ΠΑΛΑΙΟΛΟΓΟΥ ΠΕΡΙΣΤΕΡΑΚΗ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΜΗΧΑΝΙΚΗ · ΑΚΟΥΣΤΙΚΗ · ΘΕΡΜΟΤΗΣ

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΠΑΠΑΔΗΜΗΤΡΟΠΟΥΛΟΥ - ΑΘΗΝΑΙ

220 V = U

6 = kW ισχύ

; R = ωμ

; I

Wat = I . Volt

I = Volt / ohm

600 160 60

22 27

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΤΟΜΟΣ Ι

Καθηγητῇ Β. Μαυτόσγα

ΤΙΜΗΣ ΕΝΕΚΕΝ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

Περιστερ

Πρὸς χρῆσιν
τῶν ὑποψηφίων διὰ τὰς εἰσαγωγικὰς ἐξετάσεις τῶν Ἀνωτάτων Σχολῶν καὶ τῶν μαθητῶν τῶν ἀνωτέρων τάξεων τῶν Σχολείων Μέσης Ἐκπαιδεύσεως.

Ὑπὸ

Κ. Δ. ΠΑΛΑΙΟΛΟΓΟΥ
Καθηγητοῦ τῆς Φυσικῆς τοῦ Ἐθνικοῦ Μετσοβίου Πολυτεχνείου.

καὶ

Σ. Γ. ΠΕΡΙΣΤΕΡΑΚΗ
Ἐπιμελητοῦ Ἐργαστηρίου Φυσικῆς τοῦ Ε. Μ. Πολυτεχνείου.

ΤΟΜΟΣ Ι

ΜΗΧΑΝΙΚΗ • ΑΚΟΥΣΤΙΚΗ
ΘΕΡΜΟΤΗΣ

ΠΕΡΙΕΧΕΙ 361 ΛΕΛΥΜΕΝΑΣ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΙΚΩΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ
475 ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΕΤΑ ΤΟΥ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΟΣ ΚΑΙ 547
ΑΝΕΥ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΟΣ ΤΗΣ ΛΥΣΕΩΣ

ΜΕΤΑ 145 ΣΧΗΜΑΤΩΝ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟΝ ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ
ΧΑΡΙΔΗΜΟΥ Ι. ΠΑΠΑΔΗΜΗΤΡΟΠΟΥΛΟΥ
ΟΔΟΣ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ 56 (ΡΟΥΖΒΕΛΤ) ΑΘΗΝΑΙ
1957

ΤΥΠΟΓΡΑΦΕΙΟΝ ΣΕΡΓΙΑΔΗ, ΑΓ. ΠΑΥΛΟΥ 28 α, ΑΘΗΝΑΙ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Τὸ ἀνὰ χεῖρας βιβλίον περιλαμβάνει μίαν νέαν πλήρη συλλογὴν ἀσκήσεων καὶ προβλημάτων Φυσικῆς, ἀναφερομένων κυρίως εἰς θέματα τῆς στοιχειώδους Φυσικῆς, τῶν ὁποίων ἡ θεωρία ἀναγράφεται εἰς τὰ βιβλία ἡμῶν «Στοιχεῖα Φυσικῆς» καὶ «Μαθήματα Φυσικῆς». Ὡς ἐκ τούτου τὸ βιβλίον τοῦτο ἀνταποκρίνεται τελείως πρὸς τὰς ἐπιδιώξεις τῶν ὑποψηφίων τῶν Ἀνωτάτων Σχολῶν καὶ καθίσταται πολύτιμον ἐφόδιον διὰ τοὺς μαθητὰς τῶν Γυμνασίων.

Κατὰ τὴν συγγραφὴν τοῦ παρόντος βιβλίου κατεβλήθη μεγάλη προσπάθεια νὰ περιληφθοῦν εἰς αὐτὸ ἀσκήσεις καὶ προβλήματα ὑποδειγματικά, μὲ σαφῆ, σύντομον καὶ τελείαν διατύπωσιν, ταξινομημένα εἰς κατηγορίας, συμφώνως πρὸς τὰς κοινὰς ὁμοιότητας τὰς ὁποίας παρουσιάζουν ὡς πρὸς τὸ ἀντικείμενον εἰς τὸ ὁποῖον ἀναφέρονται καὶ ὡς πρὸς τὸν τρόπον τῆς λύσεώς των.

Τὰ προβλήματα Φυσικῆς ἀποτελοῦν οὐσιῶδες στοιχεῖον διὰ τὴν κατανόησιν τῆς διδασκομένης ὕλης τῆς Φυσικῆς καὶ ἀπαραίτητον συμπλήρωμα, τόσον τῆς διδασκαλίας ὅσον καὶ τῆς μελέτης τῶν μαθητῶν καὶ σπουδαστῶν, πρὸς τελείαν ἐκμάθησιν αὐτῆς.

Εἶναι ὄντως ἀναμφισβήτητον ὅτι, διὰ τῆς ἐπιλύσεως πολλῶν προβλημάτων ἀναφερομένων εἰς ὅλα ἐν γένει τὰ κεφάλαια τῆς Φυσικῆς, οἱ σπουδασταὶ εὑρίσκουν τὴν εὐκαιρίαν ὄχι μόνον νὰ ἐπαναλαμβάνουν τὴν ὕλην ἑκάστου κεφαλαίου ἀλλά, πρὸς τούτοις, νὰ συνηθίζουν εἰς τὴν πρακτικὴν ἐφαρμογὴν τῶν φυσικῶν νόμων, εἰς τὴν ὀρθὴν ἐφαρμογὴν τῶν διαφόρων τύπων, ὡς καὶ τῶν συστημάτων μονάδων, τὰ ὁποῖα χρησιμοποιεῖ ἡ Φυσική, ἐπὶ πλέον δὲ ἐξοικειοῦνται εἰς τὴν ἐκτέλεσιν ὀρθῶν ἀριθμητικῶν ὑπολογισμῶν.

Ἐξ ἄλλου—καὶ τοῦτο ἔχει κεφαλαιώδη σημασίαν—διὰ τῆς ἐπιλύσεως προβλημάτων Φυσικῆς οἱ σπουδασταὶ κατανοοῦν τὴν μεγίστην πρακτικὴν σημασίαν τοῦ μαθήματος τούτου καὶ εἰς αὐτὸν ἀκόμη τὸν καθ' ἡμέραν βίον, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον, ἀναμφιβόλως, συντελεῖ σπουδαίως εἰς τὴν διέγερσιν τῆς ἀγάπης αὐτῶν πρὸς τὴν Φυσικὴν καὶ τοῦ ζήλου των πρὸς ἀπόκτησιν ὅσον τὸ δυνατὸν περισσοτέρων γνώσεων.

Τὸ σύνολον τῶν προβλημάτων τῶν περιεχομένων εἰς τὸ ἀνὰ χεῖρας βιβλίον ὑποδιαιρεῖται εἰς τέσσαρας κατηγορίας:

Ἡ πρώτη περιλαμβάνει προβλήματα, τῶν ὁποίων παρέχεται ὁ τρόπος τῆς λύσεως, ὡς καὶ τὸ ἀποτέλεσμα τοῦ προβλήματος, καὶ εἰς τὰ ὁποῖα ὁ σπουδαστὴς πρέπει νὰ ἐνδιατρίψῃ μετ' ἐπιμονῆς καὶ ἐπιμελείας, διὰ νὰ κατανοήσῃ καλῶς τὴν μέθοδον, τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ ἀκολουθῇ κατὰ τὴν λύσιν προβλημάτων Φυσικῆς. Εἰς τὸ μέρος τοῦτο παρατίθενται καὶ ἀρκεταὶ βοηθητικαὶ γνώσεις ἀπαραίτητοι διὰ τὴν ὀρθὴν λύσιν τῶν προβλημάτων. Αἱ ἐκφωνήσεις τῶν προβλημάτων τούτων θὰ περιέχωνται εἰς τὰς νεωτέρας ἐκδόσεις τῶν βιβλίων ἡμῶν «Στοιχεῖα Φυσικῆς» καὶ «Μαθήματα Φυσικῆς».

Ἡ δευτέρα κατηγορία περιλαμβάνει τὰς ἐκφωνήσεις τῶν προβλημάτων καὶ τὸ ἀποτέλεσμα, εἰς τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ καταλήξῃ ὁ σπουδαστής, ἐὰν ἔλυσεν ὀρθῶς ταῦτα. Καὶ ἡ δευτέρα κατηγορία προβλημάτων ἔχει σπουδαιοτάτην σημασίαν, διότι δίδει εἰς τὸν σπουδαστὴν τὴν εὐκαιρίαν νὰ δοκιμάσῃ κατὰ πόσον κατέστη ἱκανὸς νὰ ἐπιλύῃ μόνος προβλήματα Φυσικῆς, χωρὶς οὐδεμίαν ἄλλην βοήθειαν. Ἡ διαρκὴς ἄλλως τε παράθεσις τοῦ τρόπου τῆς λύσεως τῶν προβλημάτων εἶναι καὶ ἀντιπαιδαγωγική, διότι ἀποκλείει τὴν αὐτενέργειαν τοῦ σπουδαστοῦ.

Ἡ τρίτη κατηγορία περιλαμβάνει μόνον τὰς ἐκφωνήσεις τῶν προβλημάτων **καὶ** ἀπευθύνεται πρὸς σπουδαστὰς ἐξοικειωθέντας ἤδη εἰς τὴν λύσιν τῶν προβλημάτων τῆς πρώτης καὶ δευτέρας κατηγορίας, ἐπαφίεται δὲ εἰς αὐτοὺς ὅπως, διὰ καταλλήλου βασάνου, συμπεράνουν περὶ τῆς ὀρθότητος τοῦ ἀποτελέσματος εἰς τὸ ὁποῖον κατέληξαν.

Τέλος, ἡ τετάρτη κατηγορία, ἡ ὁποία παρατίθεται εἰς τὸ τέλος τοῦ βιβλίου, περιλαμβάνει προβλήματα Φυσικῆς ἀνωτέρας συνθέσεως καί, ἑπομένως, δυσκολώτερα τῶν τριῶν προηγουμένων κατηγοριῶν, ἀπευθύνεται δὲ πρὸς ἐκείνους ἐκ τῶν σπουδαστῶν, οἱ ὁποῖοι θὰ ἐπιθύμουν ν' ἀσχοληθοῦν μὲ τὴν λύσιν συνθετωτέρων προβλημάτων.

Ἐθεωρήθη σκόπιμος ἡ παράθεσις, κατὰ τὴν διάρθρωσιν τῆς ὕλης, εἰς τὸ ἀνὰ χεῖρας βιβλίον χαρακτηριστικῶν τινων προβλημάτων, τὰ ὁποῖα κατὰ τὸ παρελθὸν ἔχουν δοθῆ ὡς θέματα εἰς τὰς εἰσαγωγικὰς ἐξετάσεις τῶν Ἀνωτάτων Σχολῶν. Οὕτω οἱ ὑποψήφιοι θὰ εἶναι εἰς θέσιν διὰ τῆς λύσεως τούτων νὰ ἐκτιμήσουν τὰς ἱκανότητάς των.

Τὸ βιβλίον συμπληροῦται καὶ διὰ καταλλήλου συλλογῆς πινάκων φυσικῶν σταθερῶν, εἰς τοὺς ὁποίους οἱ σπουδασταὶ δύνανται ν' ἀναζητοῦν ὡρισμένας σταθεράς, ἀπαραιτήτους διὰ τὴν λύσιν τῶν προβλημάτων, αἱ ὁποῖαι δὲν περιέχονται εἰς τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος.

Παρὰ τὴν συστηματικὴν ἐπαλήθευσιν τῶν ἐξαγομένων τῶν προβλημάτων, ὡς καὶ τὴν καταβληθεῖσαν ἐπιμέλειαν καὶ μεγάλην προσοχὴν κατὰ τὴν διόρθωσιν τῶν δοκιμίων, εἶναι πολὺ πιθανόν, λόγῳ τῆς φύσεως τῆς ὕλης τοῦ βιβλίου, νὰ παρεισέφρησαν ἀβλεψίαι· ὡς ἐκ τούτου παρακαλοῦμεν θερμῶς τοὺς ἀναγνώστας, καὶ τοὺς συναδέλφους καθηγητάς, ἐὰν τυχὸν ἤθελον παρατηρήσει τοιαύτας, ὅπως μᾶς πληροφορήσουν περὶ αὐτῶν, ἵνα τὰς ἔχωμεν ὑπ' ὄψιν, θὰ τοὺς εἴμεθα δὲ ἐξαιρετικῶς ὑπόχρεοι.

Παραδίδοντες τὸ βιβλίον τοῦτο εἰς τὴν δημοσιότητα, θέλομεν νὰ πιστεύωμεν, ὅτι θὰ συντελέσῃ εἰς τὴν ἐξύψωσιν τοῦ ἐπιπέδου τῶν γνώσεων Φυσικῆς τῶν μαθητῶν καὶ σπουδαστῶν, ἐὰν δὲ τοῦτο ἤθελεν ἐπιτευχθῇ, θ' ἀπετέλει δι' ἡμᾶς ὑψίστην ἠθικὴν ἱκανοποίησιν.

Ὅλας τὰς ἀσκήσεις τοῦ βιβλίου τούτου ἔλυσεν ὁ Φυσικὸς κ. **Μηνᾶς Μακρόπουλος**, τὸν ὁποῖον εὐχαριστῶ θερμῶς καὶ ἀπὸ τῆς θέσεως ταύτης. Ἐπίσης ἐκφράζω τὰς εὐχαριστίας μου εἰς τὸν βοηθὸν τοῦ Ἐργαστηρίου Φυσικῆς τοῦ Ε. Μ. Πολυτεχνείου κ. **Χ. Μηλιαροκατερινάκην**, ὡς καὶ τοὺς φοιτητὰς τοῦ Φυσικοῦ τμήματος τῆς Φυσικομαθηματικῆς Σχολῆς τοῦ Πανεπιστημίου Ἀθηνῶν κυρίους **Νικ. Γαρυφάλου** καὶ **Δημ. Λεωνίδου**, οἱ ὁποῖοι μὲ ἐβοήθησαν εἰς τὴν διάρθρωσιν τῆς ὕλης.

Ἡ παροῦσα ἔκδοσις τοῦ βιβλίου ἐπισφραγίζει μίαν δεκαετίαν στενῆς συνεργασίας μου μετὰ τοῦ ἐκλιπόντος καθηγητοῦ **Κ. Παλαιολόγου** εἰς τὴν συγγραφὴν βιβλίων Φυσικῆς. Ὁ ἀδόκητος θάνατος τοῦ καθηγητοῦ **Κ. Παλαιολόγου** μὲ στερεῖ τῆς συνεργασίας ἑνὸς ἀδιαμφισβητήτως μεγάλου κύρους ἐπιστήμονος Φυσικοῦ.

Ἀθῆναι, Σεπτέμβριος 1957.

Σ. Γ. ΠΕΡΙΣΤΕΡΑΚΗΣ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΜΗΧΑΝΙΚΗ

ΑΚΟΥΣΤΙΚΗ

ΘΕΡΜΟΤΗΣ

ΣΥΜΒΟΛΑ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΜΕΓΕΘΩΝ

Ὡς ταῦτα κατὰ προτίμησιν χρησιμοποιοῦνται εἰς τὸ βιβλίον

A	= ἔργον, ἄνωσις
α	= συντελεστὴς γραμ. διαστ. στερεῶν
α	= θερμικὸς συντελεστὴς ἀερίων
α	= γωνία
α	= πλάτος
Atm	= φυσικὴ ἀτμόσφαιρα
at	= τεχνικὴ ἀτμόσφαιρα
Å	= Ångström = 10^{-8} cm
B, β	= βάρος
B	= Bar
β	= συντελεστὴς ἐπιφαν. διαστολῆς
γ	= ἐπιτάχυνσις σώματος
γ	= συντελεστὴς κυβικῆς διαστολῆς
c	= ταχύτης διαδόσεως φωτὸς
c	= εἰδικὴ θερμότης
°C	= βαθμοὶ Κελσίου
cal	= θερμὶς
C.G.S.	= ἀπόλυτον σύστημα μονάδων
C.P.S.	= cycle per second
c/sec	= κύκλος ἀνὰ δευτερόλεπτον
CV	= ἀτμόϊππος
cm	= ἑκατοστόμετρον
δ	= διάμετρος
d	= διάμετρος
dyn	= δύνη
E	= μέτρον ἐλαστικότητος
$E_{δυν}$	= δυναμικὴ ἐνέργεια
$E_{κιν}$	= κινητικὴ ἐνέργεια
ε	= εἰδικὸν βάρος
erg	= ἔργιον
εφ	= ἐφαπτομένη
F	= δύναμις
°F	= βαθμοὶ Fahrenheit
g	= ἐπιτάχυνσις βαρύτητος
gr	= γραμμάριον μάζης
gr*	= γραμμάριον βάρους
grad	= βαθμὸς
h	= ὥρα
h	= ὕψος
Hz	= Hertz
HP	= ἵππος
ημ	= ἡμίτονον
η	= συντελεστὴς ἀποδόσεως
η	= συντελεστὴς τριβῆς
Θ	= ροπὴ ἀδρανείας
ϑ	= γωνία
ϑ	= θερμοκρασία
J	= ὁρμὴ
J	= μηχαν. ἰσοδύναμον θερμότητος
κ	= συντελεστὴς κρούσεως
κ	= λόγος $c_p/c_υ$
°K	= βαθμοὶ Kelvin (ἀπόλυτοι)
k	= σταθερὰ
km	= χιλιόμετρον
kgr	= χιλιόγραμμον μάζης
kgr*	= χιλιόγραμμον βάρους
kcal	= χιλιοθερμὶς
kW	= χιλιοβὰτ (κιλοβὰτ)
kWh	= κιλοβατώριον
kgr*m	= χιλιογραμμόμετρον
λ	= μῆκος κύματος
λ	= θερμότης τήξεως
l	= μῆκος
lt	= λίτρον
M	= ροπὴ δυνάμεως
μ	= μικρὸν = 10^{-4} cm
μB	= mikrobar
m	= μέτρον
m, M	= μᾶζα
mB	= millibar
mμ	= μιλλιμικρὸν
mm	= χιλιοστὸν
mgr	= χιλιοστὸν γραμμαρίου
min	= λεπτὸν
mil	= μίλιον
N	= ἰσχὺς
ν	= συχνότης
Π	= παροχὴ
p	= πίεσις
PS	= ἀτμόϊππος
Q	= ποσότης θερμότητος
R	= παγκόσμιος σταθερὰ ἀερίων
°R	= βαθμοὶ Ρεωμύρου
R, r	= ἀκτὶς
rad	= ἀκτίνιον
ρ	= πυκνότης
s	= διάστημα
S	= ἐπιφάνεια, τομὴ
sec	= δευτερόλεπτον
Σ	= συνισταμένη
Σ	= ἄθροισμα
συν	= συνημίτονον
T	= τριβὴ
T	= τάσις
T	= ἀπόλυτος θερμοκρασία
T	= περίοδος
ton	= τόννος μάζης
ton*	= τόννος βάρους
t	= χρόνος
Τ.Σ.	= Τεχνικὸν Σύστημα μονάδων
T.M.	= τεχνικὴ μονὰς μάζης
Torr	= mm στήλης Hg
υ	= ταχύτης
$υ_0$	= ἀρχικὴ ταχύτης
Φ	= φορτίον
φ	= γωνία
φ	= φάσις
V	= ὄγκος
W	= Watt
x	= ἀπόκλισις
x, y	= ζητούμενα μεγέθη
X, Ψ	= ἄξονες συντεταγμένων
ω	= γωνιακὴ ταχύτης
ω′	= γωνιακὴ ἐπιτάχυνσις
Ω	= ὤθησις δυνάμεως

Ο Δ Η Γ Ι Α Ι

ΔΙΑ ΤΗΝ ΛΥΣΙΝ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΦΥΣΙΚΗΣ

Διὰ τὴν λύσιν ἀσκήσεων Φυσικῆς ἀπαιτεῖται νὰ ἔχῃ ὁ σπουδαστὴς τελείαν γνῶσιν τῶν νόμων τῆς Φυσικῆς, ὡς καὶ τῶν βασικῶν τύπων, διὰ τῶν ὁποίων ἐκφράζονται οἱ νόμοι οὗτοι· πρὸς τούτοις ὅμως πρέπει ὁ σπουδαστὴς ν' ἀκολουθήσῃ συστηματικὴν μέθοδον διὰ τὴν ἐπιτυχῆ λύσιν αὐτῶν.

Ὡς ἐκ τούτου ἐθεωρήσαμεν σκόπιμον νὰ παραθέσωμεν μερικὰς ὁδηγίας, τὰς ὁποίας πρέπει ὁ σπουδαστὴς ν' ἀκολουθῇ ἀπαραιτήτως, ἵνα ἐπιτυγχάνῃ τὴν ὀρθὴν καὶ ἀκριβῆ λύσιν ἀσκήσεων Φυσικῆς.

Ἡ πραγματικὴ δυσχέρεια διὰ τὴν λύσιν ἀσκήσεως Φυσικῆς ἔγκειται εἰς τὴν ἀκριβῆ ἐφαρμογὴν τῶν γενικῶν ἀρχῶν καὶ νόμων τῆς Φυσικῆς εἰς τὰς ἑκάστοτε παρουσιαζομένας περιπτώσεις. Πολὺ συχνά, διὰ τὴν λύσιν ἀσκήσεως Φυσικῆς ἀπαιτεῖται ἡ χρησιμοποίησις ἑνὸς μόνον τύπου, ὅτε διὰ τὴν λύσιν ἀρκεῖ ἁπλῶς νὰ ἀντικαταστήσωμεν διὰ τῶν δεδομένων τῆς ἀσκήσεως τὰ μεγέθη καὶ ἀκολούθως νὰ ἐκτελέσωμεν τὰς ἀριθμητικὰς πράξεις.

Εἰς τὰς ἀσκήσεις τῆς κατηγορίας ταύτης, αἱ ὁποῖαι εἶναι καὶ αἱ ἁπλούστεραι, πρέπει νὰ προσέχωμεν νὰ ἀνάγωμεν ὅλα τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως εἰς ἓν καὶ τὸ αὐτὸ σύστημα μονάδων. Ἐὰν δὲν προσέξωμεν εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο, τότε, ἐνῷ ἐφαρμόζομεν τὸν κατάλληλον τύπον καὶ αἱ λογιστικαὶ πράξεις εἶναι ἄνευ σφάλματος, ἐν τούτοις τὸ ἐξαγόμενον θὰ εἶναι ἐσφαλμένον, διότι δὲν ἐλάβομεν τὴν πρόνοιαν νὰ ἀναγάγωμεν τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως εἰς ἓν ἑνιαῖον σύστημα μονάδων.

Ἐφ' ὅσον τὸ σύστημα μονάδων δὲν ὁρίζεται εἰς τὸ πρόβλημα ἢ τὴν ἄσκησιν, ἡ ἐκλογὴ αὐτοῦ ἀφίεται εἰς τὴν πρωτοβουλίαν τῶν σπουδαστῶν.

Κανὼν διὰ τὴν ἐκλογὴν τοῦ καταλλήλου συστήματος δὲν ὑπάρχει, ἀλλὰ πρέπει νὰ ἐκλέξωμεν τοῦτο κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε δι' εὐκολωτέρων ὑπολογισμῶν νὰ φθάσωμεν ταχύτερον εἰς τὸ ἐξαγόμενον, τοῦτο δὲ ἀποτελεῖ ζήτημα πείρας. Τὸ κάτωθι παρατιθέμενον παράδειγμα διευκρινίζει τὰ ἀνωτέρω ἐκτιθέμενα:

Ἄσκησις. **Σῶμα ἔχει μᾶζαν 50 kgr καὶ κινεῖται μὲ ταχύτητα 0,5 km/h· πόση εἶναι ἡ κινητικὴ ἐνέργεια αὐτοῦ.**

Λύσις. Ἐκ τῆς Φυσικῆς γνωρίζομεν, ὅτι ἡ κινητικὴ ἐνέργεια ($E_{κιν}$) ἐκφράζεται ἐκ τοῦ τύπου:

$$E_{κιν} = \frac{1}{2} m \cdot υ^2$$

ὅπου m ἡ μᾶζα τοῦ σώματος καὶ υ ἡ ταχύτης αὐτοῦ.

Ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν διὰ τῶν δεδομένων τῆς ἀσκήσεως τὰ μεγέθη τοῦ τύπου καὶ ἐκτελέσωμεν τοὺς ὑπολογισμούς, θὰ εὕρωμεν:

$$E_{κιν} = \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot 0{,}5^2 = 6{,}25\,;$$

Τὸ ἐξαγόμενον ὄχι μόνον εἶναι ἐσφαλμένον — μολονότι ἐφηρμόσαμεν τὸν κατάλληλον τύπον καὶ αἱ ἀριθμητικαὶ πράξεις εἶναι ὀρθαί —, ἀλλὰ πρὸς τούτοις δὲν γνωρίζομεν εἰς ποίαν μονάδα ἐκφράζεται. Εἰς τὸ ἀποτέλεσμα τοῦτο κατελήξαμεν, διότι δὲν ἐλάβομεν ὑπ' ὄψιν, ὅτι τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως δὲν εἶναι ἐκπεφρασμένα εἰς ἓν καὶ τὸ αὐτὸ σύστημα μονάδων.

Προκειμένου περὶ προβλημάτων ἀναγομένων εἰς τὴν Μηχανικήν, χρησιμοποιοῦμεν κυρίως δύο συστήματα μονάδων, τὸ σύστημα C.G.S. καὶ τὸ Τεχνικὸν Σύστημα μονάδων (Τ. Σ.).

α) Λύσις τῆς ἀνωτέρω ἀσκήσεως εἰς τὸ σύστημα μονάδων C.G.S. Ὡς μονὰς μάζης εἰς τὸ σύστημα τοῦτο λαμβάνεται τὸ gr, ἑπομένως: $m = 50 \cdot 10^3 = 5 \cdot 10^4$ gr, ὡς μονὰς δὲ ταχύτητος τὸ cm/sec, ἑπομένως: $\upsilon = 0{,}50 \cdot 10^5 / 3\,600 = 14$ cm/sec, ὅθεν:

$$\underline{E_{\kappa\iota\nu}} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 14^2 \cdot 10^4 = \underline{4{,}9 \cdot 10^6 \text{ erg}}$$

δεδομένου ὅτι μονὰς ἐνεργείας εἰς τὸ σύστημα C.G.S. εἶναι τὸ ἔργιον (1 erg).

β) Λύσις τῆς ἀσκήσεως εἰς τὸ Τεχνικὸν Σύστημα μονάδων. Εἰς τὸ σύστημα τοῦτο ὡς μονὰς μάζης χρησιμοποιεῖται ἡ Τεχνικὴ μονὰς μάζης (Τ.Μ. μάζης), ἑπομένως εἶναι $m = 50/9{,}81 = 5{,}1$ Τ. Μ. μάζης, ὡς μονὰς δὲ ταχύτητος τὸ m/sec, ἑπομένως θὰ εἶναι $\upsilon = 0{,}5 \cdot 10^3/3\,600 = 0{,}14$ m/sec, ὅθεν:

$$\underline{E_{\kappa\iota\nu}} = \frac{1}{2} \cdot 5{,}1 \cdot 0{,}14^2 = \underline{0{,}05 \text{ kgr*m}}$$

δεδομένου ὅτι εἰς τὸ Τεχνικὸν Σύστημα μονάδων ὡς μονὰς ἐνεργείας λαμβάνεται τὸ χιλιογραμμόμετρον (1 kgr*m).

Ἐκτὸς ὅμως τῶν ἀνωτέρω ἀναφερομένων προβλημάτων Φυσικῆς, τὰ ὁποῖα ὡς εἴπομεν ἤδη εἶναι καὶ τὰ ἁπλούστερα, ὑπάρχει καὶ ἄλλη κατηγορία, τὰ ὁποῖα δὲν εἶναι τόσον ἁπλᾶ ὡς τὰ τοῦ προηγουμένου τύπου, διότι διὰ τὴν λύσιν αὐτῶν ἀπαιτεῖται ἡ χρησιμοποίησις πολλῶν τύπων (ἐξισώσεων), διὰ συνδυασμοῦ τῶν ὁποίων προκύπτει ὁ τελικὸς τύπος, ὁ ὁποῖος εἰς τὸ πρῶτον μέλος αὐτοῦ περιλαμβάνει τὸ ἄγνωστον μέγεθος καὶ εἰς τὸ δεύτερον ὅλα τὰ δεδομένα μεγέθη.

Διὰ τὴν λύσιν προβλήματος τοῦ τύπου τούτου ἀπαιτεῖται νὰ καταβάλλῃ ὁ σπουδαστὴς σοβαρὰν διανοητικὴν ἐργασίαν, πρὸς κατάστρωσιν τοῦ τελικοῦ τύπου, καὶ ὅταν τέλος καταστρώσῃ αὐτὸ πρέπει, κατὰ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ ἐξαγομένου ἐπὶ τῇ βάσει τῶν δεδομένων, νὰ ἔχῃ ὑπ' ὄψιν του ὅλα τὰ ἐκτεθέντα διὰ τὴν περίπτωσιν τῶν προβλημάτων τῆς πρώτης κατηγορίας, ὅσον ἀφορᾷ εἰς τὰ συστήματα μονάδων.

Μεθοδικὴ λύσις ἀσκήσεως. Ἡ λύσις ἀσκήσεως συνθετωτέρας μορφῆς διέρχεται διὰ τῶν ἀκολούθων φάσεων:

α) Κατανόησις τῆς ἀσκήσεως. Αὕτη ἐπιτυγχάνεται διὰ τῆς μετὰ προσοχῆς ἀναγνώσεως τῆς ἐκφωνήσεως τῆς ἀσκήσεως, εἰς τρόπον ὥστε ὁ σπουδαστὴς νὰ συλλάβῃ τὸ περιεχόμενον αὐτῆς καὶ οὕτω νὰ κατορθώσῃ οὗτος νὰ ἐξακριβώσῃ ποῖα εἶναι τὰ ζητούμενα μεγέθη καὶ ποῖα τὰ δεδομένα.

Εἰς μερικὰς περιπτώσεις δίδονται ἐλλιπῆ στοιχεῖα ἢ καὶ περισσότερα τῶν ἀπαιτουμένων διὰ τὴν λύσιν τῆς ἀσκήσεως. Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν ὁ σπουδαστὴς πρέπει νὰ λύσῃ τὴν ἄσκησιν ὡς τὰ ἐλλείποντα στοιχεῖα νὰ εἶχον δοθῆ καὶ νὰ ἐξαγάγῃ τὸ ἀποτέλεσμα συναρτήσει καὶ τῶν ἐλλειπόντων στοιχείων, εἰς δὲ τὴν δευτέραν περίπτωσιν οὐδόλως ἐπηρεάζεται ἡ λύσις τῆς ἀσκήσεως καὶ συνεπῶς ὁ σπουδαστὴς δὲν θὰ λάβῃ ὑπ' ὄψιν του τὰ ἐπὶ πλέον ταῦτα δεδομένα.

β) Ἐκπόνησις διαγράμματος. Ἐφ' ὅσον ὑπάρχει πρὸς τοῦτο ἀνάγκη, κατασκευάζομεν σχέδιον, σημειοῦντες ἐπ' αὐτοῦ ὅλα τὰ δεδομένα καθὼς καὶ τὰ ζητούμενα μεγέθη, καθότι τὸ διάγραμμα διευκολύνει πολὺ τὴν κατανόησιν καὶ ἐπίλυσιν τῆς ἀσκήσεως.

γ) Εὕρεσις τοῦ τελικοῦ τύπου. Ἡ εὕρεσις τοῦ τελικοῦ τύπου, διὰ τοῦ ὁποίου ἐκφράζεται τὸ ἄγνωστον μέγεθος συναρτήσει τῶν δεδομένων μεγεθῶν, εἰς ὡρισμένα προβλήματα Φυσικῆς εἶναι ἐργασία ὄχι εὔκολος, ἐξαρτᾶται δὲ κυρίως ἀπὸ τὴν πλήρη γνῶσιν τῆς θεωρίας τῆς Φυσικῆς καὶ ἀπὸ τὴν πεῖραν, τὴν ὁποίαν ἀποκτᾷ ὁ σπουδαστής, σὺν τῷ χρόνῳ, ἀσχολούμενος μὲ τὴν λύσιν τοιούτων προβλημάτων.

Πρὸς κατανόησιν τοῦ τελικοῦ τύπου, ἀναχωροῦμεν ἀπὸ τύπους οἱ ὁποῖοι ἀπαραιτήτως δέον νὰ περιέχουν τὸ ζητούμενον μέγεθος καὶ νὰ εἶναι τύποι βασικοὶ καὶ ὄχι πολύπλοκοι.

Διὰ τὴν κατάλληλον ἐκλογὴν τῶν βασικῶν τούτων τύπων ὁδηγούμεθα ἀπὸ τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος καθὼς καὶ ἀπὸ τὰ ζητούμενα, προσέχομεν δὲ πάντοτε, ὥστε διὰ καταλλήλων μετασχηματισμῶν οἱ τύποι οὗτοι νὰ μᾶς ὁδηγήσουν εἰς τὸν τελικὸν τύπον διὰ τῆς συντομωτέρας δυνατῆς ὁδοῦ.

Πρὸς κατανόησιν τῆς ἀκολουθουμένης πορείας εὑρέσεως τοῦ τελικοῦ τύπου δίδομεν κατωτέρω τὴν μεθοδικὴν λύσιν τῆς ἑξῆς ἀσκήσεως ἐκ τῆς Μηχανικῆς:

Ἄσκησις. **Ἐκκρεμὲς ἔχει περίοδον κινήσεως $T_1 = 2{,}14$ sec εὑρισκόμενον εἰς ὕψος $h_1 = 5$ km ὑπὲρ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς θαλάσσης. Ποία ἡ περίοδος T_2 τοῦ ἰδίου ἐκκρεμοῦς εἰς ὕψος $h_2 = 32$ km ἀπὸ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς θαλάσσης. (Δίδεται ἡ ἀκτὶς τῆς Γῆς $R = 6{,}3 \cdot 10^8$ cm.)**

Λύσις. Ἀναχωροῦμεν ἀπὸ τὸν τύπον τοῦ ἐκκρεμοῦς:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

ὁ ὁποῖος περιέχει τὸ ζητούμενον μέγεθος T καὶ ἐπὶ πλέον εἶναι βασικὸς τύπος.

Ἐπειδὴ ἡ περίοδος T καὶ ἡ ἔντασις τῆς βαρύτητος g εἶναι μεταβλητὰ μεγέθη, ἐξαρτώμενα ἐκ τοῦ ὕψους, κάμνομεν ἐφαρμογὴν τοῦ τύπου τοῦ ἐκκρεμοῦς εἰς τὰς δύο ἀναφερομένας περιπτώσεις:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_1}} \qquad (1)$$

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_2}} \qquad (2)$$

Παρατηροῦμεν ὅτι διὰ διαιρέσεως κατὰ μέλη τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) ἐξαλείφονται τὰ 2π καὶ l καὶ λαμβάνομεν:

$$\frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{g_1}{g_2}} \quad \text{ἐξ οὗ} \quad T_2 = T_1\sqrt{\frac{g_1}{g_2}} \qquad (3)$$

Ὁ τύπος οὗτος δὲν εἶναι ὁ ζητούμενος τελικὸς τύπος, διότι περιλαμβάνει τὰ ἄγνωστα μεγέθη g_1 καὶ g_2. Ἀπὸ τὴν ἐκφώνησιν ὅμως τῆς ἀσκήσεως, εἰς τὴν ὁποίαν ἔχουν δοθῆ τὰ ὕψη h_1, h_2 καὶ ἡ ἀκτὶς R τῆς Γῆς, ὁδηγούμεθα εἰς τὸ νὰ κάμωμεν χρῆσιν καὶ τοῦ τύπου τῆς παγκοσμίου ἕλξεως:

$$F = k \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}$$

Εἶναι ὅμως $F = B = m \cdot g$ καὶ ὡς ἐκ τούτου εὑρίσκομεν τὴν σχέσιν:

$$g = \frac{k \cdot M}{r^2} \qquad (4)$$

Ἐφαρμόζομεν τὴν σχέσιν (4) εἰς τὰς δύο περιπτώσεις καὶ ἔχομεν:

$$g_1 = \frac{k \cdot M}{r_1^2} = \frac{k \cdot M}{(R+h_1)^2} \qquad (5)$$

$$g_2 = \frac{k \cdot M}{r_2^2} = \frac{k \cdot M}{(R+h_2)^2} \qquad (5)$$

Διὰ νὰ ἀπαλείψωμεν τὰ ἄγνωστα μεγέθη M καὶ k, διαιροῦμεν τὰς σχέσεις (5) καὶ (6) κατὰ μέλη καὶ λαμβάνομεν:

$$\frac{g_1}{g_2} = \frac{(R+h_2)^2}{(R+h_1)^2} \qquad (7)$$

Τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ g_1/g_2 θέτομεν εἰς τὴν σχέσιν (3) καὶ ἔχομεν:

$$T_2 = T_1 \cdot \frac{R+h_2}{R+h_1} \qquad (8)$$

Ὁ τύπος οὗτος εἶναι προφανῶς καὶ ὁ τελικός, διότι περιέχει ὡς ἄγνωστον μέγεθος μόνον τὸ ζητούμενον T_2.

δ) Ἐκλογὴ συστήματος μονάδων. Ἐκ τῶν δύο γνωστῶν εἰς τὴν Μηχανικὴν συστημάτων, ἤτοι τοῦ συστήματος μονάδων C.G.S. καὶ τοῦ Τεχνικοῦ Συστήματος (Τ.Σ.), ἂς ἐκλέξωμεν διὰ τὴν δοθεῖσαν ἄσκησιν τὸ σύστημα C.G.S. Ἐκφράζοντες τὰ δεδομένα μεγέθη εἰς μονάδας C.G.S. ἔχομεν: $T_1 = 2{,}14$ sec, $R = 6{,}3 \cdot 10^8$ cm, $h_1 = 5$ km $= 5 \cdot 10^5$ cm, $h_2 = 32$ km $= 32 \cdot 10^5$ cm.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Κάμνομεν ἐνταῦθα τὴν παρατήρησιν ὅτι τὸ πηλίκον $R + h_2 : R + h_1$ εἶναι πηλίκον δύο ὁμοειδῶν μεγεθῶν, ἤτοι μηκῶν, καὶ ὡς ἐκ τούτου δυνάμεθα νὰ μετρήσωμεν ἀμφότερα μὲ οἱανδήποτε μονάδα θελήσωμεν, π.χ. km, χωρὶς νὰ δεσμευώμεθα ἀπὸ τὸ ὅτι ἡ περίοδος εἶναι ἤδη ἐκπεφρασμένη εἰς sec.

ε) Ἀντικατάστασις τῶν δεδομένων μεγεθῶν. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τελικὸν τύπον (8) τὰ δεδομένα, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἤδη ἐκφρασθῆ εἰς τὸ αὐτὸ σύστημα μονάδων, λαμβάνομεν:

$$T_2 = 2{,}14 \cdot \frac{6{,}3 \cdot 10^8 + 32 \cdot 10^5}{6{,}3 \cdot 10^8 + 5 \cdot 10^5} \quad \frac{\text{sec} \cdot \text{cm}}{\text{cm}}$$

στ) Ἐκτέλεσις μετὰ προσοχῆς τῶν ἀριθμητικῶν πράξεων. Ἐκτελοῦντες τὰς σημειουμένας ἀνωτέρω πράξεις εὑρίσκομεν:

$$\underline{T_2 = 2{,}149 \text{ sec} \quad \text{ἢ} \quad T_2 = 2{,}15 \text{ sec περίπου.}}$$

ζ) Ἔλεγχος τοῦ ἀποτελέσματος καί, εἰ δυνατόν, ἐπαλήθευσις αὐτοῦ. Ἡ εὑρεθεῖσα τιμὴ 2,15 sec, ὡς μεγαλυτέρα τῆς δοθείσης τιμῆς 2,14 sec, δὲν ἀντιβαίνει εἰς τὸν νόμον τοῦ ἐκκρεμοῦς, καθότι, ὡς διδάσκει ἡ Φυσική, «ἡ περίοδος τοῦ ἐκκρεμοῦς εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογος τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τῆς τιμῆς τοῦ g», ἑπομένως τὸ εὑρεθὲν ἐξαγόμενον δέον νὰ θεωρηθῇ κατ' ἀρχὴν ὡς ὀρθόν.

Ἀριθμὸς διατηρουμένων δεκαδικῶν ψηφίων εἰς τὸ ἐξαγόμενον. Τὸ ζήτημα τοῦτο ἀπασχολεῖ πολλάκις τοὺς σπουδαστάς, οἱ ὁποῖοι κατὰ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ ἐξαγομένου, ἐφ' ὅσον τοῦτο δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπολογισθῇ ἐπακριβῶς, δὲν γνωρίζουν πόσα δεκαδικὰ ψηφία πρέπει νὰ διατηρήσουν εἰς τὸ ἐξαγόμενον.

Ἐὰν εἰς τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως δίδεται ἀριθμὸς τοιοῦτος, ὥστε τὸ τελευταῖον δεκαδικὸν ψηφίον του νὰ εἶναι ἀμφίβολον, π.χ. ὅταν δίδεται, ὅτι ἡ ταχύτης κινητοῦ εἶναι $\upsilon = 35{,}62$ cm/sec, τοῦτο δὲ δηλοῖ, ὅτι τὸ ψηφίον 2 δὲν εἶναι ἐπακριβῶς γνωστόν, ἀλλ' εἶναι ἀμφίβολον, πρέπει, εἰς τοὺς ὑπολογισμούς μας, νὰ μὴ διατηροῦμεν περισσότερα ἀπὸ δύο δεκαδικὰ ψηφία· ἐὰν δὲ τὸ τρίτον δεκαδικὸν ψηφίον εἶναι μεγαλύτερον ἀπὸ 5, παραλείπομεν αὐτὸ καὶ αὐξάνομεν τὸ δεύτερον κατὰ μίαν μονάδα, ἐὰν δὲ εἶναι μικρότερον τοῦ 5, ἁπλῶς παραλείπομεν αὐτό.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει, ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν δεκαδικῶν ψηφίων, τὰ ὁποῖα πρέπει νὰ διατηροῦμεν εἰς τὸ ἐξαγόμενον, ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς ἀκριβείας μὲ τὴν ὁποίαν ἔχουν μετρηθῆ τὰ δεδομένα καὶ ἑπομένως εἰς τὴν Φυσικήν, ὅπου εἶναι τοῦτο δυνατόν, περιορίζομεν τὸν ἀριθμὸν τῶν δεκαδικῶν ψηφίων καὶ ἁπλουστεύομεν οὕτω τοὺς ὑπολογισμούς, εἰς πολλὰς δὲ περιπτώσεις διατηροῦμεν δύο σημαντικὰ ψηφία καὶ ἓν ἀμφίβολον. Εἰς τὰς συνήθεις ἀσκήσεις τῆς Φυσικῆς, διὰ τοὺς ἀνωτέρω ἐκτιθεμένους λόγους, δεχόμεθα $\pi = 3{,}14$, $\sqrt{2} = 1{,}41$, $\sqrt{3} = 1{,}73$, $g = 981$ cm/sec^2 κ.ο.κ., μολονότι οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι εἶναι γνωστοὶ μὲ περισσότερα δεκαδικὰ ψηφία.

Εἰς τοὺς ὑπολογισμοὺς τῶν ἀσκήσεων Φυσικῆς τηροῦνται οἱ ἀκόλουθοι κανόνες: α) Κατὰ τὰς προσθέσεις καὶ ἀφαιρέσεις δὲν πρέπει νὰ προωθοῦμεν τὴν πρᾶξιν πέραν στήλης περιεχούσης ἀμφίβολον ψηφίον. β) Κατὰ τὸν πολλαπλασιασμὸν καὶ διαίρεσιν, εἰς τὸ ἐξαγόμενον πρέπει νὰ ἔχωμεν τόσον ἀριθμὸν σημαντικῶν ψηφίων, ὅσα ἔχει ὁ ἀριθμὸς μὲ τὸν μικρότερον ἀριθμὸν σημαντικῶν ψηφίων.

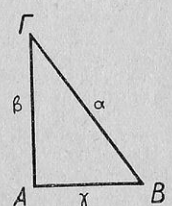
ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΕΙΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΕΚ ΤΗΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ

Κατὰ τὴν λύσιν τῶν ἀσκήσεων ὁ σπουδαστὴς συναντᾷ ὡρισμένους τύπους, ὅπου ὑπεισέρχονται συχνὰ τριγωνομετρικαὶ ἔννοιαι, ὡς π.χ. τὸ ἡμίτονον, τὸ συνημίτονον, ἡ ἐφαπτομένη καὶ ἡ συνεφαπτομένη.

Πρὸς ὑποβοήθησιν τῶν ἀναγνωστῶν ἐκείνων οἱ ὁποῖοι δὲν ἔχουν ἀκόμη ἀποκτήσει γνώσεις Τριγωνομετρίας, ἀναπτύσσομεν εἰς τὸ κεφάλαιον τοῦτο ὡρισμένας ἐκ τῶν θεμελιωδῶν γνώσεων αὐτῆς.

Α. Τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοί: Εἰς τὴν Τριγωνομετρίαν χρησιμοποιοῦμεν τέσσαρας ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι καλοῦνται τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοί, ἀναφέρονται δὲ πάντοτε εἰς γωνίαν τινὰ θ, ἢ τὸ ἀντίστοιχον πρὸς αὐτὴν τόξον. Οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι καλοῦνται ἡμίτονον, συνημίτονον, ἐφαπτομένη καὶ συνεφαπτομένη καὶ παριστῶνται συμβολικῶς ὡς ἑξῆς:

$$\text{ημ}\,\vartheta,\quad \text{συν}\,\vartheta,\quad \text{εφ}\,\vartheta,\quad \text{σφ}\,\vartheta.$$



Σχ. 1.

Β. Ὁρισμοί: Ἔστω τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ, ὅπου τὰς πλευρὰς παριστῶμεν διὰ τῶν μικρῶν γραμμάτων, δηλ. διὰ τοῦ α τὴν ἀπέναντι τῆς γωνίας Α πλευράν, διὰ τοῦ β τὴν ἀπέναντι τῆς γωνίας Β καὶ διὰ τοῦ γ τὴν ἀπέναντι τῆς γωνίας Γ (σχ. 1).

α) Ὡς ἡμίτονον τῆς γωνίας Β ὁρίζομεν τὸ πηλίκον τοῦ μήκους τῆς ἀπέναντι καθέτου πλευρᾶς β διὰ τοῦ μήκους τῆς ὑποτεινούσης α καὶ παριστᾶται συμβολικῶς ὡς κάτωθι:

$$\text{ημ}\,B = \frac{\beta}{\alpha} \tag{1}$$

ἤτοι:

$$\boxed{\text{ημ}\,B = \frac{\text{μῆκος τῆς ἀπέναντι καθέτου}}{\text{μῆκος τῆς ὑποτεινούσης}}}$$

Ὁμοίως ἔχομεν:

$$\text{ημ}\,\Gamma = \frac{\gamma}{\alpha} \tag{1'}$$

β) Τὸ συνημίτονον τῆς γωνίας Β ὁρίζεται ὡς τὸ πηλίκον τοῦ μήκους τῆς προσκειμένης καθέτου πλευρᾶς γ διὰ τοῦ μήκους τῆς ὑποτεινούσης α καὶ παριστᾶται συμβολικῶς:

$$\text{συν}\,B = \frac{\gamma}{\alpha} \tag{2}$$

ἤτοι:

$$\boxed{\text{συν}\,B = \frac{\text{μῆκος τῆς προσκειμένης καθέτου}}{\text{μῆκος τῆς ὑποτεινούσης}}}$$

Ὁμοίως ἔχομεν:

$$\text{συν}\,\Gamma = \frac{\beta}{\alpha} \tag{2'}$$

γ) Ἡ ἐφαπτομένη τῆς γωνίας Β ὁρίζεται ὡς τὸ πηλίκον τοῦ μήκους τῆς ἀπέναντι καθέτου πλευρᾶς β διὰ τοῦ μήκους τῆς προσκειμένης καθέτου πλευρᾶς γ καὶ παριστᾶται συμβολικῶς:

$$\text{εφ}\,B = \frac{\beta}{\gamma} \tag{3}$$

ἤτοι:

$$\boxed{\text{εφ}\,B = \frac{\text{μῆκος τῆς ἀπέναντι καθέτου}}{\text{μῆκος τῆς προσκειμένης καθέτου}}}$$

Ὁμοίως ἔχομεν :
$$\varepsilon\varphi\ \Gamma = \frac{\gamma}{\beta} \tag{3'}$$

δ) Ἡ συνεφαπτομένη τῆς γωνίας Β ὁρίζεται ὡς τὸ πηλίκον τοῦ μήκους τῆς προσκειμένης εἰς τὴν γωνίαν καθέτου πλευρᾶς γ διὰ τοῦ μήκους τῆς ἀπέναντι τῆς γωνίας καθέτου πλευρᾶς β καὶ παριστᾶται συμβολικῶς :

$$\sigma\varphi\ B = \frac{\gamma}{\beta} \tag{4}$$

ἤτοι :
$$\boxed{\sigma\varphi\ B = \frac{\text{μῆκος τῆς προσκειμένης καθέτου}}{\text{μῆκος τῆς ἀπέναντι καθέτου}}}$$

Ὁμοίως ἔχομεν :
$$\sigma\varphi\ \Gamma = \frac{\beta}{\gamma} \tag{4'}$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἰσοτήτων προκύπτει ὅτι :

α) Κάθε κάθετος πλευρὰ ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι γινόμενον τῆς ὑποτεινούσης ἐπὶ τὸ ἡμίτονον τῆς ἀπέναντι γωνίας ἢ ἐπὶ τὸ συνημίτονον τῆς προσκειμένης ὀξείας γωνίας.

β) Κάθε κάθετος πλευρὰ ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι γινόμενον τῆς ἄλλης καθέτου πλευρᾶς ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην τῆς ἀπέναντι γωνίας ἢ ἐπὶ τὴν συνεφαπτομένην τῆς προσκειμένης ὀξείας γωνίας αὐτοῦ.

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν μιᾶς γωνίας προκύπτει, ὅτι οὗτοι εἶναι καθαροὶ ἀριθμοί. Οὕτω π.χ. ἐὰν δύναμιν F ἐκπεφρασμένην εἰς kgr* πολλαπλασιάσωμεν ἢ διαιρέσωμεν διά τινος τριγωνομετρικοῦ ἀριθμοῦ, θὰ λάβωμεν πάλιν τὴν δύναμιν εἰς kgr* κ.ο.κ.

Ἀφοῦ τὸ ἡμίτονον καὶ τὸ συνημίτονον μιᾶς γωνίας εἶναι πηλίκον μιᾶς τῶν καθέτων πλευρῶν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου διὰ τῆς ὑποτεινούσης, εἶναι προφανὲς ὅτι τόσον τὸ ἡμίτονον, ὅσον καὶ τὸ συνημίτονον δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι μεγαλύτερα τῆς μονάδος. Διὰ τὴν ἐφαπτομένην καὶ συνεφαπτομένην μιᾶς γωνίας δὲν ἰσχύει τὸ αὐτό.

Αἱ τιμαὶ τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν ἔχουν ὑπολογισθῆ διὰ τὰς διαφόρους γωνίας καὶ ἀναγράφονται εἰς εἰδικοὺς πίνακας, ὡς π.χ. ὁ παρατιθέμενος εἰς τὸ τέλος τοῦ βιβλίου (βλ. σελ. 303). Οὕτως ἐκ τοῦ πίνακος εὑρίσκομεν π.χ. διὰ $B = 30^0$: ημ $30^0 = 0{,}5$, συν $30^0 = 0{,}866$, εφ $30^0 = 0{,}577$.

Ἐξ ἁπλῆς συγκρίσεως τῶν ἀνωτέρω τύπων βλέπομεν, ὅτι ημ Β = συν Γ, συν Β = ημ Γ, εφ Β = σφ Γ καὶ σφ Β = εφ Γ. Αἱ ἀνωτέρω σχέσεις ἰσχύουν, ὅταν αἱ γωνίαι Β καὶ Γ εἶναι συμπληρωματικαί, δηλ. ἔχουν ἄθροισμα μιᾶς ὀρθῆς γωνίας, ἤτοι 90^0.

Ἐὰν διαιρέσωμεν τὴν ἐξίσωσιν (1) διὰ τῆς (2), λαμβάνομεν τὴν (3), ἐὰν δὲ διαιρέσωμεν τὴν (2) διὰ τῆς (1), λαμβάνομεν τὴν (4). Ὁμοίως, ἐὰν διαιρέσωμεν τὴν (1') διὰ τῆς (2'), λαμβάνομεν τὴν (3'), ἐνῷ ἐὰν διαιρέσωμεν τὴν (2') διὰ τῆς (1'), λαμβάνομεν τὴν (4'). Ἐκ τούτων προκύπτουν αἱ κάτωθι σχέσεις :

$$\frac{\eta\mu\ B}{\sigma\upsilon\nu\ B} = \varepsilon\varphi\ B \quad (5) \qquad \frac{\sigma\upsilon\nu\ B}{\eta\mu\ B} = \sigma\varphi\ B \quad (6)$$

$$\frac{\eta\mu\ \Gamma}{\sigma\upsilon\nu\ \Gamma} = \varepsilon\varphi\ \Gamma \quad (7) \qquad \frac{\sigma\upsilon\nu\ \Gamma}{\eta\mu\ \Gamma} = \sigma\varphi\ \Gamma \quad (8)$$

Γ. Θεμελιώδης σχέσις: Ἐὰν ὑψώσωμεν εἰς τὸ τετράγωνον τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) καὶ προσθέσωμεν αὐτὰς κατὰ μέλη, λαμβάνομεν :

$$(\eta\mu\ B)^2 + (\sigma\upsilon\nu\ B)^2 = \frac{\beta^2 + \gamma^2}{\alpha^2}$$

Εἶναι ὅμως, κατὰ τὸ Πυθαγόρειον θεώρημα, $\beta^2 + \gamma^2 = \alpha^2$, ἑπομένως ἡ ἄνω σχέσις, ἀφαιρουμένων τῶν παρενθέσεων τοῦ πρώτου μέλους, γράφεται :

$$\boxed{\eta\mu^2\ B + \sigma\upsilon\nu^2\ B = 1}$$

τοῦ ἐκθέτου δηλ. γραφομένου ἄνωθεν τοῦ συμβόλου τοῦ τριγωνομετρικοῦ ἀριθμοῦ.

Ἐὰν πράξωμεν τὸ αὐτὸ διὰ τὰς ἰσότητας (1') καὶ (2'), λαμβάνομεν :

$$\boxed{\eta\mu^2\ \Gamma + \sigma\upsilon\nu^2\ \Gamma = 1}$$

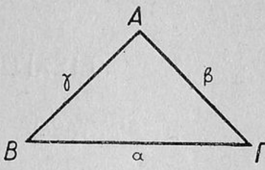
Ἐὰν τὰς ἰσότητας (5) καὶ (6) πολλαπλασιάσωμεν κατὰ μέλη, λαμβάνομεν : εφ Β · σφ Β = 1. Ὁμοίως, ἐὰν πράξωμεν τὸ αὐτὸ διὰ τὰς ἰσότητας (7) καὶ (8), θὰ λάβωμεν : εφ Γ · σφ Γ = 1.

Εἰς τὴν Τριγωνομετρίαν ἀποδεικνύεται, ὅτι :

$$\text{ημ}\ \theta = \text{συν}\ (90^0 - \theta) = \text{ημ}\ (180^0 - \theta) \qquad (9)$$
$$\text{συν}\ \theta = \text{ημ}\ (90^0 - \theta) = -\ \text{συν}\ (180^0 - \theta) \qquad (10)$$
$$\text{εφ}\ \theta = \text{σφ}\ (90^0 - \theta) = -\ \text{εφ}\ (180^0 - \theta) \qquad (11)$$

Λίαν εὔχρηστοι εἶναι αἱ ἀκόλουθοι τριγωνομετρικαὶ σχέσεις :

$$\text{ημ}\ (\theta + \varphi) = \text{ημ}\,\theta \cdot \text{συν}\,\varphi + \text{συν}\,\theta \cdot \text{ημ}\,\varphi \qquad (12)$$
$$\text{συν}\ (\theta + \varphi) = \text{συν}\,\theta \cdot \text{συν}\,\varphi - \text{ημ}\,\theta \cdot \text{ημ}\,\varphi \qquad (13)$$
$$\text{ημ}\ 2\ \theta = 2\,\text{ημ}\,\theta \cdot \text{συν}\,\theta \qquad (14)$$
$$\text{συν}\ 2\ \theta = \text{συν}^2\theta - \text{ημ}^2\theta \qquad (15)$$



Σχ. 2.

Εἰς πᾶν τρίγωνον, ὡς π.χ. εἰς τὸ ΑΒΓ (σχ. 2), ἰσχύουν αἱ σχέσεις :

$$\frac{\text{ΒΓ}}{\text{ημ Α}} = \frac{\text{ΑΓ}}{\text{ημ Β}} = \frac{\text{ΑΒ}}{\text{ημ Γ}} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\alpha}{\text{ημ Α}} = \frac{\beta}{\text{ημ Β}} = \frac{\gamma}{\text{ημ Γ}} \qquad (16)$$

ἤτοι : «τὰ μήκη τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰ ἡμίτονα τῶν ἀπέναντι γωνιῶν».

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΕΙΣ ΤΗΝ ΜΗΧΑΝΙΚΗΝ

ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ. ΜΟΝΑΔΕΣ. ΓΡΑΦΙΚΑΙ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ. ΣΥΝΘΕΣΙΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Α′

1. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις διαστάσεων καὶ αἱ μονάδες μετρήσεως εἰς τὸ σύστημα C.G.S. καὶ τὸ Τεχνικὸν Σύστημα (Τ.Σ.) τῶν μεγεθῶν $F \cdot t$ καὶ $m \cdot \upsilon$, ὅπου F δύναμις, t χρόνος, m μᾶζα καὶ υ ταχύτης.

Λύσις. α) Σύστημα μονάδων C.G.S. Διὰ τὸ μέγεθος $F \cdot t$ ἔχομεν $F = [M\,L\,T^{-2}]$ καὶ $t = [T]$, ὅθεν $F \cdot t = [M\,L\,T^{-2}]\,[T] = [M\,L\,T^{-1}]$ καὶ μονὰς αὐτοῦ εἶναι τό: $\underline{1\ gr \cdot cm \cdot sec^{-1}}$.

Διὰ τὸ μέγεθος $m \cdot \upsilon$ ἔχομεν $m = [M]$ καὶ $\upsilon = [L T^{-1}]$, ὅθεν $m \cdot \upsilon = [M]\,[L\,T^{-1}] = [M\,L\,T^{-1}]$ καὶ μονὰς αὐτοῦ τό: $\underline{1\ gr \cdot cm \cdot sec^{-1}}$.

β) Τεχνικὸν Σύστημα μονάδων. Διὰ τὸ μέγεθος $F \cdot t$ ἔχομεν $F = [F]$, $t = [T]$, ὅθεν $F \cdot t = [F\ T]$ καὶ μονὰς αὐτοῦ τό: $\underline{1\ kgr^* \cdot sec.}$

Διὰ τὸ μέγεθος $m \cdot \upsilon$ ἔχομεν $m = [F\,L^{-1}\,T^2]$ καὶ $\upsilon = [L\,T^{-1}]$, ὅθεν προκύπτει ὅτι: $m \cdot \upsilon = [F\,L^{-1}\,T^2]\,[L\,T^{-1}] = [F\,T]$ καὶ μονὰς αὐτοῦ τό: $\underline{1\ kgr^* \cdot sec.}$

Διὰ συγκρίσεως τῶν ἐξισώσεων διαστάσεων τῶν μεγεθῶν $F \cdot t$ καὶ $m \cdot \upsilon$ εἰς ἀμφότερα τὰ συστήματα παρατηροῦμεν, ὅτι αὗται εἶναι ὅμοιαι, διότι τὰ δύο μεγέθη εἶναι ὅμοια καὶ δυνάμεθα μάλιστα νὰ γράψωμεν τὴν σχέσιν $F \cdot t = m \cdot \upsilon$.

2. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἐξισώσεις διαστάσεων καὶ αἱ μονάδες τῶν μεγεθῶν $1/2\,m \cdot \upsilon^2$, ὅπου m μᾶζα καὶ υ ταχύτης, καὶ ροπῆς δυνάμεως ἡ ὁποία ἐκφράζεται ὑπὸ τῆς σχέσεως $F \cdot l$, ὅπου F δύναμις καὶ l μῆκος, εἰς τὰ συστήματα μονάδων C.G.S. καὶ Τεχνικὸν Σύστημα.

Λύσις. α) Σύστημα μονάδων C.G.S. Διὰ τὸ μέγεθος $1/2 \cdot m \cdot \upsilon^2$, ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς 1/2 ἀποτελεῖ ἀδιάστατον μέγεθος, δὲν λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν καὶ ἡ ἐξίσωσις διαστάσεων συμπίπτει πρὸς τὴν τοῦ μεγέθους $m \cdot \upsilon^2$, διὰ τὸ ὁποῖον ἔχομεν $m = [M]$, $\upsilon = [L\,T^{-1}]$ καὶ $\upsilon^2 = [L^2\,T^{-2}]$, ὅθεν $m \cdot \upsilon^2 = [M\,L^2\,T^{-2}]$ καὶ μονὰς τό: $\underline{1\ gr \cdot cm^2 \cdot sec^{-2}}$.

Διὰ τὸ μέγεθος $F \cdot l$ ἔχομεν $F = [M\,L\,T^{-2}]$ καὶ $l = [L]$, ὅθεν $F \cdot l = [M\,L\,T^{-2}] \cdot [L] = [M\,L^2\,T^{-2}]$ καὶ μονὰς τό: $\underline{1\ gr \cdot cm^2 \cdot sec^{-2}}$.

β) Τεχνικὸν Σύστημα μονάδων. Διὰ τὸ μέγεθος $m \cdot \upsilon^2/2$ ἔχομεν: $m = [F L^{-1}\,T^2]$, $\upsilon^2 = [L^2\,T^{-2}]$, ὅθεν $m \cdot \upsilon^2 = [F\,L^{-1}\,T^2]\,[L^2\,T^{-2}] = [FL]$ καὶ μονὰς τό: $\underline{1\ kgr^* m}$.

Διὰ τὸ μέγεθος $F \cdot l$ ἔχομεν $F = [F]$, $l = [L]$, ὅθεν $F \cdot l = [FL]$ καὶ μονὰς τό: $\underline{1\ kgr^* m}$.

Διὰ συγκρίσεως τῶν ἐξισώσεων διαστάσεων τῶν μεγεθῶν $m \cdot \upsilon^2/2$ (κινητικὴ ἐνέργεια) καὶ τῆς ροπῆς δυνάμεως $F \cdot l$ βλέπομεν, ὅτι ἀμφότερα τὰ μεγέθη ἔχουν τὴν αὐτὴν ἐξίσωσιν διαστάσεων, ἐν τούτοις ὅμως εἶναι ἐντελῶς διάφορα μεγέθη, διότι ἐνῷ ἡ κινητικὴ ἐνέργεια εἶναι ἀριθμητικὸν μέγεθος, ἡ ροπὴ εἶναι διανυσματικόν.

Οὕτω συνάγεται καὶ ἡ πρότασις, ὅτι δύο ὅμοια μεγέθη, π.χ. ἔργον καὶ κινητικὴ ἐνέργεια, ἔχουν κατ' ἀνάγκην τὴν αὐτὴν ἐξίσωσιν διαστάσεων. Ἀλλὰ τὸ ἀντίστροφον δὲν ἀληθεύει, δηλαδὴ δύο μεγέθη ἔχοντα τὴν αὐτὴν ἐξίσωσιν διαστάσεων δὲν ἔπεται ὅτι εἶναι ταὐτόσημα μεγέθη. Μὲ ἄλλους λόγους ἡ ἀνωτέρω συνθήκη εἶναι ἀναγκαία, ἀλλ' ὄχι καὶ ἱκανή.

3. Ἡ ἀκτὶς τῆς Γῆς εἶναι 6 370 000 m. Νὰ ἐκφρασθῇ α) εἰς km, β) εἰς dm, γ) εἰς cm καὶ δ) εἰς mm.

Λύσις. α) Διὰ νὰ μετατρέψωμεν τὴν ἀκτῖνα R τῆς Γῆς ἀπὸ μέτρα (m) εἰς χιλιόμετρα (km), ἐφαρμόζομεν τὴν μέθοδον τῶν τριῶν, ὡς ἑξῆς:

τὸ	1 km	ἰσοῦται πρὸς	10^3 m
(πόσα)	x ; »	ἰσοῦνται πρὸς	$6{,}37 \cdot 10^6$ m

καὶ εὑρίσκομεν: $$x = \frac{1 \cdot 6{,}37 \cdot 10^6}{10^3} = 6{,}37 \cdot 10^3 \text{ km}.$$

Ἄρα ἡ ἀκτὶς τῆς Γῆς εἰς km εἶναι: $\underline{R = 6{,}37 \cdot 10^3 \text{ km}}$.

β) Ὁμοίως, ἐπειδὴ 1 m = 10 dm, ἐφαρμόζομεν τὴν μέθοδον τῶν τριῶν, ὡς ἑξῆς:

1 m	10 dm
$6{,}37 \cdot 10^6$ m	x ; dm

καὶ εὑρίσκομεν: $$x = \frac{10 \cdot 6{,}37 \cdot 10^6}{1} = 6{,}37 \cdot 10^7 \text{ dm}.$$

Ἄρα ἡ ἀκτὶς τῆς Γῆς εἰς dm εἶναι $\underline{R = 6{,}37 \cdot 10^7 \text{ dm}}$.

γ) Ὁμοίως, ἐπειδὴ $1 \text{ m} = 10^2$ cm, εὑρίσκομεν διὰ τῆς αὐτῆς μεθόδου, ὅτι ἡ ἀκτὶς τῆς Γῆς εἰς cm εἶναι:

$$\underline{R} = 6{,}37 \cdot 10^6 \cdot 10^2 = \underline{6{,}37 \cdot 10^8 \text{ cm}}.$$

δ) Ὁμοίως, ἐπειδὴ $1 \text{ m} = 10^3$ mm, εὑρίσκομεν διὰ τῆς αὐτῆς μεθόδου, ὅτι ἡ ἀκτὶς τῆς Γῆς εἰς mm εἶναι:

$$\underline{R} = 6{,}37 \cdot 10^6 \cdot 10^3 = \underline{6{,}37 \cdot 10^9 \text{ mm}}.$$

4. Νὰ ἐκφρασθοῦν 20 m α) εἰς km, β) εἰς ναυτικὰ μίλια, γ) εἰς mm καὶ δ) εἰς μ.

Λύσις. α) Ἐπειδὴ $1 \text{ km} = 10^3$ m, θὰ εἶναι καὶ $1 \text{ m} = 10^{-3}$ km, ὁπότε ἐὰν ἐφαρμόσωμεν τὴν μέθοδον τῶν τριῶν εὑρίσκομεν, ὅτι:

$$\underline{20 \text{ m}} = 20 \cdot 10^{-3} = \underline{2 \cdot 10^{-2} \text{ km}}.$$

β) Ἐπειδὴ 1 ναυτικὸν μίλιον = 1852 m, εὑρίσκομεν ὅτι:

$$\underline{20 \text{ m}} = 20/1\,852 = \underline{0{,}0108 \text{ ναυτ. μίλια}}.$$

γ) Ἐπειδὴ $1 \text{ m} = 10^3$ mm, εὑρίσκομεν ὅτι:

$$\underline{20 \text{ m}} = 20 \cdot 10^3 = \underline{2 \cdot 10^4 \text{ mm}}.$$

δ) Ἐπειδὴ $1\,\mu = 10^{-6}$ m, ἢ ὅπερ τὸ αὐτὸ $1 \text{ m} = 10^6\,\mu$, εὑρίσκομεν ὅτι:

$$\underline{20 \text{ m}} = 20 \cdot 10^6 = \underline{2 \cdot 10^7\,\mu}.$$

5. Ἡ μονὰς Ångström (Ἄγκστρεμ, Å) ἰσοῦται πρὸς 10^{-8} cm. Ἐὰν τὸ πράσινον φῶς ἔχῃ μῆκος κύματος 5 900 Å, πόσον εἶναι τὸ μῆκος κύματος τούτου εἰς mμ.

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν λ τὸ μῆκος κύματος τοῦ πρασίνου φωτός, ἐπειδὴ $1 \text{ Å} = 10^{-8}$ cm, θὰ ἔχωμεν $\lambda = 5\,900 \cdot 10^{-8}$ cm, καὶ ἐπειδὴ $1 \text{ m}\mu = 10^{-7}$ cm, εὑρίσκομεν ὅτι:

$$\underline{\lambda} = 5\,900 \cdot 10^{-8} \cdot 10^7 = \underline{590 \text{ m}\mu}.$$

6. Νὰ μετατραποῦν α) ταχύτης 72 km/h εἰς m/sec, β) ταχύτης 200 cm/sec εἰς m/min, γ) ταχύτης 1 250 cm/sec εἰς km/h.

Λύσις. α) Ἐπειδὴ $1\ \mathrm{km} = 10^3\ \mathrm{m}$ καὶ $1\ \mathrm{h} = 3\,600\ \mathrm{sec}$, εὑρίσκομεν:

$$\underline{72\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}} = \frac{72 \cdot 10^3\ \mathrm{m}}{3\,600\ \mathrm{sec}} = \underline{20\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}}$$

β) Ἐπειδὴ $1\ \mathrm{cm} = 10^{-2}\ \mathrm{m}$ καὶ $1\ \mathrm{sec} = 1/60\ \mathrm{min}$, εὑρίσκομεν:

$$\underline{200\ \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{sec}}} = \frac{200 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m}}{1/60\ \mathrm{min}} = \underline{120\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{min}}}$$

γ) Ἐπειδὴ $1\ \mathrm{cm} = 10^{-5}\ \mathrm{km}$ καὶ $1\ \mathrm{sec} = 1/3\,600\ \mathrm{h}$, εὑρίσκομεν:

$$\underline{1\,250\ \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{sec}}} = \frac{1\,250 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{km}}{1/3\,600\ \mathrm{h}} = \underline{45\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}}$$

7. Νὰ μετατραπῇ ἐπιτάχυνσις α) 50 $\mathrm{cm/sec^2}$ εἰς $\mathrm{m/min^2}$ καὶ β) 1,25 $\mathrm{m/sec^2}$ εἰς $\mathrm{km/min^2}$.

Λύσις. α) Ἐπειδὴ $1\ \mathrm{cm} = 10^{-2}\ \mathrm{m}$ καὶ $1\ \mathrm{sec} = 1/60\ \mathrm{min}$, εὑρίσκομεν:

$$\underline{50\ \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{sec^2}}} = \frac{50 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m}}{\left(\frac{1}{60}\ \mathrm{min}\right)^2} = \underline{1\,800\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{min^2}}}$$

β) Ἐπειδὴ $1\mathrm{m} = 10^{-3}\ \mathrm{km}$ καὶ $1\ \mathrm{sec} = 1/60\ \mathrm{min}$, εὑρίσκομεν:

$$\underline{1{,}25\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec^2}}} = \frac{1{,}25 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{km}}{\left(\frac{1}{60}\ \mathrm{min}\right)^2} = \underline{4{,}5\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{min^2}}}$$

8. Πόσα δευτερόλεπτα περιέχονται εἰς 1 ἔτος (365 ἡμέραι).

Λύσις. Ἐπειδὴ $1\ \mathrm{h}$ (1 ὥρα) $= 60\ \mathrm{min}$ καὶ $1\ \mathrm{min} = 60\ \mathrm{sec}$, ἕπεται ὅτι:

$$1\ \mathrm{h} = 60 \cdot 60 = 3\,600\ \mathrm{sec}.$$

Ἐπίσης, ἐπειδὴ 1 ἡμέρα $= 24\ \mathrm{h}$, θὰ εἶναι:

1 ἡμέρα $= 24 \cdot 3\,600 = 86\,400\ \mathrm{sec}$ καὶ συνεπῶς τὸ 1 ἔτος (= 365 ἡμέραι) θὰ εἶναι:

$$\underline{1\ \text{ἔτος}} = 365 \cdot 86\,400 = 31\,536\,000\ \mathrm{sec} = \underline{3{,}15 \cdot 10^7\ \mathrm{sec}.}$$

9. Νὰ ἐκφρασθοῦν 100 ὑάρδες εἰς cm.

Λύσις. Ἐφ' ὅσον 1 ὑάρδα $= 0{,}914\ \mathrm{m} = 91{,}4\ \mathrm{cm}$, ἕπεται ὅτι:

$$\underline{100\ \text{ὑάρδες}} = 100 \cdot 91{,}4 = \underline{9\,140\ \mathrm{cm}.}$$

10. Κῆπος σχήματος ὀρθογωνίου ἔχει πλευρὰς 0,30 km καὶ 0,12 km. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κήπου α) εἰς στρέμματα, β) εἰς τετραγωνικοὺς τεκτονικοὺς πήχεις καὶ γ) εἰς τετραγωνικὰ μέτρα.

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν l_1 καὶ l_2 τὰς πλευρὰς τοῦ ὀρθογωνίου, τότε τὸ ἐμβαδὸν S αὐτοῦ δίδεται διὰ τῆς σχέσεως: $S = l_1 \cdot l_2$. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν σχέσιν ταύτην τὰ l_1 καὶ l_2 διὰ τῶν τιμῶν τῆς ἀσκήσεως λαμβάνομεν:

$$S = 0{,}30 \cdot 0{,}12 = 0{,}036\ \mathrm{km^2}$$

ἤ, ἐπειδὴ $1\ \mathrm{km^2} = 10^6\ \mathrm{m^2}$, θὰ ἔχωμεν:

$$S = 0{,}036 \cdot 10^6 = 36 \cdot 10^3\ \mathrm{m^2}.$$

α) Ἐφ' ὅσον 1 στρέμμα $= 10^3\ \mathrm{m^2}$, θὰ εἶναι καὶ $1\ \mathrm{m^2} = 10^{-3}$ στρέμματα καὶ ἑπομένως θὰ ἔχωμεν:

$$\underline{S} = 36 \cdot 10^3 \cdot 10^{-3} = \underline{36\ \text{στρέμματα.}}$$

β) Ἐφ' ὅσον 1 τετραγωνικὸς τεκτονικὸς πῆχυς $= 9/16\ \mathrm{m^2}$, θὰ εἶναι καὶ $1\ \mathrm{m^2} = 16/9$ τετραγωνικοὶ τεκτονικοὶ πήχεις καὶ συνεπῶς θὰ ἔχωμεν:

$$\underline{S} = 36 \cdot 10^3 \cdot 16/9 = \underline{64 \cdot 10^3\ \text{τετρ. τεκτ. πήχεις.}}$$

γ) Εἰς τὴν ἀρχὴν τῆς λύσεως ἔχομεν εὕρει, ὅτι:

$$\underline{S = 36 \cdot 10^3\ \mathrm{m^2}.}$$

11. Ἡ διάμετρος σύρματος ἐξ ὀρειχάλκου εἶναι 1,22 mm. Πόση εἶναι ἡ τομὴ αὐτοῦ α) εἰς mm² καὶ β) εἰς cm².

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν δ τὴν διάμετρον τῆς τομῆς τοῦ σύρματος, τότε τὸ ἐμβαδὸν S τῆς τομῆς αὐτοῦ θὰ εἶναι:

$$S = \pi \cdot \frac{\delta^2}{4}$$

α) Θέτοντες $\delta = 1,22$ mm, εὑρίσκομεν:

$$\underline{S = 1,168 \text{ mm}^2.}$$

β) Ἐπειδὴ $1 \text{ cm}^2 = 10 \text{ mm}^2$, θὰ εἶναι καὶ $1 \text{ mm}^2 = 10^{-2} \text{ cm}^2$ καὶ ἑπομένως:

$$\underline{S} = 1,168 \cdot 10^{-2} = \underline{0,01168 \text{ cm}^2.}$$

12. Πλὰξ κατὰ προσέγγισιν τετράγωνος 12,04 cm καὶ 11,93 cm. Πόση ἡ ἐπιφάνεια τῆς πλακὸς εἰς mm². Ἐὰν δεχθῶμεν ὅτι ἡ πλὰξ εἶναι πράγματι τετράγωνος πλευρᾶς 12 cm, ἡ ἐπιφάνεια αὐτῆς εἶναι 14 400 mm². Πόσον ἐπὶ τοῖς ἑκατὸν διαφέρει ἡ πραγματικὴ ἐπιφάνεια τῆς πλακὸς ἀπὸ τὴν κατὰ προσέγγισιν.

Λύσις. Ἐφ' ὅσον αἱ διαστάσεις τῆς πλακὸς εἶναι 12,04 cm = 120,4 mm καὶ 11,93 cm = 119,3 mm, τὸ ἐμβαδὸν S αὐτῆς θὰ εἶναι:

$$S = 120,4 \cdot 119,3 = 14\,363,7 \text{ mm}^2$$

καὶ συνεπῶς θὰ διαφέρῃ ἀπὸ τὴν κατὰ προσέγγισιν κατὰ $14\,400 \text{ mm}^2 - 14\,363,7 \text{ mm}^2 = 36,3 \text{ mm}^2$. Διὰ νὰ εὕρωμεν πόσον τοῖς ἑκατὸν διαφέρει ἡ πραγματικὴ ἐπιφάνεια ἀπὸ τὴν κατὰ προσέγγισιν, σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς: Ὅταν ἡ πραγματικὴ ἐπιφάνεια ἔχῃ ἐμβαδὸν 14 363,7 mm², τότε διαφέρει αὕτη ἀπὸ τὴν κατὰ προσέγγισιν κατὰ 36,3 mm². Ἐὰν ὅμως ἡ πραγματικὴ ἐπιφάνεια εἶχε ἐμβαδὸν 100 mm², πόσον θὰ διέφερε ἀπὸ τὴν κατὰ προσέγγισιν;

Λύοντες τὸ πρόβλημα τοῦτο μὲ τὴν μέθοδον τῶν τριῶν εὑρίσκομεν ὅτι διαφέρει κατὰ $\underline{0,25\%_0}$.

