ΓΕΩΡΓΙΟΥ ΘΕΜ. ΦΛΩΡΟΥ
ΠΟΛΙΤΙΚΟΥ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΜΕΤΑ ΤΩΝ ΛΥΣΕΩΝ ΤΩΝ, ΤΗΣ ΣΧΕΤΙΚΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΚΑΙ ΤΩΝ ΣΧΕΤΙΚΩΝ ΤΥΠΩΝ, ΜΟΝΑΔΩΝ ΜΕΤΡΗΣΕΩΣ, ΣΧΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΔΙΑΣΑΦΗΣΕΩΝ, ΚΑΤΑ ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ.

ΕΚ ΤΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΣΤΕΡΕΩΝ, ΥΓΡΩΝ, ΚΑΙ ΑΕΡΙΩΝ, ΕΚ ΤΗΣ ΑΚΟΥΣΤΙΚΗΣ, ΘΕΡΜΟΤΗΤΟΣ, ΟΠΤΙΚΗΣ, ΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΗΛΕΚΤΡΙΣΜΟΥ.

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ

Τῶν μαθητῶν τῶν ἀνωτέρων τάξεων τῶν Γυμνασίων καὶ ἀπαραίτητον βοήθημα τῶν προπαρασκευαζομένων διὰ Στρατιωτικὰς καὶ ἄλλας Σχολάς.

(Αἱ λύσεις τῶν ἀσκήσεων εἰς τὸ τέλος τοῦ παρόντος).

ΕΚΔΟΣΙΣ ΠΡΩΤΗ
Τυπογραφεῖον ΑΝΔΡ. Κ. ΔΑΜΑΝΑΚΗ Τσαμαδοῦ 27 — Πειραιεύς
ΕΤΟΣ 1948

Πᾶν γνήσιον ἀντίτυπον φέρει τὴν ὑπογραφὴν τοῦ συγγραφέως, ἄλλως θεωρεῖται ἐκ κλεπτοτυπίας προερχόμενον.

Ἀντίτυπα τοῦ παρόντος πωλοῦνται εἰς τὰ βιβλιοπωλεῖα καὶ παρὰ τῷ συγγραφεῖ, ὁδὸς Παιωνίου 35 Ἀθῆναι καὶ Τερψιχόρης 41 Παλ. Φάληρον.

ΤΗΛ. 8[illegible]

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ

Θεωρία, τύποι, μονάδες μετρήσεως, διασαφήσεις, σχήματα, ἐκφωνήσεις ἀσκήσεων Φυσικῆς. (Κατὰ Κεφάλαιον).

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΕΚ ΤΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

Ἡ ἐπιστήμη, ἡ ὁποία ἐξετάζει τὰς κινήσεις τῶν σωμάτων καὶ τὰ αἴτια τὰ προκαλοῦντα τὰς κινήσεις αὐτὰς λέγεται Μηχανική.

Ἡ Μηχανικὴ ὑποδιαιρεῖται εἰς τὴν Κινητικήν, Στατικὴν καὶ Δυναμικήν.

Ὅταν ἡ Μηχανική ἐξετάζει τὰ στερεὰ ἔχομεν τὴν Μηχανικὴν τῶν στερεῶν, ὅταν αὕτη ἐξετάζει τὰ ὑγρά ἔχομεν τὴν Μηχανικὴν τῶν ὑγρῶν καὶ ὅταν τὰ ἀέρια τὴν Μηχανικὴν τῶν ἀερίων.

Α.΄ ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΩΝ ΣΤΕΡΕΩΝ

α΄. ΚΙΝΗΤΙΚΗ

Ἡ κινητική ἐξετάζει τὴν κίνησιν τῶν σωμάτων, χωρὶς οὐδόλως νὰ ἐνδιαφέρεται διὰ τὸ βάρος τούτων, οὔτε διὰ τὰ αἴτια (διὰ τὰς δυνάμεις) τὰ ὁποῖα προκαλοῦν τὴν κίνησιν των.

I Κίνησις συνεχὴς εὐθύγραμμος ἰσοταχὴς (ὁμαλή)

Εἰς τὴν κίνησιν ταύτην τὰ διανυόμενα ὑπὸ τοῦ κινητοῦ διαστήματα εἶναι ἀνάλογα τῶν χρόνων ἐντὸς τῶν ὁποίων διηνύθησαν ὑπὸ τούτου, δεδομένου ὅτι ἡ ταχύτης του εἶναι σταθερά καθ' ὅλην τὴν διάρκειαν τῆς κινήσεως. Ἤτοι εἰς διπλάσιον τριπλάσιον κλπ. χρόνον τὸ διανυόμενον ὑπὸ τοῦ κινητοῦ διάστημα εἶναι διπλάσιον, τριπλάσιον κλπ.

Τὰ ὑπὸ δύο ἢ περισσοτέρων κινητῶν, ἐντὸς τοῦ αὐτοῦ χρόνου, διανυόμενα διαστήματα εἶναι ἀνάλογα τῶν ταχυτήτων των. Τουτέστιν, ἐὰν ἡ ταχύτης κινητοῦ εἶναι π χ. διπλασία τῆς ταχύτητος ἑτέρου κινητοῦ, ἀμφότερα δὲ πρόκειται νὰ κινηθῶσι τὸν ἴδιον χρόνον, τότε καὶ τὸ διανυθησόμενον ὑπὸ τοῦ πρώτου κινητοῦ διάστημα θὰ εἶναι διπλάσιον τοῦ διανυθησομένου διαστήματος ὑπὸ τοῦ ἑτέρου.

Αἱ δὲ ταχύτητες τῶν κινητῶν, διανυόντων τὸ αὐτὸ διάστημα, εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν χρόνων ἐντὸς τῶν ὁποίων διηνύθη τὸ διάστημα τοῦτο ὑπ' αὐτῶν. Δηλαδὴ ἐὰν π χ. ὑπὸ δύο κινητῶν πρόκειται νὰ διανυθῇ τὸ αὐτὸ διάστημα, ἡ δὲ ταχύτης τοῦ ἑνὸς εἶναι ἔστω τριπλασία τῆς ταχύτητος τοῦ ἑτέρου, τότε τὸ ὑπὸ τοῦ πρώτου κινητοῦ διάστημα θὰ διανυθῇ εἰς τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ χρόνου τοῦ ἀπαιτουμένου διὰ τὸ ἕτερον τοιοῦτον.

Τύπος διαστημάτων $S_t = Vt$ ἐξ οὗ $V = \frac{S_t}{t}$ καὶ $t = \frac{S_t}{V}$.

Ὅπου S_t τὸ διανυόμενον διάστημα ὑπὸ τοῦ κινητοῦ εἰς χρόνον t, V ἡ σταθερὰ ταχύτης τοῦ κινητοῦ καὶ t ὁ χρόνος κινήσεως. Τὰ S_t καὶ V ἐκφράζονται μὲ τὰς αὐτὰς μονάδας μήκους (χιλιόμετρα, μέτρα κλπ.) καὶ ὁ χρόνος t ἀναλόγως, εἰς ὥρας, πρῶτα ἢ δεύτερα λεπτά.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Κινητόν τι κινεῖται εὐθυγράμμως καὶ ἰσοταχῶς μὲ ταχύτητα 5,6 μ. κατὰ δευτερόλεπτον. Πόσον εἶναι τὸ διανυθησόμενον διάστημα εἰς 1 ὥραν καὶ 10 δευτερόλεπτα ;

2) Ἡ ταχύτης τοῦ φωτὸς εἶναι 300 ἑκατομμύρια μ. ἀνὰ δευτερόλεπτον. Ἡ ἀπόστασις τοῦ Ἡλίου ἀπὸ τῆς Γῆς 149.400.000 χιλιόμετρα. Ποῖος ὁ χρόνος, ἵνα τὸ φῶς διανύσῃ τὴν ἀπόστασιν ταύτην ;

3) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ταχύτης ὑλικοῦ σημείου, κινουμένου ὁμαλῶς καὶ ὅπερ εἰς 17′ διήνυσε διάστημα 214,20 μέτρων

4) Κινητὸν διατρέχει εὐθεῖαν γραμμὴν ὁμαλῶς μὲ ταχύτητα 5 μέτρων κατὰ πρῶτον λεπτόν. Πόσον τὸ διανυθὲν διάστημα εἰς $1\frac{1}{2}$ ὥραν ;

5) Κινητὸν διατρέχει εὐθεῖαν ὁδὸν ὁμαλῶς μὲ ταχύτητα 60 ἑκατοστῶν ἀνὰ δευτερόλεπτον. Πόσον τὸ διανυθὲν ὑπ᾽ αὐτοῦ διάστημα εἰς 200′;

6) Ποία ἡ ταχύτης ὑλικοῦ σημείου τὸ ὁποῖον εἰς 20″ διήνυσε διάστημα 245 ἑκατοστῶν κινούμενον ἰσοταχῶς ;

7) Κινητὸν διατρέχει 100 μέτρα κατὰ δευτερόλεπτον. Πόσον χρόνον θὰ κάμῃ νὰ διατρέξῃ διάστημα 200 χιλιομέτρων ;

8) Ἀτμάκατος πλέει μὲ ταχύτητα $\mathbf{V}=1,8$ μ. ἀνὰ δευτερόλεπτον ἀπὸ τῆς μιᾶς ὄχθης πρὸς τὴν ἀπέναντι ὄχθην ποταμοῦ, διευθυνομένη καθέτως ἐπὶ τὴν διεύθυνσιν τοῦ ῥεύματος. Μέχρις ὅτου ὅμως διατρέξῃ τὸ πλάτος τοῦ ποταμοῦ ἐκ 54 μέτρων παρασύρεται κατὰ 15 μέτρα πρὸς τὴν διεύθυνσιν τοῦ ῥεύματος. Ζητεῖται ἡ ταχύτης τοῦ ῥεύματος (ὕδατος).

9) Ἀτμάκατος πλέουσα πρὸς τὰ ἀνάντα ῥεύματος ἔχει ταχύτητα $\mathbf{V}'=3,8$ μ. ἀνα″, πρὸς δὲ τὴν φορὰν τοῦ ῥεύματος πλέουσα ἔχει ταχύτητα $\mathbf{V}''=6,2$ μ″ Ζητεῖται ποία ἡ ταχύτης τῆς ἀτμακάτου καὶ ποία ἡ τοῦ ῥεύματος (πρὸς τὰ ἀνάντα=ἀντιθέτως πρὸς τὴν διεύθυνσιν τοῦ ῥεύματος)

10) Δύο κινητὰ ἐκκινοῦν ταυτοχρόνως ἐκ δύο σημείων Γ καὶ Δ ἀπεχόντων ἀπόστασιν ΓΔ=500 μέτρα, μὲ κίνησιν ὁμαλὴν καὶ μὲ ταχύτητας 5 καὶ 2 μέτρα ἀνὰ δευτερόλεπτον. Μετὰ πόσον χρόνον ἀπὸ τῆς ἐκκινήσεως θὰ συναντηθοῦν καὶ εἰς ποῖον σημεῖον τῆς ΓΔ ; (Συνεπῶς κινοῦνται ἀντιθέτως).

11) Δύο κινητὰ κινούμενα εὐθυγράμως καὶ ἰσοταχῶς διήνυσαν τὴν ἰδίαν ἀπόστασιν ΓΔ=2000 μέτρα, τὸ μὲν ἓν εἰς 10′ τὸ δ᾽ ἕτερον εἰς 300″. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ταχύτητες τῶν κινητῶν

12) Ποδηλάτης ἀναχωρεῖ ἀπὸ σημεῖον Α πρὸς τὴν διεύθυνσιν ΑΒ. Δύο πεζοὶ μὲ ταχύτητα $\mathbf{V}$ ἀναχωροῦν ταυτοχρόνως μὲ τὸν ποδηλάτην ἐκ τοῦ Β ἀντιθέτως. Τὸν μὲν πρῶτον ὁ ποδηλάτης συναντᾷ εἰς τὸ σημεῖον Μ τὸν δὲ δεύτερον εἰς τὸ Μ′ ἀπέχον τοῦ Μ διάστημα δ, μὲ ταχύτητα μ]πλασίαν. Ζητεῖται ἡ ἀπόστασις ΑΒ. (Καὶ ἐφαρμογὴ διὰ μ=4, $\mathbf{V}=5$ χιλιόμ. τὴν ὥραν καὶ ΜΜ′=δ=10 χιλιομέτρα).

13) Ἀεροπλάνον ἔχον ἀντίθετον τὸν ἄνεμον, διήνυσε 690χιλιό μετρα εἰς 3 ὥρας. Κατόπιν ὅμως, ἐπειδὴ ἐδιπλασιάσθη ἡ ταχύτης τοῦ ἀνέμου, ηὔξησε τὴν ἰδίαν του ταχύτητα κατὰ 40 χιλιόμετρα τὴν ὥραν καὶ διήνυσε ἄλλα 470 χιλιόμετρα εἰς 2 ὥρας. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἰδία ταχύτης τοῦ ἀεροπλάνου καὶ τοῦ ἀνέμου κατὰ τὰς 3 πρώτας ὥρας πτήσεως.

II Κίνησις συνεχὴς εὐθύγραμμος, ὁμαλῶς μεταβαλλομένη (ἐπιταχυνομένη ἢ ἐπιβραδυνομένη)

Τὰ διανυόμενα διαστήματα ὑπὸ τῶν κινητῶν εἰς τὴν κίνησιν ταύτην εἶναι ἀνάλογα τῶν τετραγώνων τῶν χρόνων εἰς τοὺς ὁποίους διηνύθησαν.

Ἐὰν πχ. τὰ εἰς τὸ τέλος τοῦ πρώτου δευτερολέπτου, ἀπὸ τῆς ἐνάρξεως τῆς κινήσεως, διηνύθη ὑπὸ τοῦ κινητοῦ διάστημα 20 μέτρων, εἰς τὸ τέλος τοῦ δευτέρου δευτερολέπτου θὰ διανυθῇ διάστημα $20 \cdot 2^2 = 80$ μέτρων, εἰς τὸ τέλος τοῦ τρίτου δευτερολέπτου διάστημα $20 \cdot 3^2 = 180$ μέτρων, εἰς τὸ τέλος τοῦ τετάρτου δευτερ. ἀπὸ τῆς κινήσεως διάστημα $20 \cdot 4^2 = 320$ μέτρων καὶ οὕτω καθεξῆς

Αἱ ταχύτητες τῶν κινητῶν, εἰς τὴν κίνησιν ταύτην εἶναι ἀνάλογοι τῶν χρόνων ἐντὸς τῶν ὁποίων ἀπεκτήθησαν, διαφέρουσαι οὕτω ἀπὸ μιᾶς μονάδος χρόνου εἰς τὴν ἄλλην κατὰ σταθερὰν ποσότητα **γ** ἥτις ὀνομάζεται ἐπιτάχυνσις ἢ ἐπιβράδυνσις. Ἐὰν πχ. κινητὸν κατάτινα στιγμὴν ἔχει ταχύτητα 50 μέτρων ἀνὰ δευτερόλεπτον καὶ κινεῖται ἔστω μὲ κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιβραδυνομένην, ἡ δὲ ἐπιβράδυνσίς του **γ** εἶναι ἔστω 10 μέτρα, τότε μετὰ ἓν δευτερόλεπτον ἡ ταχύτης του θὰ εἶναι 40 μ. ἀνὰ'', μετὰ ἓν ἀκόμη δευτερόλεπτον θὰ εἶναι αὕτη 30 μ. ἀνὰ'' καὶ οὕτω καθεξῆς, μέχρις ὅπου αὕτη μηδενισθῇ, ὁπότε τὸ κινητὸν θὰ σταματήσῃ.

Ἐὰν πάλιν κινητόν τι ἐκινεῖτο μὲ κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην καὶ εἶχε κατὰ τινα στιγμὴν ταχύτητα 120 ἑκατ. ἀνὰ πρῶτον λεπτὸν ἡ δὲ ἐπιτάχυνσίς του **γ** ἦτο, ἄς ὑποθέσωμεν, 15 ἑκ., τότε μετὰ 1' ἡ ταχύτης του θὰ ἦτο 135 ἑκ. ἀνὰ δευτερόλεπτον, μετὰ 1 ἀκόμη πρῶτον λεπτὸν 150 ἑκ.'' καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς θὰ ἔβαινε ἡ ταχύτης συνεχῶς αὔξουσα, διαφέρουσα ἀπὸ τοῦ ἑνὸς πρώτου λεπτοῦ εἰς τὸ ἄλλο κατὰ τὴν σταθερὰν ποσότητα $\gamma = 15$ ἑκ., ἥτις ὀνομάζεται ἤδη, ὡς εἴπομεν, ἐπιτάχυνσις.

ΤΥΠΟΙ

Διὰ κινητὸν ἄνευ ἀρχικῆς ταχύτητος.

Τύπος διαστημάτων: $\mathbf{S}_t = \frac{1}{2} \gamma \mathbf{t}^2 = \frac{V_t^{\,2}}{2\gamma}$.

γ = ἐπιτάχυνσις ἢ ἐπιβράδυνσις (σταθερὰ ποσότης).

Τύπος ταχυτήτων: $\mathbf{V}_t = \gamma \mathbf{t}$ ἢ $\mathbf{V}_t = \sqrt{2\gamma S_t}$.

Διὰ κινητὸν μετ' ἀρχικῆς ταχύτητος.

$$S_t = V_0 t \pm \frac{1}{2}\gamma t^2, \quad V_t = V_0 \pm \gamma t \quad \text{ἢ} \quad V_t = \sqrt{V_0^2 \pm 2\gamma S_t}.$$

Ἔνθα S_t διάστημα διανυόμενον εἰς χρόνον t, V_t ἡ ταχύτης μετὰ χρόνον t, V_0 ἡ ἀρχικὴ ταχύτης τοῦ κινητοῦ. Τὸ $(+)$ διὰ κίνησιν ἐπιταχυνομένην τὸ δὲ σημεῖον $(-)$ διὰ τοιαύτην ἐπιβραδυνομένην

Ὅσον ἀφορᾷ τὴν ἐκλογὴν τοῦ καταλλήλου τύπου διὰ τὴν λῦσιν τῶν προβλημάτων, δυνατὸν νὰ χρησιμοποιοῦνται οἱ μὲν ἢ οἱ δὲ ἀναλόγως τῶν δεδομένων τῆς ἀσκήσεως.

Ὁ χρόνος t ἐκφράζεται εἰς ὥρας, πρῶτα, ἢ δεύτερα λεπτά ἀναλόγως τῆς φύσεως τοῦ προβλήματος, καὶ τὰ S_t, V_0, V_t καὶ γ μὲ τὰς αὐτὰς μονάδας διαστήματος (χιλιόμετρα, μέτρα, παλάμαι κλπ.) ἅπαντα· δηλαδὴ εἰς ὅτι ἐκφράζεται τὸ ἕν πρέπει νὰ ἐκφράζωνται καὶ τ' ἄλλα ποσά.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

14) Κινητὸν ἀναχωρῆσαν ἐκ τῆς ἠρεμίας διήνυσε 90 χιλιόμετρα μὲ ἐπιτάχυνσιν 5 χιλιόμετρα τὴν ὥραν· Ποία ἡ ταχύτης τοῦ κινητοῦ κατὰ τὴν στιγμὴν ταύτην. Ποία θὰ εἶναι μετὰ 45′ καὶ ἐντὸς πόσου χρόνου θὰ γίνῃ 60 χλ. τὴν ὥραν;

15) Σῶμα ἐκκινοῦν ἐκ τῆς ἠρεμίας, διατρέχει τὴν εὐθύγραμμον τροχιὰν του μὲ ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην κίνησιν. Εἰς τὸ πρῶτον δευτερόλεπτον διατρέχει 20 ἑκατοστά. Ζητοῦνται α) Πόσον θὰ ἔχῃ διατρέξει κατὰ τὸ διάστημα τοῦ δεκάτου δευτερολέπτου καὶ β) Μετὰ πόσον χρόνον θὰ ἔχῃ τὴν ταχύτητα τῶν 24 μέτρων.

16) Σῶμα ἐκκινοῦν ἐκ τῆς ἠρεμίας διατρέχει τὴν εὐθύγραμμον τροχιάν του μὲ ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην κίνησιν. Εἰς τὸ τρίτον δευτερόλεπτον (ἀπὸ τῆς ἐκκινήσεως) διατρέχει 50 ἑκατοστά. Ζητοῦνται. α) Πόσον διάστημα θὰ διατρέξῃ κατὰ τὴν διάρκειαν (εἰς τὸ τέλος) τοῦ εἰκοστοῦ δευτερολέπτου ἀπὸ τῆς ἐκκινήσεως β) Ποίαν ταχύτητα θὰ ἔχῃ εἰς τὸ τρίτον καὶ ποίαν εἰς τὸ εἰκοστὸν δευτερόλεπτον καὶ γ) Μετὰ πόσον χρόνον θὰ ἔχῃ τὴν ταχύτητα τῶν 100 μέτρων

17) Σῶμα ἐκκινοῦν ἐκ τῆς ἠρεμίας διατρέχει τὴν εὐθύγραμμον τροχιάν του μὲ κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην καὶ ἐπιτάχυνσιν 10 μ. ἔχει κατά τινα στιγμὴν ταχύτητα 60 μ″. Νὰ εὑρεθῇ τὸ διάστημα ὅπερ τὸ κινητὸν θὰ ἔχῃ διατρέξει κατὰ τὴν στιγμὴν ἐκείνην καὶ ὁ χρόνος καθ' ὃν θὰ ἔχῃ τὴν ταχύτητα ταύτην.

18) Κινητὸν κινούμενον μὲ κίνησιν ὁμαλῶς μεταβαλλομένην, ἔχει ἐπιτάχυνσιν 10 μέτρων, κατά τινα δὲ στιγμὴν ταχύτητα Α μέτρα ἀνὰ δευτερόλεπτον. Ζητοῦνται α) Ἐὰν ἡ κίνησις εἶναι ἐπιταχυνομένη, ποίαν ταχύτητα θὰ ἔχῃ μετὰ ἕν, δύο, τρία, τέσσαρα κλπ δευτερόλεπτα ἀπὸ τῆς στιγμῆς ἐκείνης (ὅπου δηλαδὴ ἔχει τὴν ταχύτητα Α) καὶ β) Ἐὰν ἡ κίνησις εἶναι ἐπιβραδυνομένη ποίαν ταχύτητα θὰ ἔχῃ μετὰ ἕν, δύο, τρία κλπ. δευτερόλεπτα ἀπὸ τῆς στιγμῆς ἐκείνης. Ἐφαρμογὴ δι' Α $=100$ μ.

19) Κινητὸν ἔχον κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην διήνυσεν ἐντὸς 10 δευτερολέπτων ἀπόστασιν 1000 μ., πόσον διάστημα θὰ διανύσῃ κατὰ τὸ 18ον δευτερόλεπτον τῆς κινήσεώς του;

20) Σῶμα κινητὸν ἔχον ταύτην τὴν στιγμὴν ἀρχικὴν ταχύτητα 20 μέτρων διατρέχει τὴν εὐθύγραμμον τροχιάν του μὲ ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην κίνησιν Εἰς τὸ τέλος τοῦ πρώτου δευτερολέπτου ἔχει διατρέξει 30 μέτρα Ζητεῖται α) Πόσον διάστημα θὰ διατρέξῃ εἰς τὸ τέλος τοῦ 15 δευτερολέπτου β) Μετὰ πόσον χρόνον θὰ ἔχῃ τὴν ταχύτητα τῶν 60 μέτρων.

21) Ποῖον πρέπει νὰ εἶναι τὸ διανυθὲν διάστημα ὑπό τινος σώματος, ὅπερ ἔχει κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην, ἵνα ἡ ταχύτης του κατὰ ταύτην τὴν στιγμὴν ἰσοῦται ἀριθμητικῶς πρὸς τὸ τρίτον τοῦ διανυθέντος διαστήματος;

22) Σῶμα κινητὸν ἔχον κατὰ τὴν 10ην ὥραν 10΄15΄΄ τῆς χθὲς ἀρχικὴν ταχύτητα $V_0 = 30$ μέτρα, διατρέχει τὴν εὐθύγραμμον τροχιάν του, μὲ κατεύθυνσιν ἀπὸ Βορρᾶ πρὸς Νότον, μὲ ὁμαλῶς ἐπιβραδυνομένην κίνησιν. Μετὰ δύο δευτερόλεπτα ἀπὸ τῆς στιγμῆς ἐκείνης εἶχε διατρέξει 5000 ἑκατοστὰ Ζητεῖται α) Πόσον διάστημα διέτρεξε εἰς τὸ τέλος τοῦ δεκάτου δευτερολέπτου β) Μετὰ πόσον χρόνον εἶχε τὴν ταχύτητα τῶν 40 μέτρων (εἶναι τοῦτο δυνατὸν καὶ διατί;) γ) Μετὰ πόσον χρόνον εἶχε τὴν ταχύτητα τῶν 20 μέτρων δ) Ποῖον διάστημα εἶχε διανύσει ὅταν εἶχε τὴν ταχύτητα τῶν 20 μ. ε) Ποίαν ταχύτητα εἶχε εἰς τὸ 1ον, 3ον, 4ον καὶ 5ον δευτερόλεπτον (Νὰ εὑρεθῇ ἄνευ πράξεων) καὶ στ) Μετὰ πόσον χρόνον ἀπὸ τῆς στιγμῆς ἐκείνης, ὅπου εἶχε τὴν ταχύτητα τῶν 30 μ., τὸ κινητὸν θὰ ἠρεμήσῃ καὶ ποῖον διάστημα εἶχε τότε διατρέξει.

23) Σῶμα κινούμενον μὲ κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιβραδυνομένην καὶ ἔχον ἀρχικὴν ταχύτητα 500 μέτρων κατὰ δευτερόλεπτον σταματᾶ (ἠρεμεῖ) 20 δευτερόλεπνα ἀπὸ τῆς ἐνάρξεως τῆς κινήσεως. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐπιβράδυνσις.

24) Σῶμα τι εἶχε ἀρχικὴν ταχύτητα V_0 καὶ κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην. Νὰ εὑρεθῇ ποῖον θὰ εἶναι τὸ διανυθὲν ὑπὸ τούτου διάστημα ἵνα ἡ ταχύτης του κατὰ τὴν στιγμὴν ταύτην ἰσοῦται ἀριθμητικῶς μὲ τὸ $\frac{1}{20}$ τοῦ διαστήματος (Ποία τιμὴ ἐκ τῶν δύο εὑρεθησομένων εἶναι παραδεκτή;)

III Κίνησις Περιοδικὴ κυκλικὴ ἰσοταχὴς

(Ἤτοι κίνησις ἰσοταχοῦς περιστροφῆς περὶ ἄξονα.)

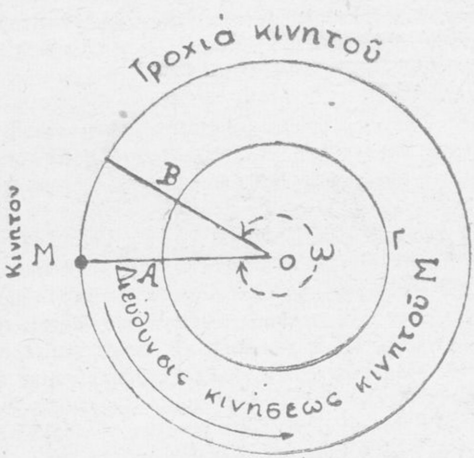
ΤΥΠΟΙ

$$2\pi = \omega.\ T, \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2N\pi, \qquad \frac{V}{\omega} = \frac{R}{1}.$$

$$\text{ἄρα} \quad V = \omega R = 2\pi NR = \frac{2\pi}{T} R.$$

$$T = \frac{1}{N} \ \text{ἢ}\ N = \frac{1}{T} \ \text{ἤτοι}\ NT = 1,\ \mathbf{S_t} = \mathbf{Vt}.$$

Ἔνθα ω = γωνιώδης (γωνιακὴ) ταχύτης εἰς ἀκτίνια, **V** = γραμμικὴ ταχύτης τοῦ κινητοῦ, R = ἀκτὶς τροχιᾶς κινητοῦ, N συχνότης, T περίοδος, $\pi = 3,14$ (λόγος περιφερείας πρὸς διάμετρον), $360^o = 2\pi$ ἀκτίνια, (ἐπὶ κύκλου ἔχοντος ἀκτῖνα ἴσην μὲ 1μ) Ἄρα $1^o = \frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{180}$ ἀκτίνια. Γωνία ἑνὸς ἀκτινίου ἀντιστοιχεῖ εἰς $57^o\ 17'\ 44''$ (ἐπὶ κύκλου οἱασδήποτε ἀκτῖνος).



(Σχ. 1)

$OA = 1$, $OM = \mathbf{R}$ (ἐπιβατικὴ ἀκτίς)· (Σχ. 1).

V = γραμμικὴ ταχύτης, ἤτοι τὸ εἰς τὴν μονάδα τοῦ χρόνου ὑπὸ τοῦ κινητοῦ διανυόμενον ἐπὶ τῆς κυκλικῆς τροχιᾶς του τόξον.

Ἡ γωνιώδης ταχύτης ω ἀντιστοιχεῖ μὲ τόξον ΑΓΒ ὅπερ γράφεται ὑπὸ τῆς ΟΜ εἰς τὴν μονάδα τοῦ χρόνου (''), ὅταν τὸ κινητὸν Μ κινεῖται ἐπὶ τῆς τροχιᾶς του καὶ μετρᾶται εἰς ἀκτίνια. Αἱ ταχύτητες τῶν σημείων Α καὶ Μ εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ ἀκτῖνες των, ἤτοι

$$\frac{V}{\omega} = \frac{R}{1}$$

Ἀκτίνιον εἶναι μῆκος τόξου ἴσον μὲ μίαν ἀκτῖνα καὶ ἐπὶ τοῦ προκειμένου, μῆκος τόξου ὁμοκέντρου πρὸς τὸν τῆς τροχιᾶς κύκλου, ἀκτῖνος ἴσης μὲ τὴν μονάδα.

Σημείωσις Ἡ γραμμικὴ ταχύτης **V** ἐκφράζεται εἰς ὅτι καὶ ἡ ἀκτὶς τῆς τροχιᾶς **R** τοῦ κινητοῦ (χιλιόμετρα, μέτρα κλπ). Περίοδος καλεῖται ὁ χρόνος **T**, εἰς δευτερόλεπτα, κατὰ τὸν ὁποῖον τὸ κινητὸν διαγράφει μίαν πλήρη περιφέρειαν, **N** δὲ εἶναι ἡ συχνότης, δηλαδὴ ὁ ἀριθμὸς τῶν (πλήρων) στροφῶν εἰς τὴν μονάδα τοῦ χρόνου (δευτερόλεπτον).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

25) Τῆς γῆς κινουμένης πέριξ τοῦ Ἡλίου μὲ κίνησιν ὁμαλὴν κυκλικὴν νὰ εὑρεθῇ ἡ γωνιώδη ταχύτης τῆς κινήσεως, καθὼς καὶ ἡ γραμμικὴ τοιαύτη ἂν περίοδος ἓν ἔτος καὶ ἀκτὶς τῆς τροχιᾶς 149.500.000 χιλιόμετρα.

26) Σῶμά τι κινεῖται ἐπὶ κύκλου ἀκτῖνος 50 μέτρων μὲ κίνησιν ὁμαλήν. Δίδονται συχνότης 5.

Ζητοῦνται α) ἡ γραμμικὴ ταχύτης τοῦ κινητοῦ β) ἡ γωνιώδης ταχύτης αὐτοῦ γ) τὸ διανυθησόμενον ἐπὶ τοῦ κύκλου διάστημα **S** ὑπὸ τοῦ κινητοῦ εἰς 20′ καὶ δ) ὁ ἀριθμὸς τῶν στροφῶν n ποὺ θὰ κάμῃ τὸ κινητὸν διὰ νὰ διανύσῃ τὸ διάστημα **S**.

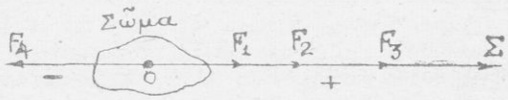
27) Σῶμα τι κινεῖται ἐπὶ κυκλικῆς τροχιᾶς, ἀκτῖνος 20 ἑκατοστῶν, μὲ κίνησιν ὁμαλὴν Δίδονται περίοδος $\mathbf{T}=0{,}5''$. Ζητοῦνται α) ἡ γωνιώδης ταχύτης β) ἡ γραμμικὴ ταχύτης του γ) ἡ συχνότης **N** καὶ δ) τὸ διανυθησόμενον διάστημα **S** εἰς χρόνον 15″.

β′ ΣΤΑΤΙΚΗ

Ἡ Στατικὴ ἐξετάζει τὴν σύνθεσιν καὶ ἀνάλυσιν τῶν ἐφαρμοζομένων ἐπὶ τῶν σωμάτων δυνάμεων ἀδιαφοροῦσα καὶ διὰ τὸ βάρος τῶν σωμάτων καὶ διὰ τὰ ἀποτελεσματα (κίνησιν κλπ), τὰ ὁποῖα ἐπιφέρουν ἐπὶ τῶν σωμάτων αἱ δυνάμεις αὗται. Εἰς κάθε δύναμιν διακρίνομεν ἔντασιν (μέγεθος), διεύθυνσιν καὶ φοράν.

Σύνθεσις καὶ ἀνάλυσις Δυνάμεων.

I Δυνάμεις ἐνεργοῦσαι ἐπὶ τῆς αὐτῆς διευθύνσεως

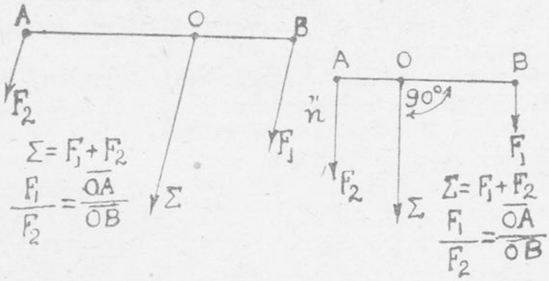


$\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$, $\mathbf{F}_4$=συνιστῶσαι δυνάμεις.

Σ = συνισταμένη τούτων· Ἤτοι δύναμις δυναμένη ν᾽ἀντικαταστήσῃ ὅλας τὰς δυνάμεις ταύτας. Ο εἶναι τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς τῶν συνιστωσῶν καὶ τῆς συνισταμένης.

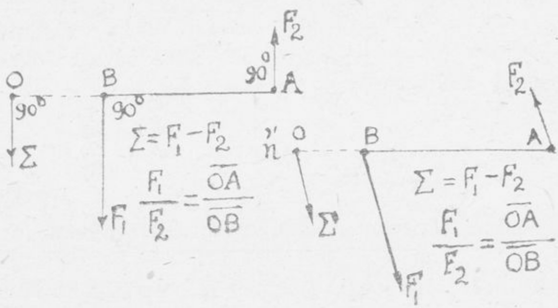
Ἄρα ἡ συνισταμένη ἰσοῦται μὲ τὸ Ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν συνιστωσῶν. Ἤτοι $\Sigma = \mathbf{F}_1+\mathbf{F}_2+\mathbf{F}_3-\mathbf{F}_4$. Ἐὰν πχ $\mathrm{F}_1 = 2\,\mathbf{Kg}$, $\mathbf{F}_2 = 3\,\mathbf{Kg}$, $\mathbf{F}_3 = 4{,}5\,\mathbf{Kg}$, $\mathbf{F}_4 = 2\,\mathbf{Kg}$ τότε : $\Sigma = 2 + 3 + 4{,}5 - 2 = 7{,}5\,\mathbf{Kg}$. Ἡ συνισταμένη βεβαίως, ἐνεργεῖ ἐπὶ τῆς αὐτῆς διευθύνσεως μὲ τὰς συνιστώσας.

II Δυνάμεις παράλληλοι καὶ ὁμόρροποι



A σημεῖον, ἐφαρμογῆς δυνάμεως $\mathbf{F}_2$, B τῆς $\mathbf{F}_1$ καὶ O τῆς συνισταμένης Σ.

III Δυνάμεις παράλληλοι καὶ ἀντίρροποι



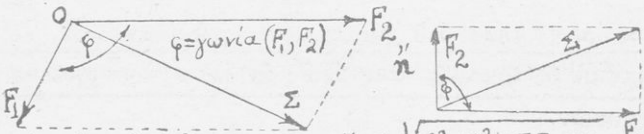
Εἰς τὰς δυνάμεις τὰς παραλλήλους καὶ ὁμορρόπους, ἢ παραλλήλους καὶ ἀντιρρόπους, αἱ $\mathbf{F}_1$. $\mathbf{F}_2$ εἶναι αἱ συνιστῶσαι δυνάμεις, Σ ἡ συνισταμένη τούτων (ἤτοι ἡ δύναμις ἥτις δύναται ν' ἀντικαταστήσῃ ταύτας, ἢ ν' ἀναλυθῇ εἰς τὰς δύο ταύτας). A καὶ B τὰ σημεῖα ἐφαρμογῆς τῶν συνιστουσῶν δυνάμεων καὶ O τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς τῆς συνισταμένης Σ.

Ἡ συνισταμένη φυσικά, εἶναι παράλληλος πρὸς τὰς συνιστώσας, ἰσοῦται πρὸς τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν ἐντάσεων τῶν συνιστωσῶν, ἔχει φορὰν τὴν φορὰν τῆς μεγαλυτέρας καὶ τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς της εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς κατευθύνσεως AB.

Αἱ συνιστῶσαι παράλληλοι δυνάμεις δύνανται νὰ εἶναι κάθετοι ἢ πλάγιαι ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν AB, (ἤτοι νὰ ἐνεργῶσιν ἐπὶ τοῦ σώματος καθέτως ἢ πλαγίως ὡς πρὸς αὐτήν), εἴτε ὁμόρροποι εἶναι αὗται, εἴτε ἀντίρροποι.

Ἐὰν ὑπάρχουν περισσότεραι τῶν δύο παράλληλοι δυνάμεις, ἀδιαφόρως ὁμόρροποι ἢ ἀντίρροποι, τὰς λαμβάνομεν ἀνὰ δύο πρὸς εὕρεσιν τοῦ σημείου ἐφαρμογῆς τῆς τελικῆς συνισταμένης. Ἡ ἔντασις τῆς τελικῆς συνισταμένης ἰσοῦται πάλιν πρὸς τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα ὅλων τῶν συνιστωσῶν δυνάμεων.

IV Δύο Δυνάμεις ἐνεργοῦσαι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου κατὰ διάφορον διεύθυνσιν (παραλληλόγραμμον δυνάμεων)



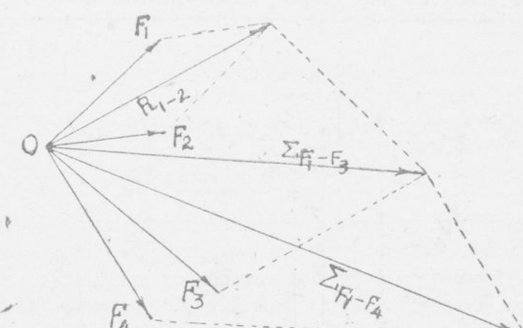
$$\Sigma^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \,\sigma\upsilon\nu\varphi \ \text{ή} \ \Sigma = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \,\sigma\upsilon\nu\varphi}$$

$$\text{καί} \ \frac{F_1}{\eta\mu(F_2,\Sigma)} = \frac{F_2}{\eta\mu(F_1,\Sigma)} = \frac{\Sigma}{\eta\mu(F_1,F_2)}$$

$$\Sigma^2 = \mathbf{F}_1^2 + \mathbf{F}_2^2 + 2\,\mathbf{F}_1\,\mathbf{F}_2 \ \sigma\upsilon\nu\varphi \ \text{ἢ} \ \Sigma = \sqrt{\mathbf{F}_1^2 + \mathbf{F}_2^2 + 2\,\mathbf{F}_1\,\mathbf{F}_2 \sigma\upsilon\nu\varphi}$$

$$\text{καὶ} \ \frac{\mathbf{F}_1}{\eta\mu\ (\mathbf{F}_2,\ \Sigma)} = \frac{\mathbf{F}_2}{\eta\mu\ (\mathbf{F}_1,\ \Sigma)} = \frac{\Sigma}{\eta\mu\ (\mathbf{F}_1,\ \mathbf{F}_2)}$$

Αἱ συνιστῶσαι δυνάμεις $\mathbf{F}_1$ καὶ $\mathbf{F}_2$ δύνανται νὰ σχηματίζουν μεταξύ των γωνίαν φ ὀξεῖαν, ἀμβλεῖαν ἢ ὀρθήν. Αὗται κεῖνται, φυσικῷ τὸ λόγῳ, ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου, καθόσον ὡς γνωστὸν ἐκ τῆς γεωμετρίας, δύο εὐθεῖαι τεμνόμεναι προσδιορίζουν τὴν θέσιν ἑνὸς καὶ μόνον ἐπιπέδου, τοῦ ἐπιπέδου ἐπὶ τοῦ ὁποίου κεῖνται.



Δυνάμεις F_1, F_2, F_3, F_4, ἔχουσαι τό αὐτό σημεῖον ἐφαρμογῆς O καί κείμεναι ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, ἤ ἐν τῷ χώρῳ.
Ἡ $\Sigma_{F_1-F_3}$ εἶναι ἡ συνισταμένη τῶν δυνάμεων (συνιστουσῶν) F_1, F_2, F_3 ἤ τῶν R_{1-2} καί F_3, ἡ δέ $\Sigma_{F_1-F_4}$ ἡ συνισταμένη τῶν F_1, F_2, F_3 καί F_4.

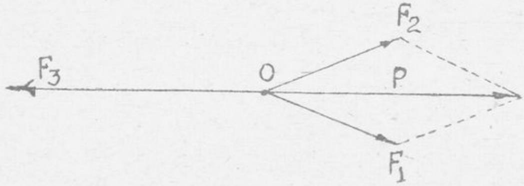
Ἐὰν ὑπάρχουν περισσότεραι τῶν δύο δυνάμεις, ἐνεργοῦσαι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἐφαρμογῆς, ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἢ ἐν τῷ χώρῳ κείμεναι τότε θὰ τὰς συνθέτωμεν ἀνὰ δύο, κατασκευάζοντες ἑκάστοτε τὸ παραλληλόγραμμον τῶν δυνάμεων, πρὸς εὕρεσιν ἑκάστοτε τῆς μερικῆς συνισταμένης, καὶ ἐξακολουθοῦντες ἔτσι μέχρι εὑρέσεως τῆς τελικῆς τοιαύτης.

V Σχέσεις μεταξὺ 3 δυνάμεων ἐφηρμοσμένων εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς, κειμένων ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ καὶ ἰσορροπουσῶν.

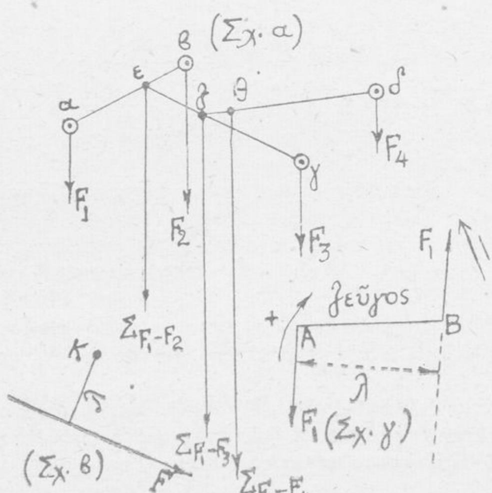
Συνισταμένη $\Sigma = O$, ἤτοι τὸ σύστημα τῶν 3 δυνάμεων F_1, F_2, F_3 ἰσορροπεῖ ὁπότε ἔχομεν τὴν σχέσιν:

$$\frac{F_1}{\eta\mu\,(F_2,\ F_3)} = \frac{F_2}{\eta\mu\,(F_1,\ F_3)} = \frac{F_3}{\eta\mu\,(F_1,\ F_2)}$$

Ἡ P εἶναι συνισταμένη τῶν F_1 καὶ F_2, ἥτις ἰσορροπεῖ μετὰ τῆς F_3, ὡς ἴση καὶ ἀντίθετος πρὸς αὐτὴν καὶ ἐπὶ τῆς ἰδίας μὲ αὐτὴν κατευθύνσεως ἐνεργοῦσα. (Ἰδὲ σχῆμα ἀμέσως κατωτέρω).



VI Δυνάμεις ἐν τῷ χώρῳ, παράλληλοι ἀνὰ δύο.



F_1, F_2, F_3, F_4, εἶναι αἱ συνιστῶσαι δυνάμεις. α. β, γ, δ τὰ σημεῖα ἐφαρμογῆς των. Ἡ $\Sigma_{F_1 - F_2}$ συνισταμένη τῶν δυνάμεων F_1, F_2, μὲ σημεῖον ἐφαρμογῆς τὸ ε (Σχ. α).

Ἡ $\Sigma_{F_1 - F_3}$ ἡ συνισταμένη τῶν $\Sigma_{F_1 - F_2}$ καὶ τῆς F_3, ἔχουσα σημεῖον ἐφαρμογῆς τὸ ζ (Σχ. α), ἤτοι συνισταμένη τῶν F_1, F_2 καὶ F_3.

Καὶ ἡ $\Sigma_{F_1 - F_4}$ εἶναι ἡ τελικὴ συνισταμένη, ἤτοι ἡ δύναμις, ἥτις δύναται ν' ἀντικαταστήσῃ τὰς συνιστώσας δυνάμεις $\Sigma_{F_1 - F_3}$ καὶ τὴν F_4, τουτέστι τὰς δυνάμεις F_1, F_2, F_3, καὶ F_4, μὲ σημεῖον ἐφαρμογῆς της τὸ θ (Σχ. α).

Αἱ $\Sigma_{F_1 - F_2}$, $\Sigma_{F_1 - F_3}$ λέγονται μερικαὶ συνισταμέναι.

VII Ροπαὶ δυνάμεων

Ροπὴ δυνάμεως **F** ὡς πρὸς σταθερόν τι σημεῖον **K** (Κέντρον ροπῆς), καλεῖται τὸ γινόμενον τῆς ἐντάσεως F τῆς δυνάμεως, ἐπὶ τὴν ἀπόστασιν λ τοῦ σημείου τούτου ἀπὸ τῆς διευθύνσεως αὐτῆς. (Σχ. β.)

Ἤτοι ῥοπὴ τῆς $F = P(F) = F\lambda$ Ἐὰν δὲ ἡ δύναμις F εἰς χιλιόγραμμα καὶ λ εἰς μέτρα τότε ἡ ροπὴ εἶναι Fλ χιλιογραμμόμετρα.

Ἡ ροπὴ πολλῶν δυνάμεων F_1, F_2, F_3 ... ὡς πρὸς σταθερὸν τὶ σημεῖον, ἰσοῦται μὲ τὴν ῥοπὴν τῆς συνισταμένης τούτων ὡς πρὸς τὸ αὐτὸ σημεῖον. Ἤτοι:

$$P(\Sigma) = P(F_1) + P(F_2) + P(F_3) + \dots$$

Μεταξὺ δύο ἴσων δυνάμων **F** παραλλήλων καὶ ἀντιρρόπων, ἐφηρμοσμένων εἰς δύο σημεῖα Α καὶ Β σώματός τινος, στερεῶς πρὸς ἄλληλα συνδεδεμένα, σχηματίζεται ζεῦγος δυνάμεων (Σχῆμα γ), τὸ ὁποῖον τείνει νὰ στρέψῃ τὸ σῶμα καὶ τοῦ ὁποίου ἡ ῥοπὴ ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς ἐντάσεως μιᾶς τῶν δυνάμεων τούτων ἐπὶ τὴν ἀπόστασιν λ (βραχεῖον ζεύγους) τῶν δύο δυνάμεων.

$$\text{Ροπὴ ζεύγους} = P = \pm F\lambda$$

Ἡ Ροπὴ εἶναι θετικὴ ἐὰν ἡ στροφὴ γίνεται πρὸς τὴν διεύθυνσιν κινήσεως τῶν δεικτῶν τοῦ ὡρολογίου καὶ ἀρνητικὴ ἄντιθέτως.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

28) Ποία εἶναι ἡ ἔντασις τῆς συνισταμένης δύο δυνάμεων $F_1 = 6$ Kg. καὶ $F_2 = 8$ Kg. ἐνεργουσῶν ἐπὶ σημείου ἑνὸς σώματος ὑπὸ γωνίαν 90°; (ἰδὲ εἰς Λύσεις καὶ τρόπον λύσεως διὰ γραφικῆς κατασκευῆς).

29) Δύο δυνάμεις παράλληλοι καὶ ὁμόρροποι $F_1 = 4$ Kg καὶ $F_2 = 12$ Kg., ἐνεργοῦν εἰς τὰ ἄκρα μιᾶς ράβδου ΑΒ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς ράβδου ΑΒ, δεδομένου ὅτι ἡ συνισταμένη τῶν δυνάμεων εἶναι ἐφηρμοσμένη εἰς ἀπόστασιν 0,15 μ. ἀπὸ τοῦ ἄκρου Α τῆς ράβδου καὶ β) ἡ ἔντασις τῆς συνισταμένης αὐτῶν.

30) Ν' ἀναλυθῇ δύναμις 10 Kg. εἰς δύο συνιστώσας παραλλήλους καὶ ὁμορρόπους ἐχούσας λόγον 3 : 7. Τὰ σημεῖα ἐφαρμογῆς τούτων ἀπέχουν μεταξύ των 2 μέτρα.

31) Δύο δυνάμεις παράλληλοι καὶ ὁμόρροποι ἐντάσεως 16 καὶ

12 χιλιογράμμων ἐνεργοῦν εἰς τὰ ἄκρα ράβδου μήκους 63 ἑκατοστῶν Ποία ἡ ἔντασις τῆς συνισταμένης καὶ ποῦ θὰ εὑρίσκεται τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς της;

32) Δύο δυνάμεις ἑκάστη 6 χιλιογράμμων ἐνεργοῦν εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον καὶ σχηματίζουν πρὸς ἀλλήλας γωνίαν 60°. Ποία ἡ συνισταμένη των;

33) Νὰ ὑπολογισθῇ 1) Ἡ συνισταμένη τῶν δυνάμεων $\Delta_1 = 25$ Kg., $\Delta_2 = 42$ Kg., καὶ αἵτινες δυνάμεις σχηματίζουν γωνίαν 105° 2) Ποίας γωνίας σχηματίζει ἡ συνισταμένη μὲ τὰς δοθείας συνιστώσας;

34) Ν' ἀναλυθῇ ἡ δύναμις $\Sigma = 10$ χιλιόγραμμα (Kg) εἰς δύο συνιστώσας Δ_1 καὶ Δ_2 σχηματιζούσας μεταξύ των γωνίαν 60° α) ὅταν $\Delta_1 = \Delta_2$ καὶ β) ὅταν $\Delta_1 = 7$ χιλιόγραμμα.

35) Εἰς σημεῖον **O** σώματος εἶναι ἐφηρμοσμέναι αἱ δυνάμεις $\Delta_1 = 1\ Kg$, $\Delta_2 = 2Kg$, $\Delta_3 = 3Kg$, $\Delta_4 = 4Kg$, $\Delta_5 = 5Kg$, καὶ $\Delta_6 = 6Kg$, σχηματίζουσαι ἀνὰ δύο πρὸς ἀλλήλας γωνίαν 60°. Νὰ προσδιορισθῇ ἡ συνισταμένη των.

36) Εἰς σημεῖον Α ἐνεργοῦν ὑπὸ γωνίαν 45° δύο δυνάμεις $\mathbf{F}_1 = 6$ *Kg*. καὶ $\mathbf{F}_2 = 8$ *Kg*. Ἐὰν ἡ πρώτη ἔχει ροπὴν 18 πρὸς Κέντρον Β ἡ δὲ ἄλλη ροπὴν 4, Ποία ἡ ἀπόστασος τοῦ Κέντρου ροπῶν Β ἀπὸ τῆς συνισταμένης των Σ;

37) Τρεῖς δυνάμεις Α, Β, Γ ἔχουσαι ἄθροισμα 100 χιλιογράμμων καὶ ἐφηρμοσμέναι ἐφ' ἑνὸς σημείου σώματός τινος ἰσορροποῦν. Ζητοῦνται. Ἡ ἔντασις ἑκάστης τούτων, γνωστοῦ ὄντος, ὅτι ἡ Α σχηματίζει μὲ τὴν Β γωνίαν 120°, μετὰ τῆς Γ δὲ γωνίαν 150°.

38) Αἱ 4 δυνάμεις $\Delta_1 = 7$ Kg, $\Delta_2 = 8$ Kg. καὶ $\Delta_3 = 11$ Kg. καὶ *R*, ἐνεργοῦσαι εἰς ἓν σημεῖον ἰσορροποῦν. Αἱ πρῶται 3 εἶναι κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας. Πόση εἶναι ἡ *R*.; (Αἱ δυνάμεις ἐν τῷ χώρῳ).

39) Τρεῖς παράλληλοι δυνάμεις $\Delta_1 = 5$ χιλιογρ; $\Delta_2 = 10$ χιλιογ., καὶ $\Delta_3 = 15$ Kg ἐνεργοῦν εἰς τὰ σημεῖα A_1, A_2 καὶ A_3 στερεᾶς εὐθείας $A_1 A_3$. Ἐκ τούτων ἡ Δ_1 ἐνεργεῖ ἀντιθέτως πρὸς τὰς ἄλλας. Αἱ ἀποστάσεις τῶν σημείων εἶναι $A_1 A_2 = \alpha_1 = 20$ ἑκ., $A_2 A_3 = \alpha_2 = 40$ ἑκ,. Ποία ἡ συνισταμένη καὶ ποῖον τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς αὐτῆς;

40) Πέντε παράλληλοι καὶ ὁμόρροποι δυνάμεις 6, 8, 12, 15 καὶ 9 χιλιόγραμμα ἐνεργοῦν εἰς πέντε διάφορα σημεῖα στερεῶς πρὸς ἄλληλα συνδεδεμένα. Αἱ ἀποστάσεις τῶν δυνάμεων τούτων ἀπὸ δοθέντος ἐπιπέδου εἶναι κατὰ σειρὰν 8, 4, 10, 5 καὶ 20 ἑκ. Ζητεῖται. Πόση εἶναι ἡ συνισταμένη καὶ πόσον ἀπέχει αὕτη τοῦ ρηθέντος ἐπιπέδου.

γ' ΔΥΝΑΜΙΚΗ

Ἡ Δυναμικὴ ἐξετάζει τὴν κίνησιν τῶν σωμάτων ἐν συνδυασμῷ πρὸς τὰς δυνάμεις αἵτινες ἐνεργοῦν ἐπ' αὐτῶν.

Μεταξὺ δυνάμεως *F*, ἐνεργούσης ἐπὶ σώματος, τῆς μάζης *m* τοῦ σώματος καὶ τῆς ἐπιταχύνσεως γ τοῦ σώματος, ὑπάρχει ἡ σχέσις.

$F = m\gamma$. Ἔνθα *F* εἰς δύνας, *m* εἰς γραμμάρια καὶ γ εἰς ἑκατοστὰ κατὰ δευτερόλεπτον, ἢ *F* καὶ *m* εἰς χιλιόγραμμα καὶ γ εἰς μέτρα.

1 δύνη (*dyne*) $= \frac{1}{981}$ γραμμάρια = θεωρητικὴ μονὰς μετρήσεως τῆς δυνάμεως. Ἄρα 1 γραμμάριον = 981 δύνας.

Ἓν χιλιόγραμμον (1000 γραμμ.) = 981000 δύνας. Τὸ χιλιόγραμμον (*Kilogramme*) εἶναι ἡ πρακτικὴ μονὰς δυνάμεως.

Μία. Δύνη εἶναι ἡ δύναμις ἥτις ἐνεργοῦσα ἐπὶ σώματος μάζης ἑνὸς γραμμαρίου τοῦ δίδει ἐπιτάχυνσιν ἑνὸς ἑκατοστοῦ εἰς ἓν δευτερόλεπτον. Μονὰς δὲ μάζης εἶναι τὸ γραμμάριον, ἤτοι ἡ μᾶζα ἑνὸς κυβικοῦ ἑκατοστοῦ ὕδατος, ἀπεσταγμένου καὶ θερμοκρασίας 4 βαθμῶν Κελσίου (4^0 K = 4^0C).

Αἱ μᾶζαι δυὸ σωμάτων εἶναι ἀντισρόφως ἀνάλογοι τῶν ἐπιταχύνσεων των ἤτοι:

$$\frac{m}{m'} = \frac{\gamma'}{\gamma}$$

Ἐπίσης ὁ λόγος τῆς ἐφαρμοζομένης ἐπὶ σώματος ἑκάστοτε **δυνάμεως**, ὡς πρὸς τὴν παρεχομένην εἰς τὸ σῶμα ὑπὸ τῆς δυνάμεως ταύτης ἐπιτάχυνσιν, εἶναι σταθερὸς ἀριθμὸς καὶ ἰσοῦται πρὸς τὴν μᾶζαν τοῦ σώματος. Ἤτοι.

$$\frac{F_1}{\gamma_1} = \frac{F_2}{\gamma_2} = \frac{F_3}{\gamma_3} = \ldots\ldots = \frac{F_\nu}{\gamma_\nu} = m$$

δ΄ ΒΑΡΥΤΗΣ

Ἡ κίνησις τῶν σωμάτων πρὸς τὴν Γῆν καλεῖται πτῶσις τῶν σωμάτων Ἡ βαρύτης εἶναι μερικὴ περίπτωσις τῆς παγκοσμίου ἕλξεως, ἡ ὁποία ἐξασκεῖται μεταξὺ τῆς Γῆς καὶ τῶν ἐπ᾽ αὐτῆς σωμάτων.

Ἡ πτῶσις τῶν σωμάτων ἀκολουθεῖ τοὺς ἑξῆς Νόμους ἀνακαλυφθέντας ὑπὸ τοῦ Γαλιλαίου.

1ον) Πάντα τὰ σώματα ἀφιέμενα ἐλεύθερα εἰς τὸ κενὸν (χῶρον ἐστερημμένον ὕλης) πίπτουν ταυτοχρόνως.

2ον Νόμος διαστημάτων. Ὅτι τὰ διανυόμενα διαστήματα ὑπὸ σώματος ἀναχωροῦντος ἐκ τῆς ἠρεμίας (ἤτοι ἐλευθέρως, δηλαδὴ ἄνευ ἀρχικῆς ταχύτητος) καὶ πίπτοντας εἰς τὸ κενόν, εἶναι ἀνάλογα τῶν τετραγώνων τῶν χρόνων ἐντὸς τῶν ὁποίων διηνύθησαν (ὡς εἰς τὴν ὁμαλῶς μεταβαλλομένην κίνησιν).

Ἐὰν πχ εἰς τὸ τέλος τοῦ πρώτου δευτερολέπτου τὸ σῶμα πίπτων διήνυσε διάστημα 4,**9** μέτρα εἰς τὸ τέλος τοῦ δευτέρου θὰ διανύσῃ 2^2.4,9 μ, εἰς τὸ τέλος τοῦ τρίτου 3^2.4,9 μ. κ. ο κ.

Ἄρα $\mathbf{S} = \frac{1}{2}\mathbf{g}t^2$ Ὅπου **S** τὸ διανυθὲν διάστημα ὑπὸ τοῦ σώματος, **t** ὁ χρόνος, εἰς δευτερόλεπτα. ἐντὸς τοῦ ὁποίου διηνύθη τοῦτο καὶ **g** ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς βαρύτητος, ἥτις εἶναι σταθερὰ διὰ τὸν αὐτὸν τόπον, μεταβαλλομένη ἀπὸ τόπου εἰς τόπον (**g**=9,78 μ. εἰς τὸν ἰσημερινὸν καὶ 9,83 μ. εἰς τοὺς πόλους τῆς Γῆς).

Ἐὰν τὸ κινητὸν δὲν ἀφίεται μόνον του ἐλεύθερον νὰ πέσῃ, ἀλλὰ προσδίδεται εἰς τοῦτο καὶ ἀρχικὴ ταχύτης V_0 τότε $\underline{S = V_0 t + \frac{1}{2} g t^2}$.

Ἐὰν πάλιν τὸ σῶμα ἐκσφενδονίζεται πρὸς τὰ ἄνω, **ὁπότε φυσικὰ προσδίδεται εἰς αὐτὸ ἀρχικὴ ταχύτης**, ἔστω V_0, τότε $\underline{S = V_0 t - \frac{1}{2} g t^2}$

Τὰ S_t, V_0 καὶ g ἅπαντα μὲ τὰς αὐτὰς μονάδας μήκους.

3ον **Νόμος τῶν ταχυτήτων**. Ἤτοι αἱ ταχύτητες, τὰς ὁποίας ἀποκτᾷ σῶμά τι ὅταν ἀναχωρεῖ ἐκ τῆς ἠρεμίας (ἄνευ ἀρχικῆς ταχύτητος, ἤτοι ἐλευθέρα πτῶσις) καὶ πίπτει εἰς τὸ κενόν, εἶναι ἀνάλογοι τῶν χρόνων κατὰ τοὺς ὁποίους ἀπεκτήθησαν. Ἤτοι ἐὰν πχ εἰς τὸ τέλος τοῦ πρώτου δευτερολέπτου ἔχει ταχύτητα 9,8 μ. εἰς τὸ τέλος τοῦ δευτέρου θὰ ἔχῃ ταχύτητα 2·9,8 εἰς τὸ τέλος τοῦ τρίτου 3·9,8 κλπ.

Ἄρα $V_t = gt$. Ἔνθα V_t ταχύτης τοῦ κινητοῦ ἀνὰ δευτερόλεπτον κατὰ τὸν χρόνον t, t ὁ χρόνος εἰς δευτερόλεπτα καὶ g ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς βαρύτητος.

Ἢ ὅταν δὲν μᾶς δίδεται ὁ χρόνος, ἀλλὰ τὸ ὕψος πτώσεως h ἀπὸ τὸ ὁποῖον πίπτει ἐλευθέρως τὸ σῶμα $(h = S)$, τότε $V_t = \sqrt{2gh}$

Ἐὰν πάλιν τὸ σῶμα πίπτει μετ᾽ ἀρχικῆς ταχύτητος V_0 ἀνὰ δευτερόλεπτον τότε $\underline{V_t = V_0 + gt}$.

Ἐὰν πάλιν τὸ σῶμα ἐκσφενδονίζεται πρὸς τὰ ἄνω μετ᾽ ἀρχικῆς ταχύτητος ἔστω V_0 (ἀναγκαστικῶς ἐφ᾽ ὅσον θέλομεν τὸ σῶμα ν᾽ ἀνέλθῃ θὰ τοῦ προσδοθῇ ἀρχικὴ ταχύτης) τότε :

$$\underline{V_t = V_0 - gt} \quad (1)$$

Εἰς τὴν τελευταίαν περίπτωσιν οὕτω πηγαίνοντας πρὸς τὰ ἄνω τὸ σῶμα κάπου, θὰ σταματήσῃ πρὸς στιγμήν, ἀμέσως δὲ μετὰ ταῦτα θ᾽ ἀρχίσῃ νὰ πίπτῃ μὲ αὔξουσαν συνεχῶς ταχύτητα, μέχρι τοῦ σημείου πτώσεώς του. Εἰς τὸ ἀνώτερον σημεῖον τῆς τροχιᾶς του, εἰς τὸ ὁποῖον θὰ σταθῇ πρὸς στιγμὴν τὸ σῶμα, θὰ ἔχῃ φυσικὰ ταχύτητα V_t μηδενικήν, ἤτοι $V_t = o = V_0 - gt$ ἄρα $V_0 = gt$ καὶ $t'' = \left(\frac{V_0}{g^1}\right)''$

ἤτοι θὰ σταθῇ εἰς χρόνον $t'' = \left(\frac{V_0}{g}\right)''$.

Δὲν γεννιέται οὐδεμία ἀμφιβολία, ὅτι ὅταν τὸ κινητὸν ἐκσφενδονίζεται πρὸς τὰ ἄνω μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα V_0, ἡ ταχύτης τοῦ V_t, προϊόντος τοῦ χρόνου ἐλαττοῦται συνεχῶς, ἐφ᾽ ὅσον τότε ὁ ὅρος gt τῆς ἰσότητος (1) αὐξάνει συνεχῶς (διότι τό t τότε αὐξάνει), καὶ θὰ μηδενισθῇ αὕτη ὅταν ὁ ὅρος οὗτος γίνει ἴσος μὲ τὴν ἀρχικὴν ταχύτοτα V_0.

Ὁ χρόνος τῆς ἀνόδου ἑνὸς σώματος, ἐκσφενδονισθέντος πρὸς τὰ ἄνω μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα V_o, ἤτοι ὁ $\left(\frac{V_o}{g}\right)''$, ἰσοῦται μὲ τὸν χρόνον τὸν ὁποῖον θὰ χρειασθῇ τὸ σῶμα ἵνα πέσῃ εἰς τὸ ἔδαφος, ἀπὸ τὸ ὑψηλότερον σημεῖον τῆς τροχιᾶς του, εἰς τὸ ὁποῖον εἶχε φθάσει κατὰ τὴν ἄνοδον, (χρόνος καθόδου τοῦ σώματος). Ὥστε ἐὰν ἔκαμε 20'' ν' ἀνέλθῃ ἄλλα τόσα θὰ κάμῃ νὰ κατέλθῃ.

Τὸ δὲ μέγιστον ὕψος H, εἰς τὸ ὁποῖον δύναται ν' ἀνέλθῃ κινητὸν ἐκφενδονιζόμενον πρὸς τὰ ἄνω εἶναι : $H = \frac{V_o{}^2}{2g}$

Ἐπίσος τὸ σῶμα ὅταν θὰ ἐπαναπέσῃ εἰς τὸ ἔδαφος διατρέχον τὸ αὐτὸ διάστημα h (H ἢ S), θὰ ἔχῃ ταχύτητα V ἴσην μὲ τὴν ἀρχικὴν V_o (διότι $V = \sqrt{2\,g\,h} = \sqrt{2\,g\,H} = \sqrt{2g\,\frac{V_o^2}{2g}} = \sqrt{V_o^2} = V_o$).

Κατ' ἀκολουθίαν ἡ ταχύτης σώματος, ἐκσφενδονιζομένου πρὸς τὰ ἄνω, εἰς ἓν σημεῖον τῆς τροχιᾶς του κατὰ τὴν ἄνοδον, εἶναι ὅση εἰς τὸ ἴδιον σημεῖον κατὰ τὴν κάθοδόν του (ἐπάνοδόν του εἰς τὸ ἔδαφος).

Τὰ g, V_0 V_t, h, H ἐκφράζονται ἅπαντα μὲ τὰς αὐτὰς μονάδας μήκους.

Βάρος σωμάτων

Ἐὰν P τὸ βάρος σώματος τότε ἔχομεν:

$P = m.\ g$ (τὰ P, m g ἐκφράζονται ὡς εἰς τὴν δυναμικὴν ἀντιστοίχως τὰ τὰ **F**, m, γ)

Παγκόσμιος ἕλξις

Ἡ ἕλξις μεταξὺ τῶν διαφόρων οὐρανίων σωμάτων καλεῖται παγκόσμιος ἕλξις.

Δυὸ ὑλικὰ σώματα εὑρισκόμενα τὸ ἓν πλησίον τοῦ ἄλλου ἕλκονται ἀμοιβαίως μὲ δύναμιν F, ἥτις εἶναι ἀνάλογος τῶν μαζῶν m καὶ m' τῶν σωμάτων τούτων καὶ ἀντιστρόφως ἀνάλογος τοῦ τετραγώνου τῆς μεταξύ των ἀποστάσεως r. Ἡ ἑλκτικὴ αὕτη δύναμις ἐξαρτᾶται ὡσαύτως ἀπὸ ἕνα συντελεστὴν $K = 67 \cdot 10^{-9}$ δύναι. Ἤτοι $F = K\frac{m.\ m'}{r^2}$

Ἔνθα ἐὰν F εἰς δύνας, K εἰς δύνας, m καὶ m' εἰς γραμμάρια καὶ r εἰς ἑκατοστά, ἢ F, m, m' καὶ K εἰς χιλιόγραμμα καὶ τὸ r εἰς μέτρα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

41) Μία Δύναμις 4,8 Kg. ἐνεργεῖ ἐπὶ ἑνὸς σώματος καὶ προσδίδει εἰς αὐτὸ ἐπιτάχυναν 1, 20 μέτρα. Πόση εἶναι ἡ μᾶζα τοῦ σώματος;

42) Πόσον χρόνον θὰ δαπανήσῃ λίθος πίπτων εἰς φρέαρ βάθους 490 μέτρων;

43) Λίθος πίπτων εἰς φρέαρ φθάνει εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὕδατος μετὰ 2, 5''. Πόσον εἶναι τὸ βάθος τοῦ φρέατος;

44) Πόσην ταχύτητα ἔχει ἀποκτήσει σῶμα πῖπτον ἐξ ὕψους 250 μέτρων ὅταν φθάσῃ εἰς τὸ ἔδαφος;

45) Γνωρίζομεν ἐκ τῆς Φυσικῆς (καὶ συμφώνως πρὸς τὸν Νόμον τῶν διαστημάτων) ὅτι, σῶμά τι βαρύ ἀφιέμενον ἐλεύθερον ἐξ ὕψους, διανύει εἰς τὸ πρῶτον δευτερόλεπτον 4, 9 μέτρα καὶ εἰς ἕκαστον ἑπόμενον 9, 8 μέτρα περισσότερον ἀπ᾽ ὅτι διήνυσεν εἰς τὸ προηγούμενον. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος ἐξ οὗ κατέπεσε σῶμά τι εἰς τὴν γῆν, ὅταν ὁ χρόνος τῆς πτώσεως εἶναν 12″ (Ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀέρος δὲν λαμβάνεται ὑπ᾽ ὄψιν).

46) Σῶμά τι πίπτει ἐλευθέρως ἐξ ὕψους 144 μέτρων. Ὅταν διανύσῃ διάστημα 25 μέτρων ἀφίεται νὰ πέσῃ ἐκ τοῦ αὐτοῦ ὕψους ἄλλο σῶμα ἀκολουθοῦν τὴν κατακόρυφον. Ζητοῦνται. α) Μετὰ ποίας ταχύτητος ἀφέθη τὸ δεύτερον σῶμα ὥστε νὰ φθάσῃ εἰς τὸ ἔδαφος ταυτοχρόνως μὲ τὸ πρῶτον, β) Ποίαν ταχύτητα θὰ ἔχῃ μόλις θὰ πέσῃ εἰς τὸ ἔδαφος τὸ πρῶτον σῶμα καὶ ποίαν τὸ δεύτερον σῶμα;

47) Σῶμά τι πίπτει ἐλευθέρως ἐξ ὕψους 144 μέτρων. Δεύτερον σῶμα εὑρισκόμενον κατὰ 25 μέτρα χαμηλώτερον τούτου ἐκσφενδονίζεται πρὸς τὰ κάτω ἀκριβῶς κατὰ τὴν στιγμὴν καθ᾽ ἣν τὸ πρῶτον σῶμα πίπτον, εὑρίσκεται εἰς τὸ ὕψος τοῦ δευτέρου. Μετὰ ποίας ταχύτητος ἐκσφενδονίσθη τὸ δεύτερον σῶμα, ὥστε νὰ φθάσῃ εἰς τὸ ἔδαφος συγχρόνως μὲ τὸ πρῶτον; Καὶ ποῖα θὰ εἶναι ἡ ταχύτης του καθ᾽ ἣν στιγμὴν θὰ πέσῃ εἰς τὸ ἔδαφος;

48) Πύργος ἔχει ὕψος 161 μέτρα. Πόσον χρόνον χρειάζεται σῶμά τι νὰ διατρέξῃ πίπτον τὸ μῆκος τοῦτο, καὶ μὲ ποίαν ταχύτητα φθάνει εἰς τὸ ἔδαφος, ἂν δὲν ληφθῇ ὑπ᾽ ὄψιν ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀέρος;

49) Ἐπὶ κατακορύφου τοιχώματος τάφρου ἡ θέσις Α εὑρίσκεται κατὰ h=58,86 μέτρα ὑψηλότερον της θέσεως Β. Ἀπὸ τὴν θέσιν **Α** ἀφήνεται νὰ πέσῃ μιὰ σφαῖρα καὶ μετὰ παρέλευσιν 1,5 δευτερολέπτου ἀφήνομεν ἑτέραν σφαῖραν ἐκ τῆς θέσεως Β. Αἱ δύο σφαῖραι φθάνουν συγχρόνως εἰς τὸν πυθμένα τοῦ τάφρου. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος χ τῆς θέσεως Β καὶ ὁ χρόνος τῆς πτώσεως τῆς ἀπὸ τοῦ Β ἀφεθείσης σφαίρας.

50) Μία δύναμις **F**=12 χιλιογ. ἐνεργεῖ ἐπὶ σώματος ἐπὶ 15″ **καὶ** μεταφέρει τοῦτο κατὰ τὴν διεύθυνσίς της εἰς 600 μέτρα ἀπόστασιν. Ζητεῖται τὸ βάρος τοῦ σώματος.

51) Βλῆμα ριπτόμενον κατακορύφως ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω ἐπανέρχεται εἰς τὸ σημεῖον ἀναχωρήσεώς του μετὰ παρέλευσιν 12″. Ποία ἡ ἀρχικὴ ταχύτης μὲ τὴν ὁποίαν ἐξηκοντίσθη καὶ εἰς ποῖον ὕψος ἔφθασε τὸ βλῆμα;

52) Σῶμα πίπτον ἐλευθέρως ἔχει εἰς τὸ σημεῖον Α τῆς τροχιᾶς του ταχύτητα $\mathbf{V}_A$=29,43 μ. εἰς δὲ τὸ Β ἔχει τὴν ταχύτητα $\mathbf{V}_B$= 49,05 μ. Ζητεῖται ἡ ἀπόστασις ΑΒ καὶ ὁ χρόνος καθ᾽ ὃν τὸ σῶμα διανύει τὴν ΑΒ.

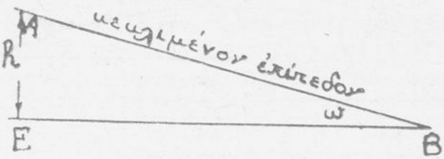
53) Σῶμα πίπτον μετ᾽ ἀρχικῆς ταχύτητος 10 μέτρων κέκτηται εἰς τὸ σημεῖον Γ τῆς τροχιᾶς του τὴν ταχύτητα $\mathbf{V}_Γ$ =40 μέτρα εἰς δὲ τὸ σημεῖον Δ τὴν ταχύτητα $V_{\Delta}=60$ μέτρα. Ζητεῖται ἡ ἀπόστασις ΓΔ καὶ ὁ χρόνος καθ' ὃν τὸ σῶμα διανύει τὴν ΓΔ,

54) Μία δύναμις $\mathbf{F}=10000$ γραμμάρια ἐνεργεῖ ἐπὶ ἑνὸς σώματος ἐπὶ 10'' καὶ μεταφέρει τοῦτο κατὰ τὴν διεύθυνσίν της εἰς ἀπόστασιν 100 μέτρων.

Ζητεῖται τὸ βάρος τοῦ σώματος εἰς γραμμάρια.

55) Ἐξ ἑνὸς σημείου Α τοῦ χώρου φανταζόμεθα ὅτι ρίπτομεν συγχρόνως πρὸς ὅλας τὰς διευθύνσεις ἀνὰ μίαν σφαῖραν, ὅλας μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα 3 μέτρων.'' Ζητεῖται ὁ τόπος τῶν θέσεων ὅπου θὰ εὑρίσκωνται αἱ σφαῖραι μετὰ πάροδον 4 δευτερολέπτων ἀφ' ἧς ἐρρίφθησαν ἀπὸ τοῦ Α.

ε'. ΚΕΚΛΙΜΕΝΟΝ ΕΠΙΠΕΔΟΝ



ΑΒ=l=μῆκος=μῆκος κεκλιμμένου ἐπιπέδου.

h—ὕψος κεκλιμένου ἐπιπέδου.

ω=γωνία κλίσεως.

Ὡς γνωστὸν ἐκ τῆς τριγωνομετρίας, $\varepsilon\varphi\omega=\dfrac{h}{EB}$

Μεταξὺ τοῦ μήκους l ἑνὸς κεκλιμένου ἐπιπέδου, τοῦ ὕψους του h, τῆς γωνίας κλίσεώς του ω καὶ τῆς ἐπιταχύνσεώς γ ἑνὸς σώματος, κινουμένου ἐπὶ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου, ὑπάρχει ἡ σχέσις:

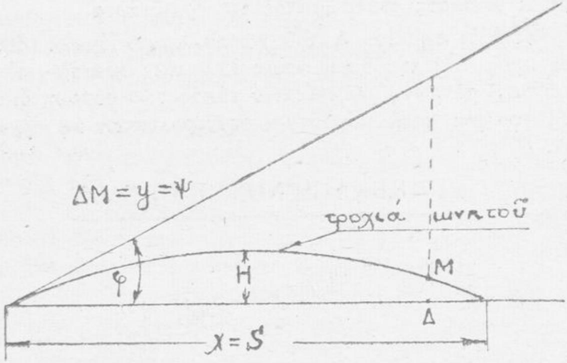
(1) $\gamma=g\eta\mu\omega=\dfrac{h}{l}\,g$ (διότι $\dfrac{h}{l}=\eta\mu\omega$, καθόσον γνωστὸν ἐκ τῆς τριγωνομετρίας, ὅτι ἑκατέρα τῶν καθέτων πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου ἰσοῦται μὲ τὴν ὑποτείνουσαν ἐπὶ τὸ ἡμίτονον τῆς ἀπέναντι γωνίας).

Εἶναι φυσικὸν ὅτι εἰς ἕνα σῶμα τὸ ὁποῖον κινεῖται ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου, ἐπιδρᾷ, ἐκτὸς τῆς ἐπιταχύνσεως γ, τὴν ὁποίαν θὰ εἶχε ἐὰν ἐκινεῖτο ἐπὶ ὁριζοντίου ἐπιπέδου, καὶ ἡ ἐπιτάχυνσις g τῆς βαρύτητος.

Αἱ σχέσεις αἱ ὑπάρχουσαι μεταξὺ τοῦ διαστήματος **S**, ταχύτητος V κλπ. εἰς τὴν ἐλευθέραν πτῶσιν τῶν σωμάτων, ὑφίστανται καὶ διὰ τὸ κεκλιμένον ἐπίπεδον, μὲ τὴν διαφορὰν ὅτι ἀντὶ g πρέπει νὰ θέτωμεν γ, τὴν δὲ τιμὴν τῆς ἐπιταχύνσεως γ λαμβάνομεν ἐκ τοῦ τύπου (1).

στ΄. ΒΕΛΗΝΕΚΕΣ

Ἔστω κινητὸν (βλῆμα κλπ.), ριπτόμενον μετ᾽ ἀρχικῆς ταχύτητος V_0 καὶ ὑπὸ γωνίαν κλίσεως φ·



Τὸ μέγιστον ὕψος Η εἰς τὸ ὁποῖον θ᾽ ἀνέλθῃ τὸ 6λῆμα, δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου $H = \frac{V_0^2 \eta\mu 2\varphi}{2g}$, ὁ δὲ χρόνος t'' ἀνόδου ἢ καθόδου τούτου ἰσοῦται μὲ $t = \frac{V_0 \acute{\eta}\mu\varphi}{g}$.

$\Delta M = y = x\varepsilon\varphi\varphi - \frac{gx^2}{2\,V_0^2\,\sigma\upsilon\nu^2\varphi}$ καὶ διὰ $y = o$ εὑρίσκομεν $S = x = \frac{\eta\mu 2\varphi}{g} V_0^2 =$ βεληνεκὲς (ὁριζόντιος ἀπόστασις).

Ἐὰν $\varphi = 45^0$ τότε $\eta\mu 2\varphi = \eta\mu\ 90^0 = 1$ ὁπότε $x = \frac{V_0^2}{g}$ ἤτοι διπλάσιον τοῦ μεγίστου ὕψους, ὅπερ θὰ ἔχῃ ὅταν ἐκσφενδονίζεται κατακορύφως πρὸς τὰ ἄνω, μὲ τὴν αὐτὴν ἀρχικὴν ταχύτητα καὶ ὅπερ ἐξετάσαμεν ἤδη εἰς τὴν 6αρύτητα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

56) Βλῆμα ρίπτεται ὑπὸ γωνίαν 45^0 μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα $V_0 = 50^m/_{sec}$ (50 μέτρα ἀνὰ δευτερόλεπτον). Εἰς ποῖον ὕψος θὰ φθάσῃ τὸ 6λῆμα καὶ εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ σημείου τῆς ἀναχωρήσεως θὰ συναντήσῃ πίπτον τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον ;

57) Ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου σχηματίζοντες γωνίαν 30^0 μετὰ τοῦ ὁριζοντίου ἀφίεται νὰ κινηθῇ σῶμα ἐπὶ 10΄΄. Ζητεῖται τὸ διανυθὲν ὑπὸ τοῦ σώματος διάστημα καὶ ἡ ταχύτης του κατὰ τὸ δέκατον δευτερόλεπτον.

58) Ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου ἀφίεται νὰ κυλίσῃ τὸ σῶμα ἐπὶ 10''. Τὸ ὕψος τοῦ ἐπιπέδου, ἀπὸ τοῦ ὁποίου ἀφίεται νὰ κινηθῇ τὸ σῶμα, εἶναι 100 μέτρα τὸ δὲ μῆκος του 1 χιλιόμετρον. Ζητοῦνται α') τὸ διανυθησόμενον ὑπὸ τοῦ κινητοῦ διάστημα εἰς τὰ 10'' καὶ β') ἡ ταχύτης του κατὰ τὸ δέκατον δευτερόλεπτον.

59) Ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου καὶ οὗτινος ὁ λόγος τοῦ ὕψους του ὡς πρὸς τὴν ὁριζοντίαν ἀπόστασιν εἶναι 1:2, κινεῖται σφαῖρα μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα εἰς Α 40 μέτρα ἀνὰ δευτερόλεπτον ($40_m/''$).

Ἡ σφαῖρα οὕτω κινουμένη φθάνει ἀπὸ τοῦ **Α** μέχρι τοῦ σημείου Β μεθ' ὃ μόνη της ἐπανέρχεται εἰς Α. Ἀπὸ τῆς στιγμῆς τῆς ἐκκινήσεώς της ἐκ τοῦ Α μέχρι τῆς ἐπανόδου της εἰς τὸ σημεῖον πάλιν Α παρῆλθον 18''. Ζητοῦνται α'). Τὸ μῆκος ΑΒ β'). Ἡ ταχύτης της μόλις ἔφθασε εἰς Β, γ'). Ποίαν ταχύτητα πρέπει νὰ ἔχῃ εἰς τὸ σημεῖον Α κατὰ τὴν ἐπιστροφήν της καὶ δ'). Ποίαν ταχύτητα εἶχεν εἰς τὸ σημεῖον Ε κατὰ τὴν ἄνοδόν της καὶ ποίαν κατὰ τὴν κάθοδόν της εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον, δεδομένου ὅτι εἰς τοῦτο εὑρίσκετο μετὰ 2,5'' ἀπὸ τῆς ἐκκινήσεώς της ἐκ τοῦ σημείου Α.

ζ' ΦΥΓΟΚΕΝΤΡΟΣ ΔΥΝΑΜΙΣ

$$F = m\gamma = m\omega^2 r = m\frac{V^2}{r} = \frac{m4\pi^2 r}{T^2}.$$

F=Φυγόκεντρος δύναμις, m=ἡ μᾶζα τοῦ σώματος, $\pi=3,14$, r= ἀκτὶς περιστροφῆς, **V**=γραμμικὴ ταχύτης περιστρεφομένου σώματος, **T** =περίοδος εἰς δευτερόλεπτα γ=ἐπιτάχυνσις, ω=γωνιώδης ταχύτης.

Ἐὰν τὸ F εἰς δύνας **m** εἰς γραμμάρια, **r** καὶ **V** εἰς ἑκατοστά, ω εἰς ἀκτίνια καὶ γ εἰς ἑκατοστά.

Ἀναλόγως τῶν δεδομένων μεταχειριζόμεθα τὸν κατάλληλον τύπον.

η'. ΑΠΛΟΥΝ ΚΑΙ ΣΥΝΘΕΤΟΝ ΕΚΚΡΕΜΕΣ

$$(1)\quad T'' = 2\pi\sqrt{\frac{\mu}{g}}$$

μ=μῆκος ἐκκρεμοῦς, **g**=ἐπιτάχυνσις βαρύτητος, ἀμφότερα εἰς μέτρα ἢ ἑκατοστὰ καὶ T ὁ χρόνος μιᾶς πλήρους αἰωρήσεως, ἤτοι ἡ περίοδος τοῦ ἁπλοῦ ἐκκρεμοῦς; ἐκφραζόμενος εἰς δευτερόλεπτα.

Λύοντες τὸν τύπον τοῦτον ὡς πρὸς **g** λαμβάνομεν

$g = \frac{4\pi^2\mu}{T^2}$, διὰ τοῦ ὁποίου προσδιορίζεται διὰ τοῦ ἁπλοῦ ἐκκρεμοῦς ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς βαρύτητος ἤτοι τὸ **g** ἑκάστου τόπου.

Ὁ τύπος τοῦ συνθέτου ἐκκρεμοῦς εἶναι

$$T'' = 2\pi\sqrt{\frac{I}{m.a.g}}$$

Ἔνθα **m** ἡ μᾶζα τοῦ ἐκκρεμοῦς, **α** ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου βάρους τοῦ ἐκκρεμοῦς ἀπὸ τοῦ ἄξονος ἐξαρτήσεως, **g** ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς βαρύτητος εἰς τὸν τόπον ὅπου ὑπάρχει τὸ ἐκκρεμὲς καὶ I ἡ ροπὴ ἀδρανείας τοῦ ἐκκρεμοῦς ὡς πρὸς τὸν ἄξονα ἐξαρτήσεως.

Πάντως ἐφ᾽ ὅσον μᾶς δίδεται τὸ μῆκος τοῦ ἐκκρεμοῦς καὶ ἐὰν πρόκειται ἀκόμη περὶ συνθέτου ἐκκρεμοῦς, δυνάμεθα νὰ χρησιμοποιήσωμεν τὸν τύπον (1) τοῦ ἁπλοῦ τοιούτου.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

60) Σφαῖρα βάρους 810 γραμμαρίων στρέφεται ἐν κατακορύφῳ κύκλῳ ἀκτῖνος r=0,8 μέτρα μὲ 90 στροφὰς εἰς τὸ 1΄, Ζητεῖται ἡ τάσις τοῦ σχετικοῦ νήματος ὅταν ἡ σφαῖρα εὑρίσκεται εἰς τὸ ἀνώτατον σημεῖον τοῦ κύκλου (Τάσις=δύναμις).

61) Κινητὸν μάζης 10 γραμμαρίων στρέφεται ἐπὶ περιφερείας κύκλου ἀκτῖνος 2 μ. μὲ ταχύτητα 8 μ κατὰ 1΄΄ Ποία ἡ ἀναπτυσσομένη φυγόκεντρος δύναμις;

62) Κινητὸν στρέφεναι ἐπὶ περιφερείας κύκλου ἀκτῖνος 4 μ. μὲ ταχύτητα 8 μ. κατὰ 1΄΄ καὶ ὑπόκειται εἰς φυγόκεντρον δύναμιν 60 χιλιογράμμων Ποία ἡ μᾶζα τοῦ κινητοῦ;

63) Ποῖον τὸ μῆκος ἁπλοῦ ἐκκρεμοῦς τοῦ ὁποίου ὁ χρόνος αἰωρήσεως εἶναι 3΄΄ εἰς τόπον ὅπου τὸ **g**=9,80 μέτρα;

64) Τὸ μῆκος ἐκκρεμοῦς εἶναι 60 μ. Ποία εἶναι ἡ διάρκεια τῆς αἰωρήσεώς του εἰς τόπον ὅπου τὸ **g**=9,80 μ;

65) Ἐκ δύο ἐκκρεμῶν τῶν ὁποίων τὰ μήκη διαφέρουν κατὰ 0,45 μ, ὅταν τὸ βραχύτερον κάμνῃ 5 αἰωρήσεις, τὸ μακρότερον κάμνει 4. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος ἑκάστου ἐκκρεμοῦς.

θ΄. ΕΡΓΟΝ—ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ—ΙΣΧΥΣ

ΕΡΓΟΝ

Ἔργον καλεῖται τὸ ποσὸν τῆς ἐνεργείας ἥτις παράγεται ὅταν μία δύναμις **F**, ἢ ἀντίστασις (διότι καὶ ἡ ἀντίστασις ἔχει τὴν ἔννοιαν τῆς δυνάμεως), ἢ ἕνα βάρος P (τὸ βάρος ἑνὸς σώματος ἔχει καὶ αὐτὸ τὴν ἔννοιαν τῆς δυνάμεως) ἐνεργήσῃ ἐπὶ ἑνὸς σώματος καὶ τὸ ἀναγκάσῃ νὰ μεταβάλῃ μορφήν, ἢ τὸ μετατοπίσῃ κατὰ τὴν ἔννοιαν τοῦ μήκους, κατὰ διάστημα **S**, ἢ κατὰ τὴν ἔννοιαν τοῦ ὕψους ἢ τοῦ βάθους, τὸ ἀνυψώσῃ, ἢ τὸ καταβιβάσῃ κατὰ διάστημα h κλπ.

Ὥστε ἔργον παράγεται καὶ ὅταν δὲν συμβῇ μετατόπισις τοῦ σώματος ἐπὶ τοῦ ὁποίου ἐνεργεῖ μία δύναμις, ἀρκεῖ μόνον ἡ ἐνέργεια τῆς δυνάμεως, ἢ τῆς ἀντιστάσεως, ἢ τοῦ βάρους νὰ ἐκδηλωθῇ καὶ δι᾽ ἄλλων φαινομένων. Π. χ. μία δύναμις ἐνεργεῖ ἐπὶ ἑνὸς σώματος, ἔστω σ᾽ ἕνα ποτῆρι καὶ τὸ σπᾷ· τότε ἀσφαλῶς παρήχθη ἔργον, τὸ ὁποῖον ἴσως νὰ μὴ μετετόπισε τὸ σῶμα, οὐχ᾽ ἧττον ὅμως ἐξεδηλώθη τὸ ἔργον διὰ τοῦ σπασίματος τοῦ ποτηριοῦ. Ἡ δύναμις δηλαδὴ μετεβλήθη εἰς ἔργον, ἐνέργειαν. Τὸ ἔργον παρίσταται διεθνῶς διὰ τοῦ γράμματος **W**.

