-\xi_\nu) \tag{2}$$

ὅπου $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\nu$ οἱ ρίζες (πραγματικές ἤ μιγαδικές) τοῦ $f(x)$, ὄχι ὑποχρεωτικά διαφορετικές μεταξύ τους ἀνά δύο, ὅπως εἴχαμε ὑποθέσει στήν ἰδιότητα II τῆς § 120.

δ) Στή μορφή (2) θά μπορούσαμε, ἀνεξάρτητα ἀπό τήν ἰδιότητα IV, νά φθάσουμε καί ὡς ἑξῆς: Μέ $\nu \geqq 1$, σύμφωνα μέ τό θεώρημα τοῦ D' Alembert τό $f(x)$ ἔχει μία (τουλάχιστο) ρίζα $\xi_1 \in \mathbf{C}$. Ἄρα: $f(x) \equiv (x-\xi_1)f_1(x)$ μέ βαθμ.$f_1(x) = \nu - 1$.

Μέ $\nu - 1 \geqq 1$, τό $f_1(x)$ ἔχει, σύμφωνα μέ τό ἴδιο θεώρημα (§ 113), μία ρίζα $\xi_2 \in \mathbf{C}$ καί ἑπομένως: $f_1(x) \equiv (x-\xi_2)f_2(x)$ μέ βαθμ.$f_2(x) = \nu - 2$.

Συνεχίζοντας μέ τόν ἴδιο τρόπο λαμβάνουμε μετά ἀπό $\nu - 2$ βήματα:

$$f_{\nu-1}(x) \equiv (x-\xi_\nu)\cdot f_\nu \text{ μέ βαθμ.} f_\nu = \nu - \nu = 0, \text{ δηλ. } f_\nu \equiv c,\ c \neq 0.$$

Πολλαπλασιάζοντας αὐτές τίς ἰδιότητες κατά μέλη καί ἐξισώνοντας τούς συντελεστές τοῦ x^ν βρίσκουμε, μετά ἀπό σχετικές ἁπλοποιήσεις, τή (2).

Ἐφαρμογή: Τό πολυώνυμο: $f(x) \equiv x^6 + 3x^5 - 4x^4 - 6x^3 + x^2 + 3x + 2$ ἀναλύεται σέ γινόμενο πρώτων παραγόντων ὡς ἑξῆς:

$$f(x) \equiv (x-1)^2(x+1)^3(x+2),$$

δηλαδή ἔχει ὡς ρίζες τούς ἀριθμούς: $1, -1, -2$ μέ βαθμούς πολλαπλότητας: 2, 3, 1 ἀντιστοίχως.

Ἡ ἑπόμενη πρόταση μᾶς δίνει μία συνθήκη γιά νά εἶναι ἕνα πολυώνυμο μηδενικό:

§ 124. Ἰδιότητα V.— Ἄν ἕνα ἀκέραιο πολυώνυμο $f(x)$, βαθμοῦ τό πολύ ν, μηδενίζεται γιά $\nu+1$ διαφορετικές μεταξύ τους ἀνά δύο τιμές τοῦ x, τότε τό $f(x)$ εἶναι τό μηδενικό πολυώνυμο.

Ἀπόδειξη. Ἔστω ὅτι τό ἀκέραιο πολυώνυμο $f(x)$ εἶναι:

$$f(x) \equiv \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

μέ βαθμ.$f(x) \leqq \nu$ ἤ $f(x) \equiv 0$.

Ἔστω ἀκόμη ὅτι: $f(\rho_1) = f(\rho_2) = \cdots = f(\rho_\nu) = f(\rho_{\nu+1}) = 0$, ὅπου $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\nu, \rho_{\nu+1}$ ἀριθμοί διαφορετικοί μεταξύ τους ἀνά δύο.

Ἔστω ὅτι τό $f(x) \not\equiv 0$, τότε ὑπάρχει ἕνας τουλάχιστο συντελεστής, ἔστω ὁ α_k, μέ $\alpha_k \neq 0$. Τότε τό $f(x)$ θά ἦταν βαθμοῦ k ($1 \leqq k \leqq \nu$) καί σύμφωνα μέ τήν ἰδιότητα II τῆς § 120 θά εἴχαμε τήν ταυτότητα:

$$f(x) \equiv \alpha_k(x-\rho_1)(x-\rho_2)\cdots(x-\rho^k) \tag{1}$$

Ἡ (1) γιά $x = \rho_{k+1}$ γίνεται:

$$f(\rho_{k+1}) = \alpha_k(\rho_{k+1}-\rho_1)(\rho_{k+1}-\rho_2)\cdots(\rho_{k+1}-\rho_k) = 0 \tag{2}$$

Ἀλλά: $(\rho_{k+1}-\rho_1)(\rho_{k+1}-\rho_2)\cdots(\rho_{k+1}-\rho_k) \neq 0$, ὁπότε ἀπό τή (2) ἕπεται ὅτι $\alpha_k = 0$, γεγονός πού μᾶς ὁδηγεῖ στήν ἀντίφαση: $\alpha_k \neq 0$ καί $\alpha_k = 0$.

Θά εἶναι λοιπόν $\alpha_k = 0 \ \forall\ k = 1, 2, \ldots, \nu$.

Τότε τό πολυώνυμο $f(x)$ παίρνει τή μορφή: $f(x) \equiv \alpha_0$. Εἶναι ὅμως καί $\alpha_0 = 0$, γιατί ἀλλιῶς τό $f(x)$ δέ θά μηδενιζότανε γιά καμία τιμή τοῦ x, πράγμα πού ἀποκλείεται ἀπό τήν ὑπόθεση.

Ἔτσι ἀποδείξαμε λοιπόν ὅτι: $\alpha_\nu = \alpha_{\nu-1} = \cdots = \alpha_1 = \alpha_0 = 0$ (4)

Ἡ (4) ἀποδεικνύει τήν παραπάνω ἰδιότητα.

Σημείωση. Ἡ ἀπόδειξη τῆς παραπάνω ἰδιότητας μπορεῖ νά γίνει, πιό σύντομα, ὡς ἑξῆς: Ἐπειδή $f(\rho_1) = f(\rho_2) = \cdots = f(\rho_\nu) = f(\rho_{\nu+1}) = 0$, θά ἰσχύει:

$(x-\rho_1)(x-\rho_2)\cdots(x-\rho_\nu)(x-\rho_{\nu+1})/f(x)$.

Παρατηροῦμε τώρα ὅτι: τό πολυώνυμο $f(x)$, βαθμοῦ τὸ πολύ ν, διαιρεῖται ἀπό ἕνα πολυώνυμο βαθμοῦ $\nu+1$. Ἄρα (βλ. σχόλιο τῆς § 115) πρέπει $f(x)\equiv 0$.

Ἐφαρμογή: Ἄν $\alpha\neq\beta\neq\gamma\neq\alpha$, νά ἀποδείξετε ὅτι τό:

$$f(x)\equiv(x-\alpha)^2(\beta-\gamma)+(x-\beta)^2(\gamma-\alpha)+(x-\gamma)^2(\alpha-\beta)+(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)$$

εἶναι τό μηδενικό πολυώνυμο.

Λύση: Εὔκολα διαπιστώνουμε ὅτι: $f(\alpha)=f(\beta)=f(\gamma)=0$. Ἐπειδή τό $f(x)$ εἶναι τό πολύ δεύτερου βαθμοῦ καί μηδενίζεται γιά 3 διαφορετικές μεταξύ τους ἀνά δύο τιμές τοῦ x, ἕπεται ὅτι τό $f(x)$ εἶναι τό μηδενικό πολυώνυμο.

Ἄμεσες συνέπειες τῆς πιό πάνω ἰδιότητας εἶναι τά ἑπόμενα πορίσματα:

Πόρισμα Ι.— Ἄν δύο ἀκέραια πολυώνυμα $f(x)$, $\varphi(x)$ εἶναι καί τά δύο βαθμοῦ τό πολύ ν καί παίρνουν ἴσες τιμές γιά $\nu+1$ διαφορετικές τιμές τοῦ x, τότε $f(x)=\varphi(x)$ $\forall$ $x\in C$, δηλαδή: $f(x)\equiv\varphi(x)$.

Ὑπόδειξη. Νά θεωρήσετε τό πολυώνυμο $F(x)\equiv f(x)-\varphi(x)$ καί νά διαπιστώσετε ὅτι τό $F(x)$ ἱκανοποιεῖ τίς ὑποθέσεις τῆς ἰδιότητας V. Ἄρα ... κτλ.

Πόρισμα ΙΙ.— Ἄν ἕνα ἀκέραιο πολυώνυμα $f(x)$, βαθμοῦ τό πολύ ν, λαμβάνει τήν ἴδια ἀριθμητική τιμή λ γιά $\nu+1$ (τουλάχιστο) διαφορετικές μεταξύ τους τιμές τοῦ x, τότε τό $f(x)$ εἶναι τό σταθερό πολυώνυμο λ, δηλ. $f(x)=\lambda$.

Ὑπόδειξη. Νά ἐφαρμόσετε τήν ἰδιότητα V στό πολυώνυμο $F(x)\equiv f(x)-\lambda$.

Πόρισμα ΙΙΙ.— Ἄν γιά ἄπειρες, ἀλλά διαφορετικές μεταξύ τους, τιμές τοῦ x, ἕνα πολυώνυμο $f(x)$ λαμβάνει τήν ἴδια ἀριθμητική τιμή λ, τότε αὐτό εἶναι τό σταθερό πολυώνυμο λ, δηλαδή $f(x)\equiv\lambda$. Εἰδικά, ἄν $\lambda=0$, τότε τό $f(x)$ εἶναι τό μηδενικό πολυώνυμο.

Σχόλιο: Τά δύο τελευταῖα πορίσματα, ἄν θέλουμε νά ἐκφραστοῦμε μέ τή «*γλώσσα*» τῆς Γεωμετρίας μᾶς λένε ὅτι: Ἄν τό γράφημα ἑνός πολυωνύμου $f(x)$, βαθμοῦ τό πολύ ν (ἀντ. ὁποιουδήποτε βαθμοῦ) ἔχει $\nu+1$ (ἀντίστοιχα ἄπειρα) κοινά σημεῖα μέ τήν εὐθεία $y=\lambda$, ἡ ὁποία εἶναι παράλληλη μέ τόν ἄξονα τῶν x, τότε τά δύο σημειοσύνολα ταυτίζονται, δηλαδή τό γράφημα τοῦ πολυωνύμου $f(x)$ εἶναι, τότε, ἡ εὐθεία $y=\lambda$.

Ἐφαρμογή. Θεωροῦμε τό πολυώνυμο $f(x)$ μέ τήν ἰδιότητα: γιά κάθε $x\in R$ καί γιά κάθε φυσικό ἀριθμό ν ἰσχύει:

$$f(x)=f\left(\nu x-\frac{1}{\nu}\right) \tag{1}$$

Νά ἀποδείξετε ὅτι τό $f(x)$ εἶναι ἕνα σταθερό πολυώνυμο.

Λύση. Γιά $\nu=1$ καί γιά κάθε $x\in \mathbf{R}$ ἰσχύει:

$$f(x)=f(x-1) \tag{2}$$

Ἀπό τή (2) γιά $x=1,2,3,\ldots$ λαμβάνουμε:

$$f(1)=f(0),\ f(2)=f(1),\ f(3)=f(2),\ \cdots,\ f(\nu)=f(\nu-1),\ \ldots$$

Ἄρα: $$f(1)=f(2)=f(3)=\cdots=f(\nu)=\cdots=\lambda,\ \text{ὅπου } \lambda=f(0) \tag{3}$$

δηλαδή γιά κάθε φυσικό ἀριθμό τό πολυώνυμο $f(x)$ ἔχει σταθερή τιμή.

Ἀπό τήν (3) βλέπουμε πώς τό πολυώνυμο $f(x)$ πού πήραμε λαμβάνει τήν ἴδια ἀριθμητική τιμή $\lambda=f(0)$ γιά ἄπειρες τιμές τοῦ x, συνεπῶς, σύμφωνα μέ τό τελευταῖο πόρισμα, τό $f(x)$ εἶναι ἕνα σταθερό πολυώνυμο.

§ 125. Σχέσεις μεταξύ τῶν ριζῶν καί τῶν συντελεστῶν ἑνός ἀκέραιου πολυωνύμου *(τύποι τοῦ Vieta)*.— Ἔστω τό ἀκέραιο πολυώνυμο:

$$f(x) \equiv \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0, \quad \alpha_\nu \neq 0$$

μέ ρίζες $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \ldots, \rho_{\nu-1}, \rho_\nu$.

Εἶναι γνωστό (§ 123, παρατ. γ) ὅτι ἰσχύει:

$$\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0 \equiv \alpha_\nu (x-\rho_1)(x-\rho_2)\cdots(x-\rho_\nu) \qquad (1)$$

Διαιρώντας καί τά δύο μέλη τῆς (1) διά τοῦ $\alpha_\nu \neq 0$ καί ἐκτελώντας τίς πράξεις στό δεύτερο μέλος (τό ὁποῖο καί διατάσσουμε κατά τίς κατιοῦσες δυνάμεις τοῦ x) ἔχουμε:

$$x^\nu + \frac{\alpha_{\nu-1}}{\alpha_\nu} x^{\nu-1} + \frac{\alpha_{\nu-2}}{\alpha_\nu} x^{\nu-2} + \cdots + \frac{\alpha_1}{\alpha_\nu} x + \frac{\alpha_0}{\alpha_\nu} \equiv x^\nu - (\rho_1 + \rho_2 + \cdots$$
$$+ \rho_\nu)x^{\nu-1} + (\rho_1\rho_2 + \rho_1\rho_3 + \cdots + \rho_{\nu-1}\rho_\nu)x^{\nu-2} - \cdots + (-1)^\nu \rho_1\rho_2 \cdots \rho_\nu.$$

Ἄν τώρα ἐξισώσουμε τούς συντελεστές τῶν ἰσοβάθμιων ὅρων, λαμβάνουμε τίς σχέσεις:

$$\boxed{\begin{aligned}
S_1 &\equiv \rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \cdots + \rho_{\nu-1} + \rho_\nu = -\frac{\alpha_{\nu-1}}{\alpha_\nu}\\
S_2 &\equiv \rho_1\rho_2 + \rho_1\rho_3 + \cdots + \rho_1\rho_\nu + \rho_2\rho_3 + \cdots + \rho_2\rho_\nu + \cdots + \rho_{\nu-1}\,\rho_\nu = +\frac{\alpha_{\nu-2}}{\alpha_\nu}\\
S_3 &\equiv \rho_1\rho_2\rho_3 + \rho_1\rho_2\rho_4 + \cdots + \rho_1\rho_2\rho_\nu + \cdots + \rho_{\nu-2}\,\rho_{\nu-1}\,\rho_\nu = -\frac{\alpha_{\nu-3}}{\alpha_\nu}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
S_\nu &\equiv \rho_1\,\rho_2\,\rho_3 \cdots \rho_{\nu-1}\,\rho_\nu = (-1)^\nu \frac{\alpha_0}{\alpha_\nu}
\end{aligned}}$$

Οἱ παραπάνω σχέσεις, οἱ ὁποῖες, ὅπως βλέπουμε, συνδέουν τίς ρίζες καί τούς συντελεστές τοῦ πολυωνύμου f(x) ὀνομάζονται **τύποι τοῦ Vieta**.

Μ' αὐτούς τούς τύπους μποροῦμε ἐπίσης νά βροῦμε ἕνα πολυώνυμο, βαθμοῦ ν, ὅταν γνωρίζουμε τίς ρίζες του καί τόν πρῶτο συντελεστή του α_ν, καθόσον τότε ἔχουμε:

$$f(x) \equiv \alpha_\nu[x^\nu - S_1 x^{\nu-1} + S_2 x^{\nu-2} - \cdots + (-1)^\nu \cdot S_\nu]$$

Εἰδικές περιπτώσεις:

i) *Ἐξίσωση δευτέρου βαθμοῦ τῆς μορφῆς*: $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$.

Σ' αὐτή τήν περίπτωση οἱ τύποι τοῦ Vieta εἶναι:

$$\rho_1 + \rho_2 = -\frac{\beta}{\alpha} \qquad \rho_1\rho_2 = \frac{\gamma}{\alpha}.$$

ii) *Ἐξίσωση τρίτου βαθμοῦ τῆς μορφῆς*: $\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta = 0$.

Σ' αὐτή τήν περίπτωση οἱ τύποι τοῦ Vieta εἶναι:

$$\rho_1+\rho_2+\rho_3=-\frac{\beta}{\alpha}\,,\quad \rho_1\rho_2+\rho_1\rho_3+\rho_2\rho_3=\frac{\gamma}{\alpha}\,,\quad \rho_1\rho_2\rho_3=-\frac{\delta}{\alpha}.$$

Ἐφαρμογή. Νά βρεῖτε τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων καί τῶν κύβων τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως:

$$2x^3-3x^2+4x-8=0. \tag{1}$$

Λύση. Ἄν ρ_1, ρ_2, ρ_3 εἶναι οἱ ρίζες τῆς ἐξισώσεως (1) ἔχουμε:

$$\rho_1+\rho_2+\rho_3=\frac{3}{2}\,,\quad \rho_1\rho_2+\rho_2\rho_3+\rho_3\rho_1=2\,,\quad \rho_1\rho_2\rho_3=4.$$

Ἐξάλλου ἰσχύει ἡ ταυτότητα:

$$\rho_1^2+\rho_2^2+\rho_3^2=(\rho_1+\rho_2+\rho_3)^2-2(\rho_1\rho_2+\rho_2\rho_3+\rho_3\rho_1)=\left(\frac{3}{2}\right)^2-2\cdot2=-\frac{7}{4}.$$

Ἐπειδή ρ_1, ρ_2, ρ_3 εἶναι ρίζες τῆς (1) ἔχουμε:

$$\left.\begin{aligned} &2\rho_1^3-3\rho_1^2+4\rho_1-8=0\\ &2\rho_2^3-3\rho_2^2+4\rho_2-8=0\\ &2\rho_3^3-3\rho_3^2+4\rho_3-8=0\end{aligned}\right\} \Longrightarrow 2(\rho_1^3+\rho_2^3+\rho_3^3)-3(\rho_1^2+\rho_2^2+\rho_3^2)+4(\rho_1+\rho_2+\rho_3)-24=0$$

ὁπότε: $2(\rho_1^3+\rho_2^3+\rho_3^3)-3\cdot\left(-\frac{7}{4}\right)+4\cdot2-24=0$

καί μετά ἀπό πράξεις βρίσκουμε: $\rho_1^3+\rho_2^3+\rho_3^3=\frac{43}{8}$.

ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ ΜΕ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ

Ὅπως ἔχουμε ἀναφέρει στήν πρώτη παράγραφο αὐτοῦ τοῦ κεφαλαίου τό σύνολο τῶν ἀκέραιων πολυωνύμων τοῦ x μέ συντελεστές πραγματικούς ἀριθμούς τό παριστάνουμε μέ $\mathbf{R}[x]$.

Σχετικά μέ τό $\mathbf{R}[x]$ ἔχουμε τά ἑξῆς: *ἄν $f(x), \varphi(x)\in\mathbf{R}[x]$ τότε καί τά πολυώνυμα: $f(x)\pm\varphi(x)$, $f(x)\,\varphi(x)$ καθώς τό πηλίκο καί τό ὑπόλοιπο τῆς ἀλγοριθμικῆς διαιρέσεως $f(x):\varphi(x)$ εἶναι ἐπίσης ἀκέραια πολυώνυμα μέ συντελεστές πραγματικούς ἀριθμούς.*

Ἀποδεικνύουμε ἀμέσως παρακάτω μία χαρακτηριστική ἰδιότητα πού ἔχουν τά ἀκέραια πολυώνυμα μέ συντελεστές πραγματικούς ἀριθμούς καί ἡ ὁποία ἀποτελεῖ γενίκευση ἀντίστοιχης ἰδιότητας τοῦ τριωνύμου β' βαθμοῦ.

§ 126. Ἰδιότητα VI.— Ἔστω τό ἀκέραιο πολυώνυμο f(x) μέ πραγματικούς συντελεστές, δηλ. $f(x)\in\mathbf{R}[x]$, βαθμοῦ $\nu\geqq2$. Ἄν τό f(x) δέχεται ὡς ρίζα τό μιγαδικό ἀριθμό $\alpha+i\beta$ ($\alpha, \beta\in\mathbf{R} \wedge \beta\neq0$), τότε αὐτό θά δέχεται ὡς ρίζα καί τό συζυγή του: $\alpha-i\beta$.

Ἀπόδειξη. Ἔστω φ(x) τό πολυώνυμο δεύτερου βαθμοῦ, τό ὁποῖο ἔχει ὡς ρίζες τούς ἀριθμούς $\alpha+i\beta$ καί $\alpha-i\beta$, δηλαδή:

$$\varphi(x)\equiv[x-(\alpha+i\beta)][x-(\alpha-i\beta)]\equiv x^2-2\alpha x+(\alpha^2+\beta^2).$$

Ἄν τό f(x) διαιρεθεῖ μέ τό φ(x), θά ἔχουμε τήν ταυτότητα:

$$f(x)\equiv\varphi(x)\cdot\pi(x)+(\gamma x+\delta) \tag{1}$$

Ἐπειδή $f(\alpha+i\beta)=0$ καί $\varphi(\alpha+i\beta)=0$, ἀπό τήν (1) ἔχουμε:

$$\gamma(\alpha+i\beta)+\delta=0 \iff (\alpha\gamma+\delta)+i\beta\gamma=0 \iff \begin{cases} \alpha\gamma+\delta=0 \\ \beta\gamma=0 \end{cases} \qquad (2)$$

Ἐπειδή ὅμως $\beta \neq 0$, ἀπό τή δεύτερη σχέση τῆς (2), ἕπεται $\gamma=0$. Τότε ἀπό τήν πρώτη τῆς (2), προκύπτει $\delta=0$.

Γιά $\gamma=\delta=0$ ἡ (1) γίνεται: $f(x)\equiv\varphi(x)\cdot\pi(x)$ (3)

Ἀπό τήν (3) προκύπτει:

$$f(\alpha-i\beta)\equiv\varphi(\alpha-i\beta)\,\pi(\alpha-i\beta)$$

καί ἐπειδή $\varphi(\alpha-i\beta)=0$ θά εἶναι: $f(\alpha-i\beta)=0$, δηλαδή τό $f(x)$ δέχεται ὡς ρίζα καί τό μιγαδικό ἀριθμό $\alpha-i\beta$.

Σημ. Προσέξτε ! ἡ παραπάνω πρόταση (ἰδιότητα VI) **δέν** ἰσχύει στήν περίπτωση κατά τήν ὁποία οἱ συντελεστές τοῦ πολυωνύμου $f(x)$ εἶναι μιγαδικοί ἀριθμοί.

Πιό γενικά ἰσχύει ἡ ἑπόμενη πρόταση.

§ 127. Ἰδιότητα VII.— **Ἄν ἕνα ἀκέραιο πολυώνυμο f(x) μέ πραγματικούς συντελεστές, βαθμοῦ $\nu \geq 2k$, ($k\in N$) δέχεται ὡς πολλαπλή ρίζα τό μιγαδικό ἀριθμό: $\alpha+i\beta$ ($\alpha, \beta\in R \wedge \beta\neq 0$) μέ βαθμό πολλαπλότητας k ($k\geq 2$), τότε αὐτό θά δέχεται ὡς πολλαπλή ρίζα καί τό συζυγή του: $\alpha-i\beta$ καί μάλιστα μέ τόν ἴδιο βαθμό πολλαπλότητας k.**

Ἀπόδειξη. Ἐπειδή τό $f(x)$ δέχεται ὡς ρίζα τόν ἀριθμό $\alpha+i\beta$, $\beta\neq 0$ θά δέχεται, σύμφωνα μέ τήν προηγούμενη ἰδιότητα, ὡς ρίζα καί τό συζυγή του: $\alpha-i\beta$, $\beta\neq 0$. Ἔστω ὅτι ὁ $\alpha-i\beta$ εἶναι ρίζα τοῦ $f(x)$ μέ βαθμό πολλαπλότητας λ, $\lambda\in N$. Θά ἀποδείξουμε ὅτι $\lambda=k$.

Πρῶτα-πρῶτα ἔχουμε τότε τήν ταυτότητα:

$$f(x)\equiv[x-(\alpha+i\beta)]^k\cdot[x-(\alpha-i\beta)]^\lambda\,\pi(x) \qquad (1)$$

ὅπου $\pi(x)\in C[x]$ μέ $\pi(\alpha+i\beta)\neq 0$ καί $\pi(\alpha-i\beta)\neq 0$.

Ἔστω ὅτι $k>\lambda$, τότε $k-\lambda=\mu$, $\mu\in N$ καί συνεπῶς $k=\lambda+\mu$.

Τότε ἡ (1) γίνεται:

$$f(x)\equiv[x-(\alpha+i\beta)]^{\lambda+\mu}[x-(\alpha-i\beta)]^\lambda\,\pi(x)\equiv[(x-\alpha)^2+\beta^2]^\lambda\cdot[x-(\alpha+i\beta)]^\mu\cdot\pi(x)$$

Θέτουμε: $\varphi(x)\equiv[x-(\alpha+i\beta)]^\mu\cdot\pi(x)$. Παρατηροῦμε ὅτι τό πολυώνυμο $\varphi(x)$, ὡς πηλίκο τῆς διαιρέσεως $f(x):[(x-\alpha)^2+\beta^2]$ δύο πολυωνύμων μέ πραγματικούς συντελεστές, ἔχει πραγματικούς συντελεστές καί ἐπιπλέον δέχεται ὡς ρίζα τόν ἀριθμό: $\alpha+i\beta$. Ἄρα, σύμφωνα μέ τήν προηγούμενη ἰδιότητα, θά δέχεται ὡς ρίζα καί τόν ἀριθμό: $\alpha-i\beta$, ὁπότε: $\varphi(\alpha-i\beta)=$ $=(-2\beta i)^\mu\pi(\alpha-i\beta)=0$. Αὐτό ὅμως εἶναι ἄτοπο, γιατί $\beta\neq 0 \wedge \pi(\alpha-i\beta)\neq 0$.

Δέν εἶναι λοιπόν δυνατό νά ἰσχύει $k>\lambda$. Μέ τόν ἴδιο τρόπο ἀποδεικνύεται ὅτι δέν μπορεῖ νά εἶναι $k<\lambda$. Ἄρα ἡ μοναδική περίπτωση πού ἀπομένει εἶναι $k=\lambda$.

Ἄμεση συνέπεια τῶν παραπάνω ἰδιοτήτων εἶναι τά ἑπόμενα πορίσματα:

Πόρισμα Ι.— **Ἄν ἕνα ἀκέραιο πολυώνυμο f(x) μέ πραγματικούς συντελεστές ἔχει μιγαδικές ρίζες, τότε τό πλῆθος τῶν μιγαδικῶν ριζῶν εἶναι ἄρτιος ἀριθμός.**

Πόρισμα ΙΙ.— **Κάθε πολυώνυμο περιττοῦ βαθμοῦ μέ πραγματικούς συντελεστές ἔχει ὁπωσδήποτε μία (τουλάχιστο) πραγματική ρίζα.**

Πόρισμα III.— Ἕνα πολυώνυμο ἄρτιου βαθμοῦ μέ πραγματικούς συντελεστές μπορεῖ νά ἔχει καμιά ἤ ἄρτιο πλῆθος ἤ καί ὅλες τίς ρίζες του μιγαδικές.

ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ ΜΕ ΡΗΤΟΥΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ

Τό σύνολο τῶν ἀκέραιων πολυωνύμων τοῦ x μέ συντελεστές ρητούς ἀριθμούς τό παριστάνουμε μέ $\mathbf{Q}[x]$.

Σχετικά μέ τό $\mathbf{Q}[x]$ ἔχουμε τά ἑξῆς: *ἄν $f(x), \varphi(x) \in \mathbf{Q}[x]$, τότε καί τά πολυώνυμα: $f(x) \pm \varphi(x), f(x)\varphi(x)$ καθώς τό πηλίκο καί τό ὑπόλοιπο τῆς ἀλγοριθμικῆς διαιρέσεως $f(x) : \varphi(x)$ εἶναι ἐπίσης ἀκέραια πολυώνυμα μέ συντελεστές ρητούς ἀριθμούς.*

Θά ἀποδείξουμε ἀμέσως παρακάτω μία χαρακτηριστική ἰδιότητα πού ἔχουν τά ἀκέραια πολυώνυμα μέ συντελεστές ρητούς ἀριθμούς, τά ὁποῖα δέχονται μία ρίζα τῆς μορφῆς $\alpha + \sqrt{\beta}$ μέ $\alpha \in \mathbf{Q}$ καί $\sqrt{\beta} \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$.

Ἀκριβέστερα ἰσχύει ἡ παρακάτω πρόταση:

§ 128. Ἰδιότητα VIII.— Ἄν ἕνα ἀκέραιο πολυώνυμο $f(x)$ μέ ρητούς συντελεστές, δηλ. $f(x) \in Q[x]$, δέχεται ὡς ρίζα τόν ἀριθμό $\alpha + \sqrt{\beta}$, ($\alpha \in Q$, $\beta \in Q^+$, $\beta \neq \theta^2$, ὅπου $\theta \in Q$), τότε αὐτό θά δέχεται ὡς ρίζα καί τόν ἀριθμό $\alpha - \sqrt{\beta}$ καί μάλιστα μέ τόν ἴδιο βαθμό πολλαπλότητας.

Ἀπόδειξη. Ἔστω $\varphi(x)$ τό πολυώνυμο β' βαθμοῦ, τό ὁποῖο ἔχει γιά ρίζες του τούς ἀριθμούς: $\alpha + \sqrt{\beta}$ καί $\alpha - \sqrt{\beta}$. Αὐτό εἶναι:

$$\varphi(x) \equiv [x - (\alpha + \sqrt{\beta})][x - (\alpha - \sqrt{\beta})] = (x - \alpha)^2 - \beta = x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 - \beta.$$

Ἄν τό $f(x)$ διαιρεθεῖ μέ τό $\varphi(x)$, θά ἔχουμε τήν ταυτότητα:

$$f(x) \equiv \varphi(x) \cdot \pi(x) + (\gamma x + \delta) \tag{1}$$

ὅπου $\gamma, \delta \in Q$, $\pi(x) \in Q[x]$, γιατί $f(x), \varphi(x) \in Q[x]$.

Ἐπειδή $f(\alpha + \sqrt{\beta}) = 0$ καί $\varphi(\alpha + \sqrt{\beta}) = 0$, ἀπό τήν (1) θά ἔχουμε:

$$\gamma(\alpha + \sqrt{\beta}) + \delta = 0 \iff (\alpha\gamma + \delta) + \gamma\sqrt{\beta} = 0.$$

Εἶναι ὅμως $\alpha\gamma + \delta \in Q$ καί $\gamma \in Q$ καί $\beta \neq 0$.

Ἄρα $\gamma = 0$ καί συνεπῶς καί $\delta = 0$.

Ἡ (1) τότε γίνεται: $$f(x) \equiv \varphi(x) \cdot \pi(x) \tag{2}$$

Ἀπό τή (2) προκύπτει: $f(\alpha - \sqrt{\beta}) = \varphi(\alpha - \sqrt{\beta}) \cdot \pi(\alpha - \sqrt{\beta}) = 0$, ἐπειδή $\varphi(\alpha - \sqrt{\beta}) = 0$.

Ἄρα τό $f(x)$ δέχεται ὡς ρίζα καί τόν ἀριθμό: $\alpha - \sqrt{\beta}$.

Ἡ ἀπόδειξη τοῦ δεύτερου μέρους τῆς ἰδιότητας αὐτῆς, τό ὁποῖο ἀναφέρεται στό βαθμό πολλαπλότητας τῆς ρίζας, εἶναι τελείως ἀνάλογη μέ αὐτή πού δώσαμε κατά τήν ἀπόδειξη τῆς ἰδιότητας VII (§ 127).

Μέ τόν ἴδιο ἀκριβῶς τρόπο ἀποδεικνύεται καί ἡ ἑπόμενη πιό γενική:

Πρόταση.—Ἄν ἕνα ἀκέραιο πολυώνυμο $f(x)$ μέ ρητούς συντελεστές δέχεται ὡς ρίζα τόν ἄρρητο ἀριθμό: $\alpha + \beta\sqrt{\gamma}$, ὅπου $\alpha, \beta, \gamma \in Q$, $\sqrt{\gamma} \in R - Q$ καί $\beta \neq 0$, τότε αὐτό δέχεται ὡς ρίζα καί τόν ἀριθμό: $\alpha - \beta\sqrt{\gamma}$ καί μάλιστα μέ τόν ἴδιο βαθμό πολλαπλότητας.

ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ ΜΕ ΑΚΕΡΑΙΟΥΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ

Τό σύνολο τῶν ἀκέραιων πολυωνύμων τοῦ x μέ συντελεστές ἀκέραιους ἀριθμούς τό παριστάνουμε μέ $\mathbf{Z}[x]$.

Βασική ἰδιότητα τοῦ $\mathbf{Z}[x]$ εἶναι ὅτι: *τό ἄθροισμα, ἡ διαφορά καί τό γινόμενο δύο ἀκέραιων πολυωνύμων τοῦ $\mathbf{Z}[x]$ εἶναι ἐπίσης πολυώνυμο μέ συντελεστές ἀκέραιους ἀριθμούς. Ἄν ἐπιπλέον ὁ πρῶτος συντελεστής τοῦ $\varphi(x)$ εἶναι ἴσος μέ ± 1, τότε τό πηλίκο καθώς καί τό ὑπόλοιπο τῆς ἀλγοριθμικῆς διαιρέσεως $f(x):\varphi(x)$ εἶναι πολυώνυμα ἐπίσης μέ ἀκέραιους συντελεστές* (βλ. παρατηρήσεις τῆς § 116).

Ἀποδεικνύουμε ἀμέσως παρακάτω δύο χαρακτηριστικές ἰδιότητες οἱ ὁποῖες μᾶς δίνουν τίς **ἀναγκαῖες** συνθῆκες γιά νά δέχεται ἕνα πολυώνυμο μέ ἀκέραιους συντελεστές ρίζα ἀκέραιο ἀριθμό ἀντίστοιχα ρίζα ρητό ἀριθμό.

§ 129. Ἰδιότητα IX.— Ἄν τό μέ ἀκέραιους συντελεστές πολυώνυμο:

$$f(x) \equiv \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

δέχεται ὡς ρίζα τόν ἀκέραιο ἀριθμό $\rho \neq 0$, τότε ὁ ρ θά εἶναι διαιρέτης τοῦ σταθεροῦ ὅρου α_0 τοῦ πολυωνύμου, δηλαδή ρ/α_0.

Ἀπόδειξη. Ἔχουμε $f(\rho) = \alpha_\nu\rho^\nu + \alpha_{\nu-1}\rho^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1\rho + \alpha_0 = 0$, ὁπότε:

$$\rho(\alpha_\nu\rho^{\nu-1} + \alpha_{\nu-1}\rho^{\nu-2} + \cdots + \alpha_1) = -\alpha_0 \qquad (1)$$

Ἀλλά: $\alpha_\nu\rho^{\nu-1} + \alpha_{\nu-1}\rho^{\nu-2} + \cdots + \alpha_1$ εἶναι ἕνας ἀκέραιος ἀριθμός, ἐπειδή $\rho, \alpha_\nu, \alpha_{\nu-1}, \ldots, \alpha_1 \in \mathbf{Z}$, τόν ὁποῖο ἄς τόν ὀνομάσουμε λ, τότε ἡ (1) γράφεται:

$$\rho \cdot \lambda = -\alpha_0 \qquad (2)$$

Ἀπό τή (2) λαμβάνουμε: ρ/α_0.

Παρατηρήσεις. α) Οἱ ἀκέραιες ρίζες ἑνός πολυωνύμου $f(x)$, ἐφόσον ὑπάρχουν, πρέπει νά ἀναζητηθοῦν ἀνάμεσα στούς διαιρέτες τοῦ σταθεροῦ ὅρου α_0.

β) Τό ἀντίστροφο τῆς παραπάνω προτάσεως **δέν** ἰσχύει πάντοτε.

γ) Ἄν κανένας ἀπό τούς διαιρέτες τοῦ σταθεροῦ ὅρου α_0 τοῦ πολυωνύμου $f(x)$ δέ μηδενίζει τό $f(x)$, τότε τό πολυώνυμο αὐτό δέν ἔχει ἀκέραιες ρίζες.

§ 130. Ἰδιότητα X.— Ἄν τό μέ ἀκέραιους συντελεστές πολυώνυμο:

$$f(x) \equiv \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

δέχεται ὡς ρίζα τό ρητό ἀριθμό $\frac{k}{\lambda}$, ὅπου k, λ ἀκέραιοι, πρῶτοι μεταξύ τους καί $\lambda \neq 0$, τότε ὁ k θά εἶναι διαιρέτης τοῦ σταθεροῦ ὅρου καί ὁ λ διαιρέτης τοῦ πρώτου συντελεστῆ τοῦ πολυωνύμου, δηλ. $k/\alpha_0 \wedge \lambda/\alpha_\nu$.

Ἀπόδειξη. Ἐπειδή $f\left(\frac{k}{\lambda}\right) = 0$ ἔχουμε:

$$\alpha_\nu\frac{k^\nu}{\lambda^\nu} + \alpha_{\nu-1}\frac{k^{\nu-1}}{\lambda^{\nu-1}} + \cdots + \alpha_1\frac{k}{\lambda} + \alpha_0 = 0 \quad \text{καί συνεπῶς}$$

$$\alpha_\nu k^\nu + \alpha_{\nu-1}k^{\nu-1}\lambda + \cdots + \alpha_1 k\lambda^{\nu-1} + \alpha_0\lambda^\nu = 0 \qquad (1)$$

Ἀπό τήν τελευταία ἐξίσωση λαμβάνουμε:

$$\alpha_\nu k^\nu = -\lambda(\alpha_{\nu-1}k^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 k\lambda^{\nu-2} + \alpha_0\lambda^{\nu-1}) = \text{πολ.}\lambda \qquad (2)$$

$$\alpha_0\lambda^\nu = -k(\alpha_\nu k^{\nu-1} + \alpha_{\nu-1}k^{\nu-2}\lambda + \cdots + \alpha_1\lambda^{\nu-1}) = \text{πολ.}k \qquad (3)$$

Ἀπό τή (2) ἔχουμε ὅτι: $\lambda/\alpha_\nu k^\nu$ καί ἐπειδή ὁ λ εἶναι πρῶτος μέ τόν k, ἄρα καί μέ τόν k^ν, θά ἔχουμε ὅτι: λ/α_ν.

Ὁμοίως ἀπό τήν (3) ἔχουμε: $k/\alpha_0\lambda^\nu$ καί ἐπειδή ὁ k εἶναι πρῶτος μέ τό λ, ἄρα καί μέ τό λ^ν, θά ἔχουμε: k/α_0.

Παρατήρηση. Τό ἀντίστροφο τῆς παραπάνω ἰδιότητας **δέν** ἰσχύει πάντοτε.

§ 131. Ἐφαρμογές στίς ἰδιότητες τῶν ἀκέραιων πολυωνύμων.—

Ἐφαρμογή 1η: Νά προσδιορίσετε τούς πραγματικούς ἀριθμούς α, β γιά νά διαιρεῖται τό πολυώνυμο $f(x) \equiv x^3 - 2\alpha x^2 + \beta x + 6$ διά τοῦ γινομένου $(x-2)(x-3)$.

Λύση. Ἐπειδή θέλουμε τό πολυώνυμο $f(x) \equiv x^3 - 2\alpha x^2 + \beta x + 6$ νά διαιρεῖται (ἀκριβῶς) διά τοῦ γινομένου $(x-2)(x-3)$, ἀρκεῖ νά διαιρεῖται ἀκριβῶς διά $x-2$ καί διά $x-3$. Γι' αὐτό πρέπει καί ἀρκεῖ:

$$\left.\begin{aligned} f(2) &= -8\alpha + 2\beta + 14 = 0 \\ f(3) &= -18\alpha + 3\beta + 33 = 0 \end{aligned}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{aligned} 4\alpha - \beta &= 7 \\ 6\alpha - \beta &= 11 \end{aligned}\right\} \Longleftrightarrow \begin{aligned} \alpha &= 2 \\ \beta &= 1. \end{aligned}$$

Σημείωση. Τούς πραγματικούς ἀριθμούς α καί β τῆς παραπάνω ἐφαρμογῆς μποροῦμε νά τούς προσδιορίσουμε καί μέ ἄλλους τρόπους. Νά ἐφαρμόσετε ἕνα ἀπό αὐτούς, γιά νά βρεῖτε τά α καί β.

Ἐφαρμογή 2η: Ἔστω ὅτι f(x) εἶναι ἀκέραιο πολυώνυμο πού ὅταν διαιρεῖται διά $x+1$ δίνει ὑπόλοιπο 2, ὅταν διαιρεῖται διά $x-2$ δίνει ὑπόλοιπο 11 καί διά $x+3$ δίνει ὑπόλοιπο 6. Νά βρεῖτε τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως τοῦ f(x) διά τοῦ γινομένου:

$$(x+1)(x-2)(x+3)$$

Λύση. Ἀπό τήν ὑπόθεση ἔχουμε:

$$f(-1) = 2, \quad f(2) = 11, \quad f(-3) = 6 \qquad (1)$$

Τό πολυώνυμο f(x) ὅταν διαιρεῖται διά τοῦ γινομένου: $(x+1)(x-2)(x+3)$, τό ὁποῖο εἶναι τρίτου βαθμοῦ, δίνει ἕνα πηλίκο π(x) καί ἕνα ὑπόλοιπο τό πολύ δεύτερου βαθμοῦ, ἔστω τό: $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$.

Σύμφωνα μέ τήν ταυτότητα τῆς ἀλγοριθμικῆς διαιρέσεως θά ἔχουμε:

$$f(x) \equiv (x+1)(x-2)(x+3)\cdot\pi(x) + \alpha x^2 + \beta x + \gamma \qquad (2)$$

Θέτοντας στή (2) διαδοχικά $x=-1$, $x=2$, $x=-3$ καί ἔχοντας ὑπόψη τίς (1), λαμβάνουμε τό σύστημα:

$$\Sigma: \quad \{\alpha - \beta + \gamma = 2 \wedge 4\alpha + 2\beta + \gamma = 11 \wedge 9\alpha - 3\beta + \gamma = 6\}$$

Λύνοντας τό σύστημα (Σ) βρίσκουμε: $\alpha = 1, \beta = 2, \gamma = 3$.

Ἄρα τό ὑπόλοιπο πού ζητᾶμε εἶναι τό: $x^2 + 2x + 3$.

Ἐφαρμογή 3η: Νά βρεῖτε ἕνα πολυώνυμο τρίτου βαθμοῦ μέ πραγματικούς συντελεστές τοῦ ὁποίου δύο ρίζες εἶναι οἱ ἀριθμοί $\rho_1 = 5$ καί $\rho_2 = i$.

Λύση. Ἔστω $\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$, $\alpha \neq 0$ τό μέ πραγματικούς συντελεστές πολυώνυμο τρίτου βαθμοῦ πού ζητᾶμε νά προσδιορίσουμε.

Προφανῶς ἡ τρίτη ρίζα τοῦ πολυωνύμου εἶναι: $\rho_3 = -i$ (γιατί;).

Τότε, σύμφωνα μέ τίς σχέσεις τοῦ Vieta, θά ἔχουμε:

$$\left.\begin{array}{llll} \rho_1+\rho_2+\rho_3 = -\dfrac{\beta}{\alpha}, & \delta\eta\lambda. & 5=-\dfrac{\beta}{\alpha} \\ \rho_1\rho_2+\rho_1\rho_3+\rho_2\rho_3 = \dfrac{\gamma}{\alpha}, & \delta\eta\lambda. & 1=\dfrac{\gamma}{\alpha} \\ \rho_1\rho_2\rho_3 = -\dfrac{\delta}{\alpha}, & \delta\eta\lambda. & 5=-\dfrac{\delta}{\alpha} \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} \beta=-5\alpha \\ \gamma=\alpha \\ \delta=-5\alpha \end{array}$$

Ἄρα τό πολυώνυμο πού ζητᾶμε εἶναι:

$$f(x) \equiv \alpha(x^3-5x^2+x-5),\ \alpha\in\mathbf{R},\ \alpha\neq 0.$$

Ἐφαρμογή 4η: Νά βρεῖτε ἕνα πολυώνυμο τέταρτου βαθμοῦ μέ ἀκέραιους συντελεστές, τό ὁποῖο νά διαιρεῖται μέ τό: $x^2-(\sqrt{2}+i)x+i\sqrt{2}$.

Λύση. Παρατηροῦμε ὅτι: $x^2-(\sqrt{2}+i)x+i\sqrt{2} \equiv (x-\sqrt{2})\cdot(x-i)$.

Ἄν $f(x)$ εἶναι τό πολυώνυμο πού ζητᾶμε, τότε, ἐπειδή αὐτό διαιρεῖται μέ τό $x-\sqrt{2}$, σύμφωνα μέ τήν ἰδιότητα VIII (§ 128) θά διαιρεῖται καί μέ τό $x+\sqrt{2}$· ἐπίσης, ἐπειδή τό $f(x)$ διαιρεῖται μέ τό $x-i$, σύμφωνα μέ τήν ἰδιότητα VI (§ 126), θά διαιρεῖται καί μέ τό $x+i$. Τό πολυώνυμο $f(x)$ θά διαιρεῖται τότε, σύμφωνα μέ τήν ἰδιότητα I (§ 119) καί μέ τό γινόμενό τους. Συνεπῶς θά ἔχουμε:

$$f(x) \equiv (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x-i)(x+i) \equiv (x^2-2)(x^2+1) \equiv x^4-x^2-2.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάδα Α΄. 259. Δίνεται τό πολυώνυμο:

$$f(x) \equiv 2x^3+\alpha x^2-13x+\beta$$

α) Νά προσδιορίσετε τούς συντελεστές α, β ἄν ξέρουμε ὅτι τό $f(x)$ διαιρεῖται (ἀκριβῶς) μέ τό: $(x-3)(x+2)$.

β) Ἄν $\pi(x)$ εἶναι τό πηλίκο τῆς διαιρέσεως $f(x):(x-3)(x+2)$, μέ τιμές τῶν α καί β αὐτές πού βρήκατε προηγουμένως, νά ἀποδείξετε ὅτι:

(τ): $\quad \pi(1)+\pi(2)+\cdots+\pi(\nu) \equiv \nu(\nu+2).$

γ) Ἀφοῦ προσδιορίσετε τούς συντελεστές καί τό πολυώνυμο $\pi(x)$, νά ἀποδείξετε, μέ τή μέθοδο τῆς τέλειας ἐπαγωγῆς, τήν ταυτότητα (τ).

260. Γιά ποιές τιμές τῶν $\alpha, \beta\in\mathbf{R}$ τό πολυώνυμο $f(x) \equiv 3x^4-\alpha x^3+5x^2-9x+\beta$ διαιρεῖται: **(i)** μέ τό x^2-1, **(ii)** μέ τό x^2+1.

Ἄν $\Pi(x)$ εἶναι τό πηλίκο τῆς διαιρέσεως $f(x):x^2-1$ καί $P(x)$ εἶναι τό πηλίκο τῆς διαιρέσεως $f(x):x^2+1$ (μέ τίς παραπάνω τιμές τῶν α καί β), τότε νά ὑπολογίσετε τά ἀθροίσματα:

1) $\Sigma_1 = \Pi(1)+\Pi(2)+\cdots+\Pi(\nu)$ καί 2) $\Sigma_2 = P(1)+P(2)+\cdots+P(\nu)$.

Ὑπόδειξη. Ἰσχύει $x^2+1=(x+i)(x-i)$.

261. Νά ἀποδείξετε ὅτι τό πολυώνυμο $f(x) \equiv (x+1)^{2\nu}-x^{2\nu}-2x-1$, $\nu\in\mathbf{N}$, εἶναι διαιρετό διά τοῦ πολυωνύμου: $2x^3+3x^2+x$.

262. Ἄν γιά τρεῖς διαφορετικές τιμές τοῦ x τά πολυώνυμα:

$$f(x) \equiv (\alpha-2)x^2+(2\beta-1)x+\gamma, \qquad \varphi(x) \equiv x^2+5x+\alpha+1$$

ἔχουν ἴσες ἀριθμητικές τιμές, νά προσδιορίσετε τούς ἀριθμούς α, β, γ.

263. Ἄν οἱ συντελεστές τοῦ $f(x) \equiv \alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$ εἶναι πραγματικοί ἀριθμοί καί ἰσχύει $x-i/f(x)$, τότε νά ἀποδείξετε ὅτι θά ἰσχύει καί: $x^2+1/f(x)$. Στή συνέχεια νά βρεῖτε τό πολυώνυμο $f(x)$ ἄν ἐπιπλέον ξέρουμε ὅτι: $f(0)=1$ καί $f(1)=10$.

264. Ἄν -4 καί -164 εἶναι τά ὑπόλοιπα τῶν διαιρέσεων $f(x):(x+1)$ καί $f(x):(x-3)$

ἀντιστοίχως, τότε νά βρεῖτε τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως $f(x):(x^2-2x-3)$. Ἄν τώρα τό πολυώνυμο $f(x)$ εἶναι τέταρτου βαθμοῦ καί ἔχει ὡς ρίζες τούς ἀριθμούς: $0, 2, -2$, νά βρεῖτε τήν ἄλλη ρίζα τοῦ πολυωνύμου.

265. Νά βρεῖτε τή σχέση πού συνδέει τούς ἀριθμούς α, β, γ ἄν ξέρουμε ὅτι οἱ ρίζες τῆς ἐξισώσεως: $\alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$ εἶναι διαδοχικοί ὅροι σέ μία ἀριθμητική πρόοδο. Κατόπιν μέ τή βοήθεια τῆς σχέσεως πού βρήκατε νά προσδιορίσετε τήν παράμετρο λ, ὥστε οἱ ρίζες τοῦ πολυωνύμου $f(x) \equiv x^4 - (2\lambda + 1)x^2 + \lambda^2$ νά εἶναι διαδοχικοί ὅροι ἀριθμητικῆς προόδου.

266. Δίνεται ἡ ἐξίσωση: $x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$. Νά βρεῖτε σχέση μεταξύ τῶν συντελεστῶν α, β, γ ἔτσι, ὥστε οἱ ρίζες τῆς παραπάνω ἐξισώσεως νά εἶναι διαδοχικοί ὅροι:

(i) Ἀριθμητικῆς προόδου, **(ii)** Γεωμετρικῆς προόδου, **(iii)** Ἁρμονικῆς προόδου.

Στή συνέχεια νά προσδιορίσετε τό συντελεστή k ἔτσι, ὥστε οἱ ρίζες τῆς ἐξισώσεως: $x^3 - 8x^2 - 6x - k = 0$ νά εἶναι διαδοχικοί ὅροι μιᾶς ἀριθμητικῆς (ἀντ. γεωμετρικῆς) προόδου. Ὕστερα νά βρεῖτε τίς ρίζες τῆς ἐξισώσεως: $x^2 - 8x^2 - 6x - k = 0$ μέ τίς παραπάνω τιμές τοῦ k.

267. Ἄν οἱ ρίζες ρ_1, ρ_2, ρ_3 τῆς ἐξισώσεως: $x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$, εἶναι πραγματικές καί ἱκανοποιοῦν τή σχέση: $\rho_1^3 + \rho_2^3 + \rho_3^3 = -3\gamma$, νά ἀποδείξετε ὅτι τό πολυώνυμο $f(x) \equiv x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ ἔχει πολλαπλή ρίζα καί μάλιστα τριπλή.

268. Ἄν οἱ ρίζες ρ_1, ρ_2, ρ_3 τοῦ πολυωνύμου $f(x) \equiv x^3 + 3\alpha x^2 + 3\beta x + \gamma$ εἶναι διαδοχικοί ὅροι ἁρμονικῆς προόδου, νά ἀποδείξετε ὅτι: $2\beta^3 - 3\alpha\beta\gamma + \gamma^2 = 0$.

269. Δίνεται πολυώνυμο $f(x)$ μέ ἀκέραιους συντελεστές τέτοιο, ὥστε:

$$f(1) = 1 \wedge f(x) \equiv f(1-x).$$

Νά ἀποδείξετε ὅτι ὑπάρχει πολυώνυμο $\varphi(x)$ μέ ἀκέραιους ἐπίσης συντελεστές καί τέτοιο, ὥστε νά ἰσχύει: $f(x) \equiv x(x-1)\varphi(x) + 1$.

270. Νά ἀποδείξετε ὅτι: ἄν ἕνα πολυώνυμο $f(x)$, $f(x) \in C[x]$, ἔχει μία ἀπό τίς παρακάτω ἰδιότητες:

$$f(x) \equiv f(x+1) \quad \text{ἤ} \quad f(x) \equiv f(2x)$$

τότε τό $f(x)$ εἶναι ἕνα σταθερό πολυώνυμο.

Ὑπόδειξη. Ἀφοῦ ἀποδείξετε ὅτι ἰσχύει: $f(\nu) = f(0)$, ἀντ. $f(2^\nu) = f(1)$, $\forall\ \nu \in N$ νά πάρετε τά πολυώνυμα: $f(x) - f(0)$, ἀντ. $f(x) - f(1)$ καί νά ἀποδείξετε ὅτι τό καθένα ἀπό αὐτά εἶναι τό μηδενικό πολυώνυμο (βλ. § 124).

Ὁμάδα Β΄. 271. Ἕνα ἀκέραιο πολυώνυμο $f(x)$ ὅταν διαιρεῖται μέ τό $x^2 + x + 1$ δίνει ὑπόλοιπο $x - 1$ καί ὅταν διαιρεῖται μέ τό $x^2 - x + 1$ δίνει ὑπόλοιπο $2x + 1$. Νά βρεῖτε τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως $f(x):x^4 + x^2 + 1$.

Ὑπόδειξη. Ἀφοῦ διαπιστώσετε ὅτι ἰσχύει: $x^4 + x^2 + 1 \equiv (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$ νά λάβετε στή συνέχεια ὑπόψη καί τό πόρισμα τῆς § 117.

272. Νά προσδιορίσετε τούς πραγματικούς ἀριθμούς α, β ἔτσι, ὥστε τό πολυώνυμο: $f(x) \equiv x^4 + (\alpha - \beta)x^3 + 2\alpha x^2 - 5x + 4$ νά διαιρεῖται μέ τή μεγαλύτερη δυνατή δύναμη τοῦ $(x-1)$. Ποιός εἶναι τότε ὁ ἐκθέτης τοῦ $(x-1)$;

273. Νά ἀποδείξετε ὅτι γιά κάθε ρίζα ρ τοῦ πολυωνύμου $f(x) \equiv \alpha x^{\nu-1} + x^{\nu-2} + \cdots + x + 1$, βαθμοῦ $(\nu - 1)$, ἰσχύει: $|\rho| < 1 + \dfrac{1}{|\alpha|}$.

274. Ἄν τά πολυώνυμα $f(x) \equiv x^3 + \alpha x - \beta$ καί $\varphi(x) \equiv \beta x^3 - \alpha x - 1$ μέ $\alpha, \beta \in R^+$ ἔχουν κοινή μία πραγματική ρίζα, νά ἀποδείξετε ὅτι ἰσχύουν οἱ σχέσεις:

(i) $\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2 = -2\alpha$, **(ii)** $|\rho_1| + |\rho_2| + |\rho_3| > \dfrac{3}{2}$,

ὅπου ρ_1, ρ_2, ρ_3 εἶναι οἱ ρίζες τοῦ $f(x)$.

275. Ἄν ὅλες οἱ ρίζες τοῦ πολυωνύμου $f(x) \equiv x^3 - x^2 + 9kx - k$ εἶναι θετικές νά προσδιορίσετε τούς συντελεστές καί τίς ρίζες τοῦ πολυωνύμου $f(x)$.

276. Νά ἀποδείξετε ὅτι τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀκέραιου πολυωνύμου $f(x)$ διά τοῦ $x^2 - 2\rho x + \rho^2$ εἶναι τό: $\pi(\rho)x + f(\rho) - \rho\pi(\rho)$, ὅπου $\pi(x)$ εἶναι τό πηλίκο τῆς διαιρέσεως $[f(x) - f(\rho)]:(x - \rho)$.

277. Ἄν τό μέ πραγματικούς συντελεστές πολυώνυμο $f(x) \equiv x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ ἔχει ὡς διπλή ρίζα τόν ἀριθμό ρ καί εἶναι $\rho \leqq 0$ ἤ $\rho \geqq 1 + \sqrt{2}$, νά ἀποδείξετε ὅτι ἰσχύει:

$$|\alpha| + |\beta| + |\gamma| \geqq \rho^2 + 2\rho.$$

278. Μέ τή βοήθεια τῆς θεωρίας τῶν ἀκέραιων πολυωνύμων, νά ἐπιλύσετε τό σύστημα:

$$\{x + y + z = 2 \wedge x^2 + y^2 + z^2 = 8 \wedge x^3 + y^3 + z^3 = 17\}.$$

Ὑπόδειξη. Ἀφοῦ βρεῖτε μέ τί ἰσοῦται τό xyz, νά θεωρήσετε τά x, y, z ὡς ρίζες μιᾶς τριτοβάθμιας ἐξισώσεως τήν ὁποία καί θά ἐπιλύσετε.

279. Δίνεται μία πολυωνυμική συνάρτηση f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ τέτοια, ὥστε γιά κάθε $x \in \mathbf{R}$ καί κάθε φυσικό ἀριθμό k ἰσχύει:

$$f(kx) = f(x)$$

Νά ἀποδείξετε ὅτι γιά κάθε φυσικό ἀριθμό ν ἰσχύει: $f(k^\nu) = f(1)$ καί ἀπό αὐτό νά συμπεράνετε ὅτι ἡ f εἶναι σταθερή.

280. Νά ἀποδείξετε ὅτι: ἄν ἕνα πολυώνυμο $f(x)$, $f(x) \in \mathbf{C}[x]$, ἔχει μία ἀπό τίς παρακάτω ἰδιότητες:

(i) $f(x) \equiv f(x + \omega)$, ὅπου $\omega \neq 0$, (ii) $f(x + 1) \equiv f(x - 1)$,

τότε τό $f(x)$ εἶναι ἕνα σταθερό πολυώνυμο.

281. Δίνεται μία πολυωνυμική συνάρτηση: f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ τέτοια, ὥστε γιά κάθε πραγματικό ἀριθμό x νά ἰσχύει: $f(2x) = f(x)$.

Νά ἀποδείξετε ὅτι γιά κάθε πραγματικό ἀριθμό x καί κάθε φυσικό ἀριθμό ν ἰσχύει: $f(x) = f\left(\frac{x}{2^\nu}\right)$. Ἀπό αὐτό νά συμπεράνετε ὅτι ἡ f εἶναι σταθερή.

282. Δίνεται τό πολυώνυμο $f(x) \equiv x^3 - x^2 - 4x - 4$. Νά καθορίσετε τό εἶδος τῶν ριζῶν του. Στή συνέχεια νά ἀποδείξετε ὅτι κάθε πραγματική ρίζα τοῦ $f(x)$ βρίσκεται στό (ἀνοιχτό) διάστημα: $(2, 3)$.

283. Νά ἀποδείξετε ὅτι: ἄν τό πολυώνυμο $f(x) \equiv x^3 - \alpha^2 x + \alpha^2\beta$, ὅπου α, β πραγματικοί ἀριθμοί μέ $\beta < 0$, ἔχει τρεῖς πραγματικές καί διακεκριμένες ρίζες, τότε θά ἰσχύει:

$$|\alpha| + \frac{3\sqrt{3}}{2}\beta > 0.$$

284. Ἄν ἕνα πολυώνυμο $f(x)$ ἔχει ἀκέραιους συντελεστές καί οἱ ἀριθμοί $f(0)$, $f(1)$ εἶναι περιττοί, νά ἀποδείξετε ὅτι τό $f(x)$ δέν ἔχει ἀκέραιη ρίζα.

285. Δίνεται τό πολυώνυμο $f(x) \equiv x^\nu + 2\alpha x + 2$, ὅπου $\alpha \in \mathbf{Z}$, $\nu \in \mathbf{N}$, $\nu \geqq 2$. Νά ἀποδείξετε ὅτι τό $f(x)$ δέ δέχεται ρητό ἀριθμό ὡς ρίζα του.

Ὑπόδειξη. Ἔστω ὅτι ὁ ρητός ἀριθμός $\frac{k}{\lambda}$, ὅπου $k, \lambda \in \mathbf{Z}$, $\lambda \neq 0$ καί $(k, \lambda) = 1$, εἶναι ρίζα τοῦ $f(x)$, τότε (§ 130) $k/2$, ὁπότε $k = \pm 1, \pm 2$ καί $\lambda/1$, ὁπότε $\lambda = \pm 1$. Στή συνέχεια νά διακρίνετε περιπτώσεις.

II. ΑΝΑΛΥΣΗ ΡΗΤΟΥ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ ΣΕ ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΑΠΛΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

§ 132. Ὁρισμός.—Ρητό κλάσμα *ὡς πρός x ὀνομάζουμε τό πηλίκο δύο ἀκέραιων πολυωνύμων τοῦ x*, δηλαδή κάθε παράσταση τῆς μορφῆς:

$$k(x) \equiv \frac{f(x)}{\varphi(x)} \equiv \frac{\alpha_\mu x^\mu + \alpha_{\mu-1}x^{\mu-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0}{\beta_\nu x^\nu + \beta_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + \beta_1 x + \beta_0}, \tag{1}$$

ὅπου α_i, β_j, $\begin{matrix} i = 0, 1, \ldots, \mu, \\ j = 0, 1, \ldots, \nu, \end{matrix}$ πραγματικοί ἀριθμοί, μ καί ν ἀκέραιοι θετικοί* καί $\alpha_\mu \neq 0$, $\beta_\nu \neq 0$.

Στηριζόμενοι στή θεωρία τῶν ἀκέραιων πολυωνύμων μποροῦμε νά ἀναλύσουμε τό ρητό κλάσμα (1) σέ ἄθροισμα ἄλλων ἁπλῶν κλασμάτων.

Γιά νά μποροῦμε ὅμως νά κάνουμε αὐτή τήν ἀνάλυση, πρέπει ὁ ἀριθμητής τῆς (1), δηλαδή τό πολυώνυμο $f(x)$, νά ἔχει βαθμό μικρότερο ἀπό τό βαθμό τοῦ παρονομαστῆ. Διαφορετικά, δηλαδή ἄν $\mu \geqq \nu$, κάνουμε τή διαίρεση $f(x):\varphi(x)$ καί, ἄν εἶναι $\pi(x)$ τό πηλίκο καί $\upsilon(x)$ τό ὑπόλοιπο, θά ἔχουμε:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} \equiv \pi(x) + \frac{\upsilon(x)}{\varphi(x)} \tag{2}$$

ὅπου ὁ βαθμός τοῦ $\upsilon(x)$ εἶναι μικρότερος ἀπό τό βαθμό τοῦ $\varphi(x)$.

Ἀπό τή σχέση (2) φαίνεται ὅτι ἡ ἀνάλυση τοῦ κλάσματος $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ ἀνάγεται στήν ἀνάλυση τοῦ κλάσματος $\dfrac{\upsilon(x)}{\varphi(x)}$, τοῦ ὁποίου ὁ βαθμός τοῦ ἀριθμητῆ εἶναι μικρότερος ἀπό τό βαθμό τοῦ παρονομαστῆ.

§ 133. Ἀνάλυση τοῦ κλάσματος $\dfrac{f(x)}{\phi(x)}$ σέ ἄθροισμα ἁπλῶν κλασμάτων, ὅπου ὁ βαθμός τοῦ $f(x)$ εἶναι μικρότερος ἀπό τό βαθμό τοῦ $\phi(x)$.—

Διακρίνουμε τίς ἑπόμενες τέσσερις περιπτώσεις:

Περίπτωση I. Ἄν τό $\varphi(x)$ ἔχει **μόνο ἁπλές πραγματικές ρίζες** $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\nu$, δηλαδή ἄν εἶναι τῆς μορφῆς: $\varphi(x) \equiv (x-\rho_1)(x-\rho_2)\cdots(x-\rho_\nu)$**, τότε μποροῦμε νά προσδιορίσουμε ν πραγματικούς ἀριθμούς $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$, τέτοιους ὥστε νά ἀληθεύει ἡ ταυτότητα:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} \equiv \frac{f(x)}{(x-\rho_1)(x-\rho_2)\ldots(x-\rho_\nu)} \equiv \frac{A_1}{x-\rho_1} + \frac{A_2}{x-\rho_2} + \cdots + \frac{A_\nu}{x-\rho_\nu} \tag{3}$$

---

* Ἄν $\mu = \nu = 0$ τό $k(x)$ γίνεται $\dfrac{\alpha_0}{\beta_0}$, δηλαδή εἶναι μία σταθερά, ἐνῶ ἄν $\nu = 0$, $\mu \geqq 1$ τό $k(x)$ γίνεται ἕνα (ἀκέραιο) πολυώνυμο τοῦ x.

** Δεχόμαστε, γιά εὐκολία μας καί χωρίς αὐτό νά περιορίζει τή γενικότητα, ὅτι ὁ συντελεστής β_ν τοῦ $\varphi(x)$ εἶναι ἴσος μέ τή μονάδα. Ἄν ὁ συντελεστής τοῦ x^ν δέν εἶναι ἡ μονάδα, τότε μποροῦμε νά διαιρέσουμε μέ τό β_ν ($\beta_\nu \neq 0$) τούς ὅρους τοῦ κλάσματος, χωρίς τό κλάσμα νά μεταβληθεῖ, ὁπότε ὁ συντελεστής τοῦ x^ν γίνεται ἴσος μέ τή μονάδα.

ἀπό τήν ὁποία, ἄν κάνουμε ἀπαλοιφή παρονομαστῶν, ἔχουμε:

$$f(x) \equiv A_1(x-\rho_2)(x-\rho_3)\cdots(x-\rho_\nu)+\cdots+A_\nu(x-\rho_1)(x-\rho_2)\cdots(x-\rho_{\nu-1}) \quad (4)$$

Ἄν τώρα θέσουμε * στήν (4) $x=\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\nu$ παίρνουμε ἀντιστοίχως:

$$f(\rho_1)=A_1(\rho_1-\rho_2)(\rho_1-\rho_3)\cdots(\rho_1-\rho_\nu) \Longrightarrow A_1=\frac{f(\rho_1)}{(\rho_1-\rho_2)(\rho_1-\rho_3)\cdots(\rho_1-\rho_\nu)}$$

....

$$f(\rho_\nu)=A_\nu(\rho_\nu-\rho_1)(\rho_\nu-\rho_2)\cdots(\rho_\nu-\rho_{\nu-1}) \Longrightarrow A_\nu=\frac{f(\rho_\nu)}{(\rho_\nu-\rho_1)(\rho_\nu-\rho_2)\cdots(\rho_\nu-\rho_{\nu-1})}.$$

Παρατήρηση. Τά $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ προσδιορίζονται καί ἀπό τήν ταυτότητα (4), ἀρκεῖ νά ἐκτελεστοῦν οἱ πράξεις στό δεύτερο μέλος της, νά ἐξισωθοῦν οἱ συντελεστές τῶν ὁμοιοβάθμιων ὅρων τῶν δύο μελῶν της καί, τέλος, νά λυθεῖ τό σύστημα πού θά προκύψει.

Ἐφαρμογή. Νά ἀναλυθεῖ τό κλάσμα: $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)} \equiv \dfrac{x^2+x+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$ **σέ ἄθροισμα ἁπλῶν κλασμάτων.**

Λύση. Σύμφωνα μέ τά παραπάνω ἔχουμε:

$$\frac{x^2+x+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} \equiv \frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{x-2}+\frac{A_3}{x-3} \quad (1)$$

Ἀπό τήν (1) παίρνουμε:

$$x^2+x+1 \equiv A_1(x-2)(x-3)+A_2(x-1)(x-3)+A_3(x-1)(x-2) \quad (2)$$

Ἡ ταυτότητα (2) γιά $x=1, 2, 3$ δίνει ἀντιστοίχως: $A_1=\dfrac{3}{2}$ $A_2=-7$, $A_3=\dfrac{13}{2}$.

Ὁπότε: $\dfrac{x^2+x+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} \equiv \dfrac{3}{2(x-1)}-\dfrac{7}{(x-2)}+\dfrac{13}{2(x-3)}$.

Περίπτωση ΙΙ.—Ἄν τό $\varphi(x)$ ἔχει **ἁπλές καί πολλαπλές πραγματικές ρίζες,** δηλαδή ἄν εἶναι, π.χ., τῆς μορφῆς:

$\varphi(x) \equiv (x-\rho_1)(x-\rho_2)(x-\rho_3)^k\cdots(x-\rho_\mu)^\lambda$, μέ $1+1+k+\cdots+\lambda=\nu$,

τότε τό κλάσμα $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ μπορεῖ νά γραφεῖ κατά ἕνα μοναδικό τρόπο μέ τή μορφή:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} \equiv \frac{A_1}{x-\rho_1}+\frac{A_2}{x-\rho_2}+\frac{B_1}{x-\rho_3}+\frac{B_2}{(x-\rho_3)^2}+\cdots+\frac{B_k}{(x-\rho_3)^k}+\cdots+\frac{M_1}{x-\rho_\mu}+$$

$$+\frac{M_2}{(x-\rho_\mu)^2}+\cdots+\frac{M_\lambda}{(x-\rho_\mu)^\lambda},$$

ὅπου $A_1, A_2, B_1, B_2, \ldots, B_k, \ldots, M_1, M_2, \ldots, M_\lambda$ πραγματικοί ἀριθμοί πού προσδιορίζονται εὔκολα.

---

* Αὐτή ἡ σχέση βρέθηκε μέ τήν ὑπόθεση ὅτι $x \neq \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\nu$. Ἄρα τό πολυώνυμο τῆς διαφορᾶς τῶν δύο μελῶν τῆς (4) μηδενίζεται γιά ὅλες τίς ἄλλες τιμές τοῦ x. Ἐπομένως ἔχει ἄπειρες ρίζες, δηλαδή περισσότερες ἀπό τό βαθμό του. Ἄρα πρόκειται γιά τό μηδενικό πολυώνυμο. Συνεπῶς μηδενίζεται καί γιά $x=\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\nu$, πού σημαίνει ὅτι ἡ (4) ἀληθεύει καί γιά $x=\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\nu$.

Παραδείγματα: 1ο: Νά ἀναλυθεῖ τό κλάσμα $\frac{f(x)}{\varphi(x)} \equiv \frac{x^2+4x+7}{(x+2)(x+3)^2}$ **σέ ἄθροισμα ἁπλῶν κλασμάτων.**

Λύση. Σύμφωνα μέ τά παραπάνω ἔχουμε:

$$\frac{x^2+4x+7}{(x+2)(x+3)^2} \equiv \frac{A}{x+2} + \frac{B_1}{(x+3)} + \frac{B_2}{(x+3)^2} \qquad (1)$$

Μετά τήν ἀπαλοιφή τῶν παρονομαστῶν ἔχουμε:

$$x^2+4x+7 \equiv A(x+3)^2 + B_1(x+2)(x+3) + B_2(x+2) \qquad (2)$$

καί μετά τίς πράξεις:

$$x^2+4x+7 \equiv (A+B_1)x^2 + (6A+5B_1+B_2)x + (9A+6B_1+2B_2) \qquad (3)$$

Ἐξισώνουμε τούς συντελεστές τῶν ὁμοιοβάθμιων ὅρων τῶν δύο μελῶν τῆς (3) καί ἔχουμε τό σύστημα:

$$A+B_1=1, \quad 6A+5B_1+B_2=4, \quad 9A+6B_1+2B_2=7.$$

Ἄν λύσουμε τό σύστημα, ἔχουμε:

$$A=3, \quad B_1=-2, \quad B_2=-4.$$

Ὁπότε: $$\frac{x^2+4x+7}{(x+2)(x+3)^2} = \frac{3}{x+2} - \frac{2}{(x+3)} - \frac{4}{(x+3)^2}.$$

2ο: Νά ἀναλυθεῖ τό κλάσμα: $\frac{f(x)}{\varphi(x)} \equiv \frac{3x^4-9x^3+4x^2-34x+1}{(x-2)^3(x+3)^2}$ **σέ ἄθροισμα ἁπλῶν κλασμάτων.**

Λύση. Ἡ ἀνάλυση προκύπτει ἀπό τόν τύπο:

$$\frac{3x^4-9x^3+4x^2-34x+1}{(x-2)^3.(x+3)^2} \equiv \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{(x-2)^2} + \frac{A_3}{(x-2)^3} + \frac{B_1}{x+3} + \frac{B_2}{(x+3)^2}.$$

Ἐργαζόμενοι ὅπως καί στό προηγούμενο παράδειγμα, βρίσκουμε:

$$A_1=1, \quad A_2=0, \quad A_3=-3, \quad B_1=2, \quad B_2=-5,$$

καί ἑπομένως ἡ ἀνάλυση πού ζητᾶμε εἶναι:

$$\frac{3x^4-9x^3+4x^2-34x+1}{(x-2)^3(x+3)^2} \equiv \frac{1}{x-2} - \frac{3}{(x-2)^3} + \frac{2}{x+3} - \frac{5}{(x+3)^2}.$$

Περίπτωση III. Ἄν τό ρητό κλάσμα εἶναι τῆς μορφῆς:

$$\frac{f(x)}{(x^2+\beta x+\gamma)^\nu},$$

ὅπου ὁ βαθμός τοῦ f(x) εἶναι μικρότερος ἀπό τό 2ν, ν ἀκέραιος ≥ 1 καί β, γ πραγματικοί ἀριθμοί μέ $\beta^2-4\gamma<0$, τότε ὑπάρχουν πραγματικοί ἀριθμοί $A_1, B_1, A_2, B_2, \ldots, A_\nu, B_\nu$ τέτοιοι, ὥστε νά ἰσχύει:

$$\frac{f(x)}{(x^2+\beta x+\gamma)^\nu} \equiv \frac{A_1x+B_1}{x^2+\beta x+\gamma} + \frac{A_2x+B_2}{(x^2+\beta x+\gamma)^2} + \cdots + \frac{A_\nu x+B_\nu}{(x^2+\beta x+\gamma)^\nu}.$$

Παράδειγμα. Νά ἀναλυθεῖ τό κλάσμα $\frac{f(x)}{\varphi(x)} \equiv \frac{x^5+1}{(x^2-x+1)^3}$ **σέ ἄθροισμα ἁπλῶν κλασμάτων.**

Λύση. Παρατηροῦμε ὅτι τό x^2-x+1 ἔχει μιγαδικές ρίζες καί ὅτι τό κλάσμα $\frac{x^5+1}{(x^2-x+1)^3}$ ἔχει ὅλες τίς προϋποθέσεις πού ἀναφέραμε. Ἄρα θά ἔχουμε τήν ἀνάλυση:

$$\frac{x^5+1}{(x^2-x+1)^3} \equiv \frac{A_1x+B_1}{x^2-x+1}+\frac{A_2x+B_2}{(x^2-x+1)^2}+\frac{A_3x+B_3}{(x^2-x+1)^3} \quad (1)$$

καί μετά τήν ἀπαλοιφή παρονομαστῶν:

$$x^5+1 \equiv (A_1x+B_1)(x^2-x+1)^2+(A_2x+B_2)(x^2-x+1)+A_3x+B_3.$$

Ἄν ἐκτελέσουμε τίς πράξεις καί ἐξισώσουμε τούς συντελεστές τῶν ἴσων δυνάμεων τοῦ x στά δύο μέλη, θά βροῦμε ἕνα πρωτοβάθμιο σύστημα μέ ἀγνώστους τά $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$, ἀπό τή λύση τοῦ ὁποίου ἔχουμε:

$$A_1=1,\ B_1=2,\ A_2=1,\ B_2=-3,\ A_3=-1,\ B_3=2.$$

Ἄν ἀντικαταστήσουμε στήν (1) αὐτές τίς τιμές, ἔχουμε:

$$\frac{x^5+1}{(x^2-x+1)^3} \equiv \frac{x+2}{x^2-x+1}+\frac{x-3}{(x^2-x+1)^2}-\frac{x-2}{(x^2-x+1)^3}.$$

Περίπτωση IV. Ἄν τό $\varphi(x)$ ἔχει **ρίζες πραγματικές** καί **μιγαδικές ἁπλές ἤ πολλαπλές**, τότε ἰσχύουν ταυτόχρονα οἱ προηγούμενες περιπτώσεις.

Παράδειγμα. Νά ἀναλυθεῖ τό κλάσμα $\frac{2x+1}{(x+1)(x^2+x+1)}$ σέ ἄθροισμα ἁπλῶν κλασμάτων.

Λύση. Παρατηροῦμε ὅτι ἡ διακρίνουσα τοῦ τριωνύμου x^2+x+1 εἶναι ἀρνητική καί ἑπομένως ὁ παρονομαστής τοῦ κλάσματος ἔχει ρίζες πραγματικές καί μιγαδικές (ἁπλές). Τότε, σύμφωνα μέ τίς περιπτώσεις I καί III, τό κλάσμα δέχεται τήν ἀνάλυση:

$$\frac{2x+1}{(x+1)(x^2+x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+\Gamma}{x^2+x+1}. \quad (1)$$

Ἀπό τήν (1) λαμβάνουμε:

$$2x+1 \equiv A(x^2+x+1)+(Bx+\Gamma)(x+1) \quad (2)$$

ἤ

$$2x+1 \equiv (A+B)x^2+(A+B+\Gamma)x+(A+\Gamma) \quad (3)$$

συνεπῶς: $A+B=0, \quad A+B+\Gamma=2, \quad A+\Gamma=1.$

Ἀπό τήν ἐπίλυση τοῦ προηγούμενου συστήματος βρίσκουμε: $A=-1,\ B=1,\ \Gamma=2.$

Ὁπότε:
$$\frac{2x+1}{(x+1)(x^2+x+1)} \equiv -\frac{1}{x+1}+\frac{x+2}{x^2+x+1}.$$

Σημείωση: Σύντομος ὑπολογισμός τῶν A, B, Γ.

Ἀπό τήν ταυτότητα (2) γιά $x=-1$ λαμβάνουμε: $A=-1$.

Ἀπό τήν ταυτότητα (3) γιά $x=0$ λαμβάνουμε: $A+\Gamma=1$ καί συνεπῶς $\Gamma=2$.

Ἐξισώνοντας τούς συντελεστές τοῦ x^2 στά δύο μέλη τῆς (3) βρίσκουμε:

$0=A+B$ καί ἐπειδή $A=-1$ λαμβάνουμε: $B=1$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

286. Νά ἀναλυθοῦν σέ ἄθροισμα ἁπλῶν κλασμάτων τά ἑπόμενα ρητά κλάσματα:

1) $\frac{1}{(x^2-4)(x+1)}$, 2) $\frac{3x-1}{x^2-5x+6}$, 3) $\frac{8x^2-19x+2}{(x+2)(x-1)(x-4)}$, 4) $\frac{1}{(1+x^2)^2\cdot(1+x)}$

5) $\frac{x+2}{(x^2-1)(x^2+1)^2}$, 6) $\frac{x^2-x+1}{(x^2+1)(x-1)^2}$, 7) $\frac{3x^2+7x+2}{(x+1)(x^2+2x+5)}$, 8) $\frac{10x^2+32}{x^3\cdot(x-4)^2}$.

287. Ἐπίσης:

1) $\frac{3x+4}{x^2-9x+14}$, 2) $\frac{3x^2-5x-6}{x^3-6x^2+11x-6}$, 3) $\frac{x+2}{(x^4-1)(x^2+1)^2}$, 4) $\frac{x^2}{(x^2-2x+5)^2}$,

5) $\frac{2x^3+7x^2-2x-2}{2x^2+x-6}$, 6) $\frac{5x^2-4}{x^4-5x^2+4}$, 7) $\frac{x^3}{x^3-3x+2}$, 8) $\frac{7x-10}{(3x-4)(x-1)^2}$.

§ 134. Μέθοδοι εὑρέσεως τοῦ ἀθροίσματος τῶν ν πρώτων ὅρων σειρᾶς.—Ὑπάρχουν διάφοροι μέθοδοι γιά νά βροῦμε τό ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων μιᾶς σειρᾶς ἀνάλογα μέ τή μορφή τοῦ γενικοῦ ὅρου της. Ὑπάρχουν ὅμως καί σειρές, στίς ὁποῖες δέν μποροῦμε νά βροῦμε τό ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων, ὅπως π.χ. εἶναι ἡ ἁρμονική σειρά $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu}$. Δέν ὑπάρχει γενική μέθοδος γιά τόν ὑπολογισμό τοῦ ἀθροίσματος σ_ν τῶν ν πρώτων ὅρων ὁποιασδήποτε σειρᾶς. Σ' αὐτή τήν παράγραφο θά μελετήσουμε μόνο ὁρισμένες περιπτώσεις πού μποροῦμε νά βροῦμε τό ἄθροισμα σ_ν τῶν ν πρώτων ὅρων μιᾶς σειρᾶς μέ γενικό ὅρο α_ν πού εἶναι εἰδικῆς μορφῆς.

Π ε ρ ί π τ ω σ η Ι. Ὅταν ὁ γενικός ὅρος α_ν τῆς σειρᾶς $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu$ μπορεῖ νά γραφεῖ μέ τή μορφή:

$$\boxed{\alpha_\nu = \varphi(\nu) - \varphi(\nu+1)} \tag{1}$$

γιά κάθε $\nu = 1, 2, 3, \ldots$, ὅπου $\varphi(\nu)$ συνάρτηση τοῦ φυσικοῦ ἀριθμοῦ ν (ἀκολουθία), τ ό τ ε τό ἄθροισμα σ_ν τῶν ν πρώτων ὅρων τῆς σειρᾶς, δίνεται ἀπό τόν τύπο:

$$\boxed{\sigma_\nu = \varphi(1) - \varphi(\nu+1)} \tag{2}$$

Πράγματι, ἀπό τήν $\alpha_\nu = \varphi(\nu) - \varphi(\nu+1)$ γιά $\nu = 1, 2, 3, \ldots, \nu$ λαμβάνουμε:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 = \varphi(1) - \varphi(2) \\ \alpha_2 = \varphi(2) - \varphi(3) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_\nu = \varphi(\nu) - \varphi(\nu+1) \end{array}\right\} \Rightarrow \sigma_\nu = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\nu = \varphi(1) - \varphi(\nu+1).$$

Παρατηρήσεις. 1η. Ὅταν ὁ γενικός ὅρος α_ν τῆς $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu$ ἀναλύεται στή διαφορά: $\alpha_\nu = \varphi(\nu+1) - \varphi(\nu)$, τότε τό σ_ν δίνεται ἀπό τόν τύπο: $\sigma_\nu = \varphi(\nu+1) - \varphi(1)$.

2η: Ἄν ὑπάρχει τό $\lim\varphi(\nu)$ καί εἶναι k, τότε ἀπό τή (2) ἔχουμε:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu = \lim\sigma_\nu = \varphi(1) - k.$$

Ἐ φ α ρ μ ο γ έ ς: 1η. Νά ἀποδείξετε ὅτι: $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{2\nu+1}{\nu^2(\nu+1)^2} = 1$.

Λύση. Ὁ γενικός ὅρος $\alpha_\nu = \frac{2\nu+1}{\nu^2(\nu+1)^2}$ τῆς σειρᾶς γράφεται:

$$\alpha_\nu = \frac{2\nu+1}{\nu^2(\nu+1)^2} = \frac{\nu^2+2\nu+1-\nu^2}{\nu^2(\nu+1)^2} = \frac{(\nu+1)^2-\nu^2}{\nu^2(\nu+1)^2} = \frac{1}{\nu^2} - \frac{1}{(\nu+1)^2} = \varphi(\nu) - \varphi(\nu+1),$$

ὅπου $\varphi(\nu) = \frac{1}{\nu^2}$. Ἄρα $\sigma_\nu = \varphi(1) - \varphi(\nu+1) = 1 - \frac{1}{(\nu+1)^2}$ καί συνεπῶς:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2\nu+1}{\nu^2(\nu+1)^2} = \lim \sigma_\nu = 1, \text{ γιατί } \lim \frac{1}{(\nu+1)^2} = 0.$$

2η. Νά βρεῖτε τό ἄθροισμα τῆς σειρᾶς:

$$\frac{4}{1\cdot 2}\cdot\frac{2}{3} + \frac{5}{2\cdot 3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{6}{3\cdot 4}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3 + \cdots + \frac{\nu+3}{\nu(\nu+1)}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^\nu + \cdots \qquad (\Sigma)$$

Λύση: Ὁ γενικός ὅρος τῆς σειρᾶς (Σ) εἶναι: $\alpha_\nu = \frac{\nu+3}{\nu(\nu+1)}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^\nu$.

Γιά νά μετασχηματίσουμε τό γενικό ὅρο, ἀναλύουμε πρῶτα-πρῶτα τό κλάσμα $\frac{\nu+3}{\nu(\nu+1)}$ **σέ ἄθροισμα δύο ἁπλῶν κλασμάτων.** Γι' αὐτό θέτουμε:

$$\frac{\nu+3}{\nu(\nu+1)} \equiv \frac{A}{\nu} + \frac{B}{\nu+1}.$$

Ἀπό αὐτή, βρίσκουμε $A = 3$, $B = -2$, ὁπότε ἔχουμε:

$$\frac{\nu+3}{\nu(\nu+1)} \equiv \frac{3}{\nu} - \frac{2}{\nu+1}.$$

Τότε ὁ γενικός ὅρος τῆς σειρᾶς γίνεται:

$$\alpha_\nu = \frac{\nu+3}{\nu(\nu+1)}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^\nu = \frac{3}{\nu}\cdot\frac{2^\nu}{3^\nu} - \frac{2}{\nu+1}\cdot\frac{2^\nu}{3^\nu} = \frac{2^\nu}{\nu\cdot 3^{\nu-1}} - \frac{2^{\nu+1}}{(\nu+1)\cdot 3^\nu},$$

δηλαδή ὁ α_ν γράφτηκε μέ τή μορφή $\alpha_\nu = \varphi(\nu) - \varphi(\nu+1)$, ὅπου $\varphi(\nu) = \frac{2^\nu}{\nu\cdot 3^{\nu-1}}$.

Τότε, σύμφωνα μέ τόν τύπο (2), θά εἶναι:

$$\sigma_\nu = \varphi(1) - \varphi(\nu+1) = 2 - \frac{2^{\nu+1}}{(\nu+1)\cdot 3^\nu}, \text{ γιατί } \varphi(1) = 2.$$

Ἄρα $\lim \sigma_\nu = 2 - \lim \frac{2^{\nu+1}}{(\nu+1)\cdot 3^\nu} = 2 - \lim \frac{2}{\nu+1}\cdot \lim\left(\frac{2}{3}\right)^\nu = 2 - 0 = 2.$

Δηλαδή ἡ σειρά (Σ) συγκλίνει στόν ἀριθμό 2.

Περίπτωση ΙΙ. Ὁ γενικός ὅρος α_ν τῆς $\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu$ ἀναλύεται σέ ἀλγεβρικό ἄθροισμα νιοστῶν ὅρων γνωστῶν σειρῶν, δηλαδή, ἄν π.χ. **ὁ α_ν εἶναι τῆς μορφῆς:**

$$\boxed{\alpha_\nu = \varphi'(\nu) + \varphi''(\nu) + \varphi'''(\nu)} \qquad (1)$$

ὅπου $\varphi'(\nu)$, $\varphi''(\nu)$, $\varphi'''(\nu)$ εἶναι οἱ γενικοί ὅροι σειρῶν, μέ μερικά ἀθροίσματα σ_ν', σ_ν'', σ_ν''' ἀντίστοιχα. Τότε τό ἄθροισμα σ_ν τῶν ν πρώτων ὅρων τῆς σειρᾶς $\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu$ εἶναι:

$$\boxed{\sigma_\nu = \sigma_\nu' + \sigma_\nu'' + \sigma_\nu'''} \qquad (2)$$

Πράγματι, ἀπό τήν (1) γιά $\nu = 1, 2, \ldots, \nu$ λαμβάνουμε:

$$\sigma_\nu = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\nu = \{\varphi'(1) + \varphi'(2) + \cdots + \varphi'(\nu)\} + \{\varphi''(1) + \varphi''(2) + \cdots + \varphi''(\nu)\} + \{\varphi'''(1) + \varphi'''(2) + \cdots + \varphi'''(\nu)\} = \sigma_\nu' + \sigma_\nu'' + \sigma_\nu'''.$$

Ἐφαρμογή. Νά βρεῖτε τό ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων τῆς σειρᾶς μέ γενικό ὅρο $\alpha_\nu = \frac{2^\nu - 1}{2^{2\nu-2}}$, καθώς καί τό ἄθροισμά της (≡ ἄθροισμα ἄπειρων ὅρων της).

Λύση. Ὁ γενικός ὅρος $\alpha_\nu = \frac{2^\nu - 1}{2^{2\nu-2}} = \frac{2^\nu}{2^{2\nu-2}} - \frac{1}{2^{2\nu-2}} = \frac{4}{2^\nu} - \frac{4}{4^\nu}$, ἀναλύεται σέ ἀλγεβρικό ἄθροισμα τῆς μορφῆς: $\varphi'(\nu) + \varphi''(\nu)$, ὅπου $\varphi'(\nu) = \frac{4}{2^\nu}$ καί $\varphi''(\nu) = -\frac{4}{4^\nu}$. Παρατηροῦμε ὅτι καθένας ἀπό τούς $\varphi'(\nu)$, $\varphi''(\nu)$ εἶναι ὁ γενικός ὅρος φθίνουσας γεωμ. προόδου. Ἔτσι ἔχουμε:

$$\sigma_\nu' = \varphi'(1) + \cdots + \varphi'(\nu) = 4\left(\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^\nu}\right) = 4\frac{\frac{1}{2^{\nu+1}} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - 1} = 4\cdot\left(1 - \frac{1}{2^\nu}\right)$$

$$\sigma_\nu'' = \varphi''(1) + \cdots + \varphi''(\nu) = -4\left(\frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{4^\nu}\right) = -\frac{4}{3}\left(1 - \frac{1}{4^\nu}\right)$$

καί συνεπῶς (τύπος (2)) εἶναι:

$$\sigma_\nu = \sigma_\nu' + \sigma_\nu'' = 4\left(1 - \frac{1}{2^\nu}\right) - \frac{4}{3}\left(1 - \frac{1}{4^\nu}\right) = \frac{8}{3} - \frac{1}{2^{\nu-1}} + \frac{1}{3\cdot 4^{\nu-1}}.$$

Παρατηροῦμε τώρα ὅτι: $\lim \sigma_\nu = \frac{8}{3}$ (γιατί;).

Ἄρα: $$\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu = \lim \sigma_\nu = \frac{8}{3}.$$

Περίπτωση III. Ἄν ὁ γενικός ὅρος α_ν τῆς σειρᾶς $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ εἶναι τῆς μορφῆς:

$$\boxed{\alpha_\nu = f(\nu)\cdot x^\nu}$$

ὅπου $f(\nu)$ ἀκέραιο πολυώνυμο τοῦ ν, τότε πάλι τό ἄθροισμα σ_ν τῶν ν πρώτων ὅρων της ὑπολογίζεται.

Παράδειγμα 1ο. Νά ὑπολογίσετε τό ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων τῆς σειρᾶς:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu x^{\nu-1} \equiv 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + \nu x^{\nu-1} + \cdots$$

Λύση. Ἔστω:

$$\sigma_\nu \equiv 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + \nu x^{\nu-1}. \quad (1)$$

Πολλαπλασιάζοντας τά μέλη τῆς (1) ἐπί x λαμβάνουμε:

$$x\sigma_\nu = x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + \nu x^\nu. \quad (2)$$

Ἀφαιρώντας ἀπό τήν (1) τή (2) βρίσκουμε:

$$(1-x)\sigma_\nu = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{\nu-1} - \nu x^\nu. \quad (3)$$

Ἀλλά: $$1 + x + x^2 + \cdots + x^{\nu-1} = \frac{x^\nu - 1}{x - 1}, \quad (x \neq 1),$$

καί ἑπομένως ἡ (3) γίνεται:

$$(1-x)\cdot\sigma_\nu = \frac{x^\nu - 1}{x - 1} - \nu x^\nu$$

ἀπό τήν ὁποία γιά $x \neq 1$ βρίσκουμε: $\sigma_\nu = \frac{1 - x^\nu}{(1-x)^2} - \frac{\nu x^\nu}{1 - x}$.

Παράδειγμα 2ο. Νά ἀποδείξετε ὅτι τό ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων τῆς σειρᾶς :

$$\frac{2}{3}+\frac{3}{3^2}+\frac{4}{3^3}+\cdots+\frac{\nu+1}{3^\nu}+\cdots \qquad (1)$$

εἶναι :

$$\frac{5}{4}-\frac{2\nu+5}{4\cdot 3^\nu}.$$

Λύση. Ὁ γενικός ὅρος τῆς (1), δηλ. ὁ $\frac{\nu+1}{3^\nu}$ εἶναι γινόμενο τοῦ νιοστοῦ ὅρου μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου (τῆς: 2, 3, ..., ν, ν + 1, ...) καί τοῦ νιοστοῦ ὅρου μιᾶς γεωμετρικῆς $\left(\text{τῆς}: \frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, \ldots, \frac{1}{3^\nu}, \ldots\right)$, δηλαδή εἶναι ὁ νιοστός ὅρος μιᾶς **μικτῆς προόδου ***.

Θέτουμε:

$$\sigma_\nu=\frac{2}{3}+\frac{3}{3^2}+\frac{4}{3^3}+\cdots+\frac{\nu+1}{3^\nu}. \qquad (2)$$

Πολλαπλασιάζοντας τά μέλη τῆς (2) ἐπί τό λόγο τῆς γεωμετρικῆς προόδου λαμβάνουμε:

$$\frac{1}{3}\sigma_\nu=\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\frac{4}{3^4}+\cdots+\frac{\nu+1}{3^{\nu+1}} \qquad (3)$$

Ἀφαιρώντας ἀπό τή (2) τήν (3) βρίσκουμε:

$$\frac{2}{3}\sigma_\nu=\frac{2}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^\nu}-\frac{\nu+1}{3^{\nu+1}}=\frac{1}{3}+\frac{\frac{1}{3^\nu}\cdot\frac{1}{3}-\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}-1}-\frac{\nu+1}{3^{\nu+1}}$$

καί τελικά:

$$\sigma_\nu=\frac{5}{4}-\frac{2\nu+5}{4\cdot 3^\nu}$$

Π ε ρ ί π τ ω σ η IV. Ἄν ὁ γενικός ὅρος α_ν τῆς σειρᾶς $\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu$ εἶναι τῆς μορφῆς:

$$\boxed{\alpha_\nu=f(\nu)}$$

ὅπου f(ν) ἀκέραιη ρητή συνάρτηση τοῦ ν, τότε πάλι τό ἄθροισμα σ_ν τῶν ν πρώτων ὅρων τῆς σειρᾶς ὑπολογίζεται.

Παράδειγμα 1ο. Νά βρεῖτε τό ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων τῆς σειρᾶς, τῆς ὁποίας ὁ γενικός ὅρος εἶναι : $\alpha_\nu=12\nu^2-6\nu+1$.

Λύση: Ἔστω $\sigma_\nu\equiv\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_\nu=\sum_{\nu=1}^{\nu}\alpha_\nu\equiv\sum_{\nu=1}^{\nu}(12\nu^2-6\nu+1)$.

Ἀλλά:

$$\sum_{\nu=1}^{\nu}(12\nu^2-6\nu+1)=\sum_{\nu=1}^{\nu}12\nu^2-\sum_{\nu=1}^{\nu}6\nu+\sum_{\nu=1}^{\nu}1.$$

Ἄρα:

$$\sigma_\nu=12\sum_{\nu=1}^{\nu}\nu^2-6\sum_{\nu=1}^{\nu}\nu+\sum_{\nu=1}^{\nu}1=12\cdot\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}-6\frac{\nu(\nu+1)}{2}+\nu=\nu^2(4\nu+3).$$

---

* **Μικτή πρόοδος** ὀνομάζεται μία ἀκολουθία ἀριθμῶν, τῆς ὁποίας κάθε ὅρος προκύπτει ἀπό τόν πολλαπλασιασμό τῶν ἀντίστοιχων (ὁμοτάξιων) ὅρων δύο προόδων, μιᾶς ἀριθμητικῆς καί μιᾶς γεωμετρικῆς.

Παράδειγμα 2ο. Νά βρεῖτε τό ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων τῆς σειρᾶς:

$$1\cdot 3\cdot 5+3\cdot 5\cdot 7+5\cdot 7\cdot 9+\cdots \qquad (\Sigma)$$

Λύση. Πρῶτα-πρῶτα βρίσκουμε τό γενικό ὅρο τῆς σειρᾶς (Σ).

Παρατηροῦμε ὅτι οἱ πρῶτοι παράγοντες (1, 3, 5, ...) τῶν ὅρων τῆς σειρᾶς (Σ) ἀποτελοῦν ἀριθμητική πρόοδο μέ λόγο 2, συνεπῶς ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ γινόμενου τοῦ γενικοῦ ὅρου τῆς σειρᾶς θά εἶναι ὁ: $1+(\nu-1)\cdot 2=2\nu-1$.

Ἐπίσης ὁ γενικός ὅρος τῆς ἀριθμητικῆς προόδου 3, 5, 7, ... εἶναι ὁ: $2\nu+1$
καί » » » » » » 5, 7, 9, ... » »: $2\nu+3$.

Ἄρα ὁ γενικός ὅρος α_ν τῆς σειρᾶς (Σ) εἶναι ὁ: $(2\nu-1)(2\nu+1)(2\nu+3)$ καί συνεπῶς τό ἄθροισμα σ_ν τῶν ν πρώτων ὅρων τῆς (Σ) εἶναι:

$$\sigma_\nu\equiv 1\cdot3\cdot5+3\cdot5\cdot7+\cdots+(2\nu-1)(2\nu+1)(2\nu+3)=\sum_{\nu=1}^{\nu}(2\nu-1)(2\nu+1)(2\nu+3)=$$

$$=\sum_{\nu=1}^{\nu}(8\nu^3+12\nu^2-2\nu-3)=8\sum_{\nu=1}^{\nu}\nu^3+12\sum_{\nu=1}^{\nu}\nu^2-2\sum_{\nu=1}^{\nu}\nu-3\sum_{\nu=1}^{\nu}1=$$

$$=8\cdot\frac{\nu^2(\nu+1)^2}{4}+12\,\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}-2\frac{\nu(\nu+1)}{2}-3\nu$$

καί τελικά:

$$\sigma_\nu=\nu(2\nu^3+8\nu^2+7\nu-2).$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάδα Α΄. 288. Νά βρεῖτε τό ἄθροισμα σ_ν τῶν ν πρώτων ὅρων τῶν παρακάτω σειρῶν:

α) $\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{(\nu+1)(\nu+2)}+\cdots$

β) $\frac{1}{2\cdot5}+\frac{1}{5\cdot8}+\cdots+\frac{1}{(3\nu-1)(3\nu+2)}+\cdots$

γ) $\frac{1}{1\cdot4}+\frac{1}{4\cdot7}+\frac{1}{7\cdot10}+\cdots$

δ) $1+\frac{4}{5}+\frac{7}{5^2}+\frac{10}{5^3}+\cdots$

289. Νά βρεῖτε τό ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων τῆς σειρᾶς μέ γενικό ὅρο:

i) $\alpha_\nu=\frac{\nu+2}{\nu(\nu+1)}\left(\frac{1}{2}\right)^\nu$, ii) $\alpha_\nu=\frac{2^\nu-1}{3^{\nu+1}}$,

καθώς καί τό ἄθροισμά της.

290. Νά βρεῖτε τό ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων τῶν σειρῶν, τῶν ὁποίων οἱ γενικοί ὅροι εἶναι:

α) $3\nu^2-\nu$, β) $8\nu^3-1$, γ) $\nu(\nu+1)(\nu+3)$, δ) $(\nu+3)\alpha^\nu$.

291. Νά βρεῖτε τούς γενικούς ὅρους α_ν τῶν παρακάτω σειρῶν καί κατόπιν τό ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων τους:

α) $\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots$, β) $1\cdot4\cdot7+2\cdot5\cdot8+\cdots$, γ) $1+\frac{3}{2}+\frac{5}{4}+\frac{7}{8}+\cdots$

292. Νά βρεῖτε τό ἄθροισμα τῆς σειρᾶς $\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu$, ὅταν:

1) $\alpha_\nu=\frac{1}{\nu(\nu+2)}$, 2) $\alpha_\nu=\frac{1}{4\nu^2-1}$, 3) $\alpha_\nu=\frac{1}{(\nu+1)(\nu+2)}$, 4) $\alpha_\nu=\frac{1}{9\nu^2-3\nu-2}$.

Ὁμάδα Β΄. 293. Νά μελετήσετε ὡς πρός τό μονότονο καί τή σύγκλιση τήν ἀκολουθία (α_ν) μέ γενικό ὅρο:

$$\alpha_\nu = \sum_{k=1}^{\nu} \frac{1}{k^2+3k+2}.$$

Στή συνέχεια νά βρεῖτε, ἄν ὑπάρχει, τό ὅριό της. Τέλος, νά βρεῖτε τό πλῆθος τῶν ὅρων της, οἱ ὁποῖοι βρίσκονται ἐκτός τοῦ διαστήματος $\left(\frac{5}{14}, \frac{3}{4}\right)$.

Ὑπόδειξη. Νά ἀναλύσετε τό κλάσμα τοῦ β΄ μέλους σέ ἄθροισμα δύο ἁπλῶν κλασμάτων.

294. Νά ἀποδείξετε ὅτι:

$$1+2\left(1+\frac{1}{\nu}\right)+3\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^2+\cdots+\nu\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu-1}=\nu^2$$

295. Νά ἀποδείξετε ὅτι: ἄν ὁ γενικός ὅρος α_ν μιᾶς σειρᾶς $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu$ μπορεῖ νά γραφεῖ μέ τή μορφή: $\alpha_\nu = A\varphi(\nu) + B\varphi(\nu+1) + \Gamma\varphi(\nu+2)$, ὅπου $A+B+\Gamma=0$, τότε τό ἄθροισμα σ_ν τῶν ν πρώτων ὅρων της μᾶς τό δίνει ὁ τύπος:

$$\sigma_\nu = A\varphi(1) - \Gamma\varphi(2) - A\varphi(\nu+1) + \Gamma\varphi(\nu+2).$$

296. Νά βρεῖτε τό ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων τῆς σειρᾶς:

$$\frac{5}{1\cdot2\cdot3}+\frac{8}{2\cdot3\cdot4}+\ldots+\frac{3\nu+2}{\nu(\nu+1)(\nu+2)}+\ldots$$

Ὑπόδειξη. Νά ἀναλύσετε τό γενικό ὅρο τῆς σειρᾶς σέ ἄθροισμα τριῶν ἁπλῶν κλασμάτων καί νά λάβετε ὑπόψη σας τήν προηγούμενη ἄσκηση.

III. ΤΥΠΟΣ ΤΟΥ DE MOIVRE ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ

§ 135. Ὄρισμα μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ $z \neq 0$.— Ἔστω ὁ μιγαδικός ἀριθμός $z = x + iy$ μέ $z \neq 0$ καί $x, y \in \mathbf{R}$· τότε ἔχουν ἔννοια στό $\mathbf{R}$ οἱ παραστάσεις: $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ καί ἔτσι ὁ z μπορεῖ νά γραφεῖ μέ τή μορφή:

$$z = x + iy = \sqrt{x^2+y^2}\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + i\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \qquad (1)$$

Ἐπειδή: $-1 \leq \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq 1$, $-1 \leq \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq 1$

καί $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 = 1$,

τά $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ μποροῦν νά εἶναι, ἀντιστοίχως, τό συνημίτονο καί τό ἡμίτονο μιᾶς κατάλληλης γωνίας φ, δηλαδή:

$$\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \eta\mu\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}. \qquad (2)$$

Εἶναι γνωστό ὅτι ὑπάρχουν ἄπειρες γωνίες πού τά μέτρα τους (σέ ἀκτίνια) διαφέρουν κατά ἀκέραιο πολλαπλάσιο τοῦ 2π καί ἐπαληθεύουν τίς σχέσεις (2). Ἀπό αὐτές, ὑπάρχει μία μόνο πού ἱκανοποιεῖ τίς (2) καί συγχρόνως τή συνθήκη $-\pi < \varphi \leqq \pi$. Αὐτή τή γωνία φ θά τή λέμε: **τό βασικό (πρωτεῦον) ὄρισμα τοῦ μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ $z = x + iy\ (\neq 0)$** καί θά τή συμβολίζουμε: μέ: **Argz** (Argument = ὄρισμα), δηλαδή ἔχουμε:

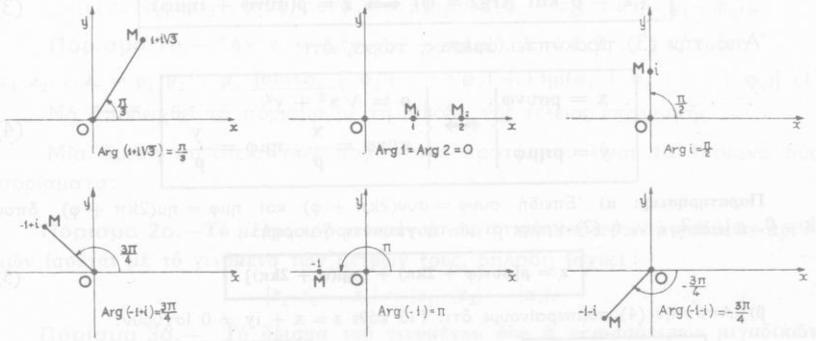
$$\boxed{\operatorname{Arg}z = \varphi \wedge -\pi < \varphi \leqq \pi}\,,$$

Παράδειγμα. Γιά τό μιγαδικό ἀριθμό $z = 1 + i\sqrt{3}$ ἔχουμε τό σύστημα:

$$\text{συν}\varphi = \frac{1}{2}, \quad \text{ημ}\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad -\pi < \varphi \leqq \pi,$$

ἀπό τό ὁποῖο: $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$, ὥστε: $\operatorname{Arg}(1 + i\sqrt{3}) = \dfrac{\pi}{3}$.