13. Μετὰ θυελλώδη βροχὴν ἡ στάθμη λίμνης ἀνῆλθε κατὰ 26 mm. Δεδομένου ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τῆς λίμνης εἶναι 9 km², κατὰ πόσα λίτρα ηὐξήθη ἡ περιεκτικότης τῆς λίμνης.

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν S τὴν ἐπιφάνειαν τῆς λίμνης καὶ h τὴν ἀνύψωσιν τῆς στάθμης, τότε ἡ αὔξησις V τῆς περιεκτικότητος τῆς λίμνης θὰ εἶναι:

$$V = S \cdot h$$

Ἐπειδὴ ἔχουν δοθῆ ὅτι: $S = 9 \text{ km}^2 = 9 \cdot 10^6 \text{ m}^2$ καὶ $h = 26 \text{ mm} = 26 \cdot 10^3 \text{ m}$, λαμβάνομεν δι' ἐφαρμογῆς τῆς ἀνωτέρω σχέσεως, ὅτι:

$$V = 9 \cdot 10^6 \text{ m}^2 \cdot 26 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 234 \cdot 10^3 \text{ m}^3.$$

Ἐπειδὴ δὲ $1 \text{ m}^3 = 10^3$ *lt*, εὑρίσκομεν ὅτι:

$$\underline{V} = 234 \cdot 10^3 \cdot 10^3 = \underline{234 \cdot 10^6 \, lt.}$$

14. Κύβος ἐκ ξύλου ἔχει πλευρὰν 0,5 m καὶ ἡ μᾶζα αὐτοῦ εἶναι 100 kgr. Νὰ εὑρεθῇ ἡ πυκνότης τοῦ ξύλου.

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν α τὴν ἀκμὴν τοῦ κύβου, τότε ὁ ὄγκος του θὰ εἶναι:

$$V = \alpha^3.$$

Ἐπειδὴ ὅμως ἔχουν δοθῆ ὅτι $\alpha = 0,5 \text{ m} = 50 \text{ cm}$, ἕπεται ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ κύβου θὰ εἶναι:

$$V = (50 \text{ cm})^3 = 125 \cdot 10^3 \text{ cm}^3.$$

Ἡ πυκνότης ρ δίδεται, ὡς γνωστόν, διὰ τοῦ τύπου:

$$\rho = \frac{m}{V}$$

Ἐργαζόμενοι εἰς τὸ σύστημα C.G.S. θέτομεν: $m = 100 \cdot 10^3$ gr, $V = 125 \cdot 10^3 \text{ cm}^3$ καὶ εὑρίσκομεν ὅτι:

$$\underline{\rho = 0,8 \text{ gr/cm}^3.}$$

15. Κυλινδρικὴ ράβδος ἐκ σιδήρου ἔχει ὕψος 0,2 m, ἡ δὲ διάμετρος τῆς βάσεως αὐτῆς εἶναι 12 mm. Ἐὰν ἡ μᾶζα τῆς ράβδου εἶναι 176 gr, νὰ εὑρεθῇ ἡ πυκνότης τοῦ σιδήρου.

Λύσις. Γνωρίζομεν ὅτι ἡ πυκνότης δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου:

$$\rho = \frac{m}{V}$$

Ἐὰν ὅμως καλέσωμεν δ τὴν διάμετρον τῆς τομῆς τῆς κυλινδρικῆς ράβδου καὶ h τὸ ὕψος αὐτῆς, τότε θὰ εἶναι:

$$V = \frac{\pi \cdot \delta^2}{4} \cdot h$$

καὶ συνεπῶς ὁ τύπος τῆς πυκνότητος γίνεται:

$$\rho = \frac{4\,m}{\pi \cdot \delta^2 \cdot h} \qquad (1)$$

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν πυκνότητα εἰς gr/cm³, τρέπομεν τὰς τιμὰς τῶν μεγεθῶν εἰς μονάδας C.G.S., ὅτε θὰ ἔχωμεν: $m = 176$ gr, $\delta = 12$ mm $= 1{,}2$ cm, $h = 0{,}2$ m $= 20$ cm, καὶ δι' ἐφαρμογῆς τοῦ ἀνωτέρου τύπου (1) λαμβάνομεν:

$$\rho = 7{,}8\ \text{gr/cm}^3.$$

16. Δοχεῖον εἶναι πλῆρες μὲ μέλι καὶ ἔχει διάμετρον 10,3 cm καὶ ὕψος 8,75 cm. Ἐὰν τὸ μέλι ἔχῃ βάρος 900 gr*, πόσον τὸ εἰδικὸν βάρος αὐτοῦ.

Λύσις. Τὸ εἰδικὸν βάρος, ὡς γνωστόν, εὑρίσκεται ἐκ τοῦ πηλίκου τοῦ βάρους Β τοῦ σώματος διὰ τοῦ ὄγκου V αὐτοῦ, ἤτοι:

$$\varepsilon = \frac{B}{V} \qquad (1)$$

Ὁ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου ἰσοῦται μὲ τὴν βάσιν αὐτοῦ $S = \pi \cdot \delta^2/4$ ἐπὶ τὸ ὕψος h καὶ ἑπομένως ἡ σχέσις (1) γράφεται:

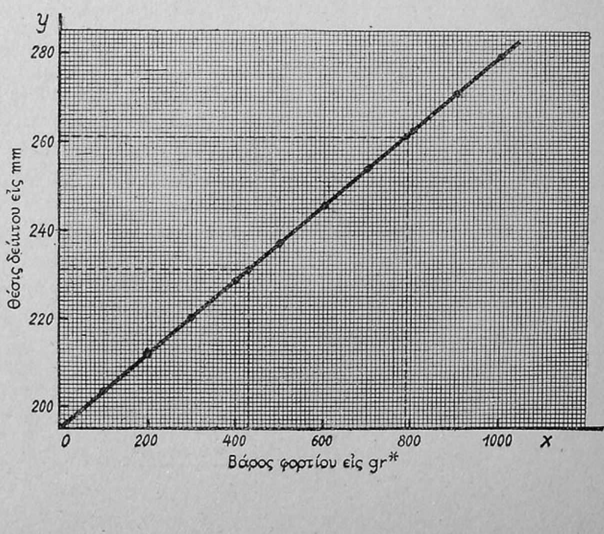
$$\varepsilon = \frac{B}{\frac{\pi\delta^2}{4} \cdot h} = \frac{4\,B}{\pi \cdot \delta^2 \cdot h} \qquad (2)$$

Θέτομεν εἰς τὴν σχέσιν (2) τὰ δεδομένα: $\delta = 10{,}3$ cm, $h = 8{,}75$ cm, $B = 900$ gr* καὶ εὑρίσκομεν:

$$\varepsilon = 1{,}23\ \text{gr}^*/\text{cm}^3.$$

17. Δυναμόμετρον δι' ἐλατηρίου φέρει εἰς τὸ κατώτερον ἄκρον τοῦ ἐλατηρίου δείκτην, ὅστις μετατοπίζε-

Βάρος φορτίου εἰς gr*	Θέσις δείκτου εἰς mm
0	195
100	204
200	213
300	223
400	232
500	240
600	248
700	256
800	264
900	271
1000	279



ται ἔμπροσθεν κανόνος διῃρημένου εἰς mm. Αἱ θέσεις τοῦ δείκτου συναρτήσει τοῦ βάρους φορτίσεως τοῦ δυναμομέτρου δίδονται ἀπὸ τὸν ἔμπροσθεν πίνακα. Ζητεῖται: α) Νὰ χαραχθῇ ἡ παραστατικὴ καμπύλη τῆς θέσεως τοῦ δείκτου συναρτήσει τοῦ φορτίου, χρησιμοποιοῦντες χάρτην χιλιοστομετρικόν. Νὰ ὁρισθῇ ὡς κλῖμαξ 1 cm διὰ 100 gr* ἐπὶ τοῦ ἄξονος ΟΧ, 1 cm διὰ 10 mm ἐπὶ τοῦ ἄξονος ΟΨ. β) Ἡ ἐπιμήκυνσις δύναται νὰ θεωρηθῇ ἀνάλογος πρὸς τὸ φορτίον; γ) Κατὰ τὴν ἐξάρτησιν ὁ δείκτης φθάνει εἰς τὴν ὑποδιαίρεσιν 261 mm· διὰ χρησιμοποιήσεως τῆς καμπύλης νὰ εὑρεθῇ τὸ βάρος. δ) Ἐξαρτᾶται βάρος 430 gr*· διὰ χρησιμοποιήσεως τῆς καμπύλης νὰ εὑρεθῇ ἡ θέσις τοῦ δείκτου.

Λύσις. α) Τὸ σχῆμα δεικνύει τὴν γραφικὴν παράστασιν τῆς θέσεως τοῦ δείκτου συναρτήσει τοῦ φορτίου.

β) Ἡ ἐπιμήκυνσις δύναται νὰ θεωρηθῇ ἀνάλογος πρὸς τὸ φορτίον, διότι ἡ χαραχθεῖσα καμπύλη εἶναι εὐθεῖα γραμμή.

γ) Τὸ βάρος φορτίσεως, δι' ἐπιμήκυνσιν 261 mm, ὅπως δεικνύεται ἐκ τῆς καμπύλης, εἶναι:

$$\underline{790\ gr^*}.$$

δ) Διὰ τὸ βάρος φορτίσεως 430 gr *, ὡς δεικνύει ἡ καμπύλη, ἡ ἐπιμήκυνσις εἶναι:

$$\underline{231\ mm.}$$

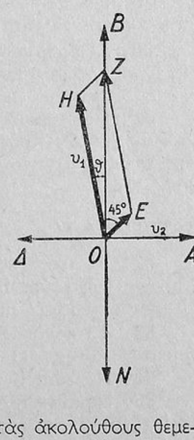
18. Ἀσθενὴς παρουσιάζει τὰς ἀκολούθους θερμοκρασίας καθ' ὥραν, ἀπὸ τῆς 8ης π.μ. μέχρι 8ης μ.μ.: 37° C, 37,2° C, 37,4° C, 37,8° C, 38° C, 38,4° C, 38,8° C, 39° C, 38,2° C, 38° C, 37,6° C, 37° C. Νὰ παρασταθῇ γραφικῶς ἡ θερμοκρασία τοῦ ἀσθενοῦς συναρτήσει τοῦ χρόνου.

Λύσις. Διὰ νὰ παραστήσωμεν γραφικῶς τὴν θερμοκρασίαν συναρτήσει τοῦ χρόνου, λαμβάνομεν δύο ἄξονας (εὐθείας) τεμνομένους κατ' ὀρθὴν γωνίαν καὶ ἐπὶ τοῦ ἑνὸς μὲν χαράσσομεν κατάλληλον κλίμακα χρονικῶν διαστημάτων, ἐπὶ δὲ τοῦ ἄλλου κατάλληλον κλίμακα θερμοκρασιῶν.

Εἰς ἕκαστον ζεῦγος τιμῶν θερμοκρασίας καὶ χρόνου θὰ ἀντιστοιχῇ προφανῶς ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν δύο ἀξόνων ἓν σημεῖον. Ἑνοῦμεν ὅλα τὰ σημεῖα ταῦτα διὰ μιᾶς γραμμῆς καὶ ἡ προκύπτουσα καμπύλη δεικνύει παραστατικῶς τὴν θερμοκρασίαν τοῦ ἀσθενοῦς κατὰ τὰς διαφόρους χρονικὰς στιγμάς.

Ἀφίεται εἰς τὸν σπουδαστὴν ἡ χάραξις τῆς ὡς ἄνω καμπύλης.

19. Ἀεροπλάνον ἀναπτύσσει ταχύτητα 3 600 km/h καὶ θέλει νὰ μετατεθῇ ἐπὶ μεσημβρινοῦ, ἐκ Νότου πρὸς Βορρᾶν, ἐνῷ πνέει Ν-Δ ἄνεμος ὑπὸ ταχύτητα 8 m/sec. Ποίαν πορείαν πρέπει νὰ τηρῇ τὸ ἀεροπλάνον.



Λύσις. Ἔστω $υ_1$ ἡ ταχύτης τοῦ ἀεροπλάνου, $υ_2$ ἡ ταχύτης τοῦ ἀνέμου καὶ θ ἡ ζητουμένη γωνία, ἡ ὁποία καθορίζει τὴν πορείαν τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ τηρῇ τὸ ἀεροπλάνον (βλ. σχῆμα). Προφανῶς αἱ δύο ταχύτητες πρέπει νὰ δίδουν συνισταμένην ταχύτητα, ἡ ὁποία νὰ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς μεσημβρινῆς γραμμῆς Ν Β καὶ μὲ φορὰν πρὸς Βορρᾶν. Ἐκ τοῦ σχηματιζομένου τριγώνου ΟΗΖ ἔχομεν:

$$\frac{υ_2}{ημ\, θ} = \frac{υ_1}{ημ\, 45^0} \quad καὶ \quad ημ\, θ = \frac{υ_2 \cdot ημ\, 45^0}{υ_1} \qquad (1)$$

Θέτομεν εἰς τὴν σχέσιν (1) τὰ δεδομένα:

$$υ_1 = \frac{360 \cdot 10^3}{3\,600} = 100\ m/sec, \quad υ_2 = 8\ m/sec, \quad ημ\, 45^0 = \sqrt{2}/2$$

καὶ εὑρίσκομεν:

$$ημ\, θ = 0{,}056 \quad καὶ \quad \underline{θ = 3^0\, 47'}.$$

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Β'

20. Ζητεῖται νὰ εὑρεθοῦν εἰς σύστημα καθοριζόμενον ἀπὸ τὰς ἀκολούθους θεμελιώδεις μονάδας: Χιλιόμετρον (km), γραμμάριον μάζης (gr) καὶ ὥραν (h), αἱ ἀριθμητικαὶ τιμαὶ τῶν φυσικῶν μεγεθῶν τὰ ὁποῖα ἔχουν εἰς τὸ σύστημα C.G.S. τὰς ἀκολούθους τιμάς : α) ταχύτης τοῦ φωτὸς $3 \cdot 10^{10}$, β) ἐπιτάχυνσις τῆς βαρύτητος 981, γ) βάρος 1 cm^3 ὕδατος ἀπεσταγμένου εἰς θερμοκρασίαν 4° C, εἰς τόπον ὅπου $g = 981$ cm/sec^2. (Ἀπ. α' $108 \cdot 10^7$, β' 127 138, γ' 127 138.)

21. Νὰ εὑρεθοῦν εἰς τὸ σύστημα C.G.S. αἱ τιμαὶ τῶν μεγεθῶν 10 kgr* καὶ 20 kgr*m. ($g = 980$ C.G.S.) (Ἀπ. $980 \cdot 10^4$, $19{,}6 \cdot 10^7$.)

22. Νὰ ἐκφρασθοῦν 17,3° εἰς rad. (Ἀπ. 0,302 rad.)

23. Νὰ μετατραπῇ γωνιακὴ ταχύτης 2 rad/sec εἰς rad/min. (Ἀπ. 120 rad/min.)

24. Νὰ ἐκφρασθῇ εἰς rad/min ἡ γωνιακὴ ταχύτης τοῦ δευτεροδείκτου, λεπτοδείκτου καὶ ὡροδείκτου ὡρολογίου. (Ἀπ. 2π rad/min, π/30 rad/min, π/360 rad/min.)

25. Δοκὸς σιδηρᾶ ἔχει 8,50 m μῆκος, 20 cm πλάτος καὶ 10 cm πάχος. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ βάρος τῆς δοκοῦ, ὅταν τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ σιδήρου εἶναι 7,8 gr^*/cm^3. (Ἀπ. 1 326 kgr*.)

26. Ἠλεκτροφόρον καλώδιον ἐκ χαλκοῦ ἔχει διάμετρον 1,5 cm. Πόσον ζυγίζει κατὰ χιλιόμετρον μήκους, ὅταν τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ χαλκοῦ εἶναι ἴσον πρὸς 8,92 gr^*/cm^3. (Ἀπ. 1 575 kgr*.)

27. Τεμάχιον ξύλου ζυγίζει 1 850 gr*, φέρει δὲ κοιλότητα ἐντὸς τῆς ὁποίας τοποθετεῖται σιδηρᾶ πλὰξ ἥτις τὴν πληροῖ· τὸ τεμάχιον ζυγίζει 2 640 gr*. Πόσος ὁ ὄγκος τῆς κοιλότητος. (Πυκνότης ξύλου 0,62 gr/cm^3, πυκνότης σιδήρου 7,80 gr/cm^3.) (Ἀπ. 110 cm^3.)

28. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ σιδήρου ὅστις ἀπητήθη διὰ τὴν κατασκευὴν τοῦ Πύργου τοῦ Eiffel, γνωστοῦ ὄντως ὅτι ζυγίζει 8 000 τόννους καὶ ὅτι τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ σιδήρου εἶναι 7,8 gr^*/cm^3. Πόση θὰ ἦτο ἡ τομὴ ράβδου σιδηρᾶς ἐχούσης τὸ αὐτὸ βάρος καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος (300 m) μὲ τὸν Πύργον τοῦ Eiffel. (Ἀπ. 1 026 m^3, 3,42 m^2.)

29. Ἐλατήριον ἐκ χάλυβος, τοῦ ὁποίου ἡ ἐπιμήκυνσις εἶναι ἀνάλογος τοῦ τείνοντος βάρους, ὑφίσταται ἐπιμήκυνσιν 15 mm ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν φορτίου 120 gr*. Ζητοῦνται : α) Πόσον ἐπιμηκύνεται ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῶν κάτωθι φορτίων : 175 gr*, 260 gr*, 325 gr* καὶ β) πόσον εἶναι τὸ φορτίον, τὸ ὁποῖον τοῦ ἐπιφέρει ἐπιμήκυνσιν 35 mm. (Ἀπ. α' 22 mm, 32,5 mm, 40,6 mm, β' 280 gr*.)

30. Αἱ ὀρθογώνιοι συνιστῶσαι ἑνὸς διανύσματος εἶναι $x = 4$ m, $y = -7$ m. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγεθος καὶ ἡ διεύθυνσις τοῦ διανύσματος ἐν σχέσει πρὸς τὸν ἄξονα x. (Ἀπ. 8,06 m, $\theta = 299{,}7°$.)

31. Νὰ εὑρεθῇ ἡ συνισταμένη τοῦ διανύσματος μήκους 30 m σχηματίζοντος γωνίαν 30° ὡς πρὸς τὴν ὁριζοντίαν, μήκους 80 m σχηματίζοντος γωνίαν 60° ὡς πρὸς τὴν ὁριζοντίαν καὶ μήκους 100 m σχηματίζοντος γωνίαν 225° ὡς πρὸς τὴν ὁριζοντίαν. (Ἀπ. 14,4 m, ὑπὸ γωνίαν 109,2° ὡς πρὸς τὴν ὁριζοντίαν.)

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Γ'

32. Ἡ ταχύτης διαδόσεως τοῦ φωτὸς εἶναι 186 300 μίλια ἀνὰ δευτερόλεπτον (mil/sec). Νὰ εὑρεθῇ ἡ ταχύτης αὐτὴ εἰς χιλιόμετρα ἀνὰ δευτερόλεπτον (km/sec). (1 μίλιον = 1 609 m.)

33. Τὸ κανονικὸν βαρομετρικὸν ὕψος εἶναι 760 mm Hg. Νὰ ἐκφρασθῇ τὸ ὕψος τοῦτο εἰς ἴντζες. (1 in = 2,540 cm.)

34. Νὰ εὑρεθῇ ἡ διαφορὰ μεταξὺ 12 ἰντζῶν καὶ 30 cm εἰς cm.

35. Νὰ εὑρεθῇ ποῖος εἶναι ὁ μεγαλύτερος ὄγκος μεταξὺ ἑνὸς κύβου πλευρᾶς 13 ἰντζῶν καὶ μιᾶς σφαίρας διαμέτρου 20 cm. (Ὁ ὄγκος σφαίρας εἶναι $4/3 \cdot \pi \cdot r^3$, ὅπου r ἡ ἀκτίς.)

36. Ἀπὸ πόλεώς τινος Α ἕως τὴν πόλιν Β ἡ ἀπόστασις εἶναι 285 mil, ἀπὸ τῆς πόλεως δὲ Γ ἕως τὴν πόλιν Δ εἶναι 854 km. Νὰ ἐκφρασθοῦν αἱ ἀποστάσεις αὐταὶ εἰς km καὶ mil ἀντιστοίχως. (1 μίλιον = 1 609 m.)

37. Τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ χυτοσιδήρου εἶναι 7,2 gr*/cm^3. Νὰ ὑπολογισθῇ α) ἡ πυκνότης του εἰς gr/cm^3, β) νὰ προσδιορισθῇ τὸ βάρος 20 cm^3 χυτοσιδήρου.

38. Πόσον ὄγκον καταλαμβάνει εἰς 0^o C 1 gr ὑδραργύρου. (Ἡ πυκνότης τοῦ ὑδραργύρου εἰς 0^o C εἶναι 13,6 gr/cm^3.)

39. Δοχεῖον περιέχει 4,58 kgr ἐλαίου πυκνότητος 0,92 gr/cm^3. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ ἐλαίου.

40. Τριχοειδὴς σωλὴν ὅταν εἶναι κενὸς ζυγίζει 4,5204 gr, ὅταν δὲ εἶναι πλήρης ὑδραργύρου ζυγίζει 4,6415 gr. Ἐὰν τὸ μῆκος τοῦ σωλῆνος εἶναι 78,3 mm, ζητεῖται ἡ ἐσωτερικὴ διάμετρος τοῦ τριχοειδοῦς σωλῆνος. (Πυκνότης ὑδραργύρου: 13,6 gr/cm^3.)

41. Δυναμόμετρον δι' ἐλατηρίου ἐκ χάλυβος παραμορφοῦται ἀναλόγως τῶν παραμορφουσῶν δυνάμεων. Διὰ τὴν βαθμολογίαν διατίθεται μόνον βάρος τοῦ 1 kgr*, τὸ ὁποῖον τοῦ ἐπιφέρει ἐπιμήκυνσιν 200 mm. Ζητοῦνται α) ὁ τρόπος τῆς βαθμολογίας καὶ β) ποία θὰ εἶναι ἡ ἔντασις δυνάμεως, ἥτις τοῦ ἐπιφέρει ἐπιμήκυνσιν 29,5 mm.

42. Νὰ παρασταθοῦν γραφικῶς ὑπὸ κλίμακα 5 mm διὰ κάθε 100 gr* : α) Βάρος 250 gr*, β) ὁριζοντία δύναμις, καὶ ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιά, ἐντάσεως 1,1 kgr*, γ) δύναμις σχηματίζουσα γωνίαν 60^o ὡς πρὸς τὴν προηγουμένην μὲ διεύθυνσιν ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω καὶ ἐντάσεως 75 000 δυνῶν.

43. Νὰ προστεθοῦν τὰ ἀκόλουθα διανύσματα 1 m πρὸς Βορρᾶν, 2 m πρὸς Δυσμάς, 3 m πρὸς Νότον, 4 m πρὸς Ἀνατολάς, 5 m βορειο - ἀνατολικῶς, 6 m βορειο - δυτικῶς, 7 m νοτιο - δυτικῶς, 8 m νοτιο - ἀνατολικῶς.

44. Διανύσματα ἔχουν μήκη ἀντιστοίχως 3 cm, 5 cm καὶ 7 cm. Ποῖαι αἱ ἐντάσεις τῶν ὑπ' αὐτῶν παριστωμένων δυνάμεων, ὅταν εἶναι γνωστὸν ὅτι ἡ πρὸς τοῦτο κλῖμαξ εἶναι 2 cm διὰ 3 kgr*.

45. Νὰ ἀναλυθῇ διάνυσμα μήκους 30 cm εἰς δύο ὀρθογωνίους συνιστώσας, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μία νὰ σχηματίζῃ γωνίαν 40^o πρὸς τὸ ἀρχικὸν διάνυσμα.

46. Ἀεροπλάνον διανύει 40 μίλια κατὰ διεύθυνσιν 30^o Ἀνατολὴ - Βορρᾶς. Πόσον διάστημα ἔχει διανύσει πρὸς Ἀνατολὰς καὶ πόσον πρὸς Βορρᾶν.

47. Πλοῖον τηρεῖ πορείαν πρὸς Νότον 15 μίλια/h καὶ ἐκτρέπεται πρὸς Δυσμὰς ὑπὸ ρεύματος 5 μίλια/h. Νὰ καθορισθῇ ἡ συνισταμένη ταχύτης τοῦ πλοίου.

48. Ἓν ἱστιοφόρον πλοῖον προχωρεῖ Β - Α κατὰ 400 m, ἀκολούθως κάμνει στροφὴν πρὸς Δυσμὰς καὶ προχωρεῖ κατὰ 300 m, ἀκολούθως Β - Α κατὰ 500 m, ἀκολούθως πρὸς Δυσμὰς κατὰ 300 m, ἀκολούθως Β - Α κατὰ 600 m καὶ τελικῶς πρὸς Δυσμὰς κατὰ 200 m. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ συνισταμένη μετατόπισις. (Ἐπιτρέπεται νὰ προσθέσωμεν χωριστὰ τὰς Β - Α μετατοπίσεις καὶ ἀκολούθως τὰς δυτικὰς καὶ τέλος νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν συνισταμένην ; Σχηματίσατε ἓν διάγραμμα.)

49. Αὐτοκίνητον τὸ ὁποῖον κινεῖται μὲ κατεύθυνσιν πρὸς Βορρᾶν καὶ ὑπὸ ταχύτητα 70 km/h ἀλλάζει τὴν διεύθυνσιν του κατὰ 30^o πρὸς Ἀνατολὰς - Βορρᾶν, ἐνῷ διατηρεῖ τὴν αὐτὴν ταχύτητα. Νὰ εὑρεθῇ γραφικῶς ἡ μεταβολὴ τῆς ταχύτητος κατὰ διεύθυνσιν πρὸς Βορρᾶν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄

ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ

ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟΣ ΚΑΙ ΚΥΚΛΙΚΗ ΚΙΝΗΣΙΣ

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Α'

50. Ἀεροπλάνον ἀναχωρεῖ ἐξ Ἀθηνῶν τὴν 13ην ὥραν καὶ 45 λεπτὰ (13 h 45 min) καὶ προσγειοῦται εἰς Θεσσαλονίκην ἀπέχουσαν 320 km τὴν 15ην ὥραν. Ζητεῖται ἡ μέση ταχύτης τοῦ ἀεροπλάνου εἰς ναυτικὰ μίλια καθ' ὥραν καὶ εἰς m/sec.

Λύσις. Ἐὰν τὸ διανυθὲν διάστημα συμβολισθῇ διὰ τοῦ s καὶ ὁ χρόνος διὰ τοῦ t, τότε ἡ μέση ταχύτης $\bar{\upsilon}$ τοῦ ἀεροπλάνου δίδεται διὰ τοῦ τύπου:

$$\bar{\upsilon} = \frac{s}{t} \qquad (1)$$

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ταχύτητα εἰς μίλια/h, τρέπομεν τὸ διάστημα εἰς μίλια ($s = 320\,000/1852$ μίλια) καὶ τὸν χρόνον εἰς ὥρας ($t = 15\text{ h} - 13\text{ h } 45\text{ min} = 1\text{ h } 15\text{ min} = 1{,}25\text{ h}$) καὶ τὰς τιμὰς ταύτας θέτομεν εἰς τὸν τύπον (1), ὅτε θὰ ἔχωμεν:

$$\underline{\bar{\upsilon}} = \frac{320\,000}{1852 \cdot 1{,}25} = \underline{138{,}2 \text{ ναυτικὰ μίλια/h.}}$$

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ταχύτητα εἰς m/sec, πρέπει νὰ ἐκφρασθῇ τὸ διάστημα εἰς μέτρα ($s = 320 \cdot 10^3$ m) καὶ ὁ χρόνος εἰς δευτερόλεπτα ($t = 75 \cdot 60 = 4\,500$ sec), ὅτε θὰ ἔχωμεν:

$$\bar{\upsilon} = \frac{320 \cdot 10^3}{4{,}5 \cdot 10^3} = \underline{71{,}1 \text{ m/sec.}}$$

51. Ἡ ταχύτης κινητοῦ αὐξάνεται ὁμαλῶς ἀπὸ 30 km/h εἰς 60 km/h ἐντὸς 5 min. Νὰ προσδιορισθῇ ἡ μέση ταχύτης, ἡ διανυομένη ἀπόστασις καὶ ἡ ἐπιτάχυνσις.

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν υ_0 τὴν ἀρχικὴν ταχύτητα τοῦ κινητοῦ καὶ υ τὴν τελικὴν ταχύτητα αὐτοῦ, τότε, ἐπειδὴ ἡ κίνησις εἶναι ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένη, ἡ μέση ταχύτης $\bar{\upsilon}$ δίδεται διὰ τοῦ τύπου:

$$\bar{\upsilon} = \frac{\upsilon_0 + \upsilon}{2} \qquad (1)$$

Ἐὰν ἀκολούθως ἀντικαταστήσωμεν τὰ υ_0 καὶ υ διὰ τῶν τιμῶν τῆς ἀσκήσεως, εὑρίσκομεν:

$$\underline{\bar{\upsilon}} = \frac{30 + 60}{2} = \underline{45 \text{ km/h.}}$$

Ἡ ἐπιτάχυνσις, ὡς γνωστόν, θὰ εἶναι:

$$\gamma = \frac{\upsilon - \upsilon_0}{t} \qquad (2)$$

Ἐπειδὴ δὲ $\upsilon - \upsilon_0 = 30$ km/h $= 30\,000/3\,600$ m/sec καὶ $t = 5$ min $= 300$ sec, ἐκ τοῦ ἀνωτέρου τύπου (2) εὑρίσκομεν:

$$\underline{\gamma} = \frac{30\,000}{3\,600 \cdot 300} = \underline{0{,}028 \text{ m/sec}^2.}$$

Τὸ διάστημα s εὑρίσκεται ἐκ τοῦ γνωστοῦ τύπου:

$$s = \upsilon_0 \cdot t + \frac{1}{2}\gamma \cdot t^2$$

ὁ ὁποῖος, συμφώνως πρὸς τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως, μᾶς δίδει:

$$\underline{s} = 30\,000 \cdot 300 + \frac{1}{2}\, 0{,}028 \cdot 300^2 = \underline{3\,760 \text{ m.}}$$

52. Σιδηρόδρομος μεταβάλλει τὴν ταχύτητά του ἐντὸς 2 min ἀπὸ 12 km/h εἰς 30 km/h. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐπιτάχυνσίς του.

Λύσις. Ἡ μεταβολὴ τῆς ταχύτητος τοῦ σιδηροδρόμου εἶναι:

$$\upsilon - \upsilon_0 = 30 - 12 = 18 \ \frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{18\,000}{3\,600} = 5 \text{ m/sec}$$

καὶ ὁ χρόνος ἐντὸς τοῦ ὁποίου συντελεῖται ἡ μεταβολὴ αὕτη τῆς ταχύτητος εἶναι $t = 2 \cdot 60 = 120$ sec. Συνεπῶς ἡ ἐπιτάχυνσις τοῦ σιδηροδρόμου θὰ εἶναι:

$$\underline{\gamma} = \frac{\upsilon - \upsilon_0}{t} = \frac{5}{120} = 0{,}0416 \text{ m/sec}^2 = \underline{4{,}16 \text{ cm/sec}^2.}$$

53. Κινητὸν κινούμενον ἐπὶ 20 sec διανύει διάστημα 12 000 m μὲ κίνησιν εὐθύγραμμον ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ταχύτης του εἰς τὸ τέλος τοῦ εἰκοστοῦ δευτερολέπτου.

Λύσις. Ὡς γνωστὸν ὁ τύπος τοῦ διαστήματος, ὅταν $\upsilon_0 = 0$, εἶναι: $s = \frac{1}{2}\gamma \cdot t^2$. Ἐπειδὴ δὲ $\upsilon = \gamma \cdot t$, ὁ τύπος τοῦ διαστήματος γίνεται:

$$s = \frac{1}{2}\, \upsilon \cdot t$$

καὶ ἐὰν λύσωμεν τὸν τύπον τοῦτον ὡς πρὸς υ, εὑρίσκομεν:

$$\upsilon = \frac{2s}{t}$$

Ἐπειδὴ δὲ $s = 12\,000$ m καὶ $t = 20$ sec, εὑρίσκομεν ὅτι:

$$\underline{\upsilon} = \frac{2s}{t} = \frac{2 \cdot 12\,000}{20} = \underline{1\,200 \text{ m/sec.}}$$

54. Κινητὸν ἀναχωρεῖ ἐκ τῆς ἠρεμίας μὲ ἐπιτάχυνσιν 20 cm/sec². Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ χρόνος, τὸν ὁποῖον χρειάζεται διὰ νὰ ἀποκτήσῃ ταχύτητα 70 cm/sec.

Λύσις. Ἐπειδὴ τὸ κινητὸν ἀναχωρεῖ ἐκ τῆς ἠρεμίας, ἡ ταχύτης του θὰ εἶναι: $\upsilon = \gamma \cdot t$. Ἐὰν δὲ λύσωμεν ὡς πρὸς t, ὁ ζητούμενος χρόνος θὰ εἶναι:

$$t = \frac{\upsilon}{\gamma}$$

Δι' ἀντικαταστάσεως τῶν μεγεθῶν διὰ τῶν δεδομένων τῆς ἀσκήσεως εὑρίσκομεν:

$$\underline{t} = \frac{70}{20} = \underline{3{,}5 \text{ sec.}}$$

55. Αὐτοκινητάμαξα ἔχει ἀρχικὴν ταχύτητα 12 m/sec. Αἴφνης διανύει 300 m ἐντὸς 10 sec. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐπιτάχυνσίς της.

Λύσις. Ἐκ τοῦ γνωστοῦ τύπου τοῦ διαστήματος $s = \upsilon_0 \cdot t + \frac{1}{2}\gamma \cdot t^2$ λαμβάνομεν:

$$\gamma = \frac{2s - 2\upsilon_0 \cdot t}{t^2}$$

καὶ ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν τὰ μεγέθη s, υ_0 καὶ t διὰ τῶν τιμῶν τῆς ἀσκήσεως, ἔχομεν:

$$\underline{\gamma} = \frac{2 \cdot 300 - 2 \cdot 12 \cdot 10}{10^2} = \underline{3{,}6 \text{ m/sec}^2.}$$

56. Ἡ ταχύτης ἑνὸς σώματος κινουμένου ἐπ' εὐθείας μεταβάλλεται κατὰ τὸν ἀκόλουθον νόμον:

χρόνος	**0** sec	**1** sec	**2** sec	**3** sec	**4** sec
ταχύτης	**10** cm/sec	**15** cm/sec	**20** cm/sec	**25** cm/sec	**30** cm/sec

Νὰ καθορισθῇ τὸ εἶδος τῆς κινήσεως καὶ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ταχύτης καὶ τὸ διάστημα μετὰ παρέλευσιν 2,5 sec ἀπὸ τῆς ἀρχῆς τῆς κινήσεως. Νὰ κατα-

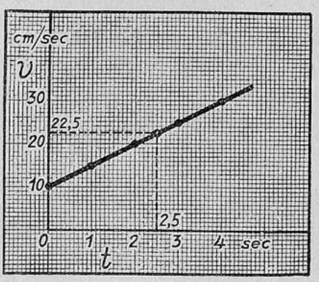
σκευασθῇ τὸ διάγραμμα τῆς ταχύτητος καὶ τοῦ διαστήματος καὶ νὰ ὑπολογισθοῦν ἐκ τοῦ διαγράμματος τὰ ἀντίστοιχα μεγέθη ἐντὸς τῶν 2,5 sec.

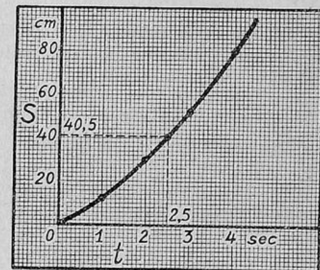
Λύσις. Ἐπειδὴ ἡ ταχύτης αὐξάνεται ἀναλόγως τοῦ χρόνου, ἡ κίνησις εἶναι ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένη, μὲ ἐπιτάχυνσιν:

$$\gamma = \frac{\upsilon - \upsilon_0}{t} = \frac{30-10}{4} = 5 \text{ cm/sec}^2.$$

Ἐκ τῶν δεδομένων τιμῶν τοῦ χρόνου καὶ τοῦ διαστήματος κατασκευάζομεν τὸ διάγραμμα τῆς ταχύτητος συναρτήσει τοῦ χρόνου καὶ εὑρίσκομεν ὅτι εἶναι εὐθεῖα γραμμὴ τέμνουσα τὸν ἄξονα τῶν διαστημάτων εἰς τὴν ὑποδιαίρεσιν 10 cm/sec.

Ἐκ τοῦ τύπου τῆς ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένης κινήσεως $s = \upsilon_0 \cdot t + \frac{1}{2}\gamma \cdot t^2$, ἐὰν θέσωμεν





$\upsilon_0 = 10$ cm/sec, δίδοντες εἰς τὸν χρόνον t τὰς τιμάς: 0 sec, 1 sec, 2 sec, 3 sec, 4 sec, εὑρίσκομεν διὰ τὸ διάστημα ἀντιστοίχως τὰς τιμάς: 12,5 cm, 30 cm, 52,5 cm, 80 cm.

Διὰ τῶν ἀνωτέρω τιμῶν κατασκευάζομεν τὸ διάγραμμα τοῦ διαστήματος συναρτήσει τοῦ χρόνου, τὸ ὁποῖον εἶναι καμπύλη γραμμὴ μὲ τὸ κοῖλον πρὸς τὰ ἄνω (βλ. σχῆμα).

Ἡ ταχύτης κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν 2,5 sec εὑρίσκεται, ἐὰν ἀπὸ τὴν ὑποδιαίρεσιν 2,5 sec τοῦ ἄξονος τῶν χρόνων φέρωμεν εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα τῶν ταχυτήτων καὶ ἀκολούθως ἀπὸ τὸ σημεῖον τομῆς τῆς καμπύλης φέρωμεν παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα τῶν χρόνων. Εὑρίσκομεν οὕτω ὅτι ἡ ταχύτης εἶναι: $\underline{\upsilon = 22{,}5 \text{ cm/sec.}}$

Καθ' ὅμοιον τρόπον εὑρίσκομεν καὶ τὸ ζητούμενον διάστημα ἐκ τοῦ διαγράμματος τοῦ διαστήματος, ὅτι εἶναι: $\underline{s = 40{,}5 \text{ cm.}}$

57. Ἡ ταχύτης αὐτοκινήτου ἐλαττοῦται ἀπὸ 35 m/sec **εἰς 15** m/sec, **ἀφοῦ διανύσῃ διάστημα 500** m. **Νὰ ὑπολογισθῇ α) ἡ ἐπιβράδυνσις, β) ποῖον διάστημα θὰ διανύσῃ μέχρις ὅτου τὸ αὐτοκίνητον ἠρεμήσῃ.**

Λύσις. α) Ἐπειδὴ ἡ κίνησις εἶναι ὁμαλῶς ἐπιβραδυνομένη, θὰ ἰσχύουν αἱ σχέσεις:

$$\upsilon = \upsilon_0 - \gamma \cdot t \quad (1) \qquad s = \upsilon_0 \cdot t - \frac{1}{2}\gamma \cdot t^2 \quad (2)$$

Ἐὰν ἀπαλείψωμεν τὸν χρόνον t μεταξὺ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2), λαμβάνομεν:

$$\gamma = \frac{\upsilon_0^2 - \upsilon^2}{2s} \tag{3}$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν σχέσιν (3) τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως εὑρίσκομεν:

$$\underline{\gamma} = \frac{35^2 - 15^2}{2 \cdot 500} = \underline{1 \text{ m/sec}^2.}$$

β) Ὅταν τὸ αὐτοκίνητον ἠρεμήσῃ, ἡ τελικὴ ταχύτης αὐτοῦ υ θὰ εἶναι μηδέν, θὰ ἔχῃ δὲ διανύσει ἓν μέγιστον διάστημα $s_{\mu\acute{\varepsilon}\gamma.}$ καὶ ἑπομένως ἡ σχέσις (3) θὰ γίνῃ:

$$\gamma = \frac{\upsilon_0^2}{2 s_{\mu\acute{\varepsilon}\gamma.}} \quad \text{ἐξ οὗ} \quad s_{\mu\acute{\varepsilon}\gamma.} = \frac{\upsilon_0^2}{2\gamma} \tag{4}$$

Θέτοντες τὰς δοθείσας τιμὰς εἰς τὴν σχέσιν (4) εὑρίσκομεν ὅτι:

$$\underline{s_{\mu\acute{\epsilon}\gamma.}} = \frac{35^2}{2 \cdot 1} = \underline{612{,}5 \text{ m.}}$$

58. Αὐτοκίνητον κινεῖται ὑπὸ ταχύτητα 25 km/h καὶ ἠρεμεῖ, ἀφοῦ διανύσῃ διάστημα 6 m. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐπιτάχυνσις (ὑποτιθεμένη σταθερὰ) καὶ ὁ ἀπαιτούμενος χρόνος. Ἐὰν ἡ ταχύτης ἐδιπλασιάζετο, πόσην ἀπόστασιν θὰ ἔπρεπε νὰ διανύσῃ τὸ αὐτοκίνητον, διὰ νὰ ἠρεμήσῃ, ἐφ' ὅσον ἡ ἐπιτάχυνσις διετηρεῖτο σταθερά.

Λύσις. Ἡ κίνησις θὰ εἶναι ὁμαλῶς ἐπιβραδυνομένη καὶ θὰ ἰσχύουν αἱ σχέσεις:

$$\upsilon = \upsilon_0 - \gamma \cdot t \qquad (1)$$

$$s = \upsilon_0 \cdot t - \frac{1}{2} \gamma \cdot t^2 \qquad (2)$$

Ἐπειδὴ ὅμως, ὅταν τὸ αὐτοκίνητον ἠρεμήσῃ, ἡ τελικὴ ταχύτης υ αὐτοῦ θὰ εἶναι μηδέν, θὰ ἔχωμεν:

$$0 = \upsilon_0 - \gamma \cdot t \qquad (3)$$

$$s = \upsilon_0 \cdot t - \frac{1}{2} \gamma \cdot t^2 \qquad (4)$$

Ἐὰν ἀκολούθως λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν (3) ὡς πρὸς t καὶ τὴν τιμὴν ταύτην θέσωμεν εἰς τὴν (4), λαμβάνομεν:

$$s = \frac{\upsilon_0^2}{2\gamma} \quad (5) \qquad \text{ἐξ οὗ} \qquad \gamma = \frac{\upsilon_0^2}{2s} \quad (6)$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν σχέσιν (6) τὰς τιμὰς τῶν υ_0 καὶ s, ἀφοῦ προηγουμένως μετατρέψωμεν τὴν ταχύτητα υ_0 εἰς m/sec ($\upsilon_0 = 25\,000/3\,600 = 7$ m/sec), καὶ εὑρίσκομεν:

$$\underline{\gamma = 4 \text{ m/sec}^2.}$$

Ὑπολογίζομεν τὸν χρόνον ἐκ τοῦ τύπου (3) θέτοντες: $\upsilon_0 = 7$ m/sec καὶ $\gamma = 4$ m/sec², ὅτε εὑρίσκομεν:

$$\underline{t} = \frac{\upsilon_0}{\gamma} = \frac{7}{4} = \underline{1{,}75 \text{ sec.}}$$

Ἐὰν ἡ ταχύτης ἐδιπλασιάζετο, θὰ ἦτο $\upsilon_0' = 2\,\upsilon_0$ καὶ ἑπομένως ἡ σχέσις (5) δύναται νὰ γραφῇ:

$$s' = \frac{(2\,\upsilon_0)^2}{2\gamma} = 4 \cdot \left(\frac{\upsilon_0^2}{2\gamma}\right)$$

Ἐπειδὴ δὲ $\frac{\upsilon_0^2}{2\gamma} = 6$ m, εὑρίσκομεν ὅτι τὸ κινητὸν θὰ διανύῃ ἀπόστασιν διὰ νὰ σταματήσῃ:

$$\underline{s'} = 4 \cdot 6 = \underline{24 \text{ m.}}$$

59. Συρμὸς ἀναχωρεῖ ἐκ τῆς ἠρεμίας μὲ κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην καὶ ἀποκτᾷ ταχύτητα 100 cm/sec, ὅταν διανύσῃ ἀπόστασιν 1 km. Πόση ἡ ἐπιτάχυνσις αὐτοῦ.

Λύσις. Ἐπειδὴ ὁ συρμὸς ἔχει ἀρχικὴν ταχύτητα μηδὲν καὶ ἡ κίνησις εἶναι ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένη, θὰ ἰσχύουν αἱ σχέσεις:

$$\upsilon = \gamma \cdot t \quad (1) \qquad \text{καὶ} \qquad s = \frac{1}{2} \gamma \cdot t^2 \quad (2)$$

Ἐκ τῆς σχέσεως (1), ἐὰν λάβωμεν τὴν τιμὴν τοῦ t καὶ τὴν θέσωμεν εἰς τὴν σχέσιν (2), εὑρίσκομεν:

$$s = \frac{\upsilon^2}{2\gamma}$$

Ἄρα ἡ ἐπιτάχυνσις τοῦ συρμοῦ θὰ εἶναι εἰς τὸ σύστημα C.G.S.:

$$\underline{\gamma} = \frac{\upsilon^2}{2s} = \frac{100^2}{2 \cdot 10^5} = \underline{0{,}05 \text{ cm/sec}^2.}$$

60. Σῶμα κινεῖται ὑπὸ ἀρχικὴν ταχύτητα 10 cm/sec καὶ ὑφίσταται ἐπι-

τάχυνσιν 2 cm/sec². Ζητοῦνται α) πόση εἶναι ἡ κτηθεῖσα ταχύτης ἐντὸς 1 min, β) πόση θὰ εἶναι ἡ ὁλικὴ ταχύτης μετὰ 1 min, γ) πόση ἡ μέση ταχύτης, δ) πόση ἡ διανυθεῖσα ἀπόστασις εἰς 1 min.

Λύσις α) Τὸ κινητὸν εἰς 1 min = 60 sec ἀποκτᾷ ταχύτητα (δηλ. μὴ ὑπολογιζομένης τῆς ἀρχικῆς ταχύτητος υ_0):

$$\upsilon' = \gamma \cdot t = 2 \cdot 60 = 120\ \text{cm/sec}.$$

β) Ἡ ὁλικὴ ταχύτης, δηλ. ἡ ταχύτης τὴν ὁποίαν θὰ ἔχῃ πράγματι μετὰ χρόνον t, θὰ εἶναι ἡ ἀρχικὴ υ_0 σὺν τὴν ταχύτητα $\gamma \cdot t$. Ἤτοι:

$$\upsilon = \upsilon_0 + \gamma \cdot t = 10 + 120 = 130\ \text{cm/sec}.$$

γ) Ἡ μέση ταχύτης αὐτοῦ θὰ εἶναι:

$$\bar{\upsilon} = \frac{\upsilon_0 + \upsilon}{2} = 70\ \text{cm/sec}.$$

δ) Ἡ ἀπόστασις, τὴν ὁποίαν θὰ διανύσῃ εἰς χρόνον t = 60 sec, θὰ εἶναι:

$$s = \bar{\upsilon} \cdot t = 70 \cdot 60 = 4\,200\ \text{cm}.$$

61. Σῶμα ἔχον ἀρχικὴν ταχύτητα 10 cm/sec ἀποκτᾷ κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην, μὲ τὴν ὁποίαν διανύει ἀπόστασιν 4 200 cm εἰς 1 min. Ζητοῦνται α) πόση ἡ μέση ταχύτης, β) πόση ἡ τελικὴ ταχύτης, γ) πόση ἡ ταχύτης ἡ κτηθεῖσα κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένης κινήσεως, δ) πόση ἡ ἐπιτάχυνσις.

Λύσις. α) Προφανῶς δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ὅτι ἡ κίνησις διεξάγεται μὲ σταθερὰν ταχύτητα, ἡ ὁποία εἶναι ἴση πρὸς τὴν μέσην ταχύτητα $\bar{\upsilon}$ τῆς ὁμαλῶς μεταβαλλομένης κινήσεως. Συνεπῶς θὰ ἔχωμεν:

$$\bar{\upsilon} = \frac{s}{t} = \frac{4\,200}{60} = 70\ \text{cm/sec}.$$

β) Ἡ τελικὴ ταχύτης εὑρίσκεται βάσει τοῦ τύπου $\upsilon = \upsilon_0 + \gamma t$, ὅτε:

$$\upsilon = 10 + 2 \cdot 60 = 130\ \text{cm/sec}.$$

γ) Ἡ κτηθεῖσα ταχύτης κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ 1 min θὰ εἶναι:

$$\upsilon - \upsilon_0 = 130 - 10 = 120\ \text{cm/sec}.$$

δ) Ἡ ἐπιτάχυνσις τοῦ σώματος θὰ εἶναι:

$$\gamma = \frac{\upsilon - \upsilon_0}{t} = \frac{120}{60} = 2\ \text{cm/sec}^2.$$

62. Σιδηρόδρομος ἀναχωρεῖ ἐξ Ἀθηνῶν καὶ φθάνει εἰς Λειβαδιὰν μετὰ 4 ὥρας. Καθ' ὁδὸν κάμνει δύο σταθμεύσεις, εἰς Τανάγραν καὶ εἰς Θήβας, διαρκείας ἡμισείας ὥρας ἑκάστην. Ἀποδώσατε γραφικῶς α) τὸ διανυθὲν διάστημα συναρτήσει τοῦ χρόνου (μετὰ τῆς σχετικῆς δικαιολογίας) καὶ β) τὴν ταχύτητα συναρτήσει τοῦ χρόνου.

(Πανεπιστήμιον Ἀθηνῶν, Φυσικὸν τμῆμα. Εἰσαγωγικαὶ ἐξετάσεις 1956.)

Λύσις. Ὑποθέτομεν ὅτι ὁ σιδηρόδρομος ἔχει τὰς ἑξῆς κινήσεις: α) Ὅταν ἐκκινῇ, ἔχει κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην. β) Μετὰ πάροδον χρόνου τινὸς ἀποκτᾷ κίνησιν ὁμαλήν. γ) Ὅταν πρόκειται νὰ σταθμεύσῃ, κινεῖται μὲ κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιβραδυνομένην.

Εἰς τὴν περίπτωσιν (α) θὰ ἰσχύουν αἱ σχέσεις:

$$s = \frac{1}{2}\gamma \cdot t^2 \quad (1) \qquad \text{καὶ} \qquad \upsilon = \gamma \cdot t \quad (2)$$

Ἐκ τῆς σχέσεως (1), ἐπειδὴ αὕτη εἶναι δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς τὸν χρόνον, προκύπτει ὅτι ἡ γραφικὴ παράστασις τοῦ διαστήματος ὡς πρὸς τὸν χρόνον εἶναι καμπύλη γραμμὴ ἔχουσα τὸ κοῖλον αὐτῆς πρὸς τὰ ἄνω: Τμήματα καμπύλης περιεχόμενα μεταξὺ τῶν χρονικῶν στιγμῶν $0 \rightarrow t_1$, $t_4 \rightarrow t_5$, $t_8 \rightarrow t_9$ (σχῆμα I).

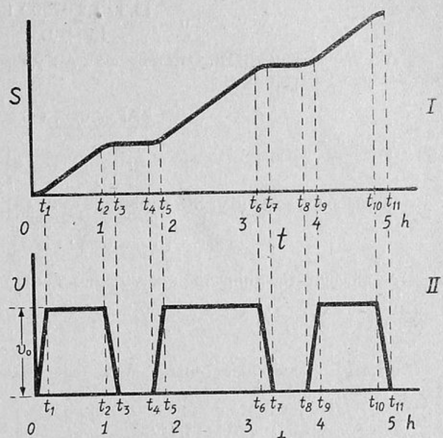
Ἐκ τῆς σχέσεως (2), ἐπειδὴ αὕτη εἶναι πρώτου βαθμοῦ ὡς πρὸς τὸν χρόνον, προκύπτει ὅτι ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς ταχύτητος ὡς πρὸς τὸν χρόνον εἶναι εὐθεῖα γραμμὴ παρουσιάζουσα κλίσιν ὡς πρὸς τὸν ἄξονα t: Εὐθύγραμμα τμήματα περιεχόμενα μεταξὺ τῶν ἰδίων χρονικῶν στιγμῶν $0 \rightarrow t_1$, κλπ. (σχῆμα II).

Εἰς τὴν περίπτωσιν (β) θὰ ἰσχύουν αἱ σχέσεις:

$$s = \upsilon_0 \cdot t \quad (3) \qquad \text{καὶ} \qquad \upsilon = \upsilon_0 = \text{σταθ.} \quad (4)$$

Ἐκ τῆς σχέσεως (3), ἐπειδὴ αὐτὴ εἶναι πρώτου βαθμοῦ ὡς πρὸς τὸν χρόνον, προκύπτει ὅτι ἡ γραφικὴ παράστασις τοῦ διαστήματος ὡς πρὸς τὸν χρόνον εἶναι εὐθεῖα γραμμὴ παρουσιάζουσα κλίσιν ὡς πρὸς τὸν ἄξονα t: Εὐθύγραμμα τμήματα περιεχόμενα μεταξὺ τῶν χρονικῶν στιγμῶν $t_1 \rightarrow t_2$, $t_5 \rightarrow t_6$,.., $t_9 - t_{10}$ (σχῆμα I).

Ἐκ τῆς σχέσεως (4), ἐπειδὴ ἡ ταχύτης εἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ χρόνου, δηλ. σταθερά, προκύπτει ὅτι ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς ταχύτητος εἶναι εὐθεῖα γραμμὴ παράλληλος ὡς πρὸς τὸν ἄξονα t: Εὐθύγραμμα τμήματα περιεχόμενα μεταξὺ τῶν ἰδίων χρονικῶν στιγμῶν $t_1 \rightarrow t_2$ (σχῆμα II).



Εἰς τὴν περίπτωσιν (γ) θὰ ἰσχύουν αἱ σχέσεις:

$$s = \upsilon_0 . t - \frac{1}{2}\gamma . t^2 \ (5) \text{ καὶ } \upsilon = \upsilon_0 - \gamma \cdot t (6)$$

Ἐκ τῆς σχέσεως (5) προκύπτει ὅτι ἡ γραφικὴ παράστασις τοῦ διαστήματος θὰ εἶναι καμπύλη γραμμὴ ἔχουσα τὸ κοῖλον αὐτῆς πρὸς τὰ κάτω: Τμήματα καμπύλης περιεχόμενα μεταξὺ τῶν χρονικῶν στιγμῶν $t_2 \rightarrow t_3$, $t_6 \rightarrow t_7$, $t_{10} \rightarrow t_{11}$ (σχῆμα I).

Ἐκ τῆς σχέσεως (6) προκύπτει ὅτι ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς ταχύτητος ὡς πρὸς τὸν χρόνον εἶναι εὐθεῖα γραμμὴ παρουσιάζουσα κλίσιν ὡς πρὸς τὸν ἄξονα t: Εὐθύγραμμα τμήματα περιεχόμενα μεταξὺ τῶν ἰδίων χρονικῶν στιγμῶν $t_2 \rightarrow t_3$.. (σχῆμα II).

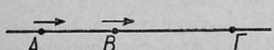
Τέλος κατὰ τὰ χρονικὰ διαστήματα $t_3 \rightarrow t_4$, $t_7 \rightarrow t_8$, ὁπότε ὁ σιδηρόδρομος εὑρίσκετο ἐν ἠρεμίᾳ, θὰ ἰσχύουν αἱ σχέσεις:

$$s = \text{σταθ.} \quad (7) \quad \text{καὶ} \quad \upsilon = 0 \quad (8)$$

Ἐκ τῆς σχέσεως (7) προκύπτουν τὰ εὐθύγραμμα τμήματα τὰ ὁποῖα εἶναι παράλληλα ὡς πρὸς τὸν ἄξονα t (σχῆμα I) καὶ ἐκ τῆς σχέσεως (8) προκύπτουν τὰ εὐθύγραμμα τμήματα τοῦ ἄξονος t (σχῆμα II).

63. Δύο ἁμαξοστοιχίαι κινοῦνται κατὰ τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν καὶ φοράν. Ἐκ τούτων ἡ μὲν πρώτη κινουμένη μὲ ταχύτητα 48 km/h προπορεύεται, ἡ δὲ δευτέρα ἕπεται καὶ κινεῖται μὲ ταχύτητα 72 km/h. Ὅταν αἱ ἁμαξοστοιχίαι εὑρίσκωνται εἰς ἀπόστασίν τινα x, τότε οἱ μηχανοδηγοὶ ἀντιλαμβάνονται ἀλλήλους καὶ εὐθὺς ἀμέσως ὁ μὲν προπορευόμενος ὁδηγὸς ἐπιταχύνει τὴν κίνησιν τῆς ἁμαξοστοιχίας κατὰ 1 m/sec², ὁ δὲ ἕτερος ἐπιβραδύνει αὐτὴν κατὰ 1,2 m/sec². Οὕτω κατωρθώθη ν' ἀποφευχθῇ ἡ σύγκρουσις. Ζητεῖται νὰ προσδιορισθῇ ἡ ἀπόστασις x ὡς καὶ ἡ κοινὴ ταχύτης τῶν ἁμαξοστοιχιῶν, ὅταν ἦλθον αὗται εἰς ἐπαφήν.

Λύσις. Ἂς καλέσωμεν υ_A καὶ υ_B τὰς ταχύτητας τῶν ἁμαξοστοιχιῶν, ὅταν αὗται εὑρίσκοντο εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β, ὁπότε ἀντελήφθησαν ἀλλήλους οἱ μηχανοδηγοί. Ἐπίσης γ_A καὶ γ_B τὰς ἐπιταχύνσεις ἀντιστοίχως αὐτῶν, t τὸν μεσολαβήσαντα χρόνον καὶ υ τὴν κοινὴν ταχύτητα εἰς τὸ σημεῖον Γ εἰς τὸ ὁποῖον κατωρθώθη ν' ἀποφευχθῇ ἡ σύγκρουσις. Οὕτω θὰ ἔχωμεν τὰς σχέσεις:



$$\upsilon = \upsilon_A - \gamma_A \cdot t \quad (1) \qquad \upsilon = \upsilon_B + \gamma_B \cdot t \quad (2)$$

Ἀπαλείφομεν τὸν χρόνον t μεταξὺ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) καὶ λαμβάνομεν:

$$\upsilon = \upsilon_B + \gamma_B \cdot \frac{\upsilon_A - \upsilon}{\gamma_A}$$

ἢ

$$\upsilon \cdot \gamma_A = \upsilon_B \cdot \gamma_A + \upsilon_A \cdot \gamma_B - \upsilon \cdot \gamma_B$$

καὶ
$$\upsilon = \frac{\upsilon_B \cdot \gamma_A + \upsilon_A \cdot \gamma_B}{\gamma_A + \gamma_B} \qquad (3)$$

Θέτομεν εἰς τὴν σχέσιν (3) :
$$\upsilon_B = \frac{48 \cdot 10^3}{3\,600} = 13{,}3 \frac{m}{sec}, \quad \upsilon_A = \frac{72 \cdot 10^3}{3\,600} = 20 \frac{m}{sec}, \quad \gamma_B = 1 \frac{m}{sec^2}, \quad \gamma_A = 1{,}2 \frac{m}{sec^2}$$
καὶ εὑρίσκομεν :
$$\underline{\upsilon} = \frac{13{,}3 \cdot 1{,}2 + 20 \cdot 1}{1{,}2 + 1} = \underline{16{,}4 \text{ cm/sec.}}$$

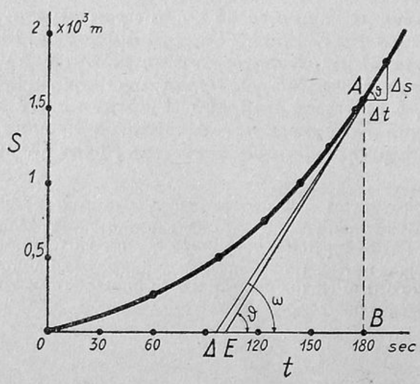
Διὰ τὴν εὕρεσιν τῆς ἀποστάσεως $x = AB$ γράφομεν τὸν τύπον τοῦ διαστήματος διὰ τὰς δύο ἁμαξοστοιχίας ἀντιστοίχως :
$$A\Gamma = \upsilon_A \cdot t - \frac{1}{2}\gamma_A \cdot t^2 \qquad (4)$$
$$B\Gamma = \upsilon_B \cdot t + \frac{1}{2}\gamma_B \cdot t^2 \qquad (5)$$

Ἀφαιροῦμεν κατὰ μέλη τὰς σχέσεις (4) καὶ (5) καὶ εὑρίσκομεν :
$$x = (\upsilon_A - \upsilon_B) \cdot t - \frac{1}{2} \cdot (\gamma_A + \gamma_B) \cdot t^2 \qquad (6)$$

Λαμβάνομεν τὴν τιμὴν τοῦ χρόνου t ἀπὸ τὴν (1) καὶ τὴν θέτομεν εἰς τὴν (6), ὅτε ἔχομεν :
$$x = (\upsilon_A - \upsilon_B) \cdot \frac{\upsilon_A - \upsilon}{\gamma_A} - \frac{1}{2} \cdot (\gamma_A + \gamma_B) \cdot \left(\frac{\upsilon_A - \upsilon}{\gamma_A}\right)^2 \qquad (7)$$

Θέτομεν τὰς δοθείσας τιμὰς καθὼς καὶ τὴν εὑρεθεῖσαν τιμὴν τοῦ υ εἰς τὴν (7) καὶ εὑρίσκομεν :
$$x = (20 - 13{,}3) \cdot \frac{20 - 16{,}4}{1{,}2} - \frac{1}{2}(1 + 1{,}2) \cdot \left(\frac{20 - 16{,}4}{1{,}2}\right)^2$$
ἐξ οὗ :
$$\underline{x = 11 \text{ m.}}$$

64. Συρμὸς ἐκκινεῖ ἔκ τινος πόλεως τὴν μεσημβρίαν (12 ὥραν) καὶ διέρχεται διὰ τῶν ἀκολούθων θέσεων :



1)4	km	**τὴν**	**12**	h	**1**	min	**3** sec
1)2	»	»	**12**	h	**1**	min	**43** sec
3)4	»	»	**12**	h	**2**	min	**6** sec
1	»	»	**12**	h	**2**	min	**25** sec
1 1)4	»	»	**12**	h	**2**	min	**43** sec
1 1)2	»	»	**12**	h	**2**	min	**58** sec

Ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ἀνωτέρω δεδομένων νὰ σχηματισθῇ τὸ διάγραμμα τῆς κινήσεως καὶ ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ διαγράμματος νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ταχύτης τοῦ συρμοῦ μετὰ 3 min ἀπὸ τῆς ἐκκινήσεως.

Λύσις. Ἂς καλέσωμεν τὴν χρονικὴν στιγμὴν 12 h, κατὰ τὴν ὁποίαν ἀναχωρεῖ ὁ σιδηρόδρομος, χρονικὴν στιγμὴν μηδέν. Ἐπειδὴ κατὰ τὴν χρονικὴν ταύτην στιγμὴν τὸ διανυθὲν διάστημα εἶναι καὶ αὐτὸ μηδέν, ἡ καμπύλη πρέπει νὰ διέρχεται διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν ἀξόνων 0.

Ἡ ταχύτης, τὴν ὁποίαν θὰ ἔχῃ ὁ σιδηρόδρομος κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν 3 min = 180 sec (σημεῖον Α καμπύλης), εἶναι προφανῶς ἡ στιγμιαία ταχύτης αὐτοῦ καὶ διὰ τοῦτο θὰ ἔχωμεν :

$$\upsilon = \text{ορ} \frac{\Delta s}{\Delta t} \qquad \text{όταν } \Delta t \to 0$$

Ἐκ τοῦ σχήματος φαίνεται ὅτι τὸ $\Delta s/\Delta t$ εἶναι ἡ ἐφαπτομένη τῆς γωνίας θ, τὸ δὲ ὅριον τοῦ $\Delta s/\Delta t$ εἶναι τὸ ὅριον τῆς ἐφαπτομένης τῆς γωνίας θ, δηλ. ἡ ἐφαπτομένη τῆς γωνίας ω, τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ ἐφαπτομένη ΔΑ ἡ ἀγομένη ἐπὶ τῆς καμπύλης εἰς τὸ σημεῖον Α μὲ τὸν ἄξονα τοῦ χρόνου t. Ἤτοι :

$$\text{εφ } \omega = \frac{BA}{\Delta B}$$

Ὡς ἐκ τοῦ σχήματος, συνάγεται ὅτι εἶναι $BA = 1{,}55 \cdot 10^3$m καὶ $\Delta B = 85$ sec. Οὕτω εὑρίσκομεν :

$$\underline{\upsilon} = \frac{1{,}55 \cdot 10^3}{85} = \underline{18{,}2 \text{ m/sec.}}$$

65. Ἐὰν ἡ συχνότης περιστροφῆς εἶναι 1 200 στρ./min, **πόση θὰ εἶναι ἡ γωνιακὴ ταχύτης εἰς** rad/sec.

Λύσις. Αἱ 1 200 στρ./min ἰσοδυναμοῦν πρὸς συχνότητα $\nu = \frac{1\,200}{60} = 20$ στρ./sec. Ἐπειδὴ δὲ ἡ γωνιακὴ ταχύτης ω, ὡς γνωστόν, εἶναι $\omega = 2\pi \cdot \nu$, θὰ ἔχωμεν :

$$\underline{\omega} = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 20 = \underline{125{,}6 \text{ rad/sec.}}$$

66. Νὰ ἐκφρασθῇ ἡ γωνιακὴ ταχύτης 40 μοιρῶν/sec **α) εἰς** στρ./sec, **β) εἰς** στρ./min.

Λύσις. α) Αἱ 40 μοῖραι ἰσοδυναμοῦν πρὸς $\frac{40 \cdot \pi}{188}$ rad καὶ συνεπῶς θὰ ἔχωμεν ὅτι :

$$40 \text{ μοῖραι/sec} = \frac{4\,\pi}{18} \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$$

Ἐὰν ἐφαρμόσωμεν τὸν τύπον τῆς γωνιακῆς ταχύτητος συναρτήσει τῆς συχνότητος ν ($\omega = 2\pi \cdot \nu$), ἔχομεν :

$$\frac{4\,\pi}{18} = 2\pi \cdot \nu \qquad \text{καὶ} \qquad \underline{\nu = 0{,}11 \text{ στρ./sec.}}$$

β) Διὰ νὰ μετατρέψωμεν τὴν συχνότητα ἀπὸ στρ./sec εἰς στρ./min, πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 60. Οὕτω προκύπτει : $\underline{\nu} = 0{,}11 \cdot 60 = \underline{6{,}6 \text{ στρ./min.}}$

67. Ἀκονιστικὸς τροχὸς ἐκτελεῖ 900 στρ./min. **Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ γωνιακή του ταχύτης ω εἰς** rad/sec.

Λύσις. Αἱ 900 στρ./min ἀντιστοιχοῦν πρὸς συχνότητα : $\nu = \frac{900}{60} \frac{\text{στρ.}}{\text{sec}}$, ἐπειδὴ δὲ $\omega = 2\pi \cdot \nu$, θὰ ἔχωμεν : $\underline{\omega} = 6{,}28 \cdot \frac{90}{6} = \underline{94{,}25 \text{ rad/sec.}}$

68. Σφόνδυλος μηχανῆς ἐκτελεῖ 300 στρ./min. **Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ γραμμικὴ ταχύτης σημείου τοῦ σφονδύλου εὑρισκομένου α) 150** cm **ἀπὸ τοῦ κέντρου, β) 60** cm **ἀπὸ τοῦ κέντρου, γ) νὰ προσδιορισθῇ ἡ γωνιακὴ ταχύτης τοῦ σφονδύλου.**

Λύσις. Αἱ 300 στρ./min ἀντιστοιχοῦν πρὸς συχνότητα : $\nu = \frac{300}{60} = 5$ στρ./sec. Ἡ γραμμικὴ ταχύτης συνδέεται πρὸς τὴν γωνιακὴν ταχύτητα διὰ τῆς γνωστῆς σχέσεως $\upsilon = \omega \cdot r$ καί, ἐπειδὴ $\omega = 2\pi \cdot \nu$, ἔχομεν $\upsilon = 2\pi \cdot \nu \cdot r$. Οὕτω εὑρίσκομεν :

α) $\underline{\upsilon} = 6{,}28 \cdot 5 \cdot 150 = \underline{4710 \text{ cm/sec.}}$

β) $\underline{\upsilon} = 6{,}28 \cdot 5 \cdot 60 = \underline{1884 \text{ cm/sec.}}$

γ) $\underline{\omega} = 6{,}28 \cdot 5 = \underline{31{,}4 \text{ rad/sec.}}$

69. Ὁ λεπτοδείκτης ὡρολογίου ἔχει μῆκος 10 cm. Νὰ εὑρεθῇ ἡ γωνιακὴ ταχύτης τοῦ λεπτοδείκτου καὶ ἡ ταχύτης τοῦ ἄκρου αὐτοῦ.

Λύσις. Ὁ λεπτοδείκτης ἐκτελεῖ μίαν στροφὴν ἐντὸς 3 600 sec καὶ συνεπῶς ἡ συχνότης περιστροφῆς αὐτοῦ θὰ εἶναι $\nu = \frac{1}{3\,600}$ στρ./sec. Ἄρα ἡ γωνιακὴ ταχύτης τοῦ λεπτοδείκτου θὰ εἶναι :

$$\underline{\omega} = 2\pi \cdot \nu = 6{,}28 \cdot \frac{1}{3\,600} = \underline{1{,}7 \cdot 10^{-3} \text{ rad/sec.}}$$

καὶ ἡ γραμμικὴ ταχύτης του :

$$\underline{\upsilon = 1{,}7 \cdot 10^{-2} \text{ cm/sec.}}$$

70. Σφόνδυλος διαμέτρου 1 m στρέφεται ὑπὸ συχνότητα 80 στρ./min. Νὰ ὑπολογισθῇ α) ἡ γωνιακὴ ταχύτης, β) ἡ γραμμικὴ ταχύτης, γ) ἡ κεντρομόλος ἐπιτάχυνσις ἑνὸς σημείου εὑρισκομένου ἐπὶ τῆς περιφερείας του.

Λύσις. Ἡ συχνότης τοῦ σφονδύλου θὰ εἶναι : $\nu = \frac{80}{60}$ στρ./sec. ἑπομένως :

α) Ἡ γωνιακὴ ταχύτης αὐτοῦ θὰ εἶναι :

$$\underline{\omega} = 2\,\pi \cdot \nu = 6{,}28 \cdot \frac{8}{6} = \underline{8{,}37 \text{ rad/sec.}}$$

β) Ἡ γραμμικὴ ταχύτης :

$$\underline{\upsilon} = \omega \cdot r = 8{,}37 \cdot 0{,}5 = \underline{4{,}18 \text{ m/sec.}}$$

γ) Ἡ κεντρομόλος ἐπιτάχυνσις :

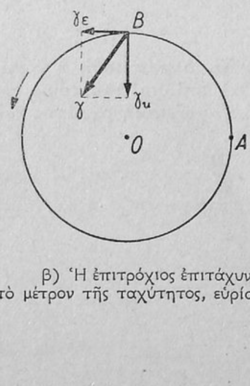
$$\underline{\gamma} = \frac{\upsilon^2}{r} = \frac{4{,}18^2}{0{,}5} = \underline{17{,}47 \text{ m/sec.}}$$

71. Ἀτμάμαξα ἀναχωρεῖ ἄνευ ἀρχικῆς ταχύτητος ἀπὸ σημείου εὑρισκομένου ἐπὶ κυκλικῆς ὁδοῦ ἀκτῖνος 250 m καὶ ἀποκτᾷ, ταχύτητα 72 km/h, ἀφοῦ διανύσῃ τὸ τέταρτον τῆς περιφερείας. Γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ κίνησις τῆς ἀτμαμάξης εἶναι ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένη, νὰ ὑπολογισθοῦν α) ὁ ἀπαιτούμενος χρόνος ἵνα ἡ ἀτμάμαξα διανύσῃ τὸ τέταρτον τῆς πλήρους περιστροφῆς, β) ἡ ἐπιτρόχιος καὶ κεντρομόλος συνιστῶσα τῆς ἐπιταχύνσεως τὴν στιγμὴν καθ' ἣν ἔχει διανύσει τὸ τέταρτον τῆς περιστροφῆς καὶ γ) τὸ μέγεθος τῆς ἐπιταχύνσεως τὴν στιγμὴν ταύτην.

Λύσις. α) Ἡ κίνησις ἐπὶ τῆς περιφερείας θὰ εἶναι ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένη, μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα $\upsilon_0 = 0$. Ἄρα θὰ ἰσχύουν αἱ σχέσεις :

$$\upsilon = \gamma \cdot t \quad (1) \qquad s = \frac{1}{2}\,\gamma \cdot t^2 \quad (2)$$

Ἀπαλείφομεν μεταξὺ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) τὴν ἐπιτάχυνσιν γ καὶ λαμβάνομεν :



$$s = \frac{1}{2}\,\upsilon \cdot t \quad \text{καὶ} \quad t = \frac{2\,s}{\upsilon} \qquad (3)$$

Ἐπειδὴ ὅμως εἶναι δεδομένον τὸ διάστημα, ὅτι εἶναι τὸ 1/4 τῆς περιφερείας, δηλ. $s = 1/4 \cdot 2\pi \cdot r = \pi \cdot r/2$, ἡ σχέσις (3) γράφεται :

$$t = \frac{\pi \cdot r}{\upsilon} \qquad (4)$$

Θέτομεν εἰς τὴν σχέσιν (4) :

$r = 250$ m καὶ $\upsilon = \frac{72 \cdot 10^3}{3\,600} = 20$ m/sec καὶ εὑρίσκομεν :

$$\underline{t = 40 \text{ sec.}}$$

β) Ἡ ἐπιτρόχιος ἐπιτάχυνσις γ_ε διευθύνεται κατὰ τὴν ἐφαπτομένην τῆς τροχιᾶς καὶ μεταβάλλει τὸ μέτρον τῆς ταχύτητος, εὑρίσκεται δὲ ἐκ τοῦ τύπου (1) ὅτι εἶναι :

$$\underline{\gamma_\varepsilon} = \frac{\upsilon}{t} = \frac{20}{40} = \underline{0{,}5 \text{ m/sec}^2.}$$

Ἡ κεντρομόλος ἐπιτάχυνσις γ_κ μεταβάλλει τὴν διεύθυνσιν τῆς ταχύτητος καὶ εὑρίσκεται ἐκ τοῦ τύπου $\gamma_\kappa = \upsilon^2/r$ ὅτι εἶναι :

$$\underline{\gamma_\kappa} = \frac{20^2}{250} = \underline{1{,}6 \text{ m/sec}^2}.$$

γ) Τὸ μέγεθος τῆς ἐπιταχύνσεως εἰς τὴν καμπυλόγραμμον κίνησιν δίδεται ἐκ τοῦ τύπου $\gamma = \sqrt{\gamma_\kappa^2 + \gamma_\varepsilon^2}$ (βλ. σχῆμα) καὶ ἑπομένως εὑρίσκομεν :

$$\underline{\gamma} = \sqrt{1{,}6^2 + 0{,}5^2} = \underline{1{,}68 \text{ m/sec}^2}.$$

72. Ἡ γωνιακὴ ταχύτης τροχοῦ αὐξάνεται ἀπὸ 4 rad/sec εἰς 12 rad/sec ἐντὸς 16 sec. Νὰ ὑπολογισθῇ α) ἡ γωνιακὴ ἐπιτάχυνσις καὶ β) ὁ ἀριθμὸς στροφῶν τὰς ὁποίας ἐκτελεῖ εἰς 16 sec.

Λύσις. α) Ἡ γωνιακὴ ἐπιτάχυνσις ω′ εἶναι τὸ πηλίκον τῆς μεταβολῆς Δω τῆς γωνιακῆς ταχύτητος διὰ τοῦ ἀντιστοίχου χρόνου Δt, ἤτοι :

$$\omega' = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \qquad (1)$$

Οὕτω ἐκ τῶν δεδομένων τῆς ἀσκήσεως εὑρίσκομεν :

$$\underline{\omega'} = \frac{12-4}{16} = \underline{0{,}5 \text{ rad/sec}^2}.$$

β) Ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς στροφῶν x δίδεται διὰ τῆς σχέσεως :

$$x = \frac{\Delta\theta}{2\pi} \qquad (2)$$

Ἡ γωνία ὅμως Δθ εἶναι προφανῶς $\Delta\theta = \Delta\omega \cdot \Delta t$ καὶ οὕτω ἡ σχέσις (2) γράφεται :

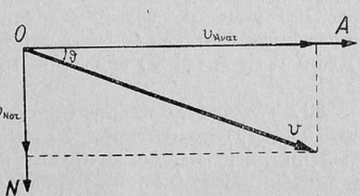
$$x = \frac{\Delta\omega \cdot \Delta t}{2\pi} \qquad (3)$$

Ἐκ τῆς σχέσεως (3) εὑρίσκομεν :

$$\underline{x} = \frac{(12-4)\cdot 16}{2 \cdot 3{,}14} = \underline{20{,}4 \text{ στροφαί}}.$$

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ὁ τύπος $\Delta\theta = \Delta\omega \cdot \Delta t$ προκύπτει ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς γωνιακῆς ταχύτητος.