Πρακτικὴ μονὰς μετρήσεως τοῦ ἔργου εἶναι **τὸ χιλιογραμμόμετρον,** ἤτοι τὸ ἔργον ὅπερ παράγεται ὅταν δύναμις ἑνὸς χιλιογράμμου ἐνεργήσῃ ἐπὶ σώματός τινος καὶ μετατοπίσῃ τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς της, κατὰ τὴν διεύθυνσίν της, κατὰ 1 μέτρον. Οὕτω ἐὰν μία δύναμις, ἔστω 5 χιλιογράμμων, ἐνεργήσῃ ἐπὶ ἑνὸς σώματος καὶ τὸ μετατοπίσῃ εἰς διάστημα 3 μέτρων, ἢ ὅπερ τὸ αὐτὸ σῶμα βάρους 5 χιλιογράμμων μετατοπισθῇ κατὰ 3 μέτρα, ἢ ὅπερ τὸ ἴδιον δύναμις 3 χιλιογράμμων μετατοπίσῃ τὸ σῶμα εἰς διάστημα 5 μέτρων, ἢ βάρος 3 χλγ. μετατοπισθῇ κατὰ 5 μέτρα, τότε λέγομεν ὅτι παρήχθη ἔργον $\mathbf{W}=5\ Kg.\ 3\ m=3\ Kg.\ 5m=15$ χιλιογραμμόμετρα (15 Kg/m).

Κατὰ τὴν ἐξέτασιν τοῦ παραγομένου ὑπὸ δυνάμεως ἔργου δὲν λαμβάνεται ποσῶς ὑπ᾽ ὄψιν ὁ χρόνος ἐντὸς τοῦ ὁποίου τὸ ἔργον παρήχθη.

Τὸ ἔργον συνεπῶς εἶναι ἀνάλογον τῆς ἐνεργούσης δυνάμεως, ἢ τοῦ βάρους τοῦ σώματος καὶ ἀνάλογον τῆς μεταθέσεως τοῦ σώματος.

Θεωρητικὴ μονὰς ἔργου εἶναι **τὸ Ἔργιον,** ἤτοι τὸ παραγόμενον ἔργον, ὅταν δύναμις μιᾶς δύνης (*dyne*) ἐπιδράσῃ ἐπὶ σώματός τινος καὶ μετακινήσῃ τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς της κατὰ τὴν διεύθυνσίν της κατὰ 1 ἑκ. (*cm*) ἤτοι ἐνῷ

$$1\ Kg/m=1\ Kg\times 1m.=981000\ dynes\times 100\ cm.$$

Τὸ 1 ἔργιον$=1\ dyne\times 1cm.$

Ἡ δύνη εἶναι ἡ θεωρητικὴ μονὰς δυνάμεως, ὡς ἀνεφέρθη τοῦτο εἰς Δυναμικήν, ἤτοι ἡ δύναμις **F** ἥτις ἐπιδρῶσα ἐπὶ σώματος μάζης m ἑνὸς γραμμαρίου, δίδει εἰς αὐτὸ ἐπιτάχυνσιν κατὰ 1 ἑκατ. εἰς τὸ δευτερόλεπτον.

Ἔχομεν ὡσαύτως καὶ τὸ *Joule* εἰς τὰς μονάδας ἔργου. Ἓν *Joule*$=10^7$ Ἔργια, ἤτοι 1 $K/gm=9{,}81$ *Joules*. Τὸ *Joule* χρησιμοποιεῖται ὡς μονὰς τοῦ ἠλεκτρικοῦ ἔργου (τῆς ἠλεκτρικῆς ἐνεργείας), ὡς θὰ ἴδωμεν εἰς τὸ κεφάλαιον τῆς ἠλεκτρολογίας.

Ὅθεν ἔχομεν ὅτι τὸ ἔργον **W** ἰσοῦται μὲ

$$\mathbf{W}=\mathbf{F\,s}=\mathbf{Ph}=\mathbf{mgh}\ (\text{διότι βάρος } \mathbf{P}=\mathbf{mg}).$$

Ἔνθα **F** ἡ ἐνεργοῦσα δύναμις ἢ ἀντίστασις, **P** παριστᾷ βάρος σώματος, **m** μᾶζα σώματος, **g** ἐπιτάχυνσις τῆς βαρύτηττος, **S** ἢ **h** διάστημα.

ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ

Ὅταν μία δύναμις **F** ἐνεργεῖ ἐπὶ ἑνὸς σώματος μάζης $\mathbf{m}=\frac{\mathbf{P}}{\mathbf{g}}$ (γνωστὸν ὅτι τὸ βάρος $\mathbf{P}=\mathbf{mg}$, ἄρα $\mathbf{m}=\frac{\mathbf{P}}{\mathbf{g}}$) μὲ μίαν ταχύτητα ἔστω V, τὸ σῶμα τοῦτο θὰ παρουσιάσῃ μίαν ἀντίστασιν (δύναμιν) ἀνάλογον φυσικὰ τῆς δυνάμεως ἥτις ἐνεργεῖ ἐπὶ τοῦ σώματος. Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον θὰ ἀναγκάσῃ ἡ δύναμις αὕτη τὸ σῶμα νὰ μετατοπισθῇ ἢ νὰ πάθῃ κάτι ἄλλο (θραῦσις κλπ.) καὶ ὁπωσδήποτε θὰ παραχθῇ ἔργον **W**, ἀνάλογον τῆς δυνάμεως **F** ἥτις ἐνήργησε, ἀνάλογον τῆς μάζης τοῦ σώματος, ἀνάλογον τῆς ταχύτητος **V** ἀνὰ'' τῆς ἐνεργούσης δυνάμεως, ἐξαρτώμενον ὡσαύτως ἐκ τῆς ἀντιστάσεως ποὺ παρουσιάζει τὸ σῶμα καὶ ἄλλων αἰτίων (ἀντίστασις ἀέρος, ὕλη ἀπὸ τὴν ὁποίαν ἔχει κατασκευασθῇ τὸ σῶμα, ἢ τὸ σῶμα ἐντὸς τοῦ ὁποίου τυχὸν εἰσδύει τοῦτο κλπ.).

Ὡς γνωστὸν ἐκ τῆς βαρύτητος ἔχομεν

$$V=\sqrt{2gh} \quad \text{ἢ} \quad V^2=2gh \text{ καὶ } h=\frac{V^2}{2g}$$

Ἀντικαθιστῶντες ἤδη εἰς τὸν εὑρεθέντα τύπον τοῦ ἔργου $\mathbf{W}=\mathbf{mgh}$ τὸ **h** διὰ $\frac{V^2}{2g}$ ἔχομεν

$$\mathbf{W}=\mathbf{mg}\frac{V^2}{2g}=\frac{\mathbf{m}V^2}{2}$$

ὅπερ καλεῖται ῥύμη, ἢ κινητική, ἢ δρῶσα ἐνέργεια τοῦ σώματος. Εἶναι δηλαδὴ Κινητικὴ ἐνέργεια, τὸ ἔργον **W** ὅπερ παράγει τὸ σῶμα μάζης **m**, ὅπερ μὲ ταχύτητα **V** κινούμενον ἐνεργεῖ π. χ. ἐπὶ ἑνὸς ἀντικειμένου παρουσιάζοντος ἀντίστασιν **F,** ἢ εἰσδύει ἐντὸς αὐτοῦ εἰς βάθος **S** κλπ.

Ἡ ἱκανότης λοιπὸν τὴν ὁποίαν ἔχουν τὰ διάφορα σώματα, ὑπὸ ὡρισμένας περιστάσεις, νὰ παράγουν ἔργον, καλεῖται γενικῶς ἐνέργεια. Ὅταν δὲ ἡ ἐνέργεια αὕτη ἐκδηλοῦται διὰ κινήσεως καλεῖται τότε κινητικὴ ἐνέργεια. Τοὐναντίον ὅταν εἶναι ὑπὸ λανθάνουσαν μορφὴν (συσπειρωμένον ἐλατήριον, πυρῖτις κλπ.) ὀνομάζεται δυναμικὴ ἐνέργεια.

Γενικῶς ἡ ἐνέργεια εἶναι τόσον μεγαλυτέρα ὅσον τὸ ἔργον τὸ ὁποῖον παράγει εἶναι μεγαλύτερον καὶ διὰ τοῦτο ἀκριβῶς μετρεῖται αὕτη διὰ τῶν αὐτῶν μονάδων διὰ τῶν ὁποίων μετρεῖται καὶ τὸ ἔργον.

Ὥστε διὰ τὴν κινητικὴν ἐνέργειαν $\frac{\mathbf{m}V^2}{2}$ ἔχομεν πάλιν τὰς σχέσεις

$$\mathbf{W}=\mathbf{Fs}=\mathbf{PR}=\mathbf{m\,gh}=\frac{\mathbf{m}V^2}{2}$$

ΙΣΧΥΣ

Ἰσχὺς **I** εἶναι τὸ παραγόμενον ἔργον εἰς τὴν μονάδα τοῦ χρόνου, ἤτοι ἰσχὺς $=\frac{\text{ἔργον}}{\text{χρόνος}}=\frac{\mathbf{W}}{\mathbf{t''}}=\mathbf{I}.$

Θεωρητικαὶ μονάδες ἰσχύος εἶναι τὸ ἓν ἔργιον εἰς 1″, ἢ τὸ 1 *Joule* εἰς 1″.

Πρακτικὴ μονὰς ἰσχύος εἶναι ὁ ἀτμόϊππος, κοινῶς ἵππος (**HP**), ὅστις ἰσοῦται μὲ ἔργον 75 χιλιογραμμομέτρων παραγόμενον εἰς 1″.

Ὡσαύτως τὸ **Watt**. Ἰσοῦται δὲ τὸ 1 **Watt** μὲ 10^7 ἔργια εἰς 1″=1 **Joule** εἰς 1″.

Ὁ 1 HP=0,736 Κιλοβὰτ (**Kilowatt**), 1 **Kilowatt**=1000 **watts**, ἢ 1 $Watt=\frac{1}{736}$ ἀτμόϊπποι.

Ἄρα 736 Κιλοβὰτ=1000 HP, ἢ 1 Κιλοβὰτ=1,43 HP.

Παράδειγμα

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι μία μηχανὴ ἐργάζεται ἡμίσειαν ὥραν καὶ μεταφέρει 10 τόννους ἐμπορευμάτων εἰς ἀπόστασιν 10 χιλιομέτρων, θέλω δὲ νὰ εὕρω τὴν ἰσχὺν τῆς μηχανῆς αὐτῆς, ἤτοι, τὸ παραγόμενον ὑπ' αὐτῆς ἔργον εἰς 1″. Γνωρίζομεν ὅτι ἡ ἰσχὺς $I=\frac{W}{t''}$. Ὁ χρόνος t ἰσοῦται 30′.60=1800″. Τὸ ἔργον $Fs=10000\times10000=10^8$ χιλιογραμμόμετρα. Ἄρα ἡ ἰσχὺς τῆς μηχανῆς $I=\frac{10^8}{1800}\,{}^{Kg}/_{m}$ ἀνὰ 1″.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

66) Πόσον εἶναι τὸ ἔργον ὅπερ ἐκτελεῖ ἐργάτης, ὅταν ἀναβιβάζῃ 260 χιλιόγραμμα ὕδατος ἀπὸ φρέαρ 25 μέτρων ;

67) Πόσον ἔργον ἐκτελεῖ ἐργάτης ἑκάστοτε, ὅταν ἀναβιβάζῃ εἰς στέγην οἰκοδομῆς ὕψους 10 μέτρων πλίνθους βάρους 30 χιλιογράμμων;

68) Πόσον ἔργον ἐκτελεῖ ἄνθρωπος μάρους 68 χιλιογράμμων, ὅταν ἀνέρχεται κλίμακα ὕψόυς 18 μέτρων;

69) Ἀτμαντλία ἀναβιβάζει 12 τόννους ὕδατος καθ' ὥραν εἰς ὕψος 34 μέτρων. Πόση εἶναι ἡ ἰσχὺς αὐτῆς ;

70) Ποία εἶναι ἡ δύναμις ἡ ὁποία εἰς 4″ θὰ ἀναγκάσῃ σῶμα βάρους 4 **Kg** νὰ διανύσῃ διάστημα 100 **m** ;

71) Μία ἀτμάμαξα βάρους 10 τόννων, μεταφέρουσα 900 ἐπιβάτας μέσου βάρους 65 **Kg**, τρέχει μὲ ταχύτητα 28 χιλιομέτρων τὴν ὥραν. Ποία ἡ κινητική της ἐνέργεια ;

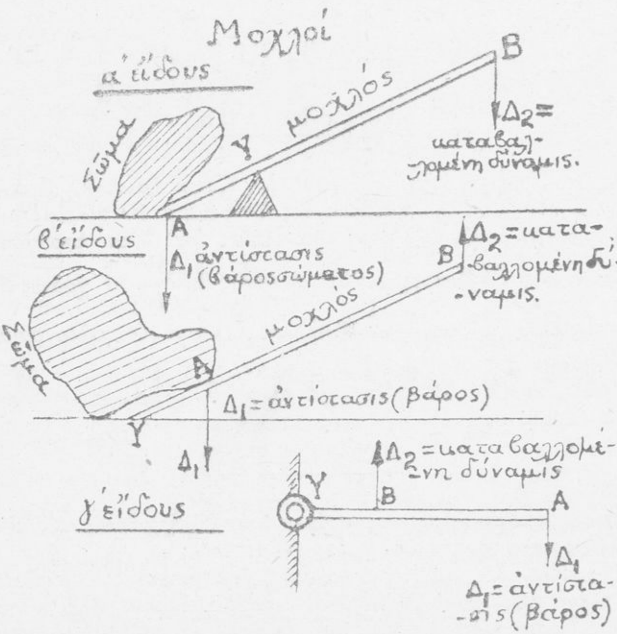
72) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἔργον ὅπερ ἀπαιτεῖται ἵνα σῶμα μάζης 5 **Kg**., ἔχον ταχύτητα $10^{m}/_{sec}$ ἀποκτήσῃ ταχύτητα $20_{m}/_{sec}$.

73) Ὑδραντλία ἀναβιβάζει 10 τόννους ὕδατος εἰς ὕψος 10 μέτρων. Ποῖον τὸ παραγόμενον ἔργον.

74) Ὀβὶς βάρους 4,1 **Kg**. ἔχει ταχύτητα 420 μέτρων ἀνὰ δευτερόλεπτον ὅταν συναντᾷ πρόχωμα εἰς τὸ ὁποῖον εἰσδύει εἰς βάθος 1, 5μ. Πόση ἡ μέση ἀντίστασις τοῦ προχώματος ;

75) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἔργον ὅπερ ἐκτελεῖ βολὶς μάζης 15 γραμμαρίων ἐκφενδονιζομένη ὑπὸ ὅπλου μὲ ταχύτητα $650 \, {}^{m}/_{sec}$ $\left({}^{m}/_{sec}\right.$ =μέτ. ἀνὰ 1'').

ι'. ΑΠΛΑΙ ΜΗΧΑΝΑΙ



ΑΒ μοχλός, Δ_1 ἀντίστασις (δύναμις, βάρος), Δ_2 καταβαλλομένη δύναμις, Υ ὑπομόχλιον, $\overline{\text{ΑΥ}}$ μοχλοβραχίων ἀντιστάσεως $\overline{\text{ΥΒ}}$ μοχλοβραχίων δυνάμεως. Αἱ δυνάμεις ἐκφράζονται μὲ τὰς αὐτὰς μονάδας δυνάμεως ἀδιαφόρως (γραμμάρια χιλιόγραμμα κλπ). οἱ δὲ βραχίονες ἀδιαφόρως μὲ τὰς αὐτὰς μονάδας μήκους.

Διὰ μοχλὸν 1ου εἴδους. Ἐφαρμόζεται ἡ σχέσις τῶν παραλλήλων καὶ ὁμορρόπων δυνάμεων.

Ἤτοι $\dfrac{\Delta_1}{\Delta_2}=\dfrac{\overline{\text{ΥΒ}}}{\overline{\text{ΥΑ}}}$ ἢ $\Delta_1 . \overline{\text{ΥΑ}}=\Delta_2 . \overline{\text{ΥΒ}}$. Ἐξ οὗ βλέπομεν, ὅτι αὐξανομένης τῆς δυνάμεως ἢ ἀντιστάσεως πρέπει νὰ μεταβάλλωνται ἀντιστρόφως ἀναλόγως καὶ οἱ μοχλοβραχίονες, καθόσον τὰ γινόμενα εἶναι σταθερά. Τὸ ὑπομόχλιον εὑρίσκεται μεταξὺ δυνάμεως καὶ ἀντιστάσεως.

Διὰ μοχλὸν 2ου εἴδους. Ἔχομεν $\frac{\Delta_1}{\Delta_2}=\frac{\overline{YB}}{\overline{YA}}$ ἤτοι ἐφαρμόζεται ἡ σχέσις τῶν παραλήλων καὶ ἀντιρρόπων δυνάμεων. Ἡ ἀντίστασις εἶναι μεταξὺ ὑπομοχλίου καὶ δυνάμεως.

Ὡς βλέπομεν ὁ μοχλοβραχίων τῆς δυνάμεως εἶναι πάντοτε μεγαλύτερος τοῦ μοχλοβραχίονος τῆς ἀντιστάσεως καὶ συνεπῶς ἡ καταβαλλομένη δύναμις εἶναι μικροτέρα ἀπὸ τὴν ἀντίστασιν. Συνεπῶς τὸ εἶδος τοῦτο τοῦ μοχλοῦ συμφέρει εἰς τὰ ὑδραυλικὰ πιεστήρια καὶ ἀλλαχοῦ.

Διὰ μοχλὸν 3ου εἴδους. Ἔχομεν $\frac{\Delta_1}{\Delta_2}=\frac{\overline{YB}}{\overline{YA}}$ ἢ $\Delta_1 . \overline{YA}=\Delta_2 . \overline{YB}.$

Ἐπειδὴ $\overline{YB}<\overline{YA}$ δὲν συμφέρει ὁ μοχλὸς οὗτος διὰ τὴν μετακίνησιν βαρέων ἀντικειμένων, διότι ἡ καταβαλλομένη δύναμις εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ὀντιστάσεως. Εἰς τὸ εἶδος τοῦτο τῶν μοχλῶν ἔχομεν τὴν περίπτωσιν τῶν παραλλήλων καὶ ἀντιρρόπων δυνάμεων.

Τροχαλίαι

α) Παγία τροχαλία. Εἶναι μοχλὸς 1ου εἴδους μὲ ἴσους βραχίονας. Ἡ καταβαλλομένη δύναμις Δ_2 ἰσοῦται μὲ τὴν ἀντίστασιν Δ_1 (βάρος P) ἤτοι $\Delta_2=\Delta_1=P$.

β) Μία κινητὴ ἢ ἐλευθέρα τροχαλία μετὰ ἢ ἄνευ παγίας τοιαύτης. Εἶναι μοχλὸς 2ου εἴδους.

Ἡ καταβαλλομένη δύναμις Δ_2 ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ἀντιστάσεως (βάρους) Δ_1. Ἤτοι $\Delta_2=\frac{\Delta_1}{2}=\frac{P}{2}$.

γ) Δύο ἐλεύθεραι (κινηταὶ) τροχαλίαι μετὰ μιᾶς παγίας. Τότε $\Delta_2=\frac{\Delta_1}{4}=\frac{P}{4}$.

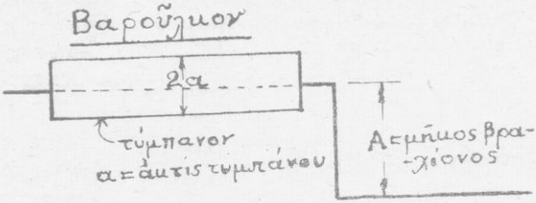
Αἱ Δυνάμεις ἢ τὰ βάρη, ἐκφράζονται μὲ τὰς αὐτὰς μονάδας ἀμφότερα (τόννους, χιλιόγραμμα, γραμμάρια).

Πολύσπαστον

Ἐὰν διὰ 2ν παραστήσωμεν τὸν ἀριθμὸν ὅλων τῶν τροχαλιῶν (ἄνω καὶ κάτω τροχαλιοθήκης), τότε ἡ ἀπαιτουμένη δύναμις **F** διὰ τὴν ἀνύψωσιν, ἢ μετακίνησιν βάρους P ἰσοῦται.

$F = \frac{P}{2\nu}$. Τὰ **F** καὶ **P** ἐκφράζονται μὲ τὰς αὐτὰς μονάδας δυνάμεως (χιλιόγρ. τόννους κλπ.). Ἔνθα ν ἀριθμὸς ἀκέραιος.

Βαροῦλκον



Ἐὰν **F** καταβαλλομένη δύναμις περιστροφῆς καὶ **P** ἀνυψούμενον βάρος, τότε $\frac{F}{P} = \frac{\alpha}{A}$. Τὰ **F** καὶ **P** μὲ τὰς αὐτὰς καὶ τὰ δύο μονάδας (τόννους, χιλιόγραμμα κλπ.), τὰ δὲ Α καὶ α, ὡσαύτως μὲ τὰς αὐτὰς μονάδας μήκους (ἑκατοστὰ ἢ μέτρα κλπ.). Τὸ βαροῦλκον ἀποτελεῖ μοχλὸν α΄ εἴδους.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

76) Μὲ μοχλὸν μήκους 0,50 μ. ἰσορροποῦμεν βάρος 27 χιλιογράμμων μὲ δύναμιν 3 χιλιογρ. Ποῖον τὸ μῆκος τοῦ μοχλοβραχίονος τῆς δυνάμεως;

77) Ποίαν δύναμιν πρέπει νὰ ἐφαρμόσωμενεἰς τὸ ἄκρον μοχλοῦ πρώτου εἴδους μήκους 1 μ. διὰ νὰ ἰσορροπήσωμεν ἀντίστασιν Α=170 χιλιογρ. ὅταν τὸ ὑπομόχλιον εὑρίσκεται 0,15 μ. ἀπὸ τῆς ἀντιστάσεως;

78) Πόσην δύναμιν θὰ χρειασθῇ νὰ καταβάλωμεν, ἐὰν χρησιμοποιήσωμεν πολύσπαστον ἀποτελούμενον ἀπὸ τρεῖς παγίας καὶ τρεῖς ἐλευθέρας τροχαλίας, διὰ νὰ ὑψώσωμεν βάρος 560 χιλιογράμμων;

79) Πόση δύναμις θὰ χρειασθῇ διὰ νὰ ἰσορροπήσῃ βάρος 400 Kg., ἐξηρτημένον ἐκ τοῦ ἀγκίστρου ἐλευθέρας τροχαλίας, ἥτις συνδυάζεται μετὰ δύο ἄλλων, ἐπίσης ἐλευθέρων;

Β΄ ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΩΝ ΥΓΡΩΝ

ΥΔΡΟΣΤΑΤΙΚΗ

Ἡ Ὑδροστατικὴ εἶναι τὸ μέρος τῆς Φυσικῆς, τὸ ὁποῖον ἐξετάζει τὰς πιέσεις τὰς ὁποίας προκαλοῦν τὰ ὑγρὰ καὶ τὰς συνθήκας ὑφ᾽ ἅς ἰσορροποῦν.

Ὅσον μία πιεζομένη ἐπιφάνεια **E**, ὑπὸ δυνάμεως **F**, ἔχει μικροτέραν ἔκτασιν τόσον ἡ πίεσις **P**, καὶ ἐπὶ τοῦ προκειμένου ἡ Ὑδροστατικὴ πίεσις **P**, εἶναι μεγαλυτέρα. Ἤτοι $\mathbf{P}=\frac{\mathbf{F}}{\mathbf{E}}$ (1). Ὡς βλέπομεν ἡ πίεσις εἶναι ἀνάλογος τῆς ἐνεργούσης (πιεζούσης) δυνάμεως καὶ ἀντιστρόφως ἀνάλογος τῆς πιεζομένης ἐπιφανείας.

Θεωρητικὴ μονὰς πιέσεως εἰς τὸ σύστημα *c. g. s* (*centimètre gramme, seconde*) εἶναι τὸ ἕν Μπάρι (*Barye*), ἤτοι ἡ πίεσις ἡ ἐπιφερομένη ὑπὸ δυνάμεως 1 δύνης ἐπὶ ἐπιφανείας ἑνὸς τετραγωνικοῦ ἑκατοστοῦ (cm^2). Ἐπίσης τὸ μιλιμπὰρ (*Millibar*) ἴσον μὲ 1000 Μπάρι. Πρακτικὴ δὲ μονὰς πιέσεως τὸ 1 K*g*. ἀνὰ τετρ. ἑκατοστὸν=9, $81 \cdot 10^5$ Μπάρι ἀνὰ/cm^2. Ἐπίσης ἔχομεν τὴν ἀτμόσφαιραν, ἥτις εἶναι πίεσις δυνάμεως 1,033 K*g*, ἤτοι 1033 γραμμαρίων, ἐπὶ ἐπιφανείας 1 cm^2, χρησιμοποιουμένη καὶ ὡς πρακτικὴ μονὰς πιέσεως τῶν ἀερίων (cm^2=τετρ. ἑκ.).

Συνεπῶς εἰς τὸν τύπον (1) ἐὰν ἡ δύναμις F ἐκφράζεται εἰς δύνας καὶ ἡ ἐπιφ. E εἰς cm^2 ἡ ὑδροστατικὴ πίεσις **P** ἐκφράζεται εἰς Μπάρι ἀνὰ τετραγωνικὸν ἑκ. Ἐὰν πάλιν τὸ F εἰς γραμμάρια, ἢ χιλιόγραμμα ἢ τόννους καὶ τὸ E εἰς τετρ. ἑκατοστά, τότε καὶ τὸ P ἐκφράζεται εἰς γραμμάρια, χιλιόγραμμα ἢ τόννους ἀνὰ cm^2.

Ἀρχὴ Πασκάλ. Πᾶσα πίεσις, ἐπὶ ἐπιφανείας ἠρεμοῦντος ὑγροῦ, μεταδίδεται καθ᾽ ὅλας τὰς διευθύνσεις καὶ μὲ τὴν αὐτὴν ἔντασιν ἐπὶ ἐπιφανείας ἴσης πρὸς τὴν πιεζομένην. Κατὰ ταῦτα ἐὰν **F** καὶ **F′** εἶναι αἱ ἀσκοῦσαι πίεσιν δυνάμεις, ἢ B καὶ B′ τὰ ἀσκοῦντα πίεσιν βάρη, ἐπὶ ἐπιφανειῶν ἀντιστοίχως E καὶ E′, ἰσορροποῦντος ὑγροῦ, τότε ὑπάρχει ἡ σχέσις. $\frac{F}{F'}=\frac{E}{E'}=\frac{B}{B'}$

Ὑδραυλικὸν πιεστήριον

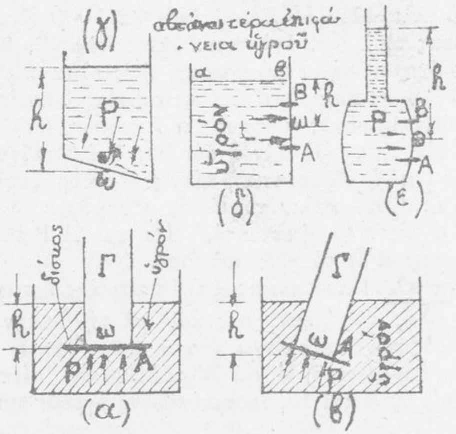
Ἐὰν ἡ δύναμις ἡ καταβαλλομένη εἰς τὸ ἄκρον Γ (χειρολαβὴ) τοῦ πιεστηρίου εἶναι F, ἔστω δὲ 5 K*g*, ὁ μοχλοβραχίων δὲ τῆς δυνάμεως, ἤτοι ἡ ἀπόστασις τοῦ ὑπομοχλίου A ἀπ᾽ αὐτῆς (μοχλὸς βου εἴδους), τουτέστι ἡ AΓ, εἶναι ἔστω ὀκταπλασία τοῦ μοχλοβραχίονος ἀντιστάσεως AB (ὅπου εἰς B ἐνεργεῖ ἡ ἀντίστασις Λ, τοῦ μικροῦ ἐμβόλου θὰ ἔχωμεν ὅτι ἐπὶ τοῦ ἐμβόλου τούτου μεταδίδεται πίεσις 5×8=40 K*g*.

(Διότι $\frac{F}{\Lambda}=\frac{\overline{BA}}{\overline{A\Gamma}}$ ἢ $\mathbf{F}.\ \overline{A\Gamma} = \overline{BA}.\ \Lambda$, ὅπερ εἶναι σταθερόν).

Ἐὰν δὲ καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ μεγάλου ἐμβόλου εἶναι ἔστω 100 φορὰς μεγαλυτέρα ἀπὸ τὴν ἐπιφ. τοῦ μικροῦ τότε σύμφωνα μὲ τὴν ἀρχὴν τοῦ *Pascal*, ἡ ἐπὶ τοῦ μεγάλου ἐμβόλου συνολικὴ πίεσις θὰ εἶναι 5×8×100=4000 χιλιόγραμμα. Ἑπομένως, ἐπὶ τῇ βάσει τῶν δεδομένων τῆς ὑποθέσεώς μας, εἶναι δυνατὸν μὲ δύναμιν **F**=5K*g*. νὰ ἐπιφέρωμεν πίεσιν 4000 χιλιογ. διὰ τοῦ ὑδραυλικοῦ πιεστηρίου.

Πιέσεις ἅς ἐξασκοῦν τὰ ὑγρὰ λόγῳ τοῦ βάρους των ἐπὶ διαφόρων ἐπιφανειῶν.

Κάθε σῶμα βυθιζόμενον ἐντὸς ὑγροῦ ὑφίσταται πιέσεις ἐπὶ ὅλης τῆς ἐπιφανείας του, ὀφειλομένας εἰς τὸ βάρος τοῦ πιέζοντος ὑγροῦ. Ἡ συνισταμένη P ὅλων τούτων τῶν πιέσεων, αἵτινες προέρχονται ἐκ τῆς βαρύτητος, ὀνομάζεται ὑδροσιατικὴ πίεσις.



Ἡ πίεσις ἤδη P τὴν ὁποίαν ὑφίσταται ὁ δίσκος A ἀπὸ τὸ κάτωθι ὑγρόν, βυθισμένος ἐντὸς αὐτοῦ, ἰσοῦται κατ' ἔντασιν μὲ τὸ βάρος ὑγρᾶς στήλης, ἐκ τοῦ ὑγροῦ τούτου, ἐχούσης βάσιν τὴν πιεζομένην ἐπιφάνειάν του ω καὶ ὕψος τῆς κατακόρυφον ἀπόστασιν h τοῦ κέντρου βάρους τοῦ δίσκου ἀπὸ τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ, εἴτε ὁ σωλὴν Γ εἶναι κατακόρυφος, εἴτε κεκλειμένος (Σχ. α καὶ β).

Ἤτοι $P = \omega h \varepsilon$, ἔνθα ε τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ πιέζοντος ὑγροῦ. (Ὡς γνωστὸν ἡ ἐπιφάνεια ω ἐπὶ τὸ ὕψος h, μᾶς δίδει τὸν ὄγκον τοῦ τμήματος τοῦ σωλῆνος τοῦ εὑρισκομένου ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ. Ἐὰν ὁ ὄγκος οὗτος πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ὑγροῦ μᾶς δίδει τὸ βάρος τοῦ ὑγροῦ τούτου).

Πιέσεις τὰς ὁποίας ἐξασκοῦν τὰ ὑγρὰ ἐπὶ τοῦ πυθμένος τοῦ δοχείου εἰς τὸ ὁποῖον περιέχονται.

Ὁ πυθμὴν ω τοῦ δοχείου (σχῆμα γ) ὑφίσταται πίεσιν P ἴσην κατ' ἔντασιν μὲ τὸ βάρος ὑγρᾶς στήλης, ἐχούσης βάσιν τὴν ἐπιφάνειαν ταύτην καὶ ὕψος τὴν κατακόρυφον ἀπόστασιν h τοῦ κέντρου βάρους αὐτῆς ἀπὸ τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ (Σχ. γ).

Ἤτοι $P = \omega h \varepsilon$

Πιέσεις τὰς ὁποίας ἐπιφέρουν τὰ ὑγρὰ ἐπὶ τῶν τοιχωμάτων τοῦ δοχείου εἰς ὅ περικλείονται.

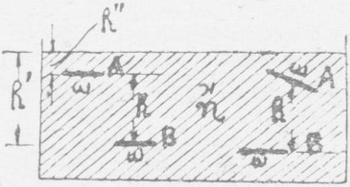
Ἡ πίεσις πάλιν P ἰσοῦται κατ' ἔντασιν πρὸς τὸ βάρος ὑγρᾶς στήλης, ἡ ὁποία ἔχει βάσιν τὴν πιεζομένην ἐπιφάνειαν ω (AB) (σχῆμα δ καὶ ε) καὶ ὕψος τὴν κατακόρυφον ἀπόστασιν τοῦ κέντρου βάρους αὐτῆς ἀπὸ τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ.

Ἤτοι $P = \omega\ h\ \varepsilon$.

Συνεπῶς 1) Ἡ συνισταμένη πασῶν τῶν πιέσεων, ἤτοι ἡ πίεσις τὴν ὁποίαν ἐξασκεῖ τὸ ὑγρὸν ἐπὶ τοῦ συνόλου τῶν τοιχωμάτων τοῦ δοχείου, ἰσοῦται πρὸς τὸ ὁλικὸν βάρος τοῦ ἐντὸς τοῦ δοχείου ὑγροῦ.

2) Εἰς πάντα τὰ σημεῖα ὁριζοντίου τινὸς στρώματος ὑγροῦ ἡ πίεσις εἶναι ἡ αὐτή.

3) Ἡ διαφορὰ τῶν πιέσεων μεταξὺ δύο ἴσων ἐπιφανειῶν A καὶ καὶ B (A=B=ω), ὑγροῦ ἐν ἰσορροπίᾳ, ἰσοῦται πρὸς τὸ βάρος ὑγρᾶς στήλης, ἐκ τοῦ ὑγροῦ τούτου, ἐχούσης βάσιν τὴν μίαν τῶν ἴσων ἐπιφανειῶν καὶ ὕψος τὴν κάθετον ἀπόστασιν αὐτῶν (σχῆμα στ).



(Σχ. στ)

$$P' - P'' = h'\ \omega\ \varepsilon - h''\ \omega\ \varepsilon = \omega\ \varepsilon\ (h' - h'') = \omega h \varepsilon$$

Ἀρχὴ Ἀρχιμήδους

Ἄνωσις, ἢ δύναμις ἀνώσεως A, εἶναι ἡ δύναμις ἐκείνη, ἡ ὁποία ἀναγκάζει ἕνα σῶμα τὸ ὁποῖον ἐβυθίσθη ἐντὸς ὑγροῦ νὰ χάσῃ τόσον ἐκ τοῦ βάρους του (ὅπερ δηλαδὴ εἶχε προτοῦ βυθισθῇ ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ) ὅσον εἶναι τὸ βάρος ὄγκου ὑγροῦ ἴσου πρὸς τὸν ὄγκον **ὁλοκλήρου τοῦ σώματος**, ἤτοι νὰ χάσῃ τόσον ἐκ τοῦ βάρους του, ὅσον εἶναι τὸ βάρος τοῦ ἐκτοπιζομένου ὑπὸ τοῦ σώματος ὑγροῦ.

Συνεπῶς ἡ δύναμις ἀνώσεως A, ἤτοι ἡ ὑπὸ τοῦ ὑγροῦ ἀσκηθεῖσα πίεσις ἐκ τῶν κάτω, δύναται νὰ παρασταθῇ κατ' ἔντασιν διὰ τοῦ βάρους τοῦ ἐκτοπιζομένου ὑγροῦ, ἤτοι δύναμις (βάρος) $\mathbf{A = m\ g = V\ \varepsilon\ g}$ (ἔνθα **V** ὁ ὄγκος τοῦ σώματος καὶ δεδομένου ὅτι $\mathbf{m = V\varepsilon}$· τὸ δὲ **ε** εἶναι τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ὑγροῦ) ὥστε κάθε σῶμα βυθισμένον ἔχει ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ βάρος τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται ἐὰν ἀπὸ τὸ πραγματικὸν, οὕτως εἰπεῖν, βάρος **B** (πραγματικὸν βάρος θεωρεῖται ἐκεῖνο ποὺ ἔχει τὸ σῶμα ὅταν εὑρίσκεται εἰς τὸν ἀέρα καὶ ὄχι ἐντὸς ὑγροῦ) ἀφαιρέσωμεν τὸ βάρος ὄγκου ὑγροῦ ἴσου πρὸς τὸν ὄγκον τοῦ σώματος, ἤτοι ἀφαιρέσωμεν τὴν ἄνωσιν **A**. Δηλαδὴ εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ ἄνωσις **A** εἶναι μικροτέρα τοῦ βάρους **B** τοῦ σώματος.

Πλέοντα Σώματα

Τὸ βάρος **B** (τὸ ὁποῖον δηλαδὴ ἔχει ἐκτὸς τοῦ ὕδατος) ἐπιπλέοντος σώματος (ὅπως π. χ. μιὰ λέμβος), ἰσοῦται πρὸς τὸ βάρος τοῦ ἐκτοπιζομένου ὑπὸ τοῦ ἐπιπλέοντος σώματος ὑγροῦ. Ἤτοι ἡ ἄνωσις **A** εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ βάρους **B** τοῦ σώματος,

Τὸ δὲ βάρος **B** αἰωρουμένου σώματος (δηλαδὴ σώματος οὗτινος ἡ ἀνωτέρα ἐπιφάνεια συμπίπτει μὲ τὴν ἀνωτέραν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ καὶ τὸ ὁποῖον διὰ νὰ αἰωρῆται ἔχασε ἀπὸ τὸ βάρος τοῦ **B** τόσον ὅσον ἦτο τὸ βάρος ὑγροῦ ὄγκου ἴσου πρὸς τὸν ὄγκον ὁλοκλήρου τοῦ σώματος) εἶναι ἴσον μὲ τὴν Ἄνωσιν, ἤτοι **A=B**.

Ἀνυψωτικὴ Δύναμις

Ἕνα σῶμα, τοῦ ὁποίου τὸ βάρος του **B** εἶναι μεγαλύτερον τῆς Ἀνώσεως **A**, ὡς εἴπομεν, θὰ βυθισθῇ, ἡ δὲ δύναμις **F**, ἥτις θὰ καταβληθῇ, ἵνα τὸ βυθισμένον σῶμα ἀνέλθῃ μέχρι τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὕδατος, θὰ ἰσοῦται μὲ B—A. Ἡ δύναμις αὕτη ἀνυψώσεως καλεῖται ἀνυψωτικὴ δύναμις, εἶναι δὲ αὕτη ἴση καὶ ἀντίθετος μὲ τὴν δύναμιν μὲ τὴν ὁποίαν βυθίζεται τοῦτο.

Ὥστε τότε **F=B—A**

Ἐὰν τὸ σῶμα αἰωρεῖται, τότε B=A καὶ συνεπῶς **F** ἴσον μὲ μηδέν. Ἤτοι **οὐδεμία ἀνυψωτικὴ δύναμις θὰ καταβληθῇ**, ἵνα τὸ σῶμα φθάσῃ μέχρι τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ, εἰς ἣν περίπτωσιν τὸ φέρωμεν (τὸ βυθίσωμεν) διὰ τῆς βίας ἐντὸς τούτου καὶ τὸ ἀφήσωμεν μετὰ ταῦτα ἐλεύθερον ν' ἀνέλθῃ μέχρι τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ.

Ἐὰν πάλιν τὸ σῶμα ἐπιπλέει καὶ τὸ βυθίσωμεν ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ, ἔπειτα δὲ τὸ ἀφήσωμεν ἐλεύθερον, τότε τοῦτο θὰ ἀνέλθῃ **μόνον του** διὰ ἀνυψωτικῆς δυνάμεως **F** ἥτις ἰσοῦται μὲ **A—B.**

Ἤτοι **F=A—B**

Καθορισμὸς μονάδων

Εἰς τοὺς καθορισθέντας προηγουμένως τύπους τὰ διάφορα ποσὰ ἐκφράζονται ἀντιστοίχως μὲ τὰς ἑξῆς μονάδας :

α) Εἰς τὸν τύπον $P=\omega h\varepsilon$. Ἐὰν ἡ πίεσις (δύναμις, βάρος) P εἰς γραμ., χιλιόγραμμα, ἢ τόννους, τότε ω εἰς τετραγωνικὰ ἑκατ. ἢ τετρ. παλάμας, ἢ τετρ. μέτρα. Τὸ h εἰς ἑκατ. παλάμας ἢ μέτρα καὶ τὸ ε εἶναι ὁ ἀριθμός, ὅστις μᾶς δίδει τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ σώματος.

β) Εἰς τὸν τύπον $\frac{F}{F'}=\frac{B}{B'}=\frac{E}{E'}$ τὰ μὲν **F** καὶ **F′** μὲ τὰς αὐτὰς μονάδας δυνάμεως ἢ βάρους τὰ δὲ **E** καὶ **E′**, μὲ τὰς αὐτὰς μονάδας ἐπιφανειῶν.

γ) Εἰς τοὺς τύπους $A = mg = Veg$, ἐὰν A εἰς δύνας, τὸ m εἰς γραμμάρια, g εἰς ἑκατοστά, τὸ **V** εἰς κυβικὰ ἑκατοστὰ καὶ τὸ ε εἶναι τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ σώματος.

Εἰδικὸν βάρος — Πυκνότης

Εἰδικὸν βάρος Ε, σώματος στερεοῦ ἢ ὑγροῦ, εἶναι ὁ λόγος τοῦ βάρους του Β (ἢ τοῦ βάρους ὄγκου τινὸς τοῦ σώματος τούτου) ὡς πρὸς τὸ βάρος **β** ἴσου ὄγκου ὕδατος ἀπεσταγμένου καὶ θερμοκρασίαι 4° C. ἢ ὅπερ τὸ αὐτὸ ὡς πρὸς τὸν ὄγκον **V** τοῦ σώματος.

Ἤτοι $\varepsilon = \frac{B}{\beta} = \frac{B}{V}$. ἐξ οὗ $B = V\varepsilon = \beta\varepsilon$

Τὰ **B** καὶ **β** ἐκφράζονται μὲ τὰς αὐτὰς μονάδας βάρους, ἤτοι εἰς τόννους, χιλιόγραμμα ἢ γραμμάρια καὶ τὸ **V** ἀντιστοίχως εἰς κυβικὰ μέτρα, κυβικὰς παλάμας ἢ κυβικὰ ἑκατοστά. Ὁ λόγος $\frac{B}{\beta}$ ὀνομάζεται καὶ πυκνότης τοῦ σώματος.

Τὴν μεγαλυτέραν πυκνότητα τὸ ὕδωρ, ἤτοι τὸ μεγαλύτερον βάρος ὑπὸ τὸν αὐτοῦ ὄγκον, τὴν ἔχει ὅταν εὑρίσκεται εἰς θερμοκρασίαν 0° καὶ εἶναι ἀπεσταγμένον. Δηλαδὴ μία κυβικὴ παλάμη ὕδατος θερμοκρασίας οὐχὶ 0° Κελσίου, οὔτε ἀπεσταγμένου, ζυγίζει ὀλιγότερον ἀπὸ τὸ 1 χιλιόγραμμον (1000 γραμ.), τὰ ὁποῖα ζυγίζει ἡ μία κυβικὴ παλάμη ὕδατος ἀπεσταγμένου καὶ θερμοκρασίας 4° Κελσίου. Οὕτω ἡ πυκνότης τοῦ ὕδατος ἐνῷ εἰς 4° Κ εἶναι 1, εἰς θερμοκρασίαν + 20° Κ εἶναι 0,998. (Κ=Κελσίου).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Διὰ τὴν εὕρεσιν τῶν βαρῶν ὑποθέτομεν, ὅτι τὰ σώματα εὑρίσκονται εἰς θερμοκρασίαν **C°** Κελσίου.

80) Δύναμίς τις 1500 **Kg** ἐνεργεῖ ἐπὶ ἐπιφανείας 150 $\mathbf{cm^2}$ Πόση ἡ ἐπιφερομένη πίεσις ἀνὰ τετραγωνικὸν ἑκατοστὸν αὐτῆς ; [Ἡ πίεσις νὰ εὑρεθῇ εἰς χιλιόγραμμα, (**Kg**), τόννους, εἰς γραμμάρια (**grammes**, ἢ **gr.**)καὶ εἰς **Baryes**].

81) Μία ἐπιφάνεια 200 $\mathbf{cm^2}$ (τετραγ. ἑκατ.) δέχεται πίεσιν 150 γραμμάρια ἀνὰ $\mathbf{cm^2}$ αὐτῆς. Ποία ἡ ἐνεργοῦσα ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας δύναμις ;

82) Μία δύναμις 1700 **Kg.** ἐνεργοῦσα ἐπὶ ἐπιφανείας τινὸς ἐπιφέρει πίεσιν 0,2 τόννους. Πόση εἶναι ἡ πιεζομένη ἐπιφάνεια ;

83) ἐντὸς συγκοινωνούντων δοχείων κινοῦνται ἔμβολεῖς, τῶν ὁποίων αἱ ἀκτῖνες τῶν βάσεων εἶναι 6 ἑκατ. καὶ 3 ἑκατ. Ποῖον βάρος πρέπει νὰ τεθῇ (δύναμις νὰ ἐφαρμοσθῇ) εἰς τὸν μεγάλον ἐμβολέα, διὰ νὰ ἰσορροπήσῃ βάρος (δύναμιν) 450 χιλιογράμμων (**Kg.**), τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ μικροῦ ἐμβολέως; (Σχ. **α** εἰς τὴν λύσιν τῆς ἀσκήσεως).

84) Ποίαν πίεσιν ὑφίσταται ἡ ἐπιφάνεια σφαίρας ἀκτῖνος 5 ἑκ., εὑρισκομένης ἐντὸς δοχείου περιέχοντος πετρέλαιον, οὗτινος τὸ εἰδικὸν βάρος εἶναι 0.95 καὶ τῆς ὁποίας τὸ κέντρον (ὅπερ διὰ τὴν σφαῖραν συμπίπτει καὶ μὲ τὸ κέντρον βάρους της) ἀπέχει 50 ἑκ. ἀπὸ τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ τούτου; (Ἀπὸ τί εἶναι καμωμένη ἡ σφαῖρα μᾶς εἶναι τελείως ἀδιάφορον ἐπὶ τοῦ προκειμένου). (Σχ. **β** εἰς τὴν λύσιν τῆς Ἀσκήσεως).

85) Ποία ἡ πίεσις ἀνὰ **cm²** ἐπιφανείας ἡ ἐπιφερομένη ὑπὸ βάρους 10000 γραμμαρίων, ἐνεργοῦντος ἐπὶ ἐπιφανείας 100 **cm²**;

86) Ἐντὸς συγκοινωνούντων δοχείων κινοῦνται 2 ἔμβολεῖς τομῆς τετραγώνου. Τὸ ἐμβαδὸν τῆς τομῆς τοῦ μικροῦ ἐμβολέως ὡς πρὸς τὴν τοῦ μεγάλου ἔχει λόγον $\frac{3}{7}$. Ποῖον πρέπει νὰ εἶναι τὸ βάρος (δύναμις), ὅπερ πρέπει νὰ τεθῇ ἐπὶ τοῦ μικροῦ ἐμβολέως, ἵνα ἰσσορροπήσῃ βάρος 500 Χιλιογ., ὅπερ τίθεται ἐπὶ τοῦ μεγάλου τοιούτου;

87) Ἐντὸς δεξαμενῆς περιεχούσης ὕδωρ εὑρίσκεται, ὡς τὸ σχῆμα **γ** (εἰς τὰς λύσεις) δεικνύει, κεκλεισμένον δοχεῖον **Α** σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, οὗτινος αἱ βάσεις εἶναι τετράγωνα πλευρᾶς 10 ἑκατ. **(cm)**. Ποία ἡ πίεσις ἥτις ἐπιφέρεται ὑπὸ τοῦ ἐν τῇ δεξαμενῇ ὕδατος εἰς τὴν ἄνω βάσιν τοῦ παραλληλεπιπέδου καὶ ποία εἰς τὴν κάτω βάσιν αὐτοῦ δεδομένου ὅτι, τὸ κέντρον βάρους τῆς μὲν ἄνω βάσεως ἀπέχει ἀπὸ τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας 10 ἑκ. τὸ δὲ κέντρον βάρους τῆς κάτω βάσεως 20 ἑκ;

88) Ἐντὸς δοχείου **Α** σχήματος κολούρου κώνου (Σχῆμα **δ** εἰς τὰς λύσεις τῶν ἀσκήσεων) ὑπάρχει ἔλαιον, ἐντὸς δὲ ἑτέρου τῶν αὐτῶν ἀκριβῶς διαστάσεων καὶ σχήματος, ὑπάρχει ὕδωρ. Ἡ βάσις τῶν δοχείων εἶναι κύκλος διαμέτρου 10 ἑκ. Ποία ἡ ἐπὶ τοῦ πυθμένος **γδ** καὶ ποία ἡ ἐπὶ τοῦ πυθμένος **αβ** ἐπιφερομένη πίεσις ὑπὸ τῶν ὑγρῶν δεδομένου ὅτι τὸ ὕψος τῶν βάσεων τούτων ἀπὸ τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας τῶν ὑγρῶν εἰς ἀμφότερα τὰ δοχεῖα εἶναι 10 ἑκ; (Εἰδικὸν βάρος ἐλαίου 0,9—Τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ὕδατος=**1**. Ὡς γνωστὸν **1** κυβικὸν ἑκ. ὕδατος ἀπεσταγμένου καὶ θερμ. **4°** Κελσίου **(C)** ζυγίζει ἓν γραμμάριον. Ἐνταῦθα τὸ ἀπεσταγμένον ἢ μὴ τοῦ ὕδατος καὶ ἡ θερμοκρασία αὐτοῦ δὲν λαμβάνονται ὑπ᾽ ὄψιν).

89) Πρόκειται περὶ τοῦ ἰδίου δοχείου τῆς ἀσκήσεως 84, ἐμβαπτιζόμενον ὁμοίως ἐντὸς τοῦ ὕδατος.

1) Ποία ἡ ἐπὶ τῆς μιᾶς τῶν παραπλεύρως ἐπιφανειῶν του, ἔστω τῆς εζηθ (Σχ. ε, εἰς τὰς Λύσεις) ἐξασκουμένη ὑπὸ τοῦ ὕδατος πίεσις δεδομένου ὅτι, τὸ κέντρον βάρους αὐτοῦ ἀπέχει ἀπὸ τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας 12 ἑκ. καὶ ὅτι ἡ διάστασις εη=30 ἑκ.;

2) Ποία ἡ ὑπὸ τοῦ ὕδατος ἐπιφερομένη πίεσις ἐπὶ τμήματος ΑΒ τῶν τοιχωμάτων τῆς δεξαμενῆς, ἐὰν ἡ ἐπιφάνεια αὕτη ἔχει ἐμβαδὸν 100 *cm*.², τὸ δὲ κέντρον βάρους της ἀπέχει ἀπὸ τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας 100 ἑκατ.

90) Δοχεῖον σχήματος κολούρου κώνου, οὗτινος ἡ κάτω βάσις ἔχει διάμετρον 5 ἑκ., ἡ ἄνω βάσις 10 ἑκ., τὸ δὲ ὕψος τοῦ κολούρου κώνου εἶναι 20 ἑκ., εἶναι πεπληρωμένον ὕδατος. Νὰ εὑρεθῶσιν :

α) Ποία ἡ πίεσις ἡ ἐπιφερομένη ἐπὶ τῆς κάτω ἐπιφανείας τοῦ δοχείου (πυθμένος) β) Ποία ἡ ἐπὶ τοῦ συνόλου τῶν τοιχωμάτων, ἤτοι ἡ πίεσις ἡ ἐπὶ τῶν πλευρῶν καὶ τοῦ πυθμένος καὶ γ) Ἐὰν φαντασθῶμεν τὸ δοχεῖον τεμνόμενον ὑπὸ ὁριζοντίου ἐπιπέδου, παραλλήλου πρὸς τὰς βάσεις, ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ ὑγροῦ τὰ ἐντὸς τοῦ ποτηρίου εὑρισκόμενα καὶ κείμενα ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου δέχονται, ἢ ὄχι, τὴν αὐτὴν πίεσιν ;

91) Εἰς τὴν ἄνω βάσιν βαρελίου (Σχ. στ, εἰς τὰς λύσεις) πλήρους ὕδατος καὶ ὕψους 90 ἑκ προσαρμόζεται σωλὴν ὕψους 3.75 μέτ. καὶ πληροῦται καὶ οὗτος ὕδατος, Πόση εἶναι ἡ ἀσκουμένη πίεσις εἰς τόννους ἐπὶ ἑκάστης τῶν δύο ἴσων βάσεων τοῦ βαρελίου, ἐὰν ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως εἶναι 15 μέτρα; **Σημείωσις** ὅταν ὁ ὄγκος ἑνὸς στερεοῦ λαμβάνεται εἰς κυβικὰ μέτρα τὸ βάρος ἐκφράζεται εἰς τόνννους, ἐὰν εἰς κυβ. παλάμας τὸ βάρος εἰς χιλιόγρ. καὶ ἐὰν εἰς κυβ. ἑκατ. τὸ βάρος ἐκφράζεται εἰς γραμμάρια. Διότι 1 $μ^3$ ὕδατος ζυγίζει 1 τόννον (1000 χιλγμ), 1 κυβ. παλάμη ζυγίζει 1 χιλιόγραμμον καὶ 1 κυβ. ἑκατ. ζυγίζει 1 γραμμ., ὑποτιθεμένου βέβαια εἰς τὰς προκειμένας ἀσκήσεις τοῦ ὕδατος ἀπεσταγμένου καὶ θερμοκρασίας 4°**C** (Κελσίου).

92) Οἱ βραχίονες ὑδραυλικοῦ πιεστηρίου εἶναι 120 ἑκ. καὶ 12 ἑκ., αἱ δὲ τομαὶ τῶν ἐμβολέων (ἐμβόλων) εἶναι 0,280 τετρ. ἑκατοστὰ τοῦ ἑνὸς καὶ 0,005 τετ. ἑκατ. τοῦ ἄλλου. Πόση εἶναι ἡ πίεσις **F**, τὴν ὁποίαν ἐξασκεῖ τὸ πιεστήριον, ἐὰν εἰς τὸ ἄκρον τοῦ μεγάλου μοχλοβραχίονος (μοχλοβραχίονος δυνάμεως) ἐνεργεῖ δύναμις **F′**=42 χιλιόγραμμα ;

93) Τὸ βάρος σώματος τινὸς εἶναι 125,15 γραμμ , ὁ δὲ ὄγκος του 80 κυβικὰ ἑκατοστά. Νὰ εὑρεθῇ τὸ εἰδικὸν βάρος του.

94) Ποῖον τὸ βάρος σιδηροῦ κυλίνδρου τοῦ ὁποίου ἡ διάμετρος τῆς βάσεως εἶναι 0,568 μ. τὸ δὲ ὕψος 3,367 μ. ; (Εἰδικὸν βάρος σιδήρου 7,8).

95) Ποῖος εἶναι ὁ ὄγκος μολύβδου, ὁ ὁποῖος τιθέμενος εἰς δίσκον ζυγοῦ τινὸς ἰσορροπεῖ σίδηρον τοῦ ὁποίου ὁ ὄγκος εἶναι 565 κυβ. ἑκατοστά ; (Εἰδ. βάρος μολ. 11,3 τοῦ δὲ σιδήρου 7,8).

Σημείωσις. Λέγοντας, ὅτι τὸ εἰδικὸν βάρος, ἔστω τοῦ σιδήρου, εἶναι 7,8 ἐννοοῦμεν, ὅτι ἐὰν πάρωμεν ἕνα τεμάχιον σιδήρου οἱουδήποτε ὄγκου καὶ τὸ ζυγίσωμεν καὶ ἕνα ὄγκον ὕδατος (ἀπεσταγμένου καὶ θερμ. 4°**C**), ἴσον μὲ τὸν ὄγκον τοῦ σιδήρου ποὺ ἐπήραμεν, καὶ τὸν ζυγίσωμεν καὶ αὐτόν, τότε ὁ σίδηρος θὰ ζυγίζῃ 7,8 φορὰς περισσότερον ἀπ᾽ ὅτι ζυγίζει τὸ ὕδωρ.

96) Νὰ εὑρεθῇ ἡ πίεσις ἡ ἐξασκουμένη ἐπὶ τῆς βάσεως ποτηρίου σχήματος κολούρου κώνου, (ὡς τὸ σχ. **ζ**, εἰς τὰς λύσεις), πεπληρωμένου ὕδατος καὶ ποία ἐὰν τοῦτο εἶναι πεπληρωμάνον ἐλαίου. (Εἰδ. βάρος ἐλαίου ἔστω 0,91).

97) Πόσα χιλιόγραμμα ἐλαίου χωρεῖ κυλινδρικὸν δοχεῖον τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως εἶναι 0,6 μ. τὸ δὲ ὕψος 1,30 μ, ; (**ε**=0.9).

98) Σῶμα τι, σχήματος κύβου, οὗτινος ἡ ἀκμὴ εἶναι 15 ἑκ. καὶ εἰδικοῦ βάρους 2, βυθίζεται ἐντὸς ἐλαίου. Ζητεῖται α) Πόσον εἶναι ἡ ἄνωσις β) Πόσον ζυγίζει τοῦτο ἐντὸς τοῦ ἐλαίου καὶ γ) Ποία ἡ ἀνυψωτικὴ δύναμις (δηλαδὴ τὶ δύναμιν πρέπει νὰ καταβάλῃ τις γιὰ νὰ τὸ ἀνυψώσῃ ἀπὸ τοῦ πυθμένος μέχρι τῆς ἐπιφανείας τοῦ ἐλαίου.

99) Σῶμά τι αἰωρεῖται ἐντὸς ὑγροῦ Νὰ εὑρεθῇ α) μὲ τὶ ἰσοῦται ἡ δύναμις ἀνώσεως, δηλαδὴ ἡ πίεσις ἡ ἐξασκουμένη ὑπὸ τοῦ ὑγροῦ ἐπὶ τοῦ σώματος τούτου, ἢ ἄλλως πῶς τὸ βάρος τοῦ ἐκτοπιζομένου ὑπὸ τοῦ σώματος ὑγροῦ). β) Ἐὰν τὸ σῶμα τοῦτο ἐπέπλεε μὲ τὶ θὰ ἰσοῦτο τὸ βάρος του; καὶ γ) Ἐὰν τὸ σῶμα ἦτο βυθισμένον ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ κατὰ πόσον θὰ ἐζύγιζε ὀλιγότερον ἀπ' ὅτι τὸ βάρος του; (ἀπ' ὅτι δηλαδὴ θὰ ἐζύγιζε ἐκτὸς τοῦ ὑγροῦ ;)

100) Πόσα γραμμάρια ζυγίζει ἐντὸς πετρελαίου χαλκίνη σφαῖρα ἀκτῖνος **α=4** ἑκ ἂν τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ χαλκοῦ εἶναι 8,9 καὶ τὸ τοῦ πετρελαίου 0,84 ;

101) Τεμάχιον μαρμάρου 500 κυβ. παλαμῶν εὑρίσκεται ἐντὸς ὕδατος. Νὰ εὑρεθῇ πόσην δύναμιν πρέπει νὰ καταβάλλωμεν διὰ ν' ἀνυψώσωμεν τοῦτο μέχρι τῆς ἐπιφανείας (Εἰδ. βάρος μαρμάρου 2,9).

102) Ποτήριον ὑέλινον ἔχει τὴν μορφὴν κολούρου κώνου, τοῦ ὁποίου ὁ πυθμὴν ἔχει ἐπιφάνειαν $β_1$=9 τετρ. ἑκατ., ἡ ἄνω βάσις ἡ ἀνοικτὴ ἐπιφάνειαν $β_2$=25 τετ. ἑκατ. Τὸ ὕψος του εἶναι 10 ἑκατ. Ζητεῖται 1) Ἡ πίεσις ἐπὶ τοῦ πυθμένος ὅταν τὸ δοχεῖον εἶναι πλῆρες ὕδατος 2) ἡ σχέσις τῆς πιέσεως ταύτης πρὸς τὸ βάρος τοῦ περιεχομένου ὕδατος καὶ 3) Πόσον εἶναι τὸ βάρος τοῦ ὑδραργύρου τὸν ὁποῖον δύναται νὰ περιλάβῃ ὁλόκληρον τὸ δοχεῖον [Εἰδ. βάρος ὑδραργύρου ε= 13,6. Σχ. **η** λύσεων].

Σημείωσις. Ὅταν λέγομεν ποία ἡ σχέσις μεταξὺ δύο μεγεθῶν θέλομεν νὰ εἴπωμεν, ποῖος ὁ λόγος τοῦ ἑνὸς μεγέθους πρὸς τὸ ἄλλο, τουτέστι πόσες φορὲς τὸ ἕνα μέγεθος εἶναι μεγαλύτερο ἢ μικρότερο τοῦ ἄλλου.

103) Δοχεῖον σχήματος ὀρθοῦ κυκλικοῦ κυλίνδρου, ἀκτῖνος βάσεως **r** καὶ ὕψους **h** (Σχ. **ϑ**, εἰς τὰς λύσεις) πρόκειται νὰ πληροῦται ὕδατος καὶ θέλομεν ἡ ἐπὶ τῆς κυλινδρικῆς αὐτοῦ ἐπιφανείας ὁλικὴ πίεσις νὰ εἶναι διπλασία τῆς τοῦ πυθμένος (βάσεως). Ζητεῖται εἰς ποίαν σχέσιν πρέπει πρὸς τοῦτο νὰ εὑρίσκωνται τὰ μεγέθη **r** καὶ **h** ;

104) Δοχεῖον σχήματος ὀρθοῦ κυλίνθρου ἀκτῖνος **r** καὶ ὕψους **h** πρόκειται νὰ πληροῦται πετρελαίου, θέλομεν δὲ ἡ ἐπὶ τοῦ πυθμένος πίεσις νὰ ἦναι ἴση μὲ τὴν πίεσιν ἐπὶ τῆς κυλινδρικῆς του ἐπιφανείας. Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ σχέσις μεταξὺ τῶν μεγεθῶν **r** καὶ **h** ;

105) Ποῖον εἶναι τὸ πάχος (δηλαδὴ ὕψος) μολυβδίνου δίσκου, ὁ ὁποῖος πρέπει νὰ ἐπικολληθῇ ἐπὶ κυλίνδρου ἐκ φελλοῦ τῆς αὐτῆς τομῆς **ω** (ἐπιφανείας) καὶ ὕψους 8 ἑκ., διὰ νὰ κρατηθῇ ὁ κύλινδρος μετέωρος (αἰωρούμενος) ἐντὸς τοῦ ὕδατος ; (Εἰδ. βάρος μολύβδου 11,3, εἰδ. βάρος φελλοῦ 0,24)—(Σχ. **ι** εἰς τὰς Λύσεις).

106) Ποία ἡ διαφορὰ πιέσεων μεταξὺ δύο ἴσων καὶ παραλλήλων ἐπιφανειῶν εὑρισκομένων ἐντὸς δοχείου περιέχοντος πετρέλαιον, ἐχουσῶν ἐμβαδὸν ἑκάστη 100 $\mathbf{cm}^2$ καὶ τῶν ὁποίων τὸ κέντρον βάρους ἀπέχει ἀπὸ τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ τῆς μὲν μιᾶς 3 **m** τῆς δ' ἑτέρας 200 **cm.** ;—Εἰδ. βάρος πετρελαίου ἔστω 0,8.

107) Ποῖον πρέπει νὰ εἶναι τὸ πάχος (ὕψος) **h**, κυλίνδρου ἐκ φελλοῦ, ὅστις πρέπει νὰ ἐπικολληθῇ ἐπὶ χαλκίνου δίσκου τῆς αὐτῆς μὲ τὸν φελλὸν τομῆς **ω**, καὶ πάχους **h**=5 χιλιοστά, ἵνα ὁ κύλινδρος οὗτος παραμείνῃ μετέωρος ἐντὸς θαλασσίου ὕδατος ; β) Ποίας τιμὰς πρέπει νὰ ἔχῃ ἑκάτερον τῶν ὑψῶν **h** καὶ **h'**, διατηρουμένης φυσικὰ τῆς ἰδίας τομῆς, ἵνα ὁ χάλκινος δίσκος μετὰ τοῦ φελλοῦ παύσῃ πλέον νὰ αἰωρῆται καὶ βυθισθῇ ; Τὸ εἰδικὸν βάρος φελλοῦ **ε**=0,24, **ε'**=8,83=εἰδικὸν βάρος χαλκοῦ, **ε''**=1,02 εἰδ. βάρος θαλασ. ὕδατος.

108) Σφαῖρα ἐκ φελλοῦ, εἰδικοῦ βάρους **ε**=0,24, φέρεται ὑπὸ τὸ ὕδωρ εἰς βάθος 10 μέτρων καὶ ἀφίεται τότε ἐλευθέρα. Εἰς πόσον χρόνον θὰ φθάσῃ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὕδατος ;

109) α) Ἕνα σῶμα τοῦ ὁποίου τὸ εἰδικὸν βάρος εἶναι μεγαλύτερον τῆς μονάδος, ριπτόμενον ἐντὸς ὕδατος τί θὰ κάμῃ ; Τί θὰ ἔκαμνε ἐὰν εἶχε τὸ ἴδιον εἰδικὸν βάρος μὲ τὸ ὕδωρ καὶ τί ἐὰν ὀλιγότερον εἰδικὸν βάρος αὐτοῦ ;

β) Ἑνὸς σώματος βάρους **Β**, τὸ εἰδικὸν βάρος εἶναι μεγαλύτερον τοῦ εἰδικοῦ βάρους τοῦ ὑγροῦ ἐντὸς τοῦ ὁποίου ρίπτεται. Ἡ ἄνωσίς του ὅταν ριφθῇ ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ τούτου εἶναι **Α.** Ποῖον τὸ βάρος τοῦ σώματος τούτου ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ ; Πόση ἡ ἀνυψωτική του δύναμις ; Πόση δύναμις χρειάζεται διὰ νὰ τὸ ἀναβιβάσω μέχρι τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ ;

γ) Ἐπὶ σώμακος βάρους **Β** τὸ εἰδικὸν βάρος εἶναι μικρότερον τοῦ ὑγροῦ ἐντὸς τοῦ ὁποίου πρόκειται νὰ ριφθῇ. Ἡ ἄνωσίς του εἶναι **Α**. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην τὸ σῶμα θὰ ἐπιπλέῃ, θὰ αἰωρῆται, ἢ θὰ εἶναι βυθισμένον ; Καὶ πόση δύναμις θὰ χρειασθῇ γιὰ νὰ τὸ ἀναγκάσῃ, ἐὰν ἐπιπλέῃ, νὰ αἰωρῆται ; Ἐὰν τοῦ δώσωμεν περισσοτέραν δύναμιν (βάρος) τί θὰ κάμῃ τὸ σῶμα ;

110) Τεμάχιον ξύλου σχήματος κύβου, πλευρᾶς 10 ἑκ. ἐπιπλέον εὑρίσκεται κατὰ τὸ ἥμισυ ἐντὸς τοῦ ὕδατος. Νὰ εὑρεθοῦν α) Τὸ βάρος του β) ἡ ἀνυψωτικὴ δύναμις καὶ πλέον συγκεκριμένως, ἡ δύναμις, ἥτις θὰ ἠνάγκαζε τοῦτο ἐὰν τὸ ἐβυθίζαμεν ν' ἀνέλθῃ πάλιν (ὡς ἐλαφρότερον τοῦ ὕδατος) εἰς τὴν προτέραν του θέσιν.

111) Εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὕδατος ἀφήνεται νὰ βυθισθῇ σῶμα, τὸ ὁποῖον φθάνει εἰς τὸν πυθμένα μετὰ 8''. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ βάθος, ἐὰν τὸ εἰδικὸν βάρος του εἶναι 3.

112) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ βάρος σώματος, εἰδικοῦ βάρους 3, σχήματος κύβου πλευρᾶς 2,5 παλαμῶν β) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἄνωσίς του καὶ γ) ἡ ἀνυψωτική του δύναμις.

113) α) Ποῖον ποσὸν ὕδατος **Q** πρέπει νὰ ἐκρέῃ θεωρητικῶς εἰς 60″ ἀπὸ μίαν ὀπὴν διατομῆς **E**=0;092 τετραγωνικῶν δεκάτων, ἡ ὁποία εὑρίσκεται εἰς βάθος **h** ἴσον μὲ 14 δέκατα κάτωθεν τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὕδατος καὶ ἥτις διατηρεῖται σταθερά ; (εἰς σταθερὸν ὕψος) β) Ποία ποσότης **Q′** ἐκρέει πράγματι ἂν ὁ συντελεστὴς συστολῆς τοῦ ὕδατος εἶναι 0,62 ; γ) Ποία ποσότης θὰ ἔρρεε πράγματι ἐὰν ἐπρόκειτο περὶ ὕδατος ; (Ἔστω ὁ ἴδιος συντελεστὴς συστολῆς διὰ τὸ ἔλαιον).

Σημείωσις. Ἡ παλάμη λέγεται καὶ δέκατον καὶ ἡ τετραγωνικὴ παλάμη καὶ τετραγωνικὸν δέκατον. Ὁμοίως τὸ χιλιόγραμμον λέγεται καὶ λίτρον.

Γ.′ ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΩΝ ΑΕΡΙΩΝ

ΑΕΡΟΣΤΑΤΙΚΗ

Ἡ ἀεροστατικὴ ἐξετάζει τὰ εὑρισκόμενα ἐν ἰσορροπίᾳ ἀέρια.

Ἤτοι ἡ ἀεροστατικὴ ἐξετάζει τὴν πίεσιν τὴν ὁποίαν τ᾽ ἀέρια ὑφίστανται ὅταν κάποια δύναμις (βάρος, πίεσις) ἐνεργήσῃ ἐπ᾽ αὐτῶν, ἢ ἐξετάζει τὴν πίεσιν τὴν ὁποίαν τ᾽ ἀέρια ἐξασκοῦν ἐπὶ τῶν πέριξ ἀντικειμένων μεθ᾽ ὧν ἔρχονται εἰς ἐπαφήν.

Τὰ ἀέρια εἶναι ρωοδέστερα τῶν ὑγρῶν, ἐκτατά, λίαν συμπιεστὰ καὶ τελείως ἐλαστικά, Ἕνεκα τῆς ἰδιότητος τοῦ ἐκτατοῦ τὰ ἀέρια ἐγκλειόμενα εἰς κλειστὸν χῶρον ἐξασκοῦν πίεσιν ἐπὶ τῶν τοιχωμάτων, ἥτις καὶ εἰς ταῦτα μεταδίδεται διὰ τῆς ἐλαστικότητος καὶ εἶναι μεγαλυτέρα παρ᾽ ὅτι εἰς τὰ ὑγρά, ἔτι δὲ μεγαλυτέρα παρ᾽ ὅτι εἰς τὰ στερεά.

Τὰ ἀέρια, ὡς ἔχοντα τὰς αὐτὰς περίπου ἰδιότητας μὲ τὰ ὑγρά, ἀκολουθοῦν τὰς ἰδίας ἀρχὰς (π χ. ἀρχὴ **Pascal**, Ἄνωσις, Ἀνυψ. δύναμις. πιέσεις ἐπιφανειῶν κλπ.) τὰς ὁποίας καὶ ταῦτα.

Εἰς τὴν ἔννοιαν τῆς λέξεως ἀέριον συμπεριλαμβάνεται καὶ ὁ ἀτμοσφαιρικὸς ἀήρ.

Ὡς πρακτικὴ μονὰς πιέσεως τῶν ἀερίων λαμβάνεται ἡ πίεσις ἡ ἐξασκουμένη ὑπὸ δυνάμεως (βάρους) 1033 γραμμαρίων ἤτοι 1,033 χιλιογράμμων ἐπὶ ἐπιφανείας 1 τετρ. ἑκατοστοῦ. Ἡ πίεσις αὕτη καλεῖται πίεσις μιᾶς ἀτμοσφαίρας, ἀντιστοιχεῖ μὲ βάρος στήλης ὑδραργύρου τομῆς 1 τετ. ἑκατ. καὶ ὕψους 0.76 μ., ὑπὸ θερμοκρασίαν **O** βαθμῶν Κελσίου (**O°KἢO°**C), καὶ ὑφίσταται ἡ πίεσις αὕτη εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς θαλάσσης. Ἢ ἐπειδὴ τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ὑδραργύρου εἶναι 13,6 δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν ὅτι ἡ πίεσις μιᾶς ἀτμοσφαίρας ἀνὰ **cm^2** ἀντιστοιχεῖ μὲ βάρος στήλης ὕδατος τομῆς 1 **cm^2** καὶ ὕψους $0.76 \times 13{,}6 = 10{,}33$ μ., ὅπερ ἀντιστοιχεῖ εἰς βάρος 1033 γραμμαρίων ἀνὰ **cm^2**, ὡς καὶ προηγουμένως ἀναφέραμεν. Ἢ ὅπερ τὸ αὐτό, ἡ πίεσις μιᾶς ἀτμοσφαίρας, ἀνὰ **cm^2** ἀντιστοιχεῖ μὲ ὕψος στήλης ὕδατος 10,33 μέτρων, ἢ μὲ ὕψος στήλης ὑδραργύρου 0,76 ἐκ. (ὅταν χρησιμοποιοῦμεν τὴν ἐκφρασιν, στήλης ὑδραργύρου ἢ ὕδατος, εὐνόητον τυγχάνει ὅτι δὲν πρέπει νὰ προσθέσωμεν τὴν ἔνδειξιν **ἀνὰ τετραγωνικὸν ἑκατοστόν**).

Ἡ πίεσις στήλης ὑδραργύρου ὕψους 76 ἑκατοστά, ἤτοι 760 χιλιστὰ καὶ ὑπὸ θερμοκρασίαν 0° Κελσίου καλεῖται, **κανονικὴ πίεσις.**

Συνεπῶς, 1 ἀτμόσφαιρα ἀνα cm^2, ἰσοῦται μὲ πίεσιν (βάρος) 1033 γρ. ἀνὰ τετρ. ἑκατοστὸν ἢ 1,033 χιλγ. ἀνὰ τετρ. έκ ἢ ἀντιστοιχεῖ μὲ ὕψος στήλης ὑδραργύρου 76 ἑκ., ἢ μὲ στήλην ὕδατος ὕψους 10,33 μέτρων.

Ἡ ἀτμοσφαιρικὴ (βαρομετρικὴ) πίεσις ἐφ᾽ ὅσον ἀνερχόμεθα κατὰ 10, 5 μέτρα ἐλαττοῦται κατὰ ἓν χιλιοστὸν στήλης ὑδραργύρου, ὅπερ ἀντιστοιχεῖ εἰς βάρος 1,357 γραμμαρίων ἀνὰ τετρ. ἑκατοστόν.

Εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς θαλάσσης καὶ ὑπὸ θερμοκρασίαν 0° Κελσίου ἡ πίεσις εἶναι 76 ἑκατ. ὕψους στήλης ὑδραργύρου ἢ 760 χιλιοστά, ἤτοι πίεσις μιᾶς ἀτμοσφαίρας· ἐφ᾽ ὅσον ὅμως κατερχόμεθα κατὰ δέκα μέτρα ἐντὸς τῆς θαλάσσης ἢ κατὰ 10,33 ἐντὸς γλυκέος ὕδατος, εἶναι εὐνόητον ὅτι, αὐξάνει ἡ πίεσις κατὰ μίαν ἀτμόσφαιραν.

Σημείωσις. Ἡ θάλασσα, ὡς ἔχουσα μεγαλυτέραν πυκνότητα ἀπαιτεῖ βάθος μικρότερον τῶν 10,33 μ., ἤτοι 10 μόνον μέτρα βάθους, διὰ νὰ αὐξήσῃ ἡ πίεσις κατὰ μίαν ἀτμόσφαιραν.

Εἰδικὸν βάρος ἀερίων

Εἰδικὸν βάρος ἀερίου, θερμοκρασίας 0° Κελσίου καὶ ὑπὸ κανονικὴν πίεσιν, καλεῖται ὁ λόγος τοῦ βάρους ὄγκου τινὸς τοῦ ἀερίου τούτου ὡς πρὸς τὸ βάρος ἴσου ὄγκου ἀέρος θερμοκρασίας 0° Κελσίου ὑπὸ κανονικὴν πίεσιν (760 χιλ. ὕψους στήλης ὑδραργύρου).

Ἐνῶ, μία κυβικὴ παλάμη ὕδατος ἀπεσταγμένου καὶ θερμοκρασίας 4° Κελσίου ζυγίζει ἕνα χιλιόγραμμον, ἡ μία κυβικὴ παλάμη ἀέρος θερμοκρασίας 0° Κελσίου καὶ ὑπὸ κανονικὴν πίεσιν, ζυγίζει 1, 293 γραμμάρια, ἤτοι ἓν κυβ. ἑκ. ἀέρος ζυγίζει 0,001293 γραμ. (πυκνότης ἀέρος). Τουτέστιν ὁ ἀὴρ εἰς θερμοκρασίαν 0° Κ. καὶ κανονικὴν πίεσιν εἶναι 773 φορὰς ἐλαφρύτερος ἀπ᾽ ὅτι βάρος ὕδατος τοῦ ἰδίου πρὸς τὸν ἀέρα ὄγκου θερμ. 4° Κ. καὶ ἀπεσταγμένου.

Μία κυβικὴ παλάμη ὀξυγόνου ζυγίζει 1, 429 γραμ. Ἄρα τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ὀξυγόνου εἶναι $\frac{1,429}{1,293}$ ἤτοι περίπου 1,104. Ὥστε τὸ ὀξυγόνον εἶναι βαρύτερον τοῦ ἀέρος, ἐνῶ τὸ ὑδρογόνον εἶναι ἐλαφρύτερον αὐτοῦ. Ἡ πυκνότης τοῦ ὀξυγόνου, ἤτοι τὸ βάρος εἰς γραμμάρια ἑνὸς κυβικοῦ ἑκατοστοῦ ὀξυγόνου, εἶναι 0,001429 γραμμάρια.

Εἰδικὸν βάρος τῶν ἀερίων ἐν σχέσει μὲ τὸ ὕδωρ

Τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ἀέρος, ἐν σχέσει μὲ τὸ ὕδωρ, εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ βάρους μιᾶς ἔστω κυβικῆς παλάμης, ἢ ἑνὸς κυβικοῦ ἑκατοστοῦ ἀέρος, ἢ ἑνὸς κυβικοῦ μέτρου ἀέρος, θερμοκρασίας **0° Κ** καὶ κανονικῆς πιέσεως, διὰ τοῦ βάρους, ἀντιστοίχως, μιᾶς κυδικῆς παλάμης ἢ ἑνὸς κυβικοῦ ἑκατοστοῦ ἢ ἑνὸς κυβικοῦ μέτρου, ὕδατος ἀπεσταγμένου καὶ θερμοκρασίας 4° K.

Ἤτοι $\frac{1,293}{1000}=0,001293$ εἶναι τὸ εἰδ. βάρος τοῦ ἀέρος ὡς πρὸς τὸ ὕδωρ.

Ἐὰν τώρα θελήσωμεν νὰ εὕρωμεν τὸ εἰδικὸν βάρος ἄλλων ἀερίων **ὡς πρὸς τὸ ὕδωρ,** πολλαπλασιάζομεν τὰ εἰδικὰ βάρη αὐτῶν (ὡς πρὸς τὸν ἀέρα) ἐπὶ 0,001293.

Νόμος Mariotte Boyle

Οἱ ὄγκοι τοὺς ὁποίους καταλαμβάνει ὡρισμένη ποσότης ἀερίου τινός, ὑπὸ σταθερὰν θερμοκρασίαν, εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν ἐπιφερομένων πιέσεων ἐπ᾽ αὐτοῦ· ἤτοι.

$$\frac{P}{P'}=\frac{V'}{V} \quad (1)$$

Ἔνθα P, P′ αἱ πιέσεις, ἀμφότεραι μὲ τὰς αὐτὰς μονάδας πιέσεως (ἑκατοστὰ ἢ χιλιοστὰ στήλης ὑδραργύρου, ἢ εἰς ἀτμοσφαίρας κλπ) καὶ V, V′ οἱ ὄγκοι αὐτοῦ, ἐκφραζόμενοι μὲ τὰς αὐτὰς μονάδας ὄγκου ἀμφότεροι (κυβικὰ ἑκατοστά, κυβικαὶ παλάμαι ἢ κυβικὰ μέτρα).

Ἐκ τοῦ **τύπου** (1) λαμβάνομεν:

$PV=P'V'$, ἤτοι τὸ γινόμενον, τῆς πιέσεως, ἣν ὑφίσταται ἀέριον, ἐπὶ τὸν ὄγκον τὸν ὁποῖον ἔχει ὑπὸ τὴν πίεσιν ταύτην εἶναι ποσότης σταθερὰ καὶ καλεῖται **ἐλαστικὴ δύναμις τοῦ ἀερίου.**

Ἔστωσαν ἤδη ε καὶ ε′ αἱ πυκνότητες τοῦ ἀερίου (εἰδικὰ βάρη) μάζης m (βάρους B) παρουσιάζοντος ὄγκους V καὶ V′, ὑπὸ τὰς πιέσεις P καὶ P′ καὶ ὑπὸ τὴν αὐτὴν θερμοκρασίαν. Ὁπότε ἔχομεν:

$$m=V\varepsilon \text{ ἢ } B=V\varepsilon \text{ ἄρα } V=\frac{m}{\varepsilon}=\frac{B}{\varepsilon}$$

$$m=V'\varepsilon' \text{ ἢ } B=V'\varepsilon' \text{ ἄρα } V'=\frac{m}{\varepsilon'}=\frac{B}{\varepsilon'}$$

Διαιροῦντες κατὰ μέλη τὰς τελευταίας λαμβάνομεν.

$$\frac{V}{V'}=\frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \quad (2)$$

Ἤτοι οἱ ὄγκοι ἀερίου τινὸς ὑπὸ τὴν αὐτὴν θερμοκρασίαν εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν πυκνοτήτων των (εἰδικῶν βαρῶν).

Συγκρίνοντες τοὺς τύπους (1) καὶ (2) λαμβάνομεν:

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}=\frac{P}{P'} \quad (3)$$

Ἦτοι αἱ πυκνότητες (εἰδικὰ βάρη) ἀερίου τινὸς, εἶναι ἀνάλογοι τῶν πιέσεων τῶν ἐπιφερομένων ἐπ᾽ αὐτοῦ.

Ἄνωσις — Ἀνυψωτικὴ δύναμις

Ἄνωσις ἢ δύναμις ἀνώσεως **A**, ἑνὸς σώματος εὑρισκομένου ἐντὸς ἀερίου τινὸς (ἀέρος, ὀξυγόνου, ὑδρογόνου κλπ.) καλεῖται, τὸ βάρος τοῦ ἐκτοπιζομένου ὑπὸ τοῦ σώματος ἀερίου, εἰς ὄγκον ἴσον πρὸς τὸν ὁλικὸν ὄγκον τοῦ σώματος. Ἀνυψωτικὴ δὲ δύναμις **F**, καλεῖται ἡ διαφορὰ μεταξὺ ἀνώσεως **A** καὶ βάρους **B** τοῦ σώματος. Ἡ ἀνυψωτικὴ λοιπὸν δύναμις **F=A—B** εἶναι ἐκείνη ποὺ ἀναγκάζει τὸ σῶμα, ὅταν τὸ βάρος του εἶναι μικρότερον τοῦ βάρους τοῦ ἐκτοπιζομένου ὑπ᾽ αὐτοῦ ἀερίου, ν᾽ ἀνυψωθῇ, ὅπως ἀκριβῶς συμβαίνει καὶ εἰς τὰ ὑγρά.

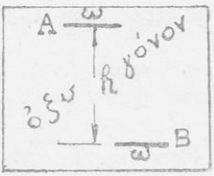
Διαφορὰ πιέσεων

Ἡ διαφορὰ πιέσεως **P**, μεταξὺ δύο ἴσων ἐπιφανειῶν **ω**, κειμένων ἐντὸς ἀερίου τινός, ἰσοῦται μὲ τὸ βάρος στήλης ἐκ τοῦ ἀερίου τούτου, ἐχούσης βάσιν τὴν μίαν ἐπιφάνειαν καὶ ὕψος τὴν κατακόρυφον ἀπόστασιν **h** τῶν ἐπιφανειῶν τούτων.

$$\text{Ἦτοι} \quad \mathbf{P=\omega h\varepsilon}$$

Ἔνθα **ε** τὸ γινόμενον τοῦ εἰδικοῦ βάρους τοῦ ἀερίου ἐπὶ τὸ βάρος τοῦ ἀέρος τοῦ ἀντιστοιχοῦντος εἰς τὸν ὄγκον **hω**.

Παράδειγμα



Ἔστω ἐπιφάνεια $\omega=10$ **cm²**, $h=4$ μέτρα.

$$\omega h=10\cdot 400=4000 \ \mathrm{cm}^3.$$

Ἡ διαφορὰ πιέσεως **P** μεταξὺ τῶν δύο ἴσων ἐπιφανειῶν **ω** τῶν κειμένων εἰς θέσεις **A** καὶ **B** καὶ εὑρισκομένων ἔστω ἐντὸς ὀξυγόνου (εἰδ. βάρος ὀξυγόνου=1,1, ἢ ἓν κυβικὸν ἑκατοστὸν ὀξυγόνου ζυγίζει $\frac{1,429}{1000}$ γραμμάρια=0,001429 γραμ.) ἰσοῦται.

$$\mathbf{P}=\omega h\varepsilon=4000\cdot 0{,}001293\cdot 1{,}1 \text{ γραμ.}$$

Ὅπερ ἰσοῦται μὲ $P=\omega h \cdot 1,429=4000 \cdot 1,429$ γραμ. (Τὸ 1,429 γρ. εἶναι τὸ βάρος ἑνὸς κυβικοῦ ἑκατ. ὀξυγόνου, ἤτοι ἡ πυκνότης του).

Ὥστε ἐὰν γνωρίζομεν τὸ βάρος ὡρισμένου ὄγκου τοῦ ἀερίου δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ βάρος ἑτέρου ὄγκου του (ἐκπεφρασμένων τῶν ὄγκων διὰ τῶν αὐτῶν μονάδων) δι' ἁπλῆς ἀναλογίας

Ἐνεργὸς πίεσις

Ἐὰν ἡ πίεσις τὴν ὁποίαν ρευστόν τι ἐπιφέρει ἐπὶ τῶν ἐσωτερικῶν τοιχωμάτων δοχείου, εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι ἐγκυκλεισμένον, εἶναι h ἀτμοσφαιρῶν, ἡ δὲ πίεσις τὴν ὁποίαν ὑφίστανται τὰ ἐξωτερικὰ τοιχώματα τοῦ δοχείου τούτου, ὑπὸ περιβάλλοντος ἀερίου, εἶναι h_1 ἀτμοσφαιρῶν, τότε ἡ ἐνεργὸς πίεσις $h\varepsilon$ ἐπὶ τῶν τοιχωμάτων, ἤτοι ἡ συνολικὴ πίεσις ἥτις εἰς αὐτὰ ὑφίσταται, εἶναι ἡ συνισταμένη τῶν δύο ἀντιθέτως ἐνεργούντων πίεσεων Ἤτοι

$$h\varepsilon = h - h_1$$

Ἐκροὴ ἀερίου διὰ μικρᾶς ὀπῆς

Ἡ ταχύτης **V** ἐκροῆς ἀερίου ἐκ μικρᾶς ὀπῆς, εἰς ἑκατοστὰ ἀνὰ δευτερόλεπτον, $\left(\mathrm{cm}/_{\mathrm{sec}}\right)$ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου.

$$V=\sqrt{2gh.\frac{13,6}{\varepsilon}} \quad \mathrm{cm}/_{\mathrm{sec}}$$

Ὅπου **V** ἡ ταχύτης ἐκροῆς τοῦ ἀερίου εἰς ἑκατοστὰ ἀνὰ δευτερόλεπτον, $g=981$ ἑκ., **h** ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου τῆς ὀπῆς ἀπὸ τῆς ἀνωτέρας ἐπιφανείας τοῦ ἀερίου εἰς ἑκατοστὰ καὶ ε ἡ πυκνότης τοῦ ἀέρος, ἤτοι τὸ βάρος 1 cm^3 ἀέρος θερμοκρασίας O^0 καὶ ὅπερ ἰσοῦται μὲ 0.001293 γραμμάρια.

Αἱ πυκνότητες ε_1 καὶ ε_2 ἀερίου τινός, εἶναι ἀνάλογοι τῶν τετραγώνων τῶν χρόνων ροῆς, ἴσων ὄγκων ὑπὸ τὴν αὐτὴν πίεσιν. Ἤτοι

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}=\frac{T_1^2}{T_2^2} \quad \text{(ὅπου } T_1,\ T_2 \text{ χρόνοι ροῆς)}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Σημείωσις. Ἐφ' ὅσον εἰς τὰς ἀσκήσεις δὲν καθορίζεται θερμοκρασία τῶν ἀερίων, νὰ θεωρῆται ὡς τοιαύτη ἡ τῶν ***O⁰ K.*** Ἐπίσης ἐφ' ὅσον δὲν ἀναφέρεται ἄλλη βαρομετρικὴ πίεσις, νὰ θεωρῆται ὡς τοιαύτη ἡ κανονικὴ (μιᾶς ἀτμοσφαίρας).

114) Σωλὴν **Torricelli** (Σχ. **α** λύσεων) εἶναι κεκλιμένος. Ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου εἰς τὸ ὁποῖον εἰσέρχεται εἰς τὸν ὑδράργυρον τῆς λεκάνης μέχρι τῆς προβολῆς τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας τοῦ ὑδραργύρου τοῦ σωλῆνος εἶναι 8 ἑκ. Ποῖον τὸ μῆκος τῆς ὑδραυλικῆς στήλης ;

115) Πλησίον τῆς θαλάσσης τὸ βαρομετρικὸν ὕψος εἶναι 0,76 μ. Πόσον θὰ εἶναι τοῦτο εἰς τὴν κορυφὴν τοῦ Ταϋγέτου ; (ὕψος ὑψηλ. κορυφῆς 2407 μ.).

Σημ. Τὸ βαρομετρικὸν ὕψος νὰ εὑρεθῇ εἰς χιλιοστὰ στήλης ὑδραργύρου καὶ εἰς ἀτμοσφαίρας.

116) Ὁ ὄγκος σφαίρας ἀεροστάτου εἶναι 23,750 κυβικὰ μέτρα. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἄνωσις.