Γεωμετρικά τό ὄρισμα μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ z παριστάνει τήν κυρτή γωνία πού σχηματίζει ὁ θετικός ἡμιάξονας Ox μέ τή διανυσματική ἀκτίνα OM (τῆς ὁποίας τό ἄκρο M εἶναι ἡ εἰκόνα τοῦ μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ z), ὅπως φαίνεται στίς διάφορες περιπτώσεις τῶν παρακάτω σχημάτων (βλ. Σχ. 8).



Σχ. 8

§ 136. Ἡ τριγωνομετρική μορφή μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ.— Ἔστω ἕνας μιγαδικός ἀριθμός $z = x + iy \neq 0$. Τότε * ὁρίζεται τό ὄρισμά του: $\operatorname{Arg}z = \varphi$ καί τό μέτρο του: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \rho$ καί, ὅπως εἴδαμε παραπάνω, ἰσχύουν:

$$\text{συν}\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{\rho}, \quad \text{ημ}\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{\rho} \qquad (1)$$

Ἀπό τίς (1) ἔχουμε: $x = \rho\,\text{συν}\varphi$, $y = \rho\,\text{ημ}\varphi$, $\rho^2 = x^2 + y^2$

καί συνεπῶς: $z = x + iy = \rho(\text{συν}\varphi + i\,\text{ημ}\varphi)$

Ἡ ἔκφραση: $\boxed{z = \rho(\text{συν}\varphi + i\text{ημ}\varphi), \quad \rho = |z| \wedge \varphi = \operatorname{Arg}z}$ (2)

* Ἄν $z = 0$, τότε $\rho = |z| = 0$. Ὄρισμα τοῦ 0 δέν ὁρίζεται.

εἶναι γνωστή, ἀπό τήν προηγούμενη τάξη, ὡς **τριγωνομετρική μορφή τοῦ μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ $z = x + iy$.**

Ἔτσι, π.χ., εἶναι:

$1 = 1\,(συν0 + i\,ημ0)$, $\quad -1 = 1(συνπ + i\,ημπ)$,

$i = 1\left(συν\frac{π}{2} + i\,ημ\frac{π}{2}\right)$, $\quad -i = 1\left(συν\left(-\frac{π}{2}\right) + i\,ημ\left(-\frac{π}{2}\right)\right)$,

$1 + i\sqrt{3} = 2\left(συν\frac{π}{3} + i\,ημ\frac{π}{3}\right)$, $\quad -1-i = \sqrt{2}\left(συν\left(-\frac{3π}{4}\right) + i\,ημ\left(-\frac{3π}{4}\right)\right)$.

Ἀπό τά προηγούμενα συνάγουμε τώρα ὅτι: *κάθε μιγαδικός ἀριθμός $z=x+iy \neq 0$ ἔχει ἀκριβῶς μία τριγωνομετρική παράσταση $z=\varrho(συνφ+iημφ)$, ὅπου ϱ εἶναι τό μέτρο τοῦ z καί $φ$ τό βασικό ὅρισμά του $(-π<φ\leq π)$.*

Ἀντιστρόφως: *Γιά κάθε διατεταγμένο ζεῦγος $(\varrho, φ)$ μέ $\varrho>0$ καί $-π<φ\leq π$ ὑπάρχει ἀκριβῶς ἕνας μιγαδικός ἀριθμός $z = x + iy \neq 0$ μέ τριγωνομετρική μορφή: $\varrho(συνφ + i\,ημφ)$·* αὐτός εἶναι ὁ μιγαδικός ἀριθμός $z=x+iy$ μέ $x=ρ\,συνφ$ και $y=ρ\,ημφ$.

Ὕστερα ἀπό αὐτά ἔχουμε τή λογική ἰσοδυναμία:

$$\boxed{(|z| = ρ \text{ καί } Argz = φ) \iff z = ρ(συνφ + iημφ)} \tag{3}$$

Ἀπό τήν (3) προκύπτει ἀμέσως, τώρα, ὅτι:

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} x = ρσυνφ \\ y = ρημφ \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{l} ρ = \sqrt{x^2 + y^2} \\ συνφ = \dfrac{x}{ρ},\ ημφ = \dfrac{y}{ρ} \end{array}\right.} \tag{4}$$

Παρατηρήσεις: α) Ἐπειδή $συνφ = συν(2kπ + φ)$ καί $ημφ = ημ(2kπ + φ)$, ὅπου $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$, ἡ (2) γράφεται μέ τή γενικότερη μορφή:

$$\boxed{z = ρ[συν(φ + 2kπ) + i\,ημ(φ + 2kπ)]} \tag{5}$$

β) Ἀπό τήν (4) συμπεραίνουμε ὅτι: Γιά κάθε $z = x + iy \neq 0$ ἰσχύουν:

$$\boxed{ημ\,(Argz) = \frac{y}{|z|}} \quad \text{καί} \quad \boxed{συν(Argz) = \frac{x}{|z|}}$$

καί συνεπῶς: $\quad z = x+iy = |z|\{συν(Argz)+iημ(Argz)\}$.

Εὔκολα ἀποδεικνύονται τώρα τά ἑπόμενα θεωρήματα:

§ 137. Θεώρημα.— Δύο μιγαδικοί ἀριθμοί γραμμένοι μέ τριγωνομετρική μορφή εἶναι ἴσοι, τότε καί μόνο τότε, ἄν ἔχουν ἴσα μέτρα καί τά ὁρίσματά τους διαφέρουν κατά ἀκέραιο πολλαπλάσιο περιφερείας.

Ἀπόδειξη: Πράγματι, ἄν ἔχουμε:

$$ρ_1(συνφ_1 + i\,ημφ_1) = ρ_2(συνφ_2 + i\,ημφ_2),$$

θά εἶναι:

$$\left.\begin{array}{l} ρ_1συνφ_1 = ρ_2συνφ_2 \implies ρ_1^2συν^2φ_1 = ρ_2^2συν^2φ_2 \\ ρ_1ημφ_1 = ρ_2ημφ_2 \implies ρ_1^2ημ^2φ_1 = ρ_2^2ημ^2φ_2 \end{array}\right\} \implies \begin{array}{l} ρ_1^2(συν^2φ_1 + ημ^2φ_1) = \\ = ρ_2^2(συν^2φ_2 + ημ^2φ_2), \end{array}$$

ἀπό τό ὁποῖο: $\rho_1^2 = \rho_2^2$ καί ἐπειδή $\rho_1 > 0$, $\rho_2 > 0$, ἔπεται: $\rho_1 = \rho_2$, ὁπότε θά εἶναι:

$$\left.\begin{array}{r}\text{συν}\varphi_1 = \text{συν}\varphi_2 \\ \text{ημ}\varphi_1 = \text{ημ}\varphi_2\end{array}\right\} \Rightarrow \varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi \Rightarrow \varphi_1 - \varphi_2 = 2k\pi.$$

Ἀντιστρόφως. Ἄν $\rho_1 = \rho_2$ καί $\varphi_1 - \varphi_2 = 2k\pi$, θά ἔχουμε:

$$\text{συν}\varphi_1 = \text{συν}\varphi_2,\ \text{ημ}\varphi_1 = \text{ημ}\varphi_2$$

ὁπότε: $\rho_1(\text{συν}\varphi_1 + i\,\text{ημ}\varphi_1) = \rho_2(\text{συν}\varphi_2 + i\,\text{ημ}\varphi_2)$.

§ 138. Θεώρημα.— Τό γινόμενο δύο μιγαδικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἕνας μιγαδικός ἀριθμός πού ἔχει μέτρο τό γινόμενο τῶν μέτρων τῶν μιγάδων καί ὅρισμα τό ἄθροισμα τῶν ὁρισμάτων τους. Δηλαδή:

$$\left.\begin{array}{l}z_1 = \rho_1(\text{συν}\varphi_1 + i\text{ημ}\varphi_1) \\ z_2 = \rho_2(\text{συν}\varphi_2 + i\text{ημ}\varphi_2)\end{array}\right\} \Rightarrow z_1z_2 = \rho_1\rho_2[\text{συν}(\varphi_1 + \varphi_2) + i\,\text{ημ}(\varphi_1 + \varphi_2)].$$

Ἀπόδειξη : Ἔχουμε:

$$z_1z_2 = \rho_1\rho_2(\text{συν}\varphi_1 + i\,\text{ημ}\varphi_1)(\text{συν}\varphi_2 + i\,\text{ημ}\varphi_2) = \rho_1\rho_2[(\text{συν}\varphi_1\text{συν}\varphi_2 - \text{ημ}\varphi_1\text{ημ}\varphi_2) + i(\text{συν}\varphi_1\,\text{ημ}\varphi_2 + \text{ημ}\varphi_1\text{συν}\varphi_2)] = \rho_1\rho_2[\text{συν}(\varphi_1 + \varphi_2) + i\,\text{ημ}(\varphi_1 + \varphi_2)].$$

Πόρισμα 1ο.— Ἄν $z_k = \rho_k(\text{συν}\varphi_k + i\text{ημ}\varphi_k)$, $k = 1, 2, \ldots, \nu$, τότε :

$$z_1 \cdot z_2 \cdots z_\nu = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdots \rho_\nu\ [\text{συν}(\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_\nu) + i\,\text{ημ}(\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_\nu)] \quad (1)$$

Νά ἀποδειχθεῖ τό πόρισμα μέ τή μέθοδο τῆς τέλειας ἐπαγωγῆς.

Μία ἄμεση συνέπεια τῶν παραπάνω προτάσεων εἶναι τά ἑπόμενα δύο πορίσματα:

Πόρισμα 2ο.—Τό μέτρο τοῦ γινομένου δύο ἤ περισσότερων μιγαδικῶν ἀριθμῶν ἰσοῦται μέ τό γινόμενο τῶν μέτρων τους, δηλαδή **ἰσχύει :**

$$|z_1 \cdot z_2 \cdots z_\nu| = |z_1| \cdot |z_2| \cdots |z_\nu|.$$

Πόρισμα 3ο.— Τό ὅρισμα τοῦ γινομένου δύο ἤ περισσότερων μιγαδικῶν ἀριθμῶν ἰσοῦται μέ τό ἄθροισμα τῶν ὁρισμάτων τους, δηλαδή **ἰσχύει :**

$$\text{Arg}(z_1 \cdot z_2 \cdots z_\nu) = \text{Arg}z_1 + \text{Arg}z_2 + \cdots + \text{Arg}z_\nu.$$

§ 139. Θεώρημα. — Ὁ ἀντίστροφος ἑνός μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ $z(\neq 0)$ ἔχει μέτρο τό ἀντίστροφο τοῦ μέτρου του καί ὅρισμα τό ἀντίθετο τοῦ ὁρίσματός του.

Ἀπόδειξη. Πράγματι, ἄν $z = \rho(\text{συν}\varphi + i\,\text{ημ}\varphi)$ θά ἔχουμε διαδοχικά:

$$[\rho(\text{συν}\varphi + i\,\text{ημ}\varphi)]^{-1} = \frac{1}{\rho(\text{συν}\varphi + i\,\text{ημ}\varphi)} = \frac{1(\text{συν}\varphi - i\,\text{ημ}\varphi)}{\rho(\text{συν}\varphi + i\,\text{ημ}\varphi)(\text{συν}\varphi - i\,\text{ημ}\varphi)} =$$

$$\frac{\text{συν}\varphi - i\,\text{ημ}\varphi}{\rho(\text{συν}^2\varphi + \text{ημ}^2\varphi)} = \frac{1}{\rho}(\text{συν}\varphi - i\,\text{ημ}\varphi) = \frac{1}{\rho}[\text{συν}(-\varphi) + i\,\text{ημ}(-\varphi)].$$

Ἔχουμε λοιπόν ὅτι:

$$[\rho(\text{συν}\varphi + i\,\text{ημ}\varphi)]^{-1} = \frac{1}{\rho}\ [\text{συν}(-\varphi) + i\,\text{ημ}(-\varphi)].$$

Ὥστε : $\forall\ z\in C\ ,\ z\neq 0\ ,\quad \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ καί $\text{Arg}\,\frac{1}{z} = -\text{Arg}z$

§ 140. Θεώρημα.— Τό πηλίκο δύο μιγαδικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἕνας μιγαδικός ἀριθμός πού ἔχει μέτρο τό λόγο τῶν μέτρων τους καί ὅρισμα τή διαφορά τῶν ορισμάτων τους. Δηλαδή:

$$\left.\begin{array}{l} z_1 = \rho_1(\sigma\upsilon\nu\varphi_1 + i\,\eta\mu\varphi_1) \\ z_2 = \rho_2(\sigma\upsilon\nu\varphi_2 + i\,\eta\mu\varphi_2) \neq 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\,[\sigma\upsilon\nu(\varphi_1 - \varphi_2) + i\,\eta\mu(\varphi_1 - \varphi_2)]$$

Ὑπόδειξη. Ἔχουμε: $\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1}$ κτλ.

Πόρισμα.— Γιά κάθε ζεῦγος μιγαδικῶν ἀριθμῶν z_1, z_2 μέ $z_1 \cdot z_2 \neq 0$ ἰσχύει :

$$\text{i)}\ \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \text{ καί } \quad \text{ii)}\ \text{Arg}\frac{z_1}{z_2} = \text{Arg}z_1 - \text{Arg}z_2.$$

§ 141. Θεώρημα (De Moivre).— Ἡ νιοστή δύναμη ἑνός μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ z εἶναι ἕνας μιγαδικός ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἔχει ὡς μέτρο τή νιοστή δύναμη τοῦ μέτρου τοῦ z καί ὡς ὅρισμα τό ν-πλάσιο τοῦ ὁρίσματος τοῦ z. Δηλαδή :

$$z = \rho(\sigma\upsilon\nu\varphi + i\,\eta\mu\varphi) \Rightarrow z^\nu = \rho^\nu[\sigma\upsilon\nu(\nu\varphi) + i\,\eta\mu(\nu\varphi)]$$

ἤ

$$\boxed{[\rho(\sigma\upsilon\nu\varphi + i\,\eta\mu\varphi)]^\nu = \rho^\nu[\sigma\upsilon\nu(\nu\varphi) + i\,\eta\mu(\nu\varphi)]} \qquad (\tau)$$

Ὁ τύπος (τ), ὁ ὁποῖος δίνει τή νιοστή δύναμη ἑνός μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ, εἶναι γνωστός μέ τό ὄνομα: τύπος τοῦ De Moivre*.

Ἀπόδειξη. Ἄν στόν τύπο (1) τοῦ πορίσματος τῆς § 138 θέσουμε: $z_1 = z_2 = \cdots = z_\nu = \rho(\sigma\upsilon\nu\varphi + i\,\eta\mu\varphi)$, τότε προκύπτει ὁ τύπος (τ).

Πόρισμα.— Γιά κάθε $\nu \in N$ καί κάθε $z \in C$ ἰσχύει :

$$\text{(i)}\ |z^\nu| = |z|^\nu \quad \text{καί} \quad \text{ii)}\ \text{Arg}z^\nu = \nu\text{Arg}z.$$

Ἄσκηση. Νά ἀποδείξετε τό θεώρημα τοῦ De Moivre μέ τή μέθοδο τῆς τέλειας ἐπαγωγῆς (Τό θεώρημα ἰσχύει γιά $\nu = 1, 2$. Ἔστω ... κτλ.).

Παρατήρηση. Ὁ τύπος τοῦ De Moivre ἰσχύει καί στήν περίπτωση πού ὁ ἐκθέτης εἶναι ρητός ἀριθμός. Δηλαδή:

Γιά κάθε $m\in Q$ (Q : τό σύνολο τῶν ρητῶν) καί κάθε $z\in C$ μέ $z = \rho(\sigma\upsilon\nu\varphi + i\,\eta\mu\varphi)$ ἔχουμε:

$$z^m = \rho^m\,[\sigma\upsilon\nu(m\varphi) + i\,\eta\mu(m\varphi)].$$

Πρῶτα-πρῶτα ὁ τύπος (τ) τοῦ De Moivre ἰσχύει ὅταν ὁ ν εἶναι ἀκέραιος ἀρνητικός, ἔστω $\nu = -k$ ($k\in N$). Πράγματι, ἔχουμε:

$$[\rho(\sigma\upsilon\nu\varphi + i\,\eta\mu\varphi)]^{-k} = \left\{[\rho(\sigma\upsilon\nu\varphi + i\,\eta\mu\varphi)]^{-1}\right\}^k = \left\{\rho^{-1}.[\sigma\upsilon\nu(-\varphi) + i\,\eta\mu\varphi(-\varphi)]\right\}^k =$$

$$= \rho^{-k}[\sigma\upsilon\nu(-k\varphi) + i\,\eta\mu(-k\varphi)].$$

Ἐπίσης ἰσχύει καί γιά $m = \frac{1}{k}$, ὅπου $k\in N$. Πράγματι, ἔχουμε:

---

* De Moivre (1667 - 1754), Γάλλος μαθηματικός.

$$\left\{ \rho \left[\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\varphi}{k}\right) + i\,\eta\mu\left(\frac{\varphi}{k}\right)\right]\right\}^k = \rho^k \cdot (\sigma\upsilon\nu\varphi + i\,\eta\mu\varphi)$$

ὁπότε:

$$(\sigma\upsilon\nu\varphi + i\,\eta\mu\varphi)^{\frac{1}{k}} = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\varphi}{k}\right) + i\,\eta\mu\left(\frac{\varphi}{k}\right).$$

Ἔστω τώρα $m = \frac{\nu}{k}$, $(\nu, k \in N)$, τότε ἔχουμε:

$$z^m = [\rho(\sigma\upsilon\nu\varphi + i\,\eta\mu\varphi)]^m = \rho^m \cdot (\sigma\upsilon\nu\varphi + i\,\eta\mu\varphi)^m = \rho^m \cdot \left[(\sigma\upsilon\nu\varphi + i\,\eta\mu\varphi)^{\frac{1}{k}}\right]^\nu =$$

$$= \rho^m\left[\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\varphi}{k}\right) + i\,\eta\mu\left(\frac{\varphi}{k}\right)\right]^\nu = \rho^m\left[\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\nu\varphi}{k}\right) + i\,\eta\mu\left(\frac{\nu\varphi}{k}\right)\right]$$

$$= \rho^m[\sigma\upsilon\nu(m\varphi) + i\,\eta\mu(m\varphi)].$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΤΥΠΟΥ ΤΟΥ DE MOIVRE ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ ΚΑΙ ΤΗΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

§ 142. Ὑπολογισμός τῶν νιοστῶν ριζῶν μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ. α) Ὁρισμός.—*Ὀνομάζουμε* **νιοστή ρίζα** *ἑνός μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ* $a \neq (0, 0)$ καί τή συμβολίζουμε μέ $\sqrt[\nu]{a}$, *κάθε μιγαδικό ἀριθμό z τέτοιο, ὥστε νά ἰσχύει:* $z^\nu = a$.

Ὥστε:

$$\boxed{\sqrt[\nu]{a} = z \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} z^\nu = a} \qquad (1)$$

Θά ἀποδείξουμε τώρα ὅτι ὑπάρχει ἕνας τουλάχιστο μιγαδικός ἀριθμός z πού ἱκανοποιεῖ τήν (1).

Ἀκριβέστερα θά ἀποδείξουμε τό ἑπόμενο:

Θεώρημα. *(ὑπάρξεως νιοστῆς ρίζας ἑνός μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ).*—**Ἄν $a = \rho(\sigma\upsilon\nu\theta + i\,\eta\mu\theta)$, $a \neq 0$, εἶναι ὁποιοσδήποτε μιγαδικός ἀριθμός, τότε ὑπάρχουν ν ἀκριβῶς διαφορετικές μεταξύ τους ρίζες, δηλαδή ἡ ἐξίσωση:**

$$z^\nu = a \qquad (1)$$

ἔχει ν διαφορετικές μεταξύ τους ρίζες πού δίνονται ἀπό τόν τύπο:

$$z_k = \sqrt[\nu]{\rho}\left[\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\theta + 2k\pi}{\nu}\right) + i\,\eta\mu\left(\frac{\theta + 2k\pi}{\nu}\right)\right], \qquad (\tau)$$

ὅπου $k = 0, 1, 2, \ldots, (\nu - 1)$.

Ἀπόδειξη. Ἔστω ὅτι ὁ μιγαδικός ἀριθμός:

$$z = r(\sigma\upsilon\nu\varphi + i\,\eta\mu\varphi)$$

ἐπαληθεύει τήν ἐξίσωση (1). Τότε, σύμφωνα μέ τόν τύπο τοῦ De Moivre, ἔχουμε:

$$r^\nu[\sigma\upsilon\nu(\nu\varphi) + i\,\eta\mu(\nu\varphi)] = \rho\,(\sigma\upsilon\nu\theta + i\,\eta\mu\theta). \qquad (2)$$

Ἡ (2) ὅμως ἀληθεύει τότε καί μόνο τότε, ἄν:

$$r^\nu = \rho \quad \text{καί} \quad \nu\varphi = \theta + 2k\pi, \quad k \in Z.$$

Ἀπό αὐτές λαμβάνουμε:

$$r = \sqrt[\nu]{\rho}\,^{*)} \quad \text{καί} \quad \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{\nu}, \quad k \in Z.$$

* $\sqrt[\nu]{\rho}$ εἶναι ἡ θετική νιοστή ρίζα τοῦ θετικοῦ ἀριθμοῦ ρ.

Ὥστε:

$$z = \sqrt[\nu]{\rho}\cdot\left[\text{συν}\frac{\theta+2k\pi}{\nu} + i\,\text{ημ}\frac{\theta+2k\pi}{\nu}\right], \quad k\in\mathbf{Z} \tag{3}$$

Ἀπόδειξαμε λοιπόν ὅτι ὑπάρχουν μιγαδικοί ἀριθμοί πού ὁρίζονται ἀπό τήν (3) γιά τίς διάφορες ἀκέραιες τιμές τοῦ k πού ἱκανοποιοῦν τήν (1).

Θά ἀποδείξουμε, τώρα, ὅτι ν μόνο ἀπό αὐτούς εἶναι διαφορετικοί μεταξύ τους γιά τίς διάφορες ἀκέραιες τιμές τοῦ k. Ἀκριβέστερα θά ἀποδείξουμε ὅτι: Ἄν ὁ ἀκέραιος k λάβει τίς τιμές $0, 1, 2, \ldots, \lambda, \ldots, \mu, \ldots, \nu-1$, τότε ἀπό τήν (3) προκύπτουν, ἀντιστοίχως, ν ἀριθμοί: $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_\lambda, \ldots, z_\mu, \ldots, z_{\nu-1}$ πού εἶναι διαφορετικοί μεταξύ τους. Ἀκόμη θά ἀποδείξουμε ὅτι, ἄν ὁ k πάρει τιμή διαφορετική ἀπό τίς: $0, 1, 2, \ldots, \nu-1$, δηλαδή ἄν $k \geq \nu$ ἤ $k < 0$, τότε ὁ μιγαδικός ἀριθμός z πού προκύπτει ἀπό τήν (3) θά συμπίπτει μέ ἕναν ἀπό τούς: $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_\lambda, \ldots, z_\mu, \ldots, z_{\nu-1}$.

Πράγματι, πρῶτα-πρῶτα ἄς δώσουμε στό k τίς ν διαδοχικές τιμές: $0, 1, 2, \ldots, (\nu-1)$· τότε ἀπό τήν (3) λαμβάνουμε ν ἀριθμούς: $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_\lambda, \ldots, z_\mu, \ldots, z_{\nu-1}$ πού ἔχουν τό ἴδιο μέτρο $\sqrt[\nu]{\rho}$ καί ὀρίσματα, ἀντιστοίχως, τά:

$$\frac{\theta}{\nu}, \frac{\theta+2\pi}{\nu}, \frac{\theta+4\pi}{\nu}, \ldots, \frac{\theta+2\lambda\pi}{\nu}, \ldots, \frac{\theta+2\mu\pi}{\nu}, \ldots, \frac{\theta+2(\nu-1)\pi}{\nu}.$$

Αὐτοί οἱ ν ἀριθμοί: $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_\lambda, \ldots, z_\mu, \ldots, z_{\nu-1}$ εἶναι διαφορετικοί μεταξύ τους, γιατί ἄν δυό ἀπό αὐτούς ἦταν ἴσοι, ἔστω οἱ z_λ καί z_μ, ὅπου $\lambda, \mu\in\mathbf{Z}$, $\lambda \neq \mu$ καί $0 \leqq \lambda, \mu < \nu$, θά ἔπρεπε:

$$\frac{\theta+2\lambda\pi}{\nu} - \frac{\theta+2\mu\pi}{\nu} = 2k'\pi,\ k'\in\mathbf{Z}.$$

Δηλαδή: $\qquad \lambda-\mu = k'\nu,\ k'\in\mathbf{Z}.$

Εἶναι ὅμως $0 < |\lambda-\mu| < \nu$ καί συνεπῶς $0 < |k'\nu| < \nu$, δηλ. $0 < |k'| < 1$, ἀλλά αὐτό εἶναι ἄτοπο, ἐπειδή δέν ὑπάρχει $k'\in\mathbf{Z}$ μέ $0 < |k'| < 1$.

Ὥστε: $\qquad z_\lambda \neq z_\mu\ \forall\ \lambda, \mu\in[0, \nu-1],\ \lambda\neq\mu$ καί $\lambda, \mu\in\mathbf{Z}$.

Ἄς δοῦμε τώρα τί συμβαίνει, ἄν ὁ k πάρει ἀκέραιες τιμές ἔξω ἀπό τό διάστημα $[0, \nu-1]$, δηλ. τί συμβαίνει γιά $k \geqq \nu$ ἤ $k < 0$.

Ἐφόσον $k\notin[0, \nu-1]$, ἄν ὀνομάσουμε λ τό πηλίκο καί k_1 τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως $k:\nu$ θά εἶναι: $k = \lambda\nu + k_1$, ὅπου λ καί k_1 εἶναι ἀκέραιοι μέ $0 \leqq k_1 < \nu$, δηλ. $k_1\in[0, \nu-1]$.

Ἔχουμε τότε:

$$z_k = \sqrt[\nu]{\rho}\cdot\left[\text{συν}\frac{\theta+2(\lambda\nu+k_1)\pi}{\nu} + i\,\text{ημ}\frac{\theta+2(\lambda\nu+k_1)\pi}{\nu}\right] =$$

$$= \sqrt[\nu]{\rho}\left[\text{συν}\left(\frac{\theta+2k_1\pi}{\nu}+2\lambda\pi\right) + i\,\text{ημ}\left(\frac{\theta+2k_1\pi}{\nu}+2\lambda\pi\right)\right] =$$

$$= \sqrt[\nu]{\rho}\cdot\left[\text{συν}\left(\frac{\theta+2k_1\pi}{\nu}\right) + i\,\text{ημ}\left(\frac{\theta+2k_1\pi}{\nu}\right)\right] = z_{k_1},\ k_1 = 0, 1, 2, \ldots, \nu-1.$$

Δηλαδή, ἄν $k \neq 0, 1, 2, \ldots, \nu-1$ (μέ ἄλλα λόγια ἄν $k \geqq \nu$ ἤ $k < 0$), τότε ὁ μιγαδικός ἀριθμός z πού προκύπτει ἀπό τήν (3) συμπίπτει μέ ἕναν ἀπό τούς: $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_{\nu-1}$.

Ὥστε, πράγματι, ὑπάρχουν ἀκριβῶς ν διαφορετικοί μεταξύ τους ἀριθμοί, πού ἐπαληθεύουν τήν ἐξίσωση:

$$z^\nu = a = \rho(\text{συν}\theta + i\,\text{ημ}\theta),$$

καί δίνονται ἀπό τόν τύπο:

$$\boxed{z_k = \sqrt[\nu]{\rho} \cdot \left[\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\theta + 2k\pi}{\nu}\right) + i\ \eta\mu\left(\frac{\theta + 2k\pi}{\nu}\right)\right]} \tag{4}$$

ὅπου $k = 0, 1, 2, \ldots, \nu - 1$.

Σημείωση. Στήν εἰδική περίπτωση πού ὁ a εἶναι θετικός ἀριθμός ὁπότε $\theta = 0$, τότε οἱ ν (διαφορετικές) λύσεις τῆς ἐξισώσεως $x^\nu = a$ δίνονται ἀπό τόν τύπο:

$$\boxed{z_k = \sqrt[\nu]{|a|} \cdot \left[\sigma\upsilon\nu\ \frac{2k\pi}{\nu} + i\ \eta\mu \frac{2k\pi}{\nu}\right]} \tag{4'}$$

ὅπου $k = 0, 1, 2, \ldots, \nu - 1$.

Παρατήρηση. Ἀπό τό παραπάνω θεώρημα προκύπτει ὅτι κάθε μιγαδικός ἀριθμός $a \neq 0$ ἔχει ν νιοστές ρίζες· μέ ἄλλα λόγια: στούς μιγαδικούς ἀριθμούς τό σύμβολο $\sqrt[\nu]{a}$ εἶναι ν-σήμαντο.

Προσέξτε! στό **R** ἡ νιοστή ρίζα πραγματικοῦ ἀριθμοῦ μπορεῖ καί νά μήν ὑπάρχει.

Πόρισμα.— Γιά κάθε $z \in C$ ἰσχύει:

$$\left|\sqrt[\nu]{z}\right| = \sqrt[\nu]{|z|}.$$

Ἐφαρμογές: 1η. Νά βρεθοῦν οἱ $\sqrt[3]{8i}$.

Λύση: Ἔχουμε: $8i = 8\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} + i\ \eta\mu\frac{\pi}{2}\right)$ καί ὁ τύπος (4) τῆς § 142 δίνει:

$$\sqrt[3]{8i} = \sqrt[3]{8\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} + i\ \eta\mu\frac{\pi}{2}\right)} = \sqrt[3]{8}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i\ \eta\mu\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}\right) =$$

$$= 2\left[\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i\ \eta\mu\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right], \quad k = 0, 1, 2.$$

Γιά $k = 0$: $\quad 2\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6} + i\ \eta\mu\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + i.$

Γιά $k = 1$: $\quad 2\left(\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{6} + i\ \eta\mu\frac{5\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} + i$

Γιά $k = 2$: $\quad 2\left(\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{2} + i\ \eta\mu\frac{3\pi}{2}\right) = 0 - 2i = -2i.$

2η. Νά βρεθοῦν οἱ $\sqrt[4]{2 + 2i\sqrt{3}}$

Λύση. Ἔχουμε $2 + 2i\sqrt{3} = 4\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} + i\ \eta\mu\frac{\pi}{3}\right)$ καί ὁ τύπος (4) τῆς § 142 γιά $\nu = 4$, $\rho = 4$, $\theta = \frac{\pi}{3}$ δίνει:

$$z_k = \sqrt[4]{4\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} + i\ \eta\mu\frac{\pi}{3}\right)} = \sqrt[4]{4} \cdot \left[\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{4}\right) + i\ \eta\mu\left(\frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{4}\right)\right] =$$

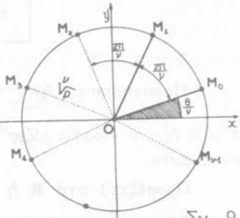
$$= \sqrt{2} \cdot \left[\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}\right) + i\ \eta\mu\left(\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}\right)\right].$$

Γιά k = 0, 1, 2, 3 βρίσκουμε ἀντιστοίχως:

$$z_0 = \sqrt{2}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{12} + i\,\eta\mu\frac{\pi}{12}\right), \qquad z_1 = \sqrt{2}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{7\pi}{12} + i\,\eta\mu\frac{7\pi}{12}\right),$$

$$z_2 = \sqrt{2}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{13\pi}{12} + i\,\eta\mu\frac{13\pi}{12}\right), \qquad z_3 = \sqrt{2}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{19\pi}{12} + i\,\eta\mu\frac{19\pi}{12}\right).$$

§ 143. Γεωμετρική παράσταση τῶν νιοστῶν ριζῶν ἑνός μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ.— Ἔστω ὁ μιγαδικός ἀριθμός $a = \rho(\sigma\upsilon\nu\theta + i\,\eta\mu\theta)$, μέ νιοστές ρίζες:



Σχ. 9

$$z_0 = \sqrt[\nu]{\rho}\left[\sigma\upsilon\nu\frac{\theta}{\nu} + i\,\eta\mu\frac{\theta}{\nu}\right]$$

$$z_1 = \sqrt[\nu]{\rho}\left[\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\theta}{\nu} + \frac{2\pi}{\nu}\right) + i\,\eta\mu\left(\frac{\theta}{\nu} + \frac{2\pi}{\nu}\right)\right]$$

$$z_2 = \sqrt[\nu]{\rho}\left[\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\theta}{\nu} + \frac{4\pi}{\nu}\right) + i\,\eta\mu\left(\frac{\theta}{\nu} + \frac{4\pi}{\nu}\right)\right]$$

. . . .

$$z_{\nu-1} = \sqrt[\nu]{\rho}\left[\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\theta}{\nu} + (\nu-1)\frac{2\pi}{\nu}\right) + i\,\eta\mu\left(\frac{\theta}{\nu} + (\nu-1)\frac{2\pi}{\nu}\right)\right].$$

Παρατηροῦμε ὅτι ὅλες οἱ νιοστές ρίζες τοῦ a ἔχουν τό ἴδιο μέτρο, δηλαδή $|z_k| = \sqrt[\nu]{\rho}$, $k = 0, 1, \ldots, (\nu-1)$, καί ὅρισμα τέτοιο ὥστε ἀπό κάποια ἀρχική τιμή $\frac{\theta}{\nu}$ νά αὐξάνει ἀδιάκοπα κατά $\frac{2\pi}{\nu}$. Τοῦτο σημαίνει ὅτι, ἄν πάρουμε τίς εἰκόνες $M_0, M_1, M_2, \ldots, M_{\nu-1}$ τῶν ριζῶν στό μιγαδικό ἐπίπεδο, αὐτές θά βρίσκονται πάνω σ' ἕναν κύκλο μέ κέντρο O καί ἀκτίνα $\sqrt[\nu]{\rho}$, καί θά εἶναι μάλιστα κορυφές κανονικοῦ πολυγώνου μέ ν πλευρές ἐγγεγραμμένου στόν κύκλο αὐτό.

§ 144. Ἐφαρμογή τοῦ τύπου τοῦ De Moivre στήν ἐπίλυση διώνυμων ἐξισώσεων.— *Κάθε ἐξίσωση τῆς μορφῆς:*

$$\boxed{z^{\nu} - a = 0} \qquad (\delta)$$

ὅπου $a \in \mathbf{C}$, $a \neq 0$ *καί ν φυσικός ἀριθμός μεγαλύτερος ἀπό τό 1* $(\nu > 1)$ *ὀνομάζεται* **διώνυμη ἐξίσωση.**

Οἱ λύσεις τῆς (δ) δίνονται ἀπό τόν τύπο (4) τῆς σελίδας 197.

Τό θεώρημα τῆς §142 ἐκφράζει ἰσοδύναμα ὅτι: *μέσα στό σύνολο* **C** *ἡ διώνυμη ἐξίσωση (δ) ἔχει ν διακεκριμένες ρίζες.*

Ἐφαρμογές: 1η. Νά ἐπιλυθεῖ ἡ ἐξίσωση: $z^{\nu} - 1 = 0$ **(1)**

Λύση. Αὐτή γράφεται $z^{\nu} = 1$. Ἐπειδή $1 = 1(\sigma\upsilon\nu 0 + i\,\eta\mu 0)$, ὁ τύπος (4) τῆς σελίδας 197 (βλ. καί σημείωση τῆς § 142) δίνει ἀμέσως γιά $\nu = \nu$, $\alpha = 1$, $\theta = 0$:

$$z_k = \sigma\upsilon\nu\frac{2k\pi}{\nu} + i\,\eta\mu\frac{2k\pi}{\nu}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots, \nu-1 \qquad (2)$$

Γιά καθεμία ἀπό τίς τιμές τοῦ k, προκύπτει ἀπό τή (2) καί μία ρίζα τῆς ἐξισώσεως (1). Ἄρα ἡ ἐξίσωση (1) ἔχει ν ρίζες πού τίς λέμε **νιοστές ρίζες τῆς μονάδας.**

Γιά $k = 0$ ἔχουμε ἀπό τή (2) τή ρίζα $z_0 = 1$. Καί ἐπειδή, σύμφωνα μέ τόν τύπο τοῦ De Moivre, εἶναι:

$$\text{συν}\frac{2k\pi}{\nu} + i\,\text{ημ}\frac{2k\pi}{\nu} = \left(\text{συν}\frac{2\pi}{\nu} + i\,\text{ημ}\frac{2\pi}{\nu}\right)^k,\ k\in\mathbf{N},$$

οἱ νιοστές ρίζες τῆς μονάδας εἶναι οἱ δυνάμεις:

$$1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{\nu-1},$$

ὅπου:

$$\omega = \text{συν}\,\frac{2\pi}{\nu} + i\,\text{ημ}\frac{2\pi}{\nu}.$$

Σημ. Κάθε ρίζα z_k τῆς μονάδας, ἡ ὁποία ἔχει τήν ἰδιότητα νά δίνει τίς ἄλλες ρίζες ὡς δυνάμεις της, τή λέμε **ἀρχική ν-οστή ρίζα τῆς μονάδας.** Π.χ. ἡ $z_1 = \text{συν}\,\frac{2\pi}{\nu} + i\,\text{ημ}\frac{2\pi}{\nu} \equiv \omega$ εἶναι ἀρχική ν-οστή ρίζα τῆς μονάδας, ἐπειδή:

$$z_1^0 = z_0, \quad z_1^1 = z_1, \quad z_1^2 = z_2, \quad z_1^3 = z_3, \ldots, z_1^{\nu-1} = z_{\nu-1}.$$

Ειδικές περιπτώσεις: 1) Γιά $\nu = 2$ ἔχουμε τή διώνυμη ἐξίσωση $z^2 - 1 = 0$, τῆς ὁποίας ρίζες εἶναι οἱ ἀριθμοί: 1 καί -1.

2) Γιά $\nu = 3$ ἔχουμε τή διώνυμη ἐξίσωση: $z^3 - 1 = 0$. Οἱ λύσεις τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς εἶναι οἱ **κυβικές ρίζες τῆς μονάδας.**

Ἄν ω_k εἶναι μία κυβική ρίζα τῆς μονάδας, ἔχουμε ἀπό τόν τύπο (4′) τῆς Σημ. τῆς § 142:

$$\omega_k = 1\cdot\left[\text{συν}\frac{2k\pi}{3} + i\,\text{ημ}\frac{2k\pi}{3}\right], \qquad 0 \leqq k \leqq 2.$$

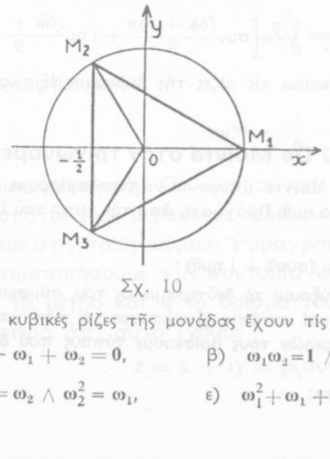
Ἀπό τόν παραπάνω τύπο γιά $k = 0, 1, 2$ λαμβάνουμε:

$$\omega_0 = 1(\text{συν}0 + i\,\text{ημ}0) = 1$$

$$\omega_1 = 1\left(\text{συν}\frac{2\pi}{3} + i\,\text{ημ}\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\omega_2 = 1\left(\text{συν}\frac{4\pi}{3} + i\,\text{ημ}\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Οἱ εἰκόνες τους στό μιγαδικό ἐπίπεδο εἶναι κορυφές ἰσόπλευρου τριγώνου ἐγγεγραμμένου στό μοναδιαῖο κύκλο (βλ. Σχ. 10).



Σχ. 10

Σχ. 11

Οἱ κυβικές ρίζες τῆς μονάδας ἔχουν τίς πιό κάτω χαρακτηριστικές ἰδιότητες:

α) $\boldsymbol{\omega_0 + \omega_1 + \omega_2 = 0}$, β) $\boldsymbol{\omega_1\omega_2 = 1 \wedge \omega_1 + \omega_2 = -1}$, γ) $\boldsymbol{\omega_0^3 = \omega_1^3 = \omega_2^3 = 1}$

δ) $\boldsymbol{\omega_1^2 = \omega_2 \wedge \omega_2^2 = \omega_1}$, ε) $\boldsymbol{\omega_1^2 + \omega_1 + 1 = 0}$, στ) $\boldsymbol{\omega_2^2 + \omega_2 + 1 = 0}$.

'Από τίς δύο τελευταίες ἰδιότητες βλέπουμε ὅτι οἱ μιγαδικές κυβικές ρίζες ω_1, ω_2 τῆς μονάδας εἶναι ρίζες τοῦ τριωνύμου: $x^2 + x + 1$ καί γι' αὐτό οἱ παραπάνω ἰδιότητες τῶν κυβικῶν ριζῶν τῆς μονάδας εἶναι πολύ χρήσιμες στή διαιρετότητα τῶν πολυωνύμων καί κυρίως ὅταν ἔχουμε διαιρέτη τό: $x^2 + x + 1$.

3) Γιά $\nu = 4$ ἔχουμε τή διώνυμη ἐξίσωση: $z^4 - 1 = 0$, ἡ ὁποία ἔχει ὡς ρίζες τούς ἀριθμούς: $1, i, -1, -i$. Οἱ εἰκόνες τῶν ριζῶν αὐτῶν στό μιγαδικό ἐπίπεδο εἶναι οἱ 4 κορυφές τοῦ τετραγώνου τοῦ σχήματος 11 τῆς σελίδας 199, πού εἶναι ἐγγεγραμμένο στό μοναδιαῖο κύκλο.

2η. Νά ἐπιλυθεῖ ἡ ἐξίσωση: $z^6 + 64i = 0$.

Λύση. Ἔχουμε:

$$z^6 = -64i = 64(-i) = 64\left[\sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\,\eta\mu\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right].$$

Ὁ τύπος (4) τῆς σελίδας 197 γιά $\nu = 6$, $\rho = 64$ καί $\theta = -\frac{\pi}{2}$ γράφεται:

$$z_k = \sqrt[6]{64}\left[\sigma\upsilon\nu\left(\frac{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{6}\right) + i\,\eta\mu\left(\frac{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{6}\right)\right],\quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

Γιά $k = 0$ εἶναι: $z_0 = 2\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{12} - i\,\eta\mu\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{2+\sqrt{3}} - i\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

Γιά $k = 1$ εἶναι: $z_1 = 2\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} + i\,\eta\mu\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\,(1+i)$. κτλ.

3η. Νά ἐπιλυθεῖ ἡ ἐξίσωση: $z^3 = 1 + i\sqrt{3}$.

Λύση. Θέτουμε πρῶτα-πρῶτα τό $1 + i\sqrt{3}$ σέ τριγωνομετρική μορφή. Σ' αὐτή τήν περίπτωση θά ἔχουμε:

$$\rho = \sqrt{1^2 + 3} = 2 \quad \text{καί} \quad \theta = \mathrm{Arg}(1 + i\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3},$$

ἄρα:

$$1 + i\sqrt{3} = \rho(\sigma\upsilon\nu\theta + i\,\eta\mu\theta) = 2\cdot\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} + i\,\eta\mu\frac{\pi}{3}\right).$$

Συνεπῶς ὁ τύπος (4) τῆς § 142 γιά $\nu = 3$, $\rho = 2$, $\theta = \frac{\pi}{3}$ δίνει:

$$z_k = \sqrt[3]{2}\left[\sigma\upsilon\nu\frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{3} + i\,\eta\mu\frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{3}\right] = \sqrt[3]{2}\cdot\left[\sigma\upsilon\nu\frac{(6k+1)\pi}{9} + i\,\eta\mu\frac{(6k+1)\pi}{9}\right].$$

'Απ' αὐτό τόν τύπο μέ $k = 0, 1, 2$ βρίσκουμε τίς ρίζες τῆς διώνυμης ἐξισώσεως πού μᾶς δόθηκε.

§ 145. Ἐφαρμογή τοῦ τύπου τοῦ De Moivre στήν τριγωνομετρία. —

α). Μέ τή βοήθεια τοῦ τύπου τοῦ De Moivre μποροῦμε νά ὑπολογίσουμε τό συννθ καί τό ημνθ $\forall\ \nu \in \mathbb{N}$, ὅταν ξέρουμε τό συν$\theta$ καί τό ημθ. Πράγματι, ἀπό τόν τύπο τοῦ De Moivre ἔχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu\nu\theta + i\,\eta\mu\nu\theta = (\sigma\upsilon\nu\theta + i\,\eta\mu\theta)^{\nu}$$

Ἄν τώρα στόν παραπάνω τύπο ἀναπτύξουμε τό δεύτερο μέλος του, σύμφωνα μέ τόν τύπο τοῦ διώνυμου τοῦ Νεύτωνα (Newton), καί κατόπιν ἐξισώσουμε τά πραγματικά τους μέρη καί τούς συντελεστές τῶν φανταστικῶν μερῶν τους βρίσκουμε τύπους πού δίνουν τά συννθ καί ημνθ.

Ἔτσι γιά $\nu = 2$ ὁ τύπος τοῦ De Moivre:

$$\sigma\upsilon\nu 2\theta + i\,\eta\mu 2\theta = (\sigma\upsilon\nu\theta + i\,\eta\mu\theta)^2$$

δίνει, ἄν ἀναπτύξουμε καί τό δεύτερο μέλος του:

$$\sigma\upsilon\nu 2\theta + i\,\eta\mu 2\theta = \sigma\upsilon\nu^2\theta - \eta\mu^2\theta + i\,2\sigma\upsilon\nu\theta\,\eta\mu\theta$$

ὁπότε ἔχουμε:

$$\begin{cases} \sigma\upsilon\nu 2\theta = \sigma\upsilon\nu^2\theta - \eta\mu^2\theta \\ \eta\mu 2\theta = 2\eta\mu\theta\cdot\sigma\upsilon\nu\theta \end{cases} \tag{1}$$

Ἐπίσης γιά $\nu = 3$ ὁ τύπος τοῦ De Moivre:

$$\sigma\upsilon\nu 3\theta + i\,\eta\mu 3\theta = (\sigma\upsilon\nu\theta + i\,\eta\mu\theta)^3$$

δίνει, ἀφοῦ ἀναπτύξουμε καί τό δεύτερο μέλος:

$$\sigma\upsilon\nu 3\theta + i\,\eta\mu 3\theta = \sigma\upsilon\nu^3\theta + 3i\,\sigma\upsilon\nu^2\theta\,\eta\mu\theta - 3\sigma\upsilon\nu\theta\eta\mu^2\theta - i\,\eta\mu^3\theta$$

καί συνεπῶς:

$$\begin{cases} \sigma\upsilon\nu 3\theta = \sigma\upsilon\nu^3\theta - 3\sigma\upsilon\nu\theta\eta\mu^2\theta = 4\sigma\upsilon\nu^3\theta - 3\sigma\upsilon\nu\theta \\ \eta\mu 3\theta = 3\sigma\upsilon\nu^2\theta\eta\mu\theta - \eta\mu^3\theta = 3\eta\mu\theta - 4\eta\mu^3\theta. \end{cases} \tag{2}$$

β). Οἱ παραπάνω τύποι (1) καί (2) μᾶς ἐπιτρέπουν, ἀντιστρόφως, νά ἐκφράσουμε τό $\sigma\upsilon\nu^\nu\theta$ καί $\eta\mu^\nu\theta$ (γιά $\nu = 2, 3$) συναρτήσει τῶν συνθ, ημθ καί συννθ ἤ ημνθ.

Ἔτσι, ἀπό τούς τύπους τῆς ὁμάδας (1) λαμβάνουμε:

$$\begin{cases} \sigma\upsilon\nu^2\theta = \dfrac{1 + \sigma\upsilon\nu 2\theta}{2} \\ \eta\mu^2\theta = \dfrac{1 - \sigma\upsilon\nu 2\theta}{2}. \end{cases} \tag{3}$$

Ἀπό τούς τύπους τῆς ὁμάδας (2) λαμβάνουμε:

$$\begin{cases} \sigma\upsilon\nu^3\theta = \dfrac{3}{4}\sigma\upsilon\nu\theta + \dfrac{1}{4}\sigma\upsilon\nu 3\theta \\ \eta\mu^3\theta = \dfrac{3}{4}\eta\mu\theta - \dfrac{1}{4}\eta\mu 3\theta. \end{cases} \tag{4}$$

Μποροῦμε ἐπίσης νά ἐκφράσουμε τό $\sigma\upsilon\nu^4\theta$ καί $\eta\mu^4\theta$ συναρτήσει τοῦ συν2θ καί συν4θ. Πράγματι, ἄν ὑψώσουμε στό τετράγωνο τήν πρώτη σχέση τῆς ὁμάδας (3) ἔχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu^4\theta = \left(\frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2\theta}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu 2\theta + \frac{1}{4}\left(\frac{1 + \sigma\upsilon\nu 4\theta}{2}\right)$$

$$= \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu 2\theta + \frac{1}{8}\sigma\upsilon\nu 4\theta. \tag{5}$$

Ὁμοίως βρίσκουμε:

$$\eta\mu^4\theta = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu 2\theta + \frac{1}{8}\sigma\upsilon\nu 4\theta. \tag{6}$$

Ἀνακεφαλαίωση. Οἱ ὁρισμοί καί οἱ κυριότερες ἰδιότητες τοῦ μέτρου καί τοῦ ὁρίσματος ἑνός μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ πού ἀπορρέουν ἀπό τίς προτάσεις πού ἀναφέραμε στίς προηγούμενες παραγράφους συνοψίζονται στόν ἑπόμενο πίνακα, ἄν χρησιμοποιήσουμε γιά συντομία καί τό συμβολισμό $z \equiv (\rho, \theta)$ ἤ $z \equiv [\rho, \theta]$ ὅπου ρ τό μέτρο καί θ τό ὅρισμα τοῦ μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ $z \neq 0$.

Ὕστερα ἀπ' αὐτό ἔχουμε :

$$z = x + iy = \rho(\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta) \equiv (\rho, \theta).$$

ΜΕΤΡΟ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ $z = x + iy = \rho(\sigma\upsilon\nu\theta + i\,\eta\mu\theta) \equiv (\rho, \theta)$	ΟΡΙΣΜΑ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ $z = x + iy = \rho(\sigma\upsilon\nu\theta + i\,\eta\mu\theta) \equiv (\rho, \theta)$
α). Ὁρισμός: $\lvert z \rvert = \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$	**α′) Ὁρισμός:** $\mathrm{Arg}z = \theta, \quad \sigma\upsilon\nu\theta = \dfrac{x}{\rho}, \quad \eta\mu\theta = \dfrac{y}{\rho}$
β). Ἰδιότητες:	**β′) Ἰδιότητες:**
1. $\lvert z_1 z_2 \rvert = \lvert z_1 \rvert \cdot \lvert z_2 \rvert$	1′. $\mathrm{Arg}(z_1 z_2) = \mathrm{Arg}z_1 + \mathrm{Arg}z_2$
2. $\left\lvert \dfrac{z_1}{z_2} \right\rvert = \dfrac{\lvert z_1 \rvert}{\lvert z_2 \rvert}$	2′. $\mathrm{Arg}\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \mathrm{Arg}z_1 - \mathrm{Arg}z_2$
3. $\left\lvert \dfrac{1}{z} \right\rvert = \dfrac{1}{\lvert z \rvert}$	3′. $\mathrm{Arg}\,\dfrac{1}{z} = -\mathrm{Arg}z$
4. $\lvert z^\nu \rvert = \lvert z \rvert^\nu$	4′. $\mathrm{Arg}z^\nu = \nu \cdot \mathrm{Arg}z$
5. $\left\lvert \prod\limits_{\kappa=1}^{\nu} z_\kappa \right\rvert = \prod\limits_{\kappa=1}^{\nu} \lvert z_\kappa \rvert$	5′. $\mathrm{Arg} \prod\limits_{\kappa=1}^{\nu} z_\kappa = \sum\limits_{\kappa=1}^{\nu} \mathrm{Arg}z_\kappa$
6. $\lvert \bar{z} \rvert = \lvert x - iy \rvert = \rho$	6′. $\mathrm{Arg}\bar{z} = -\theta$

γ). Πράξεις

$$z_1 z_2 = (\rho_1, \theta_1) \cdot (\rho_2, \theta_2) = [\rho_1\rho_2, \theta_1 + \theta_2]$$

$$z_1 : z_2 = (\rho_1, \theta_1) : (\rho_2, \theta_2) = \left[\frac{\rho_1}{\rho_2}, \theta_1 - \theta_2\right]$$

$$z^\nu = (\rho, \theta)^\nu = [\rho^\nu, \nu\theta], \quad \nu \in \mathbf{N}$$

$$z^{-1} = (\rho, \theta)^{-1} = \left[\frac{1}{\rho}, -\theta\right]$$

$$z = (\rho, \theta) \Longrightarrow \bar{z} = (\rho, -\theta)$$

δ). Διώνυμες ἐξισώσεις:

$$z^\nu = a = r(\sigma\upsilon\nu\varphi + i\,\eta\mu\varphi) \equiv (r, \varphi)$$

ἔχει ν ρίζες: $z_k = \sqrt[\nu]{r}\left[\sigma\upsilon\nu\dfrac{\varphi + 2k\pi}{\nu} + i\,\eta\mu\dfrac{\varphi + 2k\pi}{\nu}\right] \equiv \left[\sqrt[\nu]{r}, \dfrac{\varphi + 2k\pi}{\nu}\right]$,

ὅπου $k = 0, 1, 2, \cdots, \nu - 1$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάδα Α′. 297. Νά γραφοῦν μέ τριγωνομετρική μορφή οἱ μιγαδικοί ἀριθμοί:

α) $\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,i$, β) $-3 + 4i$, γ) $\sqrt{3} - 3i$, δ) $2 + 2\sqrt{3}\,i$, ε) $3\sqrt{3} + 3i$,

στ) $-\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i\sqrt{3}$, ζ) $-\sqrt{3} + i$, η) $\dfrac{1 + i\sqrt{3}}{-\sqrt{3} + i}$, θ) $1 + \sigma\upsilon\nu t + i\,\eta\mu t$.

298. Νά βρεθεῖ τό μέτρο καί τό ὅρισμα τοῦ:

$$\left[\frac{1+i+\sqrt{3}(1-i)}{1+i}\right]^3$$

299. Νά βρεῖτε τό μέτρο καί τό ὅρισμα καθενός ἀπό τούς παρακάτω ἀριθμούς:

i) $(1+\sigma\upsilon\nu\theta+i\,\eta\mu\theta)^2$, ii) $1-\sigma\upsilon\nu\theta+i\,\eta\mu\theta$.

300. Ἄν ν φυσικός ἀριθμός, νά ἀποδείξετε ὅτι:

(α). $(\sigma\upsilon\nu\theta-i\,\eta\mu\theta)^{\nu}=\sigma\upsilon\nu(\nu\theta)-i\,\eta\mu(\nu\theta)$

(β). $(\sigma\upsilon\nu\theta+i\,\eta\mu\theta)^{-\nu}=\sigma\upsilon\nu(-\nu\theta)+i\,\eta\mu(-\nu\theta)$.

301. Ἄν $z=\sigma\upsilon\nu\theta+i\,\eta\mu\theta$ καί $\nu\in\mathbf{N}$, νά ἀποδείξετε ὅτι:

$$z^{\nu}+z^{-\nu}=2\,\sigma\upsilon\nu\,(\nu\theta)$$

$$z^{\nu}-z^{-\nu}=2\,i\,\eta\mu\,(\nu\theta).$$

302. Νά ἀποδείξετε ὅτι:

α) $(1+i)^{12}=-64$, β) $(1+i)^{-6}=(2i)^{-3}$, γ) $(1+i)^{10}=32\,i$,

δ) $(\sqrt{3}+i)^{150}=-2^{150}$, ε) $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{13}=\frac{\sqrt{3}+i}{2}$, στ) $\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{3k}=1\ \forall\, k\in\mathbf{Z}$.

303. Νά ἀποδείξετε ὅτι:

α) $(1+i)^{\nu}+(1-i)^{\nu}=2^{\frac{\nu+2}{2}}\cdot\sigma\upsilon\nu\,\frac{\nu\pi}{4}$, $\nu\in\mathbf{N}$,

β) $(1+i)^{\nu}-(1-i)^{\nu}=i2^{\frac{\nu+2}{2}}\cdot\eta\mu\,\frac{\nu\pi}{4}$, $\nu\in\mathbf{N}$.

304. Νά ἐπιλυθοῦν οἱ ἑπόμενες ἐξισώσεις:

α) $z^3=1-i\sqrt{3}$, β) $z^6\pm 64=0$, γ) $4z^7+1=0$, δ) $z^3+8i=0$,

ε) $z^{12}+1=0$, στ) $z^4=-8-8\sqrt{3}i$, ζ) $z^5=-\sqrt{3}+i$, η) $3x^5+24x^2=0$.

305. Ἄν ω_1, ω_2 εἶναι οἱ μιγαδικές κυβικές ρίζες τῆς μονάδας, νά ἀποδείξετε ὅτι:

1) $(1+\omega_2)^4=\omega_1$, 2) $(1+\omega_1-\omega_2)^3-(1-\omega_1+\omega_2)^3=0$,

3) $(1+2\omega_1+3\omega_2)(1+3\omega_1+2\omega_2)=3$, 4) $(1-\omega_1+\omega_2)(1+\omega_1-\omega_2)=4$.

306. Ἔστω ὁ μιγαδικός ἀριθμός:

$$z=\sigma\upsilon\nu\,\frac{2\pi}{7}+i\,\eta\mu\frac{2\pi}{7}.$$

Θέτουμε: $A=z+z^2+z^4$ καί $B=z^3+z^5+z^6$.

Νά βρεῖτε τά: $A+B$, AB.

Ὁμάδα Β΄. 307. Νά ἀποδείξετε ὅτι ὁ μιγαδικός ἀριθμός $z=\sigma\upsilon\nu\theta+i\,\eta\mu\theta$ μπορεῖ νά πάρει τή μορφή: $z=\dfrac{1+i\lambda}{1-i\lambda}$, ὅπου λ κατάλληλος πραγματικός ἀριθμός. Νά ὁρίσετε τό λ.

308. Νά βρεῖτε τό μέτρο καί τό ὅρισμα τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν $z=x+iy$, $(x, y\in\mathbf{R})$, πού ἱκανοποιοῦν καθεμία ἀπό τίς παρακάτω ἰσότητες:

i). $|z|^2-2iz+2\alpha(1+i)=0$, **ii)**. $z^2-3|z|+\alpha^2=0$,

ὅπου α θετικός πραγματικός ἀριθμός.

309. Μέ ἐφαρμογή τοῦ τύπου τοῦ De Moivre νά λύσετε τήν ἐξίσωση $z^6+64=0$. Νά σημειώσετε τά ὁρίσματα τῶν 6 ριζῶν. Πῶς παριστάνονται γεωμετρικά οἱ ρίζες αὐτές;

310. Νά ὑπολογίσετε τά λ καί μ, ὥστε ὁ μιγαδικός ἀριθμός: $\sqrt{2}\,(\text{συν}45^\circ + i\,\text{ημ}45^\circ)$ νά εἶναι ρίζα τῆς ἐξισώσεως:

$$x^4 + 2x^3 + 3x^2 + \lambda x + \mu = 0.$$

Ποιές εἶναι οἱ ἄλλες ρίζες;

311. Δίνεται τό πολυώνυμο:

$$\varphi(x) \equiv 6x^4 + (6\lambda - 5)x^3 + (6\mu - 5\lambda + 1)x^2 + (\lambda - 5\mu)x + \mu.$$

Ἄν εἶναι γνωστό ὅτι τό $\varphi(x)$ δέχεται ὡς ρίζα τό μιγαδικό ἀριθμό $1 + i$, νά ὑπολογίσετε τά λ, μ καί νά βρεῖτε τίς ἄλλες ρίζες τοῦ πολυωνύμου $\varphi(x)$.

312. Δίνεται κανονικό πολύγωνο μέ ν πλευρές ἐγγεγραμμένο στό μοναδιαῖο κύκλο. Νά ἀποδείξετε ὅτι τό γινόμενο P τῶν ἀποστάσεων μιᾶς κορυφῆς του ἀπό τίς ὑπόλοιπες $(\nu - 1)$ κορυφές του εἶναι ἴσο μέ ν, δηλαδή: $P = \nu$.

313. Νά βρεῖτε τίς ρίζες τῆς ἐξισώσεως:

$$\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)^{\nu} - 1 = 0$$

314. Νά ἀποδείξετε ὅτι τίς ρίζες τῆς ἐξισώσεως:

$$(1 + z)^{2\nu} + (1 - z)^{2\nu} = 0$$

μᾶς τίς δίνει ὁ τύπος: $z = i\,\text{εφ}\,\dfrac{2k + 1}{4\nu}\,\pi,$

ὅπου $k = 0, 1, 2, \ldots, 2\nu - 1$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ VII

ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ – ΕΚΘΕΤΙΚΕΣ ΚΑΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

I. ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ. ΟΡΙΣΜΟΙ – ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

★§ 146. **Εἰσαγωγικές ἔννοιες.**— Στήν προηγούμενη τάξη μάθαμε γιά τίς δυνάμεις μέ βάση ὁποιοδήποτε θετικό ἀριθμό καί ἐκθέτη ρητό ἀριθμό καί ἀποδείξαμε τίς κυριότερες ἰδιότητές τους.

Ὑπενθυμίζουμε ἐδῶ μέ συντομία τίς ἰδιότητες αὐτές:

Γιά κάθε $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^+$ καί $x, y \in \mathbf{Q}$ ($\mathbf{Q}$: τὸ σύνολο τῶν ρητῶν ἀριθμῶν) ἰσχύουν:

1). $\alpha^x \alpha^y = \alpha^{x+y}$ **2).** $(\alpha \cdot \beta)^x = \alpha^x \cdot \beta^x$

3). $\alpha^x : \alpha^y = \alpha^{x-y}$ **4).** $(\alpha^x)^y = \alpha^{xy}$

5). $\alpha^x = 1 \iff x = 0 \ (\alpha \neq 1)$ **6).** $\alpha^x = \alpha^y \iff x = y \ (\alpha \neq 1)$

7). $\alpha > \beta \Longrightarrow \begin{cases} \alpha^x > \beta^x, & \text{ἄν } x > 0 \\ \alpha^x < \beta^x, & \text{ἄν } x < 0 \end{cases}$, **8).** $x > y \iff \begin{cases} \alpha^x > \alpha^y, & \text{ἄν } \alpha > 1 \\ \alpha^x < \alpha^y, & \text{ἄν } 0 < \alpha < 1. \end{cases}$

Εἰδικά γιά $\alpha = 1$ ἰσχύει: $\alpha = 1 \wedge x \neq y \Longrightarrow \alpha^x = \alpha^y = 1$

Ὥστε: γιά $\alpha > 0$ ἡ δύναμη α^x εἶναι τελείως ὁρισμένη στήν περίπτωση πού ὁ ἐκθέτης x εἶναι ἕνας ὁποιοσδήποτε ρητός ἀριθμός.

Γεννιέται ὅμως τό ἐρώτημα: τί ἐννοοῦμε ὅταν γράφουμε $\alpha^{\sqrt{2}}$, $\alpha \in \mathbf{R}^+$ καί πιό γενικά α^x, στήν περίπτωση πού ὁ ἐκθέτης x εἶναι ἄρρητος ἀριθμός; Δηλαδή πῶς ὁρίζεται γενικά ἡ ἔννοια: «*δύναμη μέ βάση (ὁποιοδήποτε) θετικό ἀριθμό α καί ἐκθέτη (ὁποιοδήποτε) πραγματικό ἀριθμό x*»; Θά ὁρίσουμε ἀκριβῶς τώρα τήν ἔννοια αὐτή.

Ἀποδεικνύεται * στά Μαθηματικά ἡ ἑξῆς πρόταση:

Πρόταση.—Γιά κάθε $\alpha > 0$ καί κάθε ἀκολουθία ρ_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ ρητῶν ἀριθμῶν μέ $\rho_\nu \to x$, $x \in \mathbf{R}$, ἡ ἀκολουθία α^{ρ_ν}, $\nu = 1, 2, \ldots$ συγκλίνει σ' ἕνα θετικό ἀριθμό, ὁ ὁποῖος δέν ἐξαρτᾶται ἀπό τήν ἀκολουθία (ρ_ν)** (ἀρκεῖ μόνο $\rho_\nu \to x$).

Δίνεται τώρα ὁ ἑπόμενος ὁρισμός:

Ὁρισμός. *Ὁ πραγματικός ἀριθμός, ἀκριβέστερα ὁ θετικός ἀριθμός, πού ὁρί-*

* Ἡ ἀπόδειξη θά δοθεῖ στήν ἄλλη τάξη.

** Ὑπάρχει τέτοια ἀκολουθία, γιατί ἀποδεικνύεται ὅτι: $\forall\ \alpha, \beta \in \mathbf{R}$ μέ $\alpha < \beta\ \exists\ \rho \in \mathbf{Q}$: $\alpha < \rho < \beta$.

ζεται μονοσήμαντα, σύμφωνα μέ τήν παραπάνω πρόταση, *καί πού εἶναι ἡ ὁριακή τιμή τῆς ἀκολουθίας* (α^{ρ_ν}), *ὅπου* (ρ_ν) *ὁποιαδήποτε ἀκολουθία ρητῶν ἀριθμῶν μέ* $\rho_\nu \to x$, *ὀνομάζεται:* **δύναμη μέ βάση τό θετικό ἀριθμό α καί ἐκθέτη τόν πραγματικό ἀριθμό x** *καί συμβολίζεται μέ:* $\boldsymbol{\alpha^x}$.

Ὥστε:

$$\boxed{\alpha^x \underset{\text{ορσ}}{=} \lim \alpha^{\rho_\nu}}$$

Εἶναι φανερό πώς ὁ πιό πάνω ὁρισμός περικλείει τό γνωστό σέ μᾶς ἀπό τήν προηγούμενη τάξη ὁρισμό τῆς δυνάμεως μέ ρητό ἐκθέτη. Ἔτσι ἐξάλλου δικαιολογεῖται καί ὁ συμβολισμός τοῦ $\lim \alpha^{\rho_\nu}$ μέ τό α^x, ἐπειδή ἄν $x \in \mathbf{Q}$, τότε μία ἀκολουθία ρητῶν ἀριθμῶν συγκλίνουσα στό x εἶναι ἡ σταθερή ἀκολουθία $r_\nu = x$, γιά κάθε $\nu = 1, 2, \ldots$ Τότε ὅμως ἔχουμε:

$$\alpha^{r_\nu} = \alpha^x \to \alpha^x.$$

Σύμφωνα ὅμως μέ τήν προηγούμενη πρόταση γιά κάθε ἀκολουθία ρ_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ ρητῶν ἀριθμῶν μέ $\rho_\nu \to x$ ἡ ἀκολουθία α^{ρ_ν}, $\nu = 1, 2, \ldots$ συγκλίνει σ' ἕνα θετικό ἀριθμό πού δέν ἐξαρτᾶται ἀπό τήν ἀκολουθία (ρ_ν) καί ἑπομένως πάλι θά ἰσχύει:

$$\alpha^{\rho_\nu} \to \alpha^x.$$

Συνοψίζοντας λοιπόν τά προηγούμενα συμφωνοῦμε ὅτι:

$$\alpha^x = \lim \alpha^{\rho_\nu}$$

ὅπου ρ_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ ἀκολουθία ρητῶν ἀριθμῶν μέ $\rho_\nu \to x$, ἀνεξάρτητα ἄν ὁ x εἶναι ρητός ἤ ἄρρητος ἀριθμός, δηλαδή γιά κάθε $x \in \mathbf{R}$.

Οἱ γνωστές ἰδιότητες τῶν δυνάμεων μέ ρητούς ἐκθέτες, τίς ὁποῖες ἀναφέραμε στήν ἀρχή αὐτῆς τῆς παραγράφου, ἀποδεικνύεται ὅτι ἰσχύουν καί στήν περίπτωση δυνάμεων μέ ἐκθέτες ἄρρητους ἀριθμούς καί συνεπῶς μέ ἐκθέτες (ὁποιουσδήποτε) πραγματικούς ἀριθμούς.

Σημείωση. Ἀπό τόν ὁρισμό τῆς δυνάμεως α^x μέ $\alpha > 0$ καί $x \in \mathbf{R}$ προκύπτει ὅτι ὁρίζεται μία συνάρτηση $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$ μέ τύπο: $\mathbf{f(x) = \alpha^x}$.

Ἡ συνάρτηση αὐτή ὀνομάζεται **ἐκθετική συνάρτηση μέ βάση τό α**.

Εἰδικά τήν ἐκθετική συνάρτηση πού ἔχει βάση τόν ἀριθμό $e \underset{\text{ορσ}}{=} \lim\left(1 + \dfrac{1}{\nu}\right)^{\nu} = 2{,}7182\ldots$, δηλ. τή συνάρτηση f μέ τύπο: $\mathbf{f(x) = e^x}$, τή λέμε ἁπλῶς **ἐκθετική συνάρτηση.**

§ 147. Ἡ ἔννοια τοῦ λογαρίθμου θετικοῦ ἀριθμοῦ.— Εἴδαμε στήν προηγούμενη παράγραφο ὅτι: ἄν $\alpha > 0$, τότε $\alpha^x > 0$ γιά κάθε $x \in \mathbf{R}$. Δηλαδή ἡ δύναμη α^x ἰσοῦται μέ θετικό ἀριθμό, ὅταν $\alpha > 0$, ἀνεξάρτητα ἀπό τό ἄν ὁ ἐκθέτης x εἶναι θετικός, ἀρνητικός ἤ μηδέν. Εἰδικά γιά $\alpha = 1$ οἱ δυνάμεις 1^x εἶναι ἴσες μέ 1 γιά κάθε $x \in \mathbf{R}$.

Οἱ δυνάμεις ὅμως α^x, ὅπου $0 < \alpha \neq 1$ καί $x \in \mathbf{R}$ ὄχι μόνο εἶναι θετικές γιά κάθε $x \in \mathbf{R}$, ἀλλά ὅταν τό x μεταβάλλεται στό διάστημα: $-\infty < x < +\infty$, τότε ἡ συνάρτηση f μέ τύπο $f(x) = \alpha^x$ παίρνει ὡς τιμές ὅλους τούς θετικούς ἀριθμούς. Ἀκριβέστερα, ἀποδεικνύεται στά Μαθηματικά ἡ ἑξῆς πρόταση:

Πρόταση.— Γιά κάθε θετικό πραγματικό ἀριθμό α διάφορο τῆς μονάδας, δηλ. γιά κάθε $\alpha \in \mathbf{R}$ μέ $0 < \alpha \neq 1$, **καί κάθε πραγματικό ἀριθμό $\theta > 0$ ὑπάρχει ἀκριβῶς ἕνας πραγματικός ἀριθμός x** (ρητός ἤ ἄρρητος) **μέ τήν ἰδιότητα:**

$$\alpha^x = \theta \tag{1}$$

Ἀπό τήν παραπάνω πρόταση ὁδηγούμαστε τώρα στό νά δώσουμε τόν ἑξῆς ὁρισμό:

Ὁρισμός. *Τό μοναδικό,* σύμφωνα μέ τήν παραπάνω πρόταση, *πραγματικό ἀριθμό x, γιά τόν ὁποῖο ἰσχύει ἡ σχέση:*

$$\alpha^x = \theta \ , \ \text{ὅπου } \alpha > 0, \ \alpha \neq 1 \text{ καί } \theta > 0$$

τόν ὀνομάζουμε **λογάριθμο τοῦ θ ὡς πρός βάση α** *καί τόν παριστάνουμε μέ* **$\lambda o\gamma_\alpha \theta$.**

Ὥστε:

$$x = \lambda o\gamma_\alpha \theta \tag{2}$$

Εἰδικά γιά $\alpha = 10$ γράφουμε: $\lambda o\gamma\theta$ ἀντί $\lambda o\gamma_{10}\theta$ καί τόν ὀνομάζουμε **δεκαδικό λογάριθμο.**

Ἄμεση συνέπεια τοῦ πιό πάνω ὁρισμοῦ εἶναι ἡ (λογική) ἰσοδυναμία:

$$\boxed{\lambda o\gamma_\alpha \theta = x \iff \alpha^x = \theta} \tag{3}$$

Ἀπό τήν (3) συνάγεται τώρα ὁ ἑξῆς κανόνας:

Ἄν ξέρουμε τό λογάριθμο ἑνός θετικοῦ ἀριθμοῦ θ, τότε ὁ ἀριθμός αὐτός εἶναι ἴσος μέ δύναμη πού ἔχει ὡς βάση τή βάση α τῶν λογαρίθμων καί ἐκθέτη τό λογάριθμο τοῦ ἀριθμοῦ αὐτοῦ.

Ἐπειδή $x = \lambda o\gamma_\alpha \theta$, ἡ σχέση (1) γράφεται: $\boxed{\alpha^{\lambda o\gamma_\alpha \theta} = \theta}$ καί λέγεται **βασική λογαριθμική ταυτότητα.**

Ἔτσι ἔχουμε τίς ἰσοδυναμίες:

$$\boxed{\lambda o\gamma_\alpha \theta = x \iff \alpha^x = \theta \iff \alpha^{\lambda o\gamma_\alpha \theta} = \theta} \quad \begin{matrix} (0 < \alpha \neq 1) \\ (\theta > 0). \end{matrix}$$

Παραδείγματα:

1) $\lambda o\gamma_{10} 100 = 2$, ἐπειδή $10^2 = 100$

2) $\lambda o\gamma_2 8 = 3$, » $2^3 = 8$

3) $\lambda o\gamma_2 \sqrt[3]{2} = \frac{1}{3}$ » $2^{1/3} = \sqrt[3]{2}$

4) $\lambda o\gamma_{1/3} 9 = -2$, » $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 9$

5) $\lambda o\gamma_{10} 0{,}001 = -3$, ἐπειδή $10^{-3} = 0{,}001$

6) $\lambda o\gamma_{1/2} \left(\frac{1}{16}\right) = 4$, » $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$

7) $\lambda o\gamma_{1/\sqrt{2}} 1 = 0$, » $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^0 = 1$

8) $\lambda o\gamma_3 \sqrt{3} = \frac{1}{2}$, » $(3)^{1/2} = \sqrt{3}$.

Γενική παρατήρηση. Παντοῦ, στά ἑπόμενα, θά ὑπολογίζουμε **μόνο** λογαρίθμους θετικῶν ἀριθμῶν. Λογαρίθμους ἀρνητικῶν ἀριθμῶν, ἀκριβέστερα μή θετικῶν ἀριθμῶν οὔτε ὁρίζουμε οὔτε μεταχειριζόμαστε. Ὕστερα ἀπό αὐτά ὁ $\lambda o\gamma_\alpha x$ ἔχει νόημα πραγματικοῦ ἀριθμοῦ, τότε καί μόνο τότε, ἄν:

$$x > 0 \quad \text{καί} \quad 0 < \alpha \neq 1$$

Ἔτσι, π.χ., ὁ $λογ_x(3x-2)$ ἔχει νόημα πραγματικοῦ ἀριθμοῦ, ἄν: $3x-2>0$ καί $0<x\neq 1$. Δηλαδή ἄν: $x\in\left(\frac{2}{3}, 1\right)\cup(1, +\infty)$.

§ 148. Βάση λογαρίθμων – Λογαριθμικά συστήματα.— Ὁ πραγματικός ἀριθμός α, πού εἶναι θετικός καί διάφορος τῆς μονάδας, δηλ. $0<\alpha\neq 1$, λέγεται **βάση** τῶν λογαρίθμων. Ἀπό τόν ὁρισμό τοῦ λογάριθμου θετικοῦ ἀριθμοῦ προκύπτει ὅτι μποροῦμε νά σχηματίσουμε ἄπειρα συστήματα λογαρίθμων, ἀφοῦ ὡς βάση μποροῦμε νά λάβουμε τόν ὁποιοδήποτε θετικό πραγματικό ἀριθμό πού εἶναι διάφορος τῆς μονάδας. Στά Μαθηματικά κυρίως χρησιμοποιοῦμε τά ἑξῆς δύο λογαριθμικά συστήματα:

1ο: Τό δεκαδικό λογαριθμικό σύστημα. Σ' αὐτό παίρνουμε ὡς βάση α τόν ἀριθμό 10. Ὁ λογάριθμος ἑνός (θετικοῦ) ἀριθμοῦ θ στό σύστημα αὐτό ὀνομάζεται, ὅπως εἴπαμε καί πιό πάνω, **δεκαδικός λογάριθμος** καί συμβολίζεται ἁπλῶς μέ: λογθ ἀντί $λογ_{10}θ$. Ἔτσι ἔχουμε: $\mathbf{λογθ = x \iff 10^x = θ}$.

Οἱ δεκαδικοί λογάριθμοι λέγονται καί *«κοινοί λογάριθμοι»* καί χρησιμοποιοῦνται εὐρύτατα στά στοιχειώδη μαθηματικά γιά πρακτικούς κυρίως σκοπούς.

2ο: Τό Νεπέρειο λογαριθμικό σύστημα. Σ' αὐτό τό σύστημα παίρνουμε ὡς βάση τόν ἀριθμό $e = 2{,}7182\ldots$, ὁ ὁποῖος ὁρίζεται ὡς τό ὅριο τῆς ἀκολουθίας $\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots$ Ἡ ἀκολουθία αὐτή ἀποδεικνύεται ὅτι εἶναι αὔξουσα (βλ. ἄσκ. 93) καί ἄνω φραγμένη, ἑπομένως (§ 66) συγκλίνει στό **R**. Ὀνομάζουμε $e = \lim\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu}$. Ὁ ἀριθμός e παίζει σπουδαῖο ρόλο στήν Ἀνάλυση καί γενικά στά Μαθηματικά, ἀνήκει στό διάστημα: (2, 3), δηλ. $2<e<3$, δέν εἶναι λοιπόν ὁ ἀριθμός e ἀκέραιος, δέν εἶναι ὅμως οὔτε καί ρητός, ἀκόμη οὔτε ἀλγεβρικός (§ 112)· εἶναι ἕνας ὑπερβατικός ἀριθμός (§ 112). Μία προσέγγιση τοῦ e μέ 20 δεκαδικά ψηφία εἶναι: $e \simeq 2{,}71828182845904523536$. Ὁ λογάριθμος ἑνός ἀριθμοῦ θ στό σύστημα αὐτό λέγεται **νεπέρειος λογάριθμος*** τοῦ θ καί συμβολίζεται μέ $\log θ$ ἤ $\ln θ$ (ἀντί: $λογ_e θ$). Ἔτσι ἔχουμε:

$$\log θ = x \iff e^x = θ. \quad (\ln θ = x \iff e^x = θ).$$

Οἱ νεπέρειοι λογάριθμοι λέγονται καί *«φυσικοί λογάριθμοι»* καί συναντῶνται κυρίως στά Ἀνώτερα Μαθηματικά.

*** Ἀξιοσημείωτες παρατηρήσεις. 1)** Ἀπό τόν ὁρισμό τοῦ $λογ_α x$ πού ὁρίζεται γιά κάθε $x>0$ προκύπτει ὅτι γιά κάθε $0<\alpha\neq 1$ ὁρίζεται μία συνάρτηση f: $\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ μέ τύπο: $f(x) = λογ_α(x) \equiv λογ_α x$. Δηλαδή ὁρίζεται ἡ συνάρτηση:

$$f:\ \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}:\ x \to f(x) = λογ_α x \qquad (0<\alpha\neq 1)$$

---

* Πρός τιμή τοῦ Ἄγγλου Μαθηματικοῦ John Napier (1550 - 1617) πρώτου ἐπινοητῆ τῶν λογαρίθμων. Πρῶτος ὁ Napier ἔλαβε ὡς βάση τόν ἀριθμό $e = 2{,}7182\ldots$ Ὁ συμβολισμός «ln» προέρχεται ἀπό τό ἀρχικό γράμμα (l) τῆς λέξεως: logarithm καί τό μικρό γράμμα (n) τοῦ ἀρχικοῦ τῆς λέξεως Napier.

Αὐτή ἡ συνάρτηση ὀνομάζεται **λογαριθμική συνάρτηση μέ βάση α.**

Ἀπό τόν ὁρισμό αὐτῆς τῆς συναρτήσεως προκύπτει ἀμέσως ὅτι:

$$y = \lambda o\gamma_\alpha x \iff \alpha^y = x \qquad (x \in \mathbf{R}^+)$$

καί συνεπῶς:

$$y = \log x \iff e^y = x \qquad (x \in \mathbf{R}^+)$$

2) Σύμφωνα μέ τή βασική λογαριθμική ταυτότητα ἰσχύει:

$$\alpha^{\lambda o\gamma_\alpha x} = x \qquad \forall\ \alpha \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$$

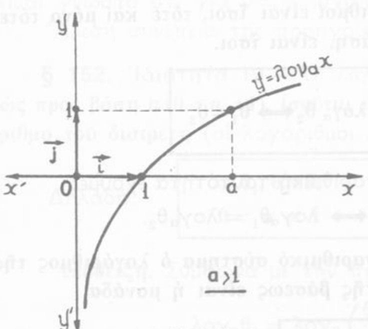
καί εἰδικά γιά $\alpha = e$ ἰσχύει:

$$e^{\log x} = x$$

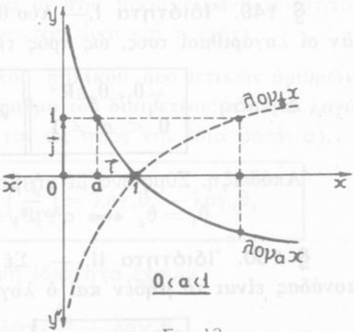
ὁπότε συνάγουμε ὅτι: $\alpha^x = (e^{\log \alpha})^x = e^{x \log \alpha}$, δηλαδή $\boxed{\alpha^x = e^{x \log \alpha}}$

3) Ἡ λογαριθμική συνάρτηση, πού ὅπως εἴδαμε πιό πάνω ἔχει πεδίο ὁρισμοῦ τό $(0, +\infty)$ καί πεδίο τιμῶν τό $\mathbf{R}$, εἶναι, ὅπως θά μάθουμε στήν ἄλλη τάξη, *«ἡ ἀντίστροφη συνάρτηση τῆς ἐκθετικῆς συναρτήσεως $x = \alpha^y$»* (βλ. σημείωση § 146).

Σ' ἕνα ὀρθοκανονικό σύστημα ἀξόνων ἡ γραφική παράσταση τῆς λογαριθμικῆς συναρτήσεως: $y = \lambda o\gamma_\alpha x$ δίνεται, μέ πρόχειρη σχεδίαση, ἀπό τά ἀμέσως ἑπόμενα σχήματα:



Σχ. 12



Σχ. 13

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάδα Α΄. 315. Νά προσδιορίσετε τόν x ἀπό τίς παρακάτω ἰσότητες:

1) $\lambda o\gamma_4 x = 3$, 2) $\lambda o\gamma\, x = -3$, 3) $\lambda o\gamma_2\left(\frac{1}{2}\right) = x$, 4) $\lambda o\gamma_{\sqrt{3}}(9\sqrt{3}) = x$,

5) $\lambda o\gamma_{4/9}\frac{27}{8} = x$, 6) $\lambda o\gamma_8 x = -\frac{7}{3}$, 7) $\lambda o\gamma_{2\alpha}\sqrt{2\alpha} = x$, 8) $\lambda o\gamma_2\left(\frac{1}{\sqrt{32}}\right) = x$.

316. Νά βρεῖτε τήν ἄγνωστη βάση $x \in \mathbf{R}^+$, $x \neq 1$, ἀπό τίς παρακάτω ἰσότητες:

1) $\lambda o\gamma_x 25 = 2$, 2) $\lambda o\gamma_x 16 = \frac{2}{3}$, 3) $\lambda o\gamma_x 5 = \frac{1}{3}$, 4) $\lambda o\gamma_x\left(\frac{81}{16}\right) = 4$.

317. Νά ὑπολογίσετε τούς λογαρίθμους τῶν ἀριθμῶν:

$81,\quad 64,\quad \frac{1}{32},\quad \sqrt{2},\quad \frac{1}{125},\quad 27,\quad 4\sqrt{2},\quad 1000$

μέ βάση ἀντιστοίχως τούς ἀριθμούς:

$3,\quad \frac{1}{2},\quad 2,\quad 4,\quad 5,\quad 3,\quad 2,\quad 0{,}01.$

318. Γιά ποιές τιμές τοῦ $x \in \mathbf{R}$ ἔχει νόημα πραγματικοῦ ἀριθμοῦ καθεμιά ἀπό τίς ἑπόμενες ἐκφράσεις:

1) $\lambda o\gamma(1-|x|)$, 2) $\lambda o\gamma_x(3-2x)$, 3) $\lambda o\gamma_{2x}(x^2-x+1)$.

★ **Ὁμάδα Β΄. 319.** Ἄν $\alpha \in \mathbf{R}^+$, $\alpha \neq 1$ καί ὀνομάσουμε: $x = \lambda o\gamma_{\sqrt{\alpha}}\alpha$, $y = \lambda o\gamma_\alpha \alpha^2$, $z = \lambda o\gamma_{\alpha^2}\alpha^4$, νά ἀποδείξετε ὅτι ἰσχύει: $xyz = x+y+z+2$.

320. Νά ἀποδείξετε ὅτι: γιά κάθε $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^+$ καί $x, y \in \mathbf{R}$ ἰσχύει:

1) $\alpha^x \cdot \alpha^y = \alpha^{x+y}$, **2)** $\alpha^x : \alpha^y = \alpha^{x-y}$, **3)** $(\alpha \cdot \beta)^x = \alpha^x \cdot \beta^x$

Ὑπόδειξη. Ἔστω ὅτι εἶναι (ρ_ν), (r_ν) δύο ὁποιεσδήποτε ἀκολουθίες μέ ρητούς ὅρους τέτοιες, ὥστε: $\rho_\nu \to x$, $r_\nu \to y$. Τότε, σύμφωνα μέ τήν πρόταση τῆς § 146, θά ἔχουμε: $\alpha^{\rho_\nu} \to \alpha^x$ καί $\alpha^{r_\nu} \to \alpha^y$, ὁπότε κτλ.

321. Ἄν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}^+ - \{1\}$ καί ὀνομάσουμε: $x = \lambda o\gamma_\alpha(\beta\gamma)$, $y = \lambda o\gamma_\beta(\gamma\alpha)$, $z = \lambda o\gamma_\gamma(\alpha\beta)$, νά ἀποδείξετε ὅτι: $x+y+z+2 = xyz$ καί $\alpha^{x-2}\cdot\beta^{y-2}\cdot\gamma^{z-2} = 1$.

322. Νά ἀποδείξετε ὅτι ὁ $\lambda o\gamma 3$ εἶναι ἄρρητος (= ἀσύμμετρος) ἀριθμός.

ΒΑΣΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΛΟΓΑΡΙΘΜΩΝ *

§ 149. Ἰδιότητα Ι.— Δύο θετικοί ἀριθμοί εἶναι ἴσοι, τότε καί μόνο τότε, ἄν οἱ λογάριθμοί τους, ὡς πρός τήν ἴδια βάση, εἶναι ἴσοι.

Δηλαδή:

$\forall \theta_1, \theta_2 \in \mathbf{R}^+$ $0 < \alpha \neq 1$	$\lambda o\gamma_\alpha \theta_1 = \lambda o\gamma_\alpha \theta_2 \Longleftrightarrow \theta_1 = \theta_2$

Ἀπόδειξη. Σύμφωνα μέ τή βασική λογαριθμική ταυτότητα ἔχουμε:

$$\theta_1 = \theta_2 \Longleftrightarrow \alpha^{\lambda o\gamma_\alpha \theta_1} = \alpha^{\lambda o\gamma_\alpha \theta_2} \Longleftrightarrow \lambda o\gamma_\alpha \theta_1 = \lambda o\gamma_\alpha \theta_2.$$

§ 150. Ἰδιότητα ΙΙ. — Σέ κάθε λογαριθμικό σύστημα ὁ λογάριθμος τῆς μονάδας εἶναι τό μηδέν καί ὁ λογάριθμος τῆς βάσεως εἶναι ἡ μονάδα.

Δηλαδή: $\boxed{\lambda o\gamma_\alpha 1 = 0}$ καί $\boxed{\lambda o\gamma_\alpha \alpha = 1}$ $\forall\ \alpha \in \mathbf{R}^+ - \{1\}$.

Ἀπόδειξη. Ὅπως εἴδαμε παραπάνω (§ 147) ἰσχύει: $\lambda o\gamma_\alpha \theta = x \Longleftrightarrow \alpha^x = \theta$,

$$\left.\begin{array}{ll} \text{ὁπότε:} & \lambda o\gamma_\alpha 1 = x \Longleftrightarrow \alpha^x = 1 \Longleftrightarrow x = 0 \\ \text{καί} & \lambda o\gamma_\alpha \alpha = y \Longleftrightarrow \alpha^y = \alpha \Longleftrightarrow y = 1 \end{array}\right\} \ \forall\ \alpha \in (0, 1) \cup (1, +\infty).$$

§ 151. Ἰδιότητα ΙΙΙ. — Ὁ λογάριθμος τοῦ γινομένου δύο θετικῶν ἀριθμῶν, ὡς πρός βάση α ($0 < \alpha \neq 1$), ἰσοῦται μέ τό ἄθροισμα τῶν λογαρίθμων αὐτῶν τῶν ἀριθμῶν (οἱ λογάριθμοι λαμβάνονται ὡς πρός τήν ἴδια βάση α).

Δηλαδή:

$\forall\ \theta_1, \theta_2 \in \mathbf{R}^+$ $0 < \alpha \neq 1$	$\lambda o\gamma_\alpha(\theta_1 \cdot \theta_2) = \lambda o\gamma_\alpha \theta_1 + \lambda o\gamma_\alpha \theta_2$

Ἀπόδειξη. Ἄς ὀνομάσουμε $x = \lambda o\gamma_\alpha \theta_1$ καί $y = \lambda o\gamma_\alpha \theta_2$. Τότε $\alpha^x = \theta_1$ καί $\alpha^y = \theta_2$,

* ἀκριβέστερα ἰδιότητες τῆς λογαριθμικῆς συναρτήσεως $\lambda o\gamma_\alpha$ $(0 < \alpha \neq 1)$.

ὁπότε: $\alpha^{x+y} = \alpha^x \cdot \alpha^y = \theta_1 \cdot \theta_2 \Longleftrightarrow \lambda o\gamma_\alpha(\theta_1 \cdot \theta_2) = x + y = \lambda o\gamma_\alpha \theta_1 + \lambda o\gamma_\alpha \theta_2$.

Σημείωση. Ἡ παραπάνω ἰδιότητα ἀποδεικνύεται καί ὡς ἑξῆς:

$$\alpha^{\lambda o\gamma_\alpha(\theta_1\theta_2)} = \theta_1 \cdot \theta_2 = \alpha^{\lambda o\gamma_\alpha \theta_1} \cdot \alpha^{\lambda o\gamma_\alpha \theta_2} = \alpha^{\lambda o\gamma_\alpha \theta_1 + \lambda o\gamma_\alpha \theta_2} \Longrightarrow \lambda o\gamma_\alpha(\theta_1 \cdot \theta_2) = \lambda o\gamma_\alpha \theta_1 + \lambda o\gamma_\alpha \theta_2.$$

Παρατήρηση. Ἄν x, y εἶναι **ὁμόσημοι** πραγματικοί ἀριθμοί, τότε ἰσχύει:

$$\lambda o\gamma_\alpha(xy) = \lambda o\gamma_\alpha |x| + \lambda o\gamma_\alpha |y| \qquad \forall\ \alpha \in (0, 1) \cup (1, +\infty).$$

Πράγματι, τότε ἔχουμε: $xy > 0 \Longrightarrow xy = |xy| = |x| \cdot |y|$. Ἄρα . . .

Πόρισμα.—Ἄν $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_\nu$ ($\nu \geqq 2$) εἶναι θετικοί ἀριθμοί, τότε ἰσχύει:

$$\boxed{\lambda o\gamma_\alpha(\theta_1 \cdot \theta_2 \cdots \theta_\nu) = \lambda o\gamma_\alpha \theta_1 + \lambda o\gamma_\alpha \theta_2 + \cdots + \lambda o\gamma_\alpha \theta_\nu}$$

Γιά συντομία γράφουμε:

$$\boxed{\lambda o\gamma_\alpha \left(\prod_{k=1}^{\nu} \theta_k\right) = \sum_{k=1}^{\nu} \lambda o\gamma_\alpha \theta_k}$$

Ἡ ἀπόδειξη γίνεται εὔκολα μέ τή μέθοδο τῆς τέλειας ἐπαγωγῆς, ἀφοῦ εἶναι γνωστό ὅτι γιά $\nu = 2$ ἰσχύει, σύμφωνα μέ τήν προηγούμενη ἰδιότητα. Ἄμεση συνέπεια τῆς προηγούμενης ἰδιότητας εἶναι καί ἡ ἑξῆς:

§ 152. Ἰδιότητα IV.—Ὁ λογάριθμος τοῦ πηλίκου δύο θετικῶν ἀριθμῶν, ὡς πρός βάση α ($0 < \alpha \neq 1$), ἰσοῦται μέ τό λογάριθμο τοῦ διαιρετέου μεῖον τό λογάριθμο τοῦ διαιρέτη (οἱ λογάριθμοι λαμβάνονται ὡς πρός τήν ἴδια βάση α).

Δηλαδή:	$\forall\ \theta_1, \theta_2 \in R^+$ $0 < \alpha \neq 1$	$\lambda o\gamma_\alpha \left(\dfrac{\theta_1}{\theta_2}\right) = \lambda o\gamma_\alpha \theta_1 - \lambda o\gamma_\alpha \theta_2$

Ἀπόδειξη. Σύμφωνα μέ τήν προηγούμενη ἰδιότητα ἔχουμε:

$$\lambda o\gamma_\alpha \theta_1 = \lambda o\gamma_\alpha \left(\frac{\theta_1}{\theta_2} \cdot \theta_2\right) = \lambda o\gamma_\alpha \frac{\theta_1}{\theta_2} + \lambda o\gamma_\alpha \theta_2$$

καί συνεπῶς:

$$\lambda o\gamma_\alpha \frac{\theta_1}{\theta_2} = \lambda o\gamma_\alpha \theta_1 - \lambda o\gamma_\alpha \theta_2.$$

Παρατήρηση. Ἄν x, y εἶναι **ὁμόσημοι** πραγματικοί ἀριθμοί, τότε ἰσχύει:

$$\lambda o\gamma_\alpha \frac{x}{y} = \lambda o\gamma_\alpha |x| - \lambda o\gamma_\alpha |y| \qquad \text{(γιατί;)}$$

γιατί $\frac{x}{y} > 0 \Rightarrow \frac{|x|}{|y|} = \frac{|x|}{|y|}$
$\Rightarrow \lambda o\gamma_\alpha \frac{x}{y} = \lambda o\gamma_\alpha \frac{|x|}{|y|}$
$= \lambda o\gamma_\alpha |x| - \lambda o\gamma |y|$
αφού $|x|, |y| >$

Πόρισμα.—Οἱ ἀντίστροφοι θετικοί ἀριθμοί ἔχουν ἀντίθετους λογαρίθμους.

Πράγματι· ἀπό τίς ἰδιότητες IV καί II ἔχουμε:

$$\lambda o\gamma_\alpha \left(\frac{1}{\theta}\right) = \lambda o\gamma_\alpha 1 - \lambda o\gamma_\alpha \theta = 0 - \lambda o\gamma_\alpha \theta = -\lambda o\gamma_\alpha \theta.$$

Ἀξιόλογη παρατήρηση. Πρέπει νά ἔχουμε πάντοτε ὑπόψη μας ὅτι:

$$\lambda o\gamma_\alpha(\theta_1 + \theta_2) \neq \lambda o\gamma_\alpha \theta_1 + \lambda o\gamma_\alpha \theta_2$$

$$\lambda o\gamma_\alpha(\theta_1-\theta_2)\neq\lambda o\gamma_\alpha\theta_1-\lambda o\gamma_\alpha\theta_2$$
$$\lambda o\gamma_\alpha\theta_1\cdot\lambda o\gamma_\alpha\theta_2\neq\lambda o\gamma_\alpha(\theta_1\cdot\theta_2)=\lambda o\gamma_\alpha\theta_1+\lambda o\gamma_\alpha\theta_2$$
$$\lambda o\gamma_\alpha\theta_1:\lambda o\gamma_\alpha\theta_2\neq\lambda o\gamma_\alpha\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)=\lambda o\gamma_\alpha\theta_1-\lambda o\gamma_\alpha\theta_2.$$

§ 153. Ἰδιότητα V.—Ὁ λογάριθμος ὁποιασδήποτε δυνάμεως ἑνός θετικοῦ ἀριθμοῦ ὡς πρός βάση α $(0<\alpha\neq 1)$ ἰσοῦται μέ τό γινόμενο τοῦ ἐκθέτη τῆς δυνάμεως ἐπί τό λογάριθμο τῆς βάσεως τῆς δυνάμεως (οἱ λογάριθμοι λαμβάνονται ὡς πρός τήν ἴδια βάση α).

Δηλαδή:

$\forall\ \theta\in\mathbf{R}^+,\ \beta\in\mathbf{R}$ $0<\alpha\neq 1$	$\lambda o\gamma_\alpha\theta^\beta=\beta\cdot\lambda o\gamma_\alpha\theta$

Ἀπόδειξη. Ἄς ὀνομάσουμε $x=\lambda o\gamma_\alpha\theta^\beta$ $(\beta\in\mathbf{R})$ καί $y=\lambda o\gamma_\alpha\theta$. Τότε ἔχουμε: $\alpha^x=\theta^\beta$ (1) καί $\alpha^y=\theta$ (2). Ἡ (1), μέ βάση τή (2), γράφεται: $\alpha^x=(\alpha^y)^\beta$ καί ἐπειδή, ὅπως εἴπαμε στήν ἀρχή αὐτοῦ τοῦ κεφαλαίου, οἱ ἰδιότητες τῶν δυνάμεων μέ πραγματικούς ἐκθέτες εἶναι ἀνάλογες τῶν ἀντίστοιχων ἰδιοτήτων μέ ἐκθέτες ρητούς ἀριθμούς, θά ἔχουμε: $\alpha^x=\alpha^{\beta y}$. Ἡ τελευταία ἰσότητα, ἐπειδή $0<\alpha\neq 1$, ἰσοδυναμεῖ μέ τήν: $x=\beta y$, δηλαδή:

$$\lambda o\gamma_\alpha\theta^\beta=\beta\cdot\lambda o\gamma_\alpha\theta\quad\forall\quad\beta\in\mathbf{R}.$$

Σημείωση. Ἡ παραπάνω ἰδιότητα ἀποδεικνύεται πιό σύντομα ὡς ἑξῆς:

$$\alpha^{\lambda o\gamma_\alpha\theta^\beta}=\theta^\beta=\left[\alpha^{\lambda o\gamma_\alpha\theta}\right]^\beta=\alpha^{\beta\cdot\lambda o\gamma_\alpha\theta}\Longrightarrow\lambda o\gamma_\alpha\theta^\beta=\beta\cdot\lambda o\gamma_\alpha\theta,\qquad(0<\alpha\neq 1)$$

Παρατήρηση. Ἄν x εἶναι ἕνας ὁποιοσδήποτε πραγματικός ἀριθμός $(x\neq 0)$ καί k ὁποιοσδήποτε ἀκέραιος ἀριθμός, τότε ἰσχύει:

$$\lambda o\gamma_\alpha x^{2k}=2k\cdot\lambda o\gamma_\alpha|x|\qquad(\text{γιατί;})$$

Προσέξτε! θά εἶναι **σφάλμα** νά γράψουμε: $\lambda o\gamma_\alpha x^{2k}=2k\cdot\lambda o\gamma_\alpha x$, πρῶτα γιατί γιά $x<0$ ὁ λογάριθμος τοῦ β΄ μέρους αὐτῆς τῆς ἰσότητας δέν ὁρίζεται καί ἔπειτα γιατί κατά τή λύση *«λογαριθμικῶν»* ἐξισώσεων, γιά τίς ὁποῖες κάνουμε λόγο παρακάτω, βρίσκουμε ἐλλιπεῖς λύσεις, ὅπως φαίνεται καί ἀπό τό ἑπόμενο παράδειγμα:

Νά βρεῖτε τά $x\in\mathbf{R}-\{0\}$ ὥστε: $\lambda o\gamma x^2=2$ (1)

Λύση. Ἡ (1) εἶναι ἰσοδύναμη μέ: $2\cdot\lambda o\gamma|x|=2\Longleftrightarrow\lambda o\gamma|x|=1\Longleftrightarrow|x|=10\Longleftrightarrow x=\pm 10$.
Ἄν ὅμως γράψουμε (ἐσφαλμένα βέβαια) τήν (1) ὡς: $2\lambda o\gamma x=2\Longleftrightarrow\lambda o\gamma x=1\Longleftrightarrow x=10$, τότε χάνουμε τή ρίζα $x=-10$.

Εἰδικές περιπτώσεις τῆς ἰδιότητας V εἶναι τά ἑπόμενα πορίσματα:

Πόρισμα 1ο.— Ὁ λογάριθμος ὁποιασδήποτε ρίζας μέ θετικό ὑπόρριζο βρίσκεται ἄν διαιρέσουμε τό λογάριθμο τοῦ ὑπορρίζου μέ τό δείκτη τῆς ρίζας (οἱ λογάριθμοι λαμβάνονται ὡς πρός τήν ἴδια βάση α, $0<\alpha\neq 1$).

Δηλαδή:

$\forall\ \theta\in\mathbf{R}^+,\ \nu\in\mathbf{N}$ $0<\alpha\neq 1$	$\lambda o\gamma_\alpha\sqrt[\nu]{\theta}=\frac{1}{\nu}\cdot\lambda o\gamma_\alpha\theta$

Ἡ ἀπόδειξη εἶναι ἄμεση συνέπεια τῆς προηγούμενης ἰδιότητας, ἀρκεῖ νά παρατηρήσουμε ότι: $\lambda o\gamma_\alpha \sqrt[\nu]{\theta} = \lambda o\gamma_\alpha \theta^{\frac{1}{\nu}} = \frac{1}{\nu}\cdot\lambda o\gamma_\alpha\theta \left(\text{δηλαδή: } \beta=\frac{1}{\nu}, \nu\in\mathbf{N}\right)$

Πόρισμα 2ο.—Γιά κάθε $\alpha\in\mathbf{R}^+ - \{1\}$ καί $x\in\mathbf{R}$ ἰσχύει : $\lambda o\gamma_\alpha \alpha^x = x$.

Πράγματι, ἔχουμε: $\lambda o\gamma_\alpha \alpha^x = x\cdot\lambda o\gamma_\alpha\alpha = x\cdot 1 = x$.

Ἄμεση συνέπεια τῆς προηγούμενης ἰδιότητας εἶναι καί ἡ ἑξῆς:

§ 154. Ἰδιότητα VI. *(ἀλλαγή βάσεως λογαρίθμων).*—**Ἄν οἱ ἀριθμοί α, β, θ εἶναι θετικοί καί οἱ α καί β εἶναι διάφοροι τοῦ 1, τότε ἰσχύει:**

$$\boxed{\lambda o\gamma_\beta\theta = \frac{\lambda o\gamma_\alpha\theta}{\lambda o\gamma_\alpha\beta}} \quad \textit{(τύπος ἀλλαγῆς βάσεως)} \tag{τ}$$

Ἀπόδειξη. Ἀπό τή βασική λογαριθμική ταυτότητα ἔχουμε: $\beta^{\lambda o\gamma_\beta\theta} = \theta$ (1)

Ἄν τώρα πάρουμε τούς λογαρίθμους ὡς πρός βάση α καί τῶν δύο μελῶν τῆς (1), σύμφωνα μέ τήν ἰδιότητα I, θά ἔχουμε: $\lambda o\gamma_\alpha(\beta^{\lambda o\gamma_\beta\theta}) = \lambda o\gamma_\alpha\theta$ καί ἄν λάβουμε ὑπόψη καί τήν προηγούμενη ἰδιότητα βρίσκουμε:

$\lambda o\gamma_\beta\theta\cdot\lambda o\gamma_\alpha\beta = \lambda o\gamma_\alpha\theta$, ὁπότε: $\lambda o\gamma_\beta\theta = \frac{\lambda o\gamma_\alpha\theta}{\lambda o\gamma_\alpha\beta}$ (ἀφοῦ $\lambda o\gamma_\alpha\beta \neq 0$).

Εἰδικές περιπτώσεις τῆς παραπάνω ἰδιότητας εἶναι τά πορίσματα:

Πόρισμα 1ο.—Γιά κάθε $\alpha, \beta\in\mathbf{R}^+ - \{1\}$ ἰσχύει : $\boxed{\lambda o\gamma_\alpha\beta\times\lambda o\gamma_\beta\alpha = 1}$

Πράγματι, ἀπό τόν τύπο ἀλλαγῆς βάσεως γιά $\theta = \alpha$ βρίσκουμε:

$\boxed{\lambda o\gamma_\beta\alpha = \frac{\lambda o\gamma_\alpha\alpha}{\lambda o\gamma_\alpha\beta} = \frac{1}{\lambda o\gamma_\alpha\beta}}$ (1) καί συνεπῶς : $\lambda o\gamma_\alpha\beta\cdot\lambda o\gamma_\beta\alpha = 1$.

