ΓΕΩΡΓΙΟΥ Χ. ΠΑΠΑΝΙΚΟΛΑΟΥ
ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΑΛΓΕΒΡΑΣ

ΔΙΑ
ΤΟΥΣ ΜΑΘΗΤΑΣ ΤΩΝ ΠΡΑΚΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ, ΤΟΥΣ ΥΠΟΨΗΦΙΟΥΣ ΤΩΝ ΑΝΩΤΑΤΩΝ ΣΧΟΛΩΝ ΤΟΥ ΚΡΑΤΟΥΣ, ΤΟΥΣ ΦΟΙΤΗΤΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ κ.λ.π.

ΔΕΥΤΕΡΑ ΕΚΔΟΣΙΣ

ΕΚΔΟΣΙΣ
ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ "Ο ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ"
ΟΔΟΣ Γ. ΓΕΝΝΑΔΙΟΥ ΑΡΙΘ. 2
(ΠΑΡΟΔΟΣ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΠΑΡΑ ΤΗΝ ΖΩΟΔΟΧΟΝ ΠΗΓΗΝ)
ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
1936

ΜΑΘΗΜΑΤΑ

ΑΛΓΕΒΡΑΣ

Ἀριανίτου 5

ΤΥΠΟΙΣ: ΑΘΑΝ. Α. ΠΑΠΑΣΠΥΡΟΥ ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ

ΓΕΩΡΓΙΟΥ Χ. ΠΑΠΑΝΙΚΟΛΑΟΥ
ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΑΛΓΕΒΡΑΣ

ΔΙΑ

ΤΟΥΣ ΜΑΘΗΤΑΣ ΤΩΝ ΠΡΑΚΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ, ΤΟΥΣ ΥΠΟΨΗΦΙΟΥΣ ΤΩΝ ΑΝΩΤΑΤΩΝ ΣΧΟΛΩΝ ΤΟΥ ΚΡΑΤΟΥΣ, ΤΟΥΣ ΦΟΙΤΗΤΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ κ.λ.π.

ΔΕΥΤΕΡΑ ΕΚΔΟΣΙΣ

ΕΚΔΟΣΙΣ
ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ "Ο ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ,,
ΟΔΟΣ Γ. ΓΕΝΝΑΔΙΟΥ ΑΡΙΘ. 3
(ΠΑΡΟΔΟΣ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΠΑΡΑ ΤΗΝ ΖΩΟΔΟΧΟΝ ΠΗΓΗΝ)
ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
1936

ΠΡΟΛΟΓΟΣ ΤΗΣ Α΄ ΕΚΔΟΣΕΩΣ

Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὴν ἔλλειψιν βιβλίου περιέχοντος ἐκτενέστερον τὴν εἰς τὰ Γυμνάσια διδασκομένην ὕλην τῆς Ἀλγέβρας, προέβημεν εἰς τὴν ἔκδοσιν τοῦ παρόντος βιβλίου τῶν **ΜΑΘΗΜΑΤΩΝ ΑΛΓΕΒΡΑΣ**.

Ὅσον ἀφορᾷ τὴν ὕλην καὶ τὰς ἀσκήσεις αἱ ὁποῖαι περιέχονται εἰς τὸ βιβλίον τοῦτο, ἐλάβομεν ὑπ' ὄψιν τὰς ἀπαιτουμένας γνώσεις διὰ τὴν εἰσαγωγὴν ἑνὸς τελειοφοίτου τοῦ Γυμνασίου ἢ τοῦ Πρακτικοῦ Λυκείου εἰς ἀνωτάτην τινὰ σχολὴν τοῦ κράτους, ὡς π. χ. εἰς τὸ Πολυτεχνεῖον, εἰς τὰς Στρατιωτικὰς Σχολάς, εἰς τὰ Πανεπιστήμια κλπ. Ἀπὸ τῆς ἀπόψεως ταύτης ἔχομεν τὴν γνώμην ὅτι προσφέρομεν θετικήν τινα ὑπηρεσίαν εἰς τὴν σπουδάζουσαν νεολαίαν. Ἀλλὰ καὶ οἱ φοιτηταὶ τῶν Μαθηματικῶν δύνανται νὰ ἀρυσθοῦν πολλὰ ἐκ τῆς ἐν τῷ παρόντι βιβλίῳ περιεχομένης ὕλης.

Κατὰ τὴν διαπραγμάτευσιν τῆς ὕλης ἐθεωρήσαμεν ὡς γνωστὰς τὰς στοιχειώδεις ἀλγεβρικὰς γνώσεις, ὡς π. χ. τὰς ἀλγεβρικὰς πράξεις ἐπὶ τῶν πολυωνύμων, τοὺς στοιχειώδεις τρόπους λύσεων τῶν ἐξισώσεων καὶ συστημάτων κλπ.

Κατὰ τὴν πορείαν τῆς ἐργασίας μας ταύτης συνεβουλεύθημεν καὶ βιβλία ξένων συγγραφέων, ἰδίως Γάλλων, Ἄγγλων καὶ Γερμανῶν. Αἱ εἰς τὸ βιβλίον περιεχόμεναι ἀσκήσεις ἐξελέγησαν μετ' ἐπιμελείας, ἵνα ἐκπληρώσουν κατὰ τὸ δυνατὸν τὸν σκοπὸν δι' ὃν ἐκδίδεται τοῦτο, πολλαὶ δὲ τούτων εἶναι πνευματικὴ ἐργασία ἡμῶν, τὸ πρῶτον δημοσιευόμεναι ἐνταῦθα.

ΓΕΩΡ. ΠΑΠΑΝΙΚΟΛΑΟΥ

Ἀθῆναι Ὀκτώβριος 1933

ΠΡΟΛΟΓΟΣ ΤΗΣ Β΄ ΕΚΔΟΣΕΩΣ

Ὅταν τὸ πρῶτον προέβημεν εἰς τὴν ἔκδοσιν τοῦ παρόντος βιβλίου, εἴχομεν ὑπ' ὄψιν κυρίως τὰς ἀνάγκας τῶν τελειοφοίτων τῶν Γυμνασίων καὶ Πρακτικῶν Λυκείων οἱ ὁποῖοι προορίζονται διὰ τὰς θετικὰς ἐπιστήμας (Πολυτεχνεῖον, Στρατ. Σχολὰς, Πανεπιστήμιον κλπ.).

Ἤδη μετὰ τὴν ἐξάντλησιν τῆς α΄ ἐκδόσεως εἰς ἐλάχιστον σχετικῶς χρονικὸν διάστημα, προβαίνοντες εἰς τὴν β΄ ἔκδοσιν τοῦ βιβλίου μας, εὑρισκόμεθα εἰς τὴν εὐχάριστον θέσιν νὰ διαπιστώσωμεν ὅτι τὸ βιβλίον τοῦτο ἀνεπλήρωσεν ἓν οὐσιῶδες κενόν, διότι εἰς τοῦτο δύνανται οἱ ἐνδιαφερόμενοι νὰ εὕρουν ὅλην τὴν ἀπαιτουμένην ὕλην, εἰς θεωρίαν καὶ εἰς ἀσκήσεις, ἵνα καταρτισθοῦν τελείως διὰ τὰς εἰσαγωγικάς των ἐξετάσεις.

Ἡ β΄ αὐτη ἔκδοσις εἶναι κατὰ πολὺ βελτιωμένη τῆς α΄ διότι καὶ ἡ διάταξις τῆς ὕλης κατεχωρήθη συστηματικώτερον καὶ ἐκτενέστερον, καὶ πλῆθος νέων ἀσκήσεων προσετέθη, εἴμεθα δὲ βέβαιοι ὅτι τὸ βιβλίον μας ἀποτελεῖ ἓν ἐκ τῶν θετικῶν βοηθημάτων εἰς τὴν σπουδάζουσαν νεολαίαν. Ἔστω δὲ τοῦτο ἡ ἱκανοποίησις τῶν κόπων μας.

ΓΕΩΡ. ΠΑΠΑΝΙΚΟΛΑΟΥ

Ἀθῆναι Φεβρουάριος 1936

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄.

ΠΡΑΞΕΙΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

Ι. ΟΡΙΣΜΟΙ

1. ***Ἀλγεβρικὴ παράστασις,*** ἢ ἁπλῶς ***παράστασις*** καλεῖται τὸ σύνολον τῶν ἀριθμῶν, γραμμάτων καὶ σημείων διὰ τῶν ὁποίων σημειώνομεν τὰς πράξεις τὰς ὁποίας πρέπει νὰ ἐκτελέσωμεν· π. χ. αἱ $\alpha x+5\beta$, $6x^2-8\alpha x+\omega$ εἶναι ἀλγεβρικαὶ παραστάσεις.

2. ***Μονώνυμον*** καλεῖται ἡ παράστασις εἰς τὴν ὁποίαν δὲν σημειοῦται οὔτε πρόσθεσις οὔτε ἀφαίρεσις· π. χ. αἱ παραστάσεις $8\alpha^2\beta x$. 5α, $-3\alpha x^3$ εἶναι μονώνυμα.

3. ***Συντελεστὴς*** ἑνὸς μονωνύμου καλεῖται ὁ ἀριθμητικὸς παράγων τοῦ μονωνύμου, γράφεται δὲ οὗτος πάντοτε πρῶτος· π. χ. τοῦ μονωνύμου $-3\alpha x^3$ συντελεστὴς εἶναι ὁ -3, τοῦ μονωνύμου α συντελεστὴς εἶναι ὁ 1, διότι τοῦτο γράφεται καὶ 1α, τοῦ δὲ μονωνύμου $-\alpha^3\beta$ συντελεστὴς εἶναι ὁ -1.

ΣΗΜ. Τὸ σημεῖον — εἰς τὸ μονώνυμον $-3\alpha x^3$ δὲν εἶναι σημεῖον ἀφαιρέσεως ἀλλὰ τοῦτο ἀνήκει εἰς τὸν συντελεστὴν -3 καὶ φανερώνει ὅτι οὗτος εἶναι ἀρνητικός. Ἐν γένει ***τὸ σημεῖον τὸ ὁποῖον εἶναι ἔμπροσθεν ἑνὸς μονωνύμου ἀνήκει πάντοτε εἰς τὸν συντελεστήν του.***

4. Δύο μονώνυμα λέγονται ***ὅμοια*** ὅταν δὲν διαφέρουν καθόλου ἢ ὅταν διαφέρουν μόνον κατὰ τὸν συντελεστήν των, προστίθενται δὲ ἂν προσθέσωμεν μόνον τοὺς συντελεστάς των· π. χ. $3\alpha^2\beta-8\alpha^2\beta=-5\alpha^2\beta$.

Ἡ πρόσθεσις τῶν ὁμοίων μονωνύμων καλεῖται καὶ ***ἀναγωγὴ τῶν ὁμοίων ὅρων.***

5. ***Πολυώνυμον*** καλεῖται τὸ ἄθροισμα πολλῶν μονωνύμων. Τὰ μονώνυμα τὰ ὁποῖα ἀποτελοῦν τὸ πολυώνυμον καλοῦνται ***ὅροι*** τοῦ πολυωνύμου· π. χ. ἡ παράστασις $\alpha x^3-5\beta x^2+8x+7$ εἶναι ἓν πολυώνυμον μὲ τέσσαρας ὅρους.

6. ***Διώνυμον*** λέγεται πᾶν πολυώνυμον τὸ ὁποῖον ἔχει δύο ὅρους π. χ. τὸ $2\alpha x+5\beta$:

II. ΑΞΙΟΣΗΜΕΙΩΤΟΙ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

19. ***Τετράγωνον διωνύμου.*** Τὸ τετράγωνον διωνύμου ἀποτελεῖται ἐκ τῶν τετραγώνων τῶν δύο ὅρων αὐτοῦ καὶ ἐκ τοῦ διπλασίου ἀλγεβρικοῦ γινομένου αὐτῶν ἤτοι :

$$(\alpha+\beta)^2 \equiv \alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta \qquad (1)$$

$$(\alpha-\beta)^2 \equiv \alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta \qquad (2)$$

Παρατήρησις : Ἡ ταυτότης (1) εἶναι ἐπίσης εὔχρηστος καὶ ὑπὸ τὴν μορφήν $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta \qquad (2')$

20. ***Διαφορὰ δύο τετραγώνων.*** Τὸ γινόμενον τοῦ ἀθροίσματος ἐπὶ τὴν διαφορὰν δύο ἀριθμῶν ἰσοῦται μὲ τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων αὐτῶν, ἤτοι :

$$(\alpha+\beta)(\alpha-\beta) \equiv \alpha^2-\beta^2 \qquad (3)$$

21. ***Τετράγωνον πολυωνύμου.*** Τὸ τετράγωνον οἱουδήποτε πολυωνύμου ἀποτελεῖται ἐκ τῶν τετραγώνων τῶν ὅρων αὐτοῦ καὶ ἐκ τοῦ διπλασίου ἀλγεβρικοῦ γινομένου αὐτῶν ἀνὰ δύο λαμβανομένων, ἤτοι :

$$(\alpha+\beta+\gamma+\delta)^2 \equiv \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+2\alpha\beta+2\alpha\gamma+2\alpha\delta+2\beta\gamma+2\beta\delta+2\gamma\delta \qquad (4)$$

Ὁμοίως $(\alpha-\beta-\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2\alpha\beta-2\alpha\gamma+2\beta\gamma \qquad (4')$

22. ***Κύβος διωνύμου.*** Ὁ κύβος τοῦ διωνύμου δύο ἀριθμῶν ἀποτελεῖται ἐκ τῶν κύβων αὐτῶν καὶ ἐκ τοῦ τριπλασίου ἀλγεβρικοῦ γινομένου τοῦ ἑνὸς ἐπὶ τὸ τετράγωνον τοῦ ἄλλου, ἤτοι :

$$(\alpha+\beta)^3 \equiv \alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3 \qquad (5)$$

$$(\alpha-\beta)^3 \equiv \alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3 \qquad (6)$$

Παρατήρησις I. Αἱ ταυτότητες (5) καὶ (6) εἶναι ἐπίσης εὔχρηστοι ὑπὸ τὴν ἑξῆς μορφὴν

$$(\alpha+\beta)^3 \equiv \alpha^3+\beta^3+3\alpha\beta(\alpha+\beta) \qquad (7)$$

$$(\alpha-\beta)^3 \equiv \alpha^3-\beta^3-3\alpha\beta(\alpha-\beta) \qquad (8)$$

ἢ καὶ ὑπό τὴν μορφὴν

$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta) \qquad (9)$$

$$\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)^3+3\alpha\beta(\alpha-\beta) \qquad (10)$$

Παρατήρησις II. Τὸ ἀνάπτυγμα οἱασδήποτε δυνάμεως ἑνὸς διωνύμου $\alpha+\beta$ ἔχει ὅρους κατὰ ἕνα περισσοτέρους ἀπὸ τὰς μονάδας τοῦ ἐκθέτου του, εἶναι πολυώνυμον πλῆρες καὶ διατεταγμένον κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ α καὶ κατὰ τὰς ἀνιούσας δυνάμεις τοῦ β.

Ἵνα εὕρωμεν τοὺς συντελεστὰς τῶν ὅρων τοῦ ἀναπτύγματος ἑνὸς διωνύμου $\alpha+\beta$ ἐργαζόμεθα πρακτικῶς ὡς ἑξῆς : Πολλαπλασιάζομεν τὸν συντελεστὴν ὅρου τινὸς ἐπὶ τὸν ἐκθέτην τοῦ α τοῦ ἰδίου ὅρου καὶ τὸ ἐξαγόμενον τὸ διαιροῦμεν διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ δηλοῦντος τὴν τάξιν τοῦ ὅρου τούτου. Ὁ οὕτω προκύπτων ἀριθμὸς εἶναι ὁ συντελεστὴς τοῦ ἑπομένου ὅρου. Παραδείγματα ἔστωσαν τὰ ἑξῆς:

$$(\alpha+\beta)^4=\alpha^4+4\alpha^3\beta+6\alpha^2\beta^2+4\alpha\beta^3+\beta^4$$
$$(\alpha+\beta)^5=\alpha^5+5\alpha^4\beta+10\alpha^3\beta^2+10\alpha^2\beta^3+5\alpha\beta^4+\beta^5$$
$$(\alpha+\beta)^6=\alpha^6+6\alpha^5\beta+15\alpha^4\beta^2+20\alpha^3\beta^3+15\alpha^2\beta^4+6\alpha\beta^5+\beta^6$$

Παρατηροῦμεν ὅτι οἱ ὅροι τοῦ ἀναπτύγματος οἱ ἀπέχοντες ἰσάκις ἀπὸ τὰ ἄκρα εἶναι οἱ αὐτοί. Συνεπῶς ἀρκεῖ εἰς ἓν ἀνάπτυγμα νὰ εὕρωμεν τοὺς ἡμίσεις τῶν ὅρων. (Περισσότερα ἴδε εἰς τὸ περὶ τοῦ διωνύμου τοῦ Νεύτωνος σχετικὸν κεφάλαιον τοῦ παρόντος βιβλίου).

23. ***Κύβος πολυωνύμου.*** Ὁ κύβος οἱουδήποτε πολυωνύμου ἀποτελεῖται ἀπὸ τοὺς κύβους τῶν ὅρων του, ἀπὸ τὸ τριπλάσιον ἀλγεβρικὸν γινόμενον τοῦ ἑνὸς ἐπὶ τὸ τετράγωνον τοῦ ἄλλου καὶ ἀπὸ τὸ ἑξαπλάσιον ἀλγεβρικὸν γινόμενον αὐτῶν λαμβανομένων ἀνὰ τριῶν, ἤτοι:

$$(\alpha+\beta+\gamma)^3\equiv\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+3\alpha^2\beta+3\alpha^2\gamma+3\beta^2\alpha+3\beta^2\gamma+3\gamma^2\alpha+ +3\gamma^2\beta+6\alpha\beta\gamma \qquad (8)$$

ὁμοίως

$$(\alpha+\beta-\gamma)^3\equiv\alpha^3+\beta^3-\gamma^3+3\alpha^2\beta-3\alpha^2\gamma+3\beta^2\alpha- -3\beta^2\gamma+3\gamma^2\alpha+3\gamma^2\beta-6\alpha\beta\gamma \qquad (9)$$

ΣΗΜ. Ι. Ἡ ἀπόδειξις τῶν ἀνωτέρω ταυτοτήτων γίνεται δι' ἀμέσου ἐκτελέσεως τῶν πράξεων αἱ ὁποῖαι εἶναι σημειωμέναι εἰς τὸ α΄ μέλος ἑκάστης.

ΣΗΜ. ΙΙ. Λέγοντες ἀνωτέρω ἀλγεβρικὸν γινόμενον ἐννοοῦμεν τὸ γινόμενον τὸ ὁποῖον εὑρίσκομεν ἂν λάβωμεν ὑπ' ὄψιν καὶ τὰ σημεῖα τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου.

24. Ὁμοίως καὶ αἱ κάτωθι ταυτότητες εἶναι ἀξιοσημείωτοι

$$(x+\alpha)(x+\beta)(x+\gamma)\equiv x^3+(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)x+\alpha\beta\gamma \qquad (10)$$
$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\equiv x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)x-\alpha\beta\gamma \qquad (11)$$

ἀποδεικνύονται δὲ δι' ἀμέσου ἐκτελέσεως τῶν πράξεων εἰς τὸ α΄ μέλος.

25. Ἡ ταυτότης.

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma\equiv(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\alpha\gamma-\beta\gamma) \qquad (12)$$

ἀποδεικνύεται ἂν διαιρέσωμεν τὸ πρῶτος μέλος διὰ $\alpha+\beta+\gamma$. Ἡ ταυτότης αὕτη γράφεται καὶ ὑπὸ τὴν ἑξῆς μορφὴν

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma\equiv\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2] \qquad (12')$$

διότι ἂν πολλαπλασιάσωμεν καὶ διαιρέσωμεν τὸ β΄ μέλος τῆς (12) διὰ 2 τότε ὁ β΄ παράγων αὐτοῦ γίνεται

$$(\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta)+(\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma)+(\gamma^2+\alpha^2-2\alpha\gamma)$$

ἢ

$$(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2.$$

26. Ἂν $\alpha+\beta+\gamma=0$, τότε ἀληθεύει ἡ ἰσότης

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma \qquad (13)$$

Τοῦτο εἶναι ἄμεσος συνέπεια τῆς σχέσεως (12) ἂν εἰς τὸ δεύτερον μέλος αὐτῆς τεθῇ $\alpha+\beta+\gamma=0$.

Ἡ ταυτότης αὕτη ἀποδεικνύεται καὶ ὡς ἑξῆς: Ἔχομεν $\alpha+\beta=-\gamma$ ἢ ὑψοῦντες εἰς τὸν κύβον

$$\alpha^3+\beta^3+3\alpha\beta(\alpha+\beta)=-\gamma^3 \quad ἢ \quad \alpha^3+\beta^3-3\alpha\beta\gamma=-\gamma^3$$

ἢ τέλος $$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma$$

Ἀντιστρόφως· ἂν $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma$ τότε θὰ εἶναι

$$ἢ \qquad \alpha+\beta+\gamma=0 \qquad ἢ \qquad \alpha=\beta=\gamma.$$

Διότι τότε ἔχομεν $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma=0$ ἡ δὲ (12′) δίδει

$$\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2]=0.$$

Ἵνα ἤδη τὸ γινόμενον τῶν παραγόντων τοῦ α′ μέλους τῆς ἀνωτέρω ἰσότητος εἶναι ἴσον μὲ μηδὲν πρέπει εἷς ἐκ τῶν παραγόντων αὐτοῦ νὰ ἰσοῦται μὲ μηδέν, πρέπει δηλαδὴ νὰ εἶναι

$$ἢ \qquad \alpha+\beta+\gamma=0 \qquad ἢ \qquad (\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2=0.$$

Ἀλλ' ἡ τελευταία αὕτη σχέσις δεικνύει ὅτι τὸ ἄθροισμα τριῶν θετικῶν ἀριθμῶν (δηλαδὴ τριῶν τετραγώνων) ἰσοῦται μὲ μηδέν. Τοῦτο εἶναι δυνατὸν μόνον ὅταν ἕκαστος ἐκ τῶν προσθετέων ἰσοῦται μὲ μηδέν, ἐξ οὗ συνάγεται ὅτι $\alpha=\beta=\gamma$.

Ἀσκήσεις πρὸς λύσιν.

Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις.

6. $[(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta][(\alpha-\beta)x^2+2x-1]$.

7. $[(2\alpha-3\beta)x^2-(\alpha-\beta)x+2\alpha+\beta][(2\alpha+3\beta)x^2+(\alpha+\beta)x-(2\alpha-\beta)]$.

8. $[y^3+(\alpha+\beta)y^2+(\alpha^2-\beta^2)y+(\alpha-\beta)^3][y^2-(\alpha-\beta)y+(\alpha-\beta)^2]$.

9. $[x^3+(2\alpha-1)x^2-(\alpha^2-2\alpha+1)x+\alpha^2-4\alpha+2][x^2+(2\alpha+1)x+1)x+\alpha+1]$.

10. $(x^\nu-x^{\nu-1}y+x^{\nu-2}y^2-x^{\nu-3}y^3+y^4)(x+y)$.

11. $(\alpha^{\nu+1}+3\alpha^\nu-4\alpha^{\nu-1}-2\alpha^{\nu-2})(\alpha^{2\nu-1}-\alpha^{2\nu-2}+\alpha^{2\nu-3})$.

12. $(3x^{\mu+\nu-1}y^\rho-4x^{2\mu-3\nu}y^{\rho-\nu}-2x^{\mu-2\nu+1}y^{\rho+2})\times$
$\times(5x^{\mu-\nu+1}y^{1-\rho}-2x^{3\nu+2\mu}y^{\nu+\rho})$

13. $[(\beta^2-1)x^2-(\beta-2)x+(1-\beta)]^2$.

14. $(\alpha^4-3\alpha^3\beta+2\alpha^2\beta^2-4\alpha\beta^3+\beta^4)^2$.

15. $(3x-2y)(9x^2+6xy+4y^2)(9x^2-6xy+4y^2)(3x+2y)$.

16. Νὰ εὑρεθῇ τὸ γινόμενον τῶν παραστάσεων
$(3+x-2x^2)^2-(3-x+2x^2)^2$ καὶ $(3+x+2x^2)^2-(3-x-2x^2)^2$

Ἂν $x+y=\omega$ καὶ $xy=\varphi$ νὰ δειχθῇ ὅτι

17. $x^2+y^2=\omega^2-2\varphi$.

18. $x^3+y^3=\omega^3-3\omega\varphi$.

19. $x^4+y^4=\omega^4-4\omega^2\varphi+2\varphi^2$.

20. $x^5+y^5=\omega^5-5\omega^3\varphi+5\omega\varphi^2$.

21. $x^6+y^6=\omega^6-6\omega^4\varphi+9\omega^2\varphi^2-2\varphi^3$

22. $x^7+y^7=\omega^7-7\omega^5\varphi+14\omega^3\varphi^2-7\omega\varphi^3$

Νὰ τραποῦν εἰς γινόμενα αἱ κάτωθι παραστάσεις.

23. $(2\mu-3\nu)^2-(\mu+3\nu)^2$

24. $4(2\alpha-3\beta)^2-(3\alpha-7\beta)^2$.

25. $9(\alpha-2\beta)^2-16(\alpha+2\beta)^2$

26. $2(x-3y)^2-16(2x-y)^2$.

Νὰ ἀποδειχθοῦν αἱ κάτωθι ταυτότητες.

27. $\alpha^4-\beta^4+2\beta(\alpha^3+\beta^3)-(\alpha+\beta)^2(\alpha-\beta)^2\equiv 2\alpha^2\beta(\alpha+\beta)$.

28. $\gamma^4-\delta^4-(\gamma-\delta)^3(\gamma+\delta)\equiv 2\gamma\delta(\gamma^2-\delta^2)$.

29. $(\mu-\nu)(\mu+\nu)^3-\mu^4+\nu^4\equiv 2\mu\nu(\mu^2-\nu^2)$.

30. (*) $(\alpha^2+\beta^2)(\alpha'^2+\beta'^2)-(\alpha\alpha'+\beta\beta')^2\equiv(\alpha\beta'-\alpha'\beta)^2$.

31. $(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2)-(\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma')^2\equiv(\alpha\beta'-\alpha'\beta)^2+(\beta\gamma'-\beta'\gamma)^2+$
$+(\gamma\alpha'-\gamma'\alpha)^2$.

32. $(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+\ldots)(\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2+\delta'^2+\ldots)-$
$-(\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma'+\delta\delta'+\ldots)^2\equiv\Sigma(\alpha\beta'-\alpha'\beta)^2$

33. Ἂν $\alpha+\beta+\gamma=0$ νὰ δειχθῇ ὅτι
$$(2\alpha-\beta)^3+(2\beta-\gamma)^3+(2\gamma-\alpha)^3=3(2\alpha-\beta)(2\beta-\gamma)(2\gamma-\alpha)$$

34. Ὁμοίως $\alpha(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)=\beta(\beta+\alpha)(\beta+\gamma)=\gamma(\gamma+\alpha)(\gamma+\beta)$.

35. Ὁμοίως $\alpha(\beta-\gamma)^2+\beta(\gamma-\alpha)^2+\gamma(\alpha-\beta)^2+9\alpha\beta\gamma=0$.

36. Ἂν $\alpha+\beta+\gamma=2\tau$ νὰ δειχθῇ ὅτι
$$\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)+\tau(\tau-\beta)(\tau-\gamma)+\tau(\tau-\gamma)(\tau-\alpha)-(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)=\alpha\beta\gamma$$

37. Ἂν $\alpha+\beta+\gamma=\tau$ νὰ δειχθῇ ὅτι
$$(\tau-3\alpha)^3+(\tau-3\beta)^3+(\tau-3\gamma)^3=3(\tau-3\alpha)(\tau-3\beta)(\tau-3\gamma).$$

Νὰ τραποῦν εἰς γινόμενα αἱ παραστάσεις : (ἴδε § 25)

38. $\alpha^3+\beta^3-\gamma^3+3\alpha\beta\gamma$ 39. $8x^3-1-y^3-6xy$.

40. $\alpha^3-27\beta^3+\gamma^3+9\alpha\beta\gamma$ 41. $x^3-8y^3-27-18xy$.

42. Νὰ δειχθῇ ὅτι $(\alpha-\beta)^3+(\beta-\gamma)^3+(\gamma-\alpha)^3\equiv 3(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)$.

III. ΥΠΟΛΟΙΠΟΝ ΔΙΑΙΡΕΣΕΩΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΥ ΔΙΑ $x\pm\alpha$

27. Θεώρημα: ***Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως πολυωνύμου διὰ $x-\alpha$ εὑρίσκεται ἂν τεθῇ εἰς τὸν διαιρετέον ὅπου x τὸ α.***

Ἔστω τὸ πολυώνυμον $\Pi(x)$. Θὰ δείξω ὅτι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως αὐτοῦ διὰ $x-\alpha$ εὑρίσκεται ἂν εἰς αὐτὸ θέσω ὅπου x τὸ α. Θὰ εἶναι δηλαδὴ τοῦτο $\Pi(\alpha)$.

Ἀπόδειξις : Ἔστω $\Delta(x)$ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ $\Pi(x)$ διὰ τοῦ $x-\alpha$ καὶ Y τὸ ὑπόλοιπον. Τὸ ὑπόλοιπον δὲν θὰ περιέχῃ τὸν x διότι τὸ ὑπόλοιπον μιᾶς διαιρέσεως εἶναι πάντοτε βαθμοῦ κατὰ μονάδα μικροτέρου ἀπὸ τὸν βαθμὸν τοῦ διαιρέτου. Ἐπομένως τὸ Y θὰ εἶναι γνωστός τις ὅρος. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν λοιπὸν τῆς διαιρέσεως, καθ' ἣν ὁ διαιρετέος ἰσοῦται μὲ τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸ πηλίκον σὺν τῷ ὑπολοίπῳ, θὰ ἔχωμεν τὴν ταυτότητα :

(*) Αἱ ταυτότητες 30, 31, 32 ὡς καὶ αἱ λοιπαὶ τῆς μορφῆς ταύτης εἶναι γνωσταὶ ὑπὸ τὸ ὄνομα **«ταυτότητες τοῦ Lagrange»**. Τὸ σύμβολον $\Sigma(\alpha\beta'-\alpha'\beta)^2$ παριστᾷ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῆς μορφῆς $(\alpha\beta'-\alpha'\beta)^2$ τὰ ὁποῖα δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν συνδυάζοντες χιαστὶ δύο ὅρους τοῦ παράγοντος $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\ldots$ μὲ δύο ὅρους τοῦ παράγοντος $\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2+\ldots$ καθ' ὅλους τοὺς δυνατοὺς τρόπους.

$$\Pi(x) \equiv (x-\alpha)\Delta(x) + Y \qquad (1)$$

Ἡ ἄνω ταυτότης εἶναι ἀληθὴς διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x. Θὰ εἶναι ἄρα ἀληθὴς καὶ διὰ $x=\alpha$. Θέτοντες λοιπὸν $x=\alpha$ εὑρίσκομεν $Y=\Pi(\alpha)$.

Παρατήρησις I. Ἂν ὁ διαιρέτης εἶναι $x+\alpha$ τότε, ἵνα εὕρωμεν τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως διὰ $x+\alpha$, θέτομεν ὅπου x τὸ $-\alpha$. Διότι τὸ $x+\alpha$ γράφεται $x-(-\alpha)$.

Παρατήρησις II. Ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι τῆς μορφῆς $\alpha x-\beta$ τότε διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ὑπόλοιπον τῆς τοιαύτης διαιρέσεως, ἀρκεῖ νὰ θέσωμεν ἀντί x τὸ $\frac{\beta}{\alpha}$. Διότι ὁ διαιρέτης γράφεται $\alpha\left(x-\frac{\beta}{\alpha}\right)$, ἡ δὲ ἀπόδειξις γίνεται ὁμοίως. Ἐπίσης ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι τῆς μορφῆς $\alpha x+\beta$ τότε, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ὑπόλοιπον, θέτομεν ἀντὶ x τὸ $-\frac{\beta}{\alpha}$, διότι ὁ διαιρέτης γράφεται $\alpha\left(x+\frac{\beta}{\alpha}\right)$.

ΣΗΜ. Ἂν πολυώνυμόν τι μηδενίζεται, τιθεμένου εἰς αὐτὸ ἀντὶ x τοῦ α ἕπεται ὅτι τοῦτο διαιρεῖται διὰ $x-\alpha$, ἤτοι ὅτι τοῦτο περιέχει τὸν παράγοντα $x-\alpha$ ἢ καὶ ὅτι τοῦτο ἔχει ὡς ρίζαν τὸν ἀριθμὸν α· π. χ. διότι εἰς τὸ πολυώνυμον $\varphi(x) \equiv x^2-5x+6$ ἔχομεν $\varphi(2) \equiv 0$, ἕπεται ὅτι τοῦτο περιέχει τὸν παράγοντα $x-2$ ἢ ὅτι ἔχει ὡς ρίζαν τὸν ἀριθμὸν 2. Πράγματι τρεπόμενον τοῦτο εἰς γινόμενον γίνεται $(x-2)(x-3)$.

IV. ΠΗΛΙΚΑ ΔΙΑΙΡΕΣΕΩΣ ΔΙΑ $x \pm \alpha$

28. ***Ἵνα εὕρωμεν τὸν συντελεστὴν ἑνὸς ὅρου τοῦ πηλίκου τῆς διαιρέσεως ἑνὸς πολυωνύμου $\Pi(x)$ διὰ $x-\alpha$, πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ α τὸν συντελεστὴν τοῦ προηγουμένου ὅρου τοῦ πηλίκου καὶ εἰς τὸ ἐξαγόμενον προσθέτομεν τὸν συντελεστὴν τοῦ ὅρου τοῦ διαιρετέου, τοῦ κατέχοντος τὴν αὐτὴν τάξιν μὲ τὴν τάξιν τοῦ ζητουμένου ὅρου τοῦ πηλίκου.*** Ὁ συντελεστὴς τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ πηλίκου εὑρίσκεται διὰ διαιρέσεως τῶν συντελεστῶν τοῦ α΄ ὅρου τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ α΄ ὅρου τοῦ διαιρέτου.

Τοῦτο συνάγεται ἀμέσως ἂν ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν. Διότι ἔστω τὸ πολυώνυμον $\Pi(x) \equiv Ax^4+Bx^3+\Gamma x^2+\Delta x+E$. Ἂν ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν τούτου διὰ $x-\alpha$ εὑρίσκομεν ὡς πηλίκον τὸ

$$Ax^3+(A\alpha+B)x^2+[(A\alpha+B)\alpha+\Gamma]x+[(A\alpha+B)\alpha+\Gamma]\alpha+\Delta$$

29. Παραδείγματα ἔστωσαν τὰ ἑξῆς:

α΄. Νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως

$$(x^4-5x^3+2x^2+x-9) : (x-3).$$

Οἱ συντελεσταὶ τῶν ὅρων τοῦ πηλίκου εἶναι κατὰ σειρὰν

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 1\times3-5 &= -2 \\ -2\times3+2 &= -4 \\ -4\times3+1 &= -11 \\ -11\times3-9 &= -42. \end{aligned}$$

Ἄρα οἱ συντελεσταὶ τῶν ὅρων τοῦ πηλίκου εἶναι κατὰ σειρὰν 1, —2, —4, —11 ὁ δὲ τελευταῖος οὕτω εὑρισκόμενος ἀριθμὸς —42 εἶναι τὸ ὑπόλοιπον. Ἐννοεῖται ὅτι τὸ πηλίκον θὰ εἶναι πολυώνυμον διατεταγμένον κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ x. Τὸ πηλίκον λοιπὸν τῆς ἀνωτέρω διαιρέσεως εἶναι

$$x^3-2x^2-4x-11.$$

ΣΗΜ. Τὸ ὑπόλοιπον τῆς ἄνω διαιρέσεως ἠδυνάμεθα νὰ τὸ εὕρωμεν καὶ κατὰ τὰ εἰς τὴν § 27 ἀναφερόμενα, θέτοντες $x=3$ εἰς τὸν διαιρετέον.

β΄. Νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον καὶ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως

$$(x^6-5x^4+2x^3-x^2+9):(x+2) = x^5-2x^4-x^3+4x^2-9x+18-27$$

Ἐνταῦθα ὁ α εἶναι —2 ὁ δὲ διαιρετέος συμπληρούμενος ἵνα περιέχῃ ὅλας τὰς δυνάμεις τοῦ x γίνεται

$$x^6+0x^5-5x^4+2x^3-x^2+0x+9 : (x+2) = x^5-2x^4-x^3+4x^2-9x+18$$

Ἄρα οἱ συντελεσταὶ τῶν διαδοχικῶν ὅρων τοῦ πηλίκου εἶναι

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 1\times(-2)+0 &= -2 \\ -2\times(-2)-5 &= -1 \\ -1\times(-2)+2 &= 4 \\ 4\times(-2)-1 &= -9 \\ -9\times(-2)+0 &= 18 \\ 18\times(-2)+9 &= -27 \end{aligned}$$

Ἑπομένως τὸ μὲν πηλίκον της διαιρέσεως ταύτης εἶναι

$$x^5-2x^4-x^3+4x^2-9x+18 \qquad \text{τὸ δὲ ὑπόλοιπον } -27.$$

ΣΗΜ. Ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι τῆς μορφῆς $\alpha x-\beta$, τότε πρὸς εὕρεσιν τοῦ συντελεστοῦ ὅρου τινὸς τοῦ πηλίκου πολλαπλασιάζομεν τὸν συντελεστὴν τοῦ προηγουμένου ὅρου τοῦ πηλίκου ἐπὶ β, εἰς τὸ ἐξαγόμενον προσθέτομεν τὸν συντελεστὴν τοῦ διαιρετέου τοῦ κατέχοντος τὴν αὐτὴν τάξιν μὲ τὸν ζητούμενον ὅρον τοῦ πηλίκου καὶ τὸ ἐξαγόμενον διαιροῦμεν διὰ α. Τὸ ὑπόλοιπον εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην εὑρίσκεται ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ἀναγραφομένων εἰς τὴν § 27 παρατήρησιν II· π. χ. οἱ συντελεσταὶ τῶν ὅρων τοῦ πηλίκου.

$$(x^4-5x^3+8x^2+9x-16):(2x-3)$$

ἔνθα $\alpha=2$ καὶ $\beta=3$, εἶναι κατὰ σειρὰν

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= \frac{1}{2} \\ \left(\frac{1}{2}\times3-5\right):2 &= -\frac{7}{4} \end{aligned}$$

$$\left(-\frac{7}{4}\times 3+8\right):2=\frac{11}{8}$$

$$\left(\frac{11}{8}\times 3+9\right):2=\frac{105}{16}$$

Ἑπομένως τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως ταύτης εἶναι

$$\frac{1}{2}x^3-\frac{7}{4}x^2+\frac{11}{8}x+\frac{105}{16}$$

30. *Ἀξιοσημείωτα πηλίκα.* Ὅταν ὁ διαιρετέος εἶναι διώνυμον τῆς μορφῆς $x^\nu \pm \alpha^\nu$ ὁ δὲ διαιρέτης εἶναι $x-\alpha$ ἢ $x+\alpha$, τότε τὸ πηλίκον εἶναι πολυώνυμον πλῆρες, βαθμοῦ κατὰ μονάδα μικροτέρου ἀπὸ τὸν βαθμὸν τοῦ διαιρετέου καὶ διατεταγμένον κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ x καὶ κατὰ τὰς ἀνιούσας δυνάμεις τοῦ α. Εἶναι δὲ οἱ ὅροι τοῦ πηλίκου ὅλοι μὲν θετικοὶ ἂν ὁ διαιρέτης εἶναι $x-\alpha$, ἐναλλὰξ δὲ θετικοὶ καὶ ἀρνητικοὶ ἂν ὁ διαιρέτης εἶναι $x+\alpha$.

Τὸ σημεῖον τοῦ διαιρετέου ἔχει ἐπίδρασιν μόνον ἐπὶ τοῦ ὑπολοίπου π. χ.

α΄. $(x^\nu-\alpha^\nu):(x-\alpha)=x^{\nu-1}+\alpha x^{\nu-2}+\alpha^2x^{\nu-3}+\ldots+\alpha^{\nu-2}x+\alpha^{\nu-1}$.

β΄. $(x^\nu+\alpha^\nu):(x-\alpha)$ δίδει πηλίκον τὸ αὐτὸ μὲ τὸ τῆς ἀνωτέρω διαιρέσεως καὶ ὑπόλοιπον $2\alpha^\nu$ εὑρισκόμενον κατὰ τὰ εἰς τὴν § 27.

γ΄. $(x^\nu-\alpha^\nu):(x+\alpha)$ ἂν ὁ ν εἶναι ἄρτιος δίδει πηλίκον

$$x^{\nu-1}-\alpha x^{\nu-2}+\alpha^2x^{\nu-3}-\ldots-\alpha^{\nu-1}$$

καὶ ὑπόλοιπον 0, ἂν δὲ ὁ ν εἶναι περιττὸς δίδει πηλίκον

$$x^{\nu-1}-\alpha x^{\nu-2}+\alpha^2x^{\nu-3}-\ldots+\alpha^{\nu-1} \text{ καὶ ὑπόλοιπον } -2\alpha^\nu.$$

δ΄. $(x^\nu+\alpha^\nu):(x+\alpha)$ ἂν ὁ ν εἶναι ἄρτιος δίδει πηλίκον $x^{\nu-1}-\alpha x^{\nu-2}+\alpha^2x^{\nu-3}-\ldots-\alpha^{\nu-1}$ καὶ ὑπόλοιπον $2\alpha^\nu$, ἂν δὲ ὁ ν εἶναι περιττὸς δίδει πηλίκον $x^{\nu-1}-\alpha x^{\nu-2}+\alpha^2x^{\nu-3}-\ldots+\alpha^{\nu-1}$ καὶ ὑπόλοιπον 0.

Παραδείγματα :

α΄) $(x^5-\alpha^5):(x-\alpha)=x^4+\alpha x^3+\alpha^2x^2+\alpha^3x+\alpha^4$

β΄) $(x^6-\alpha^6):(x+\alpha)=x^5-\alpha x^4+\alpha^2x^3-\alpha^3x^2+\alpha^4x-\alpha^5$

γ΄) $(x^5+\alpha^5):(x-\alpha)$, πηλ.$=x^4+\alpha x^3+\alpha^2x^2+\alpha^3x+\alpha^4$, ὑπόλ.$=2\alpha^5$

δ΄) $(x^5-\alpha^5):(x+\sigma)$, πηλ.$=x^4-\alpha x^3+\alpha^2x^2-\alpha^3x+\alpha^4$, ὑπόλ.$=-2\alpha^5$

ΣΗΜ. Ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ ὑπολοίπου τῆς διαιρέσεως ἑνὸς πολυωνύμου διὰ $x-\alpha$ δυνάμεθα νὰ τρέπωμεν εἰς γινόμενα διώνυμα τῆς μορφῆς $x_\nu-\alpha^\nu$, ἐφαρμόζοντες τὴν ταυτότητα (1) τῆς παραγράφου 27· π.χ. τὸ $x^3-\alpha^3$ τρέπεται εἰς τὸ γινόμενον $(x-\alpha)(x^2+\alpha x+\alpha^2)$.

Ἀσκήσεις πρὸς λύσιν.

Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι διαιρέσεις.

43. $(21\gamma^3-5\gamma^2-3\gamma-2):(7\gamma^2+3\gamma+1)$.

44. $(3\alpha^5+3\alpha^4+2\alpha^3+1):(3\alpha^3-\alpha+1)$.
45. $(1-\alpha^3+3\alpha^4+\alpha^9):(1-\alpha+\alpha^3)$.
46. $(\alpha^3+\beta^3+8\gamma^3-6\alpha\beta\gamma):(\alpha+\beta+2\gamma)$.
47. $[x^3-(\alpha-\beta)x^2-(\alpha\beta+2\beta^2)x+2\alpha\beta^2]:[x^2-(\alpha-2\beta)x-2\alpha\beta]$.
48. $[x^4+(\alpha-3)x^3+(\beta-3\alpha+2)x^2-(3\beta-2\alpha)x+2\beta]:(x^2+\alpha x+\beta)$.
49. $[(4x+3y-2\omega)^2-(3x-2y+3\omega)^2]:(x+5y-5\omega)$.

Νὰ εὑρεθοῦν τὰ πηλίκα καὶ τὰ ὑπόλοιπα τῶν ἑξῆς διαιρέσεων

50. $(x^6+y^6):(x+y)$ 51. $(x^{16}+y^8):(x^2+y)$.
52. $(\alpha^7+\beta^7):(\alpha-\beta)$ 53. $(x^{20}-\alpha^{15}):(x^4-\alpha^3)$.
54. $(x^5y^5-1):(xy+1)$ 55. $(\alpha^{10}\beta^5+1):(\alpha^2\beta-1)$.
56. Ἂν τὸ $x-2$ εἶναι παράγων τοῦ $2x^3+\gamma x(x-1)-2$ νὰ εὑρεθῇ ὁ γ.

57. Ἂν τὸ πολυώνυμον $x^3+3x^2+\alpha x+\beta$ διαιρῆται διὰ $x+2$ καὶ διὰ $x+4$ νὰ εὑρεθοῦν τὰ α καὶ β. (Ἴδε § 27 σημ.).

58. Ἂν τὸ $x-3$ εἶναι κοινὸς διαιρέτης τῶν τριωνύμων $x^2-(2\alpha+1)x+2\beta$ καὶ $x^2-(\beta+2)x+5\alpha$ νὰ εὑρεθοῦν τὰ α και β.

59. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἕκαστον ἐκ τῶν διωνύμων $\alpha-\beta$, $\beta-\gamma$, $\gamma-\alpha$ εἶναι παράγων τοῦ πολυωνύμου $\alpha^2\gamma-\alpha\gamma^2+\alpha\beta^2-\alpha^2\beta+\beta\gamma^2-\beta^2\gamma$. (§ 27 σημ.).

Νὰ δειχθῇ ὅτι :

60. Τὸ πολυώνυμον $x^5-13x+12$ ἔχει ὡς παράγοντα τὸν $x-1$.
61. Τὸ πολυώνυμον $x^4+29x+6$ ἔχει ὡς παράγοντα τὸν $x+3$.
62. Τὸ πολυώνυμον $x^3+7\gamma x^2+11\gamma^2x+2\gamma^3$ ἔχει ὡς παράγοντα τὸν $x+2\gamma$.
63. Τὸ πολυώνυμον $x^3-39x+70$ ἔχει ὡς παράγοντα τὸν $x+7$. Νὰ εὑρεθοῦν καὶ οἱ ἄλλοι δύο παράγοντες αὐτοῦ.

64. Ἂν τὸ $x^3-2\alpha x+15$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $x+5$, νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τοῦ α.
65. Ἂν τὰ πολυώνυμα $x^3+2x^2+3x+\alpha$ καὶ x^3+x^2+9 διαιρούμενα διὰ $x+2$ ἀφίνουν τὰ αὐτὰ ὑπόλοιπα, νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τοῦ α.

Νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον καὶ τὸ ὑπόλοιπον τῶν κάτωθι διαιρέσεων ἄνευ ἀμέσου ἐκτελέσεως τούτων.

66. $(x^6-12x^5+x^3-2x+6):(x+3)$. 67. $(2x^3-8x^2+3x+4):(2x-1)$
68. $(x^5-4x^4+x^2-2x-8):(x-2)$. 69. $(6x^4+5x^2-2x+1):(3x+2)$
70. $(6x^5-8x^4+2x^3-3x^2+4x+5):(x-3)$.

V. ΤΡΟΠΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ ΕΙΣ ΓΙΝΟΜΕΝΑ

31. Διὰ τὴν τροπὴν παραστάσεων εἰς γινόμενα ἔχομεν ὑπ' ὄψιν τὰς ταυτότητας τῶν παραγράφων 19—26. Ἐκτὸς τούτων ἔχομεν ὑπ' ὄψιν καὶ τὰ κάτωθι :

32. Συνδυάζομεν ἀνὰ δύο τοὺς ὅρους, ἐξάγομεν κοινὸν παράγοντα ἐκτὸς παρενθέσεως κλπ. ὡς π. χ. νὰ τραπῇ εἰς γινόμενον ἡ παράστασις· $\alpha x-\beta x+\alpha y-\beta y$.

Ἔχομεν $\alpha x-\beta x+\alpha y-\beta y=x(\alpha-\beta)+y(\alpha-\beta)=(x+y)(\alpha-\beta)$.

33. Συνδυάζομεν καθ' ὁμάδας τοὺς ὅρους εἰς τρόπον ὥστε οἱ λαμβανόμενοι ὁμοῦ ὅροι νὰ ἀποτελοῦν τέλειον τετράγωνον τὰ δὲ οὕτω προκύπτοντα νὰ ἀποτελοῦν διαφορὰν τετραγώνων· π. χ. νὰ τραπῇ εἰς γινόμενον ἡ παράστασις $x^2-y^2+2\alpha y-\alpha^2$.

Ἔχομεν $x^2-y^2+2\alpha y-\alpha^2=x^2-(y^2-2\alpha y+\alpha^2)=x^2-(y-\alpha)^2=(x+y-\alpha)(x-y+\alpha)$.

Ὁμοίως ἡ παράστασις· $x^4+1-2x^2-\alpha^2-\beta^2+2\alpha\beta$.

Ἔχομεν $(x^4+1-2x^2)-(\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta)=(x^2-1)^2-(\alpha-\beta)^2=(x^2-1+\alpha-\beta)(x^2-1-\alpha+\beta)$.

34. Προσθέτομεν καὶ ἀφαιροῦμεν ἐνίοτε ὡρισμένην παράστασιν ἵνα τὸ προκύπτον μετατραπῇ εἰς τέλειον τετράγωνον ἢ διαφορὰν τετραγώνων π. χ. νὰ τραπῇ εἰς γινόμενον ἡ παράστασις

$$\alpha^4+\beta^4+\alpha^2\beta^2.$$

Ἔχομεν

$$\alpha^4+\beta^4+2\alpha^2\beta^2-\alpha^2\beta^2=(\alpha^2+\beta^2)^2-\alpha^2\beta^2=(\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta)(\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta).$$

35. Πολλάκις ὅταν ἡ δοθεῖσα παράστασις εἶναι τριώνυμον τοῦ β′ βαθμοῦ τὸ τρέπομεν εἰς γινόμενον ἀναλύοντες τὸν πρωτοβάθμιον ὅρον του καταλλήλως εἰς ἄθροισμα ἢ διαφορὰν καὶ ἐργαζόμενοι κατόπιν ὡς εἰς τὴν παράγραφον 32 π. χ. νὰ τραπῇ εἰς γινόμενον ἡ παράστασις

$$x^2-5x+6.$$

Ἔχομεν

$$x^2-5x+6=x^2-2x-3x+6=x(x-2)-3(x-2)=(x-2)(x-3).$$

ΣΗΜ. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἠδυνάμεθα νὰ ἐργασθῶμεν καὶ ὡς ἑξῆς. Νὰ εὕρωμεν τὰς ῥίζας τοῦ τριωνύμου καὶ κατόπιν νὰ σχηματίσωμεν ἓν γινόμενον δύο διωνύμων ἕκαστον ἐκ τῶν ὁποίων εὑρίσκεται ἂν ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸν x τὰς ῥίζας διαδοχικῶς· δηλαδή, ἐπειδὴ αἱ ῥίζαι τοῦ τριωνύμου x^2-5x+6 εἶναι 2 καὶ 3 διὰ τοῦτο ἔχομεν

$$x^2-5x+6=(x-2)(x-3).$$

Ἡ ἐργασία αὕτη πρακτικῶς γίνεται καὶ ὡς ἑξῆς :

α′) Ἐὰν ὁ γνωστὸς ὅρος τοῦ τριωνύμου εἶναι θετικός, τότε ἀναλύομεν τοῦτον εἰς γινόμενον δύο παραγόντων οἱ ὁποῖοι παράγοντες νὰ ἔχουν ὡς ἄθροισμα τὸν συντελεστὴν τοῦ πρωτοβαθμίου ὅρου τοῦ τριωνύμου. Οἱ δύο οὕτω εὑρισκόμενοι ἀριθμοὶ θὰ εἶναι οἱ δεύτεροι ὅροι ἑκάστου ἐκ τῶν διωνύμων εἰς τὰ ὁποῖα ἀναλύεται τὸ τριώνυμον, θὰ ἔχῃ δὲ ἕκαστος πρὸ αὐτοῦ τὸ σημεῖον τοῦ συντελεστοῦ τοῦ x· π.χ.

Νὰ τραποῦν εἰς γινόμενα τὰ τριώνυμα

$$x^2-10x+24 \quad \text{καὶ} \quad x^2+17x+30.$$

Εἰς τὸ α′ τριώνυμον ἐπειδὴ $(-4)\times(-6)=+24$ καὶ $-4-6=-10$ διὰ τοῦτο ἔχομεν $x^2-10x+24=(x-4)(x-6)$.

Εἰς τὸ β′ τριώνυμον ἐπειδὴ $(+2)\times(+15)=+30$ καὶ $+2+15=+17$ διὰ τοῦτο ἔχομεν $x^2+17x+30=(x+2)(x+15)$.

β′) Ἐὰν ὁ γνωστὸς ὅρος εἶναι ἀρνητικὸς τότε πάλιν ἀναλύομεν τοῦτον εἰς γινόμενον δύο παραγόντων οἱ ὁποῖοι νὰ ἔχουν ὡς ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα (δηλαδὴ ὡς διαφορὰν) τὸν συντελεστὴν τοῦ x. Οἱ δύο οὕτω εὑρισκόμενοι ἀριθμοὶ θὰ εἶναι οἱ δεύτεροι ὅροι ἑκάστου ἐκ τῶν διωνύμων εἰς τὰ ὁποῖα ἀναλύεται τὸ τριώνυμον, θὰ ἔχῃ δὲ ἕκαστος πρὸ αὐτοῦ τὸ σημεῖον του. π. χ.

Νὰ τραποῦν εἰς γινόμενα τά τριώνυμα

$$x^2+4x-12 \quad \text{καὶ} \quad x^2-2x-15$$

Εἰς τὸ α΄ τριώνυμον ἐπειδὴ $(+6).(-2)=-12$ καὶ $+6-2=+4$ διὰ τοῦτο ἔχομεν

$$x^2+4x-12=(x+6)(x-2).$$

Εἰς τὸ β΄ τριώνυμον ἐπειδὴ $(-5).(+3)=-15$ καὶ $-5+3=-2$ διὰ τοῦτο ἔχομεν

$$x^2-2x-15=(x-5)(x+3).$$

Ὁ ἀνωτέρω τρόπος εἶναι πρακτικὸς τρόπος εὑρέσεως τῶν ῥιζῶν ἑνὸς τριωνύμου τοῦ β΄ βαθμοῦ. Ἐπὶ παραδείγματι, ἐφ' ὅσον τὸ τριώνυμον $x^2-2x-15$ ἀναλύεται εἰς τὸ γινόμενον $(x-5)(x+3)$ ἕπεται ὅτι τοῦτο ἔχει ὡς ῥίζας τοὺς ἀριθμοὺς 5 καὶ -3 (ἴδε καὶ § 17).

Οἱ ἀνωτέρω δύο τρόποι εἶναι εὔχρηστοι ὅταν ὁ συντελεστὴς τοῦ x^2 εἶναι ἡ μονάς.

γ΄) Ἂν ὁ x^2 ἔχῃ καὶ συντελεστὴν τότε ἐργαζόμεθα ὡς εἰς τὸ ἀκόλουθον παράδειγμα :

Νὰ τραπῇ εἰς γινόμενον τὸ τριώνυμον

$$6x^2+11x-10.$$

Ὀνομάζομεν μὲ Κ τὸ τριώνυμον τοῦτο ἤτοι

$$K=6x^2+11x-10.$$

Πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸν συντελεστὴν τοῦ x^2, δηλαδὴ ἐπὶ 6 ὁπότε εὑρίσκομεν

$$6K=36x^2+11.6x-60.$$

Θέτομεν τὴν ἀντικατάστασιν $6x=y$ ὁπότε εὑρίσκομεν

$$6K=y^2+11y-60.$$

Ἤδη τὸ τριώνυμον $y^2+11y-60$ τρέπεται εἰς τὸ γινόμενον $(y+15)(y-4)$ ὡς εἴδομεν εἰς τὴν ἀνωτέρω περίπτωσιν β΄ διότι ὁ γνωστὸς ὅρος του -60 ἀναλύεται εἰς τὸ γινόμενον $(+15)\ (-4)$, οἱ δὲ ἀριθμοὶ $+15$ καὶ -4 ἔχουν ἄθροισμα τὸν $+11$. Ἄρα $\quad 6K=(y+15)(y-4).$

Θέτομεν ἤδη ἀντὶ y τὸ ἴσον του $6x$, ὁπότε εὑρίσκομεν

$$6K=(6x+15)(6x-4)=6(2x+5)(3x-2)$$

καὶ ἄρα $K=(2x+5)(3x-2)$, ἤτοι τὸ τριώνυμον $6x^2+11x-10$ ἐτράπη εἰς τὸ γινόμενον $(2x+5)(3x-2)$.

36. Τρέπομεν ἐπίσης παραστάσεις τῆς μορφῆς $x^\nu-\alpha^\nu$ εἰς γινόμενα ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ ὑπολοίπου τῆς διαιρέσεως διὰ $x-\alpha$. π. χ.

$$x^7-\alpha^7=(x-\alpha)(x^6+\alpha x^5+\alpha^2x^4+\alpha^3x^3+\alpha^4x^2+\alpha^5x+\alpha^6).$$

37. Ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ ὑπολοίπου τῆς διαιρέσεως διὰ $x-\alpha$ τρέπομεν, ἐφ' ὅσον τοῦτο εἶναι κατορθωτόν, πολυώνυμα ἀνώτερα τοῦ β΄ βαθμοῦ εἰς γινόμενα, ὡς εἰς τὸ ἀκόλουθον παράδειγμα.

Νὰ τραπῇ εἰς γινόμενον τὸ πολυώνυμον

$$\Pi(x)\equiv x^4-6x^3+x^2+24x-20.$$

Δοκιμάζομεν ἂν τὸ πολυώνυμον $\Pi(x)$ ἔχῃ ὡς ῥίζαν διαιρέτην τινὰ τοῦ γνωστοῦ ὅρου του -20 (οἱ διαιρέται τοῦ -20 εἶναι οἱ $+1$, -1, $+2$, -2, $+4$, -4, $+5$, -5, $+10$, -10, $+20$, -20). Πρὸς τοῦτο (§ 27 σημ.) παρατηροῦμεν μήπως τὸ πολυώνυμον $\Pi(x)$ μηδενίζεται ἂν τεθῇ ἀντὶ τοῦ x εἷς διαιρέτης τοῦ 20, ἔστω ὁ $+1$.

Πράγματι $\Pi(+1)=0$. Ἄρα τὸ $\Pi(x)$ διαιρεῖται διὰ $x-1$ τὸ δὲ πηλίκον τῆς τοιαύτης διαιρέσεως εὑρισκόμενον κατὰ τὰ εἰς τὴν παράγραφον 29 εἶναι $x^3-5x^2-4x+20$. Ἄρα ἔχομεν

$$\Pi(x)\equiv(x-1)(x^3-5x^2-4x+20).$$

Ἐργαζόμενοι ὁμοίως ἐπὶ τοῦ πολυωνύμου $x^3-5x^2-4x+20$ παρατηροῦμεν ὅτι τοῦτο, ὡς μηδενιζόμενον διὰ $x=2$ διαιρεῖται διὰ $x-2$, δίδον ὡς πηλίκον τὸ $x^2-3x-10$, ἄρα

$$\Pi(x)\equiv(x-1)(x-2)(x^2-3x-10).$$

Τὸ τριώνυμον $x^2-3x-10$ τρεπόμενον εἰς γινόμενον δίδει $(x+2)(x-5)$. Ἄρα ἔχομεν

$$\Pi(x)\equiv(x-1)(x-2)(x+2)(x-5).$$

ΣΗΜ, Ὁ ἄνω τρόπος μᾶς χρησιμεύει καὶ διὰ τὴν λύσιν ἐξισώσεων ἀνωτέρων τοῦ β′ βαθμοῦ. Διότι ἀρκεῖ νὰ ἐξισώσωμεν τὸ $\Pi(x)$ μὲ μηδὲν μετὰ τὴν τροπήν του εἰς γινόμενον ἤτοι

$$(x-1)(x-2)(x+2)(x-5)=0$$

ὁπότε κατ' ἀνάγκην εἷς ἐκ τῶν παραγόντων τοῦ α′ μέλους θὰ εἶναι μηδὲν καὶ ἄρα αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως ταύτης θὰ εἶναι 1, 2, −2, 5.

Ἀσκήσεις πρὸς λύσιν.

Νὰ τραποῦν εἰς γινόμενα αἱ παραστάσεις

71. $2x^4-x^3-2+4x$.
72. $9x^2-16y^2-16y\omega-4\omega^2$
73. $\alpha x-\beta x+\beta y-\alpha y-\gamma x+\gamma y$.
74. $25-\alpha^2-\beta^2+2\alpha\beta$
75. $\alpha^2x+\sigma\beta x+\alpha\gamma+\alpha\beta y+\beta\gamma+\beta^2y$.
76. $\alpha^2+4\alpha-221$
77. $x^4+y^4-\alpha^4-\beta^4+2x^2y^2-2\alpha^2\beta^2$.
78. $3x^2-(\beta-6\alpha)x-2\alpha\beta$
79. $9\alpha^2-12\alpha x-\beta^2-\gamma^2-2\beta\gamma+4x^2$.
80. $\alpha\beta x^2+\alpha\beta-\alpha^2x-\beta^2x$.
81. $\gamma^2+9(\beta^2-\alpha^2)+6\beta\gamma$
82. $\alpha^4+9\alpha^2\beta^2+81\beta^4$
83. $27\alpha^2-15\alpha\beta-112\beta^2$
84. $\mu^4+4\mu^2\nu^2+16\nu^4$
85. $\alpha^4+3\alpha^2\beta^2+4\beta^4$
86. $x^4+y^4-11x^2y^2$
87. $\mu^4-2\lambda^2\mu^2-63\lambda^4$
88. $12x^2-68x+91$
89. $1-(x-y)^3$
90. $250(\alpha-\beta)^3-2$
91. $(\gamma+\delta)^3+(\gamma-\delta)^3$
92. $\alpha^3+\beta^3+\alpha+\beta$
93. x^4-13x^2+36
94. $\omega^2-9\omega-90$
95. $\alpha^2\beta^2+10\alpha\beta+16$
96. $x^2-14xy+24y^2$
97. $x^2+11xy-102x^2$
98. $\lambda^2\mu^2-15\lambda\mu+44$
99. $x^2-4xy-77y^2$
100. $132+28\alpha^2+\alpha^4$
101. $4x^2+4x-3$
102. $12y^2+y-6$
103. $2x^2-11xy+15y^2$
104. $28+31y-5y^2$
105. $12\alpha^2-23\alpha\beta+10\beta^2$
106. $24\alpha^2+22\alpha-21$
107. $x^{10}-y^{10}$
108. $x^{12}-\alpha^6$
109. $\alpha^6\beta^{12}-1$
110. $\alpha^4+\beta^4$
111. $\alpha^9\beta^{18}+\gamma^9$
112. $\alpha^8+\beta^8+\alpha^4\beta^4$
113. $4\alpha^2\beta^2-(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)^2$
114. $4(\alpha\delta+\beta\gamma)^2-(\alpha^2+\delta^2-\beta^2-\gamma^2)^2$
115. $4(\alpha^2\beta^2+\gamma^2\delta^2+2\alpha\beta\gamma\delta)-(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2-\delta^2)^2$
116. $(\gamma+\delta)^2(\alpha-\beta)^2-(\alpha-\beta)^2(\gamma-\delta)^2+\gamma^2(\gamma-\delta)^2-\gamma^2(\gamma+\delta)^2$
117. $(\alpha\mu+\beta\nu)^2+(\alpha\nu-\beta\mu)^2+\gamma^2\mu^2+\gamma^2\nu^2$

118. $(\alpha\mu+\beta\nu)^2+(\alpha\nu-\beta\mu)^2+(\gamma\mu+\delta\nu)^2+(\gamma\nu-\delta\mu)^2$
119. $\alpha^2\gamma^2x^2-\alpha^4\gamma^2-\beta^2\gamma^2x^2+\alpha^2\beta^2\gamma^2-\alpha^2\delta^2x^2+\alpha^4\delta^2+\beta^2\delta^2x^2-\alpha^2\beta^2\delta^2$
120. $(\alpha-\beta)^3+3(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)^2+(\alpha+\beta)^3+3(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)^2$
121. $2\alpha^2\beta^2+2\alpha^2\gamma^2+2\beta^2\gamma^2-\alpha^4-\beta^4-\gamma^4$

Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ ἑξῆς διαιρέσεις, ἀφοῦ τραποῦν εἰς γινόμενα οἱ ὅροι ἑκάστης.

122. $[x^3+(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\beta\gamma+\alpha\gamma+\alpha\beta)x+\alpha\beta\gamma] : [x^2+(\alpha+\beta)x+\alpha\beta]$.

123. $(x^2+7x+10)(x+3) : (x^2+5x+6)$.

Νὰ τραποῦν εἰς γινόμενα τὰ κάτωθι πολυώνυμα διὰ τῆς βοηθείας τοῦ ὑπολοίπου τῆς διαιρέσεως διὰ $x-\alpha$.

124. x^3-2x^2-5x+6
125. x^4-2x^3-6x-9
126. $x^3-19x+30$
127. $2x^3+13x^2-36$
128. $x^3+x^2-10x+8$
129. $2x^3-3x^2-12x+20$
130. $3x^3-9\alpha^2x+6\alpha^3$
131. $\alpha^4-\alpha^3\beta-7\alpha^2\beta^2+\alpha\beta^3+6\beta^4$

132. Νὰ ἁπλοποιηθῇ ἡ παράστασις

$$(x+y+z)^3-(x+y-z)^3-(x-y+z)^3-(y-x+z)^3$$

133. Ἂν $A=\alpha+\beta+\gamma+\delta$, $B=\alpha+\beta-\gamma-\delta$, $\Gamma=\alpha-\beta+\gamma-\delta$, $\Delta=\alpha-\beta-\gamma+\delta$ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ παράστασις $AB(A^2+B^2)-\Gamma\Delta(\Gamma^2+\Delta^2)$.

134. Ἂν εἰς τὸ τριώνυμον $Ax^2+2Bxy+\Gamma y^2$ θέσωμεν $x=\alpha x'+\beta y'$ καὶ $y=\alpha'x'+\beta'y'$, τοῦτο γίνεται $A'x'^2+2B'x'y'+\Gamma'y'^2$. Νὰ δειχθῇ τότε ὅτι

$$A'\Gamma'-B'^2=(\alpha\beta'-\alpha'\beta)^2(A\Gamma-B^2)$$

135. Ἂν $\alpha+\beta+\gamma=0$ νὰ δειχθῇ ὅτι $(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^2=2(\alpha^4+\beta^4+\gamma^4)$

136. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ παράστασις $(2x-3y+1)^3-(1-3x+2y)^3$ εἶναι διαιρετὴ διὰ $5(x-y)$.

137. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ παράστασις $(7x^2+4x+8)^2-(x^2-9x+13)^2$ εἶναι πολλαπλάσιον τῆς παραστάσεως $(3x-1)(2x+5)$.

138. Ὁμοίως ὅτι ἡ παράστασις $(2\alpha+3\beta-\gamma)^3+(3\alpha+7\beta+\gamma)^3$ εἶναι πολλαπλάσιον τῆς παραστάσεως $5(\alpha+2\beta)$.

139. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ γινόμενον τῶν τριωνύμων $2x^2+x-6$ καὶ $6x^2-5x+1$ εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ τριωνύμου $3x^2+5x-2$.

140. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ $(x+1)^2$ διαιρεῖ ἀκριβῶς τὴν διαφορὰν

$$(x^3+x^2+4)^3-(x^3-2x+3)^3.$$

141. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ παράστασις $(3\alpha^2-7\alpha+2)^3-(\alpha^2-8\alpha+8)^3$ εἶναι πολλαπλάσιον ἑκάστου ἐκ τῶν διωνύμων $2\alpha-3$ καὶ $\alpha+2$.

VI. ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ ΟΜΟΓΕΝΗ ΚΑΙ ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΑ

38. Πολυώνυμόν τι λέγεται ***ὁμογενὲς*** βαθμοῦ ν ὡς πρὸς τὰ γράμματα τὰ ὁποῖα περιέχει, ὅταν ὅλοι οἱ ὅροι του εἶναι ν βαθμοῦ ὡς πρὸς τὸ σύνολον τῶν βαθμῶν τῶν γραμμάτων τούτων π.χ. τὸ πολυώνυμον

$$2x^3+\alpha x^2y+2xy^2+3y^3$$

εἶναι ὁμογενὲς 3ου βαθμοῦ ὡς πρὸς τὰ x καὶ y. Δέν εἶναι τοῦτο ὁμογενὲς ὡς πρὸς τὰ α, x, y διότι ὁ β′ ὅρος του εἶναι 4ου βαθμοῦ ὡς πρὸς τὰ α, x, y, ἐνῷ οἱ λοιποὶ ὅροι του εἶναι 3ου βαθμοῦ.

39. Πολυώνυμόν τι λέγεται ***συμμετρικὸν*** ὡς πρὸς δύο ἢ περισσότερα γράμματα τὰ ὁποῖα περιέχει, ὅταν δὲν μεταβάλλεται τοῦτο ἂν ἀντιμετατεθοῦν κατὰ κυκλικὴν τάξιν τὰ γράμματα τὰ ὁποῖα περιέχει π. χ, τὸ πολυώνυμον

$$2(x^3+y^3+\omega^3)-3xy\omega$$

εἶναι συμμετρικὸν τρίτου βαθμοῦ ὡς πρὸς τὰ x, y, ω διότι ἂν τεθῇ εἰς αὐτὸ ἀντὶ x τὸ y, ἀντὶ y τὸ ω καὶ ἀντὶ ω τὸ x εὑρίσκεται τὸ πολυώνυμον

$$2(y^3+\omega^3+x^3)-3y\omega x$$

ὅπερ εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ δοθέν. Ὁμοίως τὸ $(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)$ εἶναι συμμετρικὸν 3ου βαθμοῦ ὡς πρὸς τὰ α, β, γ· διότι ἂν τεθῇ ἀντὶ α τὸ β, ἀντὶ β τὸ γ, καὶ ἀντὶ γ τὸ α εὑρίσκεται τὸ $(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)$ ὅπερ εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ δοθέν.

40 Ὅταν πολυώνυμόν τι εἶναι συμμετρικὸν καὶ δύναται νὰ ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον, τότε ἕκαστος ἐκ τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου εἰς τὸ ὁποῖον ἀναλύεται θὰ εἶναι ἐπίσης πολυώνυμον συμμετρικόν, τὸ δὲ σύνολον τῶν βαθμῶν τῶν παραγόντων τούτων θὰ ἰσοῦται μὲ τὸν βαθμὸν τοῦ πολυωνύμου. Ἡ ἰδιότης αὕτη μᾶς βοηθεῖ ὄχι μόνον νὰ τρέπωμεν εἰς γινόμενον συμμετρικόν τι πολυώνυμον, ἀλλὰ καὶ νὰ εὑρίσκωμεν τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως συμμετρικοῦ τινος πολυωνύμου δι᾿ ἑτέρου συμμετρικοῦ πολυωνύμου, νὰ ἀναπτύσσωμεν δύναμίν τινα συμμετρικοῦ πολυωνύμου, νὰ ἀποδεικνύωμεν ταυτότητάς τινας ἐπὶ συμμετρικῶν πολυωνύμων κλπ.

41. Παραθέτομεν κατωτέρω παραδείγματά τινα ἀσκήσεων ἐπὶ τῶν συμμετρικῶν πολυωνύμων :

α′ Νὰ τραπῇ εἰς γινόμενον ἡ παράστασις :

$$x^3(y-z)+y^3(z-x)+z^3(x-y) \qquad \text{(Πολυτ. 1932).}$$

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ δοθεῖσα παράστασις μηδενίζεται διὰ $y=z$. Ἄρα διαιρεῖται διὰ $y-z$. Ὁμοίως παρατηροῦμεν ὅτι διὰ τὸν αὐτὸν λόγον αὕτη διαιρεῖται διὰ $z-x$ καὶ διὰ $x-y$. Ἄρα θὰ διαιρῆται αὕτη καὶ διὰ τοῦ γινομένου $(y-z)(z-x)(x-y)$, ἔστω δὲ A τὸ πηλίκον. Θὰ ἔχωμεν λοιπὸν

$$x^3(y-z)+y^3(z-x)+z^3(x-y)\equiv A(y-z)(z-x)(x-y) \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ δὲ τὸ α′ μέλος τῆς ταυτότητος (1) εἶναι πολυώνυμον ὁμογενὲς 4ου βαθμοῦ καὶ συμμετρικὸν ὡς πρὸς τὰ γράμματα x, y, z, ὁ δὲ παράγων $(y-z)(z-x)(x-y)$ τοῦ β′ μέλους εἶναι ὁμογενὲς καὶ συμμετρικὸν πολυώνυμον 3ου βαθμοῦ διὰ τοῦτο ὁ παράγων Α τοῦ β΄ μέλους ὀφείλει νὰ εἶναι συμμετρικὸν πολυώνυμον α΄ βαθμοῦ ὡς πρὸς x, y, z. Θὰ εἶναι δηλαδὴ ὁ Α τῆς μορφῆς $B(x+y+z)$. Ἄρα ἔχομεν :

$$x^3(y-z)+y^3(z-x)+z^3(x-y)\equiv B(x+y+z)(y-z)(z-x)(x-y) \qquad (2)$$

Ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ προσδιορίσωμεν τὸν συντελεστὴν Β. Πρὸς τοῦτο ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς : Ἡ ταυτότης (2) εἶναι ἀληθὴς διὰ πᾶσαν τιμὴν τῶν x,y,z. Ἄρα θὰ ἀληθεύῃ αὕτη καὶ διὰ $x=0$, $y=1$, $z=2$, ὁπότε αὕτη γίνεται : $0+2-8=3B(-1).2(-1)$ ἐξ ἧς $B=-1$.

Ἄρα ἔχομεν :

$$x^3(y-z)+y^3(z-x)+z^3(x-y)\equiv-(y-z)(z-x)(x-y)(x+y+z).$$

ΣΗΜ. Εἰς τὴν ταυτότητα (2) δυνάμεθα νὰ θέσωμεν ἀντὶ τῶν x, y, z οἱασδήποτε τιμάς, εὑρίσκομεν δὲ τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον. Δὲν θέτομεν ὅμως τιμὰς ἴσας τῶν x, y, z διότι τότε τὸ β΄ μέλος τὸ περιέχον τὸν προσδιοριστέον συντελεστὴν Β μηδενίζεται. Ἐν γένει τὰς τιμὰς ποὺ δίδομεν εἰς τὰ x, y, z τὰς ἐκλέγομεν τοιαύτας ὥστε νὰ μὴ μηδενίζεται ὁ ὅρος ὁ περιέχων τὸν προσδιοριστέον συντελεστήν.

β΄. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ πολυώνυμον $(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $(x+y)(y+z)(z+x)$ καὶ νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον ἄνευ ἐκτελέσεως τῆς διαιρέσεως.

Παρατηροῦμεν ὅτι ὁ διαιρετέος διαιρεῖται διὰ $x+y$ διότι μηδενίζεται ἂν τεθῇ ἀντὶ x τὸ $-y$. Ὁμοίως διαιρεῖται καὶ διὰ $y+z$ καὶ διὰ $z+x$. Ἄρα οὗτος διαιρεῖται καὶ διὰ τοῦ γινομένου των $(x+y)(y+z)(z+x)$. Ἐπειδὴ δὲ καὶ ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης εἶναι πολυώνυμα ὁμογενῆ καὶ συμμετρικὰ 3ου βαθμοῦ, τὸ πηλίκον θὰ εἶναι μηδενὸς βαθμοῦ ἤτοι γνωστὸς ὅρος, ἔστω δὲ Α τοῦτο. Ἄρα θὰ ἔχωμεν τὴν ταυτότητα.

$$(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3\equiv A(x+y)(y+z)(z+x) \qquad (3)$$

Ἡ (3) εἶναι ἀληθὴς διὰ πᾶσαν τιμὴν τῶν x, y, z. Ἄρα ἀληθεύει καὶ ἂν $x=y=z=1$, ὁπότε γίνεται $27-1-1-1=8A$ ἐξ οὗ $A=3$. Ἄρα τὸ δοθὲν πολυώνυμον διαιρεῖται διὰ $(x+y)(y+z)(z+y)$, δίδον ὡς πηλίκον 3. Ἔχομεν λοιπὸν τὴν ταυτότητα

$$(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3\equiv3(x+y)(y+z)(z+x)$$

γ΄. Τὸ αὐτὸ διὰ τὸ πολυώνυμον $(x+y+z)^5-x^5-y^5-z^5$.

Τὸ ὅτι τοῦτο διαιρεῖται διὰ $(x+y)(y+z)(z+x)$ ἀποδεικνύεται ὁμοίως ὡς ἀνωτέρω. Τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως ταύτης θὰ εἶναι συμμετρικὸν πολυώνυμον 2ου βαθμοῦ. Θὰ εἶναι ἄρα τοῦτο τῆς μορφῆς $A(x^2+y^2+z^2)+B(xy+yz+zx)$. Ἔχομεν λοιπὸν τὴν ταυτότητα.

$$(x+y+z)^5-x^5-y^5-z^5\equiv$$

$$(x+y)(y+z)(z+x)[A(x^2+y^2+z^2)+B(xy+yz+zx)] \qquad (4)$$

Ἡ ταυτότης (4) ἀληθεύει διὰ πᾶσαν τιμὴν τῶν x, y, z. Ἄρα ἀληθεύει αὕτη καὶ διὰ $x=y=z=1$, ὡς καὶ διὰ $x=0$, $y=1$, $z=2$. Ἐκ τῆς πρώτης τιμῆς εὑρίσκομεν

$$240=8(3A+3B) \quad \text{ἢ} \quad A+B=10 \qquad (5)$$

ἐκ δὲ τῶν λοιπῶν τιμῶν εὑρίσκομεν

$$5A+2B=35 \qquad (6)$$

Λύοντες τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (5) καὶ (6) εὑρίσκομεν τὰς τιμὰς τῶν A καὶ B ἤτοι $A=5$ καὶ $B=5$. Ἄρα ἡ (4) γίνεται

$$(x+y+z)^5-x^5-y^5-z^5\equiv$$
$$5(x+y)(y+z)(z+y)(x^2+y^2+z^2+xy+yz+xz) \qquad (7)$$

δ΄. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἀνάπτυγμα τοῦ $(x+y+z)^3$

Τὸ ἀνάπτυγμα τοῦτο θὰ εἶναι πολυώνυμον ὁμογενὲς τρίτου βαθμοῦ καὶ συμμετρικὸν ὡς πρὸς τὰ x, y, z. Ἄρα θὰ ἔχωμεν ἐκ ταυτότητος.

$$(x+y+z)^3\equiv x^3+y^3+z^3+A(x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+z^2x+z^2y)+Bxyz \quad (8)$$

Ἡ ταυτότης (8) εἶναι ἀληθὴς διὰ πᾶσαν τιμὴν τῶν x, y, z. Ἄρα ἀληθεύει αὕτη καὶ διὰ $x=0$, $y=1$, $z=2$ ὡς καὶ διὰ $x=1$, $y=2$, $z=3$.

Ἐκ τῶν πρώτων τιμῶν εὑρίσκομεν $A=3$ ἐκ δὲ τῶν δευτέρων $8A+B=30$ καὶ ἄρα $B=6$. Ἑπομένως (ἴδε καὶ § 23) τὸ ζητούμενον ἀνάπτυγμα εἶναι

$$x^3+y^3+z^3+3(x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+z^2x+z^2y)+6xyz.$$

Ἀσκήσεις πρὸς λύσιν.

Νὰ τραποῦν εἰς γινόμενα αἱ κάτωθι παραστάσεις.

142. $\alpha^2(\beta+\gamma)+\beta^2(\gamma+\alpha)+\gamma^2(\alpha+\beta)+2\alpha\beta\gamma$.

143. $\beta\gamma(\beta-\gamma)+\gamma\alpha(\gamma-\alpha)+\alpha\beta(\alpha-\beta)$.

144. $\alpha^2(\beta-\gamma)+\beta^2(\gamma-\alpha)+\gamma^2(\alpha-\beta)$

145. $\alpha(\beta^2-\gamma^2)+\beta(\gamma^2-\alpha^2)+\gamma(\alpha^2-\beta^2)$

146. $(\beta-\gamma)^3+(\gamma-\alpha)^3+(\alpha-\beta)^3$

147. $\beta\gamma(\beta+\gamma)+\gamma\alpha(\gamma+\alpha)+\alpha\beta(\alpha+\beta)+2\alpha\beta\gamma$

148. $\alpha(\beta^3-\gamma^3)+\beta(\gamma^3-\alpha^3)+\gamma(\alpha^3-\beta^3)$

149. $\alpha^2(\beta^3-\gamma^3)+\beta^2(\gamma^3-\alpha^3)+\gamma^2(\alpha^3-\beta^3)$

150. $2(\beta\gamma+\alpha\gamma+\alpha\beta)^2-\alpha^2(\beta+\gamma)^2-\beta^2(\alpha+\gamma)^2-\gamma^2(\alpha+\beta)^2$

Νὰ ἀποδειχθοῦν αἱ ταυτότητες

151. $(\alpha+\beta)^5-\alpha^5-\beta^5\equiv5\alpha\beta(\alpha+\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$

152. $(\alpha+\beta)^7-\alpha^7-\beta^7\equiv7\alpha\beta(\alpha+\beta)[(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)^2$

153. $(\alpha+\beta)^9-\alpha^9-\beta^9=3\alpha\beta(\alpha+\beta)[3(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)^3+\alpha^2\beta^2(\alpha+\beta)^2]$.

VII. ΑΛΓΕΒΡΙΚΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

42. ***Ἀλγεβρικὸν κλάσμα*** καλεῖται πᾶν κλάσμα τοῦ ὁποίου οἱ ὅροι εἶναι ἀλγεβρικαὶ παραστάσεις.

43. Αἱ πράξεις ἐπὶ τῶν ἀλγεβρικῶν κλασμάτων γίνονται ὅπως καὶ αἱ πράξεις ἐπὶ τῶν κλασμάτων τῆς ἀριθμητικῆς.

44. Ἂν πολλαπλασιάσωμεν ἢ διαιρέσωμεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους ἑνὸς κλάσματος διὰ πολυωνύμου διαφόρου τοῦ μηδενός, τότε ἡ τιμὴ τοῦ κλάσματος δὲν μεταβάλλεται.

Παραθέτομεν κατωτέρω παραδείγματά τινα ἐπὶ τῶν κλασματικῶν πράξεων.

45. Νὰ ἁπλοποιηθῇ τὸ κλάσμα

$$K=\frac{\beta^2+3\alpha\beta}{2\alpha\beta^3+6\alpha^2\beta^2}.$$

Ἂν τρέψωμεν εἰς γινόμενα τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος εὑρίσκομεν

$$\frac{\beta(\beta+3\alpha)}{2\alpha\beta^2(\beta+3\alpha)}.$$

Ἄρα μετὰ τὴν ἁπλοποίησιν τοῦ κλάσματος διὰ β καὶ διὰ β+3α εὑρίσκομεν $\frac{1}{2\alpha\beta}$. Ἑπομένως ἔχομεν $K=\frac{1}{2\alpha\beta}$.

β′. Νὰ ἁπλοποιηθῇ ἡ παράστασις

$$K=\frac{\alpha-3}{\alpha-2}-\frac{\alpha+1}{\alpha+2}+\frac{2\alpha+8}{\alpha^2-4}.$$

Τὸ ἐ.κ.π. τῶν παρονομαστῶν εἶναι α^2-4. Ἂν λοιπὸν τρέψωμεν τὰ ἑτερώνυμα κλάσματα εἰς ὁμώνυμα καὶ προσθέσωμεν τοὺς ἀριθμητάς των, εὑρίσκομεν

$$K=\frac{(\alpha-3)(\alpha+2)-(\alpha+1)(\alpha-2)+2\alpha+8}{\alpha^2-4}=$$

$$=\frac{2\alpha+4}{\alpha^2-4}=\frac{2(\alpha+2)}{(\alpha-2)(\alpha+2)}=\frac{2}{\alpha-2}.$$

γ′. Νὰ ἁπλοποιηθῇ ἡ παράστασις

$$K=\frac{\alpha^2\beta^2-9}{4\alpha^3-\alpha}\times\frac{2\alpha^2+\alpha}{\alpha\beta+3}.$$

Ἡ παράστασις αὕτη, μετὰ τὴν τροπὴν τῶν ὅρων τῶν κλασμάτων εἰς γινόμενα, γίνεται

$$K=\frac{(\alpha\beta+3)(\alpha\beta-3)}{\alpha(2\alpha+1)(2\alpha-1)}\times\frac{\alpha(2\alpha+1)}{\alpha\beta+3}$$

καὶ μετὰ τὰς ἁπλοποιήσεις διὰ $\alpha\beta+3$ καὶ διὰ $\alpha(2\alpha+1)$ εὑρίσκομεν

$$K=\frac{\alpha\beta-3}{2\alpha-1}.$$

ΣΗΜ. Ὁσάκις ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν κλάσματα δὲν ἐκτελοῦμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν ἀλλὰ τρέπομεν τοὺς ὅρους των εἰς γινόμενα καὶ κατόπιν κάμνομεν ὅλας τὰς δυνατὰς ἁπλοποιήσεις.

δ′. Νὰ ἁπλοποιηθῇ ἡ παράστασις

$$K=\frac{\alpha}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\frac{\beta}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}+\frac{\gamma}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι ἐ.κ.π. τῶν παρονομαστῶν εἶναι τὸ γινόμενον $(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)$. Πρὶν ὅμως εὑρεθῇ τοῦτο ὀφείλομεν νὰ μετασχηματίσωμεν τοὺς παρονομαστὰς τοῦ β′ καὶ γ′ κλάσματος, ἤτοι πρέπει ὁ παροναμαστὴς τοῦ β′ κλάσματος νὰ γραφῇ $(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)$. Ἀλλὰ τότε ἀλλάσσει οὗτος σημεῖον ὁπότε θὰ ἀλλάξῃ καὶ τὸ κλάσμα σημεῖον ἵνα μὴ μεταβληθῇ ἡ τιμή του. Ἐπίσης ὁ παρονομαστὴς τοῦ γ′ κλάσματος θὰ γραφῇ $(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)$ χωρὶς ὅμως νὰ ἀλλάξῃ τὸ κλάσμα σημεῖον, διότι ἤλλαξαν σημεῖον ἀμφότεροι οἱ παράγοντες τοῦ παρονομαστοῦ. Ἄρα ἡ δοθεῖσα παράστασις Κ γίνεται

$$K=\frac{\alpha}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}-\frac{\beta}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)}+\frac{\gamma}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}=$$

$$=\frac{\alpha(\beta-\gamma)-\beta(\alpha-\gamma)+\gamma(\alpha-\beta)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}=0$$

διότι ὁ ἀριθμητὴς τοῦ κλάσματος γίνεται μηδὲν μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν εἰς αὐτὸν σημειουμένων πράξεων. Ἡ δοθεῖσα λοιπὸν παράστασις ἰσοῦται μὲ μηδέν.

ε′. Νὰ ἁπλοποιηθῇ ἡ παράστασις

$$\frac{2}{(x+2)^2}+\frac{2}{(x-2)^2}-\frac{1}{x+2}-\frac{1}{2-x}$$

Ἂν τὸ τελευταῖον κλάσμα γραφῇ $+\dfrac{1}{x-2}$, ὁπότε δὲν μεταβάλλεται ἡ ἀξία του, τότε ἐ.κ.π. τῶν παρονομαστῶν εἶναι τὸ

$$(x+2)^2(x-2)^2=(x^2-4)^2.$$

Ἄρα, μετὰ τὴν τροπὴν τῶν κλασμάτων εἰς ὁμώνυμα καὶ τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων, εὑρίσκομεν ὡς ἀποτέλεσμα τὸ κλάσμα $\dfrac{8x^2}{(x^2-4)^2}$.

46. ***Σύνθετα κλάσματα*** : Ὅταν κλάσμα τι εἶναι σύνθετον, ὅταν δηλαδὴ καὶ ὁ ἀριθμητής του καὶ ὁ παρονομαστής του εἶναι κλασματικαὶ παραστάσεις, τότε, πρὸς ἁπλοποίησιν αὐτοῦ, ἀρκεῖ νὰ ἐκτελέσωμεν τὰς σημειουμένας πράξεις χωριστὰ εἰς τὸν ἀριθμητὴν καὶ χωριστὰ εἰς τὸν παρονομαστήν, εἰς τρόπον ὥστε ἕκαστος ἐκ τῶν ὅρων τοῦ κλάσματος νὰ λάβῃ τὴν μορφὴν $\dfrac{\alpha}{\beta}$. Μετὰ τοῦτο τρέπομεν τὸ προκύπτον κλάσμα εἰς ἁπλοῦν διαιροῦντες τὸν ἀριθμητὴν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ του· π. χ. νὰ ἁπλοποιηθῇ τὸ κλάσμα

$$\frac{\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2-\beta^2}-\dfrac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}}{\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}-\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}$$

Ὁ ἀριθμητής του γίνεται $\dfrac{(\alpha^2+\beta^2)^2-(\alpha^2-\beta^2)^2}{(\alpha^2-\beta^2)(\alpha^2+\beta^2)}=\dfrac{4\alpha^2\beta^2}{(\alpha^2-\beta^2)(\alpha^2+\beta^2)}$

ὁ δὲ παρονομαστὴς γίνεται $\dfrac{(\alpha+\beta)^2-(\alpha-\beta)^2}{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)}=\dfrac{4\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2}$

Ἄρα τὸ σύνθετον κλάσμα γίνεται

$$\frac{4\alpha^2\beta^2}{(\alpha^2-\beta^2)(\alpha^2+\beta^2)}:\frac{4\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2}=\frac{4\alpha^2\beta^2}{(\alpha^2-\beta^2)(\alpha^2+\beta^2)}\times\frac{\alpha^2-\beta^2}{4\alpha\beta}=\frac{\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2}$$

ΣΗΜ. Ὅταν οἱ παρονομασταὶ τῶν ὅρων τοῦ συνθέτου κλάσματος εἶναι οἱ αὐτοί, τότε τοῦτο ἁπλοποιεῖται ἀφοῦ ἐξαλείψωμεν τοὺς παρονομαστὰς τούτων· ὅταν δὲ οἱ ἀριθμηταὶ εἶναι οἱ αὐτοὶ τότε ἁπλοποιεῖται τοῦτο, ἀφοῦ ἐξαλείψωμεν τοὺς ἀριθμητάς των καὶ γράψωμεν ἀντεστραμμένους τοὺς ἀπομένοντας παρονομαστάς· π. χ.

$$\frac{\dfrac{\alpha}{\beta}}{\dfrac{\gamma}{\beta}}=\frac{\dfrac{\alpha}{1}}{\dfrac{\gamma}{1}}=\frac{\alpha}{\gamma},\qquad \frac{\dfrac{\alpha}{\beta}}{\dfrac{\alpha}{\delta}}=\frac{\dfrac{1}{\beta}}{\dfrac{1}{\delta}}=\frac{\delta}{\beta}$$

Ἀσκήσεις πρὸς λύσιν.

Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις.

154. $\dfrac{2x-7}{(x-3)^2}-\dfrac{2(x+2)}{x^2-9}$ 155. $\dfrac{y^2+2y}{y^2+y-2}-\dfrac{y}{y+1}$

156. $\dfrac{4(\alpha-1)}{\alpha^2+3\alpha+2}+\dfrac{4(\alpha-3)}{\alpha^2-\alpha-6}$ 157. $\dfrac{6}{x^2-2x-8}+\dfrac{1}{x^2+5x+6}$

158. $\dfrac{\alpha^2-2\alpha\beta}{\alpha^2+\alpha\beta-6\beta^2}-\dfrac{\alpha\beta-7\beta^2}{\alpha^2-\alpha\beta-42\beta^2}$ 159. $\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{x}{(x-1)^2}$

160. $\dfrac{\alpha+x}{2(\alpha-x)}+\dfrac{\alpha-x}{2(\alpha+x)}-\dfrac{2\alpha x}{\alpha^2-x^2}$ 161. $\dfrac{1-\alpha}{\alpha-2}+\dfrac{\alpha-3}{\alpha-4}-\dfrac{1}{(2-\alpha)^2}$

162. $\dfrac{3}{2+2x}-\dfrac{4}{3-3x}+\dfrac{5}{4-4x^2}$ 163. $\dfrac{\alpha^2}{xy}+\dfrac{(\alpha+x)^2}{x(x-y)}-\dfrac{(\alpha+y)^2}{y(x-y)}$

164. $\dfrac{5}{3+\omega}-\dfrac{2}{3-\omega}+\dfrac{6(1-\omega)}{\omega^2-9}$ 165. $\dfrac{1-2\alpha}{1+2\alpha}+\dfrac{1+2\alpha}{1-2\alpha}-\dfrac{1-20\alpha^2}{4\alpha^2-1}$

166. $\dfrac{2\alpha-5}{\alpha^2-5\alpha+6}+\dfrac{2}{2\alpha-\alpha^2}+\dfrac{3}{3\alpha-\alpha^2}$ 167. $\dfrac{\alpha}{(\alpha-x)^2}+\dfrac{3\alpha}{x^2+\alpha x-2\alpha^2}+\dfrac{1}{2\alpha+x}$

168. $\dfrac{4\beta+5}{1+\beta+\beta^2}-\dfrac{1}{\beta-1}+\dfrac{3\beta^2-5}{1-\beta^3}$ 169. $\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2}+\dfrac{1}{\alpha+\beta}+\dfrac{\alpha\beta}{\alpha^3+\beta^3}$

170. $\dfrac{y^2\omega^2}{\beta^2\gamma^2}+\dfrac{(\omega^2-\beta^2)(\beta^2-y^2)}{\beta^2(\gamma^2-\beta^2)}+\dfrac{(\gamma^2-\omega^2)(\gamma^2-y^2)}{\gamma^2(\gamma^2-\beta^2)}$

171. $\dfrac{x^2z^2}{\beta^2\gamma^2}+\dfrac{(x^2-\beta^2)(\beta^2-z^2)y^2}{(y^2-\beta^2)(\gamma^2-\beta^2)\beta^2}+\dfrac{(x^2-\gamma^2)(\gamma^2-z^2)y^2}{(\gamma^2-y^2)(\gamma^2-\beta^2)\gamma^2}$

172. $\dfrac{5(2\beta-3)}{11(6\beta^2+\beta-1)}+\dfrac{7\beta}{6\beta^2+7\beta-3}-\dfrac{12(3\beta+1)}{11(4\beta^2+8\beta+3)}$

173. $\frac{3x^2-8}{x^3-1}-\frac{5x+7}{x^2+x+1}+\frac{2}{x-1}$

174. $\frac{3x-5}{3x^2-2x-5}-\frac{3x+5}{3x^2+2x-5}+\frac{2x^2}{x^2-1}$

175. $\frac{\gamma+3\delta}{4(\gamma+\delta)(\gamma+2\delta)}+\frac{\gamma+2\delta}{(\gamma+\delta)(\gamma+3\delta)}-\frac{\gamma+\delta}{4(\gamma+2\delta)(\gamma+3\delta)}$

176. $\frac{5\alpha}{2\alpha^2-4\alpha x-6x^2}-\frac{15(x-\alpha)}{16(5\alpha x-\alpha^2-6x^2)}+\frac{9(\alpha+3x)}{16(\alpha x-\alpha^2+2x^2)}$

177. $\frac{\alpha+\beta}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}+\frac{\beta+\gamma}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\frac{\gamma+\alpha}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)}$

178. $\frac{\alpha^2\beta\gamma}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\frac{\alpha\beta^2\gamma}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}+\frac{\alpha\beta\gamma^2}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$

179. $\frac{\alpha^2}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\frac{\beta^2}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)}+\frac{\gamma^2}{(\gamma-\alpha)(\gamma+\beta)}$

180. $\frac{\alpha^3}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\frac{\beta^3}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)}+\frac{\gamma^3}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$

181. $\frac{\alpha^4}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\frac{\beta^4}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)}+\frac{\gamma^4}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$

182. $\frac{\alpha^4}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)}+\frac{\beta^4}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)}+\frac{\gamma^4}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)(\gamma-\delta)}+$

$+\frac{\delta^4}{(\delta-\alpha)(\delta-\beta)(\delta-\gamma)}$

183. $\frac{x+\gamma}{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta}+\frac{x+\beta}{x^2-(\alpha+\gamma)x+\alpha\gamma}+\frac{x+\alpha}{x^2-(\beta+\gamma)x+\beta\gamma}$

Νὰ ἁπλοποιηθοῦν αἱ παραστάσεις.

184. $\frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha^3+\beta^3}\times\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\times\left(\frac{\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2}{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}\right)^2$

185. $\frac{1-x^2}{1+2y+y^2}\times\frac{1-y^2}{y^2-2xy+x^2}\times\left(\frac{x}{1-x}-\frac{y}{1-y}\right)$

186. $\frac{\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3}{\alpha^4-\beta^4}:\frac{2(\alpha+\beta)^2}{\alpha-\beta}$

187. $\frac{z^3+8y^3}{z^2-3zy+2y^2}\times\frac{2z^2-3zy-2y^2}{z^2-zy+4y^2}:\frac{2z^2+5zy+2y^2}{z^2-2zy+y^2}$

188. $\frac{\alpha^3+4\alpha^2\beta+4\alpha\beta^2}{3\alpha^2\beta-5\alpha\beta^2-2\beta^3}\times\frac{\alpha^2-4\beta^2}{9\alpha^2-3\alpha\beta+\beta^2}:\frac{(\alpha+2\beta)}{27\alpha^3+\beta^3}$

189. $\frac{2\alpha^2+3\alpha\beta-2\beta^2}{\alpha^2+2\alpha\beta+4\beta^2}\times\frac{\alpha^3-8\beta^3}{\alpha^2+3\alpha\beta+2\beta^2}:\frac{2\alpha^2-5\alpha\beta+2\beta^2}{\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2}$

190. $\frac{1+8x^3}{(2-x)^2}\times\frac{4x-x^3}{1-4x^2}:\frac{(1-2x)^2+2x}{2-5x+2x^2}$

191. $\dfrac{(\beta+\gamma)^2-\alpha^2}{\beta^2+\beta\gamma-\alpha\beta} \times \dfrac{(\gamma+\alpha)^2-\beta^2}{(\alpha+\beta)^2-\gamma^2} \times \dfrac{\beta^2+\alpha\beta-\beta\gamma}{\alpha\gamma+\alpha^2-\alpha\beta}$

192. $\dfrac{\omega^2(\omega-4)^2}{(\omega+4)^2-4\omega} \times \dfrac{64-\omega^3}{16-\omega^2} : \dfrac{(\omega^2-4\omega)^3}{(\omega+4)^2}$

193. $\dfrac{\alpha^4+\alpha^2\beta^2+\beta^4}{\alpha^2-4\alpha\beta-21\beta^2} \times \dfrac{\alpha^2+2\alpha\beta-3\beta^2}{\alpha^3-\beta^3} : \dfrac{1}{\alpha-7\beta}$

194. $\dfrac{x^2+2xy+y^2-\alpha^2}{y^2-\gamma^2+2\gamma x-x^2} \times \dfrac{y^2-2xy+x^2-\gamma^2}{(y-\gamma)^2-x^2} : \dfrac{x+y+\alpha}{x+y-\gamma}$

195. $\dfrac{\alpha^4-\beta^4}{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2} \times \dfrac{\alpha^3-\beta^3}{(\alpha-\beta)(\alpha\;\;2\beta)} \times \dfrac{\alpha^2-4\beta^2}{(\alpha+\beta)(\alpha+2\beta)} \times \dfrac{1}{(\alpha-\beta)(\alpha^2+\beta^2)}$

196. $\dfrac{\dfrac{\alpha}{1+\alpha}+\dfrac{1-\alpha}{\alpha}}{\dfrac{\alpha}{1+\alpha}-\dfrac{1-\alpha}{\alpha}}$

197. $\dfrac{\dfrac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}-\beta}{\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta-2\alpha}} + \dfrac{\dfrac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}-\alpha}{\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\alpha-2\beta}}$

198. $1-\dfrac{x+y}{x+y-\dfrac{x^2+y^2}{x-y}}$

199. $\dfrac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha-\dfrac{\beta}{1+\dfrac{\beta}{\alpha-\beta}}} - \dfrac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha+\dfrac{\beta}{1-\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}}}$

200. $\dfrac{1-x}{1-x+x^2} - \dfrac{\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{x}-2\right)}{\dfrac{1}{x^2}+1}$

201. $\dfrac{\dfrac{x+y}{x-y}-\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}}{\dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}} : \dfrac{\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x}}{x^3-y^3}$

202. $\dfrac{x}{1+\dfrac{x}{1-x+\dfrac{x}{1+x}}} : \dfrac{1+x+x^2}{1+3x+3x^2+2x^3}$

203. $\dfrac{\dfrac{\alpha^3}{\beta^3}-\dfrac{\beta^3}{\alpha^3}}{\left(\dfrac{\alpha}{\beta}-\dfrac{\beta}{\alpha}\right)\left(\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha}-1\right)} : \dfrac{\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\alpha\beta}+\dfrac{1}{\beta^2}}{\dfrac{1}{\beta}-\dfrac{1}{\alpha}}$

204. $\dfrac{(\alpha\gamma+\beta\delta)^3-(\alpha\delta+\beta\gamma)^3}{(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)} - \dfrac{(\alpha\gamma+\beta\delta)^3+(\alpha\delta+\beta\gamma)^3}{(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)}$

Νὰ δειχθῇ ὅτι

205. $\dfrac{z^2}{\alpha^2+\beta^2} + \dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2\beta^2}\left(y-\dfrac{z\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2}\right)^2 \equiv \left(\dfrac{y}{\alpha}\right)^2 + \left(\dfrac{z-y}{\beta}\right)^2$

VIII. ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΟΙ ΜΟΡΦΑΙ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

47. Ὅταν ὁ παρονομαστὴς ἑνὸς κλάσματος εἶναι μηδέν, τότε ἡ μὲν σημειουμένη διαίρεσις εἶναι ἀδύνατος τὸ δὲ κλάσμα ἰσοῦται μὲ ἄπειρον, δηλαδὴ $\dfrac{\alpha}{0} = \infty$.

Τοῦτο καταφαίνεται ἐκ τοῦ ἑξῆς συλλογισμοῦ. Θεωρήσωμεν τὸν ἀριθμητὴν α ἑνὸς κλάσματος σταθερὸν ὁ δὲ παρονομαστής του β διαρκῶς νὰ ἐλαττοῦται, εἰς τρόπον ὥστε νὰ τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν. Εἶναι φανερὸν τότε ὅτι ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος διαρκῶς θὰ αὐξάνῃ.

Ἐπὶ παραδείγματι εἰς τὸ κλάσμα $\frac{4}{10}$ ἂν ὁ μὲν ἀριθμητὴς παμένῃ σταθερὸς ὁ δὲ παρονομαστὴς διαρκῶς ἐλαττοῦται, τότε ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος διαρκῶς αὐξάνει ἤτοι

$$\frac{4}{10}=2,5 \qquad \frac{4}{0,01}=\frac{400}{1}=400$$

$$\frac{4}{1}=4 \qquad \frac{4}{0,00001}=\frac{400000}{1}=400000 \quad \text{κ.λ.π.}$$

Ἂν λοιπὸν ὁ παρονομαστὴς διαρκῶς ἐλαττούμενος γίνῃ μικρότερος παντὸς δοθέντος ἀριθμοῦ ὁσονδήποτε μικροῦ, τότε ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος θὰ γίνῃ μεγαλυτέρα παντὸς δοθέντος ἀριθμοῦ ὁσονδήποτε μεγάλου, ἤτοι ἂν ὁ παρονομαστὴς γίνῃ 0 τότε τὸ κλάσμα θὰ γίνῃ ∞.

48. Ὅταν ὅμως καὶ ὁ ἀριθμητὴς καὶ ὁ παρονομαστὴς τοῦ κλάσματος ἰσοῦται μὲ μηδὲν τότε τὸ κλάσμα εἶναι ἀπροσδιόριστον ὡς π.χ. $\frac{0}{0}$. Διότι τὸ κλάσμα τοῦτο δύναται νὰ λάβῃ οἱανδήποτε τιμήν. Καθόσον ἂν $\frac{0}{0}=\lambda$, τότε $0=0.\lambda$ ὅπερ ἀληθεύει διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ λ.

49. Τοιαῦται ἀπροσδιόριστοι μορφαὶ εἶναι καὶ αἱ ἑξῆς :

$$0.\infty,\ \frac{\infty}{\infty},\ \infty \quad \infty \qquad \text{κ.λ.π.}$$

αἱ ὁποῖαι διὰ καταλλήλων πράξεων ἀνάγονται εἰς τὴν ἀρχικὴν ἀπροσδιόριστον μορφὴν $\frac{0}{0}$.

50. Ὅταν κλάσμα τι λαμβάνῃ μίαν ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἀπροσδιορίστων μορφῶν διὰ τιμὴν τινὰ τοῦ γράμματος τὸ ὁποῖον περιέχει, τότε, ἵνα εὕρωμεν τὴν τιμήν του, ὀφείλομεν διὰ καταλλήλων μετασχηματισμῶν καὶ ἁπλοποιήσεων νὰ ἐξαλείψωμεν τὸν ὅρον ὅστις καθιστᾷ τοῦτο ἀπροσδιόριστον, ἤτοι τὸν ὅρον ὅστις μηδενίζει καὶ τὸν ἀριθμητὴν καὶ τὸν παρονομαστήν του. Πρέπει δηλαδὴ νὰ προσπαθήσωμεν νὰ ἄρωμεν τὴν ἀοριστίαν. Ἡ οὕτω εὑρισκομένη τιμὴ τοῦ κλάσματος καλεῖται ***ἀληθὴς τιμὴ*** τοῦ κλάσματος.

51. Ὡς παραδείγματα ἔστωσαν τὰ ἑξῆς :

α') Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀληθὴς τιμὴ τοῦ κλάσμασος.

$$\frac{x^2+x-2}{x^2+2x-3} \text{ διὰ } x=1.$$

Τὸ κλάσμα γίνεται $\frac{0}{0}$ ἂν τεθῇ εἰς αὐτὸ $x=1$. Ἐπειδὴ ὅμως οἱ ὅροι του μηδενίζονται διὰ $x=1$, ἕπεται ὅτι διαιροῦνται οὗτοι διὰ $x-1$. Τρέποντες αὐτοὺς εἰς γινόμενα καὶ ἁπλοποιοῦντες εὑρίσκομεν $\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+3)}=\frac{x+2}{x+3}$. Ἤδη διὰ $x=1$ τὸ κλάσμα γίνεται $\frac{3}{4}$.

Ἄρα ἡ ἀληθὴς τιμὴ τοῦ κλάσματος εἶναι $\frac{3}{4}$.

β') Εὑρεῖν διὰ $x=2$ τὴν τιμὴν τοῦ κλάσματος $\dfrac{x-3+\dfrac{1}{x-2}}{2x-\dfrac{3}{x-2}}$

Θέτοντες $x=2$ εὑρίσκομεν τὴν ἀπροσδιόριστον μορφὴν $\frac{\infty}{\infty}$. Ἂν ὅμως τρέψωμεν τὸ σύνθετον κλάσμα εἰς ἁπλοῦν, μετὰ τὴν ἁπλοποίησιν διὰ $x-2$ εὑρίσκομεν τὸ κλάσμα $\frac{x^2-5x+7}{2x^2-4x-3}$ τοῦ ὁποίου ἡ τιμὴ διὰ $x=2$ εἶναι $-\frac{1}{3}$. Ἄρα ἡ ἀληθὴς τιμὴ τοῦ κλάσματος εἶναι $-\frac{1}{3}$.

Ἀσκήσεις πρὸς λύσιν

Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀληθὴς τιμὴ τῶν κάτωθι κλασμάτων διὰ τὴν ἔναντι ἑκάστου σημειουμένην τιμὴν τοῦ x.

206. $\frac{x^3-3x^2+4}{x^3-2x^2-4x+8}$ διὰ $x=2$

207. $\frac{x^4-3x^3+2x^2-2x+1}{x^4-2x^3+x^2}$ διὰ $x=1$

208. $\frac{x^3-3x^2+4}{3x^3-18x^2+36x-24}$ διὰ $x=2$

209. $\frac{x-12}{x^2+2x-8}-\frac{x^2+1}{3(x^2-5x+6)}$ διὰ $x=2$

210. $\frac{2x^2+4x-1}{x^2-3}$ διὰ $x=\infty$

211. $\frac{5x^3-8x^2+3x+4}{2x^3-x+6}$ διὰ $x=\infty$

212. $\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3}$ διὰ $x=\infty$

213. $3x-\sqrt{9x^2-x+1}$ διὰ $x=\infty$

Ἀσκήσεις ἐπαναλήψεως πρὸς λύσιν

Νὰ ἁπλοποιηθῇ ἡ παράστασις

214. $(\alpha+\beta+\gamma)^5-(\alpha+\beta-\gamma)^5-(\alpha-\beta+\gamma)^5-(\beta+\gamma-\alpha)^5$

Ἂν $\alpha+\beta+\gamma=0$, νὰ δειχθῇ ὅτι.

215. $12\alpha^2\beta^2\gamma^2+(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^3=4(\alpha^6+\beta^6+\gamma^6)$

216. $2(\alpha^7+\beta^7+\gamma^7)=7\alpha\beta\gamma(\alpha^4+\beta^4+\gamma^4)$

217. Ἂν $\alpha+\beta+\gamma+\delta=0$ νὰ δειχθῇ ὅτι

$$(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+\delta^3)^2=9(\beta\gamma-\alpha\delta)(\gamma\alpha-\beta\delta)(\alpha\beta-\gamma\delta)$$

218. Νὰ ἁπλοποιηθῇ ἡ παράστασις

$$\frac{1}{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)}\cdot\left[\frac{(\alpha+\beta)^3-(\beta+\gamma)^3}{\alpha-\gamma}-\frac{(\alpha+\beta)^3+(\beta+\gamma)^3}{\alpha+2\beta+\gamma}\right]$$

219. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ παράστασις

$$\left(\frac{\beta-\gamma}{\alpha}+\frac{\gamma-\alpha}{\beta}+\frac{\alpha-\beta}{\gamma}\right)\left(\frac{\alpha}{\beta-\gamma}+\frac{\beta}{\gamma-\alpha}+\frac{\gamma}{\alpha-\beta}\right)$$

ἰσοῦται μὲ 1 ἂν $\gamma=\pm(\alpha-\beta)$ καὶ μὲ 9 ἂν $\alpha+\beta+\gamma=0$.

Νὰ δειχθῇ ἡ ἀλήθεια τῶν κάτωθι ταυτοτήτων

220. $(\alpha+\beta+\gamma)^4-(\beta+\gamma)^4-(\gamma+\alpha)^4-(\alpha+\beta)^4+\alpha^4+\beta^4+\gamma^4\equiv12\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)$

221. $(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^3-\alpha^3\beta^3-\beta^3\gamma^3-\gamma^3\alpha^3\equiv3\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$.

222. $\alpha^2(\beta^3-\gamma^3)+\beta^2(\gamma^3-\alpha^3)+\gamma^2(\alpha^3-\beta^3)\equiv(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

223. $\alpha^4(\beta-\gamma)+\beta^4(\gamma-\alpha)+\gamma^4(\alpha-\beta)\equiv$

$$\equiv-(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha).$$

224. Νὰ τραπῇ εἰς γινόμενον ἡ παράστασις.

$$x^3(z-y^2)+y^3(x-z^2)+z^3(y-x^2)+xyz(xyz-1)$$

225. Νὰ προσδιορισθοῦν τὰ α, β, γ ἵνα τὸ πολυώνυμον

$$\varphi(x)\equiv x^{2\nu+1}+\alpha x^{\nu+1}+\beta x^{\nu}+\gamma$$

εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ $(x-1)^3$.

226. Ἂν $(x+\alpha)^2+(y+\beta)^2=4(\alpha x+\beta y)$ καί τὰ x, y εἶναι πραγματικοὶ ἀριθμοί, νὰ δειχθῇ ὅτι $x=\alpha$ καὶ $y=\beta$.

227. Ἂν $\alpha+\beta+\gamma=2\tau$ νὰ δειχθῇ ὅτι

$$16\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)=2\beta^2\gamma^2+2\gamma^2\alpha^2+2\alpha^2\beta^2-\alpha^4-\beta^4-\gamma^4$$

228. Ἂν $\alpha^2+\delta^2=2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\delta-\beta^2-\gamma^2)$ τὰ δὲ α, β, γ, δ εἶναι πραγματικοὶ ἀριθμοὶ νὰ δειχθῇ ὅτι $\alpha=\beta=\gamma=\delta$.

229. Νὰ δειχθῇ ὅτι, οἱοσδήποτε καὶ ἂν εἶναι ὁ ἀκέραιος ν, τὸ πολυώνυμον

$$\nu x^{\nu+1}-(\nu+1)x^{\nu}+1$$

εἶναι διαιρετὸν διὰ $(x-1)^2$. Νὰ εὑρεθῇ καὶ τὸ ἀντίστοιχον πηλίκον.

230. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ πολυώνυμον

$$x^{3\alpha+2}+x^{3\beta+1}+x^{3\gamma}$$

εἶναι διαιρετὸν διὰ x^2+x+1, οἱοιδήποτε καὶ ἂν εἶναι οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ α, β, γ. (Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ x^3 διαιρούμενον διὰ x^2+x+1 ἀφίνει ὑπόλοιπον 1. Ἄρα ἀρκεῖ νὰ μετατρέψωμεν τὸ δοθὲν πολυώνυμον τοῦ x εἰς πολυώνυμον τοῦ x^3 κ.λ.π.).

231. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ πολυώνυμον

$$x^{4\alpha+3}+x^{4\beta+2}+x^{4\gamma+1}+x^{4\delta}$$

εἶναι διαιρετὸν διὰ x^3+x^2+x+1, οἱοιδήποτε καὶ ἂν εἶναι οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. (Ἴδε ἄσκησιν 230).

232. Ἂν $\alpha x+\beta y+\gamma z=0$ νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ παράστασις

$$\frac{\alpha x^2+\beta y^2+\gamma z^2}{\beta\gamma(y-z)^2+\alpha\gamma(z-x)^2+\alpha\beta(x-y)^2}$$

εἶναι ἀνεξάρτητος τῶν x, y, z.

233. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ πολυώνυμον

$$(x-1)^{\nu+2}+x^{2\nu+1}$$

εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ $x^2-(x-1)$ διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ ἀκεραίου ἀριθμοῦ ν. (Ἴδε ὑπόλοιπον διαιρέσεως διὰ $x-\alpha$).

234. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ πολυώνυμον

$$(x+1)^{2\nu}-x^{2\nu}-2x-1$$

εἶναι διαιρετὸν διὰ $x(x+1)(2x+1)$ διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ ἀκεραίου καὶ θετικοῦ ἀριθμοῦ ν.

235. Νὰ εὑρεθῇ πολυώνυμον 3ου βαθμοῦ διαιρούμενον διὰ $x+1$, γνωστοῦ ὄντος ὅτι τοῦτο ἀφίνει ὑπόλοιπον 6 διαιρούμενον εἴτε διὰ $x-1$, εἴτε διὰ $x-2$, εἴτε διὰ $x-3$.

236. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ παράστασις

$$x^\nu(y-z)+y^\nu(z-x)+z^\nu(x-y)$$

εἶναι διαιρετὴ διὰ τοῦ γινομένου $(x-y)(y-z)(z-x)$ διὰ πᾶσαν ἀκεραίαν καὶ θετικὴν τιμὴν τοῦ ν μεγαλυτέραν τοῦ 2. Ἐφαρμογὴ ἂν $\nu=3$ ἢ 4, ἢ 5.

237. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ πολυώνυμον

$$x^\nu(y^\mu-z^\mu)^{2\lambda+1}+y^\nu(z^\mu-x^\mu)^{2\lambda+1}+z^\nu(x^\mu-y^\mu)^{2\lambda+1}$$

εἶναι διαιρετὸν διὰ $(x-y)(y-z)(z-x)$, οἱοιδήποτε καὶ ἂν εἶναι οἱ ἀκέραιοι καὶ θετικοὶ ἀριθμοὶ λ, μ, ν.

238. Ἂν ὁ μ εἶναι ἀκέραιος, θετικὸς καὶ περιττὸς νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ παράστασις

$$(\alpha+\beta+\gamma)^\mu-\alpha^\mu-\beta^\mu-\gamma^\mu$$

εἶναι διαιρετὴ διὰ $(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$. Ἐφαρμογὴ ἂν $\mu=3$, ἢ 5, ἢ 7.

Νὰ ἁπλοποιηθοῦν τὰ κλάσματα

239. $\dfrac{\alpha^3(\beta-\gamma)+\beta^3(\gamma-\alpha)+\gamma^3(\alpha-\beta)}{\alpha^2(\beta-\gamma)+\beta^2(\gamma-\alpha)+\gamma^2(\alpha-\beta)}$ **240**. $\dfrac{(y-z)^5+(z-x)^5+(x-y)^5}{(y-z)^3+(z-x)^3+(x-y)^3}$

241. $\dfrac{\alpha^2(\beta-\gamma)^3+\beta^2(\gamma-\alpha)^3+\gamma^2(\alpha-\beta)^3}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}$ **242**. $\dfrac{\alpha^3(\beta-\gamma)+\beta^3(\gamma-\alpha)+\gamma^3(\alpha-\beta)}{(\beta-\gamma)^3+(\gamma-\alpha)^3+(\alpha-\beta)^3}$

243. Ἂν

$$\alpha^3+\alpha\mu+\nu=0$$
$$\beta^3+\beta\mu+\nu=0$$
$$\gamma^3+\gamma\mu+\nu=0$$

καὶ $\alpha\neq\beta\neq\gamma$, νὰ δειχθῇ ὅτι $\alpha+\beta+\gamma=0$.

244. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι

$$[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2]^2\equiv2[(\alpha-\beta)^4+(\beta-\gamma)^4+(\gamma-\alpha)^4]$$

245. ὁμοίως

$$(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^3+2(\beta\gamma+\alpha\gamma+\alpha\beta)^3-3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\beta\gamma+\alpha\gamma+\alpha\beta)^2\equiv$$
$$\equiv(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\gamma)^2.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄.

ΠΕΡΙ ΛΟΓΩΝ ΚΑΙ ΑΝΑΛΟΓΙΩΝ

Ι. ΟΡΙΣΜΟΙ

52. ***Ποσὸν*** καλεῖται πᾶν τὸ ἐπιδεχόμενον αὔξησιν ἢ ἐλάττωσιν καὶ τὸ ὁποῖον ὑπόκειται εἰς μέτρησιν.

53. ***Μέτρησις*** ἑνὸς ποσοῦ καλεῖται ἡ σύγκρισις αὐτοῦ πρὸς ἄλλο ὁμοειδὲς ποσὸν τὸ ὁποῖον ὁρίζεται κατὰ συνθήκην ἐκ τῶν προτέρων καὶ τὸ ὁποῖον καλεῖται ***μονάς***.

54. ***Τιμὴ*** ἑνὸς ποσοῦ καλεῖται τὸ ἐξαγόμενον τῆς μετρήσεως αὐτοῦ. π.χ. Ἔχομεν μῆκος τὶ, συγκρίνομεν αὐτὸ πρὸς τὴν μονάδα τοῦ μήκους, δηλ. πρὸς τὸ μέτρον, καὶ παρατηροῦμεν ὅτι τὸ μέτρον χωρεῖ 8 φορὰς εἰς τὸ ἐξεταζόμενον μῆκος. Ἄρα τὸ μῆκος ποῦ ἔχομεν εἶναι 8 μέτρα. Λοιπὸν τὸ 8 μέτρα καλεῖται τιμὴ τοῦ ποσοῦ.

55. ***Λόγος*** δύο τιμῶν ἑνὸς ποσοῦ καλεῖται τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως αὐτῶν.

56. ***Ἀναλογία*** καλεῖται ἡ ἰσότης δύο λόγων. Ἡ ἀναλογία ἔχει τέσσαρας ὅρους, γράφεται δὲ αὕτη ὡς ἑξῆς :

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta} \quad \text{ἢ} \quad \alpha:\beta=\gamma:\delta.$$

Ἐκ τῶν τῶν τεσσάρων ὅρων οἱ α καὶ δ λέγονται ***ἄκροι***, οἱ β καὶ γ ***μέσοι*** οἱ α καὶ γ λέγονται ἡγούμενοι καὶ οἱ β καὶ δ ἑπόμενοι.

57. Μία ἀναλογία λέγεται ***συνεχὴς*** ὅταν ὁ δεύτερος καὶ τρίτος ὅρος εἶναι ὁ αὐτός, λέγεται δὲ τότε οὗτος ***μέσος ἀνάλογος***· π. χ. ἡ ἀναλογία $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\beta}{\gamma}$ καλεῖται συνεχής, ὁ δὲ β μέσος ἀνάλογος τῶν α καὶ γ.

ΙΙ. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΑΝΑΛΟΓΙΩΝ

58. Αἱ σπουδαιότεραι ἰδιότητες τῆς ἀναλογίας

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta} \tag{1}$$

εἶναι αἱ ἑξῆς :

α΄. Τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων ὅρων ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῶν μέσων, ἤτοι $\alpha\delta=\beta\gamma$ (2)

Ἂν ἡ ἀναλογία εἶναι συνεχής, τότε τὸ τετράγωνον τοῦ μέσου ἀναλόγου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον των ἄκρων. Ἐκ τῆς ἰδιότητος (2) συνάγομεν ὅτι εἰς μίαν ἀναλογίαν δυνάμεθα νὰ ἀντιμεταθέσωμεν τοὺς ἄκρους ἢ τοὺς μέσους ὅρους ἢ καὶ νὰ ἀντιστρέψωμεν τὴν ἀναλογίαν.

β΄. Τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὰ τῶν δύο πρώτων ὅρων πρὸς τὸν δεύτερον ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα ἢ τὴν διαφορὰν τῶν δύο τελευταίων ὅρων πρὸς τὸν τέταρτον, ἤτοι :

$$\frac{\alpha+\beta}{\beta}=\frac{\gamma+\delta}{\delta} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\alpha-\beta}{\beta}=\frac{\gamma-\delta}{\delta} \qquad (3)$$

Αἱ σχέσεις (3) ἀληθεύουν καὶ ἀντεστραμμέναι, ἀποδεικνύονται δὲ αὗται ἂν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (1) προσθέσωμεν ἢ ἀφαιρέσωμεν τὴν μονάδα.

γ΄. Τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων ὅρων ἔχει λόγον πρὸς τὴν διαφοράν των ὃν λόγον ἔχει τὸ ἄθροισμα τῶν δύο τελευταίων ὅρων πρὸς τὴν διαφοράν των, ἤτοι :

$$\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}=\frac{\gamma+\delta}{\gamma-\delta} \qquad (4)$$

Ἡ ἰδιότης αὕτη ἀποδεικνύεται ἂν διαιρέσωμεν κατὰ μέλη τὰς ἰσότητας (3).

δ΄. Ἂν πολλὰ κλάσματα εἶναι ἴσα, τότε τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμητῶν αὐτῶν πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν παρονομαστῶν των δίδει κλάσμα ἴσον πρὸς ἓν ἐκ τῶν δοθέντων, ἤτοι :

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\varepsilon}{\eta}=\ldots=\frac{\alpha+\gamma+\varepsilon+\ldots}{\beta+\delta+\eta+\ldots}=k \qquad (5)$$

Διότι, ἂν ἕκαστον ἐκ τῶν ἴσων λόγων τῆς (5) καλέσωμεν διὰ k, τότε ἔχομεν :

$$\alpha=\beta k,\quad \gamma=\delta k,\quad \varepsilon=\eta k\ldots$$

καὶ διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη εὑρίσκομεν :

$$\alpha+\gamma+\varepsilon+\ldots=(\beta+\delta+\eta+\ldots)k \quad \text{ἢ} \quad \frac{\alpha+\gamma+\varepsilon+\ldots}{\beta+\delta+\eta+\ldots}=k=\frac{\alpha}{\beta}$$

ΣΗΜ. Συνήθως διὰ νὰ ἀποδεικνύωμεν εὐκόλως ἀσκήσεις στηριζομένας ἐπὶ ἀναλογιῶν, ὀνομάζομεν μὲ ἕνα γράμμα, ἔστω k, ἕνα ἐκ τῶν ἴσων λόγων καὶ ἀναλόγως ἐργαζόμεθα. Τοιουτοτρόπως ἀποδεικνύονται ὅλαι σχεδὸν αἱ κατωτέρω τιθέμεναι ἀσκήσεις ἐπὶ τῶν ἀναλογιῶν.

Ἀσκήσεις πρὸς λύσιν.

246. Ἂν $\frac{2(x+y)}{y}=\frac{7x-8y}{x-y}$ νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος $\frac{x}{y}$

247. Ἂν $\dfrac{x}{\gamma\mu-\beta\nu}=\dfrac{y}{\gamma\lambda-\alpha\nu}=\dfrac{z}{\beta\lambda-\alpha\mu}$, νὰ δειχθῇ ὅτι $\alpha x-\beta y+\gamma z=0$.

248. Ἂν $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{\omega}{3}$, νὰ δειχθῇ ὅτι $\sqrt{5x^2+8y^2+7\omega^2}=5y$

249. Ἂν $\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{x}{y}$, νὰ δειχθῇ ὅτι $\dfrac{\lambda\alpha^2+\mu\alpha x+\nu x^2}{\lambda\beta^2+\mu\beta y+\nu y^2}=\dfrac{\alpha^2+x^2}{\beta^2+y^2}$.

250. Ἂν $\dfrac{x}{y}=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$, νὰ δειχθῇ ὅτι $\dfrac{x^2-xy+y^2}{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}=\dfrac{x^2}{\alpha^2}$

Ἂν $\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\gamma}{\delta}=\dfrac{\lambda}{\mu}$, νὰ δειχθῇ ὅτι

251. $\dfrac{5\alpha-7\gamma+3\lambda}{5\beta-7\delta+3\mu}=\dfrac{\alpha}{\beta}$

252. $\dfrac{\alpha^2-\alpha\gamma+\lambda^2}{\beta^2-\beta\delta+\mu^2}=\dfrac{\alpha\lambda}{\beta\mu}$

253. $\dfrac{\gamma^3-\alpha^2\mu\lambda}{\delta^3-\beta^2\mu^2}=\dfrac{\alpha\gamma\lambda}{\beta\delta\mu}$

254. $\sqrt{\dfrac{\alpha^6\beta-2\gamma^5\lambda+3\alpha^4\gamma^3\lambda^2}{\beta^7-2\delta^5\mu+3\beta^4\gamma\delta^2\lambda^2}}=\dfrac{\alpha\gamma\lambda}{\beta\delta\mu}$

255. $\dfrac{4\alpha^2-5\alpha\gamma\lambda+6\lambda^2\mu}{4\beta^2-5\beta\delta\lambda+6\mu^3}=\dfrac{\alpha^2}{\beta^2}$

256. $\dfrac{4\alpha\gamma^2-3\gamma\lambda^3+2\alpha\gamma\lambda}{4\beta\delta^2-3\gamma\mu^3+2\beta\delta\mu}=\dfrac{\alpha^3}{\beta^3}$

257. Ἂν $\dfrac{x}{\lambda\mu-\nu^2}=\dfrac{y}{\mu\nu-\lambda^2}=\dfrac{z}{\lambda\nu-\mu^2}$, νὰ δειχθῇ ὅτι $\lambda x+\mu y+\nu z=0$ καὶ $\mu x+\nu y+\lambda z=0$.

258. Ἂν $\dfrac{\beta x-\alpha y}{\gamma y-\alpha z}=\dfrac{\gamma x-\alpha z}{\beta y-\alpha x}=\dfrac{x+y}{x+z}$, νὰ δειχθῇ ὅτι ἕκαστον ἐκ τῶν κλασμάτων τούτων ἰσοῦται μὲ $\dfrac{x}{y}$, ἐκτὸς ἐὰν $\beta+\gamma=0$.

259. Ἂν $\dfrac{\beta^2+\beta x+x^2}{\alpha^2+\alpha y+y^2}=\dfrac{\beta^2-\beta x+x^2}{\alpha^2-\alpha y+y^2}$, νὰ δειχθῇ ὅτι θὰ εἶναι ἢ $x:\alpha=\beta:y$ ἢ $x:\beta=y:\alpha$.

260. Ἂν $(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)=(\alpha\lambda+\beta\mu+\gamma\nu)^2$, νὰ δειχθῇ ὅτι $\lambda:\alpha=\mu:\beta=\nu:\gamma$.

Ἂν οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ, δ, ἀποτελοῦν συνεχῆ ἀναλογίαν, νὰ δειχθῇ ὅτι

261. $\sqrt{\dfrac{\alpha^5+\beta^2\gamma^2+\alpha^3\gamma^2}{\beta^4\gamma+\delta^4+\beta^2\gamma\delta^2}}=\dfrac{\alpha}{\delta}$

262. $\dfrac{\alpha}{\delta}=\dfrac{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3}{\beta^3+\gamma^3+\delta^3}$

263. $(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\beta^2+\gamma^2+\delta^2)=(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\delta)^2$

264. $(\beta+\delta):\alpha=(\gamma^2\delta+\delta^3):\gamma^3$

265. $(2\alpha+3\delta):(3\alpha-4\delta)=(2\alpha^3+3\beta^3):(3\alpha^3-4\beta^3)$

266. Ἂν οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ, δ, ε, ἀποτελοῦν συνεχῆ ἀναλογίαν, νὰ δειχθῇ ὅτι

$$(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)(\beta^2+\gamma^2+\delta^2+\varepsilon^2)=(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\delta+\delta\varepsilon)^2.$$

Ἂν $\frac{\alpha}{\delta}=\frac{\beta}{\varepsilon}=\frac{\gamma}{\eta}$, οἱ δὲ ὅροι τῶν κλασμάτων τούτων εἶναι θετικοί, νὰ δειχθῇ ὅτι

267. $\frac{\alpha}{\delta}=\frac{\beta}{\varepsilon}=\frac{\gamma}{\eta}=\sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{\delta^2+\varepsilon^2+\eta^2}}=\sqrt[\nu]{\frac{\alpha^\nu+\beta^\nu+\gamma^\nu}{\delta^\nu+\varepsilon^\nu+\eta^\nu}}$

268. $\sqrt{\alpha\delta}+\sqrt{\beta\varepsilon}+\sqrt{\gamma\eta}=\sqrt{(\alpha+\beta+\gamma)(\delta+\varepsilon+\eta)}$

269. $(\alpha\delta+\beta\varepsilon+\gamma\eta)^2=(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\delta^2+\varepsilon^2+\eta^2)$.

Ἂν $\frac{\alpha}{\delta}=\frac{\beta}{\varepsilon}=\frac{\gamma}{\eta}$, νὰ δειχθῇ ὅτι

270. $\frac{\alpha^2+\delta^2}{\alpha+\delta}+\frac{\beta^2+\varepsilon^2}{\beta+\varepsilon}+\frac{\gamma^2+\eta^2}{\gamma+\eta}=\frac{(\alpha+\beta+\gamma)^2+(\delta+\varepsilon+\eta)^2}{\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\eta}$

271. $\frac{\alpha^3+\delta^3}{\alpha^2+\delta^2}+\frac{\beta^3+\varepsilon^3}{\beta^2+\varepsilon^2}+\frac{\gamma^3+\eta^3}{\gamma^2+\eta^2}=\frac{(\alpha+\beta+\gamma)^3+(\delta+\varepsilon+\eta)^3}{(\alpha+\beta+\gamma)^2+(\delta+\varepsilon+\eta)^2}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ΄.

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΙΝΑ ΠΕΡΙ ΟΡΙΖΟΥΣΩΝ

59. Ἂν ἔχωμεν τὸ διώνυμον $\alpha\beta' - \alpha'\beta$, ἤτοι διαφορὰν δύο μονωνύμων, ἕκαστον ἐκ τῶν ὁποίων ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο παράγοντας, τότε τοῦτο δυνάμεθα συμβολικῶς νὰ τὸ παραστήσωμεν ὡς ἑξῆς

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix} \tag{1}$$

Ἡ συμβολικὴ παράστασις (1) καλεῖται ***ὁρίζουσα,*** οἱ δὲ ἀριθμοὶ α, α', β, β' καλοῦνται ***στοιχεῖα*** τῆς ὁριζούσης.

60. ***Ἵνα ἐκτελέσωμεν τὰς σημειουμένας πράξεις εἰς μίαν ὁρίζουσαν, πολλαπλασιάζομεν διαγωνίως τὰ στοιχεῖα αὐτῆς ἀρχόμενοι ἐξ ἀριστερῶν ἄνω, καὶ ἀπὸ τοῦ πρώτου διαγωνίου γινομένου ἀφαιροῦμεν τὸ δεύτερον.*** Ἔχομεν δηλαδὴ

$$\begin{vmatrix} x & \alpha \\ y & \beta \end{vmatrix} = \beta x - \alpha y. \text{ Ὁμοίως } \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = 24 + 30 = 54$$

61. Ἡ ὁρίζουσα καλεῖται ***δευτέρας τάξεως*** ὅταν ἀποτελῆται ἀπὸ δύο γραμμὰς καὶ δύο στήλας, ***τρίτης τάξεως*** ὅταν ἀποτελῆται ἀπὸ τρεῖς γραμμὰς καὶ τρεῖς στήλας κλπ., ***νυοστῆς δὲ τάξεως*** ὅταν ἀποτελῆται ἀπὸ ν γραμμὰς καὶ ν στήλας.

62. ***Ὁρίζουσα τρίτης τάξεως:*** Ἔστω ἡ ὁρίζουσα τῆς 3ης τάξεως.

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} \tag{2}$$

Δυνάμεθα νὰ ἀναπτύξωμεν ταύτην κατὰ τὰ στοιχεῖα μιᾶς στήλης (ἢ μιᾶς σειρᾶς). Πρὸς τοῦτο πολλαπλασιάζομεν ἕκαστον στοιχεῖον ἔστω τῆς πρώτης στήλης ἐπὶ τὴν ὁρίζουσαν β΄ τάξεως ἡ ὁποία ἀπομένει ἂν ἀπὸ τὴν Δ ἀφαιρέσωμεν τὴν στήλην καὶ τὴν σειρὰν εἰς τὰς ὁποίας ἀνήκει τὸ ἐν λόγῳ στοιχεῖον, θέτοντες πρὸ ἑκάστου οὕτω προκύπτοντος ἐξαγομένου ἐναλλὰξ τὰ σημεῖα + καὶ —, ἤτοι ἔχομεν

$$\Delta=\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}=\alpha\begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}-\alpha_1\begin{vmatrix} \beta & \gamma \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}+\alpha_2\begin{vmatrix} \beta & \gamma \\ \beta_1 & \gamma_1 \end{vmatrix} \qquad (3)$$

Ἤδη παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ὁρίζουσα Δ τῆς τρίτης τάξεως ἀνελύθη εἰς τρεῖς ἄλλας ὁριζούσας δευτέρας τάξεως.

Τὰ στοιχεῖα α, α_1, α_2 τὰ ὁποῖα γράφονται πρὸ τῶν ὁριζουσῶν β΄ τάξεως τῆς (3) καλοῦνται συντελεσταὶ τῶν ὁριζουσῶν τούτων.

Ἂν ἤδη ἐκτελέσωμεν τὰς σημειουμένας πράξεις εἰς τὴν (3) εὑρίσκομεν.

$$\Delta=\alpha(\beta_1\gamma_2-\beta_2\gamma_1)-\alpha_1(\beta\gamma_2-\beta_2\gamma)+\alpha_2(\beta\gamma_1-\beta_1\gamma) \qquad \text{ἤ}$$

$$\Delta=\alpha\beta_1\gamma_2-\alpha\beta_2\gamma_1-\alpha_1\beta\gamma_2+\alpha_1\beta_2\gamma+\alpha_2\beta\gamma_1-\alpha_2\beta_1\gamma. \qquad (4)$$

ΣΗΜ. Δυνάμεθα κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον νὰ ἀναπτύξωμεν τὴν ὁρίζουσαν καὶ κατὰ τὰ στοιχεῖα μιᾶς σειρᾶς ἢ μιᾶς ἄλλης στήλης, ἔχοντες ὑπ᾽ ὄψιν ὅτι τὸ στοιχεῖον τὸ ὁποῖον θέτομεν ὡς συντελεστὴν τῆς ὁριζούσης δευτέρας τάξεως θὰ ἔχῃ ἔμπροσθεν ***τὸ σημεῖον + ὅταν κατέχῃ ἢ περιττὴν τάξιν ἢ ἀρτίαν τάξιν καὶ κατὰ σειρὰν καὶ κατὰ στήλην καὶ τὸ σημεῖον — ὅταν κατέχῃ κατὰ σειρὰν μὲν ἀρτίαν τάξιν κατὰ στήλην δὲ περιττὴν τάξιν ἢ ἀντιστρόφως***· π.χ. ἂν ἡ ἄνω ὁρίζουσα Δ ἀναπτυχθῇ κατὰ τὰ στοιχεῖα τῆς β΄ σειρᾶς δίδει

$$\Delta=\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}=-\alpha_1\begin{vmatrix} \beta & \gamma \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}+\beta_1\begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \alpha_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}-\gamma_1\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}=$$

$$=-\alpha_1\beta\gamma_2+\alpha_1\beta_2\gamma+\alpha\beta_1\gamma_2-\alpha_2\beta_1\gamma-\alpha\beta_2\gamma_1+\alpha_2\beta\gamma_1 \qquad (5)$$

ἐξαγόμενον τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ τῆς σχέσεως (4)

63. ***Κανὼν τοῦ* Sarrus.** Πρὸς εὐκολωτέραν ἐκτέλεσιν τῶν πράξεων εἰς μίαν ὁρίζουσαν 3ης τάξεως ἐπαναλαμβάνομεν κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν τὰ στοιχεῖα δύο στηλῶν (ἢ δύο σειρῶν) καὶ κατόπιν πολλαπλασιάζομεν διαγωνίως, ἀπὸ δὲ τῶν διαγωνίων γινομένων τῶν εὑρισκομένων ἐξ ἀριστερῶν ἄνωθεν ἀφαιροῦμεν τὰ διαγώνια γινόμενα τὰ εὑρισκόμενα ἐκ δεξιῶν ἄνωθεν· π. χ, ἐφαρμόζοντες τὸν ἄνω κανόνα εἰς τὴν ὁρίζουσαν (2) ἔχομεν :

$$\begin{array}{ccc|cc} \alpha & \beta & \gamma & \alpha & \beta \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \alpha_2 & \beta_2 \end{array}$$

ἤτοι $$\Delta=\alpha\beta_1\gamma_2+\beta\gamma_1\alpha_2+\gamma\alpha_1\beta_2-\beta\alpha_1\gamma_2-\alpha\gamma_1\beta_2-\gamma\beta_1\alpha_2 \qquad (6)$$

Ἡ σχέσις (6) εἶναι ἡ αὐτὴ μὲ τὴν σχέσιν (4).

64. *Ὁρίζουσα τετάρτης τάξεως.* Ἔστω ἡ ὁρίζουσα

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \delta_3 \end{vmatrix}$$

Δυνάμεθα νὰ ἀναπτύξωμεν ταύτην κατὰ τὰ στοιχεῖα μιᾶς σειρᾶς ἔστω τῆς πρώτης, ὅπως ἀκριβῶς ἀναπτύσσομεν καὶ τὴν ὁρίζουσαν 3ης τάξεως (ἴδε § 62), ἤτοι

$$\Delta = \alpha \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 \\ \beta_3 & \gamma_3 & \delta_3 \end{vmatrix} - \beta \begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 & \delta_2 \\ \alpha_3 & \gamma_3 & \delta_3 \end{vmatrix} + \gamma \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \delta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \delta_3 \end{vmatrix} - \delta \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

Ἑκάστην ἐκ τῶν τεσσάρων οὕτω προκυπτουσῶν ὁριζουσῶν 3ης τάξεως ἀναπτύσσομεν κατὰ τὰ στοιχεῖα μιᾶς στήλης ἢ μιᾶς σειρᾶς (§ 62) κ.ο.κ. Ὥστε μία ὁρίζουσα 4ης τάξεως ἀναπτύσσεται εἰς 4 ἄλλας ὁριζούσας 3ης τάξεως ἢ εἰς 12 ἄλλας ὁριζούσας 2ας τάξεως.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ΄.

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ Α΄· ΒΑΘΜΟΥ

Ι. ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΤΙΝΑ ΕΠΙ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

65. Θεώρημα α΄. ***Ἂν προσθέσωμεν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη μιᾶς ἐξισώσεως τὴν αὐτὴν παράστασιν, προκύπτει ἐξίσωσις ἰσοδύναμος.***

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις

$$\Pi(x)=0 \qquad (1)$$

Προσθέτομεν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη της τὴν αὐτὴν παράστασιν $P(x)$, ὅτε προκύπτει ἡ ἐξίσωσις

$$\Pi(x)+P(x)=P(x). \qquad (2)$$

Θὰ δείξωμεν ὅτι αἱ ἐξισώσεις (1) καὶ (2) εἶναι ἰσοδύναμοι, ὅτι δηλαδὴ πᾶσα λύσις τῆς μιᾶς θὰ εἶναι λύσις καὶ τῆς ἄλλης.

Διότι, ἔστω α μία ρίζα τῆς (1). Τότε ἡ ἐξίσωσις (1) γίνεται (§ 16)

$$\Pi(\alpha)=0 \qquad (3)$$

ἡ δὲ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς παραστάσεως $P(x)$ θὰ εἶναι $P(\alpha)$ (§ 18). Ἂν ἤδη εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἰσότητος (3) προσθέσωμεν τὴν γνωστὴν πλέον ποσότητα $P(\alpha)$ θὰ προκύψῃ πάλιν ἰσότης, ἤτοι

$$\Pi(\alpha)+P(\alpha)=P(\alpha) \qquad (4)$$

Ἤδη παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ἰσότης (4) εἶναι τὸ ἐξαγόμενον ὅπερ εὑρίσκομεν ἐκ τῆς ἐξισώσεως (2) ἂν θέσωμεν εἰς αὐτὴν $x=\alpha$. Ἄρα ἡ ρίζα α τῆς (1) ἐπαληθεύει καὶ τὴν ἐξίσωσιν (2). Εὐκόλως ἐπίσης ἀποδεικνύεται καὶ τὸ ἀντίστροφον, ὅτι δηλαδὴ πᾶσα λύσις τῆς (2) θὰ εἶναι λύσις καὶ τῆς (1).

66. Συνέπεια τοῦ ἄνω θεωρήματος εἶναι ὅτι δυνάμεθα νὰ μεταφέρωμεν ὅρον τινὰ μιᾶς ἐξισώσεως ἀπὸ τοῦ ἑνὸς μέλους εἰς τὸ ἕτερον, ἀφοῦ τοῦ ἀλλάξωμεν τὸ σημεῖον π. χ. ἡ ἐξίσωσις

$$2x-8=x+5$$

εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν ἐξίσωσιν

$$2x-x=5+8.$$

67. Θεώρημα β΄. ***Ἂν πολλαπλασιάσωμεν (ἢ διαιρέσωμεν)***

ἀμφότερα τὰ μέλη μιᾶς ἐξισώσεως ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν διάφορον τοῦ μηδενός, προκύπτει ἐξίσωσις ἰσοδύναμος.