117) α) Πόσον ζυγίζουν 3 κυβικὰ μέτρα ἀέρος θερμοκρασίας **0° K** καὶ ὑπὸ κανονικὴν πίεσιν; Ποῖον τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ὀξυγόνου εἰς τὴν αὐτὴν θερμοκρασίαν καὶ πίεσιν; Ποῖον τὸ βάρος 3 κυβ. μέτρων ὀξυγόνου ὑπὸ τὰς αὐτὰς συνθήκας;

118) Ὕψος στήλης ὑδραργύρου 76 ἑκ. (760 χιλ.) μέ τι ὕψος στήλης ὕδατος ἀντιστοιχεῖ;

119) Σωλὴν βαρομετρικὸς εὑρίσκεται ἀνεστραμμένος εἰς λεκάνην ὑδραργύρου κειμένην εἰς χῶρον ἀραιωμένον ἀέρος. Τὸ ὕψος τῆς ὑδραργυρικῆς στήλης εἶναι 0,025 μέτρα, Πόση εἶναι ἡ πίεσις εἰς τὸν χῶρον τοῦτον;

120) Ποία θὰ εἶναι ἡ συνολικὴ πίεσις τὴν ὁποίαν ὑφίσταται τὸ ἀνθρώπινον σῶμα, τοῦ ὁποίου ἡ ἐπιφάνεια εἶναι 1,500 τετραγωνικὰ μέτρα; α) Εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς θαλάσσης β) ἐντὸς τῆς θαλάσσης εἰς βάθος 20 μέτρων;

121) Ποίαν πίεσιν δέχεται κατὰ τετραγωνικὸν ἑκατοστόν, καλώδιον τηλεγραφικὸν εἰς βάθος θαλάσσης 3700 μέτρων;

122) Νὰ ἐκφρασθῇ εἰς γραμμάρια ἡ διαφορὰ τῶν ἐπιφερομένων πιέσεων ἐπὶ ἐπιφανείας μιᾶς τετραγωνικῆς παλάμης εὑρισκομένης διαδοχικῶς ὑπὸ τὰς πιέσεις 0,722 μέτ. καὶ 0,782 μέτρα, ἄκρα ὅρια τῶν βαρομετρικῶν ἐνδείξεων τόπου τινός.

Ὑπομνήσεις

Ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις=βαρομετρικὴ πίεσις=πίεσις στήλης ὑδραργύρου=πίεσις ἀντιστοίχου στήλης ὕδατος.

Πίεσις 1 ἀτμοσφαίρας ἀνὰ **cm²**=Πίεσις 1033 γραμμαρίων ἀνὰ **cm²**=Πίεσις 1,033 ***Kg.*** ἀνὰ **cm²**=ὕψος ὑδραργυρικῆς στήλης 0,76 **m.** ἢ 76 **cm** ἢ 760 χιλ.=ὕψος στήλης ὕδατος 10,33 **m.**, ἢ 1033 **cm.** (Διότι τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ὑδραργύρου εἶναι **13,6**, ἤτοι ὁ ὑδράργυρος εἶναι 13,6 φορὲς βαρύτερος ἴσου ὄγκου ὕδατος. Ἄρα 76 **cm.** ὕψος ὑδραργύρου ἀντιστοιχοῦν μὲ 76×13,6=1033 **cm.** ὕψος ὕδατος ἀπεσταγμένου θερμοκρασίας **0°*K*.**)

123) Κατέρχομαι ἐντὸς τῆς θαλάσσης εἰς βάθος 30 μέτρων. Πόσας ἀτμοσφαίρας πίεσιν δέχεται τὸ σῶμα μου ἀνὰ **cm²**.

124) Πόσο ζυγίζει μία κυβική παλάμη ἀέρος εἰς θερμοκρασίαν O_0*K*. καὶ ὑπὸ πίεσιν 720 χιλιοστῶν στήλης ὑδραργύρου;

125) Ἐὰν ὑποτεθῇ ὅτι τὸ συνολικὸν βάρος σφαίρας ἀεροστάτου εἶναι 20 **Kg**. τὸ δὲ βάρος τοῦ ἐκτοπιζομένου ὑπ' αὐτῆς ὄγκου ἀερίου εἶναι 30 ***Kg***., ἡ σφαῖρα ἀφιεμένη ἐλευθέρα θ' ἀνυψωθῇ ἢ ὄχι; Καὶ ἐὰν θ' ἀνυψωθῇ ποία ἡ ἀνυψωτική της δύναμις;

126) Ποία ἡ διαφορὰ πιέσεων εἰς γραμμάρια μεταξὺ δύο ἴσων ἐπιφανειῶν ἀπεχόντων 10 μέτρα καὶ ἑκάστη τῶν ὁποίων ἔχει ἐπιφάνειαν 100 $\mathbf{cm}^2$, εὑρισκομένων ὑπὸ θερμοκρασίαν O^0K καὶ βαρομετρικὴν πίεσιν 760 χιλιοστῶν καὶ εὑρισκομένων ἀμφοτέρων ἐντὸς ἀερίου ὑδρογόνου; (Εἰδικὸν βάρος ὑδρογόνου 0,08).

127) Ποῖον τὸ βάρος, εἰς γραμμάρια, στήλης ὑδρογόνου ἐχούσης βάσιν 100 cm^2 καὶ ὕψος 10*m*;

128) α) Ποῖον τὸ βάρος μιᾶς κυβικῆς παλάμης ἀέρος ὑπὸ θερμοκρασίαν 0^0 K. καὶ πίεσιν 760 χιλ. στήλης ὑδραργύρου; Ποῖον ὑπὸ τὴν αὐτὴν θερμοκρασίαν καὶ πίεσιν 720 χιλιοστῶν;

β) Ποῖον τὸ βάρος μιᾶς κυβικῆς παλάμης ὀξυγόνου ὑπὸ πίεσιν κανονικὴν καὶ ποῖον ὑπὸ πίεσιν 700 χιλ. καὶ θερμοκρασίαν του $\mathbf{O}^0$ **K**;

γ) Ποῖον τὸ βάρος μιᾶς κυβικῆς παλάμης ὑδρογόνου ὑπὸ κανονικὴν πίεσιν καὶ θερμοκρασίαν $\mathbf{O}^0$ **K** καὶ ποῖον ὑπὸ πίεσιν 720 χιλιοστῶν στήλης ὑδραργύρου καὶ θερμοκρασίαν $\mathbf{O}^0$ K;

129) Σφαῖρα ἐλαστικὴ ἀκτῖνος 1 μέτρου ἔχει πληρωθῆ ὑδρογόνου καὶ εὑρίσκεται ἀνυψωμένη εἰς τὸν ἀέρα ὑπὸ θερμοκρασίαν $\mathbf{O}^0$ ***K***. καὶ πίεσιν ἀτμοσφαιρικὴν 700 χιλιοστῶν στήλης ὑδραργύρου. Τὸ βάρος τοῦ ἐλαστικοῦ μόνον περιβλήματος τῆς σφαίρας εἶναι 0,1 χιλιογρ. Εἰδικὸν βάρος ὑδρογόνυυ 0,08.

Ζητοῦνται α) Τὸ ὁλικὸν βάρος τῆς σφαίρας β) Τὸ βάρος τοῦ ἐκτοπιζομένου ὑπὸ τῆς σφαίρας ἀέρος, ὑπὸ τὴν δοθεῖσαν πίεσιν.

γ) Ἡ ἄνωσις δ) ἡ ἀνυψωτικὴ δύναμις τῆς σφαίρας.

130) Κυλινδρικὸν δοχεῖον ἔχει ἐμβαδὸν βάσεως 100 τετρ. ἑκ. καὶ ὕψος 10 ἑκ. εἶναι δὲ πεπληρωμένον ἐλαίου (εἰδ. βάρος ἐλαίου 0,9) καὶ εὑρίσκεται ἐν τῇ ἀτμοσφαίρᾳ ὑπὸ θερμοκρασίαν O^0 ***K***. καὶ κανονικὴν πίεσιν (760 χιλ. στήλης ὑδραργύρου). Νὰ εὑρεθῇ ἡ συνολικὴ ἐπὶ τοῦ πυθμένος τοῦ δοχείου τούτου ἐπιφερομένη πίεσις (ἤτοι τὸ ἄθροισμα πιέσεων ἀτμοσφαιρικῆς καὶ πιέσεως ὑπὸ τοῦ ἐλαίου).

131) Ἐντὸς κυλίνδρου ἔχομεν ἐγκλείσει 52 κυβ. ἑκατοστὰ ἀέρος θερμ. O^2 ***K***. ὑπὸ πίεσιν 760 χιλ. στήλης ὑδραργύρου. Πόσος θὰ γίνῃ ὁ ὄγκος τούτου ὑπὸ τὰς πιέσεις 742 καὶ 781 χιλιοστά;

132) Ποσότης ἀέρος κλεισμένη ἐντὸς δοχείου ὑπὸ πίεσιν 700 χιλιοστῶν στήλης ὑδραργύρου ἔχει ὄγκον 50 κυβ. μέτρα. Ὑπὸ ποίαν πίεσιν θὰ ἔχῃ διπλάσιον ὄγκον;

133) Ἀέριον ὑπὸ πίεσιν 760 χιλιοστῶν στήλης ὑδραργύρου καὶ θερμοκρασίαν O^2 ***K***. ἔχει πυκνότητα 0,8. Ὑπὸ ποίαν πίεσιν θὰ ἔχῃ τριπλασίαν πυκνότητα;

134) Ἀέριον ἔχει ὄγκον 50 κυβ. ἑκατοστὰ ὑπὸ πυκνότητα 0,8, Ποῖον ὄγκον θὰ ἔχῃ ὑπὸ πυκνότητα 1,6, τῆς θερμοκρασίας παραμενούσης σταθερᾶς;

135) Ποσόν τι ἀερίου κέκτηται ὄγκον **V**=10,5 κυβ. παλάμας, ὅταν ἡ βαρομετρικὴ πίεσις **P** εἶναι 71 ἑκ. Πόσον ὄγκον θὰ ἔχῃ ὅταν ἡ πίεσις εἶναι 76 ἑκ. καὶ ὑπὸ τὴν αὐτὴν θερμοκρασίαν;

136) Κυλινδρικὸν ὑέλινον ποτήριον ἔχει ὕψος 20 ἑκ. καὶ διατομὴν 30 τετρ. ἑκατοστά. Ἀφοῦ τὸ πληρώσωμεν ὕδατος καὶ τὸ καλύψωμεν δι' ἑνὸς φύλλου χάρτου τὸ ἀναστρέφομεν. Ζητεῖται ἡ πίεσις ἣν ὑφίσταται τότε ὁ χάρτης, ἂν ἡ ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις εἶναι 71 ἑκ.

137) Δοχεῖον κυλινδρικὸν διατομῆς 100 τετ. ἑκ. καὶ ὕψους 20 ἑκατ. περιέχει, μέχρι τοῦ μέσου τοῦ ὕψους του, ὕδωρ θερμοκρασίας ***O*° *K***. Ποία ἡ συνολικὴ ἐπὶ τοῦ πυθμένος του πίεσις, δεδομένου ὅτι ἡ ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις εἶναι 76 ἑκ. στήλης ὑδραργυρικῆς;

138) Τεπόζυτον ἔχον σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπίδου ἔχει βάσιν ὀρθογώνιον διαστάσεων 1 μετρ. μήκους καὶ πλάτους 0,5 μέτρα, τὸ δὲ ὕψος του εἶναι 1 μέτρον. Νὰ εὑρεθοῦν α) Ποίαν πίεσιν ἀτμοσφαιρικὴν ὑφίσταται ὁ πυθμὴν εἰς ἀτμοσφαίρας ἐὰν ἡ βαρομετρικὴ πίεσις ἐκεῖ εἶναι 70 ἑκ. στήλης ὑδραργύρου καὶ ἡ θερμοκρασία ***O*° *K***. β) Ποίαν πίεσιν συνολικήν, ὑπὸ τὴν αὐτὴν θερμοκρασίαν, ὑφίσταται ὁ πυθμὴν ἐὰν τὸ τεπόζυτὸν εἶναι πεπληρωμένον πετρελαίου (εἰδ. βάρος πετρελαίου ἔστω 0,9).

139) Ἀερόστατον ἔχει χωρητικότητα 650 κυβ. μ. Εἰς θερμοκρασίαν ***O*° *K***. καὶ κανονικὴν πίεσιν πληροῦται δι' ὑδρογόνου βάρους 0,09 χιλιογράμμων ἀνὰ κυβ. μέτρων. Ποία εἶναι ἡ ἀνυψωτικὴ δύναμις αὐτοῦ, ἂν τὸ βάρος αὐτοῦ κενοῦ μετὰ τῶν ἐξαρτημάτων του εἶναι 620 χλγ;

140) Αἴθουσα σχολείου ἔχει διαστάσεις 8 μέτρα, 7,6 μ καὶ 4 μ. Ζητεῖται πόσα χιλιόγραμμα ἀέρος περιλαμβάνει εἰς θερμοκρασίαν ***O*° *K***. καὶ βαρομετρικὴν πίεσιν 72 ἑκ.

141) Δωμάτιον ἔχει διαστάσεις 20 μ., 10 μ., καὶ 10 μ. Ζητεῖται. Πόσους τόννους ἀέρος περιλαμβάνει ὑπὸ θερμοκρασίαν ***O*° *K***. καὶ πίεσιν 76 ἑκ. στήλης ὑδραργύρου καὶ πόσους θὰ περιελάμβανεν ὑπὸ τὴν αὐτὴν θερμοκρασίαν καὶ τὴν ἡμισείαν πίεσιν.

142) Πόσα χιλιόγραμμα ὀξυγόνου θὰ περιελάμβανε τὸ εἰς τὴν ἀνωτέρω ἄσκησιν δωμάτιον ὑπὸ τὴν ἰδίαν θερμοκρασίαν καὶ κανονικὴν πίεσιν ἐὰν ἀντὶ ἀέρος περιεῖχε ὀξυγόνον, δεδομένου ὅτι, μιὰ κυβικὴ παλάμη ὀξυγόνου, ὑπὸ θερμ. ***O*° *K***. καὶ κανονικὴν πίεσιν, ζυγίζει 1,43 γραμμ; β) Νὰ εὑρεθῇ ὡσαύτως πόσα χιλιόγραμμα θὰ ἐζύγιζε τὸ εἰς τὸ δωμάτιον περιεχόμενον ὀξυγόνον ὑπὸ τὴν αὐτὴν πίεσιν ἐὰν δὲν ἐδίδετο τὸ βάρος μιᾶς κυβικῆς παλάμης τοῦ ἀερίου τούτου, ἀλλὰ τὸ εἰδικόν του βάρος 1,104.

Ἀναγωγὴ τοῦ βαρομετρικοῦ ὕψους τόπου τινὸς εἰς O^0 Κελσίου ($O^0K = O^0C$)

Αὐτὴ γίνεται διὰ τοῦ τύπου

$$H_0 = H(1 - 0{,}000181.t).$$

Ἔνθα **H** τὸ βαρομετρικὸν ὕψος εἰς **t** βαθμοὺς *K*, εἰς χιλιοστά, **t** ἡ θερμοκρασία, H_0 τὸ βαρομετρικὸν ὕψος εἰς χιλιοστὰ εἰς O^0K. καὶ 0,000181 ὁ συντελεστὴς τῆς φαινομένης διαστολῆς τοῦ ὑδραργύρου.

Προσδιορισμὸς ὕψους

Τύπος Babinut. Διὰ τοῦ τύπου $Z = 10000\left|1 + \frac{2(\vartheta + \vartheta')}{1000}\right|\frac{H - H'}{H + H'}$

ἔνθα ϑ ἡ θερμοκρασία καὶ **H** ἡ ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις εἰς τὸν κάτω τόπον καὶ ϑ' καὶ **H′** ἡ θερμοκρασία καὶ ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις εἰς τὸν ἄνω τόπον, εὑρίσκομεν τὸ ὕψος **Z** εἰς μέτρα.

Ὑδραντλίαι

Ἐὰν **B** τὸ βάρος τοῦ πληροῦντος τὸν κύλινδρον τῆς ὑδραντλίας ὑγροῦ καὶ **h** τὸ ὕψος εἰς τὸ ὁποῖον φέρεται τὸ ὑγρόν, τὸ ἔργον ὅπερ παράγεται καθ᾽ ἑκάστην διαδρομὴν τοῦ ἐμβόλου εἶναι **W=Bh**, Ἤτοι τὸ αὐτὸ ὡς ἐὰν ἀναβιβάζαμεν ἀπ᾽ εὐθείας τὸ Βάρος **B** εἰς ὕψος **h**.

Παράδειγμα. Ἐὰν ὑποτεθῇ ὅτι ἀναρροφητικὴ ὑδραντλία ἀναβιβάζει ἐντὸς τοῦ κυλίνδρου της, εἰς κάθε ἀνύψωσιν τοῦ ἐμβολέως 5 ***Kg***. ὕδατος, ἐκ φρέατος βάθους 8 μέτρων, τότε τὸ παραγόμενον ἔργον εἰς ἑκάστην ἀνύψωσιν εἶναι $5 \cdot 8 = 40\ {}^{Kg}/_{m}$ καὶ μετὰ 50 ἔστω ἀνυψώσεις τὸ ἔργον εἶναι $40.50 = 2000\ {}^{Kg}/_{m}$ (χιλιογραμμόμετρα).

Ἐὰν πάλιν ὑποθέσωμεν, ὅτι τὸ ἔμβολον κινούμενον διὰ μηχανῆς εἰς 10′ ἀναβιβάζει ἔστω 900 ***Kg***. ὕδατος ἐξ ὕψους 10 **m**, ἡ ἰσχὺς τῆς μηχανῆς εἶναι $\frac{900 \cdot 10}{600''} = 15{,}008\ {}^{Kg}/_{m}$ ἀνὰ δευτερόλεπτον, ἢ 0,2001 HP εἶναι ἡ ἰσχὺς τῆς μηχανῆς.

Ἀεραντλίαι

$$H_n = H + \left(\frac{V}{V+C}\right)^n$$

Ἔνθα H_n ἡ τελικὴ πίεσις τὴν ὁποίαν ὑφίσταται ὁ ἐν τῷ κώδωνι ἀήρ.

H ἡ ἀρχικὴ πίεσις, n ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀνελκύσεων (ἀνυψώσεων), V ἡ χωρητικότης, ἤτοι ὁ ὄγκος τοῦ κώδωνος τῆ ἀεραντλίας καὶ C ἡ χωρητικότης, ἤτοι ὁ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου τοῦ ἐμβολέως.

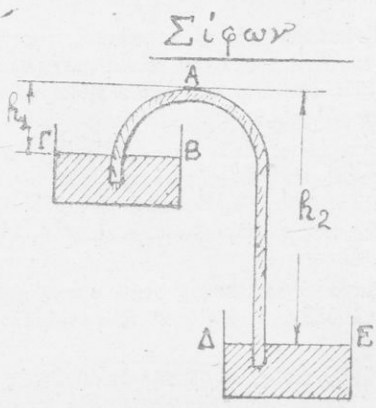
Οἱ ὄγκοι μὲ τὰς ἰδίας μονάδας (κυβ. μέτρα, κυβικαὶ παλάμαι κλπ. ἅπαντες), ὡς ἐπίσης μὲ τὰς ἰδίας μονάδας πιέσεως (ἀτμόσφαιραι, χιλ)μα κλπ) αἱ πιέσεις H_n καὶ H.

Ἀεροθλιπτικαὶ ἢ Καταθλιπτικαὶ μηχαναί.

$$H_n = H_0 + \frac{n\,C\,H}{V}$$

Ἔνθα H_n ἡ τελικὴ πίεσις τοῦ ἀερίου τοῦ ἐγκεκλεισμένου ἐντὸς κώδωνος. ὄγκου (χωρητικότητος) V, n ὁ ἀριθμὸςτῶν ἀνυψώσεων (ἀνελκύσεων) ἢ συνθλίψεων, C ὁ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου ἐντὸς τοῦ ὁποίου κινεῖται ὁ ἐμβολεύς, H ἡ πίεσις ἐξωτερικοῦ ἀέρος, καὶ H_0 ἡ ἀρχικὴ πίεσις τοῦ ἀερίου. Τὰ διάφορα ποσὰ ἐκφράζονται ὡς καὶ εἰς τὸν τύπον ἀεραντλίας.

Σίφων



Ἐὰν h_1 ἡ διαφορὰ πιέσεως μεταξὺ ἐπιφανείας ΒΓ καὶ τοῦ σημείου **Α** καὶ h_2 ἡ διαφορὰ πιέσεως μεταξὺ ἐπιφανείας ΔΕ καὶ τοῦ σημείου πάλιν **Α**, τότε ἔχομεν :

1 ἀτμ.—h_1=πίεσις ἐνεργοῦσα ἐπὶ τοῦ **Α** ἐκ τοῦ **ΒΓ**.

1 ἀτμ—h_2=πίεσις ἐνεργοῦσα ἐπὶ τοῦ **Α** ἐκ τοῦ **ΔΕ**.

Ἄρα ἡ συνισταμένη **h** τῶν δύο πιέσεων ἐπὶ τοῦ **Α** εἶναι.

$$h=(1 \text{ ἀτμ.}-h_1)-(1 \text{ ἀτμ}-h_2)=h_2-h_1$$

Ὅταν λοιπὸν h_2 γίνῃ ἴσον μὲ h_1 τότε σταματᾷ ἡ ροή, διότι γίνεται ἰσορροπία τῶν πιέσεων.

Ὅταν δὲ $h_2 < h_1$ δὲν παράγεται τοιαύτη.

Δ΄ ΑΚΟΥΣΤΙΚΗ

Τὸ μέρος τῆς Φυσικῆς, τὸ ὁποῖον ἀσχολεῖται μὲ τὴν παραγωγήν, μετάδοσιν καὶ σύγκρισιν τῶν μουσικῶν ἤχων καλεῖται **Ἀκουστική**.

Διὰ τοῦ κενοῦ ὁ ἦχος δὲν μεταδίδεται.

Ὁ ἦχος εἰς τὸν ἀέρα μεταδίδεται μὲ ταχύτητα 340 μέτρων περίπου κατὰ δευτερόλεπτον. Ἡ κίνησις εἶναι ἰσοταχής, τοῦ διανυομένου συνεπῶς διαστήματος ὑπολογιζομένου διὰ τοῦ τύπου $S=Vt$, ἔνθα **V** ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου καὶ **t** ὁ χρόνος τοῦ διανυθέντος ὑπὸ τοῦ ἤχου διαστήματος **S**. Ἡ ταχύτης εἰς τὰ ἀέρια γενικῶς μεταβάλλεται μετὰ τῆς θερμοκρασίας καὶ τῆς πυκνότητος αὐτῶν, μὴ ἐπηρεαζομένη ἀπὸ τὴν ἐλαστικότητά των καὶ παρεχομένη ὑπὸ τοῦ τύπου $V=V_0\sqrt{\frac{1+\alpha\vartheta}{d}}$ ἔνθα $V_0=331{,}4$ μ. εἰς 1″, **d**=πυκνότης ἀερίου, ϑ=θερμοκρασία ἀερίου καὶ **α** συντελεστὴς διαστολῆς ἀερίων, ὅστις ἰσοῦται μὲ $\frac{1}{273}=0{,}00367$, καὶ τὸν ὁποῖον θὰ ἐξετάσωμεν εἰς τὸ κεφάλαιον τῆς θερμότητος.

Εἰς τὰ ὑγρὰ ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου εἶναι μεγαλυτέρα παρ᾽ ὅτι εἰς τὸν ἀέρα· εὑρέθη δὲ διὰ τὸ ὕδωρ καὶ ὑπὸ θερμοκρασίαν 8°Κ. ἴση πρὸς 1435 μέτρα ἀνὰ δευτερόλεπτον.

Εἰς τὰ στερεὰ ἡ ταχύτης εἶναι ἔτι μεγαλυτέρα, δὲν εἶναι δὲ ἡ ἰδία δι᾽ ὅλα τὰ στερεά, ἐξαρτωμένη ἐκ τῆς φύσεως τοῦ σώματος καὶ ἀπὸ τὰς συνθήκας ὑπὸ τὰς ὁποίας οὗτος δι᾽ αὐτῶν μεταδίδεται. Οὕτω εἰς τὸν σίδηρον καὶ τὴν ὕαλον ὑπὸ μορφὴν ῥάβδων εἶναι 5000 μ. κατὰ δευτερόλεπτον κλπ.

Τὰ ἠχητικὰ κύματα ἀνακλῶνται ὅταν συναντήσουν ἐμπόδιόν τι, ὅπως συμβαίνει εἰς τὰ ὑδάτινα κύματα· τὸ φαινόμενον τοῦτο καλεῖται **Ἀνάκλασις**.

Ἡ ἐπανάληψις ἤχου τινός, λόγῳ τῆς ἀνακλάσεώς του ἐπί τινος ἀντικειμένου, καλεῖται **Ἠχώ**, ὁπότε ἀκούομεν δύο ἤχους τὸν ἀπ᾽ εὐθείας καὶ τὸν ἐξ ἀνακλάσεως τοιοῦτον. Ἵνα ὑπάρξῃ ὅμως διάκρισις τῶν δύο τούτων ἤχων μεταξύ των, πρέπει ὁ ἐξ ἀνακλάσεως ἦχος νὰ φθάσῃ εἰς τὸ οὖς μας μετὰ πάροδον χρονικοῦ διαστήματος οὐχὶ μικροτέρου τοῦ 0,1'' ἀπὸ τοῦ ἀπ' εὐθείας τοιούτου, ὅπερ κατορθοῦται δι' ἀπόστασιν συνολικὴν 34 μέτρων, ἤτοι δι' ἀπόστασιν τοῦ ἠχογόνου σώματος ἀπὸ τοῦ κωλύματος 17 μ.

Ἐὰν ἡ ἀπόστασις τοῦ ἠχογόνου σώματος ἀπὸ τοῦ ἀντικειμένου εἶναι μικροτέρα τῶν 17 μ., τότε ὑπάρχει σύμπτωσις (συνταύτισις) τῶν ἤχων καὶ τὸ φαινόμενον τοῦτο καλεῖται **ἀντήχησις.**

Εἰς κάθε ἦχον διακρίνομεν τὴν **ἔντασιν**, **ὕψος καὶ χροιάν**, τὰ ὁποῖα δυνάμεθα νὰ προσομοιάσωμεν ἀντιστοίχως πρὸς τὸ πλάτος τῆς παλμικῆς κινήσεως, πρὸς τὴν συχνότητα τῶν παλμῶν, καὶ τὴν χροιὰν τοῦ ἤχου πρὸς τὸ εἶδος τῆς παλμικῆς κινήσεως (παλινδρομικῆς κλπ) σώματος τινός· ὡς π. χ. τοῦ ἐκκρεμοῦς.

Νόμος τῶν παλλομένων χορδῶν

Οὗτος παρέχεται διὰ τοῦ τύπου

$$N = \frac{1}{2\varrho L}\sqrt{\frac{B}{\pi d}}$$

Ὅπου **N** συχνότης, **P** ἀκτὶς παλλομένης χορδῆς, **L** τὸ μῆκος τῆς χορδῆς, **d** ἡ πυκνότης τῆς οὐσία ἐκ τῆς ὁποίας ἡ χορδὴ καὶ **B** τὸ τεῖνον βάρος. Ἐὰν τὸ **ϱ** εἰς ἑκατοστὰ τότε καὶ τὸ **L** εἰς ἑκατοστὰ καὶ τὸ **B** εἰς γραμμάρια.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

143) Παρατηρητής τις βλέπει τὴν λάμψιν ἐκπυρσοκροτοῦντος πυροβόλου καὶ μετὰ 10 δευτερόλεπτα ἀπ' αὐτῆς ἀκούει τὸν ἦχον τῆς ἐκπυρσοκροτήσεως. Ποία ἡ ἀπόστασις τοῦ πυροβόλου ἀπ' αὐτοῦ;

144) Μεταξὺ δύο τοίχων παραλλήλων **N** καὶ **N'** εὑρίσκεται παρατηρητὴς καὶ εἰς θέσιν **A** ἀπέχουσαν 85 μέτρα ἀπὸ τοῦ **N** καὶ 42,50 μ. ἀπὸ τοῦ **N'**. Νὰ εὑρεθῇ ὁ χρόνος, ὅστις θ' ἀπαιτηθῇ ν' ἀκούσῃ τὴν ἠχὼ ἐξ ἑκατέρου τῶν τοίχων, ὅταν πυροβολήσῃ διὰ πυροβόλου ὅπλου.

145) Παρατηρητὴς καὶ ἠχηγόνον σῶμα, τοῦ ὁποίου πρέπει ν' ἀκούσωμεν τὸν ἐξ ἀνακλάσεως ἦχον, εὑρίσκονται εἰς τὰ ἄκρα βάσεως ἰσοσκελοῦς τριγώνου, οὗτινος ἡ κορυφὴ κεῖται ἐπὶ τοῦ τοίχου ὅστις παράγει τὸν ἦχον. Ἡ βάσις τοῦ τριγώνου εἶναι 10 μ., τὸ δὲ ὕψος του 25 μέτρα.

Νὰ καθορισθῇ ὁ χρόνος ὁ μεσολαβῶν μεταξὺ τῆς λήψεως τοῦ ἀπ' εὐθείας ἤχου καὶ τοῦ ἐξ ἀνακλάσεως τοιούτου.

146) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου εἰς τὸν ἀέρα ὑπὸ θερμοκρασίαν 20°, ὅταν αὕτη εἰς θερμοκρασίαν $\mathbf{0}^\circ$ εἶναι 331,4 μ. εἰς 1''.

147) Νὰ εὑρεθῇ ἡ θερμοκρασία ὑπὸ τὴν ὁποίαν ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου εἰς τὸν ἀέρα εἶναι 340 μ.

148) Ἡ συχνότης τῆς παλμικῆς κινήσεως τῶν μορίων τοῦ ἀέρος εἶναι 45 κατὰ 1'', ἡ δὲ ταχύτης τοῦ ἤχου 335 μέτρα. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος κύματος τοῦ ἤχου εἰς τὸν ἀέρα.

149) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου εἰς τὸ ὑδρογόνον, ὅταν αὕτη εἰς τὸν ἀέρα εἶναι 340 μ., αἱ δὲ πυκνότητες τοῦ ὑδρογόνου μὲν εἶναι 0,07 τοῦ δὲ ἀέρος 1.

150) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις μεταξὺ δύο σημείων, λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν ὅτι ὁ ἦχος πυροβόλου διήνυσε ταύτην ἐντὸς 10'' καὶ ὑπὸ θερμοκρασίαν 20°.

151) Ἔχομεν δύο χορδάς, τὴν μίαν ἐκ σιδήρου καὶ τὴν ἄλλην χαλκίνην, ἰσομήκεις, τῆς ἰδίας διαμέτρου καὶ αἵτινες τείνονται ἀπὸ ἴσα βάρη, ἔχουσι δὲ συχνότητα ἡ μὲν πρώτη 250 ἡ δὲ ἑτέρα 240. Νὰ εὑρεθῇ τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ σιδήρου, δεδομένου ὅτι τὸ τοιοῦτον τοῦ χαλκοῦ εἶναι 8,87.

Ε΄. ΘΕΡΜΟΤΗΣ

Πᾶσα ἐξωτερικὴ αἰτία, ἥτις προκαλεῖ τὸ αἴσθημα τοῦ θερμοῦ ἢ τοῦ ψυχροῦ καλεῖται **θερμότης**. Ἡ θερμικὴ δὲ κατάστασις τῶν σωμάτων, ἡ ὁποία φανερώνεται διὰ τῆς ἀφῆς καλεῖται **θερμοκρασία.** Ὅταν μεταβιβάζεται θερμότης ἐκ τινος θερμοτέρου σώματος εἰς ψυχρότερον, μέχρις ὅτου ὅλα τὰ πλησίον εὑρισκόμενα σώματα ἀποκτήσουν τὴν ἰδίαν θερμοκρασίαν, ἔχομεν **ἰσορροπίαν θερμοκρασιῶν**. Τὰ ὄργανα τὰ χρησιμεύοντα πρὸς προσδιορισμὸν τῆς θερμοκρασίας ὀνομάζονται θερμόμετρα.

Θερμομετρικαὶ κλίμακες τῶν θερμομέτρων καὶ μετάβασις ἀπὸ μιᾶς τούτων εἰς ἄλλην.

Μεταξὺ τῶν θερμομετρικῶν κλιμακων διακρίνομεν τὴν τοῦ Κελσίου (**Κ** ἢ **C**), Ρεωμύρου (**Ρ**) καὶ Φαρενάϊτ (**Φ**). Ἡ θερμοκρασία τοῦ τηκομένου πάγου σημειοῦται εἰς τὰς δύο πρώτας διὰ τοῦ $\mathbf{0}^\circ$ εἰς δὲ τὴν τρίτην διὰ τοῦ $+32^\circ$. Ἡ δὲ θερμοκρασία τοῦ βράζοντος ὕδατος διὰ τῶν 100° Κελσίου, ἢ διὰ τῶν 80° Ρεωμύρου καὶ διὰ τῶν 212° διὰ τὸ θερμόμετρον Φαρενάϊτ.

$$\text{Συνεπῶς } 1^\circ\ \mathbf{P}=\frac{5}{4}\mathbf{C},\ 1^\circ\ \mathbf{C}=\frac{4}{5}\ \mathbf{P},\ 1^\circ\ \mathbf{C}=\frac{9}{5}\mathbf{\Phi}.$$

Ὥστε A^0K ἀντιστοιχοῦν μὲ $\left(\frac{9}{5}\,A^0K + 32\right)^0 Φ$, καὶ $B^0Φ$ μὲ $\frac{5}{9}\,(B^0Φ-32)^0K$. Ἀδιάφορος θερμοκρασία εἶναι ἡ τῶν 32^0 Κ.

Διαστολὴ Σωμάτων

Πάντα τὰ σώματα θερμαινόμενα διαστέλλονται, ἤτοι αὐξάνουν κατ' ὄγκον καὶ ψυχόμενα συστέλλονται, ἤτοι ἐλαττοῦνται κατ' ὄγκον. Καὶ εἰς ἄλλα μέν, ὡς εἰς τὰ στερεά, δυνάμεθα νὰ παρακολουθήσωμεν καὶ ὑπολογίσωμεν τὴν διαστολὴν ἢ συστολήν των καὶ κατὰ τὴν ἔννοιαν τοῦ μήκους καὶ κατὰ τὴν ἔννοιαν τῆς ἐπιφανείας καὶ κατ' ὄγκον, εἰς ἄλλα δέ, ὡς εἰς τὰ ὑγρὰ καὶ ἀέρια, δυνάμεθα νὰ παρακολουθήσωμεν καὶ ὑπολογίσωμεν μόνον τὴν κατ' ὄγκον διαστολήν των.

Ἐξ ὅλων τῶν σωμάτων τὰ μᾶλλον διασταλτὰ εἶναι τ' ἀέρια, ὀλιγότερον τὰ ὑγρὰ καὶ ἀκόμη ὀλιγότερον τὰ στερεά.

Εὐνόητον τυγχάνει, ὅτι ἡ αὔξησις τῆς διαστολῆς τῶν σωμάτων μεταβάλλεται ἀναλόγως τῆς αὐξήσεως τῆς θερμοκρασίας αὐτῶν.

1ον Διαστολὴ στερεῶν

Εἰς ταῦτα ὑπολογίζομεν διαστολὴν κατὰ τὴν ἔννοιαν τοῦ μήκους, ἤτοι γραμμικὴν διαστολήν, διαστολὴν κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν, ἤτοι κατ' ἐπιφάνειαν διαστολὴν καὶ διαστολὴν κατ' ὄγκον.

α) Γραμμικὴ διαστολὴ

Συντελεστής, ἢ μέσος συντελεστὴς γραμμικῆς διαστολῆς, σώματος στερεοῦ, εἶναι ὁ ἀριθμὸς ὅστις μᾶς δεικνύει κατὰ πόσον αὐξάνει ἡ μονὰς τοῦ μήκους του (τὸ ἓν ἑκατοστὸν τοῦ σώματος), ὅταν ἡ θερμοκρασία τοῦ σώματος ἀνέλθῃ κατὰ 1^0 C. καὶ τὸν ὁποῖον παριστῶμεν διὰ **λ** Οὗτος δίδεται εἰς ἑκατοστά. Ἕκαστον σῶμα ἔχει φυσικὰ καὶ τὸν ἰδικόν του συντελεστὴν γραμμικῆς διαστολῆς.

Ἐὰν διὰ M_0 παραστήσωμεν τὸ μῆκος τῆς ῥάβδου εἰς θερμ. 0^0 **C**, **λ** τὸν συντελεστὴν γραμμικῆς διαστολῆς, ϑ τὴν αὔξησιν τῆς θερμοκρασίας ἀπὸ O^0 εἰς ϑ^0 καὶ M_ϑ τὸ ὁλικὸν μῆκος ταύτης μετὰ τὴν αὔξησιν τῆς θερμοκρασίας κατὰ ϑ^0, θὰ ἔχωμεν κατόπιν τῶν λεχθέντων. $M_\vartheta = M_0\,(1+\lambda\vartheta)$ ὅπου M_ϑ, M_0 μὲ τὰς αὐτὰς μονάδας μήκους ἀμφότερα (μέτρα, ἑκατοστὰ κλπ), τὸ **λ** ὡς μᾶς δίδεται καὶ ϑ ἡ αὔξησις τῆς θερμοκρασίας τοῦ σώματος.

Λύοντες ὡς πρὸς **λ** εὑρίσκομεν ὅτι.

$$\lambda = \frac{M_\vartheta - M_0}{M_0\,\vartheta}$$

β΄ Κατ' ἐπιφάνειαν διαστολὴ

Συντελεστὴς, ἢ μέσος συντελεστὴς τῆς κατ' ἐπιφάνειαν διαστολῆς σώματος στερεοῦ, καλεῖται ἡ αὔξησις **ε**, τῆς μονάδος ἐπιφανείας τοῦ σώματος (**cm²**=τετρ. ἑκ.) ἡ γενομένη, ὅταν ἡ θερμοκρασία τοῦ σώματος αὐξήσῃ κατὰ 1°**C**. Ὁ συντελεστὴς **ε** τῆς κατ' ἐπιφάνειαν διαστολῆς εἶναι ἀριθμὸς διπλάσιος τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ παριστάνοντος τὴν γραμμικὴν διαστολὴν τοῦ ἰδίου σώματος, ἤτοι $\varepsilon=2\lambda$. τετρ. ἑκατοστά.

Ἄρα ἔχομεν $E_\vartheta = E_0\,(1+\varepsilon\vartheta) = E_0\,(1+2\lambda\vartheta)$

Ὅπου E_0 ἡ ἐπιφάνεια τοῦ σώματος εἰς **0°C**, ϑ ἡ γενομένη αὔξησις τῆς θερμοκρασίας, $\varepsilon=2\lambda$ ὁ συντελ. τῆς κατ' ἐπιφάνειαν διαστολῆς καὶ E_ϑ ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια τοῦ σώματος μετὰ τὴν γενομένην αὔξησιν τῆς θερμοκρασίας κατὰ ϑ°**C**,

Τὰ E_ϑ, E_0 μὲ τὰς αὐτὰς μονάδας ἐπιφανείας. Τὸ **ε** ὡς μᾶς δίδεται.

γ΄ Κατ' ὄγκον διαστολὴ

Συντελεστής, ἢ μέσος συντελεστὴς **κ**, κατ' ὄγκον διαστολῆς σώματος στερεοῦ, εἶναι ἡ αὔξησις τῆς μονάδος τοῦ ὄγκου (**cm³**) τοῦ σώματος, ἥτις γίνεται ὅταν ἡ θερμοκρασία αὐτοῦ ἀνέλθῃ κατὰ 1°**C**. Ἡ αὔξησις αὕτη **κ** ἰσοῦται μὲ 3**λ** κυβικὰ ἑκατοστά.

Συνεπῶς ἔχομεν

$$V_\vartheta = V_0\,(1+\varkappa\vartheta) = V_0\,(1+3\lambda\vartheta)$$

Ὅπου V_0 ὁ ὄγκος τοῦ σώματος εἰς θερμ. **0°C**, ϑ ἡ γενομένη αὔξησις τῆς θερμοκρασίας καὶ V_ϑ ὁ ὁλικὸς ὄγκος τοῦ σώματος μετὰ τὴν ἀνύψωσιν τῆς θερμοκρασίας. Τὰ V_0 καὶ V_ϑ ἐκφράζονται μὲ τὰς αὐτὰς μονάδας ὄγκου.

Μηχανικὰ ἀποτελέσματα τῆς διαστολῆς τῶν στερεῶν

Ἓν μέτρον π.χ. σιδήρου, ὅταν ἡ θερμοκρασία του ἀνυψωθῇ κατὰ 100°**C** εὑρέθη ὅτι ἐπιμηκύνεται κατὰ 1,23 χιλιοστά. Ἵνα ἐπιτευχθῇ μηχανικῶς τὸ ἔργον τοῦτο ἀνάγκη νὰ καταβληθῇ δύναμις 2600 χλγ. Τὸ παράδειγμα τοῦτο μᾶς καταδεικνύει τὴν ἐφαρμογὴν τὴν ὁποίαν δύνανται νὰ ἔχουν αἱ μεταβολαὶ τῆς θερμοκρασίας διὰ τὴν παραγωγὴν ἔργου.

Προσδιορισμὸς τῆς πυκνότητος τῶν στερεῶν εἰς διαφόρους θερμοκρασίας

Ἔστω $\mathbf{m}$ ἡ μᾶζα σώματος στερεοῦ, $\mathbf{V}_0$ καὶ $\mathbf{V}_\vartheta$ οἱ ὄγκοι τοῦ σώματος εἰς τὰς θερμοκρασίας $\mathbf{O}^0$ καὶ ϑ^0 **K**. Ὁμοίως $\mathbf{d}_0$ καὶ $\mathbf{d}_\vartheta$ αἱ πυκνότητές του εἰς τὰς θερμοκρασίας ταύτας. Θὰ ἔχωμεν ;

Γνωστὸν ὅτι $\mathbf{m}=\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{V}$

Ἄρα $\mathbf{m}=\mathbf{d}_0\mathbf{V}_0$ ἢ $\mathbf{d}_0=\dfrac{\mathbf{m}}{\mathbf{V}_0}$ καὶ $\mathbf{m}=\mathbf{d}_\vartheta\,\mathbf{V}_\vartheta$ ἢ $\mathbf{d}_\vartheta=\dfrac{\mathbf{m}}{\mathbf{V}_\vartheta}$ (διότι ἡ μᾶζα τοῦ σώματος (βάρος) μένει πάντοτε σταθερὰ ὑπὸ τὰς μεταβολὰς τῆς θερμοκρασίας).

Ὁμοίως ἔχομεν $\mathbf{d}_0\mathbf{V}_0=\mathbf{d}_\vartheta\ V_\vartheta$

Ὥστε $\mathbf{d}_\vartheta=\dfrac{\mathbf{m}}{V_\vartheta}=\dfrac{\mathbf{d}_0 V_0}{V_\vartheta}$, ἀλλὰ $V_\vartheta=V_0\ (1+\varkappa\vartheta)$

Ἄρα $\mathbf{d}_\vartheta=\dfrac{\mathbf{d}_0\mathbf{V}_0}{\mathbf{V}_0\,[1+\varkappa\vartheta]}=\dfrac{\mathbf{d}_0}{1+\varkappa\vartheta}[1]$

Διὰ τοῦ τύπου [1] εὑρίσκομεν τὴν πυκνότητα [εἰδικὸν βάρος] σώματος τινὸς στερεοῦ εἰς ϑ^0**C**, ὅταν γνωρίζομεν τὴν πυκνότητά του εἰς **O**^{0}**C** καὶ τὸν συντελεστὴν $\boldsymbol{\lambda}$ γραμμικῆς διαστολῆς του [διότι $\varkappa=3\lambda$].

Ἔχοντες δὲ ὑπ᾽ ὄψιν τὸν τύπον $\dfrac{\mathbf{V}}{\mathbf{V}'}=\dfrac{\varepsilon'}{\varepsilon}$, τὸν ὁποῖον εἴδομεν εἰς τὴν ἀεροστατικήν, ἤτοι $\dfrac{\mathrm{V}}{\mathrm{V}'}=\dfrac{\mathbf{d}'}{\mathbf{d}}$ εὑρίσκομεν ὅτι $\dfrac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}'}=\dfrac{1+\varkappa\vartheta'}{1+\varkappa\vartheta}$, ὅστις μᾶς δίδει τὰς σχέσεις μεταξὺ τῶν πυκνοτήτων **d** καὶ **d**′ ἑνὸς σώματος εἰς θερμοκρασίας ϑ καὶ ϑ' βαθμούς. Ἐκ τοῦ τύπου τούτου καταλήγομεν εἰς τὸν τύπον [1] ἐὰν θέσωμεν $\vartheta'=\mathrm{o}$, $\mathbf{d}'=\mathbf{d}_0$ καὶ $\mathbf{d}=\mathbf{d}_\vartheta$.

2ον Διαστολὴ ὑγρῶν

Ἔχομεν μόνον κατ᾽ ὄγκον διάστολήν.

Αὕτη διακρίνεται εἰς φαινομενικὴν διαστολὴν καὶ ἀπόλυτον ἢ πραγματικὴν διαστολήν. Καὶ φαινομενική διαστολὴ τοῦ ὑγροῦ λέγεται, ὅταν δὲν ἐξετάζομεν μόνον τὴν διαστολὴν κατ᾽ ὄγκον τοῦ ὑγροῦ, ἀλλὰ καὶ τὴν διαστολὴν τοῦ δοχείου ἐντὸς τοῦ ὁποίου περιλαμβάνεται. Ἡ μεταβολὴ τοῦ ὄγκου μόνον τοῦ ὑγροῦ, συνεπείᾳ τῆς θερμάνσεως, καλεῖται ἀπόλυτος ἢ πραγματικὴ διαστολὴ αὐτοῦ.

Ἡ φαινομενικὴ διαστολὴ τοῦ ὑγροῦ μεταξὺ **O**^{0} καὶ 1^0 εἶναι $\mathbf{n}-\mathbf{n}_0$ ἔνθα $\mathbf{n}_0$ ὁ ὄγκος εἰς **O**^{0} **C** καὶ **n** ὁ ὄγκος μετὰ τὴν ἀνύψωσιν τῆς θερμοκρασίας κατὰ 1^0. Συνεπῶς ὁ συντελεστὴς $\boldsymbol{\mu}$ τῆς φαινομενικῆς διαστολῆς τοῦ ὑγροῦ εἶναι $\mu=\frac{n-n_0}{n_0}$. Ἤτοι $n=n_0(1+\mu)$.

Καὶ διὰ ἀνύψωσιν τῆς θερμοκρασίας κατὰ ϑ βαθμοὺς ἔχομεν $n_\vartheta=n_0\cdot(1+\mu\vartheta)$, ὅστις τύπος μᾶς δίδει τὸν φαινομενικὸν ὄγκον τοῦ ὑγροῦ εἰς ϑ^0.

Ὁ συντελεστὴς γ τῆς ἀπολύτου διαστολῆς τοῦ ὑγροῦ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν συντελεστῶν τῆς φαινομένης διαστολῆς μ καὶ τῆς κατ' ὄγκον (κυβικῆς) διαστολῆς $\varkappa$ τοῦ δοχείου. Ἤτοι

$$\gamma=\mu+\varkappa \text{ (διὰ τὴν ὕαλον } \varkappa=0{,}000026)$$

Ὡσαύτως διὰ τὴν ἀπόλυτον διαστολὴν τοῦ ὑγροῦ ἔχομεν.

$n\,(1+\varkappa)=n_0\,(1+\gamma)$ ἄρα $n=\frac{n_0\,(1+\gamma)}{1+\varkappa}$ καὶ εἰς ϑ βαθμοὺς εἶναι $n_\vartheta=\frac{n_0(1+\gamma\vartheta)}{1+\varkappa\vartheta}$, ὅστις τύπος μᾶς δίδει τὸν ἀπόλυτον ὄγκον τοῦ ὑγροῦ δι' αὔξησιν τῆς θερμοκρασίας ἀπὸ 0^0 εἰς ϑ^0.

Κατ' ἀναλογίαν ἔχομεν καὶ ἐδῶ, ὡς τὴν εἰς διαστολὴν τῶν στερεῶν εὕρομεν, ὅτι :

$$d_\vartheta=\frac{d_0}{1+\mu\vartheta} \quad \text{καὶ} \quad d_\vartheta=\frac{d_0}{1+\gamma\vartheta}$$

3ον Διαστολὴ τῶν ἀερίων

Διὰ τὴν διαστολὴν τῶν ἀερίων διακρίνομεν 2 περιπτώσεις.

α] Τὸ ἀέριον θερμαίνεται ἡ δὲ πίεσίς του κρατεῖται ἀμετάβλητος [σταθερὰ] καὶ συνεπῶς ἔχομεν αὔξησιν τοῦ ὄγκου ὅτε.

$V_\vartheta=V_0\,(1+\alpha_v\,\vartheta)$, ἔνθα α_v ὁ συντελεστὴς διαστολῆς διὰ τὸν ἀέρα καὶ τ' ἀέρια ὑπὸ σταθερὰν πίεσιν καὶ ὅστις μεταξὺ 0^0 καὶ 100^0 C εἶναι ἴσος μὲ $\frac{1}{273}=0{,}0036$. Τὸ α_v ἀντιστοιχεῖ εἰς αὔξησιν τοῦ ὄγκου 1 κυβ. ἐκ. ἀέρος, ὑπὸ σταθερὰν πίεσιν ὅταν ἡ θερμοκρασία αὐξάνει κατὰ 1^0 C.

β] Τὸ ἀέριον θερμαίνεται, ὁ δὲ ὄγκος τηρεῖται σταθερός, ὁπότε ἔχομεν αὔξησιν τῆς πιέσεως τοῦ ἀερίου ὅτε :

$$P_\vartheta=P_0\,(1+\alpha_\varrho\,\vartheta) \text{ ἤτοι } P_\vartheta=P_0\,[1+0{,}0036\cdot\vartheta]$$

Ἤδη τὸ α_ϱ ἀντιστοιχεῖ εἰς αὔξησιν πιέσεως 1 κυβ. ἐκ. ἀερίου ὑπὸ τὸν αὐτὸν ὄγκον, ὅταν ἡ θερμοκρασία αὐξάνει κατὰ 1^0 C.

Διὰ τὰ τέλεια, ἢ ἄλλως καλούμενα ἰδανικὰ ἀέρια, τὸ α εἶναι τὸ ἴδιον καὶ διὰ τὰς μεταβολὰς τῆς πιέσεως ὑπὸ σταθερὸν ὄγκον (α_ϱ) καὶ διὰ τὰς μεταβολὰς τοῦ ὄγκου ὑπὸ τὴν αὐτὴν πίεσιν (α_v), ἤτοι $\alpha_v=\alpha_\varrho$.

Νόμος Gay Lussac

$P_\vartheta\ V_\vartheta=P_0\ V_0\left(1+\frac{\vartheta}{273}\right)$ Ὅστις μᾶς δίδει τὴν σχέσιν τῶν πιέσεων καὶ ὄγκων ἀερίου, μεταξὺ 0^0 καὶ ϑ^0 C.

Θερμοδυναμικὴ ἢ Θερμιδομετρία

Τὸ ποσὸν τῆς δαπανωμένης θερμότητος εἶναι ἀνάλογον α) τῆς θερμοκρασίας εἰς ἣν θέλομεν νὰ ἀναβιβάσωμεν τὴν θερμοκρασίαν σώματός τινος, τοῦ βάρους του παραμένοντος τοῦ αὐτοῦ καὶ β) ἀνάλογον τοῦ βάρους τοῦ θερμαινομένου σώματος, διὰ τὴν αὐτὴν θερμοκρασίαν.

Ἡ θερμότης συνεπῶς εἶναι ποσόν, τὸ ὁποῖον δύναται νὰ μετρηθῇ. ἡ δὲ μέτρησις τῆς θερμότητος καλεῖται θερμιδομετρία.

Ὡς μονὰς μετρήσεως τῆς θερμότητος λαμβάνεται ἡ **Μικρὰ θερμίς,** ἥτις παριστᾷ τὸ ποσὸν τῆς θερμότητος τὸ ἀπαιτούμενον διὰ νὰ ἀνυψωθῇ ἡ θερμοκρασία ἑνὸς γραμμαρίου ὕδατος (μονὰς βάρους) κατὰ 1° **C**. Τὸ δὲ ποσὸν τῆς θερμότητος τὸ ἀπαιτούμενον διὰ ν' ἀνυψωθῇ ἡ θερμοκρασία ἑνὸς χλγ. ὕδατος κατὰ 1° **C** ὀνομάζεται **Μεγάλη θερμίς**. Μία μεγάλη θερμὶς ἰσοῦται μὲ 1000 μικράς. Πάντως τὸ ἴδιον ποσὸν θερμότητος ὅπερ θὰ ἐχρειάζετο διὰ ν' ἀνυψωθῇ ἡ θερμοκρασία ἑνὸς γραμμαρίου σώματός τινος κατὰ 500 ἔστω βαθμοὺς Κελσίου, θὰ χρειασθῇ καὶ ἐὰν εἰς 500 γραμμάρια τοῦ σώματος ὑψωθῇ ἡ θερμοκρασία κατὰ 1° **C**.

Τὸ μηχανικὸν ἰσοδύναμον τῆς μεγάλης θερμίδος εἶναι 425 χιλιογραμμόμετρα (K**g/m**), τῆς δὲ μικρᾶς θερμίδος ἰσοδυναμεῖ μὲ 4,18 **Joules**. Τοὐτέστι τὸ θερμικὸν ἔργον, ὅπερ ἔγινε διὰ ν' αὐξηθῇ ἡ θερμοκρασία ἑνὸς χιλιογράμμου ὕδατος κατὰ 1° **K.**, ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ μηχανικὸν ἔργον, τὸ ὁποῖον παρήχθη ὅταν βάρος 1 χ.λ.γ. μετετοπίσθη κατὰ διάστημα 425 μέτρων ἢ βάρος 425 χιλιογράμμων κατὰ 1 μέτρον.

Θερμότης καύσεως καλεῖται τὸ ποσὸν τῆς θερμότητος εἰς θερμίδας, τὸ ὁποῖον ἀποδίδουν διάφορα σώματα καιόμενα. Οὕτω λέγοντες π. χ. ὅτι ἡ θερμότης καύσεως τοῦ οἰνοπνεύματος εἶναι 7000 μεγάλες θερμίδες ἐννοοῦμεν ὅτι 1 χλγ οἰνοπνεύματος καιόμενον, παρέχει ποσὸν θερμότητος ἱκανὸν νὰ ὑψώσῃ τὴν θερμοκρασίαν 7000 χλγ, ὕδατος κατὰ 1° **C**.

Εἰδικὴ θερμότης. Τὰ διάφορα σώματα τῆς αὐτῆς μάζης (βάρους), διὰ νὰ θερμανθοῦν κατὰ τὸν αὐτὸν βαθμόν, χρειάζονται διάφορον ποσὸν θερμότητος.

Τὸ ποσὸν τῆς θερμότητος, εἰς μικρὰς θερμίδας, τὸ ἀπαιτούμενον διὰ ν' ἀνυψωθῇ ἡ θερμοκρασία ἑνὸς γραμμαρίου σώματός τινος κατὰ 1° **C**. ὀνομάζεται **Εἰδικὴ θερμότης** καὶ παρίσταται διὰ **c**.

Ὥστε, γνωρίζοντες τὴν εἰδικὴν θερμότητα σώματός τινος δυνάμεθα πλέον καὶ δι' ἁπλῆς ἀναλογίας νὰ εὕρωμεν τὸ ποσὸν τῆς θερμότητος τὸ ἀπαιτούμενον ν' ἀνυψωθῇ οἱονδήποτε βάρος τοῦ σώματος κατὰ 1° ***K***., ἢ καὶ εἰς οἱονδήποτε ἀκόμη θερμοκρασίαν.

Ἡ εἰδικὴ θερμότης τοῦ ὕδατος εἶναι 1. Διότι μία θερμὶς ἀπαιτεῖται διὰ ν' ἀνυψωθῇ ἡ θερμοκρασία ἑνὸς γραμμαρίου τοῦ ὕδατος κατὰ 1° **C**. Μόνον δὲ διὰ τὸ ὕδωρ ἡ εἰδικὴ θερμότης **c** συμπίπτει μὲ τὴν θερμίδα, διότι ἡ μὲν θερμὶς ἀναφέρεται εἰς ἓν γραμμάριον ὕδατος ἡ δὲ εἰδικὴ θερμότης εἰς ἓν γραμμάριον τοῦ σώματος.

Θερμότης τήξεως. Τὸ ποσὸν τῆς θερμότητος τὸ ἀπαιτούμενον διὰ νὰ τακῇ ἕν γραμμάριον σώματός τινος, **χωρὶς ὅμως νὰ ὑψωθῇ ἡ θερμοκρασία του,** καλεῖται **θερμότης τήξεως** αὐτοῦ. Ἡ θερμότης τήξεως τοῦ πάγου εἶναι 80 μικραὶ θερμίδες. Ἤτοι εἶναι αἱ 80 θερμίδες, τὸ ποσὸν τῆς θερμότητος ὅπου χρειάζεται διὰ νὰ τακῇ ἕν γραμμάριον πάγου, θερμοκρασίας **0**° *C*. εἰς ὕδωρ τῆς αὐτῆς θερμοκρασίας **0**° *C*.

Θερμοχωρητικότης σώματος

Τὸ ποσὸν τῆς θερμότητος τὸ ὁποῖον ἀπαιτεῖται διὰ νὰ ὑψωθῇ ἡ θερμοκρασία σώματός τινος, μάζης **m,** κατὰ 1° *C*. ὀνομάζεται θερμοχωρητικότης τοῦ σώματος. Ἤτοι ἡ θερμοχωρητικότης εἶναι γινόμενον τῆς μάζης τοῦ σώματος ἐπὶ τὴν εἰδικὴν αὐτοῦ θερμότητα **c**, ἤτοι **mc.**

Τὸ ποσὸν δὲ τῆς θερμότητος, **Q** θερμίδες, ποὺ ἀπαιτεῖται διὰ νὰ ὑψωθῇ ἡ θερμοκρασία τοῦ σώματος μάζης **m,** κατὰ **ϑ**° *C*. ἰσοῦται ἐπομένως μὲ **mcϑ**, Ὡς τοῦτο δι' ἁπλῆς ἀναλογίας ἐξάγεται. Ὥστε ἔχομεν.

$$Q=mc\vartheta.$$

Ἐὰν δὲ θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ ποσὸν τῆς θερμότητος ὅπερ ἀπαιτεῖται διὰ τὴν ἀνύψωσιν τῆς θερμοκρασίας τοῦ σώματος ἀπὸ ϑ^o_1 εἰς ϑ^o_2 θὰ ἔχομεν :

$$Q=mc\vartheta_2-mc\vartheta_1=mc\,(\vartheta_2-\vartheta_1)$$

Ἐὰν τὸ **m** εἰς γραμμάρια, ἡ ποσότης θερμότητρς **Q** εἰς μικρὰς θερμίδας, ἐὰν δὲ τὸ **m** εἰς χλγ. ἡ ποσότης **Q** ἐκφράζεται εἰς μεγάλας θερμίδας.

Ἡ εἰδικὴ ὅμως θερμότης **c** ἐκφράζεται πάντοτε **μὲ τὸν ἴδιον ἀριθμὸν δι' ἕκαστον σῶμα,** ὡς διὰ τοῦ ὁρισμοῦ της καθορίζεται.

Προκειμένου ὅμως διὰ τὸ ὕδωρ ὁ ἀριθμὸς ὁ ἐκφράζων τὴν μᾶζαν αὐτοῦ **m** εἰς γραμμάρια, παριστᾷ καὶ τὸν ὄγκον αὐτοῦ εἰς κυβικὰ ἑκατοστά, ἐὰν δὲ ἡ μᾶζα τοῦ ὕδατος δίδεται εἰς χιλιόγραμμα, ὁ ἀριθμὸς ὁ ἐκφράζων οὕτω τὴν μᾶζαν τοῦ ὕδατος, παριστᾷ καὶ τὸν ὄγκον αὐτοῦ εἰς κυβικὰς παλάμας. Τοῦτο συμβαίνει φυσικά, διότι τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ὕδατος εἶναι ἡ μονάς.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

152) Μὲ πόσους βαθμοὺς ἑκατονταβάθμου κλίμακος Κελσίου ἀντιστοιχοῦν $+50^o$, $+25^o$ καὶ -8^o Ρεωμύρου ;

153) Εἰς ποῖον σημεῖον τοῦ θερμομέτρου Φαρενάϊτ ἀντιστοιχοῦν αἱ θερμοκρασίαι πήξεως καὶ ζέσεως τοῦ ὑδραργύρου (θερμοκρασία πήξεως ὑδραργύρου -40^o Κελσίου καὶ ζέσεως $+357^o$ Κελσίου).

154) Θερμόμετρον Φαρενάϊτ εὑρίσκεται βυθισμένον εἰς λουτρὸν παραπλεύρως θερμομέτρου Κελσίου. Ποίας ἐνδείξεως θὰ δώσῃ τὸ τοῦ Φαρενάϊτ ὅταν τοῦ Κελσίου δεικνύῃ $+10^o$ καὶ $+50^o$.

155) Πόσον γίνεται κατὰ τὴν ἔννοιαν τοῦ μήκους χαλυβδίνη ράβδος, ὅταν θερμανθῇ κατὰ 25° *C*, δεδομένου ὅτι εἰς **0**° *C* ἔχει μῆκος 100 χιλιόμετρα. (Συντελεστὴς γραμμικῆς διαστολῆς χάλυβος λ=0,0000115).

156) Ποίαν αὔξησιν λαμβάνει τὸ μῆκος σιδηρᾶς ῥάβδου θερμαινομένης ἀπὸ **0**° *C* εἰς 200° *C*, ὅταν εἰς θερμοκρασίαν **0**° *C* ἔχει μῆκος 2 μ.; (Συντ. γραμ. διασ. σιδήρου=0,0000122).

157) Ποίαν αὔξησιν λαμβάνει τὸ μῆκος σιδηρᾶς ῥάβδου θερμαινομένης ἀπὸ 100° *C* εἰς 200° *C*, ὅταν εἰς θερμοκρασίαν **0**° *C* ἔχει μῆκος 2 μέτρων;

158) Ποῖος ὁ συντελεστὴς γραμμικῆς διαστολῆς τεμαχίου μετάλλου τινός, ὅταν τὸ μῆκος τούτου εἰς θερμοκρασίαν 120° *C* εἶναι 73,5 μ. εἰς δὲ τὴν θερμοκρασίαν **0**° *C* τὸ μῆκος του εἶναι 73,47 μέτρα;

159) Σιδηροδρομικὴ γραμμὴ ἔχει μῆκος 510 χλμ. Ποία θὰ εἶναι ἡ μεταβολὴ τοῦ μήκους της κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ ἔτους ὑπὸ τὰς ἄκρας θερμοκρασίας—2°**C** καὶ +42°**C**; (Τὸ μῆκος 510 μ. ἐννοεῖται ὅτι τὸ ἔχει εἰς τὴν θεροκρασίαν **0**°**C**— Συντ. γραμ. διαστολῆς 0,0000122).

160) Τεμάχιον σιδήρου εἰς θερμοκρασίαν **0**°**C** παρουσιάζει ἐπιφάνειαν 10 τετρ. παλάμας. Πόσην ἐπιφάνειαν θά παρουσιάσῃ εἰς θερμοκρασίαν 100°**C,** ὅταν ὁ συντελεστὴς τῆς γραμμικῆς διαστολῆς εἶναι 0,0001;

161) Τεμάχιον σιδήρου εἰς θερμοκρασίαν **0**°*C* παρουσιάζει ὄγκον 1500 κυβ. ἑκατοστά. Πόσον ὄγκον θὰ παρουσιάσῃ ἐὰν ἡ θερμοκρασία του αὐξηθῇ κατὰ 10°*C*, δεδομένου ὅτι ὁ συντελεστὴς τῆς κυβικῆς διαστολῆς τοῦ σιδήρου εἶναι 0,0003;

162) Ποῖον τὸ βάρος σιδηροῦ συμπαγοῦς κύβου πλευρᾶς 20 ἑκ. εἰς θερμοκρασίαν **0**°*C* καὶ οὗτινος τὸ εἰδικὸν βάρος ἔστω 10;

Σημείωσις. Τὰ εἰδικὰ βάρη τῶν διαφόρων σωμάτων δίδονται πάντοτε εἰς τοὺς πίνακας διό θερμοκρασίαν **0**°*C*. Συνεπῶς καὶ τὰ βάρη τῶν σωμάτων θεωροῦνται ὅτι εὑρίσκονται εἰς τὴν θερμοκρασίαν ταύτην, ἐφ᾽ ὅσον ὑπολογίζονται ἐκ τοῦ εἰδικοῦ τούτου βάρους

163) Μία κυβικὴ παλάμη χαλκοῦ εἰς **0**°*C* ἔχει βάρος 10 χλγ. Ποῖον θὰ εἶναι τὸ βάρος μιᾶς κυβικῆς παλάμης τοῦ μετάλλου τούτου εἰς θερμοκρασίαν 500°*C*;. Συντελεστὴς κυβ. διαστολῆς τοῦ χαλκοῦ ἔστω **κ**=0,0002,

164) Νὰ εὑρεθῇ. α) Τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ μολύβδου διὰ θερμοκρασίαν 100°*C*, δεδομένου ὅτι ὁ συντελεστὴς γραμμικῆς διαστολῆς τοῦ μετάλλου τούτου εἶναι 0,000012, τὸ δὲ εἰδικόν του βάρος (εἰς θερμοκρασίαν **0**°*C*) εἶναι 8. β) Πόσον ζυγίζουν 10 **κυβ. παλ.** μολύβδου εἰς θερμ. **0**°*C* καὶ πόσον εἰς θερμοκρασίαν 100°*C*;

165) Ὑγρόν τι εὑρίσκεται ἐντὸς δοχείου. α) Ποῖος ὁ φαινομενικὸς ὄγκος τοῦ ὑγροῦ τούτου θερμαινομένου εἰς 100°*C*, ὅταν ὁ ὄγκος του εἰς θερμοκρασίαν **0**°*C* εἶναι 10 κ. μ. ὁ δὲ συντελεστὴς τῆς φαινομένης διαστολῆς του εἶναι 0,0003; β) Ποῖος ὁ πραγματικὸς ἢ ἀπόλυτος ὄγκος τοῦ ἰδίου ὑγροῦ εἰς θερμοκρασίαν 100°**C,** ὅταν ὁ ὄγκος του εἰς θερμοκρασίαν **0**°*C* εἶναι 10 κ. μ. ὁ δὲ συντελεστὴς τῆς ἀπολύτου διαστολῆς του εἶναι 0,0005; γ) Ποία ἡ πυκνότης τοῦ ὑγροῦ τούτου εἰς θερμοκρασίαν 50°*C*, ὅταν αὕτη εἰς **0**°*C* εἶναι 0,5;

166) α) Πόσον ζυγίζει ἓν κυβ. μέτρον ἀέρος εἰς θερμοκρασίαν **0**°*C* καὶ κανονικὴν πίεσιν ; β) Πόσον ζυγίζει ἓν κυβ. μέτρον ἀέρος εἰς θερμοκρασίαν 30° καὶ κανονικὴν πίεσιν ;

167) Πόσον τὸ βάρος 3 κ. μ. ἀέρος θερμοκρασίας 30°*C* καὶ ὑπὸ βαρομετρικὴν πίεσιν 72 ἑκ. ;

168) α) Ποῖον ποσὸν θερμότητος χρειάζεται διὰ νὰ ὑψωθῇ ἡ θερμοκρασία 3 κ. π. ὕδατος κατὰ 50°*C* ; β) Πόσων βαθμῶν C θερμοκρασίαν θὰ λάβουν 5 κ. π. (τουτέστι 5 χλγ.) ὕδατος ὅταν καταναλωθῇ ποσὸν θερμότητος 500 μεγάλων θερμίδων ; γ) Ποίαν θερμοκρασίαν θὰ λάβουν 5000 γραμ. ὕδατος ὅταν καταναλωθῇ ποσὸν θερμότητος 500000 θερμίδων (μικρῶν) ; καὶ δ) Ποῖον ποσὸν θερμότητος χρειάζεται γιὰ νὰ ὑψωθῇ ἡ θερμοκρασία 10 κ. π. ὕδατος ἀπὸ τῆς θερμοκρασίας τῶν 100°*C* εἰς 200°*C* ;

169) Ποίαν θερμοκρασίαν θ' ἀποκτήσῃ μεῖγμα ἐξ 100 γραμμαρίων ὕδατος θερμοκρασίας 20° **K** καὶ ἐκ 45 γραμμαρίων ὕδατος θερμοκρασίας 60 **K** ;

170) Δίδονται δύο δοχεῖα μὲ ὕδωρ. Ἔστω 20° **K**, ἡ θερμοκρασία εἰς τὸ **A** δοχεῖον καὶ 80° **K** ἡ θερμοκρασία τοῦ ὕδατος ἐν τῷ δοχείῳ **B**. Πόσον ἐξ ἑκάστου δοχείου πρέπει ν' ἀφαιρέσωμεν ὕδωρ ὥστε ν' ἀποτελεσθῇ μεῖγμα 300 κυβικῶν παλαμῶν θερμοκρασίας 30° Κελσίου ;

171) Ποῖον ποσὸν ἡλιακῆς θερμότητος χρειάζεται διὰ νὰ τακῇ στρῶμα χιόνος 2 τετ. ἑκ. καὶ πάχους 8 ἑκ. τοῦ μέτρου ; (εἰδ. βάρος χιόνος 0,2) καὶ ποῖον ποσὸν ἡλιακῆς θερμότητος θὰ ἐχρειάζετο διὰ νὰ τακῇ πάγος τῶν αὐτῶν διαστάσεων (εἰδ. βάρος πάγου περίπου 1).

172) 6 χιλιόγραμμα πάγου τοποθετούμενα ἐντὸς ψυγείου τήκονται, ἀλλὰ μετά τινα χρόνον καὶ ἡ θερμοκρασία τοῦ ὕδατος τοῦ προκύψαντος ἐκ τῆς τήξεως τοῦ πάγου ἀνέρχεται εἰς 12° ***K***. Νὰ εὑρεθῇ πόσον ποσὸν θερμότητος ἀπερροφήθη ἐκ τοῦ ψυγείου διὰ τὴν τῆξιν ἀφ' ἑνὸς τοῦ πάγου καὶ ἀφ' ἑτέρου διὰ τὴν ὕψωσιν τῆς θερμοκρασίας τοῦ ὕδατος.

173) Ποῖον ποσὸν θερμότητος ἀπαιτεῖται διὰ νὰ τακῇ τεμάχιον κυλινδρικὸν μολύβδου τομῆς 10 ἑκ.² καὶ ὕψους 10 ἑκ., ἐὰν τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ μολύβδου εἶναι 11 ἡ δὲ θερμότης τήξεως αὐτοῦ εἶναι 1000 μικραὶ θερμίδες ;

174) Πόσα χιλιόγραμμα ὕδατος 25° ***K***. πρέπει ν' ἀναμειχθοῦν μὲ 15 χλγ. πάγου διὰ ν' ἀποκτήσῃ τὸ μεῖγμα μετὰ τὴν τῆξιν τοῦ πάγου θερμοκρασίαν **0**° ***K*** ; (Θερμότης τήξεως πάγου 80 μικραὶ θερμίδες).

175) Πόσα χιλιόγραμμα ὕδατος θερμοκρασίας 80° **K** πρέπει ν' ἀναμειχθοῦν μὲ 20 χλγ. πάγου διὰ ν' ἀποκτήσῃ τὸ μῖγμα μετὰ τὴν τῆξιν τοῦ πάγου θερμοκρασίαν 10° **K** ;

ΣΤ΄ ΟΠΤΙΚΗ

Ὀπτικὴ λέγεται τὸ μέρος τῆς Φυσικῆς τὸ ὁποῖον ἐξετάζει τὰ φωτεινὰ φαινόμενα, δηλαδὴ τὰ φαινόμενα ἅτινα διεγείρουν τὴν ὅρασιν καὶ προκαλοῦν εἰς ἡμᾶς τὸ αἴσθημα τοῦ φωτὸς Φῶς δὲ ὀνομάζεται τὸ αἴτιον τὸ ὁποῖον παράγει τὰ φαινόμενα ταῦτα.

Φωτειμαὶ πηγαὶ λέγονται τὰ σώματα τὰ ἐκπέμποντα φῶς. Αὗται διαιροῦνται εἰς **αὐτόφωτα** (Ἥλιος κλπ,) καὶ **σκοτεινὰ** (πλανῆται δένδρα, τοῖχοι κλπ.).

Ἀναλόγως τοῦ ἐὰν ἐπιτρέπουν ἢ μὴ τὴν δίοδον τοῦ φωτὸς διὰ μέσου τῆς μάζης των, τὰ σώματα διαιροῦνται εἰς **διαφανῆ, ἡμιδιαφανῆ, καὶ ἀδιαφανῆ ἢ σκιερά.** Ἡ διεύθυνσις διαδόσεως τοῦ φωτὸς λέγεται **φωτεινὴ ἀκτίς·** αὕτη εἶναι εὐθεῖα ἐφ᾽ ὅσον τὸ μέσον διαδόσεως τοῦ φωτὸς εἶναι ὁμογενές. **Φωτεινὴ δέσμη** λέγεται σύνολον φωτεινῶν ἀκτινων. Αὕτη καλεῖται **παράλληλος,** ὅταν αἱ ἀκτῖνες εἶναι παράλληλοι, **κωνικὴ** δὲ ὅταν αὗται σχηματίζουν γωνίαν. Τὰς τελευταίας διακρίνομεν εἰς **συγκλινούσας** (Σχ. 1) καὶ **ἀποκλινούσας** (Σχ. 2) ἀναλόγως, ἐὰν αἱ ἴδιαι φωτειναὶ ἀκτῖνες συναντῶνται ἢ αἱ προεκτάσεις των.

Ἀποτελέσματα τῆς εὐθυγράμμου διαδοσεως τοῦ φωτὸς εἶναι ἡ **σκιὰ** τοῦ σώματος σχηματιζομένη εἰς χῶρον ὅστις δὲν δέχεται φωτεινὰς ἀκτῖνας καὶ τὸ **ὑποσκίασμα ἢ παρασκίασμα** αὐτοῦ σχηματιζόμενον εἰς χῶρον τοῦ διαστήματος, ὅστις δέχεται μέρος τῶν φωτεινῶν ἀκτίνων τῆς φωτεινῆς πηγῆς. Διὰ τῆς σκιᾶς καὶ ὑποσκιάσματος ἐξηγοῦνται τὰ φαινόμενα τῆς μερικῆς, ἢ ὁλικῆς ἐκλείψεως τοῦ Ἡλίου ἢ τῆς Σελήνης.

Ἐὰν διὰ μικρᾶς ὀπῆς, θαλάμου τινὸς, διέλθουν φωτειναὶ ἀκτῖνες, σχηματίζεται ἐπὶ τοῦ ἀπέναντι τοιχώματος τοῦ θαλάμου, λόγῳ τῆς εὐθυγράμμου διαδόσεως τοῦ φωτὸς, τὸ εἴδωλον τῆς φωτεινῆς πηγῆς ἀνεστραμμένον.

Ὑποθέσεις διαδόσεως τοῦ φωτὸς εἶναι ἡ **ὑπόθεσις ἐκπομπῆς** καὶ ἡ **ὑπόθεσις κυμάνσεων**, ἀντικατασταθεῖσα διὰ τῆς **ἠλεκτρομαγνητικῆς θεωρίας**.

Ταχύτης φωτὸς Αὕτη εἰς τὸ κενὸν κατὰ μέσον ὅρον εἶναι 300000 χιλιόμ./'', ἐλαττουμένη εἰς ὑλικὰ μέσα, ἐξαρτωμένη δὲ δι᾽ αὐτὰ ἐκ τῆς πυκνότητος καὶ τοῦ δείκτου διαθλάσεως **n**, διδομένη δὲ διὰ τοῦ τύπου $\mathbf{V}=\frac{300000}{\mathbf{n}}$. π.χ. εἰς τὸ ὕδωρ εἶναι 200000 χιλ/''.

Φωτομετρικαὶ μονάδες. Φωτομετρικαὶ μονάδες ἐντάσεως, μιᾶς φωτεινῆς πηγῆς εἶναι τὸ **Violle** (θεωρητική), **τὸ δεκαδικὸν κηρίον** (πρακτικὴ ἴση μὲ $\frac{1}{20}$ τοῦ **Violle**) καὶ αἱ λυχνίαι **Carcel** καὶ **Hefner**).

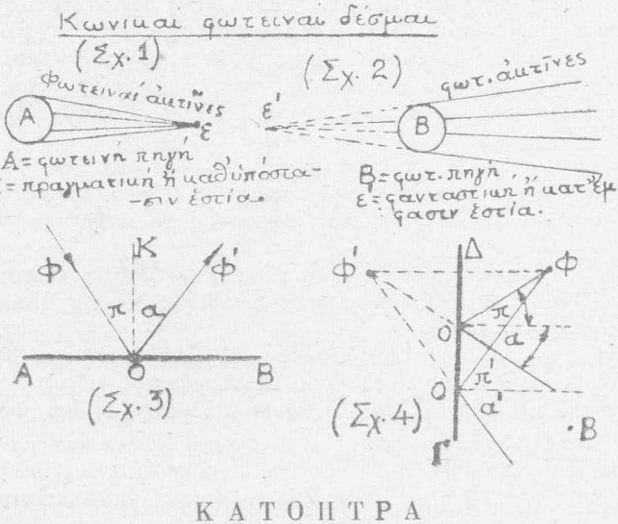
Θεωρητικὴ δὲ μονὰς φωτισμοῦ λαμβάνεται ὁ φωτισμὸς ὁ παρεχόμενος ὑπὸ πηγῆς 1 **Violle**, καθέτως ἐπὶ ἐπιφανείας, ἀπὸ ἀπόστασιν 1 ἑκ. Πρακτικὴ δὲ μονὰς φωτισμοῦ εἶναι τὸ **Lux** ἢ κηρίον, ἤτοι ὁ φωτισμὸς ὁ παρεχόμενος ἐπὶ ἐπιφανείας καθέτου πρὸς τὰς ἀκτῖνας καὶ ἐξ ἀποστάσεως 1 ἑκ., ὑπὸ ἑνὸς δεκαδικοῦ κηρίου.

Ἀνάκλασιν τοῦ φωτὸς ὀνομάζομεν τὴν ἀλλαγὴν διευθύνσεως τὴν ὁποίαν ὑφίστανται αἱ φωτειναὶ ἀκτῖνες προσπίπτουσαι ἐπὶ λείας καὶ στιλπνῆς ἐπιφανείας. **Διάχυσιν δὲ τοῦ φωτὸς** τὴν διασπορὰν κατὰ πᾶσαν διεύθυνσιν τὴν ὁποίαν ὑφίστανται αἱ φωτειναὶ ἀκτῖνες, ὅταν προσπίπτουν ἐπὶ ἐπιφανείας τραχείας (ἀνωμάλου).

Νόμοι ἀνακλάσεως (Σχ. 3) **ΦΟ**=Προσπίπτουσα ἀκτὶς ἐπὶ τῆς ἀνακλώσης ἐπιφανείας **ΑΒ**, **ΟΦ′**=Ἀνακλωμένη ἀκτίς, **Ο**=Σημεῖον προσπτώσεως. Γωνία **ΦΟΚ**=γωνία προσπτώσεως=**π**. Γωνία **ΚΟΦ′**= γωνία ἀνακλάσεως=**α**. Ἡ γωνία προπτώσεως ἰσοῦται μὲ τὴν γωνίαν ἀνακλάσεως. Ἡ προσπίπτουσα ἀκτὶς μετὰ τῆς ἀνακλωμένης κεῖνται ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὴν ἀνακλῶσαν ἐπιφάνειαν.

Συμφώνως μὲ τὴν ἀρχὴν τῆς ἀντιστρόφου πορείας τοῦ φωτός, ἀκτίς τις προσπίπτουσα κατὰ τὴν **ΦΟ** ἀνακλᾶται κατὰ τὴν ***ΟΦ′*** καὶ ἀντιθέτως, ἐὰν προσπέσῃ κατὰ τὴν ***Φ′Ο*** θὰ ἀνακλασθῇ κατὰ τὴν ***ΟΦ***.

Κωνικαὶ φωτειναὶ δέσμαι (Σχῆμ. 1 καὶ 2)



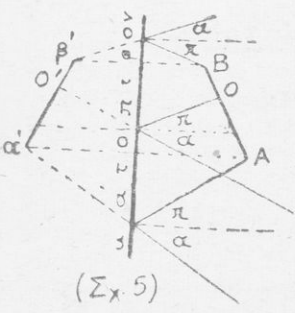
Κ Α Τ Ο Π Τ Ρ Α

Καλοῦνται κάτοπτρα πᾶσαι αἱ λεῖαι καὶ στιλπναὶ ἐπιφάνειαι αἱ ἀνακλῶσαι τὸ φῶς. Ἔχομεν κάτοπτρα ἐπίπεδα, σφαιρικά, παραβολικά, κωνικά.

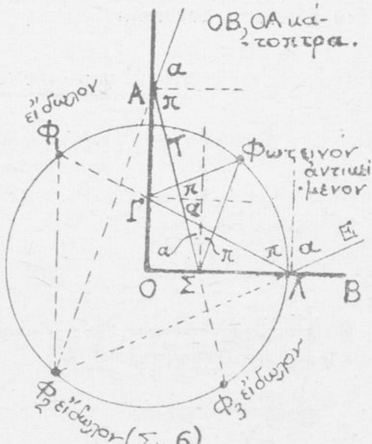
1ον) Ἐπίπεδα κάτοπτρα

α) **Εἴδωλον φωτεινοῦ σημείου.** Ἔστω Φ φωτεινὸν σημεῖον (Σχ. 4). Ἅπασαι αἱ ἐπὶ τοῦ κατόπτρου **ΓΔ** προσπίπτουσαι ἐκ τοῦ **Φ** φωτειναὶ ἀκτῖνες ἀνακλῶνται. Τινὰς τούτων δέχεται ὁ εἰς **Β** εὑρισκόμενος τυχὸν ὀφθαλμός. Αἱ προεκτάσεις τῶν ἀνακλωμένων ἀκτίνων συναντῶνται ὄπισθεν τοῦ κατόπτρου ἅπασαι εἰς σημεῖον **Φ′**, συμμετρικὸν τοῦ **Φ** (**Φ′Δ=ΔΦ**). Τὸ σημεῖον Φ′ εἶναι συνεπῶς τὸ φανταστικὸν εἴδωλον (ἢ κατ᾽ ἔμφασιν) τοῦ **Φ**.

β) **Εἴδωλον φωτεινοῦ ἀντικειμένου.** Εὐκόλως καθίσταται ἀντιληπτὸν (Σχ, 5) ὅτι τὸ φανταστικὸν εἴδωλον **α′β′** τοῦ φωτεινοῦ ἀντικειμένου **ΑΒ** θὰ σχηματισθῇ συμμετρικὸν πρὸς αὐτό. (Τὰ φανταστικὰ εἴδωλα τῶν **Α,Ο,Β** θὰ σχηματισθοῦν εἰς **α′**,Ο′,**β′**).



(Σχ. 5)



(Σχ. 6)

γ′) **Συγκλίνοντά κάτοπτρα** καλοῦνται τὰ ἐπίπεδα κάτοπτρα ἅτινα σχηματίζουν γωνίαν. Εἰς τὰ κάτοπτρα ταῦτα ἔχομεν πολλαπλὰς ἀνακλάσεις, σχηματιζομένου οὕτω ὡρισμένου ἀριθμοῦ εἰδώλων, ὑφ᾽ ἑκάστης φωτεινῆς πηγῆς, ὅστις ἀριθμὸς ἐξαρτᾶται ἀπὸ τήν γωνίαν τῶν κατόπτρων. Ὑπὸ ὀρθὴν π.χ. γωνίαν σχηματίζονται 3 εἴδωλα κατ᾽ἔμφασιν.

Ὁπωσδήποτε τὰ φανταστικὰ οὕτω πως σχηματιζόμενα εἴδωλα ὑφ᾽ ἑκάστου φωτεινοῦ ἀντικειμένου. εὑρίσκονται ἅπαντα ἐπὶ περιφερείας κύκλου (**Σχ.** 6).

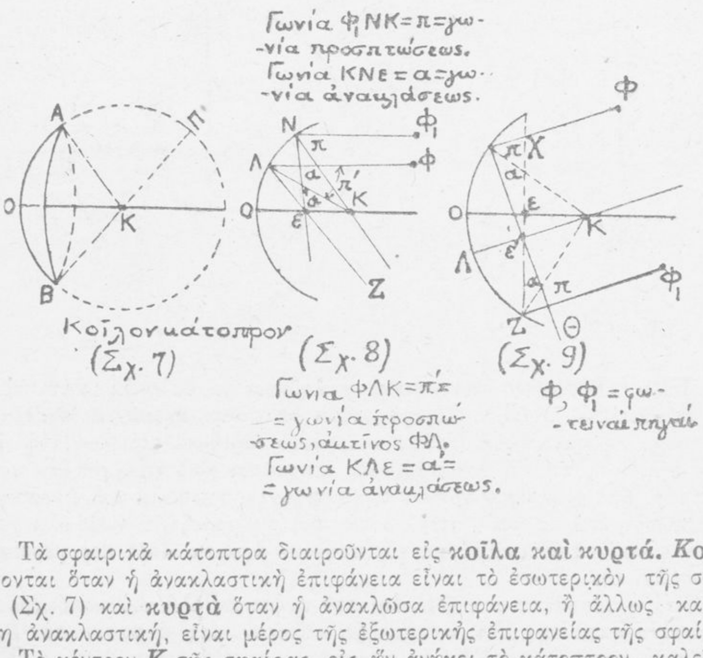
Οὕτω ἡ προσπίπτουσα **ΦΓ**, ἐπὶ τοῦ τμήματος **ΟΑ** τοῦ κατόπτρου, ἀνακλωμένη κατὰ τήν **ΓΛ**, σχηματίζει εἴδωλον κατ᾽ ἔμφασιν τὸ **Φ**$_1$, ἀλλὰ καὶ ἡ ἀνακλωμένη **ΓΛ**, ὡς προσπίπτουσα ἐπὶ τοῦ τμήματος **ΟΒ** τοῦ κατόπτρου καὶ ἀνακλωμένη κατὰ τὴν **Λ** Ε$_1$ σχηματίζει εἴδωλον φανταστικὸν εἰς Φ_2. Ὁμοίως ἡ προσπίπτουσα φωτεινὴ ἀκτὶς **ΦΣ** ἀνακλωμένη κατὰ τὴν **ΣΤ** σχηματίζει τὸ εἴδωλόν της εἰς Φ_3.

Ὁ ἀριθμὸς **N** τῶν σχηματισθησομένων φανταστικῶν εἰδώλων δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου.

$N = \frac{360^0}{\vartheta} - 1$. Ἔνθα ϑ ἡ γωνία τῶν κατόπτρων.

δ) Παράλληλα κάτοπτρα. Εἶναι ἐπίπεδα κάτοπτρα παράλληλα μεταξύ των. Λόγῳ τῶν διαδοχικῶν ἀνακλάσεων ὑπὸ τῶν κατόπτρων, σχηματίζονται ἄπειρα φανταστικὰ εἴδωλα, συμμετρικὰ ἀνὰ δύο, εἰς τὴν πραγματικότητα ὅμως βλέπομεν ὡρισμένον ἀριθμὸν εἰδώλων δι' ἕκαστον φωτεινὸν ἀντικείμενον, καὶ τὰ ὁποῖα εἴδωλα εὑρίσκονται ἅπαντα, μετὰ τοῦ φωτεινοῦ ἀντικειμένου των, ἐπὶ ἐπιπέδου καθέτου πρὸς τὰ κάτοπτρα ταῦτα καὶ ἐπὶ τῆς τομῆς τοῦ ἐπιπέδου μετ' ἄλλου ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τούτου καὶ διερχομένου διὰ τοῦ φωτεινοῦ ἀντικειμένου,

2ον Σφαιρικὰ κάτοπτρα



Τὰ σφαιρικὰ κάτοπτρα διαιροῦνται εἰς **κοῖλα καὶ κυρτά.** ***Κοῖλα*** λέγονται ὅταν ἡ ἀνακλαστικὴ ἐπιφάνεια εἶναι τὸ ἐσωτερικὸν τῆς σφαίρας (Σχ. 7) καὶ **κυρτὰ** ὅταν ἡ ἀνακλῶσα ἐπιφάνεια, ἢ ἄλλως καλουμένη ἀνακλαστική, εἶναι μέρος τῆς ἐξωτερικῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.

Τὸ κέντρον ***K*** τῆς σφαίρας, εἰς ἣν ἀνήκει τὸ κάτοπτρον, καλεῖται **Κέντρον καμπυλότητος**. **Ἀκτὶς καμπυλότητος**, ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας. **Κύριος ἄξων**, ἡ εὐθεῖα **ΟΚ**, ἥτις εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τομῆς **ΑΒ** τῆς σφαίρας (Σχ. 7). Ἄρα εἷς μόνον κύριος ἄξων ὑπάρχει, **Κορυφή**, τὸ σημεῖον Ο εἰς τὸ ὁποῖον ὁ κύριος ἄξων συναντᾷ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας. **Κυρία τομή**, πᾶσα τομὴ τοῦ κατόπτρου ὑπὸ ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ κυρίου ἄξονος καὶ περιέχουσα αὐτόν. Συνεπῶς αἱ κύριαι τομαὶ εἶναι τόξα κύκλου. **Δευτερεῦον ἄξων** καλεῖται πᾶσα εὐθεῖα διερχομένη ἐκ τοῦ κέντρου καμπυλότητος καὶ συναντῶσα τὸ κάτοπτρον (πχ. **ΚΑ**, **ΚΒ**, **ΒΚΠ** κλπ. (Σχ. 7). Ὅθεν ἔχομεν πολλοὺς δευτερεύοντας ἄξονας.

Πᾶσα εὐθεῖα κάθετος, ἐπὶ ἐπίπεδον ἐφαπτόμενον εἰς σημεῖόν τι τῆς σφαίρας καὶ ἀγομένη διὰ τοῦ σημείου τούτου ἐπαφῆς, διέρχεται καὶ διὰ τοῦ κέντρου καμπυλότητος.

Τὸ πλάτος (ἄνοιγμα) τοῦ κατόπτρου, δηλαδὴ τὴν γωνίαν **ΑΚΒ** (Σχ. 7), θεωροῦμεν μικρὰν καὶ μὴ ὑπερβαίνουσαν τὰς 8 μέχρι 9 μοίρας.

