ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ "Ο ΗΦΑΙΣΤΟΣ„

ΣΤΟΙΧΕΙΑ
ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

ΥΠΟ

ΧΡ. ΠΑΠΑΝΑΣΤΑΣΙΟΥ

ΑΘΗΝΑΙ
1948

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

"Ο ΗΦΑΙΣΤΟΣ"

ΣΤΟΙΧΕΙΑ

ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

ΥΠΟ

ΧΡ. ΠΑΠΑΝΑΣΤΑΣΙΟΥ

ΑΘΗΝΑΙ

1947

Πᾶν γνήσιον ἀντίτυπον φέρει τὴν ὑπογραφὴν τοῦ συγγραφέως.

Ἐκ τοῦ Λιθογραφείου Πετρῆ Χ. Τρικούπη 79 Ἀθῆναι

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι.
ΠΕΡΙ ΚΙΝΗΣΕΩΣ

1.- Ἡ ἔννοια τῆς κινήσεως. Ὅταν ἕνα σῶμα ἀλλάσῃ θέσιν συνεχῶς εἰς τὸ διάστημα λέγομεν ὅτι τὸ σῶμα τοῦτο κινεῖται. Τὸ δὲ φαινόμενον αὐτὸ λέγεται κίνησις. Ὅταν π.χ. οἱ ἄνθρωποι περιπατοῦν, λέγομεν ὅτι κινοῦνται. Ὅταν ἕνα αὐτοκίνητον τρέχῃ λέγομεν ὅτι κινεῖται. Ὅταν ἀφήσωμεν ἐλεύθερον εἰς τὸν ἀέρα λίθον τινα, θὰ ἀρχίσῃ νὰ κινῆται πρὸς τὰ κάτω, μέχρις ὅτου φθάσῃ εἰς τὸ δάπεδον. Εἰς τὴν φύσιν τὸ πᾶν κινεῖται. Ἡ Γῆ κινεῖται περὶ τὸν Ἥλιον καὶ περὶ ἑαυτήν, ὁ Ἥλιος τρέχει ἀνὰ τὸ ἀχανές. Πολλὰ ἀντικείμενα τὰ ὁποῖα εὑρίσκονται ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς Γῆς κινοῦνται ἐνώπιόν μας. Ὁ ἦχος, τὸ φῶς, ἡ θερμότης εἶναι κινήσεις. Συνεπῶς ἡ κίνησις εἶναι μία γενικὴ ἰδιότης, τὴν ὁποίαν ἔχουν ὅλα τὰ σώματα.

Ὅταν ἓν σῶμα δὲν κινεῖται, λέγομεν ὅτι εὑρίσκεται εἰς ἠρεμίαν ἢ ἀκινησίαν ἢ ἰσορροπίαν.

Τὸ σῶμα τὸ ὁποῖον κινεῖται, τὸ λέγομεν κινητόν.

Σῶμα τι λέγομεν, ὅτι εὑρίσκεται εἰς ἀπόλυτον ἠρεμίαν, ὅταν τὸ σῶμα τοῦτο ἠρεμῇ ἐπὶ ἄλλου σώματος ἐπίσης ἠρεμοῦντος. Εἰς σχετικὴν δὲ ἠρεμίαν ὅταν ἠρεμῇ ἐπὶ σώματος τὸ ὁποῖον κινεῖται.

Ἐπίσης λέγομεν ὅτι σῶμα τι εὑρίσκεται εἰς ἀπόλυτον κίνησιν ὅταν κινῆται ἐπὶ σώματος ἠρεμοῦντος. Εἰς σχετικὴν δὲ κίνησιν ὅταν κινῆται ἐπὶ σώματος κινουμένου. Ἐπειδὴ ἡ Γῆ διαρκῶς κινεῖται περὶ ἑαυτὴν καὶ εἰς τὸ διάστημα, τὰ σώματα τὰ ὁποῖα εὑρίσκονται ἐπ' αὐτῆς καὶ δὲν κινοῦνται, εὑρίσκονται εἰς σχετικὴν ἠρεμίαν. Ἕνας ἐπιβάτης ὁ ὁποῖος εὑρίσκεται ἐντὸς κινουμένης ἁμαξοστοιχίας, ἔχε-

ἠρεμίαν σχετικῶς ὡς πρός τήν ἁμαξοστοιχίαν καί σχετικ[ήν]
κίνησιν ὡς πρός τά ἐπί τῆς γῆς εὑρισκόμενα ἀντικείμενα. [Ἐ]
πειδή ὅμως εἰς τήν φύσιν τόν πᾶν κινεῖται, εἰς τήν πρα[γ]
ματικότητα οὔτε απόλυτος ἠρεμία ὑπάρχει οὔτε ἀπόλυτ[ος]
κίνησις.

Ἡ κίνησις λέγεται συνεχής ὅταν τό κινητόν συνεχῶς [κι]
νῆται χωρίς νά σταματήσῃ, ὡς π.χ. αὐτοκίνητον κινούμ[ε]
νον συνεχῶς ἄνευ στάσεως. Παλμική λέγεται ἡ κίνησ[ις]
ὅταν τό κινητόν κινεῖται ἐναλλάξ κατ' ἀντιθέτους διευθύ[ν]
σεις ἐπί τμήματος εὐθείας γραμμῆς, ὡς λ.χ. ἡ βελόνη ῥαπ[το]
μηχανῆς. Περιοδική δέ, ὅταν ἡ κίνησις ἀναπαράγεται ἀ[πα]
παλύτως ὁμοίως ἐντός ἴσων χρόνων, ὡς εἶναι λ.χ. ἡ κίνησι[ς]
τοῦ ἐκκρεμοῦς ὡρολογίου.

2.- Τροχιά. Ὅταν ῥίψωμεν εἰς τόν ἀέρα ἕνα λίθον, κινεῖ-
ται οὗτος, μέχρις ὅτου πέσῃ ἐπί τῆς ἐπιφανείας τῆς Γῆς. Ὅτα[ν]
κινῆται ἀκολουθεῖ βέβαια ἕναν δρόμον. Ἀλλά καί τό αὐτο-
κίνητον, ὅταν κινῆται, ἀκολουθεῖ ἕναν δρόμον. Καί γενικῶς, ὅ[τ]
αν ἕνα σῶμα κινῆται ἀκολουθεῖ ἕναν δρόμον. Ὁ δρόμος λο[ι]
πόν, που ἀκολουθεῖ κάθε κινητόν ὀνομάζεται τροχιά, τό δέ [μ]
ῆκος τῆς τροχιᾶς λέγεται διάστημα.

Ἐάν ἡ τροχιά ἑνός κινητοῦ εἶναι εὐθεῖα γραμμή ἡ κίνη-
σις λέγεται εὐθύγραμμος, ἐάν εἶναι καμπύλη, καμπυλό-
γραμμος. Ἐάν ἡ τροχιά εἶναι ἡ περιφέρεια κύκλου, ἡ κίνη-
σις λέγεται κυκλική. Ἐάν σῶμα τι κινεῖται περί σταθερόν
ἄξονα, τότε λέγομεν ὅτι ἡ κίνησίς του εἶναι περιστροφική.
Δίσκος λ.χ. κινούμενος περί ὁριζόντιον ἄξονα διερχό-
μενον διά τοῦ κέντρου του, ἔχει περιστροφικήν κίνησιν.
Ἡ Γῆ ὡς κινουμένη περί τόν ἄξονα της ἔχει περιστροφι-
κήν κίνησιν.

3.- Ὑλικόν σημεῖον. Τά εἰς τάς αἰσθήσεις ἡμῶν ὑπο-
πίπτοντα σώματα ἔχουν πάντοτε ἔκτασιν, καταλαμ-

άνουν δηλ. πάντοτε ὡρισμένον χῶρον εἰς το διάστημα. Κατά τὴν ἐξέτασιν ὅμως τῆς κινήσεως τῶν σωμάτων δεν λαμβάνομεν ὑπ' ὄψιν καμμίαν ἀπό τάς ἰδιότητας τῶν σωμάτων, ἀκόμη καί τὴν ἔκτασιν, μόνον μίαν ἰδιότητα παραδεχόμεθα εἰς τὴν ἐξέτασιν τῆς κινήσεως, τὴν <u>ἀδράνειαν</u>. Τά κινητά λοιπόν τά ὑποθέτομεν ἄνευ ἐκτάσεως, μὴ ἔχοντα ἄλλην τινά ἰδιότητα ἐκτός τῆς ἀδρανείας, καί με διαστάσεις γεωμετρικῶν σημείων. Τά τοιαῦτα σώματα ἤ κινητά τα ὀνομάζομεν <u>φυσικά</u> ἤ <u>ὑλικά σημεῖα</u>. Πρός ἁπλοποίησιν δέ τα ὑλικά σημεῖα τά θεωροῦμεν πολύ μικρα τόσον ὥστε αἱ διαστάσεις των νά μή λαμβάνωνται ὑπ' ὄψιν. Τα συμπεράσματα δέ εἰς τά ὁποῖα καταλήγομεν, ἐξετάζοντες τὴν κίνησιν ὑλικοῦ σημείου, τά επεκτείνομεν και επι κινητοῦ ὡρισμένων διαστάσεων, διότι οἱονδήποτε σῶμα δυνάμεθα να το θεωρήσωμεν ὅτι ἀποτελεῖται ἀπό ἄθροισμα ὑλικῶν σημείων.

<u>4.- Ἀδράνεια.</u> Πάντα τα σώματα δεν δύνανται ἀφ' ἑαυτῶν οὔτε νά κινηθῶσι, οὔτε ἐάν κινοῦνται να σταματήσωσι, ἄν δέν ἐπιδράσουν ἐπ' αὐτῶν διάφορα αἴτια. Ἡ ἰδιότης αὐτη τὴν ὁποίαν ἔχουν ὅλα τα σώματα καλεῖται <u>ἀδράνεια</u>. Οὐδέποτε λ.χ. λίθος τις ἀκίνητος, δύναται νά κινηθῇ ἀφ' ἑαυτοῦ, χωρίς νά ἐνεργήσῃ ἐπ' αὐτοῦ αἰτία τις. Ἐπίσης διά νά σταθῇ λίθος τις ὅστις ἐτέθη εἰς κίνησιν, πρέπει να ἐπιδράσῃ ἐπ' αὐτοῦ μία αἰτία.

Πολλά φυσικά φαινόμενα ἐξηγοῦνται διά τῆς ἀδρανείας. Λόγῳ τῆς ἀδρανείας, μία ἁμαξοστοιχία κινουμένη δεν δύναται νά σταθῇ ἀμέσως, ἀλλά ἐξακολουθεῖ κινουμένη ἐπί τινα χρόνον και μετά τὴν παῦσιν τῆς ἐνεργείας τοῦ ἀτμοῦ. Ὅταν εὑρισκώμεθα ἐντός κινουμένης ἁμαξοστοιχίας και αὐτη σταθῇ ἀποτόμως, πίπτομεν πρός τα ἔμπρος, διότι ἕνεκα τῆς ἀδρανείας, το σῶμα μας τείνει νά ἐξακολουθήσῃ τὴν κίνησιν του. Ἀντιθέτως ὅταν ἡ ἁμαξοστοιχία

τίθεται ἀποτόμως εἰς κίνησιν, πίπτομεν πρὸς τὰ ὀπίσω. Ὅ
κατερχώμεθα ἐξ ἁμάξης ἢ ἄλλου ὀχήματος κινουμέ
κλίνομεν τὸ σῶμα πρὸς διεύθυνσιν ἀντίθετον ἐκείνης κα
τὴν ὁποίαν κινεῖται τὸ ὄχημα, διὰ νὰ μὴ πέσωμεν. Αὐτο
νητον τὸ ὁποῖον τρέχει, ἐὰν σταματήσῃ ἀποτόμως, τότε
ἐπιβαίνοντες αὐτοῦ ἐκτινάσσονται, διότι τὰ σώματα τῶν
τηροῦν τὴν ἀρχικὴν τῶν κίνησιν. Ἡ ἰδιότης τῆς ἀδρανεί
εἶναι ἐκείνη ἡ ὁποία προκαλεῖ πολλάκις δυστυχήματα εἰ
τοὺς σιδηροδρόμους. Ἐὰν δι' οἱανδήποτε αἰτίαν συμβῇ νὰ
σταματήσῃ ἀποτόμως ἡ ἀτμομηχανή, ἐπειδὴ ὁλόκληρο
ἡ λοιπὴ ἁμαξοστοιχία τείνει νὰ διατηρήσῃ τὴν κίνησιν
της, τὰ ἀποτελοῦντα αὐτὴν βαγόνια προσκρούουν ἰσχυ-
ρῶς ἐπ' ἀλλήλων καὶ συντρίβονται.

Τὰ αἴτια τὰ ὁποῖα ἐπιδροῦν καὶ μεταβάλουν τὴν κατά-
στασιν τῆς ἠρεμίας ἢ τῆς κινήσεως τῶν σωμάτων, κα-
λοῦμεν <u>δυνάμεις</u>. Τὰ ἱστιοφόρα πλοῖα κινοῦνται διὰ τῆς
δυνάμεως τοῦ ἀτμοῦ. Ἡ πτῶσις τῶν σωμάτων προέρχε-
ται ἐκ τῆς δυνάμεως, τὴν ὁποίαν καλοῦμεν βάρος αὐτῶν
καὶ τὴν ὁποίαν κατανικῶμεν, ὅταν τὰ ἀνυψοῦμεν. Δυνά-
μεις εἶναι, ἡ μυϊκὴ δύναμις τῶν ἀνθρώπων καὶ τῶν ζώων,
ἡ δύναμις τοῦ ἀνέμου, τοῦ ἀτμοῦ, τοῦ ἠλεκτρισμοῦ κ.λ.π.

Τὰς δυνάμεις, αἱ ὁποῖαι προκαλοῦν τὴν κίνησιν τῶν σω-
μάτων τὰς καλοῦμεν <u>κινητηρίους</u> δυνάμεις. Τὰς δὲ δυ-
νάμεις αἱ ὁποῖαι ἐπιδροῦν καὶ σταματοῦν τὰ κινούμε-
να σώματα τὰς ὀνομάζομεν <u>ἀντιστάσεις</u>.

Κινητήριοι δυνάμεις λ.χ. εἶναι, ἡ μυϊκὴ δύναμις τοῦ ἀν-
θρώπου καὶ τῶν ζώων. Ἡ δύναμις τοῦ ἀνέμου, ἡ μαγνητι-
κὴ δύναμις, ἡ ἐλαστικὴ δύναμις τοῦ ἀτμοῦ καὶ τῶν ἀερίων.

Ἀνθιστάμεναι δυνάμεις ἢ ἀντιστάσεις λ.χ. εἶναι ἡ ἀντί-
στασις ἥτις προέρχεται ἐκ τῆς τριβῆς τῶν σωμάτων, ἡ
ἀντίστασις ἡ προερχομένη ἐκ τοῦ μέσου ἐντὸς τοῦ ὁποίου

κινεῖται ἕν σῶμα, ὅπως εἶναι ἡ ἀντίστασις τοῦ ὕδατος ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀέρος.

5.- Δρᾶσις καὶ ἀντίδρασις. Ὅταν κρατῶμεν διὰ τῆς χειρός μας ἕν οἱονδήποτε ἀντικείμενον, τοῦτο ἐξασκεῖ ἐπὶ τῆς χειρός μας μίαν ἐνέργειαν. Ἡ ἐνέργεια αὐτὴ μᾶς ἐπιβάλλει νὰ καταβάλωμεν μίαν προσπάθειαν ὥστε νὰ ἀντιδρῶμεν νὰ πέσῃ τὸ ἀντικείμενον πρὸς τὰ κάτω. Ὥστε εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὑπάρχουν δύο δυνάμεις αἱ ὁποῖαι δροῦν ταυτοχρόνως:

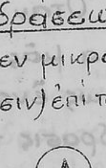
1ον) Μία δύναμις ἥτις ἐνεργεῖ διὰ νὰ πέσῃ τὸ ἀντικείμενον, καὶ ἡ ὁποία ἐξασκεῖ πίεσιν τοῦ ἀντικειμένου ἐπὶ τῆς χειρός μας.

2ον) Μία δύναμις ὁ ὁποία κρατεῖ τὸ ἀντικείμενον καὶ ἐξασκεῖ πίεσιν τῆς χειρός μας ἐπὶ τοῦ ἀντικειμένου.

Ἡ πρώτη τῶν δυνάμεων αὐτῶν καλεῖται <u>δρᾶσις</u> τοῦ ἀντικειμένου ἐπὶ τῆς χειρός μας, καὶ ἡ δευτέρα <u>ἀντίδρασις</u> τῆς χειρός μας ἐπὶ τοῦ ἀντικειμένου. Τὸ φαινόμενον τοῦτο εἶναι γενικὸν καὶ ὁσάκις ἕν σῶμα ἐξασκεῖ δρᾶσιν ἐπὶ ἄλλου σώματος τοῦτο ἀντιδρᾷ πάντοτε εἰς τὴν δρᾶσιν τοῦ πρώτου.

Ἀξίωμα τῆς ἰσότητος δράσεως καὶ ἀντιδράσεως.

Ἄνωθεν τεταμένου ἐλατηρίου (σχ. 1) θέτωμεν μικρὰν σφαῖραν· ἡ σφαῖρα αὐτὴ ἐξασκεῖ μίαν πίεσιν (δρᾶσιν) ἐπὶ τοῦ ἐλατηρίου. Ταυτοχρόνως ὅμως τὸ ἐλατήριον ἀντιδρᾷ εἰς τὴν πίεσιν ταύτην τῆς σφαίρας καὶ ἀναπτύσσεται ἀντίδρασις τοῦ ἐλατηρίου ἐπὶ τῆς σφαίρας. Ἐὰν ἡ πίεσις τῆς σφαίρας ἐπὶ τοῦ ἐλατηρίου ἦτο μεγαλυτέρα τῆς ἀντιδράσεως τοῦ ἐλατηρίου, τότε θὰ παρατηρεῖτο συστολὴ τοῦ ἐλατηρίου. Αὐτὸ παρατηροῦμεν εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ πειράματος. Ἐὰν ἀντιθέτως, ἡ ἀντίδρασις τοῦ ἐλατηρίου ἦτο μεγαλυτέρα τῆς δράσεως (πιέσεως) τῆς σφαίρας τότε ἡ



Σχ. 1.

σφαῖρα θὰ ἐξετινάσσετο εἰς τὸν ἀέρα. Ἐφ᾽ὅσον ὅμως ἡ σφαῖρα μένει ἀκίνητος ἐπὶ τοῦ ἐλατηρίου, συμπεραίνομεν ὅτι ἡ δρᾶσις τῆς σφαίρας εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀντίδρασιν τοῦ ἐλατηρίου. Τὸ ἀποτέλεσμα τοῦτο δὲν συμβαίνει μόνον εἰς τὴν προκειμένην περίπτωσιν, ἀλλὰ εἶναι γενικὸν οὕτως ὥστε πάντοτε ἰσχύει ἡ ἑξῆς <u>ἀρχὴ τῆς δράσεως</u> καὶ ἀντιδράσεως:

Ὁσάκις σῶμα τι ἐξασκεῖ ἐπὶ ἄλλου δύναμίν τινα (δρᾶσιν) καὶ τὸ δεύτερον τοῦτο σῶμα θὰ ἐξασκῇ ταυτοχρόνως ἐπὶ τοῦ πρώτου δύναμιν ἴσην καὶ ἀντίθετον (ἀντίδρασιν)

<u>Διαφορὰ μεταξὺ τῆς ἰδιότητος τῆς ἀδρανείας καὶ τῆς δυνάμεως τῆς ἀδρανείας.</u>

Ἡ ἀδράνεια εἶναι ὅπως εἴπωμεν ἰδιότης τῆς ὕλης τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ ὑπερνικήσωμεν διὰ νὰ θέσωμεν ἓν σῶμα εἰς κίνησιν ἢ διὰ νὰ μεταβάλωμεν τὴν κίνησίν του.

Διὰ νὰ ὑπερνικήσωμεν τὴν ἀδράνειαν ἑνὸς σώματος, πρέπει νὰ ἐπιδράσωμεν διὰ μιᾶς ἐνεργείας, τὴν ὁποίαν ὀνομάσαμεν δύναμιν. Τὸ σῶμα τότε ἀντιδρᾷ εἰς τὴν ἐνέργειαν αὐτήν, λόγῳ τῆς ἀρχῆς τῆς δράσεως καὶ ἀντιδράσεως. Ἡ ἀντίδρασις αὐτὴ εἶναι ἡ <u>δύναμις τῆς ἀδρανείας.</u>

Ὅταν κατερχώμεθα ἐξ ἁμάξης κινουμένης, ἡ ἀδράνεια μᾶς ὠθεῖ πρὸς τὴν διεύθυνσιν τῆς κινήσεως. Ὅταν ὅμως ἕνα ἄτομον προσπαθεῖ νὰ μᾶς σταματήσῃ, ἡ ἀντίδρασις τὴν ὁποίαν ὑφίσταται τὸ ἄτομον τοῦτο ἐκ μέρους μας εἶναι ἡ δύναμις τῆς ἀδρανείας. Δὲν εἶναι συνεπῶς ὀρθὸν νὰ λέγωμεν ὅτι ἡ δύναμις τῆς ἀδρανείας εἶναι ἐκείνη ἡ ὁποία ἐκτινάσσει πρὸς τὰ ἐμπρὸς τὸν ἀναβάτην τρέχοντος ἵππου καὶ ἀποτόμως σταματῶντος. Ἡ ἐκτίναξις τοῦ ἀναβάτου πρὸς τὰ ἐμπρὸς εἶναι συνέπεια τῆς ἀδρανείας.

Ἡ δύναμις τῆς ἀδρανείας εἶναι ἡ ἀντίδρασις σώματος τοῦ ὁποίου θέλομεν νὰ ὑπερνικήσωμεν τὴν ἀδράνειαν.

<u>6.- Ἀντικείμενον τῆς Μηχανικῆς</u>. <u>Μηχανικὴ</u> εἶναι

ἡ ἐπιστήμη ἡ ὁποία σπουδάζει τήν κίνησιν καί τά αἴτια αὐτῆς ἤτοι τάς δυνάμεις.

Διαιρεῖται εἰς τέσσαρα μέρη:

1ον/ Εἰς τήν κινητικήν. Αὕτη σπουδάζει τήν κίνησιν αὐτήν καθ'ἑαυτήν, ἀνεξαρτήτως τῶν δυνάμεων αἱ ὁποῖαι παράγουν τήν κίνησιν. Σπουδάζει δέ τήν κίνησιν ἀπό καθαρῶς γεωμετρικῆς ἀπόψεως, λαμβάνει ὑπ'ὄψι ὄχι μόνον τήν ἔννοιαν τῆς μεταθέσεως ὡς συμβαίνει εἰς τήν Γεωμετρίαν, ἀλλά καί τήν ἔννοιαν τοῦ χρόνου.

2ον/ Εἰς τήν δυναμικήν. Αὕτη προσπαθεῖ νά εὕρῃ τάς σχέσεις αἱ ὁποῖαι ὑπάρχουν μεταξύ τῆς κινήσεως καί τῶν δυνάμεων, αἱ ὁποῖαι παράγουν τήν κίνησιν. Εἰς τήν δυναμικήν ἐκτός τῶν ἐννοιῶν τῆς μεταθέσεως καί τοῦ χρόνου λαμβάνεται ὑπ'ὄψι καί ἡ ἔννοια τῆς δυνάμεως.

3ον/ Εἰς τήν στατικήν. Εἰς ταύτην ἐρευνᾶται νά ἀνευρεθῇ ἡ σχέσις, ἡ ὁποία πρέπει νά ὑπάρχῃ μεταξύ τῶν δυνάμεων, διά νά μή παραχθῇ κίνησις.

4ον/ Εἰς τήν ἐφηρμοσμένην Μηχανικήν. Εἰς ταύτην σπουδάζονται αἱ βιομηχανικαί ἐφαρμογαί τῶν ἀρχῶν τῆς Μηχανικῆς.

7.- Ὁμαλή κίνησις - Ταχύτης κινητοῦ.

Ὅταν ἕν αὐτοκίνητον πρόκειται νά μεταβῇ ἀπό τάς Ἀθήνας εἰς τήν Κόρινθον, τροχιά αὐτοῦ εἶναι ὁ δρόμος τον ὁποῖον θά ἀκολουθήσῃ ἀπό τάς Ἀθήνας μέχρι τῆς Κορίνθου. Τό μῆκος τῆς τροχιᾶς, ὅπως εἴπομεν λέγεται διάστημα. Ἄν μᾶς εἴπουν, νά εὕρωμεν «πόσον χρόνον θά κάμῃ τό αὐτοκίνητον νά μεταβῇ ἀπό τάς Ἀθήνας εἰς τήν Κόρινθον», πρῶτον πρέπει νά γνωρίζωμεν πόσον εἶναι αὐτό τό διάστημα. Πρέπει λοιπόν νά τό μετρήσωμεν. Διά νά μετρήσωμεν αὐτό τό μῆκος, καθώς καί κάθε μῆκος, ἔχομεν ἀνάγκην ἀπό ἕν ἄλλο μῆκος, ὡρισμένον, μέ τό όποῖον νά τό συγκρίνωμεν (νά τό μετρήσωμεν). Τό ὡρισμένον αὐτό μῆκος εἶναι τό μέτρον (τό μέτρον ἔχει μῆκος τό $\frac{1}{40.000.000}$ περίπου τοῦ μεσημβρινοῦ τῆς γῆς). Τό μέτρον τό χρησιμοποιοῦμεν διά νά μετρήσωμεν γενικῶς τά μήκη. Δι' αὐτό δέ λέγεται μονάς μήκους.

Τό μέτρον ὑποδιαιρεῖται εἰς δέκα ἴσα μέρη τά ὁποῖα λέγονται παλάμαι. Ἑκάστη δέ παλάμη ἐπίσης ὑποδιαιρεῖται εἰς δέκα ἴσα μέρη καί λέγονται δάκτυλοι (πόντοι). Ἕκαστος δάκτυλος εἶναι τό $\frac{1}{100}$ τοῦ μέτρου καί λέγεται καί ἑκατοστόμετρον.

Ὅταν θέλωμεν νά μετρήσωμεν μικρά μήκη τά μετροῦμεν μέ τήν παλάμην ἡ ὁποία εἶναι τό $\frac{1}{10}$ τοῦ μέτρου ἤ μέ τόν δάκτυλον. Ὅταν ὅμως θέλωμεν νά μετρήσωμεν μεγάλα μήκη, τά μετροῦμεν μέ τό χιλιόμετρον τό ὁποῖον ἔχει μῆκος 1000 μέτρων. Ὡς μονάδα δηλαδή μετρήσεως μεγάλων μηκῶν χρησιμοποιοῦμεν τό χιλιόμετρον.

Ἄς ὑποθέσωμεν λοιπόν ὅτι τό διάστημα ἀπό Ἀθηνῶν εἰς Κόρινθον εἶναι 80 χιλιόμετρα.

Ἀλλά ὁ χρόνος, ὁ ὁποῖος θά χρειασθῇ, διά νά μεταβῇ τό αὐτοκίνητον ἀπό τάς Ἀθήνας εἰς Κόρινθον ἐξαρτᾶται καί ἀπό τό αὐτοκίνητον. Ἄν τό αὐτοκίνητον τρέχει πολύ θά κάμῃ ὀλιγώτερον χρόνον, παρ' ὅσον θά κάμη, ἄν τρέχει ἀργά. Ὅταν τρέχει πολύ, λέγομεν ὅτι ἔχει μεγάλην ταχύτητα. Ὅταν τρέχει ὀλίγον, λέγομεν ὅτι ἔχει μικράν ταχύτητα. Εἶναι δυνατόν ὅμως ἄλλοτε νά τρέχῃ πολύ καί ἄλλοτε ὀλίγον. Ὅταν τρέχῃ εἰς ὅλον τό διάστημα μέ τήν αὐτήν ταχύτητα, τότε λέγομεν ὅτι ἡ κίνησις εἶναι ὁμαλή ἤ ἰσοταχής. Ὅταν ὅμως δεν τρέχει εἰς ὅλον τό διάστημα μέ τήν αὐτήν ταχύτητα, ἀλλά ἄλλοτε τρέχει γρηγορώτερον καί ἄλλοτε ἀργότερον, τότε λέγομεν ὅτι ἡ κίνησις εἶναι μεταβαλλομένη ἢ ἀνισοταχής. Ὥστε εἰς τὴν ὁμαλὴν κίνησιν ἡ ταχύτης τοῦ κινητοῦ εἶναι πάντοτε ἡ αὐτή, ἐνῶ εἰς τὴν μεταβαλλομένην κίνησιν, ἡ ταχύτης μεταβάλλεται.

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ αὐτοκίνητον ἔχει πάντοτε τὴν αὐτὴν ταχύτητα καθ' ὅλον του τὸν δρόμον ἀπὸ Ἀθηνῶν εἰς Κόρινθον, ἡ κίνησίς του δηλαδὴ εἶναι ὁμαλή. Τότε ἂν γνωρίζωμεν ὅτι εἰς μίαν ὥραν τὸ αὐτοκίνητον διανύει διάστημα 20 χιλιομέτρων, διὰ νὰ εὕρωμεν πόσας ὥρας θὰ κάμῃ τὸ αὐτοκίνητον διὰ νὰ διανύσῃ τὰ 80 χιλιόμετρα, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὸ 80:20. Εὑρίσκομεν λοιπὸν ὅτι ὁ χρόνος ποὺ χρειάζεται τὸ αὐτοκίνητον διὰ νὰ διανύσῃ τὰ 80 χιλιόμετρα εἶναι 4 ὧραι. Ὅταν συνεπῶς θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὸν χρόνον ὁ ὁποῖος χρειάζεται, ἵνα κινητόν τι διανύσῃ ἕνα διάστημα ὡρισμένον, καὶ ἡ κίνησίς του εἶναι ὁμαλή, πρέπει νὰ γνωρίζωμεν τὸ διάστημα ποὺ διανύει τὸ κινητὸν αὐτὸ εἰς μίαν ὥραν. Ταχύτητα λοιπὸν ἑνὸς κινητοῦ εἰς τὴν ὁμαλὴν κίνησιν λέγομεν τὸ διάστημα τὸ ὁποῖον διανύει τὸ κινητὸν εἰς μίαν ὥραν, ἢ γενικώτερον ἐπειδὴ ὡς μονάδα τοῦ χρόνου δυνάμεθα νὰ λάβωμεν καὶ τὸ δευτερόλεπτον, ταχύτητα κινητοῦ εἰς τὴν ὁμαλὴν κίνησιν, ὀνομάζομεν τὸ εἰς τὴν μονάδα τοῦ χρόνου διανυόμενον διάστημα. Γνωρίζοντες τὴν ταχύτητα ἑνὸς κινητοῦ, εὐκόλως δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ διανυθὲν διάστημα πολλαπλασιάζοντες τὴν ταχύτητά του ἐπὶ τὸν χρόνον. Ἐὰν λ.χ. τὸ αὐτοκίνητον ἔχει ταχύτητα 20 χιλιομέτρων, εἰς 4 ὥρας, θὰ διανύσῃ διάστημα 20×4 δηλ. 80 χιλιόμετρα.

Ἐὰν καλέσωμεν διὰ ε τὸ διανυθὲν διάστημα, διὰ υ τὴν ταχύτητα καὶ διὰ t τὸν χρόνον, τότε ἔχομεν τὸν ἑξῆς γενικὸν τύπον τῆς ὁμαλῆς κινήσεως:

(1) $\varepsilon = \upsilon t$ δηλαδή, διάστημα = ταχύτης × χρόνον

ἐκ τοῦ τύπου τούτου, λαμβάνομεν

(2) $\upsilon = \frac{\varepsilon}{t}$ τουτέστι, ταχύτης $= \frac{\text{Διάστημα}}{\text{χρόνου}}$ καί

(3) $t = \frac{\varepsilon}{\upsilon}$ δηλαδή, χρόνος $= \frac{\text{Διάστημα}}{\text{ταχύτης}}$

Οὕτω ἡ ταχύτης σιδηροδρόμου, διανύοντος 150 χιλιόμετρα ἐντός 3 ὡρῶν θά εἶναι: $\frac{150}{3} = 50$ χιλιόμετρα.

Τό διάστημα θά εἶναι $50 \times 3 = 150$ χιλιόμετρα.

καί ὁ χρόνος θά εἶναι $\frac{150}{50} = 3$ ὧραι

Εἰς τό παράδειγμα τοῦτο ἐλήφθη ὡς μονάς μήκους τό χιλιόμετρον καί ὡς μονάς χρόνου ἡ ὥρα. Ἀντί ὅμως τῶν μονάδων τούτων θά ἠδυνάμεθα νά λάβωμεν ὡς μονάδα μήκους τό μέτρον καί ὡς μονάδα χρόνου τό δευτερόλεπτον, τότε ἡ ταχύτης εἰς ἕν δευτερόλεπτον θά ἰσοῦται πρός το διάστημα εἰς μέτρα:

ἤτοι 150.000 μέτρα : 10.800 δευτερόλεπτα = 13,89 μ.

8.- Νόμοι τῆς ὁμαλῆς κινήσεως

Εἴπομεν ὅτι ἡ ἐξίσωσις τῆς ὁμαλῆς κινήσεως εἶναι:

(1) $\varepsilon = \upsilon . t$

Εἰς μίαν ἀνάλογον περίπτωσιν, ἄν τό διάστημα εἶναι ε', ἡ ταχύτης υ', καί ὁ χρόνος t', πάλιν θά ἔχωμεν:

(4) $\varepsilon' = \upsilon' . t'$

Διαιροῦντες τάς ἐξισώσεις (1) καί (4) κατά μέλη λαμβάνομεν:

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon'} = \frac{\upsilon}{\upsilon'} \times \frac{t}{t'} \qquad (5)$$

Ἐάν $t = t'$, τότε τό $\frac{t}{t'} = 1$ καί ἡ ἐξίσωσις (5) γίνεται $\frac{\varepsilon}{\varepsilon'} = \frac{\upsilon}{\upsilon'}$

Ἐκ τοῦ τύπου τούτου συμπεραίνομεν ὅτι: Εἰς τήν ὁμαλήν κίνησιν τά διανυόμενα διαστήματα εἶναι ἀνάλογα τῶν ταχυτήτων.

Ἄς λάβωμεν πάλιν τήν ἐξίσωσιν: $\frac{\varepsilon}{\varepsilon'} = \frac{\upsilon}{\upsilon'} \times \frac{t}{t'}$

Ἄν ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι αἱ ταχύτητες τῶν δύο κινητῶν εἶναι ἴσαι, δηλ. $\upsilon = \upsilon'$ τότε θά ἔχωμεν:

(6) $\frac{\varepsilon}{\varepsilon'} = \frac{t}{t'}$

Τουτέστι: Εἰς τὴν ὁμαλὴν κίνησιν ὅταν αἱ ταχύτητες εἶναι αἱ αὐταί, τὰ διανυόμενα διαστήματα εἶναι ἀνάλογα τῶν χρόνων. Ἐὰν πάλιν λάβωμεν τὰς ἐξισώσεις (1) καὶ (4) καὶ ὑποθέσωμεν ἴσα τὰ διαστήματα δηλαδὴ $\varepsilon = \varepsilon'$ τότε εὑρίσκομεν:

$$(7) \quad \upsilon t = \upsilon' t' \quad \text{ἐξ οὗ} \quad \frac{\upsilon}{\upsilon'} = \frac{t'}{t}$$

Ὁ τύπος οὗτος μᾶς λέγει ὅτι, ὅταν τὰ διανυόμενα διαστήματα εἶναι τὰ αὐτά, οἱ χρόνοι οἱ ὁποῖοι ἀπαιτοῦνται δια νὰ διανυθοῦν εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν ταχυτήτων.

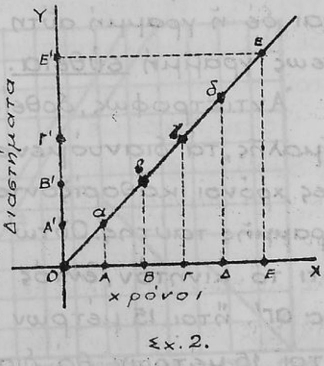
9.- Γραφικὴ παράστασις τῆς ὁμαλῆς κινήσεως.

Ἔστω διανυθέντα διαστήματα εἰς ὁμαλὴν κίνησιν τὰ ἑξῆς:

Χρόνος	Διανυθὲν διάστημα
0	0 μέτρα
1″	5
2″	10
3″	15
4″	20

Τὴν κίνησιν ταύτην δυνάμεθα νὰ παραστήσωμεν γραφικῶς ὡς ἑξῆς:

Ἐπὶ εὐθείας ΟΧ (σχ. 2) λαμβάνομεν πρὸς τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν σημεῖα Ο, Α, Β, Γ, ... ἴσον ἀπέχοντα καὶ τὰ οὕτω σχηματιζόμενα ἴσα μήκη ΟΑ, ΑΒ, ΒΓ, ... ὑποθέσωμεν ὅτι παριστῶσι ἴσους χρόνους π.χ. ἓν δευτερόλεπτον.



Σχ. 2.

Οὕτω τὸ τμῆμα ΟΑ θὰ παριστᾷ τὸ πρῶτον δευτερόλεπτον, τὸ ΑΒ τὸ δεύτερον καὶ οὕτω καθεξῆς. Τὸ τμῆμα ΟΒ θὰ παριστᾷ τότε δύο δευτερόλεπτα, τὸ ΟΓ τρία δευτερόλεπτα κ.τ.λ. Ἡ εὐθεῖα ΟΧ καλεῖται <u>ἄξων τῶν χρόνων</u>. Κατόπιν φέρομεν τὴν κάθετον ΟΨ ἐπὶ τοῦ ἄξονος ΟΧ καί σημειοῦμεν ἐπ'αὐτῆς σημεῖα Α', Β', Γ',...... ἴσον ἀπέχοντα. Τά τμήματα ΟΑ', ΟΒ', ΟΓ'..... ὑποθέσωμεν ὅτι παριστῶσι τά διανυόμενα διαστήματα ὑπό τοῦ κινητοῦ οὕτως, ὥστε τό ΟΑ' θά παριστᾷ τό διάστημα τό διανυόμενον κατά τό πρῶτον δευτερόλεπτον, τό ΟΒ' θά παριστᾶ τό διάστημα τό διανυόμενον ἐντός δύο δευτερολέπτων καί οὕτω καθ'ἑξῆς. Ἡ κάθετος ΟΨ καλεῖται τότε <u>ἄξων τῶν διαστημάτων.</u>

Ἡ θέσις τήν ὁποίαν κατέχει ἐπί τῆς τροχιᾶς του τό κινητόν κατά τινα χρονικήν στιγμήν Χ, παρίσταται δι'ὡρισμένου σημείου τοῦ ἐπιπέδου τοῦ σχήματος ὡς ἑξῆς: Ὁ χρόνος Χ παρίσταται ὑπό τοῦ τμήματος ΟΕ, τό δέ διανυθέν διάστημα ἐντός τοῦ χρόνου τούτου , παρίσταται ὑπό τοῦ τμήματος ΟΕ'. Ἐάν ἐκ τῶν σημείων Ε καί Ε' φέρωμεν τάς καθέτους Εε καί Ε'ε ἐπί τῶν ἀξόνων, θά ὁρίσωσιν αὗται ἕν σημεῖον ε καί ἕν μόνον, Ἐάν πράξωμεν τό αὐτό διά πάντας τούς ἄλλους χρόνους 1'', 2'', 3'' καί διά τῶν ἀντιστοιχούντων διαστημάτων 5, 10, 15...... μέτρα, θά ὁρίσωμεν σειράν σημείων α, β, γ,....... Οὕτω ἕκαστος χρόνος καί τό ἀντιστοιχοῦν εἰς αὐτόν διάστημα, θά ὁρίζωσι σημεῖον τι τοῦ ἐπιπέδου ΧΟΨ. Ἐάν ἑνώσωμεν πάντα τά σημεῖα ταῦτα α, β, γ...... διά γραμμῆς, ἡ γραμμή αὕτη λέγομεν, ὅτι παριστᾶ, τήν παρατηρηθεῖσαν ὁμαλήν κίνησιν. Εἶναι δέ ἡ γραμμή αὕτη εἰς τήν περίπτωσιν τῆς ὁμαλῆς κινήσεως γραμμή <u>εὐθεῖα.</u>

Ἀντιστρόφως, δοθείσης τῆς γραμμῆς Οε κινήσεώς τινος ὁμαλῆς, τά διανυόμενα διαστήματα καί οἱ ἀντιστοιχοῦντες χρόνοι καθορίζονται ἐντελῶς διά τῶν σημείων τῆς γραμμῆς ταύτης. Οὕτω διά τοῦ σημείου π.χ. γ, γνωρίζομεν ὅτι τό κινητόν, ἐντός χρόνου ΟΓ ἤτοι: 3'', διανύει διάστημα ΟΓ', ἤτοι 15 μέτρων καί ἀντιστρόφως, τό διάστημα ΟΓ', ἤτοι 15 μέτρων θά διαννυθῇ ἐντός χρόνου ΟΓ, ἤτοι 3''.-

<u>10.- Κίνησις μεταβαλλομένη ἤ ἀνισοταχής.</u> Ὅταν ἕν κι-

νητόν διανύει εἰς ἴσους χρόνους ἄνισα διαστήματα, τότε ἡ κίνησις λέγεται μεταβαλλομένη ἢ ἀνισοταχής.

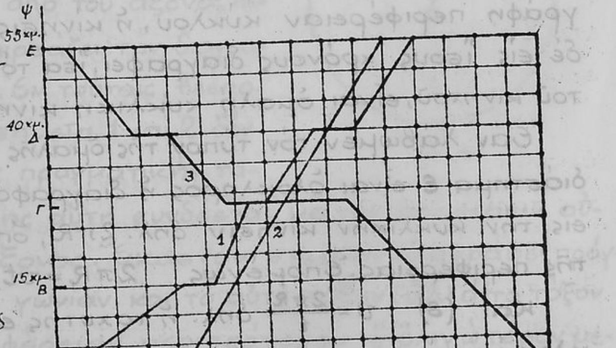
Ἡ κίνησις αὐτή ὅπως καί ἡ ὁμαλή, δύναται νά εἶναι εὐθύγραμμος ἢ καμπυλόγραμμος. Ἡ κίνησις λ.χ. σιδηροδρόμου ὁ ὁποῖος αὐξάνει τήν ταχύτητά του εἰς τάς κατωφερείας, ἐπιβραδύνει αὐτήν εἰς τάς ἀνωφερείας, καί εἶναι ὁμαλή εἰς τάς σιδηροτροχιάς αἱ ὁποῖαι δέν ἔχουν κλίσιν, εἶναι μεταβαλλομένη ἢ ἀνισοταχής.

Μέση ταχύτης εἰς τήν ἀνισοταχήν κίνησιν ὀνομάζεται, ἡ ταχύτης τήν ὁποίαν θά εἶχε τό κινητόν, ἐάν διήνυε τό αὐτό διάστημα καί εἰς τόν αὐτόν χρόνον μέ τήν αὐτήν ταχύτητα.

Παράδειγμα. Ἁμαξοστοιχία ἀναχωρεῖ ἐξ Ἀθηνῶν τήν 8ὥρ. καί 5′ π.μ. καί φθάνει εἰς Λάρισσαν τήν 2ὥρ. καί 32′ μ.μ.

Ἡ ἀπόστασις μεταξύ Ἀθηνῶν καί Λαρίσσης εἶναι 352 χιλιόμετρα. Νά εὑρεθῇ ἡ μέση ταχύτης τῆς ἁμαξοστοιχίας. Μέση ταχύτης $V_\mu = \frac{352000}{23220} = 15$ μέτρα καί 15 ἑκατοστόμετρα κατά δευτερόλεπτον.

11.- Γραφική παράστασις κινήσεως τῶν σιδηροδρόμων. Τό σχῆμα 3 παριστᾷ τήν κυκλοφορίαν διά τῶν γραμμῶν 1,2, καί 3, τριῶν ἁμαξοστοιχιῶν, αἵτινες παρίστανται διά τῶν ἀριθμῶν 1,2, καί 3. Οἱ χρόνοι λαμβάνονται ἐπί τοῦ ἄξονος ΟΧ, τά δέ διανυόμενα διαστήματα ἐπί τοῦ ἄξονος ΟΨ, ἐπί τοῦ ὁποίου ὑποδεικνύονται καί οἱ σταθμοί Α, Β, Γ, Δ, καί Ε.



Σχ. 3.

-Ἡ ἁμαξοστοιχία 1 ἀναχωρεῖ ἐκ τοῦ σταθμοῦ Α τήν 12 ὥραν καί διερχομένη διά τῶν σταθμῶν Β, Γ, καί Δ, φθάνει τήν 1 ὥρ. εἰς τόν σταθμόν Ε. Ἐκ τοῦ διαγράμματος βλέπομεν ὅτι ἡ ἁμαξοστοιχία αὐτη φθάνει εἰς τόν σταθμόν Β, ἤτοι 15 χιλιόμετρα ἀπό τοῦ Α εἰς τάς 12 ὥρ. καί 22'. Εἰς τόν σταθμόν τοῦτον παραμένει ἐπί 5', δι'ὅ καί τό ἀντιστοιχοῦν τμῆμα τῆς γραμμῆς 1, τοῦ διαγράμματος εἶναι παράλληλον πρός τόν ἄξονα ΟΧ. Μετά τοῦτο ἀναχωρεῖ πρός τόν σταθμόν Γ καί οὕτω καθεξῆς. Ὁμοίως παρακολουθοῦμεν καί τήν πορείαν τῶν ἑτέρων δύο ἁμαξοστοιχιῶν διά τῶν γραμμῶν 2 καί 3 τοῦ διαγράμματος. Τά κοινά σημεῖα τῶν γραμμῶν 1, 2 καί 3 παρέχουσι τόν χρόνον, καθ'ὅν συναντῶνται αἱ ἁμαξοστοιχίαι εἰς τούς σταθμούς, π.χ. τούς Γ καί Δ.

Κατά τήν σύνθεσιν τοῦ διαγράμματος, ὑποτίθεται ὅτι ἡ κίνησις τῶν ἁμαξοστοιχιῶν εἶναι ὁμαλή καί ταχύτητος ἴσης πρός τήν <u>μέσην ταχύτητα</u>. Ἡ μέση δέ ταχύτης μεταξύ δύο σταθμῶν εἶναι ἴση πρός τό πηλῖκον τῆς διαιρέσεως τῆς ἀποστάσεως τούτων διά τοῦ χρόνου, καθ'ὅν διανύεται αὕτη.

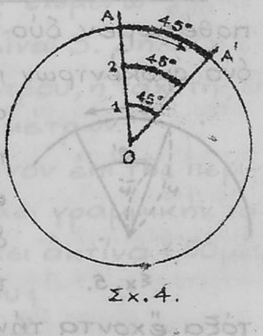
12.- <u>Ὁμαλή κυκλική κίνησις.</u> Ὅταν τό κινητόν διαγράφῃ περιφέρειαν κύκλου, ἡ κίνησις εἶναι κυκλική. Ἄν δέ εἰς ἴσους χρόνους διαγράφει ἴσα τόξα, τότε ἡ κίνησις τοῦ κινητοῦ, εἶναι ὁμαλή κυκλική κίνησις.

Ἐάν λάβωμεν τόν τύπον τῆς ὁμαλῆς κινήσεως $\varepsilon = vt$, τό διάστημα ε εἶναι ὁλόκληρος ἡ διαγραφομένη περιφέρεια εἰς τήν κυκλικήν κίνησιν δηλ. $2\pi R$, ὅπου R εἶναι ἡ ἀκτίς τῆς περιφερείας. Ἐπομένως $2\pi R = vt$

Καί (8) $v = \frac{2\pi R}{t}$ δηλ. ἡ ταχύτης εἰς τήν ὁμαλήν κυκλικήν κίνησιν εἶναι πηλῖκον τῆς διαγραφομένης περιφερείας διά τοῦ χρόνου καθ'ὅν αὕτη διαγράφεται. Ἐάν τώρα εἰς τόν τύπον (8) ὑποθέσωμεν $R = 0$, θά ἔχωμεν υ=0, ὅπερ μᾶς λέγει ὅτι ἐάν σημεῖον εὑρίσκεται εἰς τό κέντρον, ὅπου ἡ ἀκτίς εἶναι μηδέν, τότε τοῦτο δέν κινεῖται. Ὅταν τό R αὐξάνει καί τό υ αὐξάνει, δηλαδή ἡ ταχύτης αὐξάνει ὅσο τό κινητόν ἀπομακρύνεται ἐκ τοῦ κέντρου τῆς περιφερίας ἥν διαγράφει. Τά σημεῖα λ.χ. τροχοῦ τά εὑρισκόμενα πλησίον τῆς περιφερείας κινοῦνται ταχύτερον, τῶν σημείων τοῦ τροχοῦ τῶν εὑρισκομένων πλησίον τοῦ ἄξονος περιστροφῆς.

13.- Γωνιώδης ταχύτης. Ἄν καί τά σημεῖα τά εὑρισκόμενα ἐπί τῆς αὐτῆς ἀκτῖνος δίσκου περιστρεφομένου, ἔχουσι διαφόρους ταχύτητας, ἀναλόγους πρός τάς ἀποστάσεις αὐτῶν ἀπό τοῦ ἄξονος περιστροφῆς, δυνάμεθα νά εἴπωμεν, ὅτι ἐν σχέσει πρός τήν διαγραφομένην γωνίαν, αἱ ταχύτητες αὗται εἶναι αἱ αὐταί.

Οὕτω, ὅταν τά σημεῖα 1 καί 2 (σχ.4) τά κείμενα ἐπί τῆς ακτῖνος ΟΑ, μεταφέρονται, λόγῳ τῆς περιστροφῆς, ἐπί τῆς ἀκτῖνος ΟΑ', ταῦτα διαγράφουσι ἀμφότερα γωνίαν 45°. Ἐκ τούτου δυνάμεθα νά εἴπωμεν ὅτι ἡ ἀπόστασις τῶν σημείων ἀπό τοῦ ἄξονος περιστροφῆς δέν ἐπηρεάζει τήν διαγραφομένην γωνίαν. Ἐν τούτοις, βλέπομεν ὅτι ἐάν τά σημεῖα 1 καί 2 δέν ἔχουν τήν αὐτήν πραγματικήν ταχύτητα, ἡ ταχύτης αὕτη συνδέεται μέ τήν ἀπόστασιν αὐτῶν ἀπό τοῦ ἄξονος. Ἕκαστον σημεῖον διαγράφει πράγματι τήν αὐτήν γωνίαν καί τό αὐτό τόξον, ἀλλά τό τόξον ἀνήκει εἰς περιφέρειαν περισσότερον ἤ ὀλιγώτερον μεγαλητέραν. Ὡς ἐκ τούτου γεννᾶται εἰς τήν Μηχανικήν ἡ ἔννοια τῆς <u>γωνιώδους ταχύτητος</u>.