73. Ἀεροπλάνον κινεῖται πρὸς Ἀνατολὰς ὑπὸ ταχύτητα 160 km/h, ἐνῷ ταυτοχρόνως πνέει ἄνεμος βόρειος ὑπὸ ταχύτητα 35 km/h. Νὰ εὑρεθῇ ἡ συνισταμένη ταχύτης καὶ ἡ διεύθυνσις αὐτῆς, γραφικῶς καὶ λογιστικῶς.



Λύσις. Ἡ ταχύτης υ τοῦ ἀεροπλάνου θὰ εἶναι ἡ συνισταμένη τῶν ταχυτήτων

$\upsilon_{\text{Ἀνατ.}} = 160$ km/h καὶ $\upsilon_{\text{Νοτ.}} = 35$ km/h.

Ἐπειδὴ δὲ αἱ συνιστῶσαι ταχύτητες σχηματίζουν μεταξύ των γωνίαν 90°, ἡ ταχύτης υ θὰ εἶναι :

$$\underline{\upsilon} = \sqrt{160^2 + 35^2} = \underline{163{,}8 \text{ km/h}}.$$

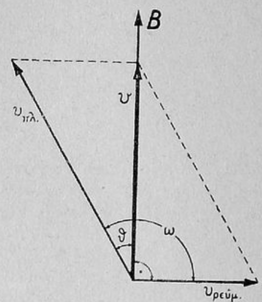
Ἡ διεύθυνσις τῆς ταχύτητος υ καθορίζεται, ὅταν εὑρεθῇ ἡ γωνία θ. Εἶναι δέ :

εφ $\theta = 35/160 = 0{,}21875$ καὶ συνεπῶς $\underline{\theta = 12^\circ\ 20'}$.

74. Πλοῖον ἀναπτύσσει ταχύτητα 8 μιλίων καθ' ὥραν ἐπὶ ἠρεμοῦντος ὕδατος. Πρὸς ποίαν διεύθυνσιν πρέπει νὰ τηρῆται ἡ πρῷρα τοῦ πλοίου, ἐὰν πρό-

κειται νὰ φθάσῃ κατ' εὐθεῖαν εἰς τὴν ἀπέναντι ὄχθην ποταμοῦ, ὅταν τὸ ρεῦμα ἔχῃ ταχύτητα 4 μιλίων καθ' ὥραν.

Λύσις. Ἔστω $υ_{πλ.}$ ἡ ταχύτης τοῦ πλοίου καὶ $υ_{ρεύμ.}$ ἡ ταχύτης τοῦ ρεύματος. Διὰ νὰ φθάσῃ τὸ πλοῖον κατ' εὐθεῖαν εἰς τὴν ἀπέναντι ὄχθην, πρέπει ἡ συνισταμένη υ τῶν δύο ταχυτήτων $(υ_{πλ.}, υ_{ρεύμ.})$ νὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ταχύτητα τοῦ ρεύματος. Οὕτω συμφώνως πρὸς τὸ σχῆμα θὰ ἔχωμεν:



$$ημ\,θ = \frac{υ_{ρευμ.}}{υ_{πλ.}} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \text{ καὶ } \underline{θ = 30^{\circ}.}$$

Ἤτοι ἡ πρῷρα τοῦ πλοίου πρέπει νὰ σχηματίζῃ γωνίαν $ω = 30^{\circ} + 90^{\circ} = 120^{\circ}$ ὡς πρὸς τὴν φορὰν τοῦ ρεύματος.

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Β'

75. Σιδηροδρομικὸς συρμὸς ἀναχωρεῖ ἐκ τῆς πόλεως Α τὴν 7 h 5 min καὶ φθάνει εἰς τὴν πόλιν Β ἄνευ ἐνδιαμέσων στάσεων τὴν 8 h 43 min. Ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τῶν πόλεων εἶναι 129,5 km. Ποία ἡ μέση ταχύτης τοῦ συρμοῦ.

('Απ. 79,3 km/h.)

76. Αὐτοκίνητον ἀναχωροῦν ἐκ τῆς πόλεως Α φθάνει εἰς τὴν πόλιν Β, μετὰ στάσιν δὲ 20 min ἀναχωρεῖ διὰ τὴν πόλιν Γ, εἰς τὴν ὁποίαν φθάνει 3 ὥρας καὶ 30 min μετὰ τὴν ἀναχώρησιν ἐκ τῆς πόλεως Α. Ποία ἡ μέση ταχύτης τοῦ αὐτοκινήτου, ἂν τοῦτο διέτρεξε συνολικῶς 148 km. ('Απ. 46,7 km/h.)

77. Αὐτοκίνητον κινεῖται ὑπὸ ταχύτητα 30 km/h ἐπὶ 1 h καὶ ἀκολούθως 10 km/h ἐπὶ 1 h. Πόση ἡ μέση ταχύτης τοῦ αὐτοκινήτου. ('Απ. 20 km/h.)

78. Κινητὸν κινούμενον ὑπὸ ταχύτητα 24 km/h ἀναχωρεῖ ἐκ τοῦ σημείου Α διευθυνόμενον πρὸς τὸ σημεῖον Γ ἀπέχον κατὰ 3 000 m ἀπὸ τοῦ Α. Μὲ πόσην ταχύτητα πρέπει νὰ κινηθῇ κινητὸν ἐκ τοῦ σημείου Β διευθυνόμενον πρὸς τὸ σημεῖον Γ, ἀπέχον 2 000 m ἐκ τοῦ Β, ἵνα τὰ δύο κινητὰ συναντηθοῦν εἰς τὸ σημεῖον Γ, γνωστοῦ ὄντος ὅτι τὸ δεύτερον κινητὸν ἐγκατέλειψε τὸ σημεῖον Β μετὰ 1 min καὶ 30 sec, ἀφ' ἧς στιγμῆς τὸ πρῶτον κινητὸν ἐγκατέλειψε τὸ σημεῖον Α.

('Απ. 20 km/h.)

79. Ποδηλάτης διανύει τὸ διάστημα μεταξὺ δύο πόλεων Α καὶ Β ἀπεχουσῶν κατὰ 120 μίλια εἰς χρόνον 3 h διευθυνόμενος ἀπὸ Α εἰς Β καὶ εἰς χρόνον 4 h διευθυνόμενος ἀπὸ Β εἰς Α. Νὰ εὑρεθῇ ἡ μέση ταχύτης διαδρομῆς του α) ἀπὸ Α εἰς Β, β) ἀπὸ Β εἰς Α καὶ γ) καθ' ὅλην τὴν διαδρομήν του.

('Απ. 40 mil/h, 30 mil/h, 34,3 mil/h.)

80. Ἀνελκυστὴρ πλήρης φορτίου ἀνέρχεται εἰς τὸν ἀνώτερον ὄροφον ἐργοστασίου μὲ ταχύτητα σταθερὰν 20 m/min καὶ παραμένει ἐκεῖ διὰ τὴν ἐκφόρτωσιν ἐπὶ 3 min, ὁπότε πάλιν κατέρχεται μετὰ ταχύτητος σταθερᾶς καὶ ἴσης πρὸς 30 m/min. Ὁ χρόνος ὁ ὁποῖος παρῆλθε διὰ τὴν ἄνοδον, ἐκφόρτωσιν καὶ κάθοδον τοῦ ἀνελκυστῆρος εἶναι 5 min. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος εἰς τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται ὁ ὄροφος οὗτος. ('Απ. 24 m.)

81. Ποδηλάτης ἀφίνει τὸν τόπον Α τὴν 14ην ὥραν καὶ κατευθύνεται πρὸς τὸν τόπον Β κινούμενος ὑπὸ ταχύτητα 15 km/h. Εἰς δεδομένην στιγμὴν συναντᾶται μὲ φορτηγὸν αὐτοκίνητον, τὸ ὁποῖον διῆλθε ἐκ τοῦ τόπου Α τὴν 14ην ὥραν καὶ

45 min καὶ τὸ ὁποῖον κινεῖται ὑπὸ ταχύτητα 60 km/h. Ὁ ποδηλάτης ἀνέρχεται ἐπὶ τοῦ αὐτοκινήτου καὶ φθάνει εἰς τὸν τόπον Β 45 min ἐνωρίτερον ἀπὸ ὅ,τι θὰ ἔφθανε ἂν ἐξηκολούθει νὰ κινῆται μὲ τὴν ταχύτητά του. Πόση ἡ ἀπόστασις τῶν δύο τόπων καὶ ποίαν ὥραν ὁ ποδηλάτης συνηντήθη μετὰ τοῦ αὐτοκινήτου.

('Απ. 30 km, 15ην h.)

82. Πυροβόλον ὅπλον βάλλει διὰ βλήματος ἐναντίον στόχου, εὑρισκομένου εἰς ἀπόστασιν 1 500 m ἀπ' αὐτοῦ. Παρατηρητὴς ἱστάμενος ἐπὶ τῆς εὐθείας πυροβόλου - στόχου, εἰς ἀπόστασιν 1 000 m ἀπὸ τοῦ πυροβόλου καὶ ὄπισθεν αὐτοῦ, ἀκούει τὸν κρότον τῆς ἐκπυρσοκροτήσεως τοῦ ὅπλου τὴν αὐτὴν στιγμήν, καθ' ἣν παρατηρεῖ τὸ βλῆμα προσκροῦον ἐπὶ τοῦ στόχου. Ἐὰν ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου ὑποτεθῇ ἴση πρὸς 1/3 km/sec καὶ ἡ τροχιὰ τοῦ βλήματος θεωρηθῇ εὐθύγραμμος, ποία ἡ ταχύτης τοῦ βλήματος. ('Απ. 500 m/sec.)

83. Ἁμαξοστοιχία ἐκκινεῖ ἀπὸ τὸν σιδηροδρομικὸν σταθμὸν Α τὴν 15ην ὥραν καὶ διευθύνεται πρὸς τὸν σταθμὸν Β, ἀπέχοντα ἐκ τοῦ Α κατὰ 30 km, μὲ μέσην ταχύτητα 60 km/h. Σταθμεύει εἰς τὸν σταθμὸν Β ἐπὶ 2 min καὶ ἀκολούθως διευθύνεται πρὸς τὸν σταθμὸν Γ, ἀπέχοντα ἐκ τοῦ Β κατὰ 120 km, μὲ μέσην ταχύτητα 72 km/h. Μία ταχεῖα ἁμαξοστοιχία ἐκινήθη ἐκ τοῦ σταθμοῦ Γ τὴν 14ην ὥραν καὶ 30 min διευθυνομένη πρὸς τὸν σταθμὸν Β μὲ μέσην ταχύτητα 90 km/h, ὅπου σταθμεύει ἐπὶ 5 min, καὶ τέλος κινεῖται πρὸς τὸν σταθμὸν Α μὲ μέσην ταχύτητα 120 km/h. Ζητοῦνται: α) Ποῖαι αἱ ὧραι ἀφίξεως τῶν ἁμαξοστοιχιῶν εἰς τὰ τέρματά των ἀντιστοίχως, β) εἰς ποίαν ὥραν αἱ δύο ἁμαξοστοιχίαι συναντῶνται καὶ εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ σταθμοῦ Α πραγματοποιεῖται ἡ συνάντησις.

('Απ. α' 17 h 12 min, 16 h 10 min. β' 15 h 42 min. γ' 42 km.)

84. Σφαῖρα ὅπλου ἐξέρχεται τῆς κάννης μὲ ταχύτητα 750 m/sec. Τὸ μῆκος τῆς κάννης εἶναι 80 cm. Ὑποθέτοντες ὅτι ἡ ἐπιτάχυνσις εἶναι σταθερά, εὕρετε τὴν τιμήν της εἰς cm/sec^2. Ἐπίσης εὕρετε τὸν ἀπαιτούμενον χρόνον, ἵνα ἡ σφαῖρα διανύσῃ τὴν κάννην. ('Απ. 352 000 m/sec^2, 0,002 sec.)

85. Ἡ τετμημένη σώματος κινουμένου κατὰ μῆκος τοῦ ἄξονος τῶν x δίδεται: $x = 10 \cdot t^2$, ὅπου τὸ x δίδεται εἰς cm καὶ ὁ χρόνος t εἰς sec. Ὑπολογίσατε τὴν μέσην ταχύτητα τοῦ σώματος κατὰ τὰ χρονικὰ διαστήματα: α) ἀπὸ 2 ἕως 2,1 sec, β) ἀπὸ 2 ἕως 2,001 sec, γ) ἀπὸ 2 ἕως 2,00001 sec, δ) ποία ἡ στιγμιαία ταχύτης ἀκριβῶς εἰς τὰ 2 sec. ('Απ. α' $\overline{\upsilon} = 41$ cm/sec. β' $\overline{\upsilon} = 40,01$ cm/sec. γ' $\overline{\upsilon} = 40,0001$ cm/sec. δ' $\overline{\upsilon} = 40 + 10\,\Delta t$.)

86. Αὐτοκίνητον ἀναχωρεῖ ἐκ τῆς ἠρεμίας καὶ ἐντὸς 20 sec ἀποκτᾷ ταχύτητα 70 km/h. Πόση εἶναι ἡ ἐπιτάχυνσίς του. ('Απ. 0,97 m/sec^2.)

87. Αἱ πέδαι αὐτοκινήτου τὸ ὁποῖον ἔχει ταχύτητα 30 km/h θέτουν αὐτὸ ἐν ἠρεμίᾳ ὅταν τὸ αὐτοκίνητον διανύσῃ διάστημα 10 m. Νὰ ὑπολογισθῇ α) ὁ ἀπαιτούμενος χρόνος καὶ β) ἡ ὑπεισερχομένη ἐπιτάχυνσις.

('Απ. $t = 2,4$ sec, $\gamma = 3,5$ m/sec^2.)

88. Σιδηροδρομικὸς συρμὸς μεταβάλλει τὴν ταχύτητά του ἐντὸς 2 min ἀπὸ 12 km/h εἰς 30 km/h. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐπιτάχυνσις τοῦ συρμοῦ.

('Απ. 4,16 cm/sec^2.)

89. Ἁμαξοστοιχία κινεῖται ὑπὸ ταχύτητα 90 km/h, σταματᾷ δὲ ἀφοῦ διανύσῃ διάστημα 1 250 m. Πρὸ πόσου χρόνου ὁ μηχανοδηγὸς ἔπρεπε νὰ ἐνεργήσῃ πρὸς τοῦτο ἐπὶ τῶν τροχοπεδῶν καὶ νὰ διακόψῃ τὴν παροχὴν ἀτμοῦ. Πόση ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς ἁμαξοστοιχίας. ('Απ. 1 min 40 sec, $\gamma = -25$ cm/sec^2.)

90. Δρομεὺς καὶ μοτοσυκλετιστὴς διανύουν δρόμον 2 700 m. Ὁ δρομεὺς κινεῖται μὲ σταθερὰν ταχύτητα 4,5 m/sec, ἐνῷ ὁ μοτοσυκλετιστής, ὅστις ἀναχωρεῖ τὴν στιγμὴν καθ' ἣν ὁ δρομεὺς ἔχει διανύσει τὸ ἥμισυ τοῦ δρόμου, κινεῖται κατ' ἀρχὰς μὲ κίνησιν ἐπιταχυνομένην μὲ ἐπιτάχυνσιν 0,5 m/sec^2 καὶ φθάνει τὴν ταχύτητα 36 km/h μετὰ 20 sec. Κινεῖται ἐν συνεχείᾳ μὲ τὴν σταθερὰν αὐτὴν ταχύτητα καὶ τέλος ὑφίσταται ἐπιβράδυνσιν 0,25 m/sec^2 κατὰ τὰ 40 τελευταῖα δευτερόλεπτα. Ποῖος ἀπὸ τοὺς δύο ταξειδιώτας φθάνει πρῶτος καὶ πόση ἡ ταχύτης τοῦ μοτοσυκλετιστοῦ κατὰ τὴν στιγμὴν τῆς ἀφίξεώς του.

('Απ. Φθάνουν συγχρόνως. Ταχύτης μοτοσυκλετιστοῦ μηδέν.)

91. Δύο δρομεῖς ἀναχωροῦν κατὰ τὴν αὐτὴν στιγμὴν ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου διὰ νὰ διανύσουν διάστημα 120 m. Ὁ εἷς κινεῖται μὲ ὁμαλὴν κίνησιν καὶ σταθερὰν ταχύτητα 4 m/sec, ἐνῷ ὁ ἕτερος μὲ κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην ὑπὸ ἀρχικὴν ταχύτητα 1 m/sec καὶ ἐπιτάχυνσιν 0,1 m/sec^2. Ποῖος ἀπὸ τοὺς δύο θὰ φθάσῃ πρῶτος εἰς τὸ τέρμα. Μετὰ πόσον χρόνον ὁ δεύτερος θὰ φθάσῃ βραδύτερον τοῦ πρώτου. Ὑπὸ ποίους ὅρους ὁ δεύτερος θὰ δυνηθῇ νὰ φθάσῃ συγχρόνως μὲ τὸν πρῶτον.

('Απ. Ὁ κινούμενος ὑπὸ σταθερὰν ταχύτητα φθάνει 10 sec ἐνωρίτερον τοῦ κινουμένου μὲ ἐπιτάχυνσιν, 0,2 m/sec^2.)

92. Κινητὸν ἀποκτᾷ κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην μὲ ἐπιτάχυνσιν 120 cm/sec^2. Μετὰ πόσον χρόνον θὰ ἀποκτήσῃ ταχύτητα 840 cm/sec καὶ πόσον τὸ διανυθὲν διάστημα μέχρι τῆς στιγμῆς ταύτης. Μετὰ πόσον χρόνον θὰ διανύσῃ διάστημα ἴσον πρὸς τὸ τριπλάσιον τοῦ διανυθέντος ἤδη καὶ πόσην ταχύτητα θὰ ἔχῃ τότε τὸ κινητόν. ('Απ. 7 sec, 29,40 m, 7 sec, 60 480 m/h.)

93. Δρομεὺς διανύει διάστημα 5 000 m μὲ σταθερὰν ταχύτητα 4 m/sec. Ποδηλάτης, ὅστις ἀναχωρεῖ τὴν στιγμὴν καθ' ἣν ὁ δρομεὺς ἔχει διανύσει 2 000 m καὶ ὑπὸ ἀρχικὴν ταχύτητα 5 m/sec, ἀποκτᾷ εἰς 20 sec τὴν ταχύτητα 36 km/h, μὲ τὴν ὁποίαν καὶ ἐξακολουθεῖ νὰ κινῆται, ἵνα τέλος ἐντὸς 20 sec ἐλαττώσῃ τὴν ταχύτητά του, ὥστε νὰ φθάσῃ εἰς τὸ τέρμα μὲ ταχύτητα μηδέν. Ζητοῦνται : α) Ποίας ἐπιταχύνσεις λαμβάνει ὁ ποδηλάτης, β) ποῖος ἐκ τῶν δύο ταξειδιωτῶν φθάνει εἰς τὸ τέλος πρῶτος καὶ γ) εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ τέρματος γίνεται ἡ συνάντησις αὐτῶν.

('Απ. α' 0,25 m/sec^2, 0,50 m/sec^2. β' ὁ ποδηλάτης. γ' 940 m ἀπὸ τοῦ σημείου ἀφίξεως.)

94. Ἀεροπλάνον συνολικοῦ βάρους 12 τόννων διαθέτει κινητηρίους μηχανὰς ἱκανὰς ὥστε ἐντὸς 20 sec ἀπὸ τῆς στιγμῆς τῆς ἐκκινήσεως νὰ προσδώσουν εἰς αὐτὸ ταχύτητα $\upsilon = 50$ m/sec, ἐπαρκῇ ἵνα ἐπιτύχῃ τὴν ἀπογείωσίν του. Ζητοῦνται α) ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς κινήσεως καὶ β) τὸ ἐλάχιστον δυνατὸν μῆκος τοῦ διαδρόμου ἀπογειώσεως. (Εἰσαγωγικαὶ ἐξετάσεις Σχολῆς Ἰκάρων, 1954.)

('Απ. 2,5 m/sec^2, 500 m.)

95. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ταχύτης τῆς κορυφῆς ἑνὸς πτερυγίου τῆς ἕλικος ἀεροπλάνου, ἔχοντος μῆκος 2 m, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν στροφῶν εἶναι 1 400 στρ./sec.

('Απ. 293 m/sec.)

96. Ὑποτιθεμένου ὅτι ἡ τροχιὰ τῆς Γῆς εἶναι κύκλος ἀκτῖνος $1{,}5 \cdot 10^8$ km καὶ ὁ χρόνος περιφορᾶς ἴσος πρὸς 365,25 ἡμέρας, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ μέση ταχύτης τῆς Γῆς κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς ἐτησίας περιφορᾶς της περὶ τὸν Ἥλιον. ('Απ. 29,9 km/h.)

97. Κινητὸν ἐκτελεῖ κίνησιν κυκλικὴν ὁμαλὴν ἐπὶ περιφερείας διαμέτρου 20 cm καὶ κάμνει 2 στρ./sec. α) Πόση εἶναι ἡ γραμμικὴ ταχύτης καὶ ἡ γωνιακὴ ταχύτης αὐτοῦ. β) Πόσον τὸ διανυθὲν διάστημα εἰς ἡμίσειαν ὥραν. γ) Πόση ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς κινήσεως. ('Απ. α' 125,6 cm/sec, 12,56 sec^{-1}. β' 2 262 m. γ' 1 580 cm/sec^2.)

98. Κινητὸν κινεῖται κυκλικῶς ἐκτελοῦν μίαν στροφὴν εἰς 4 sec πέριξ ἄξονος ἀπὸ τοῦ ὁποίου ἀπέχει 10 m. Νὰ ὑπολογισθοῦν α) ἡ συχνότης, β) ἡ γραμμικὴ ταχύτης καὶ γ) ἡ γωνιακὴ ταχύτης τοῦ κινητοῦ.
('Απ. α' 0,25 sec^{-1}. β' 1 570,8 cm/sec. γ' 1,5708 rad/sec ἢ 90^o/sec.)

99. Ὑλικὸν σημεῖον διαγράφει μὲ κίνησιν ὁμαλὴν περιφέρειαν ἀκτῖνος 25 m. Πόση ἡ γραμμικὴ ταχύτης καὶ ἡ γωνιακὴ ταχύτης, ὅταν τοῦτο ἀποκτᾷ κεντρομόλον ἐπιτάχυνσιν 1 m/sec^2. ('Απ. 5 m/sec, 0,2 rad/sec.)

100. Πόση εἶναι ἡ ἐπιτάχυνσις εἰς τὴν περιφέρειαν τοῦ κινητοῦ μέρους στροφέως ἑνὸς ἀτμοστροβίλου, ὅταν ἡ ἀκτὶς αὐτοῦ $r = 0{,}70$ m καὶ ὁ ἀριθμὸς στροφῶν 3 000 ἀνὰ λεπτόν. ('Απ. $6{,}9 \cdot 10^4$ m/sec^2, ἤτοι περίπου 7 000 g.)

101. Ὑλικὸν σημεῖον πρέπει νὰ ἀποκτήσῃ ἐπιτάχυνσιν $5 \cdot 10^5$ g εἰς φυγοκεντρικὴν μηχανήν. Ἡ ἀκτὶς τῆς τροχιᾶς του εἶναι 5 cm. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ἀριθμὸς στροφῶν ἀνὰ sec. ('Απ. $\nu = 1{,}58 \cdot 10^3$ sec^{-1}.)

102. Ποίους χρόνους μεταξὺ μεσημβρίας καὶ 1 ὥρας μετὰ μεσημβρίαν ἡ γωνία μεταξὺ λεπτοδείκτου καὶ ὡροδείκτου εἶναι ἴση πρὸς 1 ἀκτίνιον.
('Απ. 12 h 10 min 4 sec καὶ 12 h 55 min 0 sec.)

103. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ἀριθμὸς στροφῶν τὸν ὁποῖον πρέπει νὰ ἐκτελῇ σφόνδυλος μηχανῆς ἐντὸς 5 sec, ἐὰν ἀναχωρῇ ἐκ τῆς ἠρεμίας, ὅταν περιστρέφεται ὑπὸ γωνιακὴν ἐπιτάχυνσιν 20 rad/sec^2. ('Απ. 40 στροφαί.)

104. Βενζινόπλοιον διανύει, διὰ μεταβάσεως καὶ ἐπιστροφῆς, τὴν ἀπόστασιν 6 km, ἡ ὁποία χωρίζει τὰς πόλεις Α καὶ Β ἐπὶ ποταμοῦ τοῦ ὁποίου ἡ ταχύτης εἶναι 30 m/min. Γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ ταχύτης τοῦ βενζινοπλοίου ὡς πρὸς τὸ ἠρεμοῦν ὕδωρ εἶναι 90 m/min, ζητεῖται νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ἀπαιτούμενος διὰ τὴν πραγματοποίησιν τοῦ διάπλου χρόνος. ('Απ. 2 h 30 min.)

105. Λέμβος ἔχουσα ταχύτητα 50 m/min διέρχεται καθέτως πρὸς τὴν ροὴν ποταμοῦ πλάτους 300 m. Γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ ταχύτης τοῦ ρεύματος εἶναι 15 m/min, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ μετατόπισις τοῦ πλοίου. ('Απ. 90 m.)

106. Πλοῖον κατευθύνεται πρὸς Ἀνατολὰς μὲ ταχύτητα 10 mil/h. Πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ ταχύτης δευτέρου πλοίου, διευθυνομένου κατὰ 30^o Β → Α, διὰ νὰ εὑρίσκεται πάντοτε πρὸς Βορρᾶν τοῦ πρώτου πλοίου. ('Απ. 20 mil/h.)

107. Ἀεροπλάνον διὰ νὰ διανύσῃ ἀπόστασιν 250 km, ἥτις χωρίζει δύο πόλεις Α καὶ Β, χρειάζεται 50 min διὰ τὴν μετάβασιν καὶ 40 min διὰ τὴν ἐπιστροφήν. Γνωστοῦ ὄντος ὅτι πνέει σταθερὸς ἄνεμος κεκλιμένος κατὰ 60^o ἐπὶ τῆς διευθύνσεως ΑΒ, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ταχύτης πνοῆς τοῦ ἀνέμου ὡς καὶ ἡ ἰδία ταχύτης τοῦ ἀεροπλάνου. Τὸ πρόβλημα νὰ γενικευθῇ, παριστῶντες διὰ s τὴν ἀπόστασιν τῶν δύο πόλεων Α καὶ Β εἰς m, διὰ t τὸν χρόνον μεταβάσεως εἰς min καὶ διὰ t' τὸν χρόνον ἐπιστροφῆς εἰς min.

$$\text{('Απ. 75 km/h, 343,8 km/h, } \upsilon_1 = s\left(\frac{1}{t'} - \frac{1}{t}\right) \text{ m/min,}$$

$$\upsilon_2 = s\sqrt{\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t'^2} - \frac{1}{t \cdot t'}} \text{ m/min.)}$$

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Γ'

108. Ἀεροπλάνον ἀναχωρῆσαν ἐκ τοῦ ἀερολιμένος Ἑλληνικοῦ εἰς τὰς 2 h 30 min π.μ. ἐπισημαίνεται εἰς τὰς 5 h 30 min π.μ. εἰς σημεῖον 600 km πρὸς Νότον τοῦ ἀερολιμένος. Νὰ εὑρεθῇ ἡ μέση ταχύτης τοῦ ἀεροπλάνου κατὰ τὸ διαρρεῦσαν χρονικὸν διάστημα.

109. Αὐτοκινητιστὴς ἐκτελεῖ ὡρισμένην διαδρομὴν ἐντὸς 2,5 h. Τὸ ἐνδεικτικὸν ὄργανον ἀποστάσεων δεικνύει διαδρομὴν 90 km. Πόση ἡ μέση ταχύτης τοῦ αὐτοκινήτου.

110. Σιδηροδρομικὸς συρμὸς διανύει τὸ διάστημα μεταξὺ δύο σταθμῶν εἰς 4 h 20 min. Ἐὰν τὸ μῆκος τῆς διαδρομῆς τῶν δύο σταθμῶν εἶναι 350 km, πόση ἡ μέση ταχύτης τοῦ συρμοῦ.

111. Δύο ἁμαξοστοιχίαι ἀναχωροῦν τὴν 14ην ὥραν, ἡ μία ἔκ τινος πόλεως Α καὶ ἡ ἑτέρα ἔκ τινος πόλεως Β. Ἡ πρώτη κινεῖται μὲ ταχύτητα 54 km/h καὶ ἡ δευτέρα μὲ ταχύτητα 72 km/h. Μετὰ 15 min εὑρίσκονται ἀπομακρυσμέναι ἡ μία ἀπὸ τὴν ἄλλην κατὰ 28,5 km. Ποῖαι αἱ ὧραι ἀφίξεως ἀντιστοίχως τῶν δύο ἁμαξοστοιχιῶν.

112. Ἀεροπλάνον ἀφοῦ κινηθῇ ἐπὶ τοῦ διαδρόμου τοῦ ἀεροδρομίου ἐπὶ 22 sec ἀπογειοῦται μὲ ταχύτητα 116 km/h. Πόση ἡ μέση τιμὴ τῆς ἐπιταχύνσεως καὶ πόσον διάστημα διήνυσε ἐπὶ τοῦ διαδρόμου.

113. Σῶμα ἐκκινεῖ ἐκ τῆς ἠρεμίας καὶ κινεῖται ὑπὸ σταθερὰν ἐπιτάχυνσιν 3 m/sec^2. Πόσον διάστημα θὰ διανύσῃ εἰς 1 min.

114. Ἡ ταχύτης ἑνὸς σώματος εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ χρόνου εἶναι 4 m/sec καὶ μετὰ 30 sec βραδύτερον εἶναι 184 m/sec. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐπιτάχυνσις.

115. Αὐτοκίνητον κινούμενον ὑπὸ ταχύτητα 72 km/h εἰσέρχεται αἰφνιδίως ἐντὸς ἀνωμάλου δρόμου καὶ ἀφοῦ διανύσῃ ἐν αὐτῷ διάστημα 30 m τέλος ἠρεμεῖ. Πόση ἡ μέση ἐπιβράδυνσις τὴν ὁποίαν ὑφίσταται τὸ αὐτοκίνητον καὶ ἐπὶ πόσον χρόνον ἐκινήθη ἐπὶ τοῦ ἀνωμάλου δρόμου.

116. Λίθος ἐκκινεῖ ὀλισθαίνων ἐπὶ πάγου ὑπὸ ταχύτητα 110 m/min, ἐπιβραδυνόμενος δὲ ὁμαλῶς ἠρεμεῖ ἐντὸς 0,5 min. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐπιβράδυνσις.

117. Αὐτοκίνητον ἀναχωρεῖ ἐκ τῆς ἠρεμίας καὶ κινεῖται ὑπὸ σταθερὰν ἐπιτάχυνσιν 45 cm/sec^2. Νὰ εὑρεθῇ: α) Ἡ ταχύτης αὐτοῦ εἰς τὸ τέλος τοῦ τριακοστοῦ δευτερολέπτου. β) Τὸ διανυθὲν διάστημα κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ τριακοστοῦ δευτερολέπτου τῆς κινήσεώς του.

118. Συρμὸς ἀναχωρεῖ ἐκ τῆς ἠρεμίας καὶ ἔχει ἐπιτάχυνσιν 12 cm/sec^2. Πόσον χρόνον θὰ χρειασθῇ διὰ νὰ ἀποκτήσῃ ταχύτητα 90 km/h καὶ πόσον διάστημα θὰ διανύσῃ διὰ νὰ ἀποκτήσῃ τὴν ταχύτητα ταύτην.

119. Συρμὸς ἀναχωρεῖ ἀπὸ σταθμὸν Α καὶ κινεῖται ὑπὸ σταθερὰν ἐπιτάχυνσιν. Εἰς 1,5 min διέρχεται διὰ τῆς θέσεως Β καὶ μετὰ 1 min ἀκόμη διὰ τῆς θέσεως Γ. Ἐὰν ἡ ἀπόστασις ΒΓ εἶναι 1 200 m, νὰ ὑπολογισθῇ: α) Ἡ ἐπιτάχυνσις τοῦ συρμοῦ. β) Ἡ ἀπόστασις ΑΒ.

120. Συρμὸς κινεῖται ὑπὸ ταχύτητα 60 km/h καὶ ἠρεμεῖ ὑπὸ τὴν ἐπενέργειαν σταθερᾶς ἐπιβραδύνσεως ἐντὸς α) ἑνὸς πρώτου λεπτοῦ, β) ἀφοῦ διανύσῃ διάστημα 1,5 km. Νὰ ὑπολογισθῇ εἰς ἀμφοτέρας τὰς περιπτώσεις ἡ ἐπιβράδυνσις.

121. Ἐντὸς χρονικῆς περιόδου 10 sec ἡ διανυομένη ἀπόστασις l εἰς μέτρα παρέχεται ἐπακριβῶς ὑπὸ τῆς σχέσεως: $l = 20\,t + 0{,}5\,t^2$, ὅπου t παριστᾷ τὸν χρόνον εἰς sec. Νὰ εὑρεθῇ ἡ στιγμιαία ταχύτης τοῦ αὐτοκινήτου, ὅταν $t = 2$ sec. Ἐπίσης εἰς τὸ τέλος τοῦ 4ου, 6ου, 8ου καὶ 10ου sec.

122. Δύο κινητὰ Α καὶ Β κινοῦνται ἐπὶ δύο παραλλήλων εὐθειῶν μὲ κινήσεις ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένας. Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ μὲ ποίου εἴδους κίνησιν θὰ κινῆται τὸ μέσον τῆς ΑΒ.

123. Δρομεὺς καὶ μοτοσυκλετιστὴς ὀφείλουν νὰ διανύσουν τὸν αὐτὸν δρόμον τῶν 2 000 m. Ὁ δρομεὺς κινεῖται μὲ κίνησιν ὁμαλὴν καὶ ταχύτητα 5 m/sec. Ὁ μοτοσυκλετιστής, ὅστις ἀναχωρεῖ τὴν στιγμὴν καθ' ἣν ὁ δρομεὺς ἔχει διατρέξει τὸ ἥμισυ τοῦ δρόμου, κινεῖται μὲ κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην. Πόση ἡ ἐπιτάχυνσις τοῦ μοτοσυκλετιστοῦ, ἵνα φθάσῃ εἰς τὸ τέρμα συγχρόνως μετὰ τοῦ δρομέως. Ποίαν ταχύτητα θὰ ἔχῃ ὁ μοτοσυκλετιστὴς κατὰ τὴν στιγμὴν τῆς ἀφίξεως.

124. Δύο δρομεῖς ἀναχωροῦντες κατὰ τὴν αὐτὴν στιγμὴν καὶ ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου διανύουν τὸ αὐτὸ διάστημα τῶν 150 m. Ὁ εἷς κινεῖται μὲ κίνησιν ὁμαλὴν καὶ ὑπὸ τὴν σταθερὰν ταχύτητα τῶν 5 m/sec, ἐνῷ ὁ ἕτερος ἐκκινεῖ μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα 2 m/sec καὶ ἀποκτᾷ κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην μὲ ἐπιτάχυνσιν 0,2 m/sec^2. Πότε οἱ δύο δρομεῖς φθάνουν εἰς τὸ τέρμα τῆς διαδρομῆς.

125. Σῶμα ἐκτελεῖ κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην. Νὰ ἀποδοθοῦν γραφικῶς: α) τὸ διάγραμμα τῆς ταχύτητος συναρτήσει τοῦ χρόνου, β) τὸ διάγραμμα τοῦ διαστήματος συναρτήσει τοῦ χρόνου, γ) τὸ διάγραμμα τῆς ταχύτητος συναρτήσει τοῦ διαστήματος, δ) τὸ διάγραμμα τῆς ἐπιταχύνσεως συναρτήσει τοῦ χρόνου, ε) τὸ διάγραμμα τῆς ἐπιταχύνσεως συναρτήσει τοῦ διαστήματος.

126. Τὸ διάγραμμα τοῦ διαστήματος, τὸ ὁποῖον διανύει ὑλικὸν σημεῖον, συναρτήσει τοῦ χρόνου εἶναι τραπέζιον. Νὰ σχεδιασθοῦν κάτωθεν αὐτοῦ τὰ ἀντίστοιχα διαγράμματα α) τῆς ταχύτητος καὶ β) τῆς ἐπιταχύνσεως συναρτήσει τοῦ χρόνου.

127. Τὸ διάγραμμα τῆς ταχύτητος κινουμένου σώματος συναρτήσει τοῦ χρόνου εἶναι τραπέζιον. Νὰ σχεδιασθῇ τὸ ἀντίστοιχον διάγραμμα τοῦ διαστήματος συναρτήσει τοῦ χρόνου.

128. Γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ Γῆ κινεῖται περὶ τὸν Ἥλιον ἐπὶ κυκλικῆς τροχιᾶς ἀκτῖνος $138 \cdot 10^6$ km καὶ ἐκτελεῖ μίαν πλήρη περιφορὰν εἰς 365 ἡμέρας, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ μέση ταχύτης τῆς Γῆς εἰς m/sec.

129. Σημεῖον τῆς ἐπιφανείας τῆς Γῆς εὑρίσκεται εἰς γεωγραφικὸν πλάτος $\varphi = 49^o\ 27'$. Πόση ἡ ταχύτης τὴν ὁποίαν ἔχει λόγῳ περιστροφῆς τῆς Γῆς. (Ἀκτὶς τῆς Γῆς $R = 6\ 370$ km. Περίοδος τῆς Γῆς $T = 86\ 164$ sec^{-1}).

130. Πόσος εἶναι ὁ ἀριθμὸς στροφῶν εἰς 1 sec καὶ ἡ κυκλικὴ συχνότης τροχοῦ αὐτοκινήτου διαμέτρου 72 cm, ὅταν ἡ ταχύτης τοῦ αὐτοκινήτου εἶναι 63 km/h.

131. Συρμὸς κινεῖται ἐπὶ κυκλικῆς τροχιᾶς ἀκτῖνος 400 m ὑπὸ ταχύτητα 45 km/h. Νὰ ὑπολογισθῇ α) ἡ γωνιακὴ ταχύτης, β) ἡ κεντρομόλος ἐπιτάχυνσις.

132. Εἰς ποίας στιγμὰς χρόνου μεταξὺ τῶν ὡρῶν ἓξ καὶ ἑπτά, ἡ γωνία μεταξὺ τοῦ λεπτοδείκτου καὶ τοῦ ὡροδείκτου εἶναι ἴση πρὸς 1 ἀκτίνιον.

133. Δίσκος διαμέτρου 13 cm περιστρέφεται ὑπὸ ταχύτητα 5 400 rad/min. Μὲ πόσην ταχύτητα ἐκσφενδονίζεται ὕδωρ προσπῖπτον κατὰ σταγόνας ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ δίσκου.

134. Σφόνδυλος διαμέτρου 1 m στρέφεται μὲ συχνότητα 80 στρ./min. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ γωνιακὴ ταχύτης, ἡ γραμμικὴ ταχύτης καὶ ἡ κεντρομόλος ἐπιτάχυνσις ἑνὸς σημείου εὑρισκομένου ἐπὶ τῆς περιφερείας του.

135. Κινητὴρ ἐκκινεῖ ἐκ τῆς ἠρεμίας ὑπὸ γωνιακὴν ἐπιτάχυνσιν 5 rad/sec². Πόσας στροφὰς ἐκτελεῖ εἰς 8 sec ἀπὸ τῆς ἠρεμίας.

136. Σφόνδυλος αὐξάνει τὴν γωνιακήν του ταχύτητα κατὰ 900 rad/min ἐντὸς 15 sec. Νὰ προσδιορισθῇ ἡ γωνιακὴ ἐπιτάχυνσίς του εἰς rad/sec² καὶ ἡ γραμμικὴ ἐπιτάχυνσις σημείου εὑρισκομένου 90 cm ἀπὸ τοῦ ἄξονος.

137. Τροχὸς ἀναχωρεῖ ἐκ τῆς ἠρεμίας ὑπὸ γωνιακὴν ἐπιτάχυνσιν 3 rad/sec² καὶ ἀποκτᾷ γωνιακὴν ταχύτητα 24 rad/sec. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ἀριθμὸς τῶν στροφῶν τοῦ τροχοῦ μέχρις ὅτου ἀποκτήσῃ τὴν ἀνωτέρω ταχύτητα.

138. Ποταμόπλοιον διὰ νὰ διανύσῃ τὸ διάστημα μεταξὺ δύο σταθμῶν ἀπεχόντων κατὰ 8,4 km χρειάζεται 43 min, ὅταν κινῆται κατ' ἀντίθετον διεύθυνσιν πρὸς τὸ ρεῦμα τοῦ ποταμοῦ, καὶ 31 min, ὅταν διανύῃ τὸ αὐτὸ διάστημα κατὰ τὴν διεύθυνσιν τοῦ ρεύματος τοῦ ποταμοῦ. Πόση ἡ ταχύτης τοῦ πλοίου καὶ πόση ἡ ταχύτης τοῦ ρεύματος τοῦ ποταμοῦ.

139. Πλοιάριον ἔχον ταχύτητα 7 km/h διασχίζει ἐγκαρσίως ποταμόν, τοῦ ὁποίου τὸ εὖρος εἶναι 84 m. Διὰ νὰ φθάσῃ τὸ πλοῖον εἰς τὴν ἀντίπεραν ὄχθην, ὑφίσταται λόγῳ τοῦ ρεύματος τοῦ ποταμοῦ ἐκτροπὴν κατὰ 18 m. Πόση ἡ ταχύτης τοῦ ρεύματος τοῦ ποταμοῦ.

140. Πόσον χρόνον χρειάζεται ἀεροπλάνον ἀναπτύσσον ταχύτητα 180 km/h, ἵνα διανύσῃ διάστημα ΑΒ = 350 km κατὰ διεύθυνσιν ἐξ 'Ανατολῶν πρὸς Δυσμάς, ὅταν πνέῃ ἄνεμος νοτιοανατολικὸς ταχύτητος 12 m/sec.

141. Πλοῖον δύναται νὰ ἀναπτύξῃ ταχύτητα 150 m/min καὶ διασχίζει ποταμὸν εὔρους 650 m, ἔχοντα ρεῦμα ταχύτητος 100 m/min. Πόσον χρόνον θὰ χρειασθῇ τὸ πλοῖον διὰ νὰ διασχίσῃ τὸν ποταμόν. Πρὸς ποῖον σημεῖον τῆς ἀντικειμένης ὄχθης τηρεῖται ἡ πρῷρα τοῦ πλοίου.

142. 'Απὸ αὐτοκινήτου κινουμένου ὑπὸ ταχύτητα 30 km/h βάλλεται σφαῖρα κατ' ὀρθὴν γωνίαν πρὸς τὴν διεύθυνσιν τῆς κινήσεως, ὁριζοντίως καὶ ὑπὸ ταχύτητα 6 m/sec. Πόση ἡ ταχύτης τῆς σφαίρας ἐν σχέσει πρὸς τὴν Γῆν κατὰ τὴν ἀρχὴν τῆς ἐκκινήσεως αὐτῆς.

143. Εἷς ποταμὸς ἔχει ροὴν Β-Α ὑπὸ ταχύτητα 8 km/h. Ἓν πλοῖον ἐγκαταλείπει τὸν λιμένα καὶ διευθύνεται Β-Δ μὲ ταχύτητα 20 km/h. Ποῦ θὰ εὑρίσκεται μετὰ 1 h τὸ πλοῖον ἐν σχέσει πρὸς τὸν λιμένα.

144. 'Αεροπλάνον διὰ νὰ διανύσῃ τὴν ἀπόστασιν 250 km, ἥτις χωρίζει δύο πόλεις Α καὶ Β, ἀπαιτεῖ χρόνον 50 min διὰ τὴν μετάβασιν καὶ 40 min διὰ τὴν ἐπιστροφήν. Γνωστοῦ ὄντος ὅτι πνέει ἄνεμος σταθερὸς κεκλιμένος κατὰ 45° ἐπὶ τῆς διευθύνσεως ΑΒ, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ταχύτης τοῦ ἀνέμου ὡς καὶ ἡ ἰδία ταχύτης τοῦ ἀεροπλάνου. Νὰ γενικευθῇ τὸ πρόβλημα παριστῶντες διὰ s τὴν ἀπόστασιν τῶν δύο πόλεων Α καὶ Β εἰς m, διὰ t τὸν χρόνον μεταβάσεως εἰς min καὶ διὰ t' τὸν χρόνον ἐπιστροφῆς εἰς min.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄

ΣΤΑΤΙΚΗ

ΣΥΝΘΕΣΙΣ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΣΙΣ ΔΥΝΑΜΕΩΝ. ΡΟΠΑΙ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Α΄

145. Νὰ εὑρεθῇ ἡ συνισταμένη τοῦ συστήματος τῶν δυνάμεων F_1, F_2, F_3, F_4 ἐφηρμοσμένων ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου O καὶ διατεταγμένων ὡς δεικνύεται εἰς τὸ σχῆμα. Δίδονται $F_1 = 1$ kgr*, $F_2 = 2$ kgr*, $F_3 = 3$ kgr*, $F_4 = 4$ kgr*.

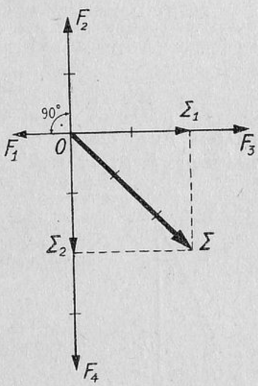
Λύσις. Αἱ δυνάμεις $F_1 = 1$ kgr* καὶ $F_3 = 3$ kgr* δίδουν συνισταμένην Σ_1 τῆς αὐτῆς διευθύνσεως καὶ μὲ φορὰν τὴν φορὰν τῆς F_3, ἡ ὁποία ἔχει ἔντασιν $\Sigma_1 = 2$ kgr*.

Ἐπίσης αἱ δυνάμεις $F_2 = 2$ kgr* καὶ $F_4 = 4$ kgr* δίδουν συνισταμένην Σ_2, τῆς αὐτῆς διευθύνσεως καὶ μὲ φορὰν τὴν φορὰν τῆς F_4, ἡ ὁποία ἔχει ἔντασιν $\Sigma_2 = 2$ kgr*.

Συνθέτομεν τὰς δυνάμεις Σ_1 καὶ Σ_2, συμφώνως πρὸς τὸν κανόνα τοῦ παραλληλογράμμου, ὁπότε εὑρίσκομεν ἐκ τοῦ τύπου:

$$\Sigma = \sqrt{\Sigma_1^2 + \Sigma_2^2}$$

ὅτι: $\underline{\Sigma} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2} = \underline{2{,}83 \text{ kgr*}}.$



Ἄσκησις 145.

146. Νὰ προσδιορισθῇ ἡ συνισταμένη δύο δυνάμεων $F_1 = 4$ kgr* καὶ $F_2 = 3$ kgr* ἐπενεργουσῶν ἐπὶ ἑνὸς σημείου ὑπὸ γωνίαν α) 90°, β) 60° μεταξύ των.

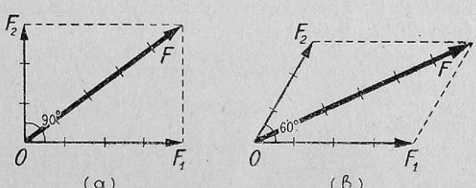
Λύσις. Α΄ ΜΕΘΟΔΟΣ. Λογιστικῶς.— α) Ὅταν ἡ μεταξὺ αὐτῶν σχηματιζομένη γωνία εἶναι $\theta = 90°$, ἡ ἔντασις τῆς συνισταμένης αὐτῶν εὑρίσκεται ἐκ τοῦ τύπου $F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$

ὅτι εἶναι: $\underline{F} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \underline{5 \text{ kgr*}}.$

β) Ὅταν ἡ μεταξὺ αὐτῶν σχηματιζομένη γωνία εἶναι $\theta = 60°$, ἡ ἔντασις τῆς συνισταμένης αὐτῶν εὑρίσκεται ἐκ τοῦ τύπου:

$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \,.\, \text{συν}\,\theta}$ ὅτι εἶναι: $\underline{F} = \sqrt{4^2 + 3^2 + 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 0{,}5} = \underline{6{,}1 \text{ kgr*}}.$

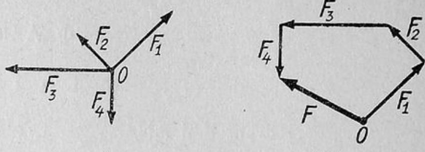
Β΄ ΜΕΘΟΔΟΣ. Γραφικῶς.—Ὑπὸ κατάλληλον κλίμακα φέρομεν ἐκ τοῦ 0 τὰ διανύσματα, ὥστε τὰ μήκη αὐτῶν νὰ παριστάνουν ἀντιστοίχως 4 kgr* καὶ 3 kgr* καὶ νὰ σχηματίζουν μεταξύ των εἰς τὴν (α) περίπτωσιν γωνίαν 90° καὶ εἰς τὴν (β) περίπτωσιν γωνίαν 60°. Κατόπιν σχηματίζομεν τὸ παραλληλόγραμμον τῶν διανυσμάτων, εἰς ἑκάστην περίπτωσιν, καὶ διὰ μετρήσεως διὰ τῆς αὐτῆς πάντοτε κλίμακος τῶν διαγωνίων εὑρίσκομεν ἀντιστοίχως: 5 kgr* καὶ 6,1 kgr*.



Ἄσκησις 146.

147. Τέσσαρες δυνάμεις $F_1 = 6$ kgr*, $F_2 = 4$ kgr*, $F_3 = 8$ kgr*, $F_4 = 4$ kgr* ἐπενεργοῦν εἰς τὸ σημεῖον O κατὰ διευθύνσεις βορειο-ἀνατολικήν, βορειο-δυτικήν, δυτικὴν καὶ νοτίαν ἀντιστοίχως (βλ. σχ., α). Νὰ κατασκευασθῇ τὸ διάγραμμα τῶν δυνάμεων καὶ νὰ εὑρεθῇ διὰ γραφικῆς μεθόδου ἡ συνισταμένη τῶν τεσσάρων τούτων δυνάμεων.

Λύσις. Γραφικῶς.—Φέρομεν ἐκ τυχόντος σημείου Ο (σχῆμα, β) τὰ διανύσματα F_1, F_2, F_3, F_4 ἀντιστοίχως, παράλληλα, ὁμόρροπα καὶ ἴσα πρὸς τὰς δοθείσας δυνάμεις τοῦ σχήματος (α). Οὕτω κατασκευάζεται μία πολυγωνικὴ γραμμὴ (δυναμοπολύγωνον), τῆς ὁποίας ἡ ἀρχὴ καὶ τὸ τέλος ὁρίζουν ἓν διάνυσμα, ἴσον κατ' ἀριθμητικὴν τιμήν, διεύθυνσιν καὶ φοράν, πρὸς τὴν συνισταμένην τῶν δοθεισῶν δυνάμεων. Τὸ διάνυσμα τοῦτο μετρούμενον διὰ τῆς αὐτῆς πάντοτε κλίμακος εὑρίσκεται ἴσον πρὸς $F = 7$ kgr*.

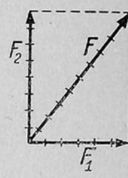


(α) (β)

Ἄσκησις 147.

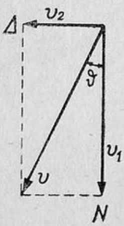
148. Δύο δυνάμεις ἐπενεργοῦσαι κατ' ὀρθὴν γωνίαν ἔχουν συνισταμένην 10 kgr*. Ἐὰν ἡ μία τῶν δύο τούτων δυνάμεων εἶναι 6 kgr*, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἄλλη δύναμις.

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν F_1 τὴν δύναμιν ἡ ὁποία ἔχει ἔντασιν 6 kgr*, F_2 τὴν ἄγνωστον δύναμιν καὶ F τὴν συνισταμένην αὐτῶν, θὰ ἔχωμεν : $F^2 = F_1^2 + F_2^2$ καὶ ἑπομένως ἡ ζητουμένη δύναμις θὰ ἔχῃ ἔντασιν :



$$\underline{F_2 = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8 \text{ kgr*}.}$$

149. Πλοῖον τηρεῖ διεύθυνσιν πρὸς Νότον ὑπὸ ταχύτητα 12 μιλίων καθ' ὥραν, ἀλλὰ ἐκκλίνει πρὸς Δυσμάς, λόγῳ παρεκκλίσεως, 5 μίλια καθ' ὥραν. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγεθος καὶ ἡ διεύθυνσις τῆς συνισταμένης ταχύτητος τοῦ πλοίου.



Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν $υ_1$ τὴν ταχύτητα τοῦ πλοίου πρὸς Νότον (Ν) καὶ $υ_2$ τὴν ταχύτητα τοῦ πλοίου πρὸς Δυσμὰς (Δ), τότε ἡ συνισταμένη ταχύτης, συμφώνως πρὸς τὸ σχῆμα θὰ εἶναι :

$$\underline{υ} = \sqrt{υ_1^2 + υ_2^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = \underline{13 \text{ mil/h}.}$$

Ἡ διεύθυνσις τῆς συνισταμένης ταχύτητος προσδιορίζεται, ἐὰν εὑρεθῇ ἡ γωνία θ (βλ. σχῆμα). Ἐκ τοῦ σχηματιζομένου ὀρθογωνίου τριγώνου ἔχομεν :

$$\text{εφ}\,θ = \frac{5}{12} = 0{,}416, \qquad \text{ἄρα} \qquad \underline{θ = 22^0\ 34'.}$$

150. Δύο ρυμουλκὰ ἐπιδιώκουν νὰ ἐλευθερώσουν προσαράξαν πλοῖον, ἕκαστον δὲ αὐτῶν ἐπενεργεῖ ἐπὶ καλωδίου, σχηματίζουν δὲ τὰ καλώδια μεταξύ των γωνίαν 20⁰. Αἱ δυνάμεις αἱ ἐξασκούμεναι ὑπὸ τῶν ρυμουλκῶν εἶναι 1 000 kgr* καὶ 1 500 kgr* ἀντιστοίχως. Νὰ εὑρεθῇ ἡ συνισταμένη δύναμις. (συν $20^0 = 0{,}64$.)

Λύσις. Δι' ἐφαρμογῆς τοῦ γνωστοῦ τύπου :

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1 \cdot F_2 \cdot \text{συν}\ φ}$$

εὑρίσκομεν ὅτι :

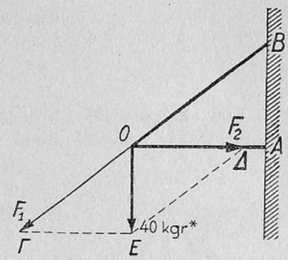
$$\underline{F} = \sqrt{1000^2 + 1500^2 + 2 \cdot 1000 \cdot 1500 \cdot 0{,}64} = \underline{2 \cdot 10^3 \text{ kgr*}.}$$

151. Δύο δυνάμεις $F_1 = 2$ kgr* καὶ $F_2 = 5$ kgr* ἐπενεργοῦν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ὑλικοῦ σημείου καὶ σχηματίζουν μεταξύ των γωνίαν 60⁰. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ συνισταμένη αὐτῶν.

Λύσις. Δι' ἐφαρμογῆς τοῦ γνωστοῦ τύπου : $F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2\,F_1 \cdot F_2 \cdot \text{συν}\ φ}$

εὑρίσκομεν ὅτι : $\underline{F} = \sqrt{2^2 + 5^2 + 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 0{,}5} = \underline{6{,}244 \text{ kgr*}.}$

152. Κιβώτιον ζυγίζον 40 kgr* εἶναι ἐξηρτημένον ἀπὸ τὸ ἄκρον ὁριζοντίας δοκοῦ ΑΟ μήκους 4 m καὶ σχοινίου ΟΒ ἐξηρτημένου ἐπὶ τοῦ σημείου Β, ἀπέχοντος 3 m ἀπὸ τοῦ σημείου Α τῆς ὑποστηρίξεως τῆς δοκοῦ ΟΑ (βλ. σχῆμα). Νὰ προσδιορισθῇ ἡ δύναμις ἡ ὁποία τείνει τὸ σχοινίον ΟΒ καὶ ἡ δύναμις ἡ ὁποία συμπιέζει τὴν δοκὸν ΟΑ.



Λύσις. Ἀναλύομεν τὴν δύναμιν τῶν 40 kgr* εἰς τὰς συνιστώσας δυνάμεις F_1 καὶ F_2, αἱ ὁποῖαι νὰ ἔχουν ἀντιστοίχως διευθύνσεις τὰς ΒΟ καὶ ΟΑ.

Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΑΒ εὑρίσκομεν ὅτι:

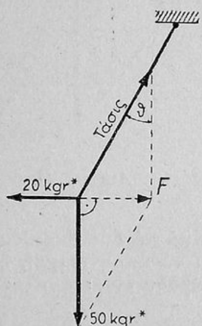
$OB = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$, ἤτοι ΟΒ = 5 m. Ἐπειδὴ δὲ τὰ τρίγωνα ΓΟΕ καὶ ΟΒΑ εἶναι ὅμοια, θὰ ἔχωμεν:

$$\frac{O\Gamma}{OB} = \frac{\Gamma E}{OA} = \frac{OE}{BA} \quad \text{ἢ} \quad \frac{F_1}{5} = \frac{F_2}{4} = \frac{40}{3}$$

Ἑπομένως εὑρίσκομεν ὅτι:

$$\underline{F_1 = 66{,}6 \text{ kgr*}} \quad \text{καὶ} \quad \underline{F_2 = 53{,}3 \text{ kgr*}}.$$

153. Σῶμα βάρους 50 kgr* ἐξηρτημένον ἀπὸ σχοινίον ὠθεῖται ὁριζοντίως διὰ δυνάμεως 20 kgr* (βλ. σχῆμα). Νὰ προσδιορισθῇ τὸ μέγεθος καὶ ἡ διεύθυνσις τῆς τάσεως τοῦ σχοινίου.



Λύσις. Ἐφ' ὅσον τὸ σύστημα ἰσορροπεῖ, ἡ ὁριζοντία δύναμις τῶν 20 kgr* θὰ εἶναι ἴσης ἐντάσεως καὶ ἀντίθετος τῆς συνισταμένης F τῶν δυνάμεων 50 kgr* καὶ τῆς Τάσεως (νήματος). Συνεπῶς αἱ δυνάμεις 50 kgr* καὶ τάσις θὰ εἶναι πλευραὶ παραλληλογράμμου καὶ ἡ δύναμις 20 kgr* ἴση μὲ τὴν διαγώνιον αὐτοῦ. Οὕτω βάσει τοῦ σχήματος θὰ ἔχωμεν:

$$\underline{\text{Τάσις}} = \sqrt{20^2 + 50^2} = \underline{54 \text{ kgr*}}.$$

Ἡ διεύθυνσις τῆς τάσεως τοῦ νήματος ὡς πρὸς τὴν κατακόρυφον σχηματίζει γωνίαν θ, ἡ ὁποία εὑρίσκεται ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου τοῦ σχήματος. Οὕτω ἔχομεν:

$$\text{ημ}\,\theta = \frac{F}{T} = \frac{20}{54} = 0{,}37 \quad \text{ἐξ οὗ} \quad \underline{\theta = 22^o}.$$

154. Δύο δυνάμεις $F_1 = 5$ kgr* καὶ $F_2 = 15$ kgr* ἐπενεργοῦν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ὑλικοῦ σημείου καὶ σχηματίζουν γωνίαν 90°. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ συνισταμένη των. Ἐὰν ἡ γωνία τῶν δυνάμεων ἦτο 45°, πόση θὰ ἦτο ἡ συνισταμένη των.

Λύσις. Ἐφ' ὅσον αἱ δυνάμεις ἐνεργοῦν ὑπὸ γωνίαν 90°, ἡ συνισταμένη αὐτῶν θὰ εἶναι:

$$\underline{F} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = \sqrt{5^2 + 15^2} = \underline{15{,}8 \text{ kgr*}}.$$

Ἐὰν ὅμως ἐνεργοῦν ὑπὸ γωνίαν 45° ἡ συνισταμένη αὐτῶν θὰ εἶναι:

$$\underline{F} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2\,F_1 \cdot F_2 \cdot \text{συν}\,45^o} = \sqrt{5^2 + 15^2 + 2 \cdot 5 \cdot 15 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \underline{18{,}87 \text{ kgr*}}.$$

155. Πλαίσιον εἶναι ἐξηρτημένον ἀπὸ καρφίον (βλ. σχῆμα). Τὸ σχοινίον ἐξαρτήσεως θραύεται, ὅταν ἡ δύναμις ὑπερβῇ τὰ 25 kgr*. Τὰ δύο ἡμίση τοῦ σχοινίου ἐξαρτήσεως σχηματίζουν γωνίαν 60° μεταξύ των. Νὰ καθορισθῇ τὸ μέγιστον ἐπιτρεπόμενον βάρος τοῦ πλαισίου.

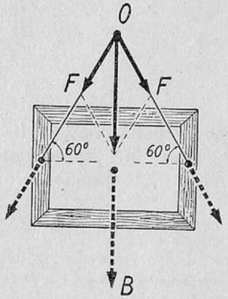
Λύσις. Ἔστω ὅτι τὸ πλαίσιον ἔχει βάρος Β. Τὸ βάρος τοῦτο θὰ ἐξασκῆται ἐπὶ τοῦ καρφίου Ο μέσῳ τῶν δύο νημάτων. Ἑπομένως, διὰ νὰ εὕρωμεν τὰς τάσεις τῶν νημάτων, ἀναλύομεν τὸ Β εἰς δύο δυνάμεις αἱ ὁποῖαι νὰ ἔχουν διευθύνσεις τὰς διευθύνσεις τῶν νημάτων καὶ σημεῖον ἐφαρμογῆς τὸ Ο. Συμφώνως πρὸς τὸ σχῆμα, τὸ σχηματιζόμενον παραλληλόγραμμον εἶναι ρόμβος καὶ ἑπομένως αἱ τάσεις τῶν νημάτων εἶναι ἴσαι. Ἐὰν ἑκάστη τάσις εἶναι F, τότε θὰ ἔχωμεν:

$$B = \sqrt{F^2 + F^2 + 2\,F \cdot F \cdot \text{συν}\,60^0} = F \cdot \sqrt{3}$$

Ἐπειδὴ ὅμως τὸ νῆμα θραύεται ὅταν ἡ δύναμις F, δηλ. ἡ τάσις τοῦ νήματος, ὑπερβῇ τὰ 25 kgr*, ἕπεται ὅτι τὸ ἐπιτρεπόμενον βάρος τοῦ πλαισίου εἶναι:

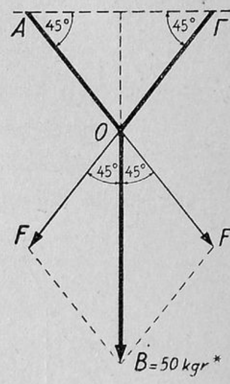
$$\underline{B} = 25\sqrt{3} = 25 \cdot 1{,}73 = \underline{43{,}25\ \text{kgr}^*}.$$

156. Βάρος 50 kgr* ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸν μέσον σχοινίου, εἰς τρόπον ὥστε τοῦτο καμπτόμενον σχηματίζει γωνίαν 90°. Νὰ προσδιορισθῇ ἡ δύναμις ἐπὶ ἑκάστου τμήματος τοῦ σχοινίου.



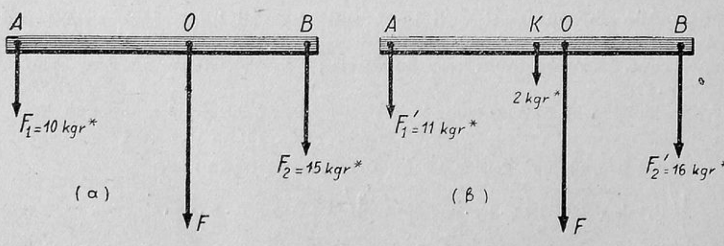
Ἄσκησις 155.

Λύσις. Ἔστω τὸ σχοινίον ΑΟΓ τοῦ ὁποίου τὰ ἄκρα εἶναι στερεωμένα εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Γ καὶ ἐκ τοῦ μέσου Ο αὐτοῦ ἐξαρτᾶται βάρος B = 50 kgr*. Ἀναλύομεν τὸ βάρος B εἰς δύο συνιστώσας κατὰ τὰς διευθύνσεις ΑΟ καὶ ΟΓ τῶν δύο τμημάτων τοῦ σχοινίου. Τὸ σχηματιζόμενον παραλληλόγραμμον τῶν δυνάμεων εἶναι τετράγωνον καὶ ἑπομένως αἱ δύο δυνάμεις εἶναι ἴσαι. Οὕτω θὰ ἔχωμεν:
$2\,F^2 = 50^2$ καὶ $\underline{F = 35{,}4\ \text{kgr}^*}$.



Ἄσκησις 156.

157. Δύο κάδοι 10 kgr* καὶ 15 kgr* ἐξαρτῶνται ἀπὸ τὰ δύο ἄκρα ὁμοιομόρφου ράβδου μήκους 1 m. Εἰς ποῖον σημεῖον πρέπει νὰ ὑποστηριχθῇ ἡ ράβδος, διὰ νὰ ἰσορροπῇ αὕτη: α) ἐὰν τὸ βάρος τῆς ράβδου εἶναι ἀμελητέον, β) ἐὰν τὸ βάρος αὐτῆς εἶναι 2 kgr*.



Λύσις. Α' ΜΕΘΟΔΟΣ. Διὰ τῆς εὑρέσεως τοῦ σημείου ἐφαρμογῆς τῆς συνισταμένης.

α) Διὰ νὰ ἰσορροπῇ ἡ ράβδος, πρέπει τὸ ὑποστήριγμα νὰ τεθῇ εἰς τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς Ο τῆς συνισταμένης F τῶν δυνάμεων F_1 καὶ F_2 (βλ. σχῆμα). Τὸ σημεῖον τοῦτο Ο εὑρίσκεται ἐκ τῆς γνωστῆς σχέσεως:

$$\frac{AO}{OB} = \frac{F_2}{F_1}$$

Ἄρα θὰ ἔχωμεν :

$$\frac{\text{AO}}{1-(\text{AO})} = \frac{15}{10}$$

ἐξ οὗ προκύπτει ὅτι : $\underline{\text{AO} = 0,59 \text{ m}}$.

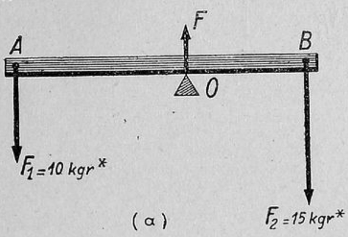
β) Τὸ βάρος τῆς ράβδου 2 kgr* θὰ ἔχῃ σημεῖον ἐφαρμογῆς τὸ μέσον Κ αὐτῆς, διότι ἡ ράβδος θεωρεῖται ὁμογενὴς (βλ. σχῆμα β). Ἀναλύομεν τὸ βάρος 2 kgr* εἰς δύο συνιστώσας, αἱ ὁποῖαι νὰ ἐνεργοῦν εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β, καὶ εὐκόλως εὑρίσκομεν ὅτι ἑκάστη συνιστῶσα ἔχει ἔντασιν 1 kgr*. Ἑπομένως τὸ ἰσοδύναμον σύστημα τῶν δυνάμεων θὰ εἶναι $F'_1 = 11$ kgr* καὶ $F_2' = 16$ kgr*, μὲ σημεῖα ἐφαρμογῆς ἀντιστοίχως τὰ Α καὶ Β, καὶ θὰ ἔχωμεν :

$$\frac{\text{AO}}{\text{OB}} = \frac{16}{11} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\text{AO}}{1-(\text{AO})} = \frac{16}{11}$$

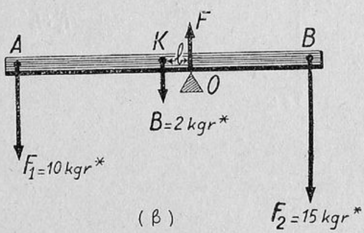
ἐξ οὗ προκύπτει ὅτι : $\underline{\text{AO} = 0,59 \text{ m}.}$

Β′ ΜΕΘΟΔΟΣ. Διὰ τοῦ θεωρήματος τῶν ροπῶν.

α) Ἐπὶ τῆς ράβδου (σχῆμα α) ἐξασκοῦνται αἱ δυνάμεις F_1, F_2 καὶ ἡ ἀντίδρασις F, ἡ ὁποία προέρχεται ἐκ τοῦ ὑποστηρίγματος. Διὰ νὰ ἰσορροποῦν αἱ τρεῖς αὗται δυνάμεις, πρέπει τὸ ἀλγεβρι-



(α)



(β)

κὸν ἄθροισμα τῶν ροπῶν αὐτῶν ὡς πρὸς οἱονδήποτε σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου τῶν δυνάμεων νὰ εἶναι μηδέν. Ἐκλέγομεν ὡς τοιοῦτον σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου τὸ Ο καὶ ἔχομεν :

$$F_1 \cdot (\text{AO}) + F \cdot 0 - F_2 \cdot (\text{OB}) = 0$$

Θέτομεν : $F_1 = 10$ kgr*, $F_2 = 15$ kgr*, $\text{OB} = 1 - (\text{AO})$ καὶ λαμβάνομεν :

$$10 \cdot (\text{AO}) + 0 - 15\,[1 - (\text{AO})] = 0,$$

ἐξ οὗ προκύπτει ὅτι : $\underline{\text{AO} = 0,59 \text{ m}.}$

β) Ἐπὶ τῆς ράβδου (σχῆμα β) ἐξασκοῦνται τέσσαρες δυνάμεις αἱ F_1, F_2, Β καὶ ἡ δύναμις F ἡ ὁποία προέρχεται ἐκ τοῦ ὑποστηρίγματος. Διὰ νὰ ἰσορροποῦν αἱ τέσσαρες αὗται δυνάμεις, πρέπει τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν ροπῶν αὐτῶν ὡς πρὸς τὸ σημεῖον Ο νὰ εἶναι μηδέν, ἤτοι :

$$F_1 \cdot (\text{AO}) + B \cdot l + F \cdot 0 - F_2 \cdot (\text{OB}) = 0 \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ δὲ $l = (\text{AO}) - (\text{AK}) = (\text{AO}) - \dfrac{(\text{AB})}{2}$ καὶ $(\text{OB}) = (\text{AB}) - (\text{AO})$, ἡ σχέσις (1) γράφεται :

$$F_1 \cdot (\text{AO}) + B\left((\text{AO}) - \frac{(\text{AB})}{2}\right) + F \cdot 0 - F_2\,[(\text{AB}) - (\text{AO})].$$

Ἐκτελοῦντες τὰς σημειουμένας πράξεις καὶ ἀντικαθιστῶντες διὰ τῶν δεδομένων τῆς ἀσκήσεως, εὑρίσκομεν εὐκόλως ὅτι :

$$\underline{\text{AO} = 0,59 \text{ m}.}$$

158. Δοκὸς ΑΒ, μήκους 120 cm καὶ βάρους 2,5 kgr*, στηρίζεται ἐπὶ δύο στύλων. Βάρος 6 kgr* τοποθετεῖται εἰς ἀπόστασιν 30 cm ἀπὸ τοῦ ἑνὸς ἄκρου. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ βάρος τὸ ὁποῖον ὑποφέρει ἕκαστος στῦλος.

Λύσις. Α′ ΜΕΘΟΔΟΣ.— Ἀναλύομεν τὴν δύναμιν 6 kgr* εἰς δύο συνιστώσας F_1 καὶ F_2, αἱ ὁποῖαι νὰ ἐνεργοῦν ἀντιστοίχως εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β τῆς δοκοῦ, ὡς ἑξῆς :

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{\Lambda\text{B}}{\text{A}\Lambda} \quad \text{ἢ} \quad \frac{F_1}{6 - F_1} = \frac{90}{30}$$

ἄρα: $F_1 = 4{,}5$ kgr* καὶ $F_2 = 6 - 4{,}5 = 1{,}5$ kgr*.

Ὁμοίως ἀναλύομεν τὴν δύναμιν 2,5 kgr* καὶ εὑρίσκομεν εὐκόλως, ἐπειδὴ αὕτη ἐνεργεῖ εἰς τὸ μέσον, ὅτι:

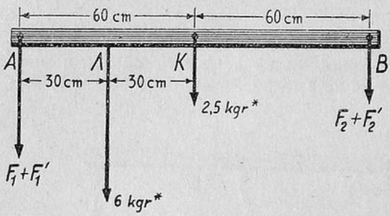
$$F'_1 = 1{,}25 \text{ kgr*} \quad \text{καὶ} \quad F'_2 = 1{,}25 \text{ kgr*}.$$

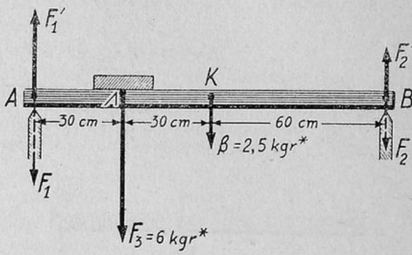
Ἑπομένως εἰς τὸ σημεῖον Α (βλ. σχῆμα) θὰ ἐνεργῆ ἡ δύναμις:

$$\underline{F_1 + F_1'} = 4{,}5 + 1{,}25 = \underline{5{,}75 \text{ kgr*}}$$

καὶ εἰς τὸ σημεῖον Β θὰ ἐνεργῆ ἡ δύναμις:

$$\underline{F_2 + F_2'} = 1{,}5 + 1{,}25 = \underline{2{,}75 \text{ kgr*}}.$$





Β' ΜΕΘΟΔΟΣ. Ἐπὶ τῆς δοκοῦ ἐξασκοῦνται τέσσαρες δυνάμεις, ἤτοι: αἱ $F_3 = 6$ kgr*, $\beta = 2{,}5$ kgr* καὶ αἱ F_1', F_2', αἱ ὁποῖαι προέρχονται ἐκ τῶν ὑποστηριγμάτων (βλ. σχῆμα).

Ἐφαρμόζοντες τὸ θεώρημα τῶν ροπῶν ὡς πρὸς τὸ σημεῖον Β, ἔχομεν:

$$F_3\,(\Lambda B) + \beta \cdot (KB) - F_1' \cdot (AB) + F_2' \cdot 0 = 0.$$

Ἀντικαθιστῶντες διὰ τῶν δοθεισῶν τιμῶν τῆς ἀσκήσεως εὑρίσκομεν:

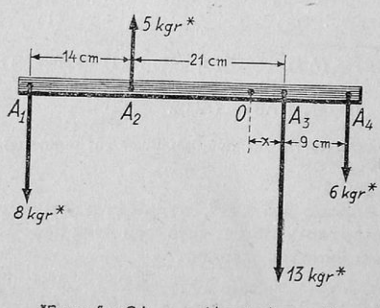
$$6 \cdot 30 + 2{,}5 \cdot 60 - F_1' \cdot 120 + 0 = 0$$

ἐξ οὗ: $$\underline{F_1' = 2{,}75 \text{ kgr*}}.$$

Ἐπειδὴ δὲ $F_1' + F_2' = 6 + 2{,}5 = 8{,}5$ kgr*, εὑρίσκομεν ὅτι:

$$\underline{F_2' = 5{,}75 \text{ kgr*}}.$$

159. Τέσσαρες παράλληλοι δυνάμεις ἐντάσεων 8 kgr*, 5 kgr*, 13 kgr* καὶ 6 kgr* ἐπενεργοῦν ἐπὶ τῶν σημείων A_1, A_2, A_3 καὶ A_4 μιᾶς δοκοῦ $A_1 A_4$. Αἱ ἀποστάσεις τῶν σημείων εἶναι $A_1 A_2 = 14$ cm, $A_2 A_3 = 21$ cm καὶ $A_3 A_4 = 9$ cm. Ἡ δευτέρα τῶν δυνάμεων εἶναι ἀντιθέτου φορᾶς πρὸς τὰς ἄλλας. Πόση ἡ συνισταμένη τῶν δυνάμεων τούτων καὶ εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ σημείου A_4 κεῖται τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς αὐτῆς.



Λύσις. Ἡ ἔντασις τῆς συνισταμένης τῶν δυνάμεων τούτων θὰ εἶναι:

$$\underline{F} = 8 + 13 + 6 - 5 = \underline{22 \text{ kgr*}}.$$

Τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς Ο τῆς συνισταμένης δυνάμεθα νὰ τὸ εὕρωμεν δι' ἐφαρμογῆς τοῦ θεωρήματος τῶν ροπῶν.

Ἔστω ὅτι $OA_3 = x$. Ἀρκεῖ νὰ προσδιορισθῇ ἡ ἀπόστασις x, διότι ἡ ζητουμένη ἀπόστασις OA_4 θὰ εἶναι ἴση πρὸς $x + 9$ cm.

Ἐφαρμόζοντες τὸ θεώρημα τῶν ροπῶν ὡς πρὸς τὸ σημεῖον Ο, ἔχομεν:

$$8 \cdot (14 + 21 - x) - 5 \cdot (21 - x) - 13\ x - 6 \cdot (9 + x) = 0$$

ἐξ οὗ προκύπτει : $\underline{x = 5{,}5\ \text{cm}.}$

Ἄρα τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς Ο τῆς συνισταμένης θὰ ἀπέχῃ ἀπὸ τοῦ A_4 ἀπόστασιν:

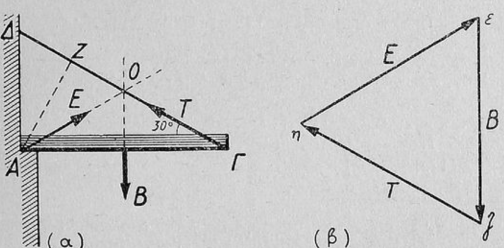
$$\underline{OA_4 = 5{,}5 + 9 = 14{,}5\ \text{cm}.}$$

160. Ὁμοιόμορφος δοκὸς ΑΓ μήκους *l* στηρίζεται, ὡς δεικνύεται εἰς τὸ σχῆμα, ἐπὶ ἑνὸς τοίχου καὶ τὸ ἕτερον ἄκρον Γ αὐτῆς μὲ τὴν βοήθειαν καλωδίου συνδέεται πρὸς τὸ σημεῖον Δ τοῦ τοίχου. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τάσις τοῦ σχοινίου καὶ ἡ ἀντίδρασις Ε τοῦ τοίχου ἐπὶ τοῦ ἄκρου Α τῆς δοκοῦ.