α) Κοῖλα κάτοπτρα

Διὰ τὸ φωτεινὸν ἀντικείμενον Φ_1 (Σχ. 8). Ἐὰν Φ_1 **Ν**, ἀκτὶς προσπτώσεως, εἶναι παράλληλος πρὸς κύριον ἄξονα **ΟΚ**, τότε ἡ **ΝΚ** εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κατόπτρου εἰς τὸ σημεῖον **Ν.** Ἡ δὲ **Νε** εἶναι ἡ ἀκτὶς ἀνακλάσεως. Ἡ Φ_1**ΝΚ** λέγεται γωνία προσπτώσεως, ἴση μὲ **ΚΝε**, γωνΐαν ἀνακλάσεως ὀνομαζομένην.

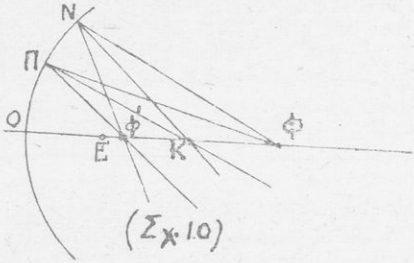
Διὰ τὸ φωτεινὸν ἀντικείνενον Φ ἔχομεν ὁμοίως, ὅτι, γωνία **ΦΛΚ** προσπτώσεως, ἴση μὲ ΚΛε, γωνίαν ἀνακλάσεως ὀνομαζομένην.

Τὸ σημεῖον **ε** ὀνομάζεται **Κυρία ἑστία** τοῦ κατόπτρου. Δηλαδὴ ἡ κυρία ἑστία **ε,** ἥτις φυσικὰ εἶναι μία καὶ μόνη διὰ κάθε κάτοπτρον, εἶναι τὸ σημεῖον τοῦ κυρίου ἄξονος, εἰς τὸ ὁποῖον ὅλαι αἱ παράλληλοι πρὸς αὐτὸν φωτειναὶ ἀκτῖνες, μετὰ τὴν ἀνάκλασίν των, τὸν συναντοῦν. Αἱ ἡλιακαὶ ἀκτῖνες, λόγῳ τῆς μεγάλης ἀποστάσεως τοῦ Ἡλίου ἀπὸ τῆς Γῆς, δύνανται νὰ θεωρηθοῦν ὡς παράλληλοι.

Ἡ ἀπόστασις Οε=φ, καλεῖται **Ἑστιακὴ ἀπόστασις.**

Εἶναι δὲ $\varphi = \frac{\varrho}{2}$, ἐὰν ϱ εἶναι ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος **ΟΚ.** Ἤτοι Οε=ε*Κ*.

Δευτερεύουσαι ἑστίαι. Ὀνομάζομεν δευτερεύουσαν ἑστίαν τὸ σημεῖον ἔστω **ε**΄ (Σχῆμα 9) δευτερεύοντος ἄξονος **ΚΛ,** διὰ τοῦ ὁποίου διέρχονται ὅλαι αἱ ἀνακλώμεναι ἀκτῖνες **ε΄Θ,ΖΧ** κλπ., τῶν ὁποίων αἱ προσπίπτουσαι **ΦΧ,**Φ_1**Ζ** κλπ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὸν δευτερεύοντα αὐτὸν ἄξονα **ΚΛ**. Ἐπειδὴ δὲ οἱ δευτερεύοντες ἄξονες εἶναι ἄπειροι, θὰ εἶναι ἄπειροι καὶ αἱ δευτερεύουσαι ἑστίαι. Ἤτοι διὰ κάθε φωτεινὸν σημιῖον ἔχομεν μίαν μόνον κυρίαν ἑστίαν σχηματιζομένην ἐπὶ τοῦ κυρίου ἄξονος εἰς τὸ μέσον τῆς ἀποστάσεως **ΟΚ**, ἤτοι ἐπὶ τῆς κυρίας ἑστίας τοῦ κατόπτρου. Ἀπείρους ὅμως δευτερευούσας, ἀναλόγως τῶν διευθύνσεων τῶν προσπιπτουσῶν ἀκτίνων. Πάντα δὲ τὰ φωτεινὰ ἀντικείμενα, τὰ εὑρισκόμενα πρὸ τοῦ αὐτοῦ κοίλου κατόπτρου σχηματίζουν τὴν ἰδίαν δευτερεύουσαν ἑστίαν, διὰ τὰς προσπιπτούσας ἐννοεῖται ἀκτίνας των, τὰς παραλλήλους πρὸς τὸν ἴδιον τυχόντα δευτερεύοντα ἄξονα. Αἱ δευτερεύουσαι ὅμως ἑστίαι τῶν φωτεινῶν ἀντικειμένων κεῖνται ἅπασαι ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὸν κύριον ἄξονα καὶ ὅπερ ἐπίπεδον τοῦτο διέρχεται διὰ τῆς κυρίας ἑστίας καὶ ὀνομάζεται **ἑστιακὸν ἐπίπεδον,** (ὡς τὸ διὰ τῆς **ΧΖ** διερχόμενον ἐπίπεδον καὶ κάθετον ἐπὶ τὸν κύριον ἄξονα ***ΟΚ***)· εἶναι δὲ καθ' ὑπόστασιν αἱ ἑστίαι αὗται τουτέστι πραγματικαί. (Σχ. 9)



(Σχ. 10)

Συζυγεῖς ἑστίαι. Ἐὰν φωτεινὸν σημεῖον ***Φ*** (Σ. 10) τεθῇ ἐπὶ τοῦ κυρίου ἄξονος τότε πᾶσα φωτεινὴ ἀκτὶς **ΦΝ,ΦΠ**.....ἀναχωροῦσα ἐκ τοῦ ***Φ*** καὶ προσπίπτουσα ἐπὶ τοῦ κατόπτρου, ἀνακλωμένη θὰ διέρχεται αἰσθητῶς διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου ***Φ'***, τοῦ κυρίου ἄξονος, ὅπερ καλεῖται συζυγὴς ἑστία τοῦ ***Φ***. Καλεῖται δὲ οὕτω, διότι ἐὰν τὸ φωτεινὸν σημεῖον τεθῇ εἰς ***Φ'*** ἡ ἑστία θὰ σχηματισθῇ εἰς ***Φ***. Ἐὰν πάλιν τὸ φωτεινὸν σημεῖον τεθῇ ἐπὶ ἄλλης θέσεως ἐπὶ τοῦ κυρίου ἄξονος, τότε καὶ ἡ συζυγής του ἑστία θὰ σχηματισθῇ ἐπὶ τοῦ κυρίου ἄξονος εἰς ἑτέραν τῆς προηγουμένης θέσιν. Πάντως αἱ συζυγεῖς ἑστίαι, ἐφ' ὅσον τὸ φωτεινὸν σημεῖον θὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ κυρίου ἄξονος ἐκεῖθεν τοῦ κέντρου καμπυλότητος ***Κ***, θὰ εὑρίσκωνται μεταξὺ **Ε** καὶ ***Κ*** καὶ θὰ εἶναι πραγματικαί. Ἐὰν δὲ τὸ φωτεινὸν σημεῖον τεθῇ ἐπὶ δευτερεύοντος ἄξονος καὶ ἡ συζυγής του ἑστία θὰ σχηματισθῇ ἐπὶ τοῦ δευτερεύοντος τούτου ἄξονος. (Εἰς τὸ σχῆμα 10 τὸ **Ε** εἶναι ἡ κυρία ἑστία).

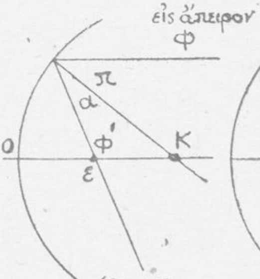
Ὥστε διὰ κάθε φωτεινὸν σημεῖον ἔχομεν μίαν κυρίαν ἑστίαν (τὴν κυρίαν ἑστίαν τοῦ κατόπτρου), μίαν συζυγὴν καὶ ἀπείρους δευτερευούσας ἑστίας.

Τύπος τῶν σφαιρικῶν κοίλων κατόπτρων.

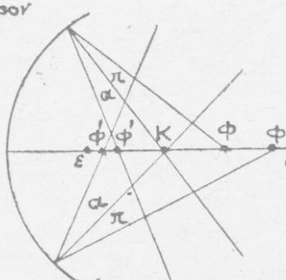
Καλοῦντες ***π*** τὴν ἀπόστασιν ΦΟ τοῦ φωτεινοῦ σημείου ἀπὸ τοῦ κατόπτρου (Σχ. 10), καὶ ***π'*** τὴν ἀπόστασιν ***Φ'Ο*** τῆς συζυγοῦς ἑστίας (ἢ ὅπερ τὸ αὐτὸ τοῦ εἰδώλου τοῦ φωτεινοῦ σημείου) ἀπὸ τῆς κορυφῆς **Ο** τοῦ κατόπτρου καὶ **φ** τὴν ἑστιακὴν ἀπόστασιν **ΕΟ**, καταλήγομεν εἰς τὸν τύπον (1). **Σημείωσις** (Ἐδῶ αἱ ἀποστάσεις **π** καὶ **π΄** δὲν ἔχουν οὐδεμίαν σχέσιν μὲ τὰ γράμματα **π** καὶ **π΄** μὲ τὰ ὁποῖα παριστῶμεν καὶ τὰς γωνίας προσπτώσεως).

$$\frac{1}{\varphi}=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi'} \quad (1)$$

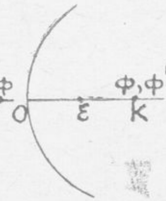
Ὁ τύπος οὗτος ἰσχύει καὶ διὰ τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν τὸ φωτεινὸν σημεῖον δὲν ἔκειτο ἐπὶ τοῦ κυρίου ἄξονος, ἀλλὰ ἐπὶ δευτερεύοντος ἄξονος, ὁπότε καὶ πάλιν, ὡς εἴπομεν, θὰ ἐσχηματίζετο ἡ συζυγής του ἑστία ἐπὶ τοῦ δευτερεύοντος τούτου ἄξονος.



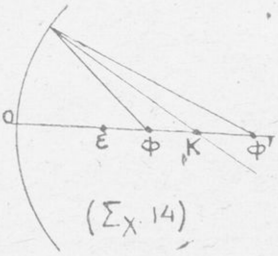
(Σχ. 11)



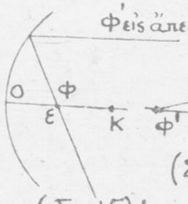
(Σχ. 12)



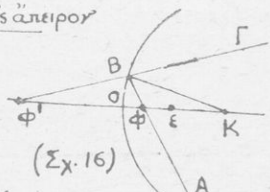
(Σχ. 13)



(Σχ. 14)



(Σχ. 15)



(Σχ. 16)

ΑΒΚ γωνία προσπτώσεως.
ΚΒΓ γωνία ἀνακλάσεως.
φ' φανταστική (κατ' ἔμφασιν) συζυγὴς ἑστία.

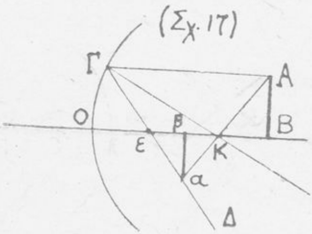
Διερεύνησις ἀνωτέρου τύπου (1)

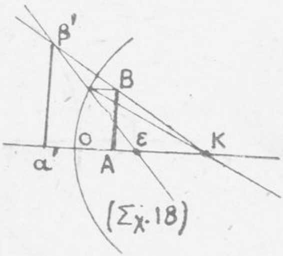
1) Ὅταν τὸ φωτεινὸν σημεῖον **Φ** εὑρίσκεται εἰς τὸ ἄπειρον, τότε ἡ συζυγής του ἑστία **Φ΄** σχηματίζεται ἐπὶ τῆς κυρίας ἑστίας **ε** (Σχ. 11)

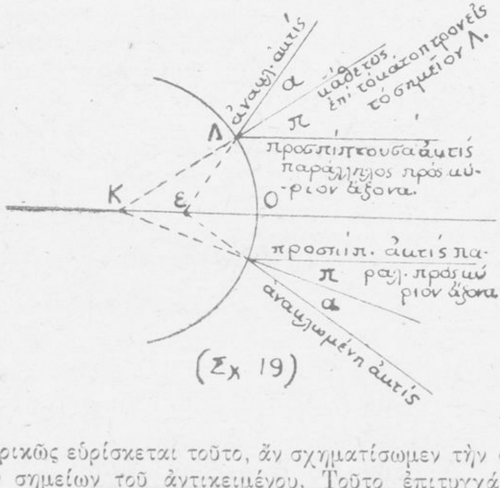
2) Ὅταν Φ μεταξὺ ἀπείρου καὶ κέντρου καμπυλότητος *K*, τότε Φ′ μεταξὺ **ε** καὶ *K* (Σχ. 12) 3) Ὅταν *Φ* εἰς **K**, τότε καὶ Φ′ εἰς K (Σχ. 13) 4) Ὅταν **Φ** μεταξὺ **ε** καὶ K, τότε Φ′ πέραν τοῦ K (σχ. 14) 5) Ὅταν Φ εἰς **ε**, τότε Φ′ εἰς ἄπειρον (Σχ. 15) καὶ 6) Ὅταν Φ μεταξὺ **ε** καὶ **ο**, τότε Φ′ φανταστικόν, δηλαδὴ ἡ ἀνακλωμένη δέσμη θὰ εἶναι ἀποκλίνουσα, σχηματιζομένης οὕτω φανταστικῆς συζυγοῦς ἑστίας (Σχ. 16).

Εἰς ὅλας τὰς περιπτώσεις, πλὴν τῆς τελευταίας, ἡ συζυγὴς ἑστία εἶναι πραγματικὴ (καθ᾽ ὑπόστασιν).

Εἴδωλον ἀντικειμένου κοίλων κατόπτρων.







Γεωμετρικῶς εὑρίσκεται τοῦτο, ἂν σχηματίσωμεν τὴν συζυγῆ ἑστίαν ἑκάστου τῶν σημείων τοῦ ἀντικειμένου, Τοῦτο ἐπιτυγχάνεται ἐὰν λάβωμεν δύο προσπιπτούσας ἀκτῖνας προερχομένας ἐκ τοῦ ἄκρου σημείου **A** (Σχ. 17), μίαν παράλληλον **AΓ** πρὸς τὸν κύριον ἄξονα, τῆς ὁποίας ἡ ἀνακλωμένη **ΓΔ** θὰ διέρχεται διὰ τῆς κυρίας ἑστίας **ε** τὴν δὲ ἄλλην

Αα κατὰ τὴν διεύθυνσιν τοῦ δευτερεύοντος ἄξονος **ΑΚ**, ἐπὶ τοῦ ὁποίου κεῖται τὸ σημεῖον **Α** καὶ ἥτις θ' ἀνακλασθῇ κατὰ τὴν ἰδίαν διεύθυνσιν **αΑ**, ὡς κάθετος ἐπὶ τὸ κάτοπτρον. Ἡ τομὴ **α** τῶν δύο τούτων ἀνακλωμένων ἀκτίνων εἶναι ἡ συζυγὴς ἑστία, ἤτοι τὸ εἴδωλον, τοῦ **Α**. Τὸ εἴδωλον τοῦ **Β** θὰ σχηματισθῇ εἰς **β**. Ὥστε τὸ εἴδωλον **αβ** τοῦ ἀντικειμένου **ΑΒ** θὰ σχηματισθῇ ἀνεστραμμένον καὶ πραγματικόν.

1) Ὅταν τὸ φωτεινὸν ἀντικείμενον τεθῇ πρὸ κοίλου κατόπτρου πέραν τοῦ κέντρου ***Κ*** ἔχομεν εἴδωλον πραγματικόν, μικρότερον τοῦ ἀντικειμένου καὶ ἀνεστραμμένον 2) Ὅταν τὸ ἀντικείμενον τεθῇ ἐπὶ τοῦ κέντρου καμπυλότητος λαμβάνομεν εἴδωλον εἰς τὴν αὐτὴν θέσιν, πραγματικόν, ἀλλὰ ἀνεστραμμένον 3) Ὅταν τὸ φωτεινὸν ἀντικείμενον εὑρίσκεται μεταξὺ κέντρου καμπυλότητος καὶ κυρίας ἑστίας λαμβάνομεν εἴδωλον πραγματικὸν ἀνεστραμμένον καὶ μεγαλύτερον τοῦ ἀντικειμένου πέραν τοῦ κέντρου ***Κ***. 4) ὅταν τὸ ἀντικείμενον εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς κυρίας ἑστίας δὲν σχηματίζεται εἴδωλον, διότι ἐξαφανίζεται εἰς τὸ ἄπειρον, καὶ 5) Ὅταν τὸ φωτεινὸν ἀντικείμενον εὑρίσκεται εἰς τὸ ἄπειρον πάλιν δὲν σχηματίζεται εἴδωλον ἐπὶ τῆς κυρίας ἑστίας.

Εἴδωλον κατ' ἔμφασιν, εἰς τὰ κοῖλα κάτοπτρα, σχηματίζεται, ὅταν τὸ φωτεινὸν ἀντικείμενον **ΑΒ** εὑρίσκεται μεταξὺ κορυφῆς κατόπτρου καὶ κυρίας ἑστίας. Τότε τὸ **π΄** εἶναι ἀρνητικὸν καὶ ὁ τύπος (1) γίνεται

$$\frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi'} = \frac{1}{\varphi} \quad (2)$$

Τὸ εἴδωλον **α΄β΄** σχηματίζεται τότε ὄπισθεν τοῦ κατόπτρου, ὀρθόν, ἐν σχέσει μὲ τὸ ἀντικείμενον καὶ μεγαλύτερον αὐτοῦ. (Σχ, 18).

Ὅταν τὸ εἴδωλον εἶναι πραγματικὸν τότε ἰσχύει ὁ τύπος (1) σελ. 67.

Μέγεθος εἰδώλου

Τοῦτο παρέχεται διὰ τοῦ τύπου (3).

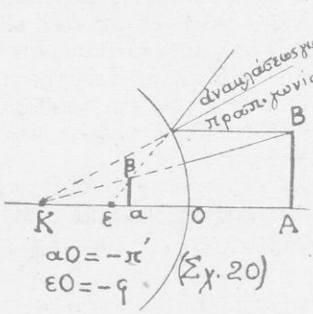
$$\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{E}} = \frac{\text{μέγεθος ἀντικειμένου}}{\text{μέγεθος εἰδώλου}} = \frac{\pi}{\pi'} \quad (3),$$ χρησιμοποιούμενος ὁ ἴδιος, εἴτε τὸ εἴδωλον εἶναι πραγματικόν, εἴτε φανταστικόν, εἴτε πρόκειται περὶ κοίλου, εἴτε περὶ κυρτοῦ κατόπτρου.

β) *Κυρτὰ κάτοπτρα*

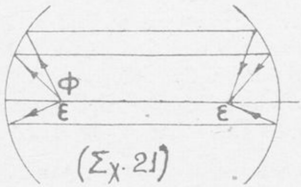
Εἰς ταῦτο (Σχ. 19) ἡ κυρία ἑστία **ε** εἶναι φανταστική, ὡς ἐπίσης κατ' ἔμφασιν σχηματίζονται καὶ ὅλαι αἱ δευτερεύουσαι ἑστίαι καὶ ἡ συζυγὴς ἑστία, ἥτις διὰ κάθε φωτεινὸν σημεῖον, μετακινούμενον ἐπὶ τοῦ κυρίου ἄξονος ἢ ἐπὶ δευτερεύοντος τοιούτου, θὰ εὑρίσκεται μεταξὺ τοῦ ἑστιακοῦ ἐπιπέδου καὶ τῆς κορυφῆς τοῦ κατόπτρου. Ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις $\varphi = -O\varepsilon = \varepsilon K$. Ἡ ἀπόστασις τοῦ εἰδώλου ἀπὸ τῆς κορυφῆς του κατόπτρου $= -\pi' = \alpha O$. Ἡ δὲ ἀπόστασις κορυφῆς κατόπτρου ἀπὸ φωτεινοῦ ἀντικειμένου $= OA = \pi$. (Σχ. 20).

Ὥστε ἔχομεν τὸν τύπον $\frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi'} = -\frac{1}{\varphi}$ (4)

Τὸ εἴδωλον **αβ** εἰς τὰ κάτοπτρα ταῦτα σχηματίζεται (Σχ 20) πάντοτε φανταστικόν, ὀρθὸν καὶ μικρότερον τοῦ πραγματικοῦ, θὰ σχηματίζεται δὲ μεταξὺ κυρίας ἑστίας καὶ κορυφῆς κατόπτρου.



(Σχ. 20)



(Σχ. 21)

Τὸ ἄνοιγμα τῶν κατόπτρων ἐν γένει ὑπετέθη πολὺ μικρὸν καὶ μὴ ὑπερβαῖνον τὰς $8^0 - 9^0$. Ἐὰν τὸ ἄνοιγμα εἶναι μεγαλύτερον συμβαίνει τὸ φαινόμενον ὥστε νὰ μὴ βλέπωμεν ὡς σημεῖον, τὸ εἴδωλον φωτεινοῦ σημείου, ἀλλὰ ὡς φωτεινὸν κύκλον. Τὸ φαινόμενον τοῦτο καλεῖται ἐκτροπὴ ἐκ τῆς σφαιρικότητος. Πρὸς ἀποφυγὴν τοῦ ἀτόπου τούτου, δι᾿ ἀνοίγματα ὄχι λίαν μικρά, προτιμῶνται τὰ παραβολικὰ κάτοπτρα.

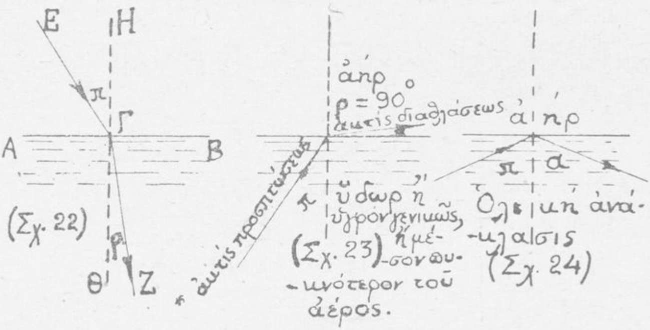
Συζυγῆ κάτοπτρα

Εἶναι κοῖλα σφαιρικὰ κάτοπτρα, ἅτινα τίθενται ἔναντι ἀλλήλων καὶ ὧν οἱ κύριοι ἄξονες συμπίπτουν (Σχ 21). Ἐὰν ἐπὶ τῆς κυρίας ἑστίας **ε** τοῦ ἑνός, τεθῇ φωτεινή τις πηγὴ **Φ** αἱ ἀνακλώμεναι ἀκτῖνες, βαίνουσαι παραλλήλως, συναντοῦν τὸ ἕτερον κάτοπτρον, μεθ᾿ ὃ ἀνακλώμεναι διέρχονται διὰ τῆς κυρίας ἑστίας **ε** τοῦ δευτέρου κατόπτρου συμφώνως πρὸς τὰ προλεχθέντα.

ΔΙΑΘΛΑΣΙΣ ΤΟΥ ΦΩΤΟΣ

Ὅταν μία φωτεινὴ ἀκτὶς μεταβαίνει πλαγίως (οὐχὶ καθέτως) ἀπὸ ἓν διαφανὲς μέσον εἰς ἄλλο διαφόρου πυκνότητος, συμβαίνει τότε τὸ φαινόμενον, ὅπερ καλεῖται **διάθλασις τοῦ φωτός**.

Ἔστω φωτεινή τις ἀκτὶς **ΕΓ** (Σχ. 22) μεταβαίνουσα ἐκ τοῦ ἀέρος εἰς τὸ ὕδωρ. **Ἡ ἀκτὶς αὕτη προσπτώσεως** διαθλᾶται κατὰ τὴν **ΓΖ**, ἥτις καλεῖται **Ἀκτὶς διαθλάσεως**.



Τὸ σημεῖον **Γ** καλεῖται σημεῖον προσπτώσεως, τὴν γωνίαν **ΕΓΗ**, σχηματιζομένην ὑπὸ τῆς ἀκτῖνος προσπτώσεως μετὰ τῆς καθέτου καλοῦμεν **Γωνίαν προσπτώσεως** καὶ τὴν **ΘΓΖ Γωνίαν διαθλάσεως**. Ἡ προσπίπτουσα καὶ ἡ ἀνακλωμένη ἀκτὶς κεῖνται ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὴν διαθλῶσαν ἐπιφάνειαν **ΑΒ**. ὁ δὲ λόγος τῶν ἡμιτόνων τῶν γωνιῶν προσπτώσεως **π** πρὸς τὰ ἡμίτονα τῶν ἀντιστοίχων γωνιῶν διαθλάσεως **ρ** εἶναι ἀριθμὸς σταθερός, διὰ τὰ ἴδια διαφανῆ μέσα.

Ὁ λόγος οὗτος **ν** καλεῖται **Δείκτης διαθλάσεως** ἤτοι :

$$\nu = \frac{\eta\mu\pi}{\eta\mu\rho}$$

Π. χ. ὁ δείκτης διαθλάσεως ἀπὸ ἀέρος εἰς ὕδωρ εἶναι $\frac{4}{3}$, ἀπὸ τοῦ ἀέρος εἰς τὴν ὕελον $\frac{3}{2}$ καὶ συνεπῶς ἀπὸ ὕδατος εἰς ἀέρα $\frac{3}{4}$ κλπ. Συνεπῶς ἰσχύει καὶ εἰς τὴν διάθλασιν ἡ ἀρχὴ τῆς ἀντιστρόφου πορείας τοῦ φωτός.

Δείκτας διαθλάσεως ἔχομεν τοὺς **ἀπολύτους**, ὅταν τὸ φῶς μεταβαίνει ἀπὸ τοῦ κενοῦ εἰς τὸ διαφανὲς σῶμα καὶ τοὺς **σχετικούς**, ὅταν τοῦτο μεταβαίνει ἀπὸ τοῦ ἀέρος εἰς τὸ διαφανὲς σῶμα. Ὁ ἀπόλυτος δείκτης διαθλάσεως σώματός τινος εἶναι τὸ γινόμενον τοῦ σχετικοῦ δείκτου του ἐπὶ τὸν ἀπόλυτον δείκτην διαθλάσεως τοῦ ἀέρος.

Κατὰ κανόνα, ὅσον τὸ φῶς μεταβαίνει ἀπὸ μέσον πυκνότερον εἰς ἀραιότερον ἐπὶ τοσοῦτον ἡ ἀκτὶς διαθλάσεως ἀπομακρύνεται τῆς καθέτου καὶ ἀντιθέτως.

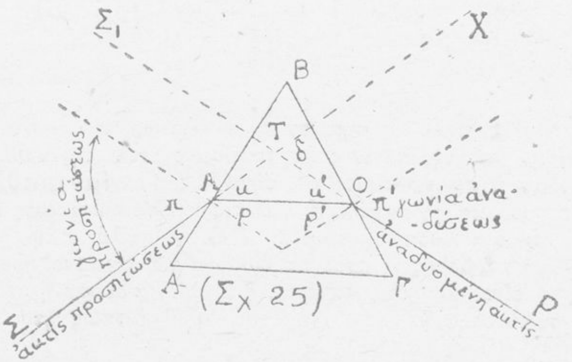
Τὴν γωνίαν προσπτώσεως **π**, ἀκτῖνος ἥτις μεταβαίνει ἐκ πυκνοτέρου εἰς ἀραιότερον μέσον καὶ τῆς ὁποίας ἡ διαθλαστικὴ γωνία εἶναι 90^0 ὀνομάζομεν **Ὁρικὴν γωνίαν** (Σχ. 23).

Ἐὰν τὸ φῶς προσπέσῃ ὑπὸ γωνίαν μεγαλυτέραν τῆς ὁρικῆς γωνίας τότε ὅλη ἡ ποσότης τοῦ προσπίπτοντος φωτὸς ἀνακλᾶται, ὡς ἐὰν ἡ διαθλαστικὴ ἐπιφάνεια εἶναι κάτοπτρον (Σχ. 24), ὁπότε ἔχομεν τὴν **Ὁλικὴν ἀνάκλασιν.**

Ὅταν φωτεινὴ ἀκτὶς εἰσέρχεται πλαγίως διὰ πλακὸς μὲ ἕδρας παραλλήλους, τότε εὐκόλως ἀποδεικνύεται, ὅτι αὕτη ἐξέρχεται παραλλήλως πρὸς τὴν προσπίπτουσαν ἀκτῖνα.

ΠΡΙΣΜΑΤΑ

Ὀνομάζεται πρῖσμα, πᾶν μέσον διαφανές, ὅπερ περατοῦται εἰς δύο ἕδρας ἐπιπέδους, μὴ παραλλήλους.



(Σχ 25)

Ἀκμὴ πρίσματος, εἶναι ἡ εὐθεῖα κατὰ τὴν ὁποίαν τέμνονται αἱ δύο ἐπίπεδοι ἕδραι.

Βάσις εἶναι ἡ ἕδρα ἡ ἀπέναντι τῆς ἀκμῆς.

Διαθλαστικὴ γωνία εἶναι ἡ ὑπὸ τῶν δύο ἑδρῶν δίεδρος γωνία τοῦ πρίσματος. (Γωνία Β) (Σχ. 25).

Κυρία τομὴ εἶναι κάθε τομὴ κάθετος πρὸς τὴν ἀκμὴν καὶ ἥτις μετρᾶ τὴν ἐπίπεδον γωνίαν, τὴν ἀντίστοιχον πρὸς τὴν δίεδρον.

Ἡ **ΣΛ** προσπίπτουσα φωτεινὴ ἀκτὶς ἐπὶ τῆς ἕδρας **ΑΒ.** Αὕτη ὑφίσταται δύο διαθλάσεις μίαν εἰς Λ καὶ τὴν ἄλλην εἰς Ο κατὰ τὴν ἔξοδον. Παρατηρητὴς ἱστάμενος εἰς **Ρ** βλέπει τὸ εἴδωλον τοῦ **Σ** εἰς Σ_1 (Σχ. 25). Ἤτοι τὰ ἀντικείμενα φαίνονται ὅτι ἐκτρέπονται πρὸς τὴν κορυφὴν τοῦ πρίσματος **Β**. Ἡ γωνία $\mathbf{PTX=\delta=\Sigma T\Sigma_1}$, κατὰ τὴν ὁποίαν ἐκτρέπεται ἡ ἀκτὶς **ΣΛ**, ὀνομάζεται **Γωνία ἐκτροπῆς.** Αἱ γωνίαι ἐκτροπῆς ἐξαρτῶνται ἀπὸ τὸν δείκτην διαθλάσεως **(ν)**, ἀπὸ τὴν διαθλαστικὴν γωνίαν **Β** καὶ ἀπὸ τὴν γωνίαν προσπτώσεως **π**.

Καλοῦντες διὰ **Β** τὴν διαθλαστικὴν γωνίαν τοῦ πρίσματος, **π**, **ρ** **π′**, **ρ′** τὰς γωνίας προσπτώσεως καὶ διαθλάσεως κατὰ τὴν εἴσοδον καὶ ἔξοδον τῆς φωτεινῆς ἀκτῖνος **ΣΛ** καὶ διὰ **ν** τὸν δείκτην διαθλάσεως (δ. **δ**) καὶ ἔχοντες ὑπ' ὄψιν, ὅτι $\mathbf{\nu} = \frac{\eta\mu\pi}{\eta\mu\varrho} = \frac{\eta\mu\pi'}{\eta\mu\varrho'}$ καὶ ὅτι $\mathbf{B} = \varrho + \varrho'$ καὶ $\mathbf{\delta} = \varkappa + \varkappa'$, εὑρίσκομεν ὅτι $\mathbf{\delta} = \pi + \pi' - \mathbf{B}$, ἔνθα $\mathbf{B} = \varrho + \varrho'$, ὅστις τύπος ἀποτελεῖ τὸν τύπον τῶν πρισμάτων.

Ὅταν γωνία προσπτώσεως **π** ἰσοῦται γωνίαν ἀναδύσεως (διαθλάσεως) **π′** (Σχ. 25), τότε ἔχομεν τὴν **ἐλαχίστην Γωνίαν ἐκτροπῆς δ** καὶ ὅπερ καλεῖται Νευτώνειος θέσις τοῦ πρίσματος (**ϱ**=μὲ ρ σχημάτων).

$$\text{Ὁπότε } \pi = \frac{\mathbf{B}+\delta}{2} = \pi',\ \varrho = \frac{\mathbf{B}}{2} = \varrho'$$

$$\text{καὶ } \mathbf{\nu} = \frac{\eta\mu\frac{\mathbf{B}+\delta}{2}}{\eta\mu\frac{\mathbf{B}}{2}}$$

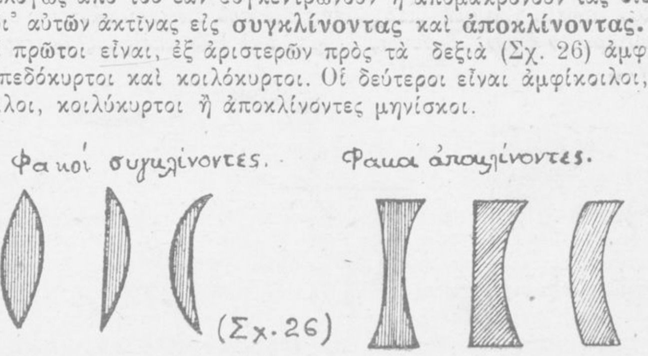
Τύπος λεπτῶν πρισμάτων

Ἐὰν ἡ διαθλαστικὴ γωνία εἶναι πολὺ μικρά, τότε **π** καὶ **ϱ** πολὺ μικραὶ ὁπότε ἀντὶ τῶν ἡμιτόνων τῶν γωνιῶν δυνάμεθα νὰ λάβωμεν τὰς ἰδίας γωνίας. Ἄρα $\pi = \nu\varrho$ καὶ $\pi' = \nu\varrho'$ καὶ ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον τῶν πρισμάτων εὑρίσκομεν $\mathbf{\delta} = (\mathbf{\nu} - 1)\mathbf{B}$, ὅστις εἶναι ὁ **τύπος** τῶν λεπτῶν πρισμάτων, χρησιμοποιούμενος πρὸς εὕρεσιν τοῦ τύπου τῶν φακῶν, δεδομένου ὅτι οἱ φακοὶ ὑπολογίζονται ὡς ἄθροισμα λεπτῶν πρισμάτων.

ΦΑΚΟΙ

Οὗτοι εἶναι διαφανῆ σώματα ἅτινα περατοῦνται εἰς δύο σφαιρικὰς ἐπιφανείας, ἢ εἰς μίαν σφαιρικὴν καὶ μίαν ἐπίπεδον. Διακρίνονται ἀναλόγως ἀπὸ τοῦ ἐὰν συγκεντρώνουν ἢ ἀπομακρύνουν τὰς διερχομένας δι' αὐτῶν ἀκτῖνας εἰς **συγκλίνοντας** καὶ **ἀποκλίνοντας.**

Οἱ πρῶτοι εἶναι, ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιὰ (Σχ. 26) ἀμφίκυρτοι ἐπιπεδόκυρτοι καὶ κοιλόκυρτοι. Οἱ δεύτεροι εἶναι ἀμφίκοιλοι, ἐπιπεδόκοιλοι, κοιλύκυρτοι ἢ ἀποκλίνοντες μηνίσκοι.



(Σχ. 26)

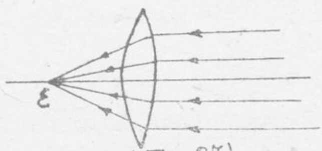
Κέντρα καμπυλότητος ἑνὸς φακοῦ εἶναι τὰ κέντρα τῶν σφαιρῶν, ὧν ἀποτελοῦσι μέρος οἱ φακοί.

Κύριος ἄξων, εἶναι ἡ εὐθεῖα ἡ ἑνώνουσα τὰ κέντρα τῶν φακῶν, ἢ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ φακοῦ κάθετος πρὸς τὴν ἑτέραν ἐπίπεδον ἐπιφάνειαν αὐτοῦ.

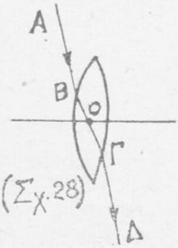
Κυρία τομὴ εἶναι πᾶσα τομὴ διερχομένη διὰ τοῦ κυρίου ἄξονος αὐτοῦ.

Τοὺς φακοὺς ὑποθέτομεν ὅτι ἔχουν μικρὸν ἄνοιγμα (10°—20°), ὡς ἐπίσης ὅτι ἀποτελοῦν ἄθροισμα πολλῶν λεπτῶν πρισμάτων.

1ον Φακοὶ συγκλίνοντες ἢ συγκεντρωτικοί.



(Σχ. 27)



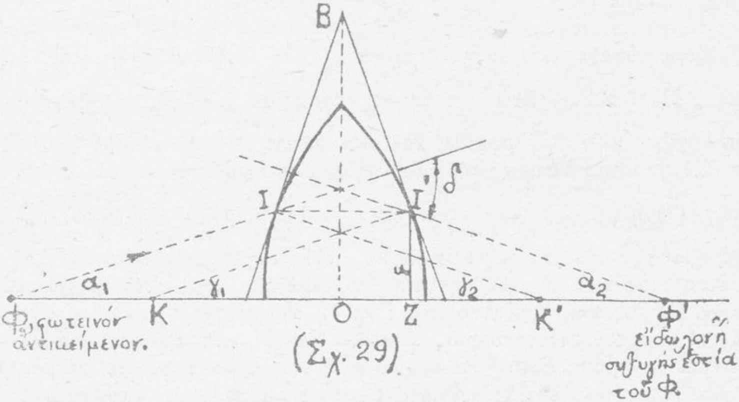
(Σχ. 28)

Αἱ παράλληλοι πρὸς τὸν κύριον ἄξονα φωτειναὶ ἀκτῖνες διερχόμεναι διὰ τοῦ φακοῦ (διὰ τῶν λεπτῶν πρισμάτων ἐξ ὧν θεωρεῖται ὅτι ἀποτελεῖται ὁ φακὸς) ἐκτρέπονται καὶ συγκλίνουν πρὸς τὸ σημεῖον **ε** καλούμενον **κυρία ἑστία**. (Σχ. 27).

Τὸ σταθερὸν σημεῖον **ο** (Σχ. 28), εἰς ὃ ἡ διερχομένη διὰ τοῦ φακοῦ ἀκτὶς **ΒΓ** συναντᾷ τὸν κύριον ἄξονα καὶ ἥτις ἀκτὶς εἶναι ἡ ἑνώνουσα τὸ σημεῖον **Β** προσπτώσεως μετὰ τοῦ σημείου **Γ** ἐξόδου, καλεῖται **ὀπτικὸν κέντρον** τοῦ φακοῦ (τοῦτο ἀντιστοιχεῖ πρὸς τὴν κορυφὴν εἰς τὰ κάτοπτρα).

Πᾶσα εὐθεῖα γραμμὴ διερχομένη διὰ τοῦ ὀπτικοῦ κέντρου ὀνομάζεται δευτερεῦον ἄξων. Συνεπῶς ἔχομεν καὶ ἐδῶ ἀπείρους δευτερεύοντας ἄξονας.

ΤΥΠΟΙ



(Σχ. 29)

$$\delta = (\nu - 1)\, B,\quad B = IBO + I'BO = \gamma_1 + \gamma_2$$

$$\delta = \alpha_1 + \alpha_2 \text{ ἄρα } \alpha_1 + \alpha_2 = (\nu - 1)\, (\gamma_1 + \gamma_2),\ I'Z = \varkappa$$

$$\frac{\varkappa}{\Phi O} + \frac{\varkappa}{\Phi' O} = (\nu - 1) \left(\frac{\varkappa}{KO} + \frac{\varkappa}{K'O} \right)$$

$$\frac{\varkappa}{\pi} + \frac{\varkappa}{\pi'} = (\nu - 1) \left(\frac{\varkappa}{\varrho_1} + \frac{\varkappa}{\varrho_2} \right)$$

$$\text{ἢ } \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi'} = (\nu - 1) \left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} \right) \quad (1)$$

Ἔνθα π ἀπόστασις φωτεινοῦ σημείου Φ ἀπὸ ἀπὸ ὀπτικοῦ κέντρου O, π' ἀπόστασις ὀπτίκοῦ κέντρου ἀπὸ εἰδώλου ἢ συζυγοῦς ἑστίας Φ', ϱ_1 καὶ ϱ_2 αἱ ἀκτῖνες καμπυλότητος KO καὶ OK' καὶ ν ὁ δείκτης διαθλάσεως (Σχ. 29).

Ἐὰν τὸ φωτεινὸν σημεῖον τεθῇ εἰς τὸ ἄπειρον, τότε ἡ συζυγὴς ἑστία του θὰ σχηματισθῇ εἰς τὴν κυρίαν ἑστίαν τοῦ φακοῦ, ἤτοι τότε $\pi' = \varphi =$ ἑστιακὴ ἀπόστασις, καὶ $\frac{1}{\pi} = \frac{1}{\infty} =$ περίπου o, ὅτε ἔχομεν.

$$\frac{1}{\infty} + \frac{1}{\pi'} = \frac{1}{\varphi} = (\nu - 1) \left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} \right) \quad (2)$$ δι᾽ οὗ προσδιορίζομεν τὴν ἑστιακὴν ἀπόστασιν φ.

Ὥστε ὡς τύπον φακῶν συγκλινόντων (συγκεντρωτικῶν) **διὰ εἴδωλα πραγματικὰ ἔχομεν.**

$$\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi'}=\frac{1}{\varphi} \quad (3)$$

Τὸ **φ**, ὡς εἴπομεν, παριστᾷ τὴν ἑστιακὴν ἀπόστασιν, ἥτις εἰς τοὺς φακοὺς δὲν ἰσοῦται, ὅπως εἰς τὰ κάτοπτρα, μὲ τὸ $\frac{1}{2}$ τῆς ἀκτῖνος καμπυλότητος, ἀλλὰ ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸν δείκτην διαθλάσεως **ν** τοῦ φακοῦ καὶ ἀπὸ τὰς ἀκτῖνας καμπυλότητος αὐτοῦ καὶ εὑρίσκεται ἐκ τῶν τύπων (2) ἢ (3). Τὸ $\frac{1}{\varphi}$ καλεῖται ἰσχὺς τοῦ φακοῦ καὶ μᾶς δίδει τὴν ἱκανότητα τὴν ὁποίαν ἔχει ὁ φακὸς πρὸς σύγκλησιν. Αὕτη μετρᾶται εἰς διοπτρίας καὶ εἶναι ἀρνητική, προκειμένου περὶ ἀποκεντρωτικῶν φακῶν. Ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις **φ** εἶναι ἡ ἀπόστασις τῆς κυρίας ἑστίας ἀπὸ τοῦ ὀπτικοῦ κέντρου τοῦ φακοῦ. Ἐπειδὴ αἱ παράλληλοι ἀκτῖνες δύνανται νὰ προσπίπτουν ἐπὶ τῆς μιᾶς ἢ ἑτέρας ἐπιφανείας τοῦ φακοῦ, ἔχομεν δύο κυρίας ἑστίας, αἵτινες εἶναι καθ' ὑπόστασιν (πραγματικαὶ) καὶ εὑρίσκονται, ἑκατέρωθεν τοῦ φακοῦ, εἰς τὴν αὐτὴν ἀπ' αὐτοῦ ἀπόστασιν. Αὗται δυνατὸν νὰ σχηματίζονται καὶ πέραν τῶν κέντρων καμπυλότητος K, K' (σχ. 29), ἀναλόγως τῶν ϱ_1, ϱ_2 καὶ τοῦ δείκτου διαθλάσεως **ν**, ἢ ἡ μία ἐντεῦθεν τοῦ κέντρου καμπυλότητος τῆς ἐπιφανείας εἰς ἣν ἀνήκει καὶ ἡ ἄλλη ἐκεῖθεν τοῦ κέντρου καμπυλότητος τῆς ἑτέρας ἐπιφανείας τοῦ φακοῦ.

Διὰ φακὸν ὅπου $\varrho_1=\varrho_2$ καὶ $\nu=\frac{3}{2}$ εὑρίσκομεν ἐκ τοῦ τύπου (2) ὅτι $\frac{1}{\varphi}=\frac{1}{\varrho}$, ἤτοι $\varphi=\varrho$ (ἔνθα $\varrho=\varrho_1=\varrho_2$), ὅπου τότε ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις ἰσοῦται μὲ τὴν ἀκτῖνα καμπυλότητος, τουτέστιν ἡ κυρία ἑστία συμπίπτει μὲ τὸ κέντρον καμπυλότητος τοῦ φακοῦ.

Διερεύνησις τοῦ τύπου τῶν φακῶν

Ἐὰν ἡ προσπίπτουσα δέσμη ἀκτίνων εἶναι παράλληλος πρὸς δευτερεύοντα ἄξονα θὰ σχηματισθῇ τότε δευτερεύουσα ἑστία ἐπὶ τοῦ δευτερεύοντος ἄξονος. Πᾶσαι αἱ δευτερεύουσαι ἑστίαι κεῖνται ἐπὶ ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τῆς κυρίας ἑστίας καὶ καλουμένου ἑστιακοῦ ἐπιπέδου.

1) Ὅταν τὸ φωτεινὸν σημεῖον εὑρίσκεται μεταξὺ ἀπείρου καὶ διπλασίας ἑστιακῆς ἀποστάσεως, ἀπὸ τοῦ φακοῦ, σχηματίζεται πρὸς τὸ ἄλλο μέρος τοῦ φακοῦ ἑστία συζυγής, κειμένη μεταξὺ ἑτέρας κυρίας ἑστίας καὶ διπλασίας ἑστιακῆς ἀποστάσεως. 2) Ὅταν τὸ φωτεινὸν σημεῖον τεθῇ ἐπὶ τῆς διπλασίας ἑστιακῆς ἀποστάσεως, ἡ συζυγὴς ἑστία σχηματίζεται ἐπὶ τῆς ἑτέρας διπλασίας ἀποστάσεως 3) Ὅταν τὸ φωτεινὸν σημεῖον τεθῇ μεταξὺ διπλασίας ἑστιακῆς ἀποστάσεως καὶ τῆς κυρίας ἑστίας, ἡ συζυγὴς ἑστία σχηματίζεται πέραν τῆς ἑτέρας διπλασίας ἑστιακῆς ἀποστάσεως καὶ 4) Ὅταν τὸ φωτεινὸν σημεῖον τεθῇ ἐπὶ τῆς κυρίας ἑστίας τότε συζυγὴς ἑστία δὲν σχηματιζεται, ἀλλ' αἱ ἐξ αὐτοῦ προερχόμεναι ἀκτῖνες ἐξέρχονται παραλλήλως πρὸς τὸν κύριον ἄξονα τοῦ φακοῦ. Δι' ὅλας τὰς περιπτώσεις ταύτας ἰσχύει ὁ τύπος (3).

Εἴδωλα σημείων φανταστικά Ἐὰν τὸ φωτεινὸν σημεῖον τεθῇ μεταξὺ κυρίας ἑστίας καὶ τοῦ φακοῦ ὁπότε $\pi < \varphi$, τὸ π' εἶναι ἀρνητικόν, αἱ ἀκτῖνες διερχόμεναι ἐκ τοῦ φακοῦ δὲν συναντῶνται, ἀλλὰ ἀποκλίνουν καὶ ὁ ὀφθαλμὸς δεχόμενος αὐτὰς σχηματίζει φανταστικὴν συζυγῆ ἑστίαν (εἴδωλον) πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ φακοῦ. Τότε ἔχομεν τὴν σχέσιν.

$$\frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi'} = \frac{1}{\varphi}$$

Εἴδωλα ἀντικειμένων. Τὰ εἴδωλα τῶν ἀντικειμένωνεἶναι πραγματικά, ὅτε ἰσχύει ὁ τύπος (3), ἐκτὸς τῆς περιπτώσεως ὅπου τὰ φωτεινὰ ἀντικείμενα εἶναι μεταξὺ κυρίας ἑστίας καὶ τοῦ φακοῦ, ὁπότε τότε τὰ εἴδωλα φανταστικά, ὀρθά, μεγαλύτερα τοῦ ἀντικειμένου καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ φακοῦ καὶ συνεπῶς τότε τὸ π' λαμβάνεται $-\pi'$ (ἀρνητικόν), ὁπότε πάλιν ἔχομεν τὴν κάτωθι σχέσιν.

$$\frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi'} = \frac{1}{\varphi}$$

Ὁμοίως ἰσχύει γενικῶς ἡ σχέσις $\frac{A}{E} = \frac{\pi}{\pi'}$ (ὅπου **Α** τὸ μέγεθος ἀντικειμένου καὶ **Ε** τὸ μέγεθος τοῦ εἰδώλου).

2ον *Φακοὶ ἀποκλίνοντες ἢ ἀποκεντρωτικοί.*

Διὰ τούτους ἔχομεν τὰς σχέσεις:

$$\frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi'} = -\frac{1}{\varphi} \text{ καὶ } \frac{A}{E} = \frac{\pi}{\pi'}$$

Τὰ π' καὶ φ ἀρνητικά, καθόσον σχηματίζονται κατ' ἔμφασιν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

176) Δύο κάτοπτρα ἐπίπεδα συγκλίνουν ὑπὸ ὀρθὴν γωνίαν. Φωτεινὸν σημεῖον εὑρίσκεται πρὸ αὐτῶν εἰς ἀπόστασιν 3 μ. μέτρων ἀφ' ἑκάστου κατόπτρου. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ εἴδωλα, ἃ τοῦτο θὰ σχηματίσῃ, καὶ διὰ γεωμετρικῆς κατασκευῆς νὰ προσδιορισθῇ ἡ ἀκριβής των θέσις

(Κλῖμαξ μηκῶν: 1 ἑκ. ἐπὶ τοῦ χάρτου ν' ἀντιστοιχῇ εἰς 1 μέτρον πραγματικόν).

177) Δύο ἐπίπεδα κάτοπτρα συγκλίνουν ὑπὸ γωνίαν 45°. Νὰ προσδιορισθῇ α) ὁ ἀριθμὸς τῶν εἰδώλων φωτεινοῦ ἀντικειμένου ἢ φωτεινοῦ σημείου εὑρισκομένου πρὸ αὐτῶν, β) Ποίαν θέσιν θὰ ἔχουν τὰ εἴδωλα ἐν σχέσει πρὸς τὴν τομὴν τῶν κατόπτρων:

178) Ἔχομεν ἐπίπεδον κάτοπτρον καὶ φωτεινὸν σημεῖον εἰς ἀπόστασιν 3 μ. ἀπ' αὐτοῦ. Νὰ δειχθῇ α) ἡ κορυφὴ τοῦ κατόπτρου τούτου, ὁ ἄξων του καὶ ἡ κυρία ἑστία τοῦ κατόπτρου. β) Πόσα εἴδωλα τοῦ φωτεινοῦ τούτου σημείου θὰ σχηματίσῃ τὸ ἐπίπεδον τοῦτο κάτοπτρον.

179) Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ κοίλου σφαιρικοῦ κατόπτρου, ἑστιακῆς ἀποστάσεως 30 ἑκ., πρέπει νὰ τεθῇ ἀντικείμενον, ἵνα τὸ εἴδωλον σχηματισθῇ α) καθ' ὑπόστασιν εἰς ἀπόστασιν 50 ἑκ. ἀπὸ τοῦ κατόπτρου; καὶ β) ἵνα τὸ εἴδωλον σχηματισθῇ κατ' ἔμφασιν εἰς τὴν αὐτὴν ἀπὸ τοῦ κατόπτρου ἀπόστασιν;

180) Εἰς ἀπόστασιν 30 ἑκ. ἀπὸ σφαιρικοῦ κατόπτρου εὑρίσκεται φωτεινὸν ἀντικείμενον τοῦ ὁποίου τὸ κάτοπτρον δίδει εἴδωλον τρεῖς φορὰς μικρότερον. Ζητεῖται τὸ εἶδος καὶ ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ κατόπτρου εἰς τὴν περίπτωσιν ὅπου τὸ εἴδωλον εἶναι πραγματικόν, καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν ὅπου τὸ εἴδωλον εἶναι φανταστικόν.

181) Ποία ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος κοίλου κατόπτρου, εἰς τὸ ὁποῖον φωτοβόλον σημεῖον τιθέμενον εἰς ἀπόστασιν 0,5 μ. ἀπὸ τῆς κυρίας ἑστίας σχηματίζει τὸ πραγματικὸν εἴδωλόν του εἰς ἀπόστασιν 12,5 μ. ἀπ' αὐτῆς;

182) Φωτοβόλον σημεῖον κεῖται ἐπὶ τοῦ κυρίου ἄξονος κοίλου κατόπτρου, εἰς ἀπόστασιν ἀπ' αὐτοῦ τετραπλασίαν τῆς ἀκτῖνος καμπυλότητος. Ποῖος ὁ λόγος τῆς ἀποστάσεως **π'**, τοῦ εἰδώλου του ἀπὸ τοῦ κατόπτρου, ὡς πρὸς τὴν ἑστιακὴν ἀπόστασιν **φ**;

183) Δίδεται κάτοπτρον σφαιρικὸν κοῖλον ἀκτῖνος 5 μ. Εἰς ποίαν ἀπὸ τοῦ κατόπτρου τούτου ἀπόστασιν πρέπει νὰ θέσωμεν φωτοβόλον ἀντικείμενον διὰ νὰ ἔχωμεν εἴδωλον πραγματικὸν α) τετράκις μεγαλύτερον τοῦ ἀντικειμένου β) τετράκις μικρότερον;

184) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις κοίλου κατόπτρου, γνωστοῦ ὄντος, ὅτι μικρὰ φωτεινὴ εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ τὸν κύριον ἄξονα καὶ 15 ἑκ. ἀπὸ τοῦ κατόπτρου ἀπέχουσα παρέχει εἴδωλον φανταστικὸν 6 φορὰς μεγαλύτερον τοῦ ἀντικειμένου.

185) Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ κυρτοῦ κατόπτρου πρέπει νὰ τεθῇ φωτεινὸν ἀντικείμενον, ἵνα τὸ εἴδωλόν του εἶναι ἴσον πρὸς τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ ἀντικειμένου; (Νὰ γίνῃ καὶ σχῆμα ὑπὸ κλίμακα).

186) Δύο κοῖλα κάτοπτρα, ὧν αἱ ἀκτῖνες εἶναι 1 μ. καὶ 1,5 μ. κεῖνται ἀπέναντι ἀλλήλων οὕτως ὥστε οἱ ἄξονες αὐτῶν νὰ συμπίπτουν. Ἡ ἀπόστασις τῶν κατόπτρων μεταξύ των εἶναι 3 μ. Νὰ προσδιορισθῇ τὸ σημεῖον τοῦ κυρίου ἄξονος εἰς τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ τεθῇ φωτοβόλον ἀντικείμενον ἵνα τὰ πραγματικὰ εἴδωλα τὰ ὑπὸ τῶν κατόπτρων τούτων διδόμενα εἶναι ἴσα.

187) Ἔχομεν ἔναντι ἀλλήλων δύο κάτοπτρα κοῖλα τῆς αὐτῆς κυρίας ἑστιακῆς ἀποστάσεως **φ** ὧν οἱ κύριοι ἄξονες συμπίπτουν. Αἱ κορυφαὶ τῶν κατόπτρων τούτων ἀπέχουν ἀπ' ἀλλήλων **δ** ἑκατοστά. Νὰ εὑρεθῇ ἡ θέσις εἰς ἣν πρέπει νὰ τεθῇ φωτεινὸν σημεῖον ἐπὶ τοῦ κυρίου ἄξονος, ἵνα τὰ δύο αὐτοῦ εἴδωλα τὰ σχηματιζόμενα ὑπὸ τῶν δύο τούτων κατόπτρων συμπίπτουν.

188) Ἀντικείμενον ἔχει ὕψος 4 ἑκ. καὶ τοποθετεῖται καθέτως πρὸς τὸν κύριον ἄξονα κυρτοῦ κατόπτρου ἑστιακῆς ἀποστάσεως 30 ἑκ. εἰς ἀπόστασιν ἀπ' αὐτοῦ 10 ἑκ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ θέσις τοῦ εἰδώλου καὶ τὸ μέγεθός του.

189) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος πύργου ὅστις ἐπὶ ὁριζοντίου ἐδάφους ρίπτει σκιὰν 84 μ., καθ' ἣν στιγμὴν παρακειμένη ῥάβδος κατακόρυφος, ὕψους 2 μέτρων, παρέχει σκιὰν μήκους 1,20 μ., ἐπὶ ἐδάφους κεκλιμένου ὡς πρὸς τὸν ὁρίζοντα (ὁριζόντιον ἐπίπεδον) κατὰ γωνίαν 30^o.

190) Ἡ φλὸξ κηρίου 2 ἑκ. τοποθετεῖται καθέτως ἐπὶ τὸν κύριον ἄξονα ἔμπροσθεν κοίλου κατόπτρου καὶ εἰς ἀπόστασιν 40 ἑκ. Ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ κατόπτρου εἶναι 30 ἑκ. Ζητεῖται ποία ἡ θέσις καὶ τὸ μέγεθος τοῦ εἰδώλου.

191) Ἐὰν φωτεινὴ ἀκτὶς ἀνακλᾶται διαδοχικῶς ἐπὶ δύο ἐπιπέδων κατόπτρων σχηματιζόντων γωνίαν α^o νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ διεύθυνσις τῆς ἀνακλωμένης ἀκτῖνος (ἀπὸ τὴν διπλῆ ἀνάκλασι) σχηματίζει μὲ τὴν διεύθυνσιν τῆς ἀρχικῶς προσπιπτούσης γωνίαν $2\alpha^o$.

192) Ἐπὶ τοῦ κυρίου ἄξονος κοίλου κατόπτρου εὑρίσκεται φωτεινὸν σημεῖον καὶ εἰς ἀπόστασιν ἀπὸ τῆς κορυφῆς διπλασίαν τῆς ἀκτῖνος καμπυλότητος. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῆς ἀποστάσεως τοῦ εἰδώλου ἀπὸ τοῦ κατόπτρου, ἐν σχέσει πρὸς τὴν ἑστιακὴν ἀπόστασιν αὐτοῦ.

193) Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ κοίλου κατόπτρου, ἑστιακῆς ἀποστάσεως 5 ἑκ., πρέπει νὰ εὑρίσκεται φωτεινὴ εὐθεῖα κάθετος πρὸς τὸν κύριον ἄξονα διὰ νὰ πενταπλασιασθῇ τὸ εἴδωλόν της ;

103) Εἰς πρῖσμα διαθλαστικῆς γωνίας 60^o πίπτει δέσμη φωτός. Ἡ γωνία τῆς ἀκτῖνος ἀναδύσεως (ἐξερχομένης ἀκτῖνος) εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν τῆς προσπιπτούσης, ὅταν αὕτη εἶναι 60^o. Ποῖος ὁ δείκτης διαθλάσεως τῆς ὕλης τοῦ πρίσματος ;

195) Ποία ἡ γωνία τῆς ἐλαχίστης ἐκτροπῆς, διὰ πρῖσμα διαθλαστικῆς γωνίας 60^o καὶ δείκτην διαθλάσεως $\delta=\frac{3}{2}$;

196) Ἀκτίς, μονοχρώμου φωτός, πίπτει ὑπὸ κλίσιν 30^o ἐπὶ ὑαλίνης πλακὸς μὲ ἕδρας παραλλήλους. Ὁ Δείκτης διαθλάσεως τῆς ὑάλου εἶναι $\frac{3}{2}$. Πάχος πλακὸς 10 ἑκ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ παράλληλος μετατόπισης τῆς προσπιπτούσης ἀκτῖνος.

197) Ποῖος ὁ δείκτης διαθλάσεως τῆς ὑάλου, ὡς πρὸς τὸ ὕδωρ ὅταν δείκτης διαθλάσεως τοῦ ὕδατος ὡς πρὸς τὸν ἀέρα εἶναι $\frac{4}{3}$, τοῦ δὲ ὑάλου πρὸς τὸν ἀέρα $\frac{3}{2}$;

198) Εἰς κοῖλον κάτοπτρον ἑστιακῆς ἀποστάσεως 0,40 μ., τὸ ἀντικείμενον καὶ τὸ εἴδωλόν του ἀπέχουν ἀπ' ἀλλήλων 0,65 μ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις ἑκάστου τούτων ἀπὸ τοῦ κατόπτρου.

199) Ρίπτομεν δέσμην κιτρίνων ἀκτίνων ἐπὶ τῆς κυρίας τομῆς πρίσματος. Ὑπὸ γωνίαν κλίσεως 45°. Ὁ δείκτης διαθλάσεως τῆς ὕλης τοῦ πρίσματος εἶναι $\sqrt{2}$ καὶ ἡ διαθλαστικὴ γωνία 60°. Ζητεῖται ἡ γωνία ἐκτροπῆς.

200) Ποία θὰ ἦτο ἡ διαθλαστικὴ γωνία ὑδατίνου πρίσματος. τὸ ὁποῖον διὰ μικρὰν γωνίαν προσπτώσεως θὰ ἔδιδε τὴν ἰδίαν γωνίαν ἐκτροπῆς μὲ ὑάλινον πρῖσμα γωνίας 2°; (δ. δ. ὕδατος ὡς πρὰς ἀέρα $\frac{4}{3}$, ὑάλου—ἀέρος $\frac{3}{2}$).

201) Ἀντικείμενον ὕψους 5 ἑκ. τοποθετεῖται καθέτως πρὸς τὸν κύριον ἄξονα συγκλίνοντος φακοῦ ἑστιακῆς ἀποστάσεως 4 ἑκ. καὶ εἰς ἀπόστασιν 6 ἑκ. ἀπ' αὐτοῦ (τουτέστιν ἀπὸ τοῦ ὀπτικοῦ κέντρου του). Ζητεῖται ἡ θέσις καὶ τὸ μέγεθος τοῦ εἰδώλου.

202) Κηρίον τοποθετεῖται εἰς ἀπόστασιν 4 μέτ. ἀπὸ διαφράγματος. Μεταξὺ τοῦ κηρίου καὶ τοῦ διαφράγματος τίθεται συγκλίνων φακὸς ἑστιακῆς ἀποστάσεως 0,5 μ. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ κηρίου πρέπει νὰ τοποθετηθῇ ὁ φακὸς διὰ νὰ λάβωμεν ἐπὶ τοῦ διαφράγματος εἴδωλον εὐκρινές; Ποῖον δὲ τὸ ὕψος τοῦ εἰδώλου, ὅταν τὸ ὕψος φλογὸς 5 ἑκατοστά;

203) Ἀντικείμενον τίθεται εἰς ἀπόστασιν 10 ἑκ. ἀπὸ φακοῦ ἀποκλίνοντος ἑστιακῆς ἀποστάσεως 20 ἑκατοστά. Νὰ εὑρεθῇ ἡ θέσις τοῦ εἰδώλου καὶ ἡ σχέσις τοῦ μεγέθους ἀντικειμένου—εἰδώλου.

204) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἰσχὺς φακοῦ ἑστιακῆς ἀποστάσεως 4 ἑκατοστῶν.

Ζ΄. ΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ

Σώματα τινὰ ἔχουν τὴν ἰδιότητα νὰ ἕλκουν τὸν σίδηρον καὶ ἄλλα τινὰ μέταλλα. Τὰ σώματα ταῦτα ὀνομάζονται **Μαγνῆται** καὶ διακρίνονται εἰς φυσικοὺς καὶ τεχνικοὺς μαγνήτας. Ἡ αἰτία τῆς ἕλξεως ὀνομάζεται **μαγνητισμός**.

Τὸ μέρος τοῦ μαγνήτου εἰς τὸ ὁποῖον ἐκδηλοῦται ἡ μεγίστη ἑλκυστικὴ δύναμις, ὀνομάζονται **Πόλοι** τοῦ μαγνήτου, διακρινόμενοι εἰς βόρειον καὶ νότιον πόλον, τὸ δὲ μέρος τοῦ μαγνήτου εἰς ὃ οὐδεμία ἐκδηλοῦται ἑλκτικὴ δύναμις ὀνομάζεται ***Οὐδετέρα χώρα***

Συμφώνως πρὸς τὸν νόμον τῆς ἀμοιβαίας ἐνεργείας τῶν πόλων, δύο πόλοι ὁμώνυμοι ἀπωθοῦνται δύο δὲ πόλοι ἑτερώνυμοι ἕλκονται.

Τὸ γνωστὸν διάγραμμα τῆς κατὰ γραμμὰς διατάξεως τῶν ἐπί τινος φύλλου χάρτου τοποθετηθέντων ρινισμάτων σιδήρου, ὅταν κάτωθεν τοῦ φύλλου τούτου τοποθετήσωμεν μαγνήτην καὶ κτυπήσωμεν ἐλαφρῶς τὸν χάρτην, ἐφ' οὗ τὰ ρινίσματα, ὀνομάζεται **Μαγνητικὸν φάσμα**. Τὸ δὲ διάστημα εἰς τὸ ὁποῖον ἐκτείνεται ἡ τοιαύτη μαγνητικὴ ἐνέργεια τοῦ μαγνήτου ὀνομάζεται **Μαγνητικὸν πεδίον** αὐτοῦ. Αἱ γραμμαὶ ἐπὶ τῶν ὁποίων διατίθενται τὰ ρινίσματα τοῦ σιδήρου ὀνομάζονται **Δυναμικαὶ γραμμαὶ** τοῦ πεδίου. Τὸ σύνολον τῶν δυναμικῶν γραμμῶν τῶν ἀναχωρούντων ἐξ ἑκάστου πόλου μαγνήτου καλεῖται **Μαγνητικὴ ροή**.

Μαγνητικαὶ δυνάμεις

Νόμος τοῦ Coulomb Οὗτος λέγει ὅτι ἡ ἕλξις, ἢ ἡ ἄπωσις, ἥτις ἐξασκεῖται μεταξὺ δύο πόλων μαγνητῶν, μεταβάλλεται ἀντιστρόφως ἀναλόγως πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ἀποστάσεως αὐτῶν. Δηλαδὴ ἐὰν ἡ ἀπόστασις δύο πόλων γίνῃ δύο, τρεῖς κλπ. φορὰς μεγαλυτέρα, τότε ἡ ἑλκτικὴ ἢ ἡ ὠστικὴ (ἀπωθητικὴ) δύναμις, τὴν ὁποίαν ὁ εἷς ἐξασκεῖ ἐπὶ τοῦ ἄλλου γίνεται τέσσαρας, ἐννέα κλπ. φορὰς μικροτέρα.

Ἔντασις πόλου. Λέγομεν ὅτι δύο μαγνητικοὶ πόλοι δύο μαγνητῶν ἔχουν τὴν αὐτὴν μαγνητικὴν μᾶζαν (ποσότητα μαγνητισμοῦ), ὅταν ἐξασκοῦν τὴν αὐτὴν ἕλξιν ἢ ἄπωσιν, ἀπὸ τῆς αὐτῆς ἀποστάσεως ἀμφότεροι, ἐπὶ ἑνὸς ἑτέρου πόλου τρίτου μαγνήτου.

Μονὰς πόλου ἢ μονὰς μαγνητικῆς μάζης. Εἰς τὸ σύστημα **c. g. s (centimètre, gramme, seconde)** ἐλήφθη, ὡς μονὰς μαγνητικῆς μάζης, ἡ μαγνητικὴ μᾶζα, ἥτις ἀπωθεῖ ἴσην μαγνητικὴν μᾶζαν, τοποθετημένην εἰς ἀπόστασιν ἑνὸς ἑκατοστοῦ ἀπ' αὐτῆς, διὰ δυνάμεως μιᾶς δύνης. Ἐὰν γενικῶς δύο πόλοι δύο μαγνητῶν ἔχουσι **μ (m)**, **μ′ (m′)** μονάδας μαγνητικῆς μάζης, ἤτοι μονάδας μαγνητικὰς καὶ ἀπέχουν ἀλλήλων **α (d)** ἑκατοστά, τότε ἡ ἑλκτικὴ ἢ ἀπωθητικὴ δύναμις αὐτῶν **δ (F)** (ἀναλόγως ἐὰν εἶναι ὁμώνυμοι ἢ ἑτερώνυμοι οἱ πόλοι) δίδεται, εἰς δύνας, ὑπὸ τοῦ τύπου.

$\delta=\frac{\mu\,\mu'}{\alpha^2}$ δῦναι (τὸ **δ** εἰς δύνας, **μ** καὶ **μ′** ἀριθμὸς μαγνητικῶν μονάδων καὶ **α** εἰς ἑκατοστὰ) ἢ $F=\frac{m\,m'}{d^2}$.

Μεταξὺ δύο πόλων ὁμωνύμων ἡ δύναμις εἶναι ὠστικὴ καὶ λαμβάνει τὸ σημεῖον (+), μεταξὺ δὲ ἑτερωνύμων ἑλκτικὴ καὶ λαμβάνει τρ σημεῖον (—).

Ἀπεδείχθη ὅτι οἱ δύο πόλοι ἑνὸς μαγνήτου ἐξασκοῦν ἐπὶ τῶν ἄλλων μαγνητῶν δυνάμεις ἑλκτικὰς ἢ ὠστικὰς ἴσας κατ' ἀπόλυτον τιμήν, ἤτοι ἔχουν τὰς αὐτὰς μαγνητικὰς μάζας, ἀλλὰ ἀντιθέτου φορᾶς.

Ἡ ἔντασις τοῦ βορείου πόλου σημειοῦται διὰ τοῦ (+) καὶ τοῦ νοτίου μὲ τὸ (—).

Ἔντασις μαγνητικοῦ πεδίου, μονὰς μαγνητικῆς ἐντάσεως. Ἔντασις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου εἴς τι σημεῖον **Α** αὐτοῦ εἶναι ἡ ἔντασις εἰς δύνας τῆς δυνάμεως, ἡ ὁποία ἐξασκεῖται ὑπὸ τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο, ἐπὶ βορείου μαγνητικοῦ πόλου ἴσου πρὸς τὴν μονάδα τῆς μαγνητικῆς μάζης, εὑρισκομένου εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο. Ἡ διεύθυνσις καὶ ἡ φορὰ τῆς δυνάμεως ταύτης εἶναι ἡ διεύθυνσις καὶ ἡ φορὰ τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο.

Μονὰς μαγνητικῆς ἐντάσεως εἶναι ἡ ἔντασις μαγνητικοῦ πεδίου, τὸ ὁποῖον ἐξασκεῖ δύναμιν μιᾶς δύνης, ἐπὶ βορείου πόλου ἴσου μὲ τὴν μονάδα τῆς μαγνητικῆς μάζης καὶ καλεῖται ἡ μονὰς αὕτη τῆς μαγνητικῆς ἐντάσεως **Gauss** (γκάουσ).

Ἐὰν λοιπὸν ἡ ἐξασκουμένη δύναμις ἐπὶ τῆς μονάδος τοῦ βορείου πόλου εἶναι ἔστω **Δ** δῦναι, θὰ εἴπωμεν ὅτι ἡ ἔντασις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου, εἰς τὸ σημεῖον ἐκεῖνο, εἶναι ἴση μὲ **Δ Gauss**.

Γήϊνος Μαγνητισμὸς

Ἡ Γῆ εἶναι εἷς μέγας μαγνήτης· συνεπῶς παρουσιάζει, ὡς μαγνήτης, πόλους καὶ μαγνητικὸν πεδίον καλούμενον **Γήϊνον μαγνητικὸν πεδίον**. Εἰς τὸν Γήϊνον μαγνητισμὸν ὀφείλεται ἡ μαγνητικὴ ἔγκλισις καὶ ἀπόκλισις τόπου τινός, ἡ δὲ ναυτικὴ πυξὶς εἶναι πυξὶς ἀποκλίσεως χρησιμοποιουμένη ὅπως δι᾿ αὐτῆς κανονίζουν τὴν διεύθυνσιν τῶν πλοίων.

Τέλος, τὸ ἠλεκτρικὸν ρεῦμα δημιουργεῖ καὶ τοῦτο μαγνητικὸν πεδίον ἡ ὕπαρξις καὶ ἐνέργεια τοῦ ὁποίου μεγίστην ἔχει πρακτικὴν ἐφαρμογὴν εἰς τὸν ἠλεκτρομαγνητισμόν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

205) Ποία ἡ δύναμις ἥτις ἐξασκεῖται μεταξὺ δύο πόλων, μαγνητικῶν μαζῶν 30 καὶ 40 ἐξ ἀποστάσεως 10 ἑκατοστῶν τοῦ μέτρου;

206) Πόλος μάζης μαγνητικῆς 80, ἕλκει ἕτερον πόλον τοποθετημένον εἰς ἀπόστασιν δύο ἑκατοστομέτρων, μετὰ δυνάμεως ἴσης πρὸς 1 γραμμάριον. Ποία ἡ μᾶζα (ἡ μαγνητικὴ μᾶζα) τοῦ δευτέρου πόλου;

207) Ποῖον τὸ πλῆθος τῶν μαγνητικῶν μονάδων πόλου, ὅστις ἀπωθεῖται μετὰ δυνάμεως 18 δυνῶν, ὅταν τοποθετεῖται εἰς μαγνητικὸν πεδίον ἐντάσεως 918;

208) Μαγνήτην, τοῦ ὁποίου οἱ πόλοι ἔχουν μᾶζαν 400 μονάδας, πλησιάζομεν εἰς μαγνητικὸν πεδίον ἐντάσεως 0,556 **gauss**. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ δυνάμεις αἱ ὁποῖαι ἐξασκοῦνται ἐπὶ τῶν πόλων τοῦ μαγνήτου.

Η΄ ΗΛΕΚΤΡΙΣΜΟΣ

1ον) ΔΥΝΑΜΙΚΟΣ ΗΛΕΚΤΡΙΣΜΟΣ Ἢ ΗΛΕΚΤΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗ

Ὁ ἠλεκτρισμὸς εἶναι μορφὴ ἐνεργείας, ὅπως ἀκριβῶς ἔχομεν τὴν μηχανικὴν ἐνέργειαν, τὴν θερμικὴν ἐνέργειαν, ἢ τὴν χημικήν ἐνέργειαν.

Ὅλα τὰ συνήθη ἠλεκτρικὰ φαινόμενα εἶναι μορφαὶ ἐνεργείας. α) Τὰ θυελλώδη νέφη ἀπὸ τὰ ὁποῖα ἐμφανίζονται ἀστραπαί, ἀκούονται βρονταί, πίπτουν κεραυνοί, οἱ ὁποῖοι φονεύουν ἔμψυχα ὄντα, γκρεμίζουν τοίχους, σχίζουν δένδρα κλπ., μεταβάλλουν οὕτω τὴν ἠλεκτρικὴν ἐνέργειαν εἰς μηχανικήν. Τεμάχιον σκληροῦ καουτσοὺκ ἢ ἠλέκτρου (κεχριμπάρι) προστριβόμενον ἐπὶ μαλλίνου ὑφάσματος ἠλεκτρίζεται καὶ ἕλκει ἢ ἀνυψώνει μικρὰ σώματα, ἐκτελοῦν οὕτω μηχανικὸν ἔργον β) Ἡ λειτουργία τοῦ τηλεγράφου, ραδιοφώνου, τηλεφώνου κλπ. γίνεται διὰ τοῦ ἠλεκτρισμοῦ, ὅστις παράγεται, ἢ διὰ στηλῶν, μετατρεπόντων τὴν χημικὴν ἐνέργειαν εἰς ἠλεκτρικήν, ἢ διὰ συσσωρευτῶν, οἵτινες πληροῦνται ὑπὸ ἠλεκτρικῶν μηχανῶν δι' ἠλεκτρισμοῦ γ) Εἰς τὰ ἐργαστάσια παραγωγῆς ἠλεκτρικοῦ ρεύματος δαπανᾶται μηχανικὴ καὶ θερμικὴ ἐνέργεια διὰ τὴν κίνησιν μηχανῶν, ἥτις μετατρέπεται εἰς ἠλεκτρικὴν τοιαύτην.

Δυνάμεθα συνεπῶς νὰ εἴπωμεν, ὅτι ὁ ἠλεκτρισμὸς καὶ εἰδικῶς ὁ ἐν κινήσει, οὕτως εἰπεῖν, ἠλεκτρισμὸς παρουσιάζεται ὡς μία δύναμις μετατροπῆς καὶ μεταφορᾶς τῆς ἐνεργείας, Π.χ. μία πτῶσις ὕδατος (μηχανικὴ ἐνέργεια) χρησιμοποιεῖται διὰ τὴν παραγωγὴν ἠλεκτρικῆς ἐνεργείας. Ἡ παραγομένη ἠλεκτρικὴ ἐνέργεια διὰ συρμάτων μεταφέρεται εἰς διαφόρους συσκευάς, ὅπου παρέχει τὴν ἐπιθυμητὴν ἐνέργειαν, ἤτοι θερμαντικὴν (ἠλεκτρικαὶ κουζίναι, θερμάστραι κλπ), φωτεινὴν (λαμπτῆρες), μηχανικὴν (κίνησις μηχανῶν, ἠλεκτρικοὶ κώδωνες κλπ.) ἢ χημικὴν τοιαύτην.

Ὁπωσδήποτε μία μηχανική, ἢ χημική, ἢ θερμικὴ ἐνέργεια δύναται νὰ μετατραπῇ εἰς ἠλεκτρικὴν τοιαύτην καὶ τ'ανάπαλιν.

Πηγαὶ ἠλεκτρισμοῦ. Ἵνα πηγὴ ἠλεκτρισμοῦ τεθῇ εἰς λειτουργίαν πρέπει νὰ παραχθῇ ἔργον. Πηγαὶ ἠλεκτρισμοῦ εἶναι αἱ ἠλεκτρικαὶ μηχαναί, αἱ ἠλεκτρικαὶ στῆλαι (στοιχεῖα) καθὼς καὶ οἱ συσσωρευταί. Πᾶσα πηγὴ ἠλεκτρισμοῦ ἔχει δύο πόλους, θετικὸν καὶ ἀρνητικόν, οἱ ὁποῖοι πρέπει, διὰ νὰ παραχθῇ ἠλεκτρικὸν ρεῦμα, νὰ συνδεθοῦν δι' ἀγωγοῦ καὶ ν' ἀποτελέσουν κλειστὸν κύκλωμα (καὶ ὄχι διακεκομμένον), ὁ δὲ ἀγωγὸς νὰ εἶναι καλὸς ἀγωγὸς τοῦ ἠλεκτρισμοῦ, νὰ ὑπάρχῃ δὲ μεταξὺ τῶν πόλων τῆς ἠλεκτρικῆς πηγῆς διαφορὰ δυναμικοῦ. Τὸ ὕδωρ, τὰ μέταλλα καὶ εἰδικῶς ὁ χαλκός, εἶναι καλοὶ ἀγωγοὶ τοῦ ἠλεκτρισμοῦ, τουναντίον τὸ ξύλον, ἡ πορσελάνη, ἡ ὕαλος, εἶναι κακοὶ ἀγωγοὶ τοῦ ἠλεκτρισμοῦ, τουτέστι δὲν ἐπιτρέπουν τὴν δι' αὐτῶν δίοδον ἠλεκτρικοῦ ρεύματος καὶ διὰ τοῦτο χρησιμοποιοῦνται ὡς μονωτῆρες.

Μονάδες ἐνεργείας. Αἱ μονάδες ἐνεργείας εἶναι αἱ αὐταὶ μὲ τὰς μονάδας τοῦ μηχανικοῦ ἔργου. Εἰς τὸ σύστημα **c.g.s.** μονὰς ἐνεργείας εἶναι τὸ **"Εργιον (erg)** ἢ τὸ **Joule=10⁷erg** Εἰς τὴν μηχανικήν,ὡς εἴδομεν, ὡς μονὰς πρακτικὴ ἐνεργείας λαμβάνεται τὸ **Kg/m**= 9,81 **Joules**.

Μονάδες ἰσχύος εἶναι τὸ 1 **"Εργιον** εἰς 1″ ἢ 1 **Joule** εἰς 1″=1 **Watt.** Τὸ 1 **Kilowatt** (κιλοβὰτ)=1000 **watts**. Ὁ 1 HP (ἵππος, ἀτμόϊππος) ἰσοῦται μὲ 75 **Kg/m**″=0,736 Κιλοβάτ.

Ἠλεκτρικὸν ρεῦμα

Τὸ ἠλεκτρικὸν ρεῦμα γενικῶς, εἴτε συνεχὲς εἶναι τοῦτο, εἴτε ἐναλλασσόμενον, δὲν τὸ ἀντιλαμβανόμεθα, ὅπως ἀντιλαμβανόμεθα ἓν ῥεῦμα ὕδατος ἢ ἀέρος. Ἐξετάζοντες ὅμως κατωτέρω, εἰδικῶς τὸ συνεχὲς ἠλεκτρικὸν ρεῦμα, λέγομεν ὅτι, δυνάμεθα νὰ ἐννοήσωμεν τὴν ὕπαρξίν του ἐκ τῶν ἀποτελεσμάτων του· καθόσον ἐπιφέρει ἀποτελέσματα θερμικά, μαγνητικά, χημικά. Θερμαίνει οὕτω τοὺς ἀγωγοὺς δι' ὧν διέρχεται, ἐκτρέπει τοὺς μαγνήτας, ἀποσυνθέτει τὸ ὕδωρ εἰς τὰ συνιστῶντα αὐτὸ ὀξυγόνον καὶ ὑδρογόνον κλπ.

Ἡ φορὰ τοῦ ἠλεκτρικοῦ ῥεύματος δυνατὸν νὰ εἶναι ἡ κατ' ἀντίθετον διεύθυνσιν τῆς κινήσεως τῶν δεικτῶν τοῦ ὡρολογίου, ἥτις λαμβάνεται καὶ θετικὴ φορὰ (+), ἤτοι τοῦ ῥεύματος κινουμένου ἐκ τοῦ θετικοῦ πόλου τῆς πηγῆς πρὸς τὸν ἀρνητικόν, ἢ κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς κινήσεως τῶν δεικτῶν τοῦ ὡρολογίου, θεωρουμένης ταύτης ὡς ἀρνητικῆς φορᾶς.

Οἱ δύο πόλοι ἠλεκτρικῆς πηγῆς εὑρίσκονται εἰς διάφορον ἠλεκτρικὴν κατάστασιν, ἤτοι ὑπὸ διάφορον δυναμικὸν καὶ ὁ μὲν εἷς πόλος φέρει θετικὸν ἠλεκτρικὸν φορτίον, ἤτοι θετικὸν ἠλεκτρισμόν, ὀνομαζόμενος θετικὸς πόλος (+) ὁ δ' ἕτερος φέρει ἀρνητικὸν ἠλεκτρισμὸν ὀνομαζόμενος **ἀρνητικὸς πόλος.** (—)

Λέγομεν ὅτι δύο σημεῖα τοῦ κυκλώματος παρουσιάζουν **διαφορὰν δυναμικοῦ** ἐὰν ὅταν τὰ συνδέσωμεν διὰ σύρματος διέρχεται διὰ τούτων ἠλεκτρικὸν ῥεῦμα. Ἐὰν τὸ ρεῦμα διευθύνεται ἐκ τοῦ σημείου **Α** πρὸς τὸ **Β**, λέγομεν ὅτι τὸ δυναμικὸν τοῦ **Α** εἶναι μεγαλύτερον τοῦ **Β**, ἐὰν δὲ τὸ ἀντίθετον τότε λέγομεν ὅτι τὸ δυναμικὸν τοῦ **Β** εἶναι μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ τοῦ **Α.**

Ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις (Η.Ε.Δ). Ηλεκτρεγερτικὴ δύναμις, μιᾶς ἠλεκτρικῆς πηγῆς, καλεῖται ἡ αἰτία, ἡ ὁποία δύναται νὰ θέσῃ εἰς κίνησιν τὸν ἠλεκτρισμὸν εἰς κύκλωμα κλειστόν, ὅπερ περιλαμβάνει τὴν πηγήν. Μονὰς τῆς Η.Ε.Δ, ἤτοι τῆς ἠλεκτρικῆς τάσεως ἢ τῆς διαφορᾶς δυναμικοῦ, λαμβάνεται ἡ Η.Ε.Δ ἑνὸς στοιχείου τοῦ Βόλτα καὶ καλεῖται **Volt**. Τὰ ὄργανα τὰ μετροῦντα τὴν Η.Ε.Δ. ἢ διαφορὰν δυναμικοῦ ὀνομάζονται βολτόμετρα. Ἡ Η.Ε.Δ. δὲν εἶναι δύναμις, ὅπως εἰς τὴν Μηχανικήν, δηλαδὴ δὲν δύναται νὰ μετρηθῇ εἰς δύνας, γραμμάρια ἢ χιλιόγραμμα, ὅπως ἐκείνη, ἀλλὰ εἶναι ποσότης ἠλεκτρισμοῦ ἐκφραζομένη εἰς **Volts**.

Ἡ Η Ε Δ. τῶν στοιχείων, ἢ τῶν συσσωρευτῶν, ἐφ᾽ ὅσον ταῦτα χρησιμοποιοῦνται χωρὶς νὰ πληρῶνται ἐκ νέου, εἶναι φυσικὸν ὅτι συνεχῶς ἐλαττοῦται, ὅταν δὲ φθάσῃ εἰς ἓν ἐλάχιστον ὅριον, ἡ ἠλεκτρικὴ πηγὴ παύει νὰ παρέχῃ τότε ἠλεκτρικὸν ρεῦμα.

Ἠλεκτρόλυσις. Εἶναι ἡ χημικὴ ἀποσύνθεσις, διὰ τοῦ ἠλεκτρισμοῦ, ὡρισμένων ὑγρῶν (βάσεις, ὀξέα ἢ ἅλατα) εἰς τὰ ἰόντα των καὶ ἅτινα ὑγρὰ ὀνομάζονται ἠλεκτρολύται.

Ἠλεκτρικὴ ποσότης. Τὸ ἠλεκτρικὸν ρεῦμα δυνάμεθα νὰ τὸ προσομοιάσωμεν μὲ ρεῦμα ὕδατος ὅπερ ρέει ἐντὸς σωλῆνος· καὶ ὅπως ἐκεῖνο προσδιορίζεται διὰ τῆς ποσότητος ὕδατος ἥτις διέρχεται διὰ μιᾶς κυρίας τομῆς τοῦ ἀγωγοῦ εἰς τὴν μονάδα τοῦ χρόνου, κατ᾽ αὐτὸν τὸν τρόπον καὶ τὸ ἠλεκτρικὸν ρεῦμα προσδιορίζεται διὰ τῆς ποσότητος ἠλεκτρισμοῦ, ἥτις διέρχεται διὰ μιᾶς κυρίας τομῆς του εἰς τὴν μονάδα τοῦ χρόνου καὶ ὅπερ καλοῦμεν **ἔντασιν τοῦ ἠλεκτρισμοῦ.**

Οὕτω ἐὰν εἰς μίαν ἠλεκτρόλυσιν ὕδατος ὀξυνισμένου διὰ Θεϊκοῦ ὀξέως. (H_2SO_4), ἡ ποσότης τοῦ ἀποχωρισθέντος ὑδρογόνου εἶναι $\frac{1}{96600}$ γραμμάρια τότε λέγομεν ὅτι ἡ ἀπαιτηθεῖσα διὰ τὸν ἀποχωρισμὸν τοῦτον ἠλεκτρικὴ ποσότης ἰσοῦται μὲ ἕνα **Coulomb** Τὸ δὲ πηλῖκον τῆς διαιρέσεως τῆς ἠλεκτρικῆς ποσότητος διὰ τοῦ χρόνου εἰς δευτερόλεπτα, τοῦ ἀπαιτηθέντος ἵνα τὸ ἠλεκτρικὸν ρεῦμα διέλθῃ διὰ μιᾶς κυρίας τομῆς του, ἤτοι ἡ εἰς τὴν μονάδα τοῦ χρόνου διερχομένη ποσότης τοῦ ἠλεκτρισμοῦ, διὰ τῆς τομῆς ταύτης καλεῖται **ἔντασις τοῦ ρεύματος.**

Ὅταν διὰ τῆς κυρίας τομῆς ἀγωγοῦ διέρχεται ποσότης ῥεύματος ἑνὸς **Coulomb** εἰς ἓν δευτερόλεπτον λέγομεν τότε, ὅτι ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἰς τὴν τομὴν ταύτην εἶναι **1 Ampêre,** καὶ τὴν ὁποίαν λαμβάνομεν ὡς μονάδα ἐντάσεως τοῦ ἠλεκτρισμοῦ, ἤτοι λέγομεν τότε, ὅτι τὸ ρεῦμα ἔχει ἔντασιν ἴσην μὲ τὴν μονάδα ἐντάσεως. Τὰ ὄργανα τὰ μετροῦντα τὴν ἔντασιν τοῦ ῥεύματος ὀνομάζονται ἀμπερόμετρα.

Ὥστε, συνοψίζοντες τ᾽ ἀνωτέρω ἔχομεν.

α) Μονὰς ποσότητος τοῦ ἠλεκτρισμοῦ εἶναι τὸ 1 **coulomb.**

β) Μονὰς Η.Ε.Δ. (Ἠλεκτρεγερτικῆς δυνάμεως), ἢ **διαφορᾶς δυναμικοῦ** εἶναι τὸ 1 **Volt.**

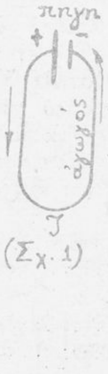
γ) Μονὰς ἐντάσεως τοῦ ἠλεκτρισμοῦ εἶναι τὸ 1 **Ampère** ἤτοι **1 Ampèpe** $=\frac{1 \text{ Coulomb}}{1''}$ καὶ γενικῶς ἐὰν διὰ **I** παραστήσωμεν τὴν ἔντασιν τοῦ ρεύματος εἰς **Ampères**, εἴς τινα τομὴν τοῦ ἀγωγοῦ, θὰ ἔχωμεν ὅτι $I=\frac{Q}{t''}$ ἔνθα **Q** ἡ ποσότης τοῦ ἠλεκτρισμοῦ εἰς **coulombs**, ἡ διελθοῦσα διὰ τῆς τομῆς ταύτης καὶ **t** ὁ χρόνος εἰς δευτερόλεπτα, ὃν ἐχρειάσθη νὰ διέλθῃ, διὰ τῆς τομῆς τοῦ ἀγωγοῦ, ἡ ποσότης αὕτη.

Συνεπῶς ἡ ποσότης τοῦ ἠλεκτρισμοῦ μετρᾶται εἰς **Coulombs** ἡ ἔντασις εἰς **Ampères** καὶ ἡ **Η. Ε. Δ.** ἢ **διαφορὰ δυναμικοῦ** εἰς **Volts**.