Σχ. 4.

Γωνιώδης λοιπόν ταχύτης εἶναι ἡ ταχύτης σημείου εὑρισκομένου εἰς ἀπόστασιν ἀπό τοῦ ἄξονος περιστροφῆς, ἴσην πρός τήν μονάδα τοῦ μήκους.

Ὡς μονάδα μήκους ἐνταῦθα δυνάμεθα νά λάβωμεν τό 1 μέτρον.

Ἄν λάβωμεν τόν τύπον (8) $\upsilon=\frac{2\pi R}{t}$ καί θέσωμεν $R=1$ τότε θά ἔχωμεν (9) $\upsilon=\frac{2\pi}{t}$, ὁ τύπος οὗτος μᾶς ἐκφράζει τήν γωνιώδη ταχύτητα. Διά νά μή γίνεται ὅμως σύγχυσις μέ ἄλλην ταχύτητα, χρησιμοποιοῦμεν ἀντί τοῦ υ διά τήν γωνιώδη ταχύτητα τό γράμμα ω.

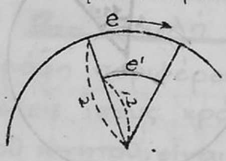
Οὕτω $\omega=\frac{2\pi}{t}$ (9)

Ἡ τιμή ὅμως τότε τοῦ ω ἀποβαίνει ἀριθμός ἀφηρημένος.

Παράδειγμα. Ποία ἡ γωνιώδης ταχύτης τῆς γῆς, τῆς ὁποίας ἡ περιστροφή γίνεται εἰς 24 ὥρας ἤ 86400 δευτερόλεπτα;

$$\omega=\frac{2\pi}{t}=\frac{2\times 3,14}{86400}=0,000072722.......$$

14.– Ἄλλη ἔκφρασις τῆς Γωνιώδους ταχύτητος. Ἄς ὑποθέσωμεν δύο σημεῖα κείμενα ἐπί τῆς αὐτῆς ἀκτῖνος δύο ὁμοκέντρων περιφερειῶν (σχ. 5) κινουμένων κατά τήν αὐτήν διεύθυνσιν. Ἔστωσαν τ καί τ' αἱ ἀποστάσεις των ἀπό τά κέντρα τῶν περιφερειῶν καί ε καί ε' τά τόξα τά ὁποῖα διαγράφονται ὑπό τῶν δύο σημείων εἰς τόν αὐτόν χρόνον. Ἐπειδή ε καί ε' εἶναι τόξα ἔχοντα τήν αὐτήν τιμήν εἰς μοίρας εἶναι μεταξύ των ὡς αἱ ἀκτῖνες τῶν περιφερειῶν των καί δυνάμεθα νά γράφωμεν τήν ἑξῆς ἀναλογίαν:



σχ. 5.

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}=\frac{\tau}{\tau'}$$

Ἀλλά ὅπως ἴδωμεν εἰς τόν τύπον (7), διά τόν αὐτόν χρόνον, τά διαστήματα εἶναι ἀνάλογα τῶν ταχυτήτων, καί ἴδωμεν ἀκόμη εἰς τόν τύπον (5) ὅτι:

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}=\frac{\upsilon}{\upsilon'}$$

Ἑπομένως ἐκ τῶν δύο ἀνωτέρω ἀναλογιῶν ἔχομεν:

$$\frac{\upsilon}{\upsilon'}=\frac{\tau}{\tau'}$$

Ἐὰν τώρα λάβωμεν τ' ὡς μονάδα μήκους, τότε τὸ υ' γίνεται γωνιώδης ταχύτης καὶ τὸ καλοῦμεν ω, καὶ ἡ τελευταία ἀναλογία γίνεται $\frac{\upsilon}{\omega}=\frac{\tau}{1}$ ἐξ οὗ $\upsilon=\omega\tau$ (10) ἢ $\omega=\frac{\upsilon}{\tau}$ (11) ὁ τύπος οὗτος μᾶς δίδει τὴν γωνιώδη ταχύτητα σώματος περιστρεφομένου (δίσκου ἢ τροχοῦ), ἐὰν γνωρίζωμεν τὴν γραμμικὴν ταχύτητα υ ἑνὸς οἱουδήποτε σημείου, καὶ τὴν ἀπόστασιν τ τοῦ σημείου τούτου ἀπὸ τοῦ ἄξονος περιστροφῆς.

1ον/ Παράδειγμα. Σημεῖον κείμενον ἐπὶ τῆς περιφερείας σφονδύλου ἔχει γραμμικὴν ταχύτητα 1,20 μέτρα κατὰ δευτερόλεπτον. Ἡ ἀκτὶς τοῦ σφονδύλου εἶναι 0,40 μέτρα. Ποία ἡ γωνιώδης ταχύτης του;

Ἐφαρμόζοντες τὸν τύπον (11) $\omega=\frac{\upsilon}{\tau}$ ἔχομεν $\omega=\frac{1,20}{0,40}=3$

Ἡ γωνιώδης ταχύτης τοῦ σημείου εἶναι 3. Δηλαδὴ ἐὰν ὁ σφόνδυλος εἶχε ἀκτῖνα ἑνὸς μέτρου, ἡ ταχύτης σημείου τῆς περιφερείας του θὰ ἦτο 3 μέτρων.

2ον/ Παράδειγμα. Σημεῖον κείμενον ἐπὶ τῆς περιφερείας δίσκου περιστρεφομένου, ἔχει γραμμικὴν ταχύτητα 0,80 μέτρα. Ἐὰν ὁ δίσκος ἔχει ἀκτῖνα 1,60 μέτρ. ποία ἡ γωνιώδης ταχύτης τοῦ σημείου;

Ἐφαρμόζοντες τὸν ἄνω τύπον $\omega=\frac{\upsilon}{\tau}$ ἔχομεν $\omega=\frac{0,80}{1,60}=0,5$, δηλαδὴ σημεῖον εὑρισκόμενον εἰς ἀπόστασιν 1 μέτρου ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ δίσκου, στρέφεται μὲ ταχύτητα 50 ἑκατοστομέτρων κατὰ δευτερόλεπτον.

Παρατήρησις. Ἡ γραμμικὴ ταχύτης ἑνὸς σημείου κειμένου ἐπὶ τῆς περιφερείας σφονδύλου εἶναι εὔκολον νά καθορισθῆ. Ἀρκεῖ νά προσδέσωμεν ἕνα ἱμάντα καί νά παρατηρήσωμεν πόσα μέτρα προχωρεῖ ἕν σημεῖον τοῦ ἱμάντος εἰς χρόνον ἀρκετῶν δευτερολέπτων. Ἄν τό σημεῖον προχωρήσῃ κατά 2,50 μέτρα εἰς 10'', ἡ ταχύτης του εἶναι 0,25 μέτρα κατά δευτερόλεπτον.

<u>Παράδειγμα.</u> Ἕνας τροχός ἔχει γωνιώδη ταχύτητα ἴσην μέ 6. Ποία θά εἶναι ἡ γραμμική ταχύτης σημείου ἀπέχοντος 0,98 μέτρα ἀπό τοῦ ἄξονος ;

ἔχομεν τόν τύπον $\omega = \frac{\upsilon}{\tau}$, ἐξ αὐτοῦ λαμβάνομεν $\upsilon = \omega\tau$

καί $\upsilon = 6 \times 0{,}98 = 5{,}98$ μέτρα.

<u>13.- Ὑπολογισμός τῆς γωνιώδους ταχύτητος ἑνός στρεφομένου σώματος, ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν στροφῶν αὐτοῦ κατά λεπτόν.</u>

Καί εἰς τήν περίπτωσιν ταύτην ἐφαρμόζομεν τόν τύπον (9) $\omega = \frac{2\pi}{t}$ μέ ἐλαφράν τροποποίησιν.

Τό διανυόμενον διάστημα, ὑπό σημείου ἀπέχοντος 1 μέτρον ἐκ τοῦ ἄξονος περιστροφῆς (δηλ. ἡ γωνιώδης ταχύτης ω), εἰς κάθε στροφήν, εἶναι ἴσον πρός ὁλόκληρον τήν περιφέρειαν δηλ. 2π.

μετά 2 στροφάς θά εἶναι ἴσον πρός $2\pi \times 2$

μετά 5 " " " " " $2\pi \times 5$

καί μετά η " " " " " $2\pi \times \eta$ ἤ $2\pi\eta$

οὕτω εἰς ἕν λεπτόν ἤ 60 δευτερόλεπτα, τό διανυθέν διάστημα εἶναι $2\pi\eta$.

εἰς ἕν δευτερόλεπτον, τό διανυθέν διάστημα θά εἶναι $\frac{2\pi\eta}{60}$ ἤ $\frac{\eta\pi}{30}$, ἡ ζητουμένη λοιπόν γωνιώδης ταχύτης $\omega = \frac{\eta\pi}{30}$ (12)

<u>Παράδειγμα.</u> Νά εὑρεθῇ ἡ γωνιώδης ταχύτης σφονδύλου ὁ ὁποῖος ἐκτελεῖ 45 στροφάς κατά λεπτόν.

Ἐφαρμόζοντες τόν τύπον (12), ἔχομεν $\omega = \frac{45 \times 3.14}{30} = 4{,}712$

Ἡ γωνιώδης συνεπῶς ταχύτης εἶναι 4,712

<u>Παρατήρησις.</u> Ἐκ τοῦ τύπου $\omega = \frac{\eta\pi}{30}$ ἐξάγομεν τήν

τιμήν τοῦ n καί ἔχομεν:

$$(13) \qquad n = \frac{30\omega}{\pi}$$

ὁ τύπος οὗτος μᾶς δίδει τόν ἀριθμόν τῶν στροφῶν ἑνός σώματος κι τά λεπτόν, ὅταν γνωρίζωμεν μόνον τήν γωνιώδη ταχύτητα.

Παράδειγμα Ὀδοντωτός τροχ ἰς στρέφεται μέ γωνιώδη ταχύτητα ἴσην πρός 5, πόσας στροφάς ἐκτελεῖ κατά λεπτόν;

Σύμφωνα μέ τόν τύπον (13) ἔχομεν $n = \frac{30\omega}{\pi}$ ἐξ οὗ

$$n = \frac{30 \times 5}{3{,}14} = 47{,}7$$

ὁ τροχός συνεπῶς ἐκτελεῖ 48 στροφάς κατά λεπτόν.

16.- Κίνησις ὁμαλῶς μεταβαλλομένη. Εἴπομεν ἀνωτέρω ὅτι ὅταν κινητόν διανύει εἰς ἴσους χρόνους ἄνισα διαστήματα, ἡ κίνησίς του λέγεται μεταβαλλομένη. Ἄν ὅμως ἡ ταχύτης τοῦ κινητοῦ αὐξάνῃ ἤ ἐλαττοῦται κατ' ἴσας ποσότητας εἰς ἴσους χρόνους ὁσονδήποτε μικρούς, ἡ κίνησις τότε ὀνομάζεται ὁμαλῶς μεταβαλλομένη.

Καί ἄν μέν ἡ ταχύτης αὐξάνῃ, ἡ κίνησις λέγεται ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένη, ἄν δέ ἐλλατοῦται, ἡ κίνησις καλεῖται ὁμαλῶς ἐπιβραδυνομένη. Ἡ εἰς κάθε μονάδα χρόνου σταθερά αὔξησις, ἤ ἡ σταθερά ἐλλάτωσις τῆς ταχύτητος ὀνομάζεται ἐπιτάχυνσις. Ἡ κίνησις λίθου, πίπτοντος ἐλευθέρως καί ἐκ μικροῦ ὕψους εἰς τό κενόν εἶναι ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένη κίνησις. Ὅταν ρίψωμεν λίθον εἰς τόν ἀέρα κατακορύφως ἐκ τῶν κάτω πρός τά ἄνω, ἡ κίνησις τούτου εἶναι ὁμαλῶς ἐπιβραδυνομένη.

Ἐάν ἀφήσωμεν μικράν σφαῖραν νά κινηθῇ ἐλευθέρως κατά μῆκος κεκλιμένου ἐπιπέδου, ἡ κίνησις αὐτῆς εἶναι ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένη.

Νόμοι τῆς ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένης κινήσεως.

1ος Νόμος τῶν διαστημάτων. Ἄν μετρήσωμεν διά χρονομέτρου τόν χρόνον τῆς πτώσεως τῆς μικρᾶς σφαίρας ἡ ὁποία ἀφίνεται ἐλευθέρως εἰς τήν κορυφήν ἑνός κεκλιμένου ἐπιπέδου καί κυλίεται κατά μῆκος αὐτοῦ, θά ἴδωμεν ὅτι:

Εἰς ἕν δευτερόλεπτον	διανύει	διάστημα	5 ἑκατοστομέτρ.	
» 2 »	»	»	20 ἤ 5×4	δηλ. 5×2^2
» 3 »	»	»	45 ἤ 5×9	» 5×3^2
» 4 »	»	»	80 ἤ 5×16	» 5×4^2
» 5 »	»	»	125 ἤ 5×25	» 5×5^2

Παρατηροῦντες τά διανυόμενα διαστήματα καί τόν χρόνον καθ' ὅν ταῦτα διηνύθησαν, βλέπομεν ὅτι: Εἰς τήν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην κίνησιν, τά διανυόμενα διαστήματα εἶναι ἀνάλογα τῶν χρόνων.

Ἐάν ε καί ε' εἶναι διανυόμενα διαστήματα τά ὁποῖα διανύονται εἰς t καί t' χρόνους τότε τόν ἄνω νόμον δυνάμεθα νά τόν διατυπώσωμεν ἀλγεβρικῶς ὡς ἑξῆς:

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}=\frac{t}{t'}$$

Ἡ σχέσις αὐτή μᾶς ἐκφράζει τόν ἄνω νόμον ὅστις λέγεται νόμος των διαστημάτων.

Κατά το πρῶτον δευτερόλεπτον, εἰς τό ἄνω πείραμα τῆς πτώσεως τῆς σφαίρας, αὕτη ἔπεσε 5 ἑκατοστά ἤ 5×1

Κατά τό 2ον δευτερόλ. ἡ σφαῖρα ἔπεσε	20-5	ἤτοι 15	= 5×3
» » 3ον » » » »	45-20	» 25	= 5×5
» » 4ον » » » »	80-45	» 35	= 5×7
» » 5ον » » » »	125-80	» 45	= 5×9

Ἐκ τούτου βλέπομεν ὅτι: τά διανυόμενα διαστήματα εἰς τάς διαδοχικάς χρονικάς μονάδας, εἶναι μεταξύ των ὡς ἡ σειρά τῶν περιττῶν ἀριθμῶν 1, 3, 5, 7, 9.

Ἐπίσης παρατηροῦμεν ὅτι μεταξὺ τῶν διαδοχικῶν διανυομένων διαστημάτων, ὑπάρχει πάντοτε ἡ αὐτὴ διαφορα: $45-35=10$ $25-15=10$. Ἡ διαφορὰ αὕτη ἔχει τιμὴν $2\times5=10$ δηλαδὴ εἶναι πάντοτε τὸ διπλάσιον τοῦ κατὰ τὴν πρώτην χρονικὴν μονάδα διανυθέντος διαστήματος.

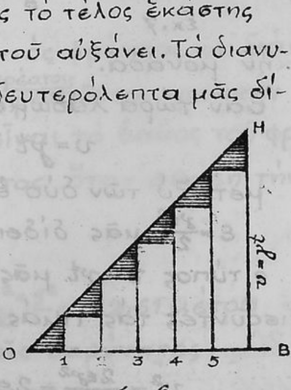
<u>Νόμος τῶν ταχυτήτων</u>. Ποία ὅμως εἶναι ἡ ταχύτης ποῦ ἀποκτᾶ ἡ πίπτουσα σφαῖρα εἰς τὸ τέλος ἑκάστης χρονικῆς μονάδος;

εἰς τὸ τέλος τοῦ 1 δευτερολ. ἡ κτηθεῖσα ταχύτης εἶναι	10	$=10$
" " " 2 " " " " "	20	$=10\times2$
" " " 3 " " " " "	30	$=10\times3$
" " " 4 " " " " "	40	$=10\times4$
" " " 5 " " " " "	50	$=10\times5$

Οὕτω: <u>αἱ κτηθεῖσαι ταχύτητες τοῦ κινητοῦ εἰς τὴν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην κίνησιν εἶναι ἀνάλογοι τῶν χρόνων.</u>

Ἐὰν ἡ κτηθεῖσα ταχύτης εἰς τὸ τέλος τοῦ πρώτου δευτερολέπτου εἶναι 10 καὶ ἂν καλέσωμεν τὴν σταθερὰν αὐτὴν ποσότητα διὰ τοῦ γράμματος γ, ὅπερ εἶναι ἡ ἐπιτάχυνσις, εἰς τὸ τέλος τῶν 4 δευτερολέπτων ἡ ταχύτης $\upsilon=\gamma\times4$ καὶ μετὰ t δευτερόλεπτα, ἡ ταχύτης θὰ εἶναι $\upsilon=\gamma t$ (15)

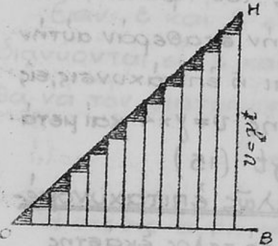
<u>17. - Γραφικὴ παράστασις τῆς ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένης κινήσεως.</u> Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι εἰς τὸ τέλος ἑκάστης χρονικῆς μονάδος ἡ ταχύτης τοῦ κινητοῦ αὐξάνει. Τὰ διανυόμενα διαστήματα κατὰ τὰ διαδοχικὰ δευτερόλεπτα μᾶς δίδονται ἀπὸ τὰς ἐπιφανείας τῶν μικρῶν ὀρθογωνίων (σχ. 6) τὰ ὁποῖα ἔχουσι βάσιν ἕκαστον τμῆμα τοῦ ὁλικοῦ χρόνου t, καὶ ὕψος τὰς ἀντιστάχους ταχύτητας. Αἱ ταχύτητες αὗται εἶναι πολλαπλάσια τοῦ γ εἶναι δηλ. $2\gamma, 3\gamma, \ldots\ t\gamma$ ἢ γt.



Σχ. 6.

Τὸ διανυθὲν διάστημα εἰς τὸ τέλος τῶν t δευτερολέπτων θά ἀποτελῆται ἀπό τό ἄθροισμα ὅλων τῶν μερικῶν ὀρθογωνίων. Ὑποθέσαμεν ὅμως ὅτι ἡ αὔξησις τῆς ταχύτητος γίνεται εἰς ἑκάστην χρονικήν μονάδα εἰς κάθε δευτερόλεπτον. Τοῦτο ὅμως δέν συμβαίνει εἰς τήν πραγματικότητα διότι ἡ ἐπιτάχυνσις εἶναι συνεχής. Ὀφείλομεν λοιπόν νά λάβωμεν μονάδας χρόνου ὅσον τό δυνατόν μικροτέρας διά νά προσεγγίσωμεν πρός τήν ἀληθῆ τιμήν τήν ὁποίαν ζητοῦμεν. Ἄν συνεπῶς λάβωμεν πάρα πολύ μικρά χρονικά διαστήματα τά ὀρθογώνια τοῦ διαγράμματος πολλαπλασιάζονται καί τό ὅριον αὐτῶν θά εἶναι τό τρίγωνον ΟΒΗ (σχ.6 καί 7).

Ἄς εὕρωμεν τώρα τό ἐμβαδόν τοῦ τριγώνου ΟΒΗ. Ἡ βάσις του εἶναι ἴση πρός t, τό ὕψος του $BA = \gamma t$. Τό ἐμβαδόν εἶναι τό διανυθέν διάστημα ε. Δυνάμεθα λοιπόν νά γράψωμεν:



Σχ.7

Ἐπιφάνεια ΟΒΗ ἤ $\varepsilon = \frac{t \times \gamma t}{2} = \frac{\gamma t^2}{2}$ ἤ

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\gamma t^2 \quad (16)$$

ἐάν δέ $t=1$, ὁ τύπος (16) γίνεται

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\gamma \quad \text{ἤ} \quad \gamma = 2\varepsilon \quad (17)$$

ὅπερ μᾶς λέγει ὅτι ἡ ἐπιτάχυνσις ἰσοῦται πρός τό διπλάσιον τοῦ διανυθέντος διαστήματος κατά τήν πρώτην χρονικήν μονάδα.

Ἐάν τώρα λάβωμεν τούς τύπους (15) καί (16)

$$\upsilon = \gamma t \qquad \text{καί} \qquad \varepsilon = \frac{\gamma t^2}{2}$$

μεταξύ τῶν δύο ἐξισώσεων ἀπαλείφομεν τόν χρόνον t.

$\varepsilon = \frac{\gamma t^2}{2}$ μᾶς δίδει $2\varepsilon = \gamma t^2$ ἐξ' οὗ $t^2 = \frac{2\varepsilon}{\gamma}$

ὁ τύπος $\upsilon = \gamma t$ μᾶς δίδει $\upsilon^2 = \gamma^2 t^2$ ἐξ οὗ $t^2 = \frac{\upsilon^2}{\gamma^2}$

ἐξισοῦντες τάς τιμάς τοῦ t ἔχομεν $\frac{2\varepsilon}{\gamma} = \frac{\upsilon^2}{\gamma^2}$ ἐξ οὗ

$$\upsilon^2 = \frac{2\varepsilon\gamma^2}{\gamma} = 2\varepsilon\gamma \qquad \text{καί} \qquad \upsilon = \sqrt{2\varepsilon\gamma} \quad (18)$$

Οἱ τύποι (16) καί (18) μᾶς δίδουν, ὁ μέν πρῶτος τό διάστημα είς τήν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην κίνησιν, ὁ δέ δεύτερος τήν ταχύτητα.

18. Ἐφαρμογή τῶν ἄνω τύπων είς τήν βαρύτητα.

Ἡ ἐλευθέρα πτῶσις τῶν σωμάτων ὀφειλομένη είς τήν βαρύτητα εἶναι κίνησις ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένη. Ἄν λοιπόν ἀντί τῆς ἐπιταχύνσεως γ, θέσωμεν τό γράμμα g τό ὁποῖον παριστᾶ τήν ἐπιτάχυνσιν τήν ὀφειλομένην είς τήν βαρύτητα, θά ἔχωμεν.

(19) $\quad v=gt \quad$ ἐξ οὗ $\quad t=\frac{v}{g}$

(20) $\quad e=\frac{gt^2}{2} \quad$ καί $\quad h=\frac{gt^2}{2} \quad$ (h = ὕψος τῆς πτώσεως)

(21) $\quad v=\sqrt{2ge} \quad$ ἤ $\quad v=\sqrt{2gh} \quad$ ἤ $\quad v^2=2gh$

Οἱ τύποι οὗτοι οἱ ὁποῖοι ἀφοροῦν τήν βαρύτητα, ἀληθεύουν μόνον ὅταν τά σώματα πίπτουν είς τό κενόν. Ὅταν τά σώματα πίπτουν είς τόν ἐλεύθερον ἀέρα πρέπει νά λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀέρος, ἥτις παράγει τριβήν ἀνάλογον τῶν ἐπιφανειῶν τῶν σωμάτων τά ὁποῖα πίπτουν. Διά τοῦτο είς τήν ἐλευθέραν πτῶσιν τῶν σωμάτων, ὑποθέτομεν τά σώματα τά ὁποῖα πίπτουν μέ πολύ μικράς διαστάσεις διά νά μή παράγονται μεγάλαι ἀντιστάσεις κατά τήν πτῶσιν.

Ἐφαρμογαί: 1) Σῶμα τι πίπτει ἐντός φρέατος καί διά νά φθάσῃ είς τήν ἐπιφάνειαν τοῦ ὕδατος τοῦ φρέατος χρειάζεται χρονικόν διάστημα 5 δευτερολέπτων. Ποῖον εἶναι τό βάθος τοῦ φρέατος καί ποία ἡ ταχύτης τοῦ σώματος ὅταν φθάσῃ τήν ἐπιφάνειαν τοῦ ὕδατος;

βάθος φρέατος: τύπος $h=\frac{gt^2}{2}$

ἀντικαθιστῶντες ἔχομεν $h=\frac{9{,}81 \times 5^2}{2}=122{,}61$ μέτρα

τό $g=9{,}81$ εἶναι ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς βαρύτητος.

κτηθεῖσα ταχύτης: τύπος $v=gt$

ἐπομένως: $v=9{,}81 \times 5=49{,}044$ μέτρα.

2) Ἀπὸ ποῖον ὕψος πρέπει νὰ πέσῃ κινητὸν, διὰ νὰ ἀποκτήσῃ ταχύτητα, 1 μέτρου καὶ ποία ἡ διάρκεια τῆς πτώσεως;

ὕψος: Τύπος $v^2 = 2gh$ ἐξ οὗ $h = \frac{v^2}{2g}$

ἐπομένως: $h = \frac{1}{2 \times 9{,}81} = 0{,}051$ μέτρα.

Διάρκεια πτώσεως: τύπος $t = \frac{v}{g} = \frac{1}{9{,}81} = \frac{1}{10}$ τοῦ δευτερολ.

19.- Κίνησις ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένη μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα.

Μέχρι τοῦδε κατὰ τὴν ἐξέτασιν τῆς ὁμαλῆς ἐπιταχυνομένης κινήσεως, ὑποθέσαμεν ὅτι τὸ κινητὸν ἀναχωρεῖ ἐκ τῆς ἠρεμίας, δηλαδὴ ὅτι δὲν ἔχει ἀρχικὴν ταχύτητα ἢ ἡ ἀρχικὴ ταχύτης του εἶναι μηδέν.

Εἶναι ὅμως δυνατὸν ἕνα κινητὸν νὰ ἔχῃ ἀρχικὴν ταχύτητα τὴν ὁποίαν λ.χ. καλοῦμεν διὰ τοῦ γράμματος a.

Καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην οἱ νόμοι δὲν μεταβάλλονται, ἀλλὰ εἰς ὅλας τὰς χρονικὰς μονάδας ἡ ἀρχικὴ ταχύτης a πρέπει νὰ προστίθεται εἰς τὴν κτηθεῖσαν ταχύτητα.

Οὕτω κατὰ τὴν κίνησιν τοῦ κινητοῦ (χρόνος 0) θὰ ἔχωμεν:

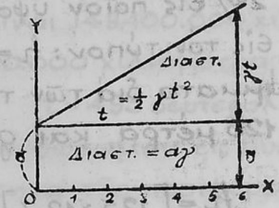
	χρόνος 0			ταχύτης	$= a$
Μετὰ	1 δευτερ.	θὰ ἔχωμεν		ταχύτης	$= a+\gamma$
»	2	»	»	»	» $= a+2\gamma$
»	3	»	»	»	» $= a+3\gamma$
»	t	»	»	»	» $= a+\gamma t$

Συνεπῶς ἡ ταχύτης εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην μᾶς δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου: $v = a + \gamma t$ (22)

20.- Γραφικὴ παράστασις τῆς ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένης κινήσεως καθ' ἣν τὸ κινητὸν ἔχει ἀρχικὴν ταχύτητα.

Εἰς τὸ (σχῆμα 8) λαμβάνομεν ἐπὶ

τοῦ ἄξονος οψ, εἰς τόν χρόνον 0 τμῆμα ἴσον πρός τήν ταχύτητα a. Αὐτη μετά t χρόνον θά μᾶς δώσῃ διάστημα τό ὁποῖον θά παρίσταται ἀπό ἕν ὀρθογώνιον ἐπιφανείας at.



Σχ. 8.

Ἐάν προσθέσωμεν εἰς αὐτήν τήν ποσότητα at, τό ἐμβαδόν τοῦ τριγώνου τοῦ εὑρισκομένου ἄνωθεν, θά ἔχωμεν:

διάστημα ἤ $\varepsilon = at + \frac{1}{2}\gamma t^2$ (23)

21. Κίνησις ὁμαλῶς ἐπιβραδυνομένη. Ὅταν ἡ ταχύτης ἑνός κινητοῦ ὑφίσταται σταθεράν ἐλάττωσιν ἀνά πᾶσαν χρονικήν μονάδα, ἡ κίνησις εἶναι ὁμαλῶς ἐπιβραδυνομένη. Ἡ ἐπιτάχυνσις δηλαδή εἶναι ἀρνητική $-\gamma$.

Ἐάν τό κινητόν ἔχει ἀρχικήν ταχύτητα a, τότε οἱ τύποι (22) καί (23) γίνονται:

ταχύτης: $\upsilon = a - \gamma t$ (24)

εἰς τήν περίπτωσιν τῆς βαρύτητος $\upsilon = a - gt$.

καί διάστημα $\varepsilon = at - \frac{1}{2}\gamma t^2$.

καί εἰς τήν βαρύτητα: $h = at - \frac{1}{2}gt^2$.

Ἐφαρμογαί: Λίθος ῥίπτεται κατακορύφως ἐκ τῶν κάτω πρός τά ἄνω μέ ἀρχικήν ταχύτητα 125 μέτρ. κατά δευτερόλεπτον.

Ζητεῖται: 1ον/ Μετά πόσον χρόνον θά σταματήσῃ ὁ λίθος εἰς τόν ἀέρα; (ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀέρος δέν λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν).

Ἐφαρμόζοντες τόν τύπον (24) ἔχομεν: $\upsilon = a - gt$ ἤ $\upsilon = 125 - 9{,}81t$.

Ἀλλά ἀφοῦ ὁ λίθος σταματᾶ, πρέπει ἡ ταχύτης του $\upsilon = 0$. Καί δυνάμεθα νά γράψωμεν:

$$125 - 9{,}81t = 0 \quad \text{ἐξ οὗ} \quad 125 = 9{,}81t \quad \text{ἤ}$$

$$t=\frac{125}{9.81}=12,7 \text{ δευτερόλεπτα}$$

Συνεπῶς ὁ λίθος θὰ σταματήσῃ ὀλίγον πρὸ τῶν 13 δευτερολέπτων.

2ον/ Εἰς ποῖον ὕψος θὰ φθάσῃ ὁ λίθος;

Εἰς τὸν τύπον: $h=at-\frac{1}{2}gt^2$ ἀντικαθιστῶμεν τὰ γράμματα διὰ τῶν τιμῶν των. Τὸ $t=12,7$ δευτερόλεπτα, $a=125$ μέτρα καὶ $g=9,81$ καὶ θὰ ἔχωμεν:

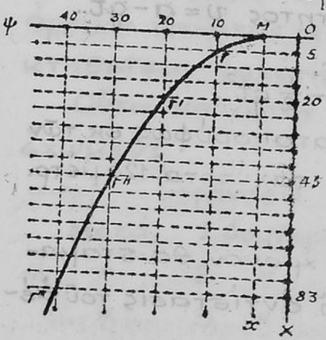
$$h=\left[125\times12,7\right]-\left[\frac{9.81\times12.7^2}{2}\right]=796,48 \text{ μέτρα}$$

3ον/ Ποίαν ταχύτητα θὰ ἔχῃ ὁ λίθος ὅταν ξαναπέσῃ ἐπὶ τοῦ ἐδάφους;

Ἐφαρμόζομεν τὸν τύπον $\upsilon=\sqrt{2gh}$ καὶ ἔχομεν:

$$\upsilon=\sqrt{2\times9,81\times796,48}=125 \text{ μέτρα}$$

22.– Γραφικὴ παράστασις τῆς ὁμαλῶς μεταβαλλομένης κινήσεως. Τὴν ὁμαλὴν μεταβαλλομένην κίνησιν δυνάμεθα νὰ παραστήσωμεν γεωμετρικῶς, ὅπως καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς ὁμαλῆς κινήσεως. Ἐὰν π.χ. εἰς χρόνους 0'', 10'', 20'' τὰ διανυόμενα διαστήματα εἰς μέτρα εἶναι 0, 5, 20, 45, καὶ λάβομεν ἐπὶ μὲν τοῦ ἄξονος Οψ τοὺς χρόνους (σχ. 9), ἐπὶ δὲ τοῦ ἄξονος ΟΧ τὰ διαστήματα, θὰ ἔχωμεν τὰ σημεῖα Μ, Γ, Γ', Γ''...... Ἡ γραμμὴ ΜΓΓ'Γ''..... παριστᾷ τότε τὴν προηγουμένην ὁμαλῶς μεταβαλλομένην κίνησιν.



Σχ. 9.

23.– Προβλήματα πρὸς λύσιν.

1/ Μὲ ποίαν ταχύτητα κινεῖται ἄνθρωπος περιπατῶν, ὁ ὁποῖος εἰς 3 ὥρ. διανύει διάστημα 16200 χιλιομέτρων;

(Ἀποκρ. $\upsilon=1,50$ μέτρα)

2/ Πόσον χρόνον χρειάζεται φωτεινή ἀκτίς διά νά φθάσῃ ἐκ τοῦ Ἡλίου εἰς τήν Γῆν, δεδομένου ὅτι ἡ ἀπόστασις τοῦ Ἡλίου ἀπό τῆς Γῆς εἶναι 149.400.000 χιλιόμετρα καί ὅτι τό φῶς διανύει 300.000 χιλιόμετρα κατά δευτερόλεπτον; (Ἀπ. $t = 493$ δευτερολ.)

3/ Ποίαν διάμετρον πρέπει νά δώσωμεν εἰς μυλόπετραν ἵνα εἰς γραμμικήν ταχύτητα τῆς περιφερείας της 9 μέτρων, ἐκτελεῖ 122 στροφάς κατά λεπτόν;

(Ἀπ. Διαμετρ. = 1,41 μέτρα)

4/ Ποία εἶναι ἡ ταχύτης ἁμαξοστοιχίας, τῆς ὁποίας οἱ κινητήριοι τροχοί ἔχουσι διάμετρον ἕκαστος 2 μέτρων, καί οἱ ὁποῖοι ἐκτελοῦν 159 στροφάς κατά λεπτόν;

(Ἀπ. $\upsilon = 16,64$ μέτρα)

5/ Κινητόν διανύει διάστημα 0,56 μέτρων εἰς τό 1/4 τοῦ δευτερολέπτου. Ποία ἡ ταχύτης του κατά τήν διαδρομήν; (Ἀπ. $\upsilon = 2,24$ μέτρα

6/ Ὀδοντωτός τροχός κινεῖται μέ γωνιώδη ταχύτητα 5, πόσας στροφάς ἐκτελεῖ κατά λεπτόν;

(Ἀπ. 47,7)

7/ Τροχός κινεῖται μέ γωνιώδη ταχύτητα ἴσην πρός 6. Ποία θά εἶναι ἡ γραμμική ταχύτης σημείου κειμένου εἰς ἀπόστασιν 0,98 μέτρου ἀπό τοῦ ἄξονος;

(Ἀπ. 5,98 μέτρα)

8/ Λίθος ἀφίεται νά πέσῃ ἐξ ὕψους 100 μέτρων. Ποία ἡ κτηθεῖσα ταχύτης αὐτοῦ κατά τήν στιγμήν τῆς πτώσεως ἐπί τοῦ ἐδάφους, καί ποία ἡ διάρκεια τῆς πτώσεως; (Ἀπ. $\upsilon = 44,29$ καί $t = 4,5''$)

9/ Λίθος ἀφίεται νά πέσῃ ἐντός φρέατος. Μετά 3 δευτερόλεπτα ἀκούγεται ὁ κρότος τῆς ἐπαφῆς τοῦ λίθου μετά τοῦ ὕδατος τοῦ φρέατος. Ποῖον τό βάθος τοῦ φρέατος, δεδομένου ὅτι ὁ ἦχος ἔχει ταχύτητα

340 μέτρων κατά δευτερόλεπτον;

(Απ. βάθος φρέατος = 41,20 μ.)

10/ Σώμα έπιπλέον έπί τής έπιφανείας ρεύματος ύδατος, διανύει 3.600 χιλιόμετρα άνά ήμίσειαν ώραν. Ποία ή μέση ταχύτης τού ύδατίνου ρεύματος;

(Άπ. $v = 2$ μέτρα)

11/ Ή διαδρομή τού έμβόλου άτμομηχανής είναι 0,60 μέτρα. Ό στρόφαλος έκτελεί 50 στροφάς κατά λεπτόν. Νά ύπολογισθή ή μέση ταχύτης τού έμβόλου, δεδομένου ότι διανύει 2 φοράς τήν διαδρομήν άνά πάσαν στροφήν τού στροφάλου. (Άπ. $v = 1$ μέτρον).

12/ Άμαξοστοιχία άναχωρεί άπό τάς Αθήνας τήν 8 ώραν καί 5', καί φθάνει είς Λάρισσαν τήν 2 ώρ. 32'. Ή άπόστασις μεταξύ τών δύο πόλεων είναι 352 χιλιόμετρα. Νά ύπολογισθή ή μέση ταχύτης τής άμαξοστοιχίας.

(Άπ. $v = 15,15$ μέτρα)

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙ

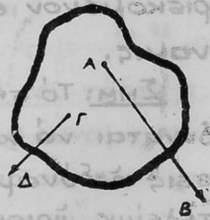
ΠΕΡΙ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

24.- Φύσις δυνάμεων. Είς τήν φύσιν ύπάρχει ποικιλία δυνάμεων. Όταν ζώον σύρει σώμα τι, λέγομεν ότι τούτο έξασκεί δύναμίν τινα έπί τού συρομένου σώματος. Ό άνεμος έξασκεί δύναμιν έπί τού φυλλώματος τών δένδρων καί κινεί αύτά. Ή δύναμις τού άτμού κινεί τάς άτμομηχανάς. Ή δύναμις τού έξ ύψους πίπτοντος ύδατος κινεί τούς ύδρομύλους.

Έάν κάμψωμεν έλασμα χαλύβδινον, τότε κατά τήν κάμψιν τού έλάσματος άναπτύσσεται δύναμις ήτις τείνει νά έπαναφέρη αύτό είς τήν άρχικήν του κατάστασιν, ἡ δύναμις αὕτη καλεῖται ἐλαστική δύναμις. Τά σώματα ἀφιέμενα ἐλεύθερα πίπτουν πρός τά κάτω, λόγῳ τῆς δυνάμεως τῆς βαρύτητος. ἐάν ὅμως κρατῶμεν τό σῶμα διά τῆς χειρός μας, δέν συμβαίνει πτῶσις, ἕνεκα τοῦ ὅτι ἡ δύναμις τῆς βαρύτητος ἐξουδετεροῦται ἀπό τήν δύναμιν τῶν μυῶν ἡμῶν.

Γνωρίσματα δυνάμεως. εἰς κάθε δύναμιν διακρίνομεν 1ον) τήν ἔντασιν, ἤτοι τό μέγεθος αὐτῆς σχετικῶς πρός ἄλλην δύναμιν τήν ὁποίαν λαμβάνομεν ὡς μονάδα. 2ον) Τό σημεῖον τῆς ἐφαρμογῆς τῆς δυνάμεως καί 3ον) Τήν διεύθυνσιν αὐτῆς.

Γραφικῶς παριστάνομεν μίαν δύναμιν, διά τμήματος εὐθείας ΑΒ (σχ. 10) ὑπό μορφήν βέλους, τό μῆκος τῆς εὐθείας εἶναι ἀνάλογον πρός τήν ἔντασιν τῆς δυνάμεως. Ἡ ἀρχή Α παριστᾷ τό σημεῖον τῆς ἐφαρμογῆς καί ἡ διεύθυνσις τοῦ βέλους, τήν διεύθυνσιν τῆς δυνάμεως. Οὕτω εἰς τό (σχ. 10) ἡ δύναμις ΑΒ εἶναι διπλασία κατά τήν ἔντασιν τῆς δυνάμεως ΓΔ, διά τοῦτο καί τό τμῆμα ΑΒ εἶναι διπλάσιον τοῦ ΓΔ.



Σχ. 10.

25.— Ἰσορροπία δυνάμεων. Ὅταν δύο ἤ περισσότερα δυνάμεις εἶναι ἐφηρμοσμέναι ἐπί στερεοῦ σώματος καί τό σῶμα ὑπό τήν ἐνέργειαν αὐτῶν δέν τίθεται εἰς κίνησιν, λέγομεν ὅτι αἱ δυνάμεις ἰσορροποῦσιν ἀλλήλας ἤ ὅτι εὑρίσκονται ἐν ἰσορροπίᾳ.

Ὅταν λ.χ. δύο ἤ περισσότεροι ἄνδρες σύρωσι κατ' ἀντιθέτους διευθύνσεις τήν διελκυστίνδα, ἐφ' ὅσον δεν ὑπερισχύει καμμία ἐκ τῶν ἀντιθέτων διευθύνσεων καθ' ἅς σύρεται τό σχοινίον, καί τοῦτο ἀκινητεῖ, αἱ ἐπὶ τοῦ σχοινίου ἐφηρμοσμέναι δυνάμεις ἰσορροποῦσιν ἀλλήλας.

Δύο δυνάμεις ἴσαι καὶ ἀντίθετοι $Δ_1$ καὶ $Δ_2$ ἐνεργοῦσαι εἰς τὰ ἄκρα εὐθείας τινὸς ΑΒ καὶ κατὰ τὴν διεύθυνσίν της ἐξουδετεροῦσιν ἀλλήλας ἤτοι ἰσορροποῦσι. Παῖς π.χ. ὠθεῖ νὰ ἀνοίξῃ θύραν τινά. Ἕτερος ὅμως παῖς ἐκ τοῦ ἀντιθέτου μέρους τῆς θύρας ὠθεῖ ταύτην ἵνα μὴ ἀνοιχθῇ. Ἐὰν οὐδεὶς ὑπερνικᾷ, ἡ θύρα δὲν θὰ μετακινηθῇ καὶ αἱ ἐπὶ τῆς θύρας ἐφηρμοσμέναι δυνάμεις ἰσορροποῦσιν ἀλλήλας ὡς ἴσαι καὶ ἀντίθετοι.

Ὡς σημεῖον ἐφαρμογῆς δυνάμεως τινὸς $Δ_1$, ἐνεργούσης ἐπὶ στερεοῦ σώματος δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν οἱονδήποτε σημεῖον Ο' τοῦ σώματος, εὑρισκόμενον ἐπὶ τῆς εὐθείας καθ' ἣν ἐνεργεῖ ἡ δύναμις.

<u>Σημ</u>: Τὸ σημεῖον τῆς ἐφαρμογῆς δυνάμεως τινὸς δύναται νὰ καθορισθῇ. Μόνον εἰς σπανίας περιπτώσεις ἡ δύναμις ἔχει πράγματι σημεῖον ἐφαρμογῆς τελείως ὡρισμένον (τὸ κέντρον βάρους λ.χ.).

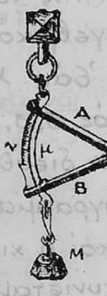
Γενικῶς ὡς σημεῖον ἐφαρμογῆς μιᾶς δυνάμεως δυνάμεθα νὰ λάβωμεν αὐθαιρέτως, οἱονδήποτε σημεῖον τῆς εὐθείας, καθ' ἣν ἐνεργεῖ.

26. <u>Μέτρησις τῶν δυνάμεων.</u> Πρὸς μέτρησιν τῆς ἐντάσεως τῶν δυνάμεων λαμβάνεται δύναμίς τις ὡς μονὰς καὶ πρὸς αὐτὴν συγκρίνονται αἱ λοιπαί. Ὡς τοιαύτη μονὰς λαμβάνεται συνήθως τὸ βάρος, τὸ καλούμενον χιλιόγραμμον.

Τὸ δὲ χιλιόγραμμον εἶναι τὸ βάρος περίπου ἑνὸς λίτρου ὕδατος ἀπεσταγμένου καὶ θερμοκρασίας 4° (312,5 δράμια)

Πρός σύγκρισιν καί μέτρησιν τῶν δυνάμεων χρησιμοποιοῦμεν ὄργανα τά ὁποῖα ὀνομάζομεν δυναμόμετρα. Τό ἁπλούστερον δυναμόμετρον, ἀποτελεῖται ἐκ χαλυβδίνου ἐλάσματος ὑπό μορφήν γωνίας (σχ. 11).

Εἰς τό ἕν ἄκρον τοῦ ἐλάσματος, προσαρμόζεται σιδηροῦν τόξον μ, ἀπολῆγον εἰς κλοιόν, ἐκ τοῦ ὁποίου ἀναρτᾶται τό ὄργανον. Εἰς τό ἕτερον ἄκρον προσαρμόζεται ἐπίσης ἕτερον τόξον ν, τό ὁποῖον διέρχεται ἐλευθέρως διά τοῦ πρώτου ἄκρου. Ἐάν ἐκ τοῦ ἄκρου τοῦ τόξου μ, ἐξαρτήσωμεν βάρος τι, τότε τά δύο ἄκρα τοῦ ἐλάσματος πλησιάζουσι πρός ἄλληλα τόσον περισσότερον, ὅσον τό βάρος τοῦτο εἶναι μεγαλήτερον.



Σχ. 11

Τό ἴδιο συμβαίνει ἐαν τό ἄκρον τοῦ τόξου μ, σύρεται ὑπό ἄλλης δυνάμεως. Ὅταν δέ ἡ δύναμις αὕτη παράγη τό αὐτό ἀποτέλεσμα τό ὁποῖον παράγει ὡρισμένον βάρος, ἡ δύναμις ἔχει ἔντασιν ἴσην πρός τό βάρος τοῦτο. Ἀριθμοί χαραγμένοι ἐπί τοῦ τόξου ν, δεικνύουν τήν ἔντασιν τῆς δυνάμεως, ἡ ὁποία ἐπιφέρει τήν ἀντιστοιχοῦσαν κάμψιν.

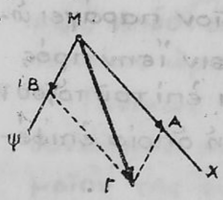
27.- Σύνθεσις καί ἀνάλυσις δυνάμεων.

Σύνθεσις δυνάμεων. Πολλάκις δυνάμεθα νά ἀντικαταστήσωμεν δύο ἤ περισσοτέρας δυνάμεις διά μιᾶς καί μόνης, ἡ ὁποία νά ἐπιφέρῃ τό αὐτό ἀποτέλεσμα, τό ὁποῖον ἐπέφερον καί αἱ δύο ἤ αἱ περισσότεραι ὅταν ἐνήργουν ταυτοχρόνως. Ἡ ἀντικατάστασις αὕτη καλεῖται σύνθεσις τῶν δυνάμεων. Αἱ ἀντικαθιστάμεναι δυνάμεις καλοῦνται συνιστῶσαι, ἐκείνη δέ ἡ ὁποία τάς ἀντικαθιστᾶ καλεῖται συνισταμένη αὐτῶν.

Περίπτωσις 1η. Αἱ δυνάμεις κεῖνται ἐπί τῆς αὐτῆς εὐθείας. Ὅταν δύο ἤ περισσότεραι δυνάμεις κεῖνται ἐπί τῆς αὐτῆς εὐθείας, δυνάμεθα νά τάς ἀντικαταστήσωμεν ὑπό μιᾶς μόνον δυνάμεως, ἡ ὁποία νά παράγῃ τό αὐτό ἀποτέλεσμα. Ἡ συνισταμένη λοιπόν τῶν δύο ἤ περισσοτέρων δυνάμεων κεῖται ἐπί τῆς ἰδίας εὐθείας, ἡ δέ ἔντασίς της ἰσοῦται πρός τό ἀλγεβρικόν ἄθροισμα τῶν ἐντάσεων τῶν συνιστωσῶν.

Ἐάν λ.χ. αἱ συνιστῶσαι δυνάμεις ἔχουν ἐντάσεις ἴσας πρός 5, 3, 7, 2, καί 6 χιλιόγραμμα καί ὅλαι ἔχουσι τήν αὐτήν διεύθυνσιν, τότε ἡ συνισταμένη εἶναι ἴση πρός 23 χιλιόγραμμα. Ἐάν ἡ διεύθυνσις δυνάμεων τινων π.χ. αἱ τῶν 2 καί 6 χιλιογράμμων εἶναι ἀντίθετος πρός τάς ἄλλας, ἡ συνισταμένη θά ἰσοῦται τότε μέ τήν διαφοράν τῶν μερικῶν ἀθροισμάτων δηλαδή 15-8 =7 χιλιόγραμμα.

Περίπτωσις 2α. Ὅταν αἱ δυνάμεις εἶναι ἐφηρμοσμέναι ἐπί ἑνός σημείου. Ἔστωσαν δύο δυνάμεις ΜΑ καί ΜΒ ἐφηρμοσμέναι ἐπί τοῦ σημείου Μ (σχ. 12). Διά νά εὕρωμεν τήν συνισταμένην αὐτῶν σχηματίζομεν τό παραλληλόγραμμον τῶν δύο δυνάμεων, ἐκ τοῦ ἄκρου Α τῆς δυνάμεως ΜΑ φέρομεν παράλληλον πρός τήν δύναμιν ΜΒ, καί ἐκ τοῦ ἄκρου Β, της ΜΒ φέρομεν παράλληλον πρός τήν ΜΑ.



Σχ. 12.

οὕτω σχηματίζεται τό παραλληλογραμμον ΜΑΓΒ. Ἡ διαγώνιος ΜΓ τοῦ παραλληλογράμμου, παριστᾶ κατ' ἔντασιν καί διεύθυνσιν, τήν συνισταμένην τῶν δύο δυνάμεων ΜΑ καί ΜΒ.

Ἡ ἔντασις τῆς συνισταμένης ταύτης ὑπολογίζεται μόνον τριγωνομετρικῶς διά τοῦ τύπου:

$$\overline{M\Gamma} = \sqrt{\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 + 2\,\overline{MA}\cdot\overline{MB}\cdot \text{συν.ημ.}\,\omega}$$

ἔνθα ω εἶναι ἡ γωνία ἡ σχηματιζομένη ὑπό τῶν δύο δυνάμεων.