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις

$$\Pi(x)=\Pi'(x) \qquad (5)$$

Πολλαπλασιάζομεν ἀμφότερα τὰ μέλη ταύτης ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν λ, διάφορον τοῦ μηδενός, ὁπότε προκύπτει ἡ ἐξίσωσις

$$\lambda.\Pi(x)=\lambda.\Pi'(x) \qquad (6)$$

Ἤδη θὰ δείξωμεν ὅτι αἱ ἐξισώσεις (5) καὶ (6) εἶναι ἰσοδύναμοι.

Διότι, ἔστω α μία ρίζα τῆς (5). Τότε αὕτη γίνεται

$$\Pi(\alpha)=\Pi'(\alpha) \qquad (7)$$

Ἂν ἤδη πολλαπλασιάσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἰσότητος (7) ἐπὶ λ, τότε προκύπτει πάλιν ἰσότης, ἤτοι

$$\lambda.\Pi(\alpha)=\lambda.\Pi'(\alpha) \qquad (8)$$

Ἀλλὰ ἡ ἰσότης (8) εἶναι τὸ ἐξαγόμενον ὅπερ προκύπτει ἂν εἰς τὴν (6) θέσωμεν ἀντὶ x τὸ α. Ἄρα ἡ ρίζα α τῆς ἐξισώσεως (5) ἐπαληθεύει καὶ τὴν (6).

Εὐκόλως ἀποδεικνύεται καὶ τὸ ἀντίστροφον, ὅτι δηλαδὴ πᾶσα λύσις τῆς (6) εἶναι λύσις καὶ τῆς (5).

68. Συνέπειαι τοῦ ἄνω θεωρήματος εἶναι ὅτι δυνάμεθα νὰ ἀλλάξωμεν τὰ σημεῖα ὅλων τῶν ὅρων μιᾶς ἐξισώσεως, δηλαδὴ δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη μιᾶς ἐξισώσεως ἐπὶ —1.

69. Θεώρημα γ΄. ***Ἂν πολλαπλασιάσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη μιᾶς ἐξισώσεως ἐπὶ παράστασιν περιέχουσαν τὸν ἄγνωστον τῆς ἐξισώσεως, τότε ἡ προκύπτουσα ἐξίσωσις, ἐκτὸς τῶν ριζῶν τὰς ὁποίας ἔχει, θὰ ἔχῃ ὡς ρίζας καὶ τὰς ρίζας τῆς παραστάσεως μὲ τὴν ὁποίαν τὴν πολλαπλασιάζομεν.***

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις ὡς πρὸς x

$$\Pi(x)=\Pi'(x) \qquad (9)$$

Πολλαπλασιάζομεν τὰ μέλη ταύτην ἐπὶ τὴν παράστασιν P(x) τὴν περιέχουσαν τὸν ἄγνωστον x, ὅτε προκύπτει ἡ ἐξίσωσις

$$\Pi(x).P(x)=\Pi'(x).P(x) \qquad (10)$$

θὰ δείξωμεν ὅτι ἡ ἐξίσωσις (10) ἐκτὸς τῶν ριζῶν τῆς (9) ἔχει ὡς ρίζας καὶ τὰς ρίζας τῆς παραστάσεως P(x) (§ 16).

Διότι, ἔστω α ρίζα τις τῆς παραστάσεως P(x)· θὰ ἔχωμεν τότε (§ 17) $P(\alpha)=0$. Ἂν ἤδη εἰς τὴν ἐξίσωσιν (10) θέσωμεν ἀντὶ x τὸ α, εὑρίσκομεν

$$\Pi(\alpha).P(\alpha)=\Pi'(\alpha).P(\alpha) \quad \text{ἢ} \quad P(\alpha)[\Pi(\alpha)-\Pi'(\alpha)]=0 \qquad (11)$$

Ἀλλ' ἡ ἰσότης (11) εἶναι ἀληθής, διότι τὸ πρῶτον μέλος της εἶναι γινόμενον δύο παραγόντων, ἰσοῦται δὲ τοῦτο μὲ μηδὲν καθόσον ὁ εἷς ἐκ τῶν παραγόντων του, ὁ $P(\alpha)$ εἶναι μηδέν. Ἄρα ἡ ἐξίσωσις (10), ὡς ἐπαληθευομένη διὰ $x=\alpha$, ἔχει ὡς ρίζαν τὴν α, ἥτις εἶναι ρίζα τῆς παραστάσεως $P(x)$.

70. Θεώρημα δ'. ***Ἂν διαιρέσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη μιᾶς ἐξισώσεως (ἐφ' ὅσον διαιροῦνται) διὰ παραστάσεως περιεχούσης τὸν ἄγνωστον τῆς ἐξισώσεως, τότε ἡ προκύπτουσα ἐξίσωσις δὲν θὰ ἔχῃ ὡς ρίζας τὰς ρίζας τῆς παραστάσεως μὲ τὴν ὁποίαν τὴν διαιροῦμεν.***

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις ὡς πρὸς x

$$\Pi(x)P(x)=\Pi'(x)P(x) \qquad (12)$$

Διαιροῦμεν ἀμφότερα τὰ μέλη ταύτης διὰ $P(x)$, ἔνθα τὸ $P(x)$ εἶναι διάφορον πρὸς τὸ $\Pi(x)$ ἢ $\Pi'(x)$, ὅτε προκύπτει ἡ ἐξίσωσις

$$\Pi(x)=\Pi'(x) \qquad (13)$$

Θὰ δείξωμεν ὅτι ἡ ἐξίσωσις (13) δὲν ἔχει ὡς ρίζας τὰς ρίζας τῆς παραστάσεως $P(x)$.

Διότι ἂν α εἶναι ρίζα τις τῆς παραστάσεως $P(x)$, τότε θὰ ἔχωμεν $P(\alpha)=0$, ἐπειδὴ δὲ τὸ $P(x)$ εἶναι διάφορον πρὸς τὰ $\Pi(x)$ καὶ $\Pi'(x)$ ἕπεται ὅτι θὰ εἶναι ἢ $\Pi(\alpha)\neq 0$ ἢ $\Pi'(\alpha)\neq 0$

Ἄρα ἡ (13) δὲν ἐπαληθεύεται διὰ $x=\alpha$, ἤτοι δὲν ἔχει ὡς ρίζαν τὴν ρίζαν α τῆς παραστάσεως $P(x)$.

71. ***Σπουδαία παρατήρησις*** : Συνέπεια τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος εἶναι ὅτι, ἂν ἁπλοποιήσωμεν ἐξίσωσίν τινα διὰ παραστάσεως περιεχούσης τὸν ἄγνωστον τῆς ἐξισώσεως, τότε ἐξισοῦμεν μὲ μηδὲν τὴν παράστασιν δι' ἧς ἁπλοποιοῦμεν καὶ ἐξάγομεν ρίζαν ἐκ τῆς εὑρισκομένης σχέσεως π. χ. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις

$$(x-2)(2x-3)=(x-2)(x+1) \qquad (14)$$

Ἁπλοποιοῦντες διὰ $x-2$ ἔχομεν $x-2=0$ ὅτε $x=2$. μένει δὲ ἡ ἐξίσωσις $2x-3=x+1$ ἡ ὁποία ἐχει ρίζαν $x=4$, Ἄρα αἱ ρίζαι τῆς (14) εἶναι 2 καὶ 4.

Πράγματι ἂν μεταφέρωμεν τὸ β' μέλος τῆς ἐξισώσεως (14) εἰς τὸ πρῶτον καὶ τρέψωμεν τοῦτο εἰς γινόμενον εὑρίσκομεν

$$(x-2)(x-4)=0 \qquad (15)$$

καὶ ἑπομένως ἢ ὁ εἷς παράγων τῆς (15) θὰ εἶναι ἴσος μὲ μηδὲν ἢ ὁ ἄλλος, θὰ εἶναι δηλαδὴ ἢ $x-2=0$. ἐξ οὗ $x=2$, ἢ $x-4=0$ ἐξ οὗ $x=4$.

II. ΛΥΣΙΣ ΚΑΙ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΙΣ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΣ $\alpha x+\beta=0$.

72. Τὸν τρόπον τῆς λύσεως μιᾶς ἐξισώσεως α' βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον τὸν παραλείπομεν ὡς ὑπάρχοντα εἰς τὰ διδακτικὰ βιβλία ὡς παράδειγμα λύσεως ἐξισώσεων α΄ βαθμοῦ ἔστω τό ἑξῆς :

Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις.

$$\frac{8x+57}{12}+\frac{15-2x}{x+8}=\frac{2(x+2)}{3}+4.$$

Ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς α΄) ἀπαλείφομεν τοὺς παρονομαστάς. Ε.κ. πολλαπλάσιον αὐτῶν εἶναι τὸ $12(x+8)$ καὶ ἔχομεν

$$(8x+57)(x+8)+12(15-2x)=8(x+8)(x+2)+48(x+8)$$

β) Ἐκτελοῦμεν τὰς σημειουμένας πράξεις ἤτοι

$$8x^2+121x+456+180-24x=8x^2+80x+128+48x+384$$

γ) Χωρίζομεν τοὺς ἀγνώστους ἀπὸ τοὺς γνωστοὺς καὶ ἐκτελοῦμεν τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων ἤτοι

$$31x=124$$

δ) διαιροῦμεν διὰ τοῦ συντελεστοῦ 31 τοῦ ἀγνώστου ἤτοι $x=4.$

Ἄρα ἡ ῥίζα τῆς ἐξισώσεως εἶναι 4.

73. Ἡ ἁπλουστάτη μορφὴ τῆς ἐξισώσεως τοῦ α΄ βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον εἶναι ἡ

$$\alpha x+\beta=0 \qquad (1)$$

ἡ ὁποία ἔχει ῥίζαν $x=-\frac{\beta}{\alpha}$.

Ἤδη, πρὸς διερεύνησιν τῆς ῥίζης, παρατηροῦμεν τὰς ἑξῆς περιπτώσεις :.

α΄) Ἡ ἐξίσωσις (1) ἔχει ῥίζαν καὶ μίαν μόνην ἂν $\alpha\neq0$ καὶ $\beta\neq0$ ἢ $\beta=0$.

β΄) Ἂν $\alpha=0$ καὶ $\beta\neq0$ τότε ἡ ῥίζα λαμβάνει τὴν ἀδύνατον μορφὴν $\frac{\beta}{0}$ ἡ ὁποία ἰσοῦται μὲ ∞. Τότε λέγομεν ὅτι ἡ ἐξίσωσις (1) δὲν ἔχει ῥίζαν, τὸ δὲ πρόβλημα (ἂν ἡ ἐξίσωσις αὕτη εἶναι λύσις προβλήματός τινος) εἶναι ἀδύνατον. Πράγματι τότε ἡ ἐξίσωσις (1) γίνεται $\beta=0$ ὅπερ ἀντιβαίνει πρὸς τὴν ὑπόθεσίν μας καθ᾿ ἣν $\beta\neq0$.

γ΄) Ἂν $\alpha=0$ καὶ $\beta=0$ τότε ἡ ῥίζα λαμβάνει τὴν ἀπροσδιόριστον μορφὴν $\frac{0}{0}$. Τότε λέγομεν ὅτι ἡ ἐξίσωσις (1) εἶναι ταυτότης (§ 12), τὸ δὲ πρόβλημα (ἂν ἡ ἐξίσωσις αὕτη εἶναι λύσις προβλήματός τινος) ἔχει ἀπείρους λύσεις, εἶναι δηλαδὴ ἀόριστον. Πράγματι τότε ἡ ἐξίσωσις (1) γίνεται $0=0$.

74. Παραδείγματα τῶν περιπτώσεων β΄ καὶ γ΄ ἔστωσαν τὰ κάτωθι:

α΄ Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμὸς ὅστις προστιθέμενος εἰς ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος $\frac{5}{8}$ νὰ καθιστᾷ αὐτὸ ἴσον πρὸς τὴν μονάδα.

Ἂν x εἶναι ὁ ζητούμενος ἀριθμός, θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\frac{5+x}{8+x}=1 \tag{2}$$

ἥτις λυομένη ὡς πρὸς x δίδει $0\,x=3$ ἢ $x=\frac{3}{0}=\infty$. Ἄρα τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον, ἡ δὲ ἐξίσωσις δὲν ἔχει ρίζαν.

β΄. Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμὸς τοῦ ὁποίου τὸ τρίτον καὶ τὸ ἕκτον προστιθέμενα νὰ ἀποτελοῦν τὸ ἥμισυ αὐτοῦ.

Ἂν x εἶναι ὁ ζητούμενος ἀριθμός, θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\frac{x}{3}+\frac{x}{6}+\frac{x}{2} \tag{3}$$

ἡ ὁποία λυομένη ὡς πρὸς x δίδει $0x=0$ ἢ $x=\frac{0}{0}$. Ἄρα τὸ πρόβλημα εἶναι ἀόριστον, δηλαδὴ ἔχει ἀπείρους λύσεις, ἡ δὲ ἐξίσωσις (3) εἶναι ταυτότης (§ 12). Πράγματι οἱοσδήποτε ἀριθμὸς τιθέμενος ἀντὶ τοῦ x εἰς τὴν (3) ἐπαληθεύει ταύτην.

Ἀσκήσεις πρὸς λύσιν.

Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις

272. $\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x-1}=\frac{2}{x-2}-\frac{x}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

273. $\frac{7x+16}{21}-\frac{x+8}{4x+10}=\frac{23}{70}+\frac{x}{3}$ **274.** $\frac{x^2-x+2}{x-2}=\frac{4x^2-5x+6}{5x-6}$

275. $\frac{7}{24}-\frac{\frac{13}{15}}{\frac{2x}{3}+\frac{4}{5}}=\frac{1}{4}$ **276.** $\frac{x}{6}-\frac{x-\frac{1}{2}}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}-\frac{x}{3}\right)=0$

277. $\frac{2x}{3}+\frac{\frac{3x-5}{4}-\frac{5x-3}{6}}{\frac{4x-3}{9}-\frac{2x-5}{4}}=\frac{2x-4}{3}$ **278.** $\frac{5x-\frac{3}{2}}{9x-\frac{5}{4}}=\frac{4}{13}$

279. $\left(\frac{1+x}{1-x}-\frac{1-x}{1+x}\right)\left(\frac{3}{4x}+\frac{x}{4}-x\right)=\frac{\left(4x-3+\frac{5x}{2x-6}\right)\frac{3}{2}}{2x-1+\frac{15}{x-3}}$

280. $(x-1)(x-2)+(x-1)(x-3)=2(x-2)(x-3)$

281. $\dfrac{x-\alpha}{x-\alpha-1}-\dfrac{x-\alpha-1}{x-\alpha-2}=\dfrac{x-\beta}{x-\beta-1}-\dfrac{x-\beta-1}{x-\beta-2}$

282. $\dfrac{1}{\alpha-\beta}+\dfrac{\alpha-\beta}{x}=\alpha\beta^2-\dfrac{\alpha+\beta}{x}$

283. $\dfrac{(\alpha+\beta)^2(x+1)-(\alpha+\beta)(x+1)+x+1}{\alpha+\beta+1}=(\alpha+\beta)^2-\alpha-\beta+1$

284. $(\alpha^2+x)(\beta^2+x)-(\alpha^2-x)(\beta^2-x)=2\alpha^2+4\alpha\beta x$

285. $\dfrac{\alpha x^\nu}{\alpha+\beta x}=\dfrac{\gamma x^\nu}{\gamma+\delta x}$ 296. $\dfrac{7x^\nu}{x-1}+\dfrac{3x^\nu+6x^{\nu+2}}{x^2-1}=\dfrac{6x^{\nu+1}+x^\nu}{x+1}$

286. Ἂν εἰς τὸ πολυώνυμον $\Pi(x)\equiv x^3-8x^2+x-2$ τὰ $\Pi(x+1)-4$ καὶ $\Pi(x-1)$ εἶναι ἴσα, νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τοῦ x.

Νὰ λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις

287. $(x+\alpha)^3+(x+\beta)^3+(x+\gamma)^3=3(x+\alpha)(x+\beta)(x+\gamma)$

288. $2(x^2-1)(x-2)(x-3)+3(x-1)(x^2-4)=0$

289. Νὰ δειχθῇ ὅτι α΄) πᾶσα λύσις τῆς ἐξισώσεως

$$\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=\sqrt[3]{z} \qquad (1)$$

εἶναι λύσις καὶ τῆς ἐξισώσεως $(x+y-z)^3+27xyz=0$ (2)

β΄) Πᾶσα λύσις τῆς ἐξισώσεως (2) εἶναι λύσις καὶ τῆς ἐξισώσεως (1) ἐκτὸς ἐὰν οἱ x, y, —z εἶναι ἴσοι μεταξύ των. (Ἴδε ταυτότητα § 26).

290. Νὰ δειχθῇ ὅτι α΄) πᾶσα λύσις τῆς ἐξισώσεως

$$x+y\sqrt[3]{\omega}+z\sqrt[3]{\omega^2}=0 \qquad (1)$$

εἶναι λύσις καὶ τῆς ἐξισώσεως $x^3+y^3\omega+z^3\omega^2-3xyz\omega=0$ (2)

β΄) Πᾶσα λύσις τῆς ἐξισώσεως (2) εἶναι λύσις καὶ τῆς ἐξισώσεως (1) ἐκτὸς ἐὰν εἶναι

$$x=y\sqrt[3]{\omega}=z\sqrt[3]{\omega^2}.$$ (Ἴδε § 26).

291. Ἐπὶ τῇ βάσει τῆς ἀνωτέρω ἀσκήσεως νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις

$$3x+1+\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{(x+1)^2}=0.$$

III. ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ Α΄ ΒΑΘΜΟΥ

75. ***Λύσις.*** μιᾶς ἀνισότητος καλεῖται ἡ εὕρεσις τιμῶν τοῦ ἀγνώστου τοῦ περιεχομένου εἰς τὴν ἀνισότητα αἱ ὁποῖαι ἐπαληθεύουν τὴν ἀνισότητα.

76. Δύο ἀνισότητες λέγονται ***ἰσοδύναμοι*** ὅταν ἐπαληθεύωνται μὲ τὰς αὐτὰς τιμὰς τοῦ ἀγνώστου τὸν ὁποῖον περιέχουν.

77. Ἡ λύσις μιᾶς ἀνισότητος α΄ βαθμοῦ γίνεται ὅπως καὶ ἡ λύσις μιᾶς ἐξισώσεως α΄ βαθμοῦ, στηρίζεται δὲ εἰς τὰς κάτωθι ἰδιότητας, ἀποδεικνυομένας εὐκόλως.

α΄) ***Ἂν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη προσθέσωμεν τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, θετικὸν ἢ ἀρνητικόν, προκύπτει ἀνισότης ἰσοδύναμος καὶ ὁμοιόστροφος πρὸς τὴν δοθεῖσαν*** π. χ. αἱ ἀνισότητες $\alpha>\beta$ καὶ $\alpha+\gamma>\beta+\gamma$ εἶναι ἰσοδύναμοι.

β΄) ***Ἂν πολλαπλασιάσωμεν ἢ διαιρέσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη μιᾶς ἀνισότητος ἐπὶ τὸν αὐτὸν θετικὸν ἀριθμόν, προκύπτει ἀνισότης ἰσοδύναμος καὶ ὁμοιόστροφος πρὸς τὴν δοθεῖσαν*** π. χ. αἱ ἀνισότητες $\alpha>\beta$ καὶ $\alpha\gamma>\beta\gamma$, ἔνθα $\gamma>0$ εἶναι ἰσοδύναμοι.

γ΄) ***Ἂν πολλαπλασιάσωμεν, (ἢ διαιρέσωμεν) ἀμφότερα τὰ μέλη μιᾶς ἀνισότητος ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀρνητικὸν ἀριθμὸν προκύπτει ἀνισότης ἰσοδύναμος ἀλλὰ ἑτερόστροφος πρὸς τὴν δοθεῖσαν*** π. χ. ἂν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἀνισότητος $\alpha>\beta$ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸν ἀρνητικὸν ἀριθμὸν γ, θὰ προκύψῃ ἡ ἀνισότης $\alpha\gamma<\beta\gamma$ ἥτις εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν δοθεῖσαν. Συνέπεια τούτου εἶναι ὅτι : ***ἂν ἀλλάξωμεν τὰ σημεῖα τῶν ὅρων μιᾶς ἀνισότητος, τότε ἀλλάσσει φορὰν ἡ ἀνισότης*** π. χ. ἂν $\alpha>\beta$, τότε $-\alpha<-\beta$.

δ΄) ***Δύο ἀνισότητας ὁμοιοστρόφους δυνάμεθα νὰ προσθέσωμεν κατὰ μέλη καὶ νὰ προκύψῃ ἀνισότης*** π.χ. ἐκ τῶν ἀνισοτήτων $\alpha>\beta$ καὶ $\gamma>\delta$ εὑρίσκομεν $\alpha+\gamma>\beta+\delta$.

ε΄) ***Δύο ἀνισότητας ὁμοιοστρόφους καὶ ἐχούσας θετικὰ μέλη δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν κατὰ μέλη καὶ νὰ προκύψῃ ἀνισότης ὁμοιόστροφος*** π. χ. ἂν $\alpha>\beta$ καὶ $\gamma>\delta$ οἱ δὲ ἀριθμοὶ $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ εἶναι θετικοί, τότε θὰ ἔχωμεν $\alpha\gamma>\beta\delta$.

στ΄) ***Δὲν δυνάμεθα νὰ ἀφαιρέσωμεν δύο ἀνισότητας κατὰ μέλη.*** Διότι δὲν γνωρίζομεν ἂν θὰ προκύψῃ ἀνισότης ὁμοιόστροφος ἢ ἑτερόστροφος. Ὁμοίως δὲν δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἢ διαιρέσωμεν ἀνισότητας μὴ ὁμοιοστρόφους καὶ μὴ ἐχούσας τὰ μέλη των θετικά.

78. Παράδειγμα λύσεως ἀνισότητος α΄ βαθμοῦ ἔστω τὸ κάτωθι.

Νὰ εὑρεθοῦν τιμαὶ τοῦ x αἱ ὁποῖαι ἐπαληθεύουν τὴν ἀνισότητα.

$$x+\frac{3x-20}{4}>\frac{9x}{4}-7.$$

Πρὸς τοῦτο ἐργαζόμεθα ὅπως καὶ διὰ τὰς ἐξισώσεις τοῦ α΄ βαθμοῦ, ἤτοι

α΄) Ἀπαλείφομεν τοὺς παρονομαστὰς καὶ ἔχομεν

$$4x+3x-20>9x-28$$

β΄) Χωρίζομεν τοὺς ἀγνώστους ἀπὸ τοὺς γνωστοὺς ἤτοι

$$4x+3x-9x>20-28$$

γ΄) Ἐκτελοῦμεν τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων ἤτοι

$$-2x > -8$$

δ΄) Ἀλλάσσομεν τὰ σημεῖα (δηλ. πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ -1), ὁπότε ἀλλάσσει φορὰν καὶ ἡ ἀνισότης, ἤτοι

$$2x < 8$$

ε΄) Τέλος διαιροῦμεν διὰ τοῦ συντελεστοῦ 2 τοῦ ἀγνώστου ἤτοι

$$x < 4.$$

Ἑπομένως πᾶς ἀριθμὸς μικρότερος τοῦ 4 ἐπαληθεύει τὴν δοθεῖσαν ἀνισότητα, καθιστᾷ δηλαδὴ τὸ πρῶτον μέλος της μεγαλύτερον τοῦ δευτέρου.

Συναληθεύουσαι ἀνισότητες.

79. ***Δύο ἢ περισσότεραι ἀνισότητες λέγομεν ὅτι συναληθεύουν ὅταν ἐπαληθεύωνται διὰ τὰς αὐτὰς τιμὰς τοῦ ἀγνώστου.*** π. χ. Νὰ εὑρεθοῦν τιμαὶ τοῦ x διὰ τὰς ὁποίας συναληθεύουν αἱ ἀνισότητες

$$3x - \frac{2}{3} > \frac{x}{2} + \frac{13}{3} \quad \text{καὶ} \quad x + \frac{x}{4} > \frac{7x}{2} - 5.$$

Λύομεν χωριστὰ ἑκάστην ἀνισότητα καὶ παρατηροῦμεν ὅτι ἡ μὲν α΄ ἐπαληθεύεται διὰ $x > 2$, ἡ δὲ β΄ διὰ $x < 10$. Ἄρα ὅλαι αἱ τιμαὶ τοῦ x αἱ κείμεναι μεταξὺ 2 καὶ 10 ἐπαληθεύουν ἀμφοτέρας τὰς ἀνισότητας ἤτοι

$$2 < x < 10.$$

Ἀσκήσεις πρὸς λύσιν.

Νὰ εὑρεθοῦν τιμαὶ τοῦ x αἱ ὁποῖαι ἐπαληθεύουν ἑκάστην ἐκ τῶν κάτωθι ἀνισοτήτων.

292. $5x - \frac{x}{2} - \frac{1}{3} > 3x - \frac{1}{6} + \frac{x}{3}$ **293.** $\frac{x}{2} + 1 < \frac{7x}{3} - 8$

294. $(x-1)(x-2) < (x+1)(x+3)$ **295.** $(x-1)(x-2)(x-3) > x^2(x-6)$

Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀκέραιαι τιμαὶ τοῦ x διὰ τὰς ὁποίας συναληθεύουν αἱ κάτωθι ἀνισότητες

296. $3x + \frac{5}{21} < 2x + 1$ καὶ $4x + \frac{3}{2} > 2x - 7.$

297. $5x - \frac{2}{3} > \frac{2x}{3} + \frac{1}{9}$ καὶ $2x - 8 > \frac{3x-14}{2}$

298. $8x - 5 > \frac{15x}{2} - 4$ καὶ $2x - 3 > \frac{5x}{2} - \frac{3}{4}$

299. $\frac{x+2}{3} + \frac{x-3}{4} > \frac{x+4}{2} - \frac{x}{6}$ καὶ $\frac{2x-3}{3} + \frac{6x-1}{12} < \frac{3x}{4} + \frac{9}{2}$

IV ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ Α΄ ΒΑΘΜΟΥ

80. Καλοῦμεν ***σύστημα*** ἐξισώσεων α΄ βαθμοῦ μετ' ἰσαρίθμων ἀγνώστων τὸ σύνολον τῶν ἐξισώσεων αἱ ὁποῖαι ἐπαληθεύονται μὲ τὰς αὐτὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων, π. χ. αἱ ἐξισώσεις

$$2x-3y=3$$
$$x+2y=5$$

ἀποτελοῦν σύστημα ὡς ἐπαληθευόμεναι μὲ τὰς αὐτὰς τιμὰς $x=3$ καὶ $y=1$ τῶν ἀγνώσνων.

Ρίζαι ἑνὸς συστήματος καλοῦνται αἱ τιμαὶ τῶν ἀγνώστων αἱ ὁποῖαι ἐπαληθεύουν τὸ σύστημα.

81. Θεώρημα. ***Ἂν προσθέσωμεν κατὰ μέλη δύο ἐξισώσεις τότε ἡ προκύπτουσα ἐξίσωσις μετὰ μιᾶς ἐκ τῶν δοθεισῶν ἀποτελεῖ σύστημα ὅπερ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ δοθέν.***

Ἔστωσαν αἱ δύο ἐξισώσεις

$$\left.\begin{array}{l} \alpha x+\beta y=\gamma \\ \alpha'+\beta' y=\gamma' \end{array}\right\} \quad (1)$$

Προσθέτοντες κατὰ μέλη ταύτας εὑρίσκομεν

$$(\alpha+\alpha')x+(\beta+\beta')y=\gamma+\gamma' \qquad (2)$$

θὰ δείξωμεν ὅτι μία ἐκ τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ ἡ (2) ἀποτελοῦν σύστημα ἰσοδύναμον πρὸς τὸ σύστημα (1), θὰ δείξωμεν δηλαδὴ ὅτι τὸ σύστημα

$$\begin{array}{l} \alpha x+\beta y=\gamma \\ (\alpha+\alpha')x+(\beta+\beta')y=\gamma+\gamma' \end{array} \qquad (3)$$

καὶ τὸ σύστημα (1) εἶναι ἰσοδύναμα ἤτοι ὅτι ἔχουν τὰς αὐτὰς ῥίζας.

Διότι ἔστωσαν $x=\lambda$ καὶ $y=\mu$ αἱ ῥίζαι τοῦ συστήματος (1). Γίνεται ἄρα τοῦτο

$$\left.\begin{array}{l} \alpha\lambda+\beta\mu=\gamma \\ \alpha'\lambda+\beta'\mu=\gamma' \end{array}\right\} \quad (4)$$

Διὰ προσθέσεως τῶν ἐξισώσεων (4) κατὰ μέλη εὑρίσκομεν

$$(\alpha+\alpha')\lambda+(\beta+\beta')\mu=\gamma+\gamma'. \qquad (5)$$

Ἀλλ' ἡ ἐξίσωσις (5) εἶναι ἡ β΄ ἐκ τῶν ἐξισώσεων (3) ἂν τεθῇ εἰς αὐτὴν ἀντὶ x τὸ λ καὶ ἀντὶ y τὸ μ. Ἑπομένως ἡ β΄ ἐκ τῶν ἐξισώσεων (3) ἔχει ὡς ῥίζας τὰς $x=\lambda$ καὶ $y=\mu$ ὡς ἐπαληθευομένη διὰ $x=\lambda$ καὶ $y=\mu$ εἶναι δὲ προφανὲς ὅτι ἡ α΄ ἐκ τῶν ἐξισώσεων (3) ἔχει τὰς αὐτὰς ῥίζας. Ἄρα τὸ σύστημα (3) ἔχει ὡς ῥίζας τὰς ῥίζας τοῦ συστήματος (1) καὶ ἐπομένως εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ σύστημα (1).

V. ΤΡΟΠΟΙ ΛΥΣΕΩΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ Α΄. ΒΑΘΜΟΥ

82. α΄. *Τρόπος ἀπαλοιφῆς.* Ἔστω πρὸς λύσιν τὸ σύστημα

$$\begin{aligned} 5x+2y&=16 \\ 2x-\ y&=1 \end{aligned} \qquad (1)$$

Φροντίζομεν ὥστε ὁ ἄγνωστος τὸν ὁποῖον θέλομεν νὰ ἀπαλείψωμεν νὰ ἔχῃ συντελεστὰς ἀντιθέτους. Πρὸς τοῦτο διὰ τὴν ἀπαλοιφὴν τοῦ y πολλαπλασιάζομεν τὴν β΄ ἐξίσωσιν ἐπὶ 2 καὶ προσθέτομεν αὐτὰς κατὰ μέλη ὁπότε εὑρίσκομεν

$$9x=18 \qquad (2)$$

Ἤδη μία ἐκ τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) ἀποτελοῦν σύστημα δύο ἐξισώσεων μετὰ δύο ἀγνώστων (§ 80). Ἐκ τῆς (2) εὑρίσκομεν $x=2$, θέτοντες δὲ τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ x εἰς τὴν α΄ ἐκ τῶν (1) εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν τοῦ y ἤτοι $y=3$. Ἄρα αἱ ρίζαι τοῦ συστήματος (1) εἶναι $x=2$ καὶ $y=3$.

83. β΄. *τρόπος ἀντικαταστάσεως.* Ἔστω πρὸς λύσιν τὸ αὐτὸ σύστημα τῆς ἀνωτέρω παραγράφου. Ἐκ τῆς α΄ ἐξισώσεως εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν τοῦ ἑνὸς ἀγνώστου ἔστω τοῦ y, θεωροῦντες τὸν ἕτερον ἄγνωστον ὡς γνωστὸν ἤτοι

$$y=\frac{16-5x}{2} \qquad (3)$$

Τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ y τὴν θέτομεν εἰς τὴν β΄ ἐξίσωσιν ἤτοι

$$2x-\frac{16-5x}{2}=1 \qquad (4)$$

Ἤδη ἡ ἐξίσωσις (4) λυομένη ὡς πρὸς τὸν ἄγνωστόν της x δίδει

$$9x=18$$

ἐξ ἧς εὑρίσκομεν $x=2$. Θέτοντες τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ x εἰς τὴν σχέσιν (3) εὑρίσκομεν $y=3$. Ἄρα αἱ ρίζαι τοῦ συστήματος (1) εἶναι $x=2$, $y=3$.

84. γ΄. *τρόπος τῆς συγκρίσεως.* Ἔστω πρὸς λύσιν τὸ αὐτὸ σύστημα τῆς § 82. Ἐξ ἑκάστης ἐξισώσεως εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν τοῦ αὐτοῦ ἀγνώστου, ἔστω τοῦ y, θεωροῦντες τὸν ἕτερον ἄγνωστον ὡς γνωστόν, ἤτοι

$$y=\frac{16-5x}{2} \quad \text{καὶ} \quad y=2x-1. \qquad (5)$$

Ἤδη, ἐπειδὴ τὰ πρῶτα μέλη τῶν σχέσεων (5) εἶναι ἴσα, ἕπεται ὅτι καὶ τὰ δεύτερα μέλη αὐτῶν θὰ εἶναι ἴσα ἤτοι θὰ ἔχωμεν

$$\frac{16-5x}{2}=2x-1 \qquad (6)$$

Ἐπιλύοντες τὴν ἐξίσωσιν (6) ὡς πρὸς τὸν ἄγνωστόν της x εὑρίσκομεν

$$9x=18$$

ἤτοι $x=2$ καὶ ἄρα ἐκ μιᾶς ἐκ τῶν (5) εὑρίσκομεν $y=3$.

Αἱ ρίζαι λοιπὸν τοῦ συστήματος εἶναι $x=2$, $y=3$.

Παρατήρησις. Παρατηροῦμεν ὅτι οἱονδήποτε ἐκ τῶν τριῶν ἀνωτέρω τρόπων καὶ ἂν μεταχειρισθῶμεν καταλήγομεν εἰς τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον. Κυρίως εὔχρηστοι τρόποι εἶναι ὁ πρῶτος καὶ ὁ δεύτερος. Ὁ δεύτερος ἰδίως χρησιμοποιεῖται εἰς τὰ δευτεροβάθμια συστήματα.

83. Ὅταν τὸ σύστημα ἔχῃ τρεῖς ἐξισώσεις μετὰ τριῶν ἀγνώστων τότε ἐργαζόμεθα ὡς ἀνωτέρω ἀπαλείφοντες ἕνα ἄγνωστον μεταξὺ α΄ καὶ β΄ ἐξισώσεως καὶ κατόπιν ἀπαλείφοντες τὸν αὐτὸν ἄγνωστον μεταξὺ μιᾶς ἐκ τῶν δύο πρώτων καὶ τῆς γ΄. Αἱ οὕτω εὑρισκόμεναι δύο ἐξισώσεις λαμβανόμεναι ὁμοῦ ἀποτελοῦν σύστημα δύο ἐξισώσεων μετὰ δύο ἀγνώστων τὸ ὁποῖον ἐπιλύεται ὡς ἀνωτέρω. Κατ᾽ ἀνάλογον τρόπον ἐργαζόμεθα καὶ ἂν ἔχωμεν σύστημα μὲ περισσοτέρας ἐξισώσεις.

Ἔστω πρὸς λύσιν τὸ σύστημα

$$\begin{aligned} 2x+3y+4\omega&=29 \\ 3x-\ y+2\omega&=11 \\ x+2y-2\omega&=0. \end{aligned} \qquad (7)$$

Ἀπαλείφομεν τὸν ω μεταξὺ α΄ καὶ β΄ πολλαπλασιάζοντες τὴν β΄ ἐπὶ -2 καὶ προσθέτοντες ὅτε εὑρίσκομεν

$$-4x+5y=7 \qquad (8)$$

Ἀπαλείφομεν τὸν αὐτὸν ἄγνωστον ω μεταξὺ μιᾶς ἐκ τῶν δύο πρώτων ἐξισώσεων, ἔστω τῆς β΄, καὶ τῆς γ΄ ὅτε εὑρίσκομεν

$$4x+y=11 \qquad (9)$$

Ἤδη αἱ ἐξισώσεις (8) καὶ (9) ἀποτελοῦν σύστημα δύο ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους, αἱ ὁποῖαι ἐπιλυόμεναι κατὰ τὰ εἰς τὴν § 82 διὰ προσθέσεως δίδουν

$$6y=18 \qquad (10)$$

ἐξ ἧς $y=3$. Θέτομεν ἤδη τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ y εἰς τὴν (9) καὶ εὑρίσκομεν $x=2$.

Ἤδη θέτομεν τὰς τιμάς τῶν x καὶ y εἰς μίαν ἐκ τῶν δοθεισῶν ἐξισώσεων, ἔστω εἰς τὴν α΄, καὶ εὑρίσκομεν $\omega=4$.

Ἄρα αἱ ρίζαι τοῦ συστήματος εἶναι $x=2$, $y=3$, $\omega=4$.

Κατ᾽ ἀνάλογον τρόπον ἐργαζόμεθα ὅταν αἱ ἐξισώσεις εἶναι περισσότεραι τῶν τριῶν.

Σημείωσις. Εἰς τὸ ἄνω σύστημα (7) ἠδυνάμεθα νὰ ἐφαρμόσωμεν καὶ τὸν τρόπον τῆς ἀντικαταστάσεως, εὑρίσκοντες τὴν τιμὴν ἔστω τοῦ x ἐκ τῆς α΄ ἐξισώσεως καὶ θέτοντες ταύτην εἰς τὴν β΄ καὶ γ΄ ἐξίσωσιν καὶ κατόπιν ἐργαζόμενοι ὡς εἰς τὴν § 83. Ἐπίσης ἠδυνάμεθα νὰ μεταχειρισθῶμεν καὶ τὸν τρόπον τῆς § 84.

Ἐκτὸς τῶν ἀνωτέρω στοιχειωδῶν τρόπων λύσεως συστημάτων ἔχομεν καὶ τοὺς κατωτέρω.

Λύσις συστημάτων διὰ τῶν ὁριζουσῶν. Κανὼν τοῦ Cramer.

86. Ἵνα λύσωμεν σύστημα πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων μὲ ἰσαρίθμους ἀγνώστους, α΄) φροντίζομεν ὥστε οἱ ὅροι οἱ περιέχοντες τοὺς ἀγνώστους ἑκάστης ἐξισώσεως νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὸ α΄ μέλος καὶ νὰ ἔχουν γραφῇ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν τῶν ἀγνώστων, οἱ δὲ γνωστοὶ ὅροι νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὸ β΄ μέλος καὶ β΄) πρὸς εὕρεσιν ἑκάστης ρίζης σχηματίζομεν κλάσμα τὸ ὁποῖον ἔχει παρονομαστὴν μὲν τὴν ὁρίζουσαν τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων, ἀριθμητὴν δὲ τὴν αὐτὴν ὁρίζουσαν ἀφοῦ ἀντικατασταθῇ διὰ τοῦ γνωστοῦ ὅρου ὁ ἀντίστοιχος συντελεστὴς τοῦ ἀγνώστου τοῦ ὁποίου τὴν ρίζαν ζητοῦμεν.

Ἔστω πρὸς λύσιν τὸ σύστημα

$$\begin{aligned} \alpha x + \beta y &= \gamma \\ \alpha' x + \beta' y &= \gamma' \end{aligned} \qquad (1)$$

Κατὰ τὸν ἄνω κανόνα, αἱ ρίζαι τοῦ συστήματος τούτου εἶναι

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \gamma & \beta \\ \gamma' & \beta' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}} = \frac{\beta'\gamma - \beta\gamma'}{\alpha\beta' - \alpha'\beta} \quad \text{καὶ} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \alpha' & \gamma' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}} = \frac{\alpha\gamma' - \alpha'\gamma}{\alpha\beta' - \alpha'\beta}$$

Πράγματι, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὴν πρώτην ἐκ τῶν (1) ἐπὶ β΄ καὶ τὴν δευτέραν ἐπὶ —β καὶ προσθέσωμεν, εὑρίσκομεν $x = \dfrac{\beta'\gamma - \beta\gamma'}{\alpha\beta' - \alpha'\beta}$.

Ὁμοίως ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὴν πρώτην ἐπὶ —α΄ καὶ τὴν δευτέραν ἐπὶ α καὶ προσθέσωμεν εὑρίσκομεν $y = \dfrac{\alpha\gamma' - \alpha'\gamma}{\alpha\beta' - \alpha'\beta}$.

Παρατηροῦμεν λοιπὸν ὅτι τῆς ρίζης x παρονομαστὴς μὲν εἶναι $\alpha\beta' - \alpha'\beta$ ἤτοι ἡ ὁρίζουσα $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}$ τῶν συντελεστῶν τοῦ x καὶ y ἀριθμητὴς δὲ $\beta'\gamma - \beta\gamma'$, ἤτοι ἡ ὁρίζουσα $\begin{vmatrix} \gamma & \beta \\ \gamma' & \beta' \end{vmatrix}$ τῶν αὐτῶν συντελεστῶν ἀφοῦ ἀντικατασταθοῦν οἱ συντελεσταὶ α καὶ α΄ τοῦ x διὰ τῶν γνωστῶν ὅρων γ καὶ γ΄. Τὸ αὐτὸ παρατηροῦμεν καὶ διὰ τὴν ρίζαν τοῦ y.

Παράδειγμα ἔστω τὸ ἑξῆς : Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$$5x-4y=-2$$
$$3x+2y=12$$

Ἔχομεν $x=\dfrac{\begin{vmatrix}-2 & -4\\ 12 & 2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}5 & -4\\ 3 & 2\end{vmatrix}}=\dfrac{-4+48}{10+12}=2,\ y=\dfrac{\begin{vmatrix}5 & -2\\ 3 & 12\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}5 & -4\\ 3 & 2\end{vmatrix}}=\dfrac{60+6}{10+12}=3.$

87. Ἔστω ἐπίσης πρὸς λύσιν τὸ σύστημα

$$\begin{aligned}\alpha x+\beta y+\gamma z&=\delta\\ \alpha' x+\beta' y+\gamma' z&=\delta'\\ \alpha'' x+\beta'' y+\gamma'' z&=\delta''\end{aligned}\qquad(2)$$

Αἱ ῥίζαι τοῦ συστήματος τούτου εἶναι

$$x=\frac{\begin{vmatrix}\delta & \beta & \gamma\\ \delta' & \beta' & \gamma'\\ \delta'' & \beta'' & \gamma''\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\alpha & \beta & \gamma\\ \alpha' & \beta' & \gamma'\\ \alpha'' & \beta'' & \gamma''\end{vmatrix}},\quad y=\frac{\begin{vmatrix}\alpha & \delta & \gamma\\ \alpha' & \delta' & \gamma'\\ \alpha'' & \delta'' & \gamma''\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\alpha & \beta & \gamma\\ \alpha' & \beta' & \gamma'\\ \alpha'' & \beta'' & \gamma''\end{vmatrix}},\quad z=\frac{\begin{vmatrix}\alpha & \beta & \delta\\ \alpha' & \beta' & \delta'\\ \alpha'' & \beta'' & \delta''\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\alpha & \beta & \gamma\\ \alpha' & \beta' & \gamma'\\ \alpha'' & \beta'' & \gamma''\end{vmatrix}}$$

πειθόμεθα δὲ περὶ τούτου εὐκόλως λύοντες τὸ σύστημα (2) διὰ τῆς μεθόδου τῆς ἀπαλοιφῆς.

Μέθοδος τοῦ σταυροειδοῦς πολλαπλασιασμοῦ.

88. Ὅταν ἔχωμεν τὸ σύστημα

$$\begin{aligned}\alpha x+\beta y+\gamma z&=0\\ \alpha' x+\beta' y+\gamma' z&=0\end{aligned}\qquad(3)$$

ἤτοι δύο ἐξισώσεις μὲ τρεῖς ἀγνώστους, αἱ ὁποῖαι ἐξισώσεις δὲν ἔχουν γνωστὸν ὅρον, τότε μεταξὺ τῶν ἀγνώστων καὶ τῶν συντελεστῶν των ἰσχύει ἡ ἑξῆς σχέσις.

$$\frac{x}{\begin{vmatrix}\beta & \gamma\\ \beta' & \gamma'\end{vmatrix}}=\frac{y}{\begin{vmatrix}\gamma & \alpha\\ \gamma' & \alpha'\end{vmatrix}}=\frac{z}{\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \alpha' & \beta'\end{vmatrix}}\quad\text{ἢ}\quad\frac{x}{\beta\gamma'-\beta'\gamma}=\frac{y}{\gamma\alpha'-\gamma'\alpha}=\frac{z}{\alpha\beta'-\alpha'\beta}\qquad(4)$$

Πράγματι, ἂν διαιρέσωμεν διὰ z ἑκάστην ἐκ τῶν ἐξισώσεων (3) καὶ μεταφέρωμεν εἰς τὸ β΄ μέλος τὸν προκύπτοντα οὕτω γνωστὸν ὅρον, εὑρίσκομεν

$$\alpha\left(\frac{x}{z}\right)+\beta\left(\frac{y}{z}\right)=-\gamma,\quad \alpha'\left(\frac{x}{z}\right)+\beta'\left(\frac{y}{z}\right)=-\gamma'\qquad(5)$$

λύοντες δὲ τὸ σύστημα (5) κατὰ τὰ εἰς τὴν § 82 γραφόμενα ὡς πρὸς ἀγνώστους τοὺς $\frac{x}{z}$ καὶ $\frac{y}{z}$ εὑρίσκομεν

$$\frac{x}{z}=\frac{\beta\gamma'-\beta'\gamma}{\alpha\beta'-\alpha'\beta},\quad \frac{y}{z}=\frac{\gamma\alpha'-\gamma'\alpha}{\alpha\beta'-\alpha'\beta} \quad \text{ἢ} \quad \frac{x}{\beta\gamma'-\beta'\gamma}=\frac{y}{\gamma\alpha'-\gamma'\alpha}=\frac{z}{\alpha\beta'-\alpha'\beta}$$

89. Χρησιμοποιοῦντες τὴν ἀνωτέρω μέθοδον δυνάμεθα νὰ λύωμεν πρωτοβάθμια συστήματα ὡς π. χ.

α'. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα.

$$5x-3y-1=0, \quad x+2y-12=0. \qquad (6)$$

Θεωροῦντες ὅτι εἰς τὸ σύστημα (6) εἶναι $z=1$ καὶ ἐφαρμόζοντες τὴν σχέσιν (4) ἔχομεν

$$\frac{x}{36+2}=\frac{y}{-1+60}=\frac{1}{10+3} \text{ καὶ ἄρα } x=\frac{38}{13},\ y=\frac{59}{13}.$$

β'. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$$\begin{aligned} \alpha x+\beta y+\gamma z&=0 \\ x+y+z&=0 \\ \beta\gamma x+\gamma\alpha y+\alpha\beta z&=(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta) \end{aligned} \qquad (7)$$

Αἱ δύο πρῶται ἐξισώσεις ἐπὶ τῇ βάσει τῆς σχέσεως (4) δίδουν

$$\frac{x}{\beta-\gamma}=\frac{y}{\gamma-\alpha}=\frac{z}{\alpha-\beta}=k.$$

Ἄρα $x=k(\beta-\gamma)$, $y=k(\gamma-\alpha)$, $z=k(\alpha-\beta)$, θέτοντες δὲ εἰς τὴν γ' ἐκ τῶν (7) τὰς τιμὰς τῶν x, y, z εὑρίσκομεν

$$k[\beta\gamma(\beta-\gamma)+\gamma\alpha(\gamma-\alpha)+\alpha\beta(\alpha-\beta)]=(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta) \quad \text{ἢ}$$
$$-k(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)=(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)$$

Ἑπομένως $k=-1$ καὶ ἄρα $x=\gamma-\beta$, $y=\alpha-\gamma$, $z=\beta-\alpha$.

Λύσις συστημάτων δι' εἰδικῶν τρόπων (τεχνασμάτων).

90. Πολλάκις ἵνα λύσωμεν σύστημά τι ἐργαζόμεθα κατὰ τρόπον διάφορον τῶν ἀνωτέρω ἐκτεθέντων καὶ ἐξαρτώμενον ἐξ αὐτοῦ τούτου τοῦ πρὸς λύσιν συστήματος. Ὁ εἰδικὸς οὗτος τρόπος καλεῖται ***τέχνασμα*** καὶ ἐφαρμόζεται εἰς ἓν σύστημα ἢ εἰς κατηγορίαν τινὰ ὁμοίων συστημάτων.

Δὲν δυνάμεθα ἐν γένει νὰ δώσωμεν ὡρισμένον κανόνα ἐργασίας εἰς τὰ διάφορα τεχνάσματα. Ἡ κατανόησις τοῦ χρησιμοποιηθησομένου τεχνάσματος ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν πεῖραν ἑκάστου καὶ ἀπὸ τὸ εἶδος τοῦ πρὸς λύσιν συστήματος. Παραθέτομεν κατωτέρω τὴν λύσιν συστημάτων τινῶν λυομένων διὰ τεχνασμάτων.

91. Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα.

$$\alpha'. \qquad \frac{xy}{x+y}=\frac{12}{5}, \quad \frac{yz}{y+z}=\frac{18}{5}, \quad \frac{xz}{x+z}=\frac{36}{13} \tag{8}$$

Ἀντιστρέφομεν τοὺς ὅρους ἑκάστης ἐκ τῶν ἐξισώσεων, χωρίζομεν τὸ κλάσμα ἑκάστου πρώτου μέλους τούτων εἰς δύο ἄλλα κλάσματα καὶ ἁπλοποιοῦμεν ὅτε εὑρίσκομεν

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{12}, \quad \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{5}{18}, \quad \frac{1}{z}+\frac{1}{x}=\frac{13}{36} \tag{9}$$

Ἤδη, χωρὶς νὰ ἐξαλείψωμεν τοὺς παρονομαστάς, θεωροῦμεν ὡς ἀγνώστους τοὺς $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{z}$, ἀλλάσσοντες δὲ τὰ σημεῖα τῆς β′ ἐκ τῶν (9) καὶ προσθέτοντες ὅλας κατὰ μέλη εὑρίσκομεν $\frac{1}{x}=\frac{1}{4}$ καὶ ἄρα $x=4$. Θέτοντες τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ x εἰς τὴν α′ καὶ γ′ ἐκ τῶν (9) εὑρίσκομεν $y=6$, $z=9$. Ἄρα αἱ ῥίζαι εἶναι $x=4$, $y=6$, $z=9$.

$$\beta'. \qquad \frac{xy}{\alpha y+\beta x}=\gamma, \quad \frac{yz}{\beta z+\gamma y}=\alpha, \quad \frac{xz}{\alpha z+\gamma x}=\beta.$$

Ἐργαζόμενοι ὡς εἰς τὸ ἀνωτέρω σύστημα εὑρίσκομεν

$$x=\frac{2\alpha^2\beta\gamma}{\alpha\beta+\alpha\gamma-\beta\gamma}, \quad y=\frac{2\alpha\beta^2\gamma}{\alpha\beta+\beta\gamma-\alpha\gamma}, \quad z=\frac{2\alpha\beta\gamma^2}{\alpha\gamma+\beta\gamma-\alpha\beta}$$

$$\gamma'. \quad \frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma}=\frac{\omega}{\delta}, \quad \alpha x+\beta y+\gamma z+\delta\omega=\frac{\alpha}{\beta} \tag{10}$$

Ἔχομεν (§ 58 δ′)

$$\frac{\alpha x}{\alpha^2}=\frac{\beta y}{\beta^2}=\frac{\gamma z}{\gamma^2}=\frac{\delta\omega}{\delta^2}=\frac{\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta\omega}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2}=\frac{\alpha}{\beta\lambda}$$

ἂν θέσωμεν χάριν συντομίας $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2=\lambda$.

Ἄρα, ἐξισοῦντες ἕκαστον ἐκ τῶν τεσσάρων πρώτων λόγων μὲ τὸν τελευταῖον, εὑρίσκομεν

$$x=\frac{\alpha^2}{\beta\lambda}, \quad y=\frac{\alpha}{\lambda}, \quad z=\frac{\alpha\gamma}{\beta\lambda}, \quad \omega=\frac{\alpha\delta}{\beta\lambda} \text{ ἔνθα } \lambda=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2$$

$$\delta'. \qquad \begin{aligned} x+2(y+z+\omega)&=19\\ 2y+3(x+z+\omega)&=28\\ 3z+4(x+y+\omega)&=37\\ \omega+2(x+y+z)&=16 \end{aligned} \tag{11}$$

Ἂν θέσωμεν $\qquad x+y+z+\omega=\lambda \qquad$ (12)

τότε ἑκάστη ἐκ τῶν ἐξισώσεων (11) γίνεται

$$
\begin{array}{lll}
x+2(\lambda-x)=19 & \text{ἐξ ἧς} & x=2\lambda-19 \\
2y+3(\lambda-y)=28 & \text{»} \ \text{»} & y=3\lambda-28 \\
3z+4(\lambda-z)=37 & \text{»} \ \text{»} & z=4\lambda-37 \\
\omega+2(\lambda-\omega)=16 & \text{»} \ \text{»} & \omega=2\lambda-16
\end{array} \qquad (13)
$$

Αἱ τιμαὶ (13) τιθέμεναι εἰς τὴν (12) δίδουν $\lambda=10$.
Ἄρα ἐκ τῶν (13) ἔχομεν $x=1,\ y=2,\ z=3,\ \omega=4$.

Ἀσκήσεις πρὸς λύσιν.

Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα

300. $\frac{3x-5y}{2}+3=\frac{2x+y}{5}$

$8-\frac{x-2y}{2}=\frac{x}{2}+\frac{y}{3}$

301. $\frac{7x+6}{11}+y-16=\frac{5x-13}{2}-\frac{8y-x}{5}$

$3(3x+4)=10y-15$

302. $3x+7y+5\omega=27$

$7x-3y+4\omega=1$

$8x+5y-7\omega=58$

303. $x-y+\omega=34$

$2y-5x=8$

$3\omega-13x=12$

304. $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{\omega}{4}=62$

$\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{\omega}{5}=47$

$\frac{x}{4}+\frac{y}{5}+\frac{\omega}{6}=38$

305. $\frac{12}{2x+3y}-\frac{7,5}{3x+4\omega}=1$

$\frac{30}{3x+4\omega}+\frac{37}{5y+9\omega}=3$

$\frac{222}{5y+9\omega}-\frac{8}{2x+3y}=5$

306. $x-y+2\omega+3\varphi=17$

$2x+y+\omega-\varphi=-1$

$5x+4y+7\omega-4\varphi=2$

$8x-y-2\omega+3\varphi=12$

307. $x+y-2\omega+\varphi=-4$

$x+2y+4\omega-5\varphi=39$

$y-4\omega+2\varphi=-21$

$5\omega-3\varphi=34$

308. $\frac{1+x}{2}=\frac{y-1}{2}+\frac{(\alpha-\beta)^2-2\beta^2}{\alpha^2-\beta^2}$

$\beta y-\alpha x=\frac{(3\alpha+\beta)\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2}+\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}-(\alpha+\beta)$

309. $\frac{x+y}{x-y}=\frac{\alpha}{\beta-\gamma}$

$\frac{x+\gamma}{y-\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\gamma}$

310. $\beta\gamma x+2\beta=\gamma y$

$\beta^2 y+\frac{\alpha(\gamma^3-\beta^3)}{\beta\gamma}=\frac{2\beta^3}{\gamma}+\gamma^3 x$

311. $x+y+\omega=\alpha$

$\lambda y=\mu x$

$\nu\omega=\varrho y$

312. $\frac{xy}{2x+3y}=\frac{6}{13},\quad \frac{x\omega}{3x+4\omega}=\frac{4}{11},\quad \frac{y\omega}{4\omega+5y}=\frac{12}{31}$

313. $\lambda(x+y)+\lambda^2(2x-3y-2)=\lambda+3$

$(\lambda-\lambda^2)x+\lambda(y-1)=2\lambda^2(x-y)-3\lambda^2-2.$

314. $x+y+\omega=0$

$(\beta+\gamma)x+(\alpha+\gamma)y+(\alpha+\beta)\omega=0$

$\beta\gamma x+\alpha\gamma y+\alpha\beta\omega=1$

315. $\alpha x+y+z=\alpha^2$

$x+\alpha y+z=3\alpha$

$x+y+\alpha z=2$

316. $x+y+z=0$

$\beta x+\gamma y+\alpha z=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$

$\gamma x+\alpha y+\beta z=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$

317.
$$x+y+z=0$$
$$\frac{\alpha^2 x}{\alpha-\delta}+\frac{\beta^2 y}{\beta-\delta}+\frac{\gamma^2 z}{\gamma-\delta}=0$$
$$\frac{\alpha x}{\alpha-\delta}+\frac{\beta y}{\beta-\delta}+\frac{\gamma z}{\gamma-\delta}=(\alpha-\beta))\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)$$

318.
$$\frac{x-\alpha}{\beta+\gamma}=\frac{y-\beta}{\alpha+\gamma}=\frac{z-\gamma}{\alpha+\beta}$$
$$x+y+z=\delta$$

319.
$$x+2y+3z+4\omega=\alpha$$
$$y+2z+3\omega+4x=\beta$$
$$z+2\omega+3x+4y=\gamma$$
$$\omega+2x+3y+4z=\delta$$

320.
$$x+y+z=1$$
$$\alpha x+\beta y+\gamma z=\delta$$
$$\alpha^2 x+\beta^2 y+\gamma^2 z=\delta^2$$

321.
$$\alpha x+\beta y+\gamma z=\lambda$$
$$\alpha^2 x+\beta^2 y+\gamma^2 z=\lambda^2$$
$$\alpha^3 x+\beta^3 y+\gamma^3 z=\lambda^3$$

Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα

322.
$$5x+y+z+\omega=11$$
$$5y+2(x+z+\omega)=17$$
$$5z+2(x+y+\omega)=20$$
$$5\omega+3(x+y+z)=27$$

323.
$$5x+2(y+z+\omega)=17$$
$$3y+(x+z+\omega)=11$$
$$6z+5(x+y+\omega)=36$$
$$\omega+3(x+y+z)=15$$

324.
$$2x+3y-7\omega=0$$
$$5x-2y-8\omega=0$$
$$3x^2-4y^2+\omega^2=9$$

325.
$$3x-4y+7\omega=0$$
$$2x-y-2\omega=0$$
$$3x^3-y^3+\omega^3=18$$

326.
$$x+y+z=1$$
$$x-y+z=-1$$
$$\alpha^2 x+\alpha y+z=\alpha^3$$

327.
$$\alpha x+\beta(y+z+\omega)=\gamma$$
$$\alpha y+\beta_1(x+z+\omega)=\gamma_1$$
$$\alpha z+\beta_2(x+y+\omega)=\gamma_2$$
$$\alpha\omega+\beta_3(x+y+z)=\gamma_3$$ ('Αεροπ. 1933)

328.
$$\alpha^3+\alpha^2 x+\alpha y+z=0$$
$$\beta^3+\beta^2 x+\beta y+z=0$$
$$\gamma^3+\gamma^2 x+\gamma y+z=0$$ (Γεωπ. 1934)

329.
$$x+\alpha y+\alpha^2 z+\alpha^4=0$$
$$x+\beta y+\beta^2 z+\beta^4=0$$
$$x+\gamma y+\gamma^2 z+\gamma^4=0$$

330.
$$\alpha x+\beta y+\gamma z=0$$
$$\alpha^2 x+\beta^2 y+\gamma^2 z=0$$
$$x+y+z+(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)=0$$

331.
$$\alpha(x+y)=xyz$$
$$\beta(y+z)=xyz$$
$$\gamma(x+z)=xyz$$

332.
$$\alpha x+\beta y+\gamma z=0$$
$$\alpha^2 x+\beta^2 y+\gamma^2 z=0$$
$$\alpha^3 x+\beta^3 y+\gamma^3 z=(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)$$

333.
$$x+y=\lambda(1+\omega)$$
$$\lambda x-\lambda y=1-\omega$$
$$x+y=\mu(1-\omega)$$
$$\mu x-\mu y=1+\omega$$

334. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ἐξίσωσις
$$(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(x^2+y^2+1)=(\alpha x+\beta y+\gamma)^2$$
εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν ἐξίσωσιν
$$(\beta x-\alpha y)^2+(\gamma x-\alpha)^2+(\gamma y-\beta)^2=0$$
νὰ εὑρεθοῦν δὲ αἱ τιμαὶ τῶν x καὶ y αἱ ἐπαληθεύουσαι ταύτην, τῶν α, β, γ, ὄντων πραγματικῶν ἀριθμῶν.

335. Νὰ εὑρεθῇ πολυώνυμον τοῦ x δευτέρου βαθμοῦ μηδενιζόμενον διὰ $x=0$ καὶ ἐπαληθεῦον τὴν ταυτότητα
$$\varphi(x)-\varphi(x-1)\equiv x$$

336. Νὰ εὑρεθῇ πολυώνυμον τοῦ x τρίτου βαθμοῦ μηδενιζόμενον διὰ $x=0$ καὶ ἐπαληθεῦον τὴν ταυτότητα

$$\varphi(x)-\varphi(x-1)\equiv x^2$$

337. Νὰ εὑρεθῇ πολυώνυμον τοῦ x τετάρτου βαθμοῦ μηδενιζόμενον διὰ $x=0$ καὶ πληροῦν τὴν ταυτότητα

$$\varphi(x)-\varphi(x-1)\equiv x^3$$

338. Ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ἀσκήσεων 335, 336, 337, νὰ εὑρεθῇ α΄) τὸ ἄθροισμα β΄) τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων, γ΄) τὸ ἄθροισμα τῶν κύβων, δ) τὸ ἄθροισμα τῶν τετάρτων δυνάμεων κλπ. τῶν ν ἀκεραίων ἀριθμῶν 1,2,3,4,....ν ἀφοῦ γενικευθῇ ἡ ἄσκησις 337.

339. Ἂν x καὶ y εἶναι δύο τυχόντες ἀριθμοί, x΄ καὶ y΄ δύο ἄλλοι ἀριθμοί τοιοῦτοι ὥστε

$$x'=\alpha x+\beta y+\gamma,\quad y'=\alpha' x+\beta' y+\gamma'$$

καὶ x΄΄ καὶ y΄΄ δύο ἄλλοι ἀριθμοί, τοιοῦτοι ὥστε

$$x''=\alpha x'+\beta y'+\gamma,\quad y''=\alpha' x'+\beta' y'+\gamma'$$

νὰ ὁρισθοῦν οἱ α, β, γ, α΄, β΄, γ΄, ἵνα ἔχωμεν $x''=x$ καὶ $y''=y$ διὰ πᾶσαν τιμὴν τῶν x καὶ y.

VI. ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΙΣ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΔΥΟ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ Α΄. ΒΑΘΜΟΥ ΜΕΤΑ ΔΥΟ ΑΓΝΩΣΤΩΝ

92. Ἡ γενικὴ μορφὴ ἑνὸς συστήματος δύο ἐξισώσεων μετὰ δύο ἀγνώστων τοῦ α΄ βαθμοῦ εἶναι

$$\begin{aligned} \alpha x+\beta y&=\gamma \\ \alpha' x+\beta' y&=\gamma' \end{aligned} \qquad (1)$$

Λύοντες τοῦτο κατὰ τὰ εἰς τὴν § 86 ἐκτεθέντα εὑρίσκομεν

$$x=\frac{\beta'\gamma-\beta\gamma'}{\alpha\beta'-\alpha'\beta} \quad \text{καὶ} \quad y=\frac{\alpha\gamma'-\alpha'\gamma}{\alpha\beta'-\alpha'\beta} \qquad (2)$$

93. Ἤδη, ἵνα ὑπάρχουν ῥίζαι τοῦ συστήματος (1), πρέπει ὁ παρονομαστὴς τῶν κλασμάτων τῶν ριζῶν (2) νὰ εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός. Διακρίνομεν λοιπὸν τὰς ἑξῆς περιπτώσεις.

α΄) Ἂν εἶναι $\alpha\beta'-\alpha'\beta\neq 0$ δηλαδὴ ἂν $\frac{\alpha}{\alpha'}\neq\frac{\beta}{\beta'}$, τότε ὑπάρχουν δύο διακεκριμέναι ῥίζαι τοῦ συστήματος (1). Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἂν $\gamma\beta'-\gamma'\beta=0$ δηλαδὴ ἂν $\frac{\beta}{\beta'}=\frac{\gamma}{\gamma'}$, τότε εἶναι $x=0$, ἂν δὲ $\alpha\gamma'-\alpha'\gamma=0$ δηλαδὴ ἂν $\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\gamma}{\gamma'}$ τότε εἶναι $y=0$.

β΄) Ἂν εἶναι $\alpha\beta'-\alpha'\beta\neq 0$ καὶ $\gamma=\gamma'=0$, τότε αἱ ῥίζαι (2) τοῦ συστήματος (1) γίνονται μηδέν, ἤτοι $x=y=0$.

γ') Ἂν εἶναι $\alpha\beta'-\alpha'\beta=0$ δηλαδὴ ἂν $\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\beta}{\beta'}$, τότε εἰς τὰς ῥίζας (2) οἱ παρονομασταὶ γίνονται μηδέν. Τότε πρέπει νὰ ἐξετάσωμεν τοὺς ἀριθμητάς. Καὶ ἂν μὲν εἶναι $\gamma\beta'-\gamma'\beta=0$ ἢ $\frac{\beta}{\beta'}=\frac{\gamma}{\gamma'}$, ὁπότε θὰ εἶναι κατ' ἀνάγκην καὶ $\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\gamma}{\gamma'}$ ἢ $\alpha\gamma'-\alpha'\gamma=0$, τότε ἀμφότεραι αἱ ῥίζαι (2) τοῦ συστήματος (1) λαμβάνουν τὴν ἀπροσδιόριστον μορφὴν $\frac{0}{0}$, τὸ δὲ σύστημα (1) εἶναι ***ἀόριστον*** ὡς πληρούμενον ὑπὸ παντὸς συστήματος τιμῶν τῶν x καὶ y. Πράγματι εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν αἱ δύο ἐξισώσεις καταλήγουν εἰς μίαν. Διότι ἂν τεθῇ

$$\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\beta}{\beta'}=\frac{\gamma}{\gamma'}=k.$$

ὁπότε $\alpha=\alpha'k$, $\beta=\beta'k$, $\gamma=\gamma'k$, τότε ἡ πρώτη ἐκ τῶν ἐξισώσεων (1) γίνεται $k(\alpha'x+\beta'y)=k\gamma'$ ἤτοι εἶναι ἡ αὐτὴ μὲ τὴν δευτέραν πολλαπλασιασθεῖσαν ἐπὶ τὸν λόγον k. Εἶναι λοιπὸν ὡς νὰ ἔχωμεν μίαν ἐξίσωσιν μὲ δύο ἀγνώστους. Τὸ σύστημα γίνεται ἀόριστον ἐπίσης καὶ ὅταν $\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\gamma}{\gamma'}$ καὶ $\gamma=\gamma'=0$.

δ') Ἂν δὲ εἶναι $\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\beta}{\beta'}$ καὶ $\gamma\beta'-\gamma'\beta\neq0$ ἢ $\frac{\beta}{\beta'}\neq\frac{\gamma}{\gamma'}$, ὁπότε κατ' ἀνάγκην θὰ εἶναι καὶ $\frac{\alpha}{\alpha'}\neq\frac{\gamma}{\gamma'}$ ἢ $\alpha\gamma'-\alpha'\gamma\neq0$, τότε ἀμφότεραι αἱ ῥίζαι (2) λαμβάνουν τὴν ἀδύνατον μορφὴν $\frac{\lambda}{0}$, τὸ δὲ σύστημα (1) εἶναι ***ἀδύνατον*** διότι οὐδὲν σύστημα τιμῶν τῶν x καὶ y ἐπαληθεύει τοῦτο.

ε') Ἂν $\alpha=\alpha'=\beta=\beta'=\gamma=\gamma'=0$, τότε ἑκάστη ἐκ τῶν ἐξισώσεων (1) εἶναι ταυτότης ὡς πρὸς x καὶ y, πληροῦται δηλαδὴ ὑπὸ πάσης τιμῆς τοῦ x καὶ ὑπὸ πάσης τιμῆς τοῦ y ἀνεξαρτήτου τῆς τιμῆς τοῦ x. Διότι τότε ἑκάστη ἐκ τῶν ἐξισώσεων (1) γίνεται $0x+0y=0$.

Ὥστε ἐξ ὅλων τῶν ἀνωτέρω συμπεραίνομεν ὅτι :

94. *Τὸ σύστημα (1) ἔχει δύο διακεκριμένας ῥίζας ἂν* $\frac{\alpha}{\alpha'}\neq\frac{\beta}{\beta'}$ *καὶ* $\gamma\neq0$ *ἢ* $\gamma'\neq0$, *ἔχει τὴν λύσιν* $x=y=0$ *ἂν* $\frac{\alpha}{\alpha'}\neq\frac{\beta}{\beta'}$ *καὶ* $\gamma=\gamma'=0$, *εἶναι ἀόριστον ἂν* $\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\beta}{\beta'}=\frac{\gamma}{\gamma'}$, *ἢ ἂν* $\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\beta}{\beta'}$

καὶ $\gamma=\gamma'=0$, εἶναι ἀδύνατον ἂν $\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\beta}{\beta'}\neq\frac{\gamma}{\gamma'}$, ἑκάστη δὲ ἐκ τῶν ἐξισώσεων (1) γίνεται ταυτότης ὡς πρὸς x καὶ y ἂν

$$\alpha=\beta=\gamma=\alpha'=\beta'=\gamma'=0.$$

95. Παραδείγματα τῶν ἀνωτέρω ἔστωσαν τὰ ἑξῆς:

α΄. Νὰ ὁρισθοῦν τὰ α καὶ β ἵνα τὸ σύστημα

$$\begin{aligned}(3\alpha-2\beta-8)x+(2\alpha-3\beta+1)y&=3\\(2\alpha-\beta-5)x+(\alpha+2\beta-7)y&=6\end{aligned}\qquad(3)$$

εἶναι ἀόριστον, ἵνα δηλαδὴ ἐπιδέχεται ἀπείρους λύσεις.

Κατὰ τὴν § 93 γ΄ πρέπει νὰ εἶναι ἀνάλογοι καὶ οἱ συντελεσταὶ τῶν ἀγνώστων καὶ οἱ γνωστοὶ ὅροι, πρέπει δηλαδὴ νὰ εἶναι

$$\frac{3\alpha-2\beta-8}{2\alpha-\beta-5}=\frac{2\alpha-3\beta+1}{\alpha+2\beta-7}=\frac{3}{6}\qquad(4)$$

Ἐπιλύοντες τὸ σύστημα (4) εὑρίσκομεν $\alpha=5$, $\beta=3$.

Αἱ ἐξισώσεις λοιπὸν (3) γίνονται

$$x+2y=3 \quad \text{καὶ} \quad 2x+4y=6\qquad(4')$$

ἤτοι ἡ β΄ ἁπλοποιουμένη ἰσοῦται μὲ τὴν α΄. Παρατηροῦμεν λοιπὸν ὅτι ἂν θέσωμεν εἰς τὴν πρώτην ἐκ τῶν (4΄) τυχοῦσαν τιμὴν τοῦ x καὶ εὕρωμεν τὴν ἀντίστοιχον τιμὴν τοῦ y, τὸ οὕτω εὑρισκόμενον ζεῦγος τιμῶν ἐπαληθεύει τὸ σύστημα (3) ὅπερ μετεσχηματίσθη εἰς τὸ (4΄).

β΄. Εἰς τὸ σύστημα

$$\begin{aligned}\alpha x+\beta y&=1\\3x+6y&=2\end{aligned}\qquad(5)$$

νὰ ὁρισθοῦν οἱ α καὶ β ἵνα τοῦτο εἶναι ἀδύνατον.

Κατὰ τὴν § 93 δ΄. πρέπει οἱ συντελεσταὶ τῶν ἀγνώστων νὰ εἶναι ἀνάλογοι ὁ δὲ λόγος τῶν γνωστῶν ὅρων νὰ εἶναι διάφορος τοῦ λόγου τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων, πρέπει δηλαδὴ νὰ εἶναι

$$\frac{\alpha}{3}=\frac{\beta}{6}\neq\frac{1}{2}.$$

Ὁ α΄ καὶ β΄ λόγος δίδουν $6\alpha=3\beta$ ἢ $\beta=2\alpha$, ὁ δὲ β΄ καὶ γ΄ δίδουν $2\beta\neq6$ ἢ $\beta\neq3$. Ἄρα

$$\beta=2\alpha\neq3.\qquad(6)$$

Ἵνα λοιπὸν τὸ σύστημα (5) εἶναι ἀδύνατον πρέπει ὁ β νὰ εἶναι ἀφ᾽ ἑνὸς μὲν διπλάσιος τοῦ α, ἀφ᾽ ἑτέρου δὲ διάφορος τοῦ 3. Πράγματι ἂν θέσωμεν $\beta=2$ ὁπότε $\alpha=1$ τότε τὸ σύστημα (5) γίνεται

$$\begin{aligned}x+2y&=1\\3x+6y&=2\end{aligned}\qquad(6')$$

ὅπερ εἶναι ἀδύνατον καθ᾽ ὅσον ἂν ἡ α΄ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 3 γίνεται

$3x+6y=3$ ἐκ ταύτης δὲ καὶ τῆς β′ ἐκ τῶν (6′) συνάγομεν ὅτι $3=2$ ὅπερ ἀδύνατον.

Ἀσκήσεις πρὸς λύσιν.

340. Ποία σχέσις πρέπει νὰ ὑφίσταται μεταξὺ τῶν συντελεστῶν δύο ἐξισώσεων α′ βαθμοῦ μὲ δύο ἀγνώστους ἵνα ἡ τιμὴ τοῦ ἑνὸς ἀγνώστου εἶναι διπλασία τῆς τιμῆς τοῦ ἄλλου;

341. Νὰ διευρευνηθῇ τὸ σύστημα

$$(\lambda+2)x+\lambda y=1$$
$$3x+(2-\lambda)y=1$$

δι᾽ ὅλας τὰς πραγματικὰς τιμὰς τοῦ λ.

342. Νὰ λυθῇ καὶ διευρευνηθῇ τὸ σύστημα

$$(24\lambda^2+8\lambda+1)x+(15\lambda^2+8\lambda+1)y+3\lambda^2=0$$
$$(8\lambda+2)x+(5\lambda+1)y=\lambda$$

343. Εἰς τὸ ἀνωτέρω σύστημα νὰ ὁρισθῇ ὁ λ ἵνα τοῦτο εἶναι α′ ἀόριστον καὶ β′ ἀδύνατον.

344. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$$x+ky=\frac{k^3+k+1}{k^2-1}, \quad kx+y=\frac{2k^2+1}{k^2-1}$$

καὶ νὰ ὁρισθῇ ὁ k ἵνα τοῦτο εἶναι α′) ἀόριστον καὶ β′) ἀδύνατον.

345. Νὰ λυθῇ καὶ διερευνηθῇ τὸ σύστημα

$$(\alpha-1)^2x+(\alpha^2-1)y=(\alpha+1)^2, \quad (2\alpha-1)x+(\alpha+1)y=\alpha^2-1$$

346. Εἰς τὸ σύστημα

$$\alpha x+(2-\alpha)y=5-\alpha, \quad \beta x+(\beta+5)y=\beta+1$$

νὰ ὁρισθοῦν τὰ α καὶ β ἵνα τοῦτο εἶναι α′) ἀόριστον καὶ β) ἀδύνατον.

347. Τὸ αὐτὸ διὰ τὸ σύστημα $4x-2y=7$, $y=\alpha x+\beta$.

348. Δίδεται τὸ σύστημα

$$(\alpha+\beta)x+\beta y=\alpha+\gamma, \quad (\alpha+4)x+4y=\delta+4$$

καὶ ἡ ἐξίσωσις $(\alpha+\beta)(\omega-4\gamma)=9(\omega-2\delta)$. Νὰ ὁρισθοῦν οἱ α, β, γ, δ, ἵνα τὸ μὲν σύστημα εἶναι ἀόριστον, ἡ δὲ ἐξίσωσις ταυτότης ὡς πρὸς ω.

349. Εἰς τὸ σύστημα

$$(\lambda-1)x+2(\lambda+2)y=2, \quad 2(\lambda-1)x+5(\lambda+3)y=4$$

νὰ ὁρισθῇ ὁ λ ἵνα τοῦτο εἶναι α′) ἀόριστον καὶ β′) ἀδύνατον

350. Εἰς τὸ σύστημα

$$(\alpha-\beta)y+2\alpha y=\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2, \quad 4x+6y=3$$

νὰ ὁρισθοῦν τὰ α καὶ β ἵνα τοῦτο εἶναι ἀόριστον

351. Δίδεται τὸ σύστημα

$$\alpha x+\beta y=\gamma, \quad (\alpha+4)x+(\beta-3)y=\gamma+\delta$$

καὶ ἡ ἐξίσωσις $(\alpha+\delta)z=\beta z+3\alpha+15$. Νὰ ὁρισθοῦν οἱ α, β, γ, δ, ἵνα τὸ μὲν σύστημα εἶναι ἀόριστον, ἡ δὲ ἐξίσωσις ταυτότης ὡς πρὸς z.

352. Δίδεται τὸ σύστημα

$$\alpha^4x-\beta^2y+z=4, \quad 5x+3y+z=8, \quad 2z-\beta x-3\gamma y=12$$

καὶ ἡ ἐξίσωσις

$$(\alpha+3)x^2+(\alpha-2\beta-\lambda^2)x+2\delta^2-2[2x^2+(\alpha+3\beta+\gamma)x+11\alpha]-4(\beta+\delta)=0$$

Νὰ ὁρισθοῦν τὰ α, β, γ, δ, λ, ἵνα τὸ μὲν σύστημα καθίσταται ἀόριστον, ἡ δὲ ἐξίσωσις ταυτότης ὡς πρὸς x.

353. Δίδεται τὸ σύστημα

$$(\alpha+1)x+2y=3-\delta, \quad (\beta+2)x+y=3-\gamma$$

καὶ ἡ ἐξίσωσις $\Lambda x^2+3Mxy+Ny^2=1-9x$, ἔνθα $\Lambda=\alpha-2\lambda-\beta$, $M=\beta-\gamma$, $N=\gamma-\delta$. Νὰ ὁρισθοῦν οἱ α, β, γ, δ, λ, ἵνα τὸ μὲν σύστημα εἶναι ἀόριστον, ἡ δὲ ἐξίσωσις νὰ πληροῦται ὑπὸ πάσης λύσεως τοῦ ἀορίστου τούτου συστήματος.

354. Δίδεται τὸ σύστημα

$$(\delta-3)x+y=4-\gamma, \quad (2-\alpha)x+y=\beta-5$$

καὶ ἡ ἐξίσωσις $\Lambda x^2+Mxy+Ny^2=P$, ἔνθα $\Lambda=(\delta-3)^2(\delta-2)(\alpha+\beta^2+\gamma^2+\delta-45)$, $M=(\delta-3)(\delta-2)(\alpha+\gamma^2-16)$, $N=\delta-2$, $P=(4-\gamma)^2(3-\alpha)$. Νὰ ὁρισθοῦν τὰ α, β, γ, δ, εἰς τρόπον ὥστε τὸ μὲν σύστημα νὰ εἶναι ἀόριστον ἡ δὲ ἐξίσωσις νὰ πληροῦται ὑπὸ πάσης λύσεως τοῦ ἀορίστου τούτου συστήματος. (Πολυτ. 1932)

VII. ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΥΗΣΕΩΣ

96. Ἔστω πρὸς λύσιν ἡ ἐξίσωσις $2x+y=3$ (1)
Λύομεν ταύτην ὡς πρὸς y, ἤτοι $y=3-2x$. Ἤδη, ἵνα ὁρισθῇ τελείως ἡ τιμὴ του y πρέπει νὰ ὁρισθῇ πρῶτον ἡ τιμὴ τοῦ x. Ἂν δηλαδὴ θέσωμεν $x=0$ τότε εὑρίσκομεν $y=3$ ἢ ἂν $x=1$ τότε $y=1$ κ.λ.π. Ἤτοι παρατηροῦμεν ὅτι εἰς ἑκάστην αὐθαίρετον τιμὴν τοῦ x ἀντιστοιχεῖ μία τιμὴ τοῦ y τελείως ὁριζομένη ἐκ τῆς ἐξισώσεως (1). Ἡ μεταβολὴ λοιπὸν τοῦ y ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς μεταβολῆς τοῦ x.

Ἐκ τῶν δύο ἀγνώστων x καὶ y οἱ ὁποῖοι συνδέονται διὰ τῆς ἐξισώσεως (1) ὁ μὲν x ὅστις δύναται νὰ μεταβάλλεται αὐθαιρέτως καλεῖται ***ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ*** (ποσότης) ὁ δὲ y, τοῦ ὁποίου ἡ μεταβολὴ ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν μεταβολὴν τοῦ x, καλεῖται ***συνάρτησις*** τοῦ x. Ἄρα :

Συνάρτησις μιᾶς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς x ***καλεῖται μία ποσότης*** y ***τῆς ὁποίας ἡ μεταβολὴ ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν μεταβολὴν τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς*** x.

97. Τὰς συναρτήσεις παριστῶμεν διὰ τοῦ y, συχνάκις δὲ καὶ διὰ τῶν συμβόλων $\varphi(x)$, $\sigma(x)$, $\Phi(x)$, $\Pi(x)$, κ.λ.π. π. χ.

$$y=3x+5 \quad \text{ἢ} \quad \varphi(x)=3x+5.$$

Ἂν ἤδη εἰς τὴν ἄνω ἐξίσωσιν εἶναι $x=2$, τότε ἔχομεν $y=11$ ἢ $\varphi(2)=11$.

Γενικῶς ἂν τὴν συνάρτησιν παραστήσωμεν διὰ $\varphi(x)$, θέσωμεν δὲ ἀντὶ x τὴν τυχοῦσαν τιμὴν λ, τότε ἡ τιμὴ τῆς συναρτήσεως εἶναι $\varphi(\lambda)$, σύμβολον ὅπερ δεικνύει τὸ εὑρισκόμενον ἐξαγόμενον διὰ $x=\lambda$, ἀλλὰ εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι σημειωμένη καὶ ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ x δι' ἣν εὑρίσκεται τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο· π.χ. εἰς τὴν συνάρτησιν $\varphi(x)=x^2-3x+1$ τὸ $\varphi(4)=16-12+1=5$ δηλαδὴ τὸ ἐξαγόμενον ὅπερ εὑρίσκομεν θέτοντες $x=4$ εἶναι 5 (ἴδε καὶ § 18).

VIII. ΛΥΣΙΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ Α΄ ΒΑΘΜΟΥ ΟΤΑΝ ΟΙ ΑΓΝΩΣΤΟΙ ΕΙΝΑΙ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΟΙ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

98. Ὡς εἴδομεν εἰς τὴν ἀνωτέρω παράγραφον, ἵνα λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν $y=3-2x$, πρέπει νὰ δώσωμεν αὐθαίρετόν τινα τιμὴν εἰς τὸν x, ἵνα εὑρεθῇ ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ y. Ὥστε, ὅταν ἔχωμεν πρὸς λύσιν μίαν ἐξίσωσιν μετὰ δύο ἀγνώστων, τότε ὁ εἷς ἄγνωστος εἶναι συνάρνησις τοῦ ἄλλου, ἵνα δὲ εὕρωμεν λύσιν τινά, ὀφείλομεν νὰ δώσωμεν εἰς τὸν ἕνα ἐξ αὐτῶν μίαν αὐθαίρετον τιμήν, διὰ νὰ εὑρεθῇ οὕτω ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ ἄλλου ἀγνώστου, Ὁμοίως ὅταν ἔχωμεν πρὸς λύσιν σύστημα δύο ἐξισώσεων μετὰ τριῶν ἀγνώστων, τότε ἀπαλείφομεν τὸν ἕνα ἄγνωστον μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων τούτων, ὁπότε μένει μία ἐξίσωσις μετὰ δύο ἀγνώστων ἐργαζόμεθα δὲ ὡς ἀνωτέρω· π.χ.

99. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$$x+y+\omega=4 \quad \text{καὶ} \quad x+4y-2\omega=7 \qquad (1)$$

Ἀπαλείφοντες τὸν x μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων τούτων δι' ἀφαιρέσεως κατὰ μέλη εὑρίσκομεν $y-\omega=1$ ἢ $y=\omega+1$. Ἤδη, θεωροῦντες τὸν ω ὡς ἀνεξάρτητον μεταβλητὴν καὶ δίδοντες εἰς αὐτὸν τὴν τυχοῦσαν τιμὴν ἔστω $\omega=2$ εὑρίσκομεν $y=3$ καὶ ἄρα ἐκ τῆς α΄ ἐκ τῶν δοθεισῶν $x=-1$.

100. Ἐν γένει, ἵνα λύσωμεν σύστημα ἐξισώσεων α΄ βαθμοῦ εἰς τὰς ὁποίας οἱ ἄγνωστοι εἶναι περισσότεροι τῶν ἐξισώσεων, θεωροῦμεν ὡς ἀνεξαρτήτους μεταβλητὰς τοὺς ἐπὶ πλέον τῶν ἐξισώσεων ὑπάρχοντας ἀγνώστους, προσδιορίζομεν δὲ αὐτοὺς αὐθαιρέτως καὶ κατόπιν ἐπιλύομεν τὸ οὕτω προκύπτον σύστημα. Οἱ ἀπομένοντες τότε ἄγνωστοι εἶναι συναρτήσεις τῶν αὐθαιρέτως προσδιορισθέντων, ὡς π. χ. εἰς τὸ ἀνωτέρω λυθὲν σύστημα (1) οἱ ἄγνωστοι x καὶ y εἶναι συναρτήσεις τοῦ ω.

IX. ΠΕΡΙ ΑΠΑΛΟΙΦΗΣ

101. ***Ἀπαλοιφὴ ἀγνώστου τινὸς (ἢ ἀγνώστων) μεταξὺ ἐξισώσεων περισσοτέρων ἀπὸ τοὺς ἀγνώστους καλεῖται ἡ εὕρεσις τῆς συνθήκης ἥτις πρέπει νὰ ὑφίσταται μεταξὺ τῶν συντελεστῶν τῶν εἰς τὰς ἐξισώσεις ὑπαρχόντων ἀγνώστων, ἵνα ὅλαι αἱ διδόμεναι ἐξισώσεις ἀποτελοῦν σύστημα, ἵνα δηλαδὴ ἐπαληθεύωνται ὅλαι διὰ τὰς αὐτὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων.***

102. Ἔστω τὸ σύστημα :

$$\alpha x=\beta \quad \text{καὶ} \quad \alpha' x=\beta' \qquad (1)$$

ἤτοι σύστημα δύο ἐξισώσεων μὲ ἕνα ἄγνωστον. Εἶναι φανερὸν ὅτι ἡ πρώτη ἐξίσωσις ἔχει τὴν ρίζαν $x=\frac{\beta}{\alpha}$. Ἵνα ἤδη τὸ σύστημα (1) ἔχῃ κοινὴν ρίζαν, ἵνα δηλαδὴ ἐπαληθεύεται διὰ τὴν αὐτὴν τιμὴν τοῦ ἀγνώστου x, πρέπει καὶ ἡ δευτέρα ἐξίσωσις νὰ ἔχῃ τὴν αὐτὴν ρίζαν μετὰ τῆς πρώτης ἤτοι $x=\frac{\beta}{\alpha}$. Ἂν δὲ τεθῇ ἀντὶ x ἡ ρίζα $\frac{\beta}{\alpha}$ εἰς τὴν δευτέραν ἐξίσωσιν, τότε αὕτη γίνεται

$$\frac{\alpha'\beta}{\alpha}=\beta' \quad ἢ \quad \alpha\beta'=\alpha'\beta \qquad (2)$$

Ἄρα, ἵνα τὸ σύστημα (1) ἔχῃ κοινὴν ρίζαν, πρέπει μεταξὺ τῶν συντελεστῶν του νὰ ὑφίσταται ἡ σχέσις (2). Ἡ σχέσις (2) καλεῖται ***ἀπαλείφουσα***, ἤτοι :

103. ***Ἀπαλείφουσα ἑνὸς συστήματος ἔχοντος ἐξισώσεις περισσοτέρας ἀπὸ τοὺς ἀγνώστους καλεῖται ἡ σχέσις ἡ ὁποία συνδέει τοὺς συντελεστὰς τῶν ἀγνώστων, ἵνα αἱ ἐξισώσεις ἐπαληθεύωνται διὰ τὰς αὐτὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων.***

104. Ἔστω ἐπίσης τὸ σύστημα :

$$\alpha x+\beta y=\gamma, \quad \alpha' x+\beta' y=\gamma', \quad \lambda x+\mu y=\nu \qquad (3)$$

ἤτοι σύστημα τριῶν ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους. Ἐπιλύοντες τὰς δύο πρώτας ἐξισώσεις ὡς σύστημα δύο ἐξισώσεως μὲ δύο ἀγνώστους εὑρίσκομεν ὡς ρίζας

$$x=\frac{\gamma\beta'-\gamma'\beta}{\alpha\beta'-\alpha'\beta} \quad καὶ \quad y=\frac{\alpha\gamma'-\alpha'\gamma}{\alpha\beta'-\alpha'\beta} \qquad (4)$$

Ἵνα ἤδη αἱ ἐξισώσεις (3) ἀποτελοῦν σύστημα, ὀφείλουν αἱ τιμαὶ (4) τῶν x καὶ y τιθέμεναι εἰς τὴν τρίτην ἐξίσωσιν ἐκ τῶν (3) νὰ πληροῦσι ταύτην, νὰ καθιστοῦν δηλαδὴ τὸ πρῶτον μέλος της ἴσον μὲ τὸ δεύτερον. Ἂν λοιπὸν θέσωμεν τὰς τιμὰς (4) τῶν x καὶ y εἰς τὴν τρίτην ἐκ τῶν ἐξισώσεων (3) εὑρίσκομεν

$$\frac{\lambda(\gamma\beta'-\gamma'\beta)}{\alpha\beta'-\alpha'\beta}+\frac{\mu(\alpha\gamma'-\alpha'\gamma)}{\alpha\beta'-\alpha'\beta}=\nu \qquad ἢ$$

$$\lambda(\gamma\beta'-\gamma'\beta)+\mu(\alpha\gamma'-\alpha'\gamma)=\nu(\alpha\beta'-\alpha'\beta) \qquad (5)$$

Ἄρα, ἵνα τὸ σύστημα (3) ἔχῃ λύσιν, πρέπει μεταξὺ τῶν συντελεστῶν του νὰ ὑφίσταται ἡ σχέσις (5). Ὥστε ἡ ἀπαλείφουσα τοῦ συστήματος (3) εἶναι ἡ σχέσις (5).

ΣΗΜ. Τὰ ἐν τῇ παραγράφῳ 101 ἀναγραφόμενα δύνανται νὰ ἐκφρασθοῦν καὶ κατὰ τοὺς ἑξῆς τρεῖς τρόπους ἤτοι

α') Νὰ ἀπαλειφθοῦν οἱ ἄγνωστοι x καὶ y μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων :

$$\alpha x+\beta y=\gamma, \quad \alpha' x+\beta' y=\gamma' \quad \text{καὶ} \quad \lambda x+\mu y=\nu, \quad \text{ἢ}$$

β') Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη ἵνα αἱ ἐξισώσεις

$$\alpha x+\beta y=\gamma, \quad \alpha' x+\beta' y=\gamma' \quad \text{καὶ} \quad \lambda x+\mu y=\nu$$

ἐπαληθεύωνται διὰ τὰς αὐτὰς τιμὰς τῶν x καὶ y, ἢ

γ') Νὰ εὑρεθῇ ἡ σχέσις ἥτις πρέπει νὰ ὑφίσταται μεταξὺ τῶν συντελεστῶν τῶν ἐξισώσεων $\alpha x+\beta y=\gamma$, $\alpha' x+\beta' y=\gamma'$ καὶ $\lambda x+\mu y=\nu$ ἵνα αὗται ἐπαληθεύωνται διὰ τὰς αὐτὰς τιμὰς τῶν x καὶ y.

105. Ἵνα ἀπαλείψωμεν ἄγνωστόν τινα ἢ ἀγνώστους μεταξὺ δοθεισῶν ἐξισώσεων ἐργαζόμεθα κατὰ διαφόρους τρόπους, ὡς καὶ εἰς τὴν λύσιν τῶν συστημάτων. Εἷς ἐξ αὐτῶν εἶναι καὶ ὁ ἑξῆς:

Λαμβάνομεν ἐκ τῶν δοθεισῶν ἐξισώσεων τόσας ὅσαι ἀπαιτοῦνται νὰ ἀποτελεσθῇ σύστημα ἐξισώσεων μὲ ἰσαρίθμους ἀγνώστους, λύομεν τὸ σύστημα τοῦτο καὶ κατόπιν θέτομεν τὰς εὑρισκομένας τιμὰς τῶν ἀγνώστων εἰς τὰς ὑπολοίπους ἐξισώσεις. Ἡ οὕτω προκύπτουσα σχέσις, ἡ μὴ περιέχουσα ἀγνώστους, εἶναι ἡ ἀπαλείφουσα.

106. Παραδείγματα τῶν ἀνωτέρω ἔστωσαν τὰ κάτωθι:

α'. Νὰ ἀπαλειφθοῦν οἱ x καὶ y μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων:

$$x+5y=\alpha, \quad 2x-6y=\beta \quad \text{καὶ} \quad x+y=\gamma. \qquad (6)$$

Πρὸς τοῦτο λαμβάνομεν τὰς δύο πρώτας ἐξισώσεις καὶ ἐπιλύομεν αὐτὰς ὡς σύστημα δύο ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους, εὑρίσκομεν δέ:

$$x=\frac{6\alpha+5\beta}{16} \quad \text{καὶ} \quad y=\frac{2\alpha-\beta}{16}.$$

Θέτοντες τὰς τιμὰς ταύτας τῶν x καὶ y εἰς τὴν τρίτην ἐξίσωσιν ἐκ τῶν (6), εὑρίσκομεν $2\alpha+\beta=4\gamma$. Αὕτη δὲ ἡ σχέσις πρέπει νὰ ὑφίσταται μεταξὺ τῶν α,β,γ, ἵνα αἱ δοθεῖσαι τρεῖς ἐξισώσεις ἔχουν κοινὴν ῥίζαν.

β'. Δίδονται δύο ἀριθμοὶ x καί y τοιοῦτοι ὥστε νὰ εἶναι

$$xy=\alpha, \quad x^2+y^2=\beta \quad \text{καὶ} \quad \frac{x}{y}=\gamma.$$

Ποία σχέσις ὑφίσταται μεταξὺ τῶν α, β, γ; (Πανεπ. Ἀθηνῶν 1930).

Πρόκειται βεβαίως περὶ ἀπαλοιφῆς τῶν x καὶ y μεταξὺ τῶν ὡς ἄνω τριῶν ἐξισώσεων. Ἐκ τῶν ἐξισώσεων α' καὶ γ' εὑρίσκομεν $x^2=\alpha\gamma$ καὶ $y^2=\frac{\alpha}{\gamma}$. Θέτοντες τὰς τιμὰς ταύτας τῶν x καὶ y, εἰς τὴν β' εὑρίσκομεν τὴν ζητουμένην σχέσιν μεταξὺ τῶν α, β, γ, (τὴν ζητουμένην ἀπαλείφουσαν), ἤτοι τὴν $\alpha\gamma^2+\alpha=\beta\gamma$. Ὡς ἐφαρμογὴν θέτοντες εἰς τὴν ἀπαλείφουσαν $\alpha=12$, $\gamma=\frac{3}{4}$ εὑρίσκομεν $\beta=25$. Ἄρα αἱ δοθεῖσαι ἐξισώσεις γίνονται $xy=12$, $x^2+y^2=25$ καὶ $\frac{x}{y}=\frac{3}{4}$

τὸ σύστημα δὲ τοῦτο ἔχει ρίζας $x=3$, $y=4$ ἢ $x=-3$, $y=-4$.

γ΄. Νὰ ἀπαλειφθοῦν οἱ x καὶ y μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων

$$x+y=\alpha,\quad x^2+y^2=\beta \quad \text{καὶ} \quad x^3+y^3=\gamma \qquad (8)$$

Πρὸς εὕρεσιν τῆς ἀπαλειφούσης δὲν ὑπάρχει ἀνάγκη νὰ λύσωμεν τὰς δύο ἐξ αὐτῶν ὡς σύστημα δύο ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους καὶ τὰς τιμὰς τῶν x καὶ y νὰ τὰς θέσωμεν εἰς τὴν τρίτην. Εἰς τὴν προκειμένην περίπτωσιν εὐκολώτερον ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς: Ἡ τρίτη ἐξίσωσις γράφεται (§ 22 παρατ. I) :

$$(x+y)^3-3xy(x+y)=\gamma \qquad (\alpha)$$

Ὑψοῦμεν εἰς τὸ τετράγωνον τὴν α΄ καὶ ἀπὸ αὐτὴν ἀφαιροῦμεν τὴν β΄ εὑρίσκομεν δὲ $xy=\frac{\alpha^2-\beta}{2}$. Ἄρα ἡ (α) ἂν εἰς αὐτὴν θέσωμεν τὰς τιμὰς τῶν $x+y$ καὶ xy δίδει

$$\alpha^3-\frac{3\alpha(\alpha^2-\beta)}{2}=\gamma \quad \text{ἢ} \quad 3\alpha\beta-\alpha^3=2\gamma \qquad (\beta)$$

Ἡ σχέσις (β) εἶναι ἡ ἀπαλείφουσα τοῦ συστήματος (8).

ΣΗΜ. Ὅταν αἱ ἐξισώσεις ἑνὸς συστήματος μὲ ἰσαρίθμους ἀγνώστους δὲν ἔχουν κανένα γνωστὸν ὅρον, τότε δὲν εὑρίσκονται ρίζαι διάφοροι τοῦ μηδενὸς ἀλλὰ σχέσις συνδέουσα τοὺς συντελεστὰς τῶν ἀγνώστων τῶν ἐξισώσεων. Καὶ ἡ οὕτω εὑρισκομένη σχέσις καλεῖται ἀπαλείφουσα π. χ. εἰς τὸ σύστημα

$$y=\alpha\omega,\quad \omega=\beta x,\quad x=\gamma y$$

ἂν πολλαπλασιάσωμεν καὶ τὰς τρεῖς ἐξισώσεις κατὰ μέλη εὑρίσκομεν $\alpha\beta\gamma=1$ Ἡ σχέσις $\alpha\beta\gamma=1$ καλεῖται ἀπαλείφουσα τοῦ ἄνω συστήματος.

Ἀσκήσεις πρὸς λύσιν.

Νὰ ἀπαλειφθοῦν οἱ x καὶ y μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων

355. $x+y=\alpha$, $x^2+y^2=\beta^2$, $x^4+y^4=\gamma^4$

356. $x-y=\alpha$, $x^2-y^2=\beta^2$, $x^3-y^3=\gamma^3$

357. $\lambda x+\mu y=\alpha$, $\lambda y-\mu x=\beta$, $x^2+y^2=1$

358. Νὰ ἀπαλειφθοῦν οἱ x,y,z μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων

$$xy=\alpha^2,\quad yz=\beta^2,\quad xz=\gamma^2,\quad x^2+y^2+z^2=\delta^2$$

359. Ποία σχέσις πρέπει νὰ συνδέῃ τοὺς συντελεστὰς τῶν ἐξισώσεων

$$x-\lambda y-\alpha=0,\quad y-\lambda x-\beta=0,\quad \alpha x+\beta y=1$$

ἵνα αὗται ἐπαληθεύωνται μὲ τὰς αὐτὰς τιμὰς τῶν x καὶ y ;

360. Νὰ ἀπαλειφθοῦν οἱ x, y, z μεταξὺ τῶν τεσσάρων ἐξισώσεων

$$\alpha x+y+z=\alpha \qquad \alpha x+\alpha y+z=1$$
$$x+\alpha y+\alpha z=1 \qquad x+y+\alpha z=\alpha$$

361. Δίδονται αἱ ἐξισώσεις

$$x=\beta y+\gamma z+\delta\omega, \qquad z=\alpha x+\beta y+\delta\omega$$
$$y=\alpha x+\gamma z+\delta\omega, \qquad \omega=\alpha x+\beta y+\gamma z$$

καὶ ζητεῖται νὰ δειχθῇ ὅτι

$$\frac{\alpha}{\alpha+1}+\frac{\beta}{\beta+1}+\frac{\gamma}{\gamma+1}+\frac{\delta}{\delta+1}=1$$

362. Ἂν οἱ x, y, z, συνδέωνται διὰ τῶν ἐξισώσεων

$$x+y+z=\alpha x+\beta y+\gamma z=x^2+y^2-z^2=0$$

τότε νὰ δειχθῇ ὅτι θὰ εἶναι ἢ $\alpha=\gamma$ ἢ $\beta=\gamma$

363. Ἂν $\frac{y+\omega}{x}=\frac{\omega+x}{y}=\frac{x+y}{\omega}$ τότε ἢ $x=y=\omega$ ἢ $x+y+\omega=0$

364. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ἀπαλείφουσα τῶν ἐξισώσεων

$$\alpha x+\gamma y+\beta z=0,\quad \gamma x+\beta y+\alpha z=0,\quad \beta x+\alpha y+\gamma z=0$$

εἶναι ἡ $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma=0$.

365. Νὰ ἀπαλειφθοῦν οἱ x, y, z, μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων

$$\alpha x+\lambda y+\mu z=\lambda x+\beta y+\nu z=\mu x+\nu y+\gamma z=0$$

366. Ὁμοίως μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων

$$\alpha x+\beta y+\gamma z=\alpha_1 x+\beta_1 y+\gamma_1 z=\alpha_2 x+\beta_2 y+\gamma_2 z=0$$

367. Ἂν $\alpha(y+z)=x$, $\beta(z+x)=y$, $\gamma(x+y)=z$, νὰ δειχθῇ ὅτι

$$\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta+2\alpha\beta\gamma=1$$

368. Ὁμοίως ὅτι $\frac{x^2}{\alpha(1-\beta\gamma)}=\frac{y^2}{\beta(1-\gamma\alpha)}=\frac{z^2}{\gamma(1-\alpha\beta)}$

369. Ἂν $\alpha x+\lambda y+\mu z=0$, $\lambda x+\beta y+\nu z=0$, $\mu x+\nu y+\gamma z=0$ νὰ δειχθῇ ὅτι

$$\frac{x^2}{\beta\gamma-\nu^2}=\frac{y^2}{\gamma\alpha-\mu^2}=\frac{z^2}{\alpha\beta-\lambda^2}$$

370. Ὁμοίως ὅτι $(\beta\gamma-\nu^2)(\gamma\alpha-\mu^2)(\alpha\beta-\lambda^2)=(\mu\nu-\gamma\lambda)(\lambda\mu-\alpha\nu)(\lambda\nu-\beta\mu)$

371. Ἂν $x=\gamma y+\beta z$, $y=\alpha z+\gamma x$, $z=\beta x+\alpha y$, νὰ δειχθῇ ὅτι

$$\frac{x^2}{1-\alpha^2}=\frac{y^2}{1-\beta^2}=\frac{z^2}{1-\gamma^2}$$

X. ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΟΣ ΑΝΑΛΥΣΙΣ Α΄ ΒΑΘΜΟΥ

107. Εἴδομεν εἰς τὴν § 98 ὅτι, ὅταν ἔχωμεν μίαν ἐξίσωσιν μὲ δύο ἀγνώστους, ὡς π. χ. τὴν $\alpha x+\beta y=\gamma$, τότε ὁ ἕνας ἄγνωστος εἶναι συνάρτησις τοῦ ἄλλου. Ἵνα δὲ ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως ὁρισθῇ τελείως ὁ y ἐπὶ παραδείγματι, πρέπει νὰ δώσωμεν μίαν αὐθαίρετον τιμὴν εἰς τὸν ἕτερον ἄγνωστον x (ὅστις εἶναι ἡ ἀνεξάρτητος μεταβλητή).

Αἱ οὕτω εὑρισκόμεναι τιμαὶ τοῦ y δυνατὸν νὰ εἶναι ἢ ἀκέραιαι ἢ κλασματικαὶ ὡς ἐπίσης καὶ αἱ αὐθαίρεται τιμαὶ τοῦ x. Δυνάμεθα ὅμως νὰ εὕρωμεν τὰς ἀκεραίας μόνον τιμὰς τοῦ y τὰς ἀντιστοιχούσας εἰς ἀκεραίας τιμὰς τοῦ x διὰ τῆς ***ἀπροσδιορίστου ἀναλύσεως τοῦ α΄ βαθμοῦ.***

108. ***Ἀπροσδιόριστος ἀνάλυσις τοῦ α΄ βαθμοῦ καλεῖται ὁ τρόπος τῆς εὑρέσεως τῶν ἀκεραίων λύσεων τῆς ἐξισώσεως*** $\boldsymbol{\alpha x+\beta y=\gamma}$.

109. Θεώρημα α΄. *Ἂν οἱ συντελεσταὶ α καὶ β τῆς ἐξισώσεως*

$\alpha x+\beta y=\gamma$ ἔχουν κοινὸν διαιρέτην, τότε ἡ ἐξίσωσις αὕτη δὲν ἐπιδέχεται οὐδεμίαν ἀκεραίαν λύσιν.

Οἱ συντελεσταὶ α, β, γ, εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Διότι ἂν δὲν ἦσαν, τότε ἁπλοποιοῦμεν τὴν ἐξίσωσιν διὰ τοῦ κοινοῦ διαιρέτου τῶν α, β, γ μέχρις οὗ οἱ συντελεσταὶ οὗτοι γίνουν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Ἔστω ἤδη κοινὸς διαιρέτης τῶν α καὶ β ὁ δ. Ὁ δ προφανῶς δὲν διαιρεῖ τὸν γ. Ἤδη, δι' οἱανδήποτε ἀκεραίαν τιμὴν τῶν x καὶ y, τὸ πρῶτον μέλος θὰ διαιρῆται πάντοτε διὰ τοῦ δ καθόσον ὁ δ, ὡς διαιρῶν τοὺς α καὶ β, θὰ διαιρῇ καὶ τὰ πολλαπλάσια αὐτῶν αx καὶ βy. Ἄρα θὰ διαιρῇ καὶ τὸ ἄθροισμά των $\alpha x+\beta y$. Ἀλλὰ τότε ὁ δ ὀφείλει νὰ διαιρῇ καὶ τὸ γ ὡς ἴσον πρὸς τὸ $\alpha x+\beta y$ ὅπερ ἄτοπον διότι ἐξ ὑποθέσεως ὁ δ δὲν διαιρεῖ τὸν γ.

Ἄρα δὲν δύναται εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ ἐξίσωσις $\alpha x+y\beta=\gamma$ νὰ ἔχῃ ἀκεραίαν τινὰ λύσιν.

110. Θεώρημα β'. ***Ἂν οἱ συντελεσταὶ α καὶ β τῆς ἐξισώσεως $\alpha x+\beta y=\gamma$ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, τότε ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἐπιδέχεται ἀκεραίαν τινὰ λύσιν.***

Λύομεν τὴν ἐξίσωσιν $\alpha x+\beta y=\gamma$ ὡς πρὸς ἄγνωστον τὸν y, ὅτε εὑρίσκομεν

$$y=\frac{\gamma-\alpha x}{\beta} \tag{1}$$

Ἤδη θὰ ἀποδείξωμεν ὅτι διά τινα ἀκεραίαν τιμὴν τοῦ x ἀπὸ 0 ἕως $\beta-1$, ὑπάρχει μία καὶ μία μόνη ἀκεραία τιμὴ τοῦ κλάσματος $\frac{\gamma-\alpha x}{\beta}$, ἄρα καὶ τοῦ y. Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι διὰ δύο διαφόρους τιμὰς λ καὶ μ τοῦ x, μικροτέρας τοῦ β ἡ διαίρεσις $(\gamma-\alpha x):\beta$ δίδει δύο διάφορα ὑπόλοιπα.

Διότι, ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι διὰ $x=\lambda$ καὶ $x=\mu$ ἡ διαίρεσις $(\gamma-\alpha x):\beta$ δίδει τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον ἔστω υ, παραστήσωμεν δὲ τὰ ἀντίστοιχα πηλίκα διὰ π καὶ π', τότε, κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς διαιρέσεως θὰ ἔχωμεν :

$$\gamma-\alpha\lambda=\beta\pi+\upsilon \quad \text{καὶ} \quad \gamma-\alpha\mu=\beta\pi'+\upsilon$$

ἢ ἀφαιροῦντες κατὰ μέλη ἔχομεν

$$\alpha(\mu-\lambda)=\beta(\pi-\pi') \tag{2}$$

Ἤδη εἰς τὴν σχέσιν (2) ὁ ἀριθμὸς β, ὡς διαιρῶν τὸ δεύτερον μέλος ὡς πολλαπλάσιόν του, θὰ διαιρῇ καὶ τὸ ἴσον πρὸς αὐτὸ πρῶτον μέλος $\alpha(\mu-\lambda)$, ἀλλ' ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν α διὰ τοῦτο θὰ διαιρῇ τὸν παράγοντα $\mu-\lambda$. Ἀλλὰ καὶ τὸ μ καὶ τὸ λ εἶναι μικρότερα τοῦ β ὡς ἀνωτέρω ἐλέχθη. Ἄρα ἡ διαφορὰ τῶν

$\mu-\lambda$ κατὰ μείζονα λόγον θὰ εἶναι μικροτέρα τοῦ β. Συνεπῶς ὁ β δὲν δύναται νὰ διαιρῇ τὸν μικρότερόν του ἀριθμὸν $\mu-\lambda$. Ἡ σχέσις λοιπὸν (2) δὲν δύναται νὰ ἀληθεύῃ. Ἄρα τὸ $\gamma-\alpha x$, διὰ δύο ἀκεραίας τιμὰς λ καὶ μ τοῦ x διαφόρους ἀλλήλων καὶ μικροτέρας τοῦ β, διαιρούμενον διὰ τοῦ β θὰ ἀφίνῃ δύο διάφορα ὑπόλοιπα.

Ἂν ἤδη ὁ x λάβῃ τὰς β διαφόρους (καὶ μικροτέρας τοῦ β) τιμὰς $0, 1, 2, 3 \ldots \beta-1$, τότε καὶ τὰ ὑπόλοιπα τῆς διαιρέσεως $(\gamma-\alpha x):\beta$ θὰ εἶναι διάφορα ἀλλήλων, θὰ εἶναι δὲ ταῦτα β τὸ πλῆθος. Ἐπειδὴ δὲ ἕκαστον ὑπόλοιπον ὀφείλει νὰ εἶναι μικρότερον τοῦ διαιρέτου β, εἶναι δὲ ὅλα τὰ διάφορα ἀλλήλων ὑπόλοιπα β κατὰ τὸ πλῆθος, διὰ τοῦτο κατ' ἀνάγκην ἓν καὶ ἓν μόνον ἐξ αὐτῶν θὰ εἶναι μηδέν.

Ἄρα διὰ τὴν τιμὴν τοῦ x δι' ἣν τὸ ἀντίστοιχον ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως $(\gamma-\alpha x):\beta$ εἶναι μηδέν, (δηλαδὴ τὸ πηλίκον αὐτῆς εἶναι ἀκέραιον), διὰ τὴν τιμὴν ταύτην τὸ ἄνω κλάσμα ἤτοι ὁ y εἶναι ἀκέραιος. Ἄρα ὑπάρχει ἀκεραία τιμὴ τοῦ y ἀντιστοιχοῦσα εἰς ἀκεραίαν τιμὴν τοῦ x.

111. Θεώρημα γ΄. ***Ἂν ἡ ἐξίσωσις $\alpha x+\beta y=\gamma$ ἔχῃ ἀκεραίαν τινὰ λύσιν, τότε ἔχει καὶ ἄλλας ἀπείρους ἀκεραίας λύσεις.***

Διότι ἔστω $x=\eta$ καὶ $y=\vartheta$ δύο ἀκέραιαι τιμαὶ τῶν x καὶ y ἐπαληθεύουσαι τὴν ἐξίσωσιν $\alpha x+\beta y=\gamma$. Θὰ ἔχωμεν ἄρα:

$$\alpha\eta+\beta\vartheta=\gamma$$

ἢ ἀφαιροῦντες ταύτην ἀπὸ τὴν δοθεῖσαν

$$\alpha(x-\eta)=\beta(\vartheta-y) \qquad (3)$$

Ἤδη ὁ α, ὡς διαιρῶν τὸ πρῶτον μέλος ὡς πολλαπιάσιόν του, θὰ διαιρῇ καὶ τὸ δεύτερον μέλος, καὶ διότι εἶναι ἐξ ὑποθέσεως πρῶτος πρὸς τὸν β, θὰ διαιρῇ τὸν $\vartheta-y$. Ἔστω ω τὸ ἀκέραιον πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ $\vartheta-y$ διὰ τοῦ α. Θὰ ἔχωμεν ἄρα

$$\vartheta-y=\alpha\omega \qquad (4)$$

$$\text{ἢ} \quad y=\vartheta-\alpha\omega \qquad (4')$$

Ὁμοίως ὁ β, ὡς διαιρῶν τὸ δεύτερον μέλος τῆς (3) ὡς πολλαπλάσιόν του, θὰ διαιρῇ καὶ τὸ πρῶτον μέλος αὐτῆς, διότι δὲ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν α, θὰ διαιρῇ τὸν $x-\eta$. Ἔστω ω' τὸ ἀκέραιον πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ $x-\eta$ διὰ τοῦ β. Θὰ ἔχωμεν ἄρα:

$$x-\eta=\beta\omega' \qquad (5)$$

$$\text{ἢ} \quad x=\eta+\beta\omega' \qquad (5')$$

Ἀλλὰ τὸ ω' δὲν δύναται νὰ εἶναι διάφορον τοῦ ω. Διότι ἂν εἰς τὴν (3) θέσωμεν τὰς τιμὰς τοῦ $\vartheta-y$ καὶ τοῦ $x-\eta$ λαμβανομένας ἐκ τῶν σχέσεων (4) καὶ (5) εὑρίσκομεν:

$$\alpha\beta\omega'=\alpha\beta\omega \quad \text{ἢ} \quad \omega'=\omega.$$

Ἄρα αἱ σχέσεις (4′) καὶ (5′) γράφονται :

$$x=\eta+\beta\omega \quad \text{καὶ} \quad y=\vartheta-\alpha\omega. \tag{6}$$

Αἱ σχέσεις (6) εἶναι ἐκεῖναι αἱ ὁποῖαι μᾶς δίδουν τὰς ἀπείρους ἀκεραίας λύσεις τῆς ἐξισώσεως $\alpha x+\beta y=\gamma$, ἀναλόγως τῆς τιμῆς τὴν ὁποίαν δύναται νὰ λάβῃ ὁ ἀκέραιος ἀριθμὸς ω.

Ἐκ τῶν σχέσεων (4) καὶ (5) συνάγεται ὅτι ὁ ἀκέραιος ἀριθμὸς ω δύναται νὰ λάβῃ θετικὴν ἢ ἀρνητικὴν τιμήν. Τοῦτο ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ σημεῖον τῆς διαφορᾶς $\vartheta-y$ ἢ τῆς διαφορᾶς $x-\eta$.

112. Ὡς παραδείγματα ἀπροσδιορίστου ἀναλύσεως ἔστωσαν τὰ κάτωθι :

α′. Τὸ κλάσμα $\frac{77}{65}$ νὰ ἀναλυθῇ εἰς ἄθροισμα ἢ διαφορὰν δύο ἄλλων κλασμάτων ἐχόντων παρονομαστὸς 5 καὶ 13. (Πολ. 1931).

Ἔστωσαν $\frac{x}{5}$ καὶ $\frac{y}{13}$ τὰ ζητούμενα κλάσματα. Θὰ ἔχωμεν ἄρα :

$$\frac{77}{65}=\frac{x}{5}+\frac{y}{13} \quad \text{ἢ} \quad 13x+5y=77. \tag{7}$$

Λύοντες ταύτην ὡς πρὸς y εὑρίσκομεν $y=\frac{77-13x}{5}$. Ἤδη (§ 110), ἂν ὁ x λάβῃ μίαν ἐκ τῶν τιμῶν 0, 1, 2, 3, 4, θὰ ὑπάρχῃ μία ἀκεραία τιμὴ τοῦ y. Πράγματι ἂν $x=4$ τότε $x=5$, ὅλαι δὲ αἱ ἀκέραιαι λύσεις τῆς ὡς ἄνω ἐξισώσεως (7), διδόμεναι ὑπὸ τῶν σχέσεων (6) εἶναι :

$$x=4+5\omega \quad \text{καὶ} \quad y=5-13\omega.$$

Ἤδη ἂν $\omega=0$ ἔχομεν $x=4,\ y=5$ ἢ $\frac{77}{65}=\frac{4}{5}+\frac{5}{13}$

ἂν $\omega=1$ » $x=9,\ y=-8$ ἢ $\frac{77}{66}=\frac{9}{5}-\frac{8}{13}$

ἂν $\omega=-1$ » $x=-1,\ y=18$ ἢ $\frac{77}{65}=\frac{18}{13}-\frac{1}{5}$ κ.ο.κ.

β′. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀκέραιαι λύσεις τῆς ἐξισώσεως $8x-15y=-3$.

Λύοντες αὐτὴν ὡς πρὸς x εὑρίσκομεν : $x=\frac{15y-3}{8}$. Ἤδη ἂν εἰς τὸν y δώσωμεν μίαν ἐξ ὅλων τῶν τιμῶν ἀπὸ 0 ἕως 7, θὰ εὕρωμεν μίαν ἀκεραίαν τιμὴν τοῦ x (§ 110). Ἤτοι ἂν $y=5$ τότε $x=9$. Ἄρα αἱ ἀκέραιαι λύσεις τῆς ἐξισώσεως διδόμεναι ὑπὸ τῶν τύπων (6) εἶναι

$$x=9-15\omega \quad \text{καὶ} \quad y=5-8\omega.$$

Ἀσκήσεις πρὸς λύσιν.

Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀκέραιαι λύσεις ἑκάστης ἐκ τῶν κάτωθι ἐξισώσεων

372. $5x-6y=8$ **373.** $7x+3y=5$

Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀκέραιαι λύσεις ἑκάστου ἐκ τῶν κάτωθι συστημάτων

374. $x+2y=3$, $5y+6\omega=7$ **375.** $3x-4y=5$, $6y-7\omega+x=8$

Εὕρεσις τῶν ἀκεραίων καὶ θετικῶν λύσεων τῆς ἐξισώσεως $\alpha x+\beta y=\gamma$.

113. Πολλάκις εἶναι χρήσιμον νὰ γνωρίζωμεν μόνον τὰς ἀκεραίας καὶ θετικὰς λύσεις τῆς ἐξισώσεως $\alpha x+\beta y=\gamma$. Πρὸς τοῦτο διακρίνομεν τὰς ἑξῆς δύο περιπτώσεις. α΄) Ἂν οἱ συντελεσταὶ α καὶ β εἶναι ὁμόσημοι καὶ β΄) ἂν οὗτοι εἶναι ἑτερόσημοι.

114. α΄. ***Ἂν οἱ ἀριθμοὶ α καὶ β εἶναι ὁμόσημοι, τότε ἡ ἐξίσωσις $\alpha x+\beta y=\gamma$, ἂν μὲν ὁ γ εἶναι ἑτερόσημος πρὸς τοὺς α καὶ β, δὲν ἐπιδέχεται οὐδεμίαν ἀκεραίαν καὶ θετικὴν λύσιν, ἂν δὲ ὁ γ εἶναι ὁμόσημος πρὸς τοὺς α καὶ β τότε ἡ ἐξίσωσις $\alpha x+\beta y=\gamma$ ἐπιδέχεται τόσας ἀκεραίας καὶ θετικὰς λύσεις ὅσος εἶναι ὁ ἀκέραιος ἀριθμὸς ὁ περιεχόμενος εἰς τὸ κλάσμα $\frac{\gamma}{\alpha\beta}$ ἢ ὅσος εἶναι οὗτος ηὐξημένος κατὰ μονάδα.***

Ἂν οἱ α καὶ β εἶναι ὁμόσημοι, τότε ὑποθέτομεν αὐτοὺς πάντοτε θετικούς. Διότι ἂν εἶναι ἀρνητικοί, δυνάμεθα νὰ ἀλλάξωμεν τὰ σημεῖα ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς ἐξισώσεως.

Ἤδη ἂν μὲν ὁ γνωστὸς ὅρος γ εἶναι ἀρνητικὸς (δηλ. ἑτερόσημος πρὸς τοὺς α καὶ β), τότε εἶναι προφανὲς ὅτι οὐδεμίαν θετικὴν λύσιν ἔχει ἡ ἐξίσωσις $\alpha x+\beta y=\gamma$. Ἂν δὲ ὁ γ εἶναι θετικὸς (ὁμόσημος πρὸς τοὺς α καὶ β) τότε, ἵνα εὕρωμεν τὰς ἀκεραίας καὶ θετικὰς λύσεις σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς: Ὅλαι αἱ ἀκέραιαι λύσεις τῆς ἐξισώσεως $\alpha x+\beta y=\gamma$ διδόμεναι ὑπὸ τῶν τύπων (6) εἶναι (§ 111).

$$x=\eta+\beta\omega \quad \text{καὶ} \quad y=\theta-\sigma\omega.$$

Εἶναι ὅμως γνωστὸν ἐκ τῆς § 110 ὅτι $\eta<\beta$. Ἄρα εἶναι φανερὸν ὅτι οἱαδήποτε ἀρνητικὴ τιμὴ τοῦ ω καθιστᾷ τὸν x (δηλαδὴ τὸ $\eta+\beta\omega$) ἀρνητικόν. Ἀντιθέτως, οἱαδήποτε θετικὴ τιμὴ τοῦ ω καθιστᾷ τὸν x πάντοτε θετικόν. Ἵνα ὅμως ἡ ἐξίσωσις $\alpha x+\beta y=\gamma$ ἔχῃ θετικήν τινα λύσιν, πρέπει καὶ ὁ y νὰ εἶναι θετικός, πρέπει δηλαδὴ ἡ θετικὴ τιμὴ τοῦ ἀκεραίου ἀριθμοῦ ω νὰ εἶναι τοιαύτη ὥστε ἡ παράστασις $\theta-\alpha\omega$ νὰ εἶναι θετική. Πρέπει δηλαδὴ νὰ εἶναι :

$$\vartheta - \alpha\omega > 0 \quad (8) \quad \text{ἢ} \quad \omega < \frac{\vartheta}{\alpha}.$$

Ἤτοι ὁ ω δύναται νὰ λάβῃ ὅλας τὰς ἀκεραίας τιμὰς τὰς περιεχομένας εἰς τὸ κλάσμα $\frac{\vartheta}{\alpha}$. Ἂν δὲ ν εἶναι ὁ μεγαλύτερος ἀκέραιος ἀριθμὸς ὁ περιεχόμενος εἰς τὸ κλάσμα $\frac{\vartheta}{\alpha}$, τότε ὁ ω δύναται νὰ λάβῃ τὰς τιμὰς 0, 1, 2, 3 . . . . . ν ἤτοι ἐν ὅλῳ $\nu+1$ τιμάς.

Ἐπειδὴ ὅμως οἱ ἀριθμοὶ η καὶ ϑ εἶναι ἀκέραιαι λύσεις τῆς δοθείσης ἐξισώσεως $\alpha x + \beta y = \gamma$, οὗτοι θὰ ἐπαληθεύουν ταύτην τιθέμενοι εἰς αὐτὴν ἀντὶ τῶν x καὶ y, ἤτοι θὰ ἔχωμεν $\alpha\eta + \beta\vartheta = \gamma$, ἢ ἂν διαιρέσωμεν διὰ αβ ἔχομεν :

$$\frac{\eta}{\beta} + \frac{\vartheta}{\alpha} = \frac{\gamma}{\alpha\beta} \qquad (9)$$

Ὡς ἀνωτέρω εἴπομεν, ὁ μεγαλύτερος ἀκέραιος ἀριθμὸς ὁ περιεχόμενο εἰς τὸ κλάσμα $\frac{\vartheta}{\alpha}$ εἶναι ὁ ν. Ἔστω υ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ ϑ διὰ τοῦ α. Ἔχομεν ἄρα $\frac{\vartheta}{\alpha} = \nu + \frac{\upsilon}{\alpha}$, ἔνθα τὸ κλάσμα $\frac{\upsilon}{\alpha}$ εἶναι μικρότερον τῆς μονάδος. Ἄρα ἡ σχέσις (9) γράφεται :

$$\nu + \frac{\upsilon}{\alpha} + \frac{\eta}{\beta} = \frac{\gamma}{\alpha\beta} \qquad (10)$$

Ἤδη, ἐπειδὴ $\upsilon < \alpha$ ὡς ἀνωτέρω εἴδομεν $\eta < \beta$ (§ 110), διὰ τοῦτο τὸ ἄθροισμα $\frac{\upsilon}{\alpha} + \frac{\eta}{\beta}$ εἶναι μικρότερον τοῦ 2.

Ἄρα τὸ πρῶτον μέλος τῆς (10) δύναται νὰ περιέχῃ ἢ ν ἀκεραίας μονάδας ἢ $\nu+1$, ἐφ᾽ ὅσον τὸ ἄθροισμα τῶν δύο κλασμάτων $\frac{\upsilon}{\alpha}$ καὶ $\frac{\eta}{\beta}$ εἶναι ἢ μικρότερον τῆς μονάδος ἢ μεγαλύτερον ταύτης. Ἄρα αἱ ἀκέραιαι μονάδες τοῦ κλάσματος $\frac{\gamma}{\alpha\beta}$ θὰ εἶναι ἢ ν ἢ $\nu+1$. Συνεπῶς ἂν εἰς τὸ κλάσμα $\frac{\gamma}{\alpha\beta}$ περιέχεται ὁ ἀκέραιος $\nu+1$, τότε τὸ πλῆθος τῶν ἀκεραίων καὶ θετικῶν λύσεων τῆς ἐξισώσεως $\alpha x + \beta y = \gamma$ ἐκφράζεται διὰ τοῦ εἰς τὸ κλάσμα τοῦτο περιεχομένου μεγίστου ἀκεραίου ἀριθμοῦ $\nu+1$. Ἂν δὲ εἰς τὸ κλάσμα $\frac{\gamma}{\alpha\beta}$ περιέχεται ὁ ν, τότε τὸ πλῆθος τῶν ἀκεραίων καὶ θετικῶν λύσεων τῆς ἐξισώσεως $\alpha x + \beta y = \gamma$ ἐκφράζεται διὰ τοῦ εἰς τὸ κλάσμα τοῦτο περιεχομένου μεγίστου ἀκεραίου ἀριθμοῦ ν ηὐξημένου κατὰ 1.

115. *β΄*. ***Ἂν οἱ ἀριθμοὶ α καὶ β εἶναι ἑτερόσημοι, τότε ἡ ἐξίσωσις αx+βy=γ ἐπιδέχεται ἀπείρους θετικὰς καὶ ἀκεραίας λύσεις.***

Διότι ἔστω ὁ α ἀρνητικός, ὁπότε ὁ β θὰ εἶναι θετικός. Οἱ γενικοὶ τύποι (6), οἱ δίδοντες τὰς ἀκεραίας λύσεις τῆς ἄνω ἐξισώσεως ἰσχύουν καὶ διὰ τὴν προκειμένην περίπτωσιν.

Καὶ ἐνταῦθα, διότι $\eta<\beta$ ἂν ὁ ω εἶναι ἀρνητικὸς οὐδεμίαν θετικὴν λύσιν ἔχομεν ὡς εἰς τὴν παράγραφον 114 εἴδομεν, καθ' ὅσον ὁ β εἶναι θετικός. Ἂν δὲ ὁ ω εἶναι θετικός, τότε ὁ μὲν x εἶναι πάντοτε θετικός. Διὰ νὰ εἶναι δὲ καὶ ὁ y θετικὸς πρέπει νὰ εἶναι καὶ

$$\vartheta-\alpha\omega>0 \quad \text{ἢ} \quad \vartheta>\alpha\omega \qquad (11)$$

Καὶ ἂν μὲν ὁ ϑ εἶναι θετικός, τότε πάντοτε ἀληθεύει ἡ (10), διότι ὁ α εἶναι ἀρνητικός, ὁ δὲ ω θετικός. Ἂν δὲ ὁ ϑ εἶναι ἀρνητικός, τότε ἡ τιμὴ τοῦ y γράφεται :

$$y=\alpha\left(\frac{\vartheta}{\alpha}-\omega\right)$$

Ἐπειδὴ δὲ ὁ α εἶναι ἀρνητικὸς πρέπει ὁ παράγων $\frac{\vartheta}{\alpha}-\omega$ νὰ εἶναι ἐπίσης ἀρνητικός, ἵνα τὸ γινόμενόν των y εἶναι θετικόν, πρέπει δηλαδὴ νὰ εἶναι :

$$\frac{\vartheta}{\alpha}-\omega<0 \quad \text{ἢ} \quad \omega>\frac{\vartheta}{\alpha} \qquad (12)$$

Ἀλλὰ δύναται νὰ εὑρεθῇ πάντοτε ὄχι μία ἀλλὰ ἄπειροι τιμαὶ τοῦ ἀκεραίου ω ἐπαληθεύουσαι τὴν ἀνισότητα (12), ἀρκεῖ δὲ πρὸς τοῦτο ὁ ω νὰ λάβῃ τιμὴν μεγαλυτέραν τοῦ μεγαλυτέρου ἀκεραίου τοῦ περιεχομένου εἰς τὸ κλάσμα $\frac{\vartheta}{\alpha}$ (ὅπερ εἶναι θετικὸν ὡς ἔχον ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους του ἀρνητικούς), εἶναι δὲ ὁ ω μεγαλύτερος τοῦ $\frac{\vartheta}{\alpha}$ ἂν λάβῃ τιμὴν μεγαλυτέραν τοῦ ν, ἔνθα ν εἶναι ὁ μεγαλύτερος ἀκέραιος ὁ περιεχόμενος εἰς τὸ κλάσμα τοῦτο.

Ἂν ἀντιθέτως ὁ α εἶναι θετικός, ὁ δὲ β ἀρνητικός, τότε, ἀντιθέτως διὰ θετικὰς τιμὰς τοῦ ω δὲν ἔχομεν θετικὴν λύσιν, διὰ δὲ τὰς ἀρνητικὰς τιμὰς τοῦ ω τὰς μεγαλυτέρας ἀπολύτως τοῦ μεγίστου ἀκεραίου τοῦ περιεχομένου εἰς τὸ κλάσμα $\frac{\vartheta}{\alpha}$ ἔχομεν ἀπείρους θετικὰς λύσεις.

116. Παραδείγματα εὑρέσεως ἀκεραίων καὶ θετικῶν λύσεων ἔστωσαν τὰ κάτωθι :

α'. Εἰς ἑορτήν τινα ἐδαπάνησαν ἄνδρες καὶ γυναῖκες 200 δρ. καὶ ἕκαστος μὲν ἀνὴρ ἐδαπάνησεν 11 δρ., ἑκάστη δὲ γυνὴ 9. Πόσοι ἦσαν οἱ ἄνδρες καὶ πόσαι αἱ γυναῖκες ;

Ἂν x ἦσαν οἱ ἄνδρες καὶ y αἱ γυναῖκες τότε θὰ ἔχωμεν :

$$11x+9y=200 \quad ἢ \quad y=\frac{200-11x}{9}$$

Ἤδη ἂν δώσωμεν εἰς τὸν x τιμὰς ἀπὸ 0 ἕως 8 θὰ εὕρωμεν μίαν ἀκεραίαν τιμὴν τοῦ y, ἤτοι ἂν $x=1$ τότε $y=21$. Ὅλαι δὲ αἱ ἀκέραιαι λύσεις, εὑρισκόμεναι κατὰ τοὺς τύπους (6) εἶναι :

$$x=1+9\omega \quad καὶ \quad y=21-11\omega.$$

Ἐπειδὴ δὲ ἐνταῦθα ζητοῦμεν τὰς ἀκεραίας καὶ θετικὰς λύσεις καὶ οἱ μὲν α, β, γ εἶναι θετικοί, τὸ δὲ κλάσμα $\frac{\gamma}{\alpha\beta}=\frac{200}{99}$ ἔχει δύο ἀκεραίας μονάδας, διὰ τοῦτο συμπεραίνομεν ὅτι αἱ ἀκέραιαι καὶ θετικαὶ λύσεις τοῦ προβλήματος θὰ εἶναι ἢ δύο ἢ τρεῖς, θὰ εὑρεθοῦν δὲ αὗται ἂν ὁ ω λάβῃ μόνον θετικὰς τιμὰς (§ 114). Θέτοντες $\omega=0$ εὑρίσκομεν $x=1$, $y=21$, θέτοντες $\omega=1$ εὑρίσκομεν $x=10$, $y=10$, θέτοντες $\omega=2$ εὑρίσκομεν $x=19$, $y=-1$, ἥτις ἀπορρίπτεται. Ἄρα δύο μόνον λύσεις εἶναι παραδεκταί. Θὰ ἦσαν λοιπὸν 1 ἀνὴρ καὶ 21 γυναῖκες ἢ 10 ἄνδρες καὶ 10 γυναῖκες.

β'. Ἔδωκέ τις εἴς τινα 10000 δραχμὰς μὲ τὴν ἐντολὴν νὰ τοῦ ἀγοράσῃ πρόβατα, αἶγας καὶ ἀγελάδας, ἐν ὅλῳ 100 κεφαλάς. Ἡ τιμὴ ἑκάστου προβάτου ἦτο 50 δρ., ἑκάστης αἰγὸς 200 δρ. καὶ ἑκάστης ἀγελάδος 600 δρ. Πόσα ἐξ ἑκάστου εἴδους θὰ ἀγοράσῃ ;

Ἔστω ὅτι θὰ ἀγοράσῃ x πρόβατα, y αἶγας καὶ z ἀγελάδας. Θὰ ἔχωμεν ἄρα :

$$x+y+z=100 \quad καὶ \quad 50x+200y+600z=10000 \tag{14}$$

Ἀπαλείφοντες τὸν x ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις ταύτας εὑρίσκομεν :

$$3y+11z=100 \tag{15}$$

ἥτις λυομένη κατὰ τὰ ἀνωτέρω ὡς πρὸς y δίδει $y=\frac{100-11z}{3}$ ἔχει δὲ ἀκεραίας ῥίζας τὰς $z=2$ καὶ $y=26$. Ἄρα $x=72$. Ἄρα αἱ ἀκέραιαι λύσεις τῆς (15) εἶναι :

$$z=2+3\omega \quad καὶ \quad y=26-11\omega \tag{16}$$

ἐκ δὲ τῆς πρώτης ἐκ τῶν (14) εὑρίσκομεν :

$$x=72+8\omega \tag{16'}$$

Ἤδη αἱ ἀκέραιαι καὶ θετικαὶ λύσεις τῆς (15) δύνανται νὰ εἶναι 3 ἢ 4 διότι αἱ ἀκέραιαι μονάδες τοῦ κλάσματος $\frac{100}{33}$ εἶναι τρεῖς. Θέτοντες $\omega=0$, 1, 3 εἰς τὰς σχέσεις (16) καὶ (16') εὑρίσκομεν :

διὰ $\omega = 0$ εἶναι $x = 72$, $y = 26$ καὶ $z = 2$
διὰ $\omega = 1$ » $x = 80$, $y = 15$ » $z = 5$
διὰ $\omega = 2$ » $x = 88$, $y = 4$ » $z = 8$
καὶ διὰ $\omega = 3$ » $x = 96$, $y = -7$ » $z = 11$

Ἡ τελευταία λύσις ἀπορρίπτεται. Ἄρα αἱ τρεῖς πρῶται εἶναι παραδεκταί.

Ἀσκήσεις πρὸς λύσιν.

Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀκέραιαι καὶ θετικαὶ λύσεις ἑκάστης ἐκ τῶν ἐξισώσεων

376. $8x+5y=9$ **377.** $25x-18y=26$

Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀκέραιαι καὶ θετικαὶ λύσεις ἑκάστου ἐκ τῶν κάτωθι συστημάτων

378. $20x-11y=38$, $3y=34-4z$ **379.** $x+y+z=43$, $10x+5y+2z=229$ **380.** $13x=103-11z$, $7z=5y+4$

381. Νὰ μερισθῇ ὁ 136 εἰς δύο μέρη ἐξ ὧν τὸ ἓν διαιρούμενον διὰ 5 νὰ ἀφίνῃ ὑπόλοιπον 2 τὸ δὲ ἄλλο διαιρούμενον διὰ 8 νὰ ἀφίνῃ ὑπόλοιπον 3.

382. Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμὸς ὁ ὁποῖος διαιρούμενος διὰ 5 νὰ ἀφίνῃ ὑπόλοιπον 3, διὰ 6 νὰ ἀφίνῃ ὑπόλοιπον 5 καὶ διὰ 7 ὑπόλοιπον 4.

383. Νὰ εὑρεθῇ διψήφιος ἀριθμὸς ἔχων ἄθροισμα ψηφίων 12 καὶ τοῦ ὁποίου τὸ διπλάσιον τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων σὺν τῷ πενταπλασίῳ τοῦ ψηφίου τῶν δεκάδων νὰ ἀποτελοῦν ἀριθμὸν διαιρετὸν διὰ 9.

384. Νὰ εὑρεθῇ τετραψήφιος ἀριθμὸς τοῦ ὁποίου τὸ ψηφίον τῶν ἑκατοντάδων νὰ εἶναι τὰ $\frac{2}{7}$ τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων, ἂν δὲ ὁ ἀριθμὸς γραφῇ κατ' ἀντίστροφον τάξιν ψηφίων τότε νὰ προκύπτῃ ἀριθμὸς μεγαλύτερός του κατὰ 90.

385. Νὰ εὑρεθοῦν ὅλοι οἱ ἀκέραιοι καὶ θετικοὶ ἀριθμοὶ x καὶ y οἱ ἐπαληθεύοντες τὴν σχέσιν $3x+2y=20$.

386. Νὰ ὁρισθοῦν τὰ α καὶ β ἵνα ὁ ἀριθμὸς 516αβ εἶναι διαιρετὸς διὰ 9· (τὸ α παριστᾶ τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων τοῦ ἀριθμοῦ καὶ τὸ β τὸ ψηφίον τῶν μονάδων του).

387. Νὰ εὑρεθῇ τετραψήφιος ἀριθμὸς διαιρετὸς διὰ 9, ἔχων ἄθροισμα ψηφίων περιλαμβανόμενον μεταξὺ 20 καὶ 30, καὶ τοῦ ὁποίου τὸ ψηφίον τῶν ἑκατοντάδων ἰσοῦται μὲ τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ ψηφίου τῶν δεκάδων.

388. Εὑρεῖν πενταψήφιον ἀριθμὸν διαιρετὸν διὰ 11, ἔχοντα ὅλα τὰ ψηφία του διάφορα ἀλλήλων καὶ τοῦ μηδενός, καὶ τοῦ ὁποίου τὸ ψηφίον τῶν ἑκατοντάδων νὰ εἶναι τὰ τρία πέμπτα τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων, τὸ δὲ τῶν χιλιάδων νὰ εἶναι τὰ δύο τρίτα τοῦ ψηφίου τῶν δεκάδων.

389. Εὑρεῖν πενταψήφιον ἀριθμὸν διαιρετὸν διὰ 9 καὶ τοῦ ὁποίου τὸ ψηφίον τῶν χιλιάδων νὰ ἰσοῦται μὲ τὰ πέντε ἕκτα τοῦ ἀθροίσματος τῶν ψηφίων τῶν μονάδων καὶ δεκάδων, ἡ δὲ διαφορὰ τοῦ ψηφίου τῶν ἑκατοντάδων ἀπὸ τοῦ ψηφίου τῶν δεκάδων χιλιάδων νὰ εἶναι 2.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε΄.

ΡΙΖΑΙ.—ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΜΕ ΕΚΘΕΤΑΣ ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΟΥΣ Η ΑΡΝΗΤΙΚΟΥΣ.—ΑΣΥΜΜΕΤΡΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ.

Ι. ΟΡΙΣΜΟΙ.

117. ***Νυοστὴ ρίζα*** ἀριθμοῦ τινος α, καλεῖται ὁ ἀριθμὸς ὅστις ὑψούμενος εἰς τὴν νυοστὴν δύναμιν δίδει τὸν α· π. χ.

$$\text{ἂν} \qquad \alpha=\beta^{\nu} \qquad \text{τότε} \qquad \sqrt[\nu]{\alpha}=\beta.$$

Ὁ ἀριθμὸς α καλεῖται ***ὑπόρριζον***, ὁ δὲ ν καλεῖται ***δείκτης*** τῆς ρίζης. Ὅταν ὁ δείκτης εἶναι 2 συνήθως παραλείπεται.

118. Πᾶσα δύναμις ἔχουσα κλασματικὸν ἐκθέτην δύναται νὰ γραφῇ ὡς ρίζα ἔχουσα δείκτην μὲν τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλασματικοῦ ἐκθέτου, ἐκθέτην δὲ τοῦ ὑπορρίζου τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλασματικοῦ ἐκθέτου καὶ ἀντιστρόφως· π. χ.

$$\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}=\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}. \qquad \text{ἢ} \qquad \sqrt[4]{\alpha^{3}}=\alpha^{\frac{3}{4}}$$

119. Δύναμις καὶ ρίζα τοῦ αὐτοῦ βαθμοῦ ἐξουδετεροῦνται· π. χ.

$$\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu}}=\alpha.$$

120. Δύο ρίζαι λέγονται ***ἰσοβάθμιοι*** ὅταν ἔχουν τὸν αὐτὸν δείκτην καὶ ***ἑτεροβάθμιοι*** ὅταν ἔχουν διαφόρους δείκτας· π. χ. αἱ ρίζαι $\sqrt[3]{\alpha}$, $\sqrt[3]{\beta}$ εἶναι ἰσοβάθμιοι αἱ δὲ ρίζαι $\sqrt[3]{\alpha}$, $\sqrt[4]{\beta}$ εἶναι ἑτεροβάθμιοι.

121. Δύο παραστάσεις περιέχουσαι ριζικὰ λέγονται ***συζυγεῖς***, ὅταν διαφέρουν μόνον κατὰ τὸ σημεῖον τοῦ ριζικοῦ· π. χ. αἱ παραστάσεις $\alpha+\sqrt{\beta}$ καὶ $\alpha-\sqrt{\beta}$ εἶναι συζυγεῖς.

122. Ἀριθμός τις λέγεται ***ἀσύμμετρος*** ὅταν ἀποτελῆται ἀπὸ ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία μὴ περιοδικά, δηλαδὴ τὰ ὁποῖα δὲν διαδέχονται ἄλληλα καθ' ὡρισμένην τάξιν· π.χ. ὁ ἀριθμὸς $\pi=3,14159\ldots..$ δηλαδὴ ὁ λόγος τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον ἑνὸς κύκλου εἶναι ἀριθμὸς ἀσύμμετρος. Ὁμοίως ἡ $\sqrt{2}=2,14142\ldots$ εἶναι ἀριθμὸς ἀσύμμετρος.

123. Ἐν γένει ἡ ρίζα παντὸς ἀκεραίου ἀριθμοῦ ἂν δὲν εἶναι ἀκέραιος ἀριθμὸς τότε οὔτε κλάσμα εἶναι καὶ ἑπομένως εἶναι ἀριθμὸς ἀσύμμετρος (ὡς ἀποδεικνύεται εἰς τὴν ἀριθμητικήν).