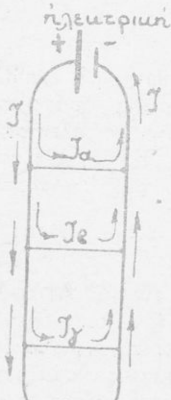
Νόμος Faraday. Διὰ νὰ λάβωμεν, κατὰ τὴν ἠλεκτρόλυσιν, ἓν γραμμάριον ὑδρογόνου ἀπαιτεῖται ποσότης ῥεύματος 96600 **Coulombs**. Εἰς κάθε γραμμάριον ὑδρογόνου, ποὺ λαμβάνεται οὕτω, ἐλευθερώνεται καὶ ἴσον βάρος μετάλλου ἀπὸ τὸν ἠλεκτρολύτην.

Ἐὰν ἔχομεν κλειστὸν κύκλωμα. ἄνευ διακλαδώσεως (Σχ. 1), τότε ἡ ἔντασις **I** τοῦ ῥεύματος εἶναι ἡ αὐτὴ εἰς οἱονδήποτε σημεῖον τοῦ κυκλώματος, δηλαδὴ ἰσοῦται μὲ τὴν ἔντασιν τοῦ ῥεύματος τὴν παρεχομένην ὑπὸ τῆς πηγῆς. Ἐὰν ὅμως ἐκτὸς τοῦ κυρίου ἀγωγοῦ ὑπάρχουν καὶ διακλαδώσεις, τότε ἡ ὁλικὴ ἔντασις **I**, ἤτοι ἡ ἔντασις τῆς πηγῆς, ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν μερικῶν ἐντάσεων τῶν διακλαδώσεων I_α, I_β, I_γ

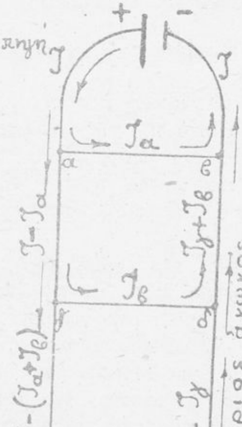
(**Σημείωσις** Εἰς τὰ σχήματα ἀντὶ τοῦ γράμματος **I**, πρὸς παράστασιν τῆς ἐντάσεως τοῦ ῥεύματος, ἐχρησιμοποιήθη τὸ ἀντίστοιχον καλλιγραφικὸν ψηφίον γιότα κεφαλαῖον.) (Σχ. 2, Σχ. 1 καὶ Σχ. 3).



(Σχ. 1)



$I = I_\alpha + I_\beta + I_\gamma + I_\delta$
(Σχ. 3)



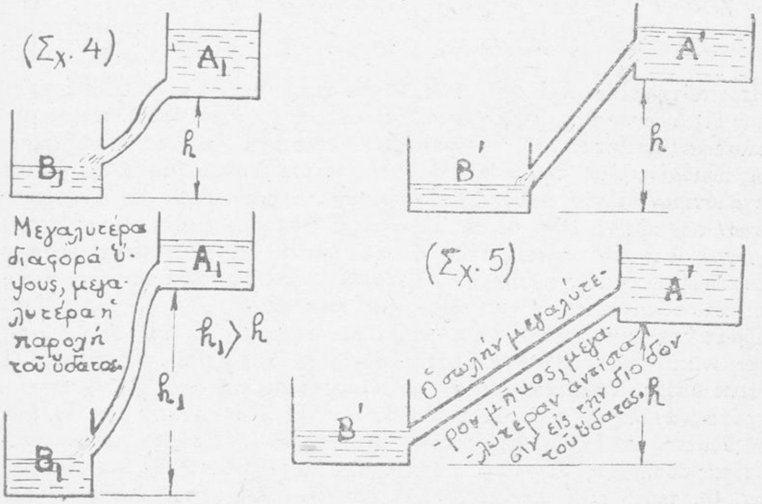
$I = I_\alpha + I_\beta + I_\gamma$
αβ, γδ, εζ, διακλαδώσεις (δευτερεύοντες ἀγωγοί). (Σχ. 2)

Ἠλεκτροχημικὸν ἰσοδύναμον σώματός τινος. Οὕτω καλοῦμεν τὸ βάρος τοῦ σώματος τούτου, ὅπερ ἐλευθερώνεται κατά τὴν ἠλεκτρόλυσιν, διὰ ποσότητας ῥεύματος ἑνὸς **coulomb**.

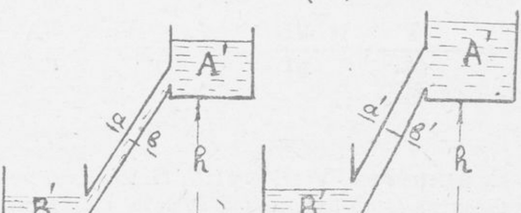
Νόμος τοῦ Ohm

$$I = \frac{V_A - V_B}{r} = \frac{V}{r} \quad (1)$$

Ἔνθα **I** ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος τῆς ἠλεκτρικῆς πηγῆς, **V** ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ μεταξὺ δύο σημείων **A** καὶ **B** ἀγωγοῦ, ἕκαστον τῶν ὁποίων ἔχει δυναμικὸν ἀντιστοίχως V_A καὶ V_B ($V_A > V_B$) καὶ **r** ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀγωγοῦ. Ἤτοι ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι ἀνάλογος τῆς διαφορᾶς δυναμικοῦ καὶ ἀντιστρόφως ἀνάλογος τῆς ἀντιστάσεως τοῦ ἀγωγοῦ.



τομὴ αβ < τομῆς α'β'



Ἡ ἀντίστασις τοῦ σωλῆνος μεγαλυτέρα. Ἡ ἀντίστασις τοῦ σωλῆνος μικροτέρα.

(Σχ. 6)

Ἐὰν τὸ δυναμικὸν ὅπερ ἔχει ἑκάτερον τῶν δυὸ σημείων **A** καὶ **B** τοῦ ἀγωγοῦ τὸ προσομοιάσωμεν μὲ δύο δεξαμενὰς A_1 καὶ B_1 (Σχ. 4) εὑρισκομένας εἰς διάφορον ὕψος καὶ συνδεομένας διὰ σωλῆνος, διὰ τὴν μεταφορὰν ὕδατος ἐκ τῆς A_1 πρὸς τὴν δεξαμενὴν B_1, ἀντιστοιχοῦντος δὲ τοῦ σωλῆνος πρὸς τὸν ἠλεκτροφόρον ἀγωγόν, θὰ πεισθῶμεν, ὅτι ὅσον μεγαλυτέραν διαφορὰν ὕψους μεταξὺ τῶν δύο δεξαμενῶν A_1, B_1 ἔχομεν, ἤτοι διὰ τὸν ἠλεκτρισμόν, ὅσον μεγαλυτέρα εἶναι ἡ διαφορά δυναμικοῦ μεταξὺ τῶν δύο σημείων **A** καὶ **B** τοῦ ἀγωγοῦ, ἐπὶ τοσοῦτον καὶ ἡ ἀπόδοσις εἰς ὕδωρ (ἡ παρεχομένη εἰς ὕδωρ ποσότης εἰς τὴν μονάδα τοῦ χρόνου) δηλαδὴ διὰ τὸν ἠλεκτρισμὸν ἡ ἔντασις, θὰ εἶναι μεγαλυτέρα.

Ἀλλὰ καὶ ἡ ἀντίστασις **r** τοῦ ἀγωγοῦ ἰσοῦται μὲ $\frac{\varrho L}{S}$ (2).

Ἤτοι αὕτη εἶναι ἀνάλογος α) τοῦ μήκους **L** τοῦ ἀγωγοῦ· πράγματι ὅσον εἷς ἀγωγὸς ἔχει μῆκος μεγαλύτερον ἐπὶ τοσοῦτον παρουσιάζει μεγαλυτέραν ἀντίστασιν εἰς τὴν ροὴν τοῦ ἠλεκτρικοῦ ρεύματος, ὅπως ἀκριβῶς συμβαίνει διὰ τὴν ροὴν τοῦ ὕδατος ἐντὸς σωλῆνος ἔχοντος μῆκος μεγαλύτερον ἑτέρου σωλῆνος, τῶν λοιπῶν φυσικὰ συνθηκῶν διατηρουμένων τῶν αὐτῶν. (Σχ. 5). β) Ἐξαρτᾶται ὡσαύτως ἡ ἀντίστασις **r** τοῦ ἀγωγοῦ ἀπὸ ἕνα συντελεστὴν ϱ, καλούμενον **εἰδικὴν ἀντίστασιν** ἐξαρτώμενον ἐκ τῆς φύσεως τοῦ μετάλλου, ἐξ οὗ κατεσκευάσθη ὁ ἀγωγὸς καὶ εἶναι οὗτος, ἡ ἀντίστασις ποὺ παρουσιάζει εἰς τὴν δίοδον τοῦ ρεύματος ἀγωγὸς ἐκ τοῦ ἰδίου μετάλλου, μήκους 1 ἑκ. καὶ τομῆς 1 τετραγωνικοῦ ἑκατ. Ὁ συντελεστὴς οὗτος ϱ ἐκφράζεται εἰς **Ohm** (1 **Ohm** μονὰς ἀντιστάσεως) καὶ γ) Ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀγωγοῦ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογος τῆς τομῆς του **S**. Πράγματι ὅπως ἀπὸ τὸν σωλῆνα τοῦ ὕδατος, τὸν ἔχοντα μικροτέραν τομὴν τὸ ὕδωρ ἐξέρχεται μετὰ μεγαλυτέρας δυσκολίας, λόγῳ τῆς παρουσιαζομένης μεγαλυτέρας ἀντιστάσεως (Σχ. 6), τοῦτ᾽ αὐτὸ συμβαίνει καὶ διὰ τὴν τομὴν τοῦ ἠλεκτροφόρου ἀγφγοῦ.

Ὥστε ὁ τύπος **(1)** μετασχηματίζεται εἰς τὸν τύπον

$$I = \frac{V}{\frac{\varrho L}{S}} \quad \frac{VS}{\varrho L} = \left(\frac{V_A - V_B}{r} = \frac{V}{r}\right)$$

Ἔνθα **I** εἰς **ampêres**, **V** εἰς **volts**, **S** τομὴ τοῦ ἀγωγοῦ εἰς τετραγωνικὰ ἑκατοστά, **L** τὸ μῆκος τοῦ ἀγωγοῦ εἰς ἑκατοστὰ καὶ ϱ ἡ εἰδικὴ ἀντίστασις, ὡς συντελεστής, ἐκπεφρασμένος εἰς ὤμ (**Ohm**).

Μονὰς ἀντιστάσεως. Μονὰς ἀντιστάσεως, εἰς τὸν ἠλεκτρισμόν, εἶναι τὸ 1 Ὤμ (**OHM**). Εἶναι δὲ 1 Ὤμ $= \frac{\textbf{1 Volt}}{\textbf{1 Ampêre}}$ Ἤτοι ἕνα Ὤμ εἶναι ἡ ἀντίστασις τὴν ὁποίαν παρουσιάζει ἀγωγός, ὅστις διαρρεόμενος ὑπὸ ρεύματος ἐντάσεως ἑνὸς **Ampêre** παρουσιάζει μεταξὺ τῶν ἄκρων του διαφορὰν δυναμικοῦ **1** *Volt*. Ἡ ἀντίστασις αὕτη 1 Ὤμ. μᾶς παριστᾷ καὶ τὴν ἀντίστασιν τὴν ὁποίαν παρουσιάζει εἰς **0°** ***K***. στήλη ὑδραργύρου τομῆς ἑνὸς τετραγ. χιλιοστοῦ καὶ μήκους 106,3 ἑκατοστά. Τὸ 1 Ὀμ = 10 μικρόμ. (**microhms**), ἤτοι 1 μικρόμ. $=10^{-6}$ Ωμ. Ὥστε ἡ ἀντίστασις γενικῶς μετρᾶται εἰς **Ohms**.

Κύκλωμα λέγεται τὸ σύνολον τῆς ἠλεκτρικῆς πηγῆς καὶ τοῦ ἀγωγοῦ, ὅστις εἶναι συνδεδεμένος μετὰ τῶν 2 πόλων τῆς πηγῆς.

Ἀνοικτὸν λέγεται τὸ κύκλωμα ἐὰν κάπου ὑπάρχει διακοπὴ καὶ δὲν διέρχεται ρεῦμα. **Κλειστόν,** ὅταν διέρχεται ρεῦμα (δὲν ὑπάρχει διακοπή).

Ἐξωτερικὴ ἀντίστασις λέγεται ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀγωγοῦ. **Ἐσωτερικὴ ἀντίστασις** εἶναι ἡ ἀντίστασις τῆς πηγῆς. **Ὁλικὴ ἀντίστασις** εἶναι ἡ ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος.

Ἐὰν ἔχομεν ἕνα ἠλεκτρικὸν ρεῦμα ἐντάσεως **I** τὸ ὁποῖον διακλαδίζεται εἰς ἀγωγούς, (Σχ. 7), αἱ μερικαὶ ἐντάσεις τοῦ ρεύματος ι_1, ι_2

(Σχῆμα 7)

εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν ἀντιστάσεων $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ τῶν ἀγωγῶν τούτων. Ἤτοι $\dfrac{\iota_1}{\iota_2} = \dfrac{\mathbf{r}_2}{\mathbf{r}_1}$. Ἡ ὁλικὴ ἔντασις τοῦ ρεύματος **I**, ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν μερικῶν ἐντάσεων. Ἤτοι $\mathbf{I}=\iota_1+\iota_2$.

Εἰς ἕνα κύκλωμα (ἀγωγὸς + ἠλεκτρικὴ πηγή), ἐκτὸς τῆς ἀντιστάσεως τοῦ ἀγωγοῦ, ἤτοι τῆς ἐξωτερικῆς ἀντιστάσεως, ἥτις ἔστω **r**, ἔχομεν καὶ τὴν ἀντίστασιν τῆς ἠλεκτρικῆς πηγῆς (στοιχείου ἢ συσσωρευτοῦ), ἤτοι τὴν ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν, τὴν ὁποίαν ἄς παραστήσωμεν διὰ **R**. Τότε καλοῦντες διὰ **I** τὴν ἔντασιν τοῦ κυκλώματος καὶ διὰ **E** τὴν **Η. Ε. Δ.** τῆς πηγῆς θὰ ἔχωμεν συμφώνως πρὸς τὰ προλεχθέντα (Νόμος Ὄμ).

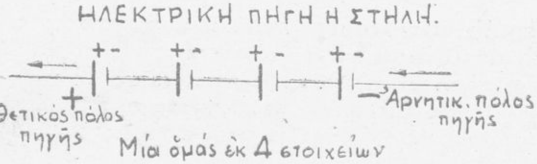
$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{R}+\mathbf{r}} \quad (2)$$

Ὁ τύπος οὗτος μᾶς δίδει τὴν ἔντασιν τοῦ ρεύματος ἑνὸς στοιχείου ἢ συσσωρευτοῦ. Ὥστε ὅταν ἔχομεν τὴν **Η. Ε. Δ.** τοῦ στοιχείου, ἢ τοῦ συσσωρευτοῦ καὶ τὴν ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν **R** αὐτοῦ, ὡς καί, τὴν ἀντίστασιν **r** τοῦ ἀγωγοῦ, θὰ χρησιμοποιῶμεν τὸν ἀνωτέρω τύπον (2), ὅταν δὲ δὲν πρόκειται νὰ ὑπολογίζωμεν τὴν ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν, ἀλλὰ μόνον τὴν ἐξωτερικὴν **r** καὶ τὴν **Η. Ε. Δ.**, **E**, ἢ τὴν διαφορὰν δυναμικοῦ **V** μεταξὺ δύο οἱονδήποτε σημείων τοῦ κυκλώματος, παρουσιαζόντων δυναμικὸν ἔστω $\mathbf{V_A}$, $\mathbf{V_B}$ ($\mathbf{V}=\mathbf{V_A}-\mathbf{V_B}$, ὅπου $\mathbf{V_A} > \mathbf{V_B}$), θὰ χρησιμοποιῶμεν τὸν τύπον $\mathbf{I} = \dfrac{\mathbf{V_A}-\mathbf{V_B}}{\mathbf{r}} = \dfrac{\mathbf{V}}{\mathbf{r}}$ ἢ τὸν τύπον $\mathbf{I} = \dfrac{\mathbf{E}}{\mathbf{r}}$.

ΣΥΝΔΕΣΕΙΣ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ Ή ΣΥΣΣΩΡΕΥΤΩΝ

Ἐφαρμογὴ τοῦ νόμου τοῦ Ohm εἰς ἠλεκτρικὴν πηγήν
Εὕρεσις ἐντάσεων

α) Σύνδεσις ἐν σειρᾷ ἢ κατὰ τάσιν (Σχ. 8).

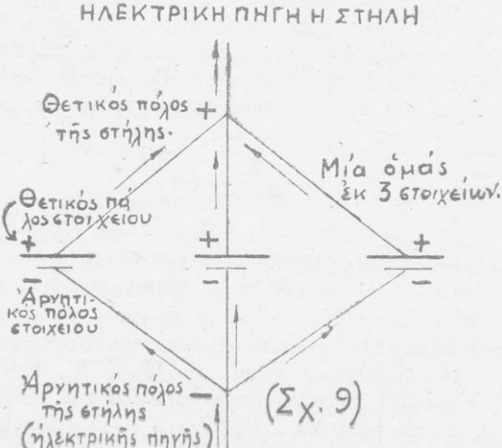


(Σχ. 8)

$$\text{Ἔχομεν } \mathbf{I} = \frac{\mathbf{nE}}{\mathbf{nR}+\mathbf{r}}$$

Ἔνθα **I** ἡ ὁλικὴ ἔντασις τῆς ἠλεκτρικῆς πηγῆς ἢ στήλης, **E** ἡ Ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις ἑκάστου στοιχείου ἢ συσσωρευτοῦ, **n** ὁ ἀριθμὸς τῶν στοιχείων ἢ συσσωρευτῶν, **R** ἡ ἀντίστασις (ἐσωτερικὴ) ἑκάστου στοιχείου ἢ συσσωρευτοῦ, **r** ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀγωγοῦ, ἤτοι ἡ ἐξωτερικὴ ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος.

β) Σύνδεσις ἐν παραλλήλῳ, ἢ κατὰ ποσότητα ἢ ἐν διακλαδώσει. (Σχ. 9)

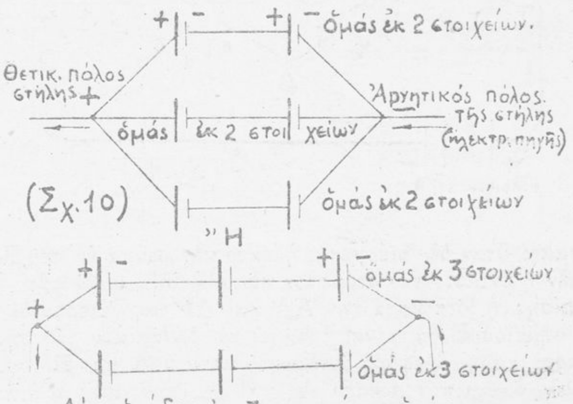


(Σχ. 9)

$$\text{῎Εχομεν } I = \frac{E}{\frac{R}{n} + r} = \frac{nE}{R + nr}$$

γ΄ Σύνδεσις μικτὴ (Σχ. 10)

ΗΛΕΚΤΡΙΚΗ ΠΗΓΗ Η ΣΤΗΛΗ
Τρεῖς ὁμάδες ἐκ 2 στοιχείων ἑκάστη.



Δύο ὁμάδες ἐκ 3 στοιχείων ἑκάστη

$$\text{῎Εχομεν } I = \frac{nE}{\frac{nR}{m} + r} = \frac{nE}{\frac{nR + mr}{m}} = \frac{mnE}{nR + mr}$$

῞Ενθα **n** ὁ ἀριθμὸς τῶν στοιχείων ἑκάστης ὁμάδος καὶ **m** ὁ ἀριθμὸς τῶν ὁμάδων.

Σημείωσις. Στήλη εἶναι τὸ ἄθροισμα δύο ἢ περισσοτέρων στοιχείων τῶν ὁποίων οἱ πόλοι ἡνώθησαν μὲ ἀγωγούς.

Ἐὰν κύκλωμα διαρρέεται ὑπὸ ρεύματος ἢ ὄχι, δύναται νὰ διαπιστωθῇ διὰ τοῦ ὀργάνου ὅπερ καλεῖται γαλβανόμετρον.

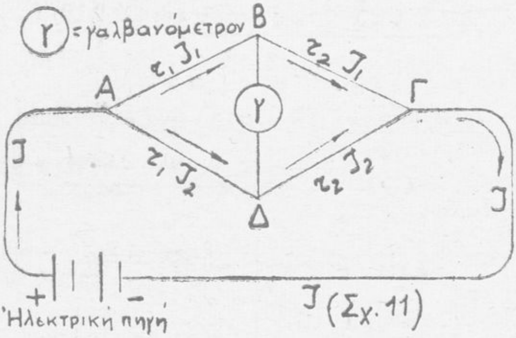
Μέτρησις ἀντιστάσεως ἀγωγοῦ

Διὰ τῆς γεφύρας τοῦ **Wheatston**.

῾Η γέφυρα τοῦ **Wheatston** στηρίζεται ἐπὶ τῆς ἑξῆς ἀρχῆς:

Ἐὰν ὁ λόγος τῶν ἀντιστάσεων **ΑΒ, ΒΓ (Σχ. 11)** ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τῶν ἀντιστάσεων τῶν δύο ἄλλων ἀντιστοίχων τμημάτων ΑΔ,

ΔΓ, ἢ μὲ τὸν λόγον τῶν μηκῶν τῶν τμημάτων τούτων, (ἐφ' ὅσον θὰ πρόκειται περὶ ἀγωγῶν ἰσοπαχῶν καὶ ἐκ τῆς αὐτῆς ὕλης) τότε δὲν διέρχεται ρεῦμα διὰ τοῦ ἀγωγοῦ τοῦ συνδέοντος τὰ σημεῖα **Β** καὶ **Δ**.



(Σχ. 11)

Πράγματι ὅταν δὲν διέρχεται ἠλεκτρικὸν ρεῦμα ἐκ τοῦ **Β** πρὸς Δ, ἀφ' ἑνὸς μὲν ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι ἡ ἰδία κατὰ τὴν **ΑΒ** καὶ **ΒΓ**, ὡς ἐπίσης ἡ ἰδία κατὰ τὴν **ΑΔ** καὶ **ΔΓ**, ἀφ' ἑτέρου δὲ τὸ δυναμικὸν τοῦ σημείου **Β** θὰ εἶναι ἴσον μὲ τὸ δυναμικὸν τοῦ σημείου **Δ**. Συνεπῶς τότε καὶ ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ μεταξὺ **Α** καὶ **Β** ἰσοῦται πρὸς τὴν διαφορὰν δυναμικοῦ μεταξὺ **Α** καὶ **Δ**, ὡς ἐπίσης ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ μεταξὺ **ΒΓ** ἰσοῦται πρὸς τὴν μεταξὺ **Δ** καὶ **Γ**.

Τούτων οὕτως ἐχόντων ἐὰν παραστήσωμεν $\mathbf{I}$ τὴν ὁλικὴν ἔντασιν, $\mathbf{I}_1$ καὶ $\mathbf{I}_2$ τὰς ἐντάσεις τῶν διακλαδώσεων **ΑΒΓ** καὶ **ΑΔΓ**$_1$ διὰ $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ $\mathbf{r}_1'$, $\mathbf{r}_2'$ τὰς ἀντιστάσεις τῶν ἀγωγῶν **ΑΒ**, **ΒΓ**, **ΑΔ**, **ΔΓ**, ὁμοίως διὰ $\mathbf{V}_1$ τὴν διαφορὰν δυναμικοῦ μεταξὺ **Α** καὶ **Β** ἢ **Α** καὶ **Δ** καὶ διὰ $\mathbf{V}_2$ τὴν διαφορὰν δυναμικοῦ μεταξὺ **Β** καὶ **Γ** ἢ **Δ** καὶ **Γ** θὰ ἔχωμεν $\mathbf{I}=\mathbf{I}_1+\mathbf{I}_2$. Ὁμοίως θὰ ἔχωμεν :

1) Διὰ τὸ τμῆμα **ΑΒ** ὅτι $\mathbf{I}_1=\dfrac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{r}_1}$ ἄρα $\mathbf{V}_1=\mathbf{I}_1\,\mathbf{r}_1$.

2) Διὰ τὸ τμῆμα **ΑΔ** ὅτι $\mathbf{I}_2=\dfrac{\mathbf{V}_1\mathbf{r}_1}{\mathbf{r}_1'}$ ἄρα $\mathbf{V}_1=\mathbf{I}_2\mathbf{r}'_1$.

Ὥστε $\mathbf{I}_1\mathbf{r}_1=\mathbf{I}_2\mathbf{r}_1'$ (α).

3) Διὰ τὸ τμῆμα **ΒΓ** ὅτι $\mathbf{I}_1=\dfrac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{r}_2}$ ἄρα $\mathbf{V}_2=\mathbf{I}_1\,\mathbf{r}_2$.

4) Διὰ τὸ τμῆμα **ΔΓ** ὅτι $\mathbf{I}_2=\dfrac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{r}_2'}$ ἄρα $V_2=\mathbf{I}_2\,\mathbf{r}_2'$.

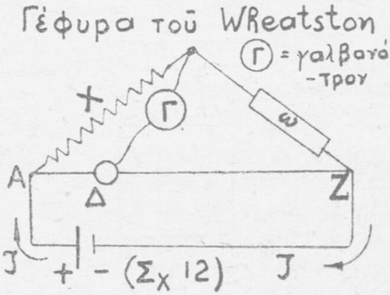
Ὥστε $\mathbf{I}_1\,\mathbf{r}_2=\mathbf{I}_2\,\mathbf{r}_2'$ (β).

Διαιροῦντες ἤδη κατὰ μέλη τὰς ἰσότητας (α) καὶ (β) λαμβάνομεν

$$\frac{I_1 r_1}{I_1 r_2} = \frac{I_2 r_1'}{I_2 r_2'} \text{ ἢ } \frac{r_1}{r_2} = \frac{r_1'}{r_2'}$$

Ὥστε ὅταν $\frac{r_1}{r_2} = \frac{r_1'}{r_2'}$ δὲν διέρχεται ρεῦμα διὰ τοῦ ἀγωγοῦ **ΒΔ** τοῦ συνδέοντος τὰ σημεῖα **Β** καὶ **Δ**.

Τρόπος μετρήσεως τῆς ἀντιστάσεως ἀγωγοῦ διὰ τῆς γεφύρας τοῦ Wheatston



ω=γνωστὴ ἀντίστασις εἰς ὄμ. Τὰ μήκη **ΑΔ** καὶ **ΔΖ** μετρῶνται εἰς χιλιοστά. **x** ἡ ζητουμένη ἀντίστασις εἰς Ὤμ.

Ἐφαρμόζοντες τὸν τύπον $\frac{r_1}{r_2} = \frac{r_1'}{r_2'}$ ἔχομεν $\frac{x}{\omega} = \frac{ΑΔ}{ΔΖ}$ καὶ $x = \frac{ΑΔ\omega}{ΔΖ}$.

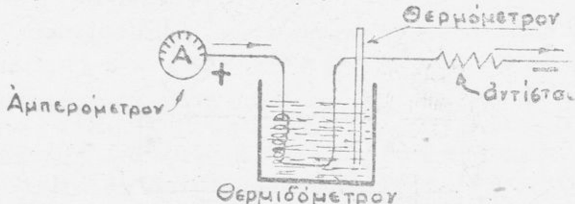
Σημείωσις. Τὰς ἀντιστάσεις ταύτας **x**, αἵτινες οὕτω μετρηθεῖσαι θὰ εἶναι πλέον γνωσταί, τὰς παρεμβάλομεν εἰς τὸ κύκλωμα, πρὸς αὐξομείωσιν τῆς ἐντάσεως τοῦ ρεύματος καὶ διὰ τὴν ἐπίτευξιν ὡρισμένων ἀποτελεσμάτων, τῶν ὁποίων θὰ λάβωμεν τυχὸν ἀνάγκην.

Νόμοι τοῦ Joule. (Ζοὺλ)

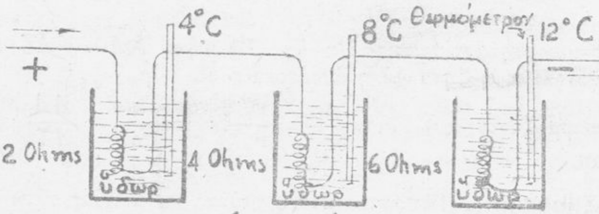
Ὡς εἴπομεν, τὸ ἠλεκτρικὸν ρεῦμα δὲν τὸ ἀντιλαμβανόμεθα, ὅπως ἓν ρεῦμα, ἀέρος ἢ ὕδατος. Τοῦτο καθίσταται εἰς ἡμᾶς γνωστὸν ἐκ τῶν ἀποτελεσμάτων του, ἤτοι παρέχει θερμικά, μαγνητικὰ ἢ χημικὰ ἀποτελέσματα, περὶ τῶν ὁποίων ἤδη ἀνεφέραμεν.

Ὁ **Joule** ἀπέδειξεν :

1) Ὅτι ἡ θερμοκρασία ἑνὸς σώματος, διὰ τοῦ ὁποίου διέρχεται ἠλεκτρικὸν ρεῦμα, ἤτοι τὸ ποσὸν τῆς θερμότητος **Q** ἥτις ἐκλύεται (παράγεται) κατὰ τὴν δίοδον, διὰ τοῦ σώματος ἠλεκτρικοῦ ῥεύματος εἶναι ἀνάλογον τοῦ τετραγώνου τῆς ἐντάσεως **I** τοῦ ρεύματος, διὰ τὸν αὐτὸν χρόνον ροῆς. Π. χ. ἐντὸς θερμιδομέτρου (Σχ. 13), περιέχοντος ὕδωρ, ἐμβαπτίζομεν μεταλλικὴν σπεῖραν καὶ διαβιβάζομεν ἠλεκτρικὸν ῥεῦμα, ἔστω ἐντάσεως 1 **Ampère**, ἐπὶ ὡρισμένον χρόνον **x,** μέχρις ὅτου ἡ θερμοκρασία τοῦ ὕδατος ἀνέλθῃ κατὰ 1° *C* (**C=K=** Κελσίου), ἔπειτα ἐὰν ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος γίνει 2 **Ampères,** τότε εἰς τὸ αὐτὸ χρονικὸν διάστημα **x** ἡ θερμοκρασία θ' ἀνέλθῃ εἰς 4°**G**, ἐὰν πάλιν ἡ ἔντασις γίνει 3 **Ampères** ἡ θερμοκρασία, διὰ τὸ αὐτὸ διάστημα **x**, θὰ ἀνέλθῃ εἰς 9°**C** καὶ οὕτω καθεξῆς. Ἤτοι τὸ ποσὸν **Q** τῆς θερμότητος μεταβάλλεται ἀναλόγως τοῦ τετραγώνου τῆς ἐντάσεως.



(Σχ. 13)



(Σχ. 14)

2ον) Ὅτι τὸ παραγόμενον ποσὸν θερμότητος **Q** εἶναι ἀνάλογον τῆς ἀντιστάσεως **R** τοῦ ἠλεκτρικοῦ ἀγωγοῦ (τῶν ἄλλων φυσικὰ ποσῶν, **I** κλπ. παραμενόντων τῶν αὐτῶν), διὰ τὸ αὐτὸ χρονικὸν διάστημα ροῆς τοῦ ρεύματος. (Σχ 14). Εὐνόητον τυγχάνει ὅτι πρὸ τῆς χρησιμοποιήσεως διαφορετικῶν ἀντιστάσεων τὸ ὕδωρ εἶχε τὴν ἰδίαν θερμοκρασίαν καὶ εἰς τὰ τρία θερμιδόμετρα.

3ον) Ὅτι ἡ δημιουργουμένη ποσότης θερμότητος **Q** εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὸν χρόνον τῆς ροῆς τοῦ ἠλεκτρικοῦ ρεύματος, ἐκπεφρασμένον εἰς δευτερόλεπτα καὶ

4ον) Ὅτι τὸ ποσὸν τῆς ἐκλυομένης (παραγομένης) θερμότητος ἐξαρτᾶται καὶ ἀπὸ ἕνα συντελεστὴν **A** ὅστις ἰσοῦται μὲ $\frac{1}{4,18}$ θερμίδας μικράς.

Εγράφη καὶ ἄλλοτε ὅτι τὸ μηχανικὸν ἰσοδύναμον μιᾶς μεγάλης θερμίδος ἰσοῦται μὲ 425 **Kg/m**, τὸ δὲ μηχανικὸν ἰσοδύναμον τῆς μικρᾶς θερμίδος ἰσοῦται μὲ 4,18 **Joules,** ἤτοι 1 **Joule** ἰσοῦται μὲ $\frac{1}{4,18}$ μικραὶ θερμίδες.

Μετρήσεις ἀκριβεῖς ἀπέδειξαν, ὅτι ὅταν ρεῦμα ἐντάσεως **1 Ampère** διέλθῃ δι' ἀντιστάσεως 1 **Ohm** ἐπὶ 1'' παράγει εἰς ἕκαστον σημεῖον τῆς διόδου του θερμότητα, ἤτοι ποσὸν θερμότητος ἴσον μὲ $\frac{1}{4,18}$ μικρὰς θερμίδας· ἐξ οὗ καὶ εὑρέθη τὸ μηχανικὸν ἰσοδύναμον τῆς μικρᾶς θερμίδος.

Ἄρα ἐφαρμόζοντες τοὺς 4 Νόμους τοῦ **Joule** ἔχομεν.

$\mathbf{Q=AI^2Rt=AEIt}$, (1) διότι **E** (**ΗΕΔ**=ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις) ἰσοῦται μὲ **IR** ἐκ τοῦ γενικοῦ τύπου ὅτι $\mathbf{I=\frac{E}{R}}$, (**I=E : R**).

Ὅπου **Q** ἡ ποσότης τῆς ἐκλυομένης θερμότητος εἰς μικρὰς θερμίδας, **I** ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἰς **Ampères, R** ἡ ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος (ὁλικὴ ἀντίστασις, ἤτοι ἀντίστασις ἀγωγοῦ καὶ ἠλεκτρικῆς πηγῆς, ἢ ἄλλως πως ἡ ἐξωτερικὴ καὶ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις) εἰς **Ohms, E** ἡ ὁλικὴ **Η.Ε.Δ.** (ἠλεκτρ. δύναμις τῆς πηγῆς) εἰς **Volts A**, συντελεστὴς ἰσούμενος μὲ $\frac{1}{4,18}$ θερμίδας μικρὰς καὶ **t** ὁ χρόνος ἐφ' ὃν διαρρέεται ὁ ἀγωγὸς ὑπὸ ρεύματος, εἰς δευτερόλεπτα.

Καὶ ἐπειδὴ $\mathbf{A}=\frac{1}{4,18}$ θερμῖδες ὁ τύπος (1) γίνεται $\mathbf{Q=\frac{I^2Rt}{4,18}=\frac{EIt}{4,18}}$ θερμῖδες.

Λαμβάνοντες τὸ μηχανικὸν ἰσοδύναμον τῆς θερμότητος ἔχομεν ὅτι ἡ θερμαντικὴ ἐνέργεια, ἤτοι **τὸ Ἠλεκτρικὸν ἔργον W** ἰσοῦται μὲ $\mathbf{I^2Rt}$ **Joules** ἤτοι

$$\mathbf{W=I^2Rt\ Joules=EIt\ Joules=\frac{E^2}{R}.t\ Joules} \quad (2)$$

(διότι ἀφοῦ ἡ 1 θερμὶς ἀντιστοιχεῖ εἰς 4,18 **Joules** αἱ $\mathbf{I^2Rt}$: 4,18 θερμίδες ἀντιστοιχοῦν εἰς $\mathbf{I^2\ Rt}$· 4,18: 4,18 **Joules** = $\mathbf{I^2\ Rt = IRIt}$, καὶ ἐπειδὴ **IR=E** καὶ **I=E: R** καταλήγομεν εἰς τὸν τύπον $\mathbf{E^2\ t:R}$). (**Σημείωσις**. Αἱ δύο τελεῖαι (:), ὡς γνωστόν, ἀντικαθιστοῦν τὴν γραμμὴν τοῦ κλάσματος, δηλαδὴ σημαίνουν, ὅτι ὁ δεξιὰ τούτων ἀριθμὸς ἢ ἡ παράστασις εἶναι ὁ διαιρέτης, τουτέστιν παρονομαστὴς τοῦ κλάσματος).

Ἰσχὺς ρεύματος ἢ Ἠλεκτρικὴ ἰσχύς.

Ἰσχὺς ρεύματος, ἢ ἠλεκτρικὴ ἰσχὺς εἶναι τὸ παραγόμενον ἠλεκτρικὸν ἔργον εἰς τὴν μονάδα τοῦ χρόνου (′′).

α) Γνωστὸν ἐκ τῆς Μηχανικῆς ὅτι 1 **Watt** = 1 **Joule** εἰς 1′′.

β) Γνωστὸν ἐκ τῆς Ἠλεκτρολογίας ὅτι $I = E : R$, ἔνθα **E** ἡ ὁλικὴ **Η.Ε.Δ.** **R** ἡ ὁλικὴ ἀντίστασις, ἤτοι ἡ ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος καὶ I ἡ ὁλικὴ ἔντασις τοῦ ρεύματος.

γ) Γνωστοὶ ἐπίσης οἱ τύποι (2). Ἄρα τὸ εἰς τὴν μονάδα τοῦ χρόνου ἠλεκτρικὸν ἔργον, ἤτοι ἡ ἠλεκτρικὴ ἰσχὺς (ἢ ἰσχὺς τοῦ ρεύματος) **P** εἰς **Watts** θὰ ἰσοῦται: $P = E \cdot I = I^2 R$ (διότι $E = IR$) $= E^2 : R$ (διότι $I = E : R$).

Τὸ ποσὸν τώρα **W** τῆς ἠλεκτρικῆς ἐνεργείας (τοῦ ἠλεκτρικοῦ ἔργου) τὸ παρεχόμενον εἰς χρόνον **t**′′ ὑπὸ ρεύματος διαρρέοντος ἀγωγὸν εἶναι εἰς **Joules**: $W = Pt = EIt = I^2 Rt = E^2 t : R$ **Joules** ὅπερ εὑρέθη καὶ εἰς τοὺς τύπους (2). Τέλος ἐὰν θέλομεν τὴν ἰσχὺν νὰ τὴν ἔχομεν εἰς **Kilowatts** διαιροῦμεν τὰ **Watts** διαιροῦδιὰ χίλια.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

209) Ἀγωγὸς διαρρέεται ὑπὸ ρεύματος ἐντάσεως 2 **Ampères**. Ποία ποσότης ἠλεκτρισμοῦ διέρχεται διὰ τῆς τομῆς του εἰς διάστημα 3 ὡρῶν;

210) Ποία ἡ ποσότης ἠλεκτρισμοῦ ἡ ὁποία διέρχεται διὰ τοῦ νήματος διατρεχομένου ὑπὸ ρεύματος ἐντάσεως 0,8 **Ampères**, μετὰ 10 ὥρας φωτισμοῦ;

211) Ἠλεκτρικὸν ρεῦμα διαρρέει ἀγωγόν. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος ὅταν διὰ τῆς τομῆς αὐτοῦ διέρχεται ποσότης 1500 **Coulombs** ἐντὸς 30′.

212) Νὰ εὑρεθοῦν πόσα **Coulombs** χρειάζονται, ἵνα ληφθοῦν δι' ἠλεκτρολύσεως 2 μ^3 ὑδρογόνου καὶ ποῖος ὁ ἀπαιτούμενος πρὸς τοῦτο χρόνος, ἐὰν ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι 10 **Ampères**. (Μία κυβ. παλάμη ὑδρογόνου ζυγίζει περίπου 0,10 γραμμαρίου).

213) Ρεῦμα διακλαδίζεται εἰς δύο βραχίονας εἰς ἕκαστον τῶν ὁποίων παρεμβάλλεται βολτόμετρον (δηλαδὴ ἡ συσκευὴ ἠλεκτρολύσεως μετὰ τοῦ ἠλεκτρολύτου, ἤτοι ὕδατος ὀξυνισμένου διὰ θεϊκοῦ ὀξέως). Εἰς 10′ συλλέγονται εἰς μὲν τὸ πρῶτον βολτόμετρον 100 ἐκ^3 ὑδρογόνου εἰς δὲ τὸ δεύτερον 150 ἐκ^3. Ζητοῦνται αἱ ἐντάσεις τῶν ρευμάτων εἰς ἑκάτερον τῶν βραχιόνων καὶ εἰς τὸ κύριον κύκλωμα.

214) Ἐὰν ἡ ποσότης τοῦ συλλεγέντος ὑδρογόνου κατά τινα ἠλεκτρόλυσιν εἶναι 7 γραμμάρια. Πόση ποσότης ρεύματος ἠλεκτρικοῦ καταναλώθη πρὸς τοῦτο;

215) Δεδομένου ὅτι τὸ ἠλεκτροχημικὸν ἰσοδύναμον τοῦ χαλκοῦ εἶναι 0,00033 γρ. καὶ ὅτι κατά τινα ἠλεκτρόλυσιν ἀπηλευθερώθησαν 33 γρ. χαλκοῦ ἐντὸς μιᾶς ὥρας. Νὰ εὑρεθῶσιν 1) Ποία ποσότης ρεύματος κατηναλώθη πρὸς τοῦτο 2) Ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος.

216) Εἴς τινα ἠλεκτρόλυσιν θεϊκοῦ ὀξέως (**H_2SO_4**) ἀπηλευθερώθησαν 5 γραμμάρια ὑδρογόνου. Πόσον βάρος μετάλλου θείου (**S**) ἀπηλευθερώθη ἐκ τοῦ ἠλεκτρολύτου;

217) Πόσα **Coulombs** χρειάζονται διὰ τὴν παρασκευὴν δι' ἠλεκτρολύσεως ἑνὸς μ^3 ὑδρογόνου б) Πόσος χρόνος θὰ χρειασθῇ πρὸς τοῦτο, ἂν ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι 1 **Ampêrc**; (Εἰδ. бάρος ὑδρογόνου περίπου 0,08).

218) Ἔχομεν κύκλωμα μὲ τρεῖς διακλαδώσεις, ἡ δ' ἔντασις τοῦ ρεύματος εἰς τὰς διακλαδώσεις ταύτας εἶναι $I_1 = 0,2$ **Ampères**, $I_2 =$ 0,3 **Amp**. καὶ $I_3 = 0,1$ **Ampêres**. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἔντασις εἰς τὸν κύριον ἀγωγὸν τοῦ κυκλώματος.

219) α) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀντίστασις χαλκίνου σύρματος μήκους 1 μέτρου καὶ διαμέτρου 1 χιλ. Ἡ εἰδικὴ ἀντίστασις χαλκοῦ$=1,6 \cdot 10^{-6}$ Ὠμ. б) Πόσα μέτρα ἐκ τοῦ ἀγωγοῦ τούτου θ' ἀπαιτηθοῦν ἐὰν θέλομεν νὰ ἔχωμεν ἀντίστασιν τοῦ ἀγωγοῦ 10πλασίαν, 50πλασίαν, ὑποδεκαπλασίαν;

220) Ποία εἶναι ἡ εἰδικὴ ἀντίστασις τοῦ ὑδραργύρου εἰς μικρόμ γνωστοῦ ὄντος ὅτι στήλη ὑδραργύρου τομῆς ἑνὸς τετρ. χιλιοστοῦ καὶ ὕψος 106,3 ἑκ. ἔχει ἀντίστασιν ἑνὸς **ohm**;

221) Οἱ δύο πόλοι συσσωρευτοῦ συνδέονται διὰ σύρματος ἀντιστάσεως 1 **ohm.** Ἐὰν ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ μεταξὺ τῶν ἄκρων τοῦ σύρματος εἶναι 2 **Volts** νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος.

222) Ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις συσσωρευτοῦ εἶναι 0,05 **ohm** καὶ οἱ δύο πόλοι του συνδέονται ἐξωτερικῶς διὰ σύρματος ἀντιστάσεως 1 **ohm.** Ἐὰν ἡ **Η.Ε.Δ.** τοῦ συσσωρευτοῦ εἶναι 2,1 **Volts** νὰ εὑρεθῇ ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος.

223) Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος σύρματος ἐκ πλατίνης διαμέτρου 1 χιλιοστοῦ, ὅπερ ἀπαιτεῖται δι' ἀντίστασιν 1 **ohm**. (Εἰδικὴ ἀντίστασις ϱ τῆς πλατίνης$=11 \cdot 10^{-6}$ **ohms**).

224) Οἱ πόλοι στοιχείου συνδέονται διὰ σύρματος ἀντιστάσεως 30 **ohms**, ἡ ἔντασις δὲ τοῦ ρεύματος εἶναι 15 **ampères**. Ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν τὸ σύρμα τοῦτο δι' ἑτέρου ἀντιστάσεως 1,5 **ohm** ἡ δὲ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι τότε 40 **ampèrcs**, νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις τοῦ στοιχείου.

225) Ἠλεκτρικὴ πηγὴ ἀποτελεῖται ἐκ 10 στοιχείων συνδεομένων κατὰ τάσιν (ἐν σειρᾷ). Ἕκαστον στοιχεῖον ἔχει **Η.Ε.Δ.** 1,8 **Volts** ἡ δὲ ἐσωτερικὴ ἀντίστασίς του εἶναι 0,5 **ohm**. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξωτερικὴ ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος (ἀντίστασις ἀγωγοῦ) ἐὰν ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος τοῦ παραγομένου ὑπὸ τῆς ἠλεκτρικῆς πηγῆς εἶναι 1,2 **ampères**.

226) Στήλη σύγκειται ἐκ 10 στοιχείων **Bunsen** συνδεομένων κατὰ σειράν. Ποία ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις ἑκάστου στοιχείου, ἂν ἡ μὲν ἐξωτερικὴ ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος εἶναι 10 **ohms** ἡ δὲ ἔντασις τοῦ ὑπὸ τῆς στήλης παρεχομένου ρεύματος εἶναι 1,2 **ampères**; β) Ποία ἡ ἀντίστασις τῆς στήλης καὶ ποία ἡ ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος;

227) Ἠλεκτρικὴ πηγὴ ἐκ 10 ὁμοίων στοιχείων, ἡνωμένων κατὰ τάσιν, παρέχει ρεῦμα ἐντάσεως 0,75 **ampères.** Εἰσάγομεν εἰς τὸ κύκλωμα συμπληρωματικὴν ἀντίστασιν 5 **Ohms** καὶ τὸ ρεῦμα ἔχει ἔντασιν τότε 0,6 **ampères.** Νὰ προσδιορισθῶσιν α) Ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀρχικοῦ κυκλώματος καὶ β) Ἡ **Η.Ε.Δ.** ἑκάστου στοιχείου.

228) Ἔχομεν ἠλεκτρικὴν πηγὴν διὰ στοιχείων ἡνωμένων κατὰ τάσιν. Ἡ **Η.Ε.Δ.** ἑκάστου στοιχείου εἶναι 1,8 **Volts**, ἡ δὲ ἐσωτερικὴ ἀντίστασίς του 0,5 **ohms**. Ἡ πηγὴ παρέχει ρεῦμα ἐντάσεως 2,4 **ampères.** Ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀγωγοῦ (ἐξωτερικὴ ἀντίστασις) εἶναι 10 **Ohms.** Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμὸς τῶν στοιχείων τῆς στήλης.

229) Στήλη, ἀποτελουμένη ἐκ δύο ἴσων ὁμάδων συνηνωμένων ἐν παραλλήλῳ (ἤτοι κατὰ ποσότητα ἢ ἐν διακλαδώσει) ἔχει 200 στοιχεῖα. Τὰ στοιχεῖα ἑκάστης ὁμάδος εἶναι συνηνωμένα ἐν σειρᾷ ἡ δὲ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις ἑκάστου στοιχείου εἶναι 1,5 **Ohms.** Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις τῆς στήλης.

230) Κύκλωμα τοῦ ὁποίου ἡ ἐξωτερικὴ ἀντίστασις (=ἀντίστασις ἀγωγοῦ) εἶναι 2 **Ohms** διαρρέεται ὑπὸ ρεύματος παρεχομένου ὑπὸ 10 στοιχείων **Bunsen** συνδυασμένων κατὰ σειράν. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, ὅταν ἡ ἀντίστασις ἑκάστου στοιχείου εἶναι 0,4 **Ohms.**

231) Εἰς τὴν ἀνωτέρω ἄσκησιν, ποία θὰ εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ ἠλεκτρικοῦ ρεύματος ἐὰν τὰ στοιχεῖα ἦσαν ἡνωμένα ἐν διακλαδώσει;

232) Ὑποθέσομεν ὅτι ἔχομεν ἠλεκτρικὴν πηγὴν σταθερὰν (δηλαδὴ ποὺ δὲν μεταβάλλεται ἡ **Η.Ε.Δ.**) καὶ τῆς ὁποίας τὸ ρεῦμα ἐντάσεως 10 **ampères** διαρρέει ἀγωγὸν (ἐξωτερικὸν κύκλωμα) ἀντιστάσεως 20 **Ohms**. Τὸ ρεῦμα γίνεται 8 **ampères** μὲ ἀντίστασιν ἀγωγοῦ 40 **Ohms** καὶ μετὰ ταῦτα γίνεται 9 **ampères** διὰ σύρματος (ἀγωγοῦ) ἀντιστάσεως ἀγνώστου. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀντίστασις **R**′ τῆς πηγῆς. ἡ **Η.Ε.Δ.** καὶ ἡ ἀντίστασις **x** τοῦ τρίτου ἀγωγοῦ.

233) α) Ποῖον τὸ ἔργον τὸ παραγόμενον εἰς 2 ὥρας ὑπὸ ἠλεκτρικῆς πηγῆς ***Η.Ε.Δ.*** 1000 ***Volts*** καὶ ἐντάσεως 10 **ampères**; β) Ποία ἡ ἰσχὺς τῆς πηγῆς;

234) Ποία ἡ ἠλεκτρικὴ ἐνέργεια ἡ παραγομένη ὑπὸ ἠλεκτρικῆς πηγῆς, ***Η.Ε.Δ.*** 1000 **Volts** καὶ ἀντιστάσεως κυκλώματος 100 **Ohms** εἰς 30′: Ποία ἡ ἰσχὺς τῆς μηχανῆς εἰς **Kilowatts**;

235) Ποῖον τὸ ποσὸν τῆς θερμότητος τὸ παραγόμενον εἰς 1 ὥραν ὑπὸ ἠλεκτρικῆς πηγῆς, ἐντάσεως ρεύματος 10 **ampères** καὶ ***Η.Ε.Δ.*** 1000 ***Volts***; Ποῖον τὸ ἀντίστοιχον ἠλεκτρικὸν ἔργον;

236) Ποῖον τὸ ποσὸν τῆς θερμότητος τὸ ἐκλυόμενον ὑπὸ ἠλεκτρικῆς πηγῆς εἰς 10′, ὅταν ἡ ἔντασις ρεύματος εἶναι 10 **ampères** καὶ ἡ ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος 100 **Ohms** ; Ποῖον τὸ ἀντιστοιχοῦν ἠλεκτρικὸν ἔργον καὶ ποία ἡ ἰσχὺς τῆς ἠλεκτρικῆς πηγῆς :

237) Ἐντὸς θερμιδομέτρου περιέχοντος 2000 γραμμάρια ὕδατος βυθίζομεν σύρμα μεταλλικὸν διὰ τοῦ ὁποίου διέρχεται ρεῦμα ἐντάσεως ἑνὸς **ampère** ἐπὶ 10΄. Ἡ ἀρχικὴ θερμοκρασία τοῦ ὕδατος ἦτο 20°**C** ἡ δὲ τελικὴ 30°**C**. Ποία ἡ ἄντίστασις τοῦ σύρματος (Ἰσοδύναμον εἰς ὕδωρ τοῦ θερμιδομέτρου=30 γραμ.)

238) Ρεῦμα ἐντάσεως 2 **ampères** διέρχεται ἐπὶ 30΄ διὰ μεταλλικοῦ σύρματος ἀντιστάσεως 4 **Ohms**, βυθισμένου ἐντὸς 400γραμμαρίων ὕδατος. Ποία θὰ εἶναι ἡ ἀνύψωσις τῆς θερμοκρασίας τοῦ ὕδατος ;

239) Ἀφίνομεν νὰ διέλθῃ ἐπὶ 10΄ ρεῦμα 1 **ampère** διὰ ὑδραργυρικῆς στήλης τῆς ὁποίας ἡ ἀντίστασις εἶναι 0,5 **Ohms**.

Ποία θὰ εἶναι ἡ ἀνύψωσις τῆς θερμοκρασίας τοῦ ὑδραργύρου. (Βάρος ὑδραργύρου=20γραμμάρια,εἰδικὴ θερμότης ὑδραργύρου0,0322),

240) Νὰ εὑρεθῇ ὁ χρόνος ὁ ἀπαιτούμενος διὰ νὰ διέλθῃ ρεῦμα 5 **ampères** ἀπὸ ἀντίστασιν 24 **Ohms**, ἵνα φθάσῃ εἰς τὸ σημεῖον τῆς ζέσεως μία κυβικὴ παλάμη ὕδατος ἀρχικῆς θερμοκρασίας 15°**C**.

2ον) ΣΤΑΤΙΚΟΣ ΗΛΕΚΤΡΙΣΜΟΣ Ἤ ΗΛΕΚΤΡΟΣΤΑΤΙΚΗ

Ἡ ἠλεκτροστατικὴ ἀποτελεῖ τὸ μέρος τῆς Φυσικῆς, ὅπερ ἐξετάζει τὰς ἰδιότητας τοῦ ἀκινητοποιηθέντος (τοῦ μὴ εἰς ἀγωγοὺς ρέοντος), ἢ ἄλλως πῶς, τοῦ ἐν στάσει εὑρισκομένου ἠλεκτρισμοῦ.

Αἱ κυριώτεραι μέθοδοι ἠλεκτρίσεως εἶναι ἡ ἠλέκτρισις διὰ συγκοινωνίας μετὰ ἠλεκτρικῆς πηγῆς, ἡ ἠλέκτρισις δι᾽ ἐπιδράσεως καὶ ἡ ἠλέκτρισις διὰ τριβῆς. Ἵνα ἡ ἠλέκτρισις ἑνὸς εὐηλεκτραγωγοῦ σώματος, ἤτοι καλοῦ ἀγωγοῦ τοῦ ἠλεκτρισμοῦ, διαρκῇ, πρέπει ὁ ἀγωγὸς οὗτος νὰ εἶναι ἀπομεμονωμένος διὰ καταλλήλων μονωτήρων. Εἰς τὰς ἐφαρμογὰς ἠλεκτρίζομεν κυρίως τοὺς καλοὺς ἀγωγούς.

Διὰ τοῦ ἠλεκτρικοῦ ἐκκρεμοῦς διαπιστοῦμεν ἐὰν σῶμά τι εἶναι ἠλεκτρισμένον ὡς ἐπίσης καὶ τὸ εἶδος τοῦ ἠλεκτρισμοῦ τὸν ὁποῖον φέρει, ἤτοι ἐὰν φέρει θετικὸν (+) (λεία ὕαλος) ἢ ἀρνητικὸν (—) (ρητίνη) ἠλεκτρισμόν. Δύο σώματα φορτισμένα μὲ τὸ αὐτὸ εἶδος εἶδος ἠλεκτρισμοῦ ἀπωθοῦνται, δι᾽ ἀντιθέτου δὲ ἠλεκτρισμοῦ φορτισμένα ἕλκονται. Ὁ ἠλεκτρισμὸς φέρεται εἰς τὴν ἐξωτερικὴν ἐπιφάνειαν τῶν ἀγωγῶν.

Ποσότης ἠλεκτρισμοῦ. Αἱ ποσότητες τοῦ ἠλεκτρισμοῦ ὀνομάζονται καὶ ἠλεκτρικαὶ μᾶζαι ἢ ἠλεκτρικὰ φορτία. Μονὰς ποσότητος τοῦ ἠλεκτρισμοῦ εἰς τὸ σύστημα **c. g. s.** εἶναι ἡ ποσότης τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ ἔχῃ ἑκάστη χωριστὰ ἀπὸ δύο ἀβαρεῖς μικρὰς σφαίρας, ἵνα αὗται τιθέμεναι εἰς ἀπ᾽ ἀλλήλων ἀπόστασιν ἴσην μὲ ἓν ἑκατοστόμετρον ἀπωθῶνται μετὰ δυνάμεως ἴσης πρὸς μίαν δύνην. Ἡ μονὰς αὕτη καλεῖται ἠλεκτροστατικὴ μονὰς ποσότητος τοῦ ἠλεκτρισμοῦ· ἐπειδὴ εἰς τὴν πρᾶξιν αὕτη εἶναι πολὺ μικρὰ λαμβάνεται ἡ **coulomb**, ἥτις ἀντιστοιχεῖ τὲ $3 \cdot 10^9$ ἠλεκτροστατικὰς μονάδας.

Νόμος Coulomb. Δύο ἠλεκτρισμένα σώματα (θεωρούμενα ἄνευ διαστάσεων, ἤτοι ὡς σημεῖα) ἕλκονται ἢ ἀπωθοῦνται κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς ἑνούσης τὰ σώματα ταῦτα εὐθείας, ἀναλόγως πρὸς τὰς ποσότητας τοῦ ἠλεκτρισμοῦ τὸν ὁποῖον φέρουν καὶ ἀντιστρόφως ἀναλόγως τοῦ τετραγώνου τῆς ἀποστάσεώς των. Ἐὰν **F** ἡ ἑλκτικὴ ἢ ὠστικὴ των δύναμις **q**, **q**′ αἱ ποσότητες ἠλεκτρισμοῦ, εἰς ἠλεκτροστατικὰς μονάδας, καὶ **r** ἡ ἀπόστασις μεταξύ των, τότε ἔχομεν $F=\frac{qq'}{r^2}$.

Ἠλεκτρικὴ πυκνότης. Ἡ ἠλεκτρικὴ πυκνότης ἐπὶ σφαίρας μεμονωμένης, δηλαδὴ ἡ ποσότης τοῦ ἠλεκτρισμοῦ της ἀνὰ εκ ² εἶναι σταθερά, ἡ δὲ διανομὴ τοῦ ἠλεκτρισμοῦ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας της ὁμαλή. Ἐὰν **q** ἡ ποσότης τοῦ ἠλεκτρισμοῦ τῆς σφαίρας, ἤτοι τὸ ἠλεκτρικὸν φορτίον της εἰς ἠλεκτροστατικὰς μονάδας, **r** ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας καὶ **σ** ἡ πυκνότης της, θὰ ἔχωμεν ἐπιφάνειαν σφαίρας ἴσην μὲ $4\pi r^2$, ὅθεν $\sigma=\frac{q}{4\pi r^2}$. Ἐπὶ μὴ σφαιρικοῦ ἀγωγοῦ ἡ διανομὴ τοῦ ἠλεκτρισμοῦ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας του δὲν εἶναι ὁμαλή, ὁπότε ὀνομάζομεν πυκνότητα τοῦ ἠλεκτρισμοῦ εἴς τι σημεῖον τῆς ἐπιφανείας τοῦ σώματος, τὸ πηλίκον $\frac{q}{e}$ τῆς πυκνότητος **q** τοῦ ἠλεκτρισμοῦ, τὴν ὁποίαν φέρει ἓν πολὺ μικρὸν τμῆμα ἐπιφανείας του, πέριξ τοῦ σημείου τούτου, ὡς πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν **e** τῆς ἐπιφανείας ταύτης.

Ἠλεκτρικὸν πεδίον ὀνομάζομεν τὸ σύνολον τῶν σημείων τοῦ διαστήματος, εἰς τὰ ὁποῖα ἐκδηλοῦνται μηχανικαὶ δράσεις ἠλεκτρισμένων σωμάτων (ἕλξεις, ἀπωθήσεις).

Δυναμικόν. Σῶμα ἠλεκτρισμένον καὶ ἐγκλείων ποσότητα ἠλεκτρισμοῦ δυνάμεθα νὰ παραβάλωμεν μὲ σῶμα ἐγκλείων ποσότητα θερμότητος· ὅπως δὲ εἰς τὴν θερμιδομετρίαν πρέπει νὰ γνωρίζωμεν ἐκτὸς τῆς ποσότητος θερμότητος, τὴν ὁποίαν ἔχει σῶμά τι, καὶ τὴν θερμοκρασίαν αὐτοῦ, οὕτω πως ἐκτὸς τῆς ποσότητος ἠλεκτρισμοῦ, ἣν ἔχει σῶμά τι, πρέπει νὰ γνωρίζωμεν καὶ τὸ δυναμικόν του. Τὸ δυναμικὸν διακρίνεται καὶ τοῦτο εἰς θετικὸν καὶ ἀρνητικόν

Δύο ἀγωγοὶ τῶν ὁποίων τὰ ἠλεκτρικὰ φορτία καὶ αἱ διαστάσεις εἶναι πολὺ διάφοροι, ἔχουν τὸ αὐτὸ δυναμικόν, ἐὰν δίδουν κεχωρισμένως φορτία ἴσα καὶ ὁμόσημα εἰς ἠλεκτροσκόπιον μεθ' οὗ ἐτέθησαν διαδοχικῶς ἀπὸ ἀποστάσεως εἰς συγκοινωνίαν. Τὸ δυναμικὸν ἑνὸς ἀγωγοῦ **Γ** εἶναι μεγαλύτερον τοῦ δυναμικοῦ ἄλλου ἀγωγοῦ **B** ἐὰν τὸ φορτίον ἠλεκτροσκοπίου, ὅπερ συνεδέθη ἀπὸ ἀποστάσεως, μετὰ τοῦ **A**, εἶναι μεγαλύτερον τοῦ φορτίου τοῦ αὐτοῦ ἠλεκτροσκοπίου συνδεθέντος μὲ τὸ **B** (οὐχὶ κατ' ἀπόλυτον τιμὴν (π.χ. $4>2$. $-3>-5$). Ὅταν ἤδη συνδεθοῦν οἱ ὡς ἀνωτέρω ἀγωγοὶ **A** καὶ **B** διὰ σύρματος, θετικὸς ἠλεκτρισμὸς διέρχεται ἀπὸ τοῦ **A** εἰς τὸ **B** αἱ δὲ πυκνότητες ἐλαττοῦνται ἐπὶ τοῦ **A** καὶ αὐξάνουν ἐπὶ τοῦ **B**. Οἱ δύο ἀγωγοὶ λαμβάνουν κοινὸν δυναμικόν, οὗτινος ἡ τιμὴ περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν δύο ἀρχικῶν δυναμικῶν. Ὁπωσδήποτε ὅμως τὸ ἄθροισμα τῶν δυναμικῶν τῶν δύο ἀγωγῶν πρὸ τῆς συγκοινωνίας των καὶ μετ' αὐτὴν μένει σταθερόν.

Ἡ κίνησις τοῦ ἠλεκτρισμοῦ μεταξὺ δύο ἀγωγῶν ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς διαφορᾶς δυναμικοῦ των. Ἵνα γίνῃ κίνησις ἠλεκτρισμοῦ μεταξὺ δύο ἀγωγῶν, πρέπει οἱ ἀγωγοὶ οὗτοι νὰ εὑρίσκωνται, ὡς γνωρίζομεν, ὑπὸ διάφορον δυναμικόν. Τὴν διαφορὰν ταύτην δυναμικοῦ καλοῦν, ὡς ἐλέχθη ἤδη καὶ εἰς τὸ προηγούμενον κεφάλαιον, **Ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν**. Οἱ δύο ἀγωγοὶ οἱ εὑρισκόμενοι ὑπὸ διάφορον δυναμικὸν ἐγκλείουν δυναμικὴν ἐνέργειαν. ἥτις ἀναπτύσσει ἔργον, εὐθὺς ὡς γίνῃ ἐξίσωσις τοῦ δυναμικοῦ των.

Ἠλεκτροχωρητικότης

Τὸ δυναμικὸν ἀγωγοῦ μεμονωμένου εἶναι ἀνάλογον πρὸς τὸ φορτίον του, ἤτοι $C=\frac{Q}{V}$ ἔνθα **Q** τὸ ἠλεκτρικὸν φορτίον τοῦ ἀγωγοῦ, **V** τὸ δυναμικόν του καὶ C ἡ ἠλεκτροχωρητικότης τοῦ ἀγωγοῦ (σταθερὰ ποσότης).

Ὥστε ἠλεκτροχωρητικότης ἀγωγοῦ μεμονωμένου, καλεῖται ἡ σταθερὰ σχέσις, ἥτις ὑφίσταται μεταξὺ τοῦ φορτίου του καὶ τοῦ δυναμικοῦ του. Μονὰς ἠλεκτροχωρητικότητος εἶναι ἡ ἠλεκτροχωρητικότης ἀγωγοῦ, ὅστις ὑπὸ φορτίον 1 **coulomb** λαμβάνει δυναμικὸν ἑνὸς **volt** καὶ καλεῖται **farad** ἤτοι 1 **farad**$=\frac{1 \textbf{ coulomb}}{1 \textbf{ volt}}$. Τὸ **microfarad** εἶναι τὸ ἑκατομμυριοστὸν τοῦ **farad**.

Ὡς ἠλεκτροστατικὴ μονὰς χωρητικότητος λαμβάνεται ἡ χωρητικότης σφαίρας ἀκτῖνος ἑνὸς ἑκατοστομέτρου. Ὅθεν ἡ χωρητικότης σφαίρας εἰς ἠλεκτροστατικὰς μονάδας, εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὴν ἀκτῖνα αὐτῆς, τουτέστι μετρεῖται διὰ τῆς ἀκτῖνος της, ἐκφραζομένης εἰς ἑκατοστά.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

241) Ποῖον φορτίον πρέπει νὰ δώσωμεν εἰς σφαῖραν διαμέτρου 3 ἑκατοστομέτρων, διὰ νὰ εἶναι ἡ πυκνότης αὐτῆς 7 ;

242) Δύο μικραὶ σφαῖραι ἔχουν ἠλεκτρικὰ φορτία $+12$ καὶ -8. Μετὰ ποίας δυνάμεως αἱ δύο αὗται σφαῖραι ἕλκονται ἐξ ἀποστάσεως 2 ἑκ;

243) Σφαῖρα ἀκτῖνος 14 ἑκ. εἶναι ἠλεκτρισμένη καὶ ἡ πυκνότης αὐτῆς εἶναι 10. Ποῖον εἶναι τὸ δυναμικὸν τῆς σφαίρας ταύτης ;

244) Δύο σφαῖραι πεφορτισμέναι ἑκατέρα δι' ἑνὸς **coulomb** θετικοῦ ἠλεκτρισμοῦ, ἀφίστανται ἀλλήλων κατὰ 10 μέτρα. Ποία ἡ ἀμοιβαία ὠστικὴ δύναμις;

245) Ποῖον φορτίον πρέπει νὰ δώσωμεν εἰς χωρητικότητα 100 **microfarads**, ἵνα ὑψώσωμεν τὸ δυναμικὸν αὐτῆς εἰς 50 **volts;**

246) Ἀγωγὸς χωρητικότητος 10 ἤχθη εἰς δυναμικὸν 30. Ποῖον τὸ φορτίον αὐτοῦ;

247) Ποία ἡ ἀκτὶς σφαίρας, ἧς ἡ χωρητικότης εἶναι 1 **microfarad;**

248) Δύο σφαῖραι μεμονωμέναι, ὧν αἱ ἀκτῖνες εἶναι μεταξύ των ὡς ὁ 7 πρὸς τὸν 11, φέρουν τὴν αὐτὴν ποσότητα ἠλεκτρισμοῦ. Εἰς ποίαν σχέσιν εὑρίσκονται αἱ πυκνότητες αὐτῶν;

249) Σφαῖρα ἠλεκτρισμένη ἔχει δυναμικὸν 10. Ἄλλη σφαῖρα ἠλεκτρισμένη ἔχει δυναμικὸν 4. Τὸ φορτίον τῆς πρώτης εἶναι μεγαλύτερον τοῦ φορτίου τῆς δευτέρας. Θέτομεν ταύτας εἰς συγκοινωνίαν διὰ σύρματος. Ποῖον τὸ δυναμικὸν τῶν σφαιρῶν μετὰ τὴν σύνδεσιν;

250) Μικρὰ σφαῖρα ἠλεκτρισμένη τίθεται εἰς ἐπαφὴν μετὰ ἴσης σφαίρας ἐν οὐδετέρᾳ καταστάσει εὑρισκομένης, κατόπιν δὲ ἀποχωρίζεται ταύτης· ἐξ ἀποστάσεως τότε 10 ἑκ. αἱ δύο σφαῖραι ἐξασκοῦν ἐπ' ἀλλήλων ἄπωσιν 9 δυνῶν. Ποῖον τὸ ἀρχικὸν φορτίον τῆς ἠλεκτρισμένης σφαίρας;

251) Δύο μικραὶ σφαῖραι ἀπέχουν ἀπ' ἀλλήλων κατὰ 5 ἑκατοστόμετρα. Ἡ μία ἐξ αὐτῶν ἔχει φορτίον 40 μονάδων. Ποῖον πρέπει νὰ εἶναι τὸ φορτίον τῆς ἑτέρας, ἵνα μεταξὺ αὐτῶν ἀσκεῖται ἄπωσις ἴση πρὸς 5 χιλιόγραμμα;

252) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἠλεκτρικὸν φορτίον διὰ τοῦ ὁποίου πρέπει νὰ φορτισθῇ ἀγωγός, χωρητικότητος 200 **microfarades**, διὰ ν' ἀνυψωθῇ τὸ δυναμικόν του εἰς 100 **Volts.**

253) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις **α** μεταξὺ δύο ἠλεκτρισμένων σφαιρῶν, ἐχουσῶν ἀκτῖνας 1 καὶ 2 ἑκατοστομέτρων, εὑρισκομένων ὑπὸ τὸ αὐτὸ δυναμικὸν 40 καὶ δεδομένου ὅτι ἡ μεταξύ των ὠστικὴ δύναμις εἶναι 4 δυνῶν.

254) Δύο σφαῖραι εὐηλεκτραγωγοί, ἔχουσαι ἀκτῖνας 8 **mm** (χιλιοστὰ τοῦ μέτρου) καὶ 1 ἑκ. ἐτέθησαν εἰς ἀπόστασιν μεταξύ των 8 ἑκ. (ἡ ἀπόστασις λογίζεται μεταξὺ τῶν κέντρων τῶν σφαιρῶν), ὁπότε καὶ ἀνεπτύχθη ὠστικὴ δύναμις 10 δυνῶν. Νὰ εὑρεθῇ τὸ κοινὸν δυναμικὸν τῶν δύο σφαιρῶν.

ΤΕΛΟΣ ΤΟΥ ΠΡΩΤΟΥ ΜΕΡΟΥΣ

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

Λύσεις ἀσκήσεων Φυσικῆς, σχήματα, διασαφήσεις (κατὰ κεφάλαιον).

Σημείωσις. Δι᾽ οἰκονομίαν χώρου, πρὸς ἀποφυγὴν μεγαλυτέρας δαπάνης ἐκτυπώσεως, καὶ κυρίως εἰς τὸ Δεύτερον Μέρος τοῦ παρόντος βιβλίου, οἱ κλασματικοὶ ἀριθμοὶ ἀντεκατεστάθησαν, ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον, διὰ τῶν ἴσων των δεκαδικῶν ἀριθμῶν. π. χ. ἀντὶ $\frac{1}{2}$ γράφεται 0,5, ἢ ἀντὶ $S=\frac{1}{2}\gamma t^2$, γράφεται $S=0,5\ \gamma t^2$ κλπ. Ὁμοίως ἡ γραμμὴ τοῦ κλάσματος (——=διά) ἀντεκατεστάθη, σχεδὸν ἐξ ὁλοκλήρου, διὰ τοῦ γνωστοῦ συμβόλου τῆς διαιρέσεως (:) π.χ. ἀντὶ $\frac{3(\alpha-\beta)}{2}$ σημειοῦται $3\ (\alpha-\beta):2$, ἢ ἀντὶ $t=\frac{S_t}{V}$ σημειοῦται $t=S_t : V$, ἢ ἀντὶ $\frac{AB}{\Gamma\Delta}=\frac{EZ}{H\Theta}$ γράφεται $AB:\Gamma\Delta=EZ:H\Theta$, ἢ ἀντὶ $I=\frac{E}{R}$, γράφεται $I=E:R$ κλπ. Ὡσαύτως διὰ τὰς πράξεις πολλαπλασιασμοῦ μεταξὺ ἀριθμῶν χρησιμοποιεῖται ἡ τελεία (·) π.χ. $S=0,5\cdot 4\gamma=2\gamma$, ἢ $3\alpha\cdot 3\beta=9\alpha\beta$ κλπ., μεταξὺ δὲ γραμμάτων, παριστώντων διάφορα μεγέθη, παρατίθενται οἱ παράγοντες, συνηθέστατα, ἄνευ τῆς χρήσεως διακριτικοῦ σημείου τοῦ πολλαπλασιασμοῦ π.χ. $P=\omega h\varepsilon=\omega.h.\varepsilon$ ἢ $s=vt$, ἀλλὰ $\overline{3AB}\cdot\overline{\Gamma\Delta}$ κλπ.

ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

α΄ ΚΙΝΗΤΙΚΗ

I Κίνησις εὐθύγραμμος ἰσοταχὴς (ὁμαλή).

1) $S_t=Vt=5,6\cdot 3610=20216$ μέτρα, εἶναι τὸ διανυθὲν διάστημα εἰς 1 ὥραν 10΄΄.

2) $t=S_t : V=149400000:300000=1494:3=498''$ ἢ 8΄ 18΄΄ εἶναι ὁ ἀπαιτούμενος χρόνος.

3) $V=S_t : t=214,20:17=12,6$ μέτρα ἀνὰ πρῶτον λεπτὸν ἢ 12,6:60 μέτρα ἀνὰ δευτερόλεπτον, εἶναι ἡ ταχύτης τοῦ σημείου.

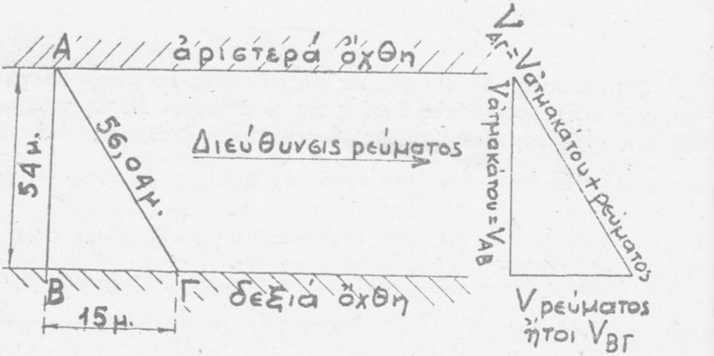
4) $S_t=Vt=5\cdot 90=450$ μέτρα θὰ διανύσῃ εἰς 1,5 ὥραν.

5) $S_t=Vt=0,60\cdot 12000=7200$ μέτρα εἶναι τὸ διανυθὲν διάστημα.

6) $V=S_t : t=245:20=12,25$ ἑκατοστὰ εἶναι ἡ ταχύτης του ἀνὰ δευτερόλεπτον.

7) $t = S_t : V = 200000:100 = 2000''$, ἢ εἰς 33′ 20″ θὰ διατρέξῃ τὰ 200 χιλιόμετρα.

8) Ἡ ἀτμάκατος ξεκινᾷ ἐκ τοῦ A διὰ νὰ φθάσῃ εἰς B, ἀλλὰ λόγῳ τῆς ταχύτητος τοῦ ρεύματος φθάνει εἰς Γ.



1ος Τρόπος. $S_{AB} = V_{AB} t$ ἢ $54 = 1{,}8t$, $t = 54:1{,}8 = 30''$ θὰ ἐχρειάζετο ἡ ἀτμάκατος νὰ διατρέξῃ τὸ διάστημα AB, ἐὰν δὲν ὑπῆρχε ταχύτης ρεύματος

Ἀλλὰ $S_{ΒΓ} = V_ρ t$, ἢ $15 = V_ρ \cdot 30$ καὶ $V_ρ = 15:30 = 0{,}5$ μέτρα ἀνὰ δευτερόλεπτον εἶναι ἡ ταχύτης τοῦ ρεύματος. [$V_ρ = V_{ΒΓ}$ = ταχύτης ρεύματος].

2ος Τρόπος (διὰ τῶν ταχυτήτων). $S_{AB} = 54$ μ. ἢ $54 = 1{,}8t$ καὶ $t = 30''$.

$S^2_{ΑΓ} = ΑΓ^2 = 54^2 + 15^2$ καὶ $ΑΓ = 56{,}04$ μέτρα $= S_{ΑΓ}$.

$S_{ΑΓ} = V_{ΑΓ} t$ καὶ $V_{ΑΓ} = 56{,}04:30 = 1{,}868$ μέτρα εἶναι ἡ ταχύτης ρεύματος καὶ ἀτμακάτου. Ὅθεν ἔχομεν διὰ τῶν ταχυτήτων ὅτι $1{,}868^2 = V^2_{AB} + V^2_ρ$. Ἄρα $V^2_ρ = 1{,}868^2 - 1{,}8^2$. Ἄρα $V^2_ρ = 0{,}25$ καὶ $V_ρ$ [ταχύτης ρεύματος] $= 0{,}5$ μέτρα ἀνὰ 1″.

9) Ἐὰν x ἡ ταχύτης τῆς ἀτμακάτου καὶ y ἡ τοῦ ρεύματος θὰ ἔχωμεν : $x + y = 6{,}2$

$y + x = 3{,}8$

Λύοντες τὸ σύστημα εὑρίσκομεν $x = 5$ μέτρα ἀνὰ 1″ καὶ $y = 1{,}2$ μέτρα ἀνὰ 1″.

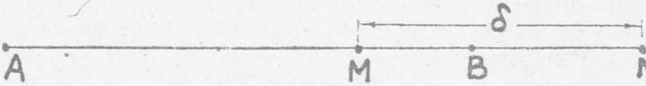
10) Ἔστω ὅτι θὰ συναντηθοῦν μετὰ t χρόνον. Τὸ διάστημα τὸ διανυθὲν ὑπὸ τοῦ κινητοῦ τοῦ ἐκκινοῦντος ἐκ τοῦ Γ εἶναι $S_Γ = 5t$ τὸ δὲ διάστημα τὸ διανυθὲν ὑπὸ τοῦ ἑτέρου εἶναι $S_Δ = 2t$.

Ἄρα $500 = 5t + 2t = 7t$. Ἤτοι $t = 500:7 = 71{,}4''$. Ἄρα μετὰ 71,4″ ἀπὸ τῆς ἐκκινήσεώς των θὰ συναντηθοῦν,

Τὸ σημεῖον συναντήσεως θὰ ἀπέχῃ ἀπὸ τοῦ σημείου Γ ἀπόστασιν

5·71,4 μέτρα, ἢ ἐκ τοῦ Δ ἀπόστασιν 2·71,4 μέτρα. **Σημείωσις.** Ἐκ τῶν τύπων $S_\Gamma=5t$ καὶ $S_\Delta=2t$ ἔχομεν $t=S_\Gamma:5$ καὶ $t=S_\Delta:2$ Ἄρα $S_\Gamma:5=S_\Delta:2$, ἢ $S_\Gamma:S_\Delta=5:2$. **Ἦτοι τὰ ὑπὸ τῶν δύο κινητῶν, ἐντὸς τοῦ αὐτοῦ χρόνου, διανυόμενα διαστήματα εἶναι ἀνάλογα τῶν ταχυτήτων των.**

11) Διὰ τὸ ἓν κινητὸν ἔχομεν $2000=V_1\cdot 10$ Ὅθεν $V_1=\frac{2000}{10}=$ $=200$ μέτρα ἀνὰ δευτερόλεπτον. Διὰ τὸ ἕτερον κινητὸν $2000=V_2\cdot 300$. Ἄρα $V_2=2000:300=6,66$ μέτρα ἀνὰ δευτερόλεπτον. **Αἱ ταχύτητες λοιπὸν τῶν κινητῶν, διανυόντων τὸ αὐτὸ διάστημα, εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν χρόνων εἰς τοὺς ὁποίους διηνύθη τοῦτο.**

12) 

Διὰ τὸν ποδηλάτην διανύσαντα τὴν ἀπόστασιν AM μὲ ταχύτητα μV καὶ εἰς χρόνον t ἔχομεν ὅτι $AM=\mu Vt$, ἄρα $t=AM:\mu V$. Ὁμοίως διὰ τὸν πρῶτον πεζὸν τὸν διανύσαντα τὴν ἀπόστασιν BM ἐντὸς τοῦ ἰδίου χρόνου t, ἔχομεν ὅτι $BM=Vt$, ἄρα $t=BM:V$. Συνεπῶς ἐκ τῶν δύο ἰσοτήτων αἵτινες μᾶς δίδουν τὸν αὐτὸν χρόνον t λαμβάνομεν τὴν ἰσότητα $AM:\mu V=BM:V$ (1).

Ἐπίσης $(AM+\delta):\mu V=BM':V=(\delta-BM):V$ (2). Ἤδη ἐκ τοῦ τύπου (1) ἔχομεν $AM=BM\mu V:V=BM\mu$ (3). Ἀντικαθιστῶντας ἤδη εἰς (2) τὴν τιμὴν τοῦ AM ἔχομεν $(BM\mu+\delta):\mu V=(\delta-BM):V$, ἢ $(BM\mu+\delta)V=(\delta-BM)\mu V$, ἢ $\mu VBM+\delta V=\mu V\delta-\mu VBM$, ἢ $\mu VBM+\mu VBM=\mu V\delta-V\delta$, ἢ $2\mu VBM=V\delta(\mu-1)$ καὶ $BM=V\delta(\mu-1):2\mu V=\delta(\mu-1):2\mu$. Ὁμοίως ἐκ τοῦ τύπου (3) ἔχομεν $AM=\frac{\delta(\mu-1)}{2\mu}\cdot\mu=\frac{\delta(\mu-1)}{2}$. Ἄρα $AB=BM+AM=\delta(\mu-1):2\mu+\delta(\mu-1):2$.

Ἐφαρμογή. $AB=10(4-1):2\cdot4+10(4-1):2$, ἢ $AB=15:4+15=75:4$ χιλιόμετρα ἢ 18750 μέτρα.

13) Ἔστω x ἡ ἰδία ταχύτης τοῦ ἀεροπλάνου καὶ y ἡ ταχύτης τοῦ ἀνέμου. Τότε τὸ ἀεροπλάνον διήνυσε τὰ 690 χιλιόμετρα μὲ ταχύτητα $x-y$. Ὥστε ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $690=3(x-y)$ ἤτοι $x-y=230$ (1)

Ἀλλὰ τὰ ὑπόλοιπα 470 χιλιόμετρα τὰ διέτρεξε μὲ ταχύτητα $x+40-2y$· ὥστε ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $470=(x+40-2y)2$, ἤτοι $x-2y=195$ (2).

Λύοντες ἤδη τὸ σύστημα ἐξισώσεων [1] καὶ [2] εὑρίσκομεν $x=265$ χιλμ. τὴν ὥραν καὶ $y=35$ χιλμ. τὴν ὥραν.

II. Κίνησις εὐθύγραμμος ὁμαλῶς μεταβαλλομένη.

14) $S=\frac{1}{2}\gamma t^2$, $t^2=\frac{2S}{\gamma}$ καὶ $t=\sqrt{\frac{2S}{\gamma}}=\sqrt{\frac{2\cdot 90}{5}}=\sqrt{36}$ $=6$ ὧραι ἐχρειάσθησαν ἵνα τὸ κινητὸν διατρέξῃ τὰ 90 χιλιόμετρα. Συνεπῶς $V_t=\gamma t=5\cdot 6=30$ χιλμ. τὴν ὥραν θὰ εἶναι ἡ ταχύτης τοῦ κινητοῦ κατὰ τὴν στιγμὴν ταύτην. **(Σημείωσις.** Ἡ ταχύτης ἠδύνατο νὰ εὑρεθῇ καὶ ἐκ τοῦ τύπου $V_t=\sqrt{2\gamma S}$)

Ἐπίσης μετὰ 45′ ἡ ταχύτης του θὰ εἶναι ; $V_{45}=V_0+\gamma t=30+5\cdot 0,75=33,75$ χιλιόμετρα ἢ 33750 μέτρα καθ' ὥραν.

Ἐπίσης ἔχομεν: $V_t=V_0+\gamma t$, $\gamma t=V_t-V_0$ καὶ $(V_t-V_0):\gamma=$ $=(60-30):5=6$. Ἤτοι μετὰ 6 ὥρας ἀφ' ὅτου εἶχε τὴν ταχύτητα τῶν 30 χλμ. ἡ ταχύτης οοῦ κινητοῦ θὰ εἶναι 60 χλμ. τὴν ὥραν.

15) α) $20=\gamma\cdot 1^2:2=\gamma:2$, καὶ $\gamma=40$ ἑκ. ἡ ἐπιτάχυνσις τοῦ κινητοῦ. Ὡσαύτως $S_{10}=0,5.40-10^2,=2000$ ἑκ. θὰ ἔχῃ διανύσει εἰς τὸ τέλος τοῦ δεκάτου δευτερολέπτου.

β) $V_t=\gamma t$ ἢ $2400=40t$ καὶ $t=60''$. Ἤτοι μετὰ 60″ θὰ ἔχῃ τὸ σῶμα τὴν ταχύτητα τῶν 24 μ.″

16) α) $50=0,5\ \gamma\cdot 3^2$ ἢ $100=9\gamma$, $\gamma=100:9=11,1$ ἑκ. Ὅθεν ἔχομεν $S=0,5\gamma t^2=0,5\cdot 11,1\cdot 20^2=2220$ ἑκ. θὰ διατρέξῃ εἰς τὸ τέλος τοῦ εἰκοστοῦ δευτερολέπτου,

β) $V_3=\gamma t=11,1\cdot 3=33,3$ ἑκ.″ θὰ εἶναι ἡ ταχύτης του εἰς τὸ τέλος τοῦ 3ου δευτερ.—Ἐπίσης $V_{20}=11,1\cdot 20=222$ ἑκ. ἢ 2,22 μ. θὰ εἶναι ἡ ταχύτης του κατὰ τὸ εἰκοστὸν δευτερ.

γ) $V_t=\gamma t$ καὶ $t=V_t:\gamma=100:11,1=9,009''$. Ἤτοι μετὰ 9,009″ ἀπὸ τῆς ἐκκινήσεως θὰ ἔχῃ τὴν ταχύτητα τῶν 100 μ.″

17) $t=V_t:\gamma=60:10=6''$. Ἤτοι μετὰ 6″ ἀφ' ὅτου ξεκινήσῃ θὰ ἔχῃ τὸ κινητὸν τὴν ταχύτητα τῶν 60 μ (″). Ὅθεν $S_t=0,5\gamma t^2=$ $=0,5\cdot 10\cdot 6^2=180$ μ θὰ ἔχῃ διανύσει κατὰ τὴν στιγμὴν ἐκείνην.

18) α) $V_1=V_0+\gamma t_1=A+10\cdot 1=A+10$ μ. ταχύτης μετὰ 1″
$V_2=V_0+\gamma t_2=A+10\cdot 2=A+20$ μ. » » 2″
$V_3=V_0+\gamma t_3=A+10\cdot 3=A+30$ μ. » » 3″
κλπ. κλπ.

β) Ἐὰν ἡ κίνησις εἶναι ἐπιβραδυνομένη τότε:

$V_1=A-10$ μ. ταχύτης μετὰ 1″
$V_2=A-20$ μ, » » 2″
$V_3=A-30$ μ. » » 3″
κλπ., κλπ.

Ἐφαρμογή α) Διὰ κίνησιν ἐπιταχυνομένην

$V_1=100+10=110$ μ. ταχύτης μετὰ 1″
$V_2=100+20=120$ μ. » » 2″
κλπ., κλπ.

β) Διὰ κίνησιν ἐπιβραδυνομένην

$V_1=100-10=90$ μ. ταχύτης μετὰ 1″
$V_2=100-20=80$ μ. » » 2″
$V_3=100-30=70$ μ. » » 3″
. . . .
$V_{10}=100-100=0$ μ. » » 10″ ὁπότε τὸ κινητὸν θὰ ἠρεμήσῃ.

Ὡς βλέπομεν αἱ ταχύτητες διαφέρουν ἀπὸ τοῦ ἑνὸς δευτερολέπτου εἰς τὸ ἕτερον κατὰ τὴν σταθερὰν ποσότηια τῆς ἐπιταχύνσεως, ἢ ἐπιβραδύνσεως.

19) $1000=0{,}5\gamma 10^2=0{,}5\cdot\gamma\cdot 100$ καὶ $\gamma=20$ μέτρα. Ὅθεν $S=$ $=20\cdot 18^2:2=3240$ μέτρα θὰ διανύσῃ κατὰ τὸ 18ον δευτερ. τῆς κινήσεώς του.

20) α) $S=V_0t+0{,}5\gamma t^2$ ἢ $20\cdot 1+0{,}5\gamma=30$ μ., $\gamma=60-40=20$ μ. εἶναι ἡ ἐπιτάχυνσις. Ἄρα $S=20\cdot 15+20\cdot 15^2;2=2550$ μ. θὰ διατρέξῃ κατὰ τὸ τέλος τοῦ 15ου δευτερολέπτου.

β) $V_t=V_0+\gamma t$, ἢ $60=20+20t$, $40=20t$ καὶ $t=2''$, ἤτοι μετὰ 2″ θὰ ἔχῃ τὴν ταχύτητα τῶν 60 μέτρων.

21) Ἐκ τοῦ τύπου $V=\sqrt{2\gamma S}$ θὰ λύσωμεν τὴν ἄσκησιν. Δέον δὲ $V=\dfrac{S}{3}$. Ἄρα $S:3=\sqrt{2\gamma S}$: ἢ $S^2:9=2\gamma S$. Ὅθεν $S^2=18\gamma S$, ἢ $S^2-18\gamma S=0=S\,(S-18\gamma)$. Συνεπῶς ἢ $S=0$ ἢ $S-18\gamma=0$ ἤτοι $S=18\gamma$.

22) α) $S=V_0t-0{,}5\gamma t^2$, ἢ $50=30\cdot 2-0{,}5\gamma 4$ ἢ $50-60=-2\gamma$ ἢ $-10=-2\gamma$ ἢ $10=2\gamma$ καὶ $\gamma=5$ μέτρα εἶναι ἡ ἐπιβράδυνσις.

Ὥστε $S_{10}=30\cdot 10-5\cdot 100:2=300-250=50$ μ. διέτρεξεν κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ 10ου δευτερολέπτου. Τὸ τοιοῦτον ὅμως ἀδύνατον, διότι εἰς τὸ τέλος τῶν 6″ τὸ κινητὸν ἐσταμάτησε. ($V=V_0-\gamma t=30-5\cdot 6=0$).