Παράδειγμα. Ἐφ' ἑνός ὑλικοῦ σημείου, εἶναι ἐφηρμοσμέναι δύο δυνάμεις 30 καί 40 χιλιογράμμων, σχηματίζουσαι γωνίαν 22°. Ζητεῖται ἡ ἔντασις τῆς συνισταμένης.

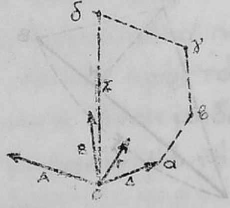
Ἡ συνισταμένη $\Sigma = \sqrt{30^2 + 40^2 + (2\times 30\times 40)\cdot \text{συν}\,22^\circ} = 68{,}74$

Ἐάν ἡ γωνία εἶναι 90°, τότε ἡ συνισταμένη Σ ἰσοῦται:

$$\Sigma^2 = B^2 + \Gamma^2 \quad \text{ἤ} \quad \Sigma = \sqrt{B^2 + \Gamma^2}$$

Περίπτωσις 3η. Ὅταν πολλαί δυνάμεις εἶναι ἐφηρμοσμέναι ἐπί ἑνός σημείου. Τότε εὑρίσκομεν κατ' ἀρχάς τήν συνισταμένην μόνον δύο δυνάμεων, εἶτα συνθέτομεν ἑτέραν δύναμιν μετά τῆς εὑρεθείσης συνισταμένης καί οὕτω καθ' ἑξῆς. Καθ' ἑκάστην σύνθεσιν ὁ ἀριθμός τῶν δυνάμεων ἐλαττοῦται κατά μίαν, ἐπομένως τό σύστημα τῶν δυνάμεων ἀνάγεται εἰς μίαν μόνην ἥτις εἶναι ἡ ζητουμένη συνισταμένη.

Περίπτωσις 4η. Πολύγωνον δυνάμεων. Ἔστωσαν αἱ δυνάμεις Α, Β, Γ, Δ, ἐφηρμοσμέναι ἐπί τοῦ ὑλικοῦ σημείου Ο, αἵτινες σχηματίζουσι μεταξύ των γωνίας. Διά νά προσδιορίσωμεν τήν συνισταμένην Σ ἀκολουθοῦμεν τόν ἑξῆς τρόπον. Ἐκ τοῦ ἄκρου α τῆς δυνάμεως Δ (σχ. 13) ἄγομεν εὐθεῖαν αβ παράλληλον, ἴσην καί τῆς αὐτῆς φορᾶς πρός τήν Γ. Ἐκ τοῦ ἄκρου β φέρομεν παράλληλον βγ καί ἴσην καί τῆς αὐτῆς φορᾶς πρός τήν Β. Ἐκ τοῦ ἄκρου γ ἐπίσης φέρομεν εὐθεῖαν γδ παράλληλον, ἴσην καί τῆς αὐτῆς φορᾶς πρός τήν Α. Ἑνοῦμεν τά σημεῖα δ καί Ο δι' εὐθείας, ἡ ὁποία θά εἶναι ἡ συνισταμένη τῶν δυνάμεων Α, Β, Γ, Δ.–



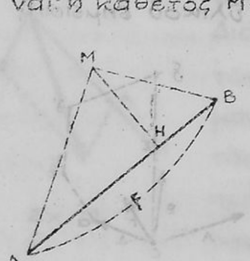
Σχ. 13.

Ὅταν πολλαὶ δυνάμεις ἐνεργῶσι ἐφ' ἑνὸς σημείου ὑλικοῦ O, ἐὰν κατασκευασθῇ ἐν τῷ διαστήματι ἐπίπεδος ἢ στρεβλὴ γραμμὴ τῆς ὁποίας αἱ ἐφ' ἑξῆς πλευραὶ νὰ ὦσι ἴσαι καὶ παράλληλαι πρὸς τὰς δοθείσας δυνάμεις, ἡ κλείουσα τὸ πολύγωνον εὐθεῖα παριστᾷ κατά τε τὴν ἔντασιν διεύθυνσιν καὶ φορὰν τὴν συνισταμένην τοῦ συστήματος.

Ἐὰν ἐκ τῆς προηγουμένης κατασκευῆς εὕρωμεν πολύγωνον κλειστὸν συμπεραίνομεν ὅτι ἡ συνισταμένη εἶναι μηδέν, ἑπομένως τὸ σύστημα τῶν δυνάμεων εὑρίσκεται ἐν ἰσορροπίᾳ.

28. – Περὶ ῥοπῶν

Καλοῦμεν ῥοπὴν μιᾶς δυνάμεως ὡς πρὸς σημεῖον, τὸ γινόμενον τῆς ἐντάσεως τῆς δυνάμεως ἐπὶ τὴν ἀπόστασιν τοῦ σημείου κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς δυνάμεως. Ἔστω λ.χ. ἡ δύναμις F ἥτις παρίσταται κατ' ἔντασιν καὶ διεύθυνσιν ὑπὸ τοῦ τμήματος τῆς εὐθείας AB καὶ σημεῖον τι M (σχ. 14). Ἡ ἀπόστασις τοῦ M ἀπὸ τὴν AB, εἶναι ἡ κάθετος MH. Τὸ γινόμενον τῆς δυνάμεως F ἐπὶ τὴν ἀπόστασιν MH εἶναι ἡ ῥοπὴ τῆς δυνάμεως F ὡς πρὸς τὸ σημεῖον M.



Σχ. 14.

ῥοπὴ $F = F \times MH$

Ἡ ῥοπὴ συνεπῶς ἐκφράζεται ἀπὸ ἓν γινόμενον, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ διπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου MAB.

Ἡ ἔννοια τῆς ῥοπῆς εἶναι πολὺ ἐνδιαφέρουσα εἰς τὴν Μηχανικὴν καὶ διὰ τοῦτο θὰ σπουδάσωμεν αὐτὴν καλλίτερον.

Ἔστωσαν δύο δυνάμεις F καὶ f ἐφηρμοσμέναι ἐπὶ τοῦ σημείου O, καὶ OR ἡ συνισταμένη αὐτῶν. Ἐπὶ τῆς συνισταμένης OR λαμβάνομεν σημεῖον τι M καὶ ἐκ τούτου φέρομεν τὰς ἀποστάσεις δ καὶ Δ, τοῦ σημείου ἀπὸ τάς δυνάμεις f_1 καί F', τότε συμφώνως πρός τόν ὁρισμόν τῶν ῥοπῶν ἔχομεν: (σχ.14α)

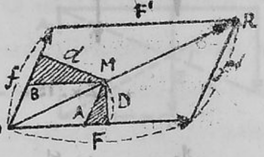
ῥοπή τῆς $f = f.\delta$ ἤ $f \times \delta$

ῥοπή τῆς $F = F \cdot \Delta$ ἤ $F \times \Delta$

θά ἀποδείξωμεν ὅτι αἱ δύο αὗται ῥοπαί εἶναι ἴσαι, δηλαδή ὅτι

$$f \cdot \delta = F \cdot \Delta$$

φέρομεν τάς εὐθείας MB καί MA παραλλήλους ἀντιστοίχως πρός τάς δυνάμεις F καί f. Τά σχηματιζόμενα τρίγωνα (μέ σκιάν) εἶναι ὀρθογώνια καί ὅμοια, διότι ἔχουσι μίαν ὀξεῖαν γωνίαν ἴσην ($\hat{B} = \hat{A}$) καί πλευράς παραλλήλους.



σχ. 14α.

Καλοῦμεν f' καί F' τάς ἀπέναντι πλευράς τῶν δυνάμεων αἱ ὁποῖαι εἶναι καί ἴσαι $f = f'$ καί $F = F'$, συνεπῶς δυνάμεθα νά γράψωμεν τήν σχέσιν:

$$\frac{f'}{F'} = \frac{f}{F} = \frac{MA}{OA} = \frac{MA}{MB} = \frac{\Delta}{\delta} \quad (\text{διότι } OA = MB)$$

ἐξ οὗ ἔχομεν: $\frac{f}{F} = \frac{\Delta}{\delta}$ ἤ $f \times \delta = F \times \Delta$

ἤ $f\delta = F \times \Delta$ ὅπερ ἐπρόκειτο νά ἀποδείξωμεν.

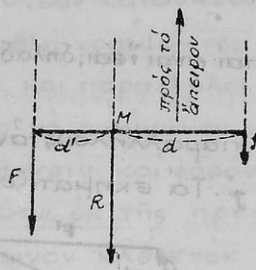
Ἑπομένως, αἱ ῥοπαί δύο συνιστωσῶν δυνάμεων, ὡς πρός σημεῖον τι τῆς συνισταμένης αὐτῶν εἶναι ἴσαι.

Ὅταν ἡ γωνία τῶν συνιστωσῶν δυνάμεων εἶναι πολύ ὀξεῖα, ἡ συνισταμένη αὐξάνει καί τείνει πρός τό ἄθροισμα τῶν συνιστωσῶν. Ὅταν ἡ γωνία εἶναι μηδέν, ἡ συνισταμένη ἰσοῦται ὡς πρός τήν ἔντασιν μέ τό ἄθροισμα τῶν συνιστωσῶν δυνάμεων.

Ὅταν ἡ γωνία εἶναι ἀμβλεῖα, ἡ συνισταμένη ἐλαττοῦται. Διά 180°, ἡ συνισταμένη ἰσοῦται ὡς πρός τήν ἔντασιν μέ τήν διαφοράν τῶν συνιστωσῶν.

<u>29. – Σύνθεσις δυνάμεων παραλλήλων καί τῆς αὐτῆς φορᾶς.</u> Ἐάν δύο δυνάμεις f καί F, παράλ-

λληλοι καί τῆς αὐτῆς φορᾶς εἶναι ἐφηρμοσμέναι ε
τά ἄκρα εὐθείας (σχ. 15), ἡ συνισταμένη αὐτῶν θά
σοῦται ὡς πρός τήν ἔντασιν μέ τό ἄθροισμα τῶν
συνιστωσῶν, ὡς πρός τήν φοράν
ἔχῃ τήν αὐτήν μέ τάς συνιστώ
καί τό σημεῖον ἐφαρμογῆς της θ
εὑρίσκεται εἰς τοιαύτην θέσιν ἐπ
τῆς εὐθείας ἐπί τῆς ὁποίας εἶνα
ἐφηρμοσμέναι αἱ δυνάμεις, ὥστε
τά δύο μέρη τῆς εὐθείας νά τέ
μνωνται εἰς μέρη ἀντιστρόφω
ἀνάλογα τῶν συνιστωσῶν δυνάμε



Σχ. 15.

Ἔστω M ἕν σημεῖον τῆς συνισταμένης (σχ. 15). Τότε ἐ
λάβωμεν τάς ῥοπάς τῶν δυνάμεων ὡς πρός τό ση-
μεῖον M, θά ἔχωμεν:

ῥοπή $fd = Fd'$ ἐξ οὗ $\frac{f}{F} = \frac{d'}{d}$

Ἡ σχέσις αὕτη σημαίνει ὅτι ἡ δύναμις f εἶναι μι-
κροτέρα τῆς F, ἡ ἀπόστασις δ τοῦ σημείου ἐφαρμο-
γῆς M ἀπό τῆς δυνάμεως f πρέπει νά εἶναι μεγαλ
τέρα τῆς d'. Τό σημεῖον δηλαδή τῆς ἐφαρμογῆς τῆ
συνισταμένης θά εὑρίσκεται πλησιέστερον τῆς μεγα-
λυτέρας δυνάμεως οὕτως ὥστε νά ἐπαληθεύῃ ἡ
σχέσις $\frac{f}{F} = \frac{d'}{d}$, τουτέστι αἱ δυνάμεις εἶναι ἀντιστρ
φως ἀνάλογοι τῶν ἀποστάσεων.

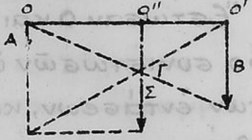
<u>Παράδειγμα</u>. Ἔστωσαν αἱ δυνά. εἰς $f = 4$ καί $F = 1($
ἐφηρμοσμέναι εἰς τά ἄκρα ῥάβδου ΑΒ. Ἐάν ἡ ἀπόστα
σις τῆς μικρᾶς δυνάμεως ἀπό τό σημεῖον ἐφαρμογῆ
συνισταμένης εἶναι $d = 5$ ἑκατοστομ. Νά εὑρεθῇ ἡ
ἀπόστασις τοῦ σημείου ἐφαρμογῆς ἀπό τῆς μεγα-
λυτέρας δυνάμεως.

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρου τύπου $f\delta = F \cdot d'$ ἔχομεν $4 \times 5 = d' \times 1($

ἢ $d' = \frac{4 \times 5}{10} = 2$ καὶ τοῦτο διότι $4 \times 5 = 2 \times 10$

30. – Γεωμετρικὴ εὕρεσις τῆς συνισταμένης δύο παραλλήλων δυνάμεων καὶ τῆς αὐτῆς διευθύνσεως ἐφηρμοσμένων ἐπὶ εὐθείας.

Ἔστωσαν Α καὶ Β αἱ δύο παράλληλοι καὶ τῆς αὐτῆς φορᾶς δυνάμεις (σχ. 16) και Ο καὶ Ο' τὰ σημεῖα ἐφαρμογῆς αὐτῶν. Τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς τῆς συνισταμένης προσδιορίζεται γεωμετρικῶς ὡς ἑξῆς:



σχ. 16.

Ἑνοῦμεν τὸ ἄκρον τῆς μιᾶς δυνάμεως ἔστω τῆς Β μετὰ τοῦ σημείου τῆς ἐφαρμογῆς Ο τῆς δυνάμεως Α. Λαμβάνομεν τὸ μῆκος τῆς δυνάμεως Β τὸ ὁποῖον προσθέτομεν εἰς τὴν προέκτασιν τῆς δυνάμεως Α ἑνοῦντες τὸ ἄκρον αὐτῆς μετὰ τοῦ Ο', αἱ δύο διαγώνιοι συναντῶνται εἰς τι σημεῖον Γ διὰ τοῦ ὁποίου διέρχεται ἡ συνισταμένη Σ, ἡ ὁποία εἶναι παράλληλος πρὸς τὰς διευθύνσεις τῶν δυνάμεων, καὶ τῆς ὁποίας ἡ ἔντασις ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν. Τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς τῆς συνισταμένης καθορίζεται διὰ τῆς κάτωθι ἀναλογίας:

$$\frac{A}{O'O''} = \frac{B}{OO''} \quad \text{ἢ} \quad A \cdot OO'' = B \cdot O'O''$$

<u>Παράδειγμα.</u> Νὰ προσδιορισθῇ τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς τῆς συνισταμένης Σ τῶν παραλλήλων δυνάμεων Α καὶ Β τῶν ὁποίων ἡ ἔντασις ἰσοῦται τῆς μὲν Α = 30 χιλιόγραμμα, τῆς δὲ Β = 70 χιλιόγραμμα, ἡ ἀπόστασις τῶν σημείων ἐφαρμογῆς τῶν δυνάμεων εἶναι 0,50 μέτρων.

Ὡς προηγουμένως εἴπομεν ἡ ἔντασις τῆς συνισταμένης Σ ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν συνιστωσῶν

ἤτοι: $\Sigma = 30 + 70 = 100$ χιλιόγραμμα.

Ὀνομάζοντες X τὴν ἀπόστασιν O''O, θὰ ἔχωμεν:

$$OO'' = 0{,}50 - X$$

καὶ ἀκολούθως: $\frac{30}{X} = \frac{70}{(0{,}50-X)}$ ἐξ ἧς $30(0{,}50-X) = 70X$

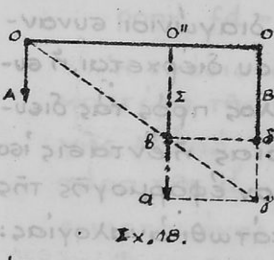
ἢ $15 - 30X = 70X$ καὶ $15 = 70X + 30X$ ἢ $15 = 100X$

καὶ $X = \frac{15}{100} = 0{,}15$ μέτρα

31.- Γεωμετρικὴ εὕρεσις τῶν συνιστωσῶν δοθείσης τῆς συνισταμένης.

Ἔστωσαν O καὶ O' (σχ. 17) τὰ σημεῖα ἐφαρμογῆς τῶν δύο συνιστωσῶν δυνάμεων, τῆς αὐτῆς φορᾶς ἀλλ' ἀγνώστων ἐντάσεων, καὶ O'' τὸ σημεῖον τῆς ἐφαρμογῆς τῆς δοθείσης συνισταμένης Σ.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ἔντασιν τῶν συνιστωσῶν φέρομεν ἐκ τοῦ ἄκρου a τῆς συνισταμένης παράλληλον πρὸς τὴν OO'. Ἐκ τοῦ σημείου O' τῆς ἐφαρμογῆς τῆς μιᾶς



Σχ. 18.

ἀγνώστου συνιστώσης φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν συνισταμένην Σ ἡ ὁποία συναντᾶται μετὰ τῆς παραλλήλου πρὸς τὴν OO' εἴς τι σημεῖον γ. Ἑνοῦμεν τὸ σημεῖον τοῦτο μετὰ τοῦ O δι' εὐθείας ἡ ὁποία τέμνει τὴν συνισταμένην εἰς τὸ σημεῖον β. Ἐκ τοῦ σημείου τούτου φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν aγ ἡ ὁποία τέμνει τὴν O'γ εἰς τὸ σημεῖον δ. Ἡ ἀπόστασις O'δ παριστᾶ καὶ κατὰ τὴν ἔντασιν καὶ κατὰ τὴν διεύθυνσιν τὴν μίαν ἐκ τῶν συνιστωσῶν παραλλήλων δυνάμεων B. Ἐπειδὴ ὅμως ἡ ἔντασις τῆς συνισταμένης ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν συνιστωσῶν, ἡ ἑτέρα ζητουμένη συνιστῶσα δύναμις ἰσοῦται πρὸς τὴν διαφορὰν Σ − B ἤτοι μὲ τὸ ὑπόλοιπον τμῆμα δγ τὸ ὁποῖον μεταφέρομεν ἐπὶ τοῦ σημείου ἐφαρμογῆς O. Τὸ τμῆμα τοῦτο θὰ ἰσοῦται μὲ τὴν ἑτέραν τῶν συνιστωσῶν δύναμιν Α.

Παράδειγμα. Ἄξων κινητηρίου μηχανῆς ὑποστηρίζεται διὰ δύο τριβέων ἀπεχόντων ἀπ' ἀλλήλων 2,70 μέτρα. Ἐπὶ τοῦ ἄξονος τούτου καὶ εἰς τὰ 3/4 τοῦ μήκους ἐφαρμόζεται δύναμις 500 χιλιογράμμων. Ποῖαι εἶναι αἱ πιέσεις ἃς ὑφίστανται οἱ τριβεῖς;

Ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου ἐφαρμογῆς τῆς μιᾶς δυνάμεως ἐκ τοῦ πλέον ἀπομεμακρυσμένου τριβέως ἰσοῦται μὲ

$$2{,}700\,\tfrac{3}{4} = 2{,}025 \text{ μέτρα}$$

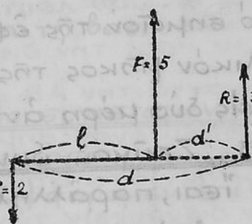
Καὶ τοῦ πλησιεστέρου $2{,}700 - 2{,}025 = 0{,}675$ μέτρα.

ἤτοι θὰ ἔχωμεν: $A = \frac{2{,}025}{2{,}700} \times 500 = 375$ χιλιόγραμμα

$$B = \frac{0{,}675}{2{,}700} \times 500 = 125 \quad \text{»}$$

32. – Σύνθεσις δύο δυνάμεων ἀνίσων παραλλήλων καὶ ἀντιθέτου φορᾶς.

Ὅταν δύο δυνάμεις εἶναι μὲν παράλληλοι ἀλλὰ ἀντιθέτου φορᾶς καὶ ἄνισοι, ὡς αἱ εἰς τὸ (σχ. 18) δυνάμεις f καὶ F, αὗται δύνανται νὰ συντεθῶσιν εἰς μίαν μόνην συνισταμένην R. Ἡ συνισταμένη αὕτη ἔχει ὡς ἔντασιν τὴν διαφορὰν τῶν ἐντάσεων τῶν συνιστωσῶν, εἶναι παράλληλος πρὸς ταύτας, ἔχει διεύθυνσιν τὴν τῆς μεγαλυτέρας ἐκ τῶν δύο καὶ τέμνει τὴν εὐθεῖαν, ἥτις ἑνώνει τὰ σημεῖα ἐφαρμογῆς τῶν συνιστωσῶν κατὰ τρόπον ὥστε νὰ ὑπάρχῃ πάντοτε ἡ σχέσις: $\frac{d}{d'} = \frac{f}{F}$ ἢ $dF = d'f$

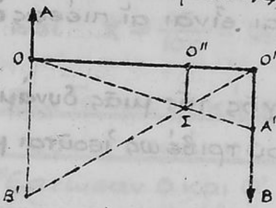


Σχ. 18.

Δηλ. αἱ ἀποστάσεις τοῦ σημείου ἐφαρμογῆς τῆς Συνισταμένης εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν δυνάμεων.

Γεωμετρικὴ εὕρεσις τῆς συνισταμένης εἰς τὴν ἀνωτέρω περίπτωσιν.

Ἔστωσαν Α καί Β (σχ. 19) δύο δυνάμεις ἀντιθέτου φορᾶς, ἐφηρμοσμέναι ἐπί τῶν σημείων Ο καί Ο'. Διά νά προσδιορίσωμεν τό σημεῖον ἐφαρμογῆς καί τήν ἔντασιν τῆς συνισταμένης γεωμετρικῶς ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς:

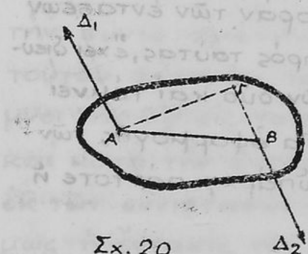


Σχ. 19.

Ἐπί τῆς προεκτάσεως τῆς δυνάμεως Α λαμβάνομεν μῆκος εὐθείας ἴσον πρός τήν δύναμιν Β ἑνοῦντες τό ἄκρον αὐτῆς Β' μετά τοῦ Ο'. Ἐπί τῆς δυνάμεως Β λαμβάνομεν μῆκος ἴσον πρός τήν δύναμιν Α τῆς ὁποίας τό ἄκρον Α' ἑνοῦμεν μετά τοῦ Ο. Ἡ ἐκ τοῦ σημείου Σ τῆς συναντήσεως τῶν δύο διαγωνίων ἀπόστασις μέχρι τοῦ σημείου Ο'' παριστᾶ τήν ἔντασιν τῆς συνισταμένης.

Τό σημεῖον τῆς ἐφαρμογῆς τῆς συνισταμένης διαιρεῖ τό ὁλικόν μῆκος τῆς εὐθείας τῆς ἑνούσης τάς συνιστώσας εἰς δύο μέρη ἀντιστρόφως ἀνάλογα τῶν συνιστωσῶν.

33.- Ζεῦγος δυνάμεων. Ἐάν δύο δυνάμεις $Δ_1$ καί $Δ_2$ εἶναι ἴσαι, παράλληλοι καί ἀντιθέτου φορᾶς, ἐφηρμοσμέναι ἐπί σώματος, τότε αἱ δυνάμεις αὗται δέν συντίθενται καί λέγομεν ὅτι ἀποτελοῦσι ζεῦγος δυνάμεων. Τό ζεῦγος δυνάμεων τείνει νά δώσῃ εἰς τό σῶμα περιστροφικήν κίνησιν.



Σχ. 20.

Ροπή τοῦ ζεύγους καλεῖται τό γινόμενον μιᾶς τῶν δυνάμεων ἐπί τήν ἀπόστασιν αὐτῶν. Δηλ. ῥοπή τοῦ ζεύγους τοῦ (σχ. 20) εἶναι τό γινόμενον $Δ_1 \times ΑΓ$ ἔνθα ΑΓ εἶναι ἡ ἀπόστασις μεταξύ τῶν δύο δυνάμεων.

Τό ἀποτέλεσμα ζεύγους, ἐνεργοῦντος ἐπί σώματος, δυναμένου νά κινηθῇ περί σημεῖον τι, ἐξαρτᾶται ὄχι μόνον ἐκ τῆς ἐντάσεως τῶν δυνάμεων, ἀλλά καί ἐκ τῆς ἀποστάσεως αὐτῶν. Ἡ ῥοπή μετρᾷ τήν ἱκανότητα τοῦ ζεύγους πρός περιστροφήν τοῦ σώματος. Ἐάν ἡ ἀπόστασις τῶν δύο δυνάμεων εἶναι μηδέν καί ἡ ἱκανότης τοῦ ζεύγους πρός περιστροφήν τοῦ σώματος εἶναι μηδέν.

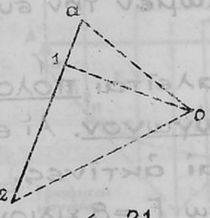
Ἡ δρᾶσις τοῦ ζεύγους εἶναι μεγάλη, ὅταν καί ἡ ἀπόστασις τῶν δυνάμεων εἶναι μεγάλη.

34.- Ἀνάλυσις δυνάμεων. Καλοῦμεν ἀνάλυσιν δυνάμεώς τινος τήν ἀντικατάστασιν ταύτης ὑπό δύο ἤ περισσοτέρων δυνάμεων, αἱ ὁποῖαι νά παράγωσι τό αὐτό ἀποτέλεσμα, τό ὁποῖον παράγει ἡ δοθεῖσα δύναμις.

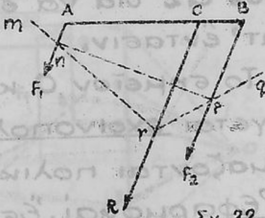
Ἡ ἀνάλυσις εἶναι ἡ ἀντίθετος πρᾶξις τῆς συνθέσεως καί δύναται νά γίνῃ ἐπί τῇ βάσει τῶν προηγουμένως ἀναπτυχθέντων.

35.- Πρακτική εὕρεσις τῆς συνισταμένης δύο δυνάμεων παραλλήλων καί ὁμορρόπων.

α/ ἐξ ἑνός σημείου α (σχ.21) φέρομεν ἐπί μιᾶς παραλλήλου πρός τήν διεύθυνσιν τῶν δυνάμεων καί ἐν συνεχείᾳ, τά τμήματα α1, καί α2 τά ὁποῖα παριστοῦν ἀντιστοίχως



Σχ. 21.



Σχ. 22

τάς δυνάμεις F_1 καί F_2. Ἡ ἔντασις τῆς συνισταμένης R, μᾶς δίδεται ἀπό τό μῆκος α·2 ἀφοῦ:

$$α2 = α1 + 1.2 = F_1 + F_2 = R$$

β/ Σημεῖον ἐφαρμογῆς. Πρός τοῦτο δεχόμεθα τὴν ἑξῆς κατασκευὴν ἥτις ὀνομάζεται μέθοδος <u>Γραφοστατική.</u>

Ἀφοῦ ὅπως ἀνωτέρω εἴπομεν λάβωμεν τὰ τμήματα α,1,2, τότε λαμβάνομεν ἓν οἱονδήποτε σημεῖον Ο εἰς τὸ ἐπίπεδον τοῦ σχήματος καὶ συνδέομεν τὰ σημεῖα α, 1, 2, μετὰ τοῦ Ο, φέρομεν δηλαδὴ τὰς Οα, Ο1 καὶ Ο2.

Ἐκ τοῦ σημείου n, τὸ ὁποῖον λαμβάνομεν αὐθαιρέτως ἐπὶ τῆς διευθύνσεως F_1 (σχ. 22) φέρομεν τὴν mn, παράλληλον πρὸς τὴν Οα, κατόπιν np παράλληλον πρὸς τὴν Ο1. Ἡ np συναντᾷ τὴν F_2 εἰς τὸ σημεῖον p, φέρομεν τὴν pq παράλληλον πρὸς τὴν Ο2. Αἱ δύο εὐθεῖαι mn καὶ pq προεκτεινόμεναι συναντῶνται εἰς ἓν σημεῖον r, τοῦτο εὑρίσκεται ἀκριβῶς ἐπὶ τῆς διευθύνσεως τῆς R. Ἐὰν λοιπόν, διὰ τοῦ r, φέρομεν μίαν παράλληλον πρὸς τὴν διεύθυνσιν τῶν δυνάμεων, ἡ εὐθεῖα αὕτη συναντᾷ τὴν ΑΒ εἰς τὸ σημεῖον C, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ζητούμενον σημεῖον τῆς ἐφαρμογῆς τῆς συνισταμένης. Τότε ἀρκεῖ νὰ φέρωμεν ἐπὶ τῆς Cr καὶ κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῶν F_1 καὶ F_2, ἓν μῆκος CR ἴσον πρὸς α2 διὰ νὰ ἔχωμεν τὴν συνισταμένην R καὶ κατ' ἔντασιν.

Τὸ σημεῖον Ο καλεῖται <u>πόλος</u>. Ἡ γραμμὴ mnpq λέγεται <u>σχοινοπολύγωνον</u>. Αἱ εὐθεῖαι Οα, Ο1, Ο2 ὀνομάζονται πολικαὶ ἀκτῖνες.

<u>Ἐφαρμογαί</u>. Ἔστω $F_1 = 8$ χιλιογρ., $F_2 = 24$ χιλιόγραμμα. ΑΒ = 0,28 μέτρα, (κλῖμαξ $\frac{1}{10}$ διὰ τὰ μήκη καὶ 1 χιλιοστὸν κατὰ χιλιόγραμμον).

Αἱ μετρήσεις τοῦ σχήματος 22 δεικνύουν ὅτι:

1ον/ R παρίσταται διὰ τοῦ τμήματος α2 μήκους 32 χιλιοστῶν τοῦ μέτρου, καὶ συνεπῶς R = 32 χιλιόγραμ.

2ον/ CA = 0,21 μέτρα, CB = 0,07 μέτρα

<u>Ἄσκησις πρὸς λύσιν.</u> Δοκὸς ἄνευ βάρους, ἔχουσα μῆκος 0,60 μέτρα, φέρει εἰς τὰ δύο ἄκρα της A καὶ B δύο σφαίρας βάρους 10 χιλιογράμμων καὶ 15 χιλιογράμμων. Νὰ προσδιορισθῇ ἡ συνισταμένη τῶν δύο αὐτῶν βαρῶν.

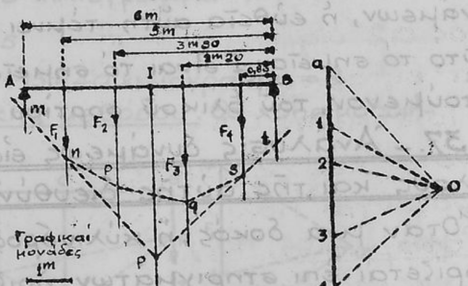
(Ἀπ. R = 25 χιλιογρ. CA = 0,36 μ.)

36.- Περίπτωσις πολλῶν δυνάμεων παραλλήλων καὶ ὁμορρόπων. Κατ' ἀρχὰς κάμνομεν σύνθεσιν δύο δυνάμεων, τῶν συνισταμένων αὐτῶν συνθέτομεν μὲ τὴν τρίτην δύναμιν καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς, μέχρις ὅτου συνθέσωμεν ὅλας τὰς δυνάμεις καὶ συνεπῶς θὰ εὕρωμεν τὴν συνισταμένην ὅλων τῶν δυνάμεων. Ἡ συνισταμένη αὐτὴ ἔχει τὰς ἑξῆς ἰδιότητας.

1) Εἶναι παράλληλος καὶ ὁμόρροπος πρὸς τὰς συνιστώσας

2) Ἡ ἔντασίς της εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἐντάσεων τῶν συνιστωσῶν δυνάμεων.

3) Τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς τῆς συνισταμένης, ὀνομάζεται <u>κέντρον τῶν παραλλήλων δυνάμεων</u> καὶ εὑρίσκεται ὡς καὶ τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς τῆς συνισταμένης δύο δυνάμεων παραλλήλων καὶ διὰ τῆς γραφοστατικῆς μεθόδου.



σχ. 23.

<u>Πρόβλημα.</u> Δοκὸς AB (σχ. 23) μήκους 6 μέτρων, ὑφίσταται εἰς τὰ σημεῖα τὰ δεικνυόμενα εἰς τὸ σχῆμα φορτία $F_1 = 10$ τόν, $F_2 = 6$, $F_3 = 12$ καὶ $F_4 = 8$. Νὰ προσδιορισθῇ τὸ ὁλικὸν φορτίον τῆς δοκοῦ καὶ τὸ σημεῖον εἰς τὸ ὁποῖον ἐφαρμόζεται τὸ ὁλικὸν τοῦτο φορτίον.

<u>1ον/ Ὁλικὸν φορτίον.</u> Εἰς μίαν παράλληλον πρὸς τὴν διεύθυνσιν τῶν δυνάμεων τοῦ σχ. 23 φέρομεν ἐκ τοῦ

σημείου α καί ἐν συνεχείᾳ τά τμήματα $a1=F_1$, $1,2=F_2$, $2,3=F_3$, $3,4=F_4$. Τό μῆκος α 4 παριστᾶ τήν ἔντασιν τῆς συνισταμένης R. εἶναι τό βάρος τοῦ ὁλικοῦ φορτίου ὅπερ φέρει ἡ Δοκός.

2ον/ Σημεῖον ἐφαρμογῆς. Ἔστω 0 εἷς οἱοσδήποτε πόλος. ἑνοῦμεν 0α, 01, 02, 03, 04. Ἔστω η σημεῖον τό ὁποῖον λαμβάνομεν αὐθαιρέτως ἐπί τῆς διευθύνσεως τῆς F_1, καί ἄς φέρομεν τήν ηm παράλληλον πρός τήν 0α, mp παράλληλον πρός τήν 01. Ἡ ηp τέμνει τήν F_2 εἰς τό σημεῖον p. Κατόπιν φέρομεν pq παράλληλον πρός τήν 02 καί κατά τόν αὐτόν τρόπον qs παράλληλον πρός τήν 03, st παράλληλον πρός τήν 04. Ἡ κεκαμμένη γραμμή mηpqst εἶναι τό σχοινοπολύγωνον τό σχετικόν πρός τό δοθέν σύστημα τῶν δυνάμεων.

Ἡ πρώτη πλευρά mη τῆς γραμμῆς αὐτῆς, καί ἡ τελευταία πλευρά st, προεκτεινόμεναι τέμνονται εἰς ἕν σημεῖον p. Τό σημεῖον τοῦτο ἀνήκει εἰς τήν διεύθυνσιν τῆς συνισταμένης R. Ἐκ τούτου συνάγεται ὅτι, ἐάν διά τοῦ P, ἄγομεν παράλληλον πρός τήν διεύθυνσιν τήν κοινήν τῶν δυνάμεων, ἡ εὐθεῖα αὐτή τέμνει τήν AB εἰς τό σημεῖον I. Τοῦτο τό σημεῖον I εἶναι τό σημεῖον τῆς ἐφαρμογῆς τό ζητούμενον, τοῦ ὁλικοῦ φορτίου R.

37.- Ἀνάλυσις δυνάμεως εἰς δύο ἄλλας παραλλήλους καί τῆς αὐτῆς διευθύνσεως.

Ὅταν μία δοκός, ἡ κύλινδρος ἤ σῶμα οἱονδήποτε, στηρίζεται ἐπί στηριγμάτων ὁριζοντίων, ἐξαρκεῖ ἐπί τῶν στηριγμάτων πιέσεις. Τό βάρος τῆς δοκοῦ, τοῦ κυλίνδρου, ἤ τοῦ σώματος, ἀναλύεται τότε εἰς πολλάς παραλλήλους δυνάμεις καί τῆς αὐτῆς διευθύνσεως.

Ἔστω ὅτι θέλομεν νά ἀναλύσωμεν μίαν δύναμιν, εἰς δύο ἄλλας δυνάμεις παραλλήλους καί τῆς αὐτῆς διευθύνσεως, γνωστῶν ὄντων τῶν σημείων ἐφαρμογῆς τῶν συνιστωσῶν δυνάμεων.

Πρός τοῦτο ἔστω ἡ ἑξῆς ἐφαρμογή:

Πρόβλημα. Ἔστω ὅτι ἡ δοθεῖσα δύναμις ἔχει βάρος 40 χιλιογράμμων, καί ὅτι εἶναι ἐφηρμοσμένη εἰς σημεῖον C, τῆς εὐθείας AB (σχ. 24) καί ὅτι AB = 4,20 μέτρα καί AC = 1,60 μέτρα.

1) Λύσις διά τοῦ λογισμοῦ. Σύμφωνα μέ τήν σύνθεσιν δύο δυνάμεων παραλλήλων καί τῆς αὐτῆς διευθύνσεως ἔχομεν:
$$\frac{CA}{F_2} = \frac{CB}{F_1} = \frac{AB}{R}$$

Τά ἄγνωστα τώρα εἶναι αἱ δυνάμεις F_1 καί F_2.

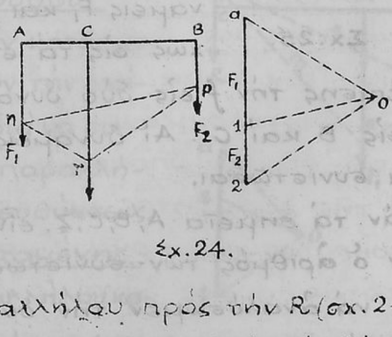
Ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἀναλογίας, ἔχομεν
$$\frac{CA}{F_2} = \frac{AB}{R} \quad \text{καί} \quad \frac{CB}{F_1} = \frac{AB}{R}$$

τότε λαμβάνομεν:
$$F_2 = CA \cdot \frac{R}{AB}$$
$$F_1 = CB \cdot \frac{R}{AB}$$

Ἀντικαθιστῶντες δι' ἀριθμῶν λαμβάνομεν.
$$F_2 = 1{,}60 \times \frac{40}{4{,}2} = 15 \text{ χιλιόγραμμα}$$
$$F_1 = 2{,}60 \times \frac{40}{4{,}2} = 25 \quad \text{"}$$

Ἐπαλήθευσις: $F_1 + F_2 = 25 + 15 = 40$ χιλιόγραμμα $= R$

2) Λύσις διά γραφοστατικῆς μεθόδου. Θά χρησιμοποιήσωμεν κατασκευήν, ἀντίστροφον ἐκείνης διά τῆς ὁποίας ἐπετύχομεν τήν σύνθεσιν δύο δυνάμεων παραλλήλων καί τῆς αὐτῆς διευθύνσεως.



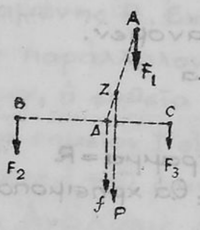
Σχ. 24.

Ἐπί μιᾶς εὐθείας παραλλήλου πρός τήν R (σχ. 24) φέρομεν μῆκος a2 τό ὁποῖον παριστᾶ αὐτήν τήν δύναμιν R.

Λαμβάνομεν ἕναν πόλον O καί ἑνοῦμεν Oa, καί O2. Ἀπό σημεῖον ρ τό ὁποῖον λάμβάνομεν ἐπί τῆς διευθύνσεως τῆς R, ἄγομεν τάς ρη καί ρπ ἀντιστοίχως παραλλήλους πρός Oa καί O2. Αὐταί αἱ εὐθεῖαι συναντῶσι εἰς η καί P τάς παραλλήλους τάς ἀγομένας πρός τήν R, καί αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἐκ τῶν σημείων A καί B. Ἑνοῦμεν η καί P διά τῆς ηP. Ἡ παράλληλος πρός τήν εὐθεῖαν ταύτης ἥτις διέρχεται διά τοῦ πόλου O τέμνει τήν a2 εἰς τό σημεῖον 1. Αἱ ζητούμεναι συνιστῶσαι παρίστανται διά τῆς a1 διά τήν F_1, καί 1·2 διά τήν F_2. Μεταφέρομεν ταύτας εἰς τά σημεῖα A καί B διά νά τάς ἔχωμεν καί κατ' ἔντασιν καί κατά τά σημεῖα ἐφαρμογῆς.

38.– Ἀνάλυσις μιᾶς δυνάμεως εἰς πολλάς ἄλλας δυνάμεις καί τῆς αὐτῆς διευθύνσεως.

Δυνάμεθα νά ἀναλύσωμεν μίαν δύναμιν εἰς τρεῖς ἄλλας παραλλήλους καί τῆς αὐτῆς διευθύνσεως καί ἐφηρμοσμένας εἰς σημεῖα μή κείμενα εἰς εὐθεῖαν γραμμήν.



Σχ.25.

Ἔστω P ἡ δοθεῖσα δύναμις (σχ. 25) Z, A, B, C τά σημεῖα ἐφαρμογῆς τῆς δοθείσης δυνάμεως καί τῶν ζητουμένων συνιστωσῶν. Ἡ εὐθεῖα ZA τέμνει τήν BC εἰς τό σημεῖον Δ. Ἀναλύομεν τήν P εἰς δύο δυνάμεις F_1 καί f ἐφηρμοσμένας ἀντιστοίχως εἰς τά σημεῖα A καί Δ. Ἀναλύομεν ἐπίσης τήν f εἰς δύο δυνάμεις F_2 καί F_3 ἐφηρμοσμένας εἰς B καί C. Αἱ δυνάμεις F_1, F_2, F_3 εἶναι αἱ ζητούμεναι συνιστῶσαι.

Ἐάν τά σημεῖα A, B, C, Z, εἶναι εἰς εὐθεῖαν γραμμήν ἤ ἐάν ὁ ἀριθμός τῶν συνιστωσῶν εἰς τάς ὁποίας πρόκειται νά ἀναλύσωμεν τήν δύναμιν εἶναι ἀνώτερος τῶν τριῶν, τό πρόβλημα εἶναι ἄλυτον διά τῶν ἤδη γνωστῶν μεθόδων. Τότε χρησιμοποιοῦμεν ὡς μέσον λύσεως τοῦ προβλήματος, τό πείραμα. Ἐάν τό σῶμα φέρῃ ὑποστηρίγματα εἰς περισσότερα τῶν δύο σημείων, ταῦτα ὑφίστανται παραμορφώσεις, καί αἱ παραμορφώσεις αὗται δύνανται νά χρησιμεύσουν διά νά καθορίσωμεν τό ἀντίστοιχον αὐτῶν φορτίον.

Τότε δυνάμεθα νά διαμοιράσωμεν τά ὑποστηρίγματα κατά τρόπον ὥστε ἡ ἐπ' αὐτῶν πίεσις ἐκ τοῦ φορτίου νά μή ὑπερβαίνῃ τό ὅριον τῆς ἀντιστάσεως αὐτῶν

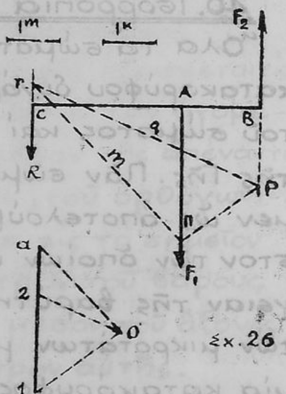
Παράδειγμα. Μερικά ὄργανα ἀκριβείας, ὅπως οἱ ζυγοί τῶν ἐργαστηρίων, ὑποστηρίζονται ὑπό ποδῶν μέ τρεῖς βραχίονας τῶν ὁποίων τά ἄκρα εἶναι αἱ κορυφαί τριγώνου ἰσοπλεύρου.

Ἡ προέκτασις τοῦ ἄξονος τοῦ ποδός τῆς ζυγοῦ, διέρχεται διά τοῦ κέντρου τοῦ τριγώνου τούτου. Συνάγονται ἑπομένως ὅτι ἑκάστη τῶν ἀρθρώσεων τοῦ τριγώνου ὑφίσταται τό τρίτον τῆς πιέσεως τοῦ ὁλικοῦ βάρους τοῦ ὀργάνου.

39. – Πρακτική εὕρεσις τῆς συνισταμένης δύο δυνάμεων παραλλήλων καί ἀντιρρόπων.

1ον/ Διά γραφικῆς μεθόδου

Θά χρησιμοποιήσωμεν κατασκευήν ἀνάλογον μέ ἐκείνην τήν ὁποίαν ἐχρησιμοποιήσαμεν διά νά συνθέσωμεν δύο δυνάμεις παραλλήλους καί τῆς αὐτῆς διευθύνσεως.



σχ. 26

α) Ἔντασις τῆς συνισταμένης. Φέρομεν ἐπί μιᾶς παραλλήλου κατά τήν διεύθυνσιν τῶν δυνάμεων (σχ. 26), τήν α 1 ἡ ὁποία παριστᾶ τὴν δύναμιν F_1. Κατόπιν κατ' ἀντίθετον διεύθυνσιν φέρομεν τὴν 1.2, ἥτις παριστᾶ τὴν F_2. Τὸ τμῆμα α.2 μᾶς δίδει τὴν ἔντασιν τῆς συνισταμένης R.

β) Σημεῖον ἐφαρμογῆς. Ἔστω εἷς οἱοσδήποτε πόλος Ο. Ἑνοῦμεν Οα, Ο1, καὶ Ο2. Δι' ἑνὸς σημείου η, τὸ ὁποῖον λαμβάνομεν αὐθαιρέτως ἐπὶ τῆς διευθύνσεως τῆς F_1, ἄγομεν τὴν ηπ παράλληλον πρὸς τὴν Οα, καὶ τὴν ηρ παράλληλον πρὸς τὴν Ο.1. Κατόπιν διὰ τοῦ σημείου ρ ἐπὶ τῆς F_2, τὴν ρq παράλληλον πρὸς τὴν Ο.2. Αἱ δύο εὐθεῖαι πη καὶ ρq προεκτεινόμεναι συναντῶνται εἰς τὸ σημεῖον r. Τὸ σημεῖον τοῦτο εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς συνισταμένης R. Τότε φέρομεν τὴν παράλληλον πρὸς τὴν διεύθυνσιν τῶν δυνάμεων ἡ ὁποία διέρχεται διὰ τοῦ r. Ἡ εὐθεῖα αὕτη τέμνει τὴν ΑΒ εἰς τὸ σημεῖον C, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ζητούμενον σημεῖος ἐφαρμογῆς τῆς συνισταμένης R.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III

ΠΕΡΙ ΚΕΝΤΡΟΥ ΒΑΡΟΥΣ

40. Ἰσορροπία τῶν στερεῶν σωμάτων.

Ὅλα τὰ σώματα ὑπόκεινται εἰς τὴν ἐνέργειαν κατακορύφου δυνάμεως, τὴν ὁποίαν καλοῦμεν βάρος τοῦ σώματος καὶ ἡ ὁποία προέρχεται ἐκ τῆς ἕλξεως τῆς Γῆς. Πᾶν σῶμα ὅμως δυνάμεθα νὰ τὸ θεωρήσωμεν ὡς ἀποτελούμενον ἐκ μικροτάτων μερῶν, ἕκαστον τῶν ὁποίων ὑπόκειται εἰς τὴν ἑλκτικὴν ἐνέργειαν τῆς βαρύτητος καὶ ἐπομένως εἰς ἕκαστον ἐκ τῶν μικροτάτων μερῶν εἶναι ἐφηρμοσμένη καὶ μία κατακόρυφος δύναμις δηλ. τὸ βάρος ἑνὸς ἑκάστου τῶν μερῶν. Ὅλαι αἱ αἰσθητῶς παράλληλοι αὐταί δυνάμεις ἔχουσι μίαν συνισταμένην ἡ ὁποία εἶναι ἐφηρμοσμένη εἰς ἕν ὡρισμένον σημεῖον τοῦ σώματος.

Ἡ συνισταμένη αὕτη δύναμις εἶναι τό καλούμενον <u>βάρος</u> τοῦ σώματος, τό δέ σημεῖον τῆς ἐφαρμογῆς τοῦ βάρους εἶναι τό <u>κέντρον τοῦ βάρους</u> τοῦ σώματος. Τό βάρος συνεπῶς ἑνός σώματος εἶναι ἡ συνισταμένη τῶν ἑλκτικῶν δυνάμεων τῆς Γῆς ἐπί πάντων τῶν μερῶν τοῦ σώματος. Τό κέντρον βάρους σώματος στερεοῦ παραμένει πάντοτε εἰς τήν αὐτήν θέσιν ὡς πρός τό σῶμα, ὁπωσδήποτε καί ἄν τοποθετηθῇ ἤ μετατεθῇ τό σῶμα. Ἐάν ὅμως τό σῶμα ὑποστῇ μεταβολάς π.χ. σχήματος, τότε τό κέντρον βάρους αὐτοῦ, δύναται νά μετατεθῇ ὡς πρός τό σῶμα.

Παντός σώματος στερεοῦ, ὑγροῦ ἤ ἀερίου, τό κέντρον τοῦ βάρους παραμένει σταθερόν, ἐφ' ὅσον τό σῶμα διατηρεῖ τάς σχετικάς ἰδιότητάς του.

Τό κέντρον τοῦ βάρους εὐθείας, ἡ ὁποία ἀποτελεῖται ἀπό ὑλικά σημεῖα, εὑρίσκεται εἰς τόν μέσον αὐτῆς. Τῆς περιφερείας, τοῦ κύκλου, κυκλικοῦ δακτυλίου καί τῆς ἐλλείψεως τό κέντρον τοῦ βάρους, εὑρίσκεται εἰς τό κέντρον ἑκάστου τῶν σχημάτων τούτων.

Τοῦ τριγώνου, τό κέντρον τοῦ βάρους εὑρίσκεται εἰς τό σημεῖον τῆς συναντήσεως τῶν εὐθειῶν τῶν ἀγομένων ἐξ ἑκάστης κορυφῆς εἰς τό μέσον τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς. Τοῦ παραλληλογράμμου, τοῦ ὀρθογωνίου καί τοῦ τετραγώνου εὑρίσκεται εἰς τό σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων. Τό κέντρον τοῦ βάρους τοῦ κυλίνδρου εὑρίσκεται εἰς τό μέσον τοῦ ἄξονος αὐτοῦ, τῆς δέ σφαίρας εἰς τό κέντρον αὐτῆς.

Τό κέντρον βάρους σώματος δύναται καί νά εὑρίσκεται καί ἐκτός τοῦ σώματος. Οὕτω λ.χ. τό κέντρον τοῦ βάρους δακτυλίου κεῖται εἰς τὸ κέντρον αὐτοῦ.