***Παρατήρηση.** Ἔχοντας ὑπόψη τή σχέση (1) τοῦ παραπάνω πορίσματος, ὁ τύπος (τ) γράφεται:

$$\boxed{\lambda o\gamma_\beta\theta = \lambda o\gamma_\beta\alpha\cdot\lambda o\gamma_\alpha\theta} \tag{τ΄}$$

Ὁ ἀριθμός $M = \lambda o\gamma_\beta\alpha$ ἐπί τόν ὁποῖο ἄν πολλαπλασιαστεῖ ὁ $\lambda o\gamma_\alpha\theta$ μᾶς δίνει τό λογάριθμο τοῦ ἀριθμοῦ θ ὡς πρός τή «νέα» βάση β ὀνομάζεται: **σταθερά τῆς ἀλλαγῆς βάσεως ἤ πολλαπλασιαστής** τοῦ συστήματος βάσεως α ὡς πρός τό σύστημα βάσεως β.

Ὁ τύπος (τ΄) γιά $\beta = 10$ καί $\alpha = e$ (e: βάση τῶν νεπέρειων λογαρίθμων) γράφεται:

$\lambda o\gamma_{10}\theta = \lambda o\gamma_{10}e\cdot\lambda o\gamma_e\theta$, ἤ ἀκριβέστερα: $\boxed{\lambda o\gamma\theta = \lambda o\gamma e\cdot\log\theta}$ (1)

Ἡ τελευταία ἰσότητα μᾶς δίνει τή **σχέση μεταξύ δεκαδικῶν καί νεπέρειων λογαρίθμων.** Ἔτσι ἔχουμε, σύμφωνα καί μέ τό προηγούμενο πόρισμα:

$$\lambda o\gamma\theta = \frac{1}{\log 10}\cdot\log\theta \quad \text{καί} \quad \log\theta = \frac{1}{\lambda o\gamma e}\cdot\lambda o\gamma\theta \tag{2}$$

Ἡ σταθερά τῆς ἀλλαγῆς βάσεως εἶναι: $M = \lambda o\gamma e = \lambda o\gamma 2{,}7182\cdots = 0{,}43429\cdots$, ὁπότε ἀπό τή δεύτερη ἰσότητα τῆς (2) ἔχουμε:

$$\log\theta = \frac{1}{M}\cdot\lambda o\gamma\theta \simeq \frac{1}{0{,}43429}\cdot\lambda o\gamma\theta \simeq 2{,}30258\cdot\lambda o\gamma\theta$$

Ὥστε: γιά κάθε $\theta > 0$ ἰσχύει:

$\boxed{\mathbf{log}\theta \simeq 2{,}30258 \cdot \lambda o\gamma\theta}$ καί $\boxed{\lambda o\gamma\theta \simeq 0{,}43429 \cdot \mathbf{log}\theta}$

Ἀπό τόν πρῶτο τύπο βρίσκουμε τό νεπέρειο λογάριθμο ἑνός ἀριθμοῦ $\theta > 0$, ἄν ξέρουμε τό δεκαδικό του λογάριθμο καί ἀπό τό δεύτερο τύπο βρίσκουμε τό δεκαδικό λογάριθμο ἑνός ἀριθμοῦ, ἄν ξέρουμε τό νεπέρειο λογάριθμο αὐτοῦ τοῦ ἀριθμοῦ.

Ἐφαρμογή: Ἄν $\lambda o\gamma 3 = 0{,}47712$, τότε $\log 3 \simeq 2{,}30258 \cdot 0{,}47712 = 1{,}09861$.

Πόρισμα. 2ο.— Γιά κάθε $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^+$, $\alpha \neq 1$ καί $\rho \in \mathbf{R}-\{0\}$ ἰσχύει:

$$\boxed{\lambda o\gamma_{\alpha^\rho}\beta = \frac{1}{\rho}\lambda o\gamma_\alpha\beta}$$

Πράγματι, ἀπό τόν τύπο ἀλλαγῆς βάσεως γιά $\theta = \beta$ καί $\beta = \alpha^\rho$ ἔχουμε:

$$\lambda o\gamma_{\alpha^\rho}\beta = \frac{\lambda o\gamma_\alpha\beta}{\lambda o\gamma_\alpha\alpha^\rho} = \frac{\lambda o\gamma_\alpha\beta}{\rho \cdot \lambda o\gamma_\alpha\alpha} = \frac{1}{\rho}\cdot\lambda o\gamma_\alpha\beta.$$

Σημείωση. Γιά $\rho = -1$ ἔχουμε: $\lambda o\gamma_{1/\alpha}\beta = -\lambda o\gamma_\alpha\beta$, δηλαδή: $\lambda o\gamma_{\alpha^{-1}} = -\lambda o\gamma_\alpha$ (βλ. καί Σχ. 13).

Ἐφαρμογή. Νά ἀποδείξετε ὅτι: ἄν $\alpha, x \in \mathbf{R}^+$ καί $\alpha \neq 1$, τότε ἰσχύει:

$$\lambda o\gamma_\alpha x \cdot \lambda o\gamma_{\alpha^2} x = \frac{1}{2}(\lambda o\gamma_\alpha x)^2$$

Ἀπόδειξη. Σύμφωνα μέ τό παραπάνω πόρισμα ἔχουμε:

$$\lambda o\gamma_\alpha x \cdot \lambda o\gamma_{\alpha^2} x = \lambda o\gamma_\alpha x \cdot \frac{1}{2}\lambda o\gamma_\alpha x = \frac{1}{2}(\lambda o\gamma_\alpha x)^2.$$

Θά συμπληρώσουμε τά συμπεράσματα τῶν προηγούμενων παραγράφων μέ μερικές ἀκόμη ἀξιοσημείωτες καί χρήσιμες ἰδιότητες πού ἔχουν οἱ λογάριθμοι.

Ἄς θεωρήσουμε τήν ἀνισότητα: $\lambda o\gamma_\alpha\theta_1 > \lambda o\gamma_\alpha\theta_2$, ὅπου θ_1, θ_2 ἀριθμοί θετικοί καί $\alpha \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$. Ἄς ὀνομάσουμε $x = \lambda o\gamma_\alpha\theta_1$ καί $y = \lambda o\gamma_\alpha\theta_2$. Τότε $\alpha^x = \theta_1$ καί $\alpha^y = \theta_2$. Συγκρίνοντας τώρα τίς δυνάμεις α^x καί α^y καί ἔχοντας ὑπόψη τήν ἰδιότητα 8 τῆς § 146, ἡ ὁποία ἰσχύει καί γιά $x, y \in \mathbf{R}$, παρατηροῦμε ὅτι: γιά $\alpha > 1$ εἶναι $\alpha^x > \alpha^y$ (ἐπειδή $x > y$) καί γιά $0 < \alpha < 1$ εἶναι $\alpha^x < \alpha^y$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ὅτι ἡ ἀνισότητα $\lambda o\gamma_\alpha\theta_1 > \lambda o\gamma_\alpha\theta_2$ συνεπάγεται τήν $\theta_1 > \theta_2$ γιά $\alpha > 1$ καί τήν $\theta_1 < \theta_2$ γιά $0 < \alpha < 1$ καί ἀντιστρόφως.

Ἀπό τά παραπάνω ὁδηγούμαστε τώρα στό νά διατυπώσουμε τήν ἑξῆς ἰδιότητα:

§ 155. Ἰδιότητα VII.— Ἄν $\alpha, \theta_1, \theta_2 \in \mathbf{R}^+$ μέ $\alpha \neq 1$, τότε ἰσχύει:

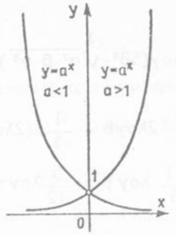
(i) Γιά $\alpha > 1$ εἶναι: $\lambda o\gamma_\alpha\theta_1 > \lambda o\gamma_\alpha\theta_2 \iff \theta_1 > \theta_2$

(ii) Γιά $\alpha < 1$ εἶναι: $\lambda o\gamma_\alpha\theta_1 > \lambda o\gamma_\alpha\theta_2 \iff \theta_1 < \theta_2$.

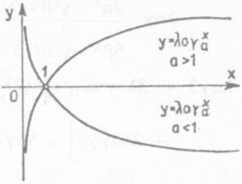
Σχόλιο. Ὅπως θά μάθουμε καί στήν ἄλλη τάξη μία συνάρτηση $f: A \to \mathbf{R}$ μέ $A \subseteq \mathbf{R}$ πού διατηρεῖ τή φυσική διάταξη τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, δηλαδή γιά τήν ὁποία ἰσχύει: $x_1 > x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$ τήν ὀνομάζουμε **γνησίως αὔξουσα**, ἐνῶ ἄν συμβαίνει:

$$(\forall\ x_1, x_2 \in A): \qquad x_1 > x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2),$$

τήν ὀνομάζουμε **γνησίως φθίνουσα**. Ἔτσι π.χ. **ἡ ἐκθετική συνάρτηση $y = \alpha^x$, $x \in \mathbf{R}$ εἶναι γνησίως αὔξουσα γιά $\alpha > 1$ καί γνησίως φθίνουσα γιά $0 < \alpha < 1$** (βλ. Σχ. 14).



Σχ. 14



Σχ. 15

Ἐπίσης ἔχοντας ὑπόψη τοὺς παραπάνω ὁρισμούς καί τήν προηγούμενη ἰδιότητα συμπεραίνουμε ὅτι: **ἡ λογαριθμική συνάρτηση $y = \lambda o\gamma_\alpha x$, $x \in R^+$ εἶναι γνησίως αὔξουσα γιά $\alpha > 1$ καί γνησίως φθίνουσα γιά $0 < \alpha < 1$** (βλ. Σχ. 15).

Εἰδικά, ἐπειδή $e > 1$, ἡ συνάρτηση f μέ τύπο $f(x) = \log x$ εἶναι γνησίως αὔξουσα.

Μία ἄμεση συνέπεια τῆς ἰδιότητας VII εἶναι τό ἑπόμενο πόρισμα:

Πόρισμα.—Ἄν $\alpha, \theta \in R^+$ μέ $\alpha \neq 1$, τότε ἰσχύει :

$$\text{(i) Γιά } \alpha > 1 \text{ εἶναι : } \begin{cases} \lambda o\gamma_\alpha \theta > 0 \text{ , ἄν } \theta > 1 \\ \lambda o\gamma_\alpha \theta < 0 \text{ , ἄν } \theta < 1 \end{cases}$$

$$\text{(ii) Γιά } \alpha < 1 \text{ εἶναι : } \begin{cases} \lambda o\gamma_\alpha \theta < 0 \text{ , ἄν } \theta > 1 \\ \lambda o\gamma_\alpha \theta > 0 \text{ , ἄν } \theta < 1. \end{cases}$$

Ἐφαρμογές στίς ἰδιότητες τῶν λογαρίθμων.

1η. Ἄν $\lambda o\gamma 2 = 0{,}301$ καί $\lambda o\gamma 5 = 0{,}698$, νά βρεῖτε τό $\lambda o\gamma 250$ καί τό $\lambda o\gamma_2 250$.

Λύση. α) $\lambda o\gamma 250 = \lambda o\gamma(2 \cdot 5^3) = \lambda o\gamma 2 + 3\lambda o\gamma 5 = 0{,}301 + 3 \cdot 0{,}698 = 0{,}301 + 2{,}094 = 2{,}395$.

β) $\lambda o\gamma_2 250 = \dfrac{\lambda o\gamma 250}{\lambda o\gamma 2} = \dfrac{2{,}395}{0{,}301} = 7{,}956$.

2η. Ἄν $\alpha, \beta, \gamma \in R^+$, νά ἐκφράσετε μέ μορφή ἀλγεβρικοῦ ἀθροίσματος λογαρίθμων τό :

$$\lambda o\gamma_3 \left(\frac{3\alpha^2}{5\beta \sqrt[4]{\gamma}} \right)$$

Λύση. Ἔχουμε:

$$\lambda o\gamma_3 \left(\frac{3\alpha^2}{5\beta \sqrt[4]{\gamma}} \right) = \lambda o\gamma_3(3\alpha^2) - \lambda o\gamma_3 (5\beta \cdot \sqrt[4]{\gamma}) = \lambda o\gamma_3 3 + \lambda o\gamma_3 \alpha^2 - (\lambda o\gamma_3 5 + \lambda o\gamma_3 \beta +$$

$$+ \lambda o\gamma_3 \sqrt[4]{\gamma}) = 1 + 2\lambda o\gamma_3 \alpha - \lambda o\gamma_3 5 - \lambda o\gamma_3 \beta - \frac{1}{4} \lambda o\gamma_3 \gamma.$$

3η. Νά ἐφαρμόσετε ὅλες τίς δυνατές ἰδιότητες τῶν λογαρίθμων στό :

$$\lambda o\gamma \frac{3\alpha^3 \cdot \sqrt[4]{\beta^2 \cdot \gamma}}{5\beta^2 \cdot \sqrt[3]{\alpha^2 \cdot \beta \cdot \gamma^2}}, \text{ ὅπου } \alpha, \beta, \gamma \in R^+.$$

Λύση. Ἔχουμε:

$$\lambda o\gamma \frac{3\alpha^3 \cdot \sqrt[4]{\beta^2 \cdot \gamma}}{5\beta^2 \cdot \sqrt[3]{\alpha^2 . \beta . \gamma^2}} = \lambda o\gamma(3\alpha^3 \cdot \sqrt[4]{\beta^2 \cdot \gamma}) - \lambda o\gamma(5\beta^2 . \sqrt[3]{\alpha^2 . \beta . \gamma^2}) =$$

$$= \left[\lambda o\gamma 3 + 3\lambda o\gamma \alpha + \frac{1}{4}(2\lambda o\gamma \beta + \lambda o\gamma \gamma) \right] - \left[\lambda o\gamma 5 + 2\lambda o\gamma \beta + \frac{1}{3}(2\lambda o\gamma \alpha + \lambda o\gamma \beta + \right.$$

$$\left. + 2\lambda o\gamma\gamma) \right] = \lambda o\gamma 3 - \lambda o\gamma 5 + \frac{7}{3}\lambda o\gamma \alpha - \frac{11}{6}\lambda o\gamma \beta - \frac{5}{12}\lambda o\gamma \gamma.$$

4η. Ἄν $\lambda o\gamma_e i = -\frac{Rt}{L} + \lambda o\gamma_e I$, τότε $i = I \cdot e^{-\frac{Rt}{L}}$.

Λύση. Ἡ σχέση πού μᾶς δόθηκε γράφεται:

$$\lambda o\gamma_e i - \lambda o\gamma_e I = -\frac{Rt}{L} \quad \text{ἤ} \quad \lambda o\gamma_e \frac{i}{I} = -\frac{Rt}{L}.$$

Σύμφωνα μέ τόν ὁρισμό τοῦ λογαρίθμου ἔχουμε ἀπό τήν τελευταία ἰσότητα:

$$e^{-\frac{Rt}{L}} = \frac{i}{I} \text{ καί συνεπῶς : } i = I \cdot e^{-\frac{Rt}{L}}$$

5η. Ἄν $\alpha > \beta > 0$ καί $\alpha^2 + \beta^2 = 11\alpha\beta$, νά ἀποδείξετε ὅτι :

$$\lambda o\gamma \frac{\alpha - \beta}{3} = \frac{1}{2}(\lambda o\gamma \alpha + \lambda o\gamma \beta).$$

Ἀπόδειξη. Ἔχουμε:

$$\alpha^2 + \beta^2 = 11\alpha\beta \implies \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta = 9\alpha\beta \implies \left(\frac{\alpha - \beta}{3}\right)^2 = \alpha\beta \implies \frac{\alpha - \beta}{3} = \sqrt{\alpha\beta},$$

ἐπειδή $\alpha - \beta > 0$.

Τότε ὅμως θά ἔχουμε καί:

$$\lambda o\gamma \left(\frac{\alpha - \beta}{3}\right) = \lambda o\gamma \sqrt{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\lambda o\gamma \alpha + \lambda o\gamma \beta).$$

6η. Νά ὑπολογίσετε τήν ἀριθμητική τιμή τῆς παραστάσεως :

$$k = \frac{(\lambda o\gamma_2 5 + \lambda o\gamma_3 5) \cdot \lambda o\gamma_6 5}{\lambda o\gamma_2 5 \, \lambda o\gamma_3 5}.$$

Λύση. Σύμφωνα μέ τό πόρισμα 1 τῆς § 154 ἔχουμε:

$$k = \frac{\left(\frac{1}{\lambda o\gamma_5 2} + \frac{1}{\lambda o\gamma_5 3}\right) \cdot \frac{1}{\lambda o\gamma_5 6}}{\frac{1}{\lambda o\gamma_5 2 \cdot \lambda o\gamma_5 3}} = \frac{\lambda o\gamma_5 2 + \lambda o\gamma_5 3}{\lambda o\gamma_5 6} = \frac{\lambda o\gamma_5(2 \cdot 3)}{\lambda o\gamma_5 6} = 1.$$

7η. Ἄν $\alpha, \beta \in R$, $\alpha\beta > 0$ καί $\alpha^3 + \beta^3 = 6\alpha\beta(\alpha + \beta)$, νά ἀποδείξετε ὅτι :

$$\lambda o\gamma \frac{|\alpha + \beta|}{3} = \frac{1}{2}(\lambda o\gamma |\alpha| + \lambda o\gamma |\beta|).$$

Ἀπόδειξη. Ἐπειδή: $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$ ἔχουμε:

$$(\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = 6\alpha\beta(\alpha + \beta) \implies (\alpha + \beta)^2 = 9\alpha\beta.$$

Τότε ὅμως, σύμφωνα καί μέ τίς παρατηρήσεις τῶν παραγράφων 153 καί 151, θά ἔχουμε:

$2 \cdot \lambda o\gamma |\alpha + \beta| = \lambda o\gamma(9\alpha\beta) = \lambda o\gamma 9 + \lambda o\gamma(\alpha\beta) = \lambda o\gamma 3^2 + \lambda o\gamma |\alpha| + \lambda o\gamma |\beta|$, ὁπότε:

$2\lambda o\gamma |\alpha + \beta| - 2\lambda o\gamma 3 = \lambda o\gamma |\alpha| + \lambda o\gamma |\beta| \implies \lambda o\gamma |\alpha + \beta| - \lambda o\gamma 3 = \frac{1}{2}(\lambda o\gamma |\alpha| + \lambda o\gamma |\beta|)$

καί συνεπῶς:

$$\lambda o\gamma \frac{|\alpha+\beta|}{3} = \frac{1}{2}(\lambda o\gamma|\alpha| + \lambda o\gamma|\beta|).$$

8η. Νά ἀποδείξετε τήν ἀλήθεια τῆς ἰσότητας :

$$\frac{7}{16}\lambda o\gamma(3+2\sqrt{2}) - 4\lambda o\gamma(\sqrt{2}+1) = \frac{25}{8}\lambda o\gamma(\sqrt{2}-1).$$

Λύση. Παρατηροῦμε ὅτι : $3+2\sqrt{2} = (\sqrt{2}+1)^2$.

Ἄρα: $\frac{7}{16}\lambda o\gamma(3+2\sqrt{2}) - 4\lambda o\gamma(\sqrt{2}+1) = \frac{7}{16}\lambda o\gamma(\sqrt{2}+1)^2 - 4\lambda o\gamma(\sqrt{2}+1) =$

$$= \frac{7}{8}\lambda o\gamma(\sqrt{2}+1) - 4\lambda o\gamma(\sqrt{2}+1) = -\frac{25}{8}\lambda o\gamma(\sqrt{2}+1) \quad (1)$$

Ἀλλά, σύμφωνα μέ τό πόρισμα τῆς § 152, ἔχουμε:

$$-\lambda o\gamma(\sqrt{2}+1) = \lambda o\gamma\left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right) = \lambda o\gamma(\sqrt{2}-1) \quad (2)$$

Ἡ (1), λόγω τῆς (2), γίνεται:

$$\frac{7}{16}\lambda o\gamma(3+2\sqrt{2}) - 4\lambda o\gamma(\sqrt{2}+1) = \frac{25}{8}\lambda o\gamma(\sqrt{2}-1).$$

⁎§ 156. Συλλογάριθμος ἑνός ἀριθμοῦ.

—**Συλλογάριθμο** *ἑνός θετικοῦ ἀριθμοῦ θ ὡς πρός βάση α* (συμβολισμός: συλλογ$_\alpha$ θ), *ὀνομάζουμε τό λογάριθμο τοῦ ἀντίστροφου τοῦ θ*, δηλ. τοῦ $\frac{1}{\theta}$, *ὡς πρός τήν ἴδια βάση.*

Ὥστε: $$\boxed{\sigma\upsilon\lambda\lambda o\gamma_\alpha\,\theta \underset{\text{ορσ}}{=} \lambda o\gamma_\alpha \frac{1}{\theta}} \quad (1)$$

Ἀλλά: $\lambda o\gamma_\alpha\left(\frac{1}{\theta}\right) = \lambda o\gamma_\alpha 1 - \lambda o\gamma_\alpha\theta = 0 - \lambda o\gamma_\alpha\theta = -\lambda o\gamma_\alpha\theta.$

Ἄρα: $$\boxed{\sigma\upsilon\lambda\lambda o\gamma_\alpha\theta = \lambda o\gamma_\alpha\frac{1}{\theta} = -\lambda o\gamma_\alpha\,\theta} \quad (2)$$

Ἡ εἰσαγωγή τῶν συλλογαρίθμων μᾶς ἐπιτρέπει νά ἀντικαθιστοῦμε μία διαφορά λογαρίθμων μέ τό ἄθροισμά τους. Ἔτσι ἔχουμε:

$$\lambda o\gamma_\alpha\frac{\theta_1}{\theta_2} = \lambda o\gamma_\alpha\theta_1 - \lambda o\gamma_\alpha\theta_2 = \lambda o\gamma_\alpha\theta_1 + \sigma\upsilon\lambda\lambda o\gamma_\alpha\theta_2.$$

Σημείωση. Ἀπό τή (2) ἔχουμε ὅτι:

$$\boxed{\lambda o\gamma_\alpha\theta + \sigma\upsilon\lambda\lambda o\gamma_\alpha\theta = 0} \quad (3)$$

⁎ § 157. Μερικές ἀξιοσημείωτες καί χρήσιμες ἐφαρμογές.

— Σ' αὐτή τήν παράγραφο θά συμπληρώσουμε τά συμπεράσματα τῶν προηγούμενων παραγράφων μέ τίς παρακάτω ἀξιοσημείωτες ἰδιότητες τῆς ἐκθετικῆς καί λογαριθμικῆς συναρτήσεως:

1η. Ἄν θεωρηθεῖ γνωστό ὅτι : $\lim\left(1+\frac{\alpha}{\nu}\right)^\nu = e^\alpha$ γιά κάθε $\alpha\in R$, νά ἀποδείξετε ὅτι ἰσχύει :

(i). $e^{\alpha} \geqq 1 + \alpha$ γιά κάθε $\alpha \in \mathbf{R}$

(ii). $1 - \dfrac{1}{\alpha} \leqq \log\alpha \leqq \alpha - 1$ γιά κάθε $\alpha > 0$.

Ἀπόδειξη. **(i)** Γιά κάθε $\alpha \in \mathbf{R}$ ἰσχύει: $\dfrac{\alpha}{\nu} \to 0$, ὁπότε γιά $\varepsilon = 1$ ὑπάρχει δείκτης $\nu_0 \in \mathbf{N}$ τέτοιος, ὥστε: $\left|\dfrac{\alpha}{\nu}\right| < 1$, δηλαδή: $-1 < \dfrac{\alpha}{\nu} < 1$ γιά κάθε $\nu \geqq \nu_0$.

Ὥστε γιά κάθε $\alpha \in \mathbf{R}$ **τελικά** ἰσχύει: $1 + \dfrac{\alpha}{\nu} > 0$, ὁπότε, σύμφωνα μέ τήν ἀνισότητα τοῦ Bernoulli (βλ. Κεφ. II, σελ. 23) ἔχουμε:

$$\left(1 + \frac{\alpha}{\nu}\right)^{\nu} \geqq 1 + \nu\,\frac{\alpha}{\nu} = 1 + \alpha$$

καί συνεπῶς (πόρισμα 2ο, § 55): $\lim\left(1 + \dfrac{\alpha}{\nu}\right)^{\nu} = e^{\alpha} \geqq 1 + \alpha, \quad \forall\ \alpha \in \mathbf{R}$.

(ii) Ἔστω $\alpha > 0$, τότε ὁρίζεται ὁ νεπέρειος λογάριθμος $\log\alpha$ καί ὅπως ξέρουμε (βλ. παρατήρηση 2, § 148) ἰσχύει: $e^{\log\alpha} = \alpha$. Ἡ ἀνισότητα $e^{\alpha} \geqq 1 + \alpha$ πού ἀποδείξαμε προηγουμένως ἰσχύει γιά κάθε $\alpha \in \mathbf{R}$, ἄρα θά ἰσχύει καί ἄν στή θέση τοῦ α θέσουμε τόν πραγματικό ἀριθμό $\log\alpha$, ὁπότε θά ἔχουμε: $e^{\log\alpha} = \alpha \geqq 1 + \log\alpha$. Ἄρα: $\log\alpha \leqq \alpha - 1$ (1)

Ἀπό τήν (1), ἐπειδή γιά $\alpha > 0$ εἶναι καί $\dfrac{1}{\alpha} > 0$, λαμβάνουμε:

$$\log\frac{1}{\alpha} \leqq \frac{1}{\alpha} - 1 \iff -\log\alpha \leqq \frac{1}{\alpha} - 1 \iff \log\alpha \geqq 1 - \frac{1}{\alpha} \qquad (2)$$

Ἀπό τίς (1) καί (2) τελικά ἔχουμε ὅτι:

$$\boxed{\forall\ \alpha > 0 \quad \Big\|\quad 1 - \frac{1}{\alpha} \leqq \log\alpha \leqq \alpha - 1} \qquad (3)$$

2η. Νά ἀποδείξετε ὅτι : γιά κάθε ἀκολουθία (α_ν) θετικῶν ὅρων μέ $\alpha_\nu \to \alpha$, ὅπου $\alpha > 0$, ἰσχύει : $\log\alpha_\nu \to \log\alpha$.

Ἀπόδειξη. Ἀπό τήν ἀνισότητα (3) τῆς προηγούμενης ἐφαρμογῆς ἔχουμε:

$$1 - \frac{\alpha}{\alpha_\nu} \leqq \log\frac{\alpha_\nu}{\alpha} \leqq \frac{\alpha_\nu}{\alpha} - 1$$

Ἀλλά $\dfrac{\alpha_\nu}{\alpha} \to 1$, $\dfrac{\alpha}{\alpha_\nu} \to 1$, ὁπότε, σύμφωνα μέ τήν ἰδιότητα τῶν ἰσοσυγκλινουσῶν ἀκολουθιῶν (§ 54), θά ἔχουμε: $\log\dfrac{\alpha_\nu}{\alpha} \to 0$.

Ἀλλά: $\log\dfrac{\alpha_\nu}{\alpha} = \log\alpha_\nu - \log\alpha$. Ἄρα:

$$\log\frac{\alpha_\nu}{\alpha} \to 0 \iff \log\alpha_\nu - \log\alpha \to 0 \iff \log\alpha_\nu \to \log\alpha.$$

Ἀνακεφαλαίωση. Οἱ ὁρισμοί καί οἱ κυριότερες ἰδιότητες τῶν λογαρίθμων πού ἀπορρέουν ἀπό τίς προηγούμενες παραγράφους συνοψίζονται στόν ἑπόμενο πίνακα:

ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ ΩΣ ΠΡΟΣ ΒΑΣΗ $\alpha\ (0<\alpha\neq 1)$	ΔΕΚΑΔΙΚΟΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ
α) ὁρισμός $\forall\ \theta\in\mathbf{R}^+$ ἰσχύει:	**α΄) Ὁρισμός:** $\forall\ \theta\in\mathbf{R}^+$ ἰσχύει:
$\lambda o\gamma_\alpha\theta = x \iff \alpha^x=\theta$	$\lambda o\gamma\theta = x \iff 10^x=\theta$
ὁρίζεται ἔτσι ἡ ἀκόλουθη συνάρτηση:	ὁρίζεται ἔτσι ἡ ἀκόλουθη συνάρτηση:
$\lambda o\gamma_\alpha\colon (0,+\infty)\to\mathbf{R}\colon x\to\lambda o\gamma_\alpha x$	$\lambda o\gamma\colon (0,+\infty)\to\mathbf{R}\colon x\to\lambda o\gamma x.$
ἡ ὁποία εἶναι γνησίως αὔξουσα γιά $\alpha>1$ καί γνησίως φθίνουσα γιά $0<\alpha<1$.	ἡ ὁποία εἶναι **πάντοτε** γνησίως αὔξουσα.
β) Ἰδιότητες: $\forall\ \theta,\theta_1,\theta_2\in\mathbf{R}^+$ ἰσχύει:	**β΄) Ἰδιότητες:** $\forall\ \theta,\theta_1,\theta_2\in\mathbf{R}^+$ ἰσχύει:
1. $\alpha^{\lambda o\gamma_\alpha\theta}=\theta$	1΄. $10^{\lambda o\gamma\theta}=\theta$
2. $\lambda o\gamma_\alpha\theta_1=\lambda o\gamma_\alpha\theta_2 \iff \theta_1=\theta_2$	2΄. $\lambda o\gamma\theta_1=\lambda o\gamma\theta_2 \iff \theta_1=\theta_2$
3. $\lambda o\gamma_\alpha 1=0,\quad \lambda o\gamma_\alpha\alpha=1$	3΄. $\lambda o\gamma 1=0,\quad \lambda o\gamma 10=1$
4. $\lambda o\gamma_\alpha(\theta_1\cdot\theta_2)=\lambda o\gamma_\alpha\theta_1+\lambda o\gamma_\alpha\theta_2$	4΄. $\lambda o\gamma(\theta_1\cdot\theta_2)=\lambda o\gamma\theta_1+\lambda o\gamma\theta_2$
5. $\lambda o\gamma_\alpha\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)=\lambda o\gamma_\alpha\theta_1-\lambda o\gamma_\alpha\theta_2$	5΄. $\lambda o\gamma\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)=\lambda o\gamma\theta_1-\lambda o\gamma\theta_2$
6. $\lambda o\gamma_\alpha\theta^\beta=\beta\cdot\lambda o\gamma_\alpha\theta\quad(\beta\in\mathbf{R})$	6΄. $\lambda o\gamma\theta^\beta=\beta\cdot\lambda o\gamma\theta\quad(\beta\in\mathbf{R})$
7. $\lambda o\gamma_\alpha\sqrt[\nu]{\theta}=\frac{1}{\nu}\lambda o\gamma_\alpha\theta\quad(\nu\in\mathbf{N})$	7΄. $\lambda o\gamma\sqrt[\nu]{\theta}=\frac{1}{\nu}\lambda o\gamma\theta\quad(\nu\in\mathbf{N})$
8. $\lambda o\gamma_\alpha\theta_1>\lambda o\gamma_\alpha\theta_2 \iff \theta_1>\theta_2$ γιά $\alpha>1$	8΄. **Προσέξτε!** ἐπειδή $\alpha=10>1$ ἰσχύει:
$\lambda o\gamma_\alpha\theta_1>\lambda o\gamma_\alpha\theta_2 \iff \theta_1<\theta_2,\ 0<\alpha<1$	$\lambda o\gamma\theta_1>\lambda o\gamma\theta_2 \iff \theta_1>\theta_2$
γ) Τύπος ἀλλαγῆς βάσεως:	**γ΄) Τύπος ἀλλαγῆς βάσεως:**
$\lambda o\gamma_\beta\theta=\dfrac{\lambda o\gamma_\alpha\theta}{\lambda o\gamma_\alpha\beta}$	$\lambda o\gamma_\beta\theta=\dfrac{\lambda o\gamma\theta}{\lambda o\gamma\beta}$
δ) Συνέπειες τῶν ἰδιοτήτων 4, 5, 6:	**δ΄) Συνέπειες τῶν ἰδιοτήτων 4΄, 5΄, 6΄:**
Ἄν $xy>0$, τότε:	Ἄν $xy>0$, τότε:
1. $\lambda o\gamma_\alpha(xy)=\lambda o\gamma_\alpha\lvert x\rvert+\lambda o\gamma_\alpha\lvert y\rvert$	1΄. $\lambda o\gamma(xy)=\lambda o\gamma\lvert x\rvert+\lambda o\gamma\lvert y\rvert$
2. $\lambda o\gamma_\alpha(x:y)=\lambda o\gamma_\alpha\lvert x\rvert-\lambda o\gamma_\alpha\lvert y\rvert$	2΄. $\lambda o\gamma(x:y)=\lambda o\gamma\lvert x\rvert-\lambda o\gamma\lvert y\rvert$
3. $\lambda o\gamma_\alpha x^{2k}=2k\cdot\lambda o\gamma_\alpha\lvert x\rvert,\quad(k\in\mathbf{Z})$	3΄. $\lambda o\gamma x^{2k}=2k\cdot\lambda o\gamma\lvert x\rvert\quad(k\in\mathbf{Z}).$

Σημείωση. Εἰδικά γιά $\alpha=e=2{,}718\ldots>1$, ἡ πρώτη στήλη τοῦ παραπάνω πίνακα μᾶς δίνει τίς ἰδιότητες τῶν νεπέρειων λογαρίθμων. Ὁ νεπέρειος λογάριθμος τοῦ θ $(\theta>0)$ συνδέεται μέ τό δεκαδικό λογάριθμο τοῦ θ μέ τή σχέση:

$$\log\theta\simeq 2{,}30258\cdot\lambda o\gamma\theta.$$

Ἐπίσης γιά τό νεπέρειο λογάριθμο ἑνός ἀριθμοῦ $\theta>0$ ἰσχύει καί ὁ τύπος:

$$\boxed{1-\frac{1}{\theta}\leqq\log\theta\leqq\theta-1<\theta}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάδα Α΄. 323. Νά ἀποδείξετε ὅτι εἶναι ἀληθεῖς οἱ παρακάτω ἰσότητες:

α) $\lambda o\gamma 21 = \lambda o\gamma 3 + \lambda o\gamma 7$, β) $\lambda o\gamma 2\frac{1}{3} = \lambda o\gamma 7 - \lambda o\gamma 3$, γ) $\lambda o\gamma 81 = 4\cdot\lambda o\gamma 3$,

δ) $\lambda o\gamma 3 + 2\cdot\lambda o\gamma 4 - \lambda o\gamma 12 = 2\lambda o\gamma 2$, ε) $3\lambda o\gamma 2 + \lambda o\gamma 5 - \lambda o\gamma 4 = 1$,

στ) $\frac{1}{2}\lambda o\gamma 25 + \frac{1}{3}\lambda o\gamma 8 + \frac{1}{5}\lambda o\gamma 32 = 1 + \lambda o\gamma 2$.

324. Ἄν $x, y, z \in \mathbf{R}^+$ νά ἐφαρμόσετε ὅλες τίς δυνατές ἰδιότητες τῶν λογαρίθμων στούς:

1) $\lambda o\gamma_3 3x\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{2x}}$, 2) $\lambda o\gamma\frac{x^3\sqrt{y}}{4\sqrt{x\cdot y^3}}$, 3) $\lambda o\gamma\frac{\sqrt[4]{5}\cdot\sqrt[10]{2}}{\sqrt[3]{18\sqrt{2}}}$, 4) $\lambda o\gamma\frac{5x^3\sqrt[4]{y^2z}}{7y^2\cdot\sqrt{x^2yz^2}}$.

325. Ἄν $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^+$, νά ἀποδείξετε ὅτι: $\alpha^{\lambda o\gamma\beta} = \beta^{\lambda o\gamma\alpha}$.

Ἀρκεῖ νά δειχθεῖ ὅτι: $\lambda o\gamma_a\beta = \frac{\lambda o\gamma\beta}{\lambda o\gamma a} \Rightarrow a^{\lambda o\gamma\beta} = a^{\lambda o\gamma_a\beta\cdot\lambda o\gamma a} = \beta^{\lambda o\gamma a} \Rightarrow a^{\lambda o\gamma_a\beta} = \beta$ πού ἰσχύει

326. Σέ ποιό λογαριθμικό σύστημα μέ βάση μεγαλύτερη ἀπό τό 1 ἰσχύει:

α) $2(\lambda o\gamma_x 8)^2 + \lambda o\gamma_x 64 + \lambda o\gamma_x 8 = 9$, β) $\lambda o\gamma_x\sqrt[3]{625} - \lambda o\gamma_x\sqrt{125} + \frac{1}{6} = 0$.

327. Νά ἀποδείξετε ὅτι: γιά κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}^+ - \{1\}$ ἰσχύει: $\lambda o\gamma_\alpha\beta.\lambda o\gamma_\beta\gamma.\lambda o\gamma_\gamma\alpha = 1$.

328. Ἄν $\alpha > 1$, $\beta > 1$ καί $\alpha^2 + \beta^2 = 7\alpha\beta$, νά ἀποδείξετε ὅτι:

$$\lambda o\gamma\frac{\alpha+\beta}{3} = \frac{1}{2}(\lambda o\gamma\alpha + \lambda o\gamma\beta) \geqq \sqrt{\lambda o\gamma\alpha\cdot\lambda o\gamma\beta}.$$

329. Ἄν $\lambda o\gamma(x^2y^3) = \alpha$ καί $\lambda o\gamma x - \lambda o\gamma y = \beta$ νά ἐκφράσετε τό $\lambda o\gamma x$ καί $\lambda o\gamma y$ συναρτήσει τῶν α καί β.

330. Ἄν $\lambda o\gamma 2\cdot\lambda o\gamma 5 = \theta$, νά ἐκφράσετε τό $\lambda o\gamma 2$ καί τό $\lambda o\gamma 5$ συναρτήσει τοῦ θ. Γιά ποιές τιμές τοῦ θ τό πρόβλημα ἔχει λύση;

331. Ἄν $\alpha > 1$, $\beta > 1$ νά ὑπολογιστεῖ ἡ τιμή τῆς παραστάσεως:

$$y = \lambda o\gamma(\alpha^2-1) + \lambda o\gamma(\beta^2-1) - \lambda o\gamma[(\alpha\beta+1)^2 - (\alpha+\beta)^2].$$

332. Ἄν $\lambda o\gamma 2 = 0{,}30103$, νά ὑπολογίσετε τήν τιμή τῆς παραστάσεως:

$$y = \frac{1}{2}\lambda o\gamma 2 + \frac{1}{2}\lambda o\gamma(2+\sqrt{2}) + \frac{1}{2}\lambda o\gamma(2+\sqrt{2+\sqrt{2}}) + \frac{1}{2}\lambda o\gamma(2-\sqrt{2+\sqrt{2}}).$$

333. Ἄν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}^+$ μέ $\beta \neq 1$ καί $\alpha\beta \neq 1$, νά ἀποδείξετε ὅτι: $\lambda o\gamma_{\alpha\beta}\gamma = \frac{\lambda o\gamma_\beta\gamma}{1+\lambda o\gamma_\beta\alpha}$.

334. Νά ἀποδείξετε ὅτι: $\lambda o\gamma_2 3\cdot\lambda o\gamma_3 4\cdot\lambda o\gamma_4 5\cdots\lambda o\gamma_7 8 = 3$.

335. Ἄν $\alpha, \beta, \gamma, \theta \in \mathbf{R}^+ - \{1\}$ καί οἱ α, β, γ εἶναι διαδοχικοί ὅροι γεωμετρικῆς προόδου, νά ἀποδείξετε ὅτι οἱ ἀριθμοί: $\lambda o\gamma_\alpha\theta$, $\lambda o\gamma_\beta\theta$, $\lambda o\gamma_\gamma\theta$ εἶναι διαδοχικοί ὅροι ἁρμονικῆς προόδου.

336. Ἄν γιά τούς διαφορετικούς μεταξύ τους θετικούς ἀριθμούς α, β, γ ἰσχύει:

$$\frac{\lambda o\gamma\alpha}{\beta-\gamma} = \frac{\lambda o\gamma\beta}{\gamma-\alpha} = \frac{\lambda o\gamma\gamma}{\alpha-\beta},$$ νά ἀποδείξετε ὅτι: $\alpha^\alpha\cdot\beta^\beta\cdot\gamma^\gamma = 1$.

337. Ἄν $\varphi(x) = \log\frac{1-x}{1+x}$, τότε ἰσχύει: $\varphi(\alpha) + \varphi(\beta) = \varphi\left(\frac{\alpha+\beta}{1+\alpha\beta}\right)$.

338. Ἄν $0 < \alpha \neq 1$ καί $\beta = \frac{1}{2}(\alpha^x - \alpha^{-x})$, νά ἀποδείξετε ὅτι: $x = \lambda o\gamma_\alpha(\beta + \sqrt{\beta^2+1})$.

339. Ἂν $\alpha, \beta, x \in \mathbf{R}^+$ μέ $\alpha \neq 1$, $\beta \neq 1$ καί $\alpha\beta \neq 1$, νά ἀποδείξετε ὅτι:

$$\lambda o\gamma_\alpha x + \lambda o\gamma_\beta x = \lambda o\gamma_\alpha \beta \cdot (1 + \lambda o\gamma_\beta \alpha)^2 \cdot \lambda o\gamma_{\alpha\beta} x.$$

340. Νά ἀποδείξετε ὅτι: τό ἄθροισμα Σ_ν τῶν ν πρώτων ὅρων μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου μέ πρῶτο ὅρο τό λογα καί δεύτερο ὅρο τό λογβ εἶναι:

$$\Sigma_\nu = \frac{1}{2} \cdot \lambda o\gamma \frac{\beta^{\nu(\nu-1)}}{\alpha^{\nu(\nu-3)}}.$$

341. Ἂν οἱ διαφορετικοί μεταξύ τους θετικοί ἀριθμοί α, β, γ κατέχουν ἀντιστοίχως τίς τάξεις μ, ν, ρ σέ μία γεωμετρική καί σέ μία ἁρμονική πρόοδο, νά ἀποδείξετε ὅτι:

$$\alpha(\beta - \gamma)\lambda o\gamma\alpha + \beta(\gamma - \alpha)\lambda o\gamma\beta + \gamma(\alpha - \beta)\lambda o\gamma\gamma = 0.$$

★ **Ὁμάδα Β΄.** 342. Ἔστω ἡ συνάρτηση f μέ τύπο: $f(x) = \lambda o\gamma\,|\lambda o\gamma x|$.

Νά βρεῖτε: (i) Γιά ποιές τιμές τοῦ x ἡ συνάρτηση εἶναι ὁρισμένη.

(ii) Γιά ποιές τιμές τοῦ x ἡ συνάρτηση μηδενίζεται.

(iii) Τόν πληθικό ἀριθμό ν(A) τοῦ συνόλου $A = \{x \in \mathbf{Z}: f(x) < 0\}$.

343. Νά βρεῖτε τό ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων τῆς σειρᾶς $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$, ἄν $\alpha_\nu = \lambda o\gamma 3^\nu$.

344. Ἂν $x, y \in \mathbf{R}^+$, $0 < \alpha \neq 1$, $0 < \beta \neq 1$ καί $\alpha^x = \beta^y$, $x^\beta = y^\alpha$, νά ἀποδείξετε ὅτι:

$$\left(\frac{x}{\lambda o\gamma_\alpha \beta}\right)^\alpha = \left(\frac{y}{\lambda o\gamma_\beta \alpha}\right)^\beta.$$

345. Ἔχοντας ὑπόψη ὅτι: $\pi^2 = (3{,}14\ldots)^2 < 10$, νά ἀποδείξετε ὅτι ἰσχύει:

$$\frac{1}{\lambda o\gamma_2 \pi} + \frac{1}{\lambda o\gamma_5 \pi} > 2.$$

346. Ἂν $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, $\alpha \neq \beta$, νά ἀποδείξετε ὅτι: $\dfrac{e^\alpha + e^\beta}{2} > e^{\frac{\alpha+\beta}{2}}$.

347. Ἂν $0 < \alpha < \beta$, νά ἀποδείξετε ὅτι: $\dfrac{2}{\sqrt{\beta}} \leq \dfrac{\log\beta - \log\alpha}{\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha}} \leq \dfrac{2}{\sqrt{\alpha}}$. Ἀπό αὐτό κατόπιν νά συμπεράνετε ὅτι: $\dfrac{2}{3} < \log 2{,}25 < 1$.

Ὑπόδειξη. Ξέρουμε ὅτι: γιά κάθε $\theta > 0$ ἰσχύει: $1 - \dfrac{1}{\theta} \leqq \log\theta \leqq \theta - 1 < \theta$.

348. Ἂν θεωρηθεῖ ὡς γνωστό ὅτι: $\lim\left(1 + \dfrac{1}{\nu}\right)^\nu = e$, νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$, μέ γενικό ὅρο $\alpha_\nu = \nu\{\log(\nu + 1) - \log\nu\}$ δέ συγκλίνει στό $\mathbf{R}$.

Ὑπόδειξη. Νά λάβετε ὑπόψη τή 2η ἐφαρμογή τῆς § 157 καί τήν § 99.

349. Νά ἀποδείξετε ὅτι οἱ σειρές $\sum_{\nu=2}^{\infty} \alpha_\nu$ καί $\sum_{\nu=2}^{\infty} \beta_\nu$ μέ γενικούς ὅρους ἀντιστοίχως: $\alpha_\nu = \sqrt[\nu]{\log\nu}$, $\beta_\nu = \dfrac{1}{\log\nu}$ ἀπειρίζονται θετικά.

Ὑπόδειξη. Νά ἀποδείξετε ὅτι: $\sqrt[\nu]{\log\nu} \to 1$ (βλ. καί ἄσκ. 117). Ἐπίσης εἶναι: $\log\nu < \nu$.

350. Ἔστω οἱ σειρές μέ θετικούς ὅρους: $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ καί $\sum_{\nu=1}^{\infty} \log(1 + \alpha_\nu)$. Νά ἀποδείξετε ὅτι:

ἄν ἡ μία ἀπό αὐτές συγκλίνει (ἀντ. ἀπειρίζεται θετικά), τότε καί ἡ ἄλλη συγκλίνει (ἀντ. ἀπειρίζεται θετικά). **Ἐφαρμογή:** $\alpha_\nu = \frac{1}{\nu}$.

Ὑπόδειξη. Γιά $x > -1$ ἰσχύει: $\frac{x}{1+x} \leqq \log(1+x) \leqq x$ (γιατί;). Κατόπιν νά λάβετε ὑπόψη τή δεύτερη ἐφαρμογή τῆς § 105.

351. Ἔχοντας ὑπόψη τήν ἀνισότητα (3) τῆς § 157 νά ἀποδείξετε ὅτι γιά κάθε φυσικό ἀριθμό ν ἰσχύει:

$$\frac{1}{\nu+1} < \log(\nu+1) - \log\nu < \frac{1}{\nu}$$

Στή συνέχεια νά συμπεράνετε ὅτι ἡ ἀκολουθία (α_ν) μέ γενικό ὅρο:

$$\alpha_\nu = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{\nu}$$

ἀπειρίζεται θετικά.

Ὑπόδειξη. Νά λάβετε ὑπόψη καί τήν προηγούμενη ἄσκηση.

352. Ἄν $\alpha, \beta, x \in \mathbf{R}^+ - \{1\}$ καί ἰσχύει: $\lambda o\gamma_\rho \alpha \cdot \lambda o\gamma_\lambda \beta = \frac{1}{4}$, ὅπου $\rho = \beta^2$, $\lambda = x^2$, νά ἀποδείξετε ὅτι ὁ x δέν ἐξαρτᾶται ἀπό τό β.

Ὑπόδειξη. Νά λάβετε ὑπόψη τό πόρισμα 2ο τῆς § 154.

353. Ἄν $x, y, z \in \mathbf{R}^+$ καί εἶναι διάφοροι ἀπό τόν α, ὅπου $0 < \alpha \neq 1$, νά ἀποδείξετε ὅτι:

$$\left(y = \alpha^{\frac{1}{1-\lambda o\gamma_\alpha x}} \wedge z = \alpha^{\frac{1}{1-\lambda o\gamma_\alpha y}} \right) \Rightarrow x = \alpha^{\frac{1}{1-\lambda o\gamma_\alpha z}}.$$

354. Ἄν $\alpha, x, y \in \mathbf{R}^+$ καί $y < x$, νά ἀποδείξετε ὅτι: $\frac{1}{x}\log(1+\alpha^x) < \frac{1}{y}\log(1+\alpha^y)$.

Ὑπόδειξη. Νά διακρίνετε τίς περιπτώσεις: **(i)** $\alpha = 1$, **(ii)** $0 < \alpha < 1$, **(iii)** $\alpha > 1$.

355. Νά ἀποδείξετε ὅτι: γιά κάθε $\alpha > 0$ ἡ ἀκολουθία (γ_ν) μέ γενικό ὅρο:

$$\gamma_\nu = (1+\alpha)(1+\alpha^2)\cdots(1+\alpha^\nu)$$

εἶναι γνησίως αὔξουσα καί ἱκανοποιεῖ τή σχέση: $0 < \gamma_\nu < e^{\alpha\frac{1-\alpha^\nu}{1-\alpha}}$ $\forall\ \nu \in \mathbf{N}$.

Εἰδικά γιά $0 < \alpha < 1$, νά ἀποδείξετε ὅτι ὑπάρχουν ἀριθμοί Μ πού ἐξαρτῶνται ἀπό τό α, ὥστε νά ἰσχύει: $\gamma_\nu \leq M$ $\forall\ \nu \in \mathbf{N}$. Τέλος, νά ἀποδείξετε ὅτι: γιά $0 < \alpha < 1$ ἰσχύει:

$$\frac{1}{1-\alpha} \leqq \lim \gamma_\nu \leqq e^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}.$$

Ὑπόδειξη. Γιά κάθε $x > 0$ ἰσχύει $e^x > 1 + x$ (βλ. 1η ἐφαρμογή, § 157). Ἐπίσης νά λάβετε ὑπόψη καί τήν ἄσκηση **23** (1) τῆς σελίδας 27.

II. ΔΕΚΑΔΙΚΟΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ

§ 158. Ὁρισμοί - Ἰδιότητες.— Ὅπως μάθαμε καί στήν § 147 οἱ λογάριθμοι ὡς πρός βάση 10 ὀνομάζονται **δεκαδικοί λογάριθμοι** καί παριστάνονται μέ λογ ἀντί $\lambda o\gamma_{10}$. Ἔτσι ἔχουμε:

$$\boxed{\lambda o\gamma\theta = x \iff 10^x = \theta} \qquad (1)$$

Ἀπό τήν παραπάνω ἰσοδυναμία συμπεραίνουμε ὅτι:

Δεκαδικός λογάριθμος *ἑνός θετικοῦ ἀριθμοῦ θ εἶναι ὁ πραγματικός ἀριθμός x στόν ὁποῖο πρέπει νά ὑψωθεῖ ἡ βάση 10 γιά νά δώσει τόν ἀριθμό θ.*

Ἔτσι, π.χ., ἔχουμε:

$$\text{λογ}\,100 = 2,\ \text{ἐπειδή}\ 10^2 = 100 \quad\Big\|\quad \text{λογ}\,1000 = 3,\ \text{ἐπειδή}\ 10^3 = 1000$$

$$\text{λογ}\,0{,}01 = -2,\ \text{ἐπειδή}\ 10^{-2} = 0{,}01 \quad\Big\|\quad \text{λογ}\,\sqrt[5]{10^3} = \frac{3}{5},\ \text{ἐπειδή}\ 10^{3/5} = \sqrt[5]{10^3}.$$

Στά ἑπόμενα θά ἀσχοληθοῦμε **μόνο** μέ δεκαδικούς λογαρίθμους. Ἔτσι στό ἑξῆς μέ τόν ὅρο: *«λογάριθμο»* θά ἐννοοῦμε: *«δεκαδικό λογάριθμο»*.

Οἱ ἰδιότητες τῶν δεκαδικῶν λογαρίθμων ἔχουν καταγραφεῖ στή δεύτερη στήλη τοῦ πίνακα τῆς σελίδας 219. Ἐπιπλέον, σύμφωνα καί μέ τό πόρισμα τῆς § 155, ἔχουμε:

$$\boldsymbol{\theta > 1 \iff \text{λογ}\theta > 0} \quad \text{καί} \quad \boldsymbol{0 < \theta < 1 \iff \text{λογ}\theta < 0.}$$

Ἐπίσης εἶναι:

$$\text{λογ}\,\theta \equiv \text{λογ}_{10}\theta = \frac{\log\theta}{\log 10} = \text{M}\cdot\log\theta,\ \text{ὅπου}\ \text{M} = \frac{1}{\log 10} = \frac{\log e}{\log 10} = \text{λογ}e = 0{,}43429\ldots$$

Εἰδικότερα γιά τούς δεκαδικούς λογαρίθμους ἰσχύουν:

α) *Ὁ λογάριθμος μιᾶς δυνάμεως τοῦ 10 μέ ἐκθέτη ρητό ἀριθμό εἶναι ἴσος μέ τό ρητό ἐκθέτη.*

Δηλαδή: ἄν $\rho \in \mathbf{Q}$, τότε $\text{λογ}\,10^\rho = \rho$.

Στήν εἰδική περίπτωση πού $\rho \in \mathbf{Z}$, ὁ λογάριθμος τοῦ 10^ρ εἶναι ὁ ἀκέραιος ἀριθμός ρ. Ἔτσι π.χ. $\text{λογ}\,100 = \text{λογ}\,10^2 = 2$, $\text{λογ}\,0{,}01 = \text{λογ}\,10^{-2} = -2$.

Εἶναι χρήσιμο νά ξέρουμε ἀπό μνήμης τούς λογαρίθμους μερικῶν ἀριθμῶν:

x	...	0,0001	0,001	0,01	0,1	1	10	100	1000	10000	...
λογ x	...	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	...

β) *Οἱ λογάριθμοι τῶν ἀριθμῶν πού δέν εἶναι δυνάμεις τοῦ 10 μέ ἐκθέτη ρητό ἀριθμό εἶναι ἄρρητοι ἀριθμοί.*

Πράγματι, ἄς θεωρήσουμε ἕναν (θετικό) ἀριθμό θ μέ $\theta \neq 10^\rho$, ὅπου $\rho \in \mathbf{Q}$, καί ἄς ὑποθέσουμε ὅτι $\text{λογ}\theta = \frac{\mu}{\nu}$, ὅπου $\mu \in \mathbf{Z}$ καί $\nu \in \mathbf{N}$. Τότε, σύμφωνα μέ τήν ἰσοδυναμία (1), θά ἔχουμε: $\theta = 10^{\frac{\mu}{\nu}} \equiv 10^\rho$, ὅπου $\rho \in \mathbf{Q}$. Αὐτό ὅμως εἶναι ἄτοπο, λόγῳ τῆς ὑποθέσεως πού κάναμε γιά τό θ.

Ἀπό τά παραπάνω συμπεραίνουμε ὅτι: *Οἱ λογάριθμοι ὅλων τῶν θετικῶν ἀριθμῶν, ἐκτός ἀπό τίς δυνάμεις τοῦ 10 μέ ρητό ἐκθέτη, εἶναι ἄρρητοι ἀριθμοί καί κατά συνέπεια δέν ὑπολογίζονται ἀκριβῶς, ἀλλά κατά προσέγγιση μιᾶς δεκαδικῆς μονάδας* (συνήθως ὑπολογίζονται κατά προσέγγιση 0,00001).

γ) *Ἄν οἱ θετικοί ἀριθμοί θ_1 καί θ_2 ἔχουν πηλίκο ἀκέραιη δύναμη τοῦ 10, τότε ὁ $(\text{λογ}\theta_1 - \text{λογ}\theta_2)$ εἶναι ἀκέραιος ἀριθμός.*

Πράγματι, ἐπειδή $\theta_1 = 10^k \cdot \theta_2$, μέ $k \in Z$, ἔχουμε: $\lambda o\gamma\, \theta_1 = \lambda o\gamma\, 10^k + \lambda o\gamma\, \theta_2 = k + \lambda o\gamma\, \theta_2$. Ἄρα: $\lambda o\gamma\, \theta_1 - \lambda o\gamma\, \theta_2 = k \quad (k \in Z)$.

§ 159. Χαρακτηριστικό καί δεκαδικό μέρος ἑνός λογαρίθμου.—

Ἔστω ὅτι θέλουμε νά βροῦμε τό λογ 557.

Ἐπειδή $10^2 < 557 < 10^3$, λογαριθμίζοντας καί τά τρία μέλη θά ἔχουμε:

$$2 < \lambda o\gamma\, 557 < 3.$$

Ἄρα: $\lambda o\gamma\, 557 = 2, \ldots$

Ἑπομένως: $\lambda o\gamma\, 557 = 2 + d$, ὅπου d εἶναι ἕνας θετικός ἀριθμός μικρότερος ἀπό τή μονάδα.

Τό ἀκέραιο μέρος τοῦ λογαρίθμου (στό παραπάνω παράδειγμα ὁ ἀριθμός 2) λέγεται **«χαρακτηριστικό»** τοῦ λογαρίθμου καί ὁ θετικός καί μικρότερος ἀπό τή μονάδα δεκαδικός ἀριθμός d λέγεται **«δεκαδικό μέρος»** τοῦ λογαρίθμου. Τό χαρακτηριστικό τοῦ λογαρίθμου ἑνός ἀριθμοῦ θ, ($\theta > 0$) τό παριστάνουμε μέ [λογθ].

Ἀπό τό παραπάνω παράδειγμα καί τόν ὁρισμό τοῦ χαρακτηριστικοῦ ἑνός λογαρίθμου παρατηροῦμε ὅτι ὡς χαρακτηριστικό ἑνός λογαρίθμου ορίζουμε *τό μικρότερο ἀπό δύο διαδοχικούς ἀκεραίους μεταξύ τῶν ὁποίων βρίσκεται ὁ λογάριθμος αὐτός*. Ἔτσι ἔχουμε:

Ἄν $\lambda o\gamma\, \alpha = 5{,}03426$, τότε $[\lambda o\gamma\, \alpha] = 5$ καί $d = 0{,}03426$.

Ἄν $\lambda o\gamma\, \gamma = -2{,}32715$, τότε $[\lambda o\gamma\, \gamma] = -3$, ἐπειδή $-3 < -2{,}32715 < -2$.

Τό δεκαδικό μέρος τοῦ λογαρίθμου εἶναι μηδέν μόνο γιά τίς ἀκέραιες δυνάμεις τοῦ 10 καί θετικό σέ κάθε ἄλλη περίπτωση.

Ὥστε: **Τό δεκαδικό μέρος ἑνός λογαρίθμου εἶναι μή ἀρνητικός ἀριθμός.**

Ἄν d εἶναι τό δεκαδικό μέρος τοῦ λογ θ καί [λογ θ] τό χαρακτηριστικό του, τότε ἀπό τή σχέση: $\lambda o\gamma\, \theta = [\lambda o\gamma\, \theta] + d$ προκύπτει: $\boxed{d = \lambda o\gamma\, \theta - [\lambda o\gamma\, \theta]}$

Ἔτσι ἔχουμε: ἄν $\lambda o\gamma\, \theta = -3{,}45217$, τότε $[\lambda o\gamma\, \theta] = -4$ καί $d = -3{,}45217 - (-4) = 0{,}54783$.

*** Παρατηρήσεις: α)** Πιό γενικά: *ὡς* ***χαρακτηριστικό*** *τοῦ* $\lambda o\gamma_\alpha \theta$ *μέ* α, $\theta \in R^+$ *καί* $\alpha \neq 1$ *ὀνομάζουμε τό ἀκέραιο μέρος* (§ 44) *τοῦ πραγματικοῦ ἀριθμοῦ* $\lambda o\gamma_\alpha \theta$, δηλαδή *τό μεγαλύτερο ἀκέραιο ἀριθμό k γιά τόν ὁποῖο ἰσχύει:*

$$k \leqq \lambda o\gamma_\alpha \theta < k + 1 \qquad (1)$$

Ἀπό τόν παραπάνω ὁρισμό συμπεραίνουμε ὅτι τό χαρακτηριστικό τοῦ $\lambda o\gamma_\alpha \theta$ εἶναι πάντοτε ἕνας ἀκέραιος ἀριθμός (θετικός, ἀρνητικός ἤ τό μηδέν). Ἐξάλλου, ἐπειδή $\lambda o\gamma_\alpha \alpha = 1$, ἡ (1) γράφεται:

$$k \cdot \lambda o\gamma_\alpha \alpha \leqq \lambda o\gamma_\alpha \theta < (k+1)\lambda o\gamma_\alpha \alpha \Longrightarrow \lambda o\gamma_\alpha (\alpha^k) \leqq \lambda o\gamma_\alpha \theta < \lambda o\gamma_\alpha \alpha^{k+1} \qquad (2)$$

Διακρίνουμε τώρα τίς περιπτώσεις:

(i) Ἄν $\alpha > 1$, τότε ἀπό τή (2) ἔχουμε: $\quad \alpha^k \leqq \theta < \alpha^{k+1} \qquad (3)$

δηλαδή οἱ ἀριθμοί θ πού ἀνήκουν στό διάστημα $[\alpha^k, \alpha^{k+1})$, καί μόνο αὐτοί, ἔχουν λογαρίθμους ὡς πρός βάση α μέ χαρακτηριστικό τόν ἀκέραιο ἀριθμό k.

Στήν είδική περίπτωση πού είναι $\alpha = 10$, ή (3) γράφεται: $10^k \leqq \theta < 10^{k+1}$ (4)

Ἀπό τήν (4) συμπεραίνουμε τώρα ὅτι : *οἱ θετικοί ἀριθμοί θ πού ἔχουν δεκαδικούς λογαρίθμους μέ χαρακτηριστικό k εἶναι αὐτοί πού ἔχουν k + 1 ἀκέραια ψηφία* ($k \in N_0$). Ἐπίσης ἀπό τήν (4) συμπεραίνουμε ὅτι : *τό χαρακτηριστικό τοῦ δεκαδικοῦ λογαρίθμου ἑνός θετικοῦ ἀριθμοῦ θ εἶναι ὁ ἐκθέτης τῆς μεγαλύτερης ἀκέραιης δυνάμεως τοῦ 10, ἡ ὁποία δέν ὑπερβαίνει τόν ἀριθμό αὐτό.*

(ii) Ἄν $0 < \alpha < 1$, τότε ἀπό τή (2) ἔχουμε: $\alpha^k \geqq \theta > \alpha^{k+1}$ (5)
δηλαδή οἱ ἀριθμοί πού ἀνήκουν στό διάστημα $(\alpha^{k+1}, \alpha^k]$ ἔχουν λογαρίθμους μέ χαρακτηριστικό k.

β). Εἴδαμε προηγουμένως ὅτι: ἄν $[\lambda o\gamma\theta] = k$, $k \in \mathbf{Z}$, τότε ἰσχύει:

$$10^k \leqq \theta < 10^{k+1} \qquad (6)$$

Ἀντιστρόφως, ἄν ἰσχύει ή (6), τότε $[\lambda o\gamma\theta] = k$. Πράγματι, ἀπό τήν (6) ἔχουμε : $\lambda o\gamma 10^k \leqq \lambda o\gamma\theta < \lambda o\gamma 10^{k+1}$, δηλ. $k \leqq \lambda o\gamma\theta < k + 1$. Ἄρα $[\lambda o\gamma\theta] = k$, ἐπειδή ὁ k εἶναι ὁ μεγαλύτερος ἀκέραιος πού δέν ὑπερβαίνει τό λογθ.

γ) Ὅπως ξέρουμε (§ 44, α) γιά κάθε $x \in \mathbf{R}$ ἰσχύει : $x = [x] + d$, ὅπου $0 \leqq d < 1$. Ἄρα: $\lambda o\gamma\theta = [\lambda o\gamma\theta] + d$ μέ $0 \leqq d < 1$. Αὐτόν τό μή ἀρνητικό ἀριθμό d τόν ὀνομάζουμε **δεκαδικό μέρος** τοῦ λογθ.

§ 160. Τροπή ἀρνητικοῦ λογαρίθμου σέ ἡμιαρνητικό.

—Εἴπαμε παραπάνω ὅτι τό δεκαδικό μέρος ἑνός λογαρίθμου εἶναι μή ἀρνητικός ἀριθμός· ἐπειδή ὅμως οἱ λογάριθμοι τῶν θετικῶν ἀριθμῶν πού εἶναι μικρότεροι ἀπό τή μονάδα εἶναι ἀρνητικοί, καί τέτοιοι λογάριθμοι δέν εἶναι εὔκολοι στή χρήση γι' αὐτό τούς ἀρνητικούς λογαρίθμους τούς μετατρέπουμε σέ **«ἡμιαρνητικούς»**, δηλαδή σέ λογαρίθμους πού ἔχουν **μόνο** τό ἀκέραιο μέρος τους (χαρακτηριστικό) ἀρνητικό, ἐνῶ τό δεκαδικό τους μέρος εἶναι θετικό.

Ἡ μετατροπή αὐτή γίνεται ὡς ἑξῆς:

Ἔστω $-2{,}54327$ ἤ $-2 - 0{,}54327$ ὁ λογάριθμος κάποιου ἀριθμοῦ· ἄν σ' αὐτό προσθέσουμε τό -1 καί $+1$ (καί ἔτσι ὁ ἀριθμός δέν ἀλλάζει) λαμβάνουμε:

$$-2 - 1 + 1 - 0{,}54327 = -3 + (1 - 0{,}54327) = -3 + 0{,}45673.$$

Ὥστε εἶναι: $$-2{,}54327 = -3 + 0{,}45673.$$

Συμφωνοῦμε νά γράφουμε τόν ἀριθμό $-3 + 0{,}45673$ ὡς ἑξῆς: $\overline{3}{,}45673$· δηλαδή γράφουμε τό — πάνω ἀπό τό ἀκέραιο μέρος γιά νά δείξουμε ὅτι **μόνο** αὐτό εἶναι ἀρνητικό. Ἔτσι φαίνεται, ὅτι τό χαρακτηριστικό τοῦ λογαρίθμου εἶναι τό ἀκέραιο μέρος -3, ἐπειδή $-3 < -2{,}54327 < -2$, καί δεκαδικό μέρος τοῦ λογαρίθμου εἶναι τό δεκαδικό μέρος πού εἶναι γραμμένο, ἐπειδή αὐτό εἶναι ἡ διαφορά πού προκύπτει ἄν ἀπό τό λογάριθμο $-3 + 0{,}45673$ ἀφαιρέσουμε τό χαρακτηριστικό του -3.

Ἀπό τά παραπάνω ἔχουμε τόν ἑξῆς πρακτικό κανόνα:

Κανόνας: *Γιά νά μετατρέψουμε ἕναν ἀρνητικό λογάριθμο σέ ἡμιαρνητικό, αὐξάνουμε τήν ἀπόλυτη τιμή τοῦ ἀκεραίου κατά 1, στόν ἀριθμό πού προκύπτει γράφουμε ἀπό πάνω τό —, καί δεξιά ἀπ' αὐτόν γράφουμε ὡς δεκαδικά ψηφία τούς ἀριθμούς πού βρίσκουμε, ἄν ἀφαιρέσουμε κάθε ψηφίο τοῦ δεκαδικοῦ μέρους τοῦ λογαρίθμου πού μᾶς δόθηκε ἀπό τό 9 καί τοῦ τελευταίου ἀπό τό 10.*

Ἔτσι, π.χ.: Ἄν $\lambda o\gamma\theta = -3{,}85732$, θά ἔχουμε: $\lambda o\gamma\,\theta = \overline{4}{,}14268$.

Ἄν $\lambda o\gamma\,\theta = -2{,}35724$, θά ἔχουμε: $\lambda o\gamma\,\theta = \overline{3}{,}64276$.

§ 161. Ἰδιότητες τῶν δεκαδικῶν λογαρίθμων.— α) Τό χαρακτηριστικό τοῦ λογαρίθμου ἑνός ἀριθμοῦ θ εἶναι ὁ ἐκθέτης τῆς μεγαλύτερης ἀκέραιης δυνάμεως τοῦ 10, ἡ ὁποία δέν ὑπερβαίνει τόν ἀριθμό αὐτό.

Ἀπόδειξη. Ἄς πάρουμε ἕνα ἀριθμητικό παράδειγμα. Ἔστω ὅτι θέλουμε νά βροῦμε τό χαρακτηριστικό τοῦ: λογ 257.

Ἐπειδή: $$10^2 = 100 < 257 < 1000 = 10^3 \qquad (1)$$
ἄν λάβουμε τούς λογαρίθμους τῶν ἀριθμῶν πού βρίσκονται στά τρία μέλη τῆς (1), θά ἔχουμε: $2 < \text{λογ}\, 257 < 3$.

Δηλαδή: $\text{λογ}\, 257 = 2 + d$, ὅπου $0 < d < 1$, καί συνεπῶς $[\text{λογ}\, 257] = 2$.

Ἔστω τώρα ὅτι θέλουμε νά βροῦμε τό $[\text{λογ}\theta]$. Ἄν 10^k εἶναι ἡ μεγαλύτερη ἀκέραιη δύναμη τοῦ 10 πού δέν ὑπερβαίνει τό (θετικό) ἀριθμό θ, τότε θά ἔχουμε:
$$10^k \leqq \theta < 10^{k+1}, \quad k \in \mathbf{Z}.$$
ὁπότε: $$k \leqq \text{λογ}\,\theta < k + 1.$$
Τότε ὅμως ὁ λογθ θά εἶναι ἴσος ἤ μέ k ἤ μέ $k + d$, ὅπου $0 < d < 1$.

Ἄρα τό χαρακτηριστικό τοῦ λογθ εἶναι ἴσο μέ k.

β) Τό χαρακτηριστικό τοῦ λογαρίθμου ἑνός ἀριθμοῦ $\theta > 1$ εἶναι μικρότερο κατά μία μονάδα ἀπό τό πλῆθος τῶν ψηφίων τοῦ ἀκέραιου μέρους τοῦ θ.

Δηλαδή: *ἄν k εἶναι τό πλῆθος τῶν ψηφίων τοῦ ἀκέραιου μέρους τοῦ θ, τότε τό χαρακτηριστικό τοῦ λογθ θά εἶναι $(k-1)$.*

Ἀπόδειξη. Ἄς πάρουμε πάλι ἕνα ἀριθμητικό παράδειγμα. Ἔστω $\theta = 23{,}5$.

Ἐπειδή $\quad 10 < 23{,}5 < 100$, δηλ. $\quad 10^1 < 23{,}5 < 10^2$,

δηλ. $\quad 10^{2-1} < 23{,}5 < 10^2$,

θά ἔχουμε: $\quad (2-1) < \text{λογ}\, 23{,}5 < 2$.

Ἄρα: $\quad [\text{λογ}\, 23{,}5] = 1 = 2 - 1$.

Ἔστω τώρα ὅτι θέλουμε νά βροῦμε τό $[\text{λογ}\theta]$, ὅπου $\theta > 1$. Ἄν τό ἀκέραιο μέρος τοῦ θ ἔχει k ψηφία, τότε ὁ θ θά περιέχεται μεταξύ τῶν 10^{k-1} καί 10^k, δηλ. θά ἔχουμε:
$$10^{k-1} \leqq \theta < 10^k \Longrightarrow (k-1) \leqq \text{λογ}\,\theta < k.$$
Ἄρα τό χαρακτηριστικό τοῦ λογθ εἶναι ἴσο μέ $(k-1)$.

Ἔτσι, π.χ. ἔχουμε: $\text{λογ}\, 5378{,}4 = 3, \ldots, \text{λογ}\, 3{,}748 = 0, \ldots$

γ) Τό χαρακτηριστικό τοῦ λογαρίθμου ἑνός θετικοῦ ἀριθμοῦ $\theta < 1$, ὁ ὁποῖος εἶναι γραμμένος μέ δεκαδική μορφή, ἔχει τόσες ἀρνητικές μονάδες ὅση εἶναι ἡ τάξη τοῦ πρώτου σημαντικοῦ ψηφίου του μετά τήν ὑποδιαστολή.

Ἀπόδειξη. Ἔστω, π.χ. ὅτι $\theta = 0{,}025$, τότε: $10^{-2} < \theta = 0{,}025 < 10^{-1}$

(γιατί: $\frac{1}{100} < \frac{25}{1000} < \frac{1}{10} \Longleftrightarrow \frac{1}{100} < \frac{1}{40} < \frac{1}{10} \Longleftrightarrow 10 < 40 < 100$)

ὁπότε: $\quad \text{λογ}\, 10^{-2} < \text{λογ}\, 0{,}025 < \text{λογ}\, 10^{-1}$

ἤ $\quad -2 < \text{λογ}\, 0{,}025 < -1$,

ἄρα: $\quad [\text{λογ}\, 0{,}025] = -2$.

Ἔστω τώρα ὅτι θέλουμε νά βροῦμε τό [λογθ], ὅπου $0 < \theta < 1$. Ἄν k εἶναι ἡ τάξη τοῦ πρώτου σημαντικοῦ ψηφίου μετά τήν ὑποδιαστολή στή δεκαδική μορφή τοῦ θ, θά εἶναι:

$$10^{-k} \leqq \theta < 10^{-k+1},$$

ὁπότε: $$\lambda o\gamma\, 10^{-k} \leqq \lambda o\gamma\, \theta < \lambda o\gamma\, 10^{-k+1},$$

δηλ. $$-k \leqq \lambda o\gamma\, \theta < -k + 1.$$

Ἄρα: $$[\lambda o\gamma\, \theta] = -k.$$

Ἔτσι, π.χ. ἔχουμε: $\lambda o\gamma\, 0{,}00729 = \overline{3}, \ldots, \quad \lambda o\gamma\, 0{,}27508 = \overline{1}, \ldots$

Παρατήρηση. Ἐφαρμόζοντας τίς παραπάνω ἰδιότητες μποροῦμε νά βρίσκουμε ἀπό μνήμης τό χαρακτηριστικό τοῦ λογαρίθμου ἑνός ἀριθμοῦ.

Ἀντιστρόφως: ἀπό τίς ἰδιότητες β καί γ ἔχουμε:

δ) Ἄν τό χαρακτηριστικό τοῦ λογαρίθμου ἑνός ἀριθμοῦ (θετικοῦ) x εἶναι ἀριθμός θετικός ἤ μηδέν, τότε ὁ ἀριθμός x ἔχει τόσα ἀκέραια ψηφία, ὅσες μονάδες ἔχει τό χαρακτηριστικό καί ἕνα ἀκόμη. Ἄν ὁ λογάριθμος τοῦ x εἶναι ἡμιαρνητικός, τότε τό ἀκέραιο μέρος τοῦ x εἶναι τό μηδέν, καί τό πρῶτο σημαντικό ψηφίο τοῦ x μετά τήν ὑποδιαστολή κατέχει τάξη ἴση μέ τό πλῆθος τῶν μονάδων τῆς ἀπόλυτης τιμῆς τοῦ χαρακτηριστικοῦ.

Ἔτσι, ἄν τό χαρακτηριστικό τοῦ λογαρίθμου ἑνός ἀριθμοῦ εἶναι 3, τό ἀκέραιο μέρος αὐτοῦ τοῦ ἀριθμοῦ ἔχει τέσσερα ψηφία· ἄν τό χαρακτηριστικό εἶναι 0, τό ἀκέραιο μέρος τοῦ ἀριθμοῦ ἔχει ἕνα ψηφίο· ἄν τό χαρακτηριστικό εἶναι $\overline{2}$, ὁ ἀριθμός εἶναι δεκαδικός τῆς μορφῆς $0{,}0y_1y_2y_3y_4 \ldots$, ὅπου $1 \leqq y_i \leqq 9$.

ε) Ἄν πολλαπλασιάσουμε (ἤ διαιρέσουμε) ἕναν ἀριθμό μέ 10^ν, $\nu \in \mathbf{N}$, τό δεκαδικό μέρος τοῦ λογαρίθμου δέ μεταβάλλεται, τό χαρακτηριστικό ὅμως αὐξάνεται (ἤ ἐλαττώνεται) κατά ν μονάδες.

Ἀπόδειξη. Ἔστω ὁ θετικός ἀριθμός θ μέ $\lambda o\gamma\, \theta = y_0, y_1y_2y_3 \cdots$.

Πολλαπλασιάζοντας τόν ἀριθμό θ μέ 10^ν, $\nu \in \mathbf{N}$ ἔχουμε:

$$\lambda o\gamma\, (10^\nu \cdot \theta) = \lambda o\gamma\, 10^\nu + \lambda o\gamma\, \theta = \nu + \lambda o\gamma\, \theta = \nu + y_0, y_1y_2y_3 \cdots =$$
$$= (y_0 + \nu), y_1y_2y_3 \cdots \qquad (1)$$

Ἐπίσης ἄν διαιρέσουμε τό θ μέ 10^ν, $\nu \in \mathbf{N}$ ἔχουμε:

$$\lambda o\gamma \left(\frac{\theta}{10^\nu}\right) = \lambda o\gamma\, \theta - \lambda o\gamma\, 10^\nu = -\nu + \lambda o\gamma\, \theta = -\nu + y_0, y_1y_2y_3 \cdots =$$
$$= (y_0 - \nu), y_1y_2y_3 \cdots \qquad (2)$$

Οἱ ἰσότητες (1) καί (2) δείχνουν ὅτι ἐνῶ τό δεκαδικό μέρος τοῦ $\lambda o\gamma(\theta \cdot 10^k)$, $k \in \mathbf{Z}$, εἶναι τό ἴδιο μέ τό δεκαδικό μέρος τοῦ λογθ, τό χαρακτηριστικό ὅμως τοῦ $\lambda o\gamma\, (\theta \cdot 10^k)$ αὐξάνεται σέ σχέση μέ τό χαρακτηριστικό τοῦ λογθ κατά k ἀκέραιες μονάδες, ἄν k εἶναι μή ἀρνητικός ἀκέραιος ἤ ἐλαττώνεται κατά k ἀκέραιες μονάδες, ἄν k εἶναι ἀρνητικός ἀκέραιος ἀριθμός.

Σύμφωνα μέ τήν πιό πάνω ἰδιότητα οἱ ἀριθμοί, π.χ., 5, 50, 500, 5000, . . ἔχουν τό ἴδιο δεκαδικό μέρος στό λογάριθμό τους. Ἐπίσης οἱ ἀριθμοί: 0,5, 0,05, 0,005, 0,0005, . . .

Πόρισμα.— Ἄν δύο ἀριθμοί γραμμένοι σέ δεκαδική μορφή ἔχουν τά ἴδια ψηφία καί μέ τήν ἴδια τάξη διαφέρουν ὅμως ὡς πρός τή θέση τῆς ὑποδιαστολῆς, οἱ λογάριθμοί τους θά διαφέρουν μόνο ὡς πρός τό χαρακτηριστικό τους.

Ἄν εἶναι, π.χ., $\text{λογ}\, 312{,}865 = 2{,}49536$, τότε θά εἶναι:

$$\text{λογ}\, 31{,}2865 = 1{,}49536 \qquad \text{λογ}\, 31286{,}5 = 4{,}49536$$

$$\text{λογ}\, 0{,}312865 = \overline{1}{,}49536 \qquad \text{λογ}\, 3{,}12865 = 0{,}49536.$$

§ 162. Πράξεις στούς δεκαδικούς λογαρίθμους.

—Οἱ πράξεις στούς δεκαδικούς λογαρίθμους γίνονται ὅπως καί στούς δεκαδικούς ἀριθμούς, μέ μερικές παραλλαγές, ὅταν οἱ λογάριθμοι ἔχουν ἀρνητικό χαρακτηριστικό. Ἔχουμε τίς ἑξῆς πράξεις:

α΄) Πρόσθεση λογαρίθμων. Γιά νά προσθέσουμε δεκαδικούς λογαρίθμους προσθέτουμε τά δεκαδικά μέρη (πού εἶναι ὅλα θετικά) καί τό ἀκέραιο μέρος τοῦ ἀθροίσματός τους τό προσθέτουμε ἀλγεβρικά στό (ἀλγεβρικό) ἄθροισμα τῶν ἀκέραιων μερῶν τῶν λογαρίθμων.

Π.χ. **Νά γίνει ἡ πρόσθεση: $\overline{2}{,}85643 + 2{,}24482 + \overline{3}{,}42105 + \overline{1}{,}24207$.** Ἔχουμε:

$$\begin{array}{r} \overline{2}{,}85643 \\ 2{,}24482 \\ \overline{3}{,}42105 \\ \overline{1}{,}24207 \\ \hline \overline{3}{,}76437 \end{array}$$

Ἐδῶ τό ἄθροισμα τῶν δεκαδικῶν μερῶν ἔχει μία ἀκέραιη μονάδα καί συνεπῶς τό ἀκέραιο μέρος τοῦ ἀθροίσματος εἶναι:

$$1 + (-1) + (-3) + 2 + (-2) = -3 = \overline{3}.$$

β΄) Ἀφαίρεση λογαρίθμων. Γιά νά ἀφαιρέσουμε δεκαδικούς λογαρίθμους ἀφαιροῦμε τά δεκαδικά μέρη· ἄν ἀπό αὐτή τήν ἀφαίρεση προκύψει τελικά κρατούμενο (αὐτό εἶναι θετικό), τό προσθέτουμε (ἀλγεβρικά) στό χαρακτηριστικό τοῦ ἀφαιρετέου καί τό ἄθροισμα πού προκύπτει τό ἀφαιροῦμε ἀπό τό χαρακτηριστικό τοῦ μειωτέου.

Π.χ. **1) Νά γίνει ἡ ἀφαίρεση: $\overline{2}{,}83754 - \overline{5}{,}32452$.** Ἔχουμε:

$$\begin{array}{r} \overline{2}{,}83754 \\ \overline{5}{,}32452 \\ \hline 3{,}51302 \end{array}$$

Ἐδῶ δέν ὑπάρχει κρατούμενο καί τό χαρακτηριστικό ἰσοῦται μέ:

$$-2 - (-5) = 3.$$

2) Νά γίνει ἡ ἀφαίρεση: $\overline{3}{,}48765 - \overline{2}{,}75603$. Ἔχουμε:

$$\begin{array}{r} \overline{3}{,}48765 \\ \overline{2}{,}75603 \\ \hline \overline{2}{,}73162 \end{array}$$

Ἐδῶ τό τελικό κρατούμενο εἶναι 1 καί τό χαρακτηριστικό ἰσοῦται μέ: $-3 - (-2 + 1) = -3 - (-1) = -2 = \overline{2}$.

Παρατήρηση: Εἶναι γνωστό (§ 156) ὅτι: $\text{λογα} - \text{λογβ} = \text{λογα} + \text{συλλογβ}$, δηλαδή ἡ ἀφαίρεση ἑνός λογαρίθμου ἀνάγεται στήν πρόσθεση τοῦ συλλογαρίθμου του.

Γιά νά ὑπολογίσουμε τό συλλογάριθμο ἑνός (θετικοῦ) ἀριθμοῦ, ὅταν εἶναι γνωστός ὁ λογάριθμός του, προσθέτουμε στό χαρακτηριστικό τοῦ λογαρίθμου τό + 1 καί ἀλλάζουμε τό σημεῖο στό ἄθροισμα, καί στή συνέχεια τό δεκαδικό μέρος τοῦ λογαρίθμου τό ἀφαιροῦμε ἀπό τή μονάδα.

Π.χ. 1) Ἄν $\text{λογβ} = 2{,}54675$. Τότε θά ἔχουμε: $\text{συλλογβ} = -\text{λογβ} = -2{,}54675$ (1)
Ἐπειδή (§ 160) $-2{,}54675 = \overline{3}{,}45325$, ἡ (1) γίνεται: $\text{συλλογβ} = \overline{3}{,}45325$.

2) Ἄν $\log\alpha = \overline{1},37260$, τότε $\text{συλλογ}\,\alpha = 0,62740$.

3) Ἄν $\log 0,06543 = \overline{2},81578$, τότε $\text{συλλογ}\,0,06543 = 1,18422$.

γ') Πολλαπλασιασμός ἑνός λογαρίθμου μέ ἀκέραιο ἀριθμό.

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

i) Ἄν ὁ ἀκέραιος εἶναι θετικός, τότε πολλαπλασιάζουμε τό δεκαδικό μέρος τοῦ λογαρίθμου ἐπί τό θετικό ἀκέραιο καί γράφουμε μόνο τά δεκαδικά ψηφία τοῦ γινομένου· τό ἀκέραιο μέρος αὐτοῦ τοῦ γινομένου τό προσθέτουμε ἀλγεβρικά στό γινόμενο: τοῦ χαρακτηριστικοῦ ἐπί τό θετικό ἀριθμό.

Π.χ. **Νά γίνει ὁ πολλαπλασιασμός: $\overline{2},65843 \times 4$. Ἔχουμε:**

$$\begin{array}{r} \overline{2},65843 \\ 4 \\ \hline \overline{6},63372 \end{array}$$

Ἐδῶ τό τελικό κρατούμενο εἶναι 2 καί τό χαρακτηριστικό τοῦ γινομένου ἰσοῦται μέ:

$(-2)\cdot 4 + 2 = -6 = \overline{6}$.

ii) Ἄν ὁ ἀκέραιος εἶναι ἀρνητικός, τότε πολλαπλασιάζουμε τό συλλογάριθμο τοῦ ἀριθμοῦ ἐπί τόν ἀντίθετο τοῦ ἀκεραίου. Ἀλλά τότε ἀναγόμαστε στήν πρώτη περίπτωση.

Π.χ. **Νά γίνει ὁ πολλαπλασιασμός: $\overline{3},67942 \times (-4)$.**

Ἔστω $\log x = \overline{3},67942$, τότε $\text{συλλογ}\,x = 2,32058$

καί συνεπῶς: $\overline{3},67942 \times (-4) = 2,32058 \times 4 = 9,28232$.

δ') Διαίρεση ἑνός λογαρίθμου μέ ἀκέραιο ἀριθμό.

1) Γιά νά διαιρέσουμε τό $\log\theta$ μέ θετικό ἀκέραιο (φυσικό) ἀριθμό k, ἐφόσον $\log\theta > 0$ ἐργαζόμαστε ὅπως καί στούς δεκαδικούς ἀριθμούς· ἄν ὅμως ὁ $\log\theta$ εἶναι ἡμιαρνητικός, ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς:

1α) Ἄν ὁ k διαιρεῖ (ἀκριβῶς) τό χαρακτηριστικό τοῦ $\log\theta$, τότε διαιροῦμε χωριστά τό δεκαδικό μέρος καί χωριστά τό χαρακτηριστικό καί προσθέτουμε τά πηλίκα.

1β) Ἄν ὁ k δέ διαιρεῖ τό χαρακτηριστικό, τότε σ' αὐτό τό χαρακτηριστικό προσθέτουμε τό μικρότερο ἀρνητικό ἀκέραιο $-\mu$ ἔτσι, ὥστε: ὁ ἀριθμός πού θά προκύψει νά εἶναι διαιρετός διά τοῦ k. Μετά προσθέτουμε τό $+\mu$ στό δεκαδικό μέρος τοῦ λογαρίθμου καί βρίσκουμε, χωριστά, τά πηλίκα τῶν δύο αὐτῶν μερῶν (διά τοῦ k) καί τελικά τά προσθέτουμε.

Π.χ. **Νά γίνουν οἱ διαιρέσεις: 1) $(\overline{6},54782):3$ καί 2) $(\overline{5},62891):3$**

1)

$$\begin{array}{r|l} \overline{6},54782 & 3 \\ \overline{6} & \overline{2}+0,18260= \\ \hline 0+0,54782 & =\overline{2},18260 \\ 24 & \\ 07 & \\ 18 & \\ 02 & \end{array}$$

2)

$$\begin{array}{r|l} \overline{5},62891 & 3 \\ \overline{5}+\overline{1}+1+0,62891 & \overline{2}+0,54297= \\ \overline{6}+1,62891 & =\overline{2},54297 \\ \overline{6} & \\ \hline 0+1,62891 & \\ 12 & \\ 08 & \\ 29 & \\ 21 & \\ 0 & \end{array}$$

2) Γιά νά διαιρέσουμε τό $\log\theta$ διά τοῦ ἀρνητικοῦ ἀκεραίου k, διαιροῦμε τό $\text{συλλογ}\,\theta$ διά τοῦ $-k > 0$.

Π.χ. **Νά γίνει ή διαίρεση: (5,92158) : (—2).** Ἔχουμε:

Ἄν λογx = 5,92158, τότε συλλογx = $\overline{6}$,07842, ὁπότε:

$$(5{,}92158) : (-2) = (\overline{6}{,}07842) : 2 = \overline{3}{,}03921.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάδα Α΄. 356. Νά γίνουν ἡμιαρνητικοί οἱ λογάριθμοι:

1) –2,32254   2) –0,69834   3) –1,27218   4) –3,54642
5) –0,41203   6) –5,78952   7) –0,00208   8) –2,05024.

357. Νά γράψετε τό χαρακτηριστικό τῶν λογαρίθμων τῶν ἀριθμῶν:

1) 135   2) 2050   3) 9,5   4) 0,003   5) 382,27
6) 47,5   7) $\frac{17}{3}$ 8) 12,25   9) 0,56   10) 3041,7.

358. Πόσα ἀκέραια ψηφία ἔχει ἕνας ἀριθμός, τοῦ ὁποίου ὁ λογάριθμος ἔχει χαρακτηριστικό: 3, 5, 0, 1, 7, 4, 2;

359. Ὁ λογάριθμος ἑνός ἀριθμοῦ ἔχει χαρακτηριστικό: –1, –2, –3, –4, –5, –7. Ποιά εἶναι ἡ τάξη τοῦ πρώτου σημαντικοῦ ψηφίου τοῦ ἀριθμοῦ μετά τήν ὑποδιαστολή;

360. Ἄν λογα = $\overline{1}$,63819 καί λογ4347 = 3,63819, τότε νά ὑπολογίσετε τό α.

361. Ἄν εἶναι λογ7283 = 3,86231, νά ὑπολογίσετε τούς λογαρίθμους τῶν ἀριθμῶν:

0,7283,   7,283,   0,007283,   728300,   728,3.

362. Νά βρεθοῦν τά ἐξαγόμενα:

λογ724 – λογ7,24,   λογ0,65 – λογ6,5,   λογ17,62 – λογ1,762.

363. Ἄν λογα = $\overline{2}$,29814 καί λογβ = $\overline{2}$,84212, νά ὑπολογίσετε τά:

1. λογα + λογβ,   2. λογα – λογβ,   3. 3λογα + 5λογβ,
4. 2λογβ – $\frac{3}{4}$ λογα,   5. $\frac{7}{5}$(λογα + λογβ) – $\frac{3}{4}$(λογα – λογβ).

364. Νά ὑπολογίσετε τά ἀθροίσματα:

1. $\overline{5}$,27124 + 3,4751 + $\overline{1}$,81523 + 0,47214
2. 4,67471 + $\overline{2}$,14523 + 0,67215 + $\overline{3}$,04703.

365. Νά ἐκτελέσετε τίς πράξεις:

1. $\overline{3}$,24518 + $\overline{1}$,41307 – $\overline{2}$,47503
2. 0,03182 – $\overline{4}$,27513 + $\overline{3}$,82504 – $\overline{1}$,08507.

366. Νά ὑπολογίσετε τά γινόμενα:

1. $\overline{3}$,82307 × 5,   2. 0,24507 × (–2),   3. $\overline{1}$,24513 × 4.

367. Νά ἐκτελέσετε τίς διαιρέσεις:

1. $\overline{4}$,89524:3,   2. $\overline{5}$,60106:(–3),   3. $\overline{4}$,57424 : $\left(-\frac{3}{7}\right)$,
4. $\overline{1}$,42118:4,   5. $\overline{6}$,27508:(–2),   6. $\overline{8}$,32403:4.

★**Ὁμάδα Β΄. 368.** Νά βρεῖτε ὅλους τούς φυσικούς ἀριθμούς ν γιά τούς ὁποίους ὁ $λογ_3\left(\frac{1}{ν}\right)$ ἔχει χαρακτηριστικό: –2.

369. Νά ἀποδείξετε ὅτι: ἄν ξέρουμε τούς λογαρίθμους ὡς πρός βάση α, α > 1, ὅλων τῶν ἀριθμῶν πού περιέχονται μεταξύ τοῦ 1 καί τοῦ α, τότε μποροῦμε νά βροῦμε τό λογάριθμο τοῦ ὁποιουδήποτε θετικοῦ ἀριθμοῦ θ ὡς πρός βάση α.

370. Ἄν Κ εἶναι τό πλῆθος τῶν ἀκέραιων ἀριθμῶν πού οἱ λογάριθμοί τους ἔχουν χαρακτηριστικό k καί ἄν Λ εἶναι τό πλῆθος τῶν ἀκεραίων πού οἱ ἀντίστροφοί τους ἔχουν λογαρίθμους μέ χαρακτηριστικό $-\lambda$ $(\lambda > 0)$, νά ἀποδείξετε ὅτι: $\text{λογ}K - \text{λογ}\Lambda = k - \lambda + 1$.

Λογαριθμικοί Πίνακες

Ὅπως εἴδαμε, ἐκτός ἀπό τίς ρητές δυνάμεις τοῦ 10, ὅλοι οἱ ἄλλοι (θετικοί) ἀριθμοί ἔχουν λογαρίθμους ἄρρητους ἀριθμούς (γι' αὐτό ἔχουν ἄπειρα δεκαδικά ψηφία μή περιοδικά). Γι' αὐτό, τούς λογαρίθμους αὐτούς τούς βρίσκουμε κατά προσέγγιση (συνήθως 0,00001).

Ἐξάλλου, ἐπειδή $\text{λογ}\dfrac{1}{\alpha} = -\text{λογ}\alpha$, ὅταν ξέρουμε τούς λογαρίθμους τῶν ἀριθμῶν τῶν > 1, μποροῦμε νά ὑπολογίσουμε τούς λογαρίθμους τῶν (θετικῶν) ἀριθμῶν πού εἶναι < 1.

Ἐπίσης εἴδαμε, ὅτι ὁ λογάριθμος ἑνός ἀριθμοῦ ἀποτελεῖται ἀπό δύο μέρη: ἀπό τό **χαρακτηριστικό** του καί ἀπό τό **δεκαδικό** του μέρος.

Στήν § 161 δείξαμε πώς τό χαρακτηριστικό του ὑπολογίζεται ἀπό μνήμης.

Τό δεκαδικό του μέρος ὑπολογίζεται κατά προσέγγιση μέ μεθόδους πού ἀναπτύσσονται στά Ἀνώτερα Μαθηματικά. Μέ τίς μεθόδους αὐτές ὑπολογίστηκε τό δεκαδικό μέρος (μέ 5 ἤ 7 ἤ 11 ἤ 15 δεκαδικά ψηφία) ὅλων τῶν ἀκέραιων ἀριθμῶν ἀπό τό 1 μέχρι τό 10.000 καί εἶναι γραμμένο σέ πίνακες πού λέγονται **λογαριθμικοί πίνακες** ἤ **«πίνακες τοῦ δεκαδικοῦ μέρους»**. Συνήθως γιά τίς ἐφαρμογές χρησιμοποιοῦμε τόν 5-ψήφιο πίνακα κατά τό σύστημα Dupuis, γιά τόν ὁποῖο ὑπάρχουν καί ἐκδόσεις ἑλληνικές· στά ἑπόμενα θά περιγράψουμε μέ συντομία τόν πίνακα αὐτό καί θά ἐκθέσουμε τόν τρόπο χρήσεώς του.

§ 163. Περιγραφή τῶν λογαριθμικῶν πινάκων Dupuis. — Οἱ λογαριθμικοί πίνακες Dupuis περιέχουν τό δεκαδικό μέρος τῶν λογαρίθμων τῶν ἀκέραιων ἀριθμῶν ἀπό 1 μέχρι 10.000. Ὁ παρακάτω «πίνακας» εἶναι ἕνα τμῆμα ἀπό τούς λογαριθμικούς πίνακες τῆς γαλλικῆς ἐκδόσεως τοῦ J. Dupuis.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
500	69897	906	914	923	932	940	949	958	966	975
1	984	992	*001	*010	*018	*027	*036	*044	*053	*062
2	70070	079	088	096	105	114	122	131	140	148
3	157	165	174	183	191	200	209	217	226	236
4	243	252	260	269	278	286	295	303	312	321
5	329	338	346	355	364	372	381	389	398	406
6	415	424	432	441	449	458	467	475	484	492
7	501	509	518	526	535	544	552	561	569	578
8	586	595	603	612	621	629	638	646	655	663
9	672	680	689	697	706	714	723	731	740	749
510	757	766	774	783	791	800	808	817	825	834
1	842	851	859	868	876	885	893	902	910	919
2	927	935	944	952	961	969	978	986	995	*003
...	.....	...	...	...	...	...	...	...	...	...
...	.....	...	...	...	...	...	...	...	...	...
549	73957	965	973	981	989	997	*005	*013	*020	*028
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Στήν ἀριστερή στήλη —ὅπου στήν κορυφή ὑπάρχει τό γράμμα N (Nombres = ἀριθμοί), στίς Ἑλληνικές ἐκδόσεις τό γράμμα Α (ἀριθμοί)— εἶναι γραμμένες κατακόρυφα οἱ δεκάδες τῶν ἀριθμῶν καί στήν ἴδια ὁριζόντια γραμμή μέ τό N, οἱ μονάδες τους. Στίς ἄλλες στή-λες εἶναι γραμμένα τά δεκαδικά μέρη τῶν λογαρίθμων. Τά δύο πρῶτα ψηφία πού ἐξέχουν στή δεύτερη στήλη, ἐννοεῖται ὅτι ἐπαναλαμβάνονται τά ἴδια μέχρι ν' ἀλλάξουν· καί τοῦτο, γιατί πολλοί ἐφεξῆς λογάριθμοι ἔχουν ἴδια τά δύο πρῶτα ψηφία.

Ὁ λογάριθμος κάθε ἀριθμοῦ βρίσκεται ἐκεῖ πού διασταυρώνεται ἡ κατακόρυφη στήλη τῶν μονάδων μέ τήν ὁριζόντια στήλη τῶν δεκάδων τοῦ ἀριθμοῦ.

Ὁ ἀστερίσκος (*) πού τόν βλέπουμε μπροστά στά τρία τελευταῖα δεκαδικά ψηφία μερικῶν λογαρίθμων δείχνει ὅτι τά δύο πρῶτα ψηφία πού παραλείπονται ἄλλαξαν καί πρέπει νά πάρουμε τά ἀμέσως ἑπόμενα.

Σύμφωνα μέ τά παραπάνω καί μέ βάση τόν «πίνακα» τῆς σελίδας 231 ἔχουμε ὅτι:

λογ 500 = 2,69897, λογ 5047 = 3,70303, λογ 5084 = 3,70621
λογ 503 = 2,70157, λογ 5128 = 3,70995, λογ 5017 = 3,70044.

§ 164. Χρήση τῶν λογαριθμικῶν πινάκων.— Τούς λογαριθμικούς πίνακες τούς χρησιμοποιοῦμε:

1) γιά νά βρίσκουμε τό λογάριθμο ἑνός ἀριθμοῦ,

καί *2) γιά νά βρίσκουμε τόν ἀριθμό, ὅταν ξέρουμε τό λογάριθμό του.*

§ 165. Πρόβλημα Ι.— Νά βρεθεῖ ὁ λογάριθμος ἑνός ἀριθμοῦ.

Γιά νά λύσουμε αὐτό τό πρόβλημα ὑποθέτουμε ὅτι ὁ ἀριθμός πού μᾶς δόθηκε εἶναι πάντοτε γραμμένος μέ δεκαδική μορφή καί ὅτι χρησιμοποιοῦμε πενταψήφιους πίνακες. Τό χαρακτηριστικό τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἀριθμοῦ θά τό βροῦμε ἀπό μνήμης (§ 161), ἐνῶ τό δεκαδικό του μέρος ἀπό τούς πίνακες· γιά νά βροῦμε τό δεκαδικό μέρος, πρέπει νά ἔχουμε ὑπόψη ὅτι:

Τό δεκαδικό μέρος τοῦ λογαρίθμου ἑνός ἀριθμοῦ ἐξαρτᾶται μόνο ἀπό τήν ἀκολουθία τῶν σημαντικῶν του ψηφίων πού προκύπτει ἄν παραλείψουμε τήν ὑποδιαστολή καί τά μηδενικά πού τυχόν μπορεῖ νά ὑπάρχουν στήν ἀρχή ἤ στό τέλος τοῦ ἀριθμοῦ. Αὐτό, ὅπως εἴδαμε (§ 161, ε) δέ μεταβάλλει τό ζητούμενο δεκαδικό μέρος. Π.χ. οἱ ἀριθμοί:

50,87 0,05087 508,70 5087000 5,0870

ἔχουν τό ἴδιο δεκαδικό μέρος μέ τόν ἀριθμό 5087.

Γιά νά λύσουμε τό πρόβλημα διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

Περίπτωση α΄.— *Ὁ ἀριθμός ἔχει ὡς 4 σημαντικά ψηφία (δηλαδή περιέχεται στούς πίνακες).*

Σ' αὐτή τήν περίπτωση βρίσκουμε πρῶτα τό χαρακτηριστικό τοῦ λογαρίθμου (ἀπό μνήμης) καί μετά τό δεκαδικό του μέρος ἀπό τούς πίνακες, ὅπως εἴπαμε σέ προηγούμενη παράγραφο (§ 163).

Παράδειγμα: Νά βρεθεῖ ὁ λογάριθμος τοῦ 56,82.

Λύση. Τό χαρακτηριστικό τοῦ λογαρίθμου εἶναι 1, καί τό δεκαδικό του μέρος τό ἴδιο (§161, ε) μέ τό δεκαδικό μέρος τοῦ λογαρίθμου τοῦ 5682 πού εἶναι (ἀπό τούς πίνακες) 75450.

Ἄρα: λογ 56,82 = 1,75450.

Ὁμοίως βρίσκουμε ὅτι: λογ 568,2 = 2,75450, λογ 0,8703 = $\overline{1}$,93967.

Περίπτωση β΄.— *Ὁ ἀριθμός ἔχει περισσότερα ἀπό 4 σημαντικά ψηφία (δηλαδή* **δέν** *περιέχεται στούς πίνακες).*

Τό χαρακτηριστικό τοῦ λογαρίθμου τό βρίσκουμε ὅπως καί στήν πρώτη περίπτωση. Γιά νά βροῦμε τό δεκαδικό του μέρος, χωρίζουμε τά 4 πρῶτα ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ μέ ὑποδιαστολή, καί ἔτσι ὅπως εἶναι γραμμένος ὁ ἀριθμός βρίσκεται μεταξύ δύο διαδοχικῶν ἀκεραίων μέ 4 ψηφία. Γιά νά βροῦμε τώρα τό δεκαδικό του μέρος, πρέπει νά ἔχουμε ὑπόψη μας τήν ἰδιότητα:

$$\alpha < \beta < \gamma \iff \lambda o\gamma\, \alpha < \lambda o\gamma\, \beta < \lambda o\gamma\, \gamma, \text{ γιά κάθε } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}^+$$

καί νά δεχτοῦμε ὅτι:

Γιά μικρές μεταβολές τῶν ἀριθμῶν, οἱ μεταβολές τοῦ δεκαδικοῦ μέρους τῶν λογαρίθμων τους εἶναι, κατά προσέγγιση, ἀνάλογες μέ τίς μεταβολές τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν, ὅταν οἱ μεταβολές τῶν ἀριθμῶν εἶναι μικρότερες ἀπό τή μονάδα καί ἀντιστρόφως.

Ἡ παραπάνω παραδοχή δέν εἶναι «τελείως» ἀληθής, δηλαδή οἱ μεταβολές τῶν λογαρίθμων δέν εἶναι ἀνάλογες μέ τίς μεταβολές τῶν ἀριθμῶν.

Πράγματι, ἄς θεωρήσουμε δύο διαδοχικούς ἀκεραίους α καί $\alpha+1$, $\alpha>0$ καί ἄς ὀνομάσουμε δ τή διαφορά: $\lambda o\gamma(\alpha+1)-\lambda o\gamma\alpha$, δηλαδή:

$$\delta = \lambda o\gamma(\alpha+1) - \lambda o\gamma\,\alpha \implies \delta = \lambda o\gamma\,\frac{\alpha+1}{\alpha} \implies \delta = \lambda o\gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right).$$

Παρατηροῦμε ὅτι : γιά $\alpha \to +\infty$, ὁπότε $\frac{1}{\alpha} \to 0$, ἔχουμε:

$$\lambda o\gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right) \to 0, \text{ δηλαδή } \delta \to 0.$$

Ὥστε ἡ διαφορά τῶν λογαρίθμων δύο διαδοχικῶν ἀκεραίων δέ μένει πάντοτε ἡ ἴδια, ἀλλά ἐλαττώνεται καθόσον οἱ ἀριθμοί αὐξάνουν καί συνεπῶς δέν ἀληθεύει ὅτι ἡ αὔξηση τῶν λογαρίθμων εἶναι ἀνάλογη μέ τήν αὔξηση τῶν ἀριθμῶν.

Ἐπειδή ὅμως ἡ διαφορά αὐτή μένει γιά πολλούς ἀριθμούς ἀμετάβλητη, μποροῦμε, κατά προσέγγιση, νά θεωρήσουμε τήν αὔξηση τῶν λογαρίθμων ἀνάλογη μέ τήν αὔξηση τῶν ἀριθμῶν.

Ὕστερα ἀπό αὐτά, γιά νά βροῦμε τό δεκαδικό μέρος τοῦ λογαρίθμου, ἐργαζόμαστε ὅπως (φαίνεται) στά παρακάτω παραδείγματα:

Παράδειγμα 1ο: Νά βρεθεῖ ὁ λογάριθμος τοῦ 17424.

Λύση. Τό χαρακτηριστικό τοῦ λογαρίθμου εἶναι 4. Χωρίζουμε τά 4 πρῶτα ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ μέ ὑποδιαστολή καί ἔτσι ἔχουμε τόν ἀριθμό 1742,4, τοῦ ὁποίου ἀρκεῖ νά βροῦμε τό δεκαδικό μέρος τοῦ λογαρίθμου του.

Ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς: Ἐπειδή $1742 < 1742{,}4 < 1743$,

ἔπεται ὅτι: $\lambda o\gamma\, 1742 < \lambda o\gamma\, 1742{,}4 < \lambda o\gamma\, 1743$.

Ἀπό τούς πίνακες εἶναι: $\lambda o\gamma\, 1742 = 3{,}24105$ καί $\lambda o\gamma\, 1743 = 3{,}24130$.

