ΒΑΣΙΛΕΙΟΝ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΝ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΜΕΛΕΤΩΝ ΚΑΙ ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟΥ
Ἀριθ. Δημοσιεύματος 33

ΕΙΣΑΓΩΓΗ
ΕΙΣ ΤΗΝ
ΘΕΩΡΙΑΝ ΤΩΝ ΣΥΝΟΛΩΝ

ΥΠΟ
JOSEPH BREUER

Κατὰ μετάφρασιν ὑπὸ
HOWARD F. FEHR
Καθηγητοῦ τοῦ Columbia University

Ἐκδοτικὸς οἶκος PRENTICE - HALL, N. J. — U.S.A.

ΑΘΗΝΑΙ 1964

ΒΑΣΙΛΕΙΟΝ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΝ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΜΕΛΕΤΩΝ ΚΑΙ ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟΥ
Ἀριθ. Δημοσιεύματος 33

ΕΙΣΑΓΩΓΗ
ΕΙΣ ΤΗΝ
ΘΕΩΡΙΑΝ ΤΩΝ ΣΥΝΟΛΩΝ

ΥΠΟ
JOSEPH BREUER

Κατὰ μετάφρασιν ὑπὸ
HOWARD F. FEHR
Καθηγητοῦ τοῦ Columbia University

Ἐκδοτικὸς οἶκος PRENTICE - HALL, N. J. — U.S.A.

ΑΘΗΝΑΙ 1964

Μεταφραστής: Δ. ΓΚΙΟΚΑΣ

Τύποις: ΧΡΗΣΤΟΣ ΣΤ. ΧΡΗΣΤΟΥ, *Ἀναξαγόρα καὶ Ξάνθου - Καλλιθέα*

Τὸ παρὸν βιβλίον ἀνήκει εἰς τὴν σειρὰν τῶν μερίμνῃ τῆς Ὑπηρεσίας Μελετῶν καὶ Συντονισμοῦ μεταφραζομένων ἑπτὰ βιβλίων Μαθηματικῶν καὶ Φυσικῆς διὰ τοὺς καθηγητὰς τῶν Σχολείων Μέσης Ἐκπαιδεύσεως.

Ἡ δαπάνη διὰ τὴν μετάφρασιν καὶ ἔκδοσιν τῶν βιβλίων τούτων, ἀνερχομένη εἰς 1.017.000 δραχμάς, καταβάλλεται ἀπὸ τὸν Ὀργανισμὸν Οἰκονομικῆς Συνεργασίας καὶ Ἀναπτύξεως καὶ ἀπὸ τὴν Ὑπηρεσίαν Τεχνικῆς Βοηθείας τοῦ Ὑπουργείου Συντονισμοῦ, τὰ δὲ τυχὸν ἐλλείμματα ἀπὸ τὸν προϋπολογισμὸν τῆς Ὑπηρεσίας Μελετῶν καὶ Συντονισμοῦ.

Ἡ ἐπιλογὴ τῶν μεταφραστῶν ἐγένετο ἀποφάσει τοῦ Ὑπουργοῦ μετὰ γνώμην Ἐπιτροπῆς ἀποτελουμένης ἐκ τῶν κ.κ. Ἀλεξοπούλου, Κάππου, Κρητικοῦ καὶ Ἀναστασιάδη, καθηγητῶν Ἀνωτάτων Σχολῶν, καὶ τοῦ Προϊσταμένου τῆς Ὑπηρεσίας, ὡς Ὀργανωτοῦ.

Ὁ Προϊστάμενος τῆς Υ.Μ.Σ.
ΝΙΚΗ ΔΕΝΔΡΙΝΟΥ ΑΝΤΩΝΑΚΑΚΗ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Τὰ ζητήματα τὰ ἀφορῶντα εἰς τὰ θεμέλια τῶν μαθηματικῶν ἐπισύρουν σήμερον πολλὴν καὶ πάλιν τὴν προσοχήν. Ἡ θεωρία τῶν συνόλων, ἰδιαιτέρως, ἀπέβη ἕνα σημαντικὸν πεδίον ἐρευνῶν, ἕνεκα τοῦ τρόπου διὰ τοῦ ὁποίου φαίνεται νὰ ἐπηρεάζῃ ἕνα μέγα μέρος τῆς συγχρόνου μαθηματικῆς σκέψεως. Ἡ θεωρία τῶν συνόλων ἠμπορεῖ νὰ θεωρηθῇ ὡς ἔχουσα τὴν ἀρχήν της εἰς τὴν προσπάθειαν τοῦ Georg Cantor νὰ ὀργανώσῃ ἐννοίας ἀναφερομένας εἰς συλλογὰς ἀντικειμένων εἰς μίαν δομήν, ἡ ὁποία θὰ ἐχρησίμευε ὡς βάσις διὰ μίαν μαθηματικὴν θεωρίαν τοῦ ἀπείρου. Κατὰ τὴν ἀντίληψιν αὐτήν, τὸ ἄπειρον δὲν εἶναι ὁ «δυνάμει» ἀπρόσιτος τύπος ἀπείρου, ὁ ὁποῖος χρησιμοποιεῖται εἰς τὴν θεωρίαν τῶν ὁρίων, ἀλλὰ ὁ «ἐνεργείᾳ» ἢ γνήσιος τύπος αὐτοῦ, ὁ νοούμενος ὡς ἕνα ἀντικείμενον τελείως καθωρισμένον, πέραν ὅλων τῶν πεπερασμένων μεγεθῶν. Καὶ ὁ βαθμὸς ἐπιτυχίας τοῦ Cantor εἰς τὸ ἔργον αὐτὸ εὐκόλως ἀναγνωρίζεται ἀπὸ τὴν ἔκτασιν, τὴν ὁποίαν προσέλαβε ἡ θεωρία τῶν συνόλων—ἀπὸ τῆς ἀρχικῆς, ἁπλοϊκῆς καὶ εὐλογοφανοῦς μορφῆς της εἰς τὴν σημερινὴν ἀφηρημένην, ἀξιωματικὴν ἀνάπτυξιν αὐτῆς, ὡς βάσεως δομῶν εἰς τὴν ἄλγεβραν, τὴν γεωμετρίαν καὶ τὴν ἀνάλυσιν.

Εἰς τὴν ἀγγλικὴν γλῶσσαν ὑπάρχουν σήμερον διάσπαρτα μόνον ἀποσπάσματα ἢ ἀνωτέρου ἐπιπέδου πραγματεῖαι ἐπὶ τῆς θεωρίας τῶν συνόλων. Εἶναι ἀναγκαία τώρα καὶ μία ἔκθεσις αὐτῆς εἰς τὴν ἀγγλικήν, δι' ὀλιγώτερον ἀφηρημένην καὶ ἀξιωματικὴν προσπέλασιν τοῦ θέματος ἀλλὰ καὶ τὴν ἐπαρκῶς στοιχειώδη, ὥστε νὰ ἠμπορῇ νὰ χρησιμεύσῃ ὡς εἰσαγωγὴ εἰς τὸν κλάδον αὐτὸν τῶν μαθηματικῶν διὰ τοὺς διδάσκοντας εἰς τὰ κολλέγια καὶ γυμνάσια, τοὺς μαθητάς των, ὡς καὶ διὰ πάντα ἐνδιαφερόμενον.

Τὸ βιβλίον τοῦτο τὴν ἀνάγκην αὐτὴν θεραπεύει. Μίαν ἁπλοϊκὴν πρώτην προσέγγισιν—ἐξαρτωμένην ἐκ τῆς παρατηρήσεως τοῦ ἀμέσως αἰσθητοῦ περιβάλλοντος διὰ τὴν ἀνάπτυξίν της καὶ τὸ περιεχόμενόν της—θεωροῦμεν ὡς τὸν περισσότερον φυσικὸν δρόμον εἰσαγωγῆς εἰς τὸ κύριον θέμα. Ὡρισμέναι ἰδιότητες καὶ ἀρχαὶ ἀναπτύσσονται βαθμιαίως, διὰ νὰ χρησιμοποιηθοῦν ἀργότερον εἰς τὴν ἀπόδειξιν προτάσεων ἀναφερομένων εἰς σύνολα, θεωρουμένων πλέον ὅμως αὐτῶν ὡς συλλογῶν ἀφηρημένων ὀντοτήτων. Κατὰ τὸν τρόπον αὐτὸν γίνεται ἡ μετάβασις ἀπὸ τῶν συγκεκριμένων πεπερασμένων συνόλων εἰς τοὺς πληθαρίθμους αὐτῶν, εἰς τοὺς ὑπερπεπερασμένους κατόπιν πληθαρίθμους καὶ ἀκολούθως εἰς τοὺς διατακτικοὺς ἀριθμούς, μέσω τῶν διατακτικῶν τύπων.

Ἀφηρημένην θεωρίαν τῶν συνόλων, βασιζομένην ἐπὶ ἀξιωματικοῦ συστήματος, δὲν πραγματευόμεθα ἐνταῦθα· δι' ὅσους ἐπιθυμοῦν νὰ ἐμβαθύνουν περισσότερον εἰς τὸ θέμα, ἡ εἰς τὸ τέλος τοῦ βιβλίου βιβλιογραφία παρέχει τρόπον μεθοδικῆς σπουδῆς. Τὸ ἀξίωμα τῆς ἐπιλογῆς καὶ ἡ σχέσις του πρὸς τὸ θεώρημα τῆς καλῆς διατάξεως, μολονότι θέματα τεραστίας σημασίας διὰ τὴν ὅλην θεωρίαν τῶν συνόλων, ἐνδιαφέρουν περισσότερον τὸν μαθηματικὸν παρὰ τὸν νεόφυτον.

Ἡ μετάφρασις αὐτὴ προσφέρεται μὲ τὴν ἐλπίδα ὅτι θὰ κεντρίσῃ τοῦ ἀναγνώστου τὸ ἐνδιαφέρον διὰ περαιτέρω σπουδὰς καὶ θὰ τοῦ παράσχῃ τὰ ἀναγκαιοῦντα ἐφόδια δι' αὐτάς.

Howard F. Fehr

ΠΙΝΑΞ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

«Ἡ γεωμετρία καὶ ἡ ἀνάλυσις, ὁ διαφορικὸς καὶ ὁ ὁλοκληρωτικὸς λογισμὸς ἀσχολοῦνται συνεχῶς μὲ ἄπειρα σύνολα, εἰς συγκεκαλυμμένην ἴσως μορφήν.» Αὐτὰ ἔγραφεν τὸ 1914 ὁ F. Hausdorff εἰς τὸ βιβλίον του *«Τὰ βασικὰ χαρακτηριστικὰ τῆς θεωρίας τῶν συνόλων»* (Grundzüge der Mengenlehre). Διὰ νὰ φθάσωμεν εἰς τὴν ἀληθῆ κατανόησιν καὶ εἰς τὴν πλήρη κυριαρχίαν τῶν διαφόρων τούτων κλάδων τῶν μαθηματικῶν, ἀπαιτεῖται ἡ γνῶσις τοῦ κοινοῦ των θεμελίου : τῆς θεωρίας τῶν συνόλων.

Ἠμποροῦμεν νὰ ἐρωτήσωμεν: Ποῖα εἶναι τὰ πράγματα, μὲ τὰ ὁποῖα ἀσχολοῦνται τὰ μαθηματικά; Εἶναι πάντοτε αὐτὰ σύνολα ἀριθμῶν (ἀριθμοσύνολα) ἢ σύνολα σημείων (σημειοσύνολα)—ἐν γένει ἄπειρα σύνολα, ποὺ περιέχουν δηλαδὴ ἄπειρον πλῆθος πραγμάτων (ἀπειροσύνολα).

Θὰ ἠμποροῦσεν ἐπίσης ὁ ἀναγνώστης νὰ ἐξετάσῃ τὴν ἰδέαν τῆς ἐρεύνης τοῦ ἀπείρου μὲ τὴν βοήθειαν τῆς μαθηματικῆς ἀναλύσεως, ὑποβάλλων οὕτω τὴν ἔννοιαν αὐτὴν εἰς τὸν ἔλεγχον τῶν μαθηματικῶν νόμων καὶ τύπων. Ἀλλὰ μία τέτοια προσπέλασις τοῦ ζητήματος ἀποτελεῖ τὴν οὐσίαν ἀκριβῶς τῆς θεωρίας τῶν συνόλων. Καὶ πρὸς τὸν σκοπὸν αὐτὸν ἡ ἀντίληψίς μας διὰ τὸ ἄπειρον θὰ πρέπει νὰ ἐλευθερωθῆ ἀπὸ συγκεχυμένας συναισθηματικὰς ἰδέας, καθὼς καὶ ἀπὸ τὴν ἰδέαν τοῦ ἀπείρου, ὅπως νοεῖται αὐτὴ εἰς ἄλλα, μὴ μαθηματικά, πεδία τῆς ἀνθρωπίνης σκέψεως (ὡς τὸ ἄπειρον εἰς τὴν μεταφυσικήν).

Πρὶν ἀπὸ τὸν Cantor, ἡ ἔννοια τοῦ ἀπείρου εἰς τὰ μαθηματικὰ ἦτο σκοτεινὴ καὶ ἀδιασαφήνιστος. Ἀκόμη καὶ ὁ Gauss, τὸ 1831, ἐξέφραζε τὴν γνώμην ὅτι «τὸ ἄπειρον δὲν εἶναι ἄλλο ἀπὸ ἕνας τρόπος τοῦ ἐκφράζεσθαι, ἀφοῦ ὁμιλοῦμεν περὶ ὁρίων ὅταν ὡρισμένοι λόγοι διαφέρουν ἀπὸ καθωρισμένας ποσότητας ὅσον θέλομεν ὀλίγον, ἐνῶ ἄλλοι λόγοι εἶναι δυνατὸν νὰ αὐξάνουν ἀπεριορίστως.» Ἀπέρριπτε ἐπίσης τὴν χρῆσιν ἑνὸς «ἀπείρου ἀριθμοῦ» ὡς ἐντελῶς ἀνεπίτρεπτον εἰς τὰ μαθηματικὰ καὶ παρεδέχετο τὸ ἄπειρον μόνον κατὰ τὴν ἔννοιαν μιᾶς διαδικασίας (ἑνὸς «προτσὲς») *ἀπειρισμοῦ* εἰς τὸ ὅριον: $\lim\limits_{x \to \infty}\ldots$

Ἕνας ἀπὸ τοὺς προδρόμους τοῦ Cantor, ὁ Bolzano*, ἀνεγνώριζε ὅτι τὸ ἄπειρον εἰς τὰ μαθηματικὰ ἐδημιούργει πληθώραν παραδόξων (ἀντινομιῶν), αἱ ὁποῖαι καθιστοῦσαν ἀδύνατον τὸν ἀριθμητικὸν χειρισμὸν τῆς ἐννοίας ταύτης. Ὁ Cantor ὅμως μᾶς ἐδίδαξεν τὸν τρόπον λογισμοῦ μὲ τὸ ἄπειρον, διὰ τῆς εἰσαγωγῆς τῶν ἀπείρων ἀριθμῶν, ἐννοιῶν σαφῶς καθοριζομένων καὶ τελείως περιγραφομένων, καθὼς καὶ πράξεων ἐπ' αὐτῶν ἐντελῶς ὁριζομένων. Κατὰ τὸν ἴδιον: «...Πρόκειται περὶ μιᾶς ἐπεκτάσεως, μιᾶς συνεχίσεως δηλαδὴ τῆς ἀκολουθίας τῶν πραγματικῶν ἀκεραίων πέραν τοῦ ἀπείρου. Ὁσονδήποτε δὲ τολμηρὸν καὶ ἂν φαίνεται τοῦτο, ἐκφράζω ὄχι μόνον τὴν ἐλπίδα ἀλλὰ καὶ τὴν ἀκλόνητον πεποίθησιν ὅτι, μὲ τὴν πάροδον τοῦ χρόνου, ἡ ἐπέκτασις αὐτὴ θὰ θεωρῆται ὡς τελείως ἁπλῆ, ἀποδεκτὴ καὶ μάλιστα φυσική.»

Κατόπιν δεκαετῶν δισταγμῶν καί, ὅταν τελικῶς ἐπείσθη ὅτι αἱ ἀντιλήψεις του αὐταὶ ἦσαν ἀπαραίτητοι διὰ τὴν περαιτέρω ἀνάπτυξιν τῶν μαθηματικῶν, ἀπεφάσισεν ὁ Cantor νὰ δημοσιεύσῃ τὴν δημιουργίαν του. Εἰς τὸ ἔργον του ἐγενίκευσε τοὺς νόμους καὶ τοὺς κανόνας ποὺ ἰσχύουν διὰ πεπερασμένους ἀριθμοὺς εἰς τρόπον, ὥστε νὰ καθίσταται δυνατὴ ἡ ἐπέκτασίς των πέραν τῆς περιοχῆς τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν. Ἐξήγησε τὸν τρόπον λογισμοῦ μὲ ἄπειρα σύνολα μὲ χρησιμοποίησιν τῶν ἰδίων μεθόδων ποὺ ἐφαρμόζονται εἰς πεπερασμένα σύνολα καὶ μὲ ὀλίγας σαφῶς καθοριζομένας ἐννοίας, ὅπως ἐκεῖναι τῆς διατάξεως (ἀνατρέχων εἰς τὸν Dedekind) τῆς δυναμικότητος ἢ πληθαρίθμου, τοῦ ἀριθμησίμου, κλπ., ἀνύψωσε τὴν θεωρίαν τῶν συνόλων εἰς ἐπιστήμην, διὰ τὴν ὁποίαν δὲν ὑπάρχουν πλέον θεμελιώδεις φραγμοὶ μεταξὺ πεπερασμένου καὶ ἀπείρου —αὐτὴν δηλαδὴ ποὺ κατέστησε κατανοητὴν τὴν ἰδέαν τοῦ ἀπείρου.

Γνωρίζομεν σήμερον ὅτι ὁ Cantor, ὅπως εἶπεν ὁ Hilbert, «ἐδημιούργησεν ἕνα ἀπὸ τοὺς πλέον γονίμους καὶ πολυδυνάμους κλάδους τῶν μαθηματικῶν, ἕνα παράδεισον, ἀπὸ τὸν ὁποῖον κανεὶς δὲν ἠμπορεῖ νὰ μᾶς ἐκδιώξῃ.» Ἡ θεωρία τῶν συνόλων ἐμφανίζεται ὡς μία ἀπὸ τὰς ὡραιοτέρας καὶ τολμηροτέρας δημιουργίας τοῦ ἀνθρωπίνου πνεύματος. Ἡ κατασκευὴ τῶν ἐννοιῶν εἰς αὐτὴν καὶ αἱ ἀποδεικτικαὶ μέθοδοί της ἐνεψύχωσαν καὶ ἀνεζωογόνησαν ὅλους τοὺς κλάδους τῆς μαθηματικῆς ἐρεύνης· καὶ ἀποτελεῖ πράγματι ἡ θεωρία αὐτὴ τὸ πλέον ἐντυπωσιακὸν παράδειγμα διὰ τὴν ἀλήθειαν τοῦ ἀφορισμοῦ τοῦ Cantor: «Ἡ οὐσία τῶν μαθηματικῶν ἔγκειται εἰς τὴν ἐλευθερίαν των.»

Τὴν ἐλευθερίαν των αὐτὴν ἀσκοῦν τὰ μαθηματικὰ μὲ τὸ νὰ θέτουν

* Εἰς ἕνα ἔργον του ποὺ ἐδημοσιεύθη τὸ 1851, μετὰ τὸν θάνατόν του.

ἐρωτήματα. Ποιὸς δὲν ὑπέβαλεν κάποτε εἰς τὸν ἑαυτόν του ἐρωτήματα ὅπως τά :

Ὑπάρχουν περισσότεροι ἀκέραιοι ἀριθμοὶ ἀπὸ τοὺς ἀρτίους ἀκεραίους;

Μία ἀπέρατος εὐθεῖα γραμμὴ περιέχει περισσότερα σημεῖα ἀπὸ ὅσα περιέχει ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα;

Ἕνα ἐπίπεδον περιέχει ὀλιγώτερα σημεῖα ἀπὸ ὅσα περιέχει ὁ χῶρος;

Ἐπὶ ἑνὸς ἀριθμητικοῦ ἄξονος τὰ ρητὰ σημεῖα εἶναι πυκνῶς κατανεμημένα;

Ἰδιαιτέρως, τί νόημα ἔχουν σύμβολα, ὅπως τά: $\infty + 1$, $\infty \cdot 3$, ἢ ∞^2;

Πρὶν ἀπὸ τὸν Cantor, διὰ ζητήματα τοῦ εἴδους αὐτοῦ ἀπεφεύγετο ἡ δημοσία συζήτησις, ἐπειδὴ ἐχαρακτηρίζοντο ὡς ἀφελῆ ἢ ἀνόητα καὶ κυρίως διότι ἀπάντησις δι' αὐτὰ δὲν ἐφαίνετο δυνατή. Ἡ θεωρία ὅμως τῶν συνόλων παρέχει σαφεῖς καὶ ἀκριβολογημένας μαθηματικῶς ἀπαντήσεις εἰς αὐτὰ—ὅταν βεβαίως διατυποῦνται κατὰ τὸν ὀρθὸν τρόπον.

Τὰ θεμέλια τῆς γενικῆς θεωρίας τῶν συνόλων ἔχουν ἤδη τεθῆ ἀπὸ ἡμίσεος καὶ πλέον αἰῶνος καὶ διὰ τὴν κατανόησίν των δὲν ἀπαιτεῖται καμμία σχεδὸν ἐκ τῶν προτέρων εἰδικὴ γνῶσις. Ὅ,τι χρειάζεται εἶναι ἡ ἐπίδειξις ἐνδιαφέροντος ἐκ μέρους τοῦ μελετητοῦ διὰ τὴν κατανόησιν τῆς κατασκευῆς τοῦ «ἀπείρως μεγάλου» καὶ ἡ ἐπιμονὴ διὰ τὴν εἰς βάθος κατανόησιν μερικῶν δυσκόλων κάπως ἐννοιῶν. Διότι ἡ θεωρία τῶν συνόλων ἀναχωρεῖ μὲν ἀπὸ συγκεκριμένας καὶ ἐνορατικὰς ἀντιλήψεις, ἀνέρχεται ὅμως εἰς πολὺ ὑψηλοῦ ἐπιπέδου θεωρήσεις.

Τὸ βιβλίον αὐτὸ εἶναι μία *εἰσαγωγὴ* εἰς τὴν θεωρίαν τῶν συνόλων. Αἱ θεμελιώδεις ἔννοιαι ἀναπτύσσονται εἰς τὰς πρώτας σελίδας μὲ τὴν βοήθειαν μερικῶν πολὺ γνωστῶν πεπερασμένων συνόλων. Μολονότι δὲ ἡ θεωρία τῶν πεπερασμένων συνόλων δὲν εἶναι τίποτε ἄλλο ἀπὸ ἁπλῆν ἀριθμητικήν, μεταθέσεις καὶ συνδυασμούς, βοηθεῖ ἐν τούτοις εἰς τὴν παραγωγὴν τῆς ὁρολογίας καὶ τοῦ συμβολισμοῦ τῆς γενικῆς θεωρίας τῶν συνόλων. Αἱ ἔννοιαι αὐταὶ παρέχουν τὴν βάσιν διὰ τὴν ἀκολουθοῦσαν ἐπεξεργασίαν τῶν ἀπείρων συνόλων.

Ἡ γενικὴ θεωρία τῶν συνόλων τερματίζεται μὲ μίαν ἔρευναν ἐπὶ τῶν διατεταγμένων συνόλων, μερικὰ δὲ ἐνδιαφέροντα θεωρήματα ἐπὶ τῶν σημειοσυνόλων περιέχονται εἰς τὸ Συμπλήρωμα. Περὶ ὁρισμῶν, τέλος, οἱ ὁποῖοι παράγουν παράδοξα γίνεται λόγος ἀκροθιγῶς μόνον εἰς τὰς Συμπερασματικὰς Παρατηρήσεις.

2

ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΥΝΟΛΑ

1. Σύνολα, στοιχεῖα, ἰσότης συνόλων.

Τί εἶναι ἕνα σύνολον; Δὲν εἶναι τοῦτο ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον ἐννοοῦμεν εἰς εἰς τὴν συνήθη ὁμιλίαν μας, ὅταν κάμνωμεν λόγον περὶ ἑνὸς μεγάλου πλήθους ἀνθρώπων ἢ πλοίων ἢ ἄλλων πραγμάτων. Ἀλλὰ μᾶλλον:

Ἕνα σύνολον εἶναι μία συλλογὴ ἐξ ἀντικειμένων, θεωρουμένων ὡς ἕνα ὅλον, καθωρισμένων, διαφορετικῶν μεταξύ των καὶ λαμβανομένων ἐκ τοῦ κόσμου εἴτε τῆς ἐμπειρίας μας εἴτε τῶν διανοημάτων μας.

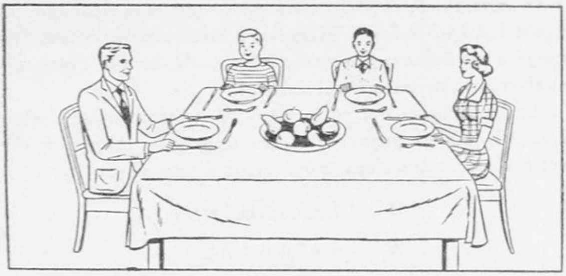
G. Cantor

2. Ἰδοὺ μερικὰ παραδείγματα συνόλων:

(α) Εἰς τὸ σχέδιον 1, τὰ τέσσαρα πρόσωπα, ποὺ παρακάθηνται εἰς τὸ τραπέζι, σχηματίζουν ἕνα σύνολον ἐκ τεσσάρων προσώπων· διότι εἶναι αὐτὰ τέσσαρα καθωρισμένα καὶ διαφορετικὰ ἀντικείμενα τῆς ἀντιλήψεώς μας. Ὁ πατέρας A, ἡ μητέρα B καὶ τὰ παιδιά τους Πέτρος A καὶ Παῦλος A εἶναι ἕνα σύνολον ποὺ ὀνομάζεται ἡ οἰκογένεια A. Τὰ τέσσαρα καθίσματα ἀποτελοῦν ἕνα σύνολον ἐκ τεσσάρων στοιχείων. Ὁμοίως, τὰ τέσσαρα πιάτα, τὰ τέσσαρα μαχαίρια, τὰ τέσσαρα πηρούνια, τὰ τέσσαρα κουτάλια· ἡ καθεμία ἀπὸ τὰς τετράδας αὐτὰς εἶναι ἕνα σύνολον ἐκ τεσσάρων στοιχείων. Ἀφ' ἑτέρου, τὰ μαχαίρια, τὰ κουτάλια καὶ τὰ πηρούνια ἠμποροῦν νὰ θεωρηθοῦν ὡς ἕνα σύνολον ἀπὸ 12 στοιχεῖα, ἀρκεῖ νὰ ὁρίσωμεν ὅτι ὡς στοιχεῖα τοῦ B ἐννοοῦμεν τὰ ἀνωτέρω ἐπιτραπέζια ἀντικείμενα.

Εἰς τὴν φρουτιέραν ὑπάρχει ἕνα σύνολον ἀπὸ ἑπτὰ φροῦτα. Ἠμποροῦμεν ἐπίσης νὰ εἴπωμεν ὅτι ἡ φρουτιέρα περιέχει ἕνα σύνολον ἀπὸ τέσσαρα μῆλα καὶ ἕνα σύνολον ἀπὸ τρία ἀχλάδια.

Ἂς σημειωθῇ ὅτι τὰ στοιχεῖα ποὺ ἀνήκουν εἰς ἕνα σύνολον A καθορίζονται ἀπὸ τὰ εἰδικὰ χαρακτηριστικὰ τοῦ συνόλου αὐτοῦ. Διὰ κάθε



Σχέδιον 1.

ἀντικείμενον, πρέπει νὰ εἴμεθα εἰς θέσιν νὰ ἀποφαινώμεθα, ἐὰν εἶναι αὐτὸ στοιχεῖον τοῦ θεωρουμένου συνόλου ἢ ὄχι. Τὸ σύνολον λ.χ. τῶν ἀρρένων μελῶν τῆς οἰκογενείας *A* ἔχει ὡς στοιχεῖα του τὸν πατέρα *A* καὶ τὰ παιδιά του Πέτρον *A* καὶ Παῦλον *A*, ἐνῶ τὸ σύνολον τῶν θηλέων μελῶν τῆς ἰδίας οἰκογενείας περιέχει ἕνα μόνον στοιχεῖον, τὴν μητέρα *A*. Εἶναι λοιπὸν δυνατὸν εἰς τὰ μαθηματικὰ νὰ ὑπάρχουν σύνολα τόσον ὀλιγομελῆ ὥστε νὰ περιέχουν ἕνα μόνον στοιχεῖον. Διὰ μεγαλυτέραν γενικότητα, σκόπιμον εἶναι νὰ θεωρήσωμεν καὶ τὴν ἔννοιαν τοῦ κενοῦ συνόλου:

Ἕνα κενὸν σύνολον δὲν περιέχει στοιχεῖα.

Τὸ σύνολον ἀπὸ δαμάσκηνα λ.χ. εἰς τὴν φρουτιέραν τοῦ σχεδίου 1 εἶναι παράδειγμα κενοῦ συνόλου.

(β) Ἐὰν ἡ τάξις τῶν τελειοφοίτων ἑνὸς γυμνασίου περιλαμβάνει 15 μαθητάς, τὰ 15 αὐτὰ στοιχεῖα σχηματίζουν τὸ σύνολον τῶν τελειοφοίτων. Ἡ ὁρίζουσα ἰδιότης τὸ σύνολον αὐτὸ εἶναι: τὸ καθὲν ἀπὸ τὰ στοιχεῖα του εἶναι ἕνας μαθητὴς τῆς τάξεως τῶν τελειοφοίτων.

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ αἴθουσα διδασκαλίας διὰ τοὺς 15 αὐτοὺς μαθητὰς περιέχει 15 μόνον ἀτομικὰ θρανία. Ἐὰν οἱ 15 μαθηταὶ πρόκειται νὰ τοποθετηθοῦν εἰς τὰ 15 θρανία καθ' ὅλους τοὺς δυνατοὺς τρόπους, σύμφωνα μὲ τοὺς νόμους τῶν μεταθέσεων θὰ ἔχωμεν $15! = 1{,}307{,}674{,}368{,}000$ διαφόρους τοποθετήσεις. Τὸ σύνολον δηλαδὴ τῶν διαφόρων τοποθετήσεων περιέχει περισσότερα ἀπὸ 1,3 τρισεκατομμύρια στοιχεῖα. (1,3 τρισεκατομμύρια δευτερόλεπτα ὑπερβαίνουν τὰ 40.000 ἔτη!)

3. Ἡ θεώρησις φυσικῶν ἀντικειμένων κατὰ σύνολα ἀπαντᾶ πολὺ σπανιώτερον εἰς τὰ μαθηματικὰ παρ' ὅσον κατασκευαὶ συνόλων ἐξ ἀφηρημένων ἀντικειμένων—ἀντικειμένων τῆς σκέψεώς μας. Παραδείγματα ἀφηρημένων ἀντικειμένων εἶναι: ἀριθμοί, σημεῖα, τρίγωνα, κλπ.

4. Παραθέτομεν μερικὰ παραδείγματα ἀφηρημένων συνόλων:

(α) Τὸ σύνολον ὅλων τῶν μονοψηφίων φυσικῶν ἀριθμῶν περιέχει τὰ στοιχεῖα 1,2,3,4,5,6,7,8,9. Εἶναι αὐτὰ ἐννέα ὡρισμένα καὶ διακεκριμένα στοιχεῖα καὶ ἀνήκουν ὅλα εἰς ἕνα σύνολον M, ἐπειδὴ ἔχουν τὴν ἰδιότητα νὰ εἶναι μονοψήφιοι φυσικοὶ ἀριθμοί.

(β) Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ σύνολον N περιέχει τοὺς ἀριθμοὺς 9, 8,7,6,5,4,3,2,1. Διὰ νὰ χαρακτηρίσωμεν ὡρισμένα πράγματα ὡς στοιχεῖα ἑνὸς συνόλου, περικλείομεν αὐτὰ ἐντὸς ἀγκίστρων:

$$M = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$

$$N = \{9,8,7,6,5,4,3,2,1\}.$$

Οἱ ἰσχυρισμοὶ «5 εἶναι στοιχεῖον τοῦ M» καὶ «5 εἶναι στοιχεῖον τοῦ N» ἐκφράζονται συμβολικῶς διὰ τῶν γραφῶν

$$5 \in M \text{ καὶ } 5 \in N$$

καὶ τὸ σύμβολον $\in$ διαβάζεται «εἶναι στοιχεῖον τοῦ» ἢ «ἀνήκει εἰς τὸ» (*).

5. Εἰς τὰ δύο προηγούμενα παραδείγματα, τὰ σύνολα M καὶ N περιέχουν τὰ αὐτὰ στοιχεῖα, ἀνεξαρτήτως τῆς τάξεως κατὰ τὴν ὁποίαν ἐθεωρήθησαν. Διὰ τὰ σύνολα αὐτὰ λέγομεν ὅτι εἶναι ἴσα, $M = E$.

Δύο σύνολα εἶναι ἴσα τότε καὶ μόνον, ὅταν περιέχουν τὰ αὐτὰ στοιχεῖα.

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τούτου ἰσότητος συνόλων συμπεραίνομεν ὅτι ἡ σχέσις ἰσότητος συνόλων εἶναι ἀνακλαστική, συμμετρικὴ καὶ μεταβατική, δηλαδὴ ὅτι

(α) $M = M$, (β) Ἐὰν $M = N$ τότε $N = M$, (γ) Ἐὰν $M = N$ καὶ $N = P$ τότε $M = P$.

6. Ὁ ὁρισμὸς ἑνὸς συνόλου κατὰ τὸν Cantor ἀπαιτεῖ τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου νὰ εἶναι πράγματα καθωρισμένα καὶ διακρινόμενα μεταξύ των. Τὸ αὐτὸ στοιχεῖον δὲν ἠμπορεῖ νὰ ἐμφανίζεται περισσοτέρας ἀπὸ μίαν φορὰν εἰς τὸ αὐτὸ σύνολον· τὰ γράμματα π.χ. $\gamma,\varepsilon,\omega,\mu,\varepsilon,\tau,\varrho,\iota,\alpha$, συνιστοῦν ἕνα σύνολον μόνον μετὰ τὴν ἐξαίρεσιν ἑνὸς ἀπὸ τὰ δύο γράμματα ε:

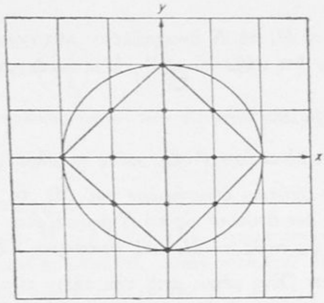
$$M = \{\varepsilon,\mu,\tau,\gamma,\omega,\alpha,\iota,\varrho\}.$$

7. Παραδείγματα συνόλων ἀπὸ τὴν γεωμετρίαν:

(α) Τὸ σύνολον K τῶν σημείων—κόμβων ἑνὸς δικτυώματος (**) εἰς τὴν περιοχὴν ποὺ ὁρίζεται διὰ τῆς σχέσεως $x^2 + y^2 \leqq 4$, περιέχει 13 στοιχεῖα (Σχῆμα 2).

*Πίναξ τῶν χρησιμοποιουμένων εἰς τὸ βιβλίον αὐτὸ συμβόλων παρατίθεται εἰς τὸ τέλος τοῦ Συμπληρώματος.

**Οἱ κόμβοι ἑνὸς δικτυώματος εἶναι τὰ σημεῖα μιᾶς περιοχῆς μὲ συντεταγμένας ἀκεραίους ἀριθμούς.



Σχέδιον 2. Σύνολα κόμβων.

(β) Τὸ σύνολον Q τῶν κόμβων τοῦ δικτυώματος ἐπὶ τοῦ περιγράμματος καὶ ἐντὸς τοῦ τετραγώνου μὲ κορυφὰς $(0,2)$, $(2,0)$, $(0,-2)$ καὶ $(-2,0)$ περιέχει τὰ ἴδια στοιχεῖα. Εἶναι ἴσα συνεπῶς τὰ δύο σημειοσύνολα καὶ ἠμποροῦμεν νὰ γράψωμεν $K = Q$.

Ἀσκήσεις

1. Ἀναζητήσατε εἰς τὸ περιβάλλον σας «πράγματα» ποὺ νὰ ἠμποροῦν νὰ συσχετισθοῦν ὡς «στοιχεῖα συνόλων». (Ὑπόδειξις : παράθυρα, καθίσματα, βιβλία,...).

2. Ἐὰν εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα 7 ἐξαιρεθοῦν τὰ σημεῖα ἀπὸ τὰ K καὶ Q, τὰ ὁποῖα εὑρίσκονται ἐπὶ τῆς περιφερείας καὶ ἐπὶ τοῦ περιγράμματος τοῦ τετραγώνου, ἀντιστοίχως, ἠμποροῦν τὰ νέα σύνολα νὰ χαρακτηρισθοῦν ὡς ἴσα;

3. Τὸ σύνολον τῶν σημείων-κόμβων δικτυώματος, τὰ ὁποῖα εὑρίσκονται ἐντὸς τῆς περιοχῆς μὲ σύνορα τὰς περιφερείας $x^2 + y^2 = 12$ καὶ $x^2 + y^2 = 14$, εἶναι κενόν; (Ἂς γίνῃ ἕνα σχῆμα).

4. Σχηματίσατε τὸ σύνολον ὅλων τῶν ἀναγώγων κλασμάτων μὲ ὅρους μονοψηφίους φυσικοὺς ἀριθμούς.

5. Διὰ ποῖον λόγον τὸ σύνολον τῶν ἀναγώγων κλασμάτων μὲ ὅρους μονοψηφίους ἀριθμοὺς (τῶν μεγαλυτέρων τῆς μονάδος) ἔχει ὀκτὼ στοιχεῖα ὀλιγώτερα ἀπὸ τὸ προηγούμενον σύνολον;

II. Ὑποσύνολον, Συμπληρωματικὸν σύνολον, Ἕνωσις, Τομή.

1. *Ἕνα σύνολον N ὀνομάζεται ὑποσύνολον ἑνὸς συνόλου M (καὶ τὸ M ὑπερσύνολον τοῦ N), ὅταν κάθε στοιχεῖον τοῦ N εἶναι στοιχεῖον ἐπίσης τοῦ M.* Ταῦτα γράφονται: «$N \subseteq M$, ἐάν, δοθέντος ὅτι $a \in N$, συμβαίνῃ $a \in M$». Τὸ σύμβολον «$\subseteq$» διαβάζεται «εἶναι ἕνα ὑποσύνολον τοῦ» ἢ «περιέχεται εἰς τό.» Ἐάν, ἐπιπλέον, $N \neq M$, τὸ N ὀνομάζεται *γνήσιον ὑποσύνολον* τοῦ M· γράφομεν τότε «$N \subset M$» καὶ διαβάζομεν «N εἶναι γνήσιον ὑποσύνολον τοῦ M.» Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, τὸ M θὰ περιέχῃ τουλάχιστον ἕνα στοιχεῖον, τὸ ὁποῖον δὲν θὰ ἀνήκῃ εἰς τὸ N. Ἐὰν $N = M$, τὸ N ὀνομάζεται *καταχρηστικὸν* ὑποσύνολον τοῦ M. Σημειωτέον ὅτι κάθε σύνολον εἶναι καταχρηστικὸν ὑποσύνολον τοῦ ἑαυτοῦ του.

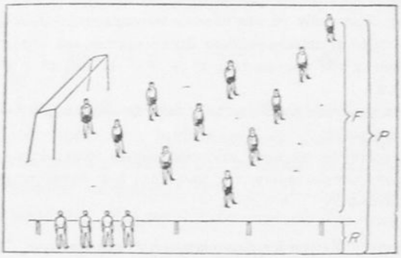
Ἐξ ὁρισμοῦ, δεχόμεθα ὅτι

Τὸ κενὸν σύνολον εἶναι ὑποσύνολον κάθε συνόλου.

2. *Ἐὰν N εἶναι γνήσιον ὑποσύνολον τοῦ M, τὸ σύνολον R ἀπὸ τὰ στοιχεῖα τοῦ M ποὺ δὲν ἀνήκουν εἰς τὸ N ὀνομάζεται τὸ συμπληρωματικὸν σύνολον τοῦ N ὡς πρὸς τὸ M, καὶ γράφομεν «$R = M - N$.»*

3. *Παραδείγματα*: Ἕνα μέρος ἀπὸ τὴν τάξιν τῶν τελειοφοίτων ποὺ ἐθεωρήσαμεν προηγουμένως καὶ ποὺ περιλαμβάνει 15 μαθητάς, ἐχρησιμοποιήθη διὰ τὸν σχηματισμὸν μιᾶς ὁμάδος ποδοσφαίρου. Ἡ ὁμὰς αὐτὴ F εἶναι ἕνα ὑποσύνολον τοῦ συνόλου P τῶν τελειοφοίτων. Τὰ 11 στοιχεῖα τοῦ F εἶναι ἐπίσης στοιχεῖα τοῦ P, ἐνῷ τὸ P περιέχει στοιχεῖα, τὰ ὁποῖα δὲν ἀνήκουν εἰς τὸ F· τὸ F, ἑπομένως, εἶναι ἕνα γνήσιον ὑποσύνολον τοῦ P. Τὸ συμπληρωματικὸν σύνολον R τοῦ F ὡς πρὸς τὸ P, $(R = P - F)$, ἔχει ὡς στοιχεῖα τοὺς τέσσαρας θεατὰς-μαθητὰς τῆς εἰκόνος καὶ εἶναι ὑποσύνολον τοῦ P. Τὰς ἀνωτέρω ἰδιότητας σημειώνομεν συντόμως ὡς ἑξῆς:

$$F \subseteq P, \qquad R = P - F, \qquad R \subseteq P.$$



Σχέδιον 3. $P =$ σύνολον, $F =$ ὑποσύνολον, $R =$ συμπληρωματικὸν σύνολον.

Οἱ 11 παῖκται ἠμποροῦν νὰ καταλάβουν τὰς 11 θέσεις των εἰς τὸ γήπεδον κατὰ 11! διαφόρους τρόπους. Ἐκτὸς αὐτῶν τῶν $11! = 39,916,800$ τρόπων, εἶναι δυνατὸν νὰ ἔχωμεν καὶ πολλοὺς ἄλλους συνδυασμοὺς 11 παικτῶν ἀπὸ τοὺς 15 τελειοφοίτους. Ἐὰν ἀπὸ τὰ 15 στοιχεῖα ποὺ ἀνήκουν εἰς τὸ σύνολον P κατασκευάσωμεν ὅλα τὰ δυνατὰ καὶ διαφορετικὰ μεταξύ των ὑποσύνολα τοῦ P, τὸ πλῆθος των θὰ εἶναι:

$$\binom{15}{11} = \frac{15!}{11!4!} = 1365 \ (*)$$

καὶ τὸ σύνολον ἑπομένως ὅλων τῶν δυνατῶν τοποθετήσεων 11 παικτῶν ἀπὸ τοὺς 15 τελειοφοίτους ἐντὸς τοῦ γηπέδου περιέχει $11! \cdot \binom{15}{11} =$ 54,486,432,000 στοιχεῖα.

4. Τοῦ συνόλου $M = \{1,2,3\}$ θὰ σχηματίσωμεν ὅλα τὰ δυνατὰ ὑποσύνολα. Ἔχομεν πρῶτον τὸ κενὸν σύνολον, $M_0 = \{\}$, κατόπιν τὰ ὑποσύνολα μὲ ἕνα μόνον στοιχεῖον: $M_{11} = \{1\}$, $M_{12} = \{2\}$, $M_{13} = \{3\}$, τὰ μὲ δύο στοιχεῖα: $M_{21} = \{1,2\}$, $M_{22} = \{1,3\}$, $M_{23} = \{2,3\}$. Τὸ καταχρηστικὸν ὑποσύνολον εἶναι τὸ $M_3 = \{1,2,3\} = M$. Τὸ σύνολον λοιπὸν $M = \{1,2,3\}$ ἔχει ὀκτὼ ἢ 2^3 ὑποσύνολα.

Μὲ χρησιμοποίησιν τοῦ τύπου ποὺ μᾶς δίδει τὸ πλῆθος τῶν συνδυασμῶν 11 πραγμάτων ἀνὰ 0, ἀνὰ 1,...ἀνὰ p,...,ἀνὰ n λαμβανομένων (**), ὁδηγούμεθα εὐκόλως εἰς τὸ ἑξῆς Θεώρημα:

Ἀπὸ κάθε σύνολον ποὺ περιέχει n στοιχεῖα, σχηματίζονται 2^n ἀκριβῶς ὑποσύνολα.

5. *Ἡ ἕνωσις δύο συνόλων εἶναι τὸ σύνολον, τοῦ ὁποίου κάθε στοιχεῖον ἀνήκει τουλάχιστον εἰς τὸ ἕνα ἀπὸ τὰ δύο σύνολα.*

Ἡ *ἕνωσις* δύο συνόλων συμβολίζεται $M \cup N$ (= ἕνωσις M καὶ N) καὶ περιέχει τὰ στοιχεῖα τοῦ M καὶ τοῦ N, μὲ τὴν παρατήρησιν ὅτι τὰ κοινὰ στοιχεῖα τῶν M καὶ N θεωροῦνται μόνον μίαν φοράν.

6. *Ἡ τομὴ δύο συνόλων εἶναι τὸ σύνολον, τοῦ ὁποίου κάθε στοιχεῖον ἀνήκει καὶ εἰς τὰ δύο σύνολα.*

Ἡ τομὴ δύο συνόλων συμβολίζεται $M \cap N$ (= τομὴ τῶν M καὶ N).

*Εἰς τὴν θεωρίαν τῶν μεταθέσεων καὶ συνδυασμῶν δεικνύεται ὅτι τὸ πλῆθος τῶν διαφόρων συνδυασμῶν ποὺ εἶναι δυνατὸν νὰ σχηματισθοῦν ἀπὸ N διαφορετικὰ πράγματα, ἀνὰ P ἑκάστοτε λαμβανόμενα, εἶναι:

$$\binom{N}{P} = \frac{N!}{P!(N-P)!}$$

(**) Ὑπάρχουν $\binom{n}{0} = 1$ ὑποσύνολα μὲ 0 στοιχεῖα, $\binom{n}{1} = n$ ὑποσύνολα μὲ ἕνα στοιχεῖον, $\binom{n}{2}$ ὑποσύνολα μὲ δύο στοιχεῖα, κ.ο.κ. Τὸ ὁλικὸν πλῆθος ὅλων τῶν ὑποσυνόλων αὐτῶν εἶναι

$$1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n .$$

7. *Παραδείγματα:*

(α) Θεωροῦμεν τὰ σύνολα:

$$M = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$
$$G = \{2,4,6,8\},$$
$$U = \{1,3,5,7,9\}$$
$$P = \{2,3,5,7\}.$$

Ὅπως βλέπομεν, τὸ M περιέχει ὅλους τοὺς μονοψηφίους φυσικοὺς ἀριθμούς, τὸ G μόνον τοὺς ἀρτίους, τὸ U μόνον τοὺς περιττοὺς καὶ τὸ P μόνον τοὺς πρώτους ἐκ τῶν ἀριθμῶν-στοιχείων τοῦ M. Σχηματίζομεν τώρα ὑποσύνολα, συμπληρωματικὰ σύνολα, ἑνώσεις καὶ τομὰς κατὰ διαφόρους συνδυασμούς· μερικαὶ ἀπὸ τὰς δυνατὰς σχέσεις εἶναι αἱ ἑξῆς:

(α) $G \subset M,\ U \subset M,\ P \subset M.$

(β) $G \cup M = M,\ U \cup M = M,\ P \cup M = M,$

$G \cup U = M,\ (G \cup U) \cup P = M,$

$G \cup P = \{2,3,4,5,6,7,8\},\ P \cup U = \{1,2,3,5,7,9\}.$

(γ) $M - U = G,\ M - G = U,\ M - P = \{1,4,6,8,9\}.$

(δ) $M \cap G = G,\ M \cap U = U,\ M \cap P = P,$

$P \cap G = \{2\},\ P \cap U = \{3,5,7\},\ G \cap U = \{\ \}.$

Διὰ τὴν τελευταίαν τομὴν παρατηροῦμεν ὅτι τὰ G καὶ U δὲν ἔχουν κοινὸν στοιχεῖον: τὰ στοιχεῖα τοῦ ἑνὸς συνόλου εἶναι διαφορετικὰ ἀπὸ τὰ στοιχεῖα τοῦ ἄλλου συνόλου. Τὰ σύνολα αὐτὰ ὀνομάζομεν *διάζευκτα*· ἡ τομὴ δύο διαζεύκτων συνόλων εἶναι τὸ κενὸν σύνολον.

(ε) Τὸ σύνολον M ἔχει $2^9 = 512$ ὑποσύνολα, τά: $\{\ \}, \{1\}, \{2\}, \ldots \{9\}, \{1,2\}, \ldots \{8,9\}, \{1,2,3\}, \ldots \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

β) Μερικαὶ πράξεις μεταξὺ τῶν συνόλων:

$$A = \{\alpha,\upsilon,\gamma,\eta\}, \qquad H = \{\eta,\mu,\varepsilon,\varrho,\alpha\}, \qquad \Pi = \{\pi,\varrho,\omega,\iota\}.$$

$H \cup \Pi = \Pi \cup H = \{\eta,\mu,\varepsilon,\varrho,\omega,\iota,\alpha,\pi\},\ H \cap \Pi = \{\varrho\}$

$(H \cap \Pi) \cap A = A \cap (H \cap \Pi) = \{\ \}$

$(A \cap H) = (H \cap A) = \{\alpha,\eta\}$

$A \cap (H \cup \Pi) = (A \cap H) \cup (A \cap \Pi) = \{\alpha,\eta\}$

$H \cap \Pi = \{\varrho\} \subset H,\ H \cap \Pi \subset \Pi,\ H - (H \cap \Pi) = \{\eta,\mu,\varepsilon,\alpha\}.$

(Ἡ τελευταία ἰσότης λέγει ὅτι τὸ συμπληρωματικὸν σύνολον τῆς τομῆς τῶν H καὶ Π ὡς πρὸς τὸ H εἶναι τὸ σύνολον $\{\eta, \mu, \varepsilon, \alpha, \}$.)

8. Μερικοὶ πολὺ γνωστοὶ κανόνες πράξεων τῆς συνήθους ἀριθμητικῆς ἰσχύουν διὰ σχηματισμοὺς ἑνώσεων καὶ τομῶν συνόλων. Τοῦτο φαίνεται ἐκ τοῦ ἀνωτέρω παραδείγματος, εἰς τὸ ὁποῖον ἐπαληθεύομεν

(α) Τοὺς ἀντιμεταθετικοὺς νόμους:

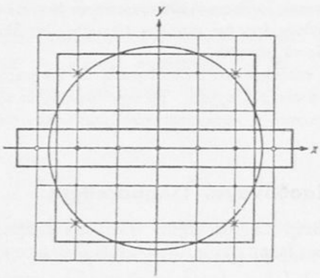
$A \cup H = H \cup A, \; A \cap H = H \cap A.$

(β) Τοὺς προσεταιριστικοὺς νόμους:

$(A \cup H) \cup \Pi = A \cup (H \cup \Pi), \; (A \cap H) \cap \Pi = A \cap (H \cap \Pi)$

(γ) Τὸν ἐπιμεριστικὸν νόμον:

$A \cap (H \cup \Pi) = (A \cap H) \cup (A \cap \Pi).$



Σχέδιον 4. Σύνολα κόμβων

9. *Ἕνα γεωμετρικὸν παράδειγμα.* Εἰς τὸ σχῆμα 4 ὑπάρχουν τρία σύνολα κόμβων: Τὸ σύνολον K τῶν κόμβων ποὺ εἶναι ἐσωτερικοὶ τῆς περιφερείας $x^2 + y^2 = 7$ καὶ τοῦ ὁποίου τὸ πλῆθος τῶν στοιχείων του εἶναι 21, τὸ σύνολον Q τῶν κόμβων ποὺ εἶναι ἐσωτερικοὶ τοῦ τετραγώνου μὲ κορυφὰς $(\pm 2{,}5, \pm 2{,}5)$ καὶ μὲ πλῆθος στοιχείων 25 καὶ τὸ σύνολον R τῶν κόμβων ποὺ εἶναι ἐσωτερικοὶ τοῦ ὀρθογωνίου μὲ κορυφὰς $(\pm 3{,}5, \pm 0{,}5)$ καὶ μὲ πλῆθος στοιχείων 7.

Ὅπως βλέπομεν, τὸ K εἶναι ἕνα γνήσιον ὑποσύνολον τοῦ Q, $K \subset Q$. Τὸ συμπληρωματικὸν σύνολον M τοῦ K ὡς πρὸς τὸ $Q (M = Q - K)$ περιέχει τέσσαρα στοιχεῖα δηλούμενα δι' ἀστερίσκων. Ἡ τομὴ D_1 τοῦ R καὶ τοῦ K $(D_1 = R \cap K)$ περιέχει πέντε στοιχεῖα δηλούμενα διὰ στιγμῶν καὶ ἡ τομὴ D_2 τῶν R καὶ Q, $(D_2 = R \cap Q)$ περιέχει τὰ ἴδια πέντε στοιχεῖα. Ἑπομένως $D_1 = D_2$.

Τὸ συμπληρωματικὸν σύνολον N τοῦ D_1 ὡς πρὸς τὸ R $(N = R - D_1)$ περιέχει τὰ δύο στοιχεῖα ποὺ ἐσημειώθησαν διὰ κυκλίσκων. Τὰ σύνολα N καὶ Q εἶναι διάζευκτα καὶ ἑπομένως $N \cap Q = \{\ \}$. Ἡ ἕνωσις $K \cup R$ περιέχει 23 στοιχεῖα, ἡ δὲ ἕνωσις $(K \cup Q) \cup R$ περιέχει ὡς στοιχεῖα καὶ τὰ 27 σημεῖα-κόμβους ποὺ ἐπεσημάναμεν εἰς τὸ σχῆμα.

Ἀσκήσεις

1. Νὰ κατασκευασθοῦν ὅλα τὰ ὑποσύνολα τοῦ συνόλου $M = \{2,3,5,7,\}$. Πόσα εἶναι αὐτά;

2. Νὰ δειχθῇ ὅτι διὰ δύο σύνολα M καὶ N, $N \subset M$, αἱ σχέσεις

$$M \cap N = N \text{ καὶ } M \cup N = M$$

εἶναι ἰσοδύναμοι.