41.— Ἰσορροπία τῶν στερεῶν σωμάτων ἐπὶ ὁριζοντίου ἐπιπέδου.

α) Ὅταν τὸ σῶμα στηρίζεται δι' ἑνὸς μόνον σημείου, ἵνα ὑπάρξῃ ἰσορροπία, πρέπει τὸ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ σώματος ἢ νὰ συμπέσῃ μετὰ τοῦ σημείου τούτου ἢ νὰ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς κατακορύφου τῆς διερχομένης δι' αὐτοῦ. Παράδειγμα τὸ νῆμα τῆς στάθμης. Ἐπίσης ῥάβδος στηριζομένη ὀρθία ἐπὶ τοῦ ἄκρου τοῦ δακτύλου.

β) Ἐὰν τὸ σῶμα στηρίζεται διὰ δύο σημείων, διὰ νὰ ὑπάρχῃ ἰσορροπία πρέπει ἡ κατακόρυφος ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ βάρους νὰ συναντᾷ τὴν εὐθεῖαν, τὴν ἑνοῦσαν τὰ δύο σημεῖα. Παράδειγμα ἡ ἰσορροπία ἀνθρώπου ἱσταμένου ἐπὶ δύο ξυλίνων ὑψηλῶν ποδῶν.

γ) Ἐὰν τὸ σῶμα στηρίζεται διὰ τριῶν ἢ περισσοτέρων σημείων, διὰ νὰ ὑπάρχῃ ἰσορροπία εἶναι ἀνάγκη ἡ ἐκ τοῦ κέντρου βάρους αὐτοῦ καταβιβαζομένη κατακόρυφος νὰ πίπτῃ ἐντὸς τοῦ πολυγώνου τῆς βάσεως, ἐντὸς δηλ. τοῦ σχήματος τὸ ὁποῖον προκύπτει, ἂν ἑνωθῶσι δι' εὐθειῶν πάντα τὰ σημεῖα, δι' ὧν τὸ σῶμα στηρίζεται.

Ἐπομένως ἡ ἰσορροπία σώματος εἶναι τόσον περισσότερον σταθερὰ ὅσον μεγαλητέρα εἶναι ἡ βάσις διὰ τῆς ὁποίας στηρίζεται.

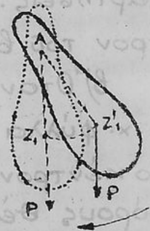
Παράδειγμα. Τὰ κηροπήγια αἱ λυχνίαι, τὰ ἔπιπλα καὶ ἄλλαι συσκευαὶ τὴν εὐστάθειαν αὐτῶν ὀφείλουσι εἰς τὴν ἔκτασιν τὴν μεγάλην τῆς βάσεώς των. Ἡ ἰσορροπία γίνεται πάντοτε εὐσταθεστέρα ὅταν τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι εἰς τὴν μᾶλλον χαμηλὴν θέσιν.

42. – Ἰσορροπία στερεοῦ σώματος ἐξηρτημένου περί σταθερόν καί ὁριζόντιον ἄξονα.

Σῶμα στερεόν ἐξηρτημένον περί σταθερόν καί ὁριζόντιον ἄξονα εὑρίσκεται ἐν ἰσορροπίᾳ ὅταν ἡ κατακόρυφος ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ κέντρου βάρους τοῦ σώματος, συναντᾶ τόν ἄξονα ἐξαρτήσεως τοῦ σώματος.

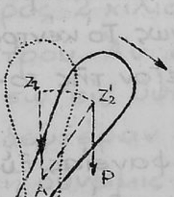
Διακρίνομεν ἐνταῦθα τρία εἴδη ἰσορροπίας: τήν εὐσταθῆ, τήν ἀσταθῆ, καί τήν ἀδιάφορον.

Ἡ ἰσορροπία εἶναι εὐσταθής, ὅταν τό κέντρον τοῦ βάρους P τοῦ σώματος κεῖται κάτωθεν τοῦ ἄξονος ἐξαρτήσεως A, ὅτε τό σῶμα ἀπομακρυνόμενον πολύ ὀλίγον τῆς θέσεώς του καί ἔπειτα ἀφιέμενον, δέν μένει εἰς τήν νέαν του θέσιν AZ_1' ἀλλ' ἐπανέρχεται εἰς τήν πρώτην θέσιν AZ_1 ἐξ αἰτίας τῶν δυνάμεων τῶν ἐπ' αὐτοῦ ἐνεργουσῶν (σχ. 27).



Σχ. 27

Ἀσταθής εἶναι ἡ ἰσορροπία, ὅταν τό κέντρον τοῦ βάρους τοῦ σώματος P εὑρίσκεται ἄνωθεν τοῦ ἄξονος ἐξαρτήσεως A, ὅτε τό σῶμα μετατιθέμενον ὀλίγον ἐκ τῆς θέσεώς του καί εἶτα ἀφιέμενον, δέν ἐπανέρχεται εἰς ταύτην πλέον, ἀλλά τουναντίον, ἀπομακρύνεται αὐτῆς ἀκόμη περισσότερον, ὑπό τήν ἐνέργειαν τῶν ἐπ' αὐτοῦ ἐνεργουσῶν δυνάμεων (σχ. 28).



Σχ. 28

Ἀδιάφορος εἶναι ἡ ἰσορροπία, ὅταν ὁ ἄξων τῆς ἐξαρτήσεως A διέρχεται διά τοῦ κέντρου τοῦ βάρους Γ τοῦ σώματος, ὅτε τό σῶμα μετατιθέμενον ὀλίγον τῆς θέσεώς του καί εἶτα ἀφιέμενον, οὔτε ἐπανέρχεται εἰς αὐτήν, οὔτε ἀπομακρύνεται περισσότερον ταύτης, ἀλλὰ παραμένει ἐν ἰσορροπίᾳ καὶ εἰς τὴν νέαν θέσιν.

Κατὰ τὴν ἀδιάφορον ἰσορροπίαν, ὁποσδήποτε μετακινουμένου τοῦ σώματος, τὸ κέντρον τοῦ βάρους αὐτοῦ οὔτε ἀνέρχεται οὔτε κατέρχεται. Ἡ εὐστάθεια ἑνὸς σώματος ἐξηρτημένου εἶναι τόσον μεγαλυτέρα ὅσον ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου βάρους αὐτοῦ ἀπὸ τὸν ἄξονα ἐξαρτήσεως εἶναι μεγαλυτέρα.

43.- Ἐμπειρικὸς προσδιορισμὸς τοῦ κέντρου βάρους οἱουδήποτε στερεοῦ σώματος, ὁμοιομεροῦς ἢ μή.

α) Ἐξαρτῶμεν τὸ σῶμα διὰ νήματος, διαδοχικῶς ἐκ δύο διαφόρων θέσεων καὶ ἀναζητοῦμεν, τὸ σημεῖον, εἰς τὸ ὁποῖον τέμνονται αἱ διευθύνσεις τοῦ νήματος κατὰ τὰς δύο ἐξαρτήσεις. Τὸ σημεῖον τοῦτο θὰ εἶναι τὸ ζητούμενον κέντρον τοῦ βάρους τοῦ σώματος.

β) Ὅταν τὰ σώματα εἶναι λεπτὰ καὶ ἐπίπεδα ὡς λ.χ. φύλλα χαρτονίου ἢ πλάκες μεταλλικαί, εὑρίσκομεν τὸ κέντρον τοῦ βάρους, ἰσορροποῦντες αὐτὰ εἰς δύο διαφόρους θέσεις ἐπὶ τῆς ἀκμῆς τραπέζης. Σημειοῦμεν πρῶτον ἐπὶ τοῦ σώματος τὴν εὐθεῖαν τῆς ἐπαφῆς αὐτοῦ μετὰ τῆς ἀκμῆς τῆς τραπέζης, τὴν στιγμὴν καθ' ἣν τοῦτο εἶναι ἕτοιμον νὰ ἀνατραπῇ. Ἀναζητοῦμεν κατόπιν δευτέραν θέσιν ἰσορροπίας καὶ χαράσσομεν νέαν εὐθεῖαν ὅπως προηγουμένως. Τὸ κέντρον βάρους θὰ εὑρίσκεται τότε εἰς τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν δύο χαραχθεισῶν εὐθειῶν.

1) Κέντρον βάρους ἡμισφαιρικῆς ἐπιφανείας. Εὑρίσκεται εἰς τὸ μέσον τῆς ἀκτῖνος τῆς καθέτου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῆς βάσεως.

2) Κέντρον βάρους ἡμισφαιρίου (ὄγκου). Εὑρίσκε-

ται ἐπὶ τῆς ἀκτῖνος τῆς καθέτου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῆς βάσεως καὶ εἰς ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ κέντρου ἴσην πρὸς τὰ 3/8 τῆς ἀκτῖνος.

3) Κέντρον βάρους κυλίνδρου μὲ παραλλήλους βάσεις. Εὑρίσκεται εἰς τὸ μέσον τῆς εὐθείας, ἡ ὁποία ἑνώνει τὰ κέντρα βάρους τῶν βάσεων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV

ΠΕΡΙ ΕΡΓΟΥ ΚΑΙ ΙΣΧΥΟΣ

44.- Ἔργον δυνάμεως. Ὅταν ἵππος σύρῃ ἅμαξαν, λέγομεν ὅτι ἐκτελεῖται ἔργον. Ὅταν ἀτμομηχανὴ σύρῃ ἁμαξοστοιχίαν ἢ ὅταν ἐργάτης ἀνυψοῖ βάρος τι, ἐπίσης λέγομεν ὅτι ἔργον ἐκτελεῖται. Γενικῶς λέγομεν ὅτι ἐκτελεῖται ἔργον, ὁσάκις μία δύναμις ἐνεργεῖ ἐπὶ σώματος, κινουμένου οὕτως ὥστε νὰ μετατίθεται τὸ σημεῖον τῆς ἐφαρμογῆς της. Ἔστω λ.χ. ὅτι ὑψοῦμεν βάρος ἑνὸς χιλιογράμμου κατακορύφως εἰς ὕψος 2 μέτρων. Ἐὰν τὸ αὐτὸ βάρος ἀνυψώσωμεν εἰς διπλάσιον ὕψος ἤτοι 4 μέτρων, λέγομεν ὅτι τὸ κατὰ τὴν δευτέραν περίπτωσιν παραχθὲν ἔργον εἶναι διπλάσιον τοῦ πρώτου. Τὸ ἔργον συνεπῶς μεταβάλλεται ἀναλόγως τῆς μεταθέσεως. Ἔστω τώρα ὅτι βάρος 2 χιλιογράμμων τὸ ὑψώνομεν εἰς ὕψος ἑνὸς μέτρου. Ἂν ἔχω βάρος 4 χιλιογράμμων καὶ τὸ ἀνυψώσω εἰς ὕψος 1 μέτρου πάλιν, τότε τὸ ἔργον τὴν δευτέραν φορὰν εἶναι διπλάσιον τοῦ πρώτου διότι ἡ δύναμις διπλασιάσθη. Ἑπομένως γενικῶς τὸ ἐκτελούμενον ἔργον εἶναι καὶ ἀνάλογον τῆς δυνάμεως.

Ἐὰν καλέσωμεν τὴν δύναμιν διὰ F, τὴν μετάθεσιν διὰ ε καὶ τὸ ἔργον διὰ T, τότε ὁ τύπος, ὅστις μᾶς δίδει τό ἔργον Τ εἶναι:

$$T = F \times \varepsilon$$

Τουτέστι τό ἔργον εἶναι γινόμενον τῆς δυνάμεως ἐπί τήν μετάθεσιν. Καί ἄν μέν ἡ μετάθεσις γίνεται κατά τήν διεύθυνσιν τῆς δυνάμεως, τό ἔργον ταύτης εἶναι θετικόν ἤ κινητήριον, ἄν δέ ἡ μετάθεσις γίνῃ ἀντιθέτως πρός τήν διεύθυνσιν τῆς δυνάμεως τό ἔργον αὐτῆς εἶναι ἀρνητικόν ἤ ἀνθιστάμενον.

Ἐάν μία δύναμις εἶναι ἐφηρμοσμένη ὡς ἐφαπτομένη εἰς περιφέρειαν, καί τότε τό ἔργον τῆς δυνάμεως θά ἰσοῦται μέ τό γινόμενον τῆς δυνάμεως ἐπί τήν μετάθεσιν. Μετάθεσις ὅμως ἐνταῦθα εἶναι μία ὁλόκληρος περιφέρεια δηλ. $2\pi R$ καί ἐπομένως ἄν ἡ δύναμις εἶναι F θά ἔχωμεν πάλιν ὅτι τό ἔργον Τ, θά ἰσοῦται: $T = F \times 2\pi R$

καί ἄν ἡ περιφέρεια στρέφεται ν φοράς

τότε πάλιν $T = F \times \nu \cdot 2\pi R$

<u>45.- Μονάς ἔργου.</u> Μονάς ἔργου εἶναι τό χιλιογραμμόμετρον, τό ὁποῖον εἶναι τό ἔργον δυνάμεως ἑνός χιλιογράμμου, μετατεθείσης κατά 1 μέτρον καί κατά τήν διεύθυνσίν της. Τό ἔργον λ.χ. ἐργάτου ὑψώσαντος σῶμα βάρος 25 χιλιογράμμων εἰς ὕψος 10 μέτρων εἶναι 250 χιλιογραμμόμετρα.

<u>Μονάς ἰσχύος.</u> Ἡ ἔννοια τοῦ ἔργου δέν εἶναι ἀρκετή διά νά χαρακτηρίσωμεν τήν ἀπόδοσιν ἑνός κινητῆρος ἤ μιᾶς μηχανῆς. Πρακτικῶς εἶναι ἀνάγκη ὄχι μόνον νά ἐκτελεσθῇ ἕνα ἔργον, ἀλλά νά ἐκτελεσθῇ εἰς ὅσον τό δυνατόν συντομώτερον χρόνον. Διά τοῦτο εἰς τήν ἔννοιαν τῆς ἰσχύος λαμβάνεται ὑπ' ὄψι καί ὁ χρόνος.

Ἰσχύς εἶναι τό ἔργον τό ὁποῖον δύναται νά ἐκτελέσῃ μία μηχανή ὑπό ὡρισμένους ὅρους εἰς τήν μονάδα τοῦ χρόνου. Ὡς μονάς ἰσχύος συνήθως λαμβάνεται ὁ ἀτμόϊππος, ἡ ὁποία εἶναι ἡ ἰσχύς μηχανῆς δυναμένης νά ἐκτελέσῃ ἔργον 75 χιλιογραμμομέτρων εἰς ἕν δευτερόλεπτον.

Οὕτω λέγοντες ὅτι μηχανή εἶναι ἰσχύος 10 ἀτμοΐππων ἐννοοῦμεν ὅτι ἡ μηχανή αὕτη παράγει ἔργον 750 χιλιογραμμομέτρων κατά δευτερόλεπτον.

Εἰς τάς ἠλεκτρικάς μηχανάς ὡς μονάς ἰσχύος λαμβάνεται, τό Βάτ. Ἰσχύς δέ ἑνός ἵππου ἰσοῦται πρός 736 βάτ.

1 ἀτμόϊππος = 75 χιλιογραμμόμετρα κατά 1″ = 736 βάτ.

Ἐπίσης ἄλλη μονάς ἰσχύος εἶναι καί τό Κιλοβάτ = = 1000 βάτ.

1 κιλοβάτ $= \frac{1000}{736}$ ἀτμοΐππους ἐξ οὗ

1 κιλοβάτ ἰσοῦται πρός 1,36 ἀτμοΐππους.

Ἐν Ἀγγλίᾳ ἡ συνήθης μονάς ἰσχύος καλεῖται Horse-power καί παρίσταται διά τοῦ συμβόλου H.P. Ἰσοδυναμεῖ δέ ἡ μονάς αὕτη πρός 75,9 χιλιογραμμόμετρα κατά δευτερόλεπτον.

Παράδειγμα. 1ον) Ποία ἡ ἰσχύς μηχανῆς δυναμένης νά ὑψώσῃ βάρος 1800 χιλιογράμμων εἰς ὕψος 25 μέτρα καί εἰς χρονικόν διάστημα 30 δευτερολ.;

Εἰς 30 δευτερολ. τό ἔργον = 1800 × 25 = 45000 χιλ/τρα

εἰς 1 » τό ἔργον $= \frac{45000}{30} = 1500$ χιλιογρ/τρα

Ἰσχύς εἰς ἀτμοΐππους $= \frac{1500}{75} = 20$ ἀτμοΐππους.

2ον) Ἐργάτης ὑψώνει ἀνά ½ τοῦ λεπτοῦ, λίθον 5 χιλιογράμμων εἰς ὕψος 1,50 μέτρων. Ποῖον τό ἐκτελούμενον ἔργον εἰς τό τέλος μιᾶς ὥρας;

Εἰς ἕκαστον ½ τοῦ λεπτοῦ ὁ ἐργάτης ἐκτελεῖ ἔργον

5 × 1,5 = 7,5 χιλμ.

Εἰς μίαν ὥραν ἔχει ἐκτελέσει $60 \times 2 = 120$ φοράς τά 7,5 χιλ.
Τό ἔργον λοιπόν ὅπερ ἐξετέλεσε ἐντός μιᾶς ὥρας εἶναι: $7{,}5 \times 120 = 900$ χιλιογραμμόμετρα.

3ον) Μοχλός λειτουργεῖ, ὑπό δυνάμεως 10 χιλιογράμμων, ἐπί περιφερείας τήν ὁποίαν διαγράφει. Ἡ περιφέρεια ἔχει διάμετρον 0,80 μέτρα. Ποῖον εἶναι τό ἔργον εἰς ἑκάστην στροφήν;

$$T = F \times 2\pi R \quad \text{καί} \quad R = \frac{0{,}80}{2} = 0{,}40 \text{ μέτρα.}$$

ἐπομένως ἔχομεν: $T = 10 \times 2 \times 3{,}14 \times 0{,}4 = 25{,}13$ χιλιογραμμ.

46.– Ἁπλαῖ Μηχαναί

Μηχαναί. Αἱ μηχαναί εἶναι ὄργανα τά ὁποῖα μᾶς βοηθοῦν νά χρησιμοποιήσωμεν δοθείσας δυνάμεις διά τήν ἐκτέλεσιν ἔργου, τό ὁποῖον αἱ δυνάμεις δέν δύνανται νά ἐκτελέσουν ἄνευ τῆς βοηθείας τῶν μηχανῶν. Αἱ πλεῖσται τῶν μηχανῶν ἀποτελοῦνται ἀπό ὡρισμένον ἀριθμῶν ὀργάνων τά ὁποῖα ὀνομάζονται ἁπλαῖ Μηχαναί, καί τάς ὁποίας δυνάμεθα νά κατατάξωμεν εἰς τρεῖς κατηγορίας:

1) Ὄργανα τά ὁποῖα δύνανται νά περιστρέφωνται περί σταθερόν σημεῖον, ὅπως οἱ μοχλοί.

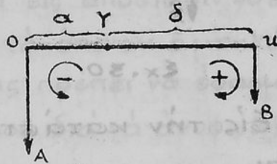
2) Ἐκεῖνα τά ὁποῖα δύνανται νά περιστρέφωνται περί σταθερόν ἄξονα ὅπως οἱ τροχοί, αἱ τροχαλίαι κ.τ.λ.

3) Ἐκεῖνα τά ὁποῖα δύνανται νά ὀλισθαίνουν ἐπί ἑνός κεκλιμένου ἐπιπέδου.

47.– Μοχλός. Καλοῦμεν μοχλόν, πᾶν στερεόν σῶμα, τό ὁποῖον ὑπό τήν ἐπίδρασιν δύο δυνάμεων, αἱ ὁποῖαι ἐνεργοῦν εἰς δύο διάφορα σημεῖα του, δύναται νά ἰσορροπίσῃ ἤ νά περιστραφῇ περί τρίτον τι σταθερόν σημεῖον τό ὁποῖον ὀνομάζομεν ὑπομόχλιον. Ἐκ τῶν δυνάμεων ἡ μία ὀνομάζεται κυρίως δύναμις, καί ἡ ἄλλη τήν ὁποίαν πρόκειται νά ἰσορροπήσωμεν ἤ νά ὑπερνικήσωμεν λέγεται ἀντίστασις. Ἡ ἀπόστασις τοῦ ὑπομοχλίου, ἀπό μέν τῆς κυρίως δυνάμεως καλεῖται βραχίων τῆς δυνάμεως, ἀπό δέ τῆς ἀντιστάσεως βραχίων τῆς ἀντιστάσεως.

Ὅταν οἱ ἐργάται μετακινῶσι μεγάλα μάρμαρα ἤ ἄλλα βαρέα σώματα, μεταχειρίζονται συνήθως σιδηρᾶν ῥάβδον, τῆς ὁποίας τό μέν ἕν ἄκρον θέτουσι ὑπό τό σῶμα, τό δέ ἄλλον ἄκρον ὠθοῦσι διά τῆς χειρός, ἀφοῦ στηρίξωσι τήν ῥάβδον ἐπί τινος ὑποστηρίγματος στερεοῦ. Ἡ ράβδος ἡ σιδηρᾶ εἶναι μοχλός, τό δέ ὑποστήριγμα ὑπομόχλιον.

Συνθήκη ἰσορροπίας τοῦ μοχλοῦ. Ἔστω ράβδος σιδηρᾶ Ου (σχ. 29) εἰς τά ἄκρα τῆς ὁποίας ἐφαρμόζομεν δύο δυνάμεις Α καί Β καί Υ τό ὑπομόχλιον. Οἱ μοχλοβραχίονες εἶναι α, τῆς κυρίως δυνάμεως καί δ τῆς ἀντιστάσεως.



Σχ. 29.

Στηριζόμενοι εἰς ὅσα ἐμάθαμεν περί ῥοπῶν, διά νά ὑπάρχῃ ἰσορροπία πρέπει ἡ ῥοπή τῆς δυνάμεως Α ὡς πρός τό σημεῖον Υ, νά εἶναι ἴση πρός τήν ῥοπήν τῆς ἀντιστάσεως Β, ὡς πρός τό σημεῖον Υ.

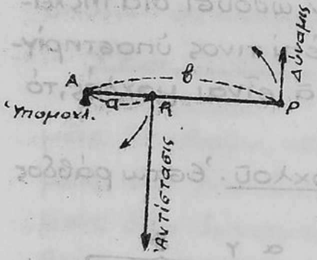
$$\text{Ῥοπή } A = A\cdot\alpha \quad \text{καί ῥοπή } B = B\cdot\delta$$

$$\text{ἑπομένως } A\cdot\alpha = B\cdot\delta \quad \text{ἐξ οὗ } \frac{A}{B} = \frac{\delta}{\alpha}$$

Βλέπομεν λοιπόν ὅτι εἰς τόν ἰσορροποῦντα μοχλόν αἱ δυνάμεις αἱ ἐφαρμοζόμεναι εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι πρός τούς μοχλοβραχίονας. Ἐάν αὐξήσωμεν ὀλίγον τήν δύναμιν Α, τότε αὕτη θά ὑπερνικήσῃ τήν ἀντίστασιν Β.

Εἰς τὴν ἄνω περίπτωσιν τὸ ὑπομόχλιον εὑρίσκεται μεταξὺ τῆς δυνάμεως καὶ τῆς ἀντιστάσεως. Ὅταν τὸ ὑπομόχλιον εὑρίσκεται μεταξὺ τῆς δυνάμεως καὶ τῆς ἀντιστάσεως ὁ μοχλὸς εἶναι πρώτου εἴδους. Μοχλὸς α' εἴδους εἶναι ἡ ψαλίς, ὁ στατήρ, ὁ ζυγός, ἡ τανάλια κ.τ.λ.

Μοχλὸς β' εἴδους. Εἰς τὸ εἶδος τοῦτο τοῦ μοχλοῦ ἡ ἀντίστασις R εὑρίσκεται μεταξὺ ὑπομοχλίου A καὶ τῆς κυρίως δυνάμεως (σχ. 30).



Σχ. 30

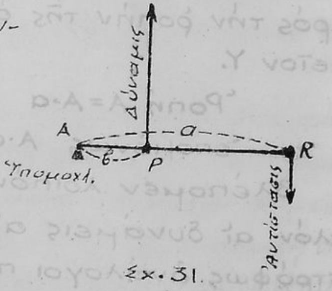
Ἂν λάβωμεν τὰς ροπὰς τῆς δυνάμεως P καὶ τῆς ἀντιστάσεως ὡς πρὸς τὸ σημεῖον A ἔχομεν: ῥοπὴ τῆς $P = P \times \beta = P\beta$

" " $R = R \times \alpha = R\alpha$

Εἰς τὴν κατάστασιν ἰσορροπίας αἱ ῥοπαὶ εἶναι ἴσαι.

Ἑπομένως: $R\alpha = P\beta$ καὶ $\frac{P}{R} = \frac{\alpha}{\beta}$ δηλαδὴ αἱ δυνάμεις εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν μοχλοβραχιόνων.

Μοχλὸς τοῦ β' εἴδους εἶναι ἡ χειράμαξα καὶ ὁ καρυοθραύστης. Εἰς τὸν μοχλὸν τοῦτον ὁ βραχίων τῆς δυνάμεως εἶναι πάντοτε μεγαλήτερος τοῦ βραχίονος τῆς ἀντιστάσεως καὶ ἡ δύναμις ἰσορροπεῖ ἀντίστασιν μεγαλητέραν.



Σχ. 31.

Μοχλὸς γ' εἴδους

Εἰς τὸν μοχλὸν τοῦ τρίτου εἴδους ἡ δύναμις εὑρίσκεται μεταξὺ τοῦ ὑπομοχλίου καὶ τῆς ἀντιστάσεως (σχ. 31)

Ἐνταῦθα λαμβάνομεν πάλιν τὰς ῥοπὰς τῶν

δυνάμεων ὡς πρός τό σημεῖον Α, ὅπερ εἶναι τό ὑπομόχλιον καί εὑρίσκομεν πάλιν

$$Ra = Pb \quad \text{καί} \quad \frac{P}{R} = \frac{a}{b}$$

Δηλαδή πάντοτε καί εἰς τά τρία εἴδη τῶν μοχλῶν αἱ δυνάμεις εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν μοχλοβραχιόνων εἰς τήν κατάστασιν τῆς ἰσορροπίας

Εἰς τόν μοχλόν τοῦ τρίτου εἴδους ὁ βραχίων τῆς δυνάμεως εἶναι πάντοτε μικρότερος τοῦ βραχίονος τῆς ἀντιστάσεως καί ἡ δύναμις ἰσορροπεῖ ἀντίστασιν μικροτέραν.

<u>Ἐφαρμογαί.</u> 1) Μοχλός μήκους 2,75 μέτρων χρησιμοποιεῖται πρός ἀνύψωσιν πλακός μαρμαρίνης βάρους 1200 χιλιογράμμων. Τό ὑπομόχλιον εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν 25 ἑκατοστομέτρων ἀπό τοῦ σημείου εἰς τό ὁποῖον ὁ μοχλός ἐφάπτεται τῆς πλακός. Ποία δύναμις πρέπει νά ἐφαρμοσθῇ εἰς τό ἕτερον ἄκρον τοῦ μοχλοῦ διά νά ἀνυψωθῇ ἡ πλάξ;

Τό μῆκος τοῦ βραχίονος τῆς ἀντιστάσεως εἶναι 25 ἑκατοστόμ.

" " " " δυνάμεως " 275-25=250 ἑκ.

αἱ ῥοπαί εἶναι 1200×25 καί $x \times 250$ ἐξ οὗ

$$1200 \times 25 = x \times 250$$

καί $x = \frac{1200 \times 25}{250} = 120$ χιλιόγραμμα

Μέ δύναμιν ἐπομένως ὀλίγον μεγαλυτέραν τῶν 120 χιλιογράμμων ἡ πλάξ θά ἀνυψωθῇ.

2) Ἐάν ἡ δύναμις ἦτο μόνον 100 χιλιόγραμμα, ποῦ ἔπρεπε νά τοποθετήσωμεν τό ὑπομόχλιον ἵνα ἀνυψώσωμεν τήν πλάκα;

Ἔστω x ἡ ἀπόστασις τοῦ ὑπομοχλίου ἀπό τῆς ἀντιστάσεως καί ἡ ἀπόστασις τοῦ ὑπομοχλίου ἀπό τῆς δυνάμεως θά εἶναι $275 - x$.

Εἰς τήν συνθήκην λοιπόν τῆς ἰσορροπίας θά ἔχωμεν·

$$1200 \times x = 100 \times (275 - x)$$

ἤ $\quad 1200x = 27500 - 100x$

καί $\quad 1300x = 27500$

ἐξ οὗ $\quad 13x = 275$ καί $x = \frac{275}{13} = 21{,}15$ ἑκατοστόμετρα.

Τοποθετοῦντες συνεπῶς τό ὑπομόχλιον εἰς ἀπόστασιν 18 ἑκατοστομέτρων ἀπό τῆς ἀντιστάσεως, θά ἀνυψώσωμεν τήν πλάκα μέ δύναμιν 100 χιλιογράμμων.

<u>48.- Τροχαλίαι.</u> Ὅλοι γνωρίζομεν ὅτι ἡ τροχαλία εἶναι στερεός δίσκος κυκλικός, δυνάμενος νά περιστραφῆ περί ἄξονα διερχόμενον διά τοῦ κέντρου του. Περιφερειακῶς ὁ δίσκος φέρει αὔλακα καί διά τοῦ ἄξονός του στηρίζεται ἐπί τῶν σκελῶν ψαλίδος καλουμένης τροχαλιοθήκης. Ἐντός τῆς τροχαλιοθήκης ὁ δίσκος δύναται νά στραφῆ ἐλευθέρως περί τόν ἄξονά του. Ἐντός δέ τῆς αὔλακος τῆς τροχαλίας διέρχεται σχοινίον. Διακρίνομεν δύο εἰδῶν τροχαλίας, τήν παγίαν ἤ ἀμετάθετον καί τήν ἐλευθέραν ἤ μετάθετον.

<u>Παγία τροχαλία.</u> Αὕτη κινεῖται μόνον περί τόν ἄξονά της κατά τήν διάρκειαν τῆς λειτουργίας της.

Ἐπί ἑνός τῶν δύο ἄκρων τοῦ σχοινίου της προσδένεται τό πρός ἀνύψωσιν βάρος R, ἐπί δέ τοῦ ἄλλου ἄκρου ἐφαρμόζεται ἡ δύναμις P. Οὕτως διά τῆς δυνάμεως P τῆς χειρός μας δυνάμεθα ἕλκοντες ἐκ τῶν ἄνω πρός τά κάτω τό ἄκρον τοῦ σχοινίου, νά ἀνυψώσωμεν τό βάρος R. Ἡ παγία τροχαλία εἶναι μοχλός πρώτου εἴδους ἔχων τό ὑπομόχλιον εἰς τόν ἄξονα περιστροφῆς καί αἱ δυνάμεις εἶναι ἐφηρμοσμέναι εἰς τά ἄκρα τῶν ἀκτίνων ὡς ἐφαπτόμεναι. Οἱ μοχλοβραχίονες εἶναι ἴσοι καί αἱ ῥοπαί ὡς πρός τό ὑπομόχλιον O εἶναι:

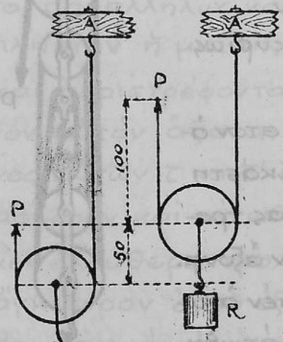
$R \times \rho' = P \times \rho$ καί ἐπειδή $\rho' = \rho$ ἕπεται ὅτι $R = P$

Εἰς τήν κατάστασιν τῆς ἰσορροπίας ἡ δύναμις εἶναι ἴση πρός τήν ἀντίστασιν, ἐφαρμόζοντες ὀλίγον μεγαλητέραν δύναμιν ὑπερνικῶμεν τήν ἀντίστασιν.

Ἑπομένως διά τῆς παγίας τροχαλίας δέν κερδίζομεν εἰς δύναμιν, ἀλλ' ἁπλῶς μεταβάλλομεν τήν διεύθυνσιν τῆς δυνάμεως καί διευκολυνόμεθα διότι ἡ δύναμις ἐνεργεῖ ἐκ τῶν ἄνω πρός τά κάτω καί εἰς τήν ἐφηρμοζομένην δύναμιν πρός ὑπερνίκησιν τῆς ἀντιστάσεως προστίθεται καί τό βάρος τοῦ σώματός μας.

Σχ. 32

<u>Ἐλευθέρα τροχαλία.</u> Ἡ ἐλευθέρα τροχαλία κινεῖται κατά τήν χρῆσιν της ὄχι μόνον περί τόν ἄξονά της ἀλλά καί ἐν τῷ συνόλῳ της. Τό ἕν ἄκρον στηρίζεται ἐπί ἀκλονήτου σημείου, τό δέ ἄλλο ἄκρον τοῦ σχοινίου σύρεται ἐκ τῶν κάτω πρός τά ἄνω. Ἡ τροχαλιοθήκη διευθύνεται πρός τά κάτω καί φέρει ἄγκιστρον ἐκ τοῦ ὁποίου ἐξαρτῶμεν τά πρός ἀνύψωσιν βάρη, δηλ. τήν ἀντίστασιν (σχ. 32). Σύρομεν τό σχοινίον οὕτως ὥστε νά μετατεθῇ ἡ δύναμις P, καί νά ἀνέλθῃ κατά 1 μέτρον ὑψηλότερον ἤτοι κατά 100 ἑκατοστόμετρα. Τό σημεῖον A παραμένει ἀκίνητον. Ἡ τροχαλία ὅμως καί ἡ ἀντίστασις R θά ἀνέλθουν κατά τό ἥμισυ τοῦ δρόμου πού ἀνῆλθε τό P, ἤτοι κατα ½ μέτρου ἢ 50 ἑκατοστόμετρα.

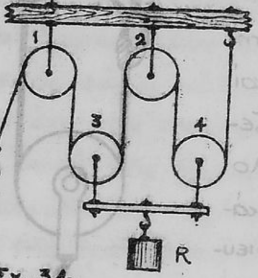


Σχ. 33

Γνωρίζομεν ὅμως ὅτι τό κινητήριον ἔργον ἰσοῦται πρός τό ἀνθιστάμενον καί ἔχομεν: $R \times 50 = P \times 100$ ἢ $\frac{P}{R} = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$

καί $R=2P$ ἤ $P=\frac{R}{2}$ ὅπερ σημαίνει ὅτι εἰς τήν κατάστασιν τῆς ἰσορροπίας ἡ δύναμις εἶναι τό ἥμισυ τῆς ἀντιστάσεως.

Διά νά μή σύρωμεν δέ τό σχοινίον ἐκ τῶν κάτω πρός τά ἄνω ἀλλά ἐκ τῶν ἄνω πρός τά κάτω, συνδέομεν τό ἄκρον τοῦ σχοινίου τῆς ἐλευθέρας τροχαλίας μετά παγίας τοιαύτης καί οὕτω μεταβάλλομεν τήν διεύθυνσιν τῆς δυνάμεως, πρᾶγμα τό ὁποῖον μᾶς διευκολύνει.

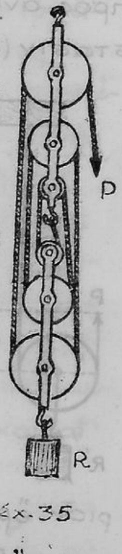


Σχ. 34.

Τέλος δυνάμεθα νά συνδέσωμεν πολλάς σταθεράς καί ἐλευθέρους τροχαλίας ὡς εἰς τό (σχ. 34). Αἱ τροχαλίαι 1 καί 2 εἶναι πάγιαι, ἐνῷ αἱ 3 καί 4 ἐλεύθεραι. Ἐάν σύρωμεν τό ἄκρον P τοῦ (σχ. 34) κατά 100 ἑκατοστόμετρα, ἡ ἀντίστασις θά ἀνέλθῃ κατά 25 ἑκατοστόμετρα, ἤτοι κατά τό 1/4 τῆς ὑπό τῆς δυνάμεως διανυθείσης ὁδοῦ καί σύμφωνα πρός τά προηγούμενα θά ἔχωμεν:

$$\frac{P}{R}=\frac{1}{4} \text{ καί } P=\frac{R}{4}$$ ἰσορροποῦμεν

δηλ. μέ τό 1/4 τῆς ἀντιστάσεως τήν κυρίως δύναμιν.



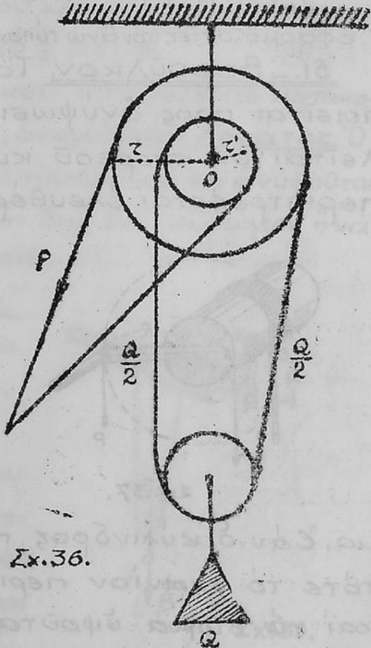
σχ. 35

49. Πολύσπαστον. Τό πολύσπαστον ἀποτελεῖται ἐκ δύο τροχαλιοθηκῶν ἑκάστη τῶν ὁποίων φέρει δύο ἤ περισσοτέρας τροχαλίας στρεφομένας περί τόν αὐτόν ἄξονα.

Ἐκ τῶν δύο τροχαλιοθηκῶν ἡ μέν ἀνωτέρα εἶναι παγία, ἡ δέ ἑτέρα ἡ κάτωθεν, ἐλευθέρα καί φέρει ἄγκιστρον ἐξ οὗ κρέμαται τό πρός ἀνύψωσιν βάρος. Εἰς κρίκον τῆς παγίας τροχαλίας προσδένεται τό ἄκρον σχοινίου (σχ. 35), τό ὁποῖον διέρχεται διά τῆς πρώτης τροχαλίας τῆς κάτω τροχαλιοθήκης καὶ εἶτα ἀνέρχεται καὶ διέρχεται διὰ τῆς τελευταίας τροχαλίας τῆς ἄνω τροχαλιοθήκης, εἶτα τῆς δευτέρας τροχαλίας τῆς κάτω τροχαλιοθήκης κ.τ.λ. καὶ ἐλευθεροῦται τὸ σχοινίον εἰς τὴν ἄνω τροχαλίαν τῆς παγίας τροχαλιοθήκης. εἰς τὸ ἄκρον τοῦ σχοινίου ἐφαρμόζομεν τὴν δύναμιν ἵνα ὑπερνικήσωμεν τὴν ἀντίστασιν.

Ἡ ἰσορροπία τῆς ἀντιστάσεως R ἐπιτυγχάνεται διὰ δυνάμεως μικροτέρας ἐξαρτωμένης ἐκ τοῦ συνόλου τῶν τροχαλιῶν τοῦ πολυσπάστου.

Ἐάν λ.χ. τὸ πολύσπαστον ἀποτελεῖται ἀπὸ 6 τροχαλίας, τότε ἡ ἀντίστασις ἰσορροπεῖται μὲ δύναμιν ἴσην πρὸς τὸ $\frac{1}{6}$ τῆς ἀντιστάσεως.



Σχ.36.

__50.– Διαφορικὸν πολύσπαστον.__ Τοῦτο ἀποτελεῖται ὡς εἰς τὸ (σχ.36) φαίνεται, ἐκ δύο παγίων τροχαλιῶν ὀδοντωτῶν αἱ ὁποῖαι τοποθετοῦνται παραλλήλως καὶ πολὺ πλησίον ἡ μία τῆς ἄλλης καὶ περιστρέφονται περὶ τὸν αὐτὸν ἄξονα. Αἱ ἀκτῖνες αὐτῶν r καὶ r' ὅμως διαφέρουν καὶ κάτωθεν ὑπάρχει ἐλευθέρα τροχαλία μὲ ἄγκιστρον ἐξ οὗ ἐξαρτῶνται τὰ πρὸς ἀνύψωσιν βάρη. Αἱ δύο ἄνω τροχαλίαι συνδέονται δι' ἁλύσεως μὲ τὴν κάτω ὡς δεικνύει τὸ (σχ.36). Τὸ βέλος ἐπὶ τῆς ἁλύσεως δεικνύει τήν διεύθυνσιν καθ'ἥν ἐνεργεῖ ἡ δύναμις. Κατά τήν λειτουργίαν τοῦ διαφορικοῦ πολυσπάστου ἡ ἅλυσος περιτυλίσσεται ἐπί τῆς μιᾶς σταθερᾶς τροχαλίας καί ἐκτυλίσσεται κατά ὀλιγώτερον μῆκος ἀπό τῆς μικροτέρας σταθερᾶς τροχαλίας.

Εἰς τήν κατάστασιν τῆς ἰσορροπίας, ἐάν ἐφαρμόσωμεν τά περί ῥοπῶν ὡς πρός τόν ἄξονα Ο θά ἔχωμεν:

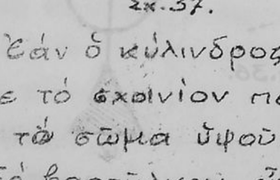
$$\frac{Q}{2}\cdot \tau = P\cdot \tau + \frac{Q}{2}\cdot \tau' \quad \text{καί} \quad P\tau = \frac{Q}{2}(\tau-\tau')$$

$$\text{καί} \quad P = \left(\frac{\tau-\tau'}{2\tau}\right)\cdot Q$$

Ἐφαρμογή. Διαφορικόν πολύσπαστον ἀποτελεῖται ἀπό δύο τροχαλίας διαμέτρων 0,50 μ. καί 0,45 μ. Ποία δύναμις πρέπει νά ἐφαρμοσθῇ διά νά ὑψώσῃ βάρος 500 χιλιογράμμων, ἐξηρτημένων ἐκ τῆς ἐλευθέρας τροχαλίας;

Ἐφαρμόζοντες τόν ἄνω τύπον ἔχομεν: $P = 500 \times \frac{50-45}{100} = 25$ χιλιόγραμμα.

51.- Βαροῦλκον. Τό βαροῦλκον (σχ. 37) χρησιμοποιεῖται πρός ἀνύψωσιν βαρέων σωμάτων. Ἀποτελεῖται ἐκ στερεοῦ κυλίνδρου, ὅστις δύναται νά περιστρέφεται ἐλευθέρως περί ἄξονα ὁριζόντιον, τῇ βοηθείᾳ μοχλοῦ. Ὁ ἄξων στηρίζεται ἐπί δύο στερεῶν ὑποστηριγμάτων. Τό ἕν ἄκρον σχοινίου προσδένεται στερεῶς ἐπί τινος σημείου τοῦ κυλίνδρου, εἰς δέ τό ἕτερον προσδένεται τό πρός ἀνύψωσιν σῶμα.



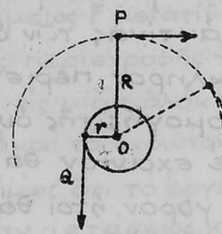
Σχ. 37.

Ἐάν ὁ κύλινδρος περιστραφῇ διά στροφάλου, τότε τό σχοινίον περιτυλίσσεται εἰς τόν κύλινδρον καί τό σῶμα ὑψοῦται.

Τό βαροῦλκον εἶναι μοχλός τοῦ πρώτου εἴδους καί τό ὑπομόχλιον εὑρίσκεται ἐπί τοῦ ἄξονος.

Βραχίων τῆς ἀντιστάσεως εἶναι ἡ ἀκτίς τοῦ κυλίνδρου, τῆς δέ δυνάμεως, ἡ ἀπόστασις τοῦ ἄξονος ἀπό τοῦ σημείου ἐφαρμογῆς τῆς κυρίως δυνάμεως δηλ. ἡ R.

Διά νά εὕρωμεν τήν συνθήκην ἰσορροπίας λαμβάνομεν τάς ῥοπάς ὡς πρός τόν ἄξονα. καί ἔχομεν: (σχ.38)



Σχ. 38.

$$Qr = P \cdot R$$

ἐξ οὗ $\frac{P}{Q} = \frac{r}{R}$ καί $P = Q\frac{r}{R}$

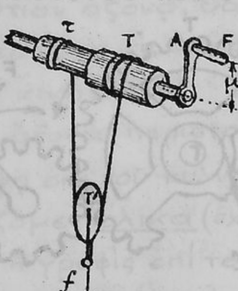
Βλέπομεν λοιπόν ὅτι ὅσον ὁ βραχίων τῆς δυνάμεως εἶναι μεγαλύτερος τόσον καί ἡ δύναμις διά νά ἰσορροπίσωμεν τήν ἀντίστασιν εἶναι μικροτέρα.

Ἄν δηλ. $r = 1$ καί $R = 3$ ἔχομεν $\frac{P}{Q} = \frac{1}{3}$ καί $3P = Q$ καί $P = \frac{Q}{3}$ τουτέστι ἡ δύναμις ποῦ χρειάζεται νά ἰσορροπίσῃ τήν ἀντίστασιν Q εἶναι τό $\frac{1}{3}$ αὐτῆς.

Συνήθως ὁ ἄξων τοῦ βαρούλκου τοποθετεῖται κατακορύφως καί τότε τό βαροῦλκον, ὀνομάζεται <u>ἐργάτης</u>. Ὁ ἐργάτης χρησιμοποιεῖται εἰς τά πλοῖα διά νά ἀνυψοῦται ἡ ἄγκυρα τοῦ πλοίου, καί ἀκόμη διά νά σύρωμεν ἤ νά ἀνυψώσωμεν διάφορα βαρέα σώματα.

<u>52. Διαφορικόν βαροῦλκον.</u>

Τό διαφορικόν βαροῦλκον ἔχει δύο τύμπανα διαφόρου ἀκτῖνος, (σχ. 39) ἔχοντα κοινόν ἄξονα. Τό σχοινίον ἀπό τοῦ ἑνός τυμπάνου Τ, ἔρχεται εἰς τήν κινητήν τροχαλίαν Τ' καί ἀπό ἐκεῖ εἰς τό ἕτερον τύμπανον τ, ὅπου περιτυλίσσεται κατ' ἀντίθετον φοράν πρός το Τ,



Σχ. 39.

οὕτως ὥστε ὅταν τυλίσσεται εἰς τό ἕν τύμπανον ἐκτυλίσσεται ἀπό τό ἄλλο. Ἡ δύναμις F ἐνεργεῖ εἰς τό ἄκρον τῆς λαβῆς Α, ἀκριβῶς ὅπως εἰς τό ἁπλοῦν βαροῦλκον ἡ δέ f εἰς τόν ἄξονα τῆς κινητῆς τροχαλίας. Ἄν καλέσωμεν μ τόν μοχλοβραχίονα τῆς δυνάμεως F, Τ καί τ τάς ἀκτῖνας τῶν δύο τυμπάνων καί θεωρήσωμεν μίαν ὁλόκληρον περιστροφήν τοῦ ἄξονος, το μέν σημεῖον ἐφαρμογῆς τῆς δυνάμεως F θά μετακινηθῇ κατά $2\pi\mu$, τό δέ σχοινίον θά περιτυλιχθῇ εἰς τό Τύμπανον Τ κατά ἕνα γῦρον ἤτοι θά βραχυνθῇ κατά $2\pi T$, θά ἐκτυλιχθῇ δέ ἀπό τό τύμπανον τ κατά ἕνα γῦρον, ἤτοι κατά $2\pi\tau$, ἑπομένως θά βραχυνθῇ ἐν ὅλῳ κατά $2\pi(T-\tau)$ καί τό σῶμα Β θά ἀνέλθῃ κατά τό ἥμισυ τοῦ μήκους τούτου,

ἤτοι θά εἶναι: $f \times \pi(T-\tau) = F \cdot 2\pi\mu$

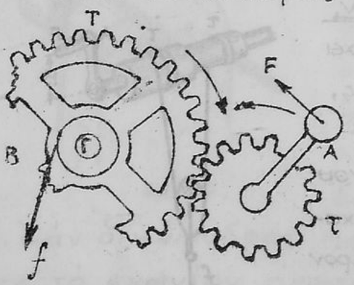
$$\text{καί } \frac{f}{F} = \frac{2\pi\mu}{\pi(T-\tau)} \text{ ἤ } \frac{f}{F} = \frac{2\mu}{T-\tau}$$

Ἄν λ.χ. $\mu = 25$ ἑκατ. $T = 20$ ἑκατ. $\tau = 19$ ἑκατ.

τότε $\frac{f}{F} = \frac{2\times 25}{20-19} = 50$ καί $\frac{f}{F} = 50$ ἐξ οὗ $f = 50F$

καί $\frac{f}{50} = F$ δηλ. ἰσορροποῦμεν τό σῶμα μέ δύναμιν ἴσην πρός τό $\frac{1}{50}$ τῆς ἀντιστάσεως.

<u>53.- Σύνθετον βαροῦλκον</u>. Τό συνθετόν βαροῦλκον εἶναι συνδυασμός τοῦ ἁπλοῦ βαρούλκου μέ ἄλλας ἁπλᾶς μηχανάς. Τό σχῆμα 40 παριστᾶ τοιοῦτον βαροῦλκον. Ἡ δύναμις F ἐνεργεῖ διά μοχλοβραχίονος μήκους Α, καί πάντοτε καθέτως ἐπί τήν λαβήν ἐπί τοῦ ὀδοντωτοῦ τροχοῦ τ ὅστις φέρει τ ὀδόντας. Οἱ ὀδόντες τοῦ τ ἐμπλέκονται



Σχ. 40

εἰς τούς ὀδόντας Τ ἐν ὅλῳ τοῦ ὀδοντωτοῦ τροχοῦ Τ οὗτος δέ διά κοινοῦ ἄξονος συνδέεται πρός τό τύμπανον Γ, τοῦ ὁποίου τήν ἀκτῖνα καλοῦμεν Γ. Περί τό τύμπανον τοῦτο τυλίσσεται σχοινίον Β, εἰς τό ἄκρον τοῦ ὁποίου κρέμαται τό σῶμα δηλαδή ἡ ἀντίστασις f.