Οἱ δεκαδικοὶ περιοδικοὶ ἀριθμοὶ δὲν εἶναι ἀσύμμετροι. Διότι ἔστω ὁ δεκαδικὸς περιοδικὸς ἀριθμὸς 3,454545..... Οὗτος, ὡς ἀποδεικνύεται εἰς τὴν ἀριθμητικήν, παράγεται ἀπὸ τὸ κλάσμα $\frac{345-3}{99}$ ὅπερ ἰσοῦται μὲ $\frac{38}{11}$.

124. Πᾶς ἀριθμὸς μὴ ἀσύμμετρος λέγεται ***σύμμετρος***.

125. Ἐξ ὅσων εἰς τὴν § 122 εἴδομεν, συνάγεται ὅτι δὲν δυνάμεθα ἐν γένει νὰ λάβωμεν ὁλόκληρον ἕνα ἀσύμμετρον ἀριθμόν, ἀλλὰ τὸν λαμβάνομεν συνήθως κατὰ προσέγγισιν.

126. Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν συνάγεται ὅτι δὲν δύναται εἷς ἀσύμμετρος ἀριθμὸς νὰ ἰσοῦται μὲ σύμμετρον ἀριθμόν.

II. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

127. I. Πᾶσα δύναμις ἔχουσα ἀρνητικὸν ἐκθέτην, ἰσοῦται μὲ κλάσμα τὸ ὁποῖον ἔχει ὡς ἀριθμητὴν μὲν τὴν μονάδα, ὡς παρονομαστὴν δὲ τὴν ἰδίαν δύναμιν μὲ θετικὸν ἐκθέτην. Π. χ.

$$\alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^{\nu}}$$

Διότι ἡ δύναμις $\alpha^{-\nu}$ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς πηλίκον δύο δυνάμεων ἔστω τῶ $\alpha^{3\nu}$ καὶ $\alpha^{4\nu}$ ἤτοι

$$\alpha^{3\nu} : \alpha^{4\nu} = \alpha^{3\nu-4\nu} = \alpha^{-\nu}.$$

Ἀλλὰ τὸ πηλίκον $\alpha^{3\nu} : \alpha^{4\nu}$ γράφεται καὶ οὕτω

$$\frac{\alpha^{3\nu}}{\alpha^{4\nu}} = \frac{\alpha^{3\nu}}{\alpha^{\nu}\,\alpha^{3\nu}} = \frac{1}{\alpha^{\nu}}. \quad \text{Ἄρα} \quad \alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^{\nu}}.$$

128. II. Πᾶς θετικὸς ἀριθμὸς ἔχει δύο ῥίζας ἀρτίας τάξεως καὶ μίαν ῥίζαν περιττῆς τάξεως.

Π. χ. $\sqrt{81} = \pm 9$ διότι $(+9)^2 = 81$ καὶ $(-9)^2 = 81$.

Ὁμοίως $\sqrt[4]{81} = \pm 3$ διότι $(+3)^4 = 81$ καὶ $(-3)^4 = 81$.

129. III. Πᾶς ἀρνητικὸς ἀριθμὸς ἔχει μίαν ῥίζαν περιττῆς τάξεως καὶ οὐδεμίαν ῥίζαν ἀρτίας τάξεως

π. χ. $\sqrt[3]{-8} = -2$, ἐνῶ ἡ $\sqrt{-16}$ δὲν ὑπάρχει.

130. IV. Διὰ νὰ τρέψωμεν δύο ἑτεροβαθμίους ῥίζας εἰς ἰσοβαθμίους πολλαπλασιάζομεν δείκτην καὶ ἐκθέτην ἑκάστης ῥίζης ἐπὶ τὸν δείκτην τῆς ἄλλης.

Π. χ. αἱ ἑτεροβάθμιοι ῥίζαι $\sqrt[3]{\alpha^2}$ καὶ $\sqrt{\beta^5}$ γίνονται $\sqrt[6]{\alpha^4}$ καὶ $\sqrt[6]{\beta^{15}}$.

Διότι ἡ $\sqrt[3]{\alpha^2}=\alpha^{\frac{2}{3}}=\alpha^{\frac{4}{6}}=\sqrt[6]{\alpha^4}$ καὶ ἡ $\sqrt{\beta^5}=\beta^{\frac{5}{2}}=\beta^{\frac{15}{6}}=\sqrt[6]{\beta^{15}}$.

ΣΗΜ. Ἂν αἱ ῥίζαι εἶναι περισσότεραι τρέπομεν αὐτὰς εἰς ἰσοβαθμίους εὑρίσκοντες τὸ ε.κ.π. τῶν δεικτῶν των καὶ πολλαπλασιάζοντες δείκτην καὶ ἐκθέτην ἑκάστης ἐπὶ τὸ πηλίκον τοῦ ε.κ.π. τῶν δεικτῶν διὰ τοῦ δείκτου τῆς ῥίζης. Ἐργαζόμεθα δηλαδὴ ὅπως ἐργαζόμεθα διὰ τὴν τροπὴν τῶν ἑτερωνύμων κλασμάτων εἰς ὁμώνυμα.

131. V. Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἢ διαιρέσωμεν ἰσοβαθμίους ῥίζας πολλαπλασιάζομεν ἢ διαιροῦμεν τὰ ὑπόρριζα τὸ δὲ ἐξαγόμενον εἶναι ῥίζα ἰσοβάθμιος πρὸς τὰς δοθείσας. Π. χ.

$$\sqrt[3]{\alpha}\cdot\sqrt[3]{\beta^2}\cdot\sqrt[3]{\gamma}=\sqrt[3]{\alpha\beta^2\gamma}\,.$$

Διότι $\sqrt[3]{\alpha}=\alpha^{\frac{1}{3}},\quad \sqrt[3]{\beta^2}=\beta^{\frac{2}{3}}=(\beta^2)^{\frac{1}{3}}$ καὶ $\sqrt[3]{\gamma}=\gamma^{\frac{1}{3}}$

Ἄρα $\sqrt[3]{\alpha}\,.\,\sqrt[3]{\beta^2}.\,\sqrt[3]{\gamma}=\alpha^{\frac{1}{3}}.\,(\beta^2)^{\frac{1}{3}}.\,\gamma^{\frac{1}{3}}=(\alpha\beta^2\gamma)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{\alpha\beta^2\gamma}$.

Ὁμοίως $\sqrt[4]{\alpha^3}:\sqrt[4]{\beta}=\sqrt[4]{\dfrac{\alpha^3}{\beta}}$

Διότι $\sqrt[4]{\alpha^3}=\alpha^{\frac{3}{4}}=(\alpha^3)^{\frac{1}{4}}$ καὶ $\sqrt[4]{\beta}=\beta^{\frac{1}{4}}$

Ἄρα $\sqrt[4]{\alpha^3}:\sqrt[4]{\beta}=(\alpha^3)^{\frac{1}{4}}:\beta^{\frac{1}{4}}=(\alpha^3:\beta)^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{\dfrac{\alpha^3}{\beta}}$.

132. VI. Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἢ διαιρέσωμεν ῥίζας ἑτεροβαθμίους τρέπομεν αὐτὰς εἰς ἰσοβαθμίους καὶ κατόπιν πολλαπλασιάζομεν ἢ διαιροῦμεν μόνον τὰ ὑπόρριζα. Π. χ.

$$\sqrt[3]{\alpha^2}\,.\,\sqrt[4]{\beta^3}=\sqrt[12]{\alpha^8}\,.\,\sqrt[12]{\beta^9}=\sqrt[12]{\alpha^8\beta^9}$$

133. VII. Ἵνα ὑψώσωμεν ῥίζαν εἰς δύναμιν ἀρκεῖ νὰ ὑψώσωμεν τὸ ὑπόρριζον εἰς τὴν δύναμιν ταύτην π. χ.

$$\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^{\mu}=\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$$

Διότι ἂν ὑψωθοῦν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἰσότητος ταύτης εἰς τὴν ν δύναμιν προκύπτουν ὡς ἴσα ἐξαγόμενα τὰ $\alpha^{\mu}=\alpha^{\mu}$.

134. VIII. Διὰ νὰ ἐξαγάγωμεν ῥίζαν ἄλλης ῥίζης ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς δείκτας των. Π. χ.

$$\sqrt[3]{\sqrt{\alpha}}=\sqrt[6]{\alpha}\,.$$

Διότι ἔχομεν $\sqrt[3]{\sqrt{\alpha}}=(\sqrt{\alpha})^{\frac{1}{3}}=\left(\alpha^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}=\alpha^{\frac{1}{6}}=\sqrt[6]{\alpha}$.

135. IX. Παράγων τις δύναται νὰ εἰσέλθῃ ἐντὸς ῥιζικοῦ ἂν ὑψωθῇ εἰς τὴν ἰσοβάθμιον δύναμιν· π. χ.

$$\alpha^2\sqrt[3]{\beta\gamma}=\sqrt[3]{\alpha^6\beta\gamma}$$

Διότι $\alpha^2=\alpha^{\frac{6}{3}}=\sqrt[3]{\alpha^6}$. Ἄρα $\alpha^2\sqrt[3]{\beta\gamma}=\sqrt[3]{\alpha^6}.\sqrt[3]{\beta\gamma}=\sqrt[3]{\alpha^6\beta\gamma}$.

136. X. Παράγων τις δύναται νὰ ἐξέλθῃ τοῦ ῥιζικοῦ ἀφοῦ τοῦ ἐξάγωμεν τὴν ἰσοβάθμιον ῥίζαν· π. χ.

$$\sqrt[4]{\alpha^6\beta^8\gamma^3}=\alpha\beta^2\sqrt[4]{\alpha^2\gamma^3}.$$

Διότι $\sqrt[4]{\alpha^6\beta^8\gamma^3}=\sqrt[4]{\alpha^4.\beta^8.\alpha^2.\gamma^3}=\sqrt[4]{\alpha^4}\,.\,\sqrt[4]{\beta^8}\,.\,\sqrt[4]{\alpha^2\gamma^3}=\alpha\beta^2\sqrt[4]{\alpha^2\gamma^3}$.

137. XI. Τετραγωνικὴ ῥίζα ἀριθμοῦ μὴ ὄντος τελείου τετραγώνου δὲν δύναται νὰ ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα συμμέτρου τινὸς ἀριθμοῦ καὶ τετραγωνικῆς ῥίζης ἑτέρου ἀριθμοῦ μὴ ὄντος τελείου τετραγώνου.

Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ ἐξ ὧν οἱ α καὶ γ δὲν εἶναι τέλεια τετράγωνα. Θὰ ἀποδείξωμεν ὅτι δὲν δύναται νὰ ὑπάρξῃ ἡ ἰσότης

$$\sqrt{\alpha}=\beta+\sqrt{\gamma} \qquad (1)$$

Διότι ἂν ὑποθέσωμεν τὴν ἰσότητα (1) ἀληθῆ καὶ ὑψώσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη της εἰς τὸ τετράγωνον εὑρίσκομεν

$$\alpha=\beta^2+\gamma+2\beta\sqrt{\gamma} \qquad \text{ἢ} \qquad \sqrt{\gamma}=\frac{\alpha-\beta^2-\gamma}{2\beta} \qquad (2)$$

Ἀλλ' ἡ σχέσις (2) εἶναι ἄτοπος διότι τὸ α' μέλος της εἶναι ἀριθμὸς ἀσύμμετρος τὸ δὲ β' μέλος της εἶναι σύμμετρος ἀριθμός, δὲν δύναται δὲ σύμμετρος ἀριθμὸς νὰ ἰσοῦται μὲ ἀσύμμετρον (§ 126).

138. XII. Ἂν $x+\sqrt{y}=\alpha+\sqrt{\beta}$, ἔνθα οἱ x καὶ α εἶναι σύμμετροι ἀριθμοὶ οἱ δὲ $\sqrt{y}$ καὶ $\sqrt{\beta}$ ἀσύμμετροι, τότε θὰ εἶναι

$$x=\alpha \quad \text{καὶ} \quad y=\beta.$$

Ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ x δὲν εἶναι ἴσος μὲ τὸν α, ἔστω δὲ $x=\alpha+\lambda$. Τότε ἡ δοθεῖσα σχέσις γράφεται

$$\lambda+\sqrt{y}=\sqrt{\beta} \qquad (3)$$

Ἀλλ' ἡ σχέσις (3) οὐδέποτε ἀληθεύει (§ 137). Ἄρα δὲν δύναται ὁ x νὰ εἶναι διάφορος τοῦ α. Θὰ εἶναι λοιπὸν $x=\alpha$ καὶ ἑπομένως ἐκ τῆς δοθείσης σχέσεως εὑρίσκομεν $y=\beta$.

139. Συνέπειαι: α') Ἂν $\sqrt{\alpha+\sqrt{\beta}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$, τότε θὰ εἶναι καὶ $\sqrt{\alpha-\sqrt{\beta}}=\sqrt{x}-\sqrt{y}$. Διότι ἂν ὑψώσωμεν εἰς τὸ τετράγωνον τὴν δοθεῖσαν σχέσιν, θὰ ἔχωμεν

$$\alpha+\sqrt{\beta}=x+y+2\sqrt{xy}$$

καὶ ἄρα (§ 138) $\alpha=x+y$ καὶ $\sqrt{\beta}=2\sqrt{xy}$ ἢ δι' ἀφαιρέσεως κατὰ μέλη

$$\alpha-\sqrt{\beta}=x-2\sqrt{xy}+y=(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2$$

Ἄρα $\sqrt{\alpha-\sqrt{\beta}}=\sqrt{x}-\sqrt{y}$.

β') Ἂν $\sqrt[3]{\alpha+\sqrt{\beta}}=x+\sqrt{y}$, τότε θὰ εἶναι καὶ $\sqrt[3]{\alpha-\sqrt{\beta}}=x-\sqrt{y}$. Διότι ἂν ὑψώσωμεν εἰς τὸν κύβον τὴν δοθεῖσαν σχέσιν, ἔχομεν

$$\alpha+\sqrt{\beta}=x^3+3x^2\sqrt{y}+3xy+y\sqrt{y}$$

καὶ ἄρα (§ 138) $\alpha=x^3+3xy$ καὶ $\sqrt{\beta}=3x^2\sqrt{y}+y\sqrt{y}$. ἀφαιροῦντες δὲ ταύτας κατὰ μέλη εὑρίσκομεν

$$\alpha-\sqrt{\beta}=x^3-3x^2\sqrt{y}+3xy-y\sqrt{y}=(x-\sqrt{y})^3$$

καὶ ἄρα $\sqrt[3]{\alpha-\sqrt{\beta}}=x-\sqrt{y}$.

III. ΤΡΟΠΗ ΑΡΡΗΤΩΝ ΠΑΡΟΝΟΜΑΣΤΩΝ ΕΙΣ ΡΗΤΟΥΣ

140. α΄. Ὅταν ὁ ἄρρητος παρονομαστὴς ἑνὸς κλάσματος εἶναι μονώνυμον, τότε πολλαπλασιάζομεν ἀμφοτέτους τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος ἐπὶ τὴν παράστασιν, ἡ ὁποία θὰ καταστήσῃ τὸν ἐκθέτην τοῦ ὑπορρίζου τοῦ παρονομαστοῦ ἴσον πρὸς τὸν δείκτην τῆς ῥίζης του.

π. χ. $\dfrac{\alpha}{\sqrt{\beta}}=\dfrac{\alpha\sqrt{\beta}}{\sqrt{\beta^2}}=\dfrac{\alpha\sqrt{\beta}}{\beta}$, ἢ $\dfrac{\alpha}{\sqrt[5]{\beta^2}}=\dfrac{\alpha\sqrt[5]{\beta^3}}{\sqrt[5]{\beta^5}}=\dfrac{\alpha\sqrt[5]{\beta^3}}{\beta}$.

141. β΄. Ὅταν ὁ ἄρρητος παρονομαστὴς εἶναι διώνυμον τῆς μορφῆς $\alpha+\sqrt{\beta}$, ἢ δύναται νὰ γίνῃ τῆς μορφῆς ταύτης, τότε πολλαπλασιάζομεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους του ἐπὶ τὴν συζυγῆ παράστασιν πρὸς τὸν παρονομαστήν, ἵνα οὕτω ὁ παρονομαστὴς γίνῃ διαφορὰ τετραγώνων καὶ ἐξαλειφθῇ τὸ ῥιζικὸν ἀπὸ αὐτόν· π.χ.

$$\frac{\alpha}{\alpha+\sqrt{\beta}}=\frac{\alpha(\alpha-\sqrt{\beta})}{\alpha^2-\beta}. \quad \text{ἢ} \quad \frac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\frac{1}{(1+\sqrt{2})-\sqrt{3}}\times$$

$$\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2})+\sqrt{3}}=\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2})^2-3}=\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}+2+\sqrt{6}}{4}.$$

142. Ὅταν ὁ παρονομαστὴς εἶναι τῆς μορφῆς $\sqrt[3]{\alpha}-\sqrt[3]{\beta}$ τότε, ἐπειδὴ $(\sqrt[3]{\alpha}-\sqrt[3]{\beta})(\sqrt[3]{\alpha^2}+\sqrt[3]{\alpha\beta}+\sqrt[3]{\beta^2})=\alpha-\beta$. (§ 36) διὰ τοῦτο πολλαπλασιάζομεν τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος ἐπὶ $\sqrt[3]{\alpha^2}+\sqrt[3]{\alpha\beta}+\sqrt[3]{\beta^2}$.

Ὅταν δὲ ὁ παρονομαστὴς εἶναι τῆς μορφῆς $\sqrt[3]{\alpha^2}+\sqrt[3]{\alpha\beta}+\sqrt[3]{\beta^2}$ τότε πολλαπλασιάζομεν τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος ἐπὶ $\sqrt[3]{\alpha}-\sqrt[3]{\beta}$, ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὰς ταυτότητας

$$\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2) \quad \text{ἢ} \quad \alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2).$$

Π. χ. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{\alpha}+\sqrt[3]{\beta}}=\dfrac{\sqrt[3]{\alpha^2}-\sqrt[3]{\alpha\beta}+\sqrt[3]{\beta^2}}{\left(\sqrt[3]{\alpha}+\sqrt[3]{\beta}\right)\left(\sqrt[3]{\alpha^2}-\sqrt[3]{\alpha\beta}+\sqrt[3]{\beta^2}\right)}=\dfrac{\sqrt[3]{\alpha^2}-\sqrt[3]{\alpha\beta}+\sqrt[3]{\beta^2}}{\alpha+\beta}$

143. Ἐν γένει, ***ἵνα τρέψωμεν ἄρρητόν τινα παρονομαστὴν εἰς ῥητόν, πολλαπλασιάζομεν τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος ἐπὶ κατάλληλον παράστασιν,*** ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὰς ταυτότητας τῶν § 19—22 καὶ τὰς διαιρέσεις τῆς μορφῆς $(x^\nu-\alpha^\nu):(x-\alpha)$.

Ἀσκήσεις πρὸς λύσιν.

Νὰ γίνῃ ῥητὸς ὁ παρονομαστὴς εἰς ἑκάστην ἐκ τῶν κάτωθι παραστάσεων

390. $\dfrac{7\sqrt{6}+3\sqrt{5}}{4\sqrt{6}+\sqrt{5}}$ 391. $\dfrac{\beta^2}{\alpha+\sqrt{\beta^2+\alpha^2}}$ 392. $\dfrac{\sqrt{10}+\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{10}-\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

393. $\dfrac{2\sqrt{\alpha+1}}{\sqrt{\alpha-1}+\sqrt{\alpha+1}-\sqrt{2\alpha}}$ 394. $\dfrac{\sqrt{\alpha+x}+\sqrt{\alpha-x}}{\sqrt{\alpha+x}-\sqrt{\alpha-x}}$

395. $\dfrac{12}{3+\sqrt{5}-2\sqrt{2}}$ 396. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$

397. $\dfrac{(\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$ 398. $\dfrac{1}{\sqrt{8}-\sqrt{6}+\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

Νὰ ἁπλοποιηθοῦν αἱ παραστάσεις

399. $\dfrac{1}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}+\sqrt{\alpha+\beta}}$ 400. $\dfrac{18}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\dfrac{12}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

401. $\dfrac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6})^2}$ 402. $\sqrt{243}+\sqrt{48}-\sqrt{768}+\sqrt{27}$

403. $\left(\sqrt[3]{54}+\sqrt[3]{250}+\sqrt[3]{192}\right)\left(\sqrt[3]{54}+\sqrt[3]{250}-\sqrt[3]{192}\right)$

404. $\dfrac{\sqrt{x^2-y^2}+x}{\sqrt{x^2+y^2}+y}:\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}-y}{x-\sqrt{x^2-y^2}}$ 405. $\sqrt{\dfrac{6+2\sqrt{3}}{33-19\sqrt{3}}}$

406. $\sqrt{6}-\dfrac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}-\dfrac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

407. $\left(\sqrt[3]{\dfrac{\beta^2\sqrt{\alpha^{-1}}}{\alpha\sqrt{\beta}}}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{\alpha^{-2}}}{\sqrt{\alpha_4^3}}}\right)^{-2}$

408. $(\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{2}+1)(\sqrt{5}-\sqrt{2})(1-\sqrt{2})$

409. $\sqrt[3]{(\alpha+\beta)^3+(\alpha-\beta)^3+6\alpha(\alpha^2-\beta^2)}$

410. $(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma})\,(\alpha+\beta+\gamma-\sqrt{\alpha\beta}-\sqrt{\beta\gamma}-\sqrt{\alpha\gamma})$

411. $\frac{1}{4}\,(x\alpha^{-1}-\alpha x^{-1})\left(\frac{\alpha^{-1}-x^{-1}}{\alpha^{-1}+x^{-1}}-\frac{\alpha^{-1}+x^{-1}}{\alpha^{-1}-x^{-1}}\right)$

412. $\frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\times\frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^3-3x\sqrt{y}-3y\sqrt{x}}$

413. $\left[\frac{\sqrt[4]{x^{-1}}}{\sqrt[3]{y^4}}\cdot\frac{\sqrt[3]{x^2}}{y^{-1}}:\frac{\sqrt[3]{y^{-2}}}{\sqrt{x^{-1}}}\right]^{12}$

414. $\frac{1+\alpha x^{-1}}{(\alpha x)^{-1}}\cdot\frac{\alpha^{-1}-x^{-1}}{x\alpha^{-1}-\alpha x^{-1}}:\frac{\alpha x^{-1}}{x-\alpha}$

415. $\left(x^{\frac{\mu}{\nu}}\cdot y\right)^{\nu}\cdot\left[\frac{x^{\mu^2-\nu^2}}{y^{\mu\nu-\nu^2}}\right]^{\frac{1}{\mu-\nu}}$

416. $\frac{(\alpha\beta)^{\frac{1}{2}}}{\gamma^{\frac{1}{6}}}:\left[\frac{\gamma^{-\frac{1}{2}}}{(\alpha\beta)^{-\frac{1}{3}}}\cdot\frac{\alpha^{-\frac{5}{6}}\cdot\gamma^{-\frac{2}{3}}}{\beta^{\frac{5}{6}}}\right]$

417. $\left[\frac{\alpha^4-\beta^4}{\alpha-\beta}-2\beta(2\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)\right]^{-\frac{2}{3}}:\left[\frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha-\beta}-3\alpha\beta\right]^{-\frac{3}{2}}$

418. $\frac{(xy)^{\mu+\nu}+x^{\nu}y^{\mu}-x^{\mu}y^{\nu}-1}{x^{-\mu}y^{\mu}(xy)^{\nu}+y^{\mu+\nu}[(xy)^{\nu}-(xy)^{-\mu}]-y^{2\nu}}$

419. $\left[\frac{x^2+y^2-\frac{4x^2y^2}{x^2+y^2}}{x^2-y^2+\frac{4x^2y^2}{x^2-y^2}}\right]^{\frac{1}{3}}+\frac{2}{x^2(x^{-2}+y^{-2})}$

420. $\frac{\left(\alpha^2-\frac{1}{\beta^2}\right)^{\alpha}\cdot\left(\alpha-\frac{1}{\beta}\right)^{\beta-\alpha}}{\left(\beta^2-\frac{1}{\alpha^2}\right)^{\beta}\cdot\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha-\beta}}$

421. $\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$ 422. $\frac{A}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}+\sqrt{\delta}}$

423. $\frac{\sqrt[3]{3}-1}{\sqrt[3]{3}+1}$ 424. $\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt{3}+\sqrt[6]{9}}$

425. $\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\alpha-\sqrt[3]{\alpha}}$ 426. $\dfrac{4}{\sqrt[3]{\alpha^2}-\sqrt[3]{\alpha}+1}$

427. $\dfrac{\alpha-\beta}{\sqrt[3]{\alpha^2}+\sqrt[3]{\alpha\beta}+\sqrt[3]{\beta^2}}$ 428. $\dfrac{\alpha-\beta}{\sqrt[6]{\alpha}-\sqrt[6]{\beta}}$

429. $\dfrac{6}{\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}}$ 430. $\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}$

431. $\dfrac{1}{1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}$ 432. $\dfrac{A}{\sqrt[3]{\alpha}+\sqrt[3]{\beta}+\sqrt[3]{\gamma}}$ 433. $\dfrac{A}{\sqrt[\nu]{\alpha}+\sqrt[\nu]{\beta}}$

Νὰ δειχθῇ ὅτι

434. $\dfrac{\sqrt{\sqrt[4]{8}+\sqrt{\sqrt{2}-1}}-\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}-1}}}{\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}+1}}}=\sqrt{2}$

435. $\sqrt[3]{45+29\sqrt{2}}+\sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}=6$ ('Αεροπ. 1935)

436. $\sqrt[3]{\dfrac{x^3-3x+(x^2-1)\sqrt{x^2-4}}{2}}+\sqrt[3]{\dfrac{x^3-3x-(x^2-1)\sqrt{x^2-4}}{2}}=x.$

437. Ἂν $2\upsilon=x+x^{-1}$ καὶ $2\varphi=y+y^{-1}$ νὰ δειχθῇ ὅτι

$$2(\upsilon\varphi+\sqrt{\upsilon^2-1}\cdot\sqrt{\varphi^2-1})=xy+(xy)^{-1}$$

Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τῶν κάτωθι παραστάσεων διὰ τὴν ἔναντι ἑκάστης σημειουμένην τιμήν.

438. $\Sigma=\dfrac{5}{4}R^2\sqrt{10-2\sqrt{5}}$ διὰ $R=\dfrac{2\alpha}{\sqrt{5}-1}$

439. $x^2-2x\alpha^{\frac{2}{3}}+\alpha^{\frac{4}{3}}-\beta^2$ διὰ $x=\alpha^{\frac{2}{3}}-\beta$

440. $x^2-\dfrac{2x}{\alpha^3}+\dfrac{1}{\alpha^6}-\dfrac{1}{\beta^4}$ διὰ $x=\alpha^{-2}+\beta^{-2}$

441. $x^2-x\alpha^{-\frac{4}{3}}+\left(\sqrt[3]{\alpha^4}-\sqrt[3]{\beta^4}\right)\alpha^{-4}$ διὰ $x=\left(\sqrt[3]{\alpha^2}-\sqrt[3]{\beta^2}\right)\alpha^{-2}$

442. $3x^2-5xy+3y^2$ διὰ $x=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$, καὶ $y=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

443. $7\alpha^2+11\alpha\beta-7\beta^2$ διὰ $\alpha=\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$ καὶ $\beta=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$

444. $\dfrac{\sqrt{2\mu\nu+y}+\sqrt{2\mu\nu-y}}{\sqrt{2\mu\nu+y}-\sqrt{2\mu\nu-y}}$ διὰ $y=\dfrac{4\lambda\mu\nu}{\lambda^2+1}$

445. $\left(\dfrac{x^2}{\alpha^2}+\dfrac{\alpha^{-2}}{y^{-2}}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left[\left(\dfrac{x^4-y^4}{x-y}\right)\cdot(\alpha^2+2xy)^{-\frac{1}{2}}\right]^{\frac{3}{2}}$ διὰ $x^2+y^2=\alpha^2$

IV. ΕΞΑΓΩΓΗ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗΣ ΡΙΖΗΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΥ

144. Ἡ τετραγωνικὴ ρίζα ἑνὸς πολυωνύμου (ὡς καὶ ἡ ρίζα οἱουδήποτε βαθμοῦ), ἐφ' ὅσον εἶναι ἀκριβής, ἐξάγεται ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ἐκ ταυτότητος ἴσων πολυωνύμων, (ἴδε σχετικὸν κεφάλαιον κατωτέρω).

145. Δυνάμεθα ὅμως νὰ ἐργασθῶμεν ὅπως ἀκριβῶς ἐργαζόμεθα καὶ διὰ τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν, ἂν παρομοιάσωμεν τοὺς ὅρους τοῦ πολυωνύμου μὲ τὰ ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ, ὡς εἰς τὸ κάτωθι παράδειγμα.

Νὰ εὑρεθῇ ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ πολυωνύμου.

$$\Pi(x) \equiv 4x^4 - 32x^3 + 76x^2 - 48x + 9$$

α'. Κατατάσσομεν τὸ πολυώνυμον κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ x καὶ εὑρίσκομεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ πρώτου ὅρου, τὸ τετράγωνον δὲ αὐτῆς ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὸ πολυώνυμον.

β'. Διπλασιάζομεν τὴν εὑρεθεῖσαν ρίζαν καὶ διαιροῦμεν τὸν ἀπομένοντα πρῶτον ὅρον τοῦ πολυωνύμου διὰ τοῦ διπλασίου τῆς ρίζης. Τὸ οὕτω εὑρισκόμενον πηλίκον γράφομεν παραπλεύρως τοῦ διπλασίου τῆς ρίζης, τὸ δὲ οὕτω προκύπτον διώνυμον τὸ πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸ εὑρεθὲν πηλίκον καὶ τὸ ἐξαγόμενον τὸ ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὸ ἀπομένον ἀρχικὸν πολυώνυμον. Τὸ ἐν λόγῳ πηλίκον εἶναι ὁ δεύτερος ὅρος τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τὸν ὁποῖον θέτομεν πλησίον τοῦ πρώτου εὑρεθέντος ὅρου τῆς τετραγωνικῆς ρίζης.

γ'. Διπλασιάζομεν τὸ οὕτω εὑρεθὲν διώνυμον τῆς ρίζης κλπ. (ἐπαναλαμβάνομεν τὴν αὐτὴν ἐργασίαν μέχρι τέλους).

Ἡ διάταξις τῆς πράξεως γίνεται ὡς ἀκολούθως

$4x^4 - 32x^3 + 76x^2 - 48x + 9$	$2x^2 - 8x + 3$	
$-4x^4$	$4x^2 - 8x$	$4x^2 - 16x + 3$
$-32x^3 + 76x^2 - 48x + 9$	$-8x$	3
$32x^3 - 64x^2$	$-32x^3 + 64x^2$	$12x^2 - 48x + 9$
$12x^2 - 48x + 9$		
$-12x^2 + 48x - 9$		
0		

ΣΗΜ. Παρατηροῦμεν ὅτι ὅταν πολυώνυμον τι $\Pi(x)$ διατεταγμένον κατὰ τὰς δυνάμεις τοῦ x εἶναι τέλειον τετράγωνον, τότε καὶ ὁ α' ὅρος του καὶ ὁ τελευταῖος εἶναι τέλειον τετράγωνον.

Ἀσκήσεις πρὸς λύσιν.

Νὰ εὑρεθῇ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τῶν κάτωθι πολυωνύμων

446. $x(x^3-64)+8(x^3+8)$

447. $x^4+1-12x(x^2+1)+38x^2$

448. $4y^4-12y^3+13y^2-6y+1$

449. $9\alpha^4-6\alpha^3y-11\alpha^2y^2+4\alpha y^3+4y^4$

450. $25x^6-20x^4-30x^3+4x^2+12x+9$

451. $4(\alpha-\beta-\gamma)^2-(\alpha+\gamma)(3\alpha-4\beta-5\gamma)$

452. $x^4-4x^2+6-\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x^4}$

453. $x^4-x^3+\frac{2\beta x^2}{3}+\frac{x^2}{4}+\frac{\beta x}{2}+\frac{\beta^2}{9}$

454. $(3\alpha^2+13\alpha\beta-10\beta^2)(2\alpha^2+7\alpha\beta-15\beta^2)(6\alpha^2-13\alpha\beta+6\beta^2)$

455. $(x^2-yz)^3+(y^2-xz)^3+(z^2-xy)^3-3(x^2-yz)(y^2-xz)(z^2-xy)$

456. Ἂν $x^2+y^2+z^2-2xy-2xz-2yz=0$, νὰ δειχθῇ ὅτι μία ἐκ τῶν τεσσάρων παραστάσεων $\sqrt{x}\pm\sqrt{y}\pm\sqrt{z}$ ἰσοῦται μὲ μηδέν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΣΤ΄.

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΙΝΑ ΠΕΡΙ ΦΑΝΤΑΣΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

I. ΟΡΙΣΜΟΙ.

146. Εἶναι γνωστὸν ὅτι τετραγωνικὴ ῥίζα ἑνὸς ἀρνητικοῦ ἀριθμοῦ δὲν ὑπάρχει, ὡς ἐπίσης ῥίζα ἀρτίας τάξεως ἀρνητικοῦ ἀριθμοῦ.

Ἐπειδὴ ὅμως εἰς τὰς πράξεις χρειάζεται νὰ σημειώνωμεν τὴν εὕρεσιν, ἐπὶ παραδείγματι τῆς $\sqrt{-9}$, ἂν καὶ δὲν ὑπάρχει αὕτη, διὰ τοῦτο γράφομεν ταύτην $\sqrt{9.(-1)}=\sqrt{9}.\sqrt{-1}=3\sqrt{-1}$. Παρατηροῦμεν λοιπὸν ὅτι ἡ $\sqrt{-9}$ ἀποτελεῖται ἀπὸ τὴν $\sqrt{-1}$ λαμβανομένην τρεῖς φοράς.

147. Ἡ $\sqrt{-1}$, ἥτις δὲν ὑπάρχει εἰς τὴν πραγματικότητα, ὀνομάζεται ***φανταστικὴ μονάς,*** σημειοῦται δὲ διὰ τοῦ συμβόλου i, ἤτοι $\sqrt{-1}=i$.

148. Πᾶς ἀριθμὸς γινόμενος ἀπὸ τὴν φανταστικὴν μονάδα i καλεῖται ***φανταστικὸς ἀριθμός,*** πρὸς διάκρισιν τῶν μέχρι τοῦδε γνωστῶν ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι καλοῦνται ***πραγματικοὶ ἀριθμοὶ*** ὡς π. χ. ὁ 3i εἶναι φανταστικὸς ἀριθμός.

149. Οἱ φανταστικοὶ ἀριθμοὶ δύνανται νὰ εἶναι θετικοί, ἀρνητικοί, ἀκέραιοι, κλασματικοὶ κ.λ.π. ὡς $-8i$, $\frac{3i}{5}$.

150. Ἀριθμός τις λέγεται ***μιγάς,*** ὅταν ἀποτελῆται καὶ ἀπὸ πραγματικὸν μέρος καὶ ἀπὸ φανταστικόν, ὡς π. χ. ὁ ἀριθμὸς $5+6i$. Ἡ γενικὴ μορφὴ ἑνὸς μιγάδος ἀριθμοῦ εἶναι ἡ $\alpha+\beta i$.

151. Δύο μιγάδες ἀριθμοὶ λέγονται ***συζυγεῖς,*** ὅταν διαφέρουν μόνον κατὰ τὸ σημεῖον τοῦ φανταστικοῦ μέρους των ὡς π.χ. οἱ ἀριθμοὶ $\alpha+\beta i$ καὶ $\alpha-\beta i$.

II. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΦΑΝΤΑΣΤΙΚΗΣ ΜΟΝΑΔΟΣ.

152. α΄. Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς φανταστικῆς μονάδος ἔχομεν

$$i^2=-1 \tag{1}$$

ἤτοι τὸ τετράγωνον τῆς φανταστικῆς μονάδος ἰσοῦται μὲ τὴν πραγματικὴν ἀρνητικὴν μονάδα.

153. β΄. Ἂν τὰ μέλη τῆς (1) τὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ i εὑρίσκομεν $i^3=-i$ καὶ ἂν τὰ μέλη ταύτης πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ i εὑρίσκομεν $i^4=-i^2=1$, ἂν δὲ τὰ μέλη ταύτης πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ i εὑρίσκομεν $i^5=i$ καὶ οὕτω καθεξῆς ἤτοι

$$i^2=-1,\quad i^3=-i,\quad i^4=1,\quad i^5=i,\quad i^6=-1\ldots$$

ἢ γενικῶς $\quad i^{4\nu}=1,\quad i^{4\nu+2}=-1,\quad i^{4\nu+1}=i,\quad i^{4\nu+3}=-i$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα. Αἱ δυνάμεις τῆς φανταστικῆς μονάδος τῶν ὁποίων ὁ ἐκθέτης εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 4 ἰσοῦνται μὲ τὴν θετικὴν πραγματικὴν μονάδα, ἐκεῖναι τῶν ὁποίων ὁ ἐκθέτης εἶναι ἄρτιος ἀλλὰ ὄχι πολλαπλάσιον τοῦ 4 ἰσοῦνται μὲ τὴν ἀρνητικὴν πραγματικὴν μονάδα, ἐκεῖναι τῶν ὁποίων ὁ ἐκθέτης εἶναι τῆς μορφῆς $4\nu+1$ ἰσοῦνται μὲ τὴν θετικὴν φανταστικὴν μονάδα καὶ ἐκεῖναι τῶν ὁποίων ὁ ἐκθέτης εἶναι τῆς μορφῆς $4\nu+3$ ἰσοῦνται μὲ τὴν ἀρνητικὴν φανταστικὴν μονάδα.

III. ΠΡΑΞΕΙΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΦΑΝΤΑΣΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ.

154. ***Πρόσθεσις, ἀφαίρεσις.*** Μιγάδας ἀριθμοὺς προσθέτομεν ἢ ἀφαιροῦμεν ἂν προσθέσωμεν ἢ ἀφαιρέσωμεν χωριστὰ τὰ πραγματικὰ μέρη των καὶ χωριστὰ τὰ φανταστικά, π. χ.

$$(6\alpha+5\beta i)+(3\alpha-\beta i)-(6-\gamma i)-(8\alpha+3\beta i)=(\alpha-6)+(\beta+\gamma)i$$

155. ***Πολλαπλασιασμός.*** Μιγάδας ἀριθμοὺς πολ/ζομεν ὅπως καὶ τοὺς πραγματικούς, ἔχοντες ὑπ᾽ ὄψιν τὴν § 153. π. χ.

$$(5\alpha-\beta i)(8\alpha+3\beta i)(\alpha-2\beta i)=[40\alpha^2+3\beta^2+7\alpha\beta i](\alpha-2\beta i)=$$
$$=4\alpha^3+17\alpha\beta^2-(73\alpha^2+6\beta^2)\beta i$$

156. Τὸ γινόμενον δύο συζυγῶν μιγάδων ἀριθμῶν ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν, ὡς π. χ. $(\alpha+\beta i)(\alpha-\beta i)=\alpha^2+\beta^2$.

157. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συμπεραίνομεν ὅτι αἱ πράξεις ἐπὶ τῶν φανταστικῶν καὶ μιγάδων ἀριθμῶν γίνονται ὅπως αἱ πράξεις ἐπὶ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, ἀφοῦ λάβωμεν ὑπ᾽ ὄψιν τὰ εἰς τὴν § 153 ἐκτεθέντα· π. χ. νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐξαγόμενον $(\alpha-\beta i)^3$.

Ἔχομεν $(\alpha-\beta i)^3=\alpha^3-3\alpha^2\beta i-3\alpha\beta^2+\beta^3 i=\alpha(\alpha^2-3\beta^2)-(3\alpha^2-\beta^2)\beta i$

IV. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΙΝΕΣ ΤΩΝ ΦΑΝΤΑΣΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ.

158. Ἂν $\alpha+\beta i=0$, τότε θὰ εἶναι καὶ $\alpha=0$ καὶ $\beta=0$.

Διότι ἡ δοθεῖσα σχέσις γίνεται $\beta i=-\alpha$ ἢ ὑψουμένη εἰς τὸ τετράγωνον

$$-\beta^2=\alpha^2 \quad ἢ \quad \alpha^2+\beta^2=0$$

Ἤδη οἱ α^2 καὶ β^2, ὡς τέλεια τετράγωνα, εἶναι θετικοί· ἐπειδὴ δὲ τὸ ἄθροισμά των ἰσοῦται μὲ μηδέν, διὰ τοῦτο ὀφείλει χωριστὰ ἕκαστος νὰ ἰσοῦτοι μὲ μηδέν. Ἄρα θὰ εἶναι καὶ $\alpha=0$ καὶ $\beta=0$.

159. Ἂν $\alpha+\beta i=\gamma+\delta i$, τότε θὰ εἶναι καὶ $\alpha=\gamma$ καὶ $\beta=\delta$.

Καθόσον ἡ δοθεῖσα σχέσις γράφεται

$$(\alpha-\gamma)+(\beta-\delta)i=0$$

καὶ ἄρα (§ 158) θὰ εἶναι χωριστὰ $\alpha-\gamma=0$ καὶ $\beta-\delta=0$ ἐξ οὗ $\alpha=\gamma$ καὶ $\beta=\delta$.

160. Ἵνα τὸ γινόμενον δύο μιγάδων ἀριθμῶν $\alpha+\beta i$ καὶ $\gamma+\delta i$ εἶναι πραγματικὸς ἀριθμὸς πρέπει καὶ ἀρκεῖ ὁ λόγος τῶν δύο πραγματικῶν μερῶν των νὰ ἰσοῦται μὲ τὸν ἀντίθετον λόγον τῶν φανταστικῶν μερῶν, πρέπει δηλαδὴ καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι $\frac{\alpha}{\gamma}=-\frac{\beta}{\delta}$.

Διότι ἔχομεν $(\alpha+\beta i)(\gamma+\delta i)=\alpha\gamma-\beta\delta+(\alpha\delta+\beta\gamma)i$.

Ἤδη ἵνα τὸ γινόμενον τοῦτο εἶναι πραγματικὸς ἀριθμὸς πρέπει νὰ ἰσοῦται μὲ μηδὲν τὸ φανταστικὸν μέρος $(\alpha\delta+\beta\gamma)i$ ἤτοι πρέπει νὰ εἶναι

$$\alpha\delta+\beta\gamma=0 \quad \text{ἐξ οὗ} \quad \frac{\alpha}{\gamma}=-\frac{\beta}{\delta}.$$

Ἀντιστρόφως ἂν εἰς τοὺς μιγάδας ἀριθμοὺς $\alpha+\beta i$ καὶ $\gamma+\delta i$ ὑφίσταται ἡ ἀναλογία $\frac{\alpha}{\gamma}=-\frac{\beta}{\delta}$ τότε τὸ γινόμενόν των εἶναι πραγματικὸς ἀριθμός. Διότι ἔστω $\frac{\alpha}{\gamma}=-\frac{\beta}{\delta}=\lambda$. Ἄρα $\alpha=\gamma\lambda$ καὶ $\beta=-\delta\lambda$ ὁ δὲ μιγὰς $\alpha+\beta i$ γίνεται $\lambda(\gamma-\delta i)$. Ἑπομένως ἔχομεν

$$(\alpha+\beta i)(\gamma+\delta i)=\lambda(\gamma-\delta i)(\gamma+\delta i)=\lambda(\gamma^2+\delta^2).$$

161. ***Διαίρεσις.*** Ἔστω ὅτι ζητοῦμεν νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον $(\alpha+\beta i):(\lambda+\mu i)$, ἔστω δὲ ὅτι εἶναι τοῦτο τὸ $x+yi$. Θὰ ἔχωμεν κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς διαιρέσεως.

$$\alpha+\beta i=(\lambda+\mu i)(x+yi)=(\lambda x-\mu y)+(\lambda y+\mu x)i$$

Ἄρα (§ 159) θὰ ἔχωμεν $\lambda x-\mu y=\alpha$ καὶ $\lambda y+\mu x=\beta$. Λύοντες δὲ τὸ σύστημα τοῦτο ὡς πρὸς ἀγνώστους τοὺς x καὶ y, εὑρίσκομεν

$$x=\frac{\alpha\lambda+\beta\mu}{\lambda^2+\mu^2} \quad \text{καὶ} \quad y=\frac{\beta\lambda-\alpha\mu}{\lambda^2+\mu^2}$$

$$\text{Ἄρα} \quad (\alpha+\beta i):(\lambda+\mu i)=\frac{\alpha\lambda+\beta\mu}{\lambda^2+\mu^2}+\left(\frac{\beta\lambda-\alpha\mu}{\lambda^2+\mu^2}\right)i$$

V. ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ.

162. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ $\alpha+\beta i$.

Ἔστω $x+yi$ ἡ ζητουμένη τετραγωνικὴ ρίζα. Ἔχομεν ἄρα

$$\sqrt{\alpha+\beta i}=x+yi \qquad (1)$$

ἢ ὑψοῦντες εἰς τὸ τετράγωνον

$$\alpha+\beta i=x^2-y^2+2xyi$$

Ἄρα (§ 159) $\quad x^2-y^2=\alpha \quad$ καὶ $\quad 2xy=\beta \qquad (2)$

Ἀλλὰ εἶναι γνωστὸν ὅτι $(x^2+y^2)^2=(x^2-y^2)^2+(2xy)^2$. Ἄρα

$$x^2+y^2=\sqrt{\alpha^2+\beta^2} \qquad (3)$$

Ἐκ τῆς πρώτης ἐκ τῶν (2) καὶ τῆς (3) εὑρίσκομεν

$$x^2=\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}+\alpha}{2} \quad \text{καὶ} \quad y^2=\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\alpha}{2}$$

Ἄρα ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ $\alpha+\beta i$ εἶναι

$$\pm\sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}+\alpha}{2}} \pm \sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\alpha}{2}}$$

Ἀσκήσεις πρὸς λύσιν.

Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις

457. $(2i\sqrt{3}+3i\sqrt{2})(4i\sqrt{3}-5i\sqrt{2})$ **458.** $(3i\sqrt{7}-5i\sqrt{2})(5i\sqrt{2}+3i\sqrt{7})$

459. $(1+2i)(2-3i)(3+4i)(4-5i)+(1-2i)(2+3i)(3-4i)(4+5i)$

460. $(\sqrt{9+40i}+\sqrt{9-40i})^2$

Νὰ ἁπλοποιηθοῦν αἱ παραστάσεις

461. $\dfrac{3+5i}{2-3i}$ **462.** $\dfrac{\sqrt{3}-i\sqrt{2}}{2\sqrt{3}-i\sqrt{2}}$ **463.** $\dfrac{(1+i)^2}{3-i}$

464. $\dfrac{(\alpha+\beta i)^2}{\alpha-\beta i}-\dfrac{(\alpha-\beta i)^2}{\alpha+\beta i}$ **465.** $\dfrac{1+i}{1-i}$ **466.** $\dfrac{(\alpha+i)^3-(\alpha-i)^3}{(\alpha+i)^2-(\alpha-i)^2}$

467. $(5-3i)^4$ **468.** $(\alpha+\beta i)^4$ **469.** $(3+\beta i)^5$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ζ΄.

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ Β΄. ΒΑΘΜΟΥ

I. ΛΥΣΕΙΣ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΣ $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$

163. Πᾶσα ἐξίσωσις τοῦ β΄ βαθμοῦ μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν σημειουμένων ἐπ' αὐτῆς πράξεων λαμβάνει τὴν γενικὴν μορφὴν

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=0 \tag{1}$$

Πρὸς εὕρεσιν τῶν ριζῶν της μεταφέρομεν τὸν γ εἰς τὸ β΄ μέλος καὶ φροντίζομεν νὰ καταστήσωμεν τὸ α΄ μέλος τέλειον τετράγωνον πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ 4α καὶ προσθέτοντες τὸ β^2 ὁπότε εὑρίσκομεν

$$4\alpha^2x^2+4\alpha\beta x+\beta^2=\beta^2-4\alpha\gamma$$

ἢ $$(2\alpha x+\beta)^2=\beta^2-4\alpha\gamma$$

ἢ $$2\alpha x+\beta=\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma} \tag{2}$$

Ἤδη ἐπιλύοντες τὴν ἐξίσωσιν (2) ἡ ὁποία εἶναι πρωτοβάθμιος ὡς πρὸς x εὑρίσκομεν

$$x=\frac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha} \tag{3}$$

Ὁ τύπος (3) μᾶς παρέχει τὴν λύσιν τῆς ἐξισώσεως (1). Ἂν ὁ β΄ τῆς ἐξισώσεως (1) εἶναι ἄρτιος καὶ θέσωμεν $\beta=2\beta_1$ τότε ὁ τύπος (3) λαμβάνει τὴν ἁπλουστέραν μορφὴν

$$x=\frac{-\beta_1\pm\sqrt{\beta_1^2-\alpha\gamma}}{\alpha} \tag{4}$$

II. ΣΧΕΣΕΙΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ ΚΑΙ ΡΙΖΩΝ ΤΗΣ $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$.

164. Ἂν παραστήσωμεν διὰ x_1 καὶ x_2 τὰς ρίζας τῆς ἐξισώσεως (1) ἔχομεν

$$x_1=\frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha} \quad \text{καὶ} \quad x_2=\frac{-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha} \tag{5}$$

Ἂν ἤδη τὰς δύο ρίζας x_1 καὶ x_2 τῆς σχέσεως (5) τὰς προσθέσωμεν κατὰ μέλη, εὑρίσκοσεν

$$x_1+x_2=-\frac{\beta}{\alpha} \tag{6}$$

Ἂν τὰς πολλαπλασιάσωμεν κατὰ μέλη εὑρίσκομεν

$$x_1 x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} \qquad (7)$$

καὶ ἂν τὰς ἀφαιρέσωμεν κατὰ μέλη εὑρίσκομεν

$$x_1 - x_2 = \frac{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{\alpha} \qquad (8)$$

Ἂν δὲ ὑποτεθῇ ὅτι εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1) ἔχομεν $\alpha=1$, τότε οἱ τύποι (6), (7) καὶ (8) γίνονται

$$x_1+x_2=-\beta, \quad x_1x_2=\gamma, \quad x_1-x_2=\sqrt{\beta^2-4\gamma} \qquad (9)$$

165. Ἐκ τῶν δύο πρώτων σχέσεων ἐκ τῶν (9) συμπεραίνομεν ὅτι δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν ἐξίσωσιν β΄ βαθμοῦ ἂν γνωρίζομεν τὸ ἄθροισμα καὶ τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν. Τότε οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι θὰ εἶναι ρίζαι τῆς σχηματισθησομένης ἐξισώσεως· π. χ. ἂν $x+y=6$ καὶ $xy=8$ τότε οἱ ἀριθμοὶ x καὶ y εἶναι ρίζαι τῆς ἐξισώσεως

$$z^2-6z+8=0$$

ἥτις ἔχει ρίζας 2 καὶ 4. Διότι πράγματι εἰς τὴν ἄνω ἐξίσωσιν τὸ μὲν ἄθροισμα τῶν ριζῶν της εἶναι 6 τὸ δὲ γινόμενόν των εἶναι 8.

Ἄρα $\qquad x=2, y=4 \quad$ ἢ $\quad x=4, y=2.$

Ἐπίσης ἂν θέλωμεν νὰ σχηματίσωμεν μίαν ἐξίσωσιν β΄ βαθμοῦ ἔχουσαν ὡς ρίζας δύο ἀριθμούς, ἔστω τοὺς 3 καὶ 5 τότε εὑρίσκομεν τὸ ἄθροισμα 8 καὶ τὸ γινόμενον 15 αὐτῶν, ἡ δὲ ζητουμένη ἐξίσωσις εἶναι

$$x^2-8x+15=0$$

ἡ ὁποία ἔχει ὡς συντελεστὴν τοῦ x^2 τὴν μονάδα, ὡς συντελεστὴν τοῦ x τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν μὲ ἀντίθετον σημεῖον καὶ ὡς γνωστὸν ὅρον τὸ γινόμενόν των.

166. α΄. Ἂν τὸ ὑπόρριζον $\beta^2-4\alpha\gamma$ τοῦ τύπου (3) δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον, τότε ἡ παράστασις $\frac{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}$ εἶναι ἀσύμμετρος ἀριθμός, ἔστω δὲ ὅτι ἰσοῦται αὕτη μὲ $\sqrt{\delta}$. Ἄρα αἱ ρίζαι (3) λαμβάνουν τὴν μορφὴν $\lambda\pm\sqrt{\delta}$, ἂν διὰ λ παραστήσωμεν τὸ κλάσμα $-\frac{\beta}{2\alpha}$. Ἤτοι παρατηροῦμεν ὅτι :

Ἡ ἐξίσωσις (1) ἂν ἔχῃ ὡς ρίζαν ἀσύμμετρόν τινα ἀριθμὸν $\lambda+\sqrt{\delta}$, τότε θὰ ἔχῃ ὡς ρίζαν καὶ τὸν συζυγῆ τούτου ἀριθμὸν ἤτοι τὸν $\lambda-\sqrt{\delta}$.

β΄. Ἂν τὸ ὑπόρριζον $\beta^2-4\alpha\gamma$ εἶναι ἀρνητικὸς ἀριθμός, τότε, σκεπτόμενοι κατ᾿ ἀνάλογον τρόπον παρατηροῦμεν ὅτι αἱ ρίζαι λαμβάνουν τὴν μορφὴν $\lambda\pm\delta i$. Ἄρα

Ἡ ἐξίσωσις (1) ἂν ἔχῃ ὡς ῥίζαν μιγάδα τινὰ ἀριθμὸν $\lambda+\delta i$, τότε θὰ ἔχῃ ὡς ῥίζαν καὶ τὸν συζυγῆ τούτου $\lambda-\delta i$.

Ὑπολογισμὸς τῶν παραστάσεων $x_1^\nu+x_2^\nu$ καὶ $\frac{1}{x_1^\nu}+\frac{1}{x_2^\nu}$

167. α΄. Ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ῥιζῶν.

Ἐπὶ τῇ βάσει τῆς ταυτότητος $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$ τῆς § 19 καὶ τῶν σχέσεων (6) καὶ (7) ἔχομεν

$$x_1^2+x_2^2=\frac{\beta^2-2\alpha\gamma}{\alpha^2} \qquad (10)$$

καὶ $$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1^2x_2^2}=\frac{\beta^2-2\alpha\gamma}{\gamma^2} \qquad (10')$$

β΄. Ἄθροισμα τῶν κύβων τῶν ῥιζῶν.

Ἐπὶ τῇ βάσει τῆς ταυτότητος $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$ τῆς § 22 καὶ τῶν σχέσεων (6) καὶ (7) ἔχομεν

$$x_1^3+x_2^3=\frac{3\alpha\beta\gamma-\beta^3}{\alpha^3} \qquad (11)$$

$$\frac{1}{x_1^3}+\frac{1}{x_2^3}=\frac{x_1^3+x_2^3}{x_1^3x_2^3}=\frac{3\alpha\beta\gamma-\beta^3}{\gamma^3} \qquad (11')$$

γ΄. Ἄθροισμα τῶν τετάρτων δυνάμεων τῶν ῥιζῶν

Ἐπὶ τῇ βάσει τῆς ταυτότητος $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$ ἔχομεν

$$x_1^4+x_2^4=(x_1^2+x_2^2)^2-2x_1^2x_2^2=\frac{(\beta^2-2\alpha\gamma)^2}{\alpha^4}-\frac{2\gamma^2}{\alpha^2}=\frac{\beta^4+2\alpha^2\gamma^2-4\alpha\beta^2\gamma}{\alpha^4}$$

καὶ $$\frac{1}{x_1^4}+\frac{1}{x_2^4}=\frac{x_1^4+x_2^4}{x_1^4x_2^4}=\frac{\beta^4+2\alpha^2\gamma^2-4\alpha\beta^2\gamma}{\gamma^4}$$

168. Γενικῶς, ἂν τὸ τριώνυμον $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ τὸ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ $x^{\nu-2}$ γίνεται $\alpha x^\nu+\beta x^{\nu-1}+\gamma x^{\nu-2}$, ὅπερ προφανῶς ἔχει ὡς ῥίζας καὶ τὰς x_1 καὶ x_2 (§ 69). Ἤδη, ἀφοῦ τὸ τριώνυμον ἔχει ὡς ῥίζαν τὴν x_1 ἕπεται ὅτι τοῦτο θὰ μηδενίζεται, ἂν ἀντὶ x τεθῇ τὸ x_1, ἤτοι

$$\alpha x_1^\nu+\beta x_1^{\nu-1}+\gamma x_1^{\nu-2}=0 \qquad (12)$$

Ὁμοίως, ἀφοῦ τοῦτο ἔχει ὡς ῥίζαν τὴν x_2 ἕπεται ὅτι θὰ μηδενίζεται ἂν ἀντὶ x τεθῇ τὸ x_2, ἤτοι

$$\alpha x_2^\nu+\beta x_2^{\nu-1}+\gamma x_2^{\nu-2}=0 \qquad (13)$$

Προσθέτοντες τὰς (12) καὶ (13) κατὰ μέλη εὑρίσκομεν

$$\alpha(x_1^\nu+x_2^\nu)+\beta(x_1^{\nu-1}+x_2^{\nu-1})+\gamma(x_1^{\nu-2}+x_2^{\nu-2})=0$$

ἢ $$x_1^\nu+x_2^\nu=-\frac{\beta}{\alpha}(x_1^{\nu-1}+x_2^{\nu-1})-\frac{\gamma}{\alpha}(x_1^{\nu-2}+x_2^{\nu-2})$$ ἢ (§ 164)

$$x_1^{\nu}+x_2^{\nu}=(x_1+x_2)(x_1^{\nu-1}+x_2^{\nu-1})-x_1x_2(x_1^{\nu-2}+x_2^{\nu-2}) \qquad (14)$$

Ἡ ἰσότης (14) μᾶς δίδει τὸ ἄθροισμα τῶν νυοστῶν δυνάμεων τῶν ῥιζῶν τοῦ τριωνύμου τοῦ β΄ βαθμοῦ, ἐφ' ὅσον εἶναι γνωστὸν τὸ ἄθροισμα τῶν ν—1 δυνάμεων καὶ τῶν ν—2 δυνάμεων αὐτῶν. Εἰς τὴν ἰσότητα (14) θέτοντες ν=2, 3, 4, εὑρίσκομεν τὰ εἰς τὴν παράγραφον 167 εὑρεθέντα ἐξαγόμενα

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι τὸ $\frac{1}{x_1^{\nu}}+\frac{1}{x_2^{\nu}}=\frac{x_1^{\nu}+x_2^{\nu}}{x_1^{\nu}\,x_2^{\nu}}$ ὅπερ δύναται νὰ ὑπολογισθῇ καθόσον ὁ μὲν ἀριθμητής του ὑπολογίζεται ἐκ τῆς (14), ὁ δὲ παρονομαστής του εἶναι γνωστὸς (§ 164).

Ἀσκήσεις πρὸς λύσιν.

Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις

470. $\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}=\frac{3\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2+3\beta^2}$

471. $\frac{x^5-\alpha^5}{x-\alpha}+\frac{x^5+\alpha^5}{x+\alpha}=\alpha x^3$

472. $\left(\frac{x-\alpha}{x+\alpha}\right)^2-7\left(\frac{x-\alpha}{x+\alpha}\right)+12=0$

473. $\left(\frac{10x-1}{10x+1}\right)\sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}=1$

474. $\frac{\alpha+x}{\alpha-x}+10\left(\frac{\alpha-x}{\alpha+x}\right)=7$

475. $\frac{x^2-7x+10}{x^2-7x+12}=\frac{x^2+3x-10}{x^2+3x-8}$

476. $\frac{1}{x^2+2x-3}+\frac{18}{x^2+2x+2}-\frac{18}{x^2+2x+1}=0$ (θέτομεν $x^2+2x=y$).

Νὰ δειχθῇ ὅτι εἶναι πραγματικαὶ αἱ ῥίζαι τῶν κάτωθι ἐξισώσεων, καὶ νὰ εὑρεθοῦν αὗται

477. $x^2-2\alpha x+\alpha^2=\beta^2+\gamma^2$

478. $(\alpha-\beta+\gamma)x^2+4(\alpha-\beta)x=\beta+\gamma-\alpha$

479. $\frac{1}{x-\alpha}+\frac{1}{x-\beta}+\frac{1}{x-\gamma}=0$

480. $\frac{\alpha^2}{x-\lambda}+\frac{\beta^2}{x-\mu}=1$

Νὰ δειχθῇ ὅτι εἶναι σύμμετροι αἱ ῥίζαι ἑκάστης ἐκ τῶν κάτωθι ἐξισώσεων, νὰ εὑρεθοῦν δὲ αὗται

481. $x^2-2\lambda x+\lambda^2-\nu^2+2\nu\mu-\mu^2=0$

482. $3\mu x^2-(2\mu+3\nu)x+2\nu=0$

483. $(\alpha+\gamma-\beta)x^2+2\gamma x+\beta+\gamma-\alpha=0$

484. $\alpha\beta\gamma^2x^2+3\alpha^2\gamma x+\beta^2\gamma x-6\alpha^2-\alpha\beta+2\beta^2=0$

Ἂν α καὶ β εἶναι αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $2x^2-3x-5=0$, νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ κάτωθι παραστάσεις χωρὶς νὰ εὑρεθοῦν αἱ ῥίζαι τῆς ἄνω ἐξισώσεως

485. $3\alpha^2+5\alpha\beta+3\beta^2$

486. $\alpha^3-2\alpha^2\beta-2\alpha\beta^2+\beta^3$

487. $\alpha^4+\beta^4$

488. $3^4\beta^7+\alpha^7\beta^4$

489. $\frac{\alpha^2}{\beta^2}+\frac{\beta^2}{\alpha^2}$

490. $\frac{2\alpha^2+\alpha\beta+2\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}$

Ἂν x΄ καὶ x΄΄ εἶναι αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $3x^2-5x-2=0$ νὰ σχηματισθῇ ἐξίσωσις β΄ βαθμοῦ ἔχουσα ῥίζας τὰς

491. $\frac{1}{x'}$ καὶ $\frac{1}{x''}$ **492.** $\frac{1}{x'^2}$ καὶ $\frac{1}{x''^2}$ **493.** $\frac{2}{x'}+3$ καὶ $\frac{2}{x''}+3$

494. $2x'-x''$ καὶ $2x''-x'$ **495.** $2x'^2 \; 3x''$ καὶ $2x''^2-3x'$

496. Δίδεται ἡ ἐξίσωσις $x^2+4x-12=0$. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμὸς $\frac{7x'+9}{9x'+7}+\frac{7x''+9}{9x''+7}$, (ἔνθα x' καὶ x'' εἶναι αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως) χωρὶς νὰ λυθῇ αὕτη. (Παν. Ἀθηνῶν 1931).

497. Δίδεται τὸ τριώνυμον $x^2+\alpha x+\beta$ ἔχον ῥίζας τὰς x' καὶ x''. Νὰ σχηματισθῇ ἕτερον τριώνυμον τοῦ β' βαθμοῦ ἔχον ῥίζας τὰς ϱ' καὶ ϱ'' ἔνθα $\varrho'=x'^3+x''^3$ καὶ $\varrho''=x'^2+x''^2-x'x''$ (Εὐελπ. 1932).

498. Δίδονται αἱ σχέσεις

$$2\alpha\beta-(\alpha+\beta)(x+y)+2xy=0 \quad \text{καὶ} \quad 2\gamma\delta-(\gamma+\delta)(x+y)+2xy=0$$

Νὰ δειχθῇ ὅτι $\frac{(x-y)^2}{4}=\frac{(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)}{(\alpha+\beta-\gamma-\delta)^2}$ (Πολυτ. 1932).

499. Νὰ σχηματισθῇ ἐξίσωσις β' βαθμοῦ τῆς ὁποίας αἱ ῥίζαι x' καὶ x'' νὰ ἐπαληθεύουν τὰς σχέσεις $x'x''+x'+x''=\alpha$ καὶ $x'x''+2(x'+x'')+4=0$.

Εἰς τὴν ἐξίσωσιν $x^2-2x+\mu-3=0$ ἔχουσαν ῥίζας x' καὶ x'', νὰ ὁρισθῇ ὁ μ εἰς τρόπον ὥστε νὰ εἶναι

500. $x'^2+x''^2=10$, **501.** $x'^3+x''^3=-4$ **502.** $x'^4+x''^4=2$

503. Εἰς τὴν ἐξίσωσιν $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ ἔχουσαν ῥίζας x' καὶ x'' νὰ ὁρισθῇ ὁ ἀριθμὸς λ εἰς τρόπον ὥστε ἡ ἐξίσωσις ἡ ἔχουσα ὡς ῥίζας τὰς $x'+\lambda$ καὶ $x''+\lambda$ νὰ μὴ ἔχῃ α') πρωτοβάθμιον ὅρον καὶ β') γνωστὸν ὅρον.

Ἂν λ καὶ μ εἶναι αἱ ῥίζαι τοῦ τριωνύμου $\alpha x^2+\beta x-\gamma$ νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τῶν παραστάσεων

504. $(\alpha\lambda+\beta)^{-2}+(\alpha\mu+\beta)^{-2}$ **505.** $(\alpha\lambda+\beta)^{-3}+(\alpha\mu+\beta)^{-3}$

506. $\lambda^2(\lambda^2\mu^{-1}-\mu)+\mu^2(\mu^2\lambda^{-1}-\lambda)$ **507.** $(\alpha\lambda+\beta)^{-4}+(\alpha\mu+\beta)^{-4}$

ΣΗΜ. Ἐπειδὴ τὸ λ εἶναι ῥίζα, ἔχομεν $\alpha\lambda^2+\beta\lambda-\gamma=0$ ἢ $\alpha\lambda+\beta=\frac{\gamma}{\lambda}$

Ὁμοίως $\alpha\mu+\beta=\frac{\gamma}{\mu}$ κ.λ.π.

508. Ἂν λ καὶ μ εἶναι αἱ ῥίζαι τοῦ τριωνύμου $\alpha x^2+\beta x+\gamma$, νὰ σχηματισθῇ τριώνυμον τοῦ β' βαθμοῦ ἔχον ῥίζας τὰς $\lambda^2+\mu^2$ καὶ $\lambda^{-2}+\mu^{-2}$.

509. Νὰ σχηματισθῇ ἐξίσωσις β' βαθμοῦ ἔχουσα ὡς ῥίζας τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων καὶ τὸ τετράγωνον τῆς διαφορᾶς τῶν ῥιζῶν τῆς ἐξισώσεως

$$2x^2+2(\lambda+\mu)x+\lambda^2+\mu^2=0.$$

510. Ἂν α, β, γ εἶναι τρεῖς δοθέντες ἀριθμοὶ καὶ x', x'' αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $x^2+\mu x+\nu=0$ νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη ἵνα ἔχωμεν τὴν ἰσότητα

$$\alpha x'^2+\beta x'+\gamma=\alpha x''^2+\beta x''+\gamma$$

511. Δίδεται ἡ ἐξίσωσις $x^2+\lambda x+\mu=0$. Νὰ εὑρεθῇ διὰ ποίας τιμὰς τῶν λ καὶ μ ἔχει αὕτη ὡς ῥίζας τοὺς ἀριθμοὺς λ καὶ μ ;

512. Ἂν λ καὶ μ εἶναι αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $x^2-\alpha x+\beta=0$ καὶ λ^3 καὶ μ^3 αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $x^2-Ax+B=0$, νὰ δειχθῇ ὅτι $A=\alpha(\alpha^2-3\beta)$ καὶ $B=\beta^3$.

III. ΣΗΜΕΙΟΝ ΤΟΥ ΤΡΙΩΝΥΜΟΥ ΤΟΥ Β' ΒΑΘΜΟΥ

169. Ἔστω τὸ τριώνυμον τοῦ β' βαθμοῦ

$$y=\alpha x^2+\beta x+\gamma \qquad (1)$$

τὸ ὁποῖον ἔχει ρίζας τὰς x_1 καὶ x_2. Τοῦτο δύναται νὰ τραπῇ εἰς γινόμενον ὡς κάτωθι

$$y=\alpha\left(x^2+\frac{\beta}{\alpha}x+\frac{\gamma}{\alpha}\right)$$

ἢ ἐπειδὴ (§ 164) εἶναι $x_1+x_2=-\dfrac{\beta}{\alpha}$ καὶ $x_1x_2=\dfrac{\gamma}{\alpha}$, ἔχομεν

$$y=\alpha[x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2]$$

ἢ $$y=\alpha(x^2-x_1x-x_2x+x_1x_2)$$

ἢ τέλος $$y=\alpha(x-x_1)(x-x_2) \qquad (2)$$

170. Ἤδη δίδοντες εἰς τὸν x πραγματικήν τινα τιμὴν μεταξὺ $-\infty$ καὶ $+\infty$, δυνάμεθα νὰ γνωρίζωμεν ἐκ τῶν προτέρων τί σημεῖον λαμβάνει τὸ τριώνυμον y. Πρὸς τοῦτο διακρίνομεν τρεῖς περιπτώσεις, ἤτοι:

α) ἂν $\beta^2-4\alpha\gamma<0$ τὸ τριώνυμον ἔχει ρίζας φανταστικὰς καὶ συζυγεῖς (§ 166 β') Ἔστωσαν αὗται $x_1=\lambda+\delta$ καὶ $x_2=\lambda-\delta i$. Τότε τὸ τριώνυμον γίνεται

$$y=\alpha(x-\lambda-\delta i)(x-\lambda+\delta i)=\alpha[(x-\lambda)^2+\delta^2]. \qquad (2)$$

Ἤδη, οἱανδήποτε πραγματικὴν τιμὴν καὶ ἂν λάβῃ ὁ x, ἡ διαφορὰ $x-\lambda$ ὑψουμένη εἰς τὸ τετράγωνον εἶναι πάντοτε θετική. Ἄρα ἡ ἐντὸς τῶν ἀγκυλῶν ποσότης εἶναι θετικὴ ὡς ἄθροισμα δύο τετραγώνων. Τὸ τριώνυμον λοιπὸν y λαμβάνει τὸ σημεῖον τοῦ συντελεστοῦ α.

β') Ἂν $\beta^2-4\alpha\gamma=0$ τότε τὸ τριώνυμον ἔχει ρίζας πραγματικὰς καὶ ἴσας. Ἔστωσαν $x_1=x_2=\varrho$. Ἄρα τοῦτο γίνεται

$$y=\alpha(x-\varrho)^2 \qquad (3)$$

Ἤδη, οἱανδήποτε πραγματικὴν τιμὴν καὶ ἂν λάβῃ ὁ x, ἡ διαφορὰ $x-\varrho$ ὑψουμένη εἰς τὸ τετράγωνον γίνεται πάντοτε θετική. Ἄρα τὸ τριώνυμον λαμβάνει πάντοτε τὸ σημεῖον τοῦ συντελεστοῦ α, ἐκτὸς ἂν $x=\varrho$, ὁπότε τὸ τριώνυμον γίνεται μηδέν.

γ') Ἂν $\beta^2-4\alpha\gamma>0$ τότε τὸ τριώνυμον ἔχει ρίζας πραγματικὰς καὶ ἀνίσους. Ἔστωσαν $x_1<x_2$.

Ἤδη, ἂν ὁ x λάβῃ τιμὰς μεγαλυτέρας ἀπὸ ἀμφοτέρας τὰς ρίζας ἤτοι ἂν $x_1<x_2<x$, τότε αἱ διαφοραὶ $x-x_1$ καὶ $x-x_2$ εἶναι θετικαί, ἄρα καὶ τὸ γινόμενόν των. Τὸ τριώνυμον λοιπὸν y ἔχει τὸ σημεῖον τοῦ α.

Ἂν ὁ x λάβῃ τιμὰς μικροτέρας ἀπὸ ἀμφοτέρας τὰς ρίζας ἤτοι ἂν $x<x_1<x_2$ τότε αἱ διαφοραὶ $x-x_1$ καὶ $x-x_2$ εἶναι ἀμφότεραι ἀρνη-

τικαί, ἄρα τὸ γινόμενόν των εἶναι θετικὸν καὶ συνεπῶς τὸ τριώνυμον ἔχει τὸ σημεῖον τοῦ α.

Ἂν δὲ ὁ x λάβῃ τιμὰς κειμένας μεταξὺ τῶν ῥιζῶν, ἤτοι ἂν $x_1 < x < x_2$, τότε ἡ μὲν διαφορὰ $x - x_1$ εἶναι θετικὴ ἡ δὲ $x - x_2$ εἶναι ἀρνητικὴ καὶ τὸ γινόμενόν των εἶναι ἀρνητικόν. Ἄρα τὸ τριώνυμον y λαμβάνει σημεῖον ἀντίθετον τοῦ συντελεστοῦ α. Συμπεραίνομεν λοιπὸν ὅτι :

Τὸ τριώνυμον τοῦ β' βαθμοῦ $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ λαμβάνει πάντοτε τὸ σημεῖον τοῦ συντελεστοῦ α δι᾽ ὅλας τὰς πραγματικὰς τιμὰς τοῦ x, ἐκτὸς τῆς περιπτώσεως καθ᾽ ἣν τοῦτο ἔχει ῥίζας πραγματικὰς καὶ ἀνίσους, ὁ δὲ x περιέχεται μεταξὺ τῶν ῥιζῶν (ὁπότε τὸ τριώνυμον λαμβάνει σημεῖον ἀντίθετον τοῦ σημείου τοῦ α).

Ἐπὶ παραδείγματι τὸ τριώνυμον $x^2 - 7x + 10$ ἔχον ῥίζας 2 καὶ 5 εἶναι θετικὸν δι᾽ὅλας τὰς τιμὰς τοῦ x τὰς μικροτέρας τοῦ 2 ἢ τὰς μεγαλυτέρας τοῦ 5, ἀρνητικὸν δὲ διὰ τὰς μεταξὺ 2 καὶ 5 εὑρισκομένας τιμὰς τοῦ x καὶ μηδὲν διὰ $x = 2$ ἢ $x = 5$.

Σημ. Τὸ συμπέρασμα τῆς § 170 ἔχει μεγίστην σπουδαιότητα, διότι ἐπὶ τῇ βάσει αὐτοῦ λύονται αἱ ἀνισότητες τοῦ β' βαθμοῦ ὡς καὶ ἀπειρία ἄλλων συναφῶν ἀσκήσεων.

Πότε τὸ τριώνυμον τοῦ β' βάθμοῦ εἶναι τέλειον τετράγωνον ἢ διαφορὰ ἢ ἄθροισμα δύο τετραγώνων.

171. ***Τὸ τριώνυμον $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ εἶναι τέλειον τετράγωνον ὅταν ἔχῃ ῥίζας πραγματικὰς καὶ ἴσας, ἀναλύεται εἰς ἄθροισμα δύο τετραγώνων ὅταν ἔχῃ ῥίζας φανταστικὰς καὶ εἰς διαφορὰν δύο τετραγώνων ὅταν ἔχῃ ῥίζας πραγματικὰς καὶ ἀνίσους.***

Εἰς τὴν σχέσιν (2) ἂν θέσωμεν ἀντὶ τῶν ῥιζῶν x_1 καὶ x_2 τὰς τιμάς των, εὑρισκομένας ἐκ τῆς σχέσεως (3) τῆς § 163, τότε τὸ τριώνυμον $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ λαμβάνει τὴν ἑξῆς μορφὴν μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν πράξεών τινων.

$$y = \alpha \left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} \right)^2 \right]. \qquad (4)$$

Ἤδη

α') Ἂν $\beta^2 - 4\alpha\gamma = 0$ τότε τὸ τριώνυμον ἔχει ῥίζας πραγματικὰς καὶ ἴσας ἡ δὲ σχέσις (4) γίνεται

$$y = \alpha \left(x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 \qquad (5)$$

σχέσις ἥτις εἶναι ἡ αὐτὴ μὲ τὴν (3). Ἄρα εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ τριώνυμον εἶναι τέλειον τετράγωνον.

β′) Ἂν $\beta^2-4\alpha\gamma>0$, δηλαδὴ ἂν τὸ τριώνυμον ἔχῃ ῥίζας πραγματικὰς καὶ ἀνίσους τότε ἡ σχέσις (4) γίνεται

$$y=\alpha\left[\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\delta^2\right] \tag{7}$$

ἤτοι τὸ τριώνυμον ἀναλύεται εἰς τὴν διαφορὰν τῶν δύο τετραγώνων $\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$ καὶ δ^2 ἔνθα $\delta=\frac{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}$

γ) ἂν $\beta^2-4\alpha\gamma<0$ τότε τὸ τριώνυμον ἔχει ῥίζας φανταστικὰς ἡ δὲ σχέσις (4) γίνεται

$$y=\alpha\left[\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2+\delta^2\right] \tag{5}$$

σχέσις ἥτις εἶναι ἡ ἰδία μὲ τὴν (2). Ἄρα εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην τὸ τριώνυμον ἀναλύεται εἰς τὸ ἄθροισμα τῶν δύο τετραγώνων $\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$ καὶ δ^2.

Ἀσκήσεις πρὸς λύσιν.

513. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λ εἰς τρόπον ὥστε τὸ τριώνυμον $5x^2-4x+\lambda$ νὰ εἶναι α′ τέλειον τετράγωνον, β′ διαφορὰ δύο τετραγώνων καὶ γ′ ἄθροισμα δύο τετραγώνων.

514. Τὸ αὐτὸ διὰ τὸ τριώνυμον $(\lambda+2)x^2-4(\lambda+1)x+4\lambda+1$

515. Τὸ αὐτὸ διὰ τὸ τριώνυμον $(\lambda+9)x^2-(30+\lambda)x+\lambda-15$

516. Νὰ ὁρισθῇ ὁ ν ἵνα τὸ πολυώνυμον $\alpha x^2+\beta x+\gamma+\nu(x^2+1)$ εἶναι τέλειον τετράγωνον. Νὰ δειχθῇ δὲ ὅτι ἡ εὑρισκομένη ὡς πρὸς ν ἐξίσωσις ἔχει πάντοτε ῥίζας πραγματικάς.

517. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη ἵνα ἡ παράστασις $(\alpha+\beta x)^2+(\alpha'+\beta'x)^2$ εἶναι τέλειον τετράγωνον

518. Τὸ αὐτὸ διὰ τὴν παράστασιν $\alpha x^2+2\beta xy+\gamma y^2$

519. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἂν ἑκάστη ἐκ τῶν παραστάσεων

$$(\alpha+\beta x)^2+(\alpha'+\beta'x)^2 \quad \text{καί} \quad (\alpha+\gamma x)^2+(\alpha'+\gamma'x)^2$$

εἶναι τέλειον τετράγωνον, τότε καὶ ἡ παράστασις $(\beta+\gamma x)^2+(\beta'+\gamma'x)^2$ θὰ εἶναι τέλειον τετράγωνον

520. Νὰ ὁρισθῇ ὁ Α ἵνα τὸ πολυώνυμον

$$\alpha x^2+\beta xy+\gamma y^2-A(x^2+y^2)$$

εἶναι τέλειον τετράγωνον

521. Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ λ ἡ παράστασις $y^2+2xy+2x+\lambda y-3$ δύναται τὰ ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον δύο συμμέτρων παραγόντων ;

522. Τὸ αὐτὸ διὰ τὴν παράστασιν $2x^2+\lambda xy+3y^2-5y-2$

523. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ παράστασις $A(x^2-y^2)-xy(B-\Gamma)$ δύναται νὰ ἀναλυθῇ πάντοτε εἰς γινόμενον δύο πραγματικῶν πρωτοβαθμίων παραγόντων ὡς πρὸς x καὶ y.

IV. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΡΙΖΙΚΑ

Ἐκτὸς τῶν θεωρημάτων τῶν § 65 — 71 ἅτινα ἀναφέρονται εἰς ἐξισώσεις παντὸς βαθμοῦ, ἔχομεν καὶ τὰ κάτωθι :

172. Θεώρημα α'. ***Ἂν τὸ α' μέλος μιᾶς ἐξισώσεως εἶναι γινόμενον παραγόντων περιεχόντων τὸν ἄγνωστον τῆς ἐξισώσεως τὸ δὲ β' μέλος ταύτης εἶναι μηδέν, τότε ρίζαι τῆς ἐξισώσεως ταύτης εἶναι αἱ ρίζαι ἑκάστου ἐκ τῶν παραγόντων τούτων τοῦ α' μέλους ἐξισουμένου μὲ μηδέν,***

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις

$$ΑΒΓ=0 \qquad (1)$$

ἔνθα Α, Β, Γ, εἶναι ἀκέραια πολυώνυμα περιέχοντα τὸν αὐτὸν ἄγνωστον, ἔστω τὸν x. Θὰ δείξωμεν ὅτι ρίζαι ταύτης εἶναι αἱ ρίζαι ἑκάστης ἐκ τῶν ἐξισώσεων

$$Α=0, \quad Β=0, \quad Γ=0 \qquad (2)$$

Πράγματι, τὸ α' μέλος τῆς (1) ὡς γινόμενον τριῶν παραγόντων θὰ ἰσοῦται μὲ μηδὲν ὅταν εἷς ἐκ τῶν παραγόντων τούτων ἰσοῦται μὲ μηδὲν ἤτοι ὅταν Α=0 ἢ Β=0 ἢ Γ=0. Ἀλλὰ τότε ἡ (1) ὡς ἐπαληθευομένη ἢ διὰ Α=0 ἢ διὰ Β=0 ἢ διὰ Γ=0, θὰ ἔχῃ ὡς ρίζας καὶ τὰς ρίζας μιᾶς ἐκ τῶν ἐξισώσεων (2).

Παρατήρησις. Ὅταν τὸ πρῶτον μέλος μιᾶς ἐξισώσεως δύναται νὰ τραπῇ εἰς γινόμεοον τὸ δὲ β' μέλος της εἶναι μηδέν, τότε τρέπομεν τὸ α' μέλος της εἰς γινόμενον καὶ εὑρίσκομεν τὰς ρίζας τῆς ἐξισώσεως ἐξισοῦντες μὲ μηδὲν ἕκαστον ἐκ τῶν παραγόντων τοῦ α' μέλους της π. χ. νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $3x^3-2x^2-3x+2=0$.

Τὸ α' μέλος ταύτης γράφεται $x^2(3x-2)-(3x-2)$ ἢ καὶ $(x^2-1)(3x-2)$. Ἄρα ἡ ἐξίσωσις γίνεται $(x^2-1)(3x-2)=0$ ἐξ ἧς ἢ $x^2-1=0$ καὶ ἄρα $x=\pm 1$ ἢ $3x-2=0$ καὶ ἄρα $x=\frac{2}{3}$. Αἱ ρίζαι λοιπὸν ταύτης εἶναι $1, -1, \frac{2}{3}$.

173. Θεώρημα β'. ***Ὅταν ἀμφότερα τὰ μέλη μιᾶς ἐξισώσεως ὑψωθοῦν εἰς τὸ τετράγωνον, τότε ἡ προκύπτουσα ἐξίσωσις, ἐκτὸς τῶν ριζῶν τῆς δοθείσης, θὰ ἔχῃ ὡς ρίζας καὶ τὰς ρίζας τῆς ἐξισώσεως τῆς διαφερούσης ἀπὸ τὴν δοθεῖσαν κατὰ τὸ σημεῖον τοῦ β' μέλους της.***

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις

$$Α=Β \qquad (3)$$

Ἂν ὑψώσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη ταύτης εἰς τὸ τετράγωνον, προκύπτει ἡ ἐξίσωσις

$$Α^2=Β^2 \qquad (4)$$

Θὰ δείξωμεν ὅτι ἡ ἐξίσωσις (4) ἐκτὸς τῶν ριζῶν τῆς (3) θὰ ἔχῃ ὡς ρίζας καὶ τὰς ρίζας τῆς

$$Α=-Β \qquad (5)$$

Διότι ἡ ἐξίσωσις (4) γράφεται

$$A^2-B^2=0 \quad ἢ \quad (A+B)(A-B)=0 \qquad (5')$$

Ἤδη ἐκ τῆς (4) συνάγομεν ὅτι (§ 172) θὰ εἶναι ἢ $A-B=0$ ἐξ οὗ $A=B$, ἢ $A+B=0$ ἐξ οὗ $A=-B$. Ἡ ἐξίσωσις λοιπὸν (4) ὡς περιέχουρα καὶ τὴν (3) καὶ τὴν (5), θὰ ἔχῃ καὶ τὰς ρίζας της (3) καὶ τὰς ρίζας τῆς (5).

174. Θεώρημα γ΄. ***Τοῦ ν ὄντος ἀκεραίου καὶ θετικοῦ, πᾶσα λύσις τῆς ἐξισώσεως $A=B$ εἶναι λύσις καὶ τῆς ἐξισώσεως $A^\nu=B^\nu$.***

Διότι ἡ ἐξίσωσις $A^\nu=B^\nu$ γράφεται

$$A^\nu-B^\nu=0 \qquad (6)$$

Τὸ α΄ μέλος τῆς (6) διαιρεῖται διὰ $A-B$ (§ 27). Ἄρα ἡ (6) γράφεται

$$(A-B)(A^{\nu-1}+BA^{\nu-2}+B^2A^{\nu-3}+\ldots+B^{\nu-1})=0 \qquad (6')$$

Ἤδη παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ἐξίσωσις (6΄) περιέχει τὴν ἐξίσωσιν $A-B=0$ ἢ $A=B$. Ἄρα (§ 172) θὰ ἔχῃ αὕτη καὶ τὰς ρίζας τῆς ἐξισώσεως $A=B$.

Λύσις ἐξισώσεων μὲ ριζικά.

175. Πρὸς λύσιν μιᾶς ἐξισώσεως περιεχούσης ριζικά, φροντίζομεν νὰ ἀπομονώσωμεν τὸν ὅρον τὸν περιέχοντα τὸ ριζικὸν καὶ κατόπιν, ἂν ἡ ρίζα εἶναι β΄ βαθμοῦ, δι᾽ ὑψώσεως εἰς τὸ τετράγωνον ἐξαλείφομεν τὸ ριζικόν. Ἡ οὕτω προκύπτουσα ἐξίσωσις, ἐκτὸς τῶν ριζῶν τῆς δοθείσης, θὰ ἔχῃ καὶ τὰς ρίζας τῆς προκυπτούσης δι᾽ ἀλλαγῆς τοῦ σημείου τοῦ ριζικοῦ της (§ 173). Διὰ τοῦτο ἐκ τῶν εὑρισκομένων ριζῶν πρέπει νὰ ἴδωμεν ποία ἀνήκει εἰς τὴν δοθεῖσαν καὶ ποία εἰς τὴν **συζυγῆ** ταύτης, δηλαδὴ εἰς τὴν διαφέρουσαν ἀπὸ ταύτην κατὰ τὸ σημεῖον τοῦ ριζικοῦ. Ἐνίοτε, ὅταν τὰ ριζικὰ εἶναι περισσότερα, παρίσταται ἀνάγκη νὰ ὑψώσωμεν δύο φορὰς εἰς τὸ τετράγωνον κλπ.

176. Παραδείγματα λύσεως ἐξισώσεων μὲ ριζικὰ ἔστωσαν τὰ κάτωθι:

α΄. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις

$$x-\sqrt{25-x^2}=1 \qquad (7)$$

Αὕτη γράφεται $\quad x-1=\sqrt{25-x^2}$

ὑψουμένη δὲ εἰς τὸ τετράγωνον κλπ, δίδει $x^2-x-12=0$ ἡ ὁποία ἔχει ρίζας τὰς 4 καὶ -3. Ἀλλ᾽ ἐκ τῶν δύο τούτων ριζῶν μόνον ἡ 4 ἐπαληθεύει τὴν (7) ἡ δὲ -3 ἐπαληθεύει τὴν συζυγῆ ταύτης.

$$x+\sqrt{25-x^2}=1 \qquad (7')$$

Ἄρα ἡ ἐξίσωσις (7) ἔχει ὡς ρίζαν τὴν $x=4$.

β'. Ὁμοίως ἡ ἐξίσωσις

$$\sqrt{x+7}+\sqrt{x+2}=\sqrt{6x+13} \quad (8)$$

Ὑψοῦντες εἰς τὸ τετράγωνον κλπ. εὑρίσκομεν

$$\sqrt{x^2+9x+14}=2x+2,$$

ὑψοῦντες δὲ πάλιν εἰς τὸ τετράγωνον κλπ. εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$3x^2-x-10=0$$

ἥτις ἔχει ρίζας τὰς 2 καὶ $-\frac{5}{3}$. Ἐξ αὐτῶν μόνον ἡ 2 ἐπαληθεύει τὴν (8). Ἡ ἄλλη ρίζα ἐπαληθεύει τὴν ἐξίσωσιν

$$\sqrt{x+7}-\sqrt{x+2}=\sqrt{6x+13} \quad (8')$$

177. Ἂν τὰ ριζικὰ εἶναι γ' βαθμοῦ, τότε ὑψώνομεν εἰς τὸν κύβον ἐπὶ τῇ βάσει τῆς ταυτότητος (7) ἢ (8) τῆς § 22 κλπ. ὡς εἰς τὸ κάτωθι παράδειγμα.

Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις

$$\sqrt[3]{72-x}-\sqrt[3]{16-x}=2 \quad (9)$$

Αὕτη ὑψουμένη εἰς τὸν κύβον (§ 22 σχέσις 8) δίδει

$$(72-x)-(16-x)-3\sqrt[3]{(72-x)(16-x)}\,[\sqrt[3]{72-x}-\sqrt[3]{16-x}]=8$$

ἢ λόγῳ τῆς (9) καὶ μετὰ τὰς ἁπλοποιήσεις κλπ.

$$8=\sqrt[3]{(72-x)(16-x)} \quad (9')$$

Ἡ (9') ὑψουμένη εἰς τὸν κύβον κλπ. δίδει τὴν ἐξίσωσιν $x^2-88x+640=0$ ἔχουσαν ρίζας τὰς 80 καὶ 8, αἱ ὁποῖαι ἐπαληθεύουν ἀμφότεραι τὴν ἐξίσωσιν (9). Αἱ ρίζαι λοιπὸν τῆς (9) εἶναι 80 καὶ 8.

178. Πολλάκις διὰ νὰ λύσωμεν μίαν ἐξίσωσιν μὲ ριζικά, τὴν ὁποίαν δὲν δυνάμεθα νὰ λύσωμεν διὰ τῶν συνήθων ἀνωτέρω τρόπων, χρησιμοποιοῦμεν εἰδικὰ τεχνάσματα, ἐξαρτώμενα ἐκ τοῦ εἴδους ἑκάστης ἐξισώσεως, ὡς φαίνεται εἰς τὰ κάτωθι παραδείγματα.

α'. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις

$$2x^2-3\sqrt{2x^2-7x+7}=7x-3 \quad (10)$$

Αὕτη γράφεται

$$(2x^2-7x+7)-3\sqrt{2x^2-7x+7}-4=0,$$

θέτοντες δὲ $2x^2-7x+7=y^2$ εὑρίσκομεν

$$y^2-3y-4=0 \quad (10')$$

Ἡ ἐξίσωσις (10') ἔχει ρίζας 4 καὶ —1. Ἄρα ἔχομεν πρὸς λύσιν τὰς ἑξῆς δύο ἐξισώσεις

$$2x^2-7x-9=0 \quad \text{καὶ} \quad 2x^2-7x+6=0 \qquad (11)$$

Ἡ α′ ἐκ τῶν (11) ἔχει ρίζας τὰς -1 καὶ $\frac{9}{2}$ ἡ δὲ β′ τὰς 2 καὶ $\frac{3}{2}$.

Ἐκ τῶν τεσσάρων ἀνωτέρω ριζῶν μόνον αἱ δύο πρῶται εἶναι ρίζαι τῆς (10) αἱ δὲ δύο ἄλλαι εἶναι ρίζαι τῆς συζυγοῦς πρὸς τὴν (10).

β′. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις

$$\sqrt{x^2+4x-5}-\sqrt{x^2-12x+11}=\sqrt{x^2-17x+16} \qquad (12)$$

Τρέποντες τὰ ὑπόρριζα εἰς γινόμενα εὑρίσκομεν

$$\sqrt{(x-1)(x+5)}-\sqrt{(x-1)(x-11)}=\sqrt{(x-1)(x-16)}$$

Ἤδη παρατηροῦμεν ὅτι ὑπάρχει κοινὸς παράγων ὁ $\sqrt{x-1}$, διαιροῦντες δὲ διὰ τούτου ὁπότε (§ 71) ἔχομεν

$$x-1=0 \quad \text{ἐξ ἧς} \quad x=1.$$

μένει δὲ ἡ ἐξίσωσις

$$\sqrt{x+5}-\sqrt{x-11}=\sqrt{x-16} \qquad (13)$$

ἡ ὁποία λυομένη ὡς ἡ β′ τῆς § 176 δίδει $x_1=20$ καὶ $x_2=-\frac{16}{3}$.

Ἄρα αἱ ρίζαι τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶναι αἱ $x_1=1$ καὶ $x_2=20$ διότι ἡ τρίτη ρίζα ἐπαληθεύει τὴν ἐξίσωσιν τὴν διαφέρουσαν ἀπὸ τὴν (13) κατὰ τὸ σημεῖον τοῦ β′ ριζικοῦ.

γ′. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις

$$\sqrt{3x^2-7x-30}-\sqrt{2x^2-7x-5}=x-5 \qquad (14)$$

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ διαφορὰ τῶν ὑπορρίζων τοῦ α′ μέλους δίδει x^2-25 ἤτοι

$$(3x-7x-30)-(2x^2-7x-5)=x^2-25 \quad \text{ἢ}$$

$$(\sqrt{3x^2-7x-30}-\sqrt{2x^2-7x-5})\times$$

$$\times(\sqrt{3x^2-7x-30}+\sqrt{2x^2-7x-5})=(x-5)(x+5)$$

Ἂν διαιρέσωμεν ταύτην μετὰ τῆς (14) κατὰ μέλη εὑρίσκομεν

$$\sqrt{3x^2-7x-30}+\sqrt{2x^2-7x-5}=x+5 \qquad (15)$$

Ἤδη προσθέτοντες τὰς (14) καὶ (15) κατὰ μέλη εὑρίσκομεν

$$\sqrt{3x^2-7x-30}=x \qquad (16)$$

ἥτις λυομένη ὡς ἡ α′ τῆς § 176 δίδει ρίζας $x_1=6$ καὶ $x_2=-\frac{5}{2}$.

Ἐκ τῶν δύο ριζῶν μόνον ἡ α′ ἐπαληθεύει τὴν (14).

Ἀσκήσεις πρὸς λύσιν.

Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις

524. $\sqrt{x-5}+\sqrt{x+4}=\dfrac{45}{\sqrt{x+4}}$

525. $\dfrac{6\sqrt{x}-11}{3\sqrt{x}}=\dfrac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+6}$

526. $\dfrac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}-\dfrac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}=8\sqrt{x^2-1}$

527. $\dfrac{\sqrt{3x^3-15x^2-8x+4}-\sqrt{2x^2-10x-4}}{\sqrt{3x^3-15x^2-8x+4}+\sqrt{2x^2-10x-4}}=\dfrac{\sqrt{6x-4}-2}{\sqrt{6x-4}+2}$

528. $\dfrac{\sqrt{7x-12}-\sqrt{x+1}-\sqrt{9x-2}}{\sqrt{7x-12}+\sqrt{x+1}+\sqrt{9x-2}}=\dfrac{3}{5}$

529. $x^2+6\sqrt{x^2-2x+5}=11+2x$

530. $9x-3x^2+4\sqrt{x^2-3x+5}=11$

531. $4x^2+5x-2\sqrt{3x^2-5x+2}=(15-2x)x$

532. $(x+1)^2=5\sqrt{x^2+2x+2}-5$

533. $\sqrt{x^2+4x-21}+\sqrt{x^2-x-6}+\sqrt{6x^2-5x-39}$

534. $\sqrt{4x^2-17x+15}=\sqrt{x^2-3x}+\sqrt{x^2-9}$

535. $\sqrt{4x^2+8x-28}+\sqrt{3x^2+8x-24}=x+2$

536. $\sqrt{7x^2-11x+6}+\sqrt{6x^2-11x+15}=2(x+3)$

537. $\sqrt{x^2+\alpha x-1}-\sqrt{x^2+\beta x-1}=\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}$

538. $\sqrt[3]{x+3}-\sqrt[3]{x-4}=1$

539. $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x-7}=\sqrt[3]{4x-5}$

540. $\sqrt[3]{\alpha+x}+\sqrt[3]{\alpha-x}=\sqrt[3]{\beta}$

541. $\dfrac{1-\alpha x}{1+\alpha x}\sqrt{\dfrac{1+\beta x}{1-\beta x}}=1$

542. $\sqrt[3]{\alpha+x}-\sqrt[3]{\alpha-x}=\sqrt[6]{\alpha^2-x^2}$ (Πολ. 1932)

543. $\sqrt[3]{\alpha+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{\alpha-\sqrt{x}}=\beta$

544. $\sqrt{\alpha^2-x^2}+\sqrt{2\alpha x-x^2}=\beta$

545. $\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{2x+2}+\sqrt[3]{3x+2}=0$

546. $\sqrt[3]{x+\alpha}+\sqrt[3]{x+\beta}+\sqrt[3]{x+\gamma}=0$

547. $(x-1)^{\frac{1}{3}}+(x-2)^{\frac{1}{3}}-(2x-3)^{\frac{1}{3}}=0$

548. $(\alpha+x)^{\frac{2}{3}}+4(\alpha-x)^{\frac{2}{3}}=5(\alpha^2-x^2)^{\frac{1}{3}}$

549. $\dfrac{\sqrt[\nu]{\alpha+x}}{x}+\dfrac{\sqrt[\nu]{\alpha+x}}{\alpha}=\dfrac{\sqrt[\nu]{x}}{\beta}$

Νὰ γίνουν ῥηταὶ αἱ κάτωθι παραστάσεις.

550. $\sqrt[3]{\alpha^2x^3}+\sqrt[3]{\beta^3y^3}=\sqrt[3]{\gamma^4}$ **551.** $\sqrt[3]{\alpha\beta}(\sqrt[3]{\alpha^2}+\sqrt[3]{\beta^2})^3=\gamma^3$

V. ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ

$$\sqrt{A\pm\sqrt{B}}$$

179. ***Αἱ παραστάσεις τῆς μορφῆς $\sqrt{A\pm\sqrt{B}}$, τότε μόνον δύνανται νὰ μετασχηματισθοῦν εἰς ἄθροισμα ἢ διαφορὰν ἁπλῶν ῥιζικῶν, ὅταν ἡ διαφορὰ A^2-B εἶναι τέλειον τετράγωνον.***

Ἔστω ὅτι εἶναι

$$\sqrt{A+\sqrt{B}}=\sqrt{x}+\sqrt{y} \qquad (1)$$

ὁπότε (§ 139) θὰ εἶναι καὶ

$$\sqrt{A-\sqrt{B}}=\sqrt{x}-\sqrt{y} \qquad (1')$$

ἔνθα οἱ ἀριθμοὶ x καὶ y εἶναι σύμμετροι καὶ μὴ τέλεια τετράγωνα. Ὑψοῦντες τὴν (1) καὶ τὴν (1′) εἰς τὸ τετράγωνον ἔχομεν

$$A+\sqrt{B}=x+y+2\sqrt{xy} \qquad (2)$$
$$A-\sqrt{B}=x+y-2\sqrt{xy} \qquad (2')$$

Διὰ προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως τῶν (2) καὶ (2′) κατὰ μέλη εὑρίσκομεν

$$x+y=A \text{ καὶ } 2\sqrt{xy}=\sqrt{B} \text{ ἢ } xy=\frac{B}{4} \qquad (3)$$

Ἑπομένως ἐκ τῶν σχέσεων (3) οἱ ἀριθμοὶ x καὶ y, τῶν ὁποίων ἔχομεν τὸ ἄθροισμα καὶ τὸ γινόμενον, θὰ εἶναι (§ 165) ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως τοῦ β′ βαθμοῦ

$$z^2-Az+\frac{B}{4}=0 \qquad (4)$$

ἡ ὁποία ἐπιλυομένη δίδει

$$x=\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2} \quad \text{καὶ} \quad y=\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2} \qquad (5)$$

Ἐκ τῶν σχέσεων (5) προκύπτει ὅτι οἱ ἀριθμοὶ x καὶ y τότε μόνον εἶναι σύμμετροι, καὶ ἄρα ἡ ἀνάλυσις (1) εἶναι ὠφέλιμος, ὅταν τὸ ὑπόρριζον A^2-B εἶναι τέλειον τετράγωνον.

Ἂν λοιπὸν ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ ὑπόρριζον A^2-B εἶναι τέλειον τετράγωνον καὶ θέσωμεν $A^2-B=\Gamma^2$ τότε αἱ σχέσεις (5) γίνονται

$$x=\frac{A+\Gamma}{2} \quad \text{καὶ} \quad y=\frac{A-\Gamma}{2}$$

αἱ δὲ σχέσεις (1) καὶ (1′) γίνονται

$$\sqrt{A+\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\Gamma}{2}}+\sqrt{\frac{A-\Gamma}{2}} \qquad (6)$$

$$\sqrt{A-\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\Gamma}{2}}-\sqrt{\frac{A-\Gamma}{2}} \qquad (6')$$

Παράδειγμα ἔστω καὶ τὸ ἑξῆς :

Νὰ τραπῇ εἰς ἁπλᾶ ριζικὰ ἡ παράστασις $\sqrt{\alpha+\beta+\sqrt{2\alpha\beta+\beta^2}}$
Ἔχομεν $A^2-B=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta-\beta^2=\alpha^2$. Ἄρα $\Gamma=\alpha$ καὶ ἐπομένως ἐπὶ τῇ βάσει τῆς σχέσεως (6) ἔχομεν

$$\sqrt{\alpha+\beta+\sqrt{2\alpha\beta+\beta^2}}=\sqrt{\frac{2\alpha+\beta}{2}}+\sqrt{\frac{\beta}{2}}$$

Ἀσκήσεις πρὸς λύσιν.

Νὰ ἁπλοποιηθοῦν αἱ παραστάσεις

552. $\dfrac{1}{\sqrt{6-2\sqrt{5}}}-\dfrac{1}{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}$

553. $\dfrac{1}{\sqrt{17+4\sqrt{15}}}+\dfrac{1}{\sqrt{17-4\sqrt{15}}}$

554. $\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}+\dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{3}}}}$

555. $\sqrt[4]{28-16\sqrt{3}}$

556. $\sqrt{-\sqrt{3}+\sqrt{3+8\sqrt{7+4\sqrt{3}}}}$

557. $\dfrac{\sqrt{3+\sqrt{5}}}{\sqrt{2+\sqrt{7+3\sqrt{5}}}}$

558. $\sqrt{\alpha\gamma^2+\beta\delta^2+2\gamma\delta\sqrt{\alpha\beta}}$

559. $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}$

560. $\sqrt{\alpha^4x^4-\alpha^3\beta^2-\alpha^2\beta^3-2\alpha^3\beta x^2 i\sqrt{\alpha+\beta}}$

561. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $(7-4\sqrt{3})x^2-(2-\sqrt{3})x-6=0$

562. Πότε ἡ παράστασις $\sqrt[3]{\alpha+\sqrt{\beta}}$ δύναται νὰ μετασχηματισθῇ εἰς τὴν παράστασιν $x+\sqrt{y}$.

VI. ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ Β΄. ΚΑΙ ΑΝΩΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ.

180. Ἡ λύσις τῆς ἀνισότητος τοῦ β΄ βαθμοῦ εἶναι ἄμεσος ἐφαρμογὴ τοῦ σημείου τοῦ τριωνύμου τοῦ β΄ βαθμοῦ (§ 170) ὡς εἰς τὰ κάτωθι παραδείγματα φαίνεται.

α) Νὰ εὑρεθοῦν τιμαὶ τοῦ x ἐπαληθεύουσαι τὴν ἀνισότητα

$$x^2-8x+12>0$$

Αἱ ρίζαι τοῦ τριωνύμου τοῦ πρώτου μέλους εἶναι 2 καὶ 6. Ἄρα ἵνα τὸ πρῶτον μέλος εἶναι θετικόν, δηλαδὴ ὁμόσημον πρὸς τὸν συντελεστὴν τοῦ πρώτου ὅρου του, πρέπει ὁ x νὰ λάβῃ τιμὰς κειμένας ἐκτὸς τῶν ριζῶν, ἤτοι ἢ μεγαλυτέρας τοῦ 6 ἢ μικροτέρας τοῦ 2. Ἄρα ἡ ἀνισότης ἀληθεύει διὰ $x>6$ ἢ $x<2$.

β) Τὸ αὐτὸ διὰ τὴν ἀνισότητα $x^2-3x-10<0$.

Αἱ ρίζαι τοῦ τριωνύμου τοῦ πρώτου μέλους εἶναι -2 καὶ 5. Ἄρα ἵνα τὸ πρῶτον μέλος εἶναι ἀρνητικόν, δηλαδὴ ἑτερόσημον πρὸς τὸν συντελεστὴν τοῦ πρώτου ὅρου του, πρέπει ὁ x νὰ περιέχεται μεταξὺ τῶν ριζῶν, πρέπει δηλαδὴ νὰ εἶναι $-2<x<5$.

γ) Τὸ αὐτὸ διὰ τὴν ἀνισότητα $x^2-3x+4>0$.

Τὸ τριώνυμον τοῦ πρώτου μέλους ἔχει ρίζας φανταστικάς. Ἄρα τοῦτο εἶναι πάντοτε ὁμόσημον πρὸς τὸν συντελεστὴν τοῦ πρώτου ὅρου του, ἤτοι πάντοτε θετικόν. Ἡ ἀνισότης λοιπὸν ἀληθεύει δι' ὅλας τὰς πραγματικὰς τιμὰς τοῦ x. Ἡ ἑτερόστροφος ἀνισότης $x^2-3x+4<0$, δὲν ἀληθεύει δι' οὐδεμίαν πραγματικὴν τιμὴν τοῦ x.

180. Ὅταν ἔχωμεν πρὸς λύσιν ἀνισότητα μεγαλυτέρου βαθμοῦ, τότε τρέπομεν τὸ α΄ μέλος της εἰς γινόμενον ἀφοῦ καταστήσωμεν τὸ β΄ μέλος ἴσον μὲ μηδέν.

Μετὰ κατατάσσομεν τοὺς παράγοντας τοῦ α΄ μέλους κατὰ σειρὰν μεγέθους ριζῶν καί, δίδοντες εἰς τὸν ἄγνωστον x τιμὰς ἀπὸ $-\infty$ μέχρι $+\infty$ καὶ κειμένας μεταξὺ τῶν διαφόρων ριζῶν τοῦ α΄ μέλους, παρακολουθοῦμεν τὸ σημεῖον ὅπερ λαμβάνει τὸ α΄ μέλος, συμπεραίνομεν δὲ τέλος διὰ ποίας τιμὰς τοῦ ἀγνώστου x ἀληθεύει ἡ ἀνισότης, ὡς εἰς τὰ κάτωθι παραδείγματα φαίνεται.

α΄. Νὰ εὑρεθοῦν τιμαὶ τοῦ x ἐπαληθεύουσαι τὴν ἀνισότητα

$$x^3-x^2-4x+4>0.$$

Τρέπομεν τὸ πρῶτον μέλος της εἰς γινόμενον ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ ὑπολοίπου τῆς διαιρέσεως διὰ $x-\alpha$. Τοῦτο πατατηροῦμεν ὅτι μηδενίζεται ἂν θέσωμεν ἀντὶ x τὸ 1 (§ 27 σημ.). Ἄρα διαιρεῖται τοῦτο διὰ $x-1$. Τρέπεται ἄρα τὸ α΄ μέλος ταύτης εὐκόλως εἰς τὸ γινόμενον $(x-1)(x-2)(x+2)$. Ἤδη κατατάσσομεν τοὺς τρεῖς ὅρους τοῦ γινομένου κατὰ σειρὰν μεγέθους τῶν ριζῶν θέτοντες πρῶτον ὅρον τὸν περιέχοντα τὴν μικροτέραν ρίζαν καὶ τελευταῖον τὸν περιέχοντα τὴν μεγαλυτέραν ρίζαν, ἤτοι ἔχομεν :

$$(x+2)(x-1)(x-2)>0. \qquad (1)$$

Ἤδη τοποθετοῦμεν τὰς ρίζας -2, 1, 2 ἐπὶ μιᾶς εὐθείας γραμμῆς καὶ δίδομεν εἰς τὸν x τιμὴν πρῶτον μεταξὺ $-\infty$ καὶ -2, κατόπιν μεταξὺ -2 καὶ 1, κατόπιν μεταξὺ 1 καὶ 2 καὶ τέλος μεταξὺ 2 καὶ $+\infty$ παρακολουθοῦμεν δὲ εἰς ἑκάστην διδομένην τιμὴν τοῦ x τὸ σημεῖον τοῦ α΄ μέλους τῆς ἀνισότητος (1) ὡς φαίνεναι εἰς τὴν κάτωθι γραφικὴν παράστασιν.

$x = -\infty \quad -2 \quad 1 \quad 2 \quad +\infty$

$- \quad + \quad - \quad +$

Εὐκόλως συμπεραίνομεν ὅτι διὰ $x < -2$ ὅλοι οἱ παράγοντες τοῦ α΄ μέλους τῆς (1) εἶναι ἀρνητικοὶ ἄρα τὸ α΄ μέλος τῆς ἀνισότητος εἶναι ἀρνητικὸν καὶ συνεπῶς δὲν ἀληθεύει αὕτη διὰ $x < -2$. Διὰ x κείμενον μεταξὺ -2 καὶ 1 ὁ α΄ παράγων γίνεται θετικὸς οἱ δὲ δύο ἄλλοι παραμένουν ἀρνητικοὶ καὶ ἑπομένως τὸ α΄ μέλος τῆς (1) εἶναι θετικόν. Ἄρα διὰ $-2 < x < 1$ ἡ ἀνισότης ἀληθεύει. Διὰ x κείμενον μεταξὺ 1 καὶ 2 ἡ ἀνισότης δὲν ἀληθεύει διότι τότε καὶ ὁ β΄ παράγων γίνεται θετικός, παραμένει δὲ ἀρνητικὸς μόνον ὁ τελευταῖος παράγων. Τέλος διὰ $x > 2$ ὅλοι οἱ παράγοντες εἶναι θετικοὶ καὶ συνεπῶς ἡ ἀνισότης ἀληθεύει.

Τελικῶς λοιπὸν ἡ ἀνισότης ἀληθεύει ἂν $-2 < x < 1$ ἢ ἂν $x > 2$.

ΣΗΜ. Παρατηροῦμεν ὅτι ἂν ὁ x λάβῃ τιμὰς κειμένας μεταξὺ τῶν διαδοχικῶν ῥιζῶν, τότε τὸ α΄ μέλος τῆς ἀνισότητος γίνεται ἐναλλὰξ θετικὸν καὶ ἀρνητικόν. Ἀρκεῖ λοιπόν, μετὰ τὴν τοποθέτησιν τῶν παραγόντων τοῦ α΄ μέλους κατὰ σειρὰν μεγέθους ῥιζῶν, νὰ ἐξακριβώσωμεν τὸ σημεῖον του α΄ μέλους εἰς τὴν ἀρχήν, εἶναι δὲ τὸ α΄ μέλος τῆς ἀνισότητος εἰς τὴν ἀρχὴν θετικὸν μὲν ἂν τὸ πλῆθος τῶν παραγόντων του εἶναι ἄρτιον, ἀρνητικὸν δὲ ἂν τὸ πλῆθος τῶν παραγόντων του εἶναι περιττόν.

β΄. Ὁμοίως διὰ τὴν ἀνισότητα $x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 14x + 24 < 0$.

Τὸ πολυώνυμον τοῦ πρώτου μέλους τρεπόμενον εἰς γινόμενον ὡς ἔχον ῥίζας τὰς -3, -1, 2, 4, (§ 27 σημ.) γίνεται

$$(x+3)(x+1)(x-2)(x-4) < 0$$

Ἐργαζόμενοι ὡς ἀνωτέρω ἔχομεν τὴν ἑξῆς γραφικὴν παράστασιν:

$x = -\infty \quad -3 \quad -1 \quad 2 \quad 4 \quad +\infty$

$+ \quad - \quad + \quad - \quad +$

Ἄρα ἡ ἀνισότης ἀληθεύει ἂν $-3 < x < -1$ ἢ ἂν $2 < x < 4$.

Ἀνισότητες μὲ παρονομαστὰς περιέχοντας τὸν ἄγνωστον.

182. Ὅταν εἰς τὸν παρονομαστὴν ὑπάρχῃ παράστασις περιέχουσα τὸν ἄγνωστον, δὲν δυνάμεθα ἐν γένει νὰ ἐξαλείψωμεν τὸν παρονομαστὴν διότι δὲν γνωρίζομεν ἂν οὗτος εἶναι θετικὸς ἢ ἀρνητικός (§77 γ΄). Διὰτοῦτο εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην μεταφέρομεν ὅλους τοὺς ὅρους εἰς τὸ πρῶτον μέλος καθιστῶντες τὸ δεύτερον μέλος ἴσον μὲ μηδέν, προσθέτομεν ὅλους τοὺς ὅρους καὶ οὕτω ἡ ἀνισότης λαμβάνει τελικῶς τὴν μορφὴν $\frac{\Pi(x)}{P(x)}\neq 0$, Ἤδη ἂν πολλαπλασιάσωμεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος ἐπὶ τὸν παρονομαστήν, ἡ ἀνισότης γίνεται :

$$\frac{\Pi(x)P(x)}{P^2(x)}\neq 0$$

Ἤδη ὁ παρονομαστὴς $P^2(x)$ ὡς τέλειον τετράγωνον εἶναι πάντοτε θετικὸς καὶ ἄρα δυνάμεθα νὰ τὸν ἐξαλείψωμεν. Ἡ ἀνισότης λοιπὸν γίνεται :

$$\Pi(x).P(x)\neq 0$$

ἥτις λύεται ὡς εἴδομεν ἀνωτέρω. Παραδείγματα ἔστωσαν.

α΄. Νὰ εὑρεθοῦν τιμαὶ τοῦ x ἐπαληθεύουσαι τὴν ἀνισότητα :

$$\frac{x-2}{x+3}+3>1-\frac{2}{x+3}$$

Ἔχομεν $\quad \frac{x-2}{x+3}+2+\frac{2}{x+3}>0$ ἢ $\frac{3(x+2)}{x+3}>0.$

Πολλαπλασιάζομεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος ἐπὶ $x+3$ ἤτοι

$$\frac{3(x+2)(x+3)}{(x+3)^2}>0 \quad ἢ \quad (x+2)(x+3)>0.$$

Τὸ πρῶτον μέλος, εἶναι τριώνυμον τοῦ β΄ βαθμοῦ ἔχον ρίζας -3 καὶ -2. Ἄρα, ἵνα τοῦτο εἶναι θετικόν, δηλαδὴ ὁμόσημον πρὸς τὸν πρῶτον ὅρον του, πρέπει νὰ εἶναι $x<-3$ ἢ $x>-2$. Ἄρα ἡ ἀνισόσότης ἀληθεύει διὰ $x<-3$ ἢ $x->2$.

β΄. Ὁμοίως διὰ τὴν ἀνισότητα $\quad \frac{x^2-2x+3}{x^2-8x+15}<0.$

Αὕτη γίνεται $\quad \frac{(x^2-2x+3)(x^2-8x+15)}{(x^2-8x+15)^2}<0$

ἢ ἂν ἀπαλείψωμεν τὸν θετικὸν παρονομαστήν,

$$(x^2-2x+3)(x^2-8x+15)<0.$$

Ὁ πρῶτος ὅρος (ἤτοι τὸ τριώνυμον x^2-2x+3) ὡς ἔχων ρίζας φανταστικὰς εἶναι πάντοτε θετικός. Ἄρα ἂν διαιρέσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη διὰ τοῦ θετικοῦ τούτου ὅρου ἔχομεν

$$x^2-8x+15<0$$

τῆς ὁποίας τὸ α΄ μέλος ἔχει ρίζας 3 καὶ 5. Ἄρα ἵνα ἀληθεύῃ αὕτη πρέπει νὰ εἶναι $3<x<5$.

Συναληθεύουσαι ἀνισότητες.

183. Ὅταν ἔχωμεν πολλὰς ἀνισότητας αἱ ὁποῖαι θέλομεν νὰ ἀληθεύουν διὰ τὰς αὐτὰς τιμὰς τοῦ x, τότε εὑρίσκομεν διὰ ποίας τιμὰς τοῦ x ἀληθεύει χωριστὰ ἑκάστη καὶ κατόπιν διὰ συγκρίσεως τῶν τιμῶν τούτων συμπεραίνομεν πότε ἀληθεύουν ὅλαι ὁμοῦ· ὡς π.χ.

Νὰ εὑρεθοῦν τιμαὶ τοῦ x διὰ τὰς ὁποίας ἀληθεύουν ταυτοχρόνως αἱ ἀνισότητες

$$x^2-5x+4>0, \quad \frac{x+9}{5-x}>1 \quad \text{καὶ} \quad \frac{x^2-9x-10}{x^2+x+3}<0.$$

Ἡ πρώτη, τῆς ὁποίας τὸ α΄ μέλος ἔχει ρίζας 1 καὶ 4, ἀληθεύει ἂν

$$x<1 \quad \text{ἢ} \quad x>4 \qquad (\alpha)$$

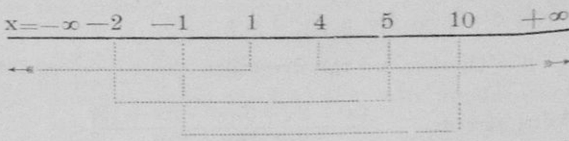
Ἡ δευτέρα λυομένη ὡς εἰς τὴν παράγραφον 182 ἀληθεύει ἂν

$$-2<x<5 \qquad (\beta)$$

Εἰς δὲ τὴν τρίτην ὁ παρονομαστής της ὡς ἔχων ρίζας φανταστικὰς εἶναι πάντοτε θετικὸς ἄρα δυνάμεθα νὰ τὸν ἐξαλείψωμεν ὁπότε αὕτη γίνεται :

$$x^2-9x-10<0 \quad \text{ἥτις ἀληθεύει ἂν} \quad -1<x<10 \qquad (\gamma)$$

Ὀφείλουν ἤδη νὰ ἀληθεύουν ταυτοχρόνως καὶ αἱ τρεῖς σχέσεις (α), (β), (γ). Ἡ κάτωθι γραφικὴ παράστασις, εἰς τὴν ὁποίαν κατατάσσομεν τὰς τιμὰς τοῦ x κατὰ σειρὰν μεγέθους, δεικνύει ὅτι ὑπάρχουν περιοχαὶ τιμῶν τοῦ x διὰ τὰς ὁποίας ἀληθεύουν ταυτοχρόνως καὶ αἱ τρεῖς ἀνισότητες ὡς αἱ μεταξὺ —1 καὶ +1 τιμαὶ καὶ αἱ μεταξὺ 4 καὶ 5 τιμαὶ ἤτοι :



ἀνισότης (α)...
ἀνισότης (β)...
ἀνισότης (γ)...

Ἄρα αἱ δοθεῖσαι ἀνισότητες συναληθεύουν ἂν $-1<x<1$ ἢ ἂν $4<x<5$.

Ἂν θέλομεν νὰ συναληθεύουν μόνον αἱ δύο πρῶται, τότε παρατηροῦμεν ὅτι συμβαίνει τοῦτο ἂν $-2<x<1$ ἢ ἂν $4<x<5$. Ἂν θέλομεν νὰ συναληθεύουν μόνον αἱ δύο τελευταῖαι, τότε παρατηροῦμεν ὅτι συμβαίνει τοῦτο μόνον ἂν $-1<x<5$. Ἂν θέλωμεν νὰ συναληθεύουν ἡ α΄ καὶ ἡ γ΄ παρατηροῦμεν ὅτι συμβαίνει τοῦτο ἂν $-1<x<1$ ἢ ἂν $4<x<10$.

Ἀνισότητες μὲ ριζικά.

184. Ὅταν μία ἀνισότης περιέχῃ ριζικὰ ἀρτίας τάξεως (τετραγωνικὴν ἢ τετάρτην κλπ. ρίζαν), τότε δυνάμεθα νὰ ὑψώσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη εἰς τὸ τετράγωνον, τετάρτην δύναμιν κλπ. μόνον ἐφ' ὅσον ταῦτα εἶναι ἀμφότερα θετικά.

Ὅταν μία ἀνισότης περιέχῃ ῥιζικὰ περιττῆς τάξεως (κυβικὴν ῥίζαν κλπ.) τότε δυνάμεθα νὰ ὑψώσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς τὸν κύβον, διότι πᾶς ἀριθμὸς θετικὸς ἢ ἀρνητικὸς ὑψούμενος εἰς περιττὴν δύναμιν διατηρεῖ τὸ σημεῖον τῆς βάσεώς του.

185. Ἔστωσαν πρὸς λύσιν τὰ κάτωθι παραδείγματα.

α' Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης $x-2>\sqrt{x^2-3x+3}$

Τὸ δεύτερον μέλος, ὡς ἔχον πρὸ τοῦ ῥιζικοῦ τὸ σημεῖον $+$ εἶναι θετικόν. Εἶναι ἐπίσης ἀριθμὸς πραγματικός, διότι τὸ ὑπόρριζόν του x^2-3x+3 ὡς ἔχον ῥίζας φανταστικὰς εἶναι πάντοτε θετικόν. Ἄρα ἵνα ὑφίσταται ἡ ἐν λόγῳ ἀνισότης ὀφείλει καὶ τὸ πρῶτον μέλος της νὰ εἶναι θετικὸν ἤτοι πρέπει νὰ εἶναι $x>2$. Ἤδη ὑψοῦντες εἰς τὸ τετράγωνον καὶ ἐκτελοῦντες τὰς ἀναλόγους πράξεις εὑρίσκομεν $x<1$. Ἐπειδὴ δὲ πρέπει νὰ εἶναι καὶ $x>2$ διὰ τοῦτο ἡ δοθεῖσα ἀνισότης δὲν ἀληθεύει ποτὲ καθόσον δὲν συναληθεύουν ποτὲ αἱ σχέσεις $x>2$ καὶ $x<1$.

β'. Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης $\sqrt[3]{x^2-4x+3}>1-x$.

Ἐπειδὴ ἡ φορὰ τῆς ἀνισότητος δὲν μεταβάλλεται ἂν ὑψώσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη εἰς τὸν κύβον, δηλ. εἰς περιττὴν δύναμιν, διὰ τοῦτο ὑψοῦντες εἰς τὸν κύβον λαμβάνομεν

$$x^2-4x+3>(1-x)^3 \quad \text{ἢ} \quad x^3-2x^2-x+2>0$$

ἡ ὁποία λύεται ὡς ἡ τῆς § 181 α' διότι τὸ α' μέλος της μετατρέπεται εἰς τὸ γινόμενον $(x+1)(x-1)(x-2)$, ἀληθεύει δὲ ἂν $-1<x<1$ ἢ ἂν $x>2$.

γ'. Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης $\sqrt{-x^2+x+6}<x+3$

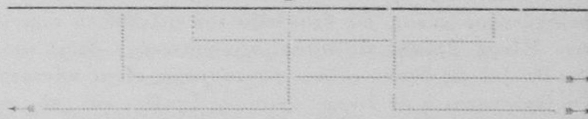
Τὸ ὑπόρριζον τοῦ α' μέλους εἶναι τριώνυμον τοῦ β' βαθμοῦ ἔχον ῥίζας -2 καὶ 3. Ἄρα, ἵνα τὸ α' μέλος εἶναι πραγματικὸς ἀριθμὸς καὶ ὡς τοιοῦτος νὰ δύναται νὰ συγκριθῇ ὡς πρὸς τὸ μέγεθος μὲ τὸ πραγματικὸν δεύτερον μέλος, ὀφείλει τὸ τριώνυμον $-x^2+x+6$ νὰ εἶναι θετικόν. Ὀφείλει ἄρα ὁ x νὰ κεῖται μεταξὺ τῶν ῥιζῶν του ἤτοι νὰ εἶναι $-2<x<3$ (α). Ὁμοίως, διότι τὸ α' μέλος εἶναι θετικόν, ὀφείλει καὶ τὸ β' μέλος νὰ εἶναι θετικὸν ἵνα ὑφίσταται ἡ δοθεῖσα ἀνισότης ἤτοι πρέπει νὰ εἶναι $x>-3$ (β)

Ἤδη, μὲ τὰς προϋποθέσεις τῶν ὡς ἄνω σχέσεων (α) καὶ (β), ὑψοῦμεν εἰς τὸ τετράγωνον ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς δοθείσης ἀνισότητος καί, μετὰ τὰς ἀναλόγους πράξεις εὑρίσκομεν $2x^2+5x+3>0$ ἥτις ἔχει ῥίζας $-\frac{3}{2}$ καὶ -1, ἀληθεύει δὲ αὕτη ὅταν ὁ x κεῖται ἐκτὸς τῶν ῥιζῶν της ἤτοι ὅταν $x<-\frac{3}{2}$ ἢ $x>-1$ (γ)

Αἱ ἀνισότητες (α), (β) (γ) ὀφείλουν νὰ συναληθεύουν. Ἡ κάτωθι γραφικὴ παράστασις (§ 183) μᾶς δεικνύει τοῦτο.

$x=-\infty \quad -3 \quad -2 \quad -\frac{3}{2} \quad -1 \quad 3 \quad +\infty$

ἀνισότης (α)..
ἀνισότης (β)..
ἀνισότης (γ)..



Ἄρα συναληθεύουν καὶ αἱ τρεῖς ἀνισότητες μόνον ἂν

$$-2<x<-\frac{3}{2} \quad \text{ἢ ἂν} \quad -1<x<3.$$

186. Ἐν γένει, ἵνα ἐπιλύσωμεν ἀνισότητας μὲ ῥιζικὰ ἀρτίας τάξεως, πρέπει νὰ εὑρίσκωμεν τὰς ἀναγκαίας σχέσεις διὰ τὰς ὁποίας ἀμφότερα τὰ μέλη των εἶναι θετικὰ καὶ κατόπιν, ὑψοῦντες εἰς τὸ τετράγωνον, νὰ προβαίνωμεν εἰς τὴν λύσιν τούτων. Ὅταν ἡ ἀνισότης ἔχῃ ῥιζικὰ περιττῆς τάξεως, τότε ἐπιλύομεν αὐτὴν ἄνευ περιορισμοῦ.

Ἀσκήσεις πρὸς λύσιν.

Νὰ εὑρεθοῦν τιμαὶ τοῦ x ἐπαληθεύουσαι ἑκάστην ἐκ τῶν κάτωθι ἀνισοτήτων.

563. $\frac{3(x^2-1)}{8}<\frac{5x}{7}-\frac{12}{28}$ **564.** $\frac{x}{2}-\frac{x^2}{3}+\frac{5}{6}<\frac{2x}{3}-\frac{59}{6}$

565. $\frac{x^2}{3}-\frac{x}{4}>\frac{5x^2}{6}+3x-58$ **566.** $\frac{5}{x+2}+\frac{1}{x+3}>\frac{7}{6}$

567. $\frac{1}{x-1}>\frac{2}{3x+1}$ (Πολ. 1932) **568.** $\frac{x-4}{x+2}+\frac{5}{x^2-x-6}>\frac{3x-8}{x-3}$

569. $x^5-7x^3+12x>0$ **570.** $\sqrt{x^2+2x-8}+\sqrt{x+5}>7$

571. $2(1-2x)<3\sqrt{-x^2-x+6}$ **572.** $\sqrt{x+6}-\sqrt{x+1}>\sqrt{2x-4}$

573. $x+2<\sqrt[3]{x^3+8}$ **574.** $2x-3>\sqrt{(4x-3)(x-2)}$

575. $\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}>0$ **576.** $\frac{x^4-17x^2+16}{x(x^2-8x+15)}>0$

Νὰ εὑρεθοῦν τιμαὶ τοῦ x διὰ τὰς ὁποίας συναληθεύουν αἱ ἀνισότητες

577. $\frac{3x+5}{7-3x}<4$ καὶ $\frac{(4x+7)(3x-2)}{2-x}<0$

578. $5x^2-7x+2>0$ καὶ $2x^2-9x+4<0$

579. $3x^3-5x^2+2x>0$ καὶ $x^3-x^2+4x>0$.

Νὰ λυθοῦν καὶ διερευνηθοῦν αἱ ἀνισότητες:

580. $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)>0$ 581. $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)<0$

582. Ἂν οἱ ἀριθμοὶ α καὶ β εἶναι θετικοὶ καὶ διάφοροι ἀλλήλων, νὰ δειχθῇ ὅτι $\alpha^2+\beta^2>2\alpha\beta$ καὶ $\alpha+\beta>2\sqrt{\alpha\beta}$

Ἂν οἱ α, β, γ εἶναι θετικοὶ καὶ διάφοροι ἀλλήλων, νὰ δειχθῇ ὅτι

583. $2(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)>\alpha\beta(\alpha+\beta)+\beta\gamma(\beta+\gamma)+\gamma\alpha(\gamma+\alpha)$

584. $\alpha(\beta^2+\gamma^2)+\beta(\gamma^2+\alpha^2)+\gamma(\alpha^2+\beta^2)>6\alpha\beta\gamma$

585. $(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)>8\alpha\beta\gamma$

586. Μεταξὺ τίνων ὁρίων πρέπει νὰ κεῖται ὁ λ ἵνα ἐπαληθεύεται διὰ πάσας τὰς πραγματικὰς τιμὰς τοῦ x ἡ ἀνισότης $16(x^2+2\lambda x+\lambda)>3$.

587. Ἂν α, β, γ, εἶναι πλευραὶ τριγώνου, νὰ δειχθῇ ὅτι ἀληθεύει πάντοτε ἡ ἀνισότης $\beta^2x^2+(\beta^2+\gamma^2-\alpha^2)x+\gamma^2>0$,

588. Νὰ ὁρισθῇ ὁ x ἵνα τὸ κλάσμα $\dfrac{2x-1}{(x+1)(x-2)}$ ἔχῃ τιμὰς περιεχομένας μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν -1 καὶ 1.

589. Νὰ ὁρισθοῦν αἱ τιμαὶ τοῦ x διὰ τὰς ὁποίας τὸ τριώνυμον $x^2-14x+50$ λαμβάνει τιμὰς μεγαλυτέρας τοῦ 5 καὶ μικροτέρας τοῦ 26. (Ἀνωτ. Γεωπον. 1935).

VII. ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΙΣ ΤΩΝ ΡΙΖΩΝ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΣ $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$

187. Τὸ εἶδος τῶν ῥιζῶν τῆς ἐξισώσεως τοῦ β′ βαθμοῦ ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν ὑπόρριζον ποσότητα $\beta^2-4\alpha\gamma$ ἥτις καλεῖται καὶ ***διακρίνουσα***, παρίσταται δὲ χάριν συντομίας διὰ τοῦ Δ. Πρὸς τοῦτο διακρίνομεν τρεῖς περιπτώσεις ἤτοι.

α′. Ἂν ἡ διακρίνουσα $\beta^2-4\alpha\gamma$ εἶναι ἀρνητική, τότε ἡ παράστασις $\dfrac{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}$ εἶναι φανταστικὸς ἀριθμὸς ἔστω τῆς μορφῆς δi αἱ δὲ ῥίζαι (3) τῆς (§ 163) εἶναι φανταστικαὶ καὶ συζυγεῖς (§ 166 β′.) τῆς μορφῆς $\lambda\pm\delta i$. Παρατηροῦμεν λοιπὸν ὅτι, ὅταν ἡ διακρίνουσα εἶναι ἀρνητική, τότε αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως τοῦ β′ βαθμοῦ εἶναι ***φανταστικαὶ καὶ συζυγεῖς.***

β′. Ὅταν ἡ διακρίνουσα $\beta^2-4\alpha\gamma$ ἰσοῦται μὲ μηδὲν τότε αἱ ῥίζαι (3) τῆς (§ 163) εἶναι πραγματικαὶ καὶ ἴσαι, ἑκάστη δὲ ἰσοῦται μὲ $-\dfrac{\beta}{2\alpha}$

γ′. Ὅταν ἡ διακρίνουσα $\beta^2-4\alpha\gamma$ εἶναι θετική, τότε ἔχομεν δύο ῥίζας πραγματικὰς καὶ ἀνίσους. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην δυνάμεθα ἐκ τῶν προτέρων νὰ γνωρίζωμεν ἂν ἀμφότεραι αἱ ῥίζαι εἶναι θετικαὶ ἢ ἀρνητικαὶ ἢ ἑτερόσημοι κλπ. Πρὸς τοῦτο ἐξετάζομεν τὸ γινόμενον καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν.

Καὶ ἂν μὲν τὸ γινόμενόν των $\frac{\gamma}{\alpha}$ εἶναι θετικόν, ἕπεται ὅτι αἱ ρίζαι εἶναι ὁμόσημοι. Τότε, ἂν καὶ τὸ ἄθροισμά των $\frac{\beta}{\alpha}$ εἶναι θετικὸν ἀμφότεραι αἱ ρίζαι εἶναι θετικαὶ ἂν δὲ τὸ ἄθροισμά των εἶναι ἀρνητικὸν τότε ἀμφότεραι αἱ ρίζαι εἶναι ἀρνητικαί. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην τὸ ἄθροισμα τῶν ριζῶν δὲν δύναται νὰ εἶναι μηδὲν διότι δύο ὁμόσημοι ἀριθμοὶ οὐδέποτε ἔχουν ἄθροισμα μηδέν.

Ἂν τὸ γινόμενον τῶν ριζῶν εἶναι μηδὲν τότε ἡ μὲν μία ρίζα εἶναι 0 ἡ δὲ ἄλλη ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμά των $-\frac{\beta}{\alpha}$.

Ἂν τὸ γινόμενον τῶν ριζῶν εἶναι ἀρνητικόν, ἕπεται ὅτι αἱ ρίζαι εἶναι ἑτερόσημοι. Καὶ ἂν τὸ ἄθροισμά των εἶναι θετικὸν ἕπεται ὅτι ἀπολύτως μεγαλυτέρα εἶναι ἡ θετική, ἂν τὸ ἄθροισμά των εἶναι μηδὲν ἕπεται ὅτι αἱ ρίζαι εἶναι ἀντίθετοι, ἂν δὲ τὸ ἄθροισμά των εἶναι ἀρνητικὸν ἕπεται ὅτι ἀπολύτως μεγαλυτέρα εἶναι ἡ ἀρνητικὴ ρίζα.

Ὅλα τὰ ἀνωτέρω συνοψίζονται εἰς τὸν κατωτέρω πίνακα :

α)	$\beta^2-4\alpha\gamma<0$			2 ρίζαι φανταστικαὶ καὶ συζυγεῖς
β)	$\beta^2-4\alpha\gamma=0$			2 ρίζαι ἴσαι $x_1=x_2=-\frac{\beta}{2\alpha}$
γ)	$\beta^2-4\alpha\gamma>0$	$\frac{\gamma}{\alpha}>0$	$-\frac{\beta}{\alpha}>0$	2 ρίζαι θετικαὶ
			$-\frac{\beta}{\alpha}<0$	2 ρίζαι ἀρνητικαί.
		$\frac{\gamma}{\alpha}=0$		μία ρίζαι$=0$, ἡ ἄλλη$=-\frac{\beta}{\alpha}$
		$\frac{\gamma}{\alpha}<0$	$-\frac{\beta}{\alpha}>0$	μεγαλυτέρα ἀπολύτως ἡ θετικὴ
			$-\frac{\beta}{\alpha}=0$	2 ρίζαι ἀντίθετοι
			$-\frac{\beta}{\alpha}<0$	μεγαλυτέρα ἀπολύτως ἡ ἀρνητικὴ

188. Ὡς παραδείγματα ἐπὶ τῶν ἀνωτέρω ἔστωσαν τὰ ἑξῆς :

α΄. Νὰ ὁρισθῇ ὁ λ εἰς τρόπον ὥστε τὸ τριώνυμον

$$4x^2-4\lambda x+\lambda^2-2\lambda+3$$

νὰ ἔχῃ δύο ρίζας πραγματικὰς καὶ ἀνίσους.

Πρὸς τοῦτο πρέπει νὰ εἶναι :

$\beta^2-4\alpha\gamma>0$ ἤτοι $\lambda^2-(\lambda^2-2\lambda+3)>0$ ἢ $2\lambda-3>0$ ἐξ οὗ $\lambda>\frac{3}{2}$.

β'. Νὰ ὁρισθῇ ὁ λ ἵνα τὸ τριώνυμον $4x^2-4\lambda x+\lambda^2-2\lambda-3$ ἔχῃ δύο ῥίζας πραγματικὰς καὶ θετικάς.

Πρὸς τοῦτο πρέπει νὰ εἶναι $\beta^2-4\alpha\gamma\geq 0,\quad \frac{\gamma}{\alpha}>0$ καὶ $-\frac{\beta}{\alpha}>0$

Ἡ πρώτη ἀνισότης δίδει

$$\lambda^2-(\lambda^2-2\lambda-3)\geq 0 \text{ ἢ } 2\lambda+3\geq 0 \text{ ἢ } \lambda\geq -\frac{3}{2}$$

Ἡ β' ἀνισότης δίδει $\lambda^2-2\lambda-3>0$ ἥτις ἀληθεύει (§ 180α') ἂν ὁ λ κεῖται ἐκτὸς τῶν ῥιζῶν δηλ. ἂν $\lambda<-1$ ἢ $\lambda>3$.

Ἡ τρίτη ἀνισότης δίδει $\lambda>0$.

Ἄρα, ἵνα συμβαίνῃ τὸ ζητούμενον πρέπει νὰ συναληθεύουν αἱ ἀνωτέρω τρεῖς ἀνισότητες αἱ ὁποῖαι συναληθεύουν (§ 183) ἂν $\lambda>3$. Ἄρα ἂν ὁ λ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 3 τότε τὸ ὡς ἄνω τριώνυμον ἔχει δύο ῥίζας πραγματικὰς καὶ θετικάς.

189. Νὰ διερευνηθοῦν αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως

$$4x^2-4(\lambda+1)x+\lambda+7=0$$

ὅταν ὁ x λαμβάνῃ ὅλας τὰς πραγματικὰς τιμὰς ἀπὸ $-\infty$ μέχρι $+\infty$.

Παρατηροῦμεν ὅτι α'. Ἂν $\beta^2-4\alpha\gamma<0$ ἡ ἐξίσωσις ἔχει ῥίζας φανταστικὰς

ἤτοι ἂν $\quad (\lambda+1)^2-(\lambda+7)<0 \quad$ ἢ $\quad \lambda^2+\lambda-6<0 \qquad (1)$

Ἡ ἀνισότης (1) ἀληθεύει διὰ τιμὰς τοῦ λ κειμένας μεταξὺ -3 καὶ 2· Ἄρα ἂν $-3<\lambda<2$ τότε ἡ ἐξίσωσις ἔχει ῥίζας φανταστικάς.

β'. Ἂν $\quad \beta^2-4\alpha\gamma=0$ ἢ $\lambda^2+\lambda-6=0 \qquad (2)$

ἤτοι ὅταν $\lambda=-3$ ἢ $\lambda=2$ τότε ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἔχει ῥίζας πραγματικὰς καὶ ἴσας.

γ'. Ἂν $\quad \beta^2-4\alpha\gamma>0$ ἢ $\lambda^2+\lambda-6>0 \qquad (3)$

δηλαδὴ ἂν $\lambda<-3$ ἢ $\lambda>2$ τότε ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἔχει δύο ῥίζας πραγματικὰς καὶ ἀνίσους. Ἤδη ἀρκεῖ νὰ ἐξετάσωμεν τὸ γινόμενον καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ῥιζῶν.

Καὶ ἂν μὲν $\frac{\gamma}{\alpha}>0$ ἢ $\frac{\lambda+7}{4}>0$ ἢ $\lambda>-7$ τότε αἱ ῥίζαι εἶναι ὁμόσημοι. Εἶναι δὲ ἀμφότεραι θετικαὶ μὲν ἂν καὶ τὸ $-\frac{\beta}{\alpha}>0$ ἢ $\lambda>-1$, ἀρνητικαὶ δὲ ἂν $\lambda<-1$,

Ἂν $\frac{\gamma}{\alpha}=0$ δηλαδὴ ἂν $\lambda=-7$ τότε ἡ μὲν μία ῥίζα εἶναι 0 ἡ δὲ ἄλλη $-\frac{\beta}{\alpha}$. Ἂν $\frac{\gamma}{\alpha}<0$ ἢ $\lambda<-7$ τότε αἱ ῥίζαι εἶναι ἑτερόσημοι. Καὶ ἂν $-\frac{\beta}{\alpha}>0$ ἢ $\lambda>-1$, τότε μεγαλυτέρα ἀπολύτως εἶναι ἡ θετική, ἂν $\lambda=-1$ τότε αἱ ρίζαι εἶναι ἀντίθετοι ὡς ἔχουσαι ἄθροισμα 0, καὶ ἂν $\lambda<-1$ τότε μεγαλυτέρα ἀπολύτως εἶναι ἡ ἀρνητική.

Ὁ κάτωθι πίναξ δεικνύει τὰ ἐξαγόμενα τῆς ὡς ἄνω διερευνήσεως

λ	Δ	Γ	Α	εἶδος ριζῶν
$-\infty$	$+$	$-$	$-$	ἀπολύτως μεγαλυτ. ἡ ἀρνητικὴ ρίζα.
-7	$+$	0		ἡ μία ρίζα=0 ἡ ἄλλη $=-\dfrac{\beta}{\alpha}$.
	$+$	$+$	$-$	2 ρίζαι πραγματικαὶ καὶ ἀρνητικαί.
-3	0			2 ρίζαι πραγματικαὶ καὶ ἴσαι.
	$-$			2 ρίζαι φανταστικαὶ καὶ συζυγεῖς.
2	0			2 ρίζαι πραγματικαὶ καὶ ἴσαι.
$-\infty$	$+$	$+$	$+$	2 ρίζαι πραγματικαὶ καὶ θετικαί.

Ἐπεξήγησις τοῦ ἄνω πίνακος: Εἰς τὴν πρώτην στήλην γράφομεν τὰς τιμὰς τῆς ***παραμέτρου*** λ ἀπὸ τὸ $-\infty$ τὸ $+\infty$ κατὰ σειρὰν μεγέθους. Εἰς τὴν δευτέραν στήλην γράφομεν τὸ σημεῖον ὅπερ λαμβάνει διὰ τὴν ἀντίστοιχον τιμὴν τοῦ λ ἡ διακρίνουσα Δ. Εἰς τὴν τρίτην στήλην γράφομεν τὸ σημεῖον ὅπερ λαμβάνει διὰ τὴν ἀντίστοιχον τιμὴν τοῦ λ τὸ γινόμενον τῶν ριζῶν ὅπερ χάριν συντομίας παριστῶμεν διὰ Γ. Εἰς τὴν τετάρτην στήλην γράφομεν τὸ ἀντίστοιχον σημεῖον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ριζῶν ὅπερ παριστῶμεν διὰ τοῦ Α καὶ εἰς τὴν τελευταίαν στήλην γράφομεν τὸ εἶδος τῶν ριζῶν.

190. Νὰ διερευνηθοῦν αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως

$$x^2-(\lambda-2)x+\lambda^2-4=0$$

ὅταν ὁ λ λαμβάνῃ ὅλας τὰς πραγματικὰς τιμὰς ἀπὸ $-\infty$ μέχρι $+\infty$.

Ἐργαζόμενοι ὡς ἀνωτέρω παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ἐξίσωσις ἔχει δύο ρίζας φανταστικὰς καὶ συζυγεῖς ἂν $\beta^2-4\alpha\gamma<0$ ἢ ἂν

$$(\lambda-2)^2-4(\lambda^2-4)<0 \text{ δηλ. ἂν } 3\lambda^2+4\lambda-20>0.$$

Ἐξ οὗ $\lambda<-\dfrac{10}{3}$ ἢ $\lambda>2$.

Ἡ ἐξίσωσις ἔχει δύο ρίζας πραγματικὰς καὶ ἴσας ἂν $\beta^2-4\alpha\gamma=0$ ἢ ἂν $3\lambda^2+4\lambda-20=0$ ἐξ οὗ $\lambda=2$ ἢ $\lambda=-\dfrac{10}{3}$.

Αὕτη ἔχει δύο ρίζας πραγματικὰς καὶ ἀνίσους ἂν $\beta^2-4\alpha\gamma>0$ ἢ $3\lambda^2+4\lambda-20<0$ ἐξ οὗ $-\dfrac{10}{3}<\lambda<2$. Ἤδη ἐξετάζοντες τὸ γινόμενον καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ριζῶν εὑρίσκομεν ὅτι ἂν $-2<\lambda<2$ τότε τὸ γινόμενον εἶναι ἀρνητικὸν καὶ ἂν $\lambda<-2$ ἢ $\lambda>2$ εἶναι θετικόν. Τὸ ἄθροισμα εἶναι θετικὸν μὲν ἂν $\lambda>2$, ἀρνητικὸν δὲ ἂν $\lambda<2$.

Εὐκόλως συντάσσομεν σχετικὸν πίνακα διερευνήσεως ὡς εἰς τὴν ἀνωτέρω παράγραφον.

VIII ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΙΣ ΑΝΙΣΟΤΗΤΟΣ Β΄ ΒΑΘΜΟΥ ΜΕ ΜΙΑΝ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΝ

191. Ἔστω πρὸς λύσιν ἡ ἀνισότης

$$(\lambda-1)x^2-4x+2\lambda<0. \qquad (1)$$

Διακρίνομεν τὰς ἑξῆς περιπτώσεις: ἤτοι α΄) ἂν $\Delta<0$, β΄) ἂν $\Delta=0$ καὶ γ΄) ἂν $\Delta>0$.

Ἡ διακρίνουσα Δ τοῦ πρώτου μέλους τῆς ἀνισότητος (1) εἶναι μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πράξεων $\Delta=-8(\lambda^2-\lambda-2)$ ἔχουσα ρίζας $\lambda'=-1$ καὶ $\lambda''=2$ (§ 17). Ἤδη

α΄) Ἂν $\Delta<0$ ἢ $\lambda^2-\lambda-2>0$ (2)

τότε τὸ τριώνυμον τοῦ πρώτου μέλους τῆς ἀνισότητος (1) ἔχει ρίζας φανταστικὰς καὶ ἑπομένως εἶναι ὁμόσημον πρὸς τὸν συντελεστὴν $\lambda-1$ τοῦ δευτεροβαθμίου ὅρου του διὰ πάσας τὰς πραγματικὰς τιμὰς τοῦ x. Ἐπειδὴ δὲ τὸ πρῶτον μέλος τῆς (1) θέλομεν νὰ εἶναι ἀρνητικὸν διὰ τοῦτο πρέπει νὰ εἶναι καὶ

$$\lambda-1<0 \qquad (3)$$

Ἂν λοιπὸν συναληθεύουν αἱ ἀνισότητες (2) καὶ (3) τότε ἀληθεύει πάντοτε ἡ (1), ἂν ὅμως αἱ ἀνισότητες (2) καὶ (3) δὲν συναληθεύουν τότε οὐδέποτε ἀληθεύει ἡ (1). Αἱ (2) καὶ (3) συναληθεύουν διὰ $\lambda<-1$. Ἑπομένως ἂν $\lambda<-1$ ἡ ἀνισότης (1) ἀληθεύει πάντονε.

β) Ἂν $\Delta=0$ ἢ $\lambda^2-\lambda-2=0$ (4)

τότε τὸ τριώνυμον τοῦ πρώτου μέλους τῆς (1), ὡς ἔχον ρίζας ἴσας, θὰ εἶναι ὁμόσημον πρὸς τὸν $\lambda-1$ δι᾽ ὅλας τὰς πραγματικὰς τιμὰς τοῦ x ἐκτὸς τῆς ρίζης. Ἄρα καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν πρέπει νὰ εἶναι $\lambda-1<0$, ἤτοι πρέπει ἡ ἐξίσωσις (4) καὶ ἡ ἀνισότης (3) νὰ συναληθεύουν. Ἐκ τῶν δύο ριζῶν τῆς (4) ἡ $\lambda=-1$ ἐπαληθεύει καὶ τὴν (3). Ἑπομένως ἂν $\lambda=-1$ τότε ἡ ἀνισότης (1) εἶναι ἀληθὴς δι᾽ ὅλας τὰς πραγματικὰς τιμὰς τοῦ x πλὴν τῆς τιμῆς $x=-1$. ἥτις εἶναι ρίζα τοῦ τριωνύμου (1) (ὅπερ διὰ $\lambda=-1$ γίνεται $-2(x^2+2x+1)$ ἔχον ρίζαν $x=-1$).

γ΄) Ἂν $\Delta>0$ ἢ $\lambda^2-\lambda-2<0$ (5)

Τότε ἡ ἀνισότης (1) εἶναι ἀληθὴς διὰ τὰς τιμὰς τοῦ x τὰς κειμένας μεταξὺ τῶν ῥιζῶν τοῦ τριωνύμου τοῦ πρώτου μέλους της ἂν $\lambda-1>0$ καὶ διὰ τὰς τιμὰς τοῦ x τὰς κειμένας ἐκτὸς τῶν ῥιζῶν του ἂν $\lambda-1<0$.

Αἱ ῥίζαι τοῦ τριωνύμου τοῦ πρώτου μέλους τῆς (1) εἶναι αἱ

$$x=\frac{4\pm\sqrt{\Delta}}{2(\lambda-1)} \tag{6}$$

Ἄρα ἂν $\lambda-1>0$ ἢ $\lambda>1$ τότε ἡ ἀνισότης (1) ἀληθεύει διὰ τὰς τιμὰς τοῦ x τὰς κειμένας μεταξὺ τῶν ῥιζῶν (6), ἂν δὲ $\lambda-1<0$ ἢ $\lambda<1$ τότε ἡ ἀνισότης (1) ἀληθεύει διὰ τιμὰς τοῦ x κειμένας ἐκτὸς τῶν ῥιζῶν (6).

192. Συμπεραίνομεν λοιπὸν τὰ ἑξῆς. α΄) Ἂν $\Delta<0$ τότε ἡ ἀνισότης (1) εἶναι ἀληθὴς διὰ πάσας τὰς πραγματικὰς τιμὰς τοῦ x ὅταν $\lambda-1<0$, καὶ οὐδέποτε ἀληθεύει ἂν ὅταν $\lambda-1>0$. β΄) Ἂν $\Delta=0$ εἶναι ἀληθὴς διὰ πάσας τὰς πραγματικὰς τιμὰς τοῦ x πλὴν τῆς ῥίζης ὅταν $\lambda-1<0$, καὶ οὐδέποτε ἀληθεύει ὅταν $\lambda-1>0$. γ΄. Ἂν $\Delta>0$ εἶναι ἀληθὴς διὰ τὰς τιμὰς τοῦ x τὰς περιεχομένας μεταξὺ τῶν ῥιζῶν ὅταν $\lambda-1>0$, καὶ διὰ τὰς τιμὰς τοῦ x τὰς κειμένας ἐκτὸς τῶν ῥιζῶν ὅταν $\lambda-1<0$.

Ὁ ἑπόμενος πίναξ τοῦ ὁποίου ἡ ἐπεξήγησις γίνεται ὅπως καὶ τοῦ τῆς § 189, δεικνύει τὸ ἐξαγόμενον τῆς ἄνω διερευνήσεως.

λ	Δ	α	ἀνισότης
$-\infty$			
	—	—	ἀληθεύει πάντοτε
—1	0	—	» » ἐκτὸς τῆς ῥίζας
	+	—	» διὰ τὰς ἐκτὸς τῶν ῥιζῶν τιμὰς τοῦ x
1	+	0	» » $x>\frac{1}{2}$
	+	+	» διὰ τὰς μεταξὺ τῶν ῥιζῶν τιμὰς τοῦ x
2	0	+	οὐδέποτε ἀληθεύει
	—	+	» »
$-\infty$			

Ἀσκήσεις πρὸς λύσιν.

590. Εἰς τὴν ἐξίσωσιν

$$x^2-2(\lambda-5)x+\lambda^2-1=0$$

νὰ ὁρισθῇ ὁ λ ἵνα αὕτη ἔχῃ α΄) δύο ῥίζας πραγματικὰς καὶ ἀρνητικάς, β΄)

δύο ρίζας πραγματικὰς καὶ ἑτεροσήμους μὲ ἀπολύτως μεγαλυτέραν τὴν ἀρνητικὴν καὶ γ΄) δύο ρίζας ἀντιστρόφους.

591. Τὸ αὐτὸ διὰ τὴν ἐξίσωσιν

$$(2\lambda-5)x^2-(3\lambda-2)x+\lambda=0$$

592. Εἰς τὴν ἐξίσωσιν

$$x^2-2\alpha x+3\alpha+4=0$$

νὰ ὁρισθῇ ὁ α ἵνα αὕτη ἔχῃ α΄) δύο ρίζας πραγματικὰς καὶ θετικάς, β΄) δύο ρίζας πραγματικὰς καὶ ἀρνητικὰς γ΄) δύο ρίζας πραγματικὰς καὶ ἑτεροσήμους μὲ ἀπολύτως μεγαλυτέραν τὴν θετικήν.

593. Ἂν ἡ ἐξίσωσις $\alpha x^2+2\beta x+\gamma=0$ ἔχῃ ρίζας πραγματικάς, νὰ δειχθῇ ὅτι ἔχει τοιαύτας διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ λ καὶ ἡ ἐξίσωσις

$$\alpha x^2+2\beta x+\gamma+\lambda(\alpha x+\beta)=0$$

Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις καὶ νὰ διερευνηθῇ ἑκάστη ὡς πρὸς πάσας τὰς πραγματικὰς τιμὰς τῆς παραμέτρου λ τὴν ὁποίαν περιέχει

594. $(\lambda+3)x^2+(2\lambda+1)x+\lambda-8=0$ 595. $2\alpha x(\alpha x+\lambda\gamma)+(\lambda^2-2)\gamma^2=0$

596. $(\lambda^2+3\lambda+4)x^2+2(\lambda-1)x+7\lambda-9=0$

497. Εἰς τὴν ἐξίσωσιν

$$x^2-6x+5+\lambda(x^2-5x+6)=0$$

νὰ ὁρισθῇ ὁ λ ἵνα αὕτη ἔχῃ ρίζας ἴσας. Παριστῶμεν διὰ λ_1 καὶ λ_2 τὰς ἐν λόγῳ τιμὰς τοῦ λ, διὰ x_1 τὴν κοινὴν ρίζαν τῆς ἐξισώσεως (1) ἂν $\lambda=\lambda_1$, διὰ x_2 τὴν κοινὴν ρίζαν ταύτης ἂν $\lambda=\lambda_2$. Ἂν x΄ καὶ x΄΄ εἶναι αἱ ρίζαι τῆς (1) διὰ τυχοῦσαν τιμὴν τοῦ λ διάφορον τῶν λ_1 καὶ λ_2 νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως

$$\frac{(x'-x_1)(x''-x_2)}{(x'-x_2)(x''-x_1)}$$

καὶ νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ τιμὴ αὕτη εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς τιμῆς τοῦ λ. Νὰ γενικευθῇ ἡ ἄσκησις ἂν ἡ (1) ἀντικατασταθῇ διὰ τῆς $\alpha x^2+\beta x+\gamma+\lambda(\alpha' x^2+\beta' x+\gamma')=0$

598. Μεταξὺ τίνων ὁρίων πρέπει νὰ περιέχεται ὁ λ ἵνα ἡ ἐξίσωσις $\alpha x^2+\beta x+\gamma+\lambda(\alpha' x^2+\beta' x+\gamma')=0$ ἔχει ρίζας πραγματικάς ;

599. Ἂν ὁ x εἶναι πραγματικὸς ἀριθμός, νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ κλάσμα $\frac{x^2+2x+7}{2x+3}$ δύναται νὰ λάβῃ ὅλας τὰς πραγματικὰς τιμὰς πλὴν τῶν κειμένων μεταξὺ -3 καὶ 2.

600. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ κλάσμα $\frac{x^2-24}{2x-11}$ δὲν δύναται νὰ λάβῃ τιμὰς κειμένας μεταξὺ 3 καὶ 8.

601. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ κλάσμα $\frac{x^2+2x-11}{2(x-3)}$ δὲν δύναται νὰ λάβῃ τιμὰς κειμένας μεταξὺ 2 καὶ 6.

602. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ κλάσμα $\frac{x^2+x-1}{x^2+3x+2}$ δύναται νὰ λάβῃ ὅλας τὰς πραγματικὰς τιμάς.

603. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ κλάσμα $\frac{x^2+\alpha\beta}{2x-\alpha+\beta}$ δὲν δύναται νὰ λάβῃ τιμὰς κειμένας μεταξὺ $-\beta$ καὶ α.

604. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ἐξίσωσις $x^2-3xy+2y^2-2x-3y-35=0$ δίδει πραγματικὴν τιμὴν τοῦ y διὰ πᾶσαν πραγματικὴν τιμὴν τοῦ x καὶ ἀντιστρόφως.

605. Ἂν οἱ x καὶ y εἶναι πραγματικοὶ ἀριθμοὶ καὶ συνδέωνται διὰ τῆς ἐξισώσεως $9x^2+3xy+y^2-92x-20y+244=0$, νὰ δειχθῇ ὅτι ὁ x ὀφείλει νὰ κεῖται μεταξὺ 3 καὶ 6 ἢ νὰ ἰσοῦται μὲ 3 ἢ μὲ 6 ὁ δὲ y ὀφείλει νὰ κεῖται μεταξὺ 1 καὶ 10 ἢ νὰ εἶναι 1 ἢ 10.

Νὰ ὁρισθῇ ὁ λ οὕτως ὥστε νὰ ἀληθεύῃ ἑκάστη ἐκ τῶν κάτωθι ἀνισοτήτων δι' ὅλας τὰς πραγματικὰς τιμὰς τοῦ x.

606. $\lambda x^2+(\lambda-1)x+\lambda-1<0$ **607.** $(\lambda-2)x^2+2(2\lambda-3)x+5\lambda-6>0$

608. $(4-\lambda)x^2-3x+4+\lambda>0$ **609.** $(\lambda-1)x^2-4x+2\lambda>0$

610. $\dfrac{(\alpha+1)x^2+\alpha x+\alpha}{x^2+x+1}>\lambda$ ἔνθα α δοθεὶς ἀριθμός

Νὰ λυθοῦν καὶ διερευνηθοῦν αἱ κάτωθι ἀνισότητες διὰ πᾶσαν πραγματικὴν τιμὴν τοῦ x ὅταν ὁ λ λαμβάνῃ πάσας τὰς τιμὰς ἀπὸ $-\infty$ ἕως $+\infty$.

611. $(\lambda+1)x^2-2(\lambda-1)x+2\lambda-3>0$ **612.** $3x^2-7\lambda x+\lambda^2-4\lambda+1<0$

613. $(1-\lambda)x^2-4x(2-\lambda)+2(2-\lambda)<0$ **614.** $(\lambda-1)x^2-(\lambda-5)x+\lambda-1>0$

IX. ΣΥΝΘΗΚΑΙ ΙΝΑ ΑΙ ΡΙΖΑΙ ΕΞΙΣΩΣΕΩΣ ΤΟΥ Β΄ ΒΑΘΜΟΥ ΠΛΗΡΟΥΝ ΣΧΕΣΙΝ ΤΙΝΑ

193. Ἂν ἔχωμεν μίαν ἐξίσωσιν τοῦ β΄ βαθμοῦ περιέχουσαν μίαν παράμετρον καὶ θέλωμεν νὰ ὁρισθῇ ἡ παράμετρος αὕτη ἵνα αἱ ρίζαι πληροῦν σχέσιν τινά, τότε λαμβάνομεν ὑπ' ὄψιν τὰς σχέσεις (6) καὶ (7) τῆς § 164 καὶ τὴν ὁριζομένην ὑπὸ τοῦ προβλήματος, ἀπαλείφοντες δὲ τὰς ρίζας x_1 καὶ x_2 μεταξὺ τῶν τριῶν οὕτω προκυπτουσῶν σχέσεων εὑρίσκομεν τὴν ζητουμένην τιμὴν τῆς παραμέτρου, ὡς φαίνεται εἰς τὰ κάτωθι παραδείγματα.

α΄. Νὰ ὁρισθῇ ἡ παράμετρος λ ἵνα ὁ λόγος τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως $x^2-3\lambda x+1=0$ εἶναι 4.

Ἔχομεν $x_1+x_2=3\lambda$, $x_1x_2=1$ καὶ $x_1=4x_2$.

Ἀπαλείφομεν τοὺς x_1 καὶ x_2 μεταξὺ τῶν τριῶν τούτων ἐξισώσεων θέτοντες ἐκ τῆς γ΄ τὴν τιμὴν τοῦ x_1 εἰς τὰς α΄ καὶ β΄, ὑψοῦντες τὴν α΄ εἰς τὸ τετράγωνον καὶ διαιροῦντες κατὰ μέλη, ὁπότε εὑρίσκομεν $\lambda=\pm\dfrac{5}{6}$.

β΄. Νὰ ὁρισθῇ ἡ παράμετρος λ ἵνα τὸ ἄθροισμα τῶν κύβων τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως $x^2-(\lambda-1)x+2\lambda=0$ εἶναι μηδέν.

Ἔχομεν (§ 167 β΄) $x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)$ εὑρίσκομεν δὲ $(\lambda-1)^3-6\lambda(\lambda-1)=0$ ἥτις τρεπομένη εἰς γινόμενον δίδει

$$(\lambda-1)(\lambda^2-8\lambda+1)=0 \text{ ἐξ ἧς } \lambda_1=1, \quad \lambda_2=4\pm\sqrt{15}.$$

Συνθήκη ἵνα δύο τριώνυμα τοῦ β' βαθμοῦ ἔχουν.

194. Α'. Δύο ρίζας κοινάς. Ἔστωσαν τὰ δύο τριώνυμα τοῦ β' βαθμοῦ

$$\varphi(x) \equiv \alpha x^2 + \beta x + \gamma \qquad (1)$$
$$\varphi_1(x) \equiv \alpha' x^2 + \beta' x + \gamma' \qquad (2)$$

Ἡ ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη ἵνα τὰ δύο τριώνυμα (1) καὶ (2) ἔχουν δύο ρίζας κοινὰς εἶναι ἡ

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'} = \frac{\gamma}{\gamma'} \qquad (3)$$

Ἡ σχέσις (3) εἶναι ἀναγκαία. Διότι ἂν x_1 καὶ x_2 εἶναι αἱ κοιναὶ ρίζαι τῶν τριωνύμων (1) καὶ (2) τότε ἔχομεν ἐκ μὲν τῆς (1) $x_1+x_2=-\frac{\beta}{\alpha}$ καὶ $x_1x_2=\frac{\gamma}{\alpha}$ ἐκ δὲ τῆς (2) $x_1+x_2=-\frac{\beta'}{\alpha'}$ καὶ $x_1x_2=\frac{\gamma'}{\alpha'}$. Ἄρα $\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\beta'}{\alpha'}$ καὶ $\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\gamma'}{\alpha'}$ ἐξ ὧν εὑρίσκεται ἡ σχέσις (3).

Ἡ σχέσις (3) εἶναι ἱκανή. Διότι, ἂν ἕκαστον ἐκ τῶν ἴσων λόγων τῆς (3) καλέσωμεν διὰ λ, ἔχομεν $\alpha=\alpha'\lambda$, $\beta=\beta'\lambda$, $\gamma=\gamma'\lambda$ τὸ δὲ τριώνυμον (1) γίνεται $\lambda(\alpha'x^2+\beta'x+\gamma')$ ὅπερ ὡς πολλαπλάσιον τοῦ (3) ἔχει τὰς αὐτὰς ρίζας μετ' αὐτοῦ.

195. Β'. Μίαν κοινὴν ρίζαν. ***Ἡ ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη ἵνα τὰ δύο τριώνυμα (1) καὶ (2) ἔχουν μίαν μόνην κοινὴν ρίζαν εἶναι ἡ***

$$R=(\alpha\gamma'-\alpha'\gamma)^2-(\alpha\beta'-\alpha'\beta)(\beta\gamma'-\beta'\gamma)=0 \qquad (4)$$

Ἡ σχέσις (4) εἶναι ἀναγκαία. Διότι ἂν ρ εἶναι ἡ κοινὴ ρίζα τῶν δύο τριωνύμων (1) καὶ (2), τότε ἔχομεν (§ 17).

$$\alpha\rho^2+\beta\rho+\gamma=0 \qquad (5)$$
$$\alpha'\rho^2+\beta'\rho+\gamma'=0 \qquad (6)$$

ἐξ ὧν εὑρίσκομεν (§ 88 καὶ 89). $\frac{\rho^2}{\beta\gamma'-\beta'\gamma}=\frac{\rho}{\gamma\alpha'-\gamma'\alpha}=\frac{1}{\alpha\beta'-\alpha'\beta}$

ἐξ ὧν $\quad \rho^2=\frac{\beta\gamma'-\beta'\gamma}{\alpha\beta'-\alpha'\beta}$ καὶ $\rho=\frac{\alpha'\gamma-\alpha\gamma}{\alpha\beta'-\alpha'\beta} \qquad (7)$

Ἄρα $$\frac{\beta'\gamma-\beta'\gamma}{\alpha\beta'-\alpha'\beta}=\frac{(\alpha'\gamma-\alpha\gamma')^2}{(\alpha\beta'-\alpha'\beta)^2} \qquad (8)$$

ἢ $$(\alpha\gamma'-\alpha'\gamma)^2-(\alpha\beta'-\alpha'\beta)(\beta\gamma'-\beta'\gamma)=0.$$

Ἡ σχέσις (4) εἶναι ἱκανή. Διότι αὕτη γράφεται ὑπὸ τὴν μορφὴν

(8) ἂν ὑποτεθῇ ὅτι εἶναι $\alpha\beta' - \alpha'\beta \neq 0$, ἂν δὲ παρασταθῇ διὰ λ^2 ἕκαστος ἐκ τῶν δύο ἴσων λόγων (8), ἤτοι ἂν

$$\lambda^2 = \frac{\beta\gamma' - \beta'\gamma}{\alpha\beta' - \alpha'\beta} \quad \text{ἢ} \quad \lambda = \frac{\alpha'\gamma - \alpha\gamma'}{\alpha\beta' - \alpha'\beta} \tag{9}$$

(ἀπορριπτομένης τῆς ἑτέρας ρίζης τοῦ λ^2) καὶ τεθοῦν αἱ τιμαὶ (9) τοῦ λ εἰς τὰ τριώνυμα (1) καὶ (2) μηδενίζουν ταῦτα. Ἄρα (§ 17) τὰ τριώνυμα (1) καὶ (2) ἔχουν ὡς κοινὴν ρίζαν τὸν λ.

Ἡ σχέσις (4) καλεῖται καὶ ***ἀπαλείφουσα*** τῶν δύο τριωνύμων (1) καὶ (2) παρίσταται δὲ συνήθως διὰ τοῦ R.

196. Ρίζας ἀναλόγους. Ἡ ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη ἵνα τὰ τριώνυμα (1) καὶ (2) ἔχουν ρίζας ἀναλόγους καὶ ἐχούσας λόγον k εἶναι ἡ

$$\beta = \beta'\lambda k, \quad \gamma = \gamma'\lambda k^2 \tag{10}$$

ἔνθα λ εἶναι ὁ λόγος $\frac{\alpha}{\alpha'}$ τῶν συντελεστῶν τῶν δευτεροβαθμίων ὅρων τῶν (1) καὶ (2).

Ἡ σχέσις (10) εἶναι ἀναγκαία. Διότι ἂν ρίζαι τοῦ μὲν (1) εἶναι αἱ x' καὶ x'' τοῦ δὲ (2) καὶ ξ' καὶ ξ'' εἶναι δὲ $\frac{x'}{\xi'} = \frac{x''}{\xi''} = k$, τότε ἔχομεν $x' = k\xi'$ καὶ $x'' = k\xi''$ ἢ διὰ προσθέσεως καὶ πολ/σμοῦ κατὰ μέλη ἔχομεν $x' + x'' = k(\xi' + \xi'')$ καὶ $x'x'' = k^2\xi'\xi''$ ἢ (§ 164) $\beta = \beta'\frac{\alpha}{\alpha'}k$ καὶ $\gamma = \gamma'\frac{\alpha}{\alpha'}k^2$ ἢ ἂν ὁ λόγος $\frac{\alpha}{\alpha'} = \lambda$ τότε $\beta = \beta'\lambda k$ καὶ $\gamma = \gamma'\lambda k^2$.

Ἡ σχέσις (10) εἶναι ἱκανή. Διότι ἂν $\alpha = \alpha'\lambda$, $\beta = \beta'\lambda k$ καὶ $\gamma = \gamma'\lambda k^2$, τότε τὸ τριώνυμον (1) γίνεται $\lambda(\alpha'x^2 + \beta'kx + \gamma'k^2)$, ὅπερ ἔχει ρίζας $x = k\left(\frac{-\beta' \pm \sqrt{\beta'^2 - 4\alpha'\gamma'}}{2\alpha'}\right)$. Ἀλλ' ἡ ἐντὸς τῆς παρενθέσεως παράστασις εἶναι αἱ ρίζαι τοῦ (2). Ἄρα $x' = k\xi'$ καὶ $x'' = k\xi''$.

Ἀσκήσεις πρὸς λύσιν.

615. Νὰ ὁρισθῇ ὁ k ἵνα ἡ μία ρίζα τῆς ἐξισώσεως

$$x^2 + (3k+2)x + k^2 - 2k - 5 = 0$$

εἶναι τριπλασία τῆς ἄλλης.

616. Εἰς τὴν ἐξίσωσιν $x^2 + \lambda x + \mu = 0$ νὰ ὁρισθοῦν οἱ λ καὶ μ εἰς τρόπον ὥστε μία ρίζα της νὰ εἶναι τριπλασία τῆς ἄλλης καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ριζῶν νὰ εἶναι 40.

617. Εἰς τὴν ἄνω ἐξίσωσιν ἂν $\lambda = -2$, ποίαν τιμὴν πρέπει νὰ λάβῃ ὁ μ ἵνα ἡ μία ρίζα ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τῆς ἄλλης;

618. Εἰς τὴν ἐξίσωσιν $2x^2 - (2\lambda+1)x + \lambda^2 - 9\lambda + 39 = 0$ νὰ ὁρισθῇ ὁ λ ἵνα ἡ μία ρίζα εἶναι διπλασία τῆς ἄλλης, νὰ λυθῇ δὲ ἡ ἐξίσωσις διὰ τὴν ἐν λόγῳ τιμὴν τοῦ λ.

619. Εἰς τὴν ἐξίσωσιν $x^2+\lambda x+\nu=0$ νὰ εὑρεθῇ ἡ σχέσις ἡ συνδέουσα τοὺς λ καὶ ν ἵνα ἡ μία ρίζα εἶναι μ φορὰς μεγαλυτέρα τῆς ἄλλης. Ἐφαρμογὴ διὰ $\mu=4$. Νὰ εὑρεθοῦν τότε ὅλαι αἱ ἀκέραιαι καὶ θετικαὶ τιμαὶ τῶν λ καὶ ν αἱ μικρότεραι τοῦ 30.

620. Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ συντελεσταὶ α καὶ β τῆς ἐξισώσεως $x^2+\alpha x+\beta=0$ γνωστοῦ ὄντος ὅτι αἱ ρίζαι ταύτης αὐξηθεῖσαι κατὰ 1 εἶναι ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $x^2-\alpha^2x+\alpha\beta=0$.

621. Ἂν αἱ ἐξισώσεις $x^2+\alpha x+\beta=0$ καὶ $x^2+\lambda x+\mu=0$ ἔχουν μίαν κοινὴν ρίζαν, νὰ δειχθῇ ὅτι $(\beta-\mu)^2=(\alpha\mu-\beta\lambda)(\lambda-\alpha)$.

622. Νὰ ὁρισθῇ ὁ λ εἰς τρόπον ὥστε μία ρίζα τῆς ἐξισώσεως $x^2-7x+2\lambda=0$ νὰ εἶναι διπλασία μιᾶς ρίζης τῆς ἐξισώσεως $x^2-5x+\lambda=0$.

623. Δίδεται ἡ ἐξίσωσις $E\equiv\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ ἔχουσα ρίζας x', x''. Σχηματίζομεν τὴν ἐξίσωσιν E_1 ἔχουσαν ρίζας $x'+\dfrac{1}{x'}$ καὶ $x''+\dfrac{1}{x''}$, τὴν ἐξίσωσιν E_2 ἔχουσαν ρίζας τὰς $\dfrac{x'+1}{x'-1}$ καὶ $\dfrac{x''+1}{x''-1}$ καὶ τὴν ἐξίσωσιν E_3 ἔχουσαν ρίζας τὰς x'^2 καὶ x''^2. Νὰ εὑρεθῇ ἡ συνθήκη ἵνα α) ἡ E_1 ἔχῃ δύο ρίζας ἴσας, β) ἡ E_2 ἔχῃ δύο ρίζας ἀντιθέτους, γ) ἡ E_3 ἔχῃ δύο ρίζας ἴσας δ) αἱ E καὶ E_3 ἔχουν μίαν ρίζαν κοινὴν καὶ ε) αἱ E καὶ E_3 ἔχουν δύο ρίζας κοινάς.

624. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη ἵνα αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ ἔχουν λόγον $\mu:\nu$.

625. Νὰ εὑρεθῇ ἡ συνθήκη ἵνα τὰ τριώνυμα $\lambda x^2+\mu xy+\nu y^2$ καὶ $\lambda' x^2+\mu' xy+\nu' y^2$ ἔχουν ἕνα κοινὸν παράγοντα α΄ βαθμοῦ.

626. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἵνα ἡ παράστασις $3x^2+2Axy+2y^2+2\alpha x-4y+1$ δύναται νὰ ἀναλυθῇ εἰς δύο συμμέτρους πρωτοβαθμίους παράγοντας, τὸ A πρέπει νὰ εἶναι ρίζα τῆς ἐξισώσεως $A^2+4\alpha A+2\alpha^2+6=0$.

627. Νὰ ὁρισθοῦν οἱ μ καὶ ν εἰς τρόπον ὥστε αἱ δύο ἐξισώσεις

$$(5\mu-52)x^2-(\mu-4)x+4=0 \quad \text{καὶ} \quad (2\nu+1)x^2-5\nu x+20=0$$

νὰ ἔχουν τὰς αὐτὰς ρίζας.

628. Εἰς τὰς ἐξισώσεις

$$x^2-5x+\lambda+2=0 \qquad \text{καὶ} \qquad x^2-7x+2\lambda=0$$

νὰ ὁρισθῇ ὁ λ ἵνα μία ρίζα τῆς δευτέρας εἶναι τριπλασία μιᾶς ρίζης τῆς πρώτης. (Πολ. 1934).

629. Νὰ εὑρεθῇ ἡ σχέσις ἥτις συνδέει τὰς ρίζας τῶν ἐξισώσεων

$$x^2+\lambda x+\mu=0 \qquad \text{καὶ} \qquad x^2-2x\sqrt{\lambda^2-2\mu}+\lambda^2-2\mu=0$$

ἂν δὲ αἱ ρίζαι τῆς πρώτης εἶναι διαστάσεις ἑνὸς ὀρθογωνίου, πῶς παρίστανται γεωμετρικῶς αἱ ρίζαι τῆς δευτέρας;

630. Τὸ αὐτὸ διὰ τὰς ἐξισώσεις

$$x^2+\lambda x+\mu=0 \qquad \text{καὶ} \qquad \mu^2x^2-(\lambda^2-2\mu)(1+\mu^2)x+(\lambda^2-2\mu)^2=0.$$

631. Νὰ ὁρισθῇ ὁ α ἵνα αἱ ἐξισώσεις $x^2+\alpha x+1=0$ καὶ $x^2+x+\alpha=0$ ἔχουν α΄ μίαν ρίζαν κοινὴν καὶ β΄ δύο ρίζας κοινάς.

632. Ἂν αἱ ἐξισώσεις $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ καὶ $\alpha' x^2+\beta' x+\gamma'=0$ ἔχουν μίαν κοινὴν ρίζαν, νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ διακρίνουσα τῆς ἐξισώσεως

$\alpha x^2+\beta x+\gamma+\lambda(\alpha' x^2+\beta' x+\gamma)=0$ εἶναι τέλειον τετράγωνον.

633. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη ἵνα αἱ ρίζαι μιᾶς ἐξισώσεως τοῦ β' βαθμοῦ εἶναι ἀντίστοιχως ἀντίθετοι πρὸς τὰς ρίζας μιᾶς ἄλλης ἐξισώσεως τοῦ β' βαθμοῦ.

634. Ὁμοίως ἵνα αἱ ρίζαι ἑνὸς τριωνύμου τοῦ β' βαθμοῦ εἶναι ἀντιστοίχως ἀντίστροφοι τῶν ριζῶν ἑνὸς ἄλλου τριωνύμου τοῦ β' βαθμοῦ.

X ΤΡΙΩΝΥΜΟΝ ΤΟΥ Β' ΒΑΘΜΟΥ

Θέσις ἀριθμοῦ τινος ἐν σχέσει πρὸς τὰς ρίζας τοῦ τριωνύμου $\alpha x^2+\beta x+\gamma$.

197. Θεώρημα α'. ***Εἰς τὸ τριώνυμον*** $\varphi(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ ***ἂν ὁ α καὶ τὸ φ(λ) εἶναι ἑτερόσημα, τότε τὸ τριώνυμον τοῦτο ἔχει δύο ρίζας πραγματικὰς καὶ ἀνίσους ὁ δὲ ἀριθμὸς λ περιέχεται μεταξὺ τῶν ριζῶν του· καὶ ἀντιστρόφως.***

Τοῦτο εἶναι ἄμεσον ἐπακολούθημα τῶν περὶ τοῦ σημείου τοῦ τριωνύμου τοῦ β' βαθμοῦ ἐκτεθέντων (§ 170). Διότι ἀφοῦ τὸ φ(λ) δηλαδὴ τὸ ἐξαγόμενον ὅπερ εὑρίσκομεν ἂν εἰς τὸ τριώνυμον θέσωμεν ἀντὶ x τὸ λ, εἶναι ἑτερόσημον πρὸς τὸν α, ἔπεται ὅτι (§ 170 γ') ὁ ἀριθμὸς λ κεῖται μεταξὺ τῶν ριζῶν τοῦ τριωνύμου.

198. Θεώρημα β'. ***Εἰς τὸ τριώνυμον*** $\varphi(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ ***ἂν τὸ φ(λ) καὶ τὸ φ(μ) εἶναι ἑτερόσημα, τότε τὸ τριώνυμον τοῦτο ἔχει δύο ρίζας πραγματικὰς καὶ ἀνίσους, μία δὲ ἐξ αὐτῶν περιέχεται μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν λ καὶ μ· καὶ ἀντιστρόφως.***

Ἔστω $\alpha>0$. Ἤδη ἂν $\varphi(\lambda)<0$, τότε θὰ εἶναι $\varphi(\mu)>0$. Ἀλλὰ διότι ὁ α καὶ τὸ φ(λ) εἶναι ἑτερόσημα, ἔπεται ὅτι ὁ λ κεῖται μεταξὺ τῶν ριζῶν x_1 καὶ x_2 τοῦ τριωνύμου (§ 197). Εἶναι δηλαδὴ $x_1<\lambda<x_2$. Ἤδη διότι τὸ φ(μ) εἶναι ὁμόσημον πρὸς τὸν α, ἔπεται ὅτι (§ 170) ὁ ἀριθμὸς μ δὲν κεῖται μεταξὺ τῶν ριζῶν x_1 καὶ x_2, ἀλλὰ θὰ εἶναι ἢ μικρότερος ἢ μεγαλύτερος ἀμφοτέρων. Δηλαδὴ ἡ τάξις μεγέθους τῶν ἀριθμῶν λ καὶ μ καὶ τῶν ριζῶν θὰ εἶναι :

$$\mu<x_1<\lambda<x_2 \quad \text{ἢ} \quad x_1<\lambda<x_2<\mu.$$

Ὁμοίως ἂν $\varphi(\lambda)>0$ ὁπότε $\varphi(\mu)<0$ τότε ὁμοίως σκεπτόμενοι συμπεραίνομεν ὅτι ἡ τάξις μεγέθους τῶν λ καὶ μ καὶ τῶν ριζῶν θὰ εἶναι :

$$\lambda<x_1<\mu<x_2 \quad \text{ἢ} \quad x_1<\mu<x_2<\lambda.$$

Ὁμοίως σκεπτόμεθα ἂν $\alpha<0$. Ἄρα πάντοτε μία ἐκ τῶν ριζῶν τοῦ τριωνύμου $x^2+\beta x+\gamma$, αἱ ὁποῖαι πλέον νὰ εἶναι πραγματικαί, κεῖται μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν λ καὶ μ.

199. ***Τὸ ἡμιάθροισμα τῶν ριζῶν τοῦ τριωνύμου*** $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ ***εὑρίσκεται πάντοτε μεταξὺ τῶν ριζῶν του, ἤτοι :***

$$x_1<\frac{x_1+x_2}{2}<x_2 \quad \text{ἂν} \quad x_1<x_2$$

Πράγματι ἔχομεν $\quad x_1<x_2$ ἢ $2x_1<x_1+x_2$ καὶ $x_1<\frac{x_1+x_2}{2}$.

Ὁμοίως $x_1<x_2$ ἢ $x_1+x_2<2x_2$ καὶ $\frac{x_1+x_2}{2}<x_2$.

Ἡ ἄνω σχέσις δύναται νὰ γραφῇ καὶ ὡς ἑξῆς $x_1<-\frac{\beta}{2\alpha}<x_2$

διότι τὸ ἡμιάθροισμα τῶν ριζῶν εἶναι $-\frac{\beta}{2\alpha}$.

200. Ἤδη ἂν θέλωμεν ὁ ἀριθμὸς λ νὰ κεῖται μεταξὺ τῶν ριζῶν τοῦ τριωνύμου $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ δηλαδὴ ἂν θέλωμεν νὰ ὑφίσταται μεταξὺ τοῦ λ καὶ τῶν ριζῶν του ἡ σχέσις $x_1<\lambda<x_2$, τότε πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ἀληθεύει ἡ ἀνισότης.

$$\alpha\varphi(\lambda)<0 \qquad (1)$$

Διότι οἱ α καὶ $\varphi(\lambda)$ ὡς ὀφείλοντες νὰ εἶναι ἑτερόσημοι (§ 197) πρέπει νὰ ἔχουν γινόμενον ἀρνητικόν.

Ἡ σχέσις (1) δεικνύει ταυτοχρόνως ὅτι τὸ τριώνυμον ἔχει καὶ πραγματικὰς ρίζας, διότι μόνον τότε ὑφίσταται αὕτη.

201. Ἂν θέλωμεν ὁ λ νὰ κεῖται ἐκτὸς τῶν πραγματικῶν ριζῶν τοῦ τριωνύμου, ἤτοι ἂν θέλωμεν νὰ εἶναι $\lambda<x_1<x_2$ ἢ $x_1<x_2<\lambda$, τότε ὀφείλουν νὰ ἀληθεύουν ταυτοχρόνως αἱ ἑξῆς τρεῖς ἀνισότητες :

$$\beta^2-4\alpha\gamma\geqq 0 \quad (2), \qquad \alpha\varphi(\lambda)>0 \quad (3), \qquad \text{καὶ } \lambda<-\frac{\beta}{2\alpha} \text{ ἢ } \lambda>-\frac{\beta}{2\alpha} \quad (4)$$

Ἐκ τούτων ἡ μὲν (2) εἶναι ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ ἵνα τὸ τριώνυμον ἔχῃ ρίζας πραγματικάς· ἡ (3) ἵνα ὁ λ μὴ περιέχεται μεταξὺ τῶν πραγματικῶν ριζῶν καὶ ἡ μία ἐκ τῶν (4) ἵνα ὁ λ εἶναι μικρότερος ἢ μεγαλύτερος τῶν ριζῶν, καθόσον θὰ εἶναι μικρότερος ἢ μεγαλύτερος ἀριθμοῦ τινος κειμένου μεταξὺ τῶν ριζῶν, καὶ ὡς τοιοῦτον ἀριθμὸν κείμενον μεταξὺ τῶν ριζῶν λαμβάνομεν τὸ ἡμιάθροισμα τῶν ριζῶν. Σημειωτέον ὅτι αἱ ἀνισότητες (2), (3), (4) ὀφείλουν νὰ συναληθεύουν καθ' ἣν τάξιν εἶναι γεγραμμέναι. Διότι μὴ ἀληθευούσης τῆς (2) εἶναι περιττὸν νὰ ἴδωμεν ἂν ἀληθεύουν αἱ λοιπαί.

202. Ἂν θέλωμεν μία ἐκ τῶν ριζῶν τοῦ τριωνύμου $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ νὰ εὑρίσκεται μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν λ καὶ μ, ἤτοι νὰ εἶναι $\lambda<x_1<\mu$ τότε πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὰ $\varphi(\lambda)$ καὶ $\varphi(\mu)$ νὰ εἶναι ἑτερόσημα (§ 198), πρέπει δηλαδὴ νὰ ἀληθεύῃ ἡ ἀνισότης :

$$\varphi(\lambda)\varphi(\mu)<0 \qquad (5)$$

Ἡ ἀνισότης (5) δεικνύει ταυτοχρόνως ὅτι ὑπάρχουν ρίζαι πραγματικαὶ καὶ ἄνισοι (§ 198).

203. Ἂν θέλωμεν ἀμφότεραι αἱ πραγματικαὶ ρίζαι νὰ κεῖνται μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν λ καὶ μ τότε εἶναι ἀπαραίτητον νὰ συναληθεύουν αἱ ἀκόλουθοι πέντε ἀνισότητες ὑπατιθεμένου ὅτι $\lambda<\mu$.

$$\beta^2-4\alpha\gamma\geqq 0 \quad (6), \qquad \alpha\varphi(\lambda)>0 \quad (7), \qquad \alpha\varphi(\mu)>0 \quad (8),$$

$$\lambda<-\frac{\beta}{2\alpha} \quad (9) \qquad \text{καὶ} \quad \mu>-\frac{\beta}{2\alpha} \quad (10)$$

Ἐκ τούτων ἡ (6) δεικνύει ὅτι ὑπάρχουν ρίζαι πραγματικαί, ἡ (7) καὶ (8) ὅτι καὶ ὁ λ καὶ ὁ μ εὑρίσκονται ἐκτὸς τῶν ριζῶν, ἡ (9) ὅτι ὁ λ εἶναι μικρότερος τῶν ριζῶν καὶ ἡ (10) ὅτι ὁ μ εἶναι μεγαλύτερος αὐτῶν. Καὶ ἐνταῦθα αἱ 5 ἀνισότητες πρέπει νὰ ἀληθεύουν μὲ τὴν σειρὰν μὲ τὴν ὁποίαν ἐδόθησαν.

204. Παραδείγματα διὰ τὴν ἐφαρμογὴν τῶν ἀνωτέρω ἔστωσαν τὰ κάτωθι :

α΄. Οἱ ἀριθμοὶ -4, -1, 0, 3, 8 καὶ αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $x^2-3x-10=0$ νὰ τεθοῦν κατὰ σειρὰν μεγέθους χωρὶς νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις.

Παρατηροῦμεν ὅτι $\varphi(-4)=18$, $\varphi(-1)=-6$, $\varphi(0)=-10$, $\varphi(3)=-10$ καὶ $\varphi(8)=30$. Ἄρα ὁ ἀριθμὸς -4 κεῖται ἐκτὸς τῶν ριζῶν, οἱ -1, 0, 3 κεῖνται μεταξὺ τῶν ριζῶν καὶ ὁ 8 κεῖται ἐκτὸς τῶν ριζῶν. Ἂν λοιπὸν x_1 καὶ x_2 εἶναι αἱ ρίζαι, τότε ἡ μικροτέρα x_1 θὰ κεῖται μεταξὺ -4 καὶ -1 ἡ δὲ μεγαλυτέρα x_2 θὰ κεῖται μεταξὺ 3 καὶ 8, ἤτοι θὰ ἔχωμεν τὴν ἑξῆς σειρὰν -4, x_1, -1, 0, 3, x_2, 8. Πράγματι αἱ αίζαι τῆς ἐξισώσεως εἶναι -2 καὶ 5.

β΄. Εἰς τὴν ἐξίσωσιν $(\nu-2)x^2-(\nu-3)x+15=0$ νὰ ὁρισθῇ ὁ ν ἵνα ὁ ἀριθμὸς 3 κεῖται μεταξὺ τῶν ριζῶν της, ἤτοι νὰ εἶναι $x_1<3<x_2$.

Πρὸς τοῦτο πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι (§ 200) $(\nu-2)\varphi(3)<0$ ἢ διότι $\varphi(3)=6(\nu+1)$ ἡ ἄνω ἀνισότης γράφεται :

$$6(\nu-2)(\nu+1)<0 \quad \text{ἢ} \quad (\nu+1)(\nu-2)<0$$

ἀληθεύει δὲ ἂν ὁ ν κεῖται μεταξὺ -1 καὶ 2, ἤτοι ἂν εἶναι $-1<\nu<2$.

γ΄. Ὁμοίως εἰς τὴν αὐτὴν ἐξίσωσιν νὰ ὁρισθῇ ὁ ν ἵνα μία ρίζα της κεῖται μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν -1 καὶ 3.

Πρὸς τοῦτο (§ 202) πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι $\varphi(-1)\varphi(3)<0$ ἢ διότι $\varphi(-1)=2(\nu+5)$ καὶ $\varphi(3)=6(\nu+1)$ πρέπει νὰ ἔχωμεν $(\nu+5)(\nu+1)<0$, ἥτις ἀληθεύει ἂν $-5<\nu<-1$.

δ΄. Εἰς τὴν ἐξίσωσιν $(\lambda-20)x^2-(\lambda-3)x+8=0$ νὰ ὁρισθῇ ὁ λ ἵνα ὁ ἀριθμὸς 4 εἶναι μεγαλύτερος ἀμφοτέρων τῶν πραγματικῶν ριζῶν της. Πρὸς τοῦτο (§ 201) πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ συναληθεύουν αἱ ἑξῆς τρεῖς ἀνισότητες :

$$\beta^2-4\alpha\gamma \geqq 0, \quad \alpha\varphi(4)>0 \quad \text{καὶ} \quad 4>-\frac{\beta}{2\alpha}.$$

Ἡ πρώτη γίνεται $(\lambda-3)^2-32(\lambda-20)>0$ ἢ $\lambda^2-38\lambda+649>0$. Ἀλλ' αὕτη ἀληθεύει πάντοτε διότι τὸ τριώνυμον τοῦ α' μέλους της ὡς ἔχον ῥίζας φανταστικὰς εἶναι πάντοτε θετικόν. Ἡ δευτέρα ἀνισότης γίνεται : $12(\lambda-20)(\lambda-25)>0$ ἀληθεύει δὲ αὕτη διὰ $\lambda<20$ ἢ $\lambda>25$. Ἡ δὲ τρίτη γίνεται :

$$4>\frac{\lambda-3}{2(\lambda-20)} \quad \text{ἢ} \quad (7\lambda-157)(\lambda-20)>0.$$

ἥτις ἀληθεύει ἂν $\lambda<20$ ἢ $\lambda>22,4$.

Ἄρα αἱ δύο τελευταῖαι ἀνισότητες ἀληθεύουν ταυτοχρόνως διὰ $\lambda>20$ ἢ διὰ $\lambda>25$. Ἂν λοιπὸν $\lambda<20$ ἢ $\lambda>25$, ὁ ἀριθμὸς 4 εἶναι μεγαλύτερος ἀμφοτέρων τῶν ῥιζῶν.

ε'. Εἰς τὴν ἄνω ἐξίσωσιν νὰ ὁρισθῇ ὁ λ ἵνα ἀμφότεραι αἱ ῥίζαι περιέχωνται μεταξὺ 0 καὶ 4, ἤτοι νὰ εἶναι $0<x_1<x_2<4$.

Πρὸς τοῦτο πρέπει (§ 203) νὰ ἀληθεύουν ταυτοχρόνως αἱ ἑξῆς πέντε ἀνισότητες :

$$(\lambda-3)^2-32(\lambda-20)>0, \quad (\lambda-20).\varphi(0)>0, \quad (\lambda-20).\varphi(4)>0$$

$$\frac{\lambda-3}{2(\lambda-20)}>0 \quad \text{καὶ} \quad \frac{\lambda-3}{2(\lambda-20)}<4.$$

Ὡς εἰς τὴν ἀνωτέρω παράγραφον εἴδομεν, ἡ πρώτη ἀληθεύει πάντοτε ἡ τρίτη ἀληθεύει ἂν $\lambda<20$ ἢ $\lambda>25$, καὶ ἡ τελευταία ἂν $\lambda<20$ ἢ $\lambda>22,4$. Ἤδη ἡ δευτέρα ἀνισότης γίνεται $8(\lambda-20)>0$ διότι $\varphi(0)=8$, ἀληθεύει δὲ διὰ $\lambda>20$ καὶ ἡ τετάρτη γίνεται

$$(\lambda-3)(\lambda-20)>0$$

ἥτις ἀληθεύει διὰ $\lambda<3$ ἢ $\lambda>20$. Ὅλαι ὁμοῦ αἱ ἀνισότητες συναληθεύουν ἂν $\lambda>25$ (ἴδε καὶ § 183). Ἄρα ἂν $\lambda>25$ τότε ἀμφότεραι αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως περιέχονται μεταξὺ 0 καὶ 4.

Σχέσεις μεγέθους μεταξὺ τῶν ῥιζῶν δύο τριωνύμων τοῦ β' βαθμοῦ.

Ἔστωσαν τὰ δύο τριώνυμα τοῦ β' βαθμοῦ

$$\varphi(x)\equiv\alpha x^2+\beta x+\gamma \qquad (1)$$

$$\varphi_1(x)\equiv\alpha' x^2+\beta' x+\gamma' \qquad (2)$$

205. Θεώρημα Α'. *Ἡ ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη ἵνα τὰ*

$\varphi(x)$ καὶ $\varphi_1(x)$ ἔχουν ρίζας πραγματικὰς καὶ τοιαύτας ὥστε αἱ δύο ρίζαι ἑκάστου νὰ χωρίζωνται ὑπὸ μιᾶς ρίζης τοῦ ἑτέρου εἶναι $R<0$ ἤτοι ἡ ἀπαλείφουσά των νὰ εἶναι ἀρνητική.

Ἡ σχέσις $R<0$ εἶναι ἀναγκαία. Διότι ἂν x', x'' εἶναι αἱ πραγματικαὶ ρίζαι τοῦ $\varphi(x)$ καὶ ξ', ξ'' αἱ τοῦ $\varphi_1(x)$, καὶ ἐφ' ὅσον $R<0$, τότε μεταξὺ τῶν ριζῶν αὐτῶν θὰ ὑφίσταται μία ἐκ τῶν σχέσεων.

$$\text{I} \quad x'<\xi'<x''<\xi'', \qquad \text{II} \quad \xi'<x'<\xi''<x''$$

Εἰς ἀμφοτέρας τὰς περιπτώσεις I καὶ II ἐπειδὴ μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν ξ' καὶ ξ'' ὑπάρχει μία ρίζα τοῦ $\varphi(x)$, διὰ τοῦτο (§ 198) θὰ εἶναι $\quad \varphi(\xi')\varphi(\xi'')<0 \quad$ ἢ $\quad (\alpha\xi'^2+\beta\xi'+\gamma)(\alpha\xi''^2+\beta\xi''+\gamma)<0 \quad$ ἢ

$$\alpha^2\xi'^2\xi''^2+\alpha\beta\xi'\xi''(\xi'+\xi'')+\alpha\gamma(\xi'^2+\xi''^2)+\beta\gamma(\xi'+\xi'')+\beta^2\xi'\xi''+\gamma^2<0 \qquad (3)$$

ἢ διότι $\xi'+\xi''=-\dfrac{\beta'}{\alpha'}$, $\xi'\xi''=\dfrac{\gamma'}{\alpha'}$ καὶ $\xi'^2+\xi''^2=\dfrac{\beta'^2-2\alpha'\gamma'}{\alpha'^2}$ ἔχομεν

$$(\alpha^2\gamma'^2+\alpha'^2\gamma^2-2\alpha\alpha'\gamma\gamma')-(\alpha\beta\beta'\gamma'-\alpha\beta'^2\gamma)+(\alpha'\beta^2\gamma'-\alpha'\beta\beta'\gamma)<0$$

ἢ τέλος
$$R=(\alpha\gamma'-\alpha'\gamma)^2-(\alpha\beta'-\alpha'\beta)(\beta\gamma'-\beta'\gamma)<0 \qquad (4)$$

Ὁμοίως εἰς ἀμφοτέρας τὰς περιπτώσεις I καὶ II, ἐπειδὴ μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν x' καὶ x'' ὑπάρχει μία ρίζα τοῦ $\varphi_1(x)$, διὰ τοῦτο θὰ εἶναι $\varphi_1(x')\varphi_1(x'')<0$, ἐργαζόμενοι δὲ ὡς ἀνωτέρω, εὑρίσκομεν τὴν σχέσιν (4), ἤτοι $R<0$.

Ἂν ἤδη ἀληθεύῃ μία ἐκ τῶν I ἢ II τότε διὰ μὲν τὴν I θὰ ἔχωμεν καὶ $-\dfrac{\beta}{\alpha}<-\dfrac{\beta'}{\alpha'}$ διότι ἀφοῦ εἶναι $x'<\xi'$ καὶ $x''<\xi''$ θὰ εἶναι καὶ $x'+x''<\xi'+\xi''$ διὰ δὲ τὴν II θὰ ἔχωμεν καὶ $-\dfrac{\beta'}{\alpha'}<-\dfrac{\beta}{\alpha}$.

Ἡ σχέσις $R<0$ εἶναι ἱκανή. Διότι αὕτη γίνεται διαδοχικῶς

$$\alpha^2\gamma'^2+\alpha'^2\gamma^2-2\alpha\alpha'\gamma\gamma'-\alpha\beta\beta'\gamma'+\alpha'\beta^2\gamma'+\alpha\beta'^2\gamma-\alpha'\beta\beta'\gamma<0 \qquad (5)$$

ἢ ἂν διαιρέσωμεν τὰ μέλη τῆς (5) διὰ τοῦ θετικοῦ ἀριθμοῦ α'^2

$$\alpha^2\frac{\gamma'^2}{\alpha'^2}+\gamma^2-2\alpha\gamma\frac{\gamma'}{\alpha'}-\alpha\beta\frac{\beta'}{\alpha'}\,\frac{\gamma'}{\alpha'}+\beta^2\frac{\gamma'}{\alpha'}+\alpha\gamma\frac{\beta'^2}{\alpha'^2}-\beta\gamma\frac{\beta'}{\alpha'}<0 \qquad \text{ἢ}$$

$$\alpha^2\xi'^2\xi''^2+\alpha\beta\xi'\xi''^2+\alpha\gamma\xi''^2+\alpha\beta\xi'^2\xi''+\beta^2\xi'\xi''+\beta\gamma\xi''+\alpha\gamma\xi'^2+\beta\gamma\xi'+\gamma^2<0$$

$$\text{ἢ} \qquad (\alpha\xi'^2+\beta\xi'+\gamma)(\alpha\xi''^2+\beta\xi''+\gamma)<0 \quad \text{ἢ τέλος} \quad \varphi(\xi')\varphi(\xi'')<0$$

Ἀλλὰ τότε (§ 198) μία ἐκ τῶν ριζῶν τοῦ $\varphi(x)$ θὰ κεῖται μεταξὺ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν ξ' καὶ ξ''.

Ἐπίσης ἂν διαιρέσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (5) διὰ τοῦ θετικοῦ ἀριθμοῦ α^2 καὶ ἐργασθῶμεν ὁμοίως εὑρίσκομεν $\varphi_1(x')\varphi_1(x'')<0$ ἐξ οὗ συμπεραίνομεν (§ 198) ὅτι μία ρίζα τοῦ $\varphi_1(x)$ κεῖται μεταξὺ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν x′ καὶ x″. Ἑπομένως ἡ τάξις μεγέθους τῶν ριζῶν τῶν τριωνύμων φ(x) καὶ $φ_1$(x) εἶναι ἡ I ἢ ἡ II.

Ἤδη, ἂν $-\frac{β}{α} < -\frac{β'}{α'}$ τότε ἔχομεν τὴν σειρὰν μεγέθους τῆς περιπτώσεως I ἂν δὲ $-\frac{β'}{α'} < -\frac{β}{α}$ τότε ἔχομεν τὴν σειρὰν μεγέθους τῆς περιπτώσεως II, ὡς ἀποδεικνύεται διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς.

ΣΗΜ. Κατὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ ἀντιστρόφου τοῦ ἄνω θεωρήματος ἀναφέρομεν ὅτι οἱ ἀριθμοὶ ξ′, ξ″ εἶναι πραγματικοί. Πράγματι ἂν οὗτοι ἦσαν φανταστικοὶ δὲν θὰ ἦτο ποτὲ ἀληθὴς ἡ εὑρισκομένη σχέσις $φ(ξ')φ(ξ'')<0$ Καθόσον τότε (§ 166 β′.) οἱ ξ′, ξ″, ὡς ρίζαι τοῦ τριωνύμου $φ_1$(x), θὰ ἦσαν τῆς μορφῆς $ξ'=λ+δi$ $ξ''=λ-δi$, τότε δὲ τὸ $φ(ξ')φ(ξ'')$ θὰ ἐγίνετο

$$(αλ^2-αδ^2+βλ+γ)^2+(2αλδ+βδ)^2$$

ὅπερ ὡς ἄθροισμα δύο τετραγώνων εἶναι πάντοτε θετικόν. Ἄρα δὲν δύνανται οἱ ξ′, ξ″ νὰ εἶναι φανταστικοί.

206. Πρὸς ἐφαρμογὴν τῶν ἀνωτέρω ἔστω τὸ ἑξῆς παράδειγμα :

Ἂν διὰ x′, x″ καὶ ξ′, ξ″ παρασταθῶσιν ἀντιστοίχως αἱ ρίζαι τῶν τριωνύμων

$$λ^2x^2+(3λ^2-5λ+17)x+\frac{1}{λ} \quad \text{καὶ} \quad λ^2x^2+(2λ^2-19λ-23)x+\frac{1}{λ}$$

νὰ εὑρεθοῦν αἱ τιμαὶ τοῦ λ διὰ τὰς ὁποίας τὰ τριώνυμα ταῦτα ἔχουν ρίζας πραγματικὰς καὶ τοιαύτας ὥστε νὰ εἶναι

$$x'<ξ'<x''<ξ'' \qquad \text{(Πολυτεχν. 1932).}$$

Πρὸς τοῦτο πρέπει νὰ εἶναι $R<0$ καὶ $-\frac{β}{α}<-\frac{β'}{α'}$. Ἀλλὰ

$R=λ(λ^2+14λ+40)^2$. Ἄρα $λ(λ^2+14λ+40)^2<0$ ἐξ ἧς $λ<0$.

Ὁμοίως $\frac{5λ-3λ^2-17}{λ^2}<\frac{19λ-2λ^2+23}{λ^2}$ ἢ $λ^2+14λ+40>0$, ἥτις ἀληθεύει ἂν $λ<-10$ ἢ $λ>-4$. Ἄρα, διότι ὀφείλει νὰ εἶναι καὶ $λ<0$, συμβαίνει τὸ ζητούμενον ἂν $λ<-10$ ἢ ἂν $-4<λ<0$.

207. Θεώρημα Β′. ***Ἡ ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη ἵνα μεταξὺ τῶν ριζῶν x′, x″ τοῦ φ(x) καὶ ξ′, ξ″ τοῦ $φ_1$(x) ὑφίσταται μία ἐκ τῶν τεσσάρων σχέσεων***

I $x'<ξ'<ξ''<x''$, III $x'<x''<ξ'<ξ'$

II $ξ'<x'<x''<ξ''$, IV $ξ'<ξ''<x'<x''$

εἶναι : $R>0$, $β^2-4αγ>0$, $β'^2-4α'γ'>0$ καὶ διὰ μὲν τὴν περίπτωσιν

I $αφ\left(-\frac{β'}{2α'}\right)<0$ καὶ $\frac{β^2-4αγ}{α^2}>\frac{β'^2-4α'γ'}{α'^2}$ διὰ τὴν II

$$\alpha'\varphi_1\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right)<0 \text{ καὶ } \frac{\beta'^2-4\alpha'\gamma'}{\alpha'^2}<\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{\alpha^2} \text{ διὰ τὴν III}$$

$$\alpha\varphi\left(-\frac{\beta'}{2\alpha'}\right)>0,\ \alpha'\varphi_1\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right)>0 \text{ καὶ } -\frac{\beta}{\alpha}<-\frac{\beta'}{\alpha'} \text{ καὶ διὰ τὴν IV}$$

$$\alpha\varphi\left(-\frac{\beta'}{2\alpha'}\right)>0,\ \alpha'\varphi_1\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right)>0 \text{ καὶ } -\frac{\beta'}{\alpha'}<-\frac{\beta}{\alpha}.$$

Αἱ ἄνω σχέσεις εἶναι ἀναγκαῖαι. Διότι ἂν ἀληθεύῃ μία ἐκ τῶν I, II, III, IV, τότε (§ 205) θὰ εἶναι $R<0$. Οὐδεμία ὅμως ἐκ τῶν τεσσάρων περιπτώσεων I, II, III, IV μᾶς πείθει ἂν τὰ τριώνυμα $\varphi(x)$ καὶ $\varphi_1(x)$ ἔχουν ῥίζας πραγματικάς. Διὰ τοῦτο πρέπει νὰ ἀληθεύουν καὶ αἱ σχέσεις $\beta^2-4\alpha\gamma<0$ καὶ $\beta'^2-4\alpha'\gamma'>0$. Καὶ ἐπὶ πλέον διὰ τὴν περίπτωσιν I, διότι (§ 197) ὁ ἀριθμὸς $\frac{\xi'+\xi''}{2}=-\frac{\beta'}{2\alpha'}$ κεῖται μεταξὺ τῶν ῥιζῶν τοῦ $\varphi(x)$ διὰ τοῦτο (§ 200) θὰ εἶναι $\alpha\varphi\left(-\frac{\beta'}{2\alpha'}\right)<0$. Ἐπίσης, διότι $x''>\xi''$ καὶ $\xi'>x'$ ἢ διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη $x''-x'>\xi''-\xi'$ ἢ $(x''-x')^2>(\xi''-\xi')^2$ θὰ εἶναι $\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{\alpha^2}>\frac{\beta'^2-4\alpha'\gamma'}{\alpha'^2}$.

Διὰ τὴν II, θὰ εἶναι διὰ τὸν αὐτὸν λόγον $\alpha'\varphi_1\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right)<0$. Ἐπίσης διότι $\xi''>x''$ καὶ $x'>\xi'$ ἢ διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη $\xi''-\xi'>x''-x'$ ἢ $(\xi''-\xi')^2>(x''-x')^2$ θὰ εἶναι $\frac{\beta'^2-4\alpha'\gamma'}{\alpha'^2}>\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{\alpha^2}$. Διὰ τὴν III καὶ IV ἐπειδὴ οὐδεὶς ἐκ τῶν ἀριθμῶν $-\frac{\beta}{2\alpha}$ καὶ $-\frac{\beta'}{2\alpha'}$ περιέχεται μεταξὺ τῶν ῥιζῶν τοῦ ἑνὸς ἐκ τῶν $\varphi(x)$ καὶ $\varphi_1(x)$, διὰ τοῦτο (§ 201) θὰ εἶναι $\alpha\varphi\left(-\frac{\beta'}{2\alpha'}\right)>0$ καὶ $\alpha'\varphi_1\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right)>0$· καὶ διὰ μὲν τὴν III θὰ εἶναι ἀκόμη $-\frac{\beta}{\alpha}<-\frac{\beta'}{\alpha'}$ διὰ δὲ τὴν IV θὰ εἶναι ἀκόμη

$$-\frac{\beta'}{\alpha'}<-\frac{\beta}{\alpha}.$$

Αἱ ἄνω σχέσεις εἶναι ἱκαναί. Διότι ἂν $R>0$ συμπεραίνομεν ὅτι αἱ ῥίζαι τοῦ ἑνὸς ἐκ τῶν τριωνύμων $\varphi(x)$ καὶ $\varphi_1(x)$ δὲν χωρίζονται ὑπὸ μιᾶς ῥίζης τοῦ ἑτέρου (§ 205). Ὥστε ἢ ἀμφότεραι αἱ ῥίζαι τοῦ ἑνὸς τριωνύμου θὰ περιέχωνται μεταξὺ τῶν ῥιζῶν τοῦ ἑτέρου (περ. I, II), ἢ ἀμφότεραι αἱ ῥίζαι τοῦ ἑνὸς θὰ εἶναι μικρότεραι ἀμφοτέρων τῶν ῥιζῶν τοῦ ἑτέρου (περιπτ. III, IV). Δυνατὸν ὅμως αἱ ῥίζαι τῶν τριωνύμων νὰ εἶναι φανταστικαί. Ἀφοῦ ὅμως εἶναι $\beta^2-4\alpha\gamma>0$ καὶ $\beta'^2-4\alpha'\gamma'>0$, ἕπεται ὅτι αἱ ῥίζαι καὶ τοῦ $\varphi(x)$ καὶ τοῦ $\varphi_1(x)$ εἶναι πραγματικαί. Καὶ ἂν μὲν $\alpha\varphi\left(-\frac{\beta'}{2\alpha'}\right)<0$ καὶ $\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{\alpha^2}>\frac{\beta'^2-4\alpha'\gamma'}{\alpha'^2}$ ἕπεται ὅτι θὰ ὑφίσταται ἢ ἡ περίπτωσις I ἢ ἡ περίπτωσις II, καθόσον $R>0$ καὶ $x'<\frac{\xi'+\xi''}{2}<x''$ (§ 197). Ἀλλ' ἂν ὑφίστατο ἡ περίπτωσις II, τότε, κατὰ τὰ ἀνωτέρω λεχθέντα, θὰ ἔπρεπε νὰ ἦτο $\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{\alpha^2}<\frac{\beta'^2-4\alpha'\gamma'}{\alpha'^2}$, ὅπερ ἄτοπον. Ἄρα μεταξὺ τῶν ῥιζῶν τῶν $\varphi(x)$ καὶ $\varphi_1(x)$ ὑφίσταται μόνον ἡ περίπτωσις I. Ἂν δὲ $\alpha'\varphi_1\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right)<0$ καὶ $\frac{\beta'^2-4\alpha'\gamma'}{\alpha'^2}>\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{\alpha^2}$ τότε ἀποδεικνύεται ὁμοίως ὡς ἀνωτέρω ὅτι ἀμφότεραι αἱ ῥίζαι τοῦ $\varphi(x)$ περιέχονται μεταξὺ τῶν ῥιζῶν τοῦ $\varphi_1(x)$ (περίπτωσις II). Ἂν $\alpha\varphi\left(-\frac{\beta'}{2\alpha'}\right)>0$ καὶ $\alpha'\varphi_1\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right)>0$ ἕπεται ὅτι αἱ ῥίζαι τοῦ ἑνὸς δὲν κεῖνται μεταξὺ τῶν ῥιζῶν τοῦ ἄλλου (201). Ἑπομένως ἡ τάξις μεγέθους τῶν ῥιζῶν θὰ εἶναι ἡ III ἢ ἡ IV. Καὶ ἂν $-\frac{\beta}{\alpha}<-\frac{\beta'}{\alpha'}$ τότε ἀληθεύει ἡ περίπτωσις III, ἂν δὲ $-\frac{\beta'}{\alpha'}<-\frac{\beta}{\alpha}$ τότε ἀληθεύει ἡ περ. IV

203. Ὡς ἐφαρμογὴ ἔστω τὸ κάτωθι παράδειγμα.

Εἰς τὰ τριώνυμα $x^2-(\lambda+3)x+16$ καὶ $x^2-\lambda x+\lambda+5$ νὰ ὁρισθῇ ὁ λ ἵνα μεταξὺ τῶν ῥιζῶν των ὑπάρχῃ ἡ σχέσις:

α') $x'<\xi'<\xi''<x''$ καὶ β') $\xi'<\xi''<x'<x''$.

α'. Ἵνα ὑφίσταται ἡ σχέσις $x'<\xi'<\xi''<x''$ πρέπει νὰ εἶναι $R>0$, $\beta^2-4\alpha\gamma>0$, $\beta'^2-4\alpha'\gamma'>0$ $\alpha\varphi\left(-\frac{\beta'}{2\alpha'}\right)<0$ καὶ $\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{\alpha^2}>\frac{\beta'^2-4\alpha'\gamma'}{\alpha'^2}$

Αἱ ἀνισότητες αὗται γίνονται κατὰ σειρὰν

$2\lambda^2-23\lambda+83>0$, $(\lambda+11)(\lambda-5)<0$, $\lambda^2-4\lambda-20>0$, $\lambda^2+6\lambda-64>0$ καὶ $2\lambda>7$. Λύοντες τὸ σύστημα τοῦτο τῶν ἀνισοτήτων συμπεραίνομεν ὅτι διὰ $\lambda>2+\sqrt{24}$ ὑφίσταται ἡ σχέσις α'.

β'. Ἵνα ὑφίσταται ἡ σχέσις $\xi'<\xi''<x'<x''$ πρέπει νὰ εἶναι

$R>0$, $\beta^2-4\alpha\gamma>0$, $\beta'^2-4\alpha'\gamma'>0$, $\alpha\varphi\left(-\frac{\beta'}{2\alpha'}\right)>0$, $\alpha'\varphi_1\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right)>0$

καὶ $-\frac{\beta'}{\alpha'}<-\frac{\beta}{\alpha}$. Αἱ ἀνισότητες αὗται γίνονται κατὰ σειρὰν

$2\lambda^2-23\lambda+83>0$, $(\lambda+11)(\lambda-5>0$, $\lambda^2-4\lambda-20>0$,

$$\lambda^2+6\lambda-64<0 \quad \text{καὶ} \quad \lambda^2-4\lambda-4\lambda-29<0$$

διότι ἡ τελευταία ἀληθεύει πάντοτε. Λύοντες τὰς ἀνισότητας ταύτας συμπεραίνομεν ὅτι δὲν συναληθεύουν δι᾽ οὐδεμίαν τιμὴν τοῦ λ. Ἄρα δὲν δύναται νὰ ὑπάρξῃ ἡ σειρὰ μεγέθους β΄ τῶν ριζῶν.

Ἀσκήσεις πρὸς λύσιν

Νὰ ὁρισθῇ ὁ α ἵνα ὁ ἀριθμὸς 2 κεῖται μεταξὺ τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως

635. $(\alpha+1)x^2-3x+\alpha-2=0$ **636.** $(\alpha^2+\alpha-2)x^2+4\alpha x+8\alpha=0$

Νὰ ὁρισθῇ ὁ μ ἵνα μία μόνη ἐκ τῶν ριζῶν ἑκάστης ἐκ τῶν κάτωθι ἐξισώσεων περιέχεται μεταξὺ 0 και 1.

637. $3x^2+(\mu+1)x+3\mu+6=0$ **638.** $\mu x^2-4\mu x+2-\mu=0$

639. Διὰ ποίαν τιμὴν τοῦ ν ἡ ἐξίσωσις $(\nu+1)x^2-3\nu x+4\nu=0$ ἔχει δύο ρίζας μεγαλυτέρας τοῦ -1;

Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ α ἑκάστη ἐκ τῶν κάτωθι ἐξισώσεων ἔχει δύο ρίζας κειμένας μεταξὺ 1 καὶ 2;

640. $x^2+(\alpha-2)x\quad\alpha+2=0$ **641.** $(\alpha-1)x^2-\alpha x+2-\alpha=0$

642. Ἂν οἱ α καὶ β εἶναι θετικοὶ ἀριθμοί, πόσαι ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $3x^2-8\alpha x+\alpha^2-\beta^2=0$ περιέχονται μεταξὺ 0 καὶ β;

643. Ἂν οἱ α καὶ β εἶναι θετικοὶ ἀριθμοί, πόσαι ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $x^2-(\alpha-\beta)x+2\alpha^2-\beta^2=0$ περιέχονται μεταξὺ $-\beta$ καὶ $+\beta$;

Διὰ ποίαν τιμὴν τοῦ ν ὁ ἀριθμὸς 3 περιέχεται μεταξὺ τῶν ριζῶν ἑκάστης ἐκ τῶν ἐξισώσεων

644. $2\nu x^2-8\nu x+\nu+5=0$ **645.** $6(\nu+3)x^2-3(\nu-1)x+4\nu=0$

646. Δίδεται ἡ ἐξίσωσις $x^2+(2\lambda-1)x+4-\lambda=0$. Νὰ ὁρισθῇ ὁ λ ἵνα α΄) οἱ ἀριθμοὶ 0 καὶ 2 κεῖνται μεταξὺ τῶν ριζῶν της β΄) μία ρίζα της νὰ κεῖται μεταξὺ 0 καὶ 2 γ΄) ἀμφότεραι αἱ ρίζαι της νὰ κεῖνται μεταξὺ 0 καὶ 2 καὶ δ΄) οἱ ἀριθμοὶ 0, 1, 2 νὰ κεῖνται μεταξὺ τῶν ριζῶν της οἱ δὲ ἀριθμοὶ 3 καὶ -1 νὰ κεῖνται ἐκτὸς τῶν ριζῶν της.

647. Δίδεται ἡ ἐξίσωσις $x^2+2(2\lambda-1)x+3\lambda^2+5=0$. α΄) Νὰ ὁρισθῇ ὁ λ ἵνα αἱ ρίζαι ταύτης εἶναι πραγματικαί. β΄) Νὰ ἐξετασθῇ ἂν ὁ ἀριθμὸς 1 δύναται νὰ κεῖται μεταξὺ τῶν ριζῶν της. γ΄) Νὰ ἐξετασθῇ ἂν ἀμφότεραι αἱ ρίζαι δύνανται νὰ εἶναι ἀρνητικαὶ καὶ δ΄) νὰ ὑπολογισθῇ συναρτήσει τοῦ λ ἡ παράστασις $\dfrac{x'^2}{x''^2}+\dfrac{x''^2}{x'^2}$, ἔνθα x' καὶ x'' εἶναι αἱ ρίζαι της.

648. Δίδεται ἡ ἐξίσωσις $x^2-2\lambda x+3\lambda+4=0$ καὶ ζητεῖται νὰ ὁρισθῇ ὁ λ ἵνα αὕτη ἔχῃ α΄) δύο ρίζας πραγματικὰς καὶ θετικὰς β΄) δύο ρίζας πραγματικὰς καὶ ἀρνητικὰς γ΄) οἱ ἀριθμοὶ 2 καὶ 5 νὰ κεῖνται μεταξὺ τῶν ριζῶν της οἱ δὲ ἀριθμοὶ 0 καὶ 6 ἐκτὸς τῶν ριζῶν της.

649. Νὰ ὁρισθῇ ὁ μ ἵνα τῆς ἐξισώσεως $(\mu-1)x^2-(\mu-5)x+\mu-1=0$ ἡ μία ρίζα νὰ κεῖται μεταξὺ 0 καὶ 2, ἡ δὲ ἑτέρα νὰ εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ 10.

650. Εἰς τὸ τριώνυμον $\varphi(x)=(\lambda-3)x^2+2(\lambda-1)x+\lambda+1$ νὰ ὁρισθῇ ὁ λ ἵνα μεταξὺ τῶν ριζῶν του x', x'' καὶ τῶν ἀριθμῶν 0 καὶ 5 ὑφίσταται μία ἐκ τῶν σχέσεων:

α) $x'<0<x''<5$, β) $x'<0<5<x''$, γ) $0<x'<5<x''$, δ) $0<x'<x''<5$

651. Εἰς τὸ τριώνυμον $3x^2-4\lambda x+\mu$ νὰ ὁρισθοῦν οἱ λ καὶ μ ἵνα εἶναι ρίζαι τούτου αἱ ἑξῆς παραστάσεις

α) λ καὶ μ, β) $2\lambda-\mu$ καὶ $2\mu-\lambda$, γ) $\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}$ καὶ $\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\mu}$.

652. Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ λ ἡ ἐξίσωσις

$$(\lambda-1)x^2-(3\lambda+1)x+5\lambda=0$$

ἔχει α) μίαν ρίζαν μεγαλυτέραν τοῦ 1 καὶ τὴν ἑτέραν μικροτέραν τοῦ 0; β) ἀμφοτέρας τὰς ρίζας μεγαλυτέρας τοῦ 1;

653. Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ ν ἡ ἐξίσωσις

$$(\nu-2)x^2-2(\nu+3)x+4\nu=0$$

ἔχει μίαν ρίζαν μεγαλυτέραν του 3 καὶ τὴν ἑτέραν μικροτέραν τοῦ 2;

654. Εἰς τὴν ἐξίσωσιν $x^2-(\lambda-3)x+2\lambda-4=0$ νὰ ὁρισθῇ ὁ λ ἵνα ἔχωμεν $\frac{1}{x'}+\frac{1}{x''}=\frac{1}{\lambda}$ ἔνθα x' καὶ x'' εἶναι αἱ ρίζαι ταύτης.

655. Εἰς τὴν ἐξίσωσιν $x^2-2(\alpha-5)x+\alpha^2-1=0$ νὰ ὁρισθῇ ὁ α ἵνα ἔχωμεν $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{2}{\alpha}$ ἔνθα x_1 καὶ x_2 εἶναι αἱ ρίζαι της.

656. Εἰς τὴν ἐξίσωσιν $x^2+2(\lambda-\mu)x-2\lambda\mu+1=0$ νὰ ὁρισθοῦν οἱ λ καὶ μ ἵνα οὗτοι εἶναι ρίζαι ταύτης.

657. Εἰς τὸ τριώνυμον $\alpha x^2+\beta xy+\gamma y^2$ νὰ ὁρισθοῦν τὰ α,β,γ ἵνα τοῦτο εἶναι τέλειον τετράγωνον διὰ πᾶσαν πραγματικὴν τιμὴν τῶν x καὶ y.

658. Τριώνυμον $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ μὲ ρητοὺς συντελεστὰς ἔχει μίαν μόνην κοινὴν ρίζαν μετὰ τοῦ τριωνύμου $\gamma x^2+\beta x+\alpha$, ὑπάρχει δὲ τιμὴ τοῦ x δι' ἣν ἀληθεύουν ἀμφότεραι αἱ ἰσότητες

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-3)(x+6) \quad \text{καὶ} \quad \gamma x^2+\beta x+\alpha=\gamma(x+1)(x-2).$$

Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ρίζαι τοῦ τριωνύμου. (Πολυτ. 1932).

659. Ζητοῦνται αἱ ρίζαι τοῦ τριωνύμου $x^2+\beta x+\gamma$ ὅπερ ἔχει μίαν μόνην κοινὴν ρίζαν μετὰ τοῦ τριωνύμου $\gamma x^2+\beta x+1$, ὑπάρχει δὲ τιμὴ τοῦ x ἐπαληθεύουσα ἀμφοτέρας τὰς ἰσότητας.

$x^2+\beta x+\gamma=(x-3)(x+6)$ καὶ $\gamma x^2+\beta x+1=(x+13)(x-5)$ (Πολ. 1932)

660. Ζητοῦνται αἱ ρίζαι τοῦ τριωνύμου $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ μὴ ἔχοντος οὐδεμίαν κοινὴν ρίζαν μετὰ τοῦ τριωνύμου $\gamma x^2+\beta x+\alpha$, ἂν μεταξὺ τῶν ριζῶν του x' καὶ x'' ὑφίσταται ἡ σχέσις $\alpha x'^2+\beta x'x''+\gamma x''^2=0$ καὶ μεταξὺ τῶν συντελεστῶν του ἡ σχέσις $x'\beta^2-(x'+x'')\beta\gamma+x''\gamma^2=0$ (Πολ. 1932).

661. Δίδονται τὰ τριώνυμα $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ καὶ $\beta x^2+4\gamma x+2\beta$ ἔχοντα μίαν μόνην κοινὴν ρίζαν. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ρίζαι αὐτῶν ἂν $\rho^2+x'^2=10$ καὶ $\rho^2+y'^2=5$ ἔνθα ρ εἶναι ἡ κοινὴ ρίζα των, x' ἡ ἑτέρα ρίζα τοῦ πρώτου καὶ y' ἡ ἑτέρα ρίζα τοῦ δευτέρου.

662 Δίδονται τὰ τριώνυμα

$$\lambda^2x^2+(2\lambda^2-\lambda+2)x-1 \quad \text{καὶ} \quad \lambda^2x^2+(2\lambda^2-8\lambda+6)x-1$$

ἔχοντα ὡς ρίζας x', x'' τὸ πρῶτον καὶ ξ', ξ'' τὸ δεύτερον. Νὰ ὁρισθῇ ὁ λ ἵνα μεταξὺ τῶν ριζῶν των ὑφίσταται ἡ σχέσις $x'<\xi'<x''<\xi''<1$.

663. Εἰς τὰ ἄνω τριώνυμα νὰ ὁρισθῇ ὁ λ ἵνα μεταξὺ τῶν ριζῶν των ὑφίστανται αἱ σχέσεις α) $\xi'<x'<\xi''<x''$ καὶ β) $x'<\xi'<\xi''<x''<0$

664. Δίδονται τὰ τριώνυμα

$$\lambda^2 x^2+(\lambda^2-3\lambda+5)x-1 \quad \text{καὶ} \quad \lambda^2 x^2+(\lambda^2-5\lambda+2)x-1$$

ἔχοντα ρίζας x' x'' τὸ πρῶτον καὶ ϱ', ϱ'' τὸ δεύτερον. Νὰ εὑρεθῇ τιμὴ τοῦ λ δι' ἣν μεταξὺ τῶν ριζῶν αὐτῶν ὑπάρχει ἡ σχέσις

α) $x'<\varrho'<-1<x''<\varrho''$ β) $\varrho'<0<x'<x''<\varrho''$

665. Δίδονται τὰ τριώνυμα

$$\nu x^2+(3\nu^2-2\nu+1)x+\frac{1}{\nu} \quad \text{καὶ} \quad \nu x^2+(2\nu^2-\nu+3)x+\frac{1}{\nu}$$

Νὰ ὁρισθῇ ὁ ν ἵνα μεταξὺ τῶν ριζῶν x' καὶ x'' τοῦ πρώτου καὶ τῶν ριζῶν ϱ' καὶ ϱ'' τοῦ δευτέρου ὑπάρχουν πάντοτε αἱ σχέσεις $x'<\varrho'<x''$ καὶ $0<\varrho'<\varrho''$.

666. Ἂν ἡ ἐξίσωσις $\alpha x^2+2\beta x+\gamma=0$ ἔχῃ ρίζας πραγματικὰς καὶ ἀνίσους νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ἐξίσωσις

$$(\alpha+\gamma)(\alpha x^2+2\beta x+\gamma)=2(\alpha\gamma-\beta^2)(x^2+1)$$

ἔχει ρίζας φανταστικάς, καὶ ἀντιστρόφως.

667. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ παράστασις $\dfrac{(\alpha x-\beta)(\delta x-\gamma)}{(\beta x-\alpha)(\gamma x-\delta)}$ δύναται νὰ λάβῃ ὅλας τὰς πραγματικὰς τιμὰς διὰ τὰς πραγματικὰς τιμὰς τοῦ x, ὅταν αἱ παραστάσεις $\alpha^2-\beta^2$ καὶ $\gamma^2-\delta^2$ εἶναι ὁμόσημοι.

668. Ἂν ὁ x εἶναι πραγματικὸς νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ κλάσμα $\dfrac{(x+\nu)^2-4\mu\nu}{2(x-\mu)}$ δύναται νὰ λάβῃ ὅλας τὰς τιμὰς ἐκτὸς τῶν κειμένων μεταξὺ 2μ καὶ 2ν.

669. Ἂν αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2+2\beta x+\gamma=0$ εἶναι λ καὶ μ αἱ δὲ τῆς $Ax^2+2Bx+\Gamma=0$ εἶναι $\lambda+\delta$ καὶ $\mu+\delta$ νὰ δειχθῇ ὅτι $A^2(\beta^2-\alpha\gamma)=\alpha^2(B^2-A\Gamma)$.

670. Ἂν $\varrho_1<\varrho_2<\varrho_3$ νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ πολυώνυμον

$$(x-\varrho_1)(x-\varrho_2)+(x-\varrho_2)(x-\varrho_3)+(x-\varrho_3)(x-\varrho_1)$$

ἔχει ρίζας πραγματικὰς καὶ τοιαύτας ὥστε μία ἐξ αὐτῶν νὰ περιέχεται μεταξὺ τῶν $\varrho_1+\dfrac{\delta_1}{3}$ καὶ $\varrho_2-\dfrac{\delta_1}{3}$, ἡ δὲ ἄλλη μεταξὺ τῶν $\varrho_2+\dfrac{\delta_2}{3}$ καὶ $\varrho_3-\dfrac{\delta_2}{3}$ ἔνθα $\delta_1=\varrho_2-\varrho_1$ καὶ $\delta_2=\varrho_3-\varrho_2$ (Πολυτ. 1933).

671. Ἂν οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ εἶναι πραγματικοὶ θετικοὶ καὶ τοιοῦτοι ὥστε $\beta>\alpha+\gamma$, νὰ εὑρεθῇ τὸ εἶδος καὶ ἡ σχέσις μεγέθους μεταξὺ τῶν ριζῶν τῶν τριωνύμων $\alpha x^2+(\beta-\alpha)x+\gamma-\alpha$ καὶ $\gamma x^2+(\beta-\gamma)x+\alpha-\gamma$

672. Νὰ ἐξετασθῇ ἡ ἀνωτέρω ἄσκησις ἂν οἱ α, β, γ εἶναι ἀρνητικοί.

673. Δίδονται τὰ τριώνυμα

$$\varphi(x)=\lambda x^2-2(\lambda-1)x+3\lambda \quad \text{καὶ} \quad \varphi_1(x)=(\lambda+1)x^2-2\lambda x+\lambda-1$$

Νὰ ὁρισθῇ ὁ λ ἵνα μεταξὺ τῶν ριζῶν x', x'' τοῦ $\varphi(x)$ καὶ ϱ', ϱ'' τοῦ $\varphi_1(x)$ ὑφίσταται ἡ σχέσις $x'<\varrho'<x''<2<\varrho''$.

674. Ἂν $\alpha^2<\beta^2<\gamma^2$ νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ἐξίσωσις

$$(\beta+\gamma)(x-\beta)(x-\gamma)+(\gamma+\alpha)(x-\gamma)(x-\alpha)+(\alpha+\beta)(x-\alpha)(x-\beta)=0$$

ἔχει ρίζας πραγματικάς. Νὰ δειχθῇ μετὰ τοῦτο ὅτι μία ρίζα της περιέχεται μεταξὺ α καὶ β ἡ δὲ ἄλλη μεταξὺ β καὶ γ.

675. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ἐξίσωσις $\lambda^2(\beta^2+x)+\mu^2(\alpha^2+x)-(\alpha^2+x)(\beta^2+x)=0$ ἔνθα $\alpha^2\neq\beta^2$, $\lambda\neq0$, $\mu\neq0$, ἔχει δύο ρίζας πραγματικὰς μία ἐκ τῶν ὁποίων περιέχεται μεταξὺ $-\alpha^2$ καὶ $-\beta^2$.

676. Νὰ ὁρισθοῦν οἱ λ καὶ μ ἵνα τὸ κλάσμα $\frac{3x^2+\lambda x+\mu}{x^2+1}$ λαμβάνῃ ὅλας τὰς μεταξὺ -3 καὶ 4 τιμὰς ὡς ἐπίσης καὶ τὰς τιμὰς 4, καὶ -3 διὰ πᾶσαν πραγματικὴν τιμὴν τοῦ x.

677. Νὰ ὁρισθοῦν οἱ α, β, γ, δ ἵνα τὸ κλάσμα $\frac{x^2+\alpha x+\beta}{x^2+\gamma x+\delta}$ δύναται νὰ λαμβάνῃ τὴν τιμὴν 4 διὰ $x=3$, τὴν τιμὴν 5 διὰ $x=1$, ὅλας τὰς τιμὰς τὰς μικροτέρας τοῦ 4 καὶ ὅλας τὰς τιμὰς τὰς μεγαλυτέρας τοῦ 5.

678. Ἂν $\alpha>\beta$ νὰ ταχθοῦν κατὰ τάξιν μεγέθους οἱ ἀριθμοὶ -1 καὶ $+1$ μετὰ τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως $\alpha(x+1)^2+\beta(x-1)^2-2\lambda(x^2+1)=0$. Νὰ ἐξετασθῇ ἡ περίπτωσις ἂν $\alpha=1$ καὶ $\beta=-1$.

679. Ἀναλόγως τῶν τιμῶν τοῦ λ νὰ εὑρεθῇ πόσας ρίζας ἐπαληθευούσας τὴν ἀνισότητα $(3-\lambda)x<1$ ἔχει ἡ ἐξίσωσις $(1+\lambda)(7-\lambda)x^2+2(3+\lambda)x-1=0$.

680. Ἂν εἰς τὰ πολυώνυμα $\Pi(x)\equiv\alpha x^2+8\beta x+8$ καὶ $\Phi(x)\equiv\beta x^2\gamma x+\alpha$ ὁ λόγος $\frac{\Pi(x)}{\Phi(x)}$ λαμβάνῃ τὴν ἀπροσδιόριστον μορφὴν $\frac{0}{0}$ διὰ $x=2$, γίνεται δὲ οὗτος ἄπειρος διὰ $x=-3$, νὰ εὑρεθοῦν τὰ α, β, γ.

681. Νὰ εὑρεθοῦν δύο τριώνυμα τοῦ β΄ βαθμοῦ $\varphi(x)$ καὶ $\varphi_1(x)$ τῶν ὁποίων ὁ λόγος, καθ' ἣν τάξιν ἐγράφησαν, νὰ ἰσοῦται μὲ 2 διὰ $x=3$, μὲ ∞ διὰ $x=1$, νὰ λαμβάνῃ δὲ οὗτος τὴν ἀπροσδιόριστον μορφὴν $\frac{0}{0}$ διὰ $x=2$ καὶ ἂν ὁ γνωστὸς ὅρος εἰς μὲν τὸ $\varphi(x)$ εἶναι 6 εἰς δὲ τὸ $\varphi_1(x)$ εἶναι 5.

682. Εὑρεῖν τὰ α, β, γ, δ εἰς τὰ τριώνυμα

$$\varphi(x)\equiv\alpha x^2+2\beta x+5 \quad \text{καὶ} \quad f(x)\equiv4x^2+2\gamma x+\delta$$

ἂν ὁ λόγος $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ λαμβάνῃ τὴν ἀπροσδιόριστον μορφὴν $\frac{0}{0}$ τιθεμένου ἀντὶ τοῦ x εἴτε τοῦ 2 εἴτε τοῦ -1.

683. Τὰ πολυώνυμα $\varphi(x)=\alpha x^2+\beta x+3\gamma$ καὶ $\varphi_1(x)=\gamma x^2+\beta^2x+\alpha\beta$ ἔχουν μίαν μόνην κοινὴν ρίζαν. Ἀφίνουν ταῦτα τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον διάφορον τοῦ μηδενὸς διαιρούμενα διὰ $x-2$. Ἀφίνουν ἐπίσης τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον διάφορον τοῦ μηδενὸς διαιρούμενα διὰ $x+1$. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ α, β, γ.

684. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τάξις μεγέθους τῶν ριζῶν τῶν τριωνύμων

$$(\lambda-1)x^2+(3\lambda-2)x+5\lambda \quad \text{καὶ} \quad (\lambda+1)x^2+(\lambda+2)x+3\lambda$$

ὅταν ὁ λ λαμβάνῃ πάσας τὰς πραγματικὰς τιμάς.

685. Ἂν x' καὶ x'' εἶναι αἱ διάφοροι ἀλλήλων ρίζαι τοῦ τριωνύμου $(\lambda-1)x^2-2x+\lambda-2$, νὰ εὑρεθοῦν αἱ πραγματικαὶ τιμαὶ τοῦ λ δι' ἃς ἡ παράστασις $x'^2-x'x''+x''^2$ εἶναι θετικὴ καὶ μικροτέρα τοῦ 2.

686. Δίδεται τὸ τριώνυμον $\alpha x^2+\beta x+\gamma$. Ἂν ὁ x λάβῃ τὴν τιμὴν 1, τότε τὸ τριώνυμον μηδενίζεται, ἂν ὁ x λάβῃ τὴν τιμὴν 2, τότε τὸ τριώνυμον ἰσοῦται μὲ 1 καὶ ἂν ὁ x λάβῃ τὴν τιμὴν 3, τότε τὸ τριώνυμον γίνεται 4. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἂν ὁ x λάβῃ τὴν τιμὴν ρ, τότε τὸ τριώνυμον γίνεται $(\rho-1)^2$. (Ἀνωτ. Γεωπονικὴ 1934).

687. Ἂν x_1 καὶ x_2 εἶναι αἱ ρίζαι μιᾶς ἐξισώσεως τοῦ β΄ βαθμοῦ, πληρούσαι τὰς σχέσεις $5x_2-(4x_2-5)x_1-4=0$ καὶ $(\beta-1)(x_1-1)(x_2-1)+1=0$, νὰ μορφωθῇ ἡ ἐξίσωσις καὶ νὰ εὑρεθοῦν αἱ τιμαὶ τοῦ β οὕτως ὥστε α΄) ἡ μία ρίζα της νὰ εἶναι μικροτέρα τοῦ -1 ἡ δὲ ἄλλη μεγαλυτέρα τοῦ $+1$, β΄) ἀμφότεραι αἱ ῥίζαι της νά εἶναι μεγαλύτεραι τοῦ 1 καὶ γ΄) ἀμφότεραι νὰ περιέχωνται μεταξὺ -1 καὶ $+1$ (Εὐελπίδων 1935).

688. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ἀπολύτως μικρότεραι ἀκεραιαι τιμαὶ τῶν συντελεστῶν μ καὶ λ τοῦ τριωνύμου $x^2+\lambda x+\mu$ διδομένου ὅτι τοῦτο ἔχει μίαν μόνην κοινὴν ῥίζαν μετὰ τοῦ τριωνύμου $x^2+\mu x+\lambda$ καὶ ὅτι ἡ κοινὴ αὕτη ῥίζα εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἄλλης ῥίζης τοῦ πρώτου καὶ μικροτέρα τῆς ἄλλης ῥίζης τοῦ δευτέρου. (Πολυτ. 1935).

689. Δίδονται τὰ δύο τριώνυμα

$$(\lambda-1)x^2+\beta x+\frac{1}{\lambda} \quad \text{καὶ} \quad \lambda^2x^2+(\lambda-1)x+\frac{1}{\lambda-1}.$$

Νὰ ὁρισθῇ ὁ λ ἵνα τὸ γινόμενον τῶν ῥιζῶν τοῦ πρώτου τριωνύμου περιέχεται μεταξὺ τῶν ῥιζῶν τοῦ δευτέρου τριωνύμου (Δοκίμων 1934).

690. Νὰ προσδιορισθῇ ὁ λ εἰς τρόπον ὥστε αἱ ἐξισώσεις $\lambda x+y=\lambda$ καὶ

$$(\lambda-36\mu)x^2-xy+(\mu+1)y^2=\lambda^2(1-x)^2+(1-\lambda)x$$

νὰ ἔχουν κοινὴν λύσιν, οἱουδήποτε ὄντος τοῦ μ. (Πολυτ. 1934).

691. Δίδεται τὸ τριώναμον $8x^2-(\lambda-1)x+\lambda-7$. Νὰ προσδιορισθῇ ὁ λ εἰς τρόπον ὥστε αἱ ῥίζαι τούτου νὰ εἶναι ἀντίστροφοι (Πολυτ. 1933).

XI. ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΤΙΝΑ ΕΠΙ ΤΩΝ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

209. Θεώρημα α΄. ***Ἂν ἀκέραιον πολυώνυμον ὡς πρὸς*** x ***διαιρῆται δι᾽ ἑκάστου ἐκ τῶν διωνύμων*** $x-\alpha$, $x-\beta$, $x-\gamma$, ***ἔνθα*** $\alpha\neq\beta\neq\gamma$, ***τότε θὰ διαιρῆται καὶ διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν*** $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ ***καὶ ἀντιστρόφως.***

Ἔστω τὸ ἀκέραιον πολυώνυμον $\Pi(x)$ ὅπερ διαιρεῖται δι᾽ ἑκάστου ἐκ τῶν διωνύμων $x-\alpha$, $x-\beta$, $x-\gamma$, ἔνθα $\alpha\neq\beta\neq\gamma$. Θὰ δείξω ὅτι τὸ $\Pi(x)$ διαιρεῖται καὶ διὰ τοῦ γινομένου $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$.

Ἀπόδειξις : Ἔστω $P(x)$ τὸ ἀκέραιον πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ $\Pi(x)$ διὰ $x-\alpha$. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς διαιρέσεως ἔχομεν τὴν ταυτότητα :

$$\Pi(x)\equiv(x-\alpha).P(x) \qquad (1)$$

Ἤδη ὁ $x-\beta$ διαιρεῖ τὸ $\Pi(x)$ ἐξ ὑποθέσεως. Ἄρα τὸ $\Pi(x)$ θὰ ἀφίνῃ ὑπόλοιπον μηδὲν ἂν εἰς αὐτὸ τεθῇ ἀντὶ x τὸ β, ἤτοι θὰ εἶναι $\Pi(\beta)=0$. Ἀλλὰ ἡ (1), ὡς ἀληθὴς διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x θὰ εἶναι ἀληθὴς καὶ διὰ $x=\beta$. Ἄρα θὰ ἔχωμεν :

$$\Pi(\beta)=(\beta-\alpha)P(\beta) \quad \text{ἢ} \quad 0=(\beta-\alpha)P(\beta) \qquad (2)$$

Ἐπειδὴ τὸ α΄ μέλος τῆς (2) εἶναι μηδέν, ἕπεται ὅτι εἷς ἐκ τῶν δύο παραγόντων τοῦ β΄ μέλους αὐτῆς θὰ εἶναι μηδέν. Ἐπειδὴ δὲ ὁ $\beta-\alpha$ δὲν εἶνοι μηδὲν καθόσον ὑπετέθη $\alpha\neq\beta$, διὰ τοῦτο θὰ εἶναι $P(\beta)=0$. Ἀλλὰ τοῦτο δεικνύει ὅτι τὸ πολυώνυμον $P(x)$ ἐπειδὴ μηδενίζεται ἂν εἰς αὐτὸ τεθῇ ἀντὶ x τὸ β, διαιρεῖται διὰ $x-\beta$. Ἔστω $\Lambda(x)$ τὸ ἀκέραιον πηλίκον τῆς διαιρέσεως ταύτης. Θὰ ἔχωμεν ἄρα.

$$P(x)=(x-\beta)\Lambda(x) \qquad (3)$$

Ἄρα ἡ (1) γίνεται :

$$\Pi(x)\equiv(x-\alpha)(x-\beta)\Lambda(x) \qquad (4)$$

Ἤδη, ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως τὸ $\Pi(x)$ διαιρεῖται διὰ $x-\gamma$, ἕπεται ὅτι μηδενίζεται ἂν τεθῇ εἰς αὐτὸ ἀντὶ x τὸ γ, ἤτοι γίνεται $\Pi(\gamma)=0$. Ἄρα ἡ (4) γίνεται

$$0=(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)\Lambda(\gamma) \qquad (5)$$

Ἐκ τῆς (5) συνάγεται ὅτι εἷς ἐκ τῶν παραγόντων τοῦ β΄ μέλους θὰ εἶναι μηδὲν καὶ ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι $\gamma\neq\alpha\neq\beta$ ἕπεται ὅτι $\Lambda(\gamma)=0$. Ἤτοι τὸ $\Lambda(x)$ διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ $x-\gamma$ ὡς μηδενιζόμενον ἂν τεθῇ εἰς αὐτὸ ἀντὶ x τὸ γ. Ἔστω δὲ $K(x)$ τὸ ἀντίστοιχον πηλίκον. Ἄρα ἔχομεν $\Lambda(x)=(x-\gamma)K(x)$. Ἑπομένως ἡ (4) γίνετοι :

$$\Pi(x)\equiv(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)K(x) \qquad (6)$$

Ἐκ τῆς (6) συμπεραίνομεν ὅτι τὸ $\Pi(x)$ διαιρεῖται διὰ τοῦ γινομένου $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$, δίδον ὡς ἀκέραιον πηλίκον τὸ $K(x)$.

Ἀντιστρόφως : Ἂν τὸ $\Pi(x)$ διαιρῆται διὰ τοῦ γινομένου $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$, τότε θὰ διαιρῆται καὶ δι' ἑκάστου ἐκ τῶν διωνύμων $x-\alpha$, $x-\beta$, $\beta-\gamma$.

Ἀπόδειξις : Ἔστω $K(x)$ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ $\Pi(x)$ διὰ τοῦ $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς διαιρέσεως θὰ ἔχωμεν τὴν ταυτότητα :

$$\Pi(x)\equiv(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)K(x) \qquad (7)$$

Ἡ ταυτότης (7) εἶναι ἀληθὴς διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x. Ἄρα καὶ διὰ $x=\alpha$. Ἂν λοιπὸν τεθῇ εἰς αὐτὴν $x-\alpha$ τότε αὕτη γίνεται

$$\Pi(\alpha)=(\alpha-\alpha)(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)K(\alpha)=0,$$

διότι εἷς παράγων τοῦ β΄ μέλους γίνεται μηδέν. Ἄρα, διότι τὸ $\Pi(x)$ μηδενίζεται ἂν ἀντὶ x τεθῇ εἰς αὐτὸ τὸ α, ἕπεται ὅτι τοῦτο διαιρεῖται διὰ $x-\alpha$.

Ὁμοίως ἀποτεικνύεται ὅτι τὸ $\Pi(x)$ διαιρεῖται καὶ διὰ $x-\beta$ καὶ διὰ $x-\gamma$.

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται τὸ θεώρημα ἂν τὰ διώνυμα εἶναι περισσότερα.

Παρατήρησις : Τὸ ἄνω θεώρημα δεικνύει ὅτι, ἂν ἀκέραιόν τι πολυώνυμον ὡς πρὸς x μηδενίζεται ὅταν θέσωμεν εἰς αὐτὸ ἀντὶ x διαδοχικῶς τοὺς ἀριθμοὺς α, β, γ, δ..... τότε τὸ πολυώνυμον τοῦτο διαιρεῖται διὰ τοῦ γινομένου $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)$.....

210. Θεώρημα β΄. ***Ἂν ἀκέραιον πολυώνυμον ὡς πρὸς*** x ***βαθμοῦ ν μηδενίζεται διὰ ν διαφόρους τιμὰς τοῦ*** x ***ἔστω τὰς α, β,***

γ.....λ, τότε τὸ πολυώνυμον τοῦτο ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον ν διωνύμων $x-\alpha$, $x-\beta$, $x-\gamma$.....$x-\lambda$, *πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὸν συντελεστὴν τοῦ πρώτου ὅρου του.*

Ἔστω τὸ πολυώνυμον :

$$\Pi(x)\equiv Ax^{\nu}+Bx^{\nu-1}+\Gamma x^{\nu-2}+\ldots\ldots+\Lambda$$

Τὸ πολυώνυμον τοῦτο, ὡς μηδενιζόμενον ἐξ ὑποθέσεως διὰ $x=\alpha, \beta, \gamma\ldots\ldots\lambda$ διαιρεῖται (θεώρημα α΄ § 209) διὰ τοῦ γινομένου $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ldots\ldots(x-\lambda)$ τῶν ν διωνύμων. Ἀλλ' ἐπειδὴ ὁ διαιρέτης (δηλαδὴ τὸ γινόμενον τοῦτο) εἶναι ν βαθμοῦ, ἤτοι βαθμοῦ ἴσου πρὸς τὸν βαθμὸν τοῦ διαιρετέου, διὰ τοῦτο τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως ταύτης δὲν θὰ περιέχῃ x θὰ εἶναι δηλαδὴ γνωστὸς ὅρος. Ὁ α΄ ὅρος τοῦ διαιρέτου, μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πράξεων εἰς αὐτόν, εἶναι x^{ν}.

Ἤδη, πρὸς εὕρεσιν τοῦ πηλίκου, ἀρκεῖ κατὰ τὸν κανόνα τῆς διαιρέσεως νὰ διαιρέσωμεν τὸν α΄ ὅρον Ax^{ν} τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ α΄ ὅρου x^{ν} τοῦ διαιρέτου. Ἀλλὰ $Ax^{\nu}:x^{\nu}=A$. Ἑπομένως τὸ πηλίκον εἶναι A. Ἄρα, κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς διαιρέσεως, θὰ ἔχωμεν :

$$Ax^{\nu}+B\nu^{\nu-1}+\Gamma x^{\nu-2}+\ldots\ldots+\Lambda\equiv A(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ldots\ldots(x-\lambda)$$

211. Θεώρημα γ΄. ***Ἂν ἀκέραιον πολυώνυμον ὡς πρὸς*** x, ***βαθμοῦ ν μηδενίζεται διὰ*** $\nu+1$ ***διαφόρους τιμὰς τοῦ*** x, ***τότε ἕκαστος ἐκ τῶν συντελεστῶν τῶν ὅρων τῶν περιεχόντων τὸν*** x ***καὶ ὁ γνωστὸς ὅρος ἰσοῦνται μὲ μηδέν.***

Ἔστω τὸ ἀκέραιον πολυώνυμον

$$\Pi(x)\equiv Ax^{\nu}+Bx^{\nu-1}+\Gamma x^{\nu-2}+\ldots.\Lambda,$$

βαθμοῦ ν ὡς πρὸς x τὸ ὁποῖον μηδενίζεται διὰ τὰς $\nu+1$ διαφόρους τιμὰς $\alpha, \beta, \gamma\ldots..\lambda, \mu$. Θὰ δείξω ὅτι

$$A=0,\ B=0,\ \Gamma=0,\ \ldots\ldots\Lambda=0.$$

Ἀπόδειξις, Ἀφοῦ τὸ πολυώνυμον $\Pi(x)$ μηδενίζεται διὰ τὰς ν διαφόρους τιμὰς $\alpha, \beta, \gamma\ldots.\lambda$, ἕπεται ὅτι (θεώρ. β΄ § 210) λαμβάνει τοῦτο τὴν μορφὴν

$$\Pi(x)\equiv A(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ldots.(x-\lambda) \qquad (8)$$

Ἀφοῦ ὅμως μηδενίζεται καὶ διὰ $x=\mu$, ἕπεται ὅτι ἂν εἰς τὴν (8) τεθῇ ἀντὶ x τὸ μ θὰ ἔχωμεν

$$\Pi(\mu)=0 \quad \text{ἢ} \quad A(\mu-\alpha)(\mu-\beta)(\mu-\gamma)\ldots.(\mu-\lambda)=0 \qquad (9)$$

Τὸ α΄ μέλος τῆς (9) ἰσοῦται μὲ μηδέν. Ἄρα εἷς ἐκ τῶν παραγόντων του ὀφείλει νὰ ἰσοῦται μὲ μηδέν. Ἐπειδὴ δὲ οἱ παράγοντες $\mu-\alpha$, $\mu-\beta$, $\mu-\gamma\ldots.\mu-\lambda$ εἶναι διάφοροι τοῦ μηδενός, καθόσον ἐξ ὑποθέσεως ὁ μ εἶναι διάφορος τῶν $\alpha, \beta, \gamma\ldots.\lambda$, ἕπεται ὅτι θὰ είναι ὁ Α μηδὲν ἤτοι $A=0$. Ἤδη, μηδενιζομένου τοῦ Α, τὸ πολυώνυμον γίνεται βαθμοῦ $\nu-1$ ἤτοι

$$Bx^{\nu-1}+\Gamma^{\nu-2}+\dots+\Lambda$$

Ἐπαναλαμβάνοντες ἤδη τοὺς αὐτοὺς συλλογισμοὺς εἰς τὸ πολυώνυμον τοῦτο τοῦ βαθμοῦ $\nu-1$, συμπεραίνομεν ὅτι $B=0$. Ἐργαζόμενοι δὲ ὁμοίως εὑρίσκομεν διαδοχικῶς $\Gamma=0$, $\Delta=0 \dots \Lambda=0$.

212. Πόρισμα. ***Ἂν ἀκέραιον πολυώνυμον ὡς πρὸς x βαθμοῦ ν εἶναι ἐκ ταυτότητος μηδέν, ἂν δηλαδὴ μηδενίζεται διὰ πάσας τὰς τιμὰς τοῦ x, τότε ἕκαστος ἐκ τῶν συντελεστῶν τῶν δυνάμεων τοῦ x καὶ ὁ γνωστὸς ὅρος θὰ ἰσοῦνται μηδέν.***

Τοῦτο εἶναι ἄμεσος συνέπεια τοῦ γ′ θεωρήματος τῆς ἀνωτέρω παραγράφου. Διότι κατὰ τὸ ἀνωτέρω θεώρημα τὸ πολυώνυμον ἀφοῦ εἶναι ἐκ ταυτότητος μηδέν, ἀφοῦ δηλαδὴ μηδενίζεται διὰ τιμὰς τοῦ x περισσοτέρας τοῦ βαθμοῦ του, ἕπεται ὅτι καὶ οἱ συντελεσταὶ τῶν ὅρων τῶν περιεχόντων τὸν x καὶ ὁ γνωστὸς ὅρος θὰ εἶναι μηδέν.

213. Θεώρημα δ′. ***Ὅταν δύο ἀκέραια πολυώνυμα ὡς πρὸς x εἶναι ἐκ ταυτότητο; ἴσα, τότε οἱ συντελεσταὶ τῶν ὅρων τῆς αὐτῆς δυνάμεως τοῦ x εἶναι ἀντιστοίχως ἴσοι μεταξύ των. Ὁμοίως καὶ οἱ γνωστοὶ ὅροι εἶναι ἴσοι μεταξύ των.***

Ἔστωσαν τὰ δύο ἐκ ταυτότητος ἴσα ἀκέραια πολυώνυμα

$$Ax^{\nu}+Bx^{\nu-1}+\Gamma x^{\nu-2}+\dots\Lambda\equiv$$
$$A'x^{\nu}+B'x^{\nu-1}+\Gamma'x^{\nu-2}+\dots+\Lambda' \qquad (10)$$

Θὰ δείξω ὅτι $A=A'$, $B=B'$, $\Gamma=\Gamma' \dots \Lambda=\Lambda'$.

Ἀπόδειξις: Μεταφέρω τοὺς ὅρους τοῦ β′ μέλους τῆς (10) εἰς τὸ α′ μέλος καὶ κατατάσσω τὸ προκύπτον πολυώνυμον κατὰ τὰς δυνάμεις τοῦ x ὅτε ἔχω

$$(A-A')x^{\nu}+(B-B')x^{\nu-1}+(\Gamma-\Gamma')x^{\nu-2}+\dots(\Lambda-\Lambda')\equiv 0 \quad (11)$$

Ἤδη, τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἄνω ταυτότητος ἰσοῦται μὲ μηδὲν διὰ τοῦτο κατὰ τὸ πόρισμα τῆς § 212 πρέπει καὶ οἱ συντελεσταὶ τῶν δυνάμεων τοῦ x καὶ ὁ γνωστὸς ὅρος νὰ ἰσοῦνται μὲ μηδέν, πρέπει δηλαδὴ νὰ εἶναι

$$A-A'=0,\ B-B'=0,\ \Gamma-\Gamma'=0 \dots \Lambda-\Lambda'=0$$

Ἄρα $A=A'$, $B=B'$, $\Gamma=\Gamma' \dots \Lambda=\Lambda'$.

214. Θεώρημα ε′. ***Ἂν δύο ἀκέραια πολυώνυμα ὡς πρὸς x τοῦ αὐτοῦ βαθμοῦ ν μηδενίζωνται διὰ τὰς αὐτὰς ν διαφόρους τιμὰς α, β, γ . . . λ τοῦ x τότε οἱ συντελεσταὶ τῶν αὐτῶν δυνάμεων τοῦ x εἶναι ἀνάλογοι.***

Ἔστωσαν τὰ ἀκέρεια πολυώνυμα :

$$\begin{aligned} &\Pi(x) \equiv Ax^{\nu} + Bx^{\nu-1} + \Gamma x^{\nu-2} + \dots . \Lambda \\ \text{καὶ}\quad &\Pi'(x) \equiv A'x^{\nu} + B'x^{\nu-1} + \Gamma' x^{\nu-2} + \dots . \Lambda' \end{aligned} \qquad (12)$$

τὰ ὁποῖα μηδενίζονται διὰ τὰς αὐτὰς ν διαφόρους τιμὰς α, β, γ. . . .λ τοῦ x. Θὰ δείξω ὅτι :

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{\Gamma}{\Gamma'} = \dots . = \frac{\Lambda}{\Lambda'} = k$$

ἔνθα k ἀκέραιός τις ἀριθμός.

Ἀπόδειξις : Πολ/ζω τὴν πρώτην ἐκ τῶν (12) ἐπὶ A′ καὶ τὴν δευτέραν ἐπὶ A καὶ ἀφαιρῶ κατὰ μέλη ὁπότε εὑρίσκω ἔστω τὸ πολυώνυμον P(x) ὅπερ κατατάσσω κατὰ τὰς δυνάμεις τοῦ x ἤτοι :

$$P(x) \equiv A'\Pi(x) - A\Pi'(x) \equiv$$
$$(A'B - AB')x^{\nu-1} + (A'\Gamma - A\Gamma')x^{\nu-2} + \dots .(A'\Lambda - A\Lambda') \quad (13)$$

Τὸ πολυώνυμον P(x) εἶναι προφανῶς βαθμοῦ ν—1 διότι κατὰ τὴν ἀφαίρεσιν οἱ ὅροι οἱ ἔχοντες τὸν x^{ν} ἐξαλείφονται. Τὸ P(x) προφανῶς μηδενίζεται διὰ τὰς αὐτὰς ν τιμὰς α, β, γ. . . .λ τοῦ x δι' ἃς μηδενίζονται καὶ τὰ πολυώνυμα Π(x) καὶ Π′(x), ὡς προκύπτον ἐξ αὐτῶν. Ἐπειδὴ ὅμως εἶναι βαθμοῦ ν—1 καὶ μηδενίζεται διὰ ν τιμάς, ἤτοι πλείονας τοῦ βαθμοῦ του, ἕπεται ὅτι τοῦτο εἶναι ἐκ ταυτότητος μηδὲν (θεώρ. γ′ § 211), εἶναι δηλαδὴ καὶ οἱ συντελεσταὶ τοῦ x καὶ ὁ γνωστὸς ὅρος μηδέν. Ἄρα θὰ ἔχωμεν :

$$A'B - AB' = 0,\ A'\Gamma - A\Gamma' = 0 \dots . A'\Lambda - A\Lambda' = 0$$

ἢ ἂν γράψωμεν αὐτὰς ὑπὸ μορφὴν ἀναλογιῶν ἔχομεν :

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{\Gamma'}{\Gamma'} = \dots . = \frac{\Lambda}{\Lambda'} = k.$$

Παρατήρησις. Τὸ θεώρημα δ′ παρ. 213 ὡς καὶ τὸ πόρισμα τῆς παραγ. 212 ἔχουν τεραστίαν ἐφαρμογὴν εἰς πολλὰς ἀσκήσεις τῆς ἀλγέβρας καὶ διὰ τοῦτο πρέπει νὰ εἶναι τελείως γνωστά.

215. Κατωτέρω προσθέτομεν ἀσκήσεις λυομένας ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ἀνωτέρω θεωρημάτων. Ὁ τρόπος τῆς κατωτέρω ἐργασίας καλεῖται ***μέθοδος τῶν προσδιοριστέων συντελεστῶν.***

α′. Νὰ ὁρισθοῦν τὰ α καὶ β ἵνα τὸ πολυώνυμον

$$x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + 27x - 18$$

εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ τριωνύμου $x^2 - 2x + \alpha$.

Τὸ πηλίκον τῆς τοιαύτης διαιρέσεως θὰ εἶναι δευτέρου βαθμοῦ (βαθμοῦ ἴσου πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν βαθμῶν τοῦ διαιρετέου καὶ τοῦ διαιρέτου). Ἄρα θὰ εἶναι τοῦτο τῆς μορφῆς $x^2 + \lambda x + \mu$. Θὰ ἔχωμεν λοιπὸν κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς διαιρέσεως τὴν ταυτότητα :

$$x^4+\alpha x^3+\beta x^2+27x-18\equiv(x^2-2x+\alpha)(x^2+\lambda x+\mu)\equiv$$
$$x^4+(\lambda-2)x^3+(\alpha-2\lambda+\mu)x^2+(\alpha\lambda-2\mu)x+\alpha\mu.$$

Ἄρα (θεώρ. δ′ § 213) θὰ ἔχωμεν

$$\lambda-2=\alpha,\quad \alpha-2\lambda+\mu=\beta,\quad \alpha\lambda-2\mu=27,\quad \alpha\mu=-18.$$

Θέτοντες τὴν τιμὴν τοῦ α ἐκ τῆς πρώτης εἰς τὰς λοιπὰς εὑρίσκομεν

$$\mu-2-\lambda=\beta,\quad \lambda^2-2\lambda-2\mu=27 \text{ καὶ } \lambda\mu-2\mu=-18.$$

Θέτοντες δὲ τὴν τιμὴν τοῦ μ ἐκ τῆς τελευταίας εἰς τὴν γ′ εὑρίσκομεν μετὰ τὰς πράξεις τὴν ἐξίσωσιν

$$\lambda^3-4\lambda^2-23\lambda+90=0. \qquad (2)$$

Τὸ α′ μέλος τῆς (2) διαιρεῖται διὰ $\lambda-5$ ὡς μηδενιζόμενον ἂν τεθῇ ἀντὶ λ τὸ 5. Ἄρα αὕτη γίνεται $(\lambda-5)(\lambda^2+\lambda-18)=0$ ἐξ ἧς $\lambda-5=0$ καὶ ἄρα $\lambda=5$ ἢ $\lambda^2+\lambda-18=0$ καὶ ἄρα $\lambda=\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{73})$. Θέτοντες τὴν ἀκεραίαν τιμὴν τοῦ λ εἰς τὰς λοιπὰς ἐξισώσεις εὑρίσκομεν $\alpha=3$, $\mu=-6$, $\beta=-13$. Θέτοντες δὲ ἀντὶ λ τὰς λοιπὰς τιμάς του εὑρίσκομεν ἀναλόγους τιμὰς διὰ τὰ α καὶ β.

β′. Δίδεται τὸ πολυώνυμον

$$x^3+2(\alpha-\beta)x^2+\alpha x+15-2(\alpha-\beta)-\beta^2$$

ὅπερ εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ τριωνύμου $x^2+(\alpha-\beta)x+\beta-2$. Εὑρεῖν τὰς ρίζας του. (Πολυτεχνεῖον 1932).

Τὸ πηλίκον τῆς τοιαύτης διαιρέσεως θὰ εἶναι τῆς μορφῆς $x+\lambda$. Ἄρα θὰ ἔχωμεν τὴν ταυτότητα:

$$x^3+2(\alpha-\beta)x^2+\alpha x+15-2(\alpha-\beta)-\beta^2\equiv[x^2+(\alpha-\beta)x+\beta-2](x+\lambda)$$
$$\equiv x^3+(\alpha-\beta+\lambda)x^2+(\beta-2+\alpha\lambda-\beta\lambda)x+(\beta-2)\lambda.$$ Ἄρα θὰ εἶναι:

$$(\alpha-\beta)+\lambda=2(\alpha-\beta)$$
$$\beta-2+(\alpha-\beta)\lambda=\alpha$$
$$(\beta-2)\lambda=15-2(\alpha-\beta)-\beta^2.$$

Ἡ α′ δίδει $\lambda=\alpha-\beta$ ἡ δὲ β′ γίνεται $(\alpha-\beta)^2-(\alpha-\beta)-2=0$ λυομένη δὲ ὡς δευτεροβάθμιος μὲ ἄγνωστον τὸν $\alpha-\beta$ δίδει $\alpha-\beta=2$ ἢ $\alpha-\beta=-1$. Ἄρα $\lambda=2$ ἢ $\lambda=-1$ ἡ δὲ γ′ γίνεται

$$\beta^2+2\beta-15=0 \qquad (1)$$
$$\text{ἢ}\quad \beta^2-\beta-15=0 \qquad (2)$$

Ἐκ τῆς (1) εὑρίσκομεν $\beta'=3$ ἢ $\beta''=-5$ ἐκ δὲ τῆς (2) $\beta=\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{61})$. Ἄρα $\alpha'=5$, $\alpha''=-3$ ἢ $\alpha=\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{61})$. Ἄρα τὸ πολυώνυμον γίνεται (ἂν λάβωμεν χάριν συντομίας τὰς ἀκεραίας μόνον τιμὰς τῶν α καὶ β).

$x^3+4x^2+5x+2=(x^2+2x+1)(x+2)$ ἔχον ῥίζας -1, -1, -2 ἢ
$x^3+4x^2-3x-14=(x^2+2x-7)(x+2)$ ἔχον ῥίζας -2, $-1\pm2\sqrt{2}$.

Ἂν θέσωμεν τὰς ἄλλας τιμὰς τῶν α, β καὶ λ εὑρίσκομεν τὰς λοιπὰς ῥίζας τοῦ πολυωνύμου.

γ'. Νὰ ὁρισθοῦν τὰ α καὶ β ἵνα τὸ πολυώνυμον
$9x^4-6x^3+13x^2+\alpha x+\beta$ εἶναι τέλειον τετράγωνον.

Ἡ τετραγ. ῥίζα τοῦ πολυωνύμου τούτου θὰ εἶναι ἓν τριώνυμον β' βαθμοῦ ἔχον ὡς πρῶτον ὅρον τὴν τετραγ. ῥίζαν τοῦ $9x^4$. Ἄρα θὰ εἶναι τοῦτο τῆς μορφῆς $3x^2+\lambda x+\mu$. Θὰ ἔχωμεν λοιπὸν ἐκ ταυτότητος.

$$9x^4-6x^3+13x^2+\alpha x+\beta\equiv(3x^2+\lambda x+\mu)^2$$
$$\equiv9x^4+6\lambda x^3+(6\mu+\lambda^2)x^2+2\lambda\mu x+\mu^2.$$

Ἄρα θὰ ἔχωμεν:

$$6\lambda=-6,\quad 6\mu+\lambda^2=13,\quad 2\lambda\mu=\alpha,\quad \mu^2=\beta,$$

ἐξ ὧν εὑρίσκομεν $\lambda=-1$, $\mu=2$, $\alpha=-4$, $\beta=4$. Ἑπομένως τὸ μὲν πολυώνυμον εἶναι $9x^4-6x^3+13x^2-4x+4$ ἡ δὲ τετραγωνική του ῥίζα εἶναι $3x^2-x+2$.

δ'. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ τιμαὶ τῶν α, β καὶ γ ἵνα τὸ τριώνυμον $x^2-6x-15$ ἰσοῦται πρὸς τὴν παράστασιν

$$\alpha(x-1)(x+1)+\beta x(x+1)+\gamma(x-3)(x+2)$$

δι' ὅλας τὰς πραγματικὰς τιμὰς τοῦ x.

Πρὸς τοῦτο θὰ ἔχωμεν τὴν ἑξῆς ταυτότητα.

$$x^2-6x-15\equiv\alpha(x-1((x+1)+\beta x(x+1)+\gamma(x-3)(x+2)$$

Ἡ ἄνω ταυτότης εἶναι ἀληθὴς διὰ πάσας τὰς πραγματικὰς τιμὰς τοῦ x, ἄρα καὶ διὰ $x=-1$. Θέτοντες $x=-1$ εὑρίσκομεν $\gamma=2$. Θέτοντες ἤδη $x=1$ εὑρίσκομεν $-20=2\beta-6\gamma$
ἢ διότι $\gamma=2$ εὑρίσκομεν $\beta=-4$.

Ὁμοίως θέτοντες $x=0$ εὑρίσκομεν $15=\alpha+6\gamma$ ἢ $\alpha=3$ διότι $\gamma=2$
Ἄρα $\alpha=3$, $\beta=-4$, $\gamma=2$.

ΣΗΜ. Τὴν ὡς ἄνω ἄσκησιν ἠδυνάμεθα νὰ λύσωμεν ἐργαζόμενοι ὡς καὶ εἰς τὰ ἀνωτέρω παραδείγματα, ἐκτελοῦντες τὰς πράξεις εἰς τὸ β' μέλος, διατάσσοντες τὸ ἐξαγόμενον κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ x καὶ ἐξισοῦντες τοὺς συντελεστὰς τῶν αὐτῶν δυνάμεων τοῦ x ὅτε εὑρίσκομεν τὸ σύστημα.

$$\alpha+\beta+\gamma=1,\quad \beta-\gamma=-6,\quad \alpha+6\gamma=15$$

ἐπιλύοντες δὲ τοῦτο εὑρίσκομεν $\alpha=3$, $\beta=-4$, $\gamma=2$.

Ἀσκήσεις πρὸς λύσιν.

692. Ποίαν τιμὴν πρέπει νὰ λάβουν τὰ α καὶ β ἵνα τὸ πολυώνυμον $2x^3+\alpha x^2-13x+\beta$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $(x-3)(x+2)$.

693. Ὁμοίως ἵνα τὸ πολυώνυμον $2x^3-(\alpha-\beta)x^2-(4\beta-1)x+4\alpha$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $x^2-3x-28$.

694. Ὁμοίως ἵνα τὸ $x^4-3x^3+\alpha x+\beta$ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ x^2-2x+4.

695. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ θετικαὶ ἀκέραιαι καὶ μικρότεραι τοῦ 10 τιμαὶ τῶν α καὶ β διὰ τὰς ὁποίας τὸ πολυώνυμον $x^3+\alpha x^2+11x+3\beta$ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ διωνύμου $x+\beta$.

696. Δίδεται τὸ τριώνυμον $x^2-\alpha x+6$ Νὰ εὑρεθοῦν αἱ πραγματικαὶ τιμαὶ τοῦ α ἵνα τὸ τριώνυμον τοῦτο εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ διωνύμου $\alpha x+2$. Νὰ εὑρεθοῦν μετὰ τοῦτο καὶ αἱ ῥίζαι αὐτοῦ.

697. Νὰ ὁρισθοῦν τὰ α, β, γ ἵνα τὸ πολυώνυμον $x^5-2x^4-6x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma$ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ $(x-3)(x^2-1)$.

698. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη ἵνα τὸ πολυώνυμον $\alpha x^4+\beta x^3+\gamma x^2+\delta x+\varepsilon$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $x^2-\lambda^2$.

699. Νὰ ὁρισθοῦν τὰ α καὶ β ἵνα τὸ πολυώνυμον

$$4x^4+\alpha x^3+25x^2+\beta x+16$$

εἶναι τέλειον τετράγωνον. Νὰ εὑρεθῇ καὶ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα αὐτοῦ.

700. Ἂν τὸ πολυώνυμον

$$27x^6+\alpha x^5+\beta x^4+\gamma x^3+\delta x^2+48x-8$$

εἶναι τέλειος κύβος, νὰ εὑρεθοῦν τὰ α, β, γ, δ. Νὰ εὑρεθῇ ἐπίσης καὶ ἡ κυβικὴ ῥίζα τούτου.

701. Ἂν τὸ $\varphi(x)\equiv x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$ εἶναι τέλειον τετράγωνον, νὰ δειχθῇ ὅτι $\gamma^2=\alpha^2\delta$ καὶ $(4\beta-\alpha^2)^2=64\delta$.

702. Ἂν δι' ὅλας τὰς πραγματικὰς τιμὰς τοῦ x ἔχωμεν τὴν ταυτότητα

$$3x^2+5x+7\equiv\lambda(x+1)(x+2)+\mu(x+1)+\nu$$

νὰ εὑρεθοῦν τὰ λ, μ, ν.

703. Ἂν δι' ὅλας τὰς πραγματικὰς τιμὰς τοῦ ν τὸ πολυώνυμον

$$\alpha(\nu-1)^2+\beta(\nu-1)(\nu+1)+\gamma(\nu+1)^2$$

ἰσοῦται μὲ $4\nu^2$ νὰ εὑρεθοῦν τὰ α, β, γ.

704. Ἂν τὸ πολυώνυμον $4x^4+12x^3y+\alpha x^2y^2+6xy^3+y^4$ εἶναι τέλειον τετράγωνον, νὰ εὑρεθῇ τὸ α.

705. Ἂν τὸ $x^3+\lambda x^2+\mu x+\nu$ εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ τριωνύμου $x^2+\alpha x+\beta$, νὰ δειχθῇ ὅτι $\mu-\beta=\alpha(\lambda-\alpha)$ καὶ $\nu=\beta(\lambda-\alpha)$.

706. Νὰ ὁρισθοῦν τὰ α καὶ β ἵνα τὸ πολυώνυμον $x^4+\alpha x^2+\beta$ εἶναι πολλαπλάσιον α΄ τοῦ $x^2+x\sqrt{3}+1$ καὶ β΄ τοῦ x^2+2x+5.

707. Νὰ ὁρισθοῦν τὰ α καὶ β ἵνα τὸ τριώνυμον $\varphi(x)\equiv\alpha x^5+\beta x^4+1$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $(x-1)^2$, Νὰ εὑρεθῇ καὶ τὸ ἀντίστοιχον πηλίκον.

708. Εἰς τὸ πολυώνυμον $x^5+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+1$ νὰ ὁρισθοῦν τὰ α, β, γ ἵνα τοῦτο εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ $(x-1)^3$. Νὰ εὑρεθῇ καὶ τὸ ἀντίστοιχον πηλίκον.

709. Νὰ προσδιορισθῇ ὁ α ἵνα τὸ τριώνυμον $x^3+\lambda x+\mu$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $(x-\alpha)^2$.

710. Πολυώνυμόν τι, ἀκέραιον ὡς πρὸς x, διαιρούμενον διὰ $x-1$ ἀφίνει ὑπόλοιπον 11 καὶ διὰ $x+2$ ἀφίνει ὑπόλοιπον 3. Ποῖον ὑπόλοιπον ἀφίνει διαιρούμενον διὰ $(x-1)(x+2)$;

711. Πολυώνυμόν τι, ἀκέραιον ὡς πρὸς x, διαιρούμενον διὰ $x+1$ ἀφίνει ὑπόλοιπον 2, διὰ $x-2$ ἀφίνει ὑπόλοιπον 11 καὶ διὰ $x+3$ ἀφίνει ὑπόλοιπον 6. Ποῖον ὑπόλοιπον θὰ ἀφίσῃ ἂν διαιρεθῇ διὰ $(x+1)(x-2)(x+3)$;

712. Πολυώνυμόν τι $\Pi(x)$ ἀκέραιον ὡς πρὸς x, διαιρούμενον διὰ $x+1$ ἀφίνει ὑπόλοιπον 7, διὰ $x-2$ ἀφίνει ὑπόλοιπον -5, διὰ $x+3$ ἀφίνει ὑπόλοιπον 45 καὶ διὰ $x-4$ ἀφίνει ὑπόλοιπον -53.

α΄) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὑπόλοιπον ὅπερ ἀφίνει διαιρούμενον διὰ τοῦ γινομένου $(x+1)(x-2)(x+3)(x-4)$ καὶ

β΄) Ἂν ἀπὸ τοῦ $\Pi(x)$ ἀφαιρέσωμεν τὸ πολυώνυμον $-x^3+x^2-2x+3$, τότε προκύπτει πολυώνυμον διαιρούμενον διὰ $2x+1$. Νὰ εὑρεθῇ τὸ πολυώνυμον $\Pi(x)$, ἂν τοῦτο εἶναι πέμπτου βαθμοῦ.

713. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη ἵνα τὸ κλάσμα $\frac{\alpha x+\beta}{\alpha' x+\beta'}$ εἶναι ἀνεξάρτητον τῆς τιμῆς τοῦ x.

714. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη ἵνα τὸ κλάσμα

$$\frac{\alpha x^2+\beta x+\gamma}{\alpha' x^2+\beta' x+\gamma'}$$

λαμβάνῃ τὴν αὐτὴν τιμὴν διὰ τρεῖς διαφόρους τιμὰς τοῦ x. Νὰ γενικευθῇ ἡ ἄσκησις.

715. Εἰς τὸ κλάσμα $\frac{3x^2-9\alpha x+6\beta}{\beta x^2+(9\alpha-8\beta)x+3\alpha}$ νὰ ὁρισθοῦν οἱ α καὶ β ἵνα τοῦτο εἶναι ἀνεξάρτητον τῆς τιμῆς τοῦ x. (Σχολὴ Ἀεροπ. 1935).

716. Τὸ αὐτὸ διὰ τὸ κλάσμα $\frac{\alpha x^2+(\alpha-\beta)x+5}{\beta x^2+(2\alpha-6)x+1}$.

717. Νὰ ὁρισθῇ ὁ α ἵνα τὸ πολυώνυμον $x^4-5x^2+4x-\alpha$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $2x+1$. Νὰ εὑρεθῇ καὶ τὸ ἀντίστοιχον πηλίκον.

XII. ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΕΠΙ ΤΩΝ ΕΚ ΤΑΥΤΟΤΗΤΟΣ ΙΣΩΝ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ.

α΄. Ὑπόλοιπον διαιρέσεως πολυωνύμου διὰ $x^\nu-\alpha$ καὶ διὰ $x^\nu-\alpha^\nu$

216. ***Ἵνα ἀκέραιον πολυώνυμον ὡς πρὸς x διαιρῆται διὰ τοῦ διωνύμου $x^\nu-\alpha$, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ διαιροῦνται διὰ $x^\nu-\alpha$ ὅλα τὰ πολυώνυμα τὰ προκύπτοντα ἂν λάβωμεν α΄) τοὺς ὅρους τῶν ὁποίων οἱ ἐκθέται εἶναι πολλαπλάσια τοῦ ν, β΄) τοὺς ὅρους τῶν ὁποίων οἱ ἐκθέται εἶναι πολλαπλάσια τοῦ ν ηὐξημένα κατὰ 1, γ΄) τοὺς ὅρους τῶν ὁποίων οἱ ἐκθέται εἶναι πολλαπλάσια τοῦ ν ηὐξημένα κατὰ 2 καὶ οὕτω καθεξῆς :***

Ἔστω τὸ ἀκέραιον ὡς πρὸς x πολυώνυμον $\Phi(x)$. Οἱ ἐκθέται τῶν δυνάμεων τοῦ x εἰς τὸ πολυώνυμον τοῦτο δυνατὸν νὰ εἶναι ἢ πολλαπλάσια τοῦ ν, ἢ πολλαπλάσια τοῦ ν ηὐξημένα κατὰ 1, ἢ πολλαπλάσια τοῦ ν ηὐξημένα κατὰ 2 κλπ. Λαμβάνομεν ὅλους τοὺς ὅρους τῶν ὁποίων οἱ ἐκθέται τοῦ x εἶναι πολλαπλάσια τοῦ ν καὶ παριστῶμεν τὸ σύνολον αὐτῶν διὰ $\varphi(x^\nu)$. Ὁμοίως λαμβάνομεν ὅλους τοὺς ὅρους τῶν ὁποίων οἱ ἐκθέται τοῦ x εἶναι πολλαπλάσια τοῦ ν ηὐξημένα κατὰ 1. Οἱ ὅροι οὗτοι θὰ ἔχουν κοινὸν παράγοντα τὸν x τὸ δὲ σύνολον αὐτῶν θὰ εἶναι τῆς μορφῆς $x\varphi_1(x^\nu)$. Ὁμοίως λαμβάνομεν ὅλους τοὺς ὅρους τῶν ὁποίων οἱ ἐκθέται τοῦ x εἶναι πολλαπλάσια τοῦ ν ηὐξημένα κατὰ 2. Οὗτοι θὰ ἔχουν κοινὸν παράγοντα τὸν x^2 τὸ δὲ σύνολόν των θὰ εἶναι τῆς μορφῆς $x^2\varphi_2(x^\nu)$ καὶ οὕτω καθεξῆς. Ἄρα τὸ πολυώνυμον $\Phi(x)$ λαμβάνει τὴν μορφὴν

$$\Phi(x)\equiv\varphi(x^\nu)+x\varphi_1(x^\nu)+x^2\varphi_2(x^\nu)+\ldots\ldots+x^{\nu-1}\varphi_{\nu-1}(x^\nu).$$

Ἤδη ἂν εἰς αὐτὸ θέσωμεν $x^\nu=y$ τότε τοῦτο γίνεται

$$\Phi(x)\equiv\varphi(y)+x\varphi_1(y)+x^2\varphi_2(y)+\ldots\ldots+x^{\nu-1}\varphi_{\nu-1}(y).$$

Τὸ ἄνω πολυώνυμον διαιρούμενον διὰ $x^\nu-\alpha$, ὅπερ ἰσοῦται μὲ τὸ $y-\alpha$, ἀφίνει ὑπόλοιπον τὸ ὁποῖον κατὰ τὰ εἰς τὴν παράγραφον 27 ἐκτιθέμενα εὑρίσκεται ἂν εἰς αὐτὸ τεθῇ $x^\nu=\alpha$ ἤτοι τὸ ὑπόλοιπον εἶναι

$$Y=\varphi(\alpha)+x\varphi_1(\alpha)+x^2\varphi_2(\alpha)+\ldots\ldots+x^{\nu-1}\varphi_{\nu-1}(\alpha).$$

Ἵνα ἤδη τὸ πολυώνυμον $\Phi(x)$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $x^\nu-\alpha$ ἀνεξαρτήτως τῆς τιμῆς τὴν ὁποίαν δύναται νὰ λάβῃ ὁ x πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὸ ὑπόλοιπον Y τῆς διαιρέσεώς του νὰ εἶναι μηδὲν ἐκ ταυτότητος ὡς πρὸς x. Πρέπει δηλαδὴ νὰ ἔχωμεν τὴν ταυτότητα

$$\varphi(\alpha)+x\varphi_1(\alpha)+x^2\varphi_2(\alpha)+\ldots\ldots+x^{\nu-1}\varphi_{\nu-1}(\alpha)\equiv0$$

ὁπότε κατὰ τὸ πόρισμα τῆς παραγράφου 212 θὰ ἔχωμεν

$$\varphi(\alpha)=0,\ \varphi_1(\alpha)=0,\ \varphi_2(\alpha)=0.\ldots.\varphi_{\nu-1}(\alpha)=0.$$

ἤτοι ὅλα τὰ πολυώνυμα $\varphi(x^\nu)$, $x\varphi_1(x^\nu)$, $x^2\varphi_2(x^\nu)\ldots$ διαιροῦνται διὰ $x^\nu-\alpha$.

Ἔστω ὡς παράδειγμα ἡ κάτωθι ἄσκησις.

Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ πολυώνυμον

$$\Phi(x)=x^8+x^7+3x^6-4x^5-3x^4-x^3+4x^2+2x-10$$

εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ x^3-2.

Ἔχομεν

$$\begin{aligned}\varphi(x^3)&=3x^6-x^3-10\\ x\varphi_1(x^3)&=x^7-3x^4+2x=x(x^6-3x^3+2)\\ x^2\varphi_2(x^3)&=x^8-4x^5+4x^2=x^2(x^6-4x^3+4).\end{aligned}$$

Ἂν ἤδη θέσωμεν $x^3=2$ εὑρίσκομεν

$$\varphi(x^3)=0,\ \varphi_1(x^3)=0,\ \varphi_2(x^3)=0.$$

Ἄρα τὸ $\Phi(x)$ διαιρεῖται διὰ x^3-2, δίδει δὲ πηλίκον

$$x^5+x^4+3x^3-2x^2-x+5.$$

217. ***Τὸ διώνυμον $x^\mu-\alpha^\mu$ τότε μόνον εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ διωνύμου $x^\nu-\alpha^\nu$ ὅταν ὁ μ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ ν.***

Ἔστω ὅτι ὁ μ δὲν εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ ν, ἀλλὰ διαιρούμενος διὰ ν δίδει λ πηλίκον καὶ υ ὑπόλοιπον. Θὰ εἶναι ἄρα $\mu=\lambda\nu+\upsilon$. Τότε τὸ διώνυμον $x^\mu-\alpha^\mu$ γίνεται

$$x^{\lambda\nu+\upsilon}-\alpha^{\lambda\nu+\upsilon}\quad ἢ\quad (x^\nu)^\lambda x^\upsilon-(\alpha^\nu)^\lambda\alpha^\upsilon \qquad (1)$$

Ἂν ἤδη εἰς τὴν παράστασιν (1) θέσωμεν ἀντὶ x^ν τὸ α^ν εὑρίσκομεν

$$(\alpha^\nu)^\lambda x^\upsilon - (\alpha^\nu)^\lambda \alpha^\upsilon \quad \text{ἢ} \quad \alpha^{\nu\lambda}(x^\upsilon - \alpha^\upsilon) \qquad (2)$$

Ἤδη ἵνα τὸ $x^\mu - \alpha^\mu$ διαιρῆται διὰ τοῦ $x^\nu - \alpha^\nu$ πρέπει (§ 27) ἡ παράστασις (2) νὰ ἰσοῦται μὲ μηδέν. Ἀλλ' ἐπειδὴ εἶναι $\alpha \neq 0$ (διότι ἂν $\alpha = 0$ τότε τὰ δοθέντα διώνυμα θὰ ἐγίνοντο x^μ καὶ x^ν εἶναι δὲ τότε πάντοτε δυνατὴ ἡ διαίρεσις τοῦ πρώτου διὰ τοῦ δευτέρου) πρέπει νὰ εἶναι

$$x^\upsilon = \alpha^\upsilon \qquad (3)$$

Ἡ (3) εἶναι ἀληθὴς μόνον ἂν $\upsilon = 0$ (καθόσον $x \neq \alpha$). Διότι τότε γίνεται $x^0 = \alpha^0 = 1$. Ἄρα $\mu = \lambda\nu$ ἤτοι ὁ μ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ ν.

218. ***Τὸ διώνυμον*** $x^\mu + \alpha^\mu$ ***εἶναι διαιρετὸν διὰ*** $x^\nu + \alpha^\nu$ ***μόνον ὅταν ὁ*** μ ***εἶναι περιττὸν πολλαπλάσιον τοῦ*** ν.

Ἡ ἀπόδειξις τῆς ἀνωτέρω προτάσεως γίνεται ἀκριβῶς ὅπως καὶ ἡ τῆς παραγράφου 217.

219. ***Τὸ διώνυμον*** $x^\mu - \alpha^\rho$ ***εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ διωνύμου*** $x^\nu - \alpha^\sigma$ ***μόνον ὅταν οἱ*** μ ***καὶ*** ρ ***εἶναι ἴσα πολλαπλάσια τῶν*** ν ***καὶ*** σ.

Ἡ ἀπόδειξις τῆς ἀνωτέρω προτάσεως γίνεται ὅπως καὶ ἡ τῆς παραγράφου 217 ἂν θέσωμεν $\mu = \lambda\nu + \upsilon$, $\rho = \lambda'\sigma + \upsilon'$ καὶ $\lambda' = \lambda + \delta$ ὁπότε καταλήγομεν εἰς τὴν ἰσότητα $\upsilon = \sigma\delta + \upsilon' = 0$.