3. Ἀπὸ τὰς σχέσεις

(α) $N \subseteq M$ καὶ $M \subseteq N$, (β) $M \cup N = M$ καὶ $M \cap N = M$, ποία εἶναι ἐκείνη ποὺ ἠμπορεῖ νὰ μᾶς πείσῃ ὅτι τὰ M καὶ N σύνολα εἶναι ἴσα;

4. Πόσαι διαφορετικαὶ ὁμάδες καλαθοσφαίρας (ὑποσύνολα ἀπὸ πέντε στοιχεῖα) ἠμποροῦν νὰ συγκροτηθοῦν ἀπὸ ἕνα σύνολον 10 μαθητῶν; Μὴ λάβετε ὑπ' ὄψιν τὰς θέσεις τῶν παικτῶν εἰς τὸ γήπεδον.

5. Εἰς μίαν τάξιν τελειοφοίτων ὅλοι οἱ μαθηταὶ προπαρασκευάζονται δι' εἰσαγωγικὰς ἐξετάσεις εἰς ἀνωτέρας σχολάς. Τὸ σύνολον τῶν ὑποψηφίων αὐτῶν δι' ἀνωτέρας σπουδὰς εἶναι γνήσιον ἢ καταχρηστικὸν ὑποσύνολον τοῦ συνόλου τῶν τελειοφοίτων;

III. Σύνολα ἰσοδύναμα. Πληθάριθμοι.

1. Εἰς τὴν πρώτην μας θεώρησιν συνόλων ἐλάβομεν ὡς παράδειγμα τὸ σύνολον τῶν τεσσάρων μελῶν τῆς οἰκογενείας A, ἀνεγνωρίσαμεν δὲ εἰς τὸ παράδειγμα αὐτὸ ἕνα σύνολον ἀπὸ τέσσαρα πιάτα, ἕνα σύνολον ἀπὸ τέσσαρα καθίσματα, ἕνα σύνολον ἀπὸ τέσσαρα μαχαίρια, ἕνα σύνολον ἀπὸ τέσσαρα μῆλα. Τί κοινὸν ἔχουν τὰ διάφορα αὐτὰ σύνολα; Τὴν ἰδιότητα, προφανῶς, ὅτι ὅλα περιέχουν τὸ αὐτὸ πλῆθος στοιχείων: τέσσαρα. Γενικῶς, τί εἶναι ἐκεῖνο ποὺ χαρακτηρίζει ἕνα σύνολον, ὅταν θεωροῦμεν αὐτὸ ἀνεξαρτήτως τῆς φύσεως τῶν στοιχείων του; Εἶναι τοῦτο τὸ *πλῆθος* τῶν στοιχείων του καὶ αὐτὴ εἶναι ἡ κοινὴ ἰδιότης τῶν ἀνωτέρω διαφόρων συνόλων.

2. Εἰς τὸ δεύτερον παράδειγμα, τὸ σύνολον P τῶν τελειοφοίτων περιέχει 15 στοιχεῖα. Ἡ αἴθουσα διδασκαλίας περιέχει ἕνα σύνολον, S, ἀπὸ 15 ἀτομικὰ καθίσματα. Διὰ τὰ σύνολα P καὶ S λέγομεν ὅτι ἔχουν τὴν αὐτὴν δυναμικότητα(*) ἢ ὅτι παριστάνονται ἀπὸ τὸν αὐτὸν *πληθάριθμον* 15.

Εὔκολον εἶναι νὰ διαπιστώσωμεν ὅτι τὰ *διαφορετικὰ* σύνολα P καὶ S ἔχουν τὸ αὐτὸ πλῆθος στοιχείων· διότι ἀρκεῖ νὰ ἀριθμήσωμεν τοὺς μα-

* Εἰς τὰ γερμανικὰ : Mächtigkeit. Καλλιτέρα ἀπόδοσις ἴσως θὰ ἦτο ἡ «ἰσχύς». Εἰς τὸ βιβλίον αὐτὸ θὰ χρησιμοποιοῦμεν τὸν ὅρον «πληθάριθμος» ὡς ταυτόσημον ἔννοιαν μὲ ἐκείνην τοῦ ὅρου «δυναμικότης».

θητὰς τοῦ συνόλου P: «1,2,3,...,15» καὶ κατόπιν τὰ καθίσματα τοῦ συνόλου S: «1,2,3,...,15.» Γίνεται ὅμως ἡ διαπίστωσις αὐτὴ καὶ μὲ ἁπλούστερον τρόπον· διότι, ἀκόμη καὶ ἕνα πρόσωπον ποὺ δὲν γνωρίζει νὰ ἀριθμῇ, δὲν ἔχει παρὰ νὰ ζητήσῃ ἀπὸ τοὺς μαθητὰς νὰ καθίσουν. Ἐὰν κάθε μαθητὴς εὑρίσκῃ ἕνα κάθισμα καὶ ὅλα τὰ καθίσματα καταλαμβάνωνται ἀπὸ αὐτὴν τὴν ἀντιστοιχίαν «μαθητὴς-κάθισμα», γίνεται πρόδηλον ὅτι τὰ σύνολα P καὶ S ἔχουν τὸ αὐτὸ πλῆθος στοιχείων, ὅτι ὑπάρχει εἰς αὐτὰ πλήρης ἀντιστοιχία στοιχείου πρὸς στοιχεῖον, ὅτι εἶναι *ἰσοδύναμα*.

Δύο σύνολα M καὶ N εἶναι ἰσοδύναμα, ἐὰν εἶναι δυνατὴ μία τέτοια συσχέτισις μεταξὺ τῶν στοιχείων τοῦ ἑνὸς καὶ τοῦ ἄλλου συνόλου, ὥστε κάθε στοιχεῖον τοῦ M νὰ ἀντιστοιχῇ πρὸς ἕνα καὶ μόνον ἕνα στοιχεῖον τοῦ N· καὶ ἀντιστρόφως.

Κάθε στοιχεῖον τοῦ M πρέπει νὰ ἀντιστοιχίζεται πρὸς ἕνα καὶ μόνον στοιχεῖον τοῦ N καί, ὁμοίως, κάθε στοιχεῖον τοῦ N πρέπει νὰ ἀντιστοιχίζεται πρὸς ἕνα καὶ μόνον στοιχεῖον τοῦ M. Τὸ εἶδος αὐτὸ ἀντιστοιχίας ὀνομάζεται *ἕνα πρὸς ἕνα ἀντιστοιχία* μεταξὺ τῶν στοιχείων τῶν M καὶ N.

3. *Ἕνα παράδειγμα :*

Τὸ σύνολον $B = \{a,b,c\}$ καὶ τὸ σύνολον $Z = \{1,2,3\}$ ἔχουν τὸ αὐτὸ πλῆθος στοιχείων (τρία)· εἶναι σύνολα ἰσοδύναμα. Ἡ ἕνα-πρὸς ἕνα ἀντιστοιχία (ἀπεικόνισις τοῦ B ἐπὶ τοῦ Z) ἠμπορεῖ νὰ γίνῃ κατὰ ἕνα ἀπὸ τοὺς ἀκολούθους τρόπους ($3! = 6$ ἐν ὅλῳ):

(I)	(II)	(III)	(IV)	(V)	(VI)
$a \leftrightarrow 1$	$a \leftrightarrow 1$	$a \leftrightarrow 2$	$a \leftrightarrow 2$	$a \leftrightarrow 3$	$a \leftrightarrow 3$
$b \leftrightarrow 2$	$b \leftrightarrow 3$	$b \leftrightarrow 1$	$b \leftrightarrow 3$	$b \leftrightarrow 1$	$b \leftrightarrow 2$
$c \leftrightarrow 3$	$c \leftrightarrow 2$	$c \leftrightarrow 3$	$c \leftrightarrow 1$	$c \leftrightarrow 2$	$c \leftrightarrow 1$

Εἰς τὴν πρώτην στήλην, ἡ ἀντιστοιχία συσχετίζει τὸ στοιχεῖον a τοῦ συνόλου B πρὸς τὸ στοιχεῖον 1 τοῦ συνόλου Z καί, ἀντιστρόφως, τὸ στοιχεῖον 1 τοῦ B πρὸς τὸ στοιχεῖον a τοῦ B. κ.ο.κ.

4. *Δύο ἀντιπαραδείγματα:*

(α) Τὰ σύνολα $A = \{a,b\}$ καὶ $Z = \{1,2,3\}$ δὲν εἶναι ἰσοδύναμα. Διότι, ναὶ μὲν κάθε στοιχεῖον τοῦ A ἠμπορεῖ νὰ συνταχθῇ πρὸς κάποιο στοιχεῖον τοῦ Z (π.χ., $a \to 1$ καὶ $b \to 3$)· δὲν συμβαίνει ὅμως καὶ τὸ ἀντίστροφον, κάθε δηλαδὴ στοιχεῖον τοῦ Z νὰ εἶναι δυνατὸν νὰ συνταχθῇ *μὲ μοναδικὸν τρόπον* πρὸς ἕνα στοιχεῖον τοῦ B.

$$1 \to a$$
$$2 \to ;$$
$$3 \to b$$

(β) Ἡ εἰκὼν 5 δεικνύει καθαρὰ ὅτι, διὰ τὰς δημοσίας συγκοινωνίας, τὸ σύνολον τῶν ἐπιβατῶν ἑνὸς ὀχήματος πολὺ συχνὰ δὲν εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ σύνολον τῶν καθισμάτων εἰς αὐτό.

Σχέδιον 5. Σύνολα μὴ ἰσοδύναμα ἐντὸς ἑνὸς σιδηροδρομικοῦ ὀχήματος.

5. Τὴν ἀντιστοιχίαν ἰσοδυνάμων συνόλων δυνάμεθα νὰ διαπιστώσωμεν καὶ διὰ μιᾶς συναρτήσεως-ἐξισώσεως, λ.χ. τῆς $y = 2x + 3$, ὅπου x παριστάνει ἕνα στοιχεῖον τοῦ συνόλου $X = \{1,2,3,...,100\}$. Τὸ σύνολον Y θὰ εἶναι τότε τὸ $\{5,7,9,...,203\}$. Μία ἕνα πρὸς ἕνα ἀντιστοιχία δύο ἰσοδυνάμων συνόλων ὀνομάζεται ἐπίσης μία *ἀπεικόνισις*· ἡ συναρτησιακὴ σχέσις $y = 2x + 3$ ἀπεικονίζει τὸ σύνολον X *ἐπὶ* τοῦ συνόλου Y.

6. Ὅταν τὰ σύνολα X καὶ Y εἶναι ἰσοδύναμα, γράφομεν συμβολικῶς: $M \sim N$. Ἡ ἰδιότης τῆς ἰσοδυναμίας εἶναι ἀνακλαστική, συμμετρικὴ καὶ μεταβατική. Δηλαδή:

(α) $M \sim M$: κάθε σύνολον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸν ἑαυτόν του.
(β) Ἐὰν $M \sim N$ τότε $N \sim M$.
(γ) Ἐὰν $M \sim N$ καὶ $N \sim P$ τότε $M \sim P$.

7. Ἡ κοινὴ ἰδιότης ὅλων τῶν ἰσοδυνάμων συνόλων εἶναι ὁ πληθάριθμος αὐτῶν (ἢ δυναμικότης) ἢ τὸ πλῆθος τῶν στοιχείων των. Τὸν πληθάριθμον ἑνὸς συνόλου παριστάνομεν διὰ τοῦ ἀντιστοίχου μικροῦ γράμματος τοῦ ἀλφαβήτου ἢ διὰ γραφῆς τοῦ συμβόλου τοῦ συνόλου ἐντὸς δύο κατακορύφων γραμμῶν. Παραδείγματος χάριν:

Διὰ $M = \{a,b,c,d,e\}$, εἶναι $|M| = |\{a,b,c,d,e\}| = m = 5$

Διὰ $N = \{s,t,u,v,w\}$, εἶναι $|N| = |\{s,t,u,v,w\}| = n = 5, n = m.$

Ὁ πληθάριθμος «5» σημαίνει τὴν δυναμικότητα ὅλων τῶν ἰσοδυνάμων συνόλων (τῶν συνόλων, δηλαδή, ποὺ περιέχουν πέντε στοιχεῖα).

Εἴμεθα τώρα εἰς θέσιν νὰ κατανοήσωμεν τὸν ὁρισμὸν ποὺ ἔδωσεν ὁ Cantor διὰ τὸν πληθάριθμον:

Ἡ δυναμικότης ἢ ὁ πληθάριθμος τοῦ συνόλου M εἶναι ἡ γενικὴ ἀντίληψις, ἡ ὁποία ἀπομένει εἰς ἡμᾶς περὶ τοῦ συνόλου αὐτοῦ, ὅταν, μέσῳ τῆς σκέψεώς μας, ἀποξενώσωμεν τὰ διάφορα στοιχεῖα του τόσον ἀπὸ τὴν φύσιν των ὅσον καὶ ἀπὸ τὴν διάταξιν, καθ' ἣν ἐμφανίζονται αὐτὰ εἰς τὸ σύνολον.

8. Ἕνα σύνολον M λέγομεν ὅτι ἔχει μεγαλύτερον πληθάριθμον ἑνὸς ἄλλου συνόλου N, ὅταν τὸ μὲν N εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς ἕνα ὑποσύνολον τοῦ M, ἀλλὰ τὸ M δὲν εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς ἕνα ὑποσύνολον τοῦ N.

Παραδείγματα:

Ἔστω $M = \{a,b,c,d\}$ καὶ $N = \{1,2,3\}$. Τὸ N εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ $U = \{a,b,c\}$ ποὺ εἶναι ἕνα γνήσιον ὑποσύνολον τοῦ M, ἤ: $U \subset M$ καὶ $N \sim U$. Τὸ M ὅμως δὲν εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς κανὲν ὑποσύνολον τοῦ N. Συνεπῶς, $|M| > |N|$ ἢ $m > n$ καί, ἐπὶ τοῦ προκειμένου, $4 > 3$.

9. Αἱ ἔννοιαι καὶ οἱ ὁρισμοὶ τῆς θεωρίας τῶν συνόλων ποὺ ἐθεωρήσαμεν εἰς τὰ προηγούμενα, ἀνήκουν εἰς τὴν περιοχὴν τῶν πεπερασμένων συνόλων—περὶ τῶν ὁποίων καὶ μόνον ἔγινεν λόγος μέχρι τοῦδε. Τὰ συμπεράσματα, εἰς τὰ ὁποῖα κατελήξαμεν, φαίνονται αὐτόδηλα καὶ δὲν προσκομίζουν τίποτε νέον. Μόνον εἰς τὴν ἐφαρμογὴν τῶν πράξεων καὶ ἀντιλήψεων αὐτῶν ἐπὶ τῶν ἀπείρων συνόλων καθίσταται προφανὴς ἡ ἐκτεταμένη γενικότης των.

Ἀσκήσεις

1. Δώσατε διάφορα παραδείγματα ἰσοδυνάμων συνόλων ἐκ τοῦ ἀμέσου περιβάλλοντός σας.

2. Πόσαι ἀπεικονίσεις τοῦ συνόλου $M = \{a,b,c,d\}$ ἐπὶ τοῦ ἑαυτοῦ του εἶναι δυναταί; Ἀναγράψατε μερικὰς ἐξ αὐτῶν.

3. Δίδονται: (1) Τὸ σύνολον K τῶν κόμβων ἐπὶ καὶ ἐντὸς τῆς περιφερείας

$x^2+y^2=4$. (2) Τὸ σύνολον Q τῶν κόμβων ἐπὶ καὶ ἐντὸς τοῦ τετραγώνου μὲ κορυφὰς $(\pm 2, \pm 2)$.

(α) Ἐκ τῶν συνόλων K καὶ Q, εἶναι τὸ ἕνα γνήσιον ὑποσύνολον τοῦ ἄλλου;

(β) Νὰ ὁρισθῇ ἡ τομὴ τῶν K καὶ Q.

(γ) Νὰ εὑρεθῇ ὁ πληθάριθμος $|Q-K|$.

(δ) Ἐὰν ἐξαιρεθοῦν τὰ σημεῖα τῆς περιφερείας καὶ τοῦ τετραγώνου, οἱ εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῶν σχημάτων αὐτῶν κόμβοι συνιστοῦν ἰσοδύναμα σύνολα;

4. Δίδεται τὸ σύνολον $X=\{1,2,3,\ldots,10\}$. Ποῖος ἀπὸ τοὺς ἑπομένους κανόνας ἠμπορεῖ νὰ χρησιμοποιηθῇ διὰ τὴν κατασκευὴν συνόλων ἰσοδυνάμων πρὸς τὸ X;

(α) $y=4x-3$. (β) $y=2^x$. (γ) $y=x^3$, (δ) $y=\text{ημ}\left(\frac{\pi}{4}\right)x$.

(ε) $y=\ln x$

5. Ποία εἶναι ἡ ἰδιότης, τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ ἔχῃ ἕνας κανὼν παραγωγῆς συνόλου ἐξ ἑνὸς ἄλλου, ὥστε τὸ παραγόμενον σύνολον νὰ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἀρχικόν;

6. Ἔστω K τὸ σύνολον τῶν κόμβων ποὺ εἶναι ἐσωτερικοὶ τῆς περιφερείας $x^2+y^2=7$ καὶ P τὸ σύνολον τῶν διψηφίων πρώτων ἀριθμῶν. Ποία ἐκ τῶν παρακάτω σχέσεων εἶναι ἀληθής;

(α) $|K|<|P|$. (β) $|K|=|P|$. (γ) $|K|>|P|$.

7. Εἰς μίαν χορευτικὴν συγκέντρωσιν, τὸ σύνολον τῶν ἀνδρῶν ἔστω M καὶ τὸ σύνολον τῶν γυναικῶν N. Πῶς ἠμπορεῖ κανεὶς νὰ γνωρίσῃ, ἐὰν τὰ δύο αὐτὰ σύνολα εἶναι ἰσοδύναμα;

8. Εἰς τὴν τάξιν σας εἶναι τὸ σύνολον τῶν στυποχάρτων ἰσοδύναμον πρὸς τὸ σύνολον τῶν σημειωματαρίων σας;

9. Νὰ εὑρεθῇ ἕνας κανὼν (συναρτησιακὴ ἐξίσωσις), διὰ τοῦ ὁποίου τὸ σύνολον $X=\{1,2,3,\ldots,100\}$ ἀπεικονίζεται ἐπὶ τοῦ $Y=\{2,4,6,\ldots,200\}$.

10. (α) Ἀπεικονίζει ὁ κανὼν τῆς προηγουμένης Ἀσκήσεως 9 κατ' ἀμφιμονοσήμαντον τρόπον «ὅλους» τοὺς φυσικοὺς ἀκεραίους ἐπὶ «ὅλων» τῶν ἀρτίων καὶ θετικῶν ἀκεραίων;

(β) Ἠμποροῦμεν νὰ εἴπωμεν ὅτι τὸ σύνολον $N=\{1,2,\ldots,n\ldots\}$ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ σύνολον $G=\{2,4,6,\ldots,2n\ldots\}$;

3

ΑΠΕΙΡΑ ΣΥΝΟΛΑ

IV. Ἰσοδυναμία καὶ ὑπερπεπερασμένοι πληθάριθμοι.

1. Εἰς τὴν Ἄσκησιν 9 τοῦ προηγουμένου κεφαλαίου, τὸ σύνολον $X = \{1,2,3,...,100\}$ ἐτέθη εἰς ἕνα πρὸς ἕνα ἀντιστοιχίαν πρὸς τὸ σύνολον $Y = \{2,4,6,...,200\}$ τῶν ἀρτίων φυσικῶν: Ἐὰν x εἶναι ἕνα στοιχεῖον τοῦ X, τὸ ἀντίστοιχον στοιχεῖον y τοῦ συνόλου Y δίδεται ὑπὸ τοῦ κανόνος $y = 2x$. Ὁ κανὼν ὅμως αὐτὸς παρέχει πολὺ περισσότερα ἀπὸ μίαν ἁπλῆν ἀντιστοιχίαν μεταξὺ τῶν δύο συνόλων: Ἀντιστοιχίζει *κάθε* φυσικὸν ἀριθμὸν κατὰ μίαν ἕνα πρὸς ἕνα ἀντιστοιχίαν πρὸς ἕνα θετικὸν ἄρτιον ἀκέραιον. Τὰ σύνολα ἑπομένως

$$N = \{1,2,3,...,n,...\} \text{ καὶ } G = \{2,4,6,...,2n,...\}$$

εἶναι ἰσοδύναμα. (Βλ. Ἄσκησιν 10.)

Διὰ τὰ σύνολα N καὶ G λέγομεν ὅτι ἔχουν τὴν αὐτὴν «δυναμικότητα», ὅτι χαρακτηρίζονται διὰ τοῦ αὐτοῦ πληθαρίθμου. Μία ἀπόπειρα, πάντως, διαπιστώσεως τῆς ἰσότητος τῶν πληθαρίθμων τῶν δύο συνόλων διὰ τῆς ἀριθμήσεως τῶν στοιχείων των θὰ ἀπετύγχανε· διότι τὰ σύνολα N καὶ G εἶναι ἄπειρα σύνολα, μὲ πλῆθος στοιχείων ἀπείρως μέγα.

Τὸ σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν κατεταγμένων εἰς τὴν φυσικήν των σειράν, $N = \{1,2,3,...\}$, σχηματίζει ἕνα ἀπέρατον σύνολον (χωρὶς πέρας, ἄπειρον) ἀπὸ καθωρισμένα καὶ διακεκριμένα στοιχεῖα, τὸ πλῆθος τῶν ὁποίων ὑπερβαίνει κάθε πεπερασμένον πληθάριθμον. Καὶ εἶναι ἑπόμενον, φυσικά, εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν νὰ μὴ ἠμποροῦμεν πλέον νὰ ὁμιλοῦμεν περὶ «πλήθους» στοιχείων κατὰ τὴν κοινὴν ἔννοιαν τῆς λέξεως.

Ἀποβαίνει λοιπὸν κενὴ περιεχομένου διὰ σύνολα ἄπειρα ἡ στοιχειώδης ἔννοια τοῦ «πλήθους» καὶ δὲν μᾶς παρέχει καμμίαν βοήθειαν διὰ τὴν ἀπάντησιν εἰς τὸ ἐρώτημα: «εἶναι περισσότεροι οἱ φυσικοὶ ἀριθμοὶ ἀπὸ τοὺς ἀρτίους θετικοὺς ἀκεραίους;». Ἡ ἔννοια τῆς ἰσοδυναμίας ὅμως μᾶς δίδει μίαν ἀπάντησιν εἰς αὐτό. *Τὰ σύνολα N καὶ G ἔχουν τὸν αὐτὸν πληθάριθμον.*

2. Ὅταν λέγωμεν ὅτι τὸ σύνολον N εἶναι «ἄπειρον», τὸ ἄπειρον τοῦτο θὰ πρέπει σαφῶς νὰ διασταλῇ ἀπὸ τὸ «ἄπειρον», ὅπως ἀντιλαμβανόμεθα τοῦτο κατὰ τὴν ἔννοιαν μιᾶς ὁριακῆς διαδικασίας. Παραδείγματος χάριν, ὅταν εἰς τὴν μαθηματικὴν ἀνάλυσιν λέγωμεν: $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \to \infty$, ἐννοοῦμεν ὅτι, ὅταν τὸ x ἀποβαίνῃ μηδέν, $1/x$ ἀποβαίνει ἀπείρως μέγα ἤ, μὲ μεγαλυτέραν ἀκριβολογίαν, «$1/x$ ἠμπορεῖ νὰ γίνῃ μεγαλύτερον κάθε αὐθαιρέτως ἐκλεγομένου, ὁσονδήποτε μεγάλου ἀριθμοῦ, φθάνει νὰ ἐκλεγῇ x ἐπαρκῶς μικρόν.» Τὸ καταχρηστικὸν ἢ *δυνάμει* (*) τοῦτο ἄπειρον εἰς τὸ ὁριακὴν διαδικασίαν εἶναι κάτι τὸ τελείως διαφορετικὸν ἀπὸ τὸ γνήσιον ἢ *ἐνεργείᾳ* (*) ἄπειρον προκειμένου περὶ τοῦ συνόλου N. Τὸ σύνολον $N = \{1,2,3,\ldots\}$ ἐκφράζει μίαν *δοθεῖσαν ὑπάρχουσαν* ἀπειρίαν καὶ ὄχι μίαν διαδικασίαν *ἀπειρίσεως*.

3. Ἡ ἰσοδυναμία τῶν συνόλων N καὶ G ἐμφανίζει καὶ μίαν ἐκπλήσσουσαν ἰδιότητα τοῦ συνόλου G: μολονότι τὸ G εἶναι ἕνα *γνήσιον ὑποσύνολον* τοῦ N, εἶναι ἐν τούτοις ἰσοδύναμον πρὸς τὸ N. Συμβαίνει δηλαδὴ ἐδῶ $G \subset N$ καὶ $G \sim N$. Ὅπως εἴδομεν, διὰ πεπερασμένα σύνολα ὁ ἰσχυρισμὸς «$A \subset B$» εἶναι ἀσυμβίβαστος πρὸς τὸν ἰσχυρισμὸν «$A \sim B$». Παραδείγματος χάριν, ἐὰν $A = \{1,2,3\}$ καὶ $B = \{1,2,3,4,5\}$, θὰ εἶναι $A \subset B$ καὶ $|A| < |B|$ (ἀφοῦ $3 < 5$). Ὁ πληθάριθμος $|A| = 3$ καὶ ὁ πληθάριθμος $|B - A| = 2$ τοῦ συμπληρωματικοῦ συνόλου εἶναι ὁ καθένας μικρότερος τοῦ πληθαρίθμου $|B| = 5$.

Ὁ Dedekind (⁑) αὐτὴν ἀκριβῶς τὴν ἰδιότητα ἐχρησιμοποίησε διὰ νὰ καθορίσῃ ἄπειρα καὶ πεπερασμένα σύνολα, ὡς ἑξῆς:

Ὅταν δὲν ὑπάρχῃ γνήσιον ὑποσύνολον τοῦ M τὸ ὁποῖον νὰ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ M, τὸ M ὀνομάζεται πεπερασμένον (⁂) σύνολον. Ὅταν ὑπάρχῃ γνήσιον ὑποσύνολον τοῦ M, τὸ ὁποῖον νὰ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ M, τὸ M ὀνομάζεται ἄπειρον σύνολον.

Τὸ ἀξίωμα δηλαδὴ τοῦ Εὐκλείδου: «Τὸ ὅλον εἶναι μεγαλύτερον παντὸς μέρους του» δὲν ἰσχύει δι' ἄπειρα σύνολα.

4. *Παραδείγματα:*

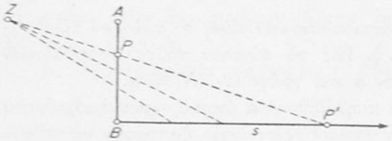
(α) Τὸ σύνολον τῶν σημείων ἐπὶ μιᾶς εὐθείας γραμμῆς εἶναι ἕνα

Σ.Μ. (*) Κατ' Ἀριστοτέλην.

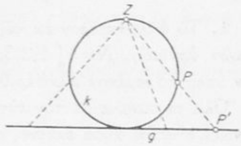
(⁑) Richard Dedekind (1831-1916).

(⁂) Πεπερασμένον σημαίνει *περατούμενον*· ἄπειρον σημαίνει ὑπερπεπερασμένον, *μὴ περατούμενον*.

ἄπειρον σύνολον· ὁμοίως τὸ σύνολον τῶν σημείων ἐπὶ μιᾶς ἡμιευθείας ἢ ἀκτῖνος δέσμης. Τὰ δύο αὐτὰ σύνολα ἔχουν τὸν αὐτὸν πληθάριθμον. Ἡ ἰσοδυναμία τοῦ συνόλου σημείων ἐπὶ τοῦ τμήματος AB καὶ τοῦ συνόλου σημείων ἐπὶ τῆς ἀκτῖνος s τῆς δέσμης μὲ κορυφὴν τὸ Z διαπιστοῦται διὰ τῆς (κεντρικῆς) προβολῆς ἀπὸ τοῦ Z τῶν σημείων τοῦ AB τμήματος ἐπὶ τῆς s εὐθείας. Τὸ σημεῖον P τοῦ AB ἀντιστοιχίζεται πρὸς τὸ σημεῖον P' τῆς S· καὶ ἀντιστρόφως.



Σχέδιον 6. Σύνολα σημείων μὲ τὸν αὐτὸν πληθάριθμον.



Σχέδιον 7. Σύνολα σημείων μὲ τὸν αὐτὸν πληθάριθμον.

(β) Τὸ σχέδιον 7 δεικνύει ὅτι τὸ σύνολον σημείων (ἐκτὸς τοῦ Z) ἐπὶ τῆς περιφερείας k εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ σύνολον σημείων ἐπὶ τῆς εὐθείας g. Μία εὐθεῖα διὰ τοῦ Z ἐπανατέμνει τὴν περιφέρειαν εἰς P καὶ τὴν εὐθεῖαν g εἰς τὸ ἀντίστοιχον τοῦ P σημεῖον P'.

(γ) Τὸ σύνολον σημείων ἐπὶ ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος μήκους 3cm εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ σύνολον σημείων ἐπὶ ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος μήκους 6cm. Τὴν ἀντιστοιχίαν δεικνύει τὸ σχέδιον 8.

Σχέδιον 8. Ἰσοδύναμα σύνολα σημείων.

δ) Τὸ σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν $N = \{1,2,3,...\}$ καὶ τὸ σύνολον τῶν θετικῶν περιττῶν ἀριθμῶν $U = \{1,3,5,...\}$ εἶναι ἰσοδύναμα. Ἔχομεν ἐδῶ $U \subset N$ καὶ ἐπίσης $U \sim N$. Ἡ ἀντιστοιχία ἠμπορεῖ νὰ ὁρισθῇ διὰ τοῦ κανόνος $u = 2n - 1$.

5. Ἰσοδύναμα πεπερασμένα σύνολα παρίστανται ὑπὸ τοῦ αὐτοῦ πληθαρίθμου. Οἱ πεπερασμένοι αὐτοὶ πληθάριθμοι εἶναι οἱ φυσικοὶ ἀριθμοί, εἰς τοὺς ὁποίους καταλήγομεν μὲ τὴν ἀπαρίθμησιν τοῦ πλήθους τῶν στοιχείων τῶν θεωρουμένων συνόλων. Διὰ σύνολα ἄπειρα ὁμοίως, ἰσοδύναμα σύνολα (μὲ τὸν αὐτὸν δηλ. πληθάριθμον) παρίστανται διὰ τοῦ ἰδίου *ὑπερπεπερασμένου* πληθαρίθμου. Οἱ ὑπερπεπερασμένοι πληθάριθμοι ἐκφράζουν μίαν ἐπέκτασιν τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν. Θὰ μελετήσωμεν αὐτοὺς εἰς τὰς ἀκολουθούσας παραγράφους.

Ἀσκήσεις

1. Δείξατε τὴν ἰσοδυναμίαν τῶν σημειοσυνόλων ἐπὶ δύο πλευρῶν ἑνὸς τριγώνου.

2. Εὕρετε ἕνα τύπον, διὰ τοῦ ὁποίου τὸ σύνολον $N = \{1,2,3,...\}$ ἀπεικονίζεται ἀμφιμονοσημάντως ἐπὶ τοῦ συνόλου $Z = \{1,10,100,...\}$.

3. Διὰ κεντρικῆς προβολῆς, ἀπεικονίσατε τὰ σημεῖα μιᾶς ἡμιπεριφερείας ἐπὶ τῶν σημείων (α) μιᾶς εὐθείας, (β) μιᾶς ἡμιευθείας, (γ) ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος.

V. Ἀριθμήσιμα σύνολα.

1. Τὸ ἁπλούστερον ἐκ τῶν ἀπειροσυνόλων εἶναι τὸ σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, $N = \{1,2,3,...\}$. Εἰς τὸ σύνολον τοῦτο προσδίδομεν τὸν ὑπερπερασμένον πληθάριθμον **a** καὶ γράφομεν $|N| = \mathbf{a}$.

Ὅλα τὰ σύνολα μὲ τὸν αὐτὸν πληθάριθμον **a** ὀνομάζονται *ἀριθμήσιμα* σύνολα, εἶναι δὲ αὐτὰ ἐκεῖνα, τῶν ὁποίων τὰ στοιχεῖα ἠμποροῦν νὰ τεθοῦν εἰς ἀμφιμονοσήμαντον ἀντιστοιχίαν πρὸς τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν. Ἀπὸ τὴν ἄποψιν αὐτήν, τὰ στοιχεῖα ἑνὸς ἀριθμησίμου συνόλου ἠμποροῦν νὰ καταταχθοῦν κατ' ἀκολουθίαν, νὰ ἔχουν δηλαδὴ ἕνα πρῶτον στοιχεῖον, ἕνα δεύτερον, τρίτον κ.ο.κ. Ἐκτὸς τοῦ συνόλου N, ἀνεγνωρίσαμεν ἤδη ὡς ἀριθμήσιμα καὶ τὰ σύνολα

$$U = \{1,3,5,...\} \text{ καὶ } G = \{2,4,6,...\}.$$

2. Τὸ σύνολον τῶν πρώτων ἀριθμῶν,

$$P = \{2,3,5,7,11,...\}$$

εἶναι ἀριθμήσιμον. Πράγματι, τὸ σύνολον τοῦτο εἶναι, πρῶτον, ἄπειρον, διότι, ὁσονδήποτε μέγας καὶ ἂν θεωρηθῇ ἕνας δοθεὶς πρῶτος ἀριθμός, ὑπάρχει πάντοτε μεγαλύτερος αὐτοῦ. Ὑπενθυμίζομεν ἐπὶ τούτου τὴν ἀπόδειξιν τοῦ Εὐκλείδου: Ἔστω ὅτι ἐδόθησαν οἱ n ἀρχικοὶ πρῶτοι ἀριθμοὶ $2,3,5,7,...P_n$· ὁ ἀριθμὸς $z = (2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot...\cdot P_n) + 1$ ἢ εἶναι πρῶτος καὶ μεγαλύτερος προφανῶς τοῦ P_n ἤ, ἐὰν δὲν εἶναι πρῶτος, θὰ ἔχῃ ὡς παράγοντα ἕνα πρῶτον ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος θὰ εἶναι, προδήλως πάλιν, μεγαλύτερος τοῦ P_n.(*)

* Τὸ 1896 οἱ Jacques Hadamard καὶ Charles de la Vallée Poussin ἀπέδειξαν τὸ ἑξῆς θεώρημα διὰ πρώτους ἀριθμούς:

Τὸ πλῆθος $\pi(n)$ τῶν ὄχι μεγαλυτέρων τοῦ n πρώτων ἀριθμῶν πληροῖ τὴν σχέσιν

$$\lim_{n\to 8} \left[\pi(n) \div \frac{n}{\ln n} \right] = 1.$$

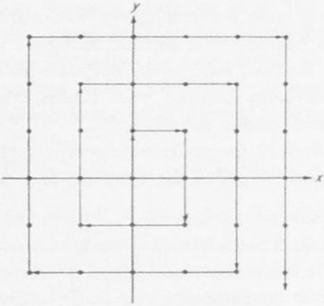
Δεύτερον, τὰ στοιχεῖα τοῦ P ἠμποροῦν νὰ τεθοῦν κατ' ἀκολουθίαν, κατὰ τὸ μέγεθός των· παραδείγματος χάριν:

$$N = \{1,2,3,4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,10,...,100,...,\ 200,...,\ 300,...\}$$
$$P = \{2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,...,541,...,1223,...,1987,...\}.$$

Ὑπάρχει λοιπὸν ἀμφιμονοσήμαντος ἀντιστοιχία μεταξὺ τῶν στοιχείων τῶν δύο συνόλων καὶ εἶναι $P \subset N$. Συνεπῶς $|P| = \mathbf{a}$ καὶ τὸ σύνολον τῶν πρώτων ἀριθμῶν εἶναι ἀριθμήσιμον.

3. *Τὸ σύνολον τῶν τετραγώνων τῶν θετικῶν ἀκεραίων,* $Q = \{1,4,9,16,25,..,\}$, *εἶναι ἀριθμήσιμον.* Διότι εἶναι $Q \subset N$ καὶ ἡ ἀντιστοιχία στοιχείων τῶν δύο συνόλων δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου $n = \sqrt{q}$ ἢ $q = n^2$. Συνεπῶς, $Q \sim N$.

4. *Τὸ σύνολον τῶν κόμβων εἰς τὸ ἐπίπεδον εἶναι ἀριθμήσιμον σύνολον.*



Σχέδιον 9. Τὸ σύνολον τῶν κόμβων εἰς τὸ ἐπίπεδον εἶναι ἀριθμήσιμον.

Ὁ ἀκόλουθος πίναξ δεικνύει τὴν πορείαν πρὸς τὸ ὅριον τοῦτο:

n	$\pi(n)$	$\frac{n}{\ln n}$	$\pi(n) \div \frac{n}{\ln n}$
100	25	21,7	1,151
1000	168	144,7	1,160
10000	1229	1085,7	1,132
100000	9592	8685,8	1,104
1000000	78498	72382,4	1,084
10000000	664579	620420,6	1,071

Τὸ θεώρημα τοῦτο ὄχι μόνον ἀποδεικνύει τὸ ἀπειροπληθὲς τοῦ συνόλου τῶν πρώτων ἀριθμῶν, ἀφοῦ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\ln n} = \infty$ καὶ ἑπομένως ἀναγκαίως (λόγῳ τῆς ὑπάρξεως τοῦ ὁρίου) μὴ πεπερασμένον, ἀλλὰ καὶ παρέχει πληροφορίας περὶ τῆς φύσεως τῆς κατανομῆς των.

Μέχρι σήμερον ἀπάντησις δὲν ἔχει δοθῆ εἰς τὸ ἐρώτημα, ἐὰν τὸ σύνολον τῶν *διδύμων* πρώτων (ὡς οἱ 17,19 ἢ 1949, 1951) ἢ τὸ σύνολον τῶν *τετραδύμων* πρώτων, ὡς οἱ 11,13,17,19, ἢ 299471, 299473, 299477, 299479), εἶναι σύνολα ἄπειρα ἢ ὄχι.

Ὅπως διαβλέπομεν ἐκ τοῦ σχεδίου 9, τὸ σύνολον τῶν κόμβων τούτων δύναται νὰ καταταχθῇ κατ' ἀκολουθίαν, εἰς ἀμφιμονοσήμαντον δηλαδὴ ἀντιστοιχίαν πρὸς τὴν φυσικὴν σειρὰν τῶν φυσικῶν ἀκεραίων. Ἐὰν ἡ κατάταξις ἀρχίσῃ ἀπὸ τῆς ἀρχῆς (0,0), τὸ δεύτερον στοιχεῖον τοῦ θεωρουμένου συνόλου εἶναι ὁ κόμβος (0,1), τὸ τρίτον ὁ κόμβος (1,1)..., τὸ τὸ 32ον ὁ κόμβος (3,2), κ.ο.κ.

5. *Τὸ σύνολον τῶν θετικῶν καὶ ἀρνητικῶν ἀριθμῶν μετὰ τοῦ μηδενὸς εἶναι ἀριθμήσιμον.* Διότι ἠμπορεῖ τοῦτο νὰ καταταχθῇ κατὰ τὴν ἀκολουθίαν:

$$Z = \{0,1,-1,2,-2,3,-3,4,-4,\ldots\}.$$

6. *Τὸ σύνολον τῶν ρητῶν ἀριθμῶν εἶναι ἀριθμήσιμον.* Ὡς στοιχεῖα τοῦ συνόλου τούτου θεωροῦμεν ὅλα τὰ ἀνάγωγα κλάσματα, συμπεριλαμβανομένων καὶ ἐκείνων μὲ παρονομαστὴν 1.

Πρὸς σχηματισμὸν μιᾶς διατεταγμένης ἀκολουθίας τῶν ρητῶν ἀριθμῶν, κατατάσσομεν πρῶτον τοὺς ρητοὺς ἀριθμοὺς κατ' αὖξον μέγεθος τῶν *ὑψῶν* των, ὅπου ὡς *ὕψος* ἑνὸς ρητοῦ ὁρίζομεν τὸ *ἄθροισμα* τῶν ὅρων τῆς κλασματικῆς ἀναγώγου μορφῆς του. Κλάσματα μὲ τὸ αὐτὸ ὕψος τὰ κατατάσσομεν κατὰ σειρὰν μεγέθους.

Θέτομεν τὸν ἀριθμὸν 0 ὡς πρῶτον ὅρον τῆς ἀκολουθίας τῶν ρητῶν καὶ κατόπιν ἐξαιροῦμεν τὸ μηδὲν ὡς ὅρον εἰς ὅλα τὰ ἀπομένοντα κλάσματα. Θὰ ἔχωμεν:

Κλάσματα μὲ ὕψος 2: τὸ κλάσμα $\frac{1}{1} = 1$,

» » 3: τὰ κλάσματα $\frac{1}{1}, \frac{2}{1} = 2$,

» » 4: τὰ κλάσματα $\frac{1}{3}, \left(\frac{2}{2}\right), \frac{3}{1} = 3$ (τὸ κλάσμα $\frac{2}{2}$ διαγράφεται ὡς μὴ ἀνάγωγον).

» » 5: τὰ κλάσματα $\frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1} = 4$, κ.ο.κ.

Διὰ νὰ λάβωμεν καὶ τοὺς ἀρνητικοὺς ρητοὺς ἀριθμούς, γράφομεν κατόπιν ἑκάστου θετικοῦ ρητοῦ τὸν ἀντίστοιχόν του ἀρνητικὸν ρητόν. Κατόπιν αὐτῶν, τὸ σύνολον ὅλων τῶν ρητῶν ἀριθμῶν ἠμπορεῖ νὰ γραφῇ κατὰ τὴν ἑξῆς διατεταγμένην ἀκολουθίαν:

$$R = \left\{0,1,-1,\frac{1}{2},\frac{-1}{2},2,-2,\frac{1}{3},\frac{-1}{3},3,-3,\ldots\right\},$$

εἰς τὴν ὁποίαν κάθε ρητὸς ἔχει μίαν ὡρισμένην θέσιν. Τὸ σύνολον R εἶναι γνήσιον *ὑπερσύνολον* ὅλων τῶν διαφόρων συνόλων ἐξ ἀριθμῶν (*ἀριθμοσυνόλων*), τὰ ὁποῖα ἐθεωρήσαμεν μέχρι τοῦδε.

7. Τὸ ἀριθμήσιμον τοῦ συνόλου τῶν ρητῶν ἀριθμῶν ἠμπορεῖ ἐπίσης νὰ ἀποδειχθῇ καὶ διὰ τῆς ἀκολούθου μεθόδου, τῆς *διαγωνίου*. Εἰς τὸν

$$
\begin{array}{ccccccc}
1 \rightarrow 2 & & 3 \rightarrow 4 & & 5 \rightarrow 6 & & \ldots \\
\frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{3}{2} & \frac{4}{2} & \frac{5}{2} & \frac{6}{2} & \ldots \\
\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{3}{3} & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & \frac{6}{3} & \ldots \\
\frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{3}{4} & \frac{4}{4} & \frac{5}{4} & \frac{6}{4} & \ldots \\
\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & \frac{5}{5} & \frac{6}{5} & \ldots \\
\frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{3}{6} & \frac{4}{6} & \frac{5}{6} & \frac{6}{6} & \ldots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}
$$

ἀνωτέρω ἄπειρον πίνακα, ὅλα τὰ μὴ ἀνάγωγα κλάσματα $\left(\frac{2}{2}, \frac{4}{2}, \frac{3}{3}, \frac{2}{4}, \ldots\right)$ διαγράφονται καὶ διατάσσομεν τὰ ἀπομένοντα κατὰ τὴν σειρὰν τὴν ὁποίαν φανερώνουν τὰ κατὰ διαγωνίους τοῦ πίνακος βέλη: $1, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 3, 4, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \ldots$ Φανερὸν εἶναι ὅτι κατὰ τὸν τρόπον αὐτὸν λαμβάνονται ὅλοι οἱ θετικοὶ ρητοὶ ἀριθμοί· ἐὰν δὲ τὸν ἀντίστοιχον ἀρνητικὸν ἑκάστου θετικοῦ ρητοῦ θέσωμεν κατόπιν αὐτοῦ καὶ ὡς πρῶτον στοιχεῖον τῆς σχηματιζομένης νέας ἀκολουθίας γράψωμεν τὸ 0, ἡ ἀκολουθία αὐτὴ θὰ περιλαμβάνη ὅλους τοὺς ρητοὺς ἀριθμούς:

$$\overline{R} = \left\{0, 1, -1, 2, -2, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{-1}{3}, 3, -3, 4, -4, \ldots\right\}$$

Προφανὲς εἶναι ὅτι $\overline{R} = R$, ὁ δὲ τρόπος διατάξεως εἰς τὰ δύο αὐτὰ σύνολα διαφέρει μόνον ὡς πρὸς κλάσματα ἔχοντα τὸ αὐτὸ ὕψος. Τὰ κλάσματα εἰς τὸ διάγραμμα, τὰ ὁποῖα εὑρίσκονται ἐπὶ τῆς αὐτῆς διαγωνίου, ἔχουν ὅλα τὸ αὐτὸ ὕψος, αἱ τιμαί των μόνον βαίνουν αὐξανόμεναι καὶ μειούμεναι ἐναλλὰξ ἀπὸ μιᾶς διαγωνίου εἰς τὴν ἑπομένην.

8. Ἕνα ἀπὸ τὰ μεγαλύτερα καὶ ὡραιότερα ἐπιτεύγματα τοῦ Cantor ἦτο ἡ ἀπόδειξις ὅτι ἕνα σύνολον ἀριθμῶν, τὸ ὁποῖον εἶναι γνήσιον ὑπερσύνολον ὅλων τῶν μέχρι τοῦδε θεωρηθέντων ἀριθμητικῶν συνόλων (τὸ ὁποῖον δηλαδή, κατὰ μίαν ἁπλοϊκὴν ἔννοιαν, περιέχει «ἀκόμη περισσότερα» στοιχεῖα ἀπὸ αὐτά), ἔχει ἐπίσης δυναμικότητα **a**.

Τὸ σύνολον ὅλων τῶν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἀριθμήσιμον.

Ἀλγεβρικὸς ἀριθμὸς λέγεται κάθε ἀριθμός, πραγματικὸς ἢ μιγαδικός, ὁ ὁποῖος εἶναι ρίζα μιᾶς ἀλγεβρικῆς ἐξισώσεως:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a^0 = 0. \tag{1}$$

Εἰς τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν ὑποθέτομεν ὅτι n εἶναι φυσικὸς ἀριθμός, οἱ δὲ συντελεσταὶ $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ θετικοὶ ἢ ἀρνητικοὶ ἀκέραιοι ἢ καὶ τὸ μηδέν, ἀλλὰ μὲ $a_n \neq 0$.

Οἱ ῥητοὶ ἀριθμοὶ ἀποτελοῦν προφανῶς «μικρὸν» μόνον μέρος τῶν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν, ἀφοῦ κάθε ῥητὸς x εἶναι ῥίζα ἀλγεβρικῆς ἐξισώσεως πρώτου βαθμοῦ:

$$mx - p = 0, \text{ μὲ } m,\ p, \text{ ἀκεραίους}, \ m \neq 0.$$

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς εὑρίσκομεν $x = \dfrac{p}{m}$. Διὰ $n = 2$, ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις (1) ἠμπορεῖ νὰ ἔχῃ καὶ ῥητὰς καὶ μιγαδικὰς ῥίζας καὶ ἑπομένως οἱ ἀριθμοὶ αὐτοὶ θὰ πρέπει νὰ θεωρηθοῦν ὡς ἀλγεβρικοὶ ἐπίσης ἀριθμοί. Π.χ., $x = \sqrt{2}$ εἶναι ῥίζα τῆς ἐξισώσεως $x^2 = 2$, καὶ $x = 1 + i$ τῆς ἐξισώσεως $x^2 - 2x + 2 = 0$.

9. Διὰ τὴν ἀνάπτυξιν τῆς ἀποδείξεως τοῦ ἀριθμησίμου τοῦ συνόλου τῶν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν, θὰ διατάξωμεν τοὺς ἀριθμοὺς αὐτοὺς κατὰ τὰ ὕψη τῶν ἀλγεβρικῶν ἐξισώσεων. Τὸ ὕψος μιᾶς ἀλγεβρικῆς ἐξισώσεως

$$a_n x^n + \ldots + a_0 = 0$$

ὁρίζεται ὡς ὁ φυσικὸς ἀριθμὸς

$$h = n + |a_n| + |a_{n-1}| + |a_{n-2}| + \ldots + |a_2| + |a_1| + |a_0|.$$

Φανερὸν εἶναι ὅτι, διὰ μίαν δοθεῖσαν τιμὴν τοῦ ὕψους h, πεπερασμένον μόνον πλῆθος ὑπάρχει ἀλγεβρικῶν ἐξισώσεων καὶ ὅτι εἰς ἑκάστην ἀλγεβρικὴν ἐξίσωσιν βαθμοῦ n ὑπάρχουν τὸ πολὺ n διάφοροι ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι νὰ εἶναι ῥίζαι αὐτῆς.

Εἶναι ἑπομένως δυνατὴ μία διάταξις τῶν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν κατ' ἀκολουθίαν (ἀριθμήσιμον σύνολον), κατὰ τὰ αὔξοντα ὕψη τῶν ἀλγεβρικῶν ἐξισώσεων, τῶν ὁποίων εἶναι ῥίζαι. Διὰ διαφορετικὰς ἐξισώσεις τοῦ αὐτοῦ ὕψους, διατάσσομεν τοὺς ἀριθμοὺς κατ' αὔξοντας βαθμοὺς τῶν ἐξισώσεων, διὰ διαφορετικὰς δὲ πραγματικὰς ῥίζας τῆς αὐτῆς ἐξισώσεως διατάσσομεν αὐτὰς κατ' αὖξον μέγεθος. Εἰς τὴν περίπτωσιν μιγαδικῶν ῥιζῶν, ἡ διάταξις γίνεται κατ' αὐξούσας τιμὰς τοῦ πραγματικοῦ των μέρους καὶ διὰ ἴσα πραγματικὰ μέρη διαφορετικῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν κατ' αὐξούσας τιμὰς τοῦ καθαρῶς φανταστικοῦ των μέρους.

Σύμφωνα μὲ τὰς ὁδηγίας αὐτάς, ἔχομεν τὴν ἀκόλουθον διάταξιν τῶν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν:

(α) Ὕψος $h = 1$ δὲν εἶναι δυνατόν, διότι τότε $n = 0$, $a_0 = \pm 1$ καὶ ὁδηγούμεθα εἰς τὸ ἄτοπον $\pm 1 = 0$.

(β) Διὰ $h = 2$ εἶναι $n = 1$, $a_1 = \pm 1$, $a_0 = 0$. Εὑρίσκομεν δηλαδὴ τὴν ἐξίσωσιν $\pm x = 0$ καὶ τὸν πρῶτον ἀλεβρικὸν ἀριθμὸν 0.

(γ) Διὰ $h = 3$, ἔχομεν τὰς ἑξῆς δύο περιπτώσεις :

(a) $n = 1$. Ἐὰν $a_1 = \pm 2$ καὶ $a_0 = 0$, λαμβάνομεν τὰς ἐξισώσεις $\pm 2x = 0$ καὶ πάλιν τὸν ἀλγεβρικὸν ἀριθμὸν 0. Ἐὰν $a_1 = \pm 1$ καὶ $a_0 =$

± 1, ἔχομεν τὰς ἐξισώσεις $\pm x \pm 1 = 0$ καὶ τοὺς ἑπομένους τοῦ μηδενὸς δύο ἀλγεβρικοὺς ἀριθμοὺς -1 καὶ 1.

(β) $n = 2$. Διὰ $a_2 = \pm 1$, εἶναι $a_1 = a_0 = 0$ καὶ ἔχομεν τὰς ἐξισώσεις $\pm x^2 = 0$, αἱ ὁποῖαι μᾶς δίδουν καὶ πάλιν τὸν ἀλγεβρικὸν ἀριθμὸν 0.

(δ) Διὰ $h = 4$, ἔχομεν τὰς τρεῖς περιπτώσεις:

(α) $n = 1$.

$a_1 = \pm 1$, $a_0 = \pm 2$: $\pm x \pm 2 = 0$: λύσεις: -2 καὶ $+2$.

$a_1 = \pm 2$, $a_0 = \pm 1$: $\pm 2x \pm 1 = 0$: λύσεις: $\dfrac{-1}{2}$ καὶ $\dfrac{+1}{2}$.

$a_1 = \pm 3$, $a_0 = 0$: $\pm 3x = 0$: λύσεις: 0.

(β) $n = 2$.

$a_2 = \pm 1$, $a_1 = 0, a_0 = \pm 1$: $\pm x^2 \pm 1 = 0$: λύσεις $-1, 1, -i, i$.

$a_2 = \pm 1$, $a_1 = \pm 1$, $a_0 = 0$: $\pm x^2 \pm x = 0$: λύσεις: $-1, 0, 1$.

$a_2 = \pm 2$, $a_1 = a_0 = 0$: $\pm 2x^2 = 0$: λύσις: 0.

(γ) $n = 3$.

$a_3 = \pm 1$, $a_2 = a_1 = a_0 = 0$: $\pm x^3 = 0$: λύσις: $x = 0$,

καὶ ἡ μέθοδος αὐτὴ ἀνευρέσεως ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν ἠμπορεῖ νὰ συνεχισθῇ ἀπεριορίστως. Τὰ πρῶτα στοιχεῖα λοιπὸν τῆς ἀκολουθίας τῶν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν εἶναι

$$A = \left\{ 0, -1, +1, -2, +2, \frac{-1}{2}, \frac{+1}{2}, -i, +i, \dots \right\}$$

Εἰς τὴν ἀκολουθίαν αὐτὴν ἕκαστος ἀλγεβρικὸς ἀριθμὸς ἔχει μίαν ὡρισμένην θέσιν· τὸ σύνολον συνεπῶς τῶν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἀριθμήσιμον.