Λύσις. Ἂς καλέσωμεν Β τὸ βάρος τῆς δοκοῦ, τὸ ὁποῖον ἐνεργεῖ εἰς τὸ μέσον αὐτῆς, Τ τὴν τάσιν τοῦ σχοινίου καὶ Ε τὴν ἀντίδρασιν τοῦ τοίχου, τῆς ὁποίας ὅμως ἡ εὐθεῖα ἐπενεργείας εἶναι ἐπὶ τοῦ παρόντος ἄγνωστος.

Ἡ συνθήκη ἰσορροπίας ἀπαιτεῖ ὥστε τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν ροπῶν ὡς πρὸς οἱονδήποτε σημεῖον ὅλων τῶν δυνάμεων τῶν ἐπενεργουσῶν ἐπὶ τῆς δοκοῦ νὰ εἶναι μηδέν. Ἡ εὐθεῖα ἐπενεργείας τοῦ βάρους Β θὰ τέμνῃ τὸ σχοινίον εἰς ἓν σημεῖον, ἔστω τὸ Ο.

Οὕτω βλέπομεν ὅτι αἱ δυνάμεις Β καὶ Τ διέρχονται διὰ τοῦ σημείου Ο καὶ ἑπομένως αἱ ροπαὶ αὐτῶν ὡς πρὸς τὸ σημεῖον Ο εἶναι μηδέν. Ἐπειδὴ ὅμως τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα Β, Τ καὶ Ε πρέπει νὰ εἶναι μηδέν, εἶναι φανερὸν ὅτι καὶ ἡ εὐθεῖα ἐπενεργείας τῆς ἀντιδράσεως Ε πρέπει νὰ διέρχεται διὰ τοῦ σημείου Ο.



Οὕτω, ἐὰν τρεῖς δυνάμεις ὁμοεπίπεδοι ἐπενεργοῦν ἐπὶ σώματος τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται ἐν ἰσορροπίᾳ, πρέπει αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ἐπενεργείας τῶν δυνάμεων νὰ συναντῶνται εἰς ἓν σημεῖον.

Ἤδη γνωρίζοντες τὴν τιμὴν τοῦ Β, αἱ τιμαὶ τῶν Τ καὶ Ε δύνανται νὰ ὑπολογισθοῦν εὐκόλως διὰ γραφικῆς μεθόδου. Ἐπειδὴ δὲ αἱ τρεῖς δυνάμεις εὑρίσκονται ἐν ἰσορροπίᾳ, τὸ διανυσματικὸν ἄθροισμα αὐτῶν πρέπει νὰ εἶναι μηδέν. Οὕτω ἐκ τοῦ σημείου ε (βλ. σχῆμα β) φέρομεν τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ε ζ, παράλληλον πρὸς τὸ Β, τοῦ ὁποίου τὸ μῆκος θεωροῦμεν ἀνάλογον πρὸς τὴν δύναμιν Β. Ἐκ τοῦ σημείου ζ φέρομεν εὐθεῖαν, παράλληλον πρὸς τὴν δύναμιν Τ, καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου ε φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν δύναμιν Ε τὴν η ε καὶ κατασκευάζομεν τὸ δυναμοπολύγωνον τῶν δυνάμεων ε ζ η. Προφανῶς τὰ εὐθύγραμμα τμήματα ζ η καὶ ε η εἶναι ἀντιστοίχως ὁμοίως ἀνάλογα πρὸς τὰς δυνάμεις Τ καὶ Ε.

Ἐπειδὴ αἱ τρεῖς πλευραὶ τοῦ σχηματιζομένου τριγώνου εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰς τρεῖς δυνάμεις, διὰ μετρήσεως τοῦ μήκους αὐτῶν καθορίζονται αἱ ἐντάσεις τῶν δυνάμεων Τ καὶ Ε.

Ἐξ ἄλλου, ἐπειδὴ ἡ γωνία ΑΓΔ (σχῆμα α) εἶναι ἴση πρὸς 30° καὶ τὸ μῆκος $A\Gamma = l$, ἐὰν ἐκ τοῦ Α φέρωμεν τὴν ΑΖ κάθετον ἐπὶ τὴν ΓΔ, ἡ κάθετος αὕτη θὰ εἶναι ἴση πρὸς $^1/_2\ l$.

Ἐὰν ἤδη ὑπολογίσωμεν τὰς ροπὰς ὡς πρὸς τὸ σημεῖον Α, θὰ ἔχωμεν:

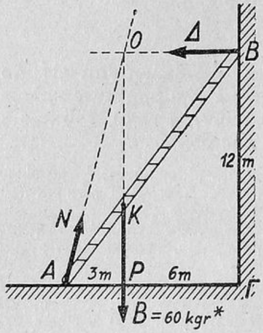
$$\text{ροπὴ τοῦ } B = +B \cdot \frac{l}{2},\ \text{ροπὴ τοῦ } T = -T \cdot \frac{l}{2},\ \text{ροπὴ τοῦ } E = 0.$$

Ἑπομένως: $B \cdot \dfrac{l}{2} - T \cdot \dfrac{l}{2} = 0$ ἐξ οὗ: $\underline{B = T.}$

Ἐπίσης ἀποδεικνύεται εὐκόλως ὅτι: $\underline{E = T.}$

161. Κλῖμαξ ὁμοιόμορφος μήκους 15 m ζυγίζει 60 kgr* καὶ ἀπέχει τὸ κέντρον βάρους αὐτῆς 5 m ἀπὸ τοῦ ἄκρου Α ὑποστηρίξεως αὐτῆς ἐπὶ τραχέος ἐδάφους, ἐνῷ τὸ ἕτερον ἄκρον αὐτῆς Β ἀπέχει 12 m ἀπὸ τοῦ ἐδάφους, στηριζομένη ἐπὶ λείου κατακορύφου τοίχου. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀντίδρασις τοῦ τοίχου καὶ ἡ ἀντίδρασις τοῦ ἐδάφους.

Λύσις. Α' ΜΕΘΟΔΟΣ. Ἐπὶ τῆς κλίμακος ἐπενεργοῦν τρεῖς δυνάμεις. α) Τὸ βάρος αὐτῆς Β κατακορύφως πρὸς τὰ κάτω καὶ ἐφαρμοζόμενον ἐπὶ τοῦ κέντρου βάρους αὐτῆς Κ εἰς ἀπόστασιν 5 m ἀπὸ τοῦ σημείου Α. β) Ἡ ἀντίδρασις Δ τοῦ λείου τοίχου, ἡ ὁποία ἐπενεργεῖ καθέτως ἐπ' αὐτοῦ. γ) Ἡ ἀντίδρασις Ν τοῦ τραχέος ἐδάφους εἰς τὸ σημεῖον Α.



Ἐπειδὴ αἱ τρεῖς ἀνωτέρω μὴ παράλληλοι δυνάμεις εὑρίσκονται ἐν ἰσορροπίᾳ, αἱ εὐθεῖαι ἐπενεργείας αὐτῶν πρέπει νὰ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου καὶ νὰ συναντῶνται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον. Ἡ εὐθεῖα ἐπενεργείας τῆς δυνάμεως Β συναντᾷ τὴν εὐθεῖαν ἐπενεργείας τῆς δυνάμεως Δ εἰς τὸ σημεῖον Ο. Ἑπομένως ἡ ἀντίδρασις Ν πρέπει νὰ διέρχεται διὰ τοῦ σημείου Ο. Ἐκ τοῦ σχήματος ἐξάγεται εὐκόλως ὅτι :

$$\text{ΑΓ} = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9 \text{ m}, \quad \text{ΑΡ} = \text{ΑΓ}/3 = 3 \text{ m}.$$

Ἐπειδὴ αἱ τρεῖς δυνάμεις εὑρίσκονται ἐν ἰσορροπίᾳ, τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν ῥοπῶν τῶν δυνάμεων ὡς πρὸς οἱονδήποτε σημεῖον πρέπει νὰ εἶναι μηδέν. Λαμβάνομεν ῥοπὰς τῶν Β, Δ καὶ Ν ὡς πρὸς τὸ σημεῖον Α, ὅτε :

$$\Delta \cdot 12 - 60 \cdot 3 + \text{N} \cdot 0 = 0, \qquad \text{ἐξ οὗ } \underline{\Delta = 15 \text{ kgr*}}.$$

Ἡ Ν εἶναι ἴση καὶ ἀντίθετος πρὸς τὴν συνισταμένην τῶν Δ καὶ Β, τῶν ὁποίων αἱ εὐθεῖαι ἐπενεργείας εἶναι κάθετοι, ὅτε :

$$\underline{\text{N}} = \sqrt{\Delta^2 + \text{B}^2} = \sqrt{15^2 + 60^2} = \underline{62 \text{ kgr*}}.$$

Β' ΜΕΘΟΔΟΣ. Αἱ εὐθεῖαι ἐπενεργείας τῶν δυνάμεων Β, Δ καὶ Ν εἶναι παράλληλοι πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου ΟΡΑ. Ὡς ἐκ τούτου, καὶ ἐπειδὴ αἱ δυνάμεις ἰσορροποῦν, θὰ εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰς πλευρὰς αὐτοῦ.

$$\text{ΟΡ} = 12 \text{ m}, \quad \text{ΡΑ} = 3 \text{ m}, \quad \text{ΑΟ} = \sqrt{3^2 + 12^2} = 12{,}4 \text{ m}$$

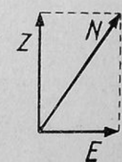
$$\frac{\Delta}{3} = \frac{\text{N}}{12{,}4} = \frac{60}{12} = 5$$

Ἐπιλύοντες εὑρίσκομεν : $\underline{\Delta = 15 \text{ kgr*}, \quad \text{N} = 62 \text{ kgr*}}.$

Γ' ΜΕΘΟΔΟΣ. Τὸ σύστημα εὑρίσκεται ἐν ἰσορροπίᾳ. Ἐφαρμόζομεν τὰς ἀκολούθους συνθήκας ἰσορροπίας. (Ἡ ἀντίδρασις τοῦ ἐδάφους Ν ἀναλύεται εἰς τὴν ὁριζοντίαν συνιστῶσαν Ε καὶ τὴν κατακόρυφον συνιστῶσαν Ζ, τοῦ παρακειμένου σχήματος). Ὡς ἐκ τούτου ἔχομεν :

1. Τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν ὁριζοντίων συνιστωσῶν τῶν δυνάμεων εἶναι μηδέν, ἤτοι : $\text{Ε} - \Delta = 0.$ (1)

2. Τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν κατακορύφων συνιστωσῶν εἶναι μηδέν, ἤτοι : $\text{Ζ} - \text{Β} = 0.$ (2)



3. Τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν ῥοπῶν ὡς πρὸς οἱονδήποτε σημεῖον εἶναι μηδέν. Εἶναι προτιμότερον νὰ λάβωμεν ὡς τοιοῦτον σημεῖον τὸ Α, διότι αἱ ῥοπαὶ τῶν Ζ καὶ Ε ὡς πρὸς Α εἶναι μηδέν. Οὕτω ἔχομεν :

$$\Delta \cdot 12 - 60 \cdot 3 = 0, \qquad \text{ἐξ οὗ } \Delta = 15 \text{ kgr*}.$$

Ἐκ τῆς (1) ἔχομεν : $\text{Ε} = \underline{\Delta = 15 \text{ kgr*}}.$

Ἐκ τῆς (2) ἔχομεν : $\text{Ζ} = \text{Β} = 60 \text{ kgr*}$

ὅτε προκύπτει : $\underline{\text{N}} = \sqrt{15^2 + 60^2} = \underline{62 \text{ kgr*}}.$

162. Αἱ ἀρθρώσεις Α καὶ Γ θύρας βάρους 80 kgr* ἀπέχουν 3 m ἀπ' ἀλλήλων, ἐνῷ τὸ εὖρος τῆς θύρας εἶναι 1,2 m. Τὸ βάρος τῆς θύρας ὑποβαστάζεται ὑπὸ τῆς ἄνω ἀρθρώσεως. Ποῖαι αἱ δυνάμεις αἱ ὁποῖαι ἀσκοῦνται ἐπὶ τῶν ἀρθρώσεων τῆς θύρας.

Λύσις. Αἱ κατακορύφως ἐπενεργοῦσαι ἐπὶ τῆς θύρας δυνάμεις εἶναι τὸ βάρος Β αὐτῆς, διευθυνόμενον κατακορύφως πρὸς τὰ κάτω καὶ ἐφηρμοσμένον εἰς τὸ κέντρον βάρους αὐτῆς Κ, καὶ ἡ κατακόρυφος δύναμις πρὸς τὰ ἄνω F_3, ἡ ὁποία εἶναι ἴση καὶ ἀντίθετος πρὸς τὴν Β. Αἱ ὁριζόντιαι δυνάμεις αἱ ἐνεργοῦσαι ἐπὶ τῆς θύρας εἶναι αἱ F_1 καὶ F_2.

Τὸ σύστημα εὑρίσκεται ἐν ἰσορροπίᾳ καὶ ὡς ἐκ τούτου ἔχομεν :

α) Τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν ὁριζοντίων δυνάμεων εἶναι μηδέν, ἤτοι:

$$F_2 - F_1 = 0 \qquad (1)$$

β) Τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν κατακορύφων δυνάμεων εἶναι μηδέν, ἤτοι:

$$F_3 - B = 0 \qquad (2)$$

γ) Τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν ροπῶν τῶν δυνάμεων ὡς πρὸς οἱονδήποτε σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου τῶν δυνάμεων εἶναι μηδέν. Λαμβάνομεν τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν ροπῶν ὡς πρὸς Α (αἱ ροπαὶ τῶν F_1 καὶ F_3 εἶναι μηδέν), ὅτε ἔχομεν:

$$F_2 \cdot (\mathrm{A\Gamma}) - B \cdot (\Gamma\Delta) = 0 \qquad (3)$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω τριῶν ἐξισώσεων εὑρίσκομεν:

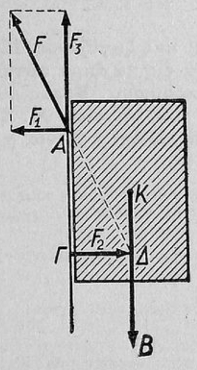
$$\underline{F_3 = B = 80 \text{ kgr*}}$$

καὶ

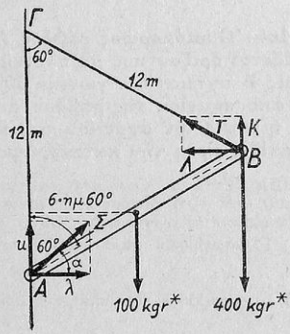
$$\underline{F_1 = F_2} = B \cdot \frac{\Gamma\Delta}{\mathrm{A\Gamma}} = 80 \cdot \frac{0{,}6}{3} = \underline{16 \text{ kgr*}.}$$

Ἐὰν καλέσωμεν F τὴν συνισταμένην δύναμιν εἰς τὴν ἄνω ἄρθρωσιν Α, θὰ ἔχωμεν:

$$F = \sqrt{F_3^2 + F_1^2} = \sqrt{80^2 + 16^2} = 81{,}5 \text{ kgr*}.$$



Ἄσκησις 162.



Ἄσκησις 163.

163. Ὁμοιόμορφος δοκὸς ΑΒ μήκους 12 m καὶ βάρους 100 kgr* ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ κάτω σημεῖον Α κατακορύφου ἱστοῦ. Τὸ ἕτερον ἄκρον Β τῆς δοκοῦ συνδέεται μὲ σχοινίον πρὸς τὸν ἱστὸν ἀπὸ σημείου Γ ἀπέχοντος 12 m ἀπὸ τοῦ Α. Ἡ δοκὸς σχηματίζει γωνίαν 60° πρὸς τὴν κατακόρυφον καὶ βάρος 400 kgr* ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ ἄκρον Β τῆς δοκοῦ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀντίδρασις Σ εἰς τὸ σημεῖον Α τῆς δοκοῦ καὶ ἡ τάσις Τ τοῦ σχοινίου.

Λύσις. Α) 1. Αἱ δυνάμεις αἱ ἐπενεργοῦσαι ἐπὶ τῆς δοκοῦ εἶναι τὸ βάρος αὐτῆς 100 kgr*, ἐφηρμοσμένον εἰς τὸ κέντρον βάρους αὐτῆς. 2. Τὸ φορτίον 400 kgr*, ἐφηρμοσμένον εἰς Β. 3. Ἡ δύναμις Τ ἡ ἐπενεργοῦσα ἐπὶ τοῦ σχοινίου, ἡ ὁποία ἀναλύεται εἰς τὴν ὁριζοντίαν συνιστῶσαν Λ καὶ τὴν κατακόρυφον συνιστῶσαν Κ, ὡς ἐπίσης καὶ ἡ ἀντίδρασις Σ εἰς Α, ἡ ὁποία ἀναλύεται εἰς τὴν ὁριζοντίαν συνιστῶσαν λ καὶ τὴν κατακόρυφον συνιστῶσαν κ (βλ. σχῆμα).

Β) Τὸ σύστημα εὑρίσκεται ἐν ἰσορροπίᾳ, ὅθεν: 1. Τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν ὁριζοντίων συνιστωσῶν εἶναι μηδέν, ἤτοι:

$$\lambda - \Lambda = 0 \qquad (1)$$

2. Τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν κατακορύφων συνιστωσῶν εἶναι μηδέν, ἤτοι:

$$\kappa + K - 100 - 400 = 0 \qquad (2)$$

3. Τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν ροπῶν ὡς πρὸς οἱονδήποτε σημεῖον εἶναι μηδέν. Εἶναι πλεονέκτημα νὰ ληφθῇ ὡς τοιοῦτον σημεῖον τὸ Γ, διότι αἱ ροπαὶ τῶν δυνάμεων Τ καὶ κ ὡς πρὸς Γ εἶναι μηδέν. Ὅθεν :

$$12\,\lambda - 100 \cdot 6 \cdot \eta\mu\, 60^o - 400 \cdot 12 \cdot \eta\mu\, 60^o = 0$$

ἢ

$$12\,\lambda - 100 \cdot 6 \cdot 0{,}866 - 400 \cdot 12 \cdot 0{,}866 = 0$$

Ὅθεν : $\lambda = 390$ kgr*. Ἐκ τῆς (1) εὑρίσκομεν $\Lambda = \lambda = 390$ kgr*.

Γ) $\underline{T} = \dfrac{\Lambda}{\eta\mu\, 60^o} = \dfrac{390}{0{,}866} = \underline{450 \text{ kgr*}}.$

Δ) $K = \Lambda \cdot \varepsilon\varphi\, 30^o = 390 \cdot 0{,}577 = 225$ kgr*.

Ἐκ τῆς σχέσεως (2) ἔχομεν : $\kappa + 225 - 100 - 400 = 0$. Ἤτοι : $\kappa = 275$ kgr*.

Ἡ ἀντίδρασις Σ εἰς τὸ σημεῖον Α τῆς δοκοῦ εἶναι :

$$\underline{\Sigma} = \sqrt{\lambda^2 + \kappa^2} = \sqrt{390^2 + 275^2} = \underline{477 \text{ kgr*}}.$$

καὶ σχηματίζει γωνίαν ἡ ὁποία προκύπτει ἐκ τῆς σχέσεως :

$$\varepsilon\varphi\, \alpha = \frac{\kappa}{\lambda} = \frac{275}{390} = 0{,}705, \quad \text{ἤτοι :} \quad \alpha = 35{,}2^o.$$

164. Ὁμοιόμορφος ράβδος ΑΒ, μήκους 16 m καὶ ζυγίζουσα 12 kgr*, ὑποβαστάζεται ὁριζοντίως μὲ σχοινία προσηρμοσμένα εἰς τὰ ἄκρα αὐτῆς. Τὸ σχοινίον εἰς Β σχηματίζει γωνίαν 30° μετὰ τῆς κατακορύφου. Βάρος 40 kgr* ἐξαρτᾶται ἀπὸ σημεῖον τῆς ράβδου ἀπέχον 4 m ἀπὸ τοῦ σημείου Α. Νὰ προσδιορισθῇ ἡ τάσις τοῦ σχοινίου τοῦ προσδεδεμένου εἰς Α καὶ ἡ γωνία α τὴν ὁποίαν σχηματίζει πρὸς τὴν κατακόρυφον.

Λύσις. Ἔστωσαν λ καὶ κ ἡ ὁριζοντία καὶ κατακόρυφος συνιστῶσαι τῆς τάσεως τοῦ σχοινίου εἰς Α, καὶ Λ καὶ Κ ἡ ὁριζοντία καὶ κατακόρυφος συνιστῶσαι τῆς τάσεως τοῦ σχοινίου εἰς Β. Τὸ σύστημα εὑρίσκεται ἐν ἰσορροπίᾳ. Οὕτω θὰ ἔχωμεν :

1) Τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν κατακορύφων συνιστωσῶν τῶν δυνάμεων εἶναι μηδέν, ἤτοι :

$$40 + 12 - \kappa - K = 0 \qquad (1)$$

2) Τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν ὁριζοντίων συνιστωσῶν εἶναι μηδέν, ἤτοι :

$$\lambda - \Lambda = 0 \qquad (2)$$

3) Τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν ροπῶν ὡς πρὸς οἱονδήποτε σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου τῆς δυνάμεως εἶναι μηδέν. Λαμβάνομεν τὰς ροπὰς τῶν δυνάμεων ὡς πρὸς τὸ σημεῖον Α καὶ ἔχομεν :

$K \cdot 16 - 12 \cdot 8 - 40 \cdot 4 = 0$ ἐξ οὗ $K = 16$ kgr*

καὶ $\Lambda = K \cdot \varepsilon\varphi\, 30^o = 16 \cdot 0{,}577 = 9{,}24$ kgr*.

Ἐκ τῆς (1) ἔχομεν :

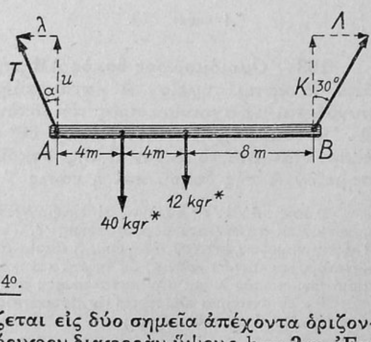
$$\kappa = 40 + 12 - 16 = 36 \text{ kgr*}$$

καὶ ἐκ τῆς (2) ἔχομεν :

$$\lambda = \Lambda = 9{,}24 \text{ kgr*}.$$

Ἡ τάσις τοῦ σχοινίου εἰς τὸ σημεῖον Α εἶναι :

$$\underline{T} = \sqrt{\lambda^2 + \kappa^2} = \sqrt{(9{,}24)^2 + 36^2} = \underline{37{,}2 \text{ kgr*}}.$$



Τέλος ἐκ τῆς σχέσεως :

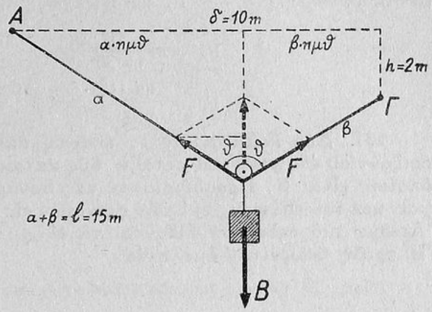
$$\varepsilon\varphi\, \alpha = \frac{\lambda}{\kappa} = \frac{9{,}24}{36} = 0{,}257$$

εὑρίσκομεν ὅτι : $\underline{\alpha = 14{,}4^o}.$

165. Σχοινίον μήκους $l = 15$ m στηρίζεται εἰς δύο σημεῖα ἀπέχοντα ὁριζοντίως κατὰ $\delta = 10$ m, τὰ ὁποῖα ἔχουν κατακόρυφον διαφορὰν ὕψους $h = 2$ m. Ἐπὶ τοῦ σχοινίου κινεῖται τροχαλία, τῆς ὁποίας ἡ τριβὴ εἶναι ἀμελητέα. Εἰς ποῖον σημεῖον αὕτη ἰσορροπεῖ, ὅταν φορτισθῇ. Εἰς ποίαν σχέσιν εὑρίσκονται αἱ ἐπὶ

τοῦ σχοινίου ἀναπτυσσόμεναι δυνάμεις ὡς πρὸς τὸ βάρος τὸ ὁποῖον εἶναι ἐξηρτημένον ἀπὸ τὴν τροχαλίαν.

Λύσις. Εἰς τὴν θέσιν ἰσορροπίας, ἐπὶ τῶν δύο τμημάτων τοῦ σχοινίου ἑκατέρωθεν τῆς τροχαλίας, ἐπενεργοῦν δύο ἴσαι ἀριθμητικῶς, ἀλλὰ διαφόρων διευθύνσεων, δυνάμεις (F, F). Ἡ συνισταμένη τῶν δυνάμεων τούτων πρέπει νὰ ἐξουδετερώνῃ τὸ βάρος B τῆς ἀνηρτημένης μάζης καὶ ἐπομένως ἡ εὐθεῖα ἐπενεργείας τοῦ βάρους B διχοτομεῖ τὴν γωνίαν, τὴν ὁποίαν σχηματίζουν οἱ δύο κλάδοι τοῦ σχοινίου.



Ἐκ τοῦ σχήματος παρατηροῦμεν ὅτι:

$$\alpha \cdot \eta\mu\,\theta + \beta \cdot \eta\mu\,\theta = l \cdot \eta\mu\,\theta = \delta \qquad (1)$$

$$\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\,\theta - \beta \cdot \sigma\upsilon\nu\,\theta = h \qquad (2)$$

$$F \cdot \sigma\upsilon\nu\,\theta = \frac{B}{2} \qquad (3)$$

Ἡ ἐξίσωσις (1) δίδει:

$$\eta\mu\,\theta = \frac{\delta}{l} \qquad (4)$$

Ἡ ἐξίσωσις (2) ἐν συνδυασμῷ μὲ τὴν (4) δίδει:

$$\underline{\alpha} = \frac{1}{2}\, l \left(1 + \frac{h}{\sqrt{l^2 + \delta^2}}\right) = \frac{1}{2} \cdot 15 \left(1 + \frac{2}{\sqrt{15^2 + 10^2}}\right) = \underline{8{,}84 \text{ m.}}$$

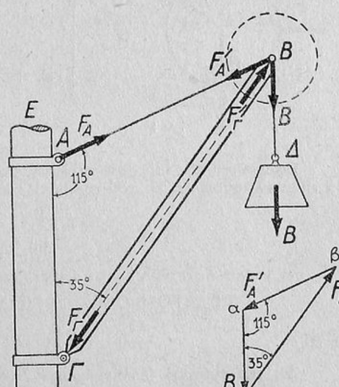
Καὶ ἐπομένως θὰ εἶναι καί:

$$\underline{\beta} = l - \alpha = \underline{6{,}16 \text{ m.}}$$

Τέλος δὲ ἡ σχέσις (3), λόγῳ καὶ τῆς (4), δίδει:

$$\underline{F} = \frac{l \cdot B}{2\sqrt{l^2 - \delta^2}} = \underline{0{,}67 \cdot B.}$$

166. Βάρος B = 500 kgr* εἶναι ἐξηρτημένον ἀπὸ σχοινίον ΒΔ καὶ στηρίζεται εἰς τὸ σημεῖον Β τῇ βοηθείᾳ τοῦ σχοινίου ΑΒ καὶ τῆς ράβδου ΒΓ ἡ ὁποία εἶναι στερεωμένη ἀρθρωτῶς εἰς Γ. Ἀμελοῦντες τὸ βάρος τοῦ σχοινίου καὶ τῆς ράβδου καὶ παραδεχόμενοι μίαν ἰδανικὴν ἄρθρωσιν εἰς Γ, νὰ προσδιορισθοῦν αἱ δυνάμεις F_A καὶ F_Γ εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Γ. Αἱ γωνίαι δεικνύονται εἰς τὸ σχῆμα α. Τὸ διανυσματικὸν ἄθροισμα τῶν δυνάμεων εἰς τὸ σημεῖον Β δεικνύεται εἰς τὸ σχῆμα β.



(α) (β)

Λύσις. Θεωροῦμεν κατ' ἀρχὴν τὴν ἰσορροπίαν εἰς τὸ σημεῖον Β. Αἱ ἐπενεργοῦσαι δυνάμεις εἶναι τὸ βάρος Β καὶ αἱ ἀντιδράσεις αἱ προερχόμενα ἀπὸ τὸ σχοινίον ΑΒ ἡ F'_A καὶ ἀπὸ τὴν ράβδον ΒΓ ἡ F'_Γ.

Ἐφ' ὅσον αἱ τρεῖς δυνάμεις ἰσορροποῦν, πρέπει ἡ συνισταμένη τούτων νὰ εἶναι μηδὲν καὶ ἐπομένως τὸ πολύγωνον τῶν τριῶν τούτων δυνάμεων (δυναμοπολύγωνον) νὰ εἶναι κλειστὸν (σχῆμα β).

Ἐκ τοῦ σχήματος (α) παρατηροῦμεν ὅτι τὸ σχοινίον ἐξασκεῖ ἐπὶ τοῦ μαστοῦ ΕΘ μίαν ἴσην πρὸς τὴν F'_A καὶ ἀντίθετον δύναμιν F_A εἰς τὸ σημεῖον Α καὶ ὅτι ἡ ράβδος ἐξασκεῖ εἰς τὸ Γ μίαν ἴσην πρὸς τὴν F'_Γ καὶ ἀντίθετον δύναμιν τὴν F_Γ (Ἀρχὴ τῆς δράσεως καὶ ἀντιδράσεως).

Ἐκ τοῦ δυναμοπολυγώνου (σχῆμα β) τὸ ὁποῖον εἶναι τρίγωνον προσδιορίζομεν τὰς δυνάμεις F_A καὶ $F_Γ$. Ἐκ τῆς θεμελιώδους σχέσεως :

$$\frac{F'_A}{\text{ημ } 35^0} = \frac{F'_Γ}{\text{ημ } 115^0} = \frac{B}{\text{ημ } 30^0} \quad \text{ἢ} \quad \frac{F_A}{\text{ημ } 35^0} = \frac{F_Γ}{\text{ημ } 115^0} = \frac{B}{\text{ημ } 30^0}$$

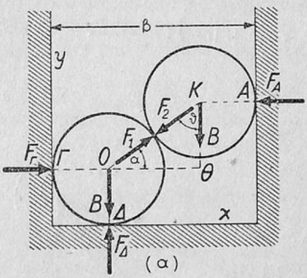
καθότι, ὡς ἐλέχθη, $F'_A = F_A$ καὶ $F'_Γ = F_Γ$. Οὕτω εὑρίσκομεν :

$$\underline{F_A} = \frac{\text{ημ } 35^0 \cdot B}{\text{ημ } 30^0} = \frac{0{,}574 \cdot 500}{0{,}5} = \underline{574 \text{ kgr*}}.$$

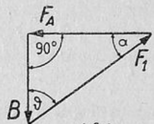
$$\underline{F_Γ} = \frac{\text{ημ } 115^0 \cdot B}{\text{ημ } 30^0} = \frac{0{,}906 \cdot 500}{0{,}5} = \underline{906 \text{ kgr*}}.$$

167. Δύο λεῖαι σφαῖραι, ἑκάστη ἀκτῖνος r καὶ βάρους B, ἰσορροποῦν ἐπὶ ὁριζοντίου ἐδάφους καὶ μεταξὺ δύο κατακορύφων τοίχων, ἡ ἀπόστασις τῶν ὁποίων εἶναι β. Προσδιορίσατε τὰς δυνάμεις τὰς ἐξασκουμένας ὑπὸ τῶν τοίχων καὶ τοῦ ἐδάφους ἐπὶ τῶν σφαιρῶν εἰς τὰς ἐπαφὰς Α, Γ καὶ Δ (F_A, $F_Γ$, $F_Δ$). Ἀριθμητικὰ δεδομένα δίδονται τὰ ἑξῆς : r = 10 cm, β = 36 cm, B = 1 000 gr*. Ἡ τριβὴ θεωρεῖται ἀμελητέα.

Λύσις. Ἐφ' ὅσον τὸ σύστημα εὑρίσκεται ἐν ἰσορροπίᾳ, ἐφαρμόζομεν τὸ θεώρημα τῶν προβολῶν κατὰ τοὺς ἄξονας x καὶ y καὶ εὑρίσκομεν :



(α)



(β)

α) Κατὰ τὸν ἄξονα x :

$$F_Γ - F_2 \cdot \text{συν } α + F_1 \text{ συν } α - F_A = 0 \qquad (1)$$

β) Κατὰ τὸν ἄξονα y :

$$F_Δ - B - F_2 \cdot \text{ημ } α + F_1 \cdot \text{ημ } α - B = 0 \qquad (2)$$

Ἐκ τῆς σχέσεως (1) προκύπτει :

$$F_Γ = F_A \qquad (3)$$

διότι $F_1 = F_2$. Ἐκ τῆς σχέσεως (2) προκύπτει :

$$\underline{F_Δ} = 2\,B = 2 \cdot 1\,000 = \underline{2\,000 \text{ gr*}}.$$

Θεωροῦμεν τὴν ἰσορροπίαν εἰς τὴν σφαῖραν Κ. Τὸ σχηματιζόμενον δυναμοπολύγωνον (σχῆμα β) θὰ εἶναι κλειστὸν καὶ ἐκ τοῦ σχηματιζομένου τριγώνου ἔχομεν :

$$\frac{F_A}{\text{ημ } θ} = \frac{F_1}{\text{ημ } 90^0} = \frac{B}{\text{ημ } α} \qquad (4)$$

Ἡ γωνία α ὑπολογίζεται ὡς ἀκολούθως :

$$β = ΓΟ + ΟΘ + ΚΑ \quad \text{ἢ} \quad β = r + 2r \cdot \text{συν } α + r = 2r + 2r \cdot \text{συν } α$$

ἐξ οὗ :

$$\text{συν } α = \frac{β}{2r} - 1 = \frac{36}{20} - 1 = 0{,}8 \quad \text{καὶ} \quad α = 37^0.$$

Ἐκ τῆς σχέσεως (4) θὰ ἔχωμεν λοιπόν :

$$F_A = \frac{\text{ημ } θ \cdot B}{\text{ημ } α} = \frac{\text{συν } α \cdot B}{\text{ημ } α} = \frac{\text{συν } 37^0 \cdot B}{\text{ημ } 37^0} = 1\,330 \text{ gr*}.$$

Τελικῶς δέ, ὡς προκύπτει ἐκ τῆς σχέσεως (3), θὰ εἶναι :

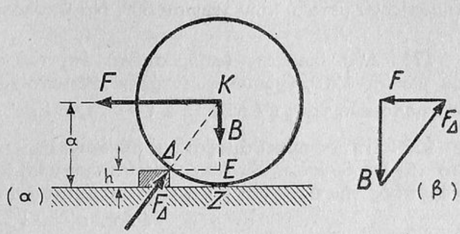
$$\underline{F_Γ = F_A = 1\,330 \text{ gr*}}.$$

168. Προσδιορίσατε τὴν ὁριζοντίαν δύναμιν F τὴν ἐφαρμοζομένην εἰς τὸ κέντρον Κ ἑνὸς κυλίνδρου βάρους B = 2 ton* καὶ ἀκτῖνος α = 50 cm τὴν

ἀναγκαίαν διὰ νὰ ὠθήσῃ τὸν κύλινδρον ὑπεράνω τοῦ ἐμποδίου Δ. Ὕψος $h = 10$ cm.

Λύσις. Ὅταν ἡ ἐφαρμοζομένη δύναμις F εἶναι μόλις ἱκανὴ νὰ προκαλέσῃ κίνησιν τοῦ κυλίνδρου, δὲν θὰ ὑπάρχῃ δύναμις μεταξὺ κυλίνδρου καὶ ὁριζοντίου ἐπιπέδου εἰς τὸ σημεῖον Ζ. Τότε ὁ κύλινδρος θὰ εὑρίσκεται ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τριῶν μόνον δυνάμεων, τῶν F, B καὶ τῆς ἀντιδράσεως F_Δ, ὡς δεικνύει τὸ σχῆμα.

Ἐφ' ὅσον αἱ δυνάμεις F καὶ B διέρχονται ἐκ τοῦ κέντρου Κ, καὶ ἡ F_Δ ὀφείλει νὰ διέρχεται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.



Τὸ τρίγωνον τῶν δυνάμεων θὰ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ΔΚΕ καὶ οὕτω λαμβάνομεν :

$$\frac{F}{B} = \frac{\sqrt{\alpha^2 - (\alpha - h)^2}}{\alpha - h} \quad \text{ἢ} \quad F = \frac{B \cdot \sqrt{\alpha^2 - (\alpha - h)^2}}{\alpha - h}$$

Θέτοντες B = 2 ton*, α = 50 cm, h = 10 cm, εὑρίσκομεν :

$$\underline{F = 1{,}5 \text{ ton*}}.$$

169. Σφαῖρα βάρους $B = 18$ kgr* κεῖται ἐπὶ λείου ὁριζοντίου ἐπιπέδου καὶ εἶναι προσδεδεμένα εἰς τὸ κέντρον της δύο σχοινία ΑΔ καὶ ΑΓ, τὰ ὁποῖα διέρχονται ἄνευ τριβῆς ἀπὸ δύο τροχαλίας Δ καὶ Γ καὶ φέρουν βάρη ἀντιστοίχως $B_1 = 3$ kgr* καὶ $B_2 = 5$ kgr*, ὡς δεικνύεται εἰς τὸ σχῆμα. Ἐὰν τὸ σχοινίον ΑΔ εἶναι ὁριζόντιον, νὰ εὑρεθῇ ἡ γωνία α, τὴν ὁποίαν τὸ σχοινίον ΑΓ σχηματίζει μὲ τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον, ὅταν ἡ σφαῖρα ἰσορροπῇ. Ἐπίσης νὰ προσδιορισθῇ ἡ ἀντίδρασις F, τὴν ὁποίαν ἐξασκεῖ τὸ ἐπίπεδον ἐπὶ τῆς σφαίρας εἰς τὴν θέσιν ἰσορροπίας.

Λύσις. Τὸ βάρος B_2 δρᾷ μέσῳ τοῦ σχοινίου ΑΓ καὶ τὸ B_1 μέσῳ τοῦ σχοινίου ΑΔ. Ἑπομένως συνολικῶς ἐπὶ τῆς σφαίρας ἐπενεργοῦν αἱ δυνάμεις B_1, B_2, B καὶ ἡ F ἡ προερχομένη ἐκ τοῦ ἐπιπέδου.

Κατὰ τὸ θεώρημα τῶν προβολῶν θὰ ἔχωμεν : α) Κατὰ τὸν ἄξονα τῶν x :

$$B_1 - B_2 \cdot \text{συν}\, \alpha = 0 \qquad (1)$$

ἐξ οὗ

$$\underline{\text{συν}\, \alpha = \frac{B_1}{B_2}} \qquad (2)$$

β) Κατὰ τὸν ἄξονα τῶν y :

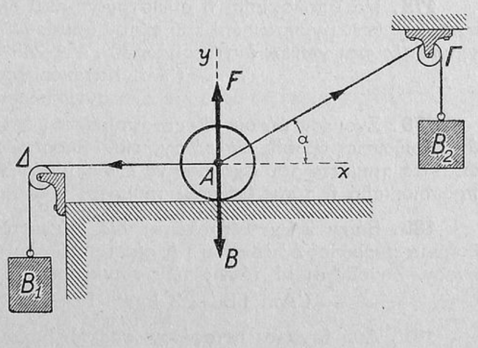
$$F - B + B_2 \cdot \text{ημ}\, \alpha = 0 \qquad (3)$$

ἢ

$$F - B + B_2 \sqrt{1 - \text{συν}^2 \alpha} = 0$$

καὶ

$$F - B + B_2 \sqrt{1 - \frac{B_1^2}{B_2^2}} = 0$$



ἐξ οὗ προκύπτει ὅτι :

$$F = B - \sqrt{B_2^2 - B_1^2} = 0$$

Θέτομεν : B = 18 kgr*, B_2 = 5 kgr*, B_1 = 3 kgr* καὶ εὑρίσκομεν :

$$\underline{F = 18 - \sqrt{5^2 - 3^2} = 14 \text{ kgr*}}.$$

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Β'

170. Δύο δυνάμεις 8 kgr* καὶ 10 kgr* ἐπενεργοῦν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου καὶ σχηματίζουν μεταξύ των γωνίαν 60°. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μέγεθος τῆς συνισταμένης. (Ἀπ. 15,6 kgr*.)

171. Δύο δυνάμεις ἐφηρμοσμέναι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου σχηματίζουν μεταξύ των γωνίαν 120°, ἔχουν δὲ ἐντάσεις ἀντιστοίχως 2 kgr* καὶ 4 kgr*. Νὰ εὑρεθῇ ἡ συνισταμένη των. (Ἀπ. $\Sigma = 2\sqrt{3} = 3{,}46$ kgr*, κάθετος πρὸς τὴν δύναμιν 2 kgr*.)

172. Ἵππος σύρει ἅμαξαν μὲ δύναμιν $F = 60$ kgr* σχηματίζουσαν γωνίαν 30° μετὰ τῆς διευθύνσεως τῆς ὁδοῦ. Νὰ ὑπολογισθῇ α) ἡ ὠφέλιμος συνιστῶσα ἡ παράλληλος πρὸς τὴν ὁδὸν καὶ β) ἡ ἐξασκουμένη ὑπὸ τῆς ἁμάξης καθέτως πρὸς τὴν ὁδόν. (Ἀπ. α' $30\sqrt{3} = 52$ kgr* περίπου. β' 30 kgr*.)

173. Νὰ ἀναλυθῇ δύναμις 10 kgr* εἰς δύο ὀρθογωνίους συνιστώσας, γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ εὐθεῖα ἐπενεργείας τῆς μιᾶς συνιστώσης σχηματίζει γωνίαν 45° πρὸς τὴν εὐθεῖαν ἐπενεργείας τῆς δυνάμεως 10 kgr*. Τὸ πρόβλημα νὰ λυθῇ γραφικῶς καὶ δι' ὑπολογισμοῦ. (Ἀπ. Ἑκάστη συνιστῶσα εἶναι 7,07 kgr*.)

174. Νὰ ἀναλυθῇ δύναμις 100 kgr* εἰς δύο συνιστώσας ὀρθογωνίους, τῆς μιᾶς συνιστώσης σχηματιζούσης γωνίαν 30° πρὸς τὴν δύναμιν 100 kgr*. Νὰ λυθῇ γραφικῶς καὶ δι' ὑπολογισμοῦ. (Ἀπ. 50 kgr*, 86,6 kgr*.)

175. Νὰ ἀναλυθῇ δύναμις $F = 13$ kgr* εἰς δύο ἄλλας δυνάμεις F_1 καὶ F_2 ὀρθογωνίους, εἰς τρόπον ὥστε ἡ F_1 νὰ εἶναι 5 kgr*. (Ἀπ. $F_2 = 12$ kgr*.)

176. Δύο δυνάμεις ἑκάστη 100 kgr* σχηματίζουν μεταξύ των γωνίαν 120°. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἔντασις τῆς συνισταμένης καὶ ἡ ἰσορροποῦσα αὐτὴν δύναμις. (Ἀπ. 100 kgr*.)

177. Νὰ εὑρεθῇ ἡ συνισταμένη τριῶν ὁμοεπιπέδων δυνάμεων ἐπενεργουσῶν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μία εἶναι 3 kgr* καὶ αἱ ἄλλαι δύο 4 kgr* ἑκάστη, σχηματίζουσαι γωνίας 30° καὶ 150° πρὸς τὴν δύναμιν 3 kgr*. (Ἀπ. 5 kgr*.)

178. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ συνισταμένη τοῦ ἀκολούθου συστήματος ὁμοεπιπέδων δυνάμεων ἐπενεργουσῶν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου: 100 kgr*, 141,4 kgr* καὶ 100 kgr*, σχηματίζουσαι γωνίας ἀντιστοίχως 30°, 45°, 240° πρὸς τὴν ὁριζοντίαν. (Ἀπ. Κατακόρυφος συνιστῶσα 63,4 kgr*, ὁριζοντία συνιστῶσα 137 kgr*, συνισταμένη 151 kgr*.)

179. Σχοινίον μήκους 70 cm στηρίζεται ἐπὶ δύο ἀγγίστρων ἀπεχόντων 50 cm ἀπὸ ὁριζοντίας ὀροφῆς. Εἰς τὸ σχοινίον προσαρμόζομεν βάρος 100 kgr*, εἰς τρόπον ὥστε τὰ τμήματα τοῦ σχοινίου νὰ ἔχουν μῆκος 30 cm καὶ 40 cm ἀντιστοίχως. Νὰ προσδιορισθῇ ἡ τάσις ἑκάστου τμήματος τοῦ σχοινίου. (Ἀπ. 80 kgr*, 60 kgr*.)

180. Βάρος 2 kgr* ἐξαρτᾶται διὰ σύρματος ΑΓΒ στερεωμένου κατὰ τὸ Α. Τῇ βοηθείᾳ σύρματος ὁριζοντίου ΓΔ φέρεται τὸ σύρμα ΑΓ εἰς 45° ὡς πρὸς τὴν κατακόρυφον. Ζητοῦνται αἱ τάσεις τῶν συρμάτων ΓΒ, ΓΔ καὶ ΓΑ. (Ἀπ. ΓΒ = 2 kgr*, ΓΔ = 2 kgr*, ΓΑ = $2\sqrt{2} = 2{,}83$ kgr*.)

181. Δύο ἐργάται μεταφέρουν φορτίον βάρους 60 kgr*. Αἱ δυνάμεις τὰς ὁποίας ἐξασκοῦν σχηματίζουν μεταξύ των γωνίαν 60° καὶ ἔχουν ἴσας κλίσεις μετὰ τῆς κατακορύφου. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐξασκουμένη δύναμις ὑπὸ ἑκάστου τῶν ἐργατῶν. (Ἀπ. $20\sqrt{3} = 34{,}6$ kgr*.)

182. Εἰς κατακόρυφον νῆμα ΟΑ, στερεωμένον εἰς τὸ Ο, εἶναι ἐξηρτημένον ἀπὸ τὸ Α βάρος Ρ = 5 kgr*. Εἰς σημεῖον Β τῆς ΟΑ ἐξασκεῖται ὁριζοντία δύναμις F, εἰς τρόπον ὥστε τὸ νῆμα ΟΒ νὰ σχηματίζῃ γωνίαν α μὲ τὴν κατακόρυφον. Νὰ ὑπολογισθοῦν ἡ δύναμις ἕλξεως F′ καὶ ἡ τάσις Τ τοῦ νήματος ΟΒ, διὰ τιμὰς τῆς γωνίας α ἀντιστοίχως ἴσας πρὸς 30°, 45° καὶ 60°.

('Απ. $F = P \cdot \text{εφ}\,\alpha$, $T = \dfrac{P}{\text{συν}\,\alpha}$, $\alpha = 30^\circ$: $F = \dfrac{5\sqrt{3}}{3} = 2{,}89$ kgr*, $T = \dfrac{10\sqrt{3}}{3} =$ 5,77 kgr*, $\alpha = 45^\circ$: $F = 5$ kgr*, $T = 5\sqrt{2} = 7{,}07$ kgr*, $\alpha = 60^\circ$: $F = 5\sqrt{3} =$ 8,66 kgr*, $T = 10$ kgr*.)

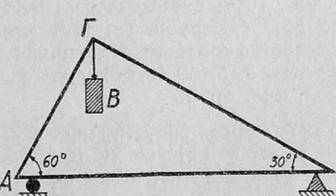
183. Βάρος 100 kgr* εἶναι ἐφηρμοσμένον εἰς τὸ σημεῖον συνδέσεως δύο δοκῶν παρουσιαζουσῶν κλίσιν 30° ὡς πρὸς τὴν ὁριζοντίαν. Αἱ βάσεις τῶν δοκῶν κεῖνται ἐπὶ ὁριζοντίου ἐπιπέδου καὶ συγκρατοῦνται μεταξύ των ὑπὸ ὁριζοντίας ράβδου. Ζητοῦνται α) ἡ θλῖψις ἐπὶ τῶν δοκίδων, β) ἡ τάσις ἐπὶ τῆς ράβδου συνδέσεως καὶ γ) ἡ πρὸς τὰ κάτω διευθυνομένη δύναμις ἐπὶ τῶν ὑποστηριγμάτων. (Τὸ βάρος τῶν δοκῶν θεωρεῖται ἀμελητέον.) ('Απ. α′ 100 kgr* ἐπὶ ἑκάστης. β′ 86,6 kgr*. γ′ 50 kgr* ἐπὶ ἑκάστης.)

184. Βάρος 100 kgr* εἶναι ἐφηρμοσμένον ἐπὶ τοῦ σημείου συνδέσεως δύο δοκῶν σχηματιζουσῶν γωνίαν 90°. Ἡ μία δοκὸς σχηματίζει γωνίαν 60° μετὰ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου ἐπὶ τοῦ ὁποίου στηρίζεται ἡ δοκός. Τὰ κάτω ἄκρα τῶν δοκῶν συνδέονται διὰ ὁριζοντίας ράβδου. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ θλῖψις ἑκάστης δοκοῦ, ἡ τάσις ἐπὶ τῆς δοκοῦ συνδέσεως καὶ ἡ κατακόρυφος πρὸς τὰ κάτω δύναμις ἐπὶ τῆς βάσεως. (Βάρος δοκῶν ἀμελητέον.) ('Απ. 50 kgr* εἰς τὴν μακροτέραν, 86,6 kgr* εἰς τὴν βραχυτέραν, 43,3 kgr*, 25 kgr* καὶ 75 kgr*.)

185. Καλώδιον ἀμελητέου βάρους καὶ συνδεδεμένον εἰς σταθερὸν σημεῖον Α ὑποβαστάζει σῶμα ἀγνώστου βάρους. Εἰς ἀπόστασιν 0,50 m ἀπὸ τοῦ σημείου ἐξαρτήσεως ἐξασκεῖται δι' ἐνδιαμέσου καλωδίου διερχομένου τὴν αὔλακα τροχαλίας, καταλλήλως διατιθεμένης, δύναμις ὁριζοντία 25 kgr*, ἥτις ἀπομακρύνει τὸ σημεῖον συνδέσεως τῶν δύο καλωδίων κατὰ 40 cm ἐκ τῆς κατακορύφου. Ποῖον τὸ βάρος τοῦ σώματος. ('Απ. 18,75 kgr*.)

186. Δύο καλώδια, ἀμελητέου βάρους, συνδεδεμένα εἰς δύο σημεῖα ὀροφῆς ἀπέχοντα 1 m, κρατοῦν βάρος 800 kgr*. Γνωστοῦ ὄντος ὅτι τὰ μήκη τῶν καλωδίων εἶναι ἀντιστοίχως 0,50 m καὶ 0,75 m, νὰ ὑπολογισθοῦν γραφικῶς καὶ λογιστικῶς αἱ τάσεις τῶν καλωδίων. ('Απ. $F_1 = 723$ kgr*, $F_2 = 568$ kgr*.)

187. Ὑπὸ τριῶν δοκῶν τῶν ὁποίων ἡ μᾶζα εἶναι ἀμελητέα σχηματίζεται ὀρθογώνιον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ ὑποτείνουσα εἶναι ὁριζοντία καὶ σχηματίζει τὰς γωνίας 30° καὶ 60° (βλ. σχῆμα). Εἰς τὴν κορυφὴν τῆς ὀρθῆς γωνίας τοῦ τριγώνου ἐξαρτᾶται βάρος Β. Νὰ ὑπολογισθοῦν α) αἱ δυνάμεις αἱ ὁποῖαι ἐπενεργοῦν ἐπὶ τῶν ὑποστηριγμάτων Α καὶ Δ ὡς καὶ β) αἱ δυνάμεις αἱ ὁποῖαι ἐπενεργοῦν ἐπὶ τῶν τριῶν δοκῶν. Ἀριθμητικὸν παράδειγμα Β = 1000 kgr*. ('Απ. α′ 750 kgr*, 250 kgr*. β′ 500 kgr*, 867 kgr*, 433 kgr*.)



188. Εἰς τὰ ἄκρα Α καὶ Β εὐθείας μήκους ΑΒ = 48 cm ἐφαρμόζονται δύο δυνάμεις παράλληλοι καὶ τῆς αὐτῆς φορᾶς F = 2 kgr* καὶ F′ = 6 kgr*. Νὰ εὑρεθῇ τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς Γ καὶ ἡ ἔντασις Σ τῆς συνισταμένης των. ('Απ. Σ = 8 kgr*, ΓΑ = 36 cm, ΓΒ = 12 cm.)

189. Εἰς τὰ δύο ἄκρα Α καὶ Β εὐθείας μήκους ΑΒ = 60 cm ἐφαρμόζονται δύο δυνάμεις παράλληλοι καὶ ἀντιθέτου φορᾶς $F_1 = 1$ kgr* καὶ $F_2 = 4$ kgr*. Νὰ εὑρεθῇ τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς Γ καὶ ἡ ἔντασις Σ τῆς συνισταμένης αὐτῶν.
('Απ. Σ = 3 kgr*, ΓΑ = 80 cm καὶ ΓΒ = 20 cm.)

190. Εἰς σημεῖα Α, Β, Γ, Δ, Ε, εὑρισκόμενα εἰς ἀπόστασιν 10 cm μεταξύ των, ἐφαρμόζονται δυνάμεις παράλληλοι μεταξύ των καὶ ἴσαι ἀντιστοίχως πρὸς 10 kgr*, 20 kgr*, 30 kgr*, 40 kgr*, 50 kgr*. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἔντασις τῆς ὁμοπαραλλήλου δυνάμεως, ἥτις ἐφαρμοζομένη εἰς σημεῖον μεταξὺ τοῦ Α καὶ Ε ἰσορροπεῖ τὴν εὐθεῖαν ΑΕ. ('Απ. 70 kgr*.)

191. Εἰς τὰς τέσσαρας κορυφὰς τραπεζίου ΑΒΓΔ ἐφαρμόζονται δυνάμεις ἴσαι, παράλληλοι καὶ τῆς αὐτῆς φορᾶς. Νὰ εὑρεθῇ τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς τῆς συνισταμένης.
('Απ. Εἰς τὸ μέσον τῆς εὐθείας, ἥτις συνδέει τὰ μέσα τῶν δύο βάσεων.)

192. Εἰς τὰ δύο ἄκρα Α καὶ Β εὐθείας μήκους ΑΒ = 120 cm εἶναι ἐφηρμοσμέναι δύο δυνάμεις παράλληλοι καὶ τῆς αὐτῆς φορᾶς, $F_1 = 2$ kgr* καὶ $F_2 = 10$ kgr*. Εἰς σημεῖον Γ εὑρισκόμενον μεταξὺ Α καὶ Β εἰς ἀπόστασιν 40 cm ἀπὸ τοῦ Α ἐξασκεῖται δύναμις $F_3 = 4$ kgr*, παράλληλος πρὸς τὰς προηγουμένας, ἀλλὰ ἀντιθέτου φορᾶς. Νὰ εὑρεθῇ τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς Ο καὶ ἡ ἔντασις τῆς συνισταμένης Σ.
('Απ. ΟΑ = 130 cm, ΟΒ = 10 cm, Σ = 8 kgr*.)

193. Εἰς τὸ μέσον ἑκάστης πλευρᾶς τριγώνου, καὶ καθέτως πρὸς τὴν πλευράν, ἐφαρμόζεται δύναμις διευθυνομένη πρὸς τὰ ἔξω τοῦ τριγώνου καὶ τῆς ὁποίας ἡ ἔντασις εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὸ μῆκος τῆς ἀντιστοίχου πλευρᾶς. Νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ τρεῖς αὗται δυνάμεις συνέρχονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον καὶ νὰ εὑρεθῇ ἡ συνισταμένη αὐτῶν.
('Απ. Συνισταμένη μηδέν.)

194. Τετράγωνον ΑΒΓΔ πλευρᾶς 10 cm εἶναι στρεπτὸν περὶ ἄξονα κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδόν του, διερχόμενον διὰ τοῦ κέντρου αὐτοῦ Ο. Εἰς τὰς κορυφὰς Α, Β καὶ Γ ἐπενεργοῦν καθέτως πρὸς τὰς διαγωνίους τρεῖς ἴσαι ὁμοπαράλληλοι δυνάμεις ἐκ 2 kgr*. Νὰ εὑρεθοῦν γραφικῶς καὶ λογιστικῶς ἡ τιμὴ καὶ τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς τῆς συνισταμένης δυνάμεως, ἡ ροπὴ καὶ ἡ ἀπόστασις αὐτῆς ἀπὸ τοῦ ἄξονος.
('Απ. 2 kgr*, 0,424 kgr*m, 21,2 cm.)

195. Τρίγωνον ΑΒΓ κεῖται ἐπὶ κατακορύφου ἐπιπέδου μὲ ὁριζοντίαν βάσιν τὴν ΒΓ = 10 cm. Αἱ ἄλλαι πλευραὶ αὐτοῦ ἔχουν μῆκος ΑΒ = 8 cm καὶ ΑΓ = 6 cm. Εἰς τὰς κορυφὰς Β καὶ Γ ἐπενεργοῦν καθέτως καὶ πρὸς τὰ κάτω δύο παράλληλοι δυνάμεις, ἴσαι πρὸς 5 kgr* καὶ 7 kgr* ἀντιστοίχως, ἐνῷ εἰς τὸ Α δύναμις 4 kgr* καθέτως πρὸς τὰ ἄνω. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ συνισταμένη καὶ ἡ ἀπόστασις τῆς εὐθείας ἐπενεργείας αὐτῆς ἐκ τοῦ Γ. ('Απ. 8 kgr*, 4,45 cm.)

196. Πέντε ὁμοπαράλληλοι δυνάμεις ἐντάσεων 4 kgr*, 8 kgr*, 5 kgr*, 3 kgr* καὶ 2 kgr* ἐπενεργοῦν ἐπὶ πέντε σημείων εὐθείας, ἀπεχόντων ἐξ ἑνὸς ἐπιπέδου ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ἀποστάσεις ἀντιστοίχως 3 dm, 4 dm, 5 dm, 7 dm καὶ 10 dm. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου κεῖται τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς τῆς συνισταμένης καὶ ποία ἡ τιμὴ αὐτῆς. ('Απ. 5 dm, 22 kgr*.)

197. Ράβδος ὁμογενὴς μήκους 2 m καὶ βάρους 1,4 kgr* φέρει εἰς τὸ ἓν ἄκρον αὐτῆς βάρος 14 kgr* καὶ εἰς τὸ ἕτερον βάρος 22 kgr*. Εἰς ποῖον σημεῖον τῆς ράβδου πρέπει νὰ τοποθετηθῇ ἄξων περιστροφῆς, ἵνα ἡ ράβδος ἰσορροπῇ.
('Απ. Μεταξὺ τοῦ σημείου ἐφαρμογῆς τῆς μεγαλυτέρας δυνάμεως καὶ τοῦ μέσου, 21,4 cm ἀπ' αὐτοῦ.)

198. Δύο ἐργάται φέρουν ἐπὶ τῶν ὤμων αὐτῶν δοκὸν μήκους 12 m καὶ βάρους 60 kgr*. Ἡ δοκὸς στηρίζεται ἐπὶ τοῦ ἑνὸς ἐργάτου κατὰ τὸ ἓν ἄκρον αὐτῆς, ἐνῷ ἐπὶ τοῦ ἄλλου εἰς σημεῖον ἀπέχον 1 m ἐκ τοῦ ἑτέρου ἄκρου. Ποῖον φορτίον ὑποβαστάζει ἕκαστος ἐργάτης. ('Απ. 32,7 kgr*, 27,3 kgr*.)

199. Ἀβαρὴς ράβδος μήκους 1,60 m ὑποστηρίζεται δι' ἄξονος ἀπέχοντος κατὰ 40 cm ἀπὸ τοῦ ἑνὸς ἄκρου Α αὐτῆς. Εἰς τὸ Α ἐπενεργεῖ δύναμις 6 kgr* καθέτως ἐπὶ τῆς ράβδου, ἐνῷ εἰς τὸ ἕτερον ἄκρον, εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον καὶ πρὸς τὴν αὐτὴν πλευράν, ἄλλη δύναμις, σχηματίζουσα μὲ τὴν ράβδον γωνίαν 45°. Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ τιμὴ αὐτῆς, ἵνα ἡ ράβδος ἰσορροπῇ. (Ἀπ. 2,83 kgr*.)

200. Τέσσαρες παράλληλοι δυνάμεις $F_1 = 7$ kgr*, $F_2 = 8$ kgr*, $F_3 = 9$ kgr* καὶ $F_4 = 10$ kgr* ἐνεργοῦν εἰς τὰ σημεῖα $Α_1$, $Α_2$, $Α_3$ καὶ $Α_4$ μιᾶς σταθερᾶς εὐθείας $Α_1Α_4$. Αἱ μεταξὺ τῶν σημείων ἐφαρμογῆς ἀποστάσεις εἶναι $Α_1Α_2 = 12$ cm, $Α_2Α_3 = 17$ cm καὶ $Α_3Α_4 = 15$ cm. Ἡ δύναμις F_2 εἶναι ἀντίρροπος πρὸς τὰς ἄλλας. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἔντασις τῆς συνισταμένης αὐτῶν Σ καὶ ἡ θέσις τοῦ σημείου Γ τῆς ἐφαρμογῆς της.
(Ἀπ. Σ = 18 kgr*, $Α_1Γ = 33{,}6$ cm.)

201. Ράβδος μήκους 1 m στερεοῦται κατὰ τὰ δύο ἄκρα αὐτῆς Α καὶ Β. Εἰς δύο οἱαδήποτε σημεῖα Γ καὶ Δ τῆς ράβδου ἐφαρμόζονται δύο δυνάμεις κάθετοι ἐπὶ τῆς ράβδου, ἴσαι καὶ ἀντιθέτου φορᾶς. Γνωστοῦ ὄντος ὅτι αἱ δυνάμεις αὗται εἶναι 50 kgr* καὶ ὅτι ΓΔ = 20 cm, νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ δυνάμεις τὰς ὁποίας ἡ ράβδος ἐξασκεῖ εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β. (Ἀπ. Αὗται σχηματίζουν ζεῦγος ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ζεῦγος τὸ ἐφαρμοζόμενον εἰς τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ.)

202. Δύο ἐργάται διαθέτουν ράβδον μήκους 1,20 m διὰ νὰ μεταφέρουν βάρος 75 kgr*. Εἰς ποῖον σημεῖον ἐπὶ τῆς ράβδου πρέπει νὰ ἐξαρτηθῇ τὸ βάρος, ἵνα ὁ ἀσθενέστερος ἐργάτης φέρῃ βάρος 30 kgr*. (Ἀπ. 0,72 m.)

203. Ἄξων μήκους 2 m φέρει εἰς τὸ ἓν τῶν ἄκρων του τροχαλίαν βάρους 6 kgr* καὶ στηρίζεται ἐπὶ δύο ἑδράνων εὑρισκομένων τὸ μὲν ἓν εἰς ἀπόστασιν 0,50 m ἀπὸ τῆς τροχαλίας τὸ δὲ ἕτερον εἰς τὸ ἀντίθετον τῆς τροχαλίας ἄκρον. Γνωστοῦ ὄντος ὅτι ὁ ἄξων εἶναι ἀπὸ σίδηρον (εἰδ. βάρος σιδήρου 7,85 gr*/cm³) καὶ ἔχει διάμετρον 40 mm, νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὑπὸ ἑκάστου ἑδράνου ὑποβασταζόμενον φορτίον.
(Ἀπ. 13,3 kgr*, 93,3 kgr*.)

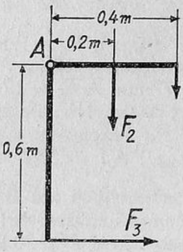
204. Ἐξαρτᾶται βάρος 50 kgr* ἐκ τοῦ ἄκρου ράβδου ἐσφηνωμένης ἐπὶ τοίχου. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ δυνάμεις τὰς ὁποίας ὁ τοῖχος ἐξασκεῖ ἐπὶ τῆς ράβδου, γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ ράβδος ἔχει μῆκος 20 cm καὶ ὅτι αὕτη εἶναι βυθισμένη ἐντὸς τοῦ τοίχου κατὰ 5 cm. (Ἀπ. 150 kgr*, 200 kgr*.)

205. Ράβδος ἀμελητέου βάρους φέρει εἰς τὰ δύο ἄκρα αὐτῆς φορτία 30 kgr* καὶ 50 kgr*. Γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τῶν φορτίων εἶναι 1 m, νὰ ὑπολογισθοῦν α) εἰς ποῖον σημεῖον πρέπει νὰ στηριχθῇ ἡ ράβδος, ἵνα μείνῃ ὁριζοντία, καὶ β) πόση ἡ ἐπὶ τοῦ στηρίγματος ἐξασκουμένη δύναμις.
(Ἀπ. α' 62,5 cm ἀπὸ τὴν δύναμιν 30 kgr* ἢ 37,5 cm ἀπὸ τὴν δύναμιν 50 kgr*. β' 80 kgr*.)

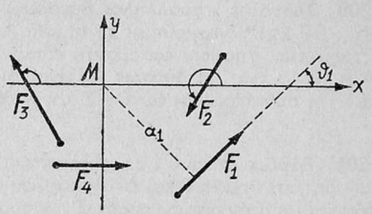
206. Εἰς τὰ ἄκρα Α καὶ Β ράβδου ΑΒ μήκους 8 cm ἐπενεργοῦν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου καὶ πρὸς τὴν αὐτὴν πλευρὰν αἱ δυνάμεις 6 kgr* καὶ 10 kgr*, σχηματίζουσαι μετὰ τῆς ράβδου γωνίας ἀντιστοίχως 120° καὶ 90°. Νὰ εὑρεθοῦν γραφικῶς καὶ λογιστικῶς: α) Ἡ τιμὴ τῆς συνισταμένης. β) Ἡ γωνία τὴν ὁποίαν σχηματίζει μετὰ τῆς ράβδου. γ) Τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς αὐτῆς ἐπὶ τῆς ΑΒ.
(Ἀπ. α' 15,5 kgr*, β' 78° 50', γ' 5,26 cm ἐκ τοῦ Α.)

207. Σιδηρογωνία (βλ. σχῆμα) εἶναι στρεπτὴ περὶ ἄξονα κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτῆς, διερχόμενον διὰ τῆς κορυφῆς Α, αἱ δὲ ἐπ' αὐτῆς ἐπενεργοῦσαι δυνάμεις εἶναι $F_1 = 1$ kgr*, $F_2 = 3{,}5$ kgr* καὶ $F_3 = 6$ kgr*. Νὰ εὑρεθοῦν γραφικῶς καὶ λογιστικῶς ἡ τιμή, ἡ διεύθυνσις καὶ τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς τῆς συνισταμένης, ὡς ἐπίσης καὶ ἡ ροπὴ αὐτῆς.

('Απ. $\Sigma = \sqrt{(F_1 + F_2)^2 + F_3^2} = 7{,}5$ kgr*, 2,5 kgr*m.)



Πρόβλημα 207.



Πρόβλημα 208.

208. Τέσσαρες δυνάμεις ἐπενεργοῦν ἐντὸς τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου ἐπὶ στερεοῦ σώματος (βλ. σχῆμα). Αἱ τιμαὶ τῶν δυνάμεων (F_n), αἱ ἀποστάσεις (α_n) ἐκ τυχόντος σημείου Μ τοῦ ἐπιπέδου καὶ αἱ γωνίαι τῶν φορέων αὐτῶν (θ_n) μετὰ τοῦ θετικοῦ ἄξονος τῶν x εἶναι :

$F_1 = 40$ kgr*	$\alpha_1 = 30$ cm	$\theta_1 = 45^\circ$
$F_2 = 28$ kgr*	$\alpha_2 = 20$ cm	$\theta_2 = 240^\circ$
$F_3 = 45$ kgr*	$\alpha_3 = 15$ cm	$\theta_3 = 120^\circ$
$F_4 = 30$ kgr*	$\alpha_4 = 18$ cm	$\theta_4 = 0^\circ$

Νὰ εὑρεθῇ ἡ συνισταμένη τῶν δυνάμεων τούτων, ἡ γωνία τοῦ φορέως αὐτῆς μετὰ τοῦ ἄξονος τῶν x καὶ ἡ ἀπόστασίς της ἐκ τοῦ Μ.

('Απ. $\Sigma x = 21{,}8$ kgr*, $\Sigma y = 43$ kgr*, $\Sigma = \sqrt{\Sigma x^2 + \Sigma y^2}$,

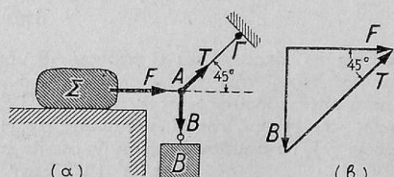
$\Sigma = 48{,}2$ kgr*, $\text{εφ}\,\theta = \dfrac{\Sigma x}{\Sigma y}$, $\theta = 63^\circ\ 9'$, $\alpha = 10{,}5$ cm.)

209. Αἱ πλευραὶ ἐπιπέδου πολυγώνου, τὰς ὁποίας θεωροῦμεν διατρεχομένας καθ' ὡρισμένην φορὰν ὑπὸ κινητοῦ, παριστοῦν κατὰ ἀριθμητικὴν τιμὴν καὶ διεύθυνσιν δυνάμεις τῆς αὐτῆς φορᾶς μὲ τὴν φορὰν τῆς κινήσεως τοῦ κινητοῦ. Νὰ γίνῃ ἡ ἀναγωγὴ τοῦ συστήματος τῶν δυνάμεων τούτων.

('Απ. Τὸ σύστημα ἀνάγεται εἰς ἓν ζεῦγος, τῆς ροπῆς τοῦ ὁποίου ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ ἰσοῦται πρὸς τὸ διπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ πολυγώνου.)

210. Ἵνα ἐφαρμόσωμεν ὁριζοντίαν δύναμιν $F = 8$ kgr* ἐπὶ τοῦ σώματος Σ μέσῳ ἑνὸς ἐξηρτημένου βάρους Β, χρησιμοποιεῖται ἡ διάταξις τοῦ σχήματος. Προσδιορίσατε τὸ ἀπαιτούμενον βάρος Β καὶ τὴν τείνουσαν δύναμιν Τ εἰς τὸ σχοινίον ΑΓ.

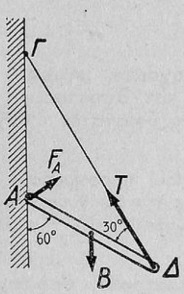
('Απ. $B = 8$ kgr*, $T = 8\sqrt{2} = 11{,}28$ kgr*.)



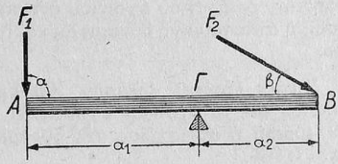
211. Εἰς τὰς τρεῖς κορυφὰς τριγώνου ΑΒΓ ἐφαρμόζονται τρεῖς ἴσαι, παράλληλοι καὶ τῆς αὐτῆς διευθύνσεως δυνάμεις. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἔντασις καὶ τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς τῆς συνισταμένης των. ('Απ. $\Sigma = 3$ F. Σημεῖον ἐφαρμογῆς εἶναι τὸ σημεῖον τομῆς τῶν διαμέσων τοῦ τριγώνου.)

212. Πρισματικὴ ράβδος ΑΔ, βάρους $B = 2$ ton*, στηρίζεται δι' ἀρθρώσεως εἰς κατακόρυφον τοῖχον εἰς τὸ Α καὶ διὰ σχοινίου ΔΓ εἰς τὸ σημεῖον Γ τοῦ τοίχου. Νὰ προσδιορισθῇ τὸ μέγεθος καὶ ἡ διεύθυνσις τῆς ἀντιδράσεως F_A εἰς τὴν ἄρθρωσιν Α καὶ ἡ τείνουσα δύναμις Τ τοῦ σχοινίου ΔΓ. Αἱ γωνίαι δεικνύονται εἰς τὸ σχῆμα.

('Απ. $F_A = 1$ ton* καὶ γωνία 60° ὡς πρὸς τὴν κατακόρυφον, $T = 1{,}73$ ton*.)



Πρόβλημα 212.

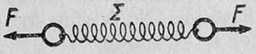


Πρόβλημα 213.

213. Ράβδος ΑΒ στηριζομένη εἰς τὸ Γ εὑρίσκεται ὑπὸ τὴν ἐπενέργειαν τῶν δυνάμεων F_1 καὶ F_2. Ἐὰν $F_1 = 40$ kgr*, $F_2 = 100$ kgr*, $\alpha = 90°$, $\beta = 30°$ καὶ τὸ βάρος τῆς ράβδου ἀμελητέον, εὕρετε τὸν λόγον τῶν ἀποστάσεων α_1 καὶ α_2, ὥστε ἡ ράβδος νὰ εἶναι εἰς ὁριζοντίαν θέσιν. (Ἡ κατακόρυφος διάστασις τῆς ράβδου θεωρεῖται ἀμελητέα.) ('Απ. $\alpha_1/\alpha_2 = 5/4$.)

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Γ'

214. Εἰς τὰ ἄκρα τοῦ σπειροειδοῦς ἐλατηρίου Σ ἐξασκοῦνται δύο ἴσαι καὶ ἀντίθετοι δυνάμεις (F, F), ὡς δεικνύεται εἰς τὸ σχῆμα. Ἐὰν ἑκάστη δύναμις ἔχῃ ἔντασιν 20 kgr*, μὲ πόσην δύναμιν τείνεται τὸ ἐλατήριον καὶ διατί.



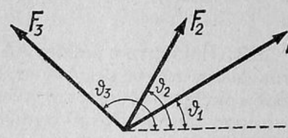
215. Δύο δυνάμεις 2 kgr* καὶ 5 kgr* ἐπενεργοῦν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ὑλικοῦ σημείου καὶ σχηματίζουν μεταξύ των γωνίαν 60°. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ συνισταμένη αὐτῶν.

216. Δύναμις 10 kgr* ἀναλύεται εἰς δύο συνιστώσας, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μία εἶναι 5 kgr* καὶ ἔχει διεύθυνσιν κάθετον πρὸς τὴν δοθεῖσαν δύναμιν. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μέγεθος καὶ ἡ διεύθυνσις τῆς ἑτέρας συνιστώσης.

217. Δύναμις 25 kgr* εἶναι ἡ συνισταμένη δύο συνιστωτῶν, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μία εἶναι 15 kgr* καὶ ἔχει διεύθυνσιν 20° ἐν σχέσει πρὸς τὴν συνισταμένην. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μέγεθος καὶ ἡ διεύθυνσις τῆς ἑτέρας συνιστώσης.

218. Ποία θὰ εἶναι ἡ συνισταμένη τῶν τριῶν δυνάμεων τοῦ εἰκονιζομένου σχήματος, ἐὰν $F_1 = 4$ kgr*, $F_2 = 2$ kgr*, $F_3 = 3$ kgr* καὶ $\theta_1 = 25°$, $\theta_2 = 65°$, $\theta_3 = 140°$.

219. Δίδονται δύο δυνάμεις F_1 καὶ F_3, κάθετοι μεταξύ των καὶ ἐφηρμοσμέναι εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον, ἔχουσαι τιμὰς ἀντιστοίχως 9 kgr* καὶ 12 kgr*. α) Νὰ κατασκευασθῇ γεωμετρικῶς ἡ συνισταμένη αὐτῶν καὶ νὰ εὑρεθῇ γραφικῶς τὸ μέγεθος αὐτῆς. β) Νὰ εὑρεθῇ δι' ὑπολογισμοῦ τὸ μέγεθος τῆς συνισταμένης καὶ νὰ συγκριθῇ τοῦτο μὲ τὸ γραφικῶς λαμβανόμενον.



Πρόβλημα 218.

220. Βάρος 100 kgr* ὑποβαστάζεται ὑπὸ δύο σχοινίων. Τὸ ἓν σχοινίον ἔχει ὁριζοντίαν διεύθυνσιν καὶ τὸ ἄλλο διεύθυνσιν 30° ὡς πρὸς τὴν κατακόρυφον. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τάσις ἑκάστου σχοινίου.

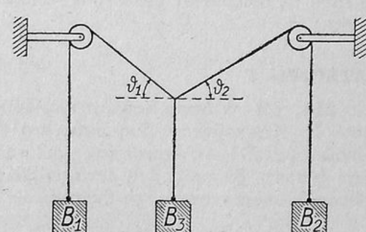
221. Μᾶζα 250 kgr εἶναι ἐξηρτημένη εἰς τὸ ἄκρον σχοινίου μήκους 6 m καὶ μὲ τὴν βοήθειαν ὁριζοντίου σχοινίου ἐκτοπίζεται πλευρικῶς κατ' ἀπόστασιν 3 m. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀπαιτουμένη δύναμις ὡς καὶ ἡ τάσις τὴν ὁποίαν ὑφίσταται τὸ σχοινίον ἐξαρτήσεως.

222. Ἵππος ἐξασκεῖ δύναμιν 100 kgr* μέσῳ σχοινίου προσηρμοσμένου ἐπὶ ποταμοπλοίου καὶ τὸ σχοινίον σχηματίζει γωνίαν 15° πρὸς τὴν διεύθυνσιν τῆς κινήσεως. Νὰ εὑρεθῇ ἡ συνιστῶσα τῆς δυνάμεως ἡ ὁποία συντελεῖ εἰς τὴν κίνησιν. (συν 15° = 0,966.)