Ἄρα: $3{,}24105 < \lambda o\gamma\, 1742{,}4 < 3{,}24130$,

πού σημαίνει ὅτι ὁ λογάριθμος πού ζητᾶμε βρίσκεται μεταξύ τῶν ἀριθμῶν 3,24105 καί 3,24130, πού διαφέρουν κατά 25 μονάδες πέμπτης δεκαδικῆς τάξεως (μ.ε΄.δ.τ.).

Ἀπό τούς πίνακες βλέπουμε ἐπίσης ὅτι, ὅταν ὁ ἀριθμός αὐξάνεται κατά 2, 3, 4, 5, . . . ἀκέραιες μονάδες, τότε ὁ λογάριθμός του αὐξάνεται ἀντιστοίχως κατά 50, 75, 99, 125, . . . μ.ε΄.δ.τ. Ὑπολογίζουμε τώρα πόσο πρέπει νά αὐξηθεῖ ὁ $\lambda o\gamma 1742 = 3{,}24105$ γιά νά προκύψει ὁ $\lambda o\gamma\, 1742{,}4$ καί ἀπό αὐτόν ὁ $\lambda o\gamma\, 17424$. Ὁ ὑπολογισμός γίνεται ὡς ἑξῆς:

Σέ αὔξηση τοῦ ἀριθμοῦ κατά 1 ἀντιστοιχεῖ αὔξ. τοῦ λογ. κατά 25 μ.ε΄.δ.τ.

» » » » 0,4 » » » » » » x; »

Ἄρα: $x = 25 \cdot 0{,}4 = 10$ μ.ε΄.δ.τ.

Τότε ἔχουμε: $λογ\, 1742{,}4 = 3{,}24105 + 0{,}00010 = 3{,}24115$

καί συνεπῶς: $λογ\, 17424 = 4{,}24115.$

Οἱ παραπάνω πράξεις διατάσσονται ὡς ἑξῆς:

$λογ\, 1742 = 3{,}24105$	Αὔξηση ἀριθμῶν 1 αὔξηση λογαρίθμων 25 μ.ε΄.δ.τ.
$λογ\, 1743 = 3{,}24130$	» » 0,4 » » x; »
$Δ = 25$	$x = 25 \cdot 0{,}4 = 10$ μ.ε΄.δ.τ.

Ἄρα: $λογ\, 17424 = 4{,}24105 + 0{,}00010 = 4{,}24115.$

Ἀφοῦ $λογ\, 17424 = 4{,}24115$ ἔχουμε:

$λογ\, 17{,}424 = 1{,}24115,$ $λογ\, 0{,}0017424 = \overline{3}{,}24115,$

$λογ\, 1{,}7424 = 0{,}24115,$ $λογ\, 174{,}24 = 2{,}24115.$

Παράδειγμα 2ο: Νά βρεθεῖ ὁ λογάριθμος τοῦ ἀριθμοῦ 24,3527.

Λύση. Τό χαρακτηριστικό τοῦ λογαρίθμου πού ζητᾶμε εἶναι 1. Ἄν πολλαπλασιάσουμε τόν ἀριθμό ἐπί 100, τό δεκαδικό μέρος τοῦ λογαρίθμου δέν ἀλλάζει. Ἀρκεῖ λοιπόν νά βροῦμε τό δεκαδικό μέρος τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἀριθμοῦ 2435,27.

Ἐργαζόμαστε ὅπως καί στό προηγούμενο παράδειγμα:

$λογ\, 2435 = 3{,}38650$	Αὔξηση ἀριθμῶν 1 αὔξηση λογαριθμῶν 18 μ.ε΄.δ.τ.
$λογ\, 2436 = 3{,}38668$	» » 0,27 » » x; »
$Δ = 18$	$x = 18 \cdot 0{,}27 = 4{,}86 \simeq 5$ μ.ε΄.δ.τ.

Ἄρα: $λογ\, 24{,}3527 = 1{,}38650 + 0{,}00005 = 1{,}38655.$

Σημείωση. Στούς λογαριθμικούς πίνακες καί ἔξω ἀπό τά πλαίσια ὑπάρχουν πινακίδια μέ ἐπικεφαλίδα τή διαφορά τῶν λογαρίθμων δύο διαδοχικῶν ἀριθμῶν. Τά πινακίδια αὐτά ἔχουν δύο στῆλες: ἡ πρώτη στήλη ἔχει τούς φυσικούς ἀριθμούς 1, 2, ..., 9, πού δείχνουν δέκατα τῆς ἀκέραιης μονάδας καί ἡ ἄλλη στήλη ἔχει τίς αὐξήσεις τῶν λογαρίθμων σέ μονάδες τῆς τελευταίας δεκαδικῆς τάξεως.

Ἄν ὀνομάσουμε Δ τίς διαφορές τῶν ἀριθμῶν, τότε τά πινακίδια δίνουν τίς τιμές:

$$\frac{Δ \times 1}{10}, \ \frac{Δ \times 2}{10}, \ \ldots, \ \frac{Δ \times 9}{10}.$$

Ἔτσι ὁ ὑπολογισμός τοῦ λογαρίθμου τοῦ παραδείγματος 2 γίνεται μέ τή βοήθεια τοῦ πινακιδίου, πού ἔχει ἐπικεφαλίδα τή διαφορά $Δ = 18$. Στό πινακίδιο αὐτό ἀπέναντι ἀπό τό 2 (στήλη α΄) εἶναι 3,6 καί ἀπέναντι ἀπό τό 7 εἶναι 12,6· ἀλλά ἐπειδή τό ψηφίο 7 παριστάνει ἑκατοστά στόν ἀριθμό 2435,27, δηλ. μονάδες 10 φορές μικρότερες, πρέπει νά πάρουμε 1,26. Ὥστε σέ αὔξηση τοῦ ἀριθμοῦ κατά 0,27 μονάδες ἀντιστοιχεῖ αὔξηση τοῦ λογαρίθμου κατά $3{,}6 + 1{,}26 = 4{,}86 \simeq 5$ μ.ε΄.δ.τ.

18	
1	1,8
2	3,6
3	5,4
4	7,2
5	9,0
6	10,8
7	12,6
8	14,4
9	16,2

Διάταξη τῶν πράξεων.

λογ 2435	= 3,38650	Δ = 18
Σέ αὔξηση 0,2 αὔξηση λογ	3,6	
» » 0,07 » »	1,26	
ἄρα λογ 2435,27	= 3,3865486	

καί ἐπειδή τό 6ο ψηφίο τοῦ δεκ. μέρους εἶναι μεγαλύτερο ἀπό τό 5, αὐξάνουμε κατά μία μονάδα τό 5ο ψηφίο. Ἄρα θά εἶναι $λογ 2435{,}27 = 3{,}38655$ καί συνεπῶς $λογ 24{,}3527 = 1{,}38655.$

§ 166. Πρόβλημα ΙΙ. *(ἀντίστροφο)*.—Νά βρεθεῖ ὁ ἀριθμός πού ἀντιστοιχεῖ σέ ὁρισμένο λογάριθμο.

Γιά νά λύσουμε αὐτό τό πρόβλημα ἀναζητοῦμε τό δεκαδικό μέρος τοῦ λογαρίθμου πού μᾶς δόθηκε στούς λογαριθμικούς πίνακες. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις καθόσον τό δεκαδικό αὐτό μέρος γράφεται ἤ ὄχι στούς λογαριθμικούς πίνακες. Τό χαρακτηριστικό τοῦ λογαρίθμου μᾶς ἐπιτρέπει νά καθορίσουμε, σύμφωνα μέ τήν ἰδιότητα δ τῆς § 161, τό πλῆθος τῶν ψηφίων τοῦ ἀκέραιου μέρους τοῦ ζητούμενου ἀριθμοῦ.

Ἀκριβέστερα ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς:

Περίπτωση α΄.— *Τό δεκαδικό μέρος τοῦ λογαρίθμου βρίσκεται στούς πίνακες.*
Ἔστω ὅτι θέλουμε νά βροῦμε τό θετικό ἀριθμό x, γιά τόν ὁποῖο εἶναι:

$$\lambda o\gamma x = 2{,}62716.$$

Λύση. Χωρίς νά λάβουμε ὑπόψη μας τό χαρακτηριστικό 2, ἀναζητᾶμε στή στήλη 0 τῶν λογαριθμικῶν πινάκων τόν ἀριθμό 62, πού ἀποτελοῦν τά δύο πρῶτα ψηφία τοῦ δεκαδικοῦ μέρους τοῦ λογαρίθμου καί κατόπιν ἀναζητᾶμε στόν πίνακα τά ἄλλα τρία ψηφία 716 τοῦ δεκαδικοῦ μέρους. Βλέπουμε ὅτι αὐτά ἀνήκουν στήν 423η ὁριζόντια γραμμή καί στήν 8η στήλη· ὁ ζητούμενος ἀριθμός ἔχει, στή σειρά, τά σημαντικά ψηφία 4, 2, 3, 8, δηλαδή ἔχει 423 δεκάδες καί 8 μονάδες. Ἐπειδή ὁ λογάριθμός του ἔχει χαρακτηριστικό 2, ὁ ἀριθμός θά ἔχει τρία ἀκέραια ψηφία, καί θά εἶναι:

$$\mathbf{x = 423{,}8.}$$

Σημείωση. Ἄν θέλουμε νά βροῦμε τόν ἀριθμό x γιά τόν ὁποῖο εἶναι $\lambda o\gamma x = 2{,}63022$· ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς:

Παρατηροῦμε ὅτι στίς σειρές τοῦ 63 δέν ὑπάρχει τό 022, ἀλλά τό ἀναζητοῦμε καί τό βρίσκουμε στίς σειρές τοῦ 62 μέ ἕναν ἀστερίσκο (*) μπροστά του. Αὐτό συμβαίνει, γιατί τό 022 μέ ἀστερίσκο (*) βρίσκεται στήν τελευταία σειρά τοῦ 62. Συνεπῶς ὁ ζητούμενος ἀριθμός x εἶναι ὁ 426,8.

Περίπτωση β΄.— *Τό δεκαδικό μέρος τοῦ λογαρίθμου* **δέ** *βρίσκεται στούς πίνακες.*

1ο: Ἔστω ὅτι θέλουμε νά βροῦμε τό θετικό ἀριθμό x, γιά τόν ὁποῖο εἶναι:

$$\lambda o\gamma x = 1{,}25357.$$

Λύση. Παρατηροῦμε ὅτι τό δεκαδικό μέρος τοῦ λογαρίθμου βρίσκεται στούς πίνακες μεταξύ τῶν 0,25334 καί 0,25358, στούς ὁποίους ἀντιστοιχοῦν οἱ ἀριθμοί 1792 καί 1793 ἀντιστοίχως. Δηλαδή ἔχουμε: $1{,}25334 < 1{,}25357 < 1{,}25358$
καί συνεπῶς: $17{,}92 < x < 17{,}93.$

Παρατηροῦμε τώρα ὅτι:

$$\Delta = 1{,}25358 - 1{,}25334 = 24 \text{ μ.ε΄.δ.τ.}$$
$$\delta = 1{,}25357 - 1{,}25334 = 23 \text{ μ.ε΄.δ.τ.}$$

Ἔχοντας ὑπόψη τήν παραδοχή πού κάναμε στήν § 165, σύμφωνα μέ τήν ὁποία ἡ αὔξηση (μεταβολή) τῶν λογαρίθμων εἶναι, κατά προσέγγιση, ἀνάλογη πρός τήν αὔξηση τῶν ἀριθμῶν, καταρτίζουμε τήν ἀκόλουθη διάταξη:

Αὔξηση λογαρίθμου κατά 24 μ.ε΄.δ.τ. φέρνει αὔξηση τοῦ ἀριθμοῦ κατά 1
» » » 23 » » » » » » y;

$$y = 1 \cdot \frac{23}{24} = \frac{23}{24} = 0{,}958.$$

Προσθέτοντας τώρα τό 0,958 στόν ἀριθμό 1792 βρίσκουμε 1792,958. Ὁ ἀριθμός ὅμως αὐτός ἔχει προφανῶς τά ἴδια ψηφία μέ τόν x καί μέ τήν ἴδια σειρά, πλήν ὅμως ἡ θέση τῆς ὑποδιαστολῆς στό x κανονίζεται ἀπό τό χαρακτηριστικό τοῦ λογx, πού ἐδῶ εἶναι 1.

Θά εἶναι λοιπόν: $x = 17{,}92958.$

Σημείωση. Ἡ διαφορά Δ τῶν ἀκραίων λογαρίθμων, ἀνάμεσα στούς ὁποίους περιέχεται ὁ λογx, ὀνομάζεται **«μεγάλη» διαφορά,** ἐνῶ ἡ διαφορά δ τοῦ μικρότερου λογαρίθμου ἀπό τό λογx ὀνομάζεται **«μικρή» διαφορά.**

2ο: Νά βρεῖτε τό x, ἄν λογx $= \overline{3},47647$.

Λύση. Ἀπό τούς λογαριθμικούς πίνακες ἔχουμε:

$$\overline{3},47640 < \overline{3},47647 < \overline{3},47654$$

καί ἄρα $$0{,}002995 < x < 0{,}002996.$$

Ἄν ἐργαστοῦμε, ὅπως στό προηγούμενο παράδειγμα, ἔχουμε τήν ἀκόλουθη σύντομη διάταξη:

$\overline{3},47647$	$\overline{3},47654$ ἀντιστοιχεῖ ὁ: 2996	14	1
$\overline{3},47640$	$\overline{3},47640$ » : 2995	7	y;
Διαφορές: $\delta = 7$	$\Delta = 14$ 1	$y = 1 \times \frac{7}{14} = 0{,}5.$	

Ἔτσι τά σημαντικά ψηφία τοῦ x κατά σειρά εἶναι: 2, 9, 9, 5, 5. Ἄρα ὁ ζητούμενος ἀριθμός x εἶναι ὁ 0,0029955, γιατί τό χαρακτηριστικό τοῦ λογαρίθμου του εἶναι $\overline{3}$.

Ἐφαρμογές τῶν δεκαδικῶν λογαρίθμων

§ 167. Ἐφαρμόζοντας τίς ἰδιότητες τῶν λογαρίθμων καί χρησιμοποιώντας τούς λογαριθμικούς πίνακες μποροῦμε νά ἁπλουστεύσουμε πολλούς ἀριθμητικούς ὑπολογισμούς καί νά κάνουμε ἄλλους ὑπολογισμούς πού θά ἦταν πάρα πολύ δύσκολοι χωρίς τούς λογαρίθμους. Τά παρακάτω παραδείγματα καί ἰδιαίτερα τό δεύτερο, θά μᾶς πείσουν γιά τή σημασία τῶν λογαρίθμων στίς πρακτικές ἐφαρμογές.

Παράδειγμα 1ο: Νά βρεῖτε τό x, ἄν εἶναι: $$x = \frac{7{,}56 \times 4667 \times 567}{899{,}1 \times 0{,}00337 \times 23435} \quad (1)$$

Λύση. Λογαριθμίζοντας τήν (1) ἔχουμε:

λογ x = λογ 7,56 + λογ 4667 + λογ 567 − (λογ 899,1 + λογ 0,00337 + λογ 23435).

Ἀπό τούς πίνακες βρίσκουμε:

λογ 7,56 = 0,87852	λογ 899,1 = 2,95381
λογ 4667 = 3,66904	λογ 0,00337 = $\overline{3},52763$
λογ 567 = 2,75358	λογ 23435 = 4,36986
7,30114	4,85130.

Μετά την ἀφαίρεση προκύπτει:

λογ x = 2,44984

Ἄρα: x = 281,73.

Παράδειγμα 2ο: Νά ὑπολογίσετε, κατά προσέγγιση, τήν ἀριθμητική τιμή τῆς παραστάσεως:

$$x = \frac{27{,}32 \times (1{,}04)^{20} \times \sqrt[5]{0{,}003}}{\sqrt[4]{0{,}0042} \times (345{,}6)^2} \quad (2)$$

Λύση. Λαμβάνοντας τούς λογαρίθμους τῶν μελῶν τῆς (2) ἔχουμε:

$$\text{λογ}x = (\text{λογ}\,27{,}32 + 20\cdot\text{λογ}\,1{,}04 + \frac{1}{5}\text{λογ}\,0{,}003) - \left(\frac{1}{4}\cdot\text{λογ}\,0{,}0042 + 2\,\text{λογ}\,345{,}6\right).$$

Ἀπό τούς πίνακες βρίσκουμε τούς λογαρίθμους καί ἐκτελοῦμε τίς πράξεις σύμφωνα μέ τήν ἑπόμενη διάταξη:

Βοηθητικές πράξεις

$$\text{λογ}\,(1{,}04) = 0{,}01703$$
$$\times 20$$
$$0{,}34060$$

$$\text{λογ}\,0{,}003 = \overline{3}{,}47712$$

$$\frac{1}{5}\,\text{λογ}\,0{,}003 = \frac{\overline{3}{,}47712}{5} = \frac{\overline{5} + 2{,}47712}{5} = \overline{1} + 0{,}49542 = \overline{1}{,}49542$$

$$\text{λογ}\,0{,}0042 = \overline{3}{,}62325$$

$$\frac{1}{4}\text{λογ}\,0{,}0042 = \frac{\overline{3}{,}62325}{4} = \frac{\overline{4} + 1{,}62325}{4} = \overline{1} + 0{,}40581 = \overline{1}{,}40581$$

$$\text{λογ}\,345{,}6 = 2{,}53857$$
$$\times 2$$
$$5{,}07714$$

Τελικές πράξεις

$$\text{λογ}\,27{,}32 = 1{,}43648$$
$$20\cdot\text{λογ}\,(1{,}04) = 0{,}34060$$
$$\frac{1}{5}\cdot\text{λογ}\,(0{,}003) = \overline{1}{,}49542$$
$$\text{Ἄθροισμα} = 1{,}27250$$

$$\frac{1}{4}\,\text{λογ}(0{,}0042) = \overline{1}{,}40581$$
$$2\cdot\text{λογ}\,345{,}6 = 5{,}07714$$
$$\text{Ἄθροισμα} = 4{,}48295$$

Ὥστε εἶναι:

$$\text{λογ}\,x = 1{,}27250 - 4{,}48295 = -3{,}21045 = \overline{4}{,}78955.$$

Ἀπό τούς πίνακες βρίσκουμε: $x = 0{,}000615957$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάδα Α΄. 371. Νά βρεθεῖ ὁ λογάριθμος τῶν ἀριθμῶν:

1. 0,2507	5. 6,8372	9. 85,007
2. 45,72	6. 5278,37	10. 0,0004124
3. 0,003817	7. 63,347	11. 326,537
4. 107,3	8. 25234	12. 14,1606

372. Νά βρεθεῖ ὁ θετικός ἀριθμός x, ἄν:

1. $\text{λογ}\,x = 2{,}48001$	5. $\text{λογ}\,x = 4{,}87622$	9. $\text{λογ}\,x = 0{,}70020$
2. $\text{λογ}\,x = \overline{1}{,}96895$	6. $\text{λογ}\,x = 2{,}99348$	10. $\text{λογ}\,x = 1{,}66325$
3. $\text{λογ}\,x = 4{,}97534$	7. $\text{λογ}\,x = \overline{1}{,}79100$	11. $\text{λογ}\,x = 4{,}15050$
4. $\text{λογ}\,x = \overline{3}{,}69636$	8. $\text{λογ}\,x = \overline{2}{,}78000$	12. $\text{λογ}\,x = 5{,}25865$.

373. Νά βρεῖτε τό y, ἄν: $y = \frac{1}{2}\,\text{λογ}(4 + \sqrt{7}) + \frac{1}{2}\,\text{λογ}(4 - \sqrt{7})$.

374. Χρησιμοποιώντας τόν τύπο:

$$E = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$$

νά ὑπολογίσετε τό ἐμβαδόν Ε ἑνός τριγώνου πού ἔχει πλευρές:

$$\alpha = 202{,}5\text{ m}, \quad \beta = 180{,}2\text{ m} \quad \text{καί} \quad \gamma = 75{,}3\text{ m} \qquad \left(\tau = \frac{1}{2}\ \text{περιμέτρου}\right).$$

375. Νά ὑπολογίσετε τήν ἀριθμητική τιμή τοῦ x πού ὁρίζεται ἀπό τή σχέση:

$$\frac{x^2}{\alpha^2} = \sqrt{\frac{\beta}{\gamma}},$$

ὅπου $\alpha = 0{,}27355, \quad \beta = 29{,}534, \quad \gamma = 44{,}340.$

376. Νά προσδιορίσετε τό y, ἄν ξέρουμε ὅτι:

$$\lambda o\gamma\, y = \lambda o\gamma\,(7 + 5\sqrt{2}) + 8\lambda o\gamma\,(\sqrt{2} + 1) + 7\,\lambda o\gamma\,(\sqrt{2} - 1) + 2\lambda o\gamma\,(3 - 2\sqrt{2}).$$

377. Τρεῖς ἀριθμοί α, x, y συνδέονται μέ τή σχέση:

$$\alpha x y^2 = \sqrt[3]{x}.$$

1ο) Νά ὑπολογίσετε τό y, ἄν εἶναι $\alpha = 0{,}3$ καί $x = 1{,}8215$.

2ο) Νά ὑπολογίσετε τό x, ἄν εἶναι $\alpha = 10$ καί $y = 0{,}5242$.

378. Σέ μία γεωμετρική πρόοδο εἶναι: $\alpha_1 = 3$, $\omega = 8$ καί $\nu = 13$. Νά βρεθεῖ ὁ 13ος ὅρος καί τό ἄθροισμα τῶν 13 πρώτων ὅρων της.

379. Νά ἐπαληθεύσετε τίς ἰσότητες (χρησιμοποιώντας λογαριθμικούς πίνακες):

1. $\sqrt{\dfrac{577{,}8 \times 69}{0{,}75 \times 3{,}107}} = 6{,}431,$ 2. $\sqrt{8{,}5273 \times \sqrt[3]{51{,}3388}} = 5{,}62962$

3. $\sqrt[3]{\dfrac{4{,}632 \times (2{,}96)^2}{81{,}3 \times 32{,}41}} = 0{,}225855,$ 4. $\dfrac{312{,}415 \times \sqrt[3]{3{,}5781^2}}{17{,}1826^2 \times \sqrt[10]{0{,}002987^3}} = 14{,}1606.$

III. ΕΚΘΕΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

§ 168. Ὁρισμοί.—Ἐκθετική ἐξίσωση *ὀνομάζουμε κάθε ἐξίσωση τῆς μορφῆς:*

$$E(x) = F(x) \tag{1}$$

ὅπου E(x), F(x) εἶναι συναρτήσεις τοῦ x, ὅταν σ' ἕνα τουλάχιστο ἀπό τά μέλη της ἐμφανίζεται ὁ ἄγνωστος x εἴτε κάποια συνάρτηση τοῦ ἀγνώστου σέ ἐκθέτη δυνάμεως μέ βάση **θετικό** *ἀριθμό.*

Ἔτσι, π.χ. οἱ ἐξισώσεις:

$$3^x = 81, \quad 5^{x^2-3x} = 625, \quad 7^{2-3|x|} = 1, \quad x^{x^2-7x+12} = 1 \ (x > 0)$$

$$x^x - x^{-x} = 3 + 3x^{-x} \ (x > 0), \quad (3x+1)^{2x-3} = 1 \ \text{μέ:}\ x > -\frac{1}{3}$$

εἶναι ἐκθετικές.

Ἐπίλυση *τῆς ἐκθετικῆς ἐξισώσεως (1) λέγεται ἡ εὕρεση τοῦ συνόλου τῶν λύσεων αὐτῆς, δηλαδή τοῦ συνόλου τῶν τιμῶν τοῦ ἀγνώστου της πού τήν ἱκανοποιοῦν.*

Οἱ πιό συνηθισμένες ἐκθετικές ἐξισώσεις ἔχουν ἤ μποροῦν νά πάρουν μία ἀπό τίς ἑπόμενες μορφές:

α΄) Ἐκθετικές ἐξισώσεις τῆς μορφῆς:

$$\boxed{\alpha^x = \beta} \tag{α}$$

ὅπου $\alpha, \beta \in R^+$ καί $\alpha \neq 1$.

Γιά νά ἐπιλύσουμε αὐτή τήν ἐκθετική ἐξίσωση διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

Περίπτωση Ι— *Ὁ β εἶναι δύναμη τοῦ* **α** *ἤ μπορεῖ νά μετατραπεῖ σέ δύναμη τοῦ α.*

Τότε, ἄν $\beta = \alpha^k$ θά ἔχουμε: $\alpha^x = \alpha^k$ καί συνεπῶς $x = k$.

Παράδειγμα: Νά ἐπιλυθεῖ ἡ ἐξίσωση: $3^x = 729$.

Λύση. Ἐπειδή $729 = 3^6$, ἡ ἐξίσωση γράφεται: $3^x = 3^6$ καί δίνει $x = 6$.

Περίπτωση ΙΙ.— *Ὁ β δέν μπορεῖ νά μετατραπεῖ σέ δύναμη τοῦ α.*

Σ' αὐτή τήν περίπτωση λαμβάνοντας τούς λογαρίθμους καί τῶν δύο μελῶν τῆς (α) ἔχουμε:

$$x \cdot \text{λογ}\alpha = \text{λογ}\beta \text{ καί συνεπῶς θά εἶναι } x = \frac{\text{λογ}\beta}{\text{λογ}\alpha}.$$

Παράδειγμα: Νά ἐπιλυθεῖ ἡ ἐξίσωση: $2^x = \frac{5}{6}$.

Λύση. Λαμβάνουμε τούς λογαρίθμους καί τῶν δύο μελῶν τῆς ἐξισώσεως καί ἔχουμε:

$$x \cdot \text{λογ}2 = \text{λογ}5 - \text{λογ}6 \text{ ἤ } x = \frac{\text{λογ}\,5 - \text{λογ}\,6}{\text{λογ}\,2} = \frac{-0{,}07918}{0{,}30103} = -0{,}26303.$$

β') Ἐκθετικές ἐξισώσεις τῆς μορφῆς:

$$\boxed{\alpha^{f(x)} = \beta} \qquad (\beta)$$

ὅπου f(x) εἶναι πραγμ. συνάρτηση τοῦ ἀγνώστου καί $\alpha, \beta \in R^+$ μέ $\alpha \neq 1$.

Προφανῶς γιά $f(x) = x$ ἔχουμε ἐκθετική ἐξίσωση τῆς προηγούμενης μορφῆς. Γιά νά ἐπιλύσουμε ἐξισώσεις τῆς μορφῆς (β) διακρίνουμε καί πάλι δύο περιπτώσεις, ἀφοῦ οἱ ἀριθμοί α καί β μπορεῖ νά εἶναι ἤ νά μήν εἶναι δυνάμεις τοῦ ἴδιου ἀριθμοῦ.

Παράδειγμα 1ο: Νά ἐπιλυθεῖ ἡ ἐξίσωση: $3^{x^2-5x+11} = 243$. (1)

Λύση. Ἐπειδή $243 = 3^5$, ἡ ἐξίσωση (1) γράφεται:

$$3^{x^2-5x+11} = 3^5 \iff x^2 - 5x + 11 = 5 \iff x^2 - 5x + 6 = 0.$$

Οἱ ρίζες τῆς τελευταίας ἐξισώσεως εἶναι $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, οἱ ὁποῖες εἶναι καί ρίζες τῆς ἐξισώσεως (1).

Παράδειγμα 2ο: Νά ἐπιλυθεῖ ἡ ἐξίσωση: $7^{2-|3x|} = 1$.

Λύση. Ἔχουμε:

$$7^{2-|3x|} = 1 = 7^0 \iff 2 - |3x| = 0 \iff |x| = \frac{2}{3} \iff x = \pm\frac{2}{3}.$$

Παράδειγμα 3ο: Νά ἐπιλυθεῖ ἡ ἐξίσωση: $5^{3x-2} = 437$. (1)

Λύση. Παίρνοντας τούς λογαρίθμους καί τῶν δύο μελῶν τῆς ἐξισώσεως (1) ἔχουμε:

$$(3x-2)\cdot \text{λογ}\,5 = \text{λογ}\,437 \text{ ἤ } 3x - 2 = \frac{\text{λογ}\,437}{\text{λογ}\,5} \text{ ἤ } 3x - 2 = \frac{2{,}64048}{0{,}69897}$$

ἤ $\qquad 3x - 2 = 3{,}77767$ καί ἀπό αὐτή: $\mathbf{x = 1{,}92589}$.

Παράδειγμα 4ο: Νά ἐπιλυθεῖ ἡ ἐξίσωση: $\alpha^{\beta^x} = \gamma$, (1)
ὅπου $\alpha, \beta, \gamma \in R^+$ καί $\alpha \neq 1$, $\beta \neq 1$.

Λύση. Λαμβάνοντας τούς λογαρίθμους καί τῶν δύο μελῶν τῆς (1) ἔχουμε:

$$\beta^x \cdot \text{λογ}\,\alpha = \text{λογ}\,\gamma \quad \text{ἤ} \quad \beta^x = \left(\frac{\text{λογ}\,\gamma}{\text{λογ}\,\alpha}\right) \qquad (2)$$

Ἀπό τή (2) λογαριθμίζοντας βρίσκουμε:

$$x \cdot \lambda o\gamma\, \beta = \lambda o\gamma \left(\frac{\lambda o\gamma\, \gamma}{\lambda o\gamma\, \alpha}\right)$$

ἤ
$$\boxed{x = \frac{1}{\lambda o\gamma \beta} \cdot \lambda o\gamma \left(\frac{\lambda o\gamma\, \gamma}{\lambda o\gamma\, \alpha}\right)} \qquad (3)$$

Γιά νά ἔχει νόημα τό δεύτερο μέλος τῆς (3) πρέπει νά εἶναι $\frac{\lambda o\gamma\, \gamma}{\lambda o\gamma\, \alpha} > 0$. Αὐτό ὅμως ἰσχύει ὅταν οἱ λογγ καί λογα εἶναι **ὁμόσημοι**, δηλ. ὅταν οἱ ἀριθμοί α καί γ εἶναι >1 ἤ ὅταν καί οἱ δυό τους εἶναι <1.

γ΄) Ἐκθετικές ἐξισώσεις τῆς μορφῆς:

$$\boxed{\alpha^{f(x)} = \alpha^{g(x)}} \qquad (\gamma)$$

ὅπου f(x), g(x) εἶναι (πραγματικές) συναρτήσεις τοῦ x καί $\alpha \in R^+$ μέ $\alpha \neq 1$.

Ἡ ἐκθετική ἐξίσωση (γ) εἶναι ἰσοδύναμη μέ τήν: $f(x) = g(x)$. Πράγματι, ἄν x_0 εἶναι μία ρίζα τῆς (γ), τότε, γιά $0 < \alpha \neq 1$, ἔχουμε:

$$\alpha^{f(x_0)} = \alpha^{g(x_0)} \iff f(x_0) \cdot \lambda o\gamma\, \alpha = g(x_0) \cdot \lambda o\gamma\, \alpha \iff f(x_0) = g(x_0).$$

Παράδειγμα: Νά ἐπιλυθεῖ ἡ ἐξίσωση: $100 \cdot 10^x = 100^{\frac{5}{x}}$ **(1)**

Λύση. Ἐπειδή $100 = 10^2$ ἡ ἐξίσωση (1) γράφεται: $10^{2+x} = 10^{\frac{10}{x}}$. Ἡ τελευταία ἐξίσωση εἶναι ἰσοδύναμη μέ τήν: $2 + x = \frac{10}{x} \iff x^2 + 2x - 10 = 0$. Οἱ ρίζες τῆς τελευταίας ἐξισώσεως εἶναι: $x_1 = 3$, $x_2 = -5$, οἱ ὁποῖες εἶναι καί ρίζες τῆς (1).

δ΄) Ἐκθετικές ἐξισώσεις τῆς μορφῆς:

$$\boxed{\alpha^{f(x)} = \beta^{g(x)}} \qquad (\delta)$$

ὅπου f(x), g(x) εἶναι (πραγματικές) συναρτήσεις τοῦ x καί $\alpha, \beta \in R^+ - \{1\}$.

Παρατηροῦμε ὅτι γιά $g(x) = 1$ ἔχουμε ἐκθετική ἐξίσωση τῆς μορφῆς (β), ἐνῶ ἄν ὁ β εἶναι ἀκέραιη δύναμη τοῦ α, τότε ἔχουμε ἐκθετική ἐξίσωση τῆς προηγούμενης μορφῆς. Ἔστω, λοιπόν, τώρα ὅτι ὁ β δέν εἶναι ἀκέραιη δύναμη τοῦ α, τότε ἡ ἐκθετική ἐξίσωση (δ) εἶναι ἰσοδύναμη μέ τήν: $\mathbf{f(x) = g(x) \cdot \lambda o\gamma_\alpha \beta}$.

Πράγματι, ἄν x_0 εἶναι μία ρίζα τῆς (δ), τότε γιά $\alpha, \beta \in R^+ - \{1\}$ ἔχουμε:

$$\alpha^{f(x_0)} = \beta^{g(x_0)} \iff f(x_0) \cdot \lambda o\gamma_\alpha \alpha = g(x_0) \cdot \lambda o\gamma_\alpha \beta \iff f(x_0) = g(x_0) \cdot \lambda o\gamma_\alpha \beta.$$

Παράδειγμα: Νά ἐπιλυθεῖ ἡ ἐξίσωση: $2^{x^2-5} = 3^{2x}$ **(1)**

Λύση. Παίρνοντας τούς λογαρίθμους ὡς πρός βάση 2 καί τῶν δύο μελῶν τῆς (1) ἔχουμε:

$$\lambda o\gamma_2(2^{x^2-5}) = \lambda o\gamma_2(3^{2x}) \Longrightarrow x^2 - 5 = 2x\lambda o\gamma_2 3 \Longrightarrow x^2 - (2\lambda o\gamma_2 3)x - 5 = 0 \text{ καί συνεπῶς:}$$

$$x_{1,2} = \lambda o\gamma_2 3 \pm \sqrt{(\lambda o\gamma_2 3)^2 + 5}.$$

ε΄) Ἐκθετικές ἐξισώσεις τῆς μορφῆς:

$$\boxed{f(\alpha^x) = g(\alpha^x)} \qquad (\varepsilon)$$

ὅπου $\alpha \in \mathbf{R}^{+} - \{1\}$.

Εἰδικά θά μελετήσουμε παρακάτω ἐξισώσεις τῶν μορφῶν:

$$\varepsilon_1: \quad A\alpha^{2x} + B\alpha^{x} + \Gamma = 0,$$

$$\varepsilon_2: \quad A_1\alpha^{\mu_1 x + \nu_1} + A_2\alpha^{\mu_2 x + \nu_2} + \cdots + A_k\alpha^{\mu_k x + \nu_k} = 0,$$

ὅπου $\mu_i, \nu_i \in \mathbf{Z}$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Οἱ ἐξισώσεις αὐτές ἀνάγονται στή μορφή (α) μέ τήν ἀντικατάσταση:

$$\boxed{\alpha^x = y}$$

Παράδειγμα 1ο: Νά ἐπιλυθεῖ ἡ ἐξίσωση: $4^x - 7\cdot 2^x - 8 = 0$. (1)

Λύση. Ἡ ἐξίσωση (1) γράφεται: $2^{2x} - 7\cdot 2^x - 8 = 0$ καί ἄν τεθεῖ: $2^x = y$, ἔχουμε:

$$y^2 - 7y - 8 = 0$$

Οἱ ρίζες αὐτῆς τῆς ἐξισώσεως εἶναι: $y_1 = 8$ καί $y_2 = -1$.

Ἄρα θά εἶναι:

$$2^x = 8 \quad (2) \qquad \text{καί} \qquad 2^x = -1 \quad (3).$$

Ἡ ἐξίσωση (2) γράφεται $2^x = 2^3$ καί δίνει: $x = 3$.

Ἡ ἐξίσωση (3) εἶναι ἀδύνατη, ἐπειδή $2^x > 0$ γιά κάθε $x \in \mathbf{R}$.

Ἡ (1) λοιπόν ἔχει μία μοναδική λύση, τή: $\mathbf{x = 3}$.

Παράδειγμα 2ο: Νά ἐπιλυθεῖ ἡ ἐξίσωση: $3^{x+2} + 5\cdot 3^x + 3^{x-1} - 3^{x-2} = 128$. (1)

Λύση. Ἡ (1) γράφεται: $3^x\cdot 3^2 + 5\cdot 3^x + \dfrac{3^x}{3} - \dfrac{3^x}{9} = 128.$

Θέτουμε $3^x = y$ καί ἔχουμε τήν ἐξίσωση:

$$9y + 5y + \frac{y}{3} - \frac{y}{9} = 128 \implies 128y = 1152 \implies y = 9.$$

Τότε ἔχουμε: $\quad 3^x = 9 = 3^2 \implies \mathbf{x = 2}.$

Παράδειγμα 3ο: Νά ἐπιλυθεῖ ἡ ἐξίσωση: $5^{2x-1} + 3\cdot 5^{x+1} = 80$. (1)

Λύση. Ἡ (1) γράφεται:

$$\frac{(5^x)^2}{5} + 3\cdot 5^x\cdot 5 - 80 = 0$$

ἤ

$$(5^x)^2 + 75\cdot 5^x - 400 = 0. \qquad (2)$$

Θέτουμε $5^x = y$ καί ἔχουμε τήν ἐξίσωση:

$$y^2 + 75\cdot y - 400 = 0 \implies y_1 = 5,\ y_2 = -80.$$

Ἄρα ἡ (2) διασπᾶται στίς ἐξισώσεις:

$$5^x = 5 \quad , \quad 5^x = -80.$$

Ἡ πρώτη δίνει: $\quad x = 1.$

Ἡ δεύτερη εἶναι ἀδύνατη, ἐπειδή $5^x > 0$ γιά κάθε $x \in \mathbf{R}$.

ζ') Ἐκθετικές ἐξισώσεις τῆς μορφῆς:

$$\boxed{f(\alpha^x) = g(\beta^x)} \qquad (\zeta)$$

ὅπου $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^{+} - \{1\}$ καί $\alpha \neq \beta$.

Συνήθεις περιπτώσεις τῆς παραπάνω μορφῆς εἶναι οἱ ἑξῆς:

$$\zeta_1: \quad A\cdot\alpha^x = B\cdot\beta^x \qquad (A \neq 0)$$

$$\zeta_2: \quad A\cdot\alpha^{2x} + B\cdot\alpha^x\cdot\beta^x + \Gamma\cdot\beta^{2x} = 0. \qquad (A \neq 0)$$

Οἱ ἐξισώσεις αὐτές ἀνάγονται στή μορφή (α) μέ τήν ἀντικατάσταση:

$$\boxed{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^x = y} \qquad (1)$$

Πράγματι, ἡ ζ_1 μέ τήν παραπάνω ἀντικατάσταση ἀνάγεται στήν ἐξίσωση: $y = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^x = \frac{B}{A}$, ἐνῶ ἡ ζ_2, ἄν διαιρέσουμε καί τά δύο μέλη της μέ τό β^{2x}, γίνεται

$$\zeta'_2: \quad A\cdot\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{2x} + B\cdot\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^x + \Gamma = 0$$

καί μέ τήν ἀντικατάσταση $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^x = y$ ἀνάγεται στήν ἐξίσωση: $Ay^2 + By + \Gamma = 0$.

Ἄν τώρα $B^2 - 4A\Gamma \geqq 0$, ἡ τελευταία ἐξίσωση δίνει δύο πραγματικές ρίζες y_1, y_2. Γιά τίς τιμές $y = y_1$, $y = y_2$ ἡ (1) δίνει τίς ἐκθετικές ἐξισώσεις: $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^x = y_1$, $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^x = y_2$, οἱ ὁποῖες λύνονται κατά τά γνωστά.

Παράδειγμα 1ο: Νά ἐπιλυθεῖ ἡ ἐξίσωση:

$$3\cdot 2^{x-4} - 2^{x-1} = 5^{x-2} - 6\cdot 5^{x-3} \qquad (1)$$

Λύση. Ἡ ἐξίσωση (1) γράφεται:

$$3\cdot\frac{2^x}{2^4} - \frac{2^x}{2} = \frac{5^x}{5^2} - 6\cdot\frac{5^x}{5^3}$$

ἤ

$$2^x\cdot\left(\frac{3}{16} - \frac{1}{2}\right) = 5^x\cdot\left(\frac{1}{25} - \frac{6}{125}\right)$$

ἤ

$$\left(\frac{2}{5}\right)^x = \frac{16}{625}$$

ἤ

$$\left(\frac{2}{5}\right)^x = \left(\frac{2}{5}\right)^4$$

Ἄρα εἶναι: $\mathbf{x = 4}$.

Παράδειγμα 2ο: Νά ἐπιλυθεῖ ἡ ἐξίσωση: $3\cdot 9^x - 5\cdot 6^x + 2^{2x+1} = 0$. (1)

Λύση. Ἡ ἐξίσωση (1) γράφεται: $2\cdot 2^{2x} - 5\cdot 2^x\cdot 3^x + 3\cdot 3^{2x} = 0$.

Διαιρώντας καί τά δύο μέλη διά 3^{2x}, λαμβάνουμε τήν ἰσοδύναμη ἐξίσωση:

$$2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - 5\left(\frac{2}{3}\right)^x + 3 = 0 \qquad (2)$$

Ἄν τώρα θέσουμε: $\left(\frac{2}{3}\right)^x = y$, τότε ἡ (2) γράφεται: $2y^2 - 5y + 3 = 0$ (3)

Ἡ (3) ἔχει ρίζες: $y_1 = \frac{3}{2}$, $y_2 = 1$. Ἄρα ἡ (2), συνεπῶς καί ἡ (1), διασπᾶται στίς ἐξισώσεις τῆς μορφῆς (α):

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{3}{2} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-1}, \quad \left(\frac{2}{3}\right)^x = 1 = \left(\frac{2}{3}\right)^0$$

Ὥστε τό σύνολο τῶν ριζῶν τῆς (1) εἶναι: $\left\{\mathbf{-1, 0}\right\}$.

η΄) Ἐκθετικές ἐξισώσεις τῆς μορφῆς:

$$\boxed{A \cdot \alpha^x + B \cdot \beta^x = \Gamma} \qquad (\eta)$$

ὅπου $\alpha, \beta \in R^+ - \{1\}$ μέ $\alpha\beta = 1$.

Οἱ ἐξισώσεις αὐτές μέ τήν ἀντικατάσταση: $\alpha^x = y$ ἀνάγονται στή μορφή (α).

Πράγματι, ἐπειδή $\alpha\beta = 1$ ἔχουμε: $\alpha^x\beta^x = 1$ καί συνεπῶς $\beta^x = \frac{1}{\alpha^x} = \frac{1}{y}$, ὁπότε ἡ (η) γράφεται:

$$Ay + \frac{B}{y} = \Gamma \Rightarrow Ay^2 - \Gamma y + B = 0 \qquad (\eta')$$

Ἄν τώρα $\Gamma^2 - 4AB \geqq 0$ ἡ τελευταία ἐξίσωση δίνει δύο πραγματικές ρίζες y_1, y_2, ὁπότε ἡ (η΄) διασπᾶται στίς ἐξισώσεις τῆς μορφῆς (α):

$$\alpha^x = y_1, \qquad \alpha^x = y_2.$$

Παράδειγμα: Νά ἐπιλυθεῖ ἡ ἐξίσωση: $3\left(\frac{3}{2}\right)^x + 2\left(\frac{2}{3}\right)^x = 5.$ (1)

Λύση. Θέτουμε $\left(\frac{3}{2}\right)^x = y$ καί ἡ (1) γράφεται: $3y + \frac{2}{y} = 5$ (2)

Ἡ (2) ἔχει ρίζες: $y_1 = \frac{2}{3}$, $y_2 = 1$ καί συνεπῶς ἔχουμε:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{2}{3} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-1}, \quad \left(\frac{3}{2}\right)^x = 1 = \left(\frac{3}{2}\right)^0$$

Ἄρα τό σύνολο λύσεων τῆς ἐξισώσεως (1) εἶναι: $\{-1, 0\}$.

Σημείωση. Μία πιό γενική μορφή τῆς (η) εἶναι ἡ ἐκθετική ἐξίσωση τῆς μορφῆς: $A \cdot \alpha^x + B \cdot \beta^x = \Gamma \cdot \gamma^x$ μέ $\alpha\beta = \gamma^2$ καί $\alpha, \beta, \gamma \in R^+$, ἀλλά $\alpha, \beta \neq 1$.

Γιά $\gamma = 1$ παίρνουμε τήν ἐκθετική ἐξίσωση (η). Γιά $\gamma \neq 1$ ἡ ἐξίσωση $A \cdot \alpha^x + B \cdot \beta^x = \Gamma \cdot \gamma^x$ γράφεται: $A\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^x + B\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^x = \Gamma$ καί λύνεται κατά τά γνωστά.

θ΄) Ἐκθετικές ἐξισώσεις τῆς μορφῆς:

$$\boxed{\{f(x)\}^{g(x)} = 1} \qquad (\theta)$$

ὅπου $f(x), g(x)$ εἶναι συναρτήσεις τοῦ x μέ τόν περιορισμό: $f(x) > 0$.

Οἱ ἐξισώσεις τῆς μορφῆς αὐτῆς ἔχουν προφανῶς λύσεις τίς λύσεις τῶν ἐξισώσεων:

(i) $f(x) = 1$

(ii) $g(x) = 0 \wedge f(x) \neq 0$ (ἀκριβέστερα $f(x) > 0$).

Παράδειγμα: Νά λυθεῖ ἡ ἐξίσωση: $(x^2 - 3x + 2)^{x^2-2x} = 1.$ (1)

Λύση. Ἐδῶ ἔχουμε $f(x) = x^2 - 3x + 2 = (x-1)\cdot(x-2)$ καί τό σύνολο λύσεων τῆς $f(x) > 0$ εἶναι: $\{x \in R: -\infty < x < 1, \quad 2 < x < +\infty\}$.

Ὕστερα ἀπό αὐτό ἔχουμε:

(i) Οἱ ρίζες τῆς $x^2 - 3x + 2 = 1 \Longleftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ εἶναι προφανῶς λύσεις τῆς (1).

(ii) Οἱ λύσεις τοῦ συστήματος:

$$\left.\begin{array}{r} x^2-2x=0 \\ x^2-3x+2>0 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{r} x(x-2)=0 \\ (x-1)(x-2)>0 \end{array}\right\} \Longrightarrow x=0$$

εἶναι ἐπίσης λύση τῆς (1).

Ἄρα τό σύνολο λύσεων τῆς ἐξισώσεως (1) εἶναι: $\left\{\mathbf{0}, \dfrac{\mathbf{3-\sqrt{5}}}{\mathbf{2}}, \dfrac{\mathbf{3+\sqrt{5}}}{\mathbf{2}}\right\}$.

Σχόλιο. Περιπτώσεις σάν τήν: $x^2-3x+2=-1 \wedge x^2-2x=2k,\ k\in\mathbf{Z}$ δέν ἐξετάζουμε ἐδῶ (βλ. σχετικῶς ὁρισμό ἐκθετικῆς ἐξισώσεως § 168).

Παρατήρηση. Ἡ ἐξίσωση $\{f(x)\}^{f(x)}=\beta$, ὅπου $f(x)$ εἶναι γνωστή συνάρτηση τοῦ x μέ $f(x)>0$ λύνεται ἄν τό β ἔχει ἤ μπορεῖ νά πάρει τή μορφή: $\beta=\alpha^\alpha$, $(\alpha>0)$. Τότε θά ἔχουμε: $\{f(x)\}^{f(x)}=\alpha^\alpha$ καί συνεπῶς θά εἶναι $f(x)=\alpha$.

Παραδείγματα : Νά ἐπιλυθοῦν οἱ ἐξισώσεις :

$$\text{α)}\quad \mathbf{x^x=4}\quad,\quad \text{β)}\quad \mathbf{(x^2-7x+15)^{x^2-7x+15}=27.}$$

Λύση. α) Ἔχουμε: $x^x=4=2^2$ καί συνεπῶς $\mathbf{x=2}$.

β) Ἔχουμε:

$$(x^2-7x+15)^{x^2-7x+15}=27=3^3 \Longleftrightarrow x^2-7x+15=3 \Longleftrightarrow x^2-7x+12=0 \Longrightarrow \mathbf{x_1=3,\ x_2=4}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάδα Α΄. 380. Νά ἐπιλύσετε τίς ἐξισώσεις:

1. $5^{\sqrt{x}}=625$, **2.** $3^{x^2-9x+11}=27$, **3.** $2^{x^2-2x}=8^{x-2}$

4. $3^x=81^{2-|x|}$, **5.** $27^{\frac{x+1}{x-2}}=3^{2x-4}$, **6.** $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{3x-7}=\left(\dfrac{4}{3}\right)^{7x-3}$

381. Νά ἐπιλύσετε τίς ἀκόλουθες ἐκθετικές ἐξισώσεις:

1. $2\cdot9^x-7\cdot3^x+3=0$, **2.** $3^x-4\sqrt{3^x}+3=0$, **3.** $2^x+\dfrac{6}{2^x}=5$,

4. $2\cdot4^x+3\cdot9^x=5\cdot6^x$, **5.** $9^x+6^x=4^x$, **6.** $x^x=x$.

382. Τό ἴδιο νά κάνετε γιά τίς ἐξισώσεις:

1. $3^{x+1}-2^x=3^{x-1}+2^{x+3}$, **2.** $7^{3x+2}+4^{x+2}=7^{3x+4}+4^{x+3}$, **3.** $2^{2x}=3^{x+1}$,

4. $5^{x-2}-3\cdot2^{x-3}=12\cdot5^{x-3}-2^x$, **5.** $(x^2-5x+6)^{x^2-2x}=1$, **6.** $x^{\sqrt{x}}=(\sqrt{x})^x$

★Ὁμάδα Β΄. 383. Νά ἐπιλύσετε τίς ἐξισώσεις:

1. $2^{3^x}=512$, **2.** $18^{8-4x}=(54\sqrt{2})^{3x-2}$, **3.** $(x^2-1)e^{\log(x-2)}=\log e^{x+1}$,

4. $5^{x^2-3x}=625$ **5.** $e^x-e^{-x}=\dfrac{8}{3}$, **6.** $3^{x+2}+9^{x-1}=1458$.

384. Νά ἐπιλύσετε τίς ἀκόλουθες ἐκθετικές ἐξισώσεις:

1. $4^x-3^{x-\frac{1}{2}}=3^{x+\frac{1}{2}}-2^{2x-1}$, **2.** $7^{x+\frac{4}{3}}-5^{3x}=2\left(7^{x+\frac{1}{3}}+5^{3x-1}\right)$

3. $e^{2x}-3e^x+2=0$, **4.** $2^{2x-1}+3^x+4^{x+\frac{1}{2}}-9^{\frac{x}{2}+1}=0$.

385. Τό ἴδιο νά κάνετε γιά τίς ἐξισώσεις:

1. $x^x-x^{-x}=3(1+x^{-x})$, **2.** $3^{x-1}-\dfrac{15}{3^{x+1}}+3^x-\dfrac{21}{3^{x+1}}=0$,

3. $\sqrt{2^{6x-13}} - 3^{2(x-2)} = \sqrt{8^{2x-3}} - 3^{2x-3}$, 4. $x^2 \cdot 2^{x+1} + 2^{|x-3|+2} = x^2 \cdot 2^{|x-3|+4} + 2^{x-1}$.

Ὑπόδειξη. Στήν (4) νά διακρίνετε τίς περιπτώσεις: **(i)** $x \geq 3$, **(ii)** $x < 3$.

386. Ἄν α, β, γ εἶναι τά μήκη τῶν πλευρῶν ἑνός ὀρθογώνιου τριγώνου ΑΒΓ ($A = 90^0$), νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ ἐκθετική ἐξίσωση:

$$\beta^x + \gamma^x = \alpha^x$$

ἔχει ἀκριβῶς μία λύση στό σύνολο τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

Ἐφαρμογή: $\beta = 3$, $\gamma = 4$, $\alpha = 5$.

Ὑπόδειξη. Ἀφοῦ βρεῖτε τήν (προφανή) λύση $x_0 (= \;;)$ νά συνεχίσετε μέ τή μέθοδο τῆς *«εἰς ἄτοπον»* ἀπαγωγῆς παίρνοντας τίς περιπτώσεις: **(i)** $x > x_0$, καί **(ii)** $x < x_0$.

387. Ἄν $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^+$ τέτοιοι, ὥστε $(\alpha-\beta)(\alpha-1)(2\alpha-1) \neq 0$ καί ὁ β εἶναι ρίζα τῆς ἐξισώσεως: $x^2 - \alpha x - \alpha\beta = 0$, νά προσδιορίσετε τά α, β καί x ἄν ξέρουμε ὅτι ἱκανοποιοῦν τίς σχέσεις:

$$\alpha^{x^2-\alpha x-\alpha\beta} = \beta^{x^2+\beta x+\alpha^2}, \quad x + \beta + 2\alpha = 0.$$

IV. ΕΚΘΕΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

§ 169. Ὁρισμοί.—*Ὀνομάζουμε* **σύστημα ἐκθετικῶν ἐξισώσεων** *μέ δύο ἤ περισσότερους ἀγνώστους, κάθε σύστημα ἐξισώσεων, ἀπό τίς ὁποῖες ἡ μία τουλάχιστο εἶναι ἐκθετική.*

Οἱ τιμές τῶν ἀγνώστων, γιά τίς ὁποῖες συναληθεύουν οἱ ἐξισώσεις τοῦ συστήματος, λέμε ὅτι ἀποτελοῦν τή **λύση** τοῦ συστήματος.

Ἡ ἐπίλυση τῶν ἐκθετικῶν συστημάτων στηρίζεται στίς ἰδιότητες τῶν δυνάμεων καί στίς ἰδιότητες τῶν λογαρίθμων.

Παραδείγματα: 1ο. Νά ἐπιλυθεῖ τό σύστημα:

$$4^x \cdot 2^{y-2} = 32 \quad (1)$$
$$3^{x+2} \cdot 3^{y-4} = 27. \quad (2)$$

Λύση. Οἱ (1) καί (2) γράφονται:

$$\left.\begin{array}{l} 2^{2x} \cdot 2^{y-2} = 2^5 \\ 3^{x+2} \cdot 3^{y-4} = 3^3 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{l} 2^{2x+y-2} = 2^5 \\ 3^{x+y-2} = 3^3 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{l} 2x + y = 7 \\ x + y = 5 \end{array}\right\} \Longrightarrow (x, y) = (2, 3).$$

Ἄρα τό σύνολο λύσεων: (x, y) τοῦ συστήματος εἶναι τό μονοσύνολο : $\{(2, 3)\}$.

2ο. Νά ἐπιλυθεῖ τό σύστημα:

$$3^x \cdot 4^y = 3981312 \quad (1)$$
$$2^y \cdot 5^x = 400000. \quad (2)$$

Λύση. Λογαριθμίζοντας καί τά δύο μέλη τῶν ἐξισώσεων (1) καί (2) βρίσκουμε τό ἰσοδύναμο σύστημα:

$$x \cdot \lambda o\gamma\, 3 + y \cdot \lambda o\gamma\, 4 = \lambda o\gamma\, 3981312 \quad (1')$$
$$y \cdot \lambda o\gamma\, 2 + x \cdot \lambda o\gamma\, 5 = \lambda o\gamma\, 4000000 \quad (2')$$

Θέτοντας $\lambda o\gamma\, 4 = \lambda o\gamma\, 2^2 = 2\lambda o\gamma\, 2$ καί πολλαπλασιάζοντας τά μέλη τῆς (2′) ἐπί 2, βρίσκουμε:

$$x\, \lambda o\gamma\, 3 + 2y \cdot \lambda o\gamma\, 2 = \lambda o\gamma\, 3981312 \quad (1'')$$
$$2x\, \lambda o\gamma\, 5 + 2y \cdot \lambda o\gamma\, 2 = 2\lambda o\gamma\, 400000 \quad (2'')$$

Λύνοντας τό σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1″) καί (2″) βρίσκουμε:

$$x = \frac{2\lambda o\gamma\, 400000 - \lambda o\gamma\, 3981312}{2\lambda o\gamma\, 5 - \lambda o\gamma\, 3} = \frac{2 \cdot \lambda o\gamma(2^2 \cdot 10^5) - \lambda o\gamma(2^{14} \cdot 3^5)}{2\lambda o\gamma\, 5 - \lambda o\gamma\, 3} =$$

$$= \frac{10 - 10\lambda o\gamma\, 2 - 5\lambda o\gamma\, 3}{2 - 2\lambda o\gamma\, 2 - \lambda o\gamma\, 3} = 5.$$

Ἀντικαθιστώντας τήν τιμή αὐτή τοῦ x στή (2) βρίσκουμε:

$$2^y = \frac{400000}{5^5} = \frac{4 \cdot 10^5}{5^5} = \frac{2^2 \cdot 2^5 \cdot 2^5}{5^5} = 2^7,$$

ἀπό τήν ὁποία ἔχουμε: $y = 7$.

Ἄρα τό σύνολο λύσεων: (x, y) τοῦ συστήματος πού μᾶς δόθηκε εἶναι τό: $\{(5, 7)\}$.

3ο. Νά ἐπιλυθεῖ τό σύστημα:

$$x^y = y^x \quad (1)$$
$$x^3 = y^2 \quad (2)$$

Λύση. Μία προφανής λύση τοῦ συστήματος εἶναι τό ζεῦγος: $(x, y) = (1, 1)$. Ὑποθέτοντας τώρα ὅτι: $x > 0$, $y > 0$ μέ $x \neq 1$ καί $y \neq 1$ καί λογαριθμίζοντας * καί τά δύο μέλη τῶν ἐξισώσεων (1) καί (2) βρίσκουμε τό ἰσοδύναμο σύστημα:

$$y \cdot \text{λογ}\, x = x \cdot \text{λογ}\, y \quad (1')$$
$$3 \cdot \text{λογ}\, x = 2 \cdot \text{λογ}\, y. \quad (2')$$

Διαιρώντας κατά μέλη τίς (1′) καί (2′) ἔχουμε: $\frac{y}{3} = \frac{x}{2} \Rightarrow y = \frac{3x}{2}$ (3)

Θέτοντας τήν τιμή αὐτή τοῦ y στή (2) ἔχουμε:

$$x^3 = \left(\frac{3x}{2}\right)^2 \quad \text{ἤ} \quad x^3 = \frac{9}{4}x^2$$

ἤ $x^2\left[x - \frac{9}{4}\right] = 0$, καί ἐπειδή ὑποθέσαμε $x > 0$ ἕπεται: $x = \frac{9}{4}$.

Θέτοντας τήν τιμή αὐτή τοῦ x στήν (3) λαμβάνουμε:

$$y = \frac{3}{2} \cdot \frac{9}{4} = \frac{27}{8}.$$

Ἑπομένως οἱ ρίζες τοῦ συστήματος εἶναι τά ζεύγη:

$$\mathbf{(x = 1, y = 1)} \quad , \quad \left(\mathbf{x = \frac{9}{4}, \ y = \frac{27}{8}}\right).$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάδα Α΄. 388. Νά ἐπιλύσετε τά ἀκόλουθα συστήματα:

1. $\begin{cases} 2^{3x+y} = 32 \\ 3^{2x-y} = 1 \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} 2^x = 3y \\ 3^x = 2y \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} 3^x - 2^{y+3} = 15 \\ 2^y - 3^{x-3} = 3 \end{cases}$

389. Νά προσδιορίσετε τά $x, y \in \mathbf{R}^+$ γιά τά ὁποῖα ἰσχύουν:

1. $\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 54 \\ 3^x \cdot 2^y = 24 \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} 3^{x^y - y^x} = 1 \\ y^2 - x = 0 \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} x^y = y^x \\ y = \alpha x, \ (0 < \alpha \neq 1) \end{cases}$

★Ὁμάδα Β΄. 390. Νά ἐπιλύσετε τά ἀκόλουθα συστήματα:

1. $\begin{cases} 3^{\frac{x-y}{2}} - 3^{\frac{x-y}{4}} = 6 \\ 2^{\frac{x+y}{3}} - 2^{\frac{x+y}{6}} = 2 \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} x^{x+y} = y^3 \\ y^{x+y} = x^3 \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} x^{x+y} = y^{\nu} \\ y^{x+y} = x^{2\nu} \cdot y^{\nu} \end{cases}, \ \nu \in \mathbf{N},$

---

* Ἡ λογαρίθμιση ἐπιτρέπεται, ἐπειδή $x \neq 1$ καί $y \neq 1$, γιατί ἀλλιῶς τό σύστημα πού θά προκύψει δέν εἶναι ἰσοδύναμο μέ τό ἀρχικό.

391. Νά ἐπιλύσετε καί νά διερευνήσετε τά παρακάτω συστήματα:

1. $\begin{matrix} \alpha^x = \beta^y \\ x^y = y^x \end{matrix}$ 2. $\begin{matrix} \alpha^x = \beta^y \\ x^\alpha = y^\beta \end{matrix}$ 3. $\begin{matrix} x^\alpha = y^\beta \\ x^y = y^x \end{matrix}$

392. Νά βρεθοῦν οἱ ἀκέραιες καί θετικές λύσεις τοῦ συστήματος:

$$\left\{x^y = y^x \ \wedge \ x^x = y^{x+2y}\right\}.$$

393. Νά βρεθοῦν οἱ πραγματικές λύσεις τοῦ συστήματος:

$$\left\{z^x = y^{2x} \ \wedge \ 2^{z-1} = 4^x \ \wedge \ x + y + z = 16\right\}.$$

V. ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

§ 170. Ὁρισμοί.—α΄) Λογαριθμική ἐξίσωση *ὀνομάζουμε κάθε ἐξίσωση τῆς μορφῆς:*

$$E(x) = F(x) \tag{1}$$

ὅπου E(x), F(x) εἶναι (πραγματικές) συναρτήσεις τοῦ x, ὅταν σ' ἕνα τουλάχιστο ἀπό τά μέλη της ἐμφανίζεται ὁ λογάριθμος τοῦ ἀγνώστου εἴτε ὁ λογάριθμος συναρτήσεων τοῦ ἀγνώστου.

Ἔτσι, π.χ. οἱ ἐξισώσεις:

$$3\lambda o\gamma x - \frac{1}{2}\lambda o\gamma(2x+1) = \lambda o\gamma\sqrt{2x-1} + 2, \quad x^{\lambda o\gamma\sqrt{x}} = 100, \ \lambda o\gamma_3 x \cdot \lambda o\gamma_9 x = 2,$$

εἶναι λογαριθμικές.

Ἐπίλυση *μιᾶς λογαριθμικῆς ἐξισώσεως λέγεται ἡ εὕρεση τοῦ συνόλου τῶν λύσεων αὐτῆς,* δηλαδή *τοῦ συνόλου τῶν τιμῶν τοῦ ἀγνώστου της, οἱ ὁποῖες τήν ἱκανοποιοῦν.*

Ἡ ἐπίλυση τῶν λογαριθμικῶν ἐξισώσεων στηρίζεται στίς ἰδιότητες τῶν λογαρίθμων, γι' αὐτό συνιστοῦμε στόν ἀναγνώστη νά ἀνατρέξει γιά μιά ἀκόμη φορά στόν πίνακα τῆς σελίδας 219.

Στίς περισσότερες φορές ἡ ἐπίλυση μιᾶς λογαριθμικῆς ἐξισώσεως ἀνάγεται σέ ἐπίλυση ἐξισώσεων πού ἔχουν τίς ἀκόλουθες μορφές:

$$\text{(i) } \lambda o\gamma x = \gamma, \quad \text{(ii) } \lambda o\gamma\, x = \lambda o\gamma\, \alpha, \quad \text{(iii) } \lambda o\gamma\, f(x) = \lambda o\gamma\, \alpha,$$
$$\text{(iv) } \lambda o\gamma_\beta\, f(x) = \lambda o\gamma_\beta g(x),$$

ὅπου α εἶναι γνωστός θετικός ἀριθμός, $f(x)$ καί $g(x)$ γνωστές συναρτήσεις τοῦ ἀγνώστου μέ τόν περιορισμό $f(x), g(x) > 0$ καί β εἶναι ἡ βάση τοῦ λογαριθμικοῦ συστήματος $(0 < \beta \neq 1)$.

Ἀπό τόν ὁρισμό τοῦ λογαρίθμου καί ἀπό τήν πρώτη ἰδιότητα τῶν λογαρίθμων προκύπτει τώρα ὅτι:

(i) Ἡ ἐξίσωση $\lambda o\gamma\, x = \gamma$ εἶναι ἰσοδύναμη μέ τήν: $x = 10^\gamma$
(ii) Ἡ » $\lambda o\gamma\, x = \lambda o\gamma\, \alpha$ » μέ τό σύστημα: $x = \alpha, \alpha > 0$
(iii) Ἡ » $\lambda o\gamma\, f(x) = \lambda o\gamma\, \alpha$ » » » » : $f(x) = \alpha, \alpha > 0$
(iv) Ἡ » $\lambda o\gamma_\beta f(x) = \lambda o\gamma_\beta g(x)$ » » » : $f(x) = g(x), g(x) > 0$.

Σημείωση. Ἄν σέ μία λογαριθμική ἐξίσωση οἱ λογάριθμοι εἶναι μέ διαφορετικές βάσεις, πρέπει νά τούς μετατρέπουμε, ὥστε ὅλοι νά εἶναι μέ τήν ἴδια βάση.

Παραδείγματα : 1ο. Νά ἐπιλυθεῖ ἡ λογαριθμική ἐξίσωση :

$$\text{λογ}(4x-1) = 2\text{λογ}\,2 + \text{λογ}(x^2-1) \qquad (1)$$

Λύση. Ἡ (1) εἶναι ἰσοδύναμη μέ τό σύστημα:

$$\left\{4x-1>0 \;\wedge\; x^2-1>0 \;\wedge\; \text{λογ}(4x-1)=\text{λογ}4(x^2-1)\right\} \qquad (2)$$

Ἡ ἐξίσωση τοῦ συστήματος (2) εἶναι ἰσοδύναμη μέ τήν:

$$4x-1=4(x^2-1) \iff 4x^2-4x-3=0 \implies x_1=\frac{3}{2},\quad x_2=-\frac{1}{2}.$$

Ἀπ' αὐτές μόνο ἡ πρώτη ἱκανοποιεῖ καί τίς δύο ἀνισώσεις τοῦ συστήματος (2).

Ἄρα ἡ ἐξίσωση (1) ἔχει μία μόνο ρίζα, τήν: $\mathbf{x=\frac{3}{2}}$.

2ο. Νά ἐπιλυθεῖ ἡ λογαριθμική ἐξίσωση :

$$\frac{1}{2}\,\text{λογ}(x+2)+\text{λογ}\sqrt{x-3}=1+\text{λογ}\sqrt{3} \qquad (1)$$

Λύση. Ἐπειδή $\frac{1}{2}\text{λογ}(x+2)=\text{λογ}\sqrt{x+2}$ καί $1=\text{λογ}10$ ἡ (1) εἶναι ἰσοδύναμη μέ τό σύστημα:

$$\left\{x+2>0 \wedge x-3>0 \wedge \text{λογ}(\sqrt{x+2}\cdot\sqrt{x-3})=\text{λογ}(10\cdot\sqrt{3})\right\} \qquad (2)$$

Οἱ δύο πρῶτες σχέσεις τοῦ (2) συναληθεύουν γιά: $\quad x>3 \qquad (3)$

Ἡ ἐξίσωση τοῦ συστήματος εἶναι ἰσοδύναμη μέ τήν:

$$\sqrt{(x+2)\cdot(x-3)}=10\cdot\sqrt{3} \iff (x+2)(x-3)=300 \iff x^2-x-306=0.$$

Ἀπό τήν τελευταία ἐξίσωση βρίσκουμε: $x_1=18,\ x_2=-17$.

Ἀπ' αὐτές μόνο ἡ πρώτη ἱκανοποιεῖ τήν (3).

Συνεπῶς ἡ (1) ἔχει ὡς (μοναδική) λύση τήν: $\mathbf{x=18}$.

3ο. Νά ἐπιλυθεῖ ἡ ἐξίσωση : $\sqrt{x^{\text{λογ}\sqrt{x}}}=10. \qquad (1)$

Λύση. Ἡ (1) εἶναι ἰσοδύναμη μέ τό σύστημα:

$$\left\{x>0 \;\wedge\; x^{\text{λογ}\sqrt{x}}=100\right\} \qquad (2)$$

Ἡ ἐξίσωση τοῦ συστήματος (2) εἶναι ἰσοδύναμη μέ τήν:

$$\text{λογ}\sqrt{x}\cdot\text{λογ}\,x=\text{λογ}\,100 \iff \frac{1}{2}(\text{λογ}\,x)^2=2 \iff (\text{λογ}\,x)^2=4.$$

Ἄρα τό σύστημα (2) διασπᾶται στά συστήματα:

$$\left\{x>0 \wedge \text{λογ}\,x=2\right\} \text{ καί } \left\{x>0 \wedge \text{λογ}\,x=-2\right\}.$$

Ἀπό τήν ἐξίσωση $\text{λογ}\,x=2$ ἔχουμε: $\text{λογ}\,x=2=\text{λογ}\,100$, ἄρα $x=100$.

Ἀπό τήν ἐξίσωση $\text{λογ}\,x=-2$ ἔχουμε: $\text{λογ}\,x=-2=\text{λογ}\,0{,}01$, ἄρα $x=0{,}01$.

Ὥστε τό σύνολο λύσεων τῆς ἐξισώσεως (1) εἶναι: $\left\{\mathbf{10^{-2}, 10^2}\right\}$.

4ο. Νά ἐπιλυθεῖ ἡ ἐξίσωση : $\quad \text{λογ}_3 x\cdot\text{λογ}_9 x=2 \qquad (1)$

Λύση. Ἐπειδή $\text{λογ}_9 x=\text{λογ}_{3^2} x=\frac{1}{2}\text{λογ}_3 x$, ἡ (1) εἶναι ἰσοδύναμη μέ τό σύστημα:

$$\left\{x>0 \;\wedge\; \frac{1}{2}(\text{λογ}_3 x)^2=2\right\} \qquad (2)$$

Ἡ ἐξίσωση τοῦ συστήματος (2) εἶναι ἰσοδύναμη μέ τήν: $(\text{λογ}_3 x)^2=4$.

Ἄρα τό σύστημα (2) διασπᾶται στά συστήματα:

$$\{x > 0 \wedge \lambda o\gamma_3 x = 2\} \quad \text{καί} \quad \{x > 0 \wedge \lambda o\gamma_3 x = -2\}.$$

'Επιλύνοντας τά παραπάνω συστήματα, ὅπως καί στό προηγούμενο παράδειγμα, βρίσκουμε ὅτι τό σύνολο λύσεων τῆς (1) εἶναι: $\{3^{-2}, 3^2\}$·

β') Λογαριθμικό σύστημα *ὀνομάζουμε κάθε σύστημα τοῦ ὁποίου μία τουλάχιστο ἀπό τίς ἐξισώσεις του εἶναι λογαριθμική.*

Ἔτσι, π.χ. τά συστήματα:

$$\left.\begin{array}{c}\lambda o\gamma\, x + \lambda o\gamma\, y = \lambda o\gamma\, 14\\ 3x - y = 1\end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{c}\lambda o\gamma_y x + \lambda o\gamma_x y = 2\\ x^2 + y = 12\end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{c}x^{\lambda o\gamma y+1} = y^{\lambda o\gamma x+2}\\ y^{\sqrt{x+2}} = x^{y-2}\end{array}\right\}$$

εἶναι λογαριθμικά.

'Επίλυση *ἑνός λογαριθμικοῦ συστήματος λέγεται ἡ εὕρεση τοῦ συνόλου τῶν λύσεων αὐτοῦ,* δηλαδή *τοῦ συνόλου τῶν τιμῶν τῶν ἀγνώστων του, οἱ ὁποῖες ἱκανοποιοῦν ὅλες τίς ἐξισώσεις τοῦ συστήματος.*

Ἡ ἐπίλυση τῶν λογαριθμικῶν συστημάτων στηρίζεται στίς ἰδιότητες τῶν λογαρίθμων καί στή θεωρία ἐπιλύσεως λογαριθμικῶν ἐξισώσεων πού ἐκθέσαμε παραπάνω.

Παραδείγματα: 1ο. Νά ἐπιλυθεῖ τό σύστημα:

$$\{\lambda o\gamma\, x + \lambda o\gamma\, y = \lambda o\gamma\, 14, \quad 3x - y = 1\} \tag{1}$$

Λύση. Πρῶτα-πρῶτα οἱ x καί y ὀφείλουν νά εἶναι θετικοί. Ἡ πρώτη ἐξίσωση τοῦ συστήματος γράφεται: $\lambda o\gamma\,(x \cdot y) = \lambda o\gamma\, 14 \iff x \cdot y = 14$, ὁπότε τό (1) ἰσοδυναμεῖ μέ τό σύστημα:

$$\{3x - y = 1 \wedge xy = 14\} \tag{2}$$

Λύνουμε τό σύστημα (2) καί, ἐπειδή πρέπει $x > 0$, $y > 0$, βρίσκουμε: $(x, y) = \left(\frac{7}{3}, 6\right)$.

Ἄρα τό σύνολο λύσεων (x, y) τοῦ (1) εἶναι τό μονοσύνολο:

$$\left\{\left(\frac{7}{3}, 6\right)\right\}.$$

2ο. Νά ἐπιλυθεῖ τό σύστημα:

$$\{\lambda o\gamma_y x + \lambda o\gamma_x y = 2 \wedge x^2 + y = 12\}\cdot \tag{1}$$

Λύση. Πρῶτα-πρῶτα οἱ x καί y ὀφείλουν νά εἶναι θετικοί καί διάφοροι ἀπό τό 1. Ὥστε: $0 < x, y \neq 1$.

'Επειδή $\lambda o\gamma_x y = \dfrac{1}{\lambda o\gamma_y x}$ (βλ. Πόρισμα 1, § 154), ἡ πρώτη ἐξίσωση τοῦ συστήματος γράφεται:

$$\lambda o\gamma_y x + \frac{1}{\lambda o\gamma_y x} = 2 \iff \lambda o\gamma^2_y x - 2\lambda o\gamma_y x + 1 = 0 \iff (\lambda o\gamma_y x - 1)^2 = 0$$

'Από τήν τελευταία ἐξίσωση ἔχουμε: $\lambda o\gamma_y x = 1$, ὁπότε: $x = y$ (2)

Ἔτσι ἔχουμε τώρα νά ἐπιλύσουμε τό ἰσοδύναμο σύστημα:

$$\{x^2 + y = 12 \wedge x = y\} \tag{3}$$

Λύνουμε τό σύστημα (3) καί ἐπειδή πρέπει $x > 0$, $y > 0$, βρίσκουμε: $(x, y) = (3, 3)$.
Ἄρα τό (1) ἔχει, ὡς (μοναδική) λύση, τήν: $(x, y) = (3, 3)$.

3ο. Νά ἐπιλυθεῖ τό σύστημα:

$$x^{\lambda o\gamma y+1} = y^{\lambda o\gamma x+2} \qquad (1)$$

$$y^{\sqrt{x+2}} = x^{y-2} \qquad (2)$$

Λύση. Πρῶτα-πρῶτα οἱ x καί y ὀφείλουν νά εἶναι θετικοί (γιατί;). Μία προφανής λύση τοῦ συστήματος εἶναι ἡ: $(x, y) = (1, 1)$. Ἔστω λοιπόν ὅτι $x \neq 1$ καί $y \neq 1$.

Ἀπό τήν (1) λογαριθμίζοντας λαμβάνουμε:

$$(\lambda o\gamma\, y + 1)\cdot \lambda o\gamma\, x = (\lambda o\gamma\, x + 2)\cdot \lambda o\gamma\, y$$

ἤ $$\lambda o\gamma\, x\, \lambda o\gamma\, y + \lambda o\gamma\, x = \lambda o\gamma\, x\, \lambda o\gamma\, y + 2\,\lambda o\gamma\, y$$

ἤ $$\lambda o\gamma\, x = \lambda o\gamma\, y^2$$

καί συνεπῶς: $$x = y^2. \qquad (3)$$

Ἐξαιτίας τῆς (3) ἡ δεύτερη ἐξίσωση τοῦ συστήματος γράφεται: $y^{\sqrt{y^2+2}} = y^{2(y-2)}$.

Ἀπό τήν τελευταία ἐξίσωση, ἐπειδή $y \neq 1$, παίρνουμε: $\sqrt{y^2+2} = 2(y-2)$.

Λύνουμε τήν τελευταία ἐξίσωση καί, ἐπειδή πρέπει $y > 0$, βρίσκουμε: $y = \dfrac{8+\sqrt{22}}{3}$,

ὁπότε ἡ (3) δίνει: $x = \dfrac{86+16\sqrt{22}}{9}$.

Ἔτσι τό σύστημα πού μᾶς δόθηκε ἔχει τίς λύσεις:

$$(x = 1, y = 1), \qquad \left(x = \frac{86+16\sqrt{22}}{9}, \quad y = \frac{8+\sqrt{22}}{3}\right).$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάδα Α΄. 394. Νά ἐπιλύσετε τίς ἀκόλουθες ἐξισώσεις:

1. $\lambda o\gamma(x-2) + \lambda o\gamma(x-1) = \lambda o\gamma(2x+8)$, 2. $\lambda o\gamma(x+1) + 2\cdot\lambda o\gamma\sqrt{5x} = 2$,

3. $\frac{1}{2}\lambda o\gamma(3x-1) + \frac{1}{2}\lambda o\gamma(8x-2) = \lambda o\gamma(4x-1)$, 4. $\frac{1}{3}\lambda o\gamma(x-1) = \lambda o\gamma x - \lambda o\gamma 2$

5. $\lambda o\gamma(2x-5) + \lambda o\gamma(3x+7) = 4\cdot\lambda o\gamma 2$, 6. $2\cdot\lambda o\gamma x = \lambda o\gamma\left(x+\frac{11}{10}\right) + 1$.

395. Νά ἐπιλύσετε τίς ἀκόλουθες λογαριθμικές ἐξισώσεις:

1. $\lambda o\gamma[\lambda o\gamma(2x^2+x-11)] = 0$, 2. $\lambda o\gamma(x+1) - \lambda o\gamma 3 = \lambda o\gamma(2x-3) + \lambda o\gamma 7$,

3. $2^{\lambda o\gamma x} + 2^{5-\lambda o\gamma x} = 12$, 4. $\lambda o\gamma\frac{2x}{3} + \lambda o\gamma\left(\frac{5x}{4}+2\right) = 2\lambda o\gamma(x-1)$,

5. $(4x)^{\lambda o\gamma 2 + \lambda o\gamma\sqrt{x}} = 100$, 6. $2\lambda o\gamma(2x-1) - \lambda o\gamma(3x-2x^2) = \lambda o\gamma(4x-3) - \lambda o\gamma x$

396. Τό ἴδιο νά κάνετε γιά τίς ἐξισώσεις:

1. $\lambda o\gamma(3^x+2) = 2x\lambda o\gamma 3$, 2. $\lambda o\gamma(2^x+2\cdot 3^x) + \lambda o\gamma 81 = x\cdot\lambda o\gamma 3 + \lambda o\gamma 178$,

3. $x^{\lambda o\gamma x} = \frac{1}{10}\cdot x^2\sqrt{x}$, 4. $\lambda o\gamma_{\sqrt{2}} x\cdot\lambda o\gamma_2 x\cdot\lambda o\gamma_{2\sqrt{2}} x\cdot\lambda o\gamma_4 x = 54$,

5. $\varphi(x) + \varphi\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{10}{3}$, ὅπου $\varphi(x) = \dfrac{2\lambda o\gamma\, x + 1}{2\lambda o\gamma\, x - 1}$.

397. Γιά ποιές τιμές τοῦ θ ἡ ἐξίσωση: $x^2 - x\lambda o\gamma\theta + 3\lambda o\gamma\theta - 8 = 0$ ἔχει ρίζες πραγματικές καί ἴσες; Κατόπιν νά προσδιορίσετε τήν τιμή τῆς παραμέτρου θ, ὥστε ἡ παραπάνω ἐξίσωση νά ἔχει μία διπλή ρίζα στό διάστημα (0, 4).

398. Νά ἐπιλύσετε τά ἀκόλουθα λογαριθμικά συστήματα:

1. $\begin{cases} x + y = 65 \\ \lambda o\gamma x + \lambda o\gamma y = 3 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} \lambda o\gamma x + \lambda o\gamma\, y = \dfrac{3}{2} \\ \lambda o\gamma x - \lambda o\gamma y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ 3. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 425 \\ \lambda o\gamma x + \lambda o\gamma y = 2. \end{cases}$

399. Νά ἐπιλύσετε τά ἀκόλουθα συστήματα:

1. $\begin{cases} \lambda o\gamma^2 x + \lambda o\gamma^2 y = 10 \\ \lambda o\gamma x - \lambda o\gamma y = 2 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x^{\lambda o\gamma y} + y^{\lambda o\gamma x} = 20 \\ \lambda o\gamma\sqrt{xy} = 1 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} 2^x + 2^y = 12 \\ \lambda o\gamma(2x+2) - \lambda o\gamma(3+y) = 0. \end{cases}$

400. Τό ἴδιο νά κάνετε γιά τά συστήματα:

1. $\begin{cases} 4(\lambda o\gamma_x y + \lambda o\gamma_y x) = 17 \\ xy = 243 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} (3x)^{\lambda o\gamma 3} = (5y)^{\lambda o\gamma 5} \\ 5^{\lambda o\gamma x} = 3^{\lambda o\gamma y} \end{cases}$ 3. $\begin{cases} xy = \alpha^2 \\ \lambda o\gamma^2 x + \lambda o\gamma^2 y = \dfrac{5}{2}\lambda o\gamma^2\alpha \end{cases}$ $(\alpha \in \mathbf{R}^+)$

★**Ὁμάδα Β'. 401.** Νά ἐπιλύσετε τίς ἐξισώσεις:

1. $\lambda o\gamma_x 10 + 6\cdot\lambda o\gamma_{10x} 10 - 8{,}4\cdot\lambda o\gamma_{100x} 10 = 0,$ 2. $x^{\lambda o\gamma\frac{3x}{10}} = 9\cdot(3x)^{\lambda o\gamma 9x^2},$

3. $\lambda o\gamma_{\sqrt{2}}(2\cdot\lambda o\gamma_4 x\cdot\lambda o\gamma_2 x + \lambda o\gamma_{\sqrt{2}} x) = 6$, 4. $\lambda o\gamma_2(\lambda o\gamma_2 x) = \lambda o\gamma_4(\lambda o\gamma_4 x),$

5. $\left[\lambda o\gamma_x(16x - 5 - x^2) + \lambda o\gamma_x 2\right]\cdot\lambda o\gamma_{x+5} x\cdot\lambda o\gamma_x x = 2.$

402. Ἔστω τό πολυώνυμο : $f(x) = x^2 - 2(1 + \lambda o\gamma_\alpha\lambda)x + 5 - \lambda o\gamma_\alpha^2\lambda$, ὅπου λ εἶναι μία (πραγματική) θετική παράμετρος καί $0 < \alpha < 1$.

(i) Νά βρεῖτε γιά ποιές (πραγματικές) τιμές τῆς λ:

α) ἡ ἐξίσωση $f(x) = 0$ ἔχει ρίζες πραγματικές καί ἄνισες,

β) τό $f(x)$ εἶναι θετικό γιά κάθε $x \in \mathbf{R}$,

γ) ἡ ἐξίσωση $f(x) = 0$ ἔχει μία διπλή ρίζα στό διάστημα $(-2, 2)$.

(ii) Ἄν x_1, x_2 εἶναι οἱ ρίζες τῆς ἐξισώσεως $f(x) = 0$, νά σχηματίσετε ἐξίσωση β' βαθμοῦ, τῆς ὁποίας ρίζες εἶναι οἱ: $\rho_1 = x_1 + 3x_2$, $\rho_2 = 3x_1 + x_2$.

(iii) Νά βρεῖτε τή μέγιστη καί τήν ἐλάχιστη δυνατή τιμή καθεμιᾶς ἀπό τίς παραστάσεις:

$$y_1 = x_1^2 + x_2^2 + 6x_1x_2, \qquad y_2 = x_1^2 + x_2^2,$$

ὅταν μεταβάλλεται τό λ καί $x_1, x_2 \in \mathbf{C} - \mathbf{R}$.

403. Νά προσδιορίσετε τά $x, y \in (0, +\infty)$ γιά τά ὁποῖα ἰσχύουν:

1. $\begin{cases} y^x(1 + y^x) = 10100 \\ \lambda o\gamma\sqrt{xy} - \lambda o\gamma\sqrt{\dfrac{x}{y}} = 3 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x^{\lambda o\gamma y} + y^{\lambda o\gamma x} = 200 \\ \left\{(\lambda o\gamma x)^y\cdot(\lambda o\gamma y)^y\right\}^{\frac{1}{x}} = 1024 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} (2x)^{\lambda o\gamma y} + y^{\lambda o\gamma(2x)} = 8x^2 \\ y = 4x^2\cdot y^{\lambda o\gamma(2x)}. \end{cases}$

404. Νά ἐπιλύσετε τά ἀκόλουθα συστήματα:

1. $\begin{cases} \lambda o\gamma_9 x - \lambda o\gamma_3(x + y) = -1 \\ \lambda o\gamma_3 x - \lambda o\gamma_9(y - x) = 0, \end{cases}$ 2. $\begin{cases} \lambda o\gamma_\alpha x\cdot\lambda o\gamma_\beta y = \lambda o\gamma_\alpha\beta \\ \alpha^{\lambda o\gamma_\alpha 2y} = \sqrt{x} \end{cases}$ $(0 < \alpha,\ \beta \neq 1)$.

405. Γιά ποιές τιμές τοῦ θ, $\theta \in \mathbf{R}^+$, οἱ ρίζες τῆς ἐξισώσεως:

$$\lambda o\gamma[\lambda o\gamma(x^2 + x\lambda o\gamma\theta + 110)] = 0$$

ἀποτελοῦν λύση τοῦ συστήματος:

$$\left\{ y^{\lambda o\gamma z} + z^{\lambda o\gamma y} = 20 \ \wedge\ \lambda o\gamma\sqrt{yz} = 1 \right\}.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ VIII

ΑΝΑΤΟΚΙΣΜΟΣ–ΙΣΕΣ ΚΑΤΑΘΕΣΕΙΣ–ΧΡΕΩΛΥΣΙΑ

Ι. ΑΝΑΤΟΚΙΣΜΟΣ

§ 171. Εἰσαγωγικές ἔννοιες-Ὁρισμοί.— Γνωρίζουμε ἀπό τήν ἀριθμητική ὅτι **τόκος** (τίκτω) εἶναι τό ἐπιπλέον ποσό πού παίρνουμε ἀπό κάποιον, ὅταν τοῦ δανείζουμε χρήματα γιά ἕνα χρονικό διάστημα. Τό ποσό πού δανείζουμε λέγεται **κεφάλαιο.** Στά οἰκονομικά μαθηματικά καί γενικότερα στήν οἰκονομία, *ὀνομάζουμε* **κεφάλαιο** *κάθε ποσό πού ἔχει παραγωγική ἱκανότητα. Τό ἀποτέλεσμα τῆς παραγωγικότητας τοῦ κεφαλαίου τό λέμε* **τόκο** *καί τή διάρκεια τῆς παραγωγικότητας τοῦ κεφαλαίου τή λέμε* **χρόνο.** Ὡς χρονική μονάδα λαμβάνουμε συνήθως τό ἔτος, τό ἑξάμηνο, τό τρίμηνο, τό μήνα, τήν ἡμέρα.

Ἄν τό κεφάλαιο μένει σταθερό σ' ὅλη τή διάρκεια τοῦ δανεισμοῦ, τότε ὁ τόκος λέγεται **ἁπλός.** Ἄν ὅμως στό τέλος κάθε χρονικῆς μονάδας ὁ τόκος ἐνσωματώνεται στό κεφάλαιο καί ἀποτελεῖ ἔτσι τό νέο κεφάλαιο γιά τήν ἑπόμενη χρονική μονάδα, τότε ὁ τόκος λέγεται **σύνθετος.** Αὐτή ἡ ἐνσωμάτωση τοῦ τόκου στό κεφάλαιο, δηλαδή *ἡ κεφαλαιοποίηση τοῦ τόκου,* λέγεται **ἀνατοκισμός.**

Στήν περίπτωση τοῦ ἁπλοῦ τόκου, ὁ τόκος τῶν 100 δραχμῶν σέ μιά χρονική μονάδα (συνήθως ἕνα ἔτος ἤ ἕνα ἑξάμηνο) λέγεται **ἐπιτόκιο (ε)** καί γράφεται: ε%. Στόν ἀνατοκισμό *«ἐπιτόκιο»* εἶναι ὁ τόκος τῆς 1 δραχμῆς σέ μιά χρονική μονάδα. Συνεπῶς τό ἐπιτόκιο στόν ἀνατοκισμό εἶναι ἴσο μέ τό 1/100 τοῦ ἐπιτοκίου πού ἔχουμε στόν ἁπλό τόκο. Αὐτό τό παριστάνουμε μέ τό τ, ὁπότε ἔχουμε: $\tau = \varepsilon/100 = 0{,}01\varepsilon$.

Στόν ἀνατοκισμό διακρίνουμε τό **ἀρχικό** ἀπό τό **τελικό** (ἤ *σύνθετο*) **κεφάλαιο.**

Τελικό *λέμε τό ἀρχικό κεφάλαιο μαζί μέ τούς τόκους ὥς τό τέλος τοῦ χρόνου, γιά τόν ὁποῖο τοκίζεται τό ἀρχικό κεφάλαιο.*

Τά προβλήματα τοῦ ἀνατοκισμοῦ τά λύνουμε μέ τύπους, τούς ὁποίους βρίσκουμε ἀπό τήν ἐπίλυση τοῦ ἑπόμενου γενικοῦ προβλήματος.

§ 172. Πρόβλημα.—Ἀρχικό κεφάλαιο k_0 δραχμές ἀνατοκίζεται γιά ν ἔτη μέ ἐπιτόκιο τ. Νά βρεθεῖ τό τελικό κεφάλαιο k_ν.

Λύση. Γιά τή λύση αὐτοῦ τοῦ προβλήματος παρατηροῦμε ὅτι: ἀφοῦ ἡ

1 δραχμή στό τέλος τοῦ ἔτους φέρνει τόκο τ, οἱ k_0 δραχμές θά φέρουν, στό τέλος τοῦ πρώτου ἔτους, τόκο $k_0 \cdot \tau$ δρχ. Ἔτσι στό τέλος τοῦ πρώτου ἔτους τό κεφάλαιο μέ τούς τόκους θά εἶναι: $k_0 + k_0\tau = k_0(1+\tau)$.

Δηλαδή : *τό ἀρχικό κεφάλαιο k_0 πολλαπλασιάζεται μέ τό (σταθερό) συντελεστή $(1+\tau)$ γιά νά δώσει τό (τελικό) κεφάλαιο στό τέλος τῆς πρώτης χρονικῆς περιόδου.*

Στήν ἀρχή τῆς δεύτερης χρονικῆς περιόδου τό ἀρχικό κεφάλαιο εἶναι τώρα τό: $k_0(1+\tau)$, τό ὁποῖο πάλι μετά ἀπό ἕνα ἔτος, δηλ. στό τέλος τῆς δεύτερης χρονικῆς περιόδου, θά γίνει μέ τούς τόκους του:

$$[k_0(1+\tau)](1+\tau) = k_0(1+\tau)^2$$

Ὅμοια, στό τέλος τῆς τρίτης χρονικῆς περιόδου θά γίνει: $k_0(1+\tau)^3$.

Τελικά, συνεχίζοντας μέ τόν ἴδιο συλλογισμό, βρίσκουμε ὅτι οἱ k_0 δρχ. στό τέλος τοῦ νιοστοῦ ἔτους θά γίνουν: $k_0(1+\tau)^\nu$.

Ὥστε τό τελικό κεφάλαιο k_ν μᾶς τό δίνει ὁ τύπος:

$$\boxed{k_\nu = k_0 \cdot (1+\tau)^\nu} \qquad (1)$$

Ὁ τύπος (1) λέγεται **τύπος τοῦ ἀνατοκισμοῦ** καί συνδέει τούς τέσσερις ἀριθμούς: k_0, τ, ν, k_ν. Ἄν μᾶς δώσουν τούς τρεῖς ἀπ' αὐτούς, ἀπαραίτητα ὅμως τό ν, μποροῦμε νά προσδιορίσουμε, μέ τή βοήθεια τῶν λογαρίθμων (ἀκριβῶς ἤ κατά προσέγγιση), καί τόν τέταρτο. Ἄν ὅμως μᾶς δώσουν τά: k_0, k_ν καί τ καί ζητεῖται ἡ χρονική διάρκεια ν κατά τήν ὁποία τό κεφάλαιο k_0 ἀνατοκιζόμενο γίνεται k_ν, τότε ἀντί γιά τόν τύπο (1) ἐφαρμόζουμε τόν τύπο (2) πού θά βροῦμε παρακάτω.

Ἔστω ὅτι ὁ ἀνατοκισμός γίνεται γιά ν ἔτη καί η ἡμέρες ($\eta < 360$). Τότε γιά νά ὑπολογίσουμε τό τελικό κεφάλαιο k σκεπτόμαστε ὡς ἑξῆς: Ὕστερα ἀπό ν ἔτη οἱ k_0 δραχμές θά γίνουν: $k_0(1+\tau)^\nu$. Τό ποσό αὐτό ἔμεινε ἀκόμη η ἡμέρες, ἄρα πρέπει σ' αὐτό νά προστεθοῦν καί οἱ τόκοι γιά η ἡμέρες. Ἐπειδή στόν ἁπλό τόκο τό ἐπιτόκιο εἶναι $\varepsilon = 100\tau$, ἕπεται ὅτι οἱ $k_0(1+\tau)^\nu$ δραχμές σέ η ἡμέρες θά φέρουν τόκο:

$$\frac{k_0(1+\tau)^\nu \cdot 100\tau \cdot \eta}{36000} = \frac{k_0(1+\tau)^\nu \cdot \tau \cdot \eta}{360}.$$

Ἐπομένως τό τελικό κεφάλαιο μετά ἀπό ν ἔτη καί η ἡμέρες θά γίνει:

$$k = k_0(1+\tau)^\nu + \frac{k_0(1+\tau)^\nu \cdot \tau\eta}{360}.$$

Ὥστε :

$$\boxed{k = k_0\,(1+\tau)^\nu \cdot \left(1 + \frac{\tau\eta}{360}\right)} \qquad (\eta < 360) \qquad (2)$$

Σημ. Στήν πράξη ἀντί γιά τόν τύπο (2) χρησιμοποιοῦμε (συνήθως) τόν τύπο:

$$k = k_0(1+\tau)^{\nu + \frac{\eta}{360}} \qquad (2')$$

Ὁ τύπος (2′) δίνει σχεδόν τό ἴδιο ἐξαγόμενο μέ τόν τύπο (2) καί εἶναι πιό εὔκολος στούς ὑπολογισμούς.

Παρατήρηση. Εἶναι φανερό ὅτι, γιά νά ὑπολογίσουμε ἀπό τούς πιό πάνω τύπους (1) καί (2) τά ποσά k_0, τ, k_ν καί ν, εἶναι ἀπαραίτητη πρῶτα ἡ λογαρίθμηση τῶν μελῶν τῶν (1) καί (2) καί ἔπειτα ἡ χρήση τῶν λογαριθμικῶν πινάκων. Στήν πράξη ὅμως ὑπάρχουν εἰδικοί πίνακες ,οἱ ὁποῖοι δίνουν τίς τιμές τῶν διαφόρων παραστάσεων, ὅπως π.χ. τῶν $(1+\tau)^\nu$, $(1+\tau)^{\frac{\eta}{360}}$ κ.τ.λ., γιά διάφορες τιμές ἐπιτοκίου καί χρόνου.

§ 173. Ἰσοδύναμα ἐπιτόκια.—

Δύο ἐπιτόκια λέμε ὅτι εἶναι **ἰσοδύναμα** ἄν ἀντιστοιχοῦν σέ διαφορετικές χρονικές περιόδους καί ἄν μέ αὐτά ἕνα ἀρχικό κεφάλαιο k_0 ἀνατοκιζόμενο στόν ἴδιο συνολικά χρόνο λαμβάνει τήν ἴδια τελική ἀξία. Ἔτσι, ἄν ὁ ἀνατοκισμός γίνεται κάθε ἑξάμηνο ἤ τρίμηνο, τό ἰσοδύναμο τοῦ τ ἑξαμηνιαῖο ἤ τριμηνιαῖο ἐπιτόκιο **δέν** εἶναι τό μισό ἤ τό τέταρτο ἀντιστοίχως τοῦ τ, ἀλλά διαφορετικό, πού ὑπολογίζεται ὡς ἑξῆς:

Ἄν τ_1 εἶναι τό ἰσοδύναμο ἑξαμηνιαῖο ἐπιτόκιο, τότε ἡ 1 δραχμή στό τέλος τοῦ πρώτου ἑξαμήνου θά γίνει $(1+\tau_1)$ καί στό τέλος τοῦ δεύτερου ἑξαμήνου θά γίνει $(1+\tau_1)^2$. Ἐπίσης ἡ μία δραχμή στό τέλος τοῦ ἔτους, ἀνατοκιζόμενη μέ ἐπιτόκιο τ, θά γίνει $(1+\tau)$. Ἐπειδή ἡ μία δραχμή, ὅπως καί νά τοκιστεῖ, πρέπει νά δίνει στό τέλος τοῦ ἔτους τό ἴδιο ποσό, ἔχουμε:

$(1+\tau_1)^2 = (1+\tau)$ καί συνεπῶς εἶναι:

$$\boxed{\tau_1 = \sqrt{1+\tau} - 1} \qquad (3)$$

Ὁ τύπος (3) συνδέει **τό ἑξαμηνιαῖο** καί **τό ἐτήσιο** ἐπιτόκιο.

Ἐπίσης, ἄν τ_2 εἶναι τό ἰσοδύναμο τριμηνιαῖο ἐπιτόκιο τοῦ τ, ἐπειδή τό ἔτος ἔχει 4 τριμηνίες, μέ ἀνάλογο συλλογισμό καταλήγουμε στή σχέση:

$(1+\tau_2)^4 = 1+\tau$ καί συνεπῶς θά εἶναι:

$$\boxed{\tau_2 = \sqrt[4]{1+\tau} - 1} \qquad (4)$$

Ὁ τύπος (4) συνδέει **τό τριμηνιαῖο** καί **τό ἐτήσιο** ἐπιτόκιο.

Σημ. Στήν πράξη πολλές φορές ἐφαρμόζεται ἀναλογία μεταξύ περιόδων καί ἐπιτοκίων, δηλαδή ἄν τό ἐτήσιο ἐπιτόκιο εἶναι 8%, τό ἑξαμηνιαῖο εἶναι 4% καί τό τριμηνιαῖο εἶναι 2%. Τά ἐπιτόκια αὐτά λέγονται τότε **ἀνάλογα.**

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1η : Δανείζουμε 5.000 δρχ. μέ ἀνατοκισμό πρός 6% ἐτησίως. Πόσες δραχμές θά πάρουμε ὕστερα ἀπό 8 ἔτη;

Λύση. Ἔχουμε: $k_0 = 5000,\ \tau = 0{,}06,\ \nu = 8,\ 1+\tau = 1{,}06.$

Ὁπότε ὁ τύπος (1) τῆς § 172 μᾶς δίνει: $k_8 = 5000\cdot(1{,}06)^8$.

Ἄν λογαριθμίσουμε τήν τελευταία σχέση παίρνουμε:

$$\begin{aligned}\text{λογ}\, k_8 &= \text{λογ}\, 5000 + 8\cdot\text{λογ}\,(1{,}06)\\ &= 3{,}69897 + 8\cdot 0{,}02531 = 3{,}90145.\end{aligned}$$

Ὁπότε: $k_8 = 7969{,}83$.

Σημείωση. Ἀπό τούς πίνακες τῶν δυνάμεων τοῦ 1,06 βρίσκουμε ἀμέσως ὅτι:

$(1{,}06)^8 = 1{,}593848$, ὁπότε: $k_8 = 5000 \cdot 1{,}593848 = 7969{,}24$.

Ἡ μικρή διαφορά τῶν δύο ἀποτελεσμάτων ὀφείλεται στόν ὑπολογισμό τῶν λογαρίθμων κατά προσέγγιση.

Παρατήρηση. Ἄν ὁ ἀνατοκισμός γινόταν γιά 8 ἔτη καί μερικές ἡμέρες, π.χ. γιά 8 ἔτη καί 72 ἡμέρες, τότε στόν τύπο (2), τό μέν $k_0(1+\tau)^\nu$ εἶναι 7969,83, τό δέ $1 + \frac{\tau\eta}{360}$ εἶναι:

$1 + \frac{72 \times 0{,}06}{360} = 1{,}012$ καί συνεπῶς: $k = 7969{,}83 \times 1{,}012 = 8065{,}46$.

2η : Πόσες δραχμές πρέπει νά καταθέσει ἕνας πατέρας τήν ἡμέρα τῆς γεννήσεως τῆς κόρης του, μέ ἀνατοκισμό πρός 6% ἐτησίως γιά νά μπορέσει νά τῆς ἀγοράσει ἕνα αὐτοκίνητο ἀξίας 300.000 δρχ., ὅταν αὐτή θά συμπληρώσει τό 20ο ἔτος τῆς ἡλικίας της;

Λύση. Ἔχουμε $\nu = 20$, $k_\nu = 300.000$, $\tau = 0{,}06$, $1+\tau = 1{,}06$.

Ἀπό τόν τύπο (1) τοῦ ἀνατοκισμοῦ ἔχουμε:

$$k_0 = \frac{k_\nu}{(1+\tau)^\nu} \tag{α}$$

Λογαριθμίζοντας τήν (α) ἔχουμε: $\lambda o\gamma\, k_0 = \lambda o\gamma\, k_\nu - \nu \cdot \lambda o\gamma\,(1+\tau)$

$$= \lambda o\gamma\, 300000 - 20 \cdot \lambda o\gamma\,(1{,}06)$$

$$= 5{,}47712 - 20 \cdot 0{,}02531 = 4{,}97092$$

Ἀπό αὐτό βρίσκουμε: $k_0 = 93524$.

3η : Ἀνατοκίζει κάποιος 80.000 δραχμές πρός 6% ἐτησίως. Πόσα χρήματα θά πάρει ὕστερα ἀπό 9 ἔτη, ἄν ὁ ἀνατοκισμός γίνεται κάθε ἑξαμηνία;

Λύση. Τό ἰσοδύναμο ἑξαμηνιαῖο ἐπιτόκιο τ_1 δίνεται ἀπό τόν τύπο (3) καί εἶναι:

$$\tau_1 = \sqrt{1+\tau} - 1 = \sqrt{1{,}06} - 1 = 0{,}0295$$

Ἐξάλλου ἔχουμε: $k_0 = 80.000$, $\nu = 9 \times 2 = 18$,

ὁπότε ὁ τύπος (1) μᾶς δίνει: $k_{18} = 80000\,(1{,}0295)^{18}$.

Ἀπό τήν τελευταία σχέση, ἄν ἐργαστοῦμε ὅπως καί στήν πρώτη ἐφαρμογή, ἔχουμε:

$$k_{18} = 135140{,}6.$$

Στά προβλήματα τοῦ ἀνατοκισμοῦ ὑπάγονται καί τά προβλήματα πού ἔχουν σχέση μέ τήν αὔξηση ἤ ἐλάττωση τοῦ πληθυσμοῦ μιᾶς πόλεως ἤ χώρας, ὅπως π.χ. τό πιό κάτω:

4η : Πρόβλημα. Ὁ πληθυσμός μιᾶς πόλεως εἶναι Π κάτοικοι καί αὐξάνει κάθε χρόνο κατά τό $\frac{1}{\mu}$ τοῦ πληθυσμοῦ τοῦ προηγούμενου ἔτους. Πόσος θά εἶναι ὁ πληθυσμός της μετά ν ἔτη;

Λύση. Στό τέλος τοῦ πρώτου ἔτους ὁ πληθυσμός θά εἶναι:

$$\Pi + \Pi \cdot \frac{1}{\mu} \quad \text{ἤ} \quad \Pi \cdot \left(1 + \frac{1}{\mu}\right).$$

Μετά ἀπό ἕνα ἀκόμη ἔτος, δηλ. στό τέλος τοῦ δεύτερου ἔτους θά εἶναι:

$$\Pi\left(1 + \frac{1}{\mu}\right) + \Pi\left(1 + \frac{1}{\mu}\right) \cdot \frac{1}{\mu} \text{ δηλ. } \Pi \cdot \left(1 + \frac{1}{\mu}\right)^2$$

καί στό τέλος τοῦ νιοστοῦ ἔτους ὁ πληθυσμός τῆς πόλεως θά εἶναι:

$$\boxed{\Pi_\nu = \Pi \cdot \left(1 + \frac{1}{\mu}\right)^\nu}$$

Σημείωση : Ἄν ὁ πληθυσμός Π **ἐλαττώνεται** κατά τό 1/μ τοῦ πληθυσμοῦ τοῦ προηγούμενου ἔτους, τότε ὕστερα ἀπό ν ἔτη θά γίνει:

$$\boxed{\Pi_\nu = \Pi \cdot \left(1 - \frac{1}{\mu}\right)^\nu}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάδα Α΄. 406. Δανείζουμε 150.000 δρχ. μέ ἀνατοκισμό πρός 4% ἐτησίως. Πόσες δραχμές θά πάρουμε ὕστερα ἀπό 6 ἔτη;

407. Τί ποσό πρέπει νά τοκίσουμε μέ ἀνατοκισμό πρός 4% τήν ἑξαμηνία, ὥστε νά γίνει μετά 18 ἔτη 200.000 δρχ.

408. Μέ ποιό ἐτήσιο ἐπιτόκιο οἱ 24850 δρχ. μετά 12 ἔτη καί μέ ἀνατοκισμό γίνονται 50.000 δρχ.;

409. Νά ἐξετάσετε τί συμφέρει σέ κάποιον: νά τοκίσει μέ ἀνατοκισμό 60.000 δρχ. πρός 5% γιά 10 χρόνια ἤ νά τά δώσει μέ ἁπλό τόκο πρός 7% γιά τό ἴδιο χρονικό διάστημα;

410. Νά βρεῖτε τό ἰσοδύναμο τριμηνιαῖο ἐπιτόκιο, ἄν τό ἀντίστοιχο ἐτήσιο εἶναι 8%.

411. Νά βρεῖτε τό ἰσοδύναμο ἐτήσιο ἐπιτόκιο, ἄν τό ἀντίστοιχο ἑξαμηνιαῖο εἶναι 2%.

412. Μετά πόσο χρόνο οἱ 12589 δρχ., ἄν ἀνατοκιστοῦν πρός 5% ἐτησίως θά γίνουν 45818 δρχ.;

413. Ὁ πληθυσμός ἑνός κράτους αὐξάνει κάθε χρόνο κατά τό $\frac{1}{80}$ τοῦ πληθυσμοῦ τοῦ προηγούμενου ἔτους. Μετά πόσα ἔτη θά διπλασιαστεῖ ἤ θά τριπλασιαστεῖ;

Ὁμάδα Β΄. 414. Κάποιος καταθέτει στό Ταχ. Ταμιευτήριο 7200 δρχ. μέ ἀνατοκισμό κάθε ἑξαμηνία πρός 4,5% ἐτησίως. Πόσα χρήματα θά πάρει μετά 15 ἔτη;

415. Κάποιος κατέθεσε στό Ταχ. Ταμιευτήριο κάποιο ποσό πού, ἀνατοκιζόμενο κάθε ἑξαμηνία πρός 6% τό χρόνο, μετά 5 ἔτη ἔγινε 26.000 δρχ. Τί ποσό κατέθεσε;

416. Ἕνα κεφάλαιο ἀνατοκιζόμενο γίνεται μετά 3 ἔτη 5625 δρχ. καί μετά ἄλλα δύο ἔτη 6084 δρχ. Μέ ποιό ἐπιτόκιο ἔγινε ὁ ἀνατοκισμός;

417. Ἕνα κεφάλαιο, πού ἀνατοκίζεται κάθε ἑξαμηνία πρός 6% ἐτησίως, μετά πόσο χρόνο θά τριπλασιαστεῖ;

418. Ἕνα κεφάλαιο 5.000 δρχ. ἀνατοκίζεται πρός 5% ἐτησίως καί ἄλλο 8.000 δρχ. πρός 3% ἐτησίως. Μετά πόσο χρόνο τά δύο σύνθετα κεφάλαια θά ἐξισωθοῦν;

419. Μία πόλη πού ἔχει πληθυσμό 8.000 κατοίκους ἐλαττώθηκε στόν πρῶτο χρόνο κατά 160 ἄτομα. Ἄν ἐξακολουθήσει ἡ ἐλάττωση μέ τήν ἴδια ἀναλογία, μετά πόσα ἔτη ἡ πόλη θά ἔχει 5.000 κατοίκους;

420. Σέ μιά πόλη ἡ θνησιμότητα τῶν κατοίκων εἶναι τό $\frac{1}{42}$ τοῦ πληθυσμοῦ καί ἡ γεννητικότητα εἶναι τό $\frac{1}{35}$ τοῦ πληθυσμοῦ. Ἄν δεχτοῦμε ὅτι ἡ πιό πάνω ἀναλογία θά παραμείνει ἡ ἴδια καί γιά τά ἑπόμενα ἔτη, μετά ἀπό πόσο χρόνο ὁ πληθυσμός τῆς πόλεως θά διπλασιαστεῖ;

ΙΙ. ΙΣΕΣ ΚΑΤΑΘΕΣΕΙΣ

Συχνά οἱ ἄνθρωποι ἀπό τίς οἰκονομίες τους καταθέτουν ἕνα ὁρισμένο χρηματικό ποσό εἴτε στήν ἀρχή κάθε ἔτους (ἤ μιᾶς ὁρισμένης χρονικῆς μονάδας) μέ σκοπό νά σχηματίσουν ἕνα κεφάλαιο, εἴτε στό τέλος κάθε ἔτους (ἤ μιᾶς χρονικῆς μονάδας πού ἔχουν συμφωνήσει) μέ σκοπό νά ἐξοφλήσουν κάποιο χρέος τους. Τό χρηματικό αὐτό ποσό τό λέμε **κατάθεση.**

Οἱ ἴσες καταθέσεις γίνονται, συνήθως, κάθε ἔτος, ἑξάμηνο, ἤ καί τρίμηνο καί γιά ἕναν ὁρισμένο χρόνο.

Στά ζητήματα ἴσων καταθέσεων διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

α΄) *οἱ καταθέσεις γίνονται στήν* **ἀρχή** *κάθε ἔτους*, καί

β΄) *οἱ καταθέσεις γίνονται στό* **τέλος** *κάθε ἔτους*.

Οἱ καταθέσεις τῆς β΄ περιπτώσεως, ἐπειδή ὅπως εἴπαμε γίνονται γιά νά ἐξοφλήσουμε κάποιο χρέος, λέγονται καί **χρεωλυτικές καταθέσεις.**

Στίς ἴσες, λοιπόν, καταθέσεις ἔχουμε τά ἑπόμενα δύο προβλήματα:

§ 174. Πρόβλημα Ι.—Καταθέτουμε στήν ἀρχή κάθε ἔτους α δρχ. μέ ἀνατοκισμό καί μέ ἐτήσιο τόκο τ γιά κάθε δραχμή. Τί ποσό θά πάρουμε μετά ν ἔτη;

Λύση. Ἡ πρώτη κατάθεση θά μείνει ν ἔτη στόν ἀνατοκισμό καί ἑπομένως θά γίνει ἴση μέ: $\alpha(1+\tau)^\nu$. Ἡ δεύτερη κατάθεση θά μείνει $(\nu-1)$ ἔτη στόν ἀνατοκισμό καί συνεπῶς θά γίνει: $\alpha(1+\tau)^{\nu-1}$, ἡ τρίτη θά γίνει: $\alpha(1+\tau)^{\nu-2}$ κ.ο.κ. Ἡ τελευταία κατάθεση θά μείνει μόνο ἕνα χρόνο στόν ἀνατοκισμό, ἄρα θά γίνει ἴση μέ: $\alpha(1+\tau)$.

Εἶναι φανερό τώρα ὅτι τό κεφάλαιο Σ πού θά σχηματιστεῖ ἀπ' αὐτές τίς καταθέσεις εἶναι ἴσο μέ: $\alpha(1+\tau)^\nu+\alpha(1+\tau)^{\nu-1}+\cdots+\alpha(1+\tau)$. Ὥστε:

$$\Sigma=\alpha(1+\tau)+\alpha(1+\tau)^2+\cdots+\alpha(1+\tau)^{\nu-1}+\alpha(1+\tau)^\nu.$$

Ἀλλά τό δεύτερο μέλος τῆς πιό πάνω ἰσότητας εἶναι τό ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων μιᾶς γεωμετρικῆς προόδου, ἡ ὁποία ἔχει πρῶτο ὅρο τό $\alpha(1+\tau)$ καί λόγο $(1+\tau)$. Ἄρα, σύμφωνα μέ τόν τύπο (1) τῆς § 91, θά ἔχουμε:

$$\boxed{\Sigma=\alpha\cdot(1+\tau)\cdot\frac{(1+\tau)^\nu-1}{\tau}} \qquad (1)$$

Ἡ σχέση (1) λέγεται καί **τύπος τῶν ἴσων καταθέσεων.**

Σημ. Οἱ δυνάμεις $(1+\tau)^\nu$ γιά $\tau=0.03, 0.04, 0.045, \ldots, 0.06$ καί γιά $\nu=1, 2, \ldots, 50$ δίνονται ἀπό είδικούς πίνακες καί ἔτσι βρίσκουμε εὔκολα τό Σ ἀπό τόν τύπο (1).

Παράδειγμα. Στήν ἀρχή κάθε χρόνου καταθέτει κάποιος στήν τράπεζα μέ ἀνατοκισμό 2.500 δρχ. καί μέ ἐτήσιο ἐπιτόκιο 5%. Πόσα χρήματα θά λάβει μετά 10 ἔτη;

Λύση. Ἔχουμε: $\alpha=2500$, $\tau=0{,}05$, $\nu=10$, ὁπότε ἀπό τόν τύπο (1) λαμβάνουμε:

$$\Sigma=2500\times1{,}05\times\frac{(1{,}05)^{10}-1}{0{,}05}.$$

Ἀπό τούς πίνακες ἤ μέ λογαρίθμους βρίσκουμε: $(1{,}05)^{10}=1{,}628$.
Ἄρα $(1{,}05)^{10}-1=0{,}628$ καί ἑπομένως:

$$\Sigma=2500\times1{,}05\times\frac{0{,}628}{0{,}05}=32.970 \text{ δρχ.}$$

§ 175. Πρόβλημα ΙΙ.—Καταθέτουμε στό τέλος κάθε χρόνου α δρχ. μέ ἀνατοκισμό καί μέ ἐτήσιο τόκο τ γιά κάθε δραχμή. Τί ποσό θά ἔχουμε σχηματίσει στό τέλος τοῦ νιοστοῦ ἔτους, δηλαδή μέ τή νιοστή κατάθεση;

Λύση. Οἱ α δρχ. πού καταθέτουμε στό τέλος τοῦ πρώτου ἔτους θά μείνουν στόν ἀνατοκισμό $\nu-1$ ἔτη καί συνεπῶς θά γίνουν: $\alpha(1+\tau)^{\nu-1}$. Οἱ α δρχ. πού καταθέτουμε στό τέλος τοῦ δεύτερου ἔτους θά μείνουν στόν ἀνατοκισμό $\nu-2$ ἔτη καί συνεπῶς θά γίνουν: $\alpha(1+\tau)^{\nu-2}$, κ.ο.κ. Ἡ προτελευταία κατάθεση θά μείνει μόνο ἕνα ἔτος καί ἑπομένως θά γίνει: $\alpha(1+\tau)$. Ἡ τελευταία κατάθεση, ἀφοῦ γίνεται στό τέλος τοῦ νιοστοῦ ἔτους, δέ μένει καθόλου γιά τόκο **(δέν τοκίζεται)** καί ἑπομένως θά εἶναι μόνο α.

Ἔτσι στό τέλος τοῦ νιοστοῦ ἔτους, δηλαδή μέ τή νιοστή κατάθεση, θά ἔχουμε σχηματίσει τό ποσό:

$$\Sigma = \alpha(1+\tau)^{\nu-1} + \alpha(1+\tau)^{\nu-2} + \cdots + \alpha(1+\tau) + \alpha$$

ἤ (§ 91, τύπος 1):

$$\boxed{\Sigma = \alpha \cdot \frac{(1+\tau)^{\nu} - 1}{\tau}} \qquad (2)$$

Ὁ τύπος (2) ὀνομάζεται **τύπος τῶν χρεωλυτικῶν καταθέσεων** καί συνδέει τά τέσσερα ποσά Σ, α, τ, ν.

Παράδειγμα. Ἕνας καπνιστής ξοδεύει γιά τσιγάρα 18 δρχ. τήν ἡμέρα κατά μέσο ὅρο. Ἄν ἄρχισε νά καπνίζει ἀπό τά 20 του χρόνια, νά ὑπολογίσετε πόσα χρήματα θά ἔπαιρνε ὅταν γινόταν 60 ἐτῶν, ἄν τά χρήματα πού ξοδεύει γιά τσιγάρα, τά κατέθετε στό τέλος κάθε ἔτους, σέ μιά Τράπεζα μέ ἀνατοκισμό πρός 6% ἐτησίως.

Λύση. Ὁ καπνιστής ξοδεύει γιά τσιγάρα τό χρόνο: $365 \cdot 18 = 6570$ δρχ.

Ἄρα ἔχουμε: $\alpha = 6570$, $\tau = 0{,}06$, $\nu = 40$.

Τότε ὁ τύπος (2) γράφεται:

$$\Sigma = 6570 \cdot \frac{(1{,}06)^{40} - 1}{0{,}06}$$

Ἀπό τούς πίνακες ἤ μέ λογαρίθμους βρίσκουμε: $(1{,}06)^{40} = 10{,}2895$.

Ἄρα: $(1{,}06)^{40} - 1 = 9{,}2895$ καί συνεπῶς:

$$\Sigma = 6570 \cdot \frac{9{,}2895}{0{,}06} = 1.017.200{,}25.$$

Ὥστε ὁ καπνιστής θά ἔπαιρνε: **1.017.200,25 δραχμές (!).**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάδα Α΄. 421. Ἕνας καταθέτει μέ ἀνατοκισμό 8.050 δραχμές πρός 4,5 % στήν ἀρχή κάθε ἔτους. Πόσα χρήματα θά πάρει ὕστερα ἀπό 18 ἔτη;

422. Ποιό ποσό πρέπει νά καταθέτει κάποιος μέ ἀνατοκισμό πρός 6% στήν ἀρχή κάθε ἔτους σέ μιά Τράπεζα, ὥστε αὐτό ὕστερα ἀπό 20 ἔτη νά γίνει 250.000 δραχμές;

423. Κάποιος καταθέτει στήν ἀρχή κάθε ἔτους 10.000 δρχ. μέ ἀνατοκισμό πρός 5%. Μετά πόσα ἔτη θά πάρει 150.000 δραχμές;

424. Ἕνας πατέρας καταθέτει σέ κάθε γενέθλια τῆς κόρης του στό Ταχ. Ταμιευτήριο 5.000 δρχ. μέ ἀνατοκισμό πρός 7,5%. Τί ποσό θά σχηματιστεῖ, ὅταν ἡ κόρη του γιορτάσει τήν 21η ἐπέτειο τῶν γενεθλίων της;

Ὁμάδα Β΄. 425. Κάποιος καταθέτει μέ ἀνατοκισμό στήν ἀρχή κάθε ἔτους 2050 δρχ. πρός 4,5%. Ὕστερα ἀπό 15 χρόνια ἔπαψε νά καταθέτει, ἀλλά τό ποσό πού σχηματίστηκε τό ἄφησε μέ ἀνατοκισμό πρός 5%. Τί κεφάλαιο θά ἔχει σχηματίσει 24 χρόνια μετά τήν πρώτη κατάθεση;

426. Νά ἀποδείξετε ὅτι: ἄν τίς ἴσες καταθέσεις πού γίνονται στό τέλος κάθε ἔτους, τίς ἀνατοκίσουμε γιά ἕνα ἀκόμη ἔτος, τότε βρίσκουμε τίς ἴσες καταθέσεις πού γίνονται στήν ἀρχή κάθε ἔτους.

427. Ἀσφαλίζει κάποιος τή ζωή του γιά διάστημα 35 ἐτῶν πρός 6% καί πληρώνει ἀσφάλιστρα στήν ἀρχή κάθε ἔτους 8.400 δραχμές. Πόσα χρήματα πρέπει νά τοῦ δώσει ἡ ἀσφαλιστική ἑταιρεία ὕστερα ἀπό 35 ἔτη;

III. ΧΡΕΩΛΥΣΙΑ

§ 176. Ὁρισμοί.— Χρεωλυσία λέμε τήν ἀπόσβεση ἑνός χρέους μέ ἴσες δόσεις, οἱ ὁποῖες καταβάλλονται σέ ἴσα χρονικά διαστήματα, π.χ. στό τέλος τοῦ ἔτους ἤ τοῦ ἑξαμήνου κ.τ.λ. Τό ποσό καθεμιᾶς ἀπό τίς ἴσες δόσεις πού καταβάλλεται στό τέλος τοῦ χρονικοῦ διαστήματος λέγεται **χρεωλύσιο** καί χρησιμεύει ἕνα μέρος του γιά τήν πληρωμή τῶν τόκων τοῦ χρέους καί τό ὑπόλοιπο γιά τή βαθμιαία ἀπόσβεση τοῦ χρέους.

Εἶναι φανερό ὅτι ἕνα χρέος ἐξοφλεῖται, ὅταν τό ἄθροισμα ὅλων τῶν χρεωλυσίων μαζί μέ τούς σύνθετους τόκους τους γίνει ἴσο μέ τήν τελική ἀξία τοῦ ἀνατοκιζόμενου ἀρχικοῦ κεφαλαίου **(χρέους)**.

Στή χρεωλυσία ἔχουμε, συνεπῶς, νά λύσουμε τό παρακάτω πρόβλημα:

§ 177. Πρόβλημα.— Ἕνας δανείστηκε α δραχμές μέ ἀνατοκισμό μέ τήν ὑποχρέωση νά τίς ἐξοφλήσει μέ ν ἴσες δόσεις, τίς ὁποῖες θά πληρώνει στό τέλος κάθε ἔτους. Νά βρεθεῖ τό ποσό κάθε δόσεως (χρεωλύσιο), ἄν ὁ ἐτήσιος τόκος γιά κάθε δραχμή εἶναι τ.

Λύση. Ὁ ὀφειλέτης πρέπει μετά ἀπό ν ἔτη νά πληρώσει τό ποσό: $\alpha(1+\tau)^{\nu}$, γιατί οἱ α δραχμές πού δανείστηκε ἀνατοκίστηκαν γιά ν ἔτη.

Ἔστω x δρχ. τό ποσό κάθε δόσεως (χρεωλύσιο) πού πληρώνει στό τέλος κάθε ἔτους, τότε ὁ ὀφειλέτης θά καταβάλει στό δανειστή του συνολικά ν δόσεις ἴσες μέ x δραχμές ἡ καθεμιά. Ἡ συνολική ἀξία αὐτῶν τῶν δόσεων (μέ τούς τόκους των) θά εἶναι, σύμφωνα μέ τόν τύπο τῶν χρεωλυτικῶν καταθέσεων, ἴση πρός: $x\cdot\dfrac{(1+\tau)^{\nu}-1}{\tau}$.

Τότε ὅμως, σύμφωνα μέ τά πιό πάνω, θά ἔχουμε:

$$\boxed{\mathbf{x}\cdot\frac{(1+\tau)^{\nu}-1}{\tau}=\alpha\,(1+\tau)^{\nu}} \qquad (1)$$

Ἡ (1) λέγεται **ἐξίσωση τῆς χρεωλυσίας.** Ἀπό τήν (1) βρίσκουμε τό ζητούμενο χρεωλύσιο. Ἄν λύσουμε τήν (1) ὡς πρός x ἤ α παίρνουμε ἀντίστοιχα τούς τύπους:

$$\boxed{\mathbf{x}=\frac{\alpha\tau(1+\tau)^{\nu}}{(1+\tau)^{\nu}-1}} \quad (1') \quad \text{καί} \quad \boxed{\alpha=\frac{\mathbf{x}\cdot[(1+\tau)^{\nu}-1]}{\tau(1+\tau)^{\nu}}} \quad (1'')$$

Στούς πρακτικούς ὑπολογισμούς οἱ ἐκφράσεις $(1+\tau)^{\nu}$ καί $[(1+\tau)^{\nu}-1]:\tau$ δίνονται ἀπό εἰδικούς πίνακες καί ἔτσι βρίσκουμε εὔκολα τά ποσά x καί α ἀπό τούς τύπους (1΄) καί (1΄΄).

Σημ. Μερικές φορές ἡ καταβολή τῆς πρώτης δόσεως (χρεωλυσίου) γίνεται μετά μ ἔτη ἀπό τότε πού συμφωνήθηκε τό δάνειο. Τότε ἡ **ἐξίσωση τῆς χρεωλυσίας** εἶναι:

$$\boxed{x\cdot\frac{(1+\tau)^{\nu-\mu+1}-1}{\tau}=\alpha(1+\tau)^{\nu}} \qquad \text{(γιατί ;)}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1η: Μία κοινότητα δανείστηκε 300.000 δρχ. μέ ἀνατοκισμό 5% καί θέλει νά ἐξοφλήσει τό χρέος μέ ἐτήσιες χρεωλυτικές δόσεις σέ 50 χρόνια. Νά βρεθεῖ τό ποσό κάθε δόσεως (χρεωλύσιο).

Λύση. Ὁ τύπος (1΄) δίνει:

$$x=\frac{300000\cdot(0{,}05)\cdot(1{,}05)^{50}}{(1{,}05)^{50}-1}.$$

Ἀπό τούς πίνακες ἤ μέ λογαρίθμους βρίσκουμε: $(1{,}05)^{50}=11{,}4674$.

Ἄρα: $(1{,}05)^{50}-1=10{,}4674$ καί συνεπῶς:

$$x=\frac{300000\times 0{,}05\times 11{,}4674}{10{,}4674}=16.433{,}02 \text{ δρχ.}$$

2η: Ἕνας ὑπάλληλος μπορεῖ νά διαθέσει γιά ἐτήσιο χρεωλύσιο 5.000 δρχ. Τί ποσό μπορεῖ νά δανειστεῖ μέ ἐπιτόκιο 4%, ὥστε νά τό ἐξοφλήσει σέ 20 ἐτήσιες δόσεις;

Λύση. Ἔχουμε: $x=5000$, $\tau=0{,}04$, $\nu=20$ καί ἡ (1΄΄) γίνεται:

$$\alpha=\frac{5000[(1{,}04)^{20}-1]}{0{,}04\cdot(1{,}04)^{20}}.$$

Ἀπό τήν πιό πάνω σχέση μέ πίνακες ἤ μέ λογαρίθμους βρίσκουμε: $\alpha=67953$ δραχμές.

3η. Ἕνας δανείζεται 120.000 δρχ. μέ ἀνατοκισμό πρός 8%. Πόσες ἐτήσιες χρεωλυτικές δόσεις τῶν 15.000 δρχ. πρέπει νά πληρώσει γιά νά ἐξοφλήσει τό χρέος;

Λύση. Ἀπό τήν ἐξίσωση (1) ἔχουμε:

$$x(1+\tau)^{\nu}-x=\alpha\tau(1+\tau)^{\nu},$$

ὁπότε:

$$(1+\tau)^{\nu}=\frac{x}{x-\alpha\tau}. \tag{2}$$

Τότε ὅμως εἶναι: $\nu\cdot\text{λογ}(1+\tau)=\text{λογ}\,x-\text{λογ}(x-\alpha\tau)$

Ἄρα:

$$\nu=\frac{\text{λογ}\,x-\text{λογ}(x-\alpha\tau)}{\text{λογ}(1+\tau)} \tag{3}$$

Ἐπειδή εἶναι $x=15000$, $\alpha=120000$, $\tau=0{,}08$ καί συνεπῶς $x-\alpha\tau=5400$, ὁ τύπος (3) δίνει:

$$\nu=\frac{\text{λογ}\,15000-\text{λογ}\,5400}{\text{λογ}\,1{,}08}.$$

Ἀπό τήν τελευταία, ἐπειδή $\text{λογ}15000=4{,}17609$, $\text{λογ}5400=3{,}73239$ καί $\text{λογ}1{,}08=$ $=0{,}03342$, λαμβάνουμε: $\nu=\dfrac{0{,}44370}{0{,}03342}=13{,}276481$ ἔτη, δηλαδή $13<\nu<14$.

Τό ἐξαγόμενο σημαίνει πώς πρέπει νά πληρωθοῦν 13 ἐτήσιες δόσεις τῶν 15000 δρχ.

καί μία μικρότερη δόση: $0{,}276481 \times 15000 = 4.147{,}215$ δρχ. σέ (συντομότερο) διάστημα: $0{,}276481 \times 360 = 99{,}53316 \simeq 100$ ἡμερῶν μετά τή 13η δόση.

Σημ. Γιά νά βροῦμε τή 14η δόση πού εἶναι μικρότερη τῶν 15.000 δρχ. μποροῦμε νά ἐργαστοῦμε καί ὡς ἑξῆς: Βρίσκουμε πόσο γίνεται τό χρέος τῶν 120.000 δρχ. σέ 14 ἔτη, δηλαδή τό: $K = 120.000\ (1{,}08)^{14}$. Κατόπιν βρίσκουμε ὅτι οἱ δόσεις τῶν 15.000 δρχ. ἡ καθεμία στό τέλος τοῦ 14ου ἔτους γίνονται:

$$\Sigma = \frac{15000[(1{,}08)^{13} - 1]}{0{,}08} \cdot 1{,}08$$

Ἡ διαφορά $K - \Sigma$ δίνει τήν τελευταία δόση.

Σχόλιο. Σύμφωνα μέ τήν ἐξίσωση (2) τῆς τελευταίας ἐφαρμογῆς γιά νά ἔχει τό πρόβλημα λύση πρέπει νά εἶναι $x > ατ$, δηλαδή πρέπει τό χρεωλύσιο νά εἶναι μεγαλύτερο ἀπό τόν ἐτήσιο τόκο τοῦ ἀρχικοῦ κεφαλαίου, γιατί διαφορετικά ποτέ δέν πρόκειται νά ἐξοφληθεῖ τό χρέος. Ἄν εἶναι $x = ατ$, τότε ἡ ἐξίσωση (2) δέν ἔχει λύση, γιατί ὁ παρονομαστής μηδενίζεται, πού σημαίνει πώς τό ν τείνει στό ἄπειρο. Σ' αὐτή τήν περίπτωση λέμε πώς τό δάνειο γίνεται **πάγιο,** γιατί ποτέ δέν ἐξοφλεῖται καί τό καταβαλλόμενο ποσό x χρησιμεύει γιά νά πληρώνονται μόνο οἱ ἐτήσιοι τόκοι τοῦ ἀρχικοῦ κεφαλαίου.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάδα Α΄. 428. Μία κοινότητα δανείστηκε 120.000 δρχ. μέ ἀνατοκισμό πρός 6% καί θέλει νά ἐξοφλήσει τό χρέος μέ ἐτήσιες χρεωλυτικές δόσεις σέ 25 χρόνια. Νά βρεῖτε τό χρεωλύσιο πού θά πληρώνει.

429. Ἕνας ἔμπορος ὑπολογίζει πώς μπορεῖ νά πληρώνει ἐτήσιο χρεωλύσιο 8.650 δρχ. γιά 20 χρόνια. Τί ποσό μπορεῖ νά δανειστεῖ μέ ἐπιτόκιο 6% ἐτησίως;

430. Μέ πόσες ἐτήσιες χρεωλυτικές δόσεις τῶν 3.000 δρχ. μποροῦμε νά ἐξοφλήσουμε δάνειο 25.000 δρχ., ὅταν τό ἐπιτόκιο εἶναι 6% ἐτησίως;

431. Μία ἑταιρεία μπορεῖ νά διαθέτει ἀπό τά κέρδη της 100.000 δρχ. γιά ἐτήσιο χρεωλύσιο. Τί ποσό μπορεῖ νά δανειστεῖ μέ ἐπιτόκιο 5%, ὥστε νά τό ἐξοφλήσει σέ 20 ἐτήσιες δόσεις;

Ὁμάδα Β΄. 432. Κάποιος δανείστηκε 250.000 δρχ. πρός 7 % μέ τήν ὑποχρέωση νά τό ἐξοφλήσει μέ 8 ἐτήσιες χρεωλυτικές δόσεις. Τρεῖς ὅμως μῆνες μετά τήν κατάθεση τῆς 5ης δόσεως θέλει νά ἐξοφλήσει ὅλο τό ποσό. Πόσα πρέπει νά καταβάλει;

433. Κάποιος δανείζεται α δρχ. μέ ἀνατοκισμό καί μέ ἐτήσιο τόκο τ τῆς μιᾶς δραχμῆς. Νά βρεῖτε τό ἐτήσιο χερωλύσιο πού πρέπει νά πληρώνει, ὥστε μετά ν ἔτη τό χρέος νά μείνει τό μισό.

(Ἐφαρμογή: $α = 40000$, $τ = 0{,}05$, $ν = 12$).

434. Μέ πόσες ἑξαμηνιαῖες χρεωλυτικές δόσεις μιά ἑταιρεία θά ἐξοφλήσει δάνειο 2.000.000 δρχ., ἄν ὁ ἀνατοκισμός γίνεται πρός 3% κάθε ἑξαμηνία καί τό χρεωλύσιο εἶναι 130.000 δραχμές;

435. Ἡ ἐξόφληση ἑνός χρέους πρέπει νά γίνει σέ 20 ἔτη χρεωλυτικῶς. Κάθε ἐτήσια δόση εἶναι 46.130 δρχ. καί ἀρχίζει ἡ καταβολή μετά τό 5ο ἔτος τοῦ δανείου. Ἄν τό ἐπιτόκιο εἶναι 4,5%, νά βρεῖτε πόσο εἶναι τό ἀρχικό ποσό;

436. Κάποιος συμφωνεῖ νά πληρώσει σέ ἕναν ἀσφαλιστικό Ὀργανισμό ν ἐτήσιες δόσεις τῶν α δρχ. τήν καθεμιά, μέ τήν ὑποχρέωση ὁ Ὀργανισμός νά τοῦ ἐξασφαλίσει γιά τά ἑπόμενα 2ν ἔτη, ἐτήσιο εἰσόδημα πού νά ἀνέρχεται σέ β δραχμές. Ὁ Ὀργανισμός θά καταβάλει γιά πρώτη φορά τό ποσό τῶν β δρχ., μετά ἀπό τήν τελευταία κατάθεση τοῦ ἀσφαλισμένου. Οἱ τόκοι εἶναι σύνθετοι καί τό ἐτήσιο ἐπιτόκιο τῆς μιᾶς δραχμῆς εἶναι τ. 1) Νά ὑπολογίσετε τό λόγο $\frac{α}{β}$ καί 2) νά βρεῖτε τήν τιμή τοῦ ν, ἄν εἶναι $β = 2α$ καί $τ = 0{,}05$.

ΜΕΡΟΣ ΤΡΙΤΟ

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ—ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ IX

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΠΟ ΤΗ ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

§ 178. Εἰσαγωγικές ἔννοιες–Συμβολισμοί.— Ἡ Συνδυαστική Ἀνάλυση παρουσιάζεται γιά πρώτη φορά τό 17ο αἰώνα στίς ἐργασίες τῶν μαθηματικῶν Fermat καί Pascal πάνω σέ προβλήματα πού εἶχαν σχέση μέ τά *«τυχερά»* παιγνίδια. Ἀπό τότε ἐφαρμόζεται σέ πολλούς κλάδους τῶν Μαθηματικῶν καί ἰδιαίτερα στή Θεωρία τῶν Πιθανοτήτων, γιά τήν ὁποία θά κάνουμε λόγο ἐκτενέστερα στό ἑπόμενο κεφάλαιο.

Ἀμέσως παρακάτω θά μᾶς χρειασθοῦν οἱ ἑξῆς δύο ἔννοιες:

α) Τμῆμα (ἤ ἄλλιῶς: **ἀρχικό ἀπόκομμα**) T_ν *τοῦ συνόλου* $\mathbf{N}$ *τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν μέχρι τό* ν *ὀνομάζουμε τό ὑποσύνολο* $\{1, 2, \ldots, \nu\}$ *τοῦ* $\mathbf{N}$.

Ὥστε ἐξ ὁρισμοῦ εἶναι: $\mathrm{T}_\nu = \{1, 2, \ldots, \nu\}$.

Παράδειγμα : $\mathrm{T}_5 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

β) *Τό γινόμενο τῶν* ν *πρώτων διαδοχικῶν φυσικῶν ἀριθμῶν θά τό λέμε* **ν-παραγοντικό** *καί θά τό συμβολίζουμε μέ* $\mathbf{\nu!}$

Ὥστε ἐξ ὁρισμοῦ εἶναι: $\nu! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (\nu-1) \times \nu$ (1)

Εἶναι φανερό τώρα ὅτι: $\nu! = (\nu-1)! \times \nu$ (2)

Γιά τήν πληρότητα τοῦ συμβολισμοῦ δεχόμαστε ὅτι: $\mathbf{0! = 1}$ (3)

Ἔτσι ἔχουμε τήν ἀκόλουθη ἀπεικόνιση τοῦ $\mathbf{N_0}$ στό $\mathbf{N}$:

$$\nu \longrightarrow \nu! = \begin{cases} 1, \text{ ἄν } \nu = 0 \\ (\nu-1)! \times \nu, \text{ ἄν } \nu \in \mathbf{N}. \end{cases}$$

Ἀπό τή (2) ἔχουμε:

$1! = 0! \times 1 = 1, \quad 2! = 1! \times 2 = 2, \quad 3! = 2! \times 3 = 6, \quad 4! = 3! \times 4 = 24,$

$5! = 4! \times 5 = 120, \ldots, \quad 10! = 9! \times 10 = 3628800, \quad 12! = 11! \times 12 = 479001600.$

Σημείωση. Ἡ χρησιμοποίηση τοῦ θαυμαστικοῦ (!) στό συμβολισμό τῶν παραγοντικῶν ἔχει σχέση μέ τήν καταπληκτική αὔξησή τους, ὅπως ἐξάλλου φαίνεται καί ἀπό τά ἀμέσως παραπάνω παραδείγματα. Ὁ συμβολισμός μέ παραγοντικά εἶναι πολύ χρήσιμος γιά νά παραστήσουμε μεγάλους ἀριθμούς πού συχνά συναντᾶμε στή μελέτη τῶν μεταθέσεων, διατάξεων καί συνδυασμῶν γιά τίς ὁποῖες γίνεται λόγος ἀμέσως παρακάτω.

§ 179. Ἁπλές μεταθέσεις.— Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι ἔχουμε ν διαφορετικά ἀντικείμενα: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ τά ὁποῖα θεωροῦμε στοιχεῖα ἑνός συνόλου E, δηλαδή $E = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu\}$ καί ἄς τά τοποθετήσουμε πάνω σέ μία εὐθεία γραμμή τό ἕνα μετά τό ἄλλο. Λέμε τότε ὅτι ἔχουμε μία **μετάθεση τῶν ν πραγμάτων** *(ἀντικειμένων)*. Ὥστε:

Μετάθεση *τῶν ἀντικειμένων* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ *ὀνομάζουμε κάθε δυνατό τρόπο τοποθετήσεώς τους ἐπάνω σέ μιά εὐθεία.*

Δύο μεταθέσεις θά εἶναι, συνεπῶς, διαφορετικές, ὅταν διαφέρουν ὡς πρός τή θέση ἑνός τουλάχιστο (στήν οὐσία δύο) ἀντικειμένου.

Πιό αὐστηρά (ἀπό μαθηματική ἄποψη) **μετάθεση** M *τῶν ἀντικειμένων* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$, *δηλ. τῶν στοιχείων τοῦ συνόλου E, ὀνομάζουμε κάθε ἀμφιμονοσήμαντη ἀπεικόνιση τοῦ E πάνω στόν ἑαυτό του*, δηλαδή:

$$M : E \longleftrightarrow E$$

Ἀπαρίθμηση *τῶν στοιχείων τοῦ συνόλου E ὀνομάζουμε κάθε ἀμφιμονοσήμαντη ἀπεικόνιση f τοῦ τμήματος* $T_\nu = \{1, 2, \ldots, \nu\}$ *τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν πάνω στό E*, δηλαδή:

$$T_\nu \ni k \overset{f}{\longleftrightarrow} \alpha_i \in E, \quad i \in T_\nu.$$

Κάθε ἀπαρίθμηση, ὅπως καί κάθε μετάθεση, παριστάνεται συμβολικά μέ τό ἑξῆς ὀρθογώνιο σχῆμα (πίνακα):

$$f : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & \nu \\ f(1) & f(2) & f(3) & \cdots & f(\nu) \end{pmatrix}$$

Στήν πρώτη γραμμή τοῦ πίνακα γράφονται τά πρότυπα καί στή δεύτερη, κάτω ἀπό κάθε πρότυπο, γράφεται ἡ εἰκόνα του. Συνήθως ὅμως ἡ πρώτη γραμμή παραλείπεται καί γράφονται (παρατάσσονται) μόνο οἱ εἰκόνες κατά μῆκος μιᾶς εὐθείας. Ἔτσι, ἄν π.χ. εἶναι $f(1)=\alpha_3$, $f(2)=\alpha_5, \ldots, f(\nu)=\alpha_\nu$, τότε ἔχουμε τήν ἑξῆς παράταξη κατά μῆκος μιᾶς εὐθείας:

$$\underset{\alpha_3}{\bullet}\quad \underset{\alpha_5}{\bullet}\quad \bullet\quad \bullet \;\cdots\; \underset{\alpha_\nu}{\bullet},$$

Τονίζουμε ὅτι τό πρῶτο στοιχεῖο τῆς παρατάξεως αὐτῆς εἶναι ἡ εἰκόνα τοῦ 1, τό δεύτερο ἡ εἰκόνα τοῦ 2, τό τρίτο ἡ εἰκόνα τοῦ 3 κ.ο.κ.

Τό πλῆθος τῶν μεταθέσεων ν διαφόρων πραγμάτων (ἀντικειμένων) θά τό παριστάνουμε μέ τό σύμβολο: M_ν.

Ἐπειδή ἐξάλλου τό E εἶναι ἰσοδύναμο μέ τό T_ν, ἕπεται ὅτι τό πλῆθος M_ν τῶν μεταθέσεων τοῦ E εἶναι ἴσο μέ τό πλῆθος τῶν ἀπαριθμήσεών του. Εἶναι φανερό πώς τό πλῆθος αὐτό δέν ἐξαρτᾶται ἀπό τή φύση τῶν στοιχείων τοῦ E, ἀλλά **μόνο** ἀπό τό πλῆθος τους. Ἄρα αὐτό εἶναι ἴσο μέ τό πλῆθος τῶν μεταθέσεων τοῦ T_ν. Γι' αὐτό πολλές φορές ν διακεκριμένα πράγματα, πού δέ μᾶς ἐνδιαφέρει ἡ φύση τους, τά παριστάνουμε μέ τούς ἀριθμούς: $1, 2, \ldots, \nu$.

Ὕστερα ἀπ' αὐτό οἱ ὅροι *ἀπαρίθμηση* καί *μετάθεση* θά χρησιμοποιοῦνται στά ἑπόμενα μέ τήν ἴδια σημασία, χωρίς διάκριση.

Θά ὑπολογίσουμε τώρα τό πλῆθος M_ν τῶν μεταθέσεων τοῦ συνόλου Ε.

Προφανῶς ὑπάρχει μία μόνο μετάθεση ἑνός πράγματος α_1, ἡ α_1, ὥστε $M_1 = 1$. Γιά δύο πράγματα α_1, α_2 ὑπάρχουν δύο μεταθέσεις, οἱ: $\alpha_1\alpha_2$, $\alpha_2\alpha_1$. Ἄρα γιά τό πλῆθος M_2 αὐτῶν τῶν πραγμάτων ἔχουμε: $M_2 = 2 = 1\cdot 2$.

Γιά τρία πράγματα $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ὑπάρχουν 6 μεταθέσεις, οἱ: $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$, $\alpha_1\alpha_3\alpha_2$, $\alpha_3\alpha_1\alpha_2$, $\alpha_2\alpha_1\alpha_3$, $\alpha_2\alpha_3\alpha_1$, $\alpha_3\alpha_2\alpha_1$. Αὐτές οἱ μεταθέσεις προκύπτουν ὅταν σέ κάθε μετάθεση τῶν δύο πραγμάτων α_1, α_2 τοποθετήσουμε τό α_3 σέ ὅλες τίς δυνατές θέσεις. Μ' αὐτό τόν τρόπο, ἀπό κάθε μετάθεση τῶν δύο πραγμάτων προκύπτουν τρεῖς μεταθέσεις τῶν τριῶν πραγμάτων. Συμπεραίνουμε λοιπόν ὅτι: $M_3 = 3\cdot M_2 = 3\cdot 2 = 1\cdot 2\cdot 3$.

Ἐπαναλαμβάνοντας τόν ἴδιο συλλογισμό ἔχουμε: $M_4 = 4\cdot M_3$ καί γενικά:

$$M_\nu = \nu\cdot M_{\nu-1} \tag{1}$$

Ἄν τώρα στόν ἀναγωγικό τύπο (1) θέσουμε $\nu = 2, 3, \ldots, (\nu-1), \nu$ καί πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη τίς σχέσεις πού θά προκύψουν, βρίσκουμε, ὕστερα ἀπό τίς σχετικές ἁπλοποιήσεις, ὅτι: $M_\nu = 1\cdot 2\cdot 3\cdots(\nu-1)\cdot\nu$.

Ἔτσι ἀποδείξαμε τήν ἑξῆς πρόταση:

Πρόταση.— Τό πλῆθος M_ν τῶν μεταθέσεων ν ἀντικειμένων εἶναι ἴσο μέ τό γινόμενο $1\cdot 2\cdot 3\cdots\nu = \nu!$. Ὥστε:

$$\boxed{M_\nu = 1\cdot 2\cdot 3\cdots\nu = \nu! = \prod_{k=1}^{\nu} k} \tag{2}$$

Ἄσκηση. Νά ἀποδείξετε τή (2) ἐφαρμόζοντας τήν ἀποδεικτική μέθοδο τῆς τέλειας ἐπαγωγῆς.

Ἐφαρμογές: 1η. Μέ πόσους διαφορετικούς τρόπους μποροῦν νά παραταχθοῦν 10 μαθητές σέ μιά σειρά;

Λύση. Τό πλῆθος ὅλων τῶν δυνατῶν παρατάξεων εἶναι ἀκριβῶς ὅσες καί οἱ μεταθέσεις τῶν 10 πραγμάτων. Ἄρα: $M_{10} = 10! = 3.628.800$.

2η. Νά βρεῖτε τό πλῆθος τῶν ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι εἶναι μεγαλύτεροι ἀπό τό 1000 καί σχηματίζονται μέ τά ψηφία 8, 5, 0, 2 χωρίς ποτέ νά ἐπαναλαμβάνεται τό ἴδιο ψηφίο.

Λύση. Κάθε ἀριθμός μεγαλύτερος ἀπό τό 1000 ἀντιστοιχεῖ σέ κάποια μετάθεση τῶν ψηφίων 8, 5, 0, 2 μέ τήν προϋπόθεση ὅτι τό ψηφίο 0 δέ θά βρίσκεται στήν ἀρχή. Οἱ ἀριθμοί στούς ὁποίους βρίσκεται στήν ἀρχή τό 0 (π.χ. 0258, 0582, ...) εἶναι τόσοι ὡς πρός τό πλῆθος, ὅσες καί οἱ μεταθέσεις τῶν τριῶν ψηφίων 8, 5, 2, δηλ. $M_3 = 3! = 6$. Οἱ τετραψήφιοι ἀριθμοί εἶναι $M_4 = 4! = 24$.

Ἄρα τό ζητούμενο πλῆθος εἶναι: $M_4 - M_3 = 4! - 3! = 18$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάδα Α΄. 437. Νά ἀποδείξετε ὅτι: $8\times 7\times 6 = \dfrac{8!}{5!}$.

438. Νά ἀποδείξετε ὅτι: $(1\times 3\times 5\times 7\times\cdots\times 15)\times 2^8 = \dfrac{16!}{8!}$.

439. Νά ἁπλοποιήσετε τά κλάσματα:

α) $\dfrac{7!\,5!}{6!\,4!}$, β) $\dfrac{\nu!}{(\nu-1)!}$, γ) $\dfrac{(\nu+2)!}{\nu!}$, δ) $\dfrac{(\nu+1)!}{(\nu-1)!}$, ε) $\dfrac{(\nu-1)!}{(\nu+2)!}$.

440. Νά ἁπλοποιηθεῖ ἡ παράσταση:

$$\frac{(\nu+1)!}{(\nu+1)^{\nu+1}} : \frac{\nu!}{\nu^\nu}.$$

441. Νά ἀποδείξετε ὅτι: $2M_\nu-(\nu-1)M_{\nu-1}=M_\nu+M_{\nu-1}$.

442. Πόσοι ἀναγραμματισμοί προκύπτουν ἀπό τή λέξη «*γραφεῖο*»; Πόσοι ἀρχίζουν ἀπό φ; Πόσοι ἀρχίζουν ἀπό α καί τελειώνουν σέ ο;

443. Κατά πόσους τρόπους μποροῦν 6 μαθητές νά παραταχθοῦν σέ μία σειρά; Ἄν γιά κάθε παράταξη χρειάζεται χρόνος 15 sec, νά ὑπολογίσετε τό χρόνο πού ἀπαιτεῖται γιά ὅλες τίς δυνατές παρατάξεις.

444. Πόσες λέξεις μποροῦμε νά σχηματίσουμε μέ τά γράμματα: α, ε, ο, k, λ, μ πού νά ἀρχίζουν ὅμως μέ σύμφωνο; Πόσες λέξεις ἀρχίζουν ἀπό k καί τελειώνουν σέ ο;

II. ΔΙΑΤΑΞΕΙΣ

§ 180. Ἁπλές διατάξεις.— Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι ἔχουμε ν διαφορετικά πράγματα $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ τά ὁποῖα θεωροῦμε ὡς στοιχεῖα ἑνός σύνόλου Ε, δηλ. $E=\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu\}$ καί ἄς πάρουμε μ ἀπό αὐτά, ὅπου $1 \leqq \mu \leqq \nu$, καί ἄς τά τοποθετήσουμε σέ μία εὐθεία γραμμή τό ἕνα κατόπιν τοῦ ἄλλου. Λέμε τότε πώς ἔχουμε μία **διάταξη τῶν ν πραγμάτων (στοιχείων) ἀνά μ.**

Πιό αὐστηρά—ἀπό μαθηματική ἄποψη—**διάταξη ν πραγμάτων ἀνά μ** $(1 \leqq \mu \leqq \nu)$, *ὀνομάζουμε κάθε ἀμφιμονοσήμαντη ἀπεικόνιση τοῦ τμήματος* $T_\mu=\{1,2,\ldots,\mu\}$ *μέσα στό σύνολο* $E=\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu\}$.

Ἔτσι μία διάταξη ν πραγμάτων ἀνά μ εἶναι μία παράθεση (παράταξη) τῶν μ πραγμάτων πού παίρνουμε ἀπό ἕνα σύνολο μέ ν ἀντικείμενα. Κάθε πράγμα μιᾶς διατάξεως περιέχεται **μόνο** μία φορά σ' αὐτή. Ἑπομένως δύο διατάξεις τῶν ν στοιχείων ἀνά μ θά θεωροῦνται ὡς διαφορετικές: ἤ ὅταν δέν ἀποτελοῦνται ἀπό τά ἴδια πράγματα, ἤ ὅταν ἀποτελοῦνται μέν ἀπό τά ἴδια πράγματα, διαφέρουν ὅμως ὡς πρός τήν τάξη τους.

Συνεπῶς σέ κάθε διάταξη παίζει ρόλο ὄχι μόνο ποιά μ πράγματα θά πάρουμε ἀπό τά ν, ἀλλά καί μέ ποιά σειρά (τάξη) θά τά πάρουμε, δηλ. ποιό θά πάρουμε πρῶτο, ποιό δεύτερο, κ.ο.κ.

Τό πλῆθος τῶν διαφόρων διατάξεων τῶν ν πραγμάτων ἀνά μ θά τό παριστάνουμε μέ τό σύμβολο: Δ_μ^ν.

Προφανῶς ἔχουμε: $\Delta_1^\nu=\nu$ καί $\mathbf{\Delta_\nu^\nu=M_\nu=\nu!}$.

Θά ἀποδείξουμε τώρα τήν ἑξῆς πρόταση:

Πρόταση.— Τό πλῆθος τῶν διατάξεων ν πραγμάτων ἀνά μ μᾶς τό δίνει ὁ τύπος:

$$\boxed{\Delta_\mu^\nu=\nu(\nu-1)(\nu-2)\cdots(\nu-\mu+1)} \qquad (1)$$

Ἀπόδειξη. Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι σχηματίσαμε ὅλες τίς διατάξεις τῶν ν πραγμάτων: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ ἀνά $(\mu-1)$, πού τό πλῆθος τους εἶναι $\Delta_{\mu-1}^\nu$, καί ἄς πάρουμε στήν τύχη μία ἀπό αὐτές, π.χ. τήν $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{\mu-1}$. Αὐτή θά περιέχει $(\mu-1)$ ἀπό τά ν πράγματα $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ καί συνεπῶς θά ὑπάρχουν ἀκόμη $\nu-(\mu-1)=\nu-\mu+1$ πράγματα πού δέν ἀνήκουν σ' αὐτή τή διάταξη. Ἄν τώρα στό τέλος αὐτῆς τῆς διατάξεως πού λάβαμε, τοποθετήσουμε ἕνα, ὁποιοδήποτε, ἀπό τά $(\nu-\mu+1)$ ὑπόλοιπα στοιχεῖα, θά προκύψει μία διάταξη τῶν ν πραγμάτων ἀνά μ. Ἄρα ἀπό τήν $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{\mu-1}$ θά προκύψουν $(\nu-\mu+1)$ συνολικά διατάξεις τῶν ν ἀνά μ, οἱ ἑξῆς:

$$\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{\mu-1}\alpha_\mu, \quad \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{\mu-1}\,\alpha_{\mu+1}, \quad \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{\mu-1}\,\alpha_{\mu+2}, \quad \ldots, \quad \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{\mu-1}\alpha_\nu.$$

Ὥστε ἀπό κάθε διάταξη τῶν ν πραγμάτων ἀνά $(\mu-1)$ προκύπτουν $(\nu-\mu+1)$ διατάξεις τῶν ν ἀνά μ. Ἑπομένως ἀπό τίς $\Delta^\nu_{\mu-1}$ διατάξεις θά προκύψουν $(\nu-\mu+1)\Delta^\nu_{\mu-1}$ διατάξεις τῶν ν ἀνά μ. Αὐτές εἶναι ὅ λ ε ς οἱ δ ι α φ ο ρ ε τ ι κ έ ς διατάξεις τῶν ν πραγμάτων ἀνά μ (γιατί;), ἑπομένως θά ἔχουμε:

$$\Delta^\nu_\mu = (\nu-\mu+1)\cdot\Delta^\nu_{\mu-1}\,. \tag{2}$$

Ἀπό τήν ἀναδρομική σχέση (2) γιά $\mu=2, 3, \ldots, \mu$ καί δεδομένου ὅτι $\Delta^\nu_1=\nu$ λαμβάνουμε τίς μ ἰσότητες:

$$\begin{aligned} \Delta^\nu_1 &= \nu \\ \Delta^\nu_2 &= (\nu-1)\,.\,\Delta^\nu_1. \\ \Delta^\nu_3 &= (\nu-2)\cdot\Delta^\nu_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Delta^\nu_\mu &= (\nu-\mu+1)\cdot\Delta^\nu_{\mu-1} \end{aligned} \tag{3}$$

Ἄν τώρα τίς σχέσεις αὐτές τίς πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη καί ἁπλοποιήσουμε μέ τούς κοινούς παράγοντες πού ἐμφανίζονται στά δύο μέλη, προκύπτει ἡ σχέση:

$$\Delta^\nu_\mu = \nu(\nu-1)(\nu-2)\cdots(\nu-\mu+1).$$

Σημείωση *(μνημονικός κανόνας)* **: Τό πλῆθος τῶν διατάξεων ν πραγμάτων ἀνά μ εἶναι ἴσο μέ τό γινόμενο μ διαδοχικῶν φυσικῶν ἀριθμῶν πού ὁ μεγαλύτερός τους εἶναι τό ν.** Π.χ.

$$\Delta^7_3 = 7\cdot6\cdot5 = 210.$$

Πόρισμα.— Τό πλῆθος τῶν διατάξεων ν πραγμάτων ἀνά μ μᾶς τό δίνει καί ὁ ἑξῆς τύπος :

$$\boxed{\Delta^\nu_\mu = \frac{\nu!}{(\nu-\mu)!}} \tag{4}$$

Ἐφαρμογές: 1η. Ἕνας μαθητής ἔχει 9 βιβλία καί θέλει νά τοποθετήσει σ᾽ ἕνα ράφι 5 ἀπ᾽ αὐτά. Μέ πόσους τρόπους μπορεῖ νά τό κάνει αὐτό;

Λύση. Οἱ διάφοροι τρόποι εἶναι ὅσες οἱ διατάξεις τῶν 9 πραγμάτων ἀνά 5:

$$\Delta^9_5 = 9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5 = 15120.$$

2η. Πόσοι πενταψήφιοι ἀριθμοί ὑπάρχουν μέ διαφορετικά ψηφία;

Λύση. Κάθε πενταψήφιος ἀριθμός (π.χ. ὁ 38906, 72925, ...) εἶναι μία διάταξη τῶν 10 ψηφίων: 0, 1, 2, 3, . . ., 8, 9 ἀνά 5, μέ τή διαφορά ὅτι τό ψηφίο 0 δέν πρέπει νά εἶναι πρῶτο (π.χ. 05382, 03948, ...). Ἀλλά οἱ ἀριθμοί πού ἔχουν ὡς πρῶτο ἀριστερά ψηφίο τό 0 εἶναι ὅσες οἱ διατάξεις τῶν 9 ψηφίων 1, 2, 3, . . ., 9 ἀνά 4.

Ἄρα τό ζητούμενο πλῆθος x εἶναι:

$$x = \Delta^{10}_5 - \Delta^9_4 = 10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6 - 9\cdot8\cdot7\cdot6 = 9\cdot8\cdot7\cdot6(10-1) = 9^2\cdot8\cdot7\cdot6 = 27216.$$

3η. Ἕνα ἐπιβατικό τραῖνο ἔχει 8 βαγόνια. Μέ πόσους τρόπους μποροῦν 5 μαθητές νά ταξιδέψουν, ἄν εἶναι ὑποχρεωμένοι νά καθήσουν σέ διαφορετικά βαγόνια;

Λύση. Ἀπό τά 8 διαθέσιμα βαγόνια τοῦ τραίνου, οἱ πέντε μαθητές θά καταλάβουν 5 βαγόνια. Αὐτό ἀντιστοιχεῖ σέ μία ἐκλογή 5 ἀντικειμένων ἀπό τά 8 διαφορετικά ἀντικείμενα. Ἄρα ὁ ζητούμενος ἀριθμός τῶν τρόπων εἶναι:

$$\Delta^8_5 = \frac{8!}{(8-5)!} = \frac{8!}{3!} = 8\times7\times6\times5\times4 = 6.720.$$

★ § 181. **Ἐπαναληπτικές διατάξεις.**— Ἔστω ὅτι μᾶς λένε νά γράψουμε ἀπό ἕναν πενταψήφιο ἀριθμό μέ ψηφία ἀπό τό 1 ὥς τό 9. Μποροῦμε νά γράψουμε, π.χ., τούς ἀριθμούς:

54678, 91823, 25777, 55333, 22222, κ.ἄ.

Παρατηροῦμε ὅτι κάθε τέτοιος ἀριθμός εἶναι καί μία «ἐπιλογή» τῶν 5 πραγμάτων (ψηφίων) ἀπό τά 9, στήν ὁποία (ἐπιλογή) ὅμως τά πέντε πράγματα (ψηφία) πού ἐμφανίζονται δέν εἶναι πάντοτε διαφορετικά μεταξύ τους, ἀλλά μερικά ἀπό αὐτά, ὅπως π.χ. συμβαίνει στούς ἀριθμούς 25777, 55333 ἤ καί ὅλα ἀκόμη, π.χ. στόν ἀριθμό 22222, εἶναι τά ἴδια. Μιά τέτοια ἐπιλογή μ πραγμάτων ἀπό ν πράγματα, στήν ὁποία τό καθένα πράγμα μπορεῖ νά ἐπαναλαμβάνεται μέχρι μ τό πολύ φορές θά τή λέμε **ἐπαναληπτική διάταξη τῶν ν πραγμάτων ἀνά μ.**

Πιό αὐστηρά: **Ἐπαναληπτική διάταξη** *τῶν ν πραγμάτων* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ *ἀνά μ ὀνομάζουμε κάθε ἀπεικόνιση τοῦ τμήματος* $T_\mu = \{1, 2, \ldots, \mu\}$ *στό σύνολο* $E = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu\}$. Εἶναι φανερό πώς τώρα μπορεῖ νά εἶναι καί $\mu > \nu$.

Τό πλῆθος ὅλων τῶν ἐπαναλ. διατάξεων τῶν ν πραγμάτων ἀνά μ θά τό παριστάνουμε μέ τό σύμβολο: δ_μ^ν, ὅπου εἶναι: $\mu \leqq \nu$ ἤ καί $\mu > \nu$.

Προφανῶς ἰσχύει: $\delta_1^\nu = \nu$.

Πρίν φθάσουμε νά διατυπώσουμε τό γενικό τύπο πού μᾶς δίνει τό πλῆθος δ_μ^ν, ἄς παρακολουθήσουμε τό ἑξῆς χαρακτηριστικό παράδειγμα: Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι σ' ἕνα νηπιαγωγεῖο ἔχουμε μ παιδιά καί ὅτι διαθέτουμε ν διαφορετικά εἴδη παγωτοῦ. Τό πρῶτο παιδί μπορεῖ νά σερβιριστεῖ μέ ἕνα ὁποιοδήποτε ἀπό τά ν παγωτά, δηλ. κατά ν τρόπους. Ὅταν σερβιριστεῖ τό πρῶτο, τότε ὑπάρχουν πάλι ν τρόποι νά σερβιριστεῖ τό δεύτερο παιδί. Οἱ τρόποι αὐτοί ἀντιστοιχοῦν σέ καθεμία ἀπό τίς ν ποικιλίες πού προσφέρθηκαν στό πρῶτο παιδί. Ἔτσι ὑπάρχουν $\nu \times \nu = \nu^2$ τρόποι σερβιρίσματος γιά τά 2 πρῶτα παιδιά. Στό τρίτο παιδί μπορεῖ νά δοθεῖ ἐπίσης μία ἀπό τίς ν ποικιλίες γιά καθεμία ἀπό τίς ν^2 δυνατότητες σερβιρίσματος τῶν δύο πρώτων παιδιῶν. Ἔτσι τά τρία πρῶτα παιδιά μποροῦν νά σερβιριστοῦν κατά $\nu^2 \times \nu = \nu^3$ τρόπους. Παρατηροῦμε, δηλ., ὅτι ὁ ἐκθέτης τῆς δυνάμεως ν^3 εἶναι ἴσος μέ τόν ἀριθμό τῶν παιδιῶν πού πῆραν παγωτό. Κάνοντας τώρα ἀνάλογο συλλογισμό βρίσκουμε ὅτι τά μ παιδιά μποροῦν νά σερβιριστοῦν κατά ν^μ τρόπους. Ὁ ἀριθμός αὐτός ν^μ δέν εἶναι τίποτε ἄλλο παρά τό πλῆθος δ_μ^ν τῶν ἐπαναληπτικῶν διατάξεων τῶν ν πραγμάτων ἀνά μ.

Ἔτσι ἀποδείξαμε τήν ἑξῆς πρόταση:

Πρόταση.— Τό πλῆθος δ_μ^ν τῶν ἐπαναληπτικῶν διατάξεων τῶν ν πραγμάτων ἀνά μ μᾶς τό δίνει ὁ τύπος:

$$\boxed{\delta_\mu^\nu = \nu^\mu} \tag{1}$$

Ἄσκηση. Νά ἀποδείξετε τήν παραπάνω πρόταση ἐφαρμόζοντας τήν ἀποδεικτική μέθοδο τῆς τέλειας ἐπαγωγῆς.

Ὑπόδειξη. Ἰσχύει $\delta_1^\nu = \nu = \nu^1$. Ἔστω ὅτι ἰσχύει ἡ (1) γιά $\mu = \kappa$, δηλ. ἔστω ὅτι: $\delta_\kappa^\nu = \nu^\kappa$. Ἄν στό τέλος μιᾶς ὁποιασδήποτε ἀπό τίς ἐπαναλ. διατάξεις τῶν ν πραγμάτων ἀνά κ ἐπισυνάψουμε ἕνα ὁποιοδήποτε ἀπό τά ν στοιχεῖα: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$, τότε θά προκύψει μία ἐπαναλ. διάταξη τῶν ν πραγμάτων ἀνά (κ + 1). Εὔκολα βρίσκουμε κατόπιν ὅτι ἰσχύει : $\delta^\nu_{\kappa+1} = \nu \cdot \delta^\nu_\kappa$ κτλ.

Ἐφαρμογές: 1η. Πόσους πενταψήφιους ἀριθμούς μποροῦμε νά σχηματίσουμε μέ τά ψηφία : 3, 5, 7;

Λύση. Καθένας ἀπ' αὐτούς τούς ἀριθμούς (π.χ. 35373, 75333, 77777, ...) εἶναι μία ἐπαναληπτική διάταξη τῶν τριῶν ψηφίων 3, 5, 7 ἀνά 5. Ἄρα τό ζητούμενο πλῆθος εἶναι ἴσο μέ : $\delta^3_5 = 3^5 = 243$.

2η. *Τό πρόβλημα τοῦ ΠΡΟ-ΠΟ.* **Πόσες στῆλες ΠΡΟ-ΠΟ πρέπει νά συμπληρώσουμε γιά νά πετύχουμε ἕνα 13άρι;**

Λύση. Κάθε στήλη τοῦ ΠΡΟ-ΠΟ εἶναι μία ἐπαναληπτική διάταξη τῶν τριῶν πραγμάτων (ἀποτελεσμάτων): 1, 2, Χ ἀνά 13. Ἑπομένως γιά νά πετύχουμε σίγουρα ἕνα 13άρι πρέπει νά συμπληρώσουμε τόσες στῆλες, ὅσες εἶναι οἱ ἐπαναλ. διατάξεις τῶν τριῶν πραγμάτων ἀνά 13, δηλ. πρέπει νά συμπληρώσουμε:

$$\delta^3_{13} = 3^{13} = 1.567.323 \text{ στῆλες.}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάδα Α΄. 445. Νά ὑπολογίσετε τίς Δ^6_3, Δ^5_4, Δ^{10}_4 καί νά δείξετε ὅτι: $\Delta^{10}_4 = M_7$.

446. Νά βρεῖτε τό ν, ἄν:

$$\alpha)\ \Delta^\nu_5 = 12 \cdot \Delta^\nu_3, \quad \beta)\ \Delta^{2\nu}_3 = 2 \cdot \Delta^\nu_4, \quad \gamma)\ 3\Delta^\nu_4 = \Delta^{\nu-1}_5.$$

447. Νά ὑπολογίσετε τό ἄθροισμα: $\Delta^5_1 + \Delta^5_2 + \Delta^5_3 + \Delta^5_4 + \Delta^5_5$.

448. Πόσες «λέξεις» μέ τρία γράμματα μποροῦμε νά σχηματίσουμε ἀπό τά γράμματα: α, β, γ, δ καί ε παίρνοντας ὅμως κάθε γράμμα μόνο μιά φορά;

449. Μέ πόσους τρόπους 5 τουρίστες μποροῦν νά κατευθυνθοῦν σέ 7 ξενοδοχεῖα σέ ξεχωριστό ὅμως ὁ καθένας;

***Ὁμάδα Β΄. 450.** Νά ἀποδείξετε ὅτι : $\Delta^{\nu+1}_\mu = \Delta^\nu_\mu + \mu \cdot \Delta^\nu_{\mu-1}$.

451. Νά βρεῖτε τό πλῆθος τῶν διψήφιων ἀριθμῶν πού δέ λήγουν σέ μηδέν.

452. Πόσοι τετραψήφιοι ἀριθμοί ὑπάρχουν μέ διαφορετικά ψηφία, ἀλλά χωρίς τό 0 καί τό 9;

453. Πόσοι πενταψήφιοι ἀριθμοί μποροῦν νά σχηματιστοῦν ἀπό τά ψηφία: 0, 1, 2, 3, 4 καί 5 χωρίς νά ἐπαναλαμβάνεται κανένα ψηφίο;

454. Ἑφτά μαθητές πρόκειται νά διαγωνιστοῦν, οἱ δύο στά Μαθηματικά καί οἱ πέντε σέ ἄλλα μαθήματα. Κατά πόσους τρόπους μποροῦν νά καθήσουν γιά νά διαγωνιστοῦν σέ μία σειρά (ὁ ἕνας πίσω ἀπό τόν ἄλλο) ἔτσι, ὥστε οἱ μαθητές πού ἐξετάζονται στά Μαθηματικά νά μήν κάθονται ὁ ἕνας ἀκριβῶς πίσω ἀπό τόν ἄλλο;

455. Δύο πόλεις Α καί Β συνδέονται μέ 6 ἁμαξοστοιχίες. Μέ πόσους τρόπους μποροῦμε νά ταξιδέψουμε ἀπό τήν πόλη Α στήν πόλη Β καί ἀντιστρόφως, ἄν χρησιμοποιήσουμε στήν ἐπιστροφή: α) διαφορετική ἁμαξοστοιχία, β) ἔστω καί τήν ἴδια ἁμαξοστοιχία.

III. ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΙ

§ 182. Ἁπλοῖ συνδυασμοί.—Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι ἔχουμε ν διαφορετικά πράγματα: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ τά ὁποῖα θεωροῦμε στοιχεῖα ἑνός συνόλου Ε καί ἄς πάρουμε k ἀπό αὐτά, ὅπου $1 \leq k \leq \nu$, ἀδιαφορώντας ὅμως γιά τήν κατάταξή τους σέ μία σειρά, δηλαδή χωρίς νά μᾶς ἐνδιαφέρει ποιό θά πάρουμε πρῶτο, ποιό δεύτερο κ.ο.κ. Λέμε τότε πώς ἔχουμε ἕνα συνδυασμό τῶν ν πραγμάτων ἀνά k.

Πιό αὐστηρά: **συνδυασμό τῶν ν πραγμάτων ἀνά k** $(1 \leq k \leq \nu)$ *ὀνομάζουμε κάθε ὑποσύνολο τοῦ $E = \{a_1, a_2, \ldots, a_\nu\}$, τό ὁποῖο περιέχει k στοιχεῖα.*

Ἀπό τόν παραπάνω ὁρισμό συμπεραίνουμε ὅτι: κάθε πράγμα ἑνός συνδυασμοῦ περιέχεται μία μόνο φορά σ' αὐτό τό συνδυασμό. Ἐξάλλου σέ κάθε συνδυασμό τῶν ν ἀνά k μᾶς ἐνδιαφέρει μ ό ν ο ποιά ἀπό τά ν πράγματα θά πάρουμε τά k, ὄχι ὅμως καί μέ ποιά σειρά (τάξη) θά τά πάρουμε, ὅπως συνέβαινε μέ τίς διατάξεις τῶν ν πραγμάτων ἀνά k. Ἑπομένως δύο συνδυασμοί τῶν ν ἀνά k εἶναι διαφορετικοί, ὅταν δέν ἀποτελοῦνται ἀπό τά ἴδια (ἀκριβῶς) πράγματα (βλ. καί ὁρισμό ἰσότητας δύο συνόλων, Κεφ. I, § 10).

Τό πλῆθος ὅλων τῶν συνδυασμῶν τῶν ν πραγμάτων ἀνά k θά τό παριστάνουμε μέ τό σύμβολο: $\binom{\nu}{k}$ ἤ μέ τό: Σ_k^ν

Προφανῶς ἔχουμε: $\binom{\nu}{1} = \nu$ καί $\binom{\nu}{\nu} = 1$.

Δεχόμαστε ἐπίσης ὅτι: $\binom{\nu}{0} = 1$. (Θυμηθεῖτε ὅτι: $\varnothing \subset E$).

Θά ἀποδείξουμε τώρα τήν ἑξῆς πρόταση:

Πρόταση.— Τό πλῆθος τῶν συνδυασμῶν ν πραγμάτων ἀνά k μᾶς τό δίνει ὁ τύπος:

$$\boxed{\binom{\nu}{k} = \frac{\nu\cdot(\nu-1)\cdots(\nu-k+1)}{k!}} \qquad (1)$$

Ἀπόδειξη. Ἄς ὀνομάσουμε x τό πλῆθος τῶν συνδυασμῶν τῶν ν ἀνά k. Ἄν τώρα σ' ἕναν ὁποιοδήποτε συνδυασμό τῶν ν ἀνά k, δηλ. ἄν σ' ἕνα ὁποιοδήποτε ὑποσύνολο τοῦ E μέ k στοιχεῖα, κάναμε ὅλες τίς δυνατές μεταθέσεις τῶν στοιχείων του, οἱ ὁποῖες εἶναι $k!$, τότε νά προκύψουν $k!$ διατάξεις τῶν ν ἀνά k (γιατί καθεμιά ἀπό τίς μεταθέσεις αὐτές περιέχει k στοιχεῖα ἀπό τά ν). Ἄν αὐτό τό ἐπαναλάβουμε γιά ὅλους τούς συνδυασμούς τῶν ν ἀνά k, πού τό πλῆθος τους τό ὀνομάσαμε x, τότε θά προκύψουν: $x\cdot k!$ διατάξεις τῶν ν ἀνά k. Αὐτές ὅμως, τότε, εἶναι ὅλες οἱ διατάξεις τῶν ν ἀνά k. Ἐξάλλου οἱ διατάξεις αὐτές εἶναι διαφορετικές μεταξύ τους, γιατί ὅσες προέκυψαν ἀπό διαφορετικούς συνδυασμούς διαφέρουν κατά ἕνα τουλάχιστο πράγμα, καί ὅσες προέκυψαν ἀπό τόν ἴδιο συνδυασμό, διαφέρουν ὡς πρός τήν τάξη τῶν στοιχείων τους.

Ἄρα ἔχουμε: $x\cdot k! = \Delta_k^\nu$

Ἀλλά (§ 180) $\Delta_k^\nu = \nu(\nu-1)\cdots(\nu-k+1)$

Ἄρα: $$x = \frac{\Delta_k^\nu}{k!} = \frac{\nu(\nu-1)\cdots(\nu-k+1)}{k!} \qquad (2)$$

ἤ ἄν τεθεῖ $x = \binom{\nu}{k}$, προκύπτει ὁ τύπος (1).

Παρατήρηση. Ἀπό τή σχέση (2) ἔχουμε:

$$\binom{\nu}{k} \equiv \Sigma_k^{\nu} = \frac{\Delta_k^{\nu}}{M_k}$$

Ἔτσι, π.χ. εἶναι : $\binom{5}{3} = \frac{\Delta_3^5}{M_3} = \frac{5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3} = 10, \quad \Sigma_4^7 = \frac{\Delta_4^7}{M_4} = \frac{7\cdot6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3\cdot4} = 35.$

Πόρισμα.— Τό πλῆθος τῶν συνδυασμῶν ν πραγμάτων ἀνά k μᾶς τό δίνει ὁ τύπος :

$$\boxed{\binom{\nu}{k} = \frac{\nu!}{k!\,(\nu - k)!}}$$

Ἡ ἀπόδειξη τοῦ παραπάνω πορίσματος προκύπτει ἀμέσως, ἄν λάβουμε ὑπόψη μας τήν προηγούμενη παρατήρηση καί τό πόρισμα τῆς σελίδας 266.

Ἐφαρμογές : 1η. Παίρνουμε ἑφτά (7) σημεῖα πού ἀνά τρία δέ βρίσκονται πάνω στήν ἴδια εὐθεία. Πόσα τρίγωνα μποροῦμε νά σχηματίσουμε, ἄν τά ἑνώσουμε μέ διάφορες εὐθεῖες;

Λύση. Προφανῶς σχηματίζονται τόσα τρίγωνα, ὅσοι εἶναι οἱ συνδυασμοί τῶν 7 πραγμάτων ἀνά 3. Ἄρα τό ζητούμενο πλῆθος εἶναι: $\binom{7}{3} = \frac{7\cdot6\cdot5}{1\cdot2\cdot3} = 35$ τρίγωνα.

2η. Μέ πόσους τρόπους 11 παῖκτες μπορεῖ νά ἐκλεγοῦν ἀπό μία ὁμάδα μέ 13 παῖκτες; Ποιός θά εἶναι ὁ ἀριθμός τῶν συνδυασμῶν, ἄν ἕνας εἰδικός παίκτης πρέπει :

α) νά συμπεριλαμβάνεται, β) νά ἀποκλειστεῖ;

Λύση. Ὁ ἀριθμός τῶν συνδυασμῶν τῶν 13 παικτῶν ἀνά 11 δίνεται ἀπό:

$$\binom{13}{11} = \frac{13!}{11!\,(13-11)!} = \frac{13!}{11!\,2!} = \frac{13\times12}{2} = 78.$$

α) Ἄν ἕνας εἰδικός παίκτης πρέπει νά συμπεριλαμβάνεται πάντοτε στήν ὁμάδα, χρειαζόμαστε 10 ἀκόμη παῖκτες ἀπό τούς ὑπόλοιπους 12. Αὐτό μπορεῖ νά γίνει κατά:

$$\binom{12}{10} = \frac{12!}{10!\,2!} = \frac{12\times11}{2} = 66 \text{ τρόπους.}$$

β) Ἄν ἕνας εἰδικός παίκτης πρέπει νά ἀποκλειστεῖ ἀπό τήν ὁμάδα, χρειαζόμαστε μία ἐκλογή 11 παικτῶν ἀπό τήν ὁμάδα τῶν 12 παικτῶν πού παραμένουν. Τό πλῆθος αὐτῶν τῶν συνδυασμῶν εἶναι: $\binom{12}{11} = \frac{12!}{11!\,1!} = \frac{12}{1} = 12.$

★§ 183. Ἀξιοσημείωτες ἰδιότητες τῶν ἁπλῶν συνδυασμῶν.

—Ἄν σ' ἕνα ὑποσύνολο A τοῦ E ἀνήκουν k στοιχεῖα, στό συμπληρωματικό του A' θά ἀνήκουν ν−k στοιχεῖα. Ἑπομένως σέ κάθε ἐκλογή ἑνός ὑποσυνόλου τοῦ E μέ k στοιχεῖα ἀντιστοιχεῖ καί μία ἐκλογή τοῦ συμπληρωματικοῦ του συνόλου μέ (ν − k) στοιχεῖα καί ἀντιστρόφως. Συνεπῶς ὁ ἀριθμός τῶν ὑποσυνόλων τοῦ E μέ k στοιχεῖα εἶναι ἴσος μέ τόν ἀριθμό τῶν ὑποσυνόλων τοῦ E μέ (ν − k) στοιχεῖα. Αὐτό θά τό λέμε καί ὡς ἑξῆς:

Ἰδιότητα I.— Τό πλῆθος τῶν συνδυασμῶν τῶν ν πραγμάτων ἀνά k εἶναι ἴσο μέ τό πλῆθος τῶν συνδυασμῶν τῶν ν πραγμάτων ἀνά (ν − k).

Δηλαδή: $$\boxed{\binom{\nu}{k} = \binom{\nu}{\nu-k}} \quad (1)$$

Ἡ ἀλγεβρική ἀπόδειξη εἶναι ἐπίσης εὔκολη. Πράγματι :

$$\binom{\nu}{\nu-k} = \frac{\nu!}{(\nu-k)!\,[\nu-(\nu-k)]!} = \frac{\nu!}{(\nu-k)!\,k!} = \binom{\nu}{k}.$$

Παρατηρήσεις: **α')** Ἀπό τόν τύπο $\binom{\nu}{k} = \binom{\nu}{\nu - k}$, $\begin{matrix} k = 0, 1, 2, \ldots, \nu \\ \nu - k = \nu, \ldots, 1, 0 \end{matrix}$

ἔχουμε προφανῶς: $(\nu - k) + k = \nu$ γιά κάθε ν καί γιά κάθε k. Μέ ἄλλες λέξεις, ἄν $\alpha + \beta = \nu$, τότε $\binom{\nu}{\alpha} = \binom{\nu}{\beta}$.

Ἔτσι ἀπό τή: $\binom{20}{k} = \binom{20}{k+2}$, ἔπεται ὅτι $k = 9$.

β') Στήν πράξη ἡ ἰδιότητα I μᾶς δίνει τή δυνατότητα νά περιοριστοῦμε στόν ὑπολογισμό τοῦ $\binom{\nu}{k}$ μόνο γιά $k \leqq \frac{\nu}{2}$, γιατί ἄν $k > \frac{\nu}{2}$, τότε ὑπολογίζουμε τό $\binom{\nu}{\nu - k}$ ἀντί $\binom{\nu}{k}$ δεδομένου ὅτι τότε εἶναι: $\nu - k < \frac{\nu}{2}$.

Ἔτσι, π.χ. ἔχουμε: $\binom{50}{46} = \binom{50}{4} = \frac{50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 230300$.

Ἰδιότητα II.— Τό πλῆθος τῶν συνδυασμῶν τῶν ν πραγμάτων ἀνά k ἰσοῦται μέ τό πλῆθος τῶν συνδυασμῶν τῶν ν — 1 πραγμάτων ἀνά k, στό ὁποῖο προσθέτουμε καί τό πλῆθος τῶν συνδυασμῶν τῶν ν — 1 πραγμάτων ἀνά k — 1.

Δηλαδή :

$$\boxed{\binom{\nu}{k} = \binom{\nu - 1}{k} + \binom{\nu - 1}{k - 1}} \qquad (2)$$

Ἡ ἀπόδειξη εἶναι εὔκολη ἄν ξεκινήσουμε ἀπό τό δεύτερο μέλος τῆς (2) καί ἐφαρμόσουμε τόν τύπο τοῦ πορίσματος τῆς προηγούμενης παραγράφου.

Ἰδιότητα III.— Ἰσχύει :

$$\boxed{\binom{\nu}{k+1} = \binom{\nu}{k} \cdot \frac{\nu - k}{k + 1}} \qquad (3)$$

Πράγματι :

$$\binom{\nu}{k+1} = \frac{\nu(\nu - 1) \cdots (\nu - k + 1)(\nu - k)}{1 \cdot 2 \cdots k \cdot (k + 1)} = \binom{\nu}{k} \cdot \frac{(\nu - k)}{k + 1}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάδα Α'. 456. Νά ὑπολογίσετε τούς: $\binom{12}{7}$, $\binom{13}{9}$, $\binom{11}{8}$.

457. Νά δείξετε ὅτι $\binom{17}{6} = \binom{16}{5} + \binom{16}{6}$.

458. Ἄν $\binom{18}{k} = \binom{18}{k+2}$, νά βρεῖτε τούς $\binom{k}{5}$.

459. Ἄν $\binom{\nu}{4} = 2\binom{\nu}{3}$, νά βρεῖτε τό φυσικό ἀριθμό ν.

460. Ἄν $\Delta_k^\nu = 3024$ καί $\binom{\nu}{k} = 126$, νά βρεῖτε τόν ἀριθμό k.

461 Νά πάρετε πάνω σ' ἕναν κύκλο 9 σημεῖα καί κατόπιν νά βρεῖτε:

α) Πόσες χορδές μπορεῖτε νά φέρετε συνδέοντας τά σημεῖα αὐτά μέ ὅλους τούς δυνατούς τρόπους;

β) Πόσα τρίγωνα, τετράπλευρα καί ἑξάγωνα μπορεῖτε νά σχηματίσετε, πού νά ἔχουν ὡς κορυφές τά σημεῖα πού πήρατε στήν ἀρχή;

462. Νά βρεῖτε, μέ τόν τύπο τῶν συνδυασμῶν, τό πλῆθος τῶν διαγωνίων ἑνός πολυγώνου πού ἔχει ν κορυφές.

*'Ομάδα Β'. **463.** Νά βρεῖτε πόσους πενταψήφιους ἀριθμούς μποροῦμε νά σχηματίσουμε ἄν πάρουμε τρία ψηφία ἀπό τά 4, 5, 6, 7, 8, 9 καί δύο ἀπό τά 1, 2, 3.

464. Μέ πόσους τρόπους μποροῦν $k + \lambda$ ἀντικείμενα νά χωριστοῦν σέ 2 ὁμάδες, ὥστε ἡ μία ὁμάδα νά ἔχει k καί ἡ ἄλλη λ ἀντικείμενα.

465. Νά ἀποδείξετε, μέ τή θεωρία τῶν συνδυασμῶν, ὅτι] τό γινόμενο ν διαδοχικῶν ἀκεραίων εἶναι πάντοτε διαιρετό μέ τό γινόμενο: $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \nu$.

466. Πόσα ὑποσύνολα μέ k στοιχεῖα, ἀπό τά ὁποῖα ὅμως 2 εἶναι ὁρισμένα, ὑπάρχουν σ' ἕνα σύνολο μέ ν στοιχεῖα ($\nu \geqq 5$). Ἐπίσης μέ 3 ὁρισμένα στοιχεῖα; Τό ἴδιο μέ 4;

467. Πόσες 5-αδες χαρτιῶν ἀπό μία δέσμη 52 παιγνιοχάρτων μποροῦν νά περιέχουν 4 ἄσσους;

468. Μέ πόσους τρόπους μποροῦν $k + \lambda + \mu$ ἀντικείμενα νά χωριστοῦν σέ 3 ὁμάδες μέ k, λ καί μ ἀντικείμενα, ἀντιστοίχως, ἡ καθεμία;

469. Σέ μία πολιτιστική ἐκδήλωση πρόκειται νά πάει μία πενταμελής ἀντιπροσωπεία ἀπό ἕνα σχολεῖο. Διαλέξαμε ἀπό τό σχολεῖο 4 μαθητές καί 7 μαθήτριες. Ἀπό τά 11 αὐτά ἄτομα, πόσες 5μελεῖς ὁμάδες μποροῦμε νά σχηματίσουμε ὥστε νά περιέχουν:
α) 2 μαθήτριες, β) τουλάχιστο δύο μαθήτριες, γ) τό πολύ δύο μαθήτριες;

* IV. ΤΥΠΟΣ ΤΟΥ ΔΙΩΝΥΜΟΥ

§ 184. Τό διωνυμικό θεώρημα.— Ἡ ἑπόμενη πρόταση πού φέρει τό ὄνομα τοῦ Newton* εἶναι τό διωνυμικό θεώρημα, τό ὁποῖο δίνει τό ἀνάπτυγμα $(x + \alpha)^\nu$.

Πρόταση.— Γιά κάθε ζεῦγος πραγματικῶν ἀριθμῶν x, α καί γιά κάθε $\nu \in N$, ἰσχύει ὁ τύπος (τοῦ διωνύμου τοῦ Νεύτωνα).

$$\boxed{\begin{aligned}(x+\alpha)^\nu = \binom{\nu}{0}x^\nu + \binom{\nu}{1}x^{\nu-1}\alpha + \binom{\nu}{2}x^{\nu-2}\alpha^2 + \cdots +\\ +\binom{\nu}{k}x^{\nu-k}\alpha^k + \cdots + \binom{\nu}{\nu-1}x\alpha^{\nu-1} + \binom{\nu}{\nu}\alpha^\nu\end{aligned}} \tag{1}$$

Ἀπόδειξη. Εἶναι γνωστό ὅτι ἡ πρώτη ταυτότητα τοῦ Νεύτωνα γράφεται:

$$(x + \alpha_1)\cdot(x + \alpha_2)\ldots(x + \alpha_\nu) \equiv x^\nu + (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\nu)x^{\nu-1} + (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \cdots + \alpha_{\nu-1}\alpha_\nu)x^{\nu-2} + \cdots + (\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k + \cdots)x^{\nu-k} + \cdots + \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_\nu \tag{1'}$$

Τό πλῆθος τῶν προσθετέων τοῦ $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\nu$ εἶναι τό πλῆθος $\binom{\nu}{1}$ τῶν συνδυασμῶν τῶν ν πραγμάτων $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ ἀνά ἕνα.

Τό πλῆθος τῶν προσθετέων τοῦ $\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \cdots + \alpha_{\nu-1}\alpha_\nu$ εἶναι τό πλῆθος $\binom{\nu}{2}$ τῶν συνδυασμῶν τῶν ν πραγμάτων ἀνά δύο κ.ο.κ.

Τό πλῆθος τῶν προσθετέων τοῦ $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k + \cdots$ εἶναι τό πλῆθος $\binom{\nu}{k}$ κτλ.

Θέτουμε $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_\nu$ στήν (1') καί, ἐπειδή $\binom{\nu}{0} = 1 = \binom{\nu}{\nu}$ λαμβάνουμε τήν (1).

---

* Isaak Newton (1642-1727). Ἄγγλος μαθηματικός, φυσικός καί φιλόσοφος.

Άσκηση. Νά ἀποδείξετε τήν (1) μέ τή μέθοδο τῆς τέλειας ἐπαγωγῆς χρησιμοποιώντας καί τήν ἰδιότητα ΙΙ τῆς § 183.

Ὁ τύπος (1) τοῦ διωνύμου γράφεται πιό σύντομα ὡς ἑξῆς:

$$\boxed{(x+\alpha)^\nu = \sum_{k=0}^{\nu}\binom{\nu}{k}x^{\nu-k}\alpha^k} \qquad (2)$$

Ἐπειδή εἶναι: $\binom{\nu}{1}=\nu, \quad \binom{\nu}{2}=\frac{\nu(\nu-1)}{1\cdot 2}$, καί γενικά:

$$\binom{\nu}{k}=\frac{\nu(\nu-1)\cdots(\nu-k+1)}{1\cdot 2\cdots k},$$

ὁ τύπος (1) μπορεῖ νά γραφεῖ καί ὡς ἑξῆς:

$$\boxed{(x+\alpha)^\nu = x^\nu+\nu x^{\nu-1}\alpha+\frac{\nu(\nu-1)}{1\cdot 2}x^{\nu-2}\alpha^2+\frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^{\nu-3}\alpha^3+\cdots+\alpha^\nu} \qquad (3)$$

Ἔτσι, π.χ. ἔχουμε:

$$(x+\alpha)^6 = x^6+6x^5\alpha+\frac{6\cdot 5}{1\cdot 2}x^4\cdot\alpha^2+\frac{6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3}x^3\alpha^3+\frac{6\cdot 5}{1\cdot 2}x^2\alpha^4+6x\alpha^5+\alpha^6=$$

$$=x^6+6x^5\alpha+15x^4\alpha^2+20x^3\alpha^3+15x^2\alpha^4+6x\alpha^5+\alpha^6.$$

Παρατηρήσεις: α) *Τό ἀνάπτυγμα τοῦ $(x+\alpha)^\nu$ εἶναι ἕνα πλῆρες ὁμογενές πολυώνυμο, ν βαθμοῦ, διατεταγμένο κατά τίς κατιοῦσες δυνάμεις τοῦ x καί τίς ἀνιοῦσες δυνάμεις τοῦ α* Σέ κάθε ὅρο του τό ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν τοῦ x καί τοῦ α εἶναι σταθερό καί ἴσο μέ ν.

β) *Τό πλῆθος τῶν ὅρων τοῦ ἀναπτύγματος εἶναι $\nu+1$*, ἐπειδή ὑπάρχουν ὅλες οἱ δυνάμεις τοῦ x ἀπό τή μηδενική ὡς τή νιοστή.

γ) *Οἱ ὅροι τοῦ ἀναπτύγματος τοῦ $(x+\alpha)^\nu$, πού ἀπέχουν ἐξίσου ἀπό τά ἄκρα, ἔχουν ἴσους συντελεστές.* Αὐτό προκύπτει ἀμέσως ἀπό τόν τύπο (1) τῆς § 183.

δ) *Ὁ ὅρος τάξεως λ τοῦ ἀναπτύγματος τοῦ $(x+\alpha)^\nu$ εἶναι ὁ:*

$$\binom{\nu}{\lambda-1}x^{\nu-\lambda+1}\cdot\alpha^{\lambda-1}.$$

Αὐτό προκύπτει ἀπό τή διάταξη τῶν συντελεστῶν τοῦ ἀναπτύγματος, ὅπου βλέπουμε ὅτι ὁ 1ος ὅρος ἔχει συντελεστή $\binom{\nu}{0}$, ὁ 2ος: $\binom{\nu}{1}$, ὁ 3ος: $\binom{\nu}{2}$καί ὁ λος ἔχει συντελεστή $\binom{\nu}{\lambda-1}$.

ε) *Ὁ ὅρος $\binom{\nu}{k}x^{\nu-k}\alpha^k$ εἶναι τάξεως $k+1$, συμβολίζεται μέ T_{k+1} καί λέγεται* **γενικός ὅρος** *τοῦ διωνύμου.* Ὥστε:

$$\boxed{T_{k+1}=\binom{\nu}{k}x^{\nu-k}\alpha^k, \text{ ὅπου } k=0,1,2,\ldots,\nu}$$

στ) *Ἄν ὁ ν εἶναι ἄρτιος, ἴσος μέ 2μ, τότε τό πλῆθος $\nu+1$ τῶν ὅρων εἶναι περιττό καί συνεπῶς ὑπάρχει ὅρος μέ μέγιστο συντελεστή. Αὐτός ὁ ὅρος λέγεται* **μεσαῖος ὅρος** *καί εἶναι τάξεως $\frac{\nu}{2}+1=\mu+1$.* Ὁ μεσαῖος ὅρος εἶναι ὁ:

$$\binom{\nu}{\mu}x^\mu\cdot\alpha^\mu.$$

ζ) *Ἄν ὁ ν εἶναι περιττός καί ἴσος μέ $2\mu + 1$, τότε τό πλῆθος $\nu + 1$ τῶν ὅρων τοῦ ἀναπτύγματος $(x+\alpha)^\nu$ εἶναι ἄρτιο καί συνεπῶς ὑπάρχουν* **δύο «μεσαῖοι» ὅροι,** (αὐτοί πού ἔχουν μέγιστους συντελεστές). Οἱ ὅροι αὐτοί εἶναι οἱ:

$$\binom{\nu}{\mu} x^{\mu+1}\alpha^{\mu} \quad \textit{καί} \quad \binom{\nu}{\mu+1} x^{\mu}\, \alpha^{\mu+1}$$

καί ἔχουν ἴσους συντελεστές.

Ἐφαρμογές: 1η. Νά βρεθεῖ ὁ μεσαῖος ὅρος στό ἀνάπτυγμα $(2x - x^2)^{12}$.

Λύση. Τό πλῆθος τῶν ὅρων τοῦ ἀναπτύγματος εἶναι: $12 + 1 = 13$, ἑπομένως ὁ μεσαῖος ὅρος εἶναι ὁ $\frac{\nu}{2} + 1 = 7$ος. Αὐτός θά εἶναι:

$$\binom{12}{6}(2x)^6 \cdot (-x^2)^6 = 59136\ x^{18}.$$

2η. Νά βρεθεῖ, ἄν ὑπάρχει, ὁ ὅρος πού εἶναι ἀνεξάρτητος ἀπό τό x στό ἀνάπτυγμα:

$$\left(2x^3 + \frac{3}{x}\right)^{16}$$

Λύση. Ὁ γενικός ὅρος τοῦ ἀναπτύγματος εἶναι:

$$T_{k+1} = \binom{16}{k}(2x^3)^{16-k} \cdot \left(\frac{3}{x}\right)^k = \binom{16}{k} 2^{16-k} \cdot 3^k \cdot x^{48-4k}.$$

Γιά νά εἶναι ἀνεξάρτητος ἀπό τό x, θά πρέπει: $48 - 4k = 0$ καί $k = 12$.

Ἄρα ὁ ὅρος πού εἶναι ἀνεξάρτητος ἀπό τό x εἶναι ὁ 13ος:

$$\binom{16}{12} \cdot 2^4 \cdot 3^{12} = \binom{16}{4} \cdot 2^4 \cdot 3^{12} = \frac{16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}\, 2^4 \cdot 3^{12} = 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 2^6 \cdot 3^{12}.$$

3η: Νά βρεθεῖ ὁ συντελεστής τοῦ x^{12} στό ἀνάπτυγμα: $(2x^3 + \alpha)^{17}$.

Λύση. Ὁ γενικός ὅρος τοῦ ἀναπτύγματος εἶναι:

$$T_{k+1} = \binom{17}{k}(2x^3)^{17-k} \cdot \alpha^k = \binom{17}{k} 2^{17-k} \cdot x^{3(17-k)} \cdot \alpha^k.$$

Γιά νά βρίσκεται ὁ x ὑψωμένος στή 12η, πρέπει: $3(17 - k) = 12$, δηλ. $k = 13$.

Ἄρα ὁ συντελεστής τοῦ x^{12} εἶναι:

$$\binom{17}{13} \cdot 2^4 = \binom{17}{4} \cdot 2^4 = \frac{17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot 16 = 38080.$$

§ 185. Ἰδιότητες τῶν διωνυμικῶν συντελεστῶν.—α΄)

Ἄν στόν τύπο τοῦ ἀναπτύγματος τοῦ διωνύμου § 184 θέσουμε $x = 1$, $\alpha = 1$, λαμβάνουμε:

$$\boxed{\binom{\nu}{0} + \binom{\nu}{1} + \binom{\nu}{2} + \cdots + \binom{\nu}{\nu} = 2^\nu} \qquad (1)$$

Ὁ τύπος (1) γράφεται συντομότερα ὡς ἑξῆς:

$$\sum_{k=0}^{\nu}\binom{\nu}{k} = 2^\nu \quad \text{ἤ} \quad \sum_{k=1}^{\nu}\binom{\nu}{k} = 2^\nu - 1. \qquad (2)$$

Πόρισμα.— Ἀπό κάθε σύνολο, πού περιέχει ν στοιχεῖα, σχηματίζονται 2^ν ἀκριβῶς ὑποσύνολα.

Πράγματι, ὑπάρχουν $\binom{\nu}{0}$ ὑποσύνολα μέ 0 στοιχεῖα, $\binom{\nu}{1}$ ὑποσύνολα μέ ἕνα στοιχεῖο, $\binom{\nu}{2}$ ὑποσύνολα μέ δύο στοιχεῖα, κ.ο.κ. Τό ὁλικό πλῆθος αὐτῶν τῶν ὑποσυνόλων εἶναι:

$$\binom{\nu}{0}+\binom{\nu}{1}+\binom{\nu}{2}+\cdots+\binom{\nu}{\nu}=2^{\nu}.$$

β) Ἄν στόν τύπο τοῦ διωνύμου θέσουμε $x=1$, $\alpha=-1$, λαμβάνουμε:

$$\boxed{\binom{\nu}{1}+\binom{\nu}{3}+\binom{\nu}{5}+\cdots=\binom{\nu}{0}+\binom{\nu}{2}+\binom{\nu}{4}+\cdots=2^{\nu-1}} \quad (3)$$

γ) Ἄν τήν ταυτότητα: $(1+x)^{2\nu}\equiv(1+x)^{\nu}\cdot(x+1)^{\nu}$ τή γράψουμε μέ τή μορφή:

$$\binom{2\nu}{0}+\binom{2\nu}{1}x+\binom{2\nu}{2}x^2+\cdots+\binom{2\nu}{\nu}x^{\nu}+\cdots+\binom{2\nu}{2\nu}x^{2\nu}\equiv$$

$$\equiv\left\{\binom{\nu}{0}+\binom{\nu}{1}x+\binom{\nu}{2}x^2+\cdots+\binom{\nu}{\nu}x^{\nu}\right\}\cdot\left[\binom{\nu}{0}x^{\nu}+\binom{\nu}{1}x^{\nu-1}+\right.$$

$$\left.+\binom{\nu}{2}x^{\nu-2}+\cdots+\binom{\nu}{\nu}\right]$$

καί ἐξισώσουμε τούς συντελεστές τῶν x^{ν} στά δύο μέλη, λαμβάνουμε:

$$\boxed{\binom{\nu}{0}^2+\binom{\nu}{1}^2+\binom{\nu}{2}^2+\cdots+\binom{\nu}{\nu}^2=\binom{2\nu}{\nu}} \quad (4)$$

Ἡ (4) γράφεται πιό σύντομα ὡς ἑξῆς:

$$\sum_{k=0}^{\nu}\binom{\nu}{k}^2=\binom{2\nu}{\nu}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάδα Α΄. 470. Νά ἀναπτύξετε τήν παράσταση $(x+3y)^6$ καί μέ ἐφαρμογή αὐτοῦ τοῦ ἀναπτύγματος νά ὑπολογίσετε τό $(1{,}03)^6$ μέ ἀκρίβεια 5 δεκαδικῶν ψηφίων.

471. Νά ἀποδείξετε: ὅτι: $\binom{4}{0}+\binom{4}{1}+\binom{4}{2}+\binom{4}{3}+\binom{4}{4}=2^4$.

472. Στό ἀνάπτυγμα τοῦ $\left(2x^2-\frac{1}{2}y^3\right)^8$, νά βρεῖτε τόν ὅρο πού περιέχει τό x^8.

473. Στά ἀναπτύγματα α) $\left(2x+\frac{1}{x^2}\right)^{12}$, β) $\left(\frac{9x^3-2}{6x}\right)^9$, γ) $\left(2x^2-\frac{1}{x}\right)^{12}$, νά βρεθεῖ ὁ ὅρος πού εἶναι ἀνεξάρτητος ἀπό τό x.

474. Νά βρεθεῖ ὁ συντελεστής τοῦ ὅρου x^{18} στό ἀνάπτυγμα: $(x+2x^2)^{10}$.

475. Ὑπάρχει στό ἀνάπτυγμα $\left(\frac{3x^2}{2}-\frac{1}{3x}\right)^9$ κάποιος ὅρος ἀνεξάρτητος ἀπό τό x καί ποιός εἶναι;

✱Ὁμάδα Β΄. 476. Νά ἀποδειχθοῦν οἱ ταυτότητες:

α). $\binom{\nu}{0}+2\binom{\nu}{1}+2^2\binom{\nu}{2}+\cdots+2^{\nu}\binom{\nu}{\nu}=3^{\nu}$

β). $\binom{\nu}{1}+2\binom{\nu}{2}+3\binom{\nu}{3}+\cdots+\nu\binom{\nu}{\nu}=\nu\cdot2^{\nu-1}$

γ). $1+2\binom{\nu}{1}+3\binom{\nu}{2}+\cdots+(\nu+1)\binom{\nu}{\nu}=2^{\nu}+\nu\cdot2^{\nu-1}$

δ). $1+\frac{1}{2}\cdot\binom{\nu}{1}+\frac{1}{3}\cdot\binom{\nu}{2}+\cdots+\frac{1}{\nu+1}\binom{\nu}{\nu}=\frac{1}{\nu+1}\cdot(2^{\nu+1}-1)$.

477. Ἂν $\nu \in \mathbf{N}$ καί $\nu > 1$, νά ἀποδείξετε ὅτι:

$$\binom{2\nu}{\nu} > \frac{4^\nu}{2\sqrt{\nu}}.$$

Ὑπόδειξη. Νά ἐφαρμόσετε τή μέθοδο τῆς τέλειας ἐπαγωγῆς.

478. Ἂν $\nu \in \mathbf{N}$, $\nu \neq 1$ νά ἀποδείξετε ὅτι:

$$\left(\frac{\nu+1}{2}\right)^\nu > \nu\,! > (\nu+1)^{\frac{\nu-1}{2}}.$$

⋆ V. ΠΙΝΑΚΕΣ – ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ

§ 186. Εἰσαγωγικές ἔννοιες - Ὁρισμοί.— Θεωροῦμε τό σύστημα τῶν ἐξισώσεων:

$$\begin{aligned} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 &= \beta_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 &= \beta_2 \end{aligned} \qquad (\Sigma)$$

ὅπου οἱ συντελεστές α_{ij} τῶν ἀγνώστων x_j καί οἱ γνωστοί ὅροι β_j εἶναι ὁποιοιδήποτε πραγματικοί ἀριθμοί $(i, j = 1, 2)$. Ἂς φανταστοῦμε τώρα τούς συντελεστές τῶν ἀγνώστων γραμμένους σέ ὀρθογώνια παράταξη πού ἔχει τή μορφή:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \text{ ἤ } \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} \qquad (1)$$

Αὐτή τήν ὀρθογώνια παράταξη τή λέμε **πίνακα** *τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων*. Ἂν στήν ὀρθογώνια παράταξη (1) περιλάβουμε καί τούς σταθερούς ὅρους, τότε θά ἔχουμε τόν πίνακα:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \beta_2 \end{pmatrix} \quad \text{ἤ} \quad \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \beta_2 \end{bmatrix} \qquad (2)$$

τόν ὁποῖο τόν ὀνομάζουμε **πίνακα** *ὅλων τῶν συντελεστῶν* ἤ *ἐπηυξημένο πίνακα*.

Ὁ πίνακας (2) ἔχει δύο *γραμμές* καί τρεῖς *στῆλες*, εἶναι ὅπως λέμε, ἕνας *πίνακας τοῦ τύπου* (2, 3).

Μετά ἀπ' αὐτή τήν εἰσαγωγή στήν ἔννοια τοῦ πίνακα, δίνουμε τόν ἑξῆς γενικό ὁρισμό:

Ὁρισμός.—*Ὀνομάζουμε* **πίνακα*** **τοῦ τύπου (μ, ν)** ἤ **πίνακα μέ μ γραμμές καί ν στῆλες** *πάνω στό σύνολο* **R** (ἤ πιό γενικά στό **C**) καί τόν παριστάνουμε μέ $A_{\mu,\nu}$ ἤ πιό ἁπλά μέ Α *μία ὀρθογώνια διευθέτηση (παράταξη)* $\mu \cdot \nu$ *στοιχείων* α_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, \mu,\ j = 1, 2, \ldots, \nu)$ *τοῦ* **R** (ἤ τοῦ **C**) *σέ μ γραμμές καί ν στῆλες ὡς ἑξῆς:*

$$A \equiv \begin{bmatrix} \alpha_{11}\ \alpha_{12} \ldots \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21}\ \alpha_{22} \ldots \alpha_{2\nu} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{\mu1}\ \alpha_{\mu2} \ldots \alpha_{\mu\nu} \end{bmatrix} \qquad (3)$$

* ἤ ἄλλιῶς **μήτρα** (matrix)

Ὁ πίνακας (3) παριστάνεται πιό σύντομα καί ὡς ἑξῆς : $A = [\alpha_{ij}]_{\mu,\nu}$ ἤ $A_{\mu,\nu} = [\alpha_{ij}]$ ἤ ἀκόμη πιό ἁπλά: $A = [\alpha_{ij}]$.

Οἱ μ ὁριζόντιες ν-άδες:

$$(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{1\nu}), (\alpha_{21}, \alpha_{22}, \ldots, \alpha_{2\nu}), \ldots, (\alpha_{\mu 1}, \alpha_{\mu 2}, \ldots, \alpha_{\mu\nu})$$

εἶναι οἱ *γραμμές* τοῦ πίνακα A καί οἱ ν κατακόρυφες μ-άδες:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \vdots \\ \alpha_{\mu 1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \vdots \\ \alpha_{\mu 2} \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{2\nu} \\ \vdots \\ \alpha_{\mu\nu} \end{bmatrix}$$

εἶναι οἱ *στῆλες* τοῦ πίνακα A.

Ἕνας πίνακας μέ μ γραμμές καί ν στῆλες λέγεται *πίνακας τοῦ τύπου (μ, ν)*. Ἔτσι ὁ πίνακας (1) εἶναι ἕνας πίνακας τύπου (2, 2), ἐνῶ ὁ πίνακας (2) εἶναι ἕνας πίνακας τοῦ τύπου (2, 3). Δύο ἤ περισσότεροι πίνακες λέγονται *τοῦ αὐτοῦ τύπου* π.χ. (k, ρ), ὅταν ὅλοι ἔχουν τό ἴδιο πλῆθος γραμμῶν k καί τό ἴδιο πλῆθος στηλῶν ρ.

Οἱ ἀριθμοί α_{ij} λέγονται *στοιχεῖα* τοῦ πίνακα. Τό στοιχεῖο $\alpha_{k\rho}$ τό ὁποῖο βρίσκεται στήν k γραμμή καί στή ρ στήλη λέγεται τό *«(k, ρ)—στοιχεῖο»* ἤ ἡ *«(k, ρ)—συντεταγμένη»* τοῦ πίνακα. Ὁ πρῶτος δείκτης k τοῦ στοιχείου $\alpha_{k\rho}$ λέγεται *δείκτης γραμμῆς* καί ὁ δεύτερος δείκτης ρ λέγεται *δείκτης στήλης*. Ὅταν τά στοιχεῖα ἑνός πίνακα εἶναι ἀριθμοί πραγματικοί, ὁ πίνακας λέγεται *πραγματικός*. Στά ἑπόμενα θά ἀσχοληθοῦμε **μόνο** μέ πίνακες πού τά στοιχεῖα τους εἶναι ἀριθμοί πραγματικοί. Ἔτσι στό ἑξῆς μέ τόν ὅρο *«πίνακα»* θά ἐννοοῦμε *«πίνακα πάνω στό* **R***»*, δηλαδή πίνακα μέ στοιχεῖα πραγματικούς ἀριθμούς.

Ἄν εἶναι $\mu = 1$, δηλαδή ἄν ὁ πίνακας ἔχει μία μόνο γραμμή, τότε λέγεται **πίνακας γραμμῆς** ἤ **γραμμή τάξεως ν**, ἐνῶ ἄν εἶναι $\nu = 1$, δηλαδή ἄν ὁ πίνακας ἔχει μία μόνο στήλη, τότε λέγεται **πίνακας στήλης** ἤ **στήλη τάξεως μ.** Σέ τέτοιους πίνακες εἰδικά γράφουμε τά στοιχεῖα τους συνήθως μέ ἕνα δείκτη, ὁ ὁποῖος φανερώνει ἀντίστοιχα τή στήλη ἤ τή γραμμή. Ἔτσι γράφουμε ἀντιστοίχως:

$$A \equiv (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu) \text{ ἤ } B \equiv \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_\mu \end{bmatrix} \tag{4}$$

§ 187. Ἀξιοσημείωτοι πίνακες.—Ἄν στόν πίνακα (3) τῆς προηγούμενης παραγράφου εἶναι $\mu = \nu$, δηλαδή τό πλῆθος τῶν γραμμῶν τοῦ πίνακα εἶναι τό ἴδιο μέ τό πλῆθος τῶν στηλῶν του, τότε ὁ πίνακας λέγεται **τετραγωνικός τάξεως ν**.

Τά στοιχεῖα: $\alpha_{11}, \alpha_{22}, \ldots, \alpha_{\nu\nu}$ τοῦ τετραγωνικοῦ πίνακα:

$$A \equiv \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2\nu} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2} & \cdots & \alpha_{\nu\nu} \end{bmatrix} \tag{5}$$

λέμε ὅτι ἀποτελοῦν τήν *πρωτεύουσα (ἤ κύρια) διαγώνιο* τοῦ πίνακα καί τά στοιχεῖα: $\alpha_{1\nu}, \alpha_{2,\nu-1}, \ldots, \alpha_{\nu 1}$ τή *δευτερεύουσα διαγώνιό* του.

Ἄν $\mu = \nu = 1$, δηλαδή ἄν ὁ πίνακας ἔχει ἕνα μόνο στοιχεῖο, τότε γράφεται (α_{11}) ἤ πιό ἁπλά α_{11}, ἄν δέν ὑπάρχει φόβος νά γίνει σύγχυση.

Ἕνας τετραγωνικός πίνακας τάξεως ν, τοῦ ὁποίου ὅλα τά στοιχεῖα πού βρίσκονται ἔξω ἀπό τήν πρωτεύουσα διαγώνιο εἶναι ἴσα μέ τό μηδέν, λέγεται **διαγώνιος πίνακας τάξεως ν.**

Γιά συντομία γράφουμε:

$$\boxed{A \equiv [\alpha_{ij}] \text{ — διαγώνιος πίνακας } \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} \alpha_{ij} = 0, \ \forall \ i \neq j}$$

Ἄν τώρα σ' ἕνα διαγώνιο πίνακα τάξεως ν ὅλα τά στοιχεῖα τῆς πρωτεύουσας ἤ κύριας διαγωνίου εἶναι ἴσα μέ τό 1, ὁ πίνακας λέγεται: **μοναδιαῖος πίνακας τάξεως ν** καί παριστάνεται συνήθως μέ E_ν ἤ μέ I_ν ἤ πιό ἁπλά μέ E ἤ I ἄν ἡ τάξη του μπορεῖ νά συναχθεῖ εὔκολα.

Σ' αὐτή τήν περίπτωση γιά συντομία γράφουμε:

$$\boxed{E \text{ ἤ } I \equiv [\alpha_{ij}] \text{ — μοναδιαῖος πίνακας } \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} \alpha_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ ἄν } i \neq j \\ 1, \text{ ἄν } i = j \end{cases}}$$

Ἔτσι, π.χ. ἀπό τούς πίνακες:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ὁ πρῶτος εἶναι διαγώνιος καί ὁ δεύτερος μοναδιαῖος.

Ἕνας πίνακας τοῦ τύπου (μ, ν) μέ ὅλα του τά στοιχεῖα μηδέν ὀνομάζεται **μηδενικός πίνακας τοῦ τύπου (μ, ν)** καί παριστάνεται μέ $\mathbf{O}_{\mu,\nu}$ ἤ πιό ἁπλά μέ **O**. Ὥστε:

$$\mathbf{O} \equiv [\alpha_{ij}]_{\mu,\nu} \Longleftrightarrow \alpha_{ij} = 0, \ \forall \ \begin{matrix} i = 1, 2, \ldots, \mu \\ j = 1, 2, \ldots, \nu. \end{matrix}$$

Ἕνας πίνακας ὀνομάζεται **συμμετρικός**, τότε καί μόνο τότε, ἄν $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$, δηλαδή ἄν τά στοιχεῖα πού εἶναι «συμμετρικά» ὡς πρός τήν πρωτεύουσα διαγώνιό του τά ἔχει ἴσα. Ἄν τώρα συμβεῖ σ' ἕναν πίνακα τά στοιχεῖα πού εἶναι «συμμετρικά» ὡς πρός τήν πρωτεύουσα διαγώνιό του νά εἶναι ἀντίθετα, δηλαδή ἄν $\alpha_{ij} = -\alpha_{ji}$ (ὁπότε $\alpha_{ii} = 0$, γιατί;), ὁ πίνακας ὀνομάζεται **ἀντισυμμετρικός.** Εἶναι φανερό τώρα ὅτι κάθε συμμετρικός ἀντιστοίχως κάθε ἀντισυμμετρικός πίνακας εἶναι πάντοτε ἕνας τετραγωνικός πίνακας.

Ἀπό τούς ἑπόμενους πίνακες:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & -3 & 5 \\ 3 & 0 & -4 \\ -5 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

ὁ πρῶτος εἶναι συμμετρικός καί ὁ δεύτερος ἀντισυμμετρικός.

Σχόλιο. Ἀπό ὅσα εἴδαμε μέχρι τώρα γιά τούς πίνακες, βγάζουμε τό συμπέρασμα **ὅτι** κάθε πίνακας A τοῦ τύπου (μ, ν) εἶναι ἕνα μαθηματικό σύμβολο πού δέν ὑποδηλώνει ὁποιαδήποτε πράξη ἀνάμεσα στά στοιχεῖα του· αὐτό ὅμως δέν ἐμποδίζει σέ τίποτα, ὥστε οἱ πίνακες νά ἔχουν κάποια μαθηματική ἔννοια. Ἔτσι, π.χ. ὁ πίνακας (α, β), ὅπου $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ εἶναι ἕνα διατεταγμένο ζεῦγος ἀριθμῶν καί παριστάνει, ὅπως ξέρουμε, ἕνα μιγαδικό ἀριθμό. Οἱ πίνακες δέν ἀποτελοῦν μόνο νέα μαθηματικά σύμβολα· εἰσάγονται καί ὡς νέα στοιχεῖα, πάνω στά ὁποῖα δίνεται ὁ ὁρισμός τῆς «*ἰσότητας*» καί ὁρίζονται «*πράξεις*», ὅπως οἱ πράξεις τῆς προσθέσεως καί τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

Τό σύνολο ὅλων τῶν πινάκων τύπου (μ, ν), δηλαδή τῶν πινάκων πάνω στό $\mathbf{R}$, οἱ ὁποῖοι ἔχουν μ γραμμές καί ν στῆλες θά τό παριστάνουμε παντοῦ παρακάτω μέ $\mathscr{M}_{\mu,\nu}$.

Μέσα στό σύνολο $\mathscr{M}_{\mu,\nu}$ ὁρίζουμε τώρα τά ἑξῆς:

α) Ἰσότητα πινάκων: Ἔστω ὅτι εἶναι $A \equiv [\alpha_{ij}]$ καί $B \equiv [\beta_{ij}]$ δύο πίνακες τοῦ τύπου (μ, ν), δηλ. $A, B \in \mathscr{M}_{\mu,\nu}$. Στό σύνολο $\mathscr{M}_{\mu,\nu}$ ἡ «*ἰσότητα*» ὁρίζεται ὡς ἑξῆς:

Θά λέμε ὅτι οἱ πίνακες $A = [\alpha_{ij}]$ καί $B = [\beta_{ij}]$ εἶναι **ἴσοι** καί θά γράφουμε $A = B$ ἤ $[\alpha_{ij}] = [\beta_{ij}]$, *τότε καί μόνο τότε, ἄν τά ἀντίστοιχα στοιχεῖα τους εἶναι ἴσα*, δηλαδή:

$$\boxed{[\alpha_{ij}] = [\beta_{ij}] \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} \alpha_{ij} = \beta_{ij} \ \forall \ \begin{matrix} i = 1, 2, \ldots, \mu \\ j = 1, 2, \ldots, \nu \end{matrix}} \tag{1}$$

Ἡ σχέση αὐτή εἶναι προφανῶς αὐτοπαθής, συμμετρική καί μεταβατική (γιατί;). Ἀπό τήν (1) προκύπτει ὅτι ἡ ἰσότητα δύο πινάκων τοῦ τύπου (μ, ν) εἶναι ἰσοδύναμη μέ ἕνα σύστημα $\mu \cdot \nu$ ἰσοτήτων. Ὁ ὁρισμός τῆς ἰσότητας πινάκων, ἀνάμεσα στά ἄλλα πλεονεκτήματα, μᾶς δίνει καί μία «διευκόλυνση» στή σύντομη γραφή διάφορων σχέσεων, ὅπως π.χ. γιά τή σύντομη ἔκφραση συστημάτων. Σύμφωνα μέ αὐτά ἡ ἔκφραση:

«Νά λύσετε τήν ἐξίσωση: $\begin{pmatrix} x + y & 2z + \omega \\ x - y & z - \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$»

εἶναι ἰσοδύναμη [σύμφωνα μέ τόν ὁρισμό (1)] μέ τό ἀκόλουθο σύστημα:

$$x + y = 3, \quad x - y = 1, \quad 2z + \omega = 5, \quad z - \omega = 4.$$

Ἡ λύση τοῦ συστήματος αὐτοῦ εἶναι: $x = 2, \ y = 1, \ z = 3, \ \omega = -1$.

β) Πρόσθεση πινάκων. Στό σύνολο $\mathscr{M}_{\mu,\nu}$ ὁρίζουμε μία πράξη ἀπό τήν ἰσότητα:

$$[\alpha_{ij}] + [\beta_{ij}] = [\alpha_{ij} + \beta_{ij}] \tag{2}$$

Αὐτή ἡ πράξη ὀνομάζεται **πρόσθεση τῶν πινάκων** $A = [\alpha_{ij}]$ **καί** $B = [\beta_{ij}]$. Ὁ πίνακας τοῦ β' μέλους τῆς (2) παριστάνεται μέ $A + B$ καί ὀνομάζεται **ἄθροισμα** τῶν πινάκων A καί B, ὥστε:

$$A + B \equiv [\alpha_{ij}] + [\beta_{ij}] \underset{\text{ορσ}}{=\!=} [\alpha_{ij} + \beta_{ij}] \tag{3}$$

Δηλαδή: *κάθε στοιχεῖο τοῦ ἀθροίσματος δύο πινάκων A, B εἶναι ἄθροισμα τῶν ἀντίστοιχων στοιχείων τῶν πινάκων A καί B.* Συνεπῶς ἄν $\Gamma = [\gamma_{ij}]$ εἶναι τό ἄθροισμα τῶν πινάκων $A = [\alpha_{ij}]$ καί $B = [\beta_{ij}]$ θά ἔχουμε:

$$\boxed{\Gamma = A + B \iff \gamma_{ij} = \alpha_{ij} + \beta_{ij} \;\forall\; \begin{matrix} i = 1, 2, \ldots, \mu \\ j = 1, 2, \ldots, \nu \end{matrix}} \tag{4}$$

Πιό ἀναλυτικά, ἄν:

$$A \equiv \begin{bmatrix} \alpha_{11}\,\alpha_{12} \ldots \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21}\,\alpha_{22} \ldots \alpha_{2\nu} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{\mu1}\,\alpha_{\mu2} \ldots \alpha_{\mu\nu} \end{bmatrix} \quad \text{καί} \quad B \equiv \begin{bmatrix} \beta_{11}\,\beta_{12} \ldots \beta_{1\nu} \\ \beta_{21}\,\beta_{22} \ldots \beta_{2\nu} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \beta_{\mu1}\,\beta_{\mu2} \ldots \beta_{\mu\nu} \end{bmatrix},$$

τότε ὡς ἄθροισμα αὐτῶν ὁρίζεται ὁ πίνακας:

$$A + B \equiv \begin{bmatrix} \alpha_{11}+\beta_{11} & \alpha_{12}+\beta_{12} \ldots \alpha_{1\nu}+\beta_{1\nu} \\ \alpha_{21}+\beta_{21} & \alpha_{22}+\beta_{22} \ldots \alpha_{2\nu}+\beta_{2\nu} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{\mu1}+\beta_{\mu1} & \alpha_{\mu2}+\beta_{\mu2} \ldots \alpha_{\mu\nu}+\beta_{\mu\nu} \end{bmatrix}.$$

γ) Γινόμενο πίνακα ἐπί ἀριθμό. *Ὀνομάζουμε* **γινόμενο τοῦ πίνακα** $A = [\alpha_{ij}] \in \mathscr{M}_{\mu,\nu}$ **ἐπί τόν πραγματικό ἀριθμό λ** καί τό παριστάνουμε μέ $\lambda \cdot A$ ἤ ἁπλῶς μέ λA, *τόν πίνακα τύπου* (μ, ν), *ὁ ὁποῖος ὁρίζεται ἀπό τήν ἰσότητα:*

$$\lambda \cdot [\alpha_{ij}] = [\lambda \alpha_{ij}] \tag{5}$$

Ἀπό τήν (5) βλέπουμε ὅτι ὁ πίνακας λA προκύπτει ἀπό τόν A, ἄν ὅλα του τά στοιχεῖα πολλαπλασιαστοῦν ἐπί λ. Ὥστε: γιά κάθε $\lambda \in \mathbf{R}$,

$$\text{ἄν } A = \begin{bmatrix} \alpha_{11}\,\alpha_{12} \ldots \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21}\,\alpha_{22} \ldots \alpha_{2\nu} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{\mu1}\,\alpha_{\mu2} \ldots \alpha_{\mu\nu} \end{bmatrix}, \text{ τότε: } \lambda A \underset{\text{ορσ}}{=\!=} \begin{bmatrix} \lambda\alpha_{11} & \lambda\alpha_{12} \ldots \lambda\alpha_{1\nu} \\ \lambda\alpha_{21} & \lambda\alpha_{22} \ldots \lambda\alpha_{2\nu} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda\alpha_{\mu1} & \lambda\alpha_{\mu2} \ldots \lambda\alpha_{\mu\nu} \end{bmatrix}.$$

Εἰδικά γιά $\lambda = -1$ ὁρίζουμε: $(-1)A = -A$. Τόν πίνακα $-A$, ὁ ὁποῖος ἔχει στοιχεῖα ἀντίθετα ἀπό τά στοιχεῖα τοῦ A, τόν ὀνομάζουμε **ἀντίθετο πίνακα τοῦ (πίνακα) A.**

Στό σύνολο $\mathscr{M}_{\mu,\nu}$ ὁρίζεται καί ἡ πράξη τῆς **ἀφαιρέσεως** ἀπό τήν ἰσότητα: $A - B = A + (-B)$. Ὁ πίνακας $A - B$ ὀνομάζεται **διαφορά τοῦ πίνακα B ἀπό τόν πίνακα A.**

Ἐφαρμογές: Ἔστω: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{pmatrix}$ καί $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -7 & 1 & 8 \end{pmatrix}$. Τότε:

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+3 & -2+0 & 3+2 \\ 4-7 & 5+1 & -6+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 5 \\ -3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$3A = \begin{pmatrix} 3\cdot 1 & 3\cdot(-2) & 3\cdot 3 \\ 3\cdot 4 & 3\cdot 5 & 3\cdot(-6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 12 & 15 & -18 \end{pmatrix}$$

$$2A - 3B = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 8 & 10 & -12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -9 & 0 & -6 \\ 21 & -3 & -24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -4 & 0 \\ 29 & 7 & -36 \end{pmatrix}.$$

Οἱ πράξεις πού ὁρίσαμε παραπάνω ἔχουν τίς ἀκόλουθες βασικές ἰδιότητες, πού εὔκολα μποροῦμε νά τίς ἀποδείξουμε:

Γιά ὁποιουσδήποτε πίνακες $A, B, \Gamma \in \mathscr{M}_{\mu,\nu}$ καί γιά ὁποιουσδήποτε πραγματικούς ἀριθμούς k, λ ἰσχύουν:

(i) $A+B=B+A$ ‖ $k(A+B)=kA+kB$
(ii) $A+(B+\Gamma)=(A+B)+\Gamma$ ‖ $(k+\lambda)A=kA+\lambda A$
(iii) $A+\mathbf{O}=\mathbf{O}+A=A$ ‖ $k(\lambda A)=(k\lambda)A$
(iv) $A+(-A)=(-A)+A=\mathbf{O}$ ‖ $1A=A$

Ἐπίσης ἰσχύει: $A+\Gamma=B+\Gamma \Longleftrightarrow A=B$.

§ 188. Πολλαπλασιασμός πινάκων. — Ἔστω $\mathscr{M}$ τό σύνολο **ὅλων** τῶν πινάκων πάνω στό $\mathbf{R}$· τότε ἀνάμεσα σέ ὁρισμένα ζεύγη πινάκων καί συγκεκριμένα στά ζεύγη (A, B) τῶν πινάκων μέ τήν ἰδιότητα: *τό πλῆθος τῶν στηλῶν τοῦ A εἶναι τό ἴδιο μέ τό πλῆθος τῶν γραμμῶν τοῦ B* ὁρίζεται τό **«γινόμενό»** τους, τό ὁποῖο παριστάνουμε μέ $A\cdot B$, μέ τά ἑξῆς δύο βήματα:

(i) *Πολλαπλασιασμός «γραμμή ἐπί στήλη».* Ἔστω $A=(\alpha_i)$, $i=1,2,\ldots,\nu$ καί $B=(\beta_j)$, $j=1,2,\ldots,\nu$ δύο πίνακες τάξεως ν, ὅπου ὅμως ὁ πρῶτος εἶναι πίνακας γραμμῆς καί ὁ δεύτερος πίνακας στήλης. Τότε ὁρίζουμε ὡς γινόμενο $A\cdot B$ τόν πίνακα τύπου (1, 1), ὁ ὁποῖος δίνεται ἀπό τήν ἰσότητα:

$$A\cdot B\equiv(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\nu)\cdot\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_\nu\end{bmatrix}=(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\ldots+\alpha_\nu\beta_\nu) \qquad (1)$$

(ii) *Πολλαπλασιασμός πινάκων:* Παίρνουμε τώρα δύο πίνακες $A_{\mu,\nu}\equiv[\alpha_{ij}]\in\mathscr{M}$ καί $B_{\nu,\rho}\equiv[\beta_{jk}]\in\mathscr{M}$, πού ἱκανοποιοῦν τή συνθήκη: *Τό πλῆθος τῶν στηλῶν τοῦ (πρώτου) A εἶναι ἴσο μέ τό πλῆθος τῶν γραμμῶν τοῦ (δεύτερου) B.* Τότε ὁρίζουμε ὡς γινόμενο $A_{\mu,\nu}\cdot B_{\nu,\rho}$ τῶν πινάκων αὐτῶν, ἕνα πίνακα $\Gamma\equiv[\gamma_{ik}]$ τοῦ ὁποίου κάθε στοιχεῖο γ_{ik} προκύπτει ἀπό τόν πολλαπλασιασμό τῆς i γραμμῆς τοῦ πίνακα A ἐπί τήν k στήλη τοῦ πίνακα B· δηλαδή εἶναι:

$$A_{\mu,\nu}\cdot B_{\nu,\rho}\equiv\begin{bmatrix}\alpha_{11}\ \alpha_{12}\cdots\alpha_{1\nu}\\ \alpha_{21}\ \alpha_{22}\cdots\alpha_{2\nu}\\ \cdots\cdots\cdots\\ \alpha_{\mu1}\ \alpha_{\mu2}\cdots\alpha_{\mu\nu}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_{11}\ \beta_{12}\cdots\beta_{1\rho}\\ \beta_{21}\ \beta_{22}\cdots\beta_{2\rho}\\ \cdots\cdots\cdots\\ \beta_{\nu1}\ \beta_{\nu2}\cdots\beta_{\nu\rho}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\gamma_{11}\ \gamma_{12}\cdots\gamma_{1\rho}\\ \gamma_{21}\ \gamma_{22}\cdots\gamma_{2\rho}\\ \cdots\cdots\cdots\\ \gamma_{\mu1}\ \gamma_{\mu2}\cdots\gamma_{\mu\rho}\end{bmatrix}=\Gamma,$$

ὅπου $\gamma_{ik}=\alpha_{i1}\beta_{1k}+\alpha_{i2}\beta_{2k}+\cdots+\alpha_{i\nu}\beta_{\nu k}=\sum_{j=1}^{\nu}\alpha_{ij}\beta_{jk}$.

Εἶναι φανερό ὅτι ὁ πίνακας Γ ἔχει μ γραμμές (ὅσες καί ὁ A) καί ρ στῆλες (ὅσες καί ὁ B), δηλ. θά ἔχουμε:

$$A_{\mu,\nu}\cdot B_{\nu,\rho}=\Gamma_{\mu,\rho}.$$

Εἶναι φανερό ἀκόμη ὅτι τό γινόμενο δύο τετραγωνικῶν πινάκων τάξεως ν, δηλαδή πινάκων μέ ν γραμμές καί ν στῆλες, εἶναι ἐπίσης ἕνας τετραγωνικός πίνακας τάξεως ν.

Προσέξτε! τό γινόμενο $A\cdot B$ δύο πινάκων **δέν** ὁρίζεται ἄν ὁ A εἶναι ἕνας πίνακας τύπου (μ, k) καί ὁ B εἶναι ἕνας πίνακας τύπου (λ, ρ) καί εἶναι $\lambda\neq k$.

Ἐφαρμογές: 1η.

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 0 & 4\\ 1 & 3 & -6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot(-2)+2\cdot1 & 1\cdot0+2\cdot3 & 1\cdot4+2\cdot(-6)\\ -1\cdot(-2)+3\cdot1 & -1\cdot0+3\cdot3 & -1\cdot4+3\cdot(-6)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 6 & -8\\ 5 & 9 & -22\end{pmatrix}$$

2η:
$$\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+2\cdot0&1\cdot1+2\cdot2\\3\cdot1+4\cdot0&3\cdot1+4\cdot2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&5\\3&11\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+1\cdot3&1\cdot2+1\cdot4\\0\cdot1+2\cdot3&0\cdot2+2\cdot4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&6\\6&8\end{pmatrix}.$$

Ἀπό τή δεύτερη ἐφαρμογή συμπεραίνουμε ὅτι ἡ ἰδιότητα τῆς ἀντιμεταθέσεως στόν πολλαπλασιασμό δέν ἰσχύει γενικά στούς πίνακες. Ἐξάλλου ἄν Α εἶναι ἕνας πίνακας τύπου (μ, ν) καί Β εἶναι ἕνας πίνακας τύπου (ν, k), τότε τό γινόμενο ΑΒ ὁρίζεται, ἐνῶ τό γινόμενο ΒΑ ὁρίζεται μόνο ἄν $k=\mu$.

Ὅμως ὁ πολλαπλασιασμός πινάκων ἱκανοποιεῖ τίς παρακάτω ἰδιότητες (ἄν βέβαια οἱ πράξεις πού σημειώνονται μποροῦν νά γίνουν):

1) $A(B\Gamma)=(AB)\Gamma$ *(προσεταιριστική ἰδιότητα)*

2) $A(B+\Gamma)=AB+A\Gamma$ *(ἐπιμεριστική ἰδιότητα ἀπό τά ἀριστερά)*

3) $(B+\Gamma)A=BA+\Gamma A$ *(ἐπιμεριστική ἰδιότητα ἀπό τά δεξιά)*

4) $k(AB)=(kA)B=A(kB)$, ὅπου $k\in\mathbf{R}$.

5) $A\cdot I_\nu=I_\mu\cdot A=A$ γιά κάθε πίνακα Α τύπου (μ, ν).

6) $\mathbf{O}A=A\mathbf{O}=\mathbf{O}$, ὅπου $\mathbf{O}$ εἶναι ὁ μηδενικός πίνακας.

Ἀξιόλογη παρατήρηση. Ἡ γνωστή ἰδιότητα πού ξέρουμε γιά τούς πραγματικούς ἀριθμούς: $\alpha\cdot\beta=0 \Rightarrow \alpha=0$ εἴτε $\beta=0$, δέν ἰσχύει γιά πίνακες, ὅπως ἐξάλλου φαίνεται καί ἀπό τό ἑπόμενο ἀντιπαράδειγμα:

Ἔστω: $A=\begin{pmatrix}-1&0\\3&0\end{pmatrix}$ καί $B=\begin{pmatrix}0&0\\2&5\end{pmatrix}$, τότε $AB=\begin{pmatrix}-1&0\\3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\2&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$, χωρίς κανένας ἀπό τούς πίνακες Α, Β νά εἶναι ὁ μηδενικός.

Σ' αὐτή τήν περίπτωση θά λέμε ὅτι τό σύνολο $\mathcal{M}$ τῶν πινάκων ἔχει **μηδενοδιαιρέτες.**

Ἐπίσης ἡ γνωστή ἰδιότητα: $\alpha\beta=\alpha\gamma$ μέ $\alpha\neq0$ συνεπάγεται: $\beta=\gamma$, δέν ἰσχύει γιά πίνακες, ὅπως φαίνεται ἀπό τό ἑπόμενο ἀντιπαράδειγμα:

Ἔστω: $A=\begin{pmatrix}1&3&0\\2&1&0\\-3&4&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&3&2\\2&1&3\\1&1&1\end{pmatrix}$ καί $\Gamma=\begin{pmatrix}1&3&2\\2&1&3\\2&2&2\end{pmatrix}$

τότε: $AB=\begin{pmatrix}7&6&11\\4&7&7\\5&-5&6\end{pmatrix}=A\Gamma$, ἄν καί $B\neq\Gamma$.

Συνοψίζοντας τά παραπάνω ὑπογραμμίζουμε τά βασικότερα σημεῖα:

(i). *Ἡ μεταθετική ἰδιότητα $AB=BA$ δέν ἰσχύει πάντοτε στούς πίνακες.*

(ii). *Ἄν $AB=\mathbf{0}$, δέ συνεπάγεται ἀναγκαστικά ὅτι ἕνας τουλάχιστο ἀπό τούς πίνακες Α, Β εἶναι ὁ μηδενικός.*

(iii). *Ἄν $AB=A\Gamma$ ἤ $BA=\Gamma A$ δέν μποροῦμε νά διαγράψουμε τόν πίνακα Α ἀπό τά δύο μέλη, ἀκόμη καί ἄν ὁ Α εἶναι διαφορετικός ἀπό τό μηδενικό πίνακα.*

Σημείωση. Ὁ ὁρισμός τοῦ γινομένου δύο πινάκων μᾶς δίνει τή δυνατότητα νά ὁρίσουμε τή δύναμη A^k ἑνός τετραγωνικοῦ πίνακα Α γιά κάθε μή ἀρνητικό ἀκέραιο ἐκθέτη k σύμφωνα μέ τούς τύπους: $A^0=I$, $A^k=A^{k-1}\cdot A$ $(k=1, 2, \ldots)$.

Ἔτσι, π.χ. εἶναι: $A^2=AA$, $A^3=A^2\cdot A$, κ.ο.κ.

§ 189. Ὁ ἀνάστροφος ἑνός πίνακα.—*Ὀνομάζουμε* **ἀνάστροφο** *(transpose) ἑνός πίνακα $A=[\alpha_{ij}]$ τύπου (μ, ν)* καί τόν παριστάνουμε μέ A^t *τόν πίνακα*

$A^t = [\beta_{ji}]$ *τύπου* (ν, μ), *ὁ ὁποῖος προκύπτει ἀπό τόν* A, *ὅταν οἱ γραμμές του γραφτοῦν, μέ τήν ἴδια τάξη, ὡς στῆλες (ὁπότε καί οἱ στῆλες γράφονται ὡς γραμμές).*
Εἶναι φανερό ὅτι τότε ἰσχύει:

$$\beta_{ji} = \alpha_{ij} \quad \forall\, i = 1, 2, \ldots, \mu \quad \text{καί} \quad \forall\, j = 1, 2, \ldots, \nu$$

δηλαδή τό (j, i) – στοιχεῖο τοῦ A^t ἰσοῦται μέ τό (i, j)–στοιχεῖο τοῦ A.

Ἀπό τόν παραπάνω ὁρισμό ἔχουμε τήν ἰσοδυναμία:

$$A \in \mathscr{M}_{\mu,\nu} \iff A^t \in \mathscr{M}_{\nu,\mu}$$

Παράδειγμα: $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Γιά τούς ἀνάστροφους πίνακες ἀποδεικνύονται οἱ ἑπόμενες ἰδιότητες:

1) $(A^t)^t = A$, 2) $\mathbf{O}^t = \mathbf{O}$, 3) $(-A)^t = -A^t$, 4) $(A + B)^t = A^t + B^t$,
5) $(A - B)^t = A^t - B^t$, 6) $(kA)^t = kA^t$, $\forall k \in \mathbf{R}$, 7) $(AB)^t = B^t \cdot A^t$.
8) A-συμμετρικός $\iff A^t = A$, 9) A-ἀντισυμμετρικός $\iff A^t = -A$.

§ 190. Ὁ ἀντίστροφος ἑνός τετραγωνικοῦ πίνακα.—*Ὀνομάζουμε* **ἀντίστροφο** *ἑνός τετραγωνικοῦ πίνακα* A *τάξεως* ν καί τόν παριστάνουμε μέ A^{-1}, *τόν πίνακα* (ὁ ὁποῖος ὑποχρεωτικά εἶναι τετραγωνικός τάξεως ν) *ὁ ὁποῖος ἱκανοποιεῖ τίς ἰσότητες:*

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_\nu,$$

ὅπου I_ν *εἶναι ὁ μοναδιαῖος πίνακας τάξεως* ν.

Ἕνας τετραγωνικός πίνακας A, ὁ ὁποῖος ἔχει ἀντίστροφο ὀνομάζεται **ἀντιστρέψιμος ἤ ὁμαλός.**

Παράδειγμα: Ὁ πίνακας $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ **εἶναι ἀντιστρέψιμος καί ἔχει ἀντίστροφο τόν πίνακα:** $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Πράγματι, ἔχουμε:

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-5 & -10+10 \\ 3-3 & -5+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \text{ καί}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-5 & 15-15 \\ -2+2 & -5+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Ἄρα: $B = A^{-1}$.

§ 191. Πίνακες καί συστήματα γραμμικῶν ἐξισώσεων.—Τό παρακάτω σύστημα γραμμικῶν ἐξισώσεων:

$$\begin{aligned} 2x + 3y - 4z &= 7 \\ x - 2y - 5z &= 3 \end{aligned} \tag{1}$$

εἶναι ἰσοδύναμο μέ τήν *«ἐξίσωση πίνακα»:*

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ ἤ πιό σύντομα } \mathbf{AX} = \mathbf{B}, \tag{2}$$

ὅπου: $$A \equiv \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix}, \quad X \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ καί } B \equiv \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Δηλαδή κάθε λύση τοῦ συστήματος (1) εἶναι μία λύση τῆς ἐξισώσεως (2) καί ἀντιστρόφως. Παρατηροῦμε ὅτι τό ἀντίστοιχο ὁμογενές σύστημα τοῦ (1) εἶναι τότε ἰσοδύναμο μέ τήν ἐξίσωση πίνακα: $\mathbf{AX} = \mathbf{O}$. Ὁ πίνακας Α τῶν συντελεστῶν λέγεται **πίνακας τῶν συντελεστῶν τοῦ συστήματος**, ἐνῶ ὁ πίνακας :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & 7 \\ 1 & -2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

λέγεται **ἐπηυξημένος πίνακας** τοῦ συστήματος (1). Παρατηροῦμε ὅτι τό σύστημα (1) εἶναι τελείως ὁρισμένο ἀπό τόν ἐπηυξημένο πίνακα.

§ 192. Τετραγωνικοί πίνακες καί ὁρίζουσες.

— Σέ κάθε τετραγωνικό πίνακα Α ἀντιστοιχεῖ ἕνας ἀριθμός, ὁ ὁποῖος λέγεται **ὁρίζουσα τοῦ (τετραγωνικοῦ) πίνακα Α** καί συμβολίζεται μέ $|A|$.

Στήν προηγούμενη τάξη μάθαμε πῶς βρίσκουμε τό ἀνάπτυγμα μιᾶς ὁρίζουσας δεύτερης ἤ τρίτης τάξεως καθώς καί τίς σπουδαιότερες ἰδιότητές τους.

Ἐδῶ θά ἐπαναλάβουμε μερικούς γνωστούς κανόνες γιά τίς ὁρίζουσες, συσχετίζοντας ὅμως τίς ὁρίζουσες μέ τούς πίνακες.

Ἔστω Α ἕνας τετραγωνικός πίνακας τάξεως 3, δηλαδή ἔστω ὅτι:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}, \text{ τότε } |A| = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} \text{ εἶναι ἡ ἀντίστοιχη ὁρίζουσα τοῦ Α.}$$

Ὅπως ξέρουμε καί ἀπό τήν προηγούμενη τάξη : **ἐλάσσονα ὁρίζουσα ἑνός στοιχείου** *τῆς ὁρίζουσας $|A|$ λέμε τήν ὁρίζουσα πού παίρνουμε ἀπό τήν $|A|$ ἄν διαγράψουμε τή γραμμή καί τή στήλη στήν ὁποία ἀνήκει αὐτό τό στοιχεῖο.* Ἔτσι ἡ ἐλάσσονα ὁρίζουσα τοῦ στοιχείου α_{11}, πού συμβολίζεται μέ M_{11}, εἶναι:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = \alpha_{22}\alpha_{33} - \alpha_{23}\alpha_{32}.$$

Ὅμοια ἡ ἐλάσσονα ὁρίζουσα M_{32} τοῦ στοιχείου α_{32} εἶναι: $M_{32} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{23} \end{vmatrix} = \alpha_{11}\alpha_{23} - \alpha_{13}\alpha_{21}$

Ὀνομάζουμε **ἀλγεβρικό συμπλήρωμα τοῦ στοιχείου α_{ij}** *ἑνός πίνακα A* καί τό συμβολίζουμε μέ A_{ij} *τό γινόμενο: $(-1)^{i+j} M_{ij}$, ὅπου M_{ij} εἶναι ἡ ἐλάσσονα ὁρίζουσα τοῦ α_{ij}*, δηλ. τό ἀλγεβρικό συμπλήρωμα τοῦ στοιχείου α_{ij} ἑνός πίνακα βρίσκεται, ἄν μπροστά ἀπό τήν ἐλάσσονα ὁρίζουσά του θέσουμε + ἤ −, ἀνάλογα μέ τό ἄν τό ἄθροισμα $i + j$ τῶν δεικτῶν εἶναι ἄρτιο ἤ περιττό. Ἔτσι γιά τόν πιό πάνω πίνακα Α ἔχουμε:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = M_{11}, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -M_{23}, \quad A_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} = M_{33}$$

καί γενικά:

$$\boxed{A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}}$$

Ἔτσι, π.χ. στόν πίνακα:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 4 & -2 & -6 \end{pmatrix}, \text{ τό ἀλγεβρικό συμπλήρωμα τοῦ στοιχείου 8 εἶναι :}$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -6.$$

Τώρα εἴμαστε σέ θέση νά παρατηρήσουμε ὅτι : **τό ἀνάπτυγμα τῆς ὁρίζουσας $|A|$ ἑνός τετραγωνικοῦ πίνακα Α τάξεως 3 εἶναι τό ἄθροισμα τῶν γινομένων ὅλων τῶν στοιχείων μιᾶς**

γραμμῆς (ἢ στήλης) μέ τά ἀντίστοιχα τους ἀλγεβρικά συμπληρώματα. Ἔτσι, π.χ. ἡ ἔκφραση: $\alpha_{11}A_{11}+\alpha_{12}A_{12}+\alpha_{13}A_{13}$ εἶναι τό **ἀνάπτυγμα** τῆς ὁρίζουσας $|A|$ ἑνός τετραγωνικοῦ πίνακα A τάξεως 3 ὡς πρός τά στοιχεῖα τῆς πρώτης γραμμῆς.

Ὥστε: $$|A| = \alpha_{11}A_{11} + A_{12}A_{12} + \alpha_{13}A_{13}.$$

Ἐφαρμογή: Ἡ ὁρίζουσα τοῦ πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ ἀναπτύσσεται κατά τά στοιχεῖα τῆς τρίτης στήλης ὡς ἑξῆς:

$$|A| = \alpha_{13}A_{13} + \alpha_{23}A_{23} + \alpha_{33}A_{33} = \alpha_{13}(-1)^{1+3}M_{13} + \alpha_{23}(-1)^{2+3}M_{23} + \alpha_{33}(-1)^{3+3}M_{33} =$$

$$= \alpha_{13}M_{13} - \alpha_{23}M_{23} + \alpha_{33}M_{33} =$$

$$= 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} - 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} + 7 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2(-2) - 5\cdot 6 + 7\cdot 4 = -6.$$

Πιό γενικά ἀποδεικνύεται ὅτι: **(Θεώρημα τοῦ Laplace):** *Γιά τό ἀνάπτυγμα τῆς ὁρίζουσας ἑνός τετραγωνικοῦ πίνακα $A = [a_{ij}]$, τάξεως ν, ἰσχύει:*

(i) $|A| = \alpha_{i1}A_{i1}+\alpha_{i2}A_{i2} + \cdots + \alpha_{i\nu}A_{i\nu}\ ,\ \forall\ i = 1, 2, \ldots, \nu.$

(ii) $|A| = \alpha_{1j}A_{1j} + \alpha_{2j}A_{2j} + \cdots + \alpha_{\nu j}A_{\nu j}\ ,\ \forall\ j = 1, 2, \ldots, \nu$

ἀναλόγως ἄν βρίσκουμε τό ἀνάπτυγμα τῆς $|A|$ κατά τά στοιχεῖα μιᾶς γραμμῆς ἤ στήλης.

Ἡ ἔκφραση (i) [ἀντ. (ii)] ὀνομάζεται **ἀνάπτυγμα** τῆς ὁρίζουσας $|A|$ ἑνός τετραγωνικοῦ πίνακα $A = [\alpha_{ij}]$ κατά τά στοιχεῖα τῆς i-γραμμῆς [ἀντ. j-στήλης].

Ἰδιότητες τῶν ὁριζουσῶν. Οἱ βασικές ἰδιότητες τῶν ὁριζουσῶν εἶναι:

1η: *Ἄν ὅλα τά στοιχεῖα μιᾶς γραμμῆς (ἤ στήλης) ἑνός πίνακα A εἶναι μηδέν, τότε $|A| = 0$.*

2η: *Ἄν A εἶναι ἕνας τετραγωνικός πίνακας καί A^t ὁ ἀνάστροφός του, τότε $|A^t| = |A|$*, δηλ. τό ἀνάπτυγμα μιᾶς ὁρίζουσας δέ μεταβάλλεται ἄν οἱ γραμμές γίνουν στῆλες καί οἱ στῆλες γραμμές.

3η: *Ἄν ὁ πίνακας B σχηματίζεται ἀπό τόν πίνακα A, μέ τό νά ἀντιμεταθέσουμε δύο γραμμές του (ἤ στῆλες), τότε θά ἔχουμε $|B| = -|A|$.*

4η: *Ἕνας πίνακας πού ἔχει σέ δυό γραμμές ἤ δυό στῆλες τά ἴδια στοιχεῖα, ἔχει ὁρίζουσα ἴση μέ μηδέν.*

5η: *Ἄν ὁ πίνακας B προκύπτει ἀπό τόν πίνακα A μέ πολλαπλασιασμό τῶν στοιχείων μιᾶς γραμμῆς (ἤ μιᾶς στήλης) ἐπί ἀριθμό k, τότε: $|B| = k\cdot|A|$.*

6η: *Ἄν τά ἀντίστοιχα στοιχεῖα δύο γραμμῶν (ἤ δύο στηλῶν) ἑνός πίνακα A εἶναι ἀνάλογα, τότε $|A| = 0$.*

7η: *Ἄν τά στοιχεῖα μιᾶς γραμμῆς (ἀντ. μιᾶς στήλης) ἑνός πίνακα εἶναι ἄθροισμα k προσθετέων, τότε ἡ ὁρίζουσά του ἀναλύεται σέ ἄθροισμα k ὁριζουσῶν. Π.χ.*

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12}+\beta_1+\gamma_1 & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22}+\beta_2+\gamma_2 & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32}+\beta_3+\gamma_3 & \alpha_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \beta_1 & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \beta_2 & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \beta_3 & \alpha_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \gamma_1 & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \gamma_2 & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \gamma_3 & \alpha_{33} \end{vmatrix}$$

8η: *Ἄν ὁ πίνακας B προκύπτει ἀπό τόν πίνακα A μέ τό νά προσθέσουμε ἕνα σταθερό πολλαπλάσιο μιᾶς γραμμῆς (ἤ στήλης) σέ μιά ἄλλη γραμμή (ἤ στήλη), τότε θά εἶναι $|B| = |A|$*

Ἄμεσες συνέπειες τῆς τελευταίας αὐτῆς ἰδιότητας εἶναι οἱ προτάσεις:

α) *Μία ὁρίζουσα δέ μεταβάλλεται ἄν προσθέσουμε τά στοιχεῖα μιᾶς γραμμῆς (ἤ μιᾶς στήλης) στά ἀντίστοιχα στοιχεῖα μιᾶς ἄλλης γραμμῆς (ἤ στήλης).*

β) *Μία ὁρίζουσα δέ μεταβάλλεται ἄν ἀφαιρέσουμε ἀπό τά στοιχεῖα μιᾶς γραμμῆς (ἤ μιᾶς στήλης) τά ἀντίστοιχα στοιχεῖα μιᾶς ἄλλης γραμμῆς (ἤ στήλης).*

Παρατήρηση. Ἄν A εἶναι ἕνας τετραγωνικός πίνακας τάξεως ν, τότε ὁ πίνακας λA,

$\lambda \in \mathbf{R}$ σχηματίζεται ἀπό τόν Α, ἄν ὅλα τά στοιχεῖα του πολλαπλασιαστοῦν ἐπί λ. Τότε ὅμως ὅλες οἱ γραμμές (ἤ ὅλες οἱ στῆλες) τῆς ὁρίζουσας $|\lambda A|$ θά ἔχουν κοινό παράγοντα τόν ἀριθμό λ. Ἔτσι, ἄν ἀπό κάθε γραμμή τῆς $|\lambda A|$, βγάλουμε τόν κοινό παράγοντα λ καί τόν θέσουμε ἔξω ἀπό τήν ὁρίζουσα, θά ἔχουμε τελικά τήν ἰσότητα: $|\lambda A| = \lambda^{\nu} \cdot |A|$, ἡ ὁποία μᾶς λέγει ὅτι: **ὅταν ἕνας (τετραγωνικός) πίνακας Α τάξεως ν πολλαπλασιάζεται ἐπί λ, ἡ ἀντίστοιχη ὁρίζουσά του $|A|$ πολλαπλασιάζεται ἐπί λ^{ν}.**

Προσέξτε! γιά κάθε $\lambda \in \mathbf{R}$, $\lambda \neq 0, 1$ ἰσχύει: $|\lambda \cdot A| \neq \lambda \cdot |A|$ (γιατί;).

Ἐφαρμογές: 1η. Νά ἀποδείξετε ὅτι: $\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta+\gamma \\ 1 & \beta & \gamma+\alpha \\ 1 & \gamma & \alpha+\beta \end{vmatrix} = 0.$

Λύση. Προσθέτουμε στά στοιχεῖα τῆς τρίτης στήλης τά ἀντίστοιχα στοιχεῖα τῆς δεύτερης, ὁπότε ἀπό τίς ἰδιότητες 5 καί 4 ἔχουμε:

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha+\beta+\gamma \\ 1 & \beta & \beta+\gamma+\alpha \\ 1 & \gamma & \gamma+\alpha+\beta \end{vmatrix} = (\alpha+\beta+\gamma)\begin{vmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ 1 & \beta & 1 \\ 1 & \gamma & 1 \end{vmatrix} = (\alpha+\beta+\gamma)\cdot 0 = 0.$$

2η. Νά ἀποδείξετε, ἐφαρμόζοντας τίς ἰδιότητες τῶν ὁριζουσῶν, ὅτι εἶναι:

$$\begin{vmatrix} \alpha-\beta-\gamma & 2\alpha & 2\alpha \\ 2\beta & \beta-\gamma-\alpha & 2\beta \\ 2\gamma & 2\gamma & \gamma-\alpha-\beta \end{vmatrix} = (\alpha+\beta+\gamma)^3.$$

Λύση. Προσθέτουμε στά στοιχεῖα τῆς πρώτης γραμμῆς τά ἀντίστοιχα στοιχεῖα τῶν δύο ἄλλων γραμμῶν, ὁπότε, ἀπό τίς ἰδιότητες 8(α) καί 5, ἔχουμε:

$$\begin{vmatrix} \alpha+\beta+\gamma & \alpha+\beta+\gamma & \alpha+\beta+\gamma \\ 2\beta & \beta-\gamma-\alpha & 2\beta \\ 2\gamma & 2\gamma & \gamma-\alpha-\beta \end{vmatrix} = (\alpha+\beta+\gamma)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2\beta & \beta-\gamma-\alpha & 2\beta \\ 2\gamma & 2\gamma & \gamma-\alpha-\beta \end{vmatrix}.$$

Στήν τελευταία ὁρίζουσα ἀφαιροῦμε τά στοιχεῖα τῆς πρώτης στήλης ἀπό τά ἀντίστοιχα στοιχεῖα τῶν δύο ἄλλων στηλῶν, ὁπότε [ἰδ. 8(β)] ἔχουμε:

$$(\alpha+\beta+\gamma)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2\beta & -\beta-\gamma-\alpha & 0 \\ 2\gamma & 0 & -\alpha-\beta-\gamma \end{vmatrix} = (\alpha+\beta+\gamma)\begin{vmatrix} -\beta-\gamma-\alpha & 0 \\ 0 & -\alpha-\beta-\gamma \end{vmatrix} = (\alpha+\beta+\gamma)^3.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάδα Α΄. 479. Νά βρεῖτε τά x, y, z, ἄν:

$$\text{α)} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \text{β)}\ 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

480. Ἔχουμε τούς πίνακες:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Νά ὑπολογίσετε τά: **1)** $3A + 4B - 2\Gamma$, **2)** $A + 2B - 4\Gamma$, **3)** $A^t + B^t - \Gamma^t$, **4)** AA^t, **5)** A^tA.

481. Νά βρεῖτε τά x, y, z, ω, ἄν:

$$3\begin{pmatrix} x & y \\ z & \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 6 \\ -1 & 2\omega \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & x+y \\ z+\omega & 3 \end{pmatrix}.$$

482. Νά ἀποδείξετε ὅτι:

$$\begin{bmatrix} \text{συν}\alpha & \text{ημ}\alpha \\ -\text{ημ}\alpha & \text{συν}\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \text{συν}\alpha & \text{ημ}\alpha \\ -\text{ημ}\alpha & \text{συν}\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{συν}2\alpha & \text{ημ}2\alpha \\ -\text{ημ}2\alpha & \text{συν}2\alpha \end{bmatrix}.$$

483. Νά ἀποδείξετε μέ τή μέθοδο τῆς τέλειας ἐπαγωγῆς ὅτι γιά κάθε $\nu \in \mathbf{N}$ ἰσχύει:

$$\begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}^{\nu} = \begin{bmatrix} \alpha^{\nu} & \nu\alpha^{\nu-1} \\ 0 & \alpha^{\nu} \end{bmatrix}.$$

484. Νά προσδιορίσετε τούς πίνακες $X, Y \in \mathscr{M}_{2,2}$ ἀπό τίς σχέσεις:

$$3 \cdot X + 4 \cdot Y = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -12 & 9 \end{bmatrix}$$

$$-2 \cdot X + 3 \cdot Y = \begin{bmatrix} 8 & -7 \\ -9 & -6 \end{bmatrix}.$$

485. Ἄν $X = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, νά ὁριστοῦν οἱ k καί λ στήν ἐξίσωση:

$X^2 - kX + \lambda E = \mathbf{O}$, (E: μοναδιαῖος πίνακας, **O**: μηδενικός πίνακας).

Ὁμάδα Β΄. 486. Νά ἀποδείξετε ὅτι: ἄν ὁ Α εἶναι ἕνας τετραγωνικός πίνακας, τότε ὁ πίνακας: $A + A^t$ εἶναι συμμετρικός.

487. Ἔστω ὅτι Α, Β εἶναι δύο συμμετρικοί πίνακες τῆς ἴδιας διαστάσεως. Νά ἀποδείξετε ὅτι: ἄν ΑΒ εἶναι ἕνας συμμετρικός πίνακας, τότε ἰσχύει: $AB = BA$.

Ὑπόδειξη. Νά λάβετε ὑπόψη σας τίς ἰδιότητες (7), (8) καί (9) τῆς § 189.

488. Ἔχουμε τόν τετραγωνικό πίνακα:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}.$$

Νά βρεῖτε τίς συνθῆκες ὑπάρξεως τοῦ ἀντίστροφου πίνακα καί νά τόν ὑπολογίσετε.

489. Νά βρεῖτε τόν ἀντίστροφο τοῦ πίνακα:

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

490. Ἔστω ὁ πίνακας $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$. Νά ἀποδείξετε ὅτι: $A^2 - 8A + 23 \cdot E = \mathbf{O}$, ὅπου E, $\mathbf{O}$ εἶναι ἀντιστοίχως ὁ μοναδιαῖος καί ὁ μηδενικός πίνακας τάξεως 2. Κατόπιν νά βρεῖτε τόν πίνακα A^{-1}.

491. Νά λυθεῖ ἡ «ἐξίσωση»:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

492. Νά ἀποδείξετε ὅτι: ἄν ἕνας πίνακας Α εἶναι ἀντιστρέψιμος, τότε καί ὁ A^t εἶναι ἐπίσης ἀντιστρέψιμος καί ἰσχύει: $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ X

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΠΟ ΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

I. ΕΝΟΡΑΤΙΚΗ ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΙΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

§ 193. Ἱστορική εἰσαγωγή. Ἡ Θεωρία τῶν Πιθανοτήτων ὀφείλει τή γέννησή της στά τυχερά παιχνίδια καί συγκεκριμένα στά παιχνίδια τῶν κύβων (ζάρια). Πρίν ἀπό τριακόσια περίπου χρόνια ὁ Γάλλος ἱππότης de Méré (1654), πού ἦταν διάσημος παίκτης, ἐνδιαφερόταν γιά τίς περιπτώσεις ἐπιτυχίας σ' ἕν τυχερό παιχνίδι πολύ τῆς μόδας τό 17ο αἰώνα. Ἐπειδή εἶχε τήν ἐντύπωση ὅτι οἱ ὑπολογισμοί του ἦταν λανθασμένοι, συμβουλεύτηκε τόν Blaise Pascal (1623 - 1662) πού ἦταν μεγαλοφυΐα στά μαθηματικά, στίς φυσικές ἐπιστῆμες ἀλλά καί στή θεολογία. Ὁ Pascal, ἐνῶ μελετοῦσε τό πρόβλημα τοῦ de Méré, ἀντιμετώπισε καί πολλά ἄλλα ἐνδιαφέροντα ἐρωτήματα πάνω στίς πιθανότητες. Αὐτά τά ἐρωτήματα ἔδωσαν ἀφορμή γιά μιά γόνιμη ἀλληλογραφία μεταξύ τοῦ Pascal καί ἑνός ἄλλου, ἐπίσης μεγάλου μαθηματικοῦ, τοῦ Fermat. Ὁ Fermat μελέτησε τά προβλήματα καί τίς λύσεις τοῦ Pascal καί γενίκευσε πολλές ἀπό αὐτές. Ἔτσι, μέ τήν ἀλληλογραφία τῶν δύο αὐτῶν σοφῶν οὐσιαστικά μπῆκαν οἱ πρῶτες βάσεις τῆς Θεωρίας τῶν Πιθανοτήτων, γιά τήν ὁποία ὁ Pascal πρότεινε τό ὄνομα *«Γεωμετρία τῆς τύχης»*.

Ἡ Θεωρία τῶν Πιθανοτήτων ἀπασχόλησε κατόπιν πολλούς μεγάλους μαθηματικούς, ὅπως εἶναι ὁ J. Bernoulli, ὁ Leibnitz, ὁ De Moivre, ὁ Euler, ὁ Lagrange, ὁ Gauss. Ἡ τιμή ὅμως ἀνήκει στόν Laplace (1749 - 1827) πού συστηματοποίησε ὅλες τίς γνώσεις τῆς ἐποχῆς του, τίς ἐπέκτεινε χρησιμοποιώντας τίς πιό ἐξελιγμένες μεθόδους τῆς Ἀναλύσεως καί ἔδωσε στή θεωρία αὐτή τήν κλασσική της μαθηματική μορφή μέ τήν ὁποία μᾶς εἶναι γνωστή σήμερα.

Γιά ἑβδομήντα καί πλέον ἔτη οἱ ἰδέες τοῦ Laplace κυριάρχησαν καί δέσμευσαν τή Θεωρία τῶν Πιθανοτήτων. Στά τέλη τοῦ περασμένου αἰώνα δύο μεγάλοι μαθηματικοί, ὁ J. Bertrand καί ὁ H. Poincaré, ἄνοιξαν νέα ἐποχή. Μέ τήν αὐστηρή κριτική τους στόν ὁρισμό τῆς πιθανότητας πού υἱοθέτησε ὁ Laplace, προκάλεσαν μία κρίση στή Θεωρία τῶν Πιθανοτήτων, ἡ ὁποία κατά τήν τελευταία περίοδο τῶν πενήντα ἐτῶν ὑπῆρξε ἐξαιρετικά γόνιμη ἀπό κάθε ἄποψη.

Ἡ νεώτερη ἀνάπτυξη τῆς Θεωρίας τῶν Πιθανοτήτων χαρακτηρίζεται τόσο ἀπό ἐνδιαφέρον πρός τήν ἴδια τή θεωρία ὅσο καί ἀπό τήν κατεύθυνση διευρύνσεως τῶν ἐφαρμογῶν της. Σημαντική εἶναι ἡ συμβολή τῶν Μαθηματικῶν τοῦ αἰώνα μας Lindeberg, S. Bernstein, A. Kolmogorov, P. Lévy καί Emile Borel.

Ἡ Θεωρία τῶν Πιθανοτήτων, πού δημιουργήθηκε ἀρχικά γιά νά ἱκανοποιήσει ἀπορίες πάνω στά τυχερά παιχνίδια, εἶναι σήμερα τόσο σημαντική, ὥστε συμβάλλει σημαντικά στό ἔργο τῶν κοινωνικῶν καί φυσικῶν ἐπιστημῶν καί στήν ἀντιμετώπιση τῶν πρακτικῶν προβλημάτων τῆς διοικήσεως καί τῆς βιομηχανίας. Ἔτσι μέ τή Θεωρία τῶν Πιθανοτήτων οἱ Φυσικοί ἐπεκτείνουν τά ὅρια τῆς κλασσικῆς φυσικῆς, οἱ Βιολόγοι μελετοῦν τούς ποσοτικούς νόμους τῆς κληρονομικότητας, οἱ Μετεωρολόγοι ἐπεξεργάζονται τίς παρατηρήσεις τους καί πάνω στή Θεωρία τῶν Πιθανοτήτων βασίζουν πολλές ἀπό τίς προβλέψεις τους, ἐνῶ οἱ Οἰκονομολόγοι προσπαθοῦν νά ἀνακαλύψουν τούς νόμους τῶν οἰκονομικῶν φαινομένων. Στή Βιομηχανία ὅλη ἡ διαδικασία τῆς παραγωγῆς ὑπόκειται στούς νόμους τῶν πιθανοτήτων καί ὅλες οἱ παρατηρήσεις καί οἱ μετρήσεις τῶν Θετικῶν Ἐπιστημῶν ὑποβάλλονται σέ ἐπεξεργασία μέ τίς μεθόδους τῆς Θεωρίας τῶν Πιθανοτήτων. Τέλος, ἡ Στατιστική, πού ἡ σημασία της όλοένα μεγαλώνει σ' ὅλες τίς περιοχές τῆς ἀνθρώπινης γνώσεως, ἀποτελεῖ τή σπουδαιότερη ἐφαρμογή τῆς Θεωρίας τῶν Πιθανοτήτων.

Τά παραπάνω παραδείγματα δείχνουν τήν εὐρύτητα τῶν ἐφαρμογῶν τῆς Θεωρίας τῶν Πιθανοτήτων καί τή χρησιμότητά της, ἀνεξάρτητα ἀπό τό ἐνδιαφέρον καί τήν ὡραιότητα πού παρουσιάζει ὡς κλάδος τῆς Μαθηματικῆς ἐπιστήμης μέ δικές της μεθόδους καί προβλήματα.

§ 194. Βασικές ἔννοιες τῆς Θεωρίας τῶν Πιθανοτήτων.—Τρεῖς κυρίως εἶναι οἱ βασικές ἔννοιες τῆς Θεωρίας τῶν Πιθανοτήτων: ἡ ἔννοια τοῦ **πειράματος τύχης (ἤ τυχαίου φαινομένου)**, ἡ ἔννοια τοῦ **ἁπλοῦ συμβάντος** (**ἤ γεγονότος**) καί ἡ ἔννοια τοῦ **δειγματικοῦ χώρου** τοῦ πειράματος τύχης.

Πείραμα τύχης εἶναι ἕνα πείραμα μέ τά ἑξῆς δύο χαρακτηριστικά:

α) *Δέν μποροῦμε μέ κανέναν τρόπο νά προβλέψουμε τό ἀποτέλεσμά του, καί*

β) *Μποροῦμε νά ἐπαναλάβουμε τό πείραμα πολλές φορές μέ τίς ἴδιες συνθῆκες, δηλαδή μέ τήν ἴδια διαδικασία.*

Ἀπό τά παραπάνω συνάγεται τώρα ὅτι: ἕνα πείραμα τύχης ἄν καί πραγματοποιεῖται κάτω ἀπό τίς ἴδιες συνθῆκες, δέν ὁδηγεῖ πάντοτε στό ἴδιο ἀποτέλεσμα. Αὐτό ὀφείλεται στήν «*ἐπέμβαση τοῦ τυχαίου παράγοντα* (τύχης)», δηλαδή τό ἀποτέλεσμα ἐπηρεάζεται ἀπό παράγοντες πού εἶναι ἀδύνατο νά προσδιοριστοῦν.

Τά δυνατά ἀποτελέσματα ἑνός πειράματος τύχης τά λέμε **ἁπλά συμβάντα** (ἤ **στοιχειώδη γεγονότα**) καί τά παριστάνουμε συνήθως μέ: $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots$

Αὐτά ἀποτελοῦν τίς «*δυνατές*» περιπτώσεις τοῦ πειράματός μας.

Τό σύνολο ὅλων τῶν δυνατῶν ἀποτελεσμάτων ἑνός πειράματος τύχης λέγεται **δειγματικός χῶρος** τοῦ πειράματος καί συμβολίζεται μέ τό γράμμα Ω.

Ὥστε: $$\Omega = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots\}$$

Γιά νά κατανοήσουμε καλύτερα τίς παραπάνω βασικές ἔννοιες δίνουμε τά ἑπόμενα παραδείγματα:

Πείραμα 1ο: *(Ρίψη ἑνός «ἰδανικοῦ» νομίσματος)*. Ἄς θεωρήσουμε ὡς ἕνα πρῶτο «*πείραμα τύχης*» τό παιχνίδι **«κορώνα - γράμματα»**. Ὅλοι ξέρουμε ὅτι κάθε μεταλλικό νόμισμα (κέρμα) ἔχει δύο ὄψεις, ἀπό τίς ὁποῖες τή μία τή λέμε συνήθως «*κορώνα*» καί τήν ἄλλη «*γράμματα*». Ρίχνουμε στόν ἀέρα ἕνα νόμισμα καί παρατηροῦμε τήν ἐπάνω ὄψη του, ὅταν τό κέρμα ἠρεμήσει στό ἔδαφος. Σχετικά ὑποθέτουμε ὅτι τό νόμισμα πού ρίχνουμε δέ διαφέρει αἰσθητά ἀπό ἕνα «ἰδανικό» νόμισμα, δηλαδή ἀπό ἕνα νόμισμα τό ὁποῖο ἔχει σχῆμα συμμετρικό ὡς πρός τό μέσο ἐπίπεδό του καί εἶναι ὁμοιογενές, δηλ. ἔχει τήν ἴδια πυκνότητα μάζας στά διάφορα σημεῖα του. Ἡ ρίψη τοῦ κέρματος στόν ἀέρα ἀποτελεῖ ἕνα «πείραμα». Λέμε στήν περίπτωση αὐτή ὅτι ἐκτελοῦμε ἕνα «*πείραμα τύχης*». Τό νόμισμα ὅταν πέσει στό ἔδαφος θά ἐμφανίσει τήν ἔνδειξη «Κορώνα» (Κ) ἤ τήν ἔνδειξη «Γράμματα» (Γ). Τά δυνατά συνεπῶς ἀποτελέσματα αὐτοῦ τοῦ πειράματος, δηλ. τά ἁπλά συμβάντα εἶναι: θ_1: τό νόμισμα δείχνει κορώνα (Κ), θ_2: τό νόμισμα δείχνει γράμματα (Γ) καί συνεπῶς ὁ ἀντίστοιχος δειγματικός χῶρος αὐτοῦ τοῦ πειράματος θά εἶναι ἕνα σύνολο μέ δύο στοιχεῖα, δηλαδή:

$$\Omega_1 = \{\text{Κ}, \text{Γ}\},$$

ὅπου Κ σημαίνει «κορώνα» καί Γ σημαίνει «γράμματα».

Εἶναι φανερό πώς δέν μποροῦμε νά προβλέψουμε κάθε φορά τό ἀποτέλεσμα μιᾶς ρίψεως, γιατί τήν κίνηση τοῦ νομίσματος τήν ἐπηρεάζουν πολλοί παράγοντες πού εἶναι ἀδύνατο νά προσδιοριστοῦν. Τέτοιοι παράγοντες στό πείραμα «κορώνα - γράμματα» εἶναι, π.χ. οἱ ἀτμοσφαιρικές συνθῆκες, ἡ κατασκευή τοῦ νομίσματος, ὁ τρόπος πού τοποθετεῖται τό νόμισμα στό χέρι μας προτοῦ τό ρίξουμε στόν ἀέρα καί τόσοι ἄλλοι δευτερεύοντες παράγοντες.

Πείραμα 2ο: *(Ρίψη ἑνός κύβου).* Ἄς πάρουμε ἕναν κύβο (ζάρι) πού χρησιμοποιεῖται στά *«τυχερά παιχνίδια»*. Αὐτός εἶναι ἕνας μικρός κύβος, κατά τό δυνατό συμμετρικός, ἀπό ὁμοιογενές ὑλικό. Στίς 6 ὄψεις του (ἕδρες) εἶναι γραμμένοι (συνήθως μέ κοκκίδες) οἱ ἀριθμοί: 1, 2, 3, 4, 5, 6 μέ τρόπο ὅμως τέτοιο, ὥστε τό ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν σέ δυό ὁποιεσδήποτε ἀπό τίς παράλληλες ἕδρες του νά εἶναι πάντοτε 7.

Ρίχνουμε τώρα ἕναν τέτοιο κύβο στόν ἀέρα καί παρατηροῦμε τήν ἐπάνω ὄψη (ἕδρα) του ὅταν αὐτός ἠρεμήσει στό ἔδαφος. Ἡ ρίψη τοῦ κύβου στόν ἀέρα ἀποτελεῖ ἐπίσης ἕνα *«πείραμα τύχης»*. Ὁ κύβος ὅταν πέσει στό ἔδαφος καί ἠρεμήσει, θά ἐμφανίσει στήν ἐπάνω ἕδρα του ἕναν ἀπό τούς ἀριθμούς: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Καθεμιά ἀπ' αὐτές τίς ἐμφανίσεις εἶναι ἕνα ἁπλό συμβάν (ἤ στοιχειῶδες γεγονός). Τά δυνατά συνεπῶς ἀποτελέσματα (δηλ. τά ἁπλά συμβάντα) αὐτοῦ τοῦ πειράματος εἶναι τά ἑξῆς ἕξι:

θ_1: *«ὁ κύβος δείχνει στήν ἐπάνω ἕδρα του τό 1»*
θ_2: *«ὁ κύβος δείχνει στήν ἐπάνω ἕδρα του τό 2»*
. . . .
θ_6: *«ὁ κύβος δείχνει στήν ἐπάνω ἕδρα του τό 6»*.

Ἔχουμε λοιπόν σ' αὐτό τό παράδειγμα ἕνα πείραμα τύχης μέ 6 ἁπλά συμβάντα, δηλ. μέ 6 δυνατά ἀποτελέσματα καί συνεπῶς ὁ ἀντίστοιχος δειγματικός του χῶρος Ω_2 θά εἶναι ἕνα σύνολο μέ ἕξι στοιχεῖα, δηλαδή:

$$\Omega_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

Πείραμα 3ο: *(Ρίψη δύο νομισμάτων).* Ρίχνουμε στόν ἀέρα δύο ὁμοιογενή νομίσματα καί παρατηροῦμε τίς ἐπάνω ὄψεις τους ὅταν ἠρεμήσουν στό ἔδαφος. Ἕνας κατάλληλος δειγματικός χῶρος γι' αὐτό τό πείραμα θά εἶναι τό σύνολο:

$$\Omega_3 = \{\text{ΚΚ, ΚΓ, ΓΚ, ΓΓ}\},$$

ὅπου ΚΚ σημαίνει ὅτι καί τά δύο νομίσματα δείχνουν στίς πάνω ὄψεις τους «κορώνα», ΚΓ ὅτι τό ἕνα δείχνει «κορώνα» καί τό ἄλλο «γράμματα» κτλ.

Ἀξιόλογη παρατήρηση. Σέ ἕνα πείραμα τύχης μποροῦμε νά ἀντιστοιχίσουμε πολλούς δειγματικούς χώρους, πού ἡ μορφή τους ἐξαρτᾶται ἀπό τή φύση τοῦ προβλήματος πού μελετᾶμε. Συνεπῶς ὁ δειγματικός χῶρος δέν καθορίζεται μονοσήμαντα γιά ἕνα ὁρισμένο πείραμα τύχης, ἀλλά εἶναι δυνατόν πολλοί δειγματικοί χῶροι νά *«περιγράφουν»* ἕνα πείραμα. Γι' αὐτό καί στό πείραμα 3 λέμε *«ἕνας...»* ἀντί *«ὁ κατάλληλος δειγματικός χῶρος...»*. Ἔτσι, π.χ. στό πείραμα 3, ἄν ἐνδιαφερόμαστε γιά τό πλῆθος τῶν Γ (γραμμάτων) πού ἐμφανίζονται καί στά δύο νομίσματα, τότε ὁ κατάλληλος δειγματικός χῶρος θά εἶναι τό σύνολο:

$$\Omega_3 = \{0, 1, 2\}$$

Ἐπίσης στό πείραμα 2, ἄν ἐνδιαφερόμαστε γιά τό ἄν ἡ ἐπάνω ἕδρα τοῦ κύβου εἶναι ἄρτιος ἤ περιττός ἀριθμός, τότε ὁ κατάλληλος δειγματικός χῶρος θά εἶναι τό σύνολο:

$$\Omega_2 = \{\text{ἄρτιος, περιττός}\}$$

Ἄς δοῦμε ἀκόμη καί τό ἑξῆς χαρακτηριστικό παράδειγμα.

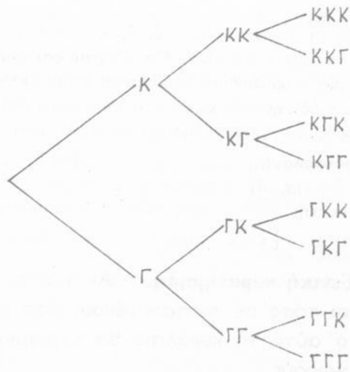
Πείραμα 4ο: *(τρεῖς διαδοχικές ρίψεις ἑνός ἰδανικοῦ νομίσματος).* Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι ἐκτελοῦμε τρεῖς ρίψεις μέ ἕνα *«ἰδανικό»* νόμισμα. Ἔστω ὅτι στό πείραμα αὐτό ἐνδιαφερόμαστε γιά τό πλῆθος τῶν Κ πού ἐμφανίζονται καί στίς τρεῖς ρίψεις. Τά δυνατά ἀποτελέσματα εἶναι: 0, 1, 2 καί 3 κορῶνες (Κ) καί συνεπῶς ἕνας δειγμ. χῶρος τοῦ πειράματος εἶναι τό σύνολο: $\Omega_3 = \{0, 1, 2, 3\}$. Τώρα μποροῦμε νά παρατηρήσουμε ὅτι μέ τό νά καταγράψουμε τόν ἀριθμό τῶν Κ πού «φέραμε» μέ τίς τρεῖς ρίψεις, μᾶς διέφυγε σημαντικό μέρος πληροφορίας, γιατί ἄν μετά τήν ἐκτέλεση τοῦ πειράματος ἀνακοινώσουμε ὅτι «φέραμε μιά φορά κορώνα» εἶναι πολύ φυσικό νά μᾶς ρωτήσουν: «σέ ποιά ρίψη ἦρθε κορώνα;» Αὐτό θά συμβεῖ γιατί ἡ μέθοδός μας τῆς ταξινομήσεως ἦταν μᾶλλον ἀνεπιτυχής.

Πιό ἀκριβή ταξινόμηση ἀποτελεσμάτων ἔχουμε ἄν μετά ἀπό κάθε ρίψη καταγράφουμε τό ἀποτέλεσμα. Π.χ. ΚΓΚ πού σημαίνει ὅτι κατά τήν ἐκτέλεση τοῦ πειράματος: «τῶν τριῶν διαδοχικῶν ρίψεων ἑνός νομίσματος» τήν πρώτη φορά φέραμε Κ (κορώνα), τή δεύτερη Γ (γράμματα) καί τήν τρίτη Κ (κορώνα). Κάθε δυνατό ἀποτέλεσμα αὐτοῦ τοῦ πειράματος ἀντιστοιχεῖ **σ' ἕνα καί μόνο ἕνα στοιχεῖο** τοῦ συνόλου:

$$\Omega_5 = \{ΚΚΚ, ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΚΓΓ, ΓΚΚ, ΓΚΓ, ΓΓΚ, ΓΓΓ\}$$

Ὅπως φαίνεται καί στό *«δέντρο - διάγραμμα»* τοῦ σχήματος 16, τά 8 στοιχεῖα τοῦ συνόλου φτιάχνουν ἕνα δειγματικό χῶρο Ω_5 διαφορετικό ἀπό τόν $\Omega_4 = \{0, 1, 2, 3\}$·

Ἀκόμη ἕνας ἄλλος δειγματικός χῶρος μπορεῖ νά περιγραφεῖ ἄν στό πείραμα ἁπλῶς ἐνδιαφερόμαστε νά ξέρουμε ὅτι τό νόμισμα ἔφερε ἴδιες ἐνδείξεις (δηλ. ὅλες Κ ἤ ὅλες Γ) ἤ διαφορετικές ἐνδείξεις στίς 3 *«δοκιμές»*. Ἄν οἱ ἐνδείξεις εἶναι «ὅμοιες» σημειώνουμε «Ο» καί ἄν εἶναι διαφορετικές σημειώνουμε «Δ». Τότε ὁ δειγματικός χῶρος εἶναι τό σύνολο: $\Omega_6 = \{Ο, Δ\}$·



Σχ. 16

Καί ἀπό τό παραπάνω παράδειγμα βλέπουμε πώς δέν ὑπάρχει ἕνας μονοσημάντως ὁρισμένος δειγματικός χῶρος γιά ἕνα συγκεκριμένο πείραμα τύχης. Διαφορετικά πρόσωπα (ἤ ἀκόμη καί τό ἴδιο πρόσωπο) εἶναι δυνατό σέ διαφορετικές περιστάσεις νά περιγράψουν τά ἀποτελέσματα τοῦ πειράματός τους μέ διαφορετικούς τρόπους. Ὁποιοσδήποτε ὅμως δειγματικός χῶρος πρέπει νά εἶναι σύμφωνος μέ τούς περιορισμούς τοῦ παρακάτω ὁρισμοῦ.

Ὁρισμός. *Ἕνας* ***δειγματικός χῶρος Ω*** *ἑνός πειράματος τύχης εἶναι ἕνα σύνολο, τοῦ ὁποίου τά στοιχεῖα βρίσκονται σέ ἀμφιμονοσήμαντη ἀντιστοιχία μέ τά στοιχεῖα τοῦ συνόλου τῶν ἀποτελεσμάτων τοῦ πειράματος. Δηλαδή ἕνας* ***δειγματικός χῶρος Ω*** *εἶναι ἕνα σύνολο τέτοιο, ὥστε:*

1. *Κάθε στοιχεῖο τοῦ Ω εἶναι ἕνα ἀπό τά δυνατά ἀποτελέσματα τοῦ πειράματος τύχης, καί*

2. *Κάθε δοκιμή τοῦ πειράματος ἔχει ὡς ἀποτέλεσμα ἕνα, καί μοναδικό, στοιχεῖο τοῦ συνόλου Ω.*

Σημείωση. Παρά τό γεγονός ὅτι πολλοί δειγματικοί χῶροι μπορεῖ νά εἶναι σύμφωνοι μέ τίς ἀπαιτήσεις τοῦ παραπάνω ὁρισμοῦ καί συνεπῶς νά χρησιμοποιηθοῦν γιά τήν *«περιγραφή»* ἑνός πειράματος τύχης, εἶναι δυνατό, ὅπως εἴδαμε καί στά προηγούμενα παραδείγματα, ὁ ἕνας ἀπό αὐτούς νά εἶναι κάθε φορά **ὁ πιό κατάλληλος.**

Στά πειράματα τύχης πού ἀναφέραμε μέχρι τώρα οἱ δειγματικοί χῶροι εἶχαν πεπερασμένο πλῆθος στοιχείων. Ὑπάρχουν ὅμως πειράματα τύχης στά ὁποῖα ὁ ἀντίστοιχος δειγματικός χῶρος ἔχει ἄπειρο πλῆθος στοιχείων.

Ἔστω π.χ. ὅτι ρίχνουμε συνεχῶς ἕνα νόμισμα μέχρι νά φέρει γιά πρώτη φορά κορώνα (Κ). Εἶναι λογικό νά παραδεχτοῦμε ὅτι μπορεῖ νά ἔχουμε μή πεπερασμένο ἀριθμό ρίψεων μέ τήν ἔνδειξη «γράμματα» καί καμία ρίψη μέ τήν ἔνδειξη «κορώνα». Σ' αὐτή τήν περίπτωση ὁ δειγματικός χῶρος εἶναι τό ἀπειροσύνολο:

$$\Omega = \{1, 2, 3, \ldots, \nu, \ldots\},$$

ὅπου τό κάθε στοιχεῖο του ἐκφράζει τόν ἀριθμό τῶν ρίψεων.

Ἄς δοῦμε καί ἕνα ἄλλο χαρακτηριστικό παράδειγμα: Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι κάποιος ξενητεμένος τήν ἡμέρα τῆς *«γιορτῆς τῆς Μητέρας»* τηλεφωνεῖ στή μητέρα του γιά νά τῆς πεῖ τίς εὐχές του.

Εἶναι φανερό πώς ὁ ἀριθμός τῶν κουδουνισμάτων (κλήσεων) πρίν ἡ μητέρα του σηκώσει τό τηλέφωνο εἶναι ἕνα **«τυχαῖο φαινόμενο»**. Εἶναι εὐκολονόητο ὅτι μποροῦμε νά πάρουμε μία *«ἀκολουθία»* κουδουνισμάτων (κλήσεων) ἄν ἡ μητέρα δέν εἶναι σπίτι, τήν ὥρα πού ὁ γιός της τήν καλεῖ στό τηλέφωνο καί αὐτό ἐξακολουθεῖ νά χτυπάει. Ἄν ἀπαντήσει, ὁ ἀριθμός τῶν κουδουνισμάτων πρίν αὐτή σηκώσει τό ἀκουστικό θά εἶναι στοιχεῖο τοῦ ἀπειροσυνόλου: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$.

Ἐπίσης, ἄν πάρουμε στήν τύχη ἕνα ἠλεκτρικό λαμπτήρα καί ἄν x παριστάνει τή διάρκεια τῆς *«ζωῆς»* του, τότε ὁ δειγματικός χῶρος σ' αὐτό τό πείραμα τύχης θά εἶναι τό σύνολο: $\Omega = \{x \in \mathbf{R}: 0 \leqq x < +\infty\}$, ὅπου **R** τό σύνολο τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

Γενική παρατήρηση. Ἄν καί ἡ γενική Θεωρία τῶν Πιθανοτήτων ἀναφέρεται τόσο σέ πεπερασμένους ὅσο καί σέ μή πεπερασμένους δειγμ. χώρους ἐμεῖς σ' αὐτό τό κεφάλαιο θά περιοριστοῦμε **μόνο** σέ πεπερασμένους δειγματικούς χώρους.

§ 195. Ἡ ἔννοια τοῦ συμβάντος (ἤ γεγονότος).— Ἄς ἐκτελέσουμε τό πείραμα τῆς διπλῆς ρίψεως ἑνός νομίσματος καί ἔστω ὅτι ἐνδιαφερόμαστε γιά τίς ἐνδείξεις του.

Ἕνας κατάλληλος δειγματικός χῶρος γι' αὐτό τό πείραμα εἶναι τό σύνολο:

$$\Omega = \{ΚΚ, ΚΓ, ΓΚ, ΓΓ\}.$$

Ἄν τώρα ἐνδιαφερόμαστε γιά τίς περιπτώσεις ἐκεῖνες, κατά τίς ὁποῖες, π.χ. *«τό νόμισμα στίς δύο ρίψεις παρουσιάζει μία φορά τουλάχιστο κορώνα»*, θά πρέπει νά θεωρήσουμε τό ὑποσύνολο:

$$Α = \{ΚΚ, ΚΓ, ΓΚ\}$$

τοῦ δειγματικοῦ χώρου Ω. Τό ὑποσύνολο Α λέγεται **συμβάν** (ἤ **γεγονός**).

Ὁρισμός. Συμβάν (ἤ γεγονός) *ὀνομάζουμε κάθε ὑποσύνολο ἑνός δειγματικοῦ χώρου.* Ἔτσι στό ἴδιο πείραμα, τό ὑποσύνολο: Β = {ΚΚ, ΓΓ} τοῦ Ω ὁρίζει τό συμβάν: *«Τό νόμισμα καί στίς δύο ρίψεις παρουσιάζει τήν ἴδια ἔνδειξη»*.

Ἄν τώρα στό πείραμα τῆς διπλῆς ρίψεως ἑνός νομίσματος ἐνδιαφερόμαστε γιά τό πλῆθος Κ (κορώνων) πού ἐμφανίζονται καί στίς δύο ρίψεις, τότε ὁ κατάλληλος δειγμ. χῶρος εἶναι: $\Omega = \{0, 1, 2\}$, ὁπότε τό ὑποσύνολο $Α = \{1, 2\}$ ὁρίζει τό συμβάν:

A: «ἐμφάνιση τουλάχιστο μιᾶς K».

Ὅταν ἕνα συμβάν εἶναι μονομελές (σύνολο), δηλαδή ὅταν περιέχει ἕνα μόνο στοιχεῖο τοῦ δειγματικοῦ χώρου, τότε, ὅπως εἴδαμε, λέγεται **ἁπλό συμβάν** καί μερικές φορές **στοιχειῶδες γεγονός**, διαφορετικά θά λέγεται **σύνθετο συμβάν.**

Ἐξάλλου, ἄν $A = \{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k\}$ εἶναι ἕνα συμβάν καί ἐπειδή $\{\theta_1\} \cup \{\theta_2\} \cup \ldots \cup \{\theta_k\} = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots, \theta_k\}$ μποροῦμε νά δώσουμε γιά τό σύνθετο συμβάν καί τόν ἑξῆς ἰσοδύναμο ὁρισμό:

Ὁρισμός. *Ἕνα* **σύνθετο συμβάν** *εἶναι ἕνωση ἁπλῶν συμβάντων.*

Στά ἑπόμενα μέ τόν ὅρο συμβάν (ἤ γεγονός) θά ἐννοοῦμε τό σύνθετο συμβάν.

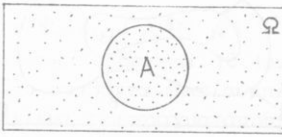
Συνεπῶς: **Κάθε συμβάν ἀποτελεῖται ἀπό δύο τουλάχιστο σημεῖα τοῦ δειγματικοῦ χώρου, ἐνῶ τά ἁπλά συμβάντα ἤ στοιχειώδη γεγονότα εἶναι τά μονοσύνολα τοῦ δειγματικοῦ χώρου.**

Ἄς ὑποθέσουμε τώρα ὅτι ἡ ἐκτέλεση κάποιου πειράματος τύχης δίνει τό ἀποτέλεσμα θ καί ὅτι $\theta \in A$, ὅπου A εἶναι ἕνα συμβάν. Λέμε τότε ὅτι τό συμβάν A **πραγματοποιεῖται** (ἤ ἀλλιῶς: **ἐμφανίζεται**) κατά τήν ἐκτέλεση τοῦ πειράματός μας. Ἄν ὅμως $\theta \notin A$, τότε λέμε ὅτι τό συμβάν A **δέν πραγματοποιεῖται.**

Τέλος, ἐπειδή $\Omega \subseteq \Omega$ καί $\varnothing \subseteq \Omega$, ἕπεται ὅτι ὁ δειγματικός χῶρος Ω καί τό κενό σύνολο θεωροῦνται ὡς συμβάντα.

Τό συμβάν πού ἀντιστοιχεῖ σ' ὅλο τό δειγματικό χῶρο τό λέμε **βέβαιο γεγονός** (ἤ **βέβαιο συμβάν**), ἐνῶ τό συμβάν πού ἀντιστοιχεῖ στό κενό σύνολο τό λέμε **ἀδύνατο γεγονός** ἤ **κενό συμβάν** καί τό παριστάνουμε μέ ∅.

Σημείωση. Ὁ δειγματικός χῶρος Ω, γιά καθαρά ἐποπτικούς καί διδακτικούς λόγους, παριστάνεται συνήθως μέ ἕνα ὀρθογώνιο, ὅπως ἀκριβῶς καί τό βασικό σύνολο ἤ σύνολο ἀναφορᾶς. Τά ἁπλά συμβάντα σημειώνονται μέ τελεῖες μέσα σ' αὐτό τό ὀρθογώνιο. Εἶναι εὐκολονόητο τώρα ὅτι ἕνα συμβάν A, πού εἶναι ἕνα ὑποσύνολο τοῦ Ω, θά σχεδιάζεται μέσα σ' αὐτό τό ὀρθογώνιο (βλ. Σχ. 17).



Σχ. 17

§ 196. Θεμελιώδεις ὁρισμοί καί πράξεις μεταξύ συμβάντων.— α)

Θά λέμε ὅτι δύο συμβάντα εἶναι **ξένα μεταξύ τους** *ἤ* **ἀμοιβαίως ἀποκλειόμενα** *ἤ* **ἀσυμβίβαστα,** *τότε καί μόνο τότε, ἄν ἡ πραγματοποίηση τοῦ ἑνός ἀποκλείει τήν πραγματοποίηση τοῦ ἄλλου.* Αὐτό σημαίνει ὅτι τά ξένα συμβάντα ἀντιστοιχοῦν σέ ὑποσύνολα τοῦ Ω πού δέν ἔχουν κοινά ἁπλά συμβάντα.

Εἶναι φανερό ὅτι δύο ἁπλά συμβάντα εἶναι **πάντοτε** ξένα μεταξύ τους.

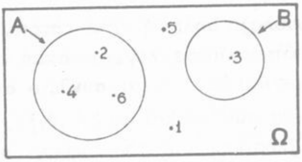
Παράδειγμα. Τά συμβάντα:

A: «Ὁ κύβος δείχνει ἄρτιο ἀριθμό»
B: «Ὁ κύβος δείχνει 3»

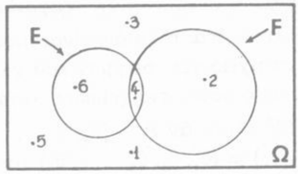
εἶναι ξένα μεταξύ τους, ἐπειδή τό ἕνα ἀποκλείει τό ἄλλο (βλ. Σχ. 18).

Ἀντιθέτως τά συμβάντα:

E: «Ὁ κύβος δείχνει ἄρτιο >2»
F: «Ὁ κύβος δείχνει ἄρτιο <5»



Σχ. 18



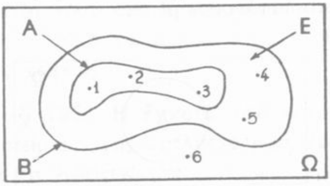
Σχ. 19

δέν εἶναι ξένα μεταξύ τους (βλ. Σχ. 19).

Παρατήρηση: Στήν περίπτωση δύο ξένων συμβάντων ἡ μή πραγματοποίηση τοῦ ἑνός δέ συνεπάγεται κατ' ἀνάγκη τήν πραγματοποίηση τοῦ ἄλλου. Ἔτσι, στό πρῶτο παράδειγμα, ἄν ὁ κύβος δέ φέρει ἄρτιο ἀριθμό, δέν ἕπεται ὅτι θά φέρει 3, ἀφοῦ μπορεῖ νά φέρει τόν ἀριθμό 5 ἤ τόν 1.

β) *Ἄν A καί B εἶναι δύο μή ξένα συμβάντα ἑνός πειράματος τύχης, τότε θά λέμε ὅτι* **τό A περιέχεται στό B** *(ἤ ἀλλιῶς τό B* **περιέχει** *τό A)* καί θά γράφουμε $A \subseteq B$ (ἀντίστοιχα $B \supseteq A$), *τότε καί μόνο τότε, ἄν : ὅταν πραγματοποιεῖται τό A πραγματοποιεῖται καί τό B.*

Προσέξτε! ἄν $A \subset B$, τότε ἡ πραγματοποίηση τοῦ B δέ συνεπάγεται ὑποχρεωτικά τήν πραγματοποίηση τοῦ A. Ἡ πραγματοποίηση τοῦ B χωρίς τήν πραγματοποίηση τοῦ A ἀποτελεῖ τό συμβάν $B - A$, τό ὁποῖο λέγεται **διαφορά** τῶν συμβάντων B, A.



Παράδειγμα. Ἄς θεωρήσουμε τά συμβάντα:

A: «Ὁ κύβος δείχνει ἀριθμό $\leqq 3$».

B: «Ὁ κύβος δείχνει ἀριθμό $\leqq 5$».

Προφανῶς $A \subset B$. Ἡ διαφορά $B - A$ παριστάνει τό συμβάν:

E: «Ὁ κύβος δείχνει 4 ἤ 5».

γ) Ἕνωση συμβάντων. *Ὀνομάζουμε* **ἕνωση** *τῶν συμβάντων $A_1, A_2, \ldots, A_k$, πού ἀνήκουν στόν ἴδιο δειγματικό χῶρο, ἕνα νέο συμβάν A, τό ὁποῖο πραγματοποιεῖται, τότε καί μόνο τότε, ἄν πραγματοποιηθεῖ* **ἕνα τουλάχιστο** *ἀπό τά $A_1, A_2, \ldots, A_k$.*

Τότε γράφουμε:

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k \equiv \bigcup_{i=1}^{k} A_i.$$

Ἄν τά συμβάντα $A_1, A_2, \ldots, A_k$ πού θεωρήσαμε εἶναι ξένα μεταξύ τους ἀνά δύο, τότε τό A λέγεται **«ἄθροισμα»** τῶν συμβάντων $A_1, A_2, \ldots, A_k$ καί στήν περίπτωση αὐτή γράφουμε:

$$A = A_1 + A_2 + \cdots + A_k = \sum_{i=1}^{k} A_i.$$

Σ' αὐτή τήν περίπτωση ἡ ἐμφάνιση (πραγματοποίηση) τοῦ A συνεπάγεται τήν ἐμφάνιση **ἑνός καί μόνο** ἀπό τά $A_1, A_2, \ldots, A_k$.

Π α ρ α δ ε ί γ μ α τ α:

1ο. Τό συμβάν A: *«Ὁ κύβος παρουσιάζει ἄρτιο ἀριθμό»* εἶναι ἕνωση τῶν συμβάντων:

A_1: *«Ὁ κύβος παρουσιάζει ἄρτιο ἀριθμό <5».*

A_2: *«Ὁ κύβος παρουσιάζει ἄρτιο ἀριθμό >3».*

2ο. Τό συμβάν: *«Ὁ κύβος παρουσιάζει ἀριθμό μεγαλύτερο ἀπό τό 3»* εἶναι ἄθροισμα τῶν τριῶν ἁπλῶν συμβάντων: *«Ὁ κύβος δείχνει 4», «ὁ κύβος δείχνει 5», «ὁ κύβος δείχνει 6».*

δ). Τομή ἤ γινόμενο συμβάντων. *Ὀνομάζουμε* **τομή** *τῶν συμβάντων $A_1, A_2, \ldots, A_k$, πού ἀνήκουν στόν ἴδιο δειγματικό χῶρο, ἕνα νέο συμβάν A, τό ὁποῖο πραγματοποιεῖται, τότε καί μόνο τότε, ἄν πραγματοποιοῦνται* **συγχρόνως ὅλα** *τά συμβάντα $A_1, A_2, \ldots, A_k$.* Τότε γράφουμε:

$$A = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k = \bigcap_{i=1}^{k} A_i$$

Εἶναι φανερό ὅτι, ἄν δύο συμβάντα A_1, A_2 εἶναι ξένα μεταξύ τους, τότε $A_1 \cap A_2 = \varnothing$.

Π α ρ ά δ ε ι γ μ α. Τό συμβάν:

A: *«Ὁ κύβος παρουσιάζει 4 ἤ 5»*

εἶναι τομή τῶν συμβάντων:

A_1: *«Ὁ κύβος παρουσιάζει ἀριθμό $\leqq 5$».*

A_2: *«Ὁ κύβος παρουσιάζει ἀριθμό >3».*

ε) Συμπληρωματικό ἑνός συμβάντος. *Δύο συμβάντα ξένα μεταξύ τους, πού ἔχουν ἄθροισμα τό βέβαιο γεγονός ὀνομάζονται* **συμπληρωματικά** *ἤ* **ἀντίθετα συμβάντα.**

Τό συμπληρωματικό ἑνός συμβάντος A παριστάνεται μέ A' (ἤ A^c).

Ὡς συμπληρωματικό τοῦ *«βέβαιου συμβάντος»* λαμβάνεται τό *«κενό συμβάν»* καί ἀντιστρόφως. Εἶναι φανερό ὅτι, ἄν δύο συμβάντα εἶναι συμπληρωματικά, τότε ἡ πραγματοποίηση τοῦ ἑνός **ἀποκλείει** τήν πραγματοποίηση τοῦ ἄλλου καί ἡ **μή** πραγματοποίηση τοῦ ἑνός **συνεπάγεται ὁπωσδήποτε** τήν πραγματοποίηση τοῦ ἄλλου.

Π α ρ ά δ ε ι γ μ α:

Τά συμβάντα:

A: *«Ὁ κύβος δείχνει ἄρτιο ἀριθμό»*

B: *«Ὁ κύβος δείχνει περιττό ἀριθμό»*

εἶναι συμπληρωματικά.

§ 197. Κλασικός καί στατιστικός ὁρισμός τῆς πιθανότητας ἑνός συμβάντος.—Ἔστω ὁ δειγματικός χῶρος $\Omega = \{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_\nu\}$ ἑνός πειράματος τύχης. Σέ κάθε ἁπλό συμβάν θ_k, $k = 1, 2, \ldots, \nu$ ἀκριβέστερα σέ κάθε μονοσύνολο $\{\theta_k\}$, $k = 1, 2, \ldots, \nu$ *«ἐκχωροῦμε»* (ἀντιστοιχίζουμε) ἕναν πραγματικό ἀριθμό πού τόν συμβολίζουμε μέ $P(\{\theta_k\})$ καί τόν ὀνομάζουμε **πιθανότητα** [Probability (ἀγγλ.) – Probabilité (γαλλ.)] τοῦ ἁπλοῦ συμβάντος $\{\theta_k\}$. Αὐτοί οἱ ἀριθμοί (πιθανότητες) μποροῦν νά εἶναι ὁποιοιδήποτε, ἀρκεῖ μόνο νά ἱκανοποιοῦν τίς ἑξῆς δύο συνθῆκες:

(i). *Ἡ πιθανότητα κάθε ἁπλοῦ συμβάντος δέν εἶναι ἀρνητικός ἀριθμός*, δηλαδή:

$$\mathbf{P}(\{\theta_k\}) \geqq \mathbf{0} \qquad \forall\ k = 1, 2, \ldots, \nu.$$

(ii) *Τό ἄθροισμα τῶν πιθανοτήτων πού ἐκχωροῦμε σ' ὅλα τά ἁπλά συμβάντα τοῦ δειγματικοῦ χώρου Ω ἰσοῦται μέ τή μονάδα*, δηλαδή:

$$\mathbf{P}(\{\theta_1\}) + \mathbf{P}(\{\theta_2\}) + \cdots + \mathbf{P}(\{\theta_k\}) = \sum_{k=1}^{\nu} \mathbf{P}(\{\theta_k\}) = \mathbf{1}.$$

Μία ἐκχώρηση πιθανοτήτων στά ἁπλά συμβάντα τοῦ Ω θά λέμε ὅτι εἶναι **«δεκτή»**, τότε καί μόνο τότε, ἄν ἱκανοποιεῖ τίς παραπάνω συνθῆκες (i) καί (ii).

Ἔτσι, π.χ. ἄν θεωρήσουμε τήν ἐκχώρηση:

$$P(\{\theta_1\}) = P(\{\theta_2\}) = \cdots = P(\{\theta_\nu\}) = \frac{1}{\nu}$$

διαπιστώνουμε ἀμέσως ὅτι αὐτή ἡ ἐκχώρηση εἶναι δεκτή.

Σ' αὐτή τήν εἰδική περίπτωση λέμε ὅτι τά ἁπλά συμβάντα $\{\theta_k\}$, $k = 1, 2, \ldots, \nu$ εἶναι **ἰσοπίθανα.**

Ἄν λάβουμε ὑπόψη καί τή συνθήκη (ii) συμπεραίνουμε ἀμέσως ὅτι ἡ πιθανότητα κάθε ἁπλοῦ συμβάντος ὄχι μόνο εἶναι μή ἀρνητικός ἀριθμός, ἀλλά καί μικρότερη ἤ ἴση μέ τό 1. Ὥστε:

$$\mathbf{0} \leqq \mathbf{P}(\{\theta_k\}) \leqq \mathbf{1} \qquad \forall\ k = 1, 2. \cdots, \nu.$$

Τώρα εἶναι εὔκολο νά προχωρήσουμε στόν ὁρισμό τῆς πιθανότητας ἑνός *ὁποιουδήποτε* συμβάντος Α.

Ἔστω ὅτι μᾶς δίνεται ὁ δειγματικός χῶρος $\Omega = \{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_\nu\}$, ὅπου θ_k, $k = 1, 2, \ldots, \nu$ εἶναι τά ἁπλά συμβάντα του. Ὑποθέτουμε ἀκόμη ὅτι ἔχει γίνει μία δεκτή ἐκχώρηση πιθανοτήτων γιά τά ἁπλά συμβάντα τοῦ Ω. Ἔστω Α ἕνα ὁποιοδήποτε συμβάν ($A \subseteq \Omega$). Τότε τό Α εἶναι ἤ **(i)** τό κενό συμβάν ($A = \varnothing$), **(ii)** ἕνα ἁπλό συμβάν, ἤ **(iii)** τό Α εἶναι ἕνωση, ἀκριβέστερα *«ἄθροισμα»*, δύο τουλάχιστο διαφορετικῶν ἁπλῶν συμβάντων. Ἡ περίπτωση (ii) ἔχει μελετηθεῖ παραπάνω.

Δίνουμε τώρα τούς ἑπόμενους ὁρισμούς.

Ὁρισμός 1. *Ἡ* **πιθανότητα τοῦ κενοῦ** *συμβάντος, ὁρίζεται ὅτι εἶναι ἴση μέ μηδέν.*

Δηλαδή: $\boxed{\mathbf{P}(\varnothing) = \mathbf{0}}$

Ἄν τώρα τό συμβάν Α εἶναι ἕνωση, ἀκριβέστερα ἄθροισμα, k ἁπλῶν συμβάντων, ὅπου $k \leqq \nu$, δηλαδή ἄν $A = \{\theta_1\} + \{\theta_2\} + \cdots + \{\theta_k\}$, $(k \leqq \nu)$, τότε:

Ὁρισμός 2. *Ὀνομάζουμε* **πιθανότητα τοῦ συμβάντος Α** καί τή συμβολίζουμε μέ P(A), *τόν πραγματικό ἀριθμό, ὁ ὁποῖος εἶναι τό ἄθροισμα τῶν πιθανοτήτων τῶν ἁπλῶν συμβάντων* $\{\theta_1\}, \{\theta_2\}, \ldots, \{\theta_k\}$.

Δηλαδή: $$\boxed{P(A)=P(\{\theta_1\})+P(\{\theta_2\})+\cdots+P(\{\theta_k\})=\sum_{i=1}^{k} P(\{\theta_i\})}$$

Ἄμεσες τώρα συνέπειες τῶν πιό πάνω ὁρισμῶν εἶναι οἱ ἑπόμενες ἀληθεῖς προτάσεις:

α). *Ἡ πιθανότητα τοῦ βέβαιου γεγονότος εἶναι ἡ μονάδα,* δηλ. $\mathbf{P(\Omega) = 1}$.

β). *Γιά ὁποιοδήποτε συμβάν A, ἰσχύει:* $\mathbf{0 \leq P(A) \leq 1}$.

γ). *Ἄν A καί B εἶναι δύο συμβάντα ξένα μεταξύ τους, τότε ἰσχύει:*

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

δ). *Ἄν A′ εἶναι τό ἀντίθετο (συμπληρωματικό) ἑνός συμβάντος A, τότε ἰσχύει:*

$$P(A') = 1 - P(A).$$

ε). *Ἄν A καί B εἶναι δύο συμβάντα μέ* $\mathbf{A \subset B}$, *τότε:* $\mathbf{P(A) < P(B)}$.

στ). *Ἄν A καί B εἶναι δύο ὁποιαδήποτε συμβάντα, τότε ἰσχύει:*

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

ἤ ἀλλιῶς: $$P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B).$$

ζ). *Ἄν A καί B εἶναι δύο ὁποιαδήποτε συμβάντα ἑνός δειγματικοῦ χώρου Ω, τότε ἰσχύει:*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

η). *Ἄν* $\mathbf{A \subset B}$, *τότε* $\mathbf{P(B-A) = P(B)-P(A)}$.

θ). *Ἄν A καί B εἶναι δύο συμπληρωματικά συμβάντα ἑνός δειγματικοῦ χώρου Ω, τότε ἰσχύει:* $\mathbf{P(A) + P(B) = 1}$.

i). *Ἄν A, B εἶναι δύο ὁποιαδήποτε συμβάντα, τότε :* $\mathbf{P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)}$ *(ὑποπροσθετική ἰδιότητα τῆς P* **ἤ ἀνισότητα τοῦ Boole).**

Ἀπό τίς παραπάνω προτάσεις θά ἀποδείξουμε ἐνδεικτικά τίς προτάσεις στ) καί ζ).

Ἀπόδειξη τῆς προτάσεως (στ).

Ἐπειδή $A = (A - B) \cup (A \cap B)$ καί $(A - B) \cap (A \cap B) = \phi$ θά ἔχουμε, σύμφωνα μέ τήν πρόταση (γ), ὅτι:

$P(A) = P(A - B) + P(A \cap B)$ καί συνεπῶς: $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$.

Ἀπόδειξη τῆς προτάσεως (ζ).

Παρατηροῦμε ὅτι: $A \cup B = (A - B) \cup B$ καί $(A - B) \cap B = \phi$. Βλέπουμε δηλαδή ὅτι μποροῦμε νά ἐκφράσουμε τήν ἕνωση δύο ὁποιωνδήποτε συμβάντων A, B ὡς ἕνωση (ἄθροισμα) τῶν συμβάντων A – B καί B πού εἶναι ξένα μεταξύ τους. Τότε ὅμως, σύμφωνα μέ τήν πρόταση (γ), ἔχουμε:

$P(A \cup B) = P(A - B) + P(B)$.

Ἀλλά: $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$ [σύμφωνα μέ τήν πρόταση στ].

Ἄρα: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Ἄν τά ν ἁπλά συμβάντα τοῦ δειγματικοῦ χώρου Ω εἶναι *ἰσοπίθανα*, τότε καθένα ἀπό τά $\{\theta_k\}$, $k = 1, 2, \ldots, \nu$ ἔχει πιθανότητα $\frac{1}{\nu}$ καί συνεπῶς ὁ ὁρισμός 2 δίνει:

$$P(A) = \frac{1}{\nu} + \frac{1}{\nu} + \cdots + \frac{1}{\nu} = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\nu} = \frac{k}{\nu}.$$

Τά ἁπλά συμβάντα $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ $(k \leq \nu)$ πού ἀπαρτίζουν τό συμβάν $A = \{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k\}$ λέμε ὅτι ἀποτελοῦν τίς **«εὐνοϊκές περιπτώσεις»** τοῦ συμβάντος A, ἐνῶ τά $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_\nu$, δηλ. τά στοιχεῖα τοῦ δειγματικοῦ χώρου Ω λέμε ὅτι ἀποτελοῦν τίς **«δυνατές περιπτώσεις»** τοῦ πειράματος τύχης.

Ὕστερα ἀπό αὐτό ἡ σχέση: $P(A) = k/\nu$ διατυπώνεται ὡς ἑξῆς καί ἀποτελεῖ τόν **κλασικό ὁρισμό τῆς πιθανότητας:**

Πιθανότητα ἑνός συμβάντος A *ὀνομάζουμε τό λόγο τοῦ ἀριθμοῦ τῶν εὐνοϊκῶν περιπτώσεων γι' αὐτό τό συμβάν πρός τόν ἀριθμό ὅλων τῶν δυνατῶν περιπτώσεων* τοῦ πειράματος μέ τήν προϋπόθεση ὅτι ὅλες οἱ περιπτώσεις εἶναι ἐξίσου δυνατές. Ὥστε:

$$\boxed{P(A) = \frac{\text{Ἀριθμός τῶν εὐνοϊκῶν περιπτώσεων τοῦ A}}{\text{Ἀριθμός ὅλων τῶν δυνατῶν περιπτώσεων τοῦ πειράματος}}} \tag{1}$$

Ὁ τύπος (1) γράφεται καί ὡς ἑξῆς:

$$\boxed{P(A) = \frac{\text{Πληθικός ἀριθμός τοῦ A}}{\text{Πληθικός ἀριθμός τοῦ }\Omega} \equiv \frac{\nu(A)}{\nu(\Omega)}} \tag{1'}$$

Ἄμεσες συνέπειες τοῦ παραπάνω ὁρισμοῦ εἶναι οἱ ἑξῆς:

α) *Ἡ πιθανότητα ἑνός συμβάντος A εἶναι ἀριθμός μή ἀρνητικός καί μικρότερος ἤ ἴσος μέ τή μονάδα*, δηλ.:

$$\boxed{0 \leq P(A) \leq 1}$$

Πράγματι· $A \subseteq \Omega \implies 0 \leq \nu(A) \leq \nu(\Omega)$.

β) *Ἡ πιθανότητα τοῦ βέβαιου συμβάντος ἰσοῦται μέ τή μονάδα*, δηλαδή:

$$\boxed{P(\Omega) = 1}$$

γ) *Τό ἄθροισμα τῶν πιθανοτήτων δύο συμπληρωματικῶν συμβάντων ἰσοῦται μέ 1.*

Πράγματι, ἄν k εἶναι τό πλῆθος τῶν εὐνοϊκῶν περιπτώσεων γιά τό A καί ν εἶναι τό πλῆθος τῶν δυνατῶν περιπτώσεων, τότε τό πλῆθος τῶν εὐνοϊκῶν περιπτώσεων γιά τό A' θά εἶναι $\nu - k$, ἐπειδή κάθε εὐνοϊκή περίπτωση γιά τό A εἶναι δυσμενής γιά τό A' καί κάθε δυσμενής γιά τό A εἶναι εὐνοϊκή γιά τό A'. Συνεπῶς ἄν P(A) καί P(A') εἶναι, ἀντιστοίχως, οἱ πιθανότητες τῶν συμβάντων A καί A', θά ἔχουμε:

$$P(A) = \frac{k}{\nu} \quad \text{καί} \quad P(A') = \frac{\nu - k}{\nu}.$$

Προσθέτοντας αὐτές τίς ἰσότητες κατά μέλη λαμβάνουμε:

$$\boxed{P(A) + P(A') = 1}$$

Ἄρα ἡ πιθανότητα τοῦ συμπληρωματικοῦ συμβάντος εἶναι:

$$\boxed{P(A') = 1 - P(A)}$$

Σχόλιο: Ὁ ὁρισμός $P(A) = \frac{k}{\nu}$ τῆς πιθανότητας ἑνός συμβάντος ὀφείλεται στόν Laplace καί προϋποθέτει ἀπό τή μιά πλευρά τό *«ἰσοπίθανο»* τῶν ἁπλῶν συμβάντων καί ἀπό τήν ἄλλη: *τή δυνατότητα ἀπαριθμήσεως τῶν δυνατῶν καί τῶν εὐνοϊκῶν περιπτώσεων.* Ἡ ἀπαρίθμηση αὐτή, ἡ ὁποία δέν εἶναι πάντοτε εὔκολη, γίνεται συνήθως μέ τίς γνωστές σέ μᾶς, ἀπό τό προηγούμενο κεφάλαιο, ἔννοιες τῆς Συνδυαστικῆς.

Ἔστω τώρα ὁ δειγματικός χῶρος $\Omega = \{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_\nu\}$ καί $A = \{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k\}$ $1 < k \leq \nu$. Θά ὁρίσουμε τήν ἔννοια τῆς πιθανότητας $P(A)$ τοῦ συμβάντος A στηριζόμενοι σέ πειραματικά δεδομένα. Ἄς ἐπαναλάβουμε ν φορές τό πείραμα τύχης πού ἀντιστοιχεῖ στό δειγματικό χῶρο Ω καί ἔστω $\sigma(A)$ *ἡ συχνότητα* ἐμφανίσεως τοῦ A στίς ν ἐπαναλήψεις. Τότε ἡ **«σχετική συχνότητα»** πραγματοποιήσεως τοῦ A εἶναι: $\frac{\sigma(A)}{\nu}$.

Ἄν τώρα ὑπάρχει τό $\lim\limits_{\nu\to\infty} \frac{\sigma(A)}{\nu}$, τό ὁποῖο θά εἶναι ἕνας ἀριθμός τοῦ διαστήματος $[0, 1]$, τότε τό ὅριο αὐτό τό ὀνομάζουμε **πιθανότητα** τοῦ συμβάντος A.

Ὥστε:

$$\boxed{P(A) \underset{\text{ορσ}}{=} \lim \frac{\sigma(A)}{\nu}} \qquad (2)$$

Ὁ παραπάνω ὁρισμός (2) τῆς πιθανότητας ἑνός συμβάντος ὀφείλεται στόν Von Mises καί λέγεται **«στατιστικός ὁρισμός τῆς πιθανότητας»** ἑνός συμβάντος.

Αὐτός ὁ ὁρισμός τῆς πιθανότητας βασίζεται στό νόμο τῆς σταθερότητας τῶν σχετικῶν συχνοτήτων σέ μεγάλο ἀριθμό ἐπαναλήψεων τοῦ πειράματος τύχης.

Ἀπό τόν παραπάνω ὁρισμό συμπεραίνουμε ὅτι: *ἡ* **πιθανότητα $P(A)$ ἑνός συμβάντος** *A ὁρίζεται ὡς τό ὅριο μιᾶς «ἀκολουθίας» σχετικῶν συχνοτήτων.*

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1η. Στό παιχνίδι **«κορώνα - γράμματα»**, τά ἁπλά συμβάντα εἶναι δύο, οἱ δύο ὄψεις: *«Κορώνα»*, *«Γράμματα»*, τίς ὁποῖες συμβολίζουμε μέ Κ καί Γ ἀντίστοιχως. Σ' αὐτό τό πείραμα τύχης τό πλῆθος τῶν δυνατῶν περιπτώσεων εἶναι 2, καί τό πλῆθος τῶν εὐνοϊκῶν περιπτώσεων γιά κάθε συμβάν εἶναι 1. Συνεπῶς $P(K) = \frac{1}{2}$ καί $P(\Gamma) = \frac{1}{2}$. Αὐτό δέ σημαίνει βέβαια ὅτι, ἄν ρίξουμε 2 φορές τό νόμισμα, τή μία φορά θά ἐμφανίσει «κορώνα» καί τήν ἄλλη «γράμματα», οὔτε ὅτι σέ 10 ρίψεις θά ἔχουμε 5 «κορῶνες» καί 5 «γράμματα». Ἡ στοιχειώδης πιθανότητα πού ὑπολογίσαμε, ἰσχύει γιά ἕνα *«πολύ μεγάλο ἀριθμό»* ρίψεων.

Ἐξάλλου ἔχουμε: $P(K) + P(\Gamma) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$

Αὐτό προφανῶς τό περιμέναμε ἐπειδή τά δύο συμβάντα εἶναι συμπληρωματικά.

2η. Στό παιχνίδι **τῆς ρίψεως ἑνός κύβου**, τά ἁπλά συμβάντα εἶναι συνολικά 6, οἱ ἕξι ὄψεις (ἕδρες) τοῦ κύβου. Ἂν στοιχηματίσουμε γιά τήν ἐμφάνιση μιᾶς συγκεκριμένης ἐνδείξεως, ἡ στοιχειώδης πιθανότητα εἶναι $\frac{1}{6}$, ἀφοῦ τό πλῆθος τῶν δυνατῶν περιπτώσεων εἶναι 6 καί ἡ εὐνοϊκή περίπτωση μόνο μία. Ὥστε:

$$P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = \frac{1}{6},$$

ὅπου $P(x)$ = πιθανότητα τοῦ ἁπλοῦ συμβάντος: «Ὁ κύβος παρουσιάζει τόν ἀριθμό x».

Ἂν ἀντί γιά ἕνα χρησιμοποιήσουμε ν ὅμοιους κύβους, τά συμβάντα θά εἶναι οἱ ἐπαναληπτικές διατάξεις τῶν 6 ἐνδείξεων ἀνά ν. Ὁ ἀριθμός τῶν διατάξεων αὐτῶν εἶναι: 6^{ν} καί ἡ στοιχειώδης πιθανότητα μιᾶς συγκεκριμένης διατάξεως, δηλαδή ἑνός ὁρισμένου συμβάντος θά εἶναι: $\frac{1}{6^{\nu}}$.

3η. Στά παιχνίδια τῶν **παιγνιοχάρτων** χρησιμοποιοῦνται ἄλλοτε $4 \times 13 = 52$ παιγνιόχαρτα καί ἄλλοτε $4 \times 8 = 32$ (πρέφα). Στά παιχνίδια τῶν 52 παιγνιοχάρτων, ὑπάρχουν γιά καθένα ἀπό τά τέσσερα **«χρώματα»**: (*«σπαθί», «καρρό», «κούπα», «μπαστούνι»*) 10 ἀριθμοί (1 μέχρι 10) καί 3 «φιγοῦρες».

Ἡ πιθανότητα νά τραβήξει κάποιος, ἀπό μία καλά ἀνακατωμένη δέσμη, ἕνα ὁρισμένο παιγνιόχαρτο εἶναι $\frac{1}{52}$, ἡ πιθανότητα νά τραβήξει ἕνα ὁρισμένο χρῶμα εἶναι $\frac{1}{4}$, ἡ πιθανότητα νά τραβήξει (γενικά) φιγούρα εἶναι $\frac{12}{52}$, καί ἡ πιθανότητα νά τραβήξει ἕνα ὁρισμένο ἀριθμό, π.χ. ἄσσο, ἀνεξάρτητο ἀπό τό χρῶμα εἶναι $\frac{4}{52}$ (ὑπάρχουν 4 ἄσσοι, δηλ. 4 εὐνοϊκές περιπτώσεις καί 52 παιγνιόχαρτα, δηλ. 52 δυνατές περιπτώσεις).

4η. Ποιά εἶναι ἡ πιθανότητα νά μήν παρουσιαστεῖ τό 3, ὅταν ρίξουμε ἕναν κύβο στόν ἀέρα;

Λύση. Τό συμβάν «ὁ κύβος φέρνει 3» εἶναι συμπληρωματικό τοῦ συμβάντος «ὁ κύβος δέ φέρνει 3». Ἡ πιθανότητα τοῦ πρώτου συμβάντος εἶναι $\frac{1}{6}$, ἄρα ἡ πιθανότητα τοῦ δεύτερου συμβάντος εἶναι: $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

5η. Ἀπό μία δέσμη μέ 52 παιγνιόχαρτα παίρνουμε ταυτόχρονα δύο παιγνιόχαρτα. Ποιά εἶναι ἡ πιθανότητα νά εἶναι καί τά δύο παιγνιόχαρτα ἄσσοι;

Λύση. Ἔστω Α τό συμβάν: *«Καί τά δύο παιγνιόχαρτα νά εἶναι ἄσσοι».* Οἱ δυνατές περιπτώσεις εἶναι $\binom{52}{2}$. Οἱ εὐνοϊκές εἶναι τόσες, ὅσοι καί οἱ διαφορετικοί τρόποι πού μποροῦμε νά πάρουμε ἀπό τούς 4 ἄσσους τούς 2, δηλ. $\binom{4}{2}$.

$$\text{Ἄρα: } P(A) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{52}{2}} = \binom{4}{2} : \binom{52}{2} = \frac{4\cdot 3}{1\cdot 2} : \frac{52\cdot 51}{1\cdot 2} = \frac{4\cdot 3}{52\cdot 51} = \frac{1}{221} \simeq 45\,‰.$$

6η. Ἂν Α καί Β εἶναι δύο συμβάντα τοῦ ἴδιου δειγματικοῦ χώρου μέ $P(B') = \frac{1}{3}$ καί $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$, νά βρεῖτε τήν $P(B \cap A')$.

Λύση. Σύμφωνα μέ τήν πρόταση στ' ἔχουμε:

$$P(B \cap A') = P(B) - P(A \cap B) = [1 - P(B')] - P(A \cap B) =$$
$$= \left(1 - \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{4} = \frac{5}{12}.$$

7η. Ἕνας κύβος ρίχνεται στόν ἀέρα. Ποιά εἶναι ἡ πιθανότητα νά φέρει ἄρτιο ἀριθμό;

Λύση. Τό συμβάν A: *«Ὁ κύβος φέρνει ἄρτιο ἀριθμό»* εἶναι **«ἄθροισμα»** τῶν ἑξῆς τριῶν ἁπλῶν συμβάντων:

θ_1: *«Ὁ κύβος φέρνει 2».*

θ_2: *«Ὁ κύβος φέρνει 4».*

θ_3: *«Ὁ κύβος φέρνει 6».*

δηλαδή: $$A = \{\theta_1\} + \{\theta_2\} + \{\theta_3\} \text{ μέ } P(\{\theta_i\}) = \frac{1}{6},\ i = 1, 2, 3\cdot$$

Ἄρα: $$P(A) = P(\{\theta_1\}) + P(\{\theta_2\}) + P(\{\theta_3\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάδα Α΄. 493. Ρίχνουμε στόν ἀέρα δύο κύβους καί μᾶς ἐνδιαφέρουν τά συμβάντα A: «τό ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν στίς ἐπάνω ἕδρες τῶν δύο κύβων εἶναι $\leqq 7$», καί B: «τό ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν στίς ἐπάνω ἕδρες τῶν δύο κύβων εἶναι ἄρτιος ἀριθμός».

α) Νά σχηματίσετε τόν κατάλληλο δειγματικό χῶρο καί νά καθορίσετε σ' αὐτόν τά A καί B.

β) Νά ὁρίσετε τά: A', B', $A \cup B$, $A \cap B$, $A' \cup B'$, $A' \cap B'$, $(A \cup B') \cap A'$.

γ) Νά βρεῖτε τήν πιθανότητα τοῦ συμβάντος: «Τό ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν στίς ἐπάνω ἕδρες τῶν δύο κύβων εἶναι ἀκριβῶς 7».

494. Ρίχνουμε δύο κύβους στόν ἀέρα. Ποιά εἶναι ἡ πιθανότητα καθενός ἀπό τά ἑπόμενα συμβάντα;

α) Νά φέρουμε 6,6.

β) Ὁ ἕνας κύβος νά φέρει 3 καί ὁ ἄλλος 5.

γ) Οἱ δύο κύβοι νά φέρουν διαδοχικούς ἀριθμούς.

δ) Οἱ δύο κύβοι νά φέρουν ἄθροισμα <9.

495. Ἕνα πολύφωτο ἔχει 5 ἠλεκτρικούς λαμπτῆρες πού συνδέονται μέ τέτοιο τρόπο, ὥστε τό πολύφωτο νά μή λειτουργεῖ ὅταν ἕνας τουλάχιστο λαμπτήρας εἶναι ἐλαττωματικός. Ἄν ἐκλέξουμε τούς ἠλεκτρικούς λαμπτῆρες, στήν τύχη, μεταξύ 100 λαμπτήρων ἀπό τούς ὁποίους οἱ 10 εἶναι ἐλαττωματικοί, νά ὑπολογίσετε τήν πιθανότητα νά λειτουργήσει τό πολύφωτο.

496. Σ' ἕνα δοχεῖο ὑπάρχουν 5 σφαῖρες λευκές, 7 μπλέ καί 5 κόκκινες. Παίρνουμε, στήν τύχη, 3 ἀπό αὐτές τίς σφαῖρες. Ποιά εἶναι ἡ πιθανότητα νά εἶναι καί οἱ τρεῖς σφαῖρες λευκές;

497. Παίρνουμε (στήν τύχη) 5 χαρτιά ἀπό μία δέσμη μέ 52 παιγνιόχαρτα.

α) Ποιά εἶναι ἡ πιθανότητα νά πάρουμε μόνο κόκκινα; (Τά 26 ἔχουν χρῶμα κόκκινο καί τά ὑπόλοιπα 26 μαῦρο).

β) Ποιά εἶναι ἡ πιθανότητα νά πάρουμε 3 μαῦρα καί 2 κόκκινα;

* **Ὁμάδα Β΄. 498.** Σέ μιά τάξη μέ 43 μαθητές, τά ἀγόρια εἶναι 24 καί τά κορίτσια 19. Παίρνουμε στήν τύχη πέντε μαθητές τῆς τάξεως. Ποιά εἶναι ἡ πιθανότητα: α) νά ἔχουμε μόνο ἀγόρια, β) νά ἔχουμε 3 ἀγόρια καί 2 κορίτσια;

499. Τρεῖς διαφορετικές ἐπιστολές πρόκειται νά μποῦν σέ 3 διαφορετικά φάκελα. Νά βρεῖτε τήν πιθανότητα ὥστε k ἐπιστολές ($k = 0, 1, 2, 3$) νά μποῦν στά σωστά τους φάκελα.

500. Προκειμένου νά ἀγοράσουμε 200 ἠλεκτρονικές λυχνίες, ἐλέγχουμε ἕνα δεῖγμα 10 λυχνιῶν ἀπό αὐτές. Ἄν ξέρουμε ὅτι στίς 200 λυχνίες ὑπάρχουν 6 ἐλαττωματικές, νά ὑπολογίσετε τίς πιθανότητες, ὥστε στό δεῖγμα τῶν 10 λυχνιῶν πού πήραμε:

α) νά μήν ὑπάρχει ἐλαττωματική λυχνία, καί

β) νά ὑπάρχουν 5 ἐλαττωματικές λυχνίες.

501. Ρίχνουμε στόν ἀέρα δύο κύβους (ζάρια): ἕνα λευκό καί ἕναν κόκκινο:

α) Νά σχηματίσετε τόν κατάλληλο δειγματικό χῶρο.

β) Νά βρεῖτε τίς πιθανότητες τῶν συμβάντων:

i) τό ἄθροισμα τῶν ἐνδείξεων τῶν κύβων εἶναι $\leqq 5$.

ii) Τό ἄθροισμα τῶν ἐνδείξεων τῶν κύβων εἶναι διάφορο ἀπό τό 4.

iii) Ἡ ἔνδειξη τοῦ λευκοῦ κύβου εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ 3.

iv) Ἡ ἔνδειξη σ' ἕναν τουλάχιστο κύβο εἶναι 6.

502. Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι σκοπεύουμε νά κάνουμε μία μελέτη σέ οἰκογένειες μέ τρία παιδιά, καταγράφοντας τό φύλο κάθε παιδιοῦ, μέ τή σειρά πού αὐτό γεννήθηκε. Νά βρεῖτε τίς πιθανότητες ὥστε οἱ οἰκογένειες νά ἔχουν:

α) τά δύο πρῶτα παιδιά ἀγόρια καί τό τρίτο κορίτσι,

β) ὅλα τά παιδιά κορίτσια,

γ) τουλάχιστο ἕνα ἀγόρι,

δ) τό πολύ ἕνα κορίτσι.

Ὑπόδειξη. Νά σχηματίσετε πρῶτα τόν κατάλληλο δειγματικό χῶρο κτλ.

★ ΙΙ. ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΑΞΙΩΜΑΤΙΚΗ ΘΕΜΕΛΙΩΣΗ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΩΝ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

Τά βασικά μειονεκτήματα τοῦ κλασικοῦ καί τοῦ στατιστικοῦ ὁρισμοῦ τῆς πιθανότητας εἶναι:

α) Ὁ κλασικός ὁρισμός τῆς πιθανότητας ἐφαρμόζεται μόνο στήν περίπτωση πού τά ἁπλά συμβάντα τῶν δειγματικῶν χώρων εἶναι **ἰσοπίθανα** καί ἀκόμη ὅταν τό πλῆθος τῶν δυνατῶν ἀποτελεσμάτων τοῦ τυχαίου πειράματος εἶναι πεπερασμένο.

β) Τό ὅριο τῆς συχνότητας γιά νά πραγματοποιηθεῖ κάποιο συμβάν εἶναι ἀδύνατο νά ὁρισθεῖ μέ ἀναλυτικό τρόπο, δηλ. χωρίς νά καταφύγουμε σέ πειραματικά δεδομένα.

Τά παραπάνω μειονεκτήματα ἀποφεύγονται μέ τήν ἀξιωματική θεμελίωση τῆς Θεωρίας τῶν Πιθανοτήτων πού ὀφείλεται στόν Kolmogorov καί γίνεται μέ τόν ἀκόλουθο τρόπο:

Ἔστω Ω ὁ δειγματικός χῶρος ἑνός πειράματος τύχης καί $\mathscr{P}(\Omega)$ τό δυναμοσύνολό του. Ἔστω P μία ἀπεικόνιση τοῦ δυναμοσυνόλου $\mathscr{P}(\Omega)$ μέσα στό σύνολο $\mathbf{R}$, δηλαδή ἔστω ὅτι:

$$P:\ \mathscr{P}(\Omega) \rightarrow \mathbf{R}:\ A \xrightarrow{P} P(A) \in \mathbf{R}.$$

Θά λέμε ὅτι μία τέτοια ἀπεικόνιση P εἶναι μία **πιθανότητα** πάνω στό Ω, ἄν αὐτή ἐκχωρεῖ σέ κάθε $A \subset \Omega$ ἕναν πραγματικό ἀριθμό $P(A)$, ὁ ὁποῖος ἱκανοποιεῖ τίς ἑξῆς συνθῆκες **(ἀξιώματα τοῦ Kolmogorov)**:

$\mathbf{P}_1$: $P(A) \geqq 0$ *γιά κάθε συμβάν* $A \subset \Omega$

$\mathbf{P}_2$: $P(\Omega) = 1$, δηλ. *ή πιθανότητα τοῦ βέβαιου συμβάντος* Ω *εἶναι ἴση μέ 1.*

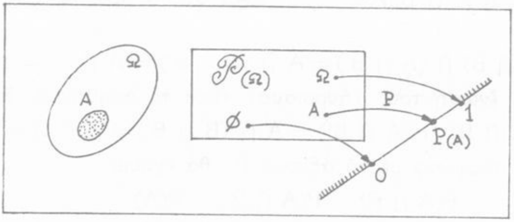
$\mathbf{P}_3$: $A \cap B = \phi \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Σημ. Τό τελευταῖο ἀξίωμα $\mathbf{P}_3$ λέγεται καί **ἀξίωμα τῶν ὁλικῶν πιθανοτήτων.**

Ἄμεση συνέπεια τῶν ἀξιωμάτων P_2 καί P_3 εἶναι ἡ βασική ἰδιότητα τῆς πιθανότητας ἑνός συμβάντος:

$$\boxed{\mathbf{0 \leqq P(A) \leqq 1.}}$$

Μέ αὐτή τήν ἀπεικόνιση P σ' ἕνα ὁποιοδήποτε συμβάν A ἀντιστοιχεῖ ἕνας μή ἀρνητικός ἀριθμός, ὅπως δείχνει καί τό παρακάτω σχῆμα:



Ἀποδεικνύουμε τώρα ὁρισμένες προτάσεις πού προκύπτουν ὡς συνέπεια τῶν ἀξιωμάτων πού πήραμε:

§ 198. Πρόταση.— Ἡ πιθανότητα τοῦ κενοῦ συμβάντος εἶναι 0, δηλ. $\mathbf{P(\varnothing) = 0.}$

Πράγματι, ἔχουμε : $A \cup \varnothing = A$ καί $A \cap \varnothing = \varnothing$. Ὁπότε, σύμφωνα μέ τό ἀξίωμα P_3, εἶναι:

$$P(A) = P(A \cup \varnothing) = P(A) + P(\varnothing). \text{ Ἄρα } P(\varnothing) = 0.$$

§ 199. Πρόταση.— Γιά κάθε συμβάν $A \subset \Omega$ ἰσχύει : $P(A') = 1 - P(A)$.

Ἀπόδειξη. Τά συμβάντα A καί A' εἶναι ξένα μεταξύ τους, δηλ. $A \cap A' = \varnothing$. Ἄρα ἀπό τό ἀξίωμα P_3 θά ἔχουμε:

$$P(A \cup A') = P(A) + P(A').$$

Ἀλλά $A \cup A' = \Omega$ καί ἀπό τό ἀξίωμα P_2 εἶναι: $P(\Omega) = 1$.

Ἄρα: $P(A) + P(A') = 1$ καί συνεπῶς $P(A') = 1 - P(A)$.

§ 200. Πρόταση.— Ἄν A, B, Γ εἶναι συμβάντα ἀνά δύο ξένα μεταξύ τους, τότε ἰσχύει :

$$\mathbf{P(A \cup B \cup \Gamma) = P(A) + P(B) + P(\Gamma).}$$

Ἀπόδειξη. Ἔχουμε: $A \cap B = \varnothing$ καί $B \cap \Gamma = \varnothing$, ἄρα: $(A \cap B) \cup (B \cap \Gamma) = \varnothing$

Ἀλλά: $(A \cup \Gamma) \cap B = (A \cap B) \cup (B \cap \Gamma) = \varnothing$.

Τότε ὅμως, σύμφωνα μέ τό ἀξίωμα P_3, θά ἔχουμε:

$$P[(A \cup \Gamma) \cup B] = P(A \cup \Gamma) + P(B) = P(A) + P(\Gamma) + P(B).$$

Σημείωση. Ἡ πρόταση αὐτή γενικεύεται εὔκολα στήν περίπτωση ν συμβάντων A_i, πού ἀνά δύο εἶναι ξένα μεταξύ τους καί προκύπτει:

$$\boxed{P\left(\sum_{i=1}^{\nu} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\nu} P(A_i)}$$

Ἡ παραπάνω πρόταση λέγεται: **Ἀθροιστικό θεώρημα τῶν πιθανοτήτων.**

§ 201. Πρόταση.— Γιά κάθε δύο συμβάντα Α καί Β ἑνός δειγματικοῦ χώρου Ω ἰσχύει:

$$\boxed{P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B).}$$

Ἀπόδειξη. Τά $A \cap B$ καί $A \cap B'$ εἶναι δύο συμβάντα ξένα μεταξύ τους, ἐπειδή:

$$(A \cap B) \cap (A \cap B') = A \cap (B \cap B') = A \cap \varnothing = \varnothing.$$

Ἐξάλλου ἡ ἕνωσή τους (ἄθροισμα) εἶναι τό συμβάν Α, ἐπειδή:

$$(A \cap B) \cup (A \cap B') = A \cap (B \cup B') = A \cap \Omega = A.$$

Τότε ὅμως, σύμφωνα μέ τό ἀξίωμα P_3, θά ἔχουμε:

$$P(A \cap B) + P(A \cap B') = P(A)$$

ἤ

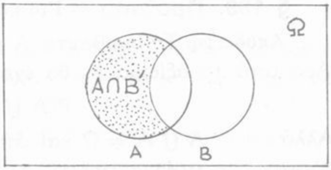
$$P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B).$$

§ 202. Πρόταση. *(Προσθετικό θεώρημα τῶν πιθανοτήτων).* **— Γιά κάθε δύο συμβάντα Α καί Β ἑνός δειγματικοῦ χώρου Ω ἰσχύει:**

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

Ἀπόδειξη. Τήν ἕνωση τῶν δύο συμβάντων Α καί Β μποροῦμε νά τήν παραστήσουμε ὡς ἕνωση τῶν δύο ξένων συμβάντων Β καί $A \cap B'$ (βλ. σχῆμα), δηλαδή:

$$A \cup B = B \cup (A \cap B').$$



Ἀπό τό ἀξίωμα P_3 καί ἄν λάβουμε ὑπόψη τήν προηγούμενη πρόταση ἔχουμε:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(B) + P(A \cap B') \\ &= P(B) + P(A) - P(A \cap B). \end{aligned}$$

Πόρισμα.— Ἰσχύει $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$.

Σημείωση. Πιό γενικά ἰσχύει: $P\left(\bigcup_{i=1}^{\nu} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\nu} P(A_i)$. **(Ἀνισότητα τοῦ Boole).**

§ 203. Πρόταση.—Γιά κάθε δύο συμβάντα Α καί Β ἑνός δειγματικοῦ χώρου Ω ἰσχύει:

$$A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B).$$

Ἀπόδειξη. Προφανῶς ἰσχύει:

$$A \cap B = A$$

'Από τήν πρόταση τῆς § 201 λαμβάνουμε:

$$P(A' \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A) \qquad (1)$$

'Αλλά, ἀπό τό ἀξίωμα P_1, εἶναι $P(A' \cap B) \geqq 0$.

"Αρα: $\quad P(B) - P(A) \geqq 0$ καί συνεπῶς $P(B) \geqq P(A)$.

Πόρισμα.— "Αν A, B εἶναι δύο συμβάντα τοῦ Ω, τότε ἰσχύει:

$$\mathbf{P(A \cap B) \leqq P(A) \leqq P(A \cup B) \leqq P(A) + P(B).}$$

§ 204. Πρόταση.— Γιά ὁποιαδήποτε συμβάντα A, B, Γ ἑνός δειγματικοῦ χώρου Ω ἰσχύει:

$$\mathbf{P(A \cup B \cup \Gamma) = P(A) + P(B) + P(\Gamma) - P(A \cap B) - P(A \cap \Gamma) - P(B \cap \Gamma) + P(A \cap B \cap \Gamma)}$$

'Απόδειξη. 'Εφαρμόζοντας τήν πρόταση τῆς § 202 καί χρησιμοποιώντας τήν προσεταιριστική καί τήν ἐπιμεριστική ἰδιότητα τῶν πράξεων τῶν συνόλων, λαμβάνουμε:

$$P(A \cup B \cup \Gamma) = P(A) + P(B \cup \Gamma) - P[A \cap (B \cup \Gamma)] \qquad (1)$$

$$P(B \cup \Gamma) = P(B) + P(\Gamma) - P(B \cap \Gamma) \qquad (2)$$

$$\begin{aligned} P[A \cap (B \cup \Gamma)] &= P[(A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)] \\ &= P(A \cap B) + P(A \cap \Gamma) - P(A \cap B \cap \Gamma) \qquad (3) \end{aligned}$$

'Αντικαθιστώντας τίς (2) καί (3) στήν (1) βρίσκουμε τό ζητούμενο.

Πόρισμα.—"Αν A,B,Γ εἶναι συμβάντα ἀμοιβαίως ἀποκλειόμενα, τότε ἰσχύει:

$$\mathbf{P(A \cup B \cup \Gamma) = P(A) + P(B) + P(\Gamma)}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

'Ομάδα Α'. 503. "Αν A καί B εἶναι συμβάντα τοῦ ἴδιου δειγματικοῦ χώρου Ω καί εἶναι ἐπίσης: $P(A') = 0{,}18$, $P(B) = 0{,}09$ καί $P(A \cap B) = 0{,}03$, νά ὑπολογίσετε τίς:

$$P(A \cup B), \quad P(A' \cap B'), \quad P(A - B).$$

504. "Ενα δοχεῖο περιέχει κόκκινα καί ἄσπρα σφαιρίδια. 'Ο ἀριθμός τῶν ἄσπρων εἶναι διπλάσιος ἀπό τόν ἀριθμό τῶν κόκκινων. Ποιά εἶναι ἡ πιθανότητα νά πάρουμε ἄσπρο σφαιρίδιο;

505. "Αν ἡ πιθανότητα νά συμβεῖ ἕνα συμβάν εἶναι τριπλάσια ἀπό τήν πιθανότητα αὐτό νά μή συμβεῖ, νά βρεῖτε τήν πιθανότητα νά ἐμφανιστεῖ αὐτό τό συμβάν.

506. "Ενα δοχεῖο περιέχει 3 ἄσπρα σφαιρίδια, 4 μπλέ καί 6 κόκκινα. "Αν πάρουμε στήν τύχη 2 ἀπό αὐτά τά σφαιρίδια, ποιά εἶναι ἡ πιθανότητα νά ἔχουν καί τά δύο τό ἴδιο χρῶμα;

507. "Ενας ἀκέραιος ἀριθμός ἐκλέγεται στήν τύχη ἀπό τό σύνολο τῶν ἀκεραίων $\{1, 2, 3, \ldots, 300\}$. Ποιά εἶναι ἡ πιθανότητα ὁ ἀριθμός αὐτός νά εἶναι διαιρετός εἴτε μέ τό 5 εἴτε μέ τό 6;

★ 'Ομάδα Β'. 508. Σέ μιά γραπτή ἐξέταση στό μάθημα τῆς 'Ιστορίας δίνονται τρία ἱστορικά γεγονότα (Γ_1, Γ_2, Γ_3) καί τρεῖς χρονολογίες (x_1, x_2, x_3) καί ζητεῖται ἀπό κάθε μαθητή νά συσχετίσει τά τρία γεγονότα μέ τίς τρεῖς χρονολογίες. "Ας ὑποθέσουμε ὅτι κάποιος μαθητής δέ γνωρίζει τό θέμα καί κάνει τυχαία συσχέτιση ἔτσι, ὥστε ὅλες οἱ δυνατές συσχετίσεις νά εἶναι ἰσοπίθανες.

α) Νά σχηματίσετε τόν κατάλληλο δειγματικό χῶρο γιά τά δυνατά ἀποτελέσματα.

β) Ποιά εἶναι ἡ πιθανότητα νά μήν ὑπάρχουν τρεῖς σωστές συσχετίσεις στήν ἀπάντηση τοῦ μαθητῆ;

γ) Ποιά εἶναι ἡ πιθανότητα νά ὑπάρχουν ἀκριβῶς δυό σωστές συσχετίσεις;

δ) Ποιά εἶναι ἡ πιθανότητα νά εἶναι ὅλες οἱ συσχετίσεις σωστές;

ε) Ποιά εἶναι ἡ πιθανότητα νά ὑπάρχουν περισσότερες ἀπό μιά σωστές συσχετίσεις;

στ) Ἡ πιθανότητα νά περιέχει ἡ ἀπάντηση τρεῖς σωστές συσχετίσεις εἶναι μεγαλύτερη ἀπό τήν πιθανότητα νά περιέχει μόνο δύο;

509. Ρίχνουμε τρεῖς κύβους συγχρόνως. Ποιά εἶναι ἡ πιθανότητα τοῦ συμβάντος: «οἱ ἐνδείξεις τῶν τριῶν κύβων εἶναι διαδοχικοί ἀριθμοί».

510. Ἔστω ὅτι A καί B εἶναι δύο συμβάντα τοῦ ἴδιου δειγματικοῦ χώρου Ω. Νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ πιθανότητα νά συμβεῖ ἀκριβῶς ἕνα ἀπό τά δύο συμβάντα εἶναι:

$$P(A) + P(B) - 2 \cdot P(A \cap B).$$

★§ 205. Πιθανότητες ὑπό συνθήκη.— Ἔστω ὅτι εἶναι A καί B δύο συμβάντα τοῦ ἴδιου πειράματος τύχης καί ὅτι $P(A) > 0$. Τότε: **Ἡ πιθανότητα τοῦ B ὑπό συνθήκη A** ἤ ἀλλιῶς **ἡ ὑπό συνθήκη πιθανότητα τοῦ B ὅταν τό A συνέβη ἤ ὅτι θά συμβεῖ,** πού τή συμβολίζουμε μέ $P(B \mid A)$, **ὁρίζεται ἀπό τή σχέση:**

$$\boxed{P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}} \qquad (P(A) > 0)$$

Δηλαδή: **Πιθανότητα τοῦ B ὑπό συνθήκη A** *ὀνομάζεται ὁ λόγος τῆς πιθανότητας τοῦ A καί B πρός τήν πιθανότητα τοῦ A.*

Παράδειγμα. Σέ μία οἰκογένεια μέ δυό παιδιά τό ἕνα εἶναι ἀγόρι. Ποιά εἶναι ἡ πιθανότητα νά εἶναι καί τά δυό παιδιά ἀγόρια;

Λύση. Ὁ δειγματικός χῶρος εἶναι:

$$\Omega = \{αα, ακ, κα, κκ\},$$

ὅπου τό «α» σημαίνει ἀγόρι καί τό «κ» κορίτσι.

Θεωροῦμε τά συμβάντα:

A: *«Ἡ οἰκογένεια ἔχει ἕνα τουλάχιστο ἀγόρι»*, δηλ. $A = \{αα, ακ, κα\}$

B: *«Ἡ οἰκογένεια ἔχει καί τά δύο παιδιά ἀγόρια»*, δηλ. $B = \{αα\}$.

Τότε τό συμβάν $B \mid A$: *«Καί τά δύο παιδιά εἶναι ἀγόρια, ὅταν τό ἕνα εἶναι ἀγόρι»* ἔχει πιθανότητα:

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P\,[\text{ἀκριβῶς δύο ἀγόρια}]}{P\,[\text{ἕνα τουλάχιστο ἀγόρι}]} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}, \quad \text{δηλ. } P(B \mid A) > P(B).$$

Σημείωση. Ἡ $P(B \mid A)$ ὀνομάζεται καί **δεσμευμένη πιθανότητα** σέ ἀντιδιαστολή μέ τήν $P(B)$ πού ὀνομάζεται καί **ἀδέσμευτη** ἤ **πιθανότητα χωρίς συνθήκη.**

Ἔτσι, στό πορηγούμενο παράδειγμα, ἡ ἀδέσμευτη πιθανότητα εἶναι: $P(B) = \frac{1}{4}$.

Μία ἄμεση συνέπεια τοῦ ὁρισμοῦ τῆς πιθανότητας ὑπό συνθήκη εἶναι ὁ *«κανόνας τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν πιθανοτήτων»* πού διατυπώνεται στήν ἑπόμενη παράγραφο.

★§ 206. Πιθανότητα τομῆς δύο συμβάντων *(κανόνας τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν πιθανοτήτων).*— Ὁ ὑπολογισμός τῆς πιθανότητας τῆς τομῆς δύο συμβάντων A καί B μπορεῖ νά γίνει ἄν χρησιμοποιήσουμε τόν τύπο τῆς ὑπό συνθήκη πιθανότητας.

Πράγματι, ἀπό τή σχέση $P(B|A)=\dfrac{P(B\cap A)}{P(A)}$, (ὅπου $P(A)>0$) προκύπτει: $P(B\cap A)=P(A)\cdot P(B|A)$. Καί ἄν $P(B)>0$, τότε μέ ἀντιμετάθεση τῶν γραμμάτων A καί B ἔχουμε:

$$P(A\cap B)=P(B)\cdot P(A|B).$$

Ἀλλά $A\cap B=B\cap A$ καί ἑπομένως:

$$\boxed{\mathbf{P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B\mid A)=P(B)\cdot P(A\mid B)}} \qquad (1)$$

Δηλαδή: *Ἡ πιθανότητα πραγματοποιήσεως* **συγχρόνως** *δύο συμβάντων ἰσοῦται μέ τήν πιθανότητα πραγματοποιήσεως τοῦ ἑνός, ἐπί τήν πιθανότητα πραγματοποιήσεως τοῦ ἄλλου, ὑπό τή συνθήκη ὅμως ὅτι συνέβη τό πρῶτο.*

Παράδειγμα. Ἕνα δοχεῖο περιέχει 15 ἄσπρα καί 10 πράσινα σφαιρίδια. Βγάζουμε δύο σφαιρίδια τό ἕνα μετά τό ἄλλο, χωρίς αὐτό πού πήραμε νά τό ξαναβάλουμε στό δοχεῖο. Ποιά εἶναι ἡ πιθανότητα νά βγεῖ πρῶτα ἄσπρο καί κατόπιν πράσινο σφαιρίδιο;

Λύση. Ἄν A σημαίνει ἄσπρο σφαιρίδιο καί Π πράσινο, θά ἔχουμε:

$$P(A\cap \Pi)=P(A)\cdot P(\Pi|A).$$

Ἀλλά $P(A)=\dfrac{15}{25}=\dfrac{3}{5}$ καί $P(\Pi|A)=\dfrac{10}{24}=\dfrac{5}{12}$.

Ἄρα: $\qquad P(A\cap \Pi)=\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{5}{12}=\dfrac{1}{4}$.

⋆§ 207. Πιθανότητα τομῆς τριῶν συμβάντων.—Ἄν A, B, Γ συμβάντα τοῦ δειγματικοῦ χώρου Ω, τότε ἰσχύει:

$$\boxed{\mathbf{P(A\cap B\cap \Gamma)=P(A)\cdot P(B\mid A)\cdot P(\Gamma\mid A\cap B)}}, \qquad [P(A\cap B)>0]$$

Ἀπόδειξη. Ἄν $A\cap B=E$, ἔχουμε:

$$P(A\cap B\cap\Gamma)=P(E\cap\Gamma)=P(E)\cdot P(\Gamma|E)=P(A\cap B)\cdot P(\Gamma|A\cap B)=$$
$$=P(A)\cdot P(B|A)\cdot P(\Gamma|A\cap B).$$

Ὅμοια ἀποδεικνύεται, ὅτι:

$$P(A\cap B\cap\Gamma\cap\Delta)=P(A)\cdot P(B|A)\cdot P(\Gamma|A\cap B)\cdot P(\Delta|A\cap B\cap\Gamma).$$

καί πιό γενικά:

$$\boxed{\mathbf{P(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_\nu)=P(A_1)\cdot P(A_2|A_1)\cdot P(A_3|A_1\cap A_2)\cdots P(A_\nu|A_1\cap\cdots\cap A_{\nu-1})}}$$

Παράδειγμα. Ἕνα δοχεῖο περιέχει 3 ἄσπρα σφαιρίδια, 4 μπλέ καί 6 κόκκινα. Παίρνουμε στήν τύχη 3 σφαιρίδια, τό ἕνα μετά τό ἄλλο, χωρίς τό σφαιρίδιο πού βγάζουμε νά τό ξαναβάζουμε μέσα στό δοχεῖο. Ποιά εἶναι ἡ πιθανότητα τά σφαιρίδια πού βγάζουμε νά εἶναι κατά σειρά: 1) ἄσπρο, 2) μπλέ, 3) κόκκινο;

Λύση. Ἄν A σημαίνει ἄσπρο σφαιρίδιο, M μπλέ καί K κόκκινο, θά ἔχουμε:

$$P(A\cap M\cap K)=P(A)\cdot P(M|A)\cdot P(K|A\cap M).$$

'Αλλά $P(A)=\frac{3}{13}$, $P(M\,|A)=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$, $P(K\,|A\cap M)=\frac{6}{11}$

Ἄρα: $P(A\cap M\cap K)=\frac{3}{13}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{11}=\frac{6}{143}$.

★ **§ 208. Συμβάντα ἀνεξάρτητα μεταξύ τους.**—Ἔστω ὅτι εἶναι Α καί Β δύο μή κενά συμβάντα, τά ὁποῖα ἀναφέρονται σ' ἕνα πείραμα τύχης. *Θά λέμε ὅτι* **τό συμβάν Β εἶναι ἀνεξάρτητο ἀπό τό Α** (ἀκριβέστερα τό Β εἶναι **στατιστικῶς ἤ στοχαστικῶς ἀνεξάρτητο ἀπό τό Α**), *τότε καί μόνο τότε, ἄν ἰσχύει:*

$$\boxed{P(B\,|\,A)=P(B)}$$

Ἄν δύο συμβάντα δέν εἶναι ἀνεξάρτητα, θά λέμε ὅτι εἶναι **ἐξηρτημένα.** Ἡ σχέση αὐτή ἔχει ὡς ἄμεση συνέπεια ἕνα σημαντικό κανόνα πολλαπλασιασμοῦ πιθανοτήτων ἀνεξαρτήτων συμβάντων. Ὁ κανόνας αὐτός δίνεται ἀπό τό ἑπόμενο θεώρημα.

★ **§ 209. Θεώρημα.—Ἄν τό συμβάν Β εἶναι ἀνεξάρτητο ἀπό τό συμβάν Α, τότε ἡ πιθανότητα τῆς τομῆς τους ἰσοῦται μέ τό γινόμενο τῶν πιθανοτήτων τους.**

Δηλαδή: $$\boxed{P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)}\qquad(1)$$

Ἀπόδειξη. Πράγματι, σύμφωνα μέ τόν ὁρισμό τῶν ἀνεξάρτητων συμβάντων καί τή σχέση (1) τῆς § 206, ἔχουμε:

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B\,|A)=P(A)\cdot P(B).$$

Σημείωση. Ἡ σχέση (1) εἶναι **καί ἱκανή** συνθήκη ἀνεξαρτησίας δύο συμβάντων. Ἔτσι ἡ παρακάτω πρόταση εἶναι ἀληθής:

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)\iff \text{τά συμβάντα } A, B \text{ εἶναι ἀνεξάρτητα μεταξύ τους.}$$

Ἡ παραπάνω πρόταση λαμβάνεται πολλές φορές ὡς ὁρισμός δύο ἀνεξάρτητων συμβάντων.

Παράδειγμα. Ρίχνουμε στόν ἀέρα ἕναν κύβο καί ἕνα νόμισμα. Ποιά εἶναι ἡ πιθανότητα τοῦ σύνθετου συμβάντος: «ὁ κύβος φέρνει 5 ἤ 6 καί τό νόμισμα φέρνει κορώνα»;

Λύση. Ἔστω ὅτι Α εἶναι τό συμβάν: *«Ὁ κύβος φέρνει 5 ἤ 6»* καί Β εἶναι τό συμβάν: *«Τό νόμισμα φέρνει κορώνα (Κ)».*

Ὁ δειγματικός χῶρος τοῦ σύνθετου πειράματος εἶναι:

$$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}\times\{K,\Gamma\}=$$
$$=\{(1,K),(2,K),(3,K),(4,K),(5,K),(6,K),(1,\Gamma),(2,\Gamma),(3,\Gamma),(4,\Gamma),(5,\Gamma),(6,\Gamma)\}.$$

Εἶναι: $A=\{(5,K),(6,K),(5,\Gamma),(6,\Gamma)\}$

$B=\{(1,K),(2,K),(3,K),(4,K),(5,K),(6,K)\}$

$A\cap B=\{(5,K),(6,K)\}$

Ἐπίσης: $P(A)=\frac{4}{12}$, $P(B)=\frac{6}{12}$, $P(A\cap B)=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$.

Παρατηροῦμε ὅτι: $P(A)\cdot P(B)=\frac{4}{12}\cdot\frac{6}{12}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$ καί $P(A\cap B)=\frac{1}{6}$.

Ἄρα $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{6}$.

Αὐτό τό περιμέναμε, γιατί τό ἀποτέλεσμα πού μᾶς δίνει ὁ κύβος εἶναι ἀνεξάρτητο ἀπό τό ἀποτέλεσμα πού μᾶς δίνει τό νόμισμα.

★ **§ 210. Ἀνεξαρτησία τριῶν συμβάντων.**—Δίνουμε τόν ἑπόμενο ὁρισμό:

Ὁρισμός. *Τρία συμβάντα Α, Β καί Γ τοῦ δειγματικοῦ χώρου Ω θά λέγονται* **τελείως ἀνεξάρτητα**, *τότε καί μόνο τότε, ἄν ἰσχύουν οἱ ἑπόμενες σχέσεις:*

$$\left.\begin{array}{ll} 1. & P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B) \\ 2. & P(A\cap \Gamma)=P(A)\cdot P(\Gamma) \\ 3. & P(B\cap \Gamma)=P(B)\cdot P(\Gamma) \end{array}\right\} \qquad (I)$$

$$4. \quad P(A\cap B\cap \Gamma)=P(A)\cdot P(B)\cdot P(\Gamma) \qquad (II)$$

Πρέπει νά σημειώσουμε ὅτι ἡ ἀνεξαρτησία τριῶν συμβάντων λαμβανομένων ἀνά δύο δέν ἐξασφαλίζει τήν τέλεια ἀνεξαρτησία τους. Ἑπομένως, γιά νά εἶναι τρία συμβάντα τελείως ἀνεξάρτητα, πρέπει νά ἰσχύουν **συγχρόνως** οἱ (I) καί (II).

Παρατήρηση. Ὅταν ἔχουμε 3 ἀνεξάρτητα συμβάντα, τότε ἰσχύει:

$$\boxed{P(A_1\cap A_2\cap A_3) = P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)} \qquad (1)$$

Ἡ σχέση ὅμως (1) **δέν εἶναι ἱκανή συνθήκη** γιά τήν τέλεια ἀνεξαρτησία τῶν A_1, A_2 καί A_3 (γιατί;).

Παραδείγματα: 1ο. Ρίχνουμε ἕνα νόμισμα, παίρνουμε ἕνα παιγνιόχαρτο ἀπό μία δέσμη παιγνιοχάρτων καί ρίχνουμε ἕναν κύβο, κατά τρόπους ἀνεξάρτητους. Ποιά εἶναι ἡ πιθανότητα νά ἐμφανίσουν: τό νόμισμα «κορώνα», τό παιγνιόχαρτο «ἄσσο» καί ὁ κύβος «6»;

Λύση. Ἄν Α σημαίνει: *«Τό νόμισμα δείχνει κορώνα»*, Β: *«Τό παιγνιόχαρτο εἶναι ἄσσος»* καί Γ: *«Ὁ κύβος φέρνει 6»*, θά ἔχουμε:

$$P(A\cap B\cap \Gamma)=P(A)\cdot P(B)\cdot P(\Gamma),$$

ἐπειδή τά συμβάντα εἶναι ἀνεξάρτητα.

Ἀλλά $\quad P(A)=\frac{1}{2}, \quad P(B)=\frac{4}{52}=\frac{1}{13}, \quad P(\Gamma)=\frac{1}{6}.$

Ἄρα: $\quad P(A\cap B\cap \Gamma)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{13}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{156}.$

Θά δώσουμε τώρα ἕνα χαρακτηριστικό παράδειγμα, ἀπό τό ὁποῖο φαίνεται ὅτι ἡ ἀνεξαρτησία τριῶν συμβάντων, ἀνά δύο, **δέν** ἐξασφαλίζει τήν τέλεια ἀνεξαρτησία τους.

2ο. Οἱ ἕδρες ἑνός κανονικοῦ τετραέδρου εἶναι χρωματισμένες ὡς ἑξῆς: Μαύρη, λευκή, κόκκινη καί ἡ τέταρτη ἕδρα ἔχει καί τά τρία χρώματα. Ρίχνουμε τό τετράεδρο καί παρατηροῦμε τό χρῶμα τῆς ἕδρας στήν ὁποία στηρίζεται. Ὀνομάζουμε:

Α τό συμβάν: «Ὁ κύβος στηρίζεται στήν ἕδρα, ἡ ὁποία εἶναι χρωματισμένη μαύρη»

Β τό συμβάν: «Ὁ » » » » » » » λευκή»

Γ τό συμβάν: «Ὁ » » » » » » » » κόκκινη».

Τότε: $\quad P(A)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}, \quad P(B)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}, \quad P(\Gamma)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$

$$P(A\cap B)=\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=P(A)\cdot P(B).$$

$$P(A\cap \Gamma)=\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=(PA)\cdot P(\Gamma).$$

$$P(B \cap \Gamma) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(B) \cdot P(\Gamma).$$

Ἑπομένως τά Α, Β, Γ εἶναι ἀνεξάρτητα ἀνά δύο.

Ἀλλά: $P(A \cap B \cap \Gamma) = \frac{1}{4} \neq P(A) \cdot P(B) \cdot P(\Gamma) = \frac{1}{8}$.

★ § 211. Ἰδιότητες ἀνεξάρτητων συμβάντων.— Γιά τά ἀνεξάρτητα συμβάντα ἰσχύουν οἱ ἑπόμενες βασικές ἰδιότητες:

1η: Ἄν Α καί Β εἶναι ἀνεξάρτητα συμβάντα, θά εἶναι ἀνεξάρτητα συμβάντα καί τά Α καί Β′,

Δηλαδή **ἰσχύει:** $\mathbf{P(A \cap B') = P(A) \cdot P(B')}$

Ἀπόδειξη. Γνωρίζουμε (§ 201) ὅτι: $P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$ καί ἐπειδή ἀπό τήν ὑπόθεση $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ θά ἔχουμε:

$$P(A \cap B') = P(A) - P(A) \cdot P(B) = P(A)[1 - P(B)] = P(A) \cdot P(B').$$

2η: Ἄν Α καί Β εἶναι ἀνεξάρτητα συμβάντα, θά εἶναι ἀνεξάρτητα καί τά Α′ καί Β.

Δηλαδή **ἰσχύει:** $\mathbf{P(A' \cap B) = P(A') \cdot P(B)}$

Ὑπόδειξη. Νά παρατηρήσετε ὅτι $(A \cap B) \cup (A' \cap B) = B$ καί νά ἐργαστεῖτε ὅπως καί προηγουμένως.

3η: Ἄν Α καί Β εἶναι ἀνεξάρτητα συμβάντα, τότε θά εἶναι ἀνεξάρτητα καί τά Α′ καί Β′.

Δηλαδή **ἰσχύει:** $\mathbf{P(A' \cap B') = P(A') \cdot P(B')}$.

Ἀπόδειξη. Ἐπειδή $(A' \cap B) \cup (A' \cap B') = A'$ καί $(A' \cap B) \cap (A' \cap B') = \varnothing$ ἔχουμε ἀπό τό ἀξίωμα P_3:

$$P(A' \cap B) + P(A' \cap B') = P(A')$$

ἤ
$$\begin{aligned} P(A' \cap B') &= P(A') - P(A' \cap B) = \\ &= P(A') - P(A') \cdot P(B) \qquad (\text{Ἰδιότητα 2η}) \\ &= P(A')\,[1 - P(B)] = P(A') \cdot P(B'). \end{aligned}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1η. Ἀπό μία δέσμη μέ 32 παιγνιόχαρτα παίρνουμε συγχρόνως δύο ἀπό αὐτά στήν τύχη. Ποιά εἶναι ἡ πιθανότητα τό ἕνα τουλάχιστον ἀπό αὐτά νά εἶναι ἄσσος;

Λύση. Ὀνομάζουμε Α τό συμβάν: *«Τό ἕνα νά εἶναι ἄσσος»* καί Β τό συμβάν: *«Τό ἄλλο νά εἶναι ἄσσος»*. Τότε $P(A) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$, $P(B) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$ καί ἡ πιθανότητα νά εἶναι καί τά δύο ἄσσοι εἶναι: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A) = \frac{4}{32} \cdot \frac{3}{31} = \frac{3}{248}$.

Τότε ἡ πιθανότητα τοῦ συμβάντος $A \cup B$: *«Τό ἕνα τουλάχιστον ἀπό αὐτά νά εἶναι ἄσσος»* εἶναι: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{3}{248} = \frac{59}{248}$.

2η. Ἔστω ὅτι εἶναι δύο συμβάντα Α καί Β μέ $\mathbf{P(A \cup B) = \frac{3}{4}}$, $\mathbf{P(A') = \frac{2}{3}}$ **καί**

$P(A \cap B) = \frac{1}{4}$. **Νά βρεῖτε: (i) P(A), (ii) P(B).**

Λύση: **(i)** Ἀπό τήν §199, ἔχουμε:

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

(ii) Ἀπό τή σχέση $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ ἔχουμε:

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{3} + P(B) - \frac{1}{4}, \text{ καί συνεπῶς: } P(B) = \frac{2}{3}.$$

3η. Ἡ πιθανότητα νά ζεῖ κάποιος μετά 40 ἔτη εἶναι $\frac{8}{10}$ καί ἡ πιθανότητα νά ζεῖ ἡ σύζυγός του μετά ἀπό 40 ἔτη εἶναι $\frac{7}{10}$. Ποιά εἶναι ἡ πιθανότητα νά ζεῖ μόνο ὁ σύζυγος μετά ἀπό 40 ἔτη;

Λύση: Ἄν ὀνομάσουμε A τό συμβάν: *«Ὁ σύζυγος νά ζεῖ μετά ἀπό 40 ἔτη»* καί B τό συμβάν: *«Νά ζεῖ ἡ σύζυγος μετά ἀπό 40 ἔτη»*, τότε ἀρκεῖ νά βροῦμε τήν $P(A \cap B')$.

Ἀλλά: $$P(A \cap B') = P(A) \cdot P(B') = P(A) \cdot [1 - P(B)],$$

ὁπότε: $$P(A \cap B') = P(A) \cdot [1 - P(B)] = \frac{8}{10} \cdot \left(1 - \frac{7}{10}\right) = \frac{8}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{24}{100}.$$

4η. Ἡ πιθανότητα νά λύσει ὁ μαθητής x ἕνα πρόβλημα εἶναι $\frac{3}{5}$ καί ἡ πιθανότητα νά τό λύσει ἕνας ἄλλος μαθητής y εἶναι $\frac{2}{3}$. Ποιά εἶναι ἡ πιθανότητα νά λυθεῖ τό πρόβλημα ἀπό τόν ἕνα μαθητή καί νά μή λυθεῖ ἀπό τόν ἄλλο;

Λύση. Ἄν ὀνομάσουμε A τό συμβάν: *«Ὁ μαθητής x λύνει τό πρόβλημα»* καί B τό συμβάν: *«Ὁ μαθητής y λύνει τό πρόβλημα»*, τότε:

$A \cap B'$ σημαίνει: *Ὁ x θά λύσει τό πρόβλημα, ἀλλ' ὄχι ὁ y.*

$A' \cap B$ σημαίνει: *Ὁ x δέ θά λύσει τό πρόβλημα, ἀλλά ὁ y θά τό λύσει.*

$(A \cap B') \cup (A' \cap B)$ σημαίνει: *Τό πρόβλημα θά λυθεῖ ἀπό τόν ἕναν καί δέ θά λυθεῖ ἀπό τόν ἄλλο.*

Λαμβάνοντας ὑπόψη ὅτι τά: $A \cap B'$ καί $A' \cap B$ εἶναι ξένα συμβάντα, ἡ πιθανότητα πού ζητᾶμε νά βροῦμε εἶναι:

$$P[(A \cap B') \cup (A \cap B)] = P(A \cap B') + P(A' \cap B) = P(A) \cdot P(B') + P(A') \cdot P(B) =$$

$$= \frac{3}{5}\left(1 - \frac{2}{3}\right) + \left(1 - \frac{3}{5}\right) \cdot \frac{2}{3} = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{7}{15}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάδα Α'. 511. Ἡ πιθανότητα νά λυθεῖ ἕνα πρόβλημα ἀπό τό μαθητή α εἶναι $\frac{2}{3}$ καί ἀπό τό συμμαθητή του β εἶναι $\frac{4}{5}$. Ποιά εἶναι ἡ πιθανότητα νά λυθεῖ τό πρόβλημα καί ἀπό τούς δύο μαθητές;

512. Ἡ πιθανότητα νά ζεῖ κάποιος μετά ἀπό 20 ἔτη εἶναι $\frac{3}{4}$ καί ἡ πιθανότητα νά ζεῖ ἡ γυναίκα του εἶναι $\frac{3}{5}$. Ποιά εἶναι ἡ πιθανότητα:

α) Νά ζοῦν καί οἱ δύο μαζί — β) Νά ζεῖ μόνο ὁ σύζυγος

γ) Νά ζεῖ μόνο ἡ σύζυγος — δ) Νά ζεῖ τουλάχιστον ἕνας ἀπό τούς δύο.

513. Ἄν A καί B εἶναι συμβάντα τοῦ ἴδιου δειγματικοῦ χώρου μέ $P(A) = \frac{3}{8}$,

$P(A \cup B) = \frac{5}{8}$ καί $P(B') = \frac{1}{2}$, νά βρεῖτε τίς: $P(A \cap B)$, $P(A' \cap B')$, $P(A' \cup B')$, $P(B \cap A')$, $P(A|B)$, $P(A'|B')$, $P(B'|A')$.

514. Ἔστω ὅτι A καί B εἶναι δύο συμβάντα τοῦ ἴδιου δειγματικοῦ χώρου. Τότε

α) νά ἀποδείξετε ὅτι: $P(A|B) + P(A'|B) = 1$,

β) ἄν $A \subset B$ καί $P(B) > 0$, νά ἀποδείξετε ὅτι:

i) $P(B|A) = 1$,

ii) $P(A|B) = \frac{P(A)}{P(B)}$.

515. Ἀπό μία κληρωτίδα, πού περιέχει 30 κλήρους ἀριθμημένους ἀπό τό 1 μέχρι τό 30, παίρνουμε στήν τύχη ἕναν κλῆρο. Ποιά εἶναι ἡ πιθανότητα ὁ κλῆρος αὐτός νά φέρει περιττό ἀριθμό καί διαιρετό διά τοῦ 9;

516. Ἕνα δοχεῖο περιέχει 6 μπάλλες ἄσπρες καί 2 μπάλλες κόκκινες· παίρνουμε 2 μπάλλες ἀπό αὐτές στήν τύχη. Ποιά εἶναι ἡ πιθανότητα τοῦ συμβάντος: «ἡ δεύτερη μπάλλα εἶναι ἄσπρη, ὅταν εἶναι γνωστό ὅτι ἡ πρώτη μπάλλα εἶναι ἄσπρη».

517. Ἄν A καί B εἶναι συμβάντα τοῦ ἴδιου δειγματικοῦ χώρου Ω νά ἀποδείξετε ὅτι:

i) $P[(A \cup A')|B] = P(A|B) + P(A'|B)$

ii) $P(A|B') = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - P(B)}$.

★ **Ὁμάδα Β΄. 518.** Ἀπό μία τράπουλα μέ 52 χαρτιά παίρνουμε 3 χαρτιά στήν τύχη. Ποιά εἶναι ἡ πιθανότητα τοῦ συμβάντος: «Κανένα ἀπό τά τρία χαρτιά εἶναι φιγούρα».

519. Ἐκλέγουμε στήν τύχη δύο φυσικούς ἀριθμούς ἀπό τό τμῆμα τῶν φυσικῶν $T_{10} \equiv \{1, 2, 3, \ldots, 9, 10\}$. Ποιά εἶναι ἡ πιθανότητα ὁ ἕνας ἀριθμός νά εἶναι ἄρτιος καί ὁ ἄλλος περιττός;

520. Ρίχνουμε δύο ζάρια. Ἄν ξέρουμε ὅτι τό πρῶτο ζάρι ἔφερε τόν ἀριθμό 5, ποιά εἶναι ἡ πιθανότητα τοῦ συμβάντος: «τό ἄθροισμα τῶν ἐνδείξεων τῶν δύο κύβων εἶναι μεγαλύτερο ἀπό τό 10»;

521. Ἄν E καί F εἶναι ἀνεξάρτητα συμβάντα, νά ἀποδείξετε ὅτι:

$$P(E'|F) = 1 - P(E|F), \quad [P(F) > 0].$$

522. Ἄν A, B καί E εἶναι συμβάντα τοῦ ἴδιου δειγματικοῦ χώρου ,νά ἀποδείξετε ὅτι: $P(A \cup B|E) = P(A|E) + P(B|E) - P(A \cap B|E)$, (προσθετικό θεώρημα γιά δεσμευμένες πιθανότητες).

523. Ἄν E καί F εἶναι συμβάντα τοῦ ἴδιου δειγμ. χώρου Ω, τότε νά ἀποδείξετε ὅτι:

i) $0 \leqq P(E|F) \leqq 1$

ii) $P(\Omega|F) = 1$

iii) $P(E) = P(F) \cdot P(E|F) + P(F') \cdot P(E|F')$.

524. Ἔστω ὅτι A καί B εἶναι δύο συμβάντα τοῦ ἴδιου δειγματικοῦ χώρου Ω. Νά ἀποδείξετε ὅτι: $P(B) = P(A) \cdot P(B|A) + P(A') \cdot P(B|A')$.

525. Ἄν A καί B εἶναι δύο ἀνεξάρτητα συμβάντα, νά ἀποδείξετε ὅτι:

$$P(A \cup B) = 1 - P(A') \cdot P(B').$$

526. Ἄν A, B εἶναι συμβάντα τοῦ ἴδιου δειγματικοῦ χώρου καί $A \subset B = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_\nu$, ὅπου $B_i \cap B_j = \emptyset$, $i \neq j$, τότε νά ἀποδείξετε ὅτι:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2) + \cdots + P(B_\nu) \cdot P(A|B_\nu).$$

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΠΟ ΤΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟ ΛΟΓΙΣΜΟ ΚΑΙ ΤΗΝ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Ὑπό

ΙΩΑΝΝΟΥ Φ. ΠΑΝΑΚΗ

τ. Ἐπιθεωρητῆ Μαθηματικῶν Μ.Ε.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι

ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΥΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

§ 1. ΓΩΝΙΑ ΔΥΟ ΕΛΕΥΘΕΡΩΝ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ.—Θεωροῦμε δύο ἐλεύθερα διανύσματα $\vec{V}_1$ καί $\vec{V}_2$ (σχ. 1).

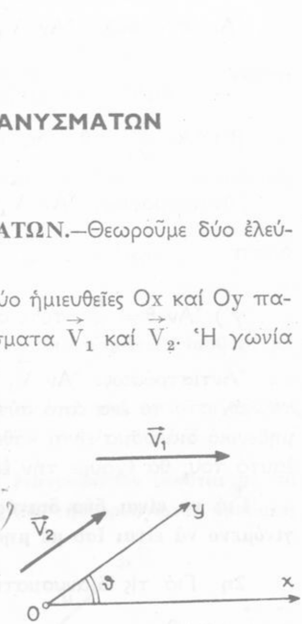
Ἀπό κάποιο σημεῖο Ο τοῦ χώρου γράφουμε δύο ἡμιευθεῖες Οx καί Oy παράλληλες καί ὁμόρροπες ἀντιστοίχως μέ τά διανύσματα $\vec{V}_1$ καί $\vec{V}_2$. Ἡ γωνία xOy πού σχηματίζεται μ' αὐτό τόν τρόπο εἶναι:

α') **Ἀνεξάρτητη ἀπό τή θέση** τοῦ σημείου Ο, διότι οἱ γωνίες μέ πλευρές παράλληλες καί ὁμόρροπες εἶναι ἴσες.

β') **Ἀνεξάρτητη ἀπό τήν τάξη** τῶν διανυσμάτων $\vec{V}_1$ καί $\vec{V}_2$.

γ') **Μηδέν,** ἄν τά διανύσματα $\vec{V}_1$ καί $\vec{V}_2$ εἶναι παράλληλα καί ὁμόρροπα, καί

δ') **Ἴση μέ 2 ὀρθές,** ὅταν τά διανύσματα εἶναι παράλληλα καί ἀντίρροπα.



Σχ. 1

Ὥστε: **Σέ δύο ἐλεύθερα διανύσματα $\vec{V}_1$ καί $\vec{V}_2$ μποροῦμε νά ἀντιστοιχίσουμε μία μή προσανατολισμένη γωνία θ ($0 \leq \theta \leq 2$ ὀρθῶν), ἡ ὁποία ὀνομάζεται γωνία τῶν δύο ἐλευθέρων διανυσμάτων.**

§ 2. ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ Η ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΥΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ.—Ἐσωτερικό ἤ **ἀριθμητικό γινόμενο** δύο διανυσμάτων ὀνομάζουμε τό γινόμενο τῶν μηκῶν τους ἐπί τό συνημίτονο τῆς γωνίας τους.

Έτσι, ἄν ἔχουμε δύο διανύσματα $\vec{V}_1$ καί $\vec{V}_2$ (σχ. 1), ὅπου θ εἶναι ἡ γωνία τους καί $|\vec{V}_1|$ καί $|\vec{V}_2|$ εἶναι τά μήκη τους, τότε ὁ πραγματικός ἀριθμός:

$$|\vec{V}_1|\,|\vec{V}_2|\,\text{συνθ}$$

εἶναι τό **ἐσωτερικό γινόμενό τους** καί σημειώνεται ὡς ἑξῆς:

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = |\vec{V}_1| \cdot |\vec{V}_2|\ \text{συνθ} = |\overline{V}_1|\,|\overline{V}_2|\ \text{συνθ} \tag{1}$$

Συνέπειες τοῦ ὁρισμοῦ:

1η. α΄) Ἄν $0 \leqq \theta < \frac{\pi}{2}$, τότε συνθ > 0, καί ἄρα $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2$ θετικό.

Ἀντιστρόφως: Ἄν $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 > 0$, τότε $|\vec{V}_1|\,|\vec{V}_2|$ συνθ > 0 ἤ συνθ > 0, ὁπότε

$$0 \leqq \theta < \frac{\pi}{2}.$$

β΄) Ἄν $\frac{\pi}{2} < \theta \leqq \pi$, τότε συνθ < 0 καί $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2$ ἀρνητικό.

Ἀντιστρόφως: Ἄν $\vec{V}_1\vec{V}_2 < 0$, τότε $|\vec{V}_1|\,|\vec{V}_2|$ συνθ < 0 ἤ συνθ < 0, ὁπότε

$$\frac{\pi}{2} < \theta \leqq \pi.$$

γ΄) Ἄν $\theta = \frac{\pi}{2}$, τότε συνθ $= 0$ καί ἄρα $\vec{V}_1\,\vec{V}_2 = 0$.

Ἀντιστρόφως: Ἄν $\vec{V}_1\,\vec{V}_2 = 0$, τότε τά διανύσματα ἤ θά εἶναι κάθετα ἤ τουλάχιστο τό ἕνα ἀπό αὐτά θά εἶναι μηδενικό. Ἄν τώρα θεωρήσουμε ὅτι τό μηδενικό διάνυσμα εἶναι κάθετο σέ κάθε διάνυσμα καί ταυτόχρονα κάθετο στόν ἑαυτό του, θά ἔχουμε τήν ἑξῆς πρόταση:

Γιά νά εἶναι δύο διανύσματα κάθετα, πρέπει καί ἀρκεῖ τό ἐσωτερικό τους γινόμενο νά εἶναι ἴσο μέ μηδέν.

2η. Γιά τίς διανυσματικές μονάδες ἔχουμε: $|\vec{i}| = 1$ καί $|\vec{j}| = 1$, ὁπότε: $\vec{\imath} \cdot \vec{j} =$ συνθ.

3η. Ἐπειδή ἡ γωνία θ εἶναι ἀνεξάρτητη ἀπό τήν τάξη τῶν διανυσμάτων, ἕπεται ὅτι:

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = \vec{V}_2 \cdot \vec{V}_1 \cdot \quad \text{(νόμος τῆς ἀντιμεταθέσεως)}$$

4η. Κάθε διάνυσμα $\vec{V}$, σχηματίζει μέ τόν ἑαυτό του γωνία $\theta = 0$, ἄρα συνθ $= 1$, ὁπότε $\vec{V} \cdot \vec{V} = |\vec{V}| \cdot |\vec{V}|$ συνθ $= |\vec{V}|^2 \cdot 1 = |\vec{V}|^2$

Δηλαδή: $$\vec{V}^2 = |\vec{V}|^2.$$

5η. Ἄν δύο διανύσματα $\vec{u} \neq \vec{0}$ καί $\vec{\upsilon} \neq \vec{0}$ εἶναι γραμμικῶς ἐξαρτημένα, τότε ὑπάρχει ἕνας πραγματικός ἀριθμός k τέτοιος, ὥστε νά εἶναι:

$$\vec{u} = k \cdot \vec{\upsilon}.$$

Διακρίνουμε τίς ἑξῆς περιπτώσεις:

α) Ἄν $k > 0$, τά διανύσματα εἶναι ὁμόρροπα. Τότε

$$\overline{\gamma\omega\nu}\,(\vec{u}, \vec{\upsilon}) = 0 \quad \text{καί} \quad \vec{u} \cdot \vec{\upsilon} = |\vec{u}|\,|\vec{\upsilon}|.$$

Ἄν πάρουμε ἄξονα παράλληλο μέ τά διανύσματα, τότε οἱ ἀλγεβρικές τιμές τῶν διανυσμάτων θά εἶναι ὁμόσημες, δηλαδή:

$$|\vec{u}| = \overline{u} \text{ καί } |\vec{\upsilon}| = \overline{\upsilon} \text{ ἤ } |\vec{u}| = -\overline{u} \text{ καί } |\vec{\upsilon}| = -\overline{\upsilon} \text{ Ἄρα:}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{\upsilon} = \overline{u} \cdot \overline{\upsilon}$$

β) Ἄν $k < 0$, τότε $\overline{\gamma\omega\nu}\,(\vec{u}, \vec{\upsilon}) = \pi$ καί $\sigma\upsilon\nu\,(\vec{u}, \vec{\upsilon}) = -1$. Ἄρα:

$$\vec{u} \cdot \vec{\upsilon} = -\,|\vec{u}|\,|\vec{\upsilon}|.$$

Ἄν πάρουμε ἄξονα παράλληλο μέ τά διανύσματα, τότε οἱ ἀλγεβρικές τιμές τους θά εἶναι ἑτερόσημες, ὁπότε

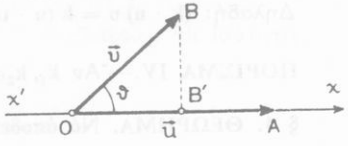
$$|\vec{u}| = \overline{u} \text{ καί } |\vec{\upsilon}| = -\overline{\upsilon} \text{ ἤ } |\vec{u}| = -\overline{u} \text{ καί } |\vec{\upsilon}| = \overline{\upsilon}. \text{ Ἄρα:}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{\upsilon} = \overline{u} \cdot \overline{\upsilon}$$

Ὥστε: **Τό ἐσωτερικό γινόμενο δύο συγγραμμικῶν διανυσμάτων ἰσοῦται μέ τό γινόμενο τῶν ἀλγεβρικῶν τιμῶν τους.**

Σημείωση: Ἄν ἀλλάξουμε τή φορά τοῦ ἑνός διανύσματος, τότε τό ἐσωτερικό γινόμενο ἀλλάζει πρόσημο.

§ 3. ΘΕΩΡΗΜΑ.–Τό ἐσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων ἰσοῦται μέ τό γινόμενο τῆς ἀλγεβρικῆς τιμῆς τοῦ ἑνός διανύσματος ἐπί τήν ὀρθογώνια προβολή τοῦ ἄλλου διανύσματος πάνω σέ ἄξονα πού ἔχει τή διεύθυνση καί τή φορά τοῦ πρώτου διανύσματος.



Σχ. 2

Ἄς εἶναι $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ καί $\overrightarrow{OB} = \vec{\upsilon}$ οἱ ἀντιπρόσωποι τῶν διανυσμάτων $\vec{u}$ καί $\vec{\upsilon}$ (σχ. 2), καί B′ ἡ ὀρθή προβολή τοῦ B πάνω στήν εὐθεία OA. Πάνω στόν ἄξονα μέ διεύθυνση καί φορά τό $\overrightarrow{OA}$, ἔχουμε:

$$\overline{OB'} = OB\ \sigma\upsilon\nu\theta = \upsilon\ \sigma\upsilon\nu\theta,$$

ὅπου θ ἡ γωνία τῶν δύο διανυσμάτων. Ἄρα:

$$\overline{OA} \cdot \overline{OB'} = u \cdot \upsilon \cdot \sigma\upsilon\nu\theta = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \vec{u} \cdot \vec{\upsilon} \cdot$$

Ὥστε: $$\vec{u} \cdot \vec{\upsilon} = \overline{OA} \cdot \overline{OB'}.$$

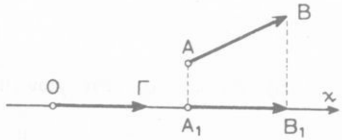
Ἄν ἀλλάξουμε τή φορά τοῦ ἄξονα, τό γινόμενο $\overline{OA} \cdot \overline{OB'}$ δέ μεταβάλλεται. Ἄν πάρουμε ὡς ἄξονα τό φορέα τοῦ $\vec{OB}$, θά ἔχουμε πάλι ἀνάλογο γινόμενο.

Ὥστε : $$\vec{u} \cdot \vec{\upsilon} = \overline{OA} \cdot \overline{OB'} = \overline{OB} \cdot \overline{OA'}.$$

ΠΟΡΙΣΜΑ Ι.–Τό ἐσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων δέ μεταβάλλεται, ἄν τό ἕνα ἀπ' αὐτά τό ἀντικαταστήσουμε μέ τήν ὀρθή προβολή του πάνω στό φορέα τοῦ ἄλλου διανύσματος.

Πραγματικά, στό σχ. 3 ἔχουμε:

$\vec{AB} \cdot \vec{O\Gamma} = \overline{A_1B_1} \cdot \overline{O\Gamma} = \vec{A_1B_1} \cdot \vec{O\Gamma}$.



Σχ. 3

Ἄν τό A (καί τό B) μετατίθεται πάνω σέ ἐπίπεδο κάθετο στόν ἄξονα $\vec{O\Gamma}$, τό ἐσωτερικό γινόμενο $\vec{AB} \cdot \vec{O\Gamma}$ δέ μεταβάλλεται, γιατί τά σημεῖα A_1 καί B_1 μένουν σταθερά.

ΠΟΡΙΣΜΑ ΙΙ.—Ἡ ἀλγεβρική τιμή τῆς ὀρθῆς προβολῆς ἑνός διανύσματος πάνω σ' ἕναν ἄξονα εἶναι τό ἐσωτερικό γινόμενο τοῦ διανύσματος ἐπί τό μοναδιαῖο διάνυσμα τοῦ ἄξονα.

Ἔτσι, ἄν στό σχ. 3 εἶναι $|\vec{O\Gamma}| = 1$, τότε:
$$\vec{AB} \cdot \vec{O\Gamma} = \overline{A_1B_1} \cdot \overline{O\Gamma} = \overline{A_1B_1}$$

ΠΟΡΙΣΜΑ ΙΙΙ.–Ἄν σ' ἕνα ἐσωτερικό γινόμενο τό ἕνα ἀπό τά διανύσματα πολλαπλασιαστεῖ μέ ἕναν πραγματικό ἀριθμό k, τότε τό ἐσωτερικό γινόμενο πολλαπλασιάζεται μέ τόν ἴδιο ἀριθμό.

Δηλαδή: $(k \cdot \vec{u})\vec{\upsilon} = k(\vec{u} \cdot \vec{\upsilon})$ (Προσεταιριστική ὡς πρός τόν k).

ΠΟΡΙΣΜΑ IV.—Ἄν $k_1, k_2 \in R$, τότε: $(k_1 \cdot \vec{u}) \cdot (k_2 \cdot \vec{\upsilon}) = k_1 \cdot k_2 (\vec{u} \cdot \vec{\upsilon})$.

§ 4. ΘΕΩΡΗΜΑ. Νά ἀποδείξετε ὅτι: $\vec{u}(\vec{\upsilon}_1 + \vec{\upsilon}_2) = \vec{u} \cdot \vec{\upsilon}_1 + \vec{u} \cdot \vec{\upsilon}_2$

Ἀπόδειξη.– Ἄς εἶναι $\vec{OA} = \vec{u}$, $\vec{OB} = \vec{\upsilon}_1$ καί $\vec{O\Gamma} = \vec{\upsilon}_2$ οἱ ἀντιπρόσωποι τῶν διανυσμάτων $\vec{u}$, $\vec{\upsilon}_1$ καί $\vec{\upsilon}_2$ ἀντιστοίχως, καί:
$$\vec{O\Sigma} = \vec{OB} + \vec{O\Gamma}.$$

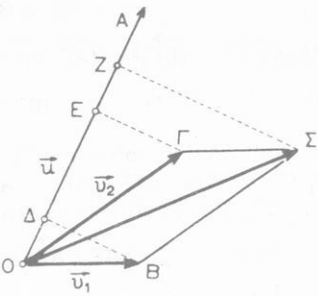
Ἄν, τώρα, Δ,Ε,Ζ εἶναι οἱ ὀρθές προβολές τῶν B,Γ καί Σ πάνω στόν ἄξονα $\vec{OA}$, θά ἔχουμε:

$\vec{u}(\vec{\upsilon}_1 + \vec{\upsilon}_2) = \vec{OA} \cdot \vec{O\Sigma} = \overline{OA} \cdot \overline{OZ}$ (Σχ.4) (1)

Ἐπειδή εἶναι $\overline{OZ} = \overline{O\Delta} + \overline{OE}$, ἡ (1), μέ βάση τήν ἐπιμεριστική ἰδιότητα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ὡς πρός τήν πρόσθεση, γίνεται:

$$\vec{u}(\vec{\upsilon}_1 + \vec{\upsilon}_2) = \overline{OA} \cdot (\overline{O\Delta} + \overline{OE}) =$$

$$= \overline{OA} \cdot \overline{O\Delta} + \overline{OA} \cdot \overline{OE} = \vec{u} \cdot \vec{\upsilon}_1 + \vec{u} \cdot \vec{\upsilon}_2$$



Σχ. 4

Δηλαδή:

$$\vec{\mathbf{u}} \,.\, (\vec{\upsilon}_1 + \vec{\upsilon}_2) = \vec{\mathbf{u}} \,.\, \vec{\upsilon}_1 + \vec{\mathbf{u}} \,.\, \vec{\upsilon}_2 \,.$$

(ἐπιμεριστική ἰδιότητα)

Μέ ὅμοιο τρόπο βρίσκουμε ὅτι:

$$\vec{u}(\vec{\upsilon}_1 + \vec{\upsilon}_2 + \vec{\upsilon}_3) = \vec{u} \cdot [\vec{\upsilon}_1 + (\vec{\upsilon}_2 + \vec{\upsilon}_3)] = \vec{u} \cdot \vec{\upsilon}_1 + \vec{u} \cdot (\vec{\upsilon}_2 + \vec{\upsilon}_3) =$$

$$= \vec{u} \cdot \vec{\upsilon}_1 + \vec{u} \cdot \vec{\upsilon}_2 + \vec{u} \cdot \vec{\upsilon}_3$$

Καί γενικῶς εἶναι:

$$\vec{u} \cdot \sum_i^{\nu} \vec{\upsilon}_i = \vec{u} \cdot \vec{\upsilon}_1 + \vec{u} \cdot \vec{\upsilon}_2 + \cdots + \vec{u} \cdot \vec{\upsilon}_\nu.$$

Γιά τό γινόμενο: $P = (\vec{u}_1 + \vec{u}_2) \cdot (\vec{\upsilon}_1 + \vec{\upsilon}_2 + \vec{\upsilon}_3)$,

ἔχουμε διαδοχικά

$$P = (\vec{u}_1 + \vec{u}_2)\vec{\upsilon}_1 + (\vec{u}_1 + \vec{u}_2)\vec{\upsilon}_2 + (\vec{u}_1 + \vec{u}_2)\vec{\upsilon}_3 =$$

$$= \vec{u}_1 \cdot \vec{\upsilon}_1 + \vec{u}_2 \cdot \vec{\upsilon}_1 + \vec{u}_1 \cdot \vec{\upsilon}_2 + \vec{u}_2 \cdot \vec{\upsilon}_2 + \vec{u}_1 \cdot \vec{\upsilon}_3 + \vec{u}_2 \cdot \vec{\upsilon}_3.$$

Γενικῶς ἔχουμε:

Ἄν $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \ldots + \vec{u}_\mu$ καί $\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_1 + \vec{\upsilon}_2 + \ldots + \vec{\upsilon}_\nu$

τότε: $\vec{u} \cdot \vec{\upsilon} = \Sigma\, \vec{u}_i \vec{\upsilon}_j$, ὅπου $i = 1,2,3,\ldots,\mu$ καί $j = 1,2,3,\ldots,\nu$.

Μέ βάση τά παραπάνω, μποροῦμε εὔκολα, νά ἀποδείξουμε τίς ἰσότητες:

$$(\vec{\mathbf{u}} + \vec{\upsilon})^2 = |\vec{\mathbf{u}}|^2 + |\vec{\upsilon}|^2 + 2\vec{\mathbf{u}} \,.\, \vec{\upsilon}$$

$$(\vec{\mathbf{u}} - \vec{\upsilon})^2 = |\vec{\mathbf{u}}|^2 + |\vec{\upsilon}|^2 - 2\vec{\mathbf{u}} \,.\, \vec{\upsilon}$$

$$(\vec{\mathbf{u}} + \vec{\upsilon})\,(\vec{\mathbf{u}} - \vec{\upsilon}) = |\vec{\mathbf{u}}|^2 - |\vec{\upsilon}|^2.$$

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

§ 5. Ἕνα τρίγωνο εἶναι ὀρθογώνιο, ὅταν καί μόνο ὅταν τό τετράγωνο μιᾶς πλευρᾶς του ἰσοῦται μέ τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν του.

Πράγματι, ἔστω τό τρίγωνο ΑΒΓ (σχ. 5). Θά εἶναι:

$$\vec{AB} + \vec{B\Gamma} = \vec{A\Gamma} \Rightarrow \vec{B\Gamma} = \vec{A\Gamma} - \vec{AB}.$$

Ἄρα: $(\vec{B\Gamma})^2 = (\vec{A\Gamma} - \vec{AB})^2 = (\vec{A\Gamma})^2 + (\vec{AB})^2 - 2\vec{A\Gamma} \cdot \vec{AB}$

ἤ $$B\Gamma^2 = A\Gamma^2 + AB^2 - 2\vec{A\Gamma} \cdot \vec{AB}. \qquad (1)$$

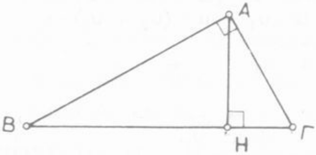
α΄) Ἄν τό τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι ὀρθογώνιο στό Α, τότε: $\vec{A\Gamma} \cdot \vec{AB} = 0$ καί ἡ (1) γίνεται: $B\Gamma^2 = A\Gamma^2 + AB^2$.

β΄) Ἄν τό ΑΒΓ εἶναι τέτοιο, ὥστε $B\Gamma^2 = A\Gamma^2 + AB^2$, ἡ (1) γράφεται:

$$2\,\vec{A\Gamma} \cdot \vec{AB} = 0 \text{ ἤ } \vec{A\Gamma} \cdot \vec{AB} = 0 \Longrightarrow A\Gamma \perp AB.$$

§ 6. Ἄν σ᾽ ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι ΑΗ τό ὕψος, τότε γιά νά εἶναι τό τρίγωνο ὀρθογώνιο, πρέπει καί ἀρκεῖ: $AH^2 = -\overline{HB} \cdot \overline{H\Gamma}$.

Πραγματικά, ἐπειδή $AH \perp H\Gamma$, εἶναι:



Σχ. 5

$$\vec{AH} \cdot \vec{H\Gamma} = 0$$

καί $\vec{BH} \cdot \vec{H\Gamma} = (\vec{BA} + \vec{AH}) \cdot \vec{H\Gamma}$

$= \vec{BA} \cdot \vec{H\Gamma} + \vec{AH} \cdot \vec{H\Gamma} = \vec{BA} \cdot \vec{H\Gamma}$

$= \vec{BA} \cdot (\vec{HA} + \vec{A\Gamma}) = \vec{BA} \cdot \vec{HA} + \vec{BA} \cdot \vec{A\Gamma}$

δηλαδή: $\mathbf{\vec{BH} \cdot \vec{H\Gamma} = \vec{BA} \cdot \vec{HA} + \vec{BA} \cdot \vec{A\Gamma}}$ **(1)**

α΄) Ἄν $A = 90^0$, τότε $\vec{BA} \cdot \vec{A\Gamma} = 0$ καί ἡ (1) γίνεται:

$\vec{BH} \cdot \vec{H\Gamma} = \vec{BA} \cdot \vec{HA} = (\vec{BH} + \vec{HA}) \cdot \vec{HA} = \vec{BH} \cdot \vec{HA} + (\vec{HA})^2$

Ἀλλά $\vec{BH} \perp \vec{HA}$, ἄρα $\vec{BH} \cdot \vec{HA} = 0$, ὁπότε

$$\vec{BH} \cdot \vec{H\Gamma} = (\vec{HA})^2$$

καί ἐπειδή τά $\vec{BH}$ καί $\vec{H\Gamma}$ εἶναι συγγραμμικά, θά ἔχουμε:

$$HA^2 = \overline{BH} \cdot \overline{H\Gamma} \text{ ἤ } \mathbf{HA^2 = -\overline{HB} \cdot \overline{H\Gamma}}.$$

β΄) Θεωροῦμε ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ, στό ὁποῖο εἶναι $HA^2 = \overline{BH} \cdot \overline{H\Gamma}$. Ἡ ἰσότητα ἰσοδυναμεῖ μέ τήν:

$$\vec{BH} \cdot \vec{H\Gamma} = (\vec{HA})^2 = \overline{BH} \cdot \overline{HA} + (\vec{HA})^2 = (\vec{BH} + \vec{HA}) \cdot \vec{HA} = \vec{BA} \cdot \vec{HA} \qquad (2)$$

Συγκρίνοντας τίς (1) καί (2) ἔχουμε:

$$\vec{BA} \cdot \vec{A\Gamma} = 0 \Longrightarrow AB \perp A\Gamma.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Σέ ὀρθοκανονικό σύστημα ἀξόνων εἶναι:

$\vec{u}$ (4,3)	$\vec{u}$ (−3,5)	$\vec{u}$ (3,7)	Νά ὑπολογίσετε τίς συντεταγμένες τοῦ ἀθροίσματος $\vec{W} = \vec{u} + \vec{\upsilon}$.
$\vec{\upsilon}$ (1,−4)	$\vec{\upsilon}$ (−4,−2)	$\vec{\upsilon}$ (−2,−7)	

2. Σέ ὀρθοκανονικό σύστημα ἀξόνων ἔχουμε:

$\vec{u}\,(5,-2)$	$\vec{u}\,(2,6)$	$\vec{u}\,(-7,4)$
$\vec{\upsilon}\,(-1,4)$	$\vec{\upsilon}\,(1,8)$	$\vec{\upsilon}\,(-5,4)$

Νά ὑπολογίσετε τίς συντεταγμένες τῆς διαφορᾶς $\vec{W} = \vec{u} - \vec{\upsilon}$.

3) Στό τετράεδρο ΑΒΓΔ νά ἀποδείξετε ὅτι:

1ο: $\vec{ΒΓ} \cdot \vec{ΑΔ} + \vec{ΓΑ} \cdot \vec{ΒΔ} + \vec{ΑΒ} \cdot \vec{ΓΔ} = 0 \qquad (\vec{ΑΒ} = \vec{ΑΓ} + \vec{ΓΒ})$

2ο: Ἄν οἱ ἀκμές ΒΓ, ΑΔ εἶναι ὀρθογώνιες καί ΓΑ, ΒΔ ὀρθογώνιες, τότε καί οἱ ΑΒ,ΓΔ εἶναι ὀρθογώνιες.

4. Ἕνα τρίγωνο εἶναι ὀρθογώνιο, ὅταν καί μόνο ὅταν μία διάμεσός του εἶναι τό μισό τῆς ἀντίστοιχης πλευρᾶς.

5. Ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ γιά νά εἶναι ὀρθογώνιο στό Α, πρέπει καί ἀρκεῖ

$$\overline{ΒΓ} \cdot \overline{ΒΗ} = ΒΑ^2 \quad ἤ \quad \overline{ΓΒ} \cdot \overline{ΓΗ} = ΓΑ^2$$

ὅπου ΑΗ τό ὕψος.

6. Σέ κάθε ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (ὅπου ΑΗ ὕψος), νά ἀποδείξετε ὅτι :

1ο: $ΑΒ \cdot ΑΓ = ΒΓ \cdot ΑΗ$, 2ο: $\dfrac{\overline{ΗΒ}}{\overline{ΗΓ}} = -\dfrac{ΑΒ^2}{ΑΓ^2}$, 3ο: $\dfrac{1}{ΑΒ^2} + \dfrac{1}{ΑΓ^2} = \dfrac{1}{ΑΗ^2}$

(Οἱ ἀποδείξεις νά γίνουν διανυσματικῶς).

7. Ἄν ΑΜ εἶναι διάμεσος τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, τότε:

1ο: $ΑΒ^2 + ΑΓ^2 = 2ΑΜ^2 + \dfrac{ΒΓ^2}{2}$ (διανυσματικῶς).

2ο: $ΑΒ^2 - ΑΓ^2 = 2\overline{ΒΓ} \cdot \overline{ΜΗ}$ (ΑΗ ὕψος).

8. Σέ κάθε τρίγωνο ΑΒΓ νά ἀποδείξετε διανυσματικῶς ὅτι:

α΄) $α^2 = β^2 + γ^2 - 2βγ συνΑ$, β΄) $β^2 = γ^2 + α^2 - 2γα συνΒ$ καί
γ΄) $γ^2 = α^2 + β^2 - 2αβ συνΓ$.

9. Ἄν Η εἶναι τό ὀρθόκεντρο ἑνός τριγώνου ΑΒΓ καί ΑΑ΄, ΒΒ΄, ΓΓ΄ τά ὕψη του:

1ο) Ποιά εἶναι ἡ τιμή τοῦ $\vec{ΒΗ} \cdot \vec{ΑΓ}$; 2ο) Νά δείξετε ὅτι: $\vec{Α'Α} \cdot \vec{Α'Η} = -\overline{Α'Β} \cdot \overline{Α'Γ}$,

3ο) $\vec{ΑΗ} \cdot \vec{ΑΒ} = \overline{ΑΒ} \cdot \overline{ΑΓ'} = \overline{ΑΗ} \cdot \overline{ΑΑ'}$ καί $\overline{ΑΒ'} \cdot \overline{ΑΓ} = \overline{ΑΒ} \cdot \overline{ΑΓ'}$,

4ο) $\vec{ΗΑ} \cdot \vec{ΗΒ} = \overline{ΗΑ} \cdot \overline{ΗΑ'} = \overline{ΗΒ} \cdot \overline{ΗΒ'}$ καί $\overline{ΗΑ} \cdot \overline{ΗΑ'} = \overline{ΗΒ} \cdot \overline{ΗΒ'} = \overline{ΗΓ} \cdot \overline{ΗΓ'}$.

10. Ἔχουμε τρία σημεῖα Α,Β,Γ πάνω σέ μιά εὐθεία καί Μ ἕνα ἄλλο σημεῖο τοῦ ὁποίου ἡ προβολή πάνω στήν εὐθεία εἶναι Η. Νά ἀποδειχτεῖ ὅτι:

$$ΜΑ^2 \cdot \overline{ΒΓ} + ΜΒ^2 \cdot \overline{ΓΑ} + ΜΓ^2 \cdot \overline{ΑΒ} + \overline{ΒΓ} \cdot \overline{ΓΑ} \cdot \overline{ΑΒ} = 0 \quad \text{(Stewart)}.$$

11. Ἄν $|\vec{u}| = u$, $|\vec{\upsilon}| = \upsilon$ καί $(\vec{u}, \vec{\upsilon}) = θ$, νά ὑπολογίσετε τό γινόμενο $\vec{u} \cdot \vec{\upsilon}$ στίς ἀκόλουθες περιπτώσεις:

1ο: $u = 5$, $\upsilon = 7$, $θ = 30^0$	2ο: $u = 12$, $\upsilon = 18$, $θ = 60^0$	3ο: $u = \sqrt{5}$, $\upsilon = \dfrac{2}{3}$, $θ = 150^0$	4ο: $u = \sqrt{17}$, $\upsilon = 7\sqrt{2}$, $θ = 135^0$

12. Σέ ὀρθοκανονικό σύστημα $(O, \vec{i}, \vec{j})$ νά κατασκευάσετε τά διανύσματα $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$

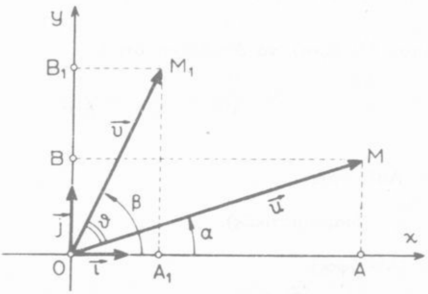
καί $\vec{\upsilon} = \vec{i} - \vec{j}$. Ἀκολούθως νά ὁρίσετε τό γινόμενο $\vec{u} \cdot \vec{\upsilon}$. Ποιά ἰδιότητα τῶν διχοτόμων γωνίας ἐπαληθεύουμε ἐδῶ;

§ 7. ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΕΚΦΡΑΣΗ ΤΟΥ ΕΣΩΤΕΡΙΚΟΥ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ.—

Ἄς εἶναι xOψ (σχ. 6) ἕνα ὀρθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων, πού σημαίνει πώς τά μοναδιαῖα διανύσματα $\vec{i}$ καί $\vec{j}$ τῶν ἀξόνων Ox καί Oy ἔχουν τό ἴδιο μῆκος, 1, καί εἶναι κάθετα. Τότε:

$$\vec{i}^2 = 1, \quad \vec{j}^2 = 1 \quad \text{καί} \quad \vec{j} \cdot \vec{i} = 0.$$

Ἄς εἶναι X,Y καί X_1, Y_1 οἱ συντεταγμένες προβολές ἀντιστοίχως τῶν διανυσμάτων $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$ καί $\overrightarrow{OM_1} = \vec{\upsilon}$ τοῦ ἐπιπέδου xOy. Τότε:



Σχ. 6

$\vec{u} = X\vec{i} + Y\vec{j}$ καί $\vec{\upsilon} = X_1\vec{i} + Y_1\vec{j}$. Ἄρα:

$\vec{u} \cdot \vec{\upsilon} = (X\vec{i} + Y\vec{j})(X_1\vec{i} + Y_1\vec{j}) =$

$XX_1\vec{i}^2 + (XY_1 + YX_1)(\vec{i} \cdot \vec{j}) + YY_1\vec{j}^2$,

ὁπότε:

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{\upsilon} = XX_1 + YY_1} \qquad (1)$$

Δηλαδή: **Τό ἐσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων εἶναι ἴσο μέ τό ἄθροισμα τῶν γινομένων πού βρίσκουμε, ἄν πολλαπλασιάσουμε τίς ὁμώνυμες συντεταγμένες προβολές τους.**

Συνέπειες:

1η: $|\vec{u}|^2 = XX + YY = X^2 + Y^2$, ὁπότε: $|\vec{u}| = \sqrt{X^2 + Y^2}$ (2)

2η: Ἐπειδή $\vec{u} \cdot \vec{\upsilon} = |\vec{u}|\,|\vec{\upsilon}|$ συνθ, ἕπεται ὅτι:

$$\text{συνθ} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{\upsilon}}{|\vec{u}|\,|\vec{\upsilon}|} = \frac{XX_1 + YY_1}{\sqrt{X^2 + Y^2} \cdot \sqrt{X_1^2 + Y_1^2}} \qquad (3)$$

§ 8. ΣΥΝΘΗΚΗ ΚΑΘΕΤΟΤΗΤΑΣ ΔΥΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ.—

Ἄν τά διανύσματα εἶναι κάθετα, τότε $\vec{u} \cdot \vec{\upsilon} = 0$ ὁπότε ἡ (1) τῆς (§ 7) γίνεται:

$$XX_1 + YY_1 = 0.$$

Ἀντιστρόφως, ἄν $XX_1 + YY_1 = 0$, τότε, ἄν $\vec{u} \neq 0$ καί $\vec{\upsilon} \neq 0$

$$\vec{u} \cdot \vec{\upsilon} = 0 \text{ ἤ } u \cdot \upsilon \text{ συνθ} = 0 \text{ ἤ συνθ} = 0, \text{ ὁπότε: } \theta = \frac{\pi}{2}.$$

Ὥστε : **Σέ ὀρθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων, γιά νά εἶναι δύο μή μηδενικά διανύσματα $\vec{u}(X,Y)$ καί $\vec{\upsilon}(X_1, Y_1)$ κάθετα, πρέπει καί ἀρκεῖ νά εἶναι:**

$$\boxed{XX_1 + YY_1 = 0}$$

§ 9. ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΔΥΟ ΣΗΜΕΙΩΝ.—Σ' ἕνα ὀρθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων xOψ (σχ. 7) ἔχουμε δύο σημεῖα Α (x_1, y_1) καί Β (x_2, y_2). Οἱ συντεταγμένες προβολές τοῦ διανύσματος $\vec{AB}$ εἶναι :

$X = x_2 - x_1$ καί $Y = y_2 - y_1$.

Ἐπειδή ὅμως:

$$\vec{AB}^2 = \overline{AB}^2 = X^2 + Y^2 =$$
$$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

θά ἔχουμε:

Σχ. 7

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Ἄν $|\vec{AB}| = AB = d$, τότε:

$$\mathbf{d} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Ἡ ἀπόσταση ἑνός σημείου Μ (x,y) ἀπό τήν ἀρχή Ο (0,0) εἶναι:

$$\mathbf{OM} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

§ 10. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΤΗΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΕΝΗΣ ΓΩΝΙΑΣ ΔΥΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ.— Θεωροῦμε ἕνα ὀρθοκανονικό σύστημα ἀξόνων μέ προσανατολισμό:

$$(\vec{i}, \vec{j}) = + \frac{\pi}{2}.$$

Ἄς εἶναι α, β, θ οἱ ἀλγεβρικές τιμές ἀντιστοίχως τῶν γωνιῶν $(\vec{Ox}, \vec{u})$, $(\vec{Ox}, \vec{\upsilon})$ καί $(\vec{u}, \vec{\upsilon})$. Θά εἶναι (σχ. 6)

$$\theta = \beta - \alpha \quad \text{καί} \quad \text{ημ}\theta = \text{ημ}\beta\,\text{συν}\alpha - \text{ημ}\alpha\,\text{συν}\beta \qquad (1)$$

Ἀλλά: $X = OM\,\text{συν}\alpha$, $Y = OM\,\text{ημ}\,\alpha$ | $X_1 = OM_1\,\text{συν}\,\beta$, $Y_1 = OM_1\,\text{ημ}\,\beta$ | ὁπότε ἡ (1) γίνεται:

$$\text{ημ}\,\theta = \frac{XY_1 - X_1Y}{OM \cdot OM_1} \quad \text{ἤ} \quad \mathbf{ημθ} = \frac{XY_1 - X_1Y}{\sqrt{X^2+Y^2}\,\sqrt{X_1^2+Y_1^2}} \qquad (2)$$

Εὔκολα τώρα ἀποδεικνύεται ὅτι:

$$\eta\mu^2\,\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta = \frac{(XX_1 + YY_1)^2 + (XY_1 - X_1Y)^2}{(X^2 + Y^2)\,(X_1^2 + Y_1^2)} = \frac{(X^2 + Y^2)\,(X_1^2 + Y_1^2)}{(X^2 + Y^2)\,(X_1^2 + Y_1^2)} = 1$$

καί
$$\varepsilon\varphi\,\theta = \frac{XY_1 - X_1Y}{XX_1 + YY_1}$$

Γιά νά εἶναι παράλληλα τά διανύσματα $\vec{u}$ καί $\vec{\upsilon}$, πρέπει τό ημθ νά εἶναι μηδέν. Δηλαδή

$$XY_1 - X_1Y = 0 \quad \text{ἤ} \quad \frac{X_1}{X} = \frac{Y_1}{Y} \quad \text{ἤ} \quad \frac{Y}{X} = \frac{Y_1}{X_1}$$

Σημ.: Ὁ λόγος τῆς τεταγμένης ἑνός διανύσματος πρός τήν τετμημένη του λέγεται **συντελεστής κατευθύνσεως** ἤ **κλίση** τοῦ διανύσματος. Ἑπομένως, σύμφωνα μέ τήν προηγούμενη σχέση, ἄν $\lambda_1 = \frac{Y}{X}$ καί $\lambda_2 = \frac{Y_1}{X_1}$ εἶναι ἀντιστοίχως οἱ συντελεστές κατευθύνσεως τῶν $\vec{u}$ καί $\vec{\upsilon}$ θά ἔχουμε: $\vec{u} \,//\, \vec{\upsilon} \iff \lambda_1 = \lambda_2$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

13. Σέ ὀρθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων χΟψ, νά ὑπολογίσετε τό ἐσωτερικό γινόμενο, τό συνημίτονο, τό ἡμίτονο καί τό μέτρο τῆς γωνίας τῶν διανυσμάτων $\vec{u}$, $\vec{\upsilon}$ στίς ἀκόλουθες περιπτώσεις:

α') $\vec{u}\,(-5,3)$ καί $\vec{\upsilon}\,(6,10)$

β') $\vec{u}\,(0,2)$ καί $\vec{\upsilon}\,(-\sqrt{3},1)$

γ') $\vec{u}\,(2,3)$ καί $\vec{\upsilon}\left(-\frac{5}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

δ') $\vec{u}\,(2,4)$ καί $\vec{\upsilon}\,(-3\sqrt{2}, -\sqrt{2})$

ε') $\vec{u}\,(\alpha,\beta)$ καί $\vec{\upsilon}\,(-\kappa\beta, \kappa\alpha)$

στ) $\vec{u}\,(3,4)$ καί $\vec{\upsilon}\,(5,13)$.

14. Νά ἐξετάσετε ἄν τά σημεῖα Α(0,–2), Β(–2,–1) καί Γ(2,2) ὁρίζουν ὀρθογώνιο τρίγωνο.

15. Τό ἴδιο καί γιά τά σημεῖα Α(4,0), Β(–1,0) καί Γ(0,2).

16. Νά ἀποδείξετε ὅτι τά σημεῖα Α(4,0), Β(7,8), Γ(0,10) καί Δ(–3,2) εἶναι κορυφές παραλληλογράμμου.

17. Νά ἀποδείξετε ὅτι τά σημεῖα Α(8,0), Β(6,6), Γ(–3,3) καί Δ(–1, –3) εἶναι κορυφές ὀρθογωνίου καί νά ὑπολογίσετε τά μήκη τῶν πλευρῶν του.

18. Νά ἀποδείξετε ὅτι τά σημεῖα Α(10,8), Β(–3,9), Γ(–4, –4) καί Δ(9,–5) εἶναι κορυφές τετραγώνου. Νά ὑπολογίσετε τά μήκη τῶν πλευρῶν καί τῶν διαγωνίων του, τίς συντεταγμένες τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων καί νά ἀποδείξετε ὅτι οἱ διαγώνιες διχοτομοῦν τίς γωνίες του.

19. Νά ἀποδείξετε ὅτι τά σημεῖα Α(–3, –7), Β(0,–2) καί Γ(6,8) βρίσκονται πάνω σέ εὐθεία.

20. Νά ἀποδείξετε ὅτι τά σημεῖα Α(–1, –3), Β(8,3), Γ(3,4), Δ(0,2) εἶναι κορυφές ἰσοσκελοῦς τραπεζίου.

21. Νά ὁρίσετε τό x, ὥστε τά σημεῖα Α(x, –3), Β(1,1), Γ(–4,3) νά βρίσκονται πάνω σέ εὐθεία.

22. Ἔχετε τά σημεῖα Α(3,8) καί Β(2,–3). Νά ἀποδείξετε ὅτι, γιά νά βρίσκεται ἕνα σημεῖο Μ ἐπάνω σέ κύκλο μέ διάμετρο τό ΑΒ, πρέπει καί ἀρκεῖ: $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$.

23. Ἔχετε τά σημεῖα Α(0,3), Β(5,2) καί Γ(–3,7). Νά ἀποδείξετε ὅτι γιά νά βρίσκεται ἕνα σημεῖο Μ πάνω στό ὕψος ΑΗ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, πρέπει καί ἀρκεῖ: $\vec{AM} \cdot \vec{B\Gamma} = 0$.

24. Ἔχετε τά σημεῖα Α(–2,–2), Β(2,1), Γ(0,2). Νά ἀποδείξετε ὅτι τό τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι ὀρθογώνιο καί νά ὑπολογίσετε τό μῆκος τῆς ὑποτείνουσας καί τό συνημίτονο μιᾶς ὀξείας γωνίας του.

§ 11. ΠΑΡΑΛΛΗΛΗ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΤΩΝ ΑΞΟΝΩΝ.—Θεωροῦμε δύο ὀρθοκανονικά συστήματα ἀξόνων μέ παράλληλους ἄξονες καί ὑποθέτουμε ὅτι τά μοναδιαῖα διανύσματα στούς παράλληλους ἄξονες εἶναι ἀντιστοίχως ἰσοδύναμα. Ὑποθέτουμε ἀκόμη ὅτι εἶναι (x_0, y_0) οἱ συντεταγμένες τοῦ Ο στό xOψ. Ὁπότε (Σχ. 8):

$$\vec{OO_1} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} \qquad (1)$$

Ἄν Μ εἶναι κάποιο σημεῖο μέ συντεταγμένες (x, y) ὡς πρός τό σύστημα xOy καί (X,Y) ὡς πρός τό σύστημα $x_1O_1y_1$ τότε θά εἶναι:

$\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ (2), $\vec{O_1M} = X\vec{i} + Y\vec{j}$ (3)

Ἀλλά $\vec{OM} = \vec{OO_1} + \vec{O_1M}$ (4)

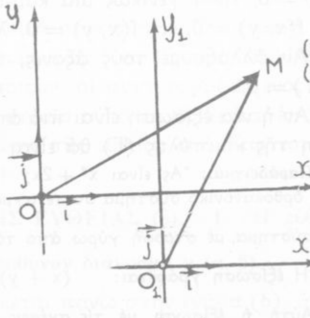
Δηλαδή:

$$x\vec{i} + y\vec{j} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + X\vec{i} + Y\vec{j} =$$

$$= (x_0 + X)\vec{i} + (y_0 + Y)\vec{j},$$

ὁπότε:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x_0 + X \\ y &= y_0 + Y \end{aligned}} \quad ἤ \quad \boxed{\begin{aligned} X &= x - x_0 \\ Y &= y - y_0 \end{aligned}}$$

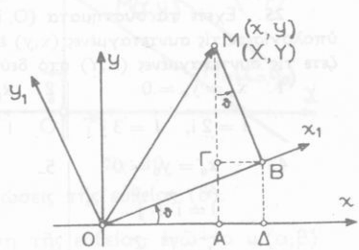


Σχ. 8

§ 12. ΣΤΡΟΦΗ ΤΟΥ ΟΡΘΟΚΑΝΟΝΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΓΥΡΩ ΑΠΟ ΤΗΝ ΑΡΧΗ Ο.— Ἄς εἶναι xOψ ἕνα ὀρθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων (σχ. 9) καί M(x,y) ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο στό ἐπίπεδο.

Στρέφουμε τό xOψ γύρω ἀπό τό Ο κατά γωνία θ καί τό φέρνουμε στή θέση x_1Oy_1. Ἄς εἶναι τώρα (X,Y) οἱ συντεταγμένες τοῦ Μ στό νέο σύστημα.

Γράφουμε τή ΒΔ κάθετη στήν Ox καί τή ΒΓ κάθετη στή ΜΑ. Θά εἶναι τότε $\widehat{ΓΜΒ} = θ$ καί



Σχ. 9

$$x = \overline{OA} = \overline{OΔ} - \overline{AΔ} = \overline{OΔ} - \overline{ΓB} = \overline{OB}\,συν\,θ - \overline{BM}\,ημ\,θ = X\,συν\,θ - Y\,ημ\,θ$$

$$καί\ \ y = \overline{AM} = \overline{AΓ} + \overline{ΓM} = \overline{ΔB} + \overline{ΓM} = \overline{OB}\cdot ημ\,θ + \overline{BM}\,συν\,θ = X\,ημ\,θ + Y\,συν\,θ$$

Ἄρα:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{X\,συν\,θ - Y\,ημ\,θ} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{X\,ημ\,θ + Y\,συν\,θ} \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Λύνοντας τό σύστημα ὡς πρός Χ καί Υ, βρίσκουμε:

$$\left.\begin{aligned} X &= x\,\sigma\upsilon\nu\,\theta + y\,\eta\mu\,\theta \\ Y &= -\,x\,\eta\mu\,\theta + y\,\sigma\upsilon\nu\,\theta \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Παράδειγμα: Γιά $\theta = \frac{\pi}{4}$, οἱ τύποι (1) δίνουν:

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}\,(X - Y) \text{ καί } y = \frac{\sqrt{2}}{2}\,(X + Y)$$

Οἱ τύποι (2) δίνουν : $X = \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)$ καί $Y = \frac{\sqrt{2}}{2}\,(-x + y)$.

Γνωρίζουμε ὅτι σ' ἕνα σύστημα συντεταγμένων xOψ, ὁ γεωμετρικός τόπος τῶν σημείων $M(x,y)$ τῶν ὁποίων οἱ συντεταγμένες ἐπαληθεύουν μία σχέση $f(x,y) = 0$, εἶναι γενικῶς μία καμπύλη (Γ), πού λέγεται γράφημα τῆς ἐξισώσεως $f(x, y) = 0$. Ἡ $f(x, y) = 0$, λέγεται **ἐξίσωση τῆς καμπύλης** (Γ).

Ἄν ἀλλάξουμε τούς ἄξονες, ἡ ἐξίσωση μετασχηματίζεται σέ μιάν ἄλλη $f_1(X,Y) = 0$.

Ἄν ἡ νέα ἐξίσωση εἶναι πιό ἁπλή ἀπό τήν προηγούμενη, ἡ κατασκευή καί μελέτη τῆς καμπύλης (Γ) θά εἶναι πιό εὔκολη.

Παράδειγμα.: Ἄς εἶναι $x^2 + 2xy + y^2 + \sqrt{2}\,(x - y) = 0$ ἡ ἐξίσωση μιᾶς καμπύλης (Γ) σέ ὀρθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων. Νά σχηματίσετε τήν ἐξίσωση τῆς (Γ) σέ ὁμόλογο σύστημα, μέ στροφή γύρω ἀπό τό 0 κατά γωνία $\frac{\pi}{4}$.

Ἡ ἐξίσωση γράφεται: $\quad (x + y)^2 + \sqrt{2}\,(x - y) = 0.$

Αὐτή ἡ ἐξίσωση μέ τίς σχέσεις $X = \frac{\sqrt{2}}{2}\,(x + y)$ καί $Y = \frac{\sqrt{2}}{2}\,(-x + y)$, μετασχηματίζεται στό νέο σύστημα στήν ἐξίσωση $Y = X^2$, πού παριστάνει παραβολή μέ κορυφή τήν ἀρχή τοῦ συστήματος τῶν ἀξόνων καί ἄξονα τόν Y.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

25. Ἔχετε τά συστήματα $(O, \vec{i}, \vec{j})$, $(\omega, \vec{I}, \vec{J})$, ὅπου ω ἔχει συντεταγμένες (x_0, y_0). Νά ὑπολογίσετε τίς συντεταγμένες (x,y) ἑνός σημείου M ὡς πρός τό πρῶτο σύστημα, ἄν γνωρίζετε τίς συντεταγμένες (X,Y) στό δεύτερο σύστημα στίς ἑπόμενες περιπτώσεις:

1. $x_0 = y_0 = 0$ $\vec{I} = 2\vec{i}$, $\vec{J} = 3\vec{j}$	2. $x_0 = y_0 = 0$ $\vec{I} = -4\vec{i}$, $\vec{J} = \frac{1}{2}\vec{j}$	3. $x_0 = 2$, $y_0 = 0$ $\vec{I} = \vec{i}$, $\vec{J} = \vec{j}$
4. $x_0 = y_0 = 0$ $\vec{I} = \vec{i} + \vec{j}$ $\vec{J} = \vec{i} - \vec{j}$	5. $x_0 = 0$, $y_0 = 3$ $\vec{I} = \vec{i}$ $\vec{J} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$	6. $x_0 = 1$, $y_0 = -2$ $\vec{I} = \vec{i} - 2\vec{j}$ $\vec{J} = 2\vec{i} - 5\vec{j}$.

26. Ἕνα ὀρθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων χOψ στρέφεται κατά τήν ὀρθή φορά κατά γωνία θ γύρω ἀπό τό O. Ἕνα σημεῖο M ἔχει στό νέο σύστημα συντεταγμένες (X,Y). Νά ὑπολογίσετε τίς συντεταγμένες του (x,y) στό πρῶτο σύστημα, ὅταν:

$$1.\ \left.\begin{aligned}\theta &= \frac{\pi}{4}\\ \theta &= \frac{\pi}{3}\\ \theta &= \frac{\pi}{6}\end{aligned}\right\} \qquad 2.\ \left.\begin{aligned}\theta &= -\frac{\pi}{4}\\ \theta &= \frac{2\pi}{3}\\ \theta &= -\frac{\pi}{6}\end{aligned}\right\} \qquad 3.\ \begin{aligned}\theta &= \frac{3\pi}{4}\\ \theta &= -\frac{2\pi}{3}\\ \theta &= \frac{5\pi}{6}\end{aligned}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙ

Η ΕΥΘΕΙΑ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΥΘΕΙΑΣ

§ **13**. Μία εὐθεία ὁρίζεται μέ δύο διαφορετικά σημεῖα ἤ μέ ἕνα σημεῖο καί μέ ἕνα διευθύνον διάνυσμα*. Θά προσπαθήσουμε τώρα νά βροῦμε τήν ἱκανή καί ἀναγκαία συνθήκη πού πρέπει νά ἱκανοποιοῦν οἱ συντεταγμένες ἑνός μεταβλητοῦ σημείου στό ἐπίπεδο xOψ, ὥστε τό σημεῖο αὐτό νά βρίσκεται ἐπάνω σέ μιά εὐθεία. Αὐτή ἡ συνθήκη λέγεται ἐξίσωση τῆς εὐθείας στό Καρτεσιανό ἐπίπεδο.

§ **14. ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΗΣ ΕΥΘΕΙΑΣ (δ).— Ι. Ἡ εὐθεία (δ) ὁρίζεται ἀπό τό σημεῖο $M_0(x_0, y_0)$ καί τό διευθύνον διάνυσμα $\vec{u}$ (α, β).**

Ἕνα σημεῖο M(x,y) τοῦ ἐπιπέδου θά βρίσκεται πάνω στήν εὐθεία (δ), ὅταν καί μόνο ὅταν ἔχουμε (Σχ. 10).

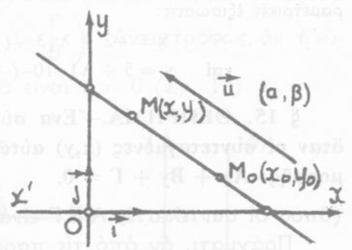
$$\overrightarrow{M_0M} = \lambda \vec{u},$$

δηλαδή:

$$(x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j} = \lambda(\alpha\vec{i} + \beta\vec{j}),$$

Ὁπότε:

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} x = x_0 + \alpha\lambda \\ y = y_0 + \beta\lambda \end{cases} \quad (\lambda \in R)$$



Σχ. 10

Οἱ ἐξισώσεις (I) λέγονται παραμετρικές ἐξισώσεις τῆς εὐθείας (δ).

Οἱ ἀριθμοί α καί β καθορίζουν τή διεύθυνση τῆς εὐθείας, ἐνῶ τό $\vec{u}$ (α,β) εἶναι τό ἀντίστοιχο ἐλεύθερο διάνυσμα.

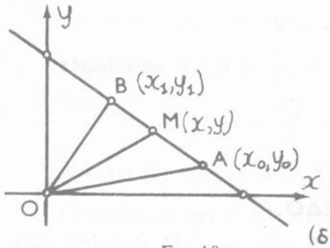
Παράδειγμα: Ἡ εὐθεία (δ) πού περνάει ἀπό τό σημεῖο M_0 (−4,7) καί ἔχει διευθύνον διάνυσμα $\vec{u}$ (−2,3) ἔχει παραμετρικές ἐξισώσεις:

$$x = -4 - 2\lambda \quad \text{καί} \quad y = 7 + 3\lambda.$$

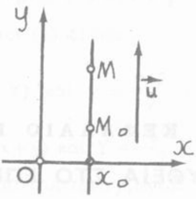
Εἰδικές περιπτώσεις: Ἄν $\alpha = 0$, τότε $x = x_0$ καί ἡ εὐθεία εἶναι παράλληλη μέ τόν ἄξονα Oy (σχ. 10β).

---

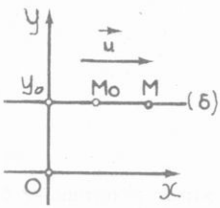
* «Διευθύνον» λέγεται τό διάνυσμα πού εἶναι παράλληλο μέ τήν εὐθεία.



Σχ. 10α



Σχ. 10β



Σχ. 10γ

Ἄν $\beta = 0$, τότε $y = y_0$ καί ἡ εὐθεία εἶναι παράλληλη μέ τόν ἄξονα Ox (σχ. 10γ)

II. Ἡ εὐθεία (δ) ὁρίζεται μέ δύο σημεῖα A (x_0, y_0) καί B (x_1, y_1). (Σχ. 10α)

Σ᾽ αὐτή τήν περίπτωση ἡ εὐθεία μπορεῖ νά θεωρηθεῖ ὅτι περνάει ἀπό τό σημεῖο $A(x_0, y_0)$ καί ὅτι εἶναι παράλληλη μέ τό διάνυσμα

$$\overrightarrow{AB}\,(x_1 - x_0,\ y_1 - y_0).$$

Ἑπομένως οἱ παραμετρικές ἐξισώσεις της θά εἶναι:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + \lambda\,(x_1 - x_0) \\ y &= y_0 + \lambda\,(y_1 - y_0), \end{aligned}\right\},\ \text{ὅπου } \lambda \in \mathbf{R}.$$

Παράδειγμα: Ἡ εὐθεία (δ) πού περνάει ἀπό τά σημεῖα A(−2,5) καί B(3,−10) ἔχει παραμετρικές ἐξισώσεις:

$$x = -2 + \lambda\,[3 - (-2)] = -2 + \lambda\,(3 + 2) = -2 + 5\lambda$$

$$\text{καί} \quad y = 5 + \lambda\,[-10 - (-5)] = 5 + \lambda\,(-10 + 5) = 5 - 5\lambda, \text{ ὅπου } \lambda \in \mathbf{R}.$$

§ 15. ΘΕΩΡΗΜΑ.—Ἕνα σύνολο σημείων ἀποτελεῖ εὐθεία, ὅταν καί μόνο ὅταν οἱ συντεταγμένες (x,y) αὐτῶν τῶν σημείων ἐπαληθεύουν μία ἐξίσωση τῆς μορφῆς: $\mathbf{Ax + By + \Gamma = 0}$.

(ὅπου οἱ συντελεστές A,B,Γ εἶναι ἀνεξάρτητοι ἀπό x,y καί $A \cdot B \neq 0$).

Πράγματι, ἄν ἀπό τίς παραμετρικές ἐξισώσεις:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + \alpha\lambda \\ y &= y_0 + \beta\lambda \end{aligned}\right\}$$

ἀπαλείψουμε τό λ, βρίσκουμε:

$$\beta(x - x_0) - \alpha(y - y_0) = 0 \qquad (1)$$

ἤ

$$\beta x - \alpha y + \alpha y_0 - \beta x_0 = 0.$$

Ἄν θέσουμε: $A = \beta$, $B = -\alpha$, $\Gamma = \alpha y_0 - \beta x_0$, λαμβάνουμε:

$$\mathbf{Ax + By + \Gamma = 0.} \qquad (2)$$

Ἀντιστρόφως. Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι $A \neq 0$ (ἀφοῦ $A \cdot B \neq 0$). Ἄν $P\,(x_0, y_0)$ εἶναι ἕνα σημεῖο πού ἐπαληθεύει τή (2), θά εἶναι:

$$Ax_0 + By_0 + \Gamma = 0. \qquad (3)$$

Ἀφαιροῦμε κατά μέλη τίς (2) καί (3) καί ἔχουμε:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \qquad (4)$$

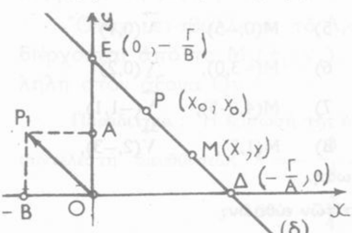
Ἀπό τίς (2) καί (4) προκύπτει ὅτι τά σημεῖα Μ (x,y) βρίσκονται πάνω σέ μιά εὐθεία πού περνάει ἀπό τό Ρ καί πού ἔχει διευθύνον διάνυσμα τό $\vec{u}\,(-B,A)$.

Ἡ ἐξίσωση (2) ὀνομάζεται **γραμμική** καί εἶναι πρώτου βαθμοῦ ὡς πρός x καί y.

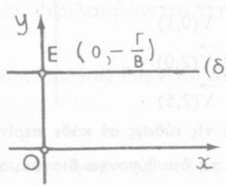
Στά ἑπόμενα θά λέμε ἡ εὐθεία $Ax+By+\Gamma=0$ (δ) καί θά ἐννοοῦμε τήν εὐθεία τῆς ὁποίας τά σημεῖα ἔχουν συντεταγμένες πού ἐπαληθεύουν τή (δ).

Παρατηρήσεις: α) Ἄν $A \neq 0$ καί $B \neq 0$ ἡ εὐθεία (δ) συναντᾶ τούς ἄξονες Ox καί Oy στά σημεῖα ἀντιστοίχως $\Delta\left(-\dfrac{\Gamma}{A}, 0\right)$ καί $E\left(0, -\dfrac{\Gamma}{B}\right)$. Ἡ τετμημένη $\left(-\dfrac{\Gamma}{A}\right)$ τοῦ Δ λέγεται **τετμημένη ἐπί τήν ἀρχή** καί ἡ τεταγμένη $\left(-\dfrac{\Gamma}{B}\right)$ τοῦ Ε λέγεται **τεταγμένη ἐπί τήν ἀρχή** τῆς (δ). Τό διάνυσμα $\overrightarrow{OP_1}(-B, A)$ πού εἶναι παράλληλο μέ τή (δ) θά ἔχει συντελεστή κατευθύνσεως $\lambda = \dfrac{A}{-B}$. Ὁ ἀριθμός αὐτός λ λέγεται καί **συντελεστής κατευθύνσεως** ἤ **κλίση** τῆς εὐθείας (δ) (Σχ. 11).

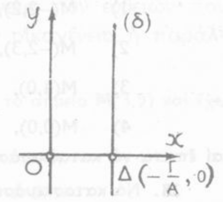
β) Ἄν $A=0$ καί $B \neq 0$, τότε ἡ εὐθεία (δ) εἶναι παράλληλη μέ τόν ἄξονα Ox καί τέμνει τόν ἄξονα Oy στό σημεῖο $E\left(0, -\dfrac{\Gamma}{B}\right)$. Ἀντιστρόφως, ἄν ἡ εὐθεία (δ) εἶναι παράλληλη μέ τόν ἄξονα Ox θά εἶναι $A=0$ (Σχ. 12).



Σχ. 11



Σχ. 12



Σχ. 13

γ) Ἄν $B=0$ καί $A \neq 0$, τότε ἡ εὐθεία (δ) εἶναι παράλληλη μέ τόν ἄξονα Oy καί τέμνει τόν Ox στό σημεῖο $\Delta\left(-\dfrac{\Gamma}{A}, 0\right)$.

Ἀντιστρόφως, ἄν ἡ εὐθεία (δ) εἶναι παράλληλη μέ τόν ἄξονα Oy, θά εἶναι $B=0$. (Σχ. 13).

δ) Ἄν $\Gamma=0$ καί $AB \neq 0$, τότε οἱ συντεταγμένες τῆς ἀρχῆς τοῦ συστήματος ἐπαληθεύουν τήν ἐξίσωση (δ). Μέ ἄλλα λόγια ἡ (δ) περνάει ἀπό τήν ἀρχή O(0,0).

'Εφαρμογές:

1. Ἡ ἐξίσωση $2x + 10 = 0$ παριστάνει μιά εὐθεία παράλληλη μέ τόν ἄξονα Oy καί ἔχει τετμημένη ἐπί τήν ἀρχή: $x = -\frac{10}{2} = -5$.

2. Ἡ ἐξίσωση $4y - 24 = 0$ παριστάνει μιά εὐθεία παράλληλη μέ τόν ἄξονα Ox μέ τεταγμένη ἐπί τήν ἀρχή: $y = \frac{24}{4} = 6$.

3. Ἡ ἐξίσωση $2x + 3y = 0$ παριστάνει μιά εὐθεία, πού περνάει ἀπό τήν ἀρχή τῶν ἀξόνων, διότι $2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 0$ ἤ $0 = 0$.

4. Ἡ ἐξίσωση $4x + 3y - 12 = 0$ παριστάνει μιά εὐθεία παράλληλη μέ τό διάνυσμα $\vec{u}(-3,4)$ καί ἔχει συντεταγμένες ἐπί τήν ἀρχή:

$$x = -\frac{\Gamma}{A} = \frac{12}{4} = 3 \quad \text{καί} \quad y = -\frac{\Gamma}{B} = \frac{12}{3} = 4.$$

'Από τά προηγούμενα προκύπτει ὅτι: **Γιά νά κατασκευάσουμε μιά εὐθεία (δ) μέ ἐξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$, ἀρκεῖ νά βροῦμε τίς συντεταγμένες ἐπί τήν ἀρχή $x = -\frac{\Gamma}{A}$ καί $y = -\frac{\Gamma}{B}$ καί νά χαράξουμε τήν εὐθεία πού περνάει ἀπό τά σημεῖα $\left(-\frac{\Gamma}{A}, 0\right)$ καί $\left(0, \frac{-\Gamma}{B}\right)$.**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

27. Νά σχηματίσετε τήν ἐξίσωση μιᾶς εὐθείας, πού περνάει ἀπό τό σημεῖο M καί εἶναι παράλληλη μέ τό διάνυσμα $\vec{V}$, στίς ἑπόμενες περιπτώσεις:

1) $M(-2,2)$, $\vec{V}(2,3)$
2) $M(-2,3)$, $\vec{V}(0,1)$
3) $M(4,0)$, $\vec{V}(2,0)$
4) $M(0,0)$, $\vec{V}(2,5)$
5) $M(0,-5)$, $\vec{V}(0,1)$
6) $M(-3,0)$, $\vec{V}(0,2)$
7) $M(4,-5)$, $\vec{V}(-1,1)$
8) $M(1,2)$, $\vec{V}(2,-3)$,

καί ἔπειτα νά κατασκευάσετε τίς εὐθεῖες σέ κάθε περίπτωση.

28. Νά κατασκευάσετε τά διευθύνοντα διανύσματα τῶν εὐθειῶν:

1) $x + 2y = 1$
2) $2x - y = 3$
3) $4x - 3y + 8 = 0$
4) $2x + 7y - 5 = 0$
5) $5x + 10y = 0$
6) $2x - 8y = 0$.

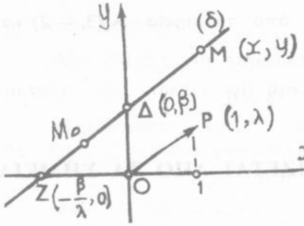
29. Νά ὁρίσετε τίς συντεταγμένες ἐπί τήν ἀρχή τῶν εὐθειῶν:

1) $3x - 4y - 12 = 0$
2) $3x - y + 5 = 0$
3) $2x - 6y = -3$
4) $4x + 6y + 3 = 0$.

§ 16. ΑΝΗΓΜΕΝΗ ΜΟΡΦΗ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΣ ΜΙΑΣ ΕΥΘΕΙΑΣ.— Θεωροῦμε τήν εὐθεία (δ), μέ ἐξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$. Ἄν $B \neq 0$, θά ἔχουμε:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{\Gamma}{B}$$

καί ἄν θέσουμε $\lambda = -\dfrac{A}{B}$, $\beta = -\dfrac{\Gamma}{B}$, τότε : $\boxed{y = \lambda x + \beta}$ (1)



Σχ. 14

Ἡ ἐξίσωση (1) λέγεται **ἀνηγμένη μορφή** τῆς ἐξισώσεως τῆς εὐθείας (δ) (Σχ. 14).

Ἡ τεταγμένη ἐπί τήν ἀρχή τῆς (δ) θά εἶναι $\beta = -\dfrac{\Gamma}{B}$ καί ὁ συντελεστής κατευθύνσεώς της θά εἶναι: $\lambda = -\dfrac{A}{B}$.

Ἄν ἡ εὐθεία ὁρίζεται μέ δύο σημεῖα $A_1(x_1, y_1)$ καί $A_2(x_2, y_2)$, μέ $(x_2 \neq x_1)$, τότε, ἀπό τήν ἐξίσωση $y = \lambda x + \beta$, θά ἔχουμε:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \lambda x_1 + \beta \\ y_2 &= \lambda x_2 + \beta \end{aligned}\right\} \Rightarrow y_2 - y_1 = \lambda(x_2 - x_1) \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

§ 17. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.–Νά βρεθεῖ ἡ ἐξίσωση τῆς εὐθείας πού περνάει ἀπό τό σημεῖο $M_1(x_1, y_1)$ καί ἔχει συντελεστή διευθύνσεως ἕναν ἀριθμό $\lambda \in R$.

Ἄν $M(x,y)$ εἶναι κάποιο σημεῖο τῆς εὐθείας, τότε τό διάνυσμα $\overrightarrow{M_1M}(x - x_1, y - y_1)$ θά ἔχει συντελεστή διευθύνσεως $\lambda = \dfrac{y - y_1}{x - x_1}$, ὁπότε:

$$\boxed{y - y_1 = \lambda(x - x_1)} \qquad (1)$$

Ἄν τό M_1 βρίσκεται πάνω στόν ἄξονα Oy, τότε $x_1 = 0$ καί $y_1 = \beta$ καί ἡ (1) λαμβάνει τή μορφή: $y = \lambda x + \beta$.

Ὅταν μεταβάλλεται τό λ, ἡ (1) ὁρίζει τήν **οἰκογένεια** τῶν εὐθειῶν πού διέρχονται ἀπό τό $M_1(x_1, y_1)$. Δέν περιλαμβάνεται στήν οἰκογένεια ἡ παράλληλη στόν ἄξονα Oy.

Παράδειγμα : Ἡ ἐξίσωση τῆς εὐθείας (δ), πού διέρχεται ἀπό τό σημεῖο M(3,5) καί ἔχει συντελεστή διευθύνσεως $\lambda = -\dfrac{3}{4}$, εἶναι:

$$y - 5 = -\frac{3}{4}(x - 3) \iff 3x + 4y - 29 = 0.$$

§ 18. ΕΞΙΣΩΣΗ ΜΙΑΣ ΕΥΘΕΙΑΣ ΠΟΥ ΠΕΡΝΑΕΙ ΑΠΟ ΔΥΟ ΣΗΜΕΙΑ $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$.—Γνωρίζουμε ὅτι οἱ παραμετρικές ἐξισώσεις τῆς εὐθείας A_1A_2, ἄν $(x_2 \neq x_1)$, εἶναι:

$$\left.\begin{aligned} x - x_1 &= \lambda(x_2 - x_1) \\ y - y_1 &= \lambda(y_2 - y_1) \end{aligned}\right\} \text{καί μέ διαίρεση κατά μέλη}$$

βρίσκουμε: $$\frac{x - x_1}{y - y_1} = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} \qquad (1)$$

Αὐτή ἡ σχέση μέ μορφή ὁρίζουσας γράφεται : $\begin{vmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{y} & \mathbf{1} \\ \mathbf{x_1} & \mathbf{y_1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{x_2} & \mathbf{y_2} & \mathbf{1} \end{vmatrix} = \mathbf{0}.$ (2)

Παράδειγμα : Ἡ ἐξίσωση τῆς εὐθείας πού διέρχεται ἀπό τά σημεῖα $A_1(3, -2)$ καί A_2 $(0, -1)$ εἶναι:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \implies x + 3y + 3 = 0.$$

§ 19. ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΗΣ ΕΥΘΕΙΑΣ ΠΟΥ ΟΡΙΖΕΤΑΙ ΑΠΟ ΤΑ ΣΗΜΕΙΑ $A_1(\alpha,0)$, $A_2(0,\beta)$ ΤΩΝ ΑΞΟΝΩΝ Ox καί Oy.

Ἄν στήν ἐξίσωση (1) τῆς προηγούμενης παραγράφου βάλουμε $x_1 = \alpha$, $y_1 = 0$, $x_2 = 0$, $y_2 = \beta$, λαμβάνουμε:

$$\frac{x-\alpha}{y-0} = \frac{0-\alpha}{\beta-0}, \text{ ὁπότε } \beta x + \alpha y = \alpha\beta. \qquad (1)$$

Ἄν εἶναι $\alpha \cdot \beta \neq 0$ ἡ (1) γράφεται:

$$\boxed{\frac{\mathbf{x}}{\alpha} + \frac{\mathbf{y}}{\beta} = \mathbf{1}} \qquad (1')$$

Παράδειγμα : Ἡ εὐθεῖα, πού διέρχεται ἀπό τά σημεῖα $A_1(5,0)$ καί $A_2(0,3)$, ἔχει ἐξίσωση:

$$\frac{x}{5} + \frac{y}{3} = 1 \iff 3x + 5y - 15 = 0.$$

Ἄν $\alpha \cdot \beta = 0$, τότε τά σημεῖα A_1 καί A_2 βρίσκονται πάνω στόν ἴδιο ἄξονα καί ἡ ἐξίσωση τῆς εὐθείας $A_1 A_2$ θά εἶναι $x = 0$ ἤ $y = 0$.

§ 20. ΣΥΝΘΗΚΗ ΠΑΡΑΛΛΗΛΙΑΣ ΔΥΟ ΕΥΘΕΙΩΝ.—Θεωροῦμε δύο εὐθεῖες (δ_1) καί (δ_2) πού ἔχουν στό Καρτεσιανό σύστημα τίς ἐξισώσεις:

(1) $A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0$ μέ $|A_1| + |B_1| > 0$

(2) $A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0$ μέ $|A_2| + |B_2| > 0$

Ἡ ἐξίσωση (1) παριστάνει εὐθεία παράλληλη μέ τό διάνυσμα $\vec{u}(-B_1, A_1)$ καί ἡ ἐξίσωση (2) παριστάνει μία εὐθεία παράλληλη μέ τό διάνυσμα $\vec{v}\,(-B_2, A_2)$.

Γιά νά εἶναι παράλληλες οἱ εὐθεῖες (1) καί (2) πρέπει καί ἀρκεῖ νά εἶναι παράλληλα τά διανύσματα $\vec{u}$ καί $\vec{v}$.

Δηλαδή $(-B_1) \cdot A_2 - (A_1) \cdot (-B_2) = 0$ ἤ $\boxed{A_1 \cdot B_2 - A_2 \cdot B_1 = 0}$ (3)

πού γράφεται καί μέ τή μορφή:

$$\frac{\mathbf{A_1}}{\mathbf{A_2}} = \frac{\mathbf{B_1}}{\mathbf{B_2}} \quad \text{ἤ} \quad \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Μερική περίπτωση : Ἄν οἱ ἐξισώσεις εἶναι τῆς μορφῆς:

$$\left.\begin{array}{l} y=\lambda_1 x+\beta_1 \\ y=\lambda_2 x+\beta_2 \end{array}\right\}, \text{ ἡ σύνθηκη (3) γίνεται : } \lambda_1-\lambda_2=0 \Longrightarrow \boxed{\lambda_1=\lambda_2},$$

ἡ ὁποία ἐκφράζει ὅτι :

Δύο εὐθεῖες, μή παράλληλες μέ τόν ἄξονα Oy, γιά νά εἶναι παράλληλες μεταξύ τους, πρέπει καί ἀρκεῖ νά εἶναι ἴσοι οἱ συντελεστές διευθύνσεώς τους.

Παραδείγματα: 1ο. Οἱ εὐθεῖες (δ_1) καί (δ_2), μέ ἐξισώσεις $3x-4y+1=0$ καί $9x-12y+7=0$ εἶναι παράλληλες, γιατί:

$$A_1B_2 - A_2B_1 = 3(-12)-(-4)\cdot 9 = -36+36 = 0.$$

2ο. Οἱ εὐθεῖες μέ ἐξισώσεις $y=5x-3$ καί $y=5x+7$ εἶναι παράλληλες μεταξύ τους καί μέ τήν εὐθεία $y=5x$, πού διέρχεται ἀπό τήν ἀρχή τῶν ἀξόνων O(0,0).

§ 21. ΕΥΘΕΙΑ ΠΟΥ ΠΕΡΝΑΕΙ ΑΠΟ ΕΝΑ ΣΗΜΕΙΟ $M_1(x_1,y_1)$ ΚΑΙ ΠΑΡΑΛΛΗΛΗ ΜΕ ΕΥΘΕΙΑ (δ).—Θεωροῦμε μιά εὐθεία (δ) μέ ἐξίσωση $Ax+By+\Gamma=0$ καί ἕνα σημεῖο $M_0(x_0,y_0)$.

Ζητοῦμε τήν ἐξίσωση τῆς εὐθείας (δ_1), πού εἶναι παράλληλη μέ τή (δ) καί περνάει ἀπό τό M_0.

Ἡ (δ) εἶναι παράλληλη μέ τό διάνυσμα $\vec{u}(-B,A)$. Ἄν M(x,y) εἶναι κάποιο σημεῖο τῆς (δ_1), τότε τά διανύσματα $\overrightarrow{M_0M}(x-x_0,\ y-y_0)$ καί $\vec{u}$ θά εἶναι παράλληλα. Ἄρα :

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 \\ -B & A \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ἤ} \quad \boxed{A(x-x_0)+B(y-y_0)=0}$$

Παράδειγμα: Ἡ εὐθεία (δ_1), πού περνάει ἀπό τό σημεῖο $M_0(3,-2)$ καί εἶναι παράλληλη μέ τήν εὐθεία (δ): $2x-3y-4=0$, ἔχει ἐξίσωση:

$$2(x-3)+(-3)(y+2)=0 \Rightarrow 2x-3y-12=0.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

30. Νά σχηματίσετε τήν ἐξίσωση τῆς εὐθείας, πού περνάει ἀπό τό σημεῖο (3,–4) καί ἔχει συντελεστή διευθύνσεως:

1) $\lambda=-2$ | 3) $\lambda=-\frac{3}{4}$ | 5) $\lambda=4{,}25$

2) $\lambda=5$ | 4) $\lambda=\frac{5}{8}$ | 6) $\lambda=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

31. Νά σχηματίσετε τήν ἐξίσωση τῆς εὐθείας, πού περνάει ἀπό τά σημεῖα A_1, A_2 στίς ἀκόλουθες περιπτώσεις:

1) $A_1(1,2)$, $A_2(-2,3)$,
2) $A_1(-1,-2)$, $A_2(-3,-6)$,
3) $A_1(3,0)$, $A_2(0,4)$,
4) $A_1(4,5)$, $A_2(4,7)$,
5) $A_1(-3,2)$, $A_2(5,2)$,
6) $A_1(0,0)$, $A_2(0,1)$,
7) $A_1(-4,5)$, $A_2(2,1)$,
8) $A_1(-1,2)$, $A_2(3,2)$.

32. Νά βρεθοῦν οἱ ἐξισώσεις τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου, πού ἔχει κορυφές τά σημεῖα A(–3,2), B(3,–2) καί Γ(0,1).

33. Νά ὁρίσετε τίς ἐξισώσεις τῶν διαμέσων τοῦ τριγώνου τῆς προηγούμενης ἀσκήσεως.

34. Νά ὁρίσετε τίς ἐξισώσεις τῶν πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου μέ κορυφές τά σημεῖα Α(10,8), Β(−3,9), Γ(−4,−4), Δ(9,−5).

35. Νά ἀποδείξετε ὅτι τά σημεῖα Α(−3,−7), Β(0,−2), Γ(6,8) βρίσκονται σέ εὐθεία.

36. Νά ὁρίσετε τό x, ὥστε τά σημεῖα Α(x,−3), Β(1,1) καί Γ(−4,3) νά βρίσκονται πάνω σέ εὐθεία.

37. Νά ὁρίσετε τήν ἐξίσωση τῆς εὐθείας, τῆς ὁποίας οἱ συντεταγμένες ἐπί τήν ἀρχή εἶναι:

1)	4 καί 5	3)	−5 καί −3
2)	−6 καί 8	4)	7 καί −2.

38. Ποιές εἶναι οἱ συντεταγμένες ἐπί τήν ἀρχή κάθε μιᾶς ἀπό τίς εὐθεῖες:

1)	$2x+5y-10=0$	3)	$5x-4y-20=0$
2)	$3x-4y+24=0$	4)	$x-3y+9=0$.

§ 22. ΣΥΝΘΗΚΗ ΠΟΥ ΕΠΑΛΗΘΕΥΟΥΝ ΔΥΟ ΕΥΘΕΙΕΣ ΤΑΥΤΙΖΟΜΕΝΕΣ.

—Θεωροῦμε δύο εὐθεῖες:

$$(\delta_1):\ A_1x+B_1y+\Gamma_1=0 \quad \text{καί} \quad (\delta_2):\ A_2x+B_2y+\Gamma_2=0.$$

Ὑποθέτουμε ὅτι οἱ εὐθεῖες δέν εἶναι παράλληλες μέ τόν ἄξονα Oy.

Οἱ συντελεστές διευθύνσεώς τους εἶναι ἀντιστοίχως: $\lambda_1=-\frac{A_1}{B_1}$ καί $\lambda_2=-\frac{A_2}{B_2}$ καί οἱ τεταγμένες τους ἐπί τήν ἀρχή εἶναι ἀντιστοίχως: $\beta_1=-\frac{\Gamma_1}{B_1}$ καί $\beta_2=-\frac{\Gamma_2}{B_2}$.

Ἀφοῦ οἱ εὐθεῖες ταυτίζονται, σημαίνει ὅτι:

$$\lambda_1=\lambda_2 \text{ καί } \beta_1=\beta_2 \quad \text{ἤ} \quad -\frac{A_1}{B_1}=-\frac{A_2}{B_2} \text{ καί } -\frac{\Gamma_1}{B_1}=-\frac{\Gamma_2}{B_2},$$

ἀπό τίς ὁποῖες ἔχουμε:
$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} \qquad (1)$$

Παρατήρηση: Ἡ συνθήκη (1) μπορεῖ νά γραφεῖ καί ὡς ἑξῆς:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & \Gamma_1 \\ A_2 & \Gamma_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_1 & \Gamma_1 \\ B_2 & \Gamma_2 \end{vmatrix} = 0$$

Τό ἀντίστροφο ἀποδεικνύεται εὔκολα.

Ὥστε: **Γιά νά ταυτίζονται δύο εὐθεῖες, πρέπει καί ἀρκεῖ νά εἶναι ἀνάλογοι οἱ ὁμώνυμοι συντελεστές τῶν ἐξισώσεων.**

Παραδείγματα:

1ο. Οἱ εὐθεῖες (δ_1) καί (δ_2), μέ ἐξισώσεις: $3x+5y-12=0$ καί $6x+10y-24=0$ ἀντιστοίχως, ταυτίζονται, γιατί:

$$\frac{3}{6}=\frac{5}{10}=\frac{-12}{-24}.$$

2ο. Νά ὁρίσετε τά α καί β, ἔτσι πού οἱ ἐξισώσεις $2\alpha x + 2y - 5 = 0$ καί $4x - 3y + 7\beta = 0$ νά παριστάνουν τήν ἴδια εὐθεία.

Πρέπει καί ἀρκεῖ νά εἶναι:

$$\frac{2\alpha}{4} = \frac{2}{-3} = \frac{-5}{7\beta} \Longrightarrow \frac{2\alpha}{4} = -\frac{2}{3} \quad \text{καί} \quad \frac{-2}{3} = \frac{-5}{7\beta},$$

ὁπότε:
$$\alpha = -\frac{4}{3} \quad \text{καί} \quad \beta = \frac{15}{14}.$$

§ 23. ΕΥΘΕΙΕΣ ΤΕΜΝΟΜΕΝΕΣ.—Θεωροῦμε τίς εὐθεῖες (δ_1) καί (δ_2), μέ ἐξισώσεις ἀντιστοίχως:

$$A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0 \qquad (\delta_1)$$
$$A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0 \qquad (\delta_2)$$

Ἄν δέν εἶναι παράλληλες, θά ἔχουν διαφορετικούς συντελεστές διευθύνσεως.

Δηλαδή:
$$-\frac{A_1}{B_1} \neq -\frac{A_2}{B_2} \quad \text{ἤ} \quad \boxed{\mathbf{A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0}} \qquad (1)$$

καί ἄρα θά τέμνονται σ' ἕνα σημεῖο, τοῦ ὁποίου οἱ συντεταγμένες θά ἐπαληθεύουν καί τίς δύο ἐξισώσεις, δηλαδή θά εἶναι τό διατεταγμένο ζεῦγος (x, y) πού ἐπαληθεύει τό σύστημα τῶν ἐξισώσεων (δ_1) καί (δ_2).

Εὔκολα ἀποδεικνύεται καί τό ἀντίστροφο.

Ὥστε: **Γιά νά τέμνονται δύο εὐθεῖες, πρέπει καί ἀρκεῖ νά ἰσχύει ἡ συνθήκη (1).**

Παράδειγμα: Νά ὁρίσετε τίς συντεταγμένες τῆς τομῆς τῶν εὐθειῶν:

$$2x + 4y - 26 = 0$$
$$4x - 3y + 3 = 0.$$

Ἐπειδή εἶναι $A_1B_2 - A_2B_1 = 2(-3) - 4 \cdot 4 = -6 - 16 = -22 \neq 0$, οἱ εὐθεῖες τέμνονται. Λύνουμε τό σύστημα καί βρίσκουμε $x = 3$ καί $y = 5$, δηλαδή οἱ εὐθεῖες τέμνονται στό σημεῖο $M(3,5)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

39. Νά βρεθοῦν οἱ συντεταγμένες τοῦ σημείου τομῆς τῶν εὐθειῶν (δ_1) καί (δ_2) μέ ἐξισώσεις ἀντιστοίχως:

1) $x - y = 1,$ $\quad x + y = 1.$
2) $6x - 2y - 8 = 0,$ $\quad 3x + y = 14.$
3) $4x - 5y + 20 = 0,$ $\quad 12x - 15y + 6 = 0.$
4) $2x + 3y - 6 = 0,$ $\quad 4x + 6y + 9 = 0.$
5) $2 - 3x = y,$ $\quad 6x + 2y = 4.$

40. Νά βρεθοῦν οἱ συντεταγμένες τῶν κορυφῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου οἱ πλευρές ὁρίζονται ἀπό τίς ἐξισώσεις:

$$2x + 3y = 0, \quad x + 3y + 3 = 0, \quad x + y + 1 = 0.$$

41. Στό προηγούμενο τρίγωνο νά ὑπολογίσετε τά μήκη τῶν πλευρῶν, τίς ἐξισώσεις τῶν διαμέσων καί τίς συντεταγμένες τοῦ κέντρου βάρους.

42. Οἱ πλευρές ἑνός τριγώνου ὁρίζονται ἀπό τίς ἐξισώσεις:

$$2x + 3y = 0, \quad x + 3y + 3 = 0, \quad x + y + 1 = 0.$$

Νά φέρετε τίς παραλλήλους ἀπό τίς κορυφές πρός τίς πλευρές τοῦ τριγώνου καί νά ορίσετε τίς ἐξισώσεις τῶν παραλλήλων αὐτῶν.

43. Νά ἀποδείξετε ὅτι οἱ εὐθεῖες, πού ὁρίζονται ἀπό τίς ἐξισώσεις:

$2x - 3y + 5 = 0,\ \ 6x + 10y + 15 = 0,\ \ 6x - 9y - 20 = 0,\ \ 3x + 5y - 20 = 0,$

σχηματίζουν παραλληλόγραμμο καί νά ορίσετε τίς συντεταγμένες τῶν κορυφῶν του.

44. Νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ εὐθεία (δ_1): $3x + 4y - 2 = 0$, εἶναι παράλληλη μέ τήν εὐθεία (δ_2): $9x + 12y + 7 = 0$ καί ταυτίζεται μέ τήν (δ_3): $15x + 20y - 10 = 0$.

§ 24. ΣΥΝΘΗΚΗ ΓΙΑ ΝΑ ΕΧΟΥΝ ΤΡΕΙΣ ΕΥΘΕΙΕΣ ΚΟΙΝΟ ΣΗΜΕΙΟ.

Θεωροῦμε τρεῖς εὐθεῖες, πού ἔχουν ἐξισώσεις:

$A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0$ (1), $A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0$ (2) καί $A_3x + B_3y + \Gamma_3 = 0$ (3).

Γιά νά ἔχουν κοινό σημεῖο, πρέπει οἱ συντεταγμένες τοῦ σημείου τομῆς $M_0(x_0, y_0)$ τῶν (1) καί (2),

$$\boxed{x_0 = \frac{B_1\Gamma_2 - B_2\Gamma_1}{A_1B_2 - A_2B_1} \text{ καί } y_0 = \frac{A_2\Gamma_1 - A_1\Gamma_2}{A_1B_2 - A_2B_1}} \qquad (k)$$

νά ἐπαληθεύουν τήν ἐξίσωση (3). Δηλαδή:

$$A_3 \cdot \frac{B_1\Gamma_2 - B_2\Gamma_1}{A_1B_2 - A_2B_1} + B_3 \cdot \frac{A_2\Gamma_1 - A_1\Gamma_2}{A_1B_2 - A_2B_1} + \Gamma_3 = 0 \qquad (4)$$

ἤ $$A_3(B_1\Gamma_2 - B_2\Gamma_1) + B_3(A_2\Gamma_1 - A_1\Gamma_2) + \Gamma_3(A_1B_2 - A_2B_1) = 0 \qquad (k_1)$$

καί μέ μορφή ὁρίζουσας:

$$\mathbf{\Delta} = \begin{vmatrix} \mathbf{A_1} & \mathbf{B_1} & \mathbf{\Gamma_1} \\ \mathbf{A_2} & \mathbf{B_2} & \mathbf{\Gamma_2} \\ \mathbf{A_3} & \mathbf{B_3} & \mathbf{\Gamma_3} \end{vmatrix} = \mathbf{0}. \qquad (5)$$

Ὥστε ἄν οἱ τρεῖς εὐθεῖες (1), (2) καί (3) ἔχουν κοινό σημεῖο, θά ἰσχύει ἡ (5).

★ **Ἀντιστρόφως, α')** ἄν ἰσχύει ἡ σχέση (k_1) καί εἶναι $A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$ ἤ $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$, τότε οἱ εὐθεῖες τέμνονται. Γιατί, ἄν ἡ (k_1), γραφεῖ μέ τή μορφή (4), ἐκφράζει ὅτι τό σημεῖο τῆς τομῆς τῶν εὐθειῶν (1) καί (2) ἔχει συντεταγμένες x_0, y_0, οἱ ὁποῖες ἱκανοποιοῦν καί τήν (3), δηλαδή τό σημεῖο (x_0, y_0) βρίσκεται ἐπάνω στήν (3).

β') Ἄν εἶναι $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$ καί $B_1\Gamma_2 - B_2\Gamma_1 \neq 0$ καί $\Gamma_1A_2 - A_1\Gamma_2 \neq 0$, τότε ἡ (k_1) ἐκφράζει τήν ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη γιά νά εἶναι τό διάνυσμα $(B_1\Gamma_2 - B_2\Gamma_1,\ \Gamma_1A_2 - A_1\Gamma_2)$ παράλληλο πρός τήν (3). Ἀλλά τό διάνυσμα $(B_1\Gamma_2 - B_2\Gamma_1,\ \Gamma_1A_2 - A_1\Gamma_2)$ εἶναι παράλληλο πρός τίς παράλληλες εὐθεῖες $A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0$, $A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0$.

Ἄρα, στήν περίπτωση αὐτή ἡ (4) ἐκφράζει τή συνθήκη γιά νά εἶναι οἱ τρεῖς εὐθεῖες παράλληλες (τέμνονται στό ἄπειρο).

γ') Ἄν εἶναι $B_1\Gamma_2 - B_2\Gamma_1 = 0$, $\Gamma_1A_2 - A_1\Gamma_2 = 0$, $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$, τότε ἡ (k_1) ἀληθεύει γιά ὁποιαδήποτε A_3, B_3, Γ_3 καί οἱ (1), (2) ταυτίζονται, ἐνῶ ἡ (3) μπορεῖ νά θεωρηθεῖ ὅτι ἔχει κοινό σημεῖο μέ τίς (1) καί (2), τό ὁποῖο βρίσκεται σέ πεπερασμένη ἀπόσταση ἤ στό ἄπειρο.

Ἀπό τά παραπάνω βγαίνει τό συμπέρασμα ὅτι:

«Ἱκανή καί ἀναγκαία συνθήκη γιά νά τέμνονται οἱ εὐθεῖες (1), (2), (3) ἤ νά εἶναι παράλληλες, εἶναι ἡ σχέση (k_1) ἤ ἡ ἰσοδύναμή της (5)».

Παράδειγμα: Οἱ εὐθεῖες μέ ἐξισώσεις:

$$3x - 5y - 10 = 0, \quad x + y + 1 = 0, \quad 21x - 11y - 31 = 0,$$

ἔχουν κοινό σημεῖο, γιατί ἡ ὁρίζουσα μηδενίζεται:

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 & -10 \\ 1 & 1 & 1 \\ 21 & -11 & -31 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -11 & -31 \end{vmatrix} - (-5)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 21 & -31 \end{vmatrix} + (-10)\begin{vmatrix} 1 & 21 \\ 21 & -11 \end{vmatrix} = 0$$

§ 25. **ΔΕΣΜΗ ΕΥΘΕΙΩΝ.**—Θεωροῦμε δύο εὐθεῖες μέ ἐξισώσεις:

$$A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0 \quad (1) \quad \text{καί} \quad A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0 \quad (2)$$

οἱ ὁποῖες τέμνονται στό σημεῖο $M(x_1, y_1)$. Κάθε εὐθεία πού περνάει ἀπό τό M θά ἔχει ἐξίσωση τῆς μορφῆς:

$$A_1x + B_1y + \Gamma_1 + k(A_2x + B_2y + \Gamma_2) = 0 \quad (3)$$

Πραγματικά, ἐπειδή τό M ἐπαληθεύει τίς (1) καί (2) θά εἶναι:
$A_1x_1 + B_1y_1 + \Gamma_1 = 0$ καί $A_2x_1 + B_2y_1 + \Gamma_2 = 0$, ὁπότε γιά ὁποιαδήποτε τιμή τοῦ k θά εἶναι $k(A_2x_1 + B_2y_1 + \Gamma_2) = 0$,

Ἑπομένως $\mathbf{A_1x_1 + B_1y_1 + \Gamma_1 + k(A_2x_1 + B_2y_1 + \Gamma_2) = 0}$ πού σημαίνει ὅτι τό M βρίσκεται πάνω στήν εὐθεία (3).

Μποροῦμε τώρα νά ὁρίσουμε τόν k, ὥστε ἡ εὐθεία (3) νά περνᾶ ἀπό τό M. Ἔστω δ μία τέτοια εὐθεία. Ἐπάνω στή δ θεωροῦμε σημεῖο $N(x_0, y_0)$, διάφορο τοῦ M. Ἄρα θά εἶναι:

$$A_1x_0 + B_1y_0 + \Gamma_1 + k(A_2x_0 + B_2y_0 + \Gamma_2) = 0 \Rightarrow$$

$$k = -\frac{A_1x_0 + B_1y_0 + \Gamma_1}{A_2x_0 + B_2y_0 + \Gamma_2} \quad (4)$$

Θέτουμε τήν τιμή αὐτή τοῦ k στήν (3) καί ἔχουμε:

$$A_1x + B_1y + \Gamma_1 - \frac{A_1x_0 + B_1y_0 + \Gamma_1}{A_2x_0 + B_2y_0 + \Gamma_2}(A_2x + B_2y + \Gamma_2) = 0 \quad (5)$$

Ἡ ἐξίσωση (5) παριστάνει εὐθεία πού περνάει ἀπό τά σημεῖα M καί N. Δηλαδή ἡ εὐθεία αὐτή εἶναι ἡ δ. Ἄρα ἡ (3) εἶναι ἡ ζητούμενη ἐξίσωση τῆς δέσμης εὐθειῶν.

Παρατήρηση: Ἄν οἱ (1) καί (2) εἶναι παράλληλες, τότε ἡ (3) παριστάνει σύνολο παράλληλων εὐθειῶν. Δηλαδή ἔχουμε παράλληλη δέσμη εὐθειῶν μέ κοινό ἐπ' ἄπειρο σημεῖο, γιατί εἶναι:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \Rightarrow \frac{A_1}{kA_2} = \frac{B_1}{kB_2} \Rightarrow \frac{A_1 + kA_2}{A_1} = \frac{B_1 + kB_2}{B_1},$$

Παραδείγματα:

1ο. Νά όρίσετε τήν έξίσωση τῆς εὐθείας, πού περνάει ἀπό τό σημεῖο Μ(2,1) καί ἀπό τήν τομή τῶν εὐθειῶν: $3x-5y-10=0$ καί $x+y+1=0$.

Λύση: Ἡ ἐξίσωση τῆς εὐθείας θά εἶναι τῆς μορφῆς:

$$3x-5y-10+k(x+y+1)=0$$

Ἐπειδή τό Μ(2,1) ἐπαληθεύει τήν ἐξίσωση αὐτή, ἔχουμε:

$$3\cdot 2-5\cdot 1-10+k(2+1+1)=0 \Rightarrow k=\frac{9}{4},$$

καί ἡ ἐξίσωση τῆς εὐθείας γίνεται: $21x-11y-31=0$.

2ο. Νά ὁρίσετε τήν ἐξίσωση τῆς εὐθείας πού περνάει ἀπό τήν τομή τῶν εὐθειῶν:

$$2x+y+1=0 \quad \text{καί} \quad x-2y+1=0$$

καί εἶναι παράλληλη μέ τήν εὐθεία $4x-3y-7=0$.

Λύση: Ἡ εὐθεία θά ἔχει ἐξίσωση τῆς μορφῆς:

$$2x+y+1+k(x-2y+1)=0$$

$$\text{ἤ} \quad (2+k)x+(1-2k)y+(1+k)=0$$

καί ἀφοῦ εἶναι παράλληλη μέ τήν τρίτη εὐθεία θά εἶναι: $\dfrac{2+k}{4}=\dfrac{1-2k}{-3} \Longrightarrow k=2$, ὁπότε ἡ ἐξίσωση τῆς εὐθείας γίνεται: $4x-3y+3=0$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

45. Νά ὁρίσετε τήν ἐξίσωση τῆς εὐθείας πού περνάει ἀπό τό σημεῖο Ο(0,0) καί ἀπό τήν τομή τῶν εὐθειῶν, πού ἔχουν ἐξισώσεις $2x-3y+2=0$, $3x-4y-2=0$.

46. Ἕνα τρίγωνο ἔχει πλευρές μέ ἐξισώσεις $2x-3y+1=0$, $x-y=0$, $3x+4y-2=0$. Νά ὁρίσετε τίς ἐξισώσεις τῶν εὐθειῶν, πού περνοῦν ἀπό τίς κορυφές του καί εἶναι παράλληλες μέ τίς ἀπέναντι πλευρές.

47. Νά ὁρίσετε τήν ἐξίσωση τῆς εὐθείας, πού περνάει ἀπό τήν τομή τῶν εὐθειῶν $2x+5y-3=0$, $3x-2y-1=0$ καθώς καί ἀπό τήν τομή τῶν εὐθειῶν $x-y=0$, $x+3y-6=0$.

§ 26. ΓΡΑΦΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΝΟΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΜΕ ΔΥΟ ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΔΥΟ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ.— Θεωροῦμε τό σύστημα τῶν ἐξισώσεων:

$$(\mathrm{I}) \quad \begin{cases} \alpha x+\beta y=\gamma \\ \alpha_1 x+\beta_1 y=\gamma_1 \end{cases}$$

Ἄν ὑπάρχει κοινό σημεῖο τῶν δύο εὐθειῶν, οἱ συντεταγμένες του θά εἶναι λύση τοῦ συστήματος (I). Ἀντιστρόφως, μία λύση τοῦ συστήματος, ἡ (x,y), θά ἐπαληθεύει τίς δύο ἐξισώσεις, ἄρα θά εἶναι ἡ τομή τῶν δύο εὐθειῶν.

Διακρίνουμε τίς ἀκόλουθες περιπτώσεις:

1η. Ἄν $\alpha\beta_1-\alpha_1\beta\neq 0$, οἱ εὐθεῖες δέν εἶναι παράλληλες καί θά ἔχουν ἕνα κοινό σημεῖο Μ. Τό σύστημα (I) ἔχει μία μοναδική λύση, τήν:

$$x=\frac{\gamma\beta_1-\gamma_1\beta}{\alpha\beta_1-\alpha_1\beta} \quad \text{καί} \quad y=\frac{\alpha\gamma_1-\alpha_1\gamma}{\alpha\beta_1-\alpha_1\beta}.$$

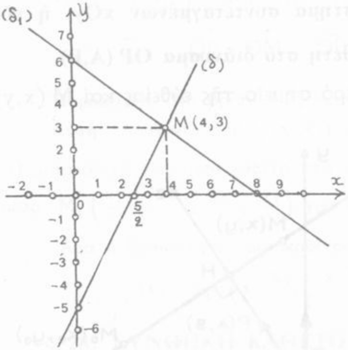
2η. Ἄν $\dfrac{\alpha}{\alpha_1} = \dfrac{\beta}{\beta_1} \neq \dfrac{\gamma}{\gamma_1}$, οἱ εὐθεῖες θά εἶναι παράλληλες μέ τή στενή ἔννοια, δηλαδή δέν ἔχουν κοινό σημεῖο σέ πεπερασμένη ἀπόσταση. Τό σύστημα εἶναι ἀδύνατο.

3η. Ἄν $\dfrac{\alpha}{\alpha_1} = \dfrac{\beta}{\beta_1} = \dfrac{\gamma}{\gamma_1}$, οἱ εὐθεῖες ταυτίζονται. Τό σύστημα ἔχει ἄπειρες λύσεις, εἶναι ἀόριστο.

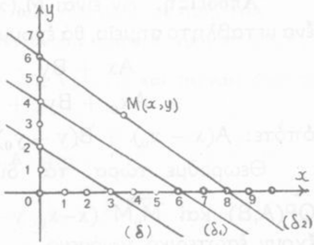
Παραδείγματα:

1ο. Οἱ ἐξισώσεις (δ): $2x - y = 5$ καί (δ_1): $3x + 4y = 24$, ὁρίζουν εὐθεῖες, (Σχ. 15) πού τέμνονται σ' ἕνα σημεῖο Μ, τοῦ ὁποίου οἱ συντεταγμένες εἶναι λύση τοῦ συστήματος:

$$\left.\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 3x + 4y = 24 \end{cases}\right\} \Longrightarrow x = 4,\ y = 3.$$



Σχ. 15



Σχ. 16

2ο. Οἱ εὐθεῖες (δ), (δ_1) μέ ἐξισώσεις $2x + 3y - 6 = 0$ καί $4x + 6y - 24 = 0$, εἶναι παράλληλες, γιατί $\dfrac{2}{4} = \dfrac{3}{6} \neq \dfrac{6}{24}$, (σχ. 16).

Τό σύστημα λοιπόν $\left.\begin{matrix} 2x + 3y = 6 \\ 4x + 6y = 24 \end{matrix}\right\}$ εἶναι ἀδύνατο.

3ο. Οἱ εὐθεῖες (δ_2) καί (δ_3), μέ ἐξισώσεις: $3x + 4y - 24 = 0$ καί $6x + 8y - 48 = 0$ ταυτίζονται (Σχ. 16). Ἄρα κάθε σημεῖο τῆς μιᾶς εὐθείας ἔχει συντεταγμένες πού ἐπαληθεύουν καί τίς δύο ἐξισώσεις τοῦ συστήματος:

$$3x + 4y - 24 = 0 \quad (1)$$
$$6x + 8y - 48 = 0 \quad (2)$$

Πράγματι, ἡ δεύτερη ἐξίσωση γράφεται: $2(3x + 4y - 24) = 0$.

Καί κάθε ζεῦγος (x_1, y_1), πού ἐπαληθεύει τήν πρώτη ἐξίσωση: $3x_1 + 4y_1 - 24 = 0$ ἐπαληθεύει καί τή δεύτερη: $2(3x_1 + 4y_1 - 24) = 0$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

48. Νά λύσετε γραφικῶς τά ἑπόμενα συστήματα:

1) $\begin{cases} 2x - y = -7 \\ x + 3y = -7 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 4x - 10y = -27 \\ 2x - 14y = -36 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 6x - 3y = -26 \\ 15x + 2y = -27 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x - 2y = 11 \\ 5x - 3y = 17 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 6x - 6y = -17 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 6x - 2y = -31. \end{cases}$

49. Νά όρίσετε τό k, ὥστε οἱ εὐθεῖες:

$$3x - 4y + 15 = 0, \quad 5x + 2y - 1 = 0, \quad kx - (2k - 1)y + 9k - 13 = 0,$$

νά ἔχουν κοινό σημεῖο.

50. Νά ἀποδείξετε ὅτι γιά ὁποιαδήποτε τιμή τοῦ μ οἱ εὐθεῖες πού ὁρίζονται ἀπό τίς ἐξισώσεις:

1) $3x - 2y + 5 + \mu(x - 2y + 4) = 0,$

2) $(2\mu - 3)x + (7 - 2\mu)y + 4 = 0,$

3) $\mu x + (5\mu - 3)y + 9 - 3\mu = 0,$

4) $(\mu^2 - 1)x + (3\mu^2 - 2\mu + 1)y - 5\mu^2 + 4\mu - 3 = 0.$

διέρχονται ἀπό τό ἴδιο σημεῖο. Ἐπίσης νά ὁρίσετε τίς συντεταγμένες αὐτοῦ τοῦ σημείου.

§ 27. ΘΕΩΡΗΜΑ. Σέ ὀρθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων xOy, ἡ εὐθεία μέ ἐξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ εἶναι κάθετη στό διάνυσμα $\overrightarrow{OP}(A,B)$.

Ἀπόδειξη. Ἄν εἶναι $M_0(x_0,y_0)$ ἕνα σταθερό σημεῖο τῆς εὐθείας καί $M(x,y)$ ἕνα μεταβλητό σημεῖο, θά ἔχουμε (Σχ.17):

$$Ax + By + \Gamma = 0 \quad (1)$$

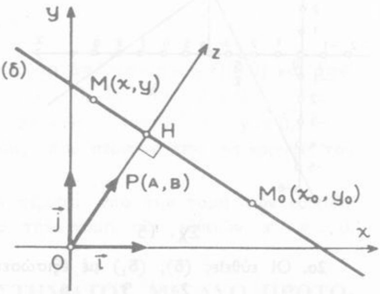
$$Ax_0 + By_0 + \Gamma = 0 \quad (2)$$

ὁπότε: $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$ (3)

Θεωροῦμε τώρα τά διανύσματα $\overrightarrow{OP}(A,B)$ καί $\overrightarrow{M_0M}\,(x-x_0,\ y-y_0)$, πού ἔχουν ἐσωτερικό γινόμενο

$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{M_0M} = A(x-x_0) + B(y-y_0) = 0.$

Ἄρα τά διανύσματα εἶναι κάθετα, πού σημαίνει ὅτι τό διάνυσμα $\overrightarrow{OP}(A,B)$ εἶναι κάθετο στήν εὐθεία: $Ax + By + \Gamma = 0.$



Σχ. 17

Παραδείγματα:

1ο. Ἡ εὐθεία μέ ἐξίσωση $5x + 8y - 10 = 0$ εἶναι κάθετη στό διάνυσμα $\overrightarrow{OP}(5,8)$.

2ο. Ἡ εὐθεία μέ ἐξίσωση $y = \lambda\chi + \beta$ εἶναι κάθετη στό διάνυσμα $\overrightarrow{OP}(\lambda,-1)$.

Ἀντιστρόφως. Κάθε εὐθεία πού εἶναι κάθετη στό διάνυσμα $\overrightarrow{OP}(A,B)$ ἔχει ἐξίσωση τῆς μορφῆς: $Ax + By + \Gamma = 0$.

Πραγματικά, ἄς εἶναι $M_0(x_0,y_0)$ ὁποιοδήποτε σημεῖο τῆς εὐθείας (δ). Κάποιο σημεῖο $M(x,y)$ τοῦ ἐπιπέδου, γιά νά βρίσκεται πάνω στή (δ), πρέπει καί ἀρκεῖ νά ἰσχύει: $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0,$

δηλαδή: $$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$
ή $$Ax + By - (Ax_0 + By_0) = 0 \qquad (1)$$
Ἄν θέσουμε $\Gamma = -(Ax_0 + By_0)$, ἡ (1) γίνεται: $Ax + By + \Gamma = 0$.

Ὥστε, κάθε ἐξίσωση τῆς μορφῆς $Ax + By + k = 0$, $(k \in \mathbf{R})$, παριστάνει μιά εὐθεία κάθετη στό διάνυσμα $\vec{OP}(A,B)$· ἑπομένως εἶναι παράλληλη μέ τήν εὐθεία πού ἔχει ἐξίσωση: $Ax + By + \Gamma = 0$.

Παρατήρηση. Ἡ παράσταση $E = Ax + By$ εἶναι τό ἐσωτερικό γινόμενο τῶν διανυσμάτων $\vec{OP}(A,B)$ καί $\vec{OM}(x,y)$. Ἡ ἐξίσωση τῆς εὐθείας γράφεται:

$$Ax + By = -\Gamma, \text{ ὁπότε: } \vec{OP} \cdot \vec{OM} = -\Gamma.$$

Ἄν H εἶναι ἡ τομή τῆς (δ) μέ τό OP, τότε

$$\vec{OP} \cdot \vec{OM} = \overline{OP} \cdot \overline{OH} \implies \boxed{\Gamma = -\overline{OP} \cdot \overline{OH}}$$

Παράδειγμα: Νά βρεθεῖ ἡ ἐξίσωση τῆς μεσοκαθέτου ἑνός εὐθυγράμμου τμήματος.

Λύση: Ἄς εἶναι (x_1,y_1), (x_2,y_2) οἱ συντεταγμένες τῶν ἄκρων τοῦ εὐθ. τμήματος A_1A_2. Ἡ μεσοκάθετή του εἶναι κάθετη στό διάνυσμα $\vec{A_1A_2}(x_2 - x_1,\ y_2 - y_1)$ καί περνάει ἀπό τό μέσο $M_1\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ τοῦ τμήματος A_1A_2.

Ἄρα ἡ ἐξίσωση τῆς μεσοκαθέτου τοῦ τμήματος A_1A_2 εἶναι:

$$(x_2 - x_1)\left(x - \frac{x_1 + x_2}{2}\right) + (y_2 - y_1)\left(y - \frac{y_1 + y_2}{2}\right) = 0.$$

§ 28. ΣΥΝΘΗΚΗ ΚΑΘΕΤΟΤΗΤΑΣ ΔΥΟ ΕΥΘΕΙΩΝ.—Οἱ εὐθεῖες:

$$(\delta_1):\ A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0 \text{ καί } (\delta_2):\ A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0,$$

εἶναι κάθετες στά διανύσματα $\vec{OP_1}(A_1,B_1)$ καί $\vec{OP_2}(A_2,B_2)$.

Γιά νά εἶναι κάθετες οἱ εὐθεῖες, πρέπει καί ἀρκεῖ νά εἶναι κάθετα τά διανύσματα $\vec{OP_1}$ καί $\vec{OP_2}$. Ἄρα:

$$\vec{OP_1} \cdot \vec{OP_2} = 0 \iff \boxed{A_1A_2 + B_1B_2 = 0} \qquad (1)$$

Παράδειγμα: Οἱ εὐθεῖες μέ ἐξισώσεις $4x + 8y - 7 = 0$ καί $6x - 3y + 11 = 0$, εἶναι κάθετες, γιατί:

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 4 \cdot 6 + 8(-3) = 24 - 24 = 0.$$

Ἡ συνθήκη: $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$ γράφεται: $\left(-\frac{A_1}{B_1}\right)\left(-\frac{A_2}{B_2}\right) = -1$, ἄν $B_1B_2 \neq 0$.

Ἐπειδή $-\frac{A_1}{B_1} = \lambda_1$ εἶναι ὁ συντελεστής διευθύνσεως τῆς (δ_1), καί $-\frac{A_2}{B_2} = \lambda_2$ εἶναι ὁ συντελεστής διευθύνσεως τῆς (δ_2), θά ἔχουμε:

$$\boxed{\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1} \qquad (2)$$

Ὥστε: **Γιά νά εἶναι δύο εὐθεῖες κάθετες, πρέπει καί ἀρκεῖ τό γινόμενο τῶν συντελεστῶν διευθύνσεως (σέ ὀρθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων) νά εἶναι ἴσο μέ -1.**

Παράδειγμα: Οἱ εὐθεῖες μέ ἐξισώσεις: $y = 7x + 4$ καί $y = -\frac{1}{7}x + 15$ εἶναι κάθετες, γιατί:

$$\lambda_1\lambda_2 = 7 \cdot \left(-\frac{1}{7}\right) = -1.$$

§ 29. ΕΞΙΣΩΣΗ ΜΙΑΣ ΕΥΘΕΙΑΣ ΠΟΥ ΠΕΡΝΑΕΙ ΑΠΟ ΕΝΑ ΣΗΜΕΙΟ ΚΑΙ ΕΙΝΑΙ ΚΑΘΕΤΗ Σ' ΕΝΑ ΜΗ ΜΗΔΕΝΙΚΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑ.

— Ἔχουμε τό σημεῖο $M_0(x_0,y_0)$ καί τό μή μηδενικό διάνυσμα $\vec{u}(A,B)$.

Ἄν $M(x,y)$ εἶναι ὁποιοδήποτε σημεῖο τῆς ζητούμενης εὐθείας, τότε:

$\vec{u} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0$, ὁπότε $\boxed{A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0}$ (1)

§ 30. ΕΞΙΣΩΣΗ ΜΙΑΣ ΕΥΘΕΙΑΣ ΠΟΥ ΠΕΡΝΑΕΙ ΑΠΟ ΕΝΑ ΣΗΜΕΙΟ ΚΑΙ ΕΙΝΑΙ ΚΑΘΕΤΗ ΣΕ ΑΛΛΗ ΕΥΘΕΙΑ.

Θέλουμε νά βροῦμε τήν ἐξίσωση τῆς εὐθείας (δ) πού περνάει ἀπό τό σημεῖο $M_0(x_0,y_0)$ καί εἶναι κάθετη στήν εὐθεία (δ): $Ax + By + \Gamma = 0$.

Ἄν $M(x,y)$ εἶναι ὁποιοδήποτε σημεῖο τῆς ζητούμενης εὐθείας (δ), τότε τό διάνυσμα $\overrightarrow{M_0M}(x - x_0,\ y - y_0)$ θά εἶναι κάθετο στήν εὐθεία (δ), ἡ ὁποία εἶναι κάθετη στό διάνυσμα $\vec{u}(A,B)$. Ἄρα τά διανύσματα $\overrightarrow{M_0M}$ καί $\vec{u}$ εἶναι παράλληλα.

Ἄρα: $\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} \iff \boxed{B(x - x_0) - A(y - y_0) = 0}$ (1)

Παράδειγμα: Ἡ ἐξίσωση τῆς εὐθείας, πού περνάει ἀπό τό σημεῖο $M_0(3,5)$ καί εἶναι κάθετη στήν εὐθεία μέ ἐξίσωση $4x - 9y + 7 = 0$, εἶναι:

$$\frac{x-3}{4} = \frac{y-5}{-9} \iff 9x + 4y - 47 = 0.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

51. Νά ἀποδείξετε ὅτι οἱ εὐθεῖες πού ὁρίζουν οἱ ἐξισώσεις:

$$3x + 4y - 2 = 0$$
$$8x - 6y + 5 = 0$$

εἶναι κάθετες

52. Νά ἀποδείξετε ὅτι οἱ ἐξισώσεις:

$$x - 3y + 2 = 0,\quad 12x + 4y + 31 = 0,\quad 2x - 6y - 7 = 0,\quad 9x + 3y - 40 = 0$$

ὁρίζουν πλευρές ὀρθογωνίου καί νά κατασκευάσετε αὐτό τό ὀρθογώνιο.

53. Νά βρεθεῖ ἡ ἐξίσωση τῆς εὐθείας:

α΄) πού περνάει ἀπό τό σημεῖο (–1,2) καί εἶναι κάθετη στήν εὐθεία : $3x - 4y + 1 = 0$.

β΄) » » » » » (–7,2) » » » » » : $x - 3y + 4 = 0$.

54. Ἕνα τρίγωνο ἔχει κορυφές Α(–3,2), Β(3, –2) καί Γ (0,–1). Νά ὁρίσετε τίς ἐξισώσεις τῶν ὑψῶν του καί νά ἀποδείξετε ὅτι αὐτά διέρχονται ἀπό τό ἴδιο σημεῖο.

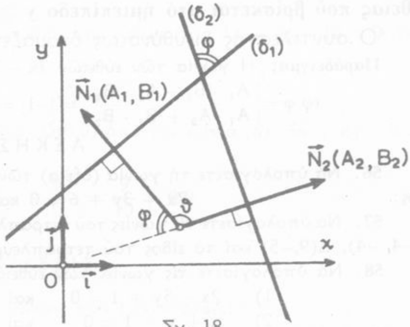
55. Στό προηγούμενο τρίγωνο νά ὁρίσετε τίς ἐξισώσεις τῶν μεσοκαθέτων τῶν πλευρῶν καί νά ἀποδείξετε ὅτι οἱ μεσοκάθετες αὐτές διέρχονται ἀπό τό ἴδιο σημεῖο πού ἀπέχει ἐξίσου ἀπό τίς κορυφές του.

***§ 31. ΓΩΝΙΑ ΔΥΟ ΕΥΘΕΙΩΝ.**—Ἔχουμε τίς εὐθεῖες (δ_1) καί (δ_2), μέ ἐξισώσεις ἀντιστοίχως:

$$A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0 \quad (1)$$

καί $$A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0 \quad (2)$$

Τά διανύσματα $\vec{N}_1(A_1,B_1)$ καί $\vec{N}_2(A_2, B_2)$ (Σχ. 18) θά εἶναι ἀντιστοίχως κάθετα στίς εὐθεῖες (δ_1), (δ_2).



Σχ. 18

Οἱ γωνίες τῶν εὐθειῶν θά εἶναι ἴσες ἤ παραπληρωματικές μέ τίς γωνίες τῶν διανυσμάτων αὐτῶν.

Ἄς εἶναι θ ἡ γωνία τῶν διανυσμάτων, ὅπου $0 \leq \theta \leq \pi$. Τότε θά ἔχουμε:

$$\textbf{συν}\theta = \frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \quad (3)$$

Ἄν φ εἶναι ἡ ὀξεία γωνία τῶν (δ_1) καί (δ_2), τότε $\theta + \varphi = \pi$ καί ἄρα συνφ $= \pm$ συνθ. Ἐπειδή $\varphi < \dfrac{\pi}{2}$, ἕπεται συνφ > 0. Καί ἄρα:

$$\textbf{συν}\varphi = \frac{|A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \quad (4)$$

Παρατηρήσεις:

α΄) Ἄν $(\delta_1) \perp (\delta_2)$, τότε συνφ $= 0$, καί ὁ τύπος (4) δίνει:

$$A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0,$$

πού εἶναι ἡ γνωστή σχέση καθετότητας τῶν εὐθειῶν.

β΄) Ἄν $\varphi < 90^0$, τότε: εφ $\varphi > 0$ καί ἄρα:

$$1 + \text{εφ}^2\varphi = \frac{1}{\text{συν}^2\varphi} \iff \text{εφ}^2\varphi = \frac{1}{\text{συν}^2\varphi} - 1 = \frac{(A_1^2 + B_1^2)(A_2^2 + B_2^2) - (A_1A_2 + B_1B_2)^2}{(A_1A_2 + B_1B_2)^2}$$

$$\textbf{εφ}\ \varphi = \frac{|A_1 \cdot B_2 - A_2 \cdot B_1|}{|A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2|} = \frac{|\lambda_2 - \lambda_1|}{|1 + \lambda_1\lambda_2|}. \quad \textbf{(5)}$$

ὅπου λ_1, λ_2 οἱ συντελεστές διευθύνσεως τῶν εὐθειῶν.

γ΄) Ἄν οἱ εὐθεῖες εἶναι παράλληλες, τότε $\varphi = 0$, ὁπότε:

$$A_1 \cdot B_2 - A_2 \cdot B_1 = 0 \quad \textbf{(6)}$$

καί βρίσκουμε πάλι τή γνωστή σχέση παραλληλίας τῶν εὐθειῶν.

δ΄) Ἄν ὁ τύπος (5) ἐφαρμοστεῖ στίς εὐθεῖες Ox (μέ ἐξίσωση $y = 0$) καί (δ): $y = \lambda x + \beta$, τότε: εφ $\varphi = |\lambda|$.

Ἄν $\lambda > 0$, τότε ἡ ὀξεία γωνία φ εἶναι ἐκείνη πού σχηματίζεται ἀπό τόν ἄξονα Ox καί τό μέρος τῆς (δ) πού εἶναι πάνω ἀπό τόν ἄξονα Ox.

Ἄν $\lambda < 0$, ἡ ὀξεία γωνία φ εἶναι ἐκείνη πού σχηματίζεται ἀπό τόν ἄξονα Ox καί ἀπό τό μέρος τῆς εὐθείας, πού εἶναι κάτω ἀπό τόν ἄξονα Ox.

Ἀπό τά παραπάνω φαίνεται ὅτι:

Σέ ὀρθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων, ὁ συντελεστής διευθύνσεως μιᾶς εὐθείας (δ), πού δέν εἶναι παράλληλη μέ τόν ἄξονα Oy, ἰσοῦται μέ τήν ἐφαπτομένη τῆς γωνίας, ἡ ὁποία (γωνία) σχηματίζεται ἀπό τόν ἄξονα Ox καί τό μέρος τῆς εὐθείας πού βρίσκεται στό ἡμιεπίπεδο $y \geqq 0$.

Ὁ συντελεστής διευθύνσεως ὀνομάζεται τότε **κλίση** τῆς εὐθείας.

Παράδειγμα: Ἡ γωνία τῶν εὐθειῶν $7x - 3y + 6 = 0$ καί $2x - 5y - 4 = 0$, εἶναι:

$$\varepsilon\varphi\, \varphi = \frac{|A_1 \cdot B_2 - A_2 \cdot B_1|}{|A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2|} = |-1| = 1 \Longrightarrow \varphi = \frac{\pi}{4} \quad \text{ἤ} \quad \varphi = \frac{3\pi}{4}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

56. Νά ὑπολογίσετε τή γωνία (ὀξεία) τῶν εὐθειῶν (δ_1) καί (δ_2) μέ ἐξισώσεις ἀντιστοίχως: $7x + 3y + 6 = 0$ καί $2x + 5y - 4 = 0$.

57. Νά ὑπολογίσετε τίς γωνίες τοῦ τετραπλεύρου μέ κορυφές τά σημεῖα A(10,8), B(–3,9), Γ(–4, –4), Δ(9,–5) καί τό εἶδος τοῦ τετραπλεύρου.

58. Νά ὑπολογίσετε τίς γωνίες τῶν εὐθειῶν:

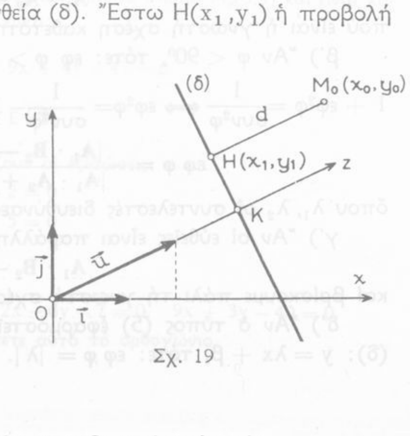
1) $2x - 5y + 1 = 0$ καί $x - 2y + 3 = 0$
2) $x + y + 1 = 0$ καί $x - y + 1 = 0$
3) $6x - 3y + 3 = 0$ καί $x = 6$.

59. Νά ὁρίσετε τήν ἐξίσωση τῆς εὐθείας (δ_1), πού περνάει ἀπό τό σημεῖο A(3,5) καί σχηματίζει γωνία $\frac{\pi}{3}$ μέ τήν εὐθεία (δ_2): $x - y + 6 = 0$.

60. Νά ὁρίσετε τήν ἐξίσωση τῆς εὐθείας, πού περνάει ἀπό τό σημεῖο A(1,–3) καί σχηματίζει γωνία 135^0 μέ τήν εὐθεία $x + 2y + 4 = 0$.

61. Νά ὑπολογίσετε τίς γωνίες τοῦ τριγώνου πού ἔχει κορυφές A(0,0), B(–4,4) καί $\Gamma(2\sqrt{3} - 2,\ 2\sqrt{3} + \sqrt{2})$.

*** § 32. ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΕΝΟΣ ΣΗΜΕΙΟΥ ΑΠΟ ΜΙΑ ΕΥΘΕΙΑ.**—Θεωροῦμε ἕνα σημεῖο $M_0(x_0, y_0)$ καί μία εὐθεία (δ): $Ax + By + \Gamma = 0$, $(|A| + |B| > 0)$. Ἐπίσης θεωροῦμε τόν ἄξονα $\overrightarrow{OZ}$ παράλληλο καί ὁμόρροπο μέ τό διάνυσμα $\vec{u}\,(A,B)$ (Σχ. 19) πού εἶναι κάθετο στήν εὐθεία (δ). Ἔστω $H(x_1, y_1)$ ἡ προβολή τοῦ M_0 πάνω στή (δ).



Σχ. 19

Θά ἔχουμε:

$$\vec{u} \cdot \overrightarrow{HM_0} = \overline{u} \cdot \overline{HM_0} = \sqrt{A^2 + B^2} \cdot \overline{HM_0},$$

δηλαδή:

$$A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) = \sqrt{A^2 + B^2} \cdot \overline{HM_0}$$

ὁπότε:

$$\overline{HM_0} = \frac{A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1)}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (1)$$

Ἐπειδή τό H βρίσκεται πάνω στή (δ), θά εἶναι $Ax_1 + By_1 = -\Gamma$ καί ἡ (1) γίνεται:

$$\overline{HM_0} = \frac{Ax_0 + By_0 + \Gamma}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

Ἄρα ἡ ἀπόσταση τοῦ M_0 ἀπό τήν εὐθεία (δ) εἶναι:

$$\mathbf{d} = |\mathbf{M_0H}| = \frac{|\mathbf{Ax_0 + By_0 + \Gamma}|}{\sqrt{\mathbf{A_2 + B_2}}} \qquad \mathbf{(2)}$$

Ἡ ἀπόσταση ΟΚ τῆς ἀρχῆς Ο τῶν ἀξόνων ἀπό τή (δ) εἶναι:

$$\mathbf{OK} = \frac{|\mathbf{\Gamma}|}{\sqrt{\mathbf{A^2 + B^2}}}. \qquad (3)$$

Παραδείγματα:

1ο. Ἡ ἀπόσταση τοῦ σημείου $M_0(2,5)$ ἀπό τήν εὐθεία (δ): $3x + 4y - 10 = 0$ εἶναι:

$$d = \frac{|3 \cdot 2 + 4 \cdot 5 - 10|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|6 + 20 - 10|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{16}{5} = 3{,}2.$$

2ο. Ἡ ἀπόσταση τῆς ἀρχῆς τῶν ἀξόνων $O(0,0)$ ἀπό τήν εὐθεία (δ): $6x + 8y - 9 = 0$ εἶναι:

$$d = \frac{|-9|}{\sqrt{6^2 + 8^2}} = \frac{|-9|}{10} = \frac{9}{10} = 0{,}9.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

62. Νά ὑπολογίσετε τά ὕψη τοῦ τριγώνου πού ἔχει κορυφές:

1) $A(1,5)$, $B(-3,3)$ καί $\Gamma(6,2)$, 2) $A(2,3)$, $B(-4,0)$, $\Gamma(-1,-4)$, 3) $A(3,5)$, $B(1,-2)$, $\Gamma(6,-5)$.

63. Ἔχετε τό σημεῖο $A(4,6)$ καί τήν εὐθεία (δ): $(\mu-1)x-(2\mu-3)y-4\mu+1=0$. Νά ὁρίσετε τό μ, ὥστε ἡ ἀπόσταση τοῦ Α ἀπό τήν εὐθεία (δ) νά εἶναι 3.

64. Νά ὁρίσετε τήν ἐξίσωση τῆς εὐθείας, πού ἀπέχει ἐξίσου ἀπό τίς εὐθεῖες:

$$3x + 4y - 5 = 0 \text{ καί } 3x + 4y + 7 = 0.$$

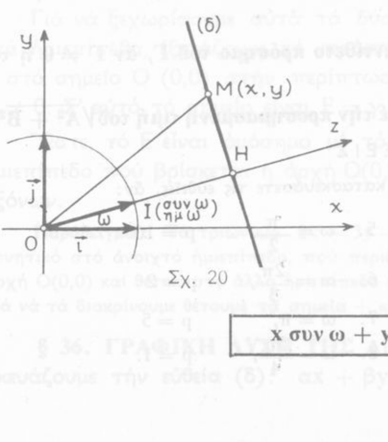
65. Νά ὑπολογίσετε τίς ἀποστάσεις τῆς ἀρχῆς $O(0,0)$ ἀπό τίς εὐθεῖες

$$x + 2y - 1 = 0, \quad \sqrt{3}\,x + \sqrt{2}\,y - 1 = 0.$$

Ποιό συμπέρασμα βγάζετε;

§ 33. ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΗΣ ΕΥΘΕΙΑΣ.

—Θεωροῦμε τήν εὐθεία (δ) καί τόν ἄξονα $\overrightarrow{OZ}$ μέ μοναδιαῖο διάνυσμα $\overrightarrow{OI}$ (συνω, ημω) κάθετο στήν εὐθεία (δ) (Σχ. 20). Ἄς εἶναι Η τό σημεῖο τομῆς τῆς (δ) καί τοῦ $\overrightarrow{OZ}$.



Σχ. 20

Θέτουμε $\overline{OH} = p$. Τότε ἡ εὐθεία (δ) θά εἶναι τό σύνολο τῶν σημείων $M(x, y)$ γιά τά ὁποῖα:

$$\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{HM} = 0 \text{ ἤ } \overrightarrow{OI}\,(\overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OM}) = 0 \text{ ἤ}$$

$$\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{OH} = p \text{ ἤ}$$

$$\boxed{\mathbf{x\,συν\,ω + y\,ημ\,ω = p}} \qquad (1)$$

Ἡ (1) εἶναι ἡ **κανονικὴ ἐξίσωση** τῆς εὐθείας (δ) (κατά τόν **Hesse**).

Εἶναι φανερό ὅτι ἡ θέση τῆς εὐθείας (δ) ἐξαρτᾶται ἀπό τήν ἀπόσταση $\overline{OH} = \rho$, πού θεωρεῖται πάντοτε θετική, καί ἀπό τή γωνία ω, πού θεωρεῖται καί αὐτή θετική, ὥστε $0 \leq \omega \leq 2\pi$.

Παράδειγμα : Ἄν $\omega = \frac{\pi}{3}$ καί $OH = \frac{5}{2}$, ἡ ἐξίσωση τῆς (δ) γίνεται:

$$x \cdot \text{συν}\frac{\pi}{3} + y \cdot \text{ημ}\frac{\pi}{3} = \frac{5}{2} \iff \frac{x}{2} + y\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{5}{2} = 0 \iff x + \sqrt{3} \cdot y - 5 = 0.$$

§ 34. ΑΝΑΓΩΓΗ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΣ Ax + By + Γ = 0 ΣΤΗΝ ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ.

—Ἀρκεῖ νά ὁρίσουμε τή γωνία ω καί τό p, ὥστε οἱ ἐξισώσεις :

(1) $x\text{συν}\,\omega + y\,\text{ημ}\,\omega - p = 0$ καί $Ax + By + \Gamma = 0$ (2)

νά παριστάνουν τήν ἴδια εὐθεία. Γι' αὐτό πρέπει καί ἀρκεῖ:

$$\frac{\text{συν}\,\omega}{A} = \frac{\text{ημ}\,\omega}{B} = \frac{-p}{\Gamma} = \rho \implies \text{συν}\,\omega = \rho A,\ \text{ημ}\,\omega = \rho B,\ -p = \rho\Gamma,$$

ὁπότε: $\rho^2(A^2 + B^2) = \text{συν}^2\omega + \text{ημ}^2\omega = 1 \implies \rho = \dfrac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$ (3)

καί

(4) $\text{συν}\,\omega = \dfrac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$ καί $\text{ημ}\omega = \dfrac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$ (5)

Ἄρα ἡ (1) γράφεται:

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}x + \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}y + \frac{\Gamma}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = 0 \qquad (6)$$

Σημείωση. Ἐπειδή $p > 0$, ἀπό τή σχέση $-p = \rho\Gamma$ συνάγουμε οἱ ρ καί Γ θά εἶναι **ἑτερόσημοι** ἀριθμοί.

Ἄν $\Gamma = 0$, τότε $p = 0$. Σ' αὐτή τήν περίπτωση ὑποθέτουμε συμβατικά ὅτι τό $\overrightarrow{OH}$ βρίσκεται στό θετικό ἡμιεπίπεδο ὡς πρός τόν ἄξονα Ox. Ἑπομένως $\omega < \pi$ καί $\text{ημ}\,\omega > 0$. Ὁπότε ἀπό τή σχέση $\text{ημ}\omega = \rho B$, ἕπεται ὅτι οἱ ρ καί B εἶναι **ὁμόσημοι** ἀριθμοί.

Ἀπό τά παραπάνω ἔχουμε τόν ἀκόλουθο κανόνα.:

ΚΑΝΟΝΑΣ. Γιά νά γράψουμε τήν $Ax + By + \Gamma = 0$ στήν κανονική της μορφή ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς:

1. **Βρίσκουμε τήν τιμή τοῦ: $\sqrt{A^2 + B^2}$**
2. **Δίνουμε στήν τιμή τοῦ $\sqrt{A^2 + B^2}$ τό ἀντίθετο πρόσημο τοῦ Γ, ἄν $\Gamma \neq 0$ ἤ τό πρόσημο τοῦ B ἄν $\Gamma = 0$.**
3. **Διαιροῦμε τά μέλη τῆς $Ax + By + \Gamma = 0$ μέ τήν προσημασμένη τιμή τοῦ $\sqrt{A^2 + B^2}$.**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

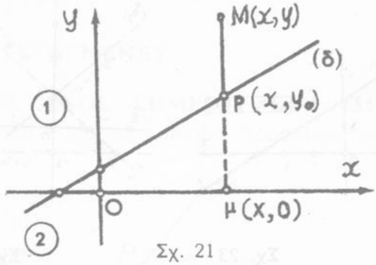
66. Νά σχηματίσετε τίς ἐξισώσεις καί νά κατασκευάσετε τίς εὐθεῖες, ἄν:

1. $\omega = 0$,	$p = 5$	5. $\omega = \frac{\pi}{2}$,	$p = 10$
2. $\omega = \frac{3\pi}{2}$,	$p = 3$	6. $\omega = \frac{2\pi}{3}$,	$p = 2$
3. $\omega = \frac{\pi}{4}$,	$p = 3$	7. $\omega = \pi$,	$p = 5$
4. $\omega = \frac{7\pi}{4}$,	$p = 4$	8. $\omega = \frac{5\pi}{4}$,	$p = 1$.

67. Νά σχηματίσετε τήν κανονική μορφή τῶν ἐξισώσεων

1. $3x + 4y - 10 = 0$	3. $x + y + 8 = 0$
2. $5x - 12y + 39 = 0$	4. $\sqrt{3} - y = 0$.

§ 35. ΠΡΟΣΗΜΟ ΤΟΥ ΤΡΙΩΝΥΜΟΥ $\alpha x + \beta y + \gamma$.— Τό σημεῖο τῆς παραστάσεως $E = \alpha x + \beta y + \gamma$ ἐξαρτᾶται ἀπό τίς τιμές τῶν μεταβλητῶν x καί y, δηλαδή ἀπό τή θέση τοῦ σημείου M(x,y) πάνω στό Καρτεσιανό ἐπίπεδο (σχ. 21).



Σχ. 21

Γιά νά εἶναι τό τριώνυμο E ἴσο μέ μηδέν, πρέπει καί ἀρκεῖ τό M νά βρίσκεται πάνω στήν εὐθεία:

$$(\delta): \quad \alpha x + \beta y + \gamma = 0.$$

Ὥστε: $\quad E = 0 \iff M \in (\delta)$.

Ἄν $M \notin (\delta)$, γράφουμε ἀπό τό M τήν παράλληλη Mμ πρός τόν ἄξονα 0y, ἡ ὁποία τέμνει τήν εὐθεία (δ) σ' ἕνα σημεῖο P (x, y_0), τοῦ ὁποίου οἱ συντεταγμένες (x, y_0) ἐπαληθεύουν τήν ἐξίσωση τῆς εὐθείας:

$$\alpha x + \beta y_0 + \gamma = 0 \quad (1)$$

Γιά τό σημεῖο M θά ἔχουμε:

$$E = \alpha x + \beta y + \gamma = (\alpha x + \beta y + \gamma) - (\alpha x + \beta y_0 + \gamma) = \beta y - \beta y_0$$

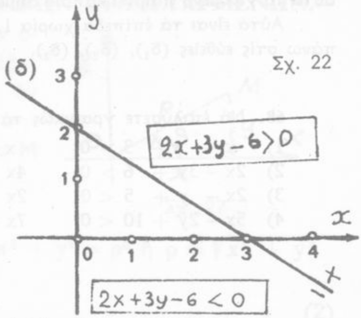
$$\mathbf{E = \beta\,(y - y_0) = \beta \cdot \overline{PM}.} \quad (2)$$

Ὥστε, ἡ παράσταση E εἶναι ὁμόσημη μέ τό β, ἄν $\overline{PM} > 0$, δηλαδή ἄν τό M βρίσκεται πάνω ἀπό τήν εὐθεία (δ), καί ἑτερόσημη μέ τό β, ἄν $\overline{PM} < 0$, δηλαδή ἄν τό M βρίσκεται κάτω ἀπό τήν εὐθεία (δ).

Ὥστε, τό τριώνυμο **$E = \alpha x + \beta y + \gamma$ εἶναι θετικό,** γιά κάθε σημεῖο τοῦ ἑνός ἡμιεπιπέδου ἀπό τά δύο πού ὁρίζει ἡ εὐθεία **$\alpha x + \beta y + \gamma = 0$,** καί ἀρνητικό γιά κάθε σημεῖο τοῦ ἄλλου ἡμιεπιπέδου.

Γιά νά ξεχωρίσουμε αὐτά τά δύο **ἀνοιχτά** ἡμιεπίπεδα, ἐξετάζουμε τό πρόσημο τῆς E στό σημεῖο O (0,0) στήν περίπτωση πού $\gamma \neq 0$. Σ' αὐτό τό σημεῖο εἶναι $E = \gamma$.

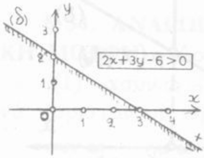
Ὥστε, τό E εἶναι ὁμόσημο μέ τό γ στό ἡμιεπίπεδο πού βρίσκεται ἡ ἀρχή O(0,0) τῶν ἀξόνων.



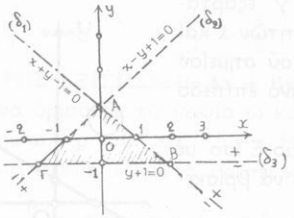
Σχ. 22

Παράδειγμα : Τό τριώνυμο $2x + 3y - 6$ εἶναι ἀρνητικό στό ἀνοιχτό ἡμιεπίπεδο, πού περιέχει τήν ἀρχή O(0,0) καί θετικό στό ἄλλο ἡμιεπίπεδο (σχ.22). Γιά νά τά διακρίνουμε θέτουμε τά σημεῖα + καί − ἀπό τά δύο μέρη τῆς εὐθείας.

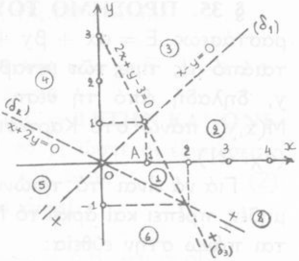
§ 36. ΓΡΑΦΙΚΗ ΛΥΣΗ ΤΗΣ ΑΝΙΣΩΣΕΩΣ : $\alpha x + \beta y + \gamma > 0$.— Κατασκευάζουμε τήν εὐθεία (δ): $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ καί ὁρίζουμε τό σημεῖο τῆς παραστάσεως $\alpha x + \beta y + \gamma$ σέ καθένα ἀπό τά ἡμιεπίπεδα στά ὁποῖα χωρίζεται τό ἐπίπεδο xOy ἀπό τήν εὐθεία (δ). (Σχ. 23).



Σχ. 23



Σχ. 24



Σχ. 25

Τήν εὐθεία (δ) τή γράφουμε μέ μικρές παῦλες γιά νά δείξουμε πώς δέν περιέχεται στό ἡμιεπίπεδο πού ζητοῦμε, ἐκτός ἄν ἔχουμε νά λύσουμε τήν ἀνίσωση $2x + 3y - 6 \geqq 0$, ὁπότε γράφουμε τή (δ) μέ μιά συνεχόμενη γραμμή.

Ἐφαρμογές:

1ο. Γιά ποιές τιμές τῶν x,y συναληθεύουν οἱ ἀνισώσεις:

$x + y - 1 < 0$ (1), $x - y + 1 > 0$ (2), $y + 1 > 0$ (3).

Κατασκευάζουμε τίς εὐθεῖες: $x + y - 1 = 0$, $x - y + 1 = 0$, $y + 1 = 0$.

Γραμμοσκιάζουμε τά ἡμιεπίπεδα πού ἐπαληθεύουν τίς ἀνισώσεις καί βρίσκουμε ὅτι οἱ τρεῖς ἀνισώσεις συναληθεύουν στό ἐσωτερικό τοῦ τριγώνου ΑΒΓ (Σχ. 24).

2ο. Νά ἐπιλυθεῖ ἡ ἀνίσωση $(x - y)(x + 2y)(2x + y - 3) < 0$.

Κατασκευάζουμε τίς εὐθεῖες (σχ. 25).

(δ_1): $x - y = 0$, (δ_2) $x + 2y = 0$, (δ_3): $2x + y - 3 = 0$.

Παρατηροῦμε ὅτι τό ἐπίπεδο xOy χωρίζεται σέ ἑφτά ἐπίπεδα χωρία. Σέ καθένα ἀπό αὐτά τό γινόμενο παίρνει κάποιο σημεῖο. Ξεχωρίζουμε τά μέρη ὅπου ἐπαληθεύεται ἡ ἀνίσωση.

Αὐτά εἶναι τά ἐπίπεδα χωρία 1,3,5 καί 7, ἀφοῦ ἐξαιρέσουμε τά σημεῖα πού βρίσκονται πάνω στίς εὐθεῖες (δ_1), (δ_2), (δ_3).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

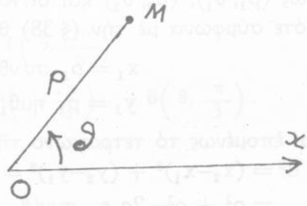
68. Νά ἐπιλύσετε γραφικῶς τά συστήματα:

1) $x + y - 3 > 0$, $x - y + 4 < 0$, $x - 4 > 0$
2) $2x - 3y + 6 > 0$, $4x - y - 4 < 0$, $4x + 3y + 12 > 0$
3) $2x - y + 5 < 0$, $2x + y + 7 < 0$, $3 - y > 0$
4) $5x - 2y + 10 < 0$, $7x - 2y + 14 > 0$, $2x + y - 5 < 0$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ III

* ΠΟΛΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

§ 37. ΠΟΛΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΕΝΟΣ ΣΗΜΕΙΟΥ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ.— Στήν παράγραφο αὐτή θά μάθουμε μιά νέα μέθοδο προσδιορισμοῦ τῶν σημείων ἑνός ἐπιπέδου μέ τή βοήθεια δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν. Ὑποθέτουμε δεδομένο τό σημεῖο Ο πού ὀνομάζεται **πόλος** καί μία σταθερή ἡμιευθεία Ox πού ὀνομάζεται **πολικός ἄξονας.** Ἡ θέση ἑνός σημείου Μ τοῦ ἐπιπέδου μπορεῖ νά καθορισθεῖ μέ τούς ἑξῆς δύο ἀριθμούς:

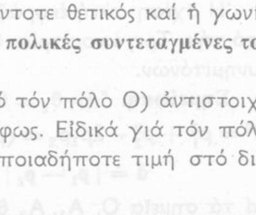


Σχ. 26

Τόν ἀριθμό ρ πού ἐκφράζει τήν ἀπόσταση τοῦ Μ ἀπό τόν πόλο καί τόν ἀριθμό θ πού εἶναι τό μέτρο τῆς θετικῆς γωνίας πού σχηματίζεται ἀπό τόν πολικό ἄξονα καί τήν εὐθεία ΟΜ. Ὁ ἀριθμός ρ, πού εἶναι πάντοτε θετικός καί ἡ γωνία θ πού μεταβάλλεται ἀπό τό 0 μέχρι τό 2π, λέγονται **πολικές συντεταγμένες τοῦ σημείου Μ** (σχ. 26).

Ἔτσι σέ κάθε σημεῖο Μ τοῦ ἐπιπέδου (ἐκτός ἀπό τόν πόλο Ο) ἀντιστοιχεῖ ἕνα διατεταγμένο ζεῦγος ἀριθμῶν (ρ,θ) καί ἀντιστρόφως. Εἰδικά γιά τόν πόλο εἶναι ρ = 0 καί θ αὐθαίρετο. Δηλαδή τό θ παίρνει ὁποιαδήποτε τιμή στό διάστημα [0, 2π].

§ 38. ΣΧΕΣΗ ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΩΝ ΚΑΙ ΠΟΛΙΚΩΝ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ.— Ἔστω ἕνα σύστημα ὀρθογωνίων ἀξόνων, τῶν ὁποίων ἡ ἀρχή συμπίπτει μέ τόν πόλο καί ὁ ἄξονας τῶν τετμημένων μέ τόν πολικό ἄξονα. Τότε, ἄν (x,y) εἶναι οἱ Καρτεσιανές συντεταγμένες τοῦ σημείου Μ, θά ἔχουμε γιά ὁποιαδήποτε θέση τοῦ Μ στό ἐπίπεδο:



Σχ. 27

$$(1)\quad \left.\begin{aligned} x &= \rho\,\sigma\upsilon\nu\theta \\ y &= \rho\,\eta\mu\theta \end{aligned}\right\}\ \text{ἤ}\ \left.\begin{aligned} x^2 &= \rho^2\,\sigma\upsilon\nu^2\theta \\ y^2 &= \rho^2\,\eta\mu^2\theta \end{aligned}\right\}\ \text{ἤ}\ x^2+y^2=\rho^2\ \text{ἤ}\ \rho=\sqrt{x^2+y^2}$$

καί
$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{y}{x} \qquad (2)$$

*** § 39. ΠΟΛΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΥΘΕΙΑΣ.**—Ἔστω $Ax + By + \Gamma = 0$ ἡ ἐξίσωση μιᾶς εὐθείας (δ) σέ Καρτεσιανές συντεταγμένες. Ἄν ἐκφράσουμε τά x καί y συναρτήσει τῶν πολικῶν συντεταγμένων (§ 38), ἡ ἐξίσωση τῆς (δ) γίνεται:

$$\rho\,(A\ \text{συν}\theta + B\ \text{ημ}\theta) + \Gamma = 0. \tag{1}$$

Ἄν ἡ ἐξίσωση τῆς (δ) ἔχει τήν κανονική μορφή:

$$x\ \text{συν}\omega + y\ \text{ημ}\ \omega = p$$

καί ἐργαστοῦμε ὅπως προηγουμένως, τότε ἡ (δ) γίνεται:

$$\rho\ \text{συν}\theta\ \text{συν}\omega + \rho\ \text{ημ}\theta\ \text{ημ}\omega = p \quad \text{ἤ} \quad \boldsymbol{\rho\ \text{συν}\ (\theta - \omega) = p}. \tag{2}$$

§ 40. ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΔΥΟ ΣΗΜΕΙΩΝ ΣΕ ΠΟΛΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ.

Θεωροῦμε δύο σημεῖα A_1 καί A_2 πού οἱ πολικές συντεταγμένες εἶναι ἀντιστοίχως (ρ_1, θ_1), (ρ_2, θ_2) καί οἱ Καρτεσιανές τους ἀντιστοίχως (x_1, y_1), (x_2, y_2). Τότε σύμφωνα μέ τήν (§ 38) θά ἔχουμε:

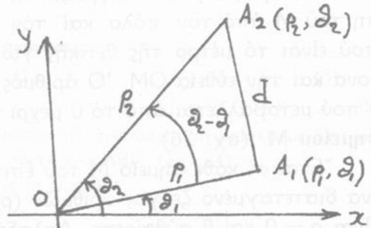
$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \rho_1\ \text{συν}\theta_1 \\ y_1 &= \rho_1\ \text{ημ}\theta_1 \end{aligned}\right\}\ \text{καί}\ \left.\begin{aligned} x_2 &= \rho_2\ \text{συν}\theta_2 \\ y_2 &= \rho_2\ \text{ημ}\theta_2 \end{aligned}\right\}$$

καί ἑπομένως τό τετράγωνο τῆς ἀποστάσεως τῶν σημείων A_1 καί A_2 θά εἶναι:

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = (\rho_2\ \text{συν}\theta_2 - \rho_1\ \text{συν}\theta_1)^2 + (\rho_2\ \text{ημ}\theta_2 - \rho_1\ \text{ημ}\theta_1)^2 =$$
$$= \rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2\ \text{συν}(\theta_1 - \theta_2)$$

$$\text{ἤ} \quad \boldsymbol{d^2 = \rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2\ \text{συν}\ (\theta_1 - \theta_2).}$$

Ἡ σχέση αὐτή ἐκφράζει τό γνωστό ἀπό τήν Τριγωνομετρία θεώρημα τῶν συνημιτόνων.



Σχ. 28

Σημείωση. Ἄν $\theta_1 = \theta_2$, τότε:

$$d^2 = \rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2 = (\rho_1 - \rho_2)^2 \Rightarrow$$
$$\mathbf{d} = |\rho_1 - \rho_2|$$

καί τά σημεῖα O, A_1, A_2 θά βρίσκονται πάνω στήν ἴδια εὐθεία.

Παρατηρήσεις:

α΄) Ἄν $\omega = 0^0$, ἡ (2) γίνεται: $\boldsymbol{\rho\ \text{συν}\theta = p}$

β΄) Ἄν $\omega = 180^0$, ἡ (2) γίνεται: $\boldsymbol{\rho\ \text{συν}\theta = -p}$

Καί στίς δύο περιπτώσεις ἡ εὐθεία (δ) εἶναι κάθετη στόν πολικό ἄξονα Ox.

γ΄) Ἄν $\omega = 90^0$ ἡ (2) γίνεται: $\boldsymbol{\rho\ \text{ημ}\theta = p}$

δ΄) Ἄν $\omega = 270^0$ ἡ (2) γίνεται: $\boldsymbol{\rho\ \text{ημ}\theta = -p}$

Καί στίς δύο περιπτώσεις ἡ (δ) εἶναι παράλληλη μέ τόν πολικό ἄξονα Ox. Κάθε εὐθεία πού περνάει ἀπό τόν πόλο ἔχει ἐξίσωση: $\theta = k$, ὅπου k ὁρισμένος πραγματικός ἀριθμός.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

69. Νά ὁρίσετε τά σημεῖα πού ἔχουν συντεταγμένες:

$$\left(4, \frac{\pi}{4}\right), \left(6, \frac{2\pi}{3}\right), \left(4, \frac{\pi}{3}\right), (5, \pi).$$

70. Νά μετασχηματίσετε τίς επόμενες ἐξισώσεις σέ πολικές συντεταγμένες:

1) $x - 3y = 0$	4) $x^2 + y^2 - \alpha x = 0$	
2) $y + 5 = 0$	5) $x^2 - y^2 = \alpha^2$	(ἄξονες ὀρθοκανονικοί)
3) $x^2 + y^2 = 16$	6) $2xy = 7$	

71. Τίς ἑπόμενες ἐξισώσεις νά τίς μετασχηματίσετε σέ Καρτεσιανές ὀρθογώνιες συντεταγμένες

1) $\rho = 10$	5) $\rho^2 \text{συν}^2 2\theta = \alpha^2$	9) $\rho = \alpha\,(1 - \text{συν}\theta)$
2) $\rho = 16\,\text{συν}\theta$	6) $\rho = \alpha\,\text{ημ}2\theta$	10) $\rho^2 \text{ημ}2\theta = 16$
3) $\rho\,\text{ημ}\theta = 4$	7) $\rho = \alpha\,\text{συν}2\theta$	11) $\rho^2 = 16\,\text{ημ}2\theta$
4) $\rho = \alpha\,\text{ημ}\theta$	8) $\rho\,\text{συν}\theta = \alpha\,\text{ημ}^2\theta$	12) $\rho = \alpha\,\text{ημ}3\theta$.

72. Νά ὑπολογίσετε τό ἐμβαδόν τοῦ τριγώνου, πού ἔχει κορυφές τά σημεῖα:

1) $A\left(4, \frac{\pi}{3}\right)$, $B\left(6, \frac{2\pi}{3}\right)$, $\Gamma\left(8, \frac{4\pi}{3}\right)$

2) $A\left(12, \frac{\pi}{6}\right)$, $B\left(8, \frac{5\pi}{6}\right)$, $\Gamma\left(5, \frac{5\pi}{6}\right)$.

73. Νά ὑπολογισθεῖ ἡ ἀπόσταση τῶν σημείων $A\left(5, \frac{2\pi}{3}\right)$, $B\left(8, \frac{\pi}{3}\right)$.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ I

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΠΟ ΤΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ ΚΑΙ ΤΑ ΣΥΝΟΛΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ II

ΑΞΙΩΜΑΤΑ ΤΟΥ PEANO — ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ἢ ΤΕΛΕΙΑ ΕΠΑΓΩΓΗ

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ III

ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΚΑΙ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ IV

ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ V

ΠΡΟΟΔΟΙ — ΣΕΙΡΕΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ VI

ΑΚΕΡΑΙΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ ΜΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

6795805