Ἐάν ὁ τροχός τ ἐκτελέσῃ μίαν ὁλόκληρον περιστροφήν, τό σημεῖον ἐφαρμογῆς τῆς δυνάμεως F μετατίθεται κατά 2πΑ. Ὁ τροχός Τ ἐκτελεῖ μέρος περιστροφῆς $\frac{\tau}{T}$ (διότι παρασύρεται κατά τ ὀδόντας ἐνῷ εἰς μίαν ὁλόκληρον στροφήν του ἀντιστοιχοῦν Τ ὀδόντες) καί τό σχοινίον προχωρεῖ κατά $2\pi\Gamma \cdot \frac{\tau}{T}$. Γνωρίζομεν ὅμως ὅτι τό ἔργον τῆς δυνάμεως ἰσοῦται μέ τό ἔργον τῆς ἀντιστάσεως καί ἑπομένως ἔχομεν:

$F \times 2\pi A = f \times 2\pi\Gamma \cdot \frac{\tau}{T}$ καί διά τήν συνθήκην ἰσορροπίας θά ἔχωμεν:

$$\frac{F}{f} = \frac{2\pi\Gamma \cdot \frac{\tau}{T}}{2\pi A} = \frac{\Gamma\tau}{AT}$$

Ἄν λ.χ. εἶναι Α = 50 ἑκατ., τ = 20, Τ = 100, Γ = 10 ἑκατ. θά ἔχωμεν $\frac{F}{f} = \frac{10 \times 20}{50 \times 100} = \frac{1}{25}$ δηλ. $\frac{F}{f} = \frac{1}{25}$ καί $F = \frac{1}{25}$

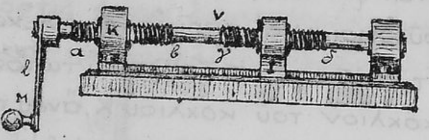
Δηλαδή εἰς τήν κατάστασιν τῆς ἰσορροπίας ἡ δύναμις εἶναι ἴση πρός τό $\frac{1}{25}$ τῆς ἀντιστάσεως.

54.- Κοχλίας

<u>Χάραξις ἕλικος κοχλίου</u>. Ἔστω ὅτι κύλινδρος στερεός περιστρέφεται περί ὁριζόντιον ἄξονα. Ἐάν κατά τήν περιστροφήν τοῦ κυλίνδρου, φέρωμεν εἰς ἐπαφήν αὐτοῦ τό ἄκρον γραφίδος ἥτις νά κινῆται μέ ὁμαλήν ταχύτητα παραλλήλως πρός τόν ἄξονα περιστροφῆς τοῦ κυλίνδρου, τότε ἡ γραφίς θά γράψῃ ἐπί τοῦ κυλίνδρου συνεχῆ γραμμήν τήν ὁποίαν ὀνομάζομεν <u>ἕλικα</u> (σχ. 41). Τό τμῆμα κατά τό ὁποῖον μετετέθη ἡ γραφίς ἐπί τοῦ κυλίνδρου εἶναι σταθερόν εἰς κάθε στροφήν τοῦ κυλίνδρου καί καλεῖται <u>βῆμα τῆς ἕλικος</u>. Ἐάν ὥρα χαράξωμεν τήν ἕλικα δι' αὔλακος ἐπί τοῦ κυλίνδρου τότε ὁ κύλινδρος μέ τήν αὐλακοειδῆ ἕλικα ὀνομάζεται

56.- Διαφορικός κοχλίας τοῦ Prony

Ὁ Διαφορικός κοχλίας ἀποτελεῖται ἐκ κυλινδρικοῦ ἐπιμήκους μετάλλου ὅστις φέρει δύο κοχλίας αβ καί γδ (σχ. 42) τῆς αὐτῆς διευθύνσεως, ἀλλά οἱ ὁποῖοι διαφέρουν κατά τό βῆμα των. Ἔστω δέ υ τό βῆμα τοῦ πρώτου καί υ' τοῦ δευτέρου. Ὁ κοχλίας αβ, εἰσέρχεται εἰς περικόχλιον σταθερόν Κ καί ὁ γδ εἰς περικόχλιον



Σχ. 42.

κινητόν Ι, τό ὁποῖον δύναται νά μετακινῆται παραλλήλως πρός τόν ἄξονα τοῦ κυλίνδρου."

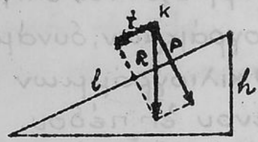
"Οταν ὁ κύλινδρος ἐκτελεῖ μίαν στροφήν, ὁ κοχλίας αβ, εἰσέρχεται εἰς τό περικόχλιον Κ κατά τμῆμα ἴσον πρός τό βῆμα του. Κατά τόν ἴδιον χρόνον τό περικόχλιον Ι μετατίθεται, παραλλήλως πρός τόν ἄξονα τοῦ κυλίνδρου κατά μῆκος υ', ἴσον πρός τό βῆμα τοῦ κοχλίου γδ.

Ἐάν τό βῆμα τοῦ κοχλίου γδ εἶναι μικρότερον τοῦ βήματος τοῦ κοχλίου αβ, τότε τό περικόχλιον Ι, ἀπομακρύνεται τοῦ Κ, καί ἡ ἀπόστασις ΙΚ αὐξάνει κατά υ-υ'. Ἀντιθέτως ἐάν τό βῆμα τοῦ κοχλίου γδ εἶναι ἀνώτερον τοῦ βήματος τοῦ κοχλίου αβ, τό Ι πλησιάζει τοῦ Κ καί ἡ ἀπόστασις ΙΚ ἐλαττοῦται κατά υ'-υ.-

Τήν διαφοράν μεταξύ τῶν δύο βημάτων δυνάμεθα νά τήν καταστήσωμεν ὅσον θέλομεν μικράν καί κατά συνέπειαν νά ἐπιτυγχάνωμεν μέ τό ὄργανον τοῦτο μεταθέσεις τοῦ περικοχλίου Ι πάρα πολύ μικράς.-

57.- Κεκλιμένον ἐπίπεδον. Πᾶν ἐπίπεδον στερεόν τό ὁποῖον ἔχει κλίσιν πρός τόν ὁρίζοντα καί σχηματίζει γωνίαν τινά μετ'αὐτοῦ δύναται νά χρησιμεύση ὡς ἁπλῆ μηχανή πρός ἀνύψωσιν βαρέων σωμάτων, χρησιμοποιοῦντες μικράν σχετικῶς δύναμιν.

Ἔστω τό είς τό σχῆμα 44 κεκλιμένον ἐπίπεδον τοῦ ὁποίου τό μέν μῆκος εἶναι l, καί τό ὕψος h. Ὁ λόγος τοῦ ὕψους πρός τό μῆκος αὐτοῦ ὀνομάζεται <u>κλίσις</u> τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου. Τό βάρος τοῦ σώματος παρίσταται ὑπό τῆς δυνάμεως R (ἀντίστασις) ἡ ὁποία εἶναι ἐφηρμοσμένη είς τό κέντρον βάρους K τοῦ σώματος. Ποίαν



Σχ. 44.

δύναμιν πρέπει νά ἐφαρμόσωμεν είς τό K διά νά ἀνυψώσωμεν τό σῶμα ἐπί τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου καί παραλλήλως αὐτοῦ;

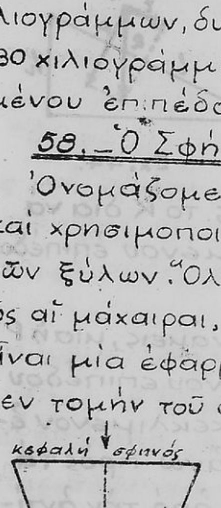
Ἡ δύναμις R ἀναλύεται είς δύο δυνάμεις, μία ἡ P ἥτις ἐξασκεῖ πίεσιν ἐπί τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου καί ἡ ἑτέρα t παράλληλος πρός τό κεκλιμένον ἐπίπεδον καί διευθυνομένη ἐκ τῶν ἄνω πρός τά κάτω. Ἡ δύναμις P ἐξουδετεροῦται ἀπό τήν ἀντίστασιν τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου, ἡ δέ t τείνει νά φέρη τό σῶμα πρός τά κάτω. Ἐάν λοιπόν ἐφαρμόσωμεν δύναμιν ἴσην καί ἀντίθετον τῆς t τότε τό σῶμα θά ἰσορροπίση

Τό μέγα ὀρθογώνιον τρίγωνον τό ὁποῖον ἔχει ὕψος h καί ὑποτείνουσα τήν l, εἶναι ὅμοιον πρός τά δύο μικρά τρίγωνα καί ὡς ἐκ τούτου ἔχομεν τήν ἀναλογίαν $\frac{t}{R} = \frac{h}{l}$. Ὑπάρχει δηλαδή σχέσις τῆς δυνάμεως t καί τῆς R, (τοῦ βάρους τοῦ σώματος) οἵα σχέσις ὑπάρχει μεταξύ τοῦ ὕψους h, καί τοῦ μήκους l τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου. Ἀλλά $\frac{h}{l}$ εἶναι ἡ κλίσις τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου. Ἐάν δηλαδή $h=1$ καί $l=4$ τότε ἡ κλίσις εἶναι $\frac{1}{4}$. Ἑπομένως $\frac{t}{R}=\frac{1}{4}$ καί $4t=R$ ἐξ οὗ $t=\frac{R}{4}$, δηλαδή δυνάμεθα μέ δύναμιν ἴσην πρός τό $\frac{1}{4}$ τῆς ἀντιστάσεως ἤ τοῦ βάρους τοῦ σώματος, νά ἰσορροπίσωμεν τήν ἀντίστασιν.

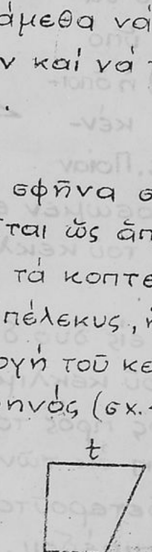
Ἐάν π.χ. τό σῶμα ἔχει βάρος 80 χιλιογράμμων τότε τό ἰσορροποῦμεν μέ βάρος 20 χιλιογράμμων καί ἐφαρμόζοντες ὀλίγην μεγαλυτέραν δύναμιν τῶν 20 χιλιογράμμων, δυνάμεθα νά ὑπερνικήσωμεν τό βάρος τῶν 80 χιλιογράμμων καί νά τό ἀνυψώσωμεν ἐπί τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου.

58.— Ὁ Σφήν

Ὀνομάζομεν σφῆνα σῶμα στερεόν πρισματικόν καί χρησιμοποιεῖται ὡς ἁπλῆ μηχανή πρός σχίσιμον τῶν ξύλων. Ὅλα τά κοπτερά ἐργαλεῖα εἶναι σφῆνες ὡς αἱ μάχαιραι, ὁ πέλεκυς, ἡ ψαλίς, τό ξυράφιον κ.τ.λ. Ὁ σφήν εἶναι μία ἐφαρμογή τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου. Ἄν λάβωμεν τομήν τοῦ σφηνός (σχ. 45 καί 46) αὕτη εἶναι τρίγωνον ἰσοσκελές, τό ὁποῖον ἀναλύομεν εἰς δύο ὀρθογώνια τρίγωνα. Αἱ ὑποτείνουσαι αὐτῶν ἀντιστοιχοῦσι πρός τάς ὄψεις τοῦ σφηνός καί ὄψιν σφηνός καλοῦμεν τό μῆκος τῆς πλαγίας αὐτοῦ ἐπιφανείας. Τήν δέ ἐπίπεδον ἄνω ἐπιφάνειαν τοῦ σφηνός τήν ὀνομάζομεν κεφαλήν.



Σχ. 45



Σχ. 46.

Ἂς λάβωμεν τώρα τὸ ἓν ἐκ τῶν δύο ὀρθογωνίων τριγώνων εἰς τὰ ὁποῖα ἀναλύσαμεν τὴν τομὴν τοῦ σφηνός. Ἡ δύναμις ἐξασκεῖται ἐπὶ τῆς βάσεως τοῦ τριγώνου, ἡ ὁποία εἶναι ἡ κεφαλὴ τοῦ σφηνός.

Ἐπὶ τῆς μιᾶς ὄψεως τοῦ τριγώνου λαμβάνομεν σημεῖον τι Μ. Ἡ ἐπὶ τῆς κεφαλῆς ἀσκουμένη δύναμις, δύναται νὰ μεταβιβασθῇ εἰς τὸ σημεῖον Μ καὶ τὴν παριστάνομεν διὰ 1. Αὕτη ἀναλύεται εἰς δύο ἄλλας τὴν 2 καὶ 3. Ἡ δύναμις 2 ἐνεργεῖ καὶ μετατίθεται ὁ σφὴν παραλλήλως πρὸς τὴν ὄψιν.

Ἡ δύναμις 3 ἐξουδετεροῦται ἀπὸ τὰς πλαγίας ἀντιστάσεις.

Συνθήκη ἰσορροπίας τοῦ σφηνός. Ἔστω σφὴν ὅστις εἰσέρχεται ἐντὸς στερεοῦ σώματος κατὰ τὴν ποσότητα. μ. Ἡ ὄψις α θὰ προχωρήσῃ τοπικῶς καὶ θὰ ἀπομακρύνῃ τὴν ἀντίστασιν κατὰ ποσότητα ν.

Τὸ κινητήριον ἔργον ὅπως γνωρίζωμεν ἰσοῦται μὲ τὸ ἀνθιστάμενον. Ἐὰν P εἶναι ἡ δύναμις ἥτις εἰσῆλθε κατὰ μ ἐντὸς τοῦ σώματος καὶ R ἡ ἀντίστασις ἥτις ἀπεμακρύνθη πλαγίως κατὰ ν, θὰ ἔχωμεν:

$$P \times \mu = R \times \nu \quad \text{καὶ} \quad \frac{P}{R} = \frac{\nu}{\mu}$$

Τὰ τρίγωνα ὅμως τοῦ σχ. 46 εἶναι ὅμοια. Εἶναι ὀρθογώνια καὶ ἔχουσι μίαν ὀξεῖαν γωνίαν ἴσην (γων. 1 = γων. 2) καὶ πλευρὰς παραλλήλους. Καλοῦμεν t τὴν μικρὰν πλευρὰν τοῦ μεγάλου τριγώνου δηλ. τὴν κεφαλὴν τοῦ σφηνός καὶ ἔχομεν τότε τὴν ἑξῆς ἀναλογίαν:

$$\frac{\nu}{\mu} = \frac{t}{a}$$

Ἀλλά $\frac{v}{\mu}$ εἶναι ἴσον πρός $\frac{P}{R}$

ἐκ τούτου ἔχομεν τελικῶς : $\frac{P}{R}=\frac{t}{a}$, τουτέστι ὁ λόγος τῆς δυνάμεως πρός τήν ἀντίστασιν ἰσοῦται μέ τόν λόγον τῆς κεφαλῆς τοῦ σφηνός διά τῆς ὄψεως αὐτοῦ.-

59.- Προβλήματα πρός λύσιν

1) Ποίαν δύναμιν πρέπει νά καταβάλωμεν ἵνα, διά μέσου μιᾶς ἐλευθέρας τροχαλίας καί διά μιᾶς παγίας τροχαλίας, δυνηθῶμεν νά ἀνυψώσωμεν σῶμα βάρους 240 χιλιογράμμων;

(Ἀπ. Δύναμις=120 χιλ/μων)

2) Πολύσπαστον ἀποτελεῖται ἀπό δύο κινητάς τροχαλίας καί δύο παγίας. Αἱ ἐλεύθεραι τροχαλίαι συγκρατοῦνται διά 4 σχοινίων. Ποίαν δύναμιν πρέπει νά χρησιμοποιήσωμεν διά νά ὑψώσωμεν βάρος 240 χιλιογράμμων; (Ἀπ. Δύναμις = 60 χιλιογράμ.)

3) Ποία δύναμις δύναται νά ἰσορροπίσῃ βάρος 900 χιλιογράμμων τό ὁποῖον κρέμαται ἀπό πολύσπαστον ἀποτελούμενον ἐξ 6 σχοινίων;

(Ἀπ. 150 χιλιογράμμων)

4) Τεμάχιον μηχανῆς βάρους 1500 χιλιογράμμων κρέμαται ἀπό διαφορικόν πολύσπαστον. Αἱ ἀκτῖνες τῶν τροχαλιῶν τοῦ πολυσπάστου εἶναι 0,30 καί 0,25 τοῦ μέτρου. Ζητεῖται νά εὑρεθῇ ἡ δύναμις ἥτις χρειάζεται διά νά ἀνυψωθῇ τό τεμάχιον τῆς μηχανῆς. (Ἀπ. 125 χιλιόγραμμα)

5) Μοχλός μήκους 0,60 μέτρου καί βάρους 20 χιλιογράμμων φέρει εἰς τά ἄκρα του φορτία βάρους 50 καί 110 χιλιογράμμων. Εἰς ποῖον σημεῖον πρέπει νά στηρίξωμεν τό ὑπομόχλιον, διά νά ὑπάρξῃ

ἰσορροπία;   (Ἀπ. Εἰς ἀπόστ. 0,10μ. ἀπό τοῦ μέσου τοῦ μόχλοῦ καί πρός τά δεξιά)

6) Ποίαν δύναμιν πρέπει νά ἐφαρμόσωμεν εἰς τό ἄκρον μοχλοῦ τοῦ ὁποίου ὁ βραχίων τῆς δυνάμεως εἶναι 2 μέτρα, καί τῆς ἀντιστάσεως 0,25 μέτρα, διά νά ὑψώσωμεν ὄγκον μαρμάρου 400 χιλιογράμμων;
(Ἀπ. 50 χιλιόγραμμα.)

7) Διά μοχλοῦ πρώτου εἴδους μετακινοῦμεν βάρος 400 ὀκάδων διά δυνάμεως 50 ὀκάδων. Ὁ βραχίων τῆς ἀντιστάσεως εἶναι 2 μέτρα. Ποῖον τό μῆκος τοῦ μοχλοῦ;   (Ἀπ. 18 μέτρα)

8) Εἰς τό ἕν ἄκρον πρωτογενοῦς μοχλοῦ μήκους 100 παλαμῶν, ἐνεργεῖ δύναμις 50 χιλιογράμμων, τῆς ὁποίας ἡ διεύθυνσις σχηματίζει μετά τοῦ μοχλοῦ γωνίαν 150°, εἰς δέ τό ἕτερον ἄκρον κρέμαται βάρος 800 χιλιογράμμων. Τοῦ μοχλοῦ εὑρισκομένου ἐν ἰσορροπίᾳ ὁριζοντίως, ζητεῖται ἡ ἀπόστασις τοῦ ὑπομοχλίου ἀπό τῆς ἀντιστάσεως.   (Ἀπ. 3⅓ παλάμαι)

9) Διαφορικόν πολύσπαστον ἀποτελεῖται ἀπό δύο τροχαλίας διαμέτρων 0,50 καί 0,45 μέτρων. Ποία δύναμις πρέπει νά ἐφαρμοσθῇ διά νά ὑψώσῃ βάρος 500 χιλιογράμμων, ἐξηρτημένον ἐκ τῆς ἐλευθέρας τροχαλίας;   (Ἀπ. 25 χιλιόγραμμα)

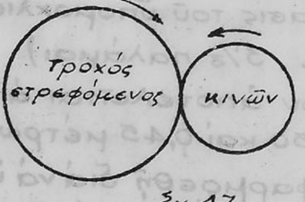
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V

ΜΕΤΑΔΟΣΙΣ ΤΩΝ ΚΙΝΗΣΕΩΝ

60.- Κύλινδροι τριβῆς καί ἱμάντες. Ὅταν δύο κύλινδροι περιστρεφόμενοι ἀπέχουσι ἀλλήλων ὀλίγον, δυνάμεθα νά μεταδόσωμεν τήν κίνησιν αὐτῶν αὐξάνοντες τὴν διάμετρον αὐτῶν. Τοῦτο ἐπιτυγχάνεται διά δύο τροχῶν τούς ὁποίους προσαρμόζομεν σταθερῶς ἐπί τῶν ἀξόνων τῶν δύο κυλίνδρων. Οἱ τροχοί ἐφάπτονται καί ὁ εἷς περιστρεφόμενος παρασύρει τόν ἕτερον δι' ἁπλῆς προστριβῆς.

Ἔστωσαν δύο τροχοί διαφορετικῶν ἀκτίνων ἐφαπτόμενοι ἐξωτερικῶς. Ὁ εἷς ἐκ τῶν δύο περιστρεφόμενος θά μεταδώσῃ τήν κίνησιν εἰς τό ἕτερον. Ὁ πρῶτος τροχός εἶναι ὁ κινῶν τροχός, ὁ δέ δεύτερος ὁ κινούμενος. Ἐάν ὁ κινῶν τροχός εἶναι ὁ μικρότερος κατά τήν ἀκτίνα, καί στρέφεται κατά μίαν διεύθυνσιν, τότε θά κινήσῃ τόν ἄλλον τόν μεγαλήτερον τροχόν κατά διεύθυνσιν ἀντίθετον (σχ. 47).

Ὅλα τά σημεῖα τά ὁποῖα εὑρίσκονται ἐπί τῆς ἐξωτερικῆς ἐπιφανείας καί τῶν δύο τροχῶν, εἶναι



Σχ. 47

διαρκῶς εἰς ἐπαφήν καί θά ἔχουν ὅλα καί εἰς τούς δύο τροχούς τήν αὐτήν γραμμικήν ταχύτητα. Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ ἀκτίς τοῦ μεγάλου τροχοῦ εἶναι διπλασία τῆς ἀκτῖνος τοῦ μικροῦ τροχοῦ. Τότε καί αἱ περιφέρειαι αὐτῶν θά ἔχουν τήν ἰδίαν σχέσιν καί ἡ περιφέρεια τοῦ μεγάλου τροχοῦ θά εἶναι διπλασία τῆς τοῦ μικροῦ. Ἐάν λοιπόν ὁ μικρός τροχός κάμνει μίαν στροφήν, ὁ μεγάλος τροχός θά στραφῆ κατά τό $\frac{1}{2}$ δηλ. θά κάμῃ ἡμίσειαν στροφήν, καί ὅταν ὁ μεγάλος τροχός καμνει 1 στροφήν, ὁ μικρός θά κάμνῃ 2 στροφάς. Ὅταν ὁ μεγάλος τροχός κάμνει 25 στροφάς, ὁ μικρός θά κάμῃ $2 \times 25 = 50$ καί γενικῶς

Ὅταν ὁ μεγαλύτερος τροχός ἐκτελεῖ ὡρισμένον ἀριθμόν στροφῶν, ὁ μικρότερος τροχός ὅστις εἶναι τό ½ τοῦ μεγάλου κατά τήν ἀκτῖνα, θά κάμη τόν διπλάσιον ἀριθμόν στροφῶν. Ἐάν διά ν καλέσωμεν τόν ἀριθμόν τῶν στροφῶν τοῦ μεγάλου τρόχου καί διά ν' τόν τοῦ μικροτέρου, καί διά ρ καί ρ' τάς ἀκτῖνας τοῦ μεγάλου καί τοῦ μικροῦ τροχοῦ, τότε ὁ ἀριθμός τῶν στροφῶν ν τοῦ μεγάλου τροχοῦ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογος πρός τόν ἀριθμόν ν' τῶν στροφῶν τοῦ μικροῦ τροχοῦ θά ἔχωμεν συνεπῶς τήν ἀναλογίαν: $\frac{\rho}{\rho'} = \frac{\nu'}{\nu}$ ἤ $\rho\nu = \rho'\nu'$

Παράδειγμα. Δύο τροχοί τριβῆς ἔχουσι ἀκτῖνας ὁ μέν πρῶτος 12 ἑκατ. καί 60 ἑκατ., ὁ δεύτερος. Ὁ πρῶτος ἐκτελεῖ 45 στροφάς κατά λεπτόν. Πόσας στροφάς θά ἐκτελέση ὁ δεύτερος;

Ἔχομεν: $\rho = 60$, $\rho' = 12$, $\nu' = 45$ καί ζητοῦμεν τήν τιμήν τοῦ ν.

Ἐφαρμόζοντες τήν ἄνω ἀναλογίαν $\rho\nu = \rho'\nu'$

ἔχομεν: $\nu = \frac{\rho'\nu'}{\rho} = \frac{12 \times 45}{60} = 9$ στροφάς

1η Παρατήρησις. Ἐφ' ὅσον ὁ μεγαλύτερος τροχός εἰς ἕν λεπτόν ἐκτελεῖ 9 στροφάς, μία ἀκτίς τοῦ διαγράφη περιφέρειαν $9 \times 360°$, ἐνῶ μία ἀκτίς τοῦ μικροτέρου τροχοῦ διαγράφει περιφέρειαν $45 \times 360°$. Ἑπομένως δυνάμεθα νά συγκρίνωμεν τάς γωνιώδεις ταχύτητας αὐτῶν. Εἶναι φανερόν ὅτι ὁ μικρός τροχός περιστρέφεται ταχύτερον τοῦ μεγάλου. Δυνάμεθα ὅμως νά ὑπολογίσωμεν τήν ἀκριβῆ γωνιώδη ταχύτητα ἐκ τοῦ τύπου $\omega = \frac{2\pi\nu}{60}$ ἤ $\frac{\pi\nu}{30}$, ἄν ἀντικαταστήσωμεν τό ν διά τό 9 θά ἔχωμεν:

$$\omega = \frac{9 \times 3.14}{30} = 0.94$$

Ἄν ὑπολογίσωμεν τήν γωνιώδη ταχύτητα τοῦ τροχοῦ τῶν 45 στροφῶν εὑρίσκομεν

$$\omega=\frac{\pi\cdot 45}{30}=\frac{45\times 3,14}{30}=4,71$$

Ἂν διαιρέσωμεν τό 4,71 διά τοῦ 0,94 εὑρίσκομεν πηλῖκον 5. Ἑπομένως ἡ γωνιώδης ταχύτης τοῦ μικροῦ τροχοῦ εἶναι πέντε φοράς μικροτέρα τῆς γωνιώδους ταχύτητος τοῦ μεγάλου τροχοῦ, ὁ ὁποῖος ἔχει ἀκτῖνα 5 φοράς μεγαλητέραν τῆς ἀκτῖνος τοῦ μικροῦ τροχοῦ. Αἱ γωνιώδεις ταχύτητες συνεπῶς τῶν δύο τροχῶν τριβῆς εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν ἀκτίνων των.-

2α Παρατήρησις. Τά ἀνωτέρω δυνάμεθα νά τά συμπεράνωμεν καί ἐκ τοῦ τύπου, ὅστις μᾶς δίδει τήν γωνιώδη ταχύτητα συναρτήσει τῆς γραμμικῆς ταχύτητος καί τῆς ἀκτῖνος.

Ἡ γραμμική ταχύτης εἶναι ἡ αὐτή καί εἰς τούς δύο τροχούς, καί ἔστω αὕτη υ.-

Διά τόν πρῶτον τροχόν ἔχομεν: $\upsilon=\omega\cdot\rho$

" " δεύτερον " " $\upsilon=\omega'\cdot\rho'$

Ἑπομένως $\omega\rho=\omega'\rho'$ ἐξ οὗ $\frac{\omega}{\omega'}=\frac{\rho}{\rho'}$ (ω καί ω' εἶναι αἱ γωνιώδεις ταχύτητες τοῦ 1ου καί 2ου).

Αἱ γωνιώδεις λοιπόν ταχύτητες εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν ἀκτίνων.

Γνωρίζομεν ἐπίσης ὅτι $\omega=\frac{\pi\nu}{30}$ καί $\omega'=\frac{\pi\nu'}{30}$

Ἂν διαιρέσωμεν κατά μέλη θά ἔχωμεν:

$\frac{\omega}{\omega'}=\frac{\nu}{\nu'}$ ὅπερ σημαίνει ὅτι αἱ γωνιώδεις ταχύτητες εἶναι ἀνάλογοι τῶν στροφῶν.

Ἀλλά ἀνωτέρω ἴδωμεν ὅτι $\frac{\omega}{\omega'}=\frac{\rho}{\rho'}$ καί $\frac{\omega}{\omega'}=\frac{\nu}{\nu'}$, ἑπομένως καί $\frac{\nu}{\nu'}=\frac{\rho'}{\rho}=\frac{\omega}{\omega'}$ ἐξ οὗ συμπεραίνομεν ὅτι:

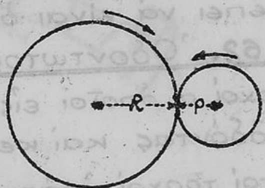
Αἱ γωνιώδεις ταχύτητες καί ὁ ἀριθμός τῶν στροφῶν τῶν δύο τροχῶν τριβῆς οἱ ὁποῖοι κινοῦνται, εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι πρὸς τὰς ἀκτῖνας των.

Ἐφαρμογή. Οἱ παράλληλοι ἄξονες δύο κυλίνδρων τριβέων ἀπέχουσι ἀλλήλων 50 ἑκατοστόμετρα. Ὁ πρῶτος ἐκτελεῖ 30 στροφὰς κατὰ λεπτὸν καὶ ὁ δεύτερος πρέπει νὰ ἐκτελῇ 20 στροφὰς κατὰ λεπτόν. Ποῖαν μέγεθος πρέπει νὰ ἔχουν οἱ τροχοί, ὁ κινῶν καὶ ὁ κινούμενος διὰ νὰ ἐκτελῇ ὁ δεύτερος κύλινδρος 20 στροφάς;

Αἱ ζητούμεναι ἀκτῖνες τῶν τροχῶν ἔστωσαν ρ καὶ R.

Ἐπομένως $\rho + R = 50$ ἑκατ.

Ἔστω ρ ἡ ἀκτὶς τοῦ κινοῦντος τροχοῦ.



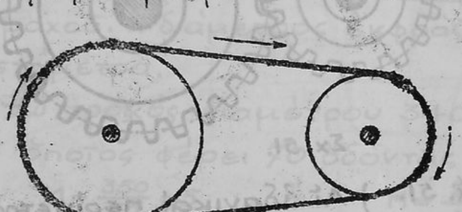
Γνωρίζοντες ὅτι $\rho\nu = \rho'\nu'$

καὶ $\frac{\rho}{\rho'} = \frac{\nu'}{\nu}$ ἔχωμεν:

Σχ. 48.

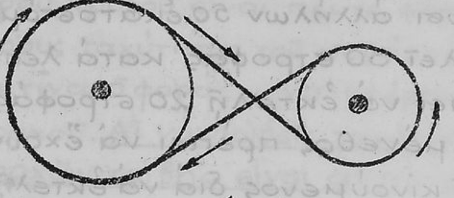
$\frac{\rho}{R} = \frac{20}{30}$ λύοντες τὴν ἐξίσωσιν ταύτην μὲ δύο ἀγνώστους, εὑρίσκομεν $R = 30$ ἑκατ. καὶ $\rho = 20$ ἑκατ.

61. – Κίνησις δι' ἱμάντων. Ὅταν δύο τροχοὶ εἶναι ἀπομεμακρυσμένοι ἀλλήλων, δυνάμεθα νὰ μεταδώσωμεν τὴν κίνησιν χρησιμοποιοῦντες ἱμάντας.



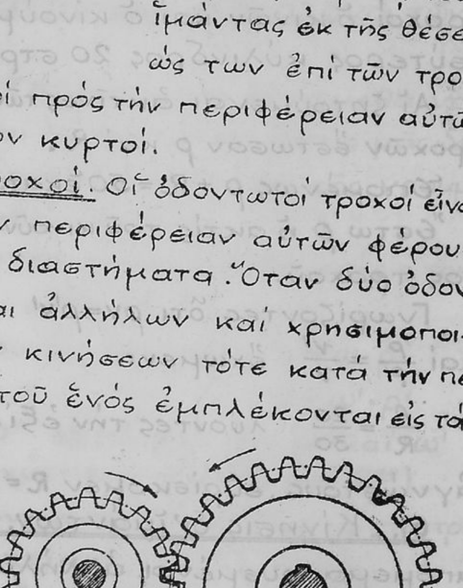
Σχ. 49.

Ἐὰν οἱ ἱμάντες ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς τῶν τροχῶν (σχ. 49), τότε οὗτοι περιστρέφονται κατὰ τὴν αὐτὴν φοράν, ἂν ἐφάπτονται ἐσωτερικῶς ὡς εἰς τὸ σχ. 50 τότε περιστρέφονται ἀντιθέτως. Καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις οἱ κανόνες διὰ τὴν γωνιώδη ταχύτητα αὐτῶν καὶ διὰ τὰς ἀκτῖνας εἶναι οἱ ἴδιοι ὅπως καὶ ἀνωτέρω. Ἐπειδὴ ὅμως κατὰ τὴν περιστροφὴν ἀναπτύσσεται ὡς θὰ ἴδωμεν κατωτέρω φυγόκεντρος δύναμις, ἡ ὁποία τείνει νὰ ἀπομακρύνῃ τοὺς ἱμάντας ἐκ τῆς θέσεώς των ἐπὶ τῶν τροχῶν, διὰ τοῦτο οἱ τροχοὶ πρὸς τὴν περιφέρειαν αὐτῶν πρέπει νὰ εἶναι ὀλίγον κυρτοί.



Σχ. 50.

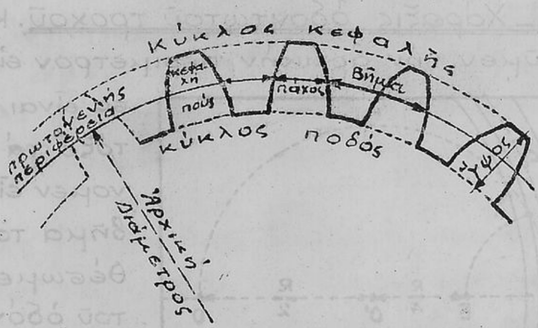
62. Ὀδοντωτοὶ τροχοί. Οἱ ὀδοντωτοὶ τροχοὶ εἶναι τροχοὶ οἱ ὁποῖοι εἰς τὴν περιφέρειαν αὐτῶν φέρουσι ὀδόντας καὶ κενὰ διαστήματα. Ὅταν δύο ὀδοντωτοὶ τροχοὶ ἐφάπτονται ἀλλήλων καὶ χρησιμοποιοῦνται διὰ μετάδοσιν κινήσεων τότε κατὰ τὴν περιστροφὴν οἱ ὀδόντες τοῦ ἑνὸς ἐμπλέκονται εἰς τὰ κενὰ διαστήματα τοῦ ἄλλου καὶ ἀντιστρόφως. Ἐκ τῶν δύο τροχῶν τῶν ὀδοντωτῶν οἱ ὁποῖοι ἐμπλέκονται ὁ μεγαλήτερος διατηρεῖ τὸ ὄνομα τοῦ τροχοῦ, ἐνῷ ὁ μικρότερος ὀνομάζεται κινητήρ.(Σχ. 51.) Αἱ ἰδανικαὶ περίμετροι αἱ ὁποῖαι θὰ ἐκινοῦντο δι' ἁπλῆς ἐπαφῆς, ἂν δὲν ὑπῆρχον οἱ ὀδόντες, καὶ ἐπὶ τῶν ὁποίων προεξέχουσιν οἱ ὀδόντες καλοῦνται ἀρχικαὶ περίμετροι καὶ ἐπ' αὐτῶν στηρίζονται κατὰ τὴν κατασκευὴν τῶν ὀδόν-



Σχ. 51.

τῶν ἑνὸς τροχοῦ. Τὸ ἐξωτερικὸν μέρος τοῦ ὀδόντος ἐν σχέσει πρὸς τὴν ἀρχικὴν περίμετρον καλεῖται <u>κεφαλὴ τοῦ ὀδόντος</u>, τὸ δὲ ἐσωτερικὸν ὀνομάζεται <u>πούς τοῦ ὀδόντος</u> (σχ. 52).

Τὸ πάχος τοῦ ὀδόντος καὶ τὸ μεταξὺ δύο ὀδόντων κενὸν διάστημα ὑπολογίζονται ἐπὶ τῆς ἀρχικῆς περιμέτρου. Τὸ πάχος καὶ τὸ κενὸν διάστημα ἀποτελοῦν τὸ <u>βῆμα</u> τοῦ ὀδοντωτοῦ τροχοῦ καὶ εἶναι τὸ αὐτὸ καὶ εἰς τοὺς δύο τροχοὺς οἱ ὁποῖοι ἐμπλέκονται.



Σχ. 52.

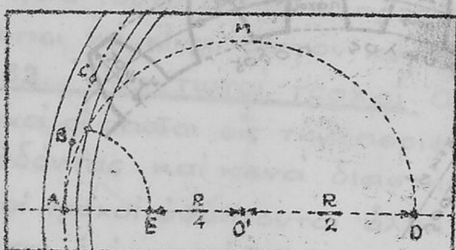
Ἐὰν διαιρέσωμεν τὴν διάμετρον τῆς ἀρχικῆς περιμέτρου τοῦ τροχοῦ, τὴν ὁποίαν καλοῦμεν 2ρ, διὰ τοῦ ἀριθμοῦ Ν τῶν ὀδόντων τοῦ τροχοῦ, τὸ πηλῖκον τὸ ὁποῖον εὑρίσκομεν καλεῖται <u>διαμετρικὸν βῆμα</u> τοῦ τροχοῦ. Ἡ διάμετρος ἐκφράζεται πάντοτε εἰς χιλιοστόμετρα.

Οὕτω τροχὸς διαμέτρου 340 χιλιοστομέτρων, καὶ ὁ ὁποῖος φέρει 70 ὀδόντας, ἔχει διαμετρικὸν βῆμα, $M = \frac{350}{70} = 5$ ἢ $M = \frac{2\rho}{N}$.

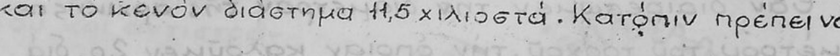
Ἡ ἀπόστασις τῆς <u>κεφαλῆς</u> τοῦ ὀδόντος ἀπὸ τοῦ ποδὸς αὐτοῦ ὀνομάζεται <u>ὕψος</u> τοῦ ὀδόντος. Ἵνα οἱ ὀδόντες τοῦ τροχοῦ ἐμπλέκονται ἀκριβῶς εἰς τὰ κενὰ διαστήματα τοῦ ἄλλου τροχοῦ, κατὰ τὴν κατασκευήν, τὰ κενὰ διαστήματα γίνονται ὀλίγον μεγαλύτερα τοῦ πάχους τοῦ ὀδόντος. Ἡ διαφορὰ αὕτη κατὰ τὴν το κατασκευὴν φθάνει ἐνίοτε τὸ $\frac{1}{10}$ μέχρι τὸ $\frac{1}{20}$ τοῦ βήματος τοῦ ὀδόντος. Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὀδόντος ἢ πρὸς τὸ κενὸν διάστημα καλεῖται <u>ὄψις</u> αὐτοῦ.

Πλάτος ὀδόντος, ὀνομάζεται τὸ μέγεθος τοῦ ὀδόντος, καὶ ὑπολογίζεται συμφώνως πρὸς τὸ πάχος τοῦ ἐπιπέδου κυλίνδρου ἐπὶ τοῦ ὁποίου ἔχει χαραχθῇ ὁ ὀδούς.

<u>63.- Χάραξις ὀδοντωτοῦ τροχοῦ</u>. Κατὰ πρῶτον διαιροῦμεν τὴν ἀρχικὴν περίμετρον εἰς τόσα μέρη ὅσα εἶναι οἱ ὀδόντες. Τὰ τόξα τὰ ὁποῖα λαμβάνομεν εἶναι ἴσα πρὸς τὸ βῆμα τοῦ ὀδόντος. Ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ βῆμα τοῦ ὀδόντος εἶναι 22 χιλιόμετρα. Τότε θὰ ὑπολογίσωμεν τὸ μὲν πάχος τοῦ ὀδόντος 10,5 χιλιοστά, καὶ τὸ κενὸν διάστημα 11,5 χιλιοστά. Κατόπιν πρέπει νὰ



Σχ. 54.



Μεγένθυσις τοῦ σχήμ. 54

Σχ. 55.

ὁρίσωμεν τὸ ὕψος τοῦ ὀδόντος. Πρὸς τοῦτο πρέπει νὰ λάβωμεν ὑπ' ὄψι μας ὅτι τὸ ὕψος τῆς κεφαλῆς τοῦ ὀδόντος εἶναι ἴσον πρός τό διαμετρικόν βῆμα αὐτοῦ $= \frac{2P}{N}$ (ὅπου ρ ἡ ἀκτίς τῆς ἀρχικῆς περιμέτρου, καί Ν ὁ ἀριθμός τῶν ὀδόντων).

Ἐπίσης γνωρίζομεν ὅτι:

Ἀρχική περίμετρος = βῆμα × ἀριθμόν ὀδόντων

ἤ $2\pi\rho = u \cdot N$ (ὅπου u = βῆμα ὀδόντος)

ἐξ οὗ $\frac{u}{\pi} = \frac{2\rho}{N}$

Ἀλλά $\frac{2\rho}{N}$ εἶναι ἴσον πρός τό διαμετρικόν βῆμα καί τοῦτο ἰσοῦται πρός $\frac{u}{\pi}$. Οὕτω διά νά ἔχωμεν τό διαμετρικόν βῆμα, ὅταν γνωρίζωμεν τό βῆμα τοῦ ὀδόντος, ἀρκεῖ νά διαιρέσωμεν τό βῆμα u, διά τοῦ π δηλ. διά 3,14. Εἰς τήν περίπτωσίν μας τό $u = 22$, ἔχομεν συνεπῶς διαμετρικόν βῆμα

$$\frac{22}{3,14} = 7$$

Ἑπομένως τό ὕψος τῆς κεφαλῆς τοῦ ὀδόντος θά εἶναι 7, καί τοῦτο θά μᾶς ὁρίσῃ τήν περιφέρειαν τῆς κεφαλῆς. Τό ὕψος τοῦ ποδός τοῦ ὀδόντος θά εἶναι ὀλίγον μεγαλύτερον ἤτοι 8 (διότι ἰσοῦται πρός τό διαμετρικόν βῆμα $+ \frac{1}{6}$). Δυνάμεθα λοιπόν νά χαράξωμεν τήν περιφέρειαν τοῦ ποδός. Κατόπιν πρόκειται νά χαράξωμεν τούς ὀδόντας. Πρός τοῦτο ἐκ τοῦ κέντρου Ο' τῆς ἀρχικῆς περιφερείας ἀκτῖνος R, χαράσσομεν μέ ἀκτῖνα $\frac{R}{2}$ ἡμιπεριφέρειαν ΟΟ'. Ἐκ τοῦ ἄκρου Α τῆς ἀκτῖνος ΟΑ γράφομεν τόξον κύκλου τό ΔΕ ἀκτῖνος $\frac{R}{4}$, τό Ε εἶναι τό μέσον τῆς ΑΟ'. Ἐκ τοῦ σημείου Δ τῆς τομῆς τοῦ τόξου ΔΕ μετά τῆς ἡμιπεριφερείας ΑΜΟ, γράφομεν νέαν ὁμόκεντρον περιφέρειαν πρός τήν ἀρχικήν περίμετρον. Ἡ περιφέρεια αὐτη θά περιέχῃ ὅλα τά κέντρα τῶν τόξων καί οὕτω σχηματίζεται διάγραμμα τῶν ὀδόντων. Τοῦτο φαίνεται

[...]τόρων εἰς τό σχ. 55 ἐν μεγενθύσει. Παρατηροῦμεν εἰς τό σχῆμα ὅτι ἡ τομή τοῦ ὀδόντος το[ῦ] διερχομένου διά τοῦ σημείου Α, εἶναι τόξον κύκλο[υ] ὅπερ διαγράφεται μέ κέντρον τό Δ καί μέ ἀκτῖνα ΔΑ. Φέρομεν τήν ἰδίαν ἀκτῖνα εἰς τό σημεῖον Α', ἐπί τῆς περιφερείας τῶν κέντρων τήν ὁποίαν τέμνει εἰς Δ'. Τό σημεῖον Δ' θά εἶναι τό κέντρον τοῦ τόξου τοῦ διερχομένου ἀπό τό Α'. Τό αὐτό κάμνομεν καί διά τά ἄλλα σημεῖα.

Ἡ ἁπλῆ αὕτη χάραξις ἰσχύει μόνον διά ὀδοντωτούς τροχούς οἱ ὁποῖοι δέν ὑπερβαίνουν τούς 24 ὀδόντας.

<u>64. Ὑπολογισμός ἀριθμοῦ ὀδόντων δύο ὀδοντωτῶν τροχῶν.</u> Ἐάν θέλωμεν νά ὑπολογίσωμεν τόν ἀριθμόν τῶν ὀδόντων δύο ὀδοντωτῶν τροχῶν, τῶν ὁποίων οἱ ἄξονες εὑρίσκονται εἰς ὡρισμένην ἀπόστασιν ἀπ' ἀλλήλων, ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς:

Ἔστω ἡ μεταξύ τῶν δύο ἀξόνων ἀπόστασις 1,80 μέτρα. Ζητεῖται νά ὑπολογισθοῦν οἱ ὀδόντες τῶν δύο τροχῶν, οὕτως ὥστε ὁ κινούμενος τροχός νά ἐκτελῆ 36 στροφάς, καί ὁ κινῶν τροχός νά ἐκτελῆ κατά τόν αὐτόν χρόνον 5 στροφάς.

Ἔστω ρ καί ρ' αἱ ἀκτῖνες τῶν ἀρχικῶν περιμέτρων τῶν δύο τροχῶν. Αἱ ἀκτῖνες εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τοῦ ἀριθμοῦ τῶν στροφῶν καί ἑπομένως:

$$\frac{\rho}{\rho'} = \frac{\nu'}{\nu}$$

ἐφαρμόζοντες τόν τύπον τῆς παραγρ. 60 θά ἔχωμεν:

$$\rho = \frac{1{,}8 \times 36}{36+5} = 1{,}5805 \text{ μέτρα}$$

καί

$$\rho' = \frac{1{,}8 \times 5}{36+5} = 0{,}2195 \text{ μέτρα}$$

Ἔστω τώρα ὅτι τό βῆμα εἶναι 0,025 μέτρα. Τότε ὁ ἀριθμός τῶν ὀδόντων εὑρίσκεται ἄν διαιρέσωμεν τό μῆκος ἑκάστης περιφερείας τῶν τροχῶν διά 0,025 μέτρα.

Περίμετρος μικροῦ τροχοῦ $= 2\pi \times 0,2195$

Ἀριθμός ὀδόντων $= \dfrac{2\pi \times 0,2195}{0,025} = 55,165$

Περίμετρος μεγάλου τροχοῦ $= 2\pi \times 1,5805$

Ἀριθμός ὀδόντων τοῦ τροχοῦ $= \dfrac{2\pi \times 1,58}{0,025} = 397,22$

Ἐπειδή οἱ εὑρεθέντες ἀριθμοί ὀδόντων εἶναι δεκαδικοί, λαμβάνομεν τούς ἀκεραίους ἀριθμούς, καί ὁ μέν μικρός τροχός πρέπει νά ἔχῃ 55 ὀδόντας, ὁ δέ μέγας 397 ὀδόντας.

Ὁ λόγος τῶν ἀριθμῶν τῶν ὀδόντων ὀφείλει νά εἶναι ἴσος πρός τόν ἀντίστροφον λόγον τῶν ἀριθμῶν τῶν στροφῶν δηλ.

$$\frac{36}{5} = 7,200 \quad \text{καί} \quad \frac{397}{55} = 7,218$$

Ὥστε παρατηροῦμεν ὅτι τό ἀποτέλεσμα εἶναι πρακτικῶς ὀρθόν διότι καί οἱ δύο ἀριθμοί 7,200 καί 7,218 πλησιάζουν πολύ. Αἱ συνθῆκαι ὅμως τοῦ προβλήματος μετεβλήθησαν ὀλίγον καί πρέπει ἐκ νέου νά ὑπολογίσωμεν τάς ἀκτίνας τῶν ἀρχικῶν περιμέτρων, τῶν ὁποίων τά κέντρα ἀπέχουν πάντοτε 1,80 μέτρα. Γνωρίζομεν ὅτι $\dfrac{\rho}{\rho'} = \dfrac{v'}{v} = \dfrac{397}{55}$
καί ἔχομεν ὡς τιμήν τῶν νέων ἀκτίνων

$$\rho' = \frac{1,8 \times 55}{397 \times 55} = 0,2191 \text{ μέτρα} \quad \text{καί} \quad \rho = \frac{1,8 \times 397}{397 + 55} = 1,5809 \text{ μέτρ.}$$

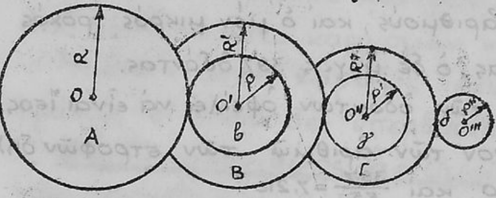
Αἱ ἀκτῖνες αὗται διαφέρουν πολύ ὀλίγον τῶν προηγουμένως εὑρεθέντων. Ἡ διαφορά εἶναι 0,4 τοῦ χιλιοστομέτρου περισσότερον ἤ ὀλιγώτερον. Τοῦτο ὅμως μεταβάλει ἐλαφρῶς τό μέγεθος τοῦ βήματος, τό ὁποῖον δέν θά εἶναι πλέον 0,025 μέτρα ἀλλά:

$$\text{Βῆμα} = \frac{\text{περίμετρον}}{\text{ἀριθμοῦ ὀδόντων}} = \frac{2\pi\rho}{v}$$

$$\text{ἤ} \quad \text{Βῆμα} = \frac{2 \times 3,1416 \times 1,5809}{397} = 0,02502$$

Τό βῆμα λοιπόν θά εἶναι μεγαλήτερον, ἡ διαφορά ὅμως εἶναι ἀνεπαίσθητος ἀφοῦ δέν φθάνει τά 0,02 τοῦ χιλιοστομέτρου.

65.- Σύστημα ὀδοντωτῶν τροχῶν. Ὅταν ὁ ἀριθμός τῶν στροφῶν τοῦ μεγάλου τροχοῦ εἶναι 5 φοράς μεγαλύτερος τοῦ ἀριθμοῦ τῶν στροφῶν τοῦ μικροῦ τροχοῦ, τότε παρεμβάλομεν ἐνδιαμέσους ὀδοντωτούς τροχούς, ὅπως παριστάνει τό σχῆμα 53. Ὁ τροχός Α ἐμπλέκεται εἰς τόν μικρόν τροχόν β ὅστις κινεῖ τόν τροχόν Β. Οὗτος ἐμπλέκεται εἰς τόν μικρόν τροχόν γ, ὅστις κινεῖ τόν τροχόν Γ καί ὁ ὁποῖος Γ μεταδίδει τήν κίνησιν εἰς τόν μικρόν τροχόν δ.