223. Μία εἰκὼν βάρους 2,5 kgr* ὑποβαστάζεται συμμετρικῶς ὑπὸ σχοινίου διερχομένου ἀπὸ καρφίου, τὸ δὲ σχοινίον εἶναι προσηρμοσμένον ἐπὶ τοῦ πλαισίου τῆς εἰκόνος. Ἡ γωνία μεταξὺ τῶν δύο τμημάτων τοῦ σχοινίου εἶναι 60°. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τάσις τοῦ σχοινίου.

224. Τὰ δύο ἄκρα σχοινίου μήκους 1 m εἶναι προσηρμοσμένα ἐπὶ δύο καρφίων, ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, καὶ εὑρίσκονται εἰς ἀπόστασιν 60 cm μεταξύ των. Ἐπὶ τοῦ σχοινίου ὑπάρχει λεῖος δακτύλιος μάζης 4 kgr. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τάσις τοῦ σχοινίου.

225. Αἱ διάμεσοι τριγώνου παριστοῦν τρεῖς δυνάμεις. Νὰ δειχθῇ ὅτι αὗται εὑρίσκονται ἐν ἰσορροπίᾳ.



Πρόβλημα 226.

226. Διὰ δύο τροχαλιῶν διέρχεται νῆμα, εἰς τὰ ἄκρα τοῦ ὁποίου ἐξαρτῶνται τὰ βάρη B_1 καὶ B_2, μεταξὺ δὲ τῶν δύο τροχαλιῶν ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ νήματος καὶ τὸ βάρος B_3 (βλ. σχῆμα). Ζητοῦνται : α) Νὰ δειχθῇ ὅτι $B_1 = B_2$, ὅταν $\theta_1 = \theta_2$. β) Νὰ δειχθῇ ὅτι $B_1 > B_2$, ὅταν $\theta_1 > \theta_2$. γ) Ἐὰν $B_1 = B_2$, νὰ εὑρεθοῦν αἱ θ_1 καὶ θ_2 διὰ τὰς περιπτώσεις $B_3 = 1/4\ B_1$, $B_3 = 3/4\ B_1$, $B_3 = 5/4\ B_1$, $B_3 = 7/4\ B_1$, $B_3 = 9/4\ B_1$.

227. Εἰς τὴν διάταξιν τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος ζητεῖται : α) Ἐὰν $B_1 + B_2 + B_3 + 1$ kgr*, νὰ εὑρεθοῦν αἱ θ_1 καὶ θ_2. β) Ἐὰν $B_1 = B_2 = 10$ kgr*, νὰ εὑρεθοῦν αἱ θ_1 καὶ θ_2 διὰ τὰς περιπτώσεις $B_3 = 5$ kgr*, 10 kgr*, 15 kgr*, 20 kgr*, 25 kgr*. γ) Ἐὰν $B_3 = 5$ kgr*, $\theta_1 = 45°$ καὶ $\theta_2 = 30°$, νὰ εὑρεθοῦν αἱ B_1 καὶ B_2.

228. Ἀβαρὴς ράβδος ΑΒ, μήκους 125 cm, ὑφίσταται τὴν ἐπενέργειαν δυνάμεως

3 kgr*, εἰς ἀπόστασιν 50 cm ἀπὸ τοῦ Α, διευθυνομένης πρὸς τὰ ἄνω καὶ τὴν ἐπενέργειαν δύο δυνάμεων 1 kgr* καὶ 2 kgr*, εἰς τὰ ἄκρα Α καὶ Β, διευθυνομένων πρὸς τὰ κάτω. Εὑρίσκεται ἡ ράβδος ἐν ἰσορροπίᾳ ; Ἐὰν ὄχι, τί πρέπει νὰ ἐφαρμοσθῇ διὰ νὰ ἔχωμεν ἰσορροπίαν.

229. Δοκὸς μήκους 6 m καὶ μάζης 240 kgr ἰσορροπεῖ, ὅταν ὑποστηρίζεται κατὰ τὸ μέσον αὐτῆς. Ἐὰν ὑποστηρίζεται ὑπὸ δύο στύλων, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ εἷς νὰ ἀπέχῃ 1 m ἀπὸ τὸ ἓν ἄκρον καὶ ὁ ἄλλος 1,5 m ἀπὸ τὸ ἄλλο, πόσον βάρος ὑποφέρει ἕκαστος στῦλος.

230. Τρεῖς δυνάμεις ἴσαι, παράλληλοι καὶ τῆς αὐτῆς φορᾶς ἐφαρμόζονται εἰς τὰς τρεῖς κορυφὰς ἰσοπλεύρου τριγώνου ἐγγεγραμμένου ἐπὶ τῆς περιφερείας τροχοῦ κινητοῦ περὶ τὸν ἄξονά του. Καὶ αἱ τρεῖς δυνάμεις ὑποτίθεται ὅτι εὑρίσκονται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ τριγώνου. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ σύνολον τῶν δυνάμεων ἔχει δυναμικὸν ἀποτέλεσμα μηδέν.

231. Σχοινίον μήκους l ἐξαρτᾶται ἐκ δύο σημείων εὑρισκομένων εἰς τὸ αὐτὸ ὕψος καὶ τῶν ὁποίων ἡ ἀπόστασις εἶναι $3/4\ l$. Εἰς ἀπόστασιν $1/3\ l$ ἀπὸ τοῦ ἑνὸς ἄκρου ἐπενεργεῖ βάρος Β. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ἐπὶ τοῦ σχοινίου δυνάμεις διὰ γεωμετρικῆς κατασκευῆς. (Βάρος σχοινίου ἀμελητέον.)

232. Ὁμοιόμορφος ράβδος ζυγίζουσα 12 kgr* καὶ ἔχουσα μῆκος 6 m ὑποβαστάζεται ὑπὸ ἑνὸς ἀνθρώπου εἰς ἀπόστασιν 1 m ἀπὸ τοῦ ἑνὸς ἄκρου καὶ ὑπὸ ἑτέρου ἀνθρώπου εἰς ἀπόστασιν 2 m ἀπὸ τοῦ ἑτέρου ἄκρου. Εἰς ποῖον σημεῖον πρέπει νὰ τοποθετηθῇ βάρος 60 kgr*, ὥστε ὁ ἄνθρωπος ὁ ὁποῖος ὑποβαστάζει τὴν ράβδον 1 m ἀπὸ τοῦ ἑνὸς ἄκρου νὰ καταβάλῃ δύναμιν ἡμίσειαν ἢ ὁ πρῶτος.

233. Ράβδος ἀβαρὴς ΑΒ, μήκους 100 cm, ὑφίσταται τὴν ἐπενέργειαν δυνάμεων διευθυνομένων πρὸς τὰ ἄνω, 8 kgr*, 2 kgr* καὶ 2 kgr*, ἐφαρμοζομένων ἀντιστοίχως εἰς τὸ σημεῖον Α, 60 cm καὶ 100 cm ἀπὸ τοῦ Α, καὶ δύναμιν 4 kgr* διευθυνομένην πρὸς τὰ κάτω εἰς ἀπόστασιν 20 cm ἀπὸ τοῦ Α. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τιμὴ καὶ ἡ θέσις τοῦ σημείου ἐφαρμογῆς τῆς ἰσορροπούσης δυνάμεως.

234. Ὁμοιόμορφος ράβδος ΑΒ ἔχει μῆκος 100 cm καὶ ζυγίζει 20 kgr*. Μία δύναμις πρὸς τὰ ἄνω 15 kgr* ἐφαρμόζεται εἰς τὴν ράβδον, 20 cm ἀπὸ τοῦ ἄκρου Α, καὶ δυνάμεις πρὸς τὰ κάτω 25 kgr* καὶ 30 kgr* ἐπενεργοῦν ἀντιστοίχως εἰς Α καὶ Β. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ καὶ ἡ θέσις τοῦ σημείου ἐφαρμογῆς τῆς ἰσορροπούσης δυνάμεως.

235. Ὁμοιόμορφος ράβδος ΑΒ μήκους 100 cm καὶ βάρους 5 kgr* ὑφίσταται τὴν ἐπενέργειαν τῶν ἀκολούθων δυνάμεων. Μιᾶς δυνάμεως 2 kgr*, διευθυνομένης πρὸς τὰ κάτω καὶ ἐφαρμοζομένης εἰς σημεῖον 20 cm ἀπὸ τοῦ Α, καὶ δυνάμεων διευθυνομένων πρὸς τὰ ἄνω 5 kgr*, 3 kgr* καὶ 8 kgr* ἐπενεργουσῶν εἰς τὸ ἄκρον Α, 60 cm καὶ 100 cm ἀπὸ τοῦ Α ἀντιστοίχως. Τί ἀπαιτεῖται διὰ νὰ ὑφίσταται ἰσορροπία.

236. Τρεῖς ἄνθρωποι ὑποβαστάζουν ὁμοιόμορφον δοκόν. Ὁ εἷς ὑποστηρίζει τὸ ἓν ἄκρον καὶ οἱ δύο ἄλλοι ὑποστηρίζουν αὐτὴν μέσῳ ἐγκαρσίας ράβδου τοποθετουμένης ὑπὸ τὴν δοκόν. Εἰς ποῖον σημεῖον τῆς δοκοῦ πρέπει νὰ τοποθετηθῇ ἡ ράβδος, ὥστε ἕκαστος τῶν ἀνθρώπων νὰ ὑποβαστάζῃ τὸ ἓν τρίτον τοῦ βάρους τῆς δοκοῦ.

237. Δοκὸς ΑΒ, μήκους 350 cm, ἔχει τὸ κέντρον βάρους αὐτῆς 60 cm ἀπὸ τοῦ ἄκρου Α καὶ πρέπει νὰ ὑποστηριχθῇ εἰς τὰ ἄκρα αὐτῆς. Πόση εἶναι ἡ δύναμις τὴν ὁποίαν ὑποβαστάζουν τὰ ὑποστηρίγματα Α καὶ Β, ἐὰν τὸ βάρος αὐτῆς εἶναι 5 kgr*.

238. Ὁμοιόμορφος ράβδος μήκους 100 cm ζυγίζει 25 kgr*. Ἡ ράβδος πρέπει νὰ ὑποστηριχθῇ εἰς τὰ ἄκρα αὐτῆς Α καὶ Β. Εἰς τὴν ράβδον ἐφαρμόζεται δύναμις 15 kgr* εἰς ἀπόστασιν 80 cm ἀπὸ τοῦ Α. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ δύναμις ἡ ἐξασκουμένη ἐπὶ τοῦ ὑποστηρίγματος.

239. Σανὶς μήκους 4 m ἀμελητέου βάρους χρησιμοποιεῖται ὡς αἰώρα εἰς δύο παιδία καθισμένα εἰς ἕκαστον ἄκρον της. Τὸ ἓν τῶν παιδίων ἔχει βάρος 30 kgr*, τὸ ἕτερον 50 kgr*. Νὰ εὑρεθῇ ἡ θέσις τοῦ σταθεροῦ ἄξονος περὶ τὸν ὁποῖον δύναται νὰ περιστρέφεται ἡ σανίς, ὅταν αὕτη εἶναι ὁριζοντία καὶ ἐν ἰσορροπίᾳ.

240. Δύο ἄνθρωποι μεταφέρουν φορτίον 90 kgr* ἐξηρτημένον ἀπὸ σημεῖον Γ ὁριζοντίας ράβδου ΑΒ, τοποθετουμένης ἐπὶ τῶν ὤμων των εἰς σημεῖα ἀπέχοντα ἀντιστοίχως 0,60 m καὶ 1,20 m ἀπὸ τὸ σημεῖον Γ. Πόσον εἶναι τὸ φορτίον τὸ ὑποβασταζόμενον ὑπὸ ἑκάστου τῶν ἀνθρώπων. (Τὸ βάρος τῆς ράβδου θεωρεῖται ἀμελητέον.)

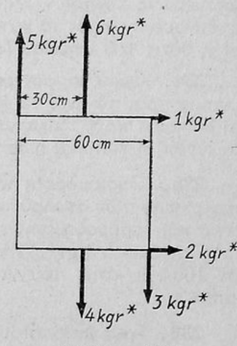
241. Ἕξ καρφία ἔχουν καρφωθῆ ἐπὶ σανίδος κατὰ τὰς κορυφὰς κανονικοῦ ἑξαγώνου καὶ μία ἐλαστικὴ ταινία συνδέει αὐτά. Ἡ τάσις τῆς ἐλαστικῆς ταινίας εἶναι 100 gr*. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγεθος καὶ ἡ διεύθυνσις τῆς δυνάμεως τῆς ἐξασκουμένης ἐπὶ ἑκάστου καρφίου.

242. Ὁμοιόμορφος ράβδος συγκρατεῖται ὁριζοντίως ἀπὸ σχοινίον τοῦ ὁποίου τὰ δύο ἄκρα συνδέονται πρὸς τὰ δύο ἄκρα τῆς ράβδου καὶ διέρχεται ἀπὸ ἕνα πάσσαλον. Νὰ δειχθῇ ὅτι, ὅσον μεγαλύτερον μῆκος ἔχει τὸ σχοινίον, τόσον μικροτέρα εἶναι ἡ τάσις αὐτοῦ. Πόση εἶναι ἡ μικροτέρα δυνατὴ τάσις.

243. Μία ἐλαφρὰ ράβδος ἐξαρτᾶται ἀπὸ τοῦ ἑνὸς ἄκρου καὶ φορτίζεται κατὰ τὸ ἕτερον ἄκρον διὰ βάρους 6 kgr*. Ἡ ράβδος συγκρατεῖται εἰς ὁριζοντίαν θέσιν ἀπὸ σχοινίον ἐξηρτημένον ἀπὸ τὸ φορτισμένον ἄκρον καὶ σχηματίζει γωνίαν 30° πρὸς τὴν ράβδον. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τάσις τοῦ σχοινίου καὶ ἡ ἀντίδρασις τοῦ σημείου ἐξαρτήσεως (βλ. σχῆμα ἀσκήσεως 160.)

244. Ράβδος δύσκαμπτος ἀμελητέου βάρους στηρίζεται κατὰ τὸ σημεῖον Α πλησίον τοῦ ἑνὸς τῶν ἄκρων της ἐπὶ τῆς αἰχμῆς ὁριζοντίου μαχαιρίου, ἐνῷ κατὰ τὸ ἄλλο ἄκρον Β εἶναι ἐξηρτημένη ἀπὸ δυναμόμετρον. Δίδεται ΟΑ = 1 m καὶ ζητοῦνται αἱ ἐνδείξεις τοῦ δυναμομέτρου, ὅταν βάρος 10 kgr* ἐξαρτᾶται διαδοχικῶς εἰς ἀποστάσεις 10 cm, 20 cm, 30 cm,.. 90 cm ἀπὸ τοῦ Α. (Δεχόμεθα ὅτι ἡ ράβδος εὑρίσκεται πάντοτε εἰς θέσιν ὁριζοντίαν.)

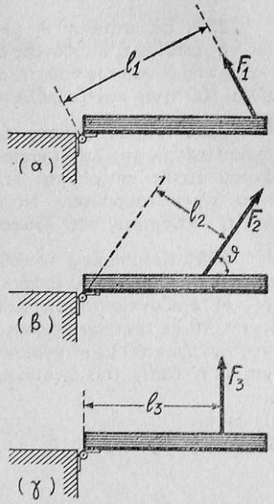
245. Δυνάμεις 1 kgr*, 2 kgr*, 3 kgr*, 4 kgr*, 5 kgr*, 6 kgr* ἐπενεργοῦν ἐπὶ τετραγώνου πλευρᾶς 60 cm, ὡς δεικνύεται εἰς τὸ σχῆμα. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ροπῶν τῶν δυνάμεων τούτων, ὡς πρὸς τὸ κέντρον τοῦ τετραγώνου.



Πρόβλημα 245.

246. Ὁμοιόμορφος δοκὸς μήκους 360 cm ὑποβαστάζει κατὰ τὸ ἓν ἄκρον μᾶζαν 40 kgr καὶ κατὰ ἕτερον ἄκρον μᾶζαν 70 kgr. Ἡ δοκὸς ἰσορροπεῖ, ὅταν ὑποστηρίζεται εἰς ἀπόστασιν 30 cm ἀπὸ τοῦ μέσου της. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ μᾶζα τῆς δοκοῦ.

247. Δοκός, ἀμελητέου βάρους, δύναται κατὰ τὸ ἓν ἄκρον αὐτῆς νὰ στρέφεται κατακορύφως ἐπὶ ὁριζοντίου ἄξονος, ἐνῷ κατὰ τὸ ἕτερον ἄκρον αὐτῆς ἐφαρμόζεται δύναμις. Ζητεῖται: α) Ἐὰν ἐφαρμόσωμεν δύναμιν $F_1 = 32$ kgr* καὶ $l_1 = 50$ cm (βλ. σχῆμα α), πόση θὰ εἶναι ἡ ροπὴ τῆς δυνάμεως F_1 εἰς kgr*m. β) Ἐὰν ἡ δύναμις $F_3 = 1$ kgr* καὶ $l_3 =$ 25 cm (σχῆμα γ), πόση θὰ εἶναι ἡ ροπὴ τῆς δυνάμεως εἰς kgr*m.

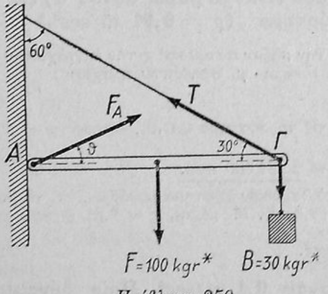


Πρόβλημα 247.

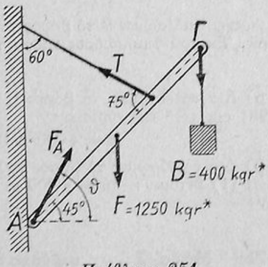
248. Εἰς τὴν δοκὸν τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος ζητεῖται: α) Ἐὰν ἡ δύναμις ἔχῃ μέγεθος 8 kgr* καὶ σχηματίζῃ γωνίαν 60° μετὰ τῆς ὁριζοντίας, τὸ δὲ σημεῖον ἐφαρμογῆς της κεῖται 15 cm ἄνω καὶ 75 cm πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ ἄξονος περιστροφῆς (βλ. σχῆμα α), πόση θὰ εἶναι ἡ ροπὴ τῆς δυνάμεως. β) Ἐὰν εἰς τὸ σχῆμα (β) ἡ δύναμις ἔχῃ ἔντασιν 6 kgr* καὶ θ = 50°, τὸ δὲ σημεῖον ἐφαρμογῆς της κεῖται 0,2 m ἄνω καὶ 0,7 m δεξιὰ τοῦ ἄξονος, πόση θὰ εἶναι ἡ ροπὴ τῆς δυνάμεως.

249. Αἱ δύο δυνάμεις ζεύγους ἐφαρμόζονται εἰς τὰ ἄκρα εὐθείας ΑΒ, ἥτις σχηματίζει γωνία 60° μετὰ τῆς διευθύνσεως τῶν δυνάμεων τούτων. Γνωστοῦ ὄντος ὅτι αἱ ἐντάσεις τῶν δυνάμεων εἶναι 10 kgr* καὶ ὅτι ΑΒ = 0,20 m, νὰ ὑπολογισθῇ ὁ βραχίων τοῦ ζεύγους καὶ ἡ τιμὴ τῆς ροπῆς αὐτοῦ.

250. Δοκὸς ζυγίζει 100 kgr* καὶ τὸ κέντρον βάρους αὐτῆς ἀπέχει 1,8 m ἀπὸ τοῦ ἄξονος. Αὐτὴ συγκρατεῖ βάρος 30 kgr* εἰς ἀπόστασιν 4 m ἀπὸ τοῦ ἄξονος Α (βλ. σχῆμα). Ἐὰν τὸ καλώδιον σχηματίζῃ γωνίαν 30° μετὰ τῆς ὁριζοντίας, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τάσις Τ τοῦ καλωδίου, ὡς καὶ τὸ μέγεθος καὶ ἡ διεύθυνσις τῆς δυνάμεως F_A ἡ ὁποία ἐξασκεῖται ὑπὸ τοῦ ἄξονος ἐπὶ τῆς δοκοῦ.



Πρόβλημα 250.



Πρόβλημα 251.

251. Εἰς τὸν γερανὸν τοῦ σχήματος τὸ βάρος τῆς κεραίας F = 1250 kgr*, τὸ φορτίον Β = 400 kgr*, τὸ κέντρον βάρους τῆς κεραίας ἀπέχει 4,5 m ἀπὸ τοῦ ἄξονος περιστροφῆς, τὸ σημεῖον ἐξαρτήσεως τοῦ καλωδίου ἀπέχει 6 m ἀπὸ τοῦ ἄξονος καὶ ἡ ἀπόστασις συγκρατήσεως τοῦ φορτίου τοῦ σχοινίου 7,5 m ἀπὸ τοῦ ἄξονος. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τάσις τοῦ καλωδίου T καὶ τὸ μέγεθος τῆς ἀντιδράσεως F_A τὴν ὁποίαν ἐξασκεῖ ὁ ἄξων.

252. Εἰς σημεῖον Α μικροῦ τροχοῦ κινητοῦ περὶ ἄξονα ΟΔ ἐφαρμόζεται δύναμις τῆς ὁποίας ἡ διεύθυνσις σχηματίζει μετὰ τῆς ΑΟ γωνίαν 150°. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ροπὴ τῆς δυνάμεως ταύτης ὡς πρὸς τὸν ἄξονα, γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ ἔντασίς της εἶναι 100 dyn καὶ ὅτι ΟΑ = 10 cm.

253. Κλῖμαξ μήκους 6 m καὶ μάζης 40 kgr στηρίζεται κατὰ τὸ ἀνώτερον ἄκρον αὐτῆς ἐπὶ λείου κατακορύφου τοίχου, ἄνευ τριβῆς, ἐνῷ διὰ τοῦ κατωτέρου ἄκρου αὐτῆς στηρίζεται ἐπὶ τοῦ ἐδάφους. Ἡ κλῖμαξ σχηματίζει γωνίαν 30° ὡς πρὸς τὴν κατακόρυφον. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ δύναμις ἡ ἐξασκουμένη ἐπὶ τοῦ τοίχου καὶ ἡ ἀντίδρασις τοῦ ἐδάφους ἐπὶ τῆς κλίμακος.

254. Κλῖμαξ ἔχει τοποθετηθῇ ἐπὶ κατακορύφου τοίχου, ἐνῷ ἡ βάσις αὐτῆς εὑρίσκεται ἐπὶ ὁριζοντίου ἐδάφους. Ἡ κορυφὴ τῆς κλίμακος ὑποβαστάζεται ὑπὸ τοῦ τοίχου δι' ὁριζοντίου σχοινίου μήκους 10 m. Ἡ κλῖμαξ ἔχει μῆκος 15 m καὶ ζυγίζει 40 kgr*, τὸ δὲ κέντρον βάρους αὐτῆς εὑρίσκεται 6 m ἀπὸ τῆς βάσεως της, ἐνῷ ἄνθρωπος ζυγίζων 60 kgr* εὑρίσκεται 3 m ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τῆς κλίμακος. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τάσις τοῦ σχοινίου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ΄

ΔΥΝΑΜΙΚΗ

ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΟΥ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ. ΘΕΜΕΛΙΩΔΗΣ ΕΞΙΣΩΣΙΣ ΤΗΣ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ. ΚΕΝΤΡΟΜΟΛΟΣ ΚΑΙ ΦΥΓΟΚΕΝΤΡΟΣ ΔΥΝΑΜΙΣ

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Α΄

255. Σῶμα ἔχει μᾶζαν 4 000 gr. Πόσον εἶναι τὸ βάρος αὐτοῦ α) εἰς τὸ σύστημα C.G.S. καὶ β) εἰς τὸ Τεχνικὸν Σύστημα. (g = 9,81 m/sec².)

Λύσις. Καλέσωμεν Β τὸ βάρος τοῦ σώματος, m τὴν μᾶζαν αὐτοῦ καὶ g τὴν ἐπιτάχυνσιν τῆς βαρύτητος. Ἐκ τοῦ θεμελιώδους νόμου τῆς Μηχανικῆς, $F = m \cdot \gamma$, προκύπτει ἡ σχέσις:

$$B = m \cdot g \qquad (1)$$

α) Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ βάρος Β τοῦ σώματος, εἰς τὸ σύστημα C.G.S., θέτομεν m = 4 000 gr, g = 981 cm/sec² καὶ εὑρίσκομεν:

$$\underline{B} = 4\,000 \cdot 981 \ \text{gr} \cdot \text{cm/sec}^2 = \underline{3\,924\,000 \ \text{dyn.}}$$

β) Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ βάρος τοῦ σώματος εἰς τὸ Τεχνικὸν Σύστημα μονάδων, ἐπὶ τῇ βάσει τῆς σχέσεως (1) θέτομεν: m = 4 000 gr = 4 kgr = 4/9,81 Τ. Μ. μάζης, g = 9,81 m/sec² καὶ εὑρίσκομεν:

$$\underline{B = 4 \ \text{kgr}^*.}$$

256. Μᾶζα 2 kgr ὑφίσταται ἐπιβράδυνσιν 0,1 m/sec². Ποία δύναμις ἐπενεργεῖ ἐπ' αὐτῆς.

Λύσις. Ἂν καλέσωμεν γ τὴν ἐπιβράδυνσιν τοῦ σώματος καὶ m τὴν μᾶζαν αὐτοῦ, τότε ἡ ἐπ' αὐτοῦ ἐπενεργοῦσα δύναμις F θὰ εἶναι, συμφώνως πρὸς τὸν θεμελιώδη νόμον τῆς Μηχανικῆς, ἴση πρός:

$$F = m \cdot \gamma$$

Ἡ ἄσκησις ἂς λυθῇ εἰς τὸ σύστημα C.G.S. Θέτομεν m = 2 000 gr, γ = 10 cm/sec², καὶ ἑπομένως ἔχομεν:

$$\underline{F = 2 \cdot 10^4 \ \text{dyn.}}$$

257. Μᾶζα 12 kgr ὑπὸ τὴν ἐπενέργειαν δυνάμεως ὑφίσταται ἐπιτάχυνσιν 4 cm/sec². Πόση εἶναι ἡ δύναμις εἰς kgr*. ($g = 9{,}81$ m/sec².)

Λύσις. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν δύναμιν εἰς kgr*, ὡς ζητεῖται, ἐνδείκνυται νὰ ἐργασθῶμεν εἰς τὸ Τεχνικὸν Σύστημα μονάδων. Ἡ δύναμις αὕτη δίδεται ἐκ τοῦ θεμελιώδους νόμου τῆς Μηχανικῆς:

$$F = m \cdot \gamma$$

Θέτοντες: $m = 12/9{,}81$ Τ. Μ. μάζης καὶ $\gamma = 0{,}04$ m/sec² εὑρίσκομεν:

$$\underline{F = 0{,}049 \text{ kgr}^*.}$$

258. Πόσην ἐπιτάχυνσιν εἰς m/sec² ὑφίσταται σῶμα βάρους 2 kgr* ὑπὸ τὴν ἐπενέργειαν δυνάμεως 1 kgr*.

Λύσις. Ἐφ' ὅσον ζητεῖται ἡ ἐπιτάχυνσις εἰς m/sec², εἶναι προτιμότερον νὰ ἐργασθῶμεν εἰς τὸ Τεχνικὸν Σύστημα μονάδων.

Ἐκ τοῦ θεμελιώδους νόμου τῆς Μηχανικῆς $F = m \cdot \gamma$, λύοντες ὡς πρὸς τὸ ζητούμενον μέγεθος γ, εὑρίσκομεν:

$$\gamma = \frac{F}{m} \tag{1}$$

Εἰς τὸ Τεχνικὸν Σύστημα ἡ δύναμις $F = 1$ kgr*, ἡ μᾶζα $m = 2/9{,}81$ Τ.Μ. μάζης, ὅτε ἐκ τῆς σχέσεως (1) προκύπτει:

$$\underline{\gamma = 4{,}905 \text{ m/sec}^2.}$$

259. Ἐπὶ ἠρεμούσης μάζης 10 gr ἐπενεργεῖ δύναμις 2 000 dyn ἐπὶ 4 sec. α) Πόσον διάστημα διανύει ἡ μᾶζα εἰς 6 sec καὶ β) πόσον διάστημα διανύει ἐντὸς τοῦ δεκάτου δευτερολέπτου.

Λύσις. Ἐκ τοῦ θεμελιώδους νόμου τῆς Μηχανικῆς $F = m \cdot \gamma$, εὑρίσκομεν τὴν ἐπιτάχυνσιν γ τῆς μάζης τοῦ σώματος ἡ ὁποία εἶναι:

$$\gamma = \frac{F}{m} = \frac{2\,000}{10} = 200 \text{ cm/sec}^2.$$

α) Ἔστω t_1 ὁ χρόνος κινήσεως μὲ κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην καὶ t_2 ὁ χρόνος μὲ ὁμαλὴν κίνησιν, ὡς καὶ s_1 καὶ s_2 τὰ ἀντίστοιχα διανυόμενα διαστήματα. Ἐπίσης ἔστω $s_{\delta\lambda.}$ τὸ διάστημα τὸ διανυόμενον εἰς χρόνον $t_1 + t_2$. Οὕτω θὰ ἔχωμεν τὰς σχέσεις:

$$s_1 = \frac{1}{2} \gamma \cdot t_1^2 \tag{1}$$

$$s_2 = \upsilon \cdot t_2 \tag{2}$$

ὅτε:

$$s_{\delta\lambda.} = s_1 + s_2 = \frac{1}{2} \gamma \cdot t_1^2 + \upsilon \cdot t_2 \tag{3}$$

Ἀλλὰ γνωρίζομεν ὅτι ἡ ταχύτης $\upsilon = \gamma \cdot t_1$, ὅτε ἡ ἀνωτέρω σχέσις (3) γράφεται:

$$s_{\delta\lambda.} = \frac{1}{2} \gamma \cdot t_1^2 + \gamma \cdot t_1 \cdot t_2 \tag{4}$$

Ἐκ τῶν δεδομένων τῆς ἀσκήσεως ἔχομεν: $t_1 = 4$ sec, $t_2 = 6 - 4 = 2$ sec καὶ $\gamma = 200$ m/sec², ὅτε εὑρίσκομεν:

$$\underline{s_{\delta\lambda.}} = \frac{1}{2} \cdot 200 \cdot 4^2 + 200 \cdot 4 \cdot 2 = \underline{3\,200 \text{ cm}}$$

ὅπου $s_{\delta\lambda.}$ παριστᾷ τὸ διάστημα τὸ διανυθὲν εἰς 6 sec.

β) Ἡ κίνησις μετὰ τὴν πάροδον τοῦ 4ου δευτερολέπτου εἶναι ὁμαλὴ καὶ τὸ κινητὸν κινεῖται μὲ τὴν σταθερὰν ταχύτητα $\upsilon = \gamma \cdot t_1$.

Ἐὰν καλέσωμεν s_{10} τὸ διάστημα τὸ ὁποῖον διανύεται ἐντὸς τοῦ 10ου δευτερολέπτου, δηλ. εἰς χρόνον $t = 1$ sec, ὑπὸ τὴν ἀνωτέρω σταθερὰν ταχύτητα, θὰ ἔχωμεν:

$$s_{10} = \gamma \cdot t_1 \cdot t \tag{5}$$

Θέτοντες εἰς τὴν σχέσιν (5) : $\gamma = 200\ \mathrm{cm/sec^2}$, $t_1 = 4\ \mathrm{sec}$, $t = 1\ \mathrm{sec}$, εὑρίσκομεν ὅτι :

$$\underline{s_{10} = 800\ \mathrm{cm}.}$$

260. Ἐκ πυροβόλου ἔχοντος σωλῆνα μήκους 3 m καὶ ἐσωτερικὴν διάμετρον 40 mm βάλλεται βλῆμα μάζης 1 kgr, τὸ ὁποῖον κατὰ τὴν ἔξοδον ἐκ τοῦ σωλῆνος ἔχει ταχύτητα 850 m/sec. Ζητοῦνται α) ἡ ἐπιτάχυνσις καὶ β) ἡ δύναμις ἐπὶ τοῦ βλήματος, ὑποτιθεμένου ὅτι αὕτη διατηρεῖται σταθερὰ καθ' ὅλην τὴν διαδρομὴν τοῦ βλήματος ἐντὸς τοῦ σωλῆνος. ($g = 10\ \mathrm{m/sec^2}$.)

Λύσις. α) Ἐὰν καλέσωμεν γ τὴν ἐπιτάχυνσιν τοῦ βλήματος, υ τὴν ταχύτητα μὲ τὴν ὁποίαν ἐξέρχεται τὸ βλῆμα, s τὸ μῆκος τοῦ σωλῆνος καὶ t τὸν χρόνον διαδρομῆς τοῦ βλήματος ἐντὸς τοῦ σωλῆνος, τότε θὰ ἰσχύουν αἱ σχέσεις :

$$\upsilon = \gamma \cdot t \tag{1}$$

$$s = \frac{1}{2}\gamma \cdot t^2 \tag{2}$$

Ἐκ τῶν δύο τούτων σχέσεων δι' ἀπαλοιφῆς τοῦ χρόνου t λαμβάνομεν :

$$\gamma = \frac{\upsilon^2}{2s}$$

Ἐργαζόμενοι εἰς τὸ Τεχνικὸν Σύστημα εὑρίσκομεν ὅτι :

$$\underline{\gamma} = \frac{850^2}{2 \cdot 3} = \underline{1{,}2 \cdot 10^5\ \mathrm{m/sec^2}.}$$

β) Ἡ δύναμις ἥτις ἐπενεργεῖ ἐπὶ τοῦ βλήματος εὑρίσκεται ἐκ τοῦ θεμελιώδους νόμου τῆς Μηχανικῆς $F = m \cdot \gamma$, διὰ $\gamma = \upsilon^2/2s$, ὅτι εἶναι :

$$F = \frac{m \cdot \upsilon^2}{2s}$$

Ἐργαζόμενοι εἰς τὸ Τεχνικὸν Σύστημα εὑρίσκομεν, ἐκ τῶν δεδομένων : $m = 1\ \mathrm{kgr} = 1/10$ Τ.Μ. μάζης, $\upsilon = 850\ \mathrm{m/sec}$, $s = 3\ \mathrm{m}$, ὅτι :

$$\underline{F = 1{,}2 \cdot 10^4\ \mathrm{kgr^*}.}$$

261. Ἐπὶ σώματος ἐπενεργεῖ ὁριζοντίως σταθερὰ δύναμις 4 500 dyn. Εἰς ὡρισμένην στιγμὴν ἡ ταχύτης τοῦ σώματος εἶναι 60 cm/sec, μετὰ πάροδον δὲ 8 sec ἡ ταχύτης αὐτοῦ εἶναι 105 cm/sec. Πόση εἶναι ἡ μᾶζα τοῦ σώματος.

Λύσις. Ἐκ τοῦ θεμελιώδους νόμου τῆς Μηχανικῆς εὑρίσκομεν ὅτι ἡ μᾶζα m τοῦ σώματος εἶναι :

$$m = \frac{F}{\gamma} \tag{1}$$

Ἂν καλέσωμεν υ_1 τὴν ταχύτητα τοῦ σώματος κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν t_1 καὶ υ_2 τὴν ταχύτητα τοῦ σώματος κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν t_2, τότε, ὡς γνωστόν, ἡ ἐπιτάχυνσις τοῦ σώματος θὰ εἶναι :

$$\gamma = \frac{\upsilon_2 - \upsilon_1}{t_2 - t_1} \tag{2}$$

ὁπότε ἡ σχέσις (1) γράφεται :

$$m = \frac{F\,(t_2 - t_1)}{\upsilon_2 - \upsilon_1} \tag{3}$$

Ἐκ τῶν δεδομένων τῆς ἀσκήσεως ἔχομεν : $F = 4\,500\ \mathrm{dyn}$, $\upsilon_1 = 60\ \mathrm{cm/sec}$, $\upsilon_2 = 105\ \mathrm{cm/sec}$, $t_2 - t_1 = 8\ \mathrm{sec}$, ὅτε ἐκ τοῦ τύπου (3) προκύπτει :

$$\underline{m = 800\ \mathrm{gr}.}$$

262. Ἐπὶ ὁριζοντίου ἐδάφους ἄνευ τριβῆς εὑρίσκεται ἐν ἠρεμίᾳ σῶμα μάζης 2 kgr. Ἐπὶ τοῦ σώματος ἐπενεργεῖ πρὸς τὰ ἄνω καὶ ὑπὸ γωνίαν 30° ἐν σχέσει πρὸς τὴν κατακόρυφον δύναμις 1 kgr*. Πόση εἶναι ἡ ἐπιτάχυνσις καὶ πόσον τὸ διανυθὲν διάστημα ἐπὶ τοῦ ἐδάφους ἐντὸς 10 sec.

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν F_1 τὴν ἐπενεργοῦσαν δύναμιν ἐπὶ τοῦ σώματος ὑπὸ γωνίαν 30° ὡς πρὸς τὴν κατακόρυφον, τότε ἡ ὁριζοντίως ἐπενεργοῦσα δύναμις F ὑπολογίζεται ὅτι εἶναι :

$$F = F_1 \cdot \text{συν}\ 60^0 \qquad (1)$$

Ἐξ ἄλλου, ἐκ τοῦ θεμελιώδους νόμου τῆς Δυναμικῆς $F = m \cdot \gamma$, προκύπτει ὅτι $\gamma = F/m$ καὶ συνεπῶς θὰ ἔχωμεν ὅτι ἡ ἐπιτάχυνσις γ τοῦ σώματος θὰ εἶναι :

$$\gamma = \frac{F_1 \cdot \text{συν}\ 60^0}{m} \qquad (2)$$

Λύσις τῆς ἀσκήσεως εἰς τὸ Τεχνικὸν Σύστημα. Θέτομεν εἰς τὴν σχέσιν (2) τὰ δεδομένα $F_1 =$ 1 kgr*, $m = 2/9{,}81$ Τ. Μ. μάζης, συν $60^0 = 0{,}5$ καὶ εὑρίσκομεν :

$$\underline{\gamma = 2{,}45\ \text{m/sec}^2}.$$

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ διανυθὲν διάστημα, ἐφαρμόζομεν τὸν τύπον τῆς ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένης κινήσεως : $s = 1/2 \cdot \gamma \cdot t^2$, ὅτε συμφώνως πρὸς τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως εὑρίσκομεν :

$$\underline{s} = \frac{1}{2} \cdot 2{,}45 \cdot 10^2 = \underline{122{,}5\ \text{m.}}$$

263. Σῶμα μάζης 3 · 10⁵ gr κινεῖται ὁριζοντίως ὑπὸ ταχύτητα 10³ cm/sec. Πόση γίνεται ἡ ταχύτης αὐτοῦ μετὰ πάροδον 100 sec, ὅταν κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς κινήσεως ἐπενεργήσῃ δύναμις 4,5 · 10⁷ dyn.

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν υ_0 τὴν ἀρχικὴν ταχύτητα τοῦ σώματος, υ τὴν ζητουμένην ταχύτητα μετὰ πάροδον χρόνου t καὶ γ τὴν ἐπιτάχυνσιν τοῦ σώματος, θὰ ἰσχύῃ, ὡς γνωστόν, ἡ σχέσις :

$$\upsilon = \upsilon_0 + \gamma \cdot t \qquad (1)$$

Ἡ ἐπιτάχυνσις ὅμως γ, συμφώνως πρὸς τὸν θεμελιώδη νόμον τῆς Μηχανικῆς, εἶναι :

$$\gamma = \frac{F}{m} \qquad (2)$$

καὶ συνεπῶς ἐκ τῆς σχέσεως (1) προκύπτει ὅτι :

$$\upsilon = \upsilon_0 + \frac{F}{m} \cdot t \qquad (3)$$

Ἐφ' ὅσον ὅλαι αἱ τιμαὶ τῆς ἀσκήσεως δίδονται εἰς τὸ σύστημα C.G.S., ἐργαζόμεθα εἰς τὸ σύστημα τοῦτο. Οὕτω θέτοντες τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως εἰς τὴν σχέσιν (3) εὑρίσκομεν :

$$\underline{\upsilon} = 10^3 + \frac{4{,}5 \cdot 10^7}{3 \cdot 10^5} \cdot 100 = \underline{16\,000\ \text{cm/sec.}}$$

264. Σιδηροδρομικὸς συρμὸς βάρους 500 ton* κινεῖται ἐπὶ ὁριζοντίων σιδηροτροχιῶν καὶ πρέπει ἡ ταχύτης αὐτοῦ ἀπὸ 4 m/sec νὰ αὐξηθῇ εἰς 20 m/sec ἐντὸς 4 min. Πόσην ἕλξιν πρέπει νὰ ἀναπτύξῃ ἡ μηχανή. (g = 10 m/sec².)

Λύσις. Ἐκ τοῦ γνωστοῦ τύπου $B = m \cdot g$ προκύπτει ὅτι :

$$m = \frac{B}{g} \qquad (1)$$

Ἐπίσης γνωρίζομεν ὅτι ἡ ἐπιτάχυνσις εἰς τὴν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην κίνησιν δίδεται διὰ τοῦ τύπου :

$$\gamma = \frac{\Delta\upsilon}{\Delta t} \qquad (2)$$

Ἄρα ἡ ζητουμένη δύναμις θὰ εἶναι, συμφώνως πρὸς τὸν θεμελιώδη νόμον τῆς Μηχανικῆς :

$$F = m \cdot \gamma = \frac{B}{g} \cdot \frac{\Delta\upsilon}{\Delta t} \qquad (3)$$

Ἐργαζόμεθα εἰς τὸ Τεχνικὸν Σύστημα. Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (3) τὰ δεδομένα, ἤτοι : $B = 5 \cdot 10^5$ kgr*, $g = 10\ \text{m/sec}^2$, $\Delta\upsilon = 20 - 4 = 16$ m/sec καὶ $\Delta t = 4$ min $= 240$ sec, εὑρίσκομεν :

$$\underline{F = 3\,300\ \text{kgr*}}.$$

265. Μᾶζα 2 τόννων ἠρεμεῖ ἐπὶ ὁριζοντίου καὶ ἄνευ τριβῆς ἐδάφους καὶ πρέπει ἐντὸς 1 min νὰ ἀποκτήσῃ ταχύτητα 5 m/sec. Ζητεῖται ἡ ὁριζοντία δύναμις, ἡ ὁποία πρέπει νὰ ἐπενεργήσῃ ἐπὶ τῆς σφαίρας.

Λύσις. Ἐκ τοῦ θεμελιώδους νόμου τῆς Μηχανικῆς $F = m \cdot \gamma$ καὶ τοῦ τύπου τῆς ἐπιταχύνσεως $\gamma = \upsilon / t$ προκύπτει ὅτι:

$$F = m \cdot \frac{\upsilon}{t}$$

Ἐργαζόμενοι εἰς τὸ Τεχνικὸν Σύστημα θέτομεν εἰς τὸν ἀνωτέρω τύπον: $m = 2$ ton $= 200$ Τ.Μ. μάζης, $\upsilon = 5$ m/sec, $t = 1$ min $= 60$ sec, καὶ εὑρίσκομεν:

$$\underline{F = 16{,}6 \text{ kgr}^*.}$$

266. Ἐπὶ ἠρεμούσης μάζης 3 kgr ἐπενεργεῖ δύναμις 600 gr*, ἡ ὁποία μετατοπίζει αὐτὴν κατὰ 5 m. Ἐπὶ πόσον χρόνον ἐπενεργεῖ ἡ δύναμις.

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν F τὴν δύναμιν καὶ m τὴν μᾶζαν, τότε ἡ ἐπιτάχυνσις θὰ εἶναι $\gamma = F/m$ καὶ συνεπῶς ὁ τύπος τοῦ διαστήματος γράφεται:

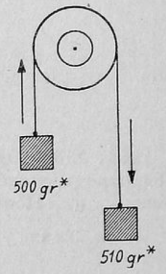
$$s = \frac{1}{2}\gamma \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{F}{m} \cdot t^2, \text{ ἐξ οὗ προκύπτει: } t = \sqrt{\frac{2\,s \cdot m}{F}} \qquad (1)$$

Ἐργαζόμενοι εἰς τὸ σύστημα μονάδων C.G.S. ἔχομεν: $s = 5$ m $= 500$ cm, $m = 3$ kgr $= 3\,000$ gr, $F = 600$ gr* $= 600 \cdot 981$ dyn.

Οὕτω ἐκ τῆς σχέσεως (1) προκύπτει ὅτι:

$$\underline{t = 2{,}25 \text{ sec.}}$$

267. Ἐπὶ κατακορύφου τροχαλίας ἀβαροῦς μὲ τὴν βοήθειαν καταλλήλου νήματος ἐξαρτῶμεν ἑκατέρωθεν δύο βάρη 500 gr* καὶ 510 gr*. Ἐὰν ἀφήσωμεν τὸ σύστημα τῶν βαρῶν ἐλεύθερον, βλέπομεν ὅτι τοῦτο κινεῖται. Νὰ περιγραφῇ α) ἡ κίνησις καὶ β) νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐπιτάχυνσις.



Λύσις. α) Ἡ κίνησις εἶναι ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένη, διότι ἐπὶ τοῦ συστήματος ἐπενεργεῖ δύναμις σταθερὰ κατ' ἔντασιν καὶ διεύθυνσιν:

$$\underline{F} = 510 - 500 = 10 \text{ gr}^* = 10 \cdot 981 = \underline{9\,810 \text{ dyn.}}$$

β) Ἐκ τοῦ θεμελιώδους νόμου τῆς Μηχανικῆς, $F = m \cdot \gamma$, ἔχομεν $\gamma = F/m$. Διὰ $F = 9\,810$ dyn καὶ $m = 500 + 510 = 1010$ gr προκύπτει:

$$\underline{\gamma = 9{,}73 \text{ cm/sec}^2.}$$

268. Δύναμις 180 gr* ἐπενεργεῖ ἐπὶ 14 sec ἐπὶ σώματος βάρους 4 kgr* εὑρισκομένου ἀρχικῶς ἐν ἠρεμίᾳ. Μετὰ παρέλευσιν ἀρκετοῦ χρόνου τὸ σῶμα εὑρίσκεται, παρατηρούμενον ἐκ τῆς ἀρχῆς τῆς κινήσεως, εἰς ἀπόστασιν 81,9 m. Νὰ περιγραφῇ λεπτομερῶς ἡ κίνησις καὶ νὰ ὑπολογισθοῦν ἡ ἐπιτάχυνσις, τὸ διανυόμενον διάστημα εἰς 14 sec καὶ ἡ κτηθεῖσα ταχύτης εἰς τὸ τέλος τοῦ 14ου δευτερολέπτου. ($g = 10$ m/sec².)

Λύσις. α) Ἐκ τοῦ θεμελιώδους νόμου τῆς Μηχανικῆς $F = m \cdot \gamma$, ἔχομεν:

$$\gamma = \frac{F}{m}$$

Διὰ $F = 180$ gr* $= 0{,}18$ kgr* καὶ $m = 4$ kgr $= 0{,}4$ Τ.Μ. μάζης προκύπτει ὅτι:

$$\underline{\gamma = 0{,}45 \text{ m/sec}^2.}$$

β) Ἐκ τοῦ τύπου $s = \frac{1}{2} \gamma \cdot t^2$. Διὰ $\gamma = 0{,}45$ m/sec² καὶ $t = 14$ sec, προκύπτει :

$$\underline{s_{14}} = \frac{1}{2} 0{,}45 \cdot 14^2 = \underline{44{,}1 \text{ m}}.$$

γ) Ἐκ τοῦ τύπου $\upsilon = \gamma \cdot t$, διὰ $\gamma = 0{,}45$ m/sec² καὶ $t = 14$ sec, προκύπτει :

$$\underline{\upsilon} = 0{,}45 \cdot 14 = \underline{6{,}3 \text{ m/sec}}.$$

δ) Ἡ διαφορὰ μεταξὺ ὁλικοῦ διαστήματος καὶ διαστήματος τὸ ὁποῖον διήνυσε εἰς χρόνον $t = 14$ sec εἶναι :

$$\underline{s} = s_t - s_{14} = 81{,}9 - 44{,}1 = \underline{37{,}8 \text{ m}}.$$

Ἡ κίνησις, κατὰ τὸ διάστημα τὸ ὁποῖον διήνυσε τὸ κινητὸν κατὰ τὴν διάρκειαν τῶν 14 ἀρχικῶν δευτερολέπτων, ἦτο ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένη, ἐνῷ κατὰ τὸ ὑπόλοιπον διάστημα τῶν 37,8 m, ἡ κίνησις ἦτο ὁμαλὴ καὶ διήρκεσε ἐπὶ χρόνον :

$$\underline{t} = \frac{s}{\upsilon} = \frac{37{,}8}{6{,}3} = \underline{6 \text{ sec}}.$$

269. Σῶμα μάζης 150 gr διαγράφει κύκλον ἀκτῖνος 50 cm ἢ 100 cm. Πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ κεντρομόλος δύναμις εἰς ἀμφοτέρας τὰς περιπτώσεις, ἵνα ἡ γραμμικὴ ταχύτης εἶναι 2 m/sec. Πόση εἶναι ἡ κεντρομόλος δύναμις, ὅταν ἡ περίοδος τῆς κινήσεως εἰς ἀμφοτέρας τὰς περιπτώσεις εἶναι 1,2 sec.

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν r τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου, m τὴν μᾶζαν καὶ υ τὴν ταχύτητα, τότε ἡ κεντρομόλος δύναμις δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$F = \frac{m \cdot \upsilon^2}{r}$$

Ἄρα, ὅταν τὸ $r = 50$ cm, θὰ εἶναι :

$$\underline{F_1} = \frac{150 \cdot 200^2}{50} = \underline{120\,000 \text{ dyn}}$$

καί, ὅταν $r = 100$ cm, θὰ εἶναι :

$$\underline{F_2} = \frac{150 \cdot 200^2}{100} = \underline{60\,000 \text{ dyn}}.$$

Ἤτοι, ὅταν ἡ ἀκτὶς περιστροφῆς διπλασιάζεται, ἡ κεντρομόλος δύναμις ὑποδιπλασιάζεται (ἡ ταχύτης υ εἶναι σταθερά).

Ἐὰν καλέσωμεν T τὴν περίοδον τῆς ὁμαλῆς κυκλικῆς κινήσεως, ἡ ταχύτης θὰ εἶναι $\upsilon = 2\pi \cdot r/T$ καὶ ἑπομένως ἡ κεντρομόλος δύναμις θὰ εἶναι $F = m \cdot 4\pi^2 \cdot r/T^2$. Ἄρα εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν θὰ εἶναι :

$$\underline{F_1'} = \frac{150 \cdot 4 \cdot 3{,}14^2 \cdot 50}{1{,}2^2} = \underline{205\,416 \text{ dyn}}$$

καὶ εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν :

$$\underline{F_2'} = \frac{150 \cdot 4 \cdot 3{,}14^2 \cdot 100}{1{,}2^2} = \underline{41\,032 \text{ dyn}}.$$

Ἤτοι, ὅταν ἡ ἀκτὶς διπλασιάζεται, διπλασιάζεται ἐπίσης καὶ ἡ κεντρομόλος δύναμις (ἡ περίοδος T εἶναι σταθερά).

270. Σφαῖρα μάζης 1 kgr εἶναι προσδεδεμένη εἰς σχοινίον καὶ διαγράφει κύκλον ὁριζόντιον ἀκτῖνος 1 m. Πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ συχνότης κινήσεως τῆς σφαίρας, ὅταν ἡ ὁριζοντία δύναμις ἡ ἐπενεργοῦσα ἐπὶ τοῦ σχοινίου εἶναι 10 kgr*.

Λύσις. Ὅταν ἡ συχνότης τῆς ὁμαλῆς κυκλικῆς κινήσεως εἶναι ν, τότε ἡ περίοδος θὰ εἶναι $T = 1/\nu$ καὶ ἑπομένως ἡ κεντρομόλος δύναμις $F = m \cdot 4\pi^2 \cdot r^2/T^2$ (βλ. προηγουμένην ἄσκησιν) γίνεται $F = m \cdot 4\pi^2 \cdot \nu^2 \cdot r$. Ἄρα θὰ ἔχωμεν :

$$\underline{\nu} = \sqrt{\frac{F}{m \cdot 4\pi^2 \cdot r}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{F}{m \cdot r}} = \frac{1}{6{,}28}\sqrt{\frac{10^4 \cdot 981}{10^3 \cdot 100}} = \underline{1{,}58 \text{ sec}^{-1}}.$$

271. Νὰ εὑρεθῇ μὲ ποίαν ἀρχικὴν ταχύτητα πρέπει νὰ βληθῇ σῶμα ὁριζοντίως, ὥστε νὰ μὴ ἐπανέλθῃ πλέον εἰς τὴν Γῆν, δηλαδὴ νὰ γίνῃ δορυφόρος της. (Ἀκτὶς τῆς Γῆς R = 6 370 km, g = 9,81 m/sec².)

Λύσις. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ σῶμα μάζης m βάλλεται ὁριζοντίως μὲ ἀρχικὴν ταύχτητα υ_0 καὶ ὅτι μὲ τὴν ταχύτητα ταύτην περιστρέφεται πέριξ τῆς Γῆς ἐπὶ περιφερείας κύκλου ἀκτῖνος r. Ἐπὶ τοῦ σώματος, εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην, ἐξασκεῖται μόνον τὸ βάρος αὐτοῦ $B = m \cdot g$ καὶ ἐπομένως τὸ σῶμα περιστρέφεται ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν κεντρομόλου δυνάμεως F_κ, ἡ ὁποία εἶναι αὐτὸ τοῦτο τὸ βάρος τοῦ σώματος. Ἤτοι:

$$F_\kappa = B \quad \text{ἢ} \quad \frac{m \cdot \upsilon^2}{r} = m \cdot g \quad \text{ἐξ οὗ} \quad \upsilon = \sqrt{r \cdot g} \qquad (1)$$

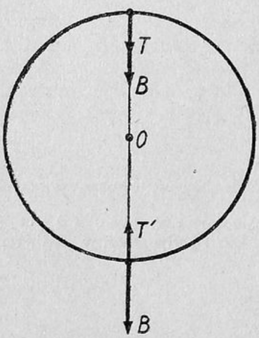
Ἐπειδὴ τὸ βάρος ἔχει φορὰν πρὸς τὸ κέντρον τῆς Γῆς, τὸ ἐπίπεδον τῆς τροχιᾶς τοῦ σώματος διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τῆς Γῆς καὶ συνεπῶς τὸ σῶμα περιστρέφεται περὶ τὸ κέντρον τῆς Γῆς.

Ἂς θεωρήσωμεν ὅτι τὸ σῶμα βάλλεται ἀπὸ σημείου τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται πλησίον τοῦ ἐδάφους. Τότε δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τὴν ἀκτῖνα r περιστροφῆς τοῦ σώματος ἴσην περίπου μὲ τὴν ἀκτῖνα R τῆς Γῆς, ὁπότε ἐκ τῆς σχέσεως (1) προκύπτει ὅτι ἡ ζητουμένη ταχύτης εἶναι:

$$\underline{\upsilon = 7\,900 \text{ m/sec.}}$$

272. Εἰς νῆμα μήκους 1 m καὶ ἀντοχῆς θραύσεως 7 kgr* ἐξαρτᾶται λίθος βάρους 2 kgr* καὶ ὁ λίθος τίθεται εἰς κίνησιν, ὥστε νὰ διαγράφῃ κατακόρυφον κύκλον. Πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ γραμμικὴ ταχύτης, ἵνα τὸ νῆμα θραυσθῇ. (g = 10 m/sec².)

Λύσις. Ὅταν ὁ λίθος εὑρίσκεται εἰς τὸ ἀνώτατον σημεῖον τῆς τροχιᾶς του, θὰ ἐξασκοῦνται ἐπ' αὐτοῦ δύο δυνάμεις, ἤτοι α) ἡ τάσις T τοῦ νήματος καὶ β) τὸ βάρος B τοῦ σώματος, τὸ ὁποῖον εἶναι κατακόρυφον. Προφανῶς ἡ συνισταμένη τῶν δύο τούτων δυνάμεων θὰ εἶναι ἡ κατακόρυφος δύναμις F_κ, ἡ ὁποία περιστρέφει τὸ σῶμα, ἤτοι:



$$F_\kappa = T + B \qquad (1)$$

Ἐκ τῆς σχέσεως ταύτης λαμβάνομεν:

$$T = F_\kappa - B \qquad (2)$$

Ἐξ ἄλλου εἰς τὸ κατώτατον σημεῖον τῆς τροχιᾶς ἐξασκοῦνται δύο δυνάμεις, ἤτοι α) ἡ τάσις T′ τοῦ νήματος καὶ β) τὸ βάρος B τοῦ σώματος. Προφανῶς ἡ συνισταμένη τῶν δύο τούτων δυνάμεων θὰ εἶναι ἡ κεντρομόλος δύναμις F_κ, ἡ ὁποία περιστρέφει τὸ σῶμα, ἤτοι:

$$F_\kappa = T' - B \qquad (3)$$

Ἐκ τῆς σχέσεως ταύτης λαμβάνομεν:

$$T' = F_\kappa + B \qquad (4)$$

Ἐκ τῶν σχέσεων (2) καὶ (4) παρατηροῦμεν ὅτι εἰς τὸ κατώτατον σημεῖον τῆς τροχιᾶς ἡ τάσις τοῦ νήματος θὰ εἶναι μεγαλυτέρα, ἐφ' ὅσον παραδεχόμεθα ὅτι ἡ κίνησις εἶναι ὁμαλή. Ἑπομένως θὰ πρέπῃ ἡ τάσις T′ τοῦ νήματος νὰ μὴ ὑπερβαίνῃ τὴν ἀντοχὴν θραύσεως τοῦ νήματος, ἤτοι 7 kgr*.

Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ μᾶζα τοῦ λίθου εἶναι m, ἡ γραμμικὴ ταχύτης περιστροφῆς υ καὶ ἡ ἀκτὶς περιστροφῆς r, τότε ἐκ τῆς σχέσεως (4) λαμβάνομεν:

$$T' = \frac{m \cdot \upsilon^2}{r} + B \qquad (5)$$

Λύοντες τὴν σχέσιν (5) ὡς πρὸς υ εὑρίσκομεν ὅτι:

$$\upsilon = \sqrt{\frac{r\,(T' - B)}{m}} \qquad (6)$$

Θέτομεν εἰς τὴν σχέσιν (6) τὰ δεδομένα, ἐργαζόμενοι εἰς τὸ Τεχνικὸν Σύστημα, ἤτοι: r = 1 m,

$T' = 7$ kgr*, $B = 2$ kgr*, $m = 2/10 = 0{,}2$ Τ.Μ. μάζης, καὶ οὕτω προκύπτει ὅτι ἡ ζητουμένη γραμμικὴ ταχύτης εἶναι:

$$\underline{\upsilon = 5 \text{ m/sec.}}$$

273. Κατὰ τὴν ἀλληλεπενέργειαν μεταξὺ σώματος 12 kgr καὶ ἑτέρου 4 kgr, τὸ σῶμα 12 kgr ὑφίσταται ἐπιτάχυνσιν 2,5 m/sec². Πόση εἶναι ἡ ἐπιτάχυνσις τοῦ σώματος 4 kgr.

Λύσις. Ἔστω m_1 καὶ m_2 αἱ μᾶζαι καὶ γ_1 καὶ γ_2 αἱ ἐπιταχύνσεις ἀντιστοίχως τῶν δύο σωμάτων. Ἐπειδὴ κατὰ τὴν ἀλληλοεπίδρασιν αὐτῶν τὰ σώματα ἀποκτοῦν ἐπιταχύνσεις, ἕπεται ὅτι ἐξασκοῦν ἀμοιβαίως ἴσας καὶ ἀντιθέτους δυνάμεις (Ἀξίωμα δράσεως καὶ ἀντιδράσεως). Ἄρα:

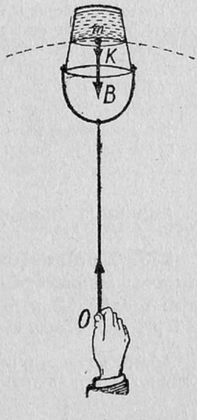
$$m_1 \cdot \gamma_1 = m_2 \cdot \gamma_2 \quad \text{καὶ} \quad \gamma_2 = \frac{m_1 \cdot \gamma_1}{m_2}$$

Θέτομεν: $m_1 = 12$ kgr, $m_2 = 4$ kgr, $\gamma_1 = 2{,}5$ m/sec² καὶ εὑρίσκομεν:

$$\underline{\gamma_2 = 7{,}5 \text{ m/sec}^2.}$$

274. Δοχεῖον περιέχον ὕδωρ μάζης 5 kgr ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ ἄκρου νήματος. Ἡ ἐλευθέρα ἐπιφάνεια τοῦ ὕδατος ἀπέχει ἀπὸ τοῦ κέντρου Ο περιστροφῆς 1,5 m. Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἐλαχίστη ταχύτης περιστροφῆς ἐπὶ κατακορύφου ἐπιπέδου, ἵνα μὴ πίπτῃ τὸ ὕδωρ. (g = 10 m/sec².)

Λύσις. Θεωροῦμεν ἓν στοιχεῖον μάζης m τοῦ ὕδατος εὑρισκόμενον ἐπὶ τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας αὐτοῦ, καθ' ἣν στιγμὴν τὸ δοχεῖον εὑρίσκεται εἰς τὴν ἀνωτάτην θέσιν ἐπὶ τῆς τροχιᾶς του, καὶ ἔστω r ἡ ἀπόστασις αὐτοῦ ἀπὸ τοῦ κέντρου περιστροφῆς.



Ἐπὶ τοῦ στοιχείου τούτου τῆς μάζης, ἐφ' ὅσον τὸ δοχεῖον περιστρέφεται μὲ ἀρκετὴν ταχύτητα, θὰ ἐξασκοῦνται δύο δυνάμεις: α) τὸ βάρος αὐτοῦ $B = m \cdot g$ καὶ β) ἡ δύναμις K ἡ προερχομένη ἐκ τοῦ πυθμένος τοῦ δοχείου καὶ ἐξασκουμένη ἐπ' αὐτοῦ μέσῳ τοῦ ὕδατος τοῦ δοχείου. Προφανῶς ἡ συνισταμένη τῶν δύο τούτων δυνάμεων ἔχει φορὰν πρὸς τὸ κέντρον περιστροφῆς καὶ θὰ εἶναι ἡ κεντρομόλος δύναμις, ἡ ὁποία περιστρέφει τὸ θεωρηθὲν στοιχεῖον μάζης. Ἄρα θὰ ἔχωμεν:

$$F_\kappa = B + K \tag{1}$$

ἢ

$$\frac{m \cdot \upsilon^2}{r} = m \cdot g + K \quad \text{ἢ} \quad m\left(\frac{\upsilon^2}{r} - g\right) = K \tag{2}$$

Ἐὰν εἰς τὴν σχέσιν (2) θέσωμεν:

$$\upsilon^2 = r \cdot g \quad \text{ἢ} \quad \upsilon = \sqrt{r \cdot g} \tag{3}$$

λαμβάνομεν $0 = K$ καὶ συνεπῶς ἐκ τῆς σχέσεως (1) προκύπτει ὅτι: $F_\kappa = B$. Τοῦτο σημαίνει ὅτι εἰς τὴν ὁρικὴν ταύτην περίπτωσιν ἡ κεντρομόλος δύναμις εἶναι αὐτὸ τοῦτο τὸ βάρος B τοῦ σώματος καὶ ἑπομένως ἡ ταχύτης:

$$\upsilon_{\delta\rho.} = \sqrt{r \cdot g} \tag{4}$$

εἶναι ἡ μικροτέρα δυνατὴ ταχύτης μὲ τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ περιστρέφεται ἡ μᾶζα m, ἵνα μὴ πίπτῃ.

Ἐὰν τώρα ἰσχύῃ ἡ συνθήκη (4), παρατηροῦμεν ὅτι διὰ πᾶν ἄλλο στοιχεῖον μάζης μὴ εὑρισκόμενον ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας ἡ ταχύτης υ θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς $\upsilon_{\delta\rho.}$ καὶ συνεπῶς ἡ κεντρομόλος δύναμις θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἐξασκουμένης ἐπὶ τῆς μάζης m. Ἐκ τούτου συνάγεται ὅτι ὁλόκληρος ἡ μᾶζα τοῦ ὕδατος παραμένει ἐντὸς τοῦ δοχείου καὶ συνεπῶς τὸ ὕδωρ δὲν πίπτει, ὅταν ἰσχύῃ ἡ σχέσις (4).

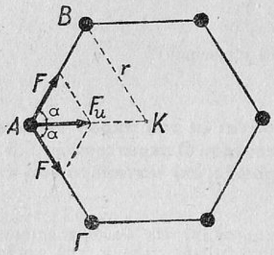
Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ζητουμένην ταχύτητα $\upsilon_{\delta\rho.}$, θέτομεν εἰς τὴν σχέσιν (4): $r = 1{,}5$ m, $g = 10$ m/sec² καὶ εὑρίσκομεν ὅτι:

$$\underline{\upsilon_{\delta\rho.}} = \sqrt{1{,}5 \cdot 10} = \underline{3{,}87 \text{ m/sec.}}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ. Ἡ μᾶζα m = 5 kgr εἶναι δεδομένον τὸ ὁποῖον, ὡς εἴδομεν κατὰ τὴν λύσιν τῆς ἀσκήσεως, δὲν ὑπεισέρχεται εἰς τὸν ὑπολογισμὸν διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ ἀποτελέσματος. Ἀποτελεῖ οὕτω πλεονάζον στοιχεῖον.

275. Κομβολόγιον ἀποτελεῖται ἀπὸ 6 σφαίρας ἐκ μολύβδου μάζης 30 gr **συνδεδεμένας διὰ λεπτοῦ σύρματος δυναμένου ν' ἀνθέξῃ εἰς τάσιν 5** kgr*, **σχηματίζει δὲ κανονικὸν πολύγωνον ἐγγράψιμον εἰς κύκλον ἀκτῖνος 25** cm **καὶ περιστρέφεται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου του πέριξ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου. Διὰ ποίαν συχνότητα περιστροφῆς τὸ σύρμα θραύεται καὶ ποία ἡ γωνιακὴ ταχύτης αὐτοῦ.**

Λύσις. Ἐπὶ τῆς σφαίρας Α ἐξασκοῦνται δύο δυνάμεις μέσῳ τῶν συρμάτων ΑΒ καὶ ΑΓ. Προφανῶς ἡ συνισταμένη τῶν δύο τούτων δυνάμεων θὰ εἶναι ἡ κεντρομόλος δύναμις F_κ, ἡ ὁποία περιστρέφει τὴν σφαῖραν. Ἐπειδὴ τὸ θεωρούμενον κομβολόγιον εἶναι κανονικὸν ἑξάγωνον καὶ ἡ F_κ κεῖται ἐπὶ ἀκτῖνος r τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου, αἱ δύο γωνίαι αἱ σχηματιζόμεναι ὑπὸ τῆς F_κ καὶ τῶν συρμάτων ΑΒ καὶ ΑΓ θὰ εἶναι ἑκάστη $\alpha = 60^\circ$. Συνεπῶς τὸ σχηματιζόμενον παραλληλόγραμμον τῶν δυνάμεων εἶναι ρόμβος καὶ αἱ ἐξασκούμεναι δυνάμεις ἐπὶ τῆς σφαίρας Α θὰ εἶναι μεταξύ των ἴσαι καὶ ἑκάστη ἴση μὲ τὴν κεντρομόλον δύναμιν. Ἤτοι:



$$F = F_\kappa \qquad (1)$$

Ἐὰν ἡ συχνότης περιστροφῆς τῆς σφαίρας εἶναι ν, τότε, ὡς γνωστόν, θὰ ἔχωμεν $F_\kappa = m \cdot 4\pi^2 \cdot \nu^2 \cdot r$ καὶ λόγῳ τῆς ἰσότητος (1) προκύπτει ὅτι καί:

$$F = m \cdot 4\pi^2 \cdot \nu^2 \cdot r \qquad (2)$$

Ἐκ τῆς σχέσεως (2) λαμβάνομεν:

$$\nu = \sqrt{\frac{F}{m \cdot 4\pi^2 \cdot r}} \qquad (3)$$

Ἐπειδὴ ἡ δύναμις F παριστᾷ προφανῶς καὶ τὴν τάσιν τοῦ σύρματος, τὸ ὁποῖον δύναται ν' ἀνθέξῃ εἰς τάσιν 5 kgr*, θέτομεν εἰς τὴν σχέσιν (3) τὰς τιμὰς $F = 5$ kgr* $= 5 \cdot 10^3 \cdot 981$ dyn, $m = 30$ gr, $r = 25$ cm καὶ εὑρίσκομεν:

$$\underline{\nu} = \sqrt{\frac{5 \cdot 10^3 \cdot 981}{30 \cdot 4 \cdot (3{,}14)^2 \cdot 25}} = \underline{13 \text{ sec}^{-1}}.$$

Ὡς γνωστόν, ἡ γωνιακὴ ταχύτης ω συνδέεται μὲ τὴν συχνότητα περιστροφῆς ν διὰ τῆς σχέσεως: $\omega = 2\pi \cdot \nu$. Ἄρα ἡ ζητουμένη γωνιακὴ ταχύτης θὰ εἶναι:

$$\underline{\omega} = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 13 = \underline{81{,}64 \text{ rad/sec.}}$$

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Προφανῶς μία ἐκ τῶν δύο ἴσων τούτων δυνάμεων (F, F), αἱ ὁποῖαι ἐξασκοῦνται ὑπὸ τῶν συρμάτων ἐπὶ τῆς σφαίρας, ὑπολογίζεται ὡς τάσις τοῦ σύρματος.

276. Σφαῖρα ζυγίζουσα 0,5 kgr* **καὶ κινουμένη ὑπὸ ταχύτητα 20** m/sec **κτυπᾶται μὲ ρακέταν, ἡ ὁποία ἀναγκάζει αὐτὴν νὰ κινῆται μὲ ταχύτητα ἀντιθέτου φορᾶς 12** m/sec. **Ἡ δύναμις ἡ ὁποία ἐπιδρᾷ ἐπὶ τῆς σφαίρας διαρκεῖ ἐπὶ 0,01** sec. **Πόση εἶναι ἡ μέση ἔντασις τῆς δυνάμεως κατὰ τὸ διάστημα τοῦτο.**

Λύσις. Ἔστω m ἡ μᾶζα τῆς σφαίρας, F ἡ ἐξασκουμένη ἐπ' αὐτῆς δύναμις ὑπὸ τῆς ρακέτας ἐπὶ χρόνον t καὶ γ ἡ ἐπιτάχυνσις τὴν ὁποίαν ἀποκτᾷ ἡ σφαίρα. Θὰ ἔχωμεν:

$$F = m \cdot \gamma = m \cdot \frac{\Delta \upsilon}{\Delta t} \qquad (1)$$

Ἐὰν καλέσωμεν τὴν τελικὴν ταχύτητα τῆς σφαίρας υ_2, τότε, ἐπειδὴ ἡ ἀρχικὴ ταχύτης αὐτῆς θὰ εἶναι ἀντιθέτου φορᾶς πρὸς αὐτήν, πρέπει νὰ εἶναι αὕτη ἀρνητική, ἔστω $-\upsilon_1$, καὶ συνεπῶς θὰ ἔχωμεν ὅτι:

$$\Delta\upsilon = \upsilon_2 - (-\upsilon_1) = \upsilon_2 + \upsilon_1 \qquad (2)$$

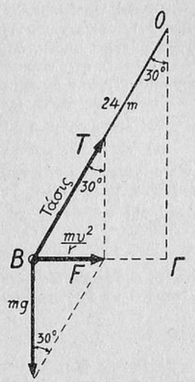
Ἄρα ἡ σχέσις (1) γράφεται:

$$F = \frac{m(\upsilon_2 + \upsilon_1)}{\Delta t} \qquad (3)$$

Ἐργαζόμεθα εἰς τὸ Τεχνικὸν Σύστημα. Θέτομεν εἰς τὴν σχέσιν (3): $m = 0{,}5/9{,}81$ Τ.Μ., μάζης, $\upsilon_1 = 20$ m/sec, $\upsilon_2 = 12$ m/sec, $\Delta t = 0{,}01$ sec, καὶ εὑρίσκομεν ὅτι:

$$\underline{F = 163{,}1 \text{ kgr*}}.$$

277. Σφαῖρα Β περιστρέφεται προσδεδεμένη εἰς τὸ ἓν ἄκρον σχοινίου μήκους 24 cm, ἐνῷ τὸ ἕτερον ἄκρον τοῦ νήματος στηρίζεται ἐπὶ σταθεροῦ σημείου Ο. Ἡ σφαῖρα διαγράφει ὁριζόντιον κύκλον ἀκτῖνος ΓΒ περὶ κέντρον εὑρισκόμενον κάτω τοῦ Ο. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ταχύτης τῆς σφαίρας ἐπὶ τῆς κυκλικῆς τροχιᾶς της, ὅταν τὸ σχοινίον σχηματίζῃ γωνίαν 30° μετὰ τῆς κατακορύφου.



Λύσις. Ἐπὶ τῆς σφαίρας ἐπενεργοῦν δύο δυνάμεις: α) τὸ βάρος τῆς σφαίρας $B = m \cdot g$, κατακορύφως καὶ β) ἡ τάσις τοῦ σχοινίου Τ.

Προφανῶς ἡ δύναμις F πρέπει νὰ εἶναι συνισταμένη τῶν δύο ἄλλων καὶ νὰ διευθύνεται πρὸς τὸ κέντρον τῆς περιστροφῆς, νὰ εἶναι δηλαδὴ ἡ κεντρομόλος δύναμις $F_\kappa = m \cdot \upsilon^2/r$, ἡ ὁποία περιστρέφει τὸ σῶμα. Ἐκ τοῦ σχήματος λαμβάνομεν:

$$\varepsilon\varphi\, 30^0 = \frac{m \cdot \upsilon^2/r}{m \cdot g} = \frac{\upsilon^2}{r \cdot g}$$

καὶ

$$\upsilon = \sqrt{r \cdot g \cdot \varepsilon\varphi\, 30^0} \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ δὲ $r = (BO) \cdot \eta\mu\, 30^0$, ἔχομεν:

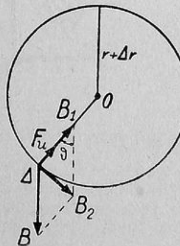
$$\upsilon = \sqrt{\frac{(BO) \cdot g \cdot \eta\mu^2 30^0}{\sigma\upsilon\nu\, 30^0}} \qquad (2)$$

Θέτοντες BO = 24 cm, g = 981 cm/sec², συν 30° = 0,865, ημ 30° = 0,5, εὑρίσκομεν:

$$\underline{\upsilon = 82{,}4 \text{ cm/sec.}}$$

278. Σύρμα ἐκ νήματος ἐλαστικοῦ, μήκους 1 m, ἐπιμηκύνεται κατὰ 52 cm, ὅταν τείνεται κατακορύφως διὰ τῆς ἐξαρτήσεως βάρους 500 gr* ἐκ τοῦ ἄκρου αὐτοῦ. Ἀντικαθίσταται τὸ βάρος δι' ἑτέρου 50 gr* καὶ περιστρέφεται ἐπὶ κατακορύφου ἐπιπέδου τὸ νῆμα μὲ ὁμαλὴν κίνησιν. Ποία ἡ γωνιακὴ ταχύτης, ἵνα ἡ ἐπιμήκυνσις εἶναι ἡ αὐτὴ ὡς καὶ κατὰ τὴν πρώτην περίπτωσιν.

Λύσις. Καλοῦμεν Β τὸ βάρος τοῦ δευτέρου σώματος, r τὸ μῆκος τοῦ σύρματος καὶ Δr τὴν ἐπιμήκυνσιν ὑπὸ τὴν ἐπενέργειαν τῆς δυνάμεως F = 500 gr*.



Ὅταν τὸ σῶμα εὑρίσκεται εἰς τυχοῦσαν θέσιν Δ, τότε ἐπ' αὐτοῦ ἐξασκοῦνται ὑπὸ τοῦ νήματος αἱ δυνάμεις $B_1 = B \cdot \sigma\upsilon\nu\,\theta$ καὶ ἡ κεντρομόλος δύναμις F_κ. Ἐὰν δὲ κατὰ τὴν στιγμὴν ταύτην εἶναι Δr ἡ ἐπιμήκυνσις τοῦ σύρματος, θὰ ἔχωμεν:

$$F = F_\kappa + B_1 = m \cdot \omega^2 (r + \Delta r) + B\, \sigma\upsilon\nu\,\theta$$

ἐξ ἧς λαμβάνομεν:

$$\omega = \sqrt{\frac{F - B \cdot \sigma\upsilon\nu\,\theta}{m\,(r + \Delta r)}}$$

Θέτομεν: F = 500 · 981 dyn, B = 50 · 981 dyn, m = 50 gr, r + Δr = 100 + 52 = 152 cm καὶ εὑρίσκομεν:

$$\underline{\omega = \sqrt{\frac{981\,(10 - \sigma\upsilon\nu\,\theta)}{152}} \quad \text{rad/sec.}}$$

Ἐξ οὗ συμπεραίνομεν ὅτι ἡ γωνιακὴ ταχύτης ω ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς γωνίας θ, ἤτοι ἐκ τῆς θέσεως τοῦ σώματος ἐπὶ τῆς κατακορύφου κυκλικῆς τροχιᾶς.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ. Εἰς τὴν πραγματικότητα, δὲν δυνάμεθα νὰ περιστρέψωμεν σῶμα τῇ βοηθείᾳ νήματος, ἐπὶ κατακορύφου κύκλου, μὲ κίνησιν ὁμαλήν, λόγῳ τῆς ἕλξεως τῆς Γῆς.

Βοηθητικαὶ Γνώσεις

Ὑπολογισμὸς τῆς ὁλικῆς δυνάμεως, τῆς ἐπενεργούσης ἐπὶ σωμάτων εὑρισκομένων ἐν κινήσει.