10. Ἡ ἔρευνα διὰ τὴν δυναμικότητα τῶν ἀπειροσυνόλων ποὺ ἐθεωρήσαμεν μέχρι τώρα, τῶν συνόλων δηλαδὴ G, U, Q, P, N, Z, R καὶ A, μᾶς ὡδήγησεν πάντοτε εἰς τὸν αὐτὸν πληθάριθμον $\mathbf{a}$, μολονότι ὅλα αὐτὰ τὰ σύνολα ἦσαν τελείως διαφορετικά. Πράγματι, τὸ σύνολον A περιέχει ὅλα τὰ ἄλλα σύνολα ὡς γνήσια ὑποσύνολά του: Τὸ καθὲν ἀπὸ τὰ σύνολα G, U, P καὶ Q εἶναι γνήσιον ὑποσύνολον τοῦ N, τὸ ὁποῖον εἶναι γνήσιον ὑποσύνολον τοῦ Z καὶ τοῦτο πάλιν γνήσιον ὑποσύνολον τοῦ R. Ἀπεδείξαμεν ἐν τούτοις ὅτι ὅλα αὐτὰ τὰ σύνολα εἶναι ἰσοδύναμα πρὸς τὸ σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν N καὶ ὅτι ἔχουν τὸν αὐτὸν πληθάριθμον $\mathbf{a}$.

Ἐκ τῶν μέχρι τώρα συλλογισμῶν μας, μήπως θὰ ἦτο εὐλογοφανὲς νὰ ἀναμένωμεν ὅτι ὅλα τὰ ἀπειροσύνολα εἶναι ἰσοδύναμα, ὅλα δηλαδὴ ἀριθμήσιμα; Ἐὰν τοῦτο συνέβαινεν, ἡ σπουδὴ τῶν ἀπειροσυνόλων δὲν θὰ παρουσίαζεν ἐνδιαφέρον, ἀφοῦ μεταξὺ αὐτῶν δὲν θὰ ὑπῆρχε καμμία ἱεράρχησις.

Ὅπως θὰ ἴδωμεν, τοῦτο δὲν συμβαίνει. Διότι ἀπεδείξαμεν μὲν τὴν ἰσοδυναμίαν ὡρισμένων συνόλων πρὸς τὸ σύνολον τῶν φυσικῶν ἀκεραίων, ἐν τούτοις ὅμως ἐθεωρήσαμεν ἐκτὸς τούτων καὶ ἄλλα σύνολα (ὅπως τὰ σημειοσύνολα ἐπὶ ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος ἢ μιᾶς ἡμιευθείας, ἐπὶ μιᾶς πλήρους εὐθείας καὶ ἐπὶ μιᾶς περιφερείας), διὰ τὰ ὁποῖα θὰ ἀποδείξωμεν ὅτι ὁ πληθάριθμός των εἶναι μεγαλύτερος τοῦ $\mathbf{a}$.

Ἀσκήσεις

1. Πόσαι ἀμφιμονοσήμαντοι ἀπεικονίσεις ὑπάρχουν ἑνὸς ἀριθμησίμου συνόλου ἐπὶ τοῦ ἑαυτοῦ του;

2. Ἐὰν δοθοῦν δύο ρητοὶ ἀριθμοί, ὁσονδήποτε γειτονικοί, ὑπάρχει πάντοτε ἕνας ρητὸς ἀριθμὸς μεταξὺ αὐτῶν. Δώσατε παραδείγματα.

3. Εὕρετε τοὺς ἀλγεβρικοὺς ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι εἶναι λύσεις ὅλων τῶν ἀλγεβρικῶν ἐξισώσεων ὕψους πέντε.

4. Εἶναι ἀλγεβρικὸς ἀριθμὸς τὸ ἡμίτονον τῶν $7^0\ 30'$;

5. Δείξατε τὴν ἀλήθειαν τῶν κάτωθι σχέσεων:

(α) $U \subset N, G \subset N,\ N \subset Z,\ Z \subset R$.

(β) Τὰ σύνολα U, G, N, Z, ἔχουν ὅλα τὴν αὐτὴν δυναμικότητα, δηλ. $U \sim G \sim N \sim Z \sim R$ καὶ εἶναι ἀριθμήσιμα. Ὁ κοινός των ὑπερπεπερασμένος πληθάριθμος εἶναι:

$$|U| = |G| = |N| = |Z| = |R| = \mathbf{a}.$$

VI. Σύνολα μὴ ἀριθμήσιμα

1. Ἂς θεωρήσωμεν τώρα ὅλους τοὺς πραγματικοὺς ἀριθμοὺς r ποὺ περιέχονται εἰς τὸ διάστημα $0 < r < 1$. Οἱ ἀριθμοὶ αὐτοὶ εἶναι δυνατὸν νὰ γραφοῦν, κατὰ μοναδικὸν τρόπον, ὑπὸ μορφὴν ἀπεράτων δεκαδικῶν κλασμάτων. Παραδείγματος χάριν:

$$\tfrac{1}{2} = 0{,}499999\ldots, \qquad \tfrac{2}{5} = 0{,}399999\ldots, \qquad \tfrac{1}{4} = 0{,}249999\ldots,$$

$$\tfrac{5}{12} = 0{,}416666\ldots, \qquad \sqrt{\tfrac{1}{50}} = 0{,}141421\ldots, \qquad \pi/6 = 0{,}523598\ldots,$$

$$\text{ημ } 4^0 = 0{,}069756\ldots, \quad \text{λογ. } 1{,}09 = 0{,}037426\ldots.$$

Ἐὰν τὸ σύνολον τῶν ἀριθμῶν τούτων ἦτο ἀριθμήσιμον, θὰ ἦτο δυνατὸν νὰ γραφοῦν αὐτοὶ κατὰ κάποιαν διατεταγμένην ἀκολουθίαν (κατὰ τὰς αὐξούσας λ.χ. τιμάς των). Θὰ ἠμπορούσαμεν ἑπομένως νὰ διακρίνωμεν μεταξὺ αὐτῶν ἕνα πρῶτον, ἕνα δεύτερον, ἕνα τρίτον κ.ο.κ., κατὰ τὸν πίνακα:

$$\begin{array}{l}
(1)\ \ 0.\, Z_{11}\, Z_{12}\, Z_{13}\, Z_{14} \ldots \\
(2)\ \ 0.\, Z_{21}\, Z_{22}\, Z_{23}\, Z_{24} \ldots \\
(3)\ \ 0.\, Z_{31}\, Z_{32}\, Z_{33}\, Z_{34} \ldots \\
(4)\ \ 0.\, Z_{41}\, Z_{42}\, Z_{43}\, Z_{44} \ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

Εἰς τοὺς ἀπεράτους αὐτοὺς δεκαδικούς, Z_{ik} εἶναι ψηφία ἐκ τοῦ συνόλου

$$\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,\}.$$

Σχηματίζομεν τώρα ἕνα πραγματικὸν ἀριθμὸν $r_1 = 0{,}a_1a_2a_3a_4...$, ὅπου τὰ a_i ἐκλέγονται ἐκ τοῦ ἀνωτέρω συνόλου καὶ μὲ $a_i \neq Z_{ii}$· εἶναι δηλαδὴ $a_1 \neq Z_{11}$, $a_2 \neq Z_{22}$, κλπ. Φανερὸν εἶναι ὅτι, κατὰ τὸν τρόπον αὐτόν, ὄχι μόνον εἶναι δυνατὸν νὰ μορφώσωμεν ἀπείρους ἀριθμοὺς r_1 ἀλλὰ καὶ ὅτι οὐδεὶς ἐξ αὐτῶν περιέχεται εἰς τὸν ἀνωτέρω πίνακα ἀριθμησίμου συνόλου δεκαδικῶν κλασμάτων. Πράγματι, ὁ σχηματισθεὶς ἀριθμὸς r_1, διαφέρει ἀπὸ τὸν πρῶτον ἀριθμὸν τοῦ πίνακος τουλάχιστον κατὰ τὸ πρῶτον δεκαδικὸν ψηφίον ($a_1 \neq Z_{11}$), ἀπὸ τὸν δεύτερον ἀριθμὸν αὐτοῦ τουλάχιστον κατὰ τὸ δεύτερον δεκαδικὸν ψηφίον ($a_2 \neq Z_{22}$), κ.ο.κ. Δὲν ὑπάρχει, ἐπομένως, ἀριθμήσιμον σύνολον πραγματικῶν ἀριθμῶν ἐντὸς τοῦ διαστήματος $0 < r < 1$, τὸ ὁποῖον νὰ ἐξαντλῇ *ὅλους* τοὺς πραγματικοὺς ἀριθμοὺς τοῦ διαστήματος τούτου. Ὥστε:

Τὸ σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν τοῦ διαστήματος $0 < r < 1$ δὲν εἶναι ἀριθμήσιμον.

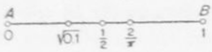
2. Τὸ σύνολον ὅλων τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν τοῦ διαστήματος $0 < r < 1$ εἶναι δυνατὸν νὰ τεθῇ εἰς ἀμφιμονοσήμαντον ἀντιστοιχίαν πρὸς τὰ σημεῖα ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος μήκους 1. Τὰ ἀκραῖα σημεῖα τοῦ τμήματος τούτου ἐξαιροῦνται φυσικά, ὅπως φαίνεται καὶ ἐκ τοῦ σχήματος 10.

3. Ὁμοίως, τὸ σύνολον ὅλων τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν τοῦ ἀνοικτοῦ διαστήματος $-\infty < r < +\infty$ δύναται νὰ διαταχθῇ κατὰ ἀμφιμονοσήμαντον ἀντιστοιχίαν πρὸς τὰ σημεῖα μιᾶς εὐθείας γραμμῆς. Τοῦτο δεικνύεται εἰς τὸ σχῆμα 11.

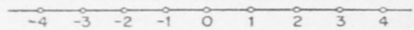
4. Τὸ σχῆμα 12 δεικνύει τὴν ἰσοδυναμίαν τοῦ συνόλου ὅλων τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν $-\infty < r < +\infty$ πρὸς τὸ σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν τοῦ διαστήματος $0 < r < 1$. Τὸ τμῆμα AB μήκους 1 κάμπτεται εἰς τὸ μέσον του M κατ' ὀρθὴν γωνίαν καὶ τὰ σημεῖα του τίθενται ἀκολούθως εἰς ἀμφιμονοσήμαντον ἀντιστοιχίαν, διὰ κεντρικῆς προβολῆς ἀπὸ τοῦ σημείου Z, πρὸς τὰ σημεῖα μιᾶς εὐθείας γραμμῆς g. Ἐπομένως:

Τὸ σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν δὲν εἶναι ἀριθμήσιμον.

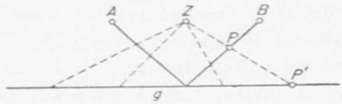
Κατὰ ταῦτα, τὸ σύνολον ὅλων τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν καὶ τὸ σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν τοῦ διαστήματος $0 < r < 1$ ἔχουν τὸν αὐτὸν πληθάριθμον. Ὁ πληθάριθμος αὐτὸς ὀνομάζεται *πληθάριθμος τοῦ συνεχοῦς* (continuum), ὁ πληθάριθμος δηλαδὴ τοῦ σημειοσυνόλου



Σχέδιον 10. Ἀπεικόνισις τῶν ἀριθμῶν $0 < r < 1$ ἐπὶ τῶν σημείων τοῦ τμήματος AB.



Σχέδιον 11. Ἀριθμητικὸς ἄξων δεικνύων τὴν ἰσοδυναμίαν τοῦ συνόλου τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν πρὸς τὸ σύνολον τῶν σημείων μιᾶς εὐθείας γραμμῆς.



Σχέδιον 12. Τὰ σύνολα σημείων ἐπὶ τῆς τεθλασμένης γραμμῆς BA καὶ ἐπὶ τῆς γραμμῆς g εἶναι ἰσοδύναμα. Ἡ εὐθεῖα AZB εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν g.

ἑνὸς συνεχοῦς εὐθυγράμμου τμήματος ἢ μιᾶς ἀπεράτου εὐθείας γραμμῆς, καὶ τὸν συμβολίζομεν μὲ τὸ γράμμα **c**.

5. Ἡ δυναμικότης τοῦ συνόλου ὅλων τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν ἢ τοῦ συνόλου τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν τοῦ διαστήματος $0 < r < 1$ εἶναι ἡ αὐτὴ πρὸς τὴν δυναμικότητα τοῦ συνόλου τῶν σημείων ἑνὸς τμήματος AB ἢ μιᾶς εὐθείας g. Τὰ σύνολα αὐτὰ εἶναι ἰσοδύναμα μεταξύ των.

6. Διεπιστώσαμεν λοιπὸν τὴν ὕπαρξιν ἀπειροσυνόλων, τὰ ὁποῖα ἔχουν μεγαλυτέραν δυναμικότητα ἢ μεγαλύτερον πληθάριθμον ἀπὸ τὴν δυναμικότητα ἑνὸς οἱουδήποτε ἀπὸ τὰ ἀριθμήσιμα σύνολα ποὺ ἐξητάσαμεν μέχρι τώρα. Τὸ γεγονὸς αὐτὸ εἶναι ἐκεῖνο ποὺ δίδει περιεχόμενον εἰς τὴν εἰσαγωγὴν τῶν ὑπερπεπερασμένων πληθαρίθμων.

Ὑπάρχουν ἐν τούτοις καὶ ἄλλοι ὑπερπεπερασμένοι πληθάριθμοι ἐκτὸς τῶν **a** καὶ **c** ποὺ εὕρομεν. Πράγματι, τὰ ἀπειροσύνολα δὲν εἶναι ὅλα ἰσοδύναμα καὶ ὑπάρχουν διάφορα «ἐπίπεδα» ἀπειριῶν μεταξύ των, ὅπως καὶ προκειμένου περὶ πεπερασμένων συνόλων. Ὅπως δὲ θὰ ἴδωμεν ἀργότερα, ὑπάρχει ἀπειρία ἀπειροσυνόλων μὲ πληθαρίθμους διαφόρους τῶν **a** καὶ **c**.

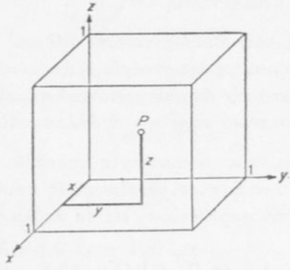
Θὰ ἐξετάσωμεν κατ' ἀρχὰς ἀπειροσύνολα μὲ πληθαρίθμους ἴσους πρὸς τὸν πληθάριθμον **c** τοῦ συνεχοῦς.

7. Σύνολα ἰσοδύναμα πρὸς τὸ σύνολον μὲ πληθάριθμον **c** εἶναι:

(α) Τὸ σύνολον ὅλων τῶν ἐσωτερικῶν σημείων ἑνὸς τετραγώνου.
(β) Τὸ σύνολον ὅλων τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου.
(γ) Τὸ σύνολον ὅλων τῶν ἐσωτερικῶν σημείων ἑνὸς κύβου.
(δ) Τὸ σύνολον ὅλων τῶν σημείων τοῦ τριδιαστάτου χώρου.

Ἡ μέθοδος ἀποδείξεως τῶν ἰσχυρισμῶν αὐτῶν εἶναι ἐντελῶς ἁπλῆ καὶ θὰ τὴν ἐπιδείξωμεν εἰς τὴν περίπτωσιν τῶν ἐσωτερικῶν σημείων ἑνὸς κύβου μὲ ἀκμὴν ἴσην πρὸς τὴν μονάδα (σχ. 13). Αἱ συντεταγμέναι ἑνὸς σημείου P ἐσωτερικοῦ τοῦ κύβου αὐτοῦ ὡς πρὸς τοὺς ἄξονας τοῦ σχήματος εἶναι:

$$x = 0,\ a_1\ a_2\ a_3\ \ldots$$
$$y = 0,\ b_1\ b_2\ b_3\ \ldots$$
$$z = 0,\ c_1\ c_2\ e_3\ \ldots$$



Σχέδιον 13. Σύνολον σημείων ἐσωτερικῶν ἑνὸς κύβου.

Ἄς χαρακτηρίσωμεν τὸ σημεῖον P διὰ τοῦ δεκαδικοῦ:

$$d = 0{,}a_1\ b_1\ c_1\ a_2\ b_2\ c_2\ a_3\ b_3\ c_3\ .\ .\ .\ .$$

Εἶναι προφανὲς ὅτι εἰς κάθε σημεῖον P ἐσωτερικὸν τοῦ κύβου ἀντιστοιχίζεται ἕνας καὶ μόνος d, διὰ τὸν ὁποῖον εἶναι $0 < d < 1$· καὶ ἀντιστρόφως, εἰς κάθε τέτοιον d ἀντιστοιχίζεται ἕνα καὶ μόνον σημεῖον P, ἐσωτερικὸν βεβαίως τοῦ κύβου. Τὰ σύνολα συνεπῶς τῶν ἐσωτερικῶν σημείων τοῦ κύβου καὶ τῶν ἀριθμῶν d εἶναι ἰσοδύναμα καί, ἐπειδὴ τὸ δεύτερον σύνολον ἔχει πληθάριθμον **c**, τὸν αὐτὸν πληθάριθμον ἔχει καὶ τὸ πρῶτον σύνολον.

Μὲ ἀνάλογον τρόπον ἠμπορεῖ νὰ δειχθῇ ὅτι διὰ κάθε εὐθύγραμμον τμῆμα ἢ χωρίον τοῦ ἐπιπέδου ἢ τοῦ χώρου τὸ σύνολον τῶν σημείων του ἔχει πληθάριθμον **c**.

8. Εἰς προηγουμένην παράγραφον εἴδομεν ὅτι τὸ σύνολον τῶν κόμβων ἑνὸς ἐπιπέδου ἠμπορεῖ νὰ ἀπεικονισθῇ ἀμφιμονοσημάντως ἐπὶ τοῦ συνόλου τῶν κόμβων μιᾶς εὐθείας (συνόλου ἀκεραίων Z) καὶ ἑπομένως ὅτι ὁ κοινὸς πληθάριθμος τῶν συνόλων αὐτῶν εἶναι **a**. Τώρα ὅμως ἔχομεν τὴν γενίκευσιν τῆς παρατηρήσεως αὐτῆς: τὰ σημειοσύνολα ἐπὶ ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος, ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου χωρίου ἢ χωρίου τοῦ χώρου εἶναι ἰσοδύναμα, ἠμποροῦν δηλ. νὰ τεθοῦν εἰς ἀμφιμονοσήμαντον ἀντιστοιχίαν. Συνέπεια τούτου εἶναι ὅτι ἡ *ἔννοια τῆς διαστάσεως* δὲν ἔχει καμμίαν σημασίαν διὰ τὸν χαρακτηρισμὸν ἑνὸς πληθαρίθμου. Σημειοσύνολα γραμμικά, ἐπίπεδα ἢ τοῦ χώρου περιέχουν σημειοσύνολα μὲ τὸν αὐτὸν πληθάριθμον **c**.

Κατὰ τὴν ἁπλοϊκὴν (naive) ἐν τούτοις ἀντίληψιν τῆς διαστάσεως, ἀνευρίσκομεν κάτι, τὸ ὁποῖον δὲν στερεῖται σημασίας διὰ τὴν θεωρίαν τῶν συνόλων. Διὰ μιᾶς ἀποδεικτικῆς μεθόδου, μᾶλλον ἐπιπόνου (Peano, Hilbert καὶ Brouwer) διεπιστώθη ὅτι:

Μεταξὺ δύο continuum διαφορετικῶν τάξεων εἶναι ἀδύνατον νὰ κατασταθῇ ἀμφιμονοσήμαντος ἀντιστοιχία, ἡ ὁποία νὰ τηρῇ τὴν συνέχειαν: ἀντιστοιχία δηλαδή, κατὰ τὴν ὁποίαν γειτονικὰ σημεῖα τοῦ ἑνὸς continuum νὰ ἀντιστοιχοῦν εἰς γειτονικὰ σημεῖα τοῦ ἄλλου continuum.

9. Ἡ ἀμφιμονοσήματος ἀντιστοιχία μεταξὺ τῶν σημειοσυνόλων $0 < x < 1$ καὶ $0 < y < \infty$ ἠμπορεῖ νὰ εἰκονισθῇ καὶ διὰ καταλλήλων συναρτησιακῶν κανόνων ποὺ παραθέτομεν εἰς τὰ ἀκόλουθα παραδείγματα:

$$y = \frac{x}{1-x} \;(\Sigma\chi.\ 14), \qquad y = \text{εφ}\left(\frac{\pi}{2}x\right) \;(\Sigma\chi.\ 15), \qquad y = \frac{x^2}{1-x^2} \;(\Sigma\chi,\ 16).$$

10. Τὰ ἀπειροσύνολα ποὺ ἐξητάσαμεν μέχρι τώρα, ἔχουν πληθαρίθμους **a** ἢ **c**. Εἶναι αὐτά:

(α) *Ἀριθμήσιμα σύνολα:*

Τὸ σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν:

$$N = \{1,2,3,4,5,\dots\}.$$

Τὸ σύνολον τῶν ἀρτίων θετικῶν ἀκεραίων:

$$G = \{2,4,6,8,\dots\}.$$

Τὸ σύνολον τῶν περιττῶν θετικῶν ἀκεραίων:

$$U = \{1,3,5,7,\dots\}.$$

Τὸ σύνολον τῶν πρώτων ἀριθμῶν:

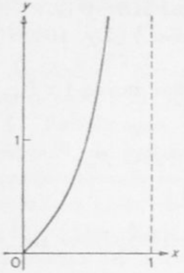
$$P = \{2,3,5,7,11,\dots\}.$$

Τὸ σύνολον τῶν τετραγώνων τῶν ἀκεραίων:

$$Q = \{1,4,9,16,\dots\}.$$

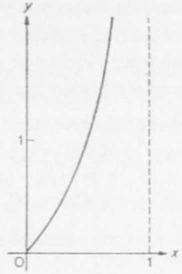
Τὸ σύνολον τῶν ἀκεραίων:

$$Z = \{0,1,-1,2,-2,\dots\}.$$



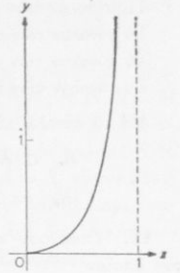
Σχέδιον 14.

$$y = \frac{x}{1-x}$$



Σχέδιον 15.

$$y = \text{εφ}\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$



Σχέδιον 16.

$$y = \frac{x^2}{1-x^2}$$

Τὸ σύνολον τῶν ρητῶν ἀριθμῶν:

$$R = \left\{0,1,-1,\frac{1}{2},\frac{-1}{2},\dots\right\}.$$

Τὸ σύνολον ὅλων τῶν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν:

$$A = \left\{0,-1,1,-2,2,\frac{-1}{2},\frac{1}{2},\dots\right\}.$$

Τὸ σύνολον τῶν κόμβων ἐπὶ μιᾶς εὐθείας: G_g.

Τὸ σύνολον τῶν κόμβων ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου: G_e.

Δι' ὅλα τὰ σύνολα αὐτὰ ἔχομεν τὰς σχέσεις ἐγκλεισμοῦ:

$G \subset N$

$U \subset N, \quad N \subset Z, \quad Z \subset R, \quad R \subset A,$

$P \subset N$

$Q \subset \mathrm{N}$

Εἶναι ὅλα ἰσοδύναμα μεταξύ των:

$$N \sim G \sim U \sim P \sim Q \sim Z \sim R \sim A \sim G_g \sim G_e,$$

εἶναι ἀριθμήσιμα καὶ ἔχουν κοινὸν πληθάριθμον **a**:

$$|N| = |G| = |U| = |P| = |Q| = |Z| = |R| = |A| = |G_g| = |G_e| = \mathbf{a}.$$

(β) *Σύνολα μὲ πληθάριθμον τὸν πληθάριθμον τοῦ συνεχοῦς:*

Τὸ σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν τοῦ διαστήματος $0 < r < 1$: R_{r1}

Τὸ σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν: R_r.

Τὸ σύνολον τῶν σημείων ἑνὸς ἀνοικτοῦ τμήματος AB: P_{AB}.
Τὸ σύνολον τῶν σημείων μιᾶς ἡμιευθείας (ἢ ἀκτῖνος) (Σχ. 10): P_s.
Τὸ σύνολον τῶν σημείων μιᾶς εὐθείας g: P_g.
Τὸ σύνολον τῶν ἐσωτερικῶν σημείων εἰς ἕνα κύβον ἀκμῆς 1 : P_w.

Διὰ τὰ σύνολα αὐτὰ ἔχομεν τὰς σχέσεις:

$$R_{e_1} \subset R_e \cdot R_{e_1} \sim R_e \sim P_{AB} \sim P_s \sim P_g \sim P_w \cdot$$

$$|R_{e_1}| = |R_e| = |P_{AB}| = |P_s| = |P_g| = |P_w| = \mathbf{c}.$$

11. Ὑπάρχουν σύνολα μὲ ὑπερπεπερασμένον πληθάριθμον $\mathbf{m}$, διὰ τὸν ὁποῖον

$$\mathbf{a} < \mathbf{m} < \mathbf{c}\,;$$

Εἰς τὸ ἐρώτημα αὐτὸ ἀπάντησις μέχρι σήμερον δὲν ἔχει δοθῆ. Εἶναι τὸ λεγόμενον «πρόβλημα τοῦ συνεχοῦς».

12. Θὰ ἐξετάσωμεν τώρα μερικὰ σπουδαῖα θεωρήματα, τὰ ὁποῖα θὰ μᾶς χρησιμεύσουν εἰς τὴν περαιτέρω μελέτην μας:

(α) *Ἐὰν εἰς τὰ στοιχεῖα ἑνὸς ἀριθμησίμου συνόλου ἐπισυναφθοῦν (ἢ ἀπὸ τὰ στοιχεῖα του ἐξαιρεθοῦν) στοιχεῖα πεπερασμένου πλήθους, τὸ προκῦπτον νέον σύνολον παραμένει ἀριθμήσιμον.*

Ἀπόδειξις: Ἡ ἕνωσις ἑνὸς πεπερασμένου συνόλου $E = \{e_1 e_2, e_3 \ldots, e_n\}$ καὶ ἑνὸς ἀριθμησίμου συνόλου $B = \{b_1, b_2, b_3, \ldots\}$ ἠμπορεῖ νὰ γραφῆ ὑπὸ μορφὴν ἀκολουθίας:

$$S = E \cup B = \{e_1 e_2, \ldots, e_n, b_1, b_2 b_3, \ldots\}.$$

Εἶναι ἑπομένως τὸ σύνολον S ἀριθμήσιμον.

Ἐὰν ἀπὸ τὰ στοιχεῖα ἑνὸς ἀριθμησίμου συνόλου S ἐξαιρεθῆ πεπερασμένον πλῆθος ἐξ αὐτῶν, εὑρίσκομεν τὸ ἀριθμήσιμον συμπληρωματικὸν σύνολον ποὺ προκύπτει ἀπὸ τὸ S διὰ διαγραφῆς εἰς αὐτὸ τῶν ἐν λόγῳ στοιχείων.

Παράδειγμα:

Ἔστω $N = \{1,2,3,4,\ldots\}$ καὶ $P_1 = \{2,3,5,7,\}$ (τὸ σύνολον τῶν μονοψηφίων πρώτων ἀριθμῶν}. Θὰ ἔχωμεν

$$\bar{P} = N - P_1 = \{1,(2),(3),4,(5),6,(7),8,9,..,\} = \{1,4,6,8,9,\ldots\}.$$

ὅπου αἱ παρενθέσεις δηλοῦν ἐξαίρεσιν τῶν ἐντὸς αὐτῶν ἀριθμῶν.

(β) *Ἡ ἕνωσις δύο ἀριθμησίμων συνόλων, καὶ γενικώτερον, ἡ ἕνωσις ἀριθμησίμου ἀπειρίας ἀριθμησίμων συνόλων, εἶναι σύνολα ἀριθμήσιμα.*

(γ) *Ἐὰν ἀπὸ ἕνα ἄπειρον σύνολον ἐξαιρεθῆ σύνολον ἀριθμήσιμον στοιχείων του τὸ δὲ προκύπτον συμπληρωματικὸν σύνολον εἶναι πάλιν* *ἄπειρον σύνολον, θὰ ἔχῃ τοῦτο τὸν αὐτὸν πληθάριθμον μετὰ τοῦ ἀρχικοῦ συνόλου.*

Ἀπόδειξις: Ἔστω M ἕνα ἄπειρον σύνολον, A ἕνα ἀριθμήσιμον ὑποσύνολον τοῦ M καὶ R τὸ συμπληρωματικὸν τοῦ A ὡς πρὸς τὸ M, $R = M - A$. Ὑποθέσωμεν τὸ R ἄπειρον σύνολον, ὁπότε $M = A \cup R$. Εἰς τὸ σύνολον R, ἂς ὀνομάσωμεν $\bar{A}$ ἕνα ἀριθμήσιμον ὑποσύνολόν του καὶ $\bar{R}$ τὸ συμπληρωματικὸν τοῦ $\bar{A}$ ὡς πρὸς τὸ R, δηλ. $R = \bar{A} \cup \bar{R}$· τὸ σύνολον $\bar{R}$ ἠμπορεῖ νὰ εἶναι τὸ κενὸν σύνολον. Κατὰ τὸν τρόπον αὐτὸν διεμερίσαμεν τὸ σύνολον M εἰς τὰ ὑποσύνολά του $\bar{A}$, A καὶ $\bar{R}$, ἀνὰ δύο τῶν ὁποίων εἶναι σύνολα διάζευκτα, χωρὶς δηλ. κοινὰ στοιχεῖα. Ἑπομένως

$$M = A \cup \bar{A} \cup \bar{R}.$$

Παρατηροῦμεν τώρα ὅτι, ἀφοῦ τὰ σύνολα A καὶ $\bar{A}$ εἶναι ἀριθμήσιμα, κατὰ τὸ ἀνωτέρω θεώρημα β) θὰ εἶναι $A \cup \bar{A} \sim \bar{A}$ καί, ἐπειδὴ $\bar{R} \sim \bar{R}$, θὰ ἔχωμεν:

$$M = (A \cup \bar{A}) \cup \bar{R} \sim \bar{A} \cup \bar{R} = R, \quad \text{δηλαδὴ } M \sim R,$$

κατὰ τὴν πρότασιν.

Τὴν ἀνωτέρω ἀπόδειξιν ἠμποροῦμεν νὰ ἀποδώσωμεν καὶ διὰ τῆς συμβολικῆς γραφῆς:

$$M = \begin{Bmatrix} A \\ R \end{Bmatrix} = \left\{ \begin{matrix} \left. \begin{matrix} A \\ \bar{A} \end{matrix} \right\} \sim \bar{A} \\ \bar{R} \quad \sim \bar{R} \end{matrix} \right\} = R.$$

10. Ὀνομάζομεν *ὑπερβατικὸν* ἕνα πραγματικὸν ἢ μιγαδικὸν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος δὲν εἶναι ἀλγεβρικὸς ἀριθμός. Ἠμποροῦμεν τώρα νὰ ἀποδείξωμεν τὸ ἑξῆς σπουδαῖον θεώρημα:

Τὸ σύνολον τῶν πραγματικῶν ὑπερβατικῶν ἀριθμῶν δὲν εἶναι ἀριθμήσιμον καὶ πληθάριθμον ἔχει τὸν **c**.

Ἀπόδειξις: Τὸ σύνολον R_r τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν ἔχει πληθάριθμον **c**, ἐξ ὁρισμοῦ δὲ τὸ σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀλγεβρικῶν εἶναι τὸ συμπληρωματικὸν τοῦ συνόλου τῶν πραγματικῶν ὑπερβατικῶν ἀριθμῶν ὡς πρὸς τὸ R_r. Ἐὰν τώρα ἀπὸ τὸ σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν ἐξαιρεθῇ τὸ ἀριθμήσιμον σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν, κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα (γ) τὸ ἀπομένον σύνολον (τὸ σύνολον δηλ. τῶν πραγματικῶν ὑπερβατικῶν ἀριθμῶν) θὰ ἔχῃ τὸν αὐτὸν πληθάριθμον **c** μετὰ τοῦ συνόλου τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

Τὸ θεώρημα τοῦτο ἀποδεικνύει ὄχι μόνον τὴν ὕπαρξιν τῶν ὑπερβατικῶν ἀριθμῶν ἀλλὰ καὶ τὴν ἀπειρίαν αὐτῶν. Τὸ σύνολον αὐτὸ ἔχει πράγματι μεγαλύτερον πληθάριθμον ἀπὸ τὸν πληθάριθμον τῶν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν. Ἕνας πραγματικὸς ἀριθμὸς εἶναι, κατὰ κανόνα, ὑπερβατικὸς ἀριθμός· οἱ πραγματικοὶ ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοὶ εἶναι αἱ ἐξαιρετικαὶ μόνον περιπτώσεις (ἀριθμήσιμον σύνολον).

Ἐν πάσῃ περιπτώσει, ἡ ἀπόδειξις τῆς ὑπερβατικότητος ὡρισμένων πραγματικῶν ἀριθμῶν (ὡς τῶν $2^{\sqrt{2}}$, e, π, sin 1, In 2), ἡ διαπίστωσις δηλ. τοῦ ἀδυνάτου τῆς ταυτίσεως αὐτῶν πρὸς λύσεις ἀλγεβρικῶν ἐξισώσεων, εἶναι πολλάκις πρόβλημα ἐξαιρετικῶς δύσκολον καὶ διὰ μερικοὺς μάλιστα ἐξ αὐτῶν ἀνεπίλυτον ἀκόμη.

Ἀσκήσεις

1. Εὕρετε τὸν πληθάριθμον τοῦ συνόλου τῶν ἐσωτερικῶν σημείων ἑνὸς ὀρθογωνίου διαστάσεων 2×1 μονάδων μήκους.

2. Εὕρετε τὸν πληθάριθμον τοῦ συνόλου τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν.

3. Ποῖος ὁ πληθάριθμος τοῦ συνόλου τῶν ἀρρήτων ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν;

4. Ἕνα ἄπειρον σύνολον ἔχει πάντοτε ἕνα ἀριθμήσιμον ὑποσύνολον;

5. Εὕρετε τὸν πληθάριθμον τοῦ συνόλου τῶν δυνάμεων m^n, μὲ m, n φυσικοὺς ἀριθμούς. (Χρησιμοποιήσατε τὴν μέθοδον τῶν διαγωνίων).

6. Ἀποδείξατε τὸ Θεώρημα (β) τῆς προηγουμένης παραγράφου 12. (Ὑπόδειξις: Δι' ἀριθμήσιμον σύνολον ἀριθμησίμων συνόλων ἐφαρμόσατε τὴν μέθοδον τῶν διαγωνίων.)

VII. Ἄλλα ἀριθμήσιμα σύνολα

1. Ἐγνωρίσαμεν μέχρι τώρα δύο εἴδη ἀπειριῶν, δύο δηλ. διαφορετικὰς δυναμικότητας ἀπείρων συνόλων ἢ δύο διαφορετικοὺς ὑπερπεπερασμένους πληθαρίθμους, τοὺς **a** καὶ **c**. Ἂς ἐξετάσωμεν ἤδη, ἐὰν ὑπάρχουν καὶ ἄλλοι ἐκτὸς αὐτῶν ὑπερπεπερασμένοι πληθάριθμοι.

Θεωρήσωμεν τὸ σύνολον F ὅλων τῶν πραγματικῶν συναρτήσεων $y = f(x)$, αἱ ὁποῖαι ὁρίζονται εἰς τὸ διάστημα $0 < x < 1$. Μὲ τὴν λέξιν «συνάρτησις» ἐννοοῦμεν τὸ ἑξῆς εἶδος συσχετίσεως: εἰς τὴν ἀνεξάρτητον μεταβλητὴν προσδίδονται ὅλαι αἱ πραγματικαὶ τιμαὶ τοῦ διαστήματος $0 < x < 1$, ἀλλ' εἰς ἑκάστην τιμὴν τοῦ x ἀντιστοιχεῖ μία καὶ μόνη τιμὴ τῆς ἐξηρτημένης μεταβλητῆς y. Ὑπὸ τὰς συνθήκας αὐτάς, ἴσαι τιμαὶ τοῦ y εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι ἀντίστοιχοι διαφορετικῶν τιμῶν τοῦ x, ἀλλ' εἰς ἑκάστην τιμὴν τοῦ x ἀντιστοιχεῖ μία καὶ μόνη τιμὴ τοῦ y.

Εἰς τὰς διαφόρους τιμὰς τοῦ x ἐντὸς τοῦ διαστήματος $0 < x < 1$ ἡ συνάρτησις $y = f(x)$ παράγει διὰ τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν της ἕνα ἄλλο σύνολον τιμῶν. (Εἰς τὰ παραδείγματα π.χ. ποὺ εἰκονίζονται γραφικῶς εἰς τὰ σχήματα 17,18 καὶ 19, τὸ y λαμβάνει τὰς τιμὰς $0 < y < \infty$). Ὁ ὁρισμὸς μιᾶς συγκεκριμένης συναρτήσεως εἶναι δυνατὸν νὰ δοθῇ διὰ μιᾶς ἐξισώσεως, π.χ. $y = x/(1 - x)$ ἢ διὰ μιᾶς καμπύλης ἢ δι' ἄλλου τινὸς τρόπου. Εἰδικοὶ πάντως περιορισμοὶ διὰ τὰς ὁριζομένας συναρτήσεις δὲν τίθενται (ὅπως λ.χ. νὰ εἶναι αὐταὶ συνεχεῖς). Ἰδιαιτέρως, δύο συναρτήσεις θὰ θεωροῦνται διαφορετικαί, ἐὰν λαμβάνουν διαφορετικὰς τιμάς, ἔστω καὶ διὰ μίαν μόνον τιμὴν τοῦ x ἐντὸς τοῦ διαστήματος $0 < x < 1$. Τοῦ θεωρουμένου συνόλου F, ὅλων τῶν δυνατῶν συναρτήσεων ποὺ εἶναι δυνατὸν νὰ ὁρισθοῦν ἐντὸς τοῦ $0 < x < 1$, τὰ στοιχεῖα εἶναι συναρτήσεις.

Φανερὸν εἶναι ὅτι τὸ σύνολον F εἶναι ἄπειρον· διότι καὶ διὰ τὰς ἁπλουστάτας ἐκ τῶν θεωρουμένων συναρτήσεων, τὰς $y = y(x) = c$, τὸ c ἠμπορεῖ νὰ λάβῃ ὅλας τὰς τιμὰς τῶν στοιχείων τοῦ μὴ ἀριθμησίμου συνόλου πραγματικῶν ἀριθμῶν $0 < c < 1$.

Θὰ ἀποδείξωμεν τώρα ὅτι ὁ πληθάριθμος $\mathbf{f}$ τοῦ συνόλου F ὅλων τῶν πραγματικῶν συναρτήσεων τῶν ὁριζομένων ἐν τοῦ διαστήματος $0 < x < 1$ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ $\mathbf{c}$. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ σύνολον τοῦτο ἔχει πληθάριθμον τὸν αὐτὸν μὲ τὸν πληθάριθμον $\mathbf{c}$ τοῦ συνεχοῦς· τοῦτο σημαίνει ὅτι εἶναι δυνατὸν νὰ κατασταθῇ μία ἀμφιμονοσήμαντος ἀντιστοιχία μεταξὺ τῶν συναρτήσεων $f(x)$ καὶ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν $0 < r < 1$. Ἔστω $f_r(x)$ ἡ συνάρτησις, ἡ ὁποία εἶναι ἡ ἀντίστοιχος τοῦ ἀριθμοῦ r.

Θὰ κατασκευάσωμεν τώρα μίαν συνάρτησιν $\varphi(x)$, διὰ τὴν ὁποίαν θὰ ἀποδείξωμεν ὅτι

$$\varphi(r) \neq f_r(r)$$

διὰ κάθε τιμὴν $x = r$ τοῦ διαστήματος $0 < x < 1$. Μία τέτοια συνάρτησις εἶναι δυνατὸν νὰ κατασκευασθῇ κατ' ἀπείρους τρόπους, π.χ. διὰ τῆς συνθήκης $\varphi(r) = f_r(r) + 1$. Ἡ συνάρτησις αὐτὴ $\varphi(x)$ δὲν ταυτίζεται μὲ οὐδεμίαν ἐκ τῶν συναρτήσεων $f_r(x)$, ἀφοῦ, ἐκ κατασκευῆς της, γνωρίζομεν ὅτι διὰ μίαν τουλάχιστον τιμὴν τοῦ x, τὴν $x = r$, εἶναι $\varphi(r) \neq f(x)$. Συνεπῶς, ἡ συνάρτησις $\varphi(x)$ δὲν ἀνήκει εἰς τὸ σύνολον F τῶν συναρτήσεων, τὸ ὁποῖον ὑπετέθη ἰσοδύναμον πρὸς τὸ συνεχές. Εἶναι λοιπὸν ψευδὴς ὁ ἰσχυρισμὸς ὅτι τὸ σύνολον F εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ συνεχὲς καὶ ἑπομένως:

Τὸ σύνολον F ὅλων τῶν πραγματικῶν συναρτήσεων τῶν ὁριζομένων ἐντὸς τοῦ διαστήματος $0 < x < 1$ ἔχει πληθάριθμον $\mathbf{f}$ μεγαλύτερον τοῦ πληθαρίθμου $\mathbf{c}$ τοῦ συνεχοῦς, $\mathbf{f} > \mathbf{c} > \mathbf{a}$.

2. Τὴν προηγουμένην ἀπόδειξιν εἶναι δυνατὸν νὰ ἑρμηνεύσωμεν καὶ ὡς ἑξῆς: Δὲν ὑπάρχει ὑποσύνολον F_c τοῦ F μὲ πληθάριθμον $\mathbf{c}$, τὸ ὁποῖον νὰ δύναται νὰ ἐξαντλήσῃ ὅλα τὰ στοιχεῖα τοῦ F· διότι, ἐὰν δοθῇ ἕνα τέτοιο ὑποσύνολον F_c, εἶναι πάντοτε δυνατὸν νὰ κατασκευασθοῦν στοιχεῖα τοῦ F, τὰ ὁποῖα νὰ μὴ ἀνήκουν εἰς τὸ F_c.

Παράδειγμα:

Θεωρήσωμεν τὸ ὑποσύνολον F_c τοῦ F, τὸ ὁποῖον ἐτέθη εἰς ἀμφιμονοσήμαντον ἀντιστοιχίαν πρὸς τὸ σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν $0 < r < 1$ διὰ τῆς σχέσεως $f_r(x) = \frac{r}{x}$. Δηλαδή:

Εἰς τὸ σημεῖον $r = \frac{1}{2}$ ἀντιστοιχεῖ ἡ συνάρτησις

$$f(x) = x \div \tfrac{1}{2} = 2x.$$

Εἰς τὸ σημεῖον $r = \frac{1}{4}$ ἀντιστοιχεῖ ἡ συνάρτησις

$$f(x) = x \div \tfrac{1}{4} = 4x, \text{ κλπ.}$$

Θεωροῦμεν τώρα τὴν συνάρτησιν $\varphi(x)$ ὑποκειμένην εἰς τὴν συνθήκην $\varphi(r) \neq f_r(r)$: μία τέτοια συνάρτησις εἶναι λ.χ. ἐκείνη, διὰ τὴν ὁποίαν συμβαίνει $\varphi(r) = f_r(r) + 1 = \frac{r}{r} + 1 = 2$. Φανερὸν εἶναι ὅτι ἡ εὐθεῖα $\varphi(x) = 2$ δὲν περιέχεται εἰς τὸ σύνολον τῶν $f_r(x) = \frac{x}{r}$, δηλαδὴ ὅτι ἡ συνάρτησις $\varphi(x)$ εἶναι στοιχεῖον τοῦ F, τὸ ὁποῖον δὲν ἀνήκει εἰς τὸ F_c.

3. *Ὁ πληθάριθμος τοῦ συνόλου ὅλων τῶν συνεχῶν συναρτήσεων ἔχει πληθάριθμον «μόνον»* **c**. Τὴν πρότασιν αὐτὴν δὲν θὰ ἀποδείξωμεν. Αἱ συνεχεῖς συναρτήσεις εἶναι αἱ «ἐξαιρετικαὶ περιπτώσεις» ἐντὸς τοῦ συνόλου ὅλων τῶν πραγματικῶν συναρτήσεων. Κατόπιν τούτου, δὲν εἶναι ἐκπληκτικὸν ὅτι εὑρίσκομεν ὅτι τὸ σύνολον ὅλων τῶν διαφορισίμων συναρτήσεων ἔχει πληθάριθμον ἐπίσης **c**, ἀλλ' ὅτι ὁ πληθάριθμος τοῦ συνόλου ὅλων τῶν ὁλοκληρωσίμων συναρτήσεων εἶναι ὁ αὐτὸς πρὸς τὸν πληθάριθμον **f** τοῦ συνόλου F ὅλων τῶν συναρτήσεων(*). Αἱ διαφορίσιμοι συναρτήσεις εἶναι καὶ ἐδῶ αἱ «ἐξαιρετικαὶ περιπτώσεις» τῶν ὁλοκληρωσίμων

*Τὸ διαφορικὸν πηλίκον καὶ τὸ ὁλοκλήρωμα συσχετίζονται, ὡς γνωστόν, διὰ τοῦ θεμελιώδους θεωρήματος τοῦ Ὁλοκληρωτικοῦ Λογισμοῦ. Ἡ παραγώγισις τοῦ ὁλοκληρώματος μιᾶς συνεχοῦς συναρτήσεως ὡς πρὸς τὸ ἄνω ὅριον δίδει τὴν τιμὴν τῆς συναρτήσεως εἰς τὸ ἄνω ὅριον:

$$\frac{d}{dx}\int_a^x fz \; dz = f(x).$$

Τὸ θεμελιῶδες τοῦτο θεώρημα, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ ἔννοια τοῦ «ὁλοκληρώματος» νοεῖται κατὰ τὸν Bernhart Riemann (1826-1866), ἐφηρμόσθη κατὰ πρῶτον διὰ συνεχεῖς συναρτήσεις. Ἡ ἔννοια αὐτὴ τοῦ ὁλοκληρώματος ἐγενικεύθη ἀργότερον ὑπὸ τοῦ Henri Lebesque (1875-1931), σὲ συσχετισμὸν πρὸς τὴν θεωρίαν τῶν σημειοσυνόλων τοῦ Cantor, εἰς τρόπον ὥστε τὸ θεμελιῶδες θεώρημα νὰ ἰσχύῃ χωρὶς τὸν περιορισμὸν τῆς συνεχείας. Ἡ νεωτέρα μάλιστα ἀνάλυσις ἐπιτρέπει τὴν παραγώγισιν καὶ ἀσυνεχῶν συναρτήσεων—πρᾶγμα πολὺ μεγάλης σημασίας εἰς τὴν σύγχρονον φυσικήν.

συναρτήσεων. Εἰς τὸ σημεῖον αὐτὸ θὰ πρέπει νὰ σημειωθῇ ὅτι ἡ «ὁλοκληρωσιμότης» δὲν πρέπει νὰ συγχέεται μὲ τὴν δυνατότητα παραστάσεως τῆς παραγούσης μιᾶς συναρτήσεως διὰ συναρτήσεως ἀλγεβρικῆς ἢ στοιχειώδους ὑπερβατικῆς. Ἀπὸ τῆς ἀπόψεως αὐτῆς, ἡ συνάρτησις $\frac{\eta\mu x}{x}$ εἶναι ὁλοκληρώσιμος.

4. Ὑπάρχουν ἄλλοι πληθάριθμοι ἐκτὸς τῶν **a**, **c**, καὶ **f**; Ἡ ἀπάντησις εἶναι ὅτι ὑπάρχουν ἄπειροι ὑπερπεπερασμένοι πληθάριθμοι καὶ ὁδηγούμεθα εἰς αὐτὴν μετὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ ἑξῆς θεωρήματος:

Δοθέντος ἑνὸς ἀπείρου συνόλου, ὑπάρχει πάντοτε σύνολον μὲ πληθάριθμον μεγαλύτερον τοῦ πληθαρίθμου τοῦ δοθέντος συνόλου.

Ἐκ τῆς προτάσεως αὐτῆς ἕπεται ὅτι ἡ ἀκολουθία τῶν ὑπερπεπερασμένων πληθαρίθμων δὲν εἶναι φραγμένη ἐκ τῶν ἄνω—δὲν ὑπάρχει δηλ. «μέγιστος» πληθάριθμος.

Διὰ πεπερασμένα σύνολα, πληθάριθμοι τῶν ὁποίων εἶναι οἱ φυσικοὶ ἀριθμοί, ἡ πρότασις ἀποδεικνύεται εὐκόλως, ἀφοῦ ἕνα σύνολον μὲ n στοιχεῖα ἔχει 2^n ὑποσύνολα καὶ $2^n > n$.

5. Διὰ τὴν καλλιτέραν κατανόησιν τῆς γενικῆς ἀποδείξεως τοῦ θεωρήματος τούτου δι' ἄπειρα σύνολα, θὰ παρακολουθήσωμεν τὴν κομψὴν μέν, ἀλλὰ μᾶλλον δύσκολον διαδοχὴν συλλογισμῶν εἰς αὐτὴν κατὰ τὴν ἐφαρμογήν της ἐπὶ ἑνὸς πεπερασμένου συνόλου.

Παράδειγμα:

Ἔστω $M = \{1,2,3\}$ ἕνα πεπερασμένον σύνολον ἐκ τριῶν στοιχείων. Τὸ σύνολον $U(M)$ τῶν ὑποσυνόλων τοῦ συνόλου M περιέχει $2^n = 2^3 =$ ὀκτὼ στοιχεῖα, τά:

$$U(M) = \{\{\}, \{1\} \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\} \{1,2,3,\}\}.$$

Ἀπὸ τὸ σύνολον $U(M)$ ἠμποροῦμεν νὰ ἀποχωρίσωμεν ἕνα ὑποσύνολον U_m τὸ ὁποῖον νὰ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ M· π.χ., τὸ ὑποσύνολον $U_m = \{\{2\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$. Ἡ ἰσοδυναμία μεταξὺ τῶν M καὶ U_m ἠμπορεῖ νὰ κατασταθῇ διὰ μιᾶς ὡρισμένης ἀντιστοιχίας, λ.χ. τῆς ἑξῆς:

$$\begin{array}{ccc} M & & U_m \\ 1 & \leftrightarrow & \{2,3\} \\ 2 & \leftrightarrow & \{1,2,3\} \\ 3 & \leftrightarrow & \{2\}. \end{array}$$

Ὡς παρατηροῦμεν, κατὰ μίαν τέτοιαν ἀντιστοιχίαν μεταξὺ τῶν στοιχείων τῶν M καὶ U_m εἶναι δυνατὸν νὰ παρουσιασθοῦν δύο δυνατότητες:

Ἐμφανίζεται ἕνα στοιχεῖον τοῦ M εἰς τὸ ἀντίστοιχόν του ὑποσύνολον-στοιχεῖον τοῦ U_m: (Κλάσις I).

Δὲν ἐμφανίζεται στοιχεῖον τοῦ M εἰς τὸ ἀντίστοιχόν του ὑποσύνολον -στοιχεῖον τοῦ U_m : (Κλάσις II).

Εἰς τὸ παράδειγμά μας, τὰ στοιχεῖα τοῦ M κατατάσσονται ὡς ἑξῆς εἰς τὰς δύο κλάσεις:

Κλάσις I	*Κλάσις II*
2: ἐπειδὴ περιέχεται εἰς τὸ ἀντίστοιχόν του στοιχεῖον $\{1,2,3\}$ τοῦ U_m	1: ἐπειδὴ δὲν περιέχεται εἰς τὸ ἀντίστοιχόν του στοιχεῖον $\{2,3\}$ τοῦ U_m
	3: ἐπειδὴ δὲν περιέχεται εἰς τὸ $\{2\}$

Σχηματίζομεν τώρα τὸ σύνολον L μὲ στοιχεῖα τὰ στοιχεῖα ποὺ ἀνήκουν εἰς τὴν Κλάσιν II: $L = \{1,3\}$. Εἶναι ἑπομένως τὸ L ὑποσύνολον τοῦ M καὶ $L \in U(M)$, ἀλλὰ δὲν εἶναι στοιχεῖον τοῦ U_m ὅπως θὰ ἀποδείξωμεν.

Ἐὰν τὸ L ἀνῆκεν εἰς τὸ U_m, τὸ στοιχεῖον m_1 τοῦ M, τοῦ ὁποίου ἀντίστοιχον εἶναι τὸ L, θὰ ἀνῆκεν ἢ εἰς τὴν κλάσιν I ἢ εἰς τὴν κλάσιν II. Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν, τὸ m_1 θὰ πρέπει νὰ ἐμφανίζεται εἰς τὸ L· τοῦτο ὅμως εἶναι ἄτοπον, ἀφοῦ τὸ L περιέχει ἐκ κατασκευῆς ἐκεῖνα τὰ στοιχεῖα τοῦ M τὰ ὁποῖα δὲν ἐμφανίζονται εἰς τὸ ἀντίστοιχον ὑποσύνολον-στοιχεῖον τοῦ U_m, στοιχεῖα δηλ. τῆς κλάσεως II. Εἰς δὲ τὴν δευτέραν περίπτωσιν, τὸ στοιχεῖον m_1 ὡς ἀνῆκον εἰς τὴν κλάσιν II ἀναγκαίως δὲν θὰ ἦτο στοιχεῖον τοῦ L. Ἀλλὰ τὸ L περιέχει ὅλα τὰ στοιχεῖα τῆς κλάσεως II καί, συνεπῶς, καὶ τὸ στοιχεῖον m_1· ἀναγκαίως ἄρα τὸ L δὲν περιέχεται εἰς τὸ U_m.

Κατὰ ταῦτα: Δὲν ὑπάρχει ὑποσύνολον U_m τοῦ $U(M)$ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ M καὶ ἐξαντλοῦν τὰ στοιχεῖα τοῦ $U|M|$. Ἀναγκαίως, ἄρα, τὸ σύνολον $U(M)$ ἔχει πληθάριθμον μεγαλύτερον τοῦ πληθαρίθμου τοῦ M.