β) Οὐδέποτε εἶχε τὴν ταχύτητα τῶν 40 μ., ἐφ' ὅσον ἡ κίνησις εἶναι ἐπιβραδυνομένη καὶ ἐφ' ὅσον εἴχομεν ἀρχικὴν ταχύτητα 30 μ.″ Πράγματι διότι συμφώνως τῷ τύπῳ $V_t=V_0-\gamma t$ θὰ εἴχομεν τότε $40=30-5t$, ἢ $5t=30-40=-10$ καὶ $t=-2$, ὅπερ ἀπαράδεκτον ὁ χρόνος νὰ εἶναι ἀρνητικὸς ἀριθμός.

γ) $V_t=V_0-\gamma t$, ἢ $20=30-5t$ καὶ $t=2''$. Ἤτοι μετὰ 2″ θὰ ἔχῃ τὴν ταχύτητα τῶν 20 μέτρων.

δ) $S=V_0t-0{,}5\gamma t^2$, ἢ $S=30\cdot 2-5\cdot \mathbf{4}:\mathbf{2}$ ἐξ οὗ $S=50$ μ. εἶχε διανύσει ὅταν εἶχε τὴν ταχύτητα τῶν 20 μ.

ε) $V_0=30$μ.″, $V_1=25$μ.″, $V_2=20$μ.″, $V_3=15$ μ.″, $V_4=10$ μ.″, $V_5=5''$μ.

Διότι ἀφοῦ εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ πρώτου δευτερολέπτου εἶχε ταχύτητα 30″ μ. καὶ εἰς τὸ τέλος τοῦ δευτέρου ταχύτητα 20 μ″, αἱ δὲ ταχύτητες διαφέρουν πάντοτε εἰς τὴν ὁμαλῶς μεταβαλλομένην κίνησιν κατὰ τὴν σταθερὰν ποσότητο τῆς ἐπιταχύνσεως ἢ ἐπιβραδύνσεως ἀπὸ τῆς μιᾶς μονάδος τοῦ χρόνου εἰς τὴν ἄλλην, ἕπεται ὅτι εὐκόλως εὑρίσκονται αἱ ζητούμεναι καὶ προσδιορισθεῖσαι ὡς ἀνωτέρω ταχύτητες.

στ) $V_t = V_0 - \gamma t$, ἤτοι $0 = 30 - 5t$. (Διότι ὅταν τὸ κινητὸν θὰ ἠρεμήσῃ (θὰ σταθῇ) ἡ ταχύτης θὰ γίνῃ μηδὲν) καὶ $t = 6''$. Ἤτοι μετὰ ἕξη δευτερόλεπτα, ἀφ' ὅτου τὸ σῶμα εἶχε τὴν ταχύτητα τῶν 30 μ., θὰ ἠρεμήσῃ τοῦτο.

23) $V_t = V_0 - \gamma t$, $0 = 500 - \gamma \cdot 20$, $\gamma = 500 : 20 = 25$ μ. εἶναι ἡ ἐπιβράδυνσις.

24) $V_t = \sqrt{V_0^2 + 2\gamma S}$, $\frac{S}{20} = \sqrt{V_0^2 + 2\gamma S}$, $S^2 : 400 = V_0^2 + 2\gamma S$, $S^2 = 400 \cdot V_0^2 + 800\gamma S$.

Ἄρα $S^2 - 800\gamma S = 400V_0^2$ ἢ $S^2 - 800\gamma S - 400V_0^2 = 0$.

Καὶ $S = 4 = 400 + \sqrt{160000 + 400\,V_0^2}$ πρέπει νὰ εἶναι τὸ διάστημα τὸ διανυθὲν ὑπὸ τοῦ σώματος, ἵνα ἡ ταχύτης του κατὰ τὴν στιγμὴν ταύτην ἰσοῦται μὲ τὸ $\frac{1}{20}$ τοῦ διανυθέντος διαστήματος.

Σημείωσις. Ἡ τιμὴ $S = 400 - \sqrt{160000 + 400V_0^2}$ ἀπορρίπτεται, καθόσον ἀρνητικὸν διάστημα δὲν δύναται νὰ νοηθῇ.

III. *Κίνησις περιοδικὴ κυκλικὴ ἰσοταχής*

25) Ἐὰν τὸ ἔτος 360 ἡμέρας τότε τοῦτο ἔχει $31104000'' = T =$ περίοδος, ἤτοι ὁ χρόνος ὃν χρειάζεται ἡ γῆ διὰ νὰ κάμῃ μίαν πλήρη στροφὴν περὶ τοῦ ἄξονά της. Συμφώνως πρὸς θεωρίαν εἶναι $2\pi = \omega T$, $6{,}28 = \omega \cdot 31104000$. Ὅθεν $\omega = 0{,}0000002$ ἀκτίνια εἶναι ἡ γωνιώδης ταχύτης τῆς κινήσεως, Ὁμοίως $V = R\omega = 149500000 \times 0{,}0000002 = 29{,}9$ χλμ. εἶναι ἡ γραμμικὴ ταχύτης V ἀνὰ''.

26) β) $N = 5$ ἄρα $T = 0{,}2''$. Ὁμοίως $2\pi = \omega T$ καὶ $\omega = 2\pi : 0{,}2 = 31{,}4$ ἀκτίνια.

α) Ἄρα $V = R\omega = 5000 \cdot 31{,}4 = 157000$ ἑκ. εἶναι ἡ γραμμικὴ ταχύτης V.

γ) $S = Vt = 1200'' \cdot 157000 = 188400000$ ἑκατ. εἶναι τὸ διανυθὲν εἰς 20′ διάστημα ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου,

δ) $2\pi\alpha = 6{,}28 \cdot 5000 = 31400$ ἑκατοστά. Ἄρα ἀριθμὸς στροφῶν $n = 188400000 : 31400 = 6000$ στροφὰς ἐντὸς 20′.

27) α) $2\pi = \omega T$ καὶ $\omega = 6{,}28 : 0{,}5 = 12{,}56$ ἀκτίνια εἶναι ἡ γωνιώδης ταχύτης τοῦ κινητοῦ.

β) $V = \omega R = 12{,}56 \cdot 20 = 251{,}2$ ἑκατ'' ἡ γραμμικὴ ταχύτης τοῦ κινητοῦ.

γ) $N = 1 : 0{,}5 = 2$ στροφὰς θὰ κάμνῃ εἰς 1''

δ) $S = V \cdot t = 251{,}2 \cdot 15 = 3768$ ἑκ. εἶναι τὸ διανυόμενον διάστημα εἰς 15''.

β'. ΣΤΑΤΙΚΗ

Τά προβλήματα τῆς Στατικῆς λύονται εἴτε δι' ὑπολογισμῶν, ἐπὶ τῇ βάσει τῶν σχετικῶν τύπων, εἴτε διὰ γραφικῶν κατασκευῶν, εἴτε διὰ ὑπολογισμῶν καὶ γραφικῶν κατασκευῶν. Ἀναλόγως τοῦ εἴδους τοῦ προβλήματος καὶ τῆς ἐπιδιωκομένης ἀκριβείας ἐκλέγομεν ἑκάστοτε τὴν καταλληλοτέραν μέθοδον.

Διὰ τὰς γραφικὰς κατασκευὰς ἔχομεν ἀνάγκην κλίμακος δυνάμεων, ὅπου παριστῶμεν γραφικῶς μὲ ὡρισμένον μῆκος ἐπὶ τοῦ χάρτου μας (γραφικὸν μῆκος) καὶ ἀναλόγως τῆς ἐπιζητουμένης ἀκριβείας, ὡρισμένην ἔντασιν δυνάμεως. Ἐπίσης δυνατὸν νὰ λάβωμεν ἀνάγκην καὶ κλίμακος μηκῶν, ὅπου μὲ ὡρισμένον πάλιν μῆκος, ἐπὶ τοῦ χάρτου ἐπὶ τοῦ ὁποίου ἐργαζόμεθα (γραφικὸν μῆκος), παριστῶμεν ὡρισμένον φυσικὸν (πραγματικὸν) μῆκος ἀπὸ ἐκεῖνο ποὺ μᾶς δίδεται εἰς τὸ πρόβλημά μας.

Θὰ λύσωμεν ἀσκήσεις τινὰς δι' ἀμφοτέρων τῶν μεθόδων.

---

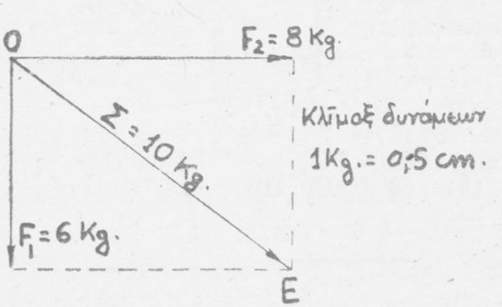
28) α) **Ἀριθμητικῶς**. Ἔχομεν

$$\Sigma = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2\, F_1\, F_2 \text{ συν } (F_1,\, F_2)} = \sqrt{36 + 64 + 2 \cdot 48 \text{ συν } 90^o}.$$

Ἀλλὰ συν $90^o = 0$, ἄρα $\Sigma = \sqrt{100} = 10$ Kg, (Kg.=χιλιόγρ).

β) **Εὕρεσις τῆς συνισταμένης δια γραφικῆς κατασκευῆς.**

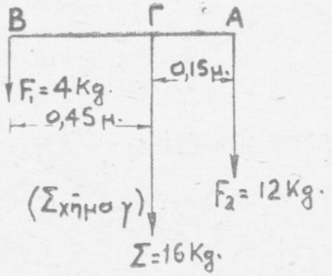
Κλῖμαξ δυνάμεων. Ἓν χιλιόγραμμον ν' ἀντιστοιχῇ εἰς μῆκος γραφικόν, ἔστω ἡμίσεως ἑκατοστοῦ. Προβαίνομεν ἤδη εἰς τὴν κατασκευὴν τοῦ παραλληλογράμμου τῶν συνιστωσῶν δυνάμεων F_1 καὶ F_2. Ἡ διαγώνιος τούτου ΟΕ μετρουμένη καὶ ἀναγομένη εἰς τὴν κλίμακά μας, μᾶς δίδει τὴν ἔντασιν τῆς αἰτουμένης συνισταμένης.

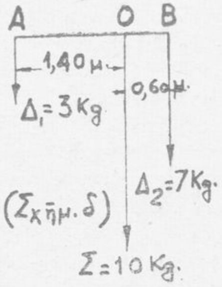


Πράγματι ἡ ΟΕ μετρουμένη δίδει μῆκος 5 ἑκ., ὅπερ ἀντιστοιχεῖ ὑπὸ τὴν ληφθεῖσαν κλίμακα, εἰς ἔντασιν δυνάμεως 10 χιλιογράμμων, ὅσον δηλαδὴ εὕρομεν καὶ ἀριθμητικῶς.

29) $F_2 : F_1 = ΒΓ : ΓΑ$ ἢ $2:4 = Β:Γ0,15$ καὶ $ΒΓ = 0,45$ μ (Σχ. γ).

Ὅθεν $\mathbf{AB} = \mathbf{A\Gamma} + \mathbf{\Gamma B} = \mathbf{0{,}15} + \mathbf{0{,}45} = \mathbf{0{,}6}$ μ. Καὶ $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \mathbf{16}$ ***Kg***.

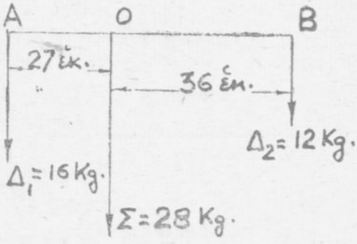




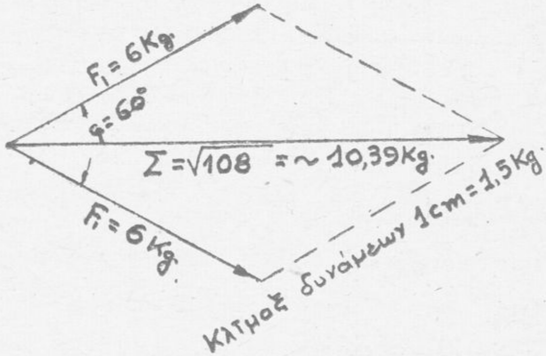
30) Ἔστωσαν Δ_1 καὶ Δ_2 αἱ ζητούμεναι συνιστῶσαι $\boldsymbol{\Sigma}$ ἡ δοθεῖσα συνισταμένη, **A** καὶ **B** ἀντιστοίχως τὰ σημεῖα ἐφαρμογῆς τῶν $\boldsymbol{\Delta}_1$ καὶ $\mathbf{\Delta}_2$ (Σχῆμα δ). Ἔχομεν $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{\Delta}_1 + \boldsymbol{\Delta}_2$, $\mathbf{AB} = 2$ μέτρα. Ὁμοίως $\mathbf{AB} = \mathbf{AO} + \mathrm{OB}$, $\mathbf{OB} = \mathbf{AB} - \mathbf{AO} = 2 - \mathbf{AO}$. Ὡσαύτως $\mathbf{\Delta}_2 : \boldsymbol{\Delta}_1 = \mathbf{A}\boldsymbol{O}$: $\mathbf{OB}$ ἢ $\mathbf{\Delta}_2 : \mathbf{\Delta}_1 = \mathbf{AO} : 2 - \mathrm{A}O$. Ἤτοι $\mathbf{7 : 3} = \mathrm{A}O : 2 - \mathbf{AO}$ ἢ $\mathbf{7(2 - A}O) = \mathbf{3AO}$ ἢ $\mathbf{14 - 7A}O = \mathbf{3AO}$ καὶ $\mathrm{A}O = \mathbf{14 : 10 = 1{,}4}$ μέτρα. Δηλαδὴ **1,40** μ. θὰ ἀπέχῃ τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς τῆς συνισταμένης ἀπὸ τὸ σημεῖον **A**. Ἄρα **OA** = 1,4 μ. καὶ **08 = 0,6** μ. (**Σημείωσις.** Ἐὰν μοιράσωμεν τὴν 10 εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν 3 καὶ 7 ἔχομεν τὴν $\boldsymbol{\Delta}_1$ ἴσην μὲ τὰ τρία δέκατα τοῦ 10, ἤτοι $\boldsymbol{\Delta}_1 = \mathbf{3{\cdot}10 : 10 = 3}$ ***Kg***. καὶ κατ᾽ ἀκολουθίαν τὴν $\mathbf{\Delta}_2 = \mathbf{7{\cdot}10 : 10 = 7}$ ***Kg***.)

31) Ἡ ἔντασις **Σ** τῆς συνισταμένης $\boldsymbol{\Delta}_1 + \Delta_2 = 16 + \mathbf{12} = \mathbf{28}$ Kg. Ὁμοίως $\mathbf{16 : 12} = \mathbf{63} - \boldsymbol{O}\mathbf{A} : \boldsymbol{O}\mathrm{A}$ **(1)** καὶ $\mathbf{O}\boldsymbol{A} = \mathbf{27}$ ἑκ. Ἤτοι 27 ἑκ. ἀπέχει τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς τῆς συνισταμένης ἀπὸ τοῦ **A**.

(Πρὸς εὕρεσιν τῆς σχέσεως (1) ἔχομεν $\mathbf{AB} = 63$ ἑκ., $\mathbf{OA} + O\mathrm{B} = \mathbf{AB} = \mathbf{63}$ ἑκ. Ἀλλὰ $\mathbf{16 : 12} = \mathbf{OB} : \boldsymbol{O}\mathbf{A}$. Καὶ ἐπειδὴ $\mathbf{OB} = \mathbf{63} - \mathbf{OA}$ ἔχομεν $\mathbf{16 : 12} = \mathbf{63} - O\mathrm{A} : \mathbf{OA}$).



32) α) Γραφικῶς

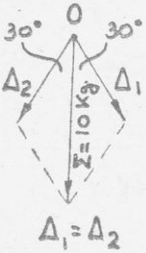


β) Ἀριθμητικῶς $\Sigma=\sqrt{F_1^2+F_2^2+2F_1\cdot F_2 \text{ συν } 60^\circ}$ (συν60°= =1 : 2=0,5). Ἄρα $\Sigma=\sqrt{72+72\cdot 0,5}=\sqrt{108}$ =περίπου 10,39 *Kg* εἶναι ἡ συνισταμένη των.

33) α) $\Sigma=\sqrt{\Delta_1^2+\Delta_2^2+2\Delta_1\Delta_2 \text{ συν } 105^\circ}$ = $\sqrt{625+1764-2100 \text{ συν } 75^\circ}$ (Διότι τόξα105° καὶ 75° εἶναι παραπληρωματικά, ἤτοι συν 105°=—συν 75°). Ἄρα $\Sigma=\sqrt{2389-2100\cdot 0,259}=$ $=\sqrt{1845,1}$ =42,9 χιλιόγραμμα, ἤτοι περίπου 43 χιλιόγ.

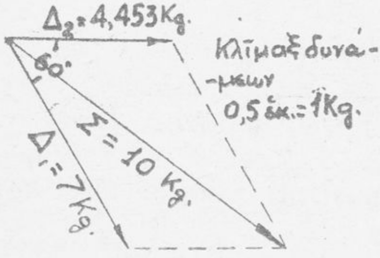
β) Δ_1 : ημ(Δ_2,Σ)=Δ_2: ημ(Δ_1,Σ) =Σ : ημ (Δ_1,Δ_2) ἢ Δ_1 : ημ(Δ_2,Σ)= =Σ : ημ 105° ἢ ἀντιστρέφοντας τοὺς ὅρους τῶν κλασμάτων ἔχομεν ημ(Δ_2,Σ) ; Δ_1=ημ 105° : Σ. ἢ ημ(Δ_2,Σ)=ημ 105°·Δ_1:Σ=ημ 75°·Δ_1:Σ(Διότι γωνίαι 105° καὶ 75° παραπληρωματικαὶ καὶ συνεπῶς τὸ ἡμίτονον τῆς μιᾶς ἰσοῦται μὲ τὸν ἡμίτονον τῆς ἄλλης). Ἡ ημ(Δ_2,Σ)=25·0,966:43 =περίπου 0,562. Καὶ λογ.ημ(Δ_2,Σ),=λογ0,562=$\bar{1}$,74974. Ἄρα γωνία (Δ_2,Σ), ἤτοι ἡ γωνία τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ δύναμις Δ_2 μετὰ τῆς συνισταμένης Σ εἶναι 34° 11′ 41″. Ἑπομένως γωνία (Δ_1,Σ)=105°— —34° 11′ 41″=70° 48′ 19″.

34) α) περίπτωσις. Ὅταν $\Delta_1 = \Delta_2$ καὶ γωνία $(\Delta_1, \Delta_2) = 60^0$



ἔχομεν $\Delta_1 : \eta\mu(\Delta_2, \Sigma) = \Delta_2 : \eta\mu(\Delta_1, \Sigma) = \Sigma : \eta\mu(\Delta_1, \Delta_2)$, ἢ $\Delta_1 : \eta\mu\, 30^0 = 10 : \eta\mu 60^0$, ἢ $\Delta_1 : 0{,}5 = 10 : 0{,}5\sqrt{5}$, (Διότι $\eta\mu\, 30^0 = 1 : 2 = 0{,}5$ καὶ $\eta\mu\, 60^0 = \sqrt{3} : 2 = 0.5\sqrt{3}$), ἢ $2\Delta_1 = 20 : \sqrt{3}$ καὶ $\Delta_1 =$ περίπου 5,7 *Kg*. Ἄρα καὶ $\Delta_2 = 5{,}7$ *Kg*. **Σημείωσις.** Τὸ ζητούμενον ἠδύνατο νὰ εὑρεθῇ καὶ ἐκ τοῦ τύπου $\Sigma = \sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + 2\Delta_1\Delta_2 \sigma\upsilon\nu\varphi} = \sqrt{2\Delta_1^2 + 2\Delta_1^2\, \sigma\upsilon\nu 60^0}$ κλπ., $(\varphi = 60^0)$.

β) **Περίπτωσις** $\Delta_1 = 7$ *Kg*. καὶ γωνία $(\Delta_1, \Delta_2) = 60^0 = \varphi$.



Ἔχομεν $\Sigma^2 = \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + 2\Delta_1\Delta_2\, \sigma\upsilon\nu\varphi$. Ἢ $100 = 49 + \Delta_2^2 + 14\Delta_2 \cdot 0{,}5$, ἢ $51 = \Delta_2^2 + 7\Delta_2$, ἢ $\Delta_2^2 + 7\Delta_2 - 51 = 0$, ἢ $\Delta_2 = -7 + \sqrt{49 + 204} : 2$, ἢ $\Delta_2 = -7 + \sqrt{253} : 2 = -7 + 15{,}905 : 2 = 4{,}453$ χιλγ. $= \Delta_2$.

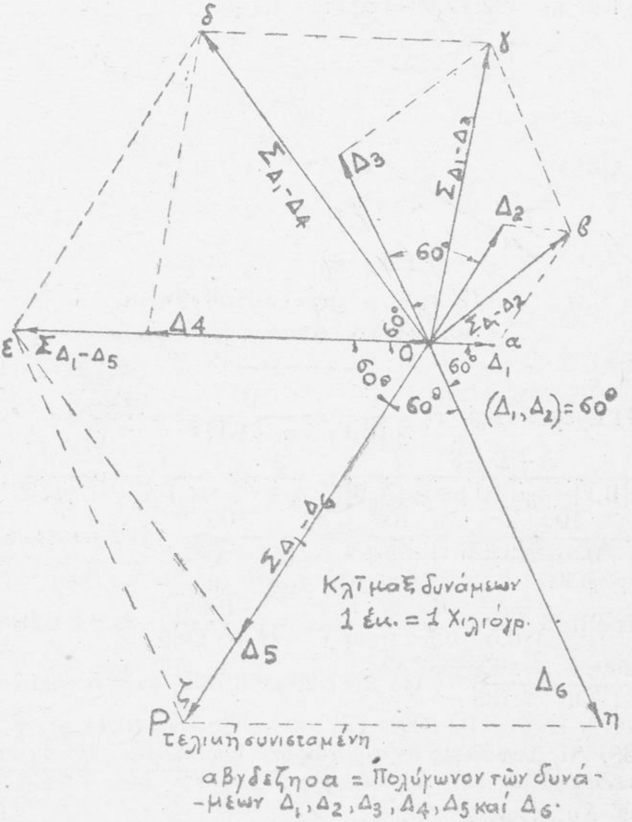
---

35) α) Γραφικῶς (Σχ. Σελὶς 11). Ἡ ΟΡ, ἤτοι ἡ $\Sigma_{\Delta_1 - \Delta_6}$ εὑρίσκεται ὡς ἡ τελικὴ συνισταμένη, ἥτις μετρουμένη ὑπὸ τὴν κλίμακα εἶναι 6,5 χιλιόγραμμα.

β) **Ἀλγεβρικῶς.** Ἡ ἄσκησις λύεται καὶ ἀλγεβρικῶς, ἀνὰ δύο λαμβανομένων τῶν δυνάμεων καὶ ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ (1) τύπου, ἤτοι τοῦ τύπ. $\Sigma = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\, \sigma\upsilon\nu\varphi}$ καὶ τοῦ (2) τύπου, ἤτοι $\frac{F_1}{\eta\mu\,(F_2, \Sigma)} = \frac{F_2}{\eta\mu\,(F_1, \Sigma)} = \frac{\Sigma}{\eta\mu\,(F_1, F_2)}$, χρησιμοποιουμένων διαδοχικῶς μέχρις εὑρέσεως τῆς τελικῆς συνισταμένης. Διὰ τοῦ τύπου (2) βοηθούμεθα πρὸς εὕρεσιν τῶν γωνιῶν τῶν σχηματιζομένων κάθε φορὰν ὑπὸ τῆς μερικῆς συνισταμένης καὶ τῆς ἑπομένης τῶν δοθεισῶν συνιστωσῶν δυνάμεων.

Δηλαδὴ διὰ τοῦ τύπου (1) ἀρχικῶς θὰ εὕρωμεν τὴν συνισταμένην $\Sigma_{\Delta_1 - \Delta_2}$ τῶν Δ_1 καὶ Δ_2, ἔπειτα διὰ τοῦ τύπου (2) θὰ εὕρωμεν τὴν γωνίαν τῆς Δ_2 μετὰ τῆς $\Sigma_{\Delta_1 - \Delta_2}$ καὶ ἥτις γωνία προστιθεμένη μὲ τὴν γωνίαν 60^0, τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ Δ_3 μετὰ τῆς Δ_2 θὰ μᾶς δώσῃ τὴν γωνίαν τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ $\Sigma_{\Delta_1 - \Delta_2}$ μετὰ τῆς Δ_3 καὶ ἥτις μᾶς χρειάζεται πρὸς εὕρεσιν διὰ τοῦ τύπου πάλιν (1) τῆς συνισταμένης $\Sigma_{\Delta_1 - \Delta_3}$ τῶν δυνάμεων Δ_3 καὶ $\Sigma_{\Delta_1 - \Delta_2}$ ἤτοι τῆς συνισταμένης τῶν δυνάμεων $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$, καὶ οὕτω καθεξῆς θὰ προχωρήσωμεν μέχρις εὑρέσεως τῆς τελικῆς ζητουμένης συνισταμένης $\Sigma_{\Delta_1 - \Delta_6}$

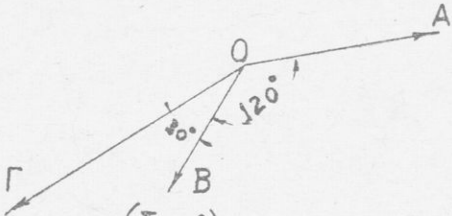
Ὥστε δυνάμεθα ἀντὶ τῶν δυνάμεων $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4, \Delta_5$ καὶ Δ_6, ὡς αὗται ἐδόθησαν, νὰ χρησιμοποιήσωμεν μίαν μόνον δύναμιν, τὴν συνισταμένην $\Sigma_{\Delta_1 - \Delta_6}$, ἐνεργοῦσαν μὲ τὴν εὑρεθεῖσαν ἔντασιν, ἐπὶ τῆς εὑρεθείσης διευθύνσεως καὶ μὲ τὸ αὐτὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς της O.



36) $\Sigma = \sqrt{36+64+2 \cdot 6 \cdot 8 \text{ συν } 45^{o}} = \sqrt{100+96 \cdot 05 \sqrt{2}}$ (διότι συν $45^{o} = \sqrt{2} : 2 = 0,5\sqrt{2}$). Καὶ μετὰ τὰς πράξεις εὑρίσκομεν ὅτι $\Sigma = \sqrt{167,68} = 12,95$ *Kg* ἡ συνισταμένη τῶν F_1 καὶ F_2. Ὡσαύτως ἔστω λ_{Δ_1} ἡ ἀπόστασις ἀπὸ τὸ κέντρον ροπῆς B τῆς δυνάμεως F_1, ἐπίσης

λ_{Δ_2} ἡ ἀπόστασις ἀπὸ τὸ κέντρον ῥοπῆς B τῆς δυνάμεως F_2. καὶ λ_Σ ἡ ἀπόστασις ἀπὸ τὸ κέντρον ῥοπῆς B τῆς συνισταμένης τῶν Σ.

Τότε ἔχομεν. Ῥοπὴ τῆς F_1, ἤτοι $P(F_1)=\lambda_{\Delta_1}\cdot 6=18$ καὶ $\lambda_{\Delta_1}==3$ μ. Ὁμοίως $P(F_2)=\lambda_{\Delta_2}8$, ἤτοι $\lambda_{\Delta_2}8=4$ καὶ $\lambda_{\Delta_2}=0{,}5$ μέτ. Ὅθεν ἡ ῥοπὴ τῆς Συνισταμένης τῶν Σ ὡς πρὸς τὸ B, ἤτοι ἡ $P[\Sigma]==P[F_1]+P[F_2]=F_1\cdot\lambda_{\Delta_1}+F_2\cdot\lambda_{\Delta_2}$ ἢ $P[\Sigma]=18+4=22$ χιλιογραμμόμετρα. Ὅθεν ἡ ῥοπὴ τῆς Σ, ἤτοι $P[\Sigma[=\lambda_\Sigma\cdot\Sigma=22=\lambda_\Sigma\cdot 12{,}95=22$ χ.λ.γ. Καὶ $\lambda_\Sigma=22:12{,}95=$ περίπου 1,7 μ.



(Σχ. ε)

Τὸ σχῆμα κατεσκευάσθη μὲ κλίμακα κατὰ προσέγγισιν.

---

37) Ἔχομεν (σχημ. ε] $\frac{A}{\eta\mu[B,\Gamma]}=\frac{B}{\eta\mu[A,\Gamma]}=\frac{\Gamma}{\eta\mu[A,B]}=$

$=\frac{A+B+\Gamma}{\eta\mu[B,\Gamma[+\eta\mu[A,\Gamma]+\eta\mu[A,B]}$ ἢ $\frac{A}{\eta\mu 30^0}=\frac{B}{\eta\mu\ 150^0}=\frac{\Gamma}{\eta\mu 120^0}=$

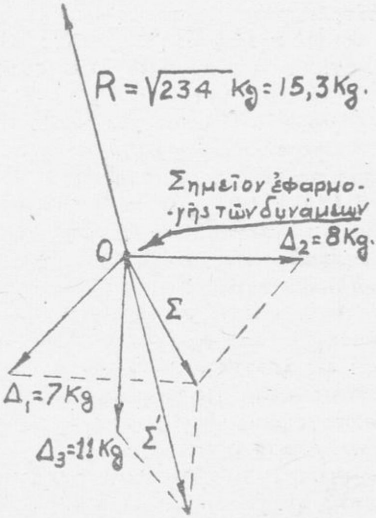
$=\frac{100}{0{,}5+0{,}5+0{,}5\sqrt{3}}\frac{100}{1+0{,}5\sqrt{3}}=\frac{100}{[2+\sqrt{3}]0{,}5}$, ($\sqrt{3}=$ περίπου 1,735)

ὁμοίως $\eta\mu 30^0=1:2=0{,}5=\eta\mu 150^0$, καὶ $\eta\mu\ 120^0=\sigma\upsilon\nu\ 60^0=\sqrt{3}:2=$ $=0{,}5\sqrt{3}]$, ἢ $\frac{A}{0{,}5}=\frac{B}{0{,}5}=\frac{\Gamma}{0{,}5\sqrt{3}}=\frac{100}{(2+\sqrt{3}):2}$, ἢ $2A=2B=\frac{2\Gamma}{\sqrt{3}}=$

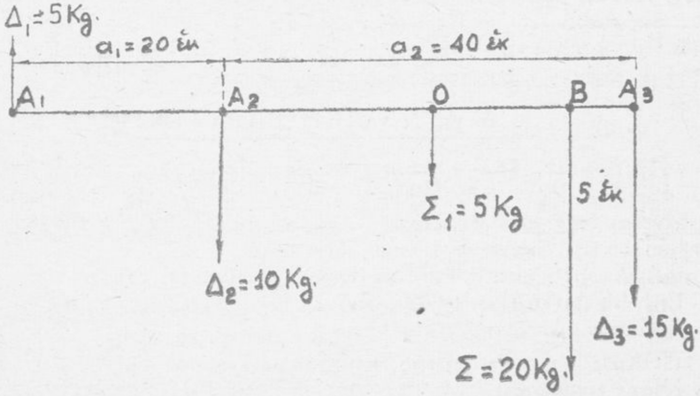
$=\frac{200}{2+1{,}735}=\frac{200}{3{,}735}$. Ἄρα $2A=200:3{,}735$ καὶ $A=26{,}78$ χιλιόγραμμα [χ.λ.γ.] $=B$. Ὅθεν $\Gamma=100-2\cdot 26{,}78=46{,}44$ χ.λ.γ.

38) Αἱ Δυνάμεις ἐν τῷ χώρῳ Εὑρίσκομεν τὴν συνισταμένην τῶν δυνάμεων Δ_1 καὶ Δ_2 καὶ ἔχομεν $\Sigma=\sqrt{7^2+8^2+2\cdot 7\cdot 8\sigma\upsilon\nu 90^0}==\sqrt{113}\ Kg.$, [συν $90^0=0$].

Ἤδη εὑρίσκομεν τὴν συνισταμένην τῆς δυνάμεως $\sqrt{113}$ Kg καὶ τῆς $\Delta_3=11$ Kg καὶ ἔχομεν ὅτι $\Sigma'=\sqrt{113+11^2}=\sqrt{234}$ Kg ἡ συνισταμένη τῶν δυνάμεων Δ_1, Δ_2 καὶ Δ_3. Ἀλλὰ διὰ νὰ ἰσορροπῇ τὸ σύστημα τῶν τριῶν δυνάμεων Δ_1, Δ_2 καὶ Δ_3 μετὰ τῆς R, ἕπεται ὅτι ἡ συνισταμένη τούτων Σ' ἐνεργεῖ ἐπὶ τῆς αὐτῆς κατευθύνσεως μετὰ τῆς R, εἶναι ἀντίρροπος πρὸς τὴν R καὶ ἔχει ἔντασιν ἴσην μὲ τὴν R. Ἤτοι $R=\sqrt{234}$K$g=$ περίπου 15,3 Kg(χιλιόγραμμα=χ.λ.γ)(Σχ. σελ. 13)



39) ***Κλῖμαξ δυνάμεων*** : 5 $Kg = 1$ ἑκατ. γραφικῶς. ***Κλῖμαξ μηκῶν*** : 20 ἑκ. πραγματικὸν μῆκος νὰ ἀντιστοιχῇ μὲ 3 ἑκατοστὰ ἐπὶ τοῦ χάρτου [γραφικὸν μῆκος].



Σημείωσις. Αἱ παράλληλοι δυνάμεις Δ_1, Δ_2 καὶ Δ_3 ἠδύνατο νὰ μὴν εἶναι καὶ κάθετοι ἐπὶ τὴν $A_1\,A_3$.

α) Ἡ συνισταμένη τῶν δυνάμεων τούτων Σ θὰ ἰσοῦται μὲ τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν συνιστωσῶν δυνάμεων. Ἤτοι $\Sigma = \Delta_2 + \Delta_3 - \Delta_1 = 10 + 15 - 5 = 20$ *Kg*. β) Τὰς δυνάμεις δυνάμεθα νὰ συνθέσωμεν ἀνὰ δύο καθ' οιανδήποτε σειράν. Ἄς συνθέσωμεν κατ' ἀρχὰς τὰς ἀντιρρόπους Δ_1 καὶ Δ_2 ὁπότε ἔχομεν $\Delta_2 : \Delta_1 = OA_1 : OA_2$ (1). Ἀλλὰ $OA_1 = \alpha_1 + OA_2$, ἀντικαθιστῶντες ὅθεν εἰς τὴν ἰσότητα (1) ἔχομεν, ὅτι $10 : 5 = 20 + OA_2 : OA_2$ ἢ $OA_2 \cdot 10 = 100 + 5 \cdot OA_2$ ἢ $10 \cdot OA_1 = 5 \cdot OA_2 = 100$, ἢ $5 \cdot OA_2 = 100$ καὶ $OA_2 = 20$ ἑκ. Ὥστε εἰς O εἶναι τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς τῆς συνισταμένης $\Sigma = 5$ Kg., τῶν ἀντιρρόπων δυνάμεων, Δ_1 καὶ Δ_2. γ) Ἄς συνθέσωμεν ἤδη τὰς δυνάμεις Σ_1 καὶ Δ_3, ὁπότε θὰ ἔχωμεν ὅτι $\Delta_3 : \Sigma_1 = BO : BA_3$ (2), ἀλλὰ $BO = OA_3 - BA_3$. Ἄρα ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν ἰσότητα (2) διὰ τῶν γνωστῶν λαμβάνομεν ὅτι $15 : 5 = OA_3 - BA_3 : BA_3 = 20 - BA_3 : BA_3$,(Διότι $OA_3 = 40$ἑκ$- OA_2 = 40$ἑκ. -20ἑκ.$=20$ἑκ.) ἢ $3 = 20 - BA_3 : BA_3$ ἢ $3 \cdot BA_3 = 20 - BA_3$, ἢ $4BA_3 = 20$ καὶ $BA_3 = 20 : 4 = 5$ ἑκ. Ὥστε τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς B τῆς συνισταμένης Σ τῶν δυνάμεων Σ_1 καὶ Δ_3, ἤτοι τῶν Δ_1, Δ_2 καὶ Δ_3 εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς A_1 A_3 καὶ εἰς ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ A_3 πέντε ἑκατοστῶν. **Σημείωσις.** Ἡ ἄσκησις αὕτη, ὡς εἴδομεν, ἐλύθη διὰ γραφικῆς κατασκευῆς καὶ διὰ ὑπολογισμοῦ. Οὐχ ἧττον ὅμως ἡ ἀκριβὴς γραφικὴ κατασκευὴ δὲν ἦτο καὶ ἀπαραίτητος.

40) Ἡ ἄσκησις θὰ λυθῇ διὰ τοῦ ταχυτέρου τρόπου. α) Ἐν πρώτοις ἡ ἔντασις τῆς συνισταμένης Σ ἰσοῦται μὲ τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν συνιστωσῶν δυνάμεων. Ὅθεν ἔχομεν: $\Sigma = 6 + 8 + 12 + 15 + 9 = 50$ Kg. **β)** Ἄς ληφθῇ ἤδη ὑπ' ὄψιν, ὅτι τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν γινομένων τῶν συνιστωσῶν δυνάμεων ἐπὶ τὰς ἀποστάσεις των ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου (ὡς συμβαίνει καὶ διὰ τὴν ροπὴν δυνάμεων ὡς πρὸς σταθερὸν σημεῖον) ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς συνισταμένης των ἐπὶ τὴν αἰτουμένην ἀπόστασιν x, Ἤτοι ἔχομεν ὅτι $50 \cdot x = 6 \cdot 8 + 8 \cdot 4 + 12 \cdot 10 + 15 \cdot 5 + 9 \cdot 20 = 48 + 32 + 120 + 75 + 180 = 455$ καὶ $x = 455 : 50 = 9,1$ μ. ἀπέχει ἡ συνισταμένη ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου.

γ', δ' ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΒΑΡΥΤΗΣ

41) $F = m\gamma$, ἤτοι $4,8 = m \cdot 1,2$) καὶ $m = 4$ χλγ. εἶναι ἡ μᾶζα.

42) $S = 0,5gt^2$, ἤτοι $490 = 0,5 \cdot 9,8t^2$, (τὸ g εἰς τὰς ἀσκήσεις λαμβάνεται ἴσον μὲ 9,8 μέτρα). Ἄρα $t^2 = 490 : 0,5 \cdot 9,8 = 490 : 4,9$ καὶ $t = \sqrt{100}'' = 10''$ ἔκανε νὰ διανύσῃ τὰ 490 μ.

43) $S = gt^2 : 2 = 9,8 \cdot 6,25 : 2 = 30,625$ μ. εἶναι τὸ βάθος,

44) $V = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9,8 \cdot 250} = 70$ μ. εἶναι ἡ ταχύτης.

45) $S = gt^2 : 2 = 9,8 \cdot 12^2 : 2 = 705,6$ μ. εἶναι τὸ ὕψος.

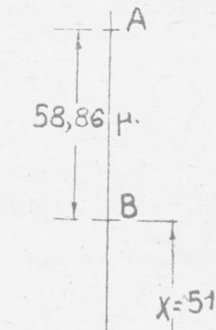
Ἤ Δι' Ἀριθμητικῆς προόδου. Γνωστὸν ἐκ τῆς Ἀλγέβρας ὅτι $K = (\alpha + \tau)\nu : 2$ καὶ $\tau = \alpha + (\nu - 1)\lambda$, ἢ $\tau = 4,9 + 11 \cdot 9,8 = 112,7$. Ἄρα τὸ ἄθροισμα K τῶν ὅρων τῆς ἀριθμητικῆς προόδου θὰ εἶναι $K = (4,9 + 112,7)12 : 2 = 705,6$ μ. εἶναι τὸ ὕψος.

46) α) $S = 0,5\, gt^2$,ἢ $144 = 0,5 \cdot 9,8t^2$ ἢ $t^2 = 144 : 4,9$ καὶ $t = \sqrt{29,38} = 5,4''$ θὰ κάμῃ τὸ πρῶτον σῶμα νὰ πέσῃ εἰς τὸ ἔδαφος. Ἐπίσης $25 = 0,5 \cdot 9,8t^2$ ἢ $t^2 = 25 : 4,9 = \sqrt{5,10} = 2,2''$ ἔκαμε ὀλιγώτερον νὰ πέσῃ τὸ δεύτερον σῶμα. Ἤτοι τὸ δεύτερον σῶμα διήνυσε τὸ ἴδιο διάστημα εἰς $5,4'' - 2,2'' = 3,2''$. Ἄρα ἔχομεν $S = V_0 t + 0,5 g t^2$, ἢ $144 = V_0 \cdot 3,2 + 0,5 \cdot 9,8 \cdot 10,24 = 3,2 V_0 + 9,8 \cdot 5,12 = 3,2 V_0 + 50,176$ ἢ $144 - 50,176 = 3,2 V_0$, ἢ $93,824 = 3,2 V_0$ καὶ $V_0 = 29,32$ ἢ περίπου μὲ 30 μ.'' ταχύτητα ἀφέθη τὸ δεύτερον σῶμα ἀπὸ τὸ ὕψος τῶν 119 μέτρων. (Διότι $144 - 25 = 119$ μετ.)

β) $V = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9,8 \cdot 144} = 53,16$ μέτρα θὰ εἶναι ἡ ταχύτης τοῦ πρώτου σώματος μόλις πέσῃ εἰς τὸ ἔδαφος. Ἡ δὲ ταχύτης τοῦ δευτέρου, ἅμα πέσῃ εἰς τὸ ἔδαφος, θὰ εἶναι $Vt = V_0 + gt = 30 + 9,8 \cdot 3,2 = 61,36$ μ.

47) α) $V = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9,8 \cdot 25} = 22,1''$μ. Ἦτοι μὲ $22,1''$ μ. ταχύτητα πρέπει ν' ἀφεθῇ τὸ δεύτερον σῶμα ἀπὸ τὰ 119 μ. ἵνα φθάσῃ συγχρόνως μὲ τὸ πρῶτον εἰς τὸ ἔδαφος. **β)** Ἐπίσης ἡ ταχύτης κατὰ τὴν στιγμὴν ποῦ θὰ φθάσῃ εἰς τὸ ἔδαφος τὸ δεύτερον σῶμα θὰ εἶναι $V_t = V_0 + gt = 22,1 + 9,8 \cdot 3,2 = 22,1 + 31,36 = 53,46$ μ. Ἦτοι ἴση μὲ τὴν ταχύτητα πτώσεως, κατὰ τὴν ἰδίαν στιγμήν, τοῦ πρώτου σώματος, ἡ ὁποία εὑρέθη ἤδη εἰς ἄσκησιν 46. (Ἡ παρουσιαζομένη μικρὴ διαφορὰ ἔγκειται εἰς τὴν χρησιμοποίησιν διαφόρων τύπων καὶ εἰς τὰ κατὰ προσέγγισιν ἐξαγόμενα τὰ ὁποῖα εὑρίσκομεν).

48) α) $S = \frac{1}{2} g t^2$ ἤτοι $t = \sqrt{\frac{2S}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 161}{9,8}} = \sqrt{32,83} =$ περίπου $5,7''$ χρειάζεται τὸ σῶμα νὰ διατρέξῃ τὸ μῆκος τοῦτο. **β)** $V = gt = 9,8 \cdot 5,7 = 56,16$ μ. εἶναι αἰτουμένη ταχύτης.

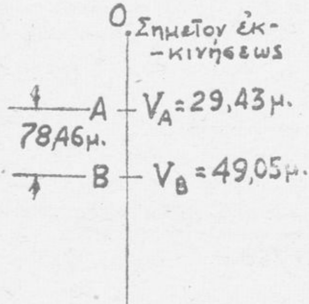


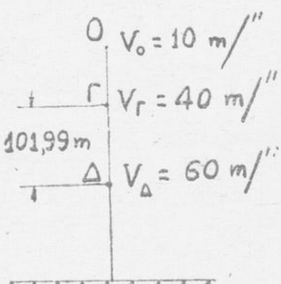
49) Ἐὰν ἡ πρώτη σφαῖρα φθάσῃ εἰς τὸν πυθμένα εἰς χρόνον t'' ἡ ἄλλη θὰ φθάσῃ εἰς $(t - 1,5)''$. Ἄρα ἔχομεν διὰ κάθε μίαν σφαῖραν: $S = AO = 58,86 + \chi = 0,5 t^2$, καὶ διὰ τὴν ἄλλην $\chi = 0,5 g (t - 1,5)^2$, ἢ ἔχομεν $\chi = 0,5 \cdot 9,8 \cdot t^2 - 58,86$ (1) διὰ τὴν μίαν σφαῖραν· καὶ $\chi = 0,5 \cdot 9,8 (t - 1,5)^2$ (2) διὰ τὴν ἄλλην. Ἀφοῦ τὰ πρῶτα μέλη τῶν ἰσοτήτων(1)καί(2)εἶναι ἴσα καὶ τὰ δεύτερα θὰ εἶναι ἴσα, ὁπότε ἔχομεν $4,9t^2 - 58,86 = 4,9(t-1,5)^2$ ἤ $4,9t^2 - 58,86 = 4,9(t^2 + 2,25 - 3t) = 4,9t^2 + 11,025 + 14,7t$ καὶ $t = 58,86 + 11,025 : 14,7 = 4,75''$. Ἄρα ὁ χρόνος πτώσεως τῆς ἀπὸ τοῦ Β ἀφεθείσης σφαίρας εἶναι $4,75'' - 1,5'' = 3,25''$. Ἤδη ἔχομεν $\chi = 0,5 \cdot 9,8\ (t-1,5)^2 = 4,9 \cdot 3,25^2 = 51,756$ μ. εἶναι τὸ ὕψος χ.

50) Εἰς τὴν ἄσκησιν ταύτην πρόκειται περὶ ὁμαλῶς μεταβαλλομένης (ἐπιταχυνομένης) κινήσεως ἄνευ ἀρχικῆς ταχύτητος, ἤτοι περὶ σώματος ἐκκινοῦντος ἐκ τῆς ἠρεμίας καὶ διὰ τὴν κίνησιν τοῦ ὁποίου ἐπέδρασε ἡ δύναμις F. Ὡς γνωρίζομεν ὅμως ἐκ τῆς δυναμικῆς, μιὰ δύναμις ἐπιδρῶσα ἐπὶ ἑνὸς σώματος προσδίδει εἰς αὐτὸ ὡρισμένην ἐπιτάχυνσιν ἐξαρτωμένην ἐκ τῆς μάζης τοῦ σώματος.

Ἡ παροῦσα ἄσκησις εἶναι ἄσκησις Κινητικῆς, Δυναμικῆς καὶ Βαρύτητος. **Ἐκ τῆς Κινητικῆς ἔχομεν** $S_t = 0,5\gamma t^2$ ἤ $600 = 0,5 \cdot 225\gamma$ καὶ $\gamma = 5,33$ μέτρα εἶναι ἡ ἐπιτάχυνσις. **Ὡσαύτως ἐκ τῆς δυναμικῆς ἔχομεν** $F = m \cdot \gamma$ καὶ $m = F : \gamma = 12 : 5,33 = 2,25$ χιλιόγραμμα εἶναι ἡ μᾶζα τοῦ σώματος. Ἐπίσης ἐκ τοῦ τύπου ποὺ μᾶς δίδει τὸ βάρος σώματος ἔχομεν $P = m \cdot g = 2,25 \cdot 9,8 = 22,03$ χιλιόγραμμα εἶναι τὸ βάρος τοῦ σώματος.

51) Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι, ὅσον χρόνον ἔκαμε ν' ἀνέλθῃ τὸ βλῆμα ἄλλον τόσον κάμνει καὶ νὰ κατέλθῃ, λαμβάνομεν τὸν χρόνον τῆς ἀνόδου ἴσον μὲ 6''. Συνεπῶς $t = V_0 : g$ καὶ $V_0 = tg = 6 \cdot 9,8 = 58,8$μ εἶναι ἡ ἀρχικὴ ταχύτης τοῦ βλήματος. Ἐπίσης $H = V_0^2 : 2g = 3457,44 : 19,6 = 176,4$ μ. εἶναι τὸ μέγιστον ὕψος εἰς ὅ ἔφθασε τὸ βλῆμα.





52) Ἔχομεν $V_B = V_A + gt$. Ὡσαύτως $V_B - V_A = 49,05 - 29,43 = 19,62$ μ. ταχύτητα προσέλαβε τὸ σῶμα ὅταν διήνυσε τὴν ἀπόστασιν ΑΒ. (Σχῆμα ἄνωθεν, ἀριστερά). Ἄρα εἶναι $V_t = gt$ καὶ $t = V_t : g = 19,62 : 9,8 = 2,002''$, ἤτοι περίπου 2'' ἔκανε τὸ σῶμα νὰ διανύσῃ τὴν ἀπόστασιν ΑΒ. Ἐπίσης ἔχομεν $AB = V_A t + 0,5gt^2 = 29,43 \cdot 2 + 4,9 \cdot 2^2 = 78,46$ μ. εἶναι ἡ ἀπόστασις ΑΒ.

Σημείωσις. Τὸ πρόβλημα ἠδύνατο, πιὸ νοητά, νὰ λυθῇ καὶ ἄλλως.

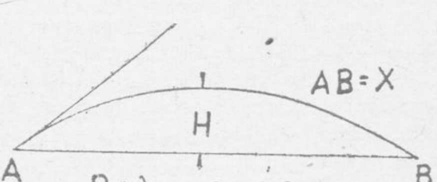
Οὕτω τὸ σῶμα ἐκκινήσαν ἐκ τοῦ Ο εἶχε εἰς Α τὴν ταχύτητα $V_A =$ $=29,43$, ἄρα $V_A = gt_A$ καὶ $t_A = V_A : g = 29,43:9,8 = 3,003''$ ἔκαμε τὸ σῶμα νὰ διανύσῃ τὴν ἀπόστοσιν ΟΑ. Ὁμοίως τὴν ἀπόστασιν ΟΒ τὴν διήνυσε εἰς χρόνον $t_B = 49,05:9,8 = 5,005''$. Κατὰ συνέπειαν τὴν ἀπόστασιν ΑΒ τὴν διήνυσε εἰς χρόνον $5,005'' - 3,003''$, ἤτοι περίπου $2''$. Ἀλλὰ καὶ διὰ τὸ διάστημα ΟΑ ἔχομεν $OA = 0,5gt^2_A = 0,5 \cdot 9,83^2 =$ $=44,10$ μέτρα (ἀντὶ $3,003''$ λαμβάνομεν $t_A = 3''$). Ὁμοίως τὸ διάστημα ΟΒ εἶναι $OB = 0,5gt^2_B = 0,5\ 9,8\ 5^2 = 122,5$ μ. Ἄρα $OB -$ $- OA = 122,50 - 44.10 = 78,4$ μ. $= AB$.

53) (Σχῆμα σελ. 16 δεξιὰ) Ἔχομεν $V_\Delta = V_O + gt$ ἤτοι $gt =$ $= V_\Delta - V_O$ καὶ $t = \frac{V_\Delta - V_O}{g} = \frac{60-10}{9,8} = 5,1''$ ἔκανε τὸ σῶμα νὰ φθάσῃ εἰς τὸ Δ. Ἐπίσης $V_\Gamma = V_o + gt'$, $gt' = V_\Gamma - V_o$ καὶ $t' =$ $= V_\Gamma - V_O : g = 40 - 10:9,8 = 3,06''$ ἔκανε τὸ σῶμα νὰ φθάσῃ εἰς τὸ Γ. Ἄρα τὴν ἀπόστασιν ΓΔ τὴν διήνυσε εἰς χρόνον $t_1 = t - t' = 5,1 -$ $- 3,06 = 2,04''$. Ὅθεν $\Gamma\Delta = V_\Gamma t_1 + 0,5gt^2_1 = 40 \cdot 2,04 + 4,9 \cdot 2,04^2 =$ $= 101,99$ μ. (Ἰδὲ Σχῆμα, σελὶς 16, δεξιά).

54) Ἔχομεν $S = 0,5\gamma t^2$ ἢ $2S = \gamma t^2$ καὶ $\gamma = 2S:t^2 = 2 \cdot 100:10^2 =$ $= 2$ μ. εἶναι ἡ ἐπιτάχυνσίς του. (10000 γραμ. $=10$ χιλιόγραμμα). Ἄρα ἔχομεν $F = m.\gamma$, $m = F:\gamma = 10:2 = 5$ χιλιογ. εἶναι ἡ μᾶζα τοῦ σώματος. Ἤτοι τὸ βάρος Ρ τοῦ σώματος εἶναι $P = m \cdot g = 5 \cdot 9,8 = 49$ χιλιόγραμμα, ἤτοι 49000 γραμμάρια.

55) Ἀξίωμα διαλυτικόν. Ὑποθέσωμεν ὅτι δὲν ὑφίσταται ἡ βαρύτης. Τότε αἱ σφαῖραι ὑπὸ τὴν ταχύτητα τῶν 3 μέτρων θὰ ἀπεμακρύνοντο τοῦ ἀρχικοῦ σημείου Α κατὰ διάστημα $S = vt = 300.4'' = 1200$ ἐκ. ἢ 12 μέτρα, μὲ τόπον σφαῖραν ἀκτῖνος 12 μέτρων. Ὁλόκληρον ἤδη τὸ σύστημα θεωροῦμεν ὑποκείμενον εἰς τὴν βαρύτητα· θὰ κατέλθῃ ἄρα κατὰ διάστημα $S = \frac{1}{2}gt = \frac{1}{2}980 \cdot 4^2 = 7840$ ἐκ. ἢ 78,40 μέτρα. Ἑπομένως ὁ τόπος εἶναι σφαῖρα ἀκτῖνος 12 μέτρων καὶ χαμηλότερον τὸ κέντρον της, ἀπὸ τοῦ ἀρχικοῦ σημείου Α, κατὰ 78,40 μέτρα.

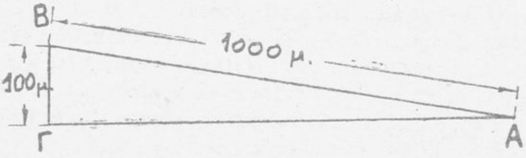
ε΄, στ΄ *Κεκλιμένον ἐπίπεδον καὶ βεληνεκές.*

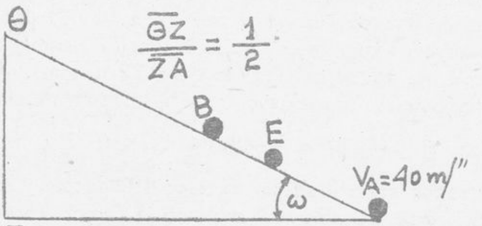


56) $H = V_0^2 \eta\mu 2\varphi : 2g = 50^2 \eta\mu.90^0 : 19,6 = 2500:19,6 = 127,5$ μ. εἶναι τὸ ὕψος εἰς τὸ ὁποῖον θὰ φθάσῃ τὸ βλῆμα. Ἐπίσης X=ημ.2φ·V_0^2:g=V_0^2:g, (Διότι ημ 90°=1). Ὥστε X=2500:9,8=255,1 μ. εἶναι ἡ αἰτουμένη ἀπόστασις AB.(Σχ. Σελ. 17).

57) Ἔχομεν S=0,5γt^2 ἀλλὰ γ=ημω.g=ημ 30°·9,8=0,5·9,8=4,9 μ., (ημ 30°=0,5) Ὥστε S=0,5·4,9·100=490:2=245 μ. εἶναι τὸ διάστημα ὅ διήνυσε τὸ κινητόν. Ἐπίσης V_{10}=γt=4,9·10=49 μέτρα ἀνὰ'' εἶναι ἡ ταχύτης του κατὰ τὸ δέκατον δευτερόλεπτον.

58) Ἔστω AB τὸ κεκλιμένον ἐπίπεδον (ὑποτείνουσα) ὅπερ ἔχει μῆκος 1000 μ., ΒΓ τὸ ὕψος αὐτοῦ ἐξ 100 μέτρων, ἤτοι ἡ ἀπόστασις τοῦ ὑψηλοτέρου του σημείου B ἀπὸ τοῦ ὀριζοντίου ἐπιπέδου ΑΓ. Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ἔχομεν. Ὅτι ημω=100:1000=1:10. Ὅθεν γ=g.ημω=9,8·0,1=0,98 μ. Ὁμοίως S=0,5γt^2=0,5·0,98·10^2=49 μέτρα εἶναι τὸ διανυόμενον διάστημα κατὰ τὸ δέκατον δευτερόλεπτον. Ἡ ταχύτης του ἤδη κατὰ τὸ δέκατον δευτερόλεπτον εἶναι V_{10}=γt=0,98·10=9,8 μ.





59) α) AB=V_0t—0,5γt^2,γ=ημω.g,εφω=0,5,(g=9,8 μ.) καὶ λογεφω=λογ1—λογ.2=0,30103=$\overline{1}$,69897, καὶ ἐκ τῶν λογαριθμικῶν πινάκων εὑρίσκομεν ὅτι ω=26°33′54″. Ἄρα λογημω=1,65051 καὶ ημω=0,4472. Συνεπῶς γ=9,8·0,4472=περίπου 4,38 μ Ὥστε AB=40·9—0,5·4,38·9^2=182,61 μ. εἶναι ἡ AB. (Λαμβάνομεν χρόνον 9'', διότι ὁ χρόνος τῆς ἀνόδου ἢ καθόδου εἶναι τό ἥμισυ τοῦ ὅλου ἀπαιτουμένου χρόνου ὅστις ἐδόθη 18''). β) V_B=V_0—γt=40—40=0 (διότι, ἀφοῦ ἡ σφαῖρα θὰ σταματήσῃ εἰς B, ἡ ταχύτης της V_B πρὸς στιγμὴν εἰς τὸ B θὰ γίνῃ μηδέν, ἤτοι τότε V_0=γt). γ) Κατὰ τὴν ἐπιστροφήν της εἰς A ἡ ταχύτης της θὰ εἶναι 40 μ'',ἤτοι ἴση μὲ τὴν ἀρχικήν. δ) V_E= V_0—γt'=40—4,38·2,5=29,05 μ. εἶναι ἡ ταχύτης της εἰς τὸ E καὶ κατὰ τὴν ἄνοδον καὶ κατὰ τὴν κάθοδον,

ζ΄ η΄ Φυγόκεντρος δύναμις —Ἐκκρεμές.

60) Ἡ λύσις θὰ γίνῃ διὰ τοῦ τύπου $F=m4\pi r^2:T^2$. Ἀφοῦ εἰς 60΄΄ κάμνει 90 στροφὰς εἰς 1΄΄ κάμνει 90.60=9:6=1,5 στροφάς, ἤτοι ἡ συχνότης N=1,5=15:10 Ἄρα περίοδος T=10:15=2:3. Ὅθεν $F=$ $=810\cdot4\cdot3,14^2\cdot80:\left(\frac{2}{3}\right)^2=5750119$ δῦναι εἶναι ἡ φυγόκεντρος δύναμις Ἐπίσης βάρος $P=810\cdot981$ δῦναι. Ἀλλά, ὅταν ἡ σφαῖρα στρεφομένη εὑρίσκεται εἰς τὸ ἀνώτατον σημεῖον τῆς περιφερείας, τὴν ὁποίαν διαγράφει, τότε τὸ βάρος της ἐνεργεῖ ἀρνητικῶς ἐλαττῶνον οὕτω τὴν τάσιν τοῦ νήματος περιστροφῆς. Ἄρα ἡ τάσις τοῦ νήματος τότε ἰσοῦται μὲ (5750119—810·981:981000 χιλιόγραμμα. **Σημείωσις** εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο ἐθεωρήθη ἡ ἔκφρασις βάρος ὅτι ἔχει τὴν ἔννοιαν τῆς μάζης τοῦ σώματος.

61) $F=mV^2:R=10\cdot640000:200=32000$ δῦναι ἢ $32000:981000=$ $=32;981=0,032$ χιλιόγραμμα (χλγ.) εἶναι ἡ φυγόκεντρος δύναμις. **Ἕτερος τρόπος.** $F=4\pi^2mr:T^2=4\cdot9,859\cdot10\cdot200:1,57^2=32000$ δῦναι **Σημείωσις.** ὁ χρόνος T μιᾶς πλήρους περιστροφῆς (περίοδος) εἶναι **1,57΄΄**, ὅστις εὑρίσκεται ἐὰν διαιρέσωμεν τὸ μῆκος τῆς περιφερείας διὰ τῆς ταχύτητος, ἤτοι 12,56:8=1,57΄΄)

62) $R=400$ έκ, $V=800$ έκ, $F=60$ χ.λ.γ.$=981000\cdot60=$ $=5886\cdot10^4$ δύνας. Ἀλλὰ καὶ $F=mV^2:R$, ἤτοι $5886\cdot10^4=640000\,m:$ $:400=1600m$, καὶ $m=5886\cdot10^2:16=36787,5$ γραμμάρια ἤτοι 36,79 χιλιογρ. εἶναι ἡ μᾶζα τοῦ κινητοῦ.

63) $T=2\pi\sqrt{\frac{\mu}{g}}$, ἢ $T^2=4\pi^2\frac{\mu}{g}$, $Tg^2=4\,\pi^2\,\mu$ καὶ $\mu=T^2g:4\pi^2=$ $=9\cdot9,81:4\cdot9,859=2,23$ μέτρα εἶναι τὸ μῆκος τοῦ ἁπλοῦ ἐκκρεμοῦς.

64) $T=2\pi\sqrt{\frac{\mu}{g}}=6,28\sqrt{\frac{60}{9,8}}=6,28\sqrt{6,12}=16,28\cdot2,47=$ $=15,59''$ εἶναι ὁ χρόνος μιᾶς πλήρους αἰωρήσεως. (Ἡ διάρκεια μιᾶς ἁπλῆς αἰωρήσεως$=15,59:2''=7,785''$).

65) Ἔστω μ. τὸ μῆκος τοῦ βραχυτέρου ἐκκρεμοῦς καὶ $\mu'=\mu+$ $+0,45$ τὸ μῆκος τοῦ μακροτέρου. Ἐὰν δὲ καὶ x εἶναι ἡ διάρκεια τῶν 5 αἰωρήσεων τοῦ πρώτου, ἡ ὁποία εἶναι ἡ αὐτὴ μὲ τὴν διάρκειαν τῶν 4 αἰωρήσεων τοῦ δευτέρου, θὰ ἔχωμεν ὡς διάρκειαν τῆς μιᾶς αἰωρήσεως τοῦ πρώτου $x:5$, καὶ τῆς μιᾶς αἰωρήσεως τοῦ ἄλλου $x:4$. Θὰ ἔχωμεν δὲ σύμφωνα μὲ τὸν τύπον τοῦ ἐκκρεμοῦς.

$\frac{x}{5}=\pi\sqrt{\frac{\mu}{g}}$ καὶ $\frac{x}{4}=\pi\sqrt{\frac{\mu'}{g}}$, ἐξ ὧν, διαιροῦντες κατὰ μέλη λαμβάνομεν $\frac{4}{5}=\sqrt{\frac{\mu}{\mu'}}$ ἢ $\mu:\mu'=16:25$, ἢ $25\,\mu=16\,(\mu+0,45)$, ἤτοι $\mu=0,8$ μετ. καὶ $\mu'=0,8+0,45=1,25$ μέτρα.

θ' Ἔργον, Κινητικὴ ἐνέργεια, ἰσχύς.

66) $W = P \cdot h = 200 \cdot 25 = 5000$ Kg/m (χιλιογραμμόμετρα, εἶναι τὸ ἔργον.

67) $W = P \cdot h = 30 \cdot 10 = 300$ Kg/m εἶναι τὸ ἔργον.

68) $W = P \cdot h = 60 \cdot 18 = 1080$ Kg/m εἶναι τὸ ἔργον.

69) $W = P \cdot h = 12000 \cdot 34 = 408000 Kg/m$ εἶναι τὸ παραγόμενον ἔργον εἰς μίαν ὥραν. Ὅθεν: $I = W : t = 408000 : 3600 = 113,3$ Kg/m ἀνὰ'' εἶναι ἡ ἰσχύς της, ἢ $113,3 : 75 = 1,5$ HP.

70) $S = 0,5 \gamma t^2$ ἢ $2S = \gamma t^2$ καὶ $\gamma = 2S : t^2 = 2 \cdot 100 : 4^2 = 12,5$ μ. εἶναι ἡ ἐπιτάχυνσις. Ὡσαύτως $P = m.g$ καὶ $m = P ; g = 4 : 9,8 =$ περίπου 0.408 Kg εἶναι ἡ μᾶζα τοῦ σώματος.

Ἄρα $F = m\gamma = 0,408 \cdot 12,5 = 5,1$ Kg εἶναι ἡ δύναμις. **Σημείωσις**. Ἡ ἄσκησις αὕτη περιλαμβάνει Κινητικήν, Δυναμικὴν καὶ Βαρύτητα.

71) Γνωστὸν ὅτι $P = mg$. Ὅθεν ἀντικαθιστῶντες ἔχομεν $68500 = m . 9,8$ καὶ $m = 68500 : 9,8 = 6989,7$ Kg εἶναι ἡ μᾶζα ἀτμαμάξης καὶ ἐπιβατῶν. Ὡσαύτως ἔχομεν $W = mv^2 : 2 = 6989,7 \cdot 7,7^2 : 2$ Kg/m εἶναι ἡ κινητικὴ ἐνέργεια (ἔργον) τῆς ἀτμαμάξης. (**Σημείωσις** 7,7 μ εἶναι ἡ ταχύτης τῆς ἀτμαμάξης ἀνὰ δευτερόλεπτον, ἀφοῦ εἰς τὴν **1** ὥραν εἶναι 28 χιλιόμετρα).

72) $W = m \, (V^2 - V_0^2) : 2 = 5 \, (20^2 - 10^2) : 2 = 5 \cdot 300 : 2 = 750$ Kg/m εἶναι τὸ ἔργον.

73) $W = P \cdot h = 10000 \cdot 10 = 10^5$ Kg/m εἶναι τὸ ἔργον.

74) $P = m.g$ ἢ $4,1 = m.9,8$ καὶ $m = 4,1 : 9,8$ $Kg =$ περίπου 0,42 Kg εἶναι ἡ μᾶζα τῆς ὀβίδος. Ἤδη $W = mV^2 : 2 = 0,42 \cdot 420^2 : 2 = 47044$ Kg/m εἶναι τὸ Ἔργον. Ἐπίσης $W = F \cdot S$ ἢ $37044 = F \cdot 1,5$ καὶ $F = 370 : 1,5 = 24696$ $Kg = 24,696$ τόννοι εἶναι ἡ ἀντίστασις τοῦ προχώματος.

75) $W = m . V^2 : 2 = 0,015 \cdot 650^2 : 2 = 3168,75$ Kg/m εἶναι τὸ ἔργον.

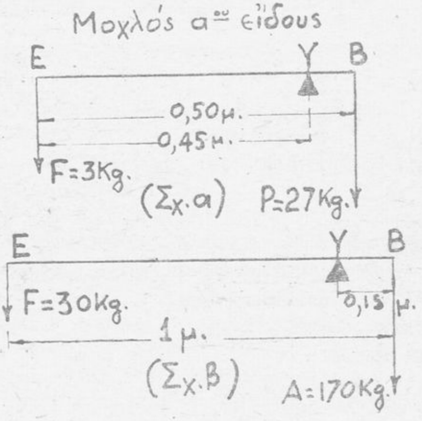
ι' Ἁπλαὶ μηχαναί.

76) Ζητεῖται ΕΥ. ἡ $EY = 0,50 - YB$ (Σχ. α, Σελ. 21). Ἔχομεν λοιπὸν $F : P = YB : EY$, ἢ $F : P = YB : (0,50 - YB)$ ἢ $F(0,50 - YB) = P - YB$, ἢ $3(0,50 - YB) = 27 \cdot YB$, ἢ $1,5 - 3YB - 27YB = 0$, ἢ $3YB + 27YB = 0,15$, ἢ $30 \cdot YB = 1,5$ καὶ $YB = 1,5 : 30$. Ἄρα $EY = 13,5 : 30 = 0,45$ μ. εἶναι τὸ μῆκος τοῦ μοχλοβραχίονος δυνάμεως.

77) $A : F = EY : YB$ ἢ $170 : F = 0,85 : 0,15$ ἢ $170 \cdot 015 = 0,85$ F καὶ $F = 170 \cdot 0,15 : 0,85 = 25,5 : 0,85 = 30$ Kg εἶναι αἰτουμένη δύναμις. (Σχῆμα 6 Σελ. 21).

78) $F = P : 2\nu = 360 : 2 \cdot 3 = 60$ χ.λ.γ ἡ αἰτουμένη δύναμις. **Σημείωσις**. 2ν εἶναι ἀριθμὸς τροχαλιῶν ἐλευθέρων καὶ παγίων.

79) $\Delta_2 = P : 8 = 400 : 8 = 50$ Kg. εἶναι τὸ ζητούμενον.



Β' ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΩΝ ΥΓΡΩΝ

80) P=F:E=1500:150=10 Kg/cm^2 (χιλιογ· ἀνὰ ἑκ. τετρ.) ἢ 10:1000=0,01 τόννοι ἀνὰ cm^2, ἢ 10·1000=10000 $gr/cm.^2$, ἢ $10 \cdot 9{,}81 \cdot 10^5$ *Baryc* ἀνὰ cm^2 εἶναι ἡ ἐπιφερομένη πίεσις.

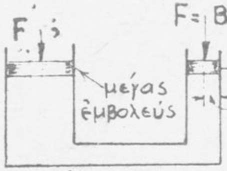
81) P=F:E, 150=F:200. Ὅπου F=200·150=3000 γραμμ. εἶναι ἡ ἐνεργοῦσα ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας δύναμις.

82) Οἱ 0,2 τόννοι=0,2·1000=200 Kg/cm^2. Γνωστὸν ὅτι P=F:E ἢ 200=1700:E καὶ E=1700:200=8,5 cm^2 (τετρ. ἑκ.) εἶναι ἡ πιεζομένη ἐπιφάνεια.

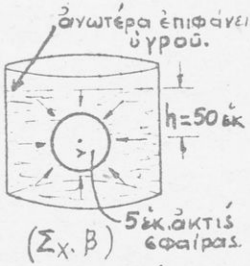
83) (Σχ. α Σελ.22) Τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως τοῦ μεγάλου ἐμβόλου εἶναι $\pi\alpha^2=3{,}14 \cdot 36=113{,}04$ τετ. ἑκ. Ὁμοίως τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως τοῦ μικροῦ ἐμβόλου εἶναι $\pi\rho^2=3{,}14 \cdot 9=28{,}26$ τετρ. ἑκ (ἔνθα α καὶ ρ αἱ ἀκτῖνες τῶν βάσεων τῶν ἐμβόλων). Ἄρα ἔχομεν B:B=F:F'=E:E', ἢ 450:F'=28,26:113,04 καὶ B'=F'=450·113,04:28,26=1800 Kg πρέπει νὰ θέσωμεν εἰς τὸν μεγάλον ἐμβολέα διὰ νὰ ἰσορροπήσῃ μετὰ τοῦ ἄλλου.

84) (Σχ. 6 Σελ. 22), $P=\omega h\varepsilon$, ἢ $P=4\pi\rho^2 h\varepsilon$. Ὅπου ω=πιεζομένη ἐπιφάνεια σφαίρας=$4\pi\rho^2$. Τὸ h=50ἑκ, τὸ ε=εἰδ. βάρος πετρελ.=0,9. Ἑπομένως ἔχομεν P=4·3,14·25·50·0,9=15915 γραμ. εἶναι ἡ πίεσις τὴν ὁποίαν ὑφίσταται ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας.

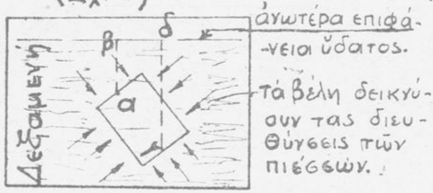
85) P=F:E, P=10000:100=100 γραμμάρια εἶναι ἡ πίεσις ἀνὰ cm^2.

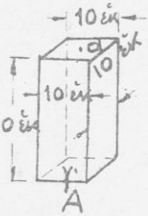


(Σχ. α)

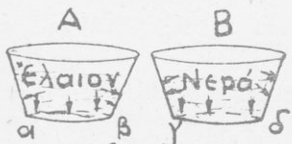


(Σχ. β)





(Σχ. γ)



(Σχ. δ)

(Σχ. ε)

Σημείωσις. Τὸ ὕδωρ, εἰς τὰς ἀσκήσεις Ὑδροστατικῆς, ὑποτίθεται ὅτι εἶναι ἀπεσταγμένον εἰς θερμοκρασίαν 4° Κελσίου.

86) F:F′=E:E′, F:500=3:7 καὶ F=3·500:7=214,2 Kg εἶναι τὸ βάρος.

87) (Σχ. γ.), **α)** P=ωhε=100·10=1000 γραμ. ($gr.$) εἶναι ἡ πίεσις τὴν ὁποίαν ὑφίσταται ἡ ἄνω ἐπιφάνεια τοῦ ὀρθογ. παραλληλεπιπέδου. **β)** P=100·20=2000 γραμ. εἶναι ἡ πίεσις ἐπὶ τῆς κάτω ἐπιφαν. τοῦ παραλ. (Τὸ ε διὰ τὸ ὕδωρ=1).

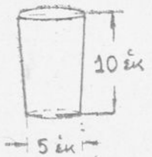
88) (Σχ. δ), **α)** ἡ ἀκτὶς 5 ἐκ., ἄρα ἔχομεν $P=\omega h\varepsilon=\pi\alpha^2 h\varepsilon=$ $=78{,}5\cdot 10=785$ γραμ εἶναι ἡ πίεσις ἐπὶ τοῦ πυθμένος γδ. **β)** $P=$ $=\omega h\varepsilon=78{,}5\cdot 10\cdot 0{,}9=785\cdot 0{,}9=706{,}5$ γραμμάρια εἶναι ἡ ἐπιφερομένη πίεσις ἐπὶ τοῦ πυθμένος **αβ**.

89) (Σχ. ε), 1) $P=\omega h\varepsilon$, $P=30\cdot 10\cdot 12=3600$ γραμ. εἶναι ἡ πίεσις ἥτις ἐξασκεῖται ἐπὶ τῆς ἐπιφ. **εζηθ**. 2) $P=\omega h\varepsilon$, P—100·100= =10000 γραμ. ἡ πίεσις ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας AB.

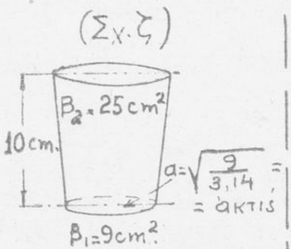
90) **α)** $P=\omega h\varepsilon=\pi\alpha^2 h$ ($\omega=\pi\alpha^2$ καὶ $\varepsilon=1$). Ἤτοι P=

=3,14·6,25·20=392,5 γραμ. ἢ 0,3925 Kg εἶναι ἡ ἐπιφερομένη πίεσις ἐπὶ τῆς κάτω ἐπιφανείας τοῦ δοχείου. β) Ἰσοῦται μὲ τὸ βάρος τοῦ περιεχομένου ὕδατος. Ἄρα ἔχομεν τὸν τύπον (1). Ἤτοι Β= $=\frac{1}{3}\pi\ (2,5^2+2,5\cdot5+5^2)\ 20=V=915,83$ γρ. εἶναι ἡ αἰτουμένη πίεσις. (Διότι ε=Β:V, ἤτοι: Β=εV, ἀλλὰ ε=1, ἄρα βάρος Β ὕδατος ἰσοῦται μὲ τὸν ὄγκον του V. Ὁ τύπος (1) μᾶς δίδει τὸν ὄγκον τοῦ κολούρου κώνου.) καὶ γ) Δέχονται ὅλα τὰ σημεῖα τὴν ἰδίαν πίεσιν.

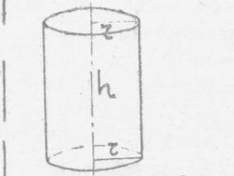
91) (Σχ. στ), α) $P=\omega h\varepsilon=15^2\cdot3,14\cdot3,75=2649,375$ τόνοι εἶναι ἡ ἐξασκουμένη πίεσις εἰς τὴν ἄνω βάσιν β) $P=\omega h\varepsilon=15^2\cdot3,14\cdot4,65=$ $=3285,225$ τόννοι εἶναι ἡ πίεσις ἐπὶ τῆς κάτω βάσεως αὐτοῦ· [$\omega=\pi\alpha^2=3,14\cdot15^2$ μ² (μ²=μέτρα τετραγωνικὰ)=706,5 μ²).



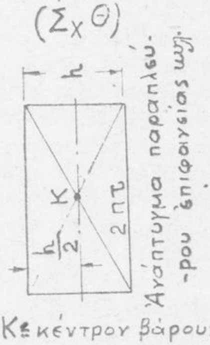
(Σχ. ζ)

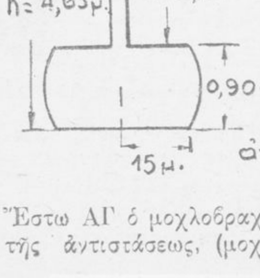


(Σχ. η)



(Σχ θ)





(Σχ. στ)
(Δὲν ἐτηρήθησαν αἱ ἀναλογίαι τῶν διαστάσεων)

92) Ἔστω ΑΓ ὁ μοχλοβραχίων τῆς δυνάμεως καὶ ΑΒ ὁ μοχλοβραχίων τῆς ἀντιστάσεως, (μοχλὸς β΄ εἴδους). Θὰ ἔχωμεν ΑΓ:ΑΒ=

$=F:F'$, $120:12=7:42$ ἢ $10=F:42$ καὶ $F=420$ χλγ. εἶναι ἡ δύναμις ἀντιστάσεως ἡ μεταδιβαζομένη εἰς τὸν μικρὸν ἐμβολέα, ἤτοι ἡ πίεσις ἡ ἐξασκουμένη ἐπὶ τοῦ ἐμβολέως τούτου. Ἤδη κατὰ τὴν ἀρχὴν τοῦ *Pascal* ἔχομεν ὅτι $F:F'=E:E'$ ἢ $420:F'=0{,}005.0{,}280$ ἢ $F':420=$ $=0{,}280:0{,}005$ καὶ $F'=420\cdot 56=23520$ *Kg*$=23{,}52$ τόννους εἶναι ἡ πίεσις τὴν ὁποίαν ἐξήσκησε τὸ πιεστήριον.

93) $\varepsilon=B:V=125{,}11:80=1{,}56$ εἶναι τὸ εἰδικόν του βάρος.

94) $\varepsilon=B:V$ καὶ $B=\varepsilon V=\pi\rho^2 \upsilon\varepsilon=3{,}14\cdot 0{,}284^2\cdot 3{,}397\cdot 7{,}8=1{,}250$ τόννοι εἶναι τὸ βάρος τοῦ κυλίνδρου.

95) $\varepsilon=B:V$. Ἄρα βάρος τοῦ σιδήρου$=B=\varepsilon V$, βάρος μολύβδου$=$ $=B=\varepsilon' V'$. Ἀφοῦ τὰ πρῶτα μέλη τῶν δύο ἰσοτήτων εἶναι ἴσα καὶ τὰ δεύτερα εἶναι ἴσα. Ὅθεν $\varepsilon V=\varepsilon' V'$ ἢ $7{,}8\cdot 565=11{,}3\cdot V'$. Καὶ $V'=$ $7{,}8\cdot 565:13{,}3=390$ cm^3 (cm^3=κυβικὰ ἑκατ.) εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ μολύβδου.

96) (Σχ. ζ Σελ. 23), $P=\omega h\varepsilon=6{,}25\cdot 10\cdot 1=62{,}5$ γραμ. εἶναι ἡ πίεσις τῆς κάτω βάσεως τοῦ ποτηρίου, ἐὰν τοῦτο εἶναι πλῆρες ὕδατος. Ἐὰν ἦτο πεπληρωμένον ἐλαίου ὁπότε $\varepsilon=0{,}91$ θὰ ἔχωμεν $P=$ $6{,}25\cdot 10\cdot 0{,}91=56{,}87$ γρ. θὰ ἦτο ἡ πίεσις.

97) $B=\varepsilon V=\varepsilon\pi\rho^2\upsilon=1{,}46\cdot 0{,}9=1{,}314$ *Kg*. ἐλαίου χωρεῖ τὸ δοχεῖον (υ=ὕψος δοχείου$=1{,}30$ μ., ρ=ἀκτὶς$=0{,}6$ μ.).

98) α) $A=V\varepsilon=15^3\cdot 0{,}9=3037{,}5$ γραμμάρια εἶναι ἡ ἄνωσις. β) Ἐπίσης τὸ βάρος τοῦ σώματος εἶναι $B=\varepsilon V=2\cdot 15^3=6750$ γραμ. (ζυγίζει τοῦτο ἐκτὸς τοῦ ἐλαίου). γ) Ἡ ἀνυψωτικὴ δύναμις $F=B-A$ $=6750-3037{,}5=3712{,}5$ γραμ.

99) Ἡ ἄνωσις ἰσοῦται μὲ τὸ βάρος τοῦ σώματος. Ἤτοι $A=B$. Ἐὰν τὸ σῶμα ἐπιπλέει τὸ βάρος του θὰ ἰσοῦται μὲ τὸ βάρος τοῦ ἐκτοπιζομένου τότε ὑγροῦ. Ἐὰν τὸ σῶμα ἦτο βυθισμένον ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ τότε τοῦτο θὰ ἐζύγιζε ὀλιγότερον ἀπὸ τὸ (πραγματικὸν) βάρος του. Ἤτοι θὰ ἐζύγιζε ὀλιγότερον κατὰ τὴν ἄνωσιν, ἤτοι ὀλιγότερον, κατὰ τὸ βάρος ὄγκου ὑγροῦ ἴσου πρὸς τὸν ὁλικὸν ὄγκον τοῦ σώματος, τουτέστι θὰ ἐζύγιζε ὀλιγότερον κατὰ ὅσον θὰ ἦτο τὸ βάρος τοῦ ἐκτοπιζομένου ὑπὸ ὁλοκλήρου τοῦ σώματος ὑγροῦ.

100) $B=\varepsilon V$, $B=8{,}9\cdot 267{,}9=2384{,}31$ γραμ. τὸ βάρος τῆς σφαίρας.

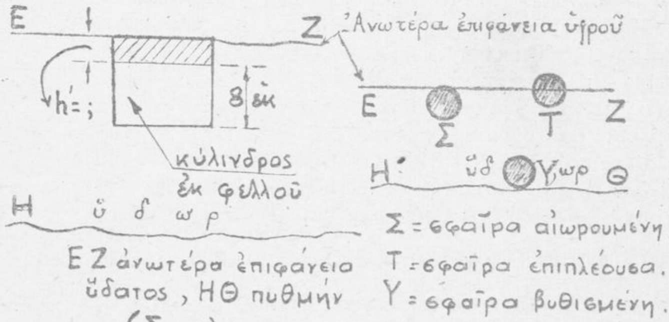
101) $B=V\varepsilon=500\cdot 2{,}9=1450$ χλγ. ζυγίζει τὸ μάρμαρον ἐντὸς τοῦ ὕδατος. Ὡσαύτως $A=V\varepsilon=500$ χιλιογ. εἶναι ἡ ἄνωσις. Ἄρα $F=$ $=B-A=1450-500=950$ χιλιογ. (χιλιόγραμμα) εἶναι ἡ αἰτουμένη ἀνυψωτικὴ δύναμις.

102) (Σχ. η Σελὶς 23). 1) $P=9\cdot 10\cdot 1=90$ γραμ. εἶναι ἡ πίεσις ἐπὶ τοῦ πυθμένος τοῦ ποτηρίου. 3) $B=\varepsilon V=\frac{1}{3}\pi(A^2+A\alpha+\alpha^2)\upsilon\cdot 13.$ (Τὰ A καὶ α ἀκτῖνες τῶν δύο βάσεων. Τὸ $\pi\alpha^2=25cm^2$, τὸ $\pi A^2=9cm^2$). Συνεπῶς $B=\frac{1}{3}3{,}14\left(\frac{25}{3{,}14}+\sqrt{\frac{25}{3{,}14}\cdot\frac{9}{3{,}14}}+\frac{9}{3{,}14}\right)10\cdot 13{,}6=\frac{21058}{9{,}42}=$ $=2221{,}29$ γραμ. εἶναι τὸ βάρος τοῦ ὑδραργύρου ὅπερ δύναται νὰ περιλάβῃ τὸ δοχεῖον. 2) Διὰ τὴν σχέσιν τῆς πιέσεως τοῦ πυθμένος τοῦ ποτηρίου πρὸς τὸ βάρος τοῦ ὕδατος, ἤτοι πρὸς τὴν συνολικὴν πίεσιν ἣν ὑφίσταται τὸ ποτήριον θὰ ἔχωμεν ὅτι, τὸ βάρος Β τοῦ ὕδατος τοῦ περιεχομένου εἰς τὸ ποτήριον εἶναι $B=\varepsilon V=1\cdot 2221{,}29:13=163{,}33$ γραμ. Ἄρα ἔχομεν $90:163{,}33=$περίπου $0{,}55$ εἶναι ἡ ζητουμένη σχέσις.

103) (Σχ. θ′ Σελ. 23). Ἐὰν διὰ x παραστήσωμεν τὴν πίεσιν ἐπὶ τοῦ πυθμένος, τότε κατὰ τὸ πρόβλημα ἡ ὁλικὴ πίεσις ἐπὶ τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας πρέπει νὰ εἶναι $2x$. Ὁπότε ἔχομεν ὅτι $x=\omega h\varepsilon=\pi r^2 h$ εἶναι ἡ πίεσις ἐπὶ τῆς κάτω ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου. $(\varepsilon=1)$ (Τὸ ἐμβαδὸν κυρτῆς ἐπιφανείας κυλίνδρου $=2\pi rh$).

Τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ὕδατος ε λαμβάνεται 1. Ὁμοίως $2x=\omega'\frac{h}{2}\varepsilon$ $(\frac{h}{2}$ εἶναι ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου βάρους τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας ἀπὸ τῆς ἀνωτέρας ἐπιφ. τοῦ ὕδατος καὶ $\omega'=$τὸ ἐμβαδὸν παραπλεύρου ἐπιφανείας κυλίνδρου). Ὥστε $2x=\omega'\frac{h}{2}\varepsilon=2\pi rh.\frac{h}{2}\varepsilon=\pi rh^2$ εἶναι ἡ πίεσις ἐπὶ τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας. Ὅθεν ἔχομεν τὴν σχέσιν $2x:x=\pi rh^2:\pi r^2 h=h:r$. Ἤτοι $h:r=2$. Ὥστε διὰ νὰ ὑπάρχῃ τὸ ζητούμενον πρέπει τὸ ὕψος τοῦ κυλίνδρου νὰ εἶναι διπλάσιον τῆς ἀκτῖνος βάσεώς του.

104) $P=\omega h\varepsilon=\pi r^2 h\varepsilon$ εἶναι ἡ ἐπὶ τοῦ πυθμένος πίεσις. $(\omega=\pi r^2=$ $=$ἐμβαδὸν κυκλικοῦ πυθμένος). Τὸ $2\pi rh$ δίδει τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυλινδρικῆς (παραπλεύρου) ἐπιφανείας. Ὅθεν $P=2\pi rh\frac{h}{2}\varepsilon=\pi rh^2\varepsilon$ εἶναι ἡ πίεσις ἡ ἐξασκουμένη ἐπὶ τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας. Ὥστε ἔχομεν $P:P'=\pi r^2 h\varepsilon:\pi rh^2\varepsilon=r:h$. Καὶ ἐπειδὴ πρέπει τὸ $P=P'$ ἕπεται ὅτι, βάσει τῶν δεδομένων τοῦ προβλήματος, θὰ εἶναι καὶ $r=h$.



(Σχ. ι)

105) (Σχ. ι) $A=V\cdot 1.g=$Ἄνωσις φελλοῦ εἰς δύνας. ($V=$ὄγκος φελλοῦ), $B=V\cdot 0{,}24g=$Βάρος σφαίρας εἰς δύνας, $F=A-B=Vg-V\cdot 0{,}24g=$

$=Vg(1-0,24)$ ἡ ἀνυψωτικὴ δύναμις, φυσικὰ καὶ αὐτὴ εἰς δύνας. Ἄρα δέον $Vg(1-0,24)=V_1\varepsilon g=mg=B'$ (1). Ὅπου ε=εἰδικὸν βάρος μολύβδου, V_1=ὄγκος μολύβδου, B'=βάρος μολύβδου, m=ἡ μᾶζα μολύβδου. Ἀλλὰ $V=\omega\cdot h=8\omega$ καὶ $V_1=\omega h'$. Ὅπου ω αἱ κυκλικαί, ἔστω, ἐπιφάνειαι τομῆς. Ἀντικαθιστῶντας ἤδη εἰς (1) τὰ V καὶ V_1 ἔχομεν ὅτι $\omega h(1-0,24)g=\omega h'\varepsilon g$ ἢ διαιροῦντες ἀμφότερα τὰ μέλη διὰ ω καὶ g λαμβάνομεν $8(1-0,24)=h'\varepsilon$ καὶ $h'=8(1-0,24):\varepsilon=$ $=8(1-0,24):11,3=$ περίπου 0,54 ἑκ., ἤτοι 5 χιλιοστὰ καὶ 0,4 τοῦ χιλιοστοῦ, θὰ εἶναι τὸ πάχος τοῦ μολύβδου. **Σημείωσις**. Τὰ A, B καὶ F ἐλήφθησαν ἀρχικῶς εἰς θεωρητικὰς μονάδας, (Δύναι)· ἠδυνάμεθα νὰ τὰ λάβωμεν καὶ χωρὶς τὴν ἐπιτάχυνσιν g (ἤτοι εἰς πρακτικὰς μονάδας) ὁπότε καὶ πάλιν εὐχερῶς θὰ καταλήγαμεν εἰς τὸ ζητούμενον,

106) $P=\omega h\varepsilon=100\cdot 300\cdot 0,8$ εἶναι ἡ πίεσις ἐπὶ τῆς κατωτέρας ἐπιφανείας. Ὁμοίως $P'=\omega h'\varepsilon=100\cdot 200\cdot 0,8$ εἶναι ἡ πίεσις ἐπὶ τῆς ἀνωτέρας ἐπιφανείας. Ὅθεν $P-P'=100\cdot 0.8(300-200)=80\cdot 100=8000$ γραμ. εἶναι ἡ διαφορὰ πιέσεων.

107) α) Ἔστω ω τετραγ. ἑκατοστὰ ἡ ἐπιφάνεια τομῆς τοῦ φελλοῦ. Τότε $B=V\cdot\varepsilon=\omega h 0,24$ γραμ. ζυγίζει ὁ φελλὸς ἐκτὸς τοῦ θαλασσίου ὕδατος (δηλαδὴ εἶναι τὸ βάρος του) καὶ ὅστις ἔχει ὄγκον V. Ἐπίσης $B'=V'\varepsilon'=\omega\, 0,5\cdot 8,83$ γραμ. εἶναι τὸ βάρος τοῦ χαλκοῦ· (δηλαδὴ ζυγίζει ἐκτὸς τοῦ θαλασσίου ὕδατος), καὶ V' ὁ ὄγκος του. Ἄρα φελλὸς καὶ χαλκὸς ζυγίζουν ἐκτὸς τοῦ θαλασσίου ὕδατος (ἔχουν βάρος) ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα B''. Ἤτοι $B+B'=B''=0,24\omega h+$ $+8,83\cdot\omega\cdot 0,5=\omega(0,24h+8,83\cdot 0,5)$ γραμμάρια. Ἀλλὰ ἀφοῦ τὸ σῶμα θὰ μείνῃ μετέωρον ἡ Ἄνωσις A ἰσοῦται μὲ τὸ βάρος B''. Ἤτοι $A=$ $=B''$. Ἀλλὰ ἄνωσις A ἰσοῦται μὲ τὸ βάρος θαλασσίου ὕδατος ὄγκου V'' ἴσου μὲ τὸν ὄγκον ἀμφοτέρων τῶν σωμάτων τούτων, ἤτοι $A=$ $V''.\varepsilon''=\omega\,(h+0,5).\varepsilon''=1,02\omega(0,5+h)$.

Ἄρα ἔχομεν $1,02\omega\,(0,5+h)=\omega\,(0,24h+8,83\cdot 0,5)$, διαιροῦντες διὰ ω λαμβάνομεν $1,02\,(0,5+h)=(0,24h+8,83\cdot 05)$, ἢ $0,51+1,02h=$ $=0,24h+4,415$, ἢ $0,78h=3,905$ καὶ $h=3,905:0,78=390,5:78=$ $=$περίπου 5,006 ἑκατοστὰ εἶναι τὸ αἰτούμενον ὕψος, ἵνα ὁ κύλινδρος αἰωρεῖται (παραμείνῃ μετέωρος).

β) Ἀφοῦ ὁ χάλκινος δίσκος μετὰ τοῦ φελλοῦ θὰ παύσῃ νὰ αἰωρῆται καὶ θὰ βυθισθῇ πρέπει νὰ γίνῃ $B''>A$. Ἤτοι θὰ εἶναι $\omega(0,24h+8,83\cdot 0,5)>1,02\omega(0,5+h)$ ἢ $\omega(0,24h+8,83\cdot h')>1,02\omega\cdot$ $\cdot(h'+h)$ (1) Καὶ λύοντες τὴν πρωτοβάθμιον ἀνισότητα (1) λαμβάνομεν ὅτι $0,24h+8,83h'>1,02h'+1,02h$, ἢ $8,83h'-1,02h'>1,02h-$ $-0,24h$, ἢ $7,81h'>0,78h$, ἢ $h<\dfrac{7,81}{0,78}h'$ ἢ $h<10\,h'$ ἢ $h'>0,1h$ ἢ $h':h>1:10$, ἤτοι πρέπει διὰ νὰ βυθισθῇ, ὁ λόγος τοῦ ὕψους τοῦ χαλκίνου δίσκου ὡς πρὸς τὸ ὕψος τοῦ ἐπικολλημένου δίσκου ἐκ φελλοῦ νὰ τηρῆται μεγαλύτερος τοῦ 0,1, **Σημείωσις.** Ἠδυνάμεθα, ὡς εἰς ἄσκησιν 102, νὰ λάβωμεν τὰ A, B, B', B'' συναρτήσει καὶ τῆς ἐπιταχύνσεως g (ἤτοι εἰς θεωρητικὰς μονάδας) ὁπότε καὶ πάλιν λόγῳ τῶν ἁπλοποιήσεων θὰ καταλήγαμεν εἰς τὰ ἴδια ἀποτελέσματα.

108) Ἐπὶ τοῦ προκειμένου ἡ ἄνωσις $A<B$. Ἔστω λοιπὸν A ἡ ἄνωσις, B τὸ βάρος τῆς σφαίρας φελλοῦ, V ὁ ὄγκος της, καὶ ε τὸ εἰδικόν της βάρος. Συνεπῶς ἔχομεν ὅτι $B=V\varepsilon g=0,24Vg$ δῦναι, εἶναι τὸ βάρος τῆς σφαίρας. Ὁμοίως $A=V\varepsilon' g=Vg$ δῦναι εἶναι ἡ ἄνωσις. (εἰδικὸν βάρος τοῦ ὕδατος $\varepsilon'=1$). Ἄρα $F=A-B=Vg-0,24Vg=Vg(1-0,24)$ δῦναι εἶναι ἡ ἀνυψωτικὴ δύναμις. Ἀλλὰ ἐκ τῆς δυναμικῆς γνωστὸν ὅτι, πᾶσα δύναμις F ἰσοῦται μὲ $m.\gamma=V\varepsilon\gamma$. Συνεπῶς καὶ ἐδῶ ἡ ἀνυψωτικὴ δύναμις F θὰ ἰσοῦται μὲ $m.\gamma$. Ἤτοι ἐκ τῆς δυναμικῆς ἔχομεν ὅτι $F=m\cdot\gamma=V\varepsilon\gamma=0,24V\gamma$. Ἄρα $0,24V\gamma=Vg(1-0,24)$ καὶ $\gamma=\delta(1-0,24):0,24$. Ὁμοίως ἐκ τῆς Κινητικῆς ἔχομεν ὅτι $S=\frac{1}{2}\gamma t^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{g(1-0,24)}{0,24}t^2=1000$ ἐκ,, ἢ $1000=\frac{0,76g}{0,48}t^2$ καὶ $t^2=$ $=\frac{480}{0,76g}$ καὶ $t=\sqrt{\frac{120}{0,19g}}''$ εἶναι ὁ ζητούμενος χρόνος. Ἐὰν ἤδη θέσωμεν ἀντὶ $g=980$ ἐκ. εὑρίσκομεν τὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν τοῦ χρόνου.

109) **α)** Θὰ βυθισθῇ. Θὰ αἰωρεῖτο. Θὰ ἐπέπλεε. **β)** Τὸ βάρος τοῦ σώματος ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ θὰ εἶναι $B-A$. Ἡ ἀνυψωτικὴ δύναμις F, ἤτοι ἡ δύναμις, ἥτις θ' ἀπαιτηθῇ διὰ τὴν ἀνύψωσίν του μέχρι τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὕδατος, θὰ εἶναι $F=B-A$, ἤτοι ὅσον εἶναι τὸ βάρος του ἐντὸς τοῦ ὕδατος. **γ)** Ἐδόθη ἡ ἀπάντησις ἀνωτέρω. ***Σημείωσις.*** Τὸ νὰ εἴπωμεν ὅτι τὸ εἰδικὸν βάρος σώματος εἶναι μεγαλύτερον τῆς μονάδος εἶναι ὡς νὰ λέγωμεν ὅτι εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ὕδατος.

110) **α)** $B=\varepsilon' V=\varepsilon\cdot 0,5V=B=0,5V$ γραμμάρια. Ἢ $B=$ $=0,5\cdot 10^3=1\cdot 0,5\cdot 10^3=500$ γραμμ. (10^3 ἐκ. κυβ. $=V$). Ὅπου B βάρος ξύλου, V ὁ ὄγκος του, ε τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ὕδατος$=1$, καὶ ε' τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ξύλου.

Διότι, διὰ νὰ εὑρίσκεται τὸ ἥμισυ τοῦ ξύλου ἐντὸς τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὕδατος, καὶ ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὴν θεωρίαν, συνάγομεν ὅτι τὸ ὁλικόν του βάρος B ἰσοῦται πρὸς τὸ βάρος τοῦ ἐκτοπιζομένου ὑγροῦ, ὅπερ ἐπὶ τοῦ προκειμένου ἔχει ὄγκον διαστάσεων $10\times10\times5=10^2\cdot5$ κυβικὰ ἑκατοστὰ καὶ ὅπερ ἀνταποκρίνεται εἰς βάρος ὕδατος $10^2.5$ γραμμαρίων. Ἢ ἄλλως πως, καταφαίνεται ὅτι τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ σώματος εἶναι 0,5. (Δεδομένου ὅτι διὰ τὸ ὕδωρ, ὁ ἀριθμὸς ὁ ἐκφράζων τὸν ὄγκον του εἰς κυβ. μέτρα, ἢ κυβ. παλάμας, ἢ κυβικὰ ἑκατοστά, ἐκφράζει καὶ τὸ βάρος του ἀντιστοίχως εἰς τόννους, χιλιόγραμμα ἢ γραμμάρια· διότι 1 κυβ. ἑκατ. διὰ ὕδωρ ἀπεστ. καὶ θερμ. 4^0 C. ἀντιστοιχεῖ εἰς βάρος 1 γραμ. ὕδατος, ἢ 1 κυβ. παλάμη εἰς βάρος 1 χιλγ., καὶ ὄγκος 1 κυβικοῦ μέτρου ἀντιστοιχεῖ εἰς βάρος 1 τόννου ὕδατος). Ὥστε τὸ βάρος B τοῦ ξύλου ἰσοῦται μὲ 500 γραμ.

β) Ἡ ἀνυψ. δύναμις $F=A-B$. Ἀλλὰ $A=V\varepsilon=10^3\cdot1=1000$ γραμμάρια. Ἄρα $F=1000-500=500$ γραμμάρια, εἶναι ἡ ἀνυψωτικὴ δύναμις F. (Τὸ A=ἄνωσις).

111) Ἐὰν V κυβ. ἑκατ. ὁ ὄγκος τοῦ σώματος καὶ $\varepsilon=3$ ἔχομεν $B=\varepsilon Vg=3Vg$ δῦναι τὸ βάρος τοῦ σώματος. Ἐπίσης $A=V\cdot\varepsilon' g=Vg$ δῦναι ἡ ἄνωσις ($\varepsilon'=1=$εἰδ. βάρος ὕδατος). Ἄρα $F=B-A=3Vg-Vg=$ $=2Vg$ εἶναι ἡ δύναμις ἥτις ἀπαιτεῖται νὰ ἀναβιβάσῃ τὸ σῶμα (ἀνυψωτικὴ δύναμις).

Ἀλλὰ καὶ ἐκ τῆς Κινητικῆς $F=m\gamma$ καὶ ἐπειδὴ $m=V\varepsilon$ ἔχομεν ὅτι $F=V\varepsilon\gamma=3V\gamma$. Ἄρα $3V\gamma=2Vg$, ἢ $3\gamma=2g$ καὶ $\gamma=2g:3$ Ὁμοίως γνωστὸν ὅτι $S=0{,}5\gamma t^2$ ἢ $S=0{,}5\cdot\frac{2g}{3}8^2=\frac{g}{3}64$ καὶ ἐὰν g ἔστω 9,8 μ., τότε $S=9{,}8\cdot 64:3=$περίπου 209,07 μέτρα εἶναι τὸ ζητούμενον βάθος.

112) α) $B=\varepsilon V$, $\varepsilon=3$, $V=2{,}5^3=15{,}625$ κυβικαὶ παλάμαι. Ἄρα $B=3\cdot 2{,}5^3=46{,}875$ χιλιόγραμμα εἶναι τὸ βάρος τοῦ σώματος. **β)** $A=\varepsilon' V$, $\varepsilon'=1$, $V=15{,}625$ κ.π. Ἄρα $A=15{,}625$ χλγ. εἶναι ἡ ἄνωσις **γ)** Δια νὰ εἶναι βυθισμένον τὸ σῶμα ἕπεται ὅτι $B>A$, ἄρα ἡ ἀνυψωτικὴ δύναμις θὰ ἰσοῦται μὲ $F=B-A=46{,}875-15{,}625=31{,}25$ χιλιόγραμμα, ἤτοι ὅσον ζυγίζει ἐντὸς τοῦ ὕδατος τὸ σῶμα.

113) Συμφώνως τῷ νόμῳ διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας εἶναι $mgh=$ $=0{,}5mV^2$ (1). Ἔνθα m ἡ μᾶζα τοῦ ὑγροῦ, ἥτις κατέρχεται ἐκ τῆς ὀπῆς εἰς τὴν μονάδα τοῦ χρόνου ($''$) ἀπὸ ὕψος h, τοῦ κέντρου τῆς ὀπῆς ἀπὸ τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ, καὶ ἥτις μᾶζα τοῦ ὑγροῦ ἐκρέουσα, ἔχει πλέον κινητικὴν ἐνέργειαν ἴσην μὲ $\frac{1}{2}mV^2$. Τὸ mgh εἶναι ἡ δυναμικὴ ἐνέργεια, ἤτοι ἡ ἐνέργεια ἥτις ἐγκλείεται ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ καὶ ἥτις μετατρέπεται εἰς κινητικὴν ἐνέργειαν, εὐθὺς ὡς ἀνοίξωμεν τὴν ὀπήν, τοῦ δοχείου τοῦ περιέχοντος τὸ ὑγρόν, καὶ ἀφήσωμεν οὕτω τὸ ὑγρὸν ἐλεύθερον νὰ ἐκρεύσῃ. (Ὅπως π. χ. ἡ πυρῖτις, τὸ συσπειρωμένον ἐλατήριον κλπ. ἐγκλείουν δυναμικὴν ἐνέργειαν). (Τὸ V παριστᾷ ἐδῶ, τὴν ταχύτητα ῥοῆς τοῦ ὑγροῦ) (Σχ. Σελ. 29, ἀριστερά).

Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν (1) ὡς πρὸς V λαμβάνομεν $V=\sqrt{2gh}$, ὅστις τύπος μᾶς δίδει τὴν ταχύτητα ἐκροῆς ὑγροῦ ἀπὸ ὀπὴν, εἰς τὴν μονάδα τοῦ χρόνου. Ἐὰν ἤδη πολλαπλασιάσωμεν τὴν ταχύτητα V ἐπὶ τὴν ἐπιφάνειαν E τῆς ὀπῆς λαμβάνομεν τὸν θεωρητικὸν ὄγκον (ποσότητα) τοῦ ἐκρέοντος ὑγροῦ εἰς τὴν μονάδα τοῦ χρόνου. Τὸ κέντρον τῆς ὀπῆς ἀπέχει, ὡς εἴπομεν, h ἀπὸ τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ. Ὥστε ἐὰν Q_Θ παραστήσωμεν τὸν θεωρητικὸν τοῦτον ἐκρέοντα ὄγκον ἐκ τῆς ὀπῆς. Θὰ ἔχωμεν : $Q_\Theta=V\cdot E$ (2). Ἀλλὰ εἰς τὴν πραγματικότητα, λόγῳ τῆς συστολῆς τοῦ ἐκρέοντος ὑγροῦ, καὶ ἥτις παρατηρεῖται πλησίον τῆς ὀπῆς, ἐκρέουν μόνον τὰ 0,62 τῆς θεωρητικῆς ποσότητος. Ἐὰν λοιπὸν διὰ Q_π παραστήμεν τὴν πρακτικὴν ποσότητα ἐκροῆς, ἤτοι τὸν πράγματι ἐκρέοντα ὄγκον, θὰ ἔχωμεν : $Q_\pi=V\cdot E\cdot 0{,}62$.(3). (Τὸ 0,62 εἶναι ὁ συντελεστὴς συστολῆς τοῦ ὕδατος). Εἰς τὸν τύπον $V=\sqrt{2gh}$ ὅλα μὲ τὰς αὐτὰς μονάδας (ἑκατοστὰ ἢ μέτρα ἢ παλάμας κλπ). Εἰς δὲ τοὺς τύπους (2) καὶ (3) ἀναλόγως· ἐὰν π. χ. τὸ E εἰς τετρ. ἑκατοστὰ τότε τὸ V εἰς ἑκατοστά ἐὰν τὸ E εἰς τετρ. παλάμας καὶ τὸ V εἰς παλάμας κ.ο.κ.

Προκειμένου περὶ ὕδατος, ὅπου ὁ ὄγκος μᾶς ἐκφράζει συγχρόνως καὶ τὸ βάρος, οἱ τύποι (2) καὶ (3) μᾶς δίδουν οἱ ἴδιοι, ἐκτὸς τοῦ ὄγκου, καὶ τὸ βάρος τοῦ ἐκρέοντος ὑγροῦ, ἐὰν ὅμως πρόκειται περὶ ἑτέρου ὑγροῦ τότε διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ βάρος πρέπει νὰ τοὺς πολλαπλασιάσωμεν, ὡς γνωστόν, ἐπὶ τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ἐκρέοντος ὑγροῦ. Κάθε ὑγρὸν ἔχει καὶ τὸν συντελεστὴν συστολῆς του.

Λύσις

α) $V=\sqrt{2gh}=\sqrt{2\cdot 98,1\cdot 14}=$περίπου 52,41'' δέκατα, ἤτοι παλάμαι ἀνὰ δευτερόλεπτον, εἶναι ἡ ταχύτης ἐκροῆς τοῦ ὕδατος. Ὁμοίως $Q_\Theta=V\cdot E=4,82$ κυβικὰ δέκατα (κυβικαὶ παλάμαι) ὕδατος ἐκρέουν εἰς 1'' ἀπὸ τὴν ὀπήν. Ἤτοι 4,82 χιλιόγραμμα ἀνὰ''. Ἄρα εἰς 60'' ἐκρέουν θεωρητικῶς $4,82\times 60=289,2$ κυβικαὶ παλάμαι (δέκατα κυβικὰ), ἤτοι 289,2 χιλιόγραμμα.

β) Ἡ πρακτικὴ ποσότης ἐκροῆς τοῦ ὕδατος εἰς 60'' εἶναι $289,2\cdot 0,62=179,36$ κυβ. δέκατα, ἤτοι 179,36 χιλιόγραμμα.

γ) Ἐὰν ἐπρόκειτο περὶ ἐλαίου θὰ εἴχομεν. $Q_\pi=V\cdot E\cdot 60\cdot 0,9$ (ὅπου 0,9 τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ἐλαίου). Ἤτοι $Q_\pi=161,42$ χιλιόγραμμα ἐλαίου, θὰ ἔρρεον ἐκ τῆς ὀπῆς ταύτης εἰς 60'', λαμβανομένου τοῦ ἰδίου συντελεστοῦ συστολῆς.

Γ' ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΩΝ ΑΕΡΙΩΝ

114) Ἔστω Χ τὸ μῆκος τῆς ὑδραργυρικῆς στήλης (σχῆμα α), τότε ἔχομεν. $X^2=8^2+76^2=5840$ ἑκ. καὶ $X=76,4$ ἑκ. εἶναι τὸ μῆκος.

(Σχ. α) 1ης Ἀσκήσεως Ἀεροστατικῆς.
Α = σημεῖον προβολῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας ὑδραργύρου

115) Κάθε 10,5 μ. ἀνόδου, κατέρχεται ἡ ὑδραργυρικὴ στήλη 1 χιλ, Συνεπῶς διὰ τὰ 2407 μ. θὰ κατέλθῃ 2407:10,5=περίπου 228,5 *mm* (χιλιοστά). Ὅθεν τὸ βαρόμετρον εἰς τὴν κορυφὴν θὰ δεικνύῃ

760—228,5=531,5 χιλ. ἢ 531,5:760 ἀτμοσφαίρας. Ἤτοι περίπου 0,7 ἀτμόσφαιραι εἶναι ἡ πίεσις εἰς κορυφὴν Ταϋγέτου.

116) Ζητεῖται ἡ Ἄνωσις, ἤτοι τὸ βάρος τοῦ ἐκτοπιζομένου ὑπὸ τοῦ ἀεροστάτου ὄγκου ἀέρος. Χάριν εὐκολίας ὑπολογισμῶν ὑποθέτομεν ὅτι ἡ μία κυβικὴ παλάμη ἀέρος, ζυγίζει 1,3 γραμ., ἀντὶ τοῦ κανονικοῦ 1,293 γραμμάρια, καὶ λέγομεν, ὅτι ἀφοῦ τὰ 0,001 κυβ. μέτ. ἀέρος ζυγίζουν 1,3 γραμ. τὰ 23.75 κυβ. μέτ. ἀέρος ζυγίζουν (1,3·23,75:0,001) γραμ, ἤτοι 30875 γραμ, ἢ 30,875 χιλγ.

117) **α)** Τὰ 3 κυβικὰ μέτρα ζυγίζουν 3000×1,293=3879 γραμ. **β)** Τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ὀξυγόνου εἶναι 1,429:1,293=1,104 (ἰδὲ θεωρίαν). **γ)** Τὸ βάρος 3 κυβ. μέτρων ὀξυγόνου εἶναι 1,429·3000=4287 γραμ.=4,287 χιλγ., ἢ ἄλλωσπως συναρτήσει τοῦ βάρους τοῦ ἀέρος ἔχομεν 3879·1,104 γραμ. (εὑρίσκεται μικρὰ διαφορὰ λόγῳ τῶν ἑκάστοτε ὑπολογισμῶν κατὰ προσέγγισιν).

118) Ὕψος στήλης ὑδραργύρου 76 ἑκ. ἀντιστοιχεῖ μὲ ὕψος στήλης ὕδατος 76·13,6=1033,6 ἑκ. ἢ 760·13,6 χιλιοστὰ ἢ 0,76·13,6 μέτρα.

119) Ὅταν ἡ ὑδραργυρικὴ στήλη δείχνει 0,76 μ. ἡ πίεσις εἶναι 1 ἀτμ ἀνὰ cm^2, ὅταν δείχνει 0,025 μ. τότε ἡ πίεσις εἶναι 0,025:0,76=0,03 ἀτμ. ἀνὰ cm^2.

120) **α)** Ἀφοῦ εἰς ἐπιφ. $1cm^2$ ἡ πίεσις εἶναι 1,033 Kg, εἰς ἐπιφάνειαν $15000cm^2$ ἡ πίεσις εἶναι 1,033·15000 Kg ἢ 15000·1,033:1,033 =15000 ἀτμόσφαιραι, εἶναι ἡ συνολικὴ πίεσις εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς θαλάσσης, τὴν ὁποίαν ὑφίσταται τὸ ἀνθρώπινον σῶμα.

β) Ὅταν κατέρχομαι 10 μ. ἡ πίεσις αὐξάνει 1 ἀτμ., συνεπῶς ὅταν κατέρχομαι 20 μ. ἡ πίεσις αὐξάνει 20:10=2 ἀτμ. ἀνὰ cm^2. Ἄρα ἡ συνολικὴ πίεσις τοῦ ἀνθρωπίνου σώματος, εἰς τὸ βάθος τοῦτο, εἶναι 15000×3=45000 ἀτμόσφαιραι, καὶ ἀνὰ τετραγωνικὸν ἑκατ. 3 ἀτμ., ἤτοι 2 ὑδάτιναι καὶ μία ἀερίνη.

121) Δέχεται πίεσιν 3700: (10+1 ἀτμ. ἀερίνη). Ἤτοι 370+1= =371 ἀτμ. ἀνὰ τετρ. ἑκατοστὸν τοῦ καλλωδίου.

122) 1 τετρ. παλάμη=100 τετρ. ἑκ. Ὅθεν ἀφοῦ εἰς 0,76 μ. στήλης ὑδραρ. ἀντιστοιχεῖ πίεσις 1 ἀτμ. εἰς 0,722 μ. στήλης ὑδραρ. ἀντιστοιχεῖ πίεσις 0,722:0,76=0,9 ἀτμ.ἀνὰ cm^2 (τετρ. ἑκ.) Συνεπῶς διὰ τὰ 100 τετ. ἑκ. ἡ πίεσις εἶναι 0,9·100=90 Ἀτμ., ἥτις εἶναι καὶ ἡ ὁλικὴ πίεσις ἐπὶ ἐπιφανείας 100 τετ. ἑκ., ὅταν τὸ βαρόμετρον δεικνύει 0,722 μ. Ὁμοίως σκεπτόμενοι εὑρίσκομεν ὅτι ἡ πίεσις ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἐπιφανείας καὶ ὑπὸ βαρομετρικὸν ὕψος 0,782 μ. εἶναι 102 ἀτμόσφαιραι. Ὅθεν ἡ διαφορὰ εἶναι 102—90=12 ἀτμόσφαιραι, τουτέστι 12×1033=12396 γραμμάρια, εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν πιέσεων τῶν δύο ἐπιφανειῶν εἰς τὰ δύο διαδοχικὰ βαρομετρικὰ ὕψη.

123) Ἔχομεν 30:10=3 ἀτμ.+1 ἀτμ. ἀερίνη=4 ἀτμ, ἀνὰ τετρ. ἑκατ., εἶναι ἡ ζητουμένη πίεσις.

124) Ἔχομεν P:P′=ε:ε′ ἢ 76:72=1,243:ε′ ἢ ε′=1,293·72:76=

$=1,225$ γραμ. ζυγίζει μιὰ κυβικὴ παλάμη ἀέρος εἰς θερμοκρασίαν 0^o K καὶ ὑπὸ πίεσιν 720 χιλ, στήλης ὑδραργύρου.

125) Θ' ἀνυψωθῇ δι' οὓς λόγους λεπτομερῶς ἐξετάσαμεν. **β)** Ἡ ἀνυψωτική της δύναμις F θὰ εἶναι $F=A-B=30-20=10$ χλγ.

126) $P=\omega he=100 \cdot 1000 \cdot 0,001293=129,3$ γραμ. βάρος ἀερίνης στήλης ἀέρος, εἶναι ἡ διαφορὰ πιέσεως μεταξὺ τῶν δύο ἴσων ἐπιφανειῶν. Ἄρα ἡ διαφορὰ πιέσεως μεταξὺ τῶν ἐπιφανειῶν τούτων, εὑρισκομένων ἐντὸς ἀερίου ὑδρογόνου, εἶναι $129,30 \cdot 0,08=10,344$ γραμμάρια.

127) 10 μετ.$=1000$ ἑκ., $V=100 \cdot 1000=10^5$ κυβ. ἑκ. ὁ ὄγκος τοῦ ὑδρογόνου. Ἄρα $B=10^5 \cdot 1,293 \cdot 0,08=10344$ γραμ., εἶναι τὸ ζητούμενον βάρος.

128) α) Τὸ βάρος μιᾶς κυβ. παλάμης ἀέρος ὑπὸ θερμ. 0^o K. καὶ πίεσιν κανονικὴν εἶναι 1,293 γρ., ὑπὸ τὴν αὐτὴν δὲ θερμοκρασίαν, καὶ πίεσιν 72 ἑκατ. στήλης ὑδραργύρου εἶναι $1,293 \cdot 72:76=1,226$ γραμ. **β)** Τὸ βάρος μιᾶς κυβ. παλ. ὀξυγόνου ὑπὸ θερμοκρασίαν 0^o K. καὶ πίεσιν 760 χιλ. στήλης ὑδραργύρου (ἤτοι 10,33 μ. στήλης ὕδατος) εἶναι $1,293 \cdot 1,1=1,429$ γραμμάρια. Τὸ βάρος ἤδη μιᾶς κυβ. παλ. ὀξυγόνου ὑπὸ Θερμ. 0^o K. καὶ πίεσιν 70 ἑκ. στήλης ὑδραργύρου εἶναι $1,226 \cdot 1,1= =1,349$ γραμ. **γ)** Ἐπίσης τὸ βάρος 1 κυβ. παλ. ὑδρογόνου ὑπὸ πίεσιν 76 ἑκ. στήλης ὑδρ. καὶ θερμοκρασίαν 0^o K. εἶναι $1,293 \cdot 0,08=0,10344$ γραμμάρια, ἢ ὑπὸ πίεσιν 720 χιλιοστῶν εἶναι $1,226 \cdot 0,08=0,09808$ γραμ. εἶναι τὸ βάρος τῆς μιᾶς κυβικῆς πάλάμης ὑδρογόνου ὑπὸ θερμ. 0^o K. καὶ πίεσιν 72 ἑκ. στήλης ὑδραργύρου.

Σημείωσις. Τὰ βάρη τῶν ἀερίων ὑδρογόνου καὶ ὀξυγόνου ἠδυνάμεθα νὰ τὰ εὕρωμεν καὶ ἀπ' εὐθείας, ἤτοι οὐχὶ συναρτήσει τοῦ βάρους τοῦ ἀέρος, ἀλλὰ συναρτήσει τῶν ὄγκων καὶ τῶν βαρῶν τῶν ἀερίων τούτων, ἐφ' ὅσον θὰ γνωρίζωμεν πόσον ζυγίζει ὡρισμένος ὄγκος ἑκάστου ἀερίου, καὶ ὡς εἰς παράδειγμά μας τῆς θεωρίας (διαφορὰ πιέσεων) ἀνεπτύξαμεν.

129) α) Ὄγκος σφαίρας$=\frac{4}{3}\pi\rho^3=\frac{4}{3} \cdot 3,14 \cdot 1^3=12,56:3=4,18$κυβ. μ.$=4180$ κυβ. παλ. εἶναι ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας. Τὸ βάρος ἤδη μιᾶς κυβικῆς παλάμης ἀέρος, ὑπὸ πίεσιν 700 χιλιοστῶν στήλης ὑδραργύρου, εἶναι 1,19. Ἄρα ἔχομεν ὅτι $4180 \cdot 1,19=$περίπου 4974 γραμ. θὰ ἐζύγιζε ἡ σφαῖρα ἐὰν ἦτο πλήρης ἀέρος, χωρὶς νὰ συμπεριλαμβάνεται τὸ βάρος τοῦ ἐλαστικοῦ, ὑπὸ πίεσιν 700 χιλ. στήλης ὑδραργ. καὶ θερμοκρασίαν 0^o K. ($\rho=$ἀκτὶς σφαίρας).

Πεπληρωμένη ἤδη ὑδρογόνου ζυγίζει ὑπὸ τὴν αὐτὴν θερμοκρασίαν καὶ πίεσιν καὶ ἄνευ τοῦ περιβλήματος, $4974 \cdot 0,08=$περίπου 397,9 γραμμάρια. Μετὰ τοῦ ἐλαστικοῦ περιβλήματος ζυγίζει $397,92+100=497,92$ γραμμάρια, ὅπερ εἶναι καὶ τὸ ὁλικὸν βάρος τῆς σφαίρας.

β) Ἡ ἄνωσις ἰσοῦται πρὸς τὸ βάρος τοῦ ἐκτοπιζομένου ὑπὸ τῆς σφαίρας ἀέρος, ἤτοι $A=4974$ γραμ.

γ) Ἡ ἀνυψωτικὴ δύναμις F ἰσοῦται. F=4974—497,92=4476,08 γραμμάρια.

130) P=ωhε=100·10·0,9=900 γραμ. εἶναι ἡ ἐπιφερομένη ὑπὸ τοῦ ἐλαίου πίεσις εἰς τὸν πυθμένα τοῦ δοχείου. Ἡ ὑπὸ τοῦ ἀέρος ἐξασκουμένη πίεσις εἶναι 100·1033=103300 γραμμάρια. Ἄρα ἡ ζητουμένη συνολικὴ πίεσις ἐπὶ τοῦ πυθμένος εἶναι 900+103300=104200 γραμμάρια, ἤτοι 104,2 χιλιόγραμμα.

131) **α)** Ἐφαρμόζοντες τὸν Νόμον *Mariotte — Boyle* ἔχομεν V′:V=P:P′ ἢ V′:52=760:742 καὶ V′=760·52:742=53,2 κυβ. ἑκ. θὰ γίνῃ ὁ ὄγκος ὑπὸ τὴν πίεσιν 742 χιλιοστῶν στήλης ὑδραρ. **β)** V′:52= =760:781 καὶ V′=760·52:781=50,6 κυβ.ἑκ. θὰ γίνῃ ὁ ὄγκος τοῦ ἀέρος ὑπὸ τὴν πίεσιν τῶν 781 χιλιοστῶν ὑδραργυρικῆς στήλης.

132) V′:V=P:P′ ἢ 50:100=P:700 καὶ P=350 χιλιοστά. Ἄρα ὑπὸ πίεσιν 350 χιλ. στήλης ὑδραργύρου θὰ ἔχῃ διπλάσιον ὄγκον.

133) P:P′=ε:ε′ ἢ 760:P′=0,8:3·0,8 ἢ P′:P=3·0,8:0,8 καὶ P′= =760·2,4:0,8=760·3=2280 χιλιοστά. Ὥστε ὑπὸ πίεσιν 2280 χιλ. στήλης ὑδραργύρου ἡ πυκνότης θὰ τριπλασιασθῇ. **Σημείωσις**. Τὸ ζητούμενον ἠδύνατο εὐκολώτατα νὰ εὑρεθῇ ἀμέσως καὶ ἄνευ πράξεων.

134) Δυνάμεθα ἀμέσως ν' ἀπαντήσωμεν ὅτι τότε θὰ ἔχῃ ὄγκον 25 κ. μ. **Σημείωσις**. Τοῦτο ἠδύνατο νὰ εὑρεθῇ καὶ βάσει τῶν σχέσεων V:V′=ε′:ε

135) V:V′=P′:P ἢ V′:10,5=71:76 καὶ V′=71·10,5:76=9,8 κ. π. θὰ εἶναι ὁ ζητούμενος ὄγκος.

136) P=ωhε=30·20=600 γραμ. εἶναι ἡ πίεσις τὴν ὁποίαν ὑφίσταται ὁ χάρτης ἀπὸ τὸ ὕδωρ.

Ὡσαύτως εἰς τὰ 76 ἑκ. στήλης ὑδραρ. ἀντιστοιχεῖ πίεσις ἀτμοσφαιρικὴ 1033 γρ. ἀνὰ cm^2 καὶ διὰ τὰ 71 ἑκ. στήλης ὑδρ. ἔχομεν πίεσιν 1033·71:76=965,03 γρ. ἀνὰ cm^2. Ὅθεν ἡ συνολικὴ ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις ἐπὶ ὁλοκλήρου τῆς διατομῆς εἶναι 965,03·30=28951 γραμμάρια. Συνεπῶς ἡ συνισταμένη τῶν δύο πιέσεων, ἤτοι τῆς ἀτμοσφαιρικῆς καὶ τῆς ἀντιθέτως δρώσης πιέσεως τοῦ ὕδατος, εἶναι ἡ πραγματικὴ πίεσις ἣν ὑφίσταται τοῦτο.

Ἤτοι 28951—900=28051 γραμ., ἢ 28,051 χιλιογ. εἶναι ἡ ζητουμένη πίεσις.

137) P=ωhε=100·20·0,5=1000 γραμ. εἶναι ἡ πίεσις ἐπὶ τοῦ πυθμένος ἀπὸ τὸ ὕδωρ.

Ἄρα ἡ συνολικὴ πίεσις ἐπὶ τοῦ πυθμένος τοῦ δοχείου θὰ ἰσοῦται μὲ 1000 γρ.+100·1033=104300 γραμ.

138) Ἡ πίεσις ἐπὶ τοῦ πυθμένος τοῦ τεποζύτου, ἀνὰ τετρ. ἑκατ. καὶ εἰς βαρομετρικὴν πίεσιν 70 ἑκ. καὶ θερμοκρασίαν 0° K. εἶναι 0,7:0,76=0,92 ἀτμόσφαιραι. Συνεπῶς ἐπὶ ὁλοκλήρου τοῦ πυθμένος, ἤτοι ἐπὶ ἐπιφανείας 100·50=5000 τετρ. ἑκατοστῶν ἐξασκεῖται πίεσις 0,92·5000=4600 ἀτμόσφαιραι, ὑπὸ θερμοκρασίαν 0° K. καὶ βαρομ. πίεσιν 70 ἑκ.

139) Τὸ 1 $μ^3$ ἀέρος θερμ. 0° K. καὶ πιέσεως 76 ἑκ. ζυγίζει 1293 γραμ. καὶ τὰ 650 $μ^3$ ὑπὸ τὴν ἰδίαν θερμοκρασίαν καὶ πίεσιν ζυγίζουν $650 \cdot 1293 = 840450$ γραμμάρια ὅπερ εἶναι καὶ τὸ βάρος τοῦ ἐκτοπιζομένου ὑπὸ τοῦ ἀεροστάτου ἀέρος, τουτέστιν ἡ Ἄνωσις. Ὡσαύτως γνωρίζομεν ὅτι τὸ βάρος τῶν ἐξαρτημάτων του εἶναι 620 χλγ. Ἐπίσης τὰ 650 m^3 ὑδρογόνου ζυγίζουν $0,09 \cdot 650 = 58,5$ χλγ. Ὅθεν τὸ συνολικὸν βάρος αὐτοῦ εἶναι $620 + 58,5 = 678,5$ χιλγ. Κατ' ἀκολουθίαν ἡ ἀνυψωτικὴ δύναμις τοῦ ἀεροστάτου εἶναι $84045 - 678,5 = 161,95$ χλγ.

140) $7,6 \cdot 8 \cdot 4 = 243,2$ $μ^3$ εἶναι ὁ ὄγκος τῆς αἰθούσης. Ὑπὸ πίεσιν 72 ἑκ. στήλης ὑδραργύρου καὶ θερμοκρασίαν 0^0 K. ἡ μία κυβικὴ παλάμη ἀέρος ζυγίζει $1,293 \cdot 72 : 76 = \mathbf{1,225}$ γραμ. ἢ 0,001225 χλγ. (Kg). Συνεπῶς τὰ 243,2 $μ^3$ ζυγίζουν $0,001225 \cdot 243,2 \cdot 1000 = 297,92$, ἢ περίπου 298 χλγ., ὑπὸ τὴν αὐτὴν θερμ. καὶ πίεσιν.

141) **α)** $20 \cdot 10 \cdot 10 = 2000$ κ. μ. εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ δωματίου. Ἤδη ἔχομεν ὅτι τὸ 0,001 κ. μ. ἀέρος ὑπὸ θερμοκρασίαν 0^0K καὶ πίεσιν κανονικὴν (76 ἑκ. στήλης ὑδρ.) ζυγίζει 1,293 γρ. Ἄρα τὰ 2000 κ. μ. ζυγίζουν $1,293 \cdot 2000 : 0,001 = 2586000$ γραμ. ἢ 2.586 *Kg*. Ὥστε 2586 χλγ. ἀέρος, τῆς ἀνωτέρω θερμοκρασίας καὶ πιέσεως, περιλαμβάνει τὸ δωμάτιον. **β)** Ὑπὸ τὴν ἡμίσειαν πίεσιν καὶ τὴν ἰδίαν θερμοκρασίαν, εὐκόλως συνάγεται ὅτι, ὁ περιλαμβανόμενος ἐν τῷ δωματίῳ τούτῳ ἀὴρ θὰ ζυγίζει τὸ ἥμισυ, ἤτοι $2586 : 2 = 1293$ χλγ., ἢ 1,293 τόννους.

142) **α)** Τὸ 0,001 $μ^3$ ὀξυγόνου εἰς θερμοκρασίαν 0^0K καὶ ὑπὸ κανονικὴν πίεσιν ζυγίζει 1,43 γραμ., συνεπῶς τὰ 2000 $μ^3$ ζυγίζουν 2860000 γραμ. ἢ 2860 χιλιόγραμμα, ὑπὸ τὴν αὐτὴν θερμοκρασίαν καὶ πίεσιν. **β)** Ὡς ἔχομεν εὕρει εἰς ἄλλην ἄσκησιν τὰ 2000 $μ^3$ ἀέρος ὑπὸ θερμ. 0^0K καὶ κανονικὴν πίεσιν ζυγίζουν 2586 Kg. Ἄρα διὰ νὰ εὕρωμεν πόσον ζυγίζουν τὰ 2000 $μ^3$ ὀξυγόνου θὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ 2586 ἐπὶ 1,104. (1.104 εἰδ. βάρος ὀξυγόνου). **Σημείωσις.** Εὑρίσκομεν μικρὰν διαφοράν, λόγῳ τῶν κατὰ προσέγγισιν ὑπολογισμῶν κατὰ τὴν εὕρεσιν τῶν εἰδικῶν βαρῶν κλπ.

Δ' ΑΚΟΥΣΤΙΚΗ

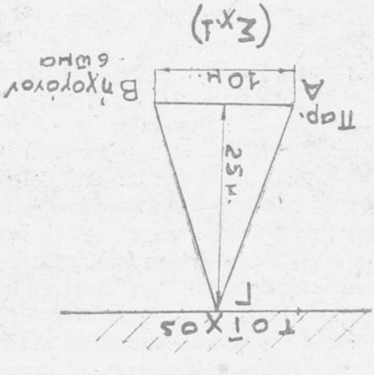
143) $S = Vt$ (κίνησις ἰσοταχής). $S = 10 \cdot 340 = 3400$ μ. ἦτο ἡ ἀπόστασις τοῦ πυροβόλου.

144) Ἐκ τοῦ τοίχου N ἔχομεν ὅτι $170 = 340t$ καὶ $t = 17 : 34 = 0,5''$ θὰ χρειασθοῦν διὰ νὰ ἀκούσῃ τὸν ἐξ ἀνακλάσεως ἦχον (ἠχὼ) ἐκ τοῦ τοίχου N. Ὡσαύτως $85 : 340 = 0,25''$ θὰ χρειασθῇ διὰ ν' ἀκούσῃ τὸν ἐξ ἀνακλάσεως ἦχον τὸν προερχόμενον ἐκ τοῦ τοίχου N'.

145) $S = Vt$ ἢ $10 = 340t$, $t = 10 : 340 =$ περίπου $0,029''$. Ἤτοι μετὰ $0.029''$ θ' ἀκούσῃ τὸν ἀπ' εὐθείας ἦχον (δηλαδὴ λόγῳ τοῦ ἐλαχίστου μεσολαβοῦντος χρόνου, θὰ τὸν ἀκούσῃ ὡς ἐὰν εὑρίσκετο εἰς B), (Σχ. 1 Σελ. 34)

Ὡσαύτως ἔχομεν ὅτι $25^2 + 5^2 = (BΓ)^2$ καὶ $BΓ = \sqrt{650}$ μ. Ὅθεν

$\sqrt{650}=340t$ καὶ $t=\sqrt{650}:340''$, θὰ κάνῃ νὰ μεταβῇ ὁ ἦχος ἀπὸ τὸ Β εἰς Γ, ἢ καὶ διὰ νὰ ἐπιστρέψῃ εἰς τὸ Α διὰ τοῦ Γ θὰχρειασθῇ $2\sqrt{650}:340''=0{,}14''$.



Ἄρα ὁ μεσολαβῶν χρόνος μεταξὺ τῆς λήψεως τοῦ ἀπ' εὐθείας ἤχου καὶ τοῦ ἐξ ἀνακλάσεως διὰ τοῦ Γ, εἶναι $0{,}14''-0{,}029''=0{,}111''$.

146) Ἐφαρμόζοντες τὸν τύπον $V=V_0\sqrt{\frac{1+\alpha\vartheta}{d}}$ ἔχομεν $V=$

$=331{,}4\sqrt{\frac{1+0{,}00367\cdot 20}{1}}=331{,}4\sqrt{1{,}0734}=331{,}4\cdot 1{,}036=343{,}33$ μ., εἶναι ἡ ζητουμένη ταχύτης τοῦ ἤχου ἀνὰ $1''$.

147) Ἐφαρμόζοντες τὸν τύπον $V=V_0\sqrt{\frac{1+\alpha\vartheta}{d}}$ ἔχομεν $340=$

$=331{,}4\sqrt{1+0{,}00367\cdot\vartheta}$, ἢ $340^2=331{,}4^2(1+0{,}00367\cdot\vartheta)$ ἢ $115600=$ $=109825{,}96+109825{,}96\cdot 0{,}00367\vartheta$, ἢ $5774{,}04=403{,}059\cdot\vartheta$ καὶ $\vartheta=$ $=5774{,}04:403{,}059=$περίπου $14{,}5^0$Κ. ἡ ζητουμένη θερμοκρασία.

148) Τὸ μῆκος κύματος εἶναι ἀντιστρόφως μὲν ἀνάλογον πρὸς τὴν συχνότητα τῆς παλμικῆς κινήσεως καὶ ἀνάλογον πρὸς τὴν ταχύτητα τοῦ ἤχου. Ἤτοι, ἐὰν διὰ μ παραστήσωμεν τὸ ζητούμενον μῆκος κύματος θὰ ἔχωμεν $\mu=335:45=7{,}44$ μέτρα, εἶναι τὸ ζητούμενον μῆκος κύματος.

149) Γνωστὸν ἐκ τῆς Φυσικῆς ὅτι, αἱ ταχύτητες τοῦ ἤχου εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι πρὸς τὰς τετραγωνικὰς ῥίζας τῶν πυκνοτήτων τῶν δύο ἀερίων (ἀέρος καὶ ὑδρογόνου), ἤτοι παριστῶντες διὰ x τὴν αἰτουμένην ταχύτητα ἔχωμεν $x:340=1:\sqrt{0{,}07}=$περίπου $1259{,}2$ μ. ἀνὰ $1''$, εἶναι ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου εἰς τὸ ὑδρογόνον.

150) Τὰ διανυόμενα ὑπὸ τοῦ ἤχου διαστήματα δίδονται ὑπὸ τοῦ τύπου $S=Vt$, δεδομένου ὅτι ἡ κίνησις εἶναι ἰσοταχής. Ἀλλὰ διὰ τὸν ἀέρα ὅπου $d=1$ ἔχομεν $V=V_0\sqrt{1+\alpha\vartheta}$ ἢ $V=331{,}4\sqrt{1+0{,}00367\cdot 20}=$

$=343{,}33$ μέτρα ἀνὰ $1''$. Συνεπῶς $S=343{,}33 \cdot 10=3433{,}3$ μέτρα, εἶναι ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τῶν δύο σημείων.

151) Διὰ τὴν χορδὴν ἐκ σιδήρου, ἐφαρμόζοντες τὸν τύπον τῶν παλλομένων χορδῶν ἔχομεν ὅτι $250=\frac{1}{2\rho L}\sqrt{\frac{B}{\pi d'}}$ Ἤδη διὰ τὴν ἑτέραν ἐκ χαλκοῦ ἔχομεν $240=\frac{1}{2\rho L}\sqrt{\frac{B}{\pi d}}$ καὶ διαιροῦντες κατὰ μέλη λαμβάνομεν $250:240=\frac{1}{2\rho L}\sqrt{\frac{B}{\pi d'}}:\frac{1}{2\rho L}\sqrt{\frac{B}{\pi d}}=\sqrt{\frac{8{,}87}{d'}}$ ἢ $25^2:24^2=8{,}87:d'$ ἢ $d':8{,}87=24^2:25^2$ καὶ $d'=24^2 \cdot 8{,}77:25^2=576 \cdot 8{,}87:625=8{,}17$ εἶναι, συμφώνως πρὸς τὰ δοθέντα, τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ σιδήρου.

Ε' ΘΕΡΜΟΤΗΣ

152) $50 \cdot \frac{5}{4}=\frac{250}{4}=62{,}5^0$ Κελσίου ἀντιστοιχοῦν οἱ 50^0 Ρεωμύρου. Ὁμοίως $25 \cdot 5:4=125:4=31{,}25^0$ Κελσίου ἀντιστοιχοῦν οἱ 25 Ρ. καὶ $-8 \cdot 5:4=-40:4=-10^0$ Κ ἀντιστοιχοῦν οἱ (-8^0) Ρ.

153) Οἱ 100^0Κ, ἀντιστοιχοῦν εἰς 180^0 Φαρενάϊτ, οἱ 357Κ. ἀντιστοιχοῦν εἰς $357 \cdot 180:100=642{,}6^0$Φ. Ἄρα $642{,}6+32=674{,}6^0$ Φ. θὰ δεικνύῃ τὸ θερμόμετρον κατὰ τὴν ζέσιν τοῦ ὑδραργύρου. Ἐπίσης οἱ 40^0 Κ. ἀντιστοιχοῦν εἰς $180 \cdot 40:100=72$Φ. Ἄρα $-72+32=-40^0$Φαρενάϊτ θὰ δεικνύῃ τὸ θερμόμετρον κατὰ τὴν πῆξιν τοῦ ὑδραργύρου. **Σημείωσις.** Τὰ ζητούμενα εὑρίσκοντο ταχύτερον διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τῶν ἀναφερθέντων εἰς τὴν θεωρίαν τύπων, ἤτοι $\left(\frac{9}{5}357^0\,K+32\right)$ βαθμοὶ Φαρενάϊτ, χρειάζονται διὰ τὴν ζέσιν τοῦ ὑδραργύρου, καὶ $\left(\frac{9}{5}.(-40)\,K+32\right)$ βαθμοὶ Φαρενάϊτ χρειάζονται διὰ τὴν πῆξιν αὐτοῦ.

154) Ὁ 1^0 Κ. ἀντιστοιχεῖ εἰς 9:5 Φαρ., οἱ 10^0 Κ. ἀντιστοιχοῦν εἰς $90:5=18^0$ Φ., τοὺς ὁποίους θὰ δεικνύῃ τὸ θερμόμετρον τοῦτο, ὅταν τὸ τοῦ Κελσίου δεικνύει 10^0. Ὁμοίως $9 \cdot 50:5=90^0$Φ. ἀντιστοιχοῦν οἱ 50^0Κ. Ἄρα τὸ θερμόμετρον Φαρενάϊτ θὰ δεικνύῃ $90+32=122^0$. **Σημείωσις.** Ταχύτερον εὑρίσκοντο τὰ ζητούμενα διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τῶν γνωστῶν τύπων οἵτινες μᾶς δίδουν τὰς σχέσεις μεταξὺ βαθμῶν Κελσίου καὶ Φαρενάϊτ (ὡς εἰς ἄσκησιν 153).

155) $M_{25}=M_0(1+\lambda\vartheta)$, Ἄρα $M_{25}=10^7(1+0{,}0000115 \cdot 25)=$ $=10002875$ ἑκ. μῆκος, ἀποκτᾷ ἡ ῥάβδος ἐὰν θερμανθῇ ἀπὸ 0^0 εἰς $+25$.

156) $M_{200}=200\,(1+0{,}0000122 \cdot 200)=200{,}488$ ἑκ. εἶναι τὸ ὁλικὸν μῆκος τῆς ῥάβδου εἰς θερμ. 200^0, Ἄρα ἡ αὔξησις τοῦ μήκους αὐτῆς εἶναι $200{,}488-200=0{,}488$ ἑκ. (ἰδὲ σημείωσιν ἀσκήσεως 57).

157) $M_{200}=200(1+0{,}0000122\cdot 200)=200{,}488$ ἑκ. εἶναι τὸ ὅλον μῆκος τῆς ῥάβδου εἰς θερμοκρασίαν 200^0 C. Ἐπίσης $M_{100}=$ $=200(1+0{,}0000122\cdot 100)=200{,}244$ ἑκ. εἶναι τὸ ὁλικὸν μῆκος τῆς ῥάβδου εἰς 100^0C. Ἄρα ἡ γενομένη αὔξησις τοῦ μήκους εἶναι $200{,}488-$ $-200{,}244=0{,}244$ ἑκ. **Σημείωσις.** Τὸ ἴδιον θὰ εὑρίσκαμεν, ἀλλὰ εἰς μέτρα (ἤτοι 0,00244 μέτρα), ἐὰν τὰ M_0 M_{100} καὶ M_{200} τὰ ἐλαμβάνομεν εἰς μέτρα ἀντὶ εἰς ἑκατοστά.

158) Ἐκ τοῦ τύπου $M_\vartheta=M_0(1+\lambda\vartheta)$ ἔχομεν $\lambda=\dfrac{M_\vartheta-M_0}{M_0\,\vartheta}=$ $=73{,}5-73{,}47:73{,}47\cdot 120=0{,}03:8816{,}4=3:881640=1:293888$ ἑκατοστά, εἶναι ὁ συντελεστὴς τῆς γραμμικῆς διαστολῆς τοῦ μετάλλου.

159) Διὰ θερμοκρασίαν—2^0C θὰ ἔχωμεν: $M_{-2}=510000(1+0{,}000122\cdot(-2))=509875{,}56$ μ., ὅπερ εἶναι τὸ μῆκος τῆς γραμμῆς ὑπὸ θερμ. $(-2)^0$K. Ὅθεν $510000-509875{,}56=$ $=124{,}44$ μέτρα θὰ εἶναι ἡ μεταβολὴ τοῦ μήκους τῆς ῥάβδου διὰ τὴν θερμοκρασίαν—2^0K, Ἤδη ὑπὸ θερμοκρασίαν $+42^0$ θὰ ἔχωμεν $M_{42}=$ $=510000(1+0{,}0000122\cdot(42))=510261{,}32$ μ., ἤτοι θὰ ἔχωμεν μεταβολὴν τοῦ μήκους της πάλιν $510261{,}32-510000=261{,}32$ μετ., διὰ τὴν θερμ. $+42^0$K.

160) $E_{100}=E_0(1+2\lambda\vartheta)$, ὅπου $\lambda=0{,}0001$. Ἤδη ἔχομεν ὅτι $E_{100}=$ $=10(1+0{,}0002\cdot 100)=10\cdot 1{,}02=10{,}2$ τετραγ. παλάμας, θὰ παρουσιάσῃ ἐπιφάνειαν εἰς θερμοκρασίαν 100^0C

161) $V_{10}=1500(1+0{,}0003\cdot 10)=1504{,}5$ κυβ. ἑκ. ὄγκον θὰ παρουσιάσῃ εἰς θερμ. 10^0C.

162) $20^3=8000$ κ. ἑ., εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ κύβου. Ἄρα $B=\varepsilon V$, $B=$ $=10\cdot 8000=80000$ γραμ., εἶναι τὸ βάρος τοῦ σιδηροῦ κύβου εἰς θερμ. 0^0C.

163) Θὰ εὕρωμεν ἐν πρώτοις ποῖος εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ χαλκοῦ εἰς 500^0C. Συνεπῶς ἔχομεν ὅτι $V_{500}=1(1+0.0002\cdot 500)=1{,}1$ κ.π. εἶναι ὁ ὄγκος του εἰς θερμ. 500^0C.

Ἄρα ἔχομεν ὅτι 1,1 κυβ. π. εἰς 500^0 K ζυγίζουν ἐπίσης 10 χλγ., συνεπῶς ἡ 1 κυβ. π. εἰς 500^0 K ζυγίζει $10:1{,}1=9{,}9$ χ.λ.γ. **Σημείωσις.** Τὸ ζητούμενον ἠδυνάμεθα νὰ εὕρωμεν καὶ ἄλλως. Ἤτοι εὑρίσκοντες κατὰ πρῶτον τὸ εἰδικὸν βάρος (πυκνότητα) τοῦ μετάλλου εἰς θερμοκρασίαν 500^0K. διὰ τοῦ τύπου $d_{500}=\dfrac{d_0}{1+\varkappa\vartheta}$, ὁπότε μετὰ ταῦττα διὰ τοῦ τύπου $B=d_{500}V$ θὰ εὑρίσκαμεν πάλιν τὸ ζητούμενον.

164) α) $d_{100}=d_0:1+\varkappa\vartheta=8:0{,}000036\cdot 100=8:1{,}0036=7{,}97$, εἶναι τὸ εἰδικόν του βάρος εἰς θερμοκρασίαν 100^0K. **β)** $B=\varepsilon V=8\cdot 10=$ $=80$ χλγ. ζυγίζουν αἱ 10 κ. π. μολύβδου εἰς θερμ. 0^0K. Ὡσαύτως $B=7{,}97\cdot 10=79{,}7$ χ.λ.γ., ζυγίζουν εἰς θερμ. 100^0K αἱ 10 κυβ. παλάμαι. **Σημείωσις.** Τὸ βάρος τοῦ μετάλλου εἰς τὴν θερμοκρασίαν τῶν 100^0K ἠδυνάμεθα νὰ τὸ εὕρωμεν καὶ διὰ τοῦ τύπου $V_{100}=V_0(1+\varkappa\vartheta)$, ὅστις μᾶς δίδει τὴν μεταβολὴν τοῦ ὄγκου ἐκ τῆς μεταβολῆς τῆς θερμοκρασίας. Ἠτοι θὰ εἴχομεν $V_{100}=10(1+0,000036\cdot100)=$ $=10\cdot1,0036=10,036$ κ. π. εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ μετάλλου εἰς θερμοκρασίαν 100°K. Ὥστε αἱ 10,036 κ. π. χαλκοῦ εἰς θερμοκρασίαν 100°K ζυγίζουν 80 χλγ. καὶ ἑπομένως αἱ 10 κ. π. εἰς θερμ. 100°K ζυγίζουν $80\cdot10:10,036=79,7$ χλγ.

165) α) $n_\vartheta=n_o(1+\mu\vartheta)$ ἢ $n_{100}=10(1+0,0003\cdot100)=10,3$ κ. μ. εἶναι ὁ φαινομενικὸς ὄγκος εἰς θερμοκρασίαν 100°K. **β)** $n_\vartheta=$ $=\dfrac{n_o(1+\gamma\vartheta)}{1+\kappa\vartheta}=10(1+0,0005\cdot100):(1+0,0002\cdot100)=10,294$ κ. μ., εἶναι ὁ ἀπόλυτος ὄγκος εἰς θερμ. 100° K. **γ)** $d_{50}=\dfrac{d_o}{1+\gamma\vartheta}=$ $=0,5:(1+50\cdot0,0005)=0,5:1,025=$περίπου 0,48 εἶναι ἡ πυκνότης τοῦ ὑγροῦ τούτου εἰς θερμοκρασίαν 50°K.

166) α) Τὸ 1 κ. μ. ἀέρος εἰς θερμοκρασίαν 0°K ζυγίζει 1,293 χλγ. **β)** $V_\vartheta=V_o\left(1+\dfrac{\vartheta}{273}\right)=1\left(1+\dfrac{30}{273}\right)=1,102$ κ. μ. γίνεται ὁ ὄγκος εἰς τὴν θερμοκρασίαν 30°K. Ἀφοῦ ὅμως τὰ 1.102 κ. μ. ζυγίζουν 1,293 χλγ. τὸ 1 κ. μ. ζυγίζει $1,293:1,102=1,17$ χλγ., εἰς τὴν θερμ. 30°K.

167) $V_\vartheta=V_o(1+\alpha\vartheta)$. Ὅθεν $V_\vartheta=3\left(1+\dfrac{30}{273}\right)=3,32$ κ. μ. γίνεται ὁ ὄγκος εἰς θερμοκρασίαν 30°K καὶ ὑπὸ τὴν κανονικὴν πίεσιν. Ἐπίσης ἀφοῦ τὰ 3,32 μ. κ. εἰς θερμ. 30°K καὶ κανον. πίεσιν ζυγίζουν 3,879 χλγ. τὰ 3 μ. κ. ὑπὸ τὴν αὐτὴν θερμ. καὶ πίεσιν ζυγίζουν $3,879\cdot3:3,32=3,5$ χλγ. (**Σημείωσις** $1,293\times3=3,879$ χλγ. ζυγίζουν τὰ 3 κ. μ. εἰς θερμοκρασίαν 0°K καὶ καν. πίεσιν, ἢ τὰ 3,32 κ. μ. εἰς θερμοκρασίαν 30°K καὶ ὑπὸ τὴν αὐτὴν πίεσιν). Ἤδη ἔχομεν $\varepsilon:\varepsilon'=$ $=B:B'=P:P'$ ἢ $B:3,5=72:76$ καὶ $B=72\cdot3,5:76=3,31$ *Kg*, εἶναι τὸ βάρος τῶν 3 κ. μ. ἀέρος εἰς θερμοκρασίαν 30K καὶ βαρομετρικὴν πίεσιν 72 ἑκ.

168) α) $Q=mc\vartheta=3\cdot1\cdot50=150$ μεγάλαι θερμίδες χρειάζονται διὰ νὰ ὑψωθῇ ἡ θερμοκρασία 3 κ. π. (ἤτοι 3 χλγ.) ὕδατος κατὰ 50°K. **β)** $Q=mc\vartheta$, $500=5\vartheta$ καὶ $\vartheta=100$°K θερμοκρασίαν θὰ λάβουν αἱ 5 κ. π. ὕδατος, ὅταν καταναλωθῇ ποσὸν θερμότητος 500 μεγ. θερμίδων. **γ)** Ἡ ἀπάντησις ὑπάρχει εἰς τὴν **β** ἐρώτησιν, διότι 500000 μικραὶ θερμίδες ἰσοῦνται μὲ 5000 μεγάλας τοιαύτας. **δ)** $Q=mc(\vartheta_2-\vartheta_1)$ ἢ $Q=10(200-100)=10\cdot100=1000$ μεγάλαι θερμίδες χρειάζονται διὰ νὰ ὑψωθῇ ἡ θερμοκρασία 10 κυβ. παλ. ὕδατος ἀπὸ θερμοκρασίας 100°K εἰς 200°K.

169) Ἔστω ὅτι τὸ μῖγμα θ' ἀποκτήσῃ x° θερμοκρασίαν. Συνεπῶς ἔχομεν $Q=mc(\vartheta_2-\vartheta_1)=100(x-20)$ (1) καὶ $Q=mc(\vartheta_2-\vartheta_1)=$ $=40(60-x)$ (2). Ἀφοῦ ὅμως τὰ πρῶτα μέλη τῶν (1) καὶ (2) ἰσοτήτων εἶναι ἴσα θὰ εἶναι ἴσα καὶ τὰ δεύτερα. Ὥστε $100(x-20)=$

$=40(60-x)$, ἢ $100x-2000=2400-40x$ ἢ $100x+40x=4400$ ἢ $140x=4400$ καὶ $x=\frac{4400}{140}=$περίπου $31,4^0$ θερμοκρασίαν θὰ ἔχῃ τὸ μῖγμα.

170) Ἔστω ὅτι θ' ἀφαιρέσωμεν ὕδωρ x χλγ. ἀπὸ τὸ Α δοχεῖον, τότε ἀπὸ τὸ δοχεῖον Β θ' ἀφαιρέσωμεν $(300-x)$ χιλιόγραμμα. (Ἐπειδὴ πρόκειται περὶ ὕδατος, 1 χλγ. εἶναι τὸ αὐτὸ ὡς ἐὰν εἴπωμεν 1 κυβ. παλάμη). Ἔχομεν λοιπὸν διὰ δοχεῖον Α ὅτι $Q=mc(\vartheta_2-\vartheta_1)=m(\vartheta_2-\vartheta_1)=$ $=x(40^0-20^0)$ μονάδες θερμότητος χρειάζονται διὰ νὰ ὑψωθῇ ἡ θερμοκρασία εἰς τὸ ὕδωρ x χιλιογράμμων τοῦ Α δοχείου εἰς 40^0Κ. Ὡσαύτως διὰ δοχεῖον Β ἔχομεν ὅτι $Q=mc(\vartheta_2-\vartheta_1)=m(\vartheta_2-\vartheta_1)=(300-x)$. $.(80^0-40^0)$ μονάδες θερμότητος, χρειάζονται ἵνα κατέλθῃ ἡ θερμοκρασία τοῦ ὕδατος $(300-x)$χλγ, τοῦ Β δοχείου, εἰς 40^0Κ.

Ἀλλὰ τὰ δύο ποσὰ θερμότητος θὰ εἶναι τὰ ἴδια. Ἄρα θὰ εἶναι $x(40-20)=(300-x)(80-40)$ ἢ $20x=(300-x)40$ ἢ $20x=$ $=12000-40x$ ἢ $40x+20x=12000$ ἢ $60x=12000$ καὶ $x=\frac{12000}{60}=$ $=200$ χλγ., ἢ κυβικὰς παλάμας ὕδωρ, πρέπει ν' ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸ δοχεῖαν Α, ὥστε ν' ἀποτελεσθῇ μῖγμα 300κ.π., θερμοκρασίας 40^0Κ. Ἑπομένως $(300-x)$, ἤτοι $300-200=100$ χλγ. (ἢ κ.π.), ὕδωρ πρέπει ν' ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸ δοχεῖον Β, ἵνα ἐπιτύχωμεν τὰ ἴδια.

Ἐπαλήθευσις τῆς ἀσκήσεως. Μῖγμα$=200$ χλγ.$+100$ χλγ.$=$ $=300$ χλγ. Ἐπίσης ἔχομεν $Q=200(\vartheta_2-20)=4000$ θερμίδες μεγάλαι καὶ $Q=100(80-\vartheta_2)=4000$ θερμίδες μεγάλαι. Ὅθεν καὶ $200(\vartheta_2-20)=$ $=100(80-\vartheta_2)$, ἢ $200\vartheta_2-4000=8000-100\vartheta_2$, ἢ $200\vartheta_2+100\vartheta_2=$ $=8000+4000=12000$, ἢ $300\vartheta_2=12000$ καὶ $\vartheta_2=12000:300=$ $=40^0$Κ. Ὥστε πράγματι ἡ θερμοκρασία τοῦ μίγματος θὰ εὑρίσκεται εἰς 40^0Κ. **Σημείωσις**. Αἱ 4000 θερμίδες εὑρίσκονται, διότι ἔχομεν διὰ τὸ ὕδωρ, ὅπερ λαμβάνομεν ἀπὸ τὸ Α δοχεῖον, ὅτι $200(40-20)=200 \cdot 20=$ $=4000$ θερμίδας ἐγκλείει. Ἐπίσης διὰ τὸ ὕδωρ, ὅπερ λαμβάνομεν ἀπὸ τὸ Β δοχεῖον, ἔχομεν ὅτι $100(80-40)=100 \cdot 40=4000$ θερμίδας ἐγκλείει.

171) Ὄγκος χιόνος$=2 \cdot 8=16cm^3$. Ἄρα ἔχομεν **α)** $B=\varepsilon V$, $B=$ $=0,2 \cdot 16=3,2$ γραμ. ζυγίζουν τὰ 16κ.ἑ. χιόνος. Ἀλλὰ τὸ 1 γραμ. χιόνος διὰ νὰ τακῇ χρειάζεται 80 θερμ. καὶ τὰ 3,2 γραμ. χρειάζονται $3,2 \cdot 80=256$ θερμίδες διὰ νὰ τακοῦν (εὑρίσκεται δι' ἁπλῆς ἀναλογίας).

β) $B=1 \cdot 16=16$ γραμ. ζυγίζει ὁ πάγος. Ὅθεν τὰ 16 γραμ. πάγου διὰ νὰ τακοῦν χρειάζονται $16 \cdot 80=1280$ θερμίδας.

172) α) Τὰ 6000 γραμ. πάγου διὰ νὰ τακοῦν, χρειάζονται $6000 \cdot 80=480000$ θερμίδας. Ὥστε 480000 θερμ. ἀπερροφήθησαν ἐκ τοῦ ψυγείου διὰ τὴν τῆξιν τοῦ πάγου. **β)** $Q=mc(\vartheta_2-\vartheta_1)=m(\vartheta_2-\vartheta_1)=$ $=6(12-0)=mc\vartheta$. Ὅθεν ἔχομεν $Q=6 \cdot 12=72$ μεγ. θερμ., ἤτοι 72000 μικραί, ἀπαιτοῦνται διὰ τὴν ἀνύψωσιν τῆς θερμοκρασίας ἀπὸ 0^0 εἰς 12^0Κ, $(c=1)$.

173) $10 \cdot 10=100$ κυβ, ἑκ., εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ μολύβδου. Ὅθεν ἔχομεν $B=\varepsilon V=11 \cdot 100=1100$ γραμμ. εἶναι τὸ βάρος τοῦ μολύβδου.

Ἤδη ἀφοῦ τὸ ἓν γραμ. μολύβδου διὰ νὰ τακῇ χρειάζεται 1000 θερμ., τὰ 1100 γραμ. χρειάζονται $1100 \cdot 1000 = 1100000$ θερμίδας διὰ νὰ τακοῦν.

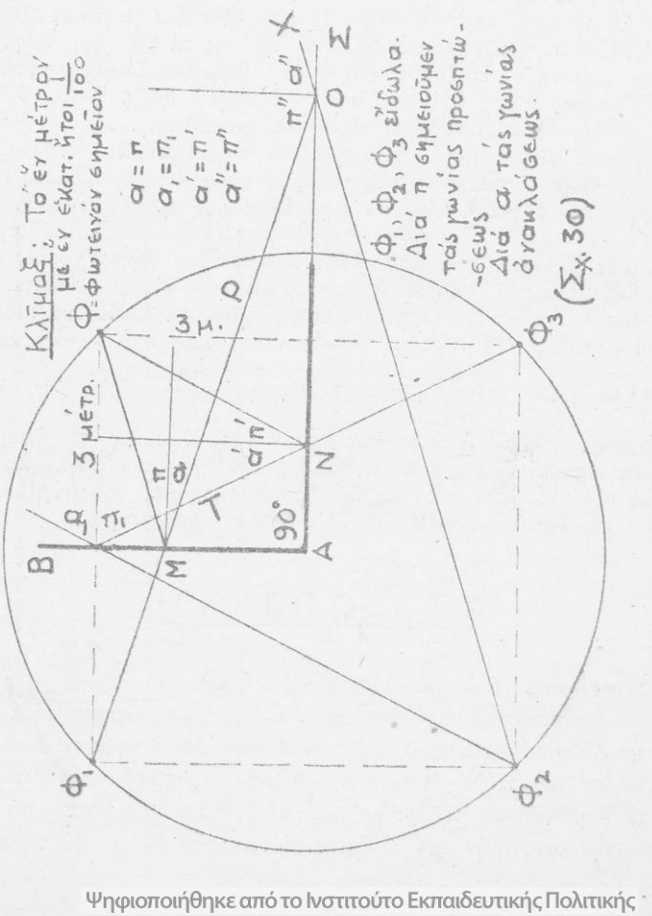
174) Ἔστω ὅτι πρέπει ν' ἀναμειχθοῦν x χιλιόγραμμα ὕδατος, θερμοκρασίας 25°Κ. Τότε ἔχομεν $Q = xc25 = 25x$, μεγάλαι θερμίδες εἶναι τὸ ποσὸν τῆς θερμότητος, τὸ ὁποῖον παρέχουν τὰ x χλγ. ὕδατος θερμοκρασίας 25°Κ. Ἐπίσης ἀφοῦ τὸ 1 χλγ. πάγου διὰ νὰ τακῇ χρειάζεται 80 μεγ. θερμίδας, τὰ 15 χλγ. χρειάζονται $15.80 = 1200$ μεγ. θερμίδας. Θ' ἀπορροφήσουν δηλαδὴ τὰ 15 χλγ. πάγου ἀπὸ τὸ ὕδωρ τῶν x χιλιογράμμων 1200 μ. θερμίδας καὶ θὰ καταβιβάσουν συγχρόνως τὴν θερμοκρασίαν αὐτοῦ ἀπὸ 25° εἰς 0°Κ. Συνεπῶς $25x = 1200$ καὶ $x = 48$ χλγ. ὕδατος πρέπει ν' ἀναμειχθοῦν.

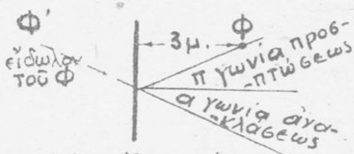
175) Ἔστω ὅτι ἀπαιτοῦνται x χλγ. ὕδατος διὰ νὰ ἀποκτήσῃ τὸ μεῖγμα θερμοκρασίαν 0°Κ. Τότε ἔχομεν $Q = 80x$ μεγάλας θερμίδας ἐγκλείουν τὰ x χιλιόγραμμα ὕδατος. Ἐπίσης τὰ 20 χλγ. πάγου διὰ νὰ τακοῦν χρειάζονται $20 \cdot 80 = 1600$ μεγ. θερμίδας. Συνεπῶς τόσας θερμίδας θ' ἀπορροφήσῃ ἀπὸ τὸ ὕδωρ, τῶν x χλγ. θερμ. 80°Κ. ὁ πάγος διὰ νὰ τακῇ. Ἄρα εἶναι $80x = 1600$ καὶ $x = 20$ χλγ. ὕδατος χρειάζονται, ὅπως τὸ μῖγμα μετὰ τὴν τῆξιν τοῦ πάγου ἀποκτήσῃ θερμ. 0°Κ. Ὥστε εἰς 0°Κ. τὸ βάρος τοῦ μίγματος θὰ εἶναι 40 χλγ. ὕδατος (τακέντος πάγου καὶ ὕδατος). Ἀλλὰ διὰ νὰ ἀποκτήσῃ τὸ μῖγμα τοῦτο θερμοκρσίαν $+10°$ χρειάζεται ποσὸν θερμότητος $Q = 40 \cdot 10 = 400$ μεγ. θερμίδες. Τὰς θερμίδας ταύτας θὰ λάβῃ ἀπὸ τὸ ὕδωρ θερμοκρασίας 80°Κ., καταβιβάζοντας τὴν θερμοκρασίαν του ἀπὸ 80° εἰς 10°. Ὥστε ἐὰν y χλγ. ὕδατος ἀπαιτοῦνται προσέτι πρὸς τοῦτο, θὰ διαθέσουν ταῦτα ποσὸν θερμότητος $70y$ μεγάλων θερμίδων καὶ ὅπερ πρέπει νὰ εἶναι ἴσον μὲ 400 θερμίδας. Ἤτοι $70y = 400$ καὶ $y = \frac{400}{70} = 5{,}71$ χλγ. ὕδατος, θερμοκρασίας 80°Κ., ἀπαιτοῦνται πρὸς τοῦτο. Συνεπῶς τὸ ἀπαιτούμενον ὁλικὸν ποσὸν ὕδατος, θερμ. 80°, διὰ τὴν τῆξιν τοῦ πάγου ἀφ' ἑνός, καὶ διὰ τὴν ἀνύψωσιν μετὰ ταῦτα τῆς θερμοκρασίας τοῦ μίγματος τῶν 40 χλγ. εἰς 10°Κ., εἶναι $20 + 5{,}71 = 25{,}71$ χιλιόγραμμα.

ΣΤ΄ ΟΠΤΙΚΗ

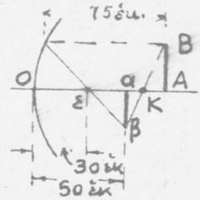
Σημείωσις. Διὰ τὴν λύσιν τῶν ἀσκήσεων καὶ ἰδιαιτέρως μάλιστα τῆς ὀπτικῆς ὅπου παρουσιάζονται πολλαὶ κλασματικαὶπαραστάσεις, εἶναι ταχύτερον καὶ εὐχερέστερον, πρὸς ἐκτέλεσιν τῶν διαφόρων διαδοχικῶν πράξεων καὶ σαφεστέραν ἀντίληψιν τῶν προκυπτουσῶν ἑκάστοτε παραστάσεων, νὰ λαμβάνωνται οἱ ἀριθμοὶ καὶ αἱ διάφοροι προκύπτουσαι ἰσότητες ὑπὸ τὴν κανονικήν των κλασματικὴν μορφὴν (π. χ. νὰ σημειώνετε

$\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi'}=\frac{1}{\varphi}$ καὶ ὄχι τὸ ἴσον του $(1:\pi)+(1:\pi')=1:\varphi$, ἢ σημειώνετε $\frac{\alpha}{2}+\varepsilon\Phi'$ καὶ ὄχι $(\alpha:2)+\varepsilon\Phi'$, ἢ τὸ ἴσον του $0{,}5\alpha+\varepsilon\Phi'$. Ἐπίσης νὰ γράφετε $\frac{1}{\frac{\alpha}{2}}$ καὶ ὄχι $\frac{1}{\alpha:2}$ ἢ $\frac{1}{0{,}5\alpha}$ κλπ.), πρᾶγμα ὅπερ δὲν ἐφηρμόσθη γενικῶς εἰς τὰς παρούσας ἀσκήσεις, μόνον καὶ μόνον δι' οἰκονομίαν χώρου, ὡς τοῦτο ἐγράφη καὶ ἀλλαχοῦ.

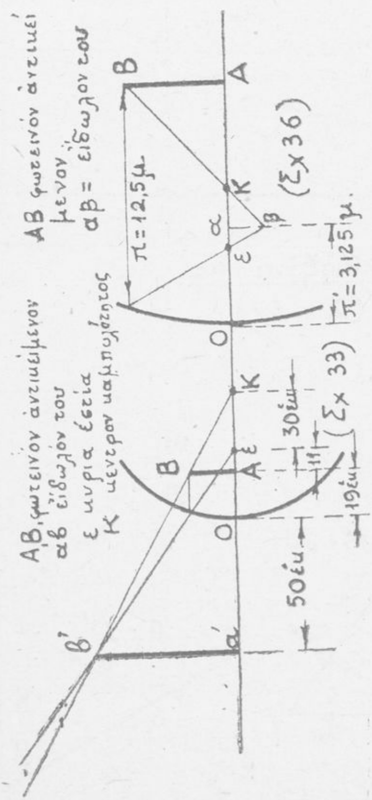


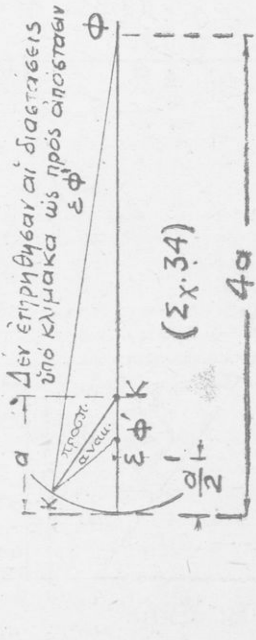


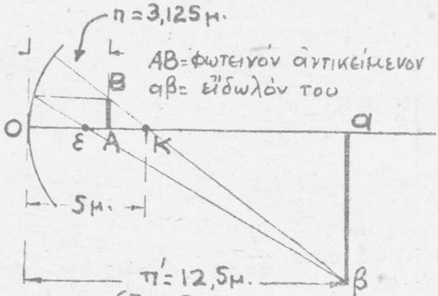
Κλῖμαξ 0,5 ἑκ γραφικόν αντιστοιχεῖ εἰς ἓν μέτρον πραγματικόν (Φυσικόν), ἤτοι ἡ κλῖμαξ εἶναι $\frac{1}{200}$
Γωνία π = α
(Σχ 31)



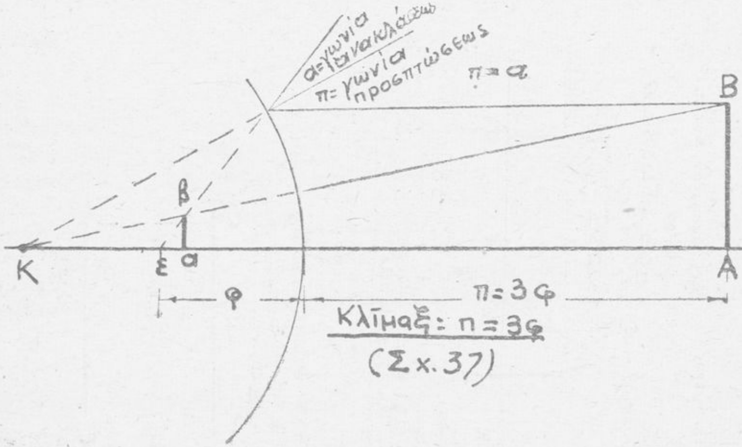
(Σχ. 32)
ΑΒ: ἀντικείμ. φωτεινόν
αβ = εἴδωλόν του
ε = κυρία ἑστία,
Κ = κέντρον καμπυλότητος



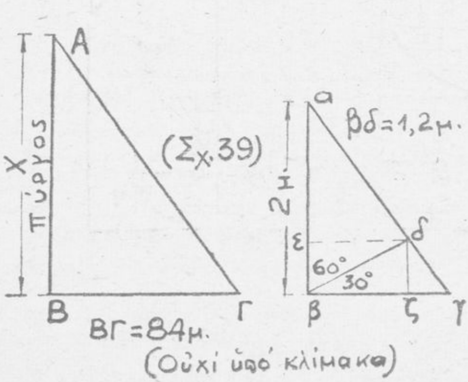




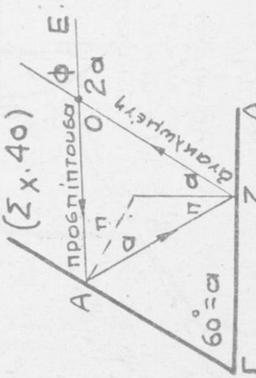
(Σχ. 35)



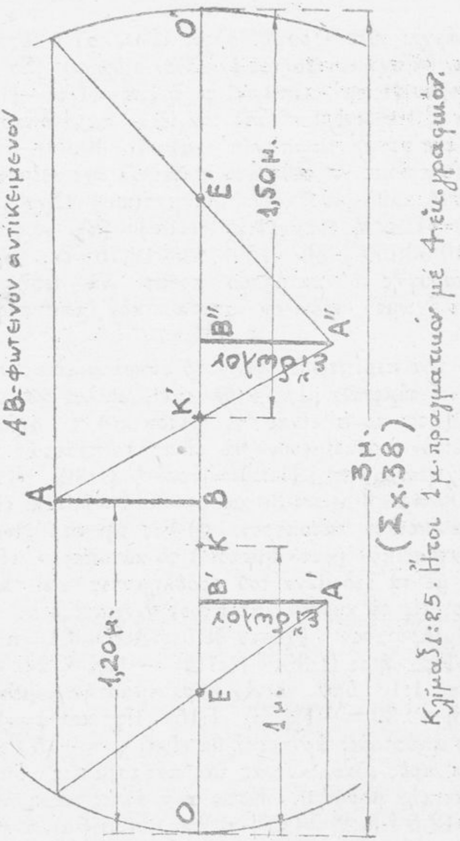
(Σχ. 37)



(Σχ. 39)



(Σχ. 40)



176) α) N=(360:90)—1=4—1=3 εἴδωλα θὰ σχηματίσῃ. β) Ἡ προσπίπτουσα ἐπὶ τοῦ κατόπτρου ΑΒ, τυχοῦσα φωτεινὴ ἀκτὶς ΦΜ, ἀνακλωμένη κατὰ τὴν ΜΡ σχηματίζει τὸ εἴδωλον $Φ_1$. Ἡ ΜΡ προσπίπτουσα ἐπὶ τοῦ κατόπτρου ΑΣ καὶ ἀνακλωμένη κατὰ τὴν ΟΧ σχηματίζει τὸ εἴδωλον $Φ_2$. Ἡ προσπίπτουσα τυχοῦσα ἀκτὶς ΦΝ ἀνακλωμένη κατὰ τὴν ΝΤ σχηματίζει τὸ εἴδωλον $Φ_3$. (Σχ. 30, Σελ. 40). Τὸ φωτεινὸν σημεῖον Φ καὶ τὰ εἴδωλα $Φ_1$, $Φ_2$, $Φ_3$, εὑρίσκονται ἐπὶ περιφερείας κύκλου ἀκτῖνος ΑΦ. Εὐνόητον ὅτι οἱασδήποτε ἀκτῖνας προσπτώσεως καὶ ἂν ἐλαμβάνομεν, τὰ εἴδωλα θὰ ἐσχηματίζοντο εἰς τὰς ἰδίας θέσεις.

177) α) N=(360:45)—1=8—1=7 εἴδωλα. β) Θὰ εὑρίσκωνται ἐπὶ μιᾶς περιφερείας καθέτου ἐπὶ τὴν τομὴν τῶν δύο συγκλινόντων κατόπτρων.

178) Δὲν ὑπάρχει οὔτε κορυφή. οὔτε, ἄξων, οὔτε ἑστία εἰς τὰ ἐπίπεδα κάτοπτρα, θὰ σχηματισθῇ δὲ ἕν μόνον εἴδωλον (Σχ. 31, Σελ. 41).

179) α) Ἔχομεν $(1:\pi)+(1:\pi')=1:\varphi$, ἢ $1:\pi=(1:\varphi)-(1:\pi')$ καὶ φέροντες τὰ κλάσματα $1:\varphi$ καὶ $1:\pi'$ ὑπὸ τὸν ἴδιον παρανομαστὴν λαμβάνομεν $1:\pi=\pi'-\varphi:\pi'\varphi$, ἢ $\pi=\pi'\varphi:(\pi'-\varphi)=50\cdot30:(50-30)=75$ ἑκ. ἀπὸ τοῦ κατόπτρου πρέπει νὰ τεθῇ τὸ φωτεινὸν ἀντικείμενον ἵνα τὸ εἴδωλον σχηματισθῇ καθ' ὑπόστασιν (πραγματικόν) (Σχ. 32, Σελ. 41). **β)** $(1:\pi)-(1:\pi')=1:\varphi$, ἢ $1:\pi=(1:\varphi)+(1:\pi')=(\pi'+\varphi):\varphi\pi'$ καὶ $\pi=\varphi\pi':(\pi'+\varphi)=30\cdot50:(50+30)=1500:80=18{,}75$ ἑκ., ἤτοι περίπου 19 ἑκ. ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ κατόπτου πρέπει νὰ τεθῇ τὸ φωτεινὸν ἀντικείμενον, ἵνα ἔχωμεν εἴδωλον φανταστικὸν (κατ' ἔμφασιν).. (Σχ. 33, Σελὶς 41).

180) α) Εἰς τὴν περίπτωσιν ὅπου τὸ εἴδωλον εἶναι πραγματικὸν τὸ κάτοπτρον εἶναι, σύμφωνα μὲ τὴν θεωρίαν, κοῖλον καὶ ἔχομεν ὅτι $A:E=\pi:\pi'=3:1$, (ἤτοι τὸ π' εἶναι τὸ τρίτον τοῦ π, δηλαδὴ 10 ἑκ., ἀφοῦ καὶ τὸ φωτεινὸν ἀντικείμενον θὰ εἶναι τριπλάσιον τοῦ εἰδώλου του). Ἐπίσης ἔχομεν $(1:\pi)+(1:\pi')=1:\varphi$, ἢ $(1:30)+(1:10)=1:\varphi$ ἢ $1:\varphi=(10+30):300=40:300=4:30$ καὶ $\varphi=30:4=7{,}5$ ἑκ. εἶναι ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις διὰ κοῖλον κάτοπτρον. **β)** Εἰς τὴν περίπτωσιν ὅπου τὸ εἴδωλον εἶναι φανταστικὸν (κατ' ἔμφασιν) τὸ κάτοπτρον εἶναι κυρτόν, καθόσον σύμφωνα μὲ τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος καὶ τὰ γνωστὰ ἐκ τῆς θεωρίας, μόνον εἰς τὸ κυρτὸν κάτοπτρον σχηματίζεται τὸ εἴδωλον φανταστικὸν καὶ μικρότερον· ἔχομεν δὲ ὅτι $A:E=3:1=\pi:\pi'$. Ἐπίσης $(1:\pi)-(1:\pi')=-1:\varphi$, ἤτοι $(1:30)-(1:10)=-1:\varphi$, ἢ ἀφοῦ φέρομεν τὰ κλάσματα $1:30$ καὶ $1:10$ ὑπὸ κοινὸν παρανομαστὴν λαμβάνομεν $(10-30):300=-1:\varphi$ ἢ $-2:30=-1:\varphi$ ἢ $1:15=1:\varphi$ καὶ $\varphi=15$ ἑκ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις ἀρνητικὴ θὰ εἶναι $\varphi=-15$ ἑκ.

181) (Λάβετε πρὸς εὐκολίαν σας τὰς παραστάσεις ὑπὸ τὴν κανονικήν των κλασματικὴν μορφήν). Ἔστω α ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος, $\varphi=\alpha:2=0{,}5\alpha$, $\pi'=12{,}5+(\alpha:2)=(25+\alpha):2=0{,}5(25+\alpha)$, $\pi=(\alpha:2)+(1:2)=(\alpha+1):2=0{,}5(\alpha+1)$. Ἄρα ἔχομεν $1:\varphi=(1:\pi)+(1:\pi')$. Ἀντικαθιστῶντες λαμβάνομεν $1:0{,}5\alpha=1:0{,}5(\alpha+1)+1:0{,}5(25+\alpha)$, ἢ $2:\alpha=2:(\alpha+1)+2:(25+\alpha)$ (1), (Διότι $1:0{,}5\alpha=\dfrac{1}{0{,}5\alpha}=\dfrac{1}{\frac{\alpha}{2}}=\dfrac{2}{\alpha}=2:\alpha$, ἀναλόγως δὲ συμβαίνει καὶ διὰ τούς δύο ἄλλους ὅρους τοῦ δεξιοῦ μέλους τῆς ἰσότητος (1)), καὶ μετὰ τὴν τροπὴν τῶν κλασμάτων τῆς ἰσότητος (1) εἰς ὁμώνυμα καὶ τὴν ἀπαλοιφὴν τῶν παρανομαστῶν λαμβάνομεν $(2\alpha+2)(25+\alpha)=2\alpha(25+\alpha)+2\alpha(\alpha+1)$ καὶ μετὰ τὰς πράξεις λαμβανόμεν $\alpha^2=25$ καὶ $\alpha=\pm5$, ἤτοι $\alpha=5$ μέτρα (ἡ ἀρνητικὴ τιμὴ ἀπορρίπτεται καθόσον ἀρνητικὴ ἀπόστασις δὲν δύναται νὰ ὑπάρξῃ). **Σημείωσις.** Διὰ νὰ εἶναι τὸ εἴδωλον πραγματικὸν ἕπεται. ὅτι ἡ θέσις τοῦ φωτοβόλου σημείου εἶναι, συμφώνως πρὸς τὰ λεχθέντα εἰς θεωρίαν, μεταξὺ κυρίας ἑστίας καὶ κέντρου καμπυλότητος τοῦ κατόπτρου.

182) Ζητεῖται ὁ λόγος $\pi':\varphi$. Ἐὰν α μέτρα ἀκτὶς καμπυλότητος, τότε $\pi=4\alpha$ (Σχ. 34, Σελ. 41), $\varphi=\alpha:2=0,5\alpha$, $\pi'=(\alpha:2)+\varepsilon\Phi'$ (1). Ὅθεν ἔχομεν $\frac{1}{\varphi}=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi'}$, ἢ $\frac{1}{\alpha:2}=\frac{1}{4\alpha}+\frac{1}{(\alpha:2)+\varepsilon\Phi'}$, ἢ $\frac{2}{\alpha}=$ $=\frac{1}{4\alpha}=\frac{2}{\alpha+2\varepsilon\Phi'}$ ἢ $8\alpha(\alpha+2\varepsilon\Phi')=\alpha(\alpha+2\varepsilon\Phi')+8\alpha^2$. Ἐκτελοῦντες τὰς πράξεις εὑρίσκομεν $14\varepsilon\Phi'=\alpha$ καὶ $\varepsilon\Phi'=\alpha:14$. Ἀντικαθιστῶντες εἰς (1) τὸ $\varepsilon\Phi'$ διὰ τοῦ $\alpha:14$ ἔχομεν $\pi'=(\alpha:2)+(\alpha:14)=$ $=(14\alpha+2\alpha):28=16\alpha:28=16\alpha:28=4\alpha:7$. Ἄρα $\pi':\varphi=\frac{4}{7}\alpha:\frac{\alpha}{2}=$ $=8\alpha:7\alpha=8:7$ εἶναι ὁ ζητούμενος λόγος.

183) Τὸ σχέδιον ἐγένετο οὐχὶ ὑπὸ κλίμακα (Σχ. 35 Σελ. 42 καὶ Σχῆμα 36 σελ. 41) **α) Διὰ εἴδωλον πραγματικὸν τετράκις μεγαλύτερον** (Σχ. 35) **ἔχομεν** $A:E=\pi:\pi'$ ἢ $1:4=\pi:\pi'$ καὶ $\pi=\pi':4$. Ἄρα εἶναι $1:\varphi=(1:\pi)+(1:\pi')=(\pi'+\pi):\pi\pi'$ ἢ $\pi\pi'=\varphi(\pi'+\pi)$ καὶ ἀντικαθιστῶντες τὸ π διὰ τοῦ ἴσου του $\pi':4$ ἔχομεν $\pi'\cdot\pi':4=\varphi\pi'+(\varphi\pi':4)$, ἢ $\pi'^2:4=\varphi\pi'+(\varphi\pi':4)$, ἢ ἐπειδὴ $\varphi=2,5$ μ. ἔχομεν $\frac{\pi'^2}{4}=2,5\pi'+\frac{2,5\pi'}{4}$ καὶ $\pi'^2=10\pi'+2,5\pi'=12,5\pi'$ ἢ $\pi'^2-12,5\pi'=0=\pi'(\pi'-12,5)$. Ἄρα ἢ $\pi'=0$, ὅπερ ἀπορρίπτεται, ἢ $\pi'-12,5=0$ ὁπότε ἔχομεν $\pi'=12,5$ μ. Ὅθεν $\pi=\pi':4=12,5:4=3,125$ μ. εἶναι ἡ ἀπόστασις τοῦ φωτοβόλου ἀντικειμένου, ἵνα πληροῦνται οἱ ὅροι τῆς ἀσκήσεως. **β)** $A:E=\pi:\pi', 4=$ $=\pi:\pi'$ καὶ $\pi=4\pi'$ (Σχ. 36). Ἄρα εἶναι $1:\varphi=(1:\pi)+(1:\pi')=(\pi'+\pi):\pi\pi'$ καὶ $\pi\pi'=\varphi(\pi'+\pi)$. Ἤδη ἀντικαθιστῶντες ὅπου π τὸ $4\pi'$ λαμβάνομεν $4\pi'^2=\varphi\pi'+4\varphi\pi'$. Καὶ ἐπειδὴ $\varphi=2,5$ μ, ἔχομεν $4\pi'^2=2,5\pi'+10\pi'=$ $12,5\pi'$ ἢ $4\pi'^2-12,5\pi'=0=\pi'^2-3,125\pi'=0=\pi'(\pi'-3,125)=0$. Ἄρα ἢ $\pi'=0$(ἀπορριπτέα) ἢ $\pi'=3,125$ μ. Ὅθεν $\pi=4\pi'=4\cdot3,125=12,5$μ. Ἄρα εἰς 12,5 μ. ἀπόστασιν πρέπει νὰ θέσωμεν τὸ φωτοβόλον ἀντικείμενον διὰ νὰ λάβωμεν εἴδωλον τετράκις μικρότερον

184) $\pi=15$έκ. Ἔχομεν $A:E=\pi:\pi'$ ἢ $1:6=\pi:\pi'$ ἢ $1:6=15:\pi'$ ἢ $\pi'=$ $=90$έκ. Ὅθεν ἔχομεν $1:\varphi=(1:\pi)-(1:\pi')=(\pi'-\pi):\pi\pi'$ καὶ ἀντιστρέφοντες τοὺς ὅρους τῶν κλασμάτων λαμβάνομεν $\varphi=\pi\pi':(\pi'-\pi)=15\cdot90:(90-15)=$ $=1350:75=18$ έκ. εἶναι τὸ ζητούμενον.

185) $A:E=\pi:\pi'$ ἢ $\pi:\pi'=4:1$ καὶ $\pi=4\pi'$ ἢ $\pi'=\pi:4$. Ὅθεν $\frac{1}{\pi}-\frac{1}{\pi:4}=-\frac{1}{\varphi}$, ἢ $(1:\pi)-(4:\pi)=-1:\varphi$, ἢ $(4-4\pi):\pi^2=-1:\varphi$, ἢ $-3\pi:\pi^2=-1:\varphi$ ἢ $3:\pi=1:\varphi$, ἢ $\pi:3=\varphi$ καὶ $\pi=3\varphi$. Ἤτοι πρέπει νὰ τεθῇ τὸ φωτεινὸν ἀντικείμενον εἰς τὸ τριπλάσιον τῆς ἑστιακῆς ἀποστάσεως (Σχ. 37, Σελ. 42).

186) Ἔχομεν $AB:A'B'=\pi:\pi'$, ἀλλὰ καὶ $AB:A'B'=\pi_1:\pi'_1$. (Ἔνθα π,π',π_1,π'_1 εἶναι αἱ ἀποστάσεις ἀντικειμένου καὶ εἰδώλων ἀπὸ τῶν δύο κατόπτρων). (Σχ. 38 σελὶς 43). Καὶ ἐπειδὴ εἶναι $A'B'=A''B''$

θά εἶναι καὶ $\pi:\pi'=\pi_1:\pi'_1$ (1). Ἐπίσης ἔχομεν $\pi+\pi_1=3$ μ. (2). Ὡσαύτως ἔχομεν $(1:\pi)+(1:\pi')=1:0,5$(3), καὶ ὅτι $(1:\pi_1)+(1:\pi'_1)=1:0,75$ (4). Ὥστε ἔχομεν νὰ λύσωμεν σύστημα τεσσάρων ἐξισώσεων, ἤτοι τῶν ἐξισώσεων (1), (2), (3) καὶ (4) μὲ 4 ἀγνώστους. Ἐκ τῆς (2) ἔχομεν $\pi_1=3-\pi$ (5) καὶ ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (4) λαμβάνομεν $\frac{1}{3-\pi}+\frac{1}{\pi'_1}=\frac{1}{0,75}$, ἢ $\frac{1}{\pi_1}=\frac{1}{0,75}-\frac{1}{3-\pi}=\frac{3-\pi-0,75}{0,75(3-\pi)}=$ $=\frac{2,25-\pi}{0,75(3-\pi)}=\frac{1}{\pi'_1}$ καὶ $\pi'_1=\frac{0,75(3-\pi)}{2,25-\pi}$ (6). Ἐπίσης ἐκ τῆς (3) λαμβάνομεν $\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi'}=\frac{1}{0,5}$, ἢ $\frac{1}{\pi'}=\frac{1}{0,5}-\frac{1}{\pi}=$ $=\frac{\pi-0,5}{0,5\pi}$ καὶ $\pi'=\frac{0,5\pi}{\pi-0,5}$ (7). Ἤδη ἀντικαθιστῶντας εἰς τὴν (1) τὰς εὑρεθείσας τιμὰς τῶν π_1, π'_1 καὶ π' συναρτήσει τῆς π ἐκ τῶν (5), (6) καὶ (7) λαμβάνομεν $\frac{\pi}{0,5\pi:(\pi-0,5)}=\frac{3-\pi}{0,75(3-\pi):(2,25-\pi)}$, ἢ μετασχηματίζοντες τὰ σύνθετα κλάσματα εἰς ἁπλᾶ λαμβάνομεν $\frac{\pi(\pi-0,5)}{0,5\pi}=$ $=\frac{(3-\pi)(2,25-\pi)}{0,75(3-\pi)}$, ἢ $(\pi-0,5):0,5=(2,25-\pi):0,75$, ἢ $0,75(\pi-0,5)=$ $=0,5(2,25-\pi)$, ἢ $0,75\pi-0,375=1,125-0,5\pi$, ἢ $0,75\pi+0,5\pi=1,5$, ἢ $1,25\pi=1,5$ καὶ $\pi=1,5:1,25=1,2$ μ. Τουτέστι τὸ σημεῖον τοῦ κυρίου ἄξονος, εἰς τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ τεθῇ τὸ φωτοβόλον ἀντικείμενον, ἵνα τὰ καθ' ὑπόστασιν εἴδωλα τὰ ὑπὸ τῶν ἐν λόγῳ κατόπτρων παρεχόμενα εἶναι ἴσα, πρέπει νὰ εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν 1,2 μ. ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ κατόπτρου.

187) Ἐὰν τὸ φωτεινὸν σημεῖον εὑρίσκεται μεταξὺ τῶν δύο κατόπτρων, εἰς θέσιν ἐπὶ τοῦ κυρίου ἄξονος ἴσην μὲ **δ:2** ἀπὸ τῶν κορυφῶν τῶν κατόπτρων, τότε τὰ κέντρα τῶν δύο ἴσων κατόπτρων θὰ συμπίπτουν. Πράγματι, σύμφωνα μὲ τὴν θεωρίαν, κάθε φωτεινὸν σημεῖον τιθέμενον ἐπὶ τοῦ κέντρου καμπυλότητος σχηματίζει τὸ εἴδωλόν του ἐπὶ τοῦ κέντρου τούτου. Ὥστε τὰ εἴδωλα θὰ συμπίπτουν ἐὰν τὸ φωτεινὸν σημεῖον τεθῇ εἰς τὸ μέσον τῆς ἀποστάσεως **δ**, ἐπὶ τῶν συμπιπτόντων κέντρων τῶν δύο κατόπτρων.

188) $(1:\pi)-(1:\pi')=-1:\varphi$, ἢ $1:\pi'=(1:\varphi)+(1:\pi')=(\pi'+\varphi):\pi\varphi$ ἢ $\pi'=$ $=\pi\varphi:(\pi+\varphi)=10\cdot30:(10+30)=7,5$ἑκ. εἶναι ἡ ἀπόστασις τῆς κορυφῆς τοῦ κατόπτρου ἀπὸ εἰδώλου. Ἐπίσης $Α:Ε=\pi:\pi'$, ἢ $Ε:Α=\pi':\pi$ καὶ $Ε=\pi'Α:\pi=7,5\cdot4:10=3$ ἑκ. εἶναι τὸ μέγεθος τὸ εἰδώλου.

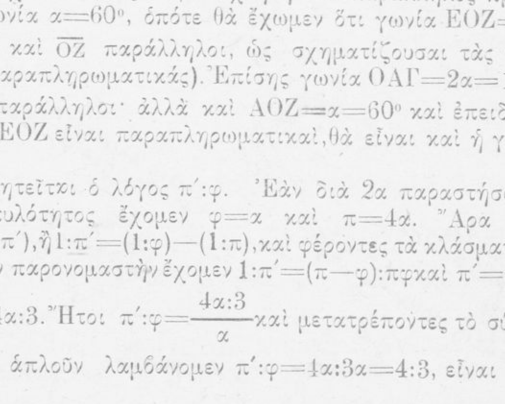
189) (Σχ. 39, Σελ. 42) Ἀπὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον βδζ (ἤχθη ἡ $\overline{δζ}$ κάθετος ἐπὶ $\overline{βγ}$) ἔχομεν ὅτι $\overline{δζ}=1,20$ημ30°$=1,2\cdot0,5=0,6$ μ. Ἄρα καὶ $\overline{εβ}=60$ ἑκ. καὶ $\overline{αε}=2-0,6=1,40$ μ. Ὡσαύτως ἀπὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον εδδ (ἤχθη ἡ εδ παράλληλος πρὸς τὴν βγ) ἔχομεν ὅτι $\overline{εδ}=$

$=1{,}20\cdot ημ60^{\circ}=1{,}20\sqrt{3}:2=0{,}6\sqrt{3}=1{,}038$ μ. Ἀλλὰ τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ καὶ αεδ εἶναι ὅμοια, ὡς ἔχοντα τὰς γωνίας των ἴσας μίαν πρὸς μίαν. Συνεπῶς ἔχομεν $\overline{ΑΒ}:\overline{αε}=\overline{ΒΓ}:\overline{εδ}$ ἢ $\overline{ΑΒ}=Χ=\overline{ΒΓ}\cdot\overline{αε}:\overline{εδ}=1{,}40\cdot 84:1{,}038=113{,}20$ μ. εἶναι τὸ ὕψος τοῦ πύργου.

190) $1:φ=(1:π)+(1:π')$, ἢ $1:π'=(π-φ):πφ$ καὶ $π'=πφ:(π-φ)=40\cdot 30:(40-30)=1200:10=120$ ἑκ. ἀπὸ τῆς κορυφῆς εὑρίσκεται τὸ ἀντικείμενον. Ὡσαύτως $Ε:Α=π':π$ καὶ $Ε=Απ':π=2\cdot 120:40=6$ ἑκ. εἶναι τὸ μέγεθος τοῦ εἰδώλου.

191) (Σχ. 40, σελὶς 42). Ἤχθη ἡ ΑΕ παράλληλος πρὸς ΓΔ. Ἐπίσης ἔστω γωνία $α=60^{\circ}$, ὁπότε θὰ ἔχωμεν ὅτι γωνία $ΕΟΖ=120^{\circ}$. (Διότι εἶναι αἱ $\overline{ΑΓ}$ καὶ $\overline{ΟΖ}$ παράλληλοι, ὡς σχηματίζουσαι τὰς γωνίας ΟΑΓ καὶ ΑΟΖ παραπληρωματικάς). Ἐπίσης γωνία $ΟΑΓ=2α=120^{\circ}$, διότι αἱ $\overline{ΟΑ}$ καὶ $\overline{ΓΖ}$ παράλληλοι· ἀλλὰ καὶ $ΑΟΖ=α=60^{\circ}$ καὶ ἐπειδὴ αὕτη μετὰ τῆς γωνίας ΕΟΖ εἶναι παραπληρωματικαί, θὰ εἶναι καὶ ἡ γωνία $ΕΟΖ==2α=120^{\circ}$

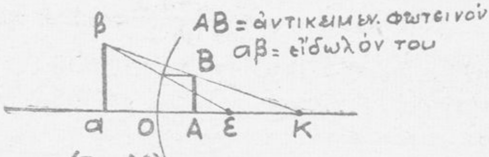
192) Ζητεῖται ὁ λόγος $π':φ$. Ἐὰν διὰ $2α$ παραστήσωμεν τὴν ἀκτῖνα καμπυλότητος ἔχομεν $φ=α$ καὶ $π=4α$. Ἄρα εἶναι $1:φ=(1:π)+(1:π')$, ἢ $1:π'=(1:φ)-(1:π)$, καὶ φέροντες τὰ κλάσματα $1:φ$ καὶ $1:π$ ὑπὸ τὸν ἴδιον παρονομαστὴν ἔχομεν $1:π'=(π-φ):πφ$ καὶ $π'=πφ:(π-φ)=4α^2:3α=4α:3$. Ἤτοι $π':φ=\frac{4α:3}{α}$ καὶ μετατρέποντες τὸ σύνθετον τοῦτο κλάσμα εἰς ἁπλοῦν λαμβάνομεν $π':φ=4α:3α=4:3$, εἶναι ὁ ζητούμενος λόγος.



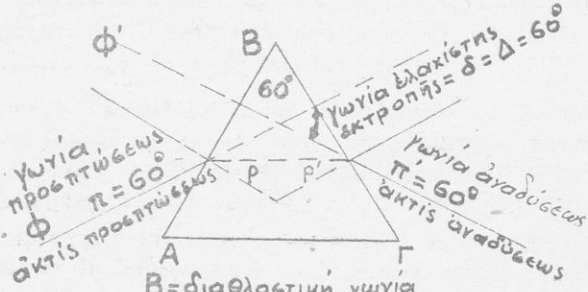
(Σχ. 41)

193) Ἐφ' ὅσον ἡ ἄσκησις δὲν ἀναφέρει ἐὰν ζητεῖ τὸ εἴδωλον φανταστικὸν ἢ πραγματικὸν καὶ δεδομένου ὅτι ἀμφότεραι αἱ περιπτώσεις δύνανται νὰ συνυπάρχουν, πρέπει νὰ ἐξετασθοῦν καὶ αἱ δύο περιπτώσεις. **α) Διὰ εἴδωλον πραγματικὸν ἔχομεν** (Σχ. 41, σελ. 47). $Α:Ε==π:π'$ ἢ $Ε:Α=π':π$ ἤτοι $5=π':π$ καὶ $π'=5π$. Ἄρα ἔχομεν $1:φ==(1:π)+(1:π')=(π'+π):ππ'=6π:5π^2$ καὶ $φ=5π^2:6π=5π:6$ ἢ ἀφοῦ $φ==5$ἑκ, ἔχομεν $30=5π$ καὶ $π=30:5=6$ μ. ἀπὸ τῆς κορυφῆς πρέπει νὰ τεθῇ τὸ ἀντικείμενον, ἵνα τὸ εἴδωλον εἶναι πενταπλάσιον τοῦ ἀντικειμένου καὶ πραγματικόν. **β) Διὰ εἴδωλον φανταστικόν.** (Σχ.42, Σελ.48). $π'$ δέον ἴσον μὲ $5π$ (ἐκ τῆς σχέσεως $Α:Ε=π:π'$). Ἄρα $1:φ=(1:π)-$

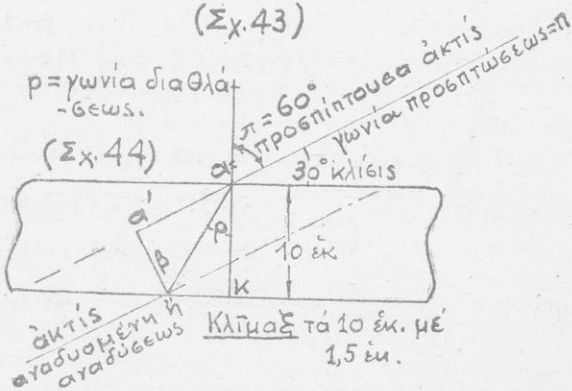
—(1:π′)=(π′—π):ππ′, ὅθεν φ=ππ′:(π′—π)=5π²:4π=5π:4 ἢ 5=5π:4 ἢ 20=5π καὶ π=20:5=4 ἑκ. Ἤτοι διὰ νὰ ἔχωμεν εἴδωλον φανταστικόν, ὑπὸ τὰς προϋποθέσεις τοῦ προβλήματος, πρέπει ἡ φωτεινὴ εὐθεῖα νὰ τοποθετηθῇ εἰς 4 ἑκ. ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ κατόπτρου.



(Σχ. 42)



(Σχ. 43)



194) (Σχ. 43) Ἔχομεν ρ=B:2, π=π′, ρ=ρ′, π=(B+Δ):2 ὅπου Δ ἔστω γωνία ἐλαχίστης ἐκτροπῆς. Ἐκ τοῦ τύπου $\nu=\frac{\eta\mu[(B+\Delta):2]}{\eta\mu(B:2)}$ καὶ ἀπὸ τὸν τύπον π=(B+Δ):2 καὶ δεδομένου ὅτι διαθλαστικὴ γωνία B=60°, ἔχομεν 60°=(60°+Δ):2, ἢ 120°=60°+Δ καὶ Δ=120°—60°=

$=60^\circ$. Ὥστε $\nu=\eta\mu\,60^\circ:\eta\mu 30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}:2}{1:2}=\sqrt{3}=1{,}372$ εἶναι ὁ δείκτης διαθλάσεως τοῦ πρίσματος. (**Σημείωσις** $\eta\mu(60^\circ+\Delta^\circ:2)=$ $=\eta\mu[(60^\circ+60^\circ):2]=\eta\mu\,60^\circ=\sqrt{3}:2$).

195) Ἔχομεν $\nu=\dfrac{\eta\mu\,(B+\Delta:2)}{\eta\mu\,(B:2)}=3:2$ ἢ $3:2=\dfrac{\eta\mu(60+\Delta:2)}{\eta\mu 30^\circ}$ ἢ $\eta\mu(60+\Delta:2)=(3:2)\eta\mu 30^\circ=(3:2)\cdot(1:2)=3:4$. (Διότι $\eta\mu 30^\circ=1:2$). Ὅθεν $\lambda o\gamma\eta\mu(60^\circ+\Delta:2)=\lambda o\gamma 3-\lambda o\gamma 4=0{,}47712-0{,}60206=-0{,}12494=$ $=\overline{1},87506$ καὶ $(60^\circ+\Delta):2=48^\circ 35'25''$. Ἄρα $60+\Delta=96^\circ 70'50''=$ $=97^\circ 10'50''$ καὶ $\Delta=37^\circ 10'50''$ εἶναι ἡ γωνία ἐλαχίστης ἐκτροπῆς.

196) δ.δ$=3:2$ ζητεῖται ἡ ἀπόστασις $\alpha'\delta$(σχῆμα 44, σελ. 48). Ἔχομεν $\nu=\eta\mu\pi:\eta\mu\rho$ ἢ $3:2=\eta\mu 60^\circ:\eta\mu\rho$ ἢ $2:3=\eta\mu\rho:\eta\mu 60^\circ$, ἢ $\eta\mu\rho=$ $=2\eta\mu 60^\circ:3=\sqrt{3}:3$(Διότι $\eta\mu 60^\circ=\sqrt{3}:2$). Ἄρα $\lambda o\gamma\eta\mu\rho=\lambda o\gamma(\sqrt{3}:3)$ $=\lambda o\gamma\sqrt{3}-\lambda o\gamma 3=\overline{1},76144$ καὶ $\rho=35^\circ 15'52''$. (γωνία διαθλάσεως). Ἤδη ἀπὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον $\alpha\beta\kappa$ ἔχομεν $\overline{\alpha\kappa}=\overline{\alpha\beta}\,\sigma\upsilon\nu(35^\circ 15'52'')$ ἢ $\overline{\alpha\beta}=\overline{\alpha\kappa}:\sigma\upsilon\nu(35^\circ 15'52'')=10:\sigma\upsilon\nu(35^\circ 15'52'')$. Ὅθεν $\lambda o\gamma\ \alpha\delta=\lambda o\gamma 10-$ $-\lambda o\gamma\sigma\upsilon\nu(35^\circ 15'52'')=1-\overline{1},91196=1-(-0{,}08804)=1+0{,}08804=$ $=1{,}08804$ καὶ $\alpha\delta=12{,}24$ ἑκ. Ὁμοίως ἀπὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον $\alpha'\alpha\delta$ ἔχομεν ὅτι $\alpha'\delta$(αἰτουμένη μετατόπισις) ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς $\overline{\alpha\beta}$ ἐπὶ τὸ ἡμίτονον τῆς γωνίας $\alpha'\alpha\delta$. Ἀλλὰ γωνία $\alpha'\alpha\delta=60^\circ-\rho=$ $=60^\circ-(35^\circ 15'52'')=24^\circ 44'8''$. Ἄρα εἶναι $\alpha'\delta=12{,}24\eta\mu(24^\circ 44'8'')$ καὶ $\lambda o\gamma\alpha'\delta=\lambda o\gamma 12{,}24+\lambda o\gamma\eta\mu 24^\circ 44'8''=1{,}08778+\overline{1},62162=$ $=1{,}08778-0{,}37838=0{,}70940$ καὶ $\alpha'\delta=5{,}123$ ἑκ. εἶναι ἡ αἰτουμένη μετατόπισις.

197) Ζητεῖται ὁ δείκτης διαθλάσεως (δ.δ) ὑάλου ὡς πρὸς τὸ ὕδωρ· ἔχομεν $\dfrac{\text{ὕδωρ}}{\text{ἀήρ}}=\dfrac{4}{3}(1)$, $\dfrac{\text{ὕαλος}}{\text{ἀήρ}}=\dfrac{3}{2}(2)$, καὶ διαιροῦντες κατὰ μέλη τὰς (1) καὶ (2) καὶ μετὰ τὴν τροπὴν τοῦ συνθέτου κλάσματος εἰς ἁπλοῦν λαμβάνομεν $\dfrac{\text{ὕδωρ}}{\text{ἀήρ}}:\dfrac{\text{ὕαλος}}{\text{ὕδωρ}}=\dfrac{\text{ὕδωρ}\times\text{ἀ/ήρ}}{\text{ὕαλος}\times\text{ἀ/ήρ}}=\dfrac{4}{3}:\dfrac{3}{2}=\dfrac{8}{9}$, καὶ δ.δ$\dfrac{\text{ὑάλου}}{\text{ὕδωρ}}=$ $=\dfrac{9}{8}$

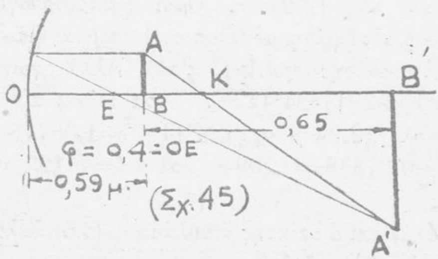
198) **α) Διὰ εἴδωλον πραγματικόν.** (Σχ. 45 σελ. 50). Ἔχομεν $\pi=0{,}40+\overline{EB}$, $\pi'=0{,}40+0{,}65+\overline{EB}=1{,}05+\overline{EB}$ Ὅθεν $\dfrac{1}{\varphi}=$ $=\dfrac{1}{\pi}+\dfrac{1}{\pi'}=\dfrac{\pi'+\pi}{\pi\pi'}$ ἢ $0{,}4=\dfrac{\pi\pi'}{\pi+\pi'}=\dfrac{(0{,}4+\overline{EB})(1{,}05+\overline{EB})}{1{,}05+\overline{EB}+0{,}4+\overline{EB}}=$

$=\dfrac{0{,}42+0{,}4\overline{EB}+1{,}05\overline{EB}+\overline{EB}^2}{2\overline{EB}+1{,}45}=0{,}4$ ἢ $0{,}42+1{,}45\overline{EB}+\overline{EB}^2=$ $0{,}4(2\overline{EB}+1{,}45)$ ἢ $0{,}42+1{,}45\overline{EB}+\overline{EB}^2-0{,}8\overline{EB}-0{,}58=0$, ἢ $\overline{EB}^2+$ $+0{,}65\overline{EB}-0{,}16=0$, καὶ $\overline{EB}=-0{,}65\pm\sqrt{1{,}0625}:2=-0{,}65\pm1{,}03:2$. Ἡ ἀρνητικὴ ρίζα ἀπορριπτέα. Ὅθεν $\overline{EB}=(-0{,}65+1{,}03):2=0{,}19$ μέτρα εἶναι ἡ ἀπόστασις $\overline{EB}$. Συνεπῶς $\pi=0{,}4+0{,}19=0{,}59$ μ. εἶναι ἡ ἀπόστασις τοῦ ἀντικειμένου ἀπὸ κατόπτρου.

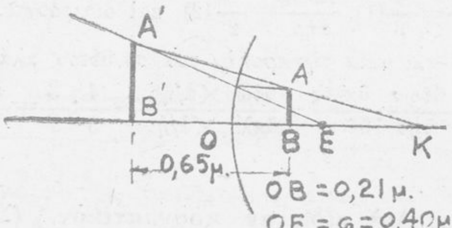
β) Διὰ εἴδωλον φανταστικὸν (Σχ. 46) ἔχομεν $\pi=0{,}4-\overline{EB}$ $\pi'=0{,}65+\overline{EB}-0{,}4=0{,}25+\overline{EB}$. Ὅθεν $1:\varphi=(1:\pi)-(1:\pi')=(\pi'-\pi):\pi\pi'$ καὶ $\varphi=\pi\pi':(\pi'-\pi)$, ἤτοι $0{,}4=\dfrac{(0{,}4-\overline{EB})(0{,}25+\overline{EB})}{0{,}25+EB-(0{,}4-EB)}=$

$=\dfrac{0{,}1+0{,}4\overline{EB}-0{,}25\overline{EB}-\overline{EB}^2}{2\overline{EB}-0{,}15}$ καὶ λύοντες τὴν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν

$\overline{EB}=\dfrac{-0{,}65\pm\sqrt{0{,}4225+0{,}64}}{2}$ Τουτέστι τὰς ἰδίας ρίζας μὲ τὰς εὑρεθείσας ὅταν τὸ εἴδωλον πραγματικόν, ἤτοι $\overline{EB}=0{,}19$ μ. Συνεπῶς $\pi=0{,}4-0{,}19=$ $=0{,}21$ μ. εἶναι ἡ ἀπόστασις τοῦ ἀντικειμένου ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ κατόπτρου.



(Σχ. 45)



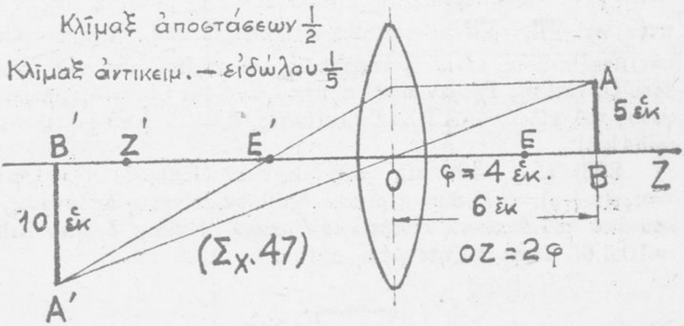
(Σχ. 46)

199) δ (γωνία ἐκτροπῆς) $=\pi+\pi'-B$ (1). Ὅθεν ἔχομεν $\nu=$ $=$ημπ:ημρ, ἢ $1:\nu=$ημρ:ημπ καὶ ημρ$=$ημπ:ν$=$ημ$45^\circ:\sqrt{2}=(\sqrt{2}:2):\sqrt{2}$

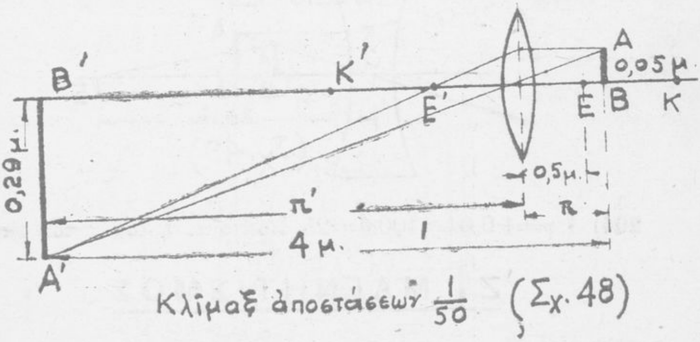
$=1:2$, ἄρα $\rho=30^0$. Ὡσαύτως ἔχομεν $B=\rho+\rho'$, ἢ $\rho'=B-\rho=60^0-$ $-30^0=30^0$. Ἐπομένως ημπ΄:ημρ΄=ν, ἢ ημπ΄:ημ30°$=\sqrt{2}$ καὶ ημπ΄$=$ $=0,5\sqrt{2}$, ἄρα $\pi'=45^0$ εἶναι ἡ γωνία ἐξόδου (ἀναδύσεως). Ἀλλὰ ἔχομεν $\pi=\pi'$. Συνεπῶς πρόκειται περὶ ἐλαχίστης ἐκτροπῆς. Ἀντικαθιστῶντες ὅθεν εἰς τὴν παράστασιν (1) λαμβάνομεν $\delta=45^0+45^0-60^0=$ $=90^0-60^0=30^0$ εἶναι ἡ γωνία ἐλαχίστης ἐκτροπῆς.

200) δ.δ. τοῦ ὕδατος ὡς πρὸς ἀέρα=4:3, δ.δ. τῆς ὑάλου πρὸς ἀέρα=3:2 (τύπος λεπτῶν πρισμάτων).

Ἤτοι εἶναι $\delta=(\nu-1)B=\left(\frac{4}{3}-1\right)B$. Ὡσαύτως $\delta=(\nu-1)B=$ $=\left(\frac{3}{2}-1\right)2$ Ἄρα εἶναι καὶ $\left(\frac{4}{3}-1\right)B=\left(\frac{3}{2}-1\right)2$ ἢ $B:3=2:2=1$ καὶ $B=3^0$, εἶναι ἡ διαθλαστικὴ γωνία τοῦ ὑδατίνου πρίσματος,



(Σχ. 47)



(Σχ. 48)

201) Ἔχομεν $(1:\pi)+(1:\pi')=1:\varphi$, ἢ $1:\pi'=(\pi-\varphi):\pi\varphi$ καὶ $\pi'=$ $6\cdot4:(6-4)=12$ ἑκ. ἡ ἀπόστασις εἰδώλου ἀπὸ τοῦ ὀπτικοῦ κέντρου.

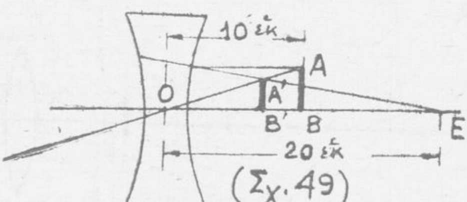
Ἐπίσης $E:A=\pi':\pi$ καὶ $E=5\cdot 12:6=10$ ἑκ., εἶναι τὸ μέγεθος τοῦ εἰδώλου. (Σχ. 47, σελ. 51).

202) Εὐκρινὲς εἴδωλον λαμβάνεται ὅταν τὸ φωτεινὸν ἀντικείμενον τίθεται σὲ θέσιν μεταξὺ κυρίας ἑστίας καὶ διπλασίου ἑστιακῆς ἀποστάσεως, ὅτε τὸ εἴδωλον σχηματίζεται εὐκρινὲς πέραν τοῦ διπλασίου τῆς ἑτέρας ἑστιακῆς ἀποστάσεως (πρὸς τὸ ἄλλο μέρος τοῦ φακοῦ) καὶ τὸ ὁποῖον εἶναι ἀνεστραμμένον καὶ μεγεθυσμένον. Ἔχομεν λοιπὸν (Σχ. 48, σελ. 51). $(1:\pi)+(1:\pi')=1:\varphi$, $\pi=0{,}5+\overline{EB}$, $\pi'=4-(0{,}5+\overline{EB})$.

Ὅθεν $\dfrac{1}{\varphi}=\dfrac{\pi'+\pi}{\pi\pi'}=\dfrac{4-(0{,}5+\overline{EB})+0{,}5+\overline{EB}}{[4-(0{,}5+\overline{EB})](0{,}5+\overline{EB})}=\dfrac{1}{0.5}$, ἢ $0{,}5=$

$=\dfrac{[4-(0{,}5+\overline{EB})](0{,}5+\overline{EB})}{4-0{,}5-\overline{EB}+0{,}5+\overline{EB}}$, ἢ $2=(3{,}5-\overline{EB})(0{,}5+\overline{EB})$ ἢ $2=1{,}75+$ $+3EB-\overline{EB}^2$ ἢ $\overline{EB}^2-3\overline{EB}+0{,}25=0$ καὶ $\overline{EB}=3\pm\sqrt{9-1}:2=$ $=3\pm\sqrt{8}:2=$ περίπου $3\pm 2{,}82:2$ ἐξ οὗ $\overline{EB}_1=5{,}82:2=2{,}91$ (ἀπορριπτέα) καὶ $\overline{EB}_2=\overline{EB}=3-2{,}82:2=0{,}09$ἑκ. (δεκτή). Ἄρα $\pi=0{,}5+0{,}09=$ $=OB=0{,}59$ ἑκ. εἶναι ἡ ἀπόστασις τοῦ κηρίου ἀπὸ τοῦ ὀπτικοῦ κέντρου O. Ἐπίσης ἔχομεν $E=A\pi':\pi=0{,}05\cdot 341:0{,}59=0{,}29$μ., εἶναι τὸ μέγεθος τοῦ εἰδώλου A′B′. (**Σημείωσις.** $\pi'=4-(0{,}5+\overline{EB})=4-0{,}59=$ $=341$μ.)

203) (Σχ. 49, σελ. 52). Ἔχομεν $(1:\pi)=(1:\pi')=1:\varphi$ καὶ $\pi'=$ $=\pi\varphi:(\pi+\varphi)=200:30=$ περίπου $6{,}66$ ἑκ., εἶναι ἡ ἀπόστασις τοῦ εἰδώλου ἀπὸ τοῦ ὀπτικοῦ κέντρου τοῦ φακοῦ. Ἐπίσης ἔχομεν $A:E=\pi:\pi'=$ $=10:6{,}66$ εἶναι ἡ ζητουμένη σχέσις.



(Σχ. 49)

204) $1:\varphi=1:0{,}04=100:4=25$ διοπτρίαι ἡ ἰσχὺς τοῦ φακοῦ.

Ζ΄. ΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ

205) $\delta=\mu\mu':\alpha^2=40\cdot 30:10^2=12$ δῦναι.

206) $\delta=\mu\mu':\alpha^2$ καὶ $\mu=\alpha^2\delta:\mu'=2^2\cdot 981:80=49{,}05$ μαγν. μονάδες, εἶναι ἡ μαγν. μᾶζα τοῦ δευτέρου πόλου.

207) -9 δῦναι$:0{,}18$ *gauss*$=-50$ εἶναι τὸ ζητούμενον πλῆθος.

208) Ἐπὶ ἑκάστου τῶν πόλων τοῦ μαγνήτου ἐξασκοῦνται αἱ αὐταὶ δυνάμεις, κατ' ἀπόλυτον τιμήν, ἀλλ' ἀντιθέτου φορᾶς, ἑκάστη τῶν ὁποίων ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς μαγνητικῆς μάζης τοῦ πόλου ἐπὶ τὴν ἔντασιν τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου εἰς *gauss*. Ἤτοι ἐπὶ τοῦ βορείου μὲν πόλου ἔχομεν ἑλκτικὴν δύναμιν ἴσην μὲ $+0,556 \cdot 400 = +222,4$ δῦναι. Ἐπὶ τοῦ νοτίου δὲ πόλου τοῦ μαγνήτου ἐξασκεῖται ἄπωσις $-0,556 \cdot 400 = -222,4$ δῦναι.

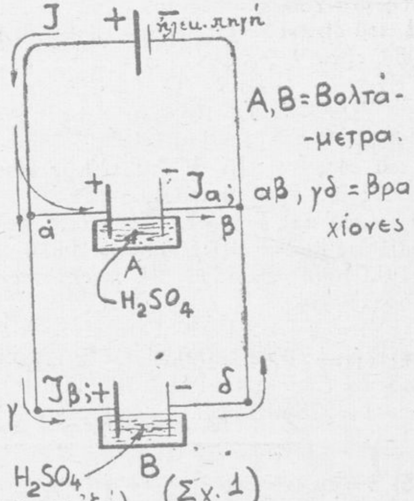
Η'α ΔΥΝΑΜΙΚΟΣ ΗΛΕΚΤΡΙΣΜΟΣ

209) $I=Q:t$, ἄρα $Q=It=2 \cdot 3 \cdot 60^2=21600$ *Coulombs* εἶναι ἡ ἠλεκ. ποσότης.

210) $Q=It=0,8 \cdot 60^2 \cdot 10=28800$ *Coul.* εἶναι ἡ ἠλεκτρ. ποσότης.

211) $I=Q;t=1500:1800=0,84$ *Amp.* εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ ρεύμ.

212) Τὸ $1\mu^3=1000$ κυβικαὶ παλάμαι, ὅθεν τὰ $2\mu^3=2000$ κ. π. Ἡ μία κυβ. παλ. ὑδρογόνου ζυγίζει περίπου 0,1 γραμ. Ὅθεν αἱ 2000 κυβ παλ. ὑδρογόνου ζυγίζουν $2000 \cdot 0,1=200$ γραμ. Ὁμοίως τὰ 0,00001035 γραμ. ὑδρ. καταναλίσκουν ρεῦμα 1 *Coulomb*, συνεπῶς τὰ 200 γρ. ὑδρογόνου καταναλίσκουν 0,00001035 200=19323665 περίπου *Coul.* Ὥστε 19323665 *Coul.* χρειάζονται, ἵνα ληφθοῦν δι' ἠλεκτρολύσεως $2\mu^3$ ὑδρογόνου. **β)** Ἐπίσης ἔχομεν $I=Q:t$ καὶ $t=Q:I$, ἤτοι $t=19323665:10=1932366,5''$ θὰ χρειασθοῦν



(Σχ. 1)

213)(Σχ. 1)Τὰ 1000 κ. ἑκ. ὑδρογόνου ζυγίζουν 0,1 γραμ. ($1,293 \cdot 0,08$), συνεπῶς τὰ 100 κ. ἑκ. ὑδρ. ζυγίζουν 0,01 γραμ. Καὶ ἐπειδὴ τὰ 0,00001035 γραμ. ὑδρογόνου καταναλίσκουν ποσότητα ρεύματος 1

Coulomb, τὰ 0,01 γραμ. καταναλίσκουν περίπου 966 *Coulombs*.Ὥστε $I_\alpha = Q{:}t = 966{:}600 = 1,61$ *Ampères* εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἰς τὸν βραχίονα αβ. Ὁμοίως ἔχομεν διὰ τὸν βραχίονα γδ, ὅτι τὰ 150 κ. ἑ. ὑδρογόνου ζυγίζουν $150 \cdot 0,1{:}1000 = 0,015$ γραμ., διὰ τὰ ὁποῖα καταναλίσκεται ἠλεκτρικὴ ποσότης $0,015{:}0,00001035 = 1439$ *Coul.* Ὥστε $I_\beta = 1439{:}600 =$ περίπου 2,39 *Amp.* εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἰς βραχίονα γδ.

214) Κατηναλώθη ποσότης $7{:}1035 \cdot 10^{-8} = 676338$ *Coul.*

215) Τὰ 0,00033 γρ. χαλκοῦ κατηνάλωσαν ποσότητα 1 *Coul.* διὰ τὰ 33 γρ. κατηναλώθησαν $33{:}0,00033 = 10^5$ *Coul.* Ἐπίσης ἔχομεν $I = Q{:}t = 100000{:}3600 = 27,72$ *Amp.* ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος.

216) Ἀπηλευθερώθη ἴση ποσότης, ἤτοι 5 γρ. θείου

217) Ὡς γνωστόν, τὸ ὑδρογόνον κατὰ τὴν ἠλεκτρόλυσιν, ὡς ἰὸν φέρον θετικὸν φορτίον ἠλεκτρισμοῦ, ἐπικάθηται ἐπὶ τοῦ ἀρνητικοῦ ἠλεκτροδίου (καθόδου), ὡς κατίον. Ἤδη ἔχομεν ὅτι $1\mu^3 = 1000$ κ. π. Ἐπίσης γνωστόν, ὅτι $1\mu^3$ ἀέρος ζυγίζει 1293 γραμμάρια. Ὅθεν $1293 \times 0,08 =$ περίπου 103 γραμ. ζυγίζει τὸ $1\mu^3$ ὑδρογόνου. Συνεπῶς ἀφοῦ τὰ 0,00001035 γραμ. ὑδρογόνου διὰ νὰ ἀπελευθερωθοῦν, χρειάζονται 1 *Coulomb*, τὰ 103 γραμμάρια ὑδρογόνου χρειάζονται $103{:}0,00001035 = 9661832$ *Coulombs*. Ἐπίσης $I = Q{:}t$ καὶ $t = Q{:}I = 9661832{:}1 = 9661832''$ εἶναι ὁ ζητούμενος χρόνος (δηλαδὴ εἰς διάστημα 3 μηνῶν 21 ἡμερῶν 19 ὡρῶν 50′ καὶ 32″, θὰ γίνῃ τὸ ζητούμενον ὑπὸ τῆς ἀσκήσεως).

218) $I = I_1 + I_2 + I_3 = 0,2 + 0,3 + 0,1 = 0,6$ *Amp.*, ἡ ἔντ. εἰς κυρ. ἀγωγ. κυκλ.

219) Ἔχομεν $r = L\rho{:}S$. Τὸ $L = 10^2$ ἑκ., $\rho = 1,6 \cdot 10^{-6}$ Ωμ, $= S = 3,14 \cdot 0,1^2{:}4$. Ὥστε $r = 1,6 \cdot 10^2 \cdot 4{:}10^6 \cdot 3,14 \cdot 0,1^2 = 1,6 \cdot 10^4 \cdot 4{:}10^6 \cdot 3,14 = 1,6 \cdot 4{:}10^2 \cdot 3,14 = 6,4{:}314 = 64{:}3140 = 16{:}785 = 0,02$ *Ohms*, εἶναι ἡ ἀντίστασις τοῦ σύρματος. **β)** Θ' ἀπαιτηθοῦν ἀντιστοίχως 10 μ. ἢ 50 μ., ἢ 0,1 μ. ἐκ τοῦ ἀγωγοῦ τούτου.

220) $r = L\rho{:}S$ καὶ $\rho = rS{:}L$ (Τὸ 1 τετρ. χιλ $= 0,01$ τετρ. ἑκατ). Ὅθεν $\rho = 0,01 \cdot 1{:}106,3 = 0,01{:}106,3 = 1{:}10630$ Ὠμ, ἢ $10^6{:}10630 = 10^5{:}1063 = 1{:}0,01063 =$ περίπου 94 *microhms* εἶναι ἡ εἰδικὴ ἀντίστασις ταῦ ὑδραργύρου.

221) $I = V{:}r = 2{:}1 = 2{:}1 = 2$ *Amp* εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος.

222) $I = E{:}(R + r) = 2,1{:}(0,05 + 1) = 2,1{:}1,05 = 2$ *Amp.*

223) $r = L\rho{:}S$ καὶ $L = r\,S{:}\rho = 1 \cdot 0,00785{:}11 \cdot 10^{-6} = 0,00785{:}11 \cdot 10^{-6} = 10^6 \cdot 0,00785{:}11 = 7850{:}11 = 714$ ἑκ. εἶναι τὸ μῆκος. $(S = \pi\alpha^2 = 3,14\left(\frac{0,1}{2}\right)^2 = 0,00785$ τετρ. ἑκ.)

224) $I = E{:}(r + R)$ ἢ $15 = E{:}(30 + R)$ καὶ $E = 15(30 + R)$, (E = Η.Ε.Δ στοιχείου). Ὁμοίως $I = E{:}(r + R)$, (Τὸ $I = E{:}(r + R) = E{:}r + R$, εἶναι τὸ $I = \frac{E}{r + R}$), ἢ $40 = E{:}(1,5 + R)$ καὶ $E = 40(1,5 + R)$.

᾿Αλλὰ ἡ Η.Ε Δ. εἶναι ἡ αὐτὴ καὶ ὑπὸ τὰς δύο περιπτώσεις. Ἄρα $15(30+R)=40(1,5+R)$ ἢ $450+15R=60+40R$ ἢ $15R-40R=$ $=30-450$ ἢ $25R=390$ καὶ $\mathbf{R}=390:25=16,6$ *ohms* εἶναι ἡ ἀντίστασις τοῦ στοιχείου.

225) $I=1,2=n\text{E}:(n\mathbf{R}+r)=10\ 1,8:(10\cdot0,5+r)=18:(5+r)$. Ὥστε $1,2=18:(5+r)$ ἢ $5+r:18=1:1,2$ ἢ $(5+r)1,2=18$ (Διότι εἰς τὴν ἀναλογίαν τὸ γινόμενον τῶν μέσων ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων), ἢ $1.2\cdot5+1,2r=18$, ἢ $6+1,2r=18$ ἢ $1,2r=12$ καὶ $r=\dfrac{12}{1,2}=10 ohms$ εἶναι ἡ ἐξωτερικὴ ἀντίστασις (ἀντίστασις ἀγωγοῦ).

226) Ἡ Η.Ε.Δ. ἑνὸς στοιχείου πλήρους (μὴ τεθέντος ἐν λειτουργίᾳ) εἶναι 1,8 *Volts*. Ὥστε ἔχομεν $I=nE:(nR+r)=10\cdot1,8:(10R+10)=$ $=1,2$ ἢ $(10R+10):10\cdot1,8=1:1,2$ ἢ $1,2(10R+10)=18$ ἢ $12R+12=$ 18, ἢ $12R=18-12=6$ καὶ $R=0,5$ *ohms* εἶναι ἡ ἀντίστασις ἑκάστου στοιχείου. β) Διὰ τὴν ἀντίστασιν τῆς ἠλεκτρικῆς πηγῆς (στήλης ἐπὶ τοῦ προκειμένου), ἤτοι καὶ τῶν 10 στοιχείων, θὰ ἔχωμεν $nR=10\cdot(1:2)=$ $=5$ *ohms*. Ἡ δὲ ὁλικὴ ἀντίστασις εἶναι $nR+r=5+10=15$ *ohms*.

227) $I=En:(nR+r)=0,75$. Ἤτοι $En=I(nR+r)=0,75(nR+r)$ (1) (διὰ τὸ ἀρχικὸν κύκλωμα). Ὡσαύτως μετὰ τὴν εἰσαγωγὴν τῆς συμπληρωματικῆς ἀντιστάσεως 5 *ohms* ἔχομεν $I_1=En:[nR+(r+5)]=0,6$. Ἤτοι $En=I_1(nR+r+5)=0,6(n\mathbf{R}+r+5)$ (2). Ὥστε ἀφοῦ τὰ πρῶτα μέλη τῶν ἰσοτήτων (1) καὶ (2) εἶναι ἴσα, θὰ εἶναι ἴσα καὶ τὰ δεύτερα. Συνεπῶς θὰ ἔχωμεν $0,75(nR+r)=0,6(nR+r+5)$, ἢ $0,75(nR+r)=$ $=0,6(nR+r)+0,6\cdot5$, ἢ $0,75(nR+r)-0,6(nR+r)=3$, ἢ $0,15(nR+r)=$ 3 καὶ $nR+r=3:0,15=300:15=20$ *ohms* εἶναι ἡ ἀρχικὴ ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος. Ἤδη διὰ τὴν Η.Ε.Δ. θὰ ἔχωμεν $I=En:(nR+r)$, ἢ $0,75=$ $=10\text{E}:20$ ἢ $10\text{E}=20\cdot0,75=15$ καὶ $\text{E}=15:10=1,5$ *Volts* εἶναι ἡ Η.Ε Δ. τῆς ἠλεκτρικῆς πηγῆς (στήλης).

228) $I=nE:(nR+r)$ ἢ $2,4=1,8n:(n.0,5+10)$, ἢ $2,4(n.0,5+10)=$ $1,8n$, ἢ $1,2n+24=1,8n$, ἢ $1,2n-1,8n=-24$, ἢ $-0,6n=-24$, ἢ $0,6n=24$ καὶ $n=24:0,6=240:6=40$ εἶναι τὰ στοιχεῖα. **229)** Μικτὴ σύνδεσις. Ἔχομεν $I=n\text{E}=[(nR:m)+r]$. Ὅπου $n=100, m=2$. Ζητεῖται τὸ $nR:m$. Ὅθεν $nR:m=1,5\cdot100:2=50\cdot1,5=75$ *ohms* τὸ ζητούμενον. **230)** Η.Ε.Δ. στοιχείου *Bunsen* μὴ τεθέντος ἐν λειτουργίᾳ $=1,8$ *Volts*. Ἔχομεν $I=nE:(n\mathbf{R}+r)=10\cdot1,8\ (10\cdot0,4+2)=18:6=3$ *Amp*. **231)** $I=En:(\mathbf{R}+nr)=1,8\cdot10:(0,4+10\cdot2)=18:20,4=0,9$ *Amp*.

232) α) Ἀντίστασις $\mathbf{R}'$ πηγῆς (ἐσωτ. ἀντ.). Ἔχομεν $I'=\text{E}:(\mathbf{R}'+r')$, ἤτοι $\text{E}=I'(\mathbf{R}'+r')$ (1), ἔνθα $I'=10$ *amp*., $r'=20$ *ohms* καὶ $\text{E}=$ ἡ σταθερὰ Η.Ε.Δ. τῆς πηγῆς. Ὡσαύτως διὰ τὸ δεύτερον σύρμα, ὅπου ἔντασις $I''=8$ *amp*., $r''=40$ *ohms*, ἔχομεν $I''=\text{E}:(\mathbf{R}'+r'')$ ἤτοι $\text{E}=$ $=I''(\mathbf{R}'+r'')$, (2) καὶ διὰ τὸ τρίτον σύρμα ἔχομεν $I'''=\text{E}:(\mathbf{R}'+\mathbf{x})$ ἤτοι $\text{E}=I'''(\mathbf{R}'+\mathbf{x})$, (3), ἔνθα $I'''=9$ *ampères* καὶ $\mathbf{x}$ ἡ ἄγνωστος ἀντίστασις τοῦ τρίτου ἀγωγοῦ. Ἤδη ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ἔχομεν $I'(\mathbf{R}'+r')=I''(\mathbf{R}'+r'')$, ἢ $10\ (\mathbf{R}'+20)=8(\mathbf{R}'+40)$. ἢ $10\mathbf{R}'+200=8\mathbf{R}'+320$, ἢ $2\mathbf{R}'=120$ καὶ $\mathbf{R}'=60$ *ohms* εἶναι ἡ ἐσωτερ. ἀντ. (ἀντίστασις τῆς πηγῆς). **β)** Διὰ τὴν

Η.Ε.Δ. ἔχομεν ὅτι $E=I'(R'+r')=10(60+20)=800$ *Volts*, ἢ $E=I''(R'+r'')=8(60+40)=800$ *Volts* εἶναι ἡ Η.Ε.Δ. τῆς πηγῆς. γ) Διὰ τὴν ἀντίστασιν **x** τοῦ τρίτου σύρματος ἔχομεν ἀπὸ τὴν (3), $E=I'''(R'+x)$, ἢ $800=9(60+x)$, ἢ $800-540=9x$, ἢ $260=9x$ καὶ $x=260:9$ καὶ $x=260:9=$περίπου 28,88 *ohms* ἡ ἀντίστασις τοῦ τρίτου ἀγωγοῦ. **233)** α) $W=EIt=1000\cdot10\cdot2\cdot3600=72$ ἑκατομμύρια *Joules* τὸ παραγόμενον ἔργον. β) $P=E\cdot I=1000\cdot10=10000$ *Watts* εἶναι ἡ ἰσχὺς ($=10000$ *Joules* ἀνὰ δευτερόλεπτον). **234)** α) $W=E^2t:R=1000^2\cdot30\cdot60'':100=18$ ἑκατ. *Joules* ἡ ἠλεκτρικὴ ἐνέργεια (ἠλεκτρικὸν ἔργον). β) $P=E^2:R=1000^2:100=10^4$ *Watts*$=10^4:10^3=10$ *Kilowatts* εἶναι ἡ αἰτουμένη ἰσχύς. **235)** α) $Q=AEIt=1000\cdot10\cdot3600:4,18=8612440$ μικραὶ θερμ. τὸ παραγόμενον ποσὸν θερμότητος εἰς 1 ὥραν. β) $W=EIt=1000\cdot10\cdot3600=36000000$ *Joules* εἶναι τὸ ἠλεκτρικόν, ἀντίστοιχον πρὸς τὴν θερμότητα, ἔργον.

236) α) $Q=AI^2Rt$ (ἔνθα $A=1:4,18$ μικραὶ θερμ.). Ὅθεν $Q=10^2\cdot100\cdot600:4,18=1210527$ μικραὶ θερμ. ἡ παραγ. θερμότης β) $W=I^2Rt=10^2\cdot10^2\cdot600=6\cdot10^6$ *Joules* τὸ ἠλεκτρ. ἔργον. γ) $P=I^2R=10^2\cdot10^2=10^4$ *Watts*, ἢ 10 *Kilowatts* ἡ ἰσχὺς τῆς πηγῆς.

237) $Q=mc(\vartheta_2-\vartheta_1)$. Ἤτοι $Q=2030(30-20)=2030\cdot10=20300$ μικραὶ θερμίδες εἶναι τὸ ποσὸν τῆς ἐκλυομένης θερμότητος. (**Σημείωσις.** Λέγοντες ἰσοδύναμον τοῦ θερμιδομέτρου ὅτι εἶναι 30 γραμμάρια ἐννοοῦμεν, ὅτι ἡ καταναλωθησομένη ποσότης θερμότητος διὰ τὴν ἀνύψωσιν καὶ τῆς θερμοκρασίας τοῦ θερμιδομέτρου, ὅπερ περιέχει τὸ ὕδωρ, εἰς τὴν θερμοκρασίαν τοῦ ὕδατος, εἶναι ἡ αὐτὴ ὡς ἐὰν θὰ ἐπρόκειτο ν' ἀνυψώσωμεν εἰς τὴν ἰδίαν θερμοκρασίαν, 30 γραμμάρια ἐπὶ πλέον ὕδατος. Διότι εἶναι φυσικόν, ὅπως μαζὺ μὲ τὴν ἀνύψωσιν τῆς θερμοκρασίας τοῦ ἐντὸς τοῦ θερμιδομέτρου ὕδατος ἀνυψωθῇ καὶ ἡ θερμοκρασία τοῦ θερμιδομέτρου, ἐν τοιαύτῃ ὅμως περιπτώσει, φυσικὸν ἐξ ἴσου εἶναι ὅτι, διὰ τὴν ἐνέργειαν ταύτην δέον νὰ καταναλωθῇ ποσότης θερμότητος). Ὡσαύτως $Q=AEIt$ καὶ $E=Q:AIt=20300:\dfrac{1\cdot600}{4,18}$ καὶ μετασχηματίζοντες τὸ σύνθετον τοῦτο κλάσμα εἰς ἁπλοῦν εὑρίσκομεν ὅτι ἰσοῦται μὲ $20300\cdot4,18:600=141,42$ *Volts*, Ἀλλὰ $I=E:r$ καὶ $r=E:I=141,42:1=141,42$ *ohms* εἶναι ἡ ἀντίστασις τοῦ σύρματος. (**Σημείωσις.** Ἡ ἀντίστασις τοῦ σύρματος **R** ἠδύνατο νὰ εὑρεθῇ καὶ ἐκ τοῦ τύπου $Q=I^2RAt$, ταχύτερον). **238)** $Q=AI^2Rt=2^2\cdot4\cdot30\cdot60:4,18=28800:4,18=6889$ μικραὶ θερμ. εἶναι ἡ ποσότης θερμότητος. Ἐπίσης γνωστὸν ὅτι $Q=mc\vartheta$ καὶ $\vartheta=Q:mc$ $6889:400\cdot1=17,22^0$ ἤτοι περίπου 17^0C εἶναι ἡ ἀνύψωσις τῆς θερμοκρασίας τοῦ ὕδατος. **239)** $Q=AI^2Rt=1\cdot10\cdot60\cdot0,5:4,18=71,77$ θερμίδες ἡ παραγομένη θερμότης. Ἀλλὰ $Q=mc\vartheta$ καὶ $\vartheta=Q:mc=71,77:20,25\cdot0,0322=71,77:0,652=$περίπου 110^0C θὰ εἶναι ἡ ὕψωσις τῆς θερμοκρασίας τοῦ ὑδραργύρου. **240)** $Q=mc(\vartheta_2-\vartheta_1)=1000\,(100^0-15)=1000\cdot85=85000$ μικραὶ θερμίδες εἶναι ἡ ποσό-

της τῆς θερμότητος. (Βαθμὸς ζέσεως τοῦ ὕδατος εἶναι οἱ 100°K).
Ὁμοίως ἔχομεν $Q=I^2ARt$ καὶ $t=Q:I^2AR=85000:\frac{25\cdot24}{4,18}$ καὶ τρέποντες τὸ σύνθετον κλάσμα εἰς ἁπλοῦν εὑρίσκομεν τὸ ἴσον του $85000\cdot4,18:25\ 24=355300:600=592''$ εἶναι τὸ ζητούμενον.

Η β ΗΛΕΚΤΡΟΣΤΑΤΙΚΗ

241) $\sigma=q:4\pi r^2$ καὶ $q=4\pi r^2\cdot\sigma=4\cdot3,14\cdot1,5^2\cdot7=197,82$ ἠλεκτροστατικαὶ μονάδες ποσότητος ἠλεκτρισμοῦ ἢ $197,82:3\cdot10^9$ *Coulombs* εἶναι τὸ φορτίον. ($4\pi r^2$=ἐπιφ. σφαίρας).

242) $F=qq':r^2=12\cdot(-8):2^2$=μὲ (-24) δύνας ἕλκονται.

243) $\sigma=q:4\pi r^2$ καὶ $q=\sigma\cdot4\pi r^2=10\cdot2461,76=24617,6$ ἠλεκτροστ. μονάδες ἠλεκ. εἶναι ἡ ἠλεκτρικὴ ποσότης της. ($4\pi r^2=2461,76cm^2$). Ἀλλὰ τὸ δυναμικὸν σφαίρας ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τοῦ φορτίου της πρὸς τὴν ἀκτῖνα. Ἤτοι $V=24617,6:14=1759,2$.

244) $F=q\cdot q':r^2=(3\ 10^9)^2:10^6=3^2\cdot10^{12}$ δῦναι εἶναι ἡ ἀμοιβαία ὠστική των δύναμις. ($q=q'$, ὅθεν $qq'=q^2$).

245) $C=Q:V$ καὶ $Q=VC$. Ἤτοι $Q=50\cdot10^2\cdot10^{-6}=0,005$ *Coul.* εἶναι τὸ δοθησόμενον φορτίον.

246) $V=Q:C$, ἢ $30=Q:10$ καὶ $Q=300$ *Coul.* εἶναι τὸ φορτίον.

247) Ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας, ἐὰν ἡ χωρητικότης της ἦτο 1 *farad*, θὰ ἦτο 1 ἑκ. Ἤδη ἡ ἀκτίς της εἶναι 10^{-6} ἑκ.

248) Ἔστωσαν r καὶ R αἱ ἀκτῖνες τῶν δύο σφαιρῶν, αἵτινες ἔχουν σχέσιν μεταξύ των ὡς ὁ 7 πρὸς 11, καὶ σ καὶ σ′ ἀντιστοίχως αἱ πυκνότητές των. Τότε θὰ εἶναι $r:R=7:11$ καὶ $r=7R:11$ (1). Ὡσαύτως $\sigma=q:4\pi r^2$ (2) καὶ $\sigma'=q:4\pi R^2$ (3). Διαιροῦντες τὰς (2) καὶ (3) ἰσότητας κατὰ μέλη καὶ ἀντικαθιστῶντας τὴν τιμὴν τῆς r συναρτήσει (διὰ τῆς τιμῆς) τῆς R λαμβάνομεν

$$\sigma:\sigma=\frac{q:4\pi\left(\frac{7}{11}R\right)^2}{q:4\pi R^2}=\frac{4\pi R^2q}{4\pi q\frac{49R^2}{121}}$$

ἢ $\sigma:\sigma'=121\ 4\pi R^2q:4\pi q49R^2$ καὶ μετὰ τὰς ἁπλοποιήσεις $\sigma:\sigma'=121:49$, εἶναι ἡ ζητουμένη σχέσις.

249) Οἱ δύο ἀγωγοὶ λαμβάνουν κοινὸν δυναμικόν, ὅπερ ἰσοῦται μὲ τὸν μέσον ὅρον τῶν δυναμικῶν, ἅ εἶχον πρὸ τῆς συνδέσεώς των. Ἤτοι 7 *Volts*.

250) Ἔστω q τὸ ἀρχικὸν φορτίον τῆς ἠλεκτρισμένης σφαίρας. Συνεπῶς τὸ φορτίον τῆς ἄλλης σφαίρας, ὅταν θὰ ἔλθῃ εἰς ἐπαφήν, θὰ ἰσοῦται μὲ $q:2=0,5q$.

Ὥστε $F=\frac{q}{2}\cdot\frac{q}{2}:r^2$ ἢ $9=\left(\frac{q}{2}\right)^2:10^2=\frac{q^2}{4}:100=$

$=q^2:400$. Ἢ $q^2=400\cdot9=3600$ καὶ $q=60$ ἠλεκτροστ. μονάδες ἦτο τὸ ἀρχικὸν φορτίον τῆς ἠλεκ. σφαίρας.

251) $F=q\cdot q':r^2$, $F=5\cdot981000=4905\cdot10^3$ δῦναι. Ὅθεν $4905\cdot10^3=$ $=40q':25$ καὶ $q'=25\cdot4905\cdot10^3:40=3065625$ ἠλεκτροστ. μονάδες εἶναι τὸ φορτίον τῆς ἑτέρας σφαίρας.

252) $C=\mathbf{Q}:V$ καὶ $\mathbf{Q}=VC=100\cdot200\cdot10^{-6}=0{,}02$ *Coul.* τὸ φορτίον.

253) Ἔστωσαν π καὶ π′ τὰ φορτία τῶν δύο σφαιρῶν. Ὅθεν τὸ δυναμικόν των εἶναι π:1 καὶ π′:2. Ἀλλὰ κατὰ τὸ πρόβλημα ἔχομεν ὅτι ἀμφότερα ταῦτα εἶναι ἴσα μὲ 40. Ἤτοι π:1=π′:2=40. Ἢ π=40 καὶ π′=80. Ἤδη ἐφαρμόζοντες τὸν νόμον *Coulomb* εὑρίσκομεν $\pi\cdot\pi':\alpha^2=40\cdot80:\alpha^2=4$ δῦναι. Ἐξ οὗ $\alpha^2=40\cdot80:4=800$ καὶ $\alpha=$ $=\sqrt{800}=28{,}2$ *cm.* εἶναι ἡ μεταξὺ τῶν δύο σφαιρῶν ἀπόστασις.

254) Ἔστωσαν π καὶ π′ τὰ φορτία τῶν δύο σφαιρῶν καὶ *V* τὸ κοινὸν αὐτῶν δυναμικόν. Θὰ ἔχωμεν ὅτι π:0,8=π′:1=**V**, ἤτοι π=0,8 *V* καὶ π′=*V*. Ἤδη συμφώνως τῷ Νόμῳ *Coulomb* ἔχομεν $10=\pi\pi':8^2$ (1), ἢ ἀντικαθιστῶντες εἰς (1) τὰ π καὶ π′ διὰ τῶν τιμῶν των λαμβάνομεν $10=0{,}8\,V\cdot V:8^2=0{,}8\mathbf{V}^2:64$, ἐξ οὗ $\mathbf{V}^2=640:0{,}8=800$ καὶ $\mathbf{V}=\sqrt{800}=$ $=28{,}3$, εἶναι τὸ κοινὸν δυναμικὸν τῶν 2 σφαιρῶν.

Σημείωσις. Εἰς τὰς λύσεις τῶν ἀσκήσεων, ὡς καὶ ἀλλαχοῦ ἐγράφη, οἱ κλασματικοὶ ἀριθμοί, δι᾽ οἰκονομίαν χώρου, ἀντεκαθεστάθησαν πολλάκις διὰ τῶν ἴσων των δεκαδικῶν ἀριθμῶν, εὐρυτάτη δὲ ἐγένετο χρῆσις τοῦ γνωστοῦ συμβόλου τῆς διαιρέσεως (:) ἀντὶ τῆς γραμμῆς τοῦ κλάσματος (—=διά). Οὕτω κατὰ τὴν λύσιν τῶν ἀσκήσεων ἀντὶ π.χ. $\frac{1}{0{,}5\alpha+\varepsilon\Phi'}$ σημειοῦται $1:(0{,}5\alpha+\varepsilon\Phi')$.

Ἢ ἀντὶ $\frac{3\alpha}{\frac{2}{5}+\gamma}$ γράφεται $3\alpha:[(2:5)+\gamma]$, ἢ ἀντὶ $\frac{2}{2+\frac{\alpha}{2}}$ σημειοῦται $2:[2+(\alpha:2)]$, ἢ ἀντὶ $S=\frac{1}{2}\gamma t^2$ σημειοῦται $S=\gamma t^2:2$ ἢ $S=0{,}5\gamma t^2$, ἢ ἀντὶ $\frac{\alpha^2+2\beta}{\alpha}$ γράφεται $(\alpha^2+2\beta):\alpha$ κλπ.

ΤΕΛΟΣ

I. Διόρθωσις τυπογραφικῶν σφαλμάτων, Πρώτου Μέρους.

1) Εἰς σχῆμα **α**, σελίδος 14, τὸ ἐπὶ τῆς εὐθείας **εγ** γράμμα εἶναι τὸ ζ. 2) Σχῆμα γ, σελ. 14, νὰ γραφῇ **F** ἀντὶ F_1. 3) τετάρτην παράγραφον τοῦ **ροπαὶ δυνάμεων**, σελὶς 15, νὰ γραφῇ $P(F_3)$ ἀντὶ $P(F^3)$ 4) Σελὶς 18, κάτω δεξιά, γράψατε $\left(\frac{V_0}{g}\right)''$ ἀντὶ τοῦ $\left(\frac{V_0}{g^1}\right)''$. Εἰς ἀρχὴν τρίτης παραγράφου, ἰδίας σελίδος, γράψατε **S** ἀντὶ S_t 5) σελίδα 19, ἑβδόμην σειράν, νὰ καθαρογραφῇ τύπος $H=V_0^2:2g$. 6) σχῆμα σελίδος 22, γράψατε x ἀντὶ **χ** 7) ἄσκησιν 41, σελὶς 19 γράψετε **ἐπιτάχυνσιν** ἀντὶ ἐπιτάχυναν. 8) σελὶς 21, δευτέραν σειρὰν κάτωθι σχήματος, γράψατε *h* ἀντὶ *h*— 9) πέμπτην σειρὰν ἀπὸ τῆς ἀρχῆς σελίδος 27, μεταξὺ τῶν λέξεων **Watt** καὶ ἔργια καθαρογράψατε (**μὲ** 10^7). **10)** ἄσκησιν 68, σελ. 27, γράψατε **βάρους** ἀντὶ μάρους **11)** Σελὶς 31, πέμπτην σειρὰν ἀπ' ἀρχῆς τοῦ **ὑδραυλικοῦ πιεστηρίου**, κλείσετε παρένθεσιν μετὰ τὴν λέξιν **ἐμβόλου**. **12)** Σελὶς 35, εἰς **εἰδικὸν βάρος πυκνότης,** πρώτην σειράν, γράψατε **ε** ἀντὶ **Ε** **13)** Σελὶς 35, πρώτην σειρὰν ἄνωθεν ἀσκήσεως 80, γράψατε 0^0, ἀντὶ C^0. **14)** ἀσκ 89, σελὶς 36, πρώτην σειρὰν, γράψατε **87** ἀντὶ **84** **15)** Ἄσκησιν 103, σελὶς 38, γράψατε **σχ.** θ ἀντὶ **σχ. ϑ** **16)** Σελὶς 40, τελευταίαν σειρὰν ἀσκήσεως 113 γράψατε **περὶ ἐλαίου** ἀντὶ **περὶ ὕδατος** **17)** ἕκτην σειρὰν τοῦ **Διαφορὰ πιέσεων,** σελὶς 43, ἀντὶ τῆς φράσεως «Ἔνθα **ε** τὸ γινόμενον τοῦ εἰδικοῦ βάρους τοῦ ἀερίου ἐπὶ τὸ βάρος τοῦ ἀέρος τοῦ ἀντιστοιχοῦντος εἰς τὸν ὄγκον **hω**» νὰ γραφῇ (Ἔνθα **ε** τὸ γινόμενον τοῦ εἰδικοῦ βάρους τοῦ ἀερίου ὡς πρὸς τὸν ἀέρα, ἐπὶ τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ἀέρος ὡς πρὸς τὸ ὕδωρ, ἢ ἄλλως πως, **ε** εἶναι τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ἀερίου ὡς πρὸς τὸ ὕδωρ). **18)** Σελὶς 44, **ἐνεργὸς πίεσις,** γράψατε h_ε (=ἐνεργὸς πίεσις), ἀντὶ **hε**. **19)** Σελὶς 45, τρίτην σειρὰν ἀπὸ τῆς ἀρχῆς, γράψατε **ὑδραργυρικῆς** ἀντὶ **ὑδραυλικῆς** **20)** κάτω σελίδος 53, καθαρογράψατε τὸν τύπον $\lambda=M_\vartheta-M_0:M_0\vartheta$ **21)** ἀρχὴν πρώτης σειρᾶς σελ. 70, γράψατε **(—φ)** ἀντὶ **(φ)** καὶ **Οε** ἀντὶ **(—Οε)**. **22)** Σελὶς 92, σχ. 11, ἀντὶ r_1I_3 γράψατε $r_1'I_2$· ὁμοίως ἀντὶ r_2I_2, γράψατε $r_2'I_2$· ὡσαύτως δεκάτην σειρὰν ἀπὸ τῆς ἀρχῆς ἰδίας σελίδος, γράψατε (**μεταξὺ Β καὶ Γ**), ἀντὶ **μεταξὺ ΒΓ**· πέμπτην σειρὰν, ἀπὸ τοῦ τέλους ἰδίας σελίδος, ἀντὶ $I_2=V_1r_1:r_1'$, γράψατε ὀρθὸν $I_2=V_1:r_1'$ **23)** Σελὶς 96, περίπτωσις γ καὶ μετὰ τὴν φρᾶσιν (**Γνωστοὶ ἐπίσης οἱ τύποι** (2), προσθέσατε (**σελίδος 95**) καὶ **24)** Σελὶς 79 ἀντὶ ἄσκησις **103.** γράψατε 194.

II Προσθῆκαι Πρώτου Μέρους.

1] Ὅσον ἀφορᾷ τὸ τί παριστοῦν τὰ S_t, V_t, γ καὶ **t,** εἰς τοὺς τύπους σελίδος 7, εἰς τί μονάδας ἐκφράζονται ταῦτα, ὡς ἐπίσης διὰ τὴν ἐκλογὴν ἑκάστοτε τοῦ καταλλήλου τύπου πρὸς εὕρεσιν τῆς ταχύτητος κινητοῦ, ἰσχύουν πάντα ὅσα ἀναγράφονται σχετικῶς εἰς ἑπομένην σελίδα 8, διὰ τὰ ἀντίστοιχά των S_t, V_t, γ καὶ **t**, διὰ κινητὸν κινούμενον μετ' ἀρχικῆς ταχύτητος. 2] Εἰς τὸν τύπον $S_t = Vt$, τῆς ἰσοταχοῦς περιοδικῆς κυκλικῆς κινήσεως [σελὶς 9], τὸ S_t παριστᾶ τὸ διανυόμενον ὑπὸ τοῦ κινητοῦ διάστημα, ἐπὶ τῆς κυκλικῆς τροχιᾶς του, εἰς χρόνον **t**, τὸ **V** τὴν γραμμικὴν ταχύτητα τοῦ κινητοῦ καὶ **t** τὸν χρόνον κινήσεως αὐτοῦ, ἐκπεφρασμένον εἰς δευτερόλεπτα. 3] Εἰς τὸ τέλος ἀσκήσεως 59, νὰ προστεθῇ ἡ φρᾶσις [Τὸ σχῆμα εἰς τὴν λύσιν τῆς ἀσκήσεως] 4] Εἰς δευτέραν σειρὰν ἀπὸ τῆς ἀρχῆς σελίδος 42, μεταξὺ τῆς λέξεως **ἀπεσταγμένου** καὶ τῆς λέξεως **καί**, νὰ προστεθῇ ἡ φρᾶσις **«πιέσεως 1 ἀτμοσφαίρας [κανονικὴ πίεσις]»**. 5] Εἰς τετάρτην σειρὰν ἀπὸ τοῦ τέλους σελίδος 43 καὶ μετὰ τὴν λέξιν ὀ**ξυγόνου** προστεθήτω ἡ φρᾶσις **«θερμοκρα-ίας 0° K καὶ πιέσεως κανονικῆς»**. 6] Τὰ ὄργανα τὰ μετρῶντα τὴν ἔντασιν τοῦ ρεύματος καλοῦνται ἀμπερόμετρα.

Εἰς ἅπαντας τοὺς τύπους κατόπτρων καὶ φακῶν τὸ μῆκος **π** παριστᾶ τὴν ἀπόστασιν τοῦ φωτεινοῦ σημείου ἢ φωτεινοῦ ἀντικειμένου ἀπὸ τοῦ κατόπτρου, τὸ δὲ μῆκος **π'** τὴν ἀπόστασιν τῆς συζυγοῦς ἑστίας ἢ τοῦ εἰδώλου ἀπὸ τοῦ κατόπτρου, ὡς καὶ εἰς τὰ σχετικὰ σχήματα ἐμφαίνεται.

III. Διαοαφήσεις Πρώτου Μέρους.

1] Εἰς τοὺς τύπους σελίδος 7 ἀναγράφεται ὅτι, ἡ ἐπιτάχυνσις ἢ ἐπιβράδυνσις **γ** εἶναι σταθερὰ ποσότης. Ἐννοεῖται ὅτι εἶναι τοιαύτη εἰς ἑκάστην παρουσιαζομένην ὁμαλῶς μεταβαλλομένην κίνησιν. 2] ὁ τύπος ταχυτήτων τῆς σελίδος 7 ($V_t = \sqrt{2\gamma S_t}$), εὑρίσκεται ἐκ τοῦ τύπου διαστημάτων $S_t = V^2_t : 2\gamma$, τῆς ἰδίας σελίδος, ἐὰν οὗτος λυθῇ ὡς πρὸς V_t. 3] Ὁ τύπος τῶν ταχυτήτων $V_t = \sqrt{V^2_0 \pm 2\gamma S_t}$, τῆς σελίδος 8, εὑρίσκεται ἐκ τοῦ τύπου τῶν διαστημάτων $S_t = V_0 t \pm \frac{1}{2}\gamma t^2$ [1] ἐὰν εἰς τὸν τύπον τοῦτον ἀντὶ τοῦ χρόνου **t** τεθῇ τὸ ἴσον του $V_t - V_0 : \gamma$, λαμβανόμενον ἐκ τοῦ ἑτέρου τύπου τῶν ταχυτήτων $V_t = V_0 \pm \gamma t$, καὶ μετὰ ταῦτα λύσωμεν τὴν ἰσότητα [1] ὡς πρὸς V_t. 4] Τὸ κάτω σχῆμα σελίδος 13, ἀναφέρεται εἰς τὰ ὅσα εἰς τὴν πρώτην παράγραφον τῆς σελίδος 14 ἀναγράφονται. 5] Εἰς τοὺς τύπους συνδέσεως στοιχείων ἢ συσσωρευτῶν [Σελὶς 90 καὶ 91], περίπτωσις **β** καὶ **γ** [ἤτοι σύνδεσις ἐν παραλλήλῳ καὶ μικτή], τὰ **I, E** καὶ **r** ἐκφράζουν ὅτι καὶ τὰ ἀντίστοιχά των τῆς **α** περιπτώσεως [σύνδεσις ἐν σειρᾷ] σελίδος 90. Ὁμοίως τὸ **n** τῆς **β** περιπτώσεως, [σύνδεσις ἐν παραλλήλῳ] ἐκφράζει καὶ τοῦτο τὸν ἀριθμὸν τῶν στοιχείων τῆς ὁμάδος. 6] Ἡ διὰ τοῦ γράμματος **ρ** κληθεῖσα ὡς γωνία διαθλάσεως τῶν πρισμάτων, παρίσταται εἰς τὰ σχετικὰ σχήματα [Σχ. 25, I Μέρους καὶ Σχ. 43 καὶ 44 τοῦ II Μέρους] καὶ εἰς τὰς λύσεις τῶν σχετικῶν ἀσκήσεων διὰ ρ.

IV Διορθώσεις τῶν οὐσιωδῶν τυπογρ. σφαλ. Δευτέρου Μέρους.

1] Σελὶς 4, ἄσκησις 15, ἀντὶ $S_{10}=0,5\cdot40-10^2=2000$, γράψατε $S_{10}=0,5\cdot40\cdot10^2$ 2] Σελὶς 5, ἄσκ. 21. ἀντὶ [ἡ] γράψατε [ἢ] 3] Σελὶς 6, ἄσκ. 24, ἀντὶ $S=4=400+\sqrt{160000+400V_0^2}$, γράψατε $S=400\pm\sqrt{160000+400V_0^2}$. 4] Σελὶς 7, ἄσκ. 29, ἀντὶ τοῦ 2:4=Β:Γ0,15, γράψατε **12:4=ΒΓ:0,15** 5] Σελὶς 8, δευτέραν σειρὰν ἀσκήσεως **31** καὶ μεταξὺ τῆς λέξεως **συνισταμένης** καὶ **Δ₁**, ἂς προστεθῇ τὸ σημεῖον [=], 6] Σελὶς 8, ὀγδόην σειρὰν ἀσκ. 34, ἀντὶ 08=0,6 μ., γράψατε **ΟΒ=0,6** μ. 7) Σελὶς 10, τρίτην σειρὰν ἀσκ. 34, ἀντὶ τοῦ $10:0,5\sqrt{5}$ νὰ γραφῇ $10:0,5\sqrt{3}$, 8] Σελὶς 9, κάτω δεξιά, νὰ καθαρογραφῇ τὸ **λογ0,562=$\bar{1}$,74974** 9] Σελὶς 10, ἄσκ. 35, σειρὰ πρώτη καθαρογράψατε τὸν δείκτην, εἰς $\Sigma_{\Delta_1-\Delta_2}$ 10] Σχ. 32, σελὶς 41 ἀντὶ Κ=Κεύτρου, γράψατε **Κ=Κέντρον**. 11] Σελὶς 27, ἄσκ. 108, 10η σειρὰ, εἰς ἰσότητα, γράφε **g** ἀντὶ **δ.** 12] Σελὶς 28, ἕκτη σειρὰ ἐκ τοῦ τέλους, γράφετε **παραστήσωμεν** ἀντὶ παραστήμεν.

V Διορθώσεις τυπογραφικῶν σφαλμάτων

α΄ Εἰς Πρῶτον Μέρος

1) Ἄσκησις 11, ὀρθὸν **10''** ἀντὶ 10', 2) Σελὶς 26, εἰς κάτω τύπους, ὀρθὸν Ph ἀντὶ PR, 3) ἄσκ. 66, ὀρθὸν 200 ἀντὶ 260, 4) ἄσκ. 68, ὀρθὸν **60** ἀντὶ 68, 5) ἄσκ. 84, τρίτη σειρά, ὀρθὸν 0,90 ἀντὶ 0,95 6) ἄσκ. 94, ὀρθὸν 3,397, ἀντὶ 3,367 7) Σελὶς 64, **παραλ. κάτοπτρα** διαγράψατε φρᾶσιν: **(μετὰ τοῦ φωτεινοῦ ἀντικειμένου των).** Προσθέσατε δὲ εἰς ὀγδόην σειράν, μετὰ τὴν λέξιν τούτου, τὴν φρᾶσιν **(καὶ ἐπὶ τὰ κάτοπτρα,)** 8) Σελ. 96 ἄσκ. 213, διορθώσατε βολτόμετρον εἰς **βολτάμετρον** 10) εἰς διασαφήσεις Πρώτου Μέρους σελὶς 2, εἰς τὸ τέλος βιβλίου, ὀγδόην σειρὰν ἐκ τοῦ τέλους τῆς σελίδος, ἀντὶ I, E καὶ r γράφετε I, E, r καὶ R, 9) Σελὶς 89, πρώτην σειρὰν ἀντὶ 10 μικρόμ, γράψατε 10^6 μικρόμ.

β΄ Εἰς Δεύτερον Μέρος (λύσεις Ἀσκήσεων)

1) Εἰς τὸ τέλος βιβλίου, **Διορθ. τῶν οὐσιωδῶν τυπογρ. σφαλμάτων,** Δευτέρου Μέρους, σελὶς 3 ἀντὶ $S=400\pm\sqrt{160000+400V_0^2}$ γράψατε εἰς λύσιν ἄσκ. 24, σελὶς 6, ὡς ὀρθὸν τὸ $S=400\gamma+\sqrt{160000\gamma^2+400V_0^2}$. Ὁμοίως εἰς σημείωσιν ἄσκ. 24, σελὶς 6, γράψατε ὡς ὀρθὸν τὸ $S=400\gamma-\sqrt{160000\gamma^2+400V_0^2}$. 2) ἄσκ. 9, γράψατε x—y=3,8 ἀντὶ y+x=3,8. 3) ἄσκ. 14, σειρὰ τρίτη Vt ἀντὶ Vt 4) ἄσκ. 21, σειρὰ 3η, εἰς τὸ (ἢ S=0) προσθέσατε: **ὅπερ ἀπαράδεκτον.** Δευτέραν σειρὰν ἀντὶ (ἥ) διορθώσατε ἤ, 5) τέλος ἄσκ. 36, ὀρθὸν 22 Kg/m ἀντὶ 22 χ.λ.γ. 6) ἄσκ. 39, σελ. 14, τετάρτη σειρά, γράψατε ὀρθὸν $10\cdot OA_2—5OA_2$ καὶ εἰς ἕκτην σειρὰν Σ_1 ἀντὶ Σ 7) ἄσκ. 40, προτελευταίαν σειράν, ἀντὶ (=455) τὸ (=455 Kg/m) 8) ἄσκ. 46, προτελευταία σειρὰ α΄ περιπτ., σελ. 15, ἀντὶ : **ἀπὸ τὸ ὕψος 119 μ (Διότι 144—25=119 μ)** γράψατε ὀρθόν: **ἀπὸ τὸ ὕψος 144 μετ.** Καὶ προτελ. σειρὰ β περίπτ. γράψατε Vt ἀντὶ Vt 9) ἄσκ. 49, τρίτη σειρὰ διορθώσατε $S=.....=05gt^2$ ἀντὶ $0,5t^2$. Σελὶς 16, τρίτη σειρά, ἄσκ. 49, πρὸ τῆς λέξεως **καὶ** προσθέσατε: (ἢ **$4,9^2—58,86—4,9^2—11,025+14,7t=o$, ἢ $14,7t=58,86+11,025$**), 10) ἄσκ. 59, δευτ. σειρά, ὀρθὸν τὸ (—0,30103), 11) ἄσκ. 63, πρώτη σειρά, ὀρθὸν T^2g ἀντὶ Tg^2, 12) ἄσκ. 64, ὀρθὸν 6,28·2,47, ἀντὶ 16,28·2,47, 13) ἄσκ. 76, δευτ. σειρά, ὀρθὸν P·YB ἀντὶ P—YB, 14) ἀσκ. 83, 4η σειρά, ὀρθὸν B:B' 15) ἄσκ. 89, δευτέρα σειρά, ὀρθὸν τὸ P=100·100 16) ἀσκ. 95, προτελ. σειρὰ ἀντὶ 13,3, ὀρθὸν 11,3 17) ἄσκ. 96, 1η σειρά, γράψατε P=ωhε=6,25·3,14·10·1=196,25 γρ., ἀντὶ τοῦ P=ωhε=6,25·10·1 =62,5 γρ., καὶ 3ην σειράν, γράψατε P=6,25·3,14·10·0,91=

$=178{,}58$ γρ., ἀντὶ τοῦ $P=6{,}25\cdot10\cdot0{,}91=56{,}87$ γραμ. 18) ἄσκ. 100, συνεχίζει ὡς ἑξῆς: (**Ἤδη ἡ ἄνωσις $A=\varepsilon'V=267{,}9\cdot0{,}84=225{,}036$ γρ. Συνεπῶς ἡ σφαῖρα ἐντὸς τοῦ πετρελαίου ζυγίζει $2384{,}31-225{,}036=2159{,}274$ γραμ.) (Ὄγκος σφαίρας$=4\cdot3{,}14\cdot4^3:3=267{,}9$** cm^3) 19) ἄσκ. 102, ἄκρον δευτέρας σειρᾶς, ἀντὶ 13, ὀρθὸν **13,6.** Τρίτην σειράν, ἀντὶ $\pi\alpha^2=25\ cm^2$, ὀρθὸν τὸ $\pi A^2=25\ cm^2$ καὶ ἀντὶ $\pi A^2=9\ cm^2$ ὀρθὸν $\pi\alpha^2=9\ cm^2$· Τετάρτην σειρὰν ὁ ὅρος $+9:3{,}14$ **νὰ τεθῇ ἐκτὸς τοῦ ριζικοῦ.**

20) Σελὶς 25, 4ην σειρὰν δεξιά, ἀντὶ 13, ὀρθὸν 13,6, 21) ἄσκ. 104, 3ην σειρὰν ἀντὶ P τὸ P′, 22) ἄσκ. 105, ἀντὶ Βάρος σφαίρας, ὀρθόν: **Βάρος κυλίνδρου ἐκ φελλοῦ,** 23) ἄσκ. 109 γ′ περίπτ. ἀντὶ (ἐδόθη ἡ ἀπάντησις ἀνωτέρω) γράψατε: **Τὸ σῶμα θὰ ἐπιπλέῃ. Ἡ δύναμις ποὺ θὰ χρειασθῇ γιὰ νὰ αἰωρῆται θὰ ἰσοῦται μὲ Α—Β, ἐὰν τοῦ δοθῇ μεγαλυτέρα δύναμις τότε θὰ βυθισθῇ.** 24) Σελὶς 29, λύσις ἀσκ. 113, σειρὰ πρώτη, ἀντὶ 52,11′′ τὸ 52,41, 25) ἄσκ. 164, πρώτη σειρά, ἀντὶ $8:0{,}000036\cdot100$ ὀρθὸν τὸ $8:(1+0{,}00036\cdot100)$, 26) ἄσκ. 179, σειρὰ 3η, ἀντὶ $5\cdot30$ τὸ $50\cdot30$ 27) ἄσκ. 182, 3η σειρά, τὸ δεύτερον (=) διορθώσατε (+) 28) ἄσκ. 185, 2αν σειράν, ἀντὶ $(4-4\pi)$, ὀρθὸν $(\pi-4\pi)$, 29) ἄσκ. 186, πρώτη σειρά, ἀντὶ $AB:A'B'=\pi_1:\pi'_1$ ὀρθὸν $AB:A''B''=\pi_7:\pi'_1$ 30) ἄσκ. 193, 7η σειρά, ἀντὶ 6μ τὸ 6 ἑκ. 31) ἄσκ. 186, Σελ. 46, σειρὰ 6η, ἀντὶ $(1:\pi_1)=(1:075)-1:(3-\pi)$ ὀρθὸν τὸ $1:\pi_1'=\ldots..$, 32) ἄσκ. 197 ἀντὶ $\frac{\text{ὕδωρ}}{\text{ἀὴρ}}:\frac{\text{ὕαλος}}{\text{ὕδωρ}}$, ὀρθὸν τὸ $\frac{\text{ὕδωρ}}{\text{ἀὴρ}}:\frac{\text{ὕαλος}}{\text{ἀὴρ}}$ 33) ἄσκ. 202, τέλος, ἀντὶ 341μ τὸ ὀρθὸν 3,41μ, 34) ἄσκ. 203, ἀντὶ $(1:\pi)=(1:\pi')=(1:\varphi)$ ὀρθὸν τὸ $(1:\pi)-(1:\pi')=-1:\varphi$, 35) ἄσκ. 215 ἀντὶ $I-Q:t$, ὀρθὸν τὸ $I=Q:t$, 36) ἄσκ. 227, 8η σειρὰ καθαρογράψατε $3:0{,}15=300:15$, 37) ἄσκ. 229 3η σειρὰ καθαρογ. $1{,}5\cdot100:2$, 38) Σελὶς 57, τελευταία σειρὰ ἄσκ. 240 γράψατε $25\cdot24$ ἀντὶ 25 24, 39) ἄσκ. 244, ἀντὶ $(3\ 10^9)^2$, ὀρθὸν τὸ $(3\cdot10^9)^2$. 40) ἄσκ. 248, προτελ. σειράν, ἀντὶ 121 4, ὀρθὸν τὸ $121\cdot4$, 41) ἄσκ. 252 καθαρογρ. $100\cdot200\cdot10^{-6}$, 42) ἄσκ. 253, προτελ. σειράν, καθορογράψατε $\alpha^2=40\cdot80:4$ καὶ 43) Σελὶς 51, εἰς Σχῆμα 48, σημειώσατε (O), εἰς τὸ ὀπτικὸν κέντρον τοῦ φακοῦ.