Πολλὰ προβλήματα τῆς Δυναμικῆς ἀνάγονται εἰς τὴν λύσιν προβλημάτων Στατικῆς, ἂν θεωρήσωμεν ὅτι εἰς ἑκάστην στιγμὴν τοῦ χρόνου τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπὶ τοῦ κινουμένου σώματος ἐπενεργουσῶν δυνάμεων εἶναι μηδέν. Δηλαδὴ ἡ σχέσις τοῦ θεμελιώδους νόμου τῆς Μηχανικῆς $F = m \cdot \gamma$ γράφεται $F - m \cdot \gamma = 0$, ἥτις εἶναι σχέσις Στατικῆς, ἀρκεῖ νὰ θεωρηθῇ ὅτι ἐπὶ τοῦ σώματος ἐπενεργεῖ εἰς ἑκάστην χρονικὴν στιγμὴν δύναμις ἴση καὶ ἀντίθετος πρὸς τὴν κινοῦσαν καὶ ἔχουσα μέγεθος $m \cdot \gamma$.

Ἡ δύναμις αὕτη καλεῖται εἰς τὴν Μηχανικὴν δύναμις ἀδρανείας.

Ὡς ἐφαρμογὴν τῶν περιπτώσεων τούτων δίδομεν τὰ ἀκόλουθα παραδείγματα.

α) Ἔστω ὅτι σιδηροδρομικὸς συρμὸς εὑρίσκεται ἐν κινήσει καὶ καλέσωμεν ὁλικὴν δύναμιν ($F_{\delta\lambda.}$) τὴν πραγματικὴν ἐπὶ τοῦ συρμοῦ ἐπενεργοῦσαν δύναμιν. Ἐφ' ὅσον ὁ συρμὸς κινεῖται ὑπὸ σταθερὰν ταχύτητα, γνωρίζομεν ὅτι ἡ ὁλικὴ δύναμις $F_{\delta\lambda.}$, ἡ ὁποία εἶναι ἡ συνισταμένη τῆς κινητηρίου δυνάμεως F_1 καὶ τῆς τριβῆς F_2, αἱ δὲ δύο αὗται εἶναι ἴσαι καὶ ἀντίθετοι, θὰ εἶναι μηδέν, ἤτοι:

$$F_{\delta\lambda.} = F_1 - F_2 = 0$$

οὕτω δὲ ὁ συρμὸς δὲν ἔχει ἐπιτάχυνσιν. Ἐὰν ὅμως ὁ συρμὸς ἔχῃ ἐπιτάχυνσιν γ, ἡ κινητήριος δύναμις F_1 πρέπει νὰ ἔχῃ μεγαλυτέραν τιμὴν ἢ προηγουμένως καὶ τότε θὰ εἶναι:

$$F_{\delta\lambda.} = F_1 - F_2 = m \cdot \gamma.$$

β) Ἔστω ἤδη, ὅτι παρατηρητὴς εὑρίσκεται ἐντὸς ἀνελκυστῆρος καὶ κρατεῖ εἰς τὰς χεῖρας του δυναμόμετρον ἀπὸ τὸ ὁποῖον εἶναι ἐξηρτημένον σῶμα μάζης m. Τὸ ἐλατήριον, ὡς γνωστόν, διατείνεται καὶ ὑφίσταται οὕτω τάσιν T, ἡ ὁποία εἶναι ἴση καὶ ἀντίθετος πρὸς τὸ βάρος $B = m \cdot g$ τοῦ σώματος. Ἐφ' ὅσον ὁ ἀνελκυστὴρ ἠρεμεῖ ἢ κινεῖται μὲ σταθερὰν ταχύτητα, ἡ ὁλικὴ δύναμις ἡ ἐπενεργοῦσα ἐπὶ τοῦ σώματος εἶναι μηδέν. Ἐὰν ὅμως ὁ ἀνελκυστὴρ ἀνέρχεται μὲ ἐπιτάχυνσιν γ, παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ἔνδειξις τοῦ δυναμομέτρου αὐξάνεται, τοῦτο δὲ ἐξηγεῖται ὡς ἑξῆς: Εἰς τὴν προκειμένην περίπτωσιν ὑφίσταται ὁλικὴ δύναμις, ἡ ὁποία παρέχεται ὑπὸ τῆς σχέσεως $F_{\delta\lambda.} = -m \cdot \gamma$, τοῦ ἀρνητικοῦ σημείου ὀφειλομένου εἰς τὸ ὅτι ἡ ἐπιτάχυνσις γ εἶναι ἀντιθέτου διευθύνσεως ἢ ἡ ἐπιτάχυνσις g, τῆς ὁποίας τὴν διεύθυνσιν θεωροῦμεν ὡς θετικήν, καὶ ἡ ὁποία ἰσοῦται πρὸς τὴν διαφορὰν βάρους καὶ τάσεως, ἤτοι:

$$F_{\delta\lambda.} = -m \cdot \gamma = B - T \quad \text{καὶ} \quad T = B + m \cdot \gamma$$

ἤτοι ἡ τάσις τοῦ ἐλατηρίου εἶναι μεγαλυτέρα κατὰ τὸν ὅρον $m \cdot \gamma$ καὶ ἑπομένως τὸ δυναμόμετρον δεικνύει μεγαλύτερον βάρος. Ἐὰν ὅμως ὁ ἀνελκυστὴρ κατέρχεται ὑπὸ ἐπιτάχυνσιν γ, τότε θὰ εἶναι:

$$F_{\delta\lambda.} = m \cdot \gamma = B - T \quad \text{καὶ} \quad T = B - m \cdot \gamma$$

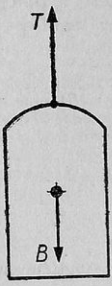
ἤτοι ἡ τάσις τοῦ ἐλατηρίου θὰ εἶναι μικροτέρα τῆς ἀντιστοιχούσης εἰς τὸ βάρος τοῦ σώματος, κατὰ τὴν ποσότητα $m \cdot \gamma$.

Ἐὰν τέλος εἶναι $\gamma = g$, τότε θὰ εἶναι $T = 0$, ἤτοι τὸ δυναμόμετρον δὲν θὰ ὑφίσταται τάσιν, καὶ διὰ τοῦτο ἡ ἔνδειξις αὐτοῦ θὰ εἶναι μηδέν. Τοῦτο ἐπὶ παραδείγματι συμβαίνει, ὅταν παρατηρητὴς κρατῶν ἕνα ζυγὸν δι' ἐλατηρίου, ὁ ὁποῖος φέρει ἐπὶ τοῦ δίσκου αὐτοῦ σῶμα βάρους τινός, πηδήσῃ ἐξ ὕψους πρὸς τὸ ἔδαφος, ὅτε, καθ' ὅλην τὴν διάρκειαν τῆς κινήσεώς του, ἡ ἔνδειξις τοῦ ζυγοῦ θὰ εἶναι μηδὲν (βλ. σχῆμα).

279. Ἀνελκυστὴρ μάζης 8 ton εἶναι ἐξηρτημένος διὰ συρματοσχοίνου καὶ ἵσταται μετέωρος. Αἴφνης ὅμως, τῇ ἐπιδράσει σταθερᾶς δυνάμεως, ἀνέρχεται πρὸς τὰ ἄνω μὲ ἐπιτάχυνσιν $\gamma = 1{,}2$ m/sec². Κατὰ πόσον ηὐξήθη ἡ τάσις τοῦ συρματοσχοίνου.

Λύσις. Ἐφ' ὅσον ὁ ἀνελκυστὴρ μένει μετέωρος, τὸ βάρος αὐτοῦ B ἐξουδετεροῦται ὑπὸ τῆς τάσεως T τοῦ συρματοσχοίνου καὶ ἡ ὁλικὴ δύναμις $F_{\delta\lambda.} = B - T = 0$. Τὸ αὐτὸ ἰσχύει καὶ ὅταν ὁ ἀνελκυστὴρ κινῆται εὐθυγράμμως καὶ ὁμαλῶς.

Ὑποθέσωμεν ἤδη, ὅτι ὁ ἀνελκυστὴρ ἀνέρχεται πρὸς τὰ ἄνω, μὲ ἐπιτάχυνσιν $\gamma = 1{,}2$ m/sec². Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει, ἡ ὁλικὴ δύναμις δὲν εἶναι μηδέν, ἀλλὰ θὰ ἔχῃ ἀπόλυτον τιμὴν $F = m \cdot \gamma$. Ἐπειδὴ ὅμως ὁ ἀνελκυστὴρ ἔχει βάρος 8 000 kgr*, θὰ ἔχῃ μᾶζαν 8 000 kgr ἢ 800 Τ. Μ. μάζης καὶ ἑπομένως ἡ ἐπιταχύνουσα δύναμις, ἡ ὁποία συμπίπτει πρὸς τὴν ὁλικὴν δύναμιν, δὲν θὰ εἶναι μηδέν, ἀλλὰ ἴση πρὸς $F_{\delta\lambda.} = 800 \cdot 1{,}2 = 960$ kgr*, ἑπομένως δὲ θὰ ἔχωμεν :



$$F_{\delta\lambda.} = -m \cdot \gamma = B - T$$

καὶ ἀντικαθιστῶντες εὑρίσκομεν :

$$F_{\delta\lambda.} = -960 = 8\,000 - T$$

καὶ $$T = 8\,000 + 960 = 8\,960 \text{ kgr*}$$

ἤτοι ἡ τάσις τοῦ συρματοσχοίνου ηὐξήθη κατά :

$$\underline{T = 960 \text{ kgr*}}.$$

280. Σῶμα μάζης 200 gr τίθεται εἰς κίνησιν διὰ νήματος μήκους 40 cm, ὥστε νὰ διαγράφῃ κατακόρυφον κύκλον ὑπὸ ταχύτητα 200 cm/sec. Νὰ δειχθῇ ὅτι εἰς τὸ ἀνώτατον σημεῖον τῆς τροχιᾶς τὸ σχοινίον εἶναι τεταμένον καὶ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ δύναμις μὲ τὴν ὁποίαν διατείνεται τὸ σχοινίον.

Λύσις. Ὅταν ἓν σῶμα περιστρέφεται (δι' ἀκίνητον παρατηρητήν), ἐξασκεῖται ἐπὶ τοῦ σώματος κεντρομόλος δύναμις, ἡ ὁποία εἶναι :

$$F = m\,\frac{\upsilon^2}{r}$$

Ἡ τάσις T τοῦ νήματος εἰς τὸ ἀνώτατον σημεῖον τῆς τροχιᾶς θὰ εἶναι προφανῶς ἴση μὲ τὴν κεντρομόλον δύναμιν μεῖον τὸ βάρος τοῦ σώματος. Ἤτοι :

$$T = F - B$$

Ἄρα εἰς τὴν ἄσκησίν μας θὰ εἶναι τεταμένον τὸ νῆμα, ὅταν ὑπάρχῃ τάσις τοῦ νήματος, δηλ. ὅταν $F > B$.

Συμφώνως πρὸς τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως θὰ ἔχωμεν :

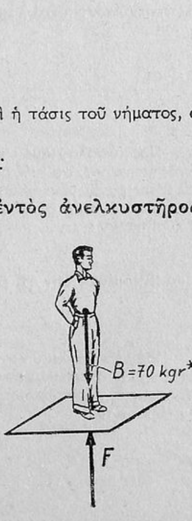
$$F = \frac{m \cdot \upsilon^2}{r} = \frac{200 \cdot 200^2}{40} = 200\,000 \text{ dyn}$$

καὶ $B = 200 \cdot 981 = 196\,200$ dyn.

Ἤτοι $F > B$ καὶ συνεπῶς ὑπάρχει τάσις (τὸ νῆμα εἶναι τεταμένον) καὶ ἡ τάσις τοῦ νήματος, ὡς εἴδομεν, θὰ εἶναι :

$$\underline{T} = F - B = 200\,000 - 196\,200 = \underline{3\,800 \text{ dyn}}.$$

281. Ἄνθρωπος ἔχει βάρος 70 kgr* καὶ εὑρίσκεται ἐντὸς ἀνελκυστῆρος, ὁ ὁποῖος ἀνέρχεται μὲ ἐπιτάχυνσιν 2,5 m/sec². Πόση εἶναι ἡ δύναμις τὴν ὁποίαν ἀσκεῖ τὸ δάπεδον ἐπὶ τοῦ ἀνθρώπου (βλ. σχῆμα).



Λύσις. Ἐφ' ὅσον ὁ ἀνελκυστὴρ ἀκινητεῖ ἢ ἀνέρχεται ἄνευ ἐπιταχύνσεως, ὁ ἄνθρωπος εὑρίσκεται ἐν ἰσορροπίᾳ καὶ τὸ δάπεδον ἀσκεῖ ἐπ' αὐτοῦ δύναμιν ἴσην πρὸς 70 kgr* διευθυνομένην πρὸς τὰ ἄνω. Ἵνα ὁ ἄνθρωπος ἐπιταχυνθῇ πρὸς τὰ ἄνω ὑπὸ ἐπιτάχυνσιν $\gamma = 2{,}5$ m/sec², ἀπαιτεῖται δύναμις $F = m \cdot \gamma$. Ἐὰν ληφθῇ $g = 10$ m/sec², ἡ μᾶζα τοῦ ἀνθρώπου θὰ εἶναι $70/10 = 7$ Τ.Μ. μάζης καὶ ἡ ἐπιταχύνουσα δύναμις, διευθυνομένη πρὸς τὰ ἄνω, θὰ εἶναι $F = 7 \cdot 2{,}5 = 17{,}5$ kgr*, ἡ δὲ ὁλικὴ δύναμις τὴν ὁποίαν θὰ ἐξασκῇ τὸ δάπεδον ἐπὶ τοῦ ἀνθρώπου θὰ εἶναι :

$$\underline{F_{\delta\lambda.}} = 17{,}5 + 70 = \underline{87{,}5 \text{ kgr*}}.$$

282. Ἀνελκυστὴρ βάρους 2 000 kgr* ἐξαρτᾶται ἀπὸ συρματόσχοινον, τὸ ὁποῖον εἶναι ἐφωδιασμένον μὲ ἀντίβαρον 3 200 kgr*. Πόση εἶναι ἡ βραχυτέρα ἀπόστασις, εἰς τὴν ὁποίαν θὰ σταματήσῃ ὁ ἀνελκυστήρ, ὅταν κατέρχεται μὲ ταχύτητα 2 m/sec.

Λύσις. Ἡ μεγίστη δύναμις, ἡ ὁποία δύναται νὰ ἐπενεργῇ ἐπὶ τοῦ ἀνεκλυστῆρος, εἶναι 3 200 – 2 000 = 1 200 kgr* διευθυνομένη πρὸς τὰ ἄνω. Ἡ μᾶζα τοῦ ἀνελκυστῆρος, διὰ $g = 10$ m/sec², εἶναι $m = 2\,000/10 = 200$ Τ.Μ. μάζης, ἡ δὲ ἐπιτάχυνσις τὴν ὁποίαν μεταδίδει εἰς αὐτὸν ἡ δύναμις 1 200 kgr* εἶναι $\gamma = 1\,200/200 = 6$ m/sec². Ἡ ἐπιτάχυνσις αὕτη ἔχει διεύθυνσιν πρὸς τὰ ἄνω, ὁ δὲ ἀνελκυστὴρ θὰ κινῆται μέχρις ὅτου ἡ ταχύτης αὐτοῦ 2 m/sec ἐκμηδενισθῇ.

Ἐὰν ὅθεν ἐφαρμόσωμεν τὸν τύπον τῆς ἐπιβραδυνομένης κινήσεως, $\upsilon = \upsilon_0 - \gamma \cdot t$, καὶ θέσωμεν $\upsilon = 0$, $\upsilon_0 = 2$ m/sec καὶ $\gamma = 6$ m/sec², εὑρίσκομεν:

$$t = \frac{\upsilon_0}{\gamma} = \frac{2}{6} = 0{,}33 \text{ sec.}$$

Εἰς τὸ χρονικὸν τοῦτο διάστημα, ὁ ἀνελκυστὴρ θὰ διανύσῃ διάστημα ὑπολογιζόμενον ἐκ τοῦ τύπου $s = \upsilon_0 \cdot t - \frac{1}{2}\gamma \cdot t^2$ καί, ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ἀριθμητικῶν δεδομένων, προκύπτει:

$$\underline{s = 0{,}33 \text{ m.}}$$

283. Ἀπὸ τροχαλίαν ἐξαρτῶνται δύο κύλινδροι, τῶν ὁποίων αἱ μᾶζαι εἶναι $m_1 = 30$ gr καὶ $m_2 = 40$ gr. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐπιτάχυνσις καὶ ἡ τάσις τοῦ νήματος.

Λύσις. Θεωροῦμεν τὸ σύστημα τῶν δύο μαζῶν ὡς σύνολον καὶ δὲν λαμβάνομεν ὑπ' ὄψιν τὴν μᾶζαν τοῦ σχοινίου, οὕτω δὲ εὑρίσκομεν ὅτι ἡ συνολικὴ δύναμις ἡ ἐπενεργοῦσα ἐπὶ τοῦ συστήματος εἶναι:

$$F = m \cdot g = (m_2 - m_1)\, g.$$

Ἐὰν δέ, χάριν ἁπλουστεύσεως, λάβωμεν $g = 1\,000$ cm/sec², προκύπτει:

$$F = (40 - 30)\; 1\,000 = 10\,000 \text{ dyn.}$$

Ἐπειδὴ ὅμως, ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς δυνάμεως F, ἀμφότεραι αἱ μᾶζαι τοῦ συστήματος πρέπει νὰ ἐπιταχύνωνται καὶ λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν ὅτι ἡ συνολικὴ μᾶζα εἶναι:

$$m = m_1 + m_2 = 30 + 40 = 70 \text{ gr},$$

θὰ εἶναι:

$$\underline{\gamma} = \frac{F}{m} = \frac{10\,000}{70} = \underline{143 \text{ cm/sec}^2}.$$

Πρὸς ὑπολογισμὸν τῆς τάσεως τοῦ νήματος, θεωροῦμεν κατ' ἰδίαν μίαν τῶν μαζῶν, τὴν m_2. Ἐπ' αὐτῆς ἐπενεργεῖ, ἀφ' ἑνὸς μὲν τὸ βάρος αὐτῆς $m_2 \cdot g$, διευθυνόμενον πρὸς τὰ κάτω, καὶ ἀφ' ἑτέρου ἡ τάσις τοῦ νήματος, διευθυνομένη πρὸς τὰ ἄνω· ἑπομένως ἡ δύναμις, ἡ ὁποία προκαλεῖ κίνησιν πρὸς τὰ κάτω τῆς μάζης m_2 ὑπὸ ἐπιτάχυνσιν γ, εἶναι $m_2 \cdot \gamma$ καὶ ἐκφράζεται ὑπὸ τῆς σχέσεως $m_2 \cdot g - T = m_2 \cdot \gamma$, ἐξ ἧς εὑρίσκομεν:

$$T = m_2\,(g - \gamma).$$

Ἑπομένως ἐπὶ τῇ βάσει τῶν δεδομένων, εὑρίσκομεν:

$$\underline{T} = 40\,(1\,000 - 143) = \underline{34\,280 \text{ dyn.}}$$

Ἐὰν ἐξετάσωμεν κατ' ἰδίαν τὴν ἑτέραν τῶν μαζῶν m_1, βλέπομεν ὅτι ἐπ' αὐτῆς ἐπενεργεῖ τὸ βάρος αὐτῆς $m \cdot g$, διευθυνόμενον πρὸς τὰ κάτω, καὶ ἡ τάσις τοῦ νήματος T, διευθυνομένη πρὸς τὰ ἄνω· ὅθεν ἡ δύναμις ἡ προκαλοῦσα τὴν ἐπιτάχυνσιν αὐτῆς πρὸς τὰ ἄνω θὰ εἶναι ἡ $m_1 \cdot \gamma$, ἑπομένως θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν:

$$m_1 \cdot g - T = -\, m_1 \cdot \gamma,$$

ὅθεν:

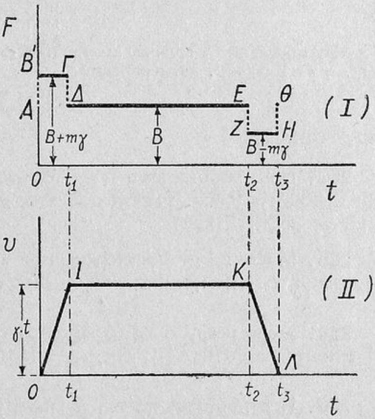
$$T = m_1\,(g + \gamma) \quad \text{ἢ} \quad \underline{T} = 30\,(1\,000 + 143) = \underline{34\,290 \text{ dyn}}$$

ἤτοι εἰς ἀμφοτέρας τὰς περιπτώσεις εὑρίσκομεν τὴν αὐτὴν τιμὴν τάσεως. Ἡ μικρὰ διαφορὰ τιμῶν κατὰ 10 dyn ὀφείλεται εἰς τὰς προσεγγίσεις ποὺ ἐδέχθημεν πρὸς ἁπλούστευσιν τῶν ὑπολογισμῶν.

284. Ἀνελκυστὴρ ἀνέρχεται ἀπὸ τὸν πρῶτον εἰς τὸν δεύτερον ὄροφον οἰκοδομῆς. Παραστήσατε γραφικῶς α) τὴν τείνουσαν δύναμιν συναρτήσει τοῦ χρόνου καὶ β) τὴν ταχύτητα συναρτήσει τοῦ χρόνου.

Λύσις. α) Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ κίνησις τοῦ ἀνελκυστῆρος γίνεται εἰς τρεῖς διαδοχικὰς φάσεις. Ἤτοι : 1ον) Ἐκκινεῖ ἐκ τῆς ἠρεμίας καὶ κινεῖται ἐπὶ ὀλίγον χρονικὸν διάστημα μὲ κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην, 2ον) ὅταν τελειώσῃ ἡ πρώτη φάσις κινήσεως, ἐξακολουθεῖ κινούμενος ὁ ἀνελκυστὴρ μὲ κίνησιν ὁμαλὴν καὶ μὲ σταθερὰν ταχύτητα ἴσην πρὸς τὴν τελικὴν ταχύτητα τῆς ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένης κινήσεως καὶ 3ον) διὰ νὰ σταματήσῃ ὁ ἀνελκυστὴρ λαμβάνει κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιβραδυνομένην μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα τὴν σταθερὰν ταχύτητα τῆς ὁμαλῆς κινήσεως.

Κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν μηδέν, κατὰ τὴν ὁποίαν ἐκκινεῖ ὁ ἀνελκυστήρ, ἡ ἐπ' αὐτοῦ ἐξασκουμένη δύναμις Β αὐτομάτως γίνεται $B + m \cdot \gamma$, ὡς δεικνύεται εἰς τὸ σχῆμα (διακεκομμένον εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ ἐπὶ τοῦ ἄξονος F). Διότι ἐκτὸς τῆς δυνάμεως Β τῆς ἐξασκουμένης ἐπ' αὐτοῦ ὑπὸ τοῦ καλωδίου πρὸς ὑπερνίκησιν τοῦ βάρους τοῦ ἀνελκυστῆρος ἐξασκεῖται ἐπὶ πλέον καὶ ἡ ἐπιταχύνουσα δύναμις $m \cdot \gamma$.



Ἀκολούθως ἡ δύναμις αὐτὴ $(B + m \cdot \gamma)$ παραμένει σταθερὰ μέχρι τῆς χρονικῆς στιγμῆς ἔστω t_1, ὡς δεικνύεται εἰς τὸ σχῆμα (εὐθύγραμμον τμῆμα ΒΓ, παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ χρόνου t).

Κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν t_1, ὁπότε τελειώνει ἡ ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένη κίνησις καὶ ἀρχίζει ἡ ὁμαλὴ κίνησις, ἡ δύναμις $B + m \cdot \gamma$ γίνεται ἀποτόμως Β (διακεκομμένον εὐθύγραμμον τμῆμα ΓΔ, παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα τῆς δυνάμεως F).

Ἀκολούθως ἡ δύναμις Β παραμένει σταθερὰ μέχρι τῆς χρονικῆς στιγμῆς ἔστω t_2 (εὐθύγραμμον τμῆμα ΔΕ, παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ χρόνου t).

Κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν t_2, ὁπότε τελειώνει ἡ ὁμαλὴ κίνησις, ἡ δύναμις Β γίνεται ἀποτόμως $B - m \cdot \gamma$, διότι ἐπὶ τοῦ ἀνελκυστῆρος ἐξασκεῖται ἀντιθέτως πρὸς τὴν δύναμιν Β καὶ ἡ ἐπιβραδύνουσα δύναμις $m \cdot \gamma$ (εὐθύγραμμον διακεκομμένον τμῆμα ΕΖ, παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα τῆς δυνάμεως F). Ἐν συνεχείᾳ ἡ δύναμις αὐτὴ παραμένει σταθερὰ μέχρι τῆς χρονικῆς στιγμῆς t_3 (εὐθύγραμμον τμῆμα ΖΗ, παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ χρόνου t).

Ἐπίσης κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν t_3, ὁπότε σταματᾷ ἡ κίνησις τοῦ ἀνελκυστῆρος, ἡ δύναμις $B - m \cdot \gamma$ γίνεται ἀποτόμως Β (διακεκομμένον εὐθύγραμμον τμῆμα ΗΘ, παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα τῆς δυνάμεως F).

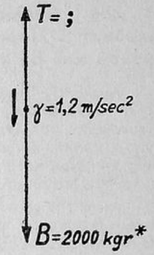
β) Διὰ νὰ σχηματίσωμεν τὸ διάγραμμα τῆς ταχύτητος συναρτήσει τοῦ χρόνου, σκεπτόμεθα ὡς ἀκολούθως. Ἀπὸ τὴν χρονικὴν στιγμὴν μηδὲν ἕως τὴν χρονικὴν στιγμὴν t_1 ἡ κίνησις, ὡς εἴδομεν, εἶναι ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένη καὶ θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις : $\upsilon = \gamma \cdot t$. Ἄρα ἡ ταχύτης, ὡς πρώτου βαθμοῦ ὡς πρὸς τὸν χρόνον, θὰ ἀποδίδεται γραφικῶς διὰ τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΟΙ.

Ἀπὸ τὴν χρονικὴν στιγμὴν t_1 ἕως τὴν χρονικὴν στιγμὴν t_2, ὁπότε ἡ κίνησις εἶναι ὁμαλή, θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις : $\upsilon_0 = \gamma \cdot t =$ σταθ. Ἄρα ἡ ταχύτης, ἐπειδὴ παραμένει σταθερά, θὰ ἀποδίδεται γραφικῶς διὰ τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΙΚ, παραλλήλου πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ χρόνου t.

Ἀπὸ τὴν χρονικὴν στιγμὴν t_2 ἕως τὴν χρονικὴν στιγμὴν t_3, ὁπότε ἡ κίνησις εἶναι ὁμαλῶς ἐπιβραδυνομένη, θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις $\upsilon = \upsilon_0 - \gamma \cdot t$. Ἄρα ἡ ταχύτης, ὡς πρώτου βαθμοῦ ὡς πρὸς τὸν χρόνον, θὰ ἀποδίδεται γραφικῶς διὰ τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΚΛ.

285. Ἀνελκυστὴρ 2 000 kgr* κατέρχεται πρὸς τὰ κάτω μὲ ἐπιτάχυνσιν 1,2 m/sec². Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τάσις τοῦ καλωδίου. ($g = 10$ m/sec².)

Λύσις. Ἐὰν ὁ ἀνελκυστὴρ παρέμενεν ἀκίνητος, τότε ἡ τάσις τοῦ νήματος θὰ ἦτο ἴση μὲ τὸ βάρος Β αὐτοῦ. Ἐπειδὴ ὅμως ὁ ἀνελκυστὴρ κατέρχεται, ἡ τάσις Τ θὰ εἶναι μικροτέρα κατὰ τὴν ἐπιταχύνουσαν αὐτὸν δύναμιν F_ε. Ἤτοι:



$$T = B - F_\varepsilon = B - m \cdot \gamma$$

Ἐργαζόμεθα εἰς τὸ Τεχνικὸν Σύστημα. Θέτομεν: $B = 2\,000$ kgr*, $m = 2\,000/10 = 200$ Τ. Μ. μάζης, $\gamma = 1{,}2$ m/sec², καὶ εὑρίσκομεν:

$$\underline{T = 1760 \text{ kgr*}.}$$

286. Φορτίον 2 τόννων ἀνυψοῦται ὑπὸ γερανοῦ καὶ ἡ κατακόρυφος ἐπιτάχυνσις εἶναι $\gamma = 1$ m/sec². Ποία δύναμις ἐπενεργεῖ ἐπὶ τοῦ σχοινίου. ($g = 10$ m/sec².)

Λύσις. Ἐπειδὴ τὸ φορτίον ἀνυψοῦται μὲ ἐπιτάχυνσιν κατακόρυφον, ἡ συνολικῶς ἐπιδρῶσα ἐπ' αὐτοῦ δύναμις θὰ ἰσοῦται μὲ τὸ βάρος Β τοῦ φορτίου σὺν τὴν ἐπιταχύνουσαν αὐτὸ δύναμιν F_ε. Ἤτοι:

$$F = B + F_\varepsilon = B + m \cdot \gamma$$

Ἐργαζόμεθα εἰς τὸ Τεχνικὸν Σύστημα. Θέτομεν: $B = 2\,000$ kgr*, $m = 2\,000/10 = 200$ Τ. Μ. μάζης, $\gamma = 1$ m/sec², καὶ εὑρίσκομεν:

$$\underline{F = 2\,200 \text{ kgr*}.}$$

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Β'

287. Νὰ προσδιορισθῇ ἡ ἐπιτάχυνσις εἰς τὰς ἀκολούθους περιπτώσεις: α) Δύναμις 3 000 dyn ἐπενεργεῖ ἐπὶ σώματος μάζης 2 kgr, β) δύναμις 50 gr* ἐπενεργεῖ ἐπὶ σώματος μάζης 2 kgr. (Ἀπ. α' 1,5 cm/sec². β' 24,5. cm/sec².)

288. Μᾶζα 1 kgr ὑφίσταται τὴν ἐπενέργειαν σταθερᾶς δυνάμεως 9 800 dyn. Ἐὰν ἐκκινῇ ἐκ τῆς ἠρεμίας, πόσον διάστημα θὰ διανύσῃ εἰς 10 sec. (Ἀπ. 490 cm.)

289. Σῶμα μάζης 6 kgr ὑφίσταται τὴν ἐπενέργειαν σταθερᾶς δυνάμεως ἐπὶ 1 min καὶ ἀποκτᾷ ταχύτητα 10 cm/sec. Πόση εἶναι ἡ ἔντασις τῆς δυνάμεως. (Ἀπ. 1 000 dyn.)

290. Πόση δύναμις πρέπει νὰ ἐπενεργῇ ἐπὶ μάζης 1 kgr, διὰ νὰ μεταβάλῃ ὁμαλῶς τὴν ταχύτητα αὐτῆς ἀπὸ 30 cm/sec εἰς 10 cm/sec ἐντὸς διαστήματος 1 m. (Ἀπ. 4 000 dyn.)

291. Μοτοσυκλέτα κινουμένη ὁριζοντίως, τῆς ὁποίας ἡ μᾶζα μετὰ τῆς μηχανῆς της εἶναι 75 kgr, φθάνει τὴν ταχύτητα 30 km/h ἐντὸς 2 min. Νὰ προσδιορισθοῦν: α) Ἡ δύναμις ἡ ἀναπτυσσομένη ὑπὸ τῆς μηχανῆς, β) τὸ διανυθὲν διάστημα ὑπὸ τῆς μοτοσυκλέτας μέχρις ὅτου φθάσῃ τὴν ταχύτητα ταύτην. Δὲν λαμβάνονται ὑπ' ὄψιν αἱ τριβαί. ($g = 9{,}81$ m/sec².) (Ἀπ. α' 0,531 kgr*. β' 500 m.)

292. Λέμβος κινουμένη ὁριζοντίως, τῆς ὁποίας ἡ μᾶζα μετὰ τῆς μηχανῆς της εἶναι 175 kgr, ἀποκτᾷ ταχύτητα 45 km/h ἐντὸς 100 sec. Νὰ προσδιορισθοῦν: α) Ἡ δύναμις προωθήσεως αὐτῆς καὶ β) τὸ διανυθὲν διάστημα ἵνα φθάσῃ τὴν ταχύτητα 45 km/h. Δὲν λαμβάνονται ὑπ' ὄψιν αἱ τριβαί. ($g = 9{,}80$ m/sec².) (Ἀπ. α' 2,232 kgr*. β' 625 m.)

293. Ὁ σωλὴν πυροβόλου ἔχει μῆκος 6 m καὶ ρίπτει βλῆμα μάζης 100 kgr ὑπὸ ἀρχικὴν ταχύτητα 600 m/sec. Νὰ ὑπολογισθοῦν: α) ὁ χρόνος ὁ ἀπαιτούμενος ἵνα ἡ ὀβὶς διανύσῃ τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ σωλῆνος καὶ β) ἡ ἐπὶ τῆς ὀβίδος ἐξασκουμένη δύναμις. Ὑποτίθεται ὅτι ἡ ἐπὶ τῆς ὀβίδος δύναμις διατηρεῖται σταθερὰ καθ' ὅλον τὸ μῆκος τοῦ σωλῆνος. (Ἀπ. α' $t = 0{,}02$ sec. β' $F = 306\,000$ kgr*.)

294. Αὐτοκίνητον βάρους 1 200 kgr*, τὸ ὁποῖον κινεῖται μὲ ταχύτητα 90 km/h, θέλομεν νὰ σταματήσῃ, ἀφοῦ διανύσῃ διάστημα 50 m. Νὰ ὑπολογισθοῦν ἡ ἐπὶ τῶν τροχοπεδῶν ἐφαρμοζομένη δύναμις καὶ ὁ ἀπαιτούμενος χρόνος μέχρις ὅτου σταματήσῃ.
('Απ. 764,5 kgr*, 4 sec.)

295. Μᾶζα 100 gr ἀποκτᾷ κατόπιν κρούσεως ταχύτητα 5 000 cm/sec. Πόση ἡ ἐπὶ τῆς μάζης τῶν 100 gr ἐνεργήσασα δύναμις. ($g = 980$ cm/sec^2.)
('Απ. 510,2 gr*.)

296. Σφαῖρα ἀποκτᾷ κατόπιν κρούσεως ταχύτητα 25 m/sec. Ἐὰν ἡ ἐπὶ τῆς σφαίρας ἐξασκηθεῖσα δύναμις ἦτο 1 000 gr*, ποία ἡ μᾶζα τῆς σφαίρας. ($g = 980$ cm/sec^2.) ('Απ. 392 gr.)

297. Σφαῖρα ὅπλου ἔχει μᾶζαν 25 gr καὶ ἐξέρχεται τῆς κάννης ὑπὸ ταχύτητα 600 m/sec. Νὰ ὑπολογισθοῦν: α) Ὁ ἀπαιτούμενος χρόνος ἵνα αὕτη διανύσῃ τὸ ἐσωτερικὸν τῆς κάννης, ὅταν αὕτη ἔχῃ μῆκος 75 cm, β) ἡ ἐπὶ τῆς σφαίρας ἐξασκουμένη δύναμις. Ὑποτίθεται ὅτι ἡ δύναμις ἥτις ὠθεῖ τὴν σφαῖραν εἶναι σταθερά, καθ' ὅλον τὸ μῆκος τῆς κάννης. ($g = 9{,}80$ m/sec^2.)
('Απ. α' 0,0025 sec. β' $6 \cdot 10^8$ dyn ἢ 612 kgr*.)

298. Πόσον περίπου θὰ εἶναι τὸ μῆκος τοῦ σωλῆνος πυροβόλου προωρισμένου εἰς τὸ νὰ ρίπτῃ βλῆμα 50 kgr ὑπὸ ταχύτητα 600 m/sec, εἰς τρόπον ὥστε ἡ ἐξασκουμένη ἐπὶ τῆς ὀβίδος δύναμις νὰ μὴ ὑπερβαίνῃ τὰ 150 000 kgr*.
('Απ. 6,1 m.)

299. Αὐτοκίνητον ἀναχωρεῖ ἐκ τῆς ἠρεμίας μὲ κίνησιν εὐθύγραμμον ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην καὶ ἀποκτᾷ μετὰ 10 sec ταχύτητα 72 km/h. Ζητοῦνται: α) Ποία ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς κινήσεώς του. β) Ποῖον τὸ διάστημα τὸ διανυόμενον κατὰ τὰ 10 sec. γ) Κατά τινα στιγμὴν ὁ ὁδηγὸς τροχοπεδεῖ καὶ σταματᾷ μετὰ 50 m· ποία ἡ ἐπιβράδυνσις καὶ πόση ἡ διάρκειά της.
('Απ. α' 200 cm/sec. β' 100 m. γ' 400 cm/sec^2, 5 sec.)

300. Μᾶζα 60 gr κινεῖται ἐπὶ κύκλου ἀκτῖνος 25 cm ἐκτελοῦσα 2 στρ./sec. Νὰ ὑπολογισθῇ α) ἡ γραμμικὴ ταχύτης εἰς cm/sec, β) τὸ μέγεθος καὶ ἡ διεύθυνσις τῆς ἐπιταχύνσεως, γ) ἡ κεντρομόλος δύναμις.
('Απ. α' 100π cm/sec. β' $400\pi^2$ cm/sec^2, πρὸς τὸ κέντρον. γ' $24\,500\pi^2$ dyn.)

301. Αὐτοκίνητον μάζης 1 600 kgr εἰσέρχεται ἐπὶ καμπυλογράμμου τροχιᾶς ἀκτῖνος καμπυλότητος 225 m μὲ ταχύτητα 72 km/h. Πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ κλίσις τῆς ὁδοῦ, ἵνα ἀποφευχθῇ κάθε παρέκκλισις. Πόση εἶναι τότε ἡ ἐξασκουμένη δύναμις ὑπὸ τοῦ ὀχήματος ἐπὶ τοῦ ἐδάφους. ($g = 9{,}8$ m/sec^2.) ('Απ. $11{,}4^0$, 1 888 kgr*.)

302. Λίθος μάζης 1 kgr συνδεδεμένος εἰς τὸ ἄκρον σχοινίου μήκους 0,5 m στρέφεται ἐπὶ κατοκρύφου ἐπιπέδου, ὥστε νὰ ἐκτελῇ 4 στρ./sec. Εἰς πόσην δύναμιν δύναται νὰ ἀντέχῃ τὸ σχοινίον. ('Απ. 33,195 kgr*.)

303. Λίθος μάζης 5 kgr εἶναι προσδεδεμένος εἰς τὸ ἄκρον σχοινίου μήκους 0,75 m καὶ ἐκτελεῖ κίνησιν κυκλικὴν ὁμαλήν, ἐπὶ κατακορύφου ἐπιπέδου. Ζητεῖται νὰ ὑπολογισθοῦν: α) Ἡ ἐλαχίστη γωνιακὴ ταχύτης περιστροφῆς ἵνα μὴ πέσῃ ὁ λίθος. β) Ἡ γωνιακὴ ταχύτης περιστροφῆς ἵνα τὸ σχοινίον, τοῦ ὁποίου τὸ ὅριον θραύσεως εἶναι 30 kgr*, θραυσθῇ. Νὰ γενικευθῇ τὸ πρόβλημα ἐκφράζοντες ἀντιστοίχως διὰ m τὴν μᾶζα τοῦ λίθου, r τὸ μῆκος τοῦ σχοινίου καὶ F τὴν ὁρικὴν δύναμιν θραύσεως τοῦ σχοινίου.
$$\left(\text{'Απ. } 3{,}6 \text{ rad/sec, } 8{,}1 \text{ rad/sec, } \omega = \sqrt{\frac{g}{r}},\ \omega = \sqrt{\frac{F - m\cdot g}{m\cdot r}} \right)$$

304. Ἁμαξοστοιχία κινεῖται μὲ σταθερὰν ταχύτητα 54 km/h ἐπὶ καμπύλης τροχιᾶς ἀκτῖνος 300 m. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ δύναμις ἡ ὁποία ἀναγκάζει ταξειδιώτην μάζης 75 kgr νὰ ἀκολουθῇ τὴν τροχιὰν ταύτην. (Ἀπ. 5,734 kgr*.)

305. Ποδηλατιστής, τοῦ ὁποίου ἡ μᾶζα μετὰ τοῦ ποδηλάτου εἶναι 90 kgr, μετατοπίζεται ἐπὶ στίβου ὁριζοντίου καὶ κυκλικοῦ ἀκτῖνος 50 m καὶ ὑπὸ ταχύτητα 27 km/h. Νὰ ὑπολογισθῇ : α) Ἡ κεντρομόλος δύναμις τὴν ὁποίαν ὑφίσταται ὁ ποδηλατιστὴς καὶ β) ἡ κλίσις τοῦ ποδηλατιστοῦ ὡς πρὸς τὴν κατακόρυφον. ($g = 980$ cm/sec^2.) (Ἀπ. 10,332 kgr*, $\alpha = 6^o\ 33'$.)

306. Ἀτμομηχανὴ 150 τόννων εἰσέρχεται ἐπὶ καμπύλης τροχιᾶς ἀκτῖνος 500 m καὶ ὑπὸ ταχύτητα 72 km/h. Νὰ ὑπολογισθοῦν: α) Ἡ κεντρομόλος δύναμις εἰς τὴν ὁποίαν ὑπόκειται ἡ ἀτμομηχανή. β) Ἡ διαφορὰ ὕψους μεταξὺ ἐξωτερικῆς καὶ ἐσωτερικῆς σιδηροτροχιᾶς, γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ ἐσωτερικὴ ἀπόστασις τῶν σιδηροτροχιῶν ἐπὶ κανονικῆς ὁδοῦ εἶναι 1,44 m καὶ ὅτι τὸ πλάτος ἑκάστης εἶναι 6 cm. ($g = 980$ cm/sec^2.) (Ἀπ. α′ 12 245 kgr*. β′ 12,24 cm.)

307. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ γραμμικὴ ταχύτης τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ ἔχῃ ἀνοικτὸν δοχεῖον περιστρεφόμενον ἐπὶ κατακορύφου ἐπιπέδου, ἵνα τὸ ὑγρὸν τὸ ὁποῖον περιέχει μὴ χυθῇ. Ἀριθμητικὴ ἐφαρμογή : Ἀκτὶς τῆς διαγραφομένης περιφερείας 1,25 m, ἐπιτάχυνσις τῆς βαρύτητος 9,81 m/sec^2. (Ἀπ. $\upsilon \geqslant \sqrt{g \cdot r}$, 350 cm/sec.)

308. Εἰς ἕνα κατακόρυφον ἄξονα προσδένεται διὰ λεπτοῦ νήματος μήκους 1,5 m σῶμα μάζης 75 kgr καὶ περιστρέφεται περὶ τὸν ἄξονα τοῦτον, ὥστε νὰ ἐκτελῇ 100 στρ./min. Ποίαν γωνίαν σχηματίζει τὸ νῆμα μετὰ τοῦ ἄξονος καὶ ποία ἡ τάσις τοῦ νήματος. (Ἀπ. $\varphi = \pm 86^o\ 35'$, $T = 1\,258$ kgr*.)

309. Ἡ ἀντοχὴ θραύσεως σχοινίου μήκους 49 cm εἶναι 2 kgr*. Μᾶζα 500 gr προσαρμόζεται εἰς τὸ ἄκρον τοῦ σχοινίου καὶ περιστρέφεται ἐπὶ ὁριζοντίου κύκλου. (Ἡ βαρύτης δὲν λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν). Νὰ προσδιορισθῇ ὁ μέγιστος ἀριθμὸς στροφῶν ἀνὰ sec, ὁ ὁποῖος δύναται νὰ δοθῇ εἰς τὴν μᾶζαν χωρὶς νὰ θραυσθῇ τὸ σχοινίον. (Ἀπ. 1,42 στρ./sec.)

310. Εἰς χειροκίνητον φυγόκεντρον μὲ δύο σωλῆνας, ὁ στρόφαλος ἐκτελεῖ 100 στρ./min. Ὅταν εἰς μίαν στροφὴν τοῦ στροφάλου ἀντιστοιχοῦν 16 στροφαὶ τοῦ κατακορύφου ἄξονος φυγοκεντρήσεως καὶ ἡ μέση ἀπόστασις ἑκάστου περιστρεφομένου σωλῆνος ἀπὸ τοῦ ἄξονος τούτου εἶναι εἰς τὴν ὁριζοντίαν θέσιν 10 cm, τότε πόσας φορὰς τὸ ἐκ τῆς φυγοκεντρήσεως εἶναι ἰσχυρότερον τοῦ πεδίου τῆς βαρύτητος εἰς τὴν μέσην ταύτην ἀπόστασιν τῶν 10 cm. ($g = 981$ cm/sec^2.) Ἐὰν τὴν κίνησιν διὰ χειρὸς ἀντικαταστήσωμεν διὰ κινήσεως δι' ἠλεκτροκινητῆρος, πόσας στρ./sec δέον νὰ ἐκτελῇ ὁ ἄξων φυγοκεντρήσεως, ἵνα ἔχωμεν πεδίον ἐκ φυγοκεντρήσεως 1 000 φορὰς μεγαλυτέρον τοῦ πεδίου τῆς βαρύτητος. (Ἀπ. α′ 286. β′ 49,8 στρ./sec.)
(Γεωπονικὴ Σχολὴ Ἀθηνῶν, 1956.)

311. Δυναμόμετρον εἶναι βαθμολογημένον εἰς kgr* καὶ δὲν δύναται νὰ μετρήσῃ ὀλιγώτερον ἀπὸ 100 gr*. Ἐξ αὐτοῦ ἐξαρτᾶται μᾶζα 10 kgr καὶ τοποθετεῖται ἐντὸς ἀνελκυστῆρος. Ποῖαι αἱ ἐνδείξεις τοῦ δυναμομέτρου, α) ὅταν ὁ ἀνεκλυστὴρ ἀνυψοῦται μὲ κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην καὶ ἐπιτάχυνσιν 200 cm/sec^2, β) ὅταν ἡ ταχύτης εἶναι σταθερὰ καὶ γ) ὅταν ἡ κίνησις αὐτοῦ εἶναι ἐπιβραδυνομένη καὶ ἡ ἐπιτάχυνσις λαμβάνῃ τὴν αὐτὴν ἀπόλυτον τιμήν. (Ἀπ. α′ 12 kgr*. β′ 10 kgr*. γ′ 8 kgr*.)

312. Σχοινίον διερχόμενον ὑπὸ τροχαλίας ἄνευ τριβῆς ὑποβαστάζει μᾶζαν 7 gr ἐξηρτημένην ἀπὸ τὸ ἓν ἄκρον αὐτῆς καὶ μᾶζαν 9 gr ἐξηρτημένην ἀπὸ τὸ ἕτερον ἄκρον. Νὰ προσδιορισθῇ ἡ ἐπιτάχυνσις τοῦ συστήματος καὶ ἡ τάσις τοῦ σχοινίου. (Ἀπ. $\gamma = 122$ cm/sec^2, $T = 7{,}9$ gr*.)

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Γ΄

313. Μᾶζα 5 kgr ὑφίσταται ἐπιτάχυνσιν 2 m/sec^2. Νὰ εὑρεθῇ ἡ δύναμις ἡ ἐνεργοῦσα ἐπὶ τοῦ σώματος.

314. Πόσον τὸ βάρος σώματος μάζης 9 kgr, εἰς τόπον ὅπου ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς βαρύτητος εἶναι $g = 9{,}81$ m/sec^2.

315. Δύναμις 1 960 dyn ἐπενεργεῖ ἐπὶ σώματος ἐπὶ 3 min καὶ μεταδίδει εἰς αὐτὸ ταχύτητα 20 cm/sec. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ μᾶζα τοῦ σώματος.

316. Δύναμις 1 kgr* ἐφαρμόζεται ἐπὶ 5 min ἐπὶ μάζης 50 kgr δυναμένης νὰ κινῆται ἐλευθέρως. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀναπτυσσομένη ταχύτης καὶ ἡ ἐπιτάχυνσις.

317. Ἀτμομηχανὴ μάζης 100 τόννων ἔχει ταχύτητα 72 km/h. Σταθερὰ δύναμις μεταδίδει εἰς αὐτὴν ἐπιτάχυνσιν $\gamma = -1$ m/sec^2. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐπιβραδύνουσα δύναμις.

318. Πόσος χρόνος ἀπαιτεῖται, ἵνα σιδηροδρομικὸς συρμὸς μάζης 25 τόννων ἀποκτήσῃ, ὑπὸ τὴν ἐπενέργειαν δυνάμεως 50 kgr*, ταχύτητα 2 m/sec ἐπὶ ὁριζοντίου ἐδάφους.

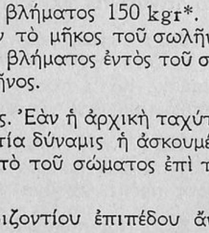
319. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ δύναμις τὴν ὁποίαν ἀσκεῖ σῶμα μάζης 65 kgr ἐπὶ τῆς βάσεως ἀνελκυστῆρος : α) Ὅταν εὑρίσκεται ἐν ἠρεμίᾳ, β) ὅταν ἀνέρχεται ὑπὸ σταθερὰν ταχύτητα 1,20 m/sec, γ) ὅταν κατέρχεται ὑπὸ ταχύτητα 1,20 m/sec, δ) ὅταν ἀνέρχεται ὑπὸ σταθερὰν ἐπιτάχυνσιν 1,20 m/sec^2, ε) ὅταν κατέρχεται ὑπὸ σταθερὰν ἐπιτάχυνσιν 1,20 m/sec^2.

320. Πόσον πρέπει νὰ εἶναι τὸ μῆκος τοῦ σωλῆνος πυροβόλου προωρισμένου νὰ ρίπτῃ ὀβίδας μάζης 7,5 kgr ὑπὸ ταχύτητα 600 m/sec, εἰς τρόπον ὥστε ἡ ἐξασκουμένη ὑπὸ τῆς ὀβίδος δύναμις νὰ μὴ ὑπερβαίνῃ τὰ 90 000 kgr*.

321. Πυροβόλον ἔχει μῆκος σωλῆνος 15 m καὶ βάρος βλήματος 150 kgr*. Ἡ ὤθησις τοῦ βλήματος ὑπὸ τῶν ἀερίων θεωρεῖται καθ' ὅλον τὸ μῆκος τοῦ σωλῆνος σταθερὰ καὶ ἴση πρὸς 100 000 kgr*. Ποία ἡ ἐπιτάχυνσις τοῦ βλήματος ἐντὸς τοῦ σωλῆνος καὶ ποία ἡ ταχύτης αὐτοῦ εἰς τὴν ἔξοδον τοῦ σωλῆνος.

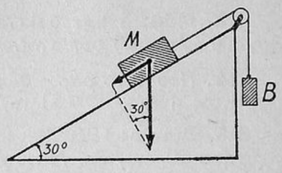
322. Σῶμα μάζης 4 kgr ὀλισθαίνει ἐπὶ ὁριζοντίου ἐδάφους. Ἐὰν ἡ ἀρχικὴ ταχύτης εἶναι 2 m/sec καὶ τὸ σῶμα ἠρεμῇ ἐντὸς 4 sec, πόση ἡ ὁριζοντία δύναμις ἡ ἀσκουμένη ἐπὶ τοῦ σώματος. Πόση ἡ ὁριζοντία δύναμις ἡ ἀσκουμένη ὑπὸ τοῦ σώματος ἐπὶ τοῦ ἐδάφους.

323. Ἕλκυθρον μάζης $M = 10$ kgr ὀλισθαίνει ἐπὶ ὁριζοντίου ἐπιπέδου ἄνευ τριβῆς. Τὸ ἕλκυθρον εἶναι προσδεδεμένον διὰ νήματος, ἀμελητέου βάρους, καὶ διέρχεται διὰ τροχαλίας, ἀμελητέας μάζης, τὸ νῆμα δὲ εἰς τὸ ἕτερον ἄκρον αὐτοῦ φέρει μᾶζαν $m = 2$ kgr (βλ. σχῆμα). Ζητεῖται τὸ διανυόμενον διάστημα εἰς 2 sec, τοῦ συστήματος ἀφιεμένου ἐλευθέρου, ἄνευ ἀρχικῆς ταχύτητος. ($g = 981$ cm/sec^2.)



324. Ἁμαξοστοιχία, τῆς ὁποίας ἡ μᾶζα εἶναι 720 τόννοι, κινεῖται ὁριζοντίως ὑπὸ ταχύτητα 54 km/h. Νὰ ὑπολογισθοῦν α) ἡ δύναμις ἡ ὁποία πρέπει νὰ ἐφαρμοσθῇ εἰς τὰς τροχοπέδας, ἵνα αὕτη σταματήσῃ ἀφοῦ διανύσῃ διάστημα 300 m, καὶ β) ὁ χρόνος ὁ ὁποῖος παρέρχεται ἀπὸ τὴν στιγμὴν ἐπενεργείας τῶν τροχοπεδῶν μέχρις ὅτου αὕτη σταματήσῃ. ($g = 9{,}80$ m/sec^2.)

325. Σῶμα μάζης $M = 5$ kgr εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας λείου κεκλιμένου ἐπιπέδου σχηματίζοντος γωνίαν 30° ὡς πρὸς τὴν ὁριζοντίαν. Τὸ σῶμα τοῦτο συνδέεται πρὸς σχοινίον τὸ ὁποῖον διέρχεται διὰ τροχαλίας, ἄνευ τριβῆς, καὶ εἰς τὸ ἄκρον τοῦ ὁποίου ἐξαρτᾶται σῶμα Β βάρους 4 kgr*, ὡς δεικνύεται εἰς τὸ σχῆμα. Νὰ ὑπολογισθῇ: α) ἡ ἐπιτάχυνσις καὶ β) ἡ ταχύτης τοῦ σώματος 4 kgr, ὅταν τοῦτο ἔχῃ διανύσει διάστημα 7,5 m ἀπὸ τῆς θέσεως ἠρεμίας.



326. Ἀνελκυστὴρ μάζης 900 kgr κατέρχεται κατακορύφως. Κατὰ τὴν ἐκκίνησίν του ἡ ἐπιτάχυνσις εἶναι 600 cm/sec^2. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τάσις τοῦ σχοινίου κατὰ τὴν ἐκκίνησιν.

327. Πόση δύναμις διευθυνομένη πρὸς τὰ ἄνω πρέπει νὰ ἐπενεργῇ ἐπὶ σώματος βάρους 50 kgr*, διὰ νὰ ἀναγκάζεται αὐτὸ νὰ κινῆται ὑπὸ ἐπιτάχυνσιν 300 cm/sec^2.

328. Σῶμα μάζης 1,2 kgr περιστρέφεται διὰ σχοινίου μήκους 1 m. (Ἡ δύναμις τῆς βαρύτητος παραλείπεται). Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τάσις τοῦ σχοινίου α) ὅταν ἡ ταχύτης εἶναι 2,4 m/sec, β) ὅταν ἡ συχνότης εἶναι 2 στρ./sec.

329. Ἐπὶ σώματος βάρους 4 kgr* εὑρισκομένου ἀρχικῶς ἐν ἠρεμίᾳ ἐπενεργεῖ δύναμις 180 gr* ἐπὶ 14 sec. Εἰς μεταγενεστέραν χρονικὴν στιγμὴν τὸ σῶμα εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν 81,9 m ἀπὸ τοῦ σημείου τῆς ἐκκινήσεως. Νὰ περιγραφῇ ἡ ὅλη κίνησις τοῦ σώματος καὶ νὰ ὑπολογισθῇ λογιστικῶς. ($g = 10$ m/sec^2.) (Ε. Μ. Πολυτεχνεῖον, Σχολὴ Πολιτικῶν Μηχανικῶν, 1956.)

330. Ἀεροπλάνον διαγράφον κυκλικὴν τροχιὰν δέον νὰ μὴ ὑφίσταται ἐπιτάχυνσιν μεγαλυτέραν ἀπὸ 7 g. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐλαχίστη ἀκτὶς τροχιᾶς, ὅταν κινῆται ὑπὸ ταχύτητα 500 km/h.

331. Συρμὸς μάζης 400 τόννων διέρχεται διὰ τροχιᾶς ἀκτῖνος καμπυλότητος 900 m ὑπὸ ταχύτητα 72 km/h. Μὲ πόσην δύναμιν ὁ συρμὸς πιέζει πλευρικῶς τὴν γραμμήν. Κατὰ πόσον πρέπει ἡ ἐξωτερικὴ σιδηροτροχιὰ νὰ ὑψωθῇ, ὥστε ἡ δύναμις ἡ ἀσκουμένη ἐπὶ τῆς σιδηροτροχιᾶς νὰ εἶναι κάθετος ἐπ' αὐτήν.

332. Ἀπὸ νῆμα μήκους 80 cm παρουσιάζον ὅριον θραύσεως 8 kgr* ἐξαρτᾶται σφαῖρα μολύβδου μάζης 500 gr ἡ ὁποία τίθεται εἰς περιστροφικὴν κίνησιν. Πόσος πρέπει νὰ εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν στροφῶν, ἵνα τὸ νῆμα θραυσθῇ.

333. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ταχύτης μὲ τὴν ὁποίαν θὰ ἔπρεπε νὰ περιστρέφεται ἡ Γῆ περὶ τὸν ἄξονά της, εἰς τρόπον ὥστε τὸ 1/4 τοῦ βάρους ἀνθρώπου εὑρισκομένου εἰς τὸν Ἰσημερινὸν νὰ ἐξουδετεροῦται ἐκ τοῦ φυγοκεντρικοῦ ἀποτελέσματος. Ἡ ἀκτὶς τοῦ Ἰσημερινοῦ εἶναι 4 000 μίλια. (1 μίλιον = 1 609 m.)

334. Συρμὸς κινεῖται ἐπὶ καμπύλης τροχιᾶς ἀκτῖνος 170 m ὑπὸ ταχύτητα 50 km/h. Πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ κλίσις τῆς τροχιᾶς, ὥστε ἡ δύναμις ἡ ἀσκουμένη ἐπὶ ἑκάστης σιδηροτροχιᾶς νὰ εἶναι ἡ αὐτή.

335. Κατὰ πόσον ἐλαττοῦται ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς βαρύτητος λόγῳ περιστροφῆς τῆς Γῆς α) εἰς τὸν Ἰσημερινόν, β) εἰς πλάτος $\varphi = 49{,}5^\circ$, γ) εἰς τὸν Πόλον. (Ἀκτὶς τῆς Γῆς $R = 6{,}377 \cdot 10^6$ m.)

336. Πόση ἔπρεπε νὰ εἶναι ἡ ἀρχικὴ ταχύτης βλήματος βαλλομένου ὁριζοντίως (παραλειπομένης τῆς τριβῆς λόγῳ ἀντιστάσεως τοῦ ἀέρος), εἰς τρόπον ὥστε τοῦτο νὰ ἠδύνατο νὰ περιστρέφεται εἰς σταθερὰν ἀπόστασιν περὶ τὴν Γῆν ὡς μία μικρὰ Σελήνη.

337. Σιδηροδρομικὸς συρμὸς κινούμενος ὑπὸ ταχύτητα 72 km/h καὶ ἔχων μᾶζαν 1 200 kgr προσκρούει ἐπὶ κωλύματος, εἰς τρόπον ὥστε ἀφοῦ διανύσῃ διάστημα 80 cm σταματᾷ. Ζητεῖται ποία δύναμις ἀκινήτησε τὸν συρμόν.

338. Σῶμα βάρους 1 kgr* εἶναι προσδεδεμένον εἰς τὸ ἓν ἄκρον σχοινίου καὶ περιστρέφεται ἐπὶ ὁριζοντίου κύκλου ἀκτῖνος 1,2 m, ἐκτελεῖ δὲ 3 στρ./sec. (Τὸ σχοινίον διατίθεται ὁριζοντίως, δηλ. ἡ ἕλξις τῆς Γῆς παραλείπεται.) Νὰ ὑπολογισθῇ α) ἡ γραμμικὴ ταχύτης εἰς m/sec, β) ἡ ἐπιτάχυνσις, γ) ἡ δύναμις τὴν ὁποίαν ἀσκεῖ τὸ σχοινίον ἐπὶ τοῦ σώματος καὶ δ) ἡ δύναμις τὴν ὁποίαν ἀσκεῖ τὸ σῶμα ἐπὶ τοῦ σχοινίου· ε) τί θὰ συμβῇ, ὅταν τὸ σχοινίον θραυσθῇ.

339. Ἓν σύγχρονον ἀεριοπροωθούμενον ἀεροπλάνον ἀναπτύσσει ταχύτητα 900 km/h. Πόση πρέπει νὰ εἶναι κατ' ἐλάχιστον ἡ ἀκτὶς ὁριζοντίως διαγραφομένου κύκλου, ἵνα ἡ ἀναπτυσσομένη φυγόκεντρος ἐπιτάχυνσις μὴ ὑπερβαίνῃ τὸ ἐννεαπλάσιον τῆς ἐπιταχύνσεως τῆς βαρύτητος. (Μεγαλυτέραν ἐπιτάχυνσιν δὲν δύναται νὰ ὑποφέρῃ τὸ ἀνθρώπινον σῶμα.)

340. Φυγοκεντρικὴ μηχανὴ γάλακτος φέρει τύμπανον διαμέτρου 60 cm τὸ ὁποῖον ἐκτελεῖ 5 400 στρ./min. Πόση δύναμις ἀναπτύσσεται ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ τυμπάνου, τὸ ὁποῖον προκαλεῖ διὰ φυγοκεντρήσεως τὸν ἀποχωρισμὸν τῶν λιποσφαιρίων τοῦ γάλακτος, ὅταν ἕκαστον λιποσφαίριον ἔχῃ διάμετρον 0,3 mm, ἡ δὲ πυκνότης τοῦ λίπους εἶναι $\rho = 0{,}93$ gr/cm^3.

341. Πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ γωνία κλίσεως στίβου ποδηλατοδρομίου ἀκτῖνος καμπυλότητος 280 m, ἵνα ποδηλάτης κινῆται μετ' ἀσφαλείας ἐπὶ τοῦ στίβου ὑπὸ ταχύτητα 160 km/h.

342. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ φυγόκεντρος δύναμις ἡ ὁποία ἐξασκεῖται λόγῳ τῆς περιστροφῆς τῆς Γῆς ἐπὶ σώματος ἔχοντος μᾶζαν m καὶ εὑρισκομένου εἰς σημεῖον τοῦ Ἰσημερινοῦ τῆς Γῆς. (Ἀκτὶς τῆς Γῆς $R = 6{,}377 \cdot 10^6$ m.)

343. Ἁμαξοστοιχία κινεῖται ὑπὸ σταθερὰν ταχύτητα 72 km/h ἐπὶ καμπύλης τροχιᾶς ἀκτῖνος 500 m. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ δύναμις ἥτις ἀναγκάζει ταξειδιώτην βάρους 70 kgr* νὰ ἀκολουθῇ τὴν τροχιὰν ταύτην. ($g = 9{,}81$ m/sec^2.)

344. Σφαῖρα μάζης 1 kgr προσδεδεμένη εἰς τὸ ἄκρον σχοινίου διαγράφει κύκλον ἀκτῖνος 1,5 m ἐν ὁριζοντίῳ ἐπιπέδῳ, ὑπὸ ταχύτητα 3 m/sec. Πόση ἡ κεντρομόλος δύναμις. Πόση ἡ γωνία τὴν ὁποίαν σχηματίζει τὸ σχοινίον πρὸς τὴν ὁριζοντίαν. Πόση ἡ τάσις τοῦ σχοινίου.

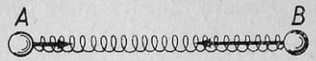
345. Ποῖος ὁ ἐλάχιστος ἀριθμὸς στροφῶν ἀνὰ λεπτὸν (στρ./min), τοὺς ὁποίους πρέπει νὰ ἐκτελῇ ἐπὶ κατακορύφου ἐπιπέδου ἀνοικτὸν δοχεῖον πλῆρες ὕδατος, ἵνα μὴ πίπτῃ τὸ ὕδωρ ἐξ αὐτοῦ. Ἀριθμητικὴ ἐφαρμογή: Ἀκτὶς τῆς διαγραφομένης περιφερείας 1,25 m, ἐπιτάχυνσις τῆς βαρύτητος 9,80 m/sec^2.

346. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ δύναμις ἡ ἐξασκουμένη πρὸς τὰ ἔνδον εἰς ἑκάστην σφαῖραν ρυθμιστοῦ ἀτμοστροβίλου (ρυθμιστὴς τοῦ Watt) καθ' ἣν στιγμὴν διαγράφει κύκλον ἀκτῖνος 30 cm, ὅταν στρέφεται ὑπὸ 100 στρ./min καὶ ὅταν ἡ σφαῖρα ζυγίζῃ 1,3 kgr*.

347. Σχοινίον διερχόμενον ἀπὸ τροχαλίας ἄνευ τριβῆς φέρει βάρος 2 kgr* προσδεδεμένον εἰς τὸ ἓν ἄκρον αὐτοῦ καὶ βάρος 6 kgr* προσδεδεμένον εἰς τὸ ἕτερον ἄκρον. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐπιτάχυνσις τοῦ συστήματος καὶ ἡ τάσις τοῦ σχοινίου.

348. Σῶμα μάζης 1 kgr συγκρούεται πρὸς δεύτερον σῶμα ἀγνώστου μάζης. Εἰς ὡρισμένην στιγμὴν ἡ ἐπιτάχυνσις τοῦ σώματος 1 kgr εἶναι 4 m/sec^2 καὶ τοῦ δευτέρου σώματος 0,5 m/sec^2. Πόση ἡ μᾶζα τοῦ δευτέρου σώματος.

349. Σῶμα μάζης 4 kgr καὶ ἕτερον μάζης 3 kgr συνδέονται πρὸς τὰ ἄκρα ἐλατηρίου τὸ ὁποῖον διατείνεται. Ἐὰν τὰ δύο σώματα ἐλευθερωθοῦν ταυτοχρόνως καὶ ἡ ἀρχικὴ ἐπιτάχυνσις τοῦ σώματος 4 kgr εἶναι 1,5 m/sec^2, πόση θὰ εἶναι ἡ ἐπιτάχυνσις τοῦ σώματος μάζης 3 kgr.



350. Εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα, ἐὰν τὸ σῶμα μάζης 3 kgr ἀντικατασταθῇ ὑπὸ σώματος μάζης 8 kgr, πόση θὰ εἶναι ἡ ἀρχικὴ ἐπιτάχυνσις αὐτοῦ ἐὰν ἡ ἐπιτάχυνσις τοῦ σώματος 4 kgr εἶναι 1,5 m/sec^2.

351. Κατὰ τὴν ἀλληλεπενέργειαν μεταξὺ δύο σωμάτων μάζης 2 kgr καὶ 3 kgr τὸ σῶμα τῶν 2 kgr ὑφίσταται ἐπιτάχυνσιν 3 m/sec^2. Πόση ἡ δύναμις ἡ ἐπενεργοῦσα ἐπὶ τοῦ σώματος τῶν 2 kgr. Πόση ἡ δύναμις ἡ ἐπενεργοῦσα ἐπὶ τοῦ σώματος 3 kgr. Πόση ἡ ἐπιτάχυνσις τοῦ σώματος 3 kgr.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ΄

ΒΑΡΥΤΗΣ

ΕΛΕΥΘΕΡΑ ΠΤΩΣΙΣ ΤΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ. ΒΟΛΑΙ. ΚΕΝΤΡΟΝ ΒΑΡΟΥΣ. ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ. ΠΑΓΚΟΣΜΙΟΣ ΕΛΞΙΣ

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Α΄

352. Σφαῖρα πίπτει ἐλευθέρως ἐξ ὕψους καὶ συναντᾷ τὸ ἔδαφος ἐντὸς 3 sec. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος ἐξ οὗ ἐβλήθη. ($g = 9{,}81$ m/sec^2.)

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν h τὸ ὕψος ἐκ τοῦ ὁποίου πίπτει ἡ σφαῖρα ἐλευθέρως, κατακορύφως πρὸς τὰ κάτω, καὶ t τὸν ἀπαιτούμενον πρὸς τοῦτο χρόνον, ἐπειδὴ ἡ κίνησις εἶναι εὐθύγραμμος ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένη ($\gamma = g$) καὶ ἡ ἀρχικὴ ταχύτης τῆς σφαίρας εἶναι μηδὲν ($\upsilon_0 = 0$), θὰ ἰσχύῃ ὁ τύπος:

$$h = \frac{1}{2}\, g \cdot t^2$$

Ἐργαζόμενοι εἰς τὸ Τεχνικὸν Σύστημα θὰ ἔχωμεν:

$$\underline{h} = \frac{1}{2} \cdot 9{,}81 \cdot 3^2 = \underline{44{,}14\ m.}$$

353. Λίθος βάλλεται ἀπὸ τοῦ στομίου φρέατος μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα 30 m/sec καὶ φθάνει εἰς τὸν πυθμένα ἐντὸς 2 sec. Πόσον τὸ βάθος τοῦ φρέατος.

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν υ_0 τὴν ἀρχικὴν ταχύτητα μὲ τὴν ὁποίαν βάλλεται ὁ λίθος πρὸς τὰ κάτω (κατακορύφως), θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις:

$$h = \upsilon_0 \cdot t + \frac{1}{2}\, g \cdot t^2$$

Ἐργαζόμενοι εἰς τὸ Τεχνικὸν Σύστημα εὑρίσκομεν ὅτι τὸ βάθος τοῦ φρέατος θὰ εἶναι:

$$\underline{h} = 30 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 9{,}81 \cdot 2^2 = \underline{79{,}62\ m.}$$

354. Σῶμα πίπτει ἐλευθέρως ἐπὶ 6 sec. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ διάστημα τὸ διανυόμενον εἰς τὰ τελευταῖα 2 sec. ($g = 9{,}81$ m/sec².)

Λύσις. Τὸ σῶμα κατὰ τὴν ἐλευθέραν πτῶσιν του διανύει εἰς χρόνον $t_1 = 6$ sec διάστημα $s_1 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_1^2$ καὶ εἰς χρόνον $t_2 = 4$ sec διάστημα $s_2 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_2^2$. Συνεπῶς κατὰ τὴν διάρκειαν τῶν τελευταίων 2 sec τῆς κινήσεώς του θὰ διανύσῃ διάστημα:

$$s = \frac{1}{2} g \cdot t_1^2 - \frac{1}{2} g \cdot t_2^2 = \frac{1}{2} g \, (t_1^2 - t_2^2)$$

Θέτομεν τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως, ἐργαζόμενοι εἰς τὸ Τεχνικὸν Σύστημα, καὶ εὑρίσκομεν:

$$\underline{s} = \frac{1}{2} \cdot 9{,}81 \cdot (6^2 - 4^2) = \underline{98{,}1 \text{ m.}}$$

355. Ἀπὸ κατερχομένου ἀεροστάτου καὶ ἐξ ἀποστάσεως 100 m ἀπὸ τοῦ ἐδάφους ἀφίεται νὰ πέσῃ σῶμα. Πόση εἶναι ἡ ταχύτης καθόδου τοῦ ἀεροστάτου, ὅταν τὸ σῶμα φθάνῃ εἰς τὸ ἔδαφος ἐντὸς 2 sec. ($g = 9{,}81$ m/sec².)

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν υ_0 τὴν ταχύτητα ὑπὸ τὴν ὁποίαν κατέρχεται τὸ ἀερόστατον, ἡ ταχύτης αὕτη θὰ εἶναι καὶ ἡ ἀρχικὴ ταχύτης ὑπὸ τὴν ὁποίαν πίπτει τὸ σῶμα τὸ ὁποῖον ἀφίεται ἀπὸ τοῦ ἀεροστάτου καὶ ἑπομένως θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις:

$$h = \upsilon_0 \cdot t + \frac{1}{2} g \cdot t^2 \quad \text{ἢ} \quad \upsilon_0 = \frac{h}{t} - \frac{1}{2} g \cdot t$$

Ἐπειδὴ δὲ $h = 100$ m, $t = 2$ sec καὶ $g = 9{,}81$ m/sec², εὑρίσκομεν:

$$\underline{\upsilon_0} = \frac{100}{2} - \frac{1}{2} \cdot 9{,}81 \cdot 2 = \underline{40{,}19 \text{ m/sec.}}$$

356. Ἐκ ποίου ὕψους πρέπει νὰ πέσῃ ἄνθρωπος, ἵνα ὅταν φθάσῃ εἰς τὸ ἔδαφος ἔχῃ τὸ αὐτὸ συναίσθημα πρὸς ἀλεξιπτωτιστήν, ὁ ὁποῖος προσγειοῦται μὲ ταχύτητα 8 m/sec. ($g = 9{,}81$ m/sec².)

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν υ τὴν ταχύτητα ὑπὸ τὴν ὁποίαν φθάνει ὁ ἄνθρωπος εἰς τὸ ἔδαφος καὶ t τὸν χρόνον καθόδου, θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις:

$$\upsilon = g \cdot t \tag{1}$$

Ἐπίσης, ἐὰν h εἶναι τὸ ὕψος ἐκ τοῦ ὁποίου πίπτει ὁ ἀλεξιπτωτιστής, θὰ ἰσχύῃ καὶ ἡ σχέσις:

$$h = \frac{1}{2} g \cdot t^2 \tag{2}$$

Ἐκ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2), δι' ἀπαλοιφῆς τοῦ χρόνου t, λαμβάνομεν τὴν σχέσιν:

$$h = \frac{\upsilon^2}{2g}$$

Ἐκ τῶν δεδομένων τῆς ἀσκήσεως, $\upsilon = 8$ m/sec καὶ $g = 9{,}81$ m/sec², προκύπτει ὅτι τὸ ὕψος ἐκ τοῦ ὁποίου πρέπει νὰ πέσῃ ὁ ἄνθρωπος εἶναι:

$$\underline{h = 3{,}26 \text{ m.}}$$

357. Σῶμα ἐλευθέρως πῖπτον ἔχει εἰς τὸ σημεῖον Α ταχύτητα 40 cm/sec καὶ εἰς τὸ κατώτερον σημεῖον Β ταχύτητα 150 cm/sec. Πόσον τὸ μῆκος τοῦ τμήματος ΑΒ. ($g = 9{,}81$ cm/sec².)

Λύσις. Ἐὰν τὸ σῶμα ἀναχωρῇ ἀπὸ ἓν σημεῖον Ο (τῆς κατακορύφου ΑΒ) καὶ φθάνῃ εἰς τὸ σημεῖον Α εἰς χρόνον t_1 καὶ ὑπὸ ταχύτητα υ_1, τότε θὰ ἰσχύουν αἱ σχέσεις:

$$OA = \frac{1}{2} g \cdot t_1^2 \;(1) \quad \text{καὶ} \quad \upsilon_1 = g \cdot t_1 \tag{2}$$

Ἐκ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν, δι' ἀπαλοιφῆς τοῦ χρόνου t, ὅτι:

$$OA = \frac{\upsilon_1^2}{2g} \qquad (3)$$

Ἐπίσης, ἐὰν τὸ σῶμα ἀπὸ τοῦ σημείου O φθάνῃ εἰς τὸ σημεῖον B εἰς χρόνον t_2 καὶ ὑπὸ ταχύτητα υ_2, θὰ ἰσχύουν αἱ σχέσεις:

$$OB = \frac{1}{2} g \cdot t_2^2 \quad (4) \qquad \text{καὶ} \qquad \upsilon_2 = g \cdot t_2 \qquad (5)$$

Ἐκ τῶν σχέσεων (4) καὶ (5) εὑρίσκομεν, δι' ἀπαλοιφῆς τοῦ χρόνου t_2, ὅτι:

$$OB = \frac{\upsilon_2^2}{2g} \qquad (6)$$

Ἐὰν τώρα ἀφαιρέσωμεν τὴν (3) ἀπὸ τὴν (6), λαμβάνομεν:

$$AB = \frac{\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2}{2g} \qquad (7)$$

Ὁπότε, δι' ἀντικαταστάσεως τῶν μεγεθῶν τῆς σχέσεως (7) διὰ τῶν τιμῶν τῆς ἀσκήσεως, εὑρίσκομεν ὅτι τὸ διάστημα AB εἶναι εἰς τὸ σύστημα C. G. S.:

$$\underline{AB} = \frac{150^2 - 40^2}{2 \cdot 981} = \underline{10{,}6 \text{ cm.}}$$

358. Ἀπὸ τῆς κορυφῆς φρέατος βάθους 20 m ἀφίεται νὰ πίπτῃ σφαῖρα καὶ μετὰ πάροδον 1 sec ἀφίεται νὰ πίπτῃ καὶ δευτέρα σφαῖρα. Εἰς ποῖον ὕψος ἀπὸ τοῦ πυθμένος θὰ εὑρίσκεται ἡ δευτέρα σφαῖρα, ὅταν ἡ πρώτη φθάνῃ εἰς τὸν πυθμένα. ($g = 10$ m·sec^{-2}.)