Σχ. 53

Ἔστωσαν R, R', R'' αἱ ἀκτῖνες τῶν μεγάλων τροχῶν καί ρ, ρ' καί ρ'' αἱ ἀκτῖνες τῶν μικρῶν τροχῶν.

Ἔστωσαν ἐπίσης ω, ω', ω'', ω''' αἱ γωνιώδεις ταχύτητες τῶν ἀξόνων O, O', O'', O'''.

Σύμφωνα πρός προηγούμενα ἔχομεν:

$$\omega R = \omega' \rho$$
$$\omega' R' = \omega'' \rho'$$
$$\omega'' R'' = \omega''' \rho''$$

Γινόμενον $\omega \cdot R \cdot R' \cdot R'' = \omega''' \cdot \rho \cdot \rho' \cdot \rho''$ ἐξ αὐτοῦ

ἔχομεν: $\frac{\omega}{\omega'''} = \frac{\rho \cdot \rho' \cdot \rho''}{R \cdot R' \cdot R''}$ Ἡ ἀναλογία αὐτή μᾶς λέγει ὅτι ὁ λόγος τῶν γωνιωδῶν ταχυτήτων τοῦ πρώτου τροχοῦ διά τοῦ τελευταίου τροχοῦ, εἶναι ἴσος πρός τόν λόγον τοῦ γινομένου τῶν ἀκτίνων τῶν μεγάλων τροχῶν.

Πρακτική παρατήρησις. Πρακτικῶς, εἶναι εὐκολώτερον νά ὑπολογίσωμεν τόν ἀριθμόν τῶν ὀδόντων, παρά νά μετρήσωμεν τάς ἀκτῖνας τῶν ἀρχικῶν περιμέτρων τῶν τροχῶν. Ὁ ἀριθμός τῶν στροφῶν δύναται ἐπίσης νά ἀναπληρώσῃ τήν γωνιώδη ταχύτητα. Συνεπῶς πρέπει νά δυνάμεθα ἐκ τοῦ λόγου τῶν ἀκτίνων πρός τήν γωνιώδη ταχύτητα, νά εὑρίσκωμεν τόν λόγον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν στροφῶν πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν ὀδόντων, καὶ ἀντιστρόφως: $\frac{\omega}{\omega'}=\frac{\nu}{\nu'}=\frac{\rho'}{\rho}$ ὁ ἀριθμὸς τῶν ὀδόντων εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὴν περίμετρον καὶ συνεπῶς πρὸς τὴν ἀκτῖνα τοῦ ὀδοντωτοῦ τροχοῦ.

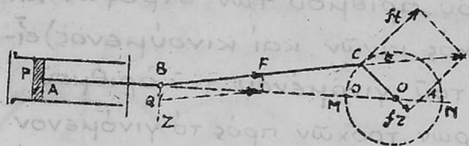
Ἑπομένως, ὁ λόγος τοῦ ἀριθμοῦ τῶν στροφῶν τῶν ἐξωτερικῶν τροχῶν (τροχὸς κινῶν καὶ κινούμενος) εἶναι ἴσος πρὸς τὸν λόγον τοῦ γινομένου τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ὀδόντων τῶν κινητήρων τροχῶν πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ὀδόντων τῶν κινουμένων τροχῶν.

66. Μετροπὴ τῆς εὐθυγράμμου κινήσεως εἰς κυκλικήν.

Διωστήρ.— Πολλάκις παρίσταται ἀνάγκη νὰ μετατρέψωμεν μίαν κίνησιν εὐθύγραμμον παλινδρομικὴν εἰς κυκλικήν. Τοῦτο γίνεται συνήθως εἰς τὰς ἀτμομηχανάς, τῇ βοηθείᾳ τοῦ διωστῆρος.

Ἔστω P τὸ ἔμβολον ἀτμομηχανῆς (σχ. 56) τοῦ ὁποίου τὸ στέλεχος AB συνδέεται εἰς τὸ B μὲ τὸν διωστῆρα BC, ὅστις πάλιν συνδέεται μὲ τὸν στρόφαλον CO. Τὸ ἔμβολον P ἔχει κίνησιν εὐθύγραμμον παλινδρομικήν. Τὴν αὐτὴν κίνησιν ἔχει καὶ τὸ ἄκρον B τοῦ στελέχους. Ἡ κίνησις αὐτὴ μετατρέπεται διὰ τοῦ διωστῆρος εἰς κυκλικὴν κίνησιν καὶ τὸ στρόφαλον OC κινεῖται κυκλικῶς καὶ περιστρέφει τὸν ἄξονα μὲ τὸν ὁποῖον συνδέεται τὸ στρόφαλον. Ἐπὶ τοῦ ἄξονος στερεοῦται μέγας καὶ βαρὺς τροχὸς ὁ σφόνδυλος ὅστις ῥυθμίζει τὴν κίνησιν ἵνα αὐτὴ γίνεται ὅσον τὸ δυνατὸν ὁμαλή. Τὸ σημεῖον O εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τοῦ στελέχους AB, καὶ ἡ διαδρομὴ τοῦ σημείου A εἶναι ἴση πρὸς τὴν διάμετρον MH τῆς περιφερείας OC, δηλαδὴ εἶναι τὸ διπλάσιον τοῦ μήκους τοῦ στροφάλου CO.

Ἂς παραστήσωμεν διὰ P τὴν πίεσιν τοῦ ἀτμοῦ ἐπὶ τοῦ ἐμβόλου. Ἡ πίεσις (δύναμις) αὕτη μεταφερομένη εἰς τὸ σημεῖον B, δύναται νὰ ἀναλυθῇ εἰς δύο δυνάμεις. Ἡ μία Q διευθυνομένη κατὰ τὴν BZ ἐξουδετεροῦται ἀπὸ τὴν ἀντίστασιν ἡ ὁποία ἀναπτύσσεται κατὰ τὴν κίνησιν τοῦ στηρίγματος, τὸ ὁποῖον διολισθαίνει ἐπὶ λίας σιδηρᾶς πλακὸς τοῦ ὁδηγοῦ. Ἡ ἄλλη δύναμις F διευθυνομένη κατὰ τὸν

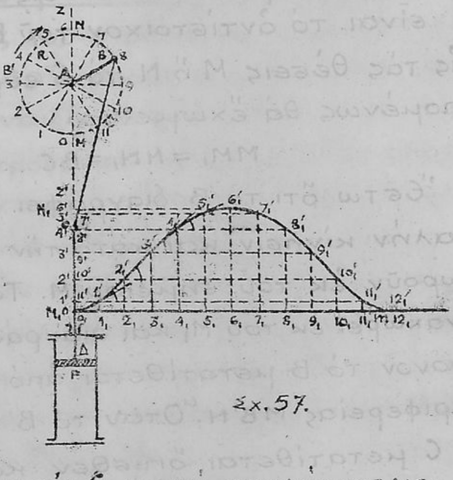


Σχ. 56

ἄξονα τοῦ διωστῆρος, δύναται νὰ μεταφερθῇ εἰς τὸ σημεῖον C, καὶ νὰ ἀναλυθῇ εἰς δύο δυνάμεις f_t καὶ f_r. Ἡ δύναμις f_r διευθυνομένη κατὰ τὴν διεύθυνσιν τοῦ ἄξονος τοῦ στροφάλου, ἐνεργεῖ ὥστε νὰ στηρίξῃ τὸ στρόφαλον ἐπὶ τοῦ ἄξονος O. Ἡ δύναμις f_t εἶναι ἐφαπτομένη εἰς τὴν περιφέρειαν OC καὶ τείνει νὰ περιστρέψῃ τὸ στρόφαλον. Ἂς διαιρέσωμεν τὴν περιφέρειαν μὲ ἀκτῖνα OC, εἰς ἄρτιον ἀριθμὸν ἴσων μερῶν, ἔστω 8 λ.χ., κατὰ τρόπον ὥστε τὰ σημεῖα διαιρέσεως 0 καὶ 4 νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὰ ἄκρα τῆς διαμέτρου MN καὶ ἂς ὁρίσωμεν ὅπως προηγουμένως τὰς δυνάμεις f_t καὶ f_r, ὅταν τὸ σημεῖον C κατέχει διαδοχικῶς τὰς θέσεις 0, 1, 2, 3...... Τότε εἶναι εὔκολον νὰ ἐννοήσωμεν ὅτι ἡ δύναμις f_t ἡ ὁποία ἐνεργεῖ νὰ περιστρέψῃ τὸ στρόφαλον, εἶναι μηδὲν ὅταν τὸ σημεῖον C εὑρίσκεται εἰς τὸ M. Κατόπιν ἡ δύναμις f_t αὐξάνει μέχρις ὅτου ὁ διωστὴρ γίνῃ κάθετος πρὸς τὴν διεύθυνσιν τοῦ στροφάλου. Εἶτα ἐλαττοῦται καὶ μηδενίζεται πάλιν ἡ δύναμις f_t ὅταν τὸ σημεῖον C ἔλθῃ εἰς τὴν θέσιν N. Ἐκ τούτου συνάγεται ὅτι ἡ κινητήριος ἐνέργεια ἐπὶ τοῦ στροφάλου μεταβάλλεται εἰς κάθε στιγμήν. Ὡς ἐκ τούτου εἶναι ἀναγκαῖον νὰ ἐφαρμόσωμεν ἐπὶ τοῦ ἄξονος O, βαρὺν σφόνδυλον διὰ νὰ καταστήσῃ ὁμαλὴν τὴν κίνησιν του ἄξονος.

Τὰ σημεῖα Μ καὶ Ν εἰς τὰ ὁποῖα ἡ δύναμις f_t μηδενίζεται ὀνομάζονται <u>νεκρὰ σημεῖα</u>. Εἶναι φανερὸν ὅτι ἐὰν ἡ μηχανὴ σταματήσῃ, ὅταν τὸ στρόφαλον εὑρίσκεται εἰς ἓν ἐκ τῶν δύο τούτων σημείων, ἡ ἐνέργεια τοῦ διωστῆρος δὲν ἀρκεῖ διὰ νὰ τὴν θέσῃ ἐκ νέου εἰς κίνησιν, καὶ τότε πρέπει νὰ κινήσωμεν διὰ τῆς χειρός μας τὸν σφόνδυλον κατὰ τὴν ἁρμόζουσαν διεύθυνσιν μέχρις ὅτου τὸ στρόφαλον περάσει το νεκρὸν σημεῖον.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω βλέπομεν ὅτι ἡ κίνησις τοῦ στροφάλου καὶ συνεπῶς καὶ τοῦ ἄξονος Ο, εἶναι ἐπιταχυνομένη μεταξὺ τοῦ σημείου Μ καὶ τοῦ σημείου Ε, ὅπου ὁ διωστὴρ καὶ τὸ στρόφαλον σχηματίζουν ὀρθὴν γωνίαν. Ὁ σφόνδυλος κατὰ τὴν πρώτην αὐτὴν περίοδον ἀποταμιεύῃ ἐνέργειαν, καὶ τὴν ἀποδίδει ὅταν τὸ σημεῖον C μεταβαίνει ἀπὸ τὴν θέσιν Ε, εἰς τὴν θέσιν Ν καὶ οὕτω διέρχεται διὰ τοῦ νεκροῦ σημείου Ν. Ἡ κίνησις γίνεται ἐκ νέου ἐπιταχυνομένη, ὁ σφόνδυλος ἀποταμιεύει ἐκ νέου ἐνέργειαν καὶ οὕτω καθεξῆς. Ἡ χρῆσις τοῦ σφονδύλου καθίσταται ἑπομένως ἀπαραίτητος διὰ τὴν ὁμαλὴν κίνησιν τοῦ ἄξονος.



Σχ. 57.

<u>67. Μετατροπὴ τῆς κυκλικῆς κινήσεως εἰς εὐθύγραμμον.</u>

<u>Διωστὴρ καὶ στρόφαλον.</u>

Ἐπὶ τοῦ ἄξονος σφονδύλου Α (σχ. 57) ἐφαρμόζομεν στρόφαλον ΑΒ ὁ ὁποῖος συνδέεται εἰς Β, μετὰ διωστῆρος, ὅστις πάλιν συνδέεται εἰς C μετὰ στελέχους μεταλλικοῦ CΔ, δυναμένου νά μετακινῆται κατά τήν διεύθυνσιν ZZ' ἥτις διέρχεται διά τοῦ σημείου A. Ἡ κυκλική κίνησις τοῦ σφονδύλου A, μεταβάλλεται τῇ βοηθείᾳ τοῦ διωστῆρος καί τοῦ στροφάλου, εἰς κίνησιν εὐθύγραμμον παλινδρομικήν τοῦ ἄκρου C τοῦ διωστῆρος καί ἐπομένως καί τοῦ μεταλλικοῦ στελέχους CΔ. Ὁ συνδιασμός οὗτος διωστῆρος καί στροφάλου ἔχει πλείστας ἐφαρμογάς καί ἰδίως εἰς τάς αντλίας.

<u>Διαδρομή τοῦ ἄκρου C τοῦ διωστῆρος ἤ τοῦ ἐμβόλου</u>

Ἔστω ὅτι τό κομβίον τοῦ στροφάλου εὑρίσκεται εἰς τό σημεῖον B, καί ἔστωσαν M καί N τά σημεῖα εἰς τά ὁποῖα ἡ διεύθυνσις ZZ' συναντᾶ τήν περιφέρειαν R ἥτις ἔχει κέντρον τό A καί ακτῖνα AB, καί τήν ὁποίαν περιφέρειαν διαγράφει τό σημεῖον B. Ὅταν τό σημεῖον B εὑρίσκεται ἐπί τῆς τροχιᾶς του, εἰς τό σημεῖον B. π.χ. ἡ ἀντίστοιχος θέσις τοῦ ἄκρου C τοῦ διωστῆρος, εὑρίσκεται ἄν διαγράψωμεν τόξον κύκλου, μέ κέντρον τό B καί ἀκτῖνα ἴσην πρός τό μῆκος BC τοῦ διωστῆρος, καί τό ὁποῖον τόξον τέμνει τήν ZZ' εἰς το σημεῖον C. Τό σημεῖον C εἶναι τό ἀντίστοιχον τοῦ B. Ὅταν τό B εὑρίσκεται εἰς τάς θέσεις M ἤ N τό C εὑρίσκεται εἰς τό M_1 ἤ N_1 καί ἐπομένως θά ἔχωμεν:

$$MM_1 = NN_1 = BC$$

Ἔστω ὅτι το B διαγράφει τήν περιφέρειαν R μέ ὁμαλήν κίνησιν καί κατά τήν διεύθυνσιν τοῦ βέλους ἀναχωροῦν ἐκ τοῦ σημείου M. Τό ἄκρον C τοῦ διωστῆρος ἀναχωρεῖ ἐκ τοῦ M_1 καί διαγράφει τό τμῆμα M_1N_1 καθ' ὅν χρόνον τό B μετατίθεται ἀπό τοῦ M εἰς το N ἐπί τῆς ἡμιπεριφερείας MB'N. Ὅταν τό B διέρχεται τό σημεῖον N, τό C μετατίθεται ὄπισθεν καί διατρέχει τό τμῆμα N_1M_1 καθ' ὅν χρόνον τό B διαγράφει τήν ἡμιπεριφέρειαν ΝΒΜ. Τὴν αὐτὴν στιγμὴν τὸ Β ἔχει ἐπανέλθει εἰς τὸ Μ, καὶ ἡ κίνησις τοῦ C συνεχίζεται παλινδρομική.

Τὸ τμῆμα M_1N_1 ὅπερ διαγράφει τὸ σημεῖον C κατὰ τὰς δύο κινήσεις ἐναλλάξ, ὀνομάζεται διαδρομὴ τοῦ σημείου C. Εἶναι φανερὸν ὅτι ἡ διαδρομὴ αὕτη εἶναι ἴση πρὸς τὴν διαδρομὴν τοῦ ἐμβόλου. Ρ. Ἑπομένως ὅταν ὁ στρόφαλος ἐκτελεῖ μίαν περιστροφήν, τὸ ἔμβολον ἐκτελεῖ δύο φορὰς τὴν διαδρομήν του. Ἐπὶ πλέον, τὸ μῆκος M_1N_1 εἶναι αἰσθητῶς ἴσον πρὸς ΜΝ δηλαδὴ ἴσον πρὸς τὸ διπλάσιον μῆκος τοῦ στροφάλου. Κατὰ τὸν συνδυασμὸν λοιπὸν τοῦ διωστῆρος καὶ τοῦ στροφάλου, ἡ διαδρομὴ τοῦ ἄκρου τοῦ διωστῆρος ἢ τοῦ ἐμβόλου εἶναι ἴση πρὸς τὸ διπλάσιον τοῦ μήκους τοῦ στροφάλου. Διὰ νὰ ἀποφεύγονται δὲ αἱ κρούσεις ἐπὶ τῶν βάσεων τοῦ κυλίνδρου, πρέπει τὸ μῆκος αὐτοῦ νὰ εἶναι ὀλίγον μεγαλήτερον τοῦ διπλασίου τοῦ μήκους τοῦ στροφάλου.

Μέση ταχύτης τοῦ σημείου C ἢ τοῦ ἐμβόλου.

Ἔστω ὅτι τὸ μῆκος τοῦ στροφάλου εἶναι $\lambda = 0{,}50$ μέτρα, καὶ ὅτι ἐκτελεῖ 40 στροφὰς κατὰ λεπτόν. Ἡ διαδρομὴ τοῦ ἐμβόλου εἶναι ἴση πρὸς 2λ δηλ. $2 \times 0{,}50 = 1$ μ. Εἰς μίαν στροφὴν τοῦ στροφάλου τὸ ἔμβολον διατρέχει δύο φορὰς τὴν διαδρομήν του ἤτοι 2 μέτρα. Ἀφοῦ ὁ στρόφαλος ἐκτελεῖ 40 στροφὰς κατὰ λεπτόν, ἡ διαδρομὴ τοῦ ἐμβόλου κατὰ λεπτὸν θὰ εἶναι $40 \times 2 = 80$ μέτρα καὶ ἡ μέση ταχύτης τοῦ ἐμβόλου θὰ εἶναι $\frac{80}{60} = 1{,}33$ μέτρα. Γενικῶς ἂν ν εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν στροφῶν τοῦ στροφάλου κατὰ λεπτόν, ἡ μέση ταχύτης τοῦ ἐμβόλου δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου: $v = \frac{4\lambda\nu}{60} = \frac{\nu\lambda}{15}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VI

69. – Μᾶζα καὶ ἐνέργεια.

Ὅταν δύναμις σταθερὰ ἐνεργεῖ ἐπὶ ἑνὸς κινητοῦ, τοῦτο κινεῖται μὲ κίνησιν ἐταχυνομένην, ἡ ἐπιτάχυνσις γ εἶναι σταθερὰ εἰς κάθε χρονικὴν στιγμήν. Ἐξ ἄλλου ἐμάθομεν πῶς μετροῦμεν τὰς δυνάμεις. Ἀνάγκη λοιπὸν νὰ εὕρωμεν τὴν σχέσιν ἡ ὁποία ὑπάρχει μεταξὺ τῶν διαφόρων δυνάμεων καὶ τῶν ἐπιταχύνσεων τὰς ὁποίας αὗται μεταδίδουν εἰς τὰ διάφορα κινητὰ ἐπὶ τῶν ὁποίων ἐνεργοῦν.

Ἔστωσαν δύο δυνάμεις Φ καὶ Φ', ἴσαι ἡ μὲν πρώτη πρὸς 3 καὶ ἡ δευτέρα πρὸς 5 χιλιόγραμμα.

Ἡ σχέσις τῶν δυνάμεων αὐτῶν εἶναι $\frac{\Phi}{\Phi'}=\frac{3}{5}$

Ἂν καλέσωμεν τὴν μονάδα τῆς δυνάμεως μὲ φ, τότε ἡ $\Phi=3\varphi$ καὶ ἡ $\Phi'=5\varphi$, καὶ ἑπομένως θὰ ἔχωμεν πάλιν τὴν σχέσιν: $\frac{\Phi}{\Phi'}=\frac{3\varphi}{5\varphi}$.

Ἡ σχέσις αὐτὴ μᾶς λέγει ὅτι, ἐὰν ἡ δύναμις φ μεταδίδει μίαν ὡρισμένην ἐπιτάχυνσιν, ἡ 3φ θὰ μεταδώσῃ εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον, ἐπιτάχυνσιν ἡ ὁποία θὰ εἶναι 3 φορὰς μεγαλητέρα καὶ ἡ 5φ θὰ μεταδώσῃ ἐπιτάχυνσιν 5 φορὰς μεγαλητέραν. Ἔστω γ ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς δυνάμεως 3φ, καὶ γ' ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς δυνάμεως 5φ. Πάλιν θὰ ἔχωμεν τὴν σχέσιν: $\frac{\gamma}{\gamma'}=\frac{3}{5}$

Ἀλλὰ καὶ $\frac{\Phi}{\Phi'}=\frac{3}{5}$, ἑπομένως $\frac{\Phi}{\Phi'}=\frac{\gamma}{\gamma'}$.

Ἡ ἀναλογία αὕτη σημαίνει ὅτι αἱ ἐπιταχύνσεις εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰς δυνάμεις.

Ἐὰν ἔχωμεν πολλὰς δυνάμεις Φ, Φ', Φ'' καὶ τὰς ἀντιστοίχους ἐπιταχύνσεις $\gamma, \gamma', \gamma''$ σύμφωνα μὲ τὰ ἀνωτέρω θὰ ἔχωμεν:

$$\frac{\Phi}{\gamma}=\frac{\Phi'}{\gamma'}=\frac{\Phi''}{\gamma''}=\text{σταθερὰ}=m$$

Ἐκ τῆς σχέσεως ταύτης βλέπομεν ὅτι, μεταξὺ μιᾶς δυνάμεως ἡ ὁποία ἐνεργεῖ ἐπὶ κινητοῦ, καὶ τῆς ἐπιταχύνσεως τὴν ὁποίαν αὐτὴ μεταδίδει εἰς αὐτό, ὑπάρχει πάντοτε σχέσις σταθερά, δηλαδὴ ὁ λόγος τῆς δυνάμεως πρὸς τὴν ἐπιτάχυνσιν εἶναι ἀριθμὸς σταθερός. Ὁ σταθερὸς αὐτὸς ἀριθμὸς τὸν ὁποῖον ἐκαλέσαμεν m, ὀνομάζεται μᾶζα τοῦ σώματος. Ἡ μᾶζα παριστάνει αἰσθητῶς τὴν ποσότητα τῆς ὕλης τὴν ὁποίαν περιέχει τὸ σῶμα. Ἐξ αὐτοῦ δυνάμεθα εὐκόλως νὰ προσδιορίσωμεν τὴν μᾶζαν ἑνὸς σώματος. Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν ποίαν ἐπιτάχυνσιν μεταδίδει ἡ βαρύτης εἰς ὡρισμένον τι σῶμα. Ἔστω P τὸ βάρος ἑνὸς σώματος καὶ g ἡ ἐπιτάχυνσις τὴν ὁποίαν ἡ βαρύτης δίδει εἰς τὸ σῶμα. Τότε μεταξὺ τοῦ βάρους P καὶ τῆς ἐπιταχύνσεως g θὰ ὑπάρχῃ ἡ αὐτὴ σχέσις ἡ ὁποία ὑπάρχει καὶ μεταξὺ τῆς δυνάμεως Φ καὶ τῆς ἐπιταχύνσεως ἣν αὐτὴ δίδει γ.

Ἐπομένως θὰ ἔχωμεν: $\frac{\Phi}{\gamma}=\frac{\Phi'}{\gamma}=\frac{P}{g}=m$ σταθερὸν καὶ $\frac{P}{g}=m$. Ὁ τύπος οὗτος μᾶς δίδει τὴν μᾶζαν ἑνὸς σώματος, ἂν γνωρίζωμεν τὸ βάρος του καὶ τὴν ἔντασιν τῆς βαρύτητος, ἡ ὁποία ἔντασις τῆς βαρύτητος εἰς Παρισίους εἶναι 9,81 μέτρα.

Ἔχομεν λοιπόν: $m=\frac{\text{Βάρος}}{g}=\frac{\text{Βάρος}}{9,81}$

Ἐὰν εἰς τὸν τύπον $m=\frac{P}{g}$ ὑποθέσωμεν ὅτι $m=1$ τότε θὰ ἔχωμεν καὶ $P=g$. Δηλαδὴ μονὰς μάζης εἶναι ἡ μᾶζα σώματος τοῦ ὁποίου τὸ βάρος, εἰς ἕνα ὡρισμένον τόπον, ἐκφράζεται εἰς χιλιόγραμμα, διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ὅστις ἐκφράζει εἰς μέτρα τὴν ἐπιτάχυνσιν τῆς ἐλευθέρας πτώσεως, εἰς τὸν αὐτὸν τόπον.

69.- Διαφορὰ μεταξὺ βάρους σώματος καὶ μάζης.

Τὸ βάρος ἑνὸς σώματος εἶναι ἡ συνισταμένη ὅλων τῶν ἑλκτικῶν δυνάμεων τῆς γῆς ἐπὶ τῶν μορίων τοῦ σώματος, ἤτοι τῆς βαρύτητος. Ἡ ἔντασις τῆς βαρύτητος μεταβάλλεται ἀναλόγως τοῦ τόπου ὅπου πειραματιζόμεθα καὶ εἶναι μεγαλητέρα εἰς τοὺς πόλους καὶ μικροτέρα εἰς τὸν Ἰσημερινὸν τῆς γῆς. Καὶ τοῦτο διότι ἡ Γῆ εἶναι πεπλατυσμένη εἰς τοὺς πόλους καὶ ἐξογκωμένη εἰς τὸν Ἰσημερινόν. Λόγῳ δὲ τῆς περιστροφῆς τῆς Γῆς περὶ τὸν ἄξονά της, ἡ ἔντασις τῆς βαρύτητος κάμνει ἀκόμη μικροτέραν τὴν ἔντασιν τῆς βαρύτητος εἰς τὰ σημεῖα τῆς Γῆς τὰ πλησίον τοῦ Ἰσημερινοῦ. Ὅταν ζυγίζομεν ἓν σῶμα διὰ τοῦ ζυγοῦ, τὸ βάρος του φαίνεται τὸ αὐτὸ εἰς οἱονδήποτε μέρος τῆς Γῆς καὶ ἂν εὑρισκόμεθα, διότι ἡ βαρύτης ἐνεργεῖ ὁμοίως καὶ ἐπὶ τοῦ σώματος καὶ ἐπὶ τῶν σταθμῶν. Τὸ βάρος ὅμως τοῦ σώματος θὰ διαφέρῃ ἐὰν ἡ ζύγυσις γίνῃ διὰ τοῦ δυναμομέτρου. Ἀντιθέτως ἡ μᾶζα σώματος παραμένει πάντοτε ἡ αὐτὴ ὁπουδήποτε καὶ ἂν εὑρίσκεται τὸ σῶμα, διότι ἡ μᾶζα αὐτη εἶναι τὸ πηλῖκον τοῦ βάρους διὰ τῆς ἐπιταχύνσεως.

Ἡ σχέσις $\frac{P}{g}$ εἶναι λοιπὸν σταθερά, καὶ παριστᾷ τὴν ἀμετάβλητον ποσότητα τῆς ὕλης ἡ ὁποία περιέχεται εἰς τὸ σῶμα. Τελευταίως ὅμως ἀπεδείχθη ὅτι καὶ ἡ μᾶζα δὲν εἶναι σταθερά, ἀλλὰ ὅτι μεταβάλλεται, ἀλλὰ μόνον ὅταν τὸ σῶμα ἀποκτήσῃ ταχύτητα πάρα πολὺ μεγάλην, τοιαύτην ὥστε νὰ φθάνῃ τὴν ταχύτητα τοῦ φωτὸς δηλ. 300.000.000 μέτρα περίπου κατὰ δευτερόλεπτον. Ὅταν τὸ σῶμα ἔχει τοιαύτην ταχύτητα, τότε ἡ μᾶζα του μεταβάλλεται. Ἐπειδὴ ὅμως αἱ ταχύτητες αὐτὰ εἶναι θεωρητικαὶ καὶ δὲν δυνάμεθα νὰ τὰς πραγματοποιήσουμε διὰ τὰ σώματα, διὰ τοῦτο καὶ ἡ μᾶζα θεωρεῖται σταθερά.

<u>Μονὰς μάζης.</u> Ἀφοῦ $\frac{\Phi}{\gamma}=m$, τότε καὶ $\frac{\Phi}{a}=m$ ἐξ οὗ $\Phi=m.a$. Ἐὰν δὲ $\Phi=1$ καὶ $a=981$

θά ἔχωμεν: $1 = m \times 9{,}81$ καί $m = \frac{1}{9{,}81}$

Οὕτω ἡ μᾶζα ἑνός χιλιογράμμου θά παρίσταται ὑπό τοῦ κλάσματος $\frac{1}{9{,}81}$.

<u>70.- Ποσότης κινήσεως.</u> Ἀνωτέρω ἴδωμεν ὅτι ὁ λόγος τῶν δυνάμεων εἶναι ἴσος πρός τόν λόγον τῶν ἐπιταχύνσεων τάς ὁποίας δίδουν αἱ δυνάμεις ὅταν ἐνεργοῦν ἐπί ἑνός καί τοῦ αὐτοῦ σώματος.

Ἔστω δύναμις Φ ἐνεργοῦσα ἐπί μάζης m ἑνός σώματος καί ἔστω γ ἡ ἐπιτάχυνσις τοῦ σώματος.

Τότε $\Phi = m \cdot \gamma$

Ἄλλη δύναμις Φ' ἐνεργοῦσα ἐπί ἄλλου σώματος μάζης m', μεταδίδει ἐπιτάχυνσιν ἔστω γ'. Ἐπίσης θά ἔχωμεν $\Phi' = m' \cdot \gamma'$

Ἐκ τῶν δύο ἀνωτέρω ἰσοτήτων ἐξάγομεν $\frac{\Phi}{\Phi'} = \frac{m \cdot \gamma}{m' \cdot \gamma'}$.

Ἐάν ὑποθέσωμεν ὅτι αἱ δυνάμεις Φ καί Φ' ἐνεργοῦν κατά τόν αὐτόν χρόνον, καί ἐπειδή αἱ ταχύτητες εἶναι ἀνάλογοι τῶν ἐπιταχύνσεων, ἄν υ καί υ' εἶναι αἱ ταχύτητες αἱ ἀντίστοιχοι, ὁ ἀνωτέρω τύπος γίνεται:

$$\frac{\Phi}{\Phi'} = \frac{m \cdot \upsilon}{m' \cdot \upsilon'}$$

Τό γινόμενον $m \cdot \upsilon$ καλεῖται <u>ποσότης κινήσεως</u>, τήν ὁποίαν κέκτηται ἕνα σῶμα μάζης m, τήν στιγμήν κατά τήν ὁποίαν ἡ ταχύτης του εἶναι υ. Δύο συνεπῶς δυνάμεις ἔχουσι λόγον μεταξύ των, ὅν λόγον ἔχουσι αἱ ποσότητες τῆς κινήσεως, τάς ὁποίας μεταδίδουν κατά τόν αὐτόν χρόνον εἰς τά σώματα ἐπί τῶν ὁποίων αἱ δυνάμεις αὗται ἐπιδροῦν.

Ἐάν εἰς τόν προηγούμενον τύπον ὑποθέσωμεν ὅτι $\Phi = \Phi'$ τότε ὁ τύπος οὗτος λαμβάνει τήν μορφήν $m\upsilon = m'\upsilon'$. Ἡ ἰσότης αὕτη φανερώνει ὅτι, ἐάν μία καί ἡ αὐτή δύναμις ἐνεργεῖ ἐπί δύο διαφόρων σωμάτων, ἐπί ἴσον χρονικόν διάστημα, μεταδίδει εἰς αὐτά τήν αὐτήν ποσότητα κινήσεως. Ἐάν δέ τήν ἰσότητα $mυ=m'υ'$, θέσωμεν ὑπό μορφήν ἀναλογίας γίνεται: $\frac{m}{m'}=\frac{υ'}{υ}$.

Ἡ ἀναλογία αὕτη δηλοῖ ὅτι: ἡ δύναμις ἡ ἀνωτέρω, μεταδίδει εἰς τά δύο σώματα, ταχύτητας ἀντιστρόφως ἀναλόγους πρός τάς μάζας των.

<u>Παράδειγμα.</u> Κατά τήν ἐκπυρσοκρότησιν πυροβόλου, τοῦτο ὀπισθοχωρεῖ τήν στιγμήν τῆς ἐκπυρσοκροτήσεως. Ἡ πυρῖτις παράγει ἀέρια ἡ πίεσις τῶν ὁποίων ὠθεῖ τό βλῆμα ἔξω τοῦ σωλῆνος τοῦ πυροβόλου, καί ταυτοχρόνως ἐνεργεῖ ἐπί τοῦ πυροβόλου καί ὠθεῖ αὐτό πρός τά ὀπίσω. Τό βλῆμα κέκτηται ἀσθενῆ μάζαν m, καί μεγάλην ταχύτητα V, ἐνῶ τό πυροβόλον ἔχει μεγάλην μᾶζαν M. Ἡ ταχύτης $υ$ μέ τήν ὁποίαν ὠθεῖται πρός τά ὀπίσω τό πυροβόλον ὀφείλει νά εἶναι πολύ μικρά διά νά ὑπάρχῃ ἡ ἰσότης.

$$mV=M.υ$$

<u>71.- Κροῦσις.</u> Ἡ ποσότης τῆς κινήσεως, μᾶς χρησιμεύει νά ἴδωμεν τί συμβαίνει κατά τήν κροῦσιν δύο σωμάτων. Ἔστω ὅτι συναντῶνται δύο σώματα μή ἐλαστικά, λ.χ. δύο σφαῖραι ἐξ ἀργίλου ἐξηρτημέναι ἐκ δύο σχοινίων λεπτῶν καί ἔστω ὅτι αἱ μᾶζαι αὐτῶν εἶναι m καί m'. Ὅταν ἀπομακρύναμεν αὐτάς φροντίζομεν νά μετρήσωμεν τάς ταχύτητας αὐτῶν. Ἔστω ὅτι ἀπομακρύνομεν τήν μίαν ἥτις ἔχει μᾶζαν $m=5$ καί ταχύτητα $υ=18$ καί ἡ ἑτέρα ἔχει μᾶζαν $m'=7$ καί ταχύτητα μηδέν διότι αὕτη εὑρίσκεται ἐν ἠρεμίᾳ. Ἀφίνομεν κατόπιν νά πέσῃ ἡ m, ἐπάνω εἰς τήν m' καί μετά τήν κροῦσιν διαπιστώνομεν ὅτι αἱ δύο σφαῖραι ἔχουσι τήν αὐτήν ταχύτητα ἴσην

πρός 7,5.-

Ἀποτέλεσμα

Πρό τῆς κρούσεως	Μετά τήν κροῦσιν
1ª σφαῖρα $m=5$	1ª σφαῖρα $m=5$
$\upsilon=18$	$\upsilon=7.5$
Ποσότης κινήσεως ἤ	Ποσότης κινήσεως ἤ
$m\cdot\upsilon=5\times18=90$	$m\cdot\upsilon=5\times7.5=37.5$
2ª σφαῖρα $m'=7$	2ª σφαῖρα $m'=7$
$\upsilon'=0$	$\upsilon'=7.5$
Ποσότης κινήσεως ἤ	Ποσοτ. κινήσεως ἤ
$m'\cdot\upsilon'=7\times0=0$	$m'\cdot\upsilon'=7\times7.5=52.5$
Ὁλικ. ποσ. κινήσ. 90	Ὁλικ. ποσοτ. κινησ. 90,0

Οὕτω ἡ ποσότης κινήσεως πολλῶν σωμάτων μετά τήν κροῦσιν εἶναι ἴση πρός τήν ποσότητα τῆς κινήσεως τήν ὁποίαν εἶχον καί πρό τῆς κρούσεως. Δυνάμεθα δέ τοῦτο νά τό θέσωμεν ὑπό μορφήν τύπου: $m\cdot\upsilon+m'\cdot\upsilon'=(m+m')V$.

72.- Ἡ ἐνέργεια.

Ὅταν ἕν σῶμα ἤ σύστημα σωμάτων δύναται νά ἐτελέσῃ ἔργον, λέγομεν ὅτι τό σῶμα ἤ τό σύστημα σωμάτων ἔχει ἐνέργειαν. Ὅσον δέ μεγαλήτερον εἶναι τό ἔργον, τό ὁποῖον δύναται τό σῶμα νά ἐκτελέσῃ, τόσον περισσοτέραν ἐνέργειαν λέγομεν ὅτι ἔχει. Τήν ἐνέργειαν μετροῦμεν διά τοῦ ἔργου, τό ὁποῖον ἐκτελεῖται. Ὅταν δέ τό σῶμα ἤ τό σύστημα τῶν σωματων ἐκτελῇ ἔργον, λέγομεν ὅτι ἀναπτύσσει ἐνέργειαν, ἡ ὁποία θά ἰσοῦται ἀριθμητικῶς πρός τό ἐκτελούμενον ἔργον. ἐάν λ.χ. μία μηχανή ἀνυψοῖ βάρος 100 χιλιογράμμων εἰς ὕψος 10 μέτρων, ἡ ἀναπτυσσομένη ἐνέργεια εἶναι ἴση πρός $100\times10=1000$ χιλιογραμμόμετρα.

<u>Μηχανική ἐνέργεια</u>. Ἡ ἐνέργεια ἐκδηλοῦται ὑπό διαφόρους καταστάσεις. Σφῦρα ἡ ὁποία πίπτει ἐπί καρφίου, προκαλεῖ μηχανικόν ἔργον, τό ὕδωρ τῶν καταρρακτῶν θέτει εἰς κίνησιν ὑδρομύλους, ὁ ἄνεμος κινεῖ τούς ἀνεμομύλους. Εἰς τά παραδείγματα ταῦτα ἡ ἐνέργεια τῶν σωμάτων εἶναι καταφανής, καθόσον ταῦτα δηλ. ἡ σφῦρα, τό ὕδωρ, ὁ ἄνεμος εἶναι ἐν κινήσει. Ἡ τοιαύτη ἐνέργεια ἡ ὁρατή καλεῖται <u>κινητική ἐνέργεια</u> ἤ <u>μηχανική ἐνέργεια</u>. Ἐκτός ὅμως τῆς μηχανικῆς ἐνεργείας διακρίνομεν καί ἄλλην ἐνέργειαν. Λίθος λ.χ. ἐξηρτημένος διά νήματος ἔχει ἐνέργειαν, διότι ἄν ἀφεθῇ ἐλεύθερος θά πέσῃ καί θά ἐκτελέσῃ ἔργον. Τό ἴδιον συμβαίνει καί μέ τεταμένον ἐλατήριον. Εἰς τήν περίπτωσιν αὐτήν ἡ ἐνέργεια δέν φαίνεται, ἀλλά εἶναι λανθάνουσα καί διά τοῦτο καλεῖται <u>λανθάνουσα</u> ἤ <u>δυναμική ἐνέργεια</u>.

Ἔστω ὅτι ὑψοῦμεν σῶμα τι εἰς ὡρισμένον ὕψος καί τοποθετοῦμεν αὐτό ἐπί στηρίγματος ὥστε νά εὑρίσκεται ἐν ἠρεμίᾳ. Ἡ ἐνέργειά μας τῆς ὑψώσεως τοῦ σώματος παρήγαγε ὡρισμένον κινητήριον ἔργον, τό ὁποῖον ὑπερνικᾷ τάς ἀντιστάσεις κατά τήν ἀνύψωσιν. Τό σῶμα ἄν καί εὑρίσκεται ἐν ἠρεμίᾳ, δέν ἔχασε τήν ἐνέργειάν του, ἀλλά τήν ἀποταμίευσε, ὡς λανθάνουσαν ἐνέργειαν. Τοῦτο δέ φαίνεται διότι ἄν ἀφήσωμεν ἐλεύθερον τί σῶμα νά πέσῃ ἐκ τοῦ ὑποστηρίγματος, τό ἔργον τό ὁποῖον θά παραχθῇ κατά τήν πτῶσιν θά εἶναι $P \times h$ ἄν P εἶναι τό βάρος τοῦ σώματος καί h τό ὕψος ἀπό τό ὁποῖον πίπτει. Ἀλλά καί κατά τήν ὕψωσιν τοῦ σώματος τό ἔργον ὅπερ παρήχθη εἶναι πάλιν Ph. Ἐκ τούτου βλέπομεν ὅτι ἡ κινητική ἐνέργεια ἥτις ἀνεπτύχθη κατά τήν ὕψωσιν, μετεβλήθη εἰς δυναμικήν, καί ὅταν ἔπεσε τό σῶμα πάλιν ἡ δυναμική μετεβλήθη εἰς μηχανικὴν ἐνέργειαν.

Ἡ ἐνέργεια συνεπῶς δὲν χάνεται οὔτε καταστρέφεται, ἀλλ' ἁπλῶς ἀλλάσσει μορφήν. Ἐὰν δὲ δὲν ὑπῆρχον αἱ ἀντιστάσεις καὶ ἐὰν τὰ σώματα ἦσαν τελείως ἐλαστικά, τότε θὰ παρετηρεῖτο, ὅτι σφαῖρα ἐξ ἐλεφαντοστοῦ ἡ ὁποία θὰ ἔπιπτε ἐπὶ στερεοῦ ἐπιπέδου, θὰ ἀνήρχετο πάλιν μόνη της μέχρι τοῦ σημείου ἀπὸ τὸ ὁποῖον ἔπεσε. Συνεπῶς εἰς τὴν φύσιν αἱ δυνάμεις μεταβάλλονται καὶ ἡ ἐνέργεια ἀλλάσσει μορφάς, αἱ ἄλλοτε μετατρέπεται εἰς θερμότητα ἢ ἠλεκτρισμόν, ἢ μαγνητισμὸν κ.τ.λ. τὸ σύνολον ὅμως τῆς ἐνεργείας παραμένει σταθερόν.

<u>Τιμὴ τῆς κινητικῆς ἐνεργείας.</u> Γνωρίζομεν ὅτι τὸ ἔργον δυνάμεως ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῆς δυνάμεως ἐπὶ τὴν μετάθεσιν. Ἂν T εἶναι τὸ παραγόμενον ἔργον, Φ ἡ δύναμις, καὶ ε ἡ μετάθεσις, ὁ τύπος τοῦ παραγομένου ἔργου εἶναι: $T=\Phi\times\varepsilon$.

Εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς βαρύτητος τὸ ἔργον θὰ ἰσοῦται μὲ τὸ βάρος τοῦ σώματος ἔστω P, ἐπὶ τὴν μετάθεσιν ἔστω h. Ἐπομένως, τὸ ἔργον $T=P\times h$. Τὸ βάρος ὅμως τοῦ σώματος $P=m\cdot g$ καὶ ἂν ἀντὶ P θέσωμεν $m\cdot g$, ὁ τύπος γίνεται:

$$T=m\cdot gh$$

Ἀλλὰ τὸ T εἶναι ὅπως εἴπωμεν τὸ παραγόμενον ἔργον, τὸ ὁποῖον ἰσοῦται μὲ τὴν κινητικὴν ἐνέργειαν τοῦ σώματος, ἂν λοιπὸν ἀντὶ T, θέσωμεν τὴν ἴσην κινητικὴν ἐνέργειαν ἣν καλοῦμεν W, θὰ ἔχωμεν $W=m\cdot g\cdot h$.

Γνωρίζομεν ὅμως ἐκ τοῦ τύπου (21) ὅτι τὸ ὕψος h δυνάμεθα νὰ τὸ ἐξάγωμεν ἀπὸ τὴν ταχύτητα τοῦ σώματος, διότι $v^2=2gh$. καὶ $h=\frac{v^2}{2g}$. Ἂν ἀντικαταστήσωμεν τὸ h διὰ τῆς τιμῆς του εἰς τὸν τύπον $W=m\cdot g\cdot h$, τότε λαμβάνομεν $W=m\cdot g\cdot\frac{v^2}{2g}$ ἢ $W=\frac{mv^2}{2}$.

Οὕτω ἡ κινητικὴ ἐνέργεια σώματος μάζης m, ἥτις ἔχει ταχύτητα υ, εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τῆς μάζης ἐπὶ τὸ τετράγωνον τῆς ταχύτητος.

Τὸ γινόμενον τῆς μάζης ἑνὸς σώματος ἐπὶ τὸ τετράγωνον τῆς ταχύτητος τοῦ σώματος καλεῖται <u>δρῶσα δύναμις</u> ἢ <u>Ῥύμη</u> τοῦ σώματος. Ῥύμη $= m \cdot \upsilon^2$

<u>Παρατήρησις.</u> Εἰς τὸ ἐν χρήσει μετρικὸν σύστημα, ἡ κινητικὴ ἐνέργεια W ἐκφράζεται πάντοτε εἰς χιλιογραμμόμετρα, καὶ ἡ ταχύτης υ εἰς μέτρα κατὰ δευτερόλεπτον, καὶ ἡ μᾶζα m ἥτις ἰσοῦται πρὸς $\frac{P}{g}$. Τὸ P, τὸ βάρος τοῦ σώματος δίδεται εἰς χιλιόγραμμα διαιρούμενον διὰ 9,81.

<u>Ἐφαρμογαί</u>. 1) Ποία εἶναι ἡ κινητικὴ ἐνέργεια μικροῦ σώματος βάρους 5 γραμμαρίων, τὸ ὁποῖον κινεῖται μὲ ταχύτητα 120 μέτρων κατὰ δευτερόλεπτον;

$$W = \frac{m\upsilon^2}{2} \quad \text{ἢ} \quad W = \frac{0.005 \times 120^2}{9.81 \times 2} = 3,66 \text{ χιλιογραμμόμετρα}$$

Τὸ βάρος ἐνταῦθα ἐκφράζεται εἰς χιλιόγραμμα καὶ ἐπειδὴ $m = \frac{P}{g}$ τὸ βάρος τοῦτο διαιρέθη διὰ 9,81.-

2) Ἁμαξοστοιχία βάρους 30 τόννων κινεῖται μὲ ταχύτητα 10 μέτρων κατὰ δευτερόλεπτον, Ποία εἶναι ἡ κινητική της ἐνέργεια;

$$W = \frac{30000 \times 10^2}{2 \times 9.81} = 152905 \text{ χιλ/μετρα}$$

3) Σῶμα βάρους 600 χιλιογράμμων, πίπτει ἐξ ὕψους 3 μέτρων ἐπὶ πασσάλου ἐμπεπηγμένου ἐπὶ τοῦ ἐδάφους, τοῦ ὁποίου ἡ ἀντίστασις εἶναι 60000 χιλιόγραμμα. Πόση θὰ εἶναι ἡ διείσδυσις τοῦ πασσάλου ἐντὸς τῆς γῆς μετὰ κάθε κτύπημα τοῦ βάρους ἐπὶ τοῦ πασσάλου;

Γνωρίζομεν ὅτι τὸ κινητήριον ἔργον = ἔργον ἀνθισταμένον. Ἐὰν ὁ πάσσαλος διεισδύει ἐντὸς τοῦ ἐδάφους κατὰ x μέτρα μεθ' ἕκαστον κτύπημα, τὸ ἀνθιστάμενον ἔργον θὰ εἶναι $60000 \times x$. Ἀλλὰ τὸ κινητήριον ἔργον ὅπερ εἶναι 600×3 εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἀνθιστάμενον. Ἑπομένως

$$600 \times 3 = 60000 \times x$$

ἐξ οὗ $x = \frac{600 \times 3}{60000} = 0{,}03$ μέτρα

ὁ πάσσαλος θὰ δ εισδύῃ ἐντός τοῦ ἐδάφους κατὰ 3 ἑκατοστόμετρα εἰς κάθε κτύπημα.

73.- <u>Ἐνέργεια</u> <u>περιστρεφομένων σωμάτων.</u> Ἴδωμεν ἀνωτέρω ὅτι ἡ κινητικὴ ἐνέργεια σώματος δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου $W = \frac{1}{2} m \cdot v^2$, ἀπαλλείφοντες τὸν παρανομαστὴν ἔχομεν $2W = m \cdot v^2$.

Ἤδη ἂς ἴδωμεν πῶς δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν κινητικὴν ἐνέργειαν σώματος στρεφομένου, π.χ. δίσκου μεταλλικοῦ, ὁ ὁποῖος ἔχει ὡρισμένην γωνιώδη ταχύτητα.

Ἡ γωνιώδης ταχύτης ὅλων τῶν σημείων τοῦ δίσκου εἶναι ἡ αὐτή, ἐνῷ ἡ γραμμικὴ ταχύτης εἶναι διάφορος. Τὰ σημεῖα τοῦ δίσκου τὰ ὁποῖα εὑρίσκονται ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἀκτῖνος, ἔχουσι ταχύτητα γραμμικὴν ἀνάλογον πρὸς τὴν ἀπόστασιν αὐτῶν ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ δίσκου. Τὰ σημεῖα δηλ. τὰ περισσότερον ἀπέχοντα τοῦ κέντρου ἔχουσι καὶ μεγαλητέραν γραμμικὴν ταχύτητα. Εἰς τὸν προηγούμενον τύπον $2W = mv^2$, τὸ v εἶναι ἡ γραμμικὴ ταχύτης τοῦ σώματος. Ἂς θεωρήσωμεν ἤδη ὅτι ὁ δίσκος τέμνεται εἰς δίσκους ὁμοκέντρους πάρα πολὺ λεπτοὺς καὶ πολλούς (σχ. 58).

Σχ. 58.