6. Ἡ τυπικὴ αὐτὴ μέθοδος διαδοχικῶν συλλογισμῶν διὰ τὰς ἀποδείξεις προτάσεων εἰς τὴν θεωρίαν τῶν συνόλων ἠμπορεῖ εὐκόλως νὰ γενικευθῇ διὰ τὴν περίπτωσιν ἑνὸς ἀπείρου συνόλου M:

Ἔστω M σύνολον ἄπειρον καὶ $U(M)$ τὸ σύνολον τῶν ὑποσυνόλων του. Λέγω ὅτι $|M| \leqq |U(M)|$, δηλαδὴ ὅτι: τὸ σύνολον $U(M)$ ἢ ἔχει τὸν αὐτὸν πληθάριθμον μὲ τὸν πληθάριθμον τοῦ M—ἀφοῦ τὸ σύνολον ὅλων τῶν ὑποσυνόλων μὲ ἕνα μόνον στοιχεῖον εἶναι προφανῶς ἰσοδύναμον πρὸς τὸ M—ἢ ἔχει μεγαλύτερον πληθάριθμον ἀπὸ τὸ M. Θὰ ἀποδείξωμεν ὅτι $|U(M)| > |M|$.

Ἔστω U_m ἕνα ὑποσύνολον τοῦ $U(M)$ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ M, δηλ. ὅτι: $U_m \subseteq U(M)$ καὶ $U_m \sim M$. Ὑποθέσωμεν ὅτι τὰ στοιχεῖα τοῦ M ἀντιστοιχοῦν κατὰ ἕνα ὡρισμένον τρόπον πρὸς τὰ στοιχεῖα τοῦ U_m καὶ ἄς καταμερίσωμεν τὰ στοιχεῖα τοῦ M εἰς τὰς ἑξῆς δύο κλάσεις:

Εἰς τὴν πρώτην κλάσιν (I) καταχωροῦμεν κάθε στοιχεῖον τοῦ M, τὸ ὁποῖον ἀνευρίσκεται καὶ εἰς τὸ ἀντίστοιχον τοῦ στοιχείου αὐτοῦ ὑποσύνολον τοῦ U_m· εἰς δὲ τὴν δευτέραν κλάσιν (II) καταχωροῦμεν κάθε στοιχεῖον τοῦ M, τὸ ὁποῖον δὲν ἀνευρίσκεται εἰς τὸ ἀντίστοιχον αὐτοῦ ὑποσύνολον τοῦ M. Τὸ σύνολον ὅλων τῶν στοιχείων τῆς κλάσεως (II) εἶναι στοιχεῖον τοῦ $U(M)$, τὸ ὁποῖον δὲν ἀνήκει εἰς τὸ U_m. (Ἡ ἀπόδειξις τούτου ἀκριβῶς ὁμοία, ὅπως ἡ προηγουμένη διὰ πεπερασμένα σύνολα). Τοῦτο σημαίνει ὅτι δὲν ὑπάρχει ὑποσύνολον τοῦ $U(M)$—ἀνεξαρτήτως τοῦ τρόπου συγκροτήσεώς του, ὥστε νὰ ἔχῃ αὐτὸ πληθάριθμον ἴσον πρὸς (M)—τὸ ὁποῖον νὰ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ $U(M)$.

Ἐκ τούτων συμπεραίνομεν:

Τὸ σύνολον ὅλων τῶν ὑποσυνόλων ἑνὸς συνόλου M ἔχει πληθάριθμον μεγαλύτερον τοῦ πληθαρίθμου τοῦ M.

Δοθέντος δηλ. ἑνὸς ὑπερπεπερασμένου πληθαρίθμου ἠμπορεῖ πάντοτε νὰ ὁρισθῇ ἕνας μεγαλύτερος αὐτοῦ πληθάριθμος.

7. Σύμφωνα μὲ αὐτὰ ποὺ ἐξεθέσαμεν ἀνωτέρω, θὰ πρέπει νὰ ἀναθεωρηθῇ ἡ συγκεχυμένη καὶ ἁπλοϊκὴ ἀντίληψις ἑνὸς «ἀπείρως μεγάλου», ἐντὸς τοῦ ὁποίου δὲν γίνεται καμμία διάκρισις ὅσον ἀφορᾷ εἰς τὴν «ἔκτασιν» τοῦ ἀπείρως τούτου μεγάλου. Ὑπάρχει ἀπειρία τελείως ὡρισμένων καὶ διαφορετικῶν ὑπερπερασμένων πληθαρίθμων, διὰ τῶν ὁποίων σαφέστατα καθορίζεται ἡ πολλαπλότης τοῦ ἀπείρου (*), ὅπως τοῦτο συμβαίνει διὰ πληθαρίθμους πεπερασμένων συνόλων.

Ἀσκήσεις

1. Ποῖος εἶναι ὁ πληθάριθμος τοῦ συνόλου ὅλων τῶν εὐθειῶν $y = c_1x + c_2$, ὅπου c_1, c_2 πραγματικοὶ ἀριθμοί;

2. Πρὸς ποῖον σύνολον ἀριθμῶν εἶναι ἰσοδύναμον τὸ σύνολον ὅλων τῶν περιφερειῶν τοῦ ἐπιπέδου $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$; Οἱ ἀριθμοὶ a, b, r εἶναι πραγματικοί.

3. Νὰ διατάξετε κατὰ μέγεθος τοὺς μέχρι τώρα ἐξετασθέντας πληθαρίθμους, πεπερασμένους καὶ ὑπερπεπερασμένους.

VIII. Τὸ θεώρημα ἰσοδυναμίας.

1. Πρὸς τὸν σκοπὸν τῆς διαπιστώσεως τῆς ἰσοδυναμίας δύο πεπερασμένων συνόλων M καὶ N, προσπαθοῦμεν νὰ ἀπεικονίσωμεν τὰ στοιχεῖα τοῦ ἑνὸς συνόλου ἐπὶ τοῦ ἄλλου κατ' ἀμφιμονοσήμαντον ἀντιστοιχίαν. Ἐὰν ἐπιτύχωμεν τοῦτο, λέγομεν ὅτι τὰ σύνολα M καὶ N εἶναι ἰσοδύναμα, ἔχουν τὴν αὐτὴν δυναμικότητα ἢ τὸν αὐτὸν πληθάριθμον:

$$M \sim N, \qquad |M| = |N|, \qquad \mathbf{m} = \mathbf{n}.$$

* Ὁ Cantor τὸ μέρος τοῦτο τῆς θεωρίας τῶν συνόλων ὠνόμαζε «θεωρίαν τῶν πολλαπλοτήτων» (Mannigfaltigkeitslehre).

Ἐὰν ὅμως, κατὰ τὴν σύγκρισιν δύο ἀπείρων τώρα συνόλων, εὕρωμεν ὅτι τὸ M εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς ἓν ὑποσύνολον N_1 τοῦ N καὶ ὅτι δὲν ὑπάρχει ὑποσύνολον M_1 τοῦ M, τὸ ὁποῖον νὰ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ N, λέγομεν ὅτι τὸ N ἔχει μεγαλυτέραν δυναμικότητα ἀπὸ τὸ M ἢ ὅτι τὸ N ἔχει μεγαλύτερον πληθάριθμον ἀπὸ τὸ M καὶ γράφομεν:

$$|M| < |N|, \quad \mathbf{m} < \mathbf{n}.$$

Κατὰ τὸν τρόπον αὐτὸν εὕρομεν προηγουμένως ὅτι

$$\mathbf{a} < \mathbf{c} < \mathbf{f} \text{ καὶ } |M| < |U(M)|.$$

Εἰς πολλὰς περιπτώσεις, ἀντὶ νὰ συγκρίνωμεν ἀπ' εὐθείας τὰ σύνολα M καὶ N, εἶναι ἁπλούστερον νὰ προσπαθήσωμεν νὰ θέσωμεν εἰς ἀντιστοιχίαν τὰ στοιχεῖα τοῦ ἑνὸς συνόλου πρὸς τὰ στοιχεῖα ἑνὸς ὑποσυνόλου τοῦ ἄλλου συνόλου. Ἐμφανίζονται τότε αἱ ἑξῆς τέσσαρες περιπτώσεις:

1. Τὸ M εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς ἕνα ὑποσύνολον N_1 τοῦ N καὶ τὸ N εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς ἕνα ὑποσύνολον M_1 τοῦ Μ. $\left\{\begin{array}{l} M \sim N_1 \\ N \sim M_1 \end{array}\right.$

2. Τὸ M εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς ἕνα ὑποσύνολον N_1 τοῦ N καὶ τὸ N πρὸς οὐδὲν ὑποσύνολον M_1 τοῦ M εἶναι ἰσοδύναμον $\left\{\begin{array}{l} M \sim N_1 \\ N \nsim M_1 \end{array}\right.$

3. Τὸ M πρὸς οὐδὲν ὑποσύνολον N_1 τοῦ N εἶναι ἰσοδύναμον καὶ τὸ N εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς ἕνα ὑποσύνολον M_1 τοῦ M. $\left\{\begin{array}{l} M \nsim N_1 \\ N \sim M_1 \end{array}\right.$

4. Τὸ M πρὸς οὐδὲν ὑποσύνολον N_1 τοῦ N εἶναι ἰσοδύναμον καὶ τὸ N πρὸς οὐδὲν ὑποσύνολον M_1 τοῦ M εἶναι ἰσοδύναμον $\left\{\begin{array}{l} M \nsim N_1 \\ N \nsim M_1 \end{array}\right.$

Ὅπως παρετηρήθη ἤδη, αἱ περιπτώσεις 2 καὶ 3 ὁρίζουν τὰς σχέσεις «μεγαλύτερον» καὶ «μικρότερον» μεταξὺ πληθαρίθμων:

$$\text{Διὰ τὴν περίπτωσιν 2, } |M| < |N| \text{ ἢ } \mathbf{m} < \mathbf{n}\cdot$$

$$\text{Διὰ τὴν περίπτωσιν 3, } |M| > |N| \text{ ἢ } \mathbf{m} > \mathbf{n}.$$

Ἡ περίπτωσις 4 ἐμφανίζει τὸ παράδοξον ὅτι οὔτε τὸ ἕνα οὔτε τὸ ἄλλο ἀπὸ τὰ δύο σύνολα εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς ἕνα ὑποσύνολον τοῦ ἄλλου: Οἱ πληθάριθμοι $\mathbf{m}$ καὶ $\mathbf{n}$ δὲν εἶναι συγκρίσιμοι. Μολονότι ὁ G. Cantor ὑπωπτεύθη τὸ ἀδύνατον τῆς περιπτώσεως αὐτῆς, ἡ ἀπόδειξις ἐδόθη ἀργότερον (μετὰ τὸν Cantor), μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ θεωρήματος τῆς «καλῆς διατάξεως». Ἐπειδὴ ὅμως τὸ θεώρημα τοῦτο ἐξέρχεται τῶν ὁρίων τοῦ βιβλίου αὐτοῦ, ἀπόδειξιν τοῦ ἀδυνάτου τῆς περιπτώσεως 4 δὲν θὰ παραθέσωμεν.

Τὸ μεγαλύτερον πάντως ἐνδιαφέρον δι' ἡμᾶς παρουσιάζει ἡ περίπτωσις 1, εἰς τὴν ὁποίαν $M \sim N_1$ καὶ $N \sim M_1$· τοῦτο δὲ διότι τὸ λεγόμενον *Θεώρημα τῆς ἰσοδυναμίας* ἀποδεικνύει ὅτι τὰ σύνολα M καὶ N εἶναι ἰσοδύναμα.

2. Τὸ Θεώρημα τῆς ἰσοδυναμίας:

Ἐὰν τὸ M εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς ἕνα ὑποσύνολον N_1 τοῦ N καὶ τὸ N εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς ἕνα ὑποσύνολον M_1 τοῦ M, τὰ σύνολα M καὶ N εἶναι ἰσοδύναμα.

Δεδομένα: $M \sim N_1 \subset N,\ N \sim M_1 \subset M$
Ἀποδεικτέον: $M \sim N$.

Ἀπόδειξις: Ἀρκεῖ νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι $M_1 \sim M$· διότι, ἀφοῦ ἡ σχέσις ἰσοδυναμίας εἶναι ἀνακλαστικὴ καὶ μεταβατική, $N \sim M_1$ καὶ $M_1 \sim M$ συνεπάγονται $N \sim M$.

Θεωροῦμεν κατὰ πρῶτον τὸ συμπληρωματικὸν σύνολον N_r τοῦ N_1 ὡς πρὸς τὸ N,

$$N = N_1 \cup N_r\,. \qquad \text{(I)}$$

Τὰ ὑποσύνολα N_1 καὶ N_r εἶναι διάζευκτα καὶ ὑπενθυμίζομεν,

$$N_1 \sim M. \qquad \text{(II)}$$

Θεωροῦμεν ἐπίσης μίαν διαίρεσιν τοῦ M_1, εἰς δύο διάζευκτα ὑποσύνολα M_2 καὶ M_r,

$$M_1 = M_2 \cup M_r\,, \qquad \text{(III)}$$

ἐκ τῶν ὁποίων τὸ M_2 νὰ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ N_1,

$$M_2 \sim N_1. \qquad \text{(IV)}$$

Ἐκ τῶν συνθηκῶν II καὶ IV λαμβάνομεν $M_2 \sim M$· ἐπειδὴ δὲ

$$M_2 \subset M_1 \subset M,$$

τὸ θεώρημα τῆς ἰσοδυναμίας ἀποδεικνύεται, ἐὰν προηγουμένως δείξωμεν ὅτι $M_2 \sim M$ καὶ $M_2 \subset M_1 \subset M$ συνεπάγονται $M_1 \sim M$.

Θὰ πρέπει λοιπὸν νὰ ἀποδείξωμεν τώρα τὸ ἑξῆς πρόδηλον θεώρημα: Ἐὰν ἕνα σύνολον M εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς ἕνα ἀπὸ τὰ ὑποσύνολά του M_2, θὰ εἶναι ἰσοδύναμον καὶ πρὸς τὸ καθένα ἀπὸ τὰ ὑποσύνολά του ποὺ περιλαμβάνονται μεταξὺ τῶν M καὶ M_2. (M_1 «περιλαμβάνεται» μεταξὺ M_2 καὶ M σημαίνει $M_2 \subset M_1 \subset M$). Ἡ ἀπόδειξις θὰ γίνῃ διὰ γνήσια ὑποσύνολα. Διότι, ἐὰν $M = M_1 = M_2$, ἡ πρότασις εἶναι φανερά.

3. Θὰ δείξωμεν λοιπὸν ὅτι, ἐὰν δοθοῦν αἱ σχέσεις (α) $M \sim M_2$ καὶ (β) $M_2 \subset M_1 \subset M$, συνέπεια αὐτῶν εἶναι $M_1 \sim M$. Διὰ τὴν ἁπλούστευσιν τῶν πραγμάτων θέτομεν $M_2 = A$, $M_1 - M_2 = B$ καὶ $M - M_1 = C$. Θὰ ἔχωμεν

$$M = A \cup B \cup C,$$
$$M_1 = A \cup B \qquad (A, B, C, \text{ σύνολα διάζευκτα})$$
$$M_2 = A$$

καὶ τὸ θεώρημά μας ἀνάγεται εἰς τό:

Δίδονται:

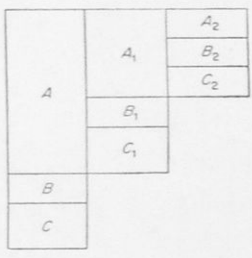
(α) $A \cup B \cup C \sim A$ καὶ (β) $A \subset (A \cup B) \subset (A \cup B \cup C)$.

Νὰ δειχθῇ ὅτι:

$$(\gamma) \ (A \cup B) \sim (A \cup B \cup C.)$$

Κατὰ τὴν ἰσοδυναμίαν (α) ὑφίσταται μία ἀπεικόνισις τοῦ $A \cup B \cup C$ ἐπὶ τοῦ A, εἰκονιζομένη σχηματικῶς εἰς τὸ σχῆμα 17· εἰς αὐτό, τὰ A_1, B_1, C_1 εἶναι ὑποσύνολα τοῦ A ποὺ ἀπεικονίζονται εἰς τὰ A,B,C. Ὁ νόμος αὐτὸς ἀντιστοιχίας μᾶς παρέχει ἐπίσης μίαν ἀπεικόνισιν τοῦ συνόλου $A_1 \cup B_1 \cup C_1$ ἐπὶ τοῦ A_1, ὅπου τὰ A_2, B_2, C_2 εἶναι ὑποσύνολα τοῦ A_1 ἀντίστοιχα τῶν A_1, B_1, C_1. Τὴν ἀντιστοίχισιν αὐτὴν θεωροῦμεν ἐπαναλαμβανομένην ἀπεριορίστως. Εὑρίσκομεν οὕτω:

$$A = A_1 \cup B_1 \cup C_1, \qquad A \sim A_1 \sim A_2 \sim A_3 \sim \ldots$$
$$A_1 = A_2 \cup B_2 \cup C_2, \qquad B \sim B_1 \sim B_2 \sim B_3 \sim \ldots$$
$$A_2 = A_3 \cup B_3 \cup C_3, \qquad C \sim C_1 \sim C_2 \sim C_3 \sim \ldots$$



Σχέδιον 17. Μία ἀπεικόνισις διὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματος τῆς ἰσοδυναμίας.

Εἰς κάθε περίπτωσιν τὰ A_i, B_i, C_i εἶναι σύνολα διάζευκτα. Ἡ τομὴ ὅλων τῶν συνόλων A_i εἶναι

$$D_A = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots,$$

ὅπου τὸ D_A ἠμπορεῖ νὰ εἶναι τὸ κενὸν σύνολον, ἀφοῦ ἡ ἀκολουθία A_1, A_2, $A_3 \ldots$ εἶναι ἀπέρατος. Ἀλλ' ἐκ τοῦ σχήματος ἔχομεν

$$A \cup B \cup C = D_A \cup B \cup C \cup B_1 \cup C_1 \cup B_2 \cup C_2 \cup \ldots,$$

καὶ $$A \cup B = D_A \cup B \cup C_1 \cup B_1 \cup C_2 \cup B_2 \cup C_3 \cup \ldots$$

καί, ὡς παρατηροῦμεν, εἰς τὰ δεξιὰ μέλη τῶν δύο αὐτῶν ἰσοτήτων ἔχομεν σύνολα διάζευκτα καὶ μάλιστα ἰσοδύναμα κατὰ στήλας ἕνα πρὸς ἕνα. Εἶναι ἑπομένως καὶ τὰ δεύτερα μέλη τῶν ἰσοτήτων σύνολα ἰσοδύναμα, δηλ.

$$A \cup B \cup C \sim A \cup B \text{ ἢ } M_1 \sim M$$

καὶ τὸ θεώρημα ἀπεδείχθη.

Ἡ ἀπόδειξις αὐτὴ ἐδόθη ὑπὸ τοῦ F. Bernstein, μαθητοῦ τοῦ Cantor καὶ καθηγητοῦ μέχρι τὸ 1933 εἰς Göttingen.

4. Ἐκ τῶν τεσσάρων διαφορετικῶν περιπτώσεων τῆς § 1, τὴν περίπτωσιν 4: $M_1 \subset M$, $N_1 \subset N$, $M \nsim N_1$, $N \nsim M_1$, ἐδέχθημεν ὡς ἀδύνατον.

Περίπτωσις 3:

$M_1 \subset M$, $N_1 \subset N$, $M \nsim N$, $N \sim M_1$ συνεπάγονται $\mathbf{m} > \mathbf{n}$.

Περίπτωσις 2:

$M_1 \subset M$, $N_1 \subset N$, $M \sim N_1$, $N \nsim M_1$ συνεπάγονται $\mathbf{m} < \mathbf{n}$.

Περίπτωσις 1:

$M_1 \subset M$, $N_1 \subset N$, $M \sim N_1$, $N \sim M_1$

συνεπάγονται, κατὰ τὸ ἀποδειχθὲν θεώρημα, $\mathbf{m} = \mathbf{n}$.

Ἀπὸ τὰς τρεῖς λοιπὸν περιπτώσεις $\mathbf{m} > \mathbf{n}$, $\mathbf{m} = \mathbf{n}$, καὶ $\mathbf{m} < \mathbf{n}$ μία καὶ μόνον μία ἠμπορεῖ νὰ ἀληθεύῃ διὰ μίαν δοθεῖσαν κατάστασιν. Ἐπὶ πλέον, ἐκ τῶν περιπτώσεων 1 καὶ 2 προκύπτει ὅτι, ἐὰν M εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς ἓν ὑποσύνολον N_1 τοῦ N, δηλαδὴ $M \sim N_1$, ἀναγκαίως $\mathbf{m} < \mathbf{n}$.

Ἀσκήσεις

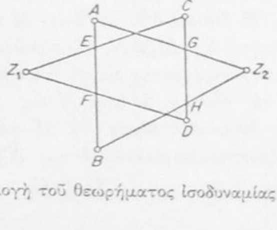
1. Αἱ ἀσυμβίβαστοι διὰ ἄπειρα σύνολα σχέσεις:

$$M_1 \subset M,\ N_1 \subset N,\ M_1 \nsim N,\ N_1 \nsim M$$

εἶναι συμβιβασταὶ διὰ πεπερασμένα σύνολα; Ὑπὸ ποίας συνθήκας συμβαίνει τοῦτο;

2. Μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ θεωρήματος τῆς ἰσοδυναμίας, δείξατε ὅτι τὰ σύνολα $U = \{1,3,5,\ldots\}$ καὶ $G = \{2,4,6,\ldots\}$ εἶναι ἰσοδύναμα.

3. Βοηθούμενοι ἀπὸ τὸ σχῆμα 18 καὶ τὸ θεώρημα τῆς ἰσοδυναμίας, δείξατε ὅτι τὸ σύνολον σημείων ἐπὶ τοῦ τμήματος CD εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ σύνολον σημείων ἐπὶ τοῦ AB.



Σχέδιον 18. Ἐφαρμογὴ τοῦ θεωρήματος ἰσοδυναμίας ἐπὶ σημειοσυνόλων.

IX. Ἀθροίσματα καὶ γινόμενα πληθαρίθμων.

Μολονότι ἐξεθέσαμεν εἰς τὰ προηγούμενα τὸν τρόπον παραγωγῆς τελείως καθωρισμένων ὑπερπεπερασμένων πληθαρίθμων καὶ ἀνεπτύξαμεν ἐπίσης μὲ ἀρκετὰς λεπτομερείας τὴν σχέσιν «μεγαλύτερος-μικρότερος» μεταξὺ αὐτῶν, παραμένει ἐν τούτοις ἄθικτον ἀκόμη τὸ πρόβλημα τῆς ἀνευρέσεως κανόνων πράξεων μεταξὺ τῶν πληθαρίθμων. Διὰ πεπερασμένους πληθαρίθμους, αἱ ρηταὶ μὲ αὐτοὺς πράξεις μᾶς εἶναι βεβαίως γνωσταὶ ἀπὸ τῶν πρώτων παιδικῶν μας χρόνων-ἀκόμη καὶ ἀπὸ τῆς ἐποχῆς, κατὰ τὴν ὁποίαν ἐγνωρίζομεν νὰ μετρῶμεν μόνον μέχρι τὸ τρία!

Μία προσεκτικωτέρα θεώρησις τῶν κανόνων αὐτῶν μᾶς παρέχει βαθυτέραν ἐπίγνωσιν τῶν νόμων ποὺ διέπουν τούτους.

Εἶναι αὐτοί:

(α) Οἱ νόμοι ἀντιμεταθέσεως:

$$a+b=b+a \qquad a\cdot b=b\cdot a\cdot$$

(β) Οἱ προσεταιριστικοὶ νόμοι:

$$a+(b+c)=(a+b)+c \qquad a(bc)=(ab)c\cdot$$

(γ) Ὁ ἐπιμεριστικὸς νόμος:

$$a(b+c)=ab+ac \qquad (a+b)c=a\cdot c+b\cdot c.$$

Θὰ προσπαθήσωμεν τώρα νὰ ἀνεύρωμεν κανόνας πράξεων διὰ τοὺς ὑπερπεπερασμένους πληθαρίθμους, τουλάχιστον διὰ τοὺς «τρεῖς πρώτους» ἀπὸ αὐτοὺς **a**, **c** καὶ **f**. Ἡ ὀνομασία «τρεῖς πρῶτοι» ποὺ προσεδώσαμεν εἰς τοὺς πληθαρίθμους τούτους ἀπηχεῖ μίαν ἁπλοϊκὴν ἀντίληψιν περὶ τοῦ ἀπείρου, δεδομένου ὅτι οὐδὲν βέβαιον γνωρίζομεν, περὶ τοῦ ἐὰν εἶναι ἢ δὲν εἶναι οἱ πληθάριθμοι αὐτοὶ «οἱ τρεῖς πρῶτοι ὑπερπεπερασμένοι πληθάριθμοι». (Τοῦτο ἄλλωστε εἶναι καὶ τὸ πρόβλημα τοῦ συνεχοῦς).

Εἰς τὰ ἑπόμενα, ὅταν θὰ ὁμιλοῦμεν περὶ πληθαρίθμων, θὰ ἐννοοῦμεν πάντοτε ὑπερπεπερασμένους πληθαρίθμους. Ἕνα σύνολον M, τὸ ὁποῖον ἔχει πληθάριθμον **m**, ἠμπορεῖ νὰ εἶναι ἕνα ὁποιοδήποτε σύνολον ἰσοδύναμον πρὸς ἕνα σύνολον, τὸ ὁποῖον ἔχει πληθάριθμον **m**.

2. Ἡ πρόσθεσις δύο πληθαρίθμων ὁρίζεται μὲ τὴν βοήθειαν τῆς ἑνώσεως δύο συνόλων. Ἡ *ἕνωσις* δύο συνόλων M καὶ N μὲ πληθαρίθμους **m** καὶ **n** εἶναι τὸ σύνολον $S=M\cup N$, τὸ σύνολον δηλ. ὅλων τῶν στοιχείων, τὰ ὁποῖα ἀνήκουν τουλάχιστον εἰς τὸ ἕνα ἀπὸ τὰ σύνολα M καὶ N. Φανταζόμεθα τώρα τὰ σύνολα M καὶ N ὡς διάζευκτα (ἢ—πρᾶγμα ποὺ εἶναι τὸ ἴδιον— ἀντικαθιστῶμεν τὰ M καὶ N διὰ ἰσοδυνάμων πρὸς αὐτά, ἀλλὰ διαζεύκτων συνόλων $\bar{M}$ καὶ $\bar{N}$) καὶ ὁρίζομεν:

$$\mathbf{m}+\mathbf{n}=|S|=|\bar{M}\cup\bar{N}|.$$

Εἶναι φανερὸν ὅτι ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ αὐτοῦ πηγάζουν οἱ ἑξῆς νόμοι:

$$\mathbf{m}+\mathbf{n}=\mathbf{n}+\mathbf{m} \qquad (\mathbf{m}+\mathbf{n})+\mathbf{p}=\mathbf{m}+(\mathbf{n}+\mathbf{p}),$$

καὶ μὲ χρησιμοποίησιν τῶν θεωρημάτων ποὺ ἀπεδείξαμεν προηγουμένως, εὑρίσκομεν τὰς σχέσεις:

$$\mathbf{a}+n=\mathbf{a}$$
$$\mathbf{a}+\mathbf{a}=\mathbf{a}$$
$$\mathbf{a}+\mathbf{a}+\mathbf{a}=\mathbf{a}.$$

Παράδειγμα:

$|\{1,3,5,...\}|+|\{2,4,6,...\}|=|\{1,2,3,4,5,6,...\}|$

Ἐπίσης:

$$\mathbf{c}+n=\mathbf{c}$$
$$\mathbf{c}+\mathbf{a}=\mathbf{c}$$
$$\mathbf{c}+\mathbf{c}=\mathbf{c}$$
$$\mathbf{c}+n+\mathbf{a}+\mathbf{c}=\mathbf{c}+\mathbf{a}+\mathbf{c}=\mathbf{c}+\mathbf{c}=\mathbf{c}$$

Παράδειγμα:

|Σημειοσύνολον: $0<x<1$ | + | Σημειοσύνολον: $1\leqq x<2$| =
| Σημειοσύνολον: $0<x<2$ |.

Ὅπως βλέπομεν, οἱ κανόνες διὰ τὴν πρόσθεσιν ὑπερπεπερασμένων πληθαρίθμων εἶναι τελείως διαφορετικοὶ ἀπὸ ἐκείνους ποὺ ἰσχύουν διὰ πεπερασμένους πληθαρίθμους. Π.χ. $\mathbf{a}+\mathbf{a}=\mathbf{a}$, ἐνῶ, διὰ πεπερασμένους ἀριθμούς, $a+a\neq a$, ἐὰν $a\neq 0$. Χωρὶς ἀπόδειξιν, συμφωνοῦμεν ὅτι, διὰ κάθε ὑπερπεπερασμένον πληθάριθμον $\mathbf{m}$, ἰσχύει ὁ ἑξῆς κανὼν

$$\mathbf{m}+\mathbf{a}+n=\mathbf{m} \text{ καὶ } \mathbf{m}+\mathbf{m}=\mathbf{m}$$

3. Δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ὁρίσωμεν ἀφαίρεσιν μεταξὺ δύο ὑπερπεπερασμένων πληθαρίθμων, ἐφ' ὅσον—καὶ καθ' ὅσον εἶναι τοῦτο δυνατὸν—δὲν ὁδηγεῖ αὐτὴ εἰς μοναδικὸν ἀποτέλεσμα. Φαίνεται τοῦτο ἐκ τοῦ ἀκολούθου παραδείγματος: Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι $\mathbf{m}-\mathbf{n}=|M-N|$, ὅπου τὰ M καὶ N δὲν εἶναι σύνολα διάζευκτα, ἀφοῦ $N\subseteq M$.

Ἔστω:	*Τότε:*	
$N=\{1,2,3,...\}$	$N-N=\{\}$	ἢ $\mathbf{a}-\mathbf{a}=0$
$N_1=\{2,3,4,...\}$	$N-N_1=\{1\}$	ἢ $\mathbf{a}-\mathbf{a}=1$
$N_2=\{3,4,5,...\}$	$N-N_2=\{1,2\}$	ἢ $\mathbf{a}-\mathbf{a}=2$
$N_n=\{n+1,n+2,...\}$	$N-N_n=\{1,2,3,...,n\}$	ἢ $\mathbf{a}-\mathbf{a}=n$
$G=\{2,4,6,...\}$	$N-G=U$	ἢ $\mathbf{a}-\mathbf{a}=\mathbf{a}$
$U=\{1,3,5,...\}$	. . . .	. . . .

4. Ὁ πολλαπλασιασμὸς δύο πληθαρίθμων ὁρίζεται ὡς ἑξῆς: Θεωροῦμεν δύο πληθαρίθμους $\mathbf{m}$ καὶ $\mathbf{n}$ ὡς παριστωμένους διὰ δύο διαζεύκτων συνόλων M καὶ N. Σχηματίζομεν τὸ σύνολον P μὲ στοιχεῖα διατεταγμένα ζεύγη (m, n) ἐκ στοιχείων τῶν δύο συνόλων, λαμβάνοντες *κάθε* στοιχεῖον m τοῦ συνόλου M καὶ συνδυάζοντες αὐτὸ μὲ *κάθε* στοιχεῖον n τοῦ συνόλου N. Τὸ σύνολον P συμβολίζομεν $M \times N$ καὶ τὸ ὀνομάζομεν *ἐκ γινομένου σύνολον* ἢ ἁπλῶς *γινόμενον* (ἢ καρτεσιανὸν γινόμενον) τῶν συνόλων M καὶ N.

Γινόμενον τῶν πληθαρίθμων $\mathbf{m}$ *καὶ* $\mathbf{n}$ *εἶναι ὁ πληθάριθμος τοῦ γινομένου* $M \times N$: $\mathbf{m} \cdot \mathbf{n} = |P| = |M \times N|$.

Ὁ ὁρισμὸς αὐτὸς δὲν εἶναι τίποτε ἄλλο ἀπὸ μίαν ἐπέκτασιν τοῦ κοινοῦ ὁρισμοῦ τοῦ γινομένου δύο πεπερασμένων πληθαρίθμων: $3 \cdot 4$ σημαίνει τὸ ἄθροισμα τριῶν προσθέτων ἴσων πρὸς 4 ἢ $3 \cdot 4 = 4 + 4 + 4 = 12$. Τοῦτο ἀκριβῶς εἶναι τὸ περιεχόμενον τοῦ νέου ὁρισμοῦ μας $\mathbf{m} \cdot \mathbf{n} = |P|$ καὶ καθιστῶμεν φανερὸν αὐτὸ μὲ ἕνα παράδειγμα.

Παράδειγμα:

Ἔστω $M = \{a,b,c\}$, $N = \{1,2,3,4\}$, $|M| = 3$, $|N| = 4$.

$$P = M \times N = \{(a,1), (a,2)\ (a,3), (a,4), (b,1), (b,2), (b,3), (b,4), (c,1), (c,2), (c,3), (c,4)\}.$$

Ἄρα $\qquad |P| = 12.$

5. Διὰ γινόμενον παραγόντων περισσοτέρων ἀπὸ δύο, τὸ ἐκ γινομένου σύνολον κατασκευάζεται μὲ ὅμοιον τρόπον: $P = A \times B \times C$ εἶναι τὸ σύνολον ὅλων τῶν διατεταγμένων τριάδων (a,b,c), μὲ a,b,c λαμβανόμενα καθ' ὅλους τοὺς δυνατοὺς τρόπους ἐκ τῶν στοιχείων τῶν A,B,C ἀντιστοίχως.

Παράδειγμα:

Ἔστω $A = \{1,2,3\}$, $B = \{g,h\}$, $C = \{a,\beta\}$.

$$P = \{(1,g,a), (1,g,\beta), (1,h,a), (1,h,\beta)\ (2,g,a), (2,g,\beta), \ldots, (3,h,\beta)\}$$

καὶ $\qquad |A| \cdot |B| \cdot |C| = |P| = 3 \cdot 2 \cdot 2 = 12.$

Φανερὸν εἶναι ὅτι διὰ γινόμενα ἰσχύουν οἱ νόμοι ἀντιμεταθέσεως, προσεταιριστικότητος καὶ ἐπιμερισμοῦ:

$$\mathbf{m} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{m} \quad (\text{ἐπειδὴ } M \times N = N \times M)$$

$$\mathbf{m} \cdot (\mathbf{n} \cdot \mathbf{p}) = (\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{p}$$

$$(\mathbf{m} + \mathbf{n}) \cdot \mathbf{p} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{p} + \mathbf{n} \cdot \mathbf{p}$$

Ἐπιπροσθέτως, ἀπαιτοῦμεν διὰ τὴν πρᾶξιν γινόμενον νὰ δίδῃ αὐτὴ τὸ κενὸν σύνολον (μὲ πληθάριθμον **0**), ὅταν τὸ ἕνα ἐκ τῶν συνόλων M ἢ N εἶναι τὸ κενὸν σύμβολον:

$$M \text{ ἢ } N = \{0\} \Longrightarrow M \times N = \{\ \} \text{ καὶ } \mathbf{m} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}.$$

6. Διὰ τοὺς «πρώτους» μας ὑπερπεπερασμένους πληθαρίθμους ἰσχύουν ἰδιαιτέρως καὶ αἱ ἑξῆς σχέσεις:

$$n \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a} \quad (\text{διότι } \mathbf{a} + \mathbf{a} + \ldots + \mathbf{a} = \mathbf{a}) \qquad \text{(I)}$$

καὶ

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}. \qquad \text{(II)}$$

Διὰ τὴν ἀπόδειξιν τῆς δευτέρας σχέσεως θεωροῦμεν τὸ σύνολον τῶν κόμβων ἐπὶ μιᾶς εὐθείας γραμμῆς καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ἢ τὸ ἀριθμήσιμον σύνολον τῶν διατεταγμένων ζευγῶν ἀκεραίων:

$$\begin{array}{l} (1,1),\ (1,2),\ (1,3)\ \ldots \\ (2,1),\ (2,2),\ (2,3)\ \ldots \\ (3,1),\ (3,2),\ (3,3)\ \ldots \\ \quad\cdot \qquad\quad \cdot \qquad\quad \cdot \end{array}$$

Εἶναι: $n \cdot \mathbf{c} = \mathbf{c}$ (διότι $\mathbf{c} + \mathbf{c} + \mathbf{c} + \ldots + \mathbf{c} = \mathbf{c}$) (III)

καὶ

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{c} \qquad \text{(IV)}$$

Διότι τὸ σημειοσύνολον $0 < x < 1$ ἔχει πληθάριθμον **c** καὶ τὸν αὐτὸν πληθάριθμον ἔχει τὸ σημειοσύνολον $0 < y < 1$. Διὰ νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι τὸ ἐκ γινομένου σύνολον μὲ στοιχεῖα (x,y) ἔχει πληθάριθμον ἐπίσης **c**, θεωροῦμεν τὰ στοιχεῖα αὐτὰ ὡς συντεταγμένας σημείων, τὰ ὁποῖα εἶναι ἐσωτερικὰ προφανῶς ἑνὸς τετραγώνου μὲ πλευρὰν 1. Τὰ σημεῖα ὅμως αὐτὰ εἶναι, ὡς εἴδομεν (Κεφ. IV, § 7), στοιχεῖα συνόλου ἰσοδυνάμου πρὸς τὸ continuum.

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{c}$$

Πράγματι ἔχομεν $n < \mathbf{a} < \mathbf{c}$ καὶ $n \cdot \mathbf{c} \leqq \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \leqq \mathbf{c} \cdot \mathbf{c}$ Δηλαδὴ

$$\mathbf{c} \leqq \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \leqq \mathbf{c}, \text{ ἄρα } \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{c}$$

Ὁ πληθάριθμος ἀφ' ἑτέρου τοῦ γινομένου P δύο συνόλων, στοιχεῖα τοῦ ὁποίου εἶναι τὰ ζεύγη (m,n), δὲν εἶναι τίποτε ἄλλο ἀπὸ τὸν ἄθροισμα **m** προσθετέων ἴσων πρὸς **n**. Διότι, εἰς κάθε ἐκλεγὲν στοιχεῖον m_1 τοῦ M ἠμποροῦμεν νὰ ἀντιστοιχίσωμεν ἕνα ὑποσύνολον P_1 τοῦ P μὲ στοιχεῖα (m_1,n), τὸ δὲ σύνολον P_1 εἶναι φυσικὰ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ N. Ἑπομένως

$$\mathbf{m} \cdot \mathbf{n} = \underbrace{\mathbf{n} + \mathbf{n} + \ldots}_{\mathbf{m} \text{ φορὰς}}$$

Διὰ τὴν περίπτωσιν λοιπὸν ἀπείρων συνόλων ἠμποροῦμεν νὰ θεωροῦμεν τὸ $\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}$ ὡς μίαν ἀπεριορίστως ἐπαναλαμβανομένην πρόσθεσιν ἴσων προσθετέων.

7. Ὅπως ἡ ἀφαίρεσις, οὕτω καὶ ἡ διαίρεσις ὑπερπερασμένων πληθαρίθμων ὁδηγεῖ εἰς ἀποτελέσματα μὴ μονοσήμαντα. Φαίνεται τοῦτο ἀπὸ τὰ ἀκολουθοῦντα παραδείγματα:

Ἀπὸ τὴν ἰσότητα $n.\mathbf{c}. = \mathbf{c}$, θὰ προέκυπτε

$$\mathbf{c} \div \mathbf{c} = n$$

ἀλλὰ καὶ ὁμοίως ἀπὸ τὰς $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{c}$ καὶ $\mathbf{c} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{c}$ αἱ

$$\mathbf{c} \div \mathbf{c} = \mathbf{a} \text{ καὶ } \mathbf{c} \div \mathbf{c} = \mathbf{c}$$

τὸ ἄτοπον δηλ. $n = \mathbf{a} = \mathbf{c}$.

Ἡ ἐπέκτασις λοιπὸν λογιστικῶν πράξεων πέραν τῆς περιοχῆς τῶν πεπερασμένων ἀριθμῶν εἶναι δυνατὴ μόνον διὰ τὰς «ἀπ' εὐθείας» πράξεις (πρόσθεσιν καὶ πολλαπλασιασμὸν) καὶ ὄχι διὰ τὰς ἀντιστρόφους των.

Ἀσκήσεις

1. Εἶναι πάντοτε ἀληθὲς ὅτι, ἐὰν $\mathbf{m} < \mathbf{n}$ καὶ $\mathbf{n} \leqq \mathbf{p}$, θὰ εἶναι $\mathbf{m} < \mathbf{p}$ καὶ $\mathbf{m} \cdot \mathbf{q} \leqq \mathbf{n} \cdot \mathbf{q} \leqq \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}$;
2. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ πληθάριθμος $\mathbf{a}! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots$.
3. Διὰ σύνολα διάζευκτα M, N, ἰσχύει πάντοτε ἡ σχέσις $|M| \cdot |N| = |M \times N|$;

X. Δυνάμεις πληθαρίθμων.

Ὡς τελευταίαν πρᾶξιν ὁρίζομεν τὰς *δυνάμεις* πληθαρίθμων. Διὰ πεπερασμένους πληθαρίθμους, τὴν δύναμιν m^n ὁρίζομεν ὡς ἐπαναμβανόμενον πολλαπλασιασμόν, ὡς γινόμενον δηλ. n παραγόντων ἴσων πρὸς m. Κατὰ τὸν ἴδιον ἀκριβῶς τρόπον ὁρίζομεν δυνάμεις μὲ βάσεις ὑπερπεπερασμένους πληθαρίθμους:

$$n \cdot \mathbf{a}^3 \cdot \mathbf{c}^2 = (n) \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{c} \cdot \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{c}.$$

Τί συμβαίνει ὅμως ὅταν ὁ ἐκθέτης εἶναι ὑπερπερασμένος;

Εἰς τὸ σύμβολον $\mathbf{m}^{\mathbf{n}}$ θὰ προσδώσωμεν τὴν ἑξῆς σημασίαν: εἶναι τοῦτο τὸ γινόμενον $\mathbf{n}$ παραγόντων ἴσων πρὸς $\mathbf{m}$. Δηλαδή : σχηματίζομεν τὸ γινόμενον $P_N(M) = M_1 \times M_2 \times M_3 \times \ldots$, ὅπου ὅλα τὰ σύνολα M_i ἔχουν τὸν αὐτὸν πληθάριθμον $\mathbf{m}$, τὸ δὲ σύνολον $N = \{M_1, M_2, M_3, \ldots\}$ ἔχει πληθάριθμον $\mathbf{n}$.

Τὰ στοιχεῖα τοῦ γινομένου αὐτοῦ ἀποτελοῦνται ἀπὸ τὰς $\mathbf{n}$-*άδας* $(m_1, m_2, m_3, \ldots)$, εἰς τὰς ὁποίας τὸ m_1 ταυτίζεται διαδοχικῶς πρὸς ὅλα τὰ στοιχεῖα τοῦ M_1, τὸ m_2 πρὸς ὅλα τὰ στοιχεῖα τοῦ M_2, κ.ο.κ. Θὰ ἔχωμεν τότε

$$\mathbf{m}^{\mathbf{n}} = |P_N(M)|.$$

Παραδείγματα:

Τὴν κατασκευὴν τοῦ συνόλου $P_N(M)$ θὰ ἐπιδείξωμεν διὰ δύο παραδειγμάτων ἀναφερομένων εἰς πεπερασμένα σύνολα:

(α) $2^3 = 8$. Ἔστω $N = \{1,2,3,\}$, $M = \{u,v,\}$, $|N| = 3$, $|M| = 2$

$$M_1 = \{u',v'\},\ M_2 = \{u'',v'',\}\ M_3 = \{u''', v'''\},\ |M_i| = 2$$

$$P_N(M) = \{ (u', u'', u'''), (u', u'', v'''), (u', v'', u'''), (u', v'', v'''),$$
$$(v', u'', u'''), (v', u'', v'''), (v', v'', u'''), (v', v'', v''')$$
$$|P_N N(M)| = 8.$$

(β) $3^2 = 9$. Ἔστω $N = \{1,2\}$, $M = \{p,q,r\}$, $|N| = 2$, $|M| = 3$.

$$M_1 = \{p', q', r'\},\ M_2 = \{p'', q'', r''\},\ |M_i| = 3.$$

$$P_N(M) = \{ (p', p''), (p', q''), (p' r''), (q', p''), (q', q'')\ (q', r'')$$
$$(r', p''), (r', q''), (r', r'')\}$$
$$|P_N(M)| = 9.$$

Ὁ ὁρισμὸς τῶν δυνάμεων πεπερασμένων πληθαρίθμων περιλαμβάνεται, ὅπως βλέπομεν, εἰς τὸν δοθέντα γενικὸν ὁρισμόν.

1. Διὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς δυνάμεως ὁ Cantor εἰσήγαγε τὴν βαθεῖαν ἀλλὰ καὶ γόνιμον ἔννοιαν τοῦ *ἐπικαλύπτοντος συνόλου* (Belegungsmenge). Κατὰ τὴν ἀντίληψιν αὐτὴν ἡ δύναμις $\mathbf{m}^{\mathbf{n}}$ ὁρίζεται ὡς ἑξῆς: Εἰς τὸ σύνολον N ποὺ παριστᾶ τὸν πληθάριθμον $\mathbf{n}$, κάθε στοιχεῖον του «καλύπτεται» δι' ἑνὸς αὐθαιρέτως ἐκλεγομένου συνόλου M μὲ πληθάριθμον $\mathbf{m}$. Εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα (a), τὸ στοιχεῖον 1 τοῦ N ἐκαλύφθη ὑπὸ τοῦ συνόλου $M_1 = \{u', v'\}$, τὸ στοιχεῖον 2 τοῦ N ὑπὸ τοῦ συνόλου $M_2 = \{u'', v''\}$ καὶ τὸ στοιχεῖον 3 ὑπὸ τοῦ $M_3 = \{u''', v'''\}$. Τὸ σύνολον ὅλων τῶν δυνατῶν συνόλων ποὺ παράγονται μὲ τὴν κάλυψιν αὐτὴν τῶν στοιχείων τοῦ N διὰ συνόλων M_i ὀνομάζεται τὸ *ἐπικαλύπτον σύνολον* καὶ συμβολίζεται N/M. Τὸ ἐπικαλύπτον σύνολον ἔχει πληθάριθμον $\mathbf{m}^{\mathbf{n}}$, δηλ.

$$\mathbf{m}^{\mathbf{n}} = |N/M|.$$

Παράδειγμα:

Ἕνα ἐπικαλύπτον σύνολον N/M τοῦ συνόλου $N = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ διὰ τοῦ συνόλου $M = \{\mathrm{I}, \mathrm{II}, 0\}$ παριστᾶ τὸ σύνολον 10 ὁμάδων εἰς ἕνα ποδοσφαιρικὸν λαχεῖον, (θεωρουμένων ὡς ἀντιπάλων 10 ἄλλων ὁμάδων), ἕκαστον στοιχεῖον τοῦ ὁποίου (ἕκαστος ἀγὼν αὐτοῦ μετὰ μιᾶς ἐκ τῶν ἀντιπάλων ὁμάδων) καλύπτεται διὰ τῶν στοιχείων τοῦ M (νίκη, ἧττα, ἰσόπαλος ἀγών). Προφανὲς εἶναι ὅτι

$$|N/M| = 3^{10} = 59049.*$$

3. Ἡ ἔννοια τοῦ *ἐπικαλύπτοντος συνόλου* συνδέεται στενῶς πρὸς τὴν ἔννοιαν τῆς συναρτήσεως. Ὅταν ἡ ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ x διατρέχῃ ὅλας τὰς τιμὰς τοῦ συνόλου X, ἡ ἐξηρτημένη μεταβλητὴ y λαμβάνει ὅλας τὰς τιμὰς τοῦ συνόλου Y. Εἶναι δηλ. $y = f(x)$ μία συνάρτησις τοῦ X εἰς τὸ Y. Ἡ συνάρτησις παριστᾷ μίαν ὡρισμένην κάλυψιν τοῦ X διὰ τοῦ Y.

4. Οἱ στοιχειώδεις κανόνες ἐκθετῶν (πρόσθεσις καὶ πολλαπλασιασμὸς) ἰσχύουν ἐπίσης δι' ἐκθέτας ὑπερπεπερασμένους πληθαρίθμους:

$$\mathbf{m}^{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{m}^{\mathbf{n}} = \mathbf{m}^{\mathbf{p}+\mathbf{n}}, \ (\mathbf{m}^{\mathbf{n}})^{\mathbf{p}} = \mathbf{m}^{\mathbf{n}\cdot\mathbf{p}}, \ \mathbf{m}^{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{p}^{\mathbf{n}} = (\mathbf{m}\cdot\mathbf{p})^{\mathbf{n}}$$

Ὁρίζομεν τέλος $\mathbf{m}^0 = 1$.

5. Ὡς *δυναμοσύνολον* (Potenzmenge) ἑνὸς συνόλου N ὁρίζομεν τὸ σύνολον ὅλων τῶν ὑποσυνόλων τοῦ N καὶ τὸ συμβολίζομεν $U(N)$. Ἀπεδείξαμεν ἤδη ὅτι $|U(N)| > |N|$. Τὸ δυναμοσύνολον ἑνὸς συνόλου N ἠμποροῦμεν νὰ θεωρήσωμεν ὡς τὸ ἐπικαλύπτον σύνολον τοῦ N διὰ τοῦ συνόλου $\{+, -\}$. Πράγματι, *ὁρίζομεν ἕνα ὑποσύνολον τοῦ N, ἐὰν ἐκλέξωμεν ὡρισμένα στοιχεῖα τοῦ N (τὰ καλυπτόμενα διὰ $+$) καὶ δὲν ἐκλέξωμεν τὰ ἄλλα (τὰ καλυπτόμενα διὰ $-$)*. Κάθε ὑποσύνολον λοιπὸν τοῦ N ἠμποροῦμεν νὰ θεωρήσωμεν ὡς μίαν ὡρισμένην ἐπικάλυψιν τοῦ συνόλου N διὰ τοῦ συνόλου $\{+, -\}$. Τὸ κενὸν σύνολον ἀντιστοιχεῖ εἰς ἐπικάλυψιν ὅλων τῶν στοιχείων τοῦ N διὰ τοῦ $-$, τὸ δὲ καταχρηστικὸν ὑποσύνολον ($N = N$) τοῦ N εἰς ἐπικάλυψιν τῶν στοιχείων του διὰ τοῦ $+$.

Ἐπειδὴ τὸ σύνολον $\{+, -\}$ ἔχει πληθάριθμον 2, ὁ πληθάριθμος τοῦ δυναμοσυνόλου $U|N|$ εἶναι $|U(N)| = 2^{\mathbf{n}}$ καί, ὅπως εἴδομεν, $2^{\mathbf{n}} > \mathbf{n}$. Ἐκ τούτου προκύπτει ὅτι ὑπάρχει πάντοτε ἕνας μεγαλύτερος πληθάριθμος ἑνὸς δεδομένου ὑπερπεπερασμένου πληθαρίθμου: $\mathbf{m} = 2^{\mathbf{n}}$ συνεπάγεται $\mathbf{m} > \mathbf{n}$ καὶ $\mathbf{p} = 2^{\mathbf{m}}$ συνεπάγεται $\mathbf{p} > \mathbf{m} > \mathbf{n}$, κλπ. Εἰς τὸ ἐρώτημα: εἶναι ὁ $2^{\mathbf{n}}$ ὁ *ἀμέσως* μεγαλύτερος πληθάριθμος τοῦ $\mathbf{n}$ ἢ ὑπάρχουν μήπως πληριθμοι $\mathbf{k}$, διὰ τοὺς ὁποίους $\mathbf{n} < \mathbf{k} < 2^{\mathbf{n}}$; ἀπάντησις μέχρι σήμερον δὲν ἔχει δοθῆ. Διὰ $\mathbf{n} = \mathbf{a}$ τὸ ἐρώτημα αὐτὸ ἀνάγεται εἰς τὸ πρόβλημα τοῦ συνεχοῦς, ἀφοῦ, ὡς θὰ ἴδωμεν μετ' ὀλίγον, συμβαίνει $2^{\mathbf{a}} = \mathbf{c}$.

6. Διὰ τὸν προσδιορισμὸν τοῦ δυναμοσυνόλου ἑνὸς ἀριθμησίμου συνόλου N μὲ πληθάριθμον $|N| = \mathbf{a}$, θεωροῦμεν πρῶτον τὴν δύναμιν $10^{\mathbf{a}}$ (ἀντίστοιχον τοῦ ἀριθμητικοῦ μας συστήματος καὶ τοῦ δεκαδικοῦ του

*Διὰ πεπερασμένα σύνολα, ὁ πληθάριθμος τοῦ ἐπικαλύπτοντος συνόλου N/M εἶναι τὸ πλῆθος τῶν ἐπαναληπτικῶν μεταθέσεων m πραγμάτων ἀνὰ n. Τὸ πλῆθος τοῦτο εἶναι $\underbrace{m.m.m....}_{n \text{ φοράς}} = m^n$.

συμβολισμοῦ). Πρὸς παράστασιν τοῦ **a** ἐκλέγομεν τὸ σύνολον $N=\{a_1,a_2,a_3\ldots\}$ καὶ ἑρμηνεύομεν τὰ στοιχεῖα a_n ὡς ψηφία τοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ $0,a_1,a_2,a_3,\ldots$· ἀκολούθως, κάθε στοιχεῖον a_n τοῦ N καλύπτομεν δι' ἑνὸς συνόλου $M_n=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,0\}$ μὲ πληθάριθμον $|M^n|=10$ καὶ τὸ κατὰ τὸν τρόπον αὐτὸν παραγόμενον ἐπικαλύπτον σύνολον $P_N(M)$ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ σύνολον ὅλων τῶν μεταξὺ 0 καὶ 1 δεκαδικῶν ἀριθμῶν, τὸ ὁποῖον γνωρίζομεν ὅτι ἔχει πληθάριθμον **c**. Εἶναι ἑπομένως $10^{\mathbf{a}}=\mathbf{c}$.

Οἱ αὐτοὶ συλλογισμοὶ ἐφαρμόζονται καὶ διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ $n^{\mathbf{a}}$, ὅπου n τυχὼν φυσικὸς μεγαλύτερος τῆς μονάδος. Θὰ ἔχωμεν καὶ πάλιν τὴν ἰσότητα $n^{\mathbf{a}}=\mathbf{c}$. Εἰδικῶς, διὰ $n=2$, $2^{\mathbf{a}}=\mathbf{c}$. Ὥστε:

Ὁ πληθάριθμος τοῦ συνόλου ὅλων τῶν ὑποσυνόλων ἑνὸς ἀριθμησίμου συνόλου εἶναι ἴσος πρὸς **c**.

7. Κατὰ τοὺς κανόνας πράξεων, ποὺ μέχρι τώρα ἀπεδείξαμεν ἰσχύοντας, συμπεραίνομεν ὅτι

$\mathbf{c}^n=\mathbf{c}$. Διότι $\mathbf{c}^n=(10^{\mathbf{a}})^n=10^{\mathbf{a}.n}=10^{\mathbf{a}}=\mathbf{c}$.

$\mathbf{c}^{\mathbf{a}}=\mathbf{c}$. Διότι $\mathbf{c}^{\mathbf{a}}=(10^{\mathbf{a}})^{\mathbf{a}}=(10)^{\mathbf{a}.\mathbf{a}}=10^{\mathbf{a}}=\mathbf{c}$.

$\mathbf{a}^{\mathbf{a}}=\mathbf{c}$. Διότι $10^{\mathbf{a}}\leq\mathbf{a}^{\mathbf{a}}\leq\mathbf{c}^{\mathbf{a}}$ ἢ $\mathbf{c}\leq\mathbf{a}^{\mathbf{a}}\leq\mathbf{c}$ ἄρα $\mathbf{a}^{\mathbf{a}}=\mathbf{c}$.

Ὁ τύπος $\mathbf{c}^n=\mathbf{c}$ ἐκφράζει τὴν ἰδιότητα, τὴν ὁποίαν καὶ προηγουμένως εὕρομεν, ὅτι τὸ σύνολον ὅλων τῶν σημείων ἐπὶ μιᾶς εὐθείας ἢ ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου ἢ εἰς τὸν χῶρον τῶν τριῶν ἢ καὶ n διαστάσεων ἔχουν πληθάριθμον **c**. Ὅλα τὰ σύνολα αὐτὰ ἠμποροῦν νὰ τεθοῦν εἰς ἀμφιμονοσήμαντον ἀντιστοιχίαν πρὸς τὸ σύνολον τῶν σημείων ἑνὸς αὐθαιρέτως ἐκλεγομένου εὐθυγράμμου τμήματος.

Εἶναι $n^{\mathbf{c}}=\mathbf{f}$. Διότι $n^{\mathbf{c}}=n^{\mathbf{a}.\mathbf{c}}=(n^{\mathbf{a}})^{\mathbf{c}}=\mathbf{c}^{\mathbf{c}}=\mathbf{f}$.

Τὴν ἰδιότητα αὐτὴν εὑρίσκομεν ἐκ τῆς παρατηρήσεως ὅτι τὸ σύνολον ὅλων τῶν πραγματικῶν συναρτήσεων, αἱ ὁποῖαι ὁρίζονται εἰς τὸ διάστημα $0<x<1$, εἶναι τὸ ἐπικαλύπτον σύνολον τοῦ συνεχοῦς K, $(0<x<1)$, ἐπὶ τοῦ συνόλου ὅλων τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν R_{r_1} $(0<r<1)$: $F=K/R_{r_1}$. Ὁ πληθάριθμος αὐτοῦ εἶναι $|K/R_{r_1}|=\mathbf{c}^{\mathbf{c}}=\mathbf{f}$.

Ἑπομένως

$\mathbf{c}^{\mathbf{c}}=\mathbf{f}$,

$\mathbf{a}^{\mathbf{c}}=\mathbf{f}$. Διότι $\mathbf{a}^{\mathbf{c}}=\mathbf{a}^{\mathbf{a}.\mathbf{c}}=(\mathbf{a}^{\mathbf{a}})^{\mathbf{c}}=\mathbf{c}^{\mathbf{c}}=\mathbf{f}$.

$\mathbf{f}^n=\mathbf{f}$. Διότι $\mathbf{f}^n=(\mathbf{c}^{\mathbf{c}})^n=\mathbf{c}^{\mathbf{c}.n}=\mathbf{c}^{\mathbf{c}}=\mathbf{f}$.

$\mathbf{f}^{\mathbf{a}}=\mathbf{f}$. Διότι $\mathbf{f}^{\mathbf{a}}=(\mathbf{c}^{\mathbf{c}})^{\mathbf{a}}=\mathbf{c}^{\mathbf{c}.\mathbf{a}}=\mathbf{c}^{\mathbf{c}}=\mathbf{f}$.

$\mathbf{f}^{\mathbf{c}}=\mathbf{f}$. Διότι $\mathbf{f}^{\mathbf{c}}=(\mathbf{c}^{\mathbf{c}})^{\mathbf{c}}=\mathbf{c}^{\mathbf{c}.\mathbf{c}}=\mathbf{c}^{\mathbf{c}}=\mathbf{f}$.

Τὰς ἐφαρμογὰς τῶν ἐκθετικῶν νόμων ἐπὶ τῶν πληθαρίθμων n (>1), **a**, **c**, καὶ **f** συνοψίζομεν ὡς ἑξῆς:

Ἐκθέτης n:

$$m^{\mathbf{n}} < \mathbf{a}, \ \mathbf{a}^{n} = \mathbf{a}, \ \mathbf{c}^{n} = \mathbf{c}, \ \mathbf{f}^{n} = \mathbf{f}.$$

Ἐκθέτης $\mathbf{a}$:

$$n^{\mathbf{a}} = \mathbf{a}^{\mathbf{a}} = \mathbf{c}^{\mathbf{a}} = \mathbf{c}, \ \mathbf{f}^{\mathbf{a}} = \mathbf{f}.$$

Ἐκθέτης $\mathbf{c}$:

$$n^{\mathbf{c}} = \mathbf{a}^{\mathbf{c}} = \mathbf{c}^{\mathbf{c}} = \mathbf{f}^{\mathbf{c}} = \mathbf{f}.$$

Ἐκθέτης $\mathbf{f}$:

$$n^{\mathbf{f}} = \mathbf{f}.$$

8. Τερματίζομεν τὸ μέρος τοῦτο μὲ τὴν θεώρησιν τοῦ συνόλου S ὅλων τῶν πραγματικῶν *συνεχῶν* συναρτήσεων $y = f(x)$ ποὺ ὁρίζονται εἰς τὸ διάστημα $0 < x < 1$. Λέγομεν ὅτι μία συνάρτησις εἶναι συνεχής, ἐὰν διὰ κάθε τιμὴν $x = x_0$ τοῦ πεδίου ὁρισμοῦ της ἡ τιμὴ τῆς συναρτήσεως καθορίζεται διὰ τῶν τιμῶν αὐτῆς εἰς τὴν γειτονιὰν τοῦ x_0. Χρήσιμον ἴσως εἶναι ἐπὶ τοῦ προκειμένου νὰ ὑπενθυμίσωμεν τὸν ὁρισμὸν τῆς συνεχείας εἰς τὸν διαφορικὸν λογισμόν: μία συνάρτησις $f(x)$ λέγεται συνεχὴς διὰ $x = x_0$, ἐὰν

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

ἢ ἐὰν

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \text{διὰ} \quad |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$$

καὶ τὰ ὁποῖα συντομογραφοῦνται διὰ τῆς ἰσότητος

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0.$$

Ὁρίζεται κατὰ ταῦτα τελείως μία συνεχὴς συνάρτησις, ὅταν εἶναι γνωσταὶ αἱ τιμαί της δι' ὅλας τὰς ρητὰς τιμὰς τοῦ x. Αἱ τιμαὶ τῆς συναρτήσεως δι' ἀσυμμέτρους τιμὰς τοῦ x ὁρίζονται μὲ ὁσηνδήποτε ἐπιθυμοῦμεν προσέγγισιν πρὸς τὰς τιμὰς τῆς συναρτήσεως διὰ ρητὰς τιμὰς τοῦ x. (Παράδειγμα: ἡ προσέγγισις ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν διὰ δεκαδικῶν κλασμάτων μέσῳ ἀνισοτήτων τῆς μορφῆς $1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$, κλπ.).

Ὅλαι αἱ συνεχεῖς συναρτήσεις περιέχονται λοιπὸν εἰς τὸ ἐπικαλύπτον σύνολον B, τὸ ὁποῖον σχηματίζεται διὰ τῆς καλύψεως τοῦ ἀριθμησίμου συνόλου ὅλων τῶν ρητῶν τιμῶν τοῦ x διὰ τοῦ συνόλου ὅλων τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, πληθάριθμος τοῦ ὁποίου εἶναι ὁ πληθάριθμος $\mathbf{c}$ τοῦ συνεχοῦς. Συνεπῶς, ὁ πληθάριθμος τοῦ συνόλου B εἶναι

$$|B| = \mathbf{c}^{\mathbf{a}} = \mathbf{c}.$$

Τὸ σύνολον ἐν τούτοις S ὅλων τῶν πραγματικῶν συνεχῶν συναρτήσεων εἶναι ἕνα ὑποσύνολον μόνον τοῦ B καὶ μάλιστα γνήσιον ὑποσύνολον αὐτοῦ: $S \subset B$. Τοῦτο ἕπεται ἐκ τοῦ ὅτι αἱ συνθῆκαι συνεχείας ἀπαιτοῦν γειτονικαὶ ρηταὶ τιμαὶ τοῦ x νὰ ἀντιστοιχοῦν εἰς γειτονικὰς τιμὰς τοῦ y καὶ συνεπῶς ἡ ἀντιστοιχία $x \longrightarrow y$ δὲν εἶναι τελείως αὐθαίρετος. Ἐπομένως $S \subset B$.

Τὸ σύνολον K ὅλων τῶν σταθερῶν συναρτήσεων $f(x) = c$ εἶναι γνήσιον πάλιν ὑποσύνολον τοῦ S, $K \subset S$. Ὁ πληθάριθμος τοῦ K εἶναι φυσικὰ $\mathbf{c}$. Θὰ ἔχωμεν λοιπὸν $K \subset S \subset B$, μὲ $K \sim B$· ἄρα, κατὰ τὸ θεώρημα τῆς ἰσοδυναμίας, $S \sim B$ καὶ $|S| = \mathbf{c}$. Ὥστε:

Τὸ σύνολον ὅλων τῶν συνεχῶν πραγματικῶν συναρτήσεων ἔχει πληθάριθμον $\mathbf{c}$.

Ἀσκήσεις

1. Νὰ καλυφθῇ τὸ σύνολον $N = \{1,2,3,..,12\}$ διὰ τοῦ συνόλου $M\{\mathrm{I,II,0}\}$ καὶ νὰ εὑρεθῇ ὁ πληθάριθμος τοῦ συνόλου N/M.

2. Διὰ ποίου συνόλου; $< y <$; πρέπει νὰ καλυφθῇ τὸ σύνολον $0 < x < \pi/2$, ὥστε τὸ ἐπικαλύπτον σύνολον νὰ εἶναι ἡ συνάρτησις $y =$ ημx;

3. Ποῖον εἶναι τὸ σύνολον Y, διὰ τὸ ὁποῖον ἡ συνάρτησις $y = (-1)^x$ ἐπικαλύπτει τὸ σύνολον $X = \{1,2,3,4,...\}$;

4. Κατὰ πόσους τρόπους εἶναι δυνατὸν νὰ καταταχθοῦν 16 μαθηταὶ εἰς 6 τάξεις; (*Ὑπόδειξις:* εὕρετε τὸν πληθάριθμον τοῦ συνόλου ποὺ ἐπικαλύπτει τὸ σύνολον $N\{1,2,...,16\}$ διὰ τοῦ $M = \{\mathrm{I,II,...VI}\}$.

5. Μὲ τὴν βοήθειαν τῆς ἐννοίας τοῦ ἐπικαλύπτοντος συνόλου νὰ δειχθῇ ὅτι, διὰ κάθε ὑπερπεπερασμένον πληθάριθμον $\mathbf{m}$, ἰσχύουν αἱ σχέσεις $1^{\mathbf{m}} = 1$ καὶ $\mathbf{m}^1 = \mathbf{m}$.

6. Ποῖος εἶναι ὁ πληθάριθμος ὅλων τῶν πραγματικῶν συναρτήσεων, τῶν ὁποίων αἱ τιμαὶ εἶναι μόνον ρητοὶ ἀριθμοί;

7. Ἀποδείξατε τὸν νόμον

$$\mathbf{m}^{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{n}^{\mathbf{p}} = (\mathbf{m} \cdot \mathbf{n})^{\mathbf{p}}$$

4

ΣΥΝΟΛΑ ΔΙΑΤΕΤΑΓΜΕΝΑ

XI. Σύνολα διατεταγμένα καὶ διατακτικοὶ τύποι.

1. Γνωρίζομεν ἀπὸ τὴν γραμματικὴν τὴν διαφορὰν ποὺ ὑπάρχει μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν ποὺ σημαίνουν τὴν τάξιν, καὶ ἐκείνων ποὺ σημαίνουν τὸ μέγεθος ὁμάδων πραγμάτων (*τακτικοὶ* καὶ *ἀπόλυτοι* ἀριθμοί). Καθὼς μανθάνομεν νὰ μετρῶμεν, ἀντιλαμβανόμεθα τὴν ἔννοιαν τοῦ τρία ὡς ἀντιπροσωπευτικὴν τῆς πολλαπλότητος τριῶν πραγμάτων ἀλλ' ἐπίσης καὶ τὸ τί ἐννοοῦμεν, ὅταν ὁμιλοῦμεν περὶ τοῦ τρίτου (ἢ τοῦ δευτέρου ἢ τοῦ πρώτου) ἐκ τῶν τριῶν αὐτῶν πραγμάτων.

Γενικῶς, εἰς τὸ πρῶτον στάδιον τῆς διανοητικῆς μας ἀναπτύξεως, εἴμεθα ἀνίκανοι νὰ ἀπομονώσωμεν τὴν ἔννοιαν τοῦ τρία ἀπὸ κάποιαν διάταξιν τῶν πραγμάτων ποὺ ἀντιπροσωπεύουν αὐτήν. Συχνά, κατὰ τὴν ἀρίθμησιν, ἐδείχναμεν μὲ τὸν δάκτυλόν μας τὸ πρῶτον, τὸ δεύτερον, τὸ τρίτον πρᾶγμα. Τόσον αἱ αἰσθήσεις μας ὅσον καὶ ὁ μηχανισμὸς τῆς σκέψεώς μας μᾶς ἐξηνάγκαζε νὰ ἀντιλαμβανώμεθα τὰ σύνολα πραγμάτων κατὰ μίαν ὡρισμένην διάταξιν,εἴτε ἐντὸς τοῦ χώρου εἴτε ἐντὸς τοῦ χρόνου.

Ὁ ὁρισμὸς τῆς ἐννοίας τοῦ συνόλου ὡς «μιᾶς συλλογῆς ἀντικειμένων τῆς ἐμπειρίας ἢ τῆς διανοήσεώς μας θεωρουμένης ὡς ἓν ὅλον», ἀνεξαρτήτως κάποιας διατάξεως τῶν στοιχείων της, ἀπαιτεῖ μεγάλην ἱκανότητα ἀφαιρέσεως. Ἡ ἀπουσία, ἐν τούτοις, τῆς διατάξεως, καθὼς καὶ κάθε ἀναφορᾶς εἰς τὴν φύσιν τῶν στοιχείων συνόλων, εἶναι αὐτὴ ποὺ μᾶς ὡδήγησε εἰς τὴν ἔννοιαν τοῦ ὑπερπεπερασμένου πληθαρίθμου, εἰς τὴν ἀντίληψιν δηλαδὴ αὐτοῦ ὡς ἀντιπροσώπου ἑνὸς οἱουδήποτε συνόλου ἐκ μιᾶς ἀπειρίας ἰσοδυνάμων μεταξύ των συνόλων. Οὕτω:

$$|\{1,2,3,\ldots\}| = |\{2,4,6,\ldots\}| = |\{1,3,5,\ldots\}| = \mathbf{a}.$$

Κατόπιν τούτων, ἠμποροῦμεν τώρα νὰ ἐννοήσωμεν τὴν παρατήρησιν τοῦ Cantor, ὅταν ἔλεγε ὅτι «ὁ πληθάριθμος ἑνὸς συνόλου M εἶναι τὸ ὄνομα ποὺ προσδίδομεν εἰς τὴν γενικὴν ἔννοιαν, τὴν ὁποίαν πορίζόμεθα ἐκ τοῦ συνόλου M διὰ τῆς δημιουργικῆς δυνάμεως τῆς σκέψεώς μας καὶ ἡ ὁποία εἶναι ἀπηλλαγμένη ἀπὸ κάθε ἀναφορὰν εἰς τὴν φύσιν τῶν διαφόρων στοιχείων τοῦ συνόλου εἴτε εἰς τὴν τάξιν, κατὰ τὴν ὁποίαν ἐμφανίζονται αὐτά».

2. Εἰς τὸ τμῆμα τοῦτο τοῦ βιβλίου θὰ θεωρήσωμεν ἰσοδύναμα σύνολα, ἀδιαφοροῦντες μὲν καὶ πάλιν ὡς πρὸς τὴν φύσιν τῶν στοιχείων τῶν συνόλων αὐτῶν, ἐφιστῶντες ὅμως τὴν προσοχήν μας ἐπὶ τοῦ τρόπου διατάξεως αὐτῶν. Ἀπὸ τὴν ἄποψιν αὐτὴν ἐξεταζόμενα τὰ σύνολα ἐμφανίζουν διαφορὰς θεμελιώδεις μεταξύ των.

(α) Τὸ σύνολον $N = \{1,2,...\}$ ἔχει πρῶτον στοιχεῖον ἀλλὰ δὲν ἔχει τελευταῖον. Κάθε στοιχεῖον, ἐκτὸς τοῦ πρώτου, ἔχει ἕνα ὡρισμένον προηγούμενον: τὸ στοιχεῖον 5 προηγεῖται τοῦ 6 καὶ τὸ 7 ἕπεται τοῦ 6.

(β) Τὸ σύνολον $\bar{N} = \{...3,2,1,\}$ ἔχει τελευταῖον στοιχεῖον ἀλλὰ δὲν ἔχει πρῶτον. Κάθε στοιχεῖον ἔχει ἕνα ὡρισμένον προηγούμενον καὶ (μὲ ἐξαίρεσιν τοῦ τελευταίου) ἕνα ἑπόμενον στοιχεῖον.

(γ) Τὸ σύνολον ὅλων τῶν θετικῶν κλασμάτων διατεταγμένων κατ' αὖξον μέγεθος δὲν ἔχει οὔτε πρῶτον οὔτε τελευταῖον στοιχεῖον. Δὲν ὑπάρχει οὔτε προηγούμενον οὔτε ἑπόμενον ἑνὸς δοθέντος στοιχείου. Εἶναι τοῦτο συνέπεια τῆς ἀνυπαρξίας ἐλαχίστου ἢ μεγίστου γνησίου κλάσματος καὶ μεταξὺ δύο δοθέντων κλασμάτων, μὲ ὁσονδήποτε μικρὰν μεταξύ των διαφοράν, ὑπάρχουν πάντοτε κλάσματα (ὡς π.χ. ὁ ἀριθμητικὸς μέσος τῶν δύο κλασμάτων).

(δ) Τὸ σύνολον $Z = \{0,1,-1,2,-2,...\}$ ἔχει πρῶτον καὶ δὲν ἔχει τελευταῖον στοιχεῖον. Κάθε στοιχεῖον, ἐκτὸς τοῦ πρώτου, ἔχει προηγούμενον καὶ ἑπόμενον στοιχεῖον αὐτοῦ.

(ε) Τὸ σύνολον $\bar{Z} = \{...-3,-2-1,0,1,2,3,...\}$ δὲν ἔχει οὔτε πρῶτον οὔτε τελευταῖον στοιχεῖον, μολονότι κάθε στοιχεῖον ἔχει προηγούμενον καὶ ἑπόμενον αὐτοῦ. Ἂς σημειωθῇ ὅτι $Z = \bar{Z}$, δηλαδὴ ὅτι τὰ δύο σύνολα ἔχουν τὰ αὐτὰ στοιχεῖα.

(στ) Εἰς τὸ σύνολον $M = \{1,3,5,...,2,4,6,...\}$ τὰ στοιχεῖα 2 καὶ 1 δὲν ἔχουν προηγούμενα στοιχεῖα.

Εἰς τὰ ἰσοδύναμα αὐτὰ σύνολα παρατηροῦμεν ὅτι τὰ στοιχεῖα των εἶναι διατεταγμένα κατὰ τελείως διαφορετικοὺς τρόπους. Ὅταν θὰ ὁμιλοῦμεν εἰς τὰ ἑπόμενα περὶ *διατεταγμένων συνόλων*, θὰ ἔχωμεν πάντοτε ὑπ' ὄψει, κατὰ τὴν νέαν αὐτὴν ἀντίληψιν τῶν συνόλων, ἕνα ὡρισμένον κανόνα διατάξεως αὐτῶν. Μὲ τὸν τρόπον αὐτὸν θὰ καταστήσωμεν προσιτὰς εἰς τὴν μαθηματικὴν νόησιν τὰς ἐννοίας τῆς γειτονιᾶς, τῆς συνεχείας καὶ τῆς διαστάσεως—ἐννοίας δηλαδὴ τὰς ὁποίας εἴχομεν ἀπολέσει εἰς τὴν γενικότητα τῆς σχέσεως ἰσοδυναμίας.

3. Ἕνα σύνολον M θὰ λέγεται *διατεταγμένον σύνολον*, ὅταν, διὰ δύο τυχόντα στοιχεῖα του a καὶ b, μία καὶ μόνον μία ἀπὸ τὰς ἑξῆς δύο συνθήκας ἀληθεύῃ:

εἴτε $a \prec b$, δηλαδή: a προηγεῖται τοῦ b
εἴτε $a \succ b$, δηλαδή: a ἕπεται τοῦ b.

Ὁ τρόπος αὐτὸς διατάξεως τῶν στοιχείων παράγει τρεῖς χαρακτηριστικὰς ἰδιότητας:

(α) Εἶναι *μὴ ἀνακλαστικός:* οὐδέποτε συμβαίνει $a \prec a$ ἢ $a \succ a$.

(β) Εἶναι *ἀντισυμμετρικός:* $a \prec b$ συνεπάγεται $b \succ a$

(γ) Εἶναι *μεταβατικός:* $a \prec b$ καὶ $b \prec c$ συνεπάγονται $a \prec c$.

Τὰ σύμβολα «$\prec$» καὶ «$\succ$» δὲν θὰ πρέπει νὰ συγχέωνται πρὸς τὰ «$>$» καὶ «$<$» τοῦ «μεγαλυτέρου» καὶ «μικροτέρου» ποὺ χρησιμοποιοῦνται διὰ πληθαρίθμους. Εἰς τὸ παράδειγμα 2(α), εἰς τὸ σύνολον $N = \{1,2,3,...\}$ τὸ $\prec$ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ $<$ καὶ τὸ $\succ$ εἰς τὸ $>$. Εἰς τὸ παράδειγμα 2(β), εἰς τὸ σύνολον $N = \{...3,2,1\}$, τὸ $\prec$ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ $>$ καὶ τὸ $\succ$, εἰς τὸ $<$, διὰ τὸ σύνολον δὲ τοῦ παραδείγματος 2(γ), τὸ $\prec$ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ $<$ καὶ τὸ $\succ$ εἰς τὸ $>$.

Εἰς τὸ παράδειγμα 2 (δ), ὡς ὁδηγίαν διατάξεως τῶν στοιχείων του, ἠμποροῦμεν νὰ λάβωμεν τὴν ἑξῆς: διὰ δύο στοιχεῖα διαφόρων ἀπολύτων τιμῶν, τὸ μικροτέρας ἀπολύτου τιμῆς προηγεῖται τοῦ μεγαλυτέρας ἀπολύτου τιμῆς, διὰ δύο δὲ στοιχεῖα μὲ τὰς αὐτὰς ἀπολύτους τιμάς, τὸ θετικὸν στοιχεῖον προηγεῖται τοῦ ἀρνητικοῦ.

Εἰς τὸ 2(ε), τὸ $\prec$ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ $<$ καὶ τὸ $\succ$ εἰς τὸ $<$.

Εἰς τὸ παράδειγμα 2 (στ) ἡ ὁδηγία διατάξεως εἶναι: κάθε περιττὸς ἀριθμὸς προηγεῖται κάθε ἀρτίου καὶ διὰ δύο περιττοὺς ἢ διὰ δύο ἀρτίους ἀριθμοὺς ὁ μικρότερος προηγεῖται τοῦ μεγαλυτέρου.

Ἕνα σύνολον M ἔχει ἕνα *πρῶτον* στοιχεῖον a, ὅταν, διὰ κάθε ἄλλο στοιχεῖον $m \in M$, ἀληθεύῃ πάντοτε ἡ σχέσις $a \prec m$· ἔχει δὲ ἕνα *τελευταῖον* στοιχεῖον b, ὅταν, διὰ κάθε ἄλλο στοιχεῖον $m \in M$, ἀληθεύῃ πάντοτε ἡ σχέσις $m \prec b$. Ἕνα διατεταγμένον σύνολον περιέχει τὸ πολὺ ἕνα πρῶτον στοιχεῖον καὶ τὸ πολὺ ἕνα τελευταῖον στοιχεῖον.

Ἐὰν διὰ τρία στοιχεῖα a, b, c ἑνὸς συνόλου γνωρίζωμεν ὅτι συμβαίνει $a \prec b \prec c$, θὰ λέγωμεν ὅτι τὸ b *κεῖται μεταξὺ* τῶν a καὶ c. Τὰ σύνολα $N = \{1,2,3,...\}$ καὶ $\bar{N} = \{...,3,2,1\}$ εἶναι *ἴσα* βεβαίως, ἀφοῦ περιέχουν τὰ αὐτὰ στοιχεῖα· ὡς διατεταγμένα ὅμως σύνολα θεωροῦνται διαφορετικά, ἀφοῦ οἱ νόμοι διατάξεως εἰς αὐτὰ διαφέρουν.

Κάθε ὑποσύνολον ἑνὸς διατεταγμένου συνόλου εἶναι διατεταγμένον σύνολον καὶ κατὰ τὸν νόμον διατάξεως ποὺ ἰσχύει διὰ τὸ ὅλον σύνολον. Συμφωνοῦμεν δὲ τὸ κενὸν σύνολον νὰ θεωροῦμεν ὡς διατεταγμένον σύνολον.

4. Προκειμένου περὶ διατεταγμένων συνόλων, ἡ ἔννοια τῆς ἰσοδυναμίας ἀντικαθίσταται διὰ τῆς ὀξυτέρας ἐννοίας τῆς *ὁμοιότητος*.

Ἕνα διατεταγμένον σύνολον M λέγεται ὅμοιον πρὸς ἕνα ἄλλο ἐπίσης διατεταγμένον σύνολον N, ἐὰν τὰ στοιχεῖα τῶν M καὶ N ἠμποροῦν νὰ *τεθοῦν εἰς ἀμφιμονοσήμαντον ἀντιστοιχίαν κατὰ τέτοιον τρόπον, ὥστε διὰ δύο τυχόντα στοιχεῖα m_1 καὶ m_2 τοῦ M, διὰ τὰ ὁποῖα συμβαίνει $m_1 < m_2$, τὰ ἀντίστοιχα αὐτῶν στοιχεῖα n_1 καὶ n_2 τοῦ N πληροῦν τὴν ἰδίαν σχέσιν: $m_1 < m_2 \Longrightarrow n_1 < n_2$. Τὴν σχέσιν ὁμοιότητος τῶν συνόλων M καὶ N σημειοῦμεν $M \simeq N$.*

Παράδειγμα:

Τὰ σύνολα $N = \{1,2,3,...\}$ καὶ $G = \{2,4,6,...\}$ εἶναι ὅμοια, διότι ἡ ἀντίστοίχισις $1 \leftrightarrow 2$, $2 \leftrightarrow 4$, $3 \leftrightarrow 6$,... ἐγγυᾶται τὴν σχέσιν $g_1 < g_2$ ὡς συνέπειαν τῆς $n_1 < n_2$. Λ.χ., ἐκ τῆς σχέσεως $11 < 14$ ἕπεται $22 < 28$.

Ἀντιθέτως, τὰ σύνολα $N = \{1,2,3,...\}$ καὶ $\overline{N} = \{...,3,2,1\}$, μολονότι ἰσοδύναμα εἶναι ἀνόμοια. Διότι εἰς τὸ N ὑπάρχει ἕνα πρῶτον στοιχεῖον, κατόπιν τοῦ ὁποίου ἀκολουθοῦν ὅλα τὰ ἄλλα στοιχεῖα του, ἐνῶ εἰς τὸ $\overline{N}$ δὲν ὑπάρχει πρῶτον στοιχεῖον, εἰς τὸ ὁποῖον τὸ 1 τοῦ N νὰ ἠμπορῇ νὰ ἀντιστοιχισθῇ. Ἐπίσης, τὸ $\overline{N}$ ἔχει τελευταῖον στοιχεῖον ἐνῶ τὸ N δὲν ἔχει.

Σύμφωνα μὲ τὸν ὁρισμὸν τῆς ὁμοιότητος, ἠμποροῦμεν νὰ δείξωμεν τὰς ἑξῆς ἰδιότητας τῶν διατεταγμένων συνόλων:

(α) $M \simeq M$. Κάθε διατεταγμένον σύνολον εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸν ἑαυτόν του. Ἡ σχέσις ὁμοιότητος εἶναι ἀνακλαστική.

(β) Ἐὰν $M \simeq N$, τότε $N \simeq M$. Ἡ σχέσις ὁμοιότητος εἶναι συμμετρική.

(γ) Ἐὰν $M \simeq N$ καὶ $N \simeq P$, τότε $M \simeq P$. Ἡ σχέσις ὁμοιότητος εἶναι μεταβατική.

5. Εἴδομεν προηγουμένως ὅτι τὰ ὅμοια σύνολα εἶναι ἰσοδύναμα, ἐνῶ σύνολα ἰσοδύναμα δὲν εἶναι πάντοτε ὅμοια. Ἐκ τοῦ παραδείγματος τῶν ἀνομοίων συνόλων $N = \{1,2,3,...\}$ καὶ $\overline{N} = \{...,3,2,1\}$ ὁδηγούμεθα εἰς τὸ συμπέρασμα:

Ἐὰν εἰς τὸ ἕνα ἐκ δύο ὁμοίων συνόλων ὑπάρχῃ πρῶτον (τελευταῖον) στοιχεῖον, θὰ ὑπάρχῃ ἐπίσης πρῶτον (τελευταῖον) στοιχεῖον καὶ εἰς τὸ ἄλλο σύνολον.

Μία περαιτέρω συνέπεια εἶναι καὶ τὸ θεώρημα:

Ἐὰν ἕνα σύνολον M εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς ἕνα διατεταγμένον σύνολον N, εἶναι δυνατὴ μιὰ τέτοια διάταξις τοῦ M, ὥστε νὰ γίνῃ αὐτὸ ὅμοιον πρὸς τὸ N.

Διὰ τὴν ἀπόδειξιν δὲν ἔχομεν παρὰ νὰ θεσπίσωμεν ὅτι εἰς τὰ στοιχεῖα n_1, n_2 τοῦ συνόλου N, διὰ τὰ ὁποῖα $n_1 < n_2$, ἀντιστοιχοῦν στοιχεῖα m_1, m_2 τοῦ M, διὰ τὰ ὁποῖα νὰ συμβαίνῃ $m_1 < m_2$.

Παραδείγματα:

(α) Τὰ σύνολα

$$N = \{1,2,3,\ldots\} \text{ καὶ } \bar{Z} = \{\ldots, -3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$$

εἶναι ἰσοδύναμα, $N \sim \bar{Z}$, ἀφοῦ καὶ τὰ δύο εἶναι ἀριθμήσιμα. Δὲν εἶναι ὅμως ὅμοια, ἀφοῦ τὸ N ἔχει πρῶτον στοιχεῖον καὶ τὸ $\bar{Z}$ δὲν ἔχει· ἐὰν ὅμως μεταβληθῇ ἡ διάταξις τῶν στοιχείων τοῦ $\bar{Z}$ εἰς τὴν

$$\bar{Z} = \{0,1,-1,2,-2,3,-3,\ldots\} \text{ τότε } N \simeq \bar{Z}.$$

Θὰ ἠμπορούσαμεν ἐπίσης νὰ ἐλαμβάνομεν καθ' ὁμοιότητα ἀπεικόνισιν δι' ἐπαναδιατάξεως τῶν στοιχείων τοῦ N ἀντὶ τοῦ Z:

$$\bar{\bar{N}} = \{\ldots 6,4,2,1,3,5,\ldots\} \text{ ὁπότε } \bar{\bar{N}} = \bar{Z}.$$

(β) Τὸ διατεταγμένον σύνολον σημείων X εἰς τὸ διάστημα $1 \leqq x \leqq 2$ καὶ τὸ διατεταγμένον σύνολον σημείων Y εἰς τὸ διάστημα $5 \leqq y \leqq 10$ εἶναι ὅμοια, μὲ σχέσιν διατάξεως $y = 5x$. Ἐὰν $x_1 \prec x_2$ θὰ εἶναι $y_1 \prec y_2$ ($\prec \,=\, <$ καὶ εἰς τὰ δύο σύνολα).

(γ) Τὰ διατεταγμένα σύνολα σημείων $X, 0 < x \leqq 1$ καὶ $Y, 0 \leqq y < 1$, εἶναι ἀνόμοια, ἐὰν ὡς ἀρχὴν διατάξεως εἰς αὐτὰ λάβωμεν τὴν σχέσιν μεγέθους τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν τῶν x καὶ y· διότι τὸ πρῶτον σύνολον δὲν ἔχει πρῶτον στοιχεῖον καὶ ἔχει τελευταῖον, ἐνῷ τὸ δεύτερον σύνολον ἔχει πρῶτον στοιχεῖον καὶ δὲν ἔχει τελευταῖον. Διὰ νὰ κατασταθοῦν ὅμοια, εἶναι ἀναγκαία μία ἀναδιάταξις τῶν στοιχείων τοῦ ἑνὸς συνόλου. Τοῦτο ἐπιτυγχάνεται, ἐὰν ὡς σχέσιν ἀντιστοιχίας μεταξὺ τῶν δύο συνόλων ὁρίσωμεν τὴν $y = 1 - x$: διότι τότε, διὰ $0 < x \leqq 1$, θὰ εἶναι $1 > y \geqq 0$.

Τὰ σύνολα σημείων ἀφ' ἑτέρου X $(0 < x \leqq 1)$ καὶ $\bar{Y}$ $(1 > \bar{y} \geqq 0)$ εἶναι ὅμοια: ἐὰν $x_1 \prec x_2$ ($\prec \,=\, <$) θὰ εἶναι $\bar{y}_1 \prec \bar{y}_2$ ($\prec \,=\, >$).

(δ) Τὰ σύνολα $N = \{1,2,3,\ldots\}$ καὶ

$$T = \{10,20,30,\ldots, 11,21,31,\ldots,19,29,39,\ldots\}$$

εἶναι ἰσοδύναμα ἀλλά, προφανῶς, ἀνόμοια.

6. Ὅπως ἡ ἔννοια τῆς ἰσοδυναμίας μεταξὺ τῶν συνόλων μᾶς ὡδήγησεν εἰς τὴν ἔννοιαν τοῦ πληθαρίθμου, οὕτω καὶ ἡ ἔννοια τῆς ὁμοιότητος μᾶς ὁδηγεῖ εἰς τὴν ἔννοιαν τοῦ *διατακτικοῦ τύπου*. Ὀνομάζομεν διατακτικὸν τύπον ἑνὸς συνόλου M—καὶ τὸν παριστῶμεν μὲ τὸ ἑλληνικὸν γράμμα μ—ἕνα οἱονδήποτε σύνολον ἐξ ἐκείνων ποὺ εἶναι ὅμοια πρὸς τὸ σύνολον M. Ἡ ἔκφρασις ἑπομένως: «δύο σύνολα ἔχουν τὸν αὐτὸν διατακτικὸν τύπον» εἶναι ταυτόσημος πρὸς τὴν ἔκφρασιν: «δύο σύνολα εἶναι ὅμοια». Γράφομεν $\mu = [M]$, διὰ νὰ ἐκφράσωμεν ὅτι μ εἶναι ὁ διατακτικὸς τύπος τοῦ συνόλου M.

Τὰ ἀκολουθοῦντα παραδείγματα ἀποσαφηνίζουν τὴν ἔννοιαν ταύτην.

Διὰ τὰ σύνολα

$M = \{1,4,7,10,13,...\}$, $N = \{1,2,3,...\}$, $\bar{N} = \{...,5,4,3,2,1\}$

ἔχομεν

$$M \neq N,\ M \neq \bar{N},\ N = \bar{N},\ M \subset N,\ M \subset \bar{N}$$

$$M \sim N \sim \bar{N},\ |M| = |N| = |\bar{N}| = \mathbf{a}.$$

$$[M] = \mu,\ [N] = \nu,\ [\bar{N}] = \bar{\nu}.$$

$M \simeq N$, ἐνῶ τὰ M, N δὲν εἶναι ὅμοια πρὸς τὸ $\bar{N}$

$$\mu = \nu,\ \mu \neq \bar{\nu},\ \bar{\nu} \neq \nu.$$

Ὅπως βλέπομεν, σύνολα ἰσοδύναμα ἠμποροῦν νὰ ἔχουν διαφόρους διατακτικοὺς τύπους. Οἱ ἀνωτέρω τύποι εἶναι διαφορετικοὶ ἀλλὰ ἡ μεταξύ των σχέσις δὲν εἶναι φύσεως τέτοιας, ὥστε νὰ μᾶς εἶναι δυνατὸν νὰ ὁδηγηθοῦμεν δι' αὐτῆς εἰς συγκρίσεις «μεγέθους» μεταξύ των. Διὰ τὸν λόγον αὐτὸν οἱ διατακτικοὶ τύποι στεροῦνται ἐκείνου ποὺ χαρακτηρίζει τοὺς ἀριθμούς: τῆς δυνατότητος διατάξεως αὐτῶν κατὰ μέγεθος, καὶ δικαιολογεῖται συνεπῶς ἡ ὀνομασία αὐτῶν ὡς τύπων διατάξεως καὶ ὄχι ὡς ἀριθμῶν.

7. Πεπερασμένα σύνολα ποὺ ἔχουν τὸν αὐτὸν πληθάριθμον, ἔχουν καὶ τὸν αὐτὸν διατακτικὸν τύπον. Μὲ ἄλλους λόγους: σύνολα πεπερασμένα καὶ ἰσοδύναμα εἶναι ὅμοια. Ἀνεξαρτήτως τοῦ τρόπου διατάξεως τεσσάρων πραγμάτων, τὸ τελευταῖον στοιχεῖον εἶναι τὸ τέταρτον καὶ τὰ τρία σύνολα

$$\{a,b,c,d\},\ \{1,2,3,4\},\ \{\lambda,\mu,\nu,\varrho\}$$

ἔχουν τὸν αὐτὸν διατακτικὸν τύπον. Διὰ πρακτικοὺς σκοπούς, ὀνομάζομεν *τέσσαρα* τὸν διατακτικὸν τοῦτον τύπον καὶ τὸν σημειοῦμεν «4». Προσλαμβάνουν οὕτω οἱ φυσικοὶ ἀριθμοὶ τὸ ἑξῆς διπλοῦν περιεχόμενον:

(α) Παριστοῦν τὸ πλῆθος στοιχείων πεπερασμένων συνόλων (πληθάριθμοι).

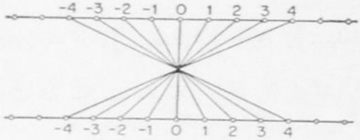
(β) Παριστοῦν διατακτικοὺς τύπους (διατακτικοὶ ἀριθμοί).

8. Συμβολίζομεν $^*\mu$ τὸν διατακτικὸν τύπον τοῦ συνόλου ποὺ προκύπτει ἀπὸ ἕνα διατεταγμένον σύνολον M, μὲ διατακτικὸν τύπον μ, δι' ἀναστροφῆς τῆς διατάξεως τῶν στοιχείων του. Γράφομεν εἰδικῶς:

$$[N] = [\{1,2,3,...\}] = \omega,\ [\bar{N}] = [\{...,3,2,1\}] = {}^*\omega.$$

Τὸν διατακτικὸν τύπον τοῦ συνόλου ὅλων τῶν ρητῶν ἀριθμῶν, διατεταγμένων κατ' αὖξον μέγεθος, παριστῶμεν μὲ τὸ γράμμα η, τὸν δὲ διατακτικὸν τύπον τοῦ συνόλου ὅλων τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, ὁμοίως κατ' αὖξον μέγεθος διατεταγμένων, παριστῶμεν μὲ τὸ γράμμα λ. Τὸ ἀκολουθοῦν διάγραμμα καθιστᾷ ἐμφανεῖς τὰς σχέσεις

$$^*\eta = \eta \text{ καὶ } {}^*\lambda = \lambda.$$



Σχέδιον 19. Ἡ ἰσότης τῶν διατακτικῶν τύπων $^*\eta = \eta$ καὶ $^*\lambda = \lambda$.

9. Τερματίζομεν τὴν παράγραφον ταύτην μὲ τὴν μελέτην τοῦ τρόπου λογισμοῦ μὲ διατακτικοὺς τύπους. Ἀρχίζομεν μὲ τὴν πρόσθεσιν.

Ἐὰν δοθοῦν δύο διάζευκτα σύνολα μὲ διατακτικοὺς τύπους

$$[M] = \mu \text{ καὶ } [N] = \nu, \text{ ὁρίζομεν}$$
$$\mu + \nu = [M] + [N] = [M \cup N]$$

Κατὰ τὸν σχηματισμὸν τῆς ἑνώσεως τῶν M καὶ N, θεωροῦμεν αὐτὴν ὡς *διατεταγμένην ἕνωσιν* τῶν διαζεύκτων συνόλων M καὶ N, εἰς τὴν ὁποίαν τὰ στοιχεῖα τοῦ M προηγοῦνται ὅλων τῶν στοιχείων τοῦ N. Γενικῶς, μία διατεταγμένη ἕνωσις δὲν εἶναι συμμετρικὴ (ἀντιμεταθετική), δηλαδὴ

$$[M \cup N] \neq [N \cup M].$$

Παραδείγματα:

(α): $[\{1,2,3,\dots\}] + [\{\alpha\}] = [\{1,2,3,\dots,\alpha\}]$ ἢ $\omega + 1 = (\omega + 1)$.
$[\{\alpha\}] + [\{1,2,3,\dots\}] = [\{\alpha,1,2,3,\dots\}]$ ἢ $1 + \omega = \omega$.

Διαφέρει δηλαδὴ ὁ τύπος $\omega + 1$ τοῦ $1 + \omega$: ἡ πρόσθεσις διατακτικῶν τύπων δὲν εἶναι ἀντιμεταθετική.

(β): $[\{\bar{1},\bar{2},\bar{3},\dots\}] + [\{1,2,3,\dots,n\}] = [\{\bar{1},\bar{2},\bar{3},\dots,1,2,3,\dots,n\}]$ ἢ
$\omega + n = \omega + n$.

$[\{1,2,3,\dots n\}] + [\{\bar{1},\bar{2},\bar{3},\dots\}] = [\{1,2,3,\dots n,\bar{1},\bar{2},\dots\}]$ ἢ
$n + \omega = \omega$.

Τὸν διατακτικὸν τύπον $\omega + \omega$ ἠμποροῦμεν νὰ λάβωμεν διὰ τῆς προσθέσεως, λ.χ., τῶν συνόλων

$$[\{1,3,5,\dots\}] + [\{2,4,6,\dots\}] = [\{1,3,5,\dots,2,4,6,\dots\}] = \omega + \omega.$$

Ἄλλα παραδείγματα:

$\omega + {}^*\omega = [\{1,3,5,\dots\}] + [\{\dots,6,4,2,\dots\}] = [\{1,3,5,\dots,6,4,2\}]$.
$^*\omega + \omega = [\{\dots,6,4,2\}] + [\{1,3,5,\dots\}] = [\{\dots,6,4,2,1,3,5,\dots\}]$.
$= [Z] = [\{\dots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\dots\}]$.

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς προσθέσεως διατακτικῶν τύπων συμπεραίνομεν ὅτι ἰσχύει δι' αὐτὴν ὁ προσεταιριστικὸς νόμος:

$$(\alpha + \varphi) + \pi = \alpha + (\varphi + \pi).$$

Παραδείγματα ἐφαρμογῆς τοῦ νόμου αὐτοῦ εἶναι:

$$(\omega + 1) + {}^*\omega = \omega + (1 + {}^*\omega) = [\{1,2,3,\dots,\alpha,\dots,\overline{3},\overline{2},\overline{1}\}[$$

$$({}^*\omega + 1) + \omega = {}^*\omega + (1 + \omega) = [\{\dots,\overline{3},\overline{2},\overline{1},\alpha,1,2,3,\dots\}].$$

Διὰ πεπερασμένους διατακτικοὺς τύπους, ἡ πρόσθεσις αὐτῶν ἀνάγεται εἰς τὴν πρόσθεσιν πληθαρίθμων καὶ οἱ νόμοι προσθέσεως πληθαρίθμων ἐφαρμόζονται καὶ διὰ πρόσθεσιν διατακτικῶν τύπων.

Παραδείγματα:

$$[\{a,b,c,d\}] + [\{1,2,3\}] = [\{a,b,c,d,1,2,3\}] \text{ ἢ } 4 + 3 = 7.$$

$$[\{1,2,3\}] + [\{a,b,c,d\}] = [\{1,2,3,a,b,c,d\}] \text{ ἢ } 3 + 4 = 7.$$

Εἶναι δυνατὸν ἐπίσης νὰ ὁρίσωμεν πολλαπλασιασμὸν ὑπερπεπερασμένων διατακτικῶν τύπων ὡς ἐπαναλαμβανομένην διατεταγμένην πρόσθεσιν ἴσων προσθετέων. Ὁ πολλαπλασιασμὸς αὐτὸς δὲν εἶναι ἀντιμεταθετικός καὶ διὰ τοῦτο εἶναι ἀναγκαία ἡ διάκρισις μεταξὺ *πολλαπλασιαστέου* (διατακτικοῦ τύπου τοῦ ἐπαναλαμβανομένου προσθετέου) καὶ *πολλαπλασιαστοῦ* (τοῦ διατακτικοῦ τύπου, ὁ ὁποῖος μᾶς λέγει πόσας «φορὰς» καὶ κατὰ ποίαν διαδοχὴν θὰ πρέπει νὰ γίνεται ἡ πρόσθεσις αὐτή). Παράδειγμα: (*)

$$\omega \cdot 2 = \omega + \omega = [\{1,3,5,\dots,2,4,6,\dots\}]$$

$$2 \cdot \omega = [\{a_1,b_1\}] + [\{a_2,b_2\}] + \dots = [\{a_1,b_1,a_2,b_2,a_3,b_3,\dots\}] = \omega.$$

καὶ γενικῶς $n \cdot \omega = \omega$· οἱ διατακτικοὶ ὅμως τύποι $\omega \cdot 2$, $\omega \cdot 3, \dots, \omega \cdot n$ εἶναι ὅλοι διαφορετικοί. Ἐπίσης

$$[\{a_1,a_2,a_3,\dots,b_1,b_2,b_3,\dots,c_1,c_2,c_3,\dots\}] =$$
$$\omega + \omega + \omega \dots + \omega = \omega \cdot \omega = \omega^2.$$

Τὸ σύνολα σημείων P_g ἐπ' εὐθείας γραμμῆς: P_1 $(0 < x < 1)$, P_2 $(1 < x < 2), \dots, P_n$ $(n - 1 < x < n)$ εἶναι ὅλα ὅμοια σύνολα, δηλ. $P_g \simeq P_1 \simeq P_2 \simeq P_3 \simeq \dots, \simeq P_n$, καὶ οἱ διατακτικοί των τύποι ἴσοι

$$[P_g] = [P_1] = [P_2] = \dots = [P_n] = \lambda.$$

Ἐὰν σχηματίσωμεν τὴν ἕνωσιν τῶν συνόλων P_1 καὶ $\{x = 1\}$ καὶ P_2 εὑρίσκομεν

$$P_1 \cup \{x = 1\} \cup P_2 = P\ (0 < x < 2),$$

*Τὸ σημεῖον « · » διαβάζεται «πολλαπλασιασμένον ἐπί». Εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν λόγου χάριν $\omega \cdot 2$, ω εἶναι ὁ πολλαπλασιαστέος, 2 ὁ πολλαπλασιαστής.

καὶ διὰ προσθέσεως τῶν ἀντιστοίχων διατακτικῶν τύπων

$$\lambda + 1 + \lambda = \lambda$$

Ὁμοίως, διὰ σχηματισμοῦ τῆς ἑνώσεως τῶν σημειοσυνόλων

$$0 \leqq x < 1,\ 1 \leqq x < 2,\ 2 \leqq x < 3, \ldots,\ n - 1 \leqq x < n,$$

εὑρίσκομεν τὸν κανόνα:

$$(1 + \lambda) + (1 + \lambda) + \ldots + (1 + \lambda) = (1 + \lambda) \cdot n = 1 + \lambda$$

καὶ τελικῶς

$$(1 + \lambda) \cdot \omega = 1 + \lambda.$$

Ἀσκήσεις

1. Ὑπολογίσατε $1 + \omega + {}^*\omega + 1 + \omega$. Δώσατε σχετικὸν παράδειγμα.

2. Ποῖος εἶναι ὁ διατακτικὸς τύπος ὅλων τῶν κλασμάτων εἰς τὸ διάστημα $0 \leqq x \leqq 1$, διατεταγμένων κατ' αὔξον μέγεθος;

3. Δείξατε τοὺς κάτωθι νόμους:

(α) $\omega + 1 \neq \omega + 2 \neq \omega + 3 \neq \omega + n$

(β) $1 + \omega = 2 + \omega = 3 + \omega = n + \omega = \omega.$

(γ) ${}^*\omega + 1 = {}^*\omega + 2 = {}^*\omega + 3 = {}^*\omega + n = {}^*\omega.$

(δ) $1 + {}^*\omega \neq 2 + {}^*\omega \neq 3 + {}^*\omega \neq n + {}^*\omega.$

(ε) $\omega + n + \omega = \omega + (n + \omega) = \omega + \omega$

(στ) $n + \omega + \omega = (n + \omega) + \omega = \omega + \omega.$

XII. Σύνολα καλῶς διατεταγμένα καὶ Διατακτικοὶ Ἀριθμοὶ

1. Ἕνα διατεταγμένον σύνολον λέγεται «καλῶς διατεταγμένον», ἐὰν τόσον αὐτὸ ὅσον καὶ τὸ κάθε ὑποσύνολόν του περιέχουν πρῶτα στοιχεῖα. Τὸ ἐπίταγμα αὐτὸ ἀποχωρίζει ἀπὸ τὴν συλλογὴν ὅλων τῶν διατεταγμένων συνόλων ἐκεῖνα, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν χαρακτηριστικὴν ἰδιότητα διὰ τὴν ἀπαρίθμησιν: νὰ ὑπάρχῃ εἰς τὸ σύνολον (ὅπως καὶ σὲ κάθε ὑποσύνολόν του), ἕνα πρῶτον στοιχεῖον καὶ κάθε στοιχεῖον του, ἐκτὸς τοῦ τελευταίου, νὰ ἔχῃ ἕνα ἀμέσως ἑπόμενον αὐτοῦ.

Εἴδομεν εἰς τὰ προηγούμενα καλῶς διατεταγμένα σύνολα, ὅπως τὰ

$$N = \{1,2,3,\ldots\},$$
$$Z = \{0,1,-1,2,-2,3,-3,\ldots\},$$
$$M = \{1,3,5,7,\ldots,2,4,6,\ldots\}.$$

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν ἀφ' ἑτέρου τῶν καλῶς διατεταγμένων συνόλων τὰ σύνολα

$$\bar{N} = \{\ldots,3,2,1\},$$
$$\bar{Z} = \{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$$

δὲ $\{$ ρητοὶ ἀριθμοὶ τοῦ διαστήματος $0 < x < 1\}$

$\{$ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ τοῦ διαστήματος $0 < x < 1\}$ κλπ.

δὲν εἶναι καλῶς διατεταγμένα, δεδομένου ὅτι δὲν ἔχουν πρῶτα στοιχεῖα.

2. Τὰ ἀκόλουθα θεωρήματα εἶναι συνέπειαι ἄμεσοι τοῦ ἰδίου ὁρισμοῦ.

(α) Κάθε ὑποσύνολον καλῶς διατεταγμένου συνόλου εἶναι καλῶς διατεταγμένον.

(β) Κάθε διατεταγμένον σύνολον καὶ ὅμοιον πρὸς ἕνα καλῶς διατεταγμένον σύνολον εἶναι καλῶς διατεταγμένον.

(γ) Κάθε πεπερασμένον σύνολον εἶναι καλῶς διατεταγμένον.

Τὸ κενὸν σύνολον ὑποτίθεται καλῶς διατεταγμένον.

3. Ἐὰν ἀπὸ ἕνα καλῶς διατεταγμένον σύνολον M ἀποχωρίσωμεν ἕνα ὑποσύνολον A ποὺ περιέχει ὅλα τὰ στοιχεῖα τοῦ M, τὰ ὁποῖα προηγοῦνται ἑνὸς δοθέντος στοιχείου m τοῦ M, τὸ ὑποσύνολον A θὰ λέγεται τὸ *τμῆμα* τοῦ M τὸ ὁριζόμενον ὑπὸ τοῦ m. Τὸ τμῆμα τὸ ὁριζόμενον ὑπὸ τοῦ πρώτου στοιχείου τοῦ M εἶναι τὸ κενὸν σύνολον. Παραδείγματος χάριν, εἰς τὸ καλῶς διατεταγμένον σύνολον

$$\{1,3,5,...,2,4,6,...\}.$$

τὸ στοιχεῖον 2 ὁρίζει τὸ τμῆμα $A = \{1,3,5,...\}$.

4. Ἡ αὐστηρὰ σπουδὴ τῶν καλῶς διατεταγμένων συνόλων—ὑπερβαίνουσα ὅμως τοὺς σκοποὺς τοῦ βιβλίου τούτου—ὁδηγεῖ εἰς συμπεράσματα πολὺ μεγάλης σημασίας διὰ τὴν θεωρίαν τῶν συνόλων. Μερικὰ ἐξ αὐτῶν συνοψίζονται εἰς τὰ ἀκολουθοῦντα θεωρήματα, τὰ ὁποῖα ἀναφέρομεν χωρὶς τὴν ἀπόδειξίν των.

(α) Δύο καλῶς διατεταγμένα σύνολα ἢ εἶναι ὅμοια ἢ τὸ ἕνα ἐξ αὐτῶν εἶναι ὅμοιον πρὸς τμῆμα τοῦ ἄλλου. Συνεπῶς, δύο καλῶς διατεταγμένα σύνολα M καὶ N εἶναι πάντοτε συγκρίσιμα ὡς πρὸς τοὺς πληθαρίθμους των. Τοῦτο σημαίνει ὅτι μία, καὶ μόνον μία, ἐκ τῶν τριῶν σχέσεων $\mathbf{m} = \mathbf{n}$, $\mathbf{m} < \mathbf{n}$ καὶ $\mathbf{m} > \mathbf{n}$ εἶναι δυνατὸν νὰ ἰσχύῃ μεταξὺ τῶν πληθαρίθμων τῶν συνόλων τούτων.