Λύσις. Ἔστω ὅτι ἡ πρώτη σφαῖρα φθάνει εἰς τὸν πυθμένα εἰς χρόνον t. Τότε θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις:

$$h = \frac{1}{2} g \cdot t^2 \qquad (1)$$

καὶ θὰ ἔχωμεν:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \qquad (2)$$

Ἡ δευτέρα σφαῖρα, ἐφ' ὅσον ἀφίεται μετὰ πάροδον 1 sec ἀπὸ τὴν πρώτην, θὰ ἔχῃ κινηθῆ, ὅταν ἡ δευτέρα ἐγγίζῃ τὸν πυθμένα, ἐπὶ χρόνον $t - 1$. Δηλαδή:

$$t - 1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} - 1 \qquad (3)$$

Ἑπομένως ἡ δευτέρα σφαῖρα θὰ ἔχῃ κατέλθει κατὰ τὸ χρονικὸν τοῦτο διάστημα κατὰ h', ὑπολογιζόμενον ἐκ τῆς σχέσεως:

$$h' = \frac{1}{2} g \left(\sqrt{\frac{2h}{g}} - 1\right)^2 \qquad (4)$$

Ὅταν ἡ πρώτη σφαῖρα φθάσῃ εἰς τὸν πυθμένα, δηλαδὴ εἰς βάθος h, ἡ δευτέρα θὰ ἔχῃ κατέλθει κατὰ h' καὶ θὰ ἀπέχῃ ἀπὸ τοῦ πυθμένος ἀπόστασιν:

$$x = h - h' \qquad (5)$$

Ἡ σχέσις (5), βάσει τῶν σχέσεων (1) καὶ (4), γράφεται:

$$x = h - \frac{1}{2} g \left(\sqrt{\frac{2h}{g}} - 1\right)^2$$

Ἐκ τῶν δεδομένων τῆς ἀσκήσεως: $h = 20$ m καὶ $g = 10$ m/sec^2, εὑρίσκομεν ὅτι:

$$\underline{x = 15 \text{ m.}}$$

359. Ἀπὸ γεφύρας ὕψους 40 m βάλλεται κατακορύφως πρὸς τὰ ἄνω σῶμα μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα 5 m/sec. Μὲ πόσην ταχύτητα καὶ μετὰ πόσον χρόνον συναντᾷ τὸ σῶμα τὸ ὕδωρ κάτωθεν τῆς γεφύρας. ($g = 10$ m/sec².)

Λύσις. Ὅταν τὸ σῶμα ἀνέλθῃ εἰς τὸ μέγιστον ὕψος εἰς χρόνον t, τότε ἡ ταχύτης αὐτοῦ υ θὰ εἶναι μηδὲν καὶ θὰ ἔχωμεν ἐκ τῆς γνωστῆς σχέσεως:

$$υ = υ_0 - g \cdot t \quad (1)$$

ὅτι:

$$0 = υ_0 - g \cdot t \quad (2)$$

Συνεπῶς τὸ σῶμα, διὰ νὰ ἀνέλθῃ εἰς τὸ μέγιστον ὕψος, θὰ δαπανήσῃ χρόνον:

$$t = \frac{υ_0}{g} \quad (3)$$

Τὸ μέγιστον ὕψος ($h_{μέγ.}$) εἰς τὸ ὁποῖον θὰ ἀνέλθῃ εἶναι, ὡς γνωστόν:

$$h_{μέγ.} = \frac{υ_0^2}{2g} \quad (4)$$

Ἐὰν καλέσωμεν h τὸ ὕψος τῆς γεφύρας, τότε προφανῶς τὸ σῶμα κατερχόμενον ἐκ τοῦ μεγίστου ὕψους μέχρι τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὕδατος θὰ ἔχῃ διανύσει συνολικῶς διάστημα:

$$h' = h_{μέγ.} + h \quad (5)$$

Λόγῳ τῆς σχέσεως (4) ἡ σχέσις (5) γράφεται:

$$h' = \frac{υ_0^2}{2g} + h \quad (6)$$

Ἐπίσης, ἐὰν καλέσωμεν t_1 τὸν χρόνον καθόδου τοῦ σώματος, πίπτοντος ἐκ τοῦ μεγίστου ὕψους μέχρι τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὕδατος, θὰ ἔχωμεν:

$$h' = \frac{1}{2} g \cdot t_1^2 \quad (7)$$

ὅτε, βάσει τῆς σχέσεως (6), ἡ σχέσις (7) γράφεται:

$$\frac{1}{2} g \cdot t_1^2 = \frac{υ_0^2}{2g} + h \quad (8)$$

Λύομεν τὴν σχέσιν (8) ὡς πρὸς τὸν χρόνον t_1 καὶ λαμβάνομεν:

$$t_1 = \frac{\sqrt{υ_0^2 + 2g \cdot h}}{g} \quad (9)$$

Ὁ συνολικὸς ἑπομένως ζητούμενος χρόνος θὰ εἶναι:

$$t_{ὁλ.} = t + t_1 = \frac{υ_0}{g} + \frac{\sqrt{υ_0^2 + 2g \cdot h}}{g}$$

Οὕτω ἐκ τῶν δεδομένων τῆς ἀσκήσεως προκύπτει ὅτι:

$$\underline{t_{ὁλ.}} = 0{,}5 + 2{,}87 = \underline{3{,}37 \text{ sec.}}$$

Ἡ ταχύτης ὑπὸ τὴν ὁποίαν συναντᾷ τὸ ὕδωρ θὰ εἶναι:

$$\underline{υ} = g \cdot t_1 = 10 \cdot 2{,}87 = \underline{28{,}7 \text{ m/sec.}}$$

360. Βλῆμα βάλλεται κατακορύφως πρὸς τὰ ἄνω μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα 900 m/sec καὶ λόγῳ τῆς ἀντιστάσεως τοῦ ἀέρος ἀνέρχεται εἰς ὕψος 8 600 m. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τοῦ ὕψους τούτου πρὸς τὸ ὕψος εἰς τὸ ὁποῖον θὰ ἀνήρχετο ἐν τῷ κενῷ. ($g = 10$ m/sec².)

Λύσις. Ἐπειδὴ ἡ κίνησις τοῦ βλήματος εἰς τὸ κενὸν εἶναι εὐθύγραμμος ὁμαλῶς ἐπιβραδυνομένη, θὰ ἰσχύουν αἱ σχέσεις:

$$υ = υ_0 - g \cdot t \quad (1)$$

$$h = υ_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2 \quad (2)$$

Εἰς τὸ μέγιστον ὅμως ὕψος $h_{μέγ.}$ αὐτοῦ ἡ ταχύτης υ εἶναι μηδὲν καὶ συνεπῶς ἐκ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) προκύπτει ὅτι:

$$h_{μέγ.} = \frac{υ_0^2}{2g} \qquad (3)$$

Ἐκ τῆς σχέσεως (3), δι' ἀντικαταστάσεως διὰ τῶν δεδομένων, εὑρίσκομεν ὅτι τὸ βλῆμα θὰ ἀνήρχετο εἰς τὸ κενὸν εἰς ὕψος:

$$h_{μέγ.} = \frac{900^2}{2 \cdot 10} = 40\,500 \text{ m.}$$

Ἄρα ὁ λόγος τοῦ ὕψους εἰς τὸ ὁποῖον ἀνέρχεται πράγματι τὸ βλῆμα ὡς πρὸς τὸ ὕψος εἰς τὸ ὁποῖον θὰ ἀνήρχετο εἰς τὸ κενὸν εἶναι:

$$\frac{8\,600}{40\,500} = \underline{0{,}212.}$$

361. Μὲ πόσην ταχύτητα πρέπει νὰ βληθῇ σῶμα κατακορύφως πρὸς τὰ ἄνω, ἵνα τὸ μέγιστον ὕψος εἶναι 20 m. Πόση ἡ ταχύτης αὐτοῦ εἰς ὕψος ἴσον πρὸς τὸ ἥμισυ τοῦ μεγίστου. ($g = 9{,}81$ m/sec².)

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν t τὸν χρόνον ἀνόδου, $h_{μέγ.}$ τὸ μέγιστον ὕψος εἰς τὸ ὁποῖον ἀνέρχεται τὸ σῶμα καὶ $υ_0$ τὴν ἀρχικὴν ταχύτητα τοῦ βλήματος, θὰ ἰσχύουν αἱ σχέσεις:

$$0 = υ_0 - γ \cdot t \qquad (υ = 0) \qquad (1)$$

$$h_{μέγ.} = υ_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2 \qquad (2)$$

Δι' ἀπαλοιφῆς τοῦ t μεταξὺ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) λαμβάνομεν:

$$h_{μέγ.} = \frac{υ_0^2}{2g} \qquad (3)$$

Λύομεν τὴν σχέσιν (3) ὡς πρὸς $υ_0$ καὶ ἔχομεν:

$$υ_0 = \sqrt{2g \cdot h_{μέγ.}}$$

Δι' ἀντικαταστάσεως τῶν μεγεθῶν διὰ τῶν δεδομένων τιμῶν τῆς ἀσκήσεως προκύπτει:

$$\underline{υ_0 = 19{,}8 \text{ m/sec.}}$$

Ἐὰν καλέσωμεν $υ_0'$ τὴν ζητουμένην ταχύτητα τοῦ βλήματος εἰς ὕψος $h_{μέγ.}/2$, τότε τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὸ ἑξῆς: Πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ ταχύτης $υ_0'$ τοῦ βλήματος, ἵνα τοῦτο ἀνέλθῃ εἰς ὕψος $h_{μέγ.}/2$.

Οὕτω ἐκ τῆς σχέσεως (3), δι' ἀντικαταστάσεως τοῦ $υ_0$ διὰ τοῦ $υ_0'$ καὶ τοῦ $h_{μέγ.}$ διὰ τοῦ $h_{μέγ.}/2$, προκύπτει ἡ σχέσις:

$$\frac{h_{μέγ.}}{2} = \frac{υ_0'^2}{2g} \qquad ἢ \qquad υ_0' = \sqrt{g \cdot h_{μέγ.}}$$

Ἐκ τῶν δεδομένων τῆς ἀσκήσεως, ἐπειδὴ $h_{μέγ.} = 20$ m καὶ $g = 9{,}81$ m/sec², εὑρίσκομεν:

$$\underline{υ_0'} = \sqrt{20 \cdot 9{,}81} = \underline{14 \text{ m/sec.}}$$

362. Μὲ πόσην ἀρχικὴν ταχύτητα πρέπει νὰ βληθῇ σῶμα ἐξ ὕψους 10 m κατακορύφως πρὸς τὰ κάτω, ἵνα τοῦτο φθάνῃ εἰς τὸ ἔδαφος μὲ ταχύτητα 20 m/sec. Πόσον χρόνον θὰ χρειασθῇ τὸ σῶμα διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὸ ἔδαφος. ($g = 9{,}81$ m/sec².)

Λύσις. Ἐπειδὴ ἡ κίνησις εἶναι εὐθύγραμμος ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένη, θὰ ἰσχύουν αἱ σχέσεις:

$$υ = υ_0 + g \cdot t \qquad (1)$$

$$h = υ_0 \cdot t + \frac{1}{2} g \cdot t^2 \qquad (2)$$

Ἐὰν λύσωμεν τὴν (1) ὡς πρὸς t καὶ τὴν προκύπτουσαν τιμὴν τοῦ t θέσωμεν εἰς τὴν (2), λαμβάνομεν τὴν σχέσιν :

$$\upsilon_0 = \sqrt{\upsilon^2 - 2g \cdot h} \qquad (3)$$

Ἐκ τῆς σχέσεως (3), θέτοντες τὰς δεδομένας τιμὰς τῆς ἀσκήσεως : $\upsilon = 20$ m/sec, $h = 10$ m, εὑρίσκομεν :

$$\underline{\upsilon_0 = 14{,}3 \text{ m/sec.}}$$

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν χρόνον ὁ ὁποῖος ἀπαιτεῖται, ἵνα τὸ σῶμα φθάσῃ εἰς τὸ ἔδαφος, λύομεν τὴν σχέσιν (1) ὡς πρὸς τὸν χρόνον t καὶ λαμβάνομεν :

$$t = \frac{\upsilon - \upsilon_0}{g} \qquad (4)$$

Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν σχέσιν (4) τῶν μεγεθῶν διὰ τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν των εὑρίσκομεν :

$$\underline{t = 0{,}58 \text{ sec.}}$$

363. Μὲ πόσην ἀρχικὴν ταχύτητα πρέπει σῶμα νὰ βληθῇ ἐξ ὕψους 10 m κατακορύφως πρὸς τὰ κάτω, ἵνα τοῦτο φθάσῃ εἰς τὸ ἔδαφος ἐντὸς 1 sec. Πόση εἶναι ἡ τελικὴ ταχύτης. ($g = 9{,}81$ m/sec^2.)

Λύσις. Ἐπειδὴ ἡ κίνησις εἶναι ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένη, θὰ ἰσχύουν αἱ σχέσεις :

$$h = \upsilon_0 \cdot t + \frac{1}{2} g \cdot t^2 \qquad (1)$$

$$\upsilon = \upsilon_0 + g \cdot t \qquad (2)$$

Διὰ τὴν εὕρεσιν τῆς ἀρχικῆς ταχύτητος υ_0, λύομεν τὴν σχέσιν (1) ὡς πρὸς υ_0 καὶ λαμβάνομεν :

$$\upsilon_0 = \frac{h}{t} - \frac{1}{2} g \cdot t \qquad (3)$$

Ἐκ τῆς (3), δι' ἀντικαταστάσεως τῶν μεγεθῶν διὰ τῶν δεδομένων τῆς ἀσκήσεως, προκύπτει :

$$\underline{\upsilon_0 = 5{,}1 \text{ m/sec.}}$$

Ἡ τελικὴ ταχύτης υ εὑρίσκεται ἐκ τῆς σχέσεως (2) ὅτι εἶναι :

$$\underline{\upsilon = 14{,}91 \text{ m/sec.}}$$

364. Σῶμα βάλλεται κατακορύφως πρὸς τὰ ἄνω ἐκ τοῦ ἐδάφους μὲ ταχύτητα 10 m/sec. Εἰς ποῖον ὕψος ἀπὸ τοῦ ἐδάφους θὰ εὑρίσκεται τὸ σῶμα μετὰ πάροδον 2 sec. ($g = 10$ m/sec^2.)

Λύσις. Ἐφ' ὅσον τὸ σῶμα βάλλεται πρὸς τὰ ἄνω καὶ κατακορύφως, θὰ ἔχῃ κίνησιν εὐθύγραμμον ὁμαλῶς ἐπιβραδυνομένην καὶ θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις :

$$h = \upsilon_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

Ἐκ τῆς σχέσεως ταύτης, ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν τὰ μεγέθη διὰ τῶν τιμῶν τῆς ἀσκήσεως, λαμβάνομεν :

$$\underline{h} = 10 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 2^2 = \underline{0}$$

Ἡ τιμὴ $h = 0$ σημαίνει ὅτι τὸ σῶμα μετὰ πάροδον 2 sec θὰ εὑρίσκεται εἰς τὸ σημεῖον ἀπὸ τοῦ ὁποίου ἐβλήθη, δηλ. εἰς τὸ ἔδαφος.

365. Σῶμα βάλλεται ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω ὑπὸ ταχύτητα 20 m/sec. Εἰς ποῖον ὕψος ἀπὸ τοῦ ἐδάφους ἡ ταχύτης θὰ ἔχῃ ἐλαττωθῇ εἰς τὸ 1)4 τῆς ἀρχικῆς. ($g = 9{,}81$ m/sec^2.)

Λύσις. Ἡ κίνησις εἶναι εὐθύγραμμος ὁμαλῶς ἐπιβραδυνομένη καὶ θὰ ἰσχύουν αἱ σχέσεις :

$$\upsilon = \upsilon_0 - g \cdot t \qquad (1)$$

$$h = \upsilon_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2 \qquad (2)$$

Δι' ἀπαλοιφῆς τοῦ χρόνου t μεταξὺ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) λαμβάνομεν τὴν σχέσιν :

$$h = \frac{\upsilon_0^2 - \upsilon^2}{2g} \qquad (3)$$

Θέτοντες τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως εἰς τὴν σχέσιν (3) εὑρίσκομεν :

$$\underline{h} = \frac{20^2 - 5^2}{2 \cdot 9{,}81} = \underline{19{,}13 \text{ m.}}$$

366. Σῶμα πίπτει ἐλευθέρως ἐξ ὕψους 20 m. Ταυτοχρόνως δεύτερον σῶμα βάλλεται κατακορύφως πρὸς τὰ ἄνω μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα 15 m/sec. Πότε καὶ εἰς ποῖον ὕψος ἀπὸ τοῦ ἐδάφους συναντῶνται τὰ σώματα. ($g = 10$ m/sec^2.)

Λύσις. Ἔστω ὅτι τὸ πρῶτον σῶμα ἀφίεται ἀπὸ τοῦ σημείου Α καὶ τὸ δεύτερον σῶμα ὅτι βάλλεται ἀπὸ τοῦ Β πρὸς τὰ ἄνω καὶ ἔστω ἐπίσης ὅτι τὰ δύο σώματα συναντῶνται εἰς τὸ σημεῖον Γ τῆς κατακορύφου ΑΒ (βλ. σχῆμα). Ἐπειδὴ τὰ δύο σώματα ἀναχωροῦν συγχρόνως, τὰ διαστήματα ΑΓ καὶ ΒΓ διανύονται ὑπ' αὐτῶν ἐντὸς τοῦ αὐτοῦ χρόνου t. Ἄρα θὰ ἔχωμεν, διὰ τὸ πρῶτον σῶμα :

$$\text{ΑΓ} = \frac{1}{2} g \cdot t^2 \qquad (1)$$

καὶ διὰ τὸ δεύτερον :

$$\text{ΒΓ} = \upsilon_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2 \qquad (2)$$

Προσθέτοντες τὰς ἐξισώσεις (1) καὶ (2) κατὰ μέλη λαμβάνομεν :

$$\text{ΑΓ} + \text{ΒΓ} = \text{ΑΒ} = \upsilon_0 \cdot t \qquad (3)$$

Διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ χρόνου t κατὰ τὸν ὁποῖον συναντῶνται τὰ δύο σώματα, λύομεν τὴν σχέσιν (3) ὡς πρὸς t καὶ λαμβάνομεν :

$$t = \frac{\text{ΑΒ}}{\upsilon_0} \quad \text{ἐξ ἧς προκύπτει ὅτι :} \quad t = \frac{20}{15} = 1{,}33 \text{ sec}$$

ἤτοι ὁ χρόνος ὁ ὁποῖος θὰ χρειασθῇ ἵνα συναντηθοῦν εἶναι :

$$\underline{t = 1{,}33 \text{ sec.}}$$

Τὸ ὕψος ΒΓ εἰς τὸ ὁποῖον συναντῶνται εὑρίσκεται ἐκ τῆς σχέσεως (2) ὅτι εἶναι :

$$\underline{\text{ΒΓ}} = 15 \cdot 1{,}3 - \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 1{,}33^2 = \underline{11{,}11 \text{ m.}}$$

367. Σῶμα βάλλεται κατακορύφως πρὸς τὰ ἄνω μὲ ταχύτητα 20 cm/sec. Κατὰ τὴν αὐτὴν στιγμὴν ἀπὸ τοῦ ἀνωτάτου σημείου, ὅπου δύναται νὰ φθάσῃ τὸ σῶμα, βάλλεται δεύτερον σῶμα πρὸς τὰ κάτω μὲ τὴν αὐτὴν ἀρχικὴν ταχύτητα. Πότε καὶ ποῦ συναντῶνται τὰ δύο σώματα. Ποῖαι αἱ ταχύτητες αὐτῶν κατὰ τὴν στιγμὴν ταύτην. ($g = 10$ m/sec^2.)

Λύσις. Τὸ πρῶτον σῶμα δύναται νὰ ἀνέλθῃ εἰς ὕψος $h_{\mu\acute{\varepsilon}\gamma.} = \frac{\upsilon_0^2}{2g}$ (1) (βλ. ἄσκησιν 360), ὅπου υ_0 ἡ ἀρχικὴ ταχύτης τοῦ σώματος.

Καλοῦμεν Β τὸ σημεῖον ἀπὸ τοῦ ὁποίου βάλλεται κατακορύφως τὸ πρῶτον σῶμα πρὸς τὰ ἄνω, Α τὸ σημεῖον ἀπὸ τοῦ ὁποίου βάλλεται κατακορύφως τὸ δεύτερον πρὸς τὰ κάτω, Γ τὸ σημεῖον τῆς κατακορύφου ΑΒ εἰς τὸ ὁποῖον συναντῶνται καὶ t τὸν χρόνον συναντήσεως αὐτῶν, ὅτε θὰ ἰσχύουν αἱ σχέσεις :

διὰ τὸ πρῶτον $\quad \text{ΒΓ} = \upsilon_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2 \qquad (2)$

διὰ τὸ δεύτερον $\quad \text{ΑΓ} = \upsilon_0 \cdot t + \frac{1}{2} g \cdot t^2 \qquad (3)$

Προσθέτομεν τὰς σχέσεις (2) καὶ (3) κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν :

$$\text{ΒΓ} + \text{ΑΓ} = \text{ΒΑ} = 2\,\upsilon_0 \cdot t \qquad (4)$$

Ἐπειδὴ ΒΑ εἶναι τὸ μέγιστον ὕψος εἰς τὸ ὁποῖον δύναται νὰ ἀνέλθῃ τὸ πρῶτον σῶμα, ἡ σχέσις (4) λόγῳ τῆς (1) γράφεται:

$$\frac{\upsilon_0^2}{2g} = 2\upsilon_0 \cdot t \quad \text{ἢ} \quad \frac{\upsilon_0}{2g} = 2t \tag{5}$$

Διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ ζητουμένου χρόνου t, λύομεν τὴν σχέσιν (5) ὡς πρὸς t καὶ ἔχομεν:

$$t = \frac{\upsilon_0}{4g} \tag{6}$$

Ἐκ τῶν δεδομένων τῆς ἀσκήσεως προκύπτει ὅτι ὁ ζητούμενος χρόνος εἶναι:

$$\underline{t} = \frac{20}{4 \cdot 10} = \underline{0{,}5 \text{ sec.}}$$

Τὸ ὕψος εἰς τὸ ὁποῖον θὰ συναντηθοῦν εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν σχέσιν (2) ὅτι εἶναι:

$$\underline{\text{ΒΓ}} = 20 \cdot 0{,}5 - \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 0{,}5^2 = \underline{8{,}75 \text{ m.}}$$

Διὰ τὴν εὕρεσιν τῶν ταχυτήτων τὰς ὁποίας ἔχουν τὰ σώματα εἰς τὸ σημεῖον Γ τῆς συναντήσεως αὐτῶν, καλοῦμεν υ_1 τὴν ταχύτητα τοῦ πρώτου καὶ υ_2 τὴν ταχύτητα τοῦ δευτέρου, ὁπότε θὰ ἰσχύουν αἱ σχέσεις:

$$\upsilon_1 = \upsilon_0 - g \cdot t \tag{7}$$

$$\upsilon_2 = \upsilon_0 + g \cdot t \tag{8}$$

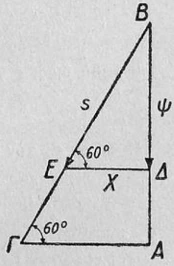
Ἐκ τῶν σχέσεων (7) καὶ (8) εὑρίσκομεν τελικῶς ὅτι:

$$\underline{\upsilon_1} = 20 - 10 \cdot 0{,}5 = \underline{15 \text{ m/sec}}$$

$$\underline{\upsilon_2} = 20 + 10 \cdot 0{,}5 = \underline{25 \text{ m/sec.}}$$

368. Σῶμα ὀλισθαίνει ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου. Τὸ ἐπίπεδον σχηματίζει γωνίαν 60⁰ ὡς πρὸς τὴν ὁριζοντίαν. Νὰ προσδιορισθῇ α) ἡ ὁριζοντία ἀπόστασις Χ καὶ β) ἡ κατακόρυφος ἀπόστασις Ψ, τὴν ὁποίαν θὰ διανύσῃ τὸ σῶμα ἐντὸς 5 sec. ($g = 10$ m/sec².)

Λύσις. Ἔστω ὅτι τὸ σῶμα ἀφίεται ἀπὸ τὴν κορυφὴν Β τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου ΒΓ. Τὸ σῶμα, ὡς γνωστόν, θὰ ὀλισθαίνῃ μὲ ἐπιτάχυνσιν $\gamma = g \cdot \text{ημ } 60^0$ καὶ ἑπομένως θὰ ἔχῃ διανύσει εἰς χρόνον t διάστημα:



$$s = \frac{1}{2}\gamma \cdot t^2 = \frac{1}{2} g \cdot \text{ημ } 60^0 \cdot t^2 \tag{1}$$

Ἡ ὁριζοντία ἀπόστασις Χ εὑρίσκεται, ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΒΔΕ, ὅτι εἶναι:

$$X = s \cdot \text{συν } 60^0 = \frac{1}{4} g \cdot \text{ημ } 60^0 \cdot t^2 \tag{2}$$

καὶ ἡ κατακόρυφος ἀπόστασις Ψ, ἀπὸ τὸ ἴδιον τρίγωνον, ὅτι εἶναι:

$$\Psi = s \cdot \text{ημ } 60^0 = \frac{1}{2} g \cdot \text{ημ}^2\, 60^0 \cdot t^2 \tag{3}$$

Θέτοντες εἰς τὰς σχέσεις (2) καὶ (3): ημ 60⁰ = 0,866, t = 5 sec, g = 10 m/sec², εὑρίσκομεν:

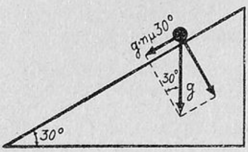
$$\underline{X = 54{,}1 \text{ m}}$$

καὶ

$$\underline{\Psi = 93{,}75 \text{ m.}}$$

369. Σῶμα ὀλισθαίνει ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου ὑπὸ γωνίαν 30° ὡς πρὸς τὴν ὁριζοντίαν. Νὰ ὑπολογισθῇ α) ἡ ταχύτης, ὅταν τὸ κινητὸν ἀναχωροῦν ἐκ τῆς ἠρεμίας διανύῃ 800 cm, καὶ β) ὁ χρόνος τὸν ὁποῖον χρειάζεται διὰ νὰ διανύσῃ τὸ διάστημα τοῦτο. ($g = 9{,}81$ m/sec².)

Λύσις. Ἐπειδὴ ἡ κίνησις εἶναι ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένη μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα μηδέν, θὰ ἰσχύουν αἱ σχέσεις:



$$\upsilon = \gamma \cdot t \quad (1) \qquad \text{καὶ} \qquad s = \frac{1}{2}\gamma \cdot t^2 \quad (2)$$

Εἰς τὸ κεκλιμένον ἐπίπεδον, ὑπὸ γωνίαν κλίσεως 30°, ἡ ἐπιτάχυνσις γ εἶναι, ὡς γνωστόν, $\gamma = g \cdot \eta\mu\, 30^0$. Ἄρα ἡ σχέσις (1) καὶ (2) γράφεται:

$$\upsilon = g \cdot \eta\mu\, 30^0 \cdot t \quad (3) \qquad \text{καὶ} \qquad s = \frac{1}{2} g \cdot \eta\mu\, 30^0 \cdot t^2 \quad (4)$$

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν χρόνον t, λύομεν τὴν σχέσιν (4) ὡς πρὸς t καὶ λαμβάνομεν:

$$t = \sqrt{\frac{2\,s}{g \cdot \eta\mu\, 30^0}} \qquad (5)$$

ὁπότε, συμφώνως πρὸς τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως, θὰ εὕρωμεν:

$$\underline{t = 1{,}8 \text{ sec.}}$$

Ἡ ταχύτης υ εὑρίσκεται ἐκ τῆς σχέσεως (3) ὅτι εἶναι:

$$\underline{\upsilon = 8{,}82 \text{ m/sec.}}$$

370. Σῶμα βάλλεται πρὸς τὰ ἄνω ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου γωνίας 30° ὡς πρὸς τὴν ὁριζοντίαν καὶ μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα 40 m/sec μετρουμένην κατὰ μῆκος τῆς κλίσεως. Νὰ εὑρεθῇ α) ὁ χρόνος ὁ ἀπαιτούμενος διὰ νὰ ἐπανέλθῃ τὸ σῶμα εἰς τὴν θέσιν ἐξ ἧς ἐβλήθη καὶ β) ἡ ἀπόστασις, τὴν ὁποίαν διήνυσε ἐπὶ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου. ($g = 9{,}81$ m/sec².)

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν γ τὴν ἐπιτάχυνσιν τὴν ὁποίαν ἔχει τὸ σῶμα ἐπὶ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου, υ_0 τὴν ἀρχικὴν ταχύτητα αὐτοῦ καὶ t τὸν χρόνον, τότε, ἐπειδὴ ἡ κίνησις εἶναι εὐθύγραμμος ὁμαλῶς ἐπιβραδυνομένη, τὸ διάστημα θὰ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου:

$$s = \upsilon_0 \cdot t - \frac{1}{2}\gamma \cdot t^2 \qquad (1)$$

Τὸ διάστημα ὅμως τὸ ὁποῖον διανύει τὸ σῶμα, ἐφ' ὅσον ἐπανέρχεται εἰς τὴν ἀρχικήν του θέσιν, εἶναι μηδέν, ἤτοι $s = 0$, καὶ συνεπῶς θὰ ἔχωμεν:

$$0 = \upsilon_0 \cdot t - \frac{1}{2}\gamma \cdot t^2 \quad \text{ἢ} \quad \left(\upsilon_0 - \frac{1}{2}\gamma \cdot t\right) \cdot t = 0 \qquad (2)$$

Ἐπειδὴ ὅμως ὁ χρόνος t δὲν εἶναι μηδέν, διαιροῦμεν διὰ t καὶ ἔχομεν:

$$\upsilon_0 - \frac{1}{2}\gamma \cdot t = 0 \quad \text{ἢ} \quad t = \frac{2\,\upsilon_0}{\gamma} \qquad (3)$$

Θέτοντες εἰς τὴν σχέσιν (3): $\gamma = g \cdot \eta\mu\, 30^0$ (τύπος τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου), λαμβάνομεν:

$$t = \frac{2\,\upsilon_0}{g \cdot \eta\mu\, 30^0} \qquad (4)$$

ἐξ ἧς προκύπτει: $\underline{t = 16 \text{ sec.}}$

Ὁ χρόνος t = 16 sec εἶναι προφανῶς ὁ χρόνος $t_{\dot{\alpha}\nu.}$ τὸν ὁποῖον χρειάζεται τὸ κινητὸν διὰ νὰ ἀνέλθῃ εἰς τὸ ἀνώτατον σημεῖον τοῦ κεκλιμένου ἐπιδέδου καὶ ὁ χρόνος $t_{\kappa\alpha\theta.}$ ὁ χρόνος τὸν ὁποῖον χρειάζεται διὰ νὰ κατέλθῃ. Ἀλλά, ὡς γνωστόν, ὁ χρόνος ἀνόδου εἶναι ἴσος πρὸς τὸν χρόνον καθόδου καὶ συνεπῶς:

$$t_{\dot{\alpha}\nu.} = 8 \text{ sec.}$$

Ἡ ἀπόστασις x τὴν ὁποίαν διανύει ἐπὶ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου θὰ εἶναι συνεπῶς:

$$x = \upsilon_0 \cdot t_{\text{ἀν.}} - \frac{1}{2} g \cdot \text{ημ}\, 30^0 \cdot t^2_{\text{ἀν.}} \qquad (5)$$

Ἐκ τῆς σχέσεως (5) προκύπτει ὅτι:

$$\underline{x = 160 \text{ m.}}$$

371. Σφαῖρα πίπτουσα ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου ὑφίσταται εἰς ἕκαστον δευτερόλεπτον αὔξησιν τῆς ταχύτητός της κατὰ 5 cm/sec. Πόση ἡ ταχύτης αὐτῆς μετὰ πάροδον 10 sec καὶ πόσον διάστημα διήνυσε.

Λύσις. Ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς σφαίρας θὰ εἶναι προφανῶς $\gamma = 5$ cm/sec² καὶ ἑπομένως ἡ ταχύτης αὐτῆς μετὰ πάροδον 10 sec θὰ εἶναι:

$$\underline{\upsilon} = \gamma \cdot t = 5 \cdot 10 = \underline{50 \text{ cm/sec}}$$

καὶ τὸ διάστημα τὸ ὁποῖον διήνυσε:

$$\underline{s} = \frac{1}{2} \gamma \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 10^2 = \underline{250 \text{ cm.}}$$

372. Ἀπὸ τοῦ κατωτάτου ἄκρου κεκλιμένου ἐπιπέδου βάλλεται πρὸς τὰ ἄνω σφαῖρα μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα 1 m/sec. Ἡ ἐπιβράδυνσις εἶναι 20 cm/sec². Πόσον εἶναι τὸ μέγιστον διάστημα τὸ ὁποῖον διανύει ἡ σφαῖρα καὶ πόσον χρόνον ἐχρειάσθη. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ κατωτάτου ἄκρου τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου ἡ ταχύτης τῆς σφαίρας εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ἀρχικῆς.

Λύσις. Ἡ κίνησις εἶναι εὐθύγραμμος ὁμαλῶς ἐπιβραδυνομένη καὶ θὰ ἰσχύουν αἱ σχέσεις:

$$\upsilon = \upsilon_0 - \gamma \cdot t \qquad (1)$$

$$s = \upsilon_0 \cdot t - \frac{1}{2} \gamma \cdot t^2 \qquad (2)$$

Ἐπειδὴ ὅμως, ὅταν ἡ σφαῖρα διανύσῃ τὸ μέγιστον αὐτῆς διάστημα ($s_{\text{μέγ.}}$), ἡ τελικὴ ταχύτης αὐτῆς υ γίνεται μηδέν, αἱ σχέσεις (1) καὶ (2) γράφονται:

$$0 = \upsilon_0 - \gamma \cdot t \qquad (3)$$

$$s_{\text{μέγ.}} = \upsilon_0 \cdot t - \frac{1}{2} \gamma \cdot t^2 \qquad (4)$$

Ἐκ τῶν σχέσεων (3) καὶ (4), δι' ἀπαλοιφῆς τοῦ χρόνου t μεταξὺ αὐτῶν, εὑρίσκομεν ὅτι τὸ μέγιστον διάστημα τὸ ὁποῖον διανύει ἡ σφαῖρα εἶναι:

$$s_{\text{μέγ.}} = \frac{\upsilon_0^2}{2\gamma} \qquad (5)$$

Ἐργαζόμενοι εἰς τὸ σύστημα C.G.S. καὶ θέτοντες $\gamma = 20$ cm/sec², $\upsilon_0 = 100$ cm/sec εὑρίσκομεν ὅτι:

$$\underline{s_{\text{μέγ.}}} = \frac{100^2}{2 \cdot 20} = \underline{250 \text{ cm.}}$$

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν χρόνον t, λύομεν τὴν σχέσιν (3) ὡς πρὸς t, ὁπότε εὑρίσκομεν:

$$\underline{t} = \frac{\upsilon_0}{\gamma} = \frac{100}{20} = \underline{5 \text{ sec.}}$$

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ κατωτάτου σημείου τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ ταχύτης θὰ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ἀρχικῆς, θέτομεν εἰς τὴν σχέσιν (1): $\upsilon = \upsilon_0/2$, ὅτε λαμβάνομεν:

$$\frac{\upsilon_0}{2} = \upsilon_0 - \gamma \cdot t \qquad \text{καὶ} \qquad t = \frac{\upsilon_0}{2\gamma}$$

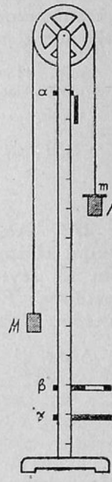
Ἀκολούθως θέτομεν τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ χρόνου εἰς τὴν σχέσιν (2) καὶ εὑρίσκομεν:

$$s = \frac{3}{8} \cdot \frac{\upsilon_0^2}{\gamma} \qquad (6)$$

ἐξ ἧς προκύπτει :

$$\underline{s = 187{,}5 \text{ cm}}.$$

373. Εἰς μηχανὴν Atwood οἱ δύο κύλινδροι ἔχουν ὁ εἷς μᾶζαν 500 gr καὶ ὁ ἄλλος 510 gr. Πόση ἡ ἐπιτάχυνσις τοῦ συστήματος, ὅταν κινῆται. ($g = 981$ cm/sec².)



Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν M τὴν μᾶζαν ἑκάστου κυλίνδρου καὶ m τὴν πρόσθετον μᾶζαν, ἡ ἐπιτάχυνσις, ὡς γνωστόν, θὰ δίδεται διὰ τοῦ τύπου :

$$\gamma = \frac{m \cdot g}{2M + m}$$

Ἐπειδὴ δὲ $m = 510 - 500 = 10$ gr καὶ $M = 500$ gr, εὑρίσκομεν :

$$\underline{\gamma} = \frac{10 \cdot 981}{2 \cdot 500 + 10} = \underline{9{,}7 \text{ cm/sec}^2}.$$

374. Εἰς μηχανὴν Atwood τὸ πρόσθετον βάρος εἶναι 6 gr* καὶ προκαλεῖ ἐπιτάχυνσιν 39,24 cm/sec². Νὰ εὑρεθῇ τὸ βάρος ἑκάστου τῶν κυλίνδρων τῆς μηχανῆς. ($g = 981$ cm/sec².)

Λύσις. Ὅπως καὶ εἰς τὴν προηγουμένην ἄσκησιν, οὕτω καὶ ἐνταῦθα ἡ ἐπιτάχυνσις δίδεται διὰ τοῦ τύπου :

$$\gamma = \frac{m \cdot g}{2M + m} \quad \text{ἢ} \quad \gamma = \frac{\beta \cdot g}{2B + \beta} \qquad (1)$$

ὅπου B εἶναι τὸ βάρος τῆς μάζης M καὶ β τὸ βάρος τῆς μάζης m.

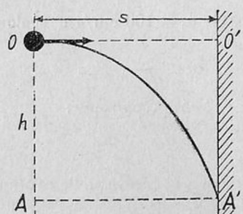
Ἐὰν τὴν σχέσιν (1) λύσωμεν ὡς πρὸς B, λαμβάνομεν :

$$B = \frac{\beta}{2}\left(\frac{g}{\gamma} - 1\right) \qquad (2)$$

Θέτομεν εἰς τὴν σχέσιν (2) : $\beta = 6$ gr*, $\gamma = 39{,}24$ cm, $g = 981$ cm/sec², καὶ εὑρίσκομεν :

$$\underline{B = 72 \text{ gr}^*}.$$

375. Ἐξ ἑνὸς σημείου O βάλλεται σφαῖρα ὁριζοντίως ὑπὸ ταχύτητα 10 m/sec κατὰ κατακορύφου τοίχου. Ἡ σφαῖρα συναντᾷ τὸν τοῖχον εἰς σημεῖον A′, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται κατὰ 40 cm κάτωθεν τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου τοῦ διερχομένου διὰ τῆς θέσεως βολῆς. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν εὑρίσκεται ὁ τοῖχος ἀπὸ τοῦ σημείου O. ($g = 9{,}81$ m/sec².)



Λύσις. Συμφώνως πρὸς τὴν ἀρχὴν τῆς ἀνεξαρτησίας τῶν κινήσεων δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ σφαῖρα πίπτει πρῶτον κατὰ διάστημα $OA = h$ μὲ κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην καὶ ἀκολούθως ὅτι κινεῖται ὁριζοντίως μὲ κίνησιν ὁμαλήν, ὑπὸ τὴν δεδομένην ἀρχικὴν ταχύτητα υ_0, καὶ διανύει τὸ διάστημα $AA' = s$. Οὕτω διὰ τὴν πρώτην κίνησιν τῆς σφαίρας θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις :

$$h = \frac{1}{2} g \cdot t^2 \qquad (1)$$

καὶ διὰ τὴν δευτέραν κίνησιν ἡ σχέσις :

$$s = \upsilon \cdot t \qquad (2)$$

Ἐκ τῶν δύο τούτων σχέσεων, δι' ἀπαλοιφῆς τοῦ χρόνου t μεταξὺ αὐτῶν, ἔχομεν :

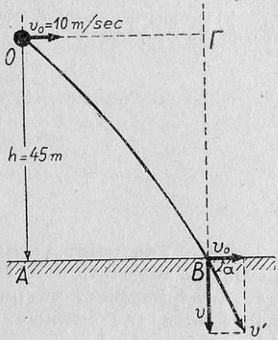
$$s = \upsilon \sqrt{\frac{2h}{g}} \qquad (3)$$

Ἐργαζόμενοι εἰς τὸ Τεχνικὸν Σύστημα, θέτομεν εἰς τὴν σχέσιν (3) τὰ δεδομένα: $h = 0{,}40$ m, $\upsilon = 10$ m/sec, $g = 9{,}81$ m/sec², καὶ εὑρίσκομεν:

$$\underline{s = 2{,}86 \text{ m}.}$$

376. Ἀπὸ τῆς στέγης πύργου ὕψους 45 m βάλλεται ὁριζοντίως λίθος μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα 10 m/sec. Μετὰ πόσον χρόνον ἀπὸ τῆς βολῆς καὶ εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τῆς βάσεως τοῦ πύργου συναντᾷ ὁ λίθος τὸ ἔδαφος. Πόση εἶναι ἡ ταχύτης αὐτοῦ κατὰ τὴν αὐτὴν στιγμὴν καὶ ἡ γωνία τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ διεύθυνσις τῆς ταχύτητος ὡς πρὸς τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον. ($g = 10$ m/sec².)

Λύσις. Ὁ λίθος φθάνει εἰς τὸ σημεῖον Β τοῦ ἐδάφους κινούμενος ἐπὶ τῆς καμπύλης ΟΒ ἔστω εἰς χρόνον t. Συμφώνως πρὸς τὴν Ἀρχὴν τῆς ἀνεξαρτησίας τῶν κινήσεων, δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ὅτι ὁ λίθος πίπτει πρῶτον κατακορύφως καὶ διανύει τὴν ἀπόστασιν ΟΑ = h μὲ κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην εἰς χρόνον t καὶ κατόπιν ὅτι κινεῖται ὁριζοντίως καὶ διανύει τὴν ἀπόστασιν ΑΒ = s μὲ σταθερὰν ταχύτητα υ_0, ἐπίσης εἰς χρόνον t.



Οὕτω, ἐπειδὴ ὁ ζητούμενος χρόνος t εἶναι ἴσος πρὸς τὸν χρόνον κατὰ τὸν ὁποῖον γίνεται ἡ κατακόρυφος κίνησις, δύναται νὰ εὑρεθῇ ἐκ τοῦ τύπου τῆς ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένης κινήσεως:

$$h = \frac{1}{2} g \cdot t^2 \qquad (1)$$

ὅτι εἶναι:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \qquad (2)$$

Θέτοντες εἰς τὴν σχέσιν (2): $h = 45$ m, $g = 10$ m/sec², εὑρίσκομεν:

$$\underline{t = 3 \text{ sec}.}$$

Κατὰ τὴν ὁριζοντίαν κίνησιν ὁ λίθος διανύει διάστημα:

$$s = \upsilon_0 \cdot t \qquad (3)$$

Θέτοντες εἰς τὴν σχέσιν (3): $\upsilon_0 = 10$ m/sec, $t = 3$ sec, εὑρίσκομεν ὅτι:

$$\underline{s = 30 \text{ m}.}$$

Καλοῦμεν υ′ τὴν ζητουμένην ταχύτητα ὑπὸ τὴν ὁποίαν πίπτει ὁ λίθος εἰς τὸ ἔδαφος, κινούμενος ἐπὶ τῆς καμπύλης ΟΒ. Τότε, ὡς ἐκ τοῦ σχήματος προκύπτει, θὰ ἔχωμεν:

$$\upsilon' = \sqrt{\upsilon_0^2 + \upsilon^2} \qquad (4)$$

Ἐπειδὴ ὅμως $\upsilon = g \cdot t$, ἡ σχέσις (4) γράφεται:

$$\upsilon' = \sqrt{\upsilon_0^2 + g^2 \cdot t^2} \qquad (5)$$

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως (5) προκύπτει ὅτι:

$$\underline{\upsilon' = 31{,}6 \text{ m/sec}.}$$

Ἡ διεύθυνσις τῆς ταχύτητος υ′ ὡς πρὸς τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον προσδιορίζεται, ἐὰν εὑρεθῇ ἡ γωνία α. Ἐπειδὴ δὲ $\varepsilon\varphi\,\alpha = \frac{g \cdot t}{\upsilon_0} = 3$, εὑρίσκομεν ὅτι:

$$\underline{\alpha = 71^\circ\ 34'.}$$

377. Ἀεροπλάνον ἵπταται ὁριζοντίως ὑπὸ ταχύτητα 400 km/h καὶ εἰς ὕψος 4 000 m. Ἐὰν ὁ ἀεροπόρος ἀφήσῃ ἀπὸ τοῦ ἀνωτέρου ὕψους βόμβαν, ὑπὸ ποίαν ταχύτητα φθάνει ἡ βόμβα εἰς τὸ ἔδαφος. ($g = 9{,}81$ m/sec².)

Λύσις. Ἡ βόμβα, ὅταν ἀφεθῇ ἐλευθέρα, δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν ὅτι ἐκτελεῖ δύο κινήσεις. Ἤτοι μίαν κατακόρυφον ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην καὶ μίαν ὁριζοντίαν ὁμαλὴν μὲ ταχύτητα υ_0, ἴσην πρὸς τὴν ταχύτητα τοῦ ἀεροπλάνου, συμφώνως πρὸς τὴν Ἀρχὴν τῆς ἀνεξαρτησίας τῶν κινήσεων.

Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ ὕψος ἀπὸ τοῦ ὁποίου ἀφίεται ἡ βόμβα εἶναι h, τότε διὰ τὴν κατακόρυφον κίνησιν ἰσχύει ἡ σχέσις :

$$h = \frac{1}{2} g \cdot t^2 \quad \text{ἢ} \quad t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \tag{1}$$

ὡς καὶ ἡ σχέσις :

$$\upsilon = g \cdot t. \tag{2}$$

Ἐκ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) προκύπτει ὅτι ἡ κατακόρυφος συνιστῶσα τῆς ζητουμένης ταχύτητος εἶναι :

$$\upsilon = g \sqrt{\frac{2h}{g}} \tag{3}$$

Ἡ ζητουμένη ταχύτης μὲ τὴν ὁποίαν φθάνει ἡ βόμβα εἰς τὸ ἔδαφος, κινουμένη ἐπὶ τῆς καμπύλης τροχιᾶς, θὰ εἶναι συνεπῶς :

$$\upsilon' = \sqrt{\upsilon_0^2 + \upsilon^2} \tag{4}$$

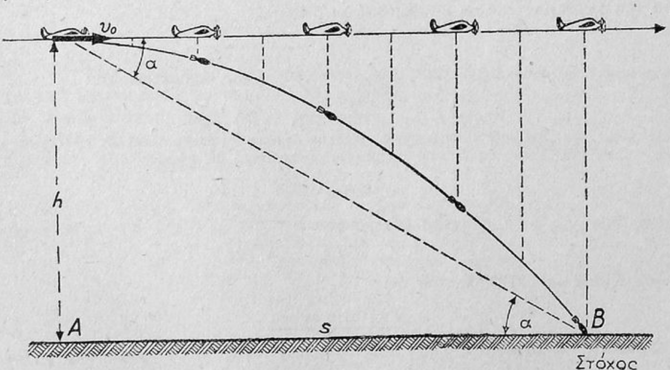
Θέτομεν εἰς τὴν σχέσιν (4) τὴν τιμὴν τοῦ υ ἐκ τῆς σχέσεως (3) καὶ λαμβάνομεν :

$$\upsilon' = \sqrt{\upsilon_0^2 + 2g \cdot h} \tag{5}$$

Ἐκ τῆς σχέσεως (5), δι' ἀντικαταστάσεως διὰ τῶν δεδομένων, εὑρίσκομεν ὅτι :

$$\underline{\upsilon' = 301{,}3 \text{ m/sec.}}$$

378. Ὑπὸ ποίαν γωνίαν, ὡς πρὸς τὴν ὁριζοντίαν, πρέπει ἀεροπόρος ἱπτάμενος ὑπὸ ταχύτητα $\upsilon_0 = 120$ m/sec καὶ εἰς ὕψος 4 000 m νὰ διοπτεύσῃ τὸν στόχον, ἵνα ἡ βόμβα ἐπιτύχῃ αὐτόν. Πῶς βλέπει τὴν βόμβαν κινουμένην ὁ ἀεροπόρος κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς πτώσεως αὐτῆς. ($g = 10$ m/sec², ἀντίστασις ἀέρος ἀμελητέα.)



Λύσις. Ἡ βόμβα διὰ νὰ πέσῃ θὰ χρειασθῇ χρόνον t, ὁ ὁποῖος εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν σχέσιν :

$$h = \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

ὅτι εἶναι :

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \tag{1}$$

Ἑπομένως, διὰ νὰ εὕρῃ τὸν στόχον, πρέπει νὰ ἀφεθῇ ἀπὸ ὁριζοντίαν ἀπόστασιν:

$$s = \upsilon_0 \cdot t = \upsilon_0 \sqrt{\frac{2h}{g}} \qquad (2)$$

Ὁ ἀεροπόρος πρέπει νὰ διοπτεύσῃ ὑπὸ γωνίαν α, ἡ ὁποία εὑρίσκεται εὐκόλως ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον τοῦ σχήματος, διότι:

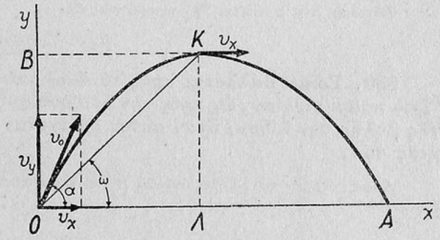
$$\text{εφ}\,\alpha = \frac{h}{s} \qquad (3)$$

Ἡ σχέσις (3), βάσει τῆς (2), γράφεται: $\text{εφ}\,\alpha = \frac{\sqrt{2\,g \cdot h}}{2\,\upsilon_0}$

ἐξ ἧς προκύπτει: $\underline{\alpha = 49^o\,40'}$.

Ἐπειδὴ ἡ βόμβα θὰ ἔχῃ εἰς τὴν ὁριζοντίαν της κίνησιν ταχύτητα ἴσην μὲ τὴν ταχύτητα τοῦ ἀεροπλάνου, ὁ ἀεροπόρος θὰ βλέπῃ τὴν βόμβαν διαρκῶς κάτωθεν αὐτοῦ ν' ἀπομακρύνεται μὲ κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην καὶ εὐθύγραμμον.

379. Λίθος βάλλεται ὑπὸ γωνίαν 60°, ὡς πρὸς τὴν ὁριζοντίαν, μὲ ταχύτητα 30 m/sec. Εἰς ποῖον ὕψος ἀνέρχεται οὗτος. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν συναντᾷ τὸ ἔδαφος. Εἰς ποίαν θέσιν εὑρίσκεται οὗτος μετὰ 3 sec. Πόση ἡ ταχύτης αὐτοῦ εἰς τὴν ἀνωτάτην θέσιν. (g = 10 m/sec².)



Λύσις. Κατὰ τὴν Ἀρχὴν τῆς ἀνεξαρτησίας τῶν κινήσεων, ὁ λίθος θὰ χρειασθῇ τὸν αὐτὸν χρόνον t εἴτε κινούμενος ὁριζοντίως μὲ σταθερὰν ταχύτητα $\upsilon_x = \upsilon_0 \cdot \text{συν}\,\alpha$, διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὸ σημεῖον Α, εἴτε διὰ νὰ ἀνέλθῃ εἰς τὸ σημεῖον Β καὶ ἀκολούθως νὰ ἐπιστρέψῃ πάλιν εἰς τὸ σημεῖον Ο, βαλλόμενος μὲ ταχύτητα $\upsilon_y = \upsilon_0 \cdot \text{ημ}\,\alpha$ κατακορύφως καὶ πρὸς τὰ ἄνω.

Ὁ χρόνος t ὑπολογίζεται ἐκ τοῦ τύπου τῆς ὁμαλῶς ἐπιβραδυνομένης κινήσεως:

$$h = \upsilon_y \cdot t - \frac{1}{2}\,g \cdot t^2 \qquad (1)$$

ὁ ὁποῖος ἰσχύει διὰ τὴν κατακόρυφον πρὸς τὰ ἄνω κίνησιν.

Ἐφ' ὅσον κατὰ τὴν κατακόρυφον κίνησιν ὁ λίθος ἐπιστρέφει εἰς τὸ σημεῖον ἀναχωρήσεως Ο, ἔπεται ὅτι τὸ διανυόμενον κατακορύφως διάστημα εἶναι μηδέν. Οὕτω, θέτοντες εἰς τὸν τύπον (1) h = 0, εὑρίσκομεν:

$$\frac{1}{2}\,g \cdot t^2 = \upsilon_y \cdot t \qquad (2)$$

ἤ, ἐπειδὴ τὸ t εἶναι διάφορον τοῦ μηδενός:

$$\frac{1}{2}\,g \cdot t = \upsilon_y \qquad (3)$$

Λύοντες τὴν σχέσιν (3) ὡς πρὸς t λαμβάνομεν:

$$t = \frac{2\,\upsilon_y}{g} = \frac{2\,\upsilon_0 \cdot \text{ημ}\,\alpha}{g} \qquad (4)$$

Συνεπῶς ἡ ἀπόστασις ΟΑ = R ὑπολογίζεται ἐκ τοῦ τύπου $R = \upsilon \cdot t$ τῆς ὁμαλῆς κινήσεως, ἐὰν θέσωμεν: $\upsilon = \upsilon_x = \upsilon_0 \cdot \text{συν}\,\alpha$ καὶ $t = \frac{2\,\upsilon_0 \cdot \text{ημ}\,\alpha}{g}$. Οὕτω λαμβάνομεν:

$$R = \frac{2\,\upsilon_0^2\,\text{ημ}\,\alpha \cdot \text{συν}\,\alpha}{g} \quad \text{ἢ} \quad \underline{R = \frac{\upsilon_0^2 \cdot \text{ημ}\,2\alpha}{g}} \quad \text{(τύπος βεληνεκοῦς)} \qquad (5)$$

Τὸ μέγιστον ὕψος ΟΒ εἰς τὸ ὁποῖον θὰ ἀνέλθῃ εὑρίσκεται ἐκ τοῦ τύπου (1), ἐὰν θέσωμεν $\upsilon_y = \upsilon_0 \cdot \eta\mu\ \alpha$ καὶ $t = \upsilon_0/g$. Οὕτω λαμβάνομεν :

$$h_{\mu\acute{\varepsilon}\gamma.} = \frac{\upsilon_0^2\ \eta\mu^2\ \alpha}{2\ g} \qquad (6)$$

Ἐκ τῶν σχέσεων (5) καὶ (6) εὑρίσκομεν, δι' ἀντικαταστάσεως διὰ τῶν δεδομένων τῆς ἀσκήσεως, ὅτι :

$$\underline{R = 77{,}9\ m} \qquad \text{καὶ} \qquad \underline{h_{\mu\acute{\varepsilon}\gamma.} = 33{,}75\ m.}$$

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν θέσιν εἰς τὴν ὁποίαν θὰ εἶναι ὁ λίθος μετὰ $t_1 = 3$ sec, ἂς καλέσωμεν x_1 τὴν ὁριζοντίαν ἀπόστασιν καὶ y_1 τὴν κατακόρυφον ἀπόστασιν, μετὰ τὴν πάροδον τοῦ ἀνωτέρω χρονικοῦ διαστήματος. Θὰ ἰσχύουν προφανῶς αἱ σχέσεις :

$$x_1 = \upsilon_0 \cdot \sigma\upsilon\nu\ \alpha \cdot t_1 \qquad (7)$$

$$y_1 = \upsilon_0 \cdot \eta\mu\ \alpha \cdot t_1 - \frac{1}{2}\ g \cdot t_1^2 \qquad (8)$$

Ἐκ τῶν σχέσεων (7) καὶ (8) εὑρίσκομεν :

$$\underline{x_1 = 45\ m} \qquad \text{καὶ} \qquad \underline{y_1 = 32{,}85\ m.}$$

Ἡ ζητουμένη ταχύτης εἰς τὴν ἀνωτάτην θέσιν Κ τῆς τροχιᾶς θὰ εἶναι ὁριζοντία καὶ συνεπῶς ἴση πρὸς υ_x. Ἄρα θὰ ἔχωμεν :

$$\upsilon_x = \upsilon_0 \cdot \sigma\upsilon\nu\ \alpha \qquad (9)$$

Οὕτω ἐκ τῆς σχέσεως (9) προκύπτει ὅτι :

$$\underline{\upsilon_x = 15\ m/sec.}$$

380. Σῶμα βάλλεται πρὸς τὰ ἄνω ὑπὸ γωνίαν 45° ὡς πρὸς τὴν ὁριζοντίαν. Ὑπὸ ποίαν γωνίαν, ὡς πρὸς τὴν ὁριζοντίαν, βλέπει παρατηρητὴς ἀπὸ τῆς θέσεως τῆς βολῆς τὸν λίθον, ὅταν οὗτος διέρχεται διὰ τοῦ ἀνωτάτου σημείου τῆς τροχιᾶς του.

Λύσις. Ὅταν τὸ βλῆμα ἀνέλθῃ εἰς τὸ ἀνώτατον ὕψος, θὰ εἶναι (βλ. σχῆμα προηγουμένης ἀσκήσεως) :

$$h_{\mu\acute{\varepsilon}\gamma.} = \mathrm{\Lambda K} = \frac{\upsilon_0^2 \cdot \eta\mu^2\ 45^0}{2\,g}$$

καὶ

$$\mathrm{O\Lambda} = \frac{\upsilon_0^2 \cdot \eta\mu\ (2 \cdot 45^0)}{2\,g}$$

(τὸ ἥμισυ τοῦ βεληνεκοῦς). Ἄρα :

$$\varepsilon\varphi\ \omega = \frac{\mathrm{\Lambda K}}{\mathrm{O\Lambda}} = \frac{\eta\mu^2\ 45^0}{\eta\mu\ 90^0} = 0{,}5$$

καὶ

$$\underline{\omega = 26^0\ 33'.}$$

381. Ὑπὸ ποίαν γωνίαν βολῆς, ὡς πρὸς τὴν ὁριζοντίαν, πρέπει νὰ βληθῇ βλῆμα πρὸς τὰ ἄνω, ἵνα ὑπὸ ἀρχικὴν ταχύτητα 10 m/sec συναντήσῃ τὸ ὁριζόντιον ἔδαφος εἰς ἀπόστασιν 5 m ἀπὸ τῆς θέσεως βολῆς. Πόσον εἶναι τὸ μέγιστον ὕψος ἀνόδου. ($g = 10$ m/sec².)

Λύσις. Ὁ τύπος τοῦ βεληνεκοῦς εἶναι (βλ. ἄσκησιν 379) :

$$R = \frac{\upsilon_0^2 \cdot \eta\mu\ 2\,\alpha}{g}$$

Ἑπομένως θὰ ἔχωμεν :

$$\eta\mu\ 2\alpha = \frac{R \cdot g}{\upsilon_0^2} = \frac{5 \cdot 10}{10^2} = 0{,}5$$

ἢ $2\alpha = 30^0$ καὶ $\underline{\alpha = 15^0}$.

Ἐπειδὴ ὅμως ημ 2α = ημ $(180^0 - 2\alpha)$, θὰ εἶναι καὶ $180^0 - 2\alpha = 30^0$

καὶ $\underline{\alpha = 75^0}$.

Ἄρα ὑπάρχουν δύο γωνίαι βολῆς διὰ τὸ αὐτὸ βεληνεκές, αἵτινες εἶναι συμπληρωματικαί:

$$15^0 + 75^0 = 90^0$$

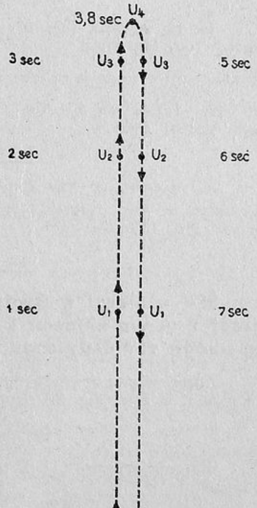
Τὸ μέγιστον ὕψος εὑρίσκεται ἐκ τοῦ τύπου:

$$h_{\mu\acute{\varepsilon}\gamma.} = \frac{\upsilon_0^2\,\eta\mu^2\alpha}{2g}$$

ὅτι εἶναι (βλ. ἄσκησιν 379) εἴτε: $\underline{h_{\mu\acute{\varepsilon}\gamma.}} = \frac{10^2 \cdot \eta\mu^2 15^0}{2 \cdot 10} = \underline{0{,}328\ m}$

ἢ $\underline{h'_{\mu\acute{\varepsilon}\gamma.}} = \frac{10^2 \cdot \eta\mu^2 75^0}{2 \cdot 10} = \underline{4{,}77\ m}$.

382. Λίθος βάλλεται κατακορύφως πρὸς τὰ ἄνω, μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα 38 m/sec (βλ. σχῆμα). Νὰ ὑπολογισθῇ: α) Ὁ χρόνος τὸν ὁποῖον χρειάζεται ὁ λίθος διὰ νὰ ἀποκτήσῃ τὸ μέγιστον ὕψος, β) τὸ μέγιστον ὕψος, γ) ὁ χρόνος τὸν ὁποῖον χρειάζεται διὰ νὰ κατέλθῃ ἐκ νέου, δ) ἡ ταχύτης τὴν ὁποίαν θὰ ἔχῃ ὅταν φθάσῃ εἰς τὸ ἔδαφος.



Λύσις. α) Ἐὰν λάβωμεν πρὸς ἁπλούστευσιν τῶν ὑπολογισμῶν $g = 10\ m/sec^2$, εὑρίσκομεν τὸν χρόνον ἀνόδου ἐκ τῆς σχέσεως $\upsilon = \upsilon_0 - g \cdot t$, ἐὰν θέσωμεν $\upsilon = 0$, $\upsilon_0 = 38\ m/sec$, δεδομένου ὅτι εἰς τὸ ἀνώτατον σημεῖον ἡ ταχύτης εἶναι μηδέν, ὅτε εὑρίσκομεν:

$$38 - 10 \cdot t = 0 \qquad \text{καὶ} \qquad \underline{t = 3{,}8\ sec.}$$

β) Τὸ μέγιστον h ὕψος ὑπολογίζομεν ἐκ τοῦ τύπου: $h = \upsilon_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$, ἐὰν θέσωμεν $\upsilon_0 = 38\ m/sec$, $t = 3{,}8$ sec καὶ $g = 10\ m/sec^2$, ὅτε θὰ ἔχωμεν:

$$\underline{h} = 38 \cdot 3{,}8 - \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot (3{,}8)^2 = \underline{72{,}2\ m.}$$

Εἰς τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα καταλήγομεν, ἐὰν μεταξὺ τῶν τύπων $\upsilon = \upsilon_0 - g \cdot t$ καὶ $h = \upsilon_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$ ἀπαλείψωμεν τὸν χρόνον, ὅτε εὑρίσκομεν:

$$\upsilon^2 = \upsilon_0^2 - 2\,g \cdot h$$

Ἐὰν εἰς τὸν τύπον τοῦτον θέσωμεν $\upsilon = 0$, προκύπτει:

$$h = \upsilon_0^2/2\,g$$

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον τοῦτον $\upsilon_0 = 38\ m/sec$ καὶ $g = 10\ m/sec^2$, εὑρίσκομεν:

$$\underline{h = 72{,}2\ m.}$$

γ) Ὁ χρόνος, κατὰ τὸν ὁποῖον θὰ κατέλθῃ τὸ σῶμα ἐκ τοῦ μεγίστου ὕψους, εὑρίσκεται ἐκ τοῦ τύπου $h = \frac{1}{2} g \cdot t^2$, λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν ὅτι ὁ λίθος θ' ἀρχίσῃ ἀπὸ τοῦ ἀνωτέρου ὕψους νὰ κατέρχεται μὲ κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην. Ἐκ τῆς ἄνω σχέσεως, ἐὰν θέσωμεν $h = 72{,}2\ m$, $g = 10\ m/sec^2$, εὑρίσκομεν:

$$t = \sqrt{\frac{2\,h}{g}} = 3{,}8 \text{ sec.}$$

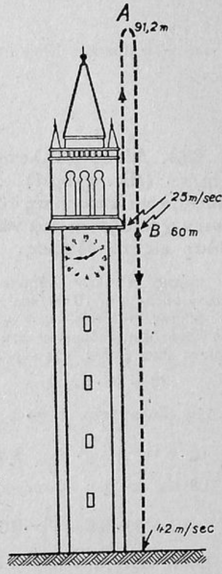
ἤτοι τὸ σῶμα, διὰ νὰ κατέλθῃ ἐκ τοῦ μεγίστου ὕψους, ἐχρειάσθη τόσον χρόνον ὅσον διὰ νὰ ἀνέλθῃ.

δ) Ἡ ταχύτης μὲ τὴν ὁποίαν θὰ φθάσῃ ὁ λίθος ἐκ νέου εἰς τὸ ἔδαφος εἶναι $\upsilon = g \cdot t$. Οὕτω, ἐὰν θέσωμεν $g = 10 \text{ m/sec}^2$ καὶ $t = 3{,}8$ sec, εὑρίσκομεν :

$$\upsilon = 38 \text{ m/sec}$$

ἤτοι ἡ ταχύτης μὲ τὴν ὁποίαν φθάνει ὁ λίθος εἰς τὸ ἔδαφος εἶναι ἴση πρὸς τὴν ταχύτητα μὲ τὴν ὁποίαν ἐβλήθη πρὸς τὰ ἄνω.

383. Ἀπὸ κωδωνοστασίου, ὕψους 60 m, ἄνθρωπος βάλλει κατακορύφως πρὸς τὰ ἄνω λίθον, ὑπὸ ταχύτητα 25 m/sec. Ζητεῖται πόσον χρόνον θὰ χρειασθῇ ὁ λίθος διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὸ ἔδαφος καὶ μὲ ποίαν ταχύτητα.



Λύσις. Ἔστω ὅτι τὸ κωδωνοστάσιον εὑρίσκεται εἰς ὕψος h καὶ ὁ λίθος βάλλεται ὑπὸ ἀρχικὴν ταχύτητα υ_0. Εἶναι προφανὲς ὅτι τὸ διανυόμενον διάστημα ὑπὸ τοῦ λίθου εἶναι $-h$, διότι τοῦτο διανύεται κατ' ἀντίθετον φορὰν τῆς ἀρχικῆς ταχύτητος υ_0. Οὕτω, ἐφαρμόζοντες τὸν τύπον τῆς ὁμαλῶς ἐπιβραδυνομένης κινήσεως, θὰ ἔχωμεν :

$$-h = \upsilon_0 \cdot t - \frac{1}{2}\, g \cdot t^2 \qquad (1)$$

Λύομεν τὴν δευτεροβάθμιον ταύτην ἐξίσωσιν ὡς πρὸς t καὶ λαμβάνομεν :

$$t = \frac{\upsilon^0 \pm \sqrt{\upsilon_0^2 + 2\,g \cdot h}}{g} \qquad (2)$$

Ἐκ τῆς σχέσεως (2), ἐὰν θέσωμεν τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως, προκύπτουν δύο τιμαί :

$$t_1 = 6{,}7 \text{ sec} \quad \text{καὶ} \quad t_2 = -1{,}7 \text{ sec.}$$

Ἡ τιμὴ $-1{,}7$ sec ὡς ἀρνητικὴ ἀπορρίπτεται καὶ ἑπομένως ὁ ζητούμενος χρόνος εἶναι :

$$t_1 = 6{,}7 \text{ sec.}$$

Ἡ ταχύτης μὲ τὴν ὁποίαν θὰ φθάσῃ ὁ λίθος εἰς τὸ ἔδαφος εὑρίσκεται ἐκ τῆς σχέσεως $\upsilon = \sqrt{\upsilon_0^2 + 2\,g \cdot h}$ ἐὰν θέσωμεν $\upsilon_0 = 25$ m/sec, $g = 10 \text{ m/sec}^2$ καὶ $h = 60$ m, ὅτε προκύπτει :

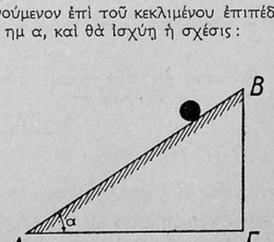
$$\upsilon = 42 \text{ m/sec.}$$

384. Δίδεται ἡ βάσις ΑΓ κεκλιμένου ἐπιπέδου καὶ ζητεῖται νὰ προσδιορισθῇ ἡ γωνία κλίσεως α, οὕτως ὥστε σῶμα ὀλισθαίνων κατὰ μῆκος τούτου νὰ χρειασθῇ τὸν ἐλάχιστον δυνατὸν χρόνον διὰ νὰ κατέλθῃ.

Λύσις. Ἔστω ὅτι ἡ ζητουμένη γωνία εἶναι α. Τὸ σῶμα κινούμενον ἐπὶ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου θὰ διανύσῃ τὸ διάστημα ΒΑ εἰς χρόνον t, μὲ ἐπιτάχυνσιν $\gamma = g \cdot \eta\mu\, \alpha$, καὶ θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις :

$$\text{ΒΑ} = \frac{1}{2}\, g \cdot \eta\mu\, \alpha \cdot t^2 \qquad (1)$$

Εἰς τὴν σχέσιν (1) θέτομεν ΒΑ = ΑΓ/συν α καὶ λαμβάνομεν :



$$\frac{\text{ΑΓ}}{\sigma\upsilon\nu\, \alpha} = \frac{1}{2}\, g \cdot \eta\mu\, \alpha \cdot t^2 \qquad (2)$$

Λύοντες τὴν σχέσιν (2) ὡς πρὸς t εὑρίσκομεν :

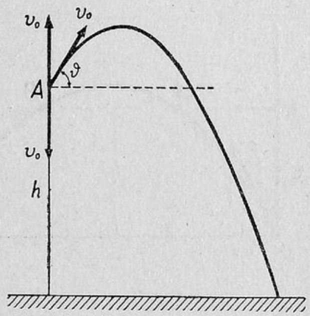
$$t = \sqrt{\frac{2\,(\text{ΑΓ})}{g \cdot \eta\mu\, \alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\, \alpha}} \qquad (3)$$

Ἐπειδὴ ὅμως ημ α · συν α $= ^1/_2 \cdot$ ημ 2α, ἡ σχέσις (3) γράφεται:

$$t = \sqrt{\frac{4\,(\text{ΑΓ})}{g \cdot \text{ημ}\; 2\alpha}} \qquad (4)$$

Εἰς τὴν σχέσιν (4) παρατηροῦμεν ὅτι τὸ μόνον μεταβλητὸν μέγεθος εἶναι τὸ ημ α. Ἑπομένως, ἵνα ὁ χρόνος t εἶναι ἐλάχιστος, πρέπει τὸ ημ 2α νὰ εἶναι μέγιστον. Ἤτοι: ημ 2α = 1 ἢ 2α = 90° καί: $\underline{\alpha = 45^\circ}$.

385. Σῶμα βάλλεται ἔκ τινος σημείου Α εὑρισκομένου εἰς ὕψος h ἀπὸ τοῦ ἐδάφους ὑπὸ ἀρχικὴν ταχύτητα υ_0 καὶ ὑπὸ γωνίαν θ ὡς πρὸς τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέτρον τῆς ταχύτητος τοῦ σώματος, ὅταν τοῦτο ἐγγίζῃ τὸ ἔδαφος. (Ἡ ἄσκησις προϋποθέτει προσέτι γνώσεις κινητικῆς ὡς καὶ δυναμικῆς ἐνεργείας.)



Λύσις. Τὸ σῶμα εἰς τὴν θέσιν Α θὰ περικλείῃ δυναμικὴν καὶ κινητικὴν ἐνέργειαν. Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ μᾶζα αὐτοῦ εἶναι m καὶ ἡ ἀρχική του ταχύτης υ_0, τότε ἡ συνολικὴ ἐνέργεια τοῦ σώματος εἰς τὴν θέσιν Α θὰ εἶναι:

$$E_{\text{ολ.}} = m \cdot g \cdot h + \frac{1}{2}\, m \cdot \upsilon_0^2 \qquad (1)$$

Ἐξ ἄλλου, ὅταν τὸ σῶμα ἐγγίζῃ τὸ ἔδαφος, θὰ ἔχῃ μόνον κινητικὴν ἐνέργειαν. Ἐὰν δὲ ὑποθέσωμεν ὅτι ἐγγίζει τὸ ἔδαφος μὲ ταχύτητα υ, τότε ἡ κινητική του ἐνέργεια θὰ εἶναι:

$$E_{\text{κιν.}} = 1/2\; m \cdot \upsilon^2 \qquad (2)$$

Συμφώνως πρὸς τὴν Ἀρχὴν τῆς διατηρήσεως τῆς μηχανικῆς ἐνεργείας, πρέπει νὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις:

$$\frac{1}{2}\, m \cdot \upsilon^2 = m \cdot g \cdot h + \frac{1}{2}\, m \cdot \upsilon_0^2 \qquad (3)$$

Ἐκ τῆς σχέσεως (3) εὑρίσκομεν ὅτι τὸ μέτρον τῆς ταχύτητος θὰ εἶναι:

$$\underline{\upsilon = \sqrt{\upsilon_0^2 + 2\,g \cdot h}} \qquad (4)$$

Ἐκ τῆς σχέσεως (4) προκύπτει ὅτι τὸ μέτρον υ τῆς ταχύτητος εἶναι πάντοτε τὸ αὐτὸ δι᾽ οἱανδήποτε γωνίαν βολῆς, ἀρκεῖ τὸ μέτρον τῆς ἀρχικῆς ταχύτητος υ_0 νὰ μὴ μεταβάλλεται.

386. Κατά τινα χρονικὴν στιγμὴν θεωρουμένην ὡς ἀρχὴν τοῦ χρόνου, ἀεροπλάνον ἐξομοιούμενον πρὸς σημεῖον διέρχεται ἀκριβῶς διὰ τῆς κατακορύφου τῆς ἀγομένης διὰ τῆς θέσεως ἀντιαεροπορικοῦ τηλεβόλου, καὶ εἰς ὕψος h ἀπ᾽ αὐτοῦ. Τὸ ἀεροπλάνον βαίνει ὁριζοντίως μὲ σταθερὰν ταχύτητα υ καὶ ἐντὸς τοῦ κατακορύφου ἐπιπέδου τοῦ ὁριζομένου ὑπὸ τοῦ ἄξονος τοῦ πυροβόλου. Τὴν χρονικὴν στιγμὴν Ο, τὸ τηλεβόλον βάλλει ὑπὸ γωνίαν α σχηματιζομένην ὑπὸ τοῦ ἄξονος αὐτοῦ καὶ τῆς δι᾽ αὐτοῦ διερχομένης κατακορύφου. Ἂν ἡ ἀρχικὴ ταχύτης τοῦ βλήματος εἶναι υ_0, ἡ δὲ ἐπιτάχυνσις τῆς βαρύτητος g, ὑπολογίσατε τὴν γωνίαν διὰ τὴν ὁποίαν τὸ βλῆμα θὰ ἐπιτύχῃ τὸ ἀεροπλάνον, καθὼς καὶ τὰς χρονικὰς στιγμὰς καὶ τὰς προϋποθέσεις ὑπὸ τὰς ὁποίας εἶναι δυνατὸν νὰ συμβῇ τοῦτο. (Εἰσαγωγικαὶ ἐξετάσεις Πανεπιστημίου Ἀθηνῶν, τμῆμα Φυσικόν, 1955.)

Λύσις. Ἂν καλέσωμεν υ_1 τὴν ὁριζοντίαν συνιστῶσαν τῆς ταχύτητος τοῦ βλήματος, τότε θὰ ἔχωμεν:

$$\upsilon_1 = \upsilon_0 \cdot \text{ημ}\; \alpha \qquad (1)$$

Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ βλῆμα συναντᾷ τὸ ἀεροπλάνον εἰς τὸ σημεῖον Α, τότε τὸ βλῆμα θὰ ἔχῃ διανύσει ὁριζοντίως τὸ αὐτὸ διάστημα ΚΑ μὲ τὸ ἀεροπλάνον καὶ ἑπομένως ἡ ὁριζοντία συνιστῶσα υ_1 τῆς ταχύτητος αὐτοῦ θὰ ἰσοῦται πρὸς τὴν ταχύτητα τοῦ ἀεροπλάνου υ. Οὕτω θὰ ἔχωμεν:

$$\upsilon_1 = \upsilon_0 \cdot \eta\mu\,\alpha = \upsilon \qquad (2)$$

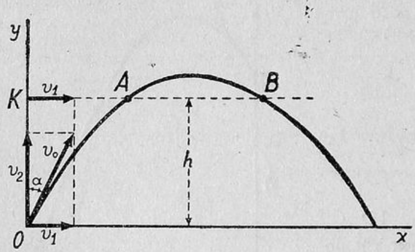
Διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῆς γωνίας α λύομεν τὴν σχέσιν (2) ὡς πρὸς ημ α καὶ ἔχομεν:

$$\eta\mu\,\alpha = \frac{\upsilon}{\upsilon_0} \qquad (3)$$

Ἐκ τῆς σχέσεως (3) ὑπολογίζεται ἡ γωνία α, δεδομένου ὅτι εἶναι γνωστὰ τὰ υ καὶ υ_0.