Ὁ πρῶτος δίσκος τοῦ ὁποίου ἔστω m' ἡ μᾶζα καὶ v' ἡ ταχύτης θὰ ἔχῃ κινητικὴν ἐνέργειαν $2W' = m' \cdot v'^2$

Ὁ δεύτερος μὲ μᾶζαν m'' καὶ v'' ταχύτητα θὰ ἔχῃ κινητικὴν ἐνέργειαν. $2W'' = m'' \cdot v''^2$ καὶ οὕτω καθεξῆς δι' ὅλους τοὺς δίσκους. Προσθέτοντες κατὰ μέλη θὰ ἔχωμεν: $2W' + 2W'' + 2W''' \ldots\ldots = m'v'^2 + m'' \cdot v''^2 + m''' \cdot v'''^2 + \ldots\ldots$

Ἄν καλέσωμεν $2W$ τό ἄθροισμα ὅλων τῶν μερικῶν ἐνεργειῶν καί διά Σ τό ἄθροισμα ὅλων τῶν $m \cdot \upsilon^2$, δηλ. διά $2W$ τό ἄθροισμα τοῦ πρώτου μέρους καί διά Σ τό ἄθροισμα τοῦ δευτέρου μέρους, εὑρίσκομεν $2W = \Sigma \cdot m\upsilon^2$.

Τό υ ὅμως δηλ. τήν γραμμικήν ταχύτητα, δυνάμεθα νά τήν ἐκφράσωμεν διά τῆς γωνιώδους ταχύτητος καί τῆς ἀκτῖνος ἑκάστου δίσκου. Γνωρίζομεν ἐκ τοῦ τύπου (10) ὅτι $\upsilon = \omega\tau$, τότε ἄν ἀντικαταστήσωμεν τό υ διά $\omega\tau$, λαμβάνομεν: $$2W = \Sigma m \cdot \omega^2 \tau^2$$

Καί ἐπειδή τό ω^2 μένει σταθερόν διότι ἡ γωνιώδης ταχύτης εἶναι ἡ αὐτή δι' ὅλα τά σημεῖα τοῦ δίσκου, δυνάμεθα νά τό θέσωμεν ἐκτός παρενθέσεως καί ἔχομεν τόν τύπον:

$$2W = \omega^2 (\Sigma \cdot m \cdot \tau^2)$$

Τό ἐντός τῆς παρενθέσεως μέρος, σημαίνει ὅτι πρέπει νά λάβωμεν τό γινόμενον ἑκάστης μάζης τῶν ὁμοκέντρων δίσκων , ἐπί τό γινόμενον τῆς ἀκτῖνος του εἰς τό τετράγωνον καί νά προσθέσωμεν κατόπιν ὅλα τά γινόμενα. Τό γινόμενον $\Sigma \cdot m \cdot \tau^2$, ὀνομάζεται ροπή ἀδρανείας τοῦ ἐν περιστροφῇ σώματος, καί παριστάνεται διά τοῦ γράμματος I.

$$I = \Sigma \cdot m \cdot \tau^2$$

Ἑπομένως ὁ τύπος $2W = \omega^2 (m\tau^2)$

γίνεται $2W = I\omega^2$ καί διαιροῦντες διά 2 ἀμφότερα τά μέλη, λαμβάνομεν $W = \frac{1}{2} I . \omega^2$ ὅστις μᾶς δίδει τήν κινητικήν ἐνέργειαν τοῦ ὡς ἄνω ἐν περιστροφῇ κυκλικοῦ δίσκου. Ἡ κινητική λοιπόν ἐνέργεια κυκλικοῦ δίσκου ἤ πλήρους τροχοῦ ἐν περιστροφῇ, εἶναι ἴση πρός τό ἥμισυ τοῦ γινομένου, τῆς ροπῆς ἀδρανείας του ἥτις εἶναι ἀμετάβλητος, ἐπί τό τετράγωνον τῆς γωνιώδους ταχύτητός του, ἥτις δύναται νά μεταβάλλεται κάθε στιγμήν, ἀλλά τήν ὁποία δυνάμεθα εὐκόλως νά ὑπολογίζωμεν.-

74.- Ὑπολογισμός τῆς ῥοπῆς ἀδρανείας. Τό ἄθροισμα τῶν μερικῶν μαζῶν τῶν ἀνωτέρω μικρῶν δίσκων, θά μᾶς δώσῃ μίαν μᾶζαν M ἡ ὁποία εἶναι ἡ μᾶζα τοῦ δίσκου, καί ἡ ὁποία εἶναι ἡ ἰδία πάντοτε δι' ἕναν καί τόν αὐτόν δίσκον. Ἑπομένως ἡ μᾶζα M τοῦ δίσκου δύναται νά ἀντικαταστήσῃ τό ἄθροισμα ὅλων τῶν μερικῶν μαζῶν. Ἐπίσης ἄν R εἶναι ἡ ἀκτίς τοῦ ἀρχικοῦ δίσκου, τό R δύναται νά ἀντικαταστήσῃ τό ἄθροισμα ὅλων τῶν ἀκτίνων τῶν μικρῶν δίσκων, καί ἀντί r^2 νά ἔχωμεν R^2. Ἡ τετραγωνική ῥίζα τοῦ R^2 εἶναι R. Ὑπάρχει λοιπόν μία ποσότης R^2 τήν ὁποίαν ἄν πολλαπλασιάσω ἐπί M θά μοῦ δώσῃ τό ἴδιον ἐξαγόμενον τό ὁποῖον μοῦ δίδει τό $\Sigma \cdot m \cdot r^2$.

Ἡ τετραγωνική ῥίζα τοῦ R^2 εἶναι R. Ἀλλά τό R δύναμαι νά τό εὕρω, ἐάν παρομοιάσωμεν τόν δίσκον πρός μίαν περιφέρειαν ὑλικῆς μάζης M καί ἀκτῖνος R. Ἡ ἀκτίς τότε τῆς περιφερείας αὐτῆς ὀνομάζεται ἀκτίς περιστροφῆς τοῦ δίσκου.

Ὅλα λοιπόν τά σώματα τά περιστρεφόμενα περί ἄξονα, εἴτε τρίγωνα εἶναι, εἴτε κυκλικοί τομεῖς, εἴτε τετράγωνα ἤ τροχοί, ὑποτίθεται ὅτι ἡ μᾶζα των εὑρίσκεται συγκεντρωμένη εἰς τά ἄκρα των καί οὕτω εὑρίσκομεν τήν ἀκτῖνα περιστροφῆς.

Ἑπομένως ἀντί $I = \Sigma m r^2$, δυνάμεθα νά γράψωμεν $I = MR^2$ καί ὁ τύπος $2W = I\omega^2$, γίνεται $2W = MR^2 \cdot \omega^2$

Ὡς ἐκ τούτου βλέπομεν ὅτι ἡ κινητική ἐνέργεια σώματος περιστρεφομένου ἐξαρτᾶται:

1ον/ Ἐκ τῆς μάζης τοῦ σώματος (ἀνάλογος τῆς μάζης)

2ον/ Ἐκ τῆς ἀκτῖνος περιστροφῆς (αὐξάνει ἀναλόγως τοῦ τετραγώνου τῆς ταχύτητος).

3ον/ Ἐκ τῆς γωνιώδους ταχύτητος τοῦ σώματος (ἡ κινητική ἐνέργεια αὐξάνει ἀναλόγως τοῦ τετραγώνου τῆς γωνιώδους ταχύτητος).

Διά νά αὐξήσωμεν λοιπόν τήν κινητικήν ἐνέργειαν, πρέπει νά αὐξήσωμεν ἀκτῖνα περιστροφῆς καί τήν γωνιώδη ταχύτητα, διότι αὐξάνοντες 10 φοράς τήν μᾶζαν, θά αὐξήσωμεν ἁπλῶς 10 φοράς τήν κινητικήν ἐνέργειαν, ἐνῶ αὐξάνοντες 10 φοράς εἴτε τήν ἀκτῖνα περιστροφῆς, εἴτε τήν γωνιώδη ταχύτητα τοῦ σώματος, ἑκατονταπλασιάζομεν τήν κινητικήν του ἐνέργειαν.

Ἐφαρμογαί. Τῶν ἀνωτέρω ἀρχῶν περί κινητικῆς ἐνεργείας κάμνομεν καθημερινῶς χρῆσιν χωρίς νά τό ἀντιλαμβανόμεθα. Ὅταν κτυπῶμεν καρφίον διά σφύρας, φροντίζομεν ὥστε ἡ σφῦρα νά ἔχῃ στέλεχος ξύλινον ὅσον τό δυνατόν μακρύτερον καί τοῦτο διότι κατά τά κτυπήματα ἡ σιδηρᾶ σφῦρα περιστρέφεται καί ὅσον τό ξύλινον στέλεχος τῆς σφύρας εἶναι μακρύτερον, τόσον καί ἡ ἀκτίς περιστροφῆς εἶναι μεγαλυτέρα καί ἐπομένως καί ἡ κινητική ἐνέργεια μεγάλη.

Ἄλλη ἐφαρμογή γίνεται εἰς τάς κινητηρίους μηχανάς. Ταύτας ἐφοδιάζωμεν διά μεγάλων τροχῶν, σφονδύλων καλουμένων. Οἱ σφόνδυλοι εἶναι δίσκοι κυκλικοί πλήρεις ἤ στεφάναι συμπαγεῖς μεγάλης διαμέτρου αἵτινες ἑνούμενα στερεῶς ἀποτελοῦν συμπαγεῖς στεφάνας.

Πρόβλημα. Νά ὑπολογισθῇ ἡ κινητική ἐνέργεια ἑνός σφονδύλου πλήρους, ἀκτῖνος 1,50 μέτρα, καί βάρους 10000 χιλιογράμμων, ὅστις περιστρέφεται μέ 115 στροφάς κατά λεπτόν.

Ἡ γωνιώδης ταχύτης του εὑρίσκεται ἐκ τοῦ τύπου

$\omega = \frac{\pi \nu}{30}$

Ἀντικαθιστῶντες τό $\pi = 3.14$ τό $\nu = 115$, εὑρίσκομεν $\omega = 12$.

Τό τετράγωνον τῆς ἀκτῖνος του εἶναι: $r^2 = 1,5 \times 1,5 = 2,25$

Τό τετράγωνον τῆς ἀκτῖνος περιστροφῆς του ἤ R^2, ὅπερ εἶναι ἴσον πρός $\frac{r^2}{2}$ ἰσοῦται: $R^2 = \frac{r^2}{2} = \frac{2.25}{2} = 1.175$

Ἀλλά $2W = I\omega^2$ ἤ $2W = MR^2 \cdot \omega^2$

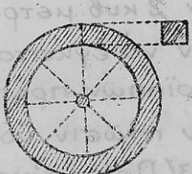
Συνεπῶς $2W = \frac{10000}{9.81} \times 1.175 \times 12^2 = 172465,56$

καί $W = \frac{172465,56}{2} = 86232$ χιλιογραμμόμετρα.

<u>Περίπτωσις ὅταν ὁ σφόνδυλος ἔχει σχῆμα στεφάνης</u>. Συνήθως οἱ σφόνδυλοι ἔχουσι σχῆμα τροχοῦ. Τότε ἡ μᾶζα των εἶναι σχεδόν συγκεντρωμένη εἰς τήν περιφέρειαν. Τό βάρος εἶναι ἴσον πρός τόν ὄγκον πολλαπλασιαζόμενον ἐπί τήν τομήν τῆς στεφάνης.

Ἔστω R ἡ ἐξωτερική ἀκτίς τοῦ τροχοῦ καί r ἡ ἐσωτερική ἀκτίς (σχ. 59). Εἰς τήν περίπτωσιν αὐτήν ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ ἀκτίς τῆς περιστροφῆς R' τοῦ σφονδύλου ἔχει τήν ἑξῆς τιμήν: Τό τετράγωνον τῆς ἀκτῖνος περιστροφῆς εἶναι ἴσον πρός τό ἡμιάθροισμα τῆς ἐξωτερικῆς καί ἐσωτερικῆς ἀκτῖνος.

$$R'^2 = \frac{1}{2}(R^2 + r^2)$$



Σχ. 59.

Πρακτικῶς ἐπειδή οἱ σφόνδυλοι εἶναι μεγάλων διαστάσεων αἱ δύο ἀκτῖνες ἐξωτερική καί ἐσωτερική διαφέρουσι πολύ ὀλίγον καί διά τοῦτο λαμβάνεται ὡς ἀκτίς περιστροφῆς τό ἡμιάθροισμα αὐτῶν.

Ἐφαρμογή. Ἡ μέση ἀκτίς σφονδύλου βάρους 10000 χιλιογράμμων, εἶναι 2 μέτρα. Ὁ σφόνδυλος ἐκτελεῖ 200 στροφάς κατά λεπτόν. Ζητεῖται νά ὑπολογισθῇ ἡ δυναμική ἐνέργεια, δηλαδή ἡ τιμή τῆς κινητικῆς ἐνεργείας.

Ἡ γωνιώδης ταχύτης $\omega = \frac{\pi \nu}{30} = \frac{3{,}14 \times 200}{30} = 20{,}933$

ἐπίσης $I = MR^2$ ἤ $I = \frac{10000 \times 2}{9{,}81} = 4077$

$W = \frac{1}{2}\omega^2 I$ ἤ $W = \frac{1}{2} \times 20{,}933^2 \times 4077 = 893250$ χιλιογραμμόμετρα.

75.- Προβλήματα πρός λύσιν.

1/ Ἵππος ἐζευγμένος εἰς μάγγανον, ἐργάζεται ἐπί 8 ὥρας καθ' ἡμέραν, καί καταβάλλει δύναμιν 40 χιλιογράμμων. Ἡ περιφερειακή κίνησις τοῦ ἵππου ἔχει ἀκτῖνα 5 μέτρων. Ὁ ἵππος ἐκτελεῖ 3 στροφάς ἀνά 2 δευτερόλεπτα. Ποῖον ἔργον ἐκτελεῖ ὁ ἵππος καθ' ἡμέραν; Νά ὑπολογισθῇ εἰς ἀτμοΐππους, ἡ δύναμις μιᾶς μηχανῆς ἡ ὁποία θά ἐξετέλη τό αὐτό ἔργον εἰς τόν ἴδιον χρόνον. (Ἀπ. 904,320 χιλιογρ. καί 0,42 ἀτμοΐπ.)

2/ Εἰς ὡρισμένον σημεῖον ποταμοῦ, εἰς τό ὁποῖον ρέουν 2 κυβ. μέτρα ὕδατος κατά δευτερόλεπτον, θέλομεν νά ἐγκαταστήσωμεν ἐργοστάσιον. Ἐπί πόσων ἀτμοΐππων πρέπει νά γίνῃ ὁ ὑπολογισμός ἐάν διαθέτωμεν πτῶσιν ὕδατος ἀπό 3 μέτρων; (Ἀπ. 80 ἀτμοΐππ.)

3/ Ποῖον εἶναι τό ἔργον, τό ὁποῖον ἐκτελεῖται κατά τήν πτῶσιν ὕδατος ἐκ τριῶν μέρων, καί τό ὁποῖον παρέχει 2000 κυβ. μέτρα ὕδατος τήν ὥραν;

(Ἀπ. 22,22 ἀτμοΐππους)

4/ Νά ὑπολογισθῇ εἰς χιλιογραμμόμετρα, ἡ κινητική ἐνέργεια βλήματος 350 χιλιογράμμων, κινουμένου μετά ταχύτητος 800 μέτρων.

(Ἀπ. $\frac{32 \times 35 \times 10^5}{9{,}81}$ χιλιογραμ.)

5/ Ἀνήρ ἐνεργεῖ διά δυνάμεως 20 χιλιογράμμων ἐπί τῆς χειρολαβῆς βαρούλκου ἀκτῖνος 0,30 μέτρων, ἐπιτυγχάνων περιστροφήν τῆς χειρολαβῆς ἐντός τριῶν δευτερολέπτων. Νά εὑρεθῇ τό ἔργον εἰς χιλιογραμμόμετρα κατά δευτερόλεπτον.

(Ἀπ. 12,567 χιλιογραμμόμ.)

6/ Ὑδραυλικός τροχός δέχεται 1800 κυβ. μέτρα ὕδατος τήν ὥραν. Τό ὕδωρ πίπτει ἐξ ὕψους 6 μέτρων μέ ταχύτητα 4 μέτρων κατά δευτερόλεπτον. Ζητεῖται τό θεωρητικόν ἔργον τοῦ ὕδατος εἰς ἀτμοΐππους.

(Ἀπ. 45,43 ἀτμοΐπποι)

7/ Ἀτμομηχανή βάρους 10 τόννων μεταφέρει 900 ἐπιβάτας μέσου βάρους 65 κοιλῶν. Κινεῖται μετά ταχύτητος 18 χιλιομέτρων τήν ὥραν. Ποία ἡ κινητική της ἐνέργεια;

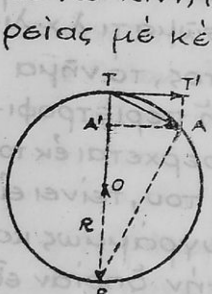
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VII

76.- Περί φυγοκέντρου δυνάμεως.

Ὅταν περιστρέψωμεν κυκλικῶς σῶμα τι λ.χ. λίθον δεμένον εἰς τό ἕν ἄκρον νήματος, τό νῆμα τείνεται καί δύναται νά κοπῇ, ἐάν ἡ περιστροφική κίνησις εἶναι ταχεῖα. Τοῦτο προέρχεται ἐκ τοῦ ὅτι τό σῶμα, λόγῳ τῆς ἀδρανείας του, τείνει εἰς ἑκάστην στιγμήν νά κινηθῇ εὐθυγράμμως κατά τήν διεύθυνσιν τῆς κινήσεως, τήν ὁποίαν εἶχε κατά τήν προηγουμένην στιγμήν. Τό νῆμα ἐξασκεῖ ἐπί τοῦ λίθου, δύναμιν ἑλκτικήν προερχομένην ἐκ τῆς χειρός μας καί διευθυνομένην πρός τό κέντρον, δηλ. πρός τό σημεῖον δι' οὗ κρατοῦμεν τό νῆμα. Ἡ ἑλκτική αὐτή δύναμις τῆς χειρός μας ἐπί τοῦ λίθου, εἶναι ἐκείνη ἡ ὁποία τόν ἀναγκάζῃ νά περιστρέφεται κυκλικῶς. Ὁ λίθος ὅμως εἰς τήν ἑλκτικήν δύναμις τῆς χειρός μας, ἀντιδρᾷ καί ἀναπτύσσεται δύναμις ἀντίθετος ἡ ὁποία τείνει τό νῆμα. Ἡ ἑλκτική δύναμις τῆς χειρός μας ἡ ὁποία διευθύνεται πρός τό κέντρον ὀνομάζεται κεντρομόλος, ἡ ἀντίθετος δέ καί ἴση πρός ταύτην ἡ ὁποία τείνει τό νῆμα καλεῖται φυγόκεντρος. Ἐπομένως ἡ φυγόκεντρος δύναμις εἶναι ἀποτέλεσμα τῆς ἀρχῆς τῆς δράσεως καί ἀντιδράσεως.

Ἐάν αἰφνηδίως ὁ λίθος ἀφεθῇ ἐλεύθερος, θά ἐκτιναχθῇ κατά τήν ἐφαπτομένην τῆς περιφερείας τήν ὁποίαν διαγράφει. Τοιοῦτον συμβαίνει εἰς τήν σφενδόνην εἰς τήν ὁποίαν ὁ λίθος ἐκφεύγει κατά τήν διεύθυνσιν τῆς κινήσεώς του. Κατά τόν ἴδιον τρόπον ἐκτινάσσεται καί ἡ λάσπη τῶν τροχῶν τῶν ἁμαξῶν.

77.- Ὑπολογισμός τῆς φυγοκέντρου δυνάμεως. Ἔστω κινητόν περιστρεφόμενον ἐπί τῆς περιφερείας μέ κέντρον τό O (σχ. 60) κατά τήν διεύθυνσιν τοῦ βέλους, καί ἔστω ὅτι εὑρίσκεται εἰς τήν θέσιν T. Ἡ διεύθυνσις τοῦ κινητοῦ εἰς κάθε στιγμήν εἶναι ἐφαπτομένη εἰς τήν περιφέρειαν. Εἰς τό τέλος ὅμως μιᾶς χρονικῆς μονάδος καί ὑπό τήν



Σχ. 60.

ἐπίδρασιν τῆς κεντρομόλου δυνάμεως, τό κινητόν ἔρχεται εἰς τήν θέσιν A καί διαγράφει τό τόξον TA τό ὁποῖον δυνάμεθα νά τό θεωρήσωμεν ὅτι ταυτίζεται μετά τῆς χορδῆς του, διότι τό τόξον ὑποτίθεται πάρα πολύ μικρόν. Τό κινητόν λοιπόν ἔπεσε κατά Τ'Α ἤ κατά τό ἴσον τοῦ ΤΑ!

Γνωρίζομεν ὅμως ὅτι ἡ δύναμις εἶναι γινόμενον τῆς μάζης ἐπί τήν ἐπιτάχυνσιν. Ἡ δύναμις λοιπόν πού θέλομεν νά ὑπολογίσωμεν θά ἐκφράζεται ἀπό τό γινόμενον τῆς μάζης τοῦ κινητοῦ ἐπί τήν ἐπιτάχυνσιν, καί ἡ ἐπιτάχυνσις τοῦ κινητοῦ εἶναι ὅπως ἐμάθαμεν τό διπλάσιον τοῦ διανυθέντος διαστήματος κατά τήν χρονικήν μονάδα.

Τό διανυθέν διάστημα ἐνταῦθα εἶναι ΤΑ'. Ἡ ἐπιτάχυνσις ἡ ὀφειλομένη εἰς τό κεντρομόλον δύναμιν εἶναι 2ΤΑ'. Ἀλλά ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΤΑΒ ἔχομεν τήν σχέσιν:

$$\overline{TA}^2 = TB \times TA'$$

Καί ἐπειδή $TB = 2\tau$ (2 φοράς ἡ ἀκτίς), εὑρίσκομεν

$$\overline{TA}^2 = 2\tau \times TA' \quad \text{ἐξ οὗ} \quad TA' = \frac{\overline{TA}^2}{2\tau}$$

Ἡ κεντρομόλος λοιπόν δύναμις $= m \cdot \gamma$ ἤ

$$m \times 2TA'$$

Καί κεντρομόλος δύναμις $= m \times \dfrac{2\overline{TA}^2}{2\tau} = \dfrac{m \cdot \overline{TA}^2}{\tau}$

Ἀλλά τό κατά τήν μονάδα τοῦ χρόνου διανυθέν διάστημα εἶναι τό τόξον ΤΑ ἤ ἡ χορδή ΤΑ, καί γνωρίζοντες ὅτι τό διάστημα τῆς ὁμαλῆς κινήσεως εἶναι $\varepsilon = \upsilon t$, ἐάν $t = 1$ τότε τό $\varepsilon = \upsilon$. Συνεπῶς

$$TA = \upsilon, \text{ καί } \overline{TA}^2 = \upsilon^2$$

Ἀντικαθιστῶντες τό $\overline{TA}^2$ εἰς τόν ἀνωτέρω τύπον τῆς κεντρομόλου δυνάμεως εὑρίσκομεν:

Κεντρομόλος δύναμις $f = \dfrac{m \cdot \upsilon^2}{\tau}$

Ἀλλά ὅπως εἴπομεν ἡ φυγόκεντρος δύναμις εἶναι ἴση καί ἀντίθετος τῆς κεντρομόλου, καί ἑπομένως καί ὁ τύπος τῆς φυγοκέντρου δυνάμεως θά εἶναι ὁ αὐτός, μέ τήν διαφοράν ὅτι ἡ φυγόκεντρος δύναμις ἔχει διεύθυνσιν ἀντίθετον τῆς κεντρομόλου, καί ὁ τύπος λοιπόν τῆς φυγοκέντρου δυνάμεως θά εἶναι: $f=\frac{m \cdot \upsilon^2}{\tau}$ ὅπου m ἡ μᾶζα τοῦ κινητοῦ, υ ἡ ταχύτης του, καί τ ἡ ἀκτίς τῆς περιφερείας ἥν διαγράφει τό κινητόν.

<u>Νόμοι τῆς φυγοκέντρου δυνάμεως</u>. Ἐκ τοῦ τύπου $f=\frac{m \cdot \upsilon^2}{\tau}$ συμπεραίνομεν τούς νόμους τῆς φυγοκέντρου δυνάμεως.

<u>1ος Νόμος</u>. Ἡ φυγόκεντρος δύναμις εἶναι ἀνάλογος τῆς μάζης τοῦ κινητοῦ. Αὐξανομένου δηλ. τοῦ βάρους τοῦ περιστρεφομένου κινητοῦ καί ἡ ἀναπτυσσομένη φυγόκεντρος δύναμις αὐξάνει. Εἰς τούς περιστρεφομένους σφονδύλους, λόγω τῆς μεγάλης των μάζης ἀναπτύσσεται πολύ μεγάλη φυγόκεντρος δύναμις.

<u>2ος Νόμος</u>. Ἡ φυγόκεντρος δύναμις εἶναι ἀνάλογος τοῦ τετραγώνου τῆς ταχύτητος τοῦ κινητοῦ. Ἐάν λ.χ. ἡ ταχύτης τοῦ κινητοῦ εἶναι τρεῖς φοράς μεγαλυτέρα, τότε ἡ ἀναπτυσσομένη φυγόκεντρος δύναμις γίνεται 9 φοράς μεγαλητέρα.

<u>3ος Νόμος</u>. Ἡ φυγόκεντρος δύναμις εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογος τῆς ἀκτῖνος τῆς περιφερείας τήν ὁποίαν διαγράφει τό κινητόν. Ἐάν π.χ. τό αὐτό κινητόν, περιστρέφεται μέ τήν <u>αὐτήν ταχύτητα</u> πρῶτον ἐπί περιφερείας ἀκτῖνος 1 μέτρου, καί κατόπιν ἐπί περιφερείας ἀκτῖνος 2 μέτρων, ἡ ἀναπτυσσομένη φυγόκεντρος δύναμις εἰς τήν δευτέραν περίπτωσιν εἶναι τό $\frac{1}{2}$ τῆς προηγουμένης.

<u>78.- Ἔκφρασις τῆς φυγοκέντρου δυνάμεως συναρτήσει τῆς γωνιώδους ταχύτητος</u>. Γνωρίζομεν ὅτι ἡ γραμμική ταχύτης κινητοῦ περι-

στρεφομένου ἐπὶ περιφερείας ἀκτῖνος r, συνδέεται μὲ τὴν γωνιώδη ταχύτητα αὐτοῦ ω διὰ τῆς σχέσεως: $\upsilon=\omega r$.

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον $f=\frac{m\cdot\upsilon^2}{r}$, τὸ υ διὰ ωr εὑρίσκομεν: $f=\frac{m\cdot\omega^2\cdot r^2}{r}=m\cdot\omega^2\cdot r$

Ἐκ τοῦ τύπου τούτου βλέπομεν ὅτι, ἡ φυγόκεντρος δύναμις εἶναι ἀνάλογος τῆς ἀκτῖνος τῆς διαγραφομένης περιφερείας, ὅταν ἡ μᾶζα εἶναι ἡ αὐτὴ καὶ αἱ περιφέρειαι διαγράφονται εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον. Ἐὰν π.χ. ἐντὸς 2" τὸ κινητὸν διανύῃ περιφέρειαν ἀκτῖνος ἑνὸς μέτρου, καὶ ἐντὸς πάλιν 2" διανύῃ περιφέρειαν ἀκτῖνος 2 μέτρων, ἡ φυγόκεντρος δύναμις εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν εἶναι διπλασία τῆς πρώτης.

<u>Πρόβλημα</u>. Σῶμα βάρους 10 χιλιογράμμων, διαγράφει ἐντὸς 2 δευτερολέπτων περιφέρειαν διαμέτρου 2 μέτρων. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀναπτυσσομένη φυγόκεντρος δύναμις.

Ἡ γραμμικὴ ταχύτης τοῦ σώματος μᾶς δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου $\upsilon=\frac{2\pi r}{2}=\frac{2\times3.14\times1}{2}=3{,}14$ μέτρα.

Ἑπομένως $f=\frac{m\cdot\upsilon^2}{r}=\frac{P}{g}\cdot\frac{\upsilon^2}{r}=\frac{10\times(3.14)^2}{9.81\times1}=10$ χιλιόγρ.

79.- Ἀποτελέσματα φυγοκέντρου δυνάμεως

Εἰς τὴν κατασκευὴν τῶν σιδηροδρομικῶν γραμμῶν ἀποφεύγουσι ὅσον τὸ δυνατὸν τὰς καμπύλας διότι ἐπειδὴ αἱ ἁμαξοστοιχίαι κινοῦνται μετὰ μεγάλης ταχύτητος, ἡ φυγόκεντρος δύναμις θὰ ἔτεινε νὰ ἐκτινάξῃ αὐτὰς ἐκτὸς τῆς γραμμῆς, εὐθὺς ὡς ἡ τροχιὰ των ἤθελε παρουσιάσει καμπυλότητα. Ὅπου δὲ δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἀποφεύγωσι τὰς καμπύλας, πρῶτον μὲν δίδουσι εἰς αὐτὰ ταδοθῆ εἰς αὐτό κατά τήν πτῶσιν του. Θά ἔλθη λοιπόν στιγμή κατά τήν ὁποίαν ἡ κτηθεῖσα κινητική ἐνέργεια θέλει τελείως μηδενισθῆ ὑπό τῆς ἀντιστάσεως τῆς βαρύτητος. Τότε ὅλη ἡ ἐνέργεια θά μεταβληθῆ εἰς δυναμικήν ἐνέργειαν καί τό ἐκκρεμές θά παύση ανερχόμενον καί κατόπιν ἀμέσως πάλιν θά ξαναέλθη πρός τό σημεῖον Η, τό ὁποῖον ἐκ νέου θά ὑπερβῆ λόγῳ τῆς κτηθείσης ταχύτητος καί θέλει ἀνέλθη πάλιν πρός τό σημεῖον A_0, ἕως ὅτου ἡ κινητική ἐνέργεια αὐτοῦ μηδενισθῆ τελείως. Τήν στιγμήν τοῦ νέου τούτου σταθμοῦ τό ἐκκρεμες θά εὑρεθῆ ὑπό τούς αὐτούς ὅρους ὅπως καί εἰς τήν ἀρχήν. Τότε ὅμως θά ἔχῃ συμπληρώσῃ μίαν πρώτην περίοδον τῆς κινήσεώς του, καί ἡ κίνησις αὐτή θά ἐξακολουθήσῃ κατά τόν αὐτόν τρόπον διά σειρᾶς περισσότερον ἤ ὀλιγώτερον μακρῶν ὁμοίων περιόδων, αἱ ὁποῖαι ἀποτελοῦν τήν <u>αἰώρησιν</u>.

<u>Ἁπλῆν αἰώρησιν</u> καλοῦμεν τήν μετάβασιν τοῦ ἐκκρεμοῦς ἀπό τῆς μιᾶς ἄκρας θέσεως αὐτοῦ, μέχρι τῆς ἑτέρας, ἑκατέρωθεν τῆς κατακορύφου. Δύο διαδοχικαί ἁπλαῖ αἰωρήσεις ἀντιθέτων διευθύνσεων ἀποτελοῦν μίαν <u>περίοδον</u> ἤ μίαν <u>πλήρη αἰώρησιν</u>. Ἡ γωνία $A_0OH = \alpha$ καλεῖται <u>πλάτος</u> τῶν αἰωρήσεων. Ὁ δέ χρόνος T ὅστις ἀπαιτεῖται ἵνα τό ἐκκρεμές ἐκτελέσῃ μίαν πλήρη αἰώρησιν καλεῖται <u>περίοδος</u> αὐτοῦ, καί ἡ κίνησις τοῦ ἐκκρεμοῦς καλεῖται <u>περιοδική</u>. Μῆκος δέ τοῦ ἐκκρεμοῦς λέγεται ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου τοῦ βάρους τοῦ ἐκκρεμοῦς ἀπό τόν ἄξονα τῆς ἐξαρτήσεως.

<u>Παρατήρησις</u>. Ἄν ἐπί τοῦ ἐκκρεμοῦς ἐνήργη μόνον ἡ βαρύτης, τό σημεῖον A_1 θά ἦτο ἀκριβῶς

συμμετρικόν πρός τό A_0, τό πλάτος δηλαδή τῶν αἰωρήσεων θά ἔμενεν ἀμετάβλητον, ἡ δέ κίνησις τοῦ ἐκκρεμοῦς θά ἐξηκολούθη ἐπ' ἄπειρον. Ἡ ἀντίστασις ὅμως τοῦ ἀέρος καί ἡ τριβή κατά τόν ἄξονα τῆς ἐξαρτήσεως, τήν ὁποίαν δέν εἶναι δυνατόν νά ἀποφύγωμεν, συντελοῦσι διαρκῶς εἰς τήν βαθμιαίαν ἐπιβράδυνσιν καί τέλος εἰς τήν παῦσιν τῆς κινήσεως τοῦ ἐκκρεμοῦς.

82.- Νόμοι τοῦ ἁπλοῦ ἐκκρεμοῦς.

1ος Νόμος. Αἱ αἰωρήσεις τοῦ ἐκκρεμοῦς εἶναι ἰσόχρονοι, ὅταν τό πλάτος αὐτῶν εἶναι μικρόν.

Ἄν μετρήσωμεν τόν χρόνον 10 αἰωρήσεων μικροῦ πλάτους, καί κατόπιν τόν χρόνον ἄλλων αἰωρήσεων ἄλλου πλάτους, θά εὕρωμεν τόν αὐτόν ἀριθμόν καί εἰς τάς δύο περιπτώσεις. Ὁ χρόνος αἰωρήσεων λοιπόν εἶναι ὁ αὐτός.

2ος Νόμος. Ἡ διάρκεια τῆς αἰωρήσεως δέν ἐξαρτᾶται οὔτε ἐκ τῆς οὐσίας, οὔτε ἐκ τοῦ βάρους τοῦ ἐκκρεμοῦς.

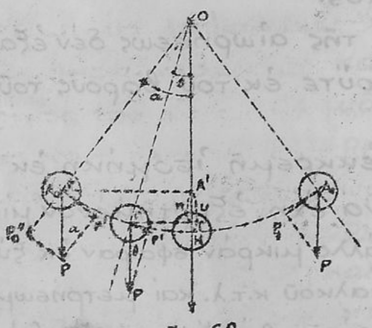
Ἄν δηλαδή λάβωμεν ἐκκρεμῆ ἰσομήκη ἐκ διαφόρων οὐσιῶν, τό ἕν λ.χ. νά ἔχη ἐξαρτημένον μικρόν μεταλλικόν σφαιρίδιον, τό ἄλλο μικράν σφαῖραν ἐκ ξύλου, τό ἄλλο μικράν σφαῖραν ἐκ χαλκοῦ κ.τ.λ. καί μετρήσωμεν τόν χρόνον τῶν αἰωρήσεων αὐτῶν, θά εὕρωμεν ὅτι διά τό αὐτό πλάτος αἰωρήσεως ὁ χρόνος εἶναι ὁ αὐτός.

3ος Νόμος. Οἱ χρόνοι τῶν αἰωρήσεων τῶν ἐκκρεμῶν εἶναι ἀνάλογοι τῶν τετραγωνικῶν ῥιζῶν τῶν μηκῶν των.

Ἐάν π.χ. λάβωμεν δύο ἐκκρεμῆ, ἐκ τῶν ὁποίων τό μέν ἔχει μῆκος 40 ἑκατοστομέτρων, τό δέ ἄλλο 160 ἑκατοστῶν, ἤτοι τετραπλάσιον τοῦ πρώτου, θά παρατηρήσωμεν, ὅτι καθ' ὅν χρόνον τό πρῶτον ἐκτελεῖ δύο αἰωρήὅμως δίδομεν εἰς τό ἐκκρεμές σχῆμα μεταλλικῆς μάζης ἡ ὁποία ἔχει ἐπιφάνειαν σφαιροειδῆ ἤ φακοειδῆ, καί ἡ ὁποία μεταλλική μᾶζα εἶναι ἐξηρτημένη διά νήματος μεταλλικοῦ, ἤ διά στερεοῦ στελέχους ἐπίσης μεταλλικοῦ. Τό ἐκκρεμές τῶν ὡρολογίων παριστᾷ τήν μορφήν τοῦ ἐκκρεμοῦς, τήν περισσότερον ἐν χρήσει.

<u>Αἰώρησις</u>. Πᾶν ἐκκρεμές τό ὁποῖον ἠρεμεῖ, λαμβάνει, ὅπως καί τό νῆμα τῆς στάθμης, θέσιν εὐσταθοῦς ἰσορροπίας. Εἰς τήν θέσιν ταύτην ἡ κατακόρυφος ἡ διερχομένη διά τοῦ κέντρου τοῦ βάρους τοῦ ἐκκρεμοῦς, συναντᾷ τόν ἄξονα ἐξαρτήσεως.

Εἰς τήν θέσιν τῆς ἰσορροπίας (σχ. 62) ἡ κατακόρυφος ἡ διά τοῦ κέντρου βάρους Γ διερχομένη, συναντᾷ τό σημεῖον Ο καί συνεπῶς τό βάρος Ρ τοῦ ἐκκρεμοῦς, ἐφηρμοσμένον εἰς τό Γ καί διευθυνόμενον κατά τήν κατακόρυφον, ἐξουδετεροῦται ὑπό τῆς ἀντιστάσεως τοῦ σταθεροῦ σημείου.



Σχ. 62

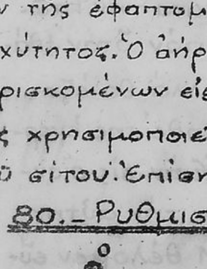
Μέ ἀκτῖνα ἴσην πρός τήν ΟΓ γράφομεν τόξον κύκλου A_0HA_1.

Ἐάν μετακινήσωμεν τό ἐκκρεμές ἀπό τῆς θέσεως τῆς ἰσορροπίας, τό κέντρον τοῦ βάρους αὐτοῦ μετακινεῖται ἐπί τοῦ τόξου τούτου. Φέρομεν τό σημεῖον Γ εἰς τήν θέσιν A_0, οὕτως ὥστε τό στέλεχος τοῦ ἐκκρεμοῦς νά σχηματίσῃ μετά τῆς ἀρχικῆς του θέσεως γωνίαν α ἴσην πρός τήν HOA_0. Πρός τοῦτο ἐξετελέσαμεν ἔργον ἀντίθετον πρός τήν βαρύτητα καί τό ὁποῖον εἶναι ἴσον πρός P·υ, ἐάν διά υ καλέσωμεν τό κατακόρυφον ὕψος εἰς τό ὁποῖον ὑψώσαμεν τό ἐκκρεμές. Ἐπειδή ἡ διεύθυνσις τοῦ βάρους P δέν διέρχεται πλέον διά τοῦ σταθεροῦ σημείου, δυνάμεθα νά ἀναλύσωμεν τό βάρος τοῦτο εἰς δύο δυνάμεις, τήν P_0'' διευθυνομένην κατά τήν προέκτασιν τοῦ στελέχους, καί τήν P_0' διευθυνομένην κατά τήν ἐφαπτομένην τοῦ τόξου. HA_0. Ἐκ τούτων ἡ μέν συνιστῶσα P_0'' μηδενίζεται ὑπό τῆς ἀντιστάσεως τοῦ σταθεροῦ σημείου, ἡ δέ ἑτέρα ἐνεργεῖ ὅπως ἐπαναφέρει τό ἐκκρεμές κατά τήν διεύθυνσιν τοῦ τόξου A_0H εἰς τήν ἀρχικήν αὐτοῦ θέσιν τῆς ἰσορροπίας. Ἡ συνιστῶσα αὕτη P_0' ἐλαττοῦται ἐλαττουμένης τῆς γωνίας α καί μηδενίζεται τελείως ὅταν τό ἐκκρεμές φθάσῃ πάλιν εἰς τήν ἀρχικήν αὐτοῦ θέσιν OH. Ὅταν ὅμως τό ἐκκρεμές φθάνει εἰς τήν θέσιν ταύτην δέν σταματᾷ, διότι ὅταν μεταβαίνει ἀπό τῆς θέσεως OA_0 εἰς τήν OH, πίπτει ἀπό ὕψος υ, ὅπερ εἶναι ἴσον πρός A'H. Ἑπομένως ὅταν πίπτῃ ἀναπτύσσει κινητικήν ἐνέργειαν ἡ ὁποία εἶναι ἴση πρός τό ἔργον τό κινητήριον τῆς βαρύτητος κατά τήν πτῶσιν δηλ. ἴσον πρός P·υ. Τό εκκρεμές λοιπόν ὅταν φθάσῃ εἰς τήν θέσιν OH δέν θά σταματήσῃ, ἀλλά θά ἐξακολουθήσῃ τήν κίνησίν του λόγῳ τῆς κτηθείσης ἐνεργείας καί θά ὑπερβῇ τήν κατακόρυφον. Ἐάν εἰς οἱονδήποτε σημεῖον τοῦ τόξου HA_1, κάμνωμεν τήν αὐτην κατασκευήν ὅπως καί εἰς τό σημεῖον M θέλομεν εὕρει, ὅτι ἡ κατά τήν ἐφαπτομένην συνιστῶσα P_1' τοῦ βάρους διευθύνεται ἤδη ἀντιθέτως πρός τήν κίνησιν.

Ἑπομένως κατά τήν δευτέραν ταύτην φάσιν τῆς κινήσεως ἡ βαρύτης ἐνεργεῖ ὡς δύναμις ἐπιβραδυντική, ἀφαιροῦσα μικρόν κατά μικρόν ἀπό τοῦ ἐκκρεμοῦς τήν κινητικήν ἐνέργειαν ἡ ὁποία εἶχε με-μέγα ἄνοιγμα, καὶ κατὰ δεύτερον λόγον στερεοῦσι τὴν ἐσωτερικὴν γραμμήν, τὴν ἐστραμμένην δηλ. πρὸς τὸ κέντρον καμπυλότητος ὀλίγον χαμηλότερον τῆς ἐξωτερικῆς. Ἐπὶ πλέον δὲ κατὰ τὴν στιγμὴν τῆς διαβάσεως τῆς ἁμαξοστοιχίας ὁ ὁδηγὸς περιορίζει τὴν ταχύτητα. Ἐπίσης ὁ στίβος ποδηλατοδρομίου κατασκευάζεται ὑπὸ κλίσιν. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον οἱ ἱππεῖς καὶ οἱ ποδηλάται εἰς τὰς στροφὰς κλίνουσι τὸ σῶμα των πρὸς τὰ ἔσω.

Ἐφαρμογαὶ τῆς φυγοκέντρου δυνάμεως εἶναι οἱ φυγοκεντρικοὶ ἀνεμιστῆρες καὶ οἱ ξηραντῆρες. Ὁ φυγοκεντρικὸς ἀνεμιστὴρ εἶναι κυλινδρικὸν τύμπανον εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ ὁποίου στρέφονται ταχέως περὶ ἄξονα πτερύγια, τῶν ὁποίων τὰ πέρατα ἐφάπτονται τῶν ἐσωτερικῶν τοιχωμάτων τοῦ κυλίνδρου. Ὁ μεταξὺ τῶν πτερυγίων ἀὴρ λαμβάνει κίνησιν περιστροφικήν, πιέζεται ἐπὶ τῶν τοιχωμάτων τοῦ τυμπάνου καὶ φθάνων εἰς τὸ στόμιον κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς ἐφαπτομένης ἐξορμᾷ πρὸς τὰ ἔξω μετὰ μεγίστης ταχύτητος. Ὁ ἀὴρ ἀνανεοῦται διαρκῶς διὰ μεγάλων ὀπῶν εὑρισκομένων εἰς τὰ μέσα τῶν δύο βάσεων. Ὁ ἀνεμιστὴρ οὗτος χρησιμοποιεῖται εἰς τὴν γεωργίαν διὰ τὸν καθορισμὸν τοῦ σίτου. Ἐπίσης εἰς τὰ σιδηρουργεῖα ἀντὶ φυσητῆρος.-

<u>80.- Ρυθμιστὴς διὰ φυγοκέντρου δυνάμεως.</u> Ἡ συσκευὴ αὕτη (σχ. 61) ἔχει σκοπὸν νὰ διατηρῇ τὴν ταχύτητα τῆς ἀτμομηχανῆς σταθερὰν καὶ κανονίζει αὐτομάτως τὴν εἴσοδον τοῦ ἀτμοῦ εἰς τὸν κύλινδρον. Ἡ κίνησις τοῦ ἄξονος μεταδίδεται εἰς στέλεχος κατακόρυφον τὸ ὁποῖον οὕτω στρέφεται μὲ ταχύτητα ἀνάλογον πρὸς τὴν ταχύτητα τῆς μηχανῆς.



Σχ. 61

ἐπὶ τοῦ στελέχους τούτου συναρθροῦνται δύο βραχίονες ΟΑ καὶ ΟΑ' καταλήγοντες κατὰ τὰ κατώτερα αὐτῶν ἄκρα εἰς μεταλλικὰς σφαίρας Β καὶ Β'.

Αἱ σφαῖραι αὗται παρασύρονται μὲ τὴν κίνησιν τοῦ κεντρικοῦ στελέχους, καὶ ἡ ἀπόκλισις αὐτῶν αὐξάνεται μετὰ τῆς ταχύτητος τῆς περιστροφῆς. Τότε τὸ κοῖλον περίβλημα Μ ἀνυψοῦται κατὰ μῆκος τοῦ στελέχους διὰ δύο μικρῶν ῥάβδων συναρθρουμένων κατὰ τὰ Α, Α'. Ἡ τοιαύτη μετατόπισις χρησιμοποιεῖται τότε καταλλήλως διὰ μοχλῶν, εἴτε ὅπως κλεισθῇ διὰ δικλεῖδος ὁ σωλὴν, δι' οὗ διέρχεται ὁ ἀτμός, εἴτε ὅπως αὐξηθῇ ἡ ἀποτόνωσις τούτου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VIII

81.- Περὶ ἐκκρεμοῦς

Ὁρισμὸς τοῦ ἐκκρεμοῦς. Καλοῦμεν ἐκκρεμὲς πᾶν σῶμα στερεὸν τὸ ὁποῖον δύναται νὰ αἰωρῆται περὶ ὁριζόντιον καὶ σταθερὸν ἄξονα. Ἡ φάλαγξ ζυγοῦ, αἰωρουμένη περὶ τὸν ἄξονά της ἀποτελεῖ ἐκκρεμές. Ἐπίσης σῶμα στερεὸν ἐξηρτημένον εἰς τὸ ἄκρον νήματος, τοῦ ὁποίου τὸ ἕτερον ἄκρον εἶναι κάπου στερεωμένον, ἀποτελεῖ ἐκκρεμές.

Ἁπλοῦν ἐκκρεμὲς καλεῖται, τὸ ἐκκρεμὲς τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖται ἐκ σημείου ὑλικοῦ, ἐξηρτημένου ἐκ τοῦ ἄκρου νήματος ἄνευ βάρους καὶ μὴ ἐκτατοῦ.

Μῆκος τοῦ ἐκκρεμοῦς τούτου καλεῖται τὸ μῆκος τοῦ νήματος.

Πᾶν ἐκκρεμὲς ὅπερ δὲν εἶναι ἁπλοῦν, ὀνομάζεται σύνθετον ἐκκρεμές. Κατὰ ταῦτα τὸ ἐκκρεμὲς δύναται νὰ ἔχῃ οἱονδήποτε σχῆμα. Συνήθως σεις, τό δεύτερον έκτελεῖ μίαν, ἤτοι ὁ χρόνος αἰωρήσεως τοῦ δευτέρου εἶναι διπλάσιος τοῦ χρόνου αἰωρήσεως τοῦ πρώτου.

4ος Νόμος. Ἡ διάρκεια αἰωρήσεως τοῦ ἐκκρεμοῦς εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογος τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τῆς ἐπιταχύνσεως g τῆς βαρύτητος εἰς τόν τόπον τοῦ πειράματος.

Ἐάν τό σφαιρίδιον λ.χ. τοῦ ἐκκρεμοῦς εἶναι ἐκ σιδήρου, ἡ ἐπιτάχυνσις g αὐξάνει ἤ ἐλαττοῦται, καθόσον τίθεται μαγνήτης κάτωθεν ἤ ἄνωθεν τοῦ ἐκκρεμοῦς.

83.- Τύπος τοῦ ἁπλοῦ ἐκκρεμοῦς. Ἐάν καλέσωμεν διά T τήν περίοδον τοῦ ἐκκρεμοῦς καί διά τοῦ μ τό μῆκος του, οἱ νόμοι οἱ ἀνωτέρω τοῦ ἐκκρεμοῦς περιλαμβάνονται εἰς τόν ἑξῆς τύπον:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\mu}{g}}\ , \quad \text{ὅπου } \pi = 3{,}1416$$

Ἐφαρμογαί τοῦ ἐκκρεμοῦς. Ἐάν λάβωμεν τόν ἄνω τύπον τοῦ ἐκκρεμοῦς καί διαιρέσωμεν ἀμφότερα τά μέλη διά 2 τότε ὁ τύπος γίνεται

$$\frac{T}{2} = \pi\sqrt{\frac{\mu}{g}}$$

Ἀλλά τό $\frac{T}{2}$ εἶναι ὁ χρόνος μιᾶς ἁπλῆς αἰωρήσεως, τόν ὁποῖον καλοῦμεν t καί θά ἔχωμεν:

$$\frac{T}{2} = t = \pi\sqrt{\frac{\mu}{g}} \quad \text{ἤ} \quad t = \pi\sqrt{\frac{\mu}{g}}$$

Ὑψοῦντες εἰς τό τετράγωνον ἀμφότερα τά μέλη ἔχομεν: $t^2 = \frac{\pi^2 \cdot \mu}{g}$ καί $gt^2 = \pi^2 \cdot \mu$ καί $g = \frac{\pi^2 \mu}{t^2}$

Γνωρίζοντες δηλαδή τό μῆκος μ τοῦ ἐκκρεμοῦς, καί τόν χρόνον t μιᾶς ἁπλῆς αἰωρήσεως, δυνάμεθα νά εὕρωμεν τήν ἔντασιν τῆς βαρύτητος g εἰς ἕνα τόπον.

84.- Τύπος τοῦ συνθέτου ἐκκρεμοῦς. Πᾶν σῶμα στερεόν στρεφόμενον περί σταθερόν καί ὁριζόντιον ἄξονα, ὅστις δέν διέρχεται διά τοῦ κέντρου τοῦ βάρους τοῦ σώματος ἀποτελεῖ σύνθετον ἐκκρεμές.

Ἄν καλέσωμεν m τήν μᾶζαν τοῦ σώματος, P τήν ῥοπήν ἀδρανείας ἐπί τοῦ ἄξονος ἐξαρτήσεως καί μ τήν ἀπόστασιν τοῦ κέντρου τοῦ βάρους τοῦ σώματος ἀπό τόν ἄξονα ἐξαρτήσεως καί g τήν ἔντασιν τῆς βαρύτητος τότε ὁ χρόνος t μιᾶς αἰωρήσεως δίδεται ὑπό τοῦ τύπου: $t = \pi\sqrt{\frac{P}{g \cdot m \cdot \mu}}$ τό t θά ἐκφράζει δευτερόλεπτα.

Τό ἐκκρεμές χρησιμοποιεῖται ὡς γνωστόν εἰς τήν μέτρησιν τοῦ χρόνου καί διά τοῦτο ἔχει μεγάλην ἐφαρμογήν εἰς τά ὡρολόγια δι'ἐκκρεμοῦς, καί τοῦτο λόγῳ τοῦ ὅτι αἱ αἰωρήσεις αὐτοῦ ὑπό μικρόν πλάτος εἶναι ἰσόχρονοι.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IX

85.- ΠΑΘΗΤΙΚΑΙ ΑΝΤΙΣΤΑΣΕΙΣ

Ὅταν χρησιμοποιοῦμεν ἁπλᾶς μηχανάς πρός ἐκτέλεσιν ἔργου, διακρίνομεν κατά τήν ἐκτέλεσιν τοῦ ἔργου δύο εἰδῶν ἀντιστάσεις.

1ον/ Τάς χρησίμους ἀντιστάσεις τάς ὁποίας προσπαθοῦμεν νά ἰσορροπήσωμεν ἤ καί νά ὑπερνικήσωμεν διά τῶν ἁπλῶν μηχανῶν.

2ον/ Τάς παθητικάς ἀντιστάσεις ἤ τάς ἀχρήστους, αἵ ὁποῖαι ἐκδηλοῦνται κατά τήν λειτουργίαν τῶν μηχανῶν καί αἱ ὁποῖαι ἀχρηστεύουν ἕνα μέρος τοῦ κινητηρίου ἔργου.

Αἱ παθητικαί ἀντιστάσεις εἶναι δύο εἰδῶν: 1ον) Αἱ ἀντιστάσεις τῶν ῥευστῶν ἐντός τῶν ὁποίων λειτουργοῦν αἱ μηχαναί ὅπως λ.χ. τό ὕδωρ καί ὁ ἀήρ, καί 2ον) Αἱ ἀντιστάσεις αἱ ὁποῖαι ἀναπτύσσονται ἐκ τῆς ναμις τριβῆς εἶναι πάντοτε μεγαλητέρα κατά τήν ἀρχήν τῆς ὀλισθήσεως.

88.- Νόμοι τῆς τριβῆς ἐξ ὀλισθήσεως. Ἐπί τοῦ ἀνωτέρω ὄγκου χυτοσιδήρου A ἐπιθέτομεν βάρος 10 χιλιογράμμων. Τότε διαπιστοῦμεν ὅτι ἡ ἕλξις τήν ὁποίαν πρέπει νά ἐφαρμόσωμεν διά νά ἀρχίση νά ὀλισθαίνη τό σῶμα A εἶναι 13 χιλιόγραμμα καί ἡ δύναμις τῆς ἕλξεως κατά τήν κίνησιν ὅταν δηλ. ἀρχίση νά ὀλισθαίνη εἶναι 4,400 χιλιόγραμμα. Ἐάν τό ἐπιτιθέμενον ἐπί τοῦ A βάρος γίνη 3 ἤ 4 φοράς μεγαλήτερον, πάλιν διαπιστοῦμεν ὅτι ἡ ἀναγκαῖα δύναμις ἕλξεως κατά τήν ἀρχήν τῆς ὀλισθήσεως καί κατά τήν ὀλίσθησιν, εἶναι 3 ἤ 4 φοράς μεγαλητέρα.

Δυνάμεθα λοιπόν νά γράψωμεν:

$$\frac{6,500}{10}=\frac{13}{20}=\frac{19,500}{30}=0,65$$

Κατά τήν ὀλίσθησιν:

$$\frac{2,200}{10}=\frac{4,400}{20}=\frac{6,600}{30}=0,22$$

Ἤ καί γενικῶς ἐάν καλέσωμεν F καί F' τάς δυνάμεις ἕλξεως τάς ἀναγκαίας διά τήν ἐκκίνησιν καί κατά τήν κίνησιν, καί δια P τό βάρος τοῦ σώματος, τό ὁποῖον ὀλισθαίνει:

θά ἔχωμεν $\frac{F'}{P}=0,65$ καί $\frac{F}{P}=0,22$

Ἐξ ἄλλου παρατηροῦμεν ὅτι τό βάρος τοῦ σώματος τοῦ ὀλισθαίνοντος εἶναι ἴσον πρός τήν πίεσιν N ἡ ὁποία ἐξασκεῖται ἐπί τῆς ἐπιφανείας τῆς τραπέζης. Συνεπῶς ὁ πρῶτος νόμος τῆς τριβῆς δύναται νά ἐκφρασθῇ ὡς ἑξῆς:

1ος Νόμος. Ὅταν σῶμα τι A ὀλισθαίνει ἐπί σώματος B με κίνησιν ὁμαλήν, ἡ δύναμις τριβῆς εἶναι ἀνάλογος τῆς πιέσεως τὴν ὁποίαν ἐξασκεῖ τὸ Α ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ Β.

89.- Συντελεσταὶ τριβῆς. Συντελεστὴς τριβῆς κατὰ τὴν ἀρχὴν τῆς ὀλισθήσεως καλεῖται ὁ λόγος τῆς δυνάμεως ἥτις χρειάζεται διὰ νὰ ἀρχίσῃ νὰ ὀλισθαίνῃ τὸ σῶμα πρὸς τὴν πίεσιν τοῦ βάρους τοῦ σώματος. Συντελεστὴς δὲ τριβῆς κατὰ τὴν ὀλίσθησιν, καλεῖται ὁ λόγος τῆς δυνάμεως ἥτις χρειάζεται διὰ νὰ ὀλισθαίνῃ τὸ σῶμα, πρὸς τὴν πίεσιν τοῦ βάρους τοῦ σώματος. Ἂν παραστήσωμεν τοὺς συντελεστὰς τριβῆς διὰ f' καὶ f θὰ ἔχωμεν: $\frac{F'}{N}=f'$ συντελεστὴς τριβῆς κατὰ τὴν ἀρχὴν τῆν ὀλισθήσεως καὶ $\frac{F}{N}=f$ συντελεστὴς τριβῆς κατὰ τὴν ὀλίσθησιν.

Οἱ τύποι οὗτοι μᾶς ἐπιτρέπουν νὰ ὑπολογίσωμεν εἰδικῶς τὴν τιμὴν τριβῆς γνωρίζοντες τὴν πίεσιν καὶ τοὺς συντελεστὰς τριβῆς τοὺς σχετικοὺς εἰς τὰ διάφορα σώματα. Οἱ συντελεσταὶ τριβῆς δίδονται εἰς εἰδικοὺς πίνακας.

Παράδειγμα.- Σῶμα βάρους 100 χιλιογράμμων ὀλισθαίνει ἐπὶ δαπέδου ἐκ δρυός. Ποῖαι αἱ τριβαὶ αἵτινες ἀναπτύσσονται;

Εἰς τὴν ἀρχὴν τῆς ὀλισθήσεως: $F'=f'N=0{,}65\times100=65$ χιλιόγραμμα.

Κατὰ τὴν ὀλίσθησιν: $F=fN=0{,}22\times100=22$ χιλιόγραμμα. Τὸ 0,65 καὶ 0,22 εἶναι οἱ συντελεσταὶ τριβῆς.

2ος Νόμος τριβῆς. Ἡ τριβὴ εἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ ἐμβαδοῦ τῶν ἐφαπτομένων ἐπιφανειῶν.

Ἐὰν τὸ σῶμα Α, τὸ ὁποῖον ἐλάβομεν προηγουμένως τὸ κάμωμεν νὰ ὀλισθήσῃ ἀλλάζοντες τὰς ἕδρας τῆς ἐπαφῆς τοῦ σώματος μετὰ τῆς τραπέζης, παρατηροῦμεν ὅτι αἱ δυνάμεις τριβῆς παπτύσσεται δύναμις παράλληλος καί πάντοτε ἀντίθετος (ἀντίστασις) πρός τήν κίνησιν καί ἡ ὁποία εἶναι ἐφηρμοσμένη εἰς τό σημεῖον τῆς συνεπαφῆς. Ἡ δύναμις αὐτή ἥτις ἀνθίσταται εἰς τήν κίνησιν καί ἐπιβραδύνει αὐτήν, καλεῖται δύναμις ἐκ τριβῆς καί μετρᾷ τήν τριβήν ἡ ὁποία εἶναι παθητική ἀντίστασις. Τοιαῦται ἀντιστάσεις ἐκ τριβῆς ἀναπτύσσονται μεταξύ τῶν διαφόρων κινουμένων μερῶν τῶν μηχανῶν καί τάς ὁποίας ἐκαλέσαμεν ἀχρήστους ἀντιστάσεις. Τά αἴτια τῆς τριβῆς εἶναι, αἱ ἀνωμαλίαι τῆς ἐπιφανείας τῶν σωμάτων, αἱ ὁποῖαι ὁσονδήποτε μικραί καί ἄν εἶναι, πάντοτε προβάλλουν ἐμπόδιον εἰς τήν ἐλευθέραν κίνησιν τῶν σωμάτων.

Ἔστω ὄγκος Α. (σχ. 63) ἐκ χυτοσιδήρου μέ κανονικάς ἕδρας ἀνίσους καί τῶν ὁποίων αἱ ἐπιφάνειαι νά εἶναι ὁμαλαί. Τοποθετοῦμεν αὐτόν ἐπί ὁριζοντίας τραπέζης δρυΐνης, βρεγμένης δι' ὕδατος κατά τρόπον ὥστε νά διευκολύνη τήν κίνησιν τοῦ ὄγκου Α. Ἄς ἐξασκήσωμεν ἐπί τοῦ Α ἕλξιν ὁριζοντίαν καί ἄς προσπαθήσωμεν νά τό κάμωμεν νά ὀλισθήσῃ.

Σχ. 63

Ἐάν ὑπῆρχον μόνον αἱ δυνάμεις τοῦ βάρους τοῦ ὄγκου τοῦ χυτοσιδήρου ἀφ' ἑνός καί ἡ ἀντίδρασις τῆς τραπέζης ἥτις εἶναι ἴση καί ἀντίθετος πρός τό βάρος τοῦ σώματος ἀφ' ἑτέρου, τότε αἱ δυνάμεις αὗται θά ἰσορροποῦντο μεταξύ των καί ἡ ἐλαχίστη ἕλξις θά ἤρκῃ διά νά κάμῃ νά ὀλισθήσῃ τό σῶμα. Τό πείραμα ὅμως μᾶς δεικνύει ἀντιθέτως ὅτι, ἐάν ἐπί τοῦ σώματος Α ἐξασκήσωμεν προοδευτικῶς προσπάθειαν ἕλξεως διαρκῶς μεγαλυτέραν, κίνησις τοῦ σώματος δέν παράγεται παρά μόνον τήν στιγμήν κατά τήν ὁποίαν ἡ δύναμις τῆς ἕλξεως τήν ὁποίαν ἐφαρμόζομεν φθάσῃ ὡρισμένην τιμήν. Ἐάν δηλαδή ὁ ὄγκος Α ἔχει βάρος 10 χιλιογράμμων παρατηροῦμεν ὅτι διά νά ἀρχίσῃ νά ὀλισθαίνῃ τό σῶμα χρειάζεται ἑλκτική δύναμις 6.500 χιλιογράμμων. Ἡ τριβή συνεπῶς ἀναχωρήσεως τοῦ σώματος εἶναι 6.500 χιλιόγραμμα. Ὅταν τό σῶμα ἄρχεται νά ὀλισθαίνῃ διά νά διατηρήσωμεν τήν κίνησίν του χωρίς ἡ ταχύτης του νά ἐλαττωθῇ εἶναι ἀνάγκη νά ἐφαρμόζωμεν μίαν σταθεράν καί διαρκῆ ἕλξιν, τήν ὁποίαν δυνάμεθα νά μετρήσωμεν διά δυναμομέτρου. Εἰς τήν περίπτωσιν τοῦ σώματος Α ἡ δύναμις αὕτη εἶναι 2.200 χιλιόγραμμα. Ἐάν ἡ κίνησις ἡ ἐξ ὀλισθήσεως εἶναι ὁμαλή, ἡ δύναμις αὕτη χρησιμοποιεῖται ὁλόκληρος πρός ὑπερνίκησιν τῆς ἀντιστάσεως εἰς τήν ὀλίσθησιν τοῦ σώματος. Τότε λέγομεν ὅτι ἡ τριβή κατά τήν κίνησιν, ἤ ἡ <u>δύναμις τριβῆς</u> κατά τήν κίνησιν εἶναι 2.200 χιλιόγραμμα.

Ἐπομένως παρατηροῦμεν ὅτι πρέπει νά διακρίνωμεν τήν τριβήν εἰς τήν ἀρχήν τῆς κινήσεως καί τήν δύναμιν τριβῆς κατά τήν κίνησιν. Ἐκ πειραμάτων ἐξάγεται ὅτι ἡ τιμή τῆς δυνάμεως τριβῆς εἰς τήν ἀρχήν τῆς κινήσεως, ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ χρόνου κατά τόν ὁποῖον τά σώματα ἔμειναν εἰς ἐπαφήν πρός τῆς κινήσεως. Ὅταν τά δύο εἰς ἐπαφήν σώματα εἶναι ἐκ ξύλου τότε ἡ δύναμις τριβῆς εἰς τήν ἀρχήν τῆς ὀλισθήσεως εἶναι ἡ μεγαλητέρα τιμή ἄν ταῦτα εὑρίσκονται εἰς συνεπαφήν ἐπί χρονικόν διάστημα 3 λεπτῶν. Διά τήν ὀλίσθησιν ξυλίνου σώματος ἐπί μετάλλου ἤ μετάλλων ἐπί ξύλου ἡ μεγαλητέρα τιμή τῆς δυνάμεως τριβῆς κατά τήν ἀρχήν τῆς κινήσεως εἶναι ὅταν τά σώματα μένουν εἰς ἐπαφήν ἐπί μίαν ἡμέραν.

Γενικῶς ὅμως δυνάμεθα νά εἴπωμεν ὅτι ἡ δύἐπαφῆς τῶν στερεῶν σωμάτων καί αἱ ὁποῖαι ὀνομάζονται τριβή, κύλισις, ὀλίσθισις καί κάμψις σχοινίων.

Ἀντίστασις τῶν ῥευστῶν εἰς τήν κίνησιν. Ὅταν ἕν σῶμα κινεῖται ἐντός ῥευστοῦ συναντᾶ ἐκ μέρους τοῦ ῥευστοῦ ἀντίστασιν ἡ ὁποία τείνει συνεχῶς νά ἐλαττώσῃ τήν ταχύτητά του. Ὅταν λ.χ. κινοῦμεν τήν χεῖρα ἡμῶν ἐντός τοῦ ὕδατος ταχέως, αἰσθανόμεθα ὅτι τό ὕδωρ παρεμβάλει ἀντίστασιν εἰς τήν κίνησιν τῆς χειρός μας. Ἐπίσης ὅταν κινοῦμεν εἰς τόν ἀέρα δίσκον μετάλλινον, οὕτως ὥστε ἡ ἐπιφάνειά τοῦ δίσκου νά εἶναι κάθετος πρός τήν διεύθυνσιν τῆς κινήσεως, αἰσθανόμεθα ὅτι ὁ ἀήρ προβάλλει ἀντίστασιν εἰς τήν κίνησιν τοῦ δίσκου. Ἡ ἀντίστασις αὕτη τῶν ρευστῶν προέρχεται ἐκ τοῦ ὅτι τό κινητόν ὠθεῖ καί ἐκδιώκει τά πρό αὐτοῦ στρώματα τοῦ ῥευστοῦ, ἵνα διέλθῃ, καί οὕτω τό κινητόν ὑφίσταται τήν ἀντίδρασιν τοῦ ῥευστοῦ.

Μεταβολαί τῆς ἀντιστάσεως τῶν ῥευστῶν. Ἡ ἀντίστασις τήν ὁποίαν παρουσιάζουσι τά ῥευστά μεταβάλλεται ὡς ἑξῆς:

1ον/ Ἡ ἀντίστασις αὐξάνει ὅταν ἡ ταχύτης τοῦ κινητοῦ αὐξάνει.

Ὅσον δηλ. ἡ ταχύτης τοῦ κινουμένου δίσκου εἰς τόν ἀέρα αὐξάνει τόσον καί ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀέρος αὐξάνει.

2ον/ Ἡ ἀντίστασις αὐξάνει, ὅταν αὐξάνει καί ἡ φαινομένη ἐπιφάνεια τοῦ κινητοῦ.

Φαινομένη δέ ἐπιφάνεια, ἑνός κινητοῦ καλεῖται, ἡ ἐπιφάνεια τῆς ἐγκαρσίας τομῆς τοῦ ὄγκου, τόν ὁποῖον διαγράφει τό κινητόν. Ὅταν λ.χ. τό κινητόν εἶναι σφαῖρα, φαινομένη ἐπιφάνεια εἶναι μέγιστος κύκλος τῆς σφαίρας. Ἐπομένως ἐάν ἀφήσωμεν δίσκον μεταλλικόν νά πέσῃ ἐλευθέρως οὕτως ὥστε ἡ ἐπιφάνεια τοῦ δίσκου νὰ εἶναι κάθετος πρὸς τὴν διεύθυνσιν τῆς πτώσεως καὶ κατόπιν ὁ ἴδιος δίσκος νὰ πέσῃ ἐκ τοῦ αὐτοῦ ὕψους ἀλλὰ ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ νὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν διεύθυνσιν τῆς πτώσεως, παρατηροῦμεν ὅτι ὁ δίσκος κατὰ τὴν πρώτην πτῶσιν πίπτει βραδύτερον, ἐνῷ κατὰ τὴν δευτέραν πτῶσιν πίπτει ταχύτερον καὶ τοῦτο διότι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κινητοῦ κατὰ τὴν δευτέραν πτῶσιν εἶναι μικρά.

Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον εἰς τὰ πλοῖα δίδεται εἰς τὸ ἔμπροσθεν μέρος, εἰς τὴν πρῶραν, μορφὴ ὅσον τὸ δυνατὸν ὀξυτέρα, καὶ τοῦτο διὰ νὰ ἐλαττώνεται ἡ ἀντίστασις τοῦ ὕδατος κατὰ τὴν κίνησιν. Ἐπίσης τὸ σχῆμα τῶν ἀεροπλοίων καὶ ἀεροπλάνων εἶναι ἐπίμηκες, ἵνα ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀέρος εἶναι μικροτέρα εἰς τὴν κίνησιν των.

<u>86.- Ἀντίστασις τοῦ ἀέρος</u>. Διὰ πειραμάτων τὰ ὁποῖα ἔγιναν ἀπεδείχθη ὅτι, ἡ ἀντίστασις τὴν ὁποίαν παρουσιάζει ὁ ἀὴρ κατὰ τὴν κίνησιν τῶν σωμάτων, εἶναι <u>ἀνάλογος πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ταχύτητος τοῦ κινητοῦ καὶ ἀνάλογος τῆς φαινομένης ἐπιφανείας αὐτοῦ</u>. Ὅταν δὲ σῶμα τι πίπτῃ ἐλευθέρως ἐν τῷ ἀέρι, ἡ ἀντίστασις αὐξάνει ταχέως καὶ τέλος γίνεται ἴση πρὸς τὸ βάρος τοῦ σώματος. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ἀντίστασις αὕτη εἶναι καὶ ἀντίθετος κατὰ τὴν διεύθυνσιν τοῦ βάρους, ἐξουδετεροῖ τὸ βάρος καὶ τὸ σῶμα ἀπὸ τῆς στιγμῆς αὐτῆς ἐξακολουθεῖ τὴν πτῶσιν μετὰ ταχύτητος σταθερᾶς, ἡ ὁποία καλεῖται <u>ὁρικὴ ταχύτης</u>.

<u>87.- Ἀντίστασις τῶν στερεῶν σωμάτων.</u>

<u>Τριβὴ ἐξολισθήσεως.</u> Ὅταν σῶμα στερεὸν ὀλισθαίνῃ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας ἑτέρου σώματος στερεοῦ, τὸ ὁποῖον δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν ἀκίνητον, εἰς ἕκαστον σημεῖον τῆς συνεπαφῆς τῶν δύο σωμάτων ἀνα-

ραμένουν πάντοτε αἱ αὐταί. Ἐάν δηλαδή αὐξήσωμεν τό ἐμβαδόν τῆς ἐπαφῆς τοῦ σώματος μετά τῆς τραπέζης, χωρίς νά μεταβάλλωμεν τό βάρος τοῦ σώματος, πάλιν αἱ δυνάμεις τριβῆς εἶναι αἱ αὐταί.

3ος Νόμος. Ἡ τριβή εἶναι ἡ αὐτή καθ' ὅλην τήν διάρκειαν τῆς ὀλισθήσεως, καί εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς ταχύτητος τοῦ σώματος.

Ἐάν εἰς τό ὀλισθαῖνον σῶμα, δόσωμεν ταχύτητας διαφόρους παρατηροῦμεν ὅτι αἱ δυνάμεις τριβῆς εἶναι πάντοτε αἱ αὐταί.

4ος Νόμος. Ἡ δύναμις τριβῆς ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς φύσεως καί ἐκ τῆς καταστάσεως τῶν εἰς ἐπαφήν εὑρισκομένων ἐπιφανειῶν, ὡς καί ἐκ τῆς φύσεως τῶν οὐσιῶν δι' ὧν ἐπαλείφονται αἱ ἐπιφάνειαι.

Ἐλάττωσις τῶν τριβῶν. Ἐπειδή ἡ τριβή ὀφείλεται εἰς μικράς ἀνωμαλίας τάς ὁποίας ἔχουσιν αἱ εἰς συνεπαφήν εὑρισκόμεναι ἐπιφάνειαι, διά τοῦτο ἐλαττώνοντες τάς ἀνωμαλίας ἐλαττοῦμεν καί τάς τριβάς καί αἱ λεῖαι ἐπιφάνειαι παρουσιάζουν μικράν τριβήν. Ἐπίσης πρός ἐλάττωσιν τῶν τριβῶν εἰς τάς μηχανάς ἐπαλείφονται τά ἐν ἐπαφῇ μέρη των διά λίπους ἤ δι' ἐλαίων εἰδικῶν. Ἡ ἐπάλειψις αὕτη ἀφ' ἑνός μέν καθιστᾶ λείας τάς εἰς ἐπαφήν ἐπιφανείας τῶν μηχανῶν καί ἀφ' ἑτέρου διαχωρίζει τάς δύο ἐπιφανείας, καί οὕτω ἐπί χρονικόν διάστημα δέν ὑπάρχει ἄμεσος ἐπαφή τῶν ἐπιφανειῶν, καθότι μεταξύ αὐτῶν παρεμβάλεται τό στρῶμα τοῦ ἐλαίου δι' οὗ ἐπαλείφονται. Τέλος ὑπάρχουν μηχαναί τῶν ὁποίων ἡ λειτουργία βασίζεται σχεδόν ἐξ ὁλοκλήρου εἰς τάς ἰδιότητας τῆς τριβῆς. Τοιαῦται μηχαναί εἶναι οἱ κύλινδροι τριβῆς, αἱ μεταφοραί δι' ἱμάντων.

90.— Ὑπολογισμός τοῦ ἐκ τριβῆς ἀνθισταμένου ἔργου. Ἄς προσπαθήσωμεν νά ὀλισθήσῃ τό σῶμα Α (σχ. 63) ἐπί τῆς ὁριζοντίας ἐπιφανείας Β καί ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ δύναμις ἕλξεως F, διευθύνεται παραλλήλως πρός τήν ἐπιφάνειαν, κατά τήν διεύθυνσιν τοῦ βέλους. Ἔστω Ν ἡ πίεσις τοῦ σώματος ἐπί τῆς ἐπιφανείας καί f ὁ συντελεστής τριβῆς μεταξύ τῶν δύο σωμάτων Α καί Β. Ἡ ἐκ τῆς τριβῆς ἀντίστασις ἔχει διεύθυνσιν ἀντίθετον τῆς κινήσεως τοῦ σώματος, καί ἰσοῦται πρός τό γινόμενον fN. Ἔστω ε τό ὑπό τοῦ Α διανυθέν διάστημα κατά τήν διεύθυνσιν τῆς ἕλξεως F. Τό ἐκ τῆς τριβῆς ἀνθιστάμενον ἔργον ἰσοῦται πρός τό γινόμενον $f.N.\varepsilon$. εἶναι δηλαδή:

Ἀνθιστάμενον ἔργον τριβῆς $T_f = f.N.\varepsilon$.

<u>Ἐφαρμογή</u>. Ἡ διαδρομή τοῦ ἐμβόλου ἀτμομηχανῆς εἶναι 0,50 μέτρα. Ὁ στρόφαλος ἐκτελεῖ 40 στροφάς κατά λεπτόν. Ἡ πίεσις τοῦ ἐμβόλου ἐπί τοῦ κυλίνδρου εἶναι 50 χιλιόγραμμα. Πόσον εἶναι, τό ἐκ τῆς τριβῆς τοῦ ἐμβόλου ἐπί τοῦ κυλίνδρου ἀνθιστάμενον ἔργον εἰς μίαν ὥραν;

Ἡ ἀντίστασις ἐκ τριβῆς εἶναι $f.N = 0{,}05 \times 50$

Ἡ εἰς μίαν στροφήν μετάθεσις τοῦ στροφάλου εἶναι ἴση πρός $0{,}50 \times 2$.

Ἡ κατά λεπτόν μετάθεσις τοῦ ἐμβόλου εἶναι ἴση πρός $0{,}50 \times 2 \times 40$.

Ἡ κατά ὥραν μετάθεσις τοῦ ἐμβόλου εἶναι ἴση μέ $0{,}50 \times 2 \times 40 \times 60$.

Ἐπειδή τό ἔργον ἰσοῦται μέ τό γινόμενον τῆς μεταθέσεως ἐπί τήν ἀντίστασιν θά ἔχωμεν:

$$T_f = 0{,}05 \times 50 \times 0{,}50 \times 2 \times 40 \times 60 = 6000 \text{ χιλιογραμμόμ.}$$

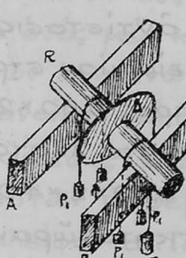
<u>91.- Ἀνθιστάμενον ἔργον τριβέων.</u> Ἔστω ἔνσφαιρος τριβεύς (σχ. 64), καί ἔστω P ἡ πίεσις τήν ὁποίαν ἐξασκεῖ κατά τήν ἐπαφήν, ἔστω f ὁ συντελεστής τριβῆς, τότε ἡ ἀντίστασις ἡ ἐκ τριβῆς εἶναι $f.P$.

Ἐπίσης ἄν καλέσωμεν R τήν ἀκτῖνα τοῦ τριβέως καί ν τόν ἀριθμόν τῶν στροφῶν αὐτοῦ κατά λεπτόν. Τό εἰς ἕν δευτερόλεπτον διανυόμενον διάστημα θά εἶναι $\frac{2\pi R\nu}{60}$. Τό διά τῆς τριβῆς ἀπορροφούμενον ἔργον δίδεται τότε ὑπό τοῦ τύπου: $T = fP \cdot \frac{2\pi R\nu}{60}$ καί ἐκφράζεται εἰς χιλιογραμμόμετρα.

Σχ. 64

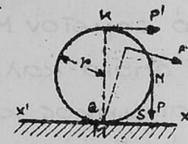
Ἐκ τοῦ τύπου βλέπομεν ὅτι τό ἔργον τοῦτο αὐξάνει, αὐξανομένης τῆς ἀκτῖνος τοῦ τριβέως. Ἐκ τούτου ὅμως δέν ἕπεται ὅτι πρέπει νά δίδωμεν εἰς τόν τριβέα ἀκτῖνα πάρα πολύ μικράν, διότι τότε ἡ δι' ἐλαίου ἐπάλειψις δέν θά παρέμενε καί τότε ὁ συντελεστής τριβῆς ηὔξανε καί αἱ στροφαί δέν θά ἐκτελοῦντο κανονικῶς.

<u>92.- Τριβή ἐκ κυλίσεως.</u> Ὅταν κύλινδρος στηρίζεται ἐπί ἐπιπέδου καί ὁριζοντίας ἐπιφανείας, ἐξασκεῖ ἐπί ταύτης πίεσιν. Ὑπό τήν ἐνέργειαν τῆς πιέσεως ταύτης καί τῆς ἀναπτυσσομένης ἀντιδράσεως, ὁ κύλινδρος πλατύνεται ἐλαφρῶς, καί ἡ ἐπιφάνεια κοιλένεται τόσον ὥστε διά νά κυλίσῃ ὁ κύλινδρος εἶναι ἀνάγκη ἡ ἐπιφάνεια νά ἔχῃ εἰς κάθε στιγμήν μικράν κλίσιν. Ἡ ἀναπτυσσομένη οὕτω ἀντίστασις κατά τήν κύλισιν ὀνομάζεται ἀντίστασις κυλίσεως ἤ <u>τριβή κυλίσεως</u>.



Σχ. 65

Ἔστω κύλινδρος R, ἀκτῖνος ρ, στηριζόμενος ἐπί δύο ὁριζοντίων δοκῶν A καί B. (σχ. 65 καί 66), καί ἔστω δίσκος κυκλικός Δ, προσηρμοσμένος εἰς τό μέσον τοῦ κυλίνδρου, ὅστις φέρει εἰς τήν περιφέρειαν σχοινίον ἐκ τοῦ ὁποίου κρέμαται βάρος P, τό ὁποῖον προκαλεῖ τήν κίνησιν. Διά νά αὐξήσωμεν τήν πίεσιν τοῦ κυλίνδρου ἐπί τῶν δοκῶν A καί B ἐπιφορτίζομεν αὐτόν διά βαρῶν P_1 κρεμασμένων διά σχοινίων. Τό βάρος P τό ὁποῖον εἶναι ἀρκετόν διά νά μεταδώσῃ κίνησιν βραδεῖαν καί ὁμαλήν εἰς τόν κύλινδρον, μᾶς χρησιμεύει ἀκόμη διά νά μετρήσωμεν τήν τριβήν ἐκ κυλίσεως.



Σχ. 66.

Ἐκ τοῦ πειράματος τούτου ἐξάγεται ὅτι, τό μέγεθος τῆς τριβῆς κυλίσεως εἶναι ἀνάλογον πρός τό βάρος τοῦ κυλιομένου σώματος, καί ἀντιστρόφως ἀνάλογον πρός τήν ακτῖνα τοῦ κυλίνδρου.

Ἐάν καλέσωμεν F τήν δύναμιν, τήν ἐφηρμοσμένην εἰς τό ἄκρον τοῦ βραχίονος μοχλοῦ μήκους λ, ἥτις εἶναι ἱκανή νά ὑπερνικήσῃ τήν ἐκ τῆς τριβῆς κυλίσεως ἀντίστασιν, καί Q τήν πίεσιν ἐπί τῆς τοῦ ὑποστηρίγματος (σχ. 66) καί A ἕναν σταθερόν ἀριθμόν ὅστις ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς φύσεως καί τῆς καταστάσεως τῶν εἰς ἐπαφήν σωμάτων, ἔχομεν:

$$F = A\frac{Q}{\lambda}$$

<u>Παρατήρησις</u>. Ὁ βραχίων τοῦ μοχλοῦ λ, ὑπολογίζεται σχετικῶς πρός τήν γενέτειραν M, ἐπί τῆς ὁποίας στηρίζεται ὁ κύλινδρος. Διά βάρος P τό ὁποῖον ἐφαρμόζεται εἰς N, ὁ βραχίων τοῦ μοχλοῦ εἶναι $MS = r$. ἔχομεν συνεπῶς: $P = A\frac{Q}{r}$. Διά βάρος P′ ἐφαρμοζόμενον εἰς K, ὁ βραχίων τοῦ μοχλοῦ εἶναι $MK = 2r$, καί κατά συνέπειαν: $P' = A\cdot\frac{Q}{2r}$.

Ἑπομένως βλέπομεν ὅτι $P = 2P'$

93.- Συντελεστής τριβῆς ἐκ κυλίσεως. Ὁ τύπος $F=A\frac{Q}{\lambda}$ δύναται νὰ λάβῃ τὴν μορφήν: $F\lambda=AQ$. Τὸ πρῶτον μέρος αὐτῆς τῆς ἰσότητος εἶναι ἡ ῥοπὴ τῆς δυνάμεως F ὡς πρὸς τὴν γενέτειραν τῆς ἐπαφῆς Μ. Ἀφοῦ δὲ Q εἶναι ἡ πίεσις εἰς Μ, τὸ δεύτερον μέρος AQ τῆς ἰσότητος παριστᾷ τὴν ῥοπὴν τῆς πιέσεως ὡς πρὸς τὸ σημεῖον Μ. Λαμβάνομεν λοιπὸν τὸν τύπον $F\lambda=AQ$, γράφοντες τὴν ἰσότητα τῶν ῥοπῶν τῶν δυνάμεων F καὶ Q ὡς πρὸς τὸ σημεῖον Μ. Ἐκ τούτου συνάγομεν ὅτι ἡ ποσότης A ἡ ὁποία καλεῖται συντελεστὴς τριβῆς κυλίσεως εἶναι μῆκος καὶ ἐκφράζεται μὲ τὴν αὐτὴν μονάδα μὲ τὴν ὁποίαν ἐκφράζεται καὶ ὁ βραχίων τοῦ μοχλοῦ λ.

Ἐφαρμογή. Ὄχημα σιδηροδρομικὸν πλῆρες φορτίου ἔχει βάρος 10 τόννων. Οἱ τροχοί του ἔχουσι διάμετρον 1 μέτρου. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀντίστασις ἐκ τριβῆς. (Ὁ συντελεστὴς τριβῆς κυλίσεως A=0,51).-

Ἐφαρμόζοντες τὸν τύπον $F=\frac{AQ}{R}$ ἔχομεν

$$F \text{ εἰς χιλιόγραμμα} = \frac{A \text{ εἰς χιλιοστὰ} \times Q \text{ εἰς χιλιόγραμμα}}{R \text{ εἰς χιλιοστά}}$$

$$F=\frac{0.51\times 10000}{500}=10{,}200 \text{ χιλιόγραμμα}$$

Ἡ τριβὴ κυλίσεως εἶναι πολὺ μικρὰ σχετικῶς μὲ τὴν τριβὴν ἐξ ὀλισθήσεως, καὶ ἑπομένως συμφέρει νὰ ἀντικαταστήσωμεν ἂν δυνάμεθα τὴν ὀλίσθησιν διὰ τῆς κυλίσεως. Ἡ ἐκ κυλίσεως ἀντίστασις ἐλαττοῦται κατὰ πολὺ ὅταν χρησιμοποιοῦμεν γραμμὰς σιδηρᾶς λείας, κατὰ τὴν κίνησιν τῶν σιδηροδρόμων.

94.- Διατήρησις τοῦ ἔργου. Κατὰ τὴν λειτουργίαν τῶν μηχανῶν ἑκάστη τῶν ἐπ' αὐτῶν ἐφηρμοσμένων δυνάμεων (κυρίως δυνάμεις καὶ ἀντιστάσεις) ἐκτελεῖ ἔργον τι κινητήριον ἢ ἀνθιστάμενον. Ἐπειδὴ δὲ ἡ κίνησις τῆς μηχανῆς εἶναι ὁμαλή, ἡ ταχύτης πα-

ραμένει σταθερά καί ἡ μεταβολή τῆς ῥύμης εἶναι μηδέν.
Ἐάν λοιπόν E εἶναι τό ἔργον τό κινητήριον καί A τό ἔργον τό ἀνθιστάμενον, θά ἔχωμεν ὡς ὁλικόν ἔργον:

$$E - A = 0 \quad \text{καί} \quad E = A$$

Ἐπομένως παρατηροῦμεν ὅτι ὅταν ἡ μηχανή ἔχει ὁμαλήν κίνησιν ὁ κινητήριον ἔργον εἶναι ἴσον πρός τό ἀνθιστάμενον.

Αἱ μηχαναί συνεπῶς οὔτε δημιουργοῦσιν, οὔτε καταστρέφουσι τό ἔργον, ἀλλά ἁπλῶς μετατρέπουσι αὐτό εἰς ἄλλο.

95.- Ἀπόδοσις μηχανῶν. Ὡς ἴδωμεν τάς ἀντιστάσεις τάς ὁποίας κατανικῶμεν διά τῶν μηχανῶν, τάς διακρίνομεν εἰς χρησίμους καί εἰς ἀχρήστους ἤ παθητικάς. Ἡ κατανίκησις τῶν παθητικῶν ἀντιστάσεων καταναλίσκει μέρος σημαντικόν τοῦ κινητηρίου ἔργου. Ἐάν καλέσωμεν A_1 τό κινητήριον ἔργον τῶν χρησίμων ἀντιστάσεων, καί διά A_2, τό ἔργον τῶν παθητικῶν ἀντιστάσεων τότε ἔχομεν τό ὁλικόν ἔργον $E = A_1 + A_2$.

Ὁ λόγος τοῦ χρησίμου ἔργου A_1 πρός τό κινητήριον ἔργον E, καλεῖται ἀπόδοσις τῆς μηχανῆς. Ἤτοι ἡ ἀπόδοσις R μηχανῆς εἶναι:

$$R = \frac{A_1}{E}$$

Τό ἄχρηστον ἀνθιστάμενον ἔργον (τριβῶν κ.λ.π.) A_2, προσπαθοῦμεν, ὅπως καταστῆ ὅσον τό δυνατόν μικρότερον. Ἡ τελεία ἐκμηδένησις τοῦ ἔργου τούτου εἶναι ἀδύνατος, καί ἡ ἀπόδοσις R εἶναι πάντοτε μικροτέρα τῆς μονάδος.

Ὡς καλαί μηχαναί θεωροῦνται ἐκεῖναι εἰς τάς ὁποίας ἡ ἀπόδοσις φθάνει τά 70% ἤ τά 80%

Τό ἀεικίνητον συνίσταται εἰς τήν πραγματοποίησιν μηχανῆς, είς τήν όποίαν ἡ ἀπόδοσις νά εἶναι ἀνωτέρα ἤ τουλάχιστον ἴση πρός τήν μονάδα.

Τοιαύτη μηχανή, ἐάν ἐτίθετο είς κίνησιν θά ἐξηκολούθη κινουμένη ἐπ'ἄπειρον.

Πρός τοῦτο ὅμως πρέπει αἱ παθητικαί ἀντιστάσεις νά ἐξαλειφθῶσι τελείως, πρᾶγμα τό ὁποῖον εἶναι τελείως ἀδύνατον καί διά τοῦτο ἡ πραγματοποίησις τοιαύτης μηχανῆς εἶναι ἀδύνατος.

ΠΙΝΑΞ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι

ΠΕΡΙ ΚΙΝΗΣΕΩΣ

1. Ἡ ἔννοια τῆς κινήσεως. Σελ. 3.
2. Τροχιά, διάστημα. » 4.
3. Ὑλικὸν σημεῖον, Φυσικά ἢ ὑλικά σώματα. » 4.
4. Ἀδράνεια. » 5.
5. Δρᾶσις καί ἀντίδρασις. Ἀξίωμα τῆς ἰσότητος δράσεως καί ἀντιδράσεως. Διαφορά μεταξύ τῆς ἰδιότητος τῆς ἀδρανείας καί τῆς δυνάμεως τῆς ἀδρανείας. » 7.
6. Ἀντικείμενον τῆς Μηχανικῆς καί διαίρεσις αὐτῆς. » 8.
7. Ὁμαλή κίνησις. Ταχύτης κινητοῦ. » 9.
8. Νόμοι τῆς ὁμαλῆς κινήσεως. » 12.
9. Γραφική παράστασις τῆς ὁμαλῆς κινήσεως. » 13.
10. Κίνησις μεταβαλλομένη ἢ ἀνισοταχής. Μέση ταχύτης. » 14.
11. Γραφική παράστασις κινήσεως τῶν σιδηροδρόμων. » 15.
12. Ὁμαλή κυκλική κίνησις » 16.
13. Γωνιώδης ταχύτης » 17.
14. Ἄλλη ἔκφρασις τῆς γωνιώδους ταχύτητος » 18.
15. Ὑπολογισμός τῆς γωνιώδους ταχύτητος ἑνός στρεφομένου σώματος ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν στροφῶν αὐτοῦ κατά λεπτόν. » 20.
16. Κίνησις ὁμαλῶς μεταβαλλομένη » 21

Σελ.

17. Γραφική παράστασις τῆς ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένης κινήσεως. Σελ. 23.
18. Κίνησις ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένη μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα. » 25.
19. Ἐφαρμογὴ τῶν τύπων εἰς τὴν βαρύτητα » 26.
20. Γραφικὴ παράστασις τῆς ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένης κινήσεως καθ' ἣν τὸ κινητὸν ἔχει ἀρχικὴν ταχύτητα. » 26.
21. Κίνησις ὁμαλῶς ἐπιβραδυνομένη. » 27.
22. Γραφικὴ παράστασις τῆς ὁμαλῶς μεταβαλλομένης κινήσεως. » 28.
23. Προβλήματα πρὸς λύσιν. » 28.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙ

ΠΕΡΙ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

24. Φύσις δυνάμεων. » 30.
25. Ἰσορροπία δυνάμεων. » 31.
26. Μέτρησις τῶν δυνάμεων. » 32.
27. Σύνθεσις καὶ ἀνάλυσις δυνάμεων. » 33.
28. Περὶ ῥοπῶν. » 36.
29. Σύνθεσις δυνάμεων παραλλήλων καὶ τῆς αὐτῆς φορᾶς. » 37.
30. Γεωμετρικὴ εὕρεσις τῆς συνισταμένης δύο παραλλήλων δυνάμεων καὶ τῆς αὐτῆς διευθύνσεως ἐφηρμοσμένων ἐπὶ εὐθείας. » 39.
31. Γεωμετρικὴ εὕρεσις τῶν συνιστωσῶν δοθείσης τῆς συνισταμένης. » 40.
32. Σύνθεσις δύο δυνάμεων ἀνίσων παραλλή-

λων καὶ ἀντιθέτου φορᾶς σελ. 41.
33. Ζεῦγος δυνάμεων. » 42.
34. Ἀνάλυσις δυνάμεων. » 43.
35. Πρακτικὴ εὕρεσις τῆς συνισταμένης δύο δυνάμεων παραλλήλων καὶ ὁμορρόπων » 43.
36. Περίπτωσις πολλῶν δυνάμεων παραλλήλων καὶ ὁμορρόπων » 45.
37. Ἀνάλυσις δυνάμεως εἰς δύο ἄλλας παραλλήλους καὶ τῆς αὐτῆς διευθύνσεως » 46.
38. Ἀνάλυσις μιᾶς δυνάμεως εἰς πολλὰς ἄλλας δυνάμεις καὶ τῆς αὐτῆς διευθύνσεως » 48.
39. Πρακτικὴ εὕρεσις τῆς συνισταμένης δύο δυνάμεων παραλλήλων καὶ ὁμορρόπων. » 49.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III

ΠΕΡΙ ΚΕΝΤΡΟΥ ΒΑΡΟΥΣ

40. Ἰσορροπία τῶν στερεῶν σωμάτων. » 50.
41. Ἰσορροπία τῶν στερεῶν σωμάτων ἐπὶ ὁριζοντίου ἐπιπέδου. » 52.
42. Ἰσορροπία στερεοῦ σώματος ἐξηρτημένου περὶ σταθερὸν καὶ ὁριζόντιον ἄξονα. » 53.
43. Ἐμπειρικὸς προσδιορισμὸς τοῦ κέντρου βάρους οἱουδήποτε στερεοῦ σώματος. » 54.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV

ΠΕΡΙ ΕΡΓΟΥ ΚΑΙ ΙΣΧΥΟΣ

44. Ἔργον δυνάμεως. » 55.
45. Μονὰς ἔργου καὶ μονὰς ἰσχύος. » 56.

46. Ἁπλαῖ μηχαναί. Μηχαναί. σελ. 58.
47. Μοχλός. Συνθήκη ἰσορροπίας μοχλοῦ. „ 58.
48. Τροχαλίαι. Παγία τροχαλία καί ἐλεύθερα „ 62.
49. Πολύσπαστον. „ 64.
50. Διαφορικόν πολύσπαστον. „ 65.
51. Βαροῦλκον. „ 66.
52. Διαφορικόν Βαροῦλκον. „ 67.
53. Σύνθετον Βαροῦλκον. „ 68.
54. Κοχλίας. Χάραξις ἕλικος κοχλίου. „ 69.
55. Ἀτέρμων Κοχλίας. „ 71.
56. Διαφορικός κοχλίας τοῦ Prony „ 72.
57. Κεκλιμένον ἐπίπεδον „ 72.
58. Σφήν. Συνθήκη ἰσορροπίας τοῦ σφηνός „ 74.
59. Προβλήματα πρός λύσιν. „ 76.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V

ΜΕΤΑΔΟΣΙΣ ΤΩΝ ΚΙΝΗΣΕΩΝ

60. Κύλινδροι τριβῆς καί ἱμάντες. „ 77.
61. Κίνησις δι' ἱμάντων. „ 81.
62. Ὀδοντωτοί τροχοί „ 82.
63. Χάραξις ὀδοντωτοῦ τροχοῦ „ 84.
64. Ὑπολογισμός ἀριθμοῦ ὀδόντων δύο ὀδοντωτῶν τροχῶν. „ 86.
65. Σύστημα ὀδοντωτῶν τροχῶν. „ 87.
66. Μετατροπή τῆς εὐθυγράμμου κινήσεως εἰς κυκλικήν. Διωστήρ. „ 89.
67. Μετατροπή τῆς κυκλικῆς κινήσεως εἰς εὐθύγραμμον. Διωστήρ καί στρόφαλον. „ 91.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VI

68. Μᾶζα καὶ ἐνέργεια. Σελ. 94.
69. Διαφορὰ μεταξὺ βάρους σώματος καὶ μάζης. » 95.
70. Ποσότης κινήσεως. » 97.
71. Περὶ κρούσεως. » 98.
72. Ἡ ἐνέργεια. Μηχανικὴ καὶ δυναμικὴ ἐνέργεια. Τιμὴ τῆς κινητικῆς ἐνεργείας. » 99.
73. Ἐνέργεια περιστρεφένων σωμάτων. » 103.
74. Ὑπολογισμὸς τῆς ῥοπῆς ἀδρανείας. Ἐφαρμογαί. » 105.
75. Προβλήματα πρὸς λύσιν. » 108.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VII

76. Περὶ φυγοκέντρου δυνάμεως. » 109.
77. Ὑπολογισμὸς τῆς φυγοκέντρου δυνάμεως. Νόμοι τῆς φυγοκέντρου δυνάμεως. » 110.
78. Ἔκφρασις τῆς φυγοκέντρου δυνάμεως συναρτήσει τῆς γωνιώδους ταχύτητος. » 112.
79. Ἀποτελέσματα φυγοκέντρου δυνάμεως. » 113.
80. Ρυθμιστὴς διὰ φυγοκέντρου δυνάμεως. » 114.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VIII

81. Περὶ ἐκκρεμοῦς. » 115.
82. Νόμοι τοῦ ἁπλοῦ ἐκκρεμοῦς. » 119.
83. Τύπος τοῦ ἁπλοῦ ἐκκρεμοῦς. Ἐφαρμογαί. » 120.

84. Τύπος τοῦ συνθέτου ἐκκρεμοῦς. Σελ. 120.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IX

85. Παθητικαὶ ἀντιστάσεις. Ἀντίστασις τῶν ῥευστῶν εἰς τὴν κίνησιν. Μεταβολαὶ τῆς ἀντιστάσεως τῶν ῥευστῶν. » 121.
86. Ἀντίστασις τοῦ ἀέρος. » 123.
87. Ἀντίστασις τῶν στερεῶν σωμάτων. Τριβὴ ἐξ ὀλισθήσεως. » 123.
88. Νόμοι τῆς τριβῆς ἐξ ὀλισθήσεως. » 126.
89. Συντελεσταὶ τριβῆς Παραδείγματα. 2ος Νόμος τριβῆς, 3ος Νόμος, 4ος Νόμος, Ἐλάττωσις τῶν τριβῶν. » 127
90. Ὑπολογισμὸς τοῦ ἐκ τριβῆς ἀνθισταμένου ἔργου. » 129.
91. Ἀνθιστάμενον ἔργον τριβέων. » 130.
92. Τριβὴ ἐκ κυλίσεως. » 130.
93. Συντελεστὴς τριβῆς ἐκ κυλίσεως. Ἐφαρμογή » 132.
94. Διατήρησις τοῦ ἔργου » 132.
95. Ἀπόδοσις μηχανῶν. Ἀεικίνητον. » 133.
Πίναξ περιεχομένων. » 135.

84. Τύπος τοῦ συνθέτου [illegible] Σελ. 120.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IX

85. Παθητικαὶ ἀντιστάσεις. Ἀντίστασις τῶν ρευστῶν εἰς τὴν κίνησιν. Μεταβολαὶ τῆς ἀντιστάσεως τῶν ρευστῶν. » 121.
86. Ἀντίστασις τοῦ ἀέρος. » 123.
87. Ἀντίστασις τῶν [illegible] σωμάτων. Τριβὴ ἐξ ὀλισθήσεως. » 123.
88. Νόμοι τῆς τριβῆς ἐξ ὀλισθήσεως. » 126.
89. Συντελεσταὶ τριβῆς [illegible] παραδείγματα. 2ος Νόμος τριβῆς, 3ος [illegible] νόμος, Ἐλάττωσις τῶν τριβῶν. » 127
[illegible] Ὑπολογισμὸς [illegible] τριβῆς ἀνθισταμένου ἔργου. » 129.
[illegible] Ἀνθιστάμενον [illegible] τριβέων. » 130.
[illegible] Τριβὴ ἐκ κυλίσεως. » 130.
[illegible] Συντελεστὴς τριβῆς ἐκ κυλίσεως [illegible] » 132.
[illegible] » 132.
[illegible] Ἀκίνητον. » 133.
[illegible] » 135.