Ἑπομένως $\gamma = \lambda\nu$ καὶ $\rho = \lambda\sigma$.

220. ***Τὸ διώνυμον*** $x^\mu + \alpha^\rho$ ***εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ διωνύμου*** $x^\nu + \alpha^\sigma$ ***μόνον ὅταν οἱ*** μ ***καὶ*** ρ ***εἶναι περιττὰ καὶ ἴσα πολλαπλάσια τῶν*** ν ***καὶ*** σ.

Ἡ ἀπόδειξις προτάσεως ταύτης γίνεται ὡς ἡ τῶν παραγράφων 217 καὶ 219.

Ἀσκήσεις πρὸς λύσιν.

718. Νὰ ὁρισθοῦν οἱ α καὶ β ἵνα τὸ πολυώνυμον

$$x^7 + \alpha x^6 - 5x^5 - 8x^4 + \beta x^3 + 8x - 6$$

εἶναι διαιρετὸν διὸ τοῦ διωνύμου $x^2 - 5$.

719. Νὰ ὁρισθοῦν οἱ α, β, γ, ἵνα τὸ πολυώνυμον

$$\alpha^3 x^8 + \beta^2 x^6 + \beta x^4 - 8x^2 - \alpha x + \gamma$$

εἶναι διαιρετὸν διὰ $x^3 + 1$.

720. Ὁμοίως ἵνα τὸ πολυώνυμον

$$\alpha^2 x^8 + \beta x^5 + x^4 - 2x^3 + \gamma x + 3\alpha$$

εἶναι διαιρετὸν διὰ $2x^2 - 3$.

721. Νὰ εὑρεθῇ ἡ σχέσις ἡ ὑφισταμένη μεταξὺ τῶν μ καὶ ν ἵνα τὸ διώ- $\alpha^{8\mu+1} - \beta^{2\nu-1}$ εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ διωνύμου $\alpha^\nu - \beta^\mu$.

722. Νὰ ὁρισθοῦν οἱ μ καὶ ν ἵνα τὸ διώνυμον $\alpha^{2\mu+5} + \beta^{3\mu+3\nu}$ εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ διωνύμου $\alpha^{\mu+1} + \beta^{\mu+\nu}$.

β΄. Ἀνάλυσις κλάσματος εἰς ἄλλα μερικὰ κλάσματα.

221. Τῇ βοηθείᾳ τῶν ἐκ ταυτότητος ἴσων πολυωνύμων δυνάμεθα νὰ ἀναλύσωμεν δοθὲν ἀλγεβρικὸν κλάσμα εἰς ἄθροισμα ἄλλων μερικῶν κλασμάτων. Ἵνα κλάσμα τι ἀναλυθῇ εἰς ἄλλα μερικὰ κλάσματα πρέπει ὁ ἀριθμητής του νὰ εἶναι βαθμοῦ μικροτέρου ἀπὸ τὸν βαθμὸν τοῦ παρονομαστοῦ. Ἐν ἐναντίᾳ περιπτώσει ἐργαζόμεθα ὡς εἰς τὸ κατωτέρω β΄ παράδειγμα.

222. Παραδείγματα ἀναλύσεως κλάσματος εἰς ἄλλα μερικὰ κλάσματα ἔστωσαν τὰ κάτωθι.

α΄. Νὰ ἀναλυθῇ τὸ κλάσμα $\dfrac{4x-19}{(x-1)(x-2)}$ εἰς δύο ἄλλα κλάσματα ἔχοντα ὡς παρονομαστὰς τοὺς παράγοντας τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ δοθέντος.

Παρατηροῦμεν ὅτι οἱ παρονομασταὶ τῶν ζητουμένων κλασμάτων εἶναι γνωστοί. Ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ προσδιορίσωμεν τοὺς ἀριθμητάς των. Ἔστωσαν Α καὶ Β οἱ ἀριθμηταὶ οὗτοι· θὰ ἔχωμεν ἄρα

$$\frac{4x-19}{(x-1)(x-2)} \equiv \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} \qquad (1)$$

Ἡ σχέσις (1) εἶναι ταυτότης ὡς πρὸς x, καθόσον ἡ ἀνωτέρω ἀνάλυσις εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς τιμῆς τοῦ x. Ἐκτελοῦντες τὴν πρόσθεσιν εἰς τὸ β΄ μέλος τῆς (1) εὑρίσκομεν

$$\frac{A(x-2)+B(x-1)}{(x-1)(x-2)}. \text{ Ἄρα}$$

$$\frac{4x-19}{(x-1)(x-2)} \equiv \frac{A(x-2)+B(x-1)}{(x-1)(x-2)} \equiv \frac{(A+B)x-(2A+B)}{(x-1)(x-2)} \qquad (2)$$

Ἐπειδὴ ὅμως οἱ παρονομασταὶ τῶν ἴσων κλασμάτων τῆς (2) εἶναι ἴσοι, ἕπεται ὅτι καὶ οἱ ἀριθμηταί των θὰ εἶναι ἴσοι, ἤτοι

$$4x-19 \equiv (A+B)x-(2A+B)$$

καὶ ἄρα (§ 213) ἔχομεν $A+B=4$ καὶ $2A+B=19$ ἐξ ὧν εὑρίσκομεν $A=15$ καὶ $B=-11$.

Τὸ δοθὲν λοιπὸν κλάσμα γίνεται $\dfrac{15}{x-1} - \dfrac{11}{x-2}$.

β΄. Νὰ ἀναλυθῇ τὸ κλάσμα $\dfrac{2x^3+7x^2-2x-2}{2x^2+x-6}$ εἰς ἄλλας μερικὰς παραστάσεις.

Παρατηροῦμεν ὅτι ὁ ἀριθμητὴς εἶναι μεγαλυτέρου βαθμοῦ ἀπὸ τὸν παρονομαστήν. Διαιροῦντες τὸν ἀριθμητὴν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ καὶ τρέποντες τὸν παρονομαστὴν εἰς γινόμενον εὑρίσκομεν

$$x+3+\frac{x+16}{(2x-3)(x+2)}$$

Ἐργαζόμενοι ἤδη εἰς τὸ κλάσμα $\frac{x+16}{(2x-3)(x+2)}$ ὡς εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα εὑρίσκομεν τὸ ζητούμενον ἤτοι

$$\frac{2x^3+7x^2-2x-2}{2x^2+x-6}\equiv x+3+\frac{5}{2x-3}-\frac{2}{x+2}.$$

γ΄. Τὸ αὐτὸ διὰ τὸ κλάσμα $\frac{4x^2-x+10}{(x+2)(x^2+x+5)}$.

Τὸ κλάσμα τοῦτο δύναται νὰ ἀναλυθῇ εἰς δύο ἄλλα ἔχοντα ὡς παρονομαστὰς τοὺς δύο παράγοντας τοῦ παρονομαστοῦ. Ἀλλὰ τὸ μὲν ἔχον παρονομαστὴν τὸν $x+2$ θὰ ἔχῃ ὡς ἀριθμητὴν γνωστόν τινὰ ὅρον (μὴ περιέχοντα τὸν x) καθόσον ὁ ἀριθμητὴς πρέπει νὰ εἶναι βαθμοῦ μικροτέρου τοῦ βαθμοῦ τοῦ παρονομαστοῦ. Τὸ δὲ ἔχον παρονομαστὴν τὸ x^2+x+5 θὰ ἔχῃ ὡς ἀριθμητὴν τὸ πολὺ διώνυμον α΄ βαθμοῦ ὡς πρὸς x, ἔστω $Bx+\Gamma$, καθόσον αὐτὴ εἶναι ἡ γενικωτέρα μορφὴ τοῦ ἀριθμητοῦ, ὀφείλοντος νὰ εἶναι βαθμοῦ κατὰ μονάδα τοὐλάχιστον μικροτέρου ἀπὸ τὸν βαθμὸν τοῦ παρονομαστοῦ. Θὰ ἔχωμεν λοιπόν.

$$\frac{4x^2-x+10}{(x+2)(x^2+x+5)}\equiv\frac{A}{x+2}+\frac{Bx+\Gamma}{x^2+x+5}$$

Τρέποντες τὰ κλάσματα τοῦ β΄ μέλους εἰς ὁμώνυμα καὶ ἐξισοῦντες τοὺς ἀριθμητὰς εὑρίσκομεν.

$$4x^2-x+10\equiv(A+B)x^2+(A+2B+\Gamma)x+5A+2\Gamma$$

Ἄρα (§ 213 ἔχομεν $A+B=4$, $A+2B+\Gamma=-1$, $5A+2\Gamma=10$.

Ἐπιλύοντες τὸ ἀνωτέρω σύστημα ὡς πρὸς ἀγνώστους τοὺς A, B, Γ εὑρίσκομεν $A=4$, $B=0$ καὶ $\Gamma=-5$. Ἄρα ἔχομεν

$$\frac{4x^2-x+10}{(x+2)(x^2+x+5)}\equiv\frac{4}{x+2}-\frac{5}{x^2+x+5}$$

ΣΗΜ. Εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα εὑρέθη $B=0$. Ἂν ὁ B ἦτο διάφορος τοῦ μηδενός, τότε ὁ ἀριθμητὴς τοῦ β΄ κλάσματος θὰ ἦτο διώνυμον α΄ βαθμοῦ ὡς πρὸς x.

δ΄. Τὸ αὐτὸ διὰ τὸ κλάσμα $\frac{3x^2-x-2}{(1+2x)(x+2)^2}$.

Ἐργαζόμενοι ὡς εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα εὑρίσκομεν

$$\frac{3x^2-x-2}{(1+2x)(x+2)^2} \equiv \frac{A}{1+2x} + \frac{Bx+\Gamma}{(x+2)^2} \qquad (3)$$

Ἀλλὰ τὸ β΄ κλάσμα δύναται νὰ μετατραπῇ ὡς ἑξῆς

$$\frac{Bx+\Gamma}{(x+2)^2} = \frac{B(x+2)+(\Gamma-2B)}{(x+2)^2} = \frac{B}{x+2} + \frac{\Gamma-2B}{(x+2)^2} = \frac{B}{x+2} + \frac{\Delta}{(x+2)^2}$$

ἂν θέσωμεν $\Gamma-2B=\Delta$. Ἄρα ἡ (3) γράφεται

$$\frac{3x^2-x-2}{(1+2x)(x+2)^2} \equiv \frac{A}{1+2x} + \frac{B}{x+2} + \frac{\Delta}{(x+2)^2} \qquad (4)$$

ἐργαζόμενοι δὲ ὡς εἰς τὸ α΄ παράδειγμα εὑρίσκομεν $A=-\frac{1}{3}$, $B=\frac{5}{3}$, $\Delta=-4$. Ἑπομένως ἔχομεν

$$\frac{3^2x-x-2}{(1+2x)(x+2)^2} \equiv -\frac{1}{3(1+2x)} + \frac{5}{3(x+2)} - \frac{4}{(x+2)^2}$$

ε΄. Τὸ αὐτὸ διὰ τὸ κλάσμα $\frac{x^2-6x+5}{(x-4)^3}$.

Λαμβάνοντες ὑπ᾽ ὄψιν τὰ εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα ἐκτεθέντα, ἔχομεν

$$\frac{x^2-6x+5}{(x-4)^3} \equiv \frac{A}{x-4} + \frac{B}{(x-4)^2} + \frac{\Gamma}{(x-4)^3}$$

ἐργαζόμενοι δὲ ὁμοίως ὡς ἀνωτέρω, εὑρίσκομεν

$A=1$, $B=2$, $\Gamma=-3$. Ἄρα

$$\frac{x^2-6x+5}{(x-4)^3} \equiv \frac{1}{x-4} + \frac{2}{(x-4)^2} - \frac{3}{(x-4)^3}.$$

223. Ἀνακεφαλαιοῦντες τὰ ἀνωτέρω συμπεραίνομεν ὅτι :

α΄) Πᾶν κλάσμα δύναται νὰ ἀναλυθῇ τὸ πολὺ εἰς τόσα ἄλλα κλάσματα, ὅσοι εἶναι οἱ παράγοντες τοῦ παρονομαστοῦ του.

β΄) Ὁ ἀριθμητής του ὀφείλει νὰ εἶναι βαθμοῦ μικροτέρου ἀπὸ τὸν βαθμὸν τοῦ παρονομαστοῦ. Ἂν ὁ ἀριθμητὴς εἶναι βαθμοῦ ἴσου ἢ μεγαλυτέρου ἀπὸ τὸν βαθμὸν τοῦ παρονομαστοῦ, τότε διὰ διαιρέσεως ἐξάγομεν τὴν εἰς τὸν ἀριθμητὴν περιεχομένην ἀκεραίαν παράστασιν καὶ ἀναλύομεν τὸ ἀπομένον κλάσμα εἰς ἄλλα μερικὰ κλάσματα.

γ΄) Ὁ ἀριθμητὴς ἑκάστου μερικοῦ κλάσματος πρέπει νὰ λαμβάνῃ τὴν γενικωτέραν μορφήν του, πρέπει δηλαδὴ νὰ εἶναι πολυώνυμον πλῆρες καὶ βαθμοῦ κατὰ μονάδα μικροτέρου ἀπὸ τὸν βαθμὸν τοῦ παρονομαστοῦ. Ἂν ὅμως ὁ παρονομαστὴς εἶναι δύ-

ναμις μιᾶς παραστάσεως τότε τὸ ἀντίστοιχον κλάσμα ἀναλύεται εἰς τόσα ἄλλα μερικὰ κλάσματα, ὅσος εἶναι ὁ βαθμὸς τοῦ παρονομαστοῦ, οἱ ἀριθμηταὶ ὅμως τῶν κλασμάτων τούτων εἶναι τότε ὅλοι τοῦ αὐτοῦ βαθμοῦ μικροτέρου κατὰ μονάδα ἀπὸ τὸν βαθμὸν τῆς βάσεως τοῦ παρονομαστοῦ. (παράδ. δ΄ καὶ ε΄).

Ἀσκήσεις πρὸς λύσιν.

Νὰ ἀναλυθοῦν εἰς ἄλλα μερικὰ κλάσματα τὰ κάτωθι

723. $\dfrac{8-x}{1+x-6x^2}$ 724. $\dfrac{x^2+8x+1}{(2-x)(1+x+x^2)}$ 725. $\dfrac{x^3-2x-13}{x^2-2x-3}$

726. $\dfrac{x^3+8}{(x-2)^4}$ 727. $\dfrac{x^3+3x^2-2x-4}{(x+2)^4}$ 728. $\dfrac{x^3-6x-7}{(x-2)(x^2+x+5)^2}$

729. $\dfrac{3x^2+x+1}{x(x+1)^2}$ 730. $\dfrac{x^2+4x+7}{(x+2)(x+3)^2}$ 731. $\dfrac{3x^2+92x}{(x^2+1)(x+6)}$

732. Τὸ κλάσμα $\dfrac{1}{(3\nu-2)(3\nu+1)}$ νὰ ἀναλυθῇ εἰς ἄλλα μερικὰ κλάσματα. Νὰ εὑρεθῇ μετὰ τοῦτο καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ν ὅρων $\dfrac{1}{1.4}+\dfrac{1}{4.7}+\dfrac{1}{7.10}+\ldots$

XIII. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΑΝΩΤΕΡΑΙ ΤΟΥ Β΄. ΒΑΘΜΟΥ ΛΥΟΜΕΝΑΙ ΤΗ ΒΟΗΘΕΙΑ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ Β΄. ΒΑΘΜΟΥ

α΄. Γενικά τινα περὶ ἐξισώσεων.

224. Εἴδομεν εἰς τὰς παραγράφους 210 καὶ 211 ὅτι ἂν ἓν πολυώνυμον Π(x) ἀκέραιον ὡς πρὸς x βαθμοῦ ν μηδενίζεται διὰ ν διαφόρους τιμὰς τοῦ x, τότε τὸ πολυώνυμον τοῦτο τρέπεται εἰς γινόμενον ν πρωτοβαθμίων παραγόντων ἐπὶ τὸν συντελεστὴν τῆς μεγαλυτέρας δυνάμεως τοῦ x. Ἂν δὲ μηδενίζεται διὰ ν+1 διαφόρους τιμὰς τοῦ x τότε τοῦτο εἶναι ἐκ ταυτότητος μηδέν.

225. Ἔστω ἤδη ἡ ἀκεραία ὡς πρὸς x ἐξισώσεις

$$\alpha x^\nu+\beta x^{\nu-1}+\gamma x^{\nu-2}+\delta x^{\nu-3}+\ldots+k=0 \qquad (1)$$

Τὸ πρῶτον μέλος ταύτης διότι εἶναι ἀκέραιον πολυώνυμον ὡς πρὸς x βαθμοῦ ν, διὰ τοῦτο δύναται νὰ ἀναλυθῇ εἰς τὸ γινόμενον τῶν ν πρωτοβαθμίων παραγόντων x—η, x—θ, x—λ,.. x—μ πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ α (§ 210) ἤτοι ἡ ἐξίσωσις (1) δύναται νὰ γίνῃ

$$\alpha(x-\eta)(x-\vartheta)(x-\lambda)..(x-\mu)=0 \qquad (2)$$

Ἤδη, ἂν ὁ α εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός, τὸ πρῶτον μέλος τῆς (2) διὰ νὰ εἶναι μηδὲν πρέπει εἷς ἐκ τῶν διωνύμων παραγόντων του x—η, x—θ,.....x—μ νὰ ἰσοῦται μὲ μηδὲν ἐξ οὗ εὑρίσκομεν :

$$x=\eta,\ x=\vartheta \ldots .. x=\mu$$

Ἤτοι οἱ ἀφαιρεταῖοι η, ϑ, λ,...μ τῶν διωνύμων παραγόντων τοῦ α' μέλους τῆς (2) εἶναι αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως ταύτης.

226. Ἡ ἐξίσωσις (1) ***δὲν δύναται νὰ ἔχῃ ῥίζας περισσοτέρας τοῦ βαθμοῦ αὐτῆς ν.*** Διότι τότε θὰ ἐμηδενίζετο τὸ πρῶτον μέλος της διὰ τιμὰς περισσοτέρας τοῦ ν καὶ ἄρα (§ 211) δὲν θὰ ἦτο ἐξίσωσις ἀλλὰ πολυώνυμον ἐκ ταυτότητος μηδέν.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συμπεραίνομεν ὅτι ***μία ἐξίσωσις ἀκεραία ὡς πρὸς*** x ***ἔχει τόσας καὶ μόνον τόσας ῥίζας ὅσος εἶναι ὁ βαθμὸς αὐτῆς.***

227. Ἐν γένει ἂν αἱ ν ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως (1) παρασταθοῦν διὰ $x_1, x_2, x_3 \ldots . x_\nu$, τότε ἔχομεν (§ 210) τὴν ἑξῆς σχέσιν ἐκ ταυτότητος.

$$\alpha x^\nu + \beta x^{\nu-1} + \gamma x^{\nu-2} + \delta x^{\nu-3} + \ldots . + k \equiv$$

$$\alpha(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) \ldots . (x-x_\nu) \qquad (3)$$

228. ***Ἐὰν μία ἐξίσωσις μὲ πραγματικοὺς συντελεστὰς ἔχῃ μίαν φανταστικὴν (μιγάδα) ῥίζαν, τότε θὰ ἔχῃ ὡς φανταστικὴν (μιγάδα) ῥίζανκαὶ τὴν συζυγῆ αὐτῆς.***

Διότι ἡ ἐξίσωσις αὕτη θὰ εἶναι τῆς μορφῆς (1) ἥτις γράφεται καὶ ὑπὸ τὴν μορφὴν (3). Ἔστω $x_1=\lambda+\delta i$ μία μιγαδικὴ ῥίζα τῆς (1). Ὁ παράγων $x-x_1$, ὅστις γράφεται καὶ $(x-\lambda)-\delta i$ ὀφείλει, πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ ἕνα ἐκ τῶν λοιπῶν παραγόντων τοῦ β' μέλους τῆς (3) νὰ δώσῃ πραγματικὸν ἀριθμόν, ἀφοῦ οἱ συντελσταὶ τῆς (1) εἶναι πραγματικοὶ ἀριθμοί. Ἀλλὰ (§ 160) πραγματικὸν ἀριθμὸν δίδει μόνον τὸ γινόμενον δύο μιγάδων ἀριθμῶν τῆς μορφῆς $A-Bi$ καὶ $k(A+Bi)$. Ἄρα θὰ ὑπάρχῃ εἰς τὸ β' μέλος τῆς (3) εἷς παράγων τῆς μορφῆς $k[(x-\lambda)+\delta i]$ ὅστις πολ/ζόμενος ἐπὶ τὸν παράγοντα $(x-\lambda)-\delta i$ θὰ δώσῃ τὸν πραγματικὸν ἀριθμὸν $k[(x-\lambda)^2+\delta^2]$ Ἀλλὰ τότε τὸ β' μέλος τῆς (3) γίνεται

$$\alpha k[(x-\lambda)^2+\delta^2](x-x_3) \ldots . (x-x^\nu)$$

Ἄρα (§ 213) θὰ εἶναι $\alpha=\alpha k$ ἐξ οὗ $k=1$, ὁ δὲ παράγων $k[(x-\lambda)+\delta i]$ γράφεται $x-(\lambda-\delta i)$ ἤτοι ὁ ἀριθμὸς $\lambda-\delta i$ θὰ εἶναι ῥίζα τῆς (1). Ἤτοι ἡ ἐξίσωσις (1) ἂν ἔχῃ ὡς ῥίζα τὸν μιγάδα ἀριθμὸν $\lambda+\delta i$ θὰ ἔχῃ ὡς τοιαύτην καὶ τὸν συζυγῆ αὐτοῦ ἀριθμὸν $\lambda-\delta i$.

229. Ἐκ τῶν εἰς τὴν ἀνωτέρω παράγραφον ἀναφερομένων συμπεραίνομεν ὅτι ***μία ἐξίσωσις ἔχει ἄρτιον ἀριθμὸν φανταστικῶν ῥιζῶν.*** Καὶ ἂν μὲν ἡ ἐξίσωσις εἶναι ἀρτίου βαθμοῦ τότε δύναται νὰ ἔχῃ φανταστικὰς ῥίζας ἢ 0 ἢ 2 ἢ 4 ἢ 6 κλπ. Ἂν δὲ εἶναι περιττοῦ βαθμοῦ τότε κατ' ἀνάγκην θὰ ἔχῃ μίαν τοὐλάχιστον ῥίζαν πραγματικήν.

230. Εἰς πᾶσαν ἐξίσωσιν ν βαθμοῦ τῆς γενικῆς μορφῆς (1) δυνάμεθα νὰ ἐξαλείψωμεν τὸν ὅρον τὸν περιέχοντα τὴν ν—1 δύναμιν τοῦ ἀγνώστου ἂν θέσωμεν τὴν ἀντικατάστασιν $x=y-\frac{\beta}{\nu\alpha}$ ἔνθα β εἶναι ὁ συντελεστὴς τοῦ ὑπὸ ἀπαλοιφὴν ὅρου καὶ α ὁ συντελεστὴς τοῦ πρώτου ὅρου.

Πράγματι τότε ἡ ἐξίσωσις (1) γίνεται

$$\alpha\left[y-\frac{\beta}{\nu\alpha}\right]^{\nu}+\beta\left[y-\frac{\beta}{\nu\alpha}\right]^{-1}+\ldots\ldots+k=0$$

Μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πράξεων ὁ β′ ὅρος τοῦ ἀναπτύγματος $\left[y-\frac{\beta}{\nu\alpha}\right]^{\nu}$ πολ/σθεὶς ἐπὶ α γίνεται $-\beta y^{\nu-1}$. Ἀλλὰ καὶ ὁ α′ ὅρος τοῦ ἀναπτύγματος $\left[y-\frac{\beta}{\nu\alpha}\right]^{\nu-1}$ πολ/σθεὶς ἐπὶ β γίνεται $\beta y^{\nu-1}$ ἤτοι μετὰ τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων ἀπαλείφεται ὁ ὅρος ὁ περιέχων τὴν ν—1 δύναμιν. Ἄρα μετὰ τοῦτο ἡ ἐξίσωσις (1) λαμβάνει τὴν γενικὴν μορφὴν

$$\alpha y^{\nu}+\lambda y^{\nu-2}+\mu y^{\nu-3}+\ldots\ldots+k'=0 \qquad (4)$$

β′. Σχέσεις μεταξὺ συντελεστῶν καὶ ῥιζῶν μιᾶς ἐξισώσεως.

231. Ἂν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ταυτότητος (3) τῆς § 227 διαιρέσωμεν διὰ τοῦ α′ ἔνθα α≠0, εὑρίσκομεν

$$x^{\nu}+\frac{\beta}{\alpha}x^{\nu-1}+\frac{\gamma}{\alpha}x^{\nu-2}+\frac{\delta}{\alpha}x^{\nu-3}+\ldots+\frac{k}{\alpha}\equiv (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots\ldots(x-x_\nu)$$

ἢ ἂν ἐκτελέσωμεν τὰς πράξεις εἰς τὸ β′ μέλος καὶ κατατάξωμεν αὐτὸ κατὰ τὰς δυνάμεις τοῦ x εὑρίσκομεν (213) ὅτι

$$\left.\begin{aligned}
&x_1+x_2+x_3+\ldots\ldots\ldots\ldots x_\nu=-\frac{\beta}{\alpha}\\
&x_1x_2+x_1x_3+\ldots\ldots+x_2x_3+\ldots=\frac{\gamma}{\alpha}\\
&x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+\ldots=-\frac{\delta}{\alpha}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&x_1x_2x_3x_4\ldots\ldots x_\nu=\pm\frac{k}{\alpha}
\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Ἤτοι παρατηροῦμεν ὅτι ***τὸ ἄθροισμα τῶν ριζῶν μιᾶς ἐξισώσεως ν βαθμοῦ διατεταγμένης κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ*** x ***ἰσοῦται μὲ τὸν ἀντίθετον συντελεστὴν τοῦ β΄ ὅρου της διαιρεθέντα διὰ τοῦ συντελεστοῦ τοῦ πρώτου ὅρου της, τὸ ἄθροισμα τῶν ἀνὰ δύο γινομένων τῶν ριζῶν της ἰσοῦται μὲ τὸν συντελεστὴν τοῦ τρίτου ὅρου της διαιρεθέντα διὰ τοῦ συντελεστοῦ τοῦ πρώτου ὅρου της, τὸ ἄθροισμα τῶν ἀνὰ τριῶν γινομένων τῶν ριζῶν της ἰσοῦται μὲ τὸν ἀντίθετον συντελεστὴν τοῦ τετάρτου ὅρου διαιρεθέντα διὰ τοῦ συντελεστοῦ τοῦ πρώτου ὅρου κ.ο.κ. τὸ δὲ γινόμενον τῶν ριζῶν της ἰσοῦται μὲ τὸν γνωστὸν ὅρον ταύτης*** k ***διαιρεθέντα διὰ τοῦ συντελεστοῦ τοῦ πρώτου ὅρου· τὸ γινόμενον δὲ τοῦτο ἔχει πρὸ αὐτοῦ τὸ σημεῖον + ὅταν ἡ ἐξίσωσις εἶναι ἀρτίου βαθμοῦ καὶ τὸ σημεῖον — ὅταν αὕτη εἶναι περιττοῦ βαθμοῦ.*** π. χ. τῆς ἐξισώσεως

$$x^3+4x^2+x-6=0$$

ἂν x_1, x_2, x_3 εἶναι αἱ ρίζαι της ἔχομεν

$$x_1+x_2+x_3=-4, \quad x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=1 \quad \text{καὶ} \quad x_1x_2x_3=6. \quad (\alpha)$$

Πράγματι αἱ ρίζαι αὐτῆς εἶναι 1, —2, — 3.

Σημειωτέον ὅτι αἱ ὡς ἄνω εὑρισκόμεναι σχέσεις μεταξὺ τῶν συντελεστῶν καὶ τῶν ριζῶν μιᾶς ἐξισώσεως δὲν μᾶς παρέχουν τρόπον λύσεως τῆς ἐξισώσεως τοῦ ν βαθμοῦ, διότι ἂν εἰς τὸ σύστημα (α) ἀπαλείψωμεν ὅλους τοὺς ἀγνώστους πλὴν ἑνὸς καταλήγομεν εἰς τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν.

γ΄. Ἀριθμητικὴ λύσις ἐξισώσεων ἐχουσῶν ἀκεραίας ρίζας.

232. Ἐκ τῶν ὅσα ἐκτίθενται εἰς τὴν § 231, εἴδομεν ὅτι εἰς μίαν ἐξίσωσιν ν βαθμοῦ, ἀκεραίαν ὡς πρὸς x τὸ γινόμενον τῶν ριζῶν ἰσοῦται μὲ τὸν γνωστὸν ὅρον διαιρεθέντα διὰ τοῦ συντελεστοῦ τοῦ πρώτου ὅρου τῆς ἐξισώσεως, ἢ ἂν ὁ συντελεστὴς τοῦ πρώτου ὅρου τῆς ἐξισώσεως εἶναι ἡ μονὰς τότε τὸ γινόμενον τῶν ριζῶν ἰσοῦται μὲ τὸν γνωστὸν ὅρον. Ἂν δηλαδὴ εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1) εἶναι $\alpha=1$ τότε ἡ τελευταία ἐκ τῶν σχέσεων (5) γίνεται

$$x_1x_2x_3 \ldots x_\nu = \pm k \qquad (6)$$

Ἡ σχέσις (6) μᾶς δεικνύει ὅτι ἂν ἡ ἐξίσωσις (1) ἔχῃ ἀκεραίας ρίζας, αὗται ὀφείλουν νὰ εἶναι διαιρέται τοῦ γνωστοῦ ὅρου της k, καθόσον τὸ γινόμενόν των ἰσοῦται μὲ k. Τοῦτο μᾶς παρέχει τρόπον λύσεως μιᾶς ἐξισώσεως οἱουδήποτε βαθμοῦ, ἐφ᾽ ὅσον αὕτη ἔχει ἀκεραίας ρίζας (ἴδε καὶ § 37).

233. Ἔστωσαν ὡς παραδείγματα τὰ κάτωθι :

α΄. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $x^3+4x^2+x-6=0$

Αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως ταύτης, ἂν εἶναι ἀκέραιαι, ὀφείλουν νὰ εἶναι διαιρέται τοῦ τελευταίου ὅρου αὐτῆς 6. Ἀλλ᾽ οἱ διαιρέται τοῦ 6 εἶναι ±1, ±2, ±3, ±6. Ἄρα δοκιμάζομεν ἂν ἡ ἐξίσωσις ἔχῃ ῥίζαν τὴν 1. Πρὸς τοῦτο πρέπει νὰ μηδενίζεται τὸ α΄ μέλος ταύτης ἂν ἀντὶ x τεθῇ τὸ 1 (§ 37). Τοῦτο συμβαίνει. Ἄρα τὸ 1 εἶναι ῥίζα ταύτης. Ἤδη, ἀφοῦ τὸ α΄ μέλος μηδενίζεται διὰ $x=1$ ἕπεται ὅτι διαιρεῖται διὰ $x-1$. Διαιροῦντες τοῦτο διὰ $x-1$ εὑρίσκομεν πηλίκον x^2+5x+6. Ἄρα ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γίνεται :

$$(x-1)(x^2+5x+6)=0$$

Ἐπομένως ἢ $x-1=0$ ἐξ οὗ $x_1=1$ ἢ $x^2+5x+6=0$ ἐξ οὗ $x_2=-2$, $x_3=-3$.

Ἄρα αἱ ῥίζαι τῆς δοθείσης εἶναι 1, -2, -3.

β΄. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $x^4+4x^3-x^2-16x-12=0$.

Ἐργαζόμενοι ὡς ἀνωτέρω παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἔχει ῥίζας τὰς -1, 2. Ἄρα διαιρεῖται διὰ $x+1$ καὶ $x-2$ ἑπομένως διαιρεῖται καὶ διὰ τοῦ γινομένου $(x+1)(x-2)$ ἢ x^2-x-2. Ἐκτελοῦντες τὴν διαίρεσιν εὑρίσκομεν ὡς πηλίκον τὸ x^2+5x+6 ὅπερ ἀναλυόμενον εἰς γινόμενον δίδει $(x+2)(x+3)$. Ἄρα ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γίνεται $(x+1)(x-2)(x+2)(x+3)=0$, ἔχουσα ῥίζας τὰς -1, 2, -2, -3. Καθ᾽ ὅμοιον τρόπον λύονται καὶ ἐξισώσεις μεγαλυτέρου βαθμοῦ.

Ἀσκήσεις πρὸς λύσιν.

733. Εἰς τὴν ἐξίσωσιν $x^4+\alpha x^2+\beta x-30=0$ νὰ ὁρισθοῦν οἱ α καὶ β, ἵνα οἱ ἀριθμοὶ 1 καὶ 2 εἶναι ῥίζαι ταύτης. Νὰ εὑρεθοῦν μετὰ τοῦτο καὶ αἱ λοιπαὶ ῥίζαι της.

734. Νὰ εὑρεθῇ πολυώνυμον τρίτου βαθμοῦ ὡς πρὸς x, τὸ ὁποῖον νὰ λαμβάνῃ διαδοχικῶς τὰς τιμὰς -30, 6, 0, 18 ὅταν ὁ x λαμβάνῃ ἀντιστοίχως τὰς τιμὰς -2, -1, 1, 2. Νὰ λυθῇ δὲ καὶ ἡ ἐκ τούτου, ἐξισουμένου μὲ μηδέν, προκύπτουσα ἐξίσωσις.

Νὰ λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις

735. $x^4+x^3-31x^2-25x+150=0$ (Ἀεροπ. 1932).

736. $x^5+\frac{x^4}{2}-\frac{3x^3}{4}-\frac{3x^2}{8}+\frac{x}{16}+\frac{1}{32}=0$ (Δοκίμων 1931).

737. $x^4-16x^3+86x^2-176x+105=0$

738. $3x^3-26x^2+52x-24=0$

739. $2x^3-x^2-22x-24=0$

740. $4x^3+16x^2-9x-36=0$

741. $x^4-9x^2+4x+12=0$

742. $x^6-3x^5+6x^3\ 3x^2-3x+2=0$

743. $x^4-6x^3+12x^2-10x+3=0$

744. $x^4-(\alpha+\beta)x^3-\alpha(\alpha-\beta)x^2+\alpha^2(\alpha+\beta)x-\alpha^3\beta=0$

745. $x^5-13x^4+67x^3-171x^2+216x-108=0$

746. $4x^4+12x^3-x^2-15x=0$ 747. $2x^4+x^3-6x^2+x+2=0$

748. $3x^3-22x^2+48x-32=0$ 749. $x^4-2x^3-10x^2+4x+16=0$

750. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $24x^3+46x^2+9x-9=0$ γνωστοῦ ὄντος ὅτι μία ρίζα της εἶναι διπλασία μιᾶς ἄλλης ρίζης αὐτῆς.

751. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $8x^4-2x^3-27x^2+6x+9=0$ γνωστοῦ ὄντος ὅτι δύο ἐκ τῶν ριζῶν της εἶναι ἀντίθετοι.

752. Ὁμοίως ἡ ἐξίσωσις $54x^3-39x^2-26x+16=0$ γνωστοῦ ὄντος ὅτι αἱ ρίζαι της ἀποτελοῦν γεωμετρικὴν πρόοδον.

753. Τὸ αὐτὸ διὰ τὴν ἐξίσωσιν $27x^4-195x^3+494x^2-520x+192=0$

754. Ὁμοίως ἡ ἐξίσωσις $32x^3-48x^2+22x-3=0$ γνωστοῦ ὄντος ὅτι αἱ ρίζαι της ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον.

755. Τὸ αὐτὸ διὰ τὴν ἐξίσωσιν $x^4-2x^3-21x^2+22x+40=0$.

756. Ὁμοίως ἡ $6x^4-29x^3+40x^2-7x-12=0$ γνωστοῦ ὄντος ὅτι τὸ γινόμενον δύο ριζῶν της ἰσοῦται μὲ 2.

757. Ὁμοίως ἡ ἐξίσωσις $18x^3+81x^2+121x+60=0$ γνωστοῦ ὄντος ὅτι μία ρίζα της ἰσοῦται μὲ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν δύο ἄλλων.

Ἂν α, β, γ εἶναι αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $x^3+\lambda x+\mu=0$, νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τῶν παραστάσεων :

758. $(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2+(\alpha-\beta)^2$ 759. $(\beta+\gamma)^{-1}+(\gamma+\alpha)^{-1}+(\alpha+\beta)^{-1}$

Ἂν α, β, γ εἶναι αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $x^3-\lambda x^2+\mu x-\nu=0$, νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τῶν παραστάσεων

760. $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ 761. $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma$

762. $\alpha^{-2}+\beta^{-2}+\gamma^{-2}$ 763. $(\beta\gamma)^{-2}+(\gamma\alpha)^{-2}+(\alpha\beta)^{-2}$

764. $\alpha^2\beta+\beta^2\gamma+\gamma^2\alpha+\alpha^2\gamma+\beta^2\alpha+\gamma^2\beta$ 765. $(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)$

Ἂν α, β, γ, δ εἶναι αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $x^4-\lambda x^3+\mu x^2-\nu x+k=0$ νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ ἑκάστης ἐκ τῶν παραστάσεων

766. $\alpha^2\beta\gamma\delta+\alpha\beta^2\gamma\delta+\alpha\beta\gamma^2\delta+\alpha\beta\gamma\delta^2$ 767. $\alpha^4+\beta^4+\gamma^4+\delta^4$

768. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν κύβων τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως

$$x^3+\lambda x+\mu=0.$$

769. Ἂν οἱ ἀριθμοὶ λ, μ, ν εἶναι θετικοὶ καὶ αἱ ἐξισώσεις

$$x^4+\lambda x^3+\mu x^2+\nu x+1=0 \text{ καὶ } x^4+\nu x^3+\mu x^2+\lambda x+1=0$$

ἔχουν μίαν κοινὴν ρίζαν, νὰ δειχθῇ ὅτι $\chi+\nu=\mu+2$.

770. Ἂν α, β, γ εἶναι αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $x^3+\lambda x^2+\mu x+\nu=0$ καὶ τ εἶναι τὸ ἄθροισμά των, νὰ δειχθῇ ὅτι $(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)=\nu-\lambda\mu$.

771. Ἂν αἱ παραστάσεις $x^3+\lambda x+\mu$ καὶ $3x^2+\lambda$ ἔχουν κοινόν τινα παράγοντα, νὰ δειχθῇ ὅτι $\frac{\lambda^3}{27}+\frac{\mu^2}{4}=0$.

Ἂν οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ εἶναι ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $x^3+\lambda x+\mu=0$ νὰ σχηματισθῇ ἐξίσωσις ἔχουσα ὡς ρίζας τὰς

772. $k\alpha^{-1}$, $k\beta^{-1}$ $k\gamma^{-1}$ 773. $\beta^2\gamma^2$, $\gamma^2\alpha^2$, $\alpha^2\beta^2$

774. $\alpha(\beta+\gamma)$, $\beta(\gamma+\alpha)$, $\gamma(\alpha+\beta)$ 775. α^3, β^3, γ^3

776. $\frac{\beta+\gamma}{\alpha^2}$, $\frac{\gamma+\alpha}{\beta^2}$, $\frac{\alpha+\beta}{\gamma^2}$ 777. $\beta\gamma+\frac{1}{\alpha}$, $\gamma\alpha+\frac{1}{\beta}$, $\alpha\beta+\frac{1}{\gamma}$

778. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν κύβων τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως $x^4+\lambda x^2+\mu x+\nu=0$.

779. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν τετάρτων δυνάμεων τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως $x^3+\lambda x+\mu=0$.

Νὰ λυθῇ ἑκάστη ἐκ τῶν κάτωθι ἐξισώσεων

780. $3x^4-10x^3+4x^2-x-6=0$ ἂν μία ρίζα της εἶναι ἡ $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$

781. $6x^4-13x^3-35x^2-x+3=0$ ἂν μία ρίζα της εἶναι ἡ $2-\sqrt{3}$

782. $x^4+4x^3+5x^2+2x-2=0$ ἂν μία ρίζα της εἶναι ἡ $-1+i$

783. $x^4+4x^3+6x^2+4x+5=0$ ἂν μία ρίζα της εἶναι ἡ i

784. $x^5-x^4+8x^2-9x-15=0$ ἂν μία ρίζα της εἶναι ἡ $\sqrt{3}$ καὶ μία ἄλλη ρίζα της εἶναι ἡ $1-2i$,

785. Νὰ εὑρεθῇ ἡ συνθήκη ἵνα ἡ ἐξίσωσις $x^3-\lambda x^2+\mu x-\nu=0$ ἔχῃ τὰς ρίζας της ἐν γεωμετρικῇ προόδῳ.

786. Εἰς τὴν ἐξίσωσιν $x^4+\lambda x^3+\mu x^2+\nu x+k=0$ ἂν αἱ ρίζαι της ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον, νὰ δειχθῇ ὅτι $\lambda^3-4\lambda\mu+8\nu=0$, ἂν δὲ ἀποτελοῦν γεωμετρικὴν πρόοδον, νὰ δειχθῇ ὅτι $\lambda^2 k=\nu^2$.

787. Νὰ ὁρισθῇ ὁ λόγος $\beta:\alpha$ ἵνα αἱ ἐξισώσεις

$$\alpha x^2+\beta x+\alpha=0 \quad \text{καὶ} \quad x^3-2x^2+2x-1=0$$

ἔχουν α΄ μίαν κοινὴν ρίζαν καὶ β΄ δύο κοινὰς ρίζας

788. Ἂν αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $x^5-5x^4-5x^3+25x^2+4x-20=0$ εἶναι τῆς μορφῆς $\alpha, -\alpha, \beta, -\beta, \gamma$ νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις.

δ΄. Διτετράγωνοι ἐξισώσεις.

234. ***Μία ἐξίσωσις λέγεται διτετράγωνος ὅταν εἶναι τῆς γενικῆς μορφῆς***

$$\alpha x^4+\beta x^2+\gamma=0 \tag{7}$$

ἤτοι ὅταν περιέχῃ μόνον τὴν δευτέραν καὶ τετάρτην δύναμιν τοῦ ἀγνώστου.

235. ***Ἡ λύσις*** τῆς διτετραγώνου ἐξισώσεως (7) ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν ἐξισώσεως β΄ βαθμοῦ ἂν θέσωμεν $x^2=y$, ὁπότε ἡ (7) λαμβάνει τὴν μορφὴν

$$\alpha y^2+\beta y+\gamma=0 \tag{8}$$

Ἡ ἐξίσωσις (8) καλεῖται ***ἐπιλύουσα*** ἐξίσωσις τῆς (7). Ἂν δὲ ρίζαι τῆς (8) εἶναι αἱ y' καὶ y'' τότε ρίζαι τῆς (7) θὰ εἶναι αἱ $\pm\sqrt{y'}$ καὶ $\pm\sqrt{y''}$. Ἤτοι παρατηροῦμεν ὅτι αἱ ρίζαι τῆς διτετραγώνου ἐξισώσεως ἂν τεθοῦν κατὰ τάξιν μεγέθους εἶναι ἀντίθετοι ἡ α΄ μετὰ τῆς δ΄ καὶ ἡ β΄ μετὰ τῆς γ΄.

236. Ἂν αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως (7) εἶναι x_1, x_2, x_3, x_4, τότε τὸ πρῶτον μέλος ταύτης ἀναλύεται εἰς γινόμενον 4 πρωτοβαθμίων παραγόντων πολλαπλασιαζομένων ἐπὶ α (§ 210), ἤτοι ἔχομεν

$$\alpha x^4+\beta x^2+\gamma\equiv\alpha(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4) \tag{9}$$

237. ***Ἡ διερεύνησις*** τῆς διτετραγώνου ἐξισώσεως (7) ἀνάγεται εἰς τὴν διερεύνησιν τῆς ἐπιλυούσης ἐξισώσεως (8), ἤτοι

α΄. Ἂν ἡ (8) ἔχῃ ῥίζας φανταστικὰς τότε καὶ ἡ (7) ἔχει ῥίζας φανταστικάς.

β΄. Ἂν ἡ (8) ἔχῃ ῥίζας πραγματικὰς καὶ ἴσας, τότε ἡ (7) ἔχει δύο ῥίζας διπλᾶς πραγματικὰς καὶ ἀντιθέτους ἂν αἱ ἴσαι ῥίζαι τῆς (8) εἶναι θετικαί, φανταστικὰς δὲ ἂν αἱ ῥίζαι τῆς (8) εἶναι ἀρνητικαί.

γ΄. Ἂν ἡ (8) ἔχῃ ῥίζας πραγματικὰς καὶ ἀνίσους, τότε ἡ (7) ἔχει τέσσαρας ῥίζας πραγματικὰς καὶ ἀνὰ δύο ἀντιθέτους ἂν αἱ δύο ῥίζαι τῆς (8) εἶναι θετικαί, τέσσαρας ῥίζας φανταστικὰς ἂν αἱ δύο ῥίζαι τῆς (8) εἶναι ἀρνητικαί, δύο ῥίζας πραγματικὰς καὶ δύο φανταστικὰς ἂν αἱ δύο ῥίζαι τῆς (8) εἶναι ἑτερόσημοι.

Ὡς παράδειγμα ἔστω τὸ ἑξῆς :

Εἰς τὴν ἐξίσωσιν $(\lambda-3)x^4-2\lambda x^2+(\lambda+1)=0$ νὰ ὁρισθῇ ὁ λ ἵνα α΄) αἱ τέσσαρες ῥίζαι της εἶναι πραγματικαὶ β΄) αἱ δύο νὰ εἶναι πραγματικαὶ καὶ αἱ ἕτεραι δύο φανταστικαί.

Ἡ ἐπιλύουσα ταύτην ἐξίσωσις εἶναι

$$(\lambda-3)y^2-2\lambda y+(\lambda+1)=0 \quad \text{ἔνθα } y=x^2.$$ Ἤδη

α΄) ἵνα ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἔχῃ 4 ῥίζας πραγματικάς, πρέπει αἱ ῥίζαι τῆς ἐπιλυούσης νὰ εἶναι ἀμφότεραι πραγματικαὶ καὶ θετικαὶ πρέπει νὰ ἤτοι ἀληθεύουν ταυτοχρόνως αἱ ἀνισότητες (§ 187 γ΄)

$$\lambda^2-(\lambda+1)(\lambda-3)\geqq 0, \quad \frac{\lambda+1}{\lambda-3}>0 \quad \text{καὶ} \quad \frac{2\lambda}{\lambda-3}>0$$

Ἐπιλύοντες τὸ σύστημα τῶν ἀνισοτήτων τούτων (§ 183) εὑρίσκομεν

$$-1{,}5\leqq\lambda<-1 \quad \text{ἢ} \quad \lambda>3.$$

β΄) Ἵνα δύο ῥίζαι εἶναι πραγματικαὶ καὶ δύο φανταστικαί, πρέπει νὰ εἶναι ταυτοχρόνως (§ 187 γ΄).

$$\lambda^2-(\lambda+1)(\lambda-3)\geqq 0 \quad \text{καὶ} \quad \frac{\lambda+1}{\lambda-3}<0$$

Ἐπιλύοντες ταύτας εὑρίσκομεν $\quad -1<\lambda<3.$

238. ***Σημεῖον τοῦ διτετραγώνου τριωνύμου.*** Ἔστω τὸ διτετράγωνον τριώνυμον $\varphi(x)\equiv\alpha x^4+\beta x^2+\gamma$ ὅπερ ἀναλύεται εἰς τὸ γινόμενον (9) ἢ διότι $\quad x_1=\sqrt{y'},\ x_2=-\sqrt{y'},\ x_3=\sqrt{y''},\ x_4=-\sqrt{y''}$ ἡ σχέσις (9) γράφεται

$$\varphi(x)\equiv\alpha(x-\sqrt{y'})(x+\sqrt{y'})(x-\sqrt{y''})(x+\sqrt{y''}), \tag{10}$$

$$\text{ἢ} \quad \varphi(x)\equiv\alpha(x^2-y')(x^2-y'') \tag{11}$$

Ἤδη α΄) ἂν ἡ ἐπιλύουσα ἐξίσωσις (8) ἔχει δύο ῥίζας φανταστικάς, τότε αὗται θὰ εἶναι συζυγεῖς (§ 228) ἔστωσαν δὲ $y'=\lambda+\delta i$ καὶ

$y''=\lambda-\delta i$. Τότε ἡ σχέσις (11) γίνεται $\alpha[(x^2-\lambda)^2+\delta^2]$ ἤτοι τότε τὸ $\varphi(x)$ ἔχει τὸ σημεῖον τοῦ α.

β΄) Ἂν ἡ (8) ἔχῃ δύο ῥίζας ἴσας ἔστωσαν δὲ $y'=y''=\varrho$, τότε ἡ (11) γίνεται $\alpha(x^2-\varrho)^2$ ἤτοι πάλιν τὸ $\varphi(x)$ ἔχει τὸ σημεῖον τοῦ α.

γ΄) Ἂν ἡ (8) ἔχῃ δύο ῥίζας πραγματικὰς καὶ ἀνίσους τότε, ἂν μὲν ἀμφότεραι εἶναι θετικαί, αἱ ῥίζαι τοῦ $\varphi(x)$ εἶναι ὅλαι πραγματικαὶ καὶ τοιαῦται ὥστε $x_4<x_2<x_1<x_3$ ἂν $y'<y''$. Τότε τὸ $\varphi(x)$ (σχέσις 9) εἶναι ὁμόσημον πρὸς τὸν α διὰ τὰς τιμὰς τοῦ x τὰς κειμένας ἐκτὸς ὅλων τῶν ῥιζῶν ἢ μεταξὺ τῶν δύο μικροτέρων ῥιζῶν κατ' ἀπόλυτον τιμὴν (§ 180) δηλαδὴ διὰ $x<x_4$ ἢ $x_2<x<x_1$ ἢ $x>x_3$. Ἂν αἱ ῥίζαι τοῦ (8) εἶναι ἑτερόσημοι ἔστω δὲ $y'<0$ τότε αἱ x_1 καὶ x_2 εἶναι φανταστικαὶ ἔστωσαν δὲ $x_1=\lambda+\delta i$, $x_2=\lambda-\delta i$, αἱ δὲ x_3 καὶ x_4 εἶναι πραγματικαί. Τότε ἡ σχέσις (9) γράφεται

$$\varphi(x)\equiv\alpha[(x-\lambda)^2+\delta^2](x-x_3)(x-x_4) \qquad (12)$$

Ἄρα τότε τὸ $\varphi(x)$ εἶναι ὁμόσημον πρὸς τὸν α διὰ τὰς τιμὰς τοῦ x τὰς κειμένας ἐκτὸς τῶν δύο πραγματικῶν ῥιζῶν x_3, καὶ x_4. Ἂν αἱ ῥίζαι τῆς (8) εἶναι ἀρνητικαί, τότε αἱ ῥίζαι τοῦ $\varphi(x)$ εἶναι φανταστικαί, ἔστωσαν δὲ αὗται $\lambda\pm\delta i$ καὶ $\lambda'\pm\delta' i$ ὁπότε τὸ $\varphi(x)$ γίνεται

$$\varphi(x)\equiv[(x-\lambda)^2+\delta^2][(x-\lambda')^2+\delta'^2]$$

ἔχει δὲ τότε τὸ $\varphi(x)$ πάντοτε τὸ σημεῖον τοῦ α.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συμπεραίνομεν ὅτι:

Τὸ διτετράγωνον τριώνυμον** $\alpha x^4+\beta x^2+\gamma$ **ἔχει τὸ σημεῖον τοῦ** α **ὅταν ἔχῃ α΄) τέσσαρας ῥίζας φανταστικάς, β΄) τέσσαρας ῥίζας ἴσας, γ΄) δύο ῥίζας πραγματικὰς καὶ δύο φανταστικὰς ὁ δὲ** x **κεῖται ἐκτὸς τῶν δύο πραγματικῶν ῥιζῶν καὶ δ΄) τέσσαρας ῥίζας πραγματικὰς ὁ δὲ** x **κεῖται ἐκτὸς ὅλων τῶν ῥιζῶν ἢ μεταξὺ τῶν δύο κατ' ἀπόλυτον τιμὴν μικροτέρων ῥιζῶν. Ἔχει δὲ τὸ διτετράγωνον τριώνυμον σημεῖον ἀντίθετον τοῦ** α **ἂν ἔχῃ δύο ῥίζας πραγματικὰς ὁ δὲ** x **κεῖται μεταξὺ αὐτῶν ἢ ἂν ἔχῃ 4 ῥίζας πραγματικὰς ὁ δὲ** x **κεῖται μεταξὺ τῆς α΄ καὶ β΄ ῥίζης κατὰ σειρὰν μεγέθους ἢ μεταξὺ τῆς γ΄ καὶ δ΄ ῥίζης.

239. Ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ἀνωτέρω λύονται εὐκολώτερον αἱ διτετράγωνοι ἀνισότητες, ὡς π. χ.

α΄) Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης $x^4-13x^2+36>0$.

Αἱ ῥίζαι τοῦ α΄ μέλους εἶναι ±2 καὶ ±3. Ἄρα ἡ ἀνισότης ἀληθεύει (εἶναι δηλ. τὸ τριώνυμον ὁμόσημον πρὸς τὸν α) ἂν $x<-3$ ἢ $-2<x<2$ ἢ $x>3$.

β΄) Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης $x^4-3x^2-4<0$.

Αἱ ῥίζαι εἶναι $\pm i$ καὶ ±2. Ἄρα αὕτη ἀληθεύει διὰ $-2<x<2$.

Ἀσκήσεις πρὸς λύσιν.

Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις

789. $x^4+1=\frac{(\alpha^4+\beta^4)x^2}{\alpha^2\beta^2}$ 790. $\gamma^4x^4+(\alpha^2-\beta^2)x^2=\left(\frac{\alpha\beta}{\gamma^2}\right)^2$

791. $(\beta+\beta x^2)^2-(\alpha-\alpha x^2)^2=(2\alpha\beta x)^2$ 792. $\alpha^2\beta^2x^4-(\alpha^2+\beta^2)x^2+1=0$

793. $\frac{x^4+(\alpha-\beta)x^2+(\alpha-\beta)^2}{x^4-(\alpha-\beta)x^2+(\alpha-\beta)^2}=\frac{\alpha}{\beta}$ 794. $\frac{(x^2-1)^2}{x^4+1}+\frac{2\alpha^2\beta^2}{\alpha^4+\beta^4}=1$

795. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\frac{x^2}{x^2-\alpha^2}+\frac{x^2}{x^2-\beta^2}=4$ καὶ νὰ δειχθῇ ὅτι αὕτη ἔχει ρίζας πραγματικὰς διὰ πᾶσαν πραγματικὴν τιμὴν τῶν α καὶ β.

796. Εἰς τὴν ἐξίσωσιν $x^4-(3\lambda+4)x^2+(\lambda+1)^2=0$ νὰ ὁρισθῇ ὁ λ εἰς τρόπον ὥστε α) αἱ ρίζαι της νὰ ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον, β) αἱ ρίζαι της νὰ εἶναι ὅλαι πραγματικαὶ καὶ γ) δύο ρίζαι νὰ εἶναι πραγματικαὶ καὶ δύο φανταστικαί.

797. Ἂν ρ καὶ ρ′ εἶναι αἱ ρίζαι τοῦ τριωνύμου $x^2+\lambda x+\mu$ νὰ σχηματισθῇ διτετράγωνον τριώνυμον ἔχον ὡς ρίζας α) $\rho, \rho', -\rho, -\rho'$, β) $\frac{1}{\rho}, \frac{1}{\rho'}, -\frac{1}{\rho}, -\frac{1}{\rho'}$ καὶ γ) $\rho\rho', -\rho\rho', \rho^2+\rho'^2, -(\rho^2+\rho'^2)$.

Νὰ διερευνηθοῦν αἱ ρίζαι τῶν κάτωθι ἐξισώσεων ὅταν ἡ παράμετρος λ λαμβάνῃ ὅλας τὰς πραγματικὰς τιμάς.

798. $x^4-2(\lambda-1)x^2+\lambda-2=0$. 799. $x^4-4(3-\lambda)x^2+\lambda-1=0$.

800. $(2\lambda-3)x^4-2\lambda x^2-(\lambda+1)=0$. 801. $(\lambda-1)x^4-2\lambda x^2-(\lambda+1)=0$.

Ποῖον εἶναι τὸ εἶδος καὶ τὸ σημεῖον τῶν ριζῶν ἑκάστης ἐκ τῶν ἐξισώσεων

802. $\frac{1}{x^2-\alpha^2}+\frac{1}{x^2-\beta^2}=\frac{1}{x^2-\gamma^2}$ 803. $\frac{\lambda^2}{x^2-\beta^2}+\frac{\mu^2}{x^2-\alpha^2}+\nu=0$.

804. Ἂν οἱ α καὶ β εἶναι θετικοὶ ἀριθμοὶ πότε ἔχει ρίζας κειμένας μεταξὺ 0 καὶ β ἡ ἐξίσωσις $2x^4-(\alpha^2+\beta^2)x^2+\alpha^4-\beta^4=0$ καὶ πόσας ;

805. Τὸ αὐτὸ διὰ τὴν ἐξίσωσιν $x^4-\alpha(3\beta-\alpha)x^2-\beta^2(3\alpha-\beta)^2=0$.

806. Ἂν οἱ α καὶ β εἶναι θετικοὶ πότε ἔχει ρίζας κειμένας μεταξὺ −β καὶ β ἡ ἐξίσωσις $3x^4-(\alpha^2-2\beta^2)x^2+(\alpha^2-3\beta^2)=0$ καὶ πόσας;

807. Νὰ εὑρεθῇ ἂν τὸ κλάσμα $\frac{2x^4+8x^2+3}{x^4-x^2-1}$ δύναται νὰ λάβῃ ὅλας τὰς πραγματικὰς τιμὰς ἀπὸ $-\infty$ μέχρι $+\infty$, διὰ πραγματικὰς τιμὰς τοῦ x.

Νὰ λυθοῦν αἱ ἀνισότητες

808. $y^4+3y^2-4>0$ 809. $y^4-10y^2+9<0$.

810. $\frac{3}{(y^2-1)(y^2+2)}<1$ 811. $\frac{18}{y^2+1}-\frac{5}{y^2-1}+\frac{2}{y^2-4}<0$.

812. $4y^{12}-17y^6+4>0$ 813. $\frac{y^4-6y^2+8}{y^4-3y^2+1}>0$

Νὰ λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις

814. $(y^4+y^2+1)^2-38(y^4+y^2+1)+105=0$.

815. $(y^2-y+1)^4-10y^2(y^2-y+1)^2+9y^4=0$

816. $\alpha^2\beta^2y^4-(\alpha^4+\beta^4)y^2+\alpha^2\beta^2=0$

817. $\frac{(1+y)^2}{1+y^3}+\frac{(1-y)^2}{1-y^3}=\alpha$ 818. $\frac{y^2}{9}=\frac{y^3+2}{y(y^3-2)}$.

ε΄. Ἐξισώσεις ἀντίστροφοι.

240. Μία ἐξίσωσις καλεῖται ἀντίστροφος ὅταν, ἐὰν ἔχῃ ὡς ρίζαν τὸν ἀριθμὸν λ, ἔχῃ ὡς ρίζαν καὶ τὸν ἀντίστροφόν του $\frac{1}{\lambda}$. Αἱ ἀντίστροφοι ἐξισώσεις διακρίνονται ἐκ τοῦ ὅτι οἱ συντελεσταὶ τῶν ὅρων τῶν ἀπεχόντων ἰσάκις ἀπὸ τὰ ἄκρα εἶναι ἴσοι ἀπολύτως.

241. ***Ἀντίστροφος ἐξίσωσις 3ου βαθμοῦ.*** Ἡ γενικὴ μορφὴ αὐτῆς εἶναι ἡ

$$\alpha x^3+\beta x^2+\beta x+\alpha=0 \qquad (13)$$

γράφεται δὲ ὡς ἑξῆς: $\alpha(x^3+1)+\beta x(x+1)=0$ ἢ διότι $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$ ἔχομεν $(x+1)[\alpha x^2+(\beta-\alpha)x+\alpha]=0$. Ἄρα ἢ $x-1=0$ ἐξ οὗ $x=-1$ ἢ

$$\alpha x^2+(\beta-\alpha)x+\alpha=0 \qquad (13')$$

ἥτις λύεται ὡς δευτεροβάθμιος.

Ἡ ἀντίστροφος ἐξίσωσις τοῦ 3ου βαθμοῦ ἔχει πάντοτε μίαν ρίζαν πραγματικὴν (§ 229). Αἱ δύο ἄλλαι εἶναι πραγματικαὶ ἢ φανταστικαί, ἐφ' ὅσον καὶ ἡ ἐξ αὐτῆς προκύπτουσα δευτεροβάθμιος ἐξίσωσις (13΄) ἔχει ρίζας πραγματικὰς ἢ φανταστικάς. Ὥστε ἡ διερεύνησις τῶν ριζῶν τῆς (13) ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς διερευνήσεως τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως (13΄).

242. ***Ἀντίστροφος ἐξίσωσις 4ου βαθμοῦ.*** Διακρίνομεν δύο μορφὰς ταύτης, ἤτοι α) τὴν ἐλλιπῆ ἐξίσωσιν

$$\alpha x^4+\beta x^3-\beta x-\alpha=0 \qquad (14)$$

εἰς ἣν ἐλλείπει ὁ ὅρος ὁ περιέχων τὸν x^2 καὶ β) τὴν πλήρη ἐξίσωσιν

$$\alpha x^4+\beta x^3+\gamma x^2+\beta x+\alpha=0 \qquad (15)$$

Ἡ ἐξίσωσις τοῦ α΄ εἴδους, ἥτις πρέπει νὰ ἔχῃ τὸν γνωστὸν ὅρον ἀρνητικόν, λύεται ὡς ἡ τοῦ 3ου βαθμοῦ, ἤτοι:

$$\alpha(x^4-1)+\beta x(x^2-1)=0 \quad \text{ἢ} \quad (x^2-1)[\alpha(x^2+1)+\beta x]=0.$$

Ἄρα ἢ $x^2-1=0$ ἐξ οὗ $x=\pm1$ ἢ $\alpha x^2+\beta x+\alpha=0$ (14΄)

ἥτις λύεται ὡς δευτεροβάθμιος.

Ἡ ἐξίσωσις τοῦ β΄ εἴδους, ἥτις πρέπει νὰ ἔχῃ τὸν γνωστὸν ὅρον θετικόν, λύεται ὡς ἑξῆς: Διαιροῦμεν διὰ x^2, ἤτοι

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma+\frac{\beta}{x}+\frac{\alpha}{x^2}=0 \quad \text{ἢ} \quad \alpha\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\beta\left(x+\frac{1}{x}\right)+\gamma=0$$

θέτομεν $x+\frac{1}{x}=\omega$ (α) ὁπότε $x^2+\frac{1}{x^2}=\omega^2-2$ ἡ δὲ ἐξίσωσις γίνεται:

$$\alpha(\omega^2-2)+\beta\omega+\gamma=0 \quad \text{ἢ} \quad \alpha\omega^2+\beta\omega+\gamma-2\alpha=0 \qquad (15')$$

ἥτις εἶναι δευτεροβάθμιος ὡς πρὸς ω δίδει δὲ δύο τιμὰς τοῦ ω καὶ ἐκ τῆς (α) εὑρίσκομεν τὰς τιμὰς τοῦ x.

Ἡ ἀντίστροφος ἐξίσωσις (14) ἔχει πάντοτε δύο ρίζας πραγματικάς. Τὸ εἶδος τῶν δύο ἄλλων ριζῶν ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ εἶδος τῶν ριζῶν τῆς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως (14΄). Ἡ ἀντίστροφος ἐξίσωσις (15) δύναται νὰ ἔχῃ τὰς ρίζας της πραγματικὰς ἢ φανταστικάς. Τοῦτο ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ εἴδους τῶν ριζῶν τῆς (15΄) ὡς καὶ τῆς (α).

243. Παράδειγμα λύσεως ἀντιστρόφου ἐξισώσεως 4ου βαθμοῦ ἔστω τὸ ἑξῆς :

Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\quad 6x^4-35x^3+62x^2-35x+6=0.$

Ἔχομεν $\quad 6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-35\left(x+\frac{1}{x}\right)+62=0.$

Θέτομεν $\quad x+\frac{1}{x}=\omega$, ὁπότε $x^2+\frac{1}{x^2}=\omega^2-2$. Ἄρα ἔχομεν

$$6\omega^2-35\omega+50=0,$$

ἥτις ἔχει ρίζας $\omega'=\frac{10}{3}$ καὶ $\omega''=\frac{5}{2}$. Ἐπομένως $x+\frac{1}{x}=\frac{10}{3}$ ἐξ ἧς $3x^2-10x+3=0$ ἔχουσα ρίζας $x'=3$ καὶ $x''=\frac{1}{3}$ καὶ $x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}$ ἢ $2x^2-5x+2=0$ ἔχουσα ρίζας $x'=2$ καὶ $x''=\frac{1}{2}$. Αἱ ρίζαι λοιπὸν τῆς δοθείσης ἐξισώσεως θὰ εἶναι $3, \frac{1}{3}, 2. \frac{1}{2}$.

στ΄ Ἐξισώσεις διώνυμοι.

244. Μία ἐξίσωσις καλεῖται διώνυμος ὅταν εἶναι τῆς μορφῆς

$$x^\nu \pm 1=0 \qquad (1)$$

ἢ ὅταν δύναται νὰ ἀναχθῇ εἰς τὴν μορφὴν ταύτην, ὡς π. χ. ἡ ἐξίσωσις $\alpha x^\mu+\beta x^\rho=0$, ἥτις γίνεται $\alpha x^\rho\left(x^{\mu-\rho}+\frac{\beta}{\alpha}\right)=0$ ἐφ᾿ὅσον $\mu>\rho$. Αὕτη δὲ δίδει $x^\rho=0$ καὶ $x^{\mu-\rho}+\frac{\beta}{\alpha}=0$, ἂν δὲ τεθῇ $\mu-\rho=\nu$ καὶ $\frac{\beta}{\alpha}=\gamma^\nu$ ἔχομεν $x^\nu+\gamma^\nu=0$ ἢ $\left(\frac{x}{\gamma}\right)^\nu+1=0$ ἂν δὲ $\frac{x}{\gamma}=y$ ἔχομεν $y^\nu+1=0$, ἤτοι τὴν μορφὴν (1).

245. Παραδείγματα λύσεως διωνύμων ἐξισώσεων ἔστωσαν τὰ κάτωθι.

α) Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $x^3+1=0$ ἢ $x^3-1=0$.

Ἔχομεν $(x+1)(x^2-x+1)=0$ ἐξ οὗ $x=-1$ καὶ $x^2-x+1=0$ ἥτις ἔχει τὰς φανταστικὰς ρίζας $\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$. Ἡ δὲ $x^3-1=0$ γίνεται $(x-1)(x^2+x+1)=0$, Ἄρα $x=1$ ἢ $x=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$.

β) Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $x^3-64=0$.

Ἐπειδὴ $64=4^3$, θέτω $x=4y$, ὅτε ἔχω $64y^3-64=0$ ἢ $y^3-1=0$ ἥτις ἔχει τὰς ρίζας τῆς ἐξισώσεως $x^3-1=0$. Ἄρα $x=4$ ἢ $x=-2\pm 2i\sqrt{3}$.

γ) Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $x^4+1=0$ ἢ $x^4-1=0$.

Ἔχομεν $x^4+1=(x^2+1)^2-2x^2=(x^2+x\sqrt{2}+1)(x^2-x\sqrt{2}+1)=0$. Ἄρα ἢ $x^2+x\sqrt{2}+1=0$ ἢ $x^2-x\sqrt{2}+1=0$ εὑρίσκομεν δὲ ρίζας τὰς $x=\frac{\pm\sqrt{2}\pm i\sqrt{2}}{2}$.

Ἡ $x^4-1=0$ γράφεται $(x^2+1)(x+1)(x-1)=0$ ἐξ ἧς $x=\pm 1$ ἢ $x=\pm i$.

δ) Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $x^5+1=0$ ἢ $x^5-1=0$,

Ἔχομεν $(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)=0$. Ἄρα θὰ εἶναι ἢ $x=1$ ἢ $x^4-x^3+x^2-x+1=0$, ἥτις εἶναι ἀντίστροφος, λύεται δὲ κατὰ τὰ εἰς τὴν § 243. Ὁμοίως λύεται καὶ ἡ ἐξίσωσις $x^5-1=0$.

ε′) Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $x^6-1=0$.

Αὕτη γραφεται $(x^3+1)(x^3-1)=0$ ἢ

$$(x+1)(x^2-x+1)(x-1)(x^2+x+1)=0$$

ἐξ ἧς εὑρίσκομεν τὰς ρίζας (ἴδε παράδειγμα α′).

ζ′. Ἐφαρμογαί.

246. ***Νὰ εὑρεθῇ ἡ κυβικὴ ρίζα τῆς μονάδος.***

Ἔστω x ἡ κυβικὴ ρίζα τῆς μονάδος. Θὰ ἔχωμεν ἄρα

$$x^3=1 \text{ ἢ } x^3-1=0 \text{ ἢ } (x-1)(x^2+x+1)=0 \qquad (1)$$

Ἐκ τῆς (1) ἔχομεν ἢ $x-1=0$ ἐξ ἧς $x=1$ ἢ

$$x^2+x+1=0 \qquad (2)$$

Ἡ (2) εἶναι ἐξίσωσις β′ βαθμοῦ, λυομένη δὲ ὡς πρὸς x δίδει ρίζας

$$x'=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \text{ καὶ } x''=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \qquad (3)$$

Ἄρα αἱ τρεῖς κυβικαὶ ρίζαι τῆς μονάδος εἶναι αἱ

$$1,\ \frac{-1+i\sqrt{3}}{2},\quad \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}.$$

Ἂν τὰς δύο φανταστικὰς ρίζας τῆς μονάδος τὰς παραστήσωμεν διὰ λ καὶ μ τότε, ἐπειδὴ αὗται εἶναι ρίζαι τῆς ἐξισώσεως (2) τὸ γινόμενόν των θὰ ἰσοῦται μὲ τὸν γνωστὸν ὅρον τῆς (2) ἤτοι μὲ τὴν μονάδα. Ἄρα

$$\lambda\mu=1 \quad \text{ἢ} \quad \lambda^3\mu=\lambda^2$$

καὶ ἐπειδὴ $\lambda^3=1$ διὰ τοῦτο θὰ εἶναι $\mu=\lambda^2$ ἤτοι παρατηροῦμεν ὅτι ***ἐκ τῶν δύο φαντατικῶν ριζῶν τῆς μονάδος ἡ μία ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τῆς ἄλλης.***

Λόγω τῶν ἀνωτέρω λεχθέντων, τὰς τρεῖς ρίζας τῆς μονάδος τὰς παριστῶμεν συνήθως διὰ 1, ω, ω^2, ἔνθα $\omega=\lambda$ καὶ $\omega^2=\mu$.

Ὡς εἴδομεν ἀνωτέρω, ἡ ω εἶναι ρίζα τῆς ἐξισώσεως (2). Ἐπαληθεύει λοιπὸν αὐτὴν ἂν τεθῇ εἰς αὐτὴν ἀντὶ τοῦ x, ἤτοι εἶναι

$$1+\omega+\omega^2=0 \tag{4}$$

Ἡ σχέσις (4) φανερώνει ὅτι ***τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν κυβικῶν ριζῶν τῆς μονάδος εἶναι μηδέν.*** Ὁμοίως ἡ σχέσις (3) ἥτις γράφεται καὶ $\omega.\omega^2=1$ δεικνύει ὅτι ***τὸ γινόμενον τῶν δύο φανταστικῶν κυβικῶν ριζῶν τῆς μονάδος ἰσοῦται μὲ 1.***

247. *Νὰ εὑρεθῇ ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τῆς φανταστικῆς μονάδος* i.

Ἔστω αὕτη x. Ἔχομεν ἄρα $x^2=i$ ὑψοῦντες εἰς τὸ τετράγωνον

$$x^4=-1 \quad \text{ἢ} \quad x^4+1=0 \tag{5}$$

Τὸ α΄ μέλος τῆς (5) γράφεται $(x^2+1)^2-2x^2$. Ἄρα ἡ (5) γίνεται

$$(x^2+x\sqrt{2}+1)(x^2-x\sqrt{2}+1)=0 \tag{6}$$

ἐξ ἧς ἡ $x^2+x\sqrt{2}+1=0$ ἔχουσα ρίζας $x=\dfrac{-\sqrt{2}\pm i\sqrt{2}}{2}$ ἢ

$x^2-x\sqrt{2}+1=0$ ἔχουσα ρίζας $x=\dfrac{\sqrt{2}\pm i\sqrt{2}}{2}$. (ἴδε καὶ § 245 γ΄).

Ἐκ τῶν τεσσάρων τούτων τιμῶν αἱ μὲν δύο, ἤτοι αἱ $\dfrac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}$ καὶ $\dfrac{-\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2}$ εἶναι αἱ τετραγωνικαὶ ρίζαι τοῦ i, αἱ δὲ ἄλλαι δύο, ἤτοι αἱ $\dfrac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2}$ καὶ $\dfrac{-\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}$ εἶναι αἱ τετραγων. ρίζαι τοῦ $-i$.

Ἀσκήσεις πρὸς λύσιν.

Νὰ δειχθῇ ὅτι

819. $(\alpha+\omega\beta+\omega^2\gamma)(\alpha+\omega^2\beta+\omega\gamma)=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha$

820. $(1+\omega-\omega^2)^3-(1-\omega+\omega^2)^3=0$

821. $(1+\omega^2)^4=\omega$ 822. $(1-\omega+\omega^4)(1+\omega-\omega^2)=4$

823. $(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega^4)(1-\omega^5)=9$

824. $x^3+y^3+z^3-xyz=(x+y+z)(x+\omega y+\omega^2 z)(x+\omega^2 y+\omega z)$

825. $(2+5\omega+2\omega^2)^6=(2+2\omega+5\omega^2)^6=729$

826. $(1-\omega+\omega^2)(1-\omega^2+\omega^4)(1-\omega^4+\omega^8)\ldots\ldots=2^{2\nu}$, ἔνθα 2ν εἶναι οἱ παράγοντες τοῦ α΄ μέλους.

Ἂν $x=\alpha+\beta$, $y=\alpha\omega+\beta\omega^2$, $z=\alpha\omega^2+\beta\omega$, νὰ δειχθῇ ὅτι

827. $xyz=\alpha^3+\beta^3$ 828. $x^2+y^2+z^2=6\alpha\beta$

829. $x^3+y^3+z^3=3(\alpha^3+\beta^3)$.

η΄) Θεώρημα τοῦ Moivre.

248. ***Νὰ δειχθῇ ὅτι, διὰ πᾶσαν πραγματικὴν τιμὴν τοῦ ν, ἀληθεύει ἡ σχέσις*** $(\sigma\upsilon\nu\vartheta+i\eta\mu\nu\vartheta)^\nu=\sigma\upsilon\nu\nu\vartheta+i\eta\mu\nu\vartheta$,

Ἀπόδειξις. α) ἂν ὁ ν εἶναι ἀκέραιος καὶ θετικός.

Ἔστω τὸ γινόμενον $(\sigma\upsilon\nu\vartheta_1+i\eta\mu\vartheta_1)(\sigma\upsilon\nu\vartheta_2+i\eta\mu\vartheta_2)$.

Ἐκτελοῦντες τὰς πράξεις εὑρίσκομεν

$$\begin{aligned}&\sigma\upsilon\nu\vartheta_1\sigma\upsilon\nu\vartheta_2-\eta\mu\vartheta_1\eta\mu\vartheta_2+i(\eta\mu\vartheta_1\sigma\upsilon\nu\vartheta_2+\eta\mu\vartheta_2\sigma\upsilon\nu\vartheta_1)=\\&=\sigma\upsilon\nu(\vartheta_1+\vartheta_2)+i\eta\mu(\vartheta_1+\vartheta_2).\end{aligned}$$

Ἄρα

$$(\sigma\upsilon\nu\vartheta_1+i\eta\mu\vartheta_1)(\sigma\upsilon\nu\vartheta_2+i\eta\mu\vartheta_2)=\sigma\upsilon\nu(\vartheta_1+\vartheta_2)+i\eta\mu(\vartheta_1+\vartheta_2) \quad (\alpha)$$

Ἂν ἤδη ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (α) πολ/σωμεν ἐπὶ $\sigma\upsilon\nu\vartheta_3+i\eta\mu\vartheta_3$ καὶ ἐργασθῶμεν ὁμοίως ὡς ἀνωτέρω εὑρίσκομεν

$$\begin{aligned}&(\sigma\upsilon\nu\vartheta_1+i\eta\mu\vartheta_1)(\sigma\upsilon\nu\vartheta_2+i\eta\mu\vartheta_2)(\sigma\upsilon\nu\vartheta_3+i\eta\mu\vartheta_3)=\\&=\sigma\upsilon\nu(\vartheta_1+\vartheta_2+\vartheta_3)+i\eta\mu(\vartheta_1+\vartheta_2+\vartheta_3) \quad (\beta)\end{aligned}$$

Ἂν ἤδη ὑποθέσωμεν ὅτι εἶναι ν τὸ πλῆθος τῶν παραγόντων τῆς μορφῆς $\sigma\upsilon\nu\vartheta+i\eta\mu\vartheta$ τοῦ α΄ μέλους τῆς (β) ὑποθέσωμεν δὲ ἐπίσης ὅτι

$$\vartheta_1=\vartheta_2=\vartheta_3=\ldots=\vartheta.$$

τότε ἡ σχέσις (β) γίνεται

$$(\sigma\upsilon\nu\vartheta+i\eta\mu\vartheta)^\nu=\sigma\upsilon\nu\nu\vartheta+i\eta\mu\nu\vartheta \quad (1)$$

β) ἂν ὁ ν εἶναι ἀκέραιος καὶ ἀρνητικός. Ἔστω $\nu=-\mu$. Τότε ἐκ τῆς ταυτότητος $(\sigma\upsilon\nu\mu\vartheta+i\eta\mu\mu\vartheta)(\sigma\upsilon\nu\mu\vartheta-i\eta\mu\mu\vartheta)=\sigma\upsilon\nu^2\mu\vartheta+\eta\mu^2\mu\vartheta=1$ ἔχομεν

$$\sigma\upsilon\nu\mu\vartheta-i\eta\mu\mu\vartheta=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\mu\vartheta+i\eta\mu\mu\vartheta}=\frac{1}{(\sigma\upsilon\nu\vartheta+i\eta\mu\vartheta)^\mu}=(\sigma\upsilon\nu\vartheta+i\eta\mu\vartheta)^{-\mu}.$$

Ἄρα $(\sigma\upsilon\nu\vartheta+i\eta\mu\vartheta)^{-\mu}=\sigma\upsilon\nu\mu\vartheta-i\eta\mu\mu\vartheta=\sigma\upsilon\nu(-\mu\vartheta)+i\eta\mu(-\mu\vartheta)$ (2)

γ΄) ἂν ὁ ν εἶναι κλάσμα θετικὸν ἢ ἀρνητικόν. Ἔστω $\nu=\frac{\mu}{\lambda}$. Τότε ἐκ τῆς σχέσεως (1), ἢ ἐκ τῆς σχέσεως (2) ἂν ὁ ν εἶναι ἀρνητικὸν κλάσμα ἔχομεν $\left[\sigma\upsilon\nu\frac{\mu\vartheta}{\lambda}+i\eta\mu\frac{\mu\vartheta}{\lambda}\right]^{\lambda}=\sigma\upsilon\nu\mu\vartheta+i\eta\mu\mu\vartheta$

ἀλλὰ $\sigma\upsilon\nu\mu\vartheta+i\eta\mu\mu\vartheta=(\sigma\upsilon\nu\vartheta+i\eta\mu\vartheta)^{\mu}$.

Ἄρα $(\sigma\upsilon\nu\vartheta+i\eta\mu\vartheta)^{\mu}=\left[\sigma\upsilon\nu\frac{\mu\vartheta}{\lambda}+i\eta\mu\frac{\mu\vartheta}{\lambda}\right]^{\lambda}$

ἢ ἐξάγοντες τὴν λ ῥίζαν ἔχομεν

$$(\sigma\upsilon\nu\vartheta+i\eta\mu\vartheta)^{\frac{\mu}{\lambda}}=\sigma\upsilon\nu\frac{\mu\vartheta}{\lambda}+i\eta\mu\frac{\mu\vartheta}{\lambda} \qquad (3)$$

Λύσις τῆς διωνύμου ἐξισώσεως $x^{\nu}\pm1=0$ διὰ τοῦ τύπου τοῦ Moivre.

249. *α) Ἔστω ἡ διώνυμος ἐξίσωσις* $x^{\nu}-1=0$ ἢ $x^{\nu}=1$.

Ἐπειδὴ $1=\sigma\upsilon\nu2k\pi+i\eta\mu2k\pi$ καθόσον τὸ $\eta\mu2k\pi=0$ ἔχομεν

$$x^{\nu}=\sigma\upsilon\nu2k\pi+i\eta\mu2k\pi$$

ἢ ἐξάγοντες τὴν ν ῥίζαν καὶ ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὴν σχέσιν (3) ἔχομεν

$$x=(\sigma\upsilon\nu2k\pi+i\eta\mu2k\pi)^{\frac{1}{\nu}}=\sigma\upsilon\nu\frac{2k\pi}{\nu}+i\eta\mu\frac{2k\pi}{\nu} \qquad (4)$$

Ἤδη θέτοντες εἰς τὴν ἐξίσωσιν (5) ἀντὶ $k=0,1,3,\ldots(\nu-1)$ εὑρίσκομεν τὰς ν τιμὰς τοῦ x αἵτινες εἶναι αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως

$$x^{\nu}-1=0$$

250. *β) Ἔστω ἡ διώνυμος ἐξίσωσις* $x^{\nu}+1=0$ ἢ $x^{\nu}=-1$.

Ἐπειδὴ $-1=\sigma\upsilon\nu\pi+i\eta\mu\pi$ ἢ $-1=\sigma\upsilon\nu(2k+1)\pi+i\eta\mu(2k+1)\pi$ καθόσον τὸ $\eta\mu(2k+1)\pi=0$ ἔχομεν

$$x^{\nu}=\sigma\upsilon\nu(2k+1)\pi+i\eta\mu(2k+1)\pi \qquad \text{ἢ}$$

$$x=\left[\sigma\upsilon\nu(2k+1)\pi+i\eta\mu(2k+1)\pi\right]^{\frac{1}{\nu}}=\sigma\upsilon\nu\frac{(2k+1)\pi}{\nu}+i\eta\mu\frac{(2k+1)\pi}{\nu} \qquad (5)$$

Ἤδη θέτοντες εἰς τὴν ἐξίσωσιν (5) ἀντὶ $k=0,1,2\ldots(\nu-1)$ εὑρίσκομεν τὰς ν τιμὰς τοῦ x αἵτινες εἶναι ῥίζαι τῆς $x^{\nu}+1=0$.

Σημ. Ἂν ὁ ν εἶναι ἄρτιος ἔστω 2μ παρατηροῦμεν ὅτι ὅλαι αἱ ῥίζαι τῆς ἄνω διωνύμου ἐξισώσεως εἶναι φανταστικαὶ τῆς μορφῆς

$$\sigma\upsilon\nu\frac{(2k+1)\pi}{2\mu}+i\eta\mu\frac{(2k+1)\pi}{2\mu}$$

καθόσον ὁ δεύτερος προσθετέος τῆς ἐξισώσεως (5) οὐδέποτε μηδενίζεται ἐπειδὴ τὸ κλάσμα $\frac{2k+1}{2\mu}$ οὐδέποτε ἰσοῦται μὲ ἀκέραιον.

Ἂν ὅμως ὁ ν εἶναι περιττὸς ἔστω 2μ+1, τότε ἡ ῥίζα ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν τιμὴν $k=\mu$ εἶναι πραγματικὴ διότι τότε τὸ κλάσμα $\frac{2k+1}{2\mu+1}$ ἰσοῦται μὲ 1 καὶ ὁ δεύτερος προσθετέος τῆς (5) ἰσοῦται μὲ μηδέν, αἱ δὲ ἄλλαι ῥίζαι εἶναι φανταστικαί.

251. *Ἔστω ἡ ἐξίσωσις* $x^\nu \pm \alpha^\nu = 0$.

Αὕτη γράφεται $\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\nu \pm 1 = 0$ λύεται δὲ συμφώνως πρὸς τὰς ἐξισώσεις (4) καὶ (5) τῶν § 249 καὶ 250 ὡς πρὸς ἄγνωστον τὸν $\frac{x}{\alpha}$.

θ΄. Ἐξισώσεις τριώνυμοι.

252. Μία ἐξίσωσις λέγεται τριώνυμος ὅταν εἶναι τῆς μορφῆς

$$\alpha x^\lambda + \beta x^\mu + \gamma x^\rho = 0 \qquad (1)$$

Δύναται δὲ νὰ λυθῇ αὕτη ὅταν οἱ ἐκθέται λ, μ, ρ ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον. Διότι πράγματι ἂν ὁ λόγος τῆς προόδου εἶναι ν καὶ λ ὁ μεγαλύτερος ὅρος θὰ ἔχωμεν $\lambda = \rho + 2\nu$, $\mu = \rho + \nu$, ἤτοι ἡ πρόοδος θὰ εἶναι $\rho + 2\nu$, $\rho + \nu, \rho$ ἡ δὲ (1) γίνεται

$$x^\rho (\alpha x^{2\nu} + \beta x^\nu + \gamma) = 0 \qquad (2)$$

ἐξ ἧς ἔχομεν $x^\rho = 0$ καὶ

$$\alpha x^{2\nu} + \beta x^\nu + \gamma = 0 \qquad (3)$$

Ἡ συνήθης μορφὴ τῶν λυομένων τριωνύμων ἐξισώσεων εἶναι ἡ (3), εἰς τὴν ὁποίαν ἐκ τῶν δύο ἐκθετῶν τοῦ x ὁ εἷς εἶναι διπλάσιος τοῦ ἄλλου, λύεται δὲ ἡ (3) ἂν θέσωμεν $x^\nu = y$, ὁπότε αὕτη λαμβάνει τὴν μορφὴν

$$\alpha y^2 + \beta y + \gamma = 0 \qquad (4)$$

Ἡ ἐξίσωσις (4), ἥτις καλεῖται ***ἐπιλύουσα*** τῆς τριωνύμου ἐξισώσεως (3) δίδει ἐν γένει δύο ῥίζας τοῦ y ἔστω τὰς y' καὶ y''. Ἔχομεν ἤδη πρὸς λύσιν τὰς ἐξισώσεις

$$x^\nu = y' \quad \text{καὶ} \quad x^\nu = y''$$

αἵτινες εἶναι διώνυμοι ἐξισώσεις λυόμεναι κατὰ τὰ εἰς τὸς παραγράφους 244—251 λεχθέντα. Ἔστω ἤδη τὸ ἑξῆς παράδειγμα

253. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις

$$x^8 - 97x^4 + 1296 = 0$$

Θέτω $x^4 = y$ ὅτε ἔχω $y^2 - 97y + 1296 = 0$, ἥτις ἔχει ῥίζας τὰς $y' = 16$ καὶ $y'' = 81$. Ἄρα ἔχομεν $x^4 - 16 = 0$ καὶ $x^4 - 81 = 0$. Ἡ μὲν πρώτη γίνεται $(x^2+4)(x+2)(x-2) = 0$ ἔχουσα ῥίζας 2, —2, 2i, —2i ἡ δὲ δευτέρα γίνεται $(x+3)(x-3)(x^2+9) = 0$ ἔχουσα ῥίζας τὰς 3, —3, 3i, —3i.

ΣΗΜ. Καὶ αἱ διτετράγωνοι ἐξισώσεις εἶναι ἐπίσης τριώνυμοι ἐξισώσεις.

ι΄. Λύσις πλήρους ἐξισώσεως γ΄ βαθμοῦ.

254. Ἡ πλήρης ἐξίσωσις τοῦ γ΄ βαθμοῦ μὲ πραγματικοὺς συντελεστὰς ἔχει τὴν γενικὴν μορφὴν

$$\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta=0 \qquad (1)$$

Ἂν εἰς αὐτὴν θέσωμεν τὴν ἀντικατάστασιν $x=y-\frac{\beta}{3\alpha}$ τότε (§ 230) ἐξαλείφεται ὁ δευτεροβάθμιος ὅρος της ὁπότε γίνεται αὔτη

$$y^3+\left(\frac{\gamma}{\alpha}-\frac{\beta^2}{3\alpha^2}\right)y+\frac{2\beta^3-9\alpha\beta\gamma}{27\alpha^3}+\frac{\delta}{\alpha}=0$$

ἢ ἂν θέσωμεν $\frac{\gamma}{\alpha}-\frac{\beta^2}{3\alpha^2}=\lambda$ καὶ $\frac{2\beta^3-9\alpha\beta\gamma}{27\alpha^3}+\frac{\delta}{\alpha}=\mu$ τότε ἡ (1) λαμβάνει τὴν μορφὴν

$$y^3+\lambda y+\mu=0 \qquad (2)$$

Ἀντὶ λοιπὸν νὰ λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν (1) λύομεν τὴν ἰσοδύναμον ταύτης (2)

255. Ἔστω πρὸς λύσιν ἡ ἐξίσωσις

$$x^3+\lambda x+\mu=0 \qquad (3)$$

Ἂν θέσωμεν $x=y+z$, καὶ ὑψώσωμεν εἰς τὸν κύβον ἔχομεν $x^3=y^3+z^3+3xz(y+z)=y^3+z^3+3yzx$. Ἑπομένως

$$x^3-3yzx-(y^3+z^3)=0 \qquad (4)$$

Ἤδη, ἵνα οἱ ἀριθμοὶ y καὶ z εἶναι τοιοῦτοι ὥστε τὸ ἄθροισμά των νὰ εἶναι ῥίζα τῆς (3), πρέπει τὰ πρῶτα μέλη τῶν ἐξισώσεων (3) καὶ (4) νὰ εἶναι ἐκ ταυτότητος ἴσα. Ἄρα εὑρίσκομεν

$$y^3+z^3=-\mu \quad \text{καὶ} \quad yz=-\frac{\lambda}{3} \quad \text{ἢ} \quad y^3z^3=-\frac{\lambda^3}{27} \qquad (5)$$

Ἐκ τῶν σχέσεων (5) προκύπτει ὅτι οἱ ἀριθμοὶ y^3 καὶ z^3 εἶναι ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως

$$\varphi^2+\mu\varphi-\frac{\lambda^3}{27}=0 \qquad (6)$$

λύοντες δὲ ταύτην εὑρίσκομεν

$$y^3=-\frac{\mu}{2}+\sqrt{\frac{\mu^2}{4}+\frac{\lambda^3}{27}} \quad \text{ἢ} \quad y=\sqrt[3]{-\frac{\mu}{2}+\sqrt{\frac{\mu^2}{4}+\frac{\lambda^3}{27}}} \qquad (7)$$

$$z^3=-\frac{\mu}{2}-\sqrt{\frac{\mu^2}{4}+\frac{\lambda^3}{27}} \quad \text{ἢ} \quad z=\sqrt[3]{-\frac{\mu}{2}-\sqrt{\frac{\mu^2}{4}+\frac{\lambda^3}{27}}} \qquad (8)$$

Ἄρα διότι $x=y+z$ ἔχομεν

$$x=\sqrt[3]{-\frac{\mu}{2}+\sqrt{\frac{\mu^2}{4}+\frac{\lambda^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{\mu}{2}-\sqrt{\frac{\mu^2}{4}+\frac{\lambda^3}{27}}} \qquad (9)$$

Ὁ τύπος (9) παρέχει τὰς τρεῖς ῥίζας τῆς ἐξισώσεως (3).

256. Ἡ σχέσις (9) δίδει τρεῖς διαφόρους τιμὰς τοῦ x, διότι ἑκάστη ἐκ τῶν ἐξισώσεων (7) καὶ (8) ἔχει τρεῖς ῥίζας (§ 226) ἐξ ὧν μίαν πραγματικὴν καὶ δύο φανταστικάς. Ἄρα (§ 246) αἱ τρεῖς ῥίζαι τῆς (7) θὰ εἶναι y, ωy, $\omega^2 y$, ἔνθα ω καὶ ω^2 εἶναι αἱ δύο φανταστικαὶ κυβικαὶ ῥίζαι τῆς μονάδος αἱ δὲ τρεῖς ῥίζαι τῆς (8) θὰ εἶναι z, ωz, $\omega^2 z$. Ἤδη, πρὸς εὕρεσιν μιᾶς τιμῆς τοῦ x πρέπει νὰ προσθέσωμεν μίαν ἐκ τῶν τριῶν ῥιζῶν τῆς (7) μὲ μίαν ἐκ τῶν τριῶν ῥιζῶν τῆς (8). Ἐκ τῶν ἐννέα ὅμως διαφόρων ἀθροισμάτων τὰ ὁποῖαν εὑρίσκομεν λαμβάνοντες μίαν ῥίζαν τῆς (7) καὶ μίαν ῥίζαν τῆς (8) μόνον τὰ ἑξῆς τρία

$$y+z, \quad \omega y+\omega^2 z, \quad \omega^2 y+\omega z \qquad (10)$$

εἶναι ῥίζαι τῆς (3). Διότι ἐκ τῶν σχέσεων (5) ὀφείλει ταυτοχρόνως τὸ γινόμενον μιᾶς ῥίζης τῆς (7) καὶ μιᾶς ῥίζης τῆς (8) νὰ ἰσοῦται μὲ τὸν πραγματικὸν ἀριθμὸν $-\frac{\lambda}{3}$ καὶ τοῦτο συμβαίνει ἂν αἱ ῥίζαι τῶν (7) καὶ (8) ληφθοῦν μόνον κατὰ ἕνα ἐκ τῶν τρόπων (10) (ἴδε καὶ § 246). Παράδειγμα λύσεως ἐξισώσεως γ′ βαθμοῦ ἔστω τὸ ἑξῆς:

Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\quad x^3-15x-126=0$

Θέτομεν $x=y+z$, ὁπότε ὑψοῦντες εἰς τὸν κύβον κλπ. λαμβάνομεν

$$x^3-3yzx-(y^3+z^3)=0$$

Ἄρα $y^3+z^3=126$ καὶ $y^3z^3=125$ ἐξ οὗ $y^3=125$ καὶ $z^3=1$. Ἄρα $y=5$ καὶ $z=1$. Αἱ ῥίζαι λοιπὸν τῆς δοθείσης ἐξισώσεως, εὑρισκόμεναι ἐκ τῶν σχέσεων (10) εἶναι

$$y+z=6, \quad \omega y+\omega^2 z=-3+2i\sqrt{3} \quad \text{καὶ} \quad \omega^2 y+\omega z=-3-2i\sqrt{3}$$

διότι $\qquad \omega=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ καὶ $\omega^2=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$.

ια′. Λύσις πλήρους ἐξισώσεως δ′ βαθμοῦ.

257. Ἡ πλήρης ἐξίσωσις τοῦ δ′ βαθμοῦ εἶναι ἡ

$$\alpha x^4+\beta x^3+\gamma x^2+\delta x+k=0 \qquad (1)$$

ἥτις μετὰ τὴν ἀπαλοιφὴν τοῦ β′ὅρου (§ 260) διὰ τῆς ἀντικαταστάσεως $x=y-\frac{\beta}{4\alpha}$ καὶ διαιρέσεως διὰ α λαμβάνει τὴν μορφὴν

$$x^4+\lambda x^2+\mu x+\nu=0 \qquad (2)$$

Ἤδη, ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ α΄ μέλος τῆς (2) ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον δύο δευτεροβαθμίων παραγόντων $x^2+kx+\rho$ καὶ x^2-kx+d. Ἄρα θὰ ἔχωμεν τὴν ταυτότητα

$$x^4+\lambda x^2+\mu x+\nu \equiv (x^2+kx+\rho)(x^2-kx+d) \qquad (3)$$

ἐξ ἧς συμπεραίνομεν (§ 213) ὅτι

$$\rho-k^2+d=\lambda, \quad k(d-\rho)=\mu, \quad d\rho=\nu \qquad (4)$$

Ἀπὸ τὰς δύο πρώτας ἐξισώσεις ἐκ τῶν (4) εὑρίσκομεν

$$2\rho=k^2+\lambda-\frac{\mu}{k} \quad \text{καὶ} \quad 2d=k^2+\lambda+\frac{\mu}{k} \qquad (5)$$

Ἄρα ἡ γ΄ ἐκ τῶν (4) δίδει μετὰ τὴν ἀντικατάστασιν εἰς αὐτὴν τῶν τιμῶν τῶν ρ καὶ d καὶ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πράξεων

$$k^6+2\lambda k^4+(\lambda^2-4\nu)k^2-\mu^2=0 \qquad (6)$$

ἡ ὁποία εἶναι τρίτου βαθμοῦ ὡς πρὸς ἄγνωστον τὸν k^2.

Ἤδη, λυομένης τῆς ἐξισώσεως (6) κατὰ τὰ εἰς τὴν § 255 λεχθέντα εὑρίσκονται αἱ τιμαὶ τῶν ρ καὶ d ἐκ τῶν σχέσεως (5) καὶ ἄρα ἔχομεν πλέον πρὸς λύσιν τὰς δύο ἐξισώσεις

$$x^2+kx+\rho=0 \quad \text{καὶ} \quad x^2-kx+d=0 \qquad (7)$$

αἱ ῥίζαι τῶν ὁποίων εἶναι ῥίζαι τῆς (1).

Παράδειγμα. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $x^4-2x^2+8x-3=0$. Ἔχομεν $x^4-2x^2+8x-3\equiv(x^2+kx+\rho)(x^2-kx+d)$ ἐξ ἧς (§ 213) εὑρίσκομεν

$$\rho+d-k^2=-2, \quad k(d-\rho)=8, \quad d\rho=-3$$

ἡ δὲ (6) γίνεται $\qquad k^6-4k^4+16k^2-64=0$

ἥτις ἔχει ῥίζαν $k^2=4$. Ἄρα $k=\pm2$ καὶ ἑπομένως $\rho=-1$ καὶ $d=3$.

Αἱ ἐξισώσεις λοιπὸν (7) δίδουν

$$x^2+2x-1=0 \quad \text{καὶ} \quad x^2-2x+3=0$$

Αἱ ῥίζαι λοιπὸν τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶναι $-1\pm\sqrt{2}$ καὶ $1\pm i\sqrt{2}$.

258. Ἂν ἡ ἐξίσωσις τοῦ τετάρτου βαθμοῦ εἶναι τῆς μορφῆς

$$x^4+2\lambda x^3+\mu x^2+2\nu x+d=0 \qquad (8)$$

τότε προσθέτομεν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (8) τὴν παράστασιν $(\alpha x+\beta)^2$, προσδιορίζομεν δὲ τοὺς συντελεστὰς α καὶ β οὕτως ὥστε τὸ α΄ μέλος τῆς προκυπτούσης ἐξισώσεως νὰ εἶναι τέλειον τετράγωνον καὶ ἔχομεν

$$x^4+2\lambda x^3+(\mu+\alpha^2)x^2+2(\nu+\alpha\beta)x+d+\beta^2=(\alpha x+\beta)^2 \qquad (9)$$

Ἂν ἤδη τὸ α΄ μέλος τῆς (9) ἰσοῦται μὲ τέλειον τετράγωνον τῆς μορφῆς $(x^2+\lambda x+k)^2$ τότε (§ 213) εὑρίσκομεν

$$\lambda^2+2k=\mu+\alpha^2, \quad \lambda k=\nu+\alpha\beta, \quad k^2=d+\beta^2 \qquad (10)$$

᾿Απαλείφοντες τοὺς α καὶ β μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων (10) καταλήγομεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν

$$2k^3-\mu k^2+2(\lambda\nu-d)k-\lambda^2 d+\mu d-\nu^2=0 \qquad (11)$$

ἥτις λύεναι κατὰ τὰ εἰς τὴν § 255 λεχθέντα. Εὑρεθέντος τοῦ k, εὑρίσκονται ἐκ τῶν ἐξισώσεων (10) αἱ τιμαὶ τῶν α καὶ β. Ἔχομεν λοιπὸν

$$(x^2+\lambda x+k)^2=(\alpha x+\beta)^2 \quad \text{ἢ} \quad x^2+\lambda x+k=\pm(\alpha x+\beta) \qquad (12)$$

Αἱ ἐξισώσεις (12) εἶναι β′ βαθμοῦ, μᾶς παρέχουν δὲ τὰς ῥίζας τῆς ἐξισώσεως (8).

Παράδειγμα. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις

$$x^4-2x^3-5x^2+10x-3=0.$$

Προσθέτοντες εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τὸ $(\alpha x+\beta)^2$ εὑρίσκομεν

$$x^4-2x^3+(\alpha^2-5)x^2+2(\alpha\beta+5)x+\beta^2-3\equiv(x^2-x+k)^2$$

ἐξ ἧς (§ 213) $\alpha^2=2k+6, \quad \alpha\beta=-k-5, \quad \beta^2=k^2+3$ ἢ

$$2k^3+5k^2-4k-7=0$$

Ἄρα $k=-1$ καὶ ἑπομένως $\alpha^2=4, \quad \beta^2=4.$

Ἄρα $$x^2-x-1=\pm(2x+2)$$

ἐξ ὧν εὑρίσκομεν ὡς ῥίζας τῆς δοθείσης τὰς $\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ καὶ $\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$

ΣΗΜ. Ἡ ἀλγεβρικὴ λύσις ἐξισώσεως ἀνωτέρας τοῦ 4ου βαθμοῦ δὲν εἶναι κατορθωτή.

Ἀσκήσεις πρὸς λύσιν.

Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις

830. $y^4-3y^3+4y^2-3y+1=0$ 831. $2(1+y^4)=(1+y)^4$
832. $2x^5-3x^4-5x^3+5x^2+3x-2=0$
833. $3x^5-16x^4+17x^3+17x^2-16x+3=0$
834. $(1-\alpha)x^4+2x^3+(3-\alpha)x^2+2x+1-\alpha=0$
835. $x-5\sqrt[3]{x^2}-5\sqrt[3]{x}+1=0$ 836. $4x-17\sqrt[4]{x^3}+17\sqrt[4]{x}-4=0$
837. $3x^4-5x^3-14x^2+5x+3=0$ 838. $\sqrt{x^3}-14x+56\sqrt{x}-64=0$
839. $\varphi^4-5\varphi^3+10\varphi^2-10\varphi+4=0$
840. $12x^5-8x^4-45x^3+45x^2+8x-12=0$
841. $(x-1)(x-5)(x-2)(x-4)=4$
842. $(x+9)(x-7)(x-3)(x+5)=385$
843. $(x+3)(x+4)(x+5)(x+2)=80$

844. Δοθέντος τοῦ πολυωνύμου $x^3+3\lambda x^2+3\mu x+\nu$, νὰ ὁρισθοῦν οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ, δ ἵνα ἡ παράστασις $\alpha(x+\gamma)^3+\beta(x+\delta)^3$ ἰσοῦται ἐκ ταυτότητος ὡς πρὸς x μὲ τὸ δοθὲν πολυώνυμον.

845. Δοθέντος τοῦ πολυωνύμου $x^4+4\lambda x^3+4\mu x+\nu$, ποία σχέσις πρέπει νὰ ὑφίσταται μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν λ, μ, ν ἵνα τὸ πολυώνυμον τοῦτο ἰσοῦται ἐκ ταυτότητος με τὴν παράστασιν $\alpha(x+\gamma)^4+\beta(x+\delta)^4$, πληρουμένης δὲ τῆς εὑρεθησομένης σχέσεως, νὰ ὁρισθοῦν τὰ α, β, γ, δ.

Ἐπὶ τῇ βάσει τῶν δύο ἀνωτέρω ἀσκήσεων, νὰ λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις

846. $x^3+6x^2+15x+14=0$ **847.** $9x^3+51x^2+99x+65=0$

848. $3x^4+8x^3-16x-12=0$

Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις

849. $x^4+625=0$ **850.** $x^6+64=0$ **851.** $x^8-256=0$

852. $x^8+1=0$ **853.** $x^7-1=0$ **854.** $x^{12}-1=0$

855. $x^6-35x^3+216=0$ **856.** $x^8-17x^4+16=0$

857. $x^{12}-65x^6+64=0$ **858.** $x^{10}-35x^5+32=0$

859. $\dfrac{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}=\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{\dfrac{16}{x}}$ **860.** $\dfrac{\sqrt[3]{4+x}+\sqrt[3]{4-x}}{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}=\dfrac{x}{4}$

861. $x^3+x^{-3}-2x-2x^{-1}=0$ **862.** $2x^4-6x^2+2+x(x^2+1)=0$

863. Νὰ ὁρισθῇ ὁ λ ἵνα ἡ ἐξίσωσις

$$2x^5+3\lambda x^4-(2\lambda+1)x^3-15x^2+(\lambda+1)x+9=0$$

ἔχῃ ὡς ῥίζαν τὸν ἀριθμὸν -3, νὰ εὑρεθοῦν δὲ μετὰ τοῦτο αἱ λοιπαὶ ῥίζαι ταύτης.

864. Τὸ αὐτὸ διὰ τὴν ἐξίσωσιν

$$x^5-3\lambda^2x^4+(2\lambda^3+1)x^3+10\lambda x^2+(\lambda-1)^3x-3=0$$

ἵνα αὕτη ἔχῃ ὡς ῥίζαν τὸν ἀριθμὸν -1.

865. Νὰ εὑρεθῇ ὁ α ἵνα ἡ ἐξίσωσις

$$(\alpha-1)x^4-(\alpha+1)x^2+\alpha-2=0$$

ἔχῃ α΄ τέσσαρας ῥίζας πραγματικάς, β΄ δύο ῥίζας πραγματικὰς καὶ δύο φανταστικὰς καὶ γ΄) τέσσαρας ῥίζας φανταστικάς.

866. Νὰ ὁρισθῇ ὁ α ἵνα αἱ τέσσαρες ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως

$$x^4-(3\alpha+5)x^2+(\alpha+1)^2=0$$

ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον. (Πολυτεχνεῖον 1934).

867. Εἰς τὴν ἄνω ἐξίσωσιν εἶναι δυνατὸν αἱ ῥίζαι της νὰ ἀποτελοῦν γεωμετρικὴν πρόοδον; πότε καὶ διατί; Νὰ ἐξετασθῇ ἡ πρότασις καὶ εἰς τὴν ἐξίσωσιν (7) τῆς § 234.

868. Νὰ ὁρισθῇ ὁ α ἵνα τὸ πολυώνυμον $27x^3-15\alpha x^2+5\alpha^2x-\alpha^3$ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ διωνύμου $3x-1$.

869. Ὁμοίως ἵνα τὸ πολυώνυμον $16x^4+48\alpha x^3+40\alpha^2x^2+12\alpha^3x+\alpha^4$ εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ διωνύμου $2x+1$.

870. Ἂν τὰ πολυώνυμα

$$3x^4-5\alpha x^3+2\alpha^2x^2+3\alpha^3x+\alpha^4 \quad \text{καὶ} \quad 2x^3+3\alpha x^2+4\alpha^2x-5\alpha^3$$

διαιρούμενα διὰ $x-1$ ἀφίνουν τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον, νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τοῦ α.

Ἀσκήσεις ἀπαναλήψεως πρὸς λύσιν.

871. Ἂν ὁ x εἶναι πραγματικὸς ἀριθμὸς ποία ἐκ τῶν παραστάσεων x^3+1 καὶ x^2+x εἶναι μεγαλυτέρα;

Ἂν ὅλα τὰ γράμματα εἰς τὰς κάτωθι ἀνισότητας εἶναι θετικά, νὰ δειχθῇ ὅτι

872. $(\alpha\beta+xy)(\alpha x+\beta y)>4\alpha\beta xy$ 873. $\alpha^3\beta+\alpha\beta^3<\alpha^4+\beta^4$

874. $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2>\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$

875. $xyz>(x+y-z)(x+z-y)(y+z-x)$

876. Ἂν $\alpha^2+\beta^2=1$ καὶ $x^2+y^2=1$ νὰ δειχθῇ ὅτι $\alpha x+\beta y<1$.

877. Ἂν $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$ καὶ $x^2+\omega^2+z^2=1$ νὰ δειχθῇ ὅτι $\alpha x+\beta\omega+\gamma z<1$.

878. Ἂν $x>\alpha$ νὰ δειχθῇ ὅτι $x^3+13\alpha^2x>5\alpha x^2+9\alpha^3$.

879. Ἂν οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ, α΄, β΄, γ΄ εἶναι θετικοὶ τὰ δὲ κλάσματα $\frac{\alpha}{\alpha'}$, $\frac{\beta}{\beta'}$, $\frac{\gamma}{\gamma'}$ ἄνισα, νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ κλάσμα $\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha'+\beta'+\gamma'}$ περιλαμβάνεται μεταξὺ τοῦ μικροτέρου καὶ μεγαλυτέρου ἐκ τῶν ὡς ἄνω κλασμάτων.

880. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἂν οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ, δ εἶναι θετικοί, ἡ παράστασις $\sqrt[\mu+\nu+\rho+\sigma]{\alpha\beta\gamma\delta}$ περιέχεται μεταξὺ τῆς μεγαλυτέρας καὶ τῆς μικροτέρας ἐκ τῶν παραστάσεων $\sqrt[\mu]{\alpha}$, $\sqrt[\nu]{\beta}$, $\sqrt[\rho]{\gamma}$, $\sqrt[\sigma]{\delta}$. (Πολυτεχνεῖον 1933).

881. Ζητεῖται νὰ προσδιορισθοῦν οἱ συντελεσταὶ τοῦ τριωνύμου $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ τὸ ὁποῖον ἔχει μίαν καὶ τὴν αὐτὴν κοινὴν ρίζαν μετὰ τοῦ τριωνύμου $\gamma x^2+\alpha x+\beta$ καὶ μετὰ δοθέντος τριωνύμου $kx^2+\lambda x+\mu$, ὑπάρχει δὲ τιμὴ τοῦ x διὰ τὴν ὁποίαν τὰ ἄνω τριώνυμα λαμβάνουν τὴν αὐτὴν τιμὴν διάφορον τοῦ μηδενός. Τὰ k, λ, μ εἶναι τοιαῦτα ὥστε, ἂν τεθῇ $k^2-\lambda\mu=\rho$, $\lambda^2-k\mu=\tau$, $\mu^2-k\lambda=\sigma$, ἀληθεύει ἡ σχέσις $(\rho^2-\sigma\tau)^2-4(\sigma^2-\rho\tau)(\tau^2-\rho\sigma)=0$ (Πολυτεχνεῖον 1933).

882. Ἂν $\frac{1}{\alpha^{17}}=1+\frac{1}{\alpha^{19}}\sqrt{\frac{1}{\alpha}}$ καὶ $\frac{1}{\beta^{17}}=1+\frac{1}{\beta^{19}}\sqrt{\frac{1}{\beta}}$ νὰ δειχθῇ ὅτι

$$\sqrt[6]{\alpha^5-\sqrt[4]{\alpha^3-\sqrt{\alpha}}}=\pm\sqrt[6]{\beta^5-\sqrt[4]{\beta^3-\sqrt{\beta}}}$$

883. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τοῦ k δι' ἣν τὰ πολυώνυμα ὡς πρὸς ω $2(k^3+k^2)\omega^3+(11k^2-2k)\omega^2+(k^2+5k)\omega+5k-1$ καὶ $2(k^2+k)\omega^2+(11k-2)\omega+4$ ἔχουν μίαν κοινὴν ρίζαν διάφορον τῆς μονάδος. Νὰ εὑρεθοῦν τότε καὶ αἱ λοιπαὶ ρίζαι τούτων.

884. Νὰ ὁρισθοῦν οἱ α καὶ β οὕτως ὥστε τὸ πολυώνυμον $2\omega^3+\alpha\omega^2+\beta\omega-6$ νὰ εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ τριωνύμου $\omega^2+(\alpha+6)\omega+\beta-11$. Νὰ εὑρεθοῦν καὶ αἱ ρίζαι τοῦ πολυωνύμου διὰ τὰς ἐν λόγῳ τιμὰς τῶν α καὶ β.

885. Ἂν τὰ τριώνυμα $\omega^2+\omega-1$ καὶ $\omega^2+\beta\omega+1$ ἔχουν μίαν μόνην κοινὴν ρίζαν, νὰ εὑρεθῇ ὁ β ὡς καὶ ἡ κοινὴ ρίζα των.

886. Ἂν τὰ τριώνυμα $\omega^2+\alpha\omega+\beta$ καὶ $\alpha\omega^2+\omega+\beta$ ἔχουν μίαν μόνην κοινὴν ρίζαν, νὰ δειχθῇ ὅτι θὰ εἶναι ἢ $\beta=0$ ἢ $\alpha+\beta=-1$, νὰ εὑρεθῇ δὲ ἡ κοινὴ ρίζα των δι' ἑκάστην ἐκ τῶν δύο ἀνωτέρω περιπτώσεων.

887. Δίδεται τὸ τριώνυμον $x^2+\lambda x+\mu$. Νὰ σχηματισθῇ ἕτερον τριώνυμον ἔχον ὡς ρίζας τὰς $\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1+x_2}$ καὶ $\frac{x_1^3+x_2^3+5\lambda\mu}{x_1^2+x_2^2}$ ἔνθα x_1 καὶ x_2 εἶναι αἱ ρίζαι τοῦ δοθέντος τριωνύμου (Πολυτεχνεῖον 1934).

888. Δίδεται τὸ σύστημα $\alpha x-6y=5\alpha-3$ καὶ $2x+(\alpha-7)y=29-7\alpha$. Νὰ ὁρισθῇ ὁ α ἵνα τὸ σύστημα εἶναι α΄ ἀόριστον, β΄ ἀσυμβίβαστον καὶ γ΄ ἵνα ἡ τιμὴ τῶν x καὶ y νὰ εἶναι ἡ αὐτὴ (Πολυτ. 1934).

889. Δίδεται τὸ τριώνυμον $x^2-5x+\gamma$. Νὰ ὁρισθῇ ὁ γ εἰς τρόπον ὥστε τὰ τετράγωνα τῶν ριζῶν του νὰ ἔχουν ἄθροισμα 13. (Ἀνωτ. Γεωπον. 1935).

XIV. ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ Β΄. ΚΑΙ ΑΝΩΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

259. Τὰ ἁπλᾶ συστήματα τοῦ β΄ βαθμοῦ λύονται συνήθως διὰ τῆς μεθόδου τῆς ἀντικαταστάσεως. Πολλάκις ὅμως διὰ τὰ μὴ ἁπλᾶ συστήματα ἀπαιτεῖται εἰδικὸς τρόπος (τέχνασμα) (ἴδε καὶ § 91).
Εἷς ἐκ τῶν τρόπων λύσεως ἁπλῶν συστημάτων β΄ βαθμοῦ εἶναι καὶ ὁ εἰς τὴν § 165 ἀναφερόμενος. Παραθέτομεν κατωτέρω μερικοὺς τρόπους λύσεως συστημάτων.

260. Ὅταν τὸ σύστημα δύο ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους εἶναι ὁμογενὲς (§ 38) δηλαδὴ ὅταν ἑκάστη ἐξίσωσις εἶναι ὁμογενὴς καὶ τοῦ αὐτοῦ βαθμοῦ ὡς πρὸς τὸ σύνολον τῶν ἀγνώστων, τότε πρὸς λύσιν τοῦ συστήματος ἀντικαθιστῶμεν τὸν ἕνα ἄγνωστον συναρτήσει τοῦ ἑτέρου πολλαπλασιασθέντος ἐπὶ βοηθητικόν τινα ἄγνωστον καὶ μετά, διὰ διαιρέσεως κατὰ μέλη εὑρίσκομεν ἐξίσωσιν περιέχουσαν μόνον τὸν βοηθητικὸν ἄγνωστον κλπ. ὡς π. χ.

Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$$x^2+2xy+3y^2=57. \quad 3x^2+4xy-24y^2=19 \qquad (1)$$

θέτομεν $x=y\omega$ ὅτε εὑρίσκομεν τὰς ἐξισώσεις

$$y^2\omega^2+2y^2\omega+3y^2=57 \quad \text{καὶ} \quad 3y^2\omega^2+3y^2\omega-24y^2=19$$

ἢ διαιροῦντες κατὰ μέλη καὶ μετὰ ἀπαλείφοντες παρονομαστὰς κλπ. εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$8\omega^2+10\omega-75=0$$

ἥτις ἔχει ρίζας $\omega'=\frac{5}{2}$ καὶ $\omega''=-\frac{15}{4}$. Ἄρα $x=\frac{5y}{2}$ ἢ $x=-\frac{15y}{4}$

Θέτοντες τὴν μίαν ἐκ τῶν δύο τιμῶν τοῦ x εἰς τὴν α΄ ἐκ τῶν δοθεισῶν ἐξισώσεων εὑρίσκομεν $y=\pm 2$ ἢ $y=\pm 4\sqrt{\frac{19}{51}}$ καὶ ἄρα $x=\pm 5$ ἢ $x=\mp 15\sqrt{\frac{19}{51}}$. Αἱ ρίζαι λοιπὸν τοῦ δοθέντος συστήματος εἶναι :

$$\begin{matrix} x=5 \\ y=2 \end{matrix} \quad \text{ἢ} \quad \begin{matrix} x=-5 \\ y=-2 \end{matrix} \quad \text{ἢ} \quad \begin{matrix} x=15\sqrt{\frac{19}{51}} \\ y=-4\sqrt{\frac{19}{51}} \end{matrix} \quad \text{ἢ} \quad \begin{matrix} x=-15\sqrt{\frac{19}{51}} \\ y=4\sqrt{\frac{19}{51}} \end{matrix}$$

261. Ὅταν τὸ ὁμογενὲς σύστημα ἔχῃ τρεῖς ἐξισώσεις, τότε ἀφαιροῦμεν αὐτὰς ἀνὰ δύο καὶ μετὰ τὴν τροπήν των εἰς γινόμενα, ἐφ' ὅσον τοῦτο εἶναι δυνατόν, διαιροῦμεν κατὰ μέλη, ὁπότε καταλήγομεν εἰς σύστημα ὁμογενὲς δύο ἐξισώσεων, ὅπερ λύεται ὡς τὸ ἀνωτέρω· π. χ.

Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα :

$x^2+xy+y^2=37$, $x^2+xz+z^2=28$, $y^2+yz+z^2=19$ (2) (Πολ. 1932)

Ἀφαιροῦμεν αὐτὰς ἀνὰ δύο, τρέπομεν τὰ εὑρισκόμενα εἰς γινόμενα, ὅτε εὑρίσκομεν

$$xy-xz+y^2-z^2=9 \quad \text{ἢ} \quad (y-z)(x+y+z)=9 \quad \text{καὶ}$$
$$x^2-y^2+xz-yz=9 \quad \text{ἢ} \quad (x-y)(x+y+z)=9$$

Ἤδη, ὑποθέτοντες ὅτι $x+y+z\neq 0$ καὶ διαιροῦντες κατὰ μέλη, εὑρίσκομεν $z=2y-x$. Θέτοντες τὴν τιμὴν τοῦ z εἰς τὴν β′ ἐκ τῶν δοθεισῶν ἐξισώσεων (2) εὑρίσκομεν $x^2-2xy+4y^2=28$. Ἡ ἐξίσωσις αὕτη μετὰ τῆς α′ ἐκ τῶν δοθεισῶν ἀποτελοῦν σύστημα ὁμογενὲς δύο ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους, λύεται δὲ ὡς τὸ τῆς § 260. Εὑρίσκομεν λοιπὸν

$$x=\pm 4 \ \text{ἢ} \ \pm\frac{10\sqrt{3}}{4}, \quad y=\pm 3 \ \text{ἢ} \ \pm\frac{\sqrt{3}}{3}, \quad z=\pm 2 \ \text{ἢ} \ \mp\frac{8\sqrt{3}}{3}$$

262. Ὅταν τὸ σύστημα εἶναι συμμετρικὸν (§ 39) τότε συνήθως λύεται διὰ πολ)σμοῦ (ἢ διὰ προσθέσεως) τῶν ἐξισώσεων κατὰ μέλη κλπ. ὡς εἰς τὰ κάτωθι παραδείγματα.

α′. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$$x^2yz=\alpha^4, \quad xy^2z=\beta^4, \quad xyz^2=\gamma^4 \tag{3}$$

Πολλαπλασιάζομεν ταύτας κατὰ μέλη ὅτε εὑρίσκομεν $x^4y^4z^4=\alpha^4\beta^4\gamma^4$.

Ἂν ἤδη ἐξαγάγωμεν τὴν τετάρτην ρίζαν τῆς προκυψάσης ἐξισώσεως καὶ περιορισθῶμεν εἰς τὰς πραγματικὰς μόνον τιμὰς αὐτῆς (§ 245) εὑρίσκομεν

$$xyz=\pm\alpha\beta\gamma \tag{4}$$

Διαιροῦντες ἑκάστην ἐκ τῶν (3) διὰ τῆς (4) εὑρίσκομεν τὰς ρίζας τοῦ συστήματος (3) ἤτοι

$$x=\pm\frac{\alpha^3}{\beta\gamma}, \quad y=\pm\frac{\beta^3}{\alpha\gamma}, \quad z=\pm\frac{\gamma^3}{\alpha\beta}.$$

β′. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$$x^2+y^2=2\alpha, \quad y^2+\omega^2=2\beta, \quad \omega^2+x^2=2\gamma \tag{5}$$

Ἀλλάσσοντες τὰ σημεῖα τῆς β′ καὶ προσθέτοντες κατὰ μέλη εὑρίσκομεν $x^2=\alpha-\beta+\gamma$ καὶ ἄρα $y^2=\alpha+\beta-\gamma$ καὶ $\omega^2=\gamma+\beta-\alpha$. Ἐπομένως αἱ ρίζαι τοῦ (5) εἶναι

$$x=\pm\sqrt{\alpha-\beta+\gamma}, \quad y=\pm\sqrt{\alpha+\beta-\gamma}, \quad \omega=\pm\sqrt{\beta+\gamma-\alpha}.$$

263. Ἐν γένει δὲν δυνάμεθα νὰ ὑπαγάγωμεν τὴν λύσιν τῶν συστημάτων εἰς ὡρισμένους κανόνας. Ἡ λύσις ἑκάστου συστήματος ἐξαρτᾶται συνήθως ἐκ τοῦ εἴδους τοῦ συστήματος καὶ ἐκ τῆς πείρας τὴν ὁποίαν ἔχει ἀποκτήσει ὁ ἀσχολούμενος εἰς τὴν λύσιν τούτου. Δίδομεν κατωτέρω τὴν λύσιν μερικῶν ἀκόμη συστημάτων.

α΄. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$$x^2+y^2+\omega^2=189, \quad x+y+\omega=21, \quad x\omega=y^2 \qquad (6)$$

Ὑψοῦμεν τὴν β΄ εἰς τὸ τετράγωνον καὶ ἀπὸ αὐτὴν ἀφαιροῦμεν τὴν α΄ ὅτε εὑρίσκομεν $xy+x\omega+y\omega=126$ ἢ λόγῳ τῆς γ΄ $y(x+y+\omega)=126$ ἢ λόγῳ τῆς β΄ $y=6$.

Ἄρα ἡ β΄ καὶ γ΄ δίδουν $x+\omega=12$ καὶ $x\omega=36$ ὅπερ λυόμενον κατὰ τὰ εἰς τὴν § 165 δίδει $x=3$, $\omega=12$ ἢ ἀντιστρόφως. Ἄρα αἱ ρίζαι τοῦ (6) εἶναι $x=3$ ἢ 12, $y=6$, $\omega=12$ ἢ 3.

β΄. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$$x^4+y^4=67, \qquad x+y=5 \qquad (7)$$

Ὑψοῦμεν τὴν β΄ εἰς τὴν τετάρτην δύναμιν καὶ ἀφαιροῦμεν ἀπὸ ταύτης τὴν α΄ ὅτε εὑρίσκομεν

$2xy(x^2+y^2)+3x^2y^2=264$ ἢ ἐπειδὴ $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=25-2xy$

ἔχομεν $$x^2y^2-50xy+264=0 \qquad (8)$$

Ἡ (8) λυομένη ὡς πρὸς ἄγνωστον τὸν xy δίδει $xy=6$ ἢ $xy=44$. Ἑκάστη ἐκ τῶν τιμῶν τούτων τοῦ xy συνδυαζομένη μετὰ τῆς β΄ ἐκ τῶν (7) δίδει (§ 165) τὰς τιμὰς τῶν x καὶ y. Ἄρα αἱ ρίζαι τοῦ συστήματος (7) εἶναι

$x=2$ ἢ $\frac{1}{2}(5+i\sqrt{151})$, $y=3$ ἢ $\frac{1}{2}(5-i\sqrt{151})$ ἢ ἀντιστρόφως

γ΄. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα :

$$x+y=5, \quad x^5+y^5=275 \qquad (9)$$

Ἐργαζόμενοι ὁμοίως ὡς εἰς τὸ ἀνατέρω σύστημα καταλήγομεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν

$$x^2y^2-25xy+114=0 \qquad (10)$$

ἥτις λυομένη ὡς πρὸς ἄγνωστον τὸν xy δίδει $xy=6$ ἢ $xy=19$. Ἑκάστη ἐκ τῶν δύο τούτων τιμῶν τοῦ xy συνδυαζομένη μετὰ τῆς α΄ ἐκ τῶν (9) δίδει (§ 165) τὰς τιμὰς τῶν x καὶ y. Ἄρα αἱ ρίζαι τοῦ συστήματος (9) εἶναι

$x=3$ ἢ $\frac{5+i\sqrt{51}}{2}$, $y=2$ ἢ $\frac{5-i\sqrt{51}}{2}$ ἢ ἀντιστρόφως.

δ΄. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα :

$$x^2+y^2=25, \quad \omega^2+\varphi^2=61, \quad x\varphi+y\omega=38, \quad x\omega+y\varphi=39 \quad (11)$$

Ὑψοῦμεν τὰς δύο τελευταίας εἰς τὸ τετράγωνον καὶ προσθέτομεν αὐτάς, ἔχοντες δὲ ὑπ᾿ ὄψιν τὰς δύο πρώτας εὑρίσκομεν $xy\omega\varphi=360$, ἥτις γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς :

$$x\varphi = \frac{360}{y\omega} \quad (12) \qquad \text{ἢ} \qquad x\omega = \frac{360}{y\varphi} \quad (13)$$

Θέτοντες τὴν (12) εἰς τὴν γ΄ ἐκ τῶν (11) καὶ λύοντες τὴν προκύπτουσαν ὡς πρὸς ἄγνωστον τὸν $y\omega$ εὑρίσκομεν

$$y\omega = 20 \quad (14) \qquad \text{καὶ ἄρα} \quad x\varphi = 18 \quad (15)$$

Θέτοντες τὴν (13) εἰς τὴν δ΄ ἐκ τῶν (11) καὶ ἐργαζόμενοι ὁμοίως εὑρίσκομεν

$$y\varphi = 24 \quad (16) \qquad \text{καὶ ἄρα} \quad x\omega = 15 \quad (17)$$

Διὰ πολαπλασιασμοῦ κατὰ μέλη τῶν (14) καὶ (16) μετὰ τῶν (15) καὶ (17) καὶ προσθέσεως εὑρίσκομεν

$$\omega\varphi = 30 \quad (18)$$

ἐκ ταύτης δὲ καὶ τῆς β΄ ἐκ τῶν (11) εὑρίσκομεν

$$\omega + \varphi = \pm 11 \quad (19)$$

Ἄρα (§ 165) ἐκ τῶν (18) καὶ (19) εὑρίσκομεν $\omega = \pm 5$, $\varphi = \pm 6$ καὶ ἑπομένως $y = \pm 4$, $x = \pm 3$. Αἱ ῥίζαι λοιπὸν τοῦ συστήματος (7) εἶναι $x = \pm 3$, $y = \pm 4$ ἢ ἀντιστρόφως καὶ $\omega = \pm 5$, $\varphi = \pm 6$ ἢ ἀντιστρόφως.

ε΄. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$$x + y + \omega = 2, \qquad xy + y\omega + \omega x = -5, \qquad xy\omega = -6 \quad (20)$$

Οἱ ἄγνωστοι x, y, ω τοῦ ἄνω συστήματος εἶναι (§ 231) ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως τοῦ τρίτου βαθμοῦ

$$z^3 - 2z^2 - 5z + 6 = 0$$

ἡ ὁποία λυομένη κατὰ τὰ εἰς τὴν § 233 ἔχει ῥίζας τὰς 1, —2, 3 ἑπομένως εἷς ἐκ τῶν ἀγνώστων τοῦ συστήματος (20) εἶναι 1, ὁ ἕτερος —2 καὶ ὁ τρίτος εἶναι ὁ 3.

ΣΗΜ. Ὅταν τὸ σύστημα εἶναι συμμετρικὸν ὡς πρὸς τοὺς ἀγνώστους τότε καὶ αἱ ῥίζαι τούτου θὰ εἶναι ἐπίσης συμμετρικαὶ (§ 39), ὡς φαίνεται εἰς τὰ συστήματα τῶν παραδειγμάτων β΄, γ΄ καὶ ε΄ τῆς § 263.

Ἀσκήσεις πρὸς λύσιν.

Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀκέραιαι ῥίζαι ἑκάστου ἐκ τῶν κάτωθι συστημάτων

890. $x^3 + y^3 = 7(x + y)$
$x^3 - y^3 = 19(x - y)$

891. $x^3y + xy^3 = 78$
$x^2 + y^2 = 13$

892. $x^2 + y^2 + 6 = \omega^2$
$x + y + \omega = 8$
$xy + x = \omega$

893. $x^2y + xy^2 = 30$
$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6}$

894. $x + y + \sqrt{x + y} = 20$
$x^3 + y^3 = 1072$

895. $15xy + 7y^2 + 68 = 0$
$x^2 + 2xy + 2y^2 = 17$

896. $x^2+xy+x\omega=42$
$y^2+xy+y\omega=70$
$\omega^2+x\omega+y\omega=84$

897. $x^2+2xy+3y^2=17$
$y^2+2y\omega+3\omega^2=43$
$\omega^2+2x\omega+3x^2=18$

Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα

898. $x^3+y^3=152$
$x+y=8$

899. $x^3-8y^3=127$
$x-2y=1$

900. $(x+y)(x+\omega)=63$
$(y+\omega)(y+x)=42$
$(x+\omega)(y+\omega)=54$

901. $(x+y)^2-\omega^2=65$
$x^2-(y+\omega)^2=13$
$x+y-\omega=5$

902. $x+\sqrt{xy}+y=19$
$x^2+xy+y^2=133$

903. $2(xy^{-1}+yx^{-1})=5$
$x^2+3y^2=28$

904. $x^2-2xy+y^2+2x+2y=3$
$y(x-y+1)+x(x-y-1)=0$

905. $4(x^4+y^4-x^2y^2)=13(x+y)^2$
$2xy(x-y)^2=(x+y)^2$

906. $8x^3-27y^3-36x^2y+x+54xy^2=128+y$
$x^2+y^2=9+2xy$

907. $3x^2-5y+3=0$
$4x^2+\dfrac{y}{x^2}=\dfrac{67}{4}$

908. $x-\sqrt{x}+y+\sqrt{y}=2\sqrt{xy}$
$\sqrt{x}+\sqrt{y}=5$

909. $\dfrac{x^4}{y^2}+\dfrac{y^4}{x^2}+2xy=x+y=1$

910. $(x+y)(x^2+y^2)=680$
$x^2y^2(x^2+y^2)=17408$

911. $x^2-y+\sqrt{x^2-y}=20$
$x^4-y^2=544$

912. $x\sqrt{1-y^2}=\dfrac{16}{25},\quad y\sqrt{1-\omega^2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{10},\quad \omega\sqrt{1-x^2}=\dfrac{3}{10}$

913. $xy\omega=\alpha(y\omega-\omega x-xy)=\beta(x\omega-xy-\omega y)=\gamma(xy-y\omega-x\omega)$

914. $x^3+y^3+x^2y+xy^2=32$
$x^4y^2+x^2y^4=128$

915. $x^2-2xy+3y^2=36$
$2x^2+xy-4y^2=32$

916. $x^4+y^4=272$
$x-y=2$

917. $x^5-y^5=242$
$x-y=2$

918. $x^6+y^6=793$
$x-y=1$

919. $x^5+y^5=\alpha$
$x+y=\beta$ (Ἀεροπ. 1932)

920. $x^2-y\sqrt{xy}=126$
$y^2-x\sqrt{xy}=-63$ (Πολ. 1932)

921. $x^2y\omega=2541$
$xy^2\omega=693$
$xy\omega^2=1617$

922. $y^2+\omega^2-x(y+\omega)=14$
$\omega^2+x^2-y(\omega+x)=2$
$x^2+y^2-\omega(x+y)=-10$

923. $x^3=108y-x^4y$
$3y^3=4x-3xy^4$

924. $x^4+x^2y^2+y^4=21$
$x^2+xy+y^2=7$

925. $\dfrac{x-y}{y^2}+\dfrac{x-z}{z^2}=\dfrac{31x}{144}$
$\dfrac{y-z}{z^2}+\dfrac{y-x}{x^2}=\dfrac{9y}{16}$
$\dfrac{z-x}{x^2}+\dfrac{z-y}{y^2}=\dfrac{23z}{72}$

926. $\omega(x-y)=3\omega-3\varphi$
$x(\varphi-\omega)=y-x$
$y(\omega-\varphi)=2x-2y$
$\varphi(x-y)=4(\omega-\varphi)$

927. $xy=\omega\upsilon$
$x+y=10$
$\upsilon+\omega=14$
$\dfrac{x}{\omega}+\dfrac{\upsilon}{y}=4$ (Πολ. 1930)

928. $x+\varphi=7$
$y+\omega=6$
$x^2+y^2+\omega^2+\varphi^2=50$
$y\omega=x\varphi$

929. $x+y+z=\alpha$
$x^2+y^2+z^2=\alpha^2$
$x^3+y^3+z^3=\alpha^3$

930. $\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}+\sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}}=\dfrac{10}{3}$
$x^2-y^2=81$ (Πολ. 1928).

931. $xy^2z^2=\alpha^2\beta^2$
$x^2yz^2=\beta^2\gamma^2$
$x^2y^2z=\alpha^2\gamma^2$

932. $x^3y=2z$
$y^3z=9x$
$xyz=6$

933. $\dfrac{x^2+xy+y^2}{x+y}=7$
$\dfrac{x^2-xy+y^2}{x-y}=9$

934. $x^3y^2\omega=\alpha$
$xy^3\omega^2=\beta$
$x^2y\omega^3=\gamma$

935. $x+\varphi=5$
$y+\omega=4$
$\chi\varphi=y\omega$
$x^4+y^4+\omega^4+\varphi^4=289$

936. $\omega+\varphi=1$
$\omega x+\varphi y=2$
$\omega x^2+\varphi y^2=5$
$\omega x^3+\varphi y^3=14$

937. $x-2y+3z=9$
$x^2+4y^2+9z^2=189$
$3xz=4y^2$ ('Αν. Γεωπ 1935).

938. $x^2+y^2=218$
$xy-y^2=42$ (Πολυτ. 1933)

939. $\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x^4y^2}}+\sqrt{y^2+\sqrt[3]{x^2y^4}}=5\sqrt{5}$
$\sqrt{x^2-\sqrt[3]{x^4y^2}}+\sqrt{\sqrt[3]{x^2y^4}-y^2}=5\sqrt{3}$

940. $x+y=2\omega$
$x^2+y^2=8\omega^2$
$x^3+y^3+\omega^3=567$

941. $\left(\dfrac{x}{y}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(\dfrac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}=(xy)^{-\frac{2}{3}}+1$
$\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=2$

942. $x^2-xy-\omega^2+z^2=10$
$x+y+\omega+z=10$
$2x+3y-\omega-z=1$
$x+y+5\omega-4z=2$

943. $x\upsilon=\omega\varphi$
$x+\upsilon+\omega+\varphi=9$
$x^2+\upsilon^2+\omega^2+\varphi^2=25$
$x^4+\upsilon^4+\omega^4+\varphi^4=289$

944. $(x+2\omega)(x+2\varphi)=99$
$(\varphi+2x)(\varphi+2\omega)=96$
$(\omega+2x)(\omega+2\varphi)=91$

945. $x^4+\omega^4=14x^2\omega^2$
$x+\omega=\alpha$

946. $(x+\upsilon)^2+(\omega+\varphi)^2=50$
$(x+\omega)^2+(\upsilon+\varphi)^2=58$
$(x+\varphi)^2+(\upsilon+\omega)^2=52$
$x+\upsilon+\omega+\varphi=10$

947. $x^2+\upsilon^2+\omega^2+\varphi^2+z^2=19$
$x+\upsilon+\omega+1=\varphi+z$
$x+z=\omega+\varphi$
$x+\upsilon+z=5$
$\upsilon+\omega=z$

948. $(x+\omega)(x-\omega)^2=16x\omega$
$(x^4-\omega^4)(x^2-\omega^2)=640x^2\omega^2$

949. $3x^3-8x\omega^2+\omega^3+21=0$
$x^2(\omega-x)=1$

950. $6x^4+x^2\omega^2+16=2x(12x+\omega^3)$
$x^2+x\omega-\omega^2=4$

951. $\beta x^3=10\alpha^2\beta x+3\alpha^3\omega$
$\alpha\omega^3=10\alpha\beta^2\omega+3\beta^3x$

952. $x\omega+x+\omega=23$
$xz+x+z=41$
$\omega z+\omega+z=27$

953. $x^2+\omega^2+z^2=21\alpha^2$
$\omega z+xz-x\omega=6\alpha^2$
$3x+\omega-2z=3\alpha$

954. $\dfrac{y(1+x^2)}{x(y^2-1)}=\dfrac{3}{4}$ καὶ $\dfrac{y^2(1+x^4)}{x^2(1+y^2)^2}=\dfrac{9}{50}$

955. Νὰ προσδιορισθοῦν τὰ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ἵνα ἡ παράστασις $\alpha(\omega+\gamma)^3+\beta(\omega+\delta)^3$ εἶναι ἴση ἐκ ταυτότητος ὡς πρὸς ω μὲ τὸ πολυώνυμον $7\omega^3+33\omega^2+57\omega+35$.

Νὰ λυθοῦν τὰ συστήματα

956. $7\varphi z+3z\omega=4\varphi\omega$
$21\varphi z-3z\omega=4\varphi\omega$
$\omega+2\varphi+3z=19$

957. $\alpha\varphi+\beta\omega+\gamma z=0$
$\beta\gamma\varphi+\alpha\gamma\omega+\alpha\beta z=0$
$\varphi\omega z+\alpha\beta\gamma(\alpha^3\varphi+\beta^3\omega+\gamma^3 z)=0$

958. $\varphi+\omega-z=0$
$3\varphi-2\omega+17z=0$
$\varphi^3+2\omega^3+2z^3=167$

959. $3\varphi^2-2\omega^2+5z^2=0$
$7\varphi^2-2\omega^2-15z^2=0$
$5\varphi-4\omega+7z=6$

960. $x^2+y^2=\alpha+x+y$
$x^4+y^4+x+y=\beta+2x^3+2y^3$

961. $xy=6-\sqrt{xy}$
$x^3+y^3=65$

962. $x(12-xy)=y(xy-3)$
$xy(4x+y-xy)=12(x+y-3)$

963. $3x^2(y-z)=-5$
$y^2(z-x)=3$
$3z^2(x-y)=1$

964. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$$\mu xy-x^2-y^2=1$$
$$\mu(\alpha x+\beta y)-2(\alpha y+\beta x)=0$$

ἔνθα οἱ μ, α, β, συνδέονται διὰ τῆς σχέσεως $\mu\alpha\beta-\alpha^2-\beta^2=1$ (Δοκίμων 1935)

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ζ΄.

ΟΡΙΑ - ΣΥΝΑΡΤΗΡΕΙΣ - ΜΕΓΙΣΤΑ ΚΑΙ ΕΛΑΧΙΣΤΑ

I. ΠΕΡΙ ΟΡΙΩΝ.

264. Μία ποσότης καλεῖται ***σταθερὰ*** ὅταν διατηρῇ πάντοτε τὴν αὐτὴν τιμήν, ἀνεξάρτητον τῆς τιμῆς τὴν ὁποίαν τυχὸν λαμβάνουν ἄλλαι ποσότητες συνδεόμεναι μὲ αὐτήν. Π. χ. τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν παντὸς τριγώνου εἶναι σταθερόν, ἰσούμενον μὲ δύο ὀρθὰς γωνίας.

265. Μία ποσότης καλεῖται ***μεταβλητὴ*** ὅταν δύναται νὰ λάβῃ διαφόρους τιμάς. Αἱ μεταβληταὶ ποσότητες παρίστανται συνήθως διὰ x, y, z, κλπ.

266. ***Ὅριον*** μιᾶς μεταβλητῆς ποσότητος x καλεῖται ἡ σταθερὰ ποσότης α, ἂν ἡ μεταβλητὴ x συνεχῶς αὐξανομένη ἢ συνεχῶς ἐλαττουμένη τείνει νὰ γίνῃ ἴση πρὸς α, σημειοῦται δὲ ὡς ἑξῆς ὅρ.x=α. Τὸ ὅριον ὁρίζεται καὶ ὡς ἑξῆς:

Ὅριον μιᾶς μεταβλητῆς ποσότητος x καλεῖται ἡ σταθερὰ ποσότης α, ὅταν ἡ διαφορὰ x—α κατ᾿ ἀπόλυτον τιμὴν τείνει νὰ γίνῃ καὶ νὰ μείνῃ μικροτέρα παντὸς δοθέντος θετικοῦ ἀριθμοῦ ε ὁσονδήποτε μικροῦ. Δηλαδὴ ὅταν $|x-\alpha|<\varepsilon$ ἔνθα ὅρ=0, τότε ὅρx=α.

Ἐκ τοῦ ὡς ἀνωτέρω ὁρισμοῦ τοῦ ὁρίου καταφαίνεται ὅτι αἱ ***σταθεραὶ ποσότητες δὲν ἔχουν ὅρια.***

267. Μία ποσότης καλεῖται ***ἀπειροστὸν*** ὅταν συνεχῶς ἐλαττουμένη τείνῃ νὰ γίνῃ μηδέν.

Θεωρήματα τινὰ ἐπὶ τῶν ὁρίων.

268. Θεώρημα α΄. ***Τὸ ἄθροισμα τῶν ὁρίων πολλῶν μεταβλητῶν ποσοτήτων ἐχουσῶν ὅρια ἰσοῦται μὲ τὸ ὅριον τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν.***

Θὰ δείξωμεν δηλαδὴ ὅτι ὅρx+ὅρy+ὅρω=ὅρ(x+y+ω).

Ἀπόδειξις: Ἔστω ὅτι

$$\text{ὅρ}x=\alpha,\quad \text{ὅρ}y=\beta,\quad \text{ὅρ}\omega=\gamma \qquad (1)$$

Διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη ἔχομεν

$$\text{ὅρ}x+\text{ὅρ}y+\text{ὅρ}\omega=\alpha+\beta+\gamma \qquad (2)$$

Ἐκ τῶν (1) κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν ὁρίων (§ 266) ἔχομεν.

$$x-\alpha<\varepsilon,\quad y-\beta<\varepsilon',\quad \omega-\gamma<\varepsilon'' \qquad (3)$$

Προσθέτοντες κατὰ μέλη τὰς (3) εὑρίσκομεν

$$(x+y+\omega)-(\alpha+\beta+\gamma)<\varepsilon+\varepsilon'+\varepsilon'' \qquad (4)$$

Ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα $\varepsilon+\varepsilon'+\varepsilon''$ ὡς ἄθροισμα ἀπειροστῶν εἶναι καὶ αὐτὸ ἀπειροστόν. Ἄρα ἐκ τῆς (4) συνάγομεν ὅτι (§ 266)

$$\text{ὅρ}.(x+y+\omega)=\alpha+\beta+\gamma \qquad (5)$$

Ἐκ τῆς (2) καὶ (5) συμπεραίνομεν ὅτι :

$$\text{ὅρ}x+\text{ὅρ}y+\text{ὅρ}\omega=\text{ὅρ}(x+y+\omega)$$

269. Θεώρημα β′. ***Τὸ ὅριον τοῦ γινομένου μεταβλητῆς ποσότητος ἐπὶ σταθερὸν ἀριθμὸν ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ σταθεροῦ ἐπὶ τὸ ὅριον τῆς μεταβλητῆς.***

Θὰ δείξωμεν δηλαδὴ ὅτι : $\text{ὅρ}(\lambda x)=\lambda\,\text{ὅρ}x$

Ἀπόδειξις : Ἔστω $\text{ὅρ}x=\alpha$ (6)

Ἄρα κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν ὁρίων θὰ εἶναι

$$x-\alpha<\frac{\varepsilon}{\lambda} \qquad (7)$$

ἔνθα $\text{ὅρ}\varepsilon=0$. Ἄρα $\text{ὅρ}\lambda x-\lambda\alpha<\varepsilon$ (8)

Ἄρα ἐκ τῆς (8) συμπεραίνομεν ὅτι $\text{ὅρ}(\lambda x)=\lambda\alpha=\lambda\,\text{ὅρ}x$.

Τὸ θεώρημα τοῦτο ἰσχύει καὶ ἂν $\text{ὅρ}x=0$ ἢ $\text{ὅρ}x=\infty$ ἀποδεικνύεται δὲ ὁμοίως.

270. Θεώρημα. ***Τὸ γινόμενον τῶν ὁρίων πολλῶν μεταβλητῶν ποσοτήτων ἐχουσῶν ὅρια, ἰσοῦται μὲ τὸ ὅριον τοῦ γινομένου αὐτῶν.***

Θὰ δείξωμεν δηλαδὴ ὅτι $\text{ὅρ}x.\text{ὅρ}y=\text{ὅρ}(xy)$.

Ἀπόδειξις: Ἔστω $\text{ὅρ}x=\alpha$ καὶ $\text{ὅρ}y=\beta$. Ἄρα $\text{ὅρ}x.\text{ὅρ}y=\alpha\beta$ (9)

Ἀφοῦ $\text{ὅρ}x=\alpha$ ἕπεται ὅτι ἡ διαφορὰ $x-\alpha$ τείνει νὰ γίνῃ μηδὲν (§ 266), τὸ αὐτὸ λέγομεν καὶ διὰ τὴν διαφορὰν $y-\beta$. Ἂν θέσωμεν

$$x-\alpha=\varepsilon \quad \text{καὶ} \quad y-\beta=\eta$$

ἔνθα ε καὶ η εἶναι ἀπειροστὰ ἤτοι $\text{ὅρ}\varepsilon=0$ καὶ $\text{ὅρ}\eta=0$, θὰ ἔχωμεν

$$x=\alpha+\varepsilon,\quad y=\beta+\eta$$

ἢ διὰ πολλαπλασιασμοῦ κατὰ μέλη εὑρίσκομεν

$$xy=\alpha\beta+\alpha\eta+\beta\varepsilon+\varepsilon\eta \quad \text{ἢ} \quad xy-\alpha\beta=\alpha\eta+\beta\varepsilon+\varepsilon\eta \qquad (10)$$

Ἀλλὰ τὸ β′ μέλος τῆς (10) ἔχει ὅριον τὸ μηδέν, διότι ἔχομεν

$\text{ὅρ}(\alpha\eta+\beta\varepsilon+\varepsilon\eta)=\text{ὅρ}(\alpha\eta)+\text{ὅρ}(\beta\varepsilon)+\text{ὅρ}(\varepsilon\eta)=\alpha\text{ὅρ}\eta+\beta\text{ὅρ}\varepsilon+\eta\text{ὅρ}\varepsilon=0$

Ἄρα ἐκ τῆς (10) συμπεραίνομεν ὅτι

$$\text{ὅρ}(xy)=\alpha\beta \qquad (11)$$

Ἐκ τῶν (9) καὶ (11) ἔχομεν $\text{ὅρ}x.\text{ὅρ}y=\text{ὅρ}(xy)$. Ἄν οἱ παράγοντες εἶναι τρεῖς ἢ περισσότεροι τότε ἐργαζόμεθα ὡς ἀνωτέρω ἤτοι:

$$\text{ὅρ}(xy\omega)=\text{ὅρ}[(xy)\omega]=\text{ὅρ}(xy).\text{ὅρ}\omega=\text{ὅρ}x.\text{ὅρ}y.\text{ὅρ}\omega$$

271. Θεώρημα δ΄. ***Ἐὰν τὸ ὅριον μεταβλητοῦ τινὸς ἀριθμοῦ εἶναι μηδέν, τότε τὸ ὅριον τοῦ ἀντιστρόφου του εἶναι τὸ ἄπειρον· καὶ ἀντιστρόφως.***

Θὰ δείξωμεν δηλαδὴ ὅτι ἂν $\text{ὅρ}x=0$ τότε $\text{ὅρ}\left(\frac{1}{x}\right)=\infty$, καὶ ἀντιστρόφως ἂν $\text{ὅρ}x=\infty$ τότε $\text{ὅρ}\left(\frac{1}{x}\right)=0$.

Ἀπόδειξις : α΄. Ἐπειδὴ $\text{ὅρ}x=0$, ἕπεται ὅτι ὁ x γίνεται μικρότερος παντὸς δοθέντος ἀριθμοῦ ε ὁσονδήποτε μικροῦ ἤτοι $x<\varepsilon$. Διαιροῦμεν ἀμφότερα τὰ μέλη διὰ εx ὅτε λαμβάνομεν

$$\frac{1}{x}>\frac{1}{\varepsilon}$$

Ἀλλὰ τὸ κλάσμα $\frac{1}{\varepsilon}$ ἔνθα $\text{ὅρ}\varepsilon=0$ γίνεται μεγαλύτερον παντὸς δοθέντος ἀριθμοῦ ὁσονδήποτε μεγάλου, ἄρα καὶ τὸ μεγαλύτερόν του $\frac{1}{x}$ γίνεται μεγαλύτερον παντὸς δοθέντος ἀριθμοῦ. Ἄρα $\text{ὅρ}\left(\frac{1}{x}\right)=\infty$.

β΄. Ἐπειδὴ $\text{ὅρ}x=\infty$, ἕπεται ὅτι ὁ x εἶναι μεγαλύτερος παντὸς δοθέντος ἀριθμοῦ M ὁσοδήποτε μεγάλου ἤτοι $x>M$. Διαιροῦμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἀνισότητος ταύτης διὰ Mx ὅτε λαμβάνομεν $\frac{1}{x}<\frac{1}{M}$ Ἐπειδὴ δὲ ὁ M εἶναι ὁσονδήποτε μέγας ἀριθμός, τὸ κλάσμα $\frac{1}{M}$ εἶναι ἐλάχιστον ἔχον ὅριον τὸ 0, ἔστω δὲ ὅτι εἶναι $\frac{1}{M}=\varepsilon$. Ἄρα $\frac{1}{x}<\varepsilon$ ἔνθα $\text{ὅρ}\varepsilon=0$. Ἑπομένως $\text{ὅρ}\left(\frac{1}{x}\right)=0$.

272. Θεώρημα ε΄. ***Ἄν τὸ ὅριον τοῦ μεταβλητοῦ ποσοῦ x εἶναι α, τότε τὸ ὅριον τοῦ $\frac{1}{x}$ θὰ εἶναι τὸ $\frac{1}{\alpha}$, ἂν $\alpha\neq 0$.***

Ἀπόδειξις : Ἔστω $\text{ὅρ}x=\alpha$. Ἄρα ἡ διαφορὰ $x-\alpha$ εἶναι ἐλαχίστη, τείνουσα πρὸς τὸ μηδέν. Θέτομεν $x-\alpha=\varepsilon$ ἔνθα $\text{ὅρ}\varepsilon=0$. Διαιροῦμεν ἀμφότερα τὰ μέλη διὰ αx, ὅτε ἔχομεν

$$\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{x}=\frac{\varepsilon}{\alpha x} \qquad (12)$$

Ἀλλὰ $x = \alpha + \varepsilon$. Ἄρα $\alpha x = \alpha(\alpha + \varepsilon)$, ἂν δὲ ἀμφότερα τὰ μέλη τοῦ κλάσματος $\frac{\varepsilon}{\alpha x}$, ὅπερ ἤδη γίνεται $\frac{\varepsilon}{\alpha(\alpha+\varepsilon)}$ διαιρέσωμεν διὰ ε εὑρίσκομεν

$\frac{1}{\alpha\left(\frac{\alpha}{\varepsilon}+1\right)}$ ἐπειδὴ δὲ (§ 271) $\text{ὅρ}\left(\frac{\alpha}{\varepsilon}\right) = \alpha.\text{ὅρ}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) = \alpha.\infty = \infty$

καὶ $\text{ὅρ}\left(\frac{\alpha}{\varepsilon}+1\right) = \infty$, ἕπεται ὅτι $\text{ὅρ}.\left(\frac{\varepsilon}{\alpha x}\right) = \text{ὅρ}\frac{1}{\alpha\left(\frac{\alpha}{\varepsilon}+1\right)} = \frac{1}{\infty} = 0$

Ἄρα ἐκ τῆς (12) συμπεραίνομεν ὅτι $\text{ὅρ}\frac{1}{x} = \frac{1}{\alpha}$.

273. Θεώρημα στʹ. ***Ὁ λόγος τῶν ὁρίων δύο μεταβλητῶν ποσοτήτων ἐχουσῶν ὅρια (ὧν τὸ βʹ διάφορον τοῦ μηδενὸς) ἰσοῦται μὲ τὸ ὅριον τοῦ λόγου των.***

Ἔστω $\text{ὅρ}x = \alpha$ καὶ $\text{ὅρ}y = \beta$. Θὰ δείξωμεν ὅτι

$$\frac{\text{ὅρ}x}{\text{ὅρ}y} = \text{ὅρ}\left(\frac{x}{y}\right) \quad \text{ἔνθα} \quad \beta \neq 0$$

Ἀπόδειξις: Ἐπειδὴ $\text{ὅρ}x = \alpha$ καὶ $\text{ὅρ}y = \beta$, θὰ εἶναι ἀφ' ἑνὸς μὲν $\frac{\text{ὅρ}x}{\text{ὅρ}y} = \frac{\alpha}{\beta}$, ἀφ' ἑτέρου δὲ $x - \alpha = \varepsilon$ καὶ $y - \beta = \eta$ ἢ $x = \alpha + \varepsilon$ καὶ

$y = \beta + \eta$ ἢ $\frac{x}{y} = \frac{\alpha+\varepsilon}{\beta+\eta} = \frac{\alpha}{\beta} + \left(\frac{\alpha+\varepsilon}{\beta+\eta} - \frac{\alpha}{\beta}\right) = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta\varepsilon - \alpha\eta}{\beta(\beta+\eta)}$.

Ἄρα $\frac{x}{y} - \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta\varepsilon - \alpha\eta}{\beta(\beta+\eta)}$ καὶ ἑπομένως $\text{ὅρ}\left(\frac{x}{\beta}\right) = \frac{\alpha}{\beta}$.

διότι $\text{ὅρ}.\left(\frac{\beta\varepsilon - \alpha\eta}{\beta(\beta+\eta)}\right) = 0$. Ἄρα $\frac{\text{ὅρ}x}{\text{ὅρ}y} = \text{ὅρ}\left(\frac{x}{y}\right)$.

274. Θεώρημα ζʹ. ***Ἂν μεταβλητὴ ποσότης x ἀπαύστως αὐξανομένη μένῃ μικροτέρα σταθεροῦ τινος ἀριθμοῦ α, τότε ἡ μεταβλητὴ αὕτη ποσότης ἔχει ὅριον τὸν ἀριθμὸν α ἢ ἀριθμὸν μικρότερον τοῦ α.***

Ἀπόδειξις: Εἶναι ἐξ ὑποθέσεως $x < \alpha$ ἢ $\alpha - x > 0$. Ἀλλὰ τοῦ x αὐξανομένου συνεχῶς, ἡ διαφορὰ $\alpha - x$ ἐλαττοῦται συνεχῶς, ἔστω δὲ ὅτι αὕτη ἰσοῦται μὲ ε ἔνθα $\text{ὅρ}\varepsilon = 0$. Ἑπομένως ἔχομεν $\alpha - x = \varepsilon$ καὶ ἄρα $\text{ὅρ}x = \alpha$. Ἂν ὅμως ἡ διαφορὰ $\alpha - x$ ἰσοῦται μὲ $\lambda + \varepsilon$ ἔνθα $\text{ὅρ}\varepsilon = 0$ καὶ $\lambda < \alpha$ τότε ἔχομεν : $\alpha - x = \lambda + \varepsilon$ ἢ $(\alpha - \lambda) - x = \varepsilon$ ἔνθα $\text{ὅρ}\varepsilon = 0$ καὶ ἑπομένως $\text{ὅρ}x = \alpha - \lambda$ ἤτοι τὸ ὅριον τοῦ x εἶναι ἀριθμὸς μικρότερος τοῦ α.

275. Θεώρημα ηʹ. ***Ἂν μεταβλητὴ ποσότης x ἀπαύστως ἐλατ-***

τουμένη, μένει μεγαλυτέρα σταθεροῦ τινος ἀριθμοῦ α, τότε ἡ μεταβλητὴ αὕτη ποσότης ἔχει ὅριον τὸν ἀριθμὸν α ἢ ἀριθμὸν μεγαλύτερον τοῦ α.

Ἀπόδειξις : Εἶναι ἐξ ὑποθέσεως $x>\alpha$. Ἄρα, τοῦ x ἐλαττουμένου συνεχῶς ἡ διαφορὰ $x-\alpha$ ἐλαττουμένη τείνει νὰ γίνῃ ἴση πρὸς ε ἔνθα $\text{ὅρ}\varepsilon=0$. Τότε ἔχομεν $x-\alpha=\varepsilon$ καὶ ἄρα $\text{ὅρ}x=\alpha$. Ἂν ὅμως ἡ διαφορὰ $x-\alpha$ ἰσοῦται μὲ $\lambda+\varepsilon$, ἔνθα $\text{ὅρ}\varepsilon=0$ τότε ἔχομεν $x-\alpha=\lambda+\varepsilon$ ἢ $x-(\alpha+\lambda)=\varepsilon$ καὶ ἄρα $\text{ὅρ}x=\alpha+\lambda$ ἤτοι τὸ ὅριον τοῦ x εἶνοι ἀριθμὸς μεγαλύτερος τοῦ α.

Λύσις τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ ὅταν $\text{ὅρ}x=0$.

276. Ἂν εἰς τὴν ἐξίσωσιν $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ εἶναι $\text{ὅρ}\alpha=0$, τότε ἐκ τῶν δύο ριζῶν της ἡ μὲν μία λαμβάνει τὴν ἀπροσδιόριστον μορφὴν $\frac{0}{0}$ ἡ δὲ ἄλλη τείνει πρὸς τὸ ἄπειρον.

Ἵνα ἐξαλείψωμεν τὴν ἀοριστίαν εἰς τὴν πρώτην ρίζαν ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς. Εἰς τὴν ρίζαν $x_1=\frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}$ πολλαπλασιάζομεν τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος ἐπὶ $-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}$ ὁπότε εὑρίσκομεν

$$x_1=\frac{\beta^2-(\beta^2-4\alpha\gamma)}{-2\alpha(\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma})}=-\frac{2\gamma}{\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}.$$

Ἤδη ἂν $\text{ὅρ}\alpha=0$ τότε ἔχομεν $x_1=-\frac{\gamma}{\beta}$.

Ὥστε ἂν $\text{ὅρ}\alpha=0$ τότε αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως τοῦ β΄ βαθμοῦ εἶναι $x_1=-\frac{\gamma}{\beta}$ καὶ $x_2=\infty$

II. ΟΛΙΓΑ ΤΙΝΑ ΕΠΙ ΤΗΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Ὁρισμοί.

277. Εἰς τὴν § 96 ἐδώσαμεν τὴν ἔννοιαν τῆς συναρτήσεως. Ἤδη ἐνταῦθα θὰ ἀναφέρωμεν περισσότερα τινα ἐπὶ τῶν συναρτήσεων, ὡς καὶ μερικὰ θεωρήματα σχετικὰ μὲ τὴν μεταβολὴν τῶν συναρτήσεων.

278. Μία συνάρτησις $y=\varphi(x)$ εἶναι ***ὡρισμένη*** διὰ τιμήν τινὰ x τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς x, ὅταν λαμβάνῃ αὕτη πραγματικὴν τιμήν, ἀντικαθισταμένου εἰς αὐτὴν τοῦ x διὰ τῆς τιμῆς του x, π.χ. ἡ συνάρτησις $y=2x-5$ εἶναι ὡρισμένη διότι διὰ τιμήν τινα τοῦ x, ἔστω τὴν $x=3$ αὕτη λαμβάνει τελείως ὡρισμένην τιμήν, ἤτοι γίνεται $y=1$.

279. Μία συνάρτησις $y=\varphi(x)$ λέγεται ***συνεχὴς*** διὰ τιμήν τινα x_1 τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς x, ὅταν εἶναι ὡρισμένη διὰ τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ x καὶ ὅταν ἡ διαφορὰ $\varphi(x_1+\varepsilon)-\varphi(x_1)$ τείνει πρὸς τὸ μηδὲν κατ' ἀπόλυτον τιμήν, τοῦ ε ἐλαττουμένου συνεχῶς καὶ ἔχοντος ὅριον τὸ μηδέν.

280. Μία συνάρτησις $y=\varphi(x)$ λέγεται ***συνεχὴς εἰς τὸ διάστημα*** ἀπὸ α ἕως β, ὅταν εἶναι αὕτη συνεχὴς διὰ πάσας τὰς τιμὰς τοῦ διαστήματος τούτου (α, β).

281. Μία συνάρτησις λέγεται ***ἀσυνεχὴς*** ὅταν δὲν εἶναι συνεχὴς π. χ. ἡ συνάρτησις $y=\frac{x}{x-2}$ διὰ $x=2$ γίνεται $y=\infty$ ἤτοι δὲν λαμβάνει ὡρισμένην τιμήν. Ἄρα αὕτη δὲν εἶναι συνεχὴς διὰ τὴν τιμὴν $x=2$. Ὁμοίως λέγομεν ὅτι ἡ συνάρτησις αὕτη δὲν εἶναι συνεχὴς εἰς τὸ διάστημα ἀπὸ $2-\varepsilon$ ἕως $2+\varepsilon$, ἔνθα ὅριον τοῦ ε εἶναι τὸ μηδέν.

282. Μία συνάρτησις λέγεται ***αὔξουσα*** εἴς τι διάστημα (α, β), ὅταν, αὐξανομένης τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς x, αὐξάνεται ὁμοίως καὶ ἡ συνάρτησις, π. χ. διὰ τὰς δύο τυχούσας τιμὰς τοῦ x εἰς τὸ διάστημα (α,β) τὰς x_1, x_2 ἔνθα $x_1<x_2$ ἂν ἡ συνάρτησις $y=\varphi(x)$ λαμβάνῃ τιμὰς $\varphi(x_1)$, $\varphi(x_2)$ τοιαύτας ὥστε νὰ εἶναι $\varphi(x_1)<\varphi(x_2)$, τότε ἡ συνάρτησις αὕτη καλεῖται αὔξουσα εἰς τὸ διάστημα (α, β). Δηλαδὴ ἡ συνάρτησις $y=2x-1$ εἶναι αὔξουσα διότι διὰ τὰς τιμὰς 2 καὶ 3 τοῦ x ἔνθα $2<3$ λαμβάνει ἀντιστοίχως τὰς τιμὰς 3 καὶ 5, ἔνθα $3<5$.

283. Μία συνάρτησις καλεῖται ***φθίνουσα*** εἴς τι διάστημα (α, β), ὅταν, αὐξανομένης τῆς x, ἐλαττοῦται αὕτη π.χ. διὰ δύο τιμὰς x_1, x_2 τοῦ x ἔνθα $x_1<x_2$ ἂν ἡ συνάρτησις $y=\varphi(x)$ λαμβάνῃ τιμὰς $\varphi(x_1)$, $\varphi(x_2)$ τοιαύτας ὥστε νὰ εἶναι $\varphi(x_1)>\varphi)x_2)$, τότε ἡ συνάρτησις y καλεῖται φθίνουσα εἰς τὸ διάστημα (α,β). Δηλαδὴ ἡ συνάρτησις $y=3-x$ εἶναι φθίνουσα διότι διὰ τὰς τιμὰς 2 καὶ 3 τοῦ x ἔνθα $2<3$ λαμβάνει ἀντιστοίχως τὰς τιμὰς 1 καὶ 0 ἔνθα $1>0$.

284. Δύο συναρτήσεις $\varphi(x)$ καὶ $\varphi_1(x)$ λέγομεν ὅτι ***μεταβάλλονται κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν*** εἰς διάστημά τι (α,β), ὅταν εἶναι ἀμφότεραι αὔξουσαι ἢ ἀμφότεραι φθίνουσαι εἰς τὸ διάστημα τοῦτο· λέγομεν δὲ ὅτι ***μεταβάλλονται κατ' ἀντίθετον φορὰν*** εἰς τὸ διάστημα (α,β), ὅταν εἰς τὸ διάστημα τοῦτο ἡ μία εἶναι αὔξουσα καὶ ἡ ἑτέρα φθίνουσα.

285. ***Μέγιστον.*** Ὅταν μία αὔξουσα συνεχὴς συνάρτησις παύσῃ αὐξανομένη, τότε λαμβάνει τὴν μεγίστην τιμήν της, ὁπότε λέγομεν ὅτι αὕτη ***ἔχει μέγιστον*** τὴν τιμὴν ταύτην.

286. ***Ἐλάχιστον.*** Ὅταν μία φθίνουσα συνεχὴς συνάρτησις παύσῃ ἐλαττουμένη, τότε λαμβάνει τὴν ἐλαχίστην τιμήν της, ὁπότε λέγομεν ὅτι ***ἔχει ἐλάχιστον*** τὴν τιμὴν ταύτην. Ὥστε

Μέγιστον μιᾶς συναρτήσεως καλεῖται ἡ μεγίστη τιμὴ τὴν ὁποίαν λαμβάνει ἡ συνάρτησις εἰς διάστημά τι (α, β), ἐλάχιστον δὲ ἡ ἐλαχίστη τιμὴ τὴν ὁποίαν λαμβάνει αὕτη εἰς τὸ διάστημα (α, β).

Θεωρήματα τινὰ ἐπὶ τῆς μεταβολῆς τῶν συναρτήσεων.

287. Θεώρημα α'. ***Ἡ συνάρτησις*** $y=\varphi(x)+c$, ***ἔνθα*** c ***εἶναι μία σταθερὰ ποσότης, μεταβάλλεται κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν μετὰ τῆς συναρτήσεως*** $\varphi(x)$.

Πράγματι ἔστωσαν x_1, x_2 δύο τιμαὶ τοῦ x εἰς τὸ διάστημα (α, β) τοιαῦται ὥστε νὰ εἶναι $x_1<x_2$. Ἂν ἡ $\varphi(x)$ εἶναι αὔξουσα συνάρτησις, θὰ ἔχωμεν (§ 282) $\varphi(x_1)<\varphi(x_2)$ ἢ διὰ προσθέσεως τῆς σταθερᾶς c εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη της ἔχομεν $\varphi(x_1)+c<\varphi(x_2)+c$.

Ἄρα ἡ y εἶναι (§ 282) ἐπίσης αὔξουσα συνάρτησις. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ἂν ἡ $\varphi(x)$ εἶναι φθίνουσα συνάρτησις.

Ἡ συνάρτησις λοιπὸν $y=\varphi(x)+c$ μεταβάλλεται κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν μετὰ τῆς συναρτήσεως $\varphi(x)$· π. χ. διότι ἡ συνάρτησις $y=5x$ εἶναι αὔξουσα, (§ 282) καὶ ἡ $y_1=5x+2$ θὰ εἶναι ἐπίσης αὔξουσα.

288. Θεώρημα β'. ***Τὸ γινόμενον μιᾶς συναρτήσεως $\varphi(x)$ ἐπὶ σταθεράν τινα ποσότητα c μεταβάλλεται κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν μετὰ τῆς $\varphi(x)$ ἂν ἡ σταθερὰ c εἶναι θετικὸς ἀριθμός, κατὰ τὴν ἀντίθετον δὲ φορὰν ἂν ἡ σταθερὰ c εἶναι ἀρνητικὸς ἀριθμός.***

Ἔστωσαν x_1, x_2 δύο τιμαὶ τοῦ x εἰς τὸ διάστημα (α, β) τοιαῦται ὥστε $x_1<x_2$. Ἂν ἡ $\varphi(x)$ εἶναι αὔξουσα συνάρτησις, τότε θὰ ἔχωμεν (§ 282).

$$\varphi(x_1)<\varphi(x_2) \qquad (1)$$

Ἂν πολ/σωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἀνισότητος (1) ἐπὶ c τότε αὕτη θὰ γίνῃ $c\varphi(x_1)<c\varphi(x_2)$ ἂν $c>0$ ἢ $c\varphi(x_1)>c\varphi(x_2)$ ἂν $c<0$.

Ἤτοι παρατηροῦμεν ὅτι διὰ $c>0$ ἡ $c\varphi(x)$ μεταβάλλεται κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν μετὰ τῆς $\varphi(x)$ (§ 284) καὶ διὰ $c<0$ αὕτη μεταβάλλεται κατὰ τὴν ἀντίθετον φοράν π.χ. διότι ἡ συνάρτησις $y=2x+3$ εἶναι αὔξουσα ἡ μὲν συνάρτησις $y_1=4(2x+3)$ θὰ εἶναι ἐπίσης αὔξουσα ἡ δὲ $y_2=-5(2x+3)$ θὰ εἶναι φθίνουσα (§ 284).

Ἀναλόγως ἀποδεικνύεται τὸ θεώρημα ἂν ἡ $\varphi(x)$ εἶναι φθίνουσα συνάρτησις.

289. Θεώρημα γ'. ***Τὸ τετράγωνον μιᾶς συναρτήσεως $\varphi(x)$ μεταβάλλεται κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν μετὰ τῆς $\varphi(x)$ εἰς διάστημά***

τι (α, β) ἂν εἰς τὸ διάστημα τοῦτο ἡ φ(x) εἶναι θετική. μεταβάλλεται δὲ κατὰ τὴν ἀντίθετον φορὰν ἂν εἰς τὸ διάστημα τοῦτο ἡ φ(x) εἶναι ἀρνητική.

Ἔστωσαν x_1, x_2 δύο τιμαὶ τοῦ x εἰς τὸ διάστημα (α, β) τοιαῦται ὥστε $x_1 < x_2$. Ἂν ἡ φ(x) εἶναι αὔξουσα συνάρτησις τοῦ x, τότε ἔχομεν (§ 282)

$$\varphi(x_1) < \varphi(x_2) \tag{2}$$

Ἤδη ἂν ἡ φ(x) παραμένη θετικὴ διὰ τὰς τιμὰς x_1, x_2, τότε (§ 77 ε΄.) ὑψοῦντες ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (2) εἰς τὸ τετράγωνον ἔχομεν

$$\varphi^2(x_1) < \varphi^2(x_2) \tag{3}$$

ἂν δὲ ἡ φ(x) εἶναι ἀρνητικὴ διὰ τὰς τιμὰς x_1, x_2, τότε ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (2) εἶναι ἀρνητικὰ ὁπότε τὸ α΄ μέλος της θὰ εἶναι κατ' ἀπόλυτον τιμὴν μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ β΄ μέλος της, ἤτοι θὰ εἶναι

$$|\varphi(x_1)| > |\varphi(x_2)| \tag{4}$$

Ἂν ὑψώσωμεν τὰς ἀπολύτους τιμὰς ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς (4) εἰς τὸ τετράγωνον (§ 77 ε΄.) εὑρίσκομεν

$$|\varphi^2(x_1)| > |\varphi^2(x_2)| \tag{5}$$

Ἀλλ' ἕκαστον μέλος τῆς (5) ὡς τέλειον τετράγωνον εἶναι θετικόν.

Ἄρα
$$\varphi^2(x_1) > \varphi^2(x_2) \tag{6}$$

Ἐκ τῶν (3) καὶ (6) καταφαίνεται ἡ ἀλήθεια τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος. Ὁμοίως σκεπτόμεθα ἂν ἡ φ(x) εἶναι φθίνουσα συνάρτησις τοῦ x.

290. *Πόρισμα.* Ἐὰν ὁ ν εἶναι ἄρτιος ἀριθμὸς τότε ἡ νυοστὴ δύναμις μιᾶς συναρτήσεως φ(x) μεταβάλλεται κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν μετὰ τῆς φ(x) εἰς διάστημά τι (α, β) ἂν εἰς τὸ διάστημα τοῦτο ἡ φ(x) εἶναι θετική· μεταβάλλεται δὲ κατὰ τὴν ἀντίθετον φορὰν ἂν εἰς τὸ διάστημα τοῦτο ἡ φ(x) εἶναι ἀρνητική. Ἐὰν ὁ ν εἶναι περιττὸς ἀριθμός, τότε ἡ νυοστὴ δύναμις τῆς συναρτήσεως φ(x) μεταβάλλεται κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν μετὰ τῆς φ(x) εἰς διάστημά τι (α, β).

291. Θεώρημα δ΄. ***Τὸ ἀντίστροφον μιᾶς συναρτήσεως φ(x) μεταβάλλεται κατὰ φορὰν ἀντίθετον τῆς φ(x) εἰς πᾶν διάστημα (α, β) εἰς τὸ ὁποῖον ἡ φ(x) διατηρεῖ τὸ αὐτὸ σημεῖον.***

Ἔστωσαν x_1, x_2 δύο τιμαὶ τῆς x εἰς τὸ διάστημα (α, β), εἶναι δὲ $x_1 < x_2$. Ἂν ἡ συνάρτησις φ(x) εἶναι αὔξουσα εἰς τὸ διάστημα (α, β) τότε ἔχομεν

$$\varphi(x_1) < \varphi(x_2) \tag{7}$$

Διαιροῦμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (7) διὰ τοῦ γινομένου $\varphi(x_1)\varphi(x_2)$

ὅπερ εἶναι θετικὸν διότι τὰ $\varphi(x_1)$, $\varphi(x_2)$ εἶναι ὁμόσημα ἐξ ὑποθέσεως, εὑρίσκομεν δὲ

$$\frac{1}{\varphi(x_1)} > \frac{1}{\varphi(x_2)} \tag{8}$$

Συγκρίνοντες τὰς σχέσεις (7) καὶ (8) συμπεραίνομεν τὴν ἀλήθειαν τοῦ θεωρήματος.

292. Θεώρημα ε΄. ***Τὸ ἄθροισμα δύο συναρτήσεων αἱ ὁποῖαι μεταβάλλονται κατὰ τὴν αὐτὴν φοράν, μεταβάλλεται καὶ τοῦτο κατὰ τὴν αὐτὴν φοράν.***

Ἔστωσαν αἱ συναρτήσεις $\varphi(x)$ καὶ $\varphi_1(x)$ αἱ ὁποῖαι ὑποθέσωμεν ὅτι εἶναι αὔξουσαι. Ἂν x_1, x_2 εἶναι δύο τυχοῦσαι τιμαὶ τοῦ x εἰς τὸ διάστημα (α, β), εἶναι δὲ $x_1 < x_2$ τότε ἔχομεν

$$\varphi(x_1) < \varphi(x_2)$$

$$\varphi_1(x_1) < \varphi_1(x_2) \tag{9}$$

ἢ διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη $\varphi(x_1) + \varphi_1(x_1) < \varphi(x_2) + \varphi_1(x_2)$ (10)

Συγκρίνοντες τὰς (9) καὶ (10) συμπεραίνομεν τὴν ἀλήθειαν τοῦ θεωρήματος.

III. ΜΕΓΙΣΤΟΝ Η ΕΛΑΧΙΣΤΟΝ ΤΟΥ ΤΡΙΩΝΥΜΟΥ ΤΟΥ Β΄. ΒΑΘΜΟΥ.

293. Τὸ τριώνυμον τοῦ β΄ βαθμοῦ $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ ὡς εἴδομεν εἰς τὴν παράγραφον 171 λαμβάνει τὴν μορφήν :

$$x = \alpha\left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha^2}\right] \tag{1}$$

Τὸ τριώνυμον τοῦ β΄ βαθμοῦ y εἶναι συνεχὴς συνάρτησις τοῦ x ὡς εὐκόλως δεικνύεται (§ 279). Πρὸς παρακολούθησιν τῆς μεταβολῆς τοῦ y θὰ δώσωμεν εἰς τὸν x διαφόρους τιμὰς μεταξὺ $-\infty$ καὶ $+\infty$.

Ἔστω $\alpha > 0$. Ἂν ἤδη ὁ x λάβη τὴν τιμὴν $-\infty$ τότε τὸ $\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$ γίνεται $+\infty$, ἄρα τὸ y γίνεται $+\infty$. Ἂν ὁ x αὐξανόμενος λάβῃ ὅλας τὰς τιμὰς μεταξὺ $-\infty$ καὶ $-\frac{\beta}{2\alpha}$ τότε ἡ παράστασις $\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$ ἐλαττουμένη θὰ λάβῃ ὅλας τὰς τιμὰς μεταξὺ $+\infty$ καὶ 0. Ἄρα ἐκ τῆς (1) τὸ y θὰ ὑφίσταται ἐλάττωσιν. Ἂν δὲ ὁ x γίνῃ $-\frac{\beta}{2\alpha}$ τότε τὸ y γίνεται $y = \alpha\left(\frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha^2}\right)$ ἢ $y = \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}$.

Ἂν ἤδη ὁ x ἐξακολουθήσῃ αὐξανόμενος ἀπὸ $-\frac{\beta}{2\alpha}$ μέχρι $+\infty$ τότε ἡ παράστασις $\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$ θὰ αὐξάνεται ἀπὸ 0 μέχρι $+\infty$ ἄρα καὶ τὸ y. Ἤτοι εἰς συνεχῆ αὔξησιν τοῦ x ἀπὸ $-\infty$ μέχρι $+\infty$ τὸ τριώνυμον y ἐλαττοῦται συνεχῶς ἀπὸ $+\infty$ μέχρι $\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$ καὶ κατόπιν αὐξάνεται συνεχῶς ἀπὸ $\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$ μέχρι $+\infty$. Θὰ δείξωμεν ἤδη ὅτι ἡ ἐλαχίστη τιμὴ τὴν ὁποίαν λαμβάνει τὸ τριώνυμον y εἶναι ἡ $\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$ λαμβάνει δὲ ταύτην διὰ $x=-\frac{\beta}{2\alpha}$. Ἔστωσαν δύο τιμαὶ τοῦ x ἐλάχιστον διαφέρουσαι τοῦ $-\frac{\beta}{2\alpha}$ αἱ $x_1=-\varepsilon-\frac{\beta}{2\alpha}$ καὶ $x_2=+\varepsilon-\frac{\beta}{2\alpha}$, ἔνθα ε εἶναι ἐλάχιστός τις ἀριθμὸς ἔχων ὅριον τὸ μηδέν. Τότε ἡ παράστασις $x+\frac{\beta}{2\alpha}$ γίνεται $-\varepsilon$ καὶ $+\varepsilon$, ἡ δὲ $\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$ γίνεται $(-\varepsilon)^2=\varepsilon^2$ καὶ $(+\varepsilon)^2=\varepsilon^2$, ἤτοι ἡ αὐτὴ δι᾽ ἀμφοτέρας τὰς τιμὰς τοῦ x. Ἄρα τὸ y γίνεται ἐκ τῆς σχέσεως (1)

$$y=\alpha\left[\varepsilon^2+\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha^2}\right]=\alpha\varepsilon^2+\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha} \qquad (2)$$

Παρατηροῦμεν λοιπὸν ὅτι διὰ δύο τιμὰς τοῦ x κατ᾽ ἐλάχιστον διαφερούσας τῆς τιμῆς $-\frac{\beta}{2\alpha}$ ἡ τιμὴ (2) τοῦ y εἶναι μεγαλυτέρα τῆς $\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$ κατὰ $\alpha\varepsilon^2$ ἔνθα ὅριον τοῦ ε εἶναι τὸ μηδέν. Ἄρα ἡ τιμὴ $\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$ εἶναι ἐλαχίστη.

Ἔστω ἤδη ὅτι $\alpha<0$. Τότε ὅλαι αἱ ἀνωτέρω τιμαὶ τῆς ἀγκύλης τῆς σχέσεως (1) πολλαπλασιαζόμεναι ἐπὶ τὸν ἀρνητικὸν ἀριθμὸν α λαμβάνουν ἀντίθετον σημεῖον. Συμπεραίνομεν λοιπὸν ὁμοίως ὅτι τὸ τριώνυμον y ἀπὸ τὴν τιμὴν $-\infty$ αὐξανόμενον φθάνει εἰς τὴν τιμὴν $\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$ διὰ $x=-\frac{\beta}{2\alpha}$ καὶ κατόπιν ἐλαττούμενον γίνεται πάλιν $-\infty$. Ἄρα ἂν $\alpha<0$ τὸ τριώνυμον λαμβάνει τὴν μεγίστην τιμήν του $\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$

διὰ $x=-\frac{\beta}{2\alpha}$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συμπεραίνομεν τὰ ἑξῆς:

Τὸ τριώνυμον τοῦ β΄ βαθμοῦ $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ ***ἔχει ἐλάχιστον μὲν ἂν ὁ α εἶναι θετικός, μέγιστον δὲ ἂν ὁ α εἶναι ἀρνητικός. Τὸ μέγιστον ἢ ἐλάχιστον αὐτοῦ εἶναι τὸ*** $\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$ ***λαμβάνει δὲ χώραν τοῦτο διὰ*** $x=-\frac{\beta}{2\alpha}$ ***ἤτοι ἂν ὁ x λάβη τιμὴν ἴσην πρὸς τὸ ἡμιάθροισμα τῶν ριζῶν.***

294. ***Ἕτερος τρόπος εὑρέσεως τοῦ μεγίστου ἢ ἐλαχίστου τοῦ τριωνύμου*** $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$.

Τὸ τριώνυμον τοῦ β΄ βαθμοῦ $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ γράφεται:

$$\alpha x^2+\beta x+(\gamma-y)=0 \qquad (3)$$

Ἵνα ἤδη δυνηθῶμεν νὰ παρακολουθήσωμεν τὴν μεταβολὴν τοῦ y δι' ὅλας τὰς ***πραγματικὰς*** τιμὰς τοῦ x ἀπὸ $-\infty$ ἕως $+\infty$ καὶ εὕρωμεν οὕτω τὸ μέγιστοη ἢ τὸ ἐλάχιστον αὐτοῦ, ὀφείλει ἡ ἐξίσωσις (3) νὰ ***ἔχη ρίζας πραγματικάς***. Ἡ συνθήκη πραγματικότητος τῶν ριζῶν τῆς (3) εἶναι $\beta^2-4\alpha(\gamma-y)\geqq 0$ ἢ

$$4\alpha y\geqq 4\alpha\gamma-\beta^2 \qquad (4)$$

Ἤδη, ἂν εἶναι $\alpha>0$, διαιροῦμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἀνισότητος (4) διὰ τοῦ θετικοῦ ἀριθμοῦ α ὁπότε ἔχομεν

$$y\geqq\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$$

Ἵνα λοιπὸν ἡ ἐξίσωσις (3) ἔχη ρίζας πραγματικάς, ὀφείλει ὁ y νὰ εἶναι μεγαλύτερος ἢ τουλάχιστον ἴσος πρὸς τὸ κλάσμα $\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$

Ἄρα ἡ ἐλαχίστη τιμὴ τὴν ὁποίαν δύναται νὰ λάβη τὸ y (δηλαδὴ τὸ τριώνυμον $\alpha x^2+\beta x+\gamma$) εἶναι τὸ κλάσμα $\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$. Τὸ τριώνυμον λοιπὸν y ἔχει ἐλάχιστον, ἰσούμενον μὲ τὸ ἄνω κλάσμα. Ἂν δὲ εἶναι $\alpha<0$ τότε διαιροῦμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (4) διὰ τοῦ ἀρνητικοῦ ἀριθμοῦ α ὁπότε ἡ ἀνισότης ἀντιστρέφεται, (§ 77 γ΄.) ἔχομεν δὲ

$$y\leqq\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$$

Ὁ y λοιπὸν ὀφείλει νὰ εἶναι μικρότερος ἢ τὸ πολὺ ἴσος πρὸς τὸ κλάσμα $\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$. Ἄρα ἡ μεγίστη τιμὴ τὴν ὁποίαν δύναται νὰ λάβῃ τὸ y εἶναι τὸ κλάσμα $\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$. Τὸ τριώνυμον λοιπὸν y ἔχει μέγιστον ἰσούμενον μὲ τὸ κλάσμα τοῦτο. Συμπεραίνομεν λοιπὸν καὶ οὕτω ὅσα εἰς τὴν § 293 ἐκτίθενται.

295. *Σπουδαία παρατήρησις.* Ὁ εἰς τὴν ἀνωτέρω § 294 ἐκτιθέμενος τρόπος εὑρέσεως τοῦ μεγίστου ἢ τοῦ ἐλαχίστου ἑνὸς τριωνύμου τοῦ β´ βαθμοῦ εἶναι καὶ ἁπλούστερος ἀλλὰ πρὸ παντὸς χρησιμοποιεῖται πρὸς λύσιν τῶν διαφόρων προβλημάτων ἐπὶ τῶν μεγίστων καὶ ἐλαχίστων ὡς εἰς τὰ κατωτέρω ποραδείγματα ἐκτίθεται. Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ σχηματίσωμεν ἐκ τῶν δεδομένων τοῦ προβλήματος μίαν ἐξίσωσιν περιέχουσαν τὸν ἄγνωστον ὡς ἀνεξάρτητον μεταβλητήν, καὶ τὸ προσδιορισθησόμενον μέγιστον ἢ ἐλάχιστον, ἀρκεῖ δὲ κατόπιν νὰ εὕρωμεν τὴν συνθήκην πραγματικότητος τῶν ῥιζῶν τῆς σχηματιζομένης ἐξισώσεως. Ἡ συνθήκη δὲ αὕτη εἶναι ἡ δεικνύουσα εἰς ἡμᾶς τὸ ζητούμενον μέγιστον ἢ ἐλάχιστον.

IV. ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΕΠΙ ΤΩΝ ΜΕΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ.

296. Θεώρημα α´. *Τὸ γινόμενον πολλῶν θετικῶν ἀριθμῶν ἐχόντων σταθερὸν ἄθροισμα, γίνεται μέγιστον ὅταν οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι γίνουν ἴσοι μεταξύ των.*

α´. Διὰ δύο ἀριθμούς. Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ x καὶ y οἵτινες ἔχουν σταθερὸν ἄθροισμα 2α, ἤτοι $y+x=2\alpha$. Θὰ δείξωμεν ὅτι τὸ γινόμενόν των γίνεται μέγιστον ὅταν οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι γίνουν ἴσοι, ἤτοι ἂν $x=y$.

Ἀπόδειξις : Ἔχομεν τὰς ταυτότητας $x^2+y^2+2xy=(x+y)^2$ καὶ $x^2+y^2-2xy=(x-y)^2$. Δι᾽ ἀφαιρέσεως κατὰ μέλη εὑρίσκομεν $4xy=(x+y)^2-(x-y)^2$ ἢ διότι $x+y=2\alpha$ ἔχομεν $4xy=4\alpha^2-(x-y)^2$ ἢ

$$xy=\alpha^2-\left(\frac{x-y}{2}\right)^2 \qquad (1)$$

Τὸ β´ μέλος τῆς (1) γίνεται τοσοῦτον μεγαλύτερον ὅσον μικρότερος καθίσταται ὁ ἀφαιρετέος καθόσον ὁ μειωτέος α^2 εἶναι σταθερὸς ἀριθμός, θὰ γίνῃ δὲ τοῦτο μέγιστον ὅταν ὁ ἀφαιρετέος, ὁ ὁποῖος εἶναι πάντοτε θετικὸς ὡς τέλειον τετράγωνον, λάβῃ τὴν ἐλαχίστην τιμήν του ἤτοι γίνῃ μηδέν, δηλαδὴ ὅταν $\left(\frac{x-y}{2}\right)^2=0$ ἢ $x-y=0$ ἐξ οὗ $x=y$.

Ἄρα ἂν $x=y$ τότε τὸ β΄ μέλος τῆς (1) γίνεται μέγιστον, ἄρα καὶ τὸ α΄ μέλος αὐτῆς, ἤτοι τὸ xy.

β΄. Διὰ περισσοτέρους ἀριθμούς. Ἔστωσαν οἱ ν θετικοὶ ἀριθμοὶ $x, y, \omega, \varphi \ldots\ldots$ οἵτινες ἔχουν σταθερὸν ἄθροισμα α, ἤτοι

$$x+y+\omega+\varphi+\ldots=\alpha$$

Θὰ δείξωμεν ὅτι τὸ γινόμενόν των γίνεται μέγιστον ὅταν οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι γίνουν ἴσοι.

Ἀπόδειξις : Ἀφοῦ τὸ ἄθροισμα τῶν ν ἀριθμῶν $x, y, \omega, \varphi \ldots$ εἶναι α, ἕπεται ὅτι ἕκαστος ἐξ αὐτῶν θὰ εἶναι μικρότερος τοῦ α καὶ ἄρα τὸ γινόμενόν των $xy\omega\varphi\ldots$ θὰ εἶναι μικρότερον τοῦ α^{ν}. Ἄρα τὸ γινόμενον $xy\omega\varphi\ldots$ ἔχει ὅριον.

Ἔστω ἤδη ὅτι

$$A=xy\omega\varphi\ldots \qquad (2)$$

Ὑποθέτομεν ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν παραγόντων x καὶ y εἶναι β ἤτοι $x+y=\beta$ καὶ ἀντικαθιστῶμεν ἕκαστον ἐξ αὐτῶν διὰ τοῦ $\frac{\beta}{2}$, ὁπότε διατηρεῖται τὸ ἄθροισμά των τὸ αὐτὸ διότι $\frac{\beta}{2}+\frac{\beta}{2}=\beta$, παριστῶμεν δὲ διὰ B τὸ γινόμενον αὐτῶν μετὰ τῶν $\omega, \varphi, \ldots$ ἤτοι

$$B=\frac{\beta}{2}\cdot\frac{\beta}{2}.\omega.\varphi\ldots \qquad (3)$$

Ἤδη συμφώνως πρὸς τὴν α΄ περίπτωσιν τοῦ θεωρήματος ἔχομεν

$$xy<\frac{\beta}{2}\cdot\frac{\beta}{2} \quad \text{ἢ} \quad xy\omega\varphi\ldots<\frac{\beta}{2}\cdot\frac{\beta}{2}\omega\varphi\ldots \qquad (4)$$

Ἄρα $A<B$. Συμπεραίνομεν λοιπὸν ὅτι ἂν ἀντικαταστήσωμεν δύο ἐκ τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου A δι' ἄλλων δύο ἴσων παραγόντων καὶ ἐχόντων τὸ αὐτὸ ἄθροισμα μὲ τοὺς ἀντικατασταθέντας, τότε τὸ γινόμενον αὐξάνει. Ἐξακολουθοῦντες οὕτω συμπεραίνομεν ὅτι τὸ γινόμενον θὰ αὐξάνῃ, ἐφ' ὅσον θὰ δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν δύο παράγοντας μὲ ἄλλους ἴσους μεταξύ των καὶ ἔχοντας ἄθροισμα ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἀντικαθιστωμένων. Ἄρα τὸ γινόμενον θὰ γίνῃ μέγιστον ὅταν ὅλοι οἱ παράγοντες γίνουν οὕτω ἴσοι μεταξύ των.

297. Θεώρημα β΄. ***Τὸ ἄθροισμα πολλῶν θετικῶν ἀριθμῶν ἐχόντων σταθερὸν γινόμενον γίνεται ἐλάχιστον ὅταν οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι γίνουν ἴσοι.***

α΄. Διὰ δύο ἀριθμούς : Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ x καὶ y ἔχοντες γινόμενον σταθερὸν ἔστω τὸ α^2 ἤτοι $xy=\alpha^2$. Θὰ δείξωμεν ὅτι τὸ ἄθροισμά των γίνεται ἐλάχιστον ὅταν οὗτοι γίνουν ἴσοι.

Ἀπόδειξις : Ἂν ἀφαιρέσωμεν κατὰ μέλη τὰς ἰσότητας,

$(x+y)^2=x^2+y^2+2xy$ καὶ $(x-y)^2=x^2+y^2-2xy$ εὑρίσκομεν

$$(x+y)^2=4xy+(x-y)^2$$

$$\text{ἢ} \quad (x+y)^2=4\alpha^2+(x-y)^2 \qquad (5)$$

Τὸ β΄ μέλος τῆς (5) τόσον περισσότερον ἐλαττοῦται ὅσον ἐλαττοῦται ὁ προσθετέος $(x-y)^2$ διότι ὁ $4\alpha^2$ εἶναι σταθερός. Θὰ λάβῃ δὲ τὴν ἐλαχίστην τιμήν του ὅταν τὸ $(x-y)^2$ τὸ ὁποῖον εἶναι θετικὸν ὡς τέλειον τετράγωνον, λάβῃ τὴν ἐλαχίστην τιμήν του ἤτοι ὅταν γίνῃ μηδὲν δηλαδὴ ὅταν $x=y$.

Ἄρα (§ 289) καὶ τὸ $x+y$ γίνεται ἐλάχιστον διὰ $x=y$.

β΄. Διὰ περισσοτέρους ἀριθμούς: Ἔστωσαν οἱ ν ἀριθμοὶ x, y, ω, φ.. ἔχοντες σταθερὸν γινόμενον $xy\omega\varphi\ldots=\alpha$. Θὰ δείξωμεν ὅτι τὸ ἄθροισμά των γίνεται ἐλάχιστον ὅταν $x=y=\omega=\varphi=\ldots$.

Ἀπόδειξις. Ἔστω $A=x+y+\omega+\varphi+\ldots$ (6)

Ἔστω δὲ β^2 τὸ γινόμενον τῶν δύο πρώτων ἤτοι $xy=\beta^2$. Ἂν ἀντικαταστήσωμεν ἕκαστον ἐκ τῶν x καὶ y διὰ β ἔνθα $xy=\beta.\beta=\beta^2$ (ἤτοι οἱ x καὶ y διατηροῦν τὸ αὐτὸ γινόμενον) καὶ παραστήσωμεν διὰ Β τὸ νέον ἄθροισμα θὰ ἔχωμεν

$$B=\beta+\beta+\omega+\varphi+\ldots \qquad (7)$$

Ἤδη συμφώνως πρὸς τὴν α΄ περίπτωσιν ἐπειδὴ $x+y>\beta+\beta$ ἕπεται ὅτι

$$x+y+\omega+\varphi+\ldots>\beta+\beta+\omega+\varphi+\ldots, \quad \text{ἢ } A>B. \qquad (8)$$

Παρατηροῦμεν λοιπὸν ὅτι ἂν ἀντικαταστήσωμεν δύο προσθετέους διὰ δύο ἄλλων ἴσων μεταξύ των καὶ ἐχόντων γινόμενον ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν ἀντικατασταθέντων τότε τὸ ἄθροισμα Α ἐλαττοῦται. Ἐξακολουθοῦντες οὕτω παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ἐν λόγῳ ἄθροισμα ἐλαττοῦται ἐφ᾿ ὅσον ὑπάρχουν δύο ἄνισοι ἀριθμοὶ πρός τοιαύτην ἀντικατάστασιν. Ἑπομένως τὸ ἄθροισμα Α γίνεται ἐλάχιστον ὅταν οἱ προσθετέοι x, y, ω, φ... γίνουν ἴσοι μεταξύ των.

298. Θεώρημα γ΄. ***Ἂν οἱ ἀριθμοὶ*** x, y, z ***εἶναι θετικοὶ καὶ ἔχουν σταθερὸν ἄθροισμα*** $x+y+z=\alpha$ ***τότε τὸ γινόμενον*** $x^\mu y^\nu z^\varrho$ ***γίνεται μέγιστον ὅταν οἱ*** x, y, z ***εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τοὺς ἐκθέτας των μ, ν, ρ.***

Ἀπόδειξις : Πολλαπλασιάζομεν καὶ διαιροῦμεν τὸ γινόμενον $x^\mu y^\nu z^\varrho$ διὰ τῆς σταθερᾶς ποσότητος $\mu^\mu \nu^\nu \varrho^\varrho$ ὁπότε τοῦτο γίνεται

$$\mu^\mu \nu^\nu \varrho^\varrho \left[\frac{x^\mu}{\mu^\mu} \cdot \frac{y^\nu}{\nu^\nu} \cdot \frac{\omega^\varrho}{\varrho^\varrho}\right] \qquad (9)$$

Ἀλλ᾿ ἡ ἐντὸς τῶν ἀγκυλῶν παράστασις γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς

$$\frac{x}{\mu}\cdot\frac{x}{\mu}\cdot\frac{x}{\mu}\cdots\cdots\frac{y}{\nu}\cdot\frac{y}{\nu}\cdot\frac{y}{\nu}\cdots\cdots\frac{z}{\varrho}\cdot\frac{z}{\varrho}\cdot\frac{z}{\varrho}\cdots\cdots$$

Ἡ παράστασις ὅμως αὕτη ἀποτελεῖται ἀπὸ μ παράγοντας ἴσους πρὸς $\frac{x}{\mu}$, ἀπὸ ν παράγοντας ἴσους πρὸς $\frac{y}{\nu}$ καὶ ἀπὸ ρ παράγοντας ἴσους πρὸς $\frac{z}{\varrho}$ τὸ δὲ ἄθροισμα ὅλων τούτων εἶναι

$$\frac{x}{\mu}\cdot\mu+\frac{y}{\nu}\cdot\nu+\frac{z}{\varrho}\,\varrho=x+y+z=\alpha$$

ἤτοι σταθερόν. Ἄρα (§296) ἡ παράστασις αὕτη γίνεται μεγίστη ὅταν οἱ παράγοντες αὐτῆς γίνουν ἴσοι, ἤτοι ἂν $\frac{x}{\mu}=\frac{y}{\nu}=\frac{z}{\varrho}$. Ἑπομένως (§ 288) καὶ ἡ παράστασις (9) ἄρα καὶ τὸ δοθὲν γινόμενον $x^{\mu}\,y^{\nu}\,z^{\varrho}$ γίνεται μέγιστον ὅταν $\frac{x}{\mu}=\frac{y}{\nu}=\frac{z}{\varrho}$.

299. Θεώρημα δ΄. ***Ἂν τὸ γινόμενον $x^{\mu}\,y^{\nu}\,z^{\varrho}$ εἶναι σταθερόν, τότε τὸ ἄθροισμα $x+y+z$ εἶναι ἐλάχιστον ὅταν οἱ x, y, z εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τοὺς ἐκθέτας των.***

Ἐπειδὴ τὸ γινόμενον $x^{\mu}\,y^{\nu}\,z^{\varrho}$ εἶναι σταθερὸν καὶ τὸ γινόμενον $\left(\frac{x}{\mu}\right)^{\mu}\left(\frac{y}{\nu}\right)^{\nu}\left(\frac{z}{\varrho}\right)^{\varrho}$ θὰ εἶναι ἐπίσης σταθερόν. Ἀλλὰ ἡ ἐντὸς ἀγκυλῶν παράστασις γράφεται

$$\frac{x}{\mu}\cdot\frac{x}{\mu}\cdot\frac{x}{\mu}\cdots\cdots\frac{y}{\nu}\cdot\frac{y}{\nu}\cdot\frac{y}{\nu}\cdots\cdots\frac{z}{\varrho}\cdot\frac{z}{\varrho}\cdot\frac{z}{\varrho}\cdots$$

ἐπειδὴ δὲ τὸ γινόμενον τοῦτο εἶναι σταθερόν, διὰ τοῦτο (§ 297) τὸ ἄθροισμά των γίνεται ἐλάχιστον ὅταν οὗτοι γίνουν ἴσοι, ἤτοι ὅταν $\frac{x}{\mu}=\frac{y}{\nu}=\frac{z}{\varrho}$.

300. Ἐπὶ τῇ βάσει τῶν εἰς τὴν § 294 ἀναφερομένων ἀποδεικνύονται ἁπλούστερον τὰ θεωρήματα α΄ καὶ β΄ τῶν § 296, καὶ 297 ὅταν πρόκειμαι διὰ δύο μόνον ἀριθμοὺς ἤτοι,

α΄. Τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν ἐχόντων σταθερὸν ἄθροισμα γίνεται μέγιστον ἂν οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι γίνουν ἴσοι.

Ἔστωσαν x καὶ y οἱ δύο ἀριθμοὶ ἔχοντες σταθερὸν ἄθροισμα 2α καὶ γινόμενον m· ἤτοι

$$x+y=2\alpha \quad \text{καὶ} \quad xy=m \qquad (10)$$

θὰ δείξωμεν ὅτι τὸ m γίνεται μέγιστον ἂν $x=y$. Πράγματι ἐκ τῶν σχέσεων (10) συμπεραίνομεν ὅτι (§ 165) οἱ x καὶ y εἶναι ρίζαι τῆς ἐξισώσεως.

$$\omega^2-2\alpha\omega+m=0 \qquad (11)$$

Ἡ συνθήκη πραγματικότητος τῶν ριζῶν τῆς (11) εἶναι ἡ $\alpha^2-m\geqq 0$ ἐξ ἧς $m\leqq\alpha^2$. Ἤδη τὸ m ὀφείλει νὰ εἶναι μικρότερον ἢ ἴσον μὲ α^2. Ἄρα τὸ μέγιστόν του εἶναι α^2. Ἀλλὰ τότε ἡ ἐξίσωσις (11) ἔχει ρίζας ἴσας. Ἑπομένως αἱ ρίζαι x καὶ y τῆς ἐξισώσεως (11) εἶναι ἴσαι ἤτοι $x=y$.

β'. Τὸ ἄθροιμα δύο ἀριθμῶν ἐχόντων σταθερὸν γινόμενον γίνεται ἐλάχιστον ὅταν οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι γίνουν ἴσοι,

Ἔστωσαν $x+y=2\alpha$ καὶ $xy=m$ ἔνθα m σταθερόν. Κατὰ τὰ ἀνωτέρω οἱ x καὶ y εἶναι ρίζαι τῆς ἐξισώσεως (11), ἵνα δὲ αὗται εἶναι πραγματικαί, πρέπει νὰ εἶναι $\alpha^2\geqq m$. Τὸ ἐλάχιστον λοιπὸν τοῦ α, ἄρα καὶ τοῦ 2α (§ 288) εἶναι τὸ m. Ἀλλὰ τότε ἡ (11) ἔχει ρίζας ἴσας. Ἄρα $x=y$.

Παραδείγματα ἐπὶ μεγίστων καὶ ἐλαχίστων

301. ***Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον ἢ τὸ ἐλάχιστον ἑκάστης ἐκ τῶν κάτωθι συναρτήσεων.***

α' $\qquad y=x^2+(x-6)^2$

Ἔχομεν $\qquad 2x^2-12x+36-y=0 \qquad (1)$

Τὸ μέγιστον ἢ ἐλάχιστον τῆς y λαμβάνει χώραν διὰ πραγματικὰς τιμὰς τοῦ x. Ἡ συνθήκη πραγματικότητος τῶν ριζῶν τῆς (1) εἶναι ἡ

$$\beta^2-4\alpha\gamma\geqq 0 \quad ἢ \quad 144-8(36-y)\geqq 0 \quad ἐξ\ ἧς \quad y\geqq 18.$$

Ἄρα ἡ ἐλαχίσρη τιμὴ τὴν ὁποίαν δύναται νὰ λάβῃ ὁ y εἶναι ἡ 18. Τὸ ἐλάχιστον λοιπὸν εἶναι 18.

β'. $\qquad y=x+\dfrac{1}{x}$

Ἔχομεν μετὰ τὴν ἀπαλοιφὴν τῶν παρονομαστῶν κλπ.

$$x^2-xy+1=0 \qquad (2)$$

Τὸ μέγιστον ἢ τὸ ἐλάχιστον τῆς συναρτήσεως ταύτης λαμβάνει χώραν διὰ πραγματικὰς τιμὰς τοῦ x.

Ἡ συνθήκη πραγματικότητος τῶν ριζῶν τῆς (2) εἶναι:

$$\beta^2-4\alpha\gamma\geqq 0 \quad ἢ \quad y^2-4\geqq 0 \qquad (3)$$

Αἱ ρίζαι τοῦ διωνύμου y^2-4 εἶναι 2 καὶ -2, ἵνα δὲ τοῦτο εἶναι θετικὸν ἢ τουλάχιστον μηδὲν πρέπει ὁ y νὰ κεῖται ἐκτὸς τῶν ριζῶν του (§ 180). Ἡ ἀνισότης (3) ἀληθεύει διὰ $y\leqq -2$ ἢ $y\geqq 2$.

Ἄρα ἡ συνάρτησις y ἔχει καὶ μέγιστον ἴσον μὲ -2 καὶ ἐλάχιστον ἴσον μὲ 2.

γ'. $y=\dfrac{x^2-x-4}{x-1}$.

Ἔχομεν μετὰ τὴν ἀπαλοιφὴν τῶν παρονομαστῶν κλπ.

$$x^2-(y+1)x+y-4=0 \qquad (4)$$

Ἡ συνθήκη πραγματικότητος τῶν ῥιζῶν τῆς (4) εἶναι ἡ

$$(y+1)^2-4(y-4)>0 \quad \text{ἢ} \quad y^2-2y+17>0 \qquad (5)$$

Ἤδη ἐπειδὴ ἡ (4) ἀληθεύει διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ y (§ 180γ) διὰ τοῦτο ἡ δοθεῖσα συνάρτησις δὲν ἔχει οὔτε μέγιστον οὔτε ἐλάχιστον.

302. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω τριῶν παραδειγμάτων συνάγομεν ὅτι μία συνάρτησις δύναται νὰ ἔχῃ ***μόνον μέγιστον ἢ μόνον ἐλάχιστον, ἢ καὶ μέγιστον καὶ ἐλάχιστον ἢ οὔτε μέγιστον οὔτε ἐλάχιστον.***

Ὅταν ἡ εὑρισκομένη ἐξίσωσις εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ β' βαθμοῦ, τότε πρὸς εὕρεσιν τοῦ μεγίστου ἢ τοῦ ἐλαχίστου κάμνομεν χρῆσιν τοῦ γ' θεωρήματος (§ 298) τροποποιοῦντες καταλλήλως τὴν διδομένην συνάρτησιν, ὡς εἰς τὰ κάτωθι παραδείγματα φαίνεται.

303. ***Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον ἑκάστης ἐκ τῶν κάτωθι συναρτήσεων.***

α'. $y=4x^4(\alpha^2-2x^2)$ β'. $y=x(\alpha^3-x^3)$ γ'. $y=\dfrac{x^2-\alpha^2}{x^3}$

Ἔχομεν α'. ἡ συνάρτησις y γράφεται $y=(2x^2)^2(\alpha^2-2x^2)^1$. Ἤδη ἐπειδὴ οἱ παράγοντες $2x^2$ καὶ α^2-2x^2 ἔχουν σταθερὸν ἄθροισμα α^2, διὰ τοῦτο ἡ y ἔχει μέγιστον ἂν οἱ παράγοντες οὗτοι γίνουν ἀνάλογοι τῶν ἐκθετῶν αὐτῶν (§ 298) ἤτοι ἂν

$$\frac{2x^2}{2}=\frac{\alpha^2-2x^2}{1}$$

ἐξ ἧς εὑρίσκομεν $x=\dfrac{\alpha\sqrt{3}}{3}$ καὶ ἄρα τὸ μέγιστον εἶναι $y=\dfrac{4\alpha^6}{27}$

β', Τὸ μέγιστον τῆς συναρτήσεως y λαμβάνει χώραν καθ' ὃν χρόνον καὶ τὸ μέγιστον τῆς y^3 (§ 290). Ἄρα ἔχομεν $y^3=x^3(\alpha^3-x^3)^3$

ἢ $y^3=(x^3)^1(\alpha^3-x^3)^3$ καὶ ἄρα (§ 298) $x^3=\dfrac{\alpha^3-x^3}{3}$ ἢ $x^3=\dfrac{\alpha^3}{4}$.

Ἑπομένως τὸ μέγιστον εἶναι $y=\dfrac{3\alpha^4\sqrt[3]{16}}{16}$.

γ'. Τὸ μέγιστον τῆς y λαμβάνει χώραν καθ' ὃν χρόνον καὶ τὸ μέγιστον τῆς y^2 (§ 289). Ἄρα ἔχομεν

$$y^2=\frac{(x^2-\alpha^2)^2}{x^6}=\frac{1}{x^2}\left(\frac{x^2-\alpha^2}{x^2}\right)^2=\frac{1}{x^2}\left(1-\frac{\alpha^2}{x^2}\right)^2$$

ἢ διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ τὴν σταθερὰν α^2 (§ 288) ἔχομεν

$$\alpha^2 y^2 = \left(\frac{\alpha^2}{x^2}\right)^1 \left(1 - \frac{\alpha^2}{x^2}\right)^2$$

Ἄρα (§ 298) τὸ $\alpha^2 y^2$, ἑπομένως καὶ τὸ y (§ 288), γίνεται μέγιστον ἂν

$$\frac{\alpha^2}{x^2} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\alpha^2}{x^2}\right)$$

ἐξ οὗ εὑρίσκομεν $x = \alpha\sqrt{3}$. Ἄρα τὸ μέγιστον εἶναι $y = \frac{2\sqrt{3}}{9\alpha}$.

304. ***Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐλάχιστον ἑκάστης ἐκ τῶν κάτωθι συναρτήσεων.***

α΄. $y = \frac{x^3}{(x-\alpha)^2}$; β΄, $y = \frac{\alpha^4 + x^4}{x^2}$, . γ΄. $y = x^2 + \frac{\alpha^3}{x}$

α΄. Τὸ ἐλάχιστον τῆς συναρτήσεως y λαμβάνει χώραν καθ᾽ ὃν χρόνον καὶ τὸ μέγιστον τῆς ἀντιστρόφου πρὸς αὐτὴν (§ 291). Ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ εὕρωμεν τὸ μέγιστον τῆς ἀντιστρόφου πρὸς ταύτην. Ἔχομεν λοιπὸν

$$\frac{1}{y} = \frac{(x-\alpha)^2}{x^3} = \frac{1}{x}\left(1 - \frac{\alpha}{x}\right)^2 \quad \text{ἢ} \quad \frac{\alpha}{y} = \left(\frac{\alpha}{x}\right)^1 \left(1 - \frac{\alpha}{x}\right)^2$$

Ἄρα ἡ συνάρτησις $\frac{\alpha}{y}$, ἑπομένως καὶ ἡ $\frac{1}{y}$ (§ 288) ἔχει μέγιστον ἂν (§ 298)

$$\frac{\alpha}{x} = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{\alpha}{x}\right] \quad \text{ἐξ ἧς} \quad x = 3\alpha.$$

Ἄρα διὰ $x = 3\alpha$ τὸ y γίνεται ἐλάχιστον καὶ ἴσον πρὸς $\frac{27\alpha}{4}$.

β΄. Ἔχομεν $y = \frac{\alpha^4}{x^2} + x^2$. Ἀλλὰ οἱ δύο οὗτοι προσθετέοι ἔχουν σταθερὸν γινόμενον α^4 καὶ ἑπομένως τὸ ἄθροισμά των γίνεται ἐλάχιστον ἂν γίνουν οὗτοι ἴσοι (§ 297). Ἄρα $\frac{\alpha^4}{x^2} = x^2$ ἐξ οὗ $x = \alpha$. Ἄρα διὰ $x = \alpha$ ἔχομεν ἐλάχιστον y ἴσον μὲ $2\alpha^2$.

γ΄. Τὸ ἐλάχιστον τῆς y λαμβάνει χώραν καθ᾽ ὃν χρόνον καὶ τὸ μέγιστον τοῦ ἀντιστρόφου του (§ 291) ἔχομεν λοιπὸν

$$\frac{1}{y} = \frac{x}{x^3 + \alpha^3} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\alpha^6}{y^3} = \frac{x^3(\alpha^3)^2}{(x^3+\alpha^3)^3} = \frac{x^3}{x^3+\alpha^3}\left[\frac{\alpha^3}{x^3+\alpha^3}\right]^2$$

Ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο παραγόντων $\frac{x^3}{x^3+\alpha^3}$ καὶ $\frac{\alpha^3}{x^3+\alpha^3}$ εἶναι σταθερόν, ὡς ἰσούμενον μὲ τὴν μονάδα. Ἄρα τὸ $\frac{\alpha^6}{y^3}$ ἑπομένως καὶ τὸ $\frac{1}{y}$ (§ 288) γίνεται μέγιστον ἂν (§ 298).

$$\frac{x^3}{x^3+\alpha^3}=\frac{1}{2}\left[\frac{\alpha^3}{x^3+\alpha^3}\right] \quad \text{ἐξ οὗ} \quad x=\frac{\alpha}{\sqrt[3]{2}}$$

Ἄρα διὰ $x=\dfrac{\alpha}{\sqrt[3]{2}}$ τὸ y ἔχει ἐλάχιστον καὶ ἴσον πρὸς $\dfrac{3\alpha^2}{\sqrt[3]{4}}$

Προβλήματα ἐπὶ μεγίστων καὶ ἐλαχίστων.

305. ***Νὰ διαιρεθῇ ὁ 27 εἰς δύο μέρη τοιαῦτα ὥστε τὸ τετραπλάσιον τοῦ τετραγώνου τοῦ ἑνὸς καὶ τὸ πενταπλάσιον τοῦ τετραγώνου καὶ τοῦ ἄλλου νὰ ἔχουν ἄθροισμα ἐλάχιστον.***

Ἔστω x ὁ εἷς ἀριθμός. Τότε ὁ ἄλλος θὰ εἶναι 27—x. Θὰ ἔχωμεν ἄρα

$$4x^2+5(27-x^2)=y \quad \text{ἢ} \quad 9x^2-270x+3645-y=0 \quad (1)$$

Ἡ συνθήκη πραγματικότητος τῶν ριζῶν τῆς (1) εἶναι $y \geqq 1620$. Ἄρα τὸ ἐλάχιστον ἄθροισμα εἶναι τὸ 1620. Τότε ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις (1) ἥτις θὰ ἔχῃ ρίζας ἴσας δίδει $x=15$. Ἄρα ὁ εἷς ἀριθμὸς εἶναι 15 ὁ δὲ ἄλλος 12.

306. ***Ἐξ ὅλων τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων τῶν ἐχόντων σταθερὰν περίμετρον 2τ ποῖον ἔχει τὸ μέγιστον ἐμβαδόν ;***

Ἂν α εἶναι ἡ ὑποτείνουσα, β, γ αἱ κάθετοι πλευραὶ καὶ Ε τὸ ἐμβαδὸν ἔχομεν τὰς σχέσεις :

$$\beta\gamma=2E, \quad \beta^2+\gamma^2=\alpha^2 \quad \text{καὶ} \quad \beta+\gamma+\alpha=2\tau.$$

Ἐκ τῆς γ΄ εὑρίσκομεν $\alpha=2\tau-\beta-\gamma$. Ἄρα ἡ β΄ γίνεται :

$$4\tau^2-4\tau(\beta+\gamma)+2\beta\gamma=0$$

ἢ συνεπείᾳ τῆς α΄ εὑρίσκομεν $\beta+\gamma=\dfrac{\tau^2+E}{\tau}$. Ἄρα οἱ ἀριθμοὶ β καὶ γ (§ 165) θὰ εἶναι ρίζαι τῆς ἐξισώσεως.

$$x^2-\frac{\tau^2+E}{\tau}x+2E=0 \qquad (2)$$

Ἡ συνθήκη πραγματικότητος τῶν ριζῶν τῆς (2) εἶναι ἡ

$$E^2-6\tau^2E+\tau^4 \geqq 0 \qquad (3)$$

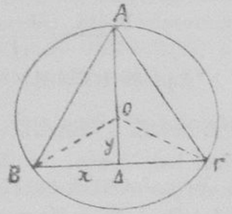
Αἱ ρίζαι τοῦ τριωνύμου τοῦ α΄ μέλους τῆς (3) εἶναι $\tau^2(3+2\sqrt{2})$ καὶ $\tau^2(3-2\sqrt{2})$. Ἄρα (§ 180) ἀληθεύει αὕτη ἂν

$$E \leqq \tau^2(3-2\sqrt{2}) \quad (4) \quad \text{ἢ} \quad E \geqq \tau^2(3+2\sqrt{2}) \quad (5)$$

Ἀλλ' ἡ ἀνισότης (5) οὐδέποτε ἀληθεύει διότι αὕτη γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς : $\beta\gamma \geqq 2\tau^2(3+2\sqrt{2})$. Ἀλλ' εἶναι $\beta<\tau$ καὶ $\gamma<\tau$ ἤτοί $\beta\gamma<\tau^2$. Ἀφοῦ λοιπὸν τὸ βγ εἶναι μικρότερον τοῦ τ^2 δὲν δύναται νὰ εἶναι ταυτοχρόνως καὶ μεγαλύτερον τοῦ $2\tau^2$ πολλαπλασιαζομένου ἐπὶ τὸν μεγαλύτερον τῆς μονάδος ἀριθμὸν $3+2\sqrt{2}$.

Ἄρα θὰ ἀληθεύῃ μόνον ἡ (4). Ἐκ τῆς (4) συμπεραίνομεν ὅτι ἡ μεγίστη τιμὴ τοῦ Ε εἶναι ἡ $\tau^2(3-2\sqrt{2})$. Ἀλλὰ τότε ἡ ἐξίσωσις (2) ἔχει ῥίζας ἴσας καὶ διότι αἱ ῥίζαι αὐτῆς εἶναι αἱ πλευραὶ β καὶ γ τοῦ τριγώνου, ἕπεται ὅτι $\beta=\gamma$. Ἄρα ἐξ ὅλων τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων τῶν ἐχόντων σταθερὰν περίμετρον 2τ μέγιστον ἐμβαδὸν ἔχει τὸ ἰσοσκελές.

307. ***Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον ἰσοσκελὲς τρίγωνον, τὸ ὁποῖον δύναται νὰ ἐγγραφῇ εἰς κύκλον ἀκτῖνος ρ.***



Ἔστω ΑΒΓ ἓν ἰσοσκελὲς τρίγωνον ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον Ο ἀκτῖνος $ΟΑ=\varrho$. Ἂν $ΒΔ=x$ καὶ $ΔΟ=y$, τότε $ΔΑ=y+\varrho$. Ἔχομεν λοιπὸν $E=x(\varrho+y)$ καὶ $x^2+y^2=\varrho^2$.

Ἡ δευτέρα γράφεται $x^2=(\varrho+y)(\varrho-y)$ ἡ δὲ α' ὑψουμένη εἰς τὸ τετράγωνον δίδει

$$x^2(\varrho+y)^2=E^2$$

διαιροῦντες δὲ κατὰ μέλη τὰς δύο τελευταίας ἐξισώσεις εὑρίσκομεν

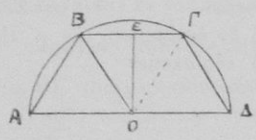
$$(\varrho+y)^3(\varrho-y)^1=E^2 \qquad (6)$$

Εἰς τὴν σχέσιν (6) ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα τῶν $\varrho+y$ καὶ $\varrho-y$ εἶναι 2ϱ, ἤτοι σταθερόν, ἕπεται ὅτι τὸ γινόμενόν των εἶναι μέγιστον ὅταν οἱ παράγοντες οὗτοι εἶναι ἀνάλογοι τῶν ἐκθετῶν των (§ 298). Ἄρα

$$\frac{\varrho+y}{3}=\frac{\varrho-y}{1}$$

ἐξ οὗ $y=\frac{1}{2}\varrho$. Ἀλλ' ἂν $y=\frac{1}{2}\varrho$ τότε ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΒΔ συμπεραίνομεν ὅτι ἡ γωνία ΟΒΔ εἶναι 30° καὶ ἄρα ἡ ΒΟΔ εἶναι 60° ἄρα καὶ ἡ ΒΑΓ εἶναι 60°. Ἄρα τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσόπλευρον. Τὸ μέγιστον λοιπὸν ἐμβαδὸν ἔχει τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον.

308. ***Εἰς δοθὲν ἡμικύκλιον ἀκτῖνος R νὰ ἐγγραφῇ τὸ μέγιστον τραπέζιον καὶ νὰ εὑρεθῇ ἡ περίμετρος τούτου (Εὐελ. 1933).***



Ἔστω ΑΒΓΔ ἓν τραπέζιον ἐγγεγραμμένον εἰς τὸ ἡμικύκλιον διαμέτρου $ΑΟΒ=2R$. Εἶναι γνωστὸν ὅτι τὸ τραπέζιον τοῦτο εἶναι ἰσοσκελές. Διότι ΑΒ=ΓΔ ὡς χορδαὶ τόξων περιεχομένων μεταξὺ τῶν παραλλήλων χορδῶν ΑΔ καὶ ΒΓ καὶ ἄρα ἴσων). Ἔστω $ΒΓ=2x$ ἡ ἄνω βάσις καὶ $ΕΟ=\upsilon$ τὸ ὕψος του. Ἔχομεν

$$E=(R+x)\upsilon \qquad (7)$$

Ἀλλὰ ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΕΒΟ ἔχομεν $υ^2=R^2-x^2$. Ἂν ὑψώσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (7) εἰς τὸ τετράγωνον καὶ θέσωμεν $υ^2=R^2-x^2=(R+x)(R-x)$ εὑρίσκομεν

$$E^2=(R+x)^3(R-x)^1 \qquad (8)$$

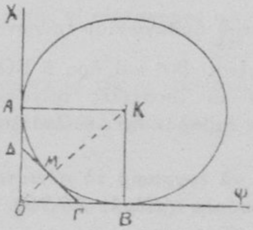
Οἱ παράγοντες $R+x$ καὶ $R-x$ τοῦ β' μέλους τῆς (8) ἔχουν σταθερὸν ἄθροισμα 2R. Ἄρα ἔχουν οὗτοι γινόμενον μέγιστον ὅταν γίνουν ἀνάλογοι τῶν ἐκθετῶν αὐτῶν (§ 298), ἤτοι ὅταν εἶναι

$$\frac{R+x}{3}=\frac{R-x}{1} \quad \text{ἐξ ἧς} \quad x=\frac{R}{2} \quad \text{καὶ ἄρα} \quad 2x=R.$$

Ἄρα ἂν ΒΓ=R, τότε τὸ E^2, ἑπομένως (§ 289) καὶ τὸ Ε, εἶναι μέγιστον καὶ ἴσον πρὸς $\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$. Ἀλλὰ τότε τὸ τρίγωνον ΒΟΓ θὰ εἶναι ἰσόπλευρον, τὸ δὲ ΑΒΓΟ θὰ εἶναι παραλληλόγραμμον καὶ τὸ τραπέζιον ΑΒΓΔ θὰ εἶναι κανονικὸν ἡμιεξάγωνον. Ἄρα ΑΒ=ΒΓ=ΓΔ=R, ἡ δὲ περίμετρος τοῦ τραπεζίου ΑΒΓΔ εἶναι 5R.

309. *Δίδεται κύκλος ἀκτῖνος R, ἐφαπτόμενος εἰς δύο καθέτους εὐθείας ΟΧ καὶ ΟΨ εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β. Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Μ τοῦ τόξου ΑΒ τοιοῦτον ὥστε ἡ ἐξ αὐτοῦ ἀγομένη ἐφαπτομένη καὶ περατουμένη εἰς τὰς δύο εὐθείας νὰ ἔχῃ μῆκος ἐλάχιστον, νὰ εὑρεθῇ δὲ τότε τὸ μῆκος ταύτης συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος R. (Εὐελπίδων 1931).*

Ἔστω ΓΜΔ τυχοῦσα ἐφαπτομένη εἰς τὸ σημεῖον Μ τοῦ τόξου ΑΜΒ τοῦ δοθέντος κύκλου Κ καὶ περατουμένη εἰς τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας ΧΟΨ. Ἔχομεν προφανῶς ΓΜ=ΓΒ καὶ ΔΜ=ΔΑ. Ἄρα ἡ περίμετρος τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΔΟΓ εἶναι σταθερὰ ὡς ἰσουμένη μὲ ΟΑ+ΟΒ=2R. Ἂν ἤδη θέσωμεν ΟΓ=λ καὶ ΟΔ=μ ὀνομάσωμεν δὲ διὰ y τὴν ἐφαπτομένην ΓΔ τῆς ὁποίας ζητοῦμεν τὸ ἐλάχιστον, ἤτοι ΔΓ=y,



ἔχομεν $λ+μ=2R-y$ καὶ $λ^2+μ^2=y^2$

ἢ ἂν ὑψώσωμεν τὴν α' εἰς τὸ τετράγωνον καὶ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τὴν β' εὑρίσκομεν :

$$y=R-\frac{λμ}{2R} \qquad (8)$$

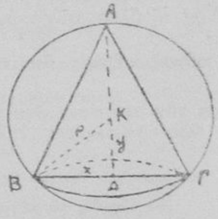
Ἤδη εἰς τὴν σχέσιν (8) τὸ λμ παριστᾶ τὸ διπλάσιον ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΔΟΓ. Ἀλλὰ (§ 307) τοῦτο γίνεται μέγιστον ὅταν τὸ τρίγωνον ΟΔΓ εἶναι ἰσοσκελές. Εἶναι προφανὲς λοιπὸν ὅτι ὅσον μεγαλύτερος γίνεται ὁ ἀφαιρετέος τῆς διαφορᾶς τοῦ β΄ μέλους τῆς (8) τόσον μικροτέρα καθίσταται ἡ διαφορὰ αὕτη. Ἄρα θὰ εἶναι τὸ y ἐλάχιστον ὅταν τὸ λμ, ἤτοι τὸ διπλάσιον ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΔΟΓ γίνῃ μέγιστον, ἤτοι ὅταν $\lambda=\mu$, δηλαδὴ ὅταν τὸ ΔΟΓ γίνῃ ἰσοσκελές. Ἀλλὰ τότε εἶναι γων.ΟΔΓ=45°. Ἄγομεν τὴν ΜΚ ὁπότε ἐκ τοῦ τετραπλεύρου ΑΔΜΚ εἶναι γωνΚΑΔ=γωνΚΜΔ=90° καὶ ἄρα γωνΑΚΜ=45°, ἤτοι τοξΑΜ=τοξΜΒ ἡ δὲ ΚΜ ὡς διχοτομοῦσα τὴν ὀρθὴν γωνίαν ΑΚΒ εἶναι διαγώνιος τοῦ τετραγώνου ΑΚΒΟ. Ἡ ἐλαχίστη λοιπὸν ἐφαπτομένη ἄγεται ἐκ τοῦ μέσου Μ τοῦ τόξου ΑΒ. Πρὸς εὕρεσιν τοῦ μήκους τῆς ΔΓ σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς: Ἔχομεν $OK=R\sqrt{2}$, $OM=OK-KM=R(\sqrt{2}-1)$ καὶ ἐπειδὴ $\Delta M=M\Gamma=MO$ ἢ $\Delta\Gamma=2(MO)$ ἕπεται ὅτι $\Delta\Gamma=2R(\sqrt{2}-1)$.

310. *Νὰ ἐγγραφῇ εἰς δοθεῖσαν σφαῖραν ἀκτῖνος ρ κῶνος ἔχων τὸν μέγιστον ὄγκον.*

Ἔστω ΑΒΓ τυχὼν κῶνος ἐγγεγραμμένος εἰς τὴν σφαῖραν Κ. Ὁ ὄγκος του εἶναι

$$V=\frac{1}{3}\pi x^2(\rho+y) \qquad (10)$$

καθόσον τὸ μὲν ὕψος του εἶναι $A\Delta=\rho+y$, ἂν διὰ y παραστήσωμεν τὴν ΚΔ, ἡ δὲ ἀκτὶς τῆς βάσεώς του εἶναι $B\Delta=x$. Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου ὅμως τριγώνου ΒΚΔ ἔχομεν $x^2=\rho^2-y^2$. Ἀντικαθιστῶντες τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ x^2 εἰς τὴν (10) εὑρίσκομεν:



$$V=\frac{1}{3}\pi(\rho+y)^2(\rho-y) \qquad (11)$$

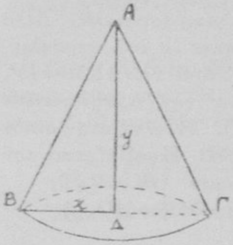
Ἤδη, ἐπειδὴ οἱ παράγοντες $\rho+y$ καὶ $\rho-y$ ἔχουν σταθερὸν ἄθροισμα, ἕπεται ὅτι τὸ γινόμενον $(\rho+y)^2(\rho-y)$, ἄρα καὶ τὸ V γίνεται μέγιστον ἂν οἱ παράγοντες οὗτοι γίνουν ἀνάλογοι τῶν ἐκθετῶν των (§ 298) ἤτοι ἂν

$$\frac{\rho+y}{2}=\frac{\rho-y}{1} \quad \text{ἐξ ἧς} \quad y=\frac{\rho}{3}$$

Ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ λάβωμεν ἐπὶ μιᾶς διαμέτρου καὶ ἐκ τοῦ κέντρου ἀρχόμενοι τμῆμα $K\Delta=\frac{\rho}{3}$ καὶ ἐκ τοῦ Δ νὰ φέρωμεν ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν ΔΚΑ καὶ οὕτω ὁρίζεται ἡ βάσις ΒΓ τοῦ μεγίστου κώνου Ὁ ὄγκος τοῦ μεγίστου τούτου κώνου εἶναι $\frac{32\pi\rho^3}{81}$.

311. *Ἐξ ὅλων τῶν κώνων οἱ ὁποῖοι ἔχουν τὴν αὐτὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν πα² ποῖος εἶναι ὁ ἔχων τὸν μέγιστον ὄγκον;*

Ἔστω x ἡ ἀκτὶς ΒΔ τῆς βάσεως καὶ y τὸ ὕψος ΑΔ ἑνὸς κώνου ἔχοντος κυρτὴν ἐπιφάνειαν $\pi\alpha^2$. Ὁ ὄγκος τοῦ κώνου τούτου εἶναι



$$V=\frac{1}{3}\pi x^2 y \qquad (12)$$

ἡ δὲ κυρτὴ ἐπιφάνειά του εἶναι $\pi x(BA)$ ἢ $\pi x\sqrt{x^2+y^2}$ διότι $(AB)^2=x^2+y^2$. Ἄρα $x\sqrt{x^2+y^2}=\alpha^2$ ἢ $x^2(x^2+y^2)=\alpha^4$ ἐξ ἧς $y^2=\dfrac{\alpha^4-x^4}{x^2}$. Ὑψοῦμεν τὴν (12) εἰς τὸ τετράγωνον καὶ θέτομεν εἰς αὐτὴν τὴν τιμὴν τοῦ y^2 ὁπότε εὑρίσκομεν

$$V^2=\frac{1}{9}\pi^2x^2(\alpha^4-x^4) \quad \text{ἢ} \quad V^4=\frac{1}{81}\pi^4x^4(\alpha^4-x^4)^2 \qquad (12')$$

Ἤδη εἰς τὴν (12′) ἐπειδὴ οἱ x^4 καὶ α^4-x^4 ἔχουν σταθερὸν ἄθροισμα α^4, διὰ τοῦτο τὸ γινόμενόν των ἄρα καὶ τὸ V γίνεται μέγιστον (§ 298) ἂν οἱ παράγοντες οὗτοι γίνουν ἀνάλογοι τῶν ἐκθετῶν αὐτῶν ἤτοι ἂν

$$\frac{x^4}{1}=\frac{\alpha^4-x^4}{2} \quad \text{ἐξ ἧς} \quad x=\frac{\alpha}{\sqrt[4]{3}} \quad \text{καὶ ἄρα} \quad y=\alpha\sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{3}}$$

Ἄρα ἐξ ὅλων τῶν κώνων τῶν ἐχόντων τὴν αὐτὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν ὁ κῶνος ὁ ἔχων ἀκτῖνα βάσεως τὴν $\dfrac{\alpha}{\sqrt[4]{3}}$ καὶ ὕψος τὸ $\alpha\sqrt{\dfrac{2\sqrt{3}}{3}}$ ἔχει τὸν μέγιστον ὄγκον.

Ἀσκήσεις πρὸς λύσιν.

Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον ἢ ἐλάχιστον τῶν κάτωθι συναρτήσεων

965. $y=\dfrac{5x^2+8x-1}{x^2+1}$ 966. $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-4x+3}$ 967. $y=\dfrac{14-9x^2}{9-6x}$

968. $y=\dfrac{\alpha+x}{\alpha-x}+\dfrac{\alpha-x}{\alpha+x}$ 969. $y=\dfrac{1-2x^3}{x^2+4x+4}$ 970. $y=\dfrac{2x-3}{x^2-2x+3}$

971. $y=\sqrt{3-x}+\sqrt{5x-4}$ 972. $y=x\sqrt{x(1-x^3)}$

973. $y=x^2(\alpha-\beta x)$ ἔνθα $\alpha>0$, $\beta>0$.

974. Νὰ μοιρασθῇ ὁ ἀριθμὸς 1225 εἰς δύο μέρη τοιαῦτα ὥστε τὸ ἄθροισμα τοῦ τριπλασίου τῆς τετραγ. ρίζης τοῦ ἑνὸς καὶ τοῦ τετραπλασίου τῆς τετραγ. ρίζης τοῦ ἄλλου νὰ εἶναι μέγιστον.

975. Νὰ μοιρασθῇ ὁ ἀριθμὸς 10 εἰς δύο μέρη τοιαῦτα ὥστε τὸ τετράγωνον τοῦ ἑνὸς καὶ ὁ κύβος τοῦ ἑτέρου νὰ ἔχουν τὸ μέγιστον γινόμενον.

976. Τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν ἐχόντων σταθερὸν ἄθροισμα τετραγώνων γίνεται μέγιστον ἂν οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι γίνουν ἴσοι.

977. Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων δύο ἀριθμῶν ἐχόντων σταθερὸν γινόμενον γίνεται ἐλάχιστον ὅταν οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι γίνουν ἴσοι.

978. Τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν ἐχόντων σταθερὸν ἄθροισμα τετραγώνων γίνεται μέγιστον ὅταν οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι γίνουν ἴσοι.

979. Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων δύο ἀριθμῶν ἐχόντων σταθερὸν ἄθροισμα γίνεται ἐλάχιστον ὅταν οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι γίνουν ἴσοι.

980. Τὸ ἄθροισμα τριῶν ἀριθμῶν ἀποτελούντων γεωμετρικὴν πρόοδον εἶναι α. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον ἢ τὸ ἐλάχιστον τοῦ γινομένου των.

981. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον ἢ τὸ ἐλάχιστον τῆς συναρτήσεως

$$y=(x^2-1)^2+7$$

982. Νὰ ὁρισθῇ ὁ α ἵνα τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως $x^2-(\alpha-2)x-(\alpha+3)=0$ νὰ εἶναι ἐλάχιστον.

983. Νὰ ὁρισθοῦν οἱ συντελεσταὶ τοῦ τριωνύμου $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ εἰς τρόπον ὥστε τοῦτο νὰ διαιρῆται διὰ $x-8$ καὶ νὰ ἔχῃ ἐλάχιστον τὸ -12 διὰ $x=6$.

984. Νὰ ὁρισθοῦν οἱ συντελεσταὶ τοῦ τριωνύμου $x^2+\lambda x+\mu$ εἰς τρόπον ὥστε νὰ ἔχῃ ἐλάχιστον α, νὰ ἰσοῦται δὲ τοῦτο μὲ $\beta+\frac{1}{4}$ διὰ $x=\frac{1}{2}$.

985 Ἂν $x+y=\alpha$ νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον ἢ ἐλάχιστον τοῦ x^3+y^3.

986. Εἰς τὸ κλάσμα $\frac{2\alpha x+\beta}{x^2+1}$ ποίαν τιμὴν πρέπει νὰ λάβουν οἱ ἀριθμοὶ α καὶ β ἵνα τοῦτο ἔχῃ μέγιστον τὸ 4 καὶ ἐλάχιστον τὸ -1.

987. Νὰ ὁρισθοῦν τὰ λ καὶ μ ἵνα ἡ παράστασις $\frac{x^2+\lambda x+\mu}{x}$ ἔχῃ μέγιστον τὸ α καὶ ἐλάχιστον τὸ β.

988. Δίδονται οἱ ἀριθμοὶ λ καὶ α ἐξ ὧν $\lambda>0$. Νὰ ὁρισθοῦν οἱ ἀριθμοὶ β καὶ γ ἵνα ἡ παράστασις $\beta x+\frac{\gamma}{x}$ ἔχῃ ἐλάχιστον τὸ λ διὰ $x=\alpha$.

989. Νὰ εὑρεθῇ ἡ σχέσις ἡ συνδέουσα τὰ α καὶ β ἵνα τὸ μέγιστον τῆς παραστάσεως $\frac{x^2+2\alpha x+1}{x^2+2\beta x+1}$ εἶναι ἀντίθετον πρὸς τὸ ἐλάχιστον αὐτῆς.

990. Ἐξ ὅλων τῶν τριγώνων τῶν ἐχόντων τὴν αὐτὴν περίμετρον ποῖον ἔχει τὸ μέγιστον ἐμβαδόν ;

991. Εἰς ἰσόπλευρον τρίγωνον πλευρᾶς α νὰ ἐγγραφῇ ἕτερον ἰσόπλευρον τρίγωνον ἔχον ἐμβαδὸν ἐλάχιστον.

992. Εἰς τετράγωνον πλευρᾶς α νὰ ἐγγραφῇ τετράγ. ἔχον ἐμβαδὸν ἐλάχιστον

993. Ἔχομεν φύλλον χάρτου σχήματος τετραγώνου ΑΒΓΔ πλευρᾶς α. Εἰς τὰς τέσσαρας γωνίας του νὰ κατασκευασθοῦν τέσσαρα ἴσα τετράγωνα, ἀνὰ ἓν εἰς ἑκάστην γωνίαν, τὰ ΑΙΕΣ, ΒΠΘΡ, ΓΝΗΜ, ΔΚΖΛ τοιαῦτα ὥστε ἂν ἀποκόψωμεν ταῦτα τὸ δὲ ὑπολοιπόμενον μέρος μετατρέψωμεν εἰς κυτίον ἔχον βάσιν τό ΕΘΗΖ, τὸ κυτίον τοῦτο νὰ ἔχῃ τὸν μέγιστον ὄγκον.

994. Νὰ ἐξετασθῇ ἡ ἰδία ὡς ἀνωτέρω ἄσκησις ἂν ἀντὶ τετραγώνου ΑΒΓΔ δοθῇ ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ ἔχον διαστάσεις α καὶ β.

995. Εἰς δοθεῖσαν σφαῖραν ἀκτῖνος R νὰ ἐγγραφῇ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ἔχον τὸν μέγιστον ὄγκον.

996. Εἰς δοθεῖσαν σφαῖραν ἀκτῖνος R νὰ ἐγγραφῇ κύλινδρος ἔχων τὸν μέγιστον ὄγκον.

997. Εἰς δοθεῖσαν σφαῖραν ἀκτῖνος R νὰ ἐγγραφῇ ὀρθὸς κῶνος ἔχων τὴν μεγίστην παράπλευρον ἐπιφάνειαν.

998. Εἰς δοθεῖσαν σφαῖραν ἀκτῖνος R νὰ ἐγγραφῇ ὀρθὸς κῶνος ἔχων τὸν μέγιστον ὄγκον.

999. Εἰς δοθεῖσαν σφαῖραν ἀκτῖνος R νὰ περιγραφῇ ὀρθὸς κῶνος ἔχων τὸν ἐλάχιστον ὄγκον.

1000. Εἰς δοθεῖσαν σφαῖραν ἀκτῖνος R νὰ περιγραφῇ ὀρθὸς κῶνος ἔχων τὴν ἐλαχίστην παράπλευρον ἐπιφάνειαν.

1001. Ἐξ ὅλων τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων τῶν ἐχόντων τὴν αὐτὴν περίμετρον ποῖον ἔχει τὴν ἐλαχίστην ὑποτείνουσαν ;

1002. Ἐξ ὅλων τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων τῶν ἐχόντων τὴν αὐτὴν ὑποτείνουσαν ποῖον ἔχει τὸ μέγιστον ἐμβαδόν ;

1003. Ἐξ ὅλων τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων τῶν ἐχόντων τὴν αὐτὴν ὑποτείνουσαν ποῖον ἔχει τὴν μεγίστην περίμετρον ;

1004. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον ἢ τὸ ἐλάχιστον τῆς ἀκτῖνος τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου εἰς ὀρθογώνιον τρίγωνον ἔχον δοθεῖσαν περίμετρον 2τ.

1005. Ἐξ ὅλων τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων τῶν ἐχόντων τὸ αὐτὸ ἐμβαδὸν k^2 ποῖον ἔχει τὴν ἐλαχίστην περίμετρον ;

1006. Εἰς δοθέντα κύκλον ἀκτῖνος ρ νὰ περιγραφῇ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ἔχον ἐλάχιστον ἐμβαδόν.

1007. Εἰς δοθέντα κύκλον ἀκτῖνος ρ νὰ περιγραφῇ ρόμβος ἔχων ἐλάχιστον ἐμβαδόν.

1008. Δίδεται περιφέρεια ἀκτῖνος ρ. Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον ἔχον ἐμβαδὸν μέγιστον καὶ τοῦ ὁποίου ἡ μὲν μία πλευρὰ νὰ εἶναι χορδὴ τῆς περιφερείας, ἡ δὲ ἀπέναντί της πλευρὰ νὰ εἶναι ἐφαπτομένη ταύτης.

1009. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον ἢ ἐλάχιστον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀποστάσεων σημείου τινὸς Μ κινουμένου ἐπὶ δοθείσης περιφερείας ἀκτῖνος ρ ἀπὸ δύο διδομένας καθέτους ἐπ' ἀλλήλας διαμέτρους τῆς περιφερείας.

1010. Εἰς δοθέντα κῶνον νὰ ἐγγραφῇ κύλινδρος ἔχων τὸν μέγιστον ὄγκον.

1011. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον τοῦ ὄγκου κώνου ἔχοντος δοθεῖσαν πλευρὰν α.

1012. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον τοῦ ὄγκου κυλίνδρου ἔχοντος δοθεῖσαν ὁλικὴν ἐπιφάνειαν $\pi\alpha^2$.

1013. Δίδεται κύκλος ἀκτῖνος ρ καὶ διάμετρος τούτου ΑΒ· ἄγομεν τυχοῦσαν χορδὴν ΓΔ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον τῆς διαφορᾶς τῶν σχηματιζομένων οὕτω τριγώνων ΑΓΔ καὶ ΒΓΔ τῶν ἐχόντων κοινὴν βάσιν τὴν χορδὴν ΓΔ.

1014. Δίδονται δύο σημεῖα Α καὶ Ο τοιαῦτα ὥστε ΑΟ=α. Μὲ κέντρον τὸ Ο καὶ ἀκτῖνα τυχοῦσαν γράφομεν περιφέρειαν καὶ ἄγομεν ἐκ τοῦ Α τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ ἐφαπτομένας εἰς ταύτην. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ὡς καὶ τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΟΓ.

1015. Εἰς δοθεῖσαν σφαῖραν νὰ ἐγγραφῇ κόλουρος κῶνος ἔχων τὴν μεγίστην παράπλευρον ἐπιφάνειαν καὶ ὡς μεγαλυτέραν βάσιν μέγιστον κύκλον τῆς σφαίρας.

1016. Εἰς δοθέντα κύκλον ἀκτῖνος ρ νὰ ἐγγραφῇ ἰσοσκελὲς τρίγωνον τοιοῦτον ὥστε ἂν τοῦτο περιστραφῇ περὶ τὴν βάσιν του, ὁ παραγόμενος ὄγκος νὰ εἶναι μέγιστος.

1017. Δίδεται σφαῖρα καὶ ὁ εἰς αὐτὴν ἐγγεγραμμένος ἰσόπλευρος κῶνος. Νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν τοῦ κώνου εἰς τρόπον ὥστε ἡ διαφορὰ τῶν ἐμβαδῶν τῶν δύο τομῶν τῆς σφαίρας καὶ τοῦ κώνου νὰ εἶναι μεγίστη ἢ ἐλαχίστη.

1018. Νὰ ὁρισθοῦν αἱ διαστάσεις σφαιρικοῦ τμήματος μὲ μίαν βάσιν εἰς τρόπον ὥστε ἡ κυρτὴ ἐπιφάνειά του νὰ εἶνε $\pi\alpha^2$, ὁ δὲ ὄγκος του νὰ εἶνε μέγιστος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Θ'.

ΠΡΟΟΔΟΙ — ΣΕΙΡΑΙ

I. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑΙ ΠΡΟΟΔΟΙ.

312. ***Ἀριθμητικὴ πρόοδος*** (ἢ πρόοδος κατὰ διαφορὰν) καλεῖται σειρὰ ἀριθμῶν, ἕκαστος ἐκ τῶν ὁποίων γίνεται ἀπὸ τὸν προηγούμενόν του διὰ τῆς προσθήκης τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ὅστις καλεῖται ***λόγος*** τῆς προόδου· π. χ. ἡ σειρά.

$$\alpha,\ \alpha+\omega,\ \alpha+2\omega,\ \alpha+3\omega,\ldots\ldots\alpha+(\nu-1)\omega \qquad (1)$$

εἶναι ἀριθμητικὴ πρόοδος μὲ πρῶτον ὅρον τὸν α καὶ λόγον τὸν ω.

Ἡ πρόοδος καλεῖται ***αὔξουσα*** μὲν ἂν οἱ ὅροι βαίνουν αὐξανόμενοι (δηλαδὴ ἂν ὁ λόγος εἶναι θετικός), ***φθίνουσα*** δὲ ἂν οἱ ὅροι βαίνουν ἐλαττούμενοι (δηλαδὴ ἂν ὁ λόγος εἶναι ἀρνητικός).

313. ***Ὁ τελευταῖος ὅρος*** μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου, ὅστις παρίσταται συνήθως διὰ τ, ἐκ τῆς σχέσεως (1) συμπεραίνομεν ὅτι ἰσοῦται μὲ $\alpha+(\nu-1)\omega$ ἤτοι

$$\tau=\alpha+(\nu-1)\omega \qquad (2)$$

314. ***Πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἀθροίσματος Σ*** τῶν ν ὅρων μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς :

Ἔστω ἡ ἀριθμητικὴ πρόοδος

$$\Sigma=\alpha+\beta+\gamma+\ldots\ldots+\varrho+\sigma+\tau \qquad (3)$$

ἢ

$$\Sigma=\tau+\sigma+\varrho+\ldots\ldots+\gamma+\beta+\alpha$$

Προσθέτοντες κατὰ μέλη εὑρίσκομεν

$$2\Sigma=(\alpha+\tau)+(\beta+\sigma)+(\gamma+\varrho)+\ldots\ldots+(\varrho+\gamma)+(\sigma+\beta)+(\tau+\alpha) \qquad (4)$$

Ἀλλὰ ἐκ τῆς σχέσεως (1) ἔχομεν (§ 312) $\beta=\alpha+\omega$, $\sigma=\tau-\alpha$ ἢ προσθέτοντες κατὰ μέλη ἔχομεν $\beta+\sigma=\alpha+\tau$. Ὁμοίως εὑρίσκομεν $\gamma+\varrho=\alpha+\tau$ ἤτοι παρατηροῦμεν ὅτι ***τὸ ἄθροισμα δύο ὅρων ἀπεχόντων ἰσάκις ἀπὸ τὰ ἄκρα ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἄκρων ὅρων.*** Ἄρα ἡ (4) δίδει

$$2\Sigma=(\alpha+\tau)\nu \quad \text{ἐξ ἧς} \quad \Sigma=\frac{(\alpha+\tau)\nu}{2} \qquad (5)$$

Αἱ σχέσεις (2) καὶ (5) ἀποτελοῦν σύστημα δύο ἐξισώσεων ἂν δὲ ἐκ τῶν πέντε ἀγνώστων α, τ, ω, ν, Σ, μᾶς δοθοῦν οἱ τρεῖς, τότε εὑρίσκομεν τοὺς ὑπολοίπους δύο ἐκ τῶν δύο σχέσεων (2) καὶ (5).

315. Ὅταν τρεῖς ἀριθμοὶ α, β, γ καθ᾽ ἣν τάξιν ἐγράφησαν ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον, τότε ὁ μεσαῖος ὅρος β ἰσοῦται μὲ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν δύο ἄλλων, καλεῖται δὲ οὗτος ***ἀριθμητικὸς μέσος*** τῶν δύο ἄλλων. Πράγματι ὁ λόγος τῆς προόδου ταύτης εἶναι $\beta-\alpha$ ἢ $\gamma-\beta$. Ἄρα $\beta-\alpha=\gamma-\beta$ ἐξ ἧς $2\beta=\alpha+\gamma$.

II. ΑΡΜΟΝΙΚΑΙ ΠΡΟΟΔΟΙ

316. ***Ἁρμονικὴ πρόοδος*** καλεῖται σειρὰ ἀριθμῶν τῶν ὁποίων οἱ ἀντίστροφοι ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον. Οὐδεὶς τύπος ὑπάρχει παρέχων τὸν νυοστὸν ὅρον καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ν ὅρων μιᾶς ἁρμονικῆς προόδου.

317. Ὅταν τρεῖς ἀριθμοὶ α, β, γ καθ᾽ ἣν τάξιν ἐγράφησαν ἀποτελοῦν ἁρμονικὴν πρόοδον, τότε ὁ μεσαῖος ὅρος β, ὅστις καλεῖται ***ἁρμονικὸς μέσος*** ἰσοῦται μὲ τὸ διπλάσιον γινόμενον τῶν δύο ἄκρων διαιρεθὲν διὰ τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν.

Πράγματι, ἂν οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ ἀποτελοῦν ἁρμονικὴν πρόοδον τότε οἱ ἀντίστροφοί των $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$ ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον καὶ ἑπομένως θὰ ἔχωμεν (§ 315)

$$\frac{2}{\beta}=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\gamma}=\frac{\alpha+\gamma}{\alpha\gamma} \quad \text{καὶ ἄρα} \quad \beta=\frac{2\alpha\gamma}{\alpha+\gamma}.$$

318. ***Ἄλλη σχέσις τριῶν ἀριθμῶν ἀποτελούντων ἁρμονικὴν πρόοδον.*** Τρεῖς ἀριθμοὶ α, β, γ καθ᾽ ἣν τάξιν ἐγράφησαν ἀποτελοῦν ἁρμονικὴν πρόοδον ἂν $\frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\alpha-\beta}{\beta-\gamma}$. Διότι πράγματι ἡ σχέσις αὕτη δίδει $\alpha\beta-\alpha\gamma=\alpha\gamma-\beta\gamma$ ἢ ἂν διαιρέσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη ταύτης διὰ $\alpha\beta\gamma$ εὑρίσκομεν $\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\alpha}$ ἤτοι οἱ ἀριθμοὶ $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$ ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον, ἄρα οἱ ἀντίστροφοί των α, β, γ ἀποτελοῦν ἁρμονικὴν πρόοδον.

III. ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑΙ ΠΡΟΔΟΙ

319. ***Γεωμετρικὴ πρόοδος*** (ἢ πρόοδος κατὰ πηλίκον) καλεῖται σειρὰ ἀριθμῶν ἕκαστος ἐκ τῶν ὁποίων γίνεται ἀπὸ τὸν προηγούμενόν του πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, ὅστις καλεῖται ***λόγος*** τῆς προόδου· π. χ. ἡ σειρὰ

$$\alpha,\ \alpha\omega,\ \alpha\omega^2,\ \alpha\omega^3..,\alpha\omega^{\nu-1} \qquad (6)$$

εἶναι γεωμετρικὴ πρόοδος μὲ πρῶτον ὅρον τὸν α, καὶ λόγον τὸν ω.

Ἡ πρόοδος καλεῖται ***αὔξουσα*** ἂν οἱ ὅροι βαίνουν αὐξανόμενοι (δηλαδὴ ἂν ὁ λόγος εἶναι θετικὸς καὶ μεγαλύτερος τῆς μονάδος), ***φθίνουσα*** δὲ ἂν οἱ ὅροι βαίνουν ἐλαττούμενοι (δηλαδὴ ἂν ὁ λόγος εἶναι θετικὸς καὶ μικρότερος τῆς μονάδος). Ὅταν ὁ λόγος μιᾶς γεωμετρικῆς προόδου εἶναι ἀρνητικός, τότε ἡ πρόοδος ἔχει ἐναλλὰξ θετικοὺς καὶ καὶ ἀρνητικοὺς ὅρους. Συνεπῶς οὔτε αὔξουσα δύναται νὰ εἶναι οὔτε φθίνουσα.

320. ***Ὁ τελευταῖος ὅρος*** τ μιᾶς γεωμετρικῆς προόδου ἐκ τῆς σχέσεως (6) συμπεραίνομεν ὅτι ἰσοῦται μὲ $\alpha\omega^{\nu-1}$ ἤτοι

$$\tau=\alpha\omega^{\nu-1} \qquad (7)$$

321. Πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἀθροίσματος Σ τῶν ν ὅρων μιᾶς γεωμετρικῆς προόδου ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς: Ἔστω ἡ γεωμετρικὴ πρόοδος

$$\Sigma=\alpha+\alpha\omega+\alpha\omega^2+\alpha\omega^3+\ldots+\alpha\omega^{\nu-1} \qquad (8)$$

Πολλαπλασιάζομεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (8) ἐπὶ ω καὶ ἀπὸ τὴν προκύπτουσαν ἀφαιροῦμεν τὴν (8) ὁπότε εὑρίσκομεν

$$\Sigma(\omega-1)=\alpha\omega^\nu-\alpha \quad \text{καὶ ἄρα} \quad \Sigma=\frac{\alpha\omega^\nu-\alpha}{\omega-1} \qquad (9)$$

ἢ ἂν εἰς τὴν σχέσιν (9) θέσωμεν $\alpha\omega^\nu=\tau\omega$ ὡς εὐκόλως εὑρίσκομεν ἐκ τῆς σχέσεως (7) ἔχομεν

$$\Sigma=\frac{\tau\omega-\alpha}{\omega-1} \qquad (9')$$

322. Ἂν ἡ γεωμετρικὴ πρόοδος εἶναι φθίνουσα μὲ ἀπείρους ὅρους, ὁπότε θὰ εἶναι $\omega<1$, τότε ὁ τελευταῖος ὅρος τ ἀπαύστως ἐλαττούμενος θὰ ἔχῃ ὅριον τὸ μηδέν, ἤτοι ὅρ.τ=0. Ἀλλὰ τότε θὰ εἶναι καί ὅρ.(τω)=0 (§ 269). Ἄρα ἡ σχέσις (9′) γίνεται

$$\Sigma=\frac{\alpha}{1-\omega} \qquad (10)$$

Ὁ τύπος (10) μᾶς δίδει τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὅρων μιᾶς φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου, ἐνῶ ὁ τύπος (9) ἢ (9′) μᾶς δίδει τὸ ἄθροισμα τῶν ν ὅρων μιᾶς γεωμετρικῆς προόδου, αὐξούσης ἢ φθινούσης.

Αἱ σχέσεις (7) καὶ (9′) ἀποτελοῦν σύστημα δύο ἐξισώσεων, ἂν δὲ ἐκ τῶν πέντε ἀγνώστων α, τ, ω, ν, Σ δοθοῦν οἱ τρεῖς, τότε ἐπιλύοντες τὰς (7) καὶ (9′) εὑρίσκομεν τοὺς ὑπολοίπους. Τοῦτο δὲν δυνάμεθα νὰ τὸ εἴπωμεν ὅταν εἶναι ἄγνωστοι οἱ ω καὶ α ἢ οἱ ω καὶ τ. Διότι τότε τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (7) καὶ (9′) ἄγει εἰς τὴν λύσιν τῆς ἐξισώσεως $(\Sigma-\tau)\omega^\nu-\Sigma\omega^{\nu-1}+\tau=0$ διὰ τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν ἄγνωστοι εἶναι οἱ ω καὶ α ἢ τῆς ἐξισώσεως $\alpha\omega^{\nu}-\Sigma\omega+\Sigma-\alpha=0$ διὰ τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν ἄγνωστοι εἶναι οἱ ω καὶ τ. Καὶ ἂν μὲν ὁ ν δὲν εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 4 λύονται αἱ ὡς ἄνω ἐξισώσεις (§ 254—258), ἂν δὲ εἶναι $\nu>4$ τότε δὲν δύνανται ἐν γένει νὰ λυθοῦν καὶ ὡς ἄνω ἐξισώσεις.

323. Ὅταν τρεῖς ἀριθμοὶ α β, γ ἀποτελοῦν γεωμετρικὴν πρόοδον, τότε τὸ τετράγωνον τοῦ μεσαίου β, ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῶν δύο ἄλλων δηλαδὴ $\beta^2=\alpha\gamma$, ὁ δὲ β καλεῖται ***γεωμετρικὸς μέσος ἢ μέσος ἀνάλογος*** τῶν δύο ἄλλων.

Πράγματι ὁ λόγος τῆς προόδου, εὑρισκόμενος κατὰ δύο τρόπους εἶναι $\frac{\beta}{\alpha}$ ἢ $\frac{\gamma}{\beta}$ ἄρα $\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\gamma}{\beta}$ ἐξ ἧς $\beta^2=\alpha\gamma$.

324. Εἰς γεωμετρικὴν πρόοδον τὸ ***γινόμενον δύο ὅρων ἀπεχόντων ἰσάκις ἀπὸ τὰ ἄκρα ἰσοῦται μὲ το γινόμενον τῶν ἄκρων ὅρων.*** Διότι εἰς τὴν γεωμετρικὴν πρόοδον $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \rho, \sigma, \tau$ ἔχομεν $\gamma=\alpha\omega^2$ καὶ $\tau=\rho\omega^2$. Ἀντιμεταθέτοντες τὰ μέλη τῆς β' ἰσότητος καὶ πολλαπλασιάζοντες κατὰ μέλη εὑρίσκομεν $\gamma\rho=\alpha\tau$.

IV. ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΕΠΙ ΤΩΝ ΠΡΟΟΔΩΝ ΕΝ ΓΕΝΕΙ

325. Πρόβλημα παρεμβολῆς. ***Μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν α καὶ β νὰ παρεμβληθοῦν α') μ ἀριθμητικοὶ μέσοι καὶ β') μ γεωμετρικοὶ μέσοι.***

Λύσις. α'). Ἀφοῦ μεταξὺ τῶν α καὶ β θὰ παρεμβληθοῦν μ ἀριθμητικοὶ μέσοι, δηλαδὴ μ ἀριθμοὶ τοιοῦτοι ὥστε νὰ ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον μετὰ τῶν α καὶ β, ἕπεται ὅτι τὸ πλῆθος ν τῶν ὅρων τῆς σχηματισθησομένης προόδου θὰ εἶναι $\mu+2$. ἤτοι $\nu=\mu+2$. Ἄρα ἐκ τοῦ τύπου (2) εἰς ὃν εἶναι $\tau=\beta$ εὑρίσκομεν τὸν λόγον ω τῆς σχηματισθησομένης προόδου ἤτοι $\omega=\frac{\beta-\alpha}{\mu+1}$. Ἄρα ἡ ζητουμένη πρόοδος θὰ εἶναι

$$\alpha,\ \alpha+\frac{\beta-\alpha}{\mu+1},\ \alpha+\frac{2(\beta-\alpha)}{\mu+1},\ \ldots\ldots\beta$$

β') Ἀφοῦ μεταξὺ τῶν α καὶ β θὰ παρεμβληθοῦν μ γεωμετρικοὶ μέσοι, ἕπεται ὅτι τὸ πλῆθος τῶν ὅρων τῆς εὑρεθησομένης γεωμετρικῆς προόδου θὰ εἶναι $\mu+2$. Ἄρα ἐκ τοῦ τύπου (7) εὑρίσκομεν

$\omega=\sqrt[\mu+1]{\frac{\beta}{\alpha}}$. Ἄρα ἡ ζητουμένη πρόοδος εἶναι :

$$\alpha, \quad \alpha\sqrt[\mu+1]{\frac{\beta}{\alpha}}, \quad \alpha\sqrt[\mu+1]{\frac{\beta^2}{\alpha^2}} \ldots\ldots \beta$$

326. ***Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα α΄) ὅλων τῶν διαδοχικῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν μέχρι τοῦ ν β΄) τῶν τετραγώνων τούτων καὶ γ΄) τῶν κύβων τούτων.***

Λύσις α΄) Ἔστω Σ_1 τὸ ζητούμενον ἄθροισμα. Ἔχομεν τὴν ἑξῆς ἀριθμητικὴν πρόοδον

$$\Sigma_1 = 1+2+3+4+\ldots..+\nu$$

ἔνθα $\omega=1$ καὶ $\tau=\nu$. Ἐκ τοῦ τύπου (5) εὑρίσκομεν $\Sigma_1 = \frac{\nu(\nu+1)}{2}$.

β΄). Ἔστω Σ_2 τὸ ζητουμενον ἄθροισμα ἤτοι

$$\Sigma_2 = 1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots..+\nu^2$$

Ἂν εἰς τὴν ταυτότητα $(\nu+1)^3=\nu^3+3\nu^2+3\nu+1$ θέσωμεν κατὰ σειρὰν ἀντὶ ν τοὺς ἀριθμοὺς 0, 1, 2, 3.....ν, εὑρίσκομεν

$$1^3=1$$
$$2^3=(1+1)^3=1^3+3\times1^2+3\times1+1$$
$$3^3=(2+1)^3=2^3+3\times2^2+3\times2+1$$
$$4^3=(3+1)^3=3^3+3\times3^2+3\times3+1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(\nu+1)^3=\nu^3+3\nu^2+3\nu+1$$

Προσθέτοντες κατὰ μέλη εὑρίσκομεν

$$(\nu+1)^3=3(1^2+2^2+3^2+\ldots+\nu^2)+3(1+2+3+\ldots+\nu)+\nu+1 \quad \text{ἢ}$$

$$(\nu+1)^3=3\Sigma_2+3\Sigma_1+\nu+1 \quad \text{καὶ ἄρα} \quad \Sigma_2=\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}.$$

γ΄). Ἔστω Σ_3 τὸ ζητούμενον ἄθροισμα ἤτοι

$$\Sigma_3=1^3+2^3+3^3+4^3+\ldots+\nu^3$$

Ἂν εἰς τὴν ταυτότητα $(\nu+1)^4=\nu^4+4\nu^3+6\nu^2+4\nu+1$ θέσωμεν κατὰ σειρὰν ἀντὶ ν τοὺς ἀριθμοὺς 0, 1, 2, 3,...ν καὶ ἐργασθῶμεν ὁμοίως ὡς εἰς τὴν ἀνωτέρω περίπτωσιν β΄. εὑρίσκομεν

$$\Sigma_3=\frac{\nu^2(\nu+1)^2}{4} \quad \text{ἢ} \quad \Sigma_3=(\Sigma_1)^2$$

327. ***Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὅρων τῶν προόδων.***

α΄) $2+\frac{2}{3}+\frac{2}{9}+\ldots$ *β΄)* $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}\ldots$

Ἐφαρμόζοντες εἰς τὴν α΄ τὸν τύπον (10) εὑρίσκομεν $\Sigma=3$. Ἡ β΄

γράφεται $\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\ldots\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}+\ldots\right)$

Ἕκαστον ἐκ τῶν ἐντὸς παρενθέσεως ἀθροισμάτων εἶναι γεωμετρικὴ πρόοδος μὲ λόγον τὸν $\frac{1}{4}$. Ἄρα ἐκ τοῦ τύπου (10) εὑρίσκομεν

$\Sigma_1=\frac{4}{3}$ καὶ $\Sigma_2=\frac{2}{3}$. Ἄρα $\Sigma=\Sigma_1-\Sigma_2=\frac{2}{3}$.

V. ΟΛΙΓΑ ΤΙΝΑ ΠΕΡΙ ΣΕΙΡΩΝ

328. ***Σειρὰ καλεῖται ἀπέραντος ἀκολουθία ἀριθμῶν ὑποκειμένη εἰς νόμον τινά.*** Οἱ ἀριθμοὶ οἱ ἀποτελοῦντες τὴν σειρὰν καλοῦνται *ὅροι* αὐτῆς.

Ἂν δοθοῦν διαδοχικοί τινες ὅροι τῆς σειρᾶς καὶ εὑρεθῇ ἐκ τούτων ὁ νόμος ὁ διέπων τὴν σειράν, τότε εἶναι δυνατὸν νὰ εὑρεθῇ ὁ ὅρος ὁ κατέχων τὴν νυοστὴν τάξιν εἰς αὐτήν. Ὁμοίως ἂν εἶναι γνωστὸς ὁ νόμος ὁ διέπων τὴν σειρὰν ὡς καὶ εἷς ὅρος τῆς σειρᾶς, τότε δύναται νὰ σχηματισθῇ αὕτη.

Αἱ πρόοδοι, ἀριθμητικαί, ἁρμονικαὶ καὶ γεωμετρικαί, εἶναι σειραί. Παραδείγματα σειρῶν ἔστωσαν τὰ ἑξῆς :

α') ἡ $1+2x+3x^2+4x^3+\ldots$ εἶναι σειρά, διότι ὁ σχηματισμός της ὑπόκειται εἰς τὸν ἑξῆς νόμον : Οἱ συντελεσταὶ τῶν ὅρων της ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον ὁμοίως δὲ καὶ οἱ ἐκθέται τοῦ x.

β') ἡ $1.4+4.7+7.10+\ldots$ εἶναι σειρά, διότι ὑπόκειται εἰς τὸν ἑξῆς νόμον. Ἕκαστος ὅρος εἶναι γινόμενον δύο παραγόντων διαφερόντων κατὰ 3 καὶ ὁ μικρότερος ἐκ τῶν δύο παραγόντων ἰσοῦται μὲ τὸν μεγαλύτερον παράγοντα τοῦ προηγουμένου ὅρου. Σειραὶ εἶναι ἐπίσης καὶ αἱ :

γ') $1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\ldots+\frac{1}{1.2..\nu}+\ldots$

δ') $\frac{2}{3}+\frac{5}{3^2}+\frac{2}{3^3}+\frac{5}{3^4}+\ldots$

329. Μία σειρὰ καλεῖται ***συγκλίνουσα*** ὅταν τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὅρων της ἔχῃ ὅριον πεπερασμένον τινὰ ἀριθμόν. Μία σειρὰ καλεῖται ***ἀποκλίνουσα*** ὅταν τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὅρων της ὑπερβαίνει πάντα δοθέντα ἀριθμὸν (δὲν ἔχει ὅριον πεπερασμένον τινὰ ἀριθμόν)· π. χ. αἱ σειραὶ α', β' τῆς § 328 εἶναι ἀποκλίνουσαι, ἡ δὲ σειρὰ γ', τῆς § 328 ὡς καὶ ἡ τῆς § 330γ' εἶναι συγκλίνουσαι, διότι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὅρων αὐτῶν ἔχει ὅριον πεπερασμένον τινὰ ἀριθμὸν (τὸ ὅριον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ὅρων τῆς σειρᾶς γ' τῆς § 328 εἶναι ὁ ἀριθμὸς e, ὅστις ἰσοῦται μὲ 2,718281...).

330. Ἐφαρμογαί. ***Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν $\nu+1$ ὅρων τῆς σειρᾶς.***

$$\alpha,\ (\alpha+\beta)\lambda,\ (\alpha+2\beta)\lambda^2,\ (\alpha+3\beta)\lambda^3 \ldots$$

Ἔστω $\Sigma=\alpha+(\alpha+\beta)\lambda+(\alpha+2\beta)\lambda^2+\ldots+(\alpha+\nu\beta)\lambda^\nu$

Ἂν πολλαπλασιάσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη ἐπὶ λ καὶ ἀφαιρέσωμεν κατὰ μέλη εὑρίσκομεν

$$\Sigma(1-\lambda)=\alpha+\beta(\lambda+\lambda^2+\lambda^3+\ldots\lambda^\nu)-(\alpha+\nu\beta)\lambda^{\nu+1}$$

Ἄρα $$\Sigma=\frac{\alpha}{1-\lambda}+\frac{\beta\lambda(1-\lambda^\nu)}{(1-\lambda)^2}-\frac{(\alpha+\nu\beta)\lambda^{\nu+1}}{1-\lambda}$$

331. ***Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων τῆς σειρᾶς.***

$$\Sigma=1+2x+3x^2+4x^3+\ldots+\nu x^{\nu-1}$$

Ἂν πολλαπλασιάσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη της ἐπὶ x καὶ ἀφαιρέσωμεν ταύτην ἀπὸ τὴν προκύπτουσαν εὑρίσκομεν

$$\Sigma(x-1)=\nu x^\nu-(1+x+x^2+x^3+\ldots+x^{\nu-1})$$

Ἄρα $$\Sigma=\frac{\nu x^\nu-(1+x+x^2+\ldots+x^{\nu-1})}{x-1}=\frac{\nu x^\nu}{x-1}+\frac{x^\nu-1}{(x-1)^2}$$

332. ***Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὅρων τῆς σειρᾶς.***

$$\Sigma=\frac{2}{3}+\frac{5}{3^2}+\frac{2}{3^3}+\frac{5}{3^4}+\frac{2}{3^5}+\frac{5}{3^6}+\ldots$$

Τὸ ἄνω ἄθροισμα γράφεται

$$\Sigma=\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3^3}+\frac{2}{3^5}+\ldots\right)+\left(\frac{5}{3^2}+\frac{5}{3^4}+\frac{5}{3^6}+\ldots\right)$$

Ἑκάστη ἐκ τῶν ἐντὸς τῶν παρενθέσεων σειρῶν εἶναι φθίνουσα γεωμετρικὴ πρόοδος. Ἄρα ἐκ τοῦ τύπου (10) εὑρίσκομεν

$$\Sigma=\frac{3}{4}+\frac{5}{8}=\frac{11}{8}$$

333. ***Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ν ὅρων τῆς σειρᾶς.***

$$\Sigma=1.4+4.7+7.10+\ldots$$

Αὕτη γράφεται

$$\Sigma=1(1+3)+4(4+3)+7(7+3)+\ldots \qquad \text{ἢ}$$

$$\Sigma=(1^2+4^2+7^2+10^2+\ldots)+3(1+4+7+10+\ldots) \qquad (\alpha)$$

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἀθροίσματος τῆς πρώτης παρενθέσεως ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς. Εἰς τὴν ταυτότητα $(3\nu-2)^2=9\nu^2-12\nu+4$, θέτομεν διαδοχικῶς $\nu=1,\ 2,\ 3,\ldots\nu$, ὅτε λαμβάνομεν

$$1^2=9.1^2-12.1+4$$
$$4^2=9.2^2-12.2+4$$
$$7^2=9.3^2-12.3+4$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

ἢ διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη

$$1^2+4^2+7^2+\ldots=9(1^2+2^2+3^2+\ldots)-12(1+2+3+\ldots)+4\nu$$

ἢ (§ 326 α΄, β΄) $1^2+4^2+7^2+\ldots=\dfrac{3\nu(\nu+1)(2\nu-3)}{2}+4\nu$. Τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων τῆς β΄ παρενθέσεως τῆς (α) εὑρισκόμενον ἐκ τοῦ τύπου (5) τῆς § 314 εἶναι $\dfrac{\nu(3\nu-1)}{2}$ διότι ὁ τελευταῖος ὅρος εἶναι $3\nu-2$. Ἄρα

$$\Sigma=\frac{3\nu(\nu+1)(2\nu-3)}{2}+4\nu+\frac{3\nu(3\nu-1)}{2}=\nu(3\nu^2+3\nu-2)$$

Ἀσκήσεις πρὸς λύσιν.

Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὅρων ἑκάστης ἐκ τῶν κάτωθι σειρῶν.

1019. $\dfrac{2}{5}+\dfrac{3}{5^2}+\dfrac{2}{5^3}+\dfrac{3}{5^4}+\ldots$

1020. $\dfrac{x+1}{x^2}-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+1}-\ldots$ ἂν $x>0$

1021. $1-3x+5x^2-7x^3+\ldots$ ἂν $x<1$

1022. $1+5\alpha+9\alpha^2+13\alpha^3+\ldots$ ἂν $\alpha<1$

1023. $\dfrac{4}{7}-\dfrac{5}{7^2}+\dfrac{4}{7^3}-\dfrac{5}{7^4}+\ldots$

1024. $1+2x+3x^2+4x^3\ldots$ ἂν $x<1$

1025. $1-\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\alpha^2}-\dfrac{1}{\alpha^3}+\ldots$ ἂν $0<\alpha<1$

1026. $1-\dfrac{2}{5}+\dfrac{3}{5^2}-\dfrac{4}{5^3}+\ldots$

1027. $\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{3^3}+\ldots\right)+\left(\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{5^2}+\dfrac{1}{5^3}+\ldots\right)+\ldots$
$+\left(\dfrac{1}{2^\nu+1}+\dfrac{1}{(2^\nu+1)^2}+\dfrac{1}{(2^\nu+1)^3}+\ldots\right)$

1028. $\alpha^\nu+\beta\alpha^{\nu-1}+\beta^2\alpha^{\nu-2}+\ldots$ ἂν $0<\beta<\alpha$

1029. $\alpha+\beta+\dfrac{\beta^2}{\alpha}+\ldots$ ἂν $0<\beta<\alpha$

1030. $\dfrac{\alpha}{\nu}-\dfrac{(\alpha-\nu)x}{\nu}+\dfrac{(\alpha-\nu)x^2}{\nu^2}-\dfrac{(\alpha-\nu)x^3}{\nu^3}+\ldots$ ἂν $\nu>x$

Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ν ὅρων ἑκάστης ἐκ τῶν κάτωθι σειρῶν

1031. $(x+\alpha)+(x^2+2\alpha)+(x^3+3\alpha)+\ldots$

1032. $1+5+13+29+\ldots$

1033. $3+6+10+16+\ldots$

1034. $1^2+3^2+5^2+7^2+\ldots$

1035. $x(x+y)+x^2(x^2+y^2)+x^3(x^3+y^3)+\ldots$

1036. $1+3x+5x^2+7x^3+\ldots$

1037. $\left(\dfrac{2\alpha^2-1}{\alpha}\right)+\left(4\alpha-\dfrac{3}{\alpha}\right)+\left(\dfrac{6\alpha^2-5}{\alpha}\right)+\ldots$

1038. $1.3+2.5+3.7+\ldots$

1039. $1.4.7+2.5.8+3.6.9+\ldots$

1040. Ἂν ὁ ν εἶναι ἄρτιος ἀριθμὸς νὰ δειχθῇ ὅτι

$$(1+x+x^2+\ldots+x^\nu)(1-x+x^2-\ldots+x^\nu)=1+x^2+x^4+\ldots+x^{2\nu}$$

Νὰ ἐκφρασθῇ μετὰ τοῦτο ἡ παράστασις $1+x^2+x^4+x^6+x^8$ ὡ γινόμενον δύο παραγόντων.

1041. Ἂν ὁ ν εἶναι περιττὸς ἀριθμὸς νὰ δειχθῇ ὅτι

$$(1+x+x^2+\ldots+x^{\nu})(1-x+x^2-\ldots+x^{\nu})=\frac{1-x^{\nu+1}}{1-x^2}$$

1042. Ἂν οἱ α, β, γ...μ, ν, ἀποτελοῦν γεωμετρικὴν πρόοδον νὰ δειχθῇ ὅτι

$$(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\ldots+\mu^2)(\beta^2+\gamma^2+\ldots+\nu^2)=(\alpha\beta+\beta\gamma+\ldots+\mu\nu)^2$$

1043. Ἂν ὁ ν εἶναι ἀκέραιος θετικὸς καὶ μεγαλύτερος τῆς μονάδος ὁ δὲ $1+x$ θετικὸς νὰ δειχθῇ ὅτι

$$(1+x)^{\nu}>1+\nu x$$

1044. Ἂν οἱ ἀριθμοὶ $(1+x)$, $(3+x)$, $(9+x)$ ἀποτελοῦν ἁρμονικὴν πρόοδον νὰ εὑρεθῇ ὁ x.

Ἂν οἱ α, β, γ ἀποτελοῦν ἁρμονικὴν πρόοδον, νὰ δειχθῇ ὅτι οἱ

1045. $\beta-\alpha,\ \beta,\ \beta-\gamma$ ἀποτελοῦν ἁρμονικὴν πρόοδον

1046. $\gamma-\beta,\ \gamma-\alpha,\ \gamma$ » » »

1047. $\beta\gamma,\ \gamma\alpha,\ \alpha\beta$ » ἀριθμητικὴν »

1048. $\alpha(\beta+\gamma),\ \beta(\gamma+\alpha),\ \gamma(\alpha+\beta)$ » » »

1049. $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta+\gamma},\ \frac{1}{\beta}+\frac{1}{\alpha+\gamma},\ \frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\alpha+\beta}$ ἀποτελοῦν ἁρμονικὴν πρόοδον

1050. $\alpha(\beta+\gamma)^{-1},\ \beta(\gamma+\alpha)^{-1},\ \gamma(\alpha+\beta)^{-1}$ » » »

1051. $(\beta+\gamma-\alpha)^2,\ (\gamma+\alpha-\beta)^2,\ (\alpha+\beta-\gamma)^2$ » ἀριθμητικὴν »

1052. $(2\alpha-\beta),\ \beta,\ (2\gamma-\beta)$ » γεωμετρικὴν »

Ἂν οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ, δ ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον, νὰ δειχθῇ ὅτι οἱ

1053. $\beta\gamma\delta,\ \gamma\delta\alpha,\ \delta\alpha\beta,\ \alpha\beta\gamma$ ἀποτελοῦν ἁρμονικὴν πρόοδον

1054. $(\beta+\gamma+\delta),(\gamma+\delta+\alpha),(\delta+\alpha+\beta),(\alpha+\beta+\gamma)$ » ἀριθμητικὴν »

1055. Ἂν οἱ ἀριθμοὶ α,β,γ ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον, νὰ δειχθῇ ὅτι

$$2(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)+21\alpha\beta\gamma=3(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$$

Ἂν οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ ἀποτελοῦν γεωμετρικὴν πρόοδον νὰ δειχθῇ ὅτι

1056. $\frac{\alpha}{\gamma}=\frac{(\alpha+\beta)^2}{(\beta+\gamma)^2}$ **1057.** $(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha-\beta+\gamma)=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$

1058. Οἱ $(\alpha+\beta)$, 2β, $(\beta+\gamma)$ ἀποτελοῦν ἁρμονικὴν πρόοδον

1059. Οἱ $(\alpha-\beta)$, $(\alpha-\gamma)$, $(\alpha+\beta)$ ἀποτελοῦν ἁρμονικὴν πρόοδον.

1060. Ἂν οἱ x, y, z ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον οἱ δὲ x, νy, z γεωμετρικήν, νὰ δειχθῇ ὅτι οἱ x, $\nu^2 y$, z ἀποτελοῦν ἁρμονικὴν πρόοδον.

1061. Ἂν οἱ α, β, γ ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον οἱ δὲ β, γ, α γεωμετρικήν, νὰ δειχθῇ ὅτι θὰ εἶναι ἢ $\alpha=\beta=\gamma$ ἢ $\alpha=4\beta=-2\gamma$.

1062. Ἂν δίδωνται τρεῖς ἀριθμοὶ α, β,γ νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός τις x τοιοῦτος ὥστε οἱ ἀριθμοὶ $(\alpha+x)$, $(\beta+x)$, $(\gamma+x)$ νὰ ἀποτελοῦν πρόοδον α′) ἀριθμητικήν), β′) ἁρμονικὴν καὶ γ′) γεωμετρικήν.

1063. Ἂν οἱ α, β, γ ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον, οἱ β, γ, δ γεωμετρικὴν καὶ οἱ γ, δ, λ ἁρμονικήν, νὰ εὑρεθῇ ὁ λ συναρτήσει τῶν α καὶ β.

1064. Νὰ δειχθῇ ὅτι εἶναι $\beta\gamma>\alpha\delta$ ἂν οἱ α, β, γ, δ ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον, $\beta\gamma=\alpha\delta$ ἂν οὗτοι ἀποτελοῦν γεωμετρικὴν πρόοδον καὶ $\beta\gamma<\alpha\delta$ ἂν ἀποτελοῦν ἁρμονικήν.

1065. Ἂν οἱ α, β, γ ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον οἱ x, y, z ἁρμονικὴν καὶ οἱ αx, βy, γz γεωμετρικὴν νὰ δειχθῇ ὅτι εἶναι ἢ $\alpha x = \beta y = \gamma z$ ἢ $\alpha z = \beta y = \gamma x$.

1066. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ν ὅρων τῆς ἀριθμητικῆς προόδου $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \tau$.

1067. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων ὅλων τῶν περιττῶν ἀριθμῶν ἀπὸ 1 μέχρι $2\nu+1$.

1068. Ἂν ὁ ὅρος ὁ κατέχων τὴν ν τάξιν εἰς πρόοδόν τινὰ εἶναι α, ὁ κατέχων τὴν μ τάξιν εἶναι β καὶ ὁ κατέχων τὴν ϱ τάξιν εἶναι γ νὰ δειχθῇ ὅτι $(\mu-\varrho)\alpha+(\varrho-\nu)\beta+(\nu-\mu)\gamma=0$ ἂν ἡ πρόοδος εἶναι ἀριθμητική.

1069. Ὁμοίως ὅτι $\alpha^{\mu-\varrho}.\beta^{\varrho-\nu}.\gamma^{\nu-\mu}=1$ ἂν ἡ πρόοδος εἶναι γεωμετρική.

1070. Ὁμοίως ὅτι $(\mu-\varrho)\beta\gamma+(\varrho-\nu)\gamma\alpha+(\nu-\mu)\alpha\beta=0$ ἂν ἡ πρόοδος εἶναι ἁρμονική.

1071. Τὸ ἄθροισμα τῶν μ ὅρων μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου εἶναι ν καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ν ὅρων αὐτῆς εἶναι μ. Εὑρεῖν τὸ ἄθροισμα τῶν $\mu+\nu$ ὅρων της.

1072. Ἂν Σ_ν εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὅρων τῆς σειρᾶς $1+\alpha^\nu+\alpha^{2\nu}+\ldots$ καὶ K_ν τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὅρων τῆς σειρᾶς $1-\alpha^\nu+\alpha^{2\nu}-\ldots$ νὰ δειχθῇ ὅτι $\Sigma_\nu+K_\nu=2\Sigma_{2\nu}$. ἔνθα $\Sigma_{2\nu}=1+\alpha^{2\nu}+\alpha^{4\nu}+\ldots$

1073. Ἂν οἱ ἀριθμοὶ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ἀποτελοῦν γεωμετρικὴν πρόοδον, νὰ δειχθῇ ὅτι $(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2+(\delta-\beta)^2=(\alpha-\delta)^2$.

1074. Ἂν ὁ ἀριθμητικὸς μέσος μεταξὺ τῶν α καὶ β εἶναι διπλάσιος τοῦ γεωμετρικοῦ μέσου των νὰ δειχθῇ ὅτι $\alpha:\beta=(2+\sqrt{3}):(2-\sqrt{3})$.

1075. Ἂν $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \ldots \Sigma_\nu$ εἶναι τὰ ἀθροίσματα τῶν ἀπείρων ὅρων γεωμετρικῶν προόδων, ἑκάστη τῶν ὁποίων ἔχει ὡς πρῶτον ὅρον ἀντιστοίχως $1, 2, 3, \ldots \nu$ καὶ ὡς λόγον ἀντιστοίχως $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots \frac{1}{\nu+1}$ νὰ δειχθῇ ὅτι $\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3+\ldots\Sigma_\nu=\frac{\nu(\nu+3)}{2}$.

1076. Ἂν α εἶναι $0<\alpha<1$ ὁ δὲ ν ἀκέραιος καὶ θετικός, νὰ δειχθῇ ὅτι

$$(1-\alpha)(2\nu+1)\alpha^\nu<1-\alpha^{2\nu+1}$$

1077. Ἂν λ, μ, ν εἶναι κατὰ σειρὰν ὁ ἀριθμητικός, ὁ ἁρμονικός, καὶ ὁ γεωμετρικὸς μέσος δύο ἀριθμῶν α καὶ β, νὰ δειχθῇ ὅτι $\nu^2=\lambda\mu$.

1078. Νὰ εὑρεθοῦν πέντε ἀκέραιοι ἀριθμοὶ ἀποτελοῦντες ἀριθμητικὴν πρόοδον ἐκ τοῦ ἀθροίσματός των 40 καὶ τοῦ γινομένου των 12320.

1079. Νὰ εὑρεθοῦν 4 ἀκέραιοι ἀριθμοὶ ἀποτελοῦντες ἀριθμητικὴν πρόοδον ἐκ τοῦ ἀθροίσματός των 32 καὶ τοῦ γινομένου των 1680.

1080. Νὰ εὑρεθοῦν 4 ἀκέραιοι ἀριθμοὶ ἀποτελοῦντες ἀριθμητικὴν πρόοδον ἐκ τοῦ ἀθροίσματός των 20 καὶ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀντιστρόφων των $\frac{25}{24}$ (Πολυτεχνεῖον 1928).

1081. Νὰ εὑρεθοῦν 4 ἀκέραιοι ἀριθμοὶ ἀποτελοῦντες ἀριθμητικὴν πρόοδον ἐκ τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων των 84, γνωστοῦ ὄντος ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀντιστρόφων των ἰσοῦται μὲ τὸ ἡμιάθροισμα τοῦ β′ καὶ γ′ ὅρου, πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὸ κλάσμα $\frac{44}{105}$

1082. Εἰς ἰσόπλευρον κῶνον πλευρᾶς 2α ἐγγράφομεν σφαῖραν ἐφαπτομένην τῆς βάσεώς του καὶ τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας του, μετὰ ἐγγράφομεν ἑτέραν σφαῖραν ἐφαπτομένην τῆς πρώτης καὶ τῆς παραπλεύροι ἐπιφανείας τοῦ κώνου, μετὰ ἐγγράφομεν ἑτέραν σφαῖραν κ.ο.κ. ἐπ' ἄπειρον. Νὰ εὑρεθῇ α') τὸ ὑπολειφθησόμενον μέρος τοῦ ὄγκου τοῦ κώνου μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν τῶν ὄγκων τῶν ἀπείρων τούτων σφαιρῶν καὶ β') τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν ὅλων τῶν κύκλων ἐπαφῆς. (Πολυτεχνεῖον 1931).

1083. Ἂν Α εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὅρων φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου, α ὁ πρῶτος ὅρος της καὶ ω ὁ λόγος, νὰ εὑρεθῇ ἡ πρόοδος ἐκ τῶν σχέσεων $A-\alpha=\frac{3}{4}$ καὶ $A+\omega=\frac{31}{12}$. (Πολυτεχνεῖον 1924).

1084. Ἂν οἱ ἀριθμοὶ x καὶ y εἶναι οἱ δύο πρῶτοι ὅροι γεωμετρικῆς προόδου, τότε ὁ 4ος ὅρος αὐτῆς ὑπερβαίνει τὸν 3ον κατὰ 18· ἂν δὲ εἶναι οὗτοι οἱ δύο πρῶτοι ὅροι ἀριθμητικῆς προόδου, τότε ὁ 4ος ὅρος αὐτῆς ὑπερβαίνει τὸν 2ον κατὰ 16. Εὑρεῖν τοὺς x καὶ y (Πολυτεχνεῖον 1929).

1085. Φθίνουσα γεωμετρικὴ καὶ ἀριθμητικὴ πρόοδος ἔχουν κοινὸν τὸν πρῶτον ὅρον καὶ τὸν λόγον. Εὑρεῖν τὰς προόδους ἂν οἱ δεύτεροι ὅροι αὐτῶν διαφέρουν κατὰ 2,5 οἱ δὲ τρίτοι ὅροι αὐτῶν διαφέρουν κατὰ 4.

1086. Ἀριθμητικὴ καὶ φθίνουσα γεωμετρικὴ πρόοδος εἶναι τοιαῦται ὥστε ὁ λόγος τῆς γεωμετρικῆς νὰ εἶναι τὸ τρίτον τοῦ λόγου τῆς ἀριθμητικῆς. Οἱ δεύτεροι ὅροι αὐτῶν εἶναι ἴσοι τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὅρων τῆς γεωμετρικῆς εἶναι 27 ἐνῷ τὸ ἄθροισμα τῶν 10 πρώτων ὅρων τῆς ἀριθμητικῆς εἶναι 130. Εὑρεῖν τὰς προόδους.

1087. Εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμοὺς x, y, z ἀποτελοῦντας γεωμετρικὴν πρόοδον ἂν οἱ ἀριθμοὶ xy, yz, zx, xyz ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον (Πολ. 1932).

1088. Ἀριθμητικὴ καὶ γεωμετρικὴ πρόοδος ἔχουν κοινὸν τὸν λόγον. Ὁ 5ος ὅρος τῆς ἀριθμητικῆς εἶναι τριπλάσιος τοῦ α' ὅρου τῆς γεωμετρικῆς, ἐνῷ ὁ β' τῆς γεωμετρικῆς εἶναι μικρότερος κατὰ 12 ἀπὸ τὸ τετράγωνον τοῦ ἀντιστοίχου ὅρου τῆς ἀριθμητικῆς. Εὑρεῖν τὰς προόδους ἂν τὸ ἄθροισμα τοῦ κοινοῦ λόγου καὶ τῶν πρώτων ὅρων αὐτῶν εἶναι 12.

1089. Εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς ἐκ τῆς διαφορᾶς τῶν 3 καὶ τῆς διαφορᾶς $\frac{3}{14}$ μεταξὺ τοῦ ἀριθμητικοῦ καὶ τοῦ ἁρμανικοῦ μέσου των.

1090. Δίδεται κανονικὸν τετράεδρον ἀκμῆς α. Ἐγγράφομεν εἰς τοῦτο σφαῖραν, μετὰ ἐγγράφομεν εἰς τοῦτο 4 σφαίρας ἀνὰ μίαν ἐφαπτομένην τῆς πρώτης καὶ τῶν τριῶν ἑδρῶν τοῦ τετραέδρου, μετὰ ἑτέρας 4 σφαίρας ἐφαπτομένας ἑκάστης ἐκ τῶν προηγουμένων καὶ τῶν τριῶν ἑδρῶν τοῦ τετραέδρου κ.ο.κ. ἐπ' ἄπειρον. Εὑρεῖν α') τὸ ὑπολειφθησόμενον μέρος τοῦ ὄγκου τοῦ τετραέδρου μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν τῶν ὄγκων τῶν ἀπείρων τούτων σφαιρῶν β') τὸ ἄθροισμα τῶν τῶν ἐμβαδῶν τῶν ἐπιφανειῶν τῶν σφαιρῶν τούτων.

1091. Νὰ ἐξετασθῇ ἡ αὐτὴ ὡς ἀνωτέρω ἄσκησις ἂν ἀντὶ κανονικοῦ τετραέδρου δοθῇ κανονικὸν ἑξάεδρον ἀκμῆς α.

1092. Αἱ γωνίαι κυρτοῦ πολυγώνου ἀποτελοῦν φθίνουσαν ἀριθμητικὴν πρόοδον μὲ λόγον 5° καὶ τελευταῖον ὅρον 120°. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου.

1093. Εἰς ἀριθμητικὴν πρόοδον ἔχουσαν περιττὸν ἀριθμὸν ὅρων τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων τῆς περιττῆς τάξεως εἶναι 44 τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν ὅρων τῆς ἀρτίας τάξεως εἶναι 33. Εὑρεῖν τὸν μεσαῖον ὅρον καὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν ὅρων.

1094. Τὸ ἄθροισμα τριῶν ἀριθμῶν x,y,z, εἶναι 147. Νὰ εὑρεθοῦν οὗτοι γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ σειρὴ x,y,z, ἀποτελεῖ ἀριθμητικὴν πρόοδον, ἡ δὲ σειρὰ x,z,y, ἀποτελεῖ γεωμετρικὴν πρόοδον (Πανεπιστήμιον 1931).

1095. Νὰ ὁρισθῇ ὁ ἀριθμὸς λ ἵνα αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως

$$x^4-(3\lambda+2)x^2+(\lambda+4)^2=0$$

νὰ ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον.

1096. Ἂν ὁ δεύτερος ὅρος ἀριθμητικῆς προόδου εἶναι μέσος ἀνάλογος μεταξὺ τοῦ πρώτου καὶ τετάρτου ὅρου της, τότε ὁ ἕκτος ὅρος αὐτῆς θὰ εἶναι ἐπίσης μέσος ἀνάλογος μεταξὺ τοῦ τετάρτου καὶ τοῦ ἐνάτου ὅρου της.

1097. Εἰς ἀριθμητικὴν πρόοδον ὁ λόγος ἰσοῦται μὲ τὴν μονάδα, ὁ δὲ ἀριθμὸς ν τῶν ὅρων της εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 3. Νὰ εὑρεθῇ ἡ πρόοδος ἂν τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων της εἶναι 33, ὁ δὲ ὅρος ὁ κατέχων τὴν $\frac{\nu}{3}$ τάξιν ἰσοῦται μὲ 4.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι΄.

ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ—ΕΚΘΕΤΙΚΑΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Ι. ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ.

334. ***Λογάριθμος ἀριθμοῦ τινὸς Β ὡς πρὸς βάσιν 10 καλεῖται ὁ ἐκθέτης τῆς δυνάμεως εἰς τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ ὑψωθῇ ὁ 10 ἵνα δόσῃ τὸν Β·*** π.χ. ἂν $B=10^{\nu}$ τότε $\lambda o\gamma B=\nu$.

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω ὁρισμοῦ τῶν λογαρίθμων συμπεραίνομεν ὅτι ὁ λογάριθμος τῆς βάσεως 10 εἶναι μονάς, ὁ λογάριθμος δὲ τῆς μονάδος εἶναι τὸ μηδέν.

335. Ἂν δὲν λάβωμεν ὡς βάσιν τὸν ἀριθμὸν 10 ἀλλὰ τυχόντα ἀριθμὸν α, τότε λογάριθμος τοῦ Β καλεῖται ὁ ἐκθέτης τῆς δυνάμεως εἰς τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ ὑψωθῇ ἡ βάσις α ἵνα δόσῃ τὸν Β· π.χ. ἂν $B=\alpha^{\nu}$ τότε $\lambda o\gamma_{\alpha} B=\nu$. Παρατηροῦμεν οὕτω ὅτι ***δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν ἄπειρα λογαριθμικὰ συστήματα, ἀναλόγως τῆς βάσεως τὴν ὁποίαν χρησιμοποιοῦμεν.*** Τὸ ἐν χρήσει σύστημα εἶναι τὸ ἔχον βάσιν τὸ 10 ὅπερ καλεῖται ***δεκαδικὸν λογαριθμικὸν σύστημα.***

336. ***Ἕτερος ὁρισμὸς τῶν λογαρίθμων.*** Ἔστωσαν αἱ δύο πρόοδοι

$$\begin{array}{l} \ldots B^{-2},\ B^{-1},\ 1,\ B^{1},\ B^{2},\ B^{3}\ldots B^{\nu} \\ \ldots -2\delta,\ -\delta,\ 0,\ \delta,\ 2\delta,\ 3\delta\ldots\ldots\nu\delta \end{array} \qquad (1)$$

Ἤτοι ἂν ἔχωμεν μίαν γεωμετρικὴν πρόοδον μὲ λόγον τὸν Β καὶ μίαν ἀριθμητικὴν μὲ λόγον τὸν δ, τοιαύτας ὥστε εἰς τὸν ὅρον 1 τῆς πρώτης νὰ ἀντιστοιχῇ ὁ ὅρος 0 τῆς δευτέρας, τότε ***οἱ ὅροι τῆς ἀριθμητικῆς προόδου καλοῦνται λογάριθμοι τῶν ἀντιστοίχων ὅρων τῆς γεωμετρικῆς.*** π.χ. ὁ 2δ καλεῖται λογάριθμος τοῦ B^2. Τότε ὁ λόγος τῆς γεωμετρικῆς προόδου καλεῖται βάσις τοῦ λογαριθμικοῦ συστήματος ὅπερ κατασκευάζομεν οὕτω.

Ἂν εἰς τὴν σχέσιν (1) θέσωμεν $B=\alpha^{\delta}$, ὅπερ δυνάμεθα νὰ κατορθώσωμεν πάντοτε, τότε αἱ σχέσεις (1) γράφονται

$$\begin{array}{l} \alpha^{-2\delta},\ \alpha^{-\delta},\ 1,\ \alpha^{\delta},\ \alpha^{2\delta},\ \alpha^{3\delta}\ldots\alpha^{\nu\delta} \\ -2\delta,\ -\delta,\ 0,\ \delta,\ 2\delta,\ 3\delta\ldots\ldots\nu\delta \end{array} \qquad (2)$$

Καὶ ἂν θέσωμεν $\alpha=10$ καὶ $\delta=1$ εὑρίσκομεν

$$\begin{matrix} 10^{-2}, & 10^{-1}, & 1, & 10, & 10^2, & 10^3 \ldots\ldots 10^{\nu} \\ -2, & -1, & 0, & 1, & 2, & 3, \ldots\ldots \nu \end{matrix} \qquad (2')$$

Αἱ σχέσεις (2) ἢ (2΄) δεικνύουν ὅτι (§ 336) οἱ ἐκθέται τῶν ὅρων τῆς πρώτης σειρᾶς εἶναι οἱ λογάριθμοι τῶν ὅρων τούτων. Ἐκ τούτου προκύπτει ὁ ἁπλούστερος ὁρισμὸς τῶν λογαρίθμων τῆς § 334.

ΣΗΜ. Ἐκ τῶν προόδων (1) ὁρίζεται ἡ βάσις e τῶν Νεπερείων λογαρίθμων ἂν θέσωμεν εἰς τὴν γεωμετρικὴν πρόοδον (1) $B=1+\delta$ ἔνθα $\rho\delta=0$ καὶ ὑπολογίσωμεν τὸν ὅρον αὐτῆς τὸν ἀντιστοιχοῦντα εἰς τὸν ὅρον τῆς ἀριθμητικῆς προόδου ἐκ τῶν (1) ὅστις ἰσοῦται μὲ τὴν μονάδα, εὑρίσκομεν δὲ οὕτω ὡς e τὴν σειρὰν γ΄ τῆς § 328. Εἶναι λοιπὸν $e=2{,}718281\ldots\ldots$

Ἰδιότητες τῶν λογαρίθμων.

337. ***Ὁ λογάριθμος γινομένου ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν λογαρίθμων τῶν παραγόντων του.***

Θὰ δείξωμεν ὅτι $\lambda o\gamma(xyz)=\lambda o\gamma x+\lambda o\gamma y+\lambda o\gamma z$,

Ἔστω $10^{\alpha}=x$, $10^{\beta}=y$, $10^{\gamma}=z$. Ἄρα εἶναι ἀφ᾽ ἑνὸς μὲν

$$10^{\alpha+\beta+\gamma}=xyz \qquad (3)$$

ἀφ᾽ ἑτέρου δὲ (§ 334) $\alpha=\lambda o\gamma x$, $\beta=\lambda o\gamma y$, $\gamma=\lambda o\gamma z$. Ἀλλὰ ἐκ τῆς σχέσεως (3) ἔχομεν ὅτι $\lambda o\gamma(xyz)=\alpha+\beta+\gamma$.

Ἄρα $\lambda o\gamma(xyz)=\lambda o\gamma x+\lambda o\gamma y+\lambda o\gamma z$.

338. ***Ὁ λογάριθμος πηλίκου ἰσοῦται μὲ τὴν διαφορὰν τοῦ λογαρίθμου τοῦ διαιρέτου ἀπὸ τοῦ λογαρίθμου τοῦ διαιρετέου.***

Θὰ δείξωμεν ὅτι $\lambda o\gamma\left(\frac{x}{y}\right)=\lambda o\gamma x-\lambda o\gamma y$

Ἔστω $10^{\alpha}=x$, $10^{\beta}=y$. Ἄρα εἶναι ἀφ᾽ ἑνὸς μεν $10^{\alpha-\beta}=\frac{x}{y}$, ἀφ᾽ ἑτέρου δὲ (§ 334) $\alpha=\lambda o\gamma x$, $\beta=\lambda o\gamma y$.

Ἄρα $\lambda o\gamma\left(\frac{x}{y}\right)=\alpha-\beta=\lambda o\gamma x-\lambda o\gamma y$.

339. ***Ὁ λογάριθμος δυνάμεως ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἐκθέτου ἐπὶ τὸν λογάριθμον τῆς βάσεώς της.***

Θὰ δείξωμεν ὅτι $\lambda o\gamma(x^{\nu})=\nu\lambda o\gamma x$.

Ἔστω $10^{\alpha}=x$. Ἑπομένως $10^{\alpha\nu}=x^{\nu}$. Ἄρα $\lambda o\gamma(x^{\nu})=\nu\alpha=\nu\lambda o\gamma x$ διότι $\alpha=\lambda o\gamma x$.

340. ***Ὁ λογάριθμος ῥίζης ἰσοῦται μὲ τὸν λογάριθμον τοῦ ὑπορρίζου διαιρεθέντα διὰ τοῦ δείκτου τῆς ῥίζης.***

Θὰ δείξωμεν ὅτι $\lambda o\gamma\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)=\frac{1}{\nu}\lambda o\gamma\alpha$.

Πράγματι ἔχομεν (§ 118) $\lambda o\gamma\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)=\lambda o\gamma\left(\alpha^{\frac{1}{\nu}}\right)=\frac{1}{\nu}\lambda o\gamma\alpha.$

341. Ἀλλαγὴ βάσεως λογαρίθμων. *Ὁ λογάριθμος ἀριθμοῦ τινὸς ὡς πρὸς βάσιν α ἰσοῦται μὲ τὸν λογάριθμον τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ὡς πρὸς βάσιν β πολλαπλασιασθέντα ἐπὶ τὸν λογάριθμον τῆς βάσεώς του β ὡς πρὸς τὴν νέαν βάσιν α.*

Θὰ δείξωμεν δηλαδὴ ὅτι $\lambda o\gamma_\alpha x=\lambda o\gamma_\beta x.\lambda o\gamma_\alpha \beta$.

Ἔστω $\lambda o\gamma_\alpha x=\mu$ καὶ $\lambda o\gamma_\beta x=\nu$.

Ἔχομεν ἄρα (§ 335) $\alpha^\mu=x$ καὶ $\beta^\nu=x$. Ἑπομένως

$$\alpha^\mu=\beta^\nu \tag{4}$$

ἢ λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους ὡς πρὸς βάσιν α ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς (4) ἔχομεν $\mu\lambda o\gamma_\alpha \alpha=\nu\lambda o\gamma_\alpha \beta$. Ἀλλ' εἶναι (§ 334) $\lambda o\gamma_\alpha \alpha=1$.

Ἄρα ἡ τελευταία σχέσις γίνεται

$$\mu=\nu\lambda o\gamma_\alpha \beta \quad \text{ἢ} \quad \lambda o\gamma_\alpha x=\lambda o\gamma_\beta x.\lambda o\gamma_\alpha \beta.$$

Ἀσκήσεις πρὸς λύσιν.

1098. Ἂν $\lambda o\gamma_\alpha 216=3$ νὰ εὑρεθῇ ἡ βάσις α τοῦ λογαριθμικοῦ συστήματος.

1099. Εἰς ποῖον λογαριθμικὸν σύστημα ὁ ἀριθμὸς 5 εἶναι λογάριθμος τοῦ 1024 ;

1100. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λογάριθμὸς τοῦ 729 ὡς πρὸς βάσιν 3.

1101. Νὰ δειχθῇ ὅτι $\lambda o\gamma\frac{9}{16}+\lambda o\gamma\frac{40}{81}=\lambda o\gamma 5-\lambda o\gamma 18.$

1102. Ὁμοίως ὅτι $\lambda o\gamma\frac{75}{16}-2\lambda o\gamma\frac{5}{9}+\lambda o\gamma\frac{32}{243}=\lambda o\gamma 2.$

1103. Ἂν οἱ α, β, γ ἀποτελοῦν γεωμετρικὴν πρόοδον νὰ δειχθῇ ὅτι οἱ $\lambda o\gamma_\alpha N$, $\lambda o\gamma_\beta N$, $\lambda o\gamma_\gamma N$ ἀποτελοῦν ἁρμονικὴν πρόοδον.

1104. Νὰ δειχθῇ ὅτι ὁ λογάριθμος ἀριθμοῦ τινος ὡς πρὸν βάσιν α εὑρίσκεται ἂν διαιρέσωμεν τὸν δεκαδικὸν λογάριθμόν του διὰ λογα. Νὰ εὑρεθοῦν μετὰ τοῦτο οἱ $\lambda o\gamma_2 15$ καὶ $\lambda o\gamma_5 27$.

1105. Ἂν $\lambda o\gamma(x^2y^3)=\alpha$ καὶ $\lambda o\gamma x-\lambda o\gamma y=\beta$ νὰ εὑρεθῇ ὁ λογx καὶ ὁ λογy.

1106. Ἂν $\nu>1$ νὰ δειχθῇ ὅτι $\lambda o\gamma(\nu+1)-\lambda o\gamma\nu<\lambda o\gamma\nu-\lambda o\gamma(\nu-1)$.

II. ΕΚΘΕΤΙΚΑΙ ΚΑΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΑΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ.

342. ***Ἐκθετικὴ*** λέγεται μία ἐξίσωσις ἔχουσα ἕνα τουλάχιστον ἐκ τῶν ὅρων της μὲ ἐκθέτην ἄγνωστον ἢ συνάρτησιν τοῦ ἀγνώστου· π.χ. αἱ ἐξισώσεις $7^\omega=243$, $3^{5\omega-8}=9$ κλπ. εἶναι ἐκθετικαὶ ἐξισώσεις.

343. ***Λογαριθμικὴ*** λέγεται μία ἐξίσωσις περιέχουσα τὸν λογάριθμον τοῦ ἀγνώστου ἢ συναρτήσεως τινὸς τοῦ ἀγνώστου· π.χ. ἡ ἐξίσωσις $\lambda o\gamma(7x-14)=2$ εἶναι λογαριθμική.

344. Ἡ λύσις μιᾶς ἐκθετικῆς ἢ λογαριθμικῆς ἐξισώσεως στηρίζεται ἐπὶ τῶν ἰδιοτήτων τῶν δυνάμεων καὶ τῶν λογαρίθμων. Ἰδίως φροντίζομεν ὥστε ἡ ἐκθετικὴ ἐξίσωσις νὰ λάβῃ μίαν ἐκ τῶν ἑξῆς μορφῶν

1) $\alpha^x=\alpha^y$ ὁπότε $x=y$.

2) $\alpha^x=1$ ὁπότε $x=0$ (διότι $1=\alpha^0$ ἡ δὲ ἐξίσωσις γίνεται $\alpha^x=\alpha^0$).

3) $\alpha^{2x}+\alpha^x+\beta=0$ ἥτις γίνεται δευτεροβάθμιος ἂν εἰς αὐτὴν τεθῇ $\alpha^x=y$, γίνεται δηλαδὴ αὕτη $y^2+y+\beta=0$ κλπ.

345. Παραδείγματα λύσεως ἐκθετικῶν καὶ λογαριθμικῶν ἐξισώσεων ἔστωσαν τὰ κάτωθι :

α'. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $3^x-4\sqrt{3^x}+3=0$.

Θέτομεν $\sqrt{3^x}=y$ ὅτι ἔχομεν $y^2-4y+3=0$ ἐξ ἧς $y'=3$ καὶ $y''=1$.

Ἄρα $3^x=3^2$ ἐξ ἧς $x=2$ καὶ $3^x=1=3^0$ ἐξ ἧς $x=0$.

β', Ὁμοίως ἡ ἐξίσωσις $\lambda o\gamma 1838-\lambda o\gamma(31^x-42)=\lambda o\gamma 2$ (Πολυτ. 1928).

ἔχομεν $\lambda o\gamma\left(\dfrac{1838}{31^x-42}\right)=\lambda o\gamma 2$ καὶ ἄρα $\dfrac{1838}{31^x-42}=2$ ἢ $31^x=961=31^2$. Ἑπομένως $x=2$.

γ'. Ὁμοίως ἡ ἐξίσωσις $(4x)^{\lambda o\gamma 2+\lambda o\gamma\sqrt{x}}=100$.

Λαλβάνοντες τοὺς λαγαρίθμους ἀμφοτέρων τῶν μελῶν ἔχομεν

$$(\lambda o\gamma 2+\lambda o\gamma\sqrt{x})\lambda o\gamma(4x)=2 \quad \text{ἢ} \quad \frac{1}{2}\lambda o\gamma^2(4x)=2$$

Ἄρα $\lambda o\gamma^2(4x)=4$ ἢ $\lambda o\gamma(4x)=\pm 2$. Ἑπομένων ἔχομεν ἢ $\lambda o\gamma(4x)=2=\lambda o\gamma 100$ καὶ ἄρα $x=25$ ἢ $\lambda o\gamma(4x)=-2=\lambda o\gamma 0{,}01$ καὶ ἄρα $x=0{,}0025$.

δ'. Ὁμοίως ἡ ἐξίσωσις $4^x-9.2^x+8=0$.

Θέτομεν $2^x=y$ ὁπότε $4^x=2^{2x}=y^2$. Ἄρα δοθεῖσα ἐξίσωσις γίνεται $y^2-9y+8=0$ ἐξ ἧς $y'=8$ καὶ $y''=1$. Ἄρα $2^x=8=2^3$ ἐξ ἧς $x=3$ ἢ $2^x=1=2^0$ ἐξ ἧς $x=0$.

ε'. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $x+\lambda o\gamma y=1$, $\sqrt[x]{y^2+10}=11\sqrt[x]{y}$ (Πολυτεχνεῖον. 1930).

Θέτομεν εἰς τὴν β' $\sqrt[x]{y}=z$ ὅτε εὑρίσκομεν $z^2-11z+10=0$ ἐξ ἧς $z'=10$ ἢ $z''=1$. Ἄρα $y=10^x$ ἢ $y=1$. Ἡ α' γράφεται $x\lambda o\gamma 10+\lambda o\gamma y=1$ ἢ $\lambda o\gamma(10^x.y)=\lambda o\gamma 10$ ἢ $10^x y=10$. Ἄρα $y^2=10$ ἐξ ἧς $y=\sqrt{10}$ καὶ ἑπομένως $x=\dfrac{1}{2}$ ἢ $y=1$ καὶ $x=1$.

στ'. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\sqrt[\omega]{4}.5^\varphi=250$, $3^\omega.4^\varphi=576$. (Πολυτ. 1930).

Αἱ ἐξισώσεις τοῦ συστήματος γράφονται $2^{\frac{2}{\omega}}.5^\varphi=2^1.5^3$ καὶ $3^\omega.2^{2\varphi}=3^2.2^6$. Ἄρα ἐκ τῆς πρώτης εὑρίσκομεν $\omega=2$, $\varphi=3$ ἐκ δὲ τῆς β' $\omega=2$, $\varphi=3$ ἤτοι εὑρίσκομεν τὰς αὐτὰς ῥίζας ἐξ ἀμφοτέρων τῶν ἐξισώσεων. Ἄρα αἱ ῥίζαι τοῦ συστήματος εἶναι $\omega=2$, $\varphi=3$.

Ἀσκήσεις πρὸς λύσιν.

Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις.

1107. $x^{x^2-7x+12}=1$

1108. $2^{2x+1}-5.6^x+3^{2x+1}=0$

1109. $2^{3x-\frac{9}{2}}+3^{2x-4}=2^{3x-\frac{13}{2}}+3^{2x-3}$

1110. $10x^{\lambda o\gamma x}=\sqrt{x^5}$

1111. $\lambda o\gamma(3x^3-4x^2+5x+1)-\lambda o\gamma(3x^2-x+9)=0$

1112. $3^{x+1}+9=28.3^x$

1113. $4^{x+1}+64.4^{-x}=257$

1114. $6(\lambda o\gamma x+1)^2+6\lambda o\gamma^2 x=13\lambda o\gamma x(\lambda o\gamma x+1)$

1115. $\left(\sqrt[4]{x}\right)^{5\sqrt[6]{x}-\sqrt[12]{x}}=(x)^{x-\frac{1}{6}}$

1116. $\left(\frac{5}{8}\right)^{\frac{x+1}{3}}\sqrt{\frac{8}{5}}=2\sqrt[x]{5}$

1117. $x^x-x^{-x}=3(1+x^{-x})$

1118. $6^{x^4-18x^2+86}=7776$

1119. $x^{2(\lambda o\gamma\sqrt{x}+3}=10x^{3(\lambda o\gamma\sqrt[3]{x^2})}$

1120. $6\sqrt[x]{64}-8=\left(\sqrt[x]{16}\right)^3$

1121. $8^{2x-1}-5^{-x}=4^{3x+1}-5^{2-x}$

1122. $x^{\lambda o\gamma x}+10^5.x^{-\lambda o\gamma x}=10010$

1123. $x^{\lambda o\gamma^3 x-\lambda o\gamma^5 x}=\frac{1}{10000}$

1124. $\lambda o\gamma(2^x+2.3^x)+2\lambda o\gamma 9=x\lambda o\gamma 3+\lambda o\gamma 178+x\lambda o\gamma 3.$

1125. Εἰς τὴν ἐξίσωσιν $(4\lambda o\gamma\alpha)x^2-4(2-\lambda o\gamma\alpha)x+1=0$ νὰ ὁρισθῇ ὁ α ἵνα αὕτη ἔχῃ ρίζας α΄ πραγματικὰς καὶ ἴσας, β΄ πραγματικὰς καὶ ἀνίσους καὶ γ΄ φανταστικάς.

1126. Εἰς τὴν ἐξίσωσιν $(\lambda o\gamma\alpha)x^2-(\lambda o\gamma\alpha+2)x+2=0$ νὰ ὁρισθῇ ὁ α΄ εἰς τρόπον ὥστε ἡ διαφορὰ τῶν ριζῶν τη; νὰ εἶναι 3.

Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα.

1127. $4^{\lambda o\gamma x}-2^{2\lambda o\gamma y}=12$, $x^2-y^4=0$

1128. $4^{\omega}.12^{\varphi}=9216$, $\sqrt[\omega]{8}.\sqrt[\varphi]{3^{2\omega}}=54$

1129. $5^{3\omega-2\varphi}=3125$, $11^{6\omega-7\varphi}=14641$

1130. $3^{\lambda o\gamma\omega}+2^{\lambda o\gamma\varphi}=11$, $9^{\lambda o\gamma\omega}-4^{\lambda o\gamma\varphi}=77$

1131. $3^{\omega}-5^{\varphi}=2$, $27^{\omega}-125^{\varphi}=4058$

1132. $x^4+y^4=641$, $\lambda o\gamma x+\lambda o\gamma y=1$

1133. $\varphi+10^{\varphi}(\varphi^{-1}-1)=1$, $\omega+\lambda o\gamma\varphi=2$

1134. $\omega^{\varphi}=\varphi^{\omega}$, $\omega^4=\varphi^3$

1135. $\omega^8=\varphi^{2+2\lambda o\gamma\varphi}$, $\omega\varphi=1000$

1136. $3^x=9^y$ καὶ $2x\lambda o\gamma 2-y\lambda o\gamma 6=\lambda o\gamma\left(7+\frac{1}{9}\right)$

1137. $\lambda o\gamma\left(x-\frac{x}{y}\right)=2+\frac{3}{\lambda o\gamma(xy-x)-\lambda o\gamma y}$ καὶ $\lambda o\gamma x=\lambda o\gamma 4y+1$

1138. $x^y=y^x$, $x=y^2$

1139. $x+y=2^x$, $(x+y).3^x=279936$

1140. $y^x(1+y^x)=10100$, $\lambda o\gamma\sqrt{xy}-\lambda o\gamma\sqrt{\frac{x}{y}}=3$ (πολυτ. 1931)

1141. $x^y=243$, $\sqrt[y]{1024}=\left(\frac{2x}{3}\right)^2$ (πολ. 1931)

1142. Οἱ λογάριθμοι τῶν ὅρων γεωμετρικῆς προόδου ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον τῆς ὁποίας τὸ ἄθροισμα τῶν τεσσάρων ὅρων ἰσοῦται μὲ τὴν μονάδα, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τοῦ β΄ καὶ γ΄ ὅρου τῆς γεωμετρικῆς ἰσαῦται μὲ 11. Εὑρεῖν τὰς προόδους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΑ'.

ΑΝΑΤΟΚΙΣΜΟΣ—ΙΣΑΙ ΚΑΤΑΘΕΣΕΙΣ—ΧΡΕΩΛΥΣΙΑ

Ι. ΑΝΑΤΟΚΙΣΜΟΣ.

346. Ὅταν ὁ τόκος ἑκάστης χρονικῆς περιόδου προστίθεται εἰς τὸ κεφάλαιον καὶ ἀποτελῇ οὗτος μέρος τοῦ κεφαλαίου τῆς ἑπομένης χρονικῆς περιόδου, τότε λέγομεν ὅτι τὰ χρήματα τοκίζονται ***ἐπὶ συνθέτῳ τόκῳ ἢ ἐπὶ ἀνατοκισμῷ,*** ἐνῷ ὅταν ὁ τόκος δὲν προστίθεται εἰς τὸ κεφάλαιον ἀλλὰ τὸ κεφάλαιον παραμένῃ τὸ αὐτὸ εἰς ὅλας τὰς χρονικὰς περιόδους τότε λέγομεν ὅτι τὰ χρήματα τοκίζονται ***ἐπὶ ἁπλῷ τόκῳ.***

Συνήθως ἡ χρονικὴ περίοδος καθ' ἣν γίνεται ὁ ἀνατομισμὸς εἶναι τὸ ἔτος ἢ ἡ ἑξαμηνία.

Εἰς τὸν ἀνατοκισμὸν διακρίνομεν ***ἀρχικὸν*** κεφάλαιον καὶ ***τελικὸν*** κεφάλαιον. Τὸ τελικὸν κεφάλαιον περιέχει τὸ ἀρχικὸν κεφάλαιον καὶ τοὺς τόκους.

347. Ἵνα εὕρωμεν τὸ τελικὸν κεφάλαιον εἰς τὸν ἀνατοκισμὸν σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς: Ἔστω ὅτι α δραχμαὶ ἀνατοκίζονται διὰ ν ἔτη.

Ἂν παραστήσωμεν διὰ τ τὸν τόκον τῆς μιᾶς δραχμῆς εἰς ἓν ἔτος (δηλαδὴ ἂν παραστήσωμεν διὰ τ τὸ ἑκατοστὸν τοῦ ἐπιτοκίου) τότε ἐκ τοῦ τύπου $Τ=\frac{Κ.Ε.Χ}{100}$, ὅστις γίνεται $Τ=Κ.τ.Χ$ καὶ ὁ ὁποῖος, ὡς γνωστὸν ἐκ τῆς ἀριθμητικῆς, δίδει τὸν ἁπλοῦν τόκον εὑρίσκομεν ὅτι

α δρχ. εἰς ἓν ἔτος δίδουν τόκον $ατ$, ἄρα γίνονται $α+ατ=α(1+τ)$
$α(1+τ)$ » » » » » » $α(1+τ)τ$, » » $α(1+τ)+α(1+τ)τ=α(1+τ)^2$
$α(1+τ)^2$ » » » » » » $α(1+τ)^2τ$ » » $α(1+τ)^2+α(1+τ)^2τ=α(1+τ)^3$

Καὶ γενικῶς αἱ α δραχμαὶ μετὰ ν ἔτη θὰ γίνουν $α(1+τ)^ν$. Ἄρα ἂν Σ εἶναι τὸ τελικὸν κεφάλαιον, ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$Σ=α(1+τ)^ν \qquad (1)$$

Ἡ ἐξίσωσις (1) ἔχει τέσσαρας ἀγνώστους τοὺς Σ, α, τ, ν. Ἂν δίδωνται οἱ τρεῖς τότε λύομεν λογαριθμικῶς ταύτην ὡς πρὸς τὸν ἀπομένοντα ἄγνωστον.

ΣΗΜ. Ὅταν ὁ ἀνατοκισμὸς γίνῃ διὰ ν ἔτη καὶ η ἡμέρας, τότε πρὸς ὑπολογισμὸν τοῦ τελικοῦ κεφαλαίου Σ σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς. Αἱ α δραχμαὶ μετὰ ν ἔτη γίνονται $α(1+τ)^ν$. Ἤδη αἱ $α(1+τ)^ν$ δραχμαὶ τοκίζονται διὰ η ἡμέρας ἐπὶ ἁπλῷ τόκῳ καὶ ἄρα δίδουν τόκον $\frac{\alpha(1+\tau)^\nu . \eta\tau}{360}$ ὁ ὁποῖος τόκος θὰ προστεθῇ εἰς τὸ κεφάλαιον $\alpha(1+\tau)^\nu$. Ἄρα θὰ ἔχομεν

$$\Sigma=\alpha(1+\tau)^\nu+\frac{\alpha(1+\tau)^\nu \eta\tau}{360} \quad ἢ \quad \Sigma=\alpha(1+\tau)^\nu\left(1+\frac{\eta\tau}{360}\right)$$

348. Ὁ ἀνατοκισμὸς δύναται νὰ γίνεται κατ' ἔτος ἢ καθ' ἑξαμηνίαν. Ἂν ὁ ἀνατοκισμὸς γίνεται καθ' ἑξαμηνίαν τότε τὸ ἐπιτόκιον δὲν εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ἐτησίου ἀλλὰ εὑρίσκεται ὡς ἑξῆς: Ἂν x εἶναι τὸ ἑξαμηνιαῖον ἐπιτόκιον καὶ τ τὸ ἐτήσιον τοτε, διότι τὸ ἔτος ἔχει δύο ἑξαμηνίας, ἔχομεν τὴν σχέσιν

$$(1+x)^2=1+\tau \qquad (2)$$

ἐξ ἧς εὑρίσκομεν $x=\sqrt{1+\tau}-1$. Κατ' ἀνάλογον τρόπον ἐργαζόμεθα ὅταν ὁ ἀνατοκισμὸς γίνεται κατὰ τριμηνίαν ἢ κατὰ μῆνα.

349. Ὡς παραδείγματα ἀνατοκισμοῦ ἔστωσαν τὰ ἑξῆς

α'. Ἀνατοκίζει τις 4000 δραχμὰς πρὸς 5% ἐπὶ 10 ἔτη. Πόσα θὰ ἔχη νὰ λαμβάνη εἰς τὸ τέλος τῶν 10 ἐτῶν;

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως (1) ἡ ὁποία γίνεται $\Sigma=4000\,(1{,}05)^{10}$ εὑρίσκομεν $\lambda o\gamma\Sigma=\lambda o\gamma 4000+10\lambda o\gamma(1{,}05)$ ἢ $\lambda o\gamma\Sigma=3{,}81396$ καὶ ἄρα $\Sigma=6515{,}70$ δρχ.

ΣΗΜ. Ἂν ὁ ἀνατοκισμὸς ἐγίνετο ἐπὶ 10 ἔτη καὶ ἡμέρας τινάς, ἔστω 36, τότε ἐκ τῆς ἐξισώσεως $\Sigma=\alpha(1+\tau)^\nu\left(1+\frac{\eta\tau}{350}\right)$ τὸ μὲν $\alpha(1+\tau)^\nu$ εἶναι 6515,70 τὸ δὲ $1+\frac{\eta\tau}{360}$ εἶναι $1+\frac{36.0{,}05}{360}=1{,}005$. Ἄρα $\Sigma=6515{,}7\times1{,}005=6548{,}27$ δρχ.

β'. Ποῖον κεφάλαιον ἀνατοκιζόμενον πρὸς 4% ἐπὶ 8 ἔτη γίνεται μετὰ τῶν τοκῶν του 3000 δραχμαί;

Ἡ ἐξίσωσις (1) λυομένη ὡς πρὸς α γίνεται $\alpha=\frac{3000}{(1{,}04)^8}$ ἢ

$\lambda o\gamma\alpha=\lambda o\gamma 3000-8\lambda o\gamma(1{,}04)=3{,}34088$ καὶ ἄρα $\alpha=2192{,}20$

γ'. Ἐπὶ πόσον χρόνον κεφάλαιον 6000 δρχ. ἀνατοκιζόμενον πρὸς 6% γίνεται μετὰ τῶν τόκων του 7500 δρχ.

Ἡ ἐξίσωσις (1) δίδει $(1{,}06)^\nu=\frac{7500}{6000}$ ἢ $(1{,}06)^\nu=\frac{5}{4}$ ἢ

$$\nu=\frac{\lambda o\gamma 5-\lambda o\gamma 4}{\lambda o\gamma(1{,}06)}=\frac{0{,}09691}{0{,}02531}=3 \text{ ἔτη καὶ ἡμέραι τινές.}$$

Ἤδη πρὸς εὕρεσιν τῶν ἡμερῶν σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς:

Αἱ 6000 δραχ. ἀνατοκιζόμεναι ἐπὶ 3 ἔτη γίνονται $\Sigma=6000(1{,}06)^3=7146{,}33$ δρχ. Ἤδη ἡ διαφορὰ αὐτῶν ἀπὸ τὰς 7500 δρχ. ἤτοι αἱ

353,67 δρχ. εἶναι ὁ ἁπλοῦς τόκος τῶν 7146,33 δρχ. πρὸς 6°/₀ διὰ τὰς ζητουμένας ἡμέρας. Λύοντες ἁπλοῦν πρόβλημα τόκου εἰς τὸ ὁποῖον ζητοῦνται αἱ ἡμέραι εὑρίσκομεν $\eta=\dfrac{353{,}67\times 36000}{7146{,}33\times 6}=297$ ἡμέραι περίπου. Ἄρα αἱ 6000 δρχ. ἀνατοκίζονται ἐπὶ 3 ἔτη καὶ 297 ἡμέρας.

δ′. Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον 5000 δρχ. ἀνατοκιζόμεναι γίνονται 8000 δραχμαὶ μετὰ 10 ἔτη;

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως (1) ἔχομεν $5000\,(1+\tau)^{10}=8000$ ἢ

$$(1+\tau)^{10}=1{,}6 \quad \text{ἢ} \quad \lambda o\gamma(1+\tau)=\frac{\lambda o\gamma 1{,}6}{10}=0{,}02041$$

καὶ ἄρα $1+\tau=1{,}0481$ καὶ ἑπομένως $\tau=0{,}0481$ ἤτοι τὸ ἐπιτόκιον εἶναι 4,81°/₀

II. ΙΣΑΙ ΚΑΤΑΘΕΣΕΙΣ.

350. Ἔστω ὅτι καταθέτει τις α δραχμὰς ***εἰς τὴν ἀρχὴν ἑκάστου ἔτους*** ἐπὶ ἀνατοκισμῷ. Πόσας δραχμὰς θὰ ἔχῃ νὰ λαμβάνῃ μετὰ ν ἔτη;

Ἡ πρώτη κατάθεσις τῶν α δραχμῶν μετὰ ν ἔτη ἀνατοκιζομένη θὰ γίνῃ $\alpha(1+\tau)^{\nu}$, ἡ δευτέρα κατάθεσις, ὡς ἀνατοκιζομένη κατὰ ἓν ἔτος ὀλιγώτερον θὰ γίνῃ $\alpha(1+\tau)^{\nu-1}$, ἡ τρίτη θὰ γίνῃ $\alpha(1+\tau)^{\nu-2}$ καὶ οὕτω καθεξῆς, ἡ δὲ τελευταία, ὡς ἀνατοκιζομένη μόνον ἐπὶ ἓν ἔτος θὰ γίνῃ $\alpha(1+\tau)$.

Ἄρα, ἂν παραστήσωμεν διὰ Σ τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν καταθέσεων θὰ ἔχωμεν

$$\Sigma=\alpha(1+\tau)+\alpha(1+\tau)^2+\ldots+\alpha(1+\tau)^{\nu} \qquad (3)$$

Τὸ β′ μέλος τῆς ἰσότητος (3) εἶναι γεωμετρικὴ πρόοδος μὲ πρῶτον ὅρον τὸν $\alpha(1+\tau)$ καὶ λόγον τὸν $(1+\tau)$. Ἄρα, ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ τύπου (9′) τῆς παραγράφου 321 ἔχομεν

$$\Sigma=\frac{\alpha(1+\tau)[(1+\tau)^{\nu}-1]}{\tau} \quad \text{ἢ} \quad \Sigma=\alpha(1+\tau)\,\frac{(1+\tau)^{\nu}-1}{\tau} \qquad (4)$$

351. Ἡ ἐξίσωσις (4) περιέχει τέσσαρας ἀγνώστους τοὺς Σ, α, τ, ν λυομένη δὲ ὡς πρὸς α δίδει

$$\alpha=\frac{\Sigma\tau}{(1+\tau)[(1+\tau)^{\nu}-1]} \qquad (5)$$

καὶ ὡς πρὸς ν δίδει

$$(1+\tau)^{\nu}=\frac{\Sigma\tau+\alpha(1+\tau)}{\alpha(1+\tau)} \qquad (6)$$

ἢ διὰ λογαρίθμων

$$\nu=\frac{\lambda o\gamma[\Sigma\tau+\alpha(1+\tau)]-\lambda o\gamma\alpha-\lambda o\gamma(1+\tau)}{\lambda o\gamma(1+\tau)} \qquad (6')$$

Ἐξυπακούεται ὅτι κατὰ τὸν λογαριθμικὸν ὑπολογισμὸν πρέπει νὰ ὑπολογίσωμεν κατ' ἀρχὰς χωριστὰ τὴν παράστασιν $(1+\tau)^\nu-1$ εἰς τοὺς τύπους (4) καὶ (5) καὶ τὴν παράστασιν $\Sigma\tau+\alpha(1+\tau)$ εἰς τὸν τύπον (6).

352. Ὡς παραδείγματα προβλημάτων ἴσων καταθέσεων ἔστωσαν τὰ ἑξῆς:

α'. Καταθέτει τις εἰς τὴν ἀρχὴν ἑκάστου ἔτους καὶ ἐπὶ 10 ἔτη 500 δραχμὰς πρὸς 4%. Πόσας δραχμὰς θὰ ἔχῃ λαμβάνειν εἰς τὸ τέλος τῶν 10 ἐτῶν;

Ἡ ἐξίσωσις (4) γίνεται $\Sigma=5000\times1{,}04\times\dfrac{(1{,}04)^{10}-1}{0{,}04}$

Ἡ παράστασις $(1{,}04)^{10}-1$ ὑπολογιζομένη χωριστὰ γίνεται 0,48. Ἄρα $\Sigma=5000\times1{,}04\times\dfrac{0{,}48}{0{,}04}$ ἐξ οὗ ἢ διὰ τῶν λογαρίθμων ἢ καὶ δι' ἀπ' εὐθείας πράξεων εὑρίσκομεν $\Sigma=62400$ δραχμαί.

β'. Καταθέτει τις κατ' ἔτος ἐπὶ ἀνατοκισμῷ 1000 δραχμὰς πρὸς 5%. Μετὰ πόσα ἔτη θὰ ἔχῃ λαμβάνειν 13210 δραχμάς;

Ἡ ἐξίσωσις (6) δίδει

$$(1{,}05)^\nu=\frac{13210\times0{,}05+1000\times1{,}05}{1000\times1{,}05}\quad \text{ἢ}\quad (1{,}05)^\nu=\frac{1710{,}5}{1050}$$

ἢ
$$\nu=\frac{\text{λογ}(1710{,}5)-\text{λογ}(1050)}{\text{λογ}(1{,}05)}=10 \text{ ἔτη}.$$

ΣΗΜ. Ι. Καὶ ἐνταῦθα ἂν ὁ ν δὲν εὑρεθῇ ἀκέραιος ἐργαζόμεθα ὅπως εἰς τὸ γ' παράδειγμα τῆς παραγράφου 349.

ΣΗΜ. ΙΙ. Εἰς τὰς ἴσας καταθέσεις, ἂν εἶναι ἄγνωστον τὸ ἐπιτόκιον τ, τότε δὲν δύναται νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις (4) ὡς πρὸς ἄγνωστον τὸν $(1+\tau)$ διότι τότε εἶναι αὕτη ν βαθμοῦ ὡς πρὸς τὸν ἄγνωστον $(1+\tau)$. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὑπάρχουν εἰδικοὶ πίνακες δίδοντες τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος ἢ ἐργαζόμεθα δοκιμαστικῶς ὡς εἰς τὸ κάτωθι παράδειγμα.

Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον πρέπει νὰ καταθέσωμεν 1000 δραχ. εἰς τὴν ἀρχὴν ἑκάστου ἔτους ἵνα μετὰ 10 ἔτη λάβωμεν 12630 δραχμάς;

Ἂν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (4) θέσωμεν π. χ. 4% εὑρίσκομεν $\Sigma=12480$ δρχ. ἤτοι ὀλιγωτέρας τῶν 12630 δραχ. Ἄρα συμπεραίνομεν ὅτι τὸ ἐπιτόκιον εἶναι εἶναι μεγαλύτερον τοῦ 4: Ἂν θέσωμεν 4,5% εὑρίσκομεν $\Sigma=14446$ δρχ. ἤτοι περισσοτέρας τῶν 12630. Ἄρα συμπεραίνομεν ὅτι τὸ ἐπιτόκιον εὑρίσκεται μεταξὺ 4 καὶ 4,5. Θέτοντες 4,2% εὑρίσκομεν $\Sigma=12629$ δραχμάς. Ἄρα συμπεραίνομεν ὅτι τὸ ζητούμενον ἐπιτόκιον εἶναι περίπου 4,2%. Ἐννοεῖται ὅτι ὁ τρόπος οὗτος εἶναι κοπιώδης καὶ διὰ τοῦτο τὸ πρόβλημα τοῦτο λύεται ἐπὶ τῇ βάσει εἰδικῶν πινάκων.

353. Ὅταν αἱ ἴσαι καταθέσεις γίνωνται ***εἰς τὸ τέλος ἑκάστου ἔτους***, τότε σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς: Ἡ πρώτη κατάθεσις τῶν α δραχμῶν θὰ ἀνατοκισθῇ ἐπὶ ν−1 ἔτη, ἀφοῦ θὰ γίνῃ εἰς τὸ τέλος τοῦ πρώτου ἔτους καὶ συνεπῶς δὲν θὰ ἔχῃ τόκον κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ πρώτου ἔτους. Δὰ γίνῃ λοιπὸν αὕτη $\alpha(1+\tau)^{\nu-1}$, ἡ δευτέρα κατάθεσις θὰ γίνῃ $\alpha(1+\tau)^{\nu-2}$ καὶ οὕτω καθεξῆς, ἡ δὲ τελευταία κατάθεσις θὰ εἶναι α ὡς μὴ περιέχουσα τόκον καθόσον θὰ γίνῃ εἰς τὸ τέλος τοῦ τελευταίου ἔτους. Ἄρα θὰ ἔχωμεν

$$\Sigma=\alpha+\alpha(1+\tau)+\alpha(1+\tau)^2+\ldots+\alpha(1+\tau)^{\nu-1}$$

ἤ

$$\Sigma=\alpha.\frac{(1+\tau)^{\nu}-1}{\tau} \qquad (7)$$

Παρατήρησις: Παρατηροῦμεν ὅτι ἂν τὰς ἴσας καταθέσεις τὰς γινομένας εἰς τὸ τέλος ἑκάστου ἔτους τὰς ἀνατοκίσωμεν διὰ ἓν ἔτος, τότε εὑρίσκομεν τὰς ἴσας καταθέσεις τὰς γινομένας εἰς τὴν ἀρχὴν ἑκάστου ἔτους. Τὰ παρδείγματα λύσεως τοιούτων προβλημάτων εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰς τῆς παραγράφου 352.

III. ΧΡΕΩΛΥΣΙΑ.

354. Ὅταν δανεισθῇ τίς χρήματα καὶ ἐξοφλήσῃ τὸ χρέος του εἰς ἴσας ἐτησίας δόσεις, τότε ἑκάστη ἐτησία δόσις λέγεται ***χρεωλύσιον***.

Εἰς τὰ προβλήματα τῆς χρεωλυσίας λαμβάνουν χώραν δύο τινὰ ἤτοι

α'). Ὁ δανειζόμενος δανείζεται ἀπὸ μίαν τράπεζαν ἐφ' ἅπαξ α δραχμὰς διὰ ν ἔτη καὶ ἄρα ὀφείλει νὰ πληρώσῃ μετὰ ν ἔτη $\alpha(1+\tau)^{\nu}$ δραχμάς.

β')· Ὁ δανειζόμενος καταθέτει εἰς τὸ τέλος ἑκάστου ἔτους x δραχμὰς ἐπὶ ν ἔτη πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπιτόκιον καὶ εἰς τὴν αὐτὴν τράπεζαν καὶ ἄρα μετὰ ν ἔτη ὀφείλει νὰ λαμβάνῃ $x\frac{(1+\tau)^{\nu}-1}{\tau}$ δραχμάς. Ἄρα πρὸς ἐξόφλησιν τοῦ χρέους σχηματίζομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$x\frac{(1+\tau)^{\nu}-1}{\tau}=\alpha(1+\tau)^{\nu} \qquad (8)$$

Ἡ ἐξίσωσις (8) λυομένη ὡς πρὸς x δίδει τὸ χρεωλύσιον, τὸ ποσὸν δηλαδὴ τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ πληρώνῃ τις κατ' ἔτος διὰ νὰ ἐξοφλήσῃ τὸ χρέος του. Ἡ ἐξίσωσις (8) δύναται νὰ λυθῇ ὡς πρὸς x, ὡς πρὸς α καὶ ὡς πρὸς ν, δὲν δύναται δὲ νὰ λυθῇ ὡς πρὸς τ. (ἴδε σημ. II τῆς § 352).

355. Ὡς παράδειγμα ἔστω τὸ κάτωθι :

Μὲ πόσον χρεωλύσιον ἐξοφλεῖται δάνειον 50000 δραχμῶν πρὸς 5°/ₒ ἂν ἡ ἐξόφλησις θέλωμεν νὰ γίνῃ εἰς 30 ἔτη ;

Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν (8) ὡς πρὸς x ἀφοῦ ὑπολογίσωμεν χωριστὰ τὴν παράστασιν $(1+\tau)^{\nu}-1$ δηλαδὴ τὴν $(1,05)^{30}-1$, εὑρίσκομεν ὅτι τὸ χρεωλύσιον εἶναι περίπου x=3252,60 δραχμαί.

Ἀσκήσεις πρὸς λύσιν.

1143. Καταθέτει τις ἐπὶ ἀνατοκισμῷ 100.000 δρχ. πρὸς 5%. Πόσα θὰ λάβῃ μετὰ 10 ἔτη καὶ 5 μῆνας;

1144. Μετὰ πόσον χρόνον διπλασιάζεται κεφάλαιόν τι ἀνατοκιζόμενον κατ' ἔτος πρὸς 4%;

1145. Μετὰ πόσον χρόνον κεφάλαιόν τι τριπλασιάζεται ἀνατοκιζόμενον κατ' ἑξαμηνίαν πρὸς ἐτήσιον ἐπιτόκιον 6%;

1146. Νὰ εὑρεθῇ ἡ παροῦσα ἀξία κεφαλαίου 50000 δρχ. πληρωτέου μετὰ 2 ἔτη ἐπ' ἀνατοκισμῷ πρὸς 5%;

ΣΗΜ. Ὁ τύπος (1) τῆς § 347 λυόμενος ὡς πρὸς α δίδει $\alpha = \frac{\Sigma}{(1+\tau)^\nu}$. Ἄρα διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν παροῦσαν ἀξίαν τοῦ κεφαλαίου Σ ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τοῦτο διὰ $(1+\tau)^\nu$. Εἰς τὸν ἀνατοκισμὸν ἡ παροῦσα ἢ πραγματικὴ ἀξία εὑρίσκεται πάντοτε μὲ ἐσωτερικὴν ὑφαίρεσιν καὶ ὄχι μὲ ἐξωτερικὴν ὑφαίρεσιν ὅπως εἰς τὸν ἁπλοῦν τόκον, κατόσον ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῶν δύο ὑφαιρέσεων εἰς τὸν ἀνατοκισμὸν εἶναι πολὺ μεγάλη.

1147. Ποῖον κεφάλαιον ἀνατοκιζόμενον κατ' ἔτος πρὸς 5% γίνεται 26300 δρχ. μετὰ 12 ἔτη 7 μῆνας καὶ 13 ἡμέρας;

1148. Δύο κεφάλαια τοποθετοῦνται ἐπὶ ἀνατοκισμῷ. Τὸ ἓν ἐκ 40000 δρχ. πρὸς $4\frac{1}{2}$% καὶ τὸ ἄλλο ἐξ 100000 δρχ. πρὸς $3\frac{1}{2}$%. Μετὰ πόσον χρόνον θὰ γίνουν ἴσα;

1149. Πατὴρ ἀφίνει εἰς τοὺς τρεῖς υἱούς του ἡλικίας 5, 9 καὶ 11 ἐτῶν 100000 δρχ. μὲ τὴν ἐντολὴν νὰ τὰ μοιρασθοῦν κατὰ τοιοῦτον τρόπον ὥστε τὰ μερίδιά των ἀνατοκιζόμενα πρὸς 5% μέχρι τῆς ἐνηλικιώσεως ἑκάστου (μέχρι τοῦ 20ου ἔτους) νὰ γίνωνται ἴσα. Πόσα θὰ λάβῃ ἕκαστος;

1150. Ποσόν τι τοκιζόμενον ἐπὶ ἀνατοκισμῷ ἐπὶ 3 ἔτη δίδει τὸ αὐτὸ τελικὸν κεφαάλαιον τὸ ὁποῖον θὰ ἔδιδεν ἂν ἐτοκίζετο ἐπὶ ἁπλῷ τόκῳ πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπιτόκιον ἐπὶ 3 ἔτη 1 μῆνα καὶ 25 ἡμ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐπιτόκιον.

1151. Ποσὸν 60000 δρχ. ἀνατοκίζεται ἐπὶ χρονικόν τι διάστημα. Ἂν ἀνετοκίζετο τοῦτο ἐπὶ ἓν ἔτος ὀλιγώτερον τότε τὸ τελικὸν κεφάλαιον θὰ ἦτο κατὰ 4000 δρχ. ὀλιγώτερον. Ἂν ὅμως ἀνετοκίζετο ἐπὶ ἓν ἔτος περισσότερον τότε τὸ τελικὸν κεφάλαιον θὰ ἦτο κατὰ 4150 δρχ. περισσότερον. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐπιτόκιον καὶ ἡ διάρκεια τοῦ ἀνατοκισμοῦ.

1152. Ποῖον ποσὸν δύναται νὰ λάβῃ τις ἂν διαθέτῃ ὡς χρεωλύσιον 20000 δρχ. ἐπὶ 12 ἔτη πρὸς $4\frac{1}{2}$%;

1153. Ὁ πληθυσμὸς μιᾶς πόλεως αὐξάνεται κατ' ἔτος κατὰ τὸ ἓν ἑκατοστὸν αὐτοῦ. Μετὰ πόσα ἔτη ὁ πληθυσμὸς τῆς πόλεως ταύτης θὰ διπλασιασθῇ;

1154. Πόλεως τῆς ὁποίας οἱ κάτοικοι εἶναι 80.000 ὁ πληθυσμὸς ἐλαττοῦται κατὰ 1600 εἰς ἓν ἔτος. Δεδομένου ὅτι ἡ ἐλάττωσις αὕτη θὰ ἐξακολουθήσῃ ὑπὸ τὴν αὐτὴν ἀναλογίαν νὰ ὑπολογισθῇ μετὰ πόσα ἔτη ὁ πληθυσμὸς τῆς πόλεως θὰ εἶναι 50.000 κάτοικοι. (Πολυτεχνεῖον 1935).

1155. Εἴς τινα πόλιν ἡ θνησιμότης εἶναι τὸ $\frac{1}{42}$ τοῦ πληθυσμοῦ αὐτῆς αἱ δὲ γεννήσεις τὸ $\frac{1}{35}$ τοῦ πληθυσμοῦ της. Ἐπὶ τῇ παραδοχῇ ὅτι ἡ ἀναλογία εἶναι ἡ αὐτὴ καὶ εἰς τὰ ἄλλα ἔτη, μετὰ πόσον χρόνον θὰ διπλασιασθῇ ὁ πληθυσμός; (Πολυτεχνεῖον 1934).

1156. Δανείζεταί τις ποσόν τι χρημάτων τὸ ὁποῖον ἐξοφλεῖ εἰς 20 ἔτη πρὸς 5% διαθέτων 80000 δρχ. εἰς τὸ τέλος ἑκάστου ἔτους, ἀλλὰ ἡ πρώτη δόσις δίδεται εἰς τὸ τέλος τοῦ πέμπτου ἔτους. Πόσας δραχμὰς ἐδανείσθη;

1157. Μία πόλις ἡ ὁποία πρὸ 16 ἐτῶν εἶχε πληθυσμὸν 600000 κατοίκους ἔχει σήμερον 570000 κατοίκους. Ποία εἶναι ἡ ἐλάττωσις ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὸν πληθυσμόν της κατ' ἔτος;

1158. Δανείζεταί τις α δραχμὰς πρὸς 5% ἐπὶ ἀνατοκισμῷ. Ποῖον χρεωλύσιον πρέπει νὰ πληρώνῃ κατ' ἔτος ἵνα μετὰ 5 ἔτη τὸ χρέος του ἐλαττωθῇ κατὰ τὸ ἥμισυ;

1159. Ὀφείλει τις νὰ πληρώνῃ εἰς τὸ τέλος ἑκάστου ἔτους 2000 δραχμὰς καὶ ἐπὶ 12 ἔτη πρὸς 5%. Πόσα θὰ πληρώσῃ ἐφ' ἅπαξ εἰς τὸ τέλος τῶν 4 ἐτῶν πρὸς ἐξόφλησιν ὅλου τοῦ χρέους;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΒ΄.

ΜΕΤΑΘΕΣΕΙΣ—ΔΙΑΤΑΞΕΙΣ—ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΙ

Ι. ΠΕΡΙ ΜΕΤΑΘΕΣΕΩΝ

356. ***Μεταθέσεις ν πραγμάτων καλοῦνται οἱ διάφοροι τρόποι κατὰ τοὺς ὁποίους δυνάμεθα νὰ θέσωμεν τὰ ν πράγματα ἐπὶ μιᾶς εὐθείας γραμμῆς τὸ ἓν μετὰ τὸ ἄλλο.***

Ἑκάστη μετάθεσις τῶν ν πραγμάτων περιέχει ὅλα τὰ ν πράγματα ἀλλὰ μὲ διάφορον σειράν. Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ εἶναι προφανὲς ὅτι ἡ μετάθεσις ἑνὸς πράγματος εἶναι 1. Ἔστωσαν δύο πράγματα τὰ α καὶ β. Ταῦτα δύνανται νὰ τεθοῦν τὸ ἓν μετὰ τὸ ἄλλο κατὰ τοὺς ἑξῆς δύο τρόπους.

$$\alpha\beta \quad \text{ἢ} \quad \beta\alpha \qquad (1)$$

Ὥστε αἱ μεταθέσες δύο πραγμάτων εἶναι 2 ἢ 1.2. Ἔστωσαν 3 πράγματα τὰ α, β, γ. Τὰ δύο πρῶτα ἀποτελοῦν τὰς μεταθέσεις (1). Τὸ γ μετὰ τῆς πρώτης ὁμάδος αβ ἀποτελεῖ τὰς μεταθέσεις γαβ, αγβ, αβγ, μετὰ δὲ τῆς ὁμάδος βα τὰς μεταθέσεις γβα, βγα, βαγ. Ἄρα ἔχομεν τὰς ἑξῆς μεταθέσεις.

$$\gamma\alpha\beta,\ \alpha\gamma\beta,\ \alpha\beta\gamma,\ \gamma\beta\alpha,\ \beta\gamma\alpha,\ \beta\alpha\gamma \qquad (2)$$

Ἤτοι αἱ μεταθέσεις τριῶν πραγμάτων εἶναι ἐν ὅλω 6 ἢ 1.2.3 εἶναι δὲ ὅλαι διάφοροι ἀλλήλων. Ἔστωσαν ἤδη 4 πράγματα τὰ α, β, γ, δ. Εἶναι προφανὲς ὅτι τὸ δ μὲ τὴν α΄ ὁμάδα ἐκ τῶν (2) ἀποτελεῖ 4 μεταθέσεις ἤτοι τὰς δγαβ, γδαβ, γαδβ, γαβδ. Ἄρα μετὰ τῶν 6 ὁμάδων θὰ ἀποτελέσῃ 24 μεταθέσεις. Ἄρα αἱ μεταθέσεις 4 πραγμάτων εἶναι 24 ἢ 1.2.3.4, ἤτοι ἰσοῦνται μὲ τὸ γινόμενον τῶν τεσσάρων ἀκερσίων ἀριθμῶν 1, 2, 3, 4.

Γενικῶς αἱ μεταθέσεις ν πραγμάτων ἰσοῦνται πρὸς τὸ γινόμενον τῶν ν ἀκεραίων ἀριθμῶν 1.2.3.4. . .ν. Αἱ μεταθέσεις συμβοκικῶς παρίστανται διὰ M_ν ἤτοι

$$M_\nu = 1.2.3.4.\ldots\nu \quad \text{ἢ} \quad \text{καὶ } M_\nu = \nu! \qquad (3)$$

Ἔνθα τὸ ν! σημαίνει τὸ γινόμενον τῶν ν ἀκεραίων ἀριθμῶν 1, 2, 3,....,,ν π. χ. αἱ μεταθέσεις 5 πραγμάτων εἶναι $M_5 = 1.2.3.4.5$.

357. Ἐκ τοῦ τρόπου καθ' ὃν σχηματίζονται αἱ μεταθέσεις εἶναι προφανὲς ὅτι ἵνα ἐκ τῶν μεταθέσεων τῶν $\nu-1$ πραγμάτων εὕρωμεν τὰς μεταθέσεις τῶν ν πραγμάτων ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰς μεταθέσεις τῶν $\nu-1$ πραγμάτων ἐπὶ ν ἤτοι

$$M_\nu = \nu . M_{\nu-1}$$

Πράγματι αἱ $\nu-1$ μεταθέσεις εἶναι $M_{\nu-1}=1.2.3.4...(\nu-1)$, ἂν δὲ πολλαπλασιάσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη ταύτης ἐπὶ ν λαμβάνομεν

$$\nu . M_{\nu-1}=1.2.3.4...(\nu-1).\nu \quad \text{ἤτοι} \quad \nu M_{\nu-1}=M_\nu .$$

II. ΠΕΡΙ ΔΙΑΤΑΞΕΩΝ

358. ***Διατάξεις ν πραγμάτων ἀνὰ μ καλοῦνται οἱ διάφοροι τρόποι κατὰ τοὺς ὁποίους δυνάμεθα νὰ λάβωμεν μ πράγματα ἐκ τῶν ν καὶ νὰ τὰ θέσωμεν τὸ ἓν μετὰ τὸ ἄλλο ἐπ᾽ εὐθείας γραμμῆς.*** Ἐξυπακούεται δὲ ὅτι θὰ εἶναι $\mu \leq \nu$.

Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ διατάξωμεν τὰ πέντε πράγματα α, β, γ, δ, ε ἀνὰ ἕν. Εἶναι προφανὲς ὅτι αἱ διατάξεις των εἶναι 5. Ἂν θέλωμεν νὰ διατάξωμεν αὐτὰ ἀνὰ δύο τότε εἶναι προφανὲς ὅτι ἕκαστον ἀποτελεῖ μετὰ τῶν λοιπῶν τέσσαρας διατάξεις ἀνὰ δύο ἤτοι τὸ α ἀποτελεῖ μετὰ τῶν λοιπῶν τὰς διατάξεις αβ, αγ, αδ, αε τὸ β τὰς βα, βγ, βδ, βε τὸ γ τὰς γα, γβ, γδ, γε κλπ. Ἄρα ὅλα τὰ 5 πράγματα θὰ ἀποτελοῦν 5.4=20 διατάξεις ἀνὰ δύο τὰς ἑξῆς

$$\begin{array}{llll} \alpha\beta, & \alpha\gamma, & \alpha\delta, & \alpha\varepsilon, \\ \beta\alpha, & \beta\gamma, & \beta\delta, & \beta\varepsilon. \\ \gamma\alpha, & \gamma\beta, & \gamma\delta, & \gamma\varepsilon. \\ \delta\alpha, & \delta\beta, & \delta\gamma, & \delta\varepsilon. \\ \varepsilon\alpha, & \varepsilon\beta, & \varepsilon\gamma, & \varepsilon\delta. \end{array} \qquad (4)$$

Ἂν ἤδη θέλωμεν νὰ διατάξωμεν τὰ 5 πράγματα ἀνὰ τρία, παρατηροῦμεν ὅτι τὸ α ἐκ τῆς πρώτης σειρᾶς ἐκ τῶν (4) οὐδεμίαν διάταξιν δίδει, ἐξ ἑκάστης δὲ τῶν λοιπῶν 4 σειρῶν δίδει τρεῖς διατάξεις ἀνὰ τρία πράγματα ἤτοι ἐκ τῆς β΄ σειρᾶς τὰς αβγ, αβδ, αβε, ἐκ τῆς γ΄ σειρᾶς τὰς αγβ, αγδ, αγε, ἐκ τῆς δ΄ σειρᾶς τὰς αδβ, αδγ, αδε καὶ ἐκ τῆς ε΄ σειρᾶς τὰς αεβ, αεγ, αεδ. Ἤτοι παρατηροῦμεν ὅτι τὸ α δίδει ἐν ὅλῳ 12 ἢ 4.3 διατάξεις. Ὁμοίως τὸ β ἐκ μὲν τῆς β΄ σειρᾶς οὐδεμίαν διάταξιν δίδει ἐξ ἑκάστης δὲ τῶν ὑπολειπομένων δίδει ἀνὰ 3 διατάξεις ἤτοι καὶ τὸ β δίδει 4.3 διατάξεις. Τὸ αὐτὸ λέγομεν καὶ διὰ τὰ λοιπὰ πράγματα γ, δ, ε. Ἐπειδὴ δὲ ὅλα τὰ πράγματα εἶναι 5 διὰ τοῦτο αἱ διατάξεις των ἀνὰ 3 εἶναι ἐν ὅλῳ 5.4.3. Εἶναι δὲ προφανὲς ἐκ τοῦ τρόπου τοῦ σχηματισμοῦ τῶν διατάξεων τούτων ὅτι ἐλήφθησαν ὅλαι αἱ δυναταὶ διατάξεις καὶ ἑκάστη ἀπὸ μίαν μόνον φοράν.

Ὁμοίως σκεπτόμενοι ἀποδεικνύομεν ὅτι αἱ διατάξεις τῶν 5 πραγμάτων ἀνὰ 4 εἶναι 5.4.3.2. Ἤτοι παρατηροῦμεν ὅτι αἱ διατάξεις τῶν 5 πραγμάτων ἀνὰ 4 εἶναι τὸ γινόμενον τῶν τεσσάρων διαδοχικῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν τῶν μικροτέρων τοῦ 5 μὲ πρῶτον παράγοντα τὸν 5.

Γενικῶς αἱ διατάξεις τῶν ν πραγμάτων ἀνὰ μ ἰσοῦνται μὲ τὸ γινόμενον τῶν μ ἀκεραίων ἀριθμῶν ν, ν—1, ν—2, ν—3 . . . .ν—μ+1 παρίσταται δὲ διὰ τοῦ συμβόλου Δ_ν^μ ἤτοι :

$$\Delta_\nu^\mu=\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)\ldots(\nu-\mu+1). \qquad (5)$$

π. χ. αἱ διατάξεις 8 πραγμάτων ἀνὰ 3 εἶναι $\Delta_8^3=8.7.6$. Αἱ διατάξεις 9 πραγμάτων ἀνὰ 5 εἶναι $\Delta_9^5=9.8.7.6.5$ κλπ.

359. Ἡ σχέσις (5) δύναται νὰ γραφῇ καὶ ὡς ἑξῆς

$$\Delta_\nu^\mu=[\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)\ldots(\nu-\mu+2)](\nu-\mu+1)$$

Ἀλλ᾽ ἡ ἐντὸς τῶν ἀγκυλῶν παράστασις εἶναι αἱ διατάξεις τῶν ν πραγμάτων ἀνὰ μ—1. Ἄρα ἔχομεν

$$\Delta_\nu^\mu=(\nu-\mu+1)\Delta_\nu^{\mu-1} \qquad (6)$$

III. ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΙ

360. ***Συνδυασμοὶ ν πραγμάτων ἀνὰ μ καλοῦνται οἱ διάφοροι τρόποι κατὰ τοὺς ὁποίους δυνάμεθα νὰ λάβωμεν μ πράγματα ἐκ τῶν ν, μὴ ἐνδιαφερόμενοι διὰ τὴν σειρὰν μὲ τὴν ὁποίαν τὰ λαμβάνομεν.***

Ὥστε οἱ συνδυασμοὶ διαφέρουν ἀπὸ τὰς διατάξεις κατὰ τὸ ὅτι ἐνῷ εἰς τὰς διατάξεις ἐνδιαφερόμεθα καὶ διὰ τὴν σειρὰν μὲ τὴν ὁποίαν λαμβάνομεν τὰ πράγματα, εἰς τοὺς συνδυασμοὺς δὲν μᾶς ἐνδιαφέρει ἡ σειρὰ αὐτῶν π.χ. ἐνῷ τὰ 3 πράγματα α, β, γ ἔχουν 6 διατάξεις ἀνὰ τρία ἤτοι τὰς γαβ, αγβ, αβγ, γβα, βγα, βαγ, συνδυασμοὺς ἀνὰ τρία ἔχουν μόνον ἕνα.

361. Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν εὐκόλως τοὺς συνδυασμοὺς ἂν γνωρίζωμεν τὰς διατάξει. Ἤτοι :

Οἱ συνδυατμοὶ 5 πραγμάτων ἀνὰ 1 εἶναι 5, δηλαδὴ τόσοι ὅσαι καὶ αἱ διατάξεις των. Οἱ συνδυασμοὶ 5 πραγμάτων ἀνὰ 2 εἶναι τὸ ἥμισυ τῶν ἀνὰ δύο διατάξεων αὐτῶν· διότι π.χ. τὰ πράγματα α καὶ β ἐνῶ ἔχουν δύο διατάξεις ἀνὰ δύο ἤτοι τὰς αβ καὶ βα, συνδυασμοὺς ἔχουν ἀνὰ δύο μόνον ἕνα. Αἱ ἀνὰ δύο λοιπὸν διατάξεις τῶν 5 πραγμάτων διαιρούμεναι διὰ δύο ἤτοι διὰ 1.2 δίδουν τοὺς ἄνω δύο συνδυασμοὺν αὐτῶν. Ὁμοίως ἐπειδὴ τὰ πράγματα α, β, γ ἔχουν ἓξ διατάξεις ἀνὰ τρία, ἤτοι τὰς 1.2.3, ἐνῷ ἔχουν ἕνα μόνον συνδυασμὸν ἀνὰ 3, διὰ τοῦτο ἵνα εὕρωμεν τοὺς συνδυασμοὺς ἀνὰ τρεῖς τῶν 5 πραγμάτων ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὰς ἀνὰ τρεῖς διατάξεις των διὰ 1.2.3 ἤτοι διὰ τῶν μεταθέσεων τῶν τριῶν πραγμάτων καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ἄρα οἱ συνδυασμοὶ ν πραγμάτων ἀνὰ μ εὑρίσκονται ἂν διαιρέσωμεν τὰς διατάξεις τῶν ν πραγμάτων ἀνὰ μ διὰ τῶν μεταθέσεων τῶν μ πραγμάτων. Ἑπομένως ἂν διὰ Σ_ν^μ παρασταθοῦν οἱ συνδυασμοὶ τῶν ν πραγμάτων ἀνὰ μ, διὰ Δ^μ αἱ διατάξεις τῶν ν πραγμάτων ἀνὰ μ καὶ M_μ αἱ μεταθέσεις τῶν μ πραγμάτων ἔχομεν

$$\Sigma_\nu^\mu = \frac{\Delta_\nu^\mu}{M_\mu} = \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)\ldots(\nu-\mu+1)}{1.2.3.4\ldots\mu} \quad (7)$$

π. χ. οἱ συνδυασμοὶ 8 πραγμάτων ἀνὰ 5 εἶναι :

$$\Sigma_8^5 = \frac{\Delta_8^5}{M_5} = \frac{8.7.6.5.4}{1.2.3.4.5} = 56.$$

362. Ἂν πολλαπλασιάσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τοῦ β' κλάσματος τῆς (7) ἐπὶ 1.2.3...ν—μ, τότε εὑρίσκομεν

$$\frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)\ldots(\nu-\mu+1)(\nu-\mu)\ldots3.2.1}{(1\,2.3\ldots\mu)(1.2.3\ldots\nu-\mu)} = \frac{\nu!}{\mu!(\nu-\mu)!}$$

ἤτοι ὁ μὲν ἀριθμητὴς ἰσοῦται μὲ τὰς μεταθέσεις τῶν ν πραγμάτων ὁ δὲ παρανομαστὴς μὲ τὸ γινόμενον τῶν μεταθέσεων τῶν μ πραγμάτων ἐπὶ τὰς μεταθέσεις τῶν ν—μ πραγμάτων. Ἄρα

$$\Sigma_\nu^\mu = \frac{M_\nu}{M_\mu M_{\nu-\mu}} \quad (8)$$

Ἡ σχέσις (8) εἶναι ἀληθὴς διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ μ μικροτέραν τοῦ ν. Ἄρα θὰ ἀληθεύῃ αὕτη καὶ διὰ τὴν τιμὴν ν—μ τοῦ μ. Θέτοντες λοιπὸν εἰς αὐτόν ἀντὶ μ τὸ ν—μ λαμβάνομεν

$$\Sigma_\nu^{\nu-\mu} \frac{M_\nu}{M_{\nu-\mu}.M_\mu} \quad (9)$$

Ἐκ τῶν (8) καὶ (9) συμπεραίνομεν ὅτι

$$\Sigma_\nu^\mu = \Sigma_\nu^{\nu-\mu} \quad (10)$$

ἤτοι ***οἱ συνδυασμοὶ τῶν ν πραγμάτων ἀνὰ μ ἰσοῦται μὲ τοὺς συνδυασμοὺς τῶν ν πραγμάτων ἀνὰ ν—μ.***

Ἐκ τοῦ τύπου (10) συμπεραίνομεν ὅτι μ+(ν—μ)=ν. ***ἤτοι ὁ ἀριθμὸς ν τῶν συνδυασμῶν ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τοῦ ἀριθμοῦ μ καὶ τοῦ ἀριθμοῦ ν—μ.***

Ἀσκήσεις πρὸς λύσιν.

1160. Ἂν $\Delta_\nu^4 = 18\,\Delta_{\nu-1}^2$ νὰ εὑρεθῇ ὁ ν.

1161. Νὰ δειχθῇ ὅτι $\Delta_{\nu+1}^{\varrho+1} = (\nu+1)\Delta_\nu^\varrho$

1162. Νὰ δειχθῇ ὅτι $\Sigma_\nu^\varrho + \Sigma_\nu^{\varrho-1} = \Sigma_{\nu+1}^\varrho$

1163. Ἂν $2\Sigma_\nu^4 = 35.\Sigma_\nu^3$ νὰ εὑρεθῇ ὁ ν.

1164. Ἂν $\Sigma_{28}^{\mu+4} = \Sigma_{28}^{\mu-2}$ νὰ εὑρεθῇ ὁ μ.

1165 Πόσαι λέξεις μὲ τρία γράμματα δύνανται νὰ σχηματισθοῦν ἐκ τοῦ ἑλληνικοῦ ἀλφαβήτου ;

1166. Πόσαι λέξεις μὲ τέσσαρα γράμματα μὴ περιέχουσαι τὰ αὐτὰ γράμματα δύνανται νὰ σχηματισθοῦν ἐκ τοῦ ἑλληνικοῦ ἀλφαβήτου ;

1167. Μεταξὺ ὀκτὼ ὁμάδων ποδοσφαίρου ἑκάστη πρόκειται νὰ συναντηθῇ τετράκις μὲ ἑκάστην ἐκ τῶν λοιπῶν. Πόσαι σνντήσεις θὰ γίνουν ἐν ὅλῳ.

1168. Ἂν $\Sigma_{2\nu}^3 : \Sigma_\nu^2 = 44 : 3$ νὰ εὑρεθῇ ὁ ν.

1169. Ἂν $\Sigma_\nu^{12} = \Sigma_\nu^8$ νὰ εὑρεθοῦν οἱ Σ_ν^{17} καὶ οἱ Σ_ν^{22}

1170. Ἂν $\Sigma_{18}^\varrho = \Sigma_{18}^{\varrho+2}$ νὰ εὑρεθοῦν οἱ Σ_ϱ^5

1171. Ἂν $\Sigma_\nu^{10} = \Sigma_\nu^{20}$ νὰ εὑρεθῇ ὁ ν.

VI. ΠΕΡΙ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

363. Ἂν α εἶναι αἱ εὐνοϊκαὶ περιπτώσεις τοῦ νὰ συμβῇ γεγονός τι καὶ β αἱ μὴ εὐνοϊκαὶ περιπτώσεις, τότε ***πιθανότης*** τοῦ νὰ συμβῇ τὸ ἐν λόγῳ γεγονὸς καλεῖται τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τῶν εὐνοϊκῶν περιπτώσεων α διὰ τοῦ ἀριθμοῦ α+β ὅλων τῶν δυνατῶν περιπτώσεων εὐνοϊκῶν καὶ μὴ εὐνοϊκῶν, ἤτοι τὸ πηλίκον $\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$.

Παραδείγματα πιθανοτήτων ἔστωσαν τὰ ἑξῆς :

α') Ἂν εἰς μίαν κληρωτίδα ὑπάρχουν 25 μικραὶ σφαῖραι ὅμοιαι ἐκ τῶν ὁποίων αἱ 9 εἶναι λευκαὶ καὶ αἱ λοιπαὶ ἐρυθραί, τότε ἂν ἐξαγάγωμεν μίαν σφαῖραν ἡ πιθανότης νὰ εἶναι λευκὴ ἡ ἐξαγομένη σφαῖρα εἶναι $\frac{9}{25}$ νὰ εἶναι δὲ αὕτη ἐρυθρὰ εἶναι $\frac{16}{25}$. Διότι διὰ μὲν τὴν λευκὴν σφαῖραν αἱ εὐνοϊκαὶ περιπτώσεις εἶναι 9 αἱ δὲ μὴ εὐνοϊκαὶ εἶναι 16· διὰ δὲ τὴν ἐρυθρὰν σφαῖραν συμβαίνει ἀντιθέτως.

β') Ἂν εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα ἐξαγάγωμεν 2 σφαίρας τότε ὅλαι αἱ εὐνοϊκαὶ περιπτώσεις διὰ νὰ ἐξαχθοῦν δύο λευκαὶ εἶναι οἱ συνδυασμοὶ τῶν 9 πραγμάτων ἀνὰ δύο ἤτοι (§ 361) $\frac{9.8}{2} = 36$, ὅλαι δὲ αἱ δύνανται περιπτώσεις εἶναι οἱ συνδυασμοὶ τῶν 25 πραγμάτων ἀνὰ δύο ἤτοι $\frac{25.24}{2} = 300$. Ἄρα ἡ πιθανότης τοῦ νὰ ἐξαχθοῦν δύο λευκαὶ σφαῖραι εἶναι $\Sigma_9^2 : \Sigma_{25}^2 = \frac{36}{300} = \frac{3}{25}$.

γ΄) Ἂν ρίψῃ τις ἐπὶ μιᾶς τραπέζης δύο κύβους (ζάρια) ποία εἶναι ἡ πιθανότης τοῦ νὰ εἶναι 10 τὸ ἄθροισμα τῶν στιγμῶν αἱ ὁποῖαι εἶναι ἐπὶ τῶν ἐπάνω δύο ἑδρῶν ;

Αἱ δυναταὶ περιπτώσεις εἶναι ἐν ὅλῳ 36 ἐπειδὴ ἕκαστος κύβος ἔχει 6 ἕδρας, αἱ εὐνοϊκαὶ ὅμως εἶναι αἱ ἑξῆς $6+4$, $5+5$, $4+6$ ἤτοι τρεῖς. Ἄρα ἡ πιθανότης νὰ συμβῇ τὸ ζητούμενον εἶναι $\frac{3}{36}$ ἢ $\frac{1}{12}$

Ἀσκήσεις πρὸς λύσιν

1172. Ἀπὸ κληρωτίδα περιέχουσαν 4 λευκὰς σφαίρας καὶ 5 μαύρας ἐξάγει τίς τρεῖς σφαίρας. Ποία εἶναι ἡ πιθανότης καὶ αἱ τρεῖς ἐξαγόμεναι σφαῖραι νὰ εἶναι μαῦρα ;

1173. Δοχεῖον περιέχει 5 λευκάς, 7 μαύρας και 4 ἐρυθρὰς σφαίρας. Ἂν ἐξάγωμεν τρεῖς σφαίρας,νὰ εὑρεθῇ ἡ πιθανότης καθ' ἣν καὶ αἱ τρεῖς θὰ εἶναι λευκαί.

1174. Ἂν εἰς μίαν κληρωτίδα περιέχωνται 12 κλῆροι ἐπὶ ἑκάστου τῶν ὁποίων εἶναι ἀναγεγραμμένοι οἱ 12 πρῶτοι ἀκέραιοι ἀριθμοί, καὶ ἐξαχθῶσι δύο κλῆροι κατὰ τύχην, ποία εἶναι ὁ πιθανότης ὁ εἷς νὰ εἶναι 6 καὶ ὁ ἄλλος 8 ;

1175. Ἂν ρίψῃ τις ἐπὶ μιᾶς τραπέζης δύο κύβους (ζάρια) ποῖα εἶναι ἡ πιθανότης νὰ εἶναι 9 τὸ ἄθροισμα τῶν στιγμῶν τῶν ἑδρῶν αἱ ὁποίαι εὑρίσκονται εἰς τὸ ἐπάνω μέρος ;

1176. Ἂν ἓν λαχεῖον ἀποτελῆται ἀπὸ 80 ἀριθμοὺς καὶ εἰς ἑκάστην κλήρωσιν ἐξάγωνται 4 κλῆροι, ποία εἶναι ἡ πιθανότης νὰ εἶναι μεταξὺ τῶν 4 ἐξαγομένων κλήρων εἷς ἐκ τῶν 80 ἀριθμῶν δοθεὶς ἐκ τῶν προτέρων ;

V. ΔΙΩΝΥΜΟΝ ΤΟΥ ΝΕΥΤΩΝΟΣ

364. Ἔστω ὅτι ἔχομεν νὰ ἐκτελέσωμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν ν διωνύμων παραγόντων.

$$(x+\alpha)(x+\beta)(x+\gamma)(x+\delta)\ldots(x+\lambda).$$

Εἶναι γνωστὸν ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ γινομένου πολλῶν παραγόντων ὅτι πρὸς εὕρεσιν τοῦ γινομένου τούτου πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς δύο πρώτους παράγοντας, κατόπιν τὸ γινόμενόν των ἐπὶ τὸν τρίτον, τὸ γινόμενον τῶν τριῶν πρώτων ἐπὶ τὸν τέταρτον καὶ οὕτω καθεξῆς μέχρι τέλους, (ἴδε καὶ § 24) ἤτοι

$$(x+\alpha)(x+\beta)=x^2+(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$$

$$(x+\alpha)(x+\beta)(x+\gamma)=x^3+(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)x+\alpha\beta\gamma$$

$$(x+\alpha)(x+\beta)(x+\gamma)(x+\delta)=x^4+(\alpha+\beta+\gamma+\delta)x^3+$$
$$(\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta)x^2+(\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta)x+\alpha\beta\gamma\delta.$$

. . . .

365. Ἐξετάζοντες τὰ ὡς ἄνω ἐξαγόμενα παρατηροῦμεν τὰ ἑξῆς. Πρὸς εὕρεσιν τοῦ α΄ ὅρου τοῦ γινομένου πολλαπλασιάζομεν τοὺς πρώτους ὅρους ὅλων τῶν διωνύμων. Πρὸς εὕρεσιν τοῦ β΄ ὅρου πολλαπλασιάζομεν τὸν β΄ ὅρον ἑκάστου διωνύμου ἐπὶ τὸν α΄ ὅρον τῶν λοιπῶν διωνύμων καὶ ἐπειδὴ ὁ α΄ ὅρος τῶν λοιπῶν διωνύμων εἶναι ὁ αὐτὸς ἤτοι x, τὰ δὲ διώνυμα εἶναι ἐν ὅλῳ $\nu-1$ (καθόσον δὲν ὑπολογίζομεν τὸ διώνυμον μὲ τὸ ὁποῖον πολλαπλασιάζομεν) ἕπεται ὅτι τὰ διάφορα ταῦτα ἐξαγόμενα θὰ περιέχουν ἅπαντα τὸν παράγοντα $x^{\nu-1}$, θὰ εἶναι δηλαδὴ ταῦτα τά :

$$\alpha x^{\nu-1},\ \beta x^{\nu-1},\ \gamma x^{\nu-1}\dots$$

Ἄρα ὁ β΄ ὅρος θὰ ἔχῃ τὴν μορφὴν $(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\dots..)x^{\nu-1}$ ἢ ἂν θέσωμεν $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\dots=K_1$. ὁ β΄ ὅρος θὰ ἔχῃ τὴν μορφὴν $K_1x^{\nu-1}$ Πρὸς εὕρεσιν τοῦ γ΄ ὅρου παρατηροῦμεν ὅτι πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ γινόμενον τῶν δευτέρων ὅρων δύο ἐκ τῶν διωνύμων ἐπὶ τὸν α΄ ὅρον ἑκάστου ἐκ τῶν ὑπολειπομένων. Ἐπειδὴ δὲ ὁ α΄ ὅρος ἑκάστου ἐκ τῶν ὑπολειπομένων διωνύμων εἶναι ὁ x τὰ δὲ διώνυμα εἶναι ἐν ὅλῳ $\nu-2$ (καθόσον δὲν ὑπολογίζονται τὰ δύο διώνυμα μὲ τὰ ὁποῖα πολλαπλασιάζομεν), ἕπεται ὅτι τὰ διάφορα ταῦτα ἐξαγόμενα θὰ περιέχουν ὡς κοινὸν παράγοντα τὸν $x^{\nu-2}$ θὰ εἶναι δὲ ταῦτα τὰ $\alpha\beta x^{\nu-2}$, $\alpha\gamma x^{\nu-2}$, $\alpha\delta x^{\nu-2}$, $\beta\gamma x^{\nu-2}\dots$ Ἄρα ὁ γ΄ ὅρος θὰ ἔχῃ τὴν μορφὴν $(\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\dots..\beta\gamma+\dots..)x^{\nu-2}$ ἤ, ἂν θέσωμεν $\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\dots..\beta\gamma+\dots..=K_2$ τότε ὁ γ΄ ὅρος εἶναι τῆς μορφῆς $K_2x^{\nu-2}$.

Ὁμοίως σκεπτόμενοι διὰ τὸν δ΄ ὅρον παρατηροῦμεν ὅτι πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ γινόμενον τῶν δευτέρων ὅρων τριῶν ἐκ τῶν διωνύμων ἐπὶ τὸν α΄ ὅρον ἑκάστου ἐκ τῶν λοιπῶν. Θὰ ἔχῃ ἄρα οὗτος τὴν μορφὴν $(\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\dots.)x^{\nu-3}$ ἢ ἂν τεθῇ $\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\dots.=K_3$ θὰ εἶναι οὗτος $K_3x^{\nu-3}$ καὶ οὕτω καθεξῆς, ὁ δὲ τελευταῖος ὅρος θὰ εἶναι τὸ γινόμενον τῶν δευτέρων ὅρων τῶν ν διωνύμων ἤτοι θὰ εἶναι $\alpha\beta\gamma\delta\dots.\lambda$. Θὰ ἔχομεν λοιπόν :

$$(x+\alpha)(x+\beta)(x+\gamma)(x+\delta)\dots.(x+\lambda)=$$
$$x^\nu+K_1x^{\nu-1}+K_2x^{\nu-2}+K_3x^{\nu-3}+\dots.+\alpha\beta\gamma\delta\dots.\lambda$$

366. Ἂν ἤδη ὑποθέσωμεν ὅτι τὰ ν ταῦτα διώνυμα εἶναι ἴσα μεταξύ των, ἤτοι ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι $\alpha=\beta=\gamma=\dots.\lambda$, τότε τὸ ἐν λόγῳ γινόμενον γίνεται : $(x+\alpha)^\nu$. Ἀλλὰ τότε

$$K_1 = \alpha + \beta + \gamma + \delta \ldots\ldots = \alpha + \alpha + \alpha + \ldots\ldots = \nu\alpha$$

$$K_2 = \alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma \ldots\ldots = \alpha^2 + \alpha^2 + \alpha^2 + \ldots\ldots = \frac{\nu(\nu-1)}{1.2}\alpha^2$$

$$K_3 = \alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \ldots\ldots = \alpha^3 + \alpha^3 + \alpha^3 + \ldots\ldots = \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{1.2.3}\alpha^3$$

. . . .

διότι τὸ K_2 εἶναι οἱ συνδυασμοὶ τῶν ν πραγμάτων ἀνὰ δύο, οἵτινες κατὰ τὴν παράγραφον 361 εἶναι $\frac{\nu(\nu-1)}{1.2}$, τὸ K_3 εἶναι οἱ συνδυασμοὶ τῶν ν πραγμάτων ἀνὰ τρία εἶναι δὲ οὗτοι $\frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{1.2.3}$ κ.λ.π.

Ἄρα ἔχομεν :

$$(x+\alpha)^\nu = x^\nu + \nu\alpha x^{\nu-1} + \frac{\nu(\nu-1)}{1.2}\alpha^2 x^{\nu-2} + \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{1.2.3}\alpha^3 x^{\nu-3}$$

$$+ \ldots + \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)\ldots(\nu-\mu+1)}{1.2.3\ldots\mu}\alpha^\mu x^{\nu-\mu} + \ldots + \alpha^\nu . \qquad (1)$$

Ἡ ἄνω σχέσις εἶναι γνωστὴ ὑπὸ τὸ ὄνομα ***διώνυμον τοῦ Νεύτωνος***, μᾶς ἐπιτρέπει δὲ νὰ εὑρίσκωμεν τὸ ἀνάπτυγμα οἱασδήποτε δυνάμεως ἑνὸς διωνύμου.

367. Ἄν τὸ διώνυμον εἶναι τῆς μορφῆς $(x-\alpha)^\nu$ τότε τὸ ἀνάπτυγμα (1) γράφεται

$$(x-\alpha)^\nu = x^\nu - \nu\alpha x^{\nu-1} + \frac{\nu(\nu-1)}{1.2}\alpha^2 x^{\nu-2} - \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{1.2.3}\alpha^3 x^{\nu-3} + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^\mu \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)\ldots(\nu-\mu+1)}{1.2.3\ldots\mu}\alpha^\mu x^{\nu-\mu} + \ldots + (-1)^\nu \alpha^\nu . \qquad (2)$$

διαφέρει δὲ ἀπὸ τὸν τύπον (1) κατὰ τὸ ὅτι οἱ ὅροι του εἶναι ἐναλλὰξ θετικοὶ καὶ ἀρνητικοί.

ΣΗΜ. Ὁ τύπος (1) ἰσχύει καὶ ἂν ὁ ἐκθέτης ν εἶναι κλασματικὸς ἢ ἀρνητικὸς ἀριθμός.

368. ***Εὕρεσις τοῦ γενικοῦ ὅρου τοῦ ἀναπτύγματος τοῦ διωνύμου τοῦ Νεύτωνος.***

Ἐκ τῆς σχέσεως (1) παρατηροῦμεν ὅτι ὁ συντελεστὴς τοῦ ὅρου τοῦ ἀναπτύγματος τοῦ διωνύμου $(x+\alpha)^\nu$ τοῦ κατέχοντος τὴν $\mu+1$ τάξιν ἰσοῦται μὲ τὸν ἀριθμὸν τῶν συνδυασμῶν τῶν ν πραγμάτων ἀνὰ μ δηλαδὴ μὲ $\frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)\ldots(\nu-\mu+1)}{1.2.3\ldots\mu}$, ὁ ἐκθέτης τοῦ x εἶναι $\nu-\mu$ ὁ δὲ τοῦ α εἶναι μ. Ἄρα ὁ γενικὸς ὅρος ὁ κατέχων τὴν $\mu+1$ τάξιν τοῦ ἀναπτύγματος θὰ εἶναι

$$K_{\mu+1} = \Sigma_\nu^\mu \alpha^\mu x^{\nu-\mu} \qquad \text{ἢ} \qquad K_{\mu+1} = \Sigma_\nu^{\nu-\mu} \alpha^\mu x^{\nu-\mu} \qquad (4)$$

369. Ὁ τύπος (1) δύναται νὰ γραφῇ καὶ ὑπὸ τὴν ἑξῆς μορφὴν

$$(x+\alpha)^\nu = x^\nu + \Sigma^1_\nu \alpha x^{\nu-1} + \Sigma^2_\nu \alpha^2 x^{\nu-2} + \Sigma^3_\nu \alpha^3 x^{\nu-3} + \dots$$
$$\dots + \Sigma^{\nu-2}_\nu \alpha^{\nu-2} x^2 + \Sigma^{\nu-1}_\nu \alpha^{\nu-1} x + \Sigma^\nu_\nu \alpha^\nu$$

Ἀλλὰ τότε συνεπείᾳ τῆς σχέσεως (10) τῆς § 362 ἔχομεν

$$\Sigma^1_\nu = \Sigma^{\nu-1}_\nu,\ \Sigma^2_\nu = \Sigma^{\nu-2}_\nu,\ \Sigma^3_\nu = \Sigma^{\nu-3}_\nu \dots$$

ἤτοι παρατηροῦμεν ὅτι ***οἱ ὅροι τοῦ ἀναπτύγματος οἱ ἀπέχοντες ἰσάκις ἀπὸ τὰ ἄκρα ἔχουν τοὺς ἰδίους συντελεστάς.*** Τοῦτο μᾶς εὐκολύνει εἰς τὴν εὕρεσιν τῶν συντελεστῶν τοῦ ἀναπτύγματος. Παρατηροῦμεν ἐπίσης ὅτι τὸ ἀνάπτυγμα ἔχει ὅρους κατὰ ἕνα περισσοτέρους ἀπὸ τὸν βαθμόν του. Ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ εὕρωμεν τοὺς συντελεστὰς τοῦ ἡμίσεως ἀριθμοῦ τῶν ὅρων του καὶ διὰ τοὺς ὑπολοίπους ὅρους νὰ ἐπαναλάβωμεν τοὺς αὐτοὺς συντελεστὰς κατ' ἀντίθετον τάξιν γραφομένους ὡς π. χ.

$$(x+\alpha)^7 = x^7 + 7\alpha x^6 + 21\alpha^2 x^5 + 35\alpha^3 x^4 + 35\alpha^4 x^3 + 21\alpha^5 x^2 + 7\alpha^6 x + \alpha^7$$

370. Ἵνα εὑρίσκωμεν εὐχερέστερον τοὺς συντελεστάς, δυνάμεθα νὰ χρησιμοποιήσωμεν ἕνα ἐκ τῶν κάτωθι πρακτικῶν τρόπων.

α΄) ***Πολλαπλασιάζομεν τὸν συντελεστὴν ὅρου τινὸς ἐπὶ τὸν ἐκθέτην τοῦ x τοῦ ἰδίου ὅρου καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ δηλοῦντος τὴν τάξιν τοῦ ὅρου τούτου. Τὸ οὕτω εὑρισκόμενον ἐξαγόμενον εἶναι ὁ συντελεστὴς τοῦ ἑπομένου ὅρου*** π. χ. εἰς τὸ ἄνω παράδειγμα διὰ τὸν συντελεστὴν 21 τοῦ 6ου ὅρου πολλαπλασιάζομεν τὸν συντελεστὴν 35 τοῦ 5ου ὅρου ἐπὶ τὸν ἐκθέτην 3 τοῦ x καὶ τὸ ἐξαγόμενον διαιροῦμεν διὰ 5, εὑρίσκομεν δὲ οὕτω τὸν ἀριθμὸν 21 ὡς συντελεστὴν τοῦ 6ου ὅρου.

β΄) Χρησιμοποιοῦμεν τὸν ἀκόλουθον πίνακα, γνωστὸν ὑπὸ τὸ ὄνομα «***Τρίγωνον τοῦ Πασκάλ***» οὗτινος ἡ κατασκευὴ εἶναι εὐνόητος.

1	1	1								
2	1	2	1							
3	1	3	3	1						
4	1	4	6	4	1					
5	1	5	10	10	5	1				
6	1	6	15	20	15	6	1			
7	1	7	21	35	35	21	7	1		
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1

. . . .

Ὁ πρὸς τὰ ἀριστερὰ τῆς κατακορύφου γραμμῆς ἀριθμὸς φανερώνει τὴν δύναμιν τοῦ διωνύμου, οἱ δὲ εἰς τὴν αὐτὴν σειρὰν μετ' αὐτοῦ γεγραμμένοι ἀριθμοὶ φανερώνουν κατὰ σειρὰν τοὺς συντελεστὰς τῶν ὅρων τοῦ ἀναπτύγματος π.χ. τοῦ ἀναπτύγματος $(x+\alpha)^6$ οἱ συντελεσταὶ εἶναι οἱ εἰς τὴν σειρὰν τοῦ 6 ἀριθμοὶ 1, 6, 15, 20, 15, 6, 1.

Ἀσκήσεις πρὸς λύσιν.

1177. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν συντελεστῶν τῶν ὅρων τοῦ ἀναπτύγματος $(x+1)^\nu$. (Θέσατε $x=1$).

1178. Ὁμοίως τῶν τετραγώνων τῶν συντελεστῶν τῶν ὅρων αὐτοῦ.

1179. Νὰ δειχθῇ ὅτι εἰς τὸ ἀνάπτυγμα τοῦ $(1+x)^\nu$ τὸ ἄθροισμα τῶν συντελεστῶν τῶν ὅρων ἀρτίας τάξεως ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν συντελεστῶν τῶν ὅρων περιττῆς τάξεως.

1180. Νὰ εὑρεθῇ ὁ 20ος ὅρος τοῦ ἀναπτύγματος τοῦ $(x^2+\beta x^{-1})^{25}$.

1181. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀνεξάρτητος τοῦ x ὅρος τοῦ ἀναπτύγματος τοῦ

$$\left(2x^2+\frac{1}{x}\right)^{12}.$$

1182. Νὰ δειχθῇ ὅτι ὁ συντελεστὴς τοῦ μεσαίου ὅρου τοῦ ἀναπτύγματος τοῦ $(1+x)^{3\nu}$ ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν συντελεστῶν τῶν δύο μεσαίων ὅρων τοῦ ἀναπτύγματος τοῦ $(1+x)^{2\nu-1}$.

1183. Ἂν α_ρ εἶναι ὁ συντελεστὴς τοῦ x_ρ εἰς τὸ ἀνάπτυγμα τοῦ $(1-x)^{2\nu-1}$ νὰ δειχθῇ ὅτι $\alpha_{\rho-1}+\alpha_{2\nu-\rho}=0$.

1184. Νὰ εὑρεθῇ ὁ μέγιστος ὅρος τοῦ ἀναπτύγματος τοῦ $(1+x)^\nu$.

1185. Ὁμοίως τοῦ $(x-4\alpha)^8$ ἂν $x=\frac{1}{2}$, $\alpha=\frac{1}{3}$.

1186. Ὁμοίως τοῦ $(\alpha+7\beta)^\nu$ ἂν $\alpha=14$, $\beta=3$, $\nu=19$.

Ἂν $(1+x)^\nu=\lambda_0+\lambda_1x+\lambda_2x^2+\ldots+\lambda_\nu x^\nu$ νὰ δειχθῇ ὅτι

1187. $\lambda_0+2\lambda_1+3\lambda_2+4\lambda_3+\ldots+(\nu+1)\lambda_\nu=2_\nu+\nu.2^{\nu-1}$.

1188. $\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3+4\lambda_4+\ldots+\nu\lambda_\nu=\nu.2^{\nu-1}$.

1189. $\lambda_0+\frac{1}{2}\lambda_1+\frac{1}{3}\lambda_2+\ldots+\frac{1}{\nu+1}\lambda_\nu=\frac{2^{\nu+1}-1}{\nu+1}$

1190. Ἂν εἰς τὸ ἀνάπτυγμα τοῦ $(1+x)^{15}$ οἱ συντελεσταὶ τοῦ ὅρου τοῦ κατέχοντος τὴν $\mu-1$ τάξιν καὶ τοῦ ὅρου τοῦ κατέχοντος τὴν $2\mu+3$ τάξιν εἶναι ἴσοι νὰ εὑρεθῇ ὁ μ.

1191. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ν εἰς τὸ $(1+x)^\nu$ ἂν οἱ συντελεσταὶ τοῦ 9ου καὶ τοῦ 15ου ὅρου εἶναι ἴσοι.

1192. Νὰ δειχθῇ ὅτι ὁ ἀνεξάρτητος τοῦ x ὅρος τοῦ ἀναρτύματος

$$\left(2x-\frac{3}{x^2}\right)^9 \text{ εἶναι } -2^8\times3^4\times7$$

1193. Ἂν Α παριστᾶ τὸ ἄθροισμα τῶν περιττῆς τάξεως ὅρων καὶ Β τὸ ἄθροισμα τῶν ἀρτίας τάξεως ὅρων τοῦ ἀναπτύγματος τοῦ $(x+\alpha)^\nu$ νὰ δειχθῇ ὅτι $A^2-B^2=(x^2-\alpha^2)^\nu$.

1194. Νὰ δειχθῇ ὅτι $(1-x)^{-1}=1+x+x^2+x^3+\ldots+x^\rho+\ldots$

1195. Ὁμοίως ὅτι $(1-x)^{-2}=1+2x+3x^2+4x^3+\ldots+(\rho+1)x_\rho+\ldots$

1196. Ὁμοίως ὅτι $(1-x)^{-3}=1+3x+6x^2+10x^3+\ldots+\frac{(\rho+1)(\rho+2)}{1.2}x_\rho+\ldots$

1197. Ἂν οἱ ἀριθμοὶ $\alpha, \beta, \gamma, \ldots k$ εἶναι θετικοὶ καὶ τὸ πλῆθος αὐτῶν εἶναι ν νὰ δειχθῇ ὅτι $\frac{\alpha+\beta+\gamma+\ldots+k}{\nu}>\sqrt[\nu]{\alpha\beta\gamma\ldots k}$

Ἂν οἱ ἀριθμαὶ x, y, z εἶναι θετικοὶ νὰ δειχθῇ ὅτι

1198. $(x^2y+y^2z+z^2x)(xy^2+yz^2+zx^2)>9x^2y^2z^2$

1199. $(x+y+z)^3>27(x+y-z)(x+z-y)(y+z-x)$

1200. $27(x^4+y^4+z^4)>(x+y+z)^4$

1201. Νὰ δειχθῇ ὅτι ὁ ἀριθμητικὸς μέσος ὁσωνδήποτε θετικῶν ἀριθμῶν εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν γεωμετρικὸν μέσον αὐτῶν.

Νὰ δειχθῇ ὅτι

1202. $\nu^\nu>1.3.5\ldots(2\nu-1)$

1203. $(\nu!)^3<\nu^\nu\left(\frac{\nu+1}{2}\right)^{2\nu}$

1204. Ἂν $\nu>2$ νὰ δειχθῇ ὅτι $2^\nu>1+\nu\sqrt{2^{\nu-1}}$

1205. Ἂν οἱ α καὶ β εἶναι θετικοὶ καὶ διάφοροι ἀλλήλων νὰ δειχθῇ ὅτι $\frac{\alpha^\nu+\beta^\nu}{2}>\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^\nu$ ἐκτὸς ἐὰν εἶναι $0<\nu<1$.

1206. Ἂν οἱ μ τὸ πλῆθος ἀριθμοὶ $\alpha, \beta, \gamma\ldots k$ εἶναι θετικοὶ ἀριθμοί, νὰ δειχθῇ ὅτι $\frac{\alpha^\nu+\beta^\nu+\gamma^\nu+\ldots+k^\nu}{\mu}>\left[\frac{\alpha+\beta+\gamma+\ldots+k}{\mu}\right]^\nu$ ἐκτὸς ἐὰν εἶναι $0<\nu<1$.

1207. Ἂν οἱ α καὶ β εἶναι ἀκέραιοι καὶ τοιοῦτοι ὥστε $\alpha>\beta>0$ ὁ δὲ $x>0$ νὰ δειχθῇ ὅτι $\left[1+\frac{x}{\alpha}\right]^\alpha>\left[1+\frac{x}{\beta}\right]^\beta$

1208. Ἂν $0<y<x<1$, νὰ δειχθῇ ὅτι $\sqrt[x]{\frac{1+x}{1-x}}>\sqrt[y]{\frac{1+y}{1-y}}$

1209 Ἂν $\alpha>\beta>0$, νὰ δειχθῇ ὅτι $\left[1+\frac{1}{\alpha}\right]^\alpha>\left[1+\frac{1}{\beta}\right]^\beta$

1210. Νὰ δειχθῇ ὅτι $\nu(\nu+1)^3<8(1^3+2^3+3^3+\ldots+\nu^3)$.

1211. Ἂν $\alpha>\beta>\gamma$, νὰ δειχθῇ ὅτι $\left[\frac{\alpha+\gamma}{\alpha-\gamma}\right]^\alpha<\left[\frac{\beta+\gamma}{\beta-\gamma}\right]^\beta$

1212. Ἂν $\mu>\nu$ νὰ δειχθῇ ὅτι $\frac{1}{\mu}\lambda o\gamma(1+\alpha^\mu)<\frac{1}{\nu}\lambda o\gamma(1+\alpha^\nu)$

1213. Ἂν ὁ ν εἶναι ἀκέραιος καὶ θετικὸς καὶ $x<1$ νὰ δειχθῇ ὅτι

$$\frac{1-x^{\nu+1}}{\nu+1}<\frac{1-x^{\nu}}{\nu}$$

1214. Ἂν οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ ἀποτελοῦν ἁρμονικὴν πρόοδον καὶ $\nu>1$ νὰ δειχθῇ ὅτι $\alpha^{\nu}+\gamma^{\nu}>2\beta^{\nu}$

1215. Ἂν $x+y+z=1$, νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ἐλάχιστον τῆς παραστάσεως $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ εἶναι 9 καὶ ὅτι $(1-x)(1-y)(1-z)>8xyz$.

1216. Νὰ δειχθῇ ὅτι $(\alpha+\beta+\gamma+\delta)(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+\delta^3)>(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)^2$.

1217. Νὰ δειχθῇ ὅτι $\alpha^{\beta}\beta^{\alpha}<\left[\frac{\alpha+\beta}{2}\right]^{\alpha+\beta}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΓ΄.

ΟΛΙΓΑ ΤΙΝΑ ΠΕΡΙ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

Ι. ΟΡΙΣΜΟΙ.

371. Ἔστω ἡ συνάρτησις

$$y=\varphi(x) \qquad (1)$$

ἔνθα x εἶναι ἀνεξάρτητος μεταβλητή. Ἂν ἡ x αὐξηθῇ κατὰ τὴν ἐλαχίστην ποσότητα Δx, ἔνθα $\text{ὅρ}(\Delta x)=0$, τότε καὶ ἡ συνάρτησις y θὰ μεταβληθῇ κατὰ μίαν ἄλλην ποσότητα ἔστω τὴν Δy, ἡ δὲ σχέσις (1) θὰ γίνῃ

$$y+\Delta y=\varphi(x+\Delta x) \qquad (2)$$

Ἀφαιροῦντες ἀπὸ τὴν (2) τὴν (1) κατὰ μέλη εὑρίσκομεν

$$\Delta y=\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x) \qquad (3)$$

Ἡ διαφορὰ τοῦ β΄ μέλους τῆς (3) εἶναι θετικὴ ὅταν ἡ συνάρτησις y εἶναι αὔξουσα (§ 282), ἀρνητικὴ δὲ ὅταν ἡ y εἶναι φθίνουσα (§ 283). Ἂν ἤδη διαιρέσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (3) διὰ τῆς αὐξήσεως Δx τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς x, τότε εὑρίσκομεν

$$y'=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x} \qquad (4) \qquad \text{ἔνθα ὅρ}(\Delta x)=0$$

Ὁ λόγος $y'=\frac{\Delta y}{\Delta x}$ καλεῖται ***παράγωγος*** τῆς συναρτήσεως y. Ὥστε

Παράγωγος μιᾶς συναντήσεως $y=\varphi(x)$ ***διὰ τιμὴν τινὰ τοῦ*** x ***καλεῖται τὸ ὅριον πρὸς τὸ ὁποῖον τείνει ὁ λόγος τῆς αὐξήσεως τῆς συναρτήσεως διὰ τῆς αὐξήσεως τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς, ὅταν ἡ αὔξησις τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς ἔχῃ ὅριον τὸ μηδέν.***

Ἡ παράγωγος παρίσταται συνήθως διὰ τοῦ y' ἢ διὰ τοῦ $\varphi'(x)$.

ΣΗΜ. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω λεχθέντων καταφαίνεται ὅτι ἡ παράγωγος τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς x ἰσοῦται μὲ τὴν μονάδα. Διότι

$$x'=\frac{(x+\Delta x)-x}{\Delta x}=\frac{\Delta x}{\Delta x}=1.$$

372. Παραδείγματα ἐπὶ παραγώγων ἔστωσαν τὰ κάτωθι :

α΄. Ἔστω ἡ συνάρτησις $y=3x^2$ (5). Ἂν αὐξηθῇ ὁ x κατὰ Δx, ἔνθα ὅρ$(\Delta x)=0$, τότε ἡ y θὰ γίνῃ $y+\Delta y$. Ἄρα ἡ (5) θὰ γίνῃ

$$y+\Delta y=3(x+\Delta x)^2=3x^2+6x(\Delta x)+3(\Delta x)^2 \qquad (6)$$

Ἀφαιροῦντες τὰς (5) καὶ (6) κατὰ μέλη εὑρίσκομεν

$$\Delta y=6x(\Delta x)+3(\Delta x)^2 \quad \text{ἢ} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x}=6x+3(\Delta x) \qquad (7)$$

Ἀλλὰ διότι ὅρ$(\Delta x)=0$ θὰ εἶναι καὶ ὅρ$3(\Delta x)=0$. Ἄρα ἡ (7) γίνεται

$$y'=\frac{\Delta y}{\Delta x}=6x$$

Ἡ παράγωγος λοιπὸν τῆς συναρτήσεως $y=3x^2$ εἶναι ἡ $y'=6x$.

β΄. Ἔστω ἐπίσης ἡ συνάρτησις $y=6x^3+5x^2+4$ (8)

Ἂν ὁ x αὐξηθῇ κατὰ Δx, ἔνθα ὅρ$(\Delta x)=0$, τότε ὁ y θὰ γίνῃ $y+\Delta y$ ἤτοι θὰ ἔχωμεν

$$y+\Delta y=6(x+\Delta x)^3+5(x+\Delta x)^2+4 \qquad (9)$$

Ὅταν ἐκτελέσωμεν τὰς πράξεις εἰς τὸ β΄ μέλος τῆς (9), ἀφαιρέσωμεν ἀπ᾽ αὐτῆς τὴν (8) καὶ διαιρέσωμεν τὰ προκύπτοντα διὰ (Δx) εὑρίσκομεν

$$y'=\frac{\Delta y}{\Delta x}=18x^2+10x+23x(\Delta x)+6(\Delta x)^2 \qquad (10)$$

ἢ διότι ὅρ$(\Delta x)=0$ καὶ συνεπῶς οἱ ὅροι οἱ περιέχοντες τὸν Δx ἔχουν ὅριον τὸ μηδὲν (§ 269) ἔχομεν

$$y'=18x^2+10x$$

Ἄρα ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως $y=6x^3+5x^2+4$ εἶναι ἡ

$$y'=18x^2+10x.$$

373. *Παράγωγος σταθερᾶς ποσότητος.* Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς παραγώγου καταφαίνεται ὅτι οἱ σταθεροὶ ἀριθμοὶ δὲν ἔχουν παράγωγον, ἤτοι ἡ παράγωγος τῆς $y=6$ εἶναι $y'=0$.

ΣΗΜ. Ὅλα τὰ ἀνωτέρω ἀναφέρονται εἰς παράγωγον μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς μεταβλητῆς.

374. Παράγωνος ἀθροίσματος. ***Ἡ παράγωγος τοῦ ἀθροίσματος πολλῶν συναρτήσεων τοῦ x ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν παραγώγων τῶν συναρτήσεων.***

Ἔστω $y=\varphi(x)+\sigma(x)+f(x)$

Ἂν ὁ x αὐξηθῇ κατὰ Δx τότε θὰ ἔχωμε

$$y+\Delta y=\varphi(x+\Delta x)+\sigma(x+\Delta x)+f(x+\Delta x)$$

ἢ ἀφαιροῦντες κατὰ μέλη καὶ διαιροῦντες διὰ τοῦ Δx ἔχομεν

$$y'=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x}+\frac{\sigma(x+\Delta)x-\sigma(x)}{\Delta x}+\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \qquad (12)$$

Ἀλλ' ἕκαστος ἐκ τῶν προσθετέων τοῦ β' μέλους τῆς (12) εἶναι (§ 371) ἡ παράγωγος ἑκάστου προσθετέους τοῦ β' μέλους τῆς (11). Ἄρα ἡ παράγωγος y' τῆς συναρτήσεως y ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν παραγώγων τῶν συναρτήσεων φ(x), σ(x), f(x), ἤτοι

$$y'=\varphi'(x)+\sigma'(x)+f'(x).$$

375. Παράγωγος γινομένου. *Ἡ παράγωγος τοῦ γινομένου πολλῶν συναρτήσεων τοῦ x ἰσοῦται μὲ τὴν παράγωγον ἑκάστης πολλαπλασιαζομένην ἐπὶ τὸ γινόγενον τῶν ἄλλων συναρτήσεων.*

Ἔστω $$y=\omega\upsilon \qquad (13)$$

ἔνθα ω καὶ υ εἶναι συναρτήσεις τοῦ x, ἤτοι $\omega=\varphi(x)$ καὶ $\upsilon=\sigma(x)$. Θὰ δείξωμεν ὅτι $y'=\upsilon\omega'+\omega\upsilon'$.

Ἂν ἡ x αὐξηθῇ κατὰ Δx, ἔνθα $ὅρ(\Delta x)=0$, τότε ἡ y θὰ αὐξηθῇ κατὰ Δy, αἱ ω καὶ υ θὰ αὐξηθοῦν κατὰ Δω καὶ Δυ, ἡ δὲ σχέσις (13) θὰ γίνῃ

$$y+\Delta y=(\omega+\Delta\omega)(\upsilon+\Delta\upsilon)=\omega\upsilon+\upsilon(\Delta\omega)+\omega(\Delta\upsilon)+(\Delta\omega)(\Delta\upsilon) \qquad (14)$$

ἢ ἀφαιροῦντες κατὰ μέλη τὰς (13) καὶ (14) καὶ διαιροῦντες διὰ Δx ἔχομεν

$$y'=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\upsilon.\frac{\Delta\omega}{\Delta x}+\omega\frac{\Delta\upsilon}{\Delta x}+\frac{\Delta\omega}{\Delta x}\Delta\upsilon \qquad (15)$$

Ἂν ἤδη $ὅρ(\Delta x)=0$ τότε καὶ $ὅρ(\Delta\upsilon)=0$ ἡ δὲ (15) γίνεται $y'=\upsilon\omega'+\omega\upsilon'$ διότι $\dfrac{\Delta\omega}{\Delta x}$ εἶναι ἡ παράγωγος ω' τῆς ω καὶ $\dfrac{\Delta\upsilon}{\Delta x}$ εἶναι ἡ παράγωγος υ' τῆς υ.

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι τῆς συναρτήσεως $y=\omega\upsilon\varphi$ ἡ παράγωγος y' εἶναι

$$y'=\omega'\upsilon\varphi+\upsilon'\omega\varphi+\varphi'\omega\upsilon.$$

376. Παράγωγος τοῦ γινομένου σταθερᾶς ἐπὶ συνάρτησιν. *Ἡ παράγωγος τοῦ γινομένου σταθερᾶς ποσότητος ἐπὶ συνάρτησιν τοῦ x ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς σταθερᾶς ἐπὶ τὴν παράγωγον τῆς συναρτήσεως.*

Ἔστω $y=\alpha\omega$. Θὰ ἔχωμεν (§ 375) $y'=\alpha'\omega+\alpha\omega'$. Ἀλλὰ $\alpha'=0$ (§ 373). Ἄρα $y'=\alpha\omega'$

377. Παράγωγος δυνάμεως. *Ἡ παράγωγος δυνάμεως μιᾶς συναρτήσεως τοῦ x ἰσοῦται μὲ τὸν ἐκθέτην τῆς δυνάμεως ἐπὶ τὴν κατὰ μονάδα μικροτέραν δύναμιν καὶ ἐπὶ τὴν παράγωγον τῆς βάσεως.*

Ἔστω $y=\omega^\nu$ ἔνθα ω εἶναι συνάρτησις τοῦ x. Θὰ δείξωμεν ὅτι $y'=\nu\omega^{\nu-1}\omega'$.

Πράγματι $y=\omega.\omega.\omega\ldots\omega\ldots$. Ἂν δὲ εὕρωμεν τὴν παράγωγον τοῦ γινομένου τῶν ν ἴσων παραγόντων ἔχομεν (§ 375)

$$y'=\omega'\omega^{\nu-1}+\omega'\omega^{\nu-1}+\omega'\omega^{\nu-1}+\ldots \quad \text{ἢ} \quad y'=\nu\omega^{\nu-1}\omega'.$$

Ἂν ἡ βάσις δὲν εἶναι συνάρτησις τοῦ x ἀλλὰ x, τότε ἡ ἄνω σχέσις ἁπλοποιεῖται, διότι ἡ παράγωγος τῆς βάσεως x εἶναι 1 (§ 371 σημ.), ἤτοι ἂν $y=x^{\nu}$ τότε $y'=\nu x^{\nu-1}$.

378. *Ἐφαρμογαί.* Τῆς συναρτήσεως $y=3x^4$ ἡ παράγωγος εἶναι $y'=4.3x^3.1=12x^3$.

Τῆς συναρτήσεως $y=(2x^2-1)^3$ ἡ παράγωγος εἶναι

$$y'=3(2x^2-1)^2(2x^2-1)'=3(2x^2-1)^2 4x=12x(2x^2-1)^2$$

διότι ἡ παράγωνος τῆς $2x^2-1$ εἶναι ἡ 4x. (Ἴδε ἐπίσης καὶ τὰ παραδείγματα τῆς § 372.

Τῆς συναρτήσεως $y=(x^2-4x+1)^3$ ἡ παράγωγος εἶναι $y'=3(x^2-4x+1)^2(x^2-4x+1)'$ καὶ ἐπειδὴ $(x^2-4x+1)'=2x-4$, ἕπεται ὅτι $y'=3(2x-4)(x^2-4x+1)^2$

Τῆς συναρτήσεως $y=(5-x)^4$ ἡ παράγωγος εἶναι

$$y'=4(5-x)^3(5-x)'=-4(5-x)^3=4(x-5)^3$$

Τῆς συναρτήσεως $y=(2x^2-3)(4x+1)$ ἡ παράγωγος εἶναι

$$y'=(2x^2-3)(4x+1)'+(4x+1)(2x^2-3)'=4(2x^2-3)+4x(4x+1)=$$
$$=24x^2+4x-12$$

379. Παράγωγος πηλίκου. *Ἡ παράγωγος τοῦ πηλίκου* $\dfrac{\varphi}{\omega}$ *ἰσοῦται μὲ* $\dfrac{\varphi\omega'-\omega\varphi'}{\varphi^2}$

Ἔστω $y=\dfrac{\omega}{\varphi}$ ἔνθα ω καὶ φ εἶναι συναρτήσεις τοῦ x. Ἂν αὐξηθῇ ὁ x κατὰ τὴν ἐλαχίστην ποσότητα Δx, ἔνθα ὅρ(Δx)=0, τότε αἱ συναρτήσεις y, ω, φ τοῦ x θὰ αὐξηθοῦν κατὰ Δy, Δω, Δφ· θὰ γίνουν λοιπὸν y+Δy, ω+Δω, φ+Δφ. Ἡ ἀνωτέρω λοιπὸν σχέσις γίνεται

$$y+\Delta y=\frac{\omega+\Delta\omega}{\varphi+\Delta\varphi}$$

ἢ ἀφαιροῦντες κατὰ μέλη ἔχομεν :

$$\Delta y=\frac{\omega+\Delta\omega}{\varphi+\Delta\varphi}-\frac{\omega}{\varphi}=\frac{\omega\varphi+\varphi(\Delta\omega)-\omega\varphi-\omega(\Delta\varphi)}{\varphi^2+\varphi(\Delta\varphi)}=\frac{\varphi(\Delta\omega)-\omega(\Delta\varphi)}{\varphi^2+\varphi(\Delta\varphi)}$$

Ἂν δὲ διαιρέσωμεν διὰ Δx ἀμφότερα τὰ μέλη εὑρίσκομεν :

$$y'=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\varphi\dfrac{\Delta\omega}{\Delta x}-\omega\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta x}}{\varphi^2+\varphi(\Delta\varphi)}$$

Ἀλλὰ τὰ κλάσματα $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, $\frac{\Delta \omega}{\Delta x}$, $\frac{\Delta \varphi}{\Delta x}$ παριστοῦν ἀντιστοίχως τὰς παραγώγους τῶν συναρτήσεων y, ω, φ τοῦ x, ὁ δὲ ὅρος φ(Δφ) ἔχει ὅριον τὸ 0 διότι ὅρ(Δφ)=0. Ἂν λοιπὸν παραστήσωμεν ταύτας διὰ y′, ω′, φ′ εὑρίσκομεν:

$$y' = \frac{\varphi\omega' - \omega\varphi'}{\varphi^2}$$

Παράδειγμα. Νὰ εὑρεθῇ ἡ παράγωγος τῆς $y = \frac{x^2 - 4x + 1}{3x - 1}$

Ἔχομεν ; $y = \frac{(3x-1)(x^2-4x+1)' - (x^2-4x+1)(3x-1)'}{(3x-1)^2} =$

$$= \frac{(3x-1)(2x-4) - 3(x^2-4x+1)}{(3x-1)^2} = \frac{3x^2-2x+1}{(3x-1)^2}$$

380. Παράγωγος τετραγωνικῆς ρίζης. ***Ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως*** $y = \sqrt{\omega}$, ***ἔνθα*** ω ***εἶναι συνάρτησις τοῦ*** x, ***εἶναι*** $y' = \frac{\omega'}{2\sqrt{\omega}}$.

Ἔστω $y = \sqrt{\omega}$. Ὑψοῦμεν ἀμφότερα τὰ μέλη της εἰς τὸ τετράγωνον ἤτοι $y^2 = \omega$. Λαμβάνομεν τὴν παράγωγον ἀμφοτέρων τῶν μελῶν ἤτοι : $2y.y' = \omega'$. Ἄρα

$$y' = \frac{\omega'}{2y} = \frac{\omega'}{2\sqrt{\omega}}$$

Π. χ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ παράγωγος τοῦ $y = \sqrt{x^2 - 3x + 4}$

Ἔχομεν $y' = \frac{2x - 3}{2\sqrt{x^2 - 3x + 4}}$

381. ***Παράγωγοι διαφόρων τάξεων.*** Ἡ παράγωγος τῆς παραγώγου μιᾶς συναρτήσεως y καλεῖται ***δευτέρα παράγωγος*** αὐτῆς, ἢ παράγωγος δευτέρας τάξεως, ἡ παράγωγος τῆς δευτέρας παραγώγου καλεῖται ***τρίτη παράγωγος*** ἢ παράγωγος τρίτης τάξεως καὶ οὕτω καθεξῆς· λέγοντες δὲ ἁπλῶς παράγωγον μιᾶς συναρτήσεως ἐννοοῦμεν τὴν ***πρώτην παράγωγον*** ταύτης· π.χ. τῆς συναρτήσεως

$$y = x^3 - 3x^2 + 2x + 5$$

ἡ πρώτη παράγωγος εἶναι $y' = 3x^2 - 6x + 2$
ἡ δευτέρα παράγωγος εἶναι $y'' = 6x - 6$
ἡ τρίτη παράγωγος εἶναι $y''' = 6$
ἡ δὲ τετάρτη παράγωγός της $y'''' = 0$ (§ 373).

382. Παράγωγοι τῶν τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων. ***α′) Ἡ παράγωγος τοῦ*** ημx ***εἶναι τὸ*** συνx. Ἔστω y=ημx. Ἂν αὐξηθῇ ὁ x κατὰ Δx, τότε καὶ ὁ y θὰ γίνῃ y+Δy. θὰ ἔχωμεν ἄρα :

$$y+\Delta y=\eta\mu(x+\Delta x)=\eta\mu x\sigma\upsilon\nu(\Delta x)+\sigma\upsilon\nu x\eta\mu(\Delta x).$$

Ἀλλὰ ἂν ὅρ(Δx)=0 τότε ὅρσυν(Δx)=ὅρσυν0=1. Ἄρα ἡ ἀνωτέρω σχέσις γίνεται $y+\Delta y=\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x\eta\mu(\Delta x)$. Ἀφαιροῦντες κατὰ μέλη ἀπὸ ταύτην τὴν δοθεῖσαν εὑρίσκομεν :

$$\Delta y=\sigma\upsilon\nu x\eta\mu(\Delta x) \quad \text{ἢ} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x}=\sigma\upsilon\nu x\frac{\eta\mu(\Delta x)}{\Delta x}$$

Ἀλλ' ὅταν τὸ τόξον Δx ἔχῃ ὅριον τὸ 0, τότε ὁ λόγος $\frac{\eta\mu(\Delta x)}{\Delta x}$ ἔχει ὅριον τὴν μονάδα, ὡς ἀποδεικνύεται εἰς τὴν τριγωνομετρίαν. Ἄρα

$$y'=\sigma\upsilon\nu x.$$

β') Ἡ παράγωγος τοῦ συνx εἶναι τὸ —ημx. Ἔστω y=συνx. Αὐξάνοντες τὸ x κατὰ Δx κ.λ.π. ἔχομεν :

$$y+\Delta y=\sigma\upsilon\nu(x+\Delta x)=\sigma\upsilon\nu x\sigma\upsilon\nu(\Delta x)-\eta\mu x\eta\mu(\Delta x)$$

ἢ διότι ὅρσυν(Δx)=1 ἔχομεν $y+\Delta y=\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x\eta\mu(\Delta x)$.

Ἄρα, ἐργαζόμενοι ὡς ἀνωτέρω, εὑρίσκομεν $y'=-\eta\mu x$.

γ'). Ἡ παράγωγος τῆς εφx εἶναι ἡ τεμ²x. Ἔστω y=εφx. Ἔχομεν $y=\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}$ ἢ λαμβάνοντες τὰς παραγώγους ἀμφοτέρων τῶν μελῶν κατὰ τὰ εἰς τὴν παράγραφον 379 καὶ ἔχοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι ἡ παράγωνος τοῦ μὲν ημx εἶναι τὸ συνx τοῦ δὲ συνx τὸ —ημx ἔχομεν :

$$y'=\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x+\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=\tau\epsilon\mu^2 x$$

δ') Ἡ παράγωγος τῆς σφx εἶναι —στεμ²x, εὑρίσκεται δὲ ὡς ἡ παράγωγος τῆς εφx.

II. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ.

383. Θεώρημα α'. ***Ἂν μία συνάρτησις y=φ(x) ὡρισμένη εἰς διάστημά τι (α,β) ἔχῃ παράγωγον y' εἰς τὸ διάστημα τοῦτο, τότε, ἂν μὲν ἡ συνάρτησις y εἶναι ἡ αὔξουσα ἡ παράγωγός της y' εἶναι θετική, ἂν δὲ ἡ συνάρτησις y εἶναι φθίνουσα τότε ἡ παράγωγός της y' εἶναι ἀρνητική· καὶ ἀντιστρόφως.***

Ἔστω ἡ συνάρτησις y=φ(x), ἔστωσαν δὲ δύο τιμαὶ x καὶ x+Δx τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς, ἔνθα $x+\Delta x>x$, καὶ αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ y καὶ y+Δy τῆς συναρτήσεως. Εἶναι προφανὲς ὅτι ἡ διαφορὰ (x+Δx)—x εἶναι θετική.

Ἤδη ἂν ἡ συνάρτησις y εἶναι αὔξουσα (§ 282), τότε ἡ διαφορὰ (y+Δy)—y θὰ εἶναι θετική, ὁπότε ὁ λόγος $\frac{(y+\Delta y)-y}{(x+\Delta x)-x}=$

$=\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'$ εἶναι θετικός. Ἄρα ἡ παράγωγος y' εἶναι θετική. Ἂν δὲ ἡ συνάρτησις y εἶναι φθίνουσα (§ 283) τότε ἡ διαφορὰ $(y+\Delta y)-y$ θὰ εἶναι ἀρνητική, ὁ δὲ λόγος $\frac{(y+\Delta y)-y}{(x+\Delta x)-x}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'$ εἶναι ἀρνητικὸς ὡς ἔχων ὅρους ἑτεροσήμους. Ἄρα ἡ παράγωγος y' εἶναι ἀρνητική. Τὸ ἀντίστροφον ἀποδεικνύεται εὐκόλως διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς.

ΣΗΜ. Ἡ παράγωγος y' εἰς ἀμφοτέρας τὰς ἄνω περιπτώσεις δύναται νὰ εἶναι καὶ μηδὲν ἂν ἡ αὔξησις Δx τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς εἶναι μηδέν.

384. Θεώρημα β′. ***Μία συνάρτησις*** $y=\varphi(x)$ ***συνεχὴς εἰς διάστημά τι (α, β) καὶ ἔχουσα παράγωγον*** y', ***διὰ νὰ ἔχῃ μέγιστον διὰ τιμήν τινα*** x_1 ***τῆς*** x, ***πρέπει καὶ ἀρκεῖ ἡ παράγωγός της*** y' ***νὰ μηδενίζεται διὰ τὴν τιμὴν ταύτην τῆς*** x, ***μεταβαίνουσα ἐκ τοῦ θετικοῦ εἰς τὸ ἀρνητικόν. Διὰ νὰ ἔχῃ δὲ ἐλάχιστον διὰ τιμήν τινα*** x_1 ***τῆς*** x, ***πρέπει καὶ ἀρκεῖ ἡ παράγωγός της*** y' ***νὰ μηδενίζεται διὰ τὴν τιμὴν ταύτην τῆς*** x, ***μεταβαίνουσα ἐκ τοῦ ἀρνητικοῦ εἰς τὸ θετικόν.***

Πράγματι ἂν ἡ συνεχὴς συνάρτησις y ἔχῃ μέγιστον διὰ τὴν τιμὴν x_1 τῆς x, ἕπεται ὅτι διὰ τιμήν τινα $x_1-\varepsilon$ τῆς x, ἔνθα ὅρ$\varepsilon=0$, ἡ y εἶναι αὔξουσα καὶ διὰ τιμήν τινα $x_1+\varepsilon$ τῆς x, ἔνθα ὅρ$\varepsilon=0$, ἡ y εἶναι φθίνουσα. Ἀλλὰ τότε ἡ παράγωγος y', ἥτις θὰ εἶναι ἐπίσης συνεχής, θὰ εἶναι θετικὴ μὲν διὰ τὴν τιμὴν $x_1-\varepsilon$ τῆς x (§ 383)· ἀρνητικὴ δὲ διὰ τὴν τιμὴν $x_1+\varepsilon$ τῆς x. Ἔστω ὅτι y'_1 εἶναι ἡ θετικὴ τιμὴ τῆς y' διὰ $x=x_1-\varepsilon$ καὶ y'_2 εἶναι ἡ ἀρνητικὴ τιμὴ τῆς y' διὰ $x=x_1+\varepsilon$. Ἀλλὰ ἡ y', ὡς συνεχής, λαμβάνει ὅλας τὰς διαδοχικὰς τιμὰς ἀπὸ y'_1 μέχρι y'_2. Ἄρα θὰ λάβῃ καὶ τὴν μεταξὺ αὐτῶν περιεχομένην τιμὴν 0.

Ἀντιστρόφως. Ἂν ἡ παράγωγος y' μηδενίζεται διὰ τὴν τιμὴν x_1 τῆς x μεταβαίνουσα ἐκ τοῦ θετικοῦ εἰς τὸ ἀρνητικόν, τότε ἡ συνάρτησις y ἔχει μέγιστον διὰ τὴν τιμὴν x_1 τῆς x. Διότι ἔστωσαν δύο τιμαὶ τῆς y' ἤτοι ἡ θετικὴ τιμὴ y'_1 διὰ $x=x_1-\varepsilon$, ἔνθα ὅρ$\varepsilon=0$, καὶ ἡ ἀρνητικὴ τιμὸ y'_2 διὰ $x=x_1+\varepsilon$, ἔνθα ὅρ$\varepsilon=0$.

Ἀφοῦ διὰ τὴν τιμὴν y'_1 ἡ παράγωγος εἶναι θετική, ἕπεται ὅτι (§ 383) ἡ συνάρτησις y εἶναι αὔξουσα· ἀφοῦ δὲ διὰ τὴν τιμὴν y'_2 ἡ παράγωγος εἶναι ἀρνητικὴ ἕπεται ὅτι ἡ y εἶναι φθίνουσα. Ἀλλὰ διότι ἡ y εἶναι συνεχὴς συνάρτησις τοῦ x, ἕπεται ὅτι ἔχει αὕτη μέγιστον διὰ τὴν τιμὴν x_1 τοῦ x.

Κατ' ἀνάλογον τρόπον ἀποδεικνύεται τὸ β′ μέρος τοῦ θεωρήματος.

385. Θεώρημα γ′. ***Ἂν μία συνάρτησις*** $y=\varphi(x)$ ***συνεχὴς εἰς τὸ διάστημα (α, β) καὶ ἔχουσα παράγωγον*** y', ***ἔχῃ μέγιστον διὰ*** $x=x_1$, ***τότε ἡ δευτέρα παράγωγος αὐτῆς*** y'' ***εἶναι ἀρνητικὴ διὰ***

τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ x· ἂν δὲ ἡ y ἔχῃ ἐλάχιστον διὰ $x=x_1$ τότε ἡ δευτέρα παράγωγος αὐτῆς y″ εἶναι θετικὴ διὰ τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ x· καὶ ἀντιστρόφως.

Ἔστω ὅτι ἡ συνάρτησις $y=\varphi(x)$ ἔχει μέγιστον διὰ τὴν τιμὴν x_1 τοῦ x. Τότε (§ 384) ἡ πρώτη παράγωγος αὐτῆς y′ μηδενίζεται μεταβαίνουσα ἐκ τοῦ θετικοῦ εἰς τὸ ἀρνητικόν. Ἄρα ἡ y′ εἶναι φθίνουσα συνάρτησις καὶ ἑπομένως ἡ πρώτη παράγωγος αὐτῆς y″ (ἥτις εἶναι δευτέρα παράγωγος τῆς y) εἶναι ἀρνητικὴ (§ 383).

Ἔστω ἐπίσης ὅτι ἡ συνάρτησις $y=\varphi(x)$ ἔχει ἐλάχιστον διὰ τὴν τιμὴν x_1 τοῦ x. Τότε (§ 383) ἡ πρώτη παράγωγος αὐτῆς y′ μηδενίζεται μεταβαίνουσα ἐκ τοῦ ἀρνητικοῦ εἰς τὸ θετικόν. Ἄρα ἡ y′ εἶναι αὔξουσα συνάρτησις καὶ ἑπομένως ἡ πρώτη παράγωγος αὐτῆς y″ (ἥτις εἶναι ἡ δευτέρα παράγωγος τῆς y) εἶναι θετικὴ (§ 383).

Κατὰ τὸ ἀντίστροφον τοῦ θεωρήματος ἀποδεικνόται εὐκόλως.

386. Θεώρημα δ′. ***Ἡ ἀληθὴς τιμὴ τοῦ κλάσματος $y=\dfrac{\varphi(x)}{\sigma(x)}$ ὅπερ λαμβάνει μίαν ἀπροσδιόριστον μορφὴν εἶναι ἡ αὐτὴ μὲ τὴν ἀληθῆ τιμὴν τοῦ λόγου τῶν παραγώγων $\varphi'(x)$ καὶ $\sigma'(x)$ τῶν ὅρων του.***

Ἔστω ἡ τιμὴ $x=\alpha$ διὰ τὴν ὁποίαν τὸ κλάσμα $y=\dfrac{\varphi(x)}{\sigma(x)}$ λαμβάνει τὴν ἀπροσδιόριστον μορφὴν $\dfrac{0}{0}$, ἤτοι $y=\dfrac{\varphi(\alpha)}{\sigma(\alpha)}=\dfrac{0}{0}$. Θὰ δείξω ὅτι ἡ ἀληθὴς τιμὴ τοῦ κλάσματος $\dfrac{\varphi(x)}{\sigma(x)}$ εἶναι ἡ αὐτὴ μὲ τὴν τιμὴν τοῦ κλάσματος $\dfrac{\varphi'(x)}{\sigma'(x)}$. Πρὸς τοῦτο, διότι $\varphi(\alpha)=0$ καὶ $\sigma(\alpha)=0$, τὸ δοθὲν κλάσμα δύναται νὰ γραφῇ καὶ ὡς ἑξῆς :

$$y=\frac{\varphi(x)-\varphi(\alpha)}{\sigma(y)-\sigma(\alpha)} \quad \text{ἢ} \quad y=\frac{\dfrac{\varphi(x)-\varphi(\alpha)}{x-\alpha}}{\dfrac{\sigma(x)-\sigma(\alpha)}{x-\alpha}}$$

Ἀλλὰ ἂν ὑποτεθῇ ὅτι ὁ x τείνῃ πρὸς τὸν α ἤτοι ὅτι $\text{ὅρ}x=\alpha$, τότε $\text{ὅρ}(x-\alpha)=0$ ὁπότε τὸ κλάσμα $\dfrac{\varphi(x)-\varphi(\alpha)}{x-\alpha}$ παριστᾷ τὸ ὅριον τῆς αὐξήσεως τῆς συναρτήσεως διὰ τῆς αὐξήσεως $x-\alpha$ τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς x, ἤτοι τὴν παράγωγον $\varphi'(x)$. Ὁμοίως καὶ τὸ κλάσμα $\frac{\sigma(x)-\sigma(\alpha)}{x-\alpha}$ παριστᾶ τὴν παράγωνον $\sigma'(x)$. Ἄρα ἂν ὅρχ=α καὶ $\sigma'(x)\neq 0$, ἔχομεν $y=\frac{\varphi'(x)}{\sigma'(x)}$ καὶ ἑπομένως $\frac{\varphi(x)}{\sigma(x)}=\frac{\varphi'(x)}{\sigma'(x)}$.

III. ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΤΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

α΄. Εὕρεσις τῆς ἀληθοῦς τιμῆς κλάσματός υινος.

387. α΄.) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀληθὴς τιμὴ τοῦ κλάσματος

$$y=\frac{2x^3-4x^2-9x+18}{4x^2-3x-10} \text{ διὰ } x=2.$$

Τὸ κλάσμα διὰ $x=2$ λαμβάνει τὴν ἀπροσδιόριστον μορφὴν $\frac{0}{0}$ Ἀλλὰ (§ 386) τὸ κλάσμα τοῦτο ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τῶν παραγώγων τῶν ὅρων του. Λαμβάνομεν τὰς παραγώγους τῶν ὅρων του ὅτε ἔχομεν

$$y=\frac{6x^2-8x-9}{8x-3}$$

θέτοντες δὲ $x=2$ εὑρίσκομεν $y=-\frac{1}{13}$ ἥτις εἶναι ἡ ἀληθὴς τιμὴ τοῦ κλάσματος.

β΄.) Ὁμοίως τοῦ κλάσματος: $y=\frac{4x^6-8x^3+4}{3x^4-4x^3+1}$ διὰ $x=1$.

Ἐργαζόμενοι ὁμοίως ὡς ἄνω λαμβάνομεν τὰς παραγώγους τῶν ὅρων του καὶ ἔχομεν: $y=\frac{24x^5-24x^2}{12x^3-12x^2}=\frac{2(x^3-1)}{x-1}$. Ἀλλὰ πάλιν διὰ $x=1$ γίνεται τοῦτο $\frac{0}{0}$. Λαμβάνομεν λοιπὸν τὰς δευτέρας παραγώγους τῶν ὅρων τοῦ δοθέντος κλὰσματος, (δηλαδὴ τὰς πρώτας παραγώγους τῶν ὅρων τοῦ προκύψαντος) ὁπότε εὑρίσκομεν $y=\frac{6x^2}{1}$ Ἄρα διὰ $x=1$ εὑρίσκομεν $y=6$ ἥτις εἶναι ἡ ἀληθὴς τιμὴ του κλάσματος.

β΄. Εὕρεσις τοῦ μεγίστου ἢ ἐλαχίστου μιᾶς συναρτήσεως.

388. α΄) Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον ἢ τὸ ἐλάχιστον τῆς συναρτήσεως

$$y=x^2-6x+6.$$

Τὸ μέγιστον ἢ τὸ ἐλάχιστον τῆς συναρτήσεως ταύτης λαμβάνει χώραν διὰ τὴν τιμὴν τοῦ x διὰ τὴν ὁποίαν ἡ πρώτη παράγωγος ταύτης μηδενίζεται (§ 383). Ἀλλ' ἡ πρώτη παράγωγος εἶναι $y'=2x-6$. Ἂν λοιπὸν $2x-6=0$ ἐξ οὗ $x=3$ τότε $y'=0$. Ἄρα διὰ $x=3$ ἡ συνάρτησις y ἔχει ἢ μέγιστον ἢ ἐλάχιστον.

Ἤδη, διὰ νὰ ἴδωμε ἂν ἡ y ἔχῃ μέγιστον ἢ ἂν ἔχῃ ἐλάχιστον, παρατηροῦμεν τὶ σημεῖον λαμβάνει ἡ δευτέρα παράγωγος διὰ τὴν τιμὴν $x=3$. Ἡ β΄ παράγωγος εἶναι $y''=2$. Ἀλλ' αὕτη εἶναι πάντοτε θετική. Ἑπομένως ἡ συνάρτησις y ἔχει ἐλάχιστον διὰ $x=3$. τὸ δὲ ἐλάχιστόν της εἶναι $y=-3$.

β΄). Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον ἢ τὸ ἐλάχιστον τῆς συναρτήσεως $y=x^3-12x+5$.

Ἡ α΄ παράγωγος τῆς y εἶναι $y'=3x^2-12$. Ψὸ μέγιστον ἢ τὸ ἐλάχιστον τῆς y λαμβάμβάνει χώραν ἂν $3x^2-12=0$ ἐξ ἧς $x_1=2$ καὶ $x_2=-2$. Ἡ β΄ παράγωγος τῆς y εἶναι $y''=6x$. Ἤδη παρατηροῦμεν ὅτι διὰ $x=2$ ἡ β΄ παράγωγος γίνεται $y''=12$ ἤτοι θετικὴ καὶ διὰ $x=-2$ ἡ β΄ παράγωγος γίνεται $y''=-12$ ἤτοι ἀρνητική. Ἄρα διὰ $x=2$ ἡ συνάρτησις y ἔχει ἐλάχιστον ὅπερ ἰσοῦται μὲ -11 καὶ διὰ $x=-2$ ἡ συνάρτησις y ἔχει μέγιστον ὅπερ ἰσοῦται μὲ 21.

γ΄). Ὁμοίως τῆς συναρτήσεως $y=x^3+8x^2+2x$. Ἡ α΄ παράγωγος εἶναι $y'=3x^2+16x+2$. Ἀλλ' αὕτη οὐδέποτε γίνεται μηδέν, καθόσον τὸ τριώνυμον $3x^2+16x+2$ ὡς ἔχον ῥίζας φανταστικὰς εἶναι πάντοτε θετικόν. Ἄρα ἡ συνάρτησις y δὲν ἔχει οὔτε μέγιστον οὔτε ἐλάχιστον.

δ΄). Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον ἢ τὸ ἐλάχιστον τῆς συναρτήσεως $y=\frac{8}{x}$. Ἡ α΄ παράγωγος τῆς y (§ 379) εἶναι $y'=\frac{0.x-8.1}{x^2}=-\frac{8}{x^2}$

Ἀλλὰ παρατηροῦμεν ὅτι ἡ y΄ δι' οὐδεμίαν τιμὴν τοῦ x μηδενίζεται Ἄρα ἡ y δὲν ἔχει οὔτε μέγιστον οὔτε ἐλάχιστον.

ε΄). Ὁμοίως τῆς $y=\frac{x^2-8x+4}{x^2-4x+2}$. Ἡ α΄ παράγωγός της εἶναι (§ 379) $y'=\frac{4x(x-1)}{(x^2-4x+2)^2}$. Αὕτη μηδενίζεται ἂν $4x(x-1)=0$· ἐξ ἧς $x=0$ ἢ $x=1$. Ἡ β΄ παράγωγος εἶναι

$$y''=\frac{-4(3x^4-16x^3+24x^2-16x+4)}{(x^2-4x+2)^4}$$

Ἤδη παρατηροῦμεν ὅτι ἡ β΄ παράγωγος γίνεται ἀρνητικὴ διὰ $x=0$ καὶ θετικὴ διὰ $x=1$. Ἄρα διὰ $x=0$ ἡ y ἔχει μέγιστον καὶ διὰ $x=1$ ἡ y ἔχει ἐλάχιστον. Τὸ μέγιστον εἶναι $y=2$ τὸ δὲ ἐλάχιστον εἶναι $y=3$.

στ΄). Ἔστω ἐπίσης ἡ $y=\frac{3x^2-21x+30}{4x^2-16x+12}$. Ἡ α΄ παράγωγός της εἶναι $y'=\frac{3(3x^2-14x+19)}{4(x^2-4x+3)^2}$. Ἀλλ' αὕτη οὐδέποτε εἶναι μηδὲν καθόσον ὁ μὲν ἀριθμητὴς $3(3x^2-14x+19)$ ὡς ἔχων ῥίζας φανταστικὰς εἶναι πάντοτε θετικὸς δηλαδὴ ὁμόσημος πρὸς τὸν πρῶτον ὅρον του, ὁ δὲ παρονομαστὴς ὡς τέλειον τετράγωνον εἶναι ἐπίσης θετικός. Ἄρα ἡ δοθεῖσα συνάρτησις δὲν ἔχει οὔτε μέγιστον οὔτε ἐλάχιστον.

Παρατήρησις. Ἐφαρμογὴ τῶν παραγώγων γίνεται ἐπίσης καὶ εἰς τὰς ἐξισώσεις τῆς κινήσεως εἰς τὴν φυσικήν. Δηλαδὴ τῆς ἐξισώσεως τοῦ διαστήματος

$$\delta=v_0 t \pm \frac{1}{2}\gamma t^2$$

ἡ μὲν πρώτη παράγωγος ὡς πρὸς τὸν χρόνον t εἶναι ἡ ταχύτης, ἡ δὲ δευτέρα παράγωγος ὡς πρὸς τὸν χρόνον t εἶναι ἡ ἐπιτάχυνσις, ἤτοι

$$\delta'=v_0\pm\gamma t \quad \text{καὶ} \quad \delta''=\pm\gamma.$$

Ἀσκήσεις πρὸς λύσιν.

Νὰ εὑρεθοῦν αἱ παράγωγοι ἑκάστης ἐκ τῶν κάτωθι συναρτήσεων

1218. $y=x^4-4x^3+3x^2-5$ **1219**. $y=x^2(1+x)^3(2-x)^2$

1220. $y=(x+1)^3(x-1)^3(x^2-1)$ **1221**. $y=(x-1)^2(x-2)^3(x-3)^4$

Νὰ εὑρεθῇ ἡ α΄ παράγωγος ἑκάστης ἐκ τῶν κάτωθι συναρτήσεων

1222. $y=(x^2-2x-1)\sqrt{x^2+2x-1}$ **1223**. $y=\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$

1224. $y=\frac{1+x}{1+x^2}$ **1225**. $y=\frac{x^3}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$ **1226**. $y=x\sqrt{\frac{\alpha-x}{\alpha+x}}$

1227. $y=\frac{x^7}{7}+\frac{x^6}{6}-\frac{x^5}{5}+\frac{3x^4}{4}-\frac{5x^3}{3}+8x^2-x+9$

1228 $y=\eta\mu 2x+\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x$ **1229**. $y=\frac{(1+\eta\mu x)^2}{\eta\mu x(1-\eta\mu x)}$

1230. $y=\frac{\varepsilon\varphi 2x}{\varepsilon\varphi x}$ **1231**. $y=\sqrt{\frac{x\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu x}}$

1232. Νὰ εὑρεθῇ ἡ νυοστὴ παράγωγος τῆς συναρτήσεως $y=(\alpha+\beta x)^\nu$.

1233. Ὁμοίως τῆς συναρτήσεως $y=(1-\alpha x)^\nu$.

Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον ἢ τὸ ἐλάχιστον ἑκάστης ἐκ τῶν κάτωθι συναρτήσεων

1234 $y=\frac{x^2-\alpha^2}{x^3}$ **1235**. $y=\frac{\alpha^8+\beta^2x^6}{x^2}$ **1236**. $y=\frac{(x-\alpha)(x-\beta)}{x}$

1237. Νὰ εὑρεθῇ μεταξὺ τίνων ὁρίων μεταβάλλεται ἡ παράστασις $\frac{x^3+2xy^2+3y^3}{x^2+y^2}$ ὅταν τὸ ἄθροισμα $x+y$ εἶναι σταθερόν.

1238. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον ἢ τὸ ἐλάχιστον τῆς παραστάσεως

$$\frac{x^3-x^2+3x^4-3x^5}{3x-3+x^2-x^3}$$

Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον ἢ τὸ ἐλάχιστον τῶν κάτωθι συναρτήσεων

1239. $y=συνx+συν2x$ 1240. $y=3ημ2x+2συν3x-3$

Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀληθὴς τιμὴ ἑκάστου ἐκ τῶν κάτωθι κλασμάτων διὰ τὴν ἔναντι ἑκάστου σημειουμένην τιμὴν τοῦ x.

1241. $y=\frac{x^3-5x^2+7x-3}{x^3-x^2-5x-3}$ διὰ $x=3$ 1242. $y=\frac{4^4-6x^2+8x-3}{x^2-3x+2}$ διὰ $x=1$

1243. $y=\frac{2x^5-21x^4+68x^3-84x^2+32x}{2x^5-14x^4+31x^3-24x^2+12x-16}$ διὰ $x=2$

1244. $y=\frac{εφx-ημx}{ημx(συν2x-συνx)}$ διὰ $x=0$

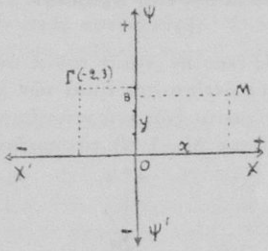
1245. $y=\frac{ημ^2x-ημ^2α}{x^2-α^2}$ διὰ $x=α$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΔ΄.

ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Ι. ΟΡΙΣΜΟΙ

389. ***Ὁρισμὸς σημείων ἐπὶ τῶν ἀξόνων. Ὀρθογώνιοι συντεταγμέναι.*** Ἂν λάβωμεν δύο καθέτους εὐθείας τὰς ΧΧ΄ καὶ ΨΨ΄ (σχ. 6), τότε ἡ θέσις παντὸς σημείου Μ τοῦ ἐπιπέδου ὁρίζεται τελείως διὰ τῶν ἀποστάσεων αὐτοῦ ἀπὸ τὰς δύο καθέτους ταύτας εὐθείας ἤτοι διὰ τῶν ἀποστάσεων ΑΜ καὶ ΒΜ. Ἐκ τῶν δύο τούτων καθέτων, (ἀποστάσεων τοῦ σημείου Μ ἀπὸ τὰς εὐθείας ΧΧ΄ καὶ ΨΨ΄) ἡ μὲν ΟΑ καλεῖται ***τετμημένη*** καὶ παρίσταται πάντοτε διὰ τοῦ x, ἡ δὲ ΑΜ ἢ ΟΒ καλεῖται ***τεταγμένη*** καὶ παρίσταται πάντοτε διὰ τοῦ y. Καὶ αἱ δύο ὁμοῦ καλοῦνται ***συντεταγμέναι*** (ὀρθογώνιοι) τοῦ σημείου Μ, σημειοῦται δὲ τὸ Μ ὡς ἑξῆς Μ(x,y). Αἱ κάθετοι εὐθεῖαι ΧΧ΄, ΨΨ΄ καλοῦνται ***ἄξονες τῶν συντεταγμένων*** τὸ δὲ σημεῖον Ο καλεῖται ***ἀρχὴ τῶν συντεναγμένων.***



Σχ. 6.

ΣΗΜ. Ὅλα τὰ ἀνωτέρω ἀναφέρονται εἰς ὀρθογωνίους μόνον ἄξονας.

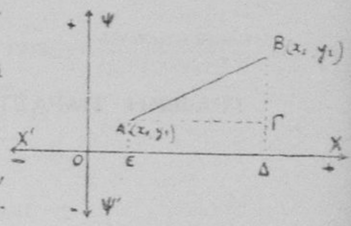
390. Ἡ τετμημένη x εἶναι θετικὴ ὅταν διευθύνεται πρὸς τὰ δεξιά, ἀρνητικὴ δὲ ὅταν διευθύνεται πρὸς τ᾽ ἀριστερά. Ἡ τεταγμένη y εἶναι θετικὴ ὅταν διευθύνεται πρὸς τὰ ἄνω, ἀρνητικὴ δὲ ὅταν διευθύνεται πρὸς τὰ κάτω. Οὕτω λοιπὸν ὁρίζεται τελείως ἡ θέσις σημείου τινὸς εὑρισκομένου ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου· π.χ. σημεῖον ἔχον ὡς συντεταγμένας —2, 3 (δηλαδὴ ἔχον $x=-2$, $y=3$) εἶναι τὸ Γ(—2, 3).

ΣΗΜ. Αἱ συντεταγμέναι σημείου τινὸς γράφονται μετὰ τὸ γράμμα ὅπερ παριστᾷ τὸ σημεῖον καὶ ἐντὸς παρενθέσεως, πρώτη δὲ γράφεται ἡ x καὶ κατόπιν ἡ y χωριζόμεναι δι᾽ ἑνὸς κόμματος π.χ. Ε(3, −5) σημαίνει ὅτι τὸ σημεῖον Ε ἔχει τετμημένην $x=3$ καὶ τεταγμένην $y=-5$. Ὁ ἄξων ΧΧ΄ καλεῖται ἄξων τῶν τετμημένων ὁ δὲ ΨΨ΄ καλεῖται ἄξων τῶν τεταγμένων.

391. ***Ἀπόστασις τῶν σημείων Α*** (x_1, y_1) ***καὶ Β***(x_2, y_2). Ἔστωσαν τὰ σημεῖα $A(x_1, y_1)$, καὶ $B(x_2, y_2)$ (σχ. 7). Φέρομεν τὰς ΒΓΔ καὶ ΑΓ ἀντιστοίχως παραλλήλους πρὸς τοὺς ἄξονας ΨΨ′ καὶ ΧΧ′. Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ἔχομεν $(AB)^2 = (A\Gamma)^2 + (\Gamma B)^2$. Ἀλλὰ
$A\Gamma = E\Delta = O\Delta - OE = x_2 - x_1$ καὶ
$\Gamma B = \Delta B - \Delta\Gamma = \Delta B - EA = y_2 - y_1$.
Ἄρα ἡ ἀνωτέρω σχέσις γίνεται :

$$(AB)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \qquad (1)$$

Ἡ σχέσις (1) δίδει τὴν ἀπόστασιν τῶν δύο σημείων Α καὶ Β ὅταν γνωρίζωμεν τὰς συντεταγμένας αὐτῶν.



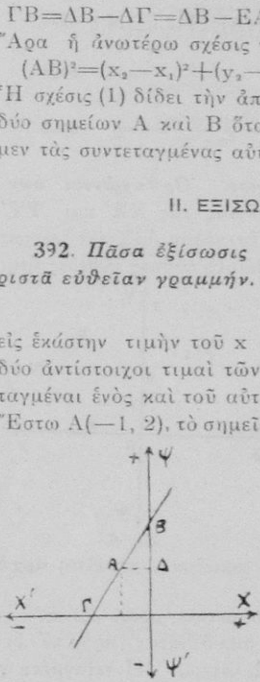
Σχ. 7.

ΙΙ. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΕΥΘΕΙΑΣ ΓΡΑΜΜΗΣ

392. ***Πᾶσα ἐξίσωσις πρώτου βαθμοῦ μὲ δύο ἀγνώστους παριστᾶ εὐθεῖαν γραμμήν.*** Πράγματι εἰς τὴν ἐξίσωσιν

$$y = 2x + 4 \qquad (2)$$

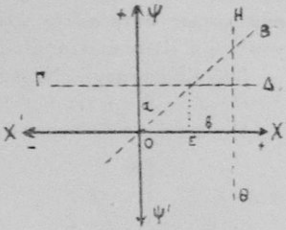
εἰς ἑκάστην τιμὴν τοῦ x ἀντιστοιχεῖ μία ὡρισμένη τιμὴ τοῦ y, αἱ δὲ δύο ἀντίστοιχοι τιμαὶ τῶν x καὶ y δύνανται νὰ θεωρηθοῦν ὡς συντεταγμέναι ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου. Ἂν π.χ. $x = -1$ τότε καὶ $y = 2$ Ἔστω $A(-1, 2)$, τὸ σημεῖον τὸ ἔχον συντεταγμένας $x = -1$, $y = 2$ (σχ.8)



Σχ. 8.

Ὁμοίως ἂν $x = 0$ τότε $y = 4$, ἔστω δὲ $B(0,4)$ τὸ σημεῖον τὸ ἔχον συντεταγμένας $x = 0, y = 4$. Ὁμοίως ἂν $x = -2$ τότε $y = 0$ ἔστω δὲ τὸ σημεῖον τοῦτο $\Gamma(-2, 0)$, Λέγω ἤδη ὅτι τὰ σημεῖα Α, Β, Γ κεῖνται ἐπ᾽ εὐθείας γραμμῆς· καθόσον τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΒΔΑ καὶ ΒΟΓ εἶναι ὅμοια διότι εἶναι $\Delta B = 2$, $\Delta A = 1$, κατ᾽ ἀπόλυτον τιμήν, $OB = 4$, $O\Gamma = 2$ κατ᾽ ἀπόλυτον τιμήν. Ἄρα $\dfrac{\Delta B}{\Delta A} = \dfrac{OB}{O\Gamma} = 2$ ἤτοι τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΒΔΑ καὶ ΒΟΓ ὡς ἔχοντα τὰς πλευρὰς τῆς ὀρθῆς γωνίας ἀναλόγους εἶναι ὅμοια. Ἄρα γωνΔΒΑ=γωνΟΒΓ ἤτοι τὰ σημεῖα Β,Α,Γ κεῖνται ἐπ᾽ εὐθείας. Ἀντιστρόφως πᾶν σημεῖον τῆς εὐθείας ΒΓ ἔχει συντεταγμένας πληρούσας τὴν σχέσιν (2), ὡς εὐκόλως ἀποδεικνύεται.

393. Ἂν ἡ ἐξίσωσις εἶναι τῆς μορφῆς $y = \alpha x$ τότε, διότι προφανῶς ἐπαληθεύεται διὰ $x = 0$, $y = 0$ διὰ τοῦτο ἡ ὑπ᾽ αὐτῆς παριστωμένη εὐθεῖα AB (σχ. 9) διέρχεται διὰ τῆς ἀρχῆς 0 τῶν συντεταγμένων (εἰς τὸ σχῆμα 9 ὡς μονὰς λαμβάνεται τὸ μῆκος ΟΕ), ἡ ἐξίσωσις $y=\alpha$ παριστᾶ τὴν εὐθεῖαν ΓΔ, παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα ΧΧ′ καὶ ἀπέχουσαν αὐτοῦ κατὰ α (σχ. 9). Ἡ ἐξίσωσις $x=\beta$ παριστᾶ τὴν εὐθεῖαν ΘΗ, παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα ΨΨ′ καὶ ἀπέχουσαν αὐτοῦ κατὰ β (σχ. 9).



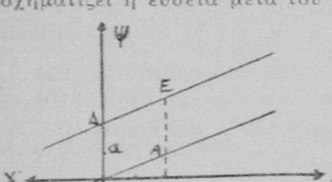
Σχ. 9.

394. ***Συντεταγμέναι ἐπὶ τὴν ἀρχήν.*** Ἐν γένει, ἵνα εὕρωμεν τὴν εὐθεῖαν τὴν παριστωμένην ἔστω ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως $y=2x+4$ (σχ. 8), θέτομεν $x=0$ ὁπότε $y=4$, κατόπιν θέτομεν $y=0$ ὁπότε $x=-2$ ἡ δὲ εὐθεῖα εἶναι ἡ ΒΓ ἔχουσα Β(0,4) καὶ Γ(−2,0). Αἱ συντεταγμέναι $x=-2$ τοῦ Γ καὶ $y=4$ τοῦ Β καλοῦνται ***συντεταγμέναι ἐπὶ τὴν ἀρχήν***, καὶ δὴ ἡ μὲν $x=-2$ λέγεται τετμημένη ἐπὶ τὴν ἀρχὴν ἡ δὲ $y=4$ τεταγμένη ἐπὶ τὴν ἀρχήν.

395. ***Συντελεστὴς διευθύνσεως ἢ γωνιακὸς συντελεστής.*** Ὅταν ἡ ἐξίσωσις τοῦ α′ βαθμοῦ μετὰ δύο ἀγνώστων λυθῇ ὡς πρὸς y, τότε λαμβάνει αὕτη τὴν μορφήν:

$$y=\lambda x+\alpha \qquad (3)$$

τότε ὁ συντελεστὴς λ τοῦ x καλεῖται ***συντελεστὴς διευθύνσεως ἢ γωνιακὸς συντελεστὴς*** τῆς εὐθείας. Ὁ συντελεστὴς διευθύνσεως λ τριγωνομετρικῶς ἰσοῦται μὲ τὴν ἐφαπτομένην τῆς γωνίας τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ εὐθεῖα μετὰ τοῦ ἄξονος ΧΧ′ (σχ. 10). Πράγματι ἔστω ἡ ἐξίσωσις $y=\lambda x$. Θέτοντες $x=1=\text{ΟΓ}$ εὑρίσκομεν $y=\lambda=\text{ΓΑ}$ ἔστω δὲ Α(1,λ) τὸ ἀντίστοιχον σημεῖον τῆς εὐθείας $y=\lambda x$. Ἡ εὐθεῖα αὕτη θὰ διέρχεται κατ᾽ ἀνάγκην καὶ διὰ τῆς ἀρχῆς 0 τῶν συντεταγμένων (§ 393). Ἄρα ἡ ζητουμένη εὐθεῖα εἶναι ἡ ΟΑ. Ἐκ δὲ τοῦ ὀρθογ. τριγώνου ΟΑΓ ἔχομεν $\text{ΑΓ}=\text{ΟΓ}\,\text{εφ}(\text{ΑΟΓ})$. Ἄρα $\lambda=\text{εφ}(\text{ΑΟΓ})$.



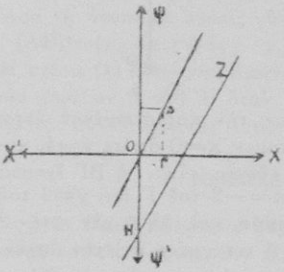
Σχ. 10.

Ἔστω ἤδη ἡ ἐξίσωσις $y=\lambda x+\alpha$. Ἂν $x=0$ τότε $y=\alpha$ καὶ ἂν $x=1$ τότε $y=\lambda+\alpha$. Ἔστωσαν Δ(0,α) καὶ Ε(1,λ+α) τὰ δύο σημεῖα, ὁπότε ἡ ἐξίσωσις $y=\lambda x+\alpha$ παριστᾶ τὴν εὐθεῖαν ΔΕ. Ἀλλ᾽ ἐπειδὴ $\text{ΑΕ}=\text{ΓΕ}-\text{ΓΑ}=\lambda+\alpha-\lambda=\alpha$ καὶ $\text{ΟΔ}=\alpha$, εἶναι δὲ καὶ ΟΔ//ΓΕ, διὰ τοῦτο τὸ σχῆμα ΟΔΕΑ εἶναι παραλληλόγραμμον. Ἄρα ἡ εὐθεῖα ΔΕ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΟΑ ἤτοι ἡ εὐθεῖα $y=\lambda x+\alpha$ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν $y=\lambda x$. Ἄρα ***ὅταν δύο εὐθεῖαι διαφέρουν μό-***

νον κατὰ τὸν γνωστὸν ὅρον, ἔχουν δὲ τὸν αὐτὸν συντελεστὴν διευθύνσεως τότε αὗται εἶναι παράλληλοι. Ὁ γνωστὸς ὅρος α τῆς $y=\lambda x+\alpha$ εἶναι ἡ τεταγμένη ἐπὶ τὴν ἀρχήν.

396. ***Ἐφαρμογή.*** Νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα ἔχουσα συντελεστὴν διευθύνσεως 2 καὶ τεταγμένην ἐπὶ τὴν ἀρχὴν —3.

Προφανῶς ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας εἶναι ἡ $y=2x-3$. Ἵνα κατασκευάσωμεν ταύτην λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς ΟΧ (σχ. 11) τμῆμα ΟΓ=1 καὶ ὑψοῦμεν ἐκ τοῦ Γ κάθετον ἐπὶ τὴν ΟΧ, λαμβάνομεν δὲ ἐπὶ ταύτης τμῆμα ΓΔ=2. Ἡ ΟΔ εἶναι ἡ διεύθυνσις τῆς ζητουμένης εὐθείας. Λαμβάνομεν μετὰ ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν y τμῆμα ΟΗ=—3 καὶ ἐκ τοῦ Η ἄγομεν τὴν ΗΖ παράλληλον τῇ ΟΔ. Ἡ ΗΖ εἶναι ἡ ζητουμένη εὐθεῖα.



Σχ. 11.

397. ***Ἐξίσωσις εὐθείας ἐχούσης συντελεστὴν διευθύνσεως λ καὶ διερχομένης διὰ τοῦ σημείου M(x_1,y_1).***

Ἀφοῦ ἡ εὐθεῖα θὰ ἔχῃ συντελεστὴν διευθύνσεως λ, τότε ἂν ἡ τεταγμένη της ἐπὶ τὴν ἀρχὴν εἶναι μ, ἡ εὐθεῖα θὰ παρίσταται ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως

$$y=\lambda x+\mu \tag{4}$$

Ἐπειδὴ ὅμως ἡ εὐθεῖα θὰ διέρχεται καὶ διὰ τοῦ σημείου $M(x_1,y_1)$, ἕπεται ὅτι αἱ συντεταγμέναι x_1, y_1 τοῦ Μ θὰ ἐπαληθεύουν τὴν ἐξίσωσιν ταύτης (4). Ἄρα θὰ εἶναι

$$y_1=\lambda x_1+\mu \tag{5}$$

Δι' ἀφαιρέσεως τῶν (4) καὶ (5) ἐξαλείφομεν τὸν μ καὶ ἔχομεν :

$$y-y_1=\lambda(x-x_1) \tag{6}$$

Ἡ ἐξίσωσις (6) εἶναι ἡ ζητουμένη ἐξίσωσις.

398. ***Ἐξίσωσις εὐθείας διερχομένης διὰ τῶν σημείων*** $M(x_1,y_1)$ ***καὶ*** $N(x_2, y_2)$.

Ἀφοῦ ἡ εὐθεῖα θὰ διέρχεται διὰ τοῦ $M(x_1, y_1)$, ἕπεται ὅτι κατὰ τὴν προηγουμένην παράγραφον ἡ ἐξίσωσίς της θὰ εἶναι

$$y-y_1=\lambda(x-x_1) \tag{7}$$

Ἐπειδὴ δὲ αὕτη θὰ διέρχεται καὶ διὰ τοῦ $N(x_2,y_2)$ ἕπεται ὅτι ἡ ἐξίσωσίς της θὰ εἶναι :

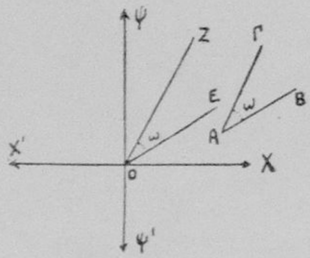
$$y-y_2=\lambda(x-x_2) \tag{8}$$

Διαιροῦντες κατὰ μέλη τὰς (7) καὶ (8) εὑρίσκομεν

$$\frac{y-y_1}{y-y_2}=\frac{x-x_1}{x-x_2} \qquad (9)$$

ἥτις εἶναι ἡ ζητουμένη ἐξίσωσις.

399. *Γωνία δύο εὐθειῶν.* Ἔστωσαν αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΑΓ (σχ. 12) σχηματίζουσαι γωνίαν ΒΑΓ=ω. Ἄγομεν ἐκ τῆς ἀρχῆς Ο τὰς ΟΕ καὶ ΟΖ ἀντιστοίχως παραλλήλους πρὸς τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ. Ἔστωσας λ καὶ λ' οἱ συντελεσταὶ διευθύνσεως τῶν δύο εὐθειῶν, ἔστωσαν δὲ αἱ γωνίαι ΧΟΕ=φ καὶ ΧΟΖ=θ. Θὰ ἔχωμεν (§ 395) εφφ=λ καὶ εφθ=λ' εἶναι δὲ γωνία ω=ΖΟΕ=θ—φ.



Σχ. 12.

Ἄρα ἔχομεν :

$$\text{εφω}=\text{εφ}(\theta-\varphi)=\frac{\text{εφθ}-\text{εφφ}}{1+\text{εφθεφφ}} \quad \text{ἢ} \quad \text{εφω}=\frac{\lambda'-\lambda}{1+\lambda\lambda'} \qquad (10)$$

Ἡ σχέσις (10) μᾶς δίδει τὴν ἐφαπτομένην τῆς γωνίας ω τῶν δύο εὐθειῶν.

400. *Συνθήκη ἵνα δύο εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι.* Ἂν αἱ εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι, τότε ἡ ἐφαπτομένη τῆς γωνίας αὐτῶν εἶναι μηδὲν ἡ δὲ σχέσις (10) δίδει $\lambda=\lambda'$. Ἤτοι, ἵνα δύο εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ἔχουν τὸν αὐτὸν συντελεστὴν διευθύνσεως.

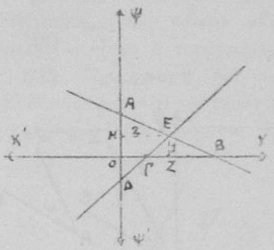
401. *Συνθήκη ἵνα δύο εὐθεῖαι εἶναι κάθετοι.* Ἂν αἱ εὐθεῖαι εἶναι κάθετοι, τότε ἡ γωνία ω=90°, ἡ δὲ εφω ἰσοῦται μὲ ἄπειρον. Ἀλλὰ τότε ἐκ τῆς σχέσεως (10), ἵνα τὸ κλάσμα $\frac{\lambda'-\lambda}{1+\lambda\lambda'}$ ἰσοῦται μὲ ἄπειρον, πρέπει ὁ παρονομαστής του νὰ ἰσοῦται μὲ μηδέν, ἤτοι $\lambda\lambda'=-1$

Ἤτοι, ἵνα δύο εὐθεῖαι εἶναι κάθετοι, πρέπει καὶ ἀρκεῖ οἱ συντελεσταὶ διευθύνσεως αὐτῶν νὰ ἔχουν γινόμενον ἴσον πρὸς —1.

402. *Σύστημα δύο ἐξισώσεων μετὰ δύο ἀγνώστων.* Ἔστω τὸ σύστημα

$$x+2y=4 \quad \text{καὶ} \quad x-y=1.$$

Ἡ πρώτη ἐξίσωσις παριστᾶ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ (σχ. 13), ἡ δὲ δευτέρα τὴν ΓΔ. Αἱ δύο αὗται εὐθεῖαι τέμνονται εἰς τὸ Ε. Εἶναι γνωστὸν ὅτι αἱ συντεταγμέναι παντὸς σημείου τῆς εὐθείας ΑΒ ἐπαληθεύουν τὴν α' ἐξίσωσιν (§ 392). Ὁμοίως αἱ συντεταγμέναι παντὸς σημείου τῆς ΓΔ ἐπαληθεύουν τὴν β΄ ἐξίσωσιν. Ἄρα αἱ συντεταγμέναι τοῦ κοινοῦ σημείου Ε τῶν δύο τούτων εὐθειῶν ἐπαληθεύουν ἀμφοτέρας τὰς ἐξισώσεις, ἤτοι εἶναι ρίζαι τοῦ συστήματος. Πράγματι αἱ συντεταγμέναι τοῦ Ε εἶναι $x=2, y=1$, αἵτινες εἶναι ρίζαι τοῦ δοθέντος συστήματος. Ἄρα, ρίζαι τοῦ συστήματος δύο ἐξισώσεων μετὰ δύο ἀγνώστων εἶναι αἱ συντεταγμέναι τοῦ κοινοῦ σημείου τῶν ὑπὸ τῶν ἐξισώσεως παριστωμένων εὐθειῶν.



Σχ. 13.

403 Εἴδομεν εἰς τὰς παραγράφους 93, 94 πότε τὸ σύστημα $\alpha x+\beta y=\gamma$ καὶ $\alpha' x+\beta' y=\lambda$ εἶναι ἀδύνατον ἢ ἀόριστον.

Γραφικῶς εἰς μὲν τὸ ἀδύνατον σύστημα αἱ ἐξισώσεις παριστοῦν δύο εὐθείας παραλλήλους καὶ ἄρα μὴ τεμνομένας, εἰς δὲ τὸ ἀόριστον σύστημα αἱ ἐξισώσεις παριστοῦν τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν. Διότι πράγματι ἂν $\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\beta}{\beta'}=\mu$, τότε $\alpha=\mu\alpha'$ καὶ $\beta=\mu\beta'$ αἱ δὲ δύο ἐξισώσεις γίνονται:

$$\alpha' x+\beta' y=\frac{\gamma}{\mu} \quad \text{καὶ} \quad \alpha' x+\beta' y=\gamma'$$

ἤτοι ὅταν τὸ σύστημα εἶναι ἀδύνατον αἱ ἐξισώσεις διαφέρουν μόνον κατὰ τὸν γνωστὸν ὅρον καὶ ἐπομένως (§ 395) εἶναι εὐθεῖαι παράλληλοι ὡς ἔχουσαι τὸν αὐτὸν συντελεστὴν διευθύνσεως.

Ἂν δὲ $\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\beta}{\beta'}=\frac{\gamma}{\gamma'}=\nu$, τότε $\alpha=\nu\alpha'$, $\beta=\nu\beta'$ $\gamma=\nu\gamma'$, τὸ δὲ σύστημα γίνεται $\nu\alpha' x+\nu\beta' y=\nu\gamma'$ καὶ $\alpha' x+\beta' y=\gamma'$. Ἀλλὰ τότε ἡ α΄ ἐξίσωσις, ἂν ἁπλοποιήσωμεν ταύτην διὰ ν, ἰσοῦται μὲ τὴν β΄, ἤτοι οὐσιαστικῶς πρόκειται περὶ μιᾶς μόνον ἐξισώσεως καὶ ὄχι περὶ συστήματος. Ἄρα τὸ σύστημα παριστᾷ μίαν καὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν,

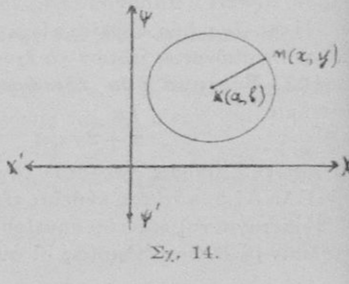
ΙΙΙ. ΕΞΙΣΩΣΙΣ ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΣ

404. Ἔστω περιφέρεια ἀκτῖνος ρ καὶ κέντρου Κ ἔχοντος συντεταγμένας τὰς α, β (σχ. 14) Ἂν λάβωμεν τυχὸν σημεῖον Μ τῆς περιφερείας ἔχον ὡς συντεταγμένας x καὶ y τότε ἡ ἀπόστασις $MK=\rho$ τῶν δύο τούτων σημείων εἶναι (§ 391)

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\rho^2 \quad \text{ἢ}$$

$$x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+ +\alpha^2+\beta^2-\rho^2=0 \quad (11)$$

Ἡ ἐξίσωσις (11) εἶναι ἡ ἐξίσωσις



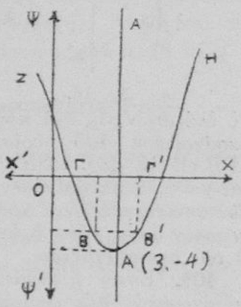
Σχ. 14.

περιφερείας ἀκτῖνος ρ καὶ ἐχούσης συντεταγμένας τοῦ κέντρου της τὰς α καὶ β.

IV. ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΙΣ ΤΟΥ ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΟΥ ΤΡΙΩΝΥΜΟΥ $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$.

405. Εἴδομεν εἰς τὴν παράγραφον 293 πότε τὸ τριώνυμον $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ ἔχει ἐλάχιστον καὶ πότε ἔχει μέγιστον. Ἤδη θὰ ἴδωμεν τί παριστᾶ γραφικῶς τὸ τριώνυμον τοῦτο.

Ἔστω τὸ τριώνυμον $y=x^2-6x+5$. Παρατηροῦμεν (§ 293) ὅτι διὰ $x=3$ τὸ τριώνυμον τοῦτο ἔχει ἐλάχιστον $y=-4$. Ἄρα τὸ σημεῖον Α(3,—4) εἶναι τὸ ἐλάχιστον τῆς καμπύλης τῆς παριστωμένης ὑπὸ τοῦ y (σχ. 15). Ἤδη δίδομεν εἰς τὸν x τιμὰς ἰσάκις ἀπεχούσας ἀπὸ τὸ ἡμιάθροισμα 3 τῶν ριζῶν ἤτοι $x=2$ καὶ $x=4$. Τότε εὑρίσκομεν διὰ τὸν y τὴν αὐτὴν τιμὴν $y=-3$, ὡς εὐκόλως συμπεραίνομεν ἐκ τῆς σχέσεως (18) τῆς § 293. Ἄρα τὰ σημεῖα Β(2,—3) καὶ Β′(4,—3) εἶναι σημεῖα τῆς καμπύλης. Ὁμοίως δίδομεν εἰς τὸν x τιμὰς 1 καὶ 5 ὅτε $y=0$. Ἄρα τὰ σημεῖα Γ(1,0) καὶ Γ′(5,0) εἶναι ἐπίσης σημεῖα τῆς καμπύλης κ.ο.κ. Ἄρα ἡ ὑπὸ τοῦ δοθέντος τριωνύμου παριστωμένη καμπύλη εἶναι ἡ ΖΓΒΑΒ′Γ′Η ἥτις, ὡς ἔχουσα ἐλάχιστον παρατηροῦμεν ὅτι στρέφει τὸ κοῖλον μέρος πρὸς τὰ ἄνω. Ἡ καμπύλη αὕτη ΖΓΒΑΑ′Β′Γ′Η καλεῖται ***παραβολή***.



Σχ. 15.

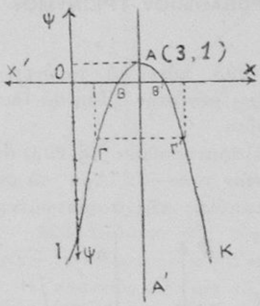
Πᾶσα λοιπὸν ἐξίσωσις τοῦ β′ βαθμοῦ γραφικῶς παριστᾶ μίαν παραβολήν.

Εὐκόλως ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ ἐκ τοῦ ἐλαχίστου Α ἀγομένη κάθετος ΑΑ′ ἐπὶ τὸν ἄξονα ΧΧ′ εἶναι ἄξων συμμετρίας τῆς καμπύλης.

Ἵνα λοιπὸν κατασκευάσωμεν τὴν καμπύλην μιᾶς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως ἐργαζόμεθα ὡς ἀκολούθως. Εὑρίσκομεν τὸ μέγιστον ἢ ἐλάχιστον τῆς συναρτήσεως $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ καὶ ἐκ τοῦ ἀντιστοίχου σημείου ἄγομεν εὐθεῖαν κάθετον ἐπὶ τὸν ΧΧ′ ἥτις θὰ εἶναι ὁ ἄξων συμμετρίας τῆς ζητουμένης καμπύλης. Κατόπιν δίδομεν εἰς τὸν x τιμὰς ἰσάκις ἀπεχούσας ἀπὸ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν ριζῶν της καὶ εὑρίσκομεν τὴν ἀντίστοιχον τιμὴν τοῦ y ἐπομένως καὶ τὰ ἀντίστοιχα σημεῖα τῆς καμπύλης καὶ οὕτω καθεξῆς

406. Τὸ τριώνυμον $y=-x^2+6x-8$ ὡς ἔχον μέγιστον, παριστᾶ τὴν παραβολὴν ΙΓΒΑΒ'Γ'Κ ἥτις στρέφει τὸ κοῖλον μέρος πρὸς τὰ κάτω (σχ. 16).

Παρατηρήσεις. Εἰς τὰς δύο ὡς ἀνωτέρω περιπτώσεις τὰ σημεῖα εἰς τὰ ὁποῖα ἡ καμπύλη τέμνει τὸν ἄξονα τῶν x ἔχουν τεταγμένας μὲν μηδέν, τετμημένας δὲ τὰς ρίζας τοῦ τριωνύμου. Ἄρα ἂν ἡ καμπύλη τέμνῃ τὸν ἄξονα XX', τότε τὸ ἀντίστοιχον τριώνυμον ἔχει δύο ρίζας πραγματικὰς καὶ ἀνίσους, ἂν ἐφάπτεται τούτου τὸ τριώνυμον ἔχει δύο ρίζας πραγματικὰς καὶ ἴσας, ἂν ἡ καμπύλη δὲν τέμνῃ τὸν ἄξονα XX' οὔτε ἐφάπτεται τούτου, τὸ τριώνυμον ἔχει ρίζας φανταστικάς.

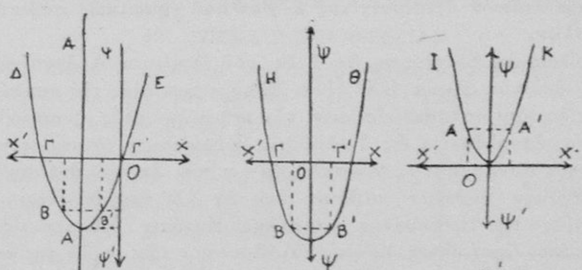


Σχ. 16.

407. Ἔστω ἡ συνάρτησις $y=x^2+4x$. Τὸ ἐλάχιστόν της διὰ $x=-2$ εἶναι $y=-4$. Ἐργαζόμενοι ὡς εἰς τὴν παράγραφον 405 εὑρίσκομεν ὅτι αὕτη παριστᾷ τὴν παραβολὴν ΔΓΒΑΒ'ΟΕ (σχ. 17 α'). Ἐπειδὴ προφανῶς διὰ $x=0$ εὑρίσκομεν καὶ $y=0$, συμπεραίνομεν ὅτι ἡ παραβολὴ διέρχεται διὰ τῆς ἀρχῆς Ο τῶν συντεταγμένων. Ἄρα ὅταν ἡ δευτεροβάθμιος συνάρτησις δὲν ἔχῃ γνωστὸν ὅρον, τότε ἡ ἀντίστοιχος καμπύλη διέρχεται διὰ τῆς ἀρχῆς Ο τῶν συντεταγμένων.

408. Ἔστω ἡ συνάρτησις $y=x^2-4$. Ἐργαζόμενοι ὡς εἰς τὴν παράγραφον 405 εὑρίσκομεν τὴν παραβολὴν ΗΓΒΑΒ'Γ'Θ ἥτις ὡς εὐκόλως ἀποδεικνύεται ἔχει ὡς ἄξονα συμμετρίας τὸν ΨΨ (σχ. 17 β'). Ἄρα ἂν ἡ δευτεροβάθμιος συνάρτησις στερῆται τοῦ πρωτοβαθμίου ὡς πρὸς x ὅρου, τότε ἡ ἀντίστοιχος καμπύλη ἔχει ἄξονα συμμετρίας τὸν ΨΨ'.

409. Ἔστω ἡ συνάρτησις $y=2x^2$. Ἐργαζόμενοι ὡς ἀνωτέρω εὑ-



Σχ. 17.

ρίσκομεν τὴν παραβολὴν ΙΑΟΑ΄Κ ἥτις διέρχεται διὰ τῆς ἀρχῆς καὶ ἔχει ὡς ἄξονα συμμετρίας τὸν ΨΨ΄ (σχ. 17 γ΄)

410. *Συμπέρασμα.* Τὸ τριώνυμον τοῦ β΄ βαθμοῦ $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ παριστᾷ πάντοτε παραβολήν. Καὶ ἂν μὲν $\gamma=0$, ὁπότε τὸ τριώνυμον λαμβάνει τὴν μορφὴν $y=\alpha x^2+\beta x$, τότε ἡ παραβολὴ διέρχεται διὰ τῆς ἀρχῆς Ο τῶν συντεταγμένων (ἴδε καὶ ἐξίσωσιν κινήσεως βλημάτων εἰς τὴν φυσικήν). Ἂν $\beta=0$, ὁπότε τὸ τριώνυμον λαμβάνει τὴν μορφὴν $y=\alpha x^2+\gamma$, τότε ἡ παραβολὴ ἔχει ὡς ἄξονα συμμετρίας τὸν ΨΨ΄. Ἂν δὲ καὶ $\beta=0$ καὶ $\gamma=0$, τότε τὸ τριώνυμον λαμβάνει τὴν μορφὴν $y=\alpha x^2$ ἡ δὲ ὑπ᾿ αὐτοῦ παριστωμένη παραβολὴ διέρχεται διὰ τῆς ἀρχῆς Ο τῶν συντεταγμένων καὶ ἔχει ὡς ἄξονα συμμετρίας τὸν ΨΨ΄.

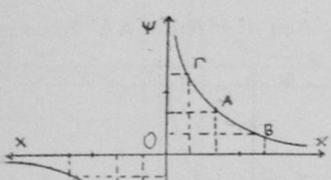
Ἐκ τῶν ἀνωτέρω παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ὑπὸ τοῦ τριωνύμου τοῦ β΄ βαθμοῦ παριστωμένη καμπύλη εἶναι συνεχής. Ἀλλὰ καὶ τὸ τριώνυμον $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ εἶναι συνεχὴς συνάρτησις τοῦ x. (§ 279).

V. ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΙΣ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ $y=\frac{\alpha}{x}$

411. *Ἀσύμπτωτοι:* Μία εὐθεῖα καλεῖται ἀσύμπτωτος μιᾶς καμπύλης (ἢ καὶ ἀντιστρόφως) ὅταν ἡ ἀπόστασις σημείου τινὸς τῆς καμπύλης ἀπὸ τῆς εὐθείας τείνει πρὸς τὸ μηδέν, ἐφ᾿ ὅσον τὸ σημεῖον τοῦτο ἀπομακρύνεται εἰς τὸ ἄπειρον, ἤτοι ὅταν ἡ καμπύλη διαρκῶς πλησιάζουσα τὴν εὐθεῖαν τείνει νὰ συναντήσῃ αὐτὴν εἰς τὸ ἄπειρον.

412. Ἔστω ἡ συνάρτησις $y=\frac{4}{x}$

Παρατηροῦμεν ὅτι διὰ $x=0$ εὑρίσκομεν $y=\infty$ ἤτοι ἡ καμπύλη τὴν ὁποίαν παριστᾷ ἡ ἄνω ἐξίσωσις συναντᾷ τὸν ἄξονα ΨΨ΄ εἰς τὸ ἄπειρον. Ἄρα ὁ ἄξων ΨΨ΄ εἶναι **ἀσύμπτωτος** τῆς καμπύλης (σχ. 18). Ὁμοίως διὰ $y=0$ εὑρίσκομεν $x=\infty$ ἤτοι καὶ ὁ ἄξων XX΄ εἶναι **ἀσύμπτωτος** τῆς καμπύλης. Ἤδη, μετὰ τὸν προσδιορισμὸν τῶν ἀσυμπτώτων τῆς καμπύλης δίδομεν εἰς τὸν x τιμὰς ἰσάκις ἀπεχούσας ἀπὸ τὸ 0 εὑρίσκομεν δὲ τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τοῦ y ἤτοι διὰ $x=\pm1$ ἔχομεν $y=\pm4$ (σημεῖα Γ καὶ Γ΄), διὰ $x=\pm2$ ἔχομεν $y=\pm2$ (σημεῖα Α καὶ Α΄), διὰ $x=\pm4$ ἔχομεν $y=\pm1$, (σημεῖα Β καὶ Β΄), κλπ. Ὁμοίως δίδομεν εἰς τὸν y τιμὰς ἰσάκις ἀπεχούσας ἀπὸ τὸ 0, εὑρίσκομεν δὲ ἀντιστοίχους τιμὰς τοῦ x

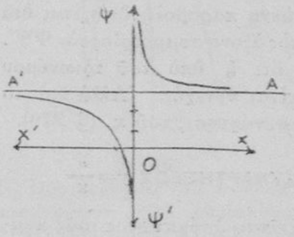


Σχ. 18.

καὶ προσδιορίζομεν οὕτω τὰ ἀντίστοιχα σημεῖα τῆς καμπύλης. Ἡ καμπύλη αὕτη παρατηροῦμεν ὅτι ἔχει δύο κλάδους ἤτοι τὸν ἕνα ἐντὸς τῆς γωνίας ΧΟΨ καὶ τὸν ἄλλον ἐντὸς τῆς κατὰ κορυφὴν γωνίας Χ΄ΟΨ΄ ἔχει δὲ ἀσυμπτώτους τοὺς ἄξονας ΧΧ΄ καὶ ΨΨ΄. Ἡ καμπύλη αὕτη καλεῖται ***ὑπερβολὴ*** εἶναι δὲ συμμετρικὴ ὡς πρὸς τὴν ἀρχὴν Ο τῶν συντεταγμένων, ὡς εὐκόλως ἀποδεικνύεται.

413. Ἔστω ἡ συνάρτησις $y=\frac{3x+2}{x}$

Αὕτη γράφεται $y=3+\frac{2}{x}$. Παρατηροῦμεν ὅτι διὰ $x=0$ ἔχομεν $y=\infty$. Ἄρα ὁ ἄξων ΨΨ΄ εἶναι ἀσύμπτωτος τῆς ἀντιστοίχου καμπύλης (σχ. 19). Διὰ $y=3$ ἔχομεν $x=\infty$, ἤτοι ἡ εὐθεῖα ΑΑ΄ ἡ ἔχουσα $y=3$ εἶναι ἐπίσης ἀσύμπτωτος. Ἐργαζόμενοι ὡς εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα καὶ θέτοντες ἀντὶ x τιμὰς ἑκατέρωθεν τοῦ 0 καὶ κατόπιν ἀντὶ y τιμὰς ἑκατέρωθεν τοῦ 3, εὑρίσκομεν τὴν ὑπὸ τῆς δοθείσης συναρτήσεως παριστωμένην καμπύλην.

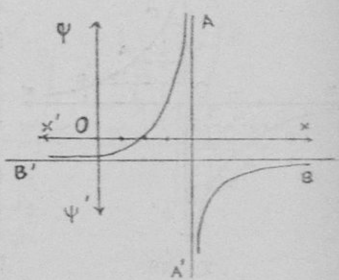


Σχ. 19

414. Ἔστω ἡ συνάρτησις $y=\frac{x-2}{4-x}$. Ἂν $x=4$ τότε $y=\infty$. Ἡ δοθεῖσα ὅμως συνάρτησις γράφεται :

$$y=\frac{1-\frac{2}{x}}{\frac{4}{x}-1}$$

θέτοντες δὲ $x=\infty$ εὑρίσκομεν $y=-1$. Ἄρα αἱ εὐθεῖαι ΑΑ΄ ἔχουσα $x=4$ καὶ ΒΒ΄ ἔχουσα $y=-1$ εἶναι ἀσύμπτωτοι τῆς καμπύλης (σχ. 20) Ἐργαζόμενοι ὡς ἀνωτέρω, ἤτοι θέτοντες ἀντὶ x τιμὰς ἑκατέρωθεν τοῦ 4 καὶ ἀντὶ y τιμὰς ἑκατέρωθεν τοῦ -1, εὑρίσκομεν σημεῖα τῆς καμπύλης καὶ τέλος τὴν ὑπὸ τῆς δοθείσης συναρτήσεως παριστωμένην καμπύλην.



Σχ. 20

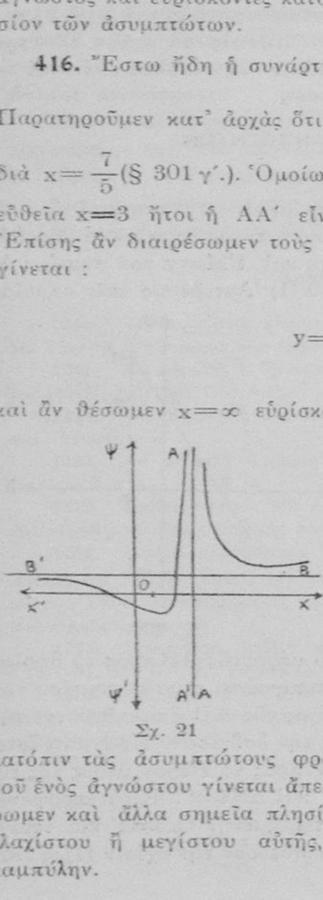
415. Ἐν γένει, πᾶσα συνάρτησις τῆς μορφῆς $\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$ παριστᾶ ὑπερβολήν. Παρατηροῦμεν ἐπίσης ὅτι αἱ συναρτήσεις τῆς μορφῆς ταύτης δὲν εἶναι συνεχεῖς (§ 281), παρουσιάζουν δὲ σημεῖα **ἀσυνεχείας.** Τὰ σημεῖα ἀσυνεχείας εἶναι ἐκεῖνα διὰ τὰ ὁποῖα ὁ εἷς ἄγνωστος γίνεται ἄπειρον, ἤτοι αἱ συντεταγμέναι τῶν ἀσυμπτώτων. Εἶναι προφανὲς ὅτι, διὰ νὰ κατασκευάσωμεν μίαν καμπύλην τῆς μορφῆς ταύτης πρέπει κατ' ἀρχὰς νὰ εὕρωμεν τὰς ἀσυμπτώτους ταύτης, θέτοντες εἰς αὐτὴν ἀντὶ τοῦ ἑνὸς ἀγνώστου τιμὰς διὰ τὰς ὁποίας γίνεται ἄπειρον ὁ ἄλλος ἄγνωστος καὶ εὑρίσκοντες κατόπιν σημεῖα τῆς καμπύλης κείμενα πλησίον τῶν ἀσυμπτώτων.

416. Ἔστω ἤδη ἡ συνάρτησις: $y=\dfrac{x^2-x-2}{x^2-6x+9}$ (α)

Παρατηροῦμεν κατ' ἀρχὰς ὅτι αὕτη ἔχει ἐλάχιστον ἴσον πρὸς $-\dfrac{9}{16}$ διὰ $x=\dfrac{7}{5}$ (§ 301 γ΄.). Ὁμοίως διὰ $x=3$ εὑρίσκομεν $y=\infty$. Ἄρα ἡ εὐθεῖα $x=3$ ἤτοι ἡ ΑΑ΄ εἶναι ἀσύμπτωτος τῆς καμπύλης (σχ. 21). Ἐπίσης ἂν διαιρέσωμεν τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος y διὰ x^2, τοῦτο γίνεται:

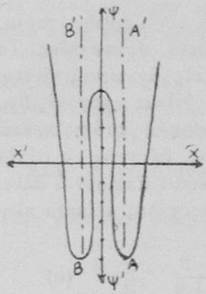
$$y=\frac{1-\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}}{1-\dfrac{6}{x}+\dfrac{9}{x^2}}$$

καὶ ἂν θέσωμεν $x=\infty$ εὑρίσκομεν $y=1$. Ἄρα ἡ εὐθεῖα $y=1$, ἤτοι ἡ ΒΒ΄ εἶναι ἀσύμπτωτος τῆς καμπύλης. Δίδομεν ἀκολούθως εἰς τὸ x τιμὰς ἑκατέρωθεν τοῦ ἐλαχίστου $\dfrac{7}{5}$ καὶ τῆς τιμῆς 3, κατόπιν εἰς τὸν y τιμὰς ἑκατέρωθεν τοῦ 1 καὶ εὑρίσκομεν τὴν ἔναντι καμπύλην, ἥτις παρίσταται ὑπὸ τῆς δοθείσης συναρτήσεως.



Σχ. 21

417. Ἐν γένει, εἰς πᾶσαν συνάρτησιν τῆς μορφῆς (α) εὑρίσκομεν πρῶτον τὸ μέγιστον ἢ ἐλάχιστον αὐτῆς καὶ κατόπιν τὰς ἀσυμπτώτους φροντίζοντες νὰ ἴδωμεν διὰ ποίαν τιμὴν τοῦ ἑνὸς ἀγνώστου γίνεται ἄπειρον ὁ ἄλλος. Μετὰ φροντίζομεν νὰ εὕρωμεν καὶ ἄλλα σημεῖα πλησίον τῶν ἀσυμπτώτων καὶ πλησίον τοῦ ἐλαχίστου ἢ μεγίστου αὐτῆς, ἵνα καθορίσωμεν ἀκριβέστερον τὴν καμπύλην.

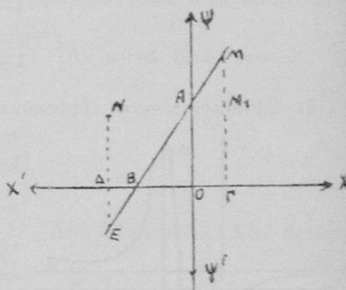


Σχ. 22

418. ***Διτετράγωνον τριώνυμον.*** Ἔστω ἡ συνάρτησις $y=2x^4-2x^2+8$, τῆς ὁποίας τὸ β' μέλος εἶναι διτετράγωνον τριώνυμον. Ἡ συνάρτησις αὕτη ἔχει ἐλάχιστον $y=-10$ διὰ $x=-\sqrt{3}$ ἢ διὰ $x=+\sqrt{3}$ καὶ μέγιστον $y=8$ διὰ $x=0$. Ἂν ἤδη δώσωμεν εἰς τὸν x τιμὰς ἰσάκις ἀπεχούσας ἀπὸ τὰς τιμὰς $-\sqrt{3}$ καὶ $\sqrt{3}$ ὡς ἐπίσης καὶ ἀπὸ τὴν τιμὴν 0, εὑρίσκομεν τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τοῦ y, ἡ δὲ συνάρνησις παριστᾶ τὴν εἰς τὸ σχῆμα 22 παριστωμένην καμπύλην ὡς εὐκόλως δύναταί τις νὰ τὴν κατασκευάσῃ.

VI. ΓΡΑΦΙΚΗ ΛΥΣΙΣ ΑΝΙΣΟΤΗΤΩΝ

419. Ἔστω ἡ ἀνισότης $y-2x-4<0$.
Τὸ τριώνυμον τοῦ α' μέλους ταύτης ἐξισούμενον μὲ 0 παριστᾶ (§ 392) τὴν εὐθεῖαν AB (σχ. 23). Ἂν ἤδη λάβωμεν τυχὸν σημεῖον M τῆς AB τότε (§ 392), αἱ συντεταγμέναι $O\Gamma=x$ καὶ $\Gamma M=y$ τοῦ σημείου M ἐπαληθεύουν τὴν ἐξίσωσιν $y-2x-4=0$ (1) Ἀντιθέτως πᾶν σημεῖον μὴ κείμενον ἐπὶ τῆς AB δὲν ἐπαληθεύτι τὴν ἐξίσωσιν (1), Ἔστω τυχὸν σημεῖον M_1 τοῦ ἐπιπέδου ἔχον συντεταγμένας $O\Gamma=x$ καὶ $\Gamma M_1=y_1<y$. Ἡ ἐξίσωσις (1) γράφεται $y=2x+4$ (2). Ἂ δὲ εἰς τὴν (2) θέσωμεν ἀντὶ y τὸ y_1 θὰ ἔχωμεν $y_1<2x+4$ ἢ $y_1-2x-4<0$. Ἤτοι παρτηροῦμεν ὅτι αἱ συντεταγμέναι x καὶ y_1 τοῦ M_1 ἐπαληθεύουν τὴν δοθεῖσαν ἀνισότητα.



Σχ. 23

Τοῦτο συμβαίνει διὰ πάντα τὰ σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου τὰ κείμενα πρὸς τὸ μέρος τῆς AB πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖται καὶ ἡ ἀρχὴ O. Ἀντιθέτως αἱ συντεταγμέναι παντὸς σημείου τοῦ ἐπιπέδου, κειμένου πρὸς τὸ ἕτερον μέρος τῆς AB ἐπαληθεύουν τὴν ἀνισότητα ἥτις εἶναι ἑτερόστροφος πρὸς τὴν δοθεῖσαν. Πράγματι ἔστω N τυχὸν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου κείμενον πρὸς τὸ ἕτερον μέρος τῆς εὐθείας AB, ἔχον συντεταγμένας $O\Delta=x'$ καὶ $\Delta N=y'$. Εἶναι προφανὲς ὅτι τὸ σημεῖον E τῆς εὐθείας AB ἔχει τετμημένην $O\Delta=x'$ καὶ τεταγμένην $E\Delta=y'_1<y'$, αἱ δὲ x' καὶ y_1' ἐπαληθεύουν τὴν σχέσιν (1) § 392)

ἥτις γίνεται $y_1'=2x'+4$ (3). Ἂν δὲ εἰς τὴν (3) τεθῇ ἀντὶ y_1' ὁ μεγαλύτερός του ἀριθμὸς y', αὕτη δίδει $y'>2x'+4$ ἢ $y'-2x'-4>0$. Ἄρα:

Ἡ εὐθεῖα ΑΒ διαιρεῖ τὸ ἐπίπεδον τῶν ἀξόνων εἰς δύο μέρη ἐξ ὧν πάντα τὰ σημεῖα τοῦ πρὸς τὴν ἀρχὴν Ο κειμένου μέρους ἔχουν συντεταγμένας ἐπαληθευούσας τὴν δοθεῖσαν ἀνισότητα πάντα δὲ τὰ σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου τὰ κείμενα πρὸς τὸ ἕτερον μέρος τῆς εὐθείας ἔχους συντεταγμένας ἐπαληθευούσας τὴν ἀνισότητα ἥτις εἶναι ἑτερόστροφος πρὸς τὴν δοθεῖσαν. Τέλος πάντα τὰ σημεῖα τῆς εὐθείας ΑΒ ἔχουν συντεταγμένας πληρούσας τὴν ἐξίσωσιν τὴν προκύπτουσαν ἂν ἐξισώσεων μὲ Ο τὸ α΄ μέλος τῆς δοθείσης ἀνισότητος.

Ὥστε ἐπαληθεύουν τὴν δοθεῖσαν ἀνισότητα αἱ συντεταγμέναι παντὸς σημείου τοῦ ὑπὸ τῶν ἀξόνων ὁριζομένου ἐπιπέδου, κειμένου πρὸς τὸ μέρος τῆς ΑΒ πρὸς ὃ καὶ ἡ ἀρχὴ 0 τῶν συντεταγμένων.

Κατ' ἀνάλογον τρόπον ἐργαζόμεθα ἂν τὸ α΄ μέλος μιᾶς ἀνισότητος παριστᾶ οἱανδήποτε ἄλλην καμπύλην.

Ἀσκήσεις πρὸς λύσιν.

1246. Ἡ ἀκτὶς μιᾶς περιφερείας εἶναι 4 τὸ δὲ κέντρον της εἶναι Κ(4,0). Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς περιφερείας.

1247. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας τῆς διερχομένης διὰ τῶν σημείων Α(—2,3) καὶ Β(3,—1).

1248. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις τῶν δύο παραλλήλων εὐθειῶν $y=2x-1$ καὶ $2y=4x+5$.

1249. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου Μ(2,5) ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν $y=3x-2$.

1250. Τριγώνου τινὸς δίδονται αἱ κορυφαὶ Α(0,2), β(3, 5) καὶ Γ(—2,—4). Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος ἑκάστης πλευρᾶς του.

1251. Παραλληλογράμμου τινὸς ΑΒΓΔ, αἱ δύο ἀπέναντι κορυφαὶ εἶναι Α(0,2) καὶ Γ(6,0). Ἂν ἡ μὲν πλευρὰ ΑΒ ἔχῃ γωνιακὸν συντελεστὴν $\sqrt{3}$, ἡ δὲ πλευρὰ ΓΒ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα ΨΨ΄, νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου.

1252. Τραπεζίου ΑΒΓΔ αἱ τέσσαρες κορυφαὶ εἶναι Α(—2,3), Β(4,3), Γ(9,—2), Δ(—3,—2). Εὑρεῖν τὸ ἐμβαδόν του καὶ τὸ μῆκος ἑκάστης πλευρᾶς του·

1253. Περιφέρειά τις ἔχει κέντρον Κ(5,2) ἡ δὲ ἀκτίς της εἶναι 4. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς περιφερείας καὶ τὸ μῆκος τῆς χορδῆς τὴν ὁποίαν ὁρίζει αὕτη ἐπὶ τοῦ ἄξονος ΧΧ΄.

Νὰ γίνῃ ἡ γραφικὴ παράστασις ἑκάστης ἐκ τῶν κάτωθι συναρτήσεων·

1254. $y=\dfrac{x^2-5x+6}{x-5}$ **1255.** $y=2+\dfrac{10}{x^2}$ **1256.** $y=\dfrac{x}{2-x}$

1257. $y=\dfrac{x^2+5x+6}{x^2+1}$ **1258.** $y=\dfrac{40x}{x^2+10}$ **1259.** $y=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$

1260. Νὰ λυθῇ γραφικῶς τὸ σύστημα $2x-y=2$ καὶ $x^2+y^2=25$.

1261. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ συντεταγμέναι ἑκάστης ἐκ τῶν κορυφῶν τοῦ τριγώνου τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ παρίστανται ἀντιστοίχως ὑπὸ τῶν ἐξισώσεων

$$4x+3y=10, \quad 3x+5y=2, \quad 2y-x=3.$$

1262. Νὰ λυθῇ τὸ ἀντίστροφον τῆς ἄνω λύσεως· δηλ. ἐκ τῶν συντεταγμένων τῶν κορυφῶν νὰ εὑρεθοῦν ἀντιστοίχως αἱ ἐξισώσεις τῶν πλευρῶν.

1263. Τοῦ αὐτοῦ ὡς ἀνωτέρω τριγώνου νὰ εὑρεθοῦν αἱ συντεταγμέναι τοῦ σημείου συναντήσεως τῶν διαμέσων.

1264. Νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ εὐθεῖαι αἱ ὁποῖαι παρίστανται ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως $\lambda x+3y-4\lambda+1=0$ διέρχονται διὰ σταθεροῦ σημείου διὰ πᾶσαν πραγματικὴν τιμὴν τοῦ λ. Νὰ εὑρεθοῦν καὶ αἱ συντεταγμέναι τοῦ ἐν λόγῳ σημείου.

Τὸ αὐτὸ διὰ τὰς εὐθείας τὰς παριστωμένας ὑπὸ ἑκάστης ἐκ τῶν κάτωθι ἐξισώσεων.

1265. $(\mu+3)x+(5-\mu)y+1=0$.

1266. $x(2\lambda^3+\lambda^2-\lambda+2)-y(3\lambda^3-\lambda^2-\lambda+1)-5\lambda^2+\lambda-4=0$.

1267. Νὰ ὁρισθοῦν τὰ α καὶ β ἵνα αἱ εὐθεῖαι αἱ παριστώμεναι ὑπὸ ἑκάστης τῶν ἐξισώσεων $\alpha x-(\beta-1)y+1=0$ καὶ $4x+3y+2=0$ εἶναι α) παράλληλοι καὶ β) συμπίπτουν.

1268. Νὰ ὁρισθῇ ὁ ν εἰς τρόπον ὥστε αἱ τρεῖς εὐθεῖαι αἱ παριστώμεναι ὑπὸ τῶν ἐξισώσεων $y-x=2$, $4y-3x=5$, $2x+\nu y=4$ νὰ συμπίπτουν.

1269. Δίδεται ἡ ἐξίσωσις $\alpha x^2-(2\alpha+\beta)x+\alpha-\beta=0$ ἔνθα α, β, εἶναι συντεταγμέναι ἑνὸς σημείου Μ ἑνὸς ἐπιπέδου. Ἀναλόγως τῶν θέσεων τοῦ Μ, νὰ εὑρεθῇ πόσας πραγματικὰς ρίζας ἔχει ἡ ἄνω ἐξίσωσις.

Νὰ ὁρισθοῦν τὰ σημεῖα ἑνὸς ἐπιπέδου τῶν ὁποίων αἱ συντεταγμέναι ἐπαληθεύουν ἑκάστην ἐκ τῶν κάτωθι ἀνισοτήτων.

1270. $2x+3y-5>0$

1271. $(3x-2y)(x-y+1)(4x-2y+1)<0$

1272. $(y-x^2)(x+y-1)>0$

1273. $(x+y-1)(2x-y+1)(2x-y)>0$

1274. $(2x+y-1)(x^2+y^2-1)>0$

1275. $(y-x^2)(x^2+y^2-1)<0$

1276. Νὰ εὑρεθοῦν ὅλα τὰ σημεῖα ἑνὸς ἐπιπέδου αἱ συντεταγμέναι τῶν ὁποίων ἐπαληθεύουν ταυτοχρόνως τὰς ἑξῆς τρεῖς ἀνισότητας·

$$y-x+\frac{1}{x}<0, \quad x+y>1, \quad x^2+y^2>1.$$

Ἀσκήσεις ἐπαναλήψεως πρὸς λύσιν.

1277. Ἂν $x+y=1$, νὰ δειχθῇ ὅτι $x^3(y+1)-y^3(x+1)-x+y=0$.

1278. Ἂν οἱ α, β, γ εἶναι τρεῖς διαδοχικοὶ ἀκέραιοι ἀριθμοί, νὰ δειχθῇ ὅτι $\alpha^3+\gamma^3=2\beta(\beta^2+3)$.

1279. Ἂν μ εἶναι ἡ διαφορὰ ἀριθμοῦ τινος καὶ τοῦ ἀντιστρόφου του καὶ ν ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῶν τετραγώνων αὐτῶν, νὰ δειχθῇ ὅτι $\gamma^2(\mu^2+4)=\nu^2$.

1280. Νὰ δειχθῇ ὅτι

$$(\alpha\lambda+\beta\mu+\gamma\nu)^2+(\beta\nu-\gamma\mu)^2+(\gamma\lambda-\alpha\nu)^2+(\alpha\mu-\beta\lambda)^2\equiv(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)$$

1281. Ὁμοίως ὅτι $\alpha^4+\beta^4+(\alpha+\beta)^4\equiv2\alpha^2\beta^2+2(\alpha^2+\beta^2)(\alpha+\beta)^2$

1282. Ἂν τὸ πολυώνυμον $x^4+\alpha x^3+5x^2+\beta x+6$ διαιρούμενον διὰ $x-2$ ἀφίνῃ ὑπόλοιπον 16 καὶ διὰ $x+1$ ἀφίνῃ ὑπόλοιπον 10, νὰ εὑρεθοῦν τὰ α καὶ β.

1283. Ἂν $\alpha+\beta+\gamma=0$ νὰ δειχθῇ ὅτι $\alpha^4+\beta^4+\gamma^4=2(\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2)$.

1284. Ἂν $(\alpha+\beta+\gamma+\delta)(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)=\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta$, νὰ δειχθῇ ὅτι $(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)=0$

Νὰ ἁπλοποιηθοῦν αἱ κάτωθι παραστάσεις

1285. $\dfrac{\alpha^3(\beta-\gamma)+\beta^3(\gamma-\alpha)+\gamma^3(\alpha-\beta)}{\alpha^2(\beta-\gamma)+\beta^2(\gamma-\alpha)+\gamma^2(\alpha-\beta)}$

1286. $\dfrac{\alpha^4(\beta^2-\gamma^2)+\beta^4(\gamma^2-\alpha^2)+\gamma^4(\alpha^2-\beta^2)}{\alpha^2(\beta-\gamma)+\beta^2(\gamma-\alpha)+\gamma^2(\alpha-\beta)}$

1287. $\dfrac{\beta\gamma(\alpha+x)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\dfrac{\gamma\alpha(\beta+x)}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}+\dfrac{\alpha\beta(\gamma+x)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$

1288. $\dfrac{\alpha(\beta-\gamma)}{1+\beta\gamma}+\dfrac{\beta(\gamma-\alpha)}{1+\alpha\gamma}+\dfrac{\gamma(\alpha-\beta)}{1+\alpha\beta}$

1289. $(\beta^{-1}+\gamma^{-1})(\beta+\gamma-\alpha)+(\gamma^{-1}+\alpha^{-1})(\gamma+\alpha-\beta)+(\alpha^{-1}+\beta^{-1})(\alpha+\beta-\gamma)$

1290. $\dfrac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\dfrac{\gamma^2+\alpha^2-\beta^2}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)}+\dfrac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$

1291. $(\alpha+\beta)^2(\alpha+\gamma)^2(\beta-\gamma)+(\beta+\gamma)^2(\beta+\alpha)^2(\gamma-\alpha)+(\gamma+\alpha)^2(\gamma+\beta)^2(\alpha-\beta)$

1292. $\alpha^3(\beta-\gamma)^3+\beta^3(\gamma-\alpha)^3+\gamma^3(\alpha-\beta)^3$

1293. $(\beta+\gamma-2\alpha)^3+(\gamma+\alpha-2\beta)^3+(\alpha+\beta-2\gamma)^3$

1294. $\dfrac{\alpha^3}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)}+\dfrac{\beta^3}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)}+$

$$+\frac{\gamma^3}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)(\gamma-\delta)}+\frac{\delta^3}{(\delta-\alpha)(\delta-\beta)(\delta-\gamma)}$$

1295. $\dfrac{\alpha^3(\beta+\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\dfrac{\beta^3(\gamma+\alpha)}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)}+\dfrac{\gamma^3(\alpha+\beta)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$

1296. $\dfrac{\alpha(\beta-\gamma)^2}{(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)}+\dfrac{\beta(\gamma-\alpha)^2}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)}+\dfrac{\gamma(\alpha-\beta)^2}{(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}$

1297. Νὰ ἁπλοποιηθῇ τὸ κλάσμα $\dfrac{(x+y)^5-x^5-y^5}{x^2+xy+y^2}$

1298. Ἂν $\alpha+\beta+\gamma=0$, νὰ δειχθῇ ὅτι

$$(\gamma y+\beta z)^3+(\alpha y+\gamma z)^3+(\beta y+\alpha z)^3=3(\gamma y+\beta z)(\alpha y+\gamma z)(\beta y+\alpha z)$$

1299. Ἂν οἱ x, y, z συνδέωνται διὰ τῆς ἐξισώσεως $x^2+y^2+z^2=$ $=2xy+2yz+2zx$, εἶναι δὲ καὶ $\beta z+\gamma y=\gamma x+\alpha z=\alpha y+\beta x$, νὰ δειχθῇ ὅτι

$$\alpha^4+\beta^4+\gamma^4=2(\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2+\alpha^2\beta^2)$$

1300. Ἂν διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x εἶναι

$$\frac{\lambda}{\alpha+x}+\frac{\mu}{\beta+x}+\frac{\nu}{\gamma+x}+\frac{\lambda\mu\nu}{(\alpha+x)(\beta+x)(\gamma+x)}=0$$

νὰ εὑρεθοῦν τὰ λ, μ, ν συναρτήσει τῶν α, β, γ.

1301. Ἂν $x=\beta+\gamma-\alpha$, $y=\gamma+\alpha-\beta$, $z=\alpha+\beta-\gamma$, νὰ δειχθῇ ὅτι

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=4(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma)$$

Ἂν $\alpha+\beta+\gamma=0$, νὰ δειχθῇ ὅτι

1302. $6(\alpha^5+\beta^5+\gamma^5)=5(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$

1303. $\alpha^6+\beta^6+\gamma^6=3\alpha^2\beta^2\gamma^2-2(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)^3$

1304. Ἂν $\alpha, \beta, \gamma, x, y, \omega$, εἶναι πραγματικοὶ ἀριθμοὶ καὶ

$$(\alpha+\beta+\gamma)^2=3(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta-x^2-y^2-\omega^2),$$

νὰ δειχθῇ ὅτι $\alpha=\beta=\gamma$ καὶ $x=y=\omega=0$

1305. Ἂν $x=\lambda\alpha$, $y=(\lambda-1)\beta$, $\omega=(\lambda-3)\gamma$, $(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\lambda=1+\beta^2+3\gamma^2$, νὰ εὑρεθῇ συναρτήσει τῶν α, β, γ ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως $x^2+y^2+\omega^2$.

1306. Ἂν $\dfrac{2x-3y}{3z+y}=\dfrac{z-y}{z-x}=\dfrac{x+3z}{2y-3x}$, νὰ δειχθῇ ὅτι ἕκαστος λόγος ἰσοῦται μὲ $x:y$. Νὰ δειχθῇ ἐπίσης ὅτι εἶναι ἢ $x=y$ ἢ $z=x+y$.

1307. Ἂν $(\alpha+\beta-3\gamma-3\delta)(2\alpha-2\beta-\gamma+\delta)=(2\alpha+2\beta-\gamma-\delta)(\alpha-\beta-3\gamma+3\delta)$ νὰ δειχθῇ ὅτι οἱ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, ἀποτελοῦν ἀναλογίαν.

1308. Ἂν $12:x=x:y=y:z=z:18$ νὰ δειχθῇ ὅτι

$$x^4+y^4+z^4=(x^2+y^2+z^2)(x^2-y^2+z^2)$$

1309. Ἂν $\alpha\neq\beta$ καὶ $\alpha\beta(\gamma^2+\delta^2)=\beta^2\gamma^2+\alpha^2\delta^2$, νὰ δειχθῇ ὅτι ὁ λόγος $\alpha:\beta$ εἶναι τὸ τετράγωνον τοῦ λόγου $\gamma:\delta$.

1310. Ἂν $(\alpha+\beta+\gamma)x=(\beta+\gamma-\alpha)y=(\alpha-\beta+\gamma)z=(\alpha+\beta-\gamma)\omega$, νὰ δειχθῇ ὅτι $y^{-1}+z^{-1}+\omega^{-1}=x^{-1}$.

1311. Ἂν $\alpha+\beta+\gamma=0$, νὰ δειχθῇ ὅτι

$$\frac{\alpha(\beta^3-\gamma^3)}{\beta-\gamma}+\frac{\beta(\gamma^3-\alpha^3)}{\gamma-\alpha}+\frac{\gamma(\alpha^3-\beta^3)}{\alpha-\beta}=0$$

1312. Ἂν οἱ ἀριθμοὶ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, ἀποτελοῦν ἀναλογίαν καθ᾽οἱανδήποτε τάξιν καὶ ἂν ληφθοῦν, νὰ δειχθῇ ὅτι $\alpha\beta\gamma\delta(\alpha^{-2}+\beta^{-2}+\gamma^{-2}+\delta^{-2})=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2$

1313. Ἂν $(\alpha^2-\delta^2):(\beta^2\gamma^2-\delta^4)=\alpha:\beta\gamma\delta$, νὰ δειχθῇ ὅτι ἢ

$$\alpha\beta\gamma+\delta^3=0 \quad ἢ \quad \alpha:\beta=\gamma:\delta$$

1314. Ἂν $\lambda(\mu y+\nu z-\lambda x)=\mu(\nu z+\lambda x-\mu y)=\nu(\lambda x+\mu y-\nu z)$, νὰ δειχθῇ ὅτι

$$(y+z-x)^{\lambda-1}=(z+x-y)^{\mu-1}=(x+y-z)^{\nu-1}$$

1315. Ἂν $\alpha x+\beta y=0$, $x+y=xy$, $x^2+y^2=1$ νὰ δειχθῇ ὅτι

$$\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}=\frac{1}{(\alpha-\beta)^2}$$

1316. Ἂν $\alpha+\beta+\gamma=0$ νὰ δειχθῇ ὅτι

$$\frac{\alpha^2}{2\alpha^2+\beta\gamma}+\frac{\beta^2}{2\beta^2+\alpha\gamma}+\frac{\gamma^2}{2\gamma^2+\alpha\beta}=1$$

1317. Ὁμοίως ὅτι $\dfrac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3}+\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}\right)=0$

1318. Ὁμοίως ὅτι $\dfrac{\alpha^4}{\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma}+\dfrac{\beta^4}{\gamma^3+\alpha^3-3\alpha\beta\gamma}+\dfrac{\gamma^4}{\alpha^3+\beta^3-3\alpha\beta\gamma}=0$

1319. Ἂν $x=\alpha(\beta-\gamma)$, $y=\beta(\gamma-\alpha)$, $z=\gamma(\alpha-\beta)$ νὰ δειχθῇ ὅτι

$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^3+\left(\frac{y}{\beta}\right)^3+\left(\frac{z}{\gamma}\right)^3=\frac{3xyz}{\alpha\beta\gamma}$$

Νὰ προσδιορισθῇ ὁ μ ἵνα εἶναι συμβιβαστὰ τὰ κάτωθι συστήματα·

1320. $3x+5y+4z=12$
$5x+3y+4z=12$
$x+y+\mu z=12$
$\mu x+(1-\mu)y+(1+\mu)z=12$

1321. $2x+6y+3z=17$
$6x+2y+2z=13$
$x+y+\mu z=6$
$\mu(x+y)+5z=30$

1322. Νὰ ἀπαλειφθοῦν οἱ x, y, z, μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων

$$x^{-1}+y^{-1}+z^{-1}=\alpha^{-1},\quad x^2+y^2+z^2=\beta^2,\quad x^3+y^3+z^3=\gamma^3,\quad xyz=\delta^3$$

1323. Ἔστωσαν αἱ ἐξισώσεις $\xi=\lambda x+\mu y+\nu z$, $\eta=\nu x+\lambda y+\mu z$, $k=\mu x+\nu y+\lambda z$· ἂν αἱ ἐξισώσεις αὗται εἶναι ἀληθεῖς διὰ πᾶσαν τιμὴν τῶν x, y, z ὅταν οἱ ξ, η, k ἀντικατασταθοῦν ἀντιστοίχως διὰ τῶν x, y, z, νὰ δειχθῇ ὅτι $\lambda^2+2\mu\nu=1$, $\mu^2+2\lambda\nu=0$, $\nu^2+2\lambda\mu=0$.

1324. Ἂν
$$(\lambda^2-\beta\gamma)x+(\gamma\mu-\lambda\nu)y+(\beta\nu-\lambda\mu)z=0$$
$$(\gamma\mu-\lambda\nu)x+(\nu^2-\gamma\alpha)y+(\alpha\lambda-\mu\nu)z=0$$
$$(\beta\nu-\lambda\mu)x+(\alpha\lambda-\mu\nu)y+(\mu^2-\alpha\beta)z=0$$

νὰ δειχθῇ ὅτι $\alpha\beta\gamma+2\lambda\mu\nu-\alpha\lambda^2-\beta\nu^2-\gamma\mu^2=0$

1325. Νὰ ἀπαλειφθῇ ὁ x μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων

$$\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta=0,\quad \lambda x^2+\mu x+\nu=0$$

Νὰ ἀπαλειφθοῦν οἱ x καὶ y μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων

1326. $x^2-y^2=\lambda x-\mu y$, $4xy=\mu x+\lambda y$, $x^2+y^2=1$

1327. $\mu x-\nu y=\alpha(x^2-y^2)$, $\nu x+\mu y=2\alpha xy$, $x^2+y^2=1$

Νὰ ἀπαλειφθοῦν οἱ x, y, ω μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων

1328. $x+y+\omega=0$, $x^2+y^2+\omega^2=\alpha^2$, $x^3+y^3+\omega^3=\beta^3$, $x^5+y^5+\omega^5=\gamma^5$

1329. $$\frac{x^2(y+\omega)}{\alpha^3}=\frac{y^2(x+\omega)}{\beta^3}=\frac{\omega^2(x+y)}{\gamma^3}=\frac{xy\omega}{\alpha\beta\gamma}=1$$

1330. $(y+\omega)^2=4\alpha^2y\omega$, $(\omega+x)^2=4\beta^2\omega x$, $(x+y)^2=4\gamma^2xy$

1331. $\alpha x+y\omega=\beta\gamma$, $\beta y+x\omega=\alpha\gamma$, $\gamma\omega+xy=\alpha\beta$, $xy\omega=\alpha\beta\gamma$.

1332. $x^2-y\omega=\alpha^2$, $y^2-x\omega=\beta^2$, $\omega^2-xy=\gamma^2$, $x+y+\omega=0$.

Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀκέραιοι καὶ θετικαὶ λύσεις ἑκάστου ἐκ τῶν κάτωθι συστημάτων :

1333. $6x+7y+4z=122$
$11x+8y-6z=145$

1334. $12x-11y+4z=22$
$5y-4x+z=17$

1335. Ἂν οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ 6, α, β ἀποτελοῦν ἁρμονικὴν πρόοδον, νὰ εὑρεθοῦν ὅλαι αἱ τιμαὶ τῶν α καὶ β.

1336. Νὰ εὑρεθῇ ἡ μεγίστη τιμὴ τοῦ γ δι' ἣν ἡ ἐξίσωσις $7x+9y=\gamma$ ἔχει ἓξ ἀκεραίας καὶ θετικὰς λύσεις.

1337. Ἂν ὁ ν εἶναι ἀκέραιος καὶ θετικός, νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ παράστασις $2^{4\nu+1}-2^{2\nu}-1$ εἶναι διαιρετὴ διὰ 9 (Πανεπ. Θεσ)νίκης 1932).

1338. Ὁμοίως ὅτι ἡ παράστασις $10^\nu+3.4^{\nu+2}+5$ εἶναι διαιρετὴ διὰ 9.

1339. Ὁμοίως ὅτι ἡ παράστασις $2.7^\nu+3.5^\nu-5$ εἶναι διαιρετὴ διὰ 24.

1340. Ἂν $\frac{\alpha}{\delta}=\frac{\beta}{\varepsilon}=\frac{\gamma}{\eta}$ νὰ δειχθῇ ὅτι

$$\frac{\alpha^4+\delta^4}{\alpha^3+\delta^3}+\frac{\beta^4+\varepsilon^4}{\beta^3+\varepsilon^3}+\frac{\gamma^4+\eta^4}{\gamma^3+\eta^3}=\frac{(\alpha+\beta+\gamma)^4+(\delta+\varepsilon+\eta)^4}{(\alpha+\beta+\gamma)^3+(\delta+\varepsilon+\eta)^3}$$

1341. Ὁμοίως ὅτι $\frac{\alpha^\nu+\delta^\nu}{\alpha^{\nu-1}+\delta^{\nu-1}}+\frac{\beta^\nu+\varepsilon^\nu}{\beta^{\nu-1}+\varepsilon^{\nu-1}}+\frac{\gamma^\nu+\eta^\nu}{\gamma^{\nu-1}+\eta^{\nu-1}}=$

$$=\frac{(\alpha+\beta+\gamma)^\nu+(\delta+\varepsilon+\eta)^\nu}{(\alpha+\beta+\gamma)^{\nu-1}+(\delta+\varepsilon+\eta)^{\nu-1}}$$

ΣΗΜ. Ἂν κληθῇ k ἕκαστος ἐκ τῶν ἴσων λόγων εὑρίσκομεν $\alpha^4=\delta^4k^4$ καὶ $\alpha^4+\delta^4=\delta^4(k^4+1)$. Ὁμοίως $\alpha^3+\delta^3=\delta^3(k^3+1)$. Ἄρα

$$\frac{\alpha^4+\delta^4}{\alpha^3+\delta^3}=\frac{\delta(k^4+1)}{k^3+1}$$

Τὸ αὐτὸ εὑρίσκομεν καὶ διὰ τὰ λοιπὰ κλάσματα. Ἄρα τὸ α΄ μέλος γίνεται

$$\frac{(\delta+\varepsilon+\eta)(k^4+1)}{k^3+1} \quad \text{καὶ ἐπειδὴ} \quad k=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\delta+\varepsilon+\eta}$$

εὑρίσκομεν τὸ ζητούμενον.(Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀποδεικνύεται καὶ ἡ ἄσκησις 1341 ὡς καὶ αἱ ἀσκήσεις 270 καὶ 271.

1342. Ἂν ὁ ἀριθμὸς $3^\nu+1$ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 10, νὰ δειχθῇ ὅτι ὁ ἀριθμὸς $3^{\nu+4}+1$ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 10. (Δοκίμων 1934).

1343. Ἂν $\sqrt[3]{\alpha+\beta-\gamma}+\sqrt[3]{\beta+\gamma-\alpha}+\sqrt[3]{\alpha+\gamma-\beta}=0$
νὰ δειχθῇ ὅτι

$$(\alpha+\beta+\gamma)^4-27(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^2+54(\alpha^4+\beta^4+\gamma^4)=0$$

1344. Ἂν τὸ πολυώνυμον $x^4+4x^3+\lambda x^2+\mu x+9$ εἶναι τετράγωνον τοῦ $x^2+\alpha x+\beta$ νὰ εὑρεθοῦν ὅλαι αἱ θετικαὶ τιμαὶ τῶν α, β, λ, μ.

1345. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ α, β, γ ἵνα τὸ πολυώνυμον

$$9x^6-6x^5+25x^4-50x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma$$

εἶναι τέλειον τετράγωνον

1346. Ἂν $\chi=\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}$ νὰ δειχθῇ ὅτι $\chi^3-3\chi\sqrt[3]{6}=5$

1347. Ἂν α καὶ β εἶναι αἱ φανταστικαὶ κυβικαὶ ρίζαι τῆς μονάδος, νὰ δειχθῇ ὅτι $\alpha^4+\beta^4+(\alpha\beta)^{-1}=0$.

1348. Νὰ ἐξαχθῇ ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τῆς παραστάσεως

$$(\alpha^2+\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta+\beta^2)(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta+\gamma^2)$$

1349. Ἂν ἡ παράστασις $\alpha(\beta-\gamma)\chi^2+\beta(\gamma-\alpha)\chi\psi+\gamma(\alpha-\beta)\psi^2$ εἶναι τέλειον τετράγωνον, νὰ δειχθῇ ὅτι τὰ α, β, γ ἀποτελοῦν ἁρμονικὴν πρόοδον.

1350. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ παράστασις

$$(\alpha^2-\beta\gamma)^3+(\beta^2-\alpha\gamma)^3+(\gamma^2-\alpha\beta)^3-3(\alpha^2-\beta\gamma)(\beta^2-\alpha\gamma)(\gamma^2-\alpha\beta)$$

εἶναι τέλειον τετράγωνον· νὰ εὑρεθῇ δὲ καὶ ἡ τετραγωνικὴ ρίζα του.

1351. Ἂν $\alpha\neq\beta\neq\gamma\neq\delta$, νὰ δειχθῇ ὅτι $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2>4\sqrt{\alpha\beta\gamma\delta}$

1352. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ἀνισότης $\dfrac{2x-1}{x^2+2}<\dfrac{1}{2}$ ἀληθεύει διὰ πάσας τὰς πραγματικὰς τιμὰς τιμὰς τοῦ x πλὴν τῆς τιμῆς $x=2$.

1353. Ἂν $\alpha^2-\delta^2=\gamma^2-\beta^2=1$, νὰ δειχθῇ ὅτι $|\alpha\gamma+\beta\delta|\leqslant 1$.

1354. Νὰ εὑρεθοῦν τιμαὶ τοῦ x διὰ τὰς ὁποίας ἀληθεύει ἡ ἀνισότης

$$\frac{x^4+x^2-1}{x^4+4x^2+1}>0.$$

1355. Ἂν $0<\alpha<\beta<\gamma$, νὰ δειχθῇ ὅτι $\dfrac{\alpha^2}{\gamma}<\dfrac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{\alpha+\beta+\gamma}<\dfrac{\gamma^2}{\alpha}$

1356. Ἂν $0<\beta<\alpha$, νὰ δειχθῇ ὅτι $\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}<\dfrac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}$

1357. Ἡ παράστασις $2(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)+2(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)+2(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)$ νὰ ἐκφρασθῇ ὡς ἄθροισμα τριῶν τετραγώνων, νὰ δειχθῇ δὲ μετὰ τοῦτο ὅτι ἡ παράστασις $(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)+(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)+(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)$ εἶναι ἀρνητικὴ διὰ πάσας τὰς πραγματικὰς τιμὰς τῶν α, β, γ.

1358. Ἂν $\alpha>0$ νὰ δειχθῇ ὅτι $\dfrac{1}{\sqrt{\alpha^2+1}-\alpha}>0$

1359. Ἂν $\alpha>\beta>\gamma$ ἢ $\beta>\gamma>\alpha$ ἢ $\gamma>\alpha>\beta$, νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ παράστασις $(\beta-\gamma)^{-1}+(\gamma-\alpha)^{-1}+(\alpha-\beta)^{-1}$ εἶναι θετική.

Ἂν $\alpha>\beta>0$ νὰ δειχθῇ ὅτι

1360. $\alpha^\alpha\,\beta^\beta>\alpha^\beta\,\beta^\alpha$

1361. $\lambda o\gamma\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)<\lambda o\gamma\left(\dfrac{1+\beta}{1+\alpha}\right)$

1362. Νὰ δειχθῇ ὅτι $\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2+\alpha^2\beta^2>\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)$

1363. Νὰ δειχθῇ ὅτι $(1.2.3.4\ldots\nu)^2>\nu^\nu$

1364. Ἂν οἱ α, β, γ, δ εἶναι ἄνισοι καὶ θετικοὶ ἀριθμοὶ καὶ k τὸ ἄθροισμά των, νὰ δειχθῇ ὅτι $(k-\alpha)(k-\beta)(k-\gamma)(k-\delta)>81\alpha\beta\gamma\delta$.

1365. Ἂν οἱ α, β, γ εἶναι πραγματικοὶ καὶ θετικοὶ ἀριθμοί, νὰ δειχθῇ ὅτι $\alpha^2\beta^2\gamma^2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)<\alpha^8+\beta^8+\gamma^8$.

1366. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ παράστασις

$$(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)-(\alpha-\gamma)(\alpha-\beta)-(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)$$

εἶναι ἀρνητικὴ ἂν οἱ α, β, γ εἶναι πραγματικοὶ ἀριθμοὶ καὶ ὄχι ὅλοι ἴσοι.

1367. Εἰς τὴν ἐξίσωσιν $2x^2-10\lambda x=1-7\lambda$, νὰ δειχθῇ ὅτι διὰ πᾶσαν πραγματικὴν τιμὴν τοῦ λ ἔχει αὕτη ρίζας πραγματικὰς καὶ ἀνίσους.

1368. Εἰς τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν νὰ ὁρισθῇ ὁ λ ἵνα αἱ ρίζαι της x_1 καὶ x_2 εἶναι ἡμίτονον καὶ συνημίτονον μιᾶς γωνίας, νὰ εὑρεθοῦν δὲ τότε καὶ αἱ ρίζαι τῆς δοθείσης ἐξισώσεως.

1369. Δίδεται ἡ ἐξίσωσις $(2-3\alpha)x^2-2\alpha x-3\alpha=0$. Νὰ ὁρισθῇ ὁ α ἵνα αὕτη ἔχῃ α) μίαν μόνον ἐκ τῶν ριζῶν της κειμένην μεταξὺ 0 καὶ −1 καὶ β) δύο ρίζας πραγματικὰς καὶ κειμένας ἐκτὸς τοῦ διαστήματος $(-1,0)$.

1370. Δίδεται τὸ τριώνυμον $x^2-(8\alpha-2)x+15\alpha^2-2\alpha-7$. Νὰ εὑρεθῇ ὁ α ἵνα α) τὸ τριώνυμον εἶναι θετικὸν διὰ πᾶσαν πραγματικὴν τιμὴν τοῦ x. β) Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ριζῶν του νὰ εἶναι 24.

1371. Δίδεται ἡ ἐξίσωσις $(2\nu+5)x^2+(\nu-2)x-3\nu+4=0$ Νὰ ὁρισθῇ ὁ ν ἵνα αὕτη ἔχῃ α′) μίαν καὶ β′) δύο ρίζας κειμένας μεταξὺ -1 καὶ $+1$.

1372. Ἂν τὰ πολυώνυμα $x^3+\alpha x^2+11x+6$ καὶ $x^3+\beta x^2+14x+8$ ἔχουν ἕνα κοινὸν παράγοντα τῆς μορφῆς $x^2+\lambda x+\mu$ νὰ εὑρεθοῦν τὰ α καὶ β.

1373. Ἂν μία ρίζα τῆς ἐξισώσεως $x^2+\lambda x+\mu=0$ εἶναι τετράγωνον τῆς ἄλλης νὰ δειχθῇ ὅτι $\lambda^3-\mu(3\lambda-1)+\mu^2=0$.

1374. Ἂν ἕκαστον ζεῦγος ἐκ τῶν τριῶν ἐξισώσεων

$$x^2-\lambda_1 x+\mu_1=0, \quad x^2-\lambda_2 x+\mu_2=0, \quad x^2-\lambda_3 x+\mu_3=0$$

ἔχῃ ἀνὰ μίαν κοινὴν ρίζαν, νὰ δειχθῇ ὅτι

$$\lambda^2_1+\lambda^2_2+\lambda^2_3+4(\mu_1+\mu_2+\mu_3)=2(\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1)$$

1375. Νὰ ὁρισθῇ ὁ Α ἵνα εἶναι τέλειον τετράγωγνον τὸ πολυώνυμον

$$\alpha x^2+\beta y^2+\gamma z^2+2\lambda yz+2\mu xz+2\nu xy-A(x^2+y^2+z^2)$$

1376. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη ἵνα τὸ πολυώνυμον $x^3+2\lambda x^2+3\mu x+\nu$ εἶναι διαιρετὸν δι' ἑνὸς τελείου τετραγώνου.

1377. Ἂν α καὶ β εἶναι ρίζαι τῶν ἐξισώσεων $x^2+\lambda x+\mu=0$ καὶ $x^{2\nu}+(\lambda x)^\nu+\mu^\nu=0$, ἔνθα ὁ ν εἶναι ἄρτιος καὶ ἀκέραιος ἀριθμός, νὰ δειχθῇ ὅτι οἱ ἀριθμοὶ $\alpha\beta^{-1}$, $\beta\alpha^{-1}$ εἶναι ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $(x+1)^\nu+x^\nu+1=0$.

1378. Ἂν α, β εἶναι ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $x^2+\lambda x+1=0$ καὶ γ, δ ρίζαι τῆς $x^2+\mu x+1=0$. νὰ δειχθῇ ὅτι $(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\alpha+\delta)(\beta+\delta)=\mu^2-\lambda^2$.

1379. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ τιμαὶ τῶν x, y διὰ τὰς ὁποίας ἡ ἰσότης

$$(\beta^2-\delta^2)(\alpha^2+\beta^2)(3x^2-2y\sqrt{xy}-240)+(\alpha\gamma-\beta\delta)(y^2-x\sqrt{xy}+63)+$$
$$+(\gamma^2-\alpha^2)(\gamma^2+\delta^2)(114+y\sqrt{xy}-2x^2)=\alpha\gamma+\beta\delta$$

καθίσταται ἐξίσωσις ὡς πρὸς α, β, γ, δ, πληρουμένη ὑπὸ παντὸς συστήματος τιμῶν τῶν γραμμάτων τούτων καθιστῶντος ταυτότητα ὡς πρὸς x τὴν ἰσότητα $(\alpha x+\beta)^2+(\gamma x+\delta)^2=x^2+1$ (Πολ. 1932).

1380. Ποίας τιμὰς πρέπει νὰ λάβουν τὰ α, β, α′. β′ ἵνα ἀληθεύῃ ἡ ὡς πρὸς x ταυτότης $(\alpha x+\beta)^2+(\alpha' x+\beta')^2=x^2+1$, καὶ ἵνα τὸ γινόμενον $(\alpha x+\beta)(\alpha' x+\beta')$ ἰσοῦται μὲ 2 ὅταν $x=2$.

1381. Δίδεται τὸ πολυώνυμον

$$\alpha x^5+2(\alpha-\beta)x^4+2(\gamma-\beta)x^3+(3\gamma-4)x^2+2(\delta-2)x-2\gamma$$

ὅπερ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ πολυωνύμου $\alpha x^3-2\beta x^2+3\gamma x-4\delta$, τὰ δὲ α, β, γ, δ εἶναι πραγματικοὶ ἀριθμοὶ καὶ τοιοῦτοι ὥστε νὰ καθιστοῦν ἐξίσωσιν ὡς πρὸς αὐτὰ τὴν ἰσότητα $(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\alpha^2+\beta^2+\delta^2)(\alpha^2+\gamma^2+\delta^2)(\alpha+\delta-\beta-\gamma)=0$. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ρίζαι αὐτοῦ.

1382. Δίδονται τὰ τριώνυμα

$$\lambda x^2+(3\lambda^2-2\lambda+1)x+\frac{1}{\lambda} \quad \text{καὶ} \quad \lambda x^2+(2\lambda^2-\lambda+3)x+\frac{1}{\lambda}$$

ἔχοντα ρίζας x_1, x_2 τὸ α′ καὶ ξ_1, ξ_2 τὸ β′. Νὰ ὁρισθῇ ὁ λ εἰς τρόπον ὥστε νὰ εἶναι α′) $x_1<\xi_1<x_2$ καὶ $0<\xi_1<\xi_2$ β′) $x_1<x_2<\xi_1<\xi_2$ καὶ γ′) $\xi_1<x_1<x_2<\xi_2$.

1383. Ἂν x_1, x_2 εἶναι αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $(\lambda+1)x^2-3x-\lambda+2=0$, ἔνθα $x_1<x_2$, νὰ εὑρεθοῦν αἱ πραγματικαὶ τιμαὶ τοῦ λ, δι' ἃς τὸ ἄθροισμα $3x_1+2x_2$ περιέχεται μεταξὺ 1 καὶ 2.

1384. Ἔστωσαν $f(x)\equiv\alpha x^2+\beta x+\gamma$ καὶ $\varphi(x)\equiv\alpha' x^2+\beta' x+\gamma'$ ἔνθα α καὶ α′ εἶναι διάφοροι τοῦ μηδενός. Ἵνα τὰ $f(x)$ καὶ $\varphi(x)$ ἔχουν μίαν κοινὴν ρίζαν πρέπει νὰ εἶναι $\alpha\varphi(x)-\alpha' f(x)=0$. Ἀντιστρόφως ἂν $f(x)=0$ καὶ $\alpha\varphi(x)-\alpha' f(x)=0$ τότε τὰ τριώνυμα ταῦτα ἔχουν μίαν κοινὴν ῥίζαν.

1385. Εἰς τὰ ἀνωτέρω τριώνυμα ἂν $\alpha\beta'\neq\alpha'\beta$ νὰ δειχθῇ ὅτι

$$R=\frac{(\alpha\beta'-\alpha'\beta)^2}{\alpha}.\ f\left(\frac{\alpha'\gamma-\alpha\gamma'}{\alpha\beta'-\alpha'\beta}\right)$$ ἔνθα R εἶναι ἡ ἀπαλείφουσα αὐτῶν.

1386. Εἰς τὰ ἀνωτέρω τριώνυμα ἂν $R<0$ (§ 195), νὰ δειχθῇ ὅτι

$$R\equiv\alpha^2\varphi(x_1)\varphi(x_2)\equiv\alpha'^2 f(\xi_1)f(\xi_2)$$

ἔνθα x_1, x_2 εἶναι αἱ ῥίζαι τοῦ $f(x)$ καὶ ξ_1, ξ_2 αἱ τοῦ $\varphi(x)$.

1387. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ τριώνυμον $Ax+By+\Gamma$, μηδενιζόμενον διὰ πᾶν σύστημα τιμῶν τῶν x καὶ y ὅπερ ἀποτελεῖ λύσιν εἴτε ἐξισώσεως πρώτου βαθμοῦ ὡς πρὸς x καὶ y διαφόρου τῆς $Ax+By+\Gamma=0$, εἴτε ἐξισώσεως β΄ βαθμοῦ ὡς πρὸς x καὶ y διαφόρου τῆς $(Ax+By+\Gamma)^2=0$, εἶναι ἐκ ταυτότητος μηδὲν (Πολυτ. 1633).

1388. Δίδονται αἱ σχέσεις

$$(\lambda^2-\lambda)(x_1-2)(x_2-2)=(\lambda+9)(\lambda-1) \quad \text{καὶ} \quad 3x_1-(x_1-3)x_2=\frac{5\lambda-14}{\lambda}$$

α΄) Νὰ μορφωθῇ ἐξίσωσις β΄ βαθμοῦ ἔχουσα ῥίζας τὰς x_1 καὶ x_2. β΄) Νὰ ὁρισθῇ μετὰ ταῦτα ὁ λ ἵνα ἡ σχηματισθησομένη ἐξίσωσις ἔχῃ δύο ῥίζας πραγματικὰς καὶ κειμένας μεταξὺ 0 καὶ 2. γ΄) μίαν μόνην ῥίζαν κειμένην μεταξὺ 0 καὶ 2.

1389. Δίδεται ἡ ἐξίσωσις $x^3+\mu x^2+4kx+\lambda=0$ τῆς ὁποίας αἱ ῥίζαι ἀποτελοῦν ἁρμονικὴν πρόοδον. Νὰ προσδιορισθοῦν οἱ συντελεσταὶ k, λ, μ, ταύτης δοθέντος ὅτι τὸ πολυώνυμον $(\mu x+k)^2+(\lambda x+\mu)^2+(kx+\lambda)^2-11x^2-14x-11$ μηδενίζεται διὰ τρεῖς διαφόρους τιμὰς τοῦ x.

1390. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ συντελεσταὶ α, β, γ καὶ αἱ ῥίζαι x_1, x_2 τοῦ τριωνύμου $\alpha x^2+2\beta x+\gamma$ ἂν καὶ $x_1+\varrho$ καὶ $x_2+\varrho$ εἶναι αἱ ῥίζαι τοῦ τριωνύμου $kx^2+\lambda x+\mu$ γνωστοῦ ὄντος ὅτι τοῦτο γίνεται $(\delta-1)^2$ ἂν τεθῇ ἀντὶ x τὸ δ, ὑπάρχουν δὲ μεταξὺ τῶν συντελεστῶν καὶ τῶν ῥιζῶν αἱ σχέσεις

$$2\alpha(x_1^2+x_2^2)(x_1+x_2+2\varrho)+2\gamma(x_1x_2+x_1\varrho+x_2\varrho+\varrho^2)-4\beta=2 \quad \text{καὶ} \quad 2\alpha+\gamma+1=2\beta$$

1391. Διὰ ποίας τιμὰς τῶν x καὶ y ἡ ἰσότης

$$4\alpha^2+(\delta-\alpha)(\alpha+\beta^2)(x^2+y^2-13)^2+(\beta^2+\gamma+\alpha-\alpha^2)(xy-y^2-2)=2\alpha^2\beta-1$$

γίνεται ἐξίσωσις ὡς πρὸς α, β, γ, δ ἡ ὁποία πληροῦται ὑπὸ παντὸς συστήματος τιμῶν τῶν γραμμάτων τούτων καθιστῶντος ταυτότητα ὡς πρὸς x τὴν ἰσότητα

$$\alpha x^2+(\beta x+\gamma)^2=x(\delta x+1)+\alpha^4$$

1392. Δίδεται τὸ σύστημα

$$(\alpha+k)x+(\beta+k)y=\gamma+\lambda$$
$$(\alpha-k)x-(\beta-k)y=\gamma-\lambda$$

καὶ ἡ ἐξίσωσις $x^2+\beta^2x+\alpha+\gamma=x^2+\lambda^2k^2x+k\beta$. Νὰ εὑρεθῇ ποία σχέσις πρέπει νὰ ὑπάρχῃ μεταξὺ τῶν k καὶ λ ἀνεξάρτητος τῶν α, β, γ, ἵνα τὸ μὲν σύστημα εἶναι ἀόριστον ἡ δὲ ἐξίσωσις νὰ πληροῦται ὑπὸ πάσης λύσεως τοῦ ἀορίστου τούτου συστήματος.

1393. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ῥίζαι τοῦ πολυωνύμου

$$9\alpha\beta x^3-(4\beta^2+3\alpha^2)x^2+(19\alpha^2+\alpha\beta-\beta^2)x-\alpha^2$$

γνωστοῦ ὄντος ὅτι ὁ α εἶναι ρίζαι τοῦ τριωνύμου $\beta^2x^2+(\alpha+\beta)x-\beta(\alpha+\beta-1)$ ὁ δὲ β εἶναι ρίζα τοῦ τριωνύμου $\alpha^2x^2+(\alpha-\beta)x+\alpha(\alpha-\beta+3)$.

1394. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ x_1, x_2, x_3, x_4 εἰς τρόπον ὥστε τὸ κλάσμα

$$\frac{(1+x_1x_2+x_3x_4)x+\sqrt{(1+x_1^2+x_3^2)(1+x_2^2+x_4^2)}}{1+x}$$

νὰ εἶναι ἀνεξάρτητον τῆς τιμῆς τοῦ x, γνωστοῦ ὄντος ὅτι διὰ δύο διαφορετικὰς τιμὰς τοῦ x τὸ τριώνυμον $(x_1-x_2)x^2+(x_1-x_3-4)x+x_1+x_2-4$ λαμβάνει μίαν τιμὴν ἴσην πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως

$$x^4+2(x_3-x_4+1)x^3+5x^2-10x-3=0$$

1395. Δίδεται ἡ ἐξίσωσις $\alpha x^4+\beta x^3+\gamma x^2+\delta x+\lambda=0$. Ποία σχέσις πρέπει νὰ ὑφίσταται μεταξὺ τῶν συντελεστῶν της ἵνα αὐτη ἔχῃ δύο ρίζας ἀντιθέτους; Πληροῖ τὴν σχέσιν ταύτην ἡ ἐξίσωσις $16x^4-64x^3+199x^2+36x-117=0$; Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ρίζαι ταύτης.

1396. Νὰ εὑρεθῇ ἡ σχέσις ἡ συνδέουσα τὰς ρίζας τῶν τριωνύμων $\alpha x^2+2\beta x+\gamma$ καὶ $\lambda x^2+2\mu x+\nu$ ἂν αἱ ρίζαι τοῦ πρώτου εἶναι x_1 καὶ x_2 αἱ δὲ τοῦ δευτέρου x_1+k καὶ x_2+k.

1397. Ἂν ὁ ν εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 3, τὸ δὲ τριώνυμον $\varphi(x)\equiv(k-1)x^2+\lambda x+1$ ἐπαληθεύῃ τὴν ταυτότητα $\varphi(x)\equiv\varphi(2x+1)$ νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ παράστασις $x^2+(x_1^\nu+x_2^\nu)x+x_1x_2$ παραμένει πάντοτε τελειον τετράγωνον.

1398. Δίδονται τὰ τριώνυμα $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ καὶ $\alpha' x^2+\beta' x+\gamma'$ τῶν ὁποίων αἱ ρίζαι εἶναι ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $x^4+kx^3+\lambda x^2+\mu x+\nu=0$. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ k, λ, μ, ν, συναρτήσει τῶν συντελεστῶν τῶν τριωνύμων.

1399. Δίδεται τὸ κλάσμα $\dfrac{\alpha x^2+\beta xy+ky^2}{\delta x^2+xy+\gamma y^2}$ Ἂν τοῦτο εἶναι ἀνεξάρτητον τῶν τιμῶν τοῦ x καὶ y, καὶ $k<0$ νά δειχθῇ ὅτι τὰ τριώνυμα

$$\gamma^2\beta^2x^2+(k+2)x+2\beta\gamma \quad \text{καὶ} \quad k^2x^2+(3\beta\gamma+2)x+2k$$

ἔχουν ρίζας x_1, x_2 τὸ πρῶτον καὶ ϱ_1, ϱ_2 τὸ δεύτερον τοιαύτας ὥστε νὰ ὑφίσταται μεταξύ των ἡ σχέσις $x_1<\varrho_1<x_2<\varrho_2$.

1400. Νὰ δειχθῇ ὅτι τριώνυμον ὡς πρὸς k

$$(\alpha-2x)k^2+2\alpha k\sqrt{\alpha}+(\alpha-2z)(\alpha-2y)$$

ἔχει ρίζας πραγματικὰς πάντοτε ἂν $x+y+z=\alpha$ καὶ $x>0$, $y>0$, $z>0$.

1401. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ρίζαι x_1, x_2 τοῦ τριωνύμου $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ καὶ αἱ ρίζαι x_3, x_4 τοῦ τριωνύμου $(\alpha+\lambda)x^2+(\beta+\lambda)x+\gamma+\lambda$ ὅταν μεταξὺ τῶν συντελεστῶν ὑπάρχῃ ἡ σχέσις $\beta^2+(\alpha+\beta+\gamma)\lambda+2\alpha\gamma=0$ τὰ δὲ γινόμενα $x_2x_3x_4$, $x_1x_3x_4$, $x_1x_2x_4$, $x_1x_2x_3$, $x_1x_2x_3x_4$ ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον καθ' ἣν τάξιν εἶναι γραμμένα.

1402. Ἂν x_1, x_2, x_3 εἶναι αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως

$$2x^3+6\alpha x^2+3(2\alpha^2-\beta)x+2\alpha^3-5\alpha\beta=0$$

νὰ εὑρεθῇ ἡ σχέσις ἡ ἀνεξάρτητος τῶν α καὶ β ἡ συνδέουσα τὰ λ_1, λ_2, λ_3 ἂν

$$\lambda_1=x_1+x_2+x_3, \qquad \lambda_2=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3 \quad \text{καὶ} \quad \lambda_3=x_1x_2x_3.$$

1403. Εἰς τὴν ἐξίσωσιν $x^2-2\lambda x+\lambda-1=0$ νὰ ὁρισθῇ ὁ λ εἰς τρόπον ὥστε α') τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ριζῶν της νὰ εἶναι 8 καὶ β') ἀμφότεραι αἱ ρίζαι της νὰ εἶναι μεγαλύτεραι τοῦ 2.

1404. Δίδεται ἡ ἐξίσωσις $(\lambda-1)x^2-(1-2\lambda)x+3-\lambda=0$. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λ ἵνα α΄) αἱ δύο πραγματικαὶ ρίζαι της εἶναι ἑτερόσημοι μὲ ἀπολύτως μεγαλυτέραν τὴν θετικὴν β΄) οἱ ἀριθμοὶ 1 καὶ 2 νὰ κεῖνται μεταξὺ τῶν ριζῶν της οἱ δὲ ἀριθμοὶ 0 καὶ 3 ἐκτὸς τῶν ριζῶν της καί γ΄) ἡ μία ρίζα νὰ εἶναι 1 ἡ δὲ ἄλλη μικροτέρα τοῦ -1.

1405. Τὸ πολυώνυμον $\varphi(x)\equiv x^3+\alpha x^2-5x+\beta$ μὲ πραγματικοὺς συντελεστὰς ἔχει μίαν κοινὴν ρίζαν μετὰ τοῦ πολυωνύμου $f(x)\equiv\beta x^3+\alpha x^2-5x+1$. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ρίζαι του γνωστοῦ ὄντος ὅτι τὰ α καὶ β εἶναι τοιαῦτα ὥστε νὰ καθιστοῦν ἐξίσωσιν ὡς πρὸς αὐτὰ τὴν ἰσότητα $(\alpha^2+\beta^2)(\alpha-\beta+4)=0$.

1406. Οἱ λ_1 καὶ λ_2 ἔνθα $\lambda_1<\lambda_2$ εἶναι δύο ἀριθμοὶ οἱ ὁποῖοι τιθέμενοι ἀντὶ τοῦ ἀκεραίου x εἰς τὸ τριώνυμον $x^2-14x-256$ καθιστοῦν αὐτὸ ἴσον μὲ τὸ τετράγωνον ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἀκεραίου ἀριθμοῦ. Νὰ προσδιορισθοῦν οἱ συντελεστοὶ τῶν τριωνύμων $x^2+\lambda x+\mu$ καὶ $x^2+kx+\varrho$ ἅτινα ἔχουν μίαν μόνην κοινὴν ρίζαν ἂν δὲ τεθῇ εἰς αὐτὰ ἀντὶ λ τὸ $\frac{\lambda_1}{40}$ καὶ ἀντὶ ϱ τὸ $\frac{\lambda_2}{160}$ ἀληθεύει ἡ ταυτότης $x^2+\lambda x+\mu\equiv x^2+kx+\varrho$. Οἱ k καὶ ϱ εἶναι τοιοῦτοι ὥστε $ky^3+\varrho y^2+6k-2\varrho\equiv1^2+2^2+3^2+\ldots+y^2$.

1407. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\chi^3+3\alpha\beta\chi+\alpha^3-\beta^3=0$

1408. Ὁμοίως ἡ ἐξίσωσις $27\chi^6+19\chi^3-8=0$

1409. Δίδονται αἱ ἐξισώσεις

$$\chi^2+2\chi+\lambda=0,\quad (1+\lambda)(\chi^2+2\chi+\lambda)=2(\lambda-1)(\chi^2+1)$$

Νὰ δειχθῇ ὅτι ἂν ἡ μία ἐκ τούτων ἔχει ρίζας πραγματικὰς καὶ ἀνίσους τότε ἡ ἄλλη θὰ ἔχῃ ρίζας φανταστικάς.

1410. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\sqrt[3]{\chi}+\sqrt[3]{\chi-1}+\sqrt[3]{\chi+2}=0$

Ἂν α, β, γ εἶναι αἱ ριζαι τῆς ἐξιώσεως $\chi^3-3\chi^2+4=0$ νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ ἑκάστης ἐκ τῶν παραστάσεων

1411. $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ **1412.** $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$ **1413.** $\alpha^4+\beta^4+\gamma^4$

Ἂν α, β, γ, δ εἶναι αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $\chi^4-4\chi^2-\chi+2=0$ νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ ἑκάστης ἐκ τῶν παραστάσεων

1414. $\alpha^{-1}+\beta^{-1}+\gamma^{-1}+\delta^{-1}$ **1415.** $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2$

1416. $\alpha(\beta+\gamma+\delta)+\beta(\alpha+\gamma+\delta)+\gamma(\alpha+\beta+\delta)+\delta(\alpha+\beta+\gamma)$

1417. $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+\delta^3$

1418. Ἂν α, β, γ εἶναι αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $\chi^3+\lambda\chi^2+\mu\chi+\nu=0$ νὰ δειχθῇ ὅτι $(\chi^2-\alpha^2)(\chi^2-\beta^2)(\chi^2-\gamma^2)\equiv\chi^2(\chi^2+\mu)^2-(\lambda\chi^2+\nu)^2$

1419. Ἐν συνεχείᾳ τῆς ἀνωτέρω ἀσκήσεως νὰ δειχθῇ ὅτι οἱ α^2, β^2, γ^2 εἶναι ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $\psi^3+\psi^2(2\mu-\lambda^2)=\nu^2-\psi(\mu^2-2\lambda\nu)$.

1420. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $6\chi^3-13\chi^2-26\chi+48=0$ γνωστοῦ ὄντος ὅτι αἱ ρίζαι εης ἀποτελοῦν γεωμετρικὴν πρόοδον.

1421. Ὁμοίως ἡ ἐξίσωσις $6\chi^3-11\chi^2-3\chi+2=0$ γνωστοῦ ὄντος ὅτι αἱ ρίζαι της ἀποτελοῦν ἁρμονικὴν πρόοδον.

1422. Ὁμοίως ἡ ἐξίσωσις $\chi^4-8\chi^3+14\chi^2+8\chi-15=0$ τῆς ὁποίας αἱ ρίζαι ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον.

1423. Ὁμοίως ἡ ἐξίσωσις $2\chi^4-15\chi^3+35\chi^2-30\chi+8=0$ τῆς ὁποίας αἱ ρίζαι ἀποτελοῦν γεωμετρικὴν πρόοδον.

1424. Ἂν οἱ χ, ψ, ω ἐπαληθεύουν τὰς ἐξισώσεις

$$\chi+\alpha\psi+\alpha^2\omega+\alpha^3=\chi+\beta\psi+\beta^2\omega+\beta^3=\chi+\gamma\psi+\gamma^2\omega+\gamma^3=0$$

νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ὡς πρὸς t ἐξίσωσις $t^3+\omega t^2+\psi t+\chi=0$ ἔχει ρίζας τὰς α, β, γ.

1425. Ἂν $\chi^2(\psi+\omega)=\alpha$, $\psi^2(\omega+\chi)=\beta$, $\omega^2(\chi+\psi)=\gamma$, νὰ δειχθῇ ὅτι

$$2(\chi\psi\omega)^3+(\chi\psi\omega)^2(\alpha+\beta+\gamma)-\alpha\beta\gamma=0$$

1426. Ἂν ἡ παράστασις $\frac{\chi}{t+\alpha}+\frac{\psi}{t+\beta}+\frac{\omega}{t+\gamma}-1$ μηδενίζεται διὰ τὰς τιμὰς λ, μ, ν τοῦ t νὰ δειχθῇ ὅτι

$$\frac{\chi}{t+\alpha}+\frac{\psi}{t+\beta}+\frac{\omega}{t+\gamma}-1=-\frac{(t-\lambda)(t-\mu)(t-\nu)}{(t+\alpha)(t+\beta)(t+\gamma)}$$

Νὰ λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις

1427. $\frac{3\chi^4+\chi^2-2\chi-3}{3\chi^4-\chi^2+2\chi+3}=\frac{5\chi^4+2\chi^2-7\chi+3}{5\chi^4-2\chi^2+7\chi-3}$

1428. $\sqrt{2\chi^2-9\chi+4}+3\sqrt{2\chi-1}=\sqrt{2\chi^2+21\chi-11}$

1429. $\sqrt[\nu]{(\alpha+\chi)^2}+2\sqrt[\nu]{(\alpha-\chi)^2}=3\sqrt[\nu]{\alpha^2-\chi^2}$

1430. $\sqrt[4]{\chi+27}+\sqrt[4]{55-\chi}=4$

1431. $(\chi-1)^2(1+2\chi+3\chi^2+4\chi^3+5\chi^4+6\chi^5)=2-7\chi^6$ (Πολ. 1932).

1432. $\chi^6+3\chi^5+9\chi^4+81\chi^2+243\chi+729=0$.

1433. Νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ ρίζαι τῆς $\lambda^2\chi^4-\lambda^3\chi^3+\lambda^3\mu\chi^2-\lambda^2\rho\chi+\rho^2=0$ ἀποτελοῦν ἀναλογίαν· νὰ λυθῇ δὲ μετὰ τοῦτο καὶ ἡ ἐξίσωσις

$$\chi^4-12\chi^3+47\chi^2-72\chi+36=0.$$

1434. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $x^4+4x^3+6x^2+4x+17=0$ ἂν εἶναι

$$(x_1+x_2)(x_3+x_4)=2(x_1x_2+x_3x_4).$$

1435. Ὁμοίως ἡ ἐξίσωσις $x^4-5x^3-75x^2+225x+1134=0$ ἂν

$$x_1+x_2=2 \quad \text{καὶ} \quad x_1x_2=-63.$$

1436. Νὰ ὁρισθοῦν τὰ α, β ἵνα τὸ πολυώνυμον

$$\chi^5-\alpha\chi^4+(4\beta+3)\chi^3-(6\alpha+3)\chi^2-54\chi-27$$

εἶναι διαιρετὸν διὰ τῆς μεγαλυτέρας δυνατῆς δυνάμεως τοῦ χ—3. Νὰ εὑρεθῇ καὶ τὸ ἀντίστοιχον πηλίκον.

1437. Δίδεται ἡ ἐξίσωσις $\alpha\chi^4+(3-\alpha)\chi^3+3\chi^2+(5-3\alpha)\chi+\beta=0$. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀκέραιαι τιμαὶ τοῦ α δι' ἃς ἡ ἐξίσωσις αὕτη δύναται νὰ μετατραπῇ εἰς διτετράγωνον, νὰ προσδιορισθῇ δὲ μετὰ τοῦτο ὁ β εἰς τρόπον ὥστε αἱ ρίζαι ταύτης νὰ ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον.

1438. Νὰ λυθῇ καὶ διερευνηθῇ ἡ ἐξίσωσις

$$\lambda\chi^4-(6\lambda-1)\chi^3+2(5\lambda+1)\chi^2-(6\lambda-1)\chi+\lambda=0$$

Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα

1439. $\chi+\psi+\omega=3$, $\chi^2+\psi^2+\omega^2=9$. $\chi\psi\omega=-4$

1440. $\chi+\psi+\omega=2$, $\chi^2+\psi^2+\omega^2=6$, $\chi^3+\psi^3+\omega^3=8$

1441. $\chi+\psi+\omega=7, \quad 4(\chi^{-1}+\psi^{-1}+\omega^{-1})=7, \quad \chi\psi\omega=8$

1442. $\chi+\psi+\omega=1, \quad \chi\psi+\psi\omega+\omega\chi=-10, (\chi+\psi)(\psi+\omega)(\omega+\chi)=-18$

1443. $31\chi^2\psi^2-7\psi^4-112\chi\psi+64=0, \quad \chi^2-7\chi\psi+4\psi^2+8=0$

1444.
$$\begin{aligned} \chi^2\psi^2\omega^2\varphi&=12\\ \chi^2\psi^2\omega\varphi^2&=8\\ \chi^2\psi\omega^2\varphi^2&=1\\ 3\chi\psi^2\omega^2\varphi^2&=4 \end{aligned}$$

1445.
$$\begin{aligned} \chi+\psi+\omega+\varphi&=1\\ \alpha\chi+\beta\psi+\gamma\omega+\delta\varphi&=\lambda\\ \alpha^2\chi+\beta^2\psi+\gamma^2\omega+\delta^2\varphi&=\lambda^2\\ \alpha^3\chi+\beta^3\psi+\gamma^3\omega+\delta^3\varphi&=\lambda^3 \end{aligned}$$

1446. $$\frac{\chi}{\alpha}=\frac{\psi}{\beta}=\frac{\omega}{\gamma}=\frac{\chi\psi\omega}{\chi+\psi+\omega}$$

1447. $\beta\sqrt{1-\omega^2}+\gamma\sqrt{1-\psi^2}=\alpha, \quad \gamma\sqrt{1-\chi^2}+\alpha\sqrt{1-\omega^2}=\beta,$

$$\alpha\sqrt{1-\psi^2}+\beta\sqrt{1-\chi^2}=\gamma.$$

1448. $\chi+\psi+\omega=15. \quad \chi\psi\omega=105, \quad \chi^3+\psi^3+\omega^3=495$

1449.
$$\begin{aligned} \chi+\psi+\omega-\varphi&=12,\\ \chi^2+\psi^2-\omega^2-\varphi^2&=6\\ \chi^3+\psi^3-\omega^3+\varphi^3&=218\\ \chi\psi+\omega\varphi&=45 \end{aligned}$$

1450.
$$\begin{aligned} &\chi+\psi+\omega+\varphi=-3\\ &4(\chi\psi+\chi\omega+\chi\varphi+\psi\omega+\psi\varphi+\omega\varphi)=-73\\ &4(\chi\psi\omega+\chi\psi\varphi+\chi\omega\varphi+\psi\omega\varphi)=3\\ &2\chi\psi\omega\varphi=9 \end{aligned}$$

1451. Δίδεται τὸ σύστημα $(\alpha-\beta)\chi+2(\beta-\gamma)\psi=3(\gamma-\delta)$ καὶ $\alpha\chi+2\beta\psi=3(\delta-\gamma)$, τὰ δὲ α, β, γ, δ εἶναι τοιαῦτα ὥστε νὰ καθιστοῦν ταυτότητα ὡς πρὸς ω τὴν ἰσότητα $(\alpha\omega-\beta)^2+(\gamma\omega-\delta)^2-(4\omega-\lambda)^2=(\omega-2)^2$. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ α, β, γ, δ ἵνα τὸ σύστημα εἶναι ἀόριστον.

1452. Ἂν διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ ν τὸ ἄθροισμα τῶν ν ὅρων μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου εἶναι $3\nu^2+4\nu$, νὰ εὑρεθῇ ἡ πρόοδος.

1453. Ἂν $\alpha\nu+\beta\nu^2$ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ν ὅρων μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος αὐτῆς καὶ ὁ ὅρος ὁ κατέχων τὴν μ τάξιν.

1454. Ἂν ὁ ὅρος ὁ κατέχων τὴν μ τάξιν εἰς ἁρμονικὴν πρόοδον εἶναι ν ὁ δὲ κατέχων τὴν ν τάξιν εἶναι μ, νὰ δειχθῇ ὅτι ὁ ὅρος ὁ κατέχων τὴν $(\mu+\nu)$ τάξιν εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ἁρμονικοῦ μέσου τῶν μ καὶ ν.

1455. Ἂν εἰς ἀριθμητικὴν πρόοδον τὸ ἄθροισμα τῶν λ πρώτων ὅρων εἶναι Λ, τὸ ἄθροισμα μ πρώτων ὅρων εἶναι Μ καὶ τῶν ν πρώτων ὅρων εἶναι Ν νὰ δειχθῇ ὅτι $\frac{\Lambda}{\lambda}(\mu-\nu)+\frac{M}{\mu}(\nu-\lambda)+\frac{N}{\nu}(\lambda-\mu)=0.$

1456. Δίδονται οἱ τρεῖς ἀριθμοὶ 12, 20, 25. Νὰ δειχθῇ ὅτι δὲν δύνανται οὗτοι νὰ ἀποτελέσουν ὅρους μιᾶς προόδου ἀριθμητικῆς ἢ γεωμετρικῆς (Δοκίμως 193.).

1457. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἂν αἱ τρεῖς πλευραὶ τριγώνου τινὸς ἀποτελοῦν γεωμετρικὴν πρόοδον, ὁ λόγος τῆς προόδου ταύτης θὰ περιλαμβάνεται μεταξὺ $\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)$ καὶ $\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}+1\right)$.

1458. Εἰς γεωμετρικὴν πρόοδον ἐκ ν ὅρων δίδεται τὸ ἄθροισμα Σ τῶν $\nu-1$ πρώτων ὅρων της καὶ τὸ ἄθροισμα Σ' τῶν $\nu-1$ τελευταίων ὅρων της. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος καὶ ὁ α' ὅρος τῆς προόδου.

1459. Ἀριθμητικὴ καὶ φθίνουσα γεωμετρικὴ πρόοδος ἔχουν τὸν αὐτὸν πρῶτον ὅρον. Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὅρων τῆς γεωμετρικῆς ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τιμῶν τῶν μ καὶ ν τὰς ὁποίας πρέπει νὰ δώσωμεν εἰς αὐτὰ ἵνα αἱ ἐξισώσεις $(5\mu-2)x^2+(\mu-8)x+4=0$ καὶ $(2\nu+1)x^2-5\nu x+20=0$ ἔχουν τὰς αὐτὰς ρίζας Νὰ εὑρεθοῦν αἱ πρόοδοι ἂν γνωρίζομεν ὅτι ὁ λόγος τῆς γεωμετρικῆς προόδου ἰσοῦται πρὸς τὸν ἀντίστροφον τοῦ λόγου τῆς ἀριθμητικῆς καὶ ὅτι ὁ δεύτερος ὅρος τῆς γεωμετρικῆς προόδου ἰσοῦται πρὸς τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ δευτέρου ὅρου τῆς ἀριθμητικῆς προόδου.

1460. Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ συντελεσταὶ k, λ, μ καὶ αἱ ρίζαι x_1, καὶ x_2 τοῦ τριωνύμου $kx^2+\lambda x+\mu$ δεδομένου ὅτι τὰ x_1, k, λ, μ, x_2 ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον (Πολυτεχν. 1935)

1461. Οἱ ἀριθμοὶ x, y, z ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον οἱ δὲ ἀριθμοὶ xy, yz, xz γεωμετρικήν. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ x, y, z, ὅταν τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων τῆς ἀριθμητικῆς προόδου εἶναι τὸ αὐτὸ πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων τῆς γεωμετρικῆς προόδου.

1462. Κεφάλαιον 50.000 δραχμῶν ἐτοκίσθη ἐπὶ ἀνατοκισμῷ ἐπί τινα χρόνον. Ἐὰν ἐτοκίζετο τοῦτο ἐπὶ 2 ἔτη ὀλιγώτερον, τὸ ὁλικὸν κεφάλαιον θὰ ἐγίνετο κατὰ 4412,93 δραχ. ὀλιγώτερον. Ἂν τοῦτο ἐτοκίζετο ἐπὶ 2 ἔτη περισσότερον θὰ ἐγίνετο 4773 δραχ. περισσότερον. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐπιτόκιον καὶ ὁ χρόνος καθ' ὃν ἐτοκίσθη τὸ κεφάλαιον (Ἀν. Γεωπονικὴ 1934).

1463. Νὰ εὑρεθοῦν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἐν γεωμετρικῇ προόδῳ ἐκ τοῦ ἀθροίσματός των 45 κατὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων των 765. (Δοκίμων 1934).

1464. Ἂν παρεμβληθοῦν ν γεωμετρικοὶ μέσοι μεταξὺ 1 καὶ α, νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμά των εἶναι $\left(\alpha-\sqrt[\nu+1]{\alpha}\right)\left(\sqrt[\nu+1]{\alpha}-1\right)$

1465. Ἂν οἱ α, A, A', β ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον, οἱ α, Γ, Γ' β ἀποτελοῦν γεωμετρικὴν καὶ οἱ α, H, H' β ἁρμονικὴν νὰ δειχθῇ ὅτι $AH'=HA'=\Gamma\Gamma'=\alpha\beta$.

1466. Ἂν εἷς ἐκ τῶν ἀριθμῶν α, β, γ εἶναι μέσος ἀνάλογος μεταξὺ τῶν δύο ἄλλων, νὰ δειχθῇ ὅτι $\beta^3\gamma^3+\gamma^3\alpha^3+\alpha^3\beta^3=\alpha\beta\gamma(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)$ καὶ ἀντιστρόφως

1467. Ὁμοίως ὅτι $(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^3=\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)^3$ καὶ ἀντιστρόφως (Πανεπ. Θεσσαλονίκης 1932).

1468 Ἂν εἷς ἐκ τῶν ἀριθμῶν α, β, γ εἶναι ἀριθμητικὸς μέσος μεταξὺ τῶν δύο ἄλλων, νὰ δειχθῇ ὅτι $2(\alpha+\beta+\gamma)^3+27\alpha\beta\gamma=9(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$.

1469. Ἂν οἱ α, β, γ, δ εἶναι ἄνισοι καὶ ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον οἱ δὲ $\alpha^2+\gamma^2$, $\beta^2+\gamma^2$, $\gamma^2+\delta^2$ γεωμετρικὴν νὰ δειχθῇ ὅτι $\alpha\delta=-3\beta\gamma$.

1470. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν σφαιρῶν αἱ ὁποῖαι ἀποτελοῦν κανονικὴν τετραγωνικὴν πυραμίδα, ἂν ἑκάστη πλευρὰ τῆς βάσεώς της ἔχῃ ν σφαίρας.

1471. Τὸ αὐτὸ ὡς ἄνω πρόβλημα ἂν ἡ κανονικὴ πυραμὶς εἶναι τριγωνική.

1472. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν σφαιρῶν αἱ ὁποῖαι ἀποτελοῦν κόλουρον κανονικὴν τετραγωνικὴν πυραμίδα ἔχουσαν 16 σειρὰς ὁριζοντίας, ἂν ἑκάστη πλευρὰ τῆς ἄνω βάσεώς της ἔχῃ 12 σφαίρας.

1473. Ἂν Σ_1, Σ_2, Σ_3, εἶναι ἀντιστοίχως τὸ ἄθροισμα τῶν ν, τῶν 2ν καὶ τῶν 3ν ὅρων μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου, νὰ δειχθῇ ὅτι $\Sigma_3=3(\Sigma_2-\Sigma_1)$.

1474. Ἂν α καὶ β εἶναι οἱ δύο πρῶτοι ὅροι μιᾶς ἀριθμητικῆς, μιᾶς ἁρμονικῆς καὶ μιᾶς γεωμετρικῆς προόδου καὶ ἐὰν $\nu(\beta^{2\nu+2}-\alpha^{2\nu+2})=\alpha\beta(\nu+1)(\beta^{2\nu}-\alpha^{2\nu})$, νὰ δειχθῇ ὅτι οἱ ὅροι τῶν προόδων τούτων οἱ κατέχοντες τὴν $\nu+2$ τάξιν ἀποτελοῦν γεωμετρικὴν πρόοδον.

1475. Ἀριθμητικὴ καὶ φθίνουσα γεωμετρικὴ πρόοδος ἔχουν κοινὸν τὸν α′ ὅρον. Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὅρων τῆς γεωμετρικῆς ἐλαττωθὲν κατὰ 3 ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τιμῶν τὰς ὁποίας λαμβάνουν οἱ μ καὶ ν εἰς τὸ τριώνυμον $\chi^4+\mu\chi^2+\nu$ ἵνα τοῦτο εἶναι διαιρετὸν διὰ $\chi^2-6\chi+5$. Ἂν ὁ λόγος τῆς ἀριθμητικῆς εἶναι διπλάσιος τοῦ λόγου τῆς γεωμετρικῆς ὁ δὲ β′ ὅρος τῆς ἀριθμητικῆς ἰσοῦται πρὸς τὸ τετραπλάσιον τοῦ β′ τῆς γεωμετρικῆς, νὰ εὑρεθοῦν αἱ πρόοδοι.

1476. Ἂν $\chi\psi^{\lambda-1}=\alpha$, $\chi\psi^{\mu-1}=\beta$, $\chi\psi^{\nu-1}=\gamma$ νὰ δειχθῇ ὅτι

$$(\mu-\nu)\lambda o\gamma\alpha \quad (\lambda-\nu)\lambda o\gamma\beta-(\mu-\lambda)\lambda o\gamma\gamma=0.$$

1477. Διὰ ποίαν τιμὴν τοῦ α ἡ ἐξίσωσις $\chi^2-4\chi+\lambda o\gamma\alpha=0$ ἔχει ῥίζας πραγματικὰς καὶ ἀνίσους;

1478. Ἂν $\mu>2$ καὶ $\nu>2$ νὰ δειχθῇ ὅτι $\lambda o\gamma\mu+\lambda o\gamma\nu>\lambda o\gamma(\mu+\nu)$.

1479. Νὰ δειχθῇ ὅτι $1+\nu+\frac{\nu(\nu+1)}{1.2}+\frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)}{1.2.3}+\ldots=\frac{\nu+\mu-1}{\nu!(\mu-1)!}$

ἔνθα μ εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν ὅρων.

1480. Ἂν οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ ἀποτελοῦν ἁρμονικὴν πρόοδον, νὰ δειχθῇ ὅτι $\lambda o\gamma(\alpha+\beta)+\lambda o\gamma(\alpha-2\beta+\gamma)=2\lambda o\gamma(\alpha-\gamma)$.

1481. Ἂν α_1, α_2, α_3, α_4 εἶναι ἀντιστοίχως οἱ συντελεσταὶ τεσσάρων διαδοχικῶν ὅρων τοῦ ἀναπτύγματος ἑνὸς διωνύμου, νὰ δειχθῇ ὅτι

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}+\frac{\alpha_3}{\alpha_3+\alpha_4}=\frac{2\alpha_2}{\alpha_2+\alpha_3}$$

1482. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $(\alpha\chi)^{\lambda o\gamma\alpha}=(\beta\psi)^{\lambda o\gamma\beta}$, $\beta^{\lambda o\gamma\chi}=\alpha^{\lambda o\gamma\psi}$

1483. Γεωμετρικὴ καὶ ἁρμονικὴ πρόοδος ἔχουν ὡς ὅρους κατέχοντας τὴν λ, τὴν μ καὶ τὴν ν τάξιν ἀντιστοίχως τοὺς α, β, γ. Νὰ δειχθῇ ὅτι

$$\alpha(\beta-\gamma)\lambda o\gamma\alpha-\beta(\alpha-\gamma)\lambda o\gamma\beta-\gamma(\beta-\alpha)\lambda o\gamma\gamma=0$$

1484. Νὰ ὁρισθοῦν οἱ μ καὶ ν εἰς τρόπον ὥστε τὸ τριώνυμον $2\chi^2-3\mu\chi+\nu$ νὰ λαμβάνῃ τὴν τιμὴν -1 διὰ $\chi=1$ καὶ νὰ εἶναι τοῦτο ἐλάχιστον διὰ $\chi=1,5$.

1485. Δίδεται ἡ συνάρτησις $\psi=(\chi-\alpha)(\chi-\beta)(\chi-\gamma)$ ἔνθα $\alpha<\beta<\gamma$. Νὰ εὑρεθῇ ἡ παράγωγος ψ' αὐτῆς καὶ νὰ δειχθῇ ὅτι μία ῥίζα ταύτης κεῖται μεταξὺ α καὶ β καὶ ἡ ἑτέρα μεταξὺ β καὶ γ.

1486. Τί θὰ συμβῇ ἂν εἰς τὴν ἄνω ἐξίσωσιν εἶναι $\alpha=\beta$;

1487. Ἂν εἰς τὴν ἄνω ἐξίσωσιν εἶναι $\alpha=\beta=-1$ καὶ $\gamma=0$, νὰ σπουδασθῇ ἡ μεταβολὴ τῆς ψ καὶ νὰ γίνῃ ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς ἀντιστοίχου καμπύλης.

ΠΙΝΑΞ ΤΩΝ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΔΙΟΡΘΩΤΕΑ

σελὶς	20	ἄσκ.	97	ἀντὶ $102x^2$		νὰ γραφῇ	$102y^2$
»	32	»	220	» $12\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta-\gamma)$	»	»	$12\alpha\beta\gamma\ \alpha+\beta+\gamma)$
»	33	»	245	» $-3\alpha\gamma$	»	»	$-3\alpha\beta\gamma$
»	59	στίχ.	14	» $\frac{\gamma}{\gamma'}$	»	»	$\frac{\beta}{\beta'}$
»	81	ἄσκ.	391	» $\sqrt{\beta^2}$	»	»	$\sqrt{\beta}$
»	93	»	471	» $\frac{x^5-\alpha^5}{x-\alpha}+\frac{x^5+\alpha^5}{x+\alpha}$	»	»	$\frac{x^5-\alpha^5}{x-\alpha}-\frac{x^5+\alpha^5}{x+\alpha}$
»	93	»	488	» $3^4\beta^7$	»	»	$\alpha^4\beta^7$
»	102	»	533	εἰς τὸ τέλος τῆς ἀσκήσεως νὰ γραφῇ $=0$			
»	118	»	605	ἀντὶ $3xy$		νὰ γραφῇ	$2xy$
»	130	»	640	» $\alpha+2$	»	»	$-\alpha+2$
»	168	»	838	» $\sqrt{x^2}$	»	»	$\sqrt{x^3}$
»	211	»	1041	» $\ldots+x^\nu\ )=\frac{1-x^{\nu+1}}{1-x^2}$	»		$\ldots-x^\nu\ )=\frac{(1-x^{\nu+1})^2}{1-x^2}$
»	212	»	1076	» x αἱ	»	»	καὶ
»	219	»	1115	ὁ ἐκθέτης τοῦ α΄ μέλους εἶναι $5\sqrt[6]{x}-\frac{12}{\sqrt{x}}$ καὶ τοῦ β΄. $x^{-\frac{1}{}}$			
»	219	»	1123	ὁ ἐκθέτης τοῦ α΄ μέλους εἶναι $\lambda o\gamma^3 x-\lambda o\gamma(x^5)$.			
»	219	»	1124	ὁ τελευταῖος ὅρος $+x\lambda o\gamma 3$ νὰ σβυσθῇ.			
»	219	»	1133	ὁ ἐκθέτης τοῦ 10 εἶναι ω			
»	231	»	1169	ἀντὶ Σ_ν^{12}		νὰ γραφῇ	Σ_ν^{20}
»	236	»	1182	» $(1+x)^{3\nu}$	»	»	$(1+x)^{2\nu}$
»	238	»	1215	$(1\ \ z)$	»	»	$(1-z)$

σελὶς 153 ἄσκ. 769 ἀντὶ $x+\nu=\mu+2$ νὰ γραφῇ $\lambda+\nu=\mu+2$.
» 272 ἄσκ. 1397 εἰς τὸ τέλος τῆς ἀσκήσεως νὰ προστεθῇ «ἂν οἱ x_1 καὶ x_2 εἶναι ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $x^2+kx+\lambda+1=0$».
» 275 ἄσκ. 1456 στίχ. 2 τὸ «ἀριθμητικῆς ἢ» νὰ σβυσθῇ.
» 276 » 1461 ἀντὶ xy, yz, xz νὰ γραφῇ xy, xz, yz.
» ῇ.

ΕΡΓΑ ΤΟΥ ΑΥΤΟΥ

1) **'Ασκήσεις 'Αλγέβρας.** λελυμέναι περιέχουσαι 1002 ἀσκήσεις ἐπὶ δυνάμεων καὶ ῥιζῶν, ἐπὶ ἐξισώσεων καὶ συστημάτων α',β' καὶ ἀνωτέρου βαθμοῦ, ἐπὶ λογαριθμικῶν καὶ ἐκθετικῶν ἐξισώσεων καὶ συστημάτων, ἐπὶ προόδων ἀριθμητικῶν, ἁρμονικῶν καὶ γεωμετρικῶν, ἀσκήσεις ἐπὶ τοῦ τριωνύμου τοῦ β' βαθμοῦ $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ κλπ. 'Αποστέλλεται εἰς τὸν ἐμβάζοντα τὸ ἀντίτιμον

Τιμὴ 'Αθηνῶν 65.—'Επαρχιῶν 75.—

Τιμὴ 'Αθηνῶν 125.—
» 'Επαρχιῶν 140.—