Ἡ πρὸς τὰ ἄνω κατακόρυφος κίνησις τοῦ βλήματος εἶναι φανερὸν ὅτι εἶναι κίνησις ὁμαλῶς ἐπιβραδυνομένη μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα τὴν κατακόρυφον συνιστῶσαν τῆς ταχύτητος τοῦ ἀεροπλάνου υ_2, ἤτοι: $\upsilon_2 = \upsilon_0 \cdot \sigma\upsilon\nu\,\alpha = \upsilon_0\sqrt{1-\eta\mu^2\,\alpha}$ ἤ, λόγῳ τῆς σχέσεως (3), δυνάμεθα νὰ γράψωμεν:

$$\upsilon_2 = \sqrt{\upsilon_0^2 - \upsilon^2}$$



Τὸ ὕψος h, εἰς τὸ ὁποῖον θὰ ἀνέλθη τὸ βλῆμα διὰ νὰ συνατήσῃ τὸ ἀεροπλάνον, θὰ δίδεται ὑπὸ τῆς σχέσεως:

$$h = \upsilon_2 \cdot t - \frac{1}{2}\,g \cdot t^2$$

ἤ

$$h = \sqrt{\upsilon_0^2 - \upsilon^2} \cdot t - \frac{1}{2}\,g \cdot t^2 \qquad (4)$$

Διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῶν χρονικῶν στιγμῶν, κατὰ τὰς ὁποίας τὸ βλῆμα θὰ ἐπιτύχῃ τὸ ἀεροπλάνον, λύομεν τὴν δευτεροβάθμιον ἐξίσωσιν (4) ὡς πρὸς τὸν χρόνον t καὶ θὰ ἔχωμεν:

$$t = \frac{\sqrt{\upsilon_0^2 - \upsilon^2} \pm \sqrt{\upsilon_0^2 - \upsilon^2 - 2g \cdot h}}{g} \qquad (5)$$

Διὰ διερευνήσεως τῆς σχέσεως (5) προκύπτουν αἱ ἀκόλουθοι περιπτώσεις:

α) Ἐὰν $\upsilon_0^2 - \upsilon^2 - 2\,g \cdot h = 0$ (6), τότε ὑπάρχει μία τιμὴ τοῦ χρόνου, ἤτοι:

$$t = \frac{\upsilon_0^2 - \upsilon^2}{g} \qquad (7)$$

Τοῦτο σημαίνει ὅτι τὸ βλῆμα θὰ ἐπιτύχῃ μίαν μόνον φορὰν τὸν στόχον τοῦ ἀεροπλάνου, τοῦτο δὲ θὰ συμβῇ, ὡς ἐξάγεται ἐκ τῆς σχέσεως (6), ὅταν:

$$h = \frac{\upsilon_0^2 - \upsilon^2}{2g}$$

Ἐπειδὴ δὲ τὸ μέγιστον ὕψος $h_{\mu\acute{\epsilon}\gamma.}$ εἰς τὸ ὁποῖον δύναται νὰ φθάσῃ τὸ βλῆμα εἶναι:

$$h_{\mu\acute{\epsilon}\gamma.} = \frac{\upsilon_0^2 \cdot \sigma\upsilon\nu^2\,\alpha}{2g} = \frac{\upsilon_0^2 - \upsilon^2}{2g}$$

συμπεραίνομεν ὅτι τὸ βλῆμα θὰ ἐπιτύχῃ μίαν μόνον φορὰν τὸν στόχον, καὶ μάλιστα ὅταν δύναται νὰ φθάσῃ εἰς μέγιστον ὕψος ἴσον πρὸς τὸ ὕψος εἰς τὸ ὁποῖον ἵπταται τὸ ἀεροπλάνον, ἤτοι $h_{\mu\acute{\epsilon}\gamma.} = h$.

β) Ἐὰν $\upsilon_0^2 - \upsilon^2 - 2\,g \cdot h > 0$, τότε θὰ ὑπάρχουν δύο τιμαὶ χρόνου κατὰ τὰς ὁποίας δύναται νὰ βληθῇ τὸ ἀεροπλάνον, ἤτοι εἰς τὴν θέσιν Α καὶ εἰς τὴν θέσιν Β. Ἐξάγεται εὐκόλως καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ὅτι τὸ μέγιστον ὕψος εἰς τὸ ὁποῖον δύναται νὰ φθάσῃ τὸ βλῆμα πρέπει νὰ εἶναι μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ ὕψος εἰς τὸ ὁποῖον ἵπταται τὸ ἀεροπλάνον, ἤτοι $h_{μέγ.} > h$.

γ) Ἐὰν $υ_0^2 - υ^2 - 2g \cdot h < 0$, τότε αἱ τιμαὶ τοῦ χρόνου εἶναι φανταστικαὶ καὶ ἑπομένως εἶναι ἀπαράδεκτοι. Τοῦτο σημαίνει ὅτι τὸ βλῆμα δὲν δύναται νὰ συναντήσῃ τὸ ἀεροπλάνον. Ἐξάγεται δὲ εὐκόλως ὅτι διὰ νὰ συμβῇ τοῦτο πρέπει $h_{μέγ.} < h$.

387. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ χρόνοι οἱ ὁποῖοι ἀπαιτοῦνται, ἵνα πῖπτον σῶμα διατρέξῃ τὴν κατακόρυφον διάμετρον ΑΓ ἑνὸς κύκλου καθὼς καὶ τὰς χορδὰς ΑΒ καὶ ΒΓ, ὅταν ἡ χορδὴ ΒΓ σχηματίζῃ τυχοῦσαν γωνίαν θ μετὰ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου. (Εἰσαγωγικαὶ ἐξετάσεις Πανεπιστημίου Ἀθηνῶν, τμῆμα Φυσικόν, 1954.)

Λύσις. α) Ὅταν τὸ σῶμα πίπτῃ κατὰ τὴν κατακόρυφον διάμετρον $ΑΓ = 2r$ (βλ. σχῆμα), κινεῖται μὲ ἐπιτάχυνσιν g καὶ θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις:

$$2r = \frac{1}{2} g \cdot t_1^2 \qquad (1)$$

β) Ὅταν πίπτῃ κατὰ τὴν χορδὴν ΑΒ, κινεῖται μὲ ἐπιτάχυνσιν $γ_1 = g \cdot ημ\,ω$ καὶ θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις:

$$AB = \frac{1}{2} g \cdot ημ\,ω \cdot t_2^2$$

Ἐπειδὴ ὅμως $AB = 2r \cdot ημ\,ω$, ἡ ἀνωτέρω σχέσις γράφεται:

$$2r = \frac{1}{2} g \cdot t_2^2 \qquad (2)$$

γ) Ὅταν πίπτῃ κατὰ τὴν χορδὴν ΒΓ, κινεῖται μὲ ἐπιτάχυνσιν $γ_2 = g \cdot ημ\,θ = g \cdot συν\,ω$ καὶ θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις:

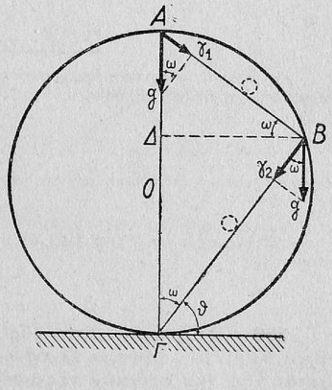
$$BΓ = \frac{1}{2} g \cdot συν\,ω \cdot t_3^2$$

Ἐπειδὴ ὅμως $BΓ = 2r \cdot συν\,ω$, ἡ ἀνωτέρω σχέσις γράφεται:

$$2r = \frac{1}{2} g \cdot t_3^2 \qquad (3)$$

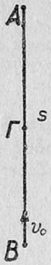
Λύοντες ἑκάστην σχέσιν ὡς πρὸς τὸν χρόνον εὑρίσκομεν:

$$\underline{t_1 = t_2 = t_3 = 2\sqrt{\frac{r}{g}}}$$



388. Ἀπὸ σημείου Α ἀφίεται νὰ πίπτῃ σῶμα ἄνευ ἀρχικῆς ταχύτητος. Ἐξ ἑτέρου σημείου Β εὑρισκομένου ἐπὶ τῆς αὐτῆς κατακορύφου καὶ κάτωθεν τοῦ σημείου Α, εἰς ἀπόστασίν τινα ἀπ' αὐτοῦ, βάλλεται κατὰ τὴν αὐτὴν στιγμὴν σῶμα κατακορύφως πρὸς τὰ ἄνω μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα $υ_0$. Ζητοῦνται: α) Ποῦ καὶ εἰς ποίαν χρονικὴν στιγμὴν θὰ γίνῃ ἡ συνάντησις τῶν δύο σωμάτων. β) Ποῖαι θὰ εἶναι αἱ ἀντίστοιχοι ταχύτητες τῶν δύο κινητῶν κατὰ τὴν στιγμὴν τῆς συναντήσεως. γ) Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἀρχικὴ ταχύτης τοῦ πρὸς τὰ ἄνω ριπτομένου σώματος, ἵνα ἡ συνάντησις γίνῃ εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ. Δίδεται ἡ ἔντασις τῆς βαρύτητος εἰς τὸν τόπον τοῦ πειράματος g εἰς μονάδας C.G.S.

Λύσις. Ἔστω ὅτι ἡ συνάντησις τῶν δύο σωμάτων γίνεται εἰς τὸ σημεῖον Γ μετὰ πάροδον χρόνου t. Τότε τὸ ἐκ τοῦ Α ἀφιέμενον σῶμα θὰ ἔχῃ διανύσει τὸ διάστημα ΑΓ καὶ τὸ ἐκ τοῦ Β βαλλόμενον, μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα $υ_0$, τὸ διάστημα ΒΓ. Ἑπομένως θὰ ἰσχύουν αἱ σχέσεις:



$$\text{ΑΓ} = \frac{1}{2}\, g \cdot t^2 \qquad (1)$$

$$\text{ΒΓ} = \upsilon_0 \cdot t - \frac{1}{2}\, g \cdot t^2 \qquad (2)$$

Προσθέτομεν τὰς ἐξισώσεις (1) καὶ (2) κατὰ μέλη καὶ λαμβάνομεν :

$$s = \upsilon_0 \cdot t \qquad (3)$$

α) Ἐκ τῆς σχέσεως (3) εὑρίσκομεν τὸν ζητούμενον χρόνον ὅτι εἶναι :

$$\underline{t = \frac{s}{\upsilon_0}} \qquad (4)$$

Ἐὰν τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ χρόνου θέσωμεν εἰς τὴν σχέσιν (2), εὑρίσκομεν ὅτι ἡ συνάντησις θὰ γίνῃ εἰς ὕψος ἄνωθεν τοῦ σημείου Β :

$$\underline{\text{ΒΓ} = s - \frac{1}{2}\, g\, \frac{s^2}{\upsilon_0^2}}$$

β) Αἱ ταχύτητες τῶν δύο σωμάτων δίδονται ἀντιστοίχως ἐκ τῶν σχέσεων :

$$\upsilon_1 = g \cdot t \qquad (5)$$

$$\upsilon_2 = \upsilon_0 - g \cdot t \qquad (6)$$

Θέτομεν εἰς τὰς σχέσεις (5) καὶ (6) τὴν τιμὴν τοῦ χρόνου $t = s/\upsilon_0$ καὶ εὑρίσκομεν :

$$\underline{\upsilon_1 = g \cdot \frac{s}{\upsilon_0}} \quad (7) \qquad \underline{\upsilon_2 = \upsilon_0 - g \cdot \frac{s}{\upsilon_0}} \quad (8)$$

γ) Ὅταν ἡ συνάντησις πραγματοποιηθῇ εἰς τὸ μέσον τῆς ἀποστάσεως ΑΒ, τότε τὸ δεύτερον σῶμα θὰ ἔχῃ ἀνέλθει εἰς ὕψος $h = s/2$ καὶ θὰ ἰσχύουν αἱ σχέσεις :

$$\frac{s}{2} = \upsilon'_0 \cdot t - \frac{1}{2}\, g \cdot t_1^2 \qquad (9)$$

ὅπου υ_0' εἶναι ἡ ζητουμένη ἀρχικὴ ταχύτης, καί :

$$\upsilon = 0 = \upsilon'_0 - g \cdot t_1^2 \qquad (10)$$

Ἐκ τῶν σχέσεων (9) καὶ (10), δι' ἀπαλοιφῆς τοῦ χρόνου t_1, εὑρίσκομεν τὴν ζητουμένην ἀρχικὴν ταχύτητα :

$$\underline{\upsilon'_0 = \sqrt{g \cdot s}}$$

389. Ὅταν ἀερόστατον εὑρίσκεται εἰς ὕψος 600 m καὶ ἀνέρχεται ὑπὸ ταχύτητα 10 m/sec, ἀφίεται ἐλεύθερος εἷς λίθος. Νὰ εὑρεθῇ ὁ χρόνος ὅστις παρέρχεται ἀπὸ τὴν στιγμὴν τῆς ἀφέσεως, ἕως ὅτου ὁ λίθος συναντήσῃ τὸ ἔδαφος. ($g = 10$ m/sec^2.)

Λύσις. Ἔστω h τὸ ὕψος εἰς τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται τὸ ἀερόστατον, ὅταν ἀφίεται ἐλεύθερος ὁ λίθος, καὶ υ_0 ἡ ταχύτης τοῦ ἀεροστάτου.

Προφανῶς ἡ ἄσκησις ἀνάγεται εἰς τὸ νὰ εὕρωμεν τὸν ζητούμενον χρόνον διὰ λίθον ὁ ὁποῖος βάλλεται πρὸς τὰ ἄνω καὶ κατακορύφως ὑπὸ ἀρχικὴν ταχύτητα υ_0. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην τὸ διανυόμενον διάστημα h εἶναι φορᾶς ἀντιθέτου πρὸς τὴν ἀρχικὴν ταχύτητα υ_0 καὶ θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις :

$$-h = \upsilon_0 \cdot t - \frac{1}{2}\, g \cdot t^2 \qquad (1)$$

Ἐκ τῆς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως (1) λαμβάνομεν :

$$t = \frac{\upsilon_0 \pm \sqrt{\upsilon_0^2 + 2g \cdot h}}{g}$$

Θέτομεν : $\upsilon_0 = 10$ m/sec, h = 600 m, καὶ εὑρίσκομεν :

$$t = \frac{10 \pm \sqrt{10^2 + 2 \cdot 10 \cdot 600}}{10}$$

Ἐξ οὗ προκύπτουν δύο τιμαὶ τοῦ χρόνου, $t_1 = 120$ sec, $t_2 = -100$ sec. Ἡ ἀρνητικὴ τιμὴ τοῦ χρόνου ὡς μὴ ἀνταποκρινομένη πρὸς τὴν ἐκφώνησιν τῆς ἀσκήσεως ἀπορρίπτεται καὶ οὕτω ὁ ζητούμενος χρόνος εἶναι :

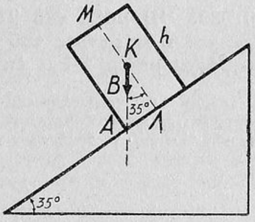
$$\underline{\underline{t = 120 \text{ sec.}}}$$

390. Κύλινδρος ἔχων ἀκτῖνα βάσεως 6 cm τοποθετεῖται ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου σχηματίζοντος γωνίαν 35° καὶ στηρίζεται ἐπ' αὐτοῦ διὰ μιᾶς βάσεώς του. Ποῖον τὸ ἀνώτατον ὕψος τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ ἔχῃ ὁ κύλινδρος, ἵνα μὴ ἀνατραπῇ.

Λύσις. Ἔστω ὅτι τὸ ζητούμενον ἀνώτατον ὕψος τοῦ κυλίνδρου εἶναι h καὶ ἡ ἀκτὶς αὐτοῦ r. Ἵνα μὴ ἀνατραπῇ ὁ κύλινδρος, πρέπει ἡ διεύθυνσις τοῦ βάρους αὐτοῦ νὰ διέρχεται διὰ τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου ἢ τουλάχιστον νὰ διέρχεται διὰ τῆς περιφερείας τῆς βάσεως, ἤτοι διὰ τοῦ σημείου Α(σχῆμα).

Ὡς γνωστὸν τὸ κέντρον βάρους Κ ὁμογενοῦς κυλίνδρου εὑρίσκεται εἰς τὸ κέντρον συμμετρίας αὐτοῦ, συνεπῶς ἐπὶ τοῦ ἄξονος τοῦ κυλίνδρου καὶ εἰς τὸ μέσον αὐτοῦ. Ἄρα θὰ ἔχωμεν :

$$ΚΛ = \frac{ΜΛ}{2} = \frac{h}{2} \qquad (1)$$



Ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΚΛ προκύπτει ὅτι :

$$ΚΛ = r \cdot σφ\ 35^0 \qquad (2)$$

Ἡ σχέσις (2), λόγῳ τῆς σχέσεως (1), γράφεται :

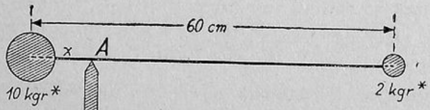
$$h = 2r \cdot σφ\ 35^0 \qquad (3)$$

Θέτομεν εἰς τὴν σχέσιν (3) : r = 6 cm, $σφ\ 35^0 = 1{,}428$ καὶ εὑρίσκομεν ὅτι τὸ ἀνώτατον ὕψος τοῦ κυλίνδρου πρέπει νὰ εἶναι :

$$\underline{h} = 2 \cdot 6 \cdot 1{,}428 = \underline{\underline{17{,}14 \text{ cm.}}}$$

391. Δύο σφαῖραι 10 kgr* καὶ 2 kgr* εὑρίσκονται εἰς τὰ ἄκρα ράβδου, ὑποτιθεμένης ἄνευ βάρους, μήκους 60 cm. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ θέσις καὶ τὸ κέντρον βάρους τοῦ συστήματος.

Λύσις. Πρὸς τοῦτο ἰσορροποῦμεν τὴν ράβδον ἐπὶ ὀξείας ἀκμῆς Α καὶ δεχόμεθα ὅτι ἡ μία σφαῖρα, τῆς ὁποίας τὴν μᾶζαν νοοῦμεν συγκεντρωμένην εἰς τὸ κέντρον, ἀπέχει κατὰ x cm ἀπὸ τοῦ κέντρου βάρους Α, ἐνῷ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς ἑτέρας σφαίρας θὰ ἀπέχῃ 60 — x.



Ἐὰν τὰ βάρη τῶν δύο μαζῶν εἶναι ἀντιστοίχως B_1 καὶ B_2, ἐπειδὴ τὸ σύστημα εὑρίσκεται ἐν ἰσορροπίᾳ, αἱ ροπαὶ αὐτοῦ, ὡς πρὸς τὸ σημεῖον Α, θὰ εἶναι ἴσαι μεταξύ των. Ἤτοι :

$$B_1 \cdot x = B_2\ (60 - x) \qquad (1)$$

Λύοντες τὴν σχέσιν (1) ὡς πρὸς x λαμβάνομεν :

$$x = \frac{B_2 \cdot 60}{B_1 + B_2} \qquad (2)$$

Ἐκ τῆς σχέσεως (2), ἐὰν θέσωμεν $B_1 = 10$ kgr* καὶ $B_2 = 2$ kgr*, εὑρίσκομεν ὅτι :

$$\underline{\underline{x = 10 \text{ cm.}}}$$

392. Ἡ μᾶζα τοῦ Ἡλίου εἶναι $3{,}55 \cdot 10^5$ φορὰς μεγαλυτέρα τῆς μάζης τῆς Γῆς καὶ ἡ ἀκτὶς τοῦ Ἡλίου 112 φορὰς μεγαλυτέρα τῆς ἀκτῖνος τῆς Γῆς. Ἐκ τῶν

δύο τούτων δεδομένων νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς βαρύτητος ἐπὶ τοῦ Ἡλίου. (Αἱ μᾶζαι θεωροῦνται συγκεντρωμέναι εἰς τὰ κέντρα αὐτῶν.)

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν M τὴν μᾶζαν τῆς Γῆς, R τὴν ἀκτῖνα αὐτῆς καὶ K τὴν σταθερὰν τῆς παγκοσμίου ἕλξεως, τότε ἡ ἐπιτάχυνσις g τῆς βαρύτητος εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς Γῆς δίδεται διὰ τῆς σχέσεως:

$$g = k \cdot \frac{M}{R^2} \qquad (1)$$

Ὁμοίως, ἐὰν καλέσωμεν M′ τὴν μᾶζαν τοῦ Ἡλίου καὶ R′ τὴν ἀκτῖνα αὐτοῦ, τότε ἡ ἐπιτάχυνσις g′ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ Ἡλίου θὰ δίδεται διὰ τῆς σχέσεως:

$$g' = k \cdot \frac{M'}{R'^2} \qquad (2)$$

Ἐπειδὴ ὅμως εἶναι, συμφώνως πρὸς τὴν ἐκφώνησιν τῆς ἀσκήσεως, $M' = 3{,}55 \cdot 10^5$ M καὶ $R' = 112$ R, ἡ σχέσις (2) γράφεται:

$$g' = \frac{3{,}55 \cdot 10^5}{112^2} \cdot k \cdot \frac{M}{R^2} \qquad (3)$$

ἢ λόγῳ τῆς σχέσεως (1):

$$g' = \frac{3{,}15 \cdot 10^5}{112^2} \cdot g \qquad \text{ἤτοι:} \quad \underline{g' = 28\,g.}$$

393. Ἡ μᾶζα τοῦ Ἡλίου εἶναι 335 000 φορὰς μεγαλυτέρα τῆς μάζης τῆς Γῆς καὶ ἡ διάμετρος τοῦ Ἡλίου 112 φορὰς μεγαλυτέρα ἢ τῆς Γῆς. Νὰ εὑρεθῇ τὸ βάρος μάζης 1 kgr ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ Ἡλίου. ($g = 9{,}81$ m/sec^2.)

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν m τὴν μᾶζαν σώματος εὑρισκομένου ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ Ἡλίου καὶ g′ τὴν ἐπιτάχυνσιν τῆς βαρύτητος εἰς τὸν Ἥλιον, τότε, συμφώνως πρὸς τὸν θεμελιώδη νόμον τῆς Δυναμικῆς $F = m \cdot \gamma$, θὰ ἔχωμεν ὅτι τὸ βάρος τοῦ σώματος εἶναι:

$$B = m \cdot g' \qquad (1)$$

Ἡ ἐπιτάχυνσις ὅμως g′ εἰς τὴν ἐπιφένειαν τοῦ Ἡλίου εἶναι, ὅπως ὑπελογίσθη εἰς τὴν προηγουμένην ἄσκησιν, $g' = 28$ g, ἑπομένως ἡ σχέσις (1) γράφεται:

$$B = 28\, m \cdot g \qquad (2)$$

Ἐργαζόμενοι εἰς τὸ Τεχνικὸν Σύστημα θέτομεν εἰς τὴν σχέσιν (2): $m = 1$ kgr $= 1/9{,}81$ Τ.Μ. μάζης καὶ $g = 9{,}81$ m/sec^2, ὅτε εὑρίσκομεν:

$$\underline{B = 28 \text{ kgr*}.}$$

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Β′

394. Σῶμα βάλλεται κατακορύφως πρὸς τὰ ἄνω μὲ ταχύτητα 10 m/sec. Νὰ ὑπολογισθοῦν: α) Τὸ μέγιστον ὕψος. β) Ὁ χρόνος κατὰ τὸν ὁποῖον ὁ λίθος παραμένει εἰς τὸν ἀέρα. (Ἀπ. α′ 509,7 cm. β′ 2,038 sec.)

395. Σῶμα βάρους 210 gr* πίπτει ἐλευθέρως. Ζητοῦνται: α) Ἡ ὑπὸ τοῦ σώματος ἀποκτωμένη ταχύτης μετὰ πτῶσιν 150 m. β) Ἡ τιμὴ τῆς ἐπὶ τοῦ κινητοῦ ἐφαρμοζομένης δυνάμεως ἵνα ἐπανέλθῃ εἰς τὴν θέσιν τῆς ἠρεμίας μετὰ 10 sec. ($g = 981$ cm/sec^2.) (Ἀπ. α′ 54,25 m/sec. β′ 319 935 dyn.)

396. Ἐξ ὕψους $h = 180$ m ἀπὸ τοῦ ἐδάφους βάλλεται κατακορύφως πρὸς τὰ ἄνω σῶμα ὑπὸ ἀρχικὴν ταχύτητα 84 m/sec. Ζητοῦνται: α) Εἰς ποῖον ὕψος ἀπὸ τοῦ ἐδάφους θ᾽ ἀνέλθῃ τὸ σῶμα. β) Μὲ πόσην ταχύτητα θὰ διέλθῃ τὸ σῶμα κατὰ τὴν κάθοδον αὐτοῦ ἀπὸ σημείου εὑρισκομένου εἰς ὕψος 72 m ἀπὸ τοῦ ἐδάφους. γ) Πόση θὰ εἶναι ἡ ταχύτης τοῦ σώματος, ὅταν θὰ φθάσῃ εἰς τὸ ἔδαφος. δ) Πόσος ὁ χρόνος τὸν ὁποῖον θὰ χρειασθῇ τὸ σῶμα ἀπὸ τῆς ἀρχῆς τῆς κινήσεως του μέχρις ὅτου φθάσῃ εἰς τὸ ἔδαφος. ($g = 10$ m/sec^2.) (Ἀπ. α′ 532,8 m. β′ 96 m/sec. γ′ 103 m/sec. δ′ 18,7 sec.)

397. Παρατηρητὴς εὑρισκόμενος εἰς ὕψος 250 m βλέπει νὰ διέρχεται πρὸ αὐτοῦ λίθος ἀφεθεὶς ὑπὸ ἀεροναύτου τὴν 15ην ὥραν. Ἕτερος παρατηρητὴς διαπιστώνει ὅτι ὁ λίθος φθάνει εἰς τὸ ἔδαφος τὴν 15ην ὥραν καὶ 3 sec. Εἰς ποῖον ὕψος εὑρίσκετο ὁ ἀεροναύτης ὅταν ἄφησε τὸν λίθον καὶ κατὰ ποίαν στιγμὴν τοῦ χρόνου τὸν ἄφησε. (Ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀέρος δὲν λαμβάνεται ὑπ᾿ ὄψιν. $g = 9,80$ m/sec^2.)
(Ἀπ. 490 m, 14 h 59 min 53 sec.)

398. Δύο σώματα, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ ἓν εἶναι ἐπὶ τοῦ ἐδάφους καὶ τὸ ἕτερον εὑρίσκεται εἰς ὕψος h, ρίπτονται κατὰ τὴν κατακόρυφον καὶ τὸ ἓν πρὸς τὸ ἄλλο μὲ τὴν αὐτὴν ἀρχικὴν ταχύτητα υ_0. Πόση εἶναι ἡ ἐλαχίστη τιμὴ τῆς ἀρχικῆς ταχύτητος, ἵνα ἡ συνάντησις λάβῃ χώραν α) κατὰ τὴν ἄνοδον τοῦ πρώτου κινητοῦ, β) κατὰ τὴν κάθοδον τοῦ πρώτου κινητοῦ.

$$\left(\text{Ἀπ. α′ } \upsilon_0 \geqslant \sqrt{\frac{g \cdot h}{2}} \quad \text{β′ } \upsilon_0 \geqslant \frac{\sqrt{g \cdot h}}{2}\right)$$

399. Αἱ δύο μᾶζαι τῆς μηχανῆς Atwood, ἑκάστη τῶν ὁποίων εἶναι 60 gr, εὑρίσκονται ἐν ἰσορροπίᾳ. Τοποθετεῖται ἐπὶ τῆς μάζης Α, ἥτις εἶναι εἰς τὴν στάθμην τοῦ μηδενὸς κατακορύφου κανόνος, πρόσθετος μᾶζα 5 gr, ἥτις προσδίδει, ἄνευ ἀρχικῆς ταχύτητος, τὴν κίνησιν τοῦ συστήματος. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν θὰ εὑρεθῇ ἡ μᾶζα Α μετὰ 2 sec τῆς πτώσεως. Κατὰ τὴν στιγμὴν ταύτην ἀφαιρεῖται ἡ πρόσθετος μᾶζα. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν θὰ εὑρεθῇ ἡ μᾶζα Α, 4 sec μετὰ τὴν ἀναχώρησιν της. ($g = 9,81$ m/sec^2.) (Ἀπ. 78,5 cm, 235,5 cm.)

400. Κεκλιμένον ἐπίπεδον ἔχει μῆκος l. Ζητεῖται νὰ διαιρεθῇ εἰς n μέρη τοιαῦτα ὥστε νὰ διανύωνται εἰς ἴσους χρόνους ὑπὸ κινητοῦ ὀλισθαίνοντος ἐπ᾿ αὐτοῦ, ἄνευ τριβῆς καὶ ἄνευ ἀρχικῆς ταχύτητος, καὶ ἀναχωροῦντος ἐκ τῆς κορυφῆς.
(Ἀπ. Τὰ τμήματα ταῦτα πρέπει νὰ εἶναι μεταξύ των ὡς οἱ ἀριθμοὶ 1, 3, 5 . . . (2n - 1).)

401. Εἰς τὴν μηχανὴν Atwood ἑκάστη τῶν ἴσων μαζῶν Μ εἶναι 50 gr καὶ τὸ ὕψος τῆς διατομῆς της 25 mm. Ἡ ἀρχὴ τῆς πτώσεως γίνεται εἰς χρόνον μηδὲν καὶ ἡ πρόσθετος μᾶζα εὑρίσκεται τότε εἰς τὸ μηδὲν τῆς κλίμακος. Δακτύλιος διάτρητος τοποθετημένος 50 cm κάτωθεν, θέλομεν ν᾿ ἀφαιρέσῃ τὴν πρόσθετον μᾶζαν μετὰ 3 sec πτώσεως καὶ ὁ πλήρης δίσκος νὰ σταματήσῃ τὴν μᾶζαν μετὰ 2 sec. Ζητεῖται α) νὰ καθορισθῇ πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ πρόσθετος μᾶζα καὶ β) ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ θέσις τοῦ δίσκου. ($g = 9,81$ m/sec^2.) (Ἀπ. α′ 1,146 gr. β′ 119,17 cm.)

402. Εἰς μηχανὴν τοῦ Atwood θεωροῦμεν τὴν τροχαλίαν καὶ τὸ νῆμα ἀμελητέας μάζης. Εἰς τὰ ἄκρα τοῦ νήματος εὑρίσκονται δύο ἴσαι μᾶζαι, ἑκάστη ἴση πρὸς 450 gr. Ἐπὶ τῆς μιᾶς ἐξ αὐτῶν προστίθεται μᾶζα 50 gr. Ζητεῖται: α) Ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς κινήσεως ἑκάστης μάζης. β) Ἡ τάσις τοῦ νήματος.
(Ἀπ. α′ 51,5 cm/sec^2. β′ 464 200 dyn.)

403. Διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ βάθους φρέατος ἀφίνομεν ἀπὸ τοῦ στομίου αὐτοῦ νὰ πίπτῃ ἐλευθέρως λίθος. Τὸν κρότον τοῦ λίθου ἀκούομεν μετὰ πάροδον $t = 4$ sec. Πόσον τὸ βάθος τοῦ φρέατος, ὅταν ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου εἶναι $\upsilon = 340$ m/sec. (Ἀπ. 70 m.)

404. Ἄνθρωπος πηδᾷ ἀπὸ πύργον ὕψους 10 m εἰς τὸ ὕδωρ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ταχύτης μὲ τὴν ὁποίαν εἰσχωρεῖ εἰς τὸ ὕδωρ εἰς m/sec καὶ km/h.
(Ἀπ. 14 m/sec, 50 km/h.)

405. Αἱ δύο μᾶζαι τῆς μηχανῆς Atwood, ἀντὶ νὰ μετατίθενται κατακορύφως, ὀλισθαίνουν, ἄνευ τριβῆς, ἐπὶ δύο κεκλιμένων ἐπιπέδων, ὑπὸ γωνίας 30° καὶ 60°, τὰ δὲ νήματα διὰ τῶν ὁποίων συνδέονται αἱ μᾶζαι M καὶ M_1 εἶναι παράλληλα πρὸς τὰ ἐπίπεδα ταῦτα. Ζητεῖται: α) Ποία ἡ σχέσις τῶν μαζῶν ἡ ἀναγκαία, ἵνα αἱ δύο μᾶζαι εὑρίσκωνται ἐν ἰσορροπίᾳ. β) Ποία ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς κινήσεως, ὅταν αἱ μᾶζαι εἶναι ἑκάστη 5 kgr. γ) Τί συμβαίνει εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην, ἐὰν μετὰ 3 sec ἀφ' ἧς πίπτουν αἱ μᾶζαι δώσωμεν αἰφνιδίως εἰς τὸ ἓν τῶν ἐπιπέδων τὴν αὐτὴν κλίσιν μὲ τὸ ἕτερον, τῶν νημάτων παραμενόντων παραλλήλων πρὸς τὰ ἐπίπεδα ($g = 9{,}81\ m/sec^2$.)
('Απ. α' $M/M_1 = \sqrt{3} = 1{,}73$. β' 179,54 cm/sec². γ' Ἡ κίνησις γίνεται ὁμαλή.)

406. Ἔκ τινος σημείου Α ἀφίεται νὰ πέσῃ σῶμα κατὰ τὴν κατακόρυφον. Ὅταν τὸ σῶμα τοῦτο ἔχῃ διατρέξει διάστημα s_1, ἀφίεται νὰ πέσῃ ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἕτερον σῶμα. Μετὰ πόσον χρόνον τὰ δύο σώματα θὰ εὑρεθοῦν εἰς δοθεῖσαν ἀπόστασιν ἀπ' ἀλλήλων ἴσην πρὸς s_2.

$$\left(\text{'Απ. } t = \frac{s_2 + s_1}{\sqrt{2g \cdot s_1}}\right)$$

407. Δύο σώματα ρίπτονται διαδοχικῶς ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω ἐν τῷ κενῷ, καὶ μὲ τὴν αὐτὴν ἀρχικὴν ταχύτητα υ_0. Ζητεῖται πόσον χρονικὸν διάστημα πρέπει νὰ παρέλθῃ μεταξὺ τῆς ἀναχωρήσεως τοῦ πρώτου σώματος καὶ τῆς ἀναχωρήσεως τοῦ δευτέρου, ἵνα ἡ συνάντησις αὐτῶν γίνῃ εἰς ὕψος ἄνωθεν τοῦ σημείου ἀναχωρήσεως ἴσον πρὸς τὸ ἥμισυ τοῦ μεγίστου ὕψους ἔνθα ἀνυψοῦται τὸ πρῶτον σῶμα.

$$\left(\text{'Απ. } \frac{\upsilon_0}{g}\left[1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right]\right)$$

408. Εἰς ἕκαστον τῶν ἄκρων νήματος μηχανῆς τοῦ Atwood ἐξαρτᾶται βάρος 200 gr* καὶ ἀκολούθως προστίθεται ἐπὶ τοῦ ἑνὸς ἐξ αὐτῶν πρόσθετος μᾶζα 5 gr. Ζητεῖται: α) Πόσον θὰ εἶναι τὸ διανυθὲν διάστημα ὑπὸ τοῦ κατερχομένου βάρους μετὰ 2 sec. β) Πόση θὰ εἶναι ἡ ταχύτης τοῦ συστήματος μετὰ 3 sec. Δὲν θὰ ληφθῇ ὑπ' ὄψιν ἡ μᾶζα τῆς τροχαλίας καὶ δίδεται τὸ $g = 9{,}81\ m/sec^2$.
('Απ. α' 0,24 m. β' 0,36 m/sec.)

409. Ἀπὸ ποίου ὕψους h πρέπει νὰ ἀφεθοῦν δύο σώματα, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ πρῶτον ἀναχωρεῖ ἐκ τῆς ἠρεμίας καὶ πίπτει ἐλευθέρως, ἐνῷ τὸ δεύτερον θὰ ριφθῇ κατὰ τὴν κατακόρυφον, t sec μετὰ τὴν ἀναχώρησιν τοῦ πρώτου, μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα υ_0, ἵνα φθάσουν εἰς τὸ ἔδαφος συγχρόνως. Ἀριθμητικὴ ἐφαρμογή: Χρόνος μεταξὺ ἀναχωρήσεως πρώτου καὶ δευτέρου σώματος 2 sec. Ἀρχικὴ ταχύτης δευτέρου σώματος 22,05 m/sec, $g = 9{,}80\ m/sec^2$.

$$\left(\text{'Απ. } h = \frac{g \cdot t^2}{8}\left(\frac{2\upsilon_0 - g \cdot t}{\upsilon_0 - g \cdot t}\right)^2, \ 490 \text{ m.}\right)$$

410. Μὲ ποίαν ταχύτητα πρέπει νὰ ἐκσφενδονισθῇ κατὰ τὴν κατακόρυφον σῶμα, ἵνα φθάσῃ εἰς τὸ ἔδαφος συγχρόνως πρὸς ἕτερον σῶμα ἀφιέμενον ἐλεύθερον ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου πρὸ t sec, γνωστοῦ ὄντος ὅτι τὸ ὕψος τοῦ σημείου τούτου εἶναι 2 m. Ἀριθμητικὴ ἐφαρμογή: Χρόνος διαρρεύσας μεταξὺ τῶν ἀναχωρήσεων τῶν δύο σωμάτων 1 sec, ὕψος πτώσεως 122,5 m, $g = 9{,}8\ m/sec^2$.

$$\left(\text{'Απ. } \upsilon_0 = g \cdot t \frac{\sqrt{\frac{2h}{g}} - \frac{t}{2}}{\sqrt{\frac{2h}{g}} - t}, \ 11{,}025 \text{ m/sec.}\right)$$

411. Σῶμα ἐκτοξεύεται μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα $υ_0 = 333{,}3$ m/sec καὶ ὑπὸ γωνίαν $θ = 75^o$ ὡς πρὸς τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον. Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ α) εἰς ποίαν ἀπόστασιν θὰ συναντήσῃ τὸ ὁριζόντιον ἔδαφος, β) ποῖον τὸ ἀνώτερον ὕψος εἰς τὸ ὁποῖον θὰ φθάσῃ καὶ γ) πόσον χρόνον θὰ χρειασθῇ διὰ νὰ διανύσῃ τὴν τροχιάν του.
('Απ. α' 5 663 m. β' 5 284 m.)

412. Πυροβόλον βάλλει ὁριζοντίως σφαῖραν ἀπὸ ὕψους 64 m ὑπὸ ἀρχικὴν ταχύτητα 1 000 m/sec. 'Επὶ πόσον χρόνον θὰ παραμείνῃ ἡ σφαῖρα εἰς τὸν ἀέρα καὶ εἰς ποίαν ἀπόστασιν θὰ συναντήσῃ τὸ ἔδαφος. ('Αντίστασις τοῦ ἀέρος ἀμελητέα, $g = 9{,}80$ m/sec².) ('Απ. 2 sec, 2 000 m.)

413. Βλῆμα ἐκτοξεύεται καὶ κινούμενον ἐπιτυγχάνει μέγιστον ὕψος $h = 40$ m καὶ βεληνεκὲς 190 m. Ποία ἡ ἀρχική του ταχύτης $υ_0$ καὶ ποία ἡ γωνία βολῆς.
('Απ. $υ_0 = 43{,}5$ m/sec, $φ = 40^o\ 6'$.)

414. Σφαῖρα βάλλεται ὑπὸ ἀρχικὴν ταχύτητα 96 m/sec καὶ ὑπὸ γωνίαν 30° πρὸς τὰ ἄνω, ἐν σχέσει πρὸς τὴν ὁριζοντίαν. 'Εὰν τὸ ὕψος ἀπὸ τοῦ ὁποίου βάλλεται ἡ σφαῖρα εἶναι 6 m ἄνωθεν τοῦ ἐδάφους, νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μέγιστον ὕψος εἰς τὸ ὁποῖον ἀνέρχεται αὕτη καὶ τὸ διάστημα τὸ ὁποῖον διανύει ὁριζοντίως μέχρι τῆς στιγμῆς καθ' ἣν φθάνει εἰς τὸ ἔδαφος. ($g = 9{,}80$ m/sec².) ('Απ. 42 m, 259 m.)

415. Εἰς χρονικὴν στιγμήν, τὴν ὁποίαν λαμβάνομεν ὡς ἀρχὴν μετρήσεως τοῦ χρόνου, ἀεροπλάνον τὸ ὁποῖον δύναται νὰ ἐξομοιωθῇ πρὸς ὑλικὸν σημεῖον διέρχεται τὸ ζενὶθ τόπου ἐπὶ τοῦ ὁποίου εὑρίσκεται ἀντιαεροπορικὸν πυροβόλον καὶ εἰς ὕψος h ἄνωθεν αὐτοῦ. Τὸ ἀεροπλάνον ἵπταται ὁριζοντίως καὶ μὲ σταθερὰν ταχύτητα $υ$ ἐπὶ κατακορύφου ἐπιπέδου ἐπὶ τοῦ ὁποίου εὑρίσκεται καὶ ὁ ἄξων τοῦ πυροβόλου. Κατὰ τὴν στιγμὴν μηδὲν τὸ πυροβόλον ρίπτει βλῆμα κατὰ τοῦ ἀεροπλάνου ὑπὸ γωνίαν $θ$ ($θ$ εἶναι ἡ γωνία τοῦ ἄξονός του μετὰ τῆς κατακορύφου). Γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ ἀρχικὴ ταχύτης τοῦ βλήματος εἶναι $υ_0$ καὶ ὅτι ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς βαρύτητος εἶναι g, νὰ προσδιορισθῇ ἡ γωνία $θ$, εἰς τρόπον ὥστε τὸ βλῆμα νὰ πλήξῃ τὸ ἀεροπλάνον. Νὰ διερευνηθοῦν αἱ διάφοροι περιπτώσεις. Δὲν θὰ ληφθῇ ὑπ' ὄψιν ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀέρος, ὅστις ὑποτίθεται τελείως ὁμογενής, ἡ μεταβολὴ τοῦ g μετὰ τοῦ ὕψους καὶ ἡ ἐπίδρασις τῶν μετεωρολογικῶν συνθηκῶν. 'Αριθμητικὴ ἐφαρμογή: $υ_0 = 500$ m/sec, $g = 10$ m/sec², $υ = 180$ km/h καὶ $h = 4\,000$ m. ('Απ. $θ = 5^o\ 44'$.)

416. Βλῆμα βάρους 40 kgr* ρίπτεται ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα 500 m/sec, κατὰ διεύθυνσιν σχηματίζουσαν μετὰ τῆς κατακορύφου γωνίαν 45°. Ζητοῦνται: α) Τὸ μέγιστον ὕψος εἰς τὸ ὁποῖον θὰ φθάσῃ ἀπὸ τοῦ σημείου τῆς ἀναχωρήσεως του. β) Τὸ βεληνεκές. ('Απ. α' 6 371 m. β' 25 484 m.)

417. Πυροβόλον μήκους 1,50 m ρίπτει βλῆμα βάρους 7,5 kgr* ὑπὸ ταχύτητα 600 m/sec. Νὰ ὑπολογισθοῦν: α) 'Ο ἀπαιτούμενος χρόνος ὅπως τὸ βλῆμα διανύσῃ τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ σωλῆνος τοῦ πυροβόλου. β) 'Η ἐπὶ τοῦ βλήματος ἐπιδρῶσα δύναμις κατὰ τὸν χρόνον αὐτόν. γ) Τὸ μέγιστον ἐπιτυγχανόμενον βεληνεκές. δ) Τὸ μέγιστον ὕψος, ὅταν ἐπιτυγχάνεται τὸ μέγιστον βεληνεκές. ($g = 9{,}81$ m/sec². Δὲν λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀέρος.)
('Απ. α' 0,005 sec. β' 92 000 kgr*. γ' 36 735 m. δ' 9 184 m.)

418. Πυροβόλον, τοῦ ὁποίου ἡ ὀβὶς ἔχει ἀρχικὴν ταχύτητα 600 m/sec, βάλλει κατακορύφως κατὰ ἀεροπλάνου τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται εἰς ὕψος 1 200 m. Πρὸ πόσου χρόνου ἀπὸ τῆς διαβάσεως τοῦ ἀεροπλάνου ἐκ τῆς κατακορύφου τοῦ πυροβόλου πρέπει νὰ ριφθῇ τὸ βλῆμα. ($g = 9{,}80$ m/sec².) ('Απ. 2 sec.)

419. Πυροβόλον, τοῦ ὁποίου ἡ ὀβὶς ἔχει ἀρχικὴν ταχύτητα 800 m/sec, βάλλει κατακορύφως, 4,2 sec πρὸ τῆς διελεύσεως διὰ τῆς κατακορύφου αὐτοῦ, κατὰ ἀεροπλάνου τὸ ὁποῖον μετατοπίζεται ὑπὸ ταχύτητα 360 km/h καὶ ἵπταται εἰς ὕψος 3 000 m. Θὰ βληθῇ τὸ ἀεροπλάνον; Καὶ εἰς τὴν ἀντίθετον περίπτωσιν εἰς πόσην ἀπόστασιν ἀπ' αὐτοῦ διέρχεται ἡ ὀβίς. ($g = 9{,}80$ m/sec^2.) ('Απ. Δὲν θὰ βληθῇ, εὑρίσκεται ἐκτὸς τῆς διελεύσεως τῆς ὀβίδος εἰς τὸ ὕψος τῶν 3 000 m, κατὰ 32 m.)

420. Πυροβόλον βάλλει βλῆμα ὑπὸ ταχύτητα 300 m/sec. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ δύο γωνίαι κλίσεως κατὰ τὰς ὁποίας πρέπει νὰ τοποθετηθῇ τὸ πυροβόλον, εἰς τρόπον ὥστε νὰ ἐπιτύχῃ στόχον εἰς ἀπόστασιν 1 500 m εὑρισκόμενον εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον μὲ τὸν ἄξονα τοῦ πυροβόλου. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μέγιστον ὕψος καὶ οἱ χρόνοι κατὰ τὰς δύο περιπτώσεις. ('Αντίστασις ἀέρος ἀμελητέα. $g = 9{,}80$ m/sec^2.)
('Απ. $\theta = 16{,}1^o$ καὶ $73{,}9^o$, $h = 108$ m καὶ 1298 m, $t = 5{,}20$ sec καὶ 17,0 sec.)

421. 'Αεροπλάνον διεθύνεται πρὸς τὸ σημεῖον Γ ἀπέχον κατὰ 1 000 m τοῦ σημείου Α, μὲ ταχύτητα 450 km/h. Ἓν δεύτερον ἀεροπλάνον διευθύνεται πρὸς τὸ σημεῖον Γ ἀπέχον κατὰ 1 200 m τοῦ σημείου Β, μὲ ταχύτητα 270 km/h. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἐκ τοῦ σημείου Γ τὸ δεύτερον ἀεροπλάνον πρέπει νὰ ρίψῃ βλῆμα, ἵνα κτυπήσῃ τὸ πρῶτον, γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ ἀρχικὴ ταχύτης τῆς ὀβίδος εἶναι 600 m/sec. Πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ γωνία μεταξὺ γραμμῆς σκοπεύσεως καὶ τοῦ ἄξονος τοῦ ἀεροπλάνου. ('Απ. 675 m, 0,00726 rad ἢ 25'.)

422. Νὰ προσδιορισθῇ ἡ θέσις τοῦ κέντρου βάρους τῆς ἐπιφανείας ἡ ὁποία σχηματίζεται ἀπὸ τετράγωνον ἐπιτιθέμενον ἐπὶ ἰσοπλεύρου τριγώνου. Ἡ κοινὴ βάσις ἔχει μῆκος $s = 6$ cm. ('Απ. Μεταξὺ τοῦ κ.β. τοῦ τετραγώνου καὶ τοῦ κ.β. τοῦ τριγώνου καὶ εἰς ἀπόστασιν 1,43 m ἀπὸ τοῦ κ.β. τοῦ τετραγώνου.)

423. Ράβδος σχηματίζεται ἀπὸ κυλινδρικὸν ὁμογενὲς στέλεχος μήκους 90 cm, ὅπερ τελειώνει εἰς ὁμογενῆ σφαῖραν διαμέτρου 6 cm. Γνωστοῦ ὄντος ὅτι τὸ βάρος τῆς σφαίρας εἶναι δύο φορὰς τὸ βάρος τοῦ στελέχους, νὰ εὑρεθῇ ἡ θέσις τοῦ κέντρου βάρους τῆς ράβδου. ('Απ. 'Επὶ τοῦ στελέχους, 13 cm ἀπὸ τῆς σφαίρας.)

424. Ράβδος σιδηρᾶ ἐγκαρσίας τομῆς 1 cm^2 καὶ μήκους 10 cm ζυγίζει 79 gr* καὶ ράβδος ἀργιλίου τομῆς 1 cm^2 καὶ μήκους 10 cm ζυγίζει 27 gr*, προσαρμόζονται δὲ ὥστε νὰ ἀποτελέσουν ράβδον μήκους 20 cm. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου βάρους ἀπὸ τοῦ μέσου τῆς συνισταμένης ράβδου τῶν 20 cm. ('Απ. 2,45 cm.)

425. 'Επίπεδος τριγωνικὴ ἐπιφάνεια ΑΒΓ μὲ πλευρὰς ΑΒ = ΑΓ = 10 cm καὶ ΒΓ = 8 cm φέρει εἰς τὰς κορυφὰς Α, Β καὶ Γ ἀντιστοίχως βάρη 60 kgr*, 30 kgr*, 30 kgr*. Εἰς ποῖον σημεῖον δέον νὰ στηριχθῇ ἡ ἐπιφάνεια αὕτη, διὰ νὰ ἰσορροπῇ ὁριζοντίως ἐπὶ κατακορύφου στελέχους. ('Απ. Εἰς σημεῖον τὸ ὁποῖον κεῖται ἐπὶ τοῦ ὕψους τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου καὶ εἰς ἀπόστασιν ἀπὸ τῆς βάσεως ἴσην πρὸς 4,6 cm.)

426. Αἱ μᾶζαι M_1 καὶ M_2 τῆς Γῆς καὶ τῆς Σελήνης ἔχουν μεταξύ των λόγον 81 : 1. Ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων τῶν δύο τούτων σωμάτων εἶναι 382 420 km. Ζητεῖται νὰ προσδιορισθῇ εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς Γῆς εὑρίσκεται τὸ κέντρον βάρους τοῦ συστήματος τῶν δύο σωμάτων. ('Απ. 4 663,6 km.)

427. Δύο σφαῖραι μολύβδου, ἑκάστη μάζης 4 kgr, τοποθετοῦνται εἰς τρόπον ὥστε τὰ κέντρα αὐτῶν νὰ εὑρίσκωνται εἰς ἀπόστασιν 20 cm. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἑλκτικὴ δύναμις ἡ ἀσκουμένη μεταξὺ αὐτῶν. ('Απ. $2{,}67 \cdot 10^{-3}$ dyn.)

428. Ἡ ἀκτὶς τοῦ πλανήτου Ἄρεως εἶναι τὰ 0,53 τῆς γηΐνης ἀκτῖνος, ἡ δὲ μᾶζα αὐτοῦ τὰ 0,105 τῆς γηΐνης μάζης. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐπιτάχυνσις γ τῆς πτώσεως τῶν σωμάτων εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ Ἄρεως, ἐν συγκρίσει πρὸς τὴν ἐπιτάχυνσιν g τῆς βαρύτητος ἐπὶ τῆς Γῆς. (Ἀπ. 0,37 g.)

429. Ἡ ἐπιτάχυνσις ἐλευθέρως πιπτούσης σφαίρας πλησίον τῆς ἐπιφανείας τῆς Γῆς εἶναι 9,8 m/sec^2. Λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν ὅτι ἡ ἀκτὶς τῆς Γῆς εἶναι $6{,}7 \cdot 10^6$ m, νὰ εὑρεθῇ ἡ μᾶζα τῆς Γῆς, ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι ἡ Γῆ ἕλκει ὅλα τὰ σώματα τὰ ἐκτὸς αὐτῆς εὑρισκόμενα, ὡς ἐὰν ὅλη ἡ μᾶζα της εἶναι συγκεντρωμένη εἰς τὸ κέντρον αὐτῆς. (Ἀπ. $6{,}6 \cdot 10^{24}$ kgr.)

430. Ποία ἡ ταχύτης λόγῳ τῆς περιστροφῆς τῆς Γῆς σημείου τινὸς τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς, κειμένου: α) ἐπὶ τοῦ Ἰσημερινοῦ, β) εἰς γεωγραφικὸν πλάτος 30° καὶ 60°. Ἡ ἀκτὶς τῆς Γῆς εἶναι 6 370 km καὶ ὁ χρόνος μιᾶς πλήρους περιστροφῆς 24 h.

$$\left(\text{Ἀπ. α' } 463\ m/sec. \ \text{β'}\ \upsilon = \frac{2\pi \cdot r \cdot \text{συν}\,\varphi}{T},\ 401\ m/sec,\ \ 232\ m/sec.\right)$$

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Γ'

431. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐλαχίστη ἐπιτάχυνσις μὲ τὴν ὁποίαν ἄνθρωπος βάρους 65 kgr* δύναται νὰ ὀλισθαίνῃ πρὸς τὰ κάτω ἐπὶ σχοινίου, τὸ ὁποῖον δύναται νὰ ὑποστηρίζῃ βάρος ὄχι μεγαλύτερον ἀπὸ 50 kgr*.

432. Διὰ τροχαλίας ἀμελητέας τριβῆς διέρχεται ἀντιδρῶν σχοινίον. Ἀπὸ τὴν μίαν πλευρὰν ἐξαρτᾶται ἡ μᾶζα Μ καὶ ἀπὸ τὴν ἄλλην πλευρὰν ἡ μᾶζα $M + m$. Ἡ τροχαλία σύρεται πρὸς τὰ ἄνω μὲ ἐπιτάχυνσιν γ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐπιτάχυνσις τῶν μαζῶν καὶ ἡ δύναμις ἐπὶ τοῦ σχοινίου.

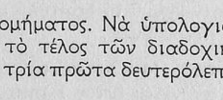
433. Σφαῖρα πίπτει ἀπὸ τῆς κορυφῆς ὑψηλοῦ οἰκοδομήματος. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μέγεθος τῆς στιγμιαίας ταχύτητος τῆς σφαίρας κατὰ τὸ τέλος τῶν διαδοχικῶν ἡμίσεων δευτερολέπτων ἀπὸ τῆς ἀρχῆς τῆς κινήσεως διὰ τὰ τρία πρῶτα δευτερόλεπτα. ($g = 9{,}80\ m/sec^2$.)

434. Εἰς τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα 433 νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ διαννύμενα διαστήματα κατὰ τὰ διαδοχικὰ ἡμίση δευτερόλεπτα διὰ τὰ πρῶτα τρία δευτερόλεπτα. ($g = 9{,}80\ m/sec^2$.)

435. Ἀπὸ ἀεροστάτου, τὸ ὁποῖον ἀνέρχεται κατακορύφως ὑπὸ ταχύτητα 90 m/min, ἀφίεται νὰ πέσῃ βόμβα, ἡ ὁποία φθάνει εἰς τὸ ἔδαφος καὶ ἐκρήγνυται. Ὁ χρόνος, ὁ ὁποῖος παρέρχεται ἀπὸ τῆς στιγμῆς καθ' ἣν γίνεται ἀντιληπτὸς ὁ κρότος εἰς τὸ ἀερόστατον εἶναι 11,5 sec. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος τοῦ ἀεροστάτου, ἂν ἡ ταχύτης διαδόσεως τοῦ ἤχου εἶναι 338 m/sec καὶ $g = 9{,}81\ m/sec^2$. Ὑποτίθεται ὅτι ἡ ταχύτης τῆς βόμβας κατὰ τὴν στιγμὴν τῆς ρίψεως εἶναι μηδέν.

(Πανεπιστήμιον Ἀθηνῶν, Φυσικὸν τμῆμα, 1954.)

436. Τὸ παραπλεύρως σχῆμα παριστᾷ δοχεῖον ΑΒΓΔ, τοῦ ὁποίου ὁ πυθμὴν ΒΓ εἶναι ὁριζόντιος. Δεδομένου ὅτι (ΑΒ) = (ΒΓ) = (ΓΔ) = 20 m καὶ ὅτι γων $\widehat{ABE} = \widehat{\Delta\Gamma Z} = 60°$, νὰ εὑρεθῇ τὸ εἶδος τῆς κινήσεως σφαίρας ἀφιεμένης ἐκ τοῦ σημείου Α, εἰς ἕκαστον τῶν τμημάτων ΑΒ, ΒΓ καὶ ΓΔ. Ἐπίσης νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ἀπαιτούμενος χρόνος ἵνα ἡ σφαῖρα ἀφιεμένη ἐλευθέρα ἐκ τοῦ Α ἐπανέλθῃ εἰς αὐτό.



(Πανεπιστήμιον Ἀθηνῶν, Μαθηματικὸν τμῆμα, 1954.)

437. Ἀνελκυστὴρ εὑρίσκεται εἰς βάθος 588 m ἐντὸς φρέατος, ἔνθα $g = 980$ cm/sec². Ἐπὶ τοῦ ἀνελκυστῆρος ἐνεργεῖ δύναμις, ἥτις προσδίδει ἐπιτάχυνσιν $\gamma = g/20$. Μετὰ παρέλευσιν χρόνου t ἡ τάσις τοῦ νήματος μεταβάλλεται, ὥστε ἡ κίνησις νὰ εἶναι ἐπιβραδυνομένη μὲ ἐπιβράδυνσιν $\gamma' = g/10$. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ χρόνος t ἵνα ὁ ἀνελκυστὴρ φθάσῃ εἰς τὸ στόμιον τοῦ φρέατος ἄνευ ταχύτητος.

(Πανεπιστήμιον Θεσσαλονίκης, Χημικὸν τμῆμα, 1953.)

438. Σφαῖρα βάλλεται κατακορύφως πρὸς τὰ ἄνω ὑπὸ ἀρχικὴν ταχύτητα 96 m/sec. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πρὸς τὰ ἄνω μετατόπισις καὶ ἡ ταχύτης κατ' ἀριθμητικὴν τιμὴν καὶ διεύθυνσιν εἰς χρονικὰ διαστήματα 1 sec μέχρις ὅτου ἡ σφαῖρα ἐπανέλθῃ εἰς τὴν ἀρχικήν της θέσιν. ($g = 9{,}80$ m/sec².)

439. Ἀντικείμενον εὑρισκόμενον ἐντὸς ἀνελκυστῆρος ἀνερχομένου ὑπὸ σταθερὰν ταχύτητα 3 m/sec ἐκφεύγει αὐτοῦ καὶ συναντᾷ τὸ ἔδαφος εἰς 2 sec. Εἰς ποῖον ὕψος ἀπὸ τοῦ ἐδάφους εὑρίσκεται τὸ ἀντικείμενον μετὰ 1/4 sec ἀπὸ τῆς στιγμῆς καθ' ἣν ἀπεσπάσθη τοῦ ἀνελκυστῆρος.

440. Εἰς τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα 439, εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ ἐδάφους εὑρίσκετο τὸ ἀντικείμενον, ὅταν ἤρχισε νὰ πίπτῃ.

441. Δεδομένου ὅτι ἡ χεὶρ εἰς ἐλεύθερον χειρισμὸν καὶ ὑπὸ διάστημα $s = 50$ cm κινεῖται μὲ ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην κίνησιν, ζητεῖται πόση δύναμις ἀπαιτεῖται διὰ τὴν ἐκσφενδόνισιν σώματος μάζης 400 gr, κατακορύφως πρὸς τὰ ἄνω, ἵνα τοῦτο φθάσῃ εἰς ὕψος 25 m. ($g = 9{,}80$ m/sec².)

442. Τρεῖς δακτύλιοι βάλλονται κατακορύφως πρὸς τὰ ἄνω μὲ διαφορὰν βολῆς κατὰ ἥμισυ δευτερόλεπτον καὶ εἰς τρόπον ὥστε ν' ἀνέλθουν εἰς ὕψος 10 m. Ποίαι ἀπόστασιν ἔχουν οἱ δακτύλιοι μεταξύ των, ὅταν ὁ πρῶτος δακτύλιος ἔχῃ ἀποκτήσει τὸ ἀνώτατον ὕψος.

443. Μία ρουκέττα τύπου Α4 μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ προωθητικοῦ της συστήματος ἐπιταχύνεται ἐντὸς 1 min ἀπὸ τῆς ταχύτητος μηδὲν εἰς τὴν ταχύτητα 2,4 km/sec. Ἀκολούθως, λόγῳ ἐξαντλήσεως τῆς καυσίμου ὕλης, ἡ ρουκέττα ἐξακολουθεῖ κινουμένη χωρὶς ἐπιτάχυνσιν. Εἰς ποῖον ὕψος ἀνέρχεται αὕτη ἐντὸς 1 min, ἐὰν δεχθῶμεν κατακόρυφον καὶ σταθερὰν ἐπιτάχυνσιν. Ποῖον εἶναι τὸ ἀνώτατον ὕψος εἰς τὸ ὁποῖον θὰ ἀνέλθῃ ἡ ρουκέττα. (Ἀντίστασις ἀέρος ἀμελητέα.)

444. Ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου βάλλονται κατακορύφως πρὸς τὰ ἄνω δύο σώματα μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα $\upsilon_0 = 18$ m/sec, ἀλλὰ τὸ ἓν σῶμα βάλλεται βραδύτερον κατὰ $t = 3$ sec ἢ τὸ ἄλλο. Πότε καὶ εἰς ποῖον σημεῖον τὰ δύο σώματα συναντῶνται.

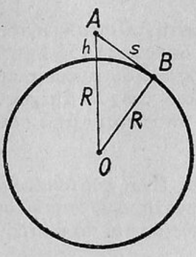
445. Ἀπὸ ἀεροστάτου, ἐν στάσει εὑρισκομένου εἰς ὕψος τι ὑπεράνω τοῦ ἐδάφους (θέσις Α), ἐκτοξεύεται σῶμα κατακορύφως πρὸς τὰ ἄνω μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα $\upsilon_0 = 147$ m/sec. Τὸ ἀερόστατον ἀπομακρύνεται μετὰ ταῦτα, τὸ δὲ σῶμα ἀνέρχεται μέχρις ὕψους τινὸς (θέσις Β), κατόπιν πίπτει καὶ μετὰ 38 sec, ἀφ' ἧς στιγμῆς ἐξετοξεύθη, φθάνει εἰς τὸ ἔδαφος (θέσις Γ). Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος ὑπεράνω τοῦ ἐδάφους, εἰς τὸ ὁποῖον εὑρίσκετο τὸ ἀερόστατον, δηλ. ἡ ἀπόστασις ΑΓ. ($g = 980$ cm/sec².)

446. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ ταχύτης ἑνὸς σώματος ριπτομένου κατακορύφως ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω ἔχει τὴν αὐτὴν τιμὴν ὅταν διέρχεται ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον τῆς τροχιᾶς, εἴτε ἀνερχόμενον εἴτε κατερχόμενον.

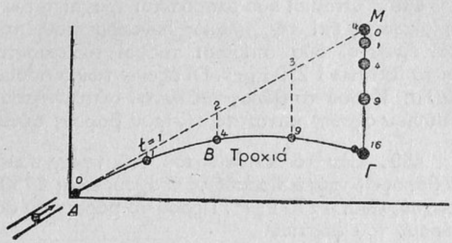
447. Μὲ πόσην ταχύτητα πρέπει νὰ ἐκσφενδονισθῇ ἀπὸ πλοίου κατακορύφως πρὸς τὰ ἄνω φωτοβολίς, ἵνα δύναται αὕτη νὰ παρατηρηθῇ ἐξ ἀποστάσεως $s = 100$ km. (Ἀκτὶς τῆς Γῆς $R = 6{,}37 \cdot 10^6$ m.)

448. Σφαῖρα εὑρισκομένη ἐπὶ τοῦ ἐδάφους βάλλεται πρὸς τὰ ἄνω ὑπὸ γωνίαν 45°. Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἀρχική της ταχύτης, ὥστε νὰ διέλθῃ διὰ σημείου εὑρισκομένου εἰς ὁριζοντίαν ἀπόστασιν 90 m ἀπὸ τῆς ἀρχικῆς θέσεως τῆς σφαίρας καὶ εἰς ὕψος 3,60 m ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου ἐδάφους.

(Μηχανολογικὴ Σχολὴ Ε. Μ. Πολυτεχνείου, 1947.)



Πρόβλημα 447.



Πρόβλημα 449.

449. Κατὰ τὴν στιγμὴν κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ βλῆμα πυροβόλου ἐξέρχεται τοῦ στομίου τοῦ πυροβόλου, στόχος εὑρισκόμενος εἰς τὴν προέκτασιν τοῦ ἄξονος τῆς κάννης τοῦ πυροβόλου ἀρχίζει νὰ πίπτῃ ἐλευθέρως. Νὰ δειχθῇ ὅτι, δι' οἱανδήποτε κλίσιν τῆς κάννης καὶ οἱανδήποτε ἀπόστασιν τοῦ στόχου, τὸ βλῆμα θὰ συναντᾷ πάντοτε τὸν στόχον, ὑποτιθεμένης ἀμελητέας τῆς ἀντιστάσεως τοῦ ἀέρος.

450. Τηλεβόλον διατίθεται ὁριζοντίως εἰς ὕψος 10 m ἀπὸ τοῦ ἐδάφους καὶ βάλλει βλῆμα τὸ ὁποῖον συναντᾷ τὸ ἔδαφος εἰς ἀπόστασιν 400 m. Πόση ἡ ἀρχικὴ ταχύτης τοῦ βλήματος.

451. Ἐὰν ἡ ὁριζοντία ἀπόστασις σφαίρας βαλλομένης ὁριζοντίως ὑπὸ ταχύτητα 1 000 m/sec εἶναι 3 000 m, πόσον τὸ ὕψος ἀπὸ τοῦ ὁποίου ἐβλήθη ἡ σφαῖρα ὁριζοντίως.

452. Σφαῖρα βάλλεται ὑπὸ ταχύτητα 15 m/sec κατὰ διεύθυνσιν σχηματίζουσαν γωνίαν 30° πρὸς τὰ ἄνω ἐν σχέσει πρὸς τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον. Νὰ εὑρεθῇ ἡ θέσις καὶ ἡ ταχύτης τῆς σφαίρας μετὰ 1 sec ὡς καὶ τὸ βεληνεκὲς αὐτῆς.

453. Ὁμοιόμορφος σανὶς μήκους 3 m καὶ μάζης 20 kgr φέρει συγκεντρωμένον βάρος 10 kgr* εἰς ἀπόστασιν 30 cm ἀπὸ τοῦ ἑνὸς ἄκρου αὐτῆς καὶ ἕτερον συγκεντρωμένον βάρος 7,5 kgr* εἰς ἀπόστασιν 90 cm ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ ἄκρου. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου βάρους τοῦ συστήματος ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ ἄκρου.

454. Χαλυβδίνη ράβδος μήκους 2 m καὶ βάρους 3,5 kgr* φέρει δακτύλιον ζυγίζοντα 1,5 kgr* καὶ εἰς ἀπόστασιν 10 cm ἀπὸ τοῦ ἑνὸς ἄκρου αὐτῆς καὶ ἕτερον δακτύλιον ζυγίζοντα 0,5 kgr* εἰς ἀπόστασιν 80 cm ἀπὸ τοῦ ἑτέρου ἄκρου. Νὰ εὑρεθῇ τὸ κέντρον βάρους τοῦ συστήματος.

455. Ὁμοιόμορφος ράβδος μήκους 2,5 m κάμπτεται κατ' ὀρθὴν γωνίαν εἰς σημεῖον ἀπέχον 90 cm ἀπὸ τοῦ ἑνὸς ἄκρου. Ἐὰν ἡ ράβδος ἐξαρτᾶται κατὰ τὴν καμπὴν ἀπὸ ὁριζόντιον σύρμα, ποίαν γωνίαν θὰ σχηματίζῃ μετὰ τῆς κατακορύφου ὁ μεγαλύτερος βραχίων.

456. Νὰ εὑρεθῇ τὸ κέντρον βάρους τετραγώνου πλακὸς ἐκ μετάλλου πλευρᾶς 2 m ἐκ τῆς ὁποίας ἔχει ἀφαιρεθῇ κύκλος 80 cm διαμέτρου, τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου εὑρισκομένου κατὰ μῆκος διαγωνίου τοῦ τετραγώνου καὶ εἰς ἀπόστασιν 70 cm ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ τετραγώνου.

457. Ράβδος χαλυβδίνη διαμέτρου 2,5 cm καὶ μήκους 90 cm τοποθετεῖται ἐπὶ τόρνου καὶ λεπτύνεται κατὰ μῆκος 30 cm, ὥστε ἡ διάμετρός της νὰ γίνῃ 1,5 cm. Νὰ εὑρεθῇ τὸ κέντρον βάρους τῆς προκυπτούσης στερεᾶς ράβδου.

458. Ὅταν οἱ δύο ἐμπρόσθιοι τροχοὶ τετρατρόχου κενοῦ φορτηγοῦ αὐτοκινήτου εὑρίσκωνται ἐπὶ τῆς πλακὸς δυναμομέτρου, τὸ δυναμόμετρον δεικνύει 1 750 kgr*. Ἐὰν ὅμως οἱ δύο ὀπίσθιοι τροχοὶ εὑρίσκωνται ἐπὶ τῆς πλακὸς τοῦ δυναμομέτρου, τοῦτο δεικνύει 1 250 kgr*. Οἱ ἄξονες τῶν ὀπισθίων καὶ ἐμπροσθίων τροχῶν ἀπέχουν 4,20 m. Πόσον τὸ βάρος τοῦ κενοῦ αὐτοκινήτου καὶ εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ ὀπισθίου ἄξονος κεῖται τὸ κέντρον βάρους αὐτοῦ.

459. Ἐὰν τὸ αὐτοκίνητον τοῦ προηγουμένου προβλήματος εἶναι φορτωμένον, τὸ βάρος εἰς τοὺς ἐμπροσθίους τροχοὺς εἶναι 2 750 kgr* καὶ τὸ βάρος εἰς τοὺς ὀπισθίους τροχοὺς εἶναι 4 250 kgr*. Πόσον τὸ βάρος τοῦ φορτίου καὶ ποῦ εὑρίσκεται τὸ κέντρον βάρους τοῦ φορτίου.

460. Εἰς τὰς κορυφὰς κανονικοῦ ἑξαγώνου ὁριζοντίου ΑΒΓΔΕΖ ἐφαρμόζομεν δι' ἐξαρτήσεως βάρη 1 kgr*, 2 kgr*, 3 kgr*, 4 kgr*, 5 kgr*, 6 kgr*. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ κέντρον τῶν ἓξ παραλλήλων τούτων δυνάμεων εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς διαγωνίου ΒΕ καὶ εἰς ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ Ε ἴσην πρὸς τὰ 5/7 τῆς πλευρᾶς τοῦ ἑξαγώνου.

461. Μᾶζαι 1 kgr, 2 kgr, 3 kgr, 4 kgr εἶναι τοποθετημέναι ἀντιστοίχως πρὸς τὰς κορυφὰς ὁμοιομόρφου τετραγώνου πλακὸς πλευρᾶς 50 cm καὶ μάζης 2 kgr. Νὰ εὑρεθῇ τὸ κέντρον βάρους τοῦ συνόλου.

462. Τὸ πάχος ἑνὸς νομίσματος εἶναι ἴσον πρὸς 1/10 τῆς διαμέτρου του. Πόσα νομίσματα πρέπει νὰ τοποθετηθοῦν, ὥστε νὰ σχηματίζουν κυλινδρικὴν στήλην ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου τοῦ ὁποίου τὸ ὕψος εἶναι τὸ 1/12 τῆς βάσεως του, χωρὶς ἡ στήλη νὰ ἀνατραπῇ.

463. Ἐὰν ἡ μᾶζα τῆς Σελήνης θεωρηθῇ ὡς ἴση πρὸς 1/81 τῆς μάζης τῆς Γῆς καὶ ἡ ἀπόστασις μεταξὺ κέντρων Γῆς καὶ Σελήνης θεωρηθῇ ἴση πρὸς 240 000 μίλια, νὰ εὑρεθῇ ἡ θέσις σημείου μεταξὺ τῶν δύο τούτων σωμάτων, ὅπου ἡ ἕλξις Γῆς καὶ Σελήνης θὰ εἶναι ἡ αὐτή.

464. Ἐὰν ἡ Γῆ ὑποστῇ συστολὴν κατὰ τὸ 1/2 τῆς παρούσης διαμέτρου της, τῆς μάζης της ὅμως παραμενούσης ἀμεταβλήτου, πόση θὰ ἦτο ἡ ἕλξις αὐτῆς ἐπὶ μάζης 1 kgr εὑρισκομένου ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας της. Θὰ ἦτο δυνατὸν συνήθης ζυγὸς μὲ τὴν σειρὰν τῶν σταθμῶν του νὰ χρησιμοποιηθῇ εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν;

465. Πόση ἡ κεντρομόλος ἐπιτάχυνσις τῆς Σελήνης ἐπὶ τῆς τροχιᾶς της περὶ τὴν Γῆν ὡς καὶ ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς Γῆς περὶ τὸν Ἥλιον. Περίοδος κινήσεως τῆς Σελήνης περὶ τὴν Γῆν: 27 ἡμέραι 7 h 43 min 12 sec. Περίοδος τῆς Γῆς περὶ τὸν Ἥλιον: 365 ἡμέραι 6 h 9 min 9 sec. Μέση ἀπόστασις Γῆς - Σελήνης : $3{,}844 \cdot 10^8$ m. Μέση ἀπόστασις Γῆς - Ἡλίου: $1{,}497 \cdot 10^{11}$ m.

466. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἕλξις μεταξὺ δύο μολυβδίνων σφαιρῶν διαμέτρου 30 cm, τῶν ὁποίων αἱ ἐπιφάνειαι ἀπέχουν κατὰ 1 cm. (Πυκνότης μολύβδου $\rho = 11{,}3$ gr/cm^3.)

467. Εἰς ποῖον ὕψος ἀπὸ τῆς γηΐνης ἐπιφανείας ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς Γῆς θὰ ἦτο 5 m/sec^2. Ἡ ἀκτὶς τῆς Γῆς νὰ ληφθῇ $R = 6{,}37 \cdot 10^6$ m.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε΄

ΕΡΓΟΝ. ΙΣΧΥΣ. ΕΝΕΡΓΕΙΑ

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Α΄

468. Βάρος 16 kgr* ἀνυψοῦται εἰς ὕψος 15 m. Πόσον τὸ παραγόμενον ἔργον εἰς erg, kgr*m καὶ W·sec.

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν B τὸ βάρος τοῦ σώματος καὶ h τὸ ὕψος εἰς τὸ ὁποῖον ἀνυψοῦται τοῦτο, τότε τὸ ἔργον δίδεται διὰ τοῦ τύπου:

$$A = B \cdot h \qquad (1)$$

Προτιμῶμεν νὰ ἐργασθῶμεν εἰς τὸ Τεχνικὸν Σύστημα, διότι τὰ δεδομένα εἶναι ἤδη ἐκπεφρασμένα εἰς τὸ σύστημα τοῦτο. Οὕτω, θέτοντες: $B = 16$ kgr* καὶ $h = 15$ m, εὑρίσκομεν:

$$\underline{A} = 16 \cdot 15 = \underline{240 \text{ kgr*m}}.$$

Γνωρίζομεν ὅμως ὅτι $1 \text{ kgr*m} = 9{,}81 \cdot 10^7$ erg καὶ ἑπομένως θὰ ἔχωμεν:

$$\underline{A} = 240 \cdot 9{,}81 \cdot 10^7 = \underline{2{,}35 \cdot 10^{10} \text{ erg}}.$$

Ἐπίσης γνωρίζομεν ὅτι 1 Joule (1 W·sec) $= 10^7$ erg καὶ ἑπομένως θὰ ἔχωμεν:

$$\underline{A} = 2{,}35 \cdot 10^{10} \cdot 10^{-7} = \underline{2{,}35 \cdot 10^3 \text{ Joule (W·sec)}}.$$

469. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἔργον τὸ ἀπαιτούμενον διὰ τὴν ἀνύψωσιν 800 λίτρων ὕδατος ἀπὸ φρέατος βάθους 7 m.

Λύσις. Ὡς γνωστόν, θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις:

$$A = B \cdot h$$

Ἐπειδὴ τὸ βάρος τῶν 800 λίτρων τοῦ ὕδατος εἶναι 800 kgr*, θέτοντες $B = 800$ kgr* καὶ $h = 7$ m εὑρίσκομεν:

$$\underline{A} = B \cdot h = 800 \cdot 7 = \underline{5\,600 \text{ kgr*m}}.$$

470. Δύναμις 5 kgr* μετατοπίζει τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς της εἰς ἀπόστασιν 10 m κατὰ τὴν ἰδίαν διεύθυνσιν αὐτῆς. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἔργον εἰς erg καὶ Joule.

Λύσις. Ἐπειδὴ ἡ διεύθυνσις τῆς δυνάμεως καὶ ἡ μετατόπισις τοῦ σημείου ἐφαρμογῆς της συμπίπτουν, θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις:

$$A = F \cdot s \qquad (1)$$

ὅπου A τὸ ἔργον, F ἡ δύναμις καὶ s ἡ μετατόπισις.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἔργον εἰς ἔργια, τρέπομεν τὴν ἔντασιν τῆς δυνάμεως ἀπὸ kgr* εἰς dyn καὶ τὴν μετατόπισιν ἀπὸ m εἰς cm καὶ ἐφαρμόζομεν τὴν σχέσιν (1). Οὕτω εὑρίσκομεν:

$$A = 5 \cdot 981\,000 \cdot 1\,000 = 490{,}5 \cdot 10^7 \text{ erg}$$

Ἐπειδὴ ὅμως 10^7 erg $= 1$ Joule, εὑρίσκομεν ὅτι:

$$\underline{A = 490{,}5 \text{ Joule}}.$$

471. Ἕλκηθρον μετατοπίζεται κατὰ 12 m ἐπὶ ὁριζοντίου ἐδάφους. Ἡ ἕλξις τοῦ σχοινίου εἶναι 15 kgr* καὶ σχηματίζει γωνίαν 30° μετὰ τοῦ ἐδάφους. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἔργον.

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν F τὴν δύναμιν (ἕλξιν), s τὴν μετατόπισιν καὶ φ τὴν γωνίαν ἡ ὁποία σχηματίζεται ἀπὸ τὴν φορὰν τῆς μετατοπίσεως καὶ τὴν φορὰν τῆς δυνάμεως, τότε τὸ ἔργον δίδεται διὰ τοῦ τύπου :

$$A = F \cdot s \cdot \text{συν}\ \varphi$$

Θέτοντες : $F = 15$ kgr*, $s = 12$ m καὶ $\varphi = 30^0$, εὑρίσκομεν :

$$\underline{A} = 15 \cdot 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \underline{155,85 \text{ kgr*m.}}$$

472. Γερανὸς ἀνυψώνει βάρος 500 kgr* ἐντὸς 4 sec εἰς ὕψος 1,5 m. Πόση ἡ ἰσχύς του εἰς ἵππους καