Δ. ΠΑΠΑΜΙΧΑΗΛ - Α. ΣΚΙΑΔΑ

Θεωρητική Γεωμετρία

Τευχος Πρωτο

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ

ΑΘΗΝΑ 1977

ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Δ. ΠΑΠΑΜΙΧΑΗΛ - Α. ΣΚΙΑΔΑ

Θεωρητικη Γεωμετρια

Τευχος Πρωτο

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΑΘΗΝΑ 1977

Ὁ Εὐκλείδης

Ὁ Ἕλληνας γεωμέτρης Εὐκλείδης ὑπῆρξε ὁ πιό διάσημος μαθηματικός ὅλων τῶν ἐποχῶν καί ὅλων τῶν ἐθνῶν. Γιά τή ζωή του ξέρουμε πολύ λίγα πράγματα. Γεννήθηκε τό 330 π.Χ. στή Σικελία ἤ στή Συρία καί πέθανε τό 270 ἤ 275 π.Χ. Ὁ πατέρας του Ναύκρατος τόν ἔστειλε ἀρχικά γιά σπουδές στήν Ἀθήνα ὅπου γρήγορα διακρίθηκε γιά τίς μαθηματικές του ἱκανότητες καί τίς γεωμετρικές του ἐργασίες. Ἀργότερα πῆγε ὡς προσκεκλημένος τοῦ Πτολεμαίου στήν Ἀλεξάνδρεια καί δίδαξε Ἀριθμητική καί Γεωμετρία. Ἡ διδασκαλία του ἐκεῖ ἄφησε ἐποχή καί ὁ Εὐκλείδης ταύτισε γιά ἑκατοντάδες χρόνια τό ὄνομά του μέ τή Γεωμετρία στήν ὁποία εἶχε ἰδιαίτερη ἀγάπη. Κατά τόν Πάππο (3ος αἰώνας μ.Χ.) ὁ Εὐκλείδης ἦταν πράος καί εἶχε μία ξεχωριστή ἱκανότητα νά μεταδίδει γνώσεις στούς συνανθρώπους του.

Ἡ μεγάλη φήμη τοῦ Εὐκλείδη ὀφείλεται κυρίως στό ἔργο του «Στοιχεῖα», ἀπό τό ὁποῖο πῆρε καί τό ὄνομα τοῦ «Στοιχειωτοῦ». Τό ἔργο αὐτό πού ἀποτελεῖ ὑπόδειγμα θεμελιώσεως καί παρουσιάσεως μαθηματικοῦ κλάδου, ἔμεινε γιά πολλούς αἰῶνες τό βασικό κείμενο διδασκαλίας τῆς Γεωμετρίας στά πιό περίφημα σχο-

λεῖα. Τά «Στοιχεῖα» τοῦ Εὐκλείδη ἀποτελοῦνται ἀπό δεκατρία βιβλία τά ὁποῖα περιλαμβάνουν, ἐκτός ἀπό τίς ἀρχικές προτάσεις, 93 προβλήματα καί 372 θεωρήματα. Τά τέσσερα πρῶτα βιβλία καί τό ἕκτο περιέχουν τήν ἐπίπεδη Γεωμετρία, ἐνῶ τό πέμπτο πραγματεύεται τή θεωρία τῶν ἀναλογιῶν. Τά ἑπόμενα τρία βιβλία, ἕβδομο, ὄγδοο καί ἔνατο, περιέχουν καθαρῶς ἀριθμητικά θέματα καί στό δέκατο γίνεται μέ θαυμάσιο τρόπο ἡ ἀνάπτυξη τῆς θεωρίας τῶν ἀσύμμετρων γεωμετρικῶν μεγεθῶν. Τέλος τά τρία τελευταῖα βιβλία ἀναφέρονται στή Στερεομετρία. Ἡ πρώτη ἔκδοση τῶν «Στοιχείων» ἔγινε τό 1482 στή Βενετία.

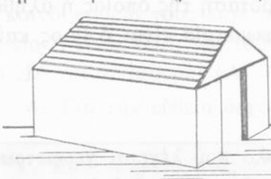
Πολλοί καί μεγάλοι μαθηματικοί ἀσχολήθηκαν τούς τελευταίους αἰῶνες μέ τή θεμελίωση τῆς Γεωμετρίας πού καθιέρωσε ὁ Εὐκλείδης καί ἀρκετοί ἀπό αὐτούς συνέβαλαν στό νά γίνεται σήμερα ἡ θεμελίωση αὐτή μέ πιό αὐστηρό τρόπο. Μερικοί τροποποίησαν ἀκόμη καί ὁρισμένες ἀπό τίς «ἀρχές» πού ἔβαλε ὁ Εὐκλείδης καί δημιούργησαν ἄλλα «λογικά οἰκοδομήματα» τά ὁποῖα ὅμως δέν ἔχουν οὔτε τήν ἁπλότητα οὔτε τήν ὀμορφιά τῆς Γεωμετρίας πού στηρίζεται στίς ἀρχές τοῦ Εὐκλείδη. Ἔτσι οἱ ἀρχές αὐτές κυριαρχοῦν ἀκόμη καί σήμερα στή Γεωμετρία ἡ ὁποία διδάσκεται στά Γυμνάσια ὅλου τοῦ κόσμου καί ἡ ὁποία, γι' αὐτόν ἀκριβῶς τό λόγο, λέγεται «Εὐκλείδειος Γεωμετρία».

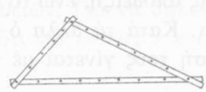
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

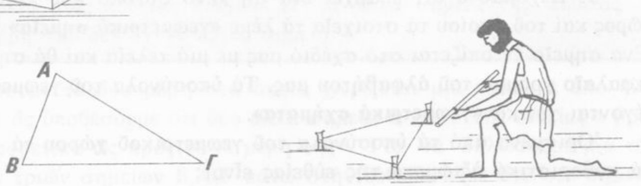
ΟΙ ΠΡΩΤΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Εισαγωγή.

1. Ἡ περιγραφή καί ἡ μελέτη τῶν σωμάτων τοῦ χώρου πού μᾶς περιβάλλει (αἰσθητοῦ χώρου) περιορίζεται ἀπό τήν πλευρά τῶν Μαθηματικῶν μόνο στή μορφή (τό σχῆμα) τῶν σωμάτων καί σέ κάθε τί πού ἐξαρτᾶται ἀπ' αὐτή. Ἔτσι τά Μαθηματικά «ἀγνοοῦν» τήν ὕλη τῶν σωμάτων καί ἀντικαθιστοῦν αὐτά μέ ἁπλοποιημένα πρότυπα (μοντέλα) τους πού λέγονται **γεωμετρικά σχήματα**. Τά γεωμε-







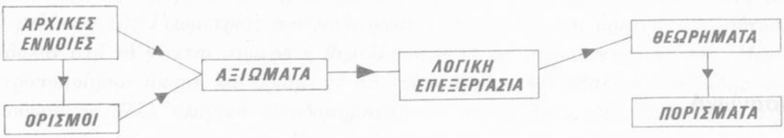
τρικά σχήματα λοιπόν εἶναι μαθηματικές ἐπινοήσεις πού ἀντιπροσωπεύουν σώματα ἤ μέρη σωμάτων ἤ καί νοητικές προεκτάσεις τους. Μέ τήν εἰσαγωγή καί μελέτη τῶν γεωμετρικῶν σχημάτων ἀσχολεῖται ἡ **Γεωμετρία** πού ἀποτελεῖ ἰδιαίτερο καί αὐτόνομο κλάδο τῶν Μαθηματικῶν.

2. Γιά τήν εἰσαγωγή τῶν γεωμετρικῶν σχημάτων δεχόμαστε ὅτι:

α) Ὑπάρχουν ὁρισμένα βασικά «γεωμετρικά στοιχεῖα» πού μέ τή βοήθεια τους ὁρίζονται τά γεωμετρικά σχήματα. Τά στοιχεῖα αὐτά, πού τούς δίνουμε κάποια ὀνομασία δίχως νά τά ὁρίζουμε (δίχως δηλαδή νά τά περιγράφουμε ἄμεσα μέ τή βοήθεια ἄλλων στοιχείων) λέγονται **ἀρχικές ἔννοιες** τῆς Γεωμετρίας.

β) Ἀληθεύουν ὁρισμένες προτάσεις, πού ἀναφέρονται κυρίως σέ καθοριστικές ἰδιότητες τῶν ἀρχικῶν ἐννοιῶν. Οἱ προτάσεις αὐτές λέγονται **ἀξιώματα** (ἤ **αἰτήματα**).

Ἡ μελέτη τῶν γεωμετρικῶν σχημάτων ἔχει σκοπό τή διατύπωση συμπερασμάτων πού βγαίνουν ἀπό μία σειρά συλλογισμῶν θεμελιωμένη στά ἀξιώματα. Οἱ προτάσεις, οἱ ὁποῖες ἐκφράζουν τά λογικά αὐτά συμπεράσματα, λέγονται **θεωρήματα** καί ἡ σειρά τῶν συλλογισμῶν πού μᾶς ὁδηγεῖ σ᾽ ἕνα θεώρημα λέγεται *«ἀπόδειξη»* τοῦ θεωρήματος. Κάθε πρόταση πού εἶναι ἄμεση συνέπεια ἑνός θεωρήματος πού ἀποδείξαμε λέγεται εἰδικότερα **πόρισμα** τοῦ θεωρήματος. Τό παρακάτω διάγραμμα δείχνει ἐποπτικά τή λογική δομή τῆς Γεωμετρίας, μιά δομή πού



ἀκόμη καί σήμερα θεωρεῖται ὑπόδειγμα γιά τήν ἀνάπτυξη κάθε αὐτοδύναμου ἐπιστημονικοῦ κλάδου.

Βλέπουμε λοιπόν ὅτι ἡ μόνη διαφορά πού ὑπάρχει μεταξύ «ἀξιώματος» καί «θεωρήματος» εἶναι ὅτι τό «ἀξίωμα» εἶναι πρόταση τῆς ὁποίας τήν ἀλήθεια δεχόμαστε χωρίς ἀπόδειξη, ἐνῶ τό «θεώρημα» εἶναι πρόταση τῆς ὁποίας ἡ ἀλήθεια ἀποδεικνύεται. Κατά τά ἄλλα ὁ ρόλος τους στή Γεωμετρία εἶναι ὁ ἴδιος καί ἡ χρησιμοποίησή τους γίνεται μέ τόν ἴδιο τρόπο.

Οἱ πρῶτες ἀρχικές ἔννοιες.

3. Δεχόμαστε ὅτι ὑπάρχει ἕνα μή κενό σύνολο πού λέγεται **γεωμετρικός χῶρος** καί τοῦ ὁποίου τά στοιχεῖα τά λέμε **«γεωμετρικά σημεῖα»** ἤ ἁπλῶς **σημεῖα.** Ἕνα σημεῖο ἐντοπίζεται στό σχέδιό μας μέ μιά τελεία καί θά σημειώνεται μέ ἕνα κεφαλαῖο γράμμα τοῦ ἀλφαβήτου μας. Τά ὑποσύνολα τοῦ γεωμετρικοῦ χώρου θά λέγονται γενικά **«γεωμετρικά σχήματα»**.

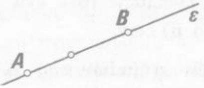
Ὁρισμένα ἀπό τά ὑποσύνολα τοῦ γεωμετρικοῦ χώρου τά καλοῦμε **εὐθεῖες.** Τά καθοριστικά ἀξιώματα τῆς εὐθείας εἶναι:

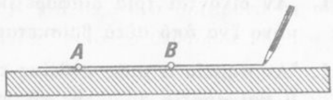
I. Ὑπάρχει τουλάχιστον ἕνα σημεῖο πού δέν ἀνήκει σέ δοσμένη εὐθεία.
II. Σέ κάθε εὐθεία ἀνήκουν τουλάχιστον δύο σημεῖα.
III. Δύο σημεῖα ἀνήκουν σέ μιά καί μόνο σέ μιά εὐθεία.

Τό ἀξίωμα III ἐκφράζεται ἰσοδύναμα μέ τήν πρόταση:

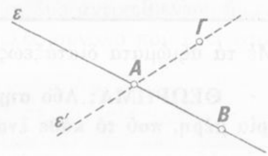
— Δύο σημεῖα ὁρίζουν τή θέση μιᾶς καί μόνο μιᾶς εὐθείας.

Ἡ εὐθεία, πού ὁρίζεται ἀπό τά σημεῖα A καί B, ὀνομάζεται *«εὐθεία AB»* καί λέμε ὅτι *«διέρχεται»* ἀπό τά A καί B. Μία εὐθεία σημειώνεται ἀκόμη μ᾽ ἕνα ἀπό τά μικρά γράμματα ε,γ,... τοῦ ἀλφαβήτου μας. Γιά νά χαράξουμε τήν εὐθεία πού διέρχεται ἀπό δύο ὁρισμένα σημεῖα Α καί Β (τοῦ πίνακα ἤ τῆς σελίδας ὅπου σχεδιάζουμε) χρησιμοποιοῦμε τόν *«κανόνα»* (χάρακα) ὅπως δείχνει τό παρακάτω





σχῆμα. Σημεῖα, πού ἀνήκουν στήν ἴδια εὐθεία, λέγονται *«συνευθειακά»*.



Ἄς θεωρήσουμε τήν εὐθεία ε, πού διέρχεται ἀπό δύο ὁρισμένα σημεῖα Α καί Β. Σύμφωνα μέ τό ἀξίωμα Ι ὑπάρχει σημεῖο Γ πού δέν ἀνήκει στήν ε. Τά σημεῖα Α καί Γ ὁρίζουν μιά ἄλλη εὐθεία ε′, πού ἔχει κοινό σημεῖο μέ τήν ε μόνο τό Α (γιατί, ἄν οἱ ε καί ε′ εἶχαν καί ἄλλο κοινό σημεῖο ἐκτός ἀπό τό Α, τότε, σύμφωνα μέ τό ἀξίωμα ΙΙΙ, θά συνέπιπταν). Δείξαμε λοιπόν ὅτι:

— Ἀπό ἕνα σημεῖο διέρχονται περισσότερες ἀπό μιά εὐθεῖες.

— Δύο εὐθεῖες πού δέ συμπίπτουν ἔχουν τό πολύ ἕνα κοινό σημεῖο.

Δύο εὐθεῖες, πού ἔχουν ἕνα μόνο κοινό σημεῖο, λέγονται **τεμνόμενες εὐθεῖες** καί τό κοινό σημεῖο τους λέγεται **τομή** τῶν δύο εὐθειῶν. Γιά νά δηλώσουμε ὅτι τό σημεῖο Α εἶναι τομή τῶν εὐθειῶν ε καί ε′ λέμε ὅτι *«οἱ εὐθεῖες ε καί ε′ τέμνονται στό Α»* καί γράφουμε: $\{A\} = \varepsilon \cap \varepsilon'$.

4. Γιά τήν εὐθεία δεχόμαστε ἐπίσης τό ἀξίωμα:

IV. Κάθε σημεῖο μιᾶς εὐθείας διαχωρίζει τά ἄλλα σημεῖα τῆς εὐθείας σέ δύο μέρη πού δέν ἔχουν κοινό σημεῖο.

Ἄς θεωρήσουμε τά δύο μέρη στά ὁποῖα χωρίζεται μιά εὐθεία ε ἀπό ἕνα σημεῖο της Α καί ἄς ὑποθέσουμε ὅτι δύο ἄλλα σημεῖα Β καί Γ τῆς εὐθείας ε βρίσκονται στά διαφορετικά ὡς πρός τό Α μέρη της[1]. Γιά νά δηλώσουμε μιά τέτοια διάταξη τῶν τριῶν σημείων Β,Α,Γ πάνω στήν εὐθεία, λέμε ὅτι *«τό σημεῖο Α εἶναι μεταξύ τῶν σημείων Β καί Γ»* ἤ ὅτι *«τά σημεῖα Β καί Γ βρίσκονται ἑκατέρωθεν τοῦ σημείου Α»*. Δεχόμαστε τώρα τά *ἀξιώματα διατάξεως:*

V. Σέ κάθε εὐθεία πού διέρχεται ἀπό δύο σημεῖα Α καί Β ὑπάρχει:

α) ἕνα τουλάχιστον σημεῖο Δ μεταξύ τῶν Α καί Β

β) ἕνα τουλάχιστον σημεῖο Ε τέτοιο ὥστε τό Β νά εἶναι μεταξύ τῶν Α καί Ε

---

1. Γιά νά ἁπλουστεύσουμε τή διατύπωση τῶν συλλογισμῶν μας θά μπορούσαμε τά δύο μέρη αὐτά νά τά ὀνομάσουμε, ἀνάλογα μέ τό πῶς βλέπουμε τήν εὐθεία μας, «ἀριστερά τοῦ Α» καί «δεξιά τοῦ Α» ἤ ἀκόμη «πρό τοῦ Α» καί «μετά τό Α».

γ) ἕνα τουλάχιστον σημεῖο Ζ τέτοιο ὥστε τό Α νά εἶναι μεταξύ τῶν Ζ καί Β.

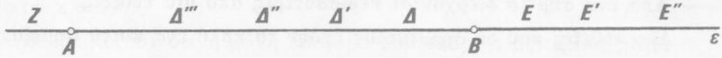
VI. Ἄν δίνονται τρία διαφορετικά σημεῖα μιᾶς εὐθείας, τότε ἕνα καί μόνο ἕνα ἀπό αὐτά βρίσκεται μεταξύ τῶν δύο ἄλλων.

VII. Ἄν σημεῖο Δ μιᾶς εὐθείας ε εἶναι μεταξύ τῶν σημείων της Α καί Β καί σημεῖο Δ΄ αὐτῆς τῆς εὐθείας εἶναι μεταξύ τῶν Α καί Δ, τότε τό Δ΄ βρίσκεται μεταξύ τῶν Α καί Β.

Μέ τά ἀξιώματα διατάξεως ἀποδεικνύεται τό θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ: Δύο σημεῖα Α καί Β μιᾶς εὐθείας ε χωρίζουν τήν εὐθεία σέ τρία μέρη, πού τό κάθε ἕνα ἀπ᾿ αὐτά ἔχει ἄπειρα[1] σημεῖα.

Ἀπόδ. Κατά τό ἀξίωμα (V,α) ὑπάρχει σημεῖο Δ μεταξύ τῶν Α καί Β. Κατά τό ἴδιο ἀξίωμα ὑπάρχει σημεῖο Δ΄ μεταξύ τῶν Α καί Δ, σημεῖο Δ΄΄ μεταξύ τῶν Α καί Δ΄, σημεῖο Δ΄΄΄

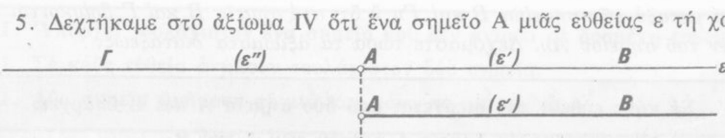


μεταξύ τῶν Α καί Δ΄΄,... κ.ο.κ. Κατά τό ἀξίωμα ὅμως VII τά Δ΄,Δ΄΄,Δ΄΄΄,... βρίσκονται μεταξύ τῶν Α καί Β. Βγάζουμε ἔτσι τό συμπέρασμα ὅτι ὑπάρχουν ὅσα θέλουμε σημεῖα μεταξύ τῶν Α καί Β καί τά σημεῖα αὐτά ἀποτελοῦν τό ἕνα μέρος τῆς εὐθείας ε. Κατά τό ἀξίωμα (V,β) ὑπάρχει σημεῖο Ε τέτοιο ὥστε τό Β νά εἶναι μεταξύ τῶν Α καί Ε. Ἄν ποῦμε γιά τό Ε ὅτι βρίσκεται «δεξιά» τοῦ Β, τότε κατά τό ἴδιο ἀξίωμα θά ὑπάρχει σημεῖο Ε΄ «δεξιά» τοῦ Ε, σημεῖο Ε΄΄ «δεξιά» τοῦ Ε΄... κ.ο.κ. Βγάζουμε ἔτσι τό συμπέρασμα ὅτι ὑπάρχουν ὅσα θέλουμε σημεῖα «δεξιά» τοῦ Β καί τά σημεῖα αὐτά ἀποτελοῦν τό δεύτερο μέρος τῆς εὐθείας ε. Τέλος, μέ ἀνάλογο συλλογισμό βγάζουμε τό συμπέρασμα ὅτι θά ὑπάρχουν καί ὅσα θέλουμε σημεῖα «ἀριστερά» τοῦ Α καί τά σημεῖα αὐτά ἀποτελοῦν τό τρίτο μέρος τῆς εὐθείας ε.

Ἀπό τήν πρόταση αὐτή εἶναι φανερό ὅτι **«κάθε εὐθεία ἔχει ἄπειρα σημεῖα»**, δηλαδή ὅτι ἡ εὐθεία εἶναι σημειοσύνολο (σύνολο σημείων) μέ ἄπειρα στοιχεῖα.

Ἡ ἡμιευθεία.

5. Δεχτήκαμε στό ἀξίωμα IV ὅτι ἕνα σημεῖο Α μιᾶς εὐθείας ε τή χωρίζει



σέ δύο μέρη πού δέν ἔχουν ἄλλο κοινό σημεῖο. Θεωροῦμε τώρα τά σημειοσύνολα:

— Τό σημειοσύνολο (ε΄) πού ἔχει στοιχεῖα τό Α καί ὅλα τά σημεῖα τῆς ε, πού βρίσκονται στό ἕνα μέρος της ὡς πρός τό Α.

1. Ὅταν σ᾿ ἕνα πλῆθος στοιχείων χρησιμοποιοῦμε τόν ὅρο «ἄπειρα», ἐννοοῦμε ὅτι τό πλῆθος τῶν στοιχείων αὐτῶν ξεπερνᾶ κάθε φυσικό ἀριθμό Μ.

— Τό σημειοσύνολο (ε΄΄) πού ἔχει στοιχεῖα τό Α καί ὅλα τά σημεῖα τῆς ε, πού βρίσκονται στό ἄλλο μέρος της ὡς πρός τό Α.

Κάθε ἕνα ἀπό τά σύνολα (ε΄) καί (ε΄΄) λέγεται **ἡμιευθεία μέ ἀρχή τό Α.** Μία ἡμιευθεία καθορίζεται ἀπό τήν ἀρχή της Α καί ἀπό ἕνα ὁρισμένο σημεῖο της Β καί τή σημειώνουμε τότε *«ἡμιευθεία ΑΒ»*. Ἀπό τό θεώρημα τῆς § 4 ἕπεται ὅτι **κάθε ἡμιευθεία ἔχει ἄπειρα σημεῖα.**

Οἱ ἡμιευθεῖες ΑΒ καί ΑΓ πού ἔχουν τήν ἴδια ἀρχή καί προκύπτουν ἀπό τήν ἴδια εὐθεία λέγονται **«ἀντικείμενες ἡμιευθεῖες».** Κάθε μιά ἀπ' αὐτές θά λέγεται *«προέκταση»* τῆς ἄλλης. Εἶναι φανερό ὅτι ἡ ἕνωση δύο ἀντικείμενων ἡμιευθειῶν εἶναι εὐθεία, ἐνῶ ἡ τομή τους εἶναι τό μονομελές σύνολο πού ἔχει στοιχεῖο τήν κοινή ἀρχή τους.

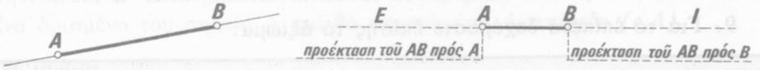
Τό εὐθύγραμμο τμῆμα.

6. Ἄς θεωρήσουμε τώρα τό σημειοσύνολο, πού ἔχει στοιχεῖα δύο ὁρισμένα σημεῖα Α καί Β μιᾶς εὐθείας ε καί ὅλα τά σημεῖα τῆς ε πού εἶναι μεταξύ τῶν Α καί Β. Τό σημειοσύνολο αὐτό λέγεται *εὐθύγραμμο τμῆμα μέ ἄκρα Α καί Β* καί σημειώνεται ΑΒ ἤ ΒΑ καί ἡ εὐθεία ε λέγεται *«φορέας»* αὐτοῦ. Ἔχουμε λοιπόν τόν ὁρισμό:

Εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ λέγεται τό σημειοσύνολο, πού ἔχει στοιχεῖα τά δύο σημεῖα Α καί Β καί ὅλα τά σημεῖα τῆς εὐθείας ΑΒ τά ὁποῖα εἶναι μεταξύ τῶν Α καί Β.

Συνηθίζουμε νά λέμε ὅτι τό εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ *«συνδέει»* ἤ *«ἑνώνει»* τά δύο σημεῖα Α καί Β. Ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ θά λέγεται καί ἁπλῶς «τμῆμα ΑΒ».

Κάθε σημεῖο τοῦ εὐθύγ. τμήματος ΑΒ διαφορετικό ἀπό τά ἄκρα του λέγεται *ἐσωτερικό σημεῖο* αὐτοῦ. Ἀπό τό θεώρημα τῆς § 4 εἶναι φανερό ὅτι **ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ ἔχει ἄπειρα ἐσωτερικά σημεῖα** καί ὅλ' αὐτά ἀποτελοῦν τό *ἐσωτερικό* τοῦ τμήματος ΑΒ. Κάθε σημεῖο τῆς εὐθείας ε πού δέν ἀνήκει στό



εὐθύγ. τμῆμα ΑΒ λέγεται *ἐξωτερικό σημεῖο* τοῦ ΑΒ. Ἄν Ε εἶναι ἐξωτερικό σημεῖο τοῦ εὐθύγρ. τμήματος ΑΒ τέτοιο ὥστε τό Α νά βρίσκεται μεταξύ τῶν Ε καί Β, ἡ ἡμιευθεία ΑΕ ἀποτελεῖ τήν *«προέκταση τοῦ ΑΒ πρός τό Α»*. Ἐπίσης, ἄν Ι εἶναι ἐξωτερικό σημεῖο τοῦ εὐθύγ. τμήματος ΑΒ τέτοιο ὥστε τό Β νά βρίσκεται μεταξύ τῶν Α καί Ι, ἡ ἡμιευθεία ΒΙ ἀποτελεῖ τήν *«προέκταση τοῦ ΑΒ πρός τό Β»*.

Τό ἐπίπεδο.

7. Ὁρισμένα ἀπό τά ὑποσύνολα τοῦ γεωμετρικοῦ χώρου θά τά λέμε **ἐπίπεδα.** Τό ἐπίπεδο εἶναι ἀρχική ἔννοια τῆς Γεωμετρίας καί τά καθοριστικά του ἀξιώματα εἶναι:

VIII. Ὑπάρχει τουλάχιστον ἕνα σημεῖο πού δέν ἀνήκει σέ δοσμένο ἐπίπεδο.

IX. Ἡ εὐθεία, πού διέρχεται ἀπό δύο σημεῖα ἑνός ἐπιπέδου, ἔχει ὅλα της τά σημεῖα στό ἐπίπεδο αὐτό.

X. Ἕνα ἐπίπεδο ἔχει τουλάχιστον τρία μή συνευθειακά σημεῖα.

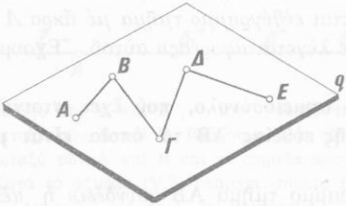
XI. Ἀπό τρία μή συνευθειακά σημεῖα «διέρχεται» ἕνα καί μόνο ἕνα ἐπίπεδο.

Τό ἀξίωμα XI ἐκφράζεται ἰσοδύναμα μέ τήν πρόταση:

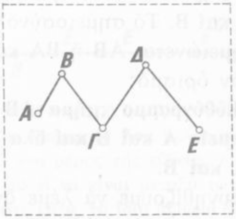
— **Τρία μή συνευθειακά σημεῖα ὁρίζουν τή θέση ἑνός καί μόνο ἑνός ἐπιπέδου.**

Τό ἐπίπεδο πού διέρχεται ἀπό τρία μή συνευθειακά σημεῖα Α,Β,Γ σημειώνεται ἐπίπεδο (Α,Β,Γ). Γιά νά σημειώσουμε ἕνα ἐπίπεδο δίχως νά ἀναφερθοῦμε σέ σημεῖα του, θά χρησιμοποιοῦμε ἕνα ἀπό τά μικρά λατινικά γράμματα p,q,r,...

8. Κάθε γεωμετρικό σχῆμα, πού ὅλα τά σημεῖα του ἀνήκουν στό ἴδιο ἐπί-



σχ. 1



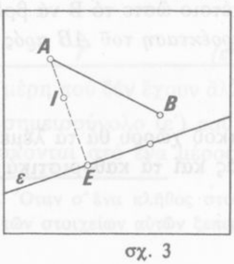
σχ. 2

πεδο q, λέγεται **ἐπίπεδο σχῆμα** καί ὁ κλάδος τῆς Γεωμετρίας πού ἀσχολεῖται μέ τή μελέτη τῶν ἐπίπεδων σχημάτων ἀποτελεῖ τήν **Ἐπιπεδομετρία.** Μέ τή μελέτη τῶν μή ἐπίπεδων σχημάτων ἀσχολεῖται ἡ **Στερεομετρία.** Ἀπό δῶ καί πέρα θά θεωροῦμε μόνο ἐπίπεδα σχήματα καί μάλιστα θά ταυτίζουμε τό ἐπίπεδό τους μέ τό ἐπίπεδο τῆς σελίδας στήν ὁποία γράφουμε ἤ διαβάζουμε (βλ. σχ.2).

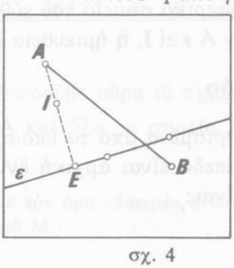
9. Γιά τό ἐπίπεδο δεχόμαστε ἐπίσης τό ἀξίωμα:

XII. Κάθε εὐθεία ἑνός ἐπιπέδου διαχωρίζει τά ἄλλα σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου σέ δύο μέρη, πού δέν ἔχουν κοινό σημεῖο.

Ἄς θεωρήσουμε τά δύο μέρη στά ὁποῖα χωρίζεται ἕνα ἐπίπεδο q ἀπό μία εὐθεία



σχ. 3



σχ. 4

του ε. Δύο σημεῖα Α καί Β τοῦ q πού δέν ἀνήκουν στήν ε, θά λέμε ὅτι εἶναι *«πρός τό αὐτό μέρος»* τῆς ε, ἄν βρίσκονται στό ἴδιο μέρος τοῦ ἐπιπέδου ὡς πρός τήν ε (βλ. σχ. 3), ἐνῶ θά λέμε ὅτι εἶναι *«ἑκατέρωθεν»* τῆς ε, ἄν βρίσκονται στά διαφορετικά μέρη τοῦ ἐπιπέδου ὡς πρός τήν ε (βλ. σχ. 4). Δεχόμαστε τώρα τό ἀξίωμα:

XIII. Ἄν δύο σημεῖα Α καί Β βρίσκονται πρός τό αὐτό μέρος μιᾶς εὐθείας ε, τό εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ δέν ἔχει κοινό σημεῖο μέ τήν ε, ἐνῶ ἄν τά σημεῖα Α καί Β βρίσκονται ἑκατέρωθεν τῆς ε, τό εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ ἔχει ἕνα καί μόνο ἕνα κοινό σημεῖο μέ τήν ε.

Στήν περίπτωση πού τό εὐθύγ. τμῆμα ΑΒ ἔχει ἕνα κοινό σημεῖο μέ τήν εὐθεία ε λέμε ὅτι τό τμῆμα ΑΒ *«τέμνει»* τήν ε.

Ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΕ πού συνδέει σημεῖο Ε τῆς εὐθείας ε μέ σημεῖο Α ἐκτός αὐτῆς ἔχει κοινό σημεῖο μέ τήν ε μόνο τό Ε, ἐνῶ ὅλα τά ἄλλα σημεῖα τοῦ ΑΕ βρίσκονται πρός τό αὐτό μέρος τῆς ε (ἀφοῦ γιά κάθε ἐσωτερικό σημεῖο Ι τοῦ ΑΕ τό τμῆμα ΑΙ δέν ἔχει κοινό σημεῖο μέ τήν ε).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 4–7

Τό ἡμιεπίπεδο.

10. Ἄς πάρουμε τώρα τά δύο μέρη στά ὁποῖα χωρίζεται ἕνα ἐπίπεδο q ἀπό μία εὐθεία του ε καί ἄς θεωρήσουμε τά δύο σημειοσύνολα:

— Τό σημειοσύνολο (q′) πού ἀποτελεῖται ἀπό τά σημεῖα τῆς εὐθείας ε καί ἀπό ὅλα τά σημεῖα τοῦ q πού βρίσκονται στό ἕνα μέρος τοῦ q ὡς πρός τήν ε.

— Τό σημειοσύνολο (q″) πού ἀποτελεῖται ἀπό τά σημεῖα τῆς εὐθείας ε καί ἀπό ὅλα τά σημεῖα τοῦ q πού βρίσκονται στό ἄλλο μέρος τοῦ q ὡς πρός τήν ε.

Κάθε ἕνα ἀπό τά σημειοσύνολα (q′) καί (q″) λέγεται **ἡμιεπίπεδο μέ ἀκμή ε.** Εἶναι φανερό ὅτι τά δύο αὐτά σημειοσύνολα ἔχουν ἕνωση τό ἐπίπεδο καί τομή τήν εὐθεία ε. Ἕνα ἡμιεπίπεδο λοιπόν καθορίζεται ἀπό τήν ἀκμή του ε καί ἀπό ἕνα ὁρισμένο του σημεῖο Α καί θά σημειώνεται *ἡμιεπίπεδο (ε,Α).*

Ἡ γωνία.

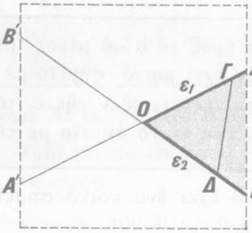
11. Ἄς θεωρήσουμε δύο εὐθεῖες $ε_1$ καί $ε_2$, πού τέμνονται στό σημεῖο Ο, καί ἄς ὀνομάσουμε ΟΑ, ΟΑ′ τίς ἀντικείμενες ἡμιευθεῖες τῆς $ε_1$ καί ΟΒ, ΟΒ′ τίς ἀντικείμενες ἡμιευθεῖες τῆς $ε_2$. Ἄς θεωρήσουμε ἀκόμα τά ἡμιεπίπεδα ($ε_1$, Β), ($ε_1$,Β′), πού ὁρίζει ἡ $ε_1$, καί τά ἡμιεπίπεδα ($ε_2$,Α), ($ε_2$,Α′) πού ὁρίζει ἡ $ε_2$. Μέ τά ἡμιεπίπεδα αὐτά σχηματίζουμε τά δύο σημειοσύνολα:

— Τήν τομή τῶν δύο ἡμιεπιπέδων ($ε_1$, Β) καί ($ε_2$,Α). Τό σημειοσύνολο αὐτό (βλ. σχ. 5), πού εἶναι διαφορετιό ἀπό τό κενό[1], θά τό λέμε **κυρτή γωνία μέ κορυφή**

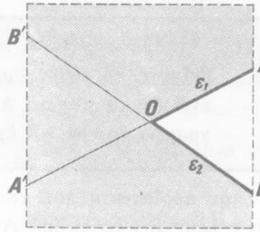
1. Γιατί, ἄν Γ εἶναι σημεῖο τῆς ΟΑ καί Δ εἶναι σημεῖο τῆς ΟΒ, κάθε ἐσωτερικό σημεῖο τοῦ τμήματος ΓΔ ἀνήκει στήν τομή τῶν ἡμιεπιπέδων ($ε_1$,Β) καί ($ε_2$,Α).

Ο καί πλευρές ΟΑ καί ΟΒ καί θά τό σημειώνουμε[1] $\widehat{AOB}$.

— Τήν ἕνωση τῶν δύο ἡμιεπιπέδων (ε_1, B') καί (ε_2, A'). Τό σημειοσύνολο αὐτό



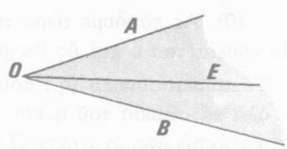
σχ. 5



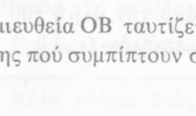
σχ. 6

(βλ. σχ. 6) θά τό λέμε **μή κυρτή γωνία μέ κορυφή τό Ο καί πλευρές ΟΑ καί ΟΒ.**

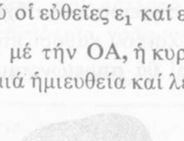
Εἶναι φανερό ὅτι οἱ δύο αὐτές γωνίες ἔχουν ἕνωση τό ἐπίπεδο καί τομή τίς δύο ἡμιευθεῖες ΟΑ καί ΟΒ. Κάθε σημεῖο μιᾶς (κυρτῆς ἤ μή κυρτῆς) γωνίας πού δέν ἀνήκει σέ πλευρά της λέγεται *ἐσωτερικό σημεῖο* της καί τό σύνολο τῶν ἐσωτερικῶν σημείων της λέγεται *ἐσωτερικό τῆς γωνίας*. Ἄν Ε εἶναι ἐσωτερικό σημεῖο μιᾶς γωνίας $\widehat{AOB}$, ὅλα τά σημεῖα τῆς ἡμιευθείας ΟΕ, ἐκτός ἀπό τό σημεῖο της Ο, βρίσκονται στό ἐσωτερικό τῆς γωνίας (βλ. ἄσκ. 9) καί ἡ ΟΕ λέγεται *ἐσωτερική ἡμιευθεία* τῆς $\widehat{AOB}$. Ἔτσι, ἡ γωνία $\widehat{AOB}$ μπορεῖ νά θεωρηθεῖ σάν σημειοσύνολο πού ἀποτελεῖται ἀπό τά σημεῖα τῶν δύο πλευρῶν της καί ἀπό τά σημεῖα ὅλων τῶν ἐσωτερικῶν ἡμιευθειῶν της.



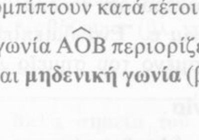
Στή μερική περίπτωση πού οἱ εὐθεῖες ε_1 καί ε_2 συμπίπτουν κατά τέτοιο τρόπο, ὥστε ἡ ἡμιευθεία ΟΒ ταυτίζεται μέ τήν ΟΑ, ἡ κυρτή γωνία $\widehat{AOB}$ περιορίζεται στίς πλευρές της πού συμπίπτουν σέ μιά ἡμιευθεία καί λέγεται **μηδενική γωνία** (βλ.σχ.7),



σχ. 7



σχ. 8



σχ.9

ἐνῶ ἡ μή κυρτή γωνία ταυτίζεται μέ ὅλο τό ἐπίπεδο καί λέγεται **πλήρης γωνία** (βλ. σχ. 8). Μία ἄλλη μερική περίπτωση ἔχουμε, ἄν φαντασθοῦμε ὅτι οἱ εὐθεῖες

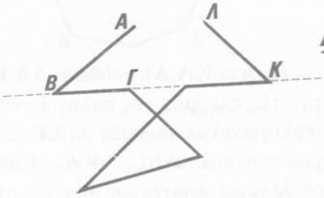
---

1. Συνηθίζουμε ἀκόμη, γιά λόγους συντομίας, νά σημειώνουμε μιά γωνία μέ ἕνα ἀπό τά μικρά γράμματα φ,θ,ω,...

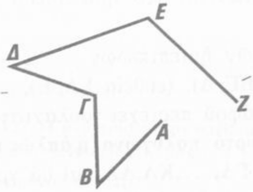
ε_1 καί ε_2 συμπίπτουν κατά τέτοιο τρόπο, ὥστε ἡ ἡμιευθεία ΟΒ΄ ταυτίζεται μέ τήν ἡμιευθεία ΟΑ. Τότε ἡ κυρτή γωνία ΑΟΒ ταυτίζεται μέ τό ἕνα ἡμιεπίπεδο πού ἔχει ἀκμή τήν εὐθεία ΑΒ καί λέγεται **πεπλατυσμένη γωνία μέ κορυφή Ο καί πλευρές ΟΑ καί ΟΒ** (βλ. σχ. 9), ἐνῶ ἡ μή κυρτή γωνία ταυτίζεται μέ τό ἄλλο ἡμιεπίπεδο πού ἔχει ἀκμή τήν εὐθεία ΑΒ.

Ἡ πολυγωνική γραμμή.

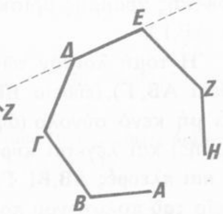
12. Ἄς θεωρήσουμε διατεταγμένα σημεῖα Α,Β,Γ,Δ,...,Κ,Λ διαφορετικά μεταξύ τους πού ἀνά τρία διαδοχικά δέν εἶναι συνευθειακά. Ἄν φέρουμε τά εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ,ΒΓ,ΓΔ,...,ΚΛ, ἡ ἕνωση τῶν εὐθύγραμμων αὐτῶν τμημάτων λέγεται **πολυγωνική ἤ τεθλασμένη γραμμή μέ κορυφές Α,Β,Γ, ..., Κ,Λ καί πλευρές ΑΒ,ΒΓ,ΓΔ,...,ΚΛ** καί θά γράφεται ΑΒΓ...ΚΛ (βλ. σχ. 10). Ἡ πρώτη κορυφή Α καί ἡ τελευταία κορυφή Λ λέγονται *ἄκρα* τῆς πολυγωνικῆς



σχ. 10



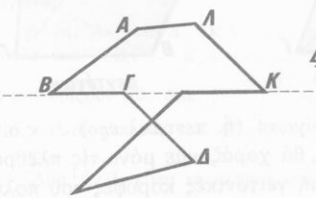
σχ. 11



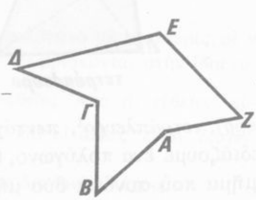
σχ. 12

γραμμῆς, ἐνῶ δύο κορυφές πού ἀνήκουν στήν ἴδια πλευρά λέγονται *«γειτονικές» κορυφές* της. Στό παραπάνω σχῆμα 11 ἔχουμε πολυγωνική γραμμή ΑΒΓΔΕΖ μέ 6 κορυφές καί 5 πλευρές. Εἶναι φανερό ὅτι κάθε πολυγωνική γραμμή μέ ν κορυφές ἔχει ν-1 πλευρές. Μία πολυγωνική γραμμή θά λέγεται *κυρτή*, ἄν καί μόνο ἄν ὁ φορέας κάθε πλευρᾶς της ἔχει πρός τό αὐτό μέρος του ὅλες τίς ἄλλες κορυφές τῆς πολυγωνικῆς γραμμῆς. Στό παραπάνω σχῆμα 12 ἔχουμε κυρτή πολυγωνική γραμμή ΑΒΓΔΕΖΗ μέ 7 κορυφές καί 6 πλευρές.

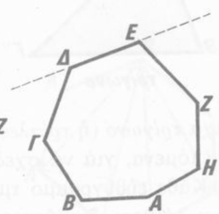
Μέ τή βοήθεια τῶν δοσμένων σημείων Α,Β,Γ,...,Κ,Λ ὁρίζεται ἀκόμη καί **ἡ κλειστή πολυγωνική (ἤ κλειστή τεθλασμένη) γραμμή** πού ἀποτελεῖται (βλ. σχ.



σχ. 13



σχ. 14



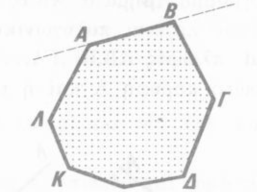
σχ. 15

13) ὄχι μόνο ἀπό τά τμήματα ΑΒ,ΒΓ,ΓΔ,...,ΚΛ ἀλλά καί ἀπό τό ΛΑ. Στό παρα-

πάνω σχ. 14 ἔχουμε τήν κλειστή πολυγωνική γραμμή ΑΒΓΔΕΖ πού ἔχει 6 κορυφές καί 6 πλευρές. Εἶναι φανερό ὅτι κάθε κλειστή πολυγωνική γραμμή μέ ν κορυφές ἔχει καί ν πλευρές καί μπορεῖ νά εἶναι κυρτή ἤ μή κυρτή. Μιά κλειστή κυρτή πολυγωνική γραμμή ΑΒΓΔΕΖΗ μέ 7 κορυφές καί 7 πλευρές εἶναι τό παραπάνω σχῆμα 15.

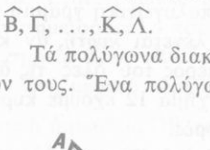
Κυρτά πολύγωνα.

13. Ἄν ἔχουμε μιά κλειστή κυρτή πολυγωνική γραμμή ΑΒΓΔ...ΚΛ, ὅλες οἱ κορυφές καί πλευρές της βρίσκονται στό ἕνα ἀπό τά δύο ἡμιεπίπεδα πού ὁρίζονται ἀπό τό φορέα κάθε πλευρᾶς της. Ἔτσι π.χ. ἄν φέρουμε τό φορέα τῆς ΑΒ, ὅλες οἱ κορυφές καί πλευρές τῆς πολυγωνικῆς γραμμῆς βρίσκονται στό ἡμιεπίπεδο (εὐθεία ΑΒ,Γ).

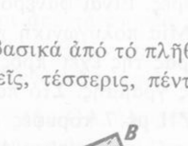


Ἡ τομή λοιπόν τῶν ἡμιεπιπέδων (εὐθεία ΑΒ, Γ), (εὐθεία ΒΓ, Δ), (εὐθεία ΓΔ, Ε), ..., (εὐθεία ΚΛ,Α), (εὐθεία ΛΑ,Β) εἶναι μή κενό σύνολο (ἀφοῦ περιέχει τουλάχιστον τίς πλευρές τῆς πολυγωνικῆς γραμμῆς) καί λέγεται **κυρτό πολύγωνο (ἤ ἁπλῶς πολύγωνο) μέ κορυφές Α,Β,Γ,..., Κ,Λ καί πλευρές ΑΒ,ΒΓ,ΓΔ,...,ΚΛ,ΛΑ** καί θά γράφεται πάλι ΑΒΓ...ΚΛ. Κάθε σημεῖο τοῦ πολυγώνου πού δέν ἀνήκει σέ πλευρά λέγεται *ἐσωτερικό σημεῖο* του καί τό σύνολο τῶν ἐσωτερικῶν σημείων ἀποτελεῖ τό *ἐσωτερικό τοῦ πολυγώνου*. Οἱ κυρτές γωνίες $\widehat{ΛΑΒ}$, $\widehat{ΑΒΓ}$, $\widehat{ΒΓΔ}$,...,$\widehat{ΚΛΑ}$, πού ἔχουν κορυφές τίς κορυφές τοῦ πολυγώνου, λέγονται *γωνίες τοῦ πολυγώνου* καί θά σημειώνονται ἁπλῶς μέ $\widehat{Α}, \widehat{Β}, \widehat{Γ}, \ldots, \widehat{Κ}, \widehat{Λ}$.

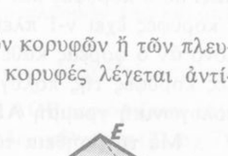
Τά πολύγωνα διακρίνονται βασικά ἀπό τό πλῆθος τῶν κορυφῶν ἤ τῶν πλευρῶν τους. Ἕνα πολύγωνο μέ τρεῖς, τέσσερις, πέντε,... κορυφές λέγεται ἀντί-



τρίγωνο



τετράπλευρο



πεντάγωνο

στοιχα *τρίγωνο* (ἤ *τρίπλευρο*), *τετράπλευρο*[1], *πεντάγωνο* (ἤ *πεντάπλευρο*)... κ.ο.κ. Στά ἑπόμενα, γιά νά σχεδιάζουμε ἕνα πολύγωνο, θά χαράζουμε μόνο τίς πλευρές του. Κάθε εὐθύγραμμο τμῆμα πού συνδέει δύο μή γειτονικές κορυφές τοῦ πολυγώνου λέγεται **διαγώνιος** τοῦ πολυγώνου. Ἔτσι π.χ. στό παραπάνω πεντάγωνο

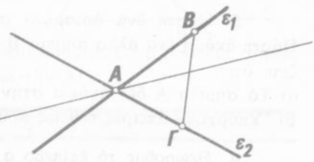
1. Γιά πολύγωνο μέ τέσσερις κορυφές δέ χρησιμοποιεῖται ὁ ὅρος «τετράγωνο», γιατί στόν ὅρο αὐτό (ὅπως θά δοῦμε ἀργότερα) ἀποδίδεται ἄλλη ειδικότερη σημασία.

ΑΒΓΔΕ τά τμήματα ΑΔ,ΕΓ,ΒΔ,... εἶναι διαγώνιοι του. Ἕνα τετράπλευρο ΑΒΓΔ ἔχει δύο διαγωνίους, τίς ΑΓ καί ΒΔ, ἐνῶ τό τρίγωνο δέν ἔχει διαγωνίους.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 8–12

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

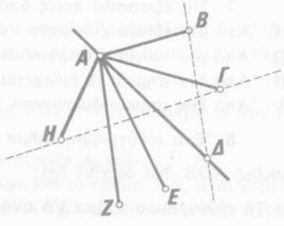
1. Ἄν ἔχουμε δύο τεμνόμενες εὐθεῖες ε_1 καί ε_2, νά δειχθεῖ ὅτι ὑπάρχουν ἄπειρα σημεῖα πού δέν ἀνήκουν στό σύνολο $\varepsilon_1 \cup \varepsilon_2$.



Λύση: Ἄν πάρουμε σημεῖα $B \in \varepsilon_1$ καί $\Gamma \in \varepsilon_2$ διαφορετικά ἀπό τό Α, ἡ εὐθεία ΒΓ εἶναι διαφορετική καί ἀπό τήν ε_1 καί ἀπό τήν ε_2 (γιατί π.χ. ἄν ἡ ΒΓ συνέπιπτε μέ τήν ε_1, τό σημεῖο $B\Gamma \cap \varepsilon_2 = \{\Gamma\}$ θά συνέπιπτε μέ τό $\varepsilon_1 \cup \varepsilon_2 = \{A\}$, πράγμα ἀδύνατο).

Κατά τό ἀξίωμα τῆς διατάξεως ὑπάρχει σημεῖο $\Delta \in B\Gamma$ μεταξύ τῶν Β καί Γ. Τό Δ εἶναι ἐσωτερικό σημεῖο τοῦ τμήματος ΒΓ καί δέν ἀνήκει οὔτε στήν ε_1 οὔτε στήν ε_2 (γιατί ἄν π.χ. $\Delta \in \varepsilon_1$, ἡ εὐθεία ΒΔ, δηλαδή ἡ ΒΓ, θά συνέπιπτε μέ τήν ε_1). Ἔτσι, τουλάχιστον τά ἄπειρα ἐσωτερικά σημεῖα τοῦ τμήματος ΒΓ δέν ἀνήκουν στό $\varepsilon_1 \cup \varepsilon_2$.

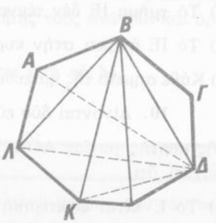
2. Θεωροῦμε 7 σημεῖα Α,Β,Γ,Δ,Ε,Ζ,Η ἀνά τρία μή συνευθειακά. Πόσες εὐθεῖες ὁρίζονται, ἄν ἑνώσουμε τά σημεῖα αὐτά ἀνά δύο; Νά γενικευθεῖ ἡ ἄσκηση γιά ν σημεῖα.



Λύση: Ὅταν ἑνώνουμε ἕνα ὁρισμένο σημεῖο, π.χ. τό Α, μέ ὅλα τά ἄλλα, φέρνουμε 6 εὐθεῖες. Τότε ὅμως, ἑνώνοντας κάθε σημεῖο μέ ὅλα τά ἄλλα, φέρνουμε 7×6 εὐθεῖες. Στόν ἀριθμό αὐτό 7×6 ἡ κάθε εὐθεία πάρθηκε δύο φορές (π.χ. ἡ ΑΔ πάρθηκε ὅταν φέραμε τίς εὐθεῖες ἀπό τό Α καί ὅταν φέραμε τίς εὐθεῖες ἀπό τό Δ). Ἔτσι ὁ ἀριθμός 7×6 εἶναι διπλάσιος ἀπό τό πλῆθος τῶν ζητούμενων εὐθειῶν, ὁπότε τό πλῆθος αὐτό εἶναι $\frac{7 \times 6}{2} = \frac{42}{2} = 21$.

Μέ τόν ἴδιο ἀκριβῶς συλλογισμό ἀποδεικνύουμε ὅτι ν σημεῖα ὁρίζουν $\frac{\nu(\nu-1)}{2}$ εὐθεῖες.

3. Νά δειχθεῖ ὅτι ἕνα πολύγωνο μέ ν πλευρές ἔχει $\frac{\nu(\nu-3)}{2}$ διαγωνίους. (Ἐφαρμογή στό δεκάγωνο).



Λύση: Ἄν ΑΒΓΔ...ΚΛ εἶναι πολύγωνο μέ ν πλευρές, οἱ ν κορυφές του Α,Β,Γ,...,Κ,Λ ἀνά τρεῖς δέ βρίσκονται στήν ἴδια εὐθεία καί ὁρίζουν (βλ. ἄσκ. 2) $\frac{\nu(\nu-1)}{2}$ εὐθεῖες. Ἀπό τίς εὐθεῖες αὐτές οἱ ν εἶναι πλευρές τοῦ πολυγώνου καί οἱ ἄλλες εἶναι διαγώνιοι του.

Ἄρα, ἄν δ_ν εἶναι τό πλῆθος τῶν διαγωνίων, ἔχουμε

$$\delta_\nu = \frac{\nu(\nu-1)}{2} - \nu = \frac{\nu(\nu-1)-2\nu}{2} = \frac{\nu(\nu-3)}{2}$$

Ἔτσι π.χ. ἕνα δεκάγωνο ἔχει $\frac{10 \times 7}{2} = 35$ διαγωνίους.

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ *

4. Πάρτε ἕνα ὁρισμένο σημεῖο Α καί φέρτε δύο εὐθεῖες ε_1 καί ε_2 πού νά διέρχονται ἀπό τό Α. Πάρτε ἀκόμη ἕνα ἄλλο σημεῖο Β τῆς ε_1 καί ἕνα ἄλλο σημεῖο Γ τῆς ε_2 καί ὀνομάστε ε τήν εὐθεία ΒΓ. Νά ἀποδείξετε ὅτι:

α) Ἡ εὐθεία ε δέ διέρχεται ἀπό τό σημεῖο Α.

β) Ἄν Ι εἶναι σημεῖο τῆς ε διαφορετικό ἀπό τά Β καί Γ, ἡ εὐθεία ΑΙ δέ συμπίπτει οὔτε μέ τήν ε_1 οὔτε μέ τήν ε_2.

γ) Ὑπάρχουν ἄπειρες εὐθεῖες πού διέρχονται ἀπό τό ὁρισμένο σημεῖο Α.

5. Πάρτε ἕνα ὁρισμένο σημεῖο Α καί φέρτε μία εὐθεία ε πού διέρχεται ἀπό τό Α. Πάρτε ἀκόμη ἕνα ἄλλο σημεῖο Β τῆς ε καί ἕνα σημεῖο Γ πού δέν ἀνήκει στήν ε. Νά ἀποδείξετε ὅτι:

α) Τό σημεῖο Α δέν ἀνήκει στήν εὐθεία ΒΓ.

β) Ὑπάρχουν ἄπειρες εὐθεῖες πού δέ διέρχονται ἀπό τό ὁρισμένο σημεῖο Α.

6. Θεωροῦμε τό ἐπίπεδο q πού διέρχεται ἀπό τρία μή συνευθειακά σημεῖα Α,Β,Γ καί παίρνουμε ἕνα σημεῖο Δ ἔξω ἀπό τό q. Ἄν καλέσουμε q΄ τό ἐπίπεδο πού διέρχεται ἀπό τά σημεῖα Α,Β,Δ, νά δειχθεῖ ὅτι:

α) Τό Δ δέν ἀνήκει στίς εὐθεῖες ΑΒ,ΒΓ,ΑΓ.

β) Τό ἐπίπεδο q΄ δέ συμπίπτει μέ τό q.

γ) Κάθε σημεῖο τῆς εὐθείας ΑΒ ἀνήκει στό σύνολο $q \cap q'$.

δ) Κάθε σημεῖο τοῦ συνόλου $q \cap q'$ εἶναι σημεῖο τῆς ΑΒ.

7. Νά ἐξετασθεῖ ποιές ἀπό τίς παρακάτω προτάσεις ἀληθεύουν καί ποιές ὄχι:

I. Ἀπό μία εὐθεία ε διέρχεται ἕνα καί μόνο ἕνα ἐπίπεδο.
II. Ἀπό μία εὐθεία ε διέρχονται περισσότερα ἀπό ἕνα ἐπίπεδα.
III. Ἀπό ἕνα σημεῖο Α διέρχεται μόνο ἕνα ἐπίπεδο.
IV. Ἀπό ἕνα σημεῖο διέρχονται τουλάχιστον δύο ἐπίπεδα.

8. Ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα ΓΔ ἔχει τά ἄκρα του Γ καί Δ στίς δύο πλευρές μιᾶς κυρτῆς γωνίας $\widehat{AOB}$. Νά δειχθεῖ ὅτι:

α) Τό εὐθύγραμμο τμῆμα ΓΔ ἀνήκει στή γωνία $\widehat{AOB}$.

β) Κάθε ἐσωτερικό σημεῖο τοῦ τμήματος ΓΔ εἶναι καί ἐσωτερικό σημεῖο τῆς $\widehat{AOB}$.

γ) Κάθε σημεῖο τῆς προεκτάσεως τοῦ ΓΔ εἶναι ἐσωτερικό σημεῖο τῆς μή κυρτῆς γωνίας $\widehat{AOB}$.

9. Δίνεται μία κυρτή γωνία $\widehat{AOB}$ καί ἕνα ὁρισμένο ἐσωτερικό σημεῖο της Ε. Ἄν Ι εἶναι ἕνα ἄλλο ὁποιοδήποτε σημεῖο τῆς ἡμιευθείας ΟΕ, διαφορετικό ἀπό τό Ο, νά δειχθεῖ ὅτι:

α) Τό τμῆμα ΙΕ δέν τέμνει τίς εὐθεῖες ΟΑ καί ΟΒ.

β) Τό ΙΕ ἀνήκει στήν κυρτή γωνία $\widehat{AOB}$.

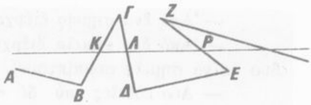
γ) Κάθε σημεῖο τῆς ἡμιευθείας ΟΕ, διαφορετικό ἀπό τό Ο, εἶναι ἐσωτερικό σημεῖο τῆς γων. $\widehat{AOB}$.

10. Δίνονται δύο εὐθεῖες ΑΑ΄ καί ΒΒ΄ πού τέμνονται στό Ο καί ἕνα ἐσωτερικό σημεῖο Ε τῆς κυρτῆς γωνίας $\widehat{AOB}$. Ἄν πάρουμε ἕνα σημεῖο Ε΄ στήν ἀντικείμενη ἡμιευθεία τῆς ΟΕ, νά δειχθεῖ ὅτι:

α) Τό Ε΄ εἶναι ἐσωτερικό σημεῖο τῆς κυρτῆς γωνίας $\widehat{A'OB'}$.

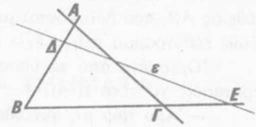
β) Ἄν μία ἡμιευθεία εἶναι ἐσωτερική τῆς κυρτῆς γωνίας $\widehat{AOB}$, τότε ἡ ἀντικείμενή της ἡμιευθεία εἶναι ἐσωτερική τῆς κυρτῆς γωνίας $\widehat{A'OB'}$.

11. Στό διπλανό σχῆμα μας ἔχουμε μιά τεθλασμένη γραμμή ΑΒΓΔ... καί μία εὐθεία ε πού δέ συμπίπτει μέ φορέα πλευρᾶς καί τέμνει τήν τεθλασμένη σέ περισσότερα ἀπό δύο σημεῖα. Νά δειχθεῖ ὅτι ἡ τεθλασμένη εἶναι μή κυρτή.



12. Γιά κάθε τριάδα μή συνευθειακῶν σημείων Α,Β,Γ, δεχόμαστε τό ἀξίωμα τοῦ Pasch:

«Μία εὐθεία ε πού δέ διέρχεται ἀπό τά Α,Β,Γ καί τέμνει τό τμῆμα ΑΒ, θά τέμνει ὁπωσδήποτε ἕνα ἀκόμη καί μόνο ἕνα ἀπό τά τμήματα ΑΓ καί ΒΓ»



Μέ τό ἀξίωμα αὐτό νά δείξετε ὅτι σ' ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ ἡ εὐθεία πού διέρχεται ἀπό ἕνα σημεῖο Δ τῆς ΑΒ καί ἕνα σημεῖο Ε τῆς προεκτάσεως τῆς ΒΓ τέμνει τήν ΑΓ.

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ **

13. Θεωροῦμε δύο εὐθεῖες Α΄Α καί Β΄Β πού τέμνονται στό Ο καί μία εὐθεία ε πού διέρχεται ἀπό τό Ο καί τέτοια ὥστε ἡ μία ἡμιευθεία της ΟΕ νά βρίσκεται μέσα στήν κυρτή γωνία $\widehat{AOB}$. Νά δειχθεῖ ὅτι:

α) Ἡ εὐθεία ε δέν τέμνει τά εὐθύγραμμα τμήματα πού ἔχουν τά ἄκρα τους στίς ἡμιευθεῖες ΟΑ καί ΟΒ΄.

β) Ἡ ἡμιευθεία ΟΕ τέμνει κάθε εὐθύγραμμο τμῆμα πού τά ἄκρα του βρίσκονται στίς πλευρές τῆς κυρτῆς γωνίας $\widehat{AOB}$.

14. Ἔχουμε μία πολυγωνική γραμμή ΑΒΓ...ΚΛ πού ἕνα σημεῖο Ρ μιᾶς πλευρᾶς της (δέν ἀποκλείεται ἡ περίπτωση νά εἶναι τό Ρ κορυφή) βρίσκεται στήν προέκταση μιᾶς ἄλλης πλευρᾶς. Νά δείξετε ὅτι ἡ πολυγωνική γραμμή εἶναι μή κυρτή.

15. Δίνεται μιά «ἀνοικτή» κυρτή πολυγωνική γραμμή ΑΒΓ...ΚΛ μέ ἄκρα Α καί Λ. Νά δειχθεῖ ὅτι:

α) Ἡ εὐθεία ΑΛ ἔχει μέ τήν πολυγ. γραμμή κοινά μόνο τά σημεῖα Α καί Λ.

β) Ἡ κλειστή πολυγωνική γραμμή, πού σχηματίζεται ἄν φέρουμε καί τό τμῆμα ΑΛ, εἶναι κυρτή.

γ) Κάθε εὐθεία ε πού ἔχει ἑκατέρωθεν αὐτῆς τά σημεῖα Α καί Λ ἔχει μέ τήν «ἀνοικτή» κυρτή πολυγωνική γραμμή ἕνα καί μόνο ἕνα κοινό σημεῖο.

16. Ἄν Ι εἶναι ἐσωτερικό σημεῖο κυρτοῦ πολυγώνου ΑΒΓ...ΚΛ, νά δειχθεῖ ὅτι κάθε εὐθεία ε πού διέρχεται ἀπό τό Ι τέμνει τήν πολυγ. γραμμή τῶν πλευρῶν του σέ δύο σημεῖα, ἐνῶ κάθε ἡμιευθεία μέ ἀρχή τό Ι τήν τέμνει σ' ἕνα σημεῖο.

17. Θεωροῦμε τέσσερις εὐθεῖες $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ πού τέμνονται ἀνά δύο καί ἀνά τρεῖς δέ διέρχονται ἀπό τό ἴδιο σημεῖο. Ὀνομάζουμε Ω τό σύνολο τῶν σημείων τομῆς τους ἀνά δύο καί ὁρίζουμε στό Ω τή διμελή σχέση R:

$$MRN \iff \text{τό } N \text{ δέν ἀνήκει σ' εὐθεία πού διέρχεται ἀπό τό } M.$$

Ἐξετάστε ἄν ἡ R εἶναι ἀνακλαστική, συμμετρική καί μεταβατική.

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 1

1. Δεχόμαστε τήν ὕπαρξη ἑνός μή κενοῦ συνόλου, τοῦ **γεωμετρικοῦ χώρου**, πού τά στοιχεῖα του λέγονται **σημεῖα** καί τά ὑποσύνολά του λέγονται **γεωμετρικά σχήματα.**

Ὁρισμένα ἀπό τά ὑποσύνολα τοῦ γεωμ. χώρου τά λέμε **εὐθεῖες** καί οἱ σπουδαιότερες προτάσεις (ἀξιώματα ἤ θεωρήματα) γι' αὐτές εἶναι:

— **Ἀπό ἕνα σημεῖο διέρχονται ἄπειρες εὐθεῖες.**

— **Ἀπό δύο σημεῖα διέρχεται μία καί μόνο μία εὐθεία** (καί ἔτσι δύο εὐθεῖες πού ἔχουν δύο κοινά σημεῖα συμπίπτουν).

— **Δύο εὐθεῖες πού δέ συμπίπτουν ἔχουν τό πολύ ἕνα κοινό σημεῖο** (καί ὅταν ἔχουν ἕνα μόνο κοινό σημεῖο, λέγονται «τεμνόμενες»).

— **Μία εὐθεία ἔχει ἄπειρα σημεῖα καί κάθε ἕνα ἀπό αὐτά τή χωρίζει σέ δύο ἡμιευθεῖες.**

Τό σημειοσύνολο πού ἔχει στοιχεῖα δύο ὁρισμένα σημεῖα Α καί Β καί ὅλα τά σημεῖα τῆς εὐθείας ΑΒ, πού βρίσκονται μεταξύ τῶν Α καί Β, λέγεται **εὐθύγραμμο τμῆμα μέ ἄκρα Α καί Β.** Κάθε εὐθύγραμμο τμῆμα ἔχει ἐπίσης ἄπειρα σημεῖα.

Ὁρισμένα ἀπό τά ὑποσύνολα τοῦ γεωμ. χώρου τά λέμε **ἐπίπεδα** καί οἱ σπουδαιότερες προτάσεις γι' αὐτά εἶναι:

— **Ἀπό τρία μή συνευθειακά σημεῖα διέρχεται ἕνα μόνο ἐπίπεδο.**

— **Μία εὐθεία πού διέρχεται ἀπό δύο σημεῖα ἑνός ἐπιπέδου ἔχει ὅλα τά σημεῖα της στό ἐπίπεδο.**

— **Ἕνα ἐπίπεδο ἔχει ἄπειρες εὐθεῖες καί κάθε μιά ἀπό αὐτές τό χωρίζει σέ δύο ἡμιεπίπεδα.**

Τά γεωμετρικά σχήματα πού ἔχουν ὅλα τά σημεῖα τους στό ἴδιο ἐπίπεδο λέγονται **«ἐπίπεδα σχήματα»** καί μέ αὐτά ἀσχολεῖται ἡ **Ἐπιπεδομετρία** στήν ὁποία ἀπό δῶ καί πέρα περιοριζόμαστε.

2. Μέ τά σημεῖα καί τίς εὐθεῖες ἑνός ἐπιπέδου ὁρίζουμε τά βασικά ἐπίπεδα σχήματα. Αὐτά εἶναι:

— **Ἡ κυρτή γωνία,** πού εἶναι τομή δύο ἡμιεπιπέδων τά ὁποῖα ἔχουν διαφορετικές ἀκμές (καί μερικές περιπτώσεις της εἶναι ἡ «μηδενική γωνία» καί ἡ «πεπλατυσμένη γωνία»).

— **Ἡ μή κυρτή γωνία,** πού εἶναι ἕνωση δύο ἡμιεπιπέδων τά ὁποῖα ἔχουν διαφορετικές ἀκμές.

— **Ἡ πολυγωνική γραμμή,** πού ἔχει γιά κορυφές ν διατεταγμένα σημεῖα Α,Β,Γ,. . .,Κ,Λ καί πλευρές τά εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ,ΒΓ,. . .,ΚΛ καί **ἡ κλειστή πολυγωνική γραμμή,** πού ἔχει γιά κορυφές τά διατεταγμένα σημεῖα Α,Β,Γ,. . .,Κ,Λ καί πλευρές τά εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ,ΒΓ,. . .,ΚΛ,ΛΑ.

— **Ἡ κυρτή πολυγωνική γραμμή,** πού ὁ φορέας τῆς κάθε πλευρᾶς της ἔχει πρός τό αὐτό μέρος του ὅλες τίς ἄλλες κορυφές τῆς πολυγωνικῆς γραμμῆς.

— **Τό κυρτό πολύγωνο,** τό ὁποῖο εἶναι τομή τῶν ἡμιεπιπέδων πού τό καθένα τους ἔχει ἀκμή μία πλευρά κλειστῆς κυρτῆς πολυγωνικῆς γραμμῆς καί περιέχει ὅλες τίς ἄλλες κορυφές τῆς πολυγωνικῆς γραμμῆς.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΣΧΕΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΤΑ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΑ ΤΜΗΜΑΤΑ

Ἰσότητα εὐθύγραμμων τμημάτων.

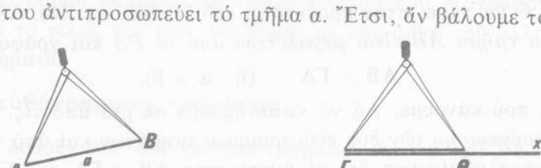
14. Ἄς καλέσουμε $\mathscr{E}$ τό σύνολο τῶν εὐθύγραμμων τμημάτων, τά ὁποῖα θά σημειώνουμε, γιά λόγους συντομίας, μέ α,β,γ,... Δεχόμαστε τό ἀξίωμα:

XIV. Στό σύνολο $\mathscr{E}$ ὑπάρχει μιά σχέση = πού εἶναι
— ἀνακλαστική, δηλαδή $\alpha = \alpha$, $\forall \alpha \in \mathscr{E}$
— συμμετρική, δηλαδή ἄν $\alpha = \beta \Rightarrow \beta = \alpha$
— μεταβατική, δηλαδή ἄν $\alpha = \beta$ καί $\beta = \gamma \Rightarrow \alpha = \gamma$

Ἡ σχέση αὐτή, πού εἶναι σχέση ἰσοδυναμίας, λέγεται **ἰσότητα τῶν εὐθύγραμμων τμημάτων**. Γιά τήν ἰσότητα αὐτή δεχόμαστε ἀκόμη τό ἀξίωμα:

XV. Σέ κάθε ἡμιευθεία ΓΧ ὑπάρχει ἕνα καί μόνο ἕνα σημεῖο Θ τέτοιο ὥστε τό τμῆμα ΓΘ νά εἶναι ἴσο μέ δοσμένο τμῆμα α.

Τό σημεῖο Θ τῆς ἡμιευθείας ΓΧ βρίσκεται πρακτικά μέ ἕνα διαβήτη, πού τό «ἄνοιγμά» του ἀντιπροσωπεύει τό τμῆμα α. Ἔτσι, ἄν βάλουμε τό ἕνα ἄκρο τοῦ



διαβήτη αὐτοῦ στήν ἀρχή Γ τῆς ἡμιευθείας, ὅπως δείχνει τό παραπάνω σχῆμα, τό ἄλλο ἄκρο του ἐντοπίζει τό σημεῖο Θ. Εἶναι φανερό ὅτι χρησιμοποιώντας τό διαβήτη μέ τόν ἴδιο τρόπο μποροῦμε νά ἐλέγξουμε ἄν δύο δοσμένα τμήματα ΑΒ καί ΓΘ εἶναι ἴσα.

Τό μέσο εὐθύγραμμου τμήματος.

15. Ὁρισμός: Ἕνα σημεῖο Μ ἑνός εὐθύγραμμου τμήματος ΑΒ θά λέγεται

μέσο αὐτοῦ, ἄν καί μόνο ἄν τά εὐθύγραμμα τμήματα AM καί MB εἶναι ἴσα, δηλαδή **ἄν καί μόνο ἄν**

$$AM = MB.$$

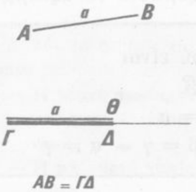
Δεχόμαστε τώρα τό ἀξίωμα:

XVI. Κάθε εὐθύγραμμο τμῆμα ἔχει ἕνα καί μόνο ἕνα μέσο.

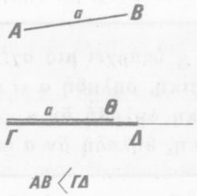
Θά δοῦμε ἀργότερα πῶς μποροῦμε νά βροῦμε τό μέσο ἑνός εὐθύγραμμου τμήματος μέ τόν κανόνα καί τό διαβήτη.

Ἄνισα εὐθύγραμμα τμήματα.

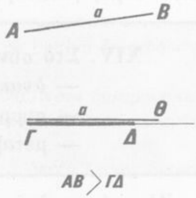
16. Ἄς θεωρήσουμε τώρα δύο εὐθύγραμμα τμήματα $AB = \alpha$ καί $\Gamma\Delta = \beta$. Ἄν πάρουμε (μέ τό διαβήτη μας) στήν ἡμιευθεία ΓΔ τμῆμα $\Gamma\Theta = \alpha$, θά ἔχουμε μία ἀπό τίς παρακάτω περιπτώσεις:



σχ. 16



σχ. 17.



σχ. 18

α) Τό σημεῖο Θ θά πέσει στό σημεῖο Δ (βλ. σχ. 16) καί τότε ἔχουμε τήν περίπτωση τῆς ἰσότητας $AB = \Gamma\Delta$ (ἤ $\alpha = \beta$).

β) Τό σημεῖο Θ θά πέσει σ' ἕνα ἐσωτερικό σημεῖο τοῦ ΓΔ (βλ. σχ. 17). Λέμε τότε ὅτι *τό εὐθύγραμμο τμῆμα AB εἶναι μικρότερο ἀπό τό ΓΔ* καί γράφουμε:

$$AB < \Gamma\Delta \quad (\text{ἤ } \alpha < \beta).$$

γ) Τό σημεῖο Θ θά πέσει στήν προέκταση τοῦ ΓΔ (βλ. σχ. 18). Λέμε τότε ὅτι *τό εὐθύγραμμο τμῆμα AB εἶναι μεγαλύτερο ἀπό τό ΓΔ* καί γράφουμε:

$$AB > \Gamma\Delta \qquad (\text{ἤ } \alpha > \beta).$$

Ἡ διαδικασία πού κάνουμε, γιά νά καταλήξουμε σέ μιά ἀπό τίς τρεῖς περιπτώσεις λέγεται *«σύγκριση»* τῶν δύο εὐθύγραμμων τμημάτων καί ἀπό τούς ὁρισμούς πού δώσαμε καταλαβαίνουμε ὅτι οἱ ἀνισότητες $AB < \Gamma\Delta$ καί $\Gamma\Delta > AB$ εἶναι ἐκφράσεις ἰσοδύναμες. Ἐπίσης γιά τή σχέση $<$ ἀποδεικνύεται εὔκολα ἡ πρόταση[1]:

1. Κάθε πρόταση *Π* τῆς μορφῆς «ἄν *A* τότε *B*», ὅταν τά *A* καί *B* εἶναι ἐπίσης προτάσεις, λέγεται *«συνεπαγωγή»* καί σημειώνεται συμβολικά «$A \Rightarrow B$».

Σέ μιά συνεπαγωγή $\Pi : A \Rightarrow B$ ἡ πρόταση *A* λέγεται **ὑπόθεση τῆς** *Π* καί ἡ *B* λέγεται **συμπέρασμα τῆς** *Π*. Ἄν ἀληθεύει ἡ πρόταση *Π*, λέμε ὅτι **«ἡ *A* εἶναι ἱκανή συνθήκη τῆς *B*»** ἤ ὅτι **«ἡ *B* εἶναι ἀναγκαία συνθήκη τῆς *A*»**.

Γιά νά ἀποδείξουμε ὅτι ἀληθεύει μιά συνεπαγωγή «$A \Rightarrow B$», μποροῦμε νά ἀκολουθή-

$$AB < \Gamma\Delta \quad \text{καί} \quad \Gamma\Delta < EZ \Rightarrow AB < EZ$$

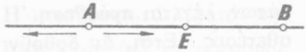
πού σημαίνει ὅτι ἡ ἀνισότητα τῶν εὐθύγραμμων τμημάτων εἶναι σχέση μεταβατική.

Προσανατολισμός εὐθύγραμμων τμημάτων.

17. Ἄς θεωρήσουμε μία εὐθεία ε καί ἄς ὑποθέσουμε ὅτι ἕνα σημεῖο Α τῆς εὐθείας κινεῖται πάνω σ' αὐτή. Γιά τήν κίνηση τοῦ Α δεχόμαστε τό ἀξίωμα:

XVII. Ἕνα σημεῖο Α μιᾶς εὐθείας ε μπορεῖ νά κινηθεῖ πάνω στήν ε κατά δύο ἀντίθετες φορές καί, ὅταν κινεῖται διαρκῶς μέ μιά ὁποιαδήποτε φορά, περνάει ἀπό ὅλα τά σημεῖα τῆς μιᾶς ἡμιευθείας πού ἔχει ἀρχή τήν ἀρχική του θέση.

Συνήθως ἡ μία φορά κινήσεως ὀνομάζεται *«θετική φορά»* καί ἡ ἀντίθετή της *«ἀρνητική φορά»*. Ἄν ἔχουμε τρία διαφορετικά σημεῖα Α,Ε,Β τῆς εὐθείας καί τό σημεῖο Ε εἶναι μεταξύ τῶν Α καί Β, τά σημεῖα αὐτά κατά τή μιά φορά κινήσεως διαγράφονται κατά τή διάταξη Α→Ε→Β, ἐνῶ κατά τήν ἀντίθετη φορά κινήσεως διαγράφονται κατά τή διάταξη Β→Ε→Α.



Ἄς θεωρήσουμε τώρα ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ καί ἄς πάρουμε ἕνα ἐσωτερικό του σημεῖο Ε. Τό ΑΒ κατά τή μία φορά κινήσεως διαγράφεται κατά τή διάταξη Α→Ε→Β καί τότε τό Α λέγεται *«ἀρχή»* καί τό Β *«τέλος»* του, ἐνῶ στήν ἀντίθετη φορά κινήσεως διαγράφεται κατά τή διάταξη Β→Ε→Α καί τότε τό Β λέγεται *«ἀρχή»* καί τό Α *«τέλος»* του. Ἄν ὑποθέσουμε ὅτι τό κινητό σημεῖο πού διαγράφει τό ΑΒ εἶναι τό ἴδιο τό Ε, στή διάταξη Α→Ε→Β λέμε ὅτι *«τό Ε κινεῖται ἀπό τό Α πρός τό Β»*, ἐνῶ στή διάταξη Β→Ε→Α λέμε ὅτι *«τό Ε κινεῖται ἀπό τό Β πρός τό Α»*. Ἔτσι τό ἐσωτερικό ἑνός τμήματος διαγράφεται πάντοτε ἀπό τήν ἀρχή πρός τό τέλος του.

Δύο εὐθύγραμμα τμήματα τῆς ἴδιας εὐθείας πού διαγράφονται κατά τήν ἴδια φορά καί τό τέλος τοῦ ἑνός συμπίπτει μέ τήν ἀρχή τοῦ ἄλλου θά λέγονται **διαδοχικά τμήματα.**

Πρόσθεση εὐθύγραμμων τμημάτων.

18. Ἄν δοθοῦν δύο εὐθύγραμμα τμήματα[1], ΑΒ=α καί ΓΔ = β, μποροῦμε

σουμε μιά ἀπό τίς ἑξῆς μεθόδους:

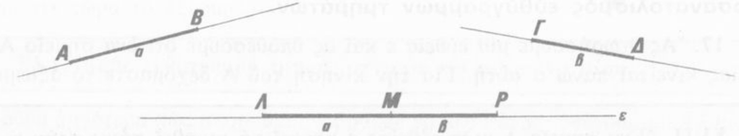
α) Νά βροῦμε προτάσεις $P_1, P_2, \ldots, P_k$ τέτοιες ὥστε νά ἀληθεύουν οἱ συνεπαγωγές $A \Rightarrow P_1$, $P_1 \Rightarrow P_2, \ldots, P_k \Rightarrow B$ (γιατί ἄν ἀληθεύουν αὐτές, ἀποδεικνύεται στή Λογική ὅτι ἀληθεύει καί ἡ $A \Rightarrow B$). Τότε λέμε ὅτι ἀκολουθοῦμε τή **συνθετική μέθοδο.**

β) Νά ἀποδείξουμε ὅτι ἀληθεύει ἡ συνεπαγωγή «ὄχι $B \Rightarrow$ ὄχι A» (γιατί αὐτή, ὅπως ἀποδεικνύεται στή Λογική, εἶναι ἰσοδύναμη μέ τήν «$A \Rightarrow B$»).

γ) Νά δείξωμε ὅτι ἡ πρόταση «A καί ὄχι B» ἔχει ὡς συνέπεια μία πρόταση πού ἀντιβαίνει σέ ἀξίωμα ἤ σέ γνωστό θεώρημα. Τότε λέμε ὅτι ἀκολουθοῦμε τήν **εἰς ἄτοπον ἀπαγωγή.**

1. Τά τμήματα θεωροῦνται μή προσανατολισμένα.

πάντοτε νά κατασκευάσουμε μ᾽αὐτά ἕνα ἄλλο εὐθύγραμμο τμῆμα ΛΡ παίρνοντας (μέ τό διαβήτη μας) πάνω σέ μιά εὐθεία ε τά διαδοχικά τμήματα ΛΜ = α



καί ΜΡ = β. Τό τμῆμα ΛΡ, πού κατασκευάζεται μέ τόν τρόπο αὐτό, λέγεται **ἄθροισμα τῶν ΑΒ = α καί ΓΔ = β** καί σημειώνεται ΑΒ + ΓΔ ἤ α + β. Γιά νά δηλώσουμε ὅτι τό ΛΡ εἶναι ἄθροισμα τῶν ΑΒ = α καί ΓΔ = β, γράφουμε:

$$\mathrm{ΛΡ} = α + β \qquad ἤ \qquad \mathrm{ΛΡ} = \mathrm{ΑΒ} + \mathrm{ΓΔ}$$

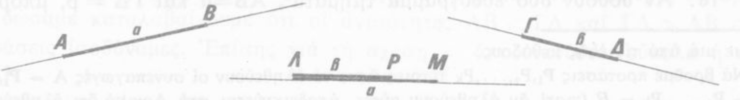
Ἡ πράξη πού κάνουμε, γιά νά βροῦμε τό ἄθροισμα δύο εὐθύγραμμων τμημάτων, λέγεται **πρόσθεση.** Ἡ πρόσθεση ἐπεκτείνεται καί γιά περισσότερους προσθετέους. Ἔτσι, ἄν δοθοῦν τρία τμήματα α,β,γ, σημειώνουμε μέ α + β + γ τό ἄθροισμα τῶν α + β καί γ, δηλαδή α + β + γ = (α + β) + γ. Ἐπίσης, ἄν δοθοῦν τέσσερα τμήματα α,β,γ,δ, σημειώνουμε μέ α + β + γ + δ τό ἄθροισμα τῶν α + β + γ καί δ, δηλαδή α + β + γ + δ = (α + β + γ) + δ, κ.ο.κ. Ἀπό τόν ὁρισμό τοῦ ἀθροίσματος διαπιστώνεται ὅτι ἡ πρόσθεση τῶν εὐθύγραμμων τμημάτων εἶναι πράξη ἀντιμεταθετική καί προσεταιριστική, δηλαδή ὅτι ἰσχύουν οἱ ἰδιότητες:

$$α + β = β + α$$
$$(α + β) + γ = α + (β + γ)$$

πού μᾶς ἐπιτρέπουν σ᾽ἕνα ὁποιοδήποτε ἄθροισμα εὐθύγραμμων τμημάτων νά ἐλαττώνουμε τό πλῆθος τους ἀντικαθιστώντας ὅσους καί ὅποιους προσθετέους θέλουμε μέ τό ἄθροισμά τους. Γενικότερα, στήν πρόσθεση εὐθύγραμμων τμημάτων ἰσχύουν ἰδιότητες ἀνάλογες μέ ἐκεῖνες πού ἰσχύουν στήν πρόσθεση ἀριθμῶν.

Ἀφαίρεση εὐθύγραμμων τμημάτων.

19. Ἄν δοθοῦν δύο εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ = α καί ΓΔ = β τέτοια ὥστε ΑΒ > ΓΔ, μποροῦμε νά κατασκευάσουμε μ᾽αὐτά ἕνα ἄλλο εὐθύγραμμο τμῆμα



ΛΡ παίρνοντας (μέ τό διαβήτη μας) πάνω σέ μιά εὐθεία ε δύο τμήματα ΛΜ = α καί ΛΡ = β πού ἔχουν κοινή ἀρχή καί διαγράφονται κατά τήν ἴδια φορά. Τό τμῆμα ΡΜ, πού κατασκευάζεται μέ τόν τρόπο αὐτό, λέγεται **διαφορά τῶν ΑΒ = α καί ΓΔ = β** καί σημειώνεται ΑΒ–ΓΔ ἤ α–β. Γιά νά δηλώσουμε ὅτι τό ΡΜ εἶναι διαφορά τῶν ΑΒ = α καί ΓΔ = β, γράφουμε:

$$\mathrm{ΡΜ} = α - β \qquad ἤ \qquad \mathrm{ΡΜ} = \mathrm{ΑΒ} - \mathrm{ΓΔ}$$

Ἡ πράξη πού κάνουμε, γιά νά βροῦμε τή διαφορά δύο εὐθύγραμμων τμημάτων, λέγεται **ἀφαίρεση.** Ἀπό τόν τρόπο κατασκευῆς τῆς διαφορᾶς $PM = \alpha - \beta$ προκύπτει ὅτι τό τμῆμα α εἶναι ἄθροισμα τῶν τμημάτων PM καί β, δηλαδή[1]

(1) $$PM = \alpha - \beta \iff PM + \beta = \alpha$$

Ἔτσι λοιπόν **τό τμῆμα PM ἰσοῦται μέ τή διαφορά α–β, ἄν καί μόνο ἄν τό ἄθροισμα τῶν τμημάτων PM καί β ἰσοῦται μέ α.** Ἐπειδή ὅμως καί τό τμῆμα β εἶναι ἴσο μέ τή διαφορά α–PM (ἀφοῦ τό ἄθροισμα τῶν β καί PM ἰσοῦται μέ α) ἔχουμε ἀκόμη

(2) $$PM = \alpha - \beta \iff \beta = \alpha - PM$$

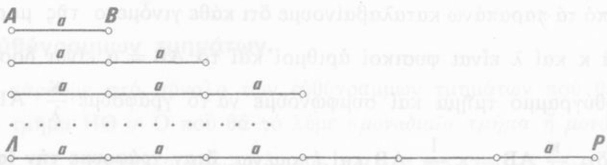
Ἡ διαφορά $PM = \alpha - \beta$, ὅπως τήν ὁρίσαμε, ἔχει νόημα μόνο ὅταν $\alpha > \beta$[2]. Στήν περίπτωση $\alpha = \beta$, ἄν ἀκολουθήσουμε τήν ἴδια πορεία γιά τήν κατασκευή τοῦ $PM = \alpha - \beta$, θά καταλήξουμε στή σύμπτωση τῶν σημείων P καί M. Γιά νά ἔχει λοιπόν νόημα ἡ διαφορά α–β καί ὅταν $\alpha = \beta$, θά πρέπει νά δεχθοῦμε ὅτι ὑπάρχει ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα πού τά ἄκρα του συμπίπτουν. Τό τμῆμα αὐτό λέγεται *μηδενικό εὐθύγραμμο τμῆμα* καί θά σημειώνεται μέ $\overline{O}$. Ἔτσι μποροῦμε νά γράφουμε γιά κάθε τμῆμα α τήν ἰσότητα

$$\alpha - \alpha = \overline{O}$$

Ἀπό τήν ἰσότητα αὐτή προκύπτει ἡ ἰσότητα $\alpha + \overline{O} = \alpha$ πού ἀληθεύει ἐπίσης γιά κάθε τμῆμα α καί σημαίνει ὅτι τό μηδενικό εὐθύγραμμο τμῆμα εἶναι τό «οὐδέτερο στοιχεῖο» τῆς προσθέσεως τῶν εὐθύγραμμων τμημάτων. Τό σύνολο τῶν ἐσωτερικῶν σημείων τοῦ $\overline{O}$ εἶναι τό κενό σύνολο.

Γινόμενο εὐθύγραμμου τμήματος ἐπί ρητό ἀριθμό.

20. Ἄν ἔχουμε ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα $AB = \alpha$, σημειώνουμε μέ $2\alpha, 3\alpha, \ldots, \kappa\alpha$ τά εὐθύγραμμα τμήματα πού εἶναι ἀντιστοίχως ἀθροίσματα δύο, τριῶν,...,κ,



1. Ἀπό κάθε πρόταση $\Pi : A \Rightarrow B$ μποροῦμε νά διατυπώσουμε μιά ἄλλη πρόταση $B \Rightarrow A$, πού λέγεται **ἀντίστροφη τῆς** Π καθώς καί τήν πρόταση Π^* : «$A \Rightarrow B$ καί $B \Rightarrow A$» ἡ ὁποία σημειώνεται συμβολικά

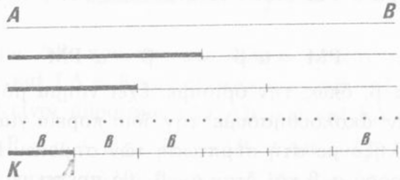
$$\Pi^* : «A \iff B»$$

καί διαβάζεται «A ἄν καί μόνο ἄν B» ἤ «γιά νά ἰσχύει ἡ A πρέπει καί ἀρκεῖ νά ἰσχύει ἡ B». Δέν εἶναι ἀπαραίτητο, ὅταν ἀληθεύει ἡ Π, νά ἀληθεύει ἡ ἀντίστροφή της ἤ ἀκόμη καί ἡ Π^*. Ἄν ὅμως ἀληθεύουν καί οἱ δύο προτάσεις $A \Rightarrow B$ καί $B \Rightarrow A$, τότε ὑποχρεωτικά ἀληθεύει ἡ Π* καί κάθε μιά ἀπό τίς A καί B εἶναι **ἱκανή καί ἀναγκαία συνθήκη** τῆς ἄλλης.

2. Γιά $\alpha < \beta$ δέν ὁρίζεται διαφορά α–β στά μή προσανατολισμένα τμήματα.

εὐθύγραμμων τμημάτων ἴσων μέ α. Ἔτσι, **ὅταν γράφουμε τήν ἰσότητα $ΛΡ=κΑΒ$, ἐννοοῦμε ὅτι τό ΛΡ εἶναι ἄθροισμα κ τμημάτων ἴσων μέ $ΑΒ = α$.**

Ἄν χωρίσουμε τώρα ἕνα τμῆμα $ΑΒ = α$ σέ δύο, τρία,...λ, ἴσα μέρη[1], τό κάθε ἕνα ἀπό τά ἴσα εὐθύγραμμα τμήματα, πού προκύπτουν, τό σημειώνουμε ἀντίστοιχα μέ $\frac{1}{2}α, \frac{1}{3}α, \ldots, \frac{1}{λ}α$.

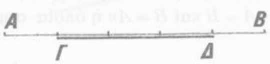


Ἔτσι, ὅταν γράφουμε $ΚΛ = \frac{1}{λ}ΑΒ$, ἐννοοῦμε ὅτι τό ΚΛ εἶναι ἕνα ἀπό τά ἴσα εὐθύγραμμα τμήματα πού προκύπτουν, ὅταν χωρίζουμε τό ΑΒ σέ λ ἴσα μέρη. Στήν περίπτωση αὐτή εἶναι φανερό ὅτι τό ΑΒ εἶναι ἄθροισμα λ τμημάτων ἴσων μέ $ΚΛ = β$ καί συνεπῶς ἔχουμε

$$ΚΛ = \frac{1}{λ} ΑΒ \iff ΑΒ = λΚΛ.$$

Παρατηροῦμε ὅτι ἡ ἰσότητα $ΑΒ = λΚΛ$ γράφεται $ΑΒ = λ\left(\frac{1}{λ} ΑΒ\right)$ καί ἔτσι γιά κάθε τμῆμα α καί γιά κάθε φυσικό ἀριθμό $λ \neq 0$ μποροῦμε νά γράφουμε $λ\left(\frac{1}{λ}α\right) = α$.

Ἀπό τά παραπάνω καταλαβαίνουμε ὅτι κάθε γινόμενο τῆς μορφῆς $κ\frac{1}{λ}ΑΒ$ (ὅταν τά κ καί λ εἶναι φυσικοί ἀριθμοί καί τό $ΑΒ = α$ εἶναι δοσμένο τμῆμα) εἶναι εὐθύγραμμο τμῆμα καί συμφωνοῦμε νά τό γράφουμε $\frac{κ}{λ}ΑΒ$. Ὁρίζουμε λοιπόν ὅτι $\frac{κ}{λ}ΑΒ = κ\frac{1}{λ}ΑΒ$ καί ἑπομένως **ὅταν γράφουμε τήν ἰσότητα $ΓΔ =$**



$= \frac{κ}{λ}ΑΒ$, ἐννοοῦμε ὅτι τό ΓΔ εἶναι ἄθροισμα κ τμημάτων ἴσων μέ $\frac{1}{λ}ΑΒ$. Στά

1. Θά δοῦμε ἀργότερα πῶς γίνεται ὁ χωρισμός ἑνός εὐθύγραμμου τμήματος σέ ν ἴσα μέρη μέ τόν κανόνα καί τό διαβήτη.

παραπάνω σχήματα ἔχουμε δύο εὐθύγραμμα τμήματα ΓΔ καί ΕΖ πού ὁρίζονται ἀπό τίς ἰσότητες $\Gamma\Delta = \frac{3}{5}$ ΑΒ καί $\mathrm{EZ} = \frac{7}{5}$ ΑΒ.

Λόγος εὐθύγραμμων τμημάτων.

21. Ἄς ὑποθέσουμε τώρα ὅτι ἔχουμε δύο τμήματα ΑΒ καί ΓΔ, πού συνδέονται μέ μιά ἰσότητα τῆς μορφῆς

(3) $$\Gamma\Delta = \frac{\kappa}{\lambda}\,\mathrm{AB}$$

ὅπου τά κ καί λ εἶναι φυσικοί ἀριθμοί. Τότε ὁ ἀριθμός $\frac{\kappa}{\lambda}$ λέγεται **λόγος τοῦ τμήματος ΓΔ πρός τό τμῆμα ΑΒ** καί σημειώνεται μέ ΓΔ : ΑΒ ἤ $\frac{\Gamma\Delta}{\mathrm{AB}}$. Ἔτσι ἡ ἰσότητα $\frac{\kappa}{\lambda} = \frac{\Gamma\Delta}{\mathrm{AB}}$ δηλώνει ὅτι ὁ ἀριθμός $\frac{\kappa}{\lambda}$ εἶναι ὁ λόγος τοῦ ΓΔ πρός τό ΑΒ καί συνεπῶς εἶναι ἰσοδύναμη μέ τήν ἰσότητα $\Gamma\Delta = \frac{\kappa}{\lambda}$ ΑΒ. Ἔχουμε λοιπόν

$$\Gamma\Delta = \frac{\kappa}{\lambda}\,\mathrm{AB} \iff \frac{\Gamma\Delta}{\mathrm{AB}} = \frac{\kappa}{\lambda}\,.$$

Θά θεωροῦμε πρός τό παρόν εὐθύγραμμα τμήματα τέτοια ὥστε δύο ὁποιαδήποτε α καί β ἀπ' αὐτά νά συνδέονται μέ σχέση τῆς μορφῆς $\alpha = \frac{\kappa}{\lambda}\beta$, ὅπου τά κ καί λ εἶναι φυσικοί ἀριθμοί[1]. Εἶναι φανερό ὅτι ἄν $\alpha = \beta$, θά ἔχουμε $\frac{\kappa}{\lambda} = 1 \Rightarrow \kappa = \lambda$, ἐνῶ ἄν $\alpha > \beta$, θά ἔχουμε $\frac{\kappa}{\lambda} > 1 \Rightarrow \kappa > \lambda$.

Μέτρηση εὐθύγραμμων τμημάτων.

22. Ἄς πάρουμε στό σύνολο τῶν εὐθύγραμμων τμημάτων πού θεωροῦμε ἕνα ὁρισμένο τμῆμα $\mathrm{H\Theta} \neq \overline{\mathrm{O}}$ πού θά τό λέμε *«μοναδιαῖο τμῆμα ἤ μονάδα»* καί ἄς σχηματίσουμε γιά κάθε εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ τοῦ συνόλου τό λόγο $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{H\Theta}}$. Ὁ λόγος αὐτός λέγεται τώρα **μέτρο τοῦ ΑΒ** ὡς πρός μονάδα μετρήσεως τό ΗΘ καί σημειώνεται ἁπλῶς μέ (ΑΒ), δηλαδή εἶναι

$$(\mathrm{AB}) = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{H\Theta}}\,.$$

1. Αὐτό δέ συμβαίνει πάντοτε, γιατί (ὅπως θά δοῦμε παρακάτω) ὑπάρχουν τμήματα α καί β γιά τά ὁποῖα δέν ἰσχύει ἰσότητα τῆς μορφῆς $\alpha = \frac{\kappa}{\lambda}\beta$. Στήν περίπτωση αὐτή λέμε ὅτι ὁ λόγος τοῦ α πρός τό β εἶναι «ἄρρητος» (μή ρητός) ἀριθμός.

Πρέπει νά προσέχουμε πολύ καί νά ξεχωρίζουμε ὅτι, ὅταν γράφουμε ΑΒ, ἐννοοῦμε εὐθύγραμμο τμῆμα, δηλαδή γεωμετρικό σχῆμα, ἐνῶ ὅταν γράφουμε (ΑΒ), ἐννοοῦμε ἀριθμό πού εἶναι τό μέτρο τοῦ ΑΒ γιά κάποια γνωστή μονάδα μετρήσεως.

Τό μέτρο ἑνός εὐθύγραμμου τμήματος ΑΒ λέγεται καί *μῆκος τοῦ ΑΒ*. Εἶναι φανερό ὅτι γιά κάθε εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ, διαφορετικό ἀπό τό μηδενικό, ὁ ἀριθμός (ΑΒ) ἐξαρτᾶται ἀπό τή μονάδα πού πήραμε, δηλαδή ἀπό τό ΗΘ. Ἔτσι ἄν παίρναμε γιά μονάδα ἕνα ἄλλο τμῆμα Η΄Θ΄, τό μέτρο $\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{H'\Theta'}}$ τοῦ ΑΒ θά ἦταν διαφορετικός ἀριθμός, ἄσχετα ἄν τόν σημειώναμε πάλι μέ (ΑΒ). Στή συνέχεια καί ὅπου παρουσιάζονται μέτρα εὐθύγραμμων τμημάτων θά ὑποθέτουμε ὅτι ἀναφέρονται στήν ἴδια μονάδα μετρήσεως. Γιά τό μηδενικό τμῆμα ἔχουμε πάντοτε $(\bar{\mathrm{O}}) = \mathrm{O}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ: Ὁ λόγος δύο τμημάτων ΑΒ καί ΓΔ ἰσοῦται πάντοτε μέ τό λόγο τῶν μέτρων τους, δηλαδή:

$$\frac{\mathrm{AB}}{\Gamma\Delta} = \frac{(\mathrm{AB})}{(\Gamma\Delta)}$$

Ἀπόδ. Ἀπό τίς $(\mathrm{AB}) = \mathrm{AB} : \mathrm{H\Theta}$ καί $(\Gamma\Delta) = \Gamma\Delta : \mathrm{H\Theta}$ ἔχουμε τίς ἰσότητες

$$\mathrm{AB} = (\mathrm{AB})\mathrm{H\Theta}, \qquad \Gamma\Delta = (\Gamma\Delta)\mathrm{H\Theta}$$

Ἀπό τή δεύτερη ἰσότητα παίρνουμε $\mathrm{H\Theta} = \dfrac{1}{(\Gamma\Delta)}\Gamma\Delta$ καί τότε ἡ πρώτη ἰσότητα γράφεται $\mathrm{AB} = (\mathrm{AB})\dfrac{1}{(\Gamma\Delta)}\Gamma\Delta = \dfrac{(\mathrm{AB})}{(\Gamma\Delta)}\Gamma\Delta$. Ἡ ἰσότητα αὐτή εἶναι ἰσοδύναμη (βλ. § 21) μέ τήν $\dfrac{\mathrm{AB}}{\Gamma\Delta} = \dfrac{(\mathrm{AB})}{(\Gamma\Delta)}$.

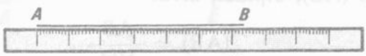
Ἀπό τό θεώρημα αὐτό ἔχουμε ἀμέσως (γιά τίς περιπτώσεις $\dfrac{\mathrm{AB}}{\Gamma\Delta} = 1$ καί $\dfrac{\mathrm{AB}}{\Gamma\Delta} > 1$) τά πορίσματα:

I. Ἴσα εὐθύγραμμα τμήματα ἔχουν ἴσα μέτρα καί ἀντιστρόφως, δηλαδή:

$$\mathbf{AB = \Gamma\Delta \iff (AB) = (\Gamma\Delta).}$$

II. Ἄνισα εὐθύγραμμα τμήματα ἔχουν ὁμοίως ἄνισα μέτρα καί ἀντιστρόφως, δηλαδή: $\mathbf{AB > \Gamma\Delta \iff (AB) > (\Gamma\Delta).}$

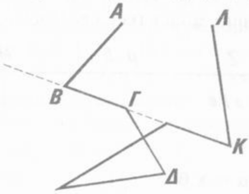
Γιά μονάδα μετρήσεως τῶν εὐθύγραμμων τμημάτων παίρνουμε συνήθως εὐθύγραμμο τμῆμα ἴσο μέ τό γνωστό μας μέτρο ἤ μία ὑποδιαίρεσή του ἤ ἕνα πολλαπλάσιό του. Ἔτσι π.χ. ἄν πάρουμε γιά μονάδα τό «ἑκατοστό» (cm), ἡ μέτρηση ἑνός τμήματος ΑΒ γίνεται στήν πράξη μέ τό «ὑποδεκάμετρο» ὅπως δείχνει τό παραπάνω σχῆμα.



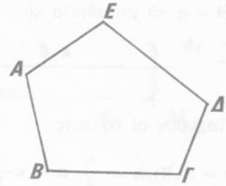
ΑΣΚΗΣΕΙΣ 18, 21–26

Περίμετρος πολυγωνικῆς γραμμῆς.

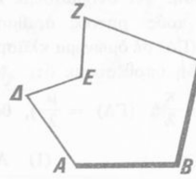
22α. Τό ἄθροισμα ΑΒ+ΒΓ + ΓΔ +... τῶν πλευρῶν μιᾶς (ἀνοικτῆς ἤ κλειστῆς) πολυγωνικῆς γραμμῆς ΑΒΓ...ΚΛ (βλ. σχ. 19) λέγεται **περίμετρός** της.



σχ. 19



σχ. 20



σχ. 21

Ἔτσι, ὅταν λέμε ὅτι μία πολυγωνική γραμμή γ_1 εἶναι μικρότερη (ἤ ἴση ἤ μεγαλύτερη) ἀπό μιά ἄλλη πολυγωνική γραμμή γ_2, ἐννοοῦμε ὅτι ἡ περίμετρος τῆς γ_1 εἶναι μικρότερη (ἤ ἴση ἤ μεγαλύτερη) ἀπό τήν περίμετρο τῆς γ_2. Δεχόμαστε τό ἀξίωμα:

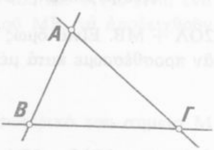
XVIII. Ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ εἶναι μικρότερο ἀπό κάθε πολυγωνική γραμμή πού ἔχει ἄκρα τά Α καί Β.

Ἔτσι π.χ. στό παραπάνω σχ. 21 ἔχουμε $ΑΒ < ΑΔ + ΔΕ + ΕΖ + ΖΗ + ΗΒ$. Ἀπό τήν ἰδιότητά του αὐτή τό εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ λέγεται καί **ἀπόσταση τῶν δύο σημείων Α καί Β.** Ἡ ἀπόσταση αὐτή ἐκφράζεται συνήθως μέ τό μέτρο τοῦ ΑΒ.

Ἡ τριγωνική ἀνισότητα.

23. Ἄν ἐφαρμόσουμε τό παραπάνω ἀξίωμα σ' ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ, ἔχουμε γιά τίς πλευρές του τίς ἀνισότητες:

$ΑΒ + ΑΓ, ΒΓ < ΑΒ < ΑΓ + ΒΓ,\ ΑΓ < ΑΒ + ΒΓ.$



Ὅταν εἶναι $ΑΒ<ΑΓ$, ἡ ἀνισότητα $ΑΓ < ΑΒ + ΒΓ$ γράφεται $ΑΓ-ΑΒ < ΒΓ$ καί ἔτσι ἔχουμε

(4) $$ΑΓ-ΑΒ < ΒΓ < ΑΓ + ΑΒ.$$

Δείξαμε λοιπόν ὅτι **ἡ κάθε πλευρά τριγώνου εἶναι μικρότερη ἀπό τό ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων καί μεγαλύτερη ἀπό τή διαφορά τους.** Ἡ ἀνισότητα $ΒΓ > ΑΓ-ΑΒ$ ἰσχύει μέ τήν προϋπόθεση $ΑΓ>ΑΒ$, ἐνῶ ὅταν εἶναι $ΑΒ>ΑΓ$, ἰσχύει ἡ ἀνισότητα $ΒΓ>ΑΒ-ΑΓ$ (πού προκύπτει ἀπό τήν $ΑΒ < ΑΓ + ΒΓ$). Ἄν σημειώσουμε μέ $|ΑΓ-ΑΒ|$ τή διαφορά τῶν δύο πλευρῶν ΑΓ καί ΑΒ ὅταν ἀπό τή μεγαλύτερη ἀφαιρέσουμε τή μικρότερη, ἡ πρότασή μας διατυπώνεται μέ τίς ἀνισότητες

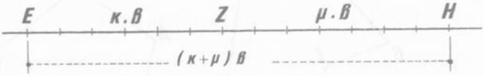
(4΄) $$|ΑΓ-ΑΒ| < ΒΓ < ΑΓ + ΓΒ$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 27, 28

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

18. Νά δειχθεῖ ὅτι γιά δύο εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ καί ΓΔ ἰσχύει πάντοτε ἡ ἰσότητα (ΑΒ + ΓΔ) = (ΑΒ) + (ΓΔ).

Λύση. Ἄν ὀνομάσουμε ΗΘ = α τό μοναδιαῖο εὐθύγραμμο τμῆμα (καί ὑποθέσουμε ὅτι τρέψαμε τούς ρητούς ἀριθμούς (ΑΒ) καί (ΓΔ) σέ ὁμώνυμα κλάσματα, δηλαδή ὑποθέσουμε ὅτι



$(AB)=\frac{\kappa}{\lambda}$, $(\Gamma\Delta)=\frac{\mu}{\lambda}$), θά ἰσχύουν οἱ σχέσεις:

$$(1)\quad AB = (AB).\alpha = \frac{\kappa}{\lambda}\alpha = \kappa\frac{1}{\lambda}\alpha = \kappa.\beta$$

$$(2)\quad \Gamma\Delta = (\Gamma\Delta).\alpha = \frac{\mu}{\lambda}\alpha = \mu\frac{1}{\lambda}\alpha = \mu.\beta$$

ὅπου θέσαμε $\frac{1}{\lambda}\alpha = \beta$. Γιά νά σχηματίσουμε τώρα τό ΑΒ + ΓΔ, θά πρέπει νά πάρουμε σέ εὐθεία ε δύο διαδοχικά τμήματα ΕΖ καί ΖΗ πού τό ἕνα θά ἀποτελεῖται ἀπό κ τμήματα ἴσα μέ β καί τό ἄλλο θά ἀποτελεῖται ἀπό μ τμήματα ἴσα μέ β. Τότε ἔχουμε

$$AB + \Gamma\Delta = EZ = (\kappa+\mu)\beta = (\kappa+\mu)\frac{1}{\lambda}\alpha = \frac{\kappa+\mu}{\lambda}\alpha,$$

ὁπότε $(AB+\Gamma\Delta) = \frac{\kappa+\mu}{\lambda} = \frac{\kappa}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda} = (AB) + (\Gamma\Delta)$.

Μέ τή βοήθεια αὐτῆς τῆς ἀσκήσεως ἀποδεικνύονται οἱ ἰδιότητες τῶν πράξεων τῶν εὐθύγραμμων τμημάτων πού εἶναι ἀνάλογες μέ τίς ἰδιότητες τῶν ἀριθμητικῶν πράξεων (βλ. ἄσκ. 21 καί 22).

19. Δίνεται ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ μιᾶς εὐθείας ε, ἕνα σημεῖο Μ ἐσωτερικό του καί ἕνα σημεῖο Ο στήν προέκταση τοῦ ΑΒ πρός τό Α. Ἄν εἶναι $AM = \frac{1}{2}MB$, νά δειχθεῖ ὅτι $OM = \frac{2OA + OB}{3}$.

Γενικότερα νά δειχθεῖ ὅτι, ἄν εἶναι $AM = \frac{\kappa}{\lambda}MB$, τότε θά εἶναι $OM = \frac{\lambda OA + \kappa OB}{\kappa+\lambda}$.

Λύση. Ἐπειδή $OM = OA + AM = OA + \frac{1}{2}MB = \frac{2OA + MB}{2}$, ἔχουμε $2OM = 2OA + MB$. Εἶναι ὅμως ἀκόμη καί $OM = OB - MB$. Ἔτσι ἄν προσθέσουμε κατά μέλη τίς ἰσότητες

$$2OM = 2OA + MB$$
$$OM = OB - MB,$$

βρίσκουμε $3OM = 2OA + OB \Rightarrow OM = \frac{2OA + OB}{3}$.

20. Ἄν Μ εἶναι ὁποιοδήποτε ἐσωτερικό σημεῖο τριγώνου ΑΒΓ, ἰσχύει πάντοτε ἡ ἀνισότητα

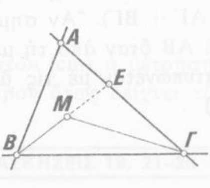
$$MB + M\Gamma < AB + A\Gamma.$$

Ἀπόδ. Ἄν Ε εἶναι ἡ τομή τῆς ΒΜ μέ τήν ΑΓ, στό τρίγωνο ΒΑΕ ἔχουμε τήν ἀνισότητα $BE < BA + AE$ ἤ

$$(\mathrm{I})\quad BM + ME < BA + AE.$$

Ἐπίσης στό τρίγωνο ΜΕΓ ἔχουμε

$$(\mathrm{II})\quad M\Gamma < ME + E\Gamma.$$

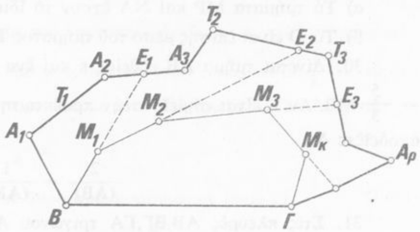


Προσθέτοντας κατά μέλη τίς (I) καί (II) βρίσκουμε:
$BM + M\Gamma < BA + (AE + E\Gamma)$ ἤ $BM + M\Gamma < BA + A\Gamma$.

Ἡ ἄσκηση αὐτή γενικεύεται ὡς ἑξῆς:

Κάθε κυρτή τεθλασμένη γραμμή $BM_1M_2...M_\kappa\Gamma$ εἶναι μικρότερη ἀπό ὁποιαδήποτε ἄλλη τεθλασμένη γραμμή $BA_1A_2...A_\rho\Gamma$ ἡ ὁποία ἔχει τά ἴδια ἄκρα καί «περικλείει» τήν κυρτή τεθλασμένη.

Ἀπόδ. Ἄν οἱ BM_1, M_1M_2, M_2M_3... τέμνουν τήν «ἐξωτερική» τεθλασμένη στά σημεῖα $E_1, E_2, E_3, \ldots, E_\kappa$» καί ὀνομάσουμε $T_1, T_2, T_3, \ldots$ τά μέρη στά ὁποῖα χωρίζεται ἡ «ἐξωτερική» τεθλασμένη ἀπό τά σημεῖα αὐτά, θά ἔχουμε τίς ἀνισότητες



$$BM_1 + M_1E_1 < T_1$$
$$M_1M_2 + M_2E_2 < M_1E_1 + T_2$$
$$M_2M_3 + M_3E_3 < M_2E_2 + T_3$$
....

Προσθέτοντας κατά μέλη τίς ἀνισότητες αὐτές βρίσκουμε $BM_1 + M_1M_2 + M_2M_3 + \ldots < T_1 + T_2 + T_3 + \ldots$, δηλαδή βρίσκουμε τήν ἀνισότητα πού ζητᾶμε.

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ*

21. Ἄν $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ εἶναι εὐθύγραμμα τμήματα τέτοια ὥστε $\alpha = \beta$ καί $\gamma = \delta$, ἀποδεῖξτε ὅτι $\alpha + \gamma = \beta + \delta$. Ἀποδεῖξτε ἐπίσης τήν πρόταση: $\alpha = \beta \Longleftrightarrow \alpha + \gamma = \beta + \gamma$

22. Ἄν $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ εἶναι εὐθύγραμμα τμήματα τέτοια ὥστε $\alpha > \beta$ καί $\gamma > \delta$, ἀποδεῖξτε ὅτι

$$\alpha + \gamma > \beta + \delta$$

Ἀποδεῖξτε ἐπίσης τήν πρόταση: $\alpha > \beta \Longleftrightarrow \alpha + \gamma > \beta + \gamma$.

23. Σέ μιά εὐθεία ε παίρνουμε στή σειρά τά σημεῖα Α,Β,Γ,Δ τέτοια ὥστε τά τμήματα ΑΔ καί ΒΓ νά ἔχουν τό ἴδιο μέσο Μ. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι $AB = \Gamma\Delta$ καί $A\Gamma = B\Delta$.

24. Σέ μιά εὐθεία ε παίρνουμε στή σειρά τέσσερα τυχόντα σημεῖα Α,Β,Γ,Δ καί ὀνομάζουμε Μ τό μέσο τοῦ ΑΒ καί Ν τό μέσο τοῦ ΓΔ. Ἀποδεῖξτε ὅτι:

$$MN = \frac{A\Delta + B\Gamma}{2}.$$

25. Θεωροῦμε ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ εὐθείας ε καί τό μέσο του Μ. Ἄν Σ εἶναι ἕνα σημεῖο στήν προέκταση τοῦ ΑΒ καί Ρ εἶναι ἕνα σημεῖο ἐσωτερικό τοῦ ΜΒ, νά ἀποδειχθοῦν οἱ ἰσότητες:

$$\Sigma M = \frac{\Sigma A + \Sigma B}{2}, \quad PM = \frac{PA - PB}{2}.$$

26. Θεωροῦμε ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ εὐθείας ε καί ἕνα ἐσωτερικό του σημεῖο Μ τέτοιο ὥστε $MB = \frac{3}{4}MA$. Ἄν Ο εἶναι σημεῖο στήν προέκταση τοῦ ΑΒ, πρός τό Α, νά ἀποδειχθεῖ ὅτι

$$OM = \frac{3.OA + 4.OB}{7}.$$

27. Ἄν Ρ εἶναι σημεῖο ἐσωτερικό τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ἀποδεῖξτε τίς ἀνισότητες

$$\frac{AB + B\Gamma + \Gamma A}{2} < PA + PB + P\Gamma < AB + B\Gamma + \Gamma A.$$

28. Ἀποδεῖξτε ὅτι σέ κάθε τετράπλευρο ΑΒΓΔ ἔχουμε τίς ἀνισότητες

α) $A\Gamma + B\Delta > AB + \Delta\Gamma$ β) $\frac{AB + B\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta A}{2} < A\Gamma + B\Delta < AB + B\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta A$.

29. Σέ μιά εὐθεία ε παίρνουμε στή σειρά τέσσερα ὁποιαδήποτε σημεῖα Α,Β,Γ,Δ καί ὀνομάζουμε Μ,Ν,Ρ,Λ τά μέσα τῶν ΑΒ,ΒΓ,ΓΔ,ΔΑ. Ἀποδεῖξτε ὅτι:

α) Τά τμήματα ΜΡ καί ΝΛ ἔχουν τό ἴδιο μέσο Ο.

β) Τό Ο εἶναι ἐπίσης μέσο τοῦ τμήματος ΤΣ ὅταν Τ καί Σ εἶναι τά μέσα τῶν ΑΓ καί ΒΔ.

30. Δίνεται τμῆμα ΑΒ εὐθείας ε καί ἕνα ἐσωτερικό σημεῖο του Μ τέτοιο ὥστε ΜΑ = $= \frac{5}{3}$ ΜΒ. Ἄν Σ εἶναι σημεῖο στήν προέκταση τοῦ ΑΒ πρός τό Β τέτοιο ὥστε ΣΑ = $\frac{5}{3}$ ΣΒ, ἀποδεῖξτε ὅτι

$$\frac{2}{(AB)} = \frac{1}{(AM)} + \frac{1}{(A\Sigma)}.$$

31. Στίς πλευρές ΑΒ,ΒΓ,ΓΑ τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε ἀντιστοίχως τά σημεῖα Δ,Ε,Ζ. Ἀποδεῖξτε ὅτι

$$AE + BZ + \Gamma\Delta < \frac{3}{2}(AB + B\Gamma + \Gamma A).$$

32. Δίνεται ἕνα τετράπλευρο ΑΒΓΔ πού οἱ διαγώνιοί του τέμνονται στό Ο. Νά ἀποδείξετε ὅτι, ἄν Ρ εἶναι ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο, τό ἄθροισμα ΡΑ + ΡΒ + ΡΓ + ΡΔ γίνεται ἐλάχιστον, ὅταν τό Ρ συμπίπτει μέ τό Ο.

33. Θεωροῦμε ἕνα πολύγωνο μέ ν πλευρές καί ὀνομάζουμε σ τό ἄθροισμα τῶν διαγωνίων του καί π_ν τήν περίμετρό του. Ἀποδεῖξτε ὅτι:

α) ἡ κάθε διαγώνιός του εἶναι μικρότερη ἀπό τήν «*ἡμιπερίμετρο*» $\pi_\nu/2$

β) ἰσχύει ἡ ἀνισότητα $\sigma < \frac{\nu(\nu-3)}{4}\pi_\nu$.

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 2

1. Δεχόμαστε ἀξιωματικά ὅτι στό σύνολο $\mathfrak{E}$ τῶν εὐθύγραμμων τμημάτων ὑπάρχει μία σχέση ἰσοδυναμίας, τήν ὁποία ὀνομάζουμε «*ἰσότητα*» καί ὅτι:

— Σέ κάθε ἡμιευθεία ΓΧ ὑπάρχει ἕνα καί μόνο ἕνα σημεῖο Θ τέτοιο ὥστε τό τμῆμα ΓΘ νά εἶναι ἴσο μέ δοσμένο τμῆμα α.

Ἄν δοθοῦν δύο τμήματα α καί β καί πάρουμε σέ μία ἡμιευθεία ΓΧ τά τμήματα ΓΘ = α καί ΓΔ = β, ἔχουμε μία ἀπό τίς περιπτώσεις:

— Τό Θ καί τό Δ πέφτουν στό ἴδιο σημεῖο τῆς ἡμιευθείας ΓΧ, ὁπότε ἔχουμε α = β.

— Τό Θ πέφτει μεταξύ τῶν Γ καί Δ, ὁπότε ἔχουμε α < β.

— Τό Δ πέφτει μεταξύ τῶν Γ καί Θ, ὁπότε ἔχουμε α > β.

Στό σύνολο $\mathfrak{E}$ ὁρίζουμε ἀκόμη «*πρόσθεση*» καί «*ἀφαίρεση*». Ἔτσι, ἄν δοθοῦν δύο τμήματα α καί β μέ α > β, ὀνομάζουμε:

— **ἄθροισμα α + β**, τό τμῆμα ΛΡ πού βρίσκουμε, ἄν πάρουμε σέ μία εὐθεία δύο «διαδοχικά» τμήματα ΛΜ = α καί ΜΡ = β,

— **διαφορά α–β** ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα γ τέτοιο ὥστε β + γ = α.

Γιά τήν πρόσθεση καί τήν ἀφαίρεση τῶν εὐθύγραμμων τμημάτων ἰσχύουν ὅλες οἱ ἰδιότητες πού ἰσχύουν στήν πρόσθεση καί τήν ἀφαίρεση τῶν θετικῶν ἀριθμῶν.

Ἡ πρόσθεση ἐπεκτείνεται καί σέ περισσότερους ἀπό δύο προσθετέους. Ἔτσι σέ μιά πολυγωνική γραμμή ΑΒΓ...ΚΛ ἔχει νόημα εὐθύγραμμου τμήματος τό ἄθροισμα τῶν πλευρῶν της ΑΒ + ΒΓ + ... + ΚΛ. Τό ἄθροισμα αὐτό λέγεται **περίμετρος τῆς πολυγωνικῆς γραμμῆς**. Δεχόμαστε τό ἀξίωμα:

— Ένα εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ εἶναι μικρότερο ἀπό κάθε πολυγωνική γραμμή πού ἔχει ἄκρα Α καί Β

καί ἐφαρμόζοντάς το στίς πλευρές ἑνός τριγώνου ΑΒΓ ἔχουμε τήν «*τριγωνική ἀνισότητα*»:

$$|\beta-\gamma|<\alpha<\beta+\gamma$$

2. Ἄν ἔχουμε ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα α καί τούς φυσικούς ἀριθμούς κ καί λ, σημειώνουμε μέ κα τό εὐθύγραμμο τμῆμα πού εἶναι ἄθροισμα κ τμημάτων ἴσων μέ α καί μέ $\frac{1}{\lambda}$ α τό ἕνα ἀπό τά εὐθύγραμμα τμήματα πού βρίσκουμε, ὅταν χωρίζουμε τό α σέ λ ἴσα μέρη. Τέλος ἡ ἰσότητα

$$\beta=\frac{\kappa}{\lambda}\alpha$$

σημαίνει ὅτι $\beta=\kappa.\frac{1}{\lambda}\alpha$, δηλαδή ὅτι τό β εἶναι ἄθροισμα κ τμημάτων ἴσων μέ $\frac{1}{\lambda}\alpha$. Ὁ ἀριθμός $\frac{\kappa}{\lambda}$ λέγεται **λόγος τοῦ β πρός τό α** καί γράφεται ἀκόμη $\frac{\beta}{\alpha}$. Δηλαδή

$$\beta=\frac{\kappa}{\lambda}\alpha \iff \frac{\beta}{\alpha}=\frac{\kappa}{\lambda}.$$

Ἄν πάρουμε στό σύνολο $\mathfrak{E}$ ἕνα ὁρισμένο τμῆμα μ, τό ὁποῖο θά ὀνομάζουμε «μονάδα», καί γιά κάθε τμῆμα $\alpha\in\mathfrak{E}$ σχηματίζουμε τό λόγο α/μ, ὁ ἀριθμός αὐτός λέγεται **μέτρο τοῦ α** καί σημειώνεται (α). Εἶναι λοιπόν (α) = α/μ.

Γιά τή μέτρηση τῶν εὐθύγραμμων τμημάτων ἔχουμε:

$$\begin{aligned}
\alpha/\beta &= (\alpha)/(\beta)\\
\alpha=\beta &\iff (\alpha)=(\beta)\\
\alpha<\beta &\iff (\alpha)<(\beta)\\
(\alpha+\beta) &= (\alpha)+(\beta)
\end{aligned}$$

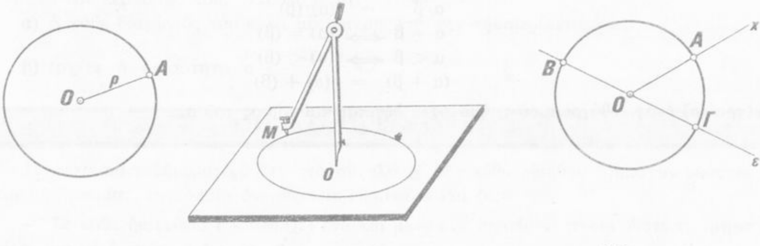
Τό μέτρο (α) ἑνός εὐθύγραμμου τμήματος α λέγεται καί μῆκος τοῦ α.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΣΤΟΝ ΚΥΚΛΟ

Ὁ κύκλος.

24. Ὁρισμός: **Ὀνομάζουμε κύκλο κέντρου Ο καί ἀκτίνας ρ τό σύνολο τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου πού οἱ ἀποστάσεις τους ἀπό ἕνα ὁρισμένο σημεῖο Ο τοῦ ἐπιπέδου εἶναι ἴσες μέ δοσμένο εὐθύγραμμο τμῆμα ρ.** Τό σημειοσύνολο αὐτό θά σημειώνεται **κυκλ(Ο,ρ)** ἤ ἁπλῶς **(Ο,ρ)**.



(I) (II) (III)

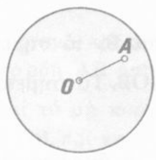
Ἀπό τόν ὁρισμό μας εἶναι φανερό ὅτι ἕνα σημεῖο Α ἀνήκει στόν κυκλ(Ο,ρ) ἄν καί μόνο ἄν ΟΑ = ρ. Ὅλα τά σημεῖα πού ἀνήκουν στόν ἴδιο κύκλο θά λέγονται «ὁμοκυκλικά». Γιά νά σχεδιάσουμε τόν κυκλ(Ο,ρ), χρησιμοποιοῦμε ἕνα διαβήτη μέ ἄνοιγμα ρ, ὅπως δείχνει τό παραπάνω σχῆμα ΙΙ.

Τά εὐθύγραμμα τμήματα, πού συνδέουν τά σημεῖα τοῦ κυκλ(Ο,ρ) μέ τό κέντρο του Ο, λέγονται **ἀκτίνες τοῦ κύκλου.** Ἐπειδή σέ κάθε ἡμιευθεία ΟΧ ὑπάρχει μόνο ἕνα σημεῖο Α τέτοιο ὥστε ΟΑ = ρ, συμπεραίνουμε ὅτι ἡ κάθε ἡμιευθεία μέ ἀρχή τό κέντρο Ο ἔχει μέ τόν κυκλ(Ο,ρ) ἕνα μόνο κοινό σημεῖο (βλ. σχ. ΙΙΙ). Τότε ὅμως κάθε εὐθεία ε πού διέρχεται ἀπό τό κέντρο Ο ἔχει μέ τόν κυκλ(Ο,ρ) δύο κοινά σημεῖα (ἀφοῦ ἡ ε εἶναι ἕνωση δύο ἡμιευθειῶν). Ἄν ὀνομάσουμε Β καί Γ τά δύο αὐτά σημεῖα, τό εὐθύγραμμο τμῆμα ΒΓ λέγεται **διάμετρος τοῦ κύκλου** καί εἶναι ἴσο μέ 2ρ.

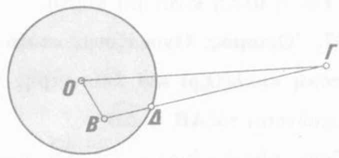
Δύο κύκλοι, πού ἔχουν ἴσες ἀκτίνες, λέγονται *ἴσοι κύκλοι*. Εἶναι φανερό ὅτι δύο ἴσοι κύκλοι μέ τό ἴδιο κέντρο συμπίπτουν.

Ὁ κυκλικός δίσκος.

25. **Ὁρισμός:** Ὀνομάζουμε **κυκλικό δίσκο κέντρου O καί ἀκτίνας ρ** τό σύνολο τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου, πού οἱ ἀποστάσεις τους ἀπό ἕνα ὁρισμένο σημεῖο O τοῦ ἐπιπέδου εἶναι μικρότερες ἀπό ρ ἤ ἴσες μέ ρ. Τό σημειοσύνολο αὐτό θά σημειώνεται **κδισ(O,ρ)**.



(I)



(II)

Ἀπό τόν ὁρισμό μας εἶναι φανερό ὅτι ἕνα σημεῖο A ἀνήκει στόν κδισ(O,ρ), ἄν καί μόνο ἄν $OA \leqq \rho$. Ἔτσι ὁ κυκλ(O,ρ) εἶναι γνήσιο ὑποσύνολο τοῦ κδισ(O,ρ) καί μάλιστα θεωρεῖται τό *«σύνορο»* του, ἀφοῦ ὁ κυκλικός δίσκος «καταλήγει» στόν κύκλο. Οἱ ἀκτίνες καί οἱ διάμετροι τοῦ κυκλ(O,ρ) λέγονται τώρα «ἀκτίνες» καί «διάμετροι» τοῦ κδισ(O,ρ).

Κάθε σημεῖο B τοῦ ἐπιπέδου μας μέ $OB < \rho$ λέγεται *ἐσωτερικό σημεῖο* τοῦ κδισ(O,ρ), ἐνῶ κάθε σημεῖο Γ μέ $O\Gamma > \rho$ λέγεται *ἐξωτερικό σημεῖο* του. Τό σύνολο τῶν ἐσωτερικῶν σημείων ἀποτελεῖ τό *ἐσωτερικό τοῦ κδισ(O,ρ)*. Δεχόμαστε τό ἀξίωμα:

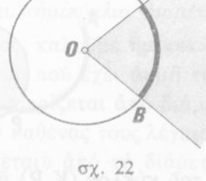
> **XIX. Κάθε εὐθύγραμμο τμῆμα BΓ πού συνδέει ἕνα ἐσωτερικό σημεῖο B καί ἕνα ἐξωτερικό σημεῖο Γ τοῦ κδισ(O,ρ), ἔχει ἕνα καί μόνο ἕνα κοινό σημεῖο μέ τόν κυκλ(O,ρ).**

Ἄν ὀνομάσουμε Δ τό κοινό αὐτό σημεῖο (βλ. σχ. II) λέμε ὅτι τό τμῆμα BΓ «τέμνει» τόν κυκλ(O,ρ) στό σημεῖο Δ.

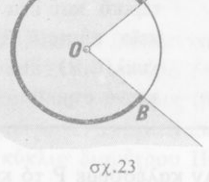
Δύο κυκλικοί δίσκοι, πού ἔχουν ἴσες ἀκτίνες, λέγονται *«ἴσοι»*. Εἶναι φανερό ὅτι οἱ ἴσοι κυκλικοί δίσκοι «περικλείονται» ἀπό ἴσους κύκλους.

Ἐπίκεντρες γωνίες καί τόξα.

26. Ἄν A καί B εἶναι δύο διαφορετικά σημεῖα ἑνός κυκλ(O,ρ), ἡ γωνία



σχ. 22



σχ.23

$\widehat{AOB}$ λέγεται **ἐπίκεντρη γωνία** τοῦ κύκλου (ἤ ἐπίκεντρη γωνία τοῦ ἀντίστοιχου κυκλικοῦ δίσκου).

Ἐπειδή, ὅπως ξέρουμε, ὑπάρχουν δύο γωνίες μέ κορυφή O καί πλευρές OA καί OB, θά ὑπάρχουν καί δύο ἐπίκεντρες γωνίες $\widehat{AOB}$. Ἀπ' αὐτές ἡ μία εἶναι κυρτή καί ἡ ἄλλη εἶναι μή κυρτή.

27. Ὁρισμός: Ὀνομάζουμε «τόξο μέ ἄκρα A καί B» τό σημειοσύνολο πού εἶναι τομή κυκλ(O,ρ) καί ἐπίκεντρης γωνίας του $\widehat{AOB}$. Τό σημειοσύνολο αὐτό θά σημειώνεται **τόξAB** ἤ $\overset{\frown}{AB}$.

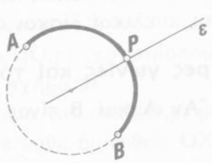
Κάθε σημεῖο ἑνός τόξου $\overset{\frown}{AB}$ διαφορετικό ἀπό τά ἄκρα του λέγεται *ἐσωτερικό σημεῖο* τοῦ $\overset{\frown}{AB}$. Τό σύνολο τῶν ἐσωτερικῶν σημείων του ἀποτελεῖ *τό ἐσωτερικό* τοῦ τόξου.

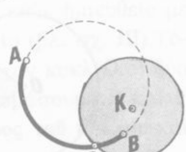
Ἀπό τόν ὁρισμό μας εἶναι φανερό ὅτι, ἄν δοθεῖ ἕνας κυκλ(O,ρ), σέ κάθε ἐπίκεντρη γωνία του $\widehat{AOB}$ ἀντιστοιχεῖ ἕνα τόξο του $\overset{\frown}{AB}$ καί ἀντιστρόφως σέ κάθε τόξο του $\overset{\frown}{AB}$ ἀντιστοιχεῖ μιά ἐπίκεντρη γωνία του $\widehat{AOB}$. Γιά τήν ἐπίκεντρη αὐτή γωνία $\widehat{AOB}$ λέμε ὅτι *«βαίνει στό τόξο AB»*. Ἐπειδή ὑπάρχουν δύο ἐπίκεντρες γωνίες $\widehat{AOB}$, ἡ κυρτή καί ἡ μή κυρτή, θά ὑπάρχουν καί δύο τόξα $\overset{\frown}{AB}$. Ἐκεῖνο πού ἀντιστοιχεῖ στήν κυρτή ἐπίκεντρη γωνία θά λέγεται **κυρτογώνιο τόξο $\overset{\frown}{AB}$** καί ἐκεῖνο πού ἀντιστοιχεῖ στὴ μὴ κυρτή ἐπίκεντρη γωνία θά λέγεται **μή κυρτογώνιο τόξο $\overset{\frown}{AB}$**. Γιά νά ξεχωρίζουμε τά δύο αὐτά τόξα, γράφουμε συνήθως μεταξύ τῶν ἄκρων τους καί ἕνα ἐσωτερικό τους σημεῖο. Ἔτσι π.χ., τό μή κυρτογώνιο τόξο στό σχ. 23 γράφεται $\overset{\frown}{AEB}$.

Συνηθίζουμε πάλι νά λέμε ὅτι ἕνα τόξο $\overset{\frown}{AB}$ «συνδέει» ἤ «ἑνώνει» τά δύο σημεῖα (ἄκρα του) A καί B. Δεχόμαστε τά ἀξιώματα:

XX. Κάθε τόξο, πού συνδέει δύο σημεῖα τά ὁποῖα βρίσκονται ἑκατέρωθεν μιᾶς εὐθείας ε, ἔχει μέ τήν ε ἕνα καί μόνο ἕνα κοινό σημεῖο.

XXI. Κάθε τόξο, πού συνδέει ἕνα ἐσωτερικό καί ἕνα ἐξωτερικό σημεῖο κδικσ(K,R), ἔχει μέ τόν κυκλ(K,R) ἕνα καί μόνο ἕνα κοινό σημεῖο.



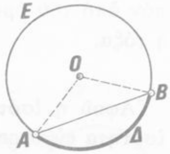


Ἄν καλέσουμε P τό κοινό σημεῖο τοῦ $\overset{\frown}{AB}$ καί τοῦ κύκλου (K,R) ἤ τῆς εὐθείας ε, λέμε ὅτι τό τόξο $\overset{\frown}{AB}$ *«τέμνει»* τόν κυκλ(K,R) ἤ τήν εὐθεία ε στό σημεῖο P.

Χορδές τόξων. Τό ἡμικύκλιο.

28. Ὁρισμός: Τό εὐθύγραμμο τμῆμα, πού ἑνώνει τά ἄκρα ἑνός τόξου, λέγεται «χορδή» τοῦ τόξου.

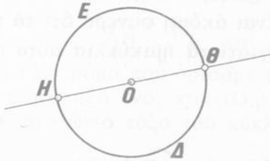
Ἀπό τόν ὁρισμό προκύπτει ὅτι σέ κάθε τόξο $\overset{\frown}{AB}$ ἀντιστοιχεῖ μιά χορδή, ἐνῶ σέ κάθε χορδή AB ἀντιστοιχοῦν δύο τόξα, τό κυρτογώνιο $\overset{\frown}{A\Delta B}$ καί τό μή κυρτογώνιο $\overset{\frown}{AEB}$. Φέρνοντας τίς ἀκτίνες OA καί OB, πού καταλήγουν στά ἄκρα τοῦ τόξου $\overset{\frown}{AB}$, ἔχουμε



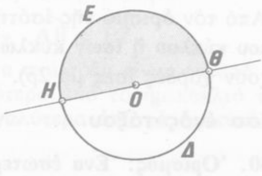
$$AB \leqq OA + OB \Rightarrow AB \leqq \rho + \rho \Rightarrow AB \leqq 2\rho,$$

ὅπου ἡ ἰσότητα ἰσχύει μόνο ὅταν ἡ χορδή AB διέρχεται ἀπό τό κέντρο O, δηλαδή ὅταν εἶναι διάμετρος. Συμπεραίνουμε λοιπόν ὅτι **ἡ χορδή ὁποιουδήποτε τόξου $\overset{\frown}{AB}$ ἑνός κυκλ(O,ρ) εἶναι μικρότερη ἀπό τή διάμετρο τοῦ κύκλου ἤ τό πολύ ἴση μέ αὐτή.**

Κάθε τόξο κύκλου, πού ἔχει χορδή ἴση μέ τή διάμετρό του, λέγεται **ἡμικύκλιο.** Ἄν θεωρήσουμε τή διάμετρο HΘ ἑνός κυκλ(O,ρ), οἱ ἀκτίνες OH καί



σχ. 24



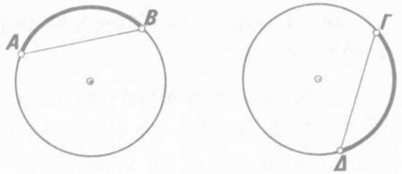
σχ. 25

OΘ εἶναι πλευρές πεπλατυσμένης γωνίας. Ἔτσι τό ἡμικύκλιο εἶναι τομή κύκλου καί πεπλατυσμένης ἐπίκεντρης γωνίας του, δηλαδή τομή κύκλου καί ἡμιεπιπέδου μέ ἀκμή πού διέρχεται ἀπό τό κέντρο του. Ἐπειδή ὅμως ὑπάρχουν δύο ἡμιεπίπεδα, πού ἔχουν ἀκμή τό φορέα μιᾶς διαμέτρου, ὁ κυκλ(O,ρ) θά χωρίζεται ἀπό κάθε διάμετρό του σέ δύο ἡμικύκλια. Ἔτσι π.χ. στό παραπάνω σχῆμα 24 ἡ διάμετρος HΘ χωρίζει τόν κύκλο στά δύο ἡμικύκλια $\overset{\frown}{H\Delta\Theta}$ καί $\overset{\frown}{HE\Theta}$. Τό καθένα ἀπ' αὐτά λέγεται *«ἡμικύκλιο διαμέτρου HΘ»*.

Τέλος, καλοῦμε **ἡμικυκλικό δίσκο** τήν τομή ἑνός κυκλικοῦ δίσκου καί ἑνός ἡμιεπιπέδου πού ἔχει ἀκμή τό φορέα μιᾶς διαμέτρου του. Εἶναι φανερό ὅτι ἕνας κδισ(O,ρ) χωρίζεται ἀπό διάμετρό του HΘ σέ δύο ἡμικυκλικούς δίσκους (βλ. σχ. 25), πού ὁ καθένας τους λέγεται *«ἡμικυκλικός δίσκος διαμέτρου HΘ»*, γιατί ἀκριβῶς «περικλείεται» ἀπό τή διάμετρο HΘ καί ἀπό ἕνα ἡμικύκλιο διαμέτρου HΘ.

Ἰσότητα τόξων.

29. Ὁρισμός: Δύο τόξα τοῦ ἴδιου κύκλου (ἤ ἴσων κύκλων) θά λέγονται ἴσα, ἄν καί μόνο ἄν, εἶναι καί τά δύο κυρτογώνια ἤ καί τά δύο μή κυρτογώνια καί ἔχουν ἴσες χορδές. Γιά νά δηλώσουμε ὅτι τά τόξα $\overset{\frown}{AB}$ καί $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ εἶναι ἴσα, γράφουμε $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{\Gamma\Delta}$. Ἔχουμε λοιπόν ἀπό τόν ὁρισμό μας, γιά ὁμοειδή τόξα,



$$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{\Gamma\Delta} \iff AB = \Gamma\Delta.$$

Ἀφοῦ ἡ ἰσότητα ὁμοειδῶν τόξων ἀνάγεται σέ ἰσότητα χορδῶν (δηλαδή σέ ἰσότητα εὐθύγραμμων τμημάτων), θά ἰσχύουν γι'αὐτήν ἰδιότητες ἀνάλογες μέ τίς ἰδιότητες τῆς ἰσότητας τῶν εὐθύγραμμων τμημάτων. Ἔτσι λοιπόν, ἄν καλέσουμε T τό σύνολο τῶν ὁμοειδῶν τόξων τοῦ ἴδιου κύκλου (ἤ ἴσων κύκλων) καί σημειώσουμε γιά λόγους συντομίας μέ $\overset{\frown}{\alpha}, \overset{\frown}{\beta}, \overset{\frown}{\gamma}, \ldots$ τά στοιχεῖα του, ἔχουμε τίς ἰδιότητες

$\overset{\frown}{\alpha} = \overset{\frown}{\alpha}, \ \forall \ \overset{\frown}{\alpha} \in T$ (ἀνακλαστική)

$\overset{\frown}{\alpha} = \overset{\frown}{\beta} \Rightarrow \overset{\frown}{\beta} = \overset{\frown}{\alpha}$ (συμμετρική)

$\overset{\frown}{\alpha} = \overset{\frown}{\beta}$ καί $\overset{\frown}{\beta} = \overset{\frown}{\gamma} \Rightarrow \overset{\frown}{\alpha} = \overset{\frown}{\gamma}$ (μεταβατική).

Ἀπό τόν ὁρισμό τῆς ἰσότητας τόξων εἶναι ἀκόμη φανερό ὅτι **τά ἡμικύκλια τοῦ ἴδιου κύκλου ἤ ἴσων κύκλων εἶναι ἴσα** (γιατί τά ἡμικύκλια αὐτά εἶναι τόξα πού ἔχουν χορδές ἴσες μέ 2ρ).

Τό μέσο ἑνός τόξου.

30. Ὁρισμός: Ἕνα ἐσωτερικό σημεῖο M τόξου $\overset{\frown}{AB}$ θά λέγεται «μέσο» αὐτοῦ, ἄν καί μόνο ἄν τά τόξα $\overset{\frown}{AM}$ καί $\overset{\frown}{MB}$ εἶναι ἴσα, δηλαδή ἄν καί μόνο ἄν εἶναι

$$\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{MB}$$

Δεχόμαστε τώρα τό ἀξίωμα:

XXII. Κάθε τόξο ἔχει ἕνα καί μόνο ἕνα μέσο.

Θά δοῦμε ἀργότερα πῶς μποροῦμε νά βροῦμε τό μέσο ἑνός τόξου μέ τόν κανόνα καί τό διαβήτη.

Ἄνισα τόξα.

31. Δύο τόξα τοῦ ἴδιου κύκλου (ἤ ἴσων κύκλων) πού δέν εἶναι ἴσα λέγονται «ἄνισα». Γιά τά ἄνισα τόξα ὁρίζουμε ὅτι:

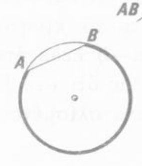
— Κάθε μή κυρτογώνιο τόξο ἑνός κύκλου εἶναι «μεγαλύτερο» ἀπό κάθε κυρτογώνιο τόξο του.

— **Μεταξύ δύο κυρτογώνιων τόξων τοῦ ἴδιου κύκλου «μεγαλύτερο» εἶναι ἐκεῖνο πού ἔχει μεγαλύτερη χορδή.**

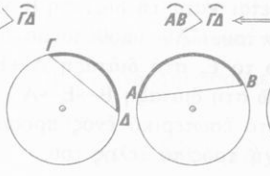
— **Μεταξύ δύο μή κυρτογώνιων τόξων τοῦ ἴδιου κύκλου «μεγαλύτερο» εἶναι ἐκεῖνο πού ἔχει μικρότερη χορδή.**

Γιά νά δηλώσουμε ὅτι ἕνα τόξο $\widehat{AB}$ εἶναι μεγαλύτερο ἀπό ἕνα τόξο $\widehat{\Gamma\Delta}$, γράφουμε $\widehat{AB} > \widehat{\Gamma\Delta}$ ἤ ἰσοδύναμα $\widehat{\Gamma\Delta} < \widehat{AB}$.

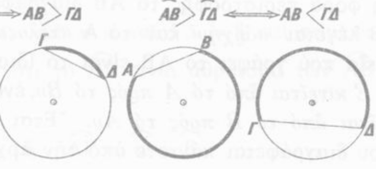
Στά παρακάτω σχήματα ἔχουμε τίς ἀνισοτικές σχέσεις τῶν τόξων στίς τρεῖς περιπτώσεις πού ἀναφέραμε.



σχ. 26



σχ. 27



σχ. 28

Ἀφοῦ ἡ ἀνισότητα ὁμοειδῶν τόξων ἑνός κύκλου (ἤ ἴσων κύκλων) ἀνάγεται σέ ἀνισότητα χορδῶν (δηλαδή σέ ἀνισότητα εὐθύγ. τμημάτων), διακρίνουμε εὔκολα ὅτι σέ κάθε περίπτωση θά ἰσχύει ἡ μεταβατική ἰδιότητα

$$\widehat{AB} < \widehat{\Gamma\Delta} \quad \text{καί} \quad \widehat{\Gamma\Delta} < \widehat{EZ} \Rightarrow \widehat{AB} < \widehat{EZ}.$$

Ἀπό τόν τρόπο πού ὁρίσαμε τήν ἀνισότητα στά τόξα εἶναι φανερό ὅτι κάθε κυρτογώνιο τόξο ἑνός κυκλ(Ο,ρ) εἶναι μικρότερο ἀπό τό ἡμικύκλιό του καί κάθε μή κυρτογώνιο τόξο τοῦ κύκλου εἶναι μεγαλύτερο ἀπό τό ἡμικύκλιό του.

Προσανατολισμός τόξων.

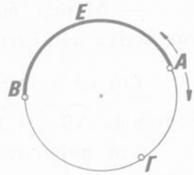
32. Ἄς θεωρήσουμε ἕνα κυκλ(Ο,ρ) καί ἄς ὑποθέσουμε ὅτι ἕνα σημεῖο του Α κινεῖται πάνω σ' αὐτόν. Γιά τήν κίνηση τοῦ Α δεχόμαστε τό ἀξίωμα:

XXIII. Ἕνα σημεῖο Α τοῦ κυκλ(Ο,ρ) μπορεῖ νά κινηθεῖ πάνω σ' αὐτόν κατά δύο ἀντίθετες φορές καί ὅταν κινεῖται διαρκῶς μέ μιά ὁποιαδήποτε φορά, διέρχεται ἀπό ὅλα τά σημεῖα τοῦ κύκλου καί ἐπιστρέφει στήν ἀρχική του θέση.

Ἡ κίνηση τοῦ Α πάνω στόν κύκλο μέ μιά ὁρισμένη φορά λέγεται *«περιστροφή τοῦ Α»*. Ἔχουμε λοιπόν δύο φορές περιστροφῆς καί ἡ μία φορά περιστροφῆς ὀνομάζεται *«θετική φορά»*[1], ἐνῶ ἡ ἀντίθετή της ὀνομάζεται *«ἀρνητική*

1. Σχεδόν πάντοτε παίρνουμε γιά «θετική» φορά περιστροφῆς τήν ἀντίθετη πρός τήν κίνηση τῶν δεικτῶν ἑνός ρολογιοῦ. Τότε τή θετική φορά τή λέμε καί «τριγωνομετρική φορά».

φορά». Ἂν πάρουμε τρία διαφορετικά σημεῖα Α,Β,Γ τοῦ κύκλου, τά σημεῖα αὐτά κατά τή μία φορά περιστροφῆς διαγράφονται κατά τή διάταξη Α→Β→Γ ἤ Β→Γ→Α ἤ Γ→Α→Β, ἐνῶ κατά τήν ἀντίθετη φορά περιστροφῆς διαγράφονται κατά τή διάταξη Α→Γ→Β ἤ Γ→Β→Α ἤ Β→Α→Γ.

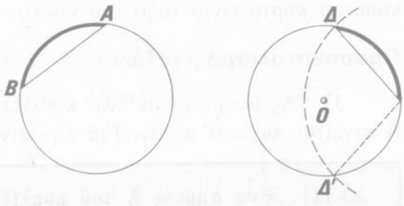


Ἄς θεωρήσουμε τώρα ἕνα τόξο $\overset{\frown}{AB}$ τοῦ κυκλ(Ο, ρ) καί ἄς πάρουμε ἕνα τυχόν ἐσωτερικό σημεῖο του Ε. Στή μία φορά περιστροφῆς τό $\overset{\frown}{AB}$ διαγράφεται κατά τή διάταξη Α→Ε→Β καί τότε τό Α λέγεται *«ἀρχή»* καί τό Β *«τέλος»* του, ἐνῶ στήν ἀντίθετη φορά περιστροφῆς τό $\overset{\frown}{AB}$ διαγράφεται κατά τή διάταξη Β→Ε→Α καί τότε τό Β λέγεται *«ἀρχή»* καί τό Α *«τέλος»* του. Ἄν ὑποθέσουμε ὅτι τό κινητό σημεῖο πού γράφει τό ΑΒ εἶναι τό ἴδιο τό Ε, στή διάταξη Α→Ε→Β λέμε ὅτι *«τό Ε κινεῖται ἀπό τό Α πρός τό Β»*, ἐνῶ στή διάταξη Β→Ε→Α λέμε ὅτι *«τό Ε κινεῖται ἀπό τό Β πρός τό Α»*. Ἔτσι τό ἐσωτερικό ἑνός προσανατολισμένου τόξου διαγράφεται πάντοτε ἀπό τήν ἀρχή πρός τό τέλος του.

Δεχόμαστε τώρα τό ἀξίωμα:

> **XXIV. Σέ κάθε κυκλ(Ο,ρ) ὑπάρχει ἕνα καί μόνο ἕνα τόξο $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ ὁρισμένης φορᾶς πού ἔχει ἀρχή δοσμένο σημεῖο Γ καί εἶναι ἴσο μέ τόξο $\overset{\frown}{AB}$ τοῦ ἴδιου (ἤ ἴσου) κύκλου.**

Γιά νά βροῦμε τό ἄλλο ἄκρο Δ τοῦ τόξου $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$, γράφουμε μέ τό διαβήτη μας κύκλο πού ἔχει κέντρο τό σημεῖο Γ καί ἀκτίνα ἴση μέ τή χορδή ΑΒ.



Ἄν ὀνομάσουμε Δ καί Δ΄ τά σημεῖα στά ὁποῖα ὁ κύκλος αὐτός τέμνει τόν κυκλ(Ο, ρ), τά τόξα $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ καί $\overset{\frown}{\Gamma\Delta'}$ εἶναι ἴσα μέ τό $\overset{\frown}{AB}$ καί ἔχουν ἀντίθετες φορές. Ἔτσι τό ἕνα ἀπ' αὐτά εἶναι τό ζητούμενο, γιατί ἔχει καί τή φορά πού θέλουμε.

Δύο τόξα τοῦ ἴδιου κύκλου, πού διαγράφονται κατά τήν ἴδια φορά καί τό τέλος τοῦ ἑνός συμπίπτει μέ τήν ἀρχή τοῦ ἄλλου, λέγονται **«διαδοχικά τόξα»**.

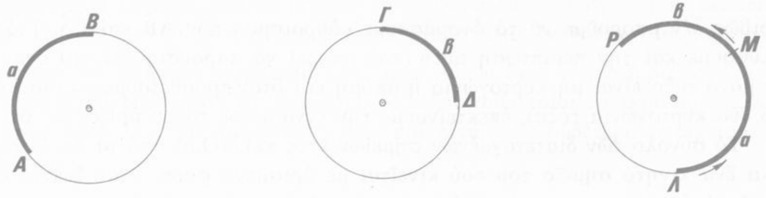
ΑΣΚΗΣΕΙΣ 36-40

Πρόσθεση τόξων.

33. Ἄν δοθοῦν δύο κυρτογώνια τόξα[1] $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{\alpha}$ καί $\overset{\frown}{\Gamma\Delta} = \overset{\frown}{\beta}$ τοῦ ἴδιου κύκλου

1. Τά τόξα θεωροῦνται μή προσανατολισμένα.

(ἢ ἴσων κύκλων), μποροῦμε πάντοτε νά κατασκευάσουμε ἕνα ἄλλο τόξο $\overset{\frown}{\Lambda P}$ παίρνοντας (μέ τό διαβήτη μας) πάνω σέ κύκλο ἴσης ἀκτίνας τά διαδοχικά τόξα $\overset{\frown}{\Lambda M} =$



$= \overset{\frown}{\alpha}$ καί $\overset{\frown}{MP} = \overset{\frown}{\beta}$. Τό τόξο $\overset{\frown}{\Lambda P}$ (ἢ ἀκριβέστερα τό $\overset{\frown}{\Lambda MP}$), πού κατασκευάζεται μέ τόν τρόπο αὐτό, λέγεται **ἄθροισμα τῶν $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{\alpha}$ καί $\overset{\frown}{\Gamma\Delta} = \overset{\frown}{\beta}$** καί σημειώνεται $\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ ἢ $\overset{\frown}{\alpha} + \overset{\frown}{\beta}$. Γιά νά δηλώσουμε ὅτι τό $\overset{\frown}{\Lambda P}$ εἶναι ἄθροισμα τῶν $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{\alpha}$ καί $\overset{\frown}{\Gamma\Delta} = \overset{\frown}{\beta}$, γράφουμε

$$\overset{\frown}{\Lambda P} = \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{\Gamma\Delta} \quad \text{ἢ} \quad \overset{\frown}{\Lambda P} = \overset{\frown}{\alpha} + \overset{\frown}{\beta}.$$

Ἡ πράξη πού κάνουμε γιά νά βροῦμε τό ἄθροισμα δύο τόξων, λέγεται **«πρόσθεση»** [1]. Ἡ πρόσθεση ἐπεκτείνεται καί σέ περισσότερους ἀπό δύο προσθετέους, ὅπως ἀκριβῶς καί στά εὐθύγραμμα τμήματα.

Ἀπό τόν ὁρισμό τοῦ ἀθροίσματος διαπιστώνεται ὅτι ἡ πρόσθεση τῶν τόξων εἶναι πράξη ἀντιμεταθετική καί προσεταιριστική, δηλαδή ὅτι [2]

$$\overset{\frown}{\alpha} + \overset{\frown}{\beta} = \overset{\frown}{\beta} + \overset{\frown}{\alpha},$$
$$(\overset{\frown}{\alpha} + \overset{\frown}{\beta}) + \overset{\frown}{\gamma} = \overset{\frown}{\alpha} + (\overset{\frown}{\beta} + \overset{\frown}{\gamma}).$$

Ἐπίσης στήν πρόσθεση τῶν τόξων ἰσχύουν ἰδιότητες ἀνάλογες μέ ἐκεῖνες πού ἰσχύουν στή πρόσθεση εὐθύγραμμων τμημάτων.

Ἐπέκταση τῆς ἔννοιας τοῦ τόξου.

34. Ἂς ἀκολουθήσουμε τήν παραπάνω κατασκευή τοῦ ἀθροίσματος δύο τόξων, ὅταν τά δοσμένα τόξα $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{\alpha}$ καί $\overset{\frown}{\Gamma\Delta} = \overset{\frown}{\beta}$ εἶναι μή κυρτογώνια. Ὑποθέτοντας ὅτι τά ἀντίστοιχα διαδοχικά τόξα $\overset{\frown}{\Lambda M} = \overset{\frown}{\alpha}$ καί $\overset{\frown}{MP} = \overset{\frown}{\beta}$ διαγράφονται κατά τή θετική φορά ἀπό ἕνα κινητό σημεῖο Ε, παρατηροῦμε ὅτι τό Ε θά ξεκινήσει ἀπό τό Α καί κατά τή διαγραφή τοῦ δεύτερου τόξου $\overset{\frown}{MP}$ θά ξαναπεράσει ἀπό τό Α. Βλέπουμε δηλαδή ὅτι τό σύνολο τῶν σημείων πού διαγράφει τό Ε δέν εἶναι ὑποσύνολο τοῦ

1. Δέν ὁρίζεται πρόσθεση τόξων πού ἀνήκουν σέ ἄνισους κύκλους.

2. Ὑποθέτουμε ὅτι στή δεύτερη ἰσότητα τό $\overset{\frown}{\alpha} + \overset{\frown}{\beta}$ εἶναι ἐπίσης κυρτογώνιο. Στήν ἀντίθετη περίπτωση ἰσχύουν αὐτά πού γράφονται στήν § 34.

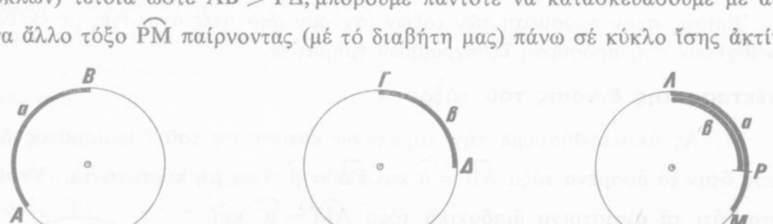
κύκλου μας, γιατί περιέχει σέ μιά ὁρισμένη διάταξη ὅλα τά σημεῖα τοῦ κύκλου καί μερικά ἀπό αὐτά δύο φορές [1]. Ἔτσι τό σύνολο τῶν σημείων πού διαγράφει τό Ε δέν εἶναι «τόξο» μέ τήν ἔννοια πού τό ὁρίσαμε στήν § 27 καί γι' αὐτό ἀκριβῶς δέν μποροῦμε νά τό ὀνομάσουμε «ἄθροισμα» τῶν $\widehat{AB}$ καί $\widehat{\Gamma\Delta}$. Γιά νά καλύψουμε καί τήν περίπτωση αὐτή (πού μπορεῖ νά παρουσιασθεῖ καί ὅταν τό ἕνα μόνο τόξο εἶναι μή κυρτογώνιο ἤ ἀκόμη καί ὅταν προσθέτουμε περισσότερα ἀπό δύο κυρτογώνια τόξα), ἐπεκτείνουμε τήν ἔννοια τοῦ τόξου ὁρίζοντας ὅτι :

Τό σύνολο τῶν διατεταγμένων σημείων ἑνός κυκλ(Ο,ρ), ἀπό τά ὁποῖα διέρχεται ἕνα κινητό σημεῖο του πού κινεῖται μέ ὁρισμένη φορά, ὅταν ξεκινᾶ ἀπό σημεῖο Λ, διαγράφει κ φορές ὁλόκληρο τόν κύκλο καί καταλήγει σέ σημεῖο Ρ, *λέγεται* **τόξο κ τάξεως μέ ἄκρα Λ καί Ρ** καί θά σημειώνεται **τοξ$_\kappa$ ΛΡ.**

Ἀπό τόν ὁρισμό αὐτό καταλαβαίνουμε ὅτι ἕνα τόξο κ τάξεως περιέχει σέ μιά ὁρισμένη διάταξη ὅλα τά σημεῖα τοῦ κύκλου κ φορές καί μερικά ἀπ' αὐτά $\kappa + 1$ φορές. Μποροῦμε μάλιστα νά φαντασθοῦμε ὅτι τά σημεῖα τοῦ κύκλου μας στή δεύτερη, τρίτη ..., ἐμφάνισή τους στή διάταξη πού θεωροῦμε ἀνήκουν σ' ἕνα δεύτερο, τρίτο,... ἴσο κύκλο πού ταυτίζεται μέ τόν ἀρχικό. Τά τόξα ὅπως τά ὁρίσαμε στήν § 27 εἶναι τόξα *«μηδενικῆς»* τάξεως. Ἡ ἰσότητα καί ἀνισότητα στά τόξα κ τάξεως ὁρίζεται χωρίς δυσκολία. Ἔτσι π.χ. δύο ἴσα τόξα εἶναι πάντοτε τῆς ἴδιας τάξεως καί ἔχουν ἴσες χορδές. Ἐπίσης, ἄν $\kappa > \lambda$, κάθε τόξο κ τάξεως θά εἶναι μεγαλύτερο ἀπό κάθε τόξο λ τάξεως, κ.ο.κ.

Ἀφαίρεση τόξων.

35. Ἄν δοθοῦν δύο τόξα $\widehat{AB} = \widehat{\alpha}$ καί $\widehat{\Gamma\Delta} = \widehat{\beta}$ τοῦ ἴδιου κύκλου (ἤ ἴσων κύκλων) τέτοια ὥστε $\widehat{AB} > \widehat{\Gamma\Delta}$, μποροῦμε πάντοτε νά κατασκευάσουμε μέ αὐτά ἕνα ἄλλο τόξο $\widehat{PM}$ παίρνοντας (μέ τό διαβήτη μας) πάνω σέ κύκλο ἴσης ἀκτίνας



δύο τόξα $\widehat{\Lambda M} = \widehat{\alpha}$ καί $\widehat{\Lambda P} = \widehat{\beta}$ πού ἔχουν κοινή ἀρχή Λ καί διαγράφονται κατά τήν ἴδια φορά. Τό τόξο $\widehat{PM}$ πού κατασκευάζεται μέ τόν τρόπο αὐτό λέγεται **διαφορά τῶν $\widehat{AB} = \widehat{\alpha}$ καί $\widehat{\Gamma\Delta} = \widehat{\beta}$** καί σημειώνεται $\widehat{AB} - \widehat{\Gamma\Delta}$ ἤ $\widehat{\alpha} - \widehat{\beta}$. Γιά νά δη-

1. Οἱ διαφορετικές «θέσεις» στή διάταξη αὐτή τῶν σημείων τοῦ κύκλου θεωροῦνται διαφορετικά στοιχεῖα τοῦ συνόλου ἔστω καί ἄν ἐμφανίζεται σ' αὐτές τό ἴδιο σημεῖο. Γιά νά γίνει αὐτό πιό κατανοητό, μποροῦμε νά φαντασθοῦμε ὅτι τά σημεῖα τοῦ κύκλου πού ἐμφανίζονται δύο φορές στό σύνολο πού θεωροῦμε, στή δεύτερη ἐμφάνισή τους ἀνήκουν σ' ἕναν ἄλλο ἴσο κύκλο πού ταυτίζεται μέ τόν ἀρχικό.

λώσουμε ὅτι τό $\overset{\frown}{PM}$ εἶναι ἡ διαφορά τῶν $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{\alpha}$ καί $\overset{\frown}{\Gamma\Delta} = \overset{\frown}{\beta}$, γράφουμε

$$\overset{\frown}{PM} = \overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{\Gamma\Delta} \quad \text{ἤ} \quad \overset{\frown}{PM} = \overset{\frown}{\alpha} - \overset{\frown}{\beta}.$$

Ἡ πράξη πού κάνουμε, γιά νά βροῦμε τή διαφορά δύο τόξων, λέγεται **ἀφαίρεση** αὐτῶν καί ἰσχύουν γι' αὐτή συμπεράσματα ἀνάλογα μέ ἐκεῖνα πού ἰσχύουν στήν ἀφαίρεση εὐθύγραμμων τμημάτων. Ἔτσι π.χ. γιά νά ἔχει νόημα ἡ διαφορά $\overset{\frown}{\alpha} - \overset{\frown}{\beta}$ καί ὅταν $\alpha = \beta$, δεχόμαστε τήν ὕπαρξη ἑνός τόξου τοῦ ὁποίου τά ἄκρα συμπίπτουν. Τό τόξο αὐτό λέγεται *«μηδενικό τόξο»* καί εἶναι τό «οὐδέτερο στοιχεῖο» τῆς προσθέσεως.

Λόγος δύο τόξων.

36. Ἄν διατυπώσουμε ὁρισμούς ἀνάλογους μέ ἐκείνους πού διατυπώσαμε γιά τά εὐθύγραμμα τμήματα στήν § 20, δίνουμε νόημα τόξου καί σέ κάθε γινόμενο τῆς μορφῆς $\frac{\kappa}{\lambda}\overset{\frown}{AB}$, ὅταν τά κ καί λ εἶναι φυσικοί ἀριθμοί καί τό $\overset{\frown}{AB}$ εἶναι δοσμένο τόξο ἑνός κυκλ(Ο,ρ). Ἔτσι κάθε ἰσότητα τῆς μορφῆς

$$\overset{\frown}{\Gamma\Delta} = \frac{\kappa}{\lambda}\overset{\frown}{AB}$$

δηλώνει ὅτι τά $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ καί $\overset{\frown}{AB}$ εἶναι τόξα τοῦ ἴδιου κύκλου (ἤ ἴσων κύκλων) καί ὅτι τό $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ εἶναι ἄθροισμα κ τόξων ἴσων μέ τό τόξο πού βρίσκουμε, ὅταν χωρίσουμε τό $\overset{\frown}{AB}$ σέ λ ἴσα μέρη [1]. Ὁ ἀριθμός $\frac{\kappa}{\lambda}$ λέγεται **λόγος τοῦ τόξου $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ πρός τό τόξο $\overset{\frown}{AB}$** καί γράφεται $\overset{\frown}{\Gamma\Delta} : \overset{\frown}{AB}$ ἤ $\dfrac{\overset{\frown}{\Gamma\Delta}}{\overset{\frown}{AB}}$. Ἔτσι ἡ ἰσότητα $\dfrac{\overset{\frown}{\Gamma\Delta}}{\overset{\frown}{AB}} = \dfrac{\kappa}{\lambda}$ δηλώνει ὅτι ὁ ἀριθμός $\frac{\kappa}{\lambda}$ εἶναι ὁ λόγος τοῦ $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ πρός τό $\overset{\frown}{AB}$ καί ἄρα εἶναι ἰσοδύναμη μέ τήν $\overset{\frown}{\Gamma\Delta} = \frac{\kappa}{\lambda}\overset{\frown}{AB}$, δηλαδή.

$$\overset{\frown}{\Gamma\Delta} = \frac{\kappa}{\lambda}\overset{\frown}{AB} \Longleftrightarrow \frac{\overset{\frown}{\Gamma\Delta}}{\overset{\frown}{AB}} = \frac{\kappa}{\lambda}.$$

Θά θεωροῦμε πρός τό παρόν τόξα τοῦ ἴδιου κύκλου (ἤ ἴσων κύκλων) τέτοια ὥστε δύο ὁποιαδήποτε $\overset{\frown}{\alpha}$ καί $\overset{\frown}{\beta}$ ἀπ' αὐτά νά συνδέονται μέ σχέση τῆς μορφῆς $\overset{\frown}{\alpha} = \frac{\kappa}{\lambda}\overset{\frown}{\beta}$, ὅπου τά κ καί λ εἶναι φυσικοί ἀριθμοί.

Μέτρηση τόξων.

37. Ἄς πάρουμε στό σύνολο τῶν τόξων (τοῦ ἴδιου κύκλου) πού θεωροῦμε ἕνα ὁρισμένο τόξο $\overset{\frown}{H\Theta}$ πού θά τό λέμε *«μοναδιαῖο τόξο»* ἤ *«μονάδα»* καί ἄς σχη-

1. Ἀντίθετα μέ ὅ,τι συμβαίνει στά εὐθύγραμμα τμήματα, ἡ διαίρεση ἑνός τόξου σέ λ ἴσα μέρη μέ τόν κανόνα καί τό διαβήτη δέν εἶναι πάντοτε δυνατή.

ματίσουμε γιά κάθε τόξο $\widehat{AB}$ τοῦ κύκλου τό λόγο $\frac{\widehat{AB}}{\widehat{H\Theta}}$. Ὁ λόγος αὐτός λέγεται τώρα **μέτρο τοῦ $\widehat{AB}$ ὡς πρός μονάδα μετρήσεως τό $\widehat{H\Theta}$** καί θά σημειώνεται ἁπλῶς μέ $(\widehat{AB})$, δηλαδή εἶναι

$$(\widehat{AB}) = \frac{\widehat{AB}}{\widehat{H\Theta}}.$$

Ἐπειδή ἡ μέτρηση τῶν τόξων γίνεται μέ τρόπο ἀνάλογο πρός τή μέτρηση τῶν εὐθύγραμμων τμημάτων, θά ἰσχύουν καί ἐδῶ οἱ ἰδιότητες

$$\frac{\widehat{AB}}{\widehat{\Gamma\Delta}} = \frac{(\widehat{AB})}{(\widehat{\Gamma\Delta})}$$

$$\widehat{AB} = \widehat{\Gamma\Delta} \iff (\widehat{AB}) = (\widehat{\Gamma\Delta})$$

$$\widehat{AB} > \widehat{\Gamma\Delta} \iff (\widehat{AB}) > (\widehat{\Gamma\Delta}).$$

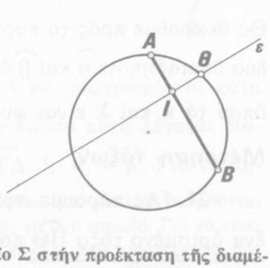
Γιά μονάδα μετρήσεως τῶν τόξων παίρνουμε συνήθως τή **«μοίρα»** (°) πού εἶναι τόξο ἴσο μέ τό $\frac{1}{360}$ τοῦ κύκλου. Ὑποδιαιρέσεις τῆς μοίρας εἶναι τό **«πρῶτο λεπτό»** (′) πού εἶναι τόξο ἴσο μέ τό $\frac{1}{60}$ τῆς μοίρας καί τό **«δεύτερο λεπτό»** (″) πού εἶναι τόξο ἴσο μέ τό $\frac{1}{60}$ τοῦ πρώτου λεπτοῦ. Εἶναι φανερό ὅτι ὁλόκληρος ὁ κύκλος ἔχει μέτρο 360°, ἐνῶ τό ἡμικύκλιο ἔχει μέτρο 180°.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 41-43

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

34. Δίνεται κυκλ(Ο,ρ) καί τόξο του $\widehat{AB}$. Νά δειχθεῖ ὅτι κάθε εὐθεία ε πού τέμνει τή χορδή ΑΒ τέμνει καί τό τόξο $\widehat{AB}$.

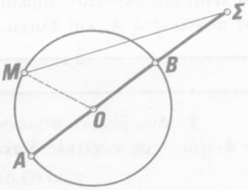
Λύση. Ἄν ἡ ε τέμνει τή χορδή ΑΒ στό Α (ἤ στό Β), ἡ πρόταση εἶναι φανερή, γιατί ἡ ε τέμνει καί τό τόξο $\widehat{AB}$ στό Α (ἤ στό Β).



Ἄν ἡ ε τέμνει τή χορδή ΑΒ σ' ἐσωτερικό σημεῖο της Ι, τότε τά Α καί Β βρίσκονται ἑκατέρωθεν τῆς ε. Ἀφοῦ ὅμως τά ἄκρα τοῦ τόξου $\widehat{AB}$ βρίσκονται ἑκατέρωθεν τῆς ε, τό τόξο $\widehat{AB}$ πού συνδέει τά σημεῖα Α καί Β θά τέμνει τήν ε (σύμφωνα μέ τό ἀξίωμα XX) σ' ἕνα σημεῖο Θ.

35. Δίνεται κυκλ(Ο,ρ), μιά διάμετρός του ΑΒ καί ἕνα σημεῖο Σ στήν προέκταση τῆς διαμέτρου ΑΒ πρός τό Β. Ἄν ἑνώσουμε τό Σ μ' ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο Μ τοῦ κυκλ(Ο,ρ), νά δειχθεῖ ὅτι $\Sigma M \geqslant \Sigma B$ **καί** $\Sigma M \leqslant \Sigma A$

Λύση. Τό Σ είναι ἐξωτερικό σημεῖο τοῦ κδισ(Ο,ρ) ἀφοῦ ΟΣ $>$ ΟΒ, δηλαδή ΟΣ $>$ ρ. Ἂν τό Μ δέ συμπίπτει μέ τό Α ἤ μέ τό Β, ἔχουμε τρίγωνο ΜΟΣ στό ὁποῖο ἰσχύουν οἱ ἀνισότητες



$$ΣΟ - ΟΜ < ΣΜ < ΣΟ + ΟΜ$$

$$\text{ή} \quad ΣΟ - ρ < ΣΜ < ΣΟ + ρ \qquad (\text{I})$$

Ἐπειδή ὅμως εἶναι ΣΟ + ρ = ΣΑ καί ΣΟ–ρ = ΣΒ, οἱ ἀνισότητες (I) γράφονται τελικά

$$ΣΒ < ΣΜ < ΣΑ.$$

Παρατηροῦμε ἀκόμη ὅτι, ὅταν τό Μ συμπίπτει μέ τό Α' ἔχουμε ΣΜ = ΣΑ καί ὅταν τὸ Μ συμπίπτει μέ τό Β, ἔχουμε ΣΜ = ΣΒ (δηλαδή τό ΣΑ εἶναι τό «*μέγιστο*» τοῦ ΣΜ καί τό ΣΒ εἶναι τό «*ἐλάχιστο*» τοῦ ΣΜ).

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ*

36. Σχεδιάστε τέσσερις ἴσους κύκλους πού νά ἔχουν ἀκτίνα 3cm καί νά διέρχονται ἀπό ἕνα δοσμένο σημεῖο Α. Ἂν καλέσουμε O_1, O_2, O_3, O_4 τά κέντρα τους, δεῖξτε ὅτι τά σημεῖα αὐτά βρίσκονται σέ κύκλο μέ κέντρο Α.

37. Νά γράψετε κύκλο πού νά ἔχει ἀκτίνα 4 cm καί νά διέρχεται ἀπό δύο σημεῖα Α καί Β τέτοια ὥστε (ΑΒ) = 3 cm.

38. Ἂν δοθεῖ ἕνα σημεῖο Κ, σχεδιάστε τό σημειοσύνολο

$$Ω = \{Μ : 3\text{cm} \leqslant (ΚΜ) \leqslant 5\text{cm}\}.$$

39. Δίνεται εὐθύγραμμο τμῆμα ΚΛ μέ (ΚΛ) = 6cm. Νά σχεδιαστεῖ τό σημειοσύνολο

$$Ω = \left\{Μ : ΚΜ \leqslant \frac{2}{3}ΚΛ \text{ καί } ΛΜ \leqslant \frac{5}{6}ΚΛ\right\}.$$

40. Δίνεται κυρτογώνιο τόξο $\overset{\frown}{ΑΒ}$ ἑνός κυκλ(Ο,ρ), ἕνα ἐσωτερικό σημεῖο Γ τοῦ τόξου $\overset{\frown}{ΑΒ}$ καί ἕνα σημεῖο Δ τοῦ μή κυρτογώνιου τόξου $\overset{\frown}{ΑΒ}$. Νά δείξετε ὅτι ἡ ἡμιευθεία ΟΓ τέμνει τή χορδή ΑΒ, ἐνῶ ἡ ἡμιευθεία ΟΔ δέν τέμνει τή χορδή.

41. Ἂν $\overset{\frown}{ΑΒ}$ καί $\overset{\frown}{ΓΔ}$ εἶναι κυρτογώνια τόξα τοῦ ἴδιου κύκλου, δεῖξτε ὅτι

$$(\overset{\frown}{ΑΒ} + \overset{\frown}{ΓΔ}) = (\overset{\frown}{ΑΒ}) + (\overset{\frown}{ΓΔ}).$$

42. Νά δειχθεῖ ὅτι γιά κυρτογώνια τόξα ἰσχύουν οἱ προτάσεις

$$\overset{\frown}{α} = \overset{\frown}{β} \iff \overset{\frown}{α} + \overset{\frown}{γ} = \overset{\frown}{β} + \overset{\frown}{γ}$$

$$\overset{\frown}{α} < \overset{\frown}{β} \iff \overset{\frown}{α} + \overset{\frown}{γ} < \overset{\frown}{β} + \overset{\frown}{γ}.$$

43. Θεωροῦμε δύο διαμέτρους ΑΑ΄ καί ΒΒ΄ ἑνός κυκλ(Ο,ρ). Νά δείξετε ὅτι τά τόξα $\overset{\frown}{Α'Β}$ καί $\overset{\frown}{ΑΒ'}$ εἶναι ἴσα.

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ**

44. Δίνεται κυκλ(Κ,ρ) καί ἕνα σημεῖο του Λ. Γράφουμε τόν κυκλ(Λ,ρ) καί ὀνομάζουμε Α ἕνα κοινό σημεῖο τῶν δύο κύκλων καί Ε,Ζ τά σημεῖα στά ὁποῖα οἱ προεκτάσεις τῶν ΑΚ καί ΑΛ τέμνουν τούς κύκλους μέ κέντρα Κ καί Λ ἀντιστοίχως (τά Ε,Ζ εἶναι «δισμετρικά» σημεῖα τοῦ Α στούς δύο κύκλους). Νά δειχθεῖ ὅτι τά εὐθύγραμμα τμήματα ΕΛ καί ΚΖ εἶναι ἴσα.

45. Σ' ἕναν κυκλ(Ο,ρ) ἡ χορδή ΑΒ εἶναι διπλάσια ἀπό τή χορδή ΑΓ. Δεῖξτε ὅτι τό κυρτογώνιο τόξο $\overset{\frown}{ΑΒ}$ εἶναι μεγαλύτερο ἀπό τό διπλάσιο τοῦ κυρτογώνιου τόξου $\overset{\frown}{ΑΓ}$.

46. Σέ διάμετρο ΑΒ ἑνός κυκλ(Ο,ρ) παίρνουμε σημεῖο Ρ ἐσωτερικό τῆς ἀκτίνας ΟΒ. Ἄν Μ εἶναι ἕνα «κινητό» σημεῖο τοῦ κύκλου, νά δείξετε ὅτι τό τμῆμα ΡΜ γίνεται μέγιστο, ὅταν τό Μ πέφτει στό Α, καί ἐλάχιστο ὅταν τό Μ πέφτει στό Β.

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 3

1. Δύο βασικά σημειοσύνολα τοῦ ἐπιπέδου εἶναι **ὁ κύκλος** κέντρου Ο καί ἀκτίνας ρ καί ὁ ἀντίστοιχος **κυκλικός δίσκος**. Αὐτά ὁρίζονται ἀπό τίς

$$\text{κυκλ}(O,\rho) = \{A : OA = \rho\}, \quad \text{κδισ}(O,\rho) = \{A : OA \leqslant \rho\}$$

Μία γωνία, πού ἔχει τήν κορυφή της στό κέντρο ἑνός κύκλου, λέγεται **ἐπίκεντρη γωνία** καί ἡ τομή τοῦ κύκλου καί ἐπίκεντρης γωνίας του λέγεται **τόξο**. Ἕνα τόξο, πού προκύπτει ὡς τομή κύκλου καί κυρτῆς ἐπίκεντρης γωνίας του, λέγεται **κυρτογώνιο τόξο**. Τό εὐθύγραμμο τμῆμα, πού συνδέει τά ἄκρα ἑνός τόξου, λέγεται **χορδή** τοῦ κύκλου καί κάθε χορδή πού διέρχεται ἀπό τό κέντρο τοῦ κύκλου λέγεται **διάμετρος** τοῦ κύκλου. Ἔτσι ἡ διάμετρος εἶναι τό διπλάσιο τῆς ἀκτίνας (δηλαδή ὅλες οἱ διάμετροι εἶναι ἴσες), ἐνῶ ἀποδεικνύεται ὅτι

— **Κάθε χορδή ἑνός κύκλου εἶναι μικρότερη ἤ ἴση ἀπό τή διάμετρό του.**

Δύο κύκλοι (ἤ δύο κυκλικοί δίσκοι), πού ἔχουν ἴσες ἀκτίνες, λέγονται ἴσοι.

2. Δύο κυρτογωνια (ἤ μή κυρτογώνια) τόξα τοῦ ἴδιου κύκλου ἤ ἴσων κύκλων, πού ἔχουν ἴσες χορδές, λέγονται **ἴσα**. Δεχόμαστε τό ἀξίωμα :

— **Σέ κάθε κυκλ(Ο,ρ) ὑπάρχει ἕνα μόνο τόξο $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ ὁρισμένης φορᾶς πού ἔχει ἀρχή ἕνα ὁρισμένο σημεῖο Γ τοῦ κύκλου καί εἶναι ἴσο μέ τόξο $\overset{\frown}{AB}$ τοῦ ἴδιου (ἤ ἴσου) κύκλου.**

Γιά ἄνισα (μή ἴσα) τόξα τοῦ ἴδιου κύκλου ἤ ἴσων κύκλων ὁρίζουμε ὅτι:

— **Κάθε μή κυρτογώνιο τόξο εἶναι μεγαλύτερο ἀπό κάθε κυρτογώνιο τόξο.**

— **Μεταξύ δύο κυρτογώνιων τόξων μεγαλύτερο εἶναι ἐκεῖνο πού ἔχει μεγαλύτερη χορδή.**

— **Μεταξύ δύο μή κυρτογώνιων τόξων μεγαλύτερο εἶναι ἐκεῖνο πού ἔχει μικρότερη χορδή.**

Γιά τήν ἰσότητα καί ἀνισότητα τῶν τόξων ἰσχύουν ὅλες οἱ ἰδιότητες πού ἰσχύουν γιά τήν ἰσότητα καί ἀνισότητα τῶν εὐθύγραμμων τμημάτων.

Τονίζεται ὅτι **δέν ὁρίζεται ἰσότητα ἤ ἀνισότητα σέ τόξα πού δέν ἀνήκουν στόν ἴδιο κύκλο ἤ σέ ἴσους κύκλους.**

3. Στό σύνολο T τῶν τόξων τοῦ ἴδιου κύκλου (ἤ ἴσων κύκλων) ὁρίζουμε **ὅπως ἀκριβῶς καί στά εὐθύγραμμα τμήματα:**

— Τό ἄθροισμα $\overset{\frown}{\alpha} + \overset{\frown}{\beta}$.

— Τή διαφορά $\overset{\frown}{\alpha} - \overset{\frown}{\beta}$.

— Τό γινόμενο $\frac{\kappa}{\lambda}\overset{\frown}{\alpha}$, ὅταν τά κ καί λ εἶναι φυσικοί ἀριθμοί.

Ἄν ἰσχύει μία ἰσότητα τῆς μορφῆς $\overset{\frown}{\beta} = \frac{\kappa}{\lambda}\overset{\frown}{\alpha}$, ὁ ἀριθμός $\frac{\kappa}{\lambda}$ λέγεται **πάλι λόγος τοῦ $\overset{\frown}{\beta}$ πρός τό $\overset{\frown}{\alpha}$** καί σημειώνεται $\frac{\overset{\frown}{\beta}}{\overset{\frown}{\alpha}}$. Παίρνοντας γιά «*μονάδα*» ἕνα ὁρισμένο τόξο $\overset{\frown}{\mu} \in T$, ὁ λόγος $\frac{\overset{\frown}{\alpha}}{\overset{\frown}{\mu}}$ λέγεται **μέτρο τοῦ $\overset{\frown}{\alpha}$** καί σημειώνεται $(\overset{\frown}{\alpha})$, δηλαδή ἔχουμε πάλι $(\overset{\frown}{\alpha}) = \frac{\overset{\frown}{\alpha}}{\overset{\frown}{\mu}}$.

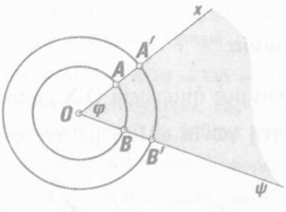
Στή μέτρηση τῶν τόξων ἰσχύουν ὅλες οἱ ἰδιότητες πού ἰσχύουν στή μέτρηση τῶν εὐθύγραμμων τμημάτων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

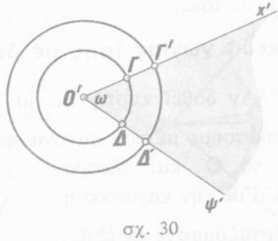
ΣΧΕΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΑΞΕΙΣ ΓΩΝΙΩΝ

Ἰσότητα γωνιῶν.

38. Ἄς θεωρήσουμε δύο γωνίες $\widehat{XOΨ} = \widehat{φ}$ καί $\widehat{X'O'Ψ'} = \widehat{ω}$ καί ἄς γράψουμε δύο κύκλους μέ κέντρα τίς κορυφές τους O καί O′ καί μέ τήν ἴδια ἀκτίνα ρ. Ἄς ὀνομάσουμε ἀκόμη A,B τά σημεῖα, στά ὁποῖα ὁ κυκλ(O,ρ) τέμνει τίς πλευρές



σχ. 29



σχ. 30

τῆς γωνίας $\widehat{XOΨ}$, καί Γ,Δ τά σημεῖα στά ὁποῖα ὁ κυκλ(O,ρ) τέμνει τίς πλευρές τῆς γωνίας X′O′Ψ′. Μέ τή διαδικασία αὐτή κάναμε τίς γωνίες $\widehat{φ}$ καί $\widehat{ω}$ ἐπίκεντρες ἴσων κύκλων πού βαίνουν στά τόξα τους $\overset{\frown}{AB}$ καί $\overset{\frown}{ΓΔ}$. Καταλαβαίνουμε λοιπόν ὅτι μποροῦμε πάντοτε νά θεωροῦμε δύο δοσμένες γωνίες ὡς ἐπίκεντρες γωνίες ἴσων κύκλων.

Ἄν τώρα γράψουμε μέ ἀκτίνα $R \neq ρ$ δύο ἄλλους ἴσους κύκλους (O,R) καί (O′,R) καί ὀνομάσουμε $\overset{\frown}{A'B'}$ καί $\overset{\frown}{Γ'Δ'}$ τά τόξα τους, στά ὁποῖα βαίνουν οἱ γωνίες $\widehat{φ}$ καί $\widehat{ω}$, δεχόμαστε τό ἀξίωμα:

> **XXV. Ἄν τά τόξα $\overset{\frown}{AB}$ καί $\overset{\frown}{ΓΔ}$, στά ὁποῖα βαίνουν γωνίες $\widehat{φ}$ καί $\widehat{ω}$ ὅταν γίνουν ἐπίκεντρες ἴσων κύκλων, εἶναι ἴσα ἤ ἄνισα, τότε καί τά τόξα $\overset{\frown}{A'B'}$ καί $\overset{\frown}{Γ'Δ'}$, στά ὁποῖα βαίνουν οἱ $\widehat{φ}$ καί $\widehat{ω}$, ὅταν γίνουν ἐπίκεντρες δύο ἄλλων ἴσων κύκλων, θά εἶναι ἐπίσης ἴσα ἤ ὁμοιοτρόπως ἄνισα.**

Μέ τό ἀξίωμα αὐτό μποροῦμε νά ὁρίσουμε σχέσεις μεταξύ γωνιῶν μέ βάση τίς σχέσεις πού ἔχουν τά τόξα στά ὁποῖα βαίνουν, ὅταν γίνουν ἐπίκεντρες ἴσων κύκλων. Ὁρίζουμε λοιπόν ὅτι:

Δύο γωνίες $\widehat{\varphi}$ καί $\widehat{\omega}$ οἱ ὁποῖες, ὅταν γίνουν ἐπίκεντρες ἴσων κύκλων, βαίνουν σέ ἴσα τόξα, θά λέγονται «ἴσες» γωνίες.

Ἀφοῦ ἡ ἰσότητα γωνιῶν ἀνάγεται σέ ἰσότητα τόξων, θά ἰσχύουν καί γι' αὐτή ἰδιότητες ἀνάλογες μέ τίς ἰδιότητες τῆς ἰσότητας τόξων. Ἔτσι, ἄν ὀνομάσουμε Γ τό σύνολο τῶν γωνιῶν καί σημειώνουμε, γιά λόγους συντομίας, μέ $\widehat{\varphi}, \widehat{\omega}, \widehat{\theta}, \ldots$ τά στοιχεῖα του, ἔχουμε τίς ἰδιότητες

$$\widehat{\varphi} = \widehat{\varphi}, \quad \forall \varphi \in \Gamma \qquad \text{(ἀνακλαστική)}$$

$$\widehat{\varphi} = \widehat{\omega} \Rightarrow \widehat{\omega} = \widehat{\varphi} \qquad \text{(συμμετρική)}$$

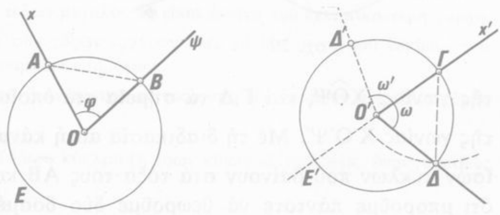
$$\widehat{\varphi} = \widehat{\omega} \text{ καί } \widehat{\omega} = \widehat{\theta} \Rightarrow \widehat{\varphi} = \widehat{\theta} \qquad \text{(μεταβατική).}$$

Ἀπό τόν ὁρισμό τῆς ἰσότητας γωνιῶν εἶναι φανερό ὅτι ὅλες οἱ πεπλατυσμένες γωνίες εἶναι ἴσες.

Κατασκευή γωνίας ἴσης μέ δοσμένη γωνία.

39. Ἄν δοθεῖ κυρτή[1] γωνία $X\widehat{O}\Psi = \widehat{\varphi}$ καί μιά ἡμιευθεία $O'X'$, μποροῦμε νά κατασκευάσουμε μέ τόν κανόνα καί τό διαβήτη γωνία $\widehat{\omega}$ ἴση μέ τή $\widehat{\varphi}$ πού ἔχει κορυφή τό O' καί πλευρά τήν $O'X'$. Γιά τήν κατασκευή τῆς $\widehat{\omega}$ ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς:

Γράφουμε μέ κέντρα O καί O' καί μέ ὁποιαδήποτε ἀκτίνα ρ δύο ἴσους κύκλους καί ὀνομάζουμε $\widehat{AB}$ τό τόξο τοῦ πρώτου κύκλου, στό ὁποῖο βαίνει ἡ $\widehat{\varphi}$, καί Γ τό σημεῖο τομῆς τοῦ δεύτερου κύκλου μέ τήν $O'X'$. Παίρνουμε μετά στόν κυκλ(O',ρ) τόξο $\widehat{\Gamma\Delta}$ ἴσο μέ τό $\widehat{AB}$ καί φέρνουμε τήν ἡμιευθεία $O'\Delta$. Εἶναι τότε φανερό ὅτι ἡ γωνία $\Gamma\widehat{O'}\Delta$ εἶναι ἴση μέ τή $\widehat{\varphi}$ (ἀφοῦ οἱ $\widehat{\varphi}$ καί $\widehat{\omega}$ εἶναι ἐπίκεντρες γωνίες ἴσων κύκλων πού βαίνουν σέ ἴσα τόξα) καί συνεπῶς εἶναι αὐτή πού ζητοῦμε, δηλαδή $\Gamma\widehat{O'}\Delta = \widehat{\omega}$.



Ἄν πάρουμε στόν κυκλ(O',ρ) καί ἕνα ἄλλο τόξο $\widehat{\Gamma\Delta'}$ ἴσο μέ τό $\widehat{\Gamma\Delta}$ ἀλλά ἀν-

1. Ἡ κατασκευή γωνίας ἴσης μέ δοσμένη μή κυρτή γωνία ἀνάγεται στήν κατασκευή γωνίας ἴσης μέ τήν ἀντίστοιχη κυρτή γωνία τῆς δοσμένης. Ἔτσι π.χ. γιά νά κατασκευάσουμε γωνία ἴση μέ αὐτή πού βαίνει στό $\widehat{AEB}$, κατασκευάζουμε γωνία $\Gamma\widehat{O'}\Delta$ ἴση μέ τήν ἀντίστοιχη κυρτή της φ, ὁπότε ἡ γωνία πού ζητοῦμε εἶναι ἐκείνη πού βαίνει στό $\widehat{\Gamma E'\Delta}$.

τίθετης φορᾶς, ἡ γωνία $\Gamma'\widehat{O}\Delta' = \widehat{\omega}$ ΄θά εἶναι ἐπίσης ἴση μέ τή $\widehat{\varphi}$ καί θά ἔχει πλευρά τήν $O'X'$. Βλέπουμε δηλαδή ὅτι, ὅταν ἡ $\widehat{\varphi}$ εἶναι κυρτή, οἱ γωνίες $\widehat{\omega}$ καί $\widehat{\omega}'$ βρίσκονται στά δύο διαφορετικά ἡμιεπίπεδα πού ἔχουν ἀκμή τήν εὐθεία $O'X'$.

Ἡ διχοτόμος γωνίας.

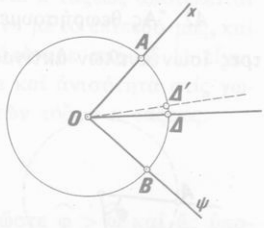
40. **Ὁρισμός**: Μία ἐσωτερική ἡμιευθεία $O\Delta$ γωνίας $X\widehat{O}\Psi$ θά λέγεται **διχοτόμος τῆς $X\widehat{O}\Psi$**, ἄν καί μόνο ἄν χωρίζει τή γωνία $X\widehat{O}\Psi$ σέ δύο ἴσα μέρη, δηλαδή ἄν καί μόνο ἄν εἶναι

$$X\widehat{O}\Delta = \Delta\widehat{O}\Psi.$$

Θά ἀποδείξουμε τώρα τό θεώρημα:

Κάθε γωνία $X\widehat{O}\Psi$ ἔχει μία καί μόνο μία διχοτόμο.

Ἀπόδ. Θεωροῦμε μιά γωνία $X\widehat{O}\Psi$ καί γράφουμε κύκλο μέ κέντρο τό O καί ὁποιαδήποτε ἀκτίνα ρ. Ἄν ὀνομάσουμε A καί B τά σημεῖα, στά ὁποῖα ὁ κυκλ(O,ρ) τέμνει τίς πλευρές τῆς γωνίας, καί Δ τό μέσο τοῦ τόξου AB, ἔχουμε



$\widehat{A\Delta} = \widehat{\Delta B} \Rightarrow A\widehat{O}\Delta = \Delta\widehat{O}B \Rightarrow O\Delta =$ διχοτόμος τῆς $A\widehat{O}B$.

Ἔτσι ἡ $O\Delta$ εἶναι διχοτόμος τῆς δοσμένης γωνίας καί εἶναι μοναδική, γιατί, ἄν ὑπῆρχε καί μιά ἄλλη διχοτόμος, θά ἔτεμνε τό $\widehat{AB}$ σ' ἕνα διαφορετικό σημεῖο Δ' τέτοιο ὥστε $\widehat{A\Delta'} = \widehat{\Delta' B}$, δηλαδή τό Δ' θά ἦταν ἐπίσης μέσο τοῦ AB, ἀλλ' αὐτό εἶναι ἀδύνατο (βλ. § 30).

Ἡ ἀπόδειξη τοῦ θεωρήματος μᾶς δίνει καί τρόπο κατασκευῆς τῆς διχοτόμου μέ τόν κανόνα καί τό διαβήτη (ὅταν ὅμως ξέρουμε πῶς κατασκευάζεται μέ τόν κανόνα καί τό διαβήτη τό μέσο ἑνός τόξου).

Ἄνισες γωνίες.

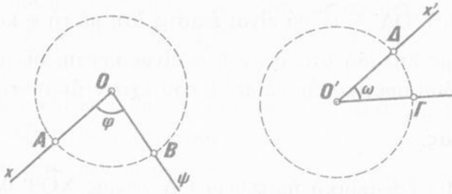
41. Δύο γωνίες, πού δέν εἶναι ἴσες, λέγονται *«ἄνισες»*. Ἄν ἔχουμε δύο ἄνισες γωνίες $\widehat{\varphi}$ καί $\widehat{\omega}$ καί τίς καταστήσουμε ἐπίκεντρες ἴσων κύκλων, ὁρίζουμε ὅτι:

Ἡ γωνία $\widehat{\varphi}$ θά λέγεται μεγαλύτερη (ἤ μικρότερη) ἀπό τή γωνία $\widehat{\omega}$, ἄν καί μόνο ἄν τό τόξο $\widehat{AB}$ πού βαίνει ἡ $\widehat{\varphi}$, εἶναι μεγαλύτερο (ἤ μικρότερο) ἀπό τό τόξο $\widehat{\Gamma\Delta}$, πού βαίνει ἡ $\widehat{\omega}$.

Γιά νά δηλώσουμε ὅτι ἡ γωνία $\widehat{\varphi}$ εἶναι μεγαλύτερη ἀπό τήν $\widehat{\omega}$, γράφουμε $\widehat{\varphi} > \widehat{\omega}$ ἤ ἰσοδύναμα $\widehat{\omega} < \widehat{\varphi}$. Ἔχουμε λοιπόν

$$\widehat{\varphi} > \widehat{\omega} \iff \widehat{AB} > \widehat{\Gamma\Delta}.$$

Ἐπειδή ἡ ἀνισότητα γωνιῶν ἀνάγεται σέ ἀνισότητα τόξων, θά ἰσχύει γι' αὐτήν ἡ μεταβατική ἰδιότητα:



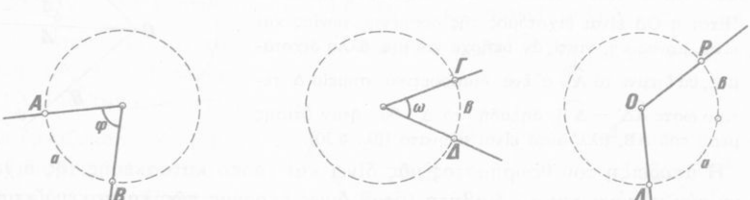
$$\widehat{\varphi} > \widehat{\omega} \text{ καί } \widehat{\omega} > \widehat{\theta} \Rightarrow \widehat{\varphi} > \widehat{\theta}.$$

Ἀπό τόν ὁρισμό τῶν ἄνισων γωνιῶν εἶναι φανερό ὅτι κάθε κυρτή γωνία εἶναι μικρότερη ἀπό τήν πεπλατυσμένη γωνία, ἐνῶ κάθε μή κυρτή γωνία εἶναι μεγαλύτερη ἀπό τήν πεπλατυσμένη γωνία.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 51, 52

Ἄθροισμα γωνιῶν.

42. Ἄς θεωρήσουμε δύο γωνίες $\widehat{\varphi}$ καί $\widehat{\omega}$ πού βαίνουν, ὅταν γίνουν ἐπίκεντρες ἴσων κύκλων ἀκτίνας ρ, στά τόξα $\widehat{AB} = \widehat{\alpha}$ καί $\widehat{\Gamma\Delta} = \widehat{\beta}$. Ἄν σχηματίσουμε



σ' ἕναν κυκλ(Ο,ρ) τό ἄθροισμα $\widehat{\Lambda P} = \widehat{\alpha} + \widehat{\beta}$ τῶν δύο τόξων, ἡ γωνία $\Lambda\widehat{O}P$ λέγεται **ἄθροισμα τῶν γωνιῶν $\widehat{\varphi}$ καί $\widehat{\omega}$** καί σημειώνεται $\widehat{\varphi} + \widehat{\omega}$. Γιά νά δηλώσουμε ὅτι ἡ $\Lambda\widehat{O}P$ εἶναι ἄθροισμα τῶν $\widehat{\varphi}$ καί $\widehat{\omega}$, γράφουμε

$$\Lambda\widehat{O}P = \widehat{\varphi} + \widehat{\omega}.$$

Ἡ πράξη πού κάνουμε, γιά νά βροῦμε τό ἄθροισμα δύο γωνιῶν, λέγεται **πρόσθεση** αὐτῶν. Ἡ πρόσθεση ἐπεκτείνεται καί σέ περισσότερους ἀπό δύο προσθετέους ὅπως ἀκριβῶς καί στά τόξα. Ἀφοῦ ἡ πρόσθεση τῶν γωνιῶν ἀνάγεται σέ πρόσθεση τόξων, θά εἶναι πράξη ἀντιμεταθετική καί προσεταιριστική, δηλαδή

$$\widehat{\varphi} + \widehat{\omega} = \widehat{\omega} + \widehat{\varphi}$$

$$(\widehat{\varphi} + \widehat{\omega}) + \widehat{\theta} = \widehat{\varphi} + (\widehat{\omega} + \widehat{\theta}).$$

Ἐπίσης στήν πρόσθεση τῶν γωνιῶν ἰσχύουν ἰδιότητες ἀνάλογες μέ ἐκεῖνες πού ἰσχύουν στήν πρόσθεση τῶν τόξων.

Ἐπέκταση τῆς ἔννοιας τῆς γωνίας.

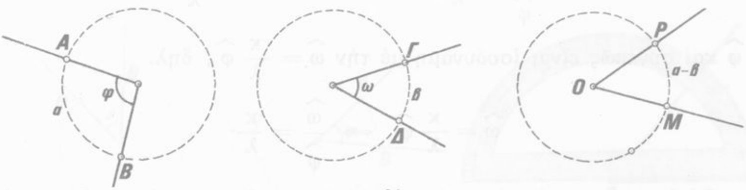
43. Ἄν δοθοῦν δύο ἤ περισσότερες γωνίες, ἡ εὕρεση τοῦ ἀθροίσματός τους ἀνάγεται, ὅπως εἴδαμε, στήν εὕρεση τοῦ ἀθροίσματος τῶν τόξων στά ὁποῖα βαίνουν, ὅταν γίνουν ἐπίκεντρες ἴσων κύκλων. Εἶναι ὅμως δυνατόν τό ἄθροισμα τῶν τόξων τους νά εἶναι *«τόξο κ τάξεως»* (βλ. § 34) καί τότε δέν μποροῦμε νά μιλᾶμε γιά «ἄθροισμα» τῶν γωνιῶν μας, ἀφοῦ ἡ ἐπίκεντρη γωνία τόξου κ τάξεως δέν εἶναι «γωνία» μέ τήν ἔννοια πού τήν ὁρίσαμε στήν § 11. Γιά νά καλύψουμε λοιπόν καί τήν περίπτωση αὐτή, ἐπεκτείνουμε πάλι τήν ἔννοια τῆς γωνίας ὁρίζοντας ὅτι:

Ἕνα ἄθροισμα γωνιῶν θά λέγεται **γωνία κ τάξεως,** ἄν καί μόνο ἄν τό ἄθροισμα τῶν τόξων στά ὁποῖα βαίνουν οἱ γωνίες, ὅταν γίνουν ἐπίκεντρες ἴσων κύκλων, εἶναι τόξο κ τάξεως.

Ἀπό τόν ὁρισμό αὐτό καταλαβαίνουμε ὅτι μία γωνία κ τάξεως ἀποτελεῖται ἀπό κ πλήρεις γωνίες, πού τά ἐπίπεδά τους «συμπίπτουν» μέ τό ἐπίπεδό μας, καί ἀπό μία γωνία τοῦ ἐπιπέδου μας. Οἱ γωνίες ὅπως τίς ὁρίσαμε στήν § 11 εἶναι γωνίες «μηδενικῆς» τάξεως. Εἶναι φανερό ὅτι ἡ ἰσότητα καί ἀνισότητα στίς γωνίες κ τάξεως θά ἀνάγεται σέ ἰσότητα καί ἀνισότητα τῶν τόξων κ τάξεως.

Ἀφαίρεση γωνιῶν.

44. Ἄς θεωρήσουμε δύο γωνίες $\widehat{\varphi}$ καί $\widehat{\omega}$ τέτοιες ὥστε $\widehat{\varphi} > \widehat{\omega}$ καί ἄς υποθέσουμε ὅτι βαίνουν, ὅταν γίνουν ἐπίκεντρες ἴσων κύκλων ἀκτίνας ρ, στά τόξα



σχ. 31

$\widehat{AB} = \widehat{\alpha}$ καί $\widehat{\Gamma\Delta} = \widehat{\beta}$, γιά τά ὁποῖα ἔχουμε ἐπίσης $\alpha > \beta$. Ἄν τώρα σχηματίσουμε σ' ἕναν κυκλ(O,ρ) τή διαφορά $\widehat{MP} = \widehat{\alpha} - \widehat{\beta}$ τῶν δύο τόξων $\widehat{\alpha}$ καί $\widehat{\beta}$, ἡ γωνία $M\widehat{O}P$ λέγεται **διαφορά τῶν γωνιῶν $\widehat{\varphi}$ καί $\widehat{\omega}$** καί σημειώνεται $\widehat{\varphi}-\widehat{\omega}$. Γιά νά δηλώσουμε ὅτι ἡ $M\widehat{O}P$ εἶναι διαφορά τῶν $\widehat{\varphi}$ καί $\widehat{\omega}$, γράφουμε

$$M\widehat{O}P = \widehat{\varphi} - \widehat{\omega}.$$

Ἡ πράξη πού κάνουμε, γιά νά βροῦμε τή διαφορά αὐτή, λέγεται **ἀφαίρεση** τῶν γωνιῶν καί ἰσχύουν γι᾿ αὐτή συμπεράσματα ἀνάλογα μέ ἐκεῖνα πού ἰσχύουν στήν ἀφαίρεση τόξων. Ἔτσι π.χ. γιά νά ἔχει νόημα ἡ διαφορά $\widehat{\varphi}-\widehat{\omega}$ καί ὅταν $\widehat{\varphi}=\widehat{\omega}$, δεχόμαστε τήν ὕπαρξη μιᾶς γωνίας πού οἱ πλευρές της συμπίπτουν. Αὐτή ὀνομάσθηκε *μηδενική πλάγια* (βλ. § 11) καί εἶναι τό *«οὐδέτερο στοιχεῖο»* τῆς προσθέσεως γωνιῶν.

Λόγος δύο γωνιῶν.

45. Ἄν διατυπώσουμε ὁρισμούς ἀνάλογους μέ ἐκείνους πού διατυπώσαμε στά τόξα (ἤ στά εὐθύγραμμα τμήματα, βλ. § 20), δίνουμε νόημα γωνίας καί σέ κάθε γινόμενο $\frac{\kappa}{\lambda}\widehat{\varphi}$, ὅταν τά κ καί λ εἶναι φυσικοί ἀριθμοί καί ἡ $\widehat{\varphi}$ εἶναι δοσμένη γωνία. Ἔτσι μιά ἰσότητα τῆς μορφῆς

$$\widehat{\omega}=\frac{\kappa}{\lambda}\widehat{\varphi}$$

δηλώνει ὅτι ἡ γωνία $\widehat{\omega}$ εἶναι ἄθροισμα κ γωνιῶν ἴσων μέ τή γωνία πού βρίσκεται, ὅταν χωρίζουμε τή $\widehat{\varphi}$ σέ λ ἴσα μέρη[1]. Εἶναι φανερό ὅτι, ἄν οἱ γωνίες $\widehat{\omega}$ καί $\widehat{\varphi}$ βαίνουν, ὅταν γίνουν ἐπίκεντρες ἴσων κύκλων, στά τόξα $\widehat{\alpha}$ καί $\widehat{\beta}$, θά ἔχουμε

$$\widehat{\omega}=\frac{\kappa}{\lambda}\widehat{\varphi}\iff\widehat{\alpha}=\frac{\kappa}{\lambda}\widehat{\beta}.$$

Ὁ ἀριθμός $\frac{\kappa}{\lambda}$ λέγεται **λόγος τῆς γωνίας $\widehat{\omega}$ πρός τήν γωνία $\widehat{\varphi}$** καί γράφεται $\widehat{\omega}:\widehat{\varphi}$ ἤ $\frac{\widehat{\omega}}{\widehat{\varphi}}$. Ἔτσι ἡ ἰσότητα $\frac{\widehat{\omega}}{\widehat{\varphi}}=\frac{\kappa}{\lambda}$ δηλώνει ὅτι ὁ ἀριθμός $\frac{\kappa}{\lambda}$ εἶναι λόγος τῆς $\widehat{\omega}$ πρός τή $\widehat{\varphi}$ καί συνεπῶς εἶναι ἰσοδύναμη μέ τήν $\widehat{\omega}=\frac{\kappa}{\lambda}\widehat{\varphi}$, δηλ.

$$\widehat{\omega}=\frac{\kappa}{\lambda}\widehat{\varphi}\iff\frac{\widehat{\omega}}{\widehat{\varphi}}=\frac{\kappa}{\lambda}.$$

Θά θεωροῦμε πρός τό παρόν γωνίες τέτοιες, ὥστε δύο ὁποιεσδήποτε ἀπ᾿ αὐτές $\widehat{\varphi}$ καί $\widehat{\omega}$ νά συνδέονται μέ σχέση τῆς μορφῆς $\widehat{\omega}=\frac{\kappa}{\lambda}\widehat{\varphi}$, ὅπου κ καί λ εἶναι φυσικοί ἀριθμοί.

---

1. Ἡ διαίρεση μιᾶς γωνίας σέ λ ἴσα μέρη μέ τόν κανόνα καί τό διαβήτη δέν εἶναι πάντοτε δυνατή.

Μέτρηση γωνιῶν.

46. Ἄς πάρουμε στό σύνολο τῶν γωνιῶν ἑνός ἐπιπέδου μιά ὁρισμένη γωνία $\widehat{\mu}$ πού θά τή λέμε *«μοναδιαία γωνία»* ἤ *«μονάδα»*, καί ἄς σχηματίσουμε γιά κάθε γωνία $\widehat{\varphi}$ τό λόγο $\dfrac{\widehat{\varphi}}{\widehat{\mu}}$. Ὁ λόγος αὐτός λέγεται τώρα **μέτρο τῆς γωνίας $\widehat{\varphi}$ ὡς πρός μονάδα μετρήσεως τή $\widehat{\mu}$** καί θά σημειώνεται μέ $(\widehat{\varphi})$, δηλαδή εἶναι

$$(\widehat{\varphi}) = \frac{\widehat{\varphi}}{\widehat{\mu}}.$$

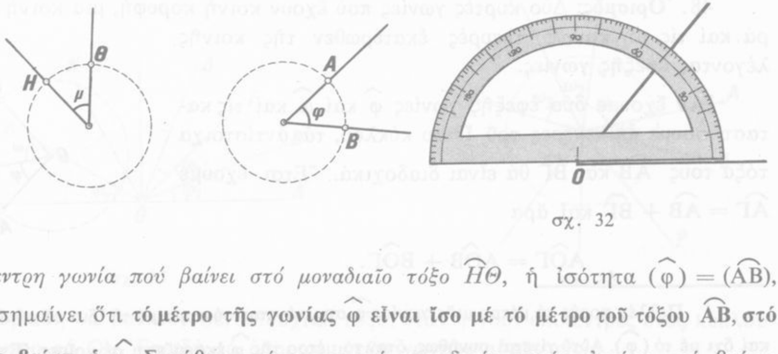
Ἐπειδή ἡ μέτρηση τῶν γωνιῶν γίνεται μέ τρόπο ἀνάλογο πρός τή μέτρηση τῶν τόξων (ἤ τή μέτρηση εὐθύγραμμων τμημάτων), θά ἰσχύουν καί ἐδῶ οἱ ἰδιότητες:

$$\frac{\widehat{\varphi}}{\widehat{\omega}} = \frac{(\widehat{\varphi})}{(\widehat{\omega})}$$

$$\widehat{\varphi} = \widehat{\omega} \iff (\widehat{\varphi}) = (\widehat{\omega})$$

$$\widehat{\varphi} < \widehat{\omega} \iff (\widehat{\varphi}) < (\widehat{\omega}).$$

Ἄς ὀνομάσουμε $\widehat{AB}$ καί $\widehat{H\Theta}$ τά τόξα, στά ὁποῖα βαίνουν οἱ γωνίες $\widehat{\varphi}$ καί $\widehat{\mu}$, ὅταν γίνουν ἐπίκεντρες ἴσων κύκλων. Τότε ἔχουμε $\dfrac{\widehat{\varphi}}{\widehat{\mu}} = \dfrac{\widehat{AB}}{\widehat{H\Theta}}$ καί ἀπό τήν ἰσότητα αὐτή προκύπτει, ἄν συμφωνήσουμε νά παίρνουμε γιά *μοναδιαία γωνία $\widehat{\mu}$ τήν*



σχ. 32

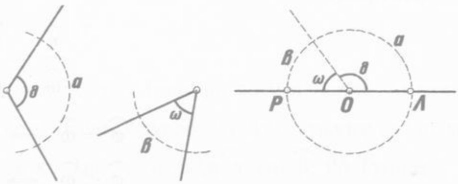
ἐπίκεντρη γωνία πού βαίνει στό μοναδιαῖο τόξο $\widehat{H\Theta}$, ἡ ἰσότητα $(\widehat{\varphi}) = (\widehat{AB})$, πού σημαίνει ὅτι **τό μέτρο τῆς γωνίας $\widehat{\varphi}$ εἶναι ἴσο μέ τό μέτρο τοῦ τόξου $\widehat{AB}$, στό ὁποῖο βαίνει ἡ $\widehat{\varphi}$.** Συνήθως παίρνουμε γιά μοναδιαία γωνία ἐκείνη πού βαίνει σέ τόξο 1° καί τήν ὀνομάζουμε ἐπίσης *«μοίρα»*. Ἔτσι ὅταν τό τόξο $\widehat{AB}$ ἐκφράζεται σέ μοῖρες, καί ἡ γωνία $\widehat{\varphi}$ θά ἐκφράζεται σέ μοῖρες[1]. Ἡ μέτρηση μιᾶς γωνίας $\widehat{\varphi}$ σέ μοῖρες γίνεται μέ τό *«μοιρογνομώνιο»* (πού εἶναι ἕνας ἡμικυκλικός δίσκος ὁ ὁποῖος ἔχει τό ἡμικύκλιο του διηρημένο σέ μοῖρες καί βαθμολογημένο ἀπό 0° ἕως 180°), ὅπως δείχνει τό παραπάνω σχῆμα 32.

Κάθε πεπλατυσμένη γωνία μπορεῖ νά θεωρηθεῖ ἐπίκεντρη γωνία κύκλου (Ο,ρ) πού βαίνει σέ ἡμικύκλιο. Ἐπειδή ὅμως τό ἡμικύκλιο εἶναι τόξο 180°, ἕπεται ὅτι **κάθε πεπλατυσμένη γωνία ἔχει μέτρο 180°**. Ἐπίσης, ἐπειδή ἡ πλήρης γωνία μπορεῖ νά θεωρηθεῖ ἐπίκεντρη πού βαίνει σ' ὁλόκληρο τόν κύκλο, ἕπεται ὅτι **κάθε πλήρης γωνία ἔχει μέτρο 360°**.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 54, 55

Παραπληρωματικές γωνίες.

47. **Ὁρισμός**: Δύο γωνίες $\widehat{\theta}$ καί $\widehat{\omega}$ θά λέγονται **παραπληρωματικές,** ἄν καί μόνο ἄν ἔχουν ἄθροισμα ἴσο μέ μιά πεπλατυσμένη γωνία. Τότε ἡ κάθε μιά γωνία λέγεται καί *«παραπλήρωμα»* τῆς ἄλλης.



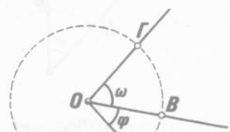
Ἀπό τόν ὁρισμό πού δώσαμε γίνεται φανερό ὅτι:

— **Δύο γωνίες εἶναι παραπληρωματικές, ἄν καί μόνο ἄν ἔχουν ἄθροισμα 180 μοῖρες.**

— **Τά παραπληρώματα τῆς ἴδιας γωνίας (ἤ ἴσων γωνιῶν) εἶναι γωνίες ἴσες.**

Ἐφεξῆς γωνίες.

48. **Ὁρισμός**: Δύο κυρτές γωνίες πού ἔχουν κοινή κορυφή, μιά κοινή πλευρά καί τίς μή κοινές πλευρές ἑκατέρωθεν τῆς κοινῆς λέγονται **ἐφεξῆς γωνίες.**



Ἄν ἔχουμε δύο ἐφεξῆς γωνίες $\widehat{\varphi}$ καί $\widehat{\omega}$ καί τίς καταστήσουμε ἐπίκεντρες τοῦ ἴδιου κύκλου, τά ἀντίστοιχα τόξα τους $\widehat{AB}$ καί $\widehat{B\Gamma}$ θά εἶναι διαδοχικά. Ἔτσι ἔχουμε $\widehat{A\Gamma} = \widehat{AB} + \widehat{B\Gamma}$ καί ἄρα

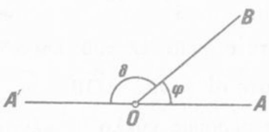
$$A\widehat{O}\Gamma = A\widehat{O}B + B\widehat{O}\Gamma.$$

1. Πολλές φορές τό μέτρο μιᾶς γωνίας $\widehat{\varphi}$ σημειώνεται σύντομα μέ τό ἴδιο τό σύμβολο $\widehat{\varphi}$ καί ὄχι μέ τό $(\widehat{\varphi})$. Αὐτό γίνεται συνήθως, ὅταν τό μέτρο τῆς $\widehat{\varphi}$ ἐκφράζεται σέ μοῖρες. Ἔτσι π.χ. συνηθίζουμε νά γράφουμε ἰσότητες τῆς μορφῆς $\widehat{\varphi} + \widehat{\omega} + \ldots = 180°$ καί ἐννοοῦμε σ' αὐτές ὅτι τά γράμματα στό πρῶτο μέλος τους παριστάνουν μέτρα γωνιῶν.

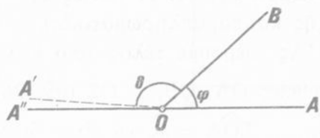
Βλέπουμε δηλαδή ὅτι τό ἄθροισμα δύο ἐφεξῆς γωνιῶν εἶναι ἡ γωνία πού ἔχει γιά πλευρές τίς μή κοινές πλευρές τους καί πού στό ἐσωτερικό της βρίσκεται ἡ κοινή πλευρά.

ΘΕΩΡΗΜΑ. Δύο ἐφεξῆς γωνίες εἶναι παραπληρωματικές, ἄν καί μόνο ἄν ἔχουν τίς μή κοινές πλευρές τους ἀντικείμενες ἡμιευθεῖες.

'Απόδ. Ἄν οἱ ἐφεξῆς γωνίες $\widehat{AOB} = \widehat{\varphi}$ καί $\widehat{BOA'} = \widehat{\theta}$ ἔχουν τίς μή κοινές πλευρές τους



σχ. 33



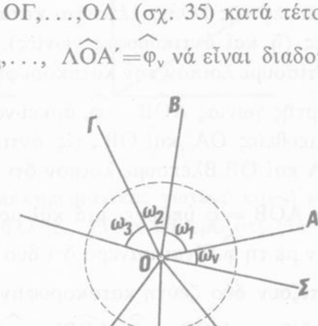
σχ. 34

ἀντικείμενες ἡμιευθεῖες, τότε τό ἄθροισμα $\widehat{\varphi}+\widehat{\theta}$ ἰσοῦται μέ τήν πεπλατυσμένη γωνία $\widehat{AOA'}$ καί ἄρα οἱ $\widehat{\varphi}$ καί $\widehat{\theta}$ εἶναι παραπληρωματικές.

'Αντιστρόφως, ἄν οἱ ἐφεξῆς γωνίες $\widehat{AOB} = \widehat{\varphi}$ καί $\widehat{BOA'} = \widehat{\theta}$ εἶναι παραπληρωματικές, (σχ. 34), δηλ. ἄν $\widehat{\varphi} + \widehat{\theta} = 180°$ καί ἡ ΟΑ′ δέν εἶναι ἀντικείμενη τῆς ΟΑ, τότε φέρνοντας τήν ἀντικείμενη ἡμιευθεία ΟΑ″ τῆς ΟΑ θά ἔχουμε $\widehat{\varphi} + \widehat{BOA''} = 180°$. 'Από αὐτή καί τήν $\widehat{\varphi} + \widehat{\theta} = 180°$ ἕπεται ὅτι $\widehat{\theta} = \widehat{BOA'} = \widehat{BOA''}$. 'Επειδή τώρα οἱ μή ἐφεξῆς γωνίες $\widehat{BOA'}$ καί $\widehat{BOA''}$ εἶναι ἴσες καί ἔχουν κοινή τή μιά πλευρά, θά ἔχουν κοινή καί τήν ἄλλη, δηλαδή ἡ ἡμιευθεία ΟΑ″ θά συμπίπτει μέ τήν ἡμιευθεία ΟΑ′ καί ἄρα ἡ ΟΑ′ εἶναι ἀντικείμενη τῆςΟΑ.

49. Ἄς πάρουμε τώρα ἕνα σημεῖο Ο μιᾶς εὐθείας Α′Α καί ἄς φέρουμε στό ἕνα ἡμιεπίπεδο ἀκμῆς Α′Α τίς ἡμιευθεῖες ΟΒ, ΟΓ,. . .,ΟΛ (σχ. 35) κατά τέτοιο τρόπο, ὥστε οἱ γωνίες $\widehat{AOB} = \widehat{\varphi}_1$, $\widehat{BO\Gamma} = \widehat{\varphi}_2, \ldots$, $\widehat{\Lambda OA'} = \varphi_\nu$ νά εἶναι διαδοχι-

σχ. 35



σχ. 36

κές (δηλαδή νά βαίνουν σέ διαδοχικά τόξα, ὅταν γίνουν ἐπίκεντρες ἑνός κύκλου μέ κέντρο τό Ο). 'Επειδή τό ἄθροισμα τῶν γωνιῶν αὐτῶν εἶναι

$$\widehat{\varphi}_1 + \widehat{\varphi}_2 + \ldots + \widehat{\varphi}_\nu = \widehat{\varphi}_1 + (\widehat{\varphi}_2 + \widehat{\varphi}_3 + \ldots + \widehat{\varphi}_\nu) = \widehat{AOB} + \widehat{BOA'} = 180°,$$

συμπεραίνουμε ὅτι **τό ἄθροισμα ὅλων τῶν διαδοχικῶν γωνιῶν, πού σχηματίζονται σ' ἕνα ἡμιεπίπεδο, ὅταν φέρνουμε ἡμιευθεῖες ἀπό ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο τῆς ἀκμῆς του, εἶναι 180⁰.**

Ἀντίστροφα, ἄν ἔχουμε διαδοχικές γωνίες $\widehat{\varphi_1} = A\widehat{O}B$, $\widehat{\varphi_2} = B\widehat{O}\Gamma, \ldots, \widehat{\varphi_\nu} = \Lambda\widehat{O}A'$ πού τό ἄθροισμά τους εἶναι $180°$, τότε οἱ ἡμιευθεῖες ΟΑ καί ΟΑ′ εἶναι ἀντικείμενες (γιατί οἱ γωνίες $\widehat{\varphi_1} = A\widehat{O}B$ καί $B\widehat{O}A' = \widehat{\varphi_2} + \widehat{\varphi_3} + \ldots + \widehat{\varphi_\nu}$ εἶναι ἐφεξῆς καί παραπληρωματικές).

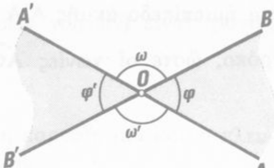
Ἄς φέρουμε τέλος ἀπό ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο Ο τοῦ ἐπιπέδου μας ἡμιευθεῖες ΟΑ, ΟΒ,...,ΟΣ (σχ. 36) τέτοιες, ὥστε οἱ γωνίες $A\widehat{O}B = \widehat{\omega_1}$, $B\widehat{O}\Gamma = \widehat{\omega_2}, \ldots, \Sigma\widehat{O}A = \widehat{\omega_\nu}$ νά εἶναι διαδοχικές. Ἄν φέρουμε κύκλο μέ κέντρο Ο, οἱ γωνίες $\widehat{\omega_1}, \widehat{\omega_2}, \ldots, \widehat{\omega_\nu}$ θά βαίνουν σέ διαδοχικά τόξα του, τά ὁποῖα ἔχουν ἄθροισμα ὁλόκληρο τόν κύκλο. Ἔτσι τό ἄθροισμα τῶν διαδοχικῶν γωνιῶν $\widehat{\omega_1}, \widehat{\omega_2}, \ldots, \widehat{\omega_\nu}$ εἶναι πλήρης γωνία καί θά ἔχουμε

$$\widehat{\omega_1} + \widehat{\omega_2} + \ldots + \widehat{\omega_\nu} = 360°,$$

δηλαδή **τό ἄθροισμα ὅλων τῶν διαδοχικῶν γωνιῶν πού σχηματίζονται σ' ἕνα ἐπίπεδο, ὅταν φέρνουμε ἡμιευθεῖες του ἀπό ἕνα σημεῖο τοῦ ἐπιπέδου, εἶναι 360⁰.**

Κατακορυφήν γωνίες.

50. **Ὁρισμός**: Δύο κυρτές γωνίες, πού ἔχουν κοινή κορυφή καί οἱ πλευρές τῆς μιᾶς εἶναι ἡμιευθεῖες ἀντικείμενες στίς πλευρές τῆς ἄλλης, λέγονται **κατακορυφήν γωνίες** (ἤ **καί ἀντικόρυφες γωνίες**). Γιά νά σχηματίσουμε λοιπόν τήν κατακορυφήν γωνία μιᾶς κυρτῆς γωνίας $A\widehat{O}B = \widehat{\varphi}$, ἀρκεῖ νά φέρουμε τίς ἡμιευθεῖες ΟΑ′ καί ΟΒ′, τίς ἀντικείμενες τῶν ΟΑ καί ΟΒ. Βλέπουμε λοιπόν ὅτι γιά κάθε γωνία $A\widehat{O}B = \widehat{\varphi}$ ὑπάρχει μιά καί μοναδική γωνία $A'\widehat{O}B' = \widehat{\varphi}'$ πού εἶναι κατακορυφήν μέ τή $\widehat{\varphi}$. Εἶναι φανερό ὅτι δύο εὐθεῖες ΑΑ′ καί ΒΒ′, πού τέμνονται στό Ο, σχηματίζουν δύο ζεύγη κατακορυφήν γωνιῶν: τό ζεῦγος $A\widehat{O}B = \widehat{\varphi}$, $A'\widehat{O}B' = \widehat{\varphi}'$ καί τό ζεῦγος $A'\widehat{O}B = \widehat{\omega}$, $A\widehat{O}B' = \widehat{\omega}'$.



ΘΕΩΡΗΜΑ: Οἱ κατακορυφήν γωνίες εἶναι ἴσες.

Ἀπόδ. Ἡ κάθε μιά ἀπό τίς κατακορυφήν γωνίες $A\widehat{O}B = \widehat{\varphi}$ καί $A'\widehat{O}B' = \widehat{\varphi}'$ εἶναι ἐφεξῆς καί παραπληρωματική τῆς $A'\widehat{O}B = \widehat{\omega}$. Ἔχουμε δηλαδή

$$\widehat{\varphi} + \widehat{\omega} = 180° \quad \text{καί} \quad \widehat{\varphi}' + \widehat{\omega} = 180°$$

Ἀπό τή σύγκριση αὐτῶν τῶν σχέσεων προκύπτει ὅτι $\widehat{\varphi} + \widehat{\omega} = \widehat{\varphi}' + \widehat{\omega} \Rightarrow \widehat{\varphi} = \widehat{\varphi}'$.

Ἡ ὀρθή γωνία. Συμπληρωματικές γωνίες.

51. Ὁρισμός: **Μία γωνία θά λέγεται ὀρθή, ἄν καί μόνο ἄν εἶναι ἴση μέ τό μισό μιᾶς πεπλατυσμένης γωνίας.**

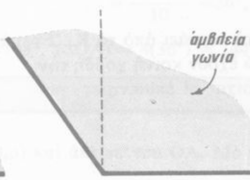
Ἄν λοιπόν ἔχουμε μιά ἡμιευθεία ΟΑ καί θέλουμε νά κατασκευάσουμε ὀρθή γωνία μέ κορυφή τό Ο καί μία πλευρά τήν ΟΑ, δέν ἔχουμε παρά νά φέρουμε τήν ἡμιευθεία ΟΑ΄ ἀντικείμενη τῆς ΟΑ καί μετά νά φέρουμε τή διχοτόμο ΟΔ τῆς πεπλατυσμένης γωνίας $\widehat{AOA'}$. Ἐπειδή οἱ πεπλατυσμένες γωνίες εἶναι ἴσες καί κάθε μία πεπλατυσμένη γωνία εἶναι 180°, ἀπό τόν ὁρισμό πού δώσαμε συμπεραίνουμε ὅτι

— Ὅλες οἱ ὀρθές γωνίες εἶναι ἴσες.

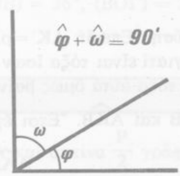
— Ἡ ὀρθή γωνία ἔχει μέτρο 90°.

Κάθε γωνία μικρότερη ἀπό τήν ὀρθή λέγεται **ὀξεία γωνία,** ἐνῶ κάθε γωνία μεγαλύτερη ἀπό τήν ὀρθή λέγεται **ἀμβλεία γωνία.** Τέλος δύο γωνίες $\widehat{\varphi}$ καί $\widehat{\omega}$, πού

σχ. 37



σχ. 38



σχ. 39

ἔχουν ἄθροισμα μιά ὀρθή γωνία, λέγονται **συμπληρωματικές γωνίες** καί ἡ κάθε μιά ἀπ' αὐτές λέγεται καί «*συμπλήρωμα*» τῆς ἄλλης. Εἶναι φανερό ὅτι γιά δυό συμπληρωματικές γωνίες $\widehat{\varphi}$ καί $\widehat{\omega}$ ἔχουμε:

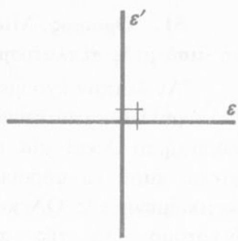
$$\widehat{\varphi}+\widehat{\omega}=90°.$$

Κάθετες εὐθεῖες.

52. Ὁρισμός: **Δύο τεμνόμενες εὐθεῖες ε καί ε΄, πού σχηματίζουν τέσσερις διαδοχικές γωνίες ἴσες, λέγονται κάθετες εὐθεῖες** καί τότε θά γράφουμε:

$$\varepsilon \perp \varepsilon'.$$

Ἄν $\varepsilon \perp \varepsilon'$, εἶναι φανερό ὅτι κάθε μιά ἀπό τίς τέσσερις ἴσες γωνίες τους ἔχει μέτρο 90° (ἀφοῦ καί οἱ τέσσερις ἔχουν ἄθροισμα 360°), δηλαδή εἶναι ὀρθή. Ἀντιστρόφως, ἄν μία ἀπό τίς διαδοχικές γνωίες πού σχηματίζουν δύο τεμνόμενες εὐθεῖες ε καί ε′ εἶναι ὀρθή, τότε οἱ εὐθεῖες ε καί ε′ εἶναι κάθετες, γιατί τότε ὅπως εἶναι φανερό καί οἱ τέσσερις διαδοχικές γωνίες, πού σχηματίζουν οἱ ε καί ε′, εἶναι ὀρθές (ἀφοῦ ἡ κατακορυφήν τῆς ὀρθῆς εἶναι ὀρθή, ἐνῶ οἱ δύο ἄλλες κατακορυφήν γωνίες εἶναι ἴσες καί ἔχουν ἄθροισμα $360° - 180° = 180°$) καί ἑπομένως εἶναι ὅλες ἴσες.



Δείξαμε λοιπόν ὅτι **δύο τεμνόμενες εὐθεῖες εἶναι κάθετες, ἄν καί μόνο ἄν σχηματίζουν ὀρθή γωνία.**

Δύο εὐθύγραμμα τμήματα, πού οἱ φορεῖς τους εἶναι κάθετες εὐθεῖες, θά λέγονται «*κάθετα τμήματα*». Ἐπίσης δύο ἡμιευθεῖες, πού ἀνήκουν σέ κάθετες εὐθεῖες, θά λέγονται «*κάθετες ἡμιευθεῖες*». Τέλος ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα θά λέγεται «κάθετο» σέ εὐθεία (ἤ ἡμιευθεία), ἄν ὁ φορέας του εἶναι κάθετος στήν εὐθεία (ἤ τήν ἡμιευθεία).

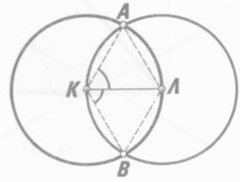
ΑΣΚΗΣΕΙΣ 53, 56 - 62

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

47. Δίνεται ἕνας κυκλ(Κ,ρ) καί ἕνα ὁρισμένο σημεῖο του Λ. Μέ κέντρο τό Λ καί ἀκτίνα ρ γράφουμε κύκλο πού τέμνει τόν κυκλ(Ο,ρ) στά σημεῖα Α καί Β. Δεῖξτε ὅτι $\widehat{AKB} = \widehat{A\Lambda B}$ καί ὅτι ἡ ΚΛ εἶναι διχοτόμος τῶν γωνιῶν $\widehat{AKB}$ καί $\widehat{A\Lambda B}$.

Λύση. Ἐπειδή $\Lambda K = \rho$, ὁ κυκλ(Λ,ρ) περνάει ἀπό τό Κ. Ἔτσι τά τόξα $\overset{\frown}{AKB}$ καί $\overset{\frown}{A\Lambda B}$ εἶναι ἴσα, γιατί εἶναι τόξα ἴσων κύκλων πού ἔχουν κοινή χορδή τήν ΑΒ. Στά τόξα αὐτά ὅμως βαίνουν ἀντίστοιχα οἱ ἐπίκεντρες γωνίες $\widehat{A\Lambda B}$ καί $\widehat{AKB}$. Ἔτσι ἔχουμε

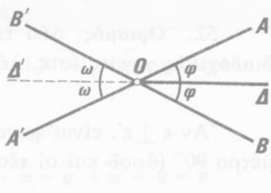
$$\widehat{A\Lambda B} = \widehat{AKB}.$$



Ἐπειδή $A\Lambda = \Lambda B$, γιατί οἱ ΑΛ καί ΛΒ εἶναι ἀκτίνες τοῦ κυκλ(Λ,ρ), τά τόξα $\overset{\frown}{A\Lambda}$ καί $\overset{\frown}{\Lambda B}$ τοῦ κυκλ(Κ,ρ) εἶναι ἴσα, γιατί ἀντιστοιχοῦν σέ ἴσες χορδές του. Ἔτσι καί οἱ ἐπίκεντρες γωνίες $\widehat{AK\Lambda}$ καί $\widehat{\Lambda KB}$ εἶναι ἴσες, ὁπότε ἡ ΚΛ εἶναι διχοτόμος τῆς $\widehat{AKB}$. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ ΛΚ διχοτομεῖ τήν $\widehat{A\Lambda B}$.

48. Δεῖξτε ὅτι οἱ διχοτόμοι δύο κατακορυφήν γωνιῶν βρίσκονται στήν ἴδια εὐθεία.

Λύση. Ἄν $\widehat{AOB}$ καί $\widehat{A'OB'}$ εἶναι οἱ κατακορυφήν γωνίες καί ΟΔ,ΟΔ′ οἱ διχοτόμοι τους, θέτουμε $\widehat{AO\Delta} = \widehat{\Delta OB} = \widehat{\varphi}$ καί $\widehat{B'O\Delta'} = \widehat{\Delta'OA'} = \widehat{\omega}$, ὁπότε θά εἶναι $\widehat{\varphi} = \widehat{\omega}$ (ἀφοῦ οἱ γωνίες $\widehat{AOB} = 2\widehat{\varphi}$ καί $\widehat{A'OB'} = 2\widehat{\omega}$ εἶναι ἴσες).Παρατηροῦμε τώρα ὅτι ἡ ἰσότητα



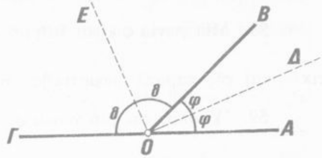
$\widehat{BOA} + \widehat{AOB'} = 180°$ γράφεται

$\widehat{\varphi} + \widehat{\varphi} + \widehat{AOB'} = 180° \Rightarrow \widehat{\varphi} + \widehat{AOB'} + \widehat{\omega} = 180° \Rightarrow \widehat{\Delta OA} + \widehat{AOB'} + \widehat{B'O\Delta'} = 180°.$

καί ἀπό τήν τελευταία ἰσότητα συμπεραίνουμε ὅτι οἱ ἡμιευθεῖες ΟΔ καί ΟΔ′ εἶναι ἀντικείμενες.

49. Δεῖξτε ὅτι οἱ διχοτόμοι δύο ἐφεξῆς καί παραπληρωματικῶν γωνιῶν εἶναι κάθετες.

Λύση. Ἄν $\widehat{AOB}$ καί $\widehat{BO\Gamma}$ εἶναι δύο ἐφεξῆς καί παραπληρωματικές γωνίες καί ΟΔ,ΟΕ οἱ διχοτόμοι τους, θά ἔχουμε



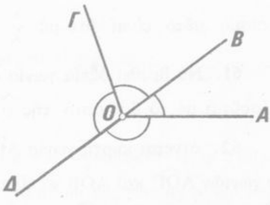
$$\widehat{AOB} + \widehat{BO\Gamma} = 180° \Rightarrow \frac{\widehat{AOB}}{2} + \frac{\widehat{\Delta O\Gamma}}{2} = 90° \Rightarrow$$

$$\widehat{\Delta OB} + \widehat{BOE} = 90° \Rightarrow \widehat{\Delta OE} = 90°,$$

δηλαδή οἱ ἡμιευθεῖες ΟΔ καί ΟΕ σχηματίζουν ὀρθή γωνία, ἄρα εἶναι κάθετες.

50. Τέσσερις ἡμιευθεῖες ΟΑ,ΟΒ,ΟΓ,ΟΔ σχηματίζουν τίς διαδοχικές γωνίες $\widehat{AOB}$, $\widehat{BO\Gamma}$, $\widehat{\Gamma O\Delta}$, $\widehat{\Delta OA}$ πού ἔχουν μέτρα ἀνάλογα μέ τούς ἀριθμούς 1,2,3,4. Νά ὑπολογισθοῦν οἱ γωνίες αὐτές·

Λύση. Ἄν στήν ὑπόθεσή μας



$$\frac{(\widehat{AOB})}{1} = \frac{(\widehat{BO\Gamma})}{2} = \frac{(\widehat{\Gamma O\Delta})}{3} = \frac{(\widehat{\Delta OA})}{4}$$

ἐφαρμόσουμε τή γνωστή ἰδιότητα τῶν ἴσων κλασμάτων, θά ἔχουμε (ἐπειδή εἶναι καί $(\widehat{AOB}) + (\widehat{BO\Gamma}) + (\widehat{\Gamma O\Delta}) + (\widehat{\Delta OA}) = 360°$)

$$\frac{(\widehat{AOB})}{1} = \frac{(\widehat{BO\Gamma})}{2} = \frac{(\widehat{\Gamma O\Delta})}{3} = \frac{(\widehat{\Delta OA})}{4} =$$

$$\frac{(\widehat{AOB}) + (\widehat{BO\Gamma}) + (\widehat{\Gamma O\Delta}) + (\widehat{\Delta OA})}{1+2+3+4} = \frac{360°}{10} = 36°,$$ ὁπότε $(\widehat{AOB}) = 36°$, $(\widehat{BO\Gamma}) = 2(36°) = 72°$, $(\widehat{\Gamma O\Delta}) = 3(36°) = 108°$, $(\widehat{\Delta OA}) = 4(36°) = 144°$.

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ*

51. Δίνεται κυκλ(Ο,ρ) καί ἀκτίνα του ΟΑ. Μέ κέντρο τό Α καί ἀκτίνα $\frac{P}{2}$ γράφουμε κύκλο πού τέμνει τόν κυκλ(Ο,ρ) στά σημεῖα Β καί Γ. Νά δείξετε ὅτι $\widehat{BOA} = \widehat{AO\Gamma}$.

52. Δίνεται ἡμικύκλιο μέ κέντρο Ο καί μία διάμετρός του ΑΒ = 2ρ. Μέ κέντρα τά Α καί Β καί ἀκτίνα ρ γράφουμε κύκλους πού τέμνουν τό ἡμικύκλιο ἀντιστοίχως στά σημεῖα Α′ καί Β′. Νά δειχθεῖ ὅτι $\widehat{AOA'} = \widehat{BOB'}$.

53. Δεῖξτε ὅτι οἱ διχοτόμοι δύο ἐφεξῆς γωνιῶν σχηματίζουν γωνία ἴση μέ τό ἡμιάθροισμα τῶν γωνιῶν αὐτῶν.

54. Θεωροῦμε κυρτή γωνία $\widehat{AOB}$ καί τή διχοτόμο της ΟΔ. Φέρνουμε μία εὐθεία ΟΡ ἐσωτερική τῆς γωνίας $\widehat{BO\Delta}$ καί μία εὐθεία ΟΣ ἐξωτερική τῆς γωνίας $\widehat{AOB}$. Νά δειχθεῖ ὅτι

$$\widehat{PO\Delta} = \frac{1}{2}(\widehat{POA} - \widehat{POB}), \quad \widehat{\Sigma O\Delta} = \frac{1}{2}(\widehat{\Sigma OA} + \widehat{\Sigma OB}).$$

55. Ἄν μέ $(\widehat{\varphi})$ σημειώνουμε τό μέτρο μιᾶς γωνίας $\widehat{\varphi}$, δείξτε ὅτι

$$(\widehat{\varphi + \omega}) = (\widehat{\varphi}) + (\widehat{\omega}).$$

56. Ἀπό σημεῖο Ο μιᾶς εὐθείας ΑΒ φέρνουμε πρός τό ἴδιο μέρος τῆς ΑΒ ἡμιευθεῖες ΟΓ καί ΟΔ τέτοιες, ὥστε οἱ γωνίες $\widehat{AO\Gamma}$, $\widehat{\Gamma O\Delta}$ καί $\widehat{\Delta OB}$ νά εἶναι διαδοχικές. Ἄν ΟΕ, ΟΗ εἶναι οἱ διχοτόμοι τῶν $\widehat{AO\Gamma}$, $\widehat{\Delta OB}$ καί $(\widehat{EOH}) = 100°$, νά ὑπολογισθεῖ τό μέτρο τῆς γωνίας $\widehat{\Gamma O\Delta}$.

57. Θεωροῦμε τέσσερις διαδοχικές ἡμιευθεῖες ΟΑ,ΟΒ,ΟΓ,ΟΔ καί καλοῦμε ΟΚ,ΟΛ,ΟΜ, ΟΝ τίς διχοτόμους τῶν διαδοχικῶν γωνιῶν $\widehat{AOB}$, $\widehat{BO\Gamma}$, $\widehat{\Gamma O\Delta}$, $\widehat{\Delta OA}$. Ἄν τόσο οἱ ἡμιευθεῖες ΟΚ,ΟΜ ὅσο καί οἱ ἡμιευθεῖες ΟΛ,ΟΝ εἶναι ἀντικείμενες, νά δείξετε ὅτι οἱ ἡμιευθεῖες ΟΑ,ΟΓ καί οἱ ΟΒ,ΟΔ εἶναι ἐπίσης ἀντικείμενες.

58. Μία γωνία $\widehat{\varphi}$ εἶναι ἴση μέ $\frac{4}{5}$ ὀρθῆς. Νά βρεθεῖ σέ μοῖρες τό μέτρο τῆς συμπληρωματικῆς καί τῆς παραπληρωματικῆς γωνίας τῆς $\widehat{\varphi}$.

59. Ὑπολογίστε μιά γωνία $\widehat{\varphi}$, ἡ ὁποία εἶναι ἴση μέ τά $\frac{2}{3}$ τῆς παραπληρωματικῆς της, καί μιά γωνία ἡ $\widehat{\omega}$, ὁποία εἶναι ἴση μέ τά $\frac{4}{5}$ τῆς συμπληρωματικῆς της.

60. Νά βρεθεῖ τό μέτρο μιᾶς γωνίας $\widehat{\varphi}$, ὅταν τό ἄθροισμα τῆς συμπληρωματικῆς καί τῆς παραπληρωματικῆς της γωνίας εἶναι ἴσο μέ τό τετραπλάσιο τῆς γωνίας (ἡ γενικότερα ὅταν τό ἄθροισμα αὐτό εἶναι ἴσο μέ $\frac{\kappa}{\lambda}\ \widehat{\varphi}$).

61. Νά βρεθεῖ ὀξεία γωνία $\widehat{\varphi}$ τέτοια, ὥστε ἡ διαφορά της ἀπό τήν παραπληρωματική της νά ἰσοῦται μέ τό διπλάσιο τῆς $\widehat{\varphi}$.

62. Δίνεται κυρτή γωνία $\widehat{AO\Gamma}$ καί ἐσωτερική ἡμιευθεία της ΟΒ τέτοια, ὥστε ἡ διαφορά τῶν γωνιῶν $\widehat{AO\Gamma}$ καί $\widehat{AOB}$ νά εἶναι 90°. Ἄν ΟΕ καί ΟΖ εἶναι οἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν $\widehat{AOB}$ καί $\widehat{AO\Gamma}$, νά δειχθεῖ ὅτι $\widehat{EOZ} = 45°$.

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ**

63. Θεωροῦμε τέσσερις διαδοχικές ἡμιευθεῖες ΟΑ,ΟΒ,ΟΓ,ΟΔ τέτοιες, ὥστε $(\widehat{AOB}) = 150°$, $(\widehat{\Gamma O\Delta}) = \frac{1}{2}$ ὀρθῆς, $(\widehat{\Delta OA}) = \frac{7}{6}$ ὀρθῆς. Νά δείξετε ὅτι ἡ διχοτόμος τῆς $\widehat{BO\Gamma}$ εἶναι ἀντικείμενη ἡμιευθεία τῆς ΟΑ.

64. Ἀπό τήν κορυφή Ο μιᾶς γωνίας $\widehat{AOB}$ φέρνουμε ἐσωτερική ἡμιευθεία της ΟΡ καί δύο ἡμιευθεῖες ΟΑ΄ καί ΟΒ΄ τέτοιες, ὥστε ἡ ΟΑ νά εἶναι διχοτόμος τῆς $\widehat{A'OP}$ καί ἡ ΟΒ νά εἶναι διχοτόμος τῆς $\widehat{B'OP}$. Δεῖξτε ὅτι γιά κάθε θέση τῆς ΟΡ ἔχουμε

$$\widehat{A'OB'} = 2\widehat{AOB}.$$

65. Θεωροῦμε ν γωνίες $\widehat{\varphi}_1, \widehat{\varphi}_2, \ldots, \widehat{\varphi}_\nu$ ἀνάλογες μέ τούς ἀριθμούς 1,2,3,...,ν. Νά ὑπολογισθοῦν τά μέτρα τῶν γωνιῶν αὐτῶν, ὅταν γνωρίζουμε ὅτι τό ἄθροισμά τους εἶναι 90° ἤ 180° ἤ γενικότερα κ ὀρθές.

(Γνωρίζουμε ὅτι $1 + 2 + \ldots + \nu = \frac{\nu(\nu+1)}{2}$, $\forall \nu \in N$).

66. Σέ κυκλ(Ο,ρ) ἡ χορδή ΑΒ εἶναι τετραπλάσια ἀπό τή χορδή ΑΔ. Δεῖξτε ὅτι ἡ κυρτή γωνία $\widehat{AOB}$ εἶναι μεγαλύτερη ἀπό τό τετραπλάσιο τῆς κυρτῆς γωνίας $\widehat{AO\Delta}$.

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 4

1. Ἡ σύγκριση γωνιῶν ἀνάγεται στή σύγκριση τῶν τόξων στά ὁποῖα βαίνουν, ὅταν γίνουν ἐπίκεντρες ἴσων κύκλων. Ἄν λοιπόν ἔχουμε δύο γωνίες $\widehat{\varphi}$ καί $\widehat{\omega}$ οἱ ὁποῖες (ὅταν γράψουμε

μέ κέντρα τίς κορυφές τους δύο ἴσους κύκλους) βαίνουν ἀντίστοιχα στά τόξα $\overset{\frown}{AB}$ καί $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$, θά ἔχουμε

$$\widehat{\varphi} \gtreqless \widehat{\omega} \Longleftrightarrow \overset{\frown}{AB} \gtreqless \overset{\frown}{\Gamma\Delta}.$$

Μέ τόν ἴδιο τρόπο ὁρίζεται καί ἡ πρόσθεση καί ἀφαίρεση στό σύνολο Γ τῶν γωνιῶν. Ἔτσι, ἄν καλέσουμε πάλι $\overset{\frown}{AB}$ καί $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ τά τόξα στά ὁποῖα βαίνουν (ὅταν γίνουν ἐπίκεντρες δύο κύκλων ἀκτίνας ρ) οἱ γωνίες $\widehat{\varphi}$ καί $\widehat{\omega}$, ὁρίζουμε:

— **ἄθροισμα** $\widehat{\varphi} + \widehat{\omega}$ τή γωνία πού εἶναι ἐπίκεντρη κύκλου ἀκτίνας ρ καί βαίνει στό τόξο $\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{\Gamma\Delta}$,

— **διαφορά** $\widehat{\varphi} - \widehat{\omega}$, τή γωνία πού εἶναι ἐπίκεντρη κύκλου ἀκτίνας ρ καί βαίνει στό τόξο $\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{\Gamma\Delta}$.

Τόσο γιά τή σύγκριση τῶν γωνιῶν ὅσο καί γιά τίς πράξεις των ἰσχύουν οἱ ἴδιες ἰδιότητες πού ἰσχύουν στή σύγκριση καί τίς πράξεις τῶν τόξων.

2. Ὁρίζουμε ἀκόμη, **ὅπως ἀκριβῶς στά τόξα ἤ στά εὐθύγραμμα τμήματα,** τό γινόμενο $\frac{\kappa}{\lambda}\widehat{\varphi}$, ὅταν κ καί λ εἶναι φυσικοί ἀριθμοί. Ἄν ἰσχύει μία ἰσότητα τῆς μορφῆς.

$$\widehat{\omega} = \frac{\kappa}{\lambda}\widehat{\varphi}$$

ὁ ἀριθμός κ/λ λέγεται πάλι **λόγος τῆς γωνίας $\widehat{\omega}$ πρός τή γωνία $\widehat{\varphi}$** καί σημειώνεται $\widehat{\omega}/\widehat{\varphi}$. Παίρνοντας γιά «μονάδα» μία ὁρισμένη γωνία $\widehat{\mu} \in \Gamma$, ὁ λόγος $\widehat{\varphi}/\widehat{\mu}$ λέγεται **μέτρο τῆς γωνίας $\widehat{\varphi}$** καί σημειώνεται μέ $(\widehat{\varphi})$. Ἔτσι ἔχουμε καί ἐδῶ $(\widehat{\varphi}) = \widehat{\varphi}/\widehat{\mu}$,
Στή μέτρηση τῶν γωνιῶν ἰσχύουν ὅλες οἱ ἰδιότητες πού ἰσχύουν στή μέτρηση τόξων ἤ εὐθύγραμμων τμημάτων.

Συνήθως γιά μονάδα $\widehat{\mu}$ παίρνουμε τή μοίρα, πού εἶναι ἴση μέ τή γωνία πού, ὅταν γίνει ἐπίκεντρη κύκλου, βαίνει σέ τόξο ἴσο μέ τό 1/360 τοῦ κύκλου. Τότε:

— Ἡ πλήρης γωνία ἔχει μέτρο 360° καί ἡ πεπλατυσμένη γωνία ἔχει μέτρο 180°.
— Μία γωνία πού ἔχει μέτρο 90° λέγεται **ὀρθή γωνία.**.
— Κάθε γωνία μικρότερη (ἤ μεγαλύτερη) ἀπό τήν ὀρθή λέγεται **ὀξεία (ἤ ἀμβλεία)** γωνία.
— Δύο γωνίες πού ἔχουν ἄθροισμα 180° λέγονται **παραπληρωματικές.**
— Δύο γωνίες πού ἔχουν ἄθροισμα 90° λέγονται **συμπληρωματικές.**

3. Δύο κυρτές γωνίες λέγονται **ἐφεξῆς**, ἄν ἔχουν κοινή κορυφή, μιά κοινή πλευρά καί τίς μή κοινές πλευρές ἑκατέρωθεν τῆς κοινῆς.

— **Δύο ἐφεξῆς γωνίες εἶναι παραπληρωματικές ἄν καί μόνο ἄν οἱ μή κοινές πλευρές τους εἶναι ἀντικείμενες ἡμιευθεῖες.**

Γενικότερα, ἄν ἀπό ἕνα σημεῖο μιᾶς εὐθείας ε φέρουμε ἡμιευθεῖες στό ἕνα ἡμιεπίπεδο ἀκμῆς ε, τότε ὅλες οἱ διαδοχικές γωνίες, πού σχηματίζονται, ἔχουν ἄθροισμα 180°. Ἀντιστρόφως, ἄν διαδοχικές γωνίες $\widehat{\varphi}_1, \widehat{\varphi}_2, \ldots, \widehat{\varphi}_\nu$ ἔχουν ἄθροισμα 180°, τότε ἡ πρώτη πλευρά τῆς $\widehat{\varphi}_1$ καί ἡ δεύτερη πλευρά τῆς $\widehat{\varphi}_\nu$ εἶναι ἀντικείμενες ἡμιευθεῖες.

Δύο γωνίες λέγονται **κατακορυφήν,** ἄν ἔχουν κοινή κορυφή καί οἱ πλευρές τῆς μιᾶς εἶναι ἡμιευθεῖες ἀντικείμενες μέ τίς πλευρές τῆς ἄλλης.

— **Οἱ κατακορυφήν γωνίες εἶναι ἴσες.**

Δύο τεμνόμενες εὐθεῖες ε καί ε΄ σχηματίζουν τέσσερις διαδοχικές γωνίες πού ἀνά δύο ἀποτελοῦν ζεῦγος κατακορυφήν γωνιῶν. Οἱ τεμνόμενες εὐθεῖες ε καί ε΄ θά λέγονται **κάθετες,** ἄν καί μόνο ἄν οἱ τέσσερις γωνίες, πού σχηματίζουν, εἶναι ἴσες (ὁπότε καθεμιά τους εἶναι ὀρθή γωνία).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

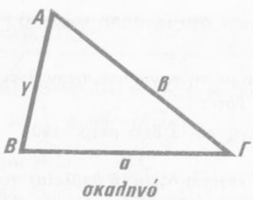
ΤΡΙΓΩΝΑ–ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ ΩΣ ΠΡΟΣ ΚΕΝΤΡΟ

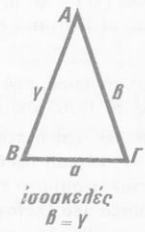
Εἴδη τριγώνων.

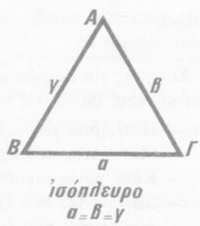
53. Ἄν ὀνομάσουμε Α,Β,Γ τίς κορυφές ἑνός τριγώνου, οἱ πλευρές πού βρίσκονται ἀπέναντι ἀπό τίς κορυφές τους (δηλαδή ἀπέναντι τῶν γωνιῶν $\widehat{A},\widehat{B},\widehat{\Gamma}$) σημειώνονται ἀντίστοιχα μέ α,β,γ. Ἔχουμε λοιπόν

$$\alpha = B\Gamma,\ \beta = A\Gamma,\ \gamma = AB.$$

Ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ, ὅταν ἐξετάζεται ὡς πρός τίς πλευρές του, λέγεται **σκαληνό,**







ἄν οἱ πλευρές του εἶναι ἄνισες μεταξύ τους, **ἰσοσκελές** ἄν δύο πλευρές του εἶναι ἴσες, **ἰσόπλευρο** ἄν καί οἱ τρεῖς πλευρές του εἶναι ἴσες. Σέ ἰσοσκελές τρίγωνο μέ $\beta = \gamma$ ἡ τρίτη πλευρά του $B\Gamma = \alpha$ λέγεται «*βάση*» του. Τό ἰσόπλευρο τρίγωνο μπορεῖ νά θεωρηθεῖ καί ἰσοσκελές μέ βάση ὁποιαδήποτε πλευρά του.

Εἶναι γνωστό ὅτι γιά τίς πλευρές α,β,γ ἑνός ὁποιουδήποτε τριγώνου ἰσχύουν οἱ ἀνισότητες

$$\alpha < \beta + \gamma,\ \ \beta < \alpha + \gamma,\ \ \gamma < \alpha + \beta.$$

Δείξαμε στήν § 23 ὅτι κάθε πλευρά τριγώνου εἶναι καί μεγαλύτερη ἀπό τή διαφορά τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν. Ἔτσι π.χ. ἄν $\beta > \gamma$, γιά τήν πλευρά α ἔχουμε δύο ἀνισότητες, τίς

$$\beta - \gamma < \alpha < \beta + \gamma.$$

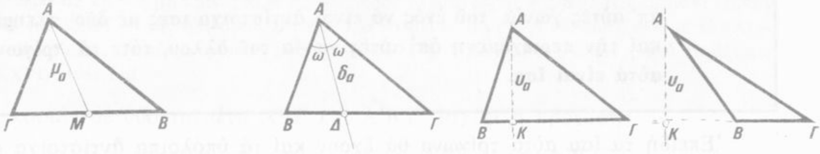
Ἕνα τρίγωνο, ὅταν ἐξετάζεται ὡς πρός τίς γωνίες του, λέγεται **ὀξυγώνιο,** ἄν ὅλες του οἱ γωνίες εἶναι ὀξεῖες, **ὀρθογώνιο** ἄν μία γωνία του εἶναι ὀρθή, **ἀμ-**

βλυγώνιο ἄν μία γωνία του εἶναι ἀμβλεία. Σέ ὀρθογώνιο τρίγωνο ἡ πλευρά πού

βρίσκεται ἀπέναντι ἀπό τήν ὀρθή γωνία λέγεται «**ὑποτείνουσα**».

Διάμεσοι, διχοτόμοι καί ὕψη τριγώνου.

54. Τά εὐθύγραμμα τμήματα, πού συνδέουν τίς κορυφές ἑνός τριγώνου μέ τά μέσα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν του, λέγονται **διάμεσοι** τοῦ τριγώνου. Ἔτσι, ἄν Μ εἶναι τό μέσο τῆς ΒΓ (βλ. σχ. 40), τό εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΜ



σχ. 40 σχ. 41 σχ. 42

εἶναι ἡ διάμεσος τοῦ ΑΒΓ πρός τήν πλευρά του α καί σημειώνεται μέ μ_α. Τό τρίγωνο λοιπόν ἔχει τρεῖς διαμέσους, πού θά σημειώνονται ἀντίστοιχα μ_α, μ_β, μ_γ.

Ἄς θεωρήσουμε τώρα τή διχοτόμο τῆς γωνίας $\widehat{A}$ καί ἄς ὀνομάσουμε Δ τό σημεῖο, στό ὁποῖο τέμνει τήν ἀπέναντι της πλευρά α (βλ. σχ. 41). Τότε τό εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΔ λέγεται **ἐσωτερική διχοτόμος τοῦ τριγώνου** ἤ ἁπλῶς **διχοτόμος τοῦ τριγώνου** καί θά σημειώνεται δ_α. Ἔτσι ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ ἔχει τρεῖς διχοτόμους, πού θά σημειώνονται ἀντίστοιχα δ_α, δ_β, δ_γ.

Ἄς θεωρήσουμε τέλος μία εὐθεία ε πού διέρχεται ἀπό τήν κορυφή Α καί εἶναι κάθετη στήν εὐθεία ΒΓ[1]. Ἄν ὀνομάσουμε Κ τό σημεῖο στό ὁποῖο τέμνει τήν ΒΓ (βλ. σχ.42), τό εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΚ λέγεται **ὕψος** τοῦ τριγώνου καί θά σημειώνεται μέ υ_α. Ἔτσι ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ ἔχει τρία ὕψη, πού θά σημειώνονται ἀντίστοιχα, υ_α, υ_β, υ_γ.

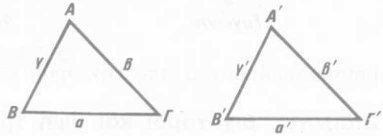
Ἄν φέρουμε τή διάμεσο $AM = \mu_\alpha$, τή διχοτόμο $A\Delta = \delta_\alpha$ καί τό ὕψος $AK = \upsilon_\alpha$, παρατηροῦμε ὅτι τά σημεῖα Μ καί Δ εἶναι πάντοτε ἐσωτερικά σημεῖα τῆς πλευρᾶς ΒΓ, ἐνῶ τό σημεῖο Κ μπορεῖ νά βρίσκεται καί στήν προέκταση τῆς ΒΓ.

1. Θά δοῦμε παρακάτω ὅτι ὑπάρχει μία καί μόνο μία τέτοια εὐθεία.

Ἰσότητα τριγώνων.

55. Ὁρισμός: Δύο τρίγωνα θά λέγονται ἴσα, ἄν καί μόνο ἄν ἔχουν τίς πλευρές τους μία πρός μία ἴσες καί τίς ἀπέναντι ἀπό τίς ἴσες πλευρές γωνίες τους ἐπίσης ἴσες.

Γιά νά δηλώσουμε ὅτι τά δύο τρίγωνα ΑΒΓ καί Α΄Β΄Γ΄ εἶναι ἴσα, θά γράφουμε τριγΑΒΓ = τριγΑ΄Β΄Γ΄ ἤ ἁπλῶς ΑΒΓ=Α΄Β΄Γ΄. Σέ ἴσα τρίγωνα ΑΒΓ καί Α΄Β΄Γ΄ τοποθετοῦμε ἔτσι τά γράμματα τῶν κορυφῶν τους, ὥστε νά εἶναι Α΄Β΄= = ΑΒ, Β΄Γ΄ = ΒΓ, Γ΄Α΄ = ΓΑ. Ἔχουμε λοιπόν κατά τόν ὁρισμό μας



$$\text{τριγ}AB\Gamma = \text{τριγ}A'B'\Gamma' \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha = \alpha',\ \beta = \beta',\ \gamma = \gamma' \\ \widehat{A} = \widehat{A'},\ \widehat{B} = \widehat{B'},\ \widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma'}. \end{cases}$$

Δεχόμαστε τώρα τό ἀξίωμα:

XXVI. Ἄν ἔχουμε δύο τρίγωνα τέτοια ὥστε δύο πλευρές καί ἡ περιεχόμενη ἀπ᾿ αὐτές γωνία τοῦ ἑνός νά εἶναι ἀντίστοιχα ισες μέ δύο πλευρές καί τήν περιεχόμενη ἀπ᾿ αὐτές γωνία τοῦ ἄλλου, τότε τά τρίγωνα αὐτά εἶναι ἴσα.

Ἐπειδή τά ἴσα αὐτά τρίγωνα θά ἔχουν καί τά ὑπόλοιπα ἀντίστοιχα στοιχεῖα τους ἴσα, τό ἀξίωμά μας γιά δύο τρίγωνα ΑΒΓ καί Α΄Β΄Γ΄ διατυπώνεται μέ τήν πρόταση:

$$\beta = \beta',\ \gamma = \gamma',\ \widehat{A} = \widehat{A'} \Rightarrow \begin{cases} \text{τριγ}AB\Gamma = \text{τριγ}A'B'\Gamma' \\ \alpha = \alpha',\ \widehat{B} = \widehat{B'},\ \widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma'}. \end{cases}$$

56. Σάν ἐφαρμογή τοῦ παραπάνω ἀξιώματος θά ἀποδείξουμε ὅτι:

ΘΕΩΡΗΜΑ: Σέ κάθε τρίγωνο ἀπέναντι ἀπό ἴσες πλευρές βρίσκονται ἴσες γωνίες, δηλ. $\beta = \gamma \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{\Gamma}$.

Ἀπόδ. Ἄς θεωρήσουμε ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ μέ ΑΒ = ΑΓ. Ἄν φέρουμε τή διχοτόμο του ΑΔ, ἔχουμε τριγΑΒΔ = τριγΑΓΔ γιατί ΑΒ = ΑΓ, ΑΔ = ΑΔ, $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$) καί ἄρα $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$.

Ἀπό τήν πρόταση αὐτή ἔχουμε ἀμέσως τά πορίσματα:

— Στό ἰσοσκελές τρίγωνο οἱ γωνίες πού πρόσκεινται στή βάση του εἶναι ἴσες.

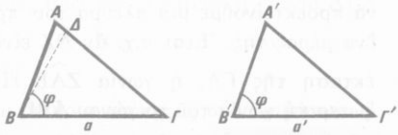
— Σέ ἰσόπλευρο τρίγωνο ὅλες οἱ γωνίες του εἶναι ἴσες.

Κριτήρια ἰσότητας τριγώνων.

57. Τό ἀξίωμα XXVI εἶναι κριτήριο ἰσότητας τριγώνων, δηλαδή μᾶς ἐπιτρέπει νά διαπιστώνουμε τήν ἰσότητα δύο τριγώνων μέ λιγότερα στοιχεῖα ἀπό ὅσα ἀπαιτεῖ ὁ ὁρισμός της. Δύο ἄλλα βασικά κριτήρια ἰσότητας τριγώνων δίνουν τά θεωρήματα:

ΘΕΩΡΗΜΑ Ι. Ἄν ἔχουμε δύο τρίγωνα τέτοια ὥστε μία πλευρά καί οἱ προσκείμενες σ' αὐτή γωνίες τοῦ ἑνός νά εἶναι ἀντίστοιχα ἴσες μέ μία πλευρά καί τίς προσκείμενες σ' αὐτή γωνίες τοῦ ἄλλου, τότε τά τρίγωνα αὐτά εἶναι ἴσα.

Ἀπόδ. Ἄς θεωρήσουμε δύο τρίγωνα ΑΒΓ καί Α΄Β΄Γ΄ τέτοια ὥστε ΒΓ = Β΄Γ΄, $\widehat{B} = \widehat{B'}$, $\widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma'}$.



Ἄν πάρουμε στήν πλευρά ΓΑ τμῆμα ΓΔ = Γ΄Α΄, παρατηροῦμε ὅτι τριγ ΔΒΓ = τριγ Α΄Β΄Γ΄ (γιατί ΒΓ=Β΄Γ΄ ΓΔ=Γ΄Α΄, $\widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma'}$) καί ἄρα

$$\widehat{\Delta B\Gamma} = \widehat{B'} = \widehat{B}\,.$$

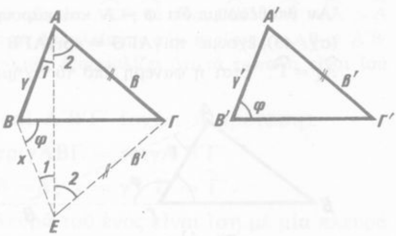
Τότε ὅμως οἱ ἴσες γωνίες $\widehat{\Delta B\Gamma}$ καί $\widehat{AB\Gamma}$ θά ταυτίζονται, γιατί ἔχουν κοινή κορυφή Β, κοινή πλευρά ΒΓ καί τίς μή κοινές πλευρές τους πρός τό ἴδιο μέρος τῆς ΒΓ. Ἡ ἡμιευθεία λοιπόν ΒΔ ταυτίζεται μέ τήν ἡμιευθεία ΒΑ καί ἄρα τό {Δ} = ΒΔ ∩ ΓΑ θά ταυτίζεται μέ τό {Α} = = ΒΑ ∩ ΓΑ. Ἔτσι τά τρίγωνά μας ἔχουν καί ΓΑ = ΓΔ = Γ΄Α΄, ὁπότε (κατά τό ἀξίωμα XXVI) εἶναι ἴσα.

Ἔτσι λοιπόν σέ δύο τρίγωνα ΑΒΓ καί Α΄Β΄Γ΄ ἰσχύει ἡ πρόταση:

$$\alpha = \alpha',\ \widehat{B} = \widehat{B'},\ \widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma'} \Rightarrow \begin{cases} \text{τριγ}AB\Gamma = \text{τριγ}A'B'\Gamma' \\ \beta = \beta',\ \gamma = \gamma',\ \widehat{A} = \widehat{A'}. \end{cases}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΙ. Ἄν ἔχουμε δύο τρίγωνα τέτοια ὥστε οἱ πλευρές τοῦ ἑνός νά εἶναι ἴσες μία πρός μία μέ τίς πλευρές τοῦ ἄλλου, τότε τά τρίγωνα αὐτά εἶναι ἴσα.

Ἀπόδ. Ἄς θεωρήσουμε δύο τρίγωνα ΑΒΓ καί Α΄Β΄Γ΄ μέ ΑΒ = Α΄Β΄ καί ἄς κατασκευάσουμε μέ κορυφή τό Β καί πλευρά ΒΓ μία γωνία $\widehat{\Gamma BX}$ ἡ ὁποία νά εἶναι ἐφεξῆς μέ τήν $\widehat{B}$ καί ἴση μέ τήν $\widehat{B'}$. Ἄν πάνω στή ΒΧ πάρουμε τμῆμα ΒΕ = Β΄Α΄ = ΒΑ, θά ἔχουμε τριγΒΓΕ = τριγΒ΄Γ΄Α΄ (γιατί ΒΓ= Β΄Γ΄, ΒΕ = Β΄Α΄, $\widehat{\Gamma BE} = \widehat{B'}$) καί ἄρα



ΓΕ = Γ΄Α΄ = ΓΑ καί $\widehat{BE\Gamma} = \widehat{A'}$.

Παρατηροῦμε τώρα ὅτι ἀπό τά ἰσοσκελή τρίγωνα ΑΒΕ καί ΑΓΕ ἔχουμε $\widehat{A_1} = \widehat{E_1}$, $\widehat{A_2} = \widehat{E_2} \Rightarrow \widehat{A_1} + \widehat{A_2} = \widehat{E_1} + \widehat{E_2}$ καί ἑπομένως $\widehat{A} = \widehat{BE\Gamma} = \widehat{A'}$. Ἔτσι τά τρίγωνά μας εἶναι ἴσα, γιατί ἔχουν β = β΄, γ = γ΄, $\widehat{A} = \widehat{A'}$.

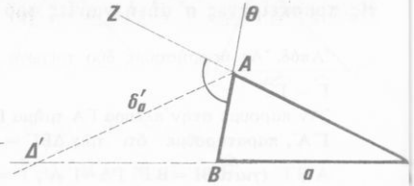
Δείξαμε λοιπόν ὅτι σέ δύο τρίγωνα ΑΒΓ καί Α΄Β΄Γ΄ ἰσχύει ἡ πρόταση:

$$\alpha = \alpha', \ \beta = \beta', \ \gamma = \gamma' \Rightarrow \begin{cases} \text{τριγ}ΑΒΓ = \text{τριγ}Α'Β'Γ' \\ \widehat{Α} = \widehat{Α'}, \ \widehat{Β} = \widehat{Β'}, \ \widehat{Γ} = \widehat{Γ'}. \end{cases}$$

Παρατηροῦμε ὅτι ὅλα τά κριτήρια ἰσότητας δύο τριγώνων περιέχουν μία τουλάχιστον ἰσότητα μεταξύ τῶν πλευρῶν τους, δηλαδή ἀπαραίτητο στοιχεῖο ἰσότητας δύο τριγώνων εἶναι ἡ ἰσότητα μιᾶς τουλάχιστον πλευρᾶς τοῦ ἑνός μέ μιά πλευρά τοῦ ἄλλου.

Ἐξωτερικές γωνίες τριγώνου.

58. **Ὁρισμός:** Κάθε γωνία πού εἶναι ἐφεξῆς καί παραπληρωματική μιᾶς γωνίας ἑνός τριγώνου λέγεται **ἐξωτερική γωνία** τοῦ τριγώνου.



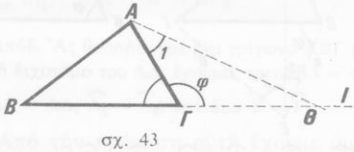
Γιά νά κατασκευάσουμε μιά ἐξωτερική γωνία τριγώνου ΑΒΓ, δέν ἔχουμε παρά νά προεκτείνουμε μιά πλευρά του πρός τό ἕνα μέρος της. Ἔτσι π.χ. ἄν ΑΖ εἶναι προέκταση τῆς ΓΑ, ἡ γωνία $\widehat{ΖΑΒ}$ εἶναι ἐξωτερική γωνία τοῦ τριγώνου ΑΒΓ μέ κορυφή τό Α καί λέμε γι᾽ αὐτή ὅτι ἔχει *«ἀπέναντι»* της τίς ἐσωτερικές γωνίες $\widehat{Β}$ καί $\widehat{Γ}$. Παρατηροῦμε ὅτι ὡς ἐξωτερική γωνία μέ κορυφή Α μποροῦμε νά πάρουμε καί τήν $\widehat{ΘΑΓ}$ πού σχηματίζεται, ἄν προεκτείνουμε τήν ΒΑ, ἡ γωνία ὅμως αὐτή εἶναι κατακορυφήν καί ἄρα ἴση μέ τήν $\widehat{ΖΑΒ}$.

Ἄν ἡ διχοτόμος τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας $\widehat{ΖΑΒ}$ τέμνει τήν προέκταση τῆς πλευρᾶς ΒΓ στό Δ', τό εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΔ' λέγεται **ἐξωτερική διχοτόμος** τῆς γωνίας $\widehat{Α}$ καί θά σημειώνεται δ'_α. Ἔτσι ἕνα τρίγωνο ἔχει τρεῖς ἐξωτερικές διχοτόμους πού θά τίς σημειώνουμε ἀντίστοιχα δ_α', δ_β', δ_γ'.

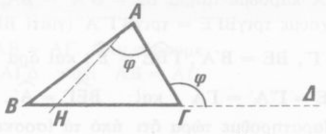
ΘΕΩΡΗΜΑ: Κάθε ἐξωτερική γωνία τριγώνου ΑΒΓ εἶναι μεγαλύτερη καί ἀπό τίς δύο ἀπέναντί της ἐσωτερικές γωνίες.

Ἀπόδ. Ἄς θεωρήσουμε τρίγωνο ΑΒΓ καί τήν ἐξωτερική του γωνία $\widehat{ΑΓΙ} = \varphi$. Γιά νά δείξουμε π.χ. ὅτι $\widehat{\varphi} > \widehat{Α}$, ἀρκεῖ νά ἀποκλείσουμε τίς περιπτώσεις $\widehat{\varphi} = \widehat{Α}$ καί $\widehat{\varphi} < \widehat{Α}$.

Ἄν ὑποθέσουμε ὅτι $\widehat{\varphi} = \widehat{Α}$ καί πάρουμε στήν προέκταση ΓΙ τῆς ΒΓ τμῆμα ΓΘ = ΑΒ (σχ. 43), ἔχουμε τριγΑΓΘ = τριγΑΓΒ (γιατί ΑΓ = ΑΓ, ΓΘ = ΑΒ, $\widehat{ΑΓΘ} = \widehat{Α}$) καί ἄρα $\widehat{Α_1} = \widehat{Γ}$. Ἔτσι ἡ φανερή ἀπό τό σχῆμα μας ἰσότητα $\widehat{Γ} + \widehat{\varphi} = 180°$ γράφεται $\widehat{Α_1} + \widehat{Α} =$



σχ. 43

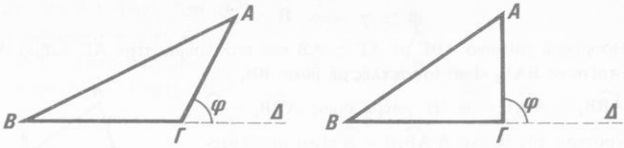


σχ. 44

$= 180°$ καί ἑπομένως θά πρέπει οἱ ἐφεξῆς γωνίες $\widehat{Α_1}$ καί $\widehat{Α}$ νά ἔχουν τίς μή κοινές πλευρές τους ΑΒ καί ΑΘ ἐπ᾽ εὐθείας, πράγμα ἀδύνατο, ἀφοῦ τό Α δέν ἀνήκει στήν ΒΘ.

Ἄν ὑποθέσουμε ὅτι $\varphi < \widehat{Α}$ καί φέρουμε ἐσωτερική ἡμιευθεία τῆς $\widehat{Α}$ πού τέμνει τήν ΒΓ στό Η (σχ. 44) καί σχηματίζει γωνία $\widehat{\varphi}$ μέ τήν ΑΓ, τό τρίγωνο ΑΗΓ ἔχει τήν ἐξωτερική γωνία του $\widehat{ΑΓΔ}$ ἴση μέ μιά ἀπέναντί της ἐσωτερική, πράγμα ἀδύνατο κατά τήν προηγούμενη ἀπόδειξη.

Ἀπό τό θεώρημα αὐτό προκύπτει ὅτι **κάθε τρίγωνο πού ἔχει μιά γωνία του ἀμβλεία (ἤ ὀρθή) θά ἔχει τίς ἄλλες δύο γωνίες του ὀξεῖες,** γιατί ἄν π.χ. εἶναι



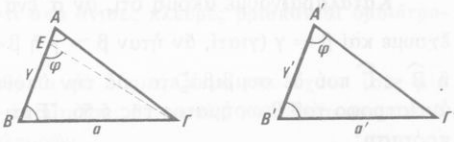
$\widehat{Γ} \geqq 90°$, οἱ γωνίες $\widehat{Α}$ καί $\widehat{Β}$ εἶναι μικρότερες ἀπό τήν ἐξωτερική γωνία $\widehat{ΑΓΔ} = \widehat{\varphi}$ πού εἶναι ὀξεία (ἤ ὀρθή), ἀφοῦ $\widehat{\varphi} = 180° - \widehat{Γ}$. Ἔτσι ἕνα τρίγωνο μπορεῖ νά ἔχει μιά τό πολύ ἀμβλεία (ἤ ὀρθή) γωνία.

59. Θά ἀποδείξουμε τώρα ἕνα ἀκόμη κριτήριο ἰσότητας δύο τριγώνων.

ΘΕΩΡΗΜΑ: Ἄν ἔχουμε δύο τρίγωνα τέτοια ὥστε μία πλευρά, ἡ ἀπέναντί της γωνία καί μία προσκείμενη σ' αὐτή γωνία τοῦ ἑνός τριγώνου νά εἶναι ἀντίστοιχα ἴσες μέ μία πλευρά, τήν ἀπέναντί της γωνία καί μία προσκείμενη σ' αὐτή γωνία τοῦ ἄλλου τριγώνου, τότε τά τρίγωνα αὐτά εἶναι ἴσα.

Ἀπόδ. Ἄν θεωρήσουμε δύο τρίγωνα ΑΒΓ καί Α΄Β΄Γ΄ τέτοια ὥστε ΒΓ = Β΄Γ΄, $\widehat{Α} = \widehat{Α'}$ καί $\widehat{Β} = \widehat{Β'}$, θά ἀποδείξουμε ὅτι ἔχουμε σ' αὐτά καί ΑΒ = Α΄Β΄.

Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι ΑΒ ≠ Α΄Β΄ καί μάλιστα ὅτι ΑΒ > Α΄Β΄. Τότε, ἄν πάρουμε στήν ΒΑ τμῆμα ΒΕ=Β΄Α΄, θά ἔχουμε τριγΒΕΓ = τριγΒ΄Α΄Γ΄



(γιατί ΒΕ = Β΄Α΄, ΒΓ = Β΄Γ΄, $\widehat{Β} = \widehat{Β'}$) καί τότε

$$\widehat{ΒΕΓ} = \widehat{Α'}.$$

Ἐπειδή ὅμως ἡ γωνία $\widehat{ΒΕΓ}$ εἶναι ἐξωτερική στό τρίγωνο ΑΕΓ, θά εἶναι $\widehat{ΒΕΓ} > \widehat{Α} \Rightarrow \widehat{Α'} > \widehat{Α}$ πράγμα πού ἀντιβαίνει στήν ὑπόθεσή μας. Ἔτσι ἀποκλείσαμε τήν περίπτωση ΑΒ ≠ Α΄Β΄ καί ἄρα δέν ἀπομένει παρά ἡ ΑΒ = Α΄Β΄, πού μᾶς ἐξασφαλίζει ὅτι τά τρίγωνα εἶναι ἴσα (γιατί ἔχουν α = α΄, γ = γ΄ καί $\widehat{Β} = \widehat{Β'}$).

Δείξαμε λοιπόν ὅτι σέ δύο τρίγωνα ΑΒΓ καί Α΄Β΄Γ΄ ἰσχύει ἡ πρόταση:

$$α = α', \ \widehat{Α} = \widehat{Α'}, \ \widehat{Β} = \widehat{Β'} \Rightarrow \begin{cases} τριγΑΒΓ = τριγΑ'Β'Γ' \\ β = β', \ γ = γ', \ \widehat{Γ} = \widehat{Γ'}. \end{cases}$$

Ἔτσι λοιπόν δύο τρίγωνα, στά ὁποῖα μία πλευρά τοῦ ἑνός εἶναι ἴση μέ μία πλευρά τοῦ ἄλλου, θά εἶναι ἴσα ὄχι μόνον ὅταν ἔχουν ἴσες μία πρός μία τίς προσκείμενες στίς ἴσες πλευρές γωνίες τους, ἀλλά καί ὅταν ἔχουν ἴσες μία πρός μία δύο ἄλλες γωνίες δμοίως κείμενες ὡς πρός τίς ἴσες πλευρές.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 70-75

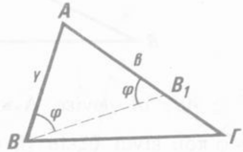
Σύγκριση πλευρῶν καί γωνιῶν σέ ἕνα τρίγωνο.

60. Εἴδαμε ὅτι σ' ἕνα τρίγωνο ἀπέναντι ἴσων πλευρῶν βρίσκονται ἴσες γωνίες (βλ. § 56). Γενικεύοντας τήν ἰδιότητα αὐτῆς θά δείξουμε ὅτι:

ΘΕΩΡΗΜΑ: Σέ κάθε τρίγωνο ΑΒΓ οἱ γωνίες πού βρίσκονται ἀπέναντι ἀπό δύο ἄνισες πλευρές εἶναι ὁμοιότροπα ἄνισες καί ἀντιστρόφως, δηλαδή

$$\beta > \gamma \iff \widehat{B} > \widehat{\Gamma}.$$

Ἀπόδ. Θεωροῦμε τρίγωνο ΑΒΓ μέ ΑΓ > ΑΒ καί παίρνουμε στήν ΑΓ τμῆμα $AB_1 = AB$. Τότε τό τρίγωνο BAB_1 εἶναι ἰσοσκελές μέ βάση BB_1 καί ἔχουμε $\widehat{ABB_1} = \widehat{AB_1B} = \widehat{\varphi}$. Ἡ γωνία ὅμως $\widehat{ABB_1} = \widehat{\varphi}$ εἶναι μικρότερη τῆς $\widehat{B}$, ἐνῶ ἡ $\widehat{AB_1B} = \widehat{\varphi}$ εἶναι μεγαλύτερη τῆς $\widehat{\Gamma} = \widehat{B}$, γιατί εἶναι ἐξωτερική τοῦ τριγώνου $BB_1\Gamma$. Ἄρα ἔχουμε $\widehat{B} > \widehat{\varphi}$ καί $\widehat{\varphi} > \widehat{\Gamma} \Rightarrow \widehat{B} > \widehat{\Gamma}$.



Ἀντιστρόφως, ἄν στό τρίγωνο ΑΒΓ ἔχουμε $\widehat{B} > \widehat{\Gamma}$, τότε θά εἶναι ΑΓ > ΑΒ (ἀφοῦ ἄν ἦταν ΑΓ = ΑΒ ἤ ΑΓ < ΑΒ, θά εἴχαμε καί $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$ ἤ $\widehat{B} < \widehat{\Gamma}$).

Ἀπό τό θεώρημα αὐτό συμπεραίνουμε ὅτι ἀπέναντι ἀπό τή μεγαλύτερη πλευρά (ἤ γωνία) τριγώνου βρίσκεται ἡ μεγαλύτερη γωνία (ἤ πλευρά) του. Ἔτσι π.χ. μεγαλύτερη πλευρά ἑνός ὀρθογώνιου τριγώνου εἶναι ἡ ὑποτείνουσα (ἀφοῦ μεγαλύτερη γωνία τοῦ ὀρθογώνιου τριγώνου εἶναι ἡ ὀρθή). Ἐπίσης, μεγαλύτερη πλευρά ἑνός ἀμβλυγώνιου τριγώνου εἶναι αὐτή πού βρίσκεται ἀπέναντι ἀπό τήν ἀμβλεία γωνία του.

Καταλαβαίνουμε ἀκόμη ὅτι, ἄν σ' ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ ἔχουμε $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$, τότε θά ἔχουμε καί $\beta = \gamma$ (γιατί, ἄν ἦταν $\beta > \gamma$ ἤ $\beta < \gamma$, θά εἴχαμε ἀπό τό θεώρημα $\widehat{B} > \widehat{\Gamma}$ ἤ $\widehat{B} < \widehat{\Gamma}$ πού δέ συμβιβάζεται μέ τήν ὑπόθεσή μας). Ἡ ἰδιότητα αὐτή εἶναι τό ἀντίστροφο τοῦ θεωρήματος τῆς § 56. Ἔτσι ἔχουμε τώρα τήν πιό ὁλοκληρωμένη πρόταση:

— Σέ κάθε τρίγωνο ἀπέναντι ἀπό ἴσες πλευρές βρίσκονται ἴσες γωνίες καί ἀντιστρόφως, δηλαδή:

$$\beta = \gamma \iff \widehat{B} = \widehat{\Gamma}$$

Ἀπό τήν πρόταση αὐτή ἔχουμε ἀμέσως τά πορίσματα:

— **Κάθε τρίγωνο πού ἔχει δύο γωνίες του ἴσες εἶναι ἰσοσκελές καί ἀντιστρόφως.**

— **Κάθε ἰσογώνιο τρίγωνο εἶναι ἰσόπλευρο καί ἀντιστρόφως.**

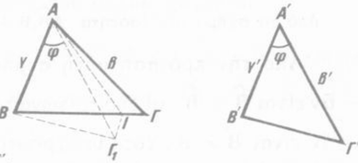
Σύγκριση πλευρῶν καί γωνιῶν σέ δύο τρίγωνα.

61. Εἴδαμε ὅτι, ἄν δύο τρίγωνα ἔχουν ἴσες μία πρός μία δύο πλευρές τους καί τίς περιεχόμενες ἀπό τίς πλευρές αὐτές γωνίες, τότε τά τρίγωνα αὐτά εἶναι ἴσα καί θά ἔχουν ἴσα καί ὅλα τά ἄλλα ἀντίστοιχα στοιχεῖα τους. Θά συγκρίνουμε τώρα ἀντίστοιχα στοιχεῖα σέ δύο τρίγωνα, πού ἔχουν πάλι ἴσες μία πρός μία δύο πλευρές τους ἀλλά οἱ περιεχόμενες ἀπό τίς πλευρές αὐτές γωνίες εἶναι ἄνισες.

ΘΕΩΡΗΜΑ. Δύο τρίγωνα πού ἔχουν ἴσες μία πρός μία δύο πλευρές τους, ἄν ἔχουν τίς περιεχόμενες ἀπό τίς ἴσες πλευρές γωνίες ἄνισες, τότε θά ἔχουν ὁμοιότροπα ἄνισες καί τίς τρίτες πλευρές τους καί ἀντιστρόφως, δηλαδή

$$\beta = \beta', \ \gamma = \gamma', \ \widehat{A} > \widehat{A}' \iff \beta = \beta', \ \gamma = \gamma', \ \alpha > \alpha'.$$

Ἀπόδ. Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι $\widehat{A} > \widehat{A}'$. Φέρνουμε ἐσωτερική ἡμιευθεία τῆς $\widehat{A}$ πού νά σχηματίζει μέ τήν ΑΒ γωνία ἴση μέ $\widehat{A}'$ καί παίρνουμε σ' αὐτή τμῆμα $Α\Gamma_1 = Α'\Gamma'$. Τότε ἔχουμε τριγ $ΑΒ\Gamma_1$ = τριγΑ'Β'Γ' (γιατί ΑΒ= Α'Β', $Α\Gamma_1$=Α'Γ', $\widehat{ΒΑ\Gamma_1} = \widehat{A}'$) καί ἄρα



$$Β\Gamma_1 = Β'\Gamma'.$$

Ἄν τώρα ἡ διχοτόμος τῆς $\widehat{\Gamma_1 Α\Gamma}$ τέμνει τήν ΒΓ στό Ι, ἔχουμε καί τριγ$Α\Gamma_1 Ι$ = τριγΑΙΓ (γιατί $Α\Gamma_1 = Α'\Gamma' = Α\Gamma$, ΑΙ = ΑΙ, $\widehat{\Gamma_1 ΑΙ} = \widehat{ΙΑ\Gamma}$) δηλαδή

$$\Gamma_1 Ι = Ι\Gamma.$$

Ἔτσι ἡ ἀνισότητα $Β\Gamma_1 < ΒΙ + Ι\Gamma_1$ γράφεται $Β'\Gamma' < ΒΙ + Ι\Gamma$ ἤ $Β'\Gamma' < Β\Gamma$.

Ἀντιστρόφως, ἄς ὑποθέσουμε ὅτι $Β\Gamma > Β'\Gamma'$. Τότε δέν μπορεῖ νά ἔχουμε $\widehat{A} = \widehat{A}'$, γιατί στήν περίπτωση αὐτή θά ἦταν τριγΑΒΓ = τριγΑ'Β'Γ' ⇒ ΒΓ = Β'Γ', πού εἶναι ἀντίθετο μέ τήν ὑπόθεσή μας. Ἐπίσης δέν μπορεῖ νά ἔχουμε καί $\widehat{A} < \widehat{A}'$, γιατί στήν περίπτωση αὐτή θά εἴχαμε καί $Β\Gamma < Β'\Gamma'$, πού εἶναι πάλι ἀντίθετο μέ τήν ὑπόθεσή μας. Ἄρα ἡ μόνη δυνατή σχέση πού ἀπομένει εἶναι $\widehat{A} > \widehat{A}'$.

Λέμε λοιπόν συντομότερα, **προϋποθέτοντας τίς δύο ἰσότητες μεταξύ τῶν πλευρῶν τους, ὅτι «σέ δύο τρίγωνα ἀπέναντι ἀπό ἄνισες πλευρές βρίσκονται ὁμοιότροπα ἄνισες γωνίες καί ἀντιστρόφως».**

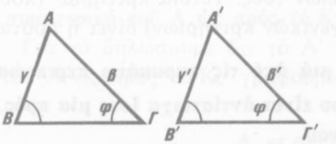
62. Θά συγκρίνουμε τέλος στοιχεῖα σέ δύο τρίγωνα πού ἔχουν ἴσες μία πρός μία δύο πλευρές τους καί ἔχουν ἀκόμη ἴσες τίς γωνίες πού βρίσκονται ἀπέναντι ἀπό τό ἕνα ζεῦγος τῶν ἴσων πλευρῶν.

Στήν περίπτωση αὐτή ἔχουμε τήν πρόταση:

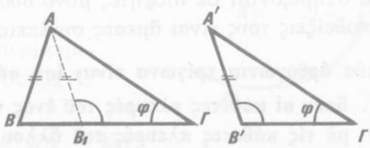
Ἄν δύο τρίγωνα ἔχουν ἴσες μία πρός μία δύο πλευρές τους καί τίς γωνίες πού βρίσκονται ἀπέναντι ἀπό τό ἕνα ζεῦγος τῶν ἴσων πλευρῶν, τότε ἔχουν τίς γωνίες πού βρίσκονται ἀπέναντι ἀπό τό ἄλλο ζεῦγος τῶν ἴσων πλευρῶν ἤ ἴσες ἤ παραπληρωματικές, δηλαδή:

$$\beta = \beta', \ \gamma = \gamma', \ \widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma}' \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{B}' \ \text{ἤ} \ \widehat{B} + \widehat{B}' = 180^0.$$

Ἀπόδ. Οἱ πλευρές ΒΓ καί Β'Γ' θά εἶναι ἴσες ἤ ἄνισες. Ἄν εἶναι ΒΓ = Β'Γ', τότε τριγΑΒΓ=



σχ. 45.



σχ. 46

$=$ τρ ιγ$A'B'\Gamma'$ καί ἄρα $\widehat{B} = \widehat{B'}$ (βλ. σχ. 45). Ἄν εἶναι $B\Gamma \neq B'\Gamma'$, παίρνουμε στή μεγαλύτερη, π.χ. στήν $B\Gamma$, τμῆμα $\Gamma B_1 = \Gamma'B'$ (βλ. σχ. 46). Ἔχουμε τότε τριγ$A\Gamma B_1$ = τριγ$A'\Gamma'B'$ (γιατί $A\Gamma = A'\Gamma'$, $\Gamma B_1 = \Gamma'B'$, $\widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma'}$) καί ἄρα

$$AB_1 = A'B' = AB \quad \text{καί} \quad A\widehat{B_1}\Gamma = \widehat{B'}.$$

Τό τρίγωνο λοιπόν BAB_1 εἶναι ἰσοσκελές καί ἑπομένως $A\widehat{B_1}B = \widehat{B}$. Τότε ὅμως ἡ φανερή ἀπό τό σχῆμα μας ἰσότητα $A\widehat{B_1}B + A\widehat{B_1}\Gamma = 180°$ γράφεται $\widehat{B} + \widehat{B'} = 180°$.

Ἀπό τήν πρόταση αὐτή συμπεραίνουμε ὅτι:

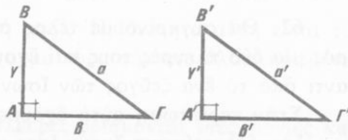
— ἄν εἶναι $\widehat{B} = \widehat{B'}$, τά δύο τρίγωνα εἶναι ἴσα (γιατί ἔχουμε τήν περίπτωση τῆς §59)·

— ἄν εἶναι $\widehat{B} \neq \widehat{B'}$, τότε ὑποχρεωτικά οἱ γωνίες $\widehat{B}$ καί $\widehat{B'}$ εἶναι παραπληρωματικές καί ἑπομένως ἡ μία θά εἶναι ὀξεία καί ἡ ἄλλη ἀμβλεία.

Σέ πολλές περιπτώσεις διακρίνουμε ἀπό τά δεδομένα μας ὅτι δέν μπορεῖ οἱ γωνίες $\widehat{B}$ καί $\widehat{B'}$ να εἶναι παραπληρωματικές, ὅπως π.χ. ὅταν καί οἱ δύο αὐτές γωνίες εἶναι ἀμβλεῖες ἤ ὀξεῖες. Τότε ἔχουμε ὁπωσδήποτε $\widehat{B} = \widehat{B'}$ καί τά τρίγωνά μας εἶναι ἴσα.

Κριτήρια ἰσότητας ὀρθογώνιων τριγώνων.

63. Εἴδαμε ὅτι σ' ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ μέ $\widehat{A} = 90°$ μεγαλύτερη γωνία του εἶναι ἡ ὀρθή, δηλαδή ἡ $\widehat{A}$. Ἔτσι οἱ δύο ἄλλες γωνίες του $\widehat{B}$ καί $\widehat{\Gamma}$ πού πρόσκεινται στήν ὑποτείνουσα $B\Gamma$ εἶναι ὀξεῖες. Οἱ πλευρές AB καί $A\Gamma$ τῆς ὀρθῆς γωνίας του λέγονται **κάθετες πλευρές** τοῦ ὀρθογώνιου τριγώνου καί κάθε μία τους εἶναι μικρότερη ἀπό τήν ὑποτείνουσα (ἀφοῦ ἡ ἀπέναντι γωνία της εἶναι ὀξεία καί ἄρα μικρότερη ἀπό τήν ὀρθή πού εἶναι ἀπέναντι ἀπό τήν ὑποτείνουσα).



Ἄς θεωρήσουμε τώρα δύο ὀρθογώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ καί $A'B'\Gamma'$ μέ $\widehat{A} = 90°$ καί $\widehat{A'} = 90°$. Στά τρίγωνα αὐτά ἔχουμε πάντοτε μιά γωνία τοῦ ἑνός ἴση μέ μιά γωνία τοῦ ἄλλου (ἀφοῦ $\widehat{A} = \widehat{A'} = 90°$) καί ἔτσι ἀπό τά γενικά κριτήρια ἰσότητας δύο τριγώνων θά προκύπτουν κριτήρια ἰσότητας ὀρθογώνιων τριγώνων πού θά στηρίζονται σέ ἰσότητες μόνο δύο στοιχείων τους. Τέτοια κριτήρια (πού οἱ ἀποδείξεις τους εἶναι ἄμεσες συνέπειες τῶν γενικῶν κριτηρίων) δίνει ἡ πρόταση:

Δύο ὀρθογώνια τρίγωνα εἶναι ἴσα σέ κάθε μιά ἀπό τίς παρακάτω περιπτώσεις:

1. ὅταν οἱ κάθετες πλευρές τοῦ ἑνός τριγώνου εἶναι ἀντίστοιχα ἴσες μία πρός μία μέ τίς κάθετες πλευρές τοῦ ἄλλου τριγώνου,

2. ὅταν μία κάθετη πλευρά καί ἡ προσκείμενή της ὀξεία γωνία τοῦ ἑνός τριγώνου

εἶναι ἀντίστοιχα ἴσες μέ μιά κάθετη πλευρά καί τήν προσκείμενή της ὀξεία γωνία τοῦ ἄλλου τριγώνου,

3. **ὅταν μία κάθετη πλευρά του καί ἡ ἀπέναντί της ὀξεία γωνία τοῦ ἑνός τριγώνου εἶναι ἀντίστοιχα ἴσες μέ μιά κάθετη πλευρά καί τήν ἀπέναντί της ὀξεία γωνία τοῦ ἄλλου τριγώνου,**
4. **ὅταν ἡ ὑποτείνουσα καί μία ὀξεία γωνία τοῦ ἑνός τριγώνου εἶναι ἀντίστοιχα ἴση μέ τήν ὑποτείνουσα καί μιά ὀξεία γωνία τοῦ ἄλλου τριγώνου.**

Ἔτσι λοιπόν σέ δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ καί Α΄Β΄Γ΄ μέ $\widehat{A} = \widehat{A'} = 90°$ ἔχουμε:

$$\beta = \beta',\ \gamma = \gamma' \Rightarrow \text{τριγ}AB\Gamma = \text{τριγ}A'B'\Gamma' \Rightarrow \alpha = \alpha',\ \widehat{B} = \widehat{B'},\ \widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma'}$$

$$\beta = \beta',\ \widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma'} \Rightarrow \text{τριγ}AB\Gamma = \text{τριγ}A'B'\Gamma' \Rightarrow \alpha = \alpha',\ \gamma = \gamma',\ \widehat{B} = \widehat{B'}$$

$$\beta = \beta',\ \widehat{B} = \widehat{B'} \Rightarrow \text{τριγ}AB\Gamma = \text{τριγ}A'B'\Gamma' \Rightarrow \alpha = \alpha',\ \gamma = \gamma',\ \widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma'}$$

$$\alpha = \alpha',\ \widehat{B} = \widehat{B'} \Rightarrow \text{τριγ}AB\Gamma = \text{τριγ}A'B'\Gamma' \Rightarrow \beta = \beta',\ \gamma = \gamma',\ \widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma'}.$$

Ἄς ὑποθέσουμε τέλος ὅτι στά ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ καί Α΄Β΄Γ΄ ἔχουμε $\alpha = \alpha'$ καί $\beta = \beta'$. Ἐπειδή εἶναι καί $\widehat{A} = \widehat{A'} (= 90°)$, τότε σύμφωνα μέ τό θεώρημα τῆς § 62 θά εἶναι ἤ $\widehat{B} = \widehat{B'}$ ἤ $\widehat{B} + \widehat{B'} = 180°$. Ἡ περίπτωση ὅμως $\widehat{B} + \widehat{B'} = 180°$ ἀποκλείεται, ἀφοῦ καί οἱ δύο γωνίες $\widehat{B}$ καί $\widehat{B'}$ εἶναι ὀξεῖες. Ἔτσι ἀπομένει $\widehat{B} = \widehat{B'}$ καί τότε τά τρίγωνα εἶναι ἴσα (ἀφοῦ $\alpha = \alpha'$ καί $\widehat{B} = \widehat{B'}$). Δείξαμε λοιπόν ὅτι

$$\alpha = \alpha',\ \beta = \beta' \Rightarrow \text{τριγ}AB\Gamma = \text{τριγ}A'B'\Gamma' \Rightarrow \gamma = \gamma',\ \widehat{B} = \widehat{B'},\ \widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma'}$$

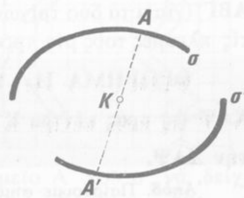
δηλαδή ὅτι, **ἄν ἡ ὑποτείνουσα καί ἡ μία κάθετη πλευρά ἑνός ὀρθογώνιου τριγώνου εἶναι ἀντίστοιχα ἴσες μέ τήν ὑποτείνουσα καί μία κάθετη πλευρά ἑνός ἄλλου ὀρθογώνιου τριγώνου, τότε τά ὀρθογώνια τρίγωνα εἶναι ἴσα.**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 76-82

Συμμετρία ὡς πρός κέντρο.

64. Μέ τή βοήθεια ἑνός ὁρισμένου σημείου Κ ὁρίζουμε μία ἀντιστοιχία μεταξύ τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου μας κατά τόν ἀκόλουθο τρόπο:

Σέ κάθε σημεῖο Α ἀντιστοιχίζουμε τό σημεῖο Α΄ πού βρίσκουμε, ἄν προεκτείνουμε τήν ΑΚ πρός τό μέρος τοῦ Κ, καί πάρουμε στήν προέκταση αὐτή τμῆμα ΚΑ΄ = ΚΑ. Ἡ ἀντιστοιχία αὐτή λέγεται **συμμετρία ὡς πρός κέντρο Κ** καί τό σημεῖο Α΄, τό ἀντίστοιχο τοῦ Α, λέγεται **συμμετρικό τοῦ Α ὡς πρός τό Κ.**



Γιά νά δηλώσουμε ὅτι τό Α΄ εἶναι συμμετρικό τοῦ Α ὡς πρός τό Κ, γράφουμε $A' = \text{συμμ}_K A$, δηλαδή

$$\mathbf{A' = \text{συμμ}_K A \iff KA' = KA}.$$

Παρατηροῦμε ἀκόμη ὅτι ἄν $A' = \text{συμμ}_K A$, τότε θά εἶναι καί $A = \text{συμμ}_K A'$. Ἔτσι **δύο σημεῖα A καί A′ εἶναι συμμετρικά ὡς πρός K ἄν καί μόνο ἄν τό K εἶναι μέσο τοῦ AA′.**

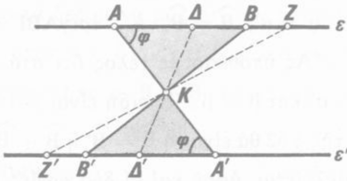
Τά συμμετρικά ὅλων τῶν σημείων ἑνός γεωμετρικοῦ σχήματος σ ὡς πρός τό K ἀποτελοῦν ἕνα ἄλλο γεωμετρικό σχῆμα σ′, πού λέγεται **συμμετρικό τοῦ σ ὡς πρός K.** Δηλώνουμε ὅτι τό σ′ εἶναι συμμετρικό τοῦ σ ὡς πρός τό K γράφοντας πάλι $\sigma' = \text{συμμ}_K \sigma$.

Συμμετρικά ἁπλῶν γεωμετρικῶν σχημάτων.

65. Γιά τά ἁπλά γεωμετρικά σχήματα ἔχουμε τά θεωρήματα:

ΘΕΩΡΗΜΑ I. Τό συμμετρικό ὡς πρός κέντρο K μιᾶς εὐθείας εἶναι εὐθεία.

Ἀπόδ. Θεωροῦμε μιά εὐθεία ε, δύο σημεῖα της A καί B καί τά σημεῖα $A' = \text{συμμ}_K A$ καί $B' = \text{συμμ}_K B$. Ἄν ὀνομάσουμε ε′ τήν εὐθεία A′B′ θά ἀποδείξουμε ὅτι $\varepsilon' = \text{συμμ}_K \varepsilon$ καί ἀρκεῖ γι' αὐτό νά ἀποδείξουμε ὅτι τό συμμετρικό κάθε σημείου Δ τῆς ε βρίσκεται στήν ε′ καί ὅτι κάθε σημεῖο Z′ τῆς ε′ εἶναι συμμετρικό ἑνός σημείου τῆς ε.



Ἐπειδή τριγAKB = τριγA′KB′, (γιατί $AK = KA'$, $BK = KB'$, $A\widehat{K}B = A'\widehat{K}B'$) θά εἶναι

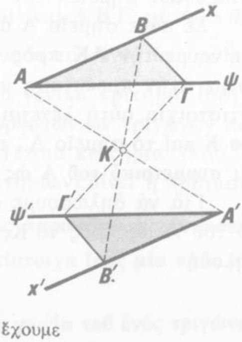
$$AB = A'B' \quad \text{καί} \quad B\widehat{A}K = B'\widehat{A'}K.$$

Ἔτσι, ἄν ἡ ΔK τέμνει τήν ε′ στό Δ′, θά εἶναι τριγΔAK = τριγΔ′A′K (γιατί $KA = KA'$, $\Delta\widehat{A}K = \Delta'\widehat{A'}K = \widehat{\varphi}$, $\Delta\widehat{K}A = \Delta'\widehat{K}A'$) καί ἄρα $K\Delta' = K\Delta$, δηλ. $\Delta' = \text{συμμ}_K \Delta$. Ἐπίσης, ἄν ἡ Z′K τέμνει τήν ε στό Z, βρίσκουμε μέ ἀνάλογο τρόπο (ἀπό τήν ἰσότητα τῶν τριγώνων AKZ καί A′KZ′) ὅτι $ZK = Z'K$, δηλ. ὅτι $Z' = \text{συμμ}_K Z$.

Καταλαβαίνουμε λοιπόν ὅτι: **γιά νά βροῦμε τό συμμετρικό μιᾶς εὐθείας ὡς πρός κέντρο K, ἀρκεῖ νά βροῦμε τά συμμετρικά μόνο δύο σημείων της ὡς πρός τό K.** Παρατηροῦμε ἀκόμη (ἀπό τήν παραπάνω ἀπόδειξη) ὅτι τό τμῆμα $A'B' = AB$ εἶναι συμμετρικό τοῦ AB. Ἔτσι ἔχουμε τά πορίσματα:

— Τό συμμετρικό ἑνός εὐθύγραμμου τμήματος AB ὡς πρός κέντρο K εἶναι εὐθύγραμμο τμῆμα A′B′ ἴσο μέ τό AB.

— Τό συμμετρικό ἑνός τριγώνου ΑΒΓ ὡς πρός κέντρο K εἶναι τρίγωνο A′B′Γ′ ἴσο μέ τό τρίγωνο ΑΒΓ (γιατί τά δύο τρίγωνα ΑΒΓ καί A′B′Γ′ θά ἔχουν τίς πλευρές τους μία πρός μία ἴσες).

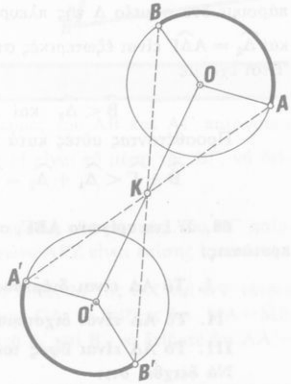


ΘΕΩΡΗΜΑ II: Τό συμμετρικό μιᾶς γωνίας $X\widehat{A}\Psi$ ὡς πρός κέντρο K εἶναι γωνία $X'\widehat{A'}\Psi'$, ἴση μέ τήν $X\widehat{A}\Psi$.

Ἀπόδ. Παίρνουμε σημεῖο B στήν πλευρά AX καί σημεῖο Γ στήν πλευρά AΨ καί καλοῦμε A′,B′,Γ′ τά συμμετρικά ὡς πρός K τῶν A,B,Γ. Τότε τά τρίγωνα ΑΒΓ καί A′B′Γ′ εἶναι ἴσα (συμμετρικά ὡς πρός τό K) καί ἄρα ἔχουμε

$$B\widehat{A'}\Gamma' = B\widehat{A}\Gamma \Rightarrow X'\widehat{A'}\Psi' = X\widehat{A}\Psi$$

ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΙΙ. Τό συμμετρικό ὡς πρός κέντρο Κ ἑνός κυκλ(Ο,ρ) εἶναι κύκλος ἴσος μέ τόν κυκλ(Ο,ρ) πού ἔχει γιά κέντρο τό συμμετρικό τοῦ Ο ὡς πρός τό Κ.



Ἀπόδ. Θεωροῦμε τόν κυκλ(Ο,ρ) καί μέ κέντρο τό Ο′ = συμμ$_K$Ο γράφουμε τόν κυκλ(Ο′,ρ). Γιά νά δείξουμε ὅτι ὁ κυκλ(Ο′,ρ) εἶναι τό συμμετρικό σχῆμα τοῦ κυκλ(Ο,ρ), ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι τό συμμετρικό κάθε σημείου Α τοῦ κυκλ(Ο′, ρ) ἀνήκει στόν κυκλ(Ο′,ρ) καί ὅτι κάθε σημεῖο Β′ τοῦ κυκλ(Ο′,ρ) εἶναι συμμετρικό ἑνός σημείου τοῦ κυκλ(Ο,ρ).

Ἄν πάρουμε Α′=συμμ$_K$Α, ἔχουμε τριγΟΚΑ = τριγΟ′ΚΑ′ (γιατί ΟΚ = ΚΟ′, ΑΚ = Α′Κ, $\widehat{OKA} = \widehat{O'KA'}$) καί ἄρα εἶναι

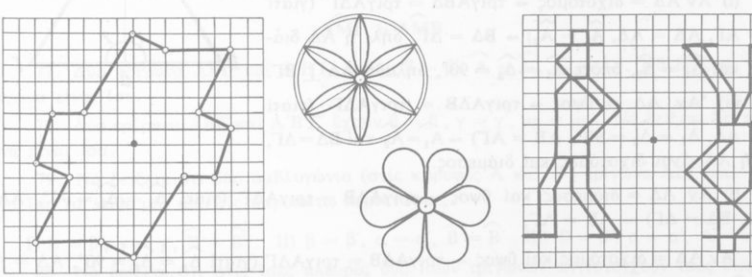
$$O'A' = OA = \rho,$$

δηλαδή τό Α′ κινεῖται στόν κυκλ(Ο′,ρ). Ἀντιστρόφως, ἄν πάρουμε Β = συμμ$_K$Β′, βρίσκουμε (ἀπό τήν ἰσότητα τῶν τριγώνων Ο′Β′Κ καί ΟΒΚ) ὅτι ΟΒ = Ο′Β′ = ρ, δηλαδή ὅτι τό Β βρίσκεται στόν κυκλ(Ο,ρ).

Παρατηροῦμε ἀκόμη ὅτι **τό συμμετρικό ἑνός τόξου ΑΒ τοῦ κυκλ(Ο,ρ) ὡς πρός κέντρο Κ εἶναι τόξο Α′Β′ ἴσο μέ ΑΒ** (ἀφοῦ οἱ χορδές ΑΒ καί Α′Β′ θά εἶναι τμήματα ἴσα).

Σχήματα μέ κέντρο συμμετρίας.

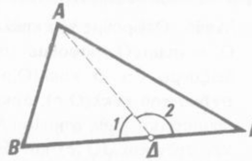
66. **Ὁρισμός:** Ἕνα γεωμετρικό σχῆμα σ θά λέμε ὅτι ἔχει **κέντρο συμμετρίας** ἕνα ὁρισμένο σημεῖο Κ ἄν καί μόνο ἄν ὅλα τά σημεῖα τοῦ σ εἶναι ἀνά δύο συμμετρικά ὡς πρός τό Κ. Γιά νά ἐλέγξουμε λοιπόν ἄν ἕνα σχῆμα σ ἔχει κέντρο



συμμετρίας, θά πρέπει, παίρνοντας ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο Α τοῦ σ, νά δείχνουμε ὅτι τό συμμετρικό τοῦ Α ὡς πρός τό Κ εἶναι ἐπίσης σημεῖο τοῦ σ. Ὅλα τά παραπάνω σχήματα ἔχουν κέντρο συμμετρίας.

67. Νά δειχθεῖ ὅτι τό ἄθροισμα δύο ὁποιωνδήποτε γωνιῶν ἑνός τριγώνου ΑΒΓ εἶναι μικρότερο ἀπό 180°.

Λύση: Θά ἀποδείξουμε π.χ. ὅτι $\widehat{B} + \widehat{\Gamma} < 180°$. Ἄν πάρουμε ἕνα σημεῖο Δ τῆς πλευρᾶς ΒΓ, οἱ γωνίες $\widehat{\Delta_1} = \mathrm{A}\widehat{\Delta}\mathrm{B}$ καί $\widehat{\Delta_2} = \mathrm{A}\widehat{\Delta}\Gamma$ εἶναι ἐξωτερικές στά τρίγωνα ΑΔΓ καί ΑΔΒ· Ἔτσι ἔχουμε



$$\widehat{B} < \widehat{\Delta_2} \quad \text{καί} \quad \widehat{\Gamma} < \widehat{\Delta_1}.$$

Προσθέτοντας αὐτές κατά μέλη βρίσκουμε

$$\widehat{B} + \widehat{\Gamma} < \widehat{\Delta_1} + \widehat{\Delta_2} \Rightarrow \widehat{B} + \widehat{\Gamma} < 180°.$$

68. Σ' ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ, στό ὁποῖο τό Δ εἶναι σημεῖο τῆς πλευρᾶς του ΒΓ, θεωροῦμε τίς προτάσεις:

I. Τό ΑΔ εἶναι διάμεσος τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

II. Τό ΑΔ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας $\widehat{A}$ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

III. Τό ΑΔ εἶναι ὕψος τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

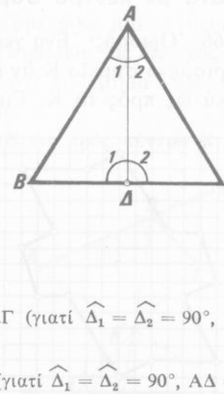
Νά δειχθεῖ ὅτι:

α) Ἄν τό τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελές μέ βάση ΒΓ καί ἀληθεύει μία ἀπό τίς τρεῖς προτάσεις I, II, III, τότε θά ἀληθεύουν καί οἱ ἄλλες δύο.

β) Ἄν ἀληθεύουν δύο ἀπό τίς προτάσεις I, II, III, τότε τό τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελές μέ βάση ΒΓ.

Λύση: α) Θεωροῦμε ἕνα ἰσοσκελές τρίγωνο μέ ΑΒ=ΑΓ.

i) Ἄν ΑΔ = διάμεσος ⇒ τριγ ΑΒΔ = τριγ ΑΔΓ (γιατί ΑΒ = ΑΓ, ΒΔ = ΔΓ, ΑΔ = ΑΔ) ⇒ $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$, δηλ. ἡ ΑΔ διχοτόμος καί $\widehat{\Delta_1} = \widehat{\Delta_2}$. Ἐπειδή ὅμως εἶναι καί $\widehat{\Delta_1} + \widehat{\Delta_2} = 180°$, θά ἔχουμε $\widehat{\Delta_1} = \widehat{\Delta_2} = 90°$, δηλαδή ΑΔ ⊥ ΒΓ.



ii) Ἄν ΑΔ = διχοτόμος ⇒ τριγΑΒΔ = τριγΑΔΓ (γιατί ΑΒ = ΑΓ, ΑΔ = ΑΔ, $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$) ⇒ ΒΔ = ΔΓ, δηλ. ἡ ΑΔ διάμεσος καί $\widehat{\Delta_1} = \widehat{\Delta_2}$, ὁπότε $\widehat{\Delta_1} = \widehat{\Delta_2} = 90°$, δηλαδή ΑΔ ⊥ ΒΓ.

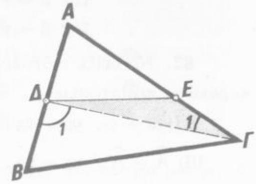
iii) Ἄν ΑΔ = ὕψος ⇒ τριγΑΔΒ = τριγΑΔΓ (γιατί ΑΔ = ΑΔ, $\widehat{\Delta_1} = \widehat{\Delta_2} = 90°$, ΑΒ = ΑΓ) ⇒ $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ καί ΒΔ=ΔΓ, δηλ. ἡ ΑΔ εἶναι διχοτόμος καί διάμεσος.

β) Ἄν ΑΔ = διάμεσος καί ὕψος ⇒ τριγΑΔΒ = τριγΑΔΓ (γιατί $\widehat{\Delta_1} = \widehat{\Delta_2} = 90°$, ΑΔ = = ΑΔ, ΒΔ = ΔΓ) ⇒ ΑΒ = ΑΓ,

Ἄν ΑΔ = διχοτόμος καί ὕψος ⇒ τριγΑΔΒ = τριγΑΔΓ (γιατί $\widehat{\Delta_1} = \widehat{\Delta_2} = 90°$, ΑΔ = ΑΔ $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$) ⇒ ΑΒ = ΑΓ.

Τέλος ἄν ΑΔ = διάμεσος καί διχοτόμος ⇒ τρίγωνα ΑΔΒ καί ΑΔΓ ἔχουν ΑΔ = ΑΔ, ΒΔ = ΔΓ καί $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$. Τότε ὅμως θά ἔχουν ἤ $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$ ἤ $\widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180°$. Ἡ ἰσότητα $\widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180°$ ἀποκλείεται (βλ. ἄσκ. 67) καί ἄρα $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$ ⇒ ΑΒ = ΑΓ.

69. Στίς πλευρές ΒΑ καί ΓΑ τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε τμήματα ΒΔ = ΓΕ. Νά δειχθεῖ ὅτι ΔΕ < ΒΓ.



Λύση: Ἡ γωνία $\widehat{Β\Delta\Gamma} = \widehat{\Delta_1}$ εἶναι ἐξωτερική στό τρίγωνο ΑΔΓ καί συνεπῶς θά εἶναι $\widehat{\Delta_1} > \widehat{\Gamma_1}$. Ἔτσι τά δύο τρίγωνα ΒΔΓ καί ΓΔΕ ἔχουν δύο πλευρές ἴσες (ΔΒ = ΓΕ, ΓΔ = ΓΔ) καί τίς περιεχόμενες γωνίες τους ἄνισες καί μάλιστα $\widehat{\Gamma_1} < \widehat{\Delta_1}$. Ἐπομένως εἶναι ΔΕ < ΒΓ.

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ*

70. Δίνεται ἰσοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ καί στίς ἴσες πλευρές του ΑΒ καί ΑΓ παίρνουμε ἀντιστοίχως τά τμήματα $ΑΔ = \frac{1}{3}$ ΑΒ καί $ΑΕ = \frac{1}{3}$ ΑΓ. Ἄν Μ εἶναι τό μέσο τῆς ΒΓ, νά δείξετε ὅτι τό τρίγωνο ΔΜΕ εἶναι ἰσοσκελές.

71. Θεωροῦμε ἰσοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ καί στίς προεκτάσεις τῆς βάσεώς του ΒΓ παίρνουμε σημεῖα Ε,Ζ τέτοια ὥστε ΒΕ = ΓΖ. Νά δείξετε ὅτι τό τρίγωνο ΑΕΖ εἶναι ἐπίσης ἰσοσκελές.

72. Θεωροῦμε γωνία $\widehat{ΧΟΨ}$ καί δύο σημεῖα Α καί Β τῶν πλευρῶν της ΟΧ καί ΟΨ τέτοια ὥστε ΟΑ = ΟΒ. Ἄν Μ εἶναι ὁποιοδήποτε σημεῖο τῆς διχοτόμου ΟΔ, νά δείξετε ὅτι ΜΑ = ΜΒ. Ἐπίσης, ἄν οἱ ΑΜ καί ΜΒ τέμνουν τίς πλευρές ΟΨ καί ΟΧ στά Α′ καί Β′, νά δείξετε ὅτι ΑΑ′ = ΒΒ′.

73. Σέ τρίγωνο ΑΒΓ προεκτείνουμε τίς πλευρές του ΒΑ καί ΓΑ πρός τό μέρος τοῦ Α καί στίς προεκτάσεις αὐτές παίρνουμε ἀντιστοίχως τά τμήματα ΑΒ′ = ΑΒ καί ΑΓ′ = ΑΓ. Νά δείξετε ὅτι ἡ προέκταση τῆς διαμέσου ΑΜ διέρχεται ἀπό τό μέσο τῆς Α′Β′.

74. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ καί δύο ἡμιευθεῖες ΑΧ καί ΑΨ κάθετες στίς πλευρές ΑΒ καί ΑΓ καί τέτοιες ὥστε κάθε μία ἀπό τίς γωνίες $\widehat{ΧΑΒ}$ καί $\widehat{ΨΑΓ}$ νά εἶναι ἐφεξῆς μέ τήν $\widehat{Α}$. Στίς ΑΧ καί ΑΨ παίρνουμε τά εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ′ = ΑΒ καί ΑΓ′ = ΑΓ. Νά δείξετε ὅτι ΒΓ′ = ΓΒ′.

75. Σέ ἰσόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ προεκτείνουμε τίς πλευρές του ΑΒ,ΒΓ,ΓΑ πρός τίς κορυφές Β,Γ,Α καί παίρνουμε στίς προεκτάσεις τμήματα ΒΔ = ΓΕ = ΑΖ. Νά δείξετε ὅτι τό ΔΕΖ εἶναι ἐπίσης ἰσόπλευρο τρίγωνο.

76. Ἄν ΑΜ εἶναι διάμεσος τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, στό ὁποῖο εἶναι ΑΒ < ΑΓ, νά δείξετε ὅτι

$$\widehat{ΑΜΓ} > \widehat{ΑΜΒ}.$$

77. Δύο τρίγωνα ΑΒΓ καί Α′Β′Γ′ ἔχουν $\beta = \beta'$, $\widehat{A} = \widehat{A'}$, $\delta_\alpha = \delta_\alpha'$. Νά δείξετε ὅτι τά τρίγωνα εἶναι ἴσα.

78. Δύο τρίγωνα ΑΒΓ καί Α′Β′Γ′ ἔχουν $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$, $\mu_\beta = \mu_\beta'$. Νά δείξετε ὅτι τά τρίγωνα εἶναι ἴσα.

79. Νά δείξετε ὅτι δύο ἀμβλυγώνια (στίς κορυφές Α καί Α′) τρίγωνα ΑΒΓ καί Α′Β′Γ′ εἶναι ἴσα σέ κάθε μία ἀπό τίς παρακάτω περιπτώσεις:

I) $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$, $\widehat{B} = \widehat{B'}$ II) $\beta = \beta'$, $\alpha = \alpha'$, $\widehat{B} = \widehat{B'}$ III) $\beta = \beta'$, $\alpha = \alpha'$, $\widehat{A} = \widehat{A'}$.

80. Νά δείξετε ὅτι στίς ἴσες πλευρές δύο ἴσων τριγώνων ἀντιστοιχοῦν ἴσες διάμεσοι, ἴσες διχοτόμοι καί ἴσα ὕψη.

81. Ἄν α,β,γ εἶναι πλευρές τριγώνου ΑΒΓ, νά διατυπωθοῦν μέ λόγια καί ν' ἀποδειχθοῦν οἱ προτάσεις:

Π_1: $\beta = \gamma \Longleftrightarrow \upsilon_\beta = \upsilon_\gamma$ $\qquad$ Π_4: $\alpha = \beta = \gamma \Longleftrightarrow \upsilon_\alpha = \upsilon_\beta = \upsilon_\gamma$

Π_2: $\beta = \gamma \Rightarrow \mu_\beta = \mu_\gamma$ $\qquad$ Π_5: $\alpha = \beta = \gamma \Rightarrow \mu_\alpha = \mu_\beta = \mu_\gamma$

Π_3: $\beta = \gamma \Rightarrow \delta_\beta = \delta_\gamma$ $\qquad$ Π_6: $\alpha = \beta = \gamma \Rightarrow \delta_\alpha = \delta_\beta = \delta_\gamma$

82. Νά δείξετε ὅτι δύο ὀξυγώνια τρίγωνα ΑΒΓ καί Α΄Β΄Γ΄ εἶναι ἴσα σέ κάθε μιά ἀπό τίς παρακάτω περιπτώσεις

I) $\alpha = \alpha'$, $\upsilon_\beta = \upsilon_\beta'$, $\upsilon_\gamma = \upsilon_\gamma'$ $\qquad$ II) $\alpha = \alpha'$, $\upsilon_\beta = \upsilon_\beta'$, $\upsilon_\alpha = \upsilon_\alpha'$

III) $\widehat{A} = \widehat{A}'$, $\upsilon_\beta = \upsilon_\beta'$, $\upsilon_\gamma = \upsilon_\gamma'$ $\qquad$ IV) $\widehat{A} = \widehat{A}'$, $\upsilon_\beta = \upsilon_\beta'$, $\upsilon_\alpha = \upsilon_\alpha'$.

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ **

83. Ἄν ΒΓ καί Β΄Γ΄ εἶναι οἱ βάσεις δύο ἰσοσκελῶν τριγώνων ΑΒΓ καί ΑΒ΄Γ΄ πού ἔχουν κοινή κορυφή Α, μή συμπίπτουσες πλευρές καί $B\widehat{A}\Gamma = B'\widehat{A}\Gamma'$, νά δείξετε ὅτι $BB' = \Gamma\Gamma'$

84. Θεωροῦμε τρίγωνο ΑΒΓ μέ $AB < A\Gamma$, ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο Μ τῆς διχοτόμου τῆς $\widehat{A}$ καί ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο Ν τῆς ἐξωτερικῆς διχοτόμου τῆς Α. Νά δειχθοῦν οἱ ἀνισότητες $\qquad M\Gamma - MB < A\Gamma - AB \qquad N\Gamma + NB > A\Gamma + AB.$

85. Ἄν Δ εἶναι ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο τῆς πλευρᾶς $B\Gamma = \alpha$ τριγώνου ΑΒΓ, νά δείξετε ὅτι
$$A\Delta > \frac{\beta + \gamma - \alpha}{2}.$$
Μέ βάση τήν ἀνισότητα αὐτή νά δείξετε ὅτι σέ κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ἔχουμε $\mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma < \tau$ καί $\delta_\alpha + \delta_\beta + \delta_\gamma < \tau$, ὅπου τ εἶναι ἡ ἡμιπερίμετρος τοῦ τριγώνου. Τέλος νά δείξετε ὅτι σέ κάθε ὀξυγώνιο τρίγωνο ἔχουμε ἀκόμη
$$\upsilon_\alpha + \upsilon_\beta + \upsilon_\gamma < \tau.$$

86. Θεωροῦμε τρίγωνο ΑΒΓ μέ $\widehat{A} < 90°$ καί δύο ὁποιαδήποτε σημεῖα Δ καί Ε τῶν πλευρῶν του ΑΒ καί ΑΓ. Νά δειχθεῖ ὅτι
$$BE + \Gamma\Delta > \Delta B + \Delta E + E\Gamma.$$

87. Δίνεται κυρτή γωνία $X\widehat{O}\Psi$, δύο σημεῖα Α,Β στήν πλευρά της ΟΧ καί δύο σημεῖα Α΄,Β΄ στήν πλευρά της ΟΨ τέτοια ὥστε $OA' = OA$ καί $OB' = OB$. Νά δείξετε ὅτι:

α) Τό σημεῖο τομῆς Κ τῶν ΑΒ΄ καί ΒΑ΄ βρίσκεται στή διχοτόμο τῆς γωνίας $X\widehat{O}\Psi$.

β) Ἄν Μ καί Ν εἶναι τά μέσα τῶν ΑΒ΄ καί Α΄Β, οἱ γωνίες $M\widehat{O}X$ καί $N\widehat{O}\Psi$ εἶναι ἴσες.

88. Δίνεται γωνία ΧΟΨ καί σημεῖα Α,Β,Γ,Δ,... στήν πλευρά της ΟΧ. Στήν πλευρά ΟΨ παίρνουμε σημεῖα Α΄,Β΄,Γ΄,Δ΄,... τέτοια ὥστε $OA' = OA$, $OB' = OB$, $O\Gamma' = O\Gamma$, $O\Delta' = O\Delta$,... καί κατόπι βρίσκουμε τά $\{K\} = AB' \cap BA'$, $\{\Lambda\} = A\Gamma' \cap \Gamma A'$, $\{M\} = A\Delta' \cap \Delta A'$, $\{P\} = B\Gamma' \cap \Gamma B'$,.... Νά δειχθεῖ ὅτι τά σημεῖα Κ,Λ,Μ,Ρ,... βρίσκονται σ' εὐθεία.

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 5

1. Δύο τρίγωνα ΑΒΓ καί Α΄Β΄Γ΄ λέγονται ἴσα, ἄν καί μόνο ἄν ἔχουν μία πρός μία τίς πλευρές τους ἴσες καί τίς ἀπέναντι ἀπό τίς ἴσες πλευρές γωνίες τους ἐπίσης ἴσες.

Συνήθως ἡ ἰσότητα δύο τριγώνων ἐξασφαλίζεται μέ λιγότερα στοιχεῖα. Τά βασικά κριτήρια ἰσότητας δύο ὁποιωνδήποτε τριγώνων δίνονται στόν πρῶτο ἀπό τούς παρακάτω πίνακες, ἐνῶ στό δεύτερο δίνονται τά κριτήρια ἰσότητας ὀρθογώνιων τριγώνων πού ἔχουν $\widehat{A} = \widehat{A}' = 90°$.

$\alpha=\alpha'$	$\beta=\beta'$	$\gamma=\gamma'$	$\widehat{A}=\widehat{A}'$	$\widehat{B}=\widehat{B}'$	$\widehat{\Gamma}=\widehat{\Gamma}'$
●	●	●			
	●	●	●		
●				●	●
●			●		●
●			●	●	

$\alpha=\alpha'$	$\beta=\beta'$	$\gamma=\gamma'$	$\widehat{B}=\widehat{B}'$	$\widehat{\Gamma}=\widehat{\Gamma}'$
	●	●		
●	●			
●			●	
	●		●	
	●			●

Παρατηροῦμε ὅτι **κάθε κριτήριο ἰσότητας δύο τριγώνων περιέχει ἀπαραίτητα μία τουλάχιστον ἰσότητα μεταξύ τῶν πλευρῶν τους.**

2. Σέ ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ ἡ σχέση πού ἰσχύει γιά δύο πλευρές (ἤ γωνίες) ἰσχύει καί γιά τίς ἀπέναντι γωνίες του (ἤ πλευρές του), δηλαδή:

$$\beta \gtreqless \gamma \iff \widehat{B} \gtreqless \widehat{\Gamma}$$

Ἀπό αὐτή διακρίνουμε ὅτι ἕνα **ἰσόπλευρο τρίγωνο** (τρίγωνο πού ἔχει ὅλες τίς πλευρές του ἴσες) εἶναι **καί ἰσογώνιο** καί ἀντιστρόφως.

Ἐπίσης ἕνα **ἰσοσκελές τρίγωνο** (τρίγωνο πού ἔχει δύο πλευρές ἴσες) ἔχει ἴσες τίς γωνίες πού πρόσκεινται στήν τρίτη πλευρά ἡ ὁποία λέγεται **βάση** του. Ἀντιστρόφως, ἕνα τρίγωνο πού ἔχει δύο γωνίες ἴσες εἶναι ἰσοσκελές. Σέ ἰσοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ μέ ΑΒ = ΑΓ τό ὕψος υ_α, ἡ διάμεσος μ_α καί ἡ διχοτόμος δ_α συμπίπτουν.

3. Δύο τρίγωνα ΑΒΓ καί Α΄Β΄Γ΄ μπορεῖ νά εἶναι ἴσα ἤ ἄνισα, ὅταν ὅμως εἶναι ἄνισα δέν μποροῦμε νά λέμε ὅτι τό ἕνα εἶναι «μικρότερο» ἤ «μεγαλύτερο» ἀπό τό ἄλλο.

Σέ ἄνισα τρίγωνα ἀπό τή σχέση πού ἰσχύει γιά δύο πλευρές (ἤ γωνίες) τους δέν προκύπτει γενικά σχέση γιά τίς ἀπέναντι γωνίες (ἤ πλευρές) τους παρά μόνο στήν περίπτωση πού τά δύο τρίγωνα ΑΒΓ καί Α΄Β΄Γ΄ ἔχουν δύο πλευρές ἴσες. Ἔτσι:

—Ἄν σέ δύο τρίγωνα ΑΒΓ καί Α΄Β΄Γ΄ ἔχουμε $\beta = \beta'$ καί $\gamma = \gamma'$, τότε ἰσχύουν οἱ προτάσεις:

$$\text{I.} \quad \widehat{A} \gtreqless \widehat{A}' \iff B\Gamma \gtreqless B'\Gamma'$$

$$\text{II.} \quad \widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma}' \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{B}' \text{ ἤ } \widehat{B} + \widehat{B}' = 180^\circ$$

4. Δύο σημεῖα Α καί Α΄ λέγονται **συμμετρικά ὡς πρός κέντρο Κ**, ἄν καί μόνο ἄν τό Κ εἶναι μέσο τοῦ εὐθύγραμμου τμήματος ΑΑ΄. Ἔτσι, γιά νά βροῦμε τό συμμετρικό ἑνός σημείου Α ὡς πρός τό Κ παίρνουμε στήν προέκταση τοῦ τμήματος ΑΚ καί πρός τό μέρος τοῦ Κ τμῆμα ΚΑ΄ = ΚΑ. Γράφουμε τότε Α΄ = συμμ_KΑ.

Τά συμμετρικά ὅλων τῶν σημείων ἑνός σχήματος σ ὡς πρός κέντρο Κ ἀποτελοῦν ἕνα νέο σχῆμα πού λέγεται **συμμετρικό τοῦ σ ὡς πρός τό Κ.** Γιά τά συμμετρικά σχήματα ὡς πρός κέντρο Κ ἰσχύουν οἱ προτάσεις:

— Τό συμμετρικό εὐθείας εἶναι εὐθεία.

— Τό συμμετρικό εὐθύγραμμου τμήματος εἶναι ἴσο εὐθύγραμμο τμῆμα.

— Τό συμμετρικό τριγώνου ΑΒΓ εἶναι τρίγωνο ἴσο μέ τό ΑΒΓ.

— Τό συμμετρικό γωνίας $\widehat{XA\Psi}$ εἶναι γωνία ἴση μέ τή $\widehat{XA\Psi}$.

— Τό συμμετρικό κυκλ(Ο,ρ) εἶναι κύκλος ἴσος μέ τόν κυκλ(Ο,ρ) πού ἔχει κέντρο τό σημεῖο Ο΄ = συμμ_KΟ.

Ἕνα σχῆμα σ θά λέμε ὅτι ἔχει **κέντρο συμμετρίας ἕνα σημεῖο Κ**, ἄν ὅλα τά σημεῖα τοῦ σ εἶναι ἀνά δύο συμμετρικά ὡς πρός τό Κ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

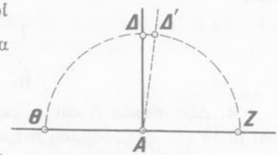
ΚΑΘΕΤΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΠΑΡΑΛΛΗΛΙΑ ΕΥΘΕΙΩΝ

Θεωρήματα καθετότητας δύο εὐθειῶν.

67. Ὁρίσαμε στήν § 52 πότε δύο εὐθεῖες λέγονται κάθετες καί εἴδαμε ὅτι δύο τεμνόμενες εὐθεῖες εἶναι κάθετες, ἄν καί μόνο ἄν σχηματίζουν ὀρθή γωνία. Θά δοῦμε τώρα ὅτι ὑπάρχουν κάθετες εὐθεῖες καί ειδικότερα ὅτι ὑπάρχει πάντα μία εὐθεία ε΄ πού διέρχεται ἀπό ἕνα σημεῖο καί εἶναι κάθετη σέ δοσμένη εὐθεία ε. Θά ἀποδείξουμε λοιπόν ὅτι:

ΘΕΩΡΗΜΑ Ι. Σ' ἕνα σημεῖο Α μιᾶς εὐθείας ε μποροῦμε νά φέρουμε μία καί μόνο μία εὐθεία κάθετη στήν ε.

Ἀπόδ. Μέ κέντρο Α καί ἀκτίνα ὁποιαδήποτε γράφουμε κύκλο πού τέμνει τήν ε στά σημεῖα Θ καί Ζ. Ἄν Δ εἶναι τό μέσο τοῦ ἑνός ἡμικυκλίου $\widehat{ΘΖ}$, οἱ γωνίες $Δ\widehat{Α}Θ$ καί $Δ\widehat{Α}Ζ$ εἶναι ἴσες καί ἔχουν ἄθροισμα 180°.



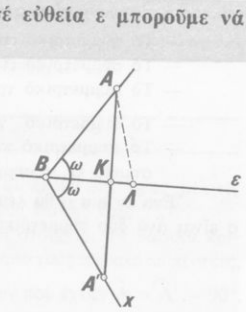
Ἄρα

$$Δ\widehat{Α}Θ = Δ\widehat{Α}Ζ = 90° \Rightarrow ΔΑ \perp ε.$$

Ἄν τώρα ὑποθέσουμε ὅτι ὑπάρχει καί ἄλλη κάθετη στό Α, αὐτή θά τέμνει τό $\widehat{ΘΖ}$ σ' ἕνα σημεῖο Δ΄ διαφορετικό ἀπό τό Δ πού θά εἶναι ἐπίσης μέσο τοῦ $\widehat{ΘΖ}$ (ἀφοῦ $Δ'\widehat{Α}Θ = Δ'\widehat{Α}Ζ = 90° \Rightarrow \widehat{ΘΔ'} = \widehat{Δ'Ζ}$) ,πράγμα ἀδύνατο.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΙ. Ἀπό σημεῖο Α πού δέν ἀνήκει σέ εὐθεία ε μποροῦμε νά φέρουμε μία καί μόνο μία εὐθεία κάθετη στήν ε.

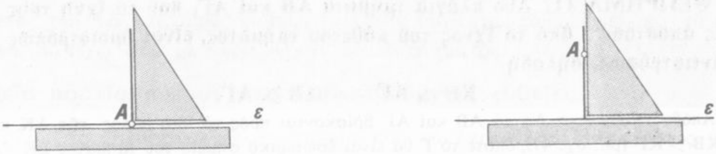
Ἀπόδ. Ἄς πάρουμε ἕνα ὁποιαδήποτε σημεῖο Β τῆς ε καί ἄς καλέσουμε ω τή μικρότερη κυρτή γωνία πού σχηματίζει ἡ ἡμιευθεία ΒΑ μέ τήν ε. Φέρνουμε ἀκόμη ἀπό τό Β μία ἡμιευθεία πρός τό ἄλλο μέρος τῆς ε, πού νά σχηματίζει γωνία $\widehat{ω}$ μέ τήν ε, καί παίρνουμε πάνω σ' αὐτή τμῆμα ΒΑ΄=ΒΑ. Ἡ ΑΑ΄ τέμνει τήν ε σ' ἕνα σημεῖο Κ καί τριγΑΒΚ = τριγΑ΄ΒΚ (γιατί ΑΒ = Α΄Β, ΒΚ = ΒΚ, $\widehat{ω} = \widehat{ω}$). Συνεπῶς



$$Α\widehat{Κ}Β = Α'\widehat{Κ}Β.$$

Ἐπειδή ὅμως εἶναι καί $\widehat{AKB} + \widehat{A'KB} = 180°$, θά ἔχουμε $\widehat{AKB} = \widehat{A'KB} = 90° \rightarrow AK \perp ε$.
Ἄς ὑποθέσουμε τώρα ὅτι ὑπάρχει καί ἄλλη κάθετη ἀπό τό Α πού τέμνει τήν ε σέ ἕνα σημεῖο Λ διαφορετικό ἀπό τό Κ. Τότε θά εἶναι $\widehat{AΛK} = 90°$ καί ἔτσι τό τρίγωνο $AKΛ$ θά ἔχει δύο ὀρθές γωνίες, πράγμα ἀδύνατο.

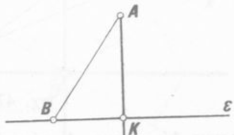
Ἡ κατασκευή τῆς εὐθείας πού διέρχεται ἀπό ἕνα σημεῖο Α καί εἶναι κάθετη σέ δοσμένη εὐθεία ε γίνεται πρακτικά μέ τή βοήθεια ἑνός κανόνα (χάρακα)



καί ἑνός γνώμονα (πού εἶναι ὄργανο μέ σχῆμα ὀρθογώνιου τριγώνου) ὅπως δείχνουν τά παραπάνω σχήματα.

Ἀπόσταση σημείου ἀπό εὐθεία.

68. Ἄς θεωρήσουμε μία εὐθεία ε καί ἄς φέρουμε ἀπό σημεῖο Α ἐκτός αὐτῆς τήν κάθετη πρός τήν ε. Ἄν Κ εἶναι τό σημεῖο στό ὁποῖο ἡ κάθετη αὐτή τέμνει τήν ε, τό εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΚ λέγεται **κάθετο τμῆμα ἀπό τό Α πρός τήν ε** καί τό σημεῖο Κ λέγεται **ἴχνος ἤ πόδι τοῦ ΑΚ** ἤ καί **ὀρθή προβολή τοῦ Α στήν ε.**



Κάθε εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ πού τό ἄκρο του Β εἶναι σημεῖο τῆς ε διαφορετικό ἀπό τό Κ θά λέγεται **πλάγιο τμῆμα ἀπό τό Α πρός τήν ε.** Τό σημεῖο Β θά λέγεται πάλι **ἴχνος ἤ πόδι τοῦ ΑΒ.** Ἐπειδή στό ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΚΒ ἡ ΑΚ εἶναι κάθετη πλευρά καί ἡ ΑΒ εἶναι ὑποτείνουσα, ἔχουμε τήν πρόταση:

— Τό κάθετο τμῆμα ἀπό σημεῖο Α πρός εὐθεία ε εἶναι μικρότερο ἀπό κάθε πλάγιο τμῆμα πού ἑνώνει τό Α μέ σημεῖο τῆς ε.

Ἀπό τήν ἰδιότητά του αὐτή τό εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΚ λέγεται καί **ἀπόσταση τοῦ σημείου Α ἀπό τήν εὐθεία ε.** Ἡ ἀπόσταση αὐτή ἐκφράζεται συνήθως μέ τό μέτρο τοῦ ΑΚ.

Σύγκριση πλάγιων τμημάτων.

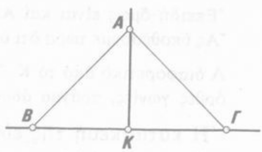
69. Ἄς θεωρήσουμε ἕνα σημεῖο Α ἐκτός εὐθείας ε καί ἄς φέρουμε ἀπό τό Α πρός τήν ε τό κάθετο τμῆμα ΑΚ καί δύο πλάγια τμήματα ΑΒ καί ΑΓ. Θά ἀποδείξουμε ὅτι:

ΘΕΩΡΗΜΑ Ι. Δύο πλάγια τμήματα ΑΒ καί ΑΓ εἶναι ἴσα, ἄν καί μόνο ἄν τά ἴχνη τους ἰσαπέχουν ἀπό τό ἴχνος τοῦ κάθετου τμήματος, δηλαδή

$$KB = KΓ \iff AB = AΓ.$$

'Απόδ. Ἄν $AB = A\Gamma$, θά εἶναι τριγAKB = τριγ$AK\Gamma$ (γιατί $\widehat{AKB} = \widehat{AK\Gamma} = 90°$, $AK = AK$, $AB = A\Gamma$) καί ἄρα $KB = K\Gamma$.

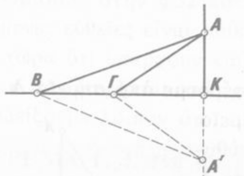
'Αντιστρόφως, ἄν $KB = K\Gamma$, τότε εἶναι πάλι τριγAKB = τριγ$AK\Gamma$ (γιατί τώρα $\widehat{AKB} = \widehat{AK\Gamma} = 90°$, $AK = AK$, $KB = K\Gamma$) καί ἄρα $AB = A\Gamma$.



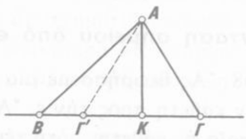
ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΙ. Δύο πλάγια τμήματα ΑΒ καί ΑΓ, πού τά ἴχνη τους ἔχουν ἄνισες ἀποστάσεις ἀπό τό ἴχνος τοῦ κάθετου τμήματος, εἶναι ὁμοιοτρόπως ἄνισα καί ἀντιστρόφως, δηλαδή

$$KB > K\Gamma \iff AB > A\Gamma.$$

'Απόδ. Ὑποθέτουμε ὅτι τά AB καί $A\Gamma$ βρίσκονται πρός τό ἴδιο μέρος τῆς AK καί ὅτι $KB > K\Gamma$ (βλ. σχ. 47), ὁπότε τό Γ θά εἶναι ἐσωτερικό σημεῖο τοῦ τμήματος BK. Ἄν πάρουμε $A' = \text{συμμ}_K A$, τά τμήματα ΓK καί BK εἶναι κάθετα στήν AA', ἐνῶ γιά τά πλάγια πρός αὐτήν τμήματα $\Gamma A'$, ΓA, BA', BA ἔχουμε $BA' = BA$ καί $\Gamma A' = \Gamma A$ (ἀφοῦ τά ἴχνη τους ἰσαπέχουν ἀπό τό ἴχνος τῆς κάθετης). Ἐπειδή τώρα ἡ τεθλασμένη $A\Gamma A'$ εἶναι μικρότερη ἀπό τήν ABA' (βλ. ἄσκ. 48), ἔχουμε



σχ. 47



σχ. 48

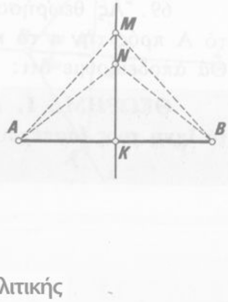
$$AB + BA' > A\Gamma + \Gamma A' \Rightarrow 2AB > 2A\Gamma \Rightarrow AB > A\Gamma.$$

Στήν περίπτωση πού τά AB καί $A\Gamma$ βρίσκονται ἑκατέρωθεν τῆς AK καί εἶναι $KB > K\Gamma$, παίρνουμε στήν ε τμῆμα $K\Gamma' = K\Gamma \Rightarrow A\Gamma' = A\Gamma$. Κατά τό προηγούμενο ὅμως εἶναι $AB > A\Gamma'$ καί ἄρα $AB > A\Gamma$.

'Αντιστρόφως, ἄν ὑποθέσουμε ὅτι $AB > A\Gamma$, τότε δέν μπορεῖ νά ἔχουμε $KB = K\Gamma$, γιατί τότε θά εἴχαμε $AB = A\Gamma$, πού εἶναι ἀντίθετο μέ τήν ὑπόθεσή μας. Ἐπίσης δέν μπορεῖ νά ἔχουμε $KB < K\Gamma$ (γιατί τότε θά εἴχαμε $AB < A\Gamma$, πού πάλι εἶναι ἀντίθετο μέ τήν ὑπόθεσή μας). Ἔτσι ἀπομένει $KB > K\Gamma$.

Σημεῖα πού ἰσαπέχουν ἀπό τά ἄκρα εὐθύγραμμου τμήματος.

70. Θά ζητήσουμε τώρα σημεῖα πού νά ἰσαπέχουν ἀπό τά ἄκρα ἑνός εὐθυγραμμου τμήματος AB. Ἄν M εἶναι ἕνα τέτοιο σημεῖο, θά ἔχουμε $MA = MB$ καί ἑπομένως, φέρνοντας τό κάθετο τμῆμα MK, θά ἔχουμε καί $KA = KB$. Ἔτσι τό K εἶναι μέσο τοῦ AB καί ἡ εὐθεία MK εἶναι ἐντελῶς ὁρισμένη, ἀφοῦ εἶναι ἡ μοναδική κάθετη πρός τήν AB πού διέρχεται ἀπό σημεῖο K. Παρατηροῦμε ἀκόμη



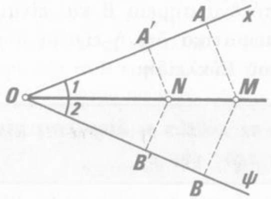
ὅτι κάθε ἄλλο σημεῖο Ν τῆς κάθετης αὐτῆς ἰσαπέχει ἐπίσης ἀπό τά Α καί Β, γιατί τά ΝΑ καί ΝΒ εἶναι πλάγια τμήματα μέ ἴχνη πού ἰσαπέχουν ἀπό τό ἴχνος Κ τοῦ κάθετου τμήματος ΝΚ. Δείξαμε λοιπόν ὅτι:

Ἕνα σημεῖο ἰσαπέχει ἀπό τά ἄκρα ἑνός εὐθύγραμμου τμήματος, ἄν καί μόνο ἄν ἀνήκει στήν εὐθεία πού εἶναι κάθετη στό τμῆμα καί περνάει ἀπό τό μέσο του.

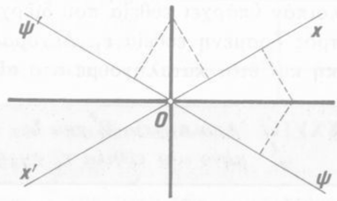
Ἡ εὐθεία πού εἶναι κάθετη σέ ἕνα τμῆμα ΑΒ στό μέσο του λέγεται **μεσοκάθετος τοῦ ΑΒ** καί, ὅπως εἴδαμε, ἔχει τήν ἰδιότητα κάθε ἕνα ἀπό τά σημεῖα της νά ἰσαπέχει ἀπό τά ἄκρα Α καί Β τοῦ τμήματος.

Σημεῖα πού ἰσαπέχουν ἀπό δύο τεμνόμενες εὐθεῖες.

71. Ἄς ζητήσουμε τέλος σημεῖα πού νά ἔχουν ἴσες ἀποστάσεις ἀπό τίς πλευρές μιᾶς γωνίας $X\widehat{O}\Psi$. Ἄν καλέσουμε Μ ἕνα σημεῖο πού οἱ ἀποστάσεις του ΜΑ καί ΜΒ ἀπό τίς πλευρές ΟΧ καί ΟΨ νά εἶναι ἴσες (σχ. 49), τότε θά ἔχουμε τριγΟΜΑ = τριγΟΜΒ (γιατί $\widehat{A} = \widehat{B} = 90°$, ΜΑ = ΜΒ, ΟΜ = ΟΜ) καί ἄρα



σχ. 49



σχ. 50

$\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$, δηλαδή ἡ ΟΜ εἶναι διχοτόμος τῆς $X\widehat{O}\Psi$. Παρατηροῦμε ἀκόμη ὅτι κάθε ἄλλο σημεῖο Ν τῆς διχοτόμου ἰσαπέχει ἀπό τίς πλευρές τῆς γωνίας, γιατί ἄν καλέσουμε ΝΑ′ καί ΝΒ′ τίς ἀποστάσεις του ἀπό τίς πλευρές τῆς γωνίας, ἔχουμε τριγΟΝΑ′ = τριγΟΝΒ′ (ἀφοῦ τώρα $\widehat{A'} = \widehat{B'} = 90°$, ΟΝ = ΟΝ, $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$) καί ἄρα ΝΑ′ = ΝΒ′. Δείξαμε λοιπόν ὅτι:

Ἕνα σημεῖο ἰσαπέχει ἀπό τίς πλευρές μιᾶς γωνίας, ἄν καί μόνο ἄν ἀνήκει στή διχοτόμο της.

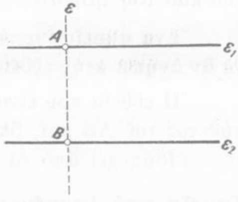
Ὅταν ζητᾶμε σημεῖα πού ἰσαπέχουν ἀπό δύο τεμνόμενες εὐθεῖες Χ′Χ καί Ψ′Ψ, εἶναι σάν νά ζητᾶμε σημεῖα πού ἰσαπέχουν ἀπό τίς πλευρές ὅλων τῶν διαδοχικῶν γωνιῶν πού σχηματίζονται ἀπό τίς εὐθεῖες αὐτές. Ἔτσι τά ζητούμενα σημεῖα βρίσκονται στίς διχοτόμους τῶν τεσσάρων διαδοχικῶν γωνιῶν πού σχηματίζουν οἱ εὐθεῖες μας (βλ. σχ. 50). Οἱ τέσσερις αὐτές διχοτόμοι ἀποτελοῦν δύο κάθετες εὐθεῖες.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 93-97

Παράλληλες εὐθεῖες.

72. **Ὁρισμός: Δύο εὐθεῖες ε_1 καί ε_2 τοῦ ἐπιπέδου μας πού δέν ἔχουν κοινό σημεῖο λέγονται παράλληλες εὐθεῖες.** Γιά νά δηλώσουμε ὅτι οἱ ε_1 καί ε_2 εἶναι παράλληλες, γράφουμε

$$\varepsilon_1 // \varepsilon_2.$$



Ἡ ὕπαρξη παράλληλων εὐθειῶν διαπιστώνεται, ἄν παρατηρήσουμε ὅτι οἱ δύο εὐθεῖες ε_1 καί ε_2 πού εἶναι κάθετες σέ δύο διαφορετικά σημεῖα Α καί Β μιᾶς εὐθείας ε δέν τέμνονται (γιατί ἄν τέμνονταν σέ ἕνα σημεῖο, θά εἴχαμε ἀπό τό σημεῖο αὐτό πρός τήν ε δύο κάθετες εὐθεῖες, πράγμα ἀδύνατο). Ἔχουμε λοιπόν τήν πρόταση:

— Δύο εὐθεῖες κάθετες στήν ἴδια εὐθεία εἶναι μεταξύ τους παράλληλες.

Ἄς θεωρήσουμε τώρα μία εὐθεία ε_1 καί ἕνα σημεῖο Β ἐκτός αὐτῆς. Ἄν φέρουμε τήν εὐθεία $BA \perp \varepsilon_1$ καί καλέσουμε ε_2 τήν εὐθεία πού εἶναι κάθετη στό Β πρός τήν ΑΒ, παρατηροῦμε ὅτι $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$ (ἀφοῦ καί οἱ δύο εἶναι κάθετες στήν ΑΒ). Ἔτσι λοιπόν ὑπάρχει εὐθεία πού διέρχεται ἀπό ἕνα σημεῖο Β καί εἶναι παράλληλη πρός δοσμένη εὐθεία ε_1. Δεχόμαστε **ἀξιωματικά** ὅτι ἡ εὐθεία αὐτή εἶναι μοναδική καί ἔτσι καταλήγουμε στό **αἴτημα τοῦ Εὐκλείδη:**

XXVII. Ἀπό σημεῖο Β πού δέν ἀνήκει σέ εὐθεία ε_1 διέρχεται μία καί μόνο μία εὐθεία ε_2 παράλληλη πρός τήν ε_1.

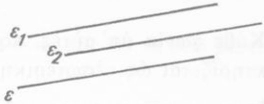
Ἡ πρόταση αὐτή εἶναι τόσο βασική, ὥστε ὁλόκληρη ἡ Γεωμετρία πού σπουδάζουμε ὀνομάσθηκε ἐξαιτίας της **«Εὐκλείδειος Γεωμετρία»**[1]. Ἄμεσες συνέπειες τοῦ εὐκλείδειου αἰτήματος εἶναι οἱ προτάσεις:

1. Οἱ διάφορες σύγχρονες ἔρευνες στή Γεωμετρία ἀρχίζουν ἱστορικά μέ τήν πρόταση αὐτή. Μετά ἀπό πολλές ἀποτυχημένες ἀπόπειρες γιά τήν ἀπόδειξη τῆς προτάσεως αὐτῆς, οἱ Μαθηματικοί προσπάθησαν νά οἰκοδομήσουν Γεωμετρίες στίς ὁποῖες δέν ἰσχύει τό «εὐκλείδειο αἴτημα». Σέ ὁλοκληρωμένη εἰκόνα μιᾶς τέτοιας Γεωμετρίας φαίνεται (ἀπό ἐπιστολές του) ὅτι εἶχε καταλήξει ἀρχικά ὁ Gauss (1777-1855) ὁ ὁποῖος ὅμως δίστασε νά δημοσιεύσει τίς σκέψεις του. Ἔτσι οἱ πρῶτες σχετικές ἐργασίες γιά μή «Εὐκλείδειο Γεωμετρία» δημοσιεύονται τό 1829 ἀπό τόν Lobatschewski (1793-1856) καί τό 1831 ἀπό τόν Bolyai (1802-1860). Ἡ πρώτη αὐτή διαφορετική Γεωμετρία δέχεται ὅτι «ἀπό σημεῖο ἐκτός εὐθείας ε διέρχονται δύο τουλάχιστον εὐθεῖες παράλληλες πρός τήν ε» καί ὀνομάζεται «Ὑπερβολική Γεωμετρία». Ἀρκετά ἀργότερα, τό 1867, δημοσιεύεται μετά τό θάνατο τοῦ Riemman (1826-1866) μιά ἐργασία του μέ τίτλο «Περί τῶν ὑποθέσεων πού θεμελιώνουν τή Γεωμετρία» ὅπου ἡ εὐθεία παρουσιάζεται πεπερασμένη καί κλειστή καί ὁρίζεται κατά τέτοιο τρόπο, ὥστε δύο εὐθεῖες νά τέμνονται πάντοτε. Ἔτσι οἰκοδομεῖται ἡ «Ἐλλειπτική Γεωμετρία» στήν ὁποία «ἀπό ἕνα σημεῖο ἐκτός εὐθείας ε δέ διέρχεται εὐθεία παράλληλη πρός τήν ε».

Ἄν καί οἱ μή Εὐκλείδειες Γεωμετρίες βρῆκαν ἐφαρμογή σέ ὁρισμένα πεδία τῆς νεώτερης Φυσικῆς, ἡ Εὐκλείδειος Γεωμετρία παραμένει πάντοτε ἡ Γεωμετρία τοῦ χώρου τῆς ἀνθρώπινης ἐποπτείας.

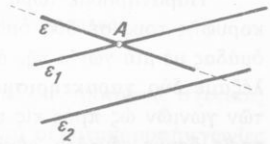
I. Ἄν δύο εὐθεῖες $ε_1$ καί $ε_2$ εἶναι παράλληλες πρός μία τρίτη εὐθεία ε, τότε εἶναι καί μεταξύ τους παράλληλες, δηλαδή:

$$ε_1 // ε \quad \text{καί} \quad ε_2 // ε \Rightarrow ε_1 // ε_2$$



Ἀπόδ. Ἄν οἱ $ε_1$ καί $ε_2$ τέμνονταν σέ ἕνα σημεῖο, θά εἴχαμε ἀπό τό σημεῖο αὐτό πρός τήν ε δύο παράλληλες, πράγμα πού δέ συμβιβάζεται μέ τό ἀξίωμά μας. Ἔτσι οἱ $ε_1$ καί $ε_2$ δέν τέμνονται καί ἄρα $ε_1 // ε_2$.

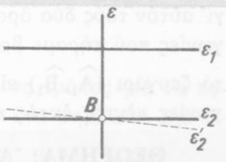
II. Ἄν δύο εὐθεῖες $ε_1$ καί $ε_2$ εἶναι παράλληλες καί μία εὐθεία ε τέμνει τή μία ἀπό αὐτές, τότε ἡ ε θά τέμνει καί τήν ἄλλη.



Ἀπόδ. Ὑποθέτουμε ὅτι ἡ ε τέμνει τήν $ε_1$ στό A. Ἄν ἡ ε δέν ἔτεμνε τήν $ε_2$, θά ἦταν $ε // ε_2$ καί ἔτσι θά εἴχαμε ἀπό τό A πρός τήν $ε_2$ δύο παράλληλες, πράγμα ἀδύνατο. Ἄρα ἡ ε τέμνει τήν $ε_2$.

III. Ἄν δύο εὐθεῖες $ε_1$ καί $ε_2$ εἶναι παράλληλες καί μία εὐθεία ε εἶναι κάθετη στήν $ε_1$, τότε ἡ ε θά εἶναι κάθετη καί στήν $ε_2$, δηλαδή

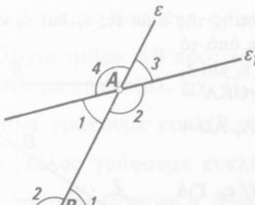
$$ε_1 // ε_2 \quad \text{καί} \quad ε \perp ε_1 \Rightarrow ε \perp ε_2.$$



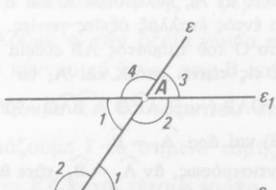
Ἀπόδ. Ἡ ε θά τέμνει τήν $ε_2$ (ἀφοῦ τέμνει τήν παράλληλή της $ε_1$) σέ ἕνα σημεῖο B. Ἄν ὑποθέσουμε ὅτι ε δέν εἶναι κάθετη στήν $ε_2$, φέρνουμε στό B τήν εὐθεία $ε_2' \perp ε$. Τότε οἱ $ε_1$ καί $ε_2'$ εἶναι παράλληλες (ὡς κάθετες στήν ε) καί ἔτσι ἔχουμε ἀπό τό B πρός τήν $ε_1$ δύο παράλληλες εὐθεῖες, τήν $ε_2$ καί $ε_2'$, πράγμα ἀδύνατο. Ἄρα $ε \perp ε_2$.

Γωνίες παράλληλων εὐθειῶν πού τέμνονται ἀπό ἄλλη.

73. Ἄς θεωρήσουμε δύο εὐθεῖες $ε_1$ καί $ε_2$ πού τέμνονται στά σημεῖα A καί B ἀπό μιά τρίτη εὐθεία ε καί ἄς καλέσουμε T τήν τομή τῶν ἡμιεπιπέδων $(ε_1,B)$ καί $(ε_2,A)$. Ἄν οἱ εὐθεῖες $ε_1$ καί $ε_2$ τέμνονται (βλ. σχ. 51), τό σύνολο T εἶναι ὡς γνωστό μία κυρτή γωνία πού οἱ πλευρές της ἀνήκουν στίς $ε_1$ καί $ε_2$. Ἄν οἱ εὐθεῖες $ε_1$ καί $ε_2$ εἶναι παράλληλες (βλ. σχ. 52), τό σύνολο T θά λέγεται **ζώνη τῶν παράλληλων εὐθειῶν $ε_1$ καί $ε_2$.**



σχ. 51



σχ. 52

Ἡ εὐθεία ε σχηματίζει μέ κάθε μία ἀπό τίς εὐθεῖες $ε_1$ καί $ε_2$ τέσσερις κυρτές διαδοχικές γωνίες πού ἀνά δύο εἶναι κατακορυφήν. Ἔχουμε λοιπόν συνολικά ὀκτώ γωνίες, πού θά τίς ὀνομάσουμε

$$\widehat{A}_1, \widehat{A}_2, \widehat{A}_3, \widehat{A}_4 \quad \text{καί} \quad \widehat{B}_1, \widehat{B}_2, \widehat{B}_3, \widehat{B}_4$$

Κάθε γωνία ἀπ' αὐτές, πού ἔχει ἐσωτερικά σημεῖα κοινά μέ τό Τ, θά χαρακτηρίζεται ὡς «ἐσωτερική» τοῦ Τ, ἐνῶ στήν ἀντίθετη περίπτωση θά χαρακτηρίζεται ὡς «ἐξωτερική» τοῦ Τ. Ἔτσι π.χ. ἡ $\widehat{A}_1$ εἶναι «ἐσωτερική» τοῦ Τ, ἐνῶ ἡ $\widehat{B}_3$ εἶναι «ἐξωτερική» τοῦ Τ.

Παρατηροῦμε τώρα ὅτι οἱ ὀκτώ γωνίες εἶναι χωρισμένες ἀπό τό γράμμα τῆς κορυφῆς τους σέ δύο ὁμάδες. Ἄν θέλουμε νά συγκρίνουμε μία γωνία τῆς μιᾶς ὁμάδας μέ μιά γωνία τῆς ἄλλης ὁμάδας, δίνουμε στό ζευγάρι τῶν γωνιῶν πού διαλέξαμε δύο χαρακτηρισμούς: Ὁ πρῶτος χαρακτηρισμός ἀναφέρεται στή θέση τῶν γωνιῶν ὡς πρός τίς εὐθεῖες ε_1 καί ε_2 καί θά χρησιμοποιοῦμε γι' αὐτόν τούς τρεῖς ὅρους «ἐντός», «ἐκτός», «ἐντός (καί) ἐκτός», ἀνάλογα μέ τό ἄν οἱ γωνίες πού πήραμε εἶναι καί οἱ δύο ἐσωτερικές τοῦ Τ ἤ καί οἱ δύο ἐξωτερικές τοῦ Τ ἤ ἡ μία ἐσωτερική καί ἡ ἄλλη ἐξωτερική τοῦ Τ. Ὁ δεύτερος χαρακτηρισμός ἀναφέρεται στή θέση τῶν γωνιῶν ὡς πρός τήν εὐθεία ε καί θά χρησιμοποιοῦμε γι' αὐτόν τούς δύο ὅρους «ἐναλλάξ» καί «ἐπί τά αὐτά μέρη», ἀνάλογα μέ τό ἄν οἱ γωνίες πού πήραμε βρίσκονται ἑκατέρωθεν ἤ πρός τό ἴδιο μέρος τῆς ε. Ἔτσι π.χ. τό ζευγάρι $(\widehat{A}_1, \widehat{B}_1)$ εἶναι γωνίες «ἐντός ἐναλλάξ», ἐνῶ τό ζευγάρι $(\widehat{A}_1, \widehat{B}_3)$ εἶναι γωνίες «ἐντός ἐκτός καί ἐπί τά αὐτά μέρη».

ΘΕΩΡΗΜΑ: Ἄν δύο παράλληλες εὐθεῖες ε_1 καί ε_2 τέμνονται ἀπό μία εὐθεία ε, ἰσχύουν οἱ προτάσεις:

— Οἱ ἐντός ἐναλλάξ γωνίες τους εἶναι ἴσες.

— Οἱ ἐντός ἐκτός καί ἐπί τά αὐτά μέρη γωνίες τους εἶναι ἴσες.

— Οἱ ἐντός καί ἐπί τά αὐτά μέρη γωνίες τους εἶναι παραπληρωματικές.

Ἀντιστρόφως, ἄν δύο εὐθεῖες ε_1 καί ε_2 τέμνονται ἀπό μία εὐθεία ε καί ἰσχύει μιά ἀπό τίς προτάσεις αὐτές, τότε οἱ εὐθεῖες ε_1 καί ε_2 εἶναι παράλληλες.

Ἀπόδ. α) Ἄς καλέσουμε Α καί Β τά σημεῖα τομῆς τῆς ε μέ τίς ε_1 καί ε_2 καί $\widehat{A}_1$, $\widehat{B}_1$ τίς δύο ἐντός ἐναλλάξ ὀξεῖες γωνίες. Ἄν φέρουμε ἀπό τό μέσο Ο τοῦ τμήματος ΑΒ εὐθεία κάθετη στίς ε_1 καί ε_2 πού τίς τέμνει στά Κ καί Λ, θά ἔχουμε τριγΟΚΑ = τριγΟΛΒ (γιατί $\widehat{AKO} = \widehat{B\Lambda O} = 90°$, $\widehat{AOK} = \widehat{BO\Lambda}$, ΑΟ = ΟΒ) καί ἄρα $\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1$.

Ἀντιστρόφως, ἄν $\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1$, τότε θά ἔχουμε $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$. Γιά νά τό ἀποδείξουμε αὐτό, φέρνουμε ἀπό τό μέσο Ο τῆς ΑΒ τήν ΟΚ $\perp$ ε_1 καί καλοῦμε Λ τό σημεῖο τομῆς τῶν ΟΚ καί ε_2. Τότε ἔχουμε τριγΟΚΑ = τριγΟΛΒ (γιατί ΟΑ = ΟΒ, $\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1$, $\widehat{KOA} = \widehat{BO\Lambda}$) καί ἄρα $\widehat{O\Lambda B} = \widehat{OKA} = 90°$, δηλαδή ΟΛ $\perp$ ε_2. Ἔτσι οἱ εὐθεῖες ε_1 καί ε_2 εἶναι παράλληλες, ἐπειδή εἶναι κάθετες στήν ΚΛ. Δείξαμε λοιπόν ὅτι

$$\text{(I)} \qquad \varepsilon_1 // \varepsilon_2 \iff \widehat{A}_1 = \widehat{B}_1.$$

Ἂν $\widehat{A}_2$ καί $\widehat{B}_2$ εἶναι οἱ ἐντός ἐναλλάξ ἀμβλεῖες γωνίες, ἔχουμε ἐπίσης $\widehat{A}_2 = \widehat{B}_2$ (γιατί $\widehat{A}_2 = 180°-\widehat{A}_1$ καί $\widehat{B}_2 = 180°-\widehat{B}_1$).

β) Ἂν καλέσουμε $\widehat{B}_3$ τή γωνία, πού μέ τήν $\widehat{A}_1$ εἶναι ἐντός ἐκτός καί ἐπί τά αὐτά μέρη, ἔχουμε $\widehat{B}_3 = \widehat{B}_1$. Ἔτσι ἡ (I) γράφεται

$$\varepsilon_1 // \varepsilon_2 \iff \widehat{A}_1 = \widehat{B}_3$$

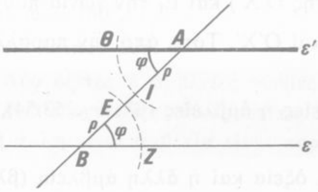
γ) Ἂν καλέσουμε $\widehat{B}_2$ τή γωνία ἡ ὁποία μέ τήν $\widehat{A}_1$ εἶναι ἐντός καί ἐπί τά αὐτά μέρη, ἔχουμε $\widehat{B}_1 = 180°-\widehat{B}_2$. Ἔτσι ἡ (I) γράφεται $\varepsilon_1 // \varepsilon_2 \iff \widehat{A}_1 = 180°-\widehat{B}_2$ δηλαδή

$$\varepsilon_1 // \varepsilon_2 \iff \widehat{A}_1 + \widehat{B}_2 = 180°.$$

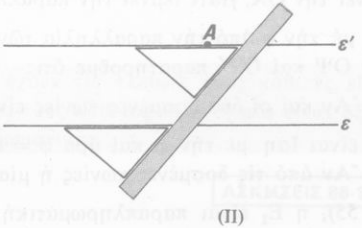
Εἶναι φανερό ὅτι μποροῦμε νά διατυπώσουμε καί ἄλλες προτάσεις σχετικές μέ τή σύγκριση δύο γωνιῶν. Ἔτσι π.χ. ἄν $\widehat{A}_3$ καί $\widehat{B}_3$ εἶναι οἱ κατακορυφήν γωνίες τῶν $\widehat{A}_1$ καί $\widehat{B}_1$, θά ἔχουμε $\widehat{A}_3 = \widehat{A}_1$ καί $\widehat{B}_3 = \widehat{B}_1$ καί τότε ἡ πρόταση $\varepsilon_1 // \varepsilon_2 \iff \widehat{A}_1 = \widehat{B}_1$ γράφεται $\varepsilon_1 // \varepsilon_2 \iff \widehat{A}_3 = \widehat{B}_3$, δηλαδή **δύο εὐθεῖες ε_1 καί ε_2 εἶναι παράλληλες, ἄν καί μόνο ἄν οἱ ἐκτός ἐναλλάξ γωνίες τους εἶναι ἴσες.**

Κατασκευή παράλληλης εὐθείας.

74. Ἀπό τό παραπάνω θεώρημα προκύπτει ἀμέσως ἕνας τρόπος γιά νά κατασκευάσουμε γεωμετρικά τήν εὐθεία ε΄ πού διέρχεται ἀπό ἕνα σημεῖο Α καί εἶ-



(I)



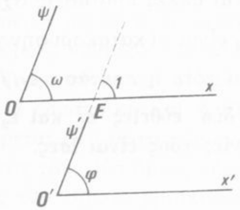
(II)

ναι παράλληλη πρός δοσμένη εὐθεία ε. Γιά τήν κατασκευή τῆς ε΄ φέρνουμε ἀπό τό Α ἕνα πλάγιο τμῆμα ΑΒ πρός τήν ε καί καλοῦμε $\widehat{\varphi}$ τήν ὀξεία γωνία πού σχηματίζει τό ΑΒ μέ τήν ε (βλ. σχ. I). Ἔπειτα, μέ κέντρο τό ἴχνος της Β καί ὁποιαδήποτε ἀκτίνα γράφουμε κυκλ(Β,ρ) καί ὀνομάζουμε $\widehat{EZ}$ τό τόξο του στό ὁποῖο βαίνει ἡ $\widehat{\varphi}$. Τέλος γράφουμε κυκλ(Α,ρ), ὀνομάζουμε Ι τό σημεῖο τομῆς του μέ τήν ΑΒ καί παίρνουμε πάνω σ' αὐτόν τόξο $\widehat{I\Theta} = \widehat{EZ}$ κατά τέτοιο τρόπο, ὥστε τά δύο τόξα $\widehat{I\Theta}$ καί $\widehat{EZ}$ νά βρίσκονται ἑκατέρωθεν τοῦ τμήματος ΑΒ. Τότε ἔχουμε $\widehat{\Theta AI} = \widehat{EBZ} = \widehat{\varphi}$ καί ἐπειδή οἱ γωνίες ΘΑΙ καί ΕΒΖ εἶναι ἐντός ἐναλλάξ τῶν εὐθειῶν ΑΘ καί ε,οἱ ὁποῖες τέμνονται ἀπό τήν ΑΒ, ἔπεται ὅτι ΑΘ // ε. Ἔτσι ἡ εὐθεία ΑΘ εἶναι ἡ ζητούμενη παράλληλος.

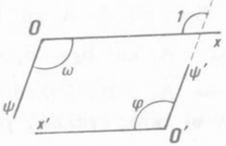
Γιά νά κατασκευάσουμε πρακτικά τήν παράλληλη εὐθεία ε΄, βάζουμε τήν «ὑποτείνουσα» ἑνός γνώμονα στήν εὐθεία ε καί προσαρμόζουμε ἕναν κανόνα (χάρακα) στή μία ἀπό τίς κάθετες πλευρές τοῦ γνώμονα ὅπως δείχνει τό παραπάνω σχῆμα. Ἔπειτα, κρατώντας ἀκίνητο τόν κανόνα, μετακινοῦμε τό γνώμονα, ὥσπου ἡ ὑποτείνουσά του νά περάσει ἀπό τό Α. Ἡ νέα αὐτή θέση τῆς ὑποτείνουσας εἶναι ἡ ζητούμενη παράλληλος ε΄.

Γωνίες μέ πλευρές παράλληλες.

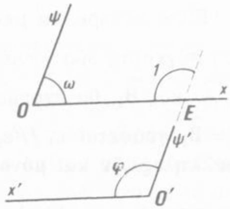
75. Ἄς θεωρήσουμε δύο γωνίες $\widehat{XO\Psi}$ καί $\widehat{X'O'\Psi'}$ πού ἔχουν τίς πλευρές τους ἀνά δύο παράλληλες καί ἄς ὑποθέσουμε ὅτι $OX \parallel O'X'$ καί $O\Psi \parallel O'\Psi'$.



σχ. 53



σχ. 54



σχ. 55

Ἄς καλέσουμε ἀκόμη Ε τό σημεῖο τομῆς τῶν εὐθειῶν $O'\Psi'$ καί OX (ἡ $O'\Psi'$ τέμνει τήν OX, γιατί τέμνει τήν παράλληλό της $O'X'$) καί $\widehat{E_1}$ τήν γωνία πού εἶναι ἴση μέ τήν $\widehat{\varphi}$ ἀπό τήν παραλληλία τῶν OX καί $O'X'$. Τότε, ἀπό τήν παραλληλία τῶν $O\Psi$ καί $O'\Psi'$ παρατηροῦμε ὅτι:

α) Ἄν καί οἱ δύο δοσμένες γωνίες εἶναι ὀξεῖες ἤ ἀμβλεῖες (βλ. σχ. 53,54), ἡ $\widehat{E_1}$ εἶναι ἴση μέ τήν $\widehat{\omega}$ καί ἄρα $\widehat{\varphi} = \widehat{\omega}$.

β) Ἄν ἀπό τίς δοσμένες γωνίες ἡ μία εἶναι ὀξεία καί ἡ ἄλλη ἀμβλεία (βλ. σχ. 55), ἡ $\widehat{E_1}$ εἶναι παραπληρωματική τῆς $\widehat{\omega}$ καί ἄρα $\widehat{\varphi} + \widehat{\omega} = 180^0$ Ἔχουμε λοιπόν τήν πρόταση:

Δύο ὀξεῖες ἤ ἀμβλεῖες γωνίες, πού ἔχουν παράλληλες πλευρές εἶναι ἴσες, ἐνῶ δύο γωνίες πού ἔχουν παράλληλες πλευρές ἀλλά ἡ μία εἶναι ὀξεία καί ἡ ἄλλη εἶναι ἀμβλεία εἶναι παραπληρωματικές.

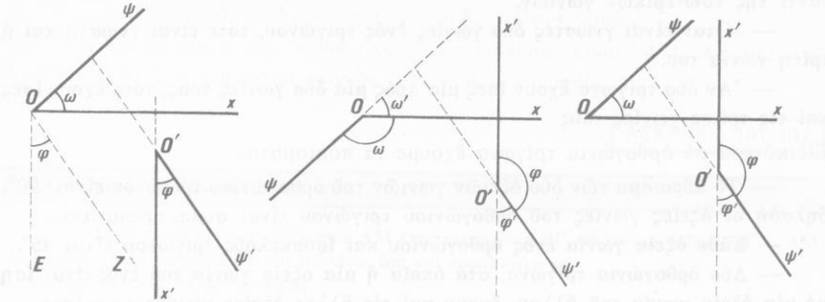
Γωνίες μέ πλευρές κάθετες.

76. Ἄς θεωρήσουμε τώρα δύο γωνίες $\widehat{XO\Psi} = \widehat{\omega}$ καί $\widehat{X'O'\Psi'} = \widehat{\varphi}$ πού ἔχουν τίς πλευρές τους κάθετες καί ἄς ὑποθέσουμε ὅτι $OX \perp O'X'$ καί $O\Psi \perp O'\Psi'$. Ἄν οἱ γωνίες $\widehat{\varphi}$ καί $\widehat{\omega}$ εἶναι ὀξεῖες, κατασκευάζουμε γωνία $\widehat{EOZ} = \widehat{\varphi}$ φέρνοντας $OE \parallel O'X'$ καί $OZ \parallel O'\Psi'$. Ἔχουμε τότε $EO \perp OX$ καί $ZO \perp O\Psi$ καί ἄρα:

$$\widehat{EOX} = \widehat{ZO\Psi} = 90° \Rightarrow \widehat{EOZ} + \widehat{ZOX} = \widehat{ZOX} + \widehat{XO\Psi}$$

$$\Rightarrow \widehat{\varphi} + \widehat{ZOX} = \widehat{ZOX} + \widehat{\omega} \Rightarrow \widehat{\varphi} = \widehat{\omega}.$$

Ἂν οἱ γωνίες $\widehat{\omega}$ καί $\widehat{\varphi}$ εἶναι ἀμβλεῖες, τά παραπληρώματά τους $\widehat{\omega}'$ καί $\widehat{\varphi}'$



(πού σχηματίζονται ἄν προεκτείνουμε μία πλευρά τῆς κάθε γωνίας) θά εἶναι ὀξεῖες γωνίες μέ πλευρές κάθετες, δηλαδή θά εἶναι γωνίες ἴσες. Ἄρα οἱ $\widehat{\varphi}$ καί $\widehat{\omega}$ εἶναι πάλι ἴσες, ἐπειδή εἶναι παραπληρώματα ἴσων γωνιῶν.

Τέλος, ἄν ἡ $\widehat{\varphi}$ εἶναι ἀμβλεία καί ἡ $\widehat{\omega}$ εἶναι ὀξεία, ἡ γωνία $\widehat{\varphi}'$, πού σχηματίζεται ἄν προεκτείνουμε τήν ΟΨ′, εἶναι παραπληρωματική τῆς $\widehat{\varphi}$ καί ἴση μέ τήν $\widehat{\omega}$ (ἀφοῦ οἱ $\widehat{\varphi}'$ καί $\widehat{\omega}$ εἶναι ὀξεῖες μέ πλευρές κάθετες). Ἔτσι εἶναι $\widehat{\varphi} + \widehat{\varphi}' = 180° \Rightarrow$
$\Rightarrow \widehat{\varphi} + \widehat{\omega} = 180°$.

Δείξαμε λοιπόν ὅτι:

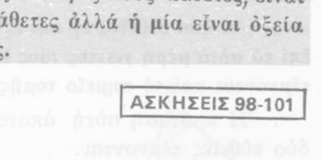
Δύο ὀξεῖες ἤ ἀμβλεῖες γωνίες πού ἔχουν τίς πλευρές τους κάθετες, εἶναι ἴσες, ἐνῶ δύο γωνίες πού ἔχουν τίς πλευρές τους κάθετες ἀλλά ἡ μία εἶναι ὀξεία καί ἡ ἄλλη εἶναι ἀμβλεία εἶναι παραπληρωματικές.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 98-101

Ἄθροισμα γωνιῶν τριγώνου.

77. Ἄν φέρουμε ἀπό τήν κορυφή Γ τριγώνου ΑΒΓ τήν εὐθεία ΓΕ // ΒΑ, ἔχουμε (ἀπό τή σύγκριση τῶν γωνιῶν πού σχηματίζουν οἱ παράλληλες, ὅταν τέμνονται ἀπό τίς ΑΓ καί ΒΓ)

$$\widehat{\text{ΕΓΑ}} = \widehat{\text{Α}}, \quad \widehat{\text{ΕΓΖ}} = \widehat{\text{Β}}.$$



Ἔτσι ἡ ἰσότητα $\widehat{\Gamma} + \widehat{\text{ΑΓΕ}} + \widehat{\text{ΕΓΖ}} = 180°$, πού εἶναι φανερή ἀπό τό σχῆμα μας, γράφεται τελικά

$$\widehat{\text{Α}} + \widehat{\text{Β}} + \widehat{\Gamma} = 180°,$$

δηλαδή:

τό ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑνός τριγώνου εἶναι 2 ὀρθές γωνίες.

Ἀπό τήν πρόταση αὐτή ἔχουμε ἀμέσως τά πορίσματα:

— Ἡ ἐξωτερική γωνία ἑνός τριγώνου εἶναι ἴση μέ τό ἄθροισμα τῶν δύο ἀπέναντί της ἐσωτερικῶν γωνιῶν.

— Ὅταν εἶναι γνωστές δύο γωνίες ἑνός τριγώνου, τότε εἶναι γνωστή καί ἡ τρίτη γωνία του.

— Ἄν δύο τρίγωνα ἔχουν ἴσες μία πρός μία δύο γωνίες τους, τότε ἔχουν ἴσες καί τίς τρίτες γωνίες τους

Εἰδικότερα σέ ὀρθογώνια τρίγωνα ἔχουμε τά πορίσματα:

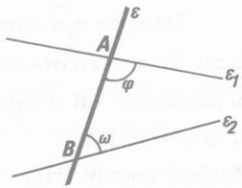
— Τό ἄθροισμα τῶν δύο ὀξειῶν γωνιῶν τοῦ ὀρθογώνιου τριγώνου εἶναι 90°, δηλαδή οἱ ὀξεῖες γωνίες τοῦ ὀρθογώνιου τριγώνου εἶναι συμπληρωματικές.

— Κάθε ὀξεία γωνία ἑνός ὀρθογώνιου καί ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι 45°.

— Δύο ὀρθογώνια τρίγωνα, στά ὁποῖα ἡ μία ὀξεία γωνία τοῦ ἑνός εἶναι ἴση μέ μία ὀξεία γωνία τοῦ ἄλλου, ἔχουν καί τίς ἄλλες ὀξεῖες γωνίες τους ἴσες.

Εἶναι φανερό ἐπίσης ὅτι **κάθε γωνία ἰσόπλευρου τριγώνου εἶναι 60°.**

Ἄν μία εὐθεία ε τέμνει δύο ἄλλες εὐθεῖες ε_1 καί ε_2 καί οἱ ἐντός καί ἐπί τά αὐτά μέρη γωνίες $\widehat{\varphi}$ καί $\widehat{\omega}$ ἔχουν ἄθροισμα μικρότερο ἀπό 180°, τότε οἱ ε_1 καί ε_2, δέν εἶναι παράλληλες (ἀφοῦ $\widehat{\varphi}+\widehat{\omega} \neq 180°$) καί ἔχουν κοινό σημεῖο τό ὁποῖο βρίσκεται πρός τό μέρος τῶν γωνιῶν $\widehat{\varphi}$ καί $\widehat{\omega}$ (γιατί ἄν βρισκόταν πρός τό ἄλλο μέρος τους, θά σχηματιζόταν τρίγωνο πού τό ἄθροισμα τῶν γωνιῶν του θά ἦταν μεγαλύτερο ἀπό 180°). Δείξαμε λοιπόν ὅτι:

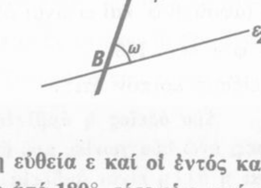


Ἄν δύο εὐθεῖες ε_1 καί ε_2 τέμνονται ἀπό μία τρίτη εὐθεία ε καί οἱ ἐντός καί ἐπί τά αὐτά μέρη γωνίες τους ἔχουν ἄθροισμα μικρότερο ἀπό 180°, τότε οἱ ε_1 καί ε_2 τέμνονται καί τό σημεῖο τομῆς τους βρίσκεται πρός τό μέρος τῶν γωνιῶν αὐτῶν.

Ἡ πρόταση αὐτή ἀποτελεῖ βασικό κριτήριο μέ τό ὁποῖο ἐξετάζουμε ἄν δύο εὐθεῖες τέμνονται.

Ἄθροισμα τῶν γωνιῶν πολυγώνου.

78. Ἄς πάρουμε τέλος ἕνα πολύγωνο $A_1A_2\ldots A_\nu$ μέ ν πλευρές καί ἄς φέρουμε ἀπό μία κορυφή του,π.χ. τήν A_1, ὅλες τίς διαγωνίους πού διέρχονται ἀπ' αὐτή. Κάθε πλευρά τοῦ πολυγώνου, διαφορετική ἀπό τίς πλευρές πού διέρχονται ἀπό τήν κορυφή A_1, σχηματίζει μέ τίς διαγωνίους πού φέραμε ἕνα τρίγωνο. Ἔτσι σχηματίζονται ν–2 τρίγωνα πού τό ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τους εἶναι ἴσο μέ τό ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ πολυγώνου. Ἐπειδή τό ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τῶν ν–2 τριγώνων εἶναι $2(\nu-2)=2\nu-4$ ὀρθές, προκύπτει ὅτι:



Τό ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑνός πολυγώνου εἶναι 2ν-4 ὀρθές,

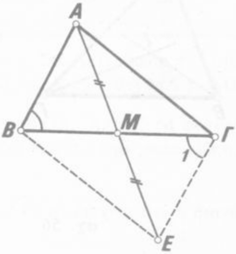
δηλαδή: $\widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 + \ldots + \widehat{A}_\nu = 2\nu - 4$ ὀρθές.

Ἔτσι π.χ. τό ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑνός τετραπλεύρου εἶναι $2.4-4=4$ ὀρθές, ἐνῶ ἕνα δεκάγωνο ἔχει ἄθροισμα γωνιῶν $2.10 - 4 = 16$ ὀρθές.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 101-107

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

89. Στήν προέκταση τῆς διαμέσου ΑΜ ἑνός τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε τμῆμα ΜΕ = ΑΜ. Νά δειχθεῖ ὅτι τά τμήματα ΓΕ καί ΒΕ εἶναι ἴσα καί παράλληλα μέ τίς πλευρές ΑΒ καί ΑΓ ἀντιστοίχως,.



Λύση : Τά τρίγωνα ΑΒΜ καί ΜΓΕ εἶναι ἴσα, γιατί ἔχουν $AM = ME$, $BM = M\Gamma$, $A\widehat{M}B = \Gamma\widehat{M}E$. Ἄρα ἔχουμε

$$\Gamma E = AB \quad \text{καί} \quad \widehat{\Gamma}_1 = \widehat{B}.$$

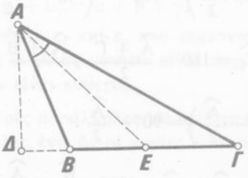
Ἀπό τήν ἰσότητα $\widehat{\Gamma}_1 = \widehat{B}$ ἔπεται ὅτι ΓΕ // ΑΒ. Μέ τόν ἴδιο τρόπο δείχνουμε, ἀπό τήν ἰσότητα τῶν τριγώνων ΑΜΓ καί ΒΜΕ, ὅτι ΒΕ // = ΑΓ.

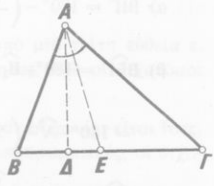
90. Σέ τρίγωνο ΑΒΓ, στό ὁποῖο εἶναι ΑΒ < ΑΓ, φέρνουμε τό ὕψος ΑΔ καί τή διχοτόμο ΑΕ.
Νά δειχθεῖ ὅτι:

α) Τό ὕψος ΑΔ δέν περιέχεται στή γωνία $E\widehat{A}\Gamma$.

β) Ἡ γωνία τοῦ ὕψους καί τῆς διχοτόμου εἶναι: $\Delta\widehat{A}E = \dfrac{\widehat{B} - \widehat{\Gamma}}{2}$.

Λύση: α) Ἄν $\widehat{B} > 90°$, τό ὕψος βρίσκεται ἔξω ἀπό τό τρίγωνο καί ἄρα ἔξω ἀπό τή γωνία $E\widehat{A}\Gamma$. Ἄν $\widehat{B} < 90°$ πρέπει νά δείξουμε ὅτι $\Delta\widehat{A}\Gamma > E\widehat{A}\Gamma$, δηλ. ὅτι $\Delta\widehat{A}\Gamma > \dfrac{\widehat{A}}{2}$. Ἐπειδή ὅμως $\widehat{B} > \widehat{\Gamma}$, ἔχουμε $90° - \widehat{B} < 90° - \widehat{\Gamma}$, δηλαδή $\Delta\widehat{A}B < \Delta\widehat{A}\Gamma \Rightarrow \widehat{A} - \Delta\widehat{A}\Gamma < \Delta\widehat{A}\Gamma \Rightarrow$ $\Rightarrow \Delta\widehat{A}\Gamma > \dfrac{\widehat{A}}{2}$.





β) Ἀφοῦ τό ΑΔ βρίσκεται ἔξω ἀπό τή γωνία $E\widehat{A}\Gamma = \dfrac{\widehat{A}}{2}$, θά εἶναι $\Delta\widehat{A}E = \Delta\widehat{A}\Gamma - E\widehat{A}\Gamma = \Delta\widehat{A}\Gamma - \dfrac{\widehat{A}}{2}$. Ἔτσι ἄν θέσουμε $\Delta\widehat{A}\Gamma = 90° - \widehat{\Gamma}$ καί $\dfrac{\widehat{A}}{2} = 90° - \dfrac{\widehat{B}}{2} - \dfrac{\widehat{\Gamma}}{2}$, βρίσκουμε τελικά:

$$\Delta\widehat{A}E = (90° - \widehat{\Gamma}) - \left(90° - \frac{\widehat{B}}{2} - \frac{\widehat{\Gamma}}{2}\right) = -\widehat{\Gamma} + \frac{\widehat{B}}{2} + \frac{\widehat{\Gamma}}{2} = \frac{\widehat{B}}{2} - \frac{\widehat{\Gamma}}{2} = \frac{\widehat{B} - \widehat{\Gamma}}{2}.$$

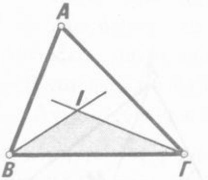
91. Σέ τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε τίς ἐσωτερικές καί ἐξωτερικές διχοτόμους τῶν γωνιῶν του $\widehat{B}$ καί Γ. Νά δειχθεῖ ὅτι:

α) Ἡ γωνία τῶν δύο ἐσωτερικῶν διχοτόμων εἶναι ἴση μέ $90^0 + \dfrac{\widehat{A}}{2}$.

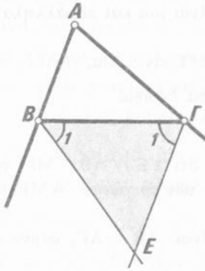
β) Ἡ γωνία τῶν δύο ἐξωτερικῶν διχοτόμων εἶναι ἴση μέ $90^0 - \dfrac{\widehat{A}}{2}$.

γ) Ἡ γωνία μιᾶς ἐσωτερικῆς καί μιᾶς ἐξωτερικῆς διχοτόμου εἶναι ἴση μέ $\dfrac{\widehat{A}}{2}$.

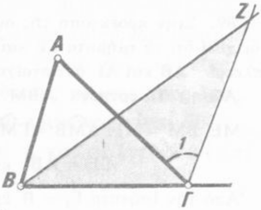
Λύση: Ἄν οἱ ἐσωτερικές διχοτόμοι τέμνονται στό Ι (βλ. σχ. 56), οἱ ἐξωτερικές διχοτόμοι τέμνονται στό Ε (βλ. σχ. 57) καί ἡ ἐσωτερική διχοτόμος τῆς $\widehat{B}$ καί ἡ ἐξωτερική διχοτόμος τῆς $\widehat{\Gamma}$



σχ. 56



σχ. 57



σχ. 58

τέμνονται στό Ζ (βλ. σχ. 58), ἀπό τά τρίγωνα ΒΙΓ, ΒΕΓ, ΒΖΓ ἔχουμε ἀντιστοίχως (ἐπειδή $\dfrac{\widehat{A}}{2} + \dfrac{\widehat{B}}{2} + \dfrac{\widehat{\Gamma}}{2} = 90°$, $2\widehat{B}_1 = \widehat{A} + \widehat{\Gamma}$ καί $2\widehat{\Gamma}_1 = \widehat{A} + \widehat{B}$):

α) $B\widehat{I}\Gamma = 180° - \left(\dfrac{\widehat{B}}{2} + \dfrac{\widehat{\Gamma}}{2}\right) = 180° - \left(90° - \dfrac{\widehat{A}}{2}\right) = 90° + \dfrac{\widehat{A}}{2}$.

β) $B\widehat{E}\Gamma = 180° - \widehat{B}_1 - \widehat{\Gamma}_1 = 180° - \dfrac{\widehat{A}+\widehat{\Gamma}}{2} - \dfrac{\widehat{A}+\widehat{B}}{2} = 180° - \widehat{A} - \left(\dfrac{\widehat{B}}{2} + \dfrac{\widehat{\Gamma}}{2}\right) =$

$= 180° - \widehat{A} - \left(90° - \dfrac{\widehat{A}}{2}\right) = 90° - \dfrac{\widehat{A}}{2}$.

γ) $B\widehat{Z}\Gamma = 180° - \dfrac{\widehat{B}}{2} - (\widehat{\Gamma}_1 + \widehat{\Gamma}) = 180° - \dfrac{\widehat{B}}{2} - \dfrac{\widehat{A}+\widehat{B}}{2} - \widehat{\Gamma} = 180° - (\widehat{B} + \widehat{\Gamma}) -$

$- \dfrac{\widehat{A}}{2} = \widehat{A} - \dfrac{\widehat{A}}{2} = \dfrac{\widehat{A}}{2}$.

92. Σέ τρίγωνο ΑΒΓ, στό ὁποῖο ἡ ἡμιευθεία ΑΕ βρίσκεται ἔξω ἀπό τή γωνία του $\widehat{A}$, θεωροῦμε τίς προτάσεις:

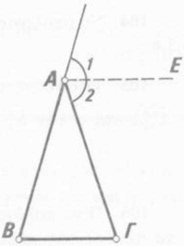
Ι. Τό τρίγωνο εἶναι ἰσοσκελές μέ ΑΒ = ΑΓ.

ΙΙ. Ἡ ΑΕ εἶναι παράλληλος πρός τήν ΒΓ.

ΙΙΙ. Ἡ ΑΕ εἶναι ἐξωτερική διχοτόμος τῆς γωνίας $\widehat{A}$.

Νά δειχθεῖ ὅτι, ἄν ἀληθεύουν οἱ δύο προτάσεις, τότε θά ἀληθεύει καί ἡ τρίτη.

Λύση: Ἂν ΑΒ = ΑΓ καί ΑΕ // ΒΓ, τότε ἀπό τήν παραλληλία τῶν ΑΕ καί ΒΓ ἔχουμε $\widehat{A}_1 = \widehat{B}$ καί $\widehat{A}_2 = \widehat{\Gamma}$ καί ἐπειδή $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$, θά εἶναι $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$.



Ἂν ΑΒ = ΑΓ καί $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$, τότε ἡ ἰσότητα $\widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 = \widehat{B} + \widehat{\Gamma}$ (πού προκύπτει ἀπό τήν ἰδιότητα τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας $\widehat{A}$) γράφεται $2\widehat{A}_2 = 2\widehat{\Gamma} \Rightarrow \widehat{A}_2 = \widehat{\Gamma} \Rightarrow$ ΑΕ // ΒΓ.

Τέλος ἄν ΑΕ // ΒΓ καί $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$, τότε οἱ ἰσότητες $\widehat{A}_1 = \widehat{B}$ καί $\widehat{A}_2 = \widehat{\Gamma}$, πού προκύπτουν ἀπό τήν παραλληλία τῶν ΑΕ καί ΒΓ, δίνουν ἀμέσως $\widehat{B} = \widehat{\Gamma} \Rightarrow$ τριγ. ΑΒΓ = ἰσοσκελές.

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ*

93. Δίνεται ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ καί ἡ μεσοκάθετός του ε. Στό ἡμιεπίπεδο πού ορίζουν ἡ εὐθεία ε καί τό σημεῖο Β παίρνουμε ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο Μ. Νά δείξετε ὅτι ΜΑ > ΜΒ.

94. Θεωροῦμε γωνία $X\widehat{O}\Psi$ καί ἕνα σημεῖο Μ τῆς διχοτόμου της ΟΔ. Ἀπό τό Μ φέρνουμε τά κάθετα πρός τίς πλευρές τμήματα ΜΑ καί ΜΒ. Νά δείξετε ὅτι ἡ ΟΔ εἶναι μεσοκάθετος τοῦ ΑΒ.

95. Ἂν σ' ἕνα τετράπλευρο ΑΒΓΔ ἔχουμε ΑΒ = ΒΓ καί $\widehat{A} = \widehat{\Gamma}$, νά δειχθεῖ ὅτι ἡ διαγώνιος ΒΔ εἶναι μεσοκάθετος τῆς διαγωνίου ΑΓ.

96. Δίνεται γωνία $X\widehat{O}\Psi$ καί ἕνα σημεῖο Μ τῆς διχοτόμου της ΟΔ. Ἀπό τό Μ φέρνουμε τό τμῆμα ΜΑ κάθετο πρός τήν πλευρά ΟΧ καί καλοῦμε Ε τό σημεῖο τομῆς τῶν εὐθειῶν ΜΑ καί ΟΨ. Νά δείξετε ὅτι ΜΑ < ΜΕ.

97. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι σέ κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ἔχουμε $\upsilon_\alpha < \dfrac{\beta+\gamma}{2}$. Μέ τή βοήθεια αὐτῆς τῆς ἀνισότητας νά δειχθεῖ ὅτι:

$$\upsilon_\alpha + \upsilon_\beta + \upsilon_\gamma < \alpha + \beta + \gamma.$$

98. Δίνονται δύο παράλληλες εὐθεῖες ε_1 καί ε_2 πού τέμνονται ἀπό μιά τρίτη εὐθεία ε. Νά δειχθεῖ ὅτι οἱ διχοτόμοι τῶν ἐντός ἐναλλάξ γωνιῶν εἶναι παράλληλες, ἐνῶ οἱ διχοτόμοι τῶν ἐντός καί ἐπί τά αὐτά μέρη γωνιῶν εἶναι κάθετες.

99. Θεωροῦμε δύο γωνίες μέ πλευρές παράλληλες. Νά δείξετε ὅτι, ἄν οἱ γωνίες εἶναι ἴσες, οἱ διχοτόμοι τους εἶναι εὐθεῖες παράλληλες, ἐνῶ ἄν οἱ γωνίες εἶναι παραπληρωματικές, οἱ διχοτόμοι τους εἶναι εὐθεῖες κάθετες.

100. Θεωροῦμε δύο γωνίες μέ πλευρές κάθετες. Νά δείξετε ὅτι, ἄν οἱ γωνίες εἶναι ἴσες, οἱ διχοτόμοι τους εἶναι εὐθεῖες κάθετες, ἐνῶ ἄν οἱ γωνίες εἶναι παραπληρωματικές, οἱ διχοτόμοι τους εἶναι εὐθεῖες παράλληλες.

101. Νά δείξετε ὅτι τό συμμετρικό μιᾶς εὐθείας ε ὡς πρός κέντρο Ο εἶναι εὐθεία παράλληλη πρός τήν ε.

102. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ μέ ΑΒ < ΑΓ καί φέρνουμε τή διχοτόμο του ΑΕ. Νά δειχθεῖ ὅτι

$$A\widehat{E}\Gamma = 90^\circ + \frac{\widehat{B} - \widehat{\Gamma}}{2}, \quad A\widehat{E}B = 90^\circ - \frac{\widehat{B} - \widehat{\Gamma}}{2}.$$

103. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ μέ ΑΒ < ΑΓ καί παίρνουμε στήν πλευρά του ΑΓ τμῆμα ΑΔ = ΑΒ. Νά δειχθεῖ ὅτι

$$\widehat{B\Delta\Gamma} = 90^\circ + \frac{\widehat{A}}{2}, \quad \widehat{\Delta B\Gamma} = \frac{\widehat{B} - \widehat{\Gamma}}{2}.$$

104. Νά ὑπολογισθοῦν οἱ γωνίες ἑνός τετραπλεύρου, ὅταν εἶναι ἀνάλογες μέ τούς ἀριθμούς 1,3,5,6.

105. Θεωροῦμε τετράπλευρο ΑΒΓΔ μέ $\widehat{A} > \widehat{\Gamma}$ καί καλοῦμε $\widehat{\omega}$ τή γωνία τῶν διχοτόμων τῶν $\widehat{\Gamma}, \widehat{\Delta}$ καί $\widehat{\varphi}$ τήν ὀξεία γωνία τῶν διχοτόμων τῶν $\widehat{B}, \widehat{\Delta}$. Νά δείξετε ὅτι

$$\widehat{\omega} = \frac{\widehat{A} + \widehat{B}}{2}, \quad \widehat{\varphi} = \frac{\widehat{A} - \widehat{\Gamma}}{2}.$$

106. Ἕνα πολύγωνο ἔχει ὅλες τίς γωνίες του ἴσες καί κάθε μιά τους εἶναι 144°. Νά βρεθεῖ τό πλῆθος τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου.

107. Νά δείξετε ὅτι τό ἄθροισμα τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν κάθε (κυρτοῦ) πολυγώνου εἶναι ἴσο μέ 360°

(Ἐξωτερική γωνία πολυγώνου λέγεται ἡ ἐφεξῆς καί παραπληρωματική κάθε γωνίας του).

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ **

109. Θεωροῦμε τρίγωνο ΑΒΓ, τίς διχοτόμους ΒΔ καί ΓΕ τῶν γωνιῶν του $\widehat{B}$ καί $\widehat{\Gamma}$ καί τήν ἐξωτερική διχοτόμο ΑΧ τῆς γωνίας του $\widehat{A}$. Ἀπό τό Δ φέρνουμε παράλληλο πρός τήν ΓΕ πού τέμνει τήν ΑΧ στό Ζ καί ἀπό τό Ε φέρνουμε παράλληλο πρός τήν ΒΔ πού τέμνει τήν ΑΧ στό Η. Νά δείξετε ὅτι:

$$\widehat{\Delta Z A} = \frac{\widehat{B}}{2}, \quad \widehat{E H A} = \frac{\widehat{\Gamma}}{2}.$$

109. Νά δείξετε ὅτι κάθε διάμεσος τριγώνου ΑΒΓ εἶναι μικρότερη ἀπό τό ἡμιάθροισμα τῶν πλευρῶν πού τήν περιέχουν καί μεγαλύτερη ἀπό τήν ἡμιδιαφορά τους, δηλαδή νά δείξετε π.χ. ὅτι:

$$\frac{|\beta - \gamma|}{2} < \mu_\alpha < \frac{\beta + \gamma}{2}.$$

Νά δείξετε ἀκόμη ὅτι σέ κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ἔχουμε: $\mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma < \alpha + \beta + \gamma$.

110. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ μέ ΑΒ < ΑΓ. Νά δειχθεῖ ὅτι:

I) Τό ὕψος $A\Delta = \upsilon_\alpha$ σχηματίζει μέ τή μικρότερη πλευρά μικρότερη γωνία.

II) Ἡ διάμεσος $AM = \mu_\alpha$ σχηματίζει μέ τή μικρότερη πλευρά μεγαλύτερη γωνία.

III) Τό ὕψος υ_α καί ἡ διάμεσος μ_α βρίσκονται ἑκατέρωθεν τῆς διχοτόμου $AE = \delta_\alpha$.

IV) Ἰσχύουν πάντα οἱ ἀνισότητες $\upsilon_\alpha < \delta_\alpha < \mu_\alpha$, $\upsilon_\alpha + \upsilon_\beta + \upsilon_\gamma < \delta_\alpha + \delta_\beta + \delta_\gamma < \mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma$

V) Ἰσχύει πάντα ἡ ἀνισότητα $\delta_\alpha + \delta_\beta + \delta_\gamma < \alpha + \beta + \gamma$.

111. Δύο ὀρθογώνια τρίγωνα εἶναι ἴσα, ὅταν ἔχουν ἴσες ὑποτείνουσες καί ἴσα ἀθροίσματα κάθετων πλευρῶν.

112. Στίς πλευρές ΑΒ, ΒΓ,ΓΑ ἑνός ἰσόπλευρου τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε ἀντιστοίχως τά σημεῖα Δ,Ε,Ζ τέτοια ὥστε ΑΔ = ΒΕ = ΓΖ. Νά δείξετε ὅτι τό τρίγωνο ΔΕΖ εἶναι ἐπίσης ἰσόπλευρο.

Ἀντιστρόφως, ἄν ἔχουμε ἕνα ἰσόπλευρο τρίγωνο ΔΕΖ πού οἱ κορυφές του Δ,Ε,Ζ, εἶναι στίς πλευρές[1] ΑΒ,ΒΓ,ΓΑ ἑνός ἄλλου ἰσόπλευρου τριγώνου ΑΒΓ, νά δείξετε ὅτι ΑΔ = ΒΕ = ΓΖ.

113. **Οἱ ἀπέναντι πλευρές ἑνός τετραπλεύρου ΑΒΓΔ τέμνονται στά Ε καί Ζ. Νά δειχθεῖ**

1. Ἄν ἔχουμε ἕνα τρίγωνο ΔΕΖ πού κάθε κορυφή του εἶναι πάνω σέ μιά πλευρά ἑνός τριγώνου ΑΒΓ, τότε τό ΔΕΖ λέγεται «ἐγγεγραμμένο» στό ΑΒΓ.

ὅτι ἡ γωνία τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν $\widehat{E}$ καί $\widehat{Z}$ εἶναι ἴση μέ τό ἡμιάθροισμα δύο ἀπέναντι γωνιῶν τοῦ τετραπλεύρου.

114. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ καί ἡ διάμεσός του ΑΜ. Νά δειχθεῖ ὅτι ἡ γωνία $\widehat{A}$ εἶναι ὀξεία, ὀρθή ἤ ἀμβλεία, ἄν ἡ ΑΜ εἶναι μεγαλύτερη, ἴση ἤ μικρότερη, ἀπό τό μισό τῆς ΒΓ.

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 6

1. Γιά τίς κάθετες εὐθεῖες ἔχουμε δύο θεμελιώδη θεωρήματα:

I. Σ' ἕνα σημεῖο Α μιᾶς εὐθείας ε μποροῦμε νά φέρουμε μία καί μόνο μία κάθετη στήν ε.

II. Ἀπό ἕνα σημεῖο Α πού δέν ἀνήκει σέ εὐθεία ε μποροῦμε νά φέρουμε μία καί μόνο μία εὐθεία κάθετη στήν ε.

Ἄν καλέσουμε Κ τό σημεῖο στό ὁποῖο ἡ κάθετη εὐθεία πού φέρνουμε ἀπό σημεῖο Α πρός εὐθεία ε τέμνει τήν ε, τό εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΚ λέγεται **ἀπόσταση τοῦ Α ἀπό τήν ε** καί εἶναι **μικρότερο** ἀπό κάθε πλάγιο τμῆμα ΑΒ.

Ἡ σύγκριση δύο πλάγιων τμημάτων ΑΒ καί ΑΓ ἀνάγεται στή σύγκριση τῶν ἀποστάσεων τῶν ἰχνῶν τους ἀπό τό ἴχνος Κ τοῦ κάθετου τμήματος. Ἔτσι ἔχουμε

$$AB \gtreqless A\Gamma \iff KB \gtreqless K\Gamma.$$

Ἡ κάθετη εὐθεία πού φέρνουμε σ' ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ στό μέσο Κ αὐτοῦ λέγεται **μεσοκάθετος τοῦ ΑΒ.** Κάθε σημεῖο πού ἰσαπέχει ἀπό δύο σημεῖα Α καί Β βρίσκεται στή μεσοκάθετο τοῦ τμήματος ΑΒ καί ἀντιστρόφως.

Ἐπίσης κάθε σημεῖο πού ἰσαπέχει ἀπό τίς πλευρές μιᾶς γωνίας βρίσκεται στή διχοτόμο της καί ἀντιστρόφως.

2. Δύο εὐθεῖες ἑνός ἐπιπέδου πού δέν ἔχουν κοινό σημεῖο λέγονται **παράλληλες εὐθεῖες.** Δεχόμαστε τό «Εὐκλείδειο αἴτημα»:

— Ἀπό ἕνα σημεῖο πού δέν ἀνήκει σέ εὐθεία ε διέρχεται μία καί μόνο μία εὐθεία παράλληλη πρός τήν ε.

Δύο εὐθεῖες ε_1 καί ε_2 εἶναι παράλληλες ὅταν:

— Εἶναι καί οἱ δύο κάθετες στήν ἴδια εὐθεία ε.

— Εἶναι καί οἱ δύο παράλληλες πρός μία ἄλλη εὐθεία ε.

— Τέμνονται ἀπό μία τρίτη εὐθεία καί σχηματίζουν τίς ἐντός ἐναλλάξ γωνίες τους ἴσες ἤ τίς ἐντός ἐκτός καί ἐπί τά αὐτά μέρη γωνίες τους ἴσες ἤ τίς ἐντός καί ἐπί τά αὐτά μέρη γωνίες τους παραπληρωματικές.

Ἄν ἔχουμε δύο εὐθεῖες ε_1 καί ε_2 παράλληλες καί μία εὐθεία ε τέμνει τή μία, τότε ἡ ε θά τέμνει καί τήν ἄλλη. Ἐπίσης ἄν ἡ ε εἶναι κάθετη στή μία ἀπό τίς ε_1 καί ε_2, τότε θά εἶναι κάθετη καί στήν ἄλλη.

Δύο γωνίες πού ἔχουν τίς πλευρές τους παράλληλες (ἤ κάθετες) εἶναι ἴσες, ὅταν εἶναι καί οἱ δύο ὀξεῖες ἤ καί οἱ δύο ἀμβλεῖες, ἐνῶ εἶναι παραπληρωματικές, ὅταν ἡ μία εἶναι ὀξεία καί ἡ ἄλλη ἀμβλεία.

3. Μέ τή βοήθεια τῶν παράλληλων εὐθειῶν ἀποδεικνύεται τό βασικό θεώρημα:

— Τό ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑνός τριγώνου εἶναι 2 ὀρθές γωνίες.

Ἔτσι ὅταν εἶναι γνωστές οἱ δύο γωνίες ἑνός τριγώνου, ξέρουμε καί τήν τρίτη γωνία του. Ἐπίσης ὅταν δύο τρίγωνα ἔχουν ἴσες μία πρός μία δύο γωνίες τους, τότε ἔχουν ἴσες καί τίς τρίτες γωνίες τους. Ἀπλά πορίσματα τοῦ θεωρήματος εἶναι οἱ προτάσεις:

— Κάθε ἐξωτερική γωνία ἑνός τριγώνου εἶναι ἴση μέ τό ἄθροισμα τῶν δύο ἀπέναντι της ἐσωτερικῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου.

— Οἱ ὀξεῖες γωνίες ὀρθογώνιου τριγώνου εἶναι συμπληρωματικές.

— Κάθε ὀξεία γωνία ὀρθογώνιου καί ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι 45°.

— Κάθε γωνία ἰσόπλευρου τριγώνου εἶναι 60°.

Τέλος, ἄν φέρουμε ὅλες τίς διαγωνίους ἑνός πολυγώνου μέ ν πλευρές ἀπό μία κορυφή του, **τό πολύγωνο** χωρίζεται σέ ν–2 τρίγωνα καί ἔτσι **τό ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ πολυγώνου εἶναι 2ν–4** ὀρθές γωνίες.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

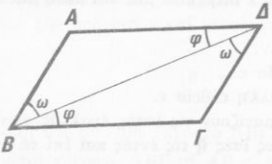
ΤΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΑ ΚΑΙ ΟΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥΣ

Παραλληλόγραμμο.

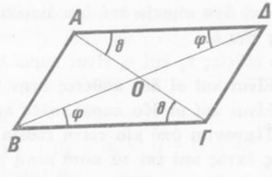
78. Ὁρισμός: Ἕνα τετράπλευρο πού ἔχει τίς ἀπέναντι πλευρές του παράλληλες λέγεται παραλληλόγραμμο, δηλαδή:

Τό ΑΒΓΔ εἶναι παραλληλογράμμο $\Longleftrightarrow$ ΑΒ//ΓΔ καί ΑΔ//ΒΓ.

Ἄν φέρουμε μία διαγώνιο τοῦ παρ/μου ΑΒΓΔ, π.χ. τήν ΒΔ, ἀπό τήν παραλληλία τῶν πλευρῶν του ἔχουμε $\widehat{\text{ΑΔΒ}} = \widehat{\text{ΔΒΓ}} = \widehat{\varphi}$ καί $\widehat{\text{ΑΒΔ}} = \widehat{\text{ΒΔΓ}} = \widehat{\omega}$. Τότε ὅμως



σχ. 59



σχ. 60

εἶναι τριγΑΒΔ = τριγΒΓΔ (γιατί καί ΒΔ = ΒΔ), δηλαδή **τό παραλληλόγραμμο χωρίζεται ἀπό κάθε διαγώνιό του σέ δύο ἴσα τρίγωνα.** Ἀπό τήν ἰσότητα τῶν τριγώνων αὐτῶν ἔχουμε ΑΔ = ΒΓ, ΑΒ = ΔΓ καί $\widehat{\text{Α}} = \widehat{\text{Γ}}$ (ἐνῶ εἶναι καί $\widehat{\text{Β}} = \widehat{\text{Δ}} = \widehat{\varphi} + \widehat{\omega}$). Ἔτσι δείξαμε ὅτι:

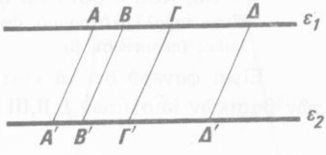
I. Στό παραλληλόγραμμο οἱ ἀπέναντι πλευρές του εἶναι ἴσες.

II. Στό παραλληλόγραμμο οἱ ἀπέναντι γωνίες του εἶναι ἴσες.

Ἄν φέρουμε καί τίς δύο διαγωνίους τοῦ παραλληλογράμμου καί καλέσουμε Ο τό σημεῖο τομῆς τους (βλ. σχ. 60), ἀπό τήν παραλληλία ΑΔ// ΓΒ ἔχουμε $\widehat{\text{ΑΔΟ}} = \widehat{\text{ΟΒΓ}} = \widehat{\varphi}$ καί $\widehat{\text{ΔΑΟ}} = \widehat{\text{ΟΓΒ}} = \widehat{\theta}$. Τότε ὅμως εἶναι τριγΑΟΔ = τριγΟΒΓ (γιατί καί ΑΔ = ΒΓ) καί ἀπό τήν ἰσότητα αὐτή ἔχουμε ΑΟ = ΟΓ καί ΟΒ = ΟΔ. Δείξαμε λοιπόν ὅτι τό σημεῖο τομῆς τῶν διαγωνίων εἶναι μέσο τῆς κάθε διαγωνίου. Τήν ἰδιότητα αὐτή τή διατυπώνουμε συντομότερα λέγοντας ὅτι:

III. Οἱ διαγώνιοι, ἑνός παραλληλογράμμου διχοτομοῦνται.

Οἱ προτάσεις I, II, III ἀποτελοῦν τίς βασικές ἰδιότητες ἑνός παραλληλογράμμου. Ἄμεση συνέπειά τους εἶναι ἡ πρόταση:



Παράλληλα τμήματα πού ἔχουν τά ἄκρα τους σέ δύο παράλληλες εὐθεῖες εἶναι ἴσα,

δηλαδή ἄν τά παράλληλα τμήματα ΑΑ′, ΒΒ′, ΓΓ′,... ἔχουν τά ἄκρα τους στίς παράλληλες εὐθεῖες ε_1 καί ε_2, θά ἔχουμε ΑΑ′ = ΒΒ′ = ΓΓ′ =... (ἀφοῦ δύο ὁποιαδήποτε ἀπό αὐτά, π.χ. τά ΑΑ′ καί ΒΒ′, σχηματίζουν τό παραλληλόγραμμο ΑΑ′Β′Β καί αὐτό ἔχει τίς ἀπέναντι πλευρές του παράλληλες).

79. Θά ζητήσουμε τώρα κριτήρια (δηλαδή συνθῆκες διαφορετικές ἀπό ἐκεῖνες τοῦ ὁρισμοῦ), γιά νά εἶναι ἕνα τετράπλευρο ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο. Τέτοια κριτήρια δίνει τό θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ: Ἕνα τετράπλευρο ΑΒΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμο, ἄν ἰσχύει μιά ἀπό τίς παρακάτω προτάσεις:

α) Οἱ ἀπέναντι πλευρές τοῦ ΑΒΓΔ εἶναι ἴσες.

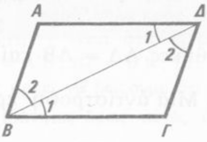
β) Δύο ἀπέναντι πλευρές τοῦ ΑΒΓΔ εἶναι ἴσες καί παράλληλες.

γ) Οἱ ἀπέναντι γωνίες τοῦ ΑΒΓΔ εἶναι ἴσες.

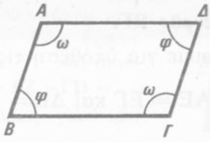
δ) Οἱ διαγώνιοι τοῦ ΑΒΓΔ διχοτομοῦνται.

Ἀπόδ. Γιά νά ἀποδείξουμε τό θεώρημα, θά πρέπει (σύμφωνα μέ τόν ὁρισμό νά ἀποδείξουμε ὅτι σέ κάθε περίπτωση οἱ ἀπέναντι πλευρές τοῦ ΑΒΓΔ εἶναι παράλληλες.

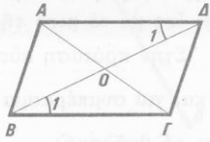
α) Ἄν ΑΒ = ΓΔ καί ΑΔ=ΒΓ, φέρνοντας τή διαγώνιο ΒΔ (βλ. σχ. 61) ἔχουμε τριγΑΒΔ =



σχ. 61



σχ. 62



σχ. 63

= τριγΒΔΓ (γιατί ΑΒ = ΔΓ, ΑΔ = ΒΓ, ΒΔ = ΒΔ) καί ἄρα $\widehat{\Delta_1} = \widehat{B_1}$ ⇒ ΑΔ // ΒΓ καί $B_2 = \Delta_2$ ⇒ ΑΒ //ΔΓ. Ἔτσι τό ΑΒΓΔ ἔχει τίς ἀπέναντι πλευρές του παράλληλες.

β) Ἄν εἶναι ΑΔ // ΒΓ καί φέρουμε πάλι τή διαγώνιο ΒΔ (βλ. σχ. 61), ἔχουμε τριγΑΒΔ= = τριγΒΔΓ (γιατί ΑΔ = ΒΓ, ΒΔ =ΒΔ, $\widehat{\Delta_1} = \widehat{B_1}$) καί ἄρα $\widehat{B_2} = \widehat{\Delta_2}$ ⇒ ΑΒ // ΔΓ. Ἔτσι τό ΑΒΓΔ ἔχει καί τίς ἄλλες δύο ἀπέναντι πλευρές του παράλληλες.

γ) Ἄν ἔχουμε $\widehat{B} = \widehat{\Delta} = \varphi$ καί $\widehat{A} = \widehat{\Gamma} = \omega$ (βλ. σχ. 62), τότε ἡ $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} + \widehat{\Delta} = 360°$ γράφεται $2\widehat{\varphi} + 2\widehat{\omega} = 360°$ ⇒ $\widehat{\varphi} + \widehat{\omega} = 180°$. Ἀπό αὐτή ἔχουμε $\widehat{A} + \widehat{B} = 180°$ ⇒ ΑΔ // ΒΓ καί $\widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180°$ ⇒ ΑΒ // ΓΔ, δηλαδή οἱ ἀπέναντι πλευρές τοῦ ΑΒΓΔ εἶναι παράλληλες.

δ) Ἄν οἱ διαγώνιοι τέμνονται στό Ο (βλ. σχ. 63), θά ἔχουμε ἀπό τήν ὑπόθεσή μας ΟΑ=

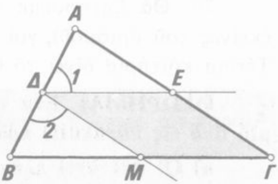
$=$ ΟΓ καί ΟΔ $=$ ΟΒ. Τότε ὅμως θά εἶναι τριγΑΟΒ $=$ τριγΔΟΓ (γιατί ΟΑ $=$ ΟΓ, ΟΔ $=$ ΟΒ, $\widehat{ΑΟΔ} = \widehat{ΒΟΓ}$) καί ἄρα ΑΔ $=$ ΒΓ καί $\widehat{Δ}_1 = \widehat{Β}_1 \Rightarrow$ ΑΔ // ΒΓ. Ἔτσι τό ΑΒΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμο, ἀφοῦ ἔχει τίς ἀπέναντι πλευρές ΑΔ καί ΒΓ ἴσες καί παράλληλες (περίπτωση β).

Εἶναι φανερό ὅτι τά κριτήρια (α), (γ), (δ) εἶναι οἱ ἀντίστροφες προτάσεις τῶν βασικῶν ἰδιοτήτων Ι, ΙΙ,ΙΙΙ τοῦ παραλληλογράμμου.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 120-126

Ἐφαρμογές τῶν παραλληλογράμμων.

80. Ἄς πάρουμε ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ καί ἄς φέρουμε ἀπό τό μέσο Δ τῆς ΑΒ τήν παράλληλο πρός τή ΒΓ πού τέμνει τήν ΑΓ στό Ε καί τήν παράλληλο πρός τήν ΑΓ πού τέμνει τή ΒΓ στό Μ. Τότε τό σχῆμα ΔΕΓΜ εἶναι παραλληλόγραμμο καί θά ἔχουμε ΔΜ $=$ ΕΓ καί ΔΕ $=$ ΜΓ. Ἐπειδή ὅμως εἶναι τριγΑΔΕ $=$ τριγΔΒΜ (γιατί ΑΔ $=$ ΔΒ, $\widehat{Δ}_1 = \widehat{Β}$, $\widehat{Α} = \widehat{Δ}_2$) ἔχουμε καί ΔΜ$=$ΑΕ καί ΔΕ $=$ ΒΜ, ὁπότε εἶναι



$$ΑΕ = ΕΓ, \qquad ΒΜ = ΜΓ$$

δηλαδή τά Ε καί Μ εἶναι μέσα τῶν πλευρῶν ΑΓ καί ΒΓ. Ἄν περιορισθοῦμε λοιπόν στήν ΔΕ, πού εἶναι ΔΕ $=$ΜΓ $= \dfrac{ΒΓ}{2}$, ἔχουμε τήν πρόταση:

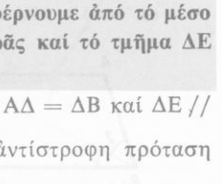
Σ' ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ ἡ παράλληλος πρός τήν ΒΓ πού φέρνουμε ἀπό τό μέσο Δ τῆς πλευρᾶς ΑΒ περνάει ἀπό τό μέσο Ε τῆς τρίτης πλευρᾶς καί τό τμῆμα ΔΕ εἶναι ἴσο μέ τό μισό τῆς πλευρᾶς ΒΓ.

Στήν πρόταση αὐτή ἔχουμε γιά ὑπόθεση τίς συνθῆκες ΑΔ $=$ ΔΒ καί ΔΕ // ΒΓ καί γιά συμπέρασμα τίς ΑΕ $=$ ΕΓ καί ΔΕ $= \dfrac{ΒΓ}{2}$. Μιά ἀντίστροφη πρόταση εἶναι τό θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ: Τό εὐθύγραμμο τμῆμα πού συνδέει τά μέσα δύο πλευρῶν τριγώνου εἶναι παράλληλο πρός τήν τρίτη πλευρά καί ἴσο μέ τό μισό της.

Ἀπόδ. Ἄν Δ καί Ε τά μέσα τῶν ΑΒ καί ΑΓ, θά ἀποδείξουμε ὅτι

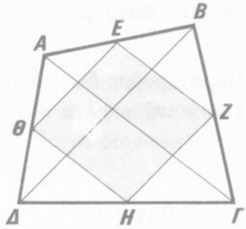
$$ΔΕ // = \frac{ΒΓ}{2}.$$



Ἄν φέρουμε ἀπό τό Δ παράλληλο πρός τήν ΑΓ πού τέμνει τή ΒΓ στό Μ, θά εἶναι (κατά τήν προηγούμενη πρόταση) ΒΜ $=$ ΜΓ καί ΔΜ $=$ // ΕΓ.

Ἔτσι τό ΔΕΓΜ εἶναι παραλληλόγραμμο (κατά τό κριτήριο (β) τῆς § 79) καί ἑπομένως ΔΕ // $=$ ΜΓ $\Rightarrow$ ΔΕ // $= \dfrac{ΒΓ}{2}$.

81. Ἄς ἐφαρμόσουμε τό θεώρημα στά δύο τρίγωνα ΑΒΓ καί ΑΔΓ στά ὁποῖα χωρίζεται ἕνα τετράπλευρο ΑΒΓΔ ἀπό τή διαγώνιό του ΑΓ. Ἄν καλέσουμε Ε,Ζ,Η,Θ τά μέσα τῶν ΑΒ,ΒΓ,ΓΔ,ΔΑ, βλέπουμε ὅτι:



— στό τρίγωνο ΑΒΓ ἔχουμε $ΕΖ // = \frac{ΑΓ}{2}$,

— στό τρίγωνο ΑΔΓ ἔχουμε $ΘΗ // = \frac{ΑΓ}{2}$

καί ἔτσι εἶναι $ΕΖ // = ΘΗ$, δηλαδή τό ΕΖΗΘ εἶναι παραλληλόγραμμο. Δείξαμε λοιπόν ὅτι:

Τά μέσα τῶν πλευρῶν ἑνός τετραπλεύρου εἶναι κορυφές παραλληλογράμμου.

Ἀπό τά τρίγωνα ΑΒΔ καί ΒΓΔ παρατηροῦμε ὅτι ἔχουμε καί $ΕΘ // = ΖΗ // = ΒΔ/2$, δηλαδή τό παραλληλόγραμμο ΕΖΗΘ ἔχει τίς ἀπέναντι πλευρές του παράλληλες πρός τίς διαγωνίους τοῦ τετραπλεύρου καί ἴσες μέ τά μισά τους.

Διαίρεση εὐθύγραμμου τμήματος σέ ν ἴσα μέρη.

82. Θά ἀποδείξουμε τώρα ἕνα γενικότερο θεώρημα:

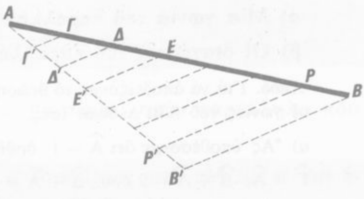
Ἄν παράλληλες εὐθεῖες $ε_1, ε_2, ε_3, \ldots$ τέμνουν δύο εὐθεῖες α καί β καί ὁρίζουν ἴσα τμήματα στήν εὐθεία α, τότε θά ὁρίζουν ἴσα τμήματα καί στήν εὐθεία β.

Ἀπόδ. Ἄν οἱ παράλληλες εὐθεῖες $ε_1, ε_2, ε_3, ε_4, \ldots$ τέμνουν τήν εὐθεία α στά σημεῖα Α,Β,Γ,Δ,.., τήν β στά σημεῖα Α΄, Β΄, Γ΄,... καί εἶναι ΑΒ = ΒΓ = ΓΔ = ... θά ἀποδείξουμε ὅτι

$$Α'Β' = Β'Γ' = Γ'Δ' = \ldots$$

Φέρνουμε ἀπό τά Α,Β,Γ,... τμήματα ΑΕ, ΒΖ, ΓΗ,... παράλληλα πρός τήν β πού τά ἄκρα τους Ε,Ζ,Η,... εἶναι στίς $ε_2, ε_3, ε_4, \ldots$ Τότε ἔχουμε ΑΕ= Α΄Β΄, ΒΖ = Β΄Γ΄, ΓΗ = Γ΄Δ΄, ... καί συνεπῶς ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι ΑΕ = ΒΖ =ΓΗ =... Οἱ ἰσότητες ὅμως αὐτές ἀληθεύουν, γιατί τριγ ΑΒΕ = τριγΒΓΖ = τριγΓΔΗ = ... (ἀφοῦ ΑΒ = ΒΓ = ΓΔ = ..., $\widehat{Α_1} = \widehat{Β_1} = \widehat{Γ_1} = \ldots$ καί $\widehat{Β_2} = \widehat{Γ_2} = \widehat{Δ_2} = \ldots$).

Ἄς ὑποθέσουμε τώρα ὅτι **θέλουμε νά χωρίσουμε δοσμένο εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ σέ ν ἴσα μέρη.** Φέρνουμε τότε ἀπό τό ἄκρο του Α μιά ὁποιαδήποτε ἡμιευθεία ΑΧ, διαφορετική ἀπό τήν ΑΒ, καί παίρνουμε (μέ τό διαβήτη μας) πάνω σέ αὐτή ν διαδοχικά ἴσα τμήματα ΑΓ΄ = Γ΄Δ΄ = Δ΄Ε΄ = ... = Ρ΄Β΄. Ἔπειτα ἑνώνουμε τό σημεῖο Β΄ μέ τό Β καί ἀπό τά σημεῖα Γ΄, Δ΄,...,Ρ΄ φέρνουμε εὐθεῖες παράλληλες πρός τήν Β΄Β πού τέμνουν τό ΑΒ στά σημεῖα Γ,Δ,Ε,...,Ρ. Τά σημεῖα



αὐτά χωρίζουν τό ΑΒ σέ ν ἴσα μέρη, γιατί, ὅπως εἶναι φανερό ἀπό τό προηγούμενο θεώρημα, ἔχουμε

$$ΑΓ = ΓΔ = ΔΕ = \ldots = ΡΒ.$$

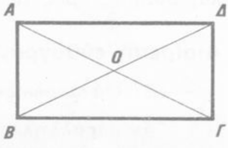
Παρατηροῦμε ὅτι γιά τή διαίρεση τοῦ ΑΒ σέ ν ἴσα μέρη μέ τόν τρόπο αὐτό χρησιμοποιοῦμε μόνο κανόνα καί διαβήτη.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 127-133

Τό ὀρθογώνιο.

83. Ὁρισμός: Τό τετράπλευρο πού ἔχει ὅλες τίς γωνίες του ἴσες λέγεται ὀρθογώνιο, δηλαδή:

$$\text{Τό ΑΒΓΔ εἶναι ὀρθογώνιο} \Longleftrightarrow \widehat{Α} = \widehat{Β} = \widehat{Γ} = \widehat{Δ}.$$



Ἐπειδή τό ἄθροισμα τῶν γωνιῶν κάθε τετραπλεύρου εἶναι 4 ὀρθές, εἶναι φανερό ὅτι **οἱ γωνίες ἑνός ὀρθογωνίου εἶναι ὀρθές.** Ἐπίσης, ἀφοῦ οἱ ἀπέναντι γωνίες τοῦ ὀρθογωνιου εἶναι ἴσες, καταλαβαίνουμε ἀμέσως ὅτι **τό ὀρθογώνιο εἶναι παραλληλόγραμμο** καί ἐπομένως ἰσχύουν γι' αὐτό οἱ ἰδιότητες:

— Οἱ ἀπέναντι πλευρές τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι παράλληλες.
— Οἱ ἀπέναντι πλευρές τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι ἴσες.
— Οἱ διαγώνιοι τοῦ ὀρθογωνίου διχοτομοῦνται.

Τά τρίγωνα ΑΒΓ καί ΒΓΔ εἶναι τώρα ὀρθογώνια καί ἴσα (ἀφοῦ ΒΓ = ΒΓ, ΑΒ = ΓΔ) καί ἔτσι ἔχουμε ἀκόμη ΑΓ = ΒΔ, δηλαδή:

— Οἱ διαγώνιοι ἑνός ὀρθογωνίου εἶναι ἴσες.

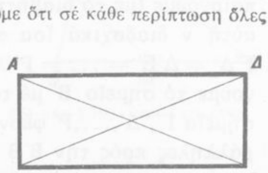
Παρατηροῦμε λοιπόν ὅτι τό ὀρθογώνιο ἔχει δύο ἐπιπλέον ἰδιότητες ἀπό τό παραλληλόγραμμο: Οἱ γωνίες του εἶναι ὀρθές καί οἱ διαγώνιοί του εἶναι ἴσες. Θά ἀποδείξουμε τώρα ὅτι κάθε παραλληλόγραμμο πού ἔχει μιά ἀπό αὐτές τίς ἐπιπλέον ἰδιότητες εἶναι ὀρθογώνιο.

ΘΕΩΡΗΜΑ: Ἕνα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ εἶναι ὀρθογώνιο, ἄν ἰσχύει μιά ἀπό τίς παρακάτω προτάσεις:

α) Μία γωνία τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ εἶναι ὀρθή.

β) Οἱ διαγώνιοι τοῦ παραλληλογράμμου εἶναι ἴσες.

Ἀπόδ. Γιά νά ἀποδείξουμε τό θεώρημα, θά πρέπει νά δείξουμε ὅτι σέ κάθε περίπτωση ὅλες οἱ γωνίες τοῦ ΑΒΓΔ εἶναι ἴσες.



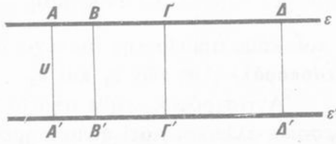
α) Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι $\widehat{Α} = 1$ ὀρθή. Τότε οἱ ἰσότητες $\widehat{Γ} = \widehat{Α}$, $\widehat{Β} + \widehat{Α} = 2$ ὀρθ., $\widehat{Δ} + \widehat{Α} = 2$ορθ., πού ἰσχύουν σέ κάθε παραλληλόγραμμο δίνουν ἀντίστοιχα $\widehat{Γ} = 1$ορθ., $\widehat{Β} = 1$ορθ. $\widehat{Δ} = 1$ορθ. $\Rightarrow \widehat{Α} = \widehat{Β} = \widehat{Γ} = \widehat{Δ}$.

β) Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι ΑΓ = ΒΔ. Τότε τριγΑΒΓ = τριγΒΓΔ (γιατί ΑΓ = ΒΔ, ΑΒ = ΔΓ, ΒΓ = ΒΓ) καί ἄρα $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$. Ἐπειδή ὅμως σέ κάθε παραλληλόγραμμο εἶναι καί $\widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 2$ορθ., ἕπεται ὅτι $\widehat{B} = \widehat{\Gamma} = 1$ ορθ. ⇒ ΑΒΓΔ = ὀρθογώνιο.

Γιά νά δείχνουμε λοιπόν ὅτι ἕνα τετράπλευρο εἶναι ὀρθογώνιο, πρέπει πρῶτα νά δείχνουμε ὅτι εἶναι παραλληλόγραμμο (μέ κάποιο ἀπό τά κριτήρια τῆς § 79) καί μετά νά δείχνουμε ὅτι μιά γωνία του εἶναι ὀρθή ἤ ὅτι οἱ διαγώνιοί του εἶναι ἴσες.

Ἀπόσταση δύο παράλληλων εὐθειῶν.

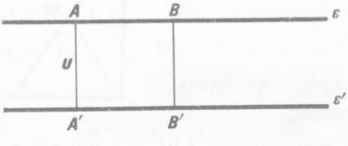
84. Ἄς θεωρήσουμε δύο παράλληλες εὐθεῖες ε καί ε΄ καί τά κάθετα σ' αὐτές εὐθύγραμμα τμήματα ΑΑ΄, ΒΒ΄, ΓΓ΄,...πού ἔχουν τά ἄκρα τους στίς ε καί ε΄. Ἐπειδή τά τμήματα αὐτά εἶναι παράλληλα (κάθετα στήν ἴδια εὐθεία, π.χ. τήν ε) καί βρίσκονται μεταξύ παράλληλων εὐθειῶν, θά εἶναι ἴσα. Τά τμήματα ὅμως αὐτά εἶναι καί ἀποστάσεις σημείων τῆς μιᾶς παραλλήλου ἀπό τήν ἄλλη. Ἔτσι ἔχουμε τίς προτάσεις:



— **Εὐθύγραμμα τμήματα πού ἔχουν τά ἄκρα τους σέ δύο παράλληλες εὐθεῖες καί εἶναι κάθετα σέ αὐτές εἶναι μεταξύ τους ἴσα.**

— **Ὅλα τά σημεῖα μιᾶς εὐθείας ε ἔχουν ἴσες ἀποστάσεις ἀπό κάθε ὁρισμένη εὐθεία παράλληλη πρός τήν ε.**

Τό εὐθύγραμμο τμῆμα υ πού εἶναι ἴσο μέ τίς ἀποστάσεις ὅλων τῶν σημείων τῆς ε ἀπό τήν ε΄ λέγεται **ἀπόσταση τῶν δύο παράλληλων εὐθειῶν ε καί ε΄**. Ἀντιστρόφως, ἄν ἔχουμε δύο σημεῖα Α καί Β πού βρίσκονται πρός τό ἴδιο μέρος μιᾶς εὐθείας ε΄ καί οἱ ἀποστάσεις τους ΑΑ΄ καί ΒΒ΄ ἀπό τήν ε΄ εἶναι ἴσες (βλ. σχ. 64), τότε ἡ εὐθεία ΑΒ εἶναι παράλληλη πρός τήν ε΄ (ἀφοῦ τό ΑΑ΄Β΄Β εἶναι ὀρθογώνιο). Ἄν λοιπόν θέσουμε ΑΑ΄ = υ, συμπεραίνουμε ὅτι κάθε σημεῖο Β πού βρίσκεται



σχ. 64

σχ. 65

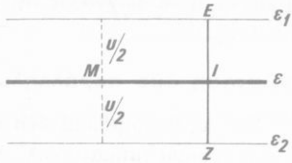
πρός τό μέρος τοῦ Α καί ἀπέχει υ ἀπό τήν ε΄ βρίσκεται στήν παράλληλο πού φέρνουμε ἀπό τό Α πρός τήν ε΄. Ἄρα :

— **Ὅλα τά σημεῖα πού βρίσκονται πρός τό ἴδιο μέρος μιᾶς εὐθείας ε΄ καί ἔχουν ἀπόσταση υ ἀπό αὐτή βρίσκονται σ' εὐθεία ε//ε΄.**

Τότε ὅμως εἶναι φανερό ὅτι ὅλα τά σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου πού ἔχουν ἀπόσταση υ ἀπό τήν ε΄ βρίσκονται σέ δύο εὐθεῖες ε καί $ε_1$ παράλληλες πρός τήν ε΄ (βλ. σχ. 65) οἱ ὁποῖες εἶναι ἑκατέρωθεν τῆς ε σέ ἀπόσταση υ.

Ἡ μεσοπαράλληλος δύο παραλλήλων.

85. Ἄς πάρουμε πάλι δύο παράλληλες εὐθεῖες $ε_1$ καί $ε_2$ καί ἕνα τμῆμα ΕΖ=υ κάθετο πρός αὐτές πού ἔχει τά ἄκρα του στίς $ε_1$ καί $ε_2$. Ἄν ἀπό τό μέσο Ι τῆς ΕΖ φέρουμε τήν εὐθεία ε παράλληλη πρός τίς $ε_1$ καί $ε_2$, παρατηροῦμε ὅτι κάθε σημεῖο Μ τῆς ε ἰσαπέχει ἀπό τίς $ε_1$ καί $ε_2$ (γιατί τό Μ ἀπέχει ἀπό κάθε μιά παράλληλο ἀπόσταση $\frac{υ}{2}$). Ἡ εὐθεία



ε πού κάθε σημεῖο της ἰσαπέχει ἀπό δύο παράλληλες εὐθεῖες $ε_1$ καί $ε_2$ λέγεται **μεσοπαράλληλος τῶν $ε_1$ καί $ε_2$.**

Ἀντιστρόφως, κάθε σημεῖο πού ἰσαπέχει ἀπό τίς $ε_1$ καί $ε_2$ βρίσκεται στή μεσοπαράλληλο, γιατί εἶναι σημεῖο τῆς ζώνης τῶν παραλλήλων καί ἀπέχει ἀπό κάθε μιά τους ἀπόσταση $\frac{υ}{2}$. Ἔτσι λοιπόν:

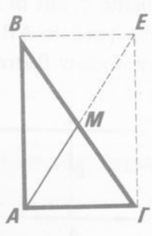
Ἕνα σημεῖο ἰσαπέχει ἀπό δύο παράλληλες εὐθεῖες, ἄν καί μόνο ἄν βρίσκεται στή μεσοπαράλληλό τους.

Δηλαδή, ἡ μεσοπαράλληλος δύο παράλληλων εὐθειῶν περιέχει ὅλα τά σημεῖα πού ἰσαπέχουν ἀπό τίς δύο παράλληλες καί μόνο αὐτά.

Μία ἰδιότητα τοῦ ὀρθογώνιου τριγώνου.

86. Ἄν ἔχουμε ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ μέ $\widehat{Α} = 90^0$ καί στήν προέκταση τῆς διαμέσου του ΑΜ πάρουμε τμῆμα ΜΕ = ΜΑ, τό σχῆμα ΑΒΕΓ εἶναι ὀρθογώνιο (γιατί οἱ διαγώνιοί του διχοτομοῦνται καί ἡ γωνία του $\widehat{Α}$ εἶναι ὀρθή). Τότε

$$ΑΕ = ΒΓ \Rightarrow 2ΑΜ = ΒΓ \Rightarrow ΑΜ = \frac{ΒΓ}{2}$$



δηλαδή :

Ἡ διάμεσος ἑνός ὀρθογώνιου τριγώνου πρός τήν ὑποτείνουσα εἶναι ἴση μέ τό μισό τῆς ὑποτείνουσας.

Ἰσχύει καί τό ἀντίστροφο, δηλαδή ἄν σ' ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ ἡ διάμεσός του ΑΜ εἶναι ἴση μέ τό μισό τῆς ΒΓ, τότε τό τρίγωνο εἶναι ὀρθογώνιο στήν κορυφή Α. Πραγματικά, ἄν εἶναι ΑΜ = ΒΓ/2 καί πάρουμε στήν προέκταση τῆς ΑΜ τμῆμα ΜΕ = ΜΑ, ἔχουμε ΑΕ = 2ΑΜ = ΒΓ, δηλαδή τό τετράπλευρο ΑΒΕΓ εἶναι πάλι ὀρθογώνιο (ἀφοῦ οἱ διαγώνιοί του διχοτομοῦνται καί εἶναι ἴσες), ὁπότε Α = 90°. Ἔτσι λοιπόν ἔχουμε τήν ὁλοκληρωμένη πρόταση:

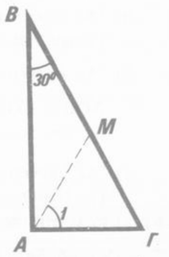
Ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι ὀρθογώνιο σέ μιά κορυφή του ἄν καί μόνο ἄν ἡ διάμεσος πρός τήν ἀπέναντι πλευρά εἶναι ἴση μέ τό μισό τῆς πλευρᾶς αὐτῆς.

Μιά χρήσιμη ἐφαρμογή τῆς προτάσεως αὐτῆς εἶναι τό θεώρημα :

Σ' ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο, ἄν ἡ μία ὀξεία γωνία του εἶναι 30^0, τότε ἡ ἀπέναντι πλευρά της εἶναι ἴση μέ τό μισό τῆς ὑποτείνουσας καί ἀντιστρόφως.

'Απόδ. Θεωροῦμε ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{A} = 90°$) μέ $\widehat{B} = 30°$. Τότε θά εἶναι καί $\widehat{Γ} = 60°$. Τό τρίγωνο ΑΜΓ εἶναι ἰσοσκελές $\left(\text{γιατί } AM = \frac{BΓ}{2} = MΓ\right)$ καί ἄρα $\widehat{A_1} = \widehat{Γ} = 60°$. Τότε ὅμως εἶναι ἰσόπλευρο, ἀφοῦ καί ἡ τρίτη γωνία του εἶναι 60° καί ἄρα $AΓ = MΓ = \frac{BΓ}{2}$.

'Αντιστρόφως, ἄν $AΓ = \frac{BΓ}{2}$, θά εἶναι $AΓ = MΓ$, ἐνῷ ἔχουμε ἐπίσηςκαί $AM = \frac{BΓ}{2} = MΓ$. Δηλαδή τό ΑΜΓ εἶναι ἰσόπλευρο καί ἄρα $\widehat{Γ} = 60° \Rightarrow \widehat{B} = 30°$.



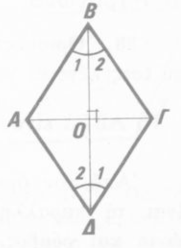
'Ο ρόμβος.

87. **'Ορισμός: Τό τετράπλευρο πού ἔχει ὅλες τίς πλευρές του ἴσες λέγεται ρόμβος,** δηλαδή:

Τό ΑΒΓΔ εἶναι ρόμβος $\Longleftrightarrow$ ΑΒ = ΒΓ=ΓΔ = ΔΑ.

'Από τόν ὁρισμό μας προκύπτει ἀμέσως ὅτι **ὁ ρόμβος εἶναι παραλληλόγραμμο**(γιατί οἱ ἀπέναντι πλευρές του εἶναι ἴσες) καί ἄρα ἰσχύουν γι' αὐτόν οἱ ἰδιότητες:

—Οἱ ἀπέναντι πλευρές τοῦ ρόμβου εἶναι παράλληλες.
—Οἱ ἀπέναντι γωνίες τοῦ ρόμβου εἶναι ἴσες.
—Οἱ διαγώνιοι τοῦ ρόμβου διχοτομοῦνται.



Ἄν Ο εἶναι τό σημεῖο τομῆς τῶν διαγωνίων ρόμβου ΑΒΓΔ, θά ἔχουμε τριγΑΟΒ = τριγΒΟΓ (γιατί ΒΟ = ΒΟ, ΑΒ = ΒΓ, ΑΟ = ΟΓ) καί ἄρα $B\widehat{O}A = B\widehat{O}Γ$ καί $\widehat{B_1} = \widehat{B_2}$. 'Επειδή ὅμως εἶναι $B\widehat{O}A + B\widehat{O}Γ = 2$ὀρθ., ἔπεται ὅτι $B\widehat{O}A = B\widehat{O}Γ = 1$ ὀρθ., δηλαδή ὅτι $BO \perp AΓ$. 'Ακόμη, ἀπό τήν παραλληλία τῶν ἀπέναντι πλευρῶν ἔχουμε $\widehat{B_1} = \widehat{Δ_1}$, $\widehat{B_2} = \widehat{Δ_2} \Rightarrow \widehat{Δ_1} = \widehat{Δ_2}$, δηλαδή ἡ διαγώνιος ΒΔ διχοτομεῖ καί τίς δύο γωνίες $\widehat{B}$ καί $\widehat{Δ}$. Ἔτσι ἔχουμε τήν πρόταση:

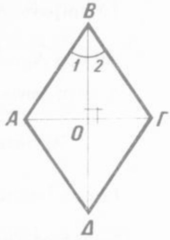
— Οἱ διαγώνιοι τοῦ ρόμβου τέμνονται κάθετα καί διχοτομοῦν τίς γωνίες του.

Παρατηροῦμε λοιπόν ὅτι ὁ ρόμβος ἔχει τρεῖς ἐπιπλέον ἰδιότητες ἀπό τό παραλληλόγραμμο. Ὅλες οἱ πλευρές του εἶναι ἴσες (καί ἑπομένως εἶναι ἴσες καί δύο ὁποιεσδήποτε διαδοχικές πλευρές του), οἱ διαγώνιοί του τέμνονται κάθετα καί οἱ διαγώνιοί του διχοτομοῦν τίς γωνίες του. Θά ἀποδείξουμε τώρα ὅτι κάθε παραλληλόγραμμο πού ἔχει μιά ἀπό αὐτές τίς ἐπιπλέον ἰδιότητες εἶναι ρόμβος.

ΘΕΩΡΗΜΑ: Ἕνα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ εἶναι ρόμβος, ἄν ἰσχύει μιά ἀπό τίς παρακάτω προτάσεις:

α) Δύο διαδοχικές πλευρές του είναι ἴσες.
β) Οἱ διαγώνιοί του τέμνονται κάθετα.
γ) Μιά διαγώνιος διχοτομεῖ μιά γωνία του.

Ἀπόδ. Γιά νά ἀποδείξουμε τό θεώρημα, θά πρέπει σέ κάθε περίπτωση νά δείξουμε ὅτι ὅλες οἱ πλευρές τοῦ ΑΒΓΔ εἶναι ἴσες.



α) Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι ΑΒ = ΒΓ. Ἐπειδή εἶναι ΑΒ=ΓΔ καί ΒΓ=ΑΔ, ἔχουμε ΑΒ = ΒΓ= ΓΔ = ΔΑ ⇒ ΑΒΓΔ = ρόμβος.

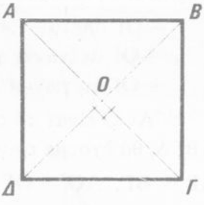
β) Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι ΒΔ ⊥ ΑΓ. Τότε τριγΑΟΒ = τριγΒΟΓ (γιατί $\widehat{AOB} = \widehat{\Gamma OB} = 90°$, ΒΟ = ΒΟ, ΑΟ = ΟΓ) ⇒ ΑΒ=ΒΓ καί ἔχουμε τήν περίπτωση (α).

γ) Ἄς ὑποθέσουμε τέλος ὅτι $\widehat{B_1} = \widehat{B_2}$. Τότε τριγΑΒΓ = ἰσοσκελές (γιατί ΒΟ = διάμεσος καί διχοτόμος) ⇒ ΑΒ = ΒΓ καί ἔχουμε πάλι τήν περίπτωση (α).

Γιά νά δείχνουμε λοιπόν ὅτι ἕνα τετράπλευρο ΑΒΓΔ εἶναι ρόμβος, θά πρέπει νά δείχνουμε πρῶτα ὅτι εἶναι παραλληλόγραμμο (μ' ἕνα ἀπό τά κριτήρια τῆς § 79) καί κατόπι νά δείχνουμε ὅτι ἤ δύο διαδοχικές πλευρές του εἶναι ἴσες ἤ ὅτι οἱ διαγώνιοί του εἶναι κάθετες ἤ ὅτι μιά διαγώνιός του διχοτομεῖ μιά γωνία του.

Τό τετράγωνο.

88. Ὁρισμός: Τό τετράπλευρο πού ἔχει ὅλες τίς πλευρές καί ὅλες τίς γωνίες του ἴσες λέγεται τετράγωνο, δηλαδή:



Τό ΑΒΓΔ εἶναι τετράγωνο $\Longleftrightarrow \begin{cases} AB = B\Gamma = \Gamma\Delta = \Delta A \\ \widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{\Gamma} = \widehat{\Delta} \end{cases}$

Ἀπό τόν ὁρισμό μας εἶναι φανερό ὅτι **τετράγωνο εἶναι τό παραλληλόγραμμο πού εἶναι συγχρόνως ὀρθογώνιο καί ρόμβος.** Ἔτσι θά ἰσχύουν γι' αὐτό οἱ ἰδιότητες:

— Οἱ ἀπέναντι πλευρές τοῦ τετραγώνου εἶναι παράλληλες.
— Ὅλες οἱ γωνίες τοῦ τετραγώνου εἶναι ὀρθές.
— Οἱ διαγώνιοι τοῦ τετραγώνου διχοτομοῦνται, εἶναι ἴσες καί κάθετες καί διχοτομοῦν τίς γωνίες του.

Ἔτσι λοιπόν κάθε διαγώνιος τοῦ τετραγώνου σχηματίζει μέ κάθε πλευρά του γωνία 45°. Γιά νά ἀποδείξουμε ὅτι ἕνα παραλληλόγραμμο εἶναι τετράγωνο, θά πρέπει νά ἀποδείξουμε ὅτι ἔχει δύο ἐπιπλέον ἰδιότητες, μιά ἰδιότητα πού μᾶς ἐξασφαλίζει ὅτι εἶναι ὀρθογώνιο καί μιά ἄλλη ἰδιότητα πού μᾶς ἐξασφαλίζει ὅτι εἶναι ρόμβος. Μποροῦμε λοιπόν νά διατυπώσουμε κριτήρια γιά τό πότε ἕνα παραλληλόγραμμο (ἤ ἕνα ὀρθογώνιο ἤ ἕνας ρόμβος) εἶναι τετράγωνο. Μερικά ἀπό τά κριτήρια αὐτά δίνουν οἱ προτάσεις:

— Ἕνα παραλληλόγραμμο εἶναι τετράγωνο σέ κάθε μιά ἀπό τίς παρακάτω περιπτώσεις:

α) Ὅταν μία γωνία του εἶναι ὀρθή καί δύο διαδοχικές πλευρές του εἶναι ἴσες.

β) Ὅταν μία γωνία του εἶναι ὀρθή καί οἱ διαγώνιοί του εἶναι κάθετες.

γ) Ὅταν μία γωνία του εἶναι ὀρθή καί διχοτομεῖται ἀπό τή διαγώνιό του.

δ) Ὅταν οἱ διαγώνιοί του εἶναι ἴσες καί κάθετες.

— Ἕνα ὀρθογώνιο εἶναι τετράγωνο σέ κάθε μιά ἀπό τίς παρακάτω περιπτώσεις:

α) Ὅταν δύο διαδοχικές πλευρές του εἶναι ἴσες.

β) Ὅταν οἱ διαγώνιοί του εἶναι κάθετες.

γ) Ὅταν μία διαγώνιός του διχοτομεῖ μιά γωνία του.

— Ἕνας ρόμβος εἶναι τετράγωνο σέ κάθε μιά ἀπό τίς παρακάτω περιπτώσεις:

α) Ὅταν μία γωνία του εἶναι ὀρθή.

β) Ὅταν οἱ διαγώνιοί του εἶναι ἴσες.

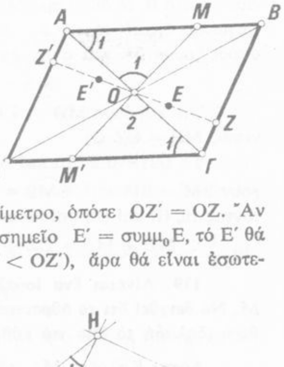
Οἱ ἀποδείξεις ὅλων αὐτῶν τῶν προτάσεων εἶναι φανερές ἀπό τά προηγούμενα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 134,144-146

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

115. Ἄν οἱ διαγώνιοι ΑΓ καί ΒΔ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ τέμνονται στό Ο, νά δειχθεῖ ὅτι τό Ο εἶναι κέντρο συμμετρίας τοῦ παραλληλογράμμου.

Λύση: Ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι τό συμμετρικό ὡς πρός τό Ο ὁποιουδήποτε σημείου τοῦ παραλληλογράμμου εἶναι ἐπίσης σημεῖο τοῦ παραλληλογράμμου.

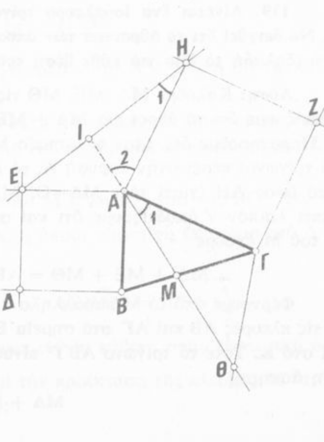


Παίρνουμε πρῶτα ἕνα σημεῖο Μ τῆς περιμέτρου. Ἄν τό Μ βρίσκεται στήν ΑΒ, ἡ εὐθεία ΟΜ θά τέμνει τήν ΓΔ σ' ἕνα σημεῖο Μ′ καί θά εἶναι τριγΟΜΑ = τριγΟΜ′Γ (γιατί ΟΑ = ΟΓ, $\widehat{A}_1 = \widehat{\Gamma}_1$, $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$). Ἄρα ΟΜ′=ΟΜ ⇒ ⇒ Μ′ = συμμ$_0$Μ.

Παίρνουμε τέλος ἕνα σημεῖο Ε ἐσωτερικό τοῦ ΑΒΓΔ καί καλοῦμε Ζ καί Ζ′ τά σημεῖα στά ὁποῖα ἡ ΟΕ τέμνει τήν περίμετρο, ὁπότε ΟΖ′ = ΟΖ. Ἄν λοιπόν τό Ε εἶναι ἐσωτερικό σημεῖο τοῦ ΟΖ καί θεωρήσουμε τό σημεῖο Ε′ = συμμ$_0$Ε, τό Ε′ θά εἶναι ἐσωτερικό σημεῖο τοῦ ΟΖ′ (ἀφοῦ ΟΕ′ = ΟΕ < ΟΖ ⇒ ΟΕ′ < ΟΖ′), ἄρα θά εἶναι ἐσωτερικό σημεῖο τοῦ παραλληλογράμμου.

Ἀπό τήν ἰδιότητά του αὐτή τό Ο λέγεται ἁπλῶς «κέντρο» τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.

116. Θεωροῦμε τρίγωνο ΑΒΓ καί κατασκευάζουμε ἔξω ἀπ' αὐτό τά τετράγωνα ΑΓΖΗ καί ΑΒΔΕ. Ἄν ΑΜ εἶναι διάμεσος τοῦ ΑΒΓ, νά δειχθεῖ ὅτι ἡ ΑΜ εἶναι κάθετη στήν ΕΗ καί ἴση μέ τό μισό τῆς ΕΗ.



Λύση: Ἄν πάρουμε στήν προέκταση τῆς ΑΜ τμῆμα ΜΘ = ΜΑ, θά εἶναι (βλ. ἄσκ. 89) ΓΘ // = ΑΒ. Τά τρίγωνα ΕΑΗ καί ΑΓΘ εἶναι ἴσα, γιατί ἔχουν ΑΗ = ΑΓ, ΑΕ = ΑΒ = ΓΘ καί $\widehat{EAH} = \widehat{A\Gamma\Theta}$ (γιατί κάθε μία ἀπό τίς γωνίες αὐτές εἶναι $180° - \widehat{A}$).

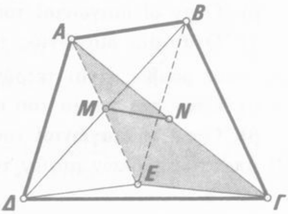
Ἄρα

$$A\Theta = EH \quad \text{καί} \quad \widehat{A}_1 = \widehat{H}_1.$$

Ἡ ἰσότητα $ΑΘ = ΕΗ$ γράφεται $2ΑΜ = ΕΗ$ καί δίνει $ΑΜ = \frac{ΕΗ}{2}$.

Ἀκόμη, ἐπειδή εἶναι $\widehat{A_1} + \widehat{A_2} = 90°$, ἀπό τή δεύτερη ἰσότητα $\widehat{A_1} = \widehat{H_1}$ προκύπτει ὅτι $\widehat{H_1} + \widehat{A_2} = 90°$. Ἔτσι τό τρίγωνο ΑΙΗ εἶναι ὀρθογώνιο καί $\widehat{AIH} = 90° \Rightarrow AM \perp EH$.

117. Ἀπό τήν κορυφή Δ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ φέρνουμε (στό ἴδιο ἡμιεπίπεδο μέ ἀκμή ΑΔ στό ὁποῖο βρίσκεται ἡ ΑΒ) τμῆμα ΔΕ// = ΑΒ. Ἄν Μ καί Ν εἶναι τά μέσα τῶν διαγωνίων ΒΔ καί ΑΓ, νά δειχθεῖ ὅτι ΕΓ// = 2ΜΝ.



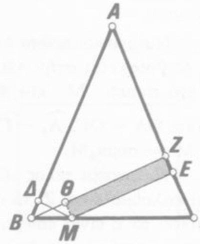
Λύση: Ἐπειδή τό σχῆμα ΑΒΕΔ εἶναι παραλληλόγραμμο, ἡ διαγώνιός του ΑΕ διέρχεται ἀπό τό μέσο Μ τῆς διαγωνίου ΒΔ καί εἶναι $ΑΜ = ΜΕ$.

Ἔτσι στό τρίγωνο ΑΕΓ τό τμῆμα ΜΝ συνδέει τά μέσα δύο πλευρῶν του. Ἄρα

$$ΜΝ // = \frac{ΕΓ}{2} \Rightarrow ΕΓ // = 2ΜΝ.$$

118. Δίνεται ἕνα ἰσοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ καί ἀπό ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο Μ τῆς βάσεώς του ΒΓ φέρνουμε τά τμήματα ΜΔ ⊥ ΑΒ καί ΜΕ ⊥ ΑΓ. Νά δειχθεῖ ὅτι τό ἄθροισμα ΜΔ+ΜΕ εἶναι σταθερό (δηλαδή τό ἴδιο γιά κάθε θέση τοῦ Μ στή ΒΓ).

Λύση: Παρατηροῦμε ὅτι, ὅταν τό σημεῖο Μ (πού «κινεῖται» ἐπάνω στήν ΒΓ) πέσει στό σημεῖο Β, τό ἄθροισμα $ΜΔ + ΜΕ$ γίνεται ἴσο μέ τό ὕψος ΒΖ τοῦ τριγώνου (γιατί τότε $ΜΔ = Ο$ καί $ΜΕ = ΒΖ$). Θά πρέπει λοιπόν ν' ἀποδείξουμε ὅτι καί στήν ὁποιαδήποτε θέση τοῦ Μ ἔχουμε



$$ΜΔ + ΜΕ = ΒΖ.$$

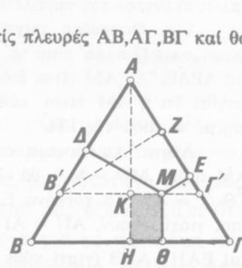
Ἄν φέρουμε ΜΘ // ΓΑ, τό ΜΘΖΕ εἶναι ὀρθογώνιο καί συνεπῶς $ΜΕ = ΘΖ$ (Ι).

Τά τρίγωνα ΒΜΔ καί ΒΜΘ εἶναι ὀρθογώνια καί ἴσα, γιατί ἔχουν $ΒΜ = ΒΜ$ καί $\widehat{ΘΜΒ} = \widehat{Γ} = \widehat{Β}$. Ἄρα $ΜΔ = ΒΘ$ (ΙΙ). Προσθέτοντας τίς (Ι) καί (ΙΙ) βρίσκουμε

$$ΜΕ + ΜΔ = ΘΖ + ΒΘ \Rightarrow ΜΕ + ΜΔ = ΒΖ.$$

119. Δίνεται ἕνα ἰσόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ καί ἕνα ὁποιοδήποτε ἐσωτερικό σημεῖο του Μ. Νά δειχθεῖ ὅτι τό ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων τοῦ Μ ἀπό τίς πλευρές τοῦ τριγώνου εἶναι σταθερό (δηλαδή τό ἴδιο γιά κάθε θέση τοῦ Μ μέσα στό τρίγωνο).

Λύση: Καλοῦμε ΜΔ, ΜΕ, ΜΘ τίς ἀποστάσεις τοῦ Μ ἀπό τίς πλευρές ΑΒ,ΑΓ,ΒΓ καί θά ἀποδείξουμε ὅτι τό ἄθροισμα $ΜΔ + ΜΕ + ΜΘ$ εἶναι σταθερό. Παρατηροῦμε ὅτι, ὅταν τό σημεῖο Μ (πού κινεῖται μέσα στό τρίγωνο) πέσει στήν κορυφή Α, τό ἄθροισμα γίνεται ἴσο μέ τό ὕψος ΑΗ (γιατί τότε $ΜΔ=Ο$, $ΜΕ=Ο$, $ΜΘ=ΑΗ$).Θά πρέπει λοιπόν ν' ἀποδείξουμε ὅτι καί στήν ὁποιαδήποτε θέση τοῦ Μ ἔχουμε



$$ΜΔ + ΜΕ + ΜΘ = ΑΗ.$$

Φέρνουμε ἀπό τό Μ παράλληλο πρός τήν ΒΓ πού τέμνει τίς πλευρές ΑΒ καί ΑΓ στά σημεῖα Β′ καί Γ′ καί τό ὕψος ΑΗ στό Κ. Τότε τό τρίγωνο ΑΒ′Γ′ εἶναι ἐπίσης ἰσόπλευρο καί θά ἔχουμε (ἀπό τήν προηγουμενη ἄσκηση)

$$ΜΔ + ΜΕ = Β'Ζ = ΑΚ \qquad (Ι)$$

Ἐπειδή τό σχῆμα ΚΜΘΗ εἶναι ὀρθογώνιο, ἔχουμε ἀκόμη καί ΜΘ = ΚΗ (ΙΙ). Προσθέτοντας κατά μέλη τίς (Ι) καί (ΙΙ) βρίσκουμε

$$ΜΔ + ΜΕ + ΜΘ = ΑΚ + ΚΗ = ΑΗ.$$

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ*

120. Δίνεται ἕνα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Νά δείξετε ὅτι οἱ διχοτόμοι τῶν ἀπέναντι γωνιῶν του εἶναι παράλληλες, ἐνῶ οἱ διχοτόμοι τῶν διαδοχικῶν γωνιῶν του εἶναι κάθετες. (Νά ἐξετάσετε ἄν ἰσχύει ἡ ἄσκηση καί γιά τίς ἐξωτερικές διχοτόμους).

121. Σέ παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ στό ὁποῖο εἶναι $\widehat{A} > 90°$ νά δείξετε ὅτι ΑΓ < ΒΔ.

122. Δίνεται ἕνα ἰσοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ καί ἕνα σημεῖο Μ τῆς βάσεώς του ΒΓ. Φέρνουμε ἀπό τό Μ παράλληλο πρός τήν πλευρά ΒΑ, ἡ ὁποία τέμνει τήν ΑΓ στό Δ, καί παράλληλο πρός τήν πλευρά ΓΑ, ἡ ὁποία τέμνει τήν ΑΒ στό Ε. Νά δείξετε ὅτι ΜΔ + ΜΕ = ΑΒ.

123. Δίνεται ἕνα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, δύο ὁποιαδήποτε σημεῖα Ε καί Ζ τῆς πλευρᾶς του ΑΒ καί ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο Η τῆς πλευρᾶς του ΒΓ. Ἄν Ο εἶναι τό σημεῖο τομῆς τῶν διαγωνίων τοῦ ΑΒΓΔ καί οἱ εὐθεῖες ΕΟ,ΖΟ,ΗΟ τέμνουν τίς ἀπέναντι πλευρές στά σημεῖα Ε′, Ζ′,Η′ ἀντιστοίχως, νά δείξετε ὅτι:

α) Τά τετράπλευρα ΕΖΕ′Ζ′ καί ΕΗΕ′Η′ εἶναι παραλληλόγραμμα.

β) Οἱ γωνίες $E\widehat{H}Z$ καί $E'\widehat{H'}Z'$ εἶναι ἴσες.

124. Θεωροῦμε τρίγωνο ΑΒΓ καί τήν εὐθεία ε πού διέρχεται ἀπό τήν κορυφή Α καί εἶναι παράλληλη πρός τή ΒΓ. Ἀπό σημεῖο Δ τῆς ΒΓ φέρνουμε παράλληλες πρός τίς ΒΑ καί ΓΑ πού τέμνουν τήν ε στά σημεῖα Ε καί Ζ. Νά δείξετε ὅτι τριγΕΔΖ = τριγΑΒΓ.

125. Στίς πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ,ΔΑ ἑνός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ παίρνουμε ἀντιστοίχως σημεῖα Ε,Ζ,Η,Θ τέτοια ὥστε ΑΕ = ΓΗ καί ΓΘ = ΑΖ. Νά δείξετε ὅτι:

α) Τό τετράπλευρο ΕΖΗΘ εἶναι παραλληλόγραμμο.

β) Τά σημεῖα στά ὁποῖα τέμνονται οἱ διαγώνιοι τῶν δύο παραλληλογράμμων ΑΒΓΔ καί ΕΖΗΘ συμπίπτουν.

126. Στίς πλευρές ΑΒ,ΒΓ,ΓΔ,ΔΑ ἑνός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ παίρνουμε ἀντιστοίχως σημεῖα Ε,Ζ,Η,Θ τέτοια ὥστε τό τετράπλευρο ΕΖΗΘ νά εἶναι παραλληλόγραμμο. Νά δείξετε ὅτι ΑΕ = ΓΗ καί ΓΘ = ΑΖ.

127. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ καί σημεῖο Ι τῆς πλευρᾶς του ΒΓ τέτοιο ὥστε $BI = \frac{1}{4}B\Gamma$.

Ἄν Ε εἶναι τό μέσο τῆς διαμέσου ΒΔ, νά δειχθεῖ ὅτι $IE = // \frac{AB}{4}$.

128. Σέ τρίγωνο ΑΒΓ ὀνομάζουμε Δ τό μέσο τῆς διαμέσου του ΑΜ. Ἄν ἡ ΒΔ τέμνει τήν πλευρά ΑΓ στό Ε, νά δειχθεῖ ὅτι ΕΓ = 2ΑΕ.

129. Ἄν Ε καί Ζ εἶναι τά μέσα τῶν πλευρῶν ΑΒ καί ΓΔ ἑνός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, νά δείξετε ὅτι οἱ εὐθεῖες ΔΕ καί ΒΖ τέμνουν τή διαγώνιο ΑΓ σέ σημεῖα, τά ὁποῖα τή χωρίζουν σέ τρία ἴσα μέρη.

130. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ μέ ΑΓ > ΑΒ στό ὁποῖο Μ εἶναι τό μέσο τῆς ΒΓ. Ἀπό τήν κορυφή Β φέρνουμε εὐθεία κάθετη στή διχοτόμο τῆς $\widehat{A}$, ἡ ὁποία τέμνει τή διχοτόμο στό Δ καί τήν πλευρά ΑΓ στό Ε. Νά δείξετε ὅτι:

α) ΕΓ = ΑΓ−ΑΒ β) $\Delta M = \frac{A\Gamma - AB}{2}$ γ) $B\widehat{\Delta}M = 90° + \frac{\widehat{A}}{2}$.

131. Ἀπό τήν κορυφή Β τριγώνου ΑΒΓ φέρνουμε εὐθεία κάθετη στήν ἐξωτερική διχοτόμο τῆς $\widehat{A}$, ἡ ὁποία τέμνει τή διχοτόμο αὐτή στό Δ καί τήν προέκταση τῆς πλευρᾶς ΑΓ στό Ε. Ἄν Μ εἶναι τό μέσο τῆς πλευρᾶς ΒΓ, νά δείξετε ὅτι:

α) $ΓΕ = ΑΒ + ΑΓ$ β) $ΔΜ = \frac{ΑΒ + ΑΓ}{2}$ γ) $B\widehat{Δ}M = \frac{\widehat{A}}{2}$.

132. Σέ τετράπλευρο ΑΒΓΔ ὀνομάζουμε Ε,Ζ,Η,Θ τά μέσα τῶν πλευρῶν του ΑΒ,ΒΓ,ΓΔ,ΔΑ καί Κ,Λ τά μέσα τῶν διαγωνίων του ΑΓ,ΒΔ ἀντιστοίχως. Νά δειχθεῖ ὅτι:

α) Τά σχήματα ΕΚΗΛ καί ΖΚΘΛ εἶναι παραλληλόγραμμα.

β) Οἱ εὐθεῖες ΕΗ, ΖΘ,ΛΚ διέρχονται ἀπό τό ἴδιο σημεῖο.

133. Οἱ κορυφές ἑνός τριγώνου ΑΒΓ εἶναι σημεῖα ἑνός κυκλ(Ο,ρ). Ἄν φέρουμε τίς διαμέτρους ΑΑ΄, ΒΒ΄, ΓΓ΄ τοῦ κύκλου, νά δειχθεῖ ὅτι τό τρίγωνο Α΄Β΄Γ΄ εἶναι ἴσο μέ τό ΑΒΓ.

134. Ἄν ΚΛΜΡ εἶναι τό παραλληλόγραμμο πού ἔχει κορυφές τά μέσα τῶν πλευρῶν ἑνός τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, νά δείξετε ὅτι: α) Τό ΚΛΜΡ εἶναι ὀρθογώνιο, ἄν καί μόνο ἄν οἱ διαγώνιοι τοῦ ΑΒΓΔ εἶναι κάθετες β) Τό ΚΛΜΡ εἶναι ρόμβος, ἄν καί μόνο ἄν οἱ διαγώνιοι τοῦ ΑΒΓΔ εἶναι ἴσες γ) Τό ΚΛΜΡ εἶναι τετράγωνο, ἄν καί μόνο ἄν οἱ διαγώνιοι τοῦ ΑΒΓΔ εἶναι ἴσες καί κάθετες.

135. Οἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν ἑνός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ σχηματίζουν ὀρθογώνιο. Οἱ διαγώνιοι τοῦ ὀρθογωνίου αὐτοῦ εἶναι παράλληλες πρός τίς πλευρές τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ καί ἴσες μέ τή διαφορά τῶν πλευρῶν τοῦ ΑΒΓΔ.

136. Οἱ διχοτόμοι τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν ἑνός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ σχηματίζουν ὀρθογώνιο. Οἱ διαγώνιοι τοῦ ὀρθογωνίου αὐτοῦ εἶναι παράλληλες πρός τίς πλευρές τοῦ ΑΒΓΔ καί ἴσες μέ τό ἄθροισμα τῶν πλευρῶν τοῦ ΑΒΓΔ.

137. Σέ ὀρθογώνιο ΑΒΓΔ ὀνομάζουμε Ε,Ζ τά μέσα τῶν πλευρῶν του ΑΒ,ΒΓ ἀντιστοίχως καί Α΄,Γ΄ τίς ὀρθές προβολές τῶν κορυφῶν του Α καί Γ στή διαγώνιο ΒΔ. Νά δειχθεῖ ὅτι οἱ εὐθεῖες Α΄Ε καί Γ΄Ζ εἶναι κάθετες.

138. Σ' ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{A} = 90°$) φέρνουμε τή διάμεσό του ΑΜ καί τό ὕψος του ΑΗ. Νά δείξετε ὅτι ἡ γωνία $M\widehat{A}H$ εἶναι ἴση μέ τή διαφορά τῶν ὀξειῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου.

139. Σ'ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{A} = 90°$) φέρνουμε τό ὕψος του ΑΗ. Νά δείξετε τήν πρόταση

$$\widehat{B} = 15° \iff AH = \frac{ΒΓ}{4}.$$

140. Οἱ γωνίες $\widehat{B}$ καί $\widehat{Δ}$ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ εἶναι ὀρθές. Ἄν Κ καί Λ εἶναι τά μέσα τῶν διαγωνίων ΒΔ καί ΑΓ, νά δείξετε ὅτι $ΚΛ \perp ΒΔ$.

141. Σέ τρίγωνο ΑΒΓ μέ $\widehat{B} > \widehat{Γ}$ φέρνουμε τό ὕψος του ΑΗ καί ὀνομάζουμε Μ καί Ρ τά μέσα τῶν πλευρῶν του ΒΓ καί ΑΓ. Νά δειχθεῖ ὅτι $H\widehat{P}M = \widehat{B} - \widehat{Γ}$.

142. Θεωροῦμε τά ὕψη ΑΗ καί Α΄Η΄ ὀρθογώνιων τριγώνων ΑΒΓ καί Α΄Β΄Γ΄ ($\widehat{A} = \widehat{A'} = 90°$). Νά δείξετε ὅτι ἄν $ΒΓ = Β'Γ'$ καί $ΑΗ = Α'Η'$, τά τρίγωνα εἶναι ἴσα.

143. Ἄν Κ καί Λ εἶναι οἱ ὀρθές προβολές τῆς κορυφῆς Α τριγώνου ΑΒΓ στήν ἐσωτερική καί στήν ἐξωτερική διχοτόμο τῆς γωνίας $\widehat{B}$, νά δείξετε ὅτι:

α) Τό ΑΚΒΛ εἶναι ὀρθογώνιο.

β) Ἡ εὐθεία ΚΛ εἶναι παράλληλη πρός τή ΒΓ καί διέρχεται ἀπό τό μέσο τῆς πλευρᾶς ΑΓ.

144. Ἕνα παραλληλόγραμμο εἶναι ρόμβος, ἄν καί μόνο ἄν οἱ ἀποστάσεις τῶν ἀπέναντι πλευρῶν του εἶναι ἴσες.

145. Ἀπό ἕνα ἐσωτερικό σημεῖο Ι τετραγώνου ΑΒΓΔ φέρνουμε δύο κάθετες εὐθεῖες $ε_1$ καί $ε_2$ πού ἡ μία τέμνει τίς πλευρές ΑΒ καί ΓΔ στά σημεῖα Λ καί Κ καί ἡ ἄλλη τέμνει τίς ΒΓ καί ΑΔ στά Ρ καί Σ. Νά δείξετε ὅτι $ΚΛ = ΡΣ$.

146. Νά δειχθεῖ ὅτι οἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν ἑνός ὀρθογωνίου σχηματίζουν τετράγωνο. Ὁμοίως καί οἱ διχοτόμοι τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν του.

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ **

147. Θεωροῦμε τό τρίγωνο ΑΒΓ καί κατασκευάζουμε ἔξω ἀπό αὐτό τά τετράγωνα ΑΓΖΗ καί ΑΒΔΕ. Ἄν Λ εἶναι τό μέσο τῆς ΕΗ, νά δειχθεῖ ὅτι τό τμῆμα ΑΛ εἶναι κάθετο στή ΒΓ καί ἴσο μέ τό μισό της.

148. Σ' ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ μέ $ΑΒ < ΑΓ$ θεωροῦμε τό μέσο Δ τῆς πλευρᾶς ΑΒ καί ἕνα σημεῖο Ε τῆς ἡμιευθείας ΔΒ τέτοιο ὥστε $ΔΕ = \frac{ΑΓ}{2}$. Ἀπό τά Β καί Ε φέρνουμε κάθετες στή διχοτόμο τῆς γωνίας $\widehat{Α}$, οἱ ὁποῖες τέμνουν τήν πλευρά ΑΓ στά Β΄ καί Ε΄ ἀντιστοίχως. Νά δείξετε ὅτι:

α) $Β'Ε' = \frac{ΑΓ-ΑΒ}{2}$.

β) Ἡ εὐθεία ΕΕ΄ διέρχεται ἀπό τό μέσο τῆς ΒΓ.

149. Ἄν σ' ἕνα τρίγωνο ἔχουμε $α > β$, τότε θά ἔχουμε $α + υ_α > β + υ_β$.

150. Νά δειχθεῖ ὅτι οἱ ὀρθές προβολές τῆς κορυφῆς Α τριγώνου ΑΒΓ στίς ἐσωτερικές καί ἐξωτερικές διχοτόμους τῶν γωνιῶν $\widehat{Β}$ καί $\widehat{Γ}$ εἶναι συνευθειακά σημεῖα.

151. Δίνονται δύο παράλληλες εὐθεῖες ε καί ε΄ καί ἕνα σημεῖο Α τῆς ε. Ἀπό τό Α φέρνουμε τό κάθετο τμῆμα ΑΚ καί ἕνα πλάγιο τμῆμα ΑΒ πρός τήν ε΄. Τέλος θεωροῦμε σημεῖο Δ τῆς ε τέτοιο ὥστε ἡ ΒΔ νά τέμνει τό τμῆμα ΑΚ σ' ἕνα σημεῖο Ζ καί νά ἔχουμε $ΖΔ = 2ΑΒ$. Νά δείξετε ὅτι $Α\widehat{Β}Κ = 3Δ\widehat{Β}Κ$.

152. Δίνεται ἕνα ἰσοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ καί ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο Μ στήν προέκταση τῆς βάσεως ΒΓ πρός τό μέρος τοῦ Β. Ἀπό τό Μ φέρνουμε εὐθεῖες παράλληλες πρός τίς ΒΑ καί ΑΓ, οἱ ὁποῖες τέμνουν τίς προεκτάσεις τῶν πλευρῶν ΓΑ καί ΑΒ στά σημεῖα Δ καί Ε. Νά δειχθεῖ ὅτι ἡ διαφορά ΜΔ–ΜΕ εἶναι σταθερή (ἀνεξάρτητη ἀπό τή θέση τοῦ Μ).

153. Δίνεται ἕνα ἰσοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ καί ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο Μ στήν προέκταση τῆς βάσεώς του ΒΓ πρός τό μέρος τοῦ Β. Ἄν Δ καί Ε εἶναι οἱ ὀρθές προβολές τοῦ Μ στίς εὐθεῖες ΑΓ καί ΑΒ, νά δείξετε ὅτι ἡ διαφορά ΜΔ–ΜΕ εἶναι σταθερή (ἀνεξάρτητη ἀπό τή θέση τοῦ Μ).

154. Δίνεται ἕνα ἰσοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ καί ἕνα σημεῖο Μ στή βάση του ΒΓ. Ἀπό τό Μ φέρνουμε τά κάθετα τμήματα ΜΔ καί ΜΕ στίς ἴσες πλευρές ΑΓ καί ΑΒ. Νά δείξετε ὅτι τό ἄθροισμα $ΑΔ + ΑΕ$ παραμένει σταθερό, ὅταν τό Μ κινεῖται στή ΒΓ.

155. Δίνεται ἕνα ἰσοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ, ἕνα σημεῖο Μ στή βάση του ΒΓ καί ἕνα σημεῖο Μ΄ στήν προέκταση τῆς ΒΓ πρός τό μέρος τοῦ Β. Ἡ κάθετος πρός τή ΒΓ στό Μ τέμνει τίς εὐθεῖες ΑΓ καί ΑΒ στά σημεῖα Δ καί Ε, ἐνῶ ἡ καθετος πρός τή ΒΓστό σημεῖο Μ΄ τίς τέμνει στά Δ΄ καί Ε΄ ἀντιστοίχως. Νά δείξετε ὅτι:

α) Τό ἄθροισμα $ΜΔ + ΜΕ$ παραμένει σταθερό, ὅταν τό Μ κινεῖται στή ΒΓ.

β) Ἡ διαφορά Μ΄Δ΄ – Μ΄Ε΄ παραμένει σταθερή, ὅταν τό Μ΄ κινεῖται στήν προέκταση τῆς ΓΒ.

156. Δίνεται μία γωνία $Χ\widehat{Ο}Ψ = 120°$ καί ἡ διχοτόμος της ΟΔ. Ἀπό ἐσωτερικό σημεῖο Ρ τῆς $Χ\widehat{Ο}Δ$ φέρνουμε τά τμήματα ΡΕ, ΡΖ,ΡΗ κάθετα στίς ΟΧ,ΟΔ,ΟΨ ἀντιστοίχως. Νά δείξετε ὅτι $ΡΕ + ΡΖ = ΡΗ$.

157. Θεωροῦμε τό παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ καί κατασκευάζουμε ἔξω ἀπό αὐτό τά τετράγωνα ΑΒΕΖ, ΒΓΗΘ, ΓΔΙΚ, ΔΑΛΜ. Ἄν Ν,Ρ,Σ,Τ εἶναι τά κέντρα τῶν τετραγώνων αὐτῶν, νά δείξετε ὅτι τό σχῆμα ΝΡΣΤ εἶναι τετράγωνο.

158. Θεωροῦμε τό τρίγωνο ΑΒΓ καί κατασκευάζουμε ἔξω ἀπό αὐτό τά τετράγωνα ΑΓΖΗ καί ΑΒΔΕ. Ἄν Σ καί Ρ εἶναι τά κέντρα τῶν τετραγώνων αὐτῶν καί Μ τό μέσο τῆς ΒΓ, νά δείξετε ὅτι τό τρίγωνο ΣΜΡ εἶναι ἰσοσκελές καί ὀρθογώνιο.

1. Ἕνα τετράπλευρο λέγεται **παραλληλόγραμμο**, ἄν καί μόνο ἄν οἱ ἀπέναντι πλευρές του εἶναι παράλληλες. Οἱ βασικές ἰδιότητες ἑνός παραλληλογράμμου εἶναι:

— **Οἱ ἀπέναντι πλευρές του εἶναι ἴσες.**

— **Οἱ ἀπέναντι γωνίες του εἶναι ἴσες.**

— **Οἱ διαγώνιοί του διχοτομοῦνται.**

Κάθε μία ἀπό τίς ἰδιότητες αὐτές εἶναι καί ἱκανή συνθήκη, γιά νά εἶναι ἕνα τετράπλευρο ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο. Μία τέτοια ἱκανή συνθήκη εἶναι ἀκόμη τό ΑΒΓΔ νά ἔχει δύο ἀπέναντι πλευρές του ἴσες καί παράλληλες. Ἕνα παραλληλόγραμμο θά λέγεται εἰδικότερα:

— **ὀρθογώνιο** ἄν καί μόνο ἄν ἔχει μία γωνία του ὀρθή, ὁπότε ὅλες οἱ γωνίες του εἶναι ὀρθές. Στό ὀρθογώνιο ἔχουμε ἐπιπλέον ὅτι **οἱ διαγώνιοι εἶναι ἴσες**. Ἡ ἰδιότητα αὐτή εἶναι καί ἱκανή συνθήκη, γιά νά εἶναι ἕνα παραλληλόγραμμο ὀρθογώνιο.

— **ρόμβος** ἄν καί μόνο ἄν ἔχει δύο διαδοχικές πλευρές του ἴσες, ὁπότε ὅλες οἱ πλευρές του εἶναι ἴσες. Στό ρόμβο ἔχουμε ἐπί πλέον ὅτι **οἱ διαγώνιοι τέμνονται κάθετα καί διχοτομοῦν τίς γωνίες του.** Κάθε μιά ἀπό τίς ἰδιότητες αὐτές εἶναι καί ἱκανή συνθήκη, γιά νά εἶναι ἕνα παραλληλόγραμμο ρόμβος.

— **τετράγωνο** ἄν καί μόνο ἄν ἔχει ὅλες τίς γωνίες του ὀρθές καί ὅλες τίς πλευρές του ἴσες (δηλαδή ἄν εἶναι συγχρόνως ὀρθογώνιο καί ρόμβος). Στό τετράγωνο ἔχουμε ἐπί πλέον ὅτι **οἱ διαγώνιοι εἶναι ἴσες, τέμνονται κάθετα καί διχοτομοῦν τίς γωνίες του.**

2. Μέ τίς ἰδιότητες τῶν παραλληλογράμμων βρίσκουμε τίς προτάσεις:

— **Ἡ εὐθεία πού ἑνώνει τά μέσα δύο πλευρῶν τριγώνου εἶναι παράλληλη πρός τήν τρίτη πλευρά καί ἴση μέ τό μισό της.**

— **Τά μέσα τῶν πλευρῶν ἑνός ὁποιουδήποτε τετραπλεύρου εἶναι κορυφές παραλληλογράμμου.**

— **Ἡ διάμεσος ὀρθογώνιου τριγώνου πού ἀντιστοιχεῖ στήν ὑποτείνουσά του εἶναι τό μισό τῆς ὑποτείνουσας.**

— **Ἄν σέ ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο ἡ μία ὀξεία γωνία του εἶναι 30^0, ἡ ἀπέναντι πλευρά της εἶναι τό μισό τῆς ὑποτείνουσας.**

Ἐπίσης, ἄν ἔχουμε δύο παράλληλες εὐθεῖες ε_1 καί ε_2, ὅλα τά σημεῖα τῆς μιᾶς ἀπέχουν τήν ἴδια ἀπόσταση υ ἀπό τήν ἄλλη καί ἡ κοινή ἀπόσταση αὐτή υ λέγεται **«ἀπόσταση τῶν δύο παραλλήλων»**. Τέλος ὅλα τά σημεῖα πού ἰσαπέχουν ἀπό δύο παράλληλες εὐθεῖες βρίσκονται **στή μεσοπαράλληλό τους.**

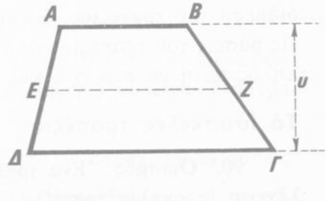
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

ΤΡΑΠΕΖΙΑ—ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ ΩΣ ΠΡΟΣ ΑΞΟΝΑ

Τραπέζιο.

89. Ὁρισμός: Τό τετράπλευρο πού ἔχει δύο μόνο ἀπέναντι πλευρές του παράλληλες λέγεται τραπέζιο.

Οἱ παράλληλες πλευρές τοῦ τραπεζίου λέγονται **βάσεις** του, ἐνῶ τό εὐθύγραμμο τμῆμα πού ἑνώνει τά μέσα τῶν μή παράλληλων πλευρῶν του λέγεται **διάμεσος τοῦ τραπεζίου.** Ἔτσι π.χ. ἄν σ' ἕνα τετράπλευρο ΑΒΓΔ ἔχουμε μόνο ΑΒ // ΓΔ, τό ΑΒΓΔ εἶναι τραπέζιο μέ βάσεις ΑΒ καί ΓΔ, ἐνῶ τό εὐθύγραμμο τμῆμα ΕΖ πού ἑνώνει τά μέσα Ε καί Ζ τῶν μή παράλληλων πλευρῶν ΑΔ καί ΒΓ εἶναι ἡ διάμεσός του.



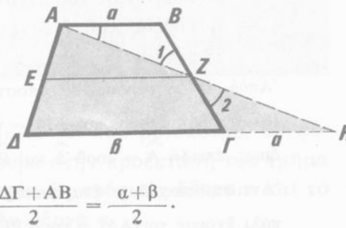
Ἀπό τήν παραλληλία τῶν βάσεων εἶναι φανερό ὅτι $\widehat{A}+\widehat{\Delta}=2$ορθ. καί $\widehat{B}+\widehat{\Gamma}=2$ορθ., δηλαδή ὅτι οἱ γωνίες πού πρόσκεινται στίς μή παράλληλες πλευρές εἶναι παραπληρωματικές. Ἡ ἀπόσταση υ τῶν παράλληλων εὐθειῶν ΑΒ καί ΓΔ λέγεται **ὕψος** τοῦ τραπεζίου.

ΘΕΩΡΗΜΑ Ι. Ἡ διάμεσος τοῦ τραπεζίου εἶναι παράλληλη πρός τίς βάσεις του καί ἴση μέ τό ἡμιάθροισμα τῶν βάσεων.

Ἀπόδ. Ἄς θεωρήσουμε τραπέζιο ΑΒΓΔ μέ βάσεις ΑΒ = α καί ΓΔ = β καί ἄς καλέσουμε Ε καί Ζ τά μέσα τῶν ΑΔ καί ΒΓ. Ἄν Η εἶναι τό σημεῖο τομῆς τῶν εὐθειῶν ΑΖ καί ΔΓ, ἔχουμε τριγΑΖΒ = τριγΓΖΗ (γιατί ΒΖ = ΖΓ, $\widehat{ABZ}=\widehat{Z\Gamma H}$, $\widehat{Z}_1=\widehat{Z}_2$) καί ἄρα

ΑΖ = ΖΗ καί ΓΗ = ΑΒ = α.

Ἔτσι τό Ζ εἶναι μέσο καί τῆς ΑΗ, δηλαδή ἡ ΕΖ ἑνώνει τά μέσα δύο πλευρῶν στό τρίγωνο ΑΔΗ· Εἶναι λοιπόν $EZ // = \frac{\Delta H}{2}$, δηλαδή

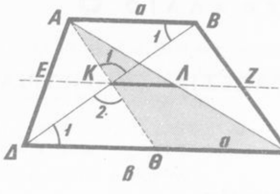


$$EZ // \Delta\Gamma // AB \text{ καί } EZ=\frac{\Delta\Gamma+\Gamma H}{2}=\frac{\Delta\Gamma+AB}{2}=\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΙ. Τό εὐθύγραμμο τμῆμα πού συνδέει τά μέσα τῶν διαγωνίων ἑνός τραπεζίου εἶναι παράλληλο πρός τίς βάσεις τοῦ τραπεζίου καί ἴσο μέ τήν ἡμιδιαφορά τους.

Ἀπόδ. Στό τραπέζιο ΑΒΓΔ ἄς καλέσουμε Κ καί Λ τά μέσα τῶν διαγωνίων του ΒΔ καί ΑΓ. Ἄν Θ εἶναι τό σημεῖο τομῆς τῶν εὐθειῶν ΑΚ καί ΔΓ ἔχουμε τριγΑΚΒ = τριγΔΚΘ (γιατί ΒΚ = ΚΔ, $\widehat{K_1} = \widehat{K_2}$, $\widehat{B_1} = \widehat{\Delta_1}$) καί ἄρα

ΑΚ = ΚΘ καί ΔΘ = ΑΒ = α.



Ἔτσι τό Κ εἶναι μέσο τῆς ΑΘ, δηλαδή ἡ ΚΛ ἑνώνει τά μέσα δύο πλευρῶν τοῦ ΑΘΓ. Εἶναι λοιπόν

$$K\Lambda \mathbin{/\!/=} \frac{\Theta\Gamma}{2},$$ δηλαδή :

$$K\Lambda \,/\!/\, \Delta\Gamma \,/\!/\, AB \quad \text{καί} \quad K\Lambda = \frac{\Theta\Gamma}{2} = \frac{\Delta\Gamma - \Delta\Theta}{2} = \frac{\Delta\Gamma - AB}{2} = \frac{\beta - \alpha}{2}.$$

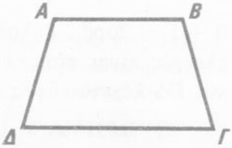
Παρατηροῦμε ἀκόμη ὅτι στό τρίγωνο ΑΔΓ ἡ εὐθεία ΚΛ διέρχεται ἀπό τό μέσο τῆς ΑΓ καί εἶναι παράλληλη πρός τήν ΓΔ. Ἐπομένως θά περάσει ἀπό τό μέσο Ε τῆς ΑΔ. Ὁμοίως ἀπό τό τρίγωνο ΒΔΓ προκύπτει ὅτι ἡ εὐθεία ΚΛ θά περάσει ἀπό τό μέσο Ζ τῆς ΒΓ. Δηλαδή **τά μέσα τῶν διαγωνίων βρίσκονται στή διάμεσο τοῦ τραπεζίου.** Εἶναι λοιπόν φανερό ὅτι, ἄν φέρουμε παράλληλο πρός τίς βάσεις τοῦ τραπεζίου ἀπό ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο ἀπό τά Ε,Κ,Λ,Ζ, ἡ παράλληλος αὐτή θά περιέχει καί τά τρία ἄλλα σημεῖα.

Τό ἰσοσκελές τραπέζιο.

90. Ὁρισμός: **Ἕνα τραπέζιο πού ἔχει ἴσες τίς μή παράλληλες πλευρές του λέγεται ἰσοσκελές τραπέζιο.**

Ἔτσι π.χ. τό τραπέζιο ΑΒΓΔ μέ βάσεις ΑΒ καί ΓΔ θά εἶναι ἰσοσκελές, ἄν καί μόνο ἄν

ΑΔ = ΒΓ.



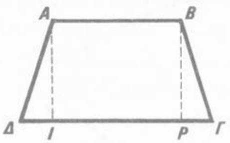
Ἐκτός ἀπό τίς ἰδιότητες τοῦ τραπεζίου τίς ὁποῖες ἀναφέραμε, τό ἰσοσκελές τραπέζιο ἔχει κι ἄλλες δικές του ἰδιότητες. Θά ἀποδείξουμε λοιπόν ὅτι:

ΘΕΩΡΗΜΑ: Σ' ἕνα τραπέζιο ἰσοσκελές ΑΒΓΔ μέ βάσεις ΑΒ καί ΓΔ
- **οἱ γωνίες πού πρόσκεινται σέ κάθε βάση του εἶναι ἴσες,**
- **οἱ διαγώνιοί του εἶναι ἴσες,**
- **ἡ εὐθεία πού διέρχεται ἀπό τά μέσα τῶν βάσεων εἶναι μεσοκάθετος τῆς κάθε βάσεως.**

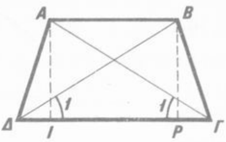
Ἀπόδ. α) Ἄν φέρουμε τίς ἀποστάσεις ΑΙ καί ΒΡ τῶν κορυφῶν Α καί Β ἀπό τή βάση ΓΔ (βλ. σχ. 66), ἔχουμε τριγΑΙΔ = τριγΒΡΓ (γιατί ΑΙ = ΒΡ, ΑΔ = ΒΓ) καί ἄρα $\widehat{\Delta} = \widehat{\Gamma}$.Τότε ὅμως, ἐπειδή $\widehat{A} = 2\text{ορθ} - \widehat{\Delta}$ καί $\widehat{B} = 2\text{ορθ} - \widehat{\Gamma}$, ἔχουμε καί $\widehat{A} = \widehat{B}$.

Ἀντιστρόφως, ἄν σ' ἕνα τραπέζιο ΑΒΓΔ ἔχουμε $\widehat{\Gamma} = \widehat{\Delta}$, τό τραπέζιο εἶναι ἰσοσκελές, γιατί πάλι ἔχουμε τριγΑΔΙ = τριγΒΡΓ (ἀφοῦ τώρα ΑΙ = ΒΡ καί $\widehat{\Delta} = \widehat{\Gamma}$) καί ἄρα ΑΔ = ΒΓ.

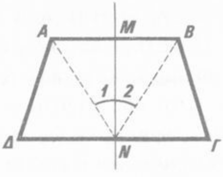
β) Ἐπειδή τριγΑΔΓ = τριγΒΔΓ (γιατί ΔΓ = ΔΓ, ΑΔ = ΒΓ, $\widehat{ΑΔΓ} = \widehat{ΒΓΔ}$) ἔχουμε ἀμέσως ΑΓ = ΒΔ. Ἀντιστρόφως, ἄν σ' ἕνα τραπέζιο ΑΒΓΔ ἔχουμε ΑΓ=ΒΔ, τό τραπέζιο



σχ. 66



σχ. 67



σχ. 68

εἶναι ἰσοσκελές, γιατί (βλ. σχ. 67) τριγΑΙΓ= τριγΒΔΡ ⇒ $\widehat{Γ}_1 = \widehat{Δ}_1$ καί τότε πάλι τριγ ΑΓΔ = τριγΒΓΔ ⇒ ΑΔ = ΒΓ.

γ) Ἄν Μ καί Ν τά μέσα τῶν βάσεων ΑΒ καί ΓΔ, ἔχουμε τριγΑΝΔ = τριγΒΝΓ (γιατί ΑΔ = ΒΓ, ΔΝ = ΝΓ καί $\widehat{Δ} = \widehat{Γ}$) ἄρα ΝΑ = ΝΒ. Τότε ὅμως ἡ διάμεσος ΝΜ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΝΒ εἶναι τό ὕψος του. Ἔτσι ΝΜ ⊥ ΑΒ καί φυσικά ΝΜ ⊥ ΔΓ (βλ. σχ. 68). Ἀντιστρόφως, ἄν σ'ἕνα τραπέζιο ΑΒΓΔ ἡ ΝΜ εἶναι κάθετη στίς βάσεις, τό τραπέζιο εἶναι ἰσοσκελές, γιατί τό τρίγωνο ΑΝΒ εἶναι ἰσοσκελές (ἀφοῦ ἡ ΝΜ εἶναι μεσοκάθετος τῆς ΑΒ), ὁπότε ΝΑ = ΝΒ καί $\widehat{N}_1 = \widehat{N}_2 \Rightarrow 90°-\widehat{N}_1 = 90°-\widehat{N}_2 \Rightarrow \widehat{ΑΝΔ} = \widehat{ΒΝΓ}$. Ἔτσι ἔχουμε τριγΑΝΔ = τριγΒΝΓ (γιατί ΑΝ = ΝΒ, ΝΔ = ΝΓ, $\widehat{ΑΝΔ} = \widehat{ΒΝΓ}$) καί ἄρα ΑΔ= ΒΓ.

Ἀποδείξαμε ὅτι στό ἰσοσκελές τραπέζιο ὄχι μόνο ἰσχύουν οἱ παραπάνω ἰδιότητες ἀλλά καί καθεμιά ἀπ'αὐτές ἀποτελεῖ κριτήριο, γιά νά εἶναι ἕνα τραπέζιο ἰσοσκελές. Ἀποδείξαμε δηλαδή ὅτι:

Ἕνα τραπέζιο εἶναι ἰσοσκελές, ἄν ἀληθεύει μιά ἀπό τίς παρακάτω προτάσεις:

α) οἱ γωνίες πού πρόσκεινται στή μία βάση του εἶναι ἴσες,

β) οἱ διαγώνιοί του εἶναι ἴσες,

γ) ἡ εὐθεία πού ἑνώνει τά μέσα τῶν βάσεων εἶναι κάθετη σ' αὐτές.

Ἔτσι λοιπόν γιά νά δείχνουμε ὅτι ἕνα τετράπλευρο εἶναι ἰσοσκελές τραπέζιο, θά πρέπει πρῶτα νά δείχνουμε ὅτι εἶναι τραπέζιο καί μετά νά δείχνουμε ὅτι ἀληθεύει μιά ἀπό τίς παραπάνω προτάσεις.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 163-174

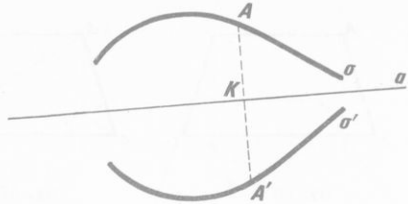
Συμμετρία ὡς πρός ἄξονα.

91. Μέ τή βοήθεια μιᾶς ὁρισμένης εὐθείας α πού θά τήν λέμε **«ἄξονα»** ὁρίζουμε μιά ἀντιστοιχία μεταξύ τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου μας κατά τόν ἀκόλουθο τρόπο:

Σέ κάθε σημεῖο Α ἀντιστοιχίζουμε τό σημεῖο Α΄ πού βρίσκουμε, ἄν φέρουμε τό κάθετο πρός τήν α τμῆμα ΑΚ καί πάρουμε στήν προέκτασή του τμῆμα ΚΑ΄ = ΚΑ. Ἡ ἀντιστοιχία αὐτή λέγεται **συμμετρία ὡς πρός τόν ἄξονα α** καί τό σημεῖο Α΄ λέγεται **συμμετρικό τοῦ Α ὡς πρός τόν ἄξονα α.**

Γιά νά δηλώσουμε ὅτι τό Α΄ εἶναι συμμετρικό τοῦ Α ὡς πρός τόν ἄξονα α, γράφουμε

Α΄ = συμμ$_α$Α.



Παρατηροῦμε ἀκόμη ὅτι ἄν Α΄ = συμμ$_α$Α, τότε καί Α = συμμ$_α$Α΄. Ἔτσι **δύο σημεῖα Α καί Α΄ θά εἶναι συμμετρικά ὡς πρός ἄξονα α, ἄν καί μόνο ἄν ἡ εὐθεία α εἶναι μεσοκάθετος τοῦ τμήματος ΑΑ΄.**

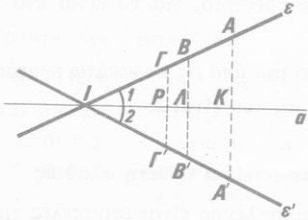
Τά συμμετρικά ὅλων τῶν σημείων ἑνός γεωμετρικοῦ σχήματος σ ὡς πρός ἄξονα α ἀποτελοῦν ἕνα ἄλλο γεωμετρικό σχῆμα σ΄ πού λέγεται **συμμετρικό τοῦ σ ὡς πρός α.** Δηλώνουμε ὅτι τό σ΄ εἶναι συμμετρικό τοῦ σ ὡς πρός τόν ἄξονα α γράφοντας πάλι σ΄ = συμμ$_α$σ.

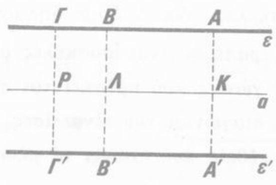
Συμμετρικά ἁπλῶν γεωμετρικῶν σχημάτων.

92. Γιά τά ἁπλά γεωμετρικά σχήματα ἔχουμε τά θεωρήματα:

Ι. Τό συμμετρικό μιᾶς εὐθείας ὡς πρός ἄξονα α εἶναι εὐθεία.

Ἀπόδ. Ἄς θεωρήσουμε μία εὐθεία ε πού τέμνει τόν ἄξονα α στό σημεῖο Ι, ἕνα σημεῖο της Α καί τό σημεῖο Α΄ = συμμ$_α$Α. Θά ἀποδείξουμε ὅτι ἡ εὐθεία ΙΑ΄ εἶναι συμμετρικό σχῆ-





μα τῆς ε. Ἀρκεῖ γι' αὐτό νά ἀποδείξουμε ὅτι κάθε σημεῖο Β τῆς ε ἔχει τό συμμετρικό του Β΄ στήν ΙΑ΄ καί ἀκόμη ὅτι κάθε σημεῖο Γ΄ τῆς ΙΑ΄ εἶναι συμμετρικό ἑνός σημείου Γ τῆς ε. Ἐπειδή εἶναι τριγΙΚΑ = τριγΙΚΑ΄ (γιατί $\widehat{ΙΚΑ} = \widehat{ΙΚΑ'} = 90°$, ΑΚ = ΚΑ΄, ΙΚ= ΙΚ), θά ἔχουμε $\widehat{Ι_1} = \widehat{Ι_2}$. Ἔτσι ἄν φέρουμε ΒΛ $\perp$ α καί καλέσουμε Β΄ τό σημεῖο τομῆς τῶν ΒΛ καί ΙΑ΄, θά ἔχουμε τριγΙΒΛ = τριγΙΒ΄Λ (γιατί $\widehat{ΙΛΒ} = \widehat{ΙΛΒ'} = 90°$, ΙΛ = ΙΛ, $\widehat{Ι_1} = \widehat{Ι_2}$ (καί ἄρα ΛΒ΄ = ΛΒ ⇒ Β΄ = συμμ$_α$Β. Ἐπίσης, ἄν φέρουμε Γ΄Ρ $\perp$ α καί καλέσουμε Γ τό σημεῖο τομῆς τῶν Γ΄Ρ καί ΙΑ, θά ἔχουμε τριγΙΡΓ΄ = τριγΙΡΓ (γιατί $\widehat{ΙΡΓ'} = \widehat{ΙΡΓ} = 90°$, ΙΡ = ΙΡ, $\widehat{Ι_1} = \widehat{Ι_2}$) καί ἄρα ΓΡ = Γ΄Ρ ⇒ Γ΄ = συμμ$_α$Γ.

Ἄς θεωρήσουμε τώρα μία εὐθεία ε // α, ἕνα σημεῖο τῆς Α καί τό σημεῖο Α΄ = συμμ$_α$Α. Ἄν φέρουμε ἀπό τό Α΄ τήν εὐθεία ε΄ // α, θά ἀποδείξουμε ὅτι ἡ ε΄ εἶναι τό συμμετρικό σχῆμα τῆς ε. Παίρνουμε πάλι ἕνα σημεῖο Β τῆς ε, φέρνουμε τήν ΒΛ $\perp$ α καί καλοῦμε Β΄ τό σημεῖο τομῆς τῶν ε΄ καί ΒΛ. Παρατηροῦμε τώρα ὅτι τά ΒΛΚΑ καί ΛΒ΄Α΄Κ εἶναι ὀρθογώνια καί ἄρα ΛΒ΄ = Α΄Κ = ΚΑ = ΛΒ ⇒ Β΄=συμμ$_α$Β. Μέ τόν ἴδιο τρόπο δείχνεται ὅτι καί κάθε σημεῖο Γ΄ τῆς ε΄ εἶναι συμμετρικό ἑνός σημείου Γ τῆς ε (ὅπου τό Γ θά εἶναι τομή τῆς ε μέ τήν κάθετο πρός τήν α ἀπό τό Γ΄).

Καταλαβαίνουμε λοιπόν ὅτι **γιά νά βροῦμε τό συμμετρικό μιᾶς εὐθείας ὡς πρός ἄξονα α ἀρκεῖ νά βροῦμε μόνο τά συμμετρικά δύο σημείων της.** Παρατηροῦμε ἀκόμη (ἀπό τήν παραπάνω ἀπόδειξη) ὅτι τό τμῆμα Α΄Β΄, πού εἶναι ἴσο μέ τό ΑΒ, εἶναι συμμετρικό τοῦ τμήματος ΑΒ. Ἔτσι ἔχουμε τά πορίσματα:

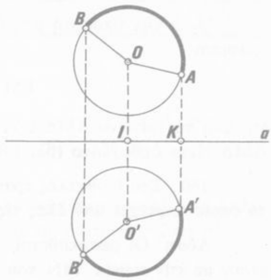
— **Τό συμμετρικό ἑνός εὐθύγραμμου τμήματος ΑΒ ὡς πρός ἄξονα α εἶναι εὐθύγραμμο τμῆμα Α΄Β΄ ἴσο μέ τό ΑΒ.**

— **Τό συμμετρικό ἑνός τριγώνου ΑΒΓ ὡς πρός ἄξονα α εἶναι τρίγωνο Α΄Β΄Γ΄ ἴσο μέ τό τρίγωνο ΑΒΓ** (ἀφοῦ τά δύο τρίγωνα θά ἔχουν τίς πλευρές τους μία πρός μία ἴσες).

— **Τό συμμετρικό μιᾶς γωνίας $\widehat{XA\Psi}$ ὡς πρός ἄξονα α εἶναι γωνία $X'\widehat{A'}\Psi'$ ἴση μέ τήν $\widehat{XA\Psi}$** (ἡ ἀπόδειξη γίνεται ὅπως ἀκριβῶς στή συμμετρία ὡς πρός κέντρο).

II. Τό συμμετρικό κυκλ(Ο,ρ) ὡς πρός ἄξονα α εἶναι κύκλος ἴσος μέ τόν κυκλ(Ο,ρ) πού ἔχει κέντρο τό συμμετρικό τοῦ Ο ὡς πρός τόν ἄξονα α.

Ἀπόδ. Θεωροῦμε τόν κυκλ(Ο,ρ) καί μέ κέντρο τό Ο΄ = συμμ$_α$Ο γράφουμε τόν κυκλ(Ο΄,ρ). Θά ἀποδείξουμε ὅτι ὁ κυκλ(Ο΄,ρ) εἶναι τό συμμετρικό σχῆμα τοῦ κυκλ(Ο,ρ). Ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι τό συμμετρικό κάθε σημείου Α τοῦ κυκλ(Ο,ρ) ἀνήκει στόν κυκλ(Ο΄,ρ) καί ὅτι κάθε σημεῖο Β΄ τοῦ κυκλ(Ο΄,ρ) εἶναι συμμετρικό ἑνός σημείου Β τοῦ κυκλ(Ο,ρ).



Ἄν Α΄ = συμμ$_α$Α, τό τετράπλευρο ΟΑΑ΄Ο΄ εἶναι ἰσοσκελές τραπέζιο (γιατί ἡ ΙΚ πού ἑνώνει τά μέσα τῶν βάσεών του εἶναι μεσοκάθετος αὐτῶν). Ἔτσι

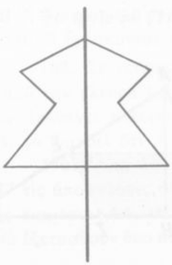
$$O'A' = OA = \rho,$$

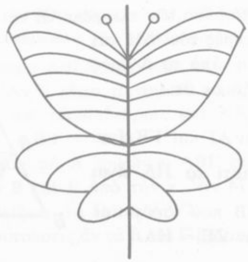
δηλαδή τό Α΄ ἀνήκει στόν κυκλ(Ο΄,ρ). Ἐπίσης ἄν πάρουμε Β = συμμ$_α$Β΄, ἀποδεικνύεται μέ τόν ἴδιο τρόπο ὅτι εἶναι ΟΒ = Ο΄Β΄ = ρ, δηλαδή ὅτι τό Β ἀνήκει στόν κυκλ(Ο,ρ) καί ἄρα Β΄ = συμμ$_α$Β.

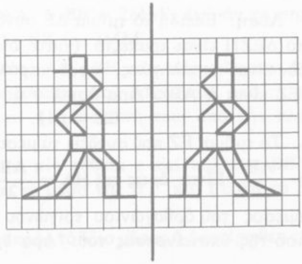
Συμπεραίνουμε ἀκόμη ὅτι **τό συμμετρικό ἑνός τόξου $\widehat{AB}$ τοῦ κυκλ(Ο,ρ) ὡς πρός ἄξονα α εἶναι τόξο $\widehat{A'B'}$ ἴσο μέ τό $\widehat{AB}$** (ἀφοῦ οἱ χορδές ΑΒ καί Α΄Β΄ θά εἶναι τμήματα ἴσα).

Σχήματα μέ ἄξονα συμμετρίας.

93. **Ὁρισμός:** Ἕνα γεωμετρικό σχῆμα σ θά λέμε ὅτι **ἔχει ἄξονα συμμετρίας**







μιά δρισμένη εὐθεία α, ἄν καί μόνο ἄν ὅλα τά σημεῖα τοῦ σ εἶναι ἀνά δύο συμμετρικά ὡς πρός τήν α. Γιά νά ἐλέγχουμε λοιπόν ἄν ἕνα σχῆμα ἔχει ἄξονα συμμετρίας μιά εὐθεία α, θά πρέπει παίρνοντας ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο Α τοῦ σ νά δείχνουμε ὅτι τό συμμετρικό του Α΄ εἶναι ἐπίσης σημεῖο τοῦ σ.

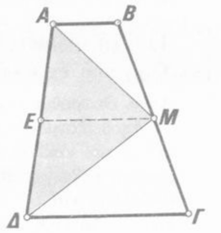
Ὅλα τά παραπάνω σχήματα ἔχουν ἄξονα συμμετρίας.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 175-178

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

159. Σ' ἕνα τραπέζιο ΑΒΓΔ ἡ μία ἀπό τίς μή παράλληλες πλευρές του ΑΔ εἶναι ἴση μέ τό ἄθροισμα τῶν βάσεων. Ἄν Μ εἶναι τό μέσο τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς, νά δείξετε ὅτι

$$\widehat{AM\Delta} = 90^0$$



Λύση: Ἄν ΑΒ,ΔΓ εἶναι οἱ βάσεις τοῦ τραπεζίου καί Ε τό μέσο τῆς ΑΔ, ἔχουμε

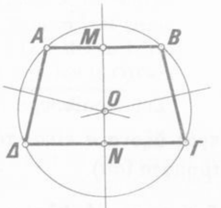
$$\text{(I)} \qquad EM = \frac{AB + \Gamma\Delta}{2}.$$

Ἀπό τήν ὑπόθεσή μας ὅμως ΑΔ = ΒΑ + ΓΔ ἡ ἰσότητα (I) γράφεται

$$EM = \frac{A\Delta}{2},$$

δηλαδή τό τρίγωνο ΑΜΔ ἔχει μία διάμεσο ἴση μέ τό μισό τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς του. Ἔτσι τό ΑΜΔ εἶναι ὀρθογώνιο (βλ. § 86) καί ΑΜΔ = 90°.

160. Στό ἰσοσκελές τραπέζιο οἱ μεσοκάθετοι τῶν πλευρῶν του διέρχονται ἀπό ἕνα σημεῖο τό ὁποῖο ἰσαπέχει ἀπό ὅλες τίς κορυφές τοῦ τραπεζίου.



Λύση: Οἱ μεσοκάθετοι τῶν δύο βάσεων ΑΒ καί ΓΔ συμπίπτουν μέ τήν εὐθεία ΜΝ πού συνδέει τά μέσα τους Μ καί Ν. Ἄν τώρα ἡ μεσοκάθετος τῆς ΒΓ τέμνει τήν ΜΝ στό Ο, θά ἀποδείξουμε ὅτι καί ἡ μεσοκάθετος τῆς ΑΔ θά περάσει ἀπό τό Ο καί ἀρκεῖ γι' αὐτό ν' ἀποδείξουμε ὅτι :

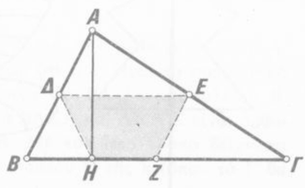
$$OA = O\Delta.$$

Ἐπειδή ὅμως τό Ο βρίσκεται στή μεσοκάθετο τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ἔχουμε τίς ἰσότητες ΟΑ = ΟΒ, ΟΒ = ΟΓ, ΟΓ = ΟΔ ἀπό τίς ὁποῖες προκύπτει ἀμέσως ἡ ζητούμενη ΟΑ = ΟΔ.

161. Δίνεται ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ καί τό ὕψος του ΑΗ. Ἄν Δ,Ε,Ζ εἶναι τά μέσα τῶν πλευρῶν του ΑΒ,ΑΓ,ΒΓ, νά δειχθεῖ ὅτι τό σχῆμα ΔΕΖΗ εἶναι ἰσοσκελές τραπέζιο.

Λύση: Ἐπειδή τό τμῆμα ΔΕ συνδέει τά μέσα τῶν πλευρῶν ΑΒ καί ΑΓ, θά εἶναι ΔΕ // ΒΓ καί τό ΔΕΖΗ εἶναι τραπέζιο (γιατί οἱ πλευρές του ΔΗ καί ΕΖ δέν εἶναι παράλληλες, ἀφοῦ παράλληλη ἀπό τό Δ πρός τήν ΕΖ εἶναι ἡ ΑΒ). Ἄρα ἀρκεῖ ν' ἀποδείξουμε ὅτι:

$$EZ = \Delta H.$$



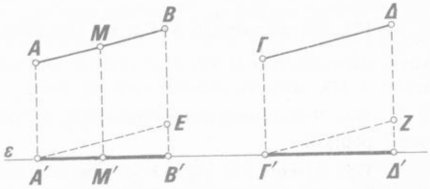
Τό τμῆμα ΕΖ πού συνδέει τά μέσα τῶν ΑΓ καί ΓΒ εἶναι $ZE = \frac{AB}{2}$. Εἶναι ὅμως καί $H\Delta = \frac{AB}{2}$, γιατί τό ΗΔ εἶναι ἡ διάμεσος τοῦ ὀρθογώνιου τριγώνου ΑΗΒ πού ἰσοῦται μέ τό μισό τῆς ὑποτείνουσάς του. Ἄρα ἔχουμε ΖΕ = ΗΔ.

162. Ἂν Α΄ καί Β΄ εἶναι οἱ ὀρθές προβολές τῶν ἄκρων ἑνός τμήματος ΑΒ σέ μία εὐθεία ε, τό τμῆμα Α΄ Β΄ λέγεται «ὀρθή προβολή» (ἤ ἁπλῶς προβολή) τοῦ ΑΒ στήν ε. Νά δειχθεῖ ὅτι:

α) Ἴσα καί παράλληλα τμήματα ἔχουν ἴσες προβολές σέ μία εὐθεία.

β) Ἡ προβολή τοῦ μέσου ἑνός τμήματος εἶναι τό μέσο τῆς προβολῆς τοῦ τμήματος.

Λύση: α) Θεωροῦμε δύο τμήματα ΑΒ καί ΓΔ παράλληλα καί ἴσα καί τίς (ὀρθές) προβολές τους Α΄Β΄ καί Γ΄Δ΄ σέ μία εὐθεία ε. Ἀπό τά Α΄ καί Γ΄ φέρνουμε εὐθεῖες παράλληλες πρός τίς ΑΒ καί ΓΔ πού τέμνουν τίς ΒΒ΄ καί ΔΔ΄ στά Ε καί Ζ. Ἀπό τά παραλληλόγραμμα ΑΒΕΑ΄ καί ΓΔΖΓ΄ ἔχουμε



Α΄Ε//=ΑΒ, Γ΄Ζ//=ΓΔ ⇒ Α΄Ε//=Γ΄Ζ.

Ἔτσι τά ὀρθογώνια τρίγωνα Α΄ΕΒ΄ καί Γ΄ΖΔ΄ εἶναι ἴσα (γιατί Α΄Ε = Γ΄Ζ καί $\widehat{ΕΑ΄Β΄} = \widehat{ΖΓ΄Δ΄}$) καί ἄρα Α΄Β΄ = Γ΄Δ΄.

β) Γιά νά βροῦμε τήν προβολή τοῦ μέσου Μ τοῦ τμήματος ΑΒ, θά φέρουμε τή ΜΜ΄ $\perp$ ε. Ἔτσι στό τραπέζιο ΑΒΒ΄Α΄ ἡ ΜΜ΄ εἶναι διάμεσος (ἀφοῦ εἶναι παράλληλη πρός τίς βάσεις ΑΑ΄ καί ΒΒ΄ καί διέρχεται ἀπό τό μέσο τῆς ΑΒ) καί συνεπῶς Α΄Μ΄ = Μ΄Β΄.

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ *

163. Σέ τραπέζιο ΑΒΓΔ, πού ἔχει βάσεις τίς ΑΒ καί ΔΓ, νά δείξετε ὅτι

$$ΑΒ + ΔΓ < ΑΓ + ΒΔ.$$

164. Σ' ἕνα τραπέζιο ΑΒΓΔ ἡ βάση του ΑΒ εἶναι ἴση μέ τό ἄθροισμα τῶν μή παράλληλων πλευρῶν του ΑΔ καί ΒΓ. Νά δειχθεῖ ὅτι οἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν $\widehat{Δ}$ καί $\widehat{Γ}$ τέμνονται σέ σημεῖο τῆς ΑΒ.

165. Σ' ἕνα τραπέζιο ΑΒΓΔ ἡ βάση του ΔΓ εἶναι διπλάσια ἀπό τή βάση του ΑΒ. Νά δείξετε ὅτι οἱ διαγώνιοι ΒΔ καί ΑΓ τέμνουν τή διάμεσο σέ δυο σημεῖα, τά ὁποῖα τή χωρίζουν σέ τρία ἴσα μέρη.

166. Σ' ἕνα τραπέζιο ΑΒΓΔ, πού ἔχει βάσεις ΑΒ καί ΔΓ, ἔχουμε ΔΓ = 2ΑΒ, $\widehat{Α} = \widehat{Δ} = 90°$ καί $\widehat{Β} = 3\widehat{Γ}$. Φέρνουμε τό τμῆμα ΒΗ $\perp$ ΔΓ πού τέμνει τή διαγώνιο ΑΓ στό Ρ καί τό τμῆμα ΑΗ πού τέμνει τήν ἄλλη διαγώνιο ΒΔ στό Ν. Νά δείξετε ὅτι: α) Τό Ρ εἶναι μέσο τῆς ΒΗ β) Ἡ ΝΡ εἶναι τό $\frac{1}{4}$ τῆς βάσεως ΔΓ.

167. Σέ τραπέζιο ΑΒΓΔ μέ βάσεις ΑΒ καί ΔΓ ἔχουμε ΑΔ = ΑΒ + ΔΓ. Νά δείξετε ὅτι οἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν $\widehat{Α}$ καί $\widehat{Δ}$ τέμνονται στή ΒΓ.

168. Καλοῦμε ΑΑ΄ καί ΒΒ΄ τίς ἀποστάσεις δύο σημείων Α καί Β ἀπό μία εὐθεία ε καί ΜΜ΄ τήν ἀπόσταση τοῦ μέσου Μ τοῦ τμήματος ΑΒ ἀπό τήν ε. Νά δείξετε ὅτι, ἄν τά σημεῖα Α καί Β βρίσκονται πρός τό ἴδιο μέρος τῆς ε, θά ἔχουμε ΑΑ΄ + ΒΒ΄= 2ΜΜ΄, ἐνῶ ἄν τά σημεῖα Α καί Β βρίσκονται ἑκατέρωθεν τῆς ε, θά ἔχουμε | ΑΑ΄ – ΒΒ΄ |= 2ΜΜ΄.

169. Σέ τετράπλευρο ΑΒΓΔ φέρνουμε τίς ἀποστάσεις ΑΑ΄, ΒΒ΄ τῶν κορυφῶν του Α καί Β ἀπό τήν πλευρά ΓΔ. Ἄν Κ εἶναι τό σημεῖο τομῆς τῶν εὐθειῶν, πού διέρχονται ἀπό τά μέσα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου, καί ΚΚ΄ εἶναι ἡ ἀπόστασή του ἀπό τήν πλευρά ΓΔ, νά δειχθεῖ ὅτι ΑΑ΄ + ΒΒ΄ = 4ΚΚ΄.

170. Ἀπό τήν κορυφή Α τριγώνου ΑΒΓ φέρνουμε μία εὐθεία ε καί καλοῦμε ΒΒ΄ καί ΓΓ΄ τίς ἀποστάσεις τῶν Β καί Γ ἀπό τήν ε. Ἄν Μ εἶναι τό μέσο τῆς Β΄Γ΄ καί Ι εἶναι τό μέσο τῆς διαμέσου ΑΔ, νά δείξετε ὅτι ΙΜ = ΑΔ/2.
(Νά ἐξετασθοῦν δύο περιπτώσεις,ἄν τά Β καί Γ βρίσκονται πρός τό ἴδιο μέρος ἤ ἑκατέρωθεν τῆς ε)

171. Σέ τραπέζιο ΑΒΓΔ μέ βάσεις ΑΒ καί ΔΓ ἔχουμε $ΔΓ = \frac{3}{2}$ ΑΒ. Ἄν Ε,Ζ εἶναι τά μέσα τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ καί Η εἶναι τό μέσο τῆς ΔΕ, νά δείξετε ὅτι ΗΖ = // ΑΒ.

172. Δίνεται ἕνα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ καί στήν προέκταση τῆς ΔΓ πρός τό μέρος τοῦ Γ παίρνουμε τμῆμα ΓΕ = 3ΓΔ. Ἄν Κ καί Λ εἶναι τά μέσα τῶν ΑΕ καί ΒΓ, νά δείξετε ὅτι τό τετράπλευρο ΑΒΚΛ εἶναι παραλληλόγραμμο.

173. Ἄν σέ τραπέζιο ΑΒΓΔ, πού ἔχει βάσεις ΑΒ καί ΓΔ, οἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν του $\widehat{Α}$ καί $\widehat{Δ}$ τέμνονται στό Η καί οἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν του $\widehat{Β}$ καί $\widehat{Γ}$ τέμνονται στό Κ, νά δείξετε ὅτι ἡ ΗΚ εἶναι παράλληλη πρός τίς βάσεις.

174. Ἕνα τραπέζιο εἶναι ἰσοσκελές, ἄν καί μόνο ἄν τά μέσα τῶν πλευρῶν του εἶναι κορυφές ρόμβου.

175. Δίνεται ἕνα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ καί βρίσκουμε τό σημεῖο $Α' = συμμ_{ΒΔ}Α$. Νά δείξετε ὅτι τό τετράπλευρο Α'ΓΒΔ εἶναι ἰσοσκελές τραπέζιο.

176. Δίνεται μία εὐθεία ε, δύο σημεῖα $\widehat{Α}$ καί $\widehat{Β}$/πρός τό ἴδιο μέρος τῆς ε καί τό σημεῖο $Α' = συμμ_εΑ$. Νά δείξετε ὅτι γιά κάθε σημεῖο Μ τῆς εὐθείας ε ἔχουμε ΑΜ + ΜΒ = Α'Μ + ΜΒ. Μέ τή βοήθεια τῆς ἰσότητας αὐτῆς νά βρεῖτε τή θέση τοῦ Μ πάνω στήν ε, γιά τήν ὁποία τό ἄρθοισμα ΑΜ + ΜΒ γίνεται ὅσο τό δυνατό μικρότερο.

177. Δίνεται μία εὐθεία ε, δύο σημεῖα Α καί Β ἑκατέρωθεν αὐτῆς καί τό σημεῖο $Α' = συμμ_εΑ$. Νά δείξετε ὅτι γιά κάθε σημεῖο Μ τῆς εὐθείας ε ἔχουμε | ΑΜ–ΜΒ | = | Α'Μ–ΜΒ |. Μέ τή βοήθεια τῆς ἰσότητας αὐτῆς νά βρεῖτε τή θέση τοῦ Μ πάνω στήν ε, γιά τήν ὁποία ἡ διαφορά | ΑΜ–ΜΒ | γίνεται ὅσο τό δυνατό μεγαλύτερη.

178. Δίνεται μία γωνία $\widehat{ΧΟΨ}$ καί δύο ἐσωτερικά της σημεῖα Α καί Β. Θεωροῦμε ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο Μ τῆς ΟΧ, ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο Ν τῆς ΟΨ καί τά σημεῖα $Α' = συμμ_{ΟΧ}Α$ καί $Β' = συμμ_{ΟΨ}Β$. Νά δείξετε ὅτι ΑΜ + ΜΝ + ΝΒ = Α'Μ + ΜΝ + ΝΒ'.
Μέ τή βοήθεια τῆς ἰσότητας αὐτῆς νά βρεῖτε τίς θέσεις τῶν σημείων Μ καί Ν, γιά τίς ὁποῖες τό ἄθροισμα ΑΜ + ΜΝ + ΝΒ γίνεται ὅσο τό δυνατό μικρότερο.

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ **

179. Δίνεται ἕνα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ καί μία εὐθεία ε πού διέρχεται ἀπό τήν κορυφή Γ καί ἔχει πρός τό ἴδιο μέρος της τίς κορυφές Α,Β,Δ.Νά δείξετε ὅτι ἡ ἀπόσταση τῆς κορυφῆς Α ἀπό τήν ε εἶναι ἴση μέ τό ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων τῶν κορυφῶν Β καί Γ ἀπό τήν ε.

180. Μία εὐθεία ε διέρχεται ἀπό τήν κορυφή Γ ἑνός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ καί ἔχει ἑκατέρωθεν αὐτῆς τίς κορυφές Β καί Δ. Νά δείξετε ὅτι ἡ ἀπόσταση τοῦ Α ἀπό τήν ε εἶναι ἴση μέ τή διαφορά τῶν ἀποστάσεων τῶν δύο κορυφῶν Β καί Δ ἀπό τήν ε.

181. Σ' ἕνα τραπέζιο ΑΒΓΔ, πού ἔχει βάσεις ΑΒ καί ΔΓ, ἔχουμε $\widehat{Α} = \widehat{Δ} = 90°$ καί ἡ πλευρά του ΒΓ εἶναι διπλάσια ἀπό τή βάση του ΔΓ. Ἄν Μ εἶναι τό μέσο τῆς ΒΓ, νά δείξετε ὅτι $Α\widehat{Μ}Γ = 3Μ\widehat{Α}Β$.

182. Μία εὐθεία ε ἔχει πρός τό ἴδιο μέρος της τίς κορυφές ἑνός τετραπλεύρου ΑΒΓΔ. Ἄν Κ εἶναι τό σημεῖο τομῆς τῶν εὐθειῶν, πού διέρχονται ἀπό τά μέσα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου, καί ΑΑ',ΒΒ', ΓΓ', ΔΔ', ΚΚ' εἶναι οἱ ἀποστάσεις τῶν σημείων Α,Β,Γ,Δ,Κ ἀπό τήν ε, νά δείξετε ὅτι ΑΑ' + ΒΒ' + ΓΓ' + ΔΔ' = 4ΚΚ'.

183. Δίνεται μία γωνία $\widehat{ΧΟΨ}$ καί ἕνα ἐσωτερικό σημεῖο της Α. Θεωροῦμε ἕνα σημεῖο Μ τῆς πλευρᾶς της ΟΧ καί καλοῦμε ΜΝ τήν ἀπόσταση τοῦ Μ ἀπό τήν ΟΨ. Νά βρεθεῖ ἡ θέση τοῦ Μ στήν ΟΧ, γιά τήν ὁποία τό ἄθροισμα ΑΜ + ΜΝ εἶναι ὅσο τό δυνατό μικρότερο.

184. Ἀπό τά ἄκρα Α,Β ἑνός τμήματος ΑΒ φέρνουμε δύο παράλληλες ἡμιευθεῖες ΑΧ καί ΒΨ οἱ ὁποῖες νά βρίσκονται στά διαφορετικά ἡμιεπίπεδα ἀκμῆς ΑΒ. Στήν ΑΧ παίρνουμε ἕνα αὐθαίρετο τμῆμα ΑΔ καί στή ΒΨ παίρνουμε τμῆμα ΒΕ = ΑΔ + ΑΒ. Ἄν Μ εἶναι τό μέσο τῆς ΔΕ, νά δείξετε ὅτι ἡ γωνία $\widehat{AMB}$ εἶναι ὀρθή.

185. Θεωροῦμε ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{A} = 90°$) καί κατασκευάζουμε ἔξω ἀπό αὐτό τά τετράγωνα ΑΒΕΖ καί ΑΓΗΘ. Ἄν ΕΚ $\perp$ ΒΓ καί ΗΛ $\perp$ ΒΓ, νά δείξετε ὅτι:

α) Οἱ προβολές τῶν τμημάτων ΒΕ καί ΓΗ στήν εὐθεία ΒΓ εἶναι ἴσες, ἐνῶ τά ΕΚ καί ΗΛ ἔχουν ἄθροισμα τήν πλευρά ΒΓ.

β) Τά σημεῖα Ε,Α,Η εἶναι συνευθειακά.

γ) Ἄν Μ εἶναι τό μέσο τοῦ τμήματος ΕΗ, ἡ γωνία $\widehat{B M \Gamma} = 90°$.

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 8

1. **Τραπέζιο** λέγεται ἕνα τετράπλευρο πού ἔχει δύο μόνο ἀπέναντι πλευρές του παράλληλες (καί αὐτές λέγονται «β ά σ ε ι ς» του). Σέ κάθε τραπέζιο διακρίνουμε δύο χαρακτηριστικά εὐθύγραμμα τμήματα:

— **Τό τμῆμα πού ἑνώνει τά μέσα τῶν μή παράλληλων πλευρῶν του, τό ὁποῖο λέγεται διάμεσος τοῦ τραπεζίου καί εἶναι παράλληλο πρός τίς βάσεις του καί ἴσο μέ τό ἡμιάθροισμά τους.**

— **Τό τμῆμα πού ἑνώνει τά μέσα τῶν διαγωνίων του, τό ὁποῖο εἶναι παράλληλο πάλι πρός τίς βάσεις του καί ἴσο μέ τήν ἡμιδιαφορά τους.**

Τό τραπέζιο πού ἔχει τίς μή παράλληλες πλευρές του ἴσες λέγεται **ἰσοσκελές**. Σ' αὐτό ἰσχύουν οἱ προτάσεις:

— **Οἱ γωνίες πού πρόσκεινται στήν κάθε βάση του εἶναι ἴσες.**

— **Οἱ διαγώνιοί του εἶναι ἴσες.**

— **Ἡ εὐθεία πού διέρχεται ἀπό τά μέσα τῶν βάσεων εἶναι κάθετη πρός τίς βάσεις.**

Κάθε μία ἀπό τίς ἰδιότητες αὐτές εἶναι καί ἱκανή συνθήκη, γιά νά εἶναι ἕνα τραπέζιο ἰσοσκελές.

2. Δύο σημεῖα Α καί Α΄ λέγονται **συμμετρικά ὡς πρός εὐθεία ε**, ἄν καί μόνο ἄν ἡ ε εἶναι μεσοκάθετος τοῦ τμήματος ΑΑ΄. Ἔτσι γιά νά βροῦμε τό συμμετρικό ἑνός σημείου Α ὡς πρός εὐθεία ε, φέρνουμε τό κάθετο στήν ε τμῆμα ΑΚ καί παίρνουμε στήν προέκτασή του τμῆμα ΚΑ΄ = ΚΑ. Γράφουμε τότε $A' = \text{συμμ}_\varepsilon A$.

Τά συμμετρικά ὅλων τῶν σημείων ἑνός σχήματος σ ὡς πρός εὐθεία ε ἀποτελοῦν ἕνα νέο σχῆμα σ΄ πού λέγεται **συμμετρικό τοῦ σ ὡς πρός τήν εὐθεία ε**. Γιά τά συμμετρικά σχήματα ὡς πρός εὐθεία ἰσχύουν οἱ προτάσεις:

— **Τό συμμετρικό εὐθείας εἶναι εὐθεία.**

— **Τό συμμετρικό εὐθύγραμμου τμήματος εἶναι ἴσο εὐθύγραμμο τμῆμα.**

— **Τό συμμετρικό τριγώνου ΑΒΓ εἶναι τρίγωνο ἴσο μέ τό ΑΒΓ.**

— **Τό συμμετρικό γωνίας $\widehat{X A \Psi}$ εἶναι γωνία ἴση μέ τήν $\widehat{X A \Psi}$.**

— **Τό συμμετρικό κυκλ(Ο,ρ) εἶναι κύκλος ἴσος μέ τόν κυκλ(Ο,ρ) πού ἔχει κέντρο τό σημεῖο $O' = \text{συμμ}_\varepsilon O$.**

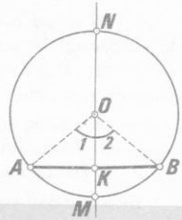
Ἕνα σχῆμα σ θά λέμε ὅτι ἔχει **ἄξονα συμμετρίας μία εὐθεία ε, ἄν ὅλα τά** σημεῖα τοῦ σ **εἶναι ἀνά δύο** συμμετρικά ὡς πρός τόν ἄξονα ε.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΣΤΟΝ ΚΥΚΛΟ–ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΕΣ ΓΩΝΙΕΣ

Χορδές καί ἀποστήματα.

94. Ὁρισμός: Ἡ ἀπόσταση τοῦ κέντρου ἑνός κυκλ(Ο,ρ) ἀπό μιά χορδή του λέγεται ἀπόστημα τῆς χορδῆς.



Ἔτσι ἀπόστημα τῆς χορδῆς ΑΒ ἑνός κυκλ(Ο,ρ) εἶναι τό κάθετο στή χορδή τμῆμα ΟΚ. Ἐπειδή τό τρίγωνο ΑΟΒ εἶναι ἰσοσκελές καί τό ΟΚ εἶναι ὕψος του, θά ἔχουμε: ΑΚ = ΚΒ καί $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$ ὁπότε θά εἶναι ἀκόμη $\widehat{AM} = \widehat{MB}$ καί $\widehat{AN} = \widehat{NB}$. Δείξαμε λοιπόν ὅτι:

Ἄν φέρουμε ἀπό τό κέντρο ἑνός κυκλ(Ο,ρ) εὐθεία κάθετη πρός χορδή του ΑΒ, αὐτή διέρχεται ἀπό τό μέσο τῆς χορδῆς καί ἀπό τό μέσο τοῦ τόξου $\widehat{AB}$.

Εἶναι φανερό (ἀπό τήν ἴδια ἰδιότητα τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγωνου ΑΟΒ) ὅτι θά ἀληθεύουν καί οἱ ἀντίστροφες προτάσεις:

— Ἡ εὐθεία πού διέρχεται ἀπό τό κέντρο ἑνός κύκλου (Ο,ρ) καί ἀπό τό μέσο μιᾶς χορδῆς του ΑΒ εἶναι κάθετη στή χορδή καί διέρχεται ἀπό τό μέσο τοῦ τόξου $\widehat{AB}$.

— Ἡ εὐθεία πού διέρχεται ἀπό τό κέντρο ἑνός κύκλου (Ο,ρ) καί ἀπό τό μέσο ἑνός τόξου $\widehat{AB}$ εἶναι κάθετη στή χορδή ΑΒ καί διέρχεται ἀπό τό μέσο της.

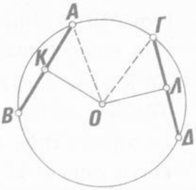
— Ἡ εὐθεία πού διέρχεται ἀπό τό μέσο μιᾶς χορδῆς ΑΒ ἑνός κύκλου (Ο,ρ) καί ἀπό τό μέσο τοῦ τόξου $\widehat{AB}$ διέρχεται ἀπό τό κέντρο Ο τοῦ κύκλου καί εἶναι κάθετη στή χορδή.

Τέλος εἶναι φανερό ὅτι, ἄν δύο διαφορετικές χορδές ΑΒ καί ΓΔ τοῦ κυκλ(Ο,ρ) ἔχουν τό ἴδιο μέσο, τότε τό μέσο αὐτό συμπίπτει μέ τό κέντρο Ο τοῦ κύκλου καί συνεπῶς ἡ χορδή εἶναι διάμετρος (γιατί ἄν τό κοινό μέσο τους ἦταν σημεῖο Κ, διαφορετικό ἀπό τό Ο, τότε οἱ δύο χορδές ΑΒ καί ΓΔ θά ἦταν κάθετες πρός τήν ΟΚ στό ἴδιο σημεῖο της, πράγμα ἀδύνατο).

95. Θά ἀποδείξουμε τώρα τά θεωρήματα:

I. Δύο χορδές ΑΒ καί ΓΔ τοῦ ἴδιου κύκλου (ἤ ἴσων κύκλων) εἶναι ἴσες, ἄν καί μόνο ἄν τά ἀποστήματά τους ΟΚ καί ΟΛ εἶναι ἴσα, δηλαδή:

$$ΑΒ = ΓΔ \iff ΟΚ = ΟΛ.$$



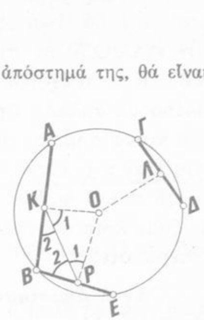
Ἀπόδ. Ἄν εἶναι ΑΒ = ΓΔ, τότε εἶναι καί ΑΚ = ΓΛ. Ἔτσι ἔχουμε τριγΟΚΑ = τριγΟΛΓ (γιατί $\widehat{ΟΚΑ} = \widehat{ΟΛΓ} = 90°$, ΟΑ = ΟΓ, ΑΚ = ΓΔ) καί ἄρα ΟΚ = ΟΛ.

Ἀντιστρόφως, ἄν εἶναι ΟΚ = ΟΛ, τότε ἔχουμε πάλι τριγ ΟΑΚ = τριγΟΛΓ (γιατί τώρα $\widehat{ΟΚΑ} = \widehat{ΟΛΓ} = 90°$, ΟΑ=ΟΓ, ΟΚ = ΟΛ) καί ἄρα ΑΚ = ΓΛ, ὁπότε ΑΒ = ΓΔ.

II. Μιά χορδή ΑΒ ἑνός κυκλ(Ο,ρ) εἶναι μεγαλύτερη ἀπό χορδή ΓΔ τοῦ ἴδιου κύκλου (ἤ ἴσου κύκλου), ἄν καί μόνο ἄν τό ἀπόστημα ΟΚ τῆς ΑΒ εἶναι μικρότερο ἀπό τό ἀπόστημα ΟΛ τῆς ΓΔ, δηλαδή:

$$ΑΒ > ΓΔ \iff ΟΚ < ΟΛ.$$

Ἀπόδ. Ἄν θεωρήσουμε χορδή ΒΕ = ΓΔ καί καλέσουμε ΟΡ τό ἀπόστημά της, θά εἶναι ΟΡ = ΟΛ.



Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι ΑΒ > ΓΔ. Τότε θά εἶναι ΑΒ > ΒΕ $\Rightarrow$ ΒΚ > ΒΡ καί στό τρίγωνο ΚΒΡ ἔχουμε $\widehat{Ρ_2} > \widehat{Κ_2}$. Ἀπό αὐτή προκύπτει ὅτι $90° - \widehat{Ρ_1} > 90° - \widehat{Κ_1} \Rightarrow \widehat{Ρ_1} < \widehat{Κ_1}$ καί ἑπομένως εἶναι (στό τρίγωνο ΟΚΡ) ΟΚ < ΟΡ $\Rightarrow$ ΟΚ < ΟΛ.

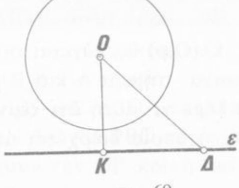
Ἀντιστρόφως, ἄς ὑποθέσουμε ὅτι ΟΚ < ΟΛ. Τότε εἶναι ΟΚ< ΟΡ καί στό τρίγωνο ΟΚΡ εἶναι $\widehat{Ρ_1} < \widehat{Κ_1}$. Ἀπό αὐτή προκύπτει ὅτι $90° - \widehat{Ρ_1} > 90° - \widehat{Κ_1} \Rightarrow \widehat{Ρ_2} > \widehat{Κ_2}$ καί ἑπομένως εἶναι (στό τρίγωνο ΚΒΡ) ΚΒ > ΒΡ $\Rightarrow$ ΑΒ > ΒΕ $\Rightarrow$ ΑΒ > ΓΔ.

Μέ τά θεωρήματα αὐτά μετατρέπουμε τή σύγκριση χορδῶν σέ σύγκριση ἀποστημάτων καί ἀντιστρόφως.

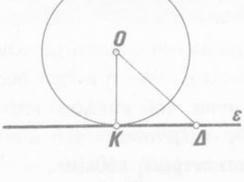
ΑΣΚΗΣΕΙΣ 190-196

Εὐθεία καί κύκλος.

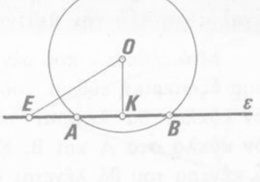
96. Ἄς θεωρήσουμε ἕναν κυκλ(Ο,ρ) καί μιά εὐθεία ε καί ἄς φέρουμε ἀπό



σχ. 69



σχ. 70



σχ. 71

τό κέντρο Ο τοῦ κύκλου τό τμῆμα ΟΚ κάθετο στήν ε. Γιά τίς δυνατές θέσεις τοῦ σημείου Κ παρατηροῦμε ὅτι :

— Τό Κ μπορεῖ νά εἶναι ἐξωτερικό σημεῖο τοῦ κδισ(Ο,ρ), δηλ. νά εἶναι ΟΚ > ρ (βλ. σχ. 69). Τότε γιά κάθε ἄλλο σημεῖο Δ τῆς ε ἔχουμε ΟΔ > ΟΚ > ρ καί ἔτσι ὅλα τά σημεῖα τῆς ε εἶναι ἐξωτερικά τοῦ κδισ(Ο,ρ). Ἄρα ἡ εὐθεία ε δέν ἔχει κοινό σημεῖο μέ τόν κυκλ(Ο,ρ).

— Τό Κ μπορεῖ νά εἶναι σημεῖο τοῦ κυκλ(Ο,ρ), δηλ. νά εἶναι ΟΚ = ρ (βλ. σχ. 70). Τότε γιά κάθε ἄλλο σημεῖο Δ τῆς ε ἔχουμε ΟΔ > ΟΚ = ρ καί ἔτσι ὅλα τ' ἄλλα σημεῖα τῆς ε εἶναι ἐξωτερικά τοῦ κδισ(Ο,ρ). Ἄρα ἡ εὐθεία ε ἔχει ἕνα μόνο κοινό σημεῖο μέ τόν κυκλ(Ο,ρ), τό Κ.

— Τό Κ μπορεῖ νά εἶναι ἐσωτερικό σημεῖο τοῦ κδισ(Ο,ρ), δηλαδή νά εἶναι ΟΚ < ρ, (βλ. σχ. 71).

Ἄν πάρουμε τότε στήν ε τμῆμα ΚΕ > ρ, θά ἔχουμε ΟΕ > ΚΕ > ρ καί ἔτσι τό Ε θά εἶναι ἐξωτερικό σημεῖο τοῦ κδισ(Ο,ρ). Τό τμῆμα λοιπόν ΚΕ τέμνει τόν κυκλ(Ο,ρ) σέ σημεῖο Α (βλ. ἀξ. XIX). Ἐπίσης ἄν πάρουμε στήν ε τμῆμα ΚΒ = ΚΑ, θά ἔχουμε καί ΟΒ = ΟΑ = ρ, ἄρα καί τό Β εἶναι σημεῖο τοῦ κυκλ(Ο,ρ). Βλέπουμε δηλαδή ὅτι στήν περίπτωση αὐτή ὁ κυκλ(Ο,ρ) καί ἡ εὐθεία ε ἔχουν δύο κοινά σημεῖα, τά Α καί Β, ἐνῶ δέν μπορεῖ νά ἔχουν καί τρίτο κοινό σημεῖο (γιατί ἄν π.χ. εἶχαν ἕνα τρίτο σημεῖο Γ πρός τό μέρος Α, τότε θά εἴχαμε ΟΑ = = ΟΓ = ΟΒ ⇒ ΚΑ = ΚΒ καί ΚΓ = ΚΒ, πράγμα ἀδύνατο κατά τό ἀξίωμα XV). Δείξαμε λοιπόν ὅτι **εὐθεία καί κύκλος ἔχουν τό πολύ δύο κοινά σημεῖα** καί ειδικότερα ὅτι:

Ἄν ἡ ἀπόσταση τοῦ κέντρου ἑνός κυκλ(Ο,ρ) ἀπό εὐθεία ε εἶναι μικρότερη, ἴση ἤ μεγαλύτερη ἀπό τήν ἀκτίνα του ρ, τότε ὁ κυκλ(Ο,ρ) ἔχει δύο, ἕνα ἤ κανένα κοινό σημεῖο μέ τήν ευθεία ε.

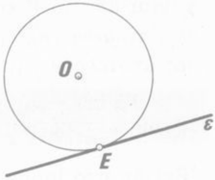
Ἀποδεικνύεται εὔκολα καί ἡ ἀντίστροφη πρόταση. Ἔτσι π.χ. ἄν μιά εὐθεία ε ἔχει δύο κοινά σημεῖα μέ τόν κυκλ(Ο,ρ), ἡ ἀπόσταση ΟΚ τοῦ Ο ἀπό τήν ε εἶναι μικρότερη ἀπό τήν ἀκτίνα (γιατί ἄν ἦταν ΟΚ = ρ ἤ ΟΚ > ρ ἡ ε καί ὁ κυκλ(Ο,ρ) θά εἶχαν ἕνα ἤ κανένα κοινό σημεῖο). Ἔχουμε λοιπόν τήν πιό συμπληρωμένη πρόταση:

Μία εὐθεία ε ἔχει δύο, ἕνα ἤ κανένα κοινό σημεῖο μέ τόν κυκλ(Ο,ρ), ἄν καί μόνο ἄν ἡ ἀπόσταση τοῦ κέντρου Ο ἀπό τήν εὐθεία ε εἶναι μικρότερη, ἴση ἤ μεγαλύτερη ἀπό τήν ἀκτίνα ρ.

Μιά εὐθεία ε πού δέν ἔχει κοινό σημεῖο μέ τόν κυκλ(Ο,ρ) θά λέγεται σύντομα **ἐξωτερική** εὐθεία τοῦ κύκλου. Ἄν ἡ ε ἔχει δύο κοινά σημεῖα Α καί Β μέ τόν κύκλο, θά λέγεται **τέμνουσα** τοῦ κύκλου καί θά λέμε γι' αὐτή ὅτι **τέμνει** τόν κύκλο στά Α καί Β. Κάθε «τέμνουσα» τοῦ κύκλου ἡ ὁποία διέρχεται ἀπό τό κέντρο του θά λέγεται **«διακεντρική εὐθεία».**

Ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου.

97. **Ὁρισμός**: Μία εὐθεία ε θά λέγεται **ἐφαπτομένη κυκλ(Ο,ρ)**, ἄν καί μόνο ἄν ἡ ε ἔχει ἕνα μόνο κοινό σημεῖο μέ τόν κυκλ(Ο,ρ). Τότε ὅλα τ' ἄλλα σημεῖα τῆς ε εἶναι ἐξωτερικά σημεῖα τοῦ κδισ(Ο,ρ).



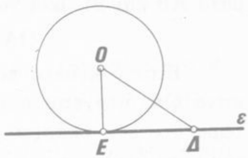
Ἄν Ε εἶναι τό μοναδικό κοινό σημεῖο τῆς εὐθείας ε καί τοῦ κύκλου, λέμε ὅτι ἡ ε **ἐφάπτεται** στόν κύκλο στό Ε ἤ ὅτι τό Ε εἶναι τό **σημεῖο ἐπαφῆς** τῆς εὐθείας ε. Ἀπό αὐτά πού εἴπαμε στήν προηγούμενη παράγραφο συμπεραίνουμε ὅτι:

Μία εὐθεία ε θά εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ κυκλ(Ο,ρ), ἄν καί μόνο ἄν ἡ ἀπόσταση τοῦ κέντρου Ο ἀπό τήν ε εἶναι ἴση μέ τήν ἀκτίνα ρ.

Θά ἀποδείξουμε τώρα τό θεώρημα:

Ἄν μία εὐθεία ε ἐφάπτεται κυκλ(Ο,ρ) στό σημεῖο Ε, τότε ἡ ἀκτίνα ΟΕ εἶναι κάθετη στήν εὐθεία ε.

Ἀπόδ. Ἀφοῦ κάθε ἄλλο σημεῖο Δ τῆς ε εἶναι ἐξωτερικό τοῦ κδισ(Ο,ρ), θά ἔχουμε $ΟΔ > ρ$, δηλαδή $ΟΔ > ΟΕ$. Ἔτσι τό τμῆμα ΟΕ εἶναι τό μικρότερο τμῆμα πού ἔχει τό ἕνα ἄκρο του στό Ο καί τό ἄλλο στήν εὐθεία ε καί γι' αὐτό $ΟΕ \perp ε$.



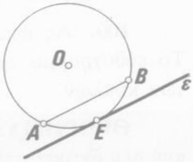
Ἀπό τό θεώρημα αὐτό προκύπτουν ἀμέσως τά πορίσματα:

— **Ἡ εὐθεία πού εἶναι κάθετη στό ἄκρο μιᾶς ἀκτίνας τοῦ κυκλ(Ο,ρ) εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου.**

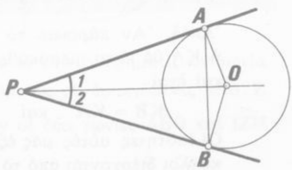
— **Ἡ εὐθεία πού εἶναι κάθετη σέ μία ἐφαπτομένη στό σημεῖο ἐπαφῆς διέρχεται ἀπό τό κέντρο τοῦ κύκλου.**

— **Ἄν ἀπό τό κέντρο ἑνός κυκλ(Ο,ρ) φέρουμε εὐθεία κάθετη σέ μία ἐφαπτομένη του, ἡ εὐθεία αὐτή διέρχεται ἀπό τό σημεῖο ἐπαφῆς.**

Τέλος καταλαβαίνουμε ὅτι, **ἄν ἔχουμε ἐφαπτομένη ε ἑνός κυκλ(Ο,ρ) παράλληλη πρός χορδή του ΑΒ, τό σημεῖο ἐπαφῆς Ε θά εἶναι μέσο τοῦ τόξου $\widehat{AB}$**, γιατί ἡ ΟΕ εἶναι κάθετη πρός τή χορδή ΑΒ (ἀφοῦ εἶναι κάθετη στήν παράλληλή της εὐθεία ε).



98. Ἄς θεωρήσουμε τώρα τίς ἐφαπτόμενες ἑνός κυκλ(Ο,ρ) στά ἄκρα μιᾶς χορδῆς του $\widehat{AB}$ (ἡ ὁποία δέν εἶναι διάμετρος). Οἱ ἐφαπτόμενες αὐτές τέμνονται σ' ἕνα σημεῖο Ρ (ἀφοῦ τέμνονται οἱ κάθετες σ' αὐτές ἀκτίνες ΟΑ καί ΟΒ) καί τά ὀρθογώνια τρίγωνα ΡΑΟ καί ΡΒΟ πού σχηματίζονται εἶναι ἴσα, γιατί ἔχουν τήν ΟΡ κοινή καί ΟΑ=ΟΒ. Ἔτσι ἔχουμε τίς ἰσότητες:



$$PA = PB, \quad \widehat{P}_1 = \widehat{P}_2.$$

Τά δύο εὐθύγραμμα τμήματα PA καί PB πού ἀνήκουν σ' εὐθεῖες οἱ ὁποῖες διέρχονται ἀπό τό P καί εἶναι ἐφαπτόμενες τοῦ κυκλ(O,ρ) στά A καί B θά λέγονται «*ἐφαπτόμενα τμήματα τοῦ κύκλου ἀπό τό σημεῖο P*». Ἔτσι οἱ παραπάνω ἰσότητες ἀποτελοῦν τήν πρόταση:

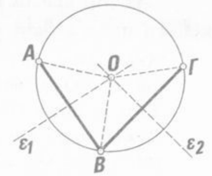
Τά ἐφαπτόμενα τμήματα τοῦ κύκλου ἀπό ἕνα σημεῖο P εἶναι ἴσα καί σχηματίζουν ἴσες γωνίες μέ τή διακεντρική εὐθεία πού διέρχεται ἀπό τό P.

Ἐπειδή στό ἰσοσκελές τρίγωνο APB ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας του $\widehat{P}$ εἶναι μεσοκάθετος τῆς βάσεως, ἕπεται, ἀκόμη ὅτι **ἡ OP εἶναι μεσοκάθετος τῆς χορδῆς AB.**

Τεμνόμενοι κύκλοι.

99. Ἄς θεωρήσουμε τρία μή συνευθειακά σημεῖα A,B,Γ καί τίς μεσοκαθέτους ε_1 καί ε_2 τῶν τμημάτων AB καί BΓ. Οἱ εὐθεῖες ε_1 καί ε_2 τέμνονται (γιατί τέμνονται τά κάθετα σ' αὐτές τμήματα AB καί BΓ)καί γιά τό σημεῖο τομῆς τους O ἔχουμε:

$$OA = OB = O\Gamma.$$



Ἔτσι ὁ κύκλος πού γράφεται μέ κέντρο O καί ἀκτίνα OA διέρχεται ἀπό τά σημεῖα A,B,Γ. Παρατηροῦμε τώρα ὅτι δέν ὑπάρχει ἄλλος κύκλος διαφορετικός ἀπό τόν κυκλ(O,OA) πού νά διέρχεται ἐπίσης ἀπό τά A,B,Γ, γιατί, ἄν ὑπῆρχε ὁ κυκλ(O',O'A), θά εἴχαμε O'A = O'B = O'Γ, καί τό O' θά ἦταν τό κοινό σημεῖο τῶν ε_1 καί ε_2, δηλαδή θά ταυτιζόταν μέ τό O. Δείξαμε λοιπόν ὅτι:

Ἀπό τρία μή συνευθειακά σημεῖα διέρχεται ἕνας καί μόνο ἕνας κύκλος.

Ἀπό τήν πρόταση αὐτή καταλαβαίνουμε ὅτι δύο κύκλοι πού ἔχουν τρία κοινά σημεῖα συμπίπτουν, δηλαδή ὅτι δύο διαφορετικοί κύκλοι μπορεῖ νά ἔχουν τό πολύ δύο κοινά σημεῖα.

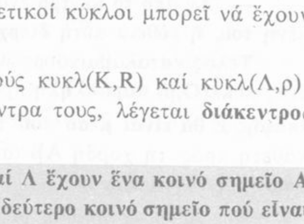
100. Ἄς θεωρήσουμε τώρα δύο κύκλους, τούς κυκλ(K,R) καί κυκλ(Λ,ρ). Τό εὐθύγραμμο τμῆμα KΛ, πού ἔχει ἄκρα τά κέντρα τους, λέγεται **διάκεντρος** τῶν κύκλων.

ΘΕΩΡΗΜΑ: Ἄν δύο κύκλοι μέ κέντρα K καί Λ ἔχουν ἕνα κοινό σημεῖο A πού δέν ἀνήκει στήν εὐθεία KΛ, τότε θά ἔχουν καί δεύτερο κοινό σημεῖο πού εἶναι τό συμμετρικό τοῦ A ὡς πρός τήν KΛ.

Ἀπόδ. Ἄν πάρουμε τό σημεῖο B = $\text{συμμ}_{K\Lambda}A$, ἡ KΛ θά εἶναι μεσοκάθετος τοῦ τμήματος AB καί ἔτσι

$$KB = KA \quad \text{καί} \quad \Lambda B = \Lambda A.$$

Οἱ ἰσότητες αὐτές μᾶς ἐξασφαλίζουν ὅτι οἱ δύο κύκλοι διέρχονται ἀπό τό B, δηλαδή ὅτι τό B εἶναι κοινό σημεῖο τους.

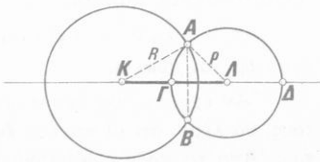


Δύο κύκλοι πού ἔχουν δύο κοινά σημεῖα λέγονται **τεμνόμενοι κύκλοι.** Τό εὐθύγραμμο τμῆμα πού ἔχει ἄκρα τά κοινά σημεῖα δύο τεμνόμενων κύκλων λέγεται **κοινή χορδή** τους. Ἀπό τό παραπάνω θεώρημα προκύπτει ὅτι **ἡ διάκεντρος δύο τεμνόμενων κύκλων εἶναι μεσοκάθετος τῆς κοινῆς χορδῆς τους.**
Θά ἀποδείξουμε ἀκόμη ὅτι:

ΘΕΩΡΗΜΑ : Δύο κύκλοι τέμνονται, ἄν καί μόνο ἄν ἡ διάκεντρός τους εἶναι μικρότερη ἀπό τό ἄθροισμα τῶν ἀκτίνων τους καί μεγαλύτερη ἀπό τή διαφορά τῶν ἀκτίνων τους, δηλαδή.

$$R-\rho < K\Lambda < R+\rho.$$

Ἀπόδ. Ἄν θεωρήσουμε δύο τεμνόμενους κύκλους (K,R) καί (Λ,ρ) μέ $R > \rho$ καί καλέσουμε Α τό ἕνα κοινό σημεῖο τους, ἀπό τό τρίγωνο ΚΑΛ ἔχουμε $KA - A\Lambda < K\Lambda < KA + A\Lambda$, δηλαδή



$$R-\rho < K\Lambda < R+\rho.$$

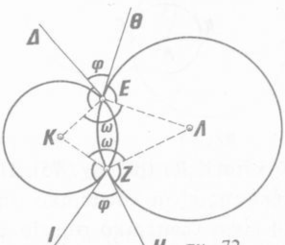
Ἀντιστρόφως, ἄν ἰσχύουν οἱ ἀνισότητες αὐτές, θά ἀποδείξουμε ὅτι οἱ δύο κύκλοι τέμνονται. Ἄν καλέσουμε Γ καί Δ τά σημεῖα τομῆς τοῦ κυκλ (Λ,ρ) μέ τήν ΚΛ, ἔχουμε (ἐπειδή $K\Gamma = K\Lambda - \rho$ καί $K\Delta = K\Lambda + \rho$):

$K\Lambda < R+\rho \Rightarrow K\Lambda - \rho < R \Rightarrow K\Gamma < R \Rightarrow$ Τό Γ εἶναι ἐσωτ. σημεῖο τοῦ κδισ(K,R).
$R-\rho < K\Lambda \Rightarrow R < K\Lambda + \rho \Rightarrow R < K\Delta \Rightarrow$ Τό Δ εἶναι ἐξωτ. σημεῖο τοῦ κδισ(K,ρ).

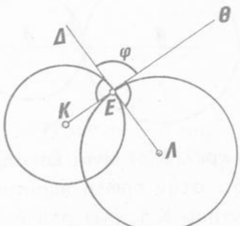
Τότε ὅμως, κατά τό ἀξίωμα XXI, κάθε τόξο $\widehat{\Gamma\Delta}$ θά τέμνει τόν κυκλ(K,R) καί ἔτσι οἱ δύο κύκλοι ἔχουν δύο κοινά σημεῖα.

Γωνία δύο κύκλων. Ὀρθογώνιοι κύκλοι.

101. Ἄν θεωρήσουμε δύο τεμνόμενους κύκλους μέ κέντρα Κ καί Λ καί καλέσουμε Ε καί Ζ τά σημεῖα τομῆς τους, τά τρίγωνα ΚΕΛ καί ΚΖΛ εἶναι ἴσα (γιατί ἔχουν τίς τρεῖς πλευρές τους ἴσες) καί θά ἔχουμε $\widehat{KE\Lambda} = \widehat{KZ\Lambda} = \widehat{\omega}$ (βλ. σχ. 72). Ἄς φέρουμε τώρα τίς ἐφαπτόμενες



σχ. 72



σχ. 73

τῶν δύο κύκλων στό σημεῖο Ε καί στό σημεῖο Ζ. Οἱ ἐφαπτόμενες στό Ε σχηματίζουν γωνία $\widehat{\Delta E\Theta} = 180° - \widehat{KE\Lambda} = 180° - \widehat{\omega}$ (γιατί $\widehat{KE\Delta} = \widehat{\Lambda E\Theta} = 90°$) καί ὁμοίως οἱ ἐφαπτόμενες στό Ζ σχηματίζουν γωνία $\widehat{IZH} = 180° - \widehat{KZ\Lambda} = 180° - \widehat{\omega}$. Ἔτσι λοιπόν οἱ δύο γωνίες $\widehat{\Delta E\Theta}$ καί $\widehat{IZH}$ εἶναι ἴσες καί ἄν θέσουμε $\widehat{\varphi} = \widehat{\Delta E\Theta} = \widehat{IZH}$, ἔχουμε

$$\widehat{\varphi} = 180° - \widehat{\omega}.$$

Ἡ γωνία αὐτή $\widehat{\varphi}$ πού σχηματίζεται ἀπό τίς ἐφαπτόμενες δύο τεμνόμενων κύκλων σ' ἕνα σημεῖο τομῆς τους λέγεται **γωνία τῶν δύο κύκλων.**

Ὁρισμός: Δύο τεμνόμενοι κύκλοι πού ἡ γωνία τους εἶναι ἴση μέ 90° λέγονται **ὀρθογώνιοι κύκλοι** ἤ λέμε γι' αὐτούς ὅτι «τέμνονται ὀρθογωνίως».

Ἄν δύο κύκλοι μέ κέντρα Κ καί Λ τέμνονται ὀρθογωνίως, δηλαδή ἄν $\widehat{\varphi} = 90°$ (βλ. σχ. 73), ἔχουμε καί $\widehat{ΚΕΛ} = \widehat{\omega} = 90° \Rightarrow \widehat{ΚΕΔ} + \widehat{ΚΕΛ} = 180°$. Ἔτσι οἱ ἐφεξῆς γωνίες $\widehat{ΔΕΚ}$ καί $\widehat{ΚΕΛ}$ εἶναι παραπληρωματικές καί οἱ ἡμιευθεῖες ΕΔ καί ΕΛ εἶναι ἀντικείμενες. Συμπεραίνουμε λοιπόν ὅτι, **ἄν δύο κύκλοι τέμνονται ὀρθογωνίως, οἱ ἐφαπτόμενες τοῦ κάθε κύκλου στά κοινά σημεῖα τους διέρχονται ἀπό τό κέντρο τῆς ἄλλης.**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 197-201

Ἐφαπτόμενοι κύκλοι.

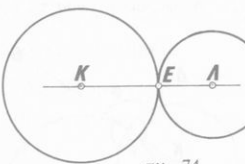
102. **Ὁρισμός: Δύο κύκλοι πού ἔχουν ἕνα καί μόνο ἕνα κοινό σημεῖο λέγονται ἐφαπτόμενοι κύκλοι.**

Ἄν ἔχουμε δύο ἐφαπτόμενους κύκλους καί καλέσουμε Ε τό κοινό σημεῖο τους, θά λέμε ὅτι οἱ κύκλοι **ἐφάπτονται** στό Ε ἤ ὅτι τό Ε εἶναι **σημεῖο ἐπαφῆς** τους. Ἀπό τό πρῶτο θεώρημα τῆς § 100 προκύπτουν ἀμέσως οἱ προτάσεις:

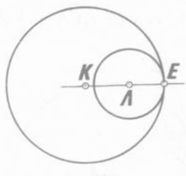
— **Τό σημεῖο ἐπαφῆς δύο ἐφαπτόμενων κύκλων βρίσκεται στήν εὐθεία πού διέρχεται ἀπό τά κέντρα τους.**

— **Ἄν δύο κύκλοι ἔχουν κοινό σημεῖο Ε καί αὐτό ἀνήκει στήν εὐθεία ἡ ὁποία διέρχεται ἀπό τά κέντρα τους, τότε οἱ κύκλοι ἐφάπτονται στό Ε.**

Ἄς θεωρήσουμε λοιπόν δύο κύκλους πού ἐφάπτονται στό σημεῖο Ε, τούς κύκλ(Κ,R) καί κυκλ(Λ,ρ) καί ἄς ὑποθέσουμε ὅτι $R > \rho$. Θά λέμε ὅτι οἱ κύκλοι **ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς**, ἄν καί μόνο ἄν ὅλα τά σημεῖα (ἐκτός ἀπό τό Ε) τοῦ κυκλ(Λ,ρ) εἶναι ἐξωτερικά σημεῖα τοῦ κδισ(Κ,R) (βλ. σχ. 74), ἐνῶ θά λέμε ὅτι οἱ κύκλοι **ἐφάπτονται ἐσωτερικῶς**, ἄν καί μόνο ἄν ὅλα τά σημεῖα (ἐκτός ἀπό



σχ. 74



σχ. 75

τό Ε) τοῦ κυκλ(Λ,ρ) εἶναι ἐσωτερικά σημεῖα τοῦ κδισ(Κ,R) (βλ. σχ. 75). Παρατηροῦμε ὅτι στήν πρώτη περίπτωση τό σημεῖο ἐπαφῆς εἶναι ἐσωτερικό σημεῖο τῆς διακέντρου ΚΛ, ἐνῶ στή δεύτερη περίπτωση εἶναι ἐξωτερικό σημεῖο της.

ΘΕΩΡΗΜΑ : Δύο κύκλοι ἐφάπτονται, ἄν καί μόνο ἄν ἡ διάκεντρός τους εἶναι ἴση μέ τό ἄθροισμα ἤ μέ τή διαφορά τῶν ἀκτίνων τους. Εἰδικότερα οἱ κύκλοι:

Ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς $\Longleftrightarrow$ ΚΛ = R + ρ.
Ἐφάπτονται ἐσωτερικῶς $\Longleftrightarrow$ ΚΛ = R−ρ.

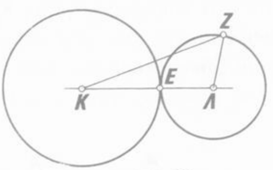
Ἀπόδ. Ἄν οἱ κυκλ(Κ,R) καί κυκλ(Λ,ρ) ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς στό Ε, τότε τό Ε εἶναι σημεῖο τῆς διαμέτρου ΚΛ (βλ. σχ. 76) καί ἔχουμε ΚΛ = ΚΕ + ΕΛ ἤ

(I) $\qquad ΚΛ = R + \rho.$

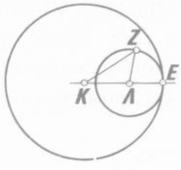
Ἀντιστρόφως, ἄν ἰσχύει ἡ (I) καί καλέσουμε Ε τό σημεῖο τομῆς τοῦ κυκλ(Λ,ρ) καί τῆς διακέντρου ΚΛ, θά ἔχουμε ΚΕ = ΚΛ–ρ = (R + ρ) –ρ=R, δηλαδή τό Ε θά εἶναι καί σημεῖο τοῦ κυκλ(Κ,R). Ἔτσι οἱ δύο κύκλοι ἐφάπτονται (ἀφοῦ ἔχουν κοινό σημεῖο ἐπάνω στή διάκεντρο) καί ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς, γιατί κάθε ἄλλο σημεῖο Ζ τοῦ κυκλ(Λ,ρ) εἶναι ἐξωτερικό τοῦ κδισ(Κ,R), ἀφοῦ εἶναι ΚΖ > ΚΛ–ρ ⇒ ΚΖ > (R +ρ) – ρ ⇒ ΚΖ > R. Ἄν οἱ κύκλοι ἐφάπτονται ἐσωτερικῶς στό Ε, τότε τό Ε εἶναι στήν προέκταση τῆς διακέντρου ΚΛ (βλ. σχ. 77) καί ἔχουμε ΚΛ = ΚΕ – ΕΛ ἤ

(II) ΚΛ = R–ρ.

Ἀντιστρόφως, ἄν ἰσχύει ἡ (II) καί καλέσουμε Ε τό σημεῖο τομῆς τοῦ κυκλ(Λ,ρ) μέ τήν



σχ. 76



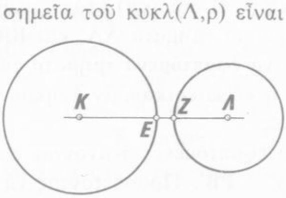
σχ. 77

προέκταση τῆς διακέντρου ΚΛ, θά ἔχουμε ΚΕ = ΚΛ + ΛΕ = (R–ρ) + ρ= R, δηλ. τό Ε εἶναι καί σημεῖο τοῦ κυκλ(Κ,R). Ἔτσι οἱ δύο κύκλοι ἐφάπτονται (ἀφοῦ ἔχουν κοινό σημεῖο στήν εὐθεία ΚΛ) καί ἐφάπτονται ἐσωτερικῶς, γιατί κάθε ἄλλο σημεῖο Ζ τοῦ κυκλ(Λ,ρ) εἶναι ἐσωτερικό σημεῖο τοῦ κδισ(Κ,R), ἀφοῦ ΚΖ < ΚΛ + ρ ⇒ ΚΖ < (R–ρ) + ρ) ⇒ ⇒ ΚΖ < R.

Μή τεμνόμενοι κύκλοι.

103. Ἄς ὑποθέσουμε τέλος ὅτι οἱ κυκλ(Κ,R) καί κυκλ(Λ,ρ), μέ R > ρ, δέν ἔχουν κοινό σημεῖο. Τότε ἔχουμε μία ἀπό τίς δύο περιπτώσεις:

— Τά σημεῖα τοῦ κυκλ(Λ,ρ) εἶναι ἐξωτερικά σημεῖα τοῦ κδισ(Κ,R). Στήν περί-



σχ. 78

σχ. 79

πτωση αὐτή ἡ διάκεντρος ΚΛ τέμνεται ἀπό τούς κύκλους σέ δύο σημεῖα Ε καί Ζ (βλ. σχ. 78) καί ἔχουμε ΚΛ = ΚΕ + ΕΖ + ΛΖ = R + ρ + ΕΖ. Ἄρα

ΚΛ > R + ρ.

— Τά σημεῖα τοῦ κυκλ(Λ,ρ) εἶναι ἐσωτερικά σημεῖα τοῦ κδισ(Κ,R). Στήν περίπτωση αὐτή ἡ προέκταση τῆς διακέντρου ΚΛ τέμνεται ἀπό τούς κύκλους στά δύο σημεῖα Ε καί Ζ (βλ. σχ. 79) καί ἔχουμε ΚΛ = ΚΕ–ΕΛ = R–(ΛΖ + ΖΕ) = = R–ρ–ΕΖ. Ἄρα

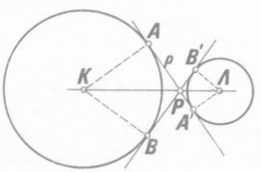
ΚΛ < R–ρ

Ἀντιστρόφως, ἄν ἀληθεύει ἡ ἀνισότητα ΚΛ > R + ρ ἤ ἡ ἀνισότητα ΚΛ <R–ρ, καταλαβαίνουμε ὅτι οἱ δύο κύκλοι δέν ἔχουν κοινό σημεῖο (γιατί

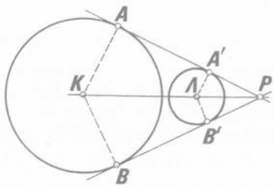
ἄν εἶχαν ἕνα μόνο κοινό σημεῖο, θά εἴχαμε $ΚΛ = R + ρ$ ἤ $ΚΛ = R - ρ$, ἐνῶ ἄν τέμνονταν, θά εἴχαμε $ΚΛ < R + ρ$ καί $ΚΛ > R - ρ$). Εἰδικότερα ἄν ἀληθεύει ἡ $ΚΛ > R + ρ$, καταλαβαίνουμε ὅτι ὁ κυκλ(Λ,ρ) εἶναι «ἔξω» ἀπό τόν κδισ(K,R) γιατί ἄν ἦταν «μέσα», θά εἴχαμε $ΚΛ < R - ρ < R < R + ρ$. Ἐπίσης ἄν ἀληθεύει ἡ $ΚΛ < R - ρ$, καταλαβαίνουμε ὅτι ὁ κυκλ(Λ,ρ) εἶναι «μέσα» στόν κδισ(K,R), γιατί ἄν ἦταν «ἔξω», θά εἴχαμε $ΚΛ > R + ρ > R > R - ρ$.

Κοινή ἐφαπτομένη δύο κύκλων.

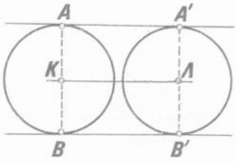
104. **Ὁρισμός**: Μία εὐθεία ε πού ἐφάπτεται σέ δύο κύκλους λέγεται **κοινή ἐφαπτομένη** τους. Εἰδικότερα ἄν ἡ ε ἔχει ἑκατέρωθεν αὐτῆς τούς δύο κύκλους, θά λέγεται **κοινή ἐσωτερική ἐφαπτομένη**, ἐνῶ στήν ἀντίθετη περίπτωση θά λέγεται **κοινή ἐξωτερική ἐφαπτομένη.** Ἄς θεωρήσουμε δύο κύκλους, τούς κυκλ(K,R)



σχ. 80



σχ. 81



σχ. 82

καί κυκλ(Λ,ρ) καί τίς κοινές ἐσωτερικές ἤ ἐξωτερικές ἐφαπτόμενές τους. Ἄς ὑποθέσουμε ἀκόμη ὅτι μία κοινή ἐσωτερική (ἤ ἐξωτερική) ἐφάπτεται στούς κύκλους στά A καί A′ καί ὅτι μία ἄλλη κοινή ἐσωτερική (ἤ ἐξωτερική) ἐφαπτομένη ἐφάπτεται στούς κύκλους στά B καί B′. Τά εὐθύγραμμα τμήματα AA′ καί BB′, πού ἔχουν ἄκρα τά σημεῖα ἐπαφῆς, θά λέγονται **κοινά ἐφαπτόμενα τμήματα** τῶν δύο κύκλων καί θά χαρακτηρίζονται «ἐσωτερικά» ἤ «ἐξωτερικά», ἄν ἀνήκουν ἀντίστοιχα σέ ἐσωτερικές ἤ ἐξωτερικές ἐφαπτόμενες.

Ἄν οἱ κοινές ἐσωτερικές (ἤ ἐξωτερικές) ἐφαπτόμενες τέμνονται στό σημεῖο P, θά ἔχουμε (βλ. § 98) $PA = PB$ καί $PA' = PB'$. Προσθέτοντας (ἤ ἀφαιρώντας) τίς ἰσότητες αὐτές κατά μέλη βρίσκουμε

$$AA' = BB',$$

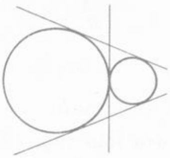
δηλαδή **τά κοινά ἐσωτερικά (ἤ ἐξωτερικά) ἐφαπτόμενα τμήματα δύο κύκλων εἶναι ἴσα.** Ἐπειδή τό K ἰσαπέχει ἀπό τίς πλευρές τῆς γωνίας APB (γιατί $KA = KB$) καί τό Λ ἰσαπέχει ἀπό τίς πλευρές τῆς γωνίας A′PB′ (γιατί $ΛA' = ΛB'$), οἱ εὐθεῖες PK καί PΛ θά συμπίπτουν, γιατί διχοτομοῦν γωνίες ἀντικόρυφες (σχ.80) ἤ συμπίπτουσες (σχ. 81). Συμπεραίνουμε λοιπόν ὅτι:

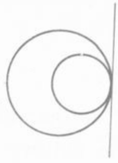
— Ἡ εὐθεία πού διέρχεται ἀπό τά κέντρα δύο κύκλων διέρχεται καί ἀπό τό σημεῖο τομῆς τῶν ἐσωτερικῶν καί ἐξωτερικῶν ἐφαπτομένων τους καί διχοτομεῖ τή γωνία τους.

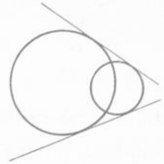
Ἄν ἔχουμε ἴσους κύκλους (βλ. σχ. 82), οἱ κοινές ἐξωτερικές ἐφαπτόμενες δέν τέμνονται, ἀλλά τά κοινά ἐξωτερικά ἐφαπτόμενα τμήματα εἶναι πάλι ἴσα (ἀφοῦ ἀπό τά ὀρθογώνια ΑΚΛΑ΄ καί ΒΚΛΒ΄ ἔχουμε ΑΑ΄ // = ΚΛ καί ΒΒ΄ // = ΚΛ). Παρατηροῦμε τέλος ὅτι στίς διάφορες θέσεις τῶν δύο κύκλων παρουσιάζονται οἱ ἑξῆς περιπτώσεις:

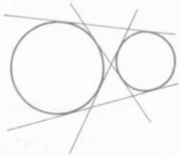
— Ἄν οἱ δύο κύκλοι δέν ἔχουν κοινό σημεῖο καί ὁ ἕνας βρίσκεται μέσα στόν ἄλλο (βλ. σχ. 83), τότε οἱ κύκλοι δέν ἔχουν κοινές ἐφαπτόμενες.


σχ. 83


σχ. 84


σχ. 85


σχ. 86


σχ. 87

— Ἄν οἱ δύο κύκλοι ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς (βλ. σχ. 84), τότε ἔχουν δύο κοινές ἐξωτερικές ἐφαπτόμενες καί μία κοινή ἐσωτερική ἐφαπτομένη (πού διέρχεται ἀπό τό σημεῖο ἐπαφῆς τους).

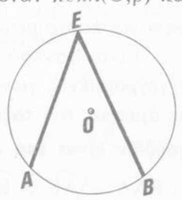
— Ἄν οἱ δύο κύκλοι ἐφάπτονται ἐσωτερικῶς (βλ. σχ. 85), τότε ἔχουν μόνο μία κοινή ἐξωτερική ἐφαπτομένη (πού διέρχεται ἀπό τό σημεῖο ἐπαφῆς τους).

— Ἄν οἱ δύο κύκλοι τέμνονται (βλ. σχ. 86), τότε ἔχουν δύο κοινές ἐξωτερικές ἐφαπτόμενες.

— Ἄν οἱ δύο κύκλοι δέν ἔχουν κοινό σημεῖο καί ὁ ἕνας βρίσκεται ἔξω ἀπό τόν ἄλλο (βλ. σχ. 87), τότε ἔχουν δύο κοινές ἐξωτερικές ἐφαπτόμενες καί δυό κοινές ἐσωτερικές ἐφαπτόμενες.

Ἐγγεγραμμένες γωνίες.

105. **Ὁρισμός**: Μία γωνία πού ἡ κορυφή της ἀνήκει σ᾽ ἕναν κυκλ(Ο,ρ) καί οἱ πλευρές της τέμνουν τόν κύκλο λέγεται **ἐγγεγραμμένη** στόν κύκλο αὐτό. Ἄν οἱ πλευρές μιᾶς ἐγγεγραμμένης γωνίας μέ κορυφή Ε τέμνουν τόν κυκλ(Ο,ρ) στά σημεῖα Α καί Β θά λέμε ὅτι ἡ ἐγγεγραμμένη γωνία $\widehat{AEB}$ «*βαίνει ατό τόξο* $\overset{\frown}{AB}$». Ἡ ἐπίκεντρη γωνία ΑΟΒ θεωρεῖται «*ἀντίστοιχη*» τῆς ἐγγεγραμμένης γωνίας $\widehat{AEB}$. Εἶναι φανερό ὅτι, ἐνῶ ὑπάρχει μία ἐπίκεντρη γωνία πού βαίνει σέ δοσμένο τόξο $\overset{\frown}{AB}$, ὑπάρχουν ἄπειρες ἐγγεγραμμένες γωνίες πού βαίνουν στό τόξο αὐτό.



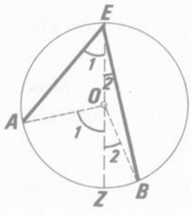
ΘΕΩΡΗΜΑ: Κάθε ἐγγεγραμμένη γωνία εἶναι τό μισό τῆς ἐπίκεντρης γωνίας πού βαίνει στό ἴδιο τόξο.

Ἀπόδ. Θεωροῦμε τήν ἐγγεγραμμένη γωνία $\widehat{AEB}$ καί φέρνουμε ἀπό τήν κορυφή της Ε τή διάμετρο ΕΖ. Ἐπειδή τά τρίγωνα ΕΟΑ καί ΕΟΒ εἶναι ἰσοσκελή, μέ τίς ἐξωτερικές γωνίες τους $\widehat{AOZ} = \widehat{O_1}$ καί $\widehat{ZOB} = \widehat{O_2}$ ἔχουμε

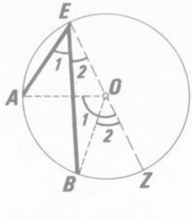
$$\widehat{O_1} = 2\widehat{OEA} = 2\widehat{E_1}, \qquad \widehat{O_2} = 2\widehat{OEB} = 2\widehat{E_2}.$$

Προσθέτοντας (ἤ στήν περίπτωση τοῦ σχ. 89 ἀφαιρώντας) κατά μέλη αὐτές βρίσκουμε

$$\widehat{AOB} = 2\widehat{AEB} \Rightarrow \widehat{AEB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB}.$$



σχ. 88



σχ. 89

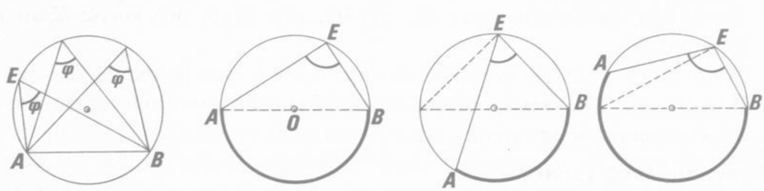
'Από τό θεώρημα αὐτό ἔχουμε ἀμέσως τά πορίσματα:

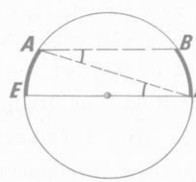
— **Οἱ ἐγγεγραμμένες γωνίες πού βαίνουν στό ἴδιο τόξο (ἤ σέ ἴσα τόξα) εἶναι ἴσες.**

— **'Εγγεγραμμένη γωνία πού βαίνει σέ ἡμικύκλιο εἶναι ὀρθή.**

— **'Εγγεγραμμένη γωνία πού βαίνει σέ τόξο μικρότερο ἀπό ἡμικύκλιο εἶναι ὀξεία, ἐνῶ ἐγγεγραμμένη γωνία πού βαίνει σέ τόξο μεγαλύτερο ἀπό ἡμικύκλιο εἶναι ἀμβλεία.**

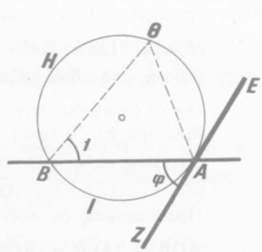
Στά παρακάτω σχήματα δίνονται μέ τή σειρά οἱ ἐποπτικές εἰκόνες τῶν παραπάνω πορισμάτων.





Εἶναι φανερό ὅτι **τά τόξα στά ὁποῖα βαίνουν δύο ἴσες ἐγγεγραμμένες γωνίες εἶναι ἴσα.** 'Από αὐτό καταλαβαίνουμε ἀμέσως ὅτι **τόξα πού περιέχονται μεταξύ παράλληλων χορδῶν εἶναι ἴσα** (γιατί ἄν ΑΒ // ΕΔ, θά ἔχουμε $A\widehat{\Delta}E = B\widehat{A}\Delta \Rightarrow \overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{B\Delta}$).

106. Ἄς θεωρήσουμε τέλος μία χορδή ΑΒ τοῦ κυκλ(Ο,ρ) καί τήν ἐφαπτομένη ΕΖ τοῦ κύκλου στό ἕνα ἄκρο τῆς ΑΒ, π.χ. στό Α. Σχηματίζονται ἔτσι δύο ἐφεξῆς γωνίες μέ κορυφή τό Α, μία ὀξεία γωνία $B\widehat{A}Z = \widehat{\varphi}$ πού θεωροῦμε ὅτι ἀντιστοιχεῖ στό κυρτογώνιο τόξο $\overset{\frown}{BIA}$ καί μία ἀμβλεία γωνία ΕΑΒ πού θεωροῦμε ὅτι ἀντιστοιχεῖ στό μή κυρτογώνιο τόξο $\overset{\frown}{BHA}$. Ἄν φέρουμε ἀπό τό Β χορδή ΒΘ // ΕΖ, τά



τόξα $\widehat{AIB}$ καί $\widehat{A\Theta}$ εἶναι ἴσα (βλ. § 105) καί ἀκόμη $\widehat{\varphi} = A\widehat{B}\Theta = \widehat{B}_1$. Ἔχουμε λοιπόν $\widehat{\varphi} = \widehat{B}_1 = \varepsilon\gamma\gamma \widehat{A\Theta} = \varepsilon\gamma\gamma \widehat{AIB}$. Ἡ ἰσότητα

$$\widehat{\varphi} = \varepsilon\gamma\gamma \widehat{AIB} = A\widehat{\Theta}B$$

ἐκφράζει τό θεώρημα:

Ἡ γωνία $\widehat{\varphi}$ πού σχηματίζεται ἀπό χορδή ἑνός κύκλου καί τήν ἐφαπτομένη στό ἕνα ἄκρο της εἶναι ἴση μέ ἐγγεγραμμένη γωνία τοῦ κύκλου πού βαίνει στό ἀντίστοιχο τόξο τῆς $\widehat{\varphi}$.

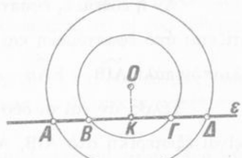
Ἡ γωνία $\widehat{\varphi}$, δηλαδή ἡ ὀξεία γωνία πού σχηματίζει ἡ χορδή AB μέ τήν ἐφαπτομένη στό ἕνα ἄκρο της, λέγεται **γωνία τῆς εὐθείας AB καί τοῦ κυκλ(O,ρ).** Εἶναι φανερό ὅτι ἡ γωνία τῆς εὐθείας AB καί τοῦ κυκλ(O,ρ) μποροῦσε νά σχηματισθεῖ καί στό ἄλλο σημεῖο B (γιατί ὅπως προκύπτει ἀπό τήν § 98 οἱ ἐφαπτόμενες στά A καί B σχηματίζουν ἴσες γωνίες μέ τή χορδή AB).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 202-211

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

186. Δίνονται δύο ὁμόκεντροι κύκλοι μέ κέντρο O καί μία εὐθεία ε, πού τούς τέμνει κατά σειρά στά σημεῖα Α,Β,Γ,Δ. Νά δειχθεῖ ὅτι ΑΒ = ΓΔ.

Λύση: Ἄν φέρουμε τήν $OK \perp \varepsilon$, θά ἔχουμε τίς ἰσότητες (ἐπειδή ἡ κάθετη ἀπό τό κέντρο πρός χορδή διέρχεται ἀπό τό μέσο της):

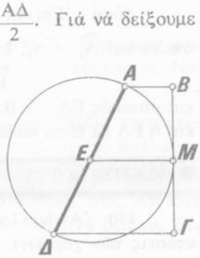


$$K A = K\Delta \quad , \quad KB = K\Gamma.$$

Ἀφαιρώντας κατά μέλη αὐτές βρίσκουμε $AB = \Gamma\Delta$.

187. Σέ τραπέζιο ΑΒΓΔ ἡ μή παράλληλη πλευρά του ΑΔ εἶναι ἴση μέ τό ἄθροισμα τῶν βάσεων ΑΒ καί ΔΓ, ἐνῶ οἱ γωνίες του $\widehat{B}$ καί $\widehat{\Gamma}$ εἶναι ὀρθές. Νά δειχθεῖ ὅτι ὁ κύκλος πού γράφεται μέ διάμετρο ΑΔ ἐφάπτεται στήν πλευρά ΒΓ.

Λύση: Ὁ κύκλος θά ἔχει κέντρο τό μέσο Ε τῆς ΑΔ καί ἀκτίνα $\frac{A\Delta}{2}$. Γιά νά δείξουμε ὅτι ὁ κύκλος αὐτός ἐφάπτεται στήν ΒΓ, θά πρέπει ν' ἀποδείξουμε ὅτι ἡ ἀπόσταση τοῦ κέντρου Ε ἀπό τήν ΒΓ εἶναι ἴση μέ τήν ἀκτίνα του, δηλαδή ἄν φέρουμε $EM \perp B\Gamma$, θά πρέπει νά δείξουμε ὅτι



$$EM = \frac{A\Delta}{2}.$$

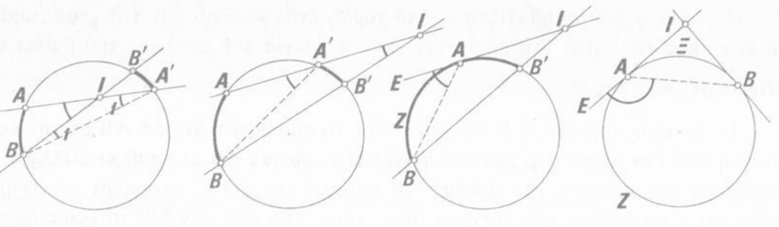
Ἐπειδή ὅμως $EM \perp B\Gamma$, θά εἶναι $EM \,//\, AB \,//\, \Delta\Gamma$. Ἔτσι ἡ ΕΜ εἶναι διάμεσος τοῦ ΑΒΓΔ καί τότε $EM = \frac{AB + \Gamma\Delta}{2} = \frac{A\Delta}{2}$.

188. Θεωροῦμε δύο εὐθεῖες ε_1 καί ε_2 τεμνόμενες στό Ι καί ἕναν κυκλ(O,ρ). Ὑποθέτουμε ὅτι ἡ ε_1 τέμνει τόν κύκλο στά σημεῖα Α, Α΄ καί ἡ ε_2 στά σημεῖα Β, Β΄. Ἄν σημειώσουμε τίς ἐγγεγραμμένες γωνίες τοῦ κύκλου πού βαίνουν στά τόξα $\widehat{AB}$ καί $\widehat{A'B'}$ μέ εγγ$\widehat{AB}$, καί εγγ$\widehat{A'B'}$, νά δειχθεῖ ὅτι:

α) Ὅταν τό Ι εἶναι ἐσωτερικό σημεῖο τοῦ κδισ(O,ρ), ἔχουμε $A\widehat{I}B$ = εγγ$\widehat{AB}$ + εγγ$\widehat{A'B'}$

β) Ὅταν τό I εἶναι ἐξωτερικό σημεῖο τοῦ κδισ(Ο,ρ), ἔχουμε $\widehat{AIB} = |\ \varepsilon\gamma\gamma\widehat{AB} - \varepsilon\gamma\gamma\widehat{A'B'}\ |$ Νά ἐξετασθεῖ καί ἡ περίπτωση πού ἡ μία εὐθεία ἤ καί οἱ δύο εὐθεῖες ἐφάπτονται στόν κύκλο.

Λύση: α) Ἐπειδή ἡ γωνία $\widehat{AIB}$ εἶναι ἐξωτερική στό τρίγωνο IBA΄ (βλ. σχ. 90), θά εἶναι



σχ. 90 σχ. 91 σχ 92 σχ. 93

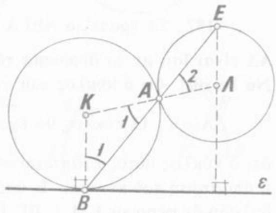
ἴση μέ τό ἄθροισμα τῶν δύο ἐντός καί ἀπέναντί της γωνιῶν $\widehat{IBA'} = \widehat{B}_1$ καί $\widehat{IA'B} = \widehat{A'}_1$. Ἔτσι ἔχουμε $\widehat{AIB} = \widehat{B}_1 + \widehat{A}_1' = \varepsilon\gamma\gamma\widehat{A'B'} + \varepsilon\gamma\gamma\widehat{AB}$.

β) Ἡ γωνία $\widehat{AA'B} = \varepsilon\gamma\gamma\widehat{AB}$ εἶναι ἐξωτερική τοῦ IBA΄ (βλ. σχ. 91). Ἄρα εἶναι $\widehat{AIB} = \widehat{AA'B} - \widehat{A'BB'} = \varepsilon\gamma\gamma\widehat{AB} - \varepsilon\gamma\gamma\widehat{A'B'}$.

Ἄν ἡ εὐθεία ε_1 ἐφάπτεται στόν κύκλο (σχ. 92) (ὁπότε $A \equiv A'$), ἡ γωνία $\widehat{EAB}$ (πού σχηματίζεται ἀπό ἐφαπτόμενη καί χορδή καί ἰσοῦται μέ $\varepsilon\gamma\gamma\widehat{AZB}$), εἶναι ἐξωτερική τοῦ AIB. Ἔχουμε λοιπόν πάλι $\widehat{AIB} = \widehat{EAB} - \widehat{ABI} = \varepsilon\gamma\gamma\widehat{AB} - \varepsilon\gamma\gamma\widehat{AB'}$.

Τέλος, ἄν καί οἱ δύο εὐθεῖες ἐφάπτονται στόν κύκλο (βλ.σχ. 93), θά ἔχουμε, ἀφοῦ ἡ $\widehat{EAB}$ εἶναι ἐξωτερική στό AIB, $\widehat{AIB} = \widehat{EAB} - \widehat{ABI} = \varepsilon\gamma\gamma\widehat{AZB} - \varepsilon\gamma\gamma\widehat{A\Xi B}$.

189. Θεωροῦμε δύο κύκλους, τούς κυκλ(K,R) καί κυκλ(Λ,ρ), πού ἐφάπτονται ἐξωτερικά στό A. Ἄν εὐθεία ε ἐφάπτεται στόν κυκλ(K,R) στό B καί ἡ εὐθεία BA τέμνει τόν κυκλ (Λ,ρ) στό E, νά δειχθεῖ ὅτι ΕΛ $\perp$ ε.



Λύση: Ἐπειδή τά τρίγωνα BKA καί ΑΛΕ εἶναι ἰσοσκελή καί $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$, ἔχουμε

$$\widehat{B}_1 = \widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 = \widehat{E}$$

καί συνεπῶς ΕΛ // KB. Ἡ KB ὅμως εἶναι κάθετη στήν ε. Ἄρα καί ἡ ΕΛ θά εἶναι κάθετη στήν ε.

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ *

190. Ἄν δύο ἴσες χορδές κυκλ(Ο,ρ) τέμνονται σέ σημεῖο I (ἤ ἄν τέμνονται στό I οἱ προεκτάσεις τῶν χορδῶν), ἡ εὐθεία OI διχοτομεῖ τή γωνία τῶν χορδῶν.

191. Δίνεται μιά χορδή AB ἑνός κυκλ(Ο,ρ) καί τά σημεῖα της Γ καί Δ τέτοια ὥστε ΑΓ = = ΓΔ = ΔB. Νά δείξετε ὅτι $\widehat{A O \Gamma} = \widehat{\Delta O B}$ καί ὅτι $\widehat{A O \Gamma} < \widehat{\Gamma O \Delta}$.

192. Δίνεται ἕνα ἐσωτερικό σημεῖο A τοῦ κδισ(Ο,ρ). Νά δείξετε ὅτι ἡ χορδή, πού εἶναι κάθετη στήν OA, εἶναι μικρότερη ἀπό κάθε ἄλλη χορδή πού διέρχεται ἀπό τό A.

193. Ἄν ἔχουμε δύο ὁμόκεντρους κύκλους, ὅλες οἱ χορδές τοῦ μεγάλου κύκλου πού ἐφάπτονται στό μικρό κύκλο εἶναι ἴσες.

194. Θεωροῦμε δύο ἴσους κύκλους μέ κέντρα Κ καί Λ καί ἀπό τό μέσο Μ τῆς ΚΛ φέρνουμε μία εὐθεία, ἡ ὁποία τέμνει τόν ἕναν κύκλο στά σημεῖα Α,Β καί τόν ἄλλο στά σημεῖα Γ,Δ. Νά δείξετε ὅτι ΑΒ = ΓΔ.

195. Νά δείξετε ὅτι ἡ εὐθεία πού ἑνώνει τά μέσα δύο παράλληλων χορδῶν ἑνός κύκλου διέρχεται ἀπό τό κέντρο τοῦ κύκλου.

196.. Δίνεται μία διάμετρος ΑΒ ἑνός κυκλ(Ο,ρ) καί μία χορδή του ΓΔ. Νά δείξετε ὅτι οἱ χορδές ΑΓ καί ΔΒ ἔχουν ἴσες προβολές στήν εὐθεία ΓΔ.

197. Μία ἐφαπτομένη τοῦ κυκλ(Ο,ρ) τέμνει δύο ἄλλες παράλληλες ἐφαπτόμενές του στά σημεῖα Β καί Γ. Νά δείξετε ὅτι $\widehat{ΒΟΓ} = 90°$.

198. Θεωροῦμε μία διάμετρο ΑΒ ἑνός κυκλ(Ο,ρ) καί ἕνα σημεῖο Γ στήν προέκτασή της πρός τό μέρος τοῦ Α. Ἀπό τό Γ φέρνουμε ἡμιευθεία πού τέμνει τόν κύκλο σέ σημεῖα Δ καί Ε τέτοια ὥστε ΓΔ = ρ. Νά δείξετε ὅτι $\widehat{ΕΟΒ} = 3\widehat{ΔΟΑ}$.

199. Δύο κύκλοι τέμνονται στά σημεῖα Α καί Β. Ἄν Γ καί Δ εἶναι τά διαμετρικά σημεῖα τοῦ Α στούς δύο κύκλους, νά δείξετε ὅτι ἡ εὐθεία ΓΔ διέρχεται ἀπό τό Β.

200. Ἀπό ἕνα κοινό σημεῖο Α δύο τεμνόμενων κύκλων φέρνουμε πρός τή διάκεντρο εὐθεία παράλληλη ἡ ὁποία τέμνει τούς κύκλους στά σημεῖα Γ καί Δ. Νά δείξετε ὅτι τό τμῆμα ΓΔ εἶναι διπλάσιο ἀπό τή διάκεντρο.

201. Ἀπό ἕνα κοινό σημεῖο Α δύο τεμνόμενων κύκλων φέρνουμε εὐθεία πού τέμνει τούς κύκλους στά σημεῖα Γ καί Δ. Ἄν φέρουμε τίς ἐφαπτόμενες τῶν κύκλων στά Γ καί Δ, νά δείξετε ὅτι ἡ γωνία τῶν ἐφαπτομένων εἶναι ἴση μέ τή γωνία τῶν δύο κύκλων.

202. Δύο κύκλοι ἐφάπτονται ἐξωτερικά (ἤ ἐσωτερικά) στό σημεῖο Α καί μία εὐθεία πού διέρχεται ἀπό τό Α τέμνει τούς δύο κύκλους στά σημεῖα Β καί Γ. Νά δείξετε ὅτι οἱ δύο εὐθεῖες, πού ἐφάπτονται στούς κύκλους στά σημεῖα Β καί Γ, εἶναι παράλληλες.

203. Δύο κύκλοι ἐφάπτονται ἐξωτερικά (ἤ ἐσωτερικά) στό σημεῖο Α καί δύο εὐθεῖες, πού διέρχονται ἀπό τό Α, τέμνουν τόν ἕναν κύκλο στά σημεῖα Β καί Β΄ καί τόν ἄλλο κύκλο στά σημεῖα Γ καί Γ΄. Νά δείξετε ὅτι ΒΒ΄ // ΓΓ΄.

204. Δύο κύκλοι ἐφάπτονται ἐξωτερικά στό Α καί μία εὐθεία ἐφάπτεται στούς δύο κύκλους στά σημεῖα Β καί Γ. Νά δείξετε ὅτι $\widehat{ΒΑΓ} = 90°$.

205. Δύο κύκλοι μέ κέντρα Κ καί Λ ἐφάπτονται ἐξωτερικά στό Α. Φέρνουμε μιά ὁποιαδήποτε χορδή ΑΒ τοῦ κύκλου Κ καί κατόπι τή χορδή ΑΓ $\perp$ ΑΒ τοῦ κύκλου Λ. Νά δείξετε ὅτι ΚΒ // ΛΓ.

206. Δύο ἴσοι κύκλοι μέ κέντρα Κ καί Λ ἐφάπτονται ἐξωτερικά στό Α. Φέρνουμε μιά ὁποιαδήποτε χορδή ΑΒ τοῦ κύκλου Κ καί κατόπι τή χορδή ΑΓ $\perp$ ΔΒ τοῦ κύκλου Λ. Νά δείξετε ὅτι ΒΓ//=ΚΛ.

207. Θεωροῦμε δύο παράλληλες χορδές ΑΒ καί ΔΓ ἑνός κυκλ(Ο,ρ) οἱ ὁποῖες σχηματίζουν τραπέζιο ΑΒΓΔ. Νά δείξετε ὅτι ἡ γωνία, πού σχηματίζουν οἱ ἐφαπτόμενες σέ δύο ἀπέναντι κορυφές τοῦ τραπεζίου, εἶναι ἴση μέ τή γωνία τῶν μή παράλληλων πλευρῶν τοῦ τραπεζίου.

208. Δίνονται δύο κύκλοι μέ κέντρα Κ καί Λ, μία ἐξωτερική ἐφαπτομένη τους ΑΒ καί μία ἐσωτερική ἐφαπτομένη τους ΓΔ. Ἄν οἱ ἐφαπτόμενες αὐτές τέμνονται στό Ι, νά δείξετε ὅτι $\widehat{ΚΙΛ} = 90°$.

209. Θεωροῦμε ἕναν κύκλο πού διέρχεται ἀπό δύο σημεῖα Α καί Β καί ἐφάπτεται σέ μία εὐθεία ε στό Ε. Ἄν Μ εἶναι ἕνα «κινητό» σημεῖο τῆς ε, νά δείξετε ὅτι ἡ γωνία $\widehat{ΑΜΒ}$ παίρνει τήν πιό μεγάλη τιμή της, ὅταν τό Μ πέσει στό Ε.

210. Ἄν ἔχουμε δύο κύκλους (Κ,R) καί (Λ,ρ), καλοῦμε «*ἀπόσταση*» τῶν κύκλων τό πιό μικρό εὐθύγραμμο τμῆμα πού τά ἄκρα του εἶναι σημεῖα τῶν δύο κύκλων. (Ἀπό τόν ὁρισμό αὐτό εἶναι φανερό ὅτι δύο κύκλοι, πού ἐφάπτονται ἤ τέμνονται, ἔχουν «μηδενική» ἀπόσταση). Νά δείξετε ὅτι ἡ ἀπόσταση δύο κύκλων (πού ὁ ἕνας εἶναι ἔξω ἤ μέσα στόν ἄλλο) βρίσκεται πάνω στήν εὐθεία πού διέρχεται ἀπό τά κέντρα τους.

211. Δίνονται δύο ἴσοι κύκλοι μέ κέντρα Κ καί Λ, οἱ ὁποῖοι τέμνονται ὀρθογωνίως. Ἀπό τό ἕνα κοινό σημεῖο τους Α φέρνουμε μία ὁποιαδήποτε εὐθεία πού τέμνει τόν κύκλο Κ στό Β καί τόν κύκλο Λ στό Γ. Ἄν Δ εἶναι τό διαμετρικό τοῦ Α στόν κύκλο Λ, νά δείξετε ὅτι ΑΒ = ΓΔ.

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ**

212. Μέ διάμετρο τήν κάθετη πλευρά ΑΒ ὀρθογώνιου τριγώνου ΑΒΓ γράφουμε κύκλο. Ἄν Δ εἶναι τό σημεῖο, στό ὁποῖο ὁ κύκλος αὐτός τέμνει τήν ὑποτείνουσα ΒΓ, νά δείξετε ὅτι ἡ ἐφαπτομένη στό Δ διέρχεται ἀπό τό μέσο τῆς ΑΓ.

213. Θεωροῦμε κυκλ(Ο,ρ), τήν ἐφαπτομένη ε σ' ἕνα σημεῖο του Α καί ἕνα σημεῖο Σ τῆς ε. Φέρνουμε ἀπό τό Σ μία εὐθεία πού τέμνει τόν κύκλο στά Β καί Γ. Ἄν ἡ διχοτόμος τῆς $\widehat{ΒΑΓ}$ τέμνει τή χορδή ΒΓ στό Ι, νά δείξετε ὅτι ΣΙ = ΣΑ.

214. Δίνεται μία ὁρισμένη διάμετρος ΑΒ ἑνός κυκλ(Ο,ρ) καί μία ὁποιαδήποτε χορδή του ΑΓ. Φέρνουμε ἀπό τό κέντρο Ο εὐθεία παράλληλη πρός τήν ΑΓ καί ὀνομάζουμε Μ τό σημεῖο στό ὁποῖο ἡ παράλληλη αὐτή τέμνει τήν ἐφαπτομένη στό Γ. Νά δείξετε ὅτι ἡ εὐθεία ΜΒ ἐφάπτεται στόν κύκλο στό Β.

215. Θεωροῦμε δύο κάθετες χορδές ΑΒ καί ΓΔ ἑνός κυκλ(Ο,ρ) οἱ ὁποῖες τέμνονται στό Ι καί ὀνομάζουμε Μ καί Ρ τά μέσα τῶν χορδῶν ΑΔ καί ΓΒ. Νά δείξετε ὅτι

α) $ΙΜ \perp ΓΒ$ καί $ΙΡ \perp ΑΔ$ β) $ΟΜ = \frac{ΓΒ}{2}$ καί $ΟΡ = \frac{ΑΔ}{2}$.

216. Δύο κύκλοι ἐφάπτονται στό Α. Φέρνουμε εὐθεία ε πού ἐφάπτεται στό μικρότερο κύκλο σ' ἕνα σημεῖο του Δ καί τέμνει τό μεγαλύτερο κύκλο στά Β καί Γ. Νά δείξετε ὅτι:

α) Ἄν οἱ κύκλοι ἐφάπτονται ἐσωτερικά, ἡ ΑΔ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας $\widehat{ΒΑΓ}$.

β) Ἄν οἱ κύκλοι ἐφάπτονται ἐξωτερικά, ἡ ΑΔ εἶναι ἐξωτερική διχοτόμος τῆς $\widehat{ΒΑΓ}$.

217. Ἄν Ι εἶναι τό σημεῖο τομῆς τῶν διαγωνίων ἑνός τραπεζίου ΑΒΓΔ (μέ βάσεις ΑΒ,ΓΔ), νά δείξετε ὅτι ὁ κύκλος πού διέρχεται ἀπό τά σημεῖα Α,Β,Ι καί ὁ κύκλος πού διέρχεται ἀπό τά σημεῖα Γ,Δ,Ι ἐφάπτονται στό Ι.

218. Θεωροῦμε τρίγωνο ΑΒΓ, ἕνα ἐσωτερικό σημεῖο του Μ καί τίς προβολές Δ,Ε,Ζ τοῦ Μ στίς πλευρές ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ τοῦ τριγώνου. Ἄν ὁ κύκλος πού διέρχεται ἀπό τά σημεῖα Δ,Ε,Ζ τέμνει τίς πλευρές αὐτές καί στά σημεῖα Δ΄,Ε΄,Ζ΄, νά δείξετε ὅτι τά Δ΄,Ε΄,Ζ΄ εἶναι ἐπίσης προβολές ἑνός σημείου στίς πλευρές τοῦ τριγώνου.

219. Δίνονται δύο σημεῖα Ε καί Ζ ἑνός ἡμικυκλίου μέ διάμετρο ΑΒ καί οἱ ἐφαπτόμενές του στά Ε καί Ζ, οἱ ὁποῖες τέμνονται στό Δ. Ἄν φέρουμε ἀπό τό Δ τήν εὐθεία ε κάθετη στήν ΑΒ, νά δείξετε ὅτι:

α) Ἡ ΑΕ τέμνει τήν ε σ' ἕνα σημεῖο Ι τέτοιο ὥστε ΔΙ = ΔΕ.

β) Οἱ εὐθεῖες ΑΕ καί ΒΖ τέμνονται πάνω στήν ε.

220. Οἱ κορυφές ἑνός τριγώνου ΑΒΓ, πού ἔχει ΑΒ < ΒΓ, εἶναι σημεῖα τοῦ κυκλ(Ο,ρ). Παίρνουμε τό μέσο Μ τοῦ τόξου $\widehat{ΑΓ}$ καί τήν προβολή του Ι στήν πλευρά ΒΓ. Νά δείξετε ὅτι

$$ΙΓ = \frac{ΒΓ - ΑΒ}{2}, \; ΙΒ = \frac{ΒΓ + ΑΒ}{2}.$$

221. Θεωροῦμε τετράγωνο ΑΒΓΔ καί τό ἡμικύκλιο πού ἔχει διάμετρο τήν ΑΔ καί ὅλα τά σημεῖα του μέσα στό τετράγωνο. Μέ κέντρο τό Α καί ἀκτίνα ΑΔ γράφουμε τόξο ΔΒ, πού ἔχει ὅλα τά σημεῖα του ἐπίσης μέσα στό τετράγωνο. Φέρνουμε τέλος μιά ὁποιαδήποτε εὐθεία πού διέρχεται ἀπό τό Α καί τέμνει τό ἡμικύκλιο στό Ε καί τό τόξο $\widehat{ΔΒ}$ στό Ζ. Νά δείξετε ὅτι τό τμῆμα ΖΕ εἶναι ἴσο μέ τήν ἀπόσταση τοῦ Ζ ἀπό τήν πλευρά ΔΓ.

.222 Ἀπό ἕνα σταθερό σημεῖο Σ φέρνουμε μιά ὁποιαδήποτε εὐθεία ε, ἡ ὁποία τέμνει ἕνα δοσμένο κυκλ(Ο,ρ) στά σημεῖα Α καί Β. Ἄν Α΄ καί Β΄ εἶναι τά διαμετρικά σημεῖα τῶν Α καί Β, νά δείξετε ὅτι ἡ εὐθεία Α΄Β΄ διέρχεται ἀπό σταθερό σημεῖο (δηλαδή διέρχεται ἀπό τό ἴδιο πάντα σημεῖο, ὅταν μεταβάλλεται ἡ εὐθεία ε).

223. Ἀπό ἕνα κοινό σημεῖο Α δύο τεμνόμενων κύκλων φέρνουμε δύο εὐθεῖες, πού τέμνουν τόν ἕναν κύκλο στά Γ καί Ε καί τόν ἄλλο στά Δ καί Ζ. Νά δείξετε ὅτι ἡ γωνία τῶν εὐθειῶν ΓΕ καί ΔΖ εἶναι σταθερή (δηλαδή εἶναι ἡ ἴδια πάντοτε, ὁποιεσδήποτε καί ἄν εἶναι οἱ εὐθεῖες πού φέραμε ἀπό τό Α).

224. Δίνεται μία γωνία $\widehat{X O \Psi}$ καί ἕνα ὁρισμένο σημεῖο Σ στή διχοτόμο της. Θεωροῦμε ἕναν ὁποιοδήποτε κύκλο πού διέρχεται ἀπό τά δύο σημεῖα Ο καί Σ καί καλοῦμε Α καί Β τά σημεῖα, στά ὁποῖα τέμνει τίς πλευρές ΟΧ καί ΟΨ τῆς γωνίας. Νά δείξετε ὅτι τό ἄθροισμα ΟΑ + ΟΒ εἶναι σταθερό (δηλαδή παραμένει τό ἴδιο καί γιά ὁποιοδήποτε ἄλλο κύκλο πού διέρχεται ἀπό τά σημεῖα Ο καί Σ).

225. Στίς πλευρές ΟΧ καί ΟΨ μιᾶς γωνίας $\widehat{X O \Psi}$ «κινοῦνται» δύο σημεῖα Α καί Β κατά τέτοιον τρόπο, ὥστε τό ἄθροισμα ΟΑ + ΟΒ νά εἶναι πάντοτε ἴσο μέ γνωστό μῆκος λ. Νά δείξετε ὅτι ὁ κύκλος πού διέρχεται ἀπό τά σημεῖα Α,Ο,Β, (ὁ ὁποῖος εἶναι μεταβλητός, ἀφοῦ ἐξαρτᾶται ἀπό τήν κίνηση τῶν Α καί Β) διέρχεται καί ἀπό ἕνα ἄλλο σταθερό σημεῖο τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας.

226. Δίνεται εὐθεία ε καί ἕνα ὁρισμένο σημεῖο της Ρ καί κυκλ(Ο,ρ) καί ἕνα ὁρισμένο σημεῖο του Σ. Γράφουμε ἕναν ὁποιοδήποτε κύκλο διερχόμενο ἀπό τά Σ καί Ρ, ὁ ὁποῖος τέμνει τήν εὐθεία ε στό Α καί τόν κυκλ(Ο,ρ) στό Β. Νά δείξετε ὅτι ἡ εὐθεία ΑΒ διέρχεται ἀπό σταθερό σημεῖο (δηλαδή διέρχεται ἀπό τό ἴδιο πάντοτε σημεῖο γιά κάθε κύκλο πού διέρχεται ἀπό τά Α καί Β).

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 9

1. Ἄν φέρουμε ἀπό τό κέντρο ἑνός κυκλ(Ο,ρ) εὐθεία κάθετη σέ μία χορδή του ΑΒ, αὐτή θά περάσει ἀπό τό μέσο Κ τῆς χορδῆς καί ἀπό τό μέσο Μ τοῦ τόξου $\widehat{AB}$. Ἔτσι τά τρία σημεῖα Ο,Κ,Μ εἶναι πάντα συνευθειακά καί μία εὐθεία, πού διέρχεται ἀπό τά δύο, θά διέρχεται καί ἀπό τό τρίτο καί θά εἶναι μεσοκάθετος τῆς χορδῆς ΑΒ.

Ἡ ἀπόσταση ΟΚ τοῦ κέντρου ἑνός κυκλ(Ο,ρ) ἀπό μία χορδή του λέγεται **ἀπόστημα τῆς χορδῆς**. Ἄν ΑΒ καί ΓΔ εἶναι δύο χορδές τοῦ ἴδιου κύκλου, ἔχουμε

$$AB \gtreqless \Gamma\Delta \iff \text{ἀπόστημα τῆς } AB \lesseqgtr \text{ ἀπόστημα τῆς } \Gamma\Delta,$$

δηλαδή ἀπό τή σχέση πού ἰσχύει γιά δύο χορδές προκύπτει ἡ σχέση πού ἰσχύει γιά τά ἀποστήματά τους καί ἀντιστρόφως.

Μία γωνία λέγεται **ἐγγεγραμμένη σέ κυκλ(Ο,ρ)**, ἄν καί μόνο ἄν ἡ κορυφή της εἶναι σημεῖο τοῦ κύκλου καί οἱ πλευρές της χορδές αὐτοῦ.

— **Κάθε ἐγγεγραμμένη γωνία εἶναι τό μισό τῆς ἐπίκεντρης πού βαίνει στό ἴδιο τόξο.**

Ἀπό τό βασικό αὐτό θεώρημα ἔχουμε τά πορίσματα:

— Ὅλες οἱ ἐγγεγραμμένες γωνίες πού βαίνουν στό ἴδιο τόξο εἶναι ἴσες.

— Ἡ γωνία πού βαίνει σέ ἡμικύκλιο εἶναι ὀρθή.

— Γωνία ἐγγεγραμμένη σέ κυρτογώνιο (ἤ μή κυρτογώνιο) τόξο εἶναι ὀξεία (ἤ ἀμβλεία).

2. Μία εὐθεία ε καί ἕνας κυκλ(Ο,ρ) ἔχουν τό πολύ δύο κοινά σημεῖα. Τό πλῆθος τῶν κοινῶν σημείων τους προκύπτει ἀπό τή σύγκριση τῆς ἀκτίνας ρ μέ τήν ἀπόσταση ΟΚ τοῦ κέντρου Ο ἀπό τήν ε. Ἔτσι ἡ εὐθεία καί ὁ κύκλος θά ἔχουν:

— **κανένα κοινό σημεῖο,** ἄν καί μόνο ἄν ΟΚ > ρ·

— **ἕνα κοινό σημεῖο**, ἄν καί μόνο ἄν ΟΚ = ρ (ὁπότε κοινό σημεῖο τους εἶναι τό Κ). Στήν περίπτωση αὐτή ἡ εὐθεία λέγεται **ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου** καί εἶναι κάθετη στό ἄκρο τῆς ἀκτίνας πού καταλήγει στό σημεῖο ἐπαφῆς·

— **δύο κοινά σημεῖα**, ἄν καί μόνο ἄν $OK < \rho$. Τότε λέμε ὅτι ἡ εὐθεία **τέμνει** τόν κύκλο. Ἄν Α καί Β εἶναι τά κοινά σημεῖα τους, ἡ ὀξεία γωνία πού σχηματίζεται ἀπό τήν εὐθεία ε καί ἀπό τήν ἐφαπτομένη στό Α ἤ στό Β λέγεται **γωνία τῆς εὐθείας καί τοῦ κύκλου** καί ἰσοῦται μέ μία ἐγγεγραμμένη στό κυρτογώνιο τόξο $\widehat{AB}$.

3. Δύο κύκλοι (K,R) καί (Λ,ρ) ἔχουν τό πολύ δύο κοινά σημεῖα. Τόσο τό πλῆθος τῶν κοινῶν σημείων τους ὅσο καί ἡ μεταξύ τους θέση προκύπτει ἀπό τή σύγκριση τῆς **διακέντρου ΚΛ** μέ τό ἄθροισμα καί τή διαφορά τῶν ἀκτίνων τους. Ἔτσι, ἄν $R > \rho$, οἱ δύο κύκλοι θά ἔχουν:

— **κανένα κοινό σημεῖο**, ἄν καί μόνο ἄν $K\Lambda > R + \rho$ ἤ $K\Lambda < R - \rho$. Ὅταν εἶναι $K\Lambda > R + \rho$ (ἤ ἀντίστοιχα $K\Lambda < R - \rho$), ὁ κυκλ(Λ,ρ) βρίσκεται «ἔξω» (ἤ ἀντίστοιχα «μέσα») στόν κυκλ(K,R)·

— **ἕνα κοινό σημεῖο**, ἄν καί μόνο ἄν $K\Lambda = R + \rho$ ἤ $K\Lambda = R - \rho$. Ὅταν εἶναι $K\Lambda = R + \rho$ (ἤ ἀντίστοιχα $K\Lambda = R - \rho$) ὁ κυκλ(Λ,ρ) βρίσκεται ἔξω (ἤ ἀντίστοιχα μέσα) στόν κυκλ(K,R). Στήν περίπτωση αὐτή οἱ κύκλοι λέγονται **ἐφαπτόμενοι** καί τό κοινό σημεῖο τους βρίσκεται πάνω στή διάκεντρο ΚΛ·

— **δύο κοινά σημεῖα**, ἄν καί μόνο ἄν $R - \rho < K\Lambda < R + \rho$. Στήν περίπτωση αὐτή οἱ κύκλοι λέγονται **τεμνόμενοι** καί τά κοινά σημεῖα τους εἶναι συμμετρικά ὡς πρός τή διάκεντρο.

4. Ἀπό ἕνα σημεῖο Α πού βρίσκεται ἔξω ἀπό τόν κυκλ(O,ρ) μποροῦμε νά φέρουμε δύο ἐφαπτόμενες τοῦ κύκλου. Ἄν Ε καί Ε΄ εἶναι τά σημεῖα ἐπαφῆς τους,

— **τά ἐφαπτόμενα τμήματα ΑΕ καί ΑΕ΄ εἶναι ἴσα·**

— **ἡ εὐθεία ΑΟ διχοτομεῖ τή γωνία $\widehat{EAE'}$ καί εἶναι μεσοκάθετος τῆς χορδῆς ΕΕ΄.**

Μία εὐθεία ε πού ἐφάπτεται σέ δύο κύκλους λέγεται **κοινή ἐφαπτομένη** τους. Ἡ κοινή ἐφαπτομένη δύο κύκλων λέγεται **ἐξωτερική** (ἤ ἀντίστοιχα **ἐσωτερική**), ἄν οἱ δύο κύκλοι βρίσκονται πρός τό ἴδιο μέρος της (ἤ ἀντίστοιχα ἑκατέρωθεν αὐτῆς). Δύο κύκλοι ἀνάλογα μέ τή θέση τους ἔχουν τό πολύ δύο κοινές ἐξωτερικές ἐφαπτόμενες καί δύο κοινές ἐσωτερικές ἐφαπτόμενες. Ἄν οἱ κύκλοι ἔχουν δύο κοινές ἐξωτερικές (ἤ ἐσωτερικές) ἐφαπτόμενες:

— **Τά κοινά ἐφαπτόμενα τμήματα εἶναι ἴσα.**

— **Ἡ διακεντρική εὐθεία διέρχεται ἀπό τό σημεῖο τομῆς τῶν κοινῶν ἐφαπτομένων τους καί διχοτομεῖ τή γωνία τους.**

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10

ΑΠΛΕΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΕΣ — ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΣΗΜΕΙΑ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

Ἡ Γεωμετρική κατασκευή

106. Ἐπειδή τά γεωμετρικά σχήματα εἶναι, ὅπως εἴπαμε, μαθηματικές ἐπινοήσεις, χρησιμοποιοῦμε γιά τή μελέτη τους *«ἐποπτικές εἰκόνες»* τῶν σχημάτων οἱ ὁποῖες μᾶς διευκολύνουν στήν ἀποκάλυψη τῶν ἰδιοτήτων τους. Ὅταν λοιπόν λέμε **«κατασκευάζουμε»** ἕνα γεωμετρικό σχῆμα, ἐννοοῦμε ὅτι σχεδιάζουμε τήν ἐποπτική του εἰκόνα. Τά δύο βασικά γεωμετρικά σχήματα, ἡ εὐθεία καί ὁ κύκλος, κατασκευάζονται ἀντίστοιχα, ὅπως εἶναι γνωστό, μέ τόν κανόνα (χάρακα) καί μέ τό διαβήτη. Ὁ διαβήτης χρησιμοποιεῖται ἀκόμη καί ὅταν θέλουμε νά κατασκευάσουμε εὐθύγραμμο τμῆμα ἴσο μέ ἄλλο δοσμένο.

Κάθε πρόταση, στήν ὁποία ζητεῖται νά κατασκευασθεῖ ἕνα γεωμετρικό σχῆμα ἀπό ὁρισμένα στοιχεῖα του ἤ ἀπό ὁρισμένες ἰδιότητές του, λέγεται **γεωμετρικό πρόβλημα.** Ἔτσι ἡ *«λύση» ἑνός προβλήματος* ἀποτελεῖται ἀπ' ὅλες τίς διαδοχικές ἐργασίες πού κάνουμε, γιά νά κατασκευάσουμε τό ζητούμενο σχῆμα. Ἄν σέ ὅλες αὐτές τίς διαδοχικές ἐργασίες χρησιμοποιοῦμε μόνο κανόνα καί διαβήτη, λέμε ὅτι ἔχουμε «**γεωμετρική λύση**» τοῦ προβλήματος ἤ **γεωμετρική κατασκευή** τοῦ ζητούμενου σχήματος[1]. Στά προηγούμενα εἴδαμε ὁρισμένες κατασκευές. Αὐτές εἶναι:

— Ἡ κατασκευή μιᾶς γωνίας πού ἔχει ἕνα ὁρισμένο σημεῖο Ο γιά κορυφή, μία ὁρισμένη ἡμιευθεία ΟΧ γιά πλευρά καί εἶναι ἴση μέ δοσμένη γωνία (βλ. § 39).

— Ἡ κατασκευή μιᾶς εὐθείας πού διέρχεται ἀπό ἕνα ὁρισμένο σημεῖο Α καί εἶναι παράλληλη πρός δοσμένη εὐθεία ε (βλ. § 74).

---

1. Ἡ λύση ἑνός γεωμετρικοῦ προβλήματος μέ κανόνα καί διαβήτη ξεκίνησε ἀπό τόν Πλάτωνα (427-347) π.Χ.). Πολύ ἀργότερα, τόν 17ο καί 18ο αἰώνα, προσπάθησαν νά δώσουν λύσεις γεωμετρικῶν προβλημάτων μόνο μέ τό διαβήτη ἤ μόνο μέ τόν κανόνα καί ἀπέδειξαν ὅτι τά προβλήματα πού λύνονται μέ τόν κανόνα καί τό διαβήτη μποροῦν νά λυθοῦν μόνο μέ τόν διαβήτη.

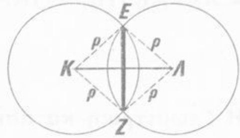
Ὑπάρχουν προβλήματα πού ἔχουμε ἀποδείξει ὅτι δέ λύνονται μέ κανόνα καί διαβήτη. Ἕνα τέτοιο «ἄλυτο» πρόβλημα εἶναι π.χ. ἡ διαίρεση μιᾶς ὁποιασδήποτε γωνίας σέ τρία ἴσα μέρη.

— Ἡ διαίρεση ἑνός τμήματος ΑΒ σέ ν ἴσα μέρη (βλ. § 82).

Θά δοῦμε τώρα καί μερικές ἀκόμη ἁπλές γεωμετρικές κατασκευές πού τίς χρησιμοποιοῦμε σχεδόν πάντοτε, γιά νά σχεδιάσουμε πιό σύνθετα γεωμετρικά σχήματα μέ ἀκρίβεια.

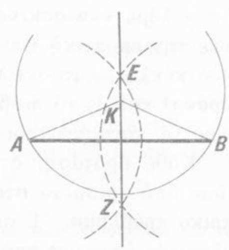
Κατασκευή τῆς μεσοκαθέτου ἑνός τμήματος.

107. Ξέρουμε ὅτι ἡ κοινή χορδή δύο τεμνόμενων κύκλων εἶναι κάθετη στή διάκεντρό τους (βλ. § 100). Ἄν τώρα θεωρήσουμε δύο ἴσους κύκλους μέ κέντρα. Κ,Λ καί ἀκτίνα ρ καί καλέσουμε ΕΖ τήν κοινή χορδή τους, τό σχῆμα ΚΕΛΖ εἶναι ρόμβος καί ἡ κοινή χορδή ΕΖ εἶναι μεσοκάθετος τῆς διακέντρου ΚΛ. Μέ τή βοήθεια τῆς ἰδιότητας αὐτῆς, πού ἔχουν μόνο οἱ ἴσοι τεμνόμενοι κύκλοι, λύνουμε τό ἑξῆς πρόβλημα:



Νά κατασκευασθεῖ ἡ μεσοκάθετος ἑνός εὐθύγραμμου τμήματος ΑΒ.

Λύση: Μέ κέντρα τά ἄκρα Α καί Β τοῦ τμήματος ΑΒ καί μέ ὁποιαδήποτε ἀκτίνα ρ μεγαλύτερη ἀπό τό τμῆμα $\frac{AB}{2}$ γράφουμε δύο κύκλους. Αὐτοί οἱ δύο κύκλοι τέμνονται, γιατί τό ἄθροισμα τῶν ἀκτίνων τους εἶναι μεγαλύτερο ἀπό τή διάκεντρο ΑΒ. Ἄν ὀνομάσουμε Ε καί Ζ τά σημεῖα τομῆς τους, ἡ εὐθεία ΕΖ εἶναι (σύμφωνα μέ τήν προηγούμενη ἰδιότητα) ἡ μεσοκάθετος πού ζητᾶμε.



Ὑπενθυμίζουμε ὅτι κάθε σημεῖο τῆς μεσοκαθέτου ΕΖ ἰσαπέχει ἀπό τά ἄκρα τοῦ τμήματος ΑΒ. Ἔτσι κάθε κύκλος, πού γράφεται μέ κέντρο ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο Κ τῆς ΕΖ καί ἀκτίνα ΚΑ, διέρχεται ἀπό τά ἄκρα Α καί Β τοῦ τμήματος.

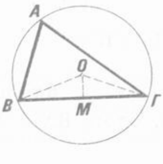
Τό περίκεντρο ἑνός τριγώνου.

108. Ἄς θεωρήσουμε τώρα ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ καί ἄς φέρουμε τίς μεσοκαθέτους τῶν δύο πλευρῶν του ΑΒ καί ΑΓ. Οἱ μεσοκάθετοι αὐτές τέμνονται σ' ἕνα σημεῖο Ο (γιατί τέμνονται οἱ κάθετες εὐθεῖες τους ΑΒ καί ΑΓ), τό ὁποῖο ἰσαπέχει τόσο ἀπό τά Α καί Β ὅσο καί ἀπό τά Β καί Γ. Ἀπό τίς ἰσότητες ὅμως ΟΑ = ΟΒ καί ΟΒ = ΟΓ βρίσκουμε ὅτι ΟΑ = ΟΓ, δηλαδή ὅτι τό Ο ἰσαπέχει ἀκόμη καί ἀπό τά σημεῖα Α καί Γ καί συνεπῶς θά βρίσκεται καί στή μεσοκάθετο τῆς πλευρᾶς ΑΓ. Δείξαμε λοιπόν ὅτι:

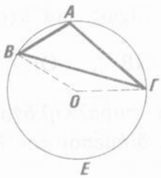
— Οἱ μεσοκάθετοι τῶν πλευρῶν ἑνός τριγώνου διέρχονται ἀπό τό ἴδιο σημεῖο.

Τό σημεῖο Ο, ἀπό τό ὁποῖο διέρχονται οἱ μεσοκάθετοι τῶν πλευρῶν ἑνός τριγώνου ΑΒΓ, λέγεται **περίκεντρο** τοῦ τριγώνου αὐτοῦ. Ἂν τώρα κατασκευάσουμε τόν κύκλο πού ἔχει κέντρο τό Ο καί ἀκτίνα ΟΑ, ὁ κύκλος αὐτός θά περάσει ἀπό τίς κορυφές Α,Β,Γ καί λέγεται **περιγεγραμμένος κύκλος** στό τρίγωνο ΑΒΓ. Τήν ἀκτίνα τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου θά τή σημειώνουμε μέ R.

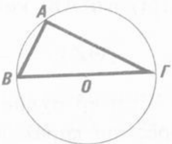
Σέ ὀξυγώνιο τρίγωνο τό περίκεντρο εἶναι ἐσωτερικό σημεῖο του (γιατί, βλ. σχ. 94) τά τόξα $\widehat{ΒΓ}, \widehat{ΓΑ}, \widehat{ΑΒ}$ εἶναι μικρότερα ἀπό ἡμικύκλιο καί συνεπῶς τό Ο



σχ. 94



σχ. 95



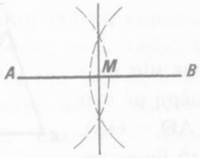
σχ. 96

εἶναι κοινό σημεῖο τῶν ἡμιεπιπέδων (ΒΓ,Α), (ΓΑ,Β), (ΑΒ,Γ). Στήν περίπτωση αὐτή ἔχουμε π.χ. $Β\widehat{Ο}Γ = 2\widehat{Α}$ καί, ἄν Μ εἶναι τό μέσο τῆς ΒΓ, $Β\widehat{Ο}Μ = Μ\widehat{Ο}Γ = \widehat{Α}$. Σέ ἀμβλυγώνιο τρίγωνο μέ ἀμβλεία γωνία τήν $\widehat{Α}$ τό περίκεντρο βρίσκεται ἔξω ἀπό τό τρίγωνο (ἀφοῦ τό τόξο $\widehat{ΒΕΓ}$ εἶναι μεγαλύτερο ἀπό ἡμικύκλιο)καί ἔχουμε $Β\widehat{Ο}Γ = 360° - 2\widehat{Α}$. Τέλος σέ ὀρθογώνιο τρίγωνο μέ κορυφή ὀρθῆς γωνίας τό Α τό περίκεντρο συμπίπτει μέ τό μέσο τῆς ὑποτείνουσας ΒΓ (σχ. 96).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 231–239

Μέσο εὐθύγραμμου τμήματος. Βαρύκεντρο τριγώνου.

109. Μέ τή γεωμετρική κατασκευή τῆς μεσοκαθέτου ἑνός εὐθύγραμμου τμήματος ΑΒ μποροῦμε νά βροῦμε καί τό μέσο του Μ, γιατί τό Μ θά εἶναι (βλ.



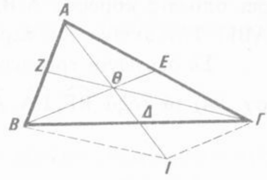
σχ. 97

σχ. 98

σχ. 97) σημεῖο τομῆς τοῦ ΑΒ μέ τή μεσοκάθετό του. Μία ἄλλη γεωμετρική κατασκευή τοῦ μέσου Μ τοῦ τμήματος ΑΒ ἔχουμε μέ τό πρόβλημα τῆς § 82 γιά ν = 2 (βλ. σχ. 98). Εἶναι φανερό ὅτι μέ κάθε μία ἀπό τίς παραπάνω κατασκευές μποροῦμε νά βροῦμε καί τίς διαμέσους ἑνός τριγώνου.

110. Ἂς κατασκευάσουμε σ' ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ τίς δύο διαμέσους του ΒΕ

καί ΓΖ. Ἐπειδή εἶναι $\Theta\widehat{B}\Gamma + \Theta\widehat{\Gamma}B < \widehat{B} + \widehat{\Gamma} < 180°$, οἱ δύο διάμεσοι τέμνονται σ' ἕνα ἐσωτερικό σημεῖο Θ τοῦ τριγώνου. Ἄν ἡ ΑΘ τέμνει τή ΒΓ στό σημεῖο Δ, θ' ἀποδείξουμε ὅτι ἡ ΑΔ εἶναι ἡ τρίτη διάμεσος τοῦ τριγώνου μας, δηλαδή ὅτι ΒΔ = ΔΓ.



Στήν ἡμιευθεία ΘΔ παίρνουμε τμῆμα ΘΙ = ΑΘ. Τότε οἱ ΘΖ καί ΘΕ συνδέουν τά μέσα δύο πλευρῶν στά τρίγωνα ΑΒΙ καί ΑΓΙ ἀντιστοίχως καί ἔχουμε

$$\Theta Z \mathrel{/\!/}= \frac{BI}{2} \Rightarrow \Gamma Z \mathrel{/\!/} IB \quad , \quad \Theta E \mathrel{/\!/}= \frac{\Gamma I}{2} \Rightarrow BE \mathrel{/\!/} I\Gamma .$$

Ἔτσι τό σχῆμα ΘΓΙΒ εἶναι παραλληλόγραμμο (γιατί ἔχει τίς ἀπέναντι πλευρές του παράλληλες) καί οἱ διάμεσοί του διχοτομοῦνται, ὁπότε ΒΔ = ΔΓ. Δείξαμε λοιπόν ὅτι:

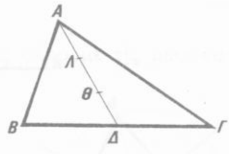
Οἱ διάμεσοι ἑνός τριγώνου διέρχονται ἀπό τό ἴδιο σημεῖο.

Τό σημεῖο Θ, στό ὁποῖο τέμνονται οἱ διάμεσοι τοῦ ΑΒΓ, λέγεται **βαρύκεντρο** τοῦ τριγώνου (ἤ καί **κέντρο βάρους** του).

Ἀπό τό παραλληλόγραμμο ΒΘΓΙ ἔχουμε ἀκόμη $\Theta\Delta = \Delta I \Rightarrow \Theta\Delta = \frac{1}{2}\,\Theta I = \frac{1}{2}\,\Theta A \Rightarrow A\Delta - A\Theta = \frac{1}{2}\,\Theta A \Rightarrow A\Delta = \frac{3}{2}\,\Theta A$ καί τελικά $\Theta A = \frac{2}{3}\,A\Delta$. Ὁμοίως βρίσκουμε (ἐπειδή $\Theta Z = \frac{1}{2}\,BI = \frac{1}{2}\,\Gamma\Theta$ καί $\Theta E = \frac{1}{2}\,I\Gamma = \frac{1}{2}\,B\Theta$) ὅτι $\Theta B = \frac{2}{3} BE$ καί $\Theta\Gamma = \frac{2}{3}\,\Gamma E$. Οἱ ἰσότητες

$$\Theta A = \frac{2}{3}\,A\Delta,\ \Theta B = \frac{2}{3}\,BE,\ \Theta\Gamma = \frac{2}{3}\,\Gamma Z$$

ἐκφράζουν ὅτι **τό βαρύκεντρο Θ ἑνός τριγώνου ΑΒΓ ἀπέχει ἀπό κάθε κορυφή του τά $\frac{2}{3}$ τῆς ἀντίστοιχης διαμέσου.**



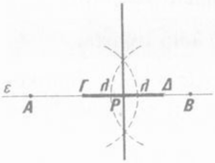
Καταλαβαίνουμε λοιπόν ὅτι, ἄν χωρίσουμε μία διάμεσο τοῦ τριγώνου, π.χ. τήν ΑΔ, σέ τρία ἴσα μέρη μέ δύο σημεῖα Λ καί Θ (δηλαδή ἄν πάρουμε ΑΛ = ΛΘ = ΘΔ), τό πλησιέστερο στήν πλευρά σημεῖο Θ εἶναι τό βαρύκεντρο τοῦ ΑΒΓ. Ἔτσι τό βαρύκεντρο ἑνός τριγώνου εἶναι πάντοτε ἐσωτερικό σημεῖο του.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 240–243

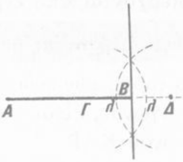
Κατασκευή εὐθείας κάθετης σέ ἄλλη.

111. Θά κατασκευάσουμε τώρα τήν εὐθεία πού εἶναι κάθετη σέ μιά δοσμέ-

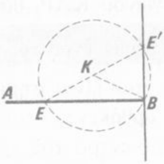
νη εὐθεία ε (ἤ σ' ἕνα δοσμένο εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ) καί διέρχεται ἀπό ἕνα ὁρισμένο σημεῖο Ρ. Ἄν τό Ρ ἀνήκει στήν ε (ἤ στό τμῆμα ΑΒ), παίρνουμε μέ τό δια-



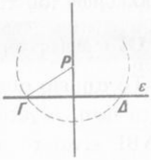
σχ. 99.



σχ. 100



σχ 101



σχ. 102

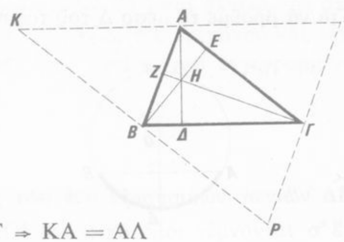
βήτη μας ἑκατέρωθεν τοῦ Ρ δύο τμήματα ΡΓ καί ΡΔ ἴσα μέ ἕνα εὐθαίρετο μῆκος λ (βλ. σχ. 99) καί κατόπι φέρνουμε τή μεσοκάθετο τοῦ τμήματος ΓΔ. Εἶναι φανερό ὅτι ἡ ἴδια κατασκευή ἰσχύει καί ὅταν ζητᾶμε εὐθεία κάθετη στό ἄκρο εὐθύγραμμου τμήματος ΑΒ (βλ. σχ. 100). Στήν περίπτωση αὐτή μποροῦμε ἀκόμη νά φέρουμε ἕνα πλάγιο τμῆμα ΚΒ (βλ. σχ. 101), νά γράψουμε τόν κυκλ(Κ,ΚΒ), ὁ ὁποῖος θά τέμνει τό ΑΒ καί σ' ἕνα ἄλλο σημεῖο Ε καί νά πάρουμε τό Ε' διαμετρικό τοῦ Ε, ὁπότε $E'B \perp AB$.

Ἄν τό Ρ δέν ἀνήκει στήν ε, φέρνουμε ἀπό τό Ρ πρός τήν εὐθεία ε ἕνα πλάγιο τμῆμα ΡΓ (βλ. σχ. 102) καί κατασκευάζουμε τόν κυκλ(Ρ,ΡΓ) ὁ ὁποῖος θά τέμνει τήν ε σ' ἕνα ἀκόμη σημεῖο Δ (γιατί ἡ ἀπόσταση τοῦ κέντρου Ρ ἀπό τήν ε εἶναι μικρότερη ἀπό τήν ἀκτίνα ΡΓ). Ἡ μεσοκάθετος τῆς χορδῆς ΓΔ τοῦ κύκλου αὐτοῦ εἶναι ἡ ζητούμενη εὐθεία (γιατί περνάει ἀπό τό κέντρο Ρ τοῦ κύκλου).

Μέ αὐτή τή γεωμετρική κατασκευή μποροῦμε νά φέρουμε ἀπό τίς κορυφές ἑνός τριγώνου εὐθεῖες κάθετες στίς ἀπέναντι πλευρές του καί νά βροῦμε ἔτσι τά ὕψη του.

Τό ὀρθόκεντρο ἑνός τριγώνου.

112. Ἄς θεωρήσουμε ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ καί ἄς κατασκευάσουμε μέ τόν παραπάνω τρόπο τά ὕψη του ΑΔ, ΒΕ,ΓΖ. Ἄς φέρουμε ἀκόμη ἀπό τίς κορυφές Α,Β,Γ τοῦ τριγώνου εὐθεῖες παράλληλες πρός τίς ἀπέναντι πλευρές του καί ἄς ὑποθέσουμε ὅτι οἱ παράλληλες αὐτές τέμνονται στά σημεῖα Κ, Λ, Ρ. Ἐπειδή τά τετράπλευρα ΚΑΓΒ, ΑΛΓΒ καί ΑΓΡΒ εἶναι παραλληλόγραμμα, ἔχουμε



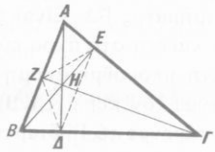
$$KA = B\Gamma\ ,\ A\Lambda = B\Gamma \Rightarrow KA = A\Lambda$$
$$KB = A\Gamma\ ,\ BP = A\Gamma \Rightarrow KB = BP$$
$$\Lambda\Gamma = AB\ ,\ \Gamma P = AB \Rightarrow \Lambda\Gamma = \Gamma P,$$

δηλαδή τά Α,Β,Γ εἶναι μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου ΚΛΡ. Παρατηροῦμε τώρα ὅτι οἱ εὐθεῖες ΑΔ, ΒΕ,ΓΖ εἶναι ἀντιστοίχως κάθετες στίς πλευρές ΚΛ,ΚΡ,ΛΡ τοῦ τριγώνου ΚΛΡ (ἀφοῦ εἶναι κάθετες στίς παράλληλές τους ΒΓ,ΑΓ,ΑΒ) καί μάλιστα στά μέσα τους. Ἀφοῦ λοιπόν οἱ εὐθεῖες ΑΔ,ΒΕ,ΓΖ εἶναι μεσοκάθετοι τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου ΚΛΡ, θά διέρχονται ἀπό ἕνα σημεῖο καί ἔτσι:

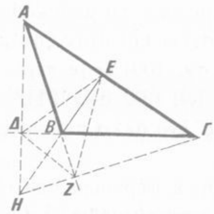
Οἱ εὐθεῖες τῶν ὑψῶν ἑνός τριγώνου διέρχονται ἀπό τό ἴδιο σημεῖο.

Τό σημεῖο αὐτό, πού εἶναι σημεῖο τομῆς τῶν εὐθειῶν, στίς ὁποῖες βρίσκονται τά ὕψη, λέγεται **ὀρθόκεντρο** τοῦ τριγώνου. Εἶναι φανερό ὅτι τό ὀρθόκεντρο τοῦ ΑΒΓ εἶναι τό περίκεντρο τοῦ τριγώνου ΚΛΡ.

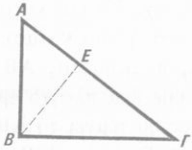
Σέ ὀξυγώνιο τρίγωνο τά ὕψη βρίσκονται σ' ἐσωτερικές ἡμιευθεῖες τῶν γωνιῶν του καί τό ὀρθόκεντρο Η εἶναι ἐσωτερικό σημεῖο του (βλ. σχ. 103). Σέ ἀμ-



σχ. 103



σχ. 104

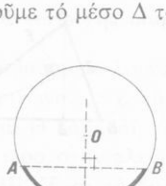


σχ. 105

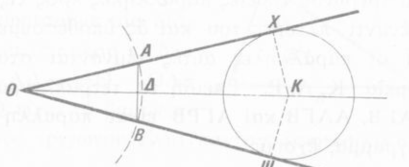
βλυγώνιο τρίγωνο τά δύο ὕψη βρίσκονται σ' ἐξωτερικές ἡμιευθεῖες τῶν (ὀξειῶν) γωνιῶν του καί τό ὀρθόκεντρο του Η βρίσκεται ἔξω ἀπό τό τρίγωνο (βλ. σχ. 104), ἐνῶ σέ ὀρθογώνιο τρίγωνο τά δύο ὕψη συμπίπτουν μέ τίς κάθετες πλευρές του καί τό ὀρθόκεντρό του συμπίπτει μέ τήν κορυφή τῆς ὀρθῆς γωνίας. Στίς δύο πρῶτες περιπτώσεις τό τρίγωνο ΔΕΖ, πού ἔχει κορυφές τά ἴχνη τῶν ὑψῶν, λέγεται **ὀρθικό τρίγωνο** τοῦ ΑΒΓ.

Μέσο τόξου. Κατασκευή τῆς διχοτόμου γωνίας.

113. Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι μᾶς δίνεται ἕνας κυκλ(Ο,ρ) καί ἕνα τόξο του $\widehat{AB}$. Γιά νά βροῦμε τό μέσο Δ τοῦ τόξου ΑΒ, δέν ἔχουμε παρά νά φέρουμε πάλι τή με-



σχ. 106



σχ. 107

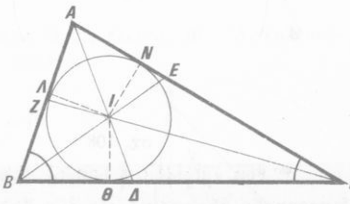
σοκάθετο τῆς χορδῆς ΑΒ (βλ. σχ. 106), ἀφοῦ ξέρουμε ὅτι ἡ μεσοκάθετος αὐτή θά περάσει τόσο ἀπό τό κέντρο τοῦ κύκλου ὅσο καί ἀπό τό μέσο τοῦ τόξου.

Σ' αὐτή τή γεωμετρική κατασκευή στηρίζεται καί ἡ κατασκευή τῆς διχοτόμου μιᾶς γωνίας $X\widehat{O}\Psi$ (βλ. σχ. 107). Πραγματικά, ἄν κάνουμε τή γωνία $X\widehat{O}\Psi$ ἐπίκεντρη σ'ἕναν κυκλ(Ο,ρ), καλέσουμε $\widehat{AB}$ τό τόξο, στό ὁποῖο βαίνει, καί Δ τό μέσο του, ἡ ἡμιευθεία ΟΔ θά εἶναι ἡ διχοτόμος πού ζητᾶμε. Ἔτσι βλέπουμε πάλι ὅτι ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας μας βρίσκεται στή μεσοκάθετο τῆς χορδῆς ΑΒ.

Ὑπενθυμίζεται ὅτι ὅλα τά σημεῖα τῆς διχοτόμου ΟΔ ἰσαπέχουν ἀπό τίς πλευρές ΟΧ καί ΟΨ τῆς γωνίας. Ἄν κατασκευάσουμε λοιπόν κύκλο πού νά ἔχει κέντρο ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο Κ τῆς διχοτόμου καί ἀκτίνα τήν ἀπόσταση τοῦ Κ ἀπό μιά πλευρά, ὁ κύκλος αὐτός θά ἐφάπτεται καί στίς δύο πλευρές τῆς γωνίας.

Τό ἔγκεντρο ἑνός τριγώνου.

114. Ἄς θεωρήσουμε ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ καί ἄς φέρουμε τίς διχοτόμους ΒΕ καί ΓΖ τῶν γωνιῶν του $\widehat{B}$ καί $\widehat{\Gamma}$. Οἱ δύο διχοτόμοι τέμνονται σ'ἕνα σημεῖο Ι (γιατί εἶναι $E\widehat{B}\Gamma + Z\widehat{\Gamma}B = \frac{\widehat{B}}{2} + \frac{\widehat{\Gamma}}{2} = \frac{\widehat{B}+\widehat{\Gamma}}{2} < \widehat{B} + \widehat{\Gamma} < 180°$) τό ὁποῖο ἰσαπέχει τόσο ἀπό τίς πλευρές τῆς γωνίας $\widehat{B}$ ὅσο καί ἀπό τίς πλευρές τῆς γωνίας $\widehat{\Gamma}$. Ἔτσι ἔχουμε τίς



ἰσότητες ΙΘ = ΙΛ καί ΙΘ = ΙΝ, ἀπό τίς ὁποῖες βρίσουμε ΙΛ = ΙΝ, δηλαδή βρίσκουμε ὅτι τό Ι ἰσαπέχει καί ἀπό τίς πλευρές τῆς γωνίας $\widehat{A}$ καί συνεπῶς θά ἀνήκει καί στή διχοτόμο ΑΔ τῆς $\widehat{A}$. Δείξαμε λοιπόν ὅτι:

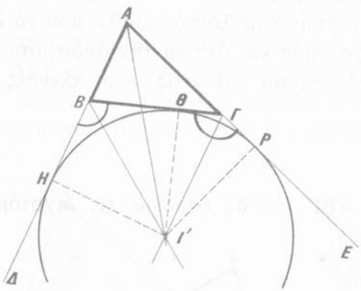
Οἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν ἑνός τριγώνου διέρχονται ἀπό τό ἴδιο σημεῖο.

Τό σημεῖο Ι, ἀπό τό ὁποῖο διέρχονται οἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν ἑνός τριγώνου ΑΒΓ, λέγεται **ἔγκεντρο** τοῦ τριγώνου αὐτοῦ. Ἐπειδή τό Ι ἰσαπέχει ἀπό τίς τρεῖς πλευρές τοῦ τριγώνου, ὁ κύκλος πού ἔχει κέντρο τό Ι καί ἀκτίνα τήν ἀπόστασή του ἀπό μία πλευρά ἐφάπτεται στίς τρεῖς πλευρές τοῦ τριγώνου καί λέγεται **ἐγγεγραμμένος κύκλος** τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Τήν ἀκτίνα τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου θά τήν σημειώνουμε μέ ρ.

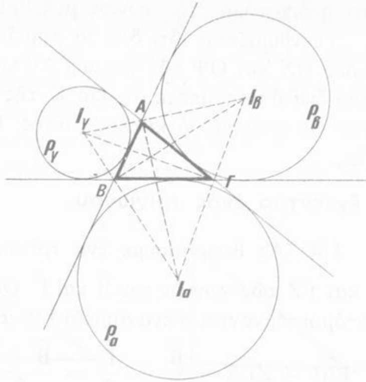
Τά παράκεντρα ἑνός τριγώνου.

115. Ἄς φέρουμε τώρα τίς διχοτόμους τῶν δύο ἐξωτερικῶν γωνιῶν $\Delta\widehat{B}\Gamma$ καί $B\widehat{\Gamma}E$ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ (βλ. σχ. 108). Οἱ δύο διχοτόμοι τέμνονται σ' ἕνα σημεῖο Ι' (γιατί εἶναι $I'\widehat{B}\Gamma + I'\widehat{\Gamma}B = \frac{\widehat{A}+\widehat{\Gamma}}{2} + \frac{\widehat{A}+\widehat{B}}{2} = \widehat{A} + \frac{\widehat{B}}{2} + \frac{\widehat{\Gamma}}{2} < 180°$) τό ὁποῖο ἰσαπέχει ἀπό τίς πλευρές τῶν γωνιῶν αὐτῶν. Ἔτσι ἔχουμε Ι'Η=Ι'Θ καί Ι'Θ = Ι'Ρ καί ἀπό τίς ἰσότητες αὐτές βρίσκουμε Ι'Η=Ι'Ρ, δηλαδή βρίσκου-

με ὅτι τό Ι΄ ἰσαπέχει ἀπό τίς πλευρές τῆς γωνίας $\widehat{Α}$ καί συνεπῶς θά ἀνήκει στή διχοτόμο της. Δείξαμε λοιπόν ὅτι:



σχ. 108



σχ. 109

Σ' ἕνα τρίγωνο ἡ εὐθεία, πού διχοτομεῖ μία γωνία του, καί οἱ εὐθεῖες, πού διχοτομοῦν ἐξωτερικά τίς δύο ἄλλες γωνίες του, διέρχονται ἀπό τό ἴδιο σημεῖο.

Τό σημεῖο Ι΄, στό ὁποῖο τέμνονται ἡ εὐθεία πού διχοτομεῖ τήν $\widehat{Α}$ καί οἱ εὐθεῖες πού διχοτομοῦν τίς ἐξωτερικές γωνίες του $\widehat{Β}$ καί $\widehat{Γ}$, λέγεται **παράκεντρο** τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Ἐπειδή τό παράκεντρο Ι΄ ἰσαπέχει ἀπό τίς πλευρές τῶν γωνιῶν $\widehat{Α}$,$\widehat{ΔΒΓ}$,$\widehat{ΒΓΕ}$, ὁ κύκλος, πού γράφεται μέ κέντρο τό Ι΄ καί ἀκτίνα τήν ἀπόστασή του Ι΄Θ ἀπό τή ΒΓ, θά ἐφάπτεται στήν πλευρά ΒΓ καί στίς προεκτάσεις τῶν ΑΒ καί ΑΓ. Ὁ κύκλος αὐτός λέγεται **παρεγγεγραμμένος κύκλος** τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

Εἶναι φανερό ὅτι ἔχουμε τρεῖς παρεγγεγραμμένους κύκλους στό τρίγωνο ΑΒΓ, πού καθένας τους ἐφάπτεται σέ μιά πλευρά τοῦ τριγώνου καί στίς προεκτάσεις τῶν δύο ἄλλων (βλ. σχ. 109). Τά κέντρα τους (πού εἶναι παράκεντρα τοῦ τριγώνου) θά σημειώνονται μέ $I_α$, $I_β$, $I_γ$ καί οἱ ἀκτίνες τους ἀντίστοιχα μέ $ρ_α$,$ρ_β$,$ρ_γ$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 244-251

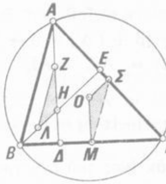
ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

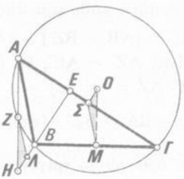
227. Τό περίκεντρο Ο ἑνός τριγώνου ΑΒΓ ἀπέχει ἀπό κάθε πλευρά του τό μισό τῆς ἀποστάσεως τοῦ ὀρθοκέντρου Η ἀπό τήν ἀπέναντι κορυφή.

Λύση: Ἄν ΟΜ, ΟΣ εἶναι οἱ ἀποστάσεις τοῦ Ο ἀπό τίς πλευρές ΒΓ, ΑΓ καί Ζ,Λ εἶναι τά μέσα τῶν ΗΑ, ΗΒ, θά δείξουμε ὅτι ΟΜ = ΗΖ καί ΟΣ = ΗΛ.

Ἀπό τά τρίγωνα ΑΗΒ καί ΑΒΓ ἔχουμε $ΖΛ \mathbin{//=} \frac{ΑΒ}{2}$, $ΣΜ \mathbin{//=} \frac{ΑΒ}{2} \Rightarrow ΖΛ \mathbin{//=}$

ΣΜ. Τά τρίγωνα ὅμως ΖΗΛ καί ΣΟΜ ἔχουν καί τίς ἄλλες πλευρές τους παράλληλες (γιατί $OM \perp B\Gamma$, $A\Delta \perp B\Gamma \Rightarrow OM // A\Delta$ καί $O\Sigma \perp A\Gamma$, $BE \perp A\Gamma \Rightarrow O\Sigma // BE$) καί συνεπῶς

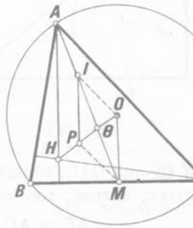




$O\widehat{\Sigma}M = H\widehat{\Lambda}Z$ καί $O\widehat{M}\Sigma = H\widehat{Z}\Lambda$. Ὥστε τριγΟΜΣ = τριγΗΖΛ καί ἄρα $OM = HZ = AH/2$ καί $O\Sigma = H\Lambda = HB/2$.

228. Ἄν Ο,Θ,Η εἶναι ἀντιστοίχως τό περίκεντρο, τό κέντρο βάρους καί τό ὀρθόκεντρο ἑνός τριγώνου ΑΒΓ, τό κέντρο βάρους Θ εἶναι σημεῖο τοῦ εὐθύγραμμου τμήματος ΟΗ τέτοιο, ὥστε $H\Theta = \dfrac{2}{3} HO$.

Λύση: Θεωροῦμε τά δύο σημεῖα Ο καί Η καί τό μέσο Μ τῆς πλευρᾶς ΒΓ. Ἄν καλέσουμε Θ τό σημεῖο τομῆς τῶν ΑΜ καί ΟΗ καί Ι,Ρ τά μέσα τῶν ΘΑ καί ΘΗ, θά ἔχουμε (βλ. ἄκσ.227)



$$OM // = \frac{AH}{2}\ ,\quad IP // = \frac{AH}{2} \Rightarrow OM // = IP.$$

Ὥστε τό ΙΡΜΟ εἶναι παραλληλόγραμμο καί συνεπῶς

$$\Theta M = \Theta I = IA \Rightarrow A\Theta = \frac{2}{3}\ AM \Rightarrow \Theta = \text{κέντρο βάρους } AB\Gamma$$

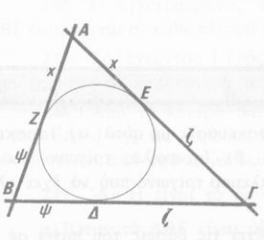
$$\text{καί } O\Theta = \Theta P = PH \Rightarrow H\Theta = \frac{2}{3} HO$$

Ἡ εὐθεία στήν ὁποία ἀνήκουν τά σημεῖα Ο, Θ, Η λέγεται «εὐθεία τοῦ Euler».

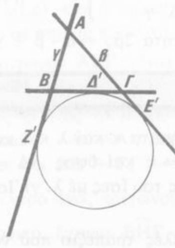
229. Ὁ ἐγγεγραμμένος κυκλ(Ι,ρ) τριγώνου ΑΒΓ ἐφάπτεται στίς πλευρές ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ στά σημεῖα Δ.Ε,Ζ ἀντιστοίχως καί ὁ παρεγγεγραμμένος κυκλ(I_α,ρ_α) ἐφάπτεται στίς ἴδιες πλευρές στά Δ΄, Ε΄,Ζ΄. Ἄν εἶναι $\tau = \dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$, νά δείξετε ὅτι:

α) $AZ = AE = \tau-\alpha$, $B\Delta = BZ = \tau-\beta$, $\Gamma\Delta = \Gamma E = \tau-\gamma$
β) $AZ' = AE' = \tau$
γ) $ZZ' = EE' = \alpha$, $\Delta\Delta' = \beta-\gamma$.

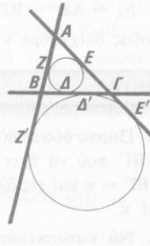
Λύση: α) Καλοῦμε $AZ = AE = \chi$, $B\Delta = BZ = \psi$, $\Gamma\Delta = \Gamma E = \zeta$. Τότε ἔχουμε (βλ. σχ. 110)



σχ. 110



σχ. 111



σχ. 112

(I) $\psi+\zeta=\alpha,\quad \zeta+\chi=\beta,\quad \chi+\psi=\gamma.$

Προσθέτοντας αὐτές βρίσκουμε $2\chi+2\psi+2\zeta=\alpha+\beta+\gamma=2\tau \Rightarrow \chi+\psi+\zeta=\tau$. Ἂν τώρα ἀφαιρέσουμε ἀπό αὐτή κάθε μιά ἀπό τίς (I), ἔχουμε $\chi=\tau-\alpha,\ \psi=\tau-\beta,\ \zeta=\tau-\gamma$.

β) $AZ'+AE'=[AB+BZ']+[A\Gamma+\Gamma E']=[\gamma+B\Delta']+[\beta+\Gamma\Delta']=\alpha+\beta+\gamma=2\tau$. Ἐπειδή ὅμως εἶναι $AZ'=AE'$, θά ἔχουμε $2AZ'=2AE'=2\tau \Rightarrow AZ'=AE'=\tau$.

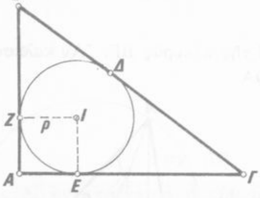
γ) $ZZ'=AZ'-AZ=\tau-[\tau-\alpha]=\alpha$

$$\Delta\Delta'=B\Delta'-B\Delta=BZ'-[\tau-\beta]=[AZ'-AB]-[\tau-\beta]=[\tau-\gamma]-[\tau-\beta]=\beta-\gamma.$$

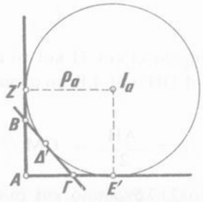
230. Σέ κάθε ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{A}=90^0$) γιά τίς ἀκτίνες τοῦ ἐγγεγραμμένου καί τῶν παρεγγεγραμμένων κύκλων ἰσχύουν οἱ ἰσότητες:

$$2\rho=\beta+\gamma-\alpha,\quad 2\rho_\alpha=\alpha+\beta+\gamma,\quad 2\rho_\beta=\alpha+\beta-\gamma,\quad 2\rho_\gamma=\alpha-\beta+\gamma.$$

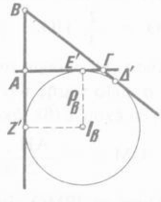
Λύση: α) Ἂν ὁ ἐγγεγραμμένος κύκλος ἐφάπτεται στίς πλευρές ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ στά σημεῖα



σχ. 113



σχ. 114



σχ. 115

Δ,Ε,Ζ (βλ. σχ. 113), τό σχῆμα ΑΖΙΕ εἶναι τετράγωνο (ἀφοῦ τρεῖς γωνίες του εἶναι ὀρθές καί δύο διαδοχικές πλευρές του ἴσες) καί συνεπῶς $AE=AZ=\rho$. Ἔχουμε λοιπόν

$$\left.\begin{aligned}\rho&=AE=A\Gamma-E\Gamma=\beta-\Gamma\Delta\\ \rho&=AB-BZ=\gamma-B\Delta\end{aligned}\right\}\Rightarrow\ 2\rho=\beta+\gamma-(\Gamma\Delta+B\Delta)=\beta+\gamma=\alpha.$$

β) Ἂν ὁ κυκλ(I_α,ρ_α) ἐφάπτεται στίς πλευρές ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ στά σημεῖα Δ', Ε', Ζ' (βλ. σχ. 114) τό σχῆμα $AZ'I_\alpha E'$ εἶναι πάλι τετράγωνο καί ἔχουμε

$$\left.\begin{aligned}\rho_\alpha&=AE'=A\Gamma+\Gamma E'=\beta+\Gamma\Delta'\\ \rho_\alpha&=AZ'=AB+BZ'=\gamma+B\Delta'\end{aligned}\right\}\Rightarrow\ 2\rho_\alpha=\beta+\gamma+(\Gamma\Delta'+B\Delta')=\beta+\gamma+\alpha.$$

γ) Ἂν ὁ κυκλ(I_β,ρ_β) ἐφάπτεται στίς πλευρές ΒΓ, ΓΑ, ΒΑ στά Δ', Ε', Ζ' (βλ. σχ. 115), τό σχῆμα $AZ'I_\beta E'$ εἶναι πάλι τετράγωνο καί ἔχουμε

$$\left.\begin{aligned}\rho_\beta&=AE'=A\Gamma-E'\Gamma=\beta-\Gamma\Delta'\\ \rho_\beta&=AZ'=BZ'-BA=B\Delta'-\gamma\end{aligned}\right\}\Rightarrow\ 2\rho_\beta=\beta-\gamma+[B\Delta'-\Gamma\Delta']=\beta-\gamma+\alpha.$$

Ὁμοίως δείχνουμε καί τήν ἰσότητα $2\rho_\gamma=\alpha-\beta+\gamma$.

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ*

231. Πάρτε δύο εὐθύγραμμα τμήματα κ καί λ καί κατασκευάστε μέ αὐτά: α) Ἰσοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ πού νά ἔχει βάση ΒΓ = κ καί ὕψος ΑΔ = λ. β) Ἰσοσκελές τρίγωνο πού νά ἔχει βάση ΒΓ = κ καί τίς ἄλλες πλευρές του ἴσες μέ λ. γ) Ἰσόπλευρο τρίγωνο πού νά ἔχει πλευρές ἴσες μέ κ.

232. Νά κατασκευάσετε ἰσοσκελές τραπέζιο πού νά ἔχει τίς βάσεις του πάνω σέ δύο δοσμένες παράλληλες εὐθεῖες καί ἴσες μέ δύο δοσμένα τμήματα κ καί λ.

233. Νά κατασκευάσετε (μέ κανόνα καί διαβήτη) τήν ἐφαπτομένη ἑνός κυκλ(Ο,ρ) σ' ἕνα σημεῖο Α τοῦ κύκλου.

234. Νά κατασκευάσετε χορδή ἑνός κυκλ(Ο,ρ) ἡ ὁποία νά ἔχει δοσμένο σημεῖο Δ γιά μέσο της.

235. Θεωροῦμε τρίγωνο ΑΒΓ καί τίς ἐφαπτόμενες τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου του στίς κορυφές του. Ἄν οἱ ἐφαπτόμενες αὐτές τέμνονται στά Κ,Λ,Μ, νά δείξετε ὅτι κάθε γωνία τοῦ τριγώνου ΚΛΜ εἶναι παραπληρωματική τοῦ διπλασίου μιᾶς γωνίας τοῦ ΑΒΓ.

236. Νά δείξετε ὅτι ἴσα τρίγωνα ἔχουν ἴσους περιγεγραμμένους κύκλους.

237. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ καί φέρνουμε ἀπό τίς κορυφές Β καί Γ εὐθεῖες κάθετες στή διάμετρο ΑΕ τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου του. Ἄν οἱ κάθετες αὐτές τέμνουν τόν περιγεγραμμένο κύκλο στά Β΄ καί Γ΄, νά δείξετε ὅτι ἡ χορδή Β΄Γ΄ εἶναι ἴση μέ τήν πλευρά ΒΓ καί διέρχεται ἀπό τό σημεῖο τομῆς τῶν ΒΓ καί ΑΕ.

238. Θεωροῦμε τρίγωνο ΑΒΓ καί τίς χορδές ΒΒ΄ καί ΓΓ΄ τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου του, τίς παράλληλες πρός τίς πλευρές ΑΓ καί ΒΑ. Νά δείξετε ὅτι ἡ χορδή Β΄Γ΄ εἶναι παράλληλη πρός τήν ἐφαπτομένη τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου στό Α.

239. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, τό ὕψος του ΑΔ καί ἡ διάμετρος ΑΕ τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου του. Νά δείξετε ὅτι:

α) Οἱ γωνίες $\widehat{ΕΑΓ}$ καί $\widehat{ΒΑΔ}$ εἶναι ἴσες.

β) Ἡ γωνία $\widehat{ΔΑΕ}$ εἶναι ἴση μέ τή διαφορά τῶν γωνιῶν $\widehat{Β}$ καί $\widehat{Γ}$.

γ) Ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας $\widehat{Α}$ διχοτομεῖ καί τή γωνία $\widehat{ΔΑΕ}$.

240. Ἄν σ' ἕνα τρίγωνο δύο διάμεσοι εἶναι ἴσες, τό τρίγωνο εἶναι ἰσοσκελές.

241. Θεωροῦμε τρίγωνο ΑΒΓ καί τίς διαμέσους του ΑΔ, ΒΕ,ΓΖ πού τέμνονται στό Θ. Ἄν Κ,Λ,Μ εἶναι τά μέσα τῶν ΘΑ, ΘΒ, ΘΓ, νά δείξετε ὅτι τό τρίγωνο ΚΛΜ εἶναι ἴσο μέ τό ΔΕΖ.

242. Στίς προεκτάσεις τῶν διαμέσων ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ ἑνός τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε τμήματα ΔΚ = ΔΘ, ΕΛ = ΕΘ, ΖΜ = ΖΘ, ὅπου Θ εἶναι τό κέντρο βάρους του.Νά δείξετε ὅτι τό τρίγωνο ΚΛΜ εἶναι ἴσο μέ τό ΑΒΓ.

243. Νά δείξετε ὅτι, ἄν δύο τρίγωνα ἔχουν ἴσες μία πρός μία τίς διαμέσους τους, εἶναι ἴσα.

244. Ἄν ὁ ἐγγεγραμμένος κύκλος ἑνός τριγώνου ΑΒΓ ἐφάπτεται σέ μία πλευρά του στό μέσο της, νά δείξετε ὅτι τό τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελές.

245. Θεωροῦμε τρίγωνο ΑΒΓ ἐγγεγραμμένο σέ κυκλ(Ο,R) καί καλοῦμε Α΄,Β΄,Γ΄ τά μέσα τῶν τόξων $\widehat{ΒΓ}$, $\widehat{ΓΑ}$, $\widehat{ΑΒ}$ τοῦ κυκλ(Ο,R). Νά δείξετε ὅτι:

α) Οἱ εὐθεῖες ΑΑ΄, ΒΒ΄, ΓΓ΄ διέρχονται ἀπό ἕνα σημεῖο Ι.

β) Ἡ εὐθεία ΑΑ΄ εἶναι κάθετη στή Β΄Γ΄.

γ) Τό Ι εἶναι ὀρθόκεντρο τοῦ Α΄Β΄Γ΄.

246. Ὁ ἐγγεγραμμένος κυκλ(Ι,ρ) καί ὁ παρεγγεγραμμένος κυκλ($Ι_α,ρ_α$) ἑνός τριγώνου ΑΒΓ ἐφάπτονται σέ κάθε πλευρά του σέ σημεῖα πούεἶναι συμμετρικά ὡς πρός τό μέσο τῆς πλευρᾶς.

247. Τό ἔγκεντρο Ι ἑνός τριγώνου ΑΒΓ εἶναι ὀρθόκεντρο τοῦ τριγώνου $Ι_αΙ_βΙ_γ$, πού ἔχει κορυφές τά παράκεντρα τοῦ ΑΒΓ.

248. Ἀπό τό κέντρο βάρους Θ ἑνός τριγώνου ΑΒΓ φέρνουμε εὐθεία ε πού ἔχει πρός τό ἴδιο μέρος της τίς κορυφές Β καί Γ. Ἄν ΑΑ΄, ΒΒ΄, ΓΓ΄ εἶναι οἱ ἀποστάσεις τῶν κορυφῶν τοῦ τριγώνου ἀπό τήν ε, νά δείξετε ὅτι ΒΒ΄ + ΓΓ΄ = ΑΑ΄.

249. Ἄν Η εἶναι τό ὀρθόκεντρο ἑνός τριγώνου ΑΒΓ, νά δείξετε ὅτι:

α) Ὅταν τό ΑΒΓ εἶναι ὀξυγώνιο, ἔχουμε $\widehat{ΒΗΓ} = 180° - \widehat{Α}$.

β) Ὅταν τό ΑΒΓ εἶναι ἀμβλυγώνιο μέ $\widehat{Α} > 90°$, ἔχουμε $\widehat{ΒΗΓ} = 180° - \widehat{Α}$.

γ) Ὅταν τό ΑΒΓ εἶναι ἀμβλυγώνιο μέ $\widehat{B} > 90°$ ἤ $\widehat{\Gamma} > 90°$, ἔχουμε $B\widehat{H}\Gamma = \widehat{A}$.

250. Θεωροῦμε τρίγωνο ΑΒΓ ἐγγεγραμμένο σέ κυκλ(Ο,R) καί τά ὕψη του ΑΔ, ΒΕ,ΓΖ, τά ὁποῖα τέμνονται στό Η. Ἄν οἱ εὐθεῖες ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ τέμνουν τόν κυκλ(Ο,R) στά σημεῖα Κ,Λ,Ρ ἀντιστοίχως, νά δείξετε ὅτι:

α) Τά Κ,Λ,Ρ εἶναι συμμετρικά τοῦ Η ὡς πρός τίς πλευρές ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ.

β) Οἱ κορυφές Α,Β,Γ τοῦ τριγώνου εἶναι μέσα τῶν τόξων $\overset{\frown}{\Lambda P}$, $\overset{\frown}{PK}$, $\overset{\frown}{K\Lambda}$.

γ) Τά τρίγωνα ΚΒΓ, ΛΓΑ, ΡΑΒ εἶναι ἀντιστοίχως ἴσα μέ τά ΗΒΓ, ΗΓΑ, ΗΑΒ.

δ) Οἱ περιγεγραμμένοι κύκλοι στά τρίγωνα ΗΒΓ, ΗΓΑ, ΗΑΒ εἶναι ἴσοι μέ τόν κυκλ(Ο,R) καί συνεπῶς ἴσοι καί μεταξύ τους.

251. Ἄν $I, I_\alpha, I_\beta, I_\gamma$ εἶναι τό ἔγκεντρο καί τά παράκεντρα ἑνός τριγώνου ΑΒΓ, νά δειχθεῖ ὅτι:

$$B\widehat{I}\Gamma = 90° + \frac{\widehat{A}}{2}, \quad B\widehat{I_\alpha}\Gamma = 90° - \frac{\widehat{A}}{2}, \quad B\widehat{I_\beta}\Gamma = B\widehat{I_\gamma}\Gamma = \frac{\widehat{A}}{2}.$$

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ**

252. Δίνεται ἕνα ἰσόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ ἐγγεγραμμένο σέ κυκλ(Ο,R) καί ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο Μ τοῦ τόξου $\overset{\frown}{B\Gamma}$. Νά δείξετε ὅτι ΜΑ = ΜΒ + ΜΓ.

253. Θεωροῦμε ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ καί τή διάμετρο ΡΜ τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου του τήν κάθετη στήν πλευρά ΒΓ (Ρ εἶναι τό μέσο τοῦ τόξου $\overset{\frown}{BA\Gamma}$). Ἄν Ρ′ καί Μ′ εἶναι οἱ προβολές τῶν σημείων Ρ καί Μ στήν πλευρά ΑΒ, νά δείξετε ὅτι:

α) ΑΡ′ = ΒΜ′ β) ΑΜ′ - ΑΡ′ = ΑΒ γ) ΑΜ′ + ΑΡ′ = ΑΓ.

254. Θεωροῦμε τρίγωνο ΑΒΓ καί τά μέσα Δ,Ε,Ζ τῶν πλευρῶν του ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ. Στήν προέκταση τῆς ΖΕ πρός τό μέρος τοῦ Ε παίρνουμε τμῆμα ΕΚ = ΕΖ. Νά δείξετε ὅτι:

α) Τό τρίγωνο ΑΔΚ ἔχει πλευρές ἴσες μέ τίς διαμέσους τοῦ ΑΒΓ.

β) Τό σημεῖο Ε εἶναι κέντρο βάρους τοῦ ΑΔΚ.

γ) Οἱ διάμεσοι τοῦ ΑΔΚ εἶναι ἴσες μέ τά 3/4 τῶν πλευρῶν τοῦ ΑΒΓ.

255. Οἱ κορυφές ἑνός τριγώνου ΑΒΓ βρίσκονται πρός τό ἴδιο μέρος μιᾶς εὐθείας ε. Ἄν Θ εἶναι τό κέντρο βάρους τοῦ ΑΒΓ καί ΑΑ′, ΒΒ′, ΓΓ′,ΘΘ′ οἱ ἀποστάσεις τῶν σημείων Α,Β,Γ,Θ ἀπό τήν ε, νά δείξετε ὅτι ΑΑ′ + ΒΒ′ + ΓΓ′ = 3ΘΘ′.

256. Θεωροῦμε ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ καί τή διάμετρο ΑΑ′ τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου του. Ἄν Η εἶναι τό ὀρθόκεντρο τοῦ τριγώνου καί Μ τό μέσο τῆς πλευρᾶς ΒΓ, νά δείξετε ὅτι:

α) Τά σημεῖα Η,Μ,Α′ εἶναι συνευθειακά.

β) Ἡ εὐθεία πού ἑνώνει τό Α′ μέ τό μέσο Λ τοῦ τμήματος ΗΑ διέρχεται ἀπό τό κέντρο βάρους τοῦ ΑΒΓ.

257. Θεωροῦμε ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ, τίς διαμέτρους ΑΑ′, ΒΒ′, ΓΓ′ τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου του καί τά μέσα Λ,Μ,Ρ τῶν ἀποστάσεων τοῦ ὀρθοκέντρου Η ἀπό τίς κορυφές Α,Β,Γ. Νά δειχθεῖ ὅτι οἱ εὐθεῖες Α′Λ, Β′Μ, Γ′Ρ διέρχονται ἀπό τό ἴδιο σημεῖο.

258. Ἄν Η εἶναι τό ὀρθόκεντρο ἑνός τριγώνου, Λ εἶναι τό μέσο τοῦ τμήματος ΗΑ καί Μ εἶναι τό μέσο τῆς πλευρᾶς ΒΓ, νά δειχθεῖ ὅτι $H\widehat{\Lambda}M = |\widehat{B} - \widehat{\Gamma}|$.

259. Δίνεται χορδή ΔΓ ἑνός κυκλ(Ο,ρ) καί ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο Α τοῦ τόξου $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$. Ἀπό τό Α φέρνουμε τμῆμα ΑΒ // = ΒΓ τέτοιο, ὥστε τό ΑΒΓΔ νά εἶναι παραλληλόγραμμο. Ἄν Δ′ εἶναι τό διαμετρικό τοῦ σημείου Δ, νά δείξετε ὅτι ΒΔ′ ⊥ ΑΓ.

260. Θεωροῦμε κυκλ(Ο,ρ), τίς ἐφαπτόμενές του ΑΔ καί ΑΕ ἀπό ἕνα σημεῖο Α καί ἕνα «κινητό» σημεῖο Μ τοῦ τόξου $\overset{\frown}{\Delta E}$. Ἄν ἡ ἐφαπτομένη στό Μ τέμνει τά τήματα ΑΔ καί ΑΕ στά σημεῖα Β καί Γ, νά δείξετε ὅτι ἡ περίμετρος τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι σταθερή.

261. Δίνεται ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ μέ κάθετες διαγωνίους, οἱ ὁποῖες τέμνονται στό Ε. Ἄν ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4 εἶναι οἱ ἀκτίνες τῶν ἐγγεγραμμένων κύκλων στά τρίγωνα ΑΕΒ, ΒΕΓ, ΓΕΔ, ΔΕΑ, νά δείξετε ὅτι

$$\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \rho_4 = ΑΓ + ΒΔ - \frac{1}{2}(ΑΒ + ΒΓ + ΓΔ + ΔΑ).$$

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 10

1. Μέ τόν ὅρο «γεωμετρική κατασκευή» ἐννοοῦμε τήν κατασκευή ἑνός γεωμετρικοῦ σχήματος μόνο μέ τόν κανόνα καί τό διαβήτη. Οἱ βασικές γεωμετρικές κατασκευές κατά τή σειρά πού τίς συναντήσαμε εἶναι:

— Κατασκευή μιᾶς γωνίας πού εἶναι ἴση μέ δοσμένη (βλ. § 39).

— Κατασκευή εὐθείας πού διέρχεται ἀπό σημεῖο Α καί εἶναι παράλληλη πρός δοσμένη εὐθεία (βλ. § 74).

— Διαίρεση δοσμένου τμήματος σέ ν ἴσα μέρη (βλ. § 82).

— Κατασκευή τῆς μεσοκαθέτου ἑνός εὐθύγραμμου τμήματος (στήν ὁποία ἀνάγεται καί ἡ εὕρεση τοῦ μέσου ἑνός τμήματος).

— Κατασκευή εὐθείας πού διέρχεται ἀπό σημεῖο καί εἶναι κάθετη σέ δοσμένη εὐθεία.

— Εὕρεση τοῦ μέσου ἑνός τόξου (στήν ὁποία ἀνάγεται ἡ κατασκευή τῆς διχοτόμου μιᾶς γωνίας).

2. Σέ ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ εἴδαμε ὅτι **διέρχονται ἀπό τό ἴδιο σημεῖο :**

— Οἱ μεσοκάθετοι τῶν τριῶν πλευρῶν του. Τό κοινό σημεῖο τους Ο λέγεται **περίκεντρο** τοῦ ΑΒΓ καί ὁ κυκλ(Ο,ΟΑ) λέγεται **περιγεγραμμένος κύκλος** τοῦ ΑΒΓ.

— Οἱ διάμεσοι τῶν τριῶν πλευρῶν του. Τό κοινό σημεῖο τους Θ λέγεται **βαρύκεντρο** τοῦ ΑΒΓ καί ἔχει τήν ἰδιότητα νά ἀπέχει ἀπό κάθε κορυφή τοῦ τριγώνου τά 2/3 τῆς ἀντίστοιχης διαμέσου.

— Τά τρία ὕψη του. Τό κοινό σημεῖο τους Η λέγεται **ὀρθόκεντρο** τοῦ ΑΒΓ καί σέ ὀξυγώνιο τρίγωνο εἶναι ἐσωτερικό σημεῖο του.

— Οἱ διχοτόμοι τῶν τριῶν γωνιῶν του. Τό κοινό σημεῖο τους Ι λέγεται **ἔγκεντρο** τοῦ ΑΒΓ καί ὁ κύκλος πού ἔχει κέντρο τό Ι καί ἀκτίνα τήν ἀπόστασή του ἀπό μία πλευρά λέγεται **ἐγγεγραμμένος κύκλος** τοῦ ΑΒΓ. Ὁ κύκλος αὐτός ἐφάπτεται σέ ὅλες τίς πλευρές τοῦ τριγώνου.

— Ἡ εὐθεία πού διχοτομεῖ μία γωνία του καί οἱ δύο εὐθεῖες πού διχοτομοῦν ἐξωτερικά τίς δύο ἄλλες γωνίες του. Τό σημεῖο I_a ἀπό τό ὁποῖο διέρχεται ἡ διχοτόμος τῆς $\widehat{A}$ καί οἱ εὐθεῖες πού διχοτομοῦν ἐξωτερικά τίς $\widehat{B}$ καί $\widehat{\Gamma}$ λέγεται **παράκεντρο** τοῦ ΑΒΓ καί ὁ κύκλος πού ἔχει κέντρο τό I_a καί ἀκτίνα τήν ἀπόστασή του ἀπό τή ΒΓ λέγεται **παρεγγεγραμμένος κύκλος**. Κάθε παρεγγεγραμμένος κύκλος ἐφάπτεται στή μία πλευρά τοῦ τριγώνου καί στίς προεκτάσεις τῶν δύο ἄλλων.

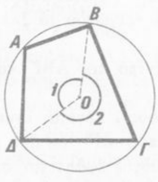
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11

ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΑ ΚΑΙ ΠΕΡΙΓΕΓΡΑΜΜΕΝΑ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΑ

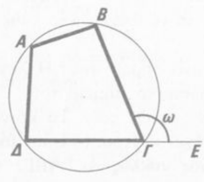
Τό ἐγγεγραμμένο τετράπλευρο.

116. **Ὁρισμός: Ἕνα τετράπλευρο πού οἱ κορυφές του εἶναι σημεῖα ἑνός κύκλ(Ο,ρ) λέγεται ἐγγεγραμμένο στόν κυκλ(Ο,ρ).**

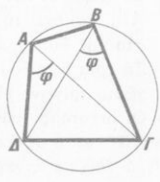
Ἄς θεωρήσουμε τετράπλευρο ΑΒΓΔ ἐγγεγραμμένο σέ κυκλ(Ο,ρ). Ἐπειδή οἱ ἀπέναντι γωνίες του εἶναι ἐγγεγραμμένες καί βαίνουν σέ δύο τόξα τῆς ἴδιας



σχ. 116



σχ. 117



σχ. 118

χορδῆς, ἔχουν ἄθροισμα 180° (γιατί π.χ. οἱ γωνίες $\widehat{A}$ καί $\widehat{\Gamma}$, βλ. σχ. 116, βαίνουν στά τόξα $\widehat{B\Gamma\Delta}$ καί $\widehat{BA\Delta}$ καί οἱ ἀντίστοιχες ἐπίκεντρες $\widehat{O}_2$ καί $\widehat{O}_1$ τῶν τόξων αὐτῶν ἔχουν ἄθροισμα 360°). Τότε κάθε ἐξωτερική γωνία τοῦ τετραπλεύρου θά εἶναι ἴση μέ τήν ἀπέναντί της ἐσωτερική, γιατί θά εἶναι καί οἱ δύο παραπληρωματικές τῆς ἴδιας γωνίας. Ἔτσι π.χ. θά ἔχουμε $\widehat{B\Gamma E} = \widehat{A}$, γιατί (βλ. σχ. 117) $\widehat{A} + \widehat{\Gamma} = 180° \Rightarrow \widehat{\Gamma} = 180° - \widehat{A}$ καί $\widehat{\omega} + \widehat{\Gamma} = 180° \Rightarrow \widehat{\omega} = 180° - \widehat{\Gamma}$. Δείξαμε λοιπόν ὅτι:

I. Οἱ ἀπέναντι γωνίες ἐγγεγραμμένου τετραπλεύρου εἶναι παραπληρωματικές.

II. Κάθε ἐξωτερική γωνία ἐγγεγραμμένου τετραπλεύρου ἰσοῦται μέ τήν ἀπέναντί της ἐσωτερική γωνία του.

Τέλος δύο ὁποιεσδήποτε διαδοχικές κορυφές τοῦ τετραπλεύρου εἶναι καί κορυφές δύο ἴσων ἐγγεγραμμένων γωνιῶν πού βαίνουν στό τόξο, τό ὁποῖο ὁρίζει ἡ ἀπέναντι πλευρά τους. Ἔτσι π.χ. οἱ γωνίες $\widehat{ΔΑΓ}$ καί $\widehat{ΔΒΓ}$ εἶναι ἴσες (βλ. σχ. 118), γιατί εἶναι καί οἱ δύο ἐγγεγραμμένες στό τόξο $\widehat{ΔΓ}$. Ἄν λοιπόν τίς σημειώνουμε μέ $\widehat{φ}$, θά λέμε ὅτι κάθε μία ἀπό τίς κορυφές Α καί Β «*βλέπει*» τήν πλευρά ΔΓ «ὑπό γωνία» $\widehat{φ}$ ἤ ὅτι ἡ πλευρά ΔΓ «*φαίνεται*» ἀπό τίς κορυφές Α καί Β «ὑπό γωνία» $\widehat{φ}$. Δείξαμε λοιπόν ὅτι:

III. Κάθε πλευρά τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραπλεύρου φαίνεται ἀπό τίς δύο ἀπέναντι κορυφές του ὑπό ἴσες γωνίες.

Οἱ προτάσεις I, II,III ἀποτελοῦν τίς βασικές ἰδιότητες ἑνός ἐγγεγραμμένου τετραπλεύρου.

Τετράπλευρο ἐγγράψιμο σέ κύκλο.

117. Στήν § 99 εἴδαμε ὅτι ἀπό τρία μή συνευθειακά σημεῖα διέρχεται πάντοτε ἕνας κύκλος.Δέ συμβαίνει ὅμως τό ἴδιο καί γιά τέσσερα (μή συνευθειακά ἀνά τρία) σημεῖα. Ἔτσι δέν ὑπάρχει πάντοτε κύκλος πού νά διέρχεται ἀπό τίς τέσσερις κορυφές τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, δηλαδή ἕνα τετράπλευρο δέν εἶναι ἀπαραίτητα «ἐγγράψιμο» σέ κύκλο. Ἔτσι π.χ. κάθε παραλληλόγραμμο, πού δέν εἶναι ὀρθογώνιο, δέν εἶναι ἐγγράψιμο σέ κύκλο. Θά δοῦμε τώρα ὅτι κάθε μία ἀπό τίς παραπάνω ἰδιότητες I,II,III, εἶναι καί ἱκανή συνθήκη, γιά νά εἶναι ἕνα τετράπλευρο ἐγγράψιμο σέ κύκλο.

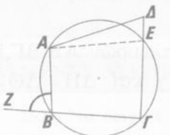
ΘΕΩΡΗΜΑ: Ἕνα τετράπλευρο ΑΒΓΔ εἶναι ἐγγράψιμο σέ κύκλο, ἄν ἀληθεύει μία ἀπό τίς παρακάτω προτάσεις:

I. Δύο ἀπέναντι γωνίες τοῦ τετραπλεύρου εἶναι παραπληρωματικές.

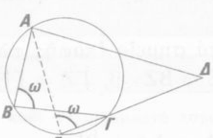
II. Μία ἐξωτερική γωνία τοῦ τετραπλεύρου εἶναι ἴση μέ τήν ἀπέναντί της ἐσωτερική.

III. Μία πλευρά τοῦ τετραπλεύρου φαίνεται ἀπό τίς δύο ἀπέναντι κορυφές της ὑπό ἴσες γωνίες.

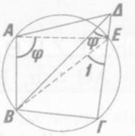
Ἀπόδ. I) Ὑποθέτοντας $\widehat{Β} + \widehat{Δ} = 180°$ θά ἀποδείξουμε ὅτι ὑπάρχει κύκλος πού διέρχεται καί ἀπό τίς τέσσερις κορυφές τοῦ τετραπλεύρου. Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι ὁ κύκλος πού



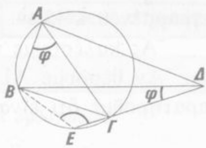
σχ. 119



σχ. 120



σχ. 121



σχ, 122

διέρχεται ἀπό τά σημεῖα Α,Β,Γ δέ διέρχεται ἀπό τό Δ (βλ. σχ. 119). Ἄν καλέσουμε Ε τό σημεῖο τομῆς τοῦ κύκλου αὐτοῦ μέ τήν ἡμιευθεία ΓΔ, τό ΑΒΓΕ εἶναι ἐγγεγραμμένο καί ἄρα $\widehat{Β} + \widehat{ΑΕΓ} = 180°$. Συγκρίνοντας αὐτή μέ τήν $\widehat{Β} + \widehat{Δ} = 180°$ βρίσκουμε $\widehat{ΑΕΓ} = \widehat{Δ}$

δηλαδή μία ἐξωτερική γωνία τοῦ τριγώνου ΑΔΕ εἶναι ἴση μέ τήν ἀπέναντί της ἐσωτερική, πράγμα ἀδύνατο. Ἀπό τό σχῆμα, 120, εἶναι φανερό ὅτι τό σημεῖο Ε δέν μπορεῖ νά βρίσκεται στήν ἡμιευθεία τήν ἀντικείμενη πρός τή ΓΔ, γιατί τότε θά εἴχαμε $\widehat{\mathrm{AE\Delta}}+\widehat{\Delta}=\widehat{\mathrm{B}}+\widehat{\Delta}=180^\circ$, δηλαδή τό ἄθροισμα δύο γωνιῶν τοῦ τριγώνου ΑΕΔ θά ἦταν 180°, πράγμα ἀδύνατο.

ΙΙ) Ὑποθέτουμε τώρα ὅτι $\widehat{\mathrm{ZBA}}=\widehat{\Delta}$ (βλ. σχ. 119). Τότε ἡ φανερή ἀπό τό σχῆμα ἰσότητα $\widehat{\mathrm{ABZ}}+\widehat{\mathrm{B}}=180^\circ$ γράφεται $\widehat{\Delta}+\widehat{\mathrm{B}}=180^\circ$. Ἔτσι τό τετράπλευρο εἶναι ἐγγράψιμο, γιατί ἔχει δύο ἀπέναντι γωνίες του παραπληρωματικές.

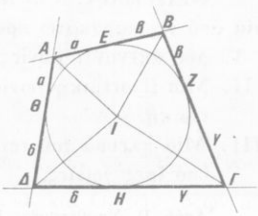
ΙΙΙ) Ὑποθέτουμε ὅτι $\widehat{\mathrm{BA\Gamma}}=\widehat{\mathrm{B\Delta\Gamma}}$ καί ὅτι ὁ κύκλος πού διέρχεται ἀπό τά Α,Β,Γ δέ διέρχεται ἀπό τό σημεῖο Δ (βλ. σχ. 121). Ἄν καλέσουμε πάλι Ε τό σημεῖο τομῆς τοῦ κύκλου μέ τήν ἡμιευθεία ΓΔ, τό ΑΒΓΕ εἶναι ἐγγεγραμμένο καί ἄρα $\widehat{\mathrm{BA\Gamma}}=\widehat{\mathrm{BE\Gamma}}$. Συγκρίνοντας αὐτή μέ τήν ὑπόθεσή μας βρίσκουμε $\widehat{\mathrm{BE\Gamma}}=\widehat{\mathrm{B\Delta\Gamma}}$, δηλαδή μία ἐξωτερική γωνία τοῦ ΒΕΔ εἶναι ἴση μέ τήν ἀπέναντί της ἐσωτερική, πράγμα ἀδύνατο. Ἀπό τό σχῆμα 122 εἶναι φανερό ὅτι τό σημεῖο Ε δέν μπορεῖ νά βρίσκεται στήν ἡμιευθεία τήν ἀντικείμενη πρός τή ΓΔ, γιατί τότε θά εἴχαμε $\widehat{\mathrm{BE\Gamma}}=180^\circ-\widehat{\mathrm{A}}=180^\circ-\widehat{\varphi}$ καί $\widehat{\mathrm{BE\Gamma}}+\widehat{\Delta}=180^\circ$, δηλαδή τό ἄθροισμα δύο γωνιῶν τοῦ τριγώνου ΒΕΔ θά ἦταν 180°, πράγμα ἀδύνατο.

Μέ τό θεώρημα αὐτό ἐργαζόμαστε συνήθως καί ὅταν θέλουμε ν' ἀποδείξουμε ὅτι τέσσερα σημεῖα εἶναι ὁμοκυκλικά.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 268-278

Ἰδιότητες περιγεγραμμένου τετραπλεύρου.

118. **Ὁρισμός:** Ἕνα τετράπλευρο πού ὅλες οἱ πλευρές του εἶναι ἐφαπτόμενες τοῦ ἴδιου κύκλου λέγεται **περιγεγραμμένο** στόν κύκλο αὐτό, ἐνῶ ὁ κύκλος λέγεται **ἐγγεγραμμένος** στό τετράπλευρο αὐτό.



Ἄν τό τετράπλευρο ΑΒΓΔ εἶναι περιγγεγραμμένο στόν κυκλ(Ι,ρ), οἱ ἡμιευθεῖες ΑΙ, ΒΙ, ΓΙ, ΔΙ εἶναι διχοτόμοι τῶν γωνιῶν $\widehat{\mathrm{A}}$, $\widehat{\mathrm{B}}$, $\widehat{\Gamma}$, $\widehat{\Delta}$ ἀντιστοίχως, δηλαδή:

Ι. Οἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν περιγεγραμμένου τετραπλεύρου διέρχονται ἀπό τό ἴδιο σημεῖο τό ὁποῖο εἶναι κέντρο τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

Ἄς καλέσουμε τώρα Ε,Ζ,Η,Θ τά σημεῖα ἐπαφῆς τῶν πλευρῶν ΑΒ,ΒΓ,ΓΔ, ΔΑ. Ἄν θέσουμε ΑΕ = ΑΘ = α, ΒΕ = ΒΖ=β, ΓΖ = ΓΗ=γ καί ΔΗ=ΔΘ=δ, παρατηροῦμε ὅτι εἶναι

$$\mathrm{AB}+\Gamma\Delta=\mathrm{A}\Delta+\mathrm{B}\Gamma,$$

γιατί κάθε ἕνα ἀπό τά ἀθροίσματα αὐτά εἶναι ἴσο μέ $\alpha+\beta+\gamma+\delta$. Δείξαμε λοιπόν ὅτι :

ΙΙ. Τά ἀθροίσματα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν ἑνός περιγεγραμμένου τετραπλεύρου εἶναι ἴσα.

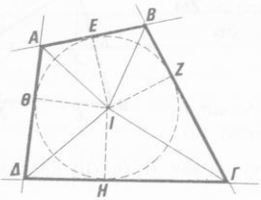
Οἱ προτάσεις I καί II ἀποτελοῦν τίς δύο βασικές ἰδιότητες τοῦ περιγεγραμμένου τετραπλεύρου.

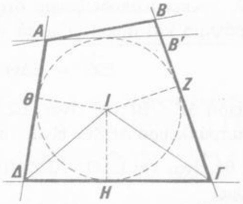
Τετράπλευρο περιγράψιμο σέ κύκλο.

119. Ἄν δοθεῖ ἕνα τετράπλευρο, δέν ὑπάρχει ὑποχρεωτικά κύκλος πού νά ἐφάπτεται σέ ὅλες τίς πλευρές του, δηλαδή ἕνα τετράπλευρο ΑΒΓΔ δέν εἶναι ἀπαραίτητα «περιγράψιμο» σέ κύκλο. Ἔτσι π.χ. κάθε ὀρθογώνιο, πού δέν εἶναι τετράγωνο, δέν εἶναι περιγράψιμο σέ κύκλο. Θά ἀποδείξουμε ὅτι:

ΘΕΩΡΗΜΑ: Ἕνα τετράπλευρο ΑΒΓΔ εἶναι περιγράψιμο σέ κύκλο, ἄν ἀληθεύει μία ἀπό τίς παρακάτω προτάσεις:
I. Οἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τοῦ τετραπλεύρου διέρχονται ἀπό τό ἴδιο σημεῖο.
II. Τά ἀθροίσματα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου εἶναι ἴσα.

Ἀπόδ. I) Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι οἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τέμνονται στό Ι καί ἄς καλέσουμε ΙΕ, ΙΖ, ΙΗ, ΙΘ τίς ἀποστάσεις τοῦ Ι ἀπό τίς πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ. Ἐπειδή τό Ι εἶναι σημεῖο τῆς κάθε διχοτόμου, ἔχουμε κατά σειρά τίς ἰσότητες ΙΕ = ΙΖ, ΙΖ = ΙΗ,





ΙΗ = ΙΘ, ΙΘ = ΙΕ ἀπό τίς ὁποῖες συμπεραίνουμε ὅτι τό Ι ἰσαπέχει ἀπό ὅλες τίς πλευρές. Ἔτσι ὁ κύκλος (Ι, ΙΕ) θά ἐφάπτεται σέ ὅλες τίς πλευρές.

II) Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι ΑΒ + ΓΔ = ΑΔ + ΒΓ καί ἄς καλέσουμε Ι τό σημεῖο τομῆς τῶν διχοτόμων τῶν $\widehat{\Delta}$ καί $\widehat{\Gamma}$ καί ΙΘ, ΙΗ, ΙΖ τίς ἀποστάσεις του ἀπό τίς ΑΔ,ΔΓ,ΓΒ. Ἐπειδή ΙΘ = ΙΗ = ΙΖ, ὁ κυκλ(Ι,ΙΘ) ἐφάπτεται στίς τρεῖς πλευρές ΑΔ, ΔΓ, ΓΒ. Ἄς ὑποθέσουμε ἀκόμη ὅτι ὁ κύκλος αὐτός δέν ἐφάπτεται στήν ΑΒ καί ἄς φέρουμε τήν ἐφαπτομένη ΑΒ′ ἀπό τό Α. Ἐπειδή τό ΑΒ′ ΓΔ εἶναι περιγεγραμμένο, θά ἔχουμε καί ΑΒ′ + ΓΔ = ΑΔ + Β′Γ. Ἀφαιρώντας κατά μέλη αὐτή ἀπό τήν ἰσότητα τῆς ὑποθέσεώς μας βρίσκουμε ΑΒ—ΑΒ′ = ΒΓ–Β′Γ ⇒ ΑΒ–ΑΒ′ = ΒΒ′ ⇒ ΑΒ = ΑΒ′ + ΒΒ′, πράγμα ἀδύνατο.

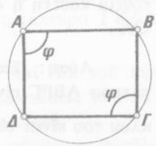
Εἴδαμε δηλαδή ὅτι κάθε μία ἀπό τίς ἰδιότητες I καί II τῆς § 118 εἶναι καί ἱκανή συνθήκη, γιά νά εἶναι ἕνα τετράπλευρο περιγράψιμο σέ κύκλο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 279-282

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

262. Νά δειχθεῖ ὅτι κάθε ἐγγεγραμμένο παραλληλόγραμμο εἶναι ὀρθογώνιο.

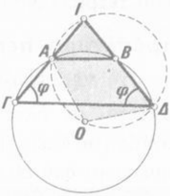
Λύση: Ἐπειδή τό ΑΒΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμο, θά ἔχουμε $\widehat{A}=\widehat{\Gamma}=\widehat{\varphi}$, καί ἐπειδή εἶναι ἐγγεγραμμένο, θά ἔχουμε $\widehat{A}+\widehat{\Gamma}=180°$. Ἄρα βρίσκουμε



$$\widehat{\varphi}+\widehat{\varphi}=180° \Rightarrow 2\widehat{\varphi}=180° \Rightarrow \widehat{\varphi}=90°,$$

δηλαδή τό παραλληλόγραμμό μας εἶναι ὀρθογώνιο, γιατί ἔχει μία γωνία του ὀρθή.

263. Δίνονται δύο παράλληλες χορδές ΑΒ καί ΓΔ ἑνός κυκλ(Ο,ρ). Ἄν οἱ ΑΓ καί ΒΔ τέμνονται στό Ι, νά δείξετε ὅτι τά τέσσερα σημεῖα Α,Ο,Δ,Ι εἶναι ὁμοκυκλικά.



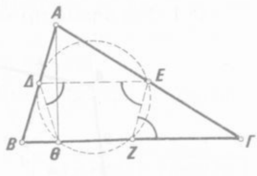
Λύση: Ἀρκεῖ ν' ἀποδείξουμε ὅτι τό τετράπλευρο ΑΟΔΙ εἶναι ἐγγράψιμο, δηλαδή ὅτι

$$\widehat{AI\Delta} + \widehat{AO\Delta} = 180^\circ.$$

Τό τραπέζιο ΑΒΔΓ εἶναι ἰσοσκελές (ἀφοῦ $\overset{\frown}{A\Gamma} = \overset{\frown}{B\Delta}$ καί ΑΓ= ΒΔ) καί ἄρα $\widehat{\Gamma} = \widehat{\Delta} = \widehat{\varphi}$. Ἔτσι καί τό τρίγωνο ΓΙΔ εἶναι ἰσοσκελές καί συνεπῶς ἔχουμε $\widehat{I} = 180^\circ - 2\widehat{\varphi}$ (I). Ἡ γωνία $\widehat{AO\Delta}$ εἶναι ἐπίκεντρη τοῦ τόξου $\overset{\frown}{A\Delta}$ καί ἴση μέ $\widehat{AO\Delta} = 2\widehat{A\Gamma\Delta} = 2\widehat{\varphi}$ (II). Προσθέτοντας τίς (I) καί (II) βρίσκουμε $\widehat{I} + \widehat{AO\Delta} = 180^\circ$.

264. Νά δειχθεῖ ὅτι ὁ κύκλος πού διέρχεται ἀπό τά μέσα τῶν τριῶν πλευρῶν ἑνός τριγώνου ΑΒΓ διέρχεται καί ἀπό τά ἴχνη τῶν ὑψῶν τοῦ τριγώνου.

Λύση: Θεωροῦμε τά μέσα Δ,Ε,Ζ τῶν πλευρῶν ΑΒ,ΑΓ,ΒΓ καί τόν κύκλο πού διέρχεται ἀπό τά τρία σημεῖα αὐτά. Γιά νά δείξουμε ὅτι ὁ κύκλος αὐτός διέρχεται ἀπό τό ἴχνος ἑνός ὕψους, π.χ. ἀπό τό ἴχνος Θ τοῦ ὕψους ΑΘ, πρέπει ν'ἀποδείξουμε ὅτι τό τετράπλευρο ΔΕΖΘ εἶναι ἐγγράψιμο καί ἀρκεῖ γι' αὐτό νά δείξουμε π.χ. ὅτι

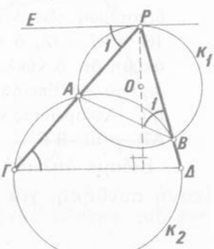


$$\widehat{EZ\Gamma} = \widehat{E\Delta\Theta}.$$

Ἐπειδή ΔΕ //ΒΓ, θά εἶναι $\widehat{EZ\Gamma} = \widehat{\Delta EZ}$ (I) Ἀκόμη, ἐπειδή τό τετράπλευρο ΔΕΖΘ εἶναι ἰσοσκελές τραπέζιο (βλ. ἄσκ. 161), θά εἶναι καί $\widehat{E\Delta\Theta} = \widehat{\Delta EZ}$ (II). Ἀπό τή σύγκριση τῶν (I) καί (II) προκύπτει ἡ ἰσότητα πού ζητοῦμε.

Ὁμοίως ἀποδεικνύουμε ὅτι ὁ κύκλος διέρχεται καί ἀπό τά ἴχνη τῶν δύο ἄλλων ὑψῶν.

265. Θεωροῦμε δύο τεμνόμενους κύκλους κ_1 καί κ_2 καί καλοῦμε Α,Β τά σημεῖα τομῆς τους. Ἄν Ρ εἶναι ἕνα σημεῖο τοῦ κύκλου κ_1 καί οἱ ΡΑ, ΡΒ τέμνουν τόν κύκλο κ_2 στά Γ καί Δ, νά δειχθεῖ ὅτι ἡ εὐθεία πού διέρχεται ἀπό τό Ρ καί ἀπό τό κέντρο Ο τοῦ κύκλου κ_1 εἶναι κάθετη στή ΓΔ.



Λύση: Ἄν φέρουμε τή ΡΕ ἐφαπτομένη τοῦ κ_1, ἔχουμε

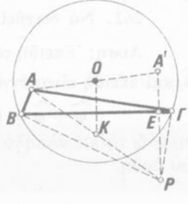
$$\widehat{P_1} = \widehat{B_1} \qquad \text{(I)}$$

Ἀπό τό ἐγγεγραμμένο τετράπλευρο ΑΒΔΓ ἔχουμε καί

$$\widehat{\Gamma} = \widehat{B_1} \qquad \text{(II)}$$

Συγκρίνοντας τίς (I) καί (II) βρίσκουμε ὅτι $\widehat{P_1} = \widehat{\Gamma}$, δηλ. ΡΕ// ΓΔ. Ἀφοῦ λοιπόν ἡ ΡΟ εἶναι κάθετη στήν ἐφαπτομένη ΡΕ, θά εἶναι κάθετη καί στήν παράλληλή της ΓΔ.

266. Θεωροῦμε κυκλ(Ο,ρ), δύο σημεῖα του Β,Γ καί ἕνα σημεῖο Α ἐσωτερικό τοῦ κδισ(Ο,ρ). Στά σημεῖα Β καί Γ φέρνουμε εὐθεῖες κάθετες στίς ΑΒ καί ΑΓ, οἱ ὁποῖες τέμνονται στό Ρ καί ἀπό τό Ρ φέρνουμε στή χορδή ΒΓ εὐθεία κάθετη ἡ ὁποία τέμνει τήν ΑΟ στό Α΄. Νά δειχθεῖ ὅτι ΟΑ = ΟΑ΄.



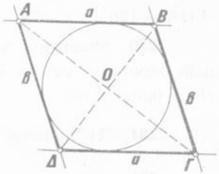
Λύση: Ἐπειδή $\widehat{AB P} + \widehat{A\Gamma P} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, τό τετράπλευρο ΑΒΡΓ εἶναι ἐγγράψιμο καί κέντρο τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου του εἶναι τό μέσο Κ τῆς ΑΡ (γιατί $\Gamma K = \frac{AP}{2} = BK$). Ἔτσι ἡ ΟΚ εἶναι διάκεντρος δύο κύκλων πού ἔχουν κοινή χορδή τή ΒΓ καί ἄρα

$$ΟΚ \perp ΒΓ.$$

Στό τρίγωνο λοιπόν ΡΑΑ΄ ἡ ΚΟ διέρχεται ἀπό τό μέσο τῆς ΑΡ καί εἶναι παράλληλη πρός τή ΡΑ΄ $\Rightarrow$ ΟΑ = ΟΑ΄.

267. Νά δειχθεῖ ὅτι κάθε περιγεγραμμένο παραλληλόγραμμο εἶναι ρόμβος καί οἱ διαγώνιοί του διέρχονται ἀπό τό κέντρο τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

Λύση: Θεωροῦμε ἕνα περιγεγραμμένο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ καί θέτουμε ΑΒ = ΓΔ = α καί ΒΓ = ΑΔ = β. Ἐπειδή τό ΑΒΓΔ εἶναι περιγεγραμμένο, ἔχουμε



$$ΑΒ + ΓΔ = ΑΔ + ΒΓ \Rightarrow 2α = 2β \Rightarrow α = β \Rightarrow ΑΒ = ΒΓ,$$

δηλαδή τό παραλληλόγραμμό μας εἶναι ρόμβος, γιατί ἔχει δύο διαδοχικές πλευρές του ἴσες.

Ἀφοῦ τό ΑΒΓΔ εἶναι ρόμβος, κάθε διαγώνιός του διχοτομεῖ τίς ἀπέναντι γωνίες του. Ἔστι π.χ. ἡ ΒΔ διχοτομεῖ τίς γωνίες του $\widehat{Β}$ καί $\widehat{Δ}$. Οἱ διχοτόμοι ὅμως τῶν γωνιῶν $\widehat{Β}$ καί $\widehat{Δ}$ διέρχονται ἀπό τό κέντρο Ο. Ἄρα ἡ ΒΔ διέρχεται ἀπό τό κέντρο Ο. Ὅμοια ἀπόδειξη γίνεται καί γιά τήν ΑΓ.

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ*

268. Κάθε ἐγγεγραμμένος ρόμβος εἶναι τετράγωνο.

269. Δύο κύκλοι τέμνονται στά σημεῖα Α καί Β. Ἀπό τά Α καί Β φέρνουμε εὐθεῖες πού τέμνουν τόν ἕναν κύκλο στά Γ καί Γ΄ καί τόν ἄλλο στά Δ καί Δ΄. Νά δειχθεῖ ὅτι ΓΓ΄ // ΔΔ΄.

270. Δίνονται δύο κύκλοι πού τέμνονται στά Α καί Β. Φέρνουμε τήν εὐθεία ε πού διέρχεται ἀπό τό Β καί εἶναι κάθετη στήν ΑΒ καί ὀνομάζουμε Ε,Ζ τά σημεῖα, στά ὁποῖα ἡ ε τέμνει τούς κύκλους, καί Ρ τό μέσο τοῦ τμήματος ΕΖ. Φέρνουμε ἀκόμη μιά ὁποιαδήποτε εὐθεία πού διέρχεται ἀπό τό Α καί ὀνομάζουμε Γ,Δ τά σημεῖα, στά ὁποῖα τέμνει τούς κύκλους. Ἄν Μ εἶναι τό μέσο τοῦ τήματος ΓΔ, νά δείξετε ὅτι ΡΜ $\perp$ ΓΔ.

271. Θεωροῦμε ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ καί δύο κύκλους πού διέρχονται ἀπό τίς κορυφές του Β καί Γ καί τέμνουν τίς πλευρές ΑΒ καί ΑΓ ὁ ἕνας στά σημεῖα Ε,Ζ καί ὁ ἄλλος στά σημεῖα Ε΄, Ζ΄. Νά δείξετε ὅτι ΕΖ // Ε΄Ζ΄.

272. Δίνεται ἕνα τετράπλευρο ΑΒΓΔ ἐγγεγραμμένο σέ κυκλ(Ο,ρ) καί παίρνουμε τά σημεῖα Κ,Λ,Μ,Ρ συμμετρικά τοῦ κέντρου Ο ὡς πρός τίς πλευρές τοῦ ΑΒΓΔ. Νά δείξετε ὅτι τό ΚΛΜΡ εἶναι παραλληλόγραμμο.

273. Δίνεται μία γωνία $\widehat{ΧΟΨ}$ καί ὁρισμένο σημεῖο Σ τῆς διχοτόμου της. Γράφουμε δύο κύκλους πού διέρχονται ἀπό τά σημεῖα Ο καί Σ καί τέμνουν τήν πλευρά ΟΧ στά σημεῖα Α καί Α΄ καί τήν πλευρά ΟΨ στά σημεῖα Β καί Β΄. Νά δείξετε ὅτι ΑΑ΄ = ΒΒ΄.

274. Ἀπό ἕνα σημεῖο Ι τοῦ ὕψους ΑΔ ἑνός τριγώνου ΑΒΓ φέρνουμε τά τήματα ΙΚ καί ΙΛ κάθετα στίς πλευρές ΑΓ καί ΑΒ ἀντιστοίχως. Νά δείξετε ὅτι τό τετράπλευρο ΒΓΚΛ εἶναι ἐγγράψιμο σέ κύκλο.

275. Θεωροῦμε μία χορδή ΑΒ ἑνός κυκλ(Ο,ρ) καί τό μέσο Μ τοῦ κυρτογώνιου τόξου $\widehat{ΑΒ}$. Ἄν Γ καί Δ εἶναι δύο ὁποιαδήποτε σημεῖα τοῦ μή κυρτογώνιου τόξου $\widehat{ΑΒ}$ καί οἱ χορδές ΜΓ καί ΜΔ τέμνουν τήν ΑΒ στά σημεῖα Κ καί Λ, νά δείξετε ὅτι τό τετράπλευρο ΓΚΛΔ εἶναι ἐγγράψιμο.

276. Δίνεται μία διάμετρος ΑΒ ἑνός κυκλ(Ο,ρ) καί δύο χορδές ΑΓ καί ΑΔ τοῦ κύκλου ἑκατέρωθεν τῆς διαμέτρου ΑΒ. Ἄν ἡ ἐφαπτομένη στό Β τέμνει τίς προεκτάσεις τῶν ΑΓ καί ΑΔ στά σημεῖα Κ καί Λ, νά δείξετε ὅτι τά σημεῖα Γ,Δ,Κ,Λ εἶναι ὁμοκυκλικά.

277. Θεωροῦμε τά ὕψη ΒΔ καί ΓΕ ἑνός τριγώνου ΑΒΓ. Ἀπό τό Ε φέρνουμε παράλληλη πρός τό ΒΔ, ἡ ὁποία τέμνει τήν ΑΓ στό Κ, καί ἀπό τό Δ φέρνουμε παράλληλη πρός τό ΓΕ, ἡ ὁποία τέμνει τήν ΑΒ στό Λ. Νά δείξετε ὅτι ΚΛ // ΒΓ.

278. Θεωροῦμε τρία ὁποιαδήποτε σημεῖα Δ,Ε,Ζ τῶν πλευρῶν ΒΓ,ΓΑ, ΑΒ ἑνός τριγώνου ΑΒΓ. Γράφουμε τόν κύκλο κ_1 πού διέρχεται ἀπό τά Α,Ζ,Ε, τόν κύκλο κ_2 πού διέρχεται ἀπό τά Ζ,Β,Δ καί τόν κύκλο κ_3 πού διέρχεται ἀπό τά Δ,Γ,Ε. Νά δείξετε ὅτι οἱ κύκλοι κ_1, κ_2,κ_3 διέρχονται ἀπό τό ἴδιο σημεῖο.

279. Σ' ἕνα τετράπλευρο ΑΒΓΔ περιγεγραμμένο στόν κυκλ(Ο,ρ) ἔχουμε πάντοτε $\widehat{ΑΟΒ}$ + $\widehat{ΓΟΔ} = 180°$.

280. Θεωροῦμε τετράπλευρο ΑΒΓΔ (μή περιγράψιμο) καί ὀνομάζουμε Κ,Λ,Μ,Ρ τά σημεῖα ὅπου τέμνονται οἱ διχοτόμοι τῶν διαδοχικῶν γωνιῶν του. Νά δείξετε ὅτι τά σημεῖα αὐτά εἶναι ὁμοκυκλικά.

281. Ἡ διάμεσος περιγεγραμμένου τραπεζίου εἶναι ἴση μέ τό $\frac{1}{4}$ τῆς περιμέτρου του.

282. Σ' ἕνα ἰσοσκελές τραπέζιο ἡ διάμεσός του εἶναι ἴση μέ μία ἀπό τίς μή παράλληλες πλευρές του. Νά δείξετε ὅτι τό τραπέζιο εἶναι περιγράψιμο σέ κύκλο.

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ**

283. Σ' ἕνα τετράπλευρο ΑΒΓΔ ἐγγεγραμμένο στόν κυκλ(Ο,ρ) ὀνομάζουμε Θ τό σημεῖο στό ὁποῖο τέμνονται οἱ εὐθεῖες πού ἑνώνουν τά μέσα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν του. Ἄν εἶναι Κ = συμμ$_Θ$Ο, νά δείξετε ὅτι:

α) Ἡ εὐθεία πού ἑνώνει τό μέσο μιᾶς πλευρᾶς τοῦ τετραπλεύρου μέ τό Κ εἶναι κάθετη στήν ἀπέναντι πλευρά του.

β) Οἱ εὐθεῖες πού διέρχονται ἀπό τά μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου καί εἶναι κάθετες στίς ἀπέναντι πλευρές του διέρχονται ἀπό τό ἴδιο σημεῖο.

284. Θεωροῦμε κυκλ(Ο,ρ) καί δύο κάθετες χορδές του ΑΒ καί ΓΔ. Νά δείξετε ὅτι οἱ ἐφαπτόμενες τοῦ κύκλου στά Α,Β,Γ,Δ σχηματίζουν ἐγγράψιμο τετράπλευρο.

285. Ἡ ἐγγεγραμμένη περιφέρεια ὀρθογώνιου τριγώνου ΑΒΓ ($\widehat{Α} = 90°$) ἐφάπτεται στίς πλευρές του ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ στά σημεῖα Δ,Ε,Ζ. Ἄν Ι εἶναι ἡ προβολή τοῦ Ε στή ΔΖ, νά δείξετε ὅτι: α) Τό τρίγωνο ΕΙΔ εἶναι ἰσοσκελές β) Ἡ ΙΓ διχοτομεῖ τή γωνία $\widehat{ΕΙΔ}$ γ) Ἡ γωνία $\widehat{ΑΙΓ}$ εἶναι ἴση μέ 90°.

286. Δίνεται μία χορδή ΒΓ ἑνός κυκλ(Ο,ρ) καί οἱ ἐφαπτόμενες ε_1 καί ε_2 στά ἄκρα της. Ἀπό ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο Μ τῆς ΒΓ φέρνουμε κάθετη στήν ΟΜ, ἡ ὁποία τέμνει τίς ε_1 καί ε_2 στά σημεῖα Ε καί Ζ. Νά δείξετε ὅτι ΕΜ = ΜΖ.

287. Ἕνα τετράπλευρο ΑΒΓΔ ἐγγεγραμμένο σέ κύκλ(Ο,ρ) ἔχει κάθετες διαγωνίους πού τέμνονται στό Ι. Ἄν Κ,Λ,Μ,Ρ εἶναι οἱ προβολές τοῦ Ι στίς πλευρές τοῦ ΑΒΓΔ, νά δείξετε ὅτι τό ΚΛΜΡ εἶναι ἐγγράψιμο καί περιγράψιμο.

288. Οἱ πλευρές ΑΒ καί ΓΔ ἑνός ἐγγεγραμμένου τετραπλεύρου ΑΒΓΔ τέμνονται στό Ε καί οἱ πλευρές του ΑΔ καί ΒΓ τέμνονται στό Ζ. Φέρνουμε τή διχοτόμο τῆς γωνίας $\widehat{Ε}$ πού τέμνει τίς πλευρές ΒΓ,ΑΔ στά σημεῖα Κ,Μ καί τή διχοτόμο τῆς $\widehat{Ζ}$ πού τέμνει τίς πλευρές ΓΔ καί ΑΒ στά σημεῖα Λ,Ρ. Νά δείξετε ὅτι:

α) Οἱ διχοτόμοι τῶν $\widehat{Ε}$ καί $\widehat{Ζ}$ τέμνονται καθέτως.

β) Τό τετράπλευρο ΚΛΜΡ εἶναι ρόμβος.

289. Θεωροῦμε ἕνα ἐγγεγραμμένο τετράπλευρο ΑΒΓΔ καί γράφουμε τόξα πού ἔχουν χορδές τίς πλευρές του καί ἀνά δύο διαδοχικά τέμνονται σέ σημεῖα Κ,Λ,Μ,Ρ πού βρίσκονται δλα μέσα (ἢ ἔξω) στό τετράπλευρο. Νά δείξετε ὅτι τά σημεῖα αὐτά εἶναι ὁμοκυκλικά.

290. Θεωροῦμε γωνία $\widehat{XO\Psi}$, τή διχοτόμο της ΟΔ καί ἕνα σημεῖο Ρ ἐσωτερικό τῆς γωνίας $\widehat{\Delta O\Psi}$. Ἄν Α,Β,Γ εἶναι οἱ προβολές τοῦ Ρ στίς ἡμιευθεῖες ΟΔ,ΟΧ,ΟΨ, νά δείξετε ὅτι:

α) Τά σημεῖα Ο,Β,Α,Ρ,Γ εἶναι ὁμοκυκλικά.

β) Τά τμήματα ΑΒ καί ΑΓ εἶναι ἴσα.

291. Δύο κύκλοι κ_1 καί κ_2 μέ κέντρα Κ καί Λ τέμνονται στά Α καί Β. Ἄν οἱ ἀκτίνες ΚΑ καί ΛΑ τέμνουν τούς κύκλους κ_2 καί κ_1 στά σημεῖα Δ καί Γ, νά δείξετε ὅτι τά σημεῖα Γ,Κ,Β,Λ,Δ εἶναι ὁμοκυκλικά.

292. Νά δείξετε ὅτι τά ὕψη ἑνός τριγώνου ΑΒΓ διχοτομοῦν τίς γωνίες τοῦ ὀρθικο τριγώνου του.

293. Δίνεται ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ καί οἱ ἐφαπτόμενες τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου του στά Β καί Γ οἱ ὁποῖες τέμνονται στό Κ. Ἄν Δ,Ε,Ζ εἶναι οἱ προβολές τοῦ Κ στίς εὐθεῖες ΑΒ,ΒΓ,ΓΑ, νά δειχθεῖ ὅτι τό ΚΔΕΖ εἶναι παραλληλόγραμμο.

294. Θεωροῦμε μία εὐθεία ε καί δύο σημεῖα Α καί Β πρός τό ἴδιο μέρος της. Παίρνουμε τό σημεῖο $A' = \sigma\upsilon\mu\mu_\varepsilon A$ καί φέρνουμε τήν εὐθεία Α΄Β, πού τέμνει τήν ε στό Ν, καί τή μεσοκάθετο τοῦ τμήματος ΑΒ, πού τέμνει τήν ε στό Μ. Νά δείξετε ὅτι τά σημεῖα Α,Β,Μ,Ν εἶναι ὁμοκυκλικά.

295. Θεωροῦμε τά ὕψη ΑΑ΄,ΒΒ΄,ΓΓ΄ ἑνός τριγώνου ΑΒΓ καί τά μέσα Ε,Ζ τῶν δύο ὑψῶν ΒΒ΄ καί ΓΓ΄. Νά δειχθεῖ ὅτι τό τρίγωνο Α΄ΕΖ εἶναι ἰσογώνιο μέ τό ΑΒΓ.

296. Θεωροῦμε ἕνα ἡμιεπίπεδο ἀκμῆς ε, τρία (κυκλικά) τόξα τοῦ ἡμιεπιπέδου, πού διέρχονται ἀπό δύο ὁρισμένα σημεῖα Β καί Γ τῆς ε, καί μία ἡμιευθεία ΒΧ τοῦ ἡμιεπιπέδου, πού τέμνει τά τόξα αὐτά στά σημεῖα Δ,Ε,Ζ. Ἄν οἱ ἐφαπτόμενες τῶν τόξων στά Δ,Ε,Ζ τέμνονται ἀνά δύο στά σημεῖα Κ,Λ,Ρ, νά δείξετε ὅτι τά σημεῖα Γ,Κ,Λ,Ρ εἶναι ὁμοκυκλικά.

297. Δίνεται ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ ἐγγεγραμμένο σέ κύκλο καί ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο Μ τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου του. Νά δείξετε ὅτι οἱ προβολές τοῦ Μ στίς πλευρές τοῦ τριγώνου βρίσκονται στήν ἴδια εὐθεία (εὐθεία τοῦ Simpson).

298. Δίνεται ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ καί ἕνα σημεῖο Μ τέτοιο ὥστε οἱ τρεῖς προβολές του στίς πλευρές τοῦ τριγώνου νά βρίσκονται στήν ἴδια εὐθεία. Νά δείξετε ὅτι τό Μ βρίσκεται στόν περιγεγραμμένο κύκλο τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

299. Νά δείξετε ὅτι σέ κάθε τρίγωνο τά μέσα τῶν τριῶν πλευρῶν του, τά ἴχνη τῶν τριῶν ὑψῶν του καί τά μέσα τῶν ἀποστάσεων τοῦ ὀρθόκεντρου ἀπό τίς κορυφές του βρίσκονται στόν ἴδιο κύκλο (κύκλος τῶν 9 σημείων ἤ κύκλος τοῦ Euler). Νά δείξετε ἀκόμη ὅτι ὁ κύκλος αὐτός ἔχει κέντρο τό μέσο τοῦ εὐθύγραμμου τμήματος πού συνδέει τό ὀρθόκεντρο καί τό περίκεντρο τοῦ τριγώνου καί ἀκτίνα ἴση μέ τό μισό τῆς ἀκτίνας τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου του.

300. Δίνεται ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ, τό ὀρθόκεντρό του Η καί ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο Μ τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου του. Νά δείξετε ὅτι, ὅταν τό Μ κινεῖται στόν περιγεγραμμένο κύκλο τοῦ ΑΒΓ, τό μέσο Ρ τοῦ τμήματος ΗΜ κινεῖται στόν κύκλο τοῦ Euler (βλ. ἄσκ. 299).

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 11

1. Ἕνα τετράπλευρο πού οἱ κορυφές του εἶναι σημεῖα ἑνός κυκλ(Ο,ρ) λέγεται **ἐγγεγραμμένο** στόν κύκλο αὐτό. Σέ ἐγγεγραμμένο τετράπλευρο ἔχουμε τίς ἰδιότητες:

— **Οἱ ἀπέναντι γωνίες του εἶναι παραπληρωματικές.**

— **Κάθε ἐξωτερική γωνία του εἶναι ἴση μέ τήν ἀπέναντί της ἐσωτερική γωνία του.**

— **Κάθε πλευρά του φαίνεται ἀπό τίς δύο ἀπέναντι της κορυφές ὑπό ἴσες γωνίες.**

Κάθε μία ἀπό τίς ἰδιότητες αὐτές εἶναι καί ἱκανή συνθήκη, γιά νά εἶναι ἕνα τετράπλευρο ΑΒΓΔ ἐγγράψιμο σέ κύκλο.

2. Ἕνα τετράπλευρο πού οἱ πλευρές του ἐφάπτονται σέ ἕναν κύκλ(Ο,ρ) λέγεται **περιγεγραμμένο** στόν κύκλο αὐτό. Σέ ἕνα περιγεγραμμένο τετράπλευρο ἔχουμε τίς ἰδιότητες:

— **Οἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν του διέρχονται ἀπό τό ἴδιο σημεῖο.**

— **Τά ἀθροίσματα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν του εἶναι ἴσα.**

Κάθε μία ἀπό τίς ἰδιότητες αὐτές εἶναι καί ἱκανή συνθήκη, γιά νά εἶναι ἕνα τετράπλευρο ΑΒΓΔ περιγράψιμο σέ κύκλο.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ [1]

Οἱ βασικές ἔννοιες τῆς Γεωμετρίας.

1. Ἡ Γεωμετρία θεμελιώνεται μέ τίς ἀρχικές ἔννοιες (ἔννοιες πού δεχόμαστε χωρίς ὁρισμό) καί τά ἀξιώματα (προτάσεις πού δεχόμαστε ὅτι ἀληθεύουν). Οἱ βασικές ἀρχικές ἔννοιες εἶναι:

— Τό σημεῖο.
— Ἡ εὐθεία.
— Τό ἐπίπεδο.

Τό σύνολο ὅλων τῶν σημείων λέγεται **«γεωμετρικός χῶρος»** καί τά ὑποσύνολά του λέγονται **«γεωμετρικά σχήματα»**.

Μέ τά ἀξιώματα πού δεχόμαστε γιά τήν εὐθεία $^{\Delta}$ ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ εὐθεία ἔχει ἄπειρα σημεῖα. Κάθε σημεῖο Α μιᾶς εὐθείας ε ὁρίζει δύο **ἡμιευθεῖες μέ ἀρχή τό Α** (ἀντικείμενες ἡμιευθεῖες), ἐνῶ δύο σημεῖα Α καί Β τῆς εὐθείας ε ὁρίζουν ἕνα **εὐθύγραμμο τμῆμα μέ ἄκρα Α καί Β** πού ἔχει «φορέα» τήν ε.

Στά ἀξιώματα τοῦ ἐπιπέδου $^{\Delta}$ δεχόμαστε ὅτι δύο σημεῖα του καθορίζουν μία εὐθεία ε αὐτοῦ τοῦ ἐπιπέδου ἡ ὁποία ὁρίζει δύο **ἡμιεπίπεδα μέ ἀκμή ε.** Ἡ τομή δύο ἡμιεπιπέδων (τοῦ ἴδιου ἐπιπέδου), τά ὁποῖα ἔχουν διαφορετικές ἀκμές, λέγεται **κυρτή γωνία,** ἐνῶ ἡ ἕνωσή τους λέγεται **μή κυρτή γωνία.**

Τά ἐπίπεδα γεωμετρικά σχήματα τά μελετᾶ ἡ «Ἐπιπεδομετρία».

2. Στήν Ἐπιπεδομετρία δεσπόζουν δύο γεωμετρικά σχήματα:

— Ἡ εὐθεία, πού σχεδιάζεται μέ τόν κανόνα (χάρακα).
— Ὁ κύκλος*, πού σχεδιάζεται μέ τό διαβήτη.

Ἡ ἕνωση τῶν εὐθύγραμμων τμημάτων, πού συνδέουν ν διατεταγμένα καί μή συνευθειακά σημεῖα, λέγεται **πολυγωνική ἤ τεθλασμένη γραμμή.** Μία τεθλασμένη γραμμή μπορεῖ νά εἶναι **κυρτή*** ἤ μή κυρτή. Μέ τή βοήθεια μιᾶς κυρτῆς **κλειστῆς*** πολυγωνικῆς γραμμῆς ὁρίζεται τό **κυρτό πολύγωνο*** καί ἡ κλειστή πολυγωνική γραμμή, πού τό ὁρίζει, χωρίζει τά ἐσωτερικά καί τά ἐξωτερικά σημεῖα τοῦ πολυγώνου. Ἕνα κυρτό πολύγωνο μέ ν κορυφές ἔχει ν πλευρές καί $\frac{\nu(\nu-3)}{2}$ διαγωνίους (βλ. ἄσκ. 3).

Μία γωνία, πού ἔχει γιά κορυφή της τό κέντρο ἑνός κύκλου, λέγεται **ἐπίκεντρη γωνία** τοῦ κύκλου αὐτοῦ. Ἡ τομή τοῦ κύκλου μέ μιά ἐπίκεντρη γωνία του λέγεται **τόξο τοῦ κύκλου.** Δύο σημεῖα Α καί Β ἑνός κύκλου ὁρίζουν δύο τόξα $\overset{\frown}{AB}$, ἕνα **κυρτογώνιο τόξο*** καί ἕνα μή κυρ-

---

1. Ὅταν ἐμφανίζεται σέ φράση ἤ λέξη τό σύμβολο $^{\Delta}$, νά ἀναφέρετε τά σχετικά θεωρήματα ἤ ἀξιώματα, ἐνῶ ὅταν ἐμφανίζεται τό σύμβολο * σέ ἕναν ὅρο, νά δίνετε τόν ὁρισμό του.

Τό εὐθύγραμμο τμῆμα, πού συνδέει τά ἄκρα ἑνός τόξου, λέγεται **χορδή** καί κάθε χορδή πού διέρχεται ἀπό τό κέντρο λέγεται **διάμετρος** τοῦ κύκλου. Κάθε διάμετρος χωρίζει τόν κύκλο σέ δύο **ἡμικύκλια.**

Σέ κάθε κύκλο ἀντιστοιχεῖ ἕνας **κυκλικός δίσκος*** στόν ὁποῖο ἀνήκουν καί τά σημεῖα τοῦ κύκλου. Ὁ κυκλ(Ο,ρ) χωρίζει τά ἐσωτερικά καί τά ἐξωτερικά σημεῖα τοῦ κδισ(Ο,ρ).

Ἡ ἰσότητα στά γεωμετρικά σχήματα.

3. Ἡ ἰσότητα δύο εὐθύγραμμων τμημάτων ὁρίζεται ἀξιωματικά$^{\Delta}$ καί διαπιστώνεται μέ τό διαβήτη.

Στήν ἰσότητα τῶν εὐθύγραμμων τμημάτων στηρίζεται οὐσιαστικά καί κάθε ἄλλη ἰσότητα στή Γεωμετρία. Ἔτσι ὁρίζουμε ὅτι:

— **Δύο κύκλοι** (ἤ κυκλικοί δίσκοι) **λέγονται ἴσοι, ἄν καί μόνο ἄν ἔχουν ἴσες ἀκτίνες.**

— **Δύο τόξα τοῦ ἴδιου κύκλου ἤ ἴσων κύκλων** λέγονται ἴσα, **ἄν καί μόνο ἄν ἔχουν ἴσες χορδές·**

— **Δύο γωνίες λέγονται ἴσες, ἄν καί μόνο ἄν, ὅταν γίνουν ἐπίκεντρες ἴσων κύκλων, βαίνουν σέ ἴσα τόξα.**

Παρατηροῦμε ὅτι δέν ὁρίζεται ἰσότητα εὐθειῶν ἤ ἡμιευθειῶν. Ἐπίσης δέν ὁρίζεται ἰσότητα γιά τόξα πού δέν ἀνήκουν στόν ἴδιο κύκλο ἤ σέ ἴσους κύκλους.

4. Δύο τρίγωνα λέγονται ἴσα, ἄν καί μόνο ἄν ἔχουν τίς πλευρές τους μία πρός μία ἴσες καί τίς ἀπέναντι ἀπό τίς ἴσες πλευρές γωνίες τους ἐπίσης ἴσες.

Σέ ὁρισμένες περιπτώσεις ἡ ἰσότητα δύο τριγώνων ἐξασφαλίζεται μέ τήν ἰσότητα τριῶν μόνο ἀντίστοιχων στοιχείων. Ὁ παρακάτω πίνακας δίνει τέτοιες ἀντιπροσωπευτικές περιπτώσεις[1] δύο τριγώνων ΑΒΓ καί Α΄Β΄Γ΄.

τριγ. ΑΒΓ = τριγ. Α΄Β΄Γ΄ $\longleftrightarrow$	$\alpha=\alpha'$	$\beta=\beta'$	$\gamma=\gamma'$	$\hat{A}=\hat{A}'$	$\hat{B}=\hat{B}'$	$\hat{\Gamma}=\hat{\Gamma}'$	
3 πλευρές ἴσες	●	●	●				
2 πλευρές ἴσες		●	●	●			
		●	●		●		ΟΞ/ΑΜ
		●	●			●	ΟΞ/ΑΜ
1 πλευρά	●				●	●	
	●			●	●		
	●			●		●	

Ἐπίσης, σέ ὁρισμένες περιπτώσεις ἡ ἰσότητα ὀρθογώνιων τριγώνων ἐξασφαλίζεται μέ τήν ἰσότητα δύο μόνο ἀντίστοιχων στοιχείων. Ὁ παρακάτω πίνακας δίνει τέτοιες ἀντιπροσωπευτικές περιπτώσεις δύο ὀρθογώνιων τριγώνων ΑΒΓ καί Α΄Β΄Γ΄ πού ἔχουν $\hat{A} = \hat{A}' = 90°$.

τριγ. ΑΒΓ = τριγ. Α΄Β΄Γ΄ $\longleftrightarrow$	$\alpha=\alpha'$	$\beta=\beta'$	$\gamma=\gamma'$	$\hat{B}=\hat{B}'$	$\hat{\Gamma}=\hat{\Gamma}'$
2 πλευρές		●	●		
	●	●			
1 πλευρά	●			●	
		●		●	
		●			●

1. Οἱ περιπτώσεις στίς ὁποῖες ὑπάρχει τό σύμβολο ΟΞ/ΑΜ ἰσχύουν, ὅταν τά δύο τρίγωνα εἶναι ὀξυγώνια ἤ ὅταν τά δύο τρίγωνα εἶναι ἀμβλυγώνια μέ τίς ἀμβλεῖες γωνίες τους σέ ἀντίστοιχες κορυφές.

Παρατηροῦμε ὅτι **κάθε κριτήριο ἰσότητας δύο τριγώνων περιέχει ἀπαραίτητα μία τουλάχιστον ἰσότητα μεταξύ τῶν πλευρῶν τους.**

Γενικότερα, μποροῦμε νά ὁρίσουμε ἰσότητα μεταξύ δύο κυρτῶν πολυγώνων λέγοντας ὅτι δύο πολύγωνα εἶναι ἴσα, ἄν καί μόνο ἄν ἔχουν τίς πλευρές τους μία πρός μία ἴσες καί τίς γωνίες τους, πού περιέχονται ἀπό ἴσες πλευρές, ἐπίσης ἴσες.

5. Ἄς συγκεντρώσουμε τίς κυριότερες περιπτώσεις ἰσότητας εὐθύγ. τμημάτων καί γωνιῶν.

Δύο εὐθύγραμμα τμήματα εἶναι ἴσα, ὅταν εἶναι:

— Οἱ ἴσες πλευρές ἰσοσκελοῦς τριγώνου.
— Πλευρές ἴσων τριγώνων πού βρίσκονται ἀπέναντι ἀπό ἴσες γωνίες.
— Πλάγια τμήματα, ἀπό τό ἴδιο σημεῖο πρός εὐθεία, πού τά ἴχνη τους ἰσαπέχουν ἀπό τό ἴχνος τοῦ κάθετου τμήματος.
— Χορδές ἴσων τόξων τοῦ ἴδιου κύκλου (ἤ ἴσων κύκλων).
— Ἀποστήματα ἴσων χορδῶν τοῦ ἴδιου κύκλου (ἤ ἴσων κύκλων).
— Ἀπέναντι πλευρές παραλληλογράμμου (ἤ ὁποιεσδήποτε πλευρές ρόμβου ἤ τετραγώνου).
— Προβολές ἴσων καί παράλληλων τμημάτων σ' εὐθεία (βλ. ἄσκ. 162).
— Συμμετρικά ὡς πρός κέντρο ἤ ἄξονα.

Δύο γωνίες εἶναι ἴσες, ὅταν εἶναι:

— Οἱ γωνίες ἰσοσκελοῦς τριγώνου πού βρίσκονται ἀπέναντι ἀπό τίς ἴσες πλευρές.
— Γωνίες ἴσων τριγώνων πού βρίσκονται ἀπέναντι ἀπό τίς ἴσες πλευρές.
— Συμπληρώματα ἤ παραπληρώματα ἴσων γωνιῶν.
— Κατακορυφήν γωνίες.
— Ἐντός ἐναλλάξ ἤ ἐκτός καί ἐπί τά αὐτά μέρη παράλληλων εὐθειῶν.
— Ὀξεῖες (ἤ ἀμβλεῖες) πού ἔχουν παράλληλες ἤ κάθετες πλευρές.
— Ἀπέναντι γωνίες παραλληλογράμμου (ἤ ὁποιεσδήποτε γωνίες ὀρθογωνίου ἤ τετραγώνου).
— Ἐγγεγραμμένες (ἤ ἐπίκεντρες) τοῦ ἴδιου κύκλου (ἤ ἴσων κύκλων) πού βαίνουν σέ ἴσα τόξα.
— Οἱ γωνίες πού βλέπουν μιά πλευρά ἐγγεγραμμένου τετραπλεύρου ἀπό τίς δύο ἀπέναντι κορυφές της.
— Ἡ μία γωνία ἐγγεγραμμένου τετραπλεύρου καί ἡ ἄλλη ἀπέναντί της ἐξωτερική.
— Συμμετρικές ὡς πρός κέντρο ἤ ἄξονα.

Σύγκριση γεωμετρικῶν σχημάτων.

6. Ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ λέγεται **μικρότερο** ἀπό ἕνα ἄλλο ΓΔ (καί γράφουμε $AB < Γ\Delta$), ἄν καί μόνο ἄν τό ΑΒ εἶναι ἴσο μέ μέρος τοῦ ΓΔ. Τότε τό ΓΔ λέγεται **μεγαλύτερο** ἀπό τό ΑΒ (καί γράφουμε $Γ\Delta > AB$)

Δίνουμε τώρα μερικές χαρακτηριστικές περιπτώσεις πού ἕνα τμῆμα εἶναι μικρότερο ἀπό ἕνα ἄλλο:

— Τό κάθετο τμῆμα ἀπό σημεῖο Α πρός εὐθεία ε εἶναι μικρότερο ἀπό κάθε πλάγιο τμῆμα ἀπό τό Α πρός τήν ε.
— Κάθε μία ἀπό τίς κάθετες πλευρές ὀρθογώνιου τριγώνου εἶναι μικρότερη ἀπό τήν ὑποτείνουσά του.
— Κάθε πλευρά τριγώνου εἶναι μικρότερη ἀπό τό ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων καί μεγαλύτερη ἀπό τή διαφορά τους, δηλαδή:

$$|\beta-\gamma| < \alpha < \beta + \gamma.$$

— Κάθε εὐθύγραμμο τμῆμα εἶναι μικρότερο ἀπό τήν περίμετρο* κάθε ἀνοικτῆς πολυγωνικῆς γραμμῆς πού ἔχει τά ἴδια ἄκρα.

7. Στήν παραπάνω ἀνισοτική σχέση τῶν εὐθύγραμμων τμημάτων στηρίζεται οὐσιαστικά καί κάθε ἄλλη σχέση τῆς Γεωμετρίας πού ὁρίζει ἕνα σχῆμα «**μικρότερο**» ἀπό ἕνα ἄλλο. Ἔτσι, ὁρίζουμε ὅτι:

— Ἕνας κύκλ(Ο,ρ) θά λέγεται «**μικρότερος**» ἀπό ἕναν ἄλλο κυκλ(Ο΄,ρ΄), ἄν καί μόνο ἄν $\rho < \rho'$

— Ἕνα κυρτογώνιο τόξο $\overset{\frown}{AB}$ θά λέγεται **«μικρότερο»** ἀπό ἕνα ἄλλο κυρτογώνιο τόξο $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ **τοῦ ἴδιου (ἤ ἴσου) κύκλου,** ἄν καί μόνο ἄν $AB < \Gamma\Delta$ (σέ μή κυρτογώνια τόξα ὁρίζουμε ὅτι $\overset{\frown}{AB} < \overset{\frown}{\Gamma\Delta} \iff AB > \Gamma\Delta$, ἐνῶ κάθε κυρτογώνιο τόξο ὁρίζουμε ὅτι εἶναι μικρότερο ἀπό κάθε μή κυρτογώνιο τόξο).

— Μία γωνία $\widehat{\varphi}$ θά λέγεται «μικρότερη» ἀπό μία ἄλλη γωνία $\widehat{\omega}$, ἄν καί μόνο ἄν, ὅταν γίνουν καί οἱ δύο ἐπίκεντρες ἴσων κύκλων, ἡ $\widehat{\varphi}$ βαίνει σέ μικρότερο τόξο.

Παρατηροῦμε ὅτι μποροῦμε πάντοτε νά συγκρίνουμε δύο εὐθύγραμμα τμήματα ἤ δύο γωνίες, ἐνῶ δέν μποροῦμε νά συγκρίνουμε δύο τόξα παρά μόνο ὅταν ἀνήκουν στόν ἴδιο κύκλο ἤ σέ ἴσους κύκλους.

8. Πολλές φορές ἀπό μία σχέση πού ἰσχύει γιά δύο σχήματα βρίσκουμε σχέση πού ἰσχύει γιά δύο ἄλλα ἀντίστοιχά τους σχήματα. Οἱ πιό συνηθισμένες ἀπό τίς περιπτώσεις αὐτές εἶναι:

— Ἡ σχέση πού ἰσχύει γιά δύο πλευρές (ἤ γωνίες) ἑνός τριγώνου ΑΒΓ ἰσχύει καί γιά τίς ἀπέναντι γωνίες (ἤ πλευρές) του, δηλαδή:

$$\beta \gtreqless \gamma \iff \widehat{B} \gtreqless \widehat{\Gamma}$$

— Ἄν φέρουμε ἀπό σημεῖο Α τό κάθετο τμῆμα ΑΚ καί δύο πλάγια τμήματα ΑΒ καί ΑΓ πρός μία εὐθεία ε, ἡ σχέση πού ἰσχύει γιά τά πλάγια τμήματα ΑΒ καί ΑΓ ἰσχύει καί γιά τά τμήματα ΚΒ καί ΚΓ καί ἀντιστρόφως, δηλαδή

$$AB \gtreqless A\Gamma \iff KB \gtreqless K\Gamma.$$

— Ἄν θεωρήσουμε δύο χορδές ΑΒ καί ΓΔ τοῦ ἴδιου κύκλου (ἤ ἴσων κύκλων), ἰσχύει ἡ πρόταση

$$AB \gtreqless \Gamma\Delta \iff \text{ἀπόστημα } AB \lesseqgtr \text{ ἀπόστημα } \Gamma\Delta,$$

δηλαδή ἀπό τή σχέση πού ἰσχύει γιά τίς χορδές προκύπτει ἡ σχέση πού ἰσχύει γιά τά ἀποστήματά τους καί ἀντιστρόφως.

9. Ἄν ἔχουμε δύο τρίγωνα ΑΒΓ καί Α΄Β΄Γ΄, μποροῦμε νά λέμε ὅτι εἶναι ἴσα ἤ ἄνισα, γιά ἄνισα ὅμως τρίγωνα δέν μποροῦμε νά λέμε ὅτι τό ἕνα εἶναι «μικρότερο» ἤ «μεγαλύτερο» ἀπό τό ἄλλο.

Ἐπίσης, ἀπό τή σχέση πού ἰσχύει γιά δύο πλευρές (ἤ γωνίες) ἄνισων τριγώνων δέν προκύπτει σχέση γιά τίς ἀπέναντι γωνίες (ἤ πλευρές) τους παρά μόνο στήν περίπτωση πού τά δύο τρίγωνα ἔχουν δύο πλευρές ἴσες. Ἔτσι **σέ δύο τρίγωνα ΑΒΓ καί Α΄Β΄Γ΄ μέ $\beta = \beta'$ καί $\gamma = \gamma'$ ἔχουμε τίς προτάσεις:**

$$\text{I. } \widehat{A} \gtreqless \widehat{A'} \iff B\Gamma \gtreqless B'\Gamma'$$

$$\text{II. } \widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma'} \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{B'} \text{ ἤ } \widehat{B} + \widehat{B'} = 180^\circ$$

Πράξεις καί μέτρο γεωμετρικῶν σχημάτων.

10. Στή Γεωμετρία ὁρίζουμε πράξεις σέ τρία σύνολα: στό σύνολο $\mathfrak{S}$ τῶν εὐθύγραμμων τμημάτων, στό σύνολο T τῶν τόξων ἑνός κύκλου (ἤ ἴσων κύκλων) καί στό σύνολο Γ τῶν γωνιῶν. Ἄν σημειώνουμε λοιπόν μέ

$$\Theta = \{a, b, c, \ldots\}$$

στήν κάθε περίπτωση τό θεωρούμενο σύνολο (δηλαδή μέ Θ ἐννοοῦμε ἕνα ἀπό τά σύνολα $\mathfrak{S}, T, \Gamma$, ἀνάλογα μέ τήν περίπτωση πού ἐξετάζουμε), στό Θ ὁρίζουμε πρόσθεση καί ἀφαίρεση μέ τόν ἀκόλουθο τρόπο:

— Ἄν $\Theta = \mathfrak{S}$, καλοῦμε **ἄθροισμα** $a + b$ τό τμῆμα πού προκύπτει, ἄν πάρουμε σέ μία εὐθεία δύο διαδοχικά τμήματα* ἴσα ἀντίστοιχα μέ τά a καί b.

— Ἄν $\Theta = T$, καλοῦμε **ἄθροισμα** a + b τό τόξο πού προκύπτει, ἄν πάρουμε στόν ἴδιο (ἤ σέ ἴσο) κύκλο δύο διαδοχικά τόξα* ἴσα ἀντιστοίχως μέ a καί b.

— Ἄν $\Theta = \Gamma$, καλοῦμε **ἄθροισμα** a + b μία γωνία πού εἶναι ἴση μέ τήν ἐπίκεντρη γωνία ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ στό ἄθροισμα τῶν τόξων, στά ὁποῖα βαίνουν οἱ γωνίες a καί b, ὅταν γίνουν ἐπίκεντρες ἴσων κύκλων.

— Ἄν a > b καλοῦμε **διαφορά** a–b σέ κάθε περίπτωση ἕνα στοιχεῖο $d \in \Theta$ τέτοιο, ὥστε d + b = a. Ἔχουμε δηλαδή πάντοτε

$$a - b = d \iff a = b + d.$$

Ἡ **διαφορά** a–a, $\forall a \in \Theta$ εἶναι τό «μηδενικό στοιχεῖο» τοῦ Θ, τό ὁποῖο σημειώνεται ἁπλῶς μέ O καί εἶναι οὐδέτερο στοιχεῖο τῆς προσθέσεως.

11. Στό σύνολο Θ ὁρίζουμε καί μία ἄλλη πράξη : **τό γινόμενο στοιχείου τοῦ Θ ἐπί ἀριθμό.** Ἄν κ καί λ εἶναι φυσικοί ἀριθμοί, ἡ πράξη αὐτή ὁρίζεται ὡς ἑξῆς:

— Τό γινόμενο κa σημαίνει ἄθροισμα κ στοιχείων ἴσων μέ a.

— Τό γινόμενο (1/λ)a σημαίνει τό ἕνα ἀπό τά στοιχεῖα πού βρίσκουμε, ἄν χωρίσουμε τό a σέ λ ἴσα μέρη.

— Τό γινόμενο $\frac{\kappa}{\lambda}$ a σημαίνει ἄθροισμα κ στοιχείων ἴσων μέ $\frac{1}{\lambda}$ a.

Ἡ ἰσότητα λοιπόν $b = \frac{\kappa}{\lambda} a$ σημαίνει ὅτι τό b εἶναι ἴσο μέ κ τμήματα ἴσα μέ $\frac{1}{\lambda}$ a.

Τέτοια σχήματα εἶναι:

— Τό τμῆμα πού συνδέει τά μέσα δύο πλευρῶν τριγώνου εἶναι ἴσο (καί παράλληλο) μέ τό μισό τῆς τρίτης πλευρᾶς.

— Ἡ διάμεσος ὀρθογώνιου τριγώνου πού ἀντιστοιχεῖ στήν ὑποτείνουσά του εἶναι τό μισό τῆς ὑποτείνουσας.

— Τό τμῆμα πού ἔχει ἄκρα μία κορυφή τριγώνου καί τό κέντρο βάρους του εἶναι ἴσο μέ τά 2/3 τῆς ἀντίστοιχης διαμέσου.

— Ἡ διάμεσος* ἑνός τραπεζίου εἶναι ἴση μέ τό μισό τοῦ ἀθροίσματος τῶν βάσεών του.

— Τό τμῆμα πού ἑνώνει τά μέσα τῶν διαγωνίων ἑνός τραπεζίου εἶναι τό μισό τῆς διαφορᾶς τῶν βάσεών του.

— Ἡ ἀπόσταση τοῦ περίκεντρου ἑνός τριγώνου ἀπό μία πλευρά του εἶναι τό μισό τῆς ἀποστάσεως τοῦ ὀρθόκεντρου ἀπό τήν ἀπέναντι κορυφή του (βλ. ἄσκ. 227).

— Ἡ ἐγγεγραμμένη γωνία σ' ἕνα τόξο κύκλου εἶναι τό μισό τῆς ἀντίστοιχης ἐπίκεντρης γωνίας.

Ἄν ἔχουμε μία ἰσότητα τῆς μορφῆς $b = \frac{\kappa}{\lambda} a$, ὁ ἀριθμός $\frac{\kappa}{\lambda}$ λέγεται **λόγος τοῦ b πρός τό a** καί γράφεται $\frac{b}{a}$, δηλαδή εἶναι

$$\frac{b}{a} = \frac{\kappa}{\lambda} \iff b = \frac{\kappa}{\lambda} a.$$

Εἰδικά γιά τίς γωνίες ὁ λόγος δύο γωνιῶν ἰσοῦται πάντοτε μέ τό λόγο τῶν τόξων στά ὁποῖα βαίνουν, ὅταν γίνουν ἐπίκεντρες ἴσων κύκλων.

12. Ἄν πάρουμε ἕνα ὁρισμένο στοιχεῖο $\mu \in \Theta$ καί τό καλέσουμε «μονάδα μετρήσεως», ὁ λόγος $\frac{\theta}{\mu}$ γιά κάθε $\theta \in \Theta$ λέγεται **μέτρο τοῦ θ** ὡς πρός μονάδα τό μ καί σημειώνεται (θ), δηλ.

$$(\theta) = \frac{\theta}{\mu}.$$

Γιά τά μέτρα τῶν στοιχείων τοῦ Θ ἔχουμε τίς προτάσεις:

I. Ὁ λόγος δύο στοιχείων ἰσοῦται μέ τό λόγο τῶν μέτρων τους, δηλ. $\frac{a}{b} = \frac{(a)}{(b)}$.

II. Ἡ σχέση πού ἰσχύει γιά δύο στοιχεῖα ἰσχύει καί γιά τά μέτρα τους καί ἀντιστρόφως, δηλαδή

$$\alpha \gtreqless b \Longleftrightarrow (a) \gtreqless (b).$$

III. Τό μέτρο τοῦ ἀθροίσματος δύο στοιχείων ἰσοῦται μέ τό **ἄθροισμα τῶν μέτρων τους** (βλ. ἄσκ. 18, 41,55), δηλαδή

$$(a + b) = (a) + (b).$$

Στό σύνολο τῶν τόξων παίρνουμε γιά μονάδα μετρήσεως τή **μοίρα***.
Στό σύνολο τῶν γωνιῶν παίρνουμε γιά μονάδα μετρήσεως τή γωνία, πού ὅταν γίνει ἐπίκεντρη, βαίνει σέ τόξο μιᾶς μοίρας. Ἡ γωνία αὐτή λέγεται ἐπίσης **«μοίρα»**. Μία πεπλατυσμένη γωνία* ἔχει μέτρο 180°, ἐνῶ μία πλήρης γωνία* ἔχει μέτρο 360°.

Ὀρθή γωνία. Συμπληρωματικές καί παραπληρωματικές γωνίες.

13. Μία γωνία, πού εἶναι ἴση μέ τό μισό μιᾶς πεπλατυσμένης γωνίας, λέγεται **ὀρθή γωνία**. Ὅλες οἱ ὀρθές γωνίες εἶναι ἴσες μεταξύ τους, γιατί κάθε μία ἔχει μέτρο 90°. Γωνία πού εἶναι μεγαλύτερη ἤ μικρότερη ἀπό τήν ὀρθή λέγεται ἀντίστοιχα **ὀξεία** ἤ **ἀμβλεία**. Ἐπειδή κάθε γωνία ἐγγεγραμμένη σέ κύκλο εἶναι τό μισό τῆς ἀντίστοιχης ἐπίκεντρης, συμπεραίνουμε ὅτι:

— Γωνία ἐγγεγραμμένη σέ ἡμικύκλιο εἶναι ὀρθή.

— Γωνία ἐγγεγραμμένη σέ κυρτογώνιο (ἤ μή κυρτογώνιο) τόξο εἶναι ὀξεία (ἤ ἀμβλεία).

Πολλές φορές χρησιμοποιοῦμε τήν ὀρθή γωνία γιά μονάδα μετρήσεως τῶν γωνιῶν. Τότε οἱ ὀξεῖες γωνίες ἔχουν μέτρο μικρότερο ἀπό 1 καί οἱ ἀμβλεῖες ἔχουν μέτρο μεγαλύτερο ἀπό 1.

14. Δύο ὀξεῖες γωνίες, πού ἔχουν ἄθροισμα 90° (δηλαδή μία ὀρθή γωνία), λέγονται **συμπληρωματικές γωνίες**. Ἔτσι π.χ. συμπληρωματικές εἶναι οἱ ὀξεῖες γωνίες ἑνός ὀρθογώνιου τριγώνου.

Δύο γωνίες πού ἔχουν ἄθροισμα 180° (δηλαδή δύο ὀρθές ἤ μία πεπλατυσμένη γωνία) λέγονται **παραπληρωματικές γωνίες**. Χαρακτηριστικά ζευγάρια παραπληρωματικῶν γωνιῶν εἶναι:
— Οἱ ἐφεξῆς* γωνίες πού οἱ μή κοινές πλευρές τους εἶναι ἀντικείμενες ἡμιευθεῖες.
— Οἱ ἐντός καί ἐπί τά αὐτά μέρη δύο παράλληλων εὐθειῶν.
— Οἱ γωνίες πού ἔχουν τίς πλευρές τους παράλληλες (ἤ κάθετες) καί εἶναι ἡ μία ὀξεία καί ἡ ἄλλη ἀμβλεία.
— Δύο ὁποιεσδήποτε διαδοχικές γωνίες ἑνός παραλληλογράμμου.
— Οἱ διαδοχικές γωνίες ἑνός τραπεζίου πού ἔχουν τίς κορυφές τους στά ἄκρα μιᾶς ἀπό τίς μή παράλληλες πλευρές του.
— Οἱ ἀπέναντι γωνίες ἑνός ἐγγεγραμμένου τετραπλεύρου.

Ἡ ἐφεξῆς καί παραπληρωματική γωνία μιᾶς γωνίας τριγώνου (ἤ πολυγώνου) λέγεται **ἐξωτερική γωνία** του. Κάθε ἐξωτερική γωνία τριγώνου εἶναι ἴση μέ τό ἄθροισμα τῶν δύο γωνιῶν τοῦ τριγώνου πού βρίσκονται ἀπέναντί της (καί συνεπῶς εἶναι μεγαλύτερη ἀπό τήν κάθε μιά τους). Ἐπίσης ἡ ἐξωτερική γωνία ἑνός ἐγγεγραμμένου τετραπλεύρου εἶναι ἴση μέ τή γωνία τοῦ τετραπλεύρου πού βρίσκεται ἀπέναντί της.

15. Ἄς ἀναφέρουμε τέλος τά πιό χρήσιμα ἀθροίσματα γωνιῶν (μέ περισσότερους ἀπό δύο προσθετέους), πού εἶναι ἴσα μέ πολλαπλάσιο τῆς ὀρθῆς γωνίας.
— Ἄν ἀπό ἕνα σημεῖο Α μιᾶς εὐθείας ε φέρουμε ἡμιευθεῖες σ' ἕνα ἡμιεπίπεδο ἀκμῆς ε, τό ἄθροισμα ὅλων τῶν διαδοχικῶν γωνιῶν πού σχηματίζονται εἶναι ἴσο μέ 180°.
— Ἄν ἀπό ἕνα σημεῖο Α φέρουμε ὁποιεσδήποτε ἡμιευθεῖες, τό ἄθροισμα ὅλων τῶν διαδοχικῶν γωνιῶν πού σχηματίζονται εἶναι ἴσο μέ 360°.
— Τό ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου εἶναι 180°.
— Τό ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ τετραπλεύρου εἶναι 360°.

— Τό ἄθροισμα τῶν γωνιῶν πολυγώνου μέ ν πλευρές εἶναι 2ν-4 ὀρθές γωνίες.
— Τό ἄθροισμα τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν ὁποιουδήποτε πολυγώνου εἶναι 4 ὀρθές (βλ. ἄσκ. 107).

Σχέσεις εὐθειῶν.

16. Δύο εὐθεῖες πού ἔχουν δύο κοινά σημεῖα συμπίπτουν (ταυτίζονται). Ἔτσι δύο διαφορετικές εὐθεῖες τοῦ ἐπιπέδου μας:
— ἤ ἔχουν ἕνα κοινό σημεῖο καί τότε λέγονται **τεμνόμενες**·
— ἤ δέν ἔχουν κοινό σημεῖο καί τότε λέγονται **παράλληλες**.

Οἱ τεμνόμενες εὐθεῖες σχηματίζουν τέσσερις διαδοχικές γωνίες ἀπό τίς ὁποῖες οἱ ἀπέναντι εἶναι κατακορυφήν καί ἴσες, ἐνῶ δύο ὁποιεσδήποτε συνεχόμενες εἶναι ἐφεξῆς καί παραπληρωματικές. Στήν περίπτωση πού οἱ τέσσερις αὐτές γωνίες εἶναι ἴσες ὁπότε κάθε μία τους εἶναι ὀρθή), οἱ εὐθεῖες λέγονται **κάθετες**.

Ἄν ἔχουμε μία εὐθεία ε καί ἕνα σημεῖο Α πού δέν ἀνήκει στήν ε, ἰσχύουν οἱ προτάσεις:
— Ὑπάρχει μία μόνο εὐθεία πού διέρχεται ἀπό τό Α καί εἶναι παράλληλη πρός τήν εὐθεία ε (ἀξίωμα Εὐκλείδη).
— Ὑπάρχει μία μόνο εὐθεία πού διέρχεται ἀπό τό Α καί εἶναι κάθετη στήν ε. Ἄν ἡ κάθετη αὐτή τέμνει τήν ε στό Κ, τό τμῆμα ΑΚ λέγεται **ἀπόσταση τοῦ Α ἀπό τήν ε.**

Ἡ δεύτερη πρόταση ἰσχύει καί ὅταν τό σημεῖο Α ἀνήκει στήν εὐθεία ε. Ἄν τό Α εἶναι τό μέσο ἑνός εὐθύγραμμου τμήματος ΒΓ τῆς εὐθείας ε, τότε ἡ κάθετη στήν ε στό σημεῖο Α λέγεται **μεσοκάθετος τοῦ ΒΓ** καί κάθε σημεῖο της ἰσαπέχει ἀπό τά Β καί Γ.

17. Ἄν ἔχουμε δύο παράλληλες εὐθεῖες ε_1 καί ε_2, κάθε εὐθεία ε πού τέμνει τή μία σ' ἕνα σημεῖο της Α θά τέμνει καί τήν ἄλλη σ' ἕνα σημεῖο της Β. Ἀπό τίς γωνίες πού σχηματίζονται στά Α καί Β:
— οἱ ἐντός ἐναλλάξ εἶναι ἴσες,
— οἱ ἐντός ἐκτός καί ἐπί τά αὐτά μέρη εἶναι ἴσες,
— οἱ ἐντός καί ἐπί τά αὐτά μέρη εἶναι παραπληρωματικές.

Ἄν ἐπιπλέον ἡ εὐθεία ε εἶναι κάθετη στή μία ἀπό τίς παράλληλες, τότε θά εἶναι κάθετη καί στήν ἄλλη.

Θά ἀναφερθοῦμε τώρα στίς κυριότερες περιπτώσεις παραλληλίας δύο εὐθειῶν. Δύο εὐθεῖες ε_1 καί ε_2 εἶναι παράλληλες, ὅταν:
— Εἶναι κάθετες στήν ἴδια εὐθεία.
— Κάθε μιά τους εἶναι παράλληλη πρός μία τρίτη εὐθεία.
— Τέμνονται ἀπό μία τρίτη εὐθεία καί οἱ ἐντός ἐναλλάξ γωνίες πού σχηματίζουν εἶναι ισες (ἤ οἱ ἐντός ἐκτός καί ἐπί τά αὐτά μέρη γωνίες πού σχηματίζουν εἶναι ἴσες ἤ οἱ ἐντός καί ἐπί τά αὐτά μέρη γωνίες πού σχηματίζουν εἶναι παραπληρωματικές).
— Εἶναι συμμετρικές ὡς πρός κέντρο.
— Ἑνώνουν τά ἄκρα δύο ἴσων καί παράλληλων εὐθύγραμμων τμημάτων.

Ἐπίσης, παράλληλα εὐθύγραμμα τμήματα εἶναι:
— Τό τμῆμα πού ἑνώνει τά μέσα δύο πλευρῶν ἑνός τριγώνου καί ἡ τρίτη πλευρά τοῦ τριγώνου.
— Οἱ ἀπέναντι πλευρές ἑνός παραλληλογράμμου.
— Οἱ βάσεις ἑνός τραπεζίου.

Ἄν ἔχουμε δύο παράλληλες εὐθεῖες ε_1 καί ε_2, ὅλα τά σημεῖα τῆς μιᾶς ἔχουν ἴσες ἀποστάσεις ἀπό τήν ἄλλη. Τό εὐθύγραμμο τμῆμα υ πού εἶναι ἴσο μέ ὅλες αὐτές τίς ἀποστάσεις λέγεται **ἀπόσταση τῶν δύο παράλληλων εὐθειῶν.** Εἶναι φανερό ὅτι ὑπάρχει μία εὐθεία ε παράλληλη πρός τίς ε_1 καί ε_2, ἡ ὁποία βρίσκεται μέσα στή ζώνη* τῶν παράλληλων αὐτῶν καί ἀπέχει ἀπό κάθε μιά τους ἀπόσταση $\frac{\upsilon}{2}$. Ἡ εὐθεία αὐτή λέγεται **μεσοπαράλληλος τῶν ε_1 καί ε_2 καί** ὅλα τά σημεῖα της ἰσαπέχουν ἀπό τίς δύο παράλληλες ε_1 καί ε_2.

18. Δύο μή παράλληλες εὐθεῖες τοῦ ἐπιπέδου διέρχονται πάντοτε ἀπό ἕνα σημεῖο. Τρεῖς ἤ περισσότερες εὐθεῖες τοῦ ἐπιπέδου (μή παράλληλες ἀνά δύο) δέ διέρχονται ὑποχρεωτικά ἀπό τό ἴδιο σημεῖο. Χαρακτηριστικές περιπτώσεις εὐθειῶν περισσότερων ἀπό δύο πού διέρχονται ἀπό τό ἴδιο σημεῖο εἶναι:

— Οἱ μεσοκάθετοι τῶν πλευρῶν ἑνός τριγώνου (διέρχονται ἀπό τό περίκεντρο* τοῦ τριγώνου).
— Οἱ εὐθεῖες πού περιέχουν τά ὕψη ἑνός τριγώνου (διέρχονται ἀπό τό ὀρθόκεντρο* τοῦ τριγώνου).
— Οἱ εὐθεῖες πού περιέχουν τίς διαμέσους ἑνός τριγώνου (διέρχονται ἀπό τό «κέντρο βάρους»* τοῦ τριγώνου τό ὁποῖο ἀπέχει ἀπό κάθε κορυφή τά $\frac{2}{3}$ τῆς ἀντίστοιχης διαμέσου).
— Οἱ εὐθεῖες πού διχοτομοῦν τίς γωνίες ἑνός τριγώνου (διέρχονται ἀπό τό ἔγκεντρο* τοῦ τριγώνου).
— Οἱ εὐθεῖες πού διχοτομοῦν ἐξωτερικά δύο γωνίες τοῦ τριγώνου καί ἡ εὐθεία πού διχοτομεῖ τήν τρίτη γωνία τοῦ τριγώνου (διέρχονται ἀπό ἕνα παράκεντρο* τοῦ τριγώνου).
— Οἱ μεσοκάθετοι τῶν πλευρῶν ἑνός ἐγγεγραμμένου τετραπλεύρου (διέρχονται ἀπό τό κέντρο τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου του).
— Οἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν ἑνός περιγεγραμμένου τετραπλεύρου (διέρχονται ἀπό τό κέντρο τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου του).
— Οἱ εὐθεῖες πού ἑνώνουν τά μέσα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν ἑνός τετραπλεύρου καί ἡ εὐθεία πού ἑνώνει τά μέσα τῶν διαγωνίων των (βλ. ἄσκ. 132).

Σχέσεις εὐθείας καί κύκλου. Σχέσεις δύο κύκλων.

19. Μία εὐθεία καί ἕνας κύκλος ἔχουν δύο τό πολύ κοινά σημεῖα. Ἄν θεωρήσουμε μία εὐθεία ε καί ἕναν κυκλ(Ο,ρ) καί ὀνομάσουμε ΟΚ τήν ἀπόσταση τοῦ κέντρου Ο ἀπό τήν ε, θά ἔχουμε τίς περιπτώσεις:

— Ἡ εὐθεία ε δέν ἔχει κοινό σημεῖο μέ τόν κύκλο. Τότε λέμε ὅτι ἡ ε βρίσκεται «ἔξω» ἀπό τόν κύκλο καί ἔχουμε $ΟΚ > ρ$.
— Ἡ εὐθεία ε ἔχει ἕνα μόνο κοινό σημεῖο Ε μέ τόν κύκλο. Τότε λέμε ὅτι ἡ ε **ἐφάπτεται** στόν κύκλο στό σημεῖο Ε (ἤ ὅτι ἡ ε εἶναι «ἐφαπτομένη» τοῦ κύκλου) καί ἔχουμε $ΟΚ = ρ$
— Ἡ εὐθεία ε ἔχει δύο κοινά σημεῖα Α καί Β μέ τόν κύκλο. Τότε λέμε ὅτι ἡ ε **τέμνει τόν** κύκλο καί ἔχουμε $ΟΚ < ρ$. Στήν περίπτωση αὐτή ἡ γωνία πού σχηματίζει ἡ ε μέ τήν ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου στό Α ἤ στό Β λέγεται **γωνία τῆς εὐθείας καί τοῦ κύκλου** καί ἰσοῦται μέ μιά ὁποιαδήποτε γωνία ἐγγεγραμμένη στό τόξο $\overset{\frown}{ΑΒ}$.

Σ' ἕνα σημεῖο Ε ἑνός κυκλ(Ο,ρ) μποροῦμε νά φέρουμε μόνο μία εὐθεία ε πού ἐφάπτεται στόν κύκλο. Ἡ εὐθεία αὐτή εἶναι κάθετη στήν ἀκτίνα ΟΕ.

Ἀπό ἕνα ἐξωτερικό σημεῖο Α τοῦ κδισ(Ο,ρ) μποροῦμε νά φέρουμε δύο ἐφαπτόμενες τοῦ κυκλ(Ο,ρ). Ἄν Ε καί Ε΄ εἶναι τά σημεῖα ἐπαφῆς τους, ἔχουμε τίς προτάσεις:

— Τά «ἐφαπτόμενα τμήματα» ΑΕ καί ΑΕ΄ εἶναι ἴσα.
— Ἡ εὐθεία ΑΟ διχοτομεῖ τή γωνία τῶν ἐφαπτομένων καί εἶναι μεσοκάθετος τῆς χορδῆς ΕΕ΄.

20. Δύο κύκλοι, πού ἔχουν τρία κοινά σημεῖα, συμπίπτουν (ταυτίζονται). Ἔτσι δύο διαφορετικοί κύκλοι μέ κέντρα Κ καί Λ:

— ἤ ἔχουν δύο κοινά σημεῖα καί τότε λέγονται **τεμνόμενοι,**
— ἤ ἔχουν ἕνα κοινό σημεῖο καί τότε λέγονται **ἐφαπτόμενοι,**
— ἤ δέν ἔχουν κοινό σημεῖο.

Τό εὐθύγραμμο τμῆμα ΚΛ, πού ἔχει ἄκρα τά κέντρα τους, λέγεται **διάκεντρος** τῶν δύο κύκλων καί ἡ εὐθεία ΚΛ λέγεται **διακεντρική εὐθεία.**
Ἄν ἔχουμε δύο κύκλους πού δέν ἔχουν κοινό σημεῖο,
— ἤ ὁ ἕνας κύκλος βρίσκεται στό ἐξωτερικό τοῦ ἄλλου κυκλικοῦ δίσκου καί τότε ἔχουμε $ΚΛ > R + ρ$,

— ἤ ὁ ἕνας κύκλος βρίσκεται στό ἐσωτερικό τοῦ ἄλλου κυκλικοῦ δίσκου καί τότε ἔχουμε $ΚΛ < R-ρ$.

Ἄν ἔχουμε δύο κύκλους, τούς κυκλ(Κ,R) καί κυκλ(Λ,ρ), πού τέμνονται στά σημεῖα Α καί Β, τότε:

— Ἡ διακεντρική εὐθεία ΚΛ εἶναι μεσοκάθετος τῆς κοινῆς χορδῆς τους ΑΒ (δηλαδή τά Α καί Β εἶναι συμμετρικά ὡς πρός τή διακεντρική εὐθεία).

— Ἰσχύουν οἱ ἀνισότητες $|R-ρ| < ΚΛ < R+ρ$.

— Ἡ γωνία $\widehat{φ}$ πού σχηματίζουν οἱ ἐφαπτόμενες τῶν κύκλων στό Α ἤ τό Β λέγεται **γωνία τῶν δύο κύκλων** καί εἶναι ἴση μέ $\widehat{φ} = 180° - \widehat{ΚΑΛ} = 180° - \widehat{ΚΒΛ}$. Ἄν ἡ $\widehat{φ}$ εἶναι ὀρθή, οἱ κύκλοι τέμνονται «ὀρθογωνίως».

Τέλος, ἄν ἔχουμε δύο κύκλους ἐφαπτόμενους στό Ε, τό σημεῖο ἐπαφῆς Ε βρίσκεται στή διακεντρική εὐθεία ΚΛ καί εἶναι φανερό ὅτι ἡ κάθετη στήν ΚΛ στό Ε εἶναι «κοινή ἐφαπτομένη» τῶν δύο κύκλων. Στήν περίπτωση αὐτή

— ἤ ὁ ἕνας κύκλος βρίσκεται στό ἐξωτερικό τοῦ ἄλλου κυκλικοῦ δίσκου καί τότε ἔχουμε $ΚΛ = R+ρ$,

— ἤ ὁ ἕνας κύκλος βρίσκεται στό ἐσωτερικό τοῦ ἄλλου κυκλικοῦ δίσκου καί τότε ἔχουμε $ΚΛ = R-ρ$.

21. Μία εὐθεία ε πού ἐφάπτεται σέ δύο κύκλους λέγεται **κοινή ἐφαπτομένη** τους. Ἡ ε λέγεται εἰδικότερα **κοινή ἐξωτερική ἐφαπτομένη** ἤ **κοινή ἐσωτερική ἐφαπτομένη**, ἄν οἱ κύκλοι βρίσκονται πρός τό ἴδιο μέρος ἤ ἑκατέρωθεν τῆς εὐθείας ε.

Δύο κύκλοι, ἀνάλογα μέ τή θέση τους, ἔχουν τό πολύ δύο κοινές ἐξωτερικές ἐφαπτόμενες καί τό πολύ δύο κοινές ἐσωτερικές ἐφαπτόμενες. Ἄν οἱ κύκλοι ἔχουν δύο κοινές ἐξωτερικές ἐφαπτόμενες (ἤ δύο κοινές ἐσωτερικές ἐφαπτόμενες) ἰσχύουν οἱ προτάσεις:

— Τά ἐφαπτόμενα τμήματα (δηλαδή τά τμήματα πού βρίσκονται στίς κοινές ἐφαπτόμενες καί ἔχουν ἄκρα τά σημεῖα ἐπαφῆς στούς δύο κύκλους) εἶναι ἴσα.

— Ἡ διακεντρική εὐθεία διέρχεται ἀπό τό σημεῖο τομῆς τῶν κοινῶν ἐφαπτομένων καί διχοτομεῖ τή γωνία τους.

Ἀποστάσεις σέ γεωμετρικά σχήματα.

22. Λέγοντας «ἀπόσταση» δύο γεωμετρικῶν σχημάτων (σημείων, εὐθειῶν, κύκλων) ἐννοοῦμε πάντοτε τό μικρότερο ἀπό ὅλα τά εὐθύγραμμα τμήματα πού συνδέουν ἕνα σημεῖο τοῦ ἑνός σχήματος μέ ἕνα σημεῖο τοῦ ἄλλου σχήματος. Ἔτσι:

— Ἡ ἀπόσταση δύο σημείων Α καί Β εἶναι τό εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ.

— Ἡ ἀπόσταση ἑνός σημείου Α ἀπό εὐθεία ε εἶναι τό κάθετο τμῆμα ΑΚ ἀπό τό Α στήν ε.

— Ἡ ἀπόσταση ἑνός σημείου Α ἀπό κυκλ(Ο,ρ) εἶναι τό τμῆμα $|ΟΑ-ρ|$ πού βρίσκεται στήν εὐθεία ΟΑ (βλ. ἄσκ. 35).

— Ἡ ἀπόσταση δύο παράλληλων εὐθειῶν εἶναι ἡ ἀπόσταση ἑνός σημείου τῆς μιᾶς ἀπό τήν ἄλλη.

— Ἡ ἀπόσταση μιᾶς εὐθείας ε καί ἑνός κυκλ(Ο,ρ) πού δέν τέμνει τήν ε εἶναι τό εὐθύγραμμο τμῆμα ΟΚ–ρ πού βρίσκεται στήν κάθετη ἀπό τό κέντρο Ο πρός τήν ε (ΟΚ εἶναι τό κάθετο τμῆμα ἀπό τό Ο πρός τήν ε).

— Ἡ ἀπόσταση δύο κύκλων, τῶν κυκλ(Κ,R) καί κυκλ(Λ,ρ) μέ $ΚΛ > R+ρ$, εἶναι τό εὐθύγραμμο τμῆμα ΚΛ–R–ρ πού βρίσκεται στή διακεντρική εὐθεία (βλ. ἄσκ. 210).

Εἶναι φανερό ὅτι δύο σχήματα, πού ἔχουν κοινό σημεῖο, ἔχουν «μηδενική» ἀπόσταση.

23. Μποροῦμε νά ἐντοπίσουμε (προσδιορίσουμε) ὅλα τά σημεῖα πού ἔχουν ἀπό ἕνα γεωμετρικό σχῆμα (σημεῖο, εὐθεία, κύκλο) ἀποστάσεις ἴσες μέ δοσμένο τμῆμα λ. Ἔτσι:

— Τά σημεῖα πού ἔχουν ἀποστάσεις ἴσες μέ λ ἀπό ὁρισμένο σημεῖο Ο βρίσκονται στόν κυκλ(Ο,ρ).

— Τά σημεῖα πού ἔχουν ἀποστάσεις ἴσες μέ λ ἀπό ὁρισμένη εὐθεία ε βρίσκονται σέ δύο εὐθεῖες παράλληλες πρός τήν ε, οἱ ὁποῖες βρίσκονται ἑκατέρωθεν τῆς ε σέ ἀπόσταση λ.
— Τά σημεῖα πού ἔχουν ἀποστάσεις ἴσες μέ λ ἀπό ὁρισμένο κυκλ(Ο,ρ) βρίσκονται στούς δύο ὁμόκεντρους κύκλους πού ἔχουν ἀκτίνες $\rho + \lambda$ καί $\rho - \lambda$.

Εἶναι φανερό ὅτι τά σημεῖα πού ἔχουν ἀποστάσεις λ ἀπό δύο σχήματα (ἤ ἀπόσταση λ ἀπό τό ἕνα σχῆμα καί ἀπόσταση $\mu \neq \lambda$ ἀπό τό ἄλλο σχῆμα) θά βρίσκονται ὡς σημεῖα τομῆς γνωστῶν γεωμετρικῶν σχημάτων. Ἔτσι π.χ. ὑπάρχουν δύο τό πολύ σημεῖα πού ἔχουν ἀπόσταση λ ἀπό δύο σημεῖα Α καί Β (ὅσα δηλαδή εἶναι τά κοινά σημεῖα τῶν δύο κύκλων πού ἔχουν κέντρα τά Α,Β καί ἀκτίνα λ), ἐνῶ ὑπάρχουν 4 τό πολύ σημεῖα πού ἔχουν ἀπόσταση λ ἀπό ἕνα σημεῖο Α καί μία εὐθεία ε (ὅσα δηλαδή εἶναι τά κοινά σημεῖα τοῦ κυκλ(Α,λ) μέ τίς δύο παράλληλες πρός τήν ε εὐθεῖες πού ἀπέχουν ἀπό αὐτήν ἀπόσταση λ).

24. Μποροῦμε ἀκόμη νά ἐντοπίσουμε τά σημεῖα πού ἔχουν ἴσες ἀποστάσεις ἀπό δύο σημεῖα ἤ δύο εὐθεῖες. Ἔτσι:
— Τά σημεῖα πού ἰσαπέχουν ἀπό δύο ὁρισμένα σημεῖα Α καί Β βρίσκονται στή μεσοκάθετο τοῦ ΑΒ. Τά σημεῖα λοιπόν τῆς μεσοκαθέτου τοῦ ΑΒ εἶναι τά κέντρα τῶν κύκλων, οἱ ὁποῖοι διέρχονται ἀπό τά Α καί Β.
— Τά σημεῖα πού ἰσαπέχουν ἀπό τίς πλευρές μιᾶς γωνίας $\widehat{X O \Psi}$ βρίσκονται στή διχοτόμο ΟΔ τῆς γωνίας. Τά σημεῖα λοιπόν τῆς διχοτόμου ΟΔ εἶναι τά κέντρα τῶν κύκλων οἱ ὁποῖοι ἐφάπτονται στίς πλευρές τῆς γωνίας.
— Τά σημεῖα πού ἰσαπέχουν ἀπό δύο τεμνόμενες εὐθεῖες ΧΧ΄ καί ΨΨ΄ βρίσκονται στίς δύο κάθετες εὐθεῖες, οἱ ὁποῖες διχοτομοῦν τίς κατακορυφήν γωνίες πού σχηματίζονται.
— Τά σημεῖα πού ἰσαπέχουν ἀπό δύο παράλληλες εὐθεῖες ε_1 καί ε_2 βρίσκονται στή μεσοπαράλληλο τῶν ε_1 καί ε_2.

Εἶναι φανερό ὅτι τά σημεῖα πού ἰσαπέχουν ἀπό τρία σημεῖα ἤ ἀπό τρεῖς εὐθεῖες θά βρίσκονται ὡς σημεῖα τομῆς γνωστῶν εὐθειῶν.

Συνευθειακά καί ὁμοκυκλικά σημεῖα.

25. Ὅταν λέμε **«συνευθειακά σημεῖα»** ἐννοοῦμε σημεῖα περισσότερα ἀπό δύο, πού ἀνήκουν στήν ἴδια εὐθεία. Χαρακτηριστικές περιπτώσεις συνευθειακῶν σημείων εἶναι:
— Τό κέντρο ἑνός κυκλ(Ο,ρ), τό μέσο μιᾶς χορδῆς του ΑΒ καί τά μέσα τῶν δύο τόξων (κυρτογώνιου καί μή κυρτογώνιου) πού ἔχουν ἄκρα Α καί Β.
— Οἱ δύο ἀπέναντι κορυφές ἑνός παραλληλογράμμου καί τό μέσο τῆς διαγωνίου του ἡ ὁποία διέρχεται ἀπό τίς δύο ἄλλες κορυφές.
— Τά μέσα τῶν μή παράλληλων πλευρῶν καί τά μέσα τῶν διαγωνίων ἑνός τραπεζίου.
— Τά μέσα ὅλων τῶν τμημάτων πού ἔχουν τά ἄκρα τους σέ ὁρισμένο σημεῖο Α καί τό ἄλλο ἄκρο τους σέ ὁρισμένη εὐθεία ε[1].
— Μία κορυφή ἑνός τριγώνου, τό ἔγκεντρό του καί ἕνα παράκεντρο (τό ἀντίστοιχο τῆς κορυφῆς, π.χ. τά σημεῖα Α,Ι,$Ι_α$).
— Τό περίκεντρο, τό κέντρο βάρους καί τό ὀρθόκεντρο ἑνός τριγώνου (βλ. ἄσκ. 228).

26. Ὅταν λέμε **«ὁμοκυκλικά σημεῖα»** ἐννοοῦμε σημεῖα, περισσότερα ἀπό τρία, πού ἀνήκουν στόν ἴδιο κύκλο. Χαρακτηριστικές περιπτώσεις τέτοιων σημείων εἶναι:
— Οἱ κορυφές ἐγγεγραμμένου τετραπλεύρου.
— Οἱ κορυφές ὀρθογωνίου (ἤ τετραγώνου).
— Οἱ κορυφές ἰσοσκελοῦς τραπεζίου.
— Τά τρία μέσα τῶν πλευρῶν ἑνός τριγώνου καί τά τρία ἴχνη τῶν ὑψῶν του (βλ. ἄσκ. 264).
— Τά μέσα ὅλων τῶν τμημάτων πού ἔχουν τό ἕνα ἄκρο τους σέ ὁρισμένο σημεῖο Α΄ καί τό ἄλλο ἄκρο τους σέ ὁρισμένο κυκλ(Ο,ρ)[1].

---

1. Νά τό ἀποδείξετε.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ II

ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗ ΛΥΣΗ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

4. α) Νά δείξετε ὅτι, ἄν ἡ ε διέρχεται ἀπό τό Α, τότε $\Gamma \equiv A$ καί $B \equiv A$. β) Ὁμοίως ἄν ἡ ΑΙ συμπίπτει μέ τήν ε_1, τότε $I \equiv B$. γ) Ὑπάρχουν τόσες ὅσα τά σημεῖα Ι.

5. α) Ἄν $A \in B\Gamma$, τότε τό Γ θά ἀνήκει στήν ε. β) Ὑπάρχουν τόσες ὅσες διέρχονται ἀπό τό Β.

6. α) Ἄν $\Delta \in AB$, τότε $\Delta \in q$. β) Ἄν τό q΄ συμπίπτει μέ τό q, τότε $\Delta \in q$. γ) Ἄν $E \in AB$, τότε ἔχουμε $E \in q$ καί $E \in q'$. δ) Ἄν τό Ε δέν ἦταν σημεῖο τῆς ΑΒ, τότε τά q καί q΄ θά εἶχαν τρία κοινά σημεῖα μή συνευθειακά.

7. Ἀληθεύουν μόνο οἱ ΙΙ καί IV.

8. Ἐντοπίστε τά ἡμιεπίπεδα στά ὁποῖα βρίσκεται τό ΓΔ.

9. α) Ἐφαρμόστε τό ἀξίωμα XIII. β) Ἐντοπίστε τά ἡμιεπίπεδα στά ὁποῖα βρίσκεται κάθε σημεῖο τοῦ ΙΕ. γ) Ἐργασθεῖτε ὅπως καί γιά τό Ι.

10. Ἐντοπίστε τά ἡμιεπίπεδα στά ὁποῖα ἀνήκει τό Ε΄ παρατηρώντας ὅτι τό τμῆμα ΕΕ΄ τέμνει τίς ΑΑ΄ καί ΒΒ΄.

11. Παρατηρῆστε ὅτι τά Κ καί Ρ βρίσκονται ἑκατέρωθεν τοῦ φορέα τῆς ΓΔ πού διέρχεται ἀπό τό «μεσαῖο» σημεῖο Λ.

12. Ἡ ε δέν τέμνει τό ΒΓ.

13. Ἄν $\Gamma \in O A$, $Z \in O B'$ καί ὑπῆρχε $\{\Lambda\} = \varepsilon \cap \Gamma Z$, δεῖξτε ὅτι ἡ ἡμιευθεία ΟΕ ἤ ἡ ἀντικείμενή της θά βρισκόταν μέσα στήν $\widehat{AOB'}$. β) Ἄν $\Delta \in OB$, δεῖξτε ὅτι τά Γ καί Δ βρίσκονται ἑκατέρωθεν τῆς ε (παρατηρώντας ὅτι τά Δ καί Ζ βρίσκονται ἑκατέρωθεν τῆς ε).

14. Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι τό Ρ βρίσκεται στήν προέκταση τῆς πλευρᾶς ΑΖ. Ἄν τό Ρ εἶναι σημεῖο π.χ. τῆς ΒΓ, τότε τά Β καί Γ βρίσκονται ἑκατέρωθεν τῆς εὐθείας ΕΖ (ἀξίωμα XIII). Ἄν τό Ρ εἶναι κορυφή καί τό Ε βρίσκεται μεταξύ τῶν Ρ καί Ζ, τότε τά Ρ καί Ζ βρίσκονται ἑκατέρωθεν τῆς ἄλλης πλευρᾶς πού διέρχεται ἀπό τό Ε.

15. α) Στήν ἀντίθετη περίπτωση δέ θά ἦταν κυρτή (βλ. ἄσκ. 11), β) Ἄν ὑπῆρχαν κορυφές ἑκατέρωθεν τῆς ΑΛ, ἡ ΑΛ θά εἶχε καί τρίτο κοινό σημεῖο μέ τήν πολυγ. γραμμή. γ) Ἡ εὐθεία ε ἤ θά διέρχεται ἀπό κορυφή ἤ θά ἔχει δύο διαδοχικές κορυφές ἑκατέρωθεν αὐτῆς.

16. Ἄν ἡ ε διέρχεται ἀπό κορυφή, π.χ. τήν Α, τότε ἡ ἀνοικτή πολυγ. γραμμή ΒΓ... ΚΛ ἔχει ἕνα ἀκόμη κοινό σημεῖο Α΄ στήν ε (ἄσκ. 15). Ἄν ἡ ε δέ διέρχεται ἀπό τήν Α, τότε τά Α καί Α΄ βρίσκονται ἑκατέρωθεν τῆς ε καί κάθε μία ἀπό τίς δύο ἀνοικτές πολυγ. γραμμές μέ ἄκρα Α καί Α΄ τέμνει τήν ε σ᾽ ἕνα σημεῖο (βλ. ἄσκ. 15).

17. Ἄν σχηματίσουμε τά ζεύγη τῶν σημείων πού ὁρίζονται ἀπό τήν R, βλέπουμε ὅτι ἡ R εἶναι μόνο συμμετρική.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

21. Χρησιμοποιῆστε τήν πρόταση Ι τῆς § 22 καί τήν ἄσκηση 18.

22. Χρησιμοποιῆστε τήν πρόταση II τῆς § 22 καί τήν ἄσκηση 18.

23. Γράψτε τήν ὑπόθεση ὡς ΑΜ = ΜΔ καί ΒΜ = ΜΓ.

24. Γράψτε τό ΜΝ ὡς ἄθροισμα τῶν ΜΒ, ΒΓ, ΓΝ.

25. Γράψτε κάθε ἕνα ἀπό τά τμήματα ΣΜ καί ΡΜ σάν ἄθροισμα ἤ διαφορά ἄλλων τμημάτων.

26. Ἐργασθεῖτε ὅπως στήν ἄσκηση 19.

27. Χρησιμοποιῆστε τήν τριγωνική ἀνισότητα στά τρίγωνα ΒΡΓ, ΓΡΑ, ΑΡΒ καί τήν ἄσκηση 20 γιά τίς τεθλασμένες ΒΡΓ, ΓΡΑ, ΑΡΒ.

28. α) Ἄν Ο τό σημεῖο τομῆς τῶν διαγωνίων, ἐφαρμόστε τήν τριγωνική ἀνισότητα στά τρίγωνα ΑΟΒ καί ΔΟΓ. β) Ἐφαρμόστε ἐπίσης τήν τριγωνική ἀνισότητα στά τρίγωνα ΑΒΓ, ΓΒΔ καί στά ΑΒΓ, ΑΔΓ.

29. α) Ἄν Ο εἶναι τό μέσο τοῦ ΝΛ καί τό Ν εἶναι σημεῖο τοῦ ΑΛ, ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι ΜΝ = ΛΡ. β) Ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι ΓΝ=ΛΣΓ (Χρησιμοποιῆστε ὅτι $ΑΛ = ΛΔ = \frac{ΑΔ}{2} = \frac{ΑΒ}{2} + \frac{ΒΓ}{2} + \frac{ΓΔ}{2}\Big)$.

30. Νά ὑπολογίσετε τούς λόγους $\frac{ΑΒ}{ΑΜ}$ καί $\frac{ΑΒ}{ΑΣ}\left(\text{π.χ.} \frac{ΑΒ}{ΑΜ} = \frac{ΑΜ+ΜΒ}{ΑΜ} = 1 + \frac{3}{5} = \frac{8}{5}\right)$

31. Ἐφαρμόστε γιά κάθε τμῆμα ΑΕ,ΒΖ,ΓΔ τήν τριγωνική ἀνισότητα θεωρώντας π.χ. τό ΑΕ πλευρά τῶν τριγώνων ΑΒΕ καί ΑΓΕ.

32. Ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι γιά ὁποιαδήποτε θέση τοῦ Ρ ἔχουμε $ΡΑ > ΡΒ + ΡΓ + ΡΔ > ΟΑ + ΟΒ + ΟΓ + ΟΔ$, δηλαδή $ΡΑ + ΡΒ + ΡΓ + ΡΔ > ΑΓ + ΒΔ$.

33. α) Ἐφαρμόστε γιά μιά ὁποιαδήποτε διαγώνιο τό ἀξίωμα XVIII. β) Τό συμπέρασμα τῆς περιπτώσεως α ἐφαρμόστε το γιά ὅλες τίς διαγωνίους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

36. Χρησιμοποιῆστε τόν ὁρισμό τοῦ κύκλου κέντρου Α.

37. Τό κέντρο της Ο ἀπέχει ἀπό τό Α καί ἀπό τό Β ἀπόσταση 4 cm.

38. Χρησιμοποιῆστε τόν ὁρισμό τῶν ἐσωτερικῶν καί ἐξωτερικῶν σημείων κυκλικοῦ δίσκου μέ κέντρο Κ.

39. Εἶναι τομή δύο κυκλικῶν δίσκων.

40. Ἀρκεῖ νά δείξετε ὅτι ἡ ΟΓ εἶναι ἐσωτερική ἡμιευθεία τῆς κυρτῆς γωνίας ΑΟΒ (ἄσκ. 13) καί ὅτι ἡ ΟΔ εἶναι ἐξωτερική ἡμιευθεία της.

41. Ἐργασθεῖτε ὅπως στή λυμένη ἄσκηση 18.

42. Χρησιμοποιῆστε τίς ἰδιότητες τῆς § 37 καί τήν ἄσκηση 41.

43. Εἶναι διαφορές ἴσων τόξων.

44. Δεῖξτε ὅτι εἶναι χορδή ἴσων τόξων.

45. Ἐπειδή $\widehat{ΑΒ} > 2\widehat{ΑΓ} \iff \widehat{ΑΒ}-\widehat{ΑΓ} > \widehat{ΑΓ} \iff \widehat{ΒΓ} > \widehat{ΑΓ} \iff ΒΓ > ΑΓ$, θά πρέπει νά ἀποδείξουμε τήν ἀνισότητα $ΒΓ > ΑΓ$.

46. Ἐργασθεῖτε ὅπως στή λυμένη ἄσκηση 35.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

51. Ἀρκεῖ νά δειχθεῖ ὅτι $\widehat{ΒΑ} = \widehat{ΑΓ}$.

52. Ἀρκεῖ νά δειχθεῖ ὅτι $\widehat{ΑΑ'} = \widehat{ΒΒ'}$.

53. Πάρτε τή γωνία τῶν διχοτόμων ὡς ἄθροισμα δύο γωνιῶν.

54. Ἐργασθεῖτε ὅπως στήν ἄσκ. 19 γιά τά εὐθ. τμήματα.

55. Ἐργασθεῖτε ὅπως στή λυμένη ἄσκηση 18.

56. Ἀπάντηση : $\widehat{\Gamma O \Delta} = 20°$.

57. Ἀρκεῖ νά δειχθεῖ ὅτι $\widehat{AOK} = \widehat{MO\Gamma}$ (δηλαδή ὅτι $\frac{\widehat{AOB}}{2} = \frac{\widehat{\Gamma O\Delta}}{2}$) καί ὅτι $\widehat{BOA} = \widehat{\Delta ON}$ (δηλαδή ὅτι $\widehat{BO\Gamma}/2 = \widehat{A O\Delta}/2$).

58. Ἀπάντηση: συμπλήρωμα $\widehat{\varphi} = 18°$, παραπλήρωμα $\widehat{\varphi} = 108°$.

59. Ἀπάντηση: $\widehat{\varphi} = 72°$, $\widehat{\omega} = 40°$.

60. Ἀπάντηση: $\widehat{\varphi} = 45°$. Στή γενίκευση $\widehat{\varphi} = \frac{\lambda}{\kappa + 2\lambda} 270°$.

61. Ἀπάντηση: $\widehat{\varphi} = 45°$.

62. Ὑπολογίστε κάθε μία ἀπό τίς $\widehat{EOB}$ καί $\widehat{BOZ}$ μέ τίς $\widehat{AO\Gamma}$ καί $\widehat{AOB}$.

63. Ἄν εἶναι ΟΖ ἡ διχοτόμος τῆς $\widehat{BO\Gamma}$, νά ὑπολογίσετε τίς γωνίες $\widehat{BOZ}$ καί $\widehat{AOZ} = \widehat{AOB} + \widehat{BOZ}$.

64. Θεωρῆστε τίς $\widehat{A'OB'}$ καί $\widehat{AOB}$ ὡς ἄθροισμα ἐφεξῆς γωνιῶν μέ κοινή πλευρά τήν ΟΡ.

65. Ἐργασθεῖτε ὅπως στή λυμένη ἄσκ. 50.

66. Ἄν πάρουμε χορδή ΑΕ = 2ΑΔ, θά ἔχουμε (βλ. ἄσκ. 45) $\widehat{AE} > 2\widehat{A\Delta}$. Ἔχουμε ὅμως καί $AB = 2AE \Rightarrow \widehat{AB} > 2\widehat{AE} > 2.\,2\widehat{A\Delta} \Rightarrow \widehat{AB} > 4\widehat{A\Delta}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

70. Συγκρίνετε τα τριγ. ΔΒΜ καί ΕΜΓ.

71. Συγκρίνετε τά τρίγ. ΑΒΕ καί ΑΓΖ.

72. Συγκρίνετε τά τρίγωνα ΟΜΑ καί ΟΜΒ καί κατόπι τά ΟΑΑ΄ καί ΟΒΒ΄.

73. Ἄν ἡ ΑΜ τέμνει τή Γ΄Β΄ στό Μ΄ νά δείξετε, μέ ἰσότητες τριγώνων, ὅτι Γ΄Μ΄ = ΜΓ καί Μ΄Β΄ = ΜΒ.

74. Συγκρίνετε τά τρίγωνα Β΄ΑΓ καί ΒΑΓ΄.

75. Συγκρίνετε ἀνά δύο τά τρίγωνα ΔΒΕ, ΕΖΓ, ΖΑΔ.

76. Χρησιμοποιῆστε τό θεώρημα πού συγκρίνει στοιχεῖα δύο τριγώνων, ὅταν τα τρίγωνα αὐτά ἔχουν δύο πλευρές ἴσες.

77. Νά ἀποδείξετε, μέ σύγκριση δύο κατάλληλων τριγώνων, ὅτι τά τρίγωνα ΑΒΓ καί Α΄Β΄Γ΄ ἔχουν καί $\widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma'}$.

78. Νά ἀποδείξετε, μέ σύγκριση κατάλληλων τριγώνων, ὅτι τά τρίγωνα ΑΒΓ καί Α΄Β΄Γ΄ ἔχουν καί $\widehat{A} = \widehat{A'}$.

79. Σέ κάθε περίπτωση νά δείξετε ὅτι οἱ γωνίες πού βρίσκονται ἀπέναντι ἀπό τίς ἄλλες ἴσες πλευρές δέν μπορεῖ νά εἶναι παραπληρωματικές (βλ. θεώρημα § 62).

80. Νά ἀποδείξετε σέ κάθε περίπτωση τήν ἰσότητα δύο τριγώνων πού ἔχουν γιά ἀντίστοιχες πλευρές τά τήματα πού θέλετε νά συγκρίνετε.

81. Γιά τίς προτάσεις Π_1, Π_2, Π_3 ὀνομάστε στήν κάθε περίπτωση ΒΔ καί ΓΕ τά τμήματα

πού θέλετε νά συγκρίνετε καί ἀποδεῖξτε τήν ἰσότητα τῶν τριγώνων ΒΓΔ καί ΒΓΕ. Οἱ προτάσεις $Π_4, Π_5, Π_6$ εἶναι ἁπλές συνέπειες τῶν $Π_1, Π_2, Π_3$.

82. Ἀπό ἰσότητες ὀρθογώνιων τριγώνων, πού ἔχουν κάθετες πλευρές τά ἴσα ὕψη, νά ἐξασφαλίσετε στήν κάθε περίπτωση στοιχεῖα ἴσα γιά τά τρίγωνα ΑΒΓ καί Α΄Β΄Γ΄.

83. Συγκρίνετε τά τρίγωνα ΒΑΒ΄ καί ΓΑΓ΄.

84. Γιά τήν πρώτη ἀνισότητα πάρτε στήν ΑΓ τμῆμα ΑΒ΄ = ΑΒ καί παρατηρῆστε ὅτι ΜΒ΄ = ΜΒ, ἐνῶ τό Β΄Γ εἶναι ἴσο μέ τή διαφορά τῶν πλευρῶν. Γιά τή δεύτερη ἀνισότητα πάρτε στήν προέκταση τῆς ΓΑ τμῆμα $AB_1 = AB$ (ὅταν ἡ ἐξωτερική διχοτόμος διχοτομεῖ τή γωνία BAB_1) καί παρατηρῆστε ὅτι $NB_1 = NB$, ἐνῶ τό $ΓB_1$ εἶναι ἴσο μέ τό ἄθροισμα τῶν πλευρῶν.

85. Ἐφαρμόστε τήν τριγωνική ἀνισότητα (§ 23) στά τρίγωνα ΑΔΒ καί ΑΔΓ.

86. Ἄν Ο εἶναι τό σημεῖο τομῆς τῶν ΒΕ καί ΓΔ, παρατηρῆστε ὅτι στά τρίγωνα ΒΟΔ καί ΟΕΓ ἔχουμε ἀντίστοιχα $ΒΔ < ΒΟ$ καί $ΓΕ < ΟΓ$.

87. α) Μέ ἰσότητες τριγώνων δεῖξτε ὅτι $\widehat{OBA'} = \widehat{OB'A}$ καί ὅτι ΚΒ = ΚΒ΄, ὁπότε θά εἶναι τριγΟΒΑ΄ = τριγΟΒΑ΄.

β) Ἀποδεῖξτε ὅτι τριγΟΜΑ = τριγΟΝΑ΄.

88. Παρατηρῆστε (ἀπό τήν ἄσκ. 87α) ὅτι κάθε ἕνα ἀπό τά Κ,Λ,Μ,... κεῖται στή διχοτόμο τῆς $\widehat{XOΨ}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

93. Ἄν εἶναι $\{P\} = MA \cap ε$, ἐφαρμόστε τήν τριγωνική ἀνισότητα στό τρίγωνο ΜΡΒ.

94. Παρατηρῆστε ὅτι δύο σημεῖα τῆς ΟΔ ἰσαπέχουν ἀπό τά Α καί Β.

95. Ἀποδεῖξτε ὅτι καί τό Δ ἰσαπέχει ἀπό τά Α καί Γ.

96. Παρατηρῆστε ὅτι τό ΜΑ εἶναι ἴσο μέ τό $MB \perp OΨ$.

97. Νά συγκρίνετε τό $υ_α$ μέ κάθε μιά ἀπό τίς πλευρές β καί γ.

98. Ἄν $\widehat{ω}$ καί $\widehat{φ}$ εἶναι οἱ ἐντός ἐναλλάξ τῶν $ε_1$ καί $ε_2$, οἱ γωνίες $\frac{\widehat{ω}}{2}$ καί $\frac{\widehat{φ}}{2}$ εἶναι ἐντός ἐναλλάξ τῶν διχοτόμων τους ὅταν τέμνονται ἀπό τήν ε. Ἄν $\widehat{θ}$ καί $\widehat{φ}$ οἱ ἐντός καί ἐπί τά αὐτά μέρη τῶν $ε_1$ καί $ε_2$, ἡ διχοτόμος τῆς $\widehat{θ}$ εἶναι κάθετη στή διχοτόμο τῆς $\widehat{ω}$.

99. α) Ἄν οἱ $\widehat{φ}$ καί $\widehat{ω}$ εἶναι ἴσες καί ἔχουν πλευρές παράλληλες, συγκρίνετε τίς ἐντός ἐκτός καί ἐπί τά αὐτά μέρη γωνίες τῶν διχοτόμων τους, ὅταν τέμνονται ἀπό μία πλευρά τῆς μιᾶς γωνίας.

β) Ἄν οἱ $\widehat{θ}$ καί $\widehat{φ}$ εἶναι παραπληρωματικές καί ἔχουν πλευρές παράλληλες, παρατηρῆστε ὅτι ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας $\widehat{ω}$ πού εἶναι ἐφεξῆς καί παραπληρωματική τῆς $\widehat{θ}$ καί ἡ διχοτόμος τῆς $\widehat{φ}$ εἶναι παράλληλες.

100. α) Ἄν οἱ $\widehat{XOΨ} = \widehat{ω}$, $\widehat{X'O'Ψ'} = \widehat{φ}$ ἔχουν πλευρές κάθετες καί εἶναι ἴσες, σχηματίστε γωνία $\widehat{φ'} = \widehat{φ}$ πού νά ἔχει κορυφή τό Ο καί πλευρές παράλληλες μέ τίς πλευρές τῆς $\widehat{φ}$. Ἀποδεῖξτε ὅτι οἱ διχοτόμοι τῶν $\widehat{φ}$ καί $\widehat{ω}$ εἶναι κάθετες.

β) Ἄν οἱ γωνίες $\widehat{θ}$ καί $\widehat{φ}$ εἶναι παραπληρωματικές καί ἔχουν κάθετες πλευρές, παρατηρῆστε ὅτι ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας $\widehat{ω}$ πού εἶναι ἐφεξῆς καί παραπληρωματική τῆς $\widehat{θ}$ καί ἡ διχοτόμος τῆς $\widehat{φ}$ εἶναι κάθετες.

101. Στό σχῆμα τῆς § 65 θά πρέπει νά δείξουμε π.χ. ὅτι $\widehat{ABK} = \widehat{KB'A'}$.

102. Ὑπολογίστε τήν $\widehat{AEΓ}$ ὡς ἐξωτερική τοῦ τριγώνου ΑΕΒ καί ἀντικαταστῆστε, στήν ἰσότητα πού προκύπτει, τήν $\widehat{A}$.

103. Ὑπολογίστε τίς γωνίες πού ζητᾶμε ἀπό τίς γωνίες τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΔ·

104. Ἐργασθεῖτε ὅπως στήν ἄσκ. 50.

105. Ἄν οἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν $\widehat{Γ}$ καί $\widehat{Δ}$ τέμνονται στό Ι, ὑπολογίζουμε τήν $\widehat{ω}$ ἀπό τό τρίγωνο ΓΙΔ. Ἐπίσης ἄν οἱ διχοτόμοι τῶν $\widehat{B}$ καί $\widehat{Δ}$ τέμνονται στό Ε, ὑπολογίζουμε τή $\widehat{BEΔ} = 180° - \widehat{φ}$ ἀπό τό τετράπλευρο ΑΒΕΔ.

106. Παρατηρῆστε ὅτι κάθε γωνία τοῦ πολυγώνου μας εἶναι $\frac{2ν-4}{ν}$ ὀρθές.

107. Κάνετε χρήση τοῦ ὅτι κάθε γωνία τοῦ τετραπλεύρου καί ἡ ἀντίστοιχη ἐξωτερική της ἔχουν ἄθροισμα 180°.

108. Ὑπολογίστε τίς γωνίες ἀπό τά τρίγωνα ΑΖΔ καί ΑΕΗ ἐκφράζοντας τίς δύο ἄλλες γωνίες κάθε τριγώνου ἀπό τίς γωνίες τοῦ ΑΒΓ.

109. Προεκτείνετε τή διάμεσο ΑΜ κατά τμῆμα ΜΕ = ΑΜ καί ἐφαρμόστε τήν τριγωνική ἀνισότητα.

110. Ι) Ἐκφράστε τίς $\widehat{BAΔ}$ καί $\widehat{ΓAΔ}$ ἀπό τίς γωνίες $\widehat{B}$ καί $\widehat{Γ}$ ἀντιστοίχως.

ΙΙ) Προεκτείνετε τή διάμεσο ΑΜ κατά τμῆμα ΜΕ = ΜΑ καί συγκρίνετε στοιχεῖα τοῦ ΑΕΓ.

ΙΙΙ) Συνδυάζοντας τά δύο παραπάνω συμπεράσματα δεῖξτε ὅτι $\widehat{BAΔ} < \widehat{A}/2$ καί $\widehat{BAM} > \widehat{A}/2$.

ΙV) Παρατηρῆστε, ἀπό τό συμπέρασμα ΙΙΙ, ὅτι τά $δ_α$ καί $μ_α$ βρίσκονται πρός τό ἴδιο μέρος τοῦ $υ_α$)

V) Χρησιμοποιῆστε τήν ἄσκηση 109.

111. Προεκτείνετε στό κάθε τρίγωνο μία κάθετη πλευρά πρός τήν κορυφή τῆς ὀρθῆς γωνίας κατά τμῆμα ἴσο μέ τήν ἄλλη κάθετη. Παρατηρῆστε ὅτι στά τρίγωνα πού σχηματίζονται ἔχετε δύο πλευρές μία πρός μία ἴσες καί ἀπέναντι ἀπό δύο ἴσες πλευρές ἔχετε γωνίες ἴσες μέ 45°.

112. Νά συγκρίνετε τά τρίγωνα ΑΔΖ, ΒΕΔ, ΓΕΖ.

113. Ἄν εἶναι $\{E\} = AΔ \cap BΓ$ καί ἡ διχοτόμος τῆς $\widehat{E}$ τέμνει τή διχοτόμο τῆς $\widehat{Z}$ στό Ι καί τήν πλευρά ΔΓ στό Θ, πάρτε τήν $\widehat{EIZ}$ ὡς ἐξωτερική τοῦ τριγώνου ΙΘΖ καί ὑπολογίστε τίς ἄλλες γωνίες τοῦ τριγώνου αὐτοῦ ἀπό τίς γωνίες τοῦ ΑΒΓΔ.

114. Μετατρέψτε τήν ὑπόθεση $AM > \frac{BΓ}{2}\left(\text{ἤ } AM = \frac{BΓ}{2} \text{ ἤ } AM < \frac{BΓ}{2}\right)$ σέ ἀνισότητες γωνιῶν τῶν δύο τριγώνων ΑΜΒ καί ΑΜΓ καί προσθέστε κατά μέλη τίς δύο ἀνισότητες πού προκύπτουν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

120. Ἄν οἱ διχοτόμοι τῶν $\widehat{B}$ καί $\widehat{Δ}$ τέμνουν τίς ΑΔ καί ΓΒ στά Ε καί Ζ, συγκρίνετε τίς γωνίες $\widehat{AEB}$ καί $\widehat{AΔZ}$. Ἄν οἱ διχοτόμοι τῶν διαδοχικῶν γωνιῶν $\widehat{B}$ καί $\widehat{A}$ τέμνονται στό Ι, ὑπολογίστε τή γωνία $\widehat{AIB}$ ἀπό τό τρίγωνο ΑΙΒ. Ἐργασθεῖτε ὅμοια καί γιά τίς ἐξωτερικές διχοτόμους.

121. Παρατηρῆστε ὅτι τά τρίγωνα ΑΒΔ καί ΑΔΓ ἔχουν δύο πλευρές ἴσες.

122. Ἐπειδή τό ΜΔΑΕ εἶναι παραλληλόγραμμο, ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι τό τρίγωνο ΜΕΒ εἶναι ἰσοσκελές.

123. α) Χρησιμοποιῆστε τό θεώρημα τῆς § 79 (περίπτωση δ) καί τήν ἄσκηση 115. β) Παρατηρῆστε ὅτι οἱ γωνίες εἶναι συμμετρικές ὡς πρός τό Ο.

124. Δεῖξτε μέ τά σχηματιζόμενα παραλληλόγραμμα ὅτι ἔχουμε τήν περίπτωση τοῦ ἀξιώματος XXVII.

125. α) Δεῖξτε μέ ἰσότητες τριγώνων ὅτι οἱ ἀπέναντι πλευρές του εἶναι ἴσες. β) Ἄν πάρουμε μία διαγώνιο τοῦ ἑνός καί μία διαγώνιο τοῦ ἄλλου, δεῖξτε ὅτι τό σημεῖο τομῆς τους εἶναι μέσο τῆς καθεμιᾶς.

126. Συγκρίνετε τά τρίγωνα ΑΕΖ καί ΓΗΘ.

127. Ἄν Μ τό μέσο τῆς ΒΓ, ἀρκεῖ νά δειχθεῖ ὅτι $ΕΙ // = \frac{ΔΜ}{2}$

128. Ἄν Ζ τό μέσο τοῦ ΕΓ, ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι ΑΕ = ΕΖ = ΖΓ.

129. Παρατηρῆστε ὅτι ΔΕ // ΒΖ.

130. Παρατηρῆστε ὅτι τό τρίγωνο ΑΒΕ εἶναι ἰσοσκελές καί τό Δ μέσο τοῦ ΒΕ.

131. Παρατηρῆστε ὅτι καί στήν ἄσκ. 130.

132. α) Δεῖξτε ὅτι στό καθένα ἀπό τά τετράπλευρα αὐτά οἱ δύο ἀπέναντι πλευρές τους εἶναι ἴσες καί παράλληλες πρός τό μισό μιᾶς πλευρᾶς τοῦ ΑΒΓΔ.

β) Παρατηρῆστε ὅτι κάθε μία ἀπό τίς ΖΘ καί ΛΚ περνάει ἀπό τό μέσο τῆς ΕΗ.

133. Παρατηρῆστε ὅτι τά Α′,Β′,Γ′ εἶναι συμμετρικά τῶν Α,Β,Γ ὡς πρός τό Ο.

134. Χρησιμοποιῆστε τό ὅτι οἱ πλευρές τοῦ ΚΛΜΡ εἶναι παράλληλες καί ἴσες μέ τά μισά τῶν διαγωνίων τοῦ ΑΒΓΔ.

135, Μέ τήν ἄσκ. 120 ἐξασφαλίστε ὅτι οἱ διχοτόμοι σχηματίζουν ὀρθογώνιο. Μετά, ἄν Ε καί Ζ εἶναι τά σημεῖα τομῆς τῶν διχοτόμων τῶν $\widehat{Β}$ καί $\widehat{Δ}$ μέ τίς πλευρές ΑΔ καί ΒΓ ἀντιστοίχως, δεῖξτε ὅτι οἱ δύο ἀπέναντι κορυφές τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι μέσα τῶν ΒΕ καί ΔΖ.

136. Ἐργασθεῖτε ὅπως στήν ἄσκηση 135.

137. Ἄν εἶναι $\{Ι\} = Α'Ε \cap Γ'Ζ$, δεῖξτε ὅτι οἱ δύο ἄλλες γωνίες τοῦ Α′ΙΓ′ εἶναι ἴσες μέ τίς γωνίες στίς ὁποῖες χωρίζεται ἡ $\widehat{Β}$ ἀπό τή ΒΔ.

138. Παρατηρῆστε ὅτι ἡ $Α\widehat{Μ}Η$ ἰσοῦται μέ τό διπλάσιο μιᾶς ὀξείας γωνίας τοῦ τριγώνου.

139. Φέρτε τή διάμεσο ΑΜ καί παρατηρῆστε ὅτι $Α\widehat{Μ}Η = 30°$.

140. Ἀποδεῖξτε ὅτι τό τρίγωνο ΒΛΔ εἶναι ἰσοσκελές.

141. Νά χρησιμοποιήσετε τήν ἰσότητα $Ρ\widehat{Μ}Γ = Μ\widehat{Ρ}Η + Ρ\widehat{Η}Μ$.

142. Ἄν ΑΜ καί Α′Μ′ εἶναι οἱ διάμεσοι τῶν δύο τριγώνων, συγκρίνετε τά τρίγωνα ΑΗΜ καί Α′Η′Μ′.

143. α) Παρατηρῆστε ὅτι τό ΑΚΒΛ ἔχει τρεῖς ὀρθές γωνίες.

β) Ἡ ΚΛ περνάει ἀπό τό μέσο τῆς ΑΒ καί εἶναι $Λ\widehat{Κ}Β = Α\widehat{Β}Κ = Κ\widehat{Β}Γ$.

144. Ὀνομάστε ΑΚ καί ΑΛ τίς ἀποστάσεις τῆς κορυφῆς Α ἀπό τίς πλευρές ΒΓ καί ΔΓ καί συγκρίνετε τά τρίγωνα ΑΒΚ καί ΑΔΛ.

145. Πάρτε τίς ἀποστάσεις τῶν σημείων Σ καί Κ ἀπό τίς ἀπέναντι πλευρές τους καί συγκρίνετε τά τρίγωνα πού σχηματίζονται.

146. Ἐπειδή οἱ διχοτόμοι σχηματίζουν ὀρθογώνιο (βλ. ἄσκ. 135), πρέπει νά δείξουμε ὅτι τό ὀρθογώνιο αὐτό ἔχει δύο διαδοχικές πλευρές του ἴσες.

147. Ἐργασθεῖτε ὅπως στήν ἄσκηση 116 (ἀντιστρέφοντας τούς ρόλους τῶν τριγώνων ΑΒΓ καί ΕΑΗ).

148. α) Ἐπειδή τά τρίγωνα ΒΑΒ΄ καί ΕΑΕ΄ εἶναι ἰσοσκελή, βρίσκουμε εὔκολα ὅτι Β΄Ε΄ = = ΒΕ. β) Παρατηρῆστε ὅτι τό Ε΄ εἶναι μέσο τοῦ Β΄Γ.

149. Ἄν πάρουμε στήν πλευρά ΓΒ τμῆμα ΓΕ = ΓΑ, ἔχουμε ΒΕ = α–β. Ἀκόμη τό ὕψος ΕΘ τοῦ τριγώνου ΑΓΕ εἶναι ἴσο μέ τό $υ_α$. Ἔτσι, ἄν φέρουμε ΕΖ $\perp$ $υ_β$, τό τμῆμα ΒΖ εἶναι $υ_β - υ_α$ ἐνῶ ΒΖ < ΒΕ.

150. Ἀπό τήν ἄσκηση 143 καταλαβαίνουμε ὅτι κάθε ἕνα ἀπό τά σημεῖα αὐτά βρίσκεται στήν εὐθεία πού διέρχεται ἀπό τά μέσα τῶν ΑΒ καί ΑΓ.

151. Ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι $\widehat{ΑΒΔ} = 2\widehat{ΔΒΚ}$. Ἄν φέρουμε τή διάμεσο ΑΜ τοῦ ὀρθογώνιου τριγώνου ΔΑΖ, παρατηροῦμε ὅτι $\widehat{ΑΒΔ} = \widehat{ΑΜΒ}$, ἐνῶ $\widehat{ΑΜΒ} = 2\widehat{ΑΔΜ}$.

152. Παρατηρῆστε (πηγαίνοντας τό Μ στό Β) ὅτι ἡ διαφορά αὐτή πρέπει νά εἶναι ἴση μέ ΒΑ, ἐνῶ ἔχουμε ΜΔ = ΑΕ.

153. Πηγαίνοντας τό Μ στό Β βλέπουμε ὅτι ἡ διαφορά αὐτή πρέπει νά εἶναι ἴση μέ τό ὕψος ΒΖ. Ἄν λοιπόν φέρουμε ΒΙ $\perp$ ΜΔ, ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι ΜΕ = ΜΙ.

154. Ἄν φέρουμε τό ὕψος ΒΖ, βλέπουμε (πηγαίνοντας τό Μ στό Β) ὅτι τό ἄθροισμα πρέπει νά εἶναι ἴσο μέ τό ΑΒ + ΑΖ καί ἑπομένως ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι ΒΕ = ΖΔ.

155. α) Πηγαίνοντας τό Μ στό μέσο Η τῆς ΒΓ βλέπουμε ὅτι τό ἄθροισμα αὐτό πρέπει νά εἶναι ἴσο μέ τό διπλάσιο τοῦ ὕψους ΑΗ. Ἔτσι, ἄν φέρουμε ΑΙ $\perp$ ΔΕ, ἀρκεῖ νά ἐκφράσουμε καθένα ἀπό τά ΜΕ καί ΜΔ μέ τό ΜΙ = ΑΗ.

β) Ὁμοίως ἐργαζόμαστε καί γιά τό Μ΄.

156. Ἄν φέρουμε ἀπό τό Ρ παράλληλο πρός τήν ΟΨ, τό ἄθροισμα ΡΕ + ΡΖ εἶναι ἴσο μέ τό ὕψος τοῦ ἰσόπλευρου τριγώνου πού σχηματίζεται.

157. Νά συγκρίνετε μεταξύ τους τά τρίγωνα ΝΒΡ, ΡΓΣ, ΣΔΤ, ΤΑΝ καί μετά νά δείξετε ὅτι μία γωνία τοῦ ΝΡΣΤ εἶναι ὀρθή.

158. Πάρτε τά μέσα Ν καί Λ τῶν πλευρῶν ΑΓ καί ΑΒ καί συγκρίνετε τά τρίγωνα ΜΝΣ καί ΜΛΡ (παρατηρώντας ὅτι $ΜΣ = \dfrac{ΑΗ}{2}$ καί $ΜΡ = \dfrac{ΓΕ}{2}$).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

163. Ἄν Ο εἶναι τό σημεῖο τομῆς τῶν διαγωνίων, γράψτε τήν τριγωνική ἀνισότητα στά τρίγωνα ΑΟΒ καί ΔΟΓ.

164. Ἄν ἡ διχοτόμος τῆς $\widehat{Δ}$ τέμνει τήν ΑΒ στό Ε, δεῖξτε ὅτι ἡ ΓΕ εἶναι διχοτόμος τῆς $\widehat{Γ}$ (Παρατηρώντας ὅτι ΑΕ = ΑΔ).

165. Ὑπολογίστε ἀπό τήν ΑΒ = α τή διάμεσο τοῦ τραπεζίου ἀπό τά δύο ἀκραῖα μέρη της.

166. Παρατηρῆστε ὅτι ΑΔΗΒ εἶναι ὀρθογώνιο καί δεῖξτε ὅτι τό τμῆμα ΝΡ ἑνώνει τά μέσα τῶν διαγωνίων.

167. Ἄν ἡ διχοτόμος τῆς $\widehat{Α}$ τέμνει τή ΒΓ στό Ε καί τή ΔΓ στό Ζ, δεῖξτε ὅτι ἡ ΔΕ εἶναι διχοτόμος τῆς $\widehat{Δ}$ (δείχνοντας ὅτι τό τρίγωνο ΑΔΖ εἶναι ἰσοσκελές).

168. Ἐξετάστε στήν κάθε περίπτωση τί εἶναι τό τμῆμα ΜΜ΄ γιά τό τραπέζιο πού ἔχει βάσεις ΑΑ΄ καί ΒΒ΄.

169. Ἄν Ε καί Ζ εἶναι τά μέσα τῶν ΑΔ καί ΒΓ, φέρνουμε τίς ΕΕ΄ $\perp$ ΓΔ καί ΖΖ΄ $\perp$ ΓΔ καί παρατηροῦμε ὅτι ἡ ΚΚ΄ εἶναι διάμεσος τοῦ ΕΕ΄Ζ΄Ζ.

170. Ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι τό τρίγωνο ΑΜΔ εἶναι ὀρθογώνιο στό Μ, δηλαδή ὅτι ΔΜ ⊥ Β΄Γ΄.

171. Παρατηρῆστε ὅτι ἡ ΗΖ εἶναι διάμεσος τοῦ τραπεζίου ΕΒΓΔ.

172. Παρατηρῆστε ὅτι τό τμῆμα ΚΛ συνδέει τά μέσα τῶν διαγωνίων τοῦ τραπεζίου ΑΒΕΓ.

173. Ἄν οἱ ΑΗ καί ΒΚ τέμνουν τή ΓΔ στά Ε καί Ζ, παρατηρῆστε ὅτι τά Η καί Κ εἶναι μέσα τῶν ΑΕ καί ΒΖ.

174. Τά μέσα τῶν πλευρῶν του εἶναι κορυφές ρόμβου, ἄν καί μόνο ἄν οἱ διαγώνιοί του εἶναι ἴσες (βλ. ἄσκ. 134,β).

175. Παρατηρῆστε ὅτι ἡ ΔΒ διέρχεται ἀπό τά μέσα δύο πλευρῶν τοῦ τριγώνου ΑΑ΄Γ.

176. Παρατηρῆστε ὅτι $AM + MB \geq A'B$.

177. Παρατηρῆστε ὅτι $|AM - MB| < A'B$.

178. Παρατηρῆστε ὅτι $AM + MN + NB \geq A'B'$.

179. Ἄν ΑΑ΄, ΒΒ΄, ΓΓ΄ εἶναι οἱ θεωρούμενες ἀποστάσεις καί ΟΟ΄ εἶναι ἡ ἀπόσταση τοῦ κέντρου τοῦ ΑΒΓΔ ἀπό τήν ε, συγκρίνετε κάθε ἕνα ἀπό τά τμήματα ΑΑ΄ καί ΒΒ΄+ΓΓ΄ μέ τό τμῆμα ΟΟ΄.

180. Ἐργασθεῖτε ὅπως καί στήν ἄσκηση 179.

181. Ἄν ΕΜ εἶναι ἡ διάμεσος τοῦ τραπεζίου, παρατηρῆστε ὅτι $\widehat{BAM} = \widehat{AME}$ καί δεῖξτε ὅτι $\widehat{AME} = \widehat{EM\Delta} = \widehat{\Delta M\Gamma}$.

182. Ἄν Ε καί Ζ εἶναι τά μέσα τῶν ΑΒ καί ΓΔ, παρατηρῆστε ὅτι τό τμῆμα ΚΚ΄ εἶναι διάμεσος τοῦ τραπεζίου πού ἔχει βάσεις τά τμήματα ΕΕ΄ ⊥ ε καί ΖΖ΄ ⊥ ε.

183. Παίρνουμε $A' = \text{συμμ}_{OX}A$ καί φέρνουμε τό τμῆμα Α΄Κ ⊥ΟΨ. Παρατηρῆστε τότε ὅτι ἔχουμε $AM + MN \geq A'K$.

184. Ἄν Ν τό μέσο τῆς ΑΒ, δεῖξτε ὅτι $MN = \frac{AB}{2}$.

185. α) Φέρτε τό ὕψος ΑΝ καί δεῖξτε ὅτι κάθε μία ἀπό τίς προβολές εἶναι ἴση μέ ΑΝ.

β) Δεῖξτε ὅτι ἡ γωνία $\widehat{EA\Theta}$ εἶναι 180°. γ) Πάρτε τό μέσο Λ τοῦ ΒΓ καί δεῖξτε ὅτι $M\Lambda = \frac{B\Gamma}{2}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9

190. Συγκρίνετε τά τρίγωνα πού σχηματίζονται, ἄν φέρουμε τά ἀποστήματα τῶν χορδῶν.

191. Συγκρίνετε τά τρίγωνα ΟΑΓ καί ΟΔΒ. Γιά τό δεύτερο ἐρώτημα χρησιμοποιῆστε τήν ἄσκηση 110, ΙΙ.

192. Πάρτε καί μιά ἄλλη ὁποιαδήποτε χορδή καί συγκρίνετε τά ἀποστήματα τῶν δύο χορδῶν.

193. Γιατί ἔχουν ἴσα ἀποστήματα.

194. Νά συγκρίνετε τά ἀποστήματα τῶν δύο χορδῶν.

195. Ἑνῶστε τό μέσο Κ τῆς μιᾶς χορδῆς μέ τό κέντρο Ο τοῦ κύκλου καί δεῖξτε ὅτι ἡ ΟΚ διέρχεται ἀπό τό μέσο καί τῆς ἄλλης χορδῆς.

196. Ἄν φέρουμε τά τμήματα ΑΑ΄, ΒΒ΄, ΟΟ΄ κάθετα στή ΓΔ, παρατηρῆστε ὅτι τό Ο΄ εἶναι κοινό μέσο τῶν Α΄Β΄ καί ΓΔ.

197. Ὑπολογίστε τό ἄθροισμα $\widehat{B\Gamma O} + \widehat{\Gamma BO}$.

198. Θεωρῆστε τήν $\widehat{EOB}$ ὡς ἐξωτερική τοῦ τριγώνου ΕΟΓ παρατηρώντας ὅτι οἱ γωνίες $\widehat{\Delta EO}$ καί $\widehat{E\Delta O}$ εἶναι ἴσες καί κάθε μιά τους εἶναι διπλάσια ἀπό τίς ἴσες γωνίες $\widehat{\Delta\Gamma O}$ καί $\widehat{\Delta O\Gamma}$.

199. Ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι $\widehat{AB\Gamma} + \widehat{AB\Delta} = 180°$

200. Ἄν φέρουμε ἀπό τά κέντρα Κ καί Λ τά τμήματα $KZ \perp \Gamma\Delta$ καί $\Lambda H \perp \Gamma\Delta$, παρατηρῆστε ὅτι $K\Lambda = ZH$.

201. Ἄν οἱ ἐφαπτόμενες στά Γ καί Δ τέμνονται στό Ρ, ὑπολογίστε τή γωνία $\widehat{P}$ ἀπό τό τρίγωνο ΡΓΔ παρατηρώντας ὅτι οἱ δύο ἄλλες γωνίες του εἶναι ἴσες μέ γωνίες πού σχηματίζονται ἀπό τίς ἐφαπτόμενες στό Α.

202. Δεῖξτε ὅτι οἱ ἀκτίνες πού καταλήγουν στά Β καί Γ εἶναι παράλληλες.

203. Φέρτε τήν κοινή ἐσωτερική ἐφαπτομένη καί δεῖξτε ὅτι οἱ ἐντός ἐναλλάξ (ἤ οἱ ἐντός ἐκτός καί ἐπί τά αὐτά μέρη) γωνίες τῶν ΒΒ′ καί ΓΓ′ εἶναι ἴσες.

204. Ἄν ἡ κοινή ἐσωτερική ἐφαπτομένη τῶν δύο κύκλων τέμνει τή ΒΓ στό Μ, δεῖξτε ὅτι τό Μ εἶναι μέσο τῆς ΒΓ καί $AM = B\Gamma/2$.

205. Ἀρκεῖ νά δείξετε ὅτι $\widehat{BKA} + \widehat{\Gamma\Lambda A} = 180°$.

206. Ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι τό ΚΒΓΛ εἶναι παραλληλόγραμμο, δηλαδή ὅτι $KB \mathbin{/\!/} = \Lambda\Gamma$ (βλ. ἄσκ. 205).

207. Ἄν οἱ ἐφαπτόμενες στά Α καί Γ τέμνονται στό Ε καί οἱ χορδές ΔΑ καί ΓΒ τέμνονται στό Ζ, ὑπολογίστε τίς γωνίες $\widehat{E}$ καί $\widehat{Z}$ ἀπό τά ἰσοσκελή τρίγωνα ΑΕΓ καί ΔΖΓ.

208. Παρατηρῆστε ὅτι οἱ εὐθεῖες ΙΚ καί ΙΛ εἶναι διχοτόμοι ἐφεξῆς καί παραπληρωματικῶν γωνιῶν.

209. Ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι $\widehat{AME} < \widehat{AEB}$.

210. Ἄν Α καί Β εἶναι ὁποιαδήποτε σημεῖα τῶν κύκλων (Κ,R) καί (Λ,ρ) καί ΕΖ εἶναι τό μικρότερο τμῆμα πού ὁρίζουν οἱ κύκλοι στή διάκεντρο, ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι $AB \geq EZ$. (Ἄν ὁ ἕνας κύκλος εἶναι ἔξω ἀπό τόν ἄλλο, χρησιμοποιῆστε τήν ἀνισότητα $AK \leqslant KA + AB + B\Lambda$, ἐνῶ ἄν ὁ κύκλος (Λ,ρ) εἶναι μέσα στόν (Κ,R), χρησιμοποιῆστε τήν ἀνισότητα $AK \leqslant AB + B\Lambda + K\Lambda$).

211. Ἄν Ε εἶναι τό διαμετρικό τοῦ Α στόν κύκλο Κ, συγκρίνετε τά τρίγωνα ΑΒΕ καί ΑΓΔ.

212. Παρατηρῆστε ὅτι τό τρίγωνο ΑΔΓ εἶναι ὀρθογώνιο καί ὅτι $AM = M\Delta$.

213. Δεῖξτε ὅτι $\widehat{\Sigma I A} = \widehat{\Sigma A I}$ (παίρνοντας τή $\widehat{\Sigma I A}$ ὡς ἐξωτερική τοῦ τριγώνου ΑΙΓ).

214. Ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι τό τρίγωνο ΜΒΟ εἶναι ὀρθογώνιο στό Β. Τό τρίγωνο αὐτό νά τό συγκρίνετε μέ τό ΜΓΟ.

215. α) Ἄν ἡ ΜΙ τέμνει τή ΓΒ στό Ε, δεῖξτε ὅτι $\widehat{\Gamma I E} + \widehat{I\Gamma E} = 90°$. β) Ἄν ἡ ΡΙ τέμνει τήν ΑΔ στό Ζ, ἐργασθεῖτε ὅπως στό ἐρώτημα Ι. γ) Παρατηρῆστε ὅτι τό ΙΜΟΡ εἶναι παραλληλόγραμμο καί ὅτι $OM = PI$. δ) Ἀπό τό παραλληλόγραμμο ΙΜΟΡ ἔχουμε καί $OP = IM$.

216. α) Ἄν οἱ χορδές ΑΒ,ΑΓ τέμνουν τό μικρότερο κύκλο στά Ε καί Ζ, θά ἔχουμε (βλ. ἄσκ. 203) $EZ \mathbin{/\!/} B\Gamma$ καί ἄρα $\widehat{E\Delta} = \widehat{\Delta Z}$.

β) Ἄν ἡ ΒΑ τέμνει τό μικρό κύκλο στό Ε, θεωρῆστε τή $\widehat{\Delta AE}$ ὡς ἐξωτερική τοῦ τριγώνου ΔΑΒ καί τή $\widehat{\Delta A\Gamma}$ ὡς ἄθροισμα τῶν δύο γωνιῶν της πού ὁρίζονται ἀπό τήν κοινή ἐφαπτομένη τῶν δύο κύκλων.

217. Ἄν ἡ ἐφαπτομένη στό Ι, τοῦ κύκλου πού διέρχεται ἀπό τά σημεῖα Α,Β,Ι, τέμνει

τήν ΑΔ στό Η, ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι ἡ ΗΙ ἐφάπτεται καί στόν κύκλο πού διέρχεται ἀπό τά σημεῖα Δ,Ι,Γ, δηλαδή ὅτι $\widehat{\text{ΗΙΔ}} = \widehat{\text{ΙΓΔ}}$.

218. Ἄν φέρετε τίς κάθετες στά Δ΄,Ε΄,Ζ΄ στίς ἀντίστοιχες πλευρές, δεῖξτε ὅτι καθεμιά ἀπό αὐτές διέρχεται ἀπό τό συμμετρικό τοῦ Μ ὡς πρός τό κέντρο τοῦ κύκλου ὁ ὁποῖος διέρχεται ἀπό τά Δ,Ε,Ζ.

219. α) Δεῖξτε ὅτι κάθε μιά ἀπό τίς γωνίες $\widehat{\text{ΔΙΕ}}$ καί $\widehat{\text{ΙΕΔ}}$ εἶναι ἴση μέ τήν $\widehat{\text{ΑΒΕ}}$. β) Ὀνομάστε Ι΄ τό σημεῖο στό ὁποῖο ἡ ΒΖ τέμνει τήν ε καί δεῖξτε ὅτι ΔΙ΄ = ΔΙ.

220. Πάρτε στή ΒΓ τμῆμα ΒΕ = ΒΑ καί δεῖξτε ὅτι τό τρίγωνο ΕΜΓ εἶναι ἰσοσκελές (ὁπότε τό Ι εἶναι μέσο τῆς ΕΓ).

221. Παρατηρῆστε ὅτι ΖΕ ⊥ ΔΕ, ὁπότε ἀρκεῖ νά δείξτε ὅτι ἡ ΔΖ εἶναι διχοτόμος τῆς $\widehat{\text{ΕΔΓ}}$.

222. Παρατηρῆστε ὅτι οἱ εὐθεῖες ΑΒ καί Α΄Β΄ εἶναι συμμετρικές ὡς πρός τό Ο.

223. Ἄν εἶναι {Ρ} = ΓΕ ∩ ΔΖ, πάρτε τή $\widehat{\text{Ρ}}$ ἀπό τό τρίγωνο ΡΕΔ καί ἀντικαταστῆστε τίς δύο ἄλλες γωνίες του μέ ἴσες πρός αὐτές γωνίες, οἱ ὁποῖες σχηματίζονται ἀπό τίς ἐφαπτόμενες στό Α.

224. Ἄν ΣΚ ⊥ ΟΧ καί ΣΛ ⊥ ΟΨ, παρατηρῆστε ὅτι ὁ κύκλος πού γράφεται μέ διάμετρο τήν ΟΣ περνάει ἀπό τά Κ καί Σ. Ἄρα ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι ΟΑ + ΟΒ = ΟΚ + ΟΛ, δηλαδή ὅτι ΚΑ = ΛΒ.

225. Ἄν ἡ διχοτόμος τέμνει τόν κύκλο στό Σ, θά πρέπει νά δείξουμε ὅτι Σ = σταθερό. Φέρνοντας τή ΣΚ ⊥ ΟΧ καί τή ΣΛ ⊥ ΟΨ, ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι τό Κ ἤ τό Λ εἶναι σταθερό. Αὐτό ὅμως εἶναι φανερό, γιατί στήν ἄσκ. 224 δείξαμε ὅτι ΟΑ + ΟΒ = ΟΚ + ΟΛ.

226. Ἄν Λ τό ἄλλο σημεῖο στό ὁποῖο ἡ ΑΒ τέμνει τόν κυκλ(Ο,ρ), δεῖξτε ὅτι τό Λ εἶναι σταθερό (δείχνοντας ὅτι τό τόξο του $\widehat{\text{ΣΛ}}$ ἤ ὅτι ἡ ἐγγεγραμμένη γωνία του $\widehat{\text{ΣΒΛ}}$ εἶναι σταθερή).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10

231. α) Πάρτε τό μέσο Δ ἑνός τμήματος ΒΓ = κ καί στή μεσοκάθετο τῆς ΒΓ πάρτε τμῆμα ΔΑ = λ. β) Πάρτε τμῆμα ΒΓ = κ καί γράψτε τούς κύκλους (Β,λ) καί (Γ,λ). γ) Κατασκευή ὅμοια μέ τή β.

232. Φέρνοντας μιά κοινή κάθετο ΚΛ τῶν δύο παραλλήλων παίρνουμε ἑκατέρωθεν τῶν Κ καί Λ τμήματα λ/2 καί κ/2 ἀντιστοίχως.

233. Ἀρκεῖ νά φέρουμε κάθετο στό σημεῖο Α τῆς εὐθείας ΟΑ.

234. Ἀρκεῖ νά φέρουμε κάθετο στό σημεῖο Δ τῆς εὐθείας ΟΔ.

235. Ἄν οἱ ἐφαπτόμενες στά Β καί Γ τέμνονται στό Κ, ὑπολογίστε τήν $\widehat{\text{Κ}}$ ἀπό τό ἰσοσκελές τρίγωνο ΒΚΓ.

236. Ἄν Ο καί Ο΄ εἶναι τά περίκεντρα τῶν ἴσων τριγώνων ΑΒΓ καί Α΄Β΄Γ΄, ἀρκεῖ νά δείξουμε π.χ. ὅτι ΟΒ = Ο΄Β΄ (μέ σύγκριση τῶν τριγώνων ΒΟΓ καί Β΄Ο΄Γ΄).

237. Παρατηρῆστε ὅτι Β΄Γ΄ = $\text{συμμ}_{\text{ΑΕ}}$ΒΓ.

238. Ἀρκεῖ νά δείξετε ὅτι $\widehat{\text{ΑΒ΄}} = \widehat{\text{ΑΓ΄}}$.

239. α) Συγκρίνετε τίς γωνίες τῶν τριγώνων ΑΒΔ καί ΑΕΓ. β) Θεωρῆστε την ὡς διαφορά τῶν $\widehat{\text{ΔΑΓ}}$ καί $\widehat{\text{ΕΑΓ}}$ (ὑποθέτοντας ὅτι $\widehat{\text{Β}} > \widehat{\text{Γ}}$). γ) Ἁπλή συνέπεια τοῦ ἐρωτήματος α.

240. Ἄν ΒΕ καί ΓΖ οἱ ἴσες διάμεσοι καί Θ τό σημεῖο τομῆς τους, παρατηρῆστε ὅτι ΒΘ = ΓΘ καί μετά συγκρίνετε τά τρίγωνα ΕΒΓ καί ΖΓΒ.

241. Παρατηρῆστε ὅτι $ΘΛ = ΘΕ$, $ΘΜ = ΘΖ$, $ΘΚ = ΘΔ$.

242. Παρατηρῆστε ὅτι $ΘΚ = ΘΑ$, $ΘΛ = ΘΒ$, $ΘΜ = ΘΓ$.

243. Ὀνομάστε Θ,Θ′ τά βαρύκεντρα δύο ἴσων τριγώνων ΑΒΓ, Α′Β′Γ′ καί πάρτε στίς προεκτάσεις τῶν διαμέσων τους ΑΜ καί Α′Μ′ τμήματα $ΜΕ = ΜΘ$ καί $Μ'Ε' = Μ'Θ'$. Μετά, ἀπό τή σύγκριση τῶν τριγώνων ΘΓΕ καί Θ′Γ′Ε′, νά ἐξασφαλίσετε ἴσα στοιχεῖα γιά τά ἀρχικά τρίγωνα.

244. Ἄν ἐφάπτεται στό μέσο Δ τῆς ΒΓ, ἐκφράστε (μέ τήν ἄσκ. 229) τά τμήματα ΒΔ καί ΓΔ μέ τίς πλευρές τοῦ ΑΒΓ.

245. α) Οἱ εὐθεῖες αὐτές διχοτομοῦν τίς γωνίες τοῦ ΑΒΓ. β) Ἄν ἡ ΑΑ′ τέμνει τή Β′Γ′ στό Ν, ὑπολογίστε τίς γωνίες $\widehat{ΝΒ'Ι}$ καί $\widehat{ΝΙΒ'}$ τοῦ τριγώνου ΙΝΒ′. γ) Ἁπλή συνέπεια τοῦ ἐρωτήματος β.

246. Θεωρῆστε τό μέσο Μ τῆς πλευρᾶς ΒΓ καί δεῖξτε στό σχῆμα τῆς ἄσκ. 229 ὅτι $ΒΔ = ΓΔ'$.

247. Ἀρκεῖ νά δείξετε π.χ. ὅτι $ΑΙ_α \perp Ι_βΙ_γ$ (βλ. ἄσκ. 49).

248. Ἄν εἶναι Μ,Ρ τά μέσα τῶν ΒΓ,ΑΘ καί ΜΜ′, ΡΡ′ οἱ ἀποστάσεις τῶν Μ καί Ρ ἀπό τήν ε, συγκρίνετε τά τμήματα ΑΑ′ καί $ΒΒ' + ΓΓ'$ μέ τά ΡΡ′ καί ΜΜ′ ἀντιστοίχως.

249. α) Ἄν $ΒΕ \perp ΑΓ$ καί $ΓΖ \perp ΑΒ$, ὑπολογίστε τή γωνία $\widehat{ΒΗΓ}$ ἀπό τό τετράπλευρο ΑΕΗΖ. β) Ἐργασθεῖτε ὅπως στό προηγούμενο ἐρώτημα. γ) Συγκρίνετε κάθε μιά ἀπό τίς γωνίες $\widehat{ΒΗΓ}$ καί $\widehat{Α}$ μέ τήν $\widehat{ΑΓΗ}$.

250. α) Ἀρκεῖ νά δείξετε π.χ. ὅτι τό τρίγωνο ΗΒΚ εἶναι ἰσοσκελές. β) Ἡ ἰσότητα π.χ. $\widehat{ΛΓ} = \widehat{ΓΚ}$ εἶναι συνέπεια τῆς $\widehat{ΗΒΔ} = \widehat{ΔΒΚ}$. γ) Ἔχουν τίς πλευρές τους μία πρός μία ἴσες. δ) Ὁ περιγεγραμμένος κύκλος π.χ. στό ΒΗΓ εἶναι ἴσος μέ τόν περιγεγραμμένο κύκλο στό ΒΚΓ, δηλαδή μέ τόν (Ο,R).

251. Δεῖτε τήν ἄσκηση 91.

252. Πάρτε στή ΜΑ τμῆμα $ΜΡ = ΜΒ$ καί δεῖξτε ὅτι $ΡΑ = ΜΓ$.

253. α) Ἄν $ΟΙ \perp ΑΒ$, δεῖξτε ὅτι τό Ι εἶναι καί μέσο τῆς Ρ′Μ′. β) Ἁπλή συνέπεια τοῦ προηγούμενου. γ) Φέρτε τή $ΜΖ \perp ΑΓ$ καί παρατηρῆστε ὅτι $ΑΖ = ΑΜ'$.

254. α) Δεῖξτε ὅτι τά ΕΚΔΒ καί ΑΚΓΖ εἶναι παραλληλόγραμμα. β) Δεῖξτε ὅτι τό σημεῖο τομῆς Ν τῶν ΑΕ καί ΔΚ εἶναι μέσο τῆς ΔΚ. γ) Ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι τό Ν εἶναι τό μέσο τοῦ ΕΓ.

255. Θεωρῆστε τά μέσα Μ,Ν τῶν ΒΓ καί ΑΘ καί τίς ἀποστάσεις τους ΜΜ′ καί ΝΝ′ ἀπό τήν ε, καί ὑπολογίστε τά ἀθροίσματα $ΒΒ' + ΓΓ'$ καί $ΑΑ' + ΘΘ'$.

256. α) Παρατηρῆστε ὅτι τό ΒΗΓΑ′ εἶναι παραλληλόγραμμο. β) Τά τμήματα Α′Λ καί ΑΜ εἶναι διάμεσοι στό τρίγωνο ΑΗΑ′.

257. Χρησιμοποιῆστε τό ἐρώτημα β τῆς ἀσκήσεως 256.

258. Ἄν θεωρήσουμε τό περίκεντρο Ο, τό ΑΛΜΟ εἶναι παραλληλόγραμμο καί $\widehat{ΗΛΜ} = \widehat{ΗΑΟ}$, ὁπότε καταλήγουμε στήν ἄσκηση 239 β.

259. Παρατηρῆστε ὅτι τό Δ′ εἶναι ὀρθόκεντρο στό τρίγωνο ΑΒΓ.

260. Παρατηρῆστε ὅτι (κατά τήν ἄσκηση 229) τό τμῆμα ΑΔ εἶναι ἴσο μέ τήν ἡμιπερίμετρο τοῦ ΑΒΓ.

261. Νά ἐκφράσετε (ἀπό τήν ἄσκηση 230, α) τήν καθεμιά ἀκτίνα ἀπό τίς πλευρές τοῦ ἀντίστοιχου ὀρθογώνιου τριγώνου.

268. Ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι μία γωνία του εἶναι ὀρθή (βλ. καί ἄσκ. 262).

269. Φέρτε τήν κοινή χορδή καί ἀποδεῖξτε ὅτι δύο ἐντός καί ἐπί τά αὐτά μέρη γωνίες εἶναι παραπληρωματικές.

270. Παρατηρῆστε ὅτι τό ΕΓΔΖ εἶναι τραπέζιο καί ἡ ΡΜ εἶναι διάμεσός του.

271. Δεῖξτε ὅτι δύο γωνίες ἐντός ἐκτός καί ἐπί τά αὐτά μέρη εἶναι ἴσες.

272. Ἄν οἱ ΟΚ, ΟΛ,ΟΜ,ΟΡ τέμνουν τίς πλευρές στά $Κ_1$, $Λ_1$, $Μ_1$, $Ρ_1$, παρατηρῆστε ὅτι τά σημεῖα αὐτά εἶναι μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου καί ὅτι $Κ_1Λ_1$ // ΚΛ, $Λ_1Μ_1$ // ΛΜ,...

273. Συγκρίνετε τά τρίγωνα ΣΑΑ΄ καί ΣΒΒ΄.

274. Ἀρκεῖ νά δείξετε π.χ. ὅτι $\widehat{ΑΛΚ} = \widehat{Γ}$.

275. Ἀρκεῖ νά δείξετε π.χ. ὅτι $\widehat{ΜΚΛ} = \widehat{Δ}$.

276. Ἀρκεῖ νά δείξετε π.χ. ὅτι ἡ $\widehat{ΑΓΔ}$ (ἤ ἡ ἴση της $\widehat{ΑΒΔ}$), εἶναι ἴση μέ τήν $\widehat{ΚΛΔ}$.

277. Ἀρκεῖ νά δείξετε ὅτι $\widehat{ΑΚΛ} = \widehat{Γ}$. (Φέρτε τήν ΕΔ καί παρατηρῆστε ὅτι κάθε μιά ἀπό τίς γωνίες αὐτές εἶναι ἴση μέ τήν $\widehat{ΑΕΔ}$).

278. Ἄν Ρ τό σημεῖο τομῆς τῶν κύκλων $κ_1$,$κ_2$, δεῖξτε ὅτι τό Ρ ἀνήκει καί στόν κύκλο $κ_3$, δηλαδή δεῖξτε ὅτι τό ΡΔΓΕ εἶναι ἐγγράψιμο.

279. Ὑπολογίστε τίς γωνίες $\widehat{ΑΟΒ}$ καί $\widehat{ΔΟΓ}$ ἀπό τά τρίγωνα ΑΟΒ καί ΓΟΔ.

280. Ἀποδεῖξτε (μέ τή βοήθεια τῆς ἀσκ. 105) ὅτι οἱ ἀπέναντι γωνίες τοῦ σχηματιζόμενου τετραπλεύρου εἶναι παραπληρωματικές.

281. Ἀρκεῖ νά δείξετε ὅτι τό ἡμιάθροισμα τῶν βάσεών του εἶναι ἴσο μέ τό 1/4 τῆς περιμέτρου του.

282. Ἀρκεῖ νά δείξετε ὅτι τό ἄθροισμα τῶν βάσεων εἶναι διπλάσιο ἀπό μιά ἀπό τίς μή παράλληλες πλευρές του.

283. α) Ἄν Μ,Ν τά μέσα δύο ἀπέναντι πλευρῶν, παρατηρῆστε ὅτι τό ΜΚΝΟ εἶναι παραλληλόγραμμο. β) Διέρχονται ἀπό τό Κ.

284. Ἄν οἱ ἐφαπτόμενες στά Α καί Δ τέμνονται στό Κ καί οἱ δύο ἄλλες ἐφαπτόμενες τέμνονται στό Ρ, ὑπολογίστε τίς γωνίες $\widehat{Κ}$ καί $\widehat{Ρ}$ ἀπό τά τρίγωνα ΚΑΔ καί ΡΒΓ.

285. α) Παρατηρῆστε ὅτι $\widehat{ΙΔΕ} = \widehat{ΖΕΛ}$. β) Συγκρίνετε τά τρίγωνα ΙΔΓ καί ΙΕΓ. γ) Παρατηρῆστε ὅτι κάθε μία ἀπό τίς $\widehat{ΑΙΕ}$ καί $\widehat{ΕΙΓ}$ εἶναι 45°.

286. Ἀρκεῖ νά δείξετε ὅτι τό τρίγωνο ΟΕΖ εἶναι ἰσοσκελές.

287. Δεῖξτε ὅτι οἱ εὐθεῖες ΚΙ, ΛΙ, ΜΙ, ΡΙ διχοτομοῦν τίς γωνίες τοῦ ΚΛΜΡ. Κατόπι δεῖξτε ὅτι δύο ἀπέναντι γωνίες τοῦ ΚΛΜΡ εἶναι παραπληρωματικές.

288. α) Ἀπόδειξη ὅμοια μέ τήν ἄσκηση 113. β) Παρατηρῆστε ὅτι τά τρίγωνα ΛΕΡ καί ΚΖΜ εἶναι ἰσοσκελή καί συνεπῶς οἱ ΡΛ,ΚΜ τέμνονται κάθετα καί διχοτομοῦνται.

289. Δεῖξτε, μέ τά σχηματιζόμενα ἐγγεγραμμένα τετράπλευρα, ὅτι δύο ἀπέναντι γωνίες τοῦ ΚΛΜΡ εἶναι παραπληρωματικές.

290. α) Παρατηρῆστε ὅτι τά Α,Β,Γ βρίσκονται σέ κύκλο διαμέτρου ΟΡ. β) Συγκρίνετε τά τόξα τά ὁποῖα ἔχουν χορδές ΑΒ καί ΑΓ.

291. Δεῖξτε (ὑπολογίζοντας τό ἄθροισμα τῶν ἀπέναντι γωνιῶν τους) ὅτι τά ΚΓΛΒ καί ΚΔΛΒ εἶναι ἐγγράψιμα.

292. Ἂν ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ εἶναι τά ὕψη τοῦ ΑΒΓ καί τέμνονται στό Η, νά βρεῖτε μέ ἐγγράψιμα τετράπλευρα γωνίες ἴσες μέ τίς $\widehat{Z\Delta H}$ καί $\widehat{H\Delta E}$ καί νά τίς συγκρίνετε.

293. Ἀρκεῖ νά δείξετε (μέ τά ἐγγράψιμα τετράπλευρα ΒΕΚΔ καί ΕΚΖΓ) ὅτι $\widehat{\Delta EK} = \widehat{EKZ}$ καί ὅτι $\widehat{ZEK} = \widehat{EK\Delta}$.

294. Παρατηρῆστε ὅτι τό Μ εἶναι τό περίκεντρο τοῦ τριγώνου ΑΑ΄Β (ὁπότε $\widehat{AMB} = 2\widehat{A'}$) καί δεῖξτε ὅτι $\widehat{AMB} = \widehat{ANB}$.

295. Ἂν Μ τό μέσο τῆς ΒΓ ἔχουμε ΜΖ // ΒΑ, ΜΕ // ΓΑ καί ἄρα $\widehat{EMZ} = \widehat{A}$. Παρατηρῆστε τώρα ὅτι ὁ κύκλος πού ἔχει διάμετρο ΗΜ διέρχεται ἀπό τά Ε,Α΄,Ζ δηλαδή ὅτι τό Α΄ΕΗΖ εἶναι ἐγγράψιμο καί συνεπῶς $\widehat{EA'Z} = \widehat{EMZ}$.

296. Οἱ ΓΔ, ΓΕ, ΓΖ σχηματίζουν μέ τίς ἐφαπτόμενες στά Δ,Ε,Ζ γωνίες ἴσες μέ τή $\widehat{XB\Gamma}$ καί ἀπό τά ἐγγράψιμα τετράπλευρα πού σχηματίζονται βλέπουμε ὅτι μία ἐξωτερική γωνία τοῦ ΚΛΡΓ εἶναι ἴση μέ τήν ἀπέναντί της ἐσωτερική.

297. Ἂν πάρουμε τό Μ στό $\widehat{A\Gamma}$ καί φέρουμε ΜΔ ⊥ΒΓ, ΜΕ⊥ΑΓ, ΜΖ ⊥ΑΒ, ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι $\widehat{AEZ} = \widehat{\Gamma E\Delta}$. Αὐτό τό δείχνουμε μέ τά ἐγγράψιμα τετράπλευρα ΜΖΑΕ καί ΜΕΔΓ.

298. Ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι τό ΑΒΓΜ εἶναι ἐγγράψιμο. Ἂν Δ,Ε,Ζ εἶναι οἱ προβολές τοῦ Μ στίς πλευρές ΒΓ, ΓΑ,ΑΒ, παρατηρῆστε ὅτι τώρα $\widehat{AEZ} = \widehat{\Gamma E\Delta}$, δηλ. ὅτι $\widehat{AMZ} = \widehat{\Delta M\Gamma}$, ὁπότε $\widehat{AM\Gamma} = \widehat{ZM\Delta}$.

299. Ὁ κύκλος κ πού διέρχεται ἀπό τά μέσα M_1, M_2, M_3 τῶν πλευρῶν α,β,γ διέρχεται καί ἀπό τά ἴχνη Θ_1, Θ_2, Θ_3 τῶν ὑψῶν υ_α, υ_β, υ_γ (βλ. ἄσκ. 264). Ἂν Η εἶναι τό ὀρθόκεντρο τοῦ ΑΒΓ καί Λ_1, Λ_2, Λ_3 τά μέσα τῶν ΗΑ, ΗΒ, ΗΓ, δεῖξτε π.χ. ὅτι τό $M_3\Lambda_1M_1\Theta_1$ εἶναι ἐγγράψιμο, δηλαδή ὅτι $\Lambda_1\widehat{M_3}M_1 = 90° = \Lambda_1\widehat{\Theta_1}M_1$. Γιά τόν προσδιορισμό τοῦ κέντρου καί τῆς ἀκτίνας τοῦ κ παρατηρῆστε ὅτι ἡ Λ_1M_1 εἶναι διάμετρος τοῦ κύκλου κ καί ὅτι (κατά τήν ἄσκ. 227) τά $H\Lambda_1OM_1$ καί $A\Lambda_1M_1O$ εἶναι παραλληλόγραμμα (ὅπου Ο εἶναι τό περίκεντρο τοῦ ΑΒΓ).

300. Ἂν Λ_1, Λ_2, Λ_3 τά μέσα τῶν ΗΑ, ΗΒ, ΗΓ, ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι τό $\Lambda_1\Lambda_2\Lambda_3P$ εἶναι ἐγγράψιμο. Παρατηρῆστε ὅτι κάθε μία πλευρά τοῦ $\Lambda_1\Lambda_2\Lambda_3P$ εἶναι παράλληλη μέ μία πλευρά τοῦ ΑΒΓΜ.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ III

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΟΡΩΝ[1]

1 Οἱ ἀριθμοί ἀναφέρονται σέ σελίδα τοῦ βιβλίου.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Κεφάλαιο 6

ΚΑΘΕΤΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΠΑΡΑΛΛΗΛΙΑ ΕΥΘΕΙΩΝ

Κεφάλαιο 7

ΤΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΑ ΚΑΙ ΟΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥΣ

Κεφάλαιο 8

ΤΡΑΠΕΖΙΑ — ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ ΩΣ ΠΡΟΣ ΑΞΟΝΑ

Κεφάλαιο 9

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΣΤΟΝ ΚΥΚΛΟ — ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΕΣ ΓΩΝΙΕΣ