(β) Ἕνα καλῶς διατεταγμένον σύνολον M μόνον διὰ μιᾶς ταυτοτικῆς ἀπεικονίσεως ἠμπορεῖ νὰ ἀπεικονισθῇ εἰς σύνολον ὅμοιον πρὸς τὸν ἑαυτόν του.

(γ) Ἐὰν M εἶναι καλῶς διατεταγμένον σύνολον καὶ ὅμοιον πρὸς σύνολον N $(M \simeq N)$, ὑπάρχει μία μόνον καθ' ὁμοιότητα ἀπεικόνισις τοῦ M ἐπὶ τοῦ N.

(δ) Ἕνα καλῶς διατεταγμένον σύνολον πρὸς οὐδὲν ἐκ τῶν τμημάτων του εἶναι ὅμοιον.

5. Ἡ κορωνὶς ὅλων τῶν θεωρημάτων τῶν ἀναφερομένων εἰς τὰ καλῶς διατεταγμένα σύνολα εἶναι τὸ λεγόμενον *Θεώρημα τῆς καλῆς διατάξεως*, τὸ ὁποῖον ἀπεδέχετο μὲν ὡς ἀληθὲς ὁ Cantor, ἀλλ' ἀπεδείχθη μὲ κάθε αὐστηρότητα ὑπὸ τοῦ Zermelo τὸ 1904:

Κάθε σύνολον ἐπιδέχεται καλὴν διάταξιν.

Ἐὰν δηλαδὴ μᾶς δοθῇ ἕνα ὁποιονδήποτε σύνολον, εἶναι δυνατὴ μιὰ τέτοια ἀναδιάταξις τῶν στοιχείων του, ὥστε νὰ ἀποβῇ αὐτὸ ἕνα καλῶς διατεταγμένον σύνολον. Τὸ ἀτύχημα ὅμως εἶναι ὅτι, παρὰ τὴν ὕπαρξιν τῆς δυνατότητος αὐτῆς, δὲν ἀνευρέθη μέχρι σήμερον τρόπος πρακτικῆς κατασκευῆς τῆς ἐν λόγῳ ἀναδιατάξεως. Ἀκόμη καὶ διὰ σύνολα σχετικῶς ἁπλᾶ, ὅπως αὐτὰ μὲ πληθάριθμα **c**, τὸ πρόβλημα τῆς κατασκευῆς τῆς καλῆς διατάξεως παραμένει ἀνεπίλυτον μέχρι τοῦδε(*).

6. Ἀφοῦ ὅλα τὰ καλῶς διατεταγμένα σύνολα εἶναι μεταξύ των συγκρίσιμα, ἔχομεν τώρα τὸν τρόπον διακρίσεως μεταξὺ τῶν ἀντιστοίχων των διατακτικῶν τύπων. Οἱ διατακτικοὶ τύποι τῶν καλῶς διατεταγμένων συνόλων ὀνομάζονται *διατακτικοὶ ἀριθμοί*. Ἐὰν ἕνα καλῶς διατεταγμένον σύνολον M εἶναι ὅμοιον πρὸς τμῆμα ἑνὸς καλῶς διατεταγμένου συνόλου N, θὰ λέγωμεν ὅτι ὁ διατακτικὸς ἀριθμὸς $\boldsymbol{\mu} = [M]$ εἶναι μικρότερος τοῦ διατακτικοῦ ἀριθμοῦ $\boldsymbol{\nu} = [N]$: $\boldsymbol{\mu} < \boldsymbol{\nu}$.

Κάθε καλῶς διατεταγμένον σύνολον M καὶ κάθε ὅμοιον σύνολον πρὸς τὸ M ἔχουν τὸν αὐτὸν καὶ κατὰ ἕνα μόνον τρόπον ὁριζόμενον διατακτικὸν ἀριθμὸν $\boldsymbol{\mu}$ καὶ ὁ ὁποῖος ἠμπορεῖ νὰ συγκριθῇ ὡς πρὸς τὸ μέγεθος πρὸς ὅλους τοὺς ἄλλους διατακτικοὺς ἀριθμοὺς (διατακτικοὺς τύπους, ἐπαναλαμβάνομεν, καλῶς διατεταγμένων συνόλων). Διὰ τοὺς διατακτικοὺς

* Ἡ εἰδικὴ σημασία τοῦ θεωρήματος τῆς καλῆς διατάξεως ἔγκειται εἰς τὸ ὅτι μᾶς παρέχεται οὕτω ἡ δυνατότης τῆς ἐφαρμογῆς τῆς μεθόδου τῆς πλήρους ἐπαγωγῆς (μετάβασις ἀπὸ n εἰς $n+1$) εἰς ἕνα οἱονδήποτε καλῶς διατεταγμένον σύνολον. Ἐπιθυμοῦμεν νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι μία ὡρισμένη ἰδιότης E ἀνήκει εἰς ὅλα τὰ στοιχεῖα ἑνὸς καλῶς διατεταγμένου συνόλου M. Πρὸς τοῦτο, ἀποδεικνύομεν ὅτι, ἐὰν ἡ ἰδιότης E ἀνήκῃ εἰς ὅλα τὰ προηγούμενα στοιχεῖα ἑνὸς στοιχείου τυχόντος m συμπεριλαμβανομένου καὶ τοῦ πρώτου, ἀναγκαίως θὰ ἀνήκῃ αὐτὴ εἰς τὸ στοιχεῖον m.

Συνέπεια τούτου εἶναι ὅτι ἡ ἰδιότης E ἀνήκει εἰς ὅλα τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου M. Διότι ὑποθέσωμεν ὅτι ὑπάρχουν στοιχεῖα τοῦ συνόλου M, τὰ ὁποῖα δὲν ἔχουν τὴν ἰδιότητα ταύτην· ἀναγκαίως τότε θὰ ὑπῆρχε ἕνα πρῶτον στοιχεῖον e [τοῦ ὑποσυνόλου τῶν στοιχείων τούτων: ὁρισμὸς καλῶς διατεταγμένου συνόλου] τὸ ὁποῖον δὲν θὰ ἔχῃ τὴν ἰδιότητα E—ὁπότε καὶ ὅλα τὰ προηγούμενα τοῦ e στοιχεῖα τοῦ M ἐπίσης δὲν θὰ ἔχουν τὴν ἰδιότητα E. Τοῦτο ὅμως ἀντιβαίνει πρὸς τὸ ἀμέσως ἀνωτέρω ἀποδειχθέν.

Ὅλα λοιπὸν τὰ στοιχεῖα τοῦ M ἔχουν τὴν ἰδιότητα E καί, κατὰ τὸ θεώρημα τῆς καλῆς διατάξεως, κάθε σύνολον ἐπιδέχεται καλὴν διάταξιν. Ἐφαρμόζεται ἄρα ἡ πλήρης ἐπαγωγὴ διὰ τὸ σύνολον τοῦτο.

τύπους τῶν συνόλων ποὺ ἐξητάσαμεν ἤδη ἔχομεν τοὺς διατακτικοὺς ἀριθμούς.

$$\omega, \ \omega + 1, \ \omega + 2, \ \omega \cdot 2, \ \omega^2.$$

Οἱ διατακτικοὶ ἀφ' ἑτέρου τύποι $^*\omega$, $^*\omega + \omega$, η καὶ λ δὲν εἶναι διατακτικοὶ ἀριθμοί.

7. Εἰς τὴν περίπτωσιν συνόλων πεπερασμένων, αἱ ἔννοιαι διατακτικοῦ τύπου, διατακτικοῦ ἀριθμοῦ καὶ πληθαρίθμου ταυτίζονται. Παραδείγματος χάριν, τὸ σύνολον τῶν 15 τελειοφοίτων (σχ. 3) ἔχει πληθάριθμον «15». Ἡ κάθε μία ἀπὸ τὰς $15! = 1307674368000$ μεταθέσεις τῶν στοιχείων του εἶναι σύνολα μεταξύ τους ὅμοια, μὲ κοινὸν διατακτικὸν τύπον «15». Ἐὰν δὲ θεωρήσωμεν ὅλας τὰς ὑπὲρ τὰ 1,3 τρισεκατομύρια παραστάσεις αὐτὰς τῆς τάξεως τῶν τελειοφοίτων, θὰ καταλήγωμεν πάντοτε εἰς τὸ αὐτὸ συμπέρασμα—ὅτι τὸ τελευταῖον στοιχεῖον εἰς τὴν καθεμίαν των εἶναι τὸ δέκατον πέμπτον.

8. Διὰ σύνολα ἄπειρα, μία ἀναδιάταξις τῶν στοιχείων των ὁδηγεῖ εἰς διαφορετικοὺς διατακτικοὺς ἀριθμούς. Τὸ σύνολον π.χ. $N = \{1,2,3,...\}$ ἠμπορεῖ νὰ ἀναδιαταχθῆ κατὰ διαφόρους τρόπους, ὅπως οἱ

$$N_1 = \{2,3,4,...,1\}, \qquad N_2 = \{3,4,5,...,1,2\}$$
$$N_3 = \{1,3,5,...,2,4,6,...\} \qquad N_4 = \{...,3,2,1\}$$
$$N_5 = \{1,3,5,...6,4,2,\}, \qquad N_6 = \{1,11,21,...,2,12,22,...\}$$

Ὅλα τὰ σύνολα αὐτὰ εἶναι ἴσα, ἰσοδύναμα καὶ ἔχουν τὸν αὐτὸν πληθάριθμον $\mathbf{a}$· εἶναι δὲ καὶ διατεταγμένα, μὲ διατακτικοὺς τύπους:

$$[N] = \omega, \qquad [N_1] = \omega + 1, \qquad [N_2] = \omega + 2,$$
$$[N_3] = \omega + \omega = \omega \cdot 2, \qquad [N_4] = {}^*\omega, \qquad [N_5] = \omega + {}^*\omega$$
$$[N_6] = \omega \cdot 10\cdot$$

ὅλους διαφορετικοὺς καὶ μεταξὺ αὐτῶν δὲν ὑπάρχουν ὅμοια σύνολα.

Τὰ σύνολα N, N_1, N_2, N_3, καὶ N_6 εἶναι καλῶς διατεταγμένα. Οἱ διατακτικοί των ἀριθμοὶ εἶναι, ἀντιστοίχως, ω, $\omega + 1$, $\omega + 2$, $\omega \cdot 2$ καὶ $\omega \cdot 10$. Καὶ θὰ ἔχωμεν

$$\omega < \omega + 1 < \omega + 2 < \omega \cdot 2 < \omega \cdot 10.$$

Εἶναι λ.χ. $\omega < \omega + 1$, διότι τὸ N εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ τμῆμα τοῦ N_1 ποὺ ὁρίζεται εἰς αὐτὸ διὰ τοῦ στοιχείου «1».

Τὰ σύνολα N_4 καὶ N_5 δὲν εἶναι καλῶς διατεταγμένα: διότι τὸ N_4 δὲν ἔχει πρῶτον στοιχεῖον, τὸ δὲ N_5 ἔχει μὲν πρῶτον στοιχεῖον ἀλλὰ τὸ ὑποσύνολόν του «σύνολον ἀρτίων ἀριθμῶν» δὲν ἔχει πρῶτον στοιχεῖον.

9. Οἱ κανόνες πράξεων μὲ διατακτικοὺς ἀριθμοὺς εἶναι οἱ ἴδιοι, ὅπως καὶ μὲ διατακτικοὺς τύπους. Ὁ διατακτικὸς ἀριθμός, ὁ ὁποῖος εἶναι ὁ ἀμέσως μεγαλύτερος τοῦ μ εἶναι προφανῶς ὁ $\mu + 1$. Ἡ παρατήρησις αὐτὴ ἐπέτρεψε εἰς τὸν Cantor τὴν κατασκευὴν μιᾶς ἀδιακόπου ἀριθμητικῆς ἀκολουθίας, πέραν τοῦ ἀπείρου ἐπεκτεινομένης:

$$
\begin{array}{cccccc}
0 & 1 & 2 & 3 & \dots & \omega \\
 & \omega+1 & \omega+2 & \omega+3 & \dots & \omega+\omega=\omega.2 \\
 & \omega\cdot 2+1 & \omega\cdot 2+2 & \omega\cdot 2+3 & \dots & \omega\cdot 3 \\
 & \dots & \dots & \dots & \dots & . \\
 & . & . & . & & . \\
 & . & . & . & & . \\
 & . & . & . & & \omega\cdot\omega=\omega^2 \\
 & \omega^2+1 & \omega^2+2 & \omega^2+3 & \dots & \omega^2\cdot 2, \text{ κ.ο.κ.}
\end{array}
$$

Γενικῶς, $\omega^n + \omega^{n-1}\cdot n_1 + \omega^{n-2}\cdot n_2 + \dots$ εἶναι μορφὴ ἑνὸς ὑπερπεπερασμένου διατακτικοῦ ἀριθμοῦ, ὅπως ἐπίσης ω^ω, ω^{ω^ω}, κλπ. Ἠμποροῦμεν λοιπὸν νὰ ἀριθμήσωμεν καὶ πέραν ἀκόμη τοῦ ἀπείρου.

Ἕκαστος διατακτικὸς ἀριθμὸς συντροφεύεται ἐπίσης καὶ μὲ ἕνα ὡρισμένον πληθάριθμον. Παραδείγματος χάριν, τὰ καλῶς διατεταγμένα σύνολα μὲ διατακτικοὺς ἀριθμοὺς ω, $\omega+1$, $\omega+2$, $\omega+n$, $\omega\cdot 2,\dots,\omega^2$ ἔχουν ὅλα πληθάριθμον $\mathbf{a}$. Εἰς κάθε πληθάριθμον ἀντιστοιχεῖ ὁλόκληρος κλάσις διατακτικῶν ἀριθμῶν, ποὺ ὀνομάζεται ἡ «ἀντίστοιχος» τοῦ πληθαρίθμου κλάσις διατακτικῶν ἀριθμῶν.

10. Ἂς εἴμεθα ἱκανοποιημένοι μὲ τὴν βραχεῖαν αὐτὴν ἐπισκόπησιν τῆς θεωρίας τῶν καλῶς διατεταγμένων συνόλων, ἐὰν μᾶς ἐπέτρεψε αὐτὴ νὰ διαπιστώσωμεν τὴν ἀλήθειαν τῆς παρατηρήσεως τοῦ Hilbert ὅτι ἡ θεωρία αὐτὴ χαρακτηρίζει «μίαν ἀπὸ τὰς πλέον θαυμαστὰς ἀνθηφορίας τοῦ μαθηματικοῦ πνεύματος» καὶ ὅτι ἀποτελεῖ ἕνα «ἀπὸ τὰ ὑψηλότερα ἐπιτεύγματα τῆς καθαρῶς διανοητικῆς δημιουργητικότητος τοῦ ἀνθρώπου».

Ἡ διέπουσα ἀφ' ἑτέρου τὰ μαθηματικὰ ἐγκράτεια ἐκφράσεων δὲν πρέπει νὰ μᾶς ἐμποδίσῃ ἀπὸ τὸ νὰ ἐκτιμήσωμεν κατ' ἀξίαν τὰ σχόλια τοῦ Cantor ἐν σχέσει πρὸς τὰς ἰσότητας

$$1+\omega=\omega \text{ καὶ } \omega+1=\omega+1.$$

«Ὅπως φαίνεται πολὺ καθαρά, ἡ συσχέτισις πεπερασμένου καὶ ἀπείρου ἠμπορεῖ νὰ ἔχῃ συνεπείας ἀπροβλέπτους. Ὅταν τὸ πεπερασμένον προηγῆται, ἀπορροφεῖται ἀπὸ τὸ ἄπειρον καὶ ἀφανίζεται ἐντὸς αὐτοῦ. Ἐὰν ὅμως γνωρίζῃ (τὸ πεπερασμένον) τοῦτο καὶ τοποθετῆται μετὰ τὸ ἄπειρον, διασώζεται καὶ ἑνοῦται μετὰ τοῦ ἀπείρου εἰς μίαν νέαν, ἄλλου εἴδους, ἀπειρίαν».

Ἀσκήσεις

1. Ποῖα ἀπὸ τὰ κάτωθι σύνολα εἶναι καλῶς διατεταγμένα;

$$Z = \{\,0,1,-1,2,-2,3,-3,\ldots\}$$
$$\overline{Z} = \{\,\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$$
$$Z_1 = \{\,0,1,2,3,\ldots,-1,-2,-3,\ldots\}$$
$$Z_2 = \{\,1,2,3,\ldots,0,-1,-2,-3,\ldots\}$$
$$Z_3 = \{\,1,2,3,\ldots,-1,-2,-3,\ldots,0\}.$$

2. Δώσατε τοὺς διατακτικοὺς τύπους τῶν ἀνωτέρω συνόλων. Ποῖοι ἐξ αὐτῶν εἶναι διατακτικοὶ ἀριθμοί;

3. Ἕνα καλῶς διατεταγμένον σύνολον ἠμπορεῖ νὰ ἔχῃ ὑποσύνολον διατακτικοῦ τύπου $^*\omega$;

4. Ἰσχύει ἡ ἀνισότης $\mu < \mu + 1$ διὰ κάθε διατακτικὸν ἀριθμὸν μ;

5. Ὑπάρχουν περισσότεροι ἀπὸ ἕνα τρόποι, διὰ τῶν ὁποίων τὸ μὴ καλῶς διατεταγμένον σύνολον

$$\overline{Z} = \{\,\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$$

ἠμπορεῖ νὰ ἀπεικονισθῇ καθ' ὁμοιότητα ἐπὶ τοῦ ἑαυτοῦ του;

6. Οἱ διατακτικοὶ τύποι $\eta + 1$ καὶ $1 + \eta$ εἶναι διατακτικοὶ ἀριθμοί;

5

ΣΗΜΕΙΟΣΥΝΟΛΑ

XIII. Σημεῖα συσσωρεύσεως καὶ συμπυκνώσεως.

1. Ὡς ἁπλῆν ἐφαρμογὴν τῆς θεωρίας τῶν συνόλων ἄς θεωρήσωμεν τελικῶς τὰ σημειοσύνολα. Ἐξητάσαμεν ἤδη διάφορα παραδείγματα σημειοσυνόλων, ὅπως εἶναι οἱ κόμβοι ἐπὶ εὐθείας γραμμῆς, ἐντὸς ἑνὸς τετραγώνου, ἑνὸς κύβου ἢ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ἢ τὰ σημεῖα ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος, μιᾶς εὐθείας γραμμῆς, τοῦ ἐπιπέδου, τοῦ κύβου κλπ. Εἰς τὰ ἀκολουθοῦντα, θὰ περιορίσωμεν τὴν ἔρευνάν μας ἐπὶ τῶν *γραμμικῶν σημειοσυνόλων*, σημειοσυνόλων δηλαδὴ ἐπὶ εὐθείας γραμμῆς. Τὴν εὐθεῖαν αὐτὴν ἠμποροῦμεν νὰ τὴν φανταζώμεθα καὶ ὡς ἀριθμητικὴν κλίμακα (ἢ ἄξονα, σχῆμα 19), ὁπότε θὰ παριστᾶ μίαν καθ' ὁμοιότητα ἀπεικόνισιν τοῦ διατεταγμένου συνόλου τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν ἐπὶ τῶν σημείων τῆς κλίμακος ταύτης.

Ἐὰν τὸ σημεῖον P_1 εἶναι ἡ εἰκὼν τοῦ πραγματικοῦ ἀριθμοῦ z_1 καὶ τὸ P_2 ἡ εἰκὼν τοῦ z_2, ἀπὸ τὴν σχέσιν $z_1 \prec z_2$ (ἢ $z_1 < z_2$) θὰ ἔχωμεν τὴν σχέσιν $P_1 \prec P_2$ (ἢ ὅτι τὸ P_1 εὑρίσκεται ἀριστερὰ τοῦ P_2). Προτάσεις δηλαδή, ἀναφερόμεναι εἰς σημειοσύνολα εἶναι ταυτοχρόνως καὶ προτάσεις ἀναφερόμεναι εἰς πραγματικοὺς ἀριθμοὺς διατεταγμένους κατὰ τὰς ἀριθμητικάς των τιμὰς καὶ δὲν δύναται ἑπομένως νὰ ὁδηγήσῃ εἰς παρανοήσεις ἡ χρησιμοποίησις ἐκφράσεων ὡς αἱ κατωτέρω:

Ρητὰ σημεῖα εἶναι σημεῖα-εἰκόνες ρητῶν ἀριθμῶν.

Ἀσύμμετρα σημεῖα εἶναι σημεῖα-εἰκόνες ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν.

Διὰ τὸν καθορισμὸν τοῦ ἀκριβοῦς περιεχομένου τῆς λέξεως *διάστημα*, θὰ γράφωμεν

$[a,b]$ διὰ τὴν παράστασιν *κλειστοῦ* διαστήματος, ἐντὸς τοῦ ὁποίου περιέχονται τὰ *ἄκρα* a καὶ b αὐτοῦ.

(a,b) διὰ τὴν παράστασιν *ἀνοικτοῦ* διαστήματος, ἐντὸς τοῦ ὁποίου δὲν περιέχονται τὰ ἄκρα a καὶ b.

$[a,b)$ διὰ τὴν παράστασιν *ἡμιανοίκτου* διαστήματος, περιέχοντος τὸ a ἀλλ' ὄχι τὸ b.

$(a,b]$ διὰ τὴν παράστασιν ἡμιανοίκτου διαστήματος, περιέχοντος τὸ b ἀλλ' ὄχι τὸ a.

Τὸ σημειοσύνολον λ.χ. X εἰς τὸ διάστημα $(0,1)$ ὁρίζεται διὰ τῶν ἀνισοτήτων $0 < x < 1$, τὸ δὲ σημειοσύνολον εἰς τὸ διάστημα $[0,1]$ διὰ τῶν $0 \leq x \leq 1$.

Παραδείγματα σημειοσυνόλων:

Τὸ σύνολον ὅλων τῶν κόμβων ἐπὶ μιᾶς εὐθείας: $\{...,-2,-1,0,1,2...\}$.

Τὸ σύνολον ὅλων τῶν σημείων: $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4},...\}$

Τὸ σύνολον ὅλων τῶν σημείων τοῦ διαστήματος $[0,1]$.

Τὸ σύνολον ὅλων τῶν ρητῶν σημείων τοῦ διαστήματος $(0,1]$.

Τὸ σύνολον ὅλων τῶν ἀσυμμέτρων σημείων τοῦ διαστήματος $(0,2)$.

2. Ὀνομάζομεν *σημεῖον συσσωρεύσεως* ἕνα σημεῖον P ἑνὸς σημειοσυνόλου M, ὅταν εἰς κάθε γειτονιὰν τοῦ P ὑπάρχῃ ἀπειρία σημείων τοῦ M. Δι' ἕνα γραμμικὸν σημειοσύνολον M, *γειτονιὰ* τοῦ P ὀνομάζεται τὸ σύνολον ὅλων τῶν σημείων τοῦ M, τῶν ὁποίων ἡ ἀπόστασις ἀπὸ τοῦ P εἶναι μικροτέρα ἀπολύτως ἑνὸς δοθέντος θετικοῦ ἀριθμοῦ ϵ ὁσονδήποτε μικροῦ. Ἠμποροῦμεν ἀκόμη νὰ εἴπωμεν: Τὸ P εἶναι σημεῖον συσσωρεύσεως τοῦ σημειοσυνόλου M, ὅταν εἰς κάθε γειτονιὰν τοῦ P, ὁσονδήποτε μικράν, ὑπάρχῃ πάντοτε ἕνα τουλάχιστον σημεῖον τοῦ M διάφορον τοῦ P.

Παραδείγματα:

(α) Τὸ σύνολον τῶν κόμβων ἐπὶ μιᾶς εὐθείας δὲν ἔχει σημεῖα συσσωρεύσεως.

(β) Τὸ σύνολον ὅλων τῶν ρητῶν σημείων ἀποτελεῖται μόνον ἀπὸ σημεῖα συσσωρεύσεως· διότι μεταξὺ δύο ρητῶν ἀριθμῶν, ὁσονδήποτε πλησίον μεταξύ των, ὑπάρχει πάντοτε ἀπειρία ἄλλων ρητῶν. (Διότι ὁ μέσος ἀριθμητικὸς δύο ρητῶν περιέχεται μεταξὺ αὐτῶν καὶ εἶναι προφανῶς ρητός).

(γ) Τὸ σύνολον ὁμοίως ὅλων τῶν σημείων ἐπὶ μιᾶς εὐθείας καὶ τὸ σύνολον ὅλων τῶν ἀσυμμέτρων ἐπὶ μιᾶς εὐθείας ἀποτελοῦνται ἀποκλειστικῶς ἀπὸ σημεῖα συσσωρεύσεως.

(δ) Τὸ σύνολον $P_1 = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4},...\}$ ἔχει ἕνα μόνον σημεῖον συσσωρεύσεως, τὸ 0, τὸ ὁποῖον δὲν ἀνήκει εἰς τὸ σύνολον.

(ε) Τὸ σύνολον $P_2 = \{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}...\}$ ἔχει καὶ αὐτὸ ἕνα μόνον σημεῖον συσσωρεύσεως, τὸ 1, τὸ ὁποῖον ἐπίσης δὲν ἀνήκει εἰς τὸ σύνολον.

(στ) Τὸ σύνολον $P_3 = \left\{ 1, \frac{5}{4}, \frac{11}{9}, \cdots \frac{n^2+n-1}{n^2}, \cdots \right\}$ ἔχει ἕνα μόνον σημεῖον συσσωρεύσεως, τὸ 1, τὸ ὁποῖον ἀνήκει εἰς τὸ σύνολον.

(ζ) Τὸ σύνολον $P_4 = \left\{ \frac{+1}{2}, \frac{-2}{3}, \frac{+3}{4}, \frac{-4}{5}, \cdots \right\}$ ἔχει ὡς σημεῖα συσσωρεύσεως τὰ -1 καὶ 1, τὰ ὁποῖα δὲν ἀνήκουν εἰς τὸ σύνολον.

3. Τὰ πεπερασμένα σύνολα δὲν ἔχουν προφανῶς σημεῖα συσσωρεύσεως. Δι' ἄπειρα σύνολα ἰσχύει τὸ θεώρημα τῶν Weierstrass—Bolzano:*

Κάθε περατωμένον καὶ ἄπειρον σημειοσύνολον ἔχει τουλάχιστον ἕνα σημεῖον συσσωρεύσεως.

Ἕνα γραμμικὸν σημειοσύνολον λέγεται *περατωμένον* ἐὰν ὁλόκληρον εὑρίσκεται ἐντὸς ἑνὸς κλειστοῦ διαστήματος. Ἡ ἀπόδειξις τοῦ θεωρήματος τῶν Weirstrass-Bolzano γίνεται πολὺ εὔκολα μὲ τὴν βοήθειαν τῶν *ἀλληλενθέτων διαστημάτων:*

Τὸ σημεῖον ποὺ διχοτομεῖ τὸ διάστημα, ἐντὸς τοῦ ὁποίου κεῖται τὸ περατωμένον καὶ ἄπειρον σημειοσύνολον M, διαιρεῖ τὸ M εἰς δύο ὑποσύνολα, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ ἕνα τουλάχιστον, ἔστω τὸ M_1 περιέχει ἄπειρα σημεῖα. Τὸ σημεῖον ποὺ διχοτομεῖ τὸ ὑποσύνολον M_1, διαιρεῖ αὐτὸ εἰς δύο ὑποσύνολα, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ ἕνα τουλάχιστον, ἔστω τὸ M_2, περιέχει ἄπειρα σημεῖα. Διὰ συνεχίσεως τῆς διχοτομήσεως αὐτῆς φθάνομεν τελικῶς εἰς ἕνα ὑποσύνολον πλάτους αὐθαιρέτως μικροῦ ἀλλὰ τὸ ὁποῖον περιέχει ἀπειρίαν σημείων. Ἡ ὕπαρξις τοῦ ὑποσυνόλου τούτου ἀποδεικνύει τὸ θεώρημα.

Τὸ σύνολον ὅλων τῶν κόμβων ἐπὶ μιᾶς εὐθείας, μολονότι ἄπειρον σημειοσύνολον, δὲν ἔχει σημεῖα συσσωρεύσεως—ἀλλὰ δὲν εἶναι καὶ περατωμένον. Τὰ σημειοσύνολα P_1, P_2, P_3, καὶ P_4 ἔχουν σημεῖα συσσωρεύσεως, ὡς ἑπόμενον, ἀφοῦ εἶναι ἄπειρα καὶ περατωμένα. (Διὰ νὰ ἔχῃ, ἐν τούτοις, ἕνα ἄπειρον σύνολον σημεῖα συσσωρεύσεως δὲν εἶναι ἀπαραίτητον νὰ εἶναι περατωμένον.)

4. Ἐὰν εἰς κάθε γειτονιὰν ἑνὸς σημείου P, ὁσονδήποτε μικράν, ὑπάρχῃ πάντοτε ἀπειρία μὴ ἀριθμήσιμος σημείων ἑνὸς σημειοσυνόλου M, τὸ σημεῖον P θὰ λέγεται *σημεῖον συμπυκνώσεως τοῦ συνόλου.*

Ἕνα σημεῖον συμπυκνώσεως εἶναι ἀναγκαίως σημεῖον συσσωρεύσεως, ἕνα ὅμως σημεῖον συσσωρεύσεως δὲν εἶναι ἀπαραίτητον νὰ εἶναι σημεῖον συμπυκνώσεως.

*Bernand Bolzano (1781-1848), Karl Th. W. Weierstrass (1815-1897).

Παραδείγματα:

Τὸ σύνολον ὅλων τῶν πραγματικῶν σημείων περιέχει μόνον σημεῖα συμπυκνώσεως.

Τὸ σύνολον ὅλων τῶν ἀσυμμέτρων σημείων περιέχει ἐπίσης μόνον σημεῖα συμπυκνώσεως.

Τὸ σύνολον ὅλων τῶν ῥητῶν σημείων περιέχει μόνον σημεῖα συσσωρεύσεως καὶ οὐδὲν ἐξ αὐτῶν εἶναι σημεῖον συμπυκνώσεως.

Ἀσκήσεις

1. Διὰ καταλλήλου ἐκλογῆς σημειοσυνόλων δείξατε ὅτι $(1+\eta)\cdot n = 1+\eta$.

2. Μὲ ὅμοιον τρόπον δείξατε ὅτι $(\lambda+1)n = \lambda+1$.

3. Ποῖα εἶναι τὰ σημεῖα συσσωρεύσεως ποὺ περιέχονται εἰς τὸ σύνολον ὅλων τῶν λύσεων τῆς ἐξισώσεως

$$x^2 - \frac{n+3}{2n}x + \frac{n+1}{2n^2} = 0$$

ὅταν τὸ n εἶναι στοιχεῖον τοῦ συνόλου τῶν φυσικῶν ἀκεραίων;

4. Δώσατε παραδείγματα συνόλων, τὰ ὁποῖα στεροῦνται σημείων συσσωρεύσεως.

5. Δείξατε ὅτι: Κάθε μὴ ἀριθμήσιμον σημειοσύνολον ἔχει τουλάχιστον ἕνα σημεῖον συμπυκνώσεως. Ὑποδείξεις : (α) Ἐὰν τὸ σύνολον εἶναι περατωμένον, ἡ ἀπόδειξις εἶναι ὁμοία πρὸς ἐκείνην τοῦ θεωρήματος τῶν Weierstrass—Bolzano, ὅπου ἡ λέξις «ἄπειρον» ἀντικαθίσταται ὑπὸ τῆς «μὴ ἀριθμήσιμον». (β) Ἐὰν τὸ σύνολον δὲν εἶναι περατωμένον, εἶναι δυνατὸν νὰ διασπασθῇ εἰς ἀριθμήσιμον πλῆθος ὑποσυνόλων, ἐκ τῶν ὁποίων ἕνα τουλάχιστον περιέχει ἕνα μὴ ἀριθμήσιμον σημειοσύνολον· ἐφαρμόζομεν ἀκολούθως τὴν ἀπόδειξιν (α) ἐπὶ τοῦ μὴ ἀριθμησίμου ὑποσυνόλου τούτου.

XIV. Κλειστά, πυκνὰ καὶ τέλεια σύνολα.

1. Ἐὰν ὅλα τὰ σημεῖα συσσωρεύσεως ἑνὸς σημειοσυνόλου M ἀνήκουν εἰς τὸ M, τὸ σύνολον M λέγεται *κλειστόν*.

Παραδείγματα:

(α) Τὸ σημειοσύνολον $P_1 = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$ δὲν εἶναι κλειστόν, διότι τὸ μοναδικόν του σημεῖον συσσωρεύσεως 0 δὲν ἀνήκει εἰς τὸ σύνολον.

(β) Ὁμοίως καὶ διὰ τὸ σημειοσύνολον $P_2 = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots\right\}$, μὲ μοναδικὸν σημεῖον συσσωρεύσεως 1 μὴ ἀνῆκον εἰς τὸ σύνολον.

(γ) Τὸ σημειοσύνολον $P_3 = \left\{1, \frac{5}{4}, \frac{11}{9}, \frac{19}{16}, \frac{29}{25}, \frac{41}{36}, \dots\right\}$ εἶναι κλειστόν, διότι τὸ μόνον αὐτοῦ σημεῖον συσσωρεύσεως, τὸ 1, ἀνήκει εἰς τὸ σύνολον.

(δ) Τὸ σημειοσύνολον $P_4 = \left\{ \frac{+1}{2}, \frac{-2}{3}, \frac{+2}{4}, \frac{-4}{5}, \dots \right\}$ δὲν εἶναι κλειστόν, ἐνῷ τὸ $P_5 = \left\{ +1, -1, \frac{+1}{2}, \frac{-2}{3}, \frac{+3}{4}, \dots \right\}$ εἶναι κλειστόν.

(ε) Τὸ σημειοσύνολον ἑνὸς κλειστοῦ διαστήματος εἶναι κλειστόν.

(στ) Τὸ σημειοσύνολον ἀντιθέτως ἑνὸς ἀνοικτοῦ διαστήματος (a,b) δὲν εἶναι κλειστόν· διότι τὰ σημεῖα a καὶ b εἶναι μὲν σημεῖα συσσωρεύσεως τοῦ συνόλου ἀλλ' ἐκτὸς αὐτοῦ κείμενα.

2. Τὰ σημεῖα συσσωρεύσεως ἑνὸς συνόλου M ἠμποροῦμεν νὰ τὰ θεωρήσωμεν ὡς στοιχεῖα ἑνὸς συνόλου M'. Τὸ σύνολον M' ὀνομάζεται τὸ *παράγωγον σύνολον* τοῦ συνόλου M. Τὸ σύνολον M' ἠμπορεῖ νὰ εἶναι τὸ κενὸν σύνολον, ὅπως λ.χ. συμβαίνει, ὅταν τὸ M εἶναι πεπερασμένον σύνολον ἢ τὸ σύνολον τῶν κόμβων ἐπὶ μιᾶς εὐθείας. Φανερὸν εἶναι ὅτι ἡ σχέσις $M' \subseteq M$ ἐκφράζει ὅτι τὸ σύνολον M εἶναι κλειστόν.

3. Τὸ παράγωγον σύνολον ἑνὸς σημειοσυνόλου εἶναι κλειστὸν σύνολον.

Ἀπόδειξις: Ἔστω M' τὸ παράγωγον σύνολον τοῦ M καὶ ὑποθέσωμεν ὅτι P εἶναι σημεῖον συσσωρεύσεως τοῦ M'. Θὰ ὑπάρχουν τότε εἰς κάθε γειτονιὰν τοῦ P ἀπειρία σημείων τοῦ M', ἀπειρία δηλαδὴ σημείων συσσωρεύσεως τοῦ M. Ὑπάρχουν συνεπῶς εἰς τὴν γειτονιὰν τοῦ σημείου P ἄπειρα σημεῖα τοῦ M· τοῦτο ὅμως σημαίνει ὅτι τὸ P εἶναι σημεῖον συσσωρεύσεως τοῦ M καὶ ἑπομένως ὅτι ἀνήκει εἰς τὸ M'. Εἶναι ἄρα τὸ M' σύνολον κλειστόν.

Εἶναι φανερὸν ὅτι, ἐὰν M'' εἶναι τὸ παράγωγον τοῦ M', θὰ ἔχωμεν

$$M'' \subseteq M'.$$

4. Ἕνα σύνολον M λέγεται *πυκνόν*, ὅταν μεταξὺ δύο τυχόντων σημείων τοῦ M ὑπάρχῃ τουλάχιστον ἕνα σημεῖον τοῦ M. Τοῦτο σημαίνει ὅτι εἰς πυκνὸν σύνολον M δὲν ὑπάρχει *ἀμέσως* γειτονικὸν σημεῖον ἑνὸς τυχόντος σημείου τοῦ M.

Παραδείγματα:

(α) Τὸ σύνολον ὅλων τῶν πραγματικῶν ἢ ῥητῶν σημείων ἑνὸς ἀνοικτοῦ ἢ κλειστοῦ διαστήματος ἐπὶ εὐθείας γραμμῆς εἶναι πυκνόν.

(β) Τὸ σημειοσύνολον $P_2 = \{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots \}$ δὲν εἶναι πυκνόν.

(γ) Ἕνα πυκνὸν σημειοσύνολον δὲν ἀποτελεῖται ἀναγκαίως μόνον ἀπὸ σημεῖα συσσωρεύσεως. Τὸ σημειοσύνολον λ.χ. $M = \{ (0,1), 2, (3,4) \}$ εἶναι πυκνόν, διότι τὸ σημεῖον 2 δὲν ἔχει ἀμέσως γειτονικὸν σημεῖον εἰς τὸ σύνολον M· τὸ 2 ἐν τούτοις δὲν εἶναι προφανῶς σημεῖον συσσωρεύσεως τοῦ M. Τὰ σημεῖα ἀφ' ἑτέρου 1 καὶ 3 εἶναι μὲν σημεῖα συσσωρεύσεως τοῦ M, ἀλλὰ δὲν ἀνήκουν εἰς αὐτό. Εἶναι ἄρα τὸ M σύνολον πυκνόν, ἀλλὰ μὴ κλειστόν.

5. Ἕνα πυκνὸν σημειοσύνολον M ἠμπορεῖ νὰ εἶναι ὅμοιον μόνον πρὸς πυκνὸν ἐπίσης σύνολον. Διότι, ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ M εἶναι πυκνὸν σύνολον καὶ ὅτι ἕνα μὴ πυκνὸν σημειοσύνολον N περιέχει δύο γειτονικὰ σημεῖα n_1 καὶ n_2. Τότε, ἐὰν τὸ M ἦτο ὅμοιον πρὸς τὸ N, τὰ σημεῖα m_1 καὶ m_2 τοῦ M, τὰ ὁποῖα εἶναι ἀντίστοιχα τῶν σημείων n_1 καὶ n_2 τοῦ N, θὰ ἔπρεπε νὰ ἦσαν δύο γειτονικὰ σημεῖα, πρᾶγμα ποὺ ἀντιβαίνει πρὸς τὸν χαρακτηρισμὸν τοῦ M ὡς πυκνοῦ συνόλου. Ἀναγκαίως λοιπὸν τὸ M δὲν ἠμπορεῖ νὰ εἶναι ὅμοιον πρὸς σημειοσύνολον μὴ πυκνόν.

6. Ὅλα τὰ πυκνὰ καὶ ἀριθμήσιμα σημειοσύνολα, τὰ ὁποῖα δὲν ἔχουν πρῶτον ἢ τελευταῖον στοιχεῖον, εἶναι ὅμοια μεταξύ των. Ὅπως εἴδομεν προηγουμένως ὁ διατακτικός των τύπος εἶναι η. Ἀφ' ἑτέρου, ἐὰν δύο διατεταγμένα σύνολα εἶναι ὅμοια, ἀναγκαίως ἢ καὶ τὰ δύο σύνολα θὰ ἔχουν πρῶτον (ἢ τελευταῖον) στοιχεῖον ἢ καὶ τὰ δύο σύνολα θὰ στεροῦνται τέτοιου στοιχείου. Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι ὅλα τὰ πυκνὰ καὶ ἀριθμήσιμα σημειοσύνολα ἀνήκουν εἰς τὸν ἕνα ἐκ τῶν τεσσάρων διατακτικῶν τύπων

$$\eta,\quad \eta+1,\quad 1+\eta,\quad 1+\eta+1.$$

7. Ὅταν κάθε σημεῖον ἑνὸς σημειοσυνόλου M εἶναι σημεῖον συσσωρεύσεως τοῦ M, θὰ εἶναι τὸ M ἕνα ὑποσύνολον τοῦ M',

$$M \subseteq M',$$

καὶ τὸ σύνολον M θὰ λέγεται *πυκνὸν καθ' ἑαυτό*.

Παραδείγματα:

(α) Τὸ σημειοσύνολον κάθε ἀνοικτοῦ ἢ κλειστοῦ διαστήματος εἶναι πυκνὸν καθ' ἑαυτό.

(β) Τὸ σημειοσύνολον $M = \{(0,1),2,(3,4)\}$ εἶναι πυκνὸν ἀλλ' ὄχι πυκνὸν καθ' ἑαυτό.

(γ) Τὸ κλειστὸν σημειοσύνολον $P = \{[0,1],[2,3]\}$ εἶναι πυκνὸν καθ' ἑαυτό, ἀφοῦ κάθε σημεῖον του εἶναι σημεῖον συσσωρεύσεως. Δὲν εἶναι ὅμως πυκνόν, διότι τὰ σημεῖα 1 καὶ 2 εἶναι σημεῖα γειτονικὰ τοῦ P καὶ μεταξὺ αὐτῶν δὲν ὑπάρχει ἄλλο σημεῖον τοῦ P.

8. Ἐὰν ἕνα σημειοσύνολον εἶναι κλειστὸν καὶ πυκνὸν καθ' ἑαυτό, ὀνομάζεται *τέλειον*. Τὰ τέλεια σημειοσύνολα περιέχουν ὅλα τὰ σημεῖα συσσωρεύσεως αὐτῶν καὶ τὸ καθὲν ἐκ τῶν σημείων των εἶναι σημεῖον συσσωρεύσεως. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν θὰ ἔχωμεν $M' \subseteq M$ ἀλλὰ καὶ $M \subseteq M'$ καὶ ἑπομένως $M = M'$. Ταυτίζεται δηλαδὴ ἕνα τέλειον σύνολον πρὸς τὸ παράγωγον αὐτοῦ σύνολον.

Παραδείγματα:

(α) Τὸ σύνολον ὅλων τῶν σημείων ἐπὶ εὐθείας γραμμῆς ἢ ἐπὶ ἑνὸς κλειστοῦ διαστήματος εἶναι τέλειον.

(β) Τὸ σύνολον ὅλων τῶν ρητῶν σημείων ἐπὶ μιᾶς εὐθείας ἢ ἐπὶ ἑνὸς κλειστοῦ διαστήματος εἶναι πυκνὸν καὶ μάλιστα πυκνὸν καθ' ἑαυτό, ἀλλὰ μὴ κλειστὸν καὶ ἑπομένως μὴ τέλειον σύνολον. Δὲν περιέχει τὴν μὴ ἀριθμήσιμον ἀπειρίαν τῶν ἀσυμμέτρων σημείων συσσωρεύσεως αὐτοῦ. Εἰς τὴν γειτονιὰν κάθε ἀσυμμέτρου σημείου αὐτοῦ ὑπάρχουν ἄπειρα ρητὰ σημεῖα: τοῦτο φαίνεται ἐκ τῶν ἀνισοτήτων:

$$1{,}4 < 1{,}41, < 1{,}414 < 1{,}4142 < \sqrt{2} < 1{,}4143 < 1{,}415 < 1{,}42 < 1{,}5.$$

(γ) Ἕνα σύνολον πεπερασμένον εἶναι πάντοτε κλειστὸν ἀλλὰ δὲν εἶναι οὔτε πυκνόν, οὔτε πυκνὸν καθ' ἑαυτὸ οὔτε τέλειον, ἀφοῦ δὲν περιέχει σημεῖα· συσσωρεύσεως. Τὸ παράγωγον αὐτοῦ σύνολον εἶναι τὸ κενὸν σύνολον.

(δ) Ὁ πληθάριθμος κάθε τελείου γραμμικοῦ σημειοσυνόλου εἶναι **c**.

Ἀσκήσεις

1. Εἶναι τὸ σημειοσύνολον $\{0{,}1,\ 0{,}01,\ 0{,}001, \dots\}$ κλειστόν;

2. Ποῖον εἶναι τὸ παράγωγον τοῦ συνόλου ὅλων τῶν ρητῶν σημείων τοῦ διαστήματος $(1{,}2)$;

3. Τὸ αὐτὸ ἐρώτημα διὰ τὰ ρητὰ σημεῖα τοῦ διαστήματος $\langle 1{,}2 \rangle$.

4. Τὸ σύνολον ὅλων τῶν ρητῶν σημείων τοῦ διαστήματος $\langle 2{,}3 \rangle$ εἶναι κλειστόν;

5. Τὸ σύνολον ὅλων τῶν ρητῶν σημείων τοῦ διαστήματος $\langle 2{,}3 \rangle$ εἶναι πυκνόν;

6. Εἶναι τὸ ἴδιον σύνολον πυκνὸν καθ' ἑαυτό;

7. Τὸ παράγωγον τοῦ ἰδίου συνόλου εἶναι κλειστόν; Εἶναι τέλειον;

8. Τὸ παράγωγον κάθε ἀπείρου συνόλου εἶναι σύνολον τέλειον;

XV. Συνεχῆ σύνολα.

1. Ὁ Dedekind εἰσήγαγε τὸ 1872 τὴν ἔννοιαν τῆς «τομῆς», ἡ ὁποία ἠμπορεῖ νὰ ἐφαρμοσθῇ ἐπὶ διατεταγμένων σημειοσυνόλων (ἑπομένως καὶ ἐπὶ διατεταγμένων συνόλων ἐκ πραγματικῶν ἀριθμῶν). Ἐὰν ἕνα σημειοσύνολον M διαιρεθῇ εἰς δύο μὴ κενὰ ὑποσύνολα M_1 καὶ M_2, ὁ διαμερισμὸς αὐτὸς λέγεται *μία τομὴ* εἰς τὸ σύνολον M καὶ παρίσταται $M_1|M_2$. Κατὰ τὴν τομὴν ταύτην, συμφωνοῦμεν ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ M νὰ εὑρίσκωνται ἀριστερὰ ὅλων τῶν σημείων τοῦ M_2. Θὰ ἔχωμεν λοιπὸν $M = M_1 \cup M_2$ (διατεταγμένη ἕνωσις) καὶ $M_1 \cap M_2 = \varnothing$ (ἡ τομὴ τῶν M_1 καὶ M_2 εἶναι τὸ κενὸν σύνολον).

2. Κατὰ μίαν τομὴν ἐμφανίζονται αἱ ἑξῆς περιπτώσεις:

(α) Τὸ M_1 ἔχει τελευταῖον σημεῖον καὶ τὸ M_2 πρῶτον σημεῖον. Ὁ τύπος αὐτὸς τομῆς λέγεται *ἅλμα* εἰς τὸ σύνολον M. Μεταξὺ τοῦ τελευταίου σημείου τοῦ M_1 καὶ τοῦ πρώτου τοῦ M_2 δὲν ὑπάρχουν σημεῖα τοῦ M. Εἰς τὴν θέσιν τοῦ ἅλματος τὸ M δὲν εἶναι πυκνόν.

(β) Τὸ M_1 ἔχει τελευταῖον σημεῖον ἀλλὰ τὸ M_2 δὲν ἔχει πρῶτον σημεῖον.

(γ) Τὸ M_1 δὲν ἔχει τελευταῖον σημεῖον καὶ τὸ M_2 ἔχει πρῶτον σημεῖον.

Εἰς τὰς περιπτώσεις (β) καὶ (γ) χαρακτηρίζομεν τὴν τομὴν ὡς *συνεχῆ*.

(δ) Τὸ M_1 δὲν ἔχει τελευταῖον σημεῖον οὔτε τὸ M_2 πρῶτον σημεῖον. Τὸν τύπον αὐτὸν τομῆς χαρακτηρίζομεν ὡς *χάσμα*.

Εἰς ὅλα τὰ πυκνὰ σύνολα, τὰ ὁποῖα ἐθεωρήσαμεν μέχρι τοῦδε, δὲν ὑπάρχουν ἅλματα. Ἕνα ἅλμα ὑποθέτει τὴν ὕπαρξιν δύο γειτονικῶν σημείων.

Παραδείγματα:

(α) Τὸ μὴ πυκνὸν σημειοσύνολον $\{|0,1|, |2,3|\}$ ἔχει τὸ ἅλμα $1|2$. [Περίπτωσις (α)].

(β) Εἰς τὸ σύνολον R ὅλων τῶν ρητῶν σημείων τοῦ διαστήματος $|1,3|$, τὸ σημεῖον 2 παράγει μίαν συνεχῆ τομήν. Ὁ τρόπος διαμερισμοῦ εἶναι:

ἢ $\quad R_1 = \{|1,2|\}, \quad R_2 = \{(2,3|\}$. [Περίπτωσις (β)]

ἢ $\quad R_1 = \{|1,2)\}, \quad R_2 = \{|2,3|\}$. [Περίπτωσις (γ)].

Κατὰ τὸν πρῶτον τρόπον, 2 εἶναι τὸ τελευταῖον σημεῖον τοῦ R_1 ἐνῷ τὸ R_2 δὲν ἔχει πρῶτον σημεῖον. Κατὰ τὸν δεύτερον, τὸ R_1 δὲν ἔχει τελευταῖον σημεῖον, ἐνῷ τὸ 2 εἶναι τὸ πρῶτον σημεῖον τοῦ R_2.

(γ) Εἰς τὸ αὐτὸ σύνολον R, τὸ σημεῖον $\sqrt{2}$, τὸ ὁποῖον δὲν ἀνήκει εἰς τὸ R, παράγει ἀσυνεχῆ τομήν, ἕνα χάσμα. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, τὸ R_1 δὲν ἔχει τελευταῖον σημεῖον οὔτε τὸ R_2 πρῶτον σημεῖον.

3. Ὀνομάζομεν *συνεχὲς* ἕνα σημειοσύνολον, ἐὰν κάθε τομὴ εἰς αὐτὸ εἶναι συνεχής. Εἰς ἕνα συνεχὲς σύνολον δὲν ὑπάρχουν οὔτε ἅλματα οὔτε χάσματα. Τὸ σύνολον ὅλων τῶν ρητῶν σημείων εἶναι πυκνὸν σύνολον καὶ ἅλματα δὲν παρουσιάζει· παρουσιάζει ὅμως χάσματα καὶ μάλιστα ἀπειρίαν χασμάτων. Πράγματι, τὸ πυκνὸν καὶ ἀριθμήσιμον σύνολον ὅλων τῶν ρητῶν σημείων εἶναι σύνολον μὴ ἀριθμήσιμον χασμάτων: ὅπως εἴδομεν εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς $\sqrt{2}$, τὰ ἀσύμμετρα σημεῖα «πληροῦν» τὰ χάσματα. Τὰ ρητὰ σημεῖα πληροῦν τὴν ἀριθμητικὴν κλίμακα πυκνῶς, ἀλλὰ οὐδαμοῦ συνεχῶς. Τὸ συμπέρασμα τοῦτο προκαλεῖ ἔκπληξιν καὶ ἡ συγκεχυμένη ἐνόρασίς μας εὐκόλως θὰ ὡδηγεῖτο εἰς ἀντιφάσεις, ἐὰν δὲν ἔρριπτε τὸ φῶς της ἐπὶ τῶν ἀπατηλῶν τούτων φαινομένων ἡ θεωρία τῶν συνόλων.

4. Ἡ ἀμφιμονοσήμαντος ἀντιστοιχία μεταξὺ τοῦ σημειοσυνόλου ἐπὶ μιᾶς εὐθείας καὶ ἑνὸς ἀριθμητικοῦ συνόλου κατέστη ἀρχικῶς δυνατὴ διὰ τῆς εἰσαγωγῆς τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν. Ἐὰν περιορισθῶμεν μόνον εἰς τοὺς ρητοὺς ἀριθμούς, κάθε ἀριθμὸς θὰ ἀντιστοιχῇ μὲν εἰς ἕνα σημεῖον (ρητὸν σημεῖον) τῆς εὐθείας ἀλλὰ τὸ ἀντίστροφον δὲν θὰ συμβαίνει. Παραδείγματος χάριν, ἐὰν ἡ διαγώνιος ἑνὸς τετραγώνου μὲ πλευρὰν ἴσην πρὸς τὴν μονάδα ἀχθῇ διὰ τῆς ἀρχῆς O, τὸ ἄλλο ἄκρον τῆς διαγωνίου στερεῖται ἀντιστοίχου ἀριθμοῦ—ἐκτὸς ἐὰν εἰσαγάγωμεν τὸ $\sqrt{2}$ ὡς τὸν ἀσύμμετρον ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος πληροῖ τὸ χάσμα $r_{1i} < \sqrt{2} < r_{2k}$ εἰς τὴν τομὴν $R_1|R_2$.

Τὸ εἰδικὸν τοῦτο χάσμα εἰς τὸ σύνολον τῶν ρητῶν ἀριθμῶν ἠμπορεῖ νὰ παρασταθῇ ὡς ἑξῆς: Εἰς τὸ πρῶτον ὑποσύνολον R_1 ὑπάγονται ὅλοι οἱ θετικοὶ ρητοὶ m/n, διὰ τοὺς ὁποίους $m^2/n^2 < 2$ καὶ εἰς τὸ δεύτερον ὑποσύνολον R_2 ὅλοι οἱ m/n, διὰ τοὺς ὁποίους $m^2/n^2 > 2$.

5. Τὸ προηγούμενον θεώρημα, κατὰ τὸ ὁποῖον τὰ ἀριθμήσιμα πυκνὰ σύνολα χωρὶς πρῶτον ἢ τελευταῖον στοιχεῖον εἶναι ὅμοια μεταξύ των, μᾶς ἐπιτρέπει τὸν πλήρη χαρακτηρισμὸν τοῦ διατακτικοῦ τύπου $\boldsymbol{\eta}$ (τοῦ διατακτικοῦ τύπου, ὑπενθυμίζομεν, τοῦ συνόλου ὅλων τῶν ρητῶν σημείων ἐπὶ μιᾶς εὐθείας ἢ ἑνὸς ἀνοικτοῦ διαστήματος). Αἱ ἰδιότητές του εἶναι:

(α) Τὸ διατεταγμένον σύνολον R εἶναι ἀριθμήσιμον.

(β) Εἶναι πυκνόν.

(γ) Δὲν περιέχει οὔτε πρῶτον οὔτε τελευταῖον στοιχεῖον.

Ὁ Cantor ἀπέδειξε ὅτι αἱ τρεῖς αὐταὶ ἰδιότητες ὁρίζουν τελείως τὸν διατακτικὸν τύπον $\boldsymbol{\eta}$.

6. Ὁ διατακτικὸς τύπος τοῦ ἀμφιπλεύρως περατωμένου γραμμικοῦ συνεχοῦς C (ὡς λ.χ. τοῦ σημειοσυνόλου $|0,1|$) συμβολίζεται μὲ τὸ γράμμα $\boldsymbol{\theta}$. Ὁ Cantor ἔδειξε ὅτι ὁ τύπος $\boldsymbol{\theta}$ ἠμπορεῖ τελείως νὰ χαρακτηρισθῇ διὰ τῶν ἑξῆς ἰδιοτήτων:

(α) Τὸ διατεταγμένον σημειοσύνολον C περιέχει ἕνα πυκνὸν ἀριθμήσιμον ὑποσύνολον R τέτοιο, ὥστε μεταξὺ δύο τυχόντων σημείων τοῦ C νὰ μεσολαβῇ τουλάχιστον ἕνα σημεῖον τοῦ R.

(β) Τὸ σύνολον C εἶναι συνεχές.

(γ) Τὸ σύνολον C ἔχει πρῶτον καὶ τελευταῖον στοιχεῖον.

Δεδομένου ὅτι ὁ $\boldsymbol{\theta}$ παρίσταται διὰ κλειστοῦ σημειοσυνόλου, οἱ διατακτικοὶ τύποι $\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\theta}$, $\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\theta}$, $\boldsymbol{\theta} \cdot n$ καὶ $\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\omega}$ εἶναι ὅλοι διαφορετικοί. Ἐπὶ παραδείγματι, τὸ σημειοσύνολον $\{|1,2|, |3,4|\}$, διὰ τοῦ ὁποίου παράγεται τὸ ἅλμα $2|3$, ἔχει διατακτικὸν τύπον $\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\theta}$.

7. Ὁ διατακτικὸς τύπος τοῦ ἀπεράτου γραμμικοῦ συνεχοῦς $\bar{C}$ (ὡς τὸ σημειοσύνολον ἐπὶ μιᾶς εὐθείας ἢ ἑνὸς ἀνοικτοῦ διαστήματος) συμβολίζεται μὲ τὸ γράμμα **λ** καὶ δύναται νὰ περιγραφῇ τελείως διὰ τῶν ἰδιοτήτων:

(α) Τὸ διατεταγμένον σημειοσύνολον $\bar{C}$ περιέχει ἕνα πυκνὸν ἀριθμήσιμον ὑποσύνολον R τέτοιο, ὥστε μεταξὺ δύο τυχόντων σημείων τοῦ $\bar{C}$ νὰ μεσολαβῇ τουλάχιστον ἕνα σημεῖον τοῦ R.

(β) Τὸ σύνολον $\bar{C}$ εἶναι συνεχές.

(γ) Τὸ σύνολον $\bar{C}$ στερεῖται πρώτου καὶ τελευταίου στοιχείου. Θὰ ἔχωμεν λοιπόν: $1+\boldsymbol{\lambda}+1=\boldsymbol{\theta}$ καὶ $\boldsymbol{\lambda}+1+\boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{\lambda}$.

Παραδείγματα:

(α) $[\{1 \cup (1,2) \cup 2\}] \quad = [\{\langle 1,2\rangle\}] = \boldsymbol{\theta}$.

(β) $[\{(1,2) \cup 2 \cup (2,3)\}] = [\{(1,3)\}] = \boldsymbol{\lambda}$.

Ὁ διατακτικὸς τύπος $\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\lambda}$ εἶναι διαφορετικὸς ἀπὸ τὸν $\boldsymbol{\lambda}$· διότι $\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\lambda}$ ἠμπορεῖ νὰ παρασταθῇ ὑπὸ τοῦ σημειοσυνόλου $\{(1,2) \cup (2,3)\}$, τὸ ὁποῖον δὲν εἶναι πανταχοῦ συνεχές, ἀφοῦ ἔχει τὸ χάσμα 2. Ἀντιθέτως, ὁ τύπος $\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\eta}$ εἶναι ἴσος πρὸς $\boldsymbol{\eta}$, διότι τὸ σύνολον ὅλων τῶν ρητῶν σημείων τοῦ διαστήματος $(1,3)$, ἀπὸ τοῦ ὁποίου ἐξῃρέθη τὸ σημεῖον 2, παραμένει πυκνόν, ἀπέρατον καὶ ἀριθμήσιμον.

8. Αἱ ἰδιότητες διατάξεως, αἱ ὁποῖαι χαρακτηρίζουν ἕνα σύνολον M ὡς κλειστόν, πυκνόν, πυκνὸν καθ' ἑαυτό, τέλειον ἢ συνεχές, φυσικὸν εἶναι νὰ πληροῦνται καὶ δι' ὅλα τὰ ὅμοια σύνολα πρὸς τὸ M.

Ἀσκήσεις

1. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $\sqrt{2}$ δὲν εἶναι ρητὸς ἀριθμός, ὅτι δηλαδὴ δὲν εἶναι πηλίκον δύο πρώτων πρὸς ἀλλήλους ἀριθμῶν m καὶ n.

2. Νὰ περιγραφῇ ἡ ὑπὸ τοῦ ἀριθμοῦ $\sqrt{5}$ παραγομένη τομὴ εἰς τὸ σύνολον ὅλων τῶν ρητῶν ἀριθμῶν.

3. Ποῖος ὁ τύπος τῆς τομῆς τῆς παραγομένης ὑπὸ τοῦ ἀριθμοῦ $\sqrt[3]{6}$ εἰς τὸ σύνολον (α) τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν; (β) τῶν ρητῶν ἀριθμῶν; (γ) τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν;

XIV. Αἰώρησις καὶ συνέχεια συναρτήσεων.

1. Τὴν συνάρτησιν $y=f(x)$ ὡρίσαμεν ὡς ἀπεικόνισιν, διὰ τῆς ὁποίας ἀντιστοιχίζεται εἰς κάθε στοιχεῖον x ἑνὸς συνόλου X ἕνα στοιχεῖον καὶ μόνον ἕνα y ἑνὸς συνόλου Y. Τὸ στοιχεῖον y ὀνομάζεται ἡ *εἰκὼν* ἐντὸς τοῦ Y τοῦ στοιχείου x τοῦ X. Ἕνα στοιχεῖον τυχὸν τοῦ Y δὲν εἶναι ἐν γένει ἡ εἰκὼν ἑνὸς στοιχείου x τοῦ X· εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν διὰ τὴν συνάρτησιν f ὅτι εἶναι αὐτὴ μία *ἀπεικόνισις τοῦ X ἐντὸς τοῦ Y.*

Ἐὰν ὅμως συμβαίνῃ ἕνα τυχὸν στοιχεῖον τοῦ Y νὰ εἶναι ἡ εἰκὼν τουλάχιστον ἑνὸς στοιχείου x τοῦ X, ἡ συνάρτησις f λέγεται *ἀπεικόνισις τοῦ X ἐπὶ τοῦ Y.* Ἐὰν δὲ κάθε στοιχεῖον y τοῦ Y εἶναι ἡ εἰκὼν ἑνὸς καὶ μόνον ἑνὸς στοιχείου x τοῦ X, ἡ συνάρτησις f λέγομεν, ὅτι ὁρίζει μία *ἀμφιμονοσήμαντον ἀπεικόνισιν τοῦ X ἐπὶ τοῦ Y.*

Ὅταν x εἶναι ἡ ἀνεξάρτητος μεταβλητή, ὑποτίθεται ὡρισμένον πάντοτε τὸ σύνολον X τῶν τιμῶν της· ἡ συνάρτησις $f(x)$ λέγεται τότε ὡρισμένη ἐντὸς (ἢ ἐπὶ) τοῦ συνόλου τούτου X.

Παραδείγματα:

(α) Ἔστω $y=f(x)=x^2$ ἡ δοθεῖσα συνάρτησις καὶ ὡς σύνολον X ἂς λάβωμεν τὸ σύνολον ὅλων τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Τὸ σύνολον Y εἶναι τότε τὸ σύνολον ὅλων τῶν θετικῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Εὐκόλως βλέπομεν ὅτι ἡ ἀπεικόνισις f δὲν εἶναι ἀμφιμονοσήμαντος τοῦ X ἐπὶ τοῦ Y· διότι ἀντιστοιχίζεται μὲν δι᾽ αὐτῆς εἰς κάθε στοιχεῖον τοῦ X ἕνα στοιχεῖον τοῦ Y ἀλλὰ τὸ ἀντίστροφον δὲν συμβαίνει. Ἐὰν ὅμως ὡς σύνολον X ἐκλέξωμεν τὸ σύνολον τῶν θετικῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, τὸ σύνολον Y παραμένει τὸ ἴδιον ἀλλὰ ἔχομεν τότε ἀμφιμονοσήμαντον ἀπεικόνισιν διὰ τῆς f τοῦ συνόλου X ἐπὶ τοῦ Y.

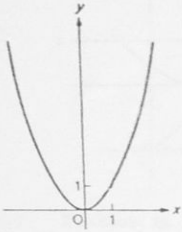
(β) Ἔστω $y=f(x)=x!$ καὶ $X=\{1,2,3,\dots\}$. Ἡ συνάρτησις αὐτὴ εἶναι ἀπεικόνισις ἀμφιμονοσήμαντος τοῦ X ἐπὶ τοῦ συνόλου $Y=\{1,2,6,24,120,\dots\}$.

(γ) Ἐὰν μίαν ποσότητα θερμανθέντος ὕδατος μεταφέρωμεν εἰς ψυχρότερον περιβάλλον καὶ μετρήσωμεν ἀκολούθως τὴν θερμοκρασίαν τοῦ ὕδατος εἰς βαθμοὺς Κελσίου ἐπὶ μίαν ὥραν καὶ ἀνὰ χρονικὰ διαστήματα 10 λεπτῶν, ἠμποροῦμεν νὰ κατασκευάσωμεν τὴν κάτωθι ἀντιστοίχισιν χρόνου-θερμοκρασίας:

t (λεπτά):	0	10	20	30	40	50	60
T (βαθμοὶ °C):	71,2	45,6	32,8	26,4	23,2	21,6	20,8

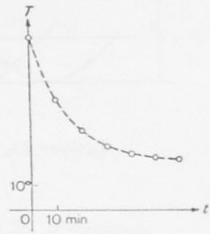
διὰ τῆς ὁποίας ὁρίζεται μία συνάρτησις $T=f(t)$ ὡς ἀμφιμονοσήμαντος ἀπεικόνισις τοῦ συνόλου $t=\{0,10,20,\dots,60\}$ ἐπὶ τοῦ συνόλου $T=\{71{,}2\ 45{,}6,\ 32{,}8,\dots,20{,}8\}$.

2. Κάθε πραγματικὴ συνάρτησις, κατὰ τὸν τρόπον αὐτὸν ὁριζομένη, ἠμπορεῖ νὰ παρασταθῇ διὰ μιᾶς καμπύλης (ἢ δι᾽ ἑνὸς σημειοσυνόλου)· διότι εἶναι πάντοτε δυνατὴ μία ἀντιστοιχία ὅλων τῶν ζευγῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν πρὸς τὰ σημεῖα ἑνὸς ἐπιπέδου (καρτεσιαναὶ συντεταγμέναι). Τὸ σχῆμα 20 δεικνύει τὸ γραφικὸν τῆς συναρτήσεως $y=x^2$, τὸ σχῆμα 21 τῆς $y = x!$ ($X = \{1,2,3,...\}$) καὶ τὸ σχῆμα 22 τῆς ἐμπειρικῆς συναρτήσεως $T = f(t)$.



Σχέδιον 20.
Ἡ συνάρτησις
$y = x^2$.

Σχέδιον 21.
Ἡ συνάρτησις $y = x!$
$X = \{1,2,3,...\}$.



Σχέδιον 22.
Ἡ ἐμπειρικὴ συνάρτησις
$T = f(t)$.

3. Ἐὰν διὰ μίαν συνάρτησιν $y = f(x)$, ὡρισμένην εἰς ἕνα σύνολον X, τὸ ἀντίστοιχον τοῦ X σύνολον Y κεῖται ἐξ ὁλοκλήρου ἐντὸς ἑνὸς ἀνοικτοῦ ἢ κλειστοῦ διαστήματος, (a,b) ἢ $[a,b]$, θὰ λέγωμεν ὅτι ἡ συνάρτησις αὐτὴ f εἶναι *φραγμένη* καὶ ὅτι a εἶναι *κάτω φράγμα* καὶ b *ἄνω φράγμα* αὐτῆς. Ἐὰν τὰ φράγματα a αἱ b εἶναι τιμαὶ τοῦ συνόλου Y (κλειστὸν διάστημα), οἱ ἀριθμοὶ a καὶ b λέγονται ἀντιστοίχως *μέγιστον κάτω φράγμα* ἢ *κάτω πέρας* καὶ *ἐλάχιστον ἄνω φράγμα* ἢ *ἄνω πέρας* τῆς συναρτήσεως. Τὸ μῆκος τοῦ διαστήματος, $|b - a|$, ὀνομάζεται *αἰώρησις** τῆς συναρτήσεως $y = f(x)$ ὡς πρὸς τὸ σύνολον X.

Παραδείγματα:

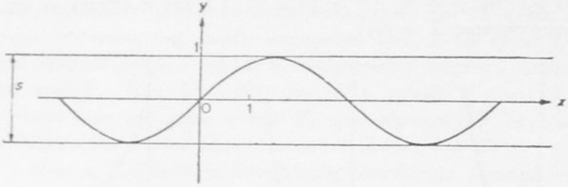
(a) Ἡ συνάρτησις $y = f(x) =$ ημx ὁρίζεται εἰς τὸ σύνολον X τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Τὸ σύνολον Y εἶναι τὸ σύνολον $\{[-1, 1]\}$. Ἡ συνάρτησις εἶναι φραγμένη, μὲ κάτω πέρας -1 καὶ ἄνω πέρας $+1$. Ἡ αἰώρησις αὐτῆς εἶναι ἴση πρὸς 2 (σχ. 23).

(β) Ἔστω ἡ συνάρτησις $y = 1/(x^2 + 1)$ ὡρισμένη εἰς τὸ σύνολον X τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Τὸ σύνολον Y εἶναι τὸ σύνολον $\{(0,1]\}$ ἡ δὲ συνάρτησις ἔχει πέρατα τοὺς ἀριθμοὺς 0 καὶ 1 καὶ αἰώρησιν ἴσην πρὸς 1 (σχ. 24).

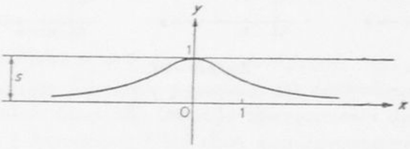
Καὶ εἰς τὰ δύο παραδείγματα (α) καὶ (β) αἱ συναρτήσεις δὲν ὁρίζουν ἀπεικονίσεις ἀμφιμονοσημάντους.

4. Μία συνάρτησις λέγεται *συνεχὴς* εἰς x_1, ἐὰν εἰς κάθε γειτονιὰν τοῦ x_1 (εἰς κάθε δηλαδὴ διάστημα $x_1 - \epsilon < x < x_1 + \epsilon$) ἡ αἰώρησις τῶν

*Ὁ ὅρος «αἰώρησις» ἀναφέρεται συνήθως *εἰς τὸ σύνολον τῶν τιμῶν τῶν λαμβανομένων ὑπὸ τῆς* y, τῆς ἐξηρτημένης μεταβλητῆς.



Σχέδιον 23. Ἡ φραγμένη συνάρτησις $y = \eta\mu x$.



Σχέδιον 24. Ἡ φραγμένη συνάρτησις $y = \dfrac{1}{x^2+1}$.

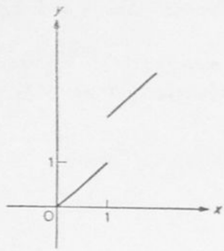
τιμῶν y ἠμπορεῖ νὰ γίνῃ ὁσονδήποτε μικρὰ ($s < \delta$), ἀρκεῖ νὰ ἐκλεγῇ ὁ θετικὸς ϵ καταλλήλως μικρός. Ἢ ἄλλως: μία συνάρτησις εἶναι συνεχὴς εἰς x_1, ἐὰν ἡ αἰώρησις τῆς συναρτήσεως τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν: $\lim\limits_{x \to x_1} s = 0$. Ὁ ὁρισμὸς αὐτὸς δὲν διαφέρει ἀπὸ ἐκεῖνον ποὺ ἐδόθη προηγουμένως, μὲ Δy εἰς τὴν θέσιν τοῦ s.

Παραδείγματα:

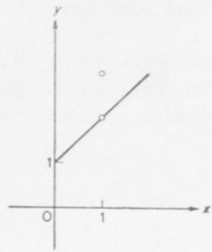
(α) Ὑποθέσωμεν τὴν συνάρτησιν $y = f(x)$ ὁριζομένην ὡς ἑξῆς: ἐπὶ μὲν τοῦ διαστήματος $X_1 = \{ (0,1) \}$, $f(x) = f_1(x) = x$, ἐπὶ δὲ τοῦ διαστήματος $X_2 = \{ (1,2) \} f(x) = f_2(x) = x + 1$. Εἰς τὸ σημεῖον $x_1 = 1$ ἡ συνάρτησις εἶναι ἀσυνεχής, ἀφοῦ $\lim\limits_{x \to x_1} f_1(x) = 1$ καὶ $\lim\limits_{x \to x_1} f_2(x) = 2$, ἄρα $\lim\limits_{x \to x_1} s = 1$. (Σχ. 25).

(β) Ἔστω ἡ συνάρτησις $y = (x^2 - 1)/(x - 1)$ ὁριζομένη εἰς τὸ διάστημα $X = \{ (0,2) \}$. Εἰς τὸ σημεῖον $x_1 = 1$ ἡ συνάρτησις εἶναι ἀπροσδιόριστος. Ἐὰν συμφωνήσωμεν διὰ $x = x_1$ ἡ τιμὴ τῆς συναρτήσεως νὰ εἶναι $f(x_1) = 3$, ἡ συνάρτησις εἶναι ἀσυνεχὴς εἰς τὴν θέσιν ταύτην· ἐὰν ὅμως προσδώσωμεν εἰς αὐτὴν τὴν τιμὴν $f(x_1) = \lim\limits_{x \to x_1} f(x) = 2$ διὰ $x = x_1$, ἡ ἀσυνέχεια αἴρεται. Κατὰ τὸν Riemann (*), ἀσυνέχειαι ὡς αὗται (σχ. 26) ὀνομάζονται «ἄρσιμοι».

*Bernhard Riemann (1826-66)



Σχέδιον 25. Ἡ συνάρτησις $y = f(x)$ εἶναι ἀσυνεχὴς εἰς $x_1 = 1$.



Σχέδιον 26. Ἡ συνάρτησις $y = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ ἔχει ἀσυνέχειαν ἄρσιμον εἰς $x_1 = 1$.

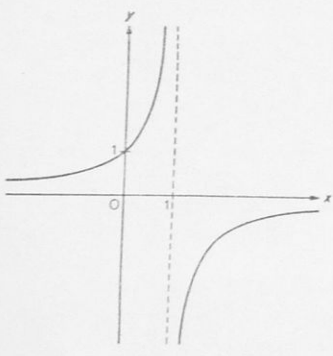
5. Διὰ συναρτήσεις συνεχεῖς ἰσχύουν τὰ ἀκόλουθα θεωρήματα:

5. Ἐὰν μία συνάρτησις συνεχὴς εἰς ἕνα κλειστὸν διάστημα λαμβάνῃ τὰς τιμὰς a *καὶ* β *εἰς αὐτό, λαμβάνει ἐπίσης καὶ κάθε τιμὴν περιεχομένην μεταξὺ τῶν* a *καὶ* b.

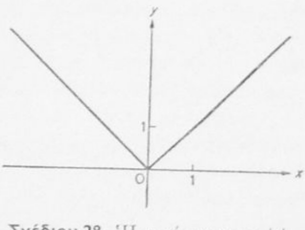
Μία συνάρτησις συνεχὴς εἰς ἕνα κλειστὸν διάστημα εἶναι φραγμένη.

Παραδείγματα:

(α) Ἡ συνάρτησις $y = \dfrac{1}{1 - x}$ δὲν εἶναι φραγμένη εἰς τὸ διάστημα



Σχέδιον 27. Ἡ συνάρτησις $y = 1/(1 - x)$ ἔχει πόλον τὸ σημεῖον $x_1 = 1$.



Σχέδιον 28. Ἡ συνάρτησις $y = |x|$ εἶναι πανταχοῦ συνεχὴς ἀλλ' εἰς τὸ σημεῖον $x_1 = 0$ μὴ παραγωγίσιμος.

$X = \{ (0,2) \}$ καὶ οὔτε πανταχοῦ συνεχής. Διὰ $x = 1$ ἔχει ἕνα πόλον (σχ. 27).

(β) Ἡ συνάρτησις $y = |x|$ εἶναι συνεχὴς δι' ὅλας τὰς πραγματικὰς τιμὰς τοῦ x (σχ. 28). Ἀλλ' ὡς γνωστόν, εἰς τὸ σημεῖον $x_1 = 0$ ἡ συνάρτησις αὐτὴ δὲν εἶναι παραγωγίσιμος.

6

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

XIV. Τὰ παράδοξα τῆς θεωρίας τῶν συνόλων.

1. Ἀνεχωρήσαμεν ἀπὸ τὴν θεώρησιν τῶν πεπερασμένων συνόλων καὶ ἐπετελέσαμεν ἀρκετὰς προόδους πρὸς τὴν κατεύθυνσιν μιᾶς εἰσαγωγικῆς σπουδῆς τοῦ ἀπείρου, καθὼς καὶ πρὸς τὴν ἀπαρχὴν τοῦ λογισμοῦ μὲ ὑπερπεπερασμένους ἀριθμούς. Κατέστημεν δὲ ἐνήμεροι τοῦ γεγονότος ὅτι ἠμποροῦμεν νὰ ἀριθμοῦμεν καὶ νὰ ἐκτελοῦμεν πράξεις πέραν τοῦ ἀπείρου, μετὰ τῆς πλήρους ἐκείνης ὁριστικότητος, ἡ ὁποία χαρακτηρίζει ὅλους τοὺς μαθηματικοὺς ὁρισμοὺς καὶ πράξεις.

2. Ἐμελετήσαμεν κατόπιν σημειοσύνολα δι' ἑνὸς εἴδους «συνολοθεωρητικοῦ» μικροσκοπίου, διὰ τοῦ ὁποίου ἐπετύχομεν μὲν μίαν ἄπειρον μεγέθυνσιν αὐτῶν ἀλλὰ διεπιστώσαμεν καὶ ὀξείας μεταξὺ των διαφοράς. Γνωρίζομεν τώρα ὅτι ἕνα πυκνὸν σύνολον, καθὼς καὶ ἕνα σύνολον πυκνὸν καθ' ἑαυτό, ἠμπορεῖ νὰ ἔχουν ἄπειρον πλῆθος χασμάτων.

3. Διὰ τῆς θεωρίας τῶν συνόλων εἰσήλθομεν εἰς ἕνα πεδίον ἐρεύνης, διὰ τῆς ὁποίας αἱ διάφοροι περιοχαὶ τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης ὄχι μόνον ἐθεμελιώθησαν ἐπὶ σταθερωτέρας βάσεως ἀλλὰ καὶ ἐνεπλουτίσθησαν. Κατὰ τὴν δημιουργίαν αὐτὴν τῆς ἀνθρωπίνης σκέψεως, τὴν εἰς τὸ βάθος τῶν πραγμάτων διεισδύουσαν, ἐχρησιμοποιεῖτο εὐρέως ἡ «ἐλευθερία» κατασκευῆς νέων ἐννοιῶν. Εἶναι δὲ αὐταὶ ἁπλαῖ καὶ σαφεῖς, μολονότι ἡ πληθώρα αὐτῶν μᾶς ὑποχρεώνει ἐνίοτε εἰς λεπτολόγους διακρίσεις.

4. Ἐν τούτοις, κατὰ τὴν δημιουργικήν μας αὐτὴν ἐλευθερίαν, δὲν ἐδείχθημεν τόσον ἀπρόσεκτοι, ὥστε νὰ ἐπιτρέψωμεν τὴν ἐμφάνισιν παραδόξων. Τὰ παράδοξα αὐτά, τῶν ὁποίων μέχρι σήμερον δὲν κατωρθώθη ἡ πλήρης ἀποσάφησις, εὐκόλως ἀνακύπτουν, ὅταν γίνεται ἀπεριόριστος χρῆσις τῆς ἱκανότητός μας πρὸς κατασκευὴν νέων συνόλων. Τοῦτο συμβαίνει παραδείγματος χάριν, ὅταν ἐπιτρέπωμεν τὸν σχηματισμὸν συνόλων, στοιχεῖα τῶν ὁποίων εἶναι ἐπίσης σύνολα. Τὰ παράδοξα, τὰ ὁποῖα ἀνεκαλύφθησαν εἰς τὴν θεωρίαν τῶν συνόλων, ἐπέφερον ἐπιβράδυνσιν τῆς θεωρίας κατὰ τὴν κατεύθυνσιν αὐτῆς πρὸς τὴν παροῦσαν μορφήν της καὶ ἐσκεμμένως ἀπεφύγομεν εἰς τὸ βιβλίον αὐτὸ ὁρισμούς, οἱ ὁποῖοι θὰ ἠμποροῦσαν νὰ ὁδηγήσουν εἰς αὐτά. Εἰς τὸ πέρας ὅμως τώρα τοῦ ἔργου τούτου, θὰ ἐξετάσωμεν μερικὰ ἐκ τῶν παραδόξων αὐτῶν.

5. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι κατασκευάζομεν τὸ σύνολον N ὅλων τῶν συνόλων, ἕκαστον ἐκ τῶν ὁποίων δὲν περιέχει τὸν ἑαυτόν του ὡς στοιχεῖον. Ὅτι ὑπάρχουν σύνολα, τὰ ὁποῖα δὲν περιέχουν τὸν ἑαυτόν τους ὡς στοιχεῖον, εἶναι ἤδη γνωστὸν εἰς ἡμᾶς, δεδομένου ὅτι εἰς τὰ προηγούμενα εἰργάσθημεν σχεδὸν πάντοτε μὲ σύνολα τὰ στοιχεῖα, τῶν ὁποίων δὲν ἦσαν σύνολα ἀλλὰ πράγματα, ἀριθμοὶ ἢ σημεῖα. Ἡ μόνη ἐξαίρεσις ἦτο τὸ σύνολον $U(M)$ ὅλων τῶν ὑποσυνόλων ἑνὸς συνόλου M, στοιχεῖα τοῦ ὁποίου ἦσαν μόνον σύνολα. Τὸ σύνολον ὅμως τοῦτο δὲν περιεῖχε βεβαίως τὸν ἑαυτόν του ὡς στοιχεῖον· τὸ μεγαλυτέρας περιεκτικότητος στοιχεῖον του ἦτο τὸ M, τὸ καταχρηστικὸν ὑποσύνολον τοῦ M, καὶ ἐδείξαμεν ὅτι

$$|\mathsf{U}(M)| > |M|.$$

Θὰ ἠδύνατο ὅμως κανεὶς νὰ προτείνῃ: «Νὰ κατασκευασθῇ τὸ σύνολον J ὅλων τῶν συνόλων, ἕκαστον τῶν ὁποίων περιέχει τὸν ἑαυτόν του ὡς στοιχεῖον». Μέχρι τώρα τέτοιο σύνολον οὐδέποτε ἀνευρέθη εἰς τὰ μαθηματικὰ καὶ ἐνδεχόμενον εἶναι νὰ μὴ ὑπάρχῃ· ἐὰν δὲ ὑπάρχῃ, θὰ πρέπει νὰ ἐξορισθῇ ἀπὸ τὸ πεδίον τῶν μαθηματικῶν, ἀφοῦ, κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ Cantor, ἕνα σύνολον πρέπει νὰ εἶναι κάτι διαφορετικὸν ἀπὸ τὰ στοιχεῖα του (*).

Ἀλλ' ἐν πάσῃ περιπτώσει, ἂς ὑποθέσωμεν τὴν ὕπαρξιν τοῦ συνόλου τούτου. Τὸ σύνολον αὐτὸ ἀναγκαίως περιέχεται εἰς τὸ J. Παρατηροῦμεν τώρα ὅτι ἕνα οἱονδήποτε σύνολον ἐξ ὅλων τῶν συνόλων ἀνήκει ἢ εἰς τὸ N ἢ εἰς τὸ J (ὅπου N, ὅπως εἴπαμεν, εἶναι τὸ σύνολον ὅλων τῶν συνόλων, ἕκαστον τῶν ὁποίων περιέχει τὸν ἑαυτόν του ὡς στοιχεῖον). Ἐρωτῶμεν τώρα: κατὰ τὴν κατάταξιν ταύτην, τὸ σύνολον N ποῦ ἀνήκει; εἰς τὸ N ἢ εἰς τὸ J;

Ὑπόθεσις I. Τὸ σύνολον ὅλων τῶν συνόλων, ἕκαστον τῶν ὁποίων δὲν περιέχει τὸν ἑαυτόν του, ἀνήκει εἰς τὸ N.

Τοῦτο ὅμως σημαίνει ὅτι τὸ N θὰ πρέπει νὰ περιέχῃ τὸν ἑαυτόν του

*Ἐπὶ τοῦ σημείου αὐτοῦ παρατηροῦμεν ὅτι καὶ ἡ ἀκόλουθος μέθοδος συλλογισμοῦ εἶναι ἀπορριπτέα ὡς ὁδηγοῦσα εἰς παράδοξον: Τί εἶναι σύνολον; Ἀπάντησις: Μία ἀφῃρημένη ἔννοια. Ἀλλὰ τὸ σύνολον ὅλων τῶν ἀφῃρημένων ἐννοιῶν περιέχει τὸν ἑαυτόν του ὡς στοιχεῖον (ἀφοῦ εἶναι ἀφῃρημένη ἔννοια).

ὡς στοιχεῖον—κατ' ἀντίφασιν πρὸς τὸν ὁρισμὸν τοῦ N. Συνεπῶς, τὸ N δὲν ἠμπορεῖ νὰ περιέχεται εἰς τὸ N.

Ὑπόθεσις II. Τὸ N εἶναι στοιχεῖον τοῦ J.

Ὅλα τὰ στοιχεῖα τοῦ J εἶναι σύνολα, ἕκαστον τῶν ὁποίων περιέχει τὸν ἑαυτόν του ὡς στοιχεῖον. Ἐξ ὁρισμοῦ, ἑπομένως, τοῦ N, ἀποκλείεται νὰ εἶναι αὐτὸ στοιχεῖον τοῦ J.

Καὶ αἱ δύο ὑποθέσεις ὁδηγοῦν εἰς ἀντιφάσεις. Τὸ φαινόμενον τοῦτο εἶναι γνωστὸν ὡς παράδοξον τοῦ *R*ussell (1903).*

Κατὰ ταῦτα, τὸ σύνολον ὅλων τῶν συνόλων, ἕκαστον τῶν ὁποίων δὲν περιέχει τὸν ἑαυτόν του ὡς στοιχεῖον, ἀποβαίνει ἔννοια ἀπαράδεκτος καὶ ἡ ὁποία τίθεται ἐκτὸς τῆς θεωρίας τῶν συνόλων, πρὸς ἀποφυγὴν ἀντιφάσεων.

6. Ὡς ἀνάλογον παράδοξον πρὸς τὸ τοῦ Russel ἔχομεν τὴν ἱστορίαν τοῦ κουρέως ἑνὸς μικροῦ χωρίου, ὁ ὁποῖος ἐξύριζε ὅλους τοὺς κατοίκους τοῦ χωρίου (καὶ μόνον αὐτούς), οἱ ὁποῖοι δὲν ἐξυρίζοντο μόνοι των. Διὰ τὸν ἴδιον ὅμως τὸν κουρέα τί πρέπει νὰ ὑποθέσωμεν; Ἐὰν μὲν ξυρίζεται μόνος του, εἶναι αὐτοξυριζόμενος καὶ δὲν πρέπει νὰ ξυρίζῃ τὸν ἑαυτόν του· ἐὰν δὲ δὲν ξυρίζεται μόνος του, ἀνήκει εἰς τὸ σύνολον τῶν χωρικῶν, τοὺς ὁποίους πρέπει νὰ ξυρίζῃ. Ὅ,τι δήποτε δηλαδὴ καὶ ἂν πράττῃ ὁ κουρεὺς αὐτός, θὰ εὑρίσκεται πάντοτε εἰς ἀντίφασιν πρὸς τὸν ἑαυτόν του.

7. Τελείως ὁμοία εἶναι ἡ κατάστασις ἡ παραγομένη ὑπὸ ἑνὸς ψεύστου, ὁ ὁποῖος λέγει: «ψεύδομαι». Ἐὰν λέγῃ τοῦτο ὄντως ψευδόμενος, λέγει τὴν ἀλήθειαν: ἄρα δὲν ψεύδεται. Ἐὰν δὲ λέγων τοῦτο δὲν ψεύδεται, ἡ δήλωσίς του δὲν εἶναι ἀληθὴς καὶ τὸ ἀληθὲς εἶναι ὅτι ψεύδεται.

8. Τὸ «σύνολον ὅλων τῶν συνόλων, τὰ ὁποῖα ἠμποροῦμεν νὰ νοήσωμεν», εἶναι προφανῶς τὸ περισσότερον περιεκτικὸν εἰς στοιχεῖα σύνολον ποὺ ἠμπορεῖ νὰ ὑπάρξῃ. Θὰ πρέπει, ἐκ τῶν προτέρων, νὰ ἔχῃ τὸν μεγαλύτερον πληθάριθμον. Ἀλλ' ἐν τούτοις τὸ σύνολον τῶν ὑποσυνόλων του ἔχει ἀκόμη μεγαλύτερον πληθάριθμον, ὡς ἐδείξαμεν, καὶ εἶναι ἑπομένως «περισσότερον περιεκτικόν».

Ἡ ἔκφρασις λοιπὸν «σύνολον ὅλων τῶν συνόλων» ὁδηγεῖ εἰς ἀντιφάσεις καὶ διὰ τὸν λόγον τοῦτον θὰ πρέπει νὰ ἀποκλεισθῇ ἀπὸ τὴν θεωρίαν τῶν συνόλων. Τὸ σύνολον αὐτὸ ὅλων τῶν συνόλων περιέχει βεβαίως τὸν ἑαυτόν του ὡς στοιχεῖον καί, ὡς εἴδομεν, σύνολα τοῦ εἴδους αὐτοῦ εὑρίσκονται εἰς ἀντίφασιν πρὸς τὸν ὁρισμὸν τοῦ Cantor διὰ σύνολα.

«Μία ὁλότης δὲν ἠμπορεῖ νὰ περιέχῃ μέλη, τὰ ὁποῖα ὁρίζονται μέσῳ μόνον τῆς ὁλότητος αὐτῆς καὶ ἐξαρτῶνται, συνεπῶς, ἀπὸ αὐτήν.» (Russell.)

*Bertrand Russell (γεν. 1872).

9. Ὁ Ἰταλὸς μαθηματικὸς Burali-Forti(*) ἀπέδειξε τὸ 1897 τὸ ἑξῆς παράδοξον: «Τὸ σύνολον ὅλων τῶν διατακτικῶν ἀριθμῶν ἔχει διατακτικὸν ἀριθμὸν μεγαλύτερον ἀπὸ τὸν μεγαλύτερον διατακτικὸν ἀριθμὸν εἰς τὸ σύνολον τοῦτο ὅλων τῶν διατακτικῶν ἀριθμῶν». Ὁμοίως, ἠμπορεῖ νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ «σύνολον ὅλων τῶν πληθαρίθμων» ἔχει μεγαλύτερον πληθάριθμον ἀπὸ τὸν μεγαλύτερον πληθάριθμον ποὺ περιέχονται εἰς τὸ σύνολον.

10. Ἂς σταματήσωμεν ἐδῶ τὸν κατάλογον τοῦτον παραδόξων. Ἐὰν ἐξαιρέσωμεν ἀπὸ τὴν θεωρίαν μας ἐννοίας ἐπισφαλεῖς, ὅπως «σύνολον ὅλων τῶν συνόλων», «σύνολον ὅλων τῶν διατακτικῶν ἀριθμῶν» κλπ., ἀντιφάσεις δὲν ἐμφανίζονται εἰς αὐτήν. Αἱ ἔννοιαι ἄλλωστε αὐταὶ εὑρίσκονται εἰς ἀντίφασιν καὶ πρὸς τὸν ἑαυτόν τους καὶ εἰς μίαν αὐστηρῶς ἀξιωματικὴν θεμελίωσιν τῆς θεωρίας τῶν συνόλων, ποὺ ἐδόθη τὸ 1908 ὑπὸ τοῦ Zermello, δὲν ἔχουν καμμίαν θέσιν.

XVIII. Φορμαλισμὸς καὶ Ἐνορατισμὸς

1. Τὰ μαθηματικὰ καί, ἰδιαιτέρως, τὰ θεμέλια αὐτῶν ἠμποροῦν νὰ θεωρηθοῦν ἀπὸ διαφόρους ἀπόψεις. Δύο τελείως διαφορετικαὶ ἀπόψεις εἶναι ὁ *φορμαλισμὸς* καὶ ὁ *ἐνορατισμός*, εἰς τὰς ὁποίας καὶ μόνον θὰ περιορισθῶμεν, δεδομένου ὅτι ἀποτελοῦν αὐταὶ τὰς ἀκραίας σχεδὸν περιπτώσεις, μεταξὺ τῶν ὁποίων κινοῦνται αἱ ἄλλαι.

2. Τὰ παράδοξα τῆς θεωρίας τῶν συνόλων ἀπετέλεσαν τὴν κυρίαν αἰτίαν τῆς ἐγέρσεως σφοδρῶν διαφωνιῶν μεταξὺ φορμαλιστῶν καὶ ἐνορατιστῶν. Ἡ διαμάχη δὲ αὐτὴ δὲν ἀφεώρα μόνον τὰ παράδοξα ταῦτα ἀλλ' ἐξετείνετο πολὺ βαθύτερον ἐντὸς τῆς μαθηματικῆς σκέψεως.

3. Εἴμεθα ἤδη ἀρκετὰ γνῶσται τοῦ φορμαλισμοῦ, τοῦ ὁποίου κατ' ἐξοχὴν ἐκπρόσωπος θὰ πρέπει νὰ θεωρηθῇ ὁ David Hilbert. Ἡ θεωρία τῶν συνόλων τοῦ Cantor εἶναι μία ἐπέκτασις τῆς φορμαλιστικῆς σκέψεως. Τὰ χαρακτηριστικὰ τοῦ φορμαλισμοῦ εἶναι:

(α) *Ἡ ἀξιωματικὴ μέθοδος*. Ὡς ἀφετηρία τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης καὶ διὰ τὴν θεμελίωσιν αὐτῆς τίθεται ἕνα σύστημα ἀνεξαρτήτων μεταξύ των θεμελιωδῶν προτάσεων, αἱ ὁποῖαι ὀνομάζονται ἀξιώματα. Διὰ τὸ σύστημα αὐτὸ *πιστεύομεν* ὅτι εἶναι πλῆρες καὶ ἀπηλλαγμένον ἀντιφάσεων. Ἐκ τῶν προτάσεων τούτων πορίζόμεθα διάφορα θεωρήματα διὰ λογικῶν μεθόδων. Τὰ θεωρήματα αὐτὰ ἀναφέρονται εἰς ἀντικείμενα τῆς σκέψεως, τὰ ὁποῖα στεροῦνται «οὐσιαστικοῦ περιεχομένου», ὡς «οἱ ἀριθμοὶ» ἢ εἶναι «σύμβολα χωρὶς περιεχόμενον». Ἡ μποροῦμεν βεβαίως νὰ παριστῶμεν τὰς γεωμετρικὰς ἐννοίας ἐκ τῆς ἐποπτείας μας τοῦ χώρου

*Cesare Burali-Forti (1861-1931).

μὲ λέξεις, ὅπως «σημεῖον», «γραμμή», «ἐπίπεδον» κλπ· τοῦτο ὅμως δὲν εἶναι ἀναγκαῖον.

Παραδείγματα:

1. Τὸ ἀξίωμα τῶν παραλλήλων: Εἰς ἕνα ἐπίπεδον, διὰ σημείου A, τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται ἐπὶ εὐθείας a, ἠμποροῦμεν νὰ φέρωμεν μίαν καὶ μόνην εὐθεῖαν, ἡ ὁποία νὰ μὴ τέμνῃ τὴν εὐθεῖαν a.

2. Ὡς πρῶτον θεώρημα, τὸ ὁποῖον ἀποδεικνύομεν διὰ τοῦ αἰτήματος τούτου, εὑρίσκομεν: Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν παντὸς τριγώνου εἶναι δύο ὀρθαὶ γωνίαι.

(β) *Ἡ ὕπαρξις ὡς ἀπουσία ἀντιφάσεων.* Ὄχι μόνον τὰ ἀξιώματα ἀλλὰ καὶ αἱ ἔννοιαι πρέπει νὰ εἶναι ἀπηλλαγμέναι ἀντιφάσεων.

Διὰ κάθε ἔννοιαν θὰ πρέπει νὰ ἰσχύῃ ὁ νόμος τῆς ταυτότητος:

$$a = a \qquad \text{(I)}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Ἐὰν } a = b, \text{ δὲν εἶναι } a \neq b.\\ \text{Ἐὰν } a \neq b, \text{ δὲν εἶναι } a = b.\end{array}\right\} \qquad \text{(II)}$$

Διὰ τὸν φορμαλιστήν, ἡ μαθηματικὴ ὕπαρξις μιᾶς ἐννοίας εἶναι ταυτόσημος πρὸς τὸ μὴ ἀντιφατικὸν αὐτῆς.

Παραδείγματα:

«Τὸ σύνολον ὅλων τῶν συνόλων» εἶναι ἔννοια πλήρης ἀντιφάσεων καὶ ἑπομένως ἀνύπαρκτος. Πράγματι, διὰ τὸ σύμβολον αὐτὸ ἔχομεν

$$M = M \qquad \text{(I)}$$

ἀλλὰ καὶ

$$M \neq M, \qquad \text{(II)}$$

ἀφοῦ $M \subset M$.

(γ) *Ὁ νόμος τῆς τοῦ τρίτου ἀποκλείσεως.* Εἶναι: ἢ $a = b$ ἢ $a \neq b$. Τρίτον ἐνδεχόμενον δὲν ὑπάρχει. Ὁ φορμαλιστὴς κάμνει συνεχῆ τῆς συλλογιστικῆς αὐτῆς μεθόδου χρῆσιν διὰ τὴν ἀπόδειξιν μιᾶς ἀδυνατότητος (ἔμμεσος μέθοδος ἀποδείξεως).

Παραδείγματα:

1. Δὲν ὑπάρχει ρητὸς m/n, διὰ τὸν ὁποῖον $m/n = \sqrt{2}$. Συμβαίνει ἄρα τὸ ἀντίθετον, $\sqrt{2} \neq m/n$.

2. Ἐφαρμογὴ τῆς δευτέρας μεθόδου τῆς διαγωνίου: Τὸ σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν δὲν εἶναι ἀριθμήσιμον, διότι ἡ ὑπόθεσις τοῦ ἀριθμησίμου αὐτοῦ ὁδηγεῖ εἰς ἀντίφασιν.

3. Ἡ ἀπόδειξις τοῦ Θεωρήματος τῆς ἰσοδυναμίας.

4. Ἡ ἀπόδειξις τοῦ Θεωρήματος τῶν Bolzano-Weiertrass.

(δ) *Τὸ δυνατὸν τῆς ἀποφάνσεως ἐπὶ παντὸς μαθηματικοῦ προβλήματος.* Διὰ τὸν παλαιότερον φορμαλιστήν, κάθε μαθηματικὸν πρόβλημα ἐπιδέχεται ἀπόφανσιν, ἀνεξαρτήτως ἐὰν δὲν διετυπώθη αὐτὴ μέχρι τοῦδε. Κατὰ τὸν Hilbert, κάθε μαθηματικὸς «συμμερίζεται ἀσφαλῶς τὴν πεποίθησιν ὅτι κάθε καθωρισμένον μαθηματικὸν πρόβλημα εἶναι ἐπιδεκτικὸν μιᾶς αὐστηρᾶς λύσεως—διὰ μόνης τῆς καθαρᾶς σκέψεως.»

Παραδείγματα:

1. Ὁ ἀριθμὸς 299,909 ἢ εἶναι πρῶτος ἢ δὲν εἶναι πρῶτος. Ἠμπορεῖ νὰ ἀποδειχθῇ πρῶτος μὲ πεπερασμένον πλῆθος πράξεων.

2. Τὸ πλῆθος τῶν διδύμων πρώτων ἀριθμῶν εἶναι ἢ πεπερασμένον ἢ ἄπειρον. (Οὐδεμία μέχρι τοῦδε ἀπάντησις ἐπ' αὐτοῦ). Δίδυμοι πρῶτοι λέγονται δύο διαδοχικοὶ περιττοὶ καὶ πρῶτοι ἀριθμοί, ὡς οἱ (11,13) ἢ (17,19).

3. Κάθε ἄρτιος ἀριθμὸς εἶναι ἄθροισμα δύο πρώτων ἀριθμῶν. (Θεώρημα τοῦ Goldbach (1690-1764), ἀναπόδεικτον μέχρι τοῦδε.)

4. Ὑπάρχει τουλάχιστον μία ἀριθμητικὴ τριὰς (x, y, z) ἀριθμῶν διὰ τοὺς ὁποίους $x^n + y^n = z^n$, $(n = 3,4,5,...)$ ἢ καμμία. (Θεώρημα τοῦ Fermat (*), ἐπίσης ἀναπόδεικτον.)

5. Τὸ πλῆθος τῶν τελείων ἀριθμῶν εἶναι ἢ πεπερασμένον ἢ ἄπειρον. Ἕνας ἀριθμὸς λέγεται *τέλειος*, ἐὰν εἶναι ἴσος πρὸς τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν (γνησίων) διαιρετῶν του, ὅπως οἱ
$6 = 1+2+3$, $28 = 1+2+4+7+14$, $496 = 1+2+4+8+16+31+62+124+148$.

Ὁ Εὐκλείδης ἀπέδειξε εἰς τὰ Στοιχεῖα του ὅτι κάθε ἀριθμὸς τῆς μορφῆς

$$Z = (2^{n+1} - 1) \cdot 2^n$$

εἶναι τέλειος, ἐὰν $2^{n+1}-1$ εἶναι πρῶτος ἀριθμός: παραμένει ὅμως ἄγνωστον πρὸς τὸ παρόν, ἐὰν ὑπάρχουν πεπερασμένοι ἢ ἄπειροι τὸ πλῆθος πρῶτοι ἀριθμοὶ τῆς μορφῆς $2^{n+1} - 1$. Ὁ ἀριθμὸς π.χ. $2^{127} - 1$ εἶναι ἕνας πρῶτος ἀριθμὸς 39-ψήφιος. Ὁ Euler ἀπέδειξε ὅτι δὲν ὑπάρχουν ἄρτιοι τέλειοι ἀριθμοί, ἐκτὸς ἐκείνων ποὺ κατασκευάζονται κατὰ τὸν ἀνωτέρω νόμον τοῦ Εὐκλείδου. Ἀναπάντητον μένει τὸ ἐρώτημα, ἐὰν ὑπάρχουν περιττοὶ τέλειοι ἀριθμοὶ ἢ ὄχι.

4. Ἕνας ἀπὸ τοὺς πρώτους ἀντικειμενικοὺς σκοποὺς τῆς στοιχειώδους μαθηματικῆς διδασκαλίας ἦτο ἡ κατάκτησις τοῦ μαθηματικοῦ αὐτοῦ φορμαλισμοῦ. Διότι ὁ φορμαλισμός, ὡς εἴδομεν, δὲν εἶναι ἁπλῶς μία μηχανικὴ μέθοδος λειτουργοῦσα ἐρήμην τῆς σκέψεως ἀλλὰ τουναντίον ἡ ὑψηλὴ καὶ δύσκολος τέχνη τῆς κατασκευῆς ἀφαιρέσεων καὶ λογικῶν ἐπαγωγῶν. Ἀπὸ τὴν ἄποψιν αὐτήν, ὅλοι οἱ μαθηματικοὶ εἶναι φορμαλισταί, ἄλλος ὀλιγώτερον ἄλλος περισσότερον.

5. Ἡ δύναμις τῆς φορμαλιστικῆς μεθόδου, ἡ αὐστηρότης ἀλλὰ καὶ

* Pierre de Fermat (1601-1665).

ἡ κομψότης αὐτῆς ἐφαίνετο ὅτι εἶχον προσδώσει εἰς τὰ μαθηματικὰ μίαν ἀκλόνητον πλέον εὐστάθειαν, ἕως ὅτου, περὶ τὸ 1900, ἤρχισεν ἡ ἀνοικτὴ ἐπίθεσις τῶν ἐνορατιστῶν ἐναντίον τῶν ἰσχυρῶν αὐτῶν θεμελίων.

6. Τὴν ἐπωνυμίαν τους οἱ ἐνορατισταὶ προσέλαβον ἐκ τοῦ λόγου ὅτι ἐθεώρουν τοὺς φυσικοὺς ἀριθμοὺς ὡς *πρωταρχικὰ ἐνορατικὰ δεδομένα*, εἰς ἐπίγνωσιν τῶν ὁποίων ἤγοντο δι' ἑνὸς εἴδους ἐσωτερικοῦ αὐταναγκασμοῦ. Ἐπερίττευεν συνεπῶς πᾶσα περαιτέρω θεμελίωσις τῆς ἐννοίας των. (Διὰ τοὺς φορμαλιστάς, οἱ φυσικοὶ ἀριθμοὶ καὶ αἱ ἐπ' αὐτῶν ἀριθμητικαὶ πράξεις ἀπαιτοῦν ἀποδείξεις διὰ τὸ μὴ ἀντιφατικὸν αὐτῶν.) Ὡς πρόδρομος τῶν ἐνορατιστῶν ἀναφέρεται ὁ Kronecker,(*) ὁ ὁποῖος διετύπωσεν τὰς θεμελιώδεις ἀπόψεις των εἰς μίαν περίφημον φράσιν: «Οἱ φυσικοὶ ἀριθμοὶ ἐδημιουργήθησαν ὑπὸ τοῦ Θεοῦ. Ὅλα τὰ ἄλλα εἶναι ἔργον τοῦ ἀνθρώπου». Ἐπ' αὐτοῦ ἀκριβῶς «τοῦ ἔργου τοῦ ἀνθρώπου» συνεκέντρωσαν τὰ πυρὰ τῆς ὀξείας κριτικῆς των οἱ ἐνορατισταί.

Μεταξὺ τῶν κυριωτέρων ἐκπροσώπων τοῦ ἐνορατισμοῦ ὑπῆρξεν ὁ ὁ Weyl (Βάϊλ)** καὶ ἰδιαιτέρως ὁ Jan Brouwer*** ὁ ὁποῖος, ἕνεκα τῆς ἄκρας τοποθετήσεώς του, αὐτοκαλεῖτο νεοενορατιστής.

8. Αἱ χαρακτηρίζουσαι τὸν ἐνορατισμὸν ἀρχαὶ εἶναι αἱ ἑξῆς δύο:

(α) Ἡ πρωταρχικὴ ἐνορατικὴ ἀντίληψις τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν.
(β) Ἡ μαθηματικὴ ὕπαρξις ὡς κατασκευαστικὴ δυνατότης.

Διὰ τοὺς ἐνορατιστάς, τὸ ὅτι ἡ μὴ ἀντιφατικότης μιᾶς μαθηματικῆς ἐννοίας ἀποτελεῖ κριτήριον τῆς ὑπάρξεως αὐτῆς (ὡς ἰσχυρίζονται οἱ φορμαλισταὶ) εἶναι κάτι τὸ τελείως ἀπαράδεκτον. Τὴν μὴ ἀντιφατικότητα θεωροῦν αὐτοὶ ὡς τίποτε περισσότερον ἀπὸ ἕνα παιγνίδι μὲ κενὰς λέξεις· κατὰ τοὺς ἰδίους των λόγους: «τὰ μαθηματικὰ εἶναι περισσότερον πρᾶξις παρὰ θεωρία». Ἡ ἀντικειμενικότης πρέπει νὰ τίθεται ὑπεράνω τῆς μεθόδου. Ἡ μαθηματικὴ σκέψις εἶναι καθαρὰ κατασκευή.

Ὅταν ὁμιλοῦμεν περὶ «κατασκευῆς», ἐννοοῦμεν τοῦτο: ἀναχωροῦμεν ἀπὸ ἁπλᾶ ἀντικείμενα, περὶ τῆς φύσεως τῶν ὁποίων ἔχομεν ἤδη ἐπίγνωσιν, καὶ διὰ πεπερασμένου πλήθους πράξεων παράγομεν κάτι τὸ νέον. Ὅ,τι εἶναι ἀνεπίδεκτον μιᾶς τέτοιας κατασκευῆς στερεῖται κάθε ἀξίας, ὅπως π.χ. κάθε πρότασις ἐκφράζουσα ἁπλῶς τὴν ὕπαρξιν: «Ὑπάρχει...».

Μία τέτοια πρότασις, ἀναφερομένη εἰς ὕπαρξιν καὶ μόνον, εἶναι κατὰ τὸν Weyl «ἕνα φύλλον χαρτιοῦ, εἰς τὸ ὁποῖον ἀναγράφεται μὲν ἡ ὕπαρξις ἑνὸς θησαυροῦ δὲν ὑποδεικνύεται ὅμως καὶ ἡ θέσις αὐτοῦ.»

*Leopold Kronecker (1823-1891).
**Hermann Weyl (1885-1955)
***Luitzen Egbertus Jan Brouwer (γεν. 1882).

Παραδείγματα:

1. Οἱ ἐνορατισταὶ θεωροῦν τὸ θεώρημα τῆς καλῆς διατάξεως ἄνευ ἀξίας· ἐπειδὴ ἀποδεικνύει τοῦτο τὴν ὕπαρξιν ἁπλῶς τῆς «καλῆς διατάξεως», χωρὶς νὰ ὑποδεικνύῃ καὶ τὸν τρόπον, διὰ τοῦ ὁποίου γίνεται αὐτή.

2. Τί σημασίαν ἠμπορεῖ νὰ ἔχῃ ἡ «ἀπόδειξις» τῆς ὑπάρξεως ὑπερβατικῶν ἀριθμῶν, ὅταν μᾶς εἶναι ἀδύνατον νὰ ἀποφανθῶμεν, εἰς μίαν συγκεκριμένην περίπτωσιν, ἐὰν ἕνας δοθεὶς πραγματικὸς ἀριθμὸς εἶναι ὑπερβατικὸς ἢ ἀλγεβρικός;

Μὲ πόσην ἐλαφρότητα ἐχειρίσθησαν (οἱ φορμαλισταὶ) ἐννοίας, ὅπως τῆς «διατάξεως» τοῦ «κανόνος» κλπ, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἀνεπίδεκτοι ἐπαληθεύσεων διὰ κατασκευῶν!

Παραδείγματα:

1. Εἰς τὸν ἀπέρατον δεκαδικὸν ἀριθμὸν $\sqrt{2} = 1{,}4142,\ldots$, ἂς ἀντικαταστήσωμεν κάθε τέταρτον ψηφίον μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴν διὰ τοῦ ψηφίου 5. Ὁ κατὰ τὸν τρόπον αὐτὸν κατασκευαζόμενος ἀριθμὸς $y = 1{,}4145$ $\ldots 5\ldots,5\ldots$, εἶναι ἀλγεβρικὸς ἢ ὑπερβατικός; Καμμία ἀπάντησις μέχρι σήμερον ἐπ' αὐτοῦ!

2. Κατασκευάζομεν ἕνα δεκαδικὸν ἀριθμὸν $r = 0{,}\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_i\ldots$ διὰ τῆς ἑξῆς ἀντιστοιχίας τῶν ψηφίων του $\alpha_1, \alpha_2\ldots$ πρὸς τὰ ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ $\pi = 3{,}14159\ldots$. Διαχωρίζομεν πρῶτον τὰ δεκαδικὰ ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ π, μετὰ τὴν ὑποδιαστολήν, εἰς δεκαμελεῖς ὁμάδας. Ἀκολούθως, ἐὰν μὲν ἡ ὁμὰς ποὺ ἔχει τὴν i τάξιν ἀποτελῆται ἀπὸ δέκα ἴσα ψηφία, δέκα 7 λ.χ., δίδομεν εἰς τὸ α_i τὴν τιμὴν 1, ἐὰν δὲ τοῦτο δὲν συμβαίνῃ, δίδομεν εἰς τὸν α_i τὴν τιμὴν 0. Διὰ τὸν κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον συγκροτούμενον δεκαδικὸν r εἶναι ἀδύνατον νὰ ἀποφανθῶμεν, διὰ πεπερασμένου πλήθους πράξεων, ἐὰν ἡ τιμή του εἶναι 0 ἢ $\neq 0$. Οἱ φορμαλισταὶ λέγουν: «Ὑπάρχει ὁ ἀριθμὸς r· διότι ὁρίζεται μονότροπα καὶ χωρὶς καμμίαν ἀντίφασιν διὰ τῆς ἀμφιμονοσημάντου ἀντιστοιχίας μεταξὺ τῶν ψηφίων του καὶ τῶν ὁμάδων ψηφίων τοῦ ἀριθμοῦ π». Οἱ ἐνορατισταὶ ἀπαντοῦν: «Οὐδέποτε εἶναι δυνατὸν νὰ γνωρίσωμεν, ἐὰν ὁ r εἶναι ἴσος πρὸς μηδὲν ἢ διάφορος τοῦ μηδενός. Διότι δὲν δυνάμεθα νὰ τὸν κατασκευάσωμεν. Δι' ἡμᾶς δὲν ἔχει μαθηματικὴν ὕπαρξιν».

(γ) *Ἀπαγόρευσις τοῦ νόμου τῆς τοῦ τρίτου ἀποκλείσεως.* Διὰ τὸν ἐνορατιστήν, ὁ νόμος τῆς τοῦ τρίτου ἀποκλείσεως εἶναι μία ἀβάσιμος πρόληψις. Κατ' αὐτόν, πρόκειται περὶ νόμου τῆς κλασσικῆς λογικῆς ποὺ προέκυψε ἐκ τῆς σπουδῆς πεπερασμένων συνόλων δι' ἀφαιρέσεως καὶ τοῦ ὁποίου ἡ ἰσχὺς ἐπεβλήθη, a priori καὶ χωρὶς κανένα δικαίωμα, ἐπὶ ἀπείρων συνόλων. Συνεχίζουν δὲ λέγοντες ὅτι δὲν εἶναι ἀπαραίτητον νὰ ἀληθεύῃ πάντοτε ἡ μία μόνον ἐκ τῶν δύο σχέσεων

$$a = b \text{ καὶ } a \neq b$$

(ὅπως ἰσχυρίζονται οἱ φορμαλισταί)· διότι ὑπάρχει καὶ τρίτον ἐνδεχόμενον:

(δ) *Δυνατότης μὴ ἀποφάνσεως ἐπὶ μαθηματικῶν προβλημάτων.* Δὲν πιστεύουν οἱ ἐνορατισταὶ ὅτι ὅλα τὰ προβλήματα εἶναι ἐπιλύσιμα. Μέχρι σήμερον, ὅμως, πρόβλημα *μαθηματικὸν* καὶ μὴ ἐπιδεχόμενον ἀπόφανσιν δὲν εἶναι γνωστὸν—μολονότι μερικὰ ἀριθμητικὰ προβλήματα παραμένουν μέχρι τοῦδε ἄκριτα.

Παραδείγματα:

1. Εἶναι πρῶτος ὁ ἀριθμὸς $2^{1024}+1$; Δὲν γνωρίζομεν. Ἀπάντησιν πάντως εἰς τὸ ἐρώτημα αὐτὸ δὲν δίδουν οὔτε οἱ φορμαλισταὶ οὔτε οἱ ἐνορατισταί. Διὰ πεπερασμένου πλήθους πράξεων (διὰ πεπερασμένης δηλ. κατασκευῆς) λύσις δίδεται βεβαίως, ἀκόμη καὶ ἂν ἀπαιτοῦνται δι' αὐτὴν ἑκατὸν ἔτη ὑπολογισμῶν. (Οἱ ἠλεκτρονικοὶ ὑπολογισταὶ ὑποβιβάζουν εἰς τεράστιον βαθμὸν τὸν χρόνον αὐτόν).

2. Ἡ ἐξίσωσις $x^n + y^n = z^n$ $(n = 3,4,5,...)$ ἔχει ἀκεραίαν λύσιν μὴ μηδενικὴν ὡς πρὸς x, y, z; Οἱ ἐνορατισταὶ πιστεύουν ὅτι εἶναι δυναταὶ τρεῖς ἀπαντήσεις:

(1) Ὑπάρχει τουλάχιστον μία ἀκεραία τριὰς $(x, y, z,)$ λύσεων.
(2) Δὲν ὑπάρχει καμμία.
(3) Τὸ ἐρώτημα δὲν ἐπιδέχεται ἀπάντησιν.

8. Ἡ αὐστηρὰ κριτικὴ τῶν ἐνορατιστῶν ἔχει τὰς ἑξῆς ἀπαιτήσεις ἀπὸ τὴν θεωρίαν τῶν συνόλων:

(α) Τὴν ἀπομάκρυνσιν ἐξ αὐτῆς παντὸς πέραν τοῦ ἀριθμησίμου. Τὸ συνεχὲς παύει οὕτω νὰ εἶναι ἕνα ἐν ἐνεργείᾳ ἄπειρον ἀλλὰ γίνεται μόνον ἕνα «πεδίον ἐλευθέρας δημιουργίας», δηλαδὴ τὸ σύνολον ὅλων τῶν ἀπεράτων ἀριθμητικῶν ἀκολουθιῶν (δεκαδικῶν ἀριθμῶν), τὰ ψηφία τῶν ὁποίων ἠμποροῦν νὰ ἐκλεγοῦν κατὰ βούλησιν.

(β) Τὸν ἀποκλεισμὸν τοῦ Θεωρήματος τῆς ἰσοδυναμίας.
(γ) Τὸν ἀποκλεισμὸν τοῦ Θεωρήματος τῶν Bolzano—Weierstrass.
(δ) Τὸν ἀποκλεισμὸν τοῦ Θεωρήματος τῆς καλῆς διατάξεως.
(ε) Τὸν ἀποκλεισμὸν τοῦ Θεωρήματος τοῦ Cantor: $|\mathsf{U}(M)| > |M|$.
(στ) Τὴν ἀποκήρυξιν τῆς μεθόδου τομῆς τοῦ Dedekind, καὶ πολλὰ ἄλλα.

9. Ὁ ἐνορατισμὸς δὲν ἐδημιούργησεν μόνον δυσκολίας εἰς τὰ κλασσικὰ φορμαλιστικὰ μαθηματικά· εἶχεν καὶ εὐεργετικὰ ἐπὶ τούτων ἀποτελέσματα. Διότι ὑπεχρέωσεν τοὺς φορμαλιστὰς εἰς τὴν ἄσκησιν αὐστηρᾶς κριτικῆς τῶν συλλογισμῶν των, προκαλέσαντα οὕτω μίαν ἀναζωογόνησιν τοῦ στρατοπέδου των. Ἡ πολεμικὴ μεταξὺ τῶν δύο παρατάξεων ὑπῆρξεν ἐπί τινα χρόνον σφοδροτάτη καί, καθὼς ἔγραφεν ὁ Cantor: «Δὲν φαίνεται ἀμέτοχος (εἰς τὴν διαμάχην αὐτὴν) καὶ κάποια ἐπιθυμία ἐπικρατήσεως...Διότι πρόκειται νὰ γνωσθῆ, ἐὰν αἱ ἰδέαι τοῦ Kronecker ἢ αἱ ἰδικαί μου εἶναι αἱ περισσότερον ἰσχυραί, αἱ περισσότερον εὐρεῖαι αἱ περισσότερον γόνιμοι. Ὁ χρόνος μόνον θὰ δείξη τὴν ἔκβασιν τῶν ἀγώνων μας.»

Καὶ ποία ὑπῆρξεν αὐτή; Ἀπὸ τὴν ἤρεμον ἀπόστασιν πολλῶν δεκαετηρίδων καὶ χιλιάδων χιλιομέτρων ἕνα μαθηματικὸς καὶ ἱστορικὸς ἐκφέρει ἐπὶ τῶν ἡμερῶν μας τὴν κρίσιν του: (*)

«Ἦτο ἀγὼν ζωῆς καὶ θανάτου μεταξὺ τοῦ φορμαλισμοῦ τοῦ Hilbert καὶ τοῦ ἐνορατισμοῦ τοῦ Brouwer διὰ τὴν κατάκτησιν τῶν μαθηματικῶν. Καὶ δὲν ἐσκέφθη φαίνεται οὔτε ὁ ἕνας οὔτε ὁ ἄλλος ἀπὸ τοὺς δύο ἀνταγωνιστάς, εἰς τὴν προσπάθειάν του ἕκαστος νὰ ἐκμηδενίση τὸν ἀντίπαλον, ὅτι διὰ τὰ μαθηματικὰ ἦτο ἐνδεχόμενον οὐδὲ καὶ ἐλαχίστην σημασίαν νὰ εἶχε ποῖος θὰ ἐκέρδιζε τὴν μάχην ἢ ποῖος θὰ τὴν ἔχανε ἢ ἐὰν θὰ παρέμενε αὐτὴ ἀμφίρροπος.»

Θὰ ὑπάρχουν πιθανῶς πάντοτε φορμαλισταὶ καὶ ἐνορατισταί. Πράγματι, ὁ πραγματικὸς μαθηματικὸς θὰ πρέπει νὰ δέχεται τὰς ἐπιδράσεις καὶ τῶν δύο θεωριῶν. Καὶ ἡ πόλωσις αὐτή, ἡ τόσην ἔντασιν παράγουσα, θὰ εἶναι πηγὴ νέων μαθηματικῶν δημιουργιῶν.

10. «Ἂς θεωροῦμεν τοὺς ἑαυτούς μας εὐτυχεῖς, διότι ἠμποροῦμεν νὰ εἰσέλθωμεν εἰς τὴν θεωρίαν τῶν συνόλων, τὸν παράδεισον αὐτὸν ἀπὸ τὸν ὁποῖον κανεὶς δὲν ἠμπορεῖ νὰ μᾶς ἐκδιώξη.» (Hilbert.) Διότι, μὲ τὸ νὰ ἀνοίξη ἡ θεωρία αὐτὴ τοὺς ὀφθαλμούς μας εἰς τὰς «βαθμίδας» τοῦ ἀπείρου, δὲν μᾶς ἐδίδαξεν ἴσως κάτι ποὺ ἐγγίζει τὰ ὅρια τοῦ «θαυμαστοῦ;» Ἀλλ' ἐπειδὴ ἡ γνῶσις αὐτὴ περὶ τοῦ ἀπείρου ἀπεκτήθη μὲ τὴν βοήθειαν τῆς μαθηματικῆς ἀναλύσεως, τὸ «θαυμαστὸν» αὐτὸ γίνεται ὀλιγώτερον ἀκατανόητον.

Τελειώνομεν μὲ μερικὰς λέξεις τοῦ Stevin,** τοῦ ὁποίου τὸ ἔργον διὰ τὴν ἀνάπτυξιν τοῦ λογισμοῦ μὲ δεκαδικοὺς ἀριθμούς (***) παρέσχε τὸ ὄργανον, ἄνευ τοῦ ὁποίου ἡ θεωρία τῶν συνόλων δὲν θὰ ἠμποροῦσε νὰ ἀναπτύξη τὰς ἀποδεικτικάς της μεθόδους: τὴν παράστασιν δηλ. κάθε πραγματικοῦ ἀριθμοῦ δι' ἑνὸς ἀπεράτου δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ.

*E. T. Bell, The Development of Mathematics, 1ist ed., Mc Graw—Hill, New York, 1945.

** Simon Srevin (1548-1620).

*** *De thiende*, εἰς τὰ ὀλλανδικά: Τὸ δέκατον μέρος (1586), *La disme*, εἰς τὰ παλαιὰ γαλλικά, (1634).

Πλήρης θαυμασμοῦ διὰ τὴν ἀνακάλυψιν ὑπ' αὐτοῦ τοῦ νόμου τοῦ παραλληλογράμμου τῶν δυνάμεων, κατὰ τὰς ἐρεύνας του ἐπὶ τῆς κινήσεως τῶν σωμάτων ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου, ἐπέγραψε ὁ Stevin ἐπὶ τοῦ βιβλίου του τὴν ἑξῆς φράσιν (motto), ἡ ὁποία ἰσχύει χωρὶς κανένα περιορισμὸν καὶ διὰ τὴν θεωρίαν τῶν συνόλων:

Ἕνα θαῦμα καὶ ὅμως κανένα θαῦμα!

7

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

XIX. Κατάλογος Ὁρισμῶν καὶ Θεωρημάτων.

Σελὶς 4. Σύνολον εἶναι μία συλλογὴ ὡρισμένων καὶ διακεκριμένων ἀντικειμένων τῆς ἐμπειρίας μας ἢ τῶν διανοημάτων μας. Τὰ ἀντικείμενα αὐτὰ λέγονται *στοιχεῖα* τοῦ συνόλου. (Cantor.)

Σελὶς 6. Δύο σύνολα εἶναι ἴσα, ἐὰν περιέχουν τὰ αὐτὰ στοιχεῖα.

Σελὶς 7. Ἕνα σύνολον N εἶναι *ὑποσύνολον* ἑνὸς συνόλου M, ἐὰν κάθε στοιχεῖον τοῦ N εἶναι καὶ στοιχεῖον τοῦ M.

Σελὶς 8. Ἐὰν N εἶναι *γνήσιον ὑποσύνολον* τοῦ M, τὸ σύνολον τῶν στοιχείων τοῦ M, τὰ ὁποῖα δὲν ἀνήκουν εἰς τὸ M, λέγεται τὸ *συμπληρωματικὸν σύνολον* R τοῦ N ὡς πρὸς τὸ M.

Σελὶς 9. Ἡ *ἕνωσις* δύο συνόλων εἶναι τὸ σύνολον ὅλων τῶν στοιχείων, τὰ ὁποῖα ἀνήκουν εἰς τὸ ἕνα τουλάχιστον ἀπὸ τὰ δύο σύνολα.

Σελὶς 9. Ἡ *τομὴ* δύο συνόλων εἶναι τὸ σύνολον ὅλων τῶν στοιχείων, τὰ ὁποῖα ἀνήκουν καὶ εἰς τὰ δύο σύνολα.

Σελὶς 13. Δύο σύνολα M καὶ N λέγονται *ἰσοδύναμα* μεταξύ των, ὅταν τὰ στοιχεῖα τοῦ M ἠμποροῦν νὰ ταχθοῦν κατ' ἀμφιμονοσήμαντον ἀντιστοιχίαν πρὸς τὰ στοιχεῖα τοῦ N.

Σελὶς 18. Ἐὰν δὲν ὑπάρχῃ γνήσιον ὑποσύνολον τοῦ M, τὸ ὁποῖον νὰ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ M, τὸ M εἶναι σύνολον *πεπερασμένον*. Ἐὰν δὲ ὑπάρχῃ γνήσιον ὑποσύνολον τοῦ M, τὸ ὁποῖον νὰ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ M, τὸ M εἶναι σύνολον *ἄπειρον* (ἢ *ὑπερπεπερασμένον*). (Dedekind).

Σελὶς 20. Τὸ σύνολον τῶν πρώτων ἀριθμῶν εἶναι ἀριθμήσιμον. Τὸ σύνολον ὅλων τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν εἶναι ἀριθμήσιμον. Τὸ σύνολον ὅλων τῶν ρητῶν ἀριθμῶν εἶναι ἀριθμήσιμον.

Σελὶς 23. Τὸ σύνολον ὅλων τῶν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἀριθμήσιμον.

Σελὶς 27. Τὸ σύνολον ὅλων τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν δὲν εἶναι ἀριθμήσιμον.

Σελὶς 33. Τὸ σύνολον ὅλων τῶν πραγματικῶν ὑπερβατικῶν ἀριθμῶν δὲν εἶναι ἀριθμήσιμον καὶ πληθάριθμον ἔχει **c**.

Σελὶς 35. Τὸ σύνολον ὅλων τῶν πραγματικῶν συναρτήσεων ποὺ ὁρίζονται εἰς τὸ διάστημα $0 < x < 1$, ἔχει πληθάριθμον μεγαλύτερον τοῦ πληθαρίθμου τοῦ συνεχοῦς.

Σελὶς 36. Τὸ σύνολον ὅλων τῶν πραγματικῶν συνεχῶν συναρτήσεων ἔχει πληθάριθμον **c**.

Σελὶς 37. Δοθέντος ἑνὸς ἀπείρου συνόλου, ὑπάρχει σύνολον μὲ πληθάριθμον μεγαλύτερον τοῦ πληθαρίθμου τοῦ δοθέντος συνόλου.

Σελὶς 39. Τὸ σύνολον ὅλων τῶν ὑποσυνόλων ἑνὸς συνόλου M ἔχει πάντοτε πληθάριθμον μεγαλύτερον ἀπὸ τὸν πληθάριθμον τοῦ M.

Σελὶς 41. Ἐὰν τὸ M εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς ὑποσύνολον N_1 τοῦ N καὶ τὸ N ἰσοδύναμον πρὸς ὑποσύνολον M_1 τοῦ M, τὰ σύνολα M καὶ N εἶναι ἰσοδύναμα (Θεώρημα ἰσοδυναμίας).

Σελὶς 57. Τὸ διατεταγμένον σύνολον M εἶναι *ὅμοιον* πρὸς διατεταγμένον σύνολον N, ἐὰν τὰ στοιχεῖα τῶν δύο συνόλων εἶναι δυνατὸν νὰ ταχθοῦν κατὰ τέτοιαν ἀμφιμονοσήμαντον ἀντιστοιχίαν μεταξύ των, ὥστε, ἐὰν διὰ δύο στοιχεῖα m_1 καὶ m_2 τοῦ M ἰσχύῃ ἡ σχέσις $m_1 < m_2$, διὰ τὰ ἀντίστοιχα αὐτῶν στοιχεῖα n_1 καὶ n_2 τοῦ N ἰσχύει ἡ ἰδία σχέσις $n_1 < n_2$.

Σελὶς 58. Ἐὰν ἕνα σύνολον M εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς ἕνα διατεταγμένον σύνολον N, εἶναι δυνατὴ μιὰ τέτοια διάταξις τῶν στοιχείων τοῦ M, ὥστε νὰ γίνῃ αὐτὸ ὅμοιον πρὸς τὸ N.

Σελὶς 63. Κάθε πεπερασμένον σύνολον εἶναι καλῶς διατεταγμένον.

Σελὶς 64. Κάθε σύνολον ἐπιδέχεται καλὴν διάταξιν τῶν στοιχείων του. (Θεώρημα καλῆς διατάξεως.)

Σελὶς 70. Κάθε ἄπειρον καὶ φραγμένον σημειοσύνολον ἔχει τουλάχιστον ἕνα σημεῖον συσσωρεύσεως (Θεώρημα τῶν Bolzano—Weierstrass).

XX. Βραχὺ ἱστορικὸν διάγραμμα

1. Τὸ ἐν ἐνεργείᾳ ἄπειρον. Ἡ Θεωρία τῶν συνόλων:

Bernhard Bolzano. Ἐγεννήθη τὴν 5ην Ὀκτωβρίου 1781 εἰς Πράγαν, ἀπέθανε τὴν 18ην Δεκεμβρίου 1848 εἰς τὴν ἰδίαν πόλιν. Ὑπῆρξεν ἱεροκήρυξ καὶ καθηγητὴς τῆς Θεολογίας εἰς τὴν Πράγαν. Θεωρεῖται πρόδρομος τοῦ Cantor. Τὸ ἔργον του: *Τὰ παράδοξα τοῦ ἀπείρου*, ἐξεδόθη τὸ 1851, μετὰ τὸν θάνατόν του.

Georg Cantor. Ἐγεννήθη τὴν 3ην Μαρτίου 1845 εἰς Πέτερσμπουργκ ἀπὸ πατέρα ἔμπορον τῆς Κοπεγχάγης καὶ ἀπέθανεν τὴν 6ην Ἰανουαρίου 1918 εἰς Halle. Εἰς ἡλικίαν 11 ἐτῶν μετενάστευσε μετὰ τῆς οἰκογενείας του εἰς Γερμανίαν. Ἐσπούδασε εἰς Ντάρμσταντ, Γοτίγγην καὶ

Βερολῖνον. Εἰς τὸ Βερολῖνον ὑπῆρξε μαθητὴς τοῦ Kronecker καὶ τοῦ Weierstrass. Ἐδίδαξεν ὡς καθηγητὴς εἰς τὴν Halle, ὅπου ἀπὸ τοῦ 1878 ἐδημοσίευσε τακτικὰ ἐργασίας του ἐπὶ τῆς Θεωρίας τῶν συνόλων.

Ernst Zermelo. Ἐγεννήθη εἰς Φράϊμπουργκ τὴν 27ην Ἰουλίου 1871 ὅπου καὶ ἀπέθανε, τὴν 21ην Μαΐου 1953. Τὸ θεώρημα τῆς καλῆς διατάξεως ἀπέδειξε τὸ 1904.

Cesare Burali—Forti(1861-1931). Τὸ ὁμώνυμόν του παράδοξον ἀνεκοίνωσεν τὸ 1897.

Bertrand Russel. Ἐγεννήθη τὴν 18ην Μαΐου 1872 εἰς *Chapstow*. Καθηγητὴς εἰς Καΐμπριτζ, τὸ 1903 ἀνεκοίνωσε τὸ ὁμώνυμόν του παράδοξον. Τὸ ἔργον του: *Εἰσαγωγὴ εἰς τὴν μαθηματικὴν φιλοσοφίαν* (Introduction to Mathematical Philopsophy), ἐδημοσιεύθη τὸ 1923.

2. *Ἐνορατισμὸς καὶ Φορμαλισμός:*

Leopold Kronecker. Ἐγεννήθη τὴν 7ην Δεκεμβρίου 1823 εἰς Liegnitz, ἀπέθανε τὴν 29ην Δεκεμβρίου 1891 εἰς Βερολῖνον. Διδάσκαλος τοῦ Cantor καὶ πρόδρομος τοῦ ἐνορατισμοῦ. Ἔγραψεν: «Οἱ ἀκέραιοι ἐδημιουργήθησαν ὑπὸ τοῦ Θεοῦ, ὅλα τὰ ἄλλα εἶναι ἔργον τοῦ ἀνθρώπου». Ἀπέρριπτε τοῦ μαθητοῦ του Cantor τὴν θεωρίαν τῶν συνόλων.

Hermann Weil. Ἐγεννήθη τὴν 9ην Νοεμβρίου 1885 εἰς Elmshorn, ἀπέθανε τὸν Δεκέμβριον τοῦ 1955 εἰς Ceneva (Η.Π.) Ἦτο καθηγητὴς εἰς τὸ Πρίνστον καὶ μεταξὺ τῶν ἔργων του εἶναι: *Τὸ συνεχὲς* (The Continuum, 1918), *Ἐπὶ τῆς νέας κρίσεως τῶν βάσεων τῶν μαθηματικῶν* (Concerning the New Crisis in Foundations *of* Mathematics, 1921), *Φιλοσοφία τῶν μαθηματικῶν καὶ φυσικῶν ἐπιστημῶν* (Philosophy ot Mathematics and Natural Sciences, 1926).

Luitzen Egbertus Jan Brouwer. Ἐγεννήθη τὴν 27ην Φεβρουαρίου 1881 εἰς Overschie (Ὁλλανδία). Καθηγητὴς εἰς Ἄμστερνταμ. Ἀπέρριπτε τὴν θεωρίαν τῶν συνόλων τοῦ Cantor καὶ ἐστράφη ἐναντίον τῶν φορμαλιστικῶν μεθόδων τοῦ Hilbert. Μεταξὺ ἄλλων ἔγραψε: *Ἐπὶ τῶν θεμελίων τῆς γνώσεως* (Concerning the Foundations of Knowledge, 1907), *Ἐνορατισμὸς καὶ φορμαλισμὸς* (Intuitionalism and Formalism, 1912). *Ἐνορατικὴ θεωρία τῶν συνόλων* (Intutionalistic Theory of Sets, 1919).

David Hilbert. Ἐγεννήθη τὴν 23ην Ἰανουαρίου 1861 εἰς Καίνιξβέργην, ἀπέθανε τὴν 14ην Φεβρουαρίου 1932 εἰς Γοτίγγην. Ἀνύψωσεν εἰς τελείαν πληρότητα τὴν ἀξιωματικὴν μέθοδον. Μεταξὺ τῶν ἔργων του συγκαταλέγονται: *Τὰ Θεμέλια τῆς Γεωμετρίας* (Grundlage der Grometrie, 1899) καὶ τὰ *Θεμέλια τῶν Μαθηματικῶν* (Grundlage der Mathematik, 1928). Ἦτο ἀντίπαλος τῶν ἐνορατιστῶν· ἔγραψεν σχετικῶς: «Θὰ πρέπει νὰ ἐπαναφέρω εἰς τὰ μαθηματικὰ τὴν φωνὴν τῆς ἀδιαμφισβητήτου ἀληθείας, ἡ ὁποία ἐφάνη νὰ ἐξασθενίζῃ διὰ τῶν παραδόξων τῆς θεωρίας τῶν συνόλων. Θεωρῶ τοῦτο δυνατὸν καὶ μὲ πλήρη διατήρησιν ὅλων τῶν μέχρι τοῦδε κατακτήσεων αὐτῆς. Ἡ μέθοδος, τὴν ὁποίαν ἐφαρμόζω, δὲν εἶναι ἄλλη ἀπὸ τὴν ἀξιωματικὴν μέθοδον.»

XXI. Βιβλιογραφία.

Εἰς τοὺς ἐνδιαφερομένους διὰ περαιτέρω σπουδὰς εἰς τὴν θεωρίαν τῶν συνόλων συνιστῶμεν τὰ κάτωθι συγγράμματα, εἰς τὰ ὁποῖα θὰ εὕρουν ἐπέκτασιν τῶν περιεχομένων τοῦ παρόντος βιβλίου ἀλλὰ καὶ ἐμβάθυνσιν εἰς αὐτά, ὄχι πάντως πολὺ δύσκολον.

Cantor, George: *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers.* Dover Publications, New York. Αἱ πρῶται αὐταὶ μελέται τοῦ Cantor (1895, 1897) μετεφράσθησαν ἐκ τῆς γερμανικῆς ὑπὸ Philip E. B. Jourdain, ὁ ὁποῖος παρέχει καὶ εἰσαγωγήν, ἱστορικὴν καὶ ἐπεξηγηματικήν, ἐξ 82 σελίδων. Τὸ ἔργον τοῦτο τοῦ Cantor εἶναι κάπως ἀφηρημένον καὶ ὄχι πολὺ κατάλληλον διὰ πρώτην μελέτην τοῦ θέματος.

Fraenkel, Abraham *A*, *Abstract Set Theory.* North Holland Publishing Co, Amsterdam, 1953. Αὐστηροτέρα καὶ πλήρης διεξαγωγὴ τῆς θεωρίας. Ἐξαίρετον βιβλίον ἀναφορᾶς διὰ τὸν ἐνδιαφερόμενον ἀναγνώστην καὶ μὲ τὴν πλουσιωτέραν βιβλιογραφίαν (128 σελίδες) μέχρι τοῦ 1950.

Kamke, E. *Theory of sets.* Dover Publications, New York. Κατὰ μετάφρασιν ἐκ τοῦ γερμανικοῦ (*Mengenlehre*, Sammlumg Göschen) ὑπὸ F. Bagemihl. Μέσης δυσκολίας παρουσίασις τοῦ θέματος, μεταξὺ τοῦ παρόντος βιβλίου καὶ τοῦ Fraenkel κειμένη.

Kemeny. J. G. Snell, J. L., καὶ Thompson, G. L. *Introduction to Finite Mathematics.* Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J. Μία σύγχρονος πραγμάτευσις τῶν πεπερασμένων συνόλων καὶ τῶν πράξεων ἐπὶ τῶν συνόλων. Θὰ πρέπει νὰ μελετηθῇ ἐν συνδυασμῷ πρὸς τὸ παρὸν βιβλίον.

Weil, Hermann. *Philosophy of Matematics and the Natural Sciences.* Princeton University Press. Μία καλὴ ἔκθεσις τῶν φιλοσοφικῶν προβλημάτων εἰς τὰ Μαθηματικὰ (Μεταμαθηματικά).

Bachman, Heinz. *Transfinite Zahlen.* Spinger Verlag, Berlin. Αἱ πλέον σύγχρονοι ἀπόψεις ἐπὶ τῆς θεωρίας τῶν συνόλων καὶ μία πολὺ περιεκτικὴ βιβλιογραφία μεταξὺ τῶν ἐτῶν 1950-1955. Περιέχει ἐπίσης μίαν πρώτην παρουσίασιν τῆς ἀριθμητικῆς τῶν πληθαρίθμων, χωρὶς χρῆσιν τοῦ ἀξιώματος τῆς ἐπιλογῆς.

Bourbaki, N. *Théorie des Ensembles. Livre I.* Hermann et C^{ie}, Paris. Ὁ πρῶτος τόμος μιᾶς σειρᾶς ἐκδόσεων ὑπὸ ὁμάδος μαθηματικῶν (καλουμένων Bourbaki) ἐπὶ τῆς αὐστηρᾶς θεμελιώσεως τῆς ἀναλύσεως. Βιβλίον πολὺ περιεκτικὸν καὶ δύσκολον.

Hausdorff, F. *Mengenlehre*, 3η ἔκδοσις. Ἀγγλικὴ ἔκδοσις Dover Publications, New York. Καταληπτὴ πραγμάτευσις τῆς θεωρίας, μὲ πολλὰ περιγραφικὰ καὶ ἐπεξηγηματικὰ στοιχεῖα.

XXII. Πίναξ συμβόλων

$a = b$ a εἶναι ἴσον πρὸς τὸ b.
$a \neq b$ a δὲν εἶναι ἴσον πρὸς τὸ b.
$a < b$ a μικρότερον τοῦ b.
$a > b$ a μεγαλύτερον τοῦ b.
$M = \{1,2,3,...n\}$ Σύνολον πεπερασμένον, μὲ στοιχεῖα: $1,2,3,...,n$
$M = \{1,2,3,...\}$ Σύνολον ἄπειρον, μὲ στοιχεῖα: $1,2,3,...$
$a \in M$ Τὸ a εἶναι στοιχεῖον τοῦ M.
$a \notin M$ Τὸ a δὲν εἶναι στοιχεῖον τοῦ M.
$M = N$ Τὰ σύνολα M καὶ N εἶναι ἴσα: Περιέχουν τὰ αὐτὰ στοιχεῖα.
$N \subset M$ N εἶναι γνήσιον ὑποσύνολον τοῦ M.
$N \subseteq M$ N εἶναι (γνήσιον ἢ καταχρηστικὸν) ὑποσύνολον τοῦ M.
$R = M - N = \bar{R}$. Τὸ συμπληρωματικὸν σύνολον R τοῦ N ὡς πρὸς τὸ M περιέχει τὰ στοιχεῖα τοῦ M, τὰ ὁποῖα δὲν ἀνήκουν εἰς τὸ ὑποσύνολόν του N καὶ μόνον αὐτά.
$S = M \cup N$ Ἡ ἕνωσις S τῶν M καὶ N περιέχει τὰ στοιχεῖα, τὰ ὁποῖα ἀνήκουν ἢ εἰς τὸ M ἢ εἰς τὸ N ἢ καὶ εἰς τὰ δύο σύνολα.
$D = M \cap N$ Ἡ τομὴ D τῶν M καὶ N περιέχει τὰ στοιχεῖα, τὰ ὁποῖα εἶναι κοινὰ καὶ τῶν δύο συνόλων.
$M \sim N$ M εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς N καὶ δύναται νὰ ἀπεικονισθῇ ἐπ' αὐτοῦ.
$M \nsim N$ M δὲν εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς N.
$|M| = \mathbf{m}$ Ὁ πληθάριθμος (ἡ δυναμικότης) τοῦ M.
$\mathbf{a}$ Ὁ πληθάριθμος ἑνὸς ἀριθμησίμου συνόλου.
$\mathbf{c}$ Ὁ πληθάριθμος τοῦ συνεχοῦς.
$M \times N$ Τὸ καρτεσιανὸν γινόμενον τῶν συνόλων $M(m)$ καὶ $N(n)$ ἔχει στοιχεῖα (m_1,n_1), (m_1,n_2) ... (m_2,n_1), (m_2,n_2)... καὶ εἶναι

$$|M \times N| = \mathbf{m} \cdot \mathbf{n}.$$

N/M Τὸ ἐπικαλύπτον σύνολον N/M (N ἐπικαλύπτεται διὰ τοῦ M) ἔχει πληθάριθμον $|N/M| = \mathbf{m}^{\mathbf{n}}$.

$U(M)$ Τὸ δυναμοσύνολον τοῦ M εἶναι τὸ σύνολον ὅλων τῶν ὑποσυνόλων τοῦ M. Εἶναι:

$$|U(M)| = 2^{\mathbf{m}} > \mathbf{m}.$$

$a \prec b$ Τὸ a προηγεῖται τοῦ b.
$a \succ b$ Τὸ a ἕπεται τοῦ b.
$M \simeq N$ Τὰ M καὶ N εἶναι ὅμοια καὶ ἔχουν ἴσους διατακτικοὺς τύπους.
$\boldsymbol{\omega}$ Διατακτικὸς τύπος (καὶ διατακτικὸς ἀριθμὸς) τοῦ συνόλου $\{1,2,3,...\}$.
$^*\boldsymbol{\omega}$ Διατακτικὸς τύπος τοῦ συνόλου $\{...3,2,1\}$.
$\boldsymbol{\eta}$ Διατακτικὸς τύπος τοῦ συνόλου ὅλων τῶν ρητῶν σημείων μιᾶς εὐθείας.
$\boldsymbol{\lambda}$ Διατακτικὸς τύπος τοῦ μὴ φραγμένου γραμμικοῦ συνεχοῦς.
$\boldsymbol{\theta}$ Διατακτικὸς τύπος τοῦ φραγμένου γραμμικοῦ συνεχοῦς.
$\boldsymbol{\mu} = [M]$ Διατακτικὸς τύπος τοῦ διατεταγμένου συνόλου M.
$\langle a,b \rangle$ Κλειστὸν διάστημα (περιέχον τὸ a καὶ b).
(a,b) Ἀνοικτὸν διάστημα (μὴ περιέχον τὰ a καὶ b)
$\langle a,b)$, $(a,b\rangle$ Ἡμιάνοικτα διαστήματα.
$a|b$ Ἅλμα. Μεταξὺ τῶν a καὶ b δὲν ὑπάρχουν στοιχεῖα.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Σελὶς 7

1. Καθηγηταί, μαθηταί, ἄνθη, καθίσματα, κλπ. **2.** Ὄχι. Οἱ κόμβοι $(\pm 1, \pm 1)$ ἀνήκουν εἰς τὸ K ἀλλὰ δὲν εἶναι πλέον στοιχεῖα τοῦ Q. **3.** Ὄχι. Περιέχει τοὺς κόμβους $(\pm 2, \pm 3)$ καὶ $(\pm 3, \pm 2)$. Κατασκευάσατε ἕνα σχέδιον. **4.** $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{9}, \frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \frac{2}{7}, \frac{2}{9}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{8}{9}\right\}$. Τὸ σύνολον περιέχει 27 στοιχεῖα. **5.** Τὰ ἀντίστροφα τῶν ὀκτὼ κλασμάτων $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{9}$ δὲν εἶναι καταχρηστικὰ κλάσματα ἀλλὰ ἀκέραιοι ἀριθμοί.

Σελὶς 12

1. $2^4 = 16$ ὑποσύνολα: $\{\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{5\}$, $\{7\}$, $\{2,3\}$, $\{2,5\}$, $\{2,7\}$, $\{3,5\}$, $\{3,7\}$, $\{5,7\}$, $\{2,3,5\}$, $\{2,3,7\}$, $\{2,5,7\}$, $\{3,5,7\}$, $\{2,3,5,7\}$.
2. Ἡ πρότασις εἶναι συνέπεια τοῦ ὁρισμοῦ. **3.** Ναί. Προκύπτει ἐκ τῶν ὁρισμῶν τῶν πράξεων. **4.** $\binom{10}{5} = 252$. Διὰ κάθε ὁμάδα ὑπάρχουν ἐπιπροσθέτως $5! = 120$ διαφορετικαὶ μεταθέσεις θέσεως. **5.** Εἶναι καταχρηστικὸν σύνολον, ἀφοῦ ὅλοι οἱ τελειόφοιτοι πρέπει νὰ ὑποστοῦν ἐξετάσεις.

Σελὶς 15

1. Πόδια καὶ ὑποδήματα, μάτια καὶ αὐτιὰ κλπ. Βιβλία, ἴσως καὶ καλύμματα βιβλίων. **2.** $4! = 24 \cdot$ π.χ.

$$\begin{array}{lll} a \Leftrightarrow a, & a \Leftrightarrow a, & a \Leftrightarrow a \quad \text{κλπ.} \\ b \Leftrightarrow b, & b \Leftrightarrow b, & b \Leftrightarrow b \\ c \Leftrightarrow c, & c \Leftrightarrow d, & c \Leftrightarrow b \\ d \Leftrightarrow d, & d \Leftrightarrow c, & d \Leftrightarrow d \end{array}$$

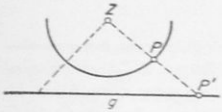
3. (α) $K \subset Q \cdot$ (β) $K \cap Q = K \cdot$ (γ) $|Q - K| = 12 \cdot$ (δ) Ναί, καὶ μάλιστα ἴσα. Κατασκευάσατε ἕνα σχέδιον. **4.** Μόνον (α), (β), (γ) καὶ (ε). **5.** Εἰς τὸ πεδίον ὁρισμοῦ θὰ πρέπει νὰ εὑρίσκωνται εἰς ἀμφιμονοσήμαντον ἀντιστοιχίαν. **6.** $|K| = |P| = 21$. **7.** Ἐὰν κάθε ἄτομον ἀνήκῃ εἰς ἕνα χορευτικὸν ζεῦγος, τότε $M \sim N$. **8.** Ἄς τὸ ἐλπίζωμεν. **9.** $y = 2x$. **10.** Ναί. $N \sim G$.

Σελὶς 20

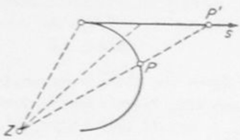
2. $z = 10^{n-1}$.

n	1	2	3
z	1	10	100

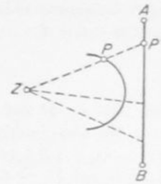
3. Βλέπε σχήματα 29, 30 καὶ 31. **4.** $n!$



Σχέδιον 29. Ἀπεικόνισις ἡμικυκλίου ἐπὶ εὐθείας γραμμῆς.



Σχέδιον 30. Ἀπεικόνισις ἡμικυκλίου ἐπὶ ἡμιευθείας.



Σχέδιον 31. Ἀπεικόνισις ἡμικυκλίου ἐπὶ εὐθυγράμμου τμήματος.

Σελὶς 26

1. **α**! διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ **α**! βλέπε ἄσκ. 2, σελ. 15. **2.** Ναί. Κατασκευάσατε τὸν ἀριθμητικὸν μέσον $(r_1 + r_2)/2$. **3.** Διὰ τοὺς ἀλγεβρικοὺς ἀριθμοὺς τῆς σελίδος 25 τὸ ὕψος πέντε δίδει ἐπιπροσθέτως καὶ τοὺς ἑξῆς ἀριθμούς:

$$\pm\frac{1}{3},\ \pm 3,\ \pm\sqrt{\pm\frac{1}{2}},\ \pm\sqrt{\pm 2},\ \pm\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}\pm 1}.$$

4. ημ. $7^0 30'$ εἶναι ἀλγεβρικὸς ἀριθμός, ἀφοῦ ημ $7^0 30' = +\sqrt{\frac{1}{2}(1 - \text{συν. } 15^0)}$, συν. $15^0 = \sqrt{\frac{1}{2}\ (1 + \text{συν } 30^0)}$, συν $30^0 = \sqrt{3}/2$. Γενικῶς, ημφ^0 εἶναι πάντοτε ἀλγεβρικὸς ἀριθμός, ἐὰν φ εἶναι ρητός. Ἀντιθέτως, ημ x, ὅπου x ἐκφράζεται εἰς ἀκτίνια καὶ εἶναι ρητὸς ἀριθμός, εἶναι πάντοτε ὑπερβατικὸς ἀριθμός.

Σελὶς 34

1. Ἡ ἀπόδειξις ὅπως εἰς VI, § 7. (Τὸ εἰς τὸ ἐσωτερικὸν ἑνὸς κύβου σημειοσύνολον). **2.** $x = x + iy$. Ὁ πληθάριθμος τοῦ συνόλου ὅλων τῶν ζευγῶν (x, y) ἀπὸ πραγματικοὺς ἀριθμοὺς εἶναι **c**. Ὁ πληθάριθμος, ἑπομένως, ὅλων τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν εἶναι **c**. **3.** **a**. **4.** Ναί. **5.** Ὁ πληθάριθμος ὅλων τῶν δυνάμεων m^n εἶναι ὁ ἴδιος μὲ τὸν πληθάριθμον τοῦ συνόλου ὅλων τῶν ζευγῶν φυσικῶν ἀριθμῶν τοῦ ἐπιπέδου. Φαίνεται τοῦτο καὶ διὰ τῆς μεθόδου τῆς διαγωνίου:

$$\begin{tikzcd}
1^1 \arrow[r] & 1^2 \arrow[dl] & 1^3 \arrow[r] & 1^4 \arrow[dl] & \cdots \\
2^1 & 2^2 \arrow[ur] & 2^3 \arrow[dl] & 2^4 & \cdots \\
3^1 \arrow[ur] & 3^2 \arrow[dl] & 3^3 & 3^4 & \cdots \\
4^1 & 4^2 & 4^3 & 4^4 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

Σελὶς 39

1. Ὁ πληθάριθμος ὅλων τῶν ζευγῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν c_1 καὶ c_2 εἶναι **c**. **2.** Τὸ κυκλικὸν σύνολον εἶναι τὸ σύνολον ὅλων τῶν σημείων ποὺ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸν τριδιάστατον σημειακὸν χῶρον· πληθάριθμον, ἑπομένως, ἔχει **c**. Θεωρήσατε τὰ

a, b, r, ὡς καρτεσιανὰς συντεταγμένας σημείων τοῦ χώρου. **3.** $1 < 2 < 3 < 4 < \ldots < \mathbf{a} < \mathbf{c} < \mathbf{f}$

Σελὶς 43

1. Ναί. Ἐὰν τὰ M καὶ N ἔχουν τὸν αὐτὸν πεπερασμένον πληθάριθμον, ἕκαστον σύνολον δὲν εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς γνήσιον ὑποσύνολον τοῦ ἄλλου. **2.** Ἂς ἐκλέξωμεν π. χ. $U_1 = \{3,7,11,\ldots,\}$ καὶ $G_1 = \{2,6,10,\ldots\}$. Θὰ ἔχωμεν τότε $U_1 \subset U$, $G_1 \subset G$ καὶ $U_1 \sim G$. Τὴν διάταξιν ἐπιτυγχάνομεν θέτοντες $u_1 = 2g - 1$. $G_1 \sim U$ καὶ ἡ διάταξις ὁρίζεται διὰ τῆς σχέσεως $g_1 = 2u$. **3.** Τὸ ὑποσύνολον EF τοῦ τμήματος AB ἀπεικονίζεται ἀμφιμονοσημάντως ἐπὶ τοῦ CD διὰ κεντρικῆς προβολῆς ἐκ τοῦ Z_1. Τὸ ὑποσύνολον ὁμοίως GH τοῦ CD ἀπεικονίζεται ἐπὶ τοῦ AB διὰ κεντρικῆς προβολῆς ἐκ τοῦ Z_2.

Σελὶς 48

1. Ναί. **2.** $\mathbf{a}! = \mathbf{c}$. Διότι $2^{\mathbf{a}} \leqq \mathbf{a}! \leqq \mathbf{a}^{\mathbf{a}}$ καὶ $2^{\mathbf{a}} = \mathbf{a}^{\mathbf{a}} = \mathbf{c}$. **3.** Πάντοτε.

Σελὶς 54

1. $|N/M| = 3^{12} = 531441$. **2.** $0 < y < 1$. **3.** $Y = \{-1, +1\}$. **4.** $|N/M| = 6^{16} = 2821109097456$. **5.** $1^{\mathbf{m}} = 1$: Ὅλαι αἱ $\mathbf{m}$ θέσεις τοῦ M καλύπτονται μὲ ἕνα μόνον στοιχεῖον. Τὸ καλύπτον σύνολον ἔχει πληθάριθμον 1. $\mathbf{m}^1 = \mathbf{m}$. Μία θέσις ἠμπορεῖ νὰ καλυφθῇ διὰ $\mathbf{m}$ διαφορετικῶν στοιχείων. Ὑπάρχουν $\mathbf{m}$ καλύψεις. Τὸ καλύπτον σύνολον ἔχει πληθάριθμον $\mathbf{m}$. **6.** Τὸ σύνολον X ($|X| = \mathbf{c}$) καλύπτεται διὰ τοῦ συνόλου Y ($|Y| = \mathbf{a}$). Ἐπομένως $\mathbf{a}^{\mathbf{c}} = \mathbf{f}$. **7.** $\mathbf{m}^{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{n}^{\mathbf{p}} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{m} \cdot \mathbf{m} \ldots \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} \ldots = \mathbf{m} \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{m} \cdot \mathbf{n} \ldots = (\mathbf{m} \cdot \mathbf{n})^{\mathbf{p}}$, ἀφοῦ ἰσχύει ὁ ἀντιμεταθετικὸς νόμος.

Σελὶς 63

1. $$\begin{aligned}(1 + \omega) + ({}^*\omega + 1) + \omega &= \omega + {}^*\omega + \omega \\ &= [\{a, 1, 3, 5, \ldots 6, 4, 2, b, c_1, c_2 c_3 \ldots\}].\end{aligned}$$

2. $1 + \eta + 1$.

Σελὶς 67

1. Τὰ καλῶς διατεταγμένα σύνολα εἶναι τὰ Z, Z_1, Z_2, Z_3.

2. $[Z] = \omega$ εἶναι διατακτικὸς ἀριθμός,

$[\bar{Z}] = {}^*\omega + \omega$,

$[Z_1] = \omega + \omega = \omega \cdot 2$ εἶναι διατακτικὸς ἀριθμός,

$[Z_2] = \omega + \omega = \omega \cdot 2$ εἶναι διατακτικὸς ἀριθμός,

$[Z_3] = \omega + \omega + 1 = \omega \cdot 2 + 1$ εἶναι διατακτικὸς ἀριθμός.

3. Ὄχι. **4.** Ναί. Ἡ τομή, ἡ ἀνήκουσα εἰς τὸ τελευταῖον στοιχεῖον τοῦ δευτέρου συνόλου (μὲ διατακτικὸν ἀριθμὸν $\mu + 1$), εἶναι ὁμοία πρὸς τὸ πρῶτον σύνολον (μὲ διατακτικὸν ἀριθμὸν μ). **5.** Ναί, καὶ κατ' ἀπείρους τρόπους, ὡς λ.χ.

$$\begin{array}{ccccccccc} \{\ldots, & -2, & -1, & 0, & +1, & +2, & \ldots\} \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ \{\ldots, & -3, & -2, & -1, & 0, & +1, & \ldots\} \end{array}$$

6. Ὄχι. Σύνολα διατακτικοῦ τύπου $\boldsymbol{\eta} + 1$ δὲν ἔχουν πρῶτον στοιχεῖον. Σύνολα τοῦ τύπου $1 + \boldsymbol{\eta}$ ἔχουν ὑποσύνολα στερούμενα πρώτου στοιχείου (ὡς τὸ ὑποσύνολον ποὺ προκύπτει μὲ ἐξαίρεσιν τοῦ πρώτου στοιχείου).

Σελὶς 71

1. $\{1 \cup$ ρητὰ σημεῖα τοῦ $(1,2)\} \cup \{2 \cup$ ρητὰ σημεῖα τοῦ $(2,3)\} \cup + \ldots \cup \{n \cup$ ρητὰ σημεῖα τοῦ $(n, n+1)\} = \{1 \cup$ ρητὰ σημεῖα τοῦ $(1, n+1)\}$.

2. $\{(0,1) \cup 1\} \cup \{(1,2) \cup 2\} \cup \ldots \cup \{(n-1,n) \cup n\} = \{(0,n) \cup n\}$.

3. $x_1 = (n+1)/2n$, $x_2 = 1/n$. Σημεῖα συσσωρεύσεως : $\frac{1}{2}$, 0.

4. Ὅλα τὰ πεπερασμένα σύνολα δὲν ἔχουν σημεῖα συσσωρεύσεως. Μερικὰ μὴ φραγμένα ἄπειρα σύνολα δὲν ἔχουν ἐπίσης σημεῖα συσσωρεύσεως, ὡς τὸ $\{1,2,3,\ldots\}$.

Σελὶς 74

1. Ὄχι. Δὲν περιέχει τὸ σημεῖον συσσωρεύσεως 0. **2.** Τὸ σύνολον ὅλων τῶν σημείων τοῦ διαστήματος $[1,2]$. **3.** Τὸ σύνολον ὅλων τῶν σημείων τοῦ διαστήματος $[1,2]$ **4.** Ὄχι. Δὲν περιέχει τὰ ἀσύμμετρα σημεῖα τοῦ διαστήματος, τὰ ὁποῖα εἶναι σημεῖα συσσωρεύσεως τῶν ρητῶν σημείων αὐτοῦ. **5.** Ναί. Συγκρίνατε πρὸς τὴν ἄσκησιν 2, σελ. 26. **6.** Ναί. Κάθε σημεῖον εἶναι σημεῖον συσσωρεύσεως. **7.** Ναί. Ναί. Τὸ παράγωγον ἑνὸς τυχόντος συνόλου εἶναι κλειστὸν σύνολον. Τὸ παράγωγον τοῦ δοθέντος συνόλου εἶναι τὸ διάστημα $[2,3]$, τὸ ὁποῖον εἶναι σύνολον κλειστόν, πυκνὸν καθ' ἑαυτὸ ἄρα καὶ τέλειον. **8.** Ὄχι. Εἶναι ἁπλῶς κλειστόν, ὡς τὸ $M = \{0{,}1,\ 0{,}01,\ 0{,}001, \ldots\}$, διὰ τὸ ὁποῖον $M' = \{0\}$. Τὸ 0 δὲν εἶναι σημεῖον συσσωρεύσεως τοῦ M'.

Σελὶς 77

1. Ὑποθέσατε $\sqrt{2} = m/n$ ὁπότε $m^2/n^2 = 2$ ἢ $m^2 = 2n^2$. Θὰ εἶναι τὸ m ἀναγκαίως ἄρτιος ἀριθμὸς $2K$ καὶ θὰ ἔχωμεν $m_2 = 4k_2 = 2n^2$ ἢ $n^2 = 2k^2$ δηλ. $n =$ ἄρτιος, εἰς ἀντίφασιν πρὸς τὴν ὑπόθεσιν ὅτι οἱ m καὶ n εἶναι ἀριθμοὶ σχετικῶς πρῶτοι. **2.** $\sqrt{5}$ εἶναι τὸ χάσμα, τὸ ὁποῖον χωρίζει ὅλους τοὺς ρητοὺς m/n, διὰ τοὺς ὁποίους $m^2/n^2 < 5$, ἀπὸ ὅλους τοὺς ρητούς, διὰ τοὺς ὁποίους $m^2/n^2 > 5$. **3.** (α) Ἅλμα: 1|2· (β) χάσμα· (γ) συνεχὴς τομή.

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟΝ ΟΡΩΝ

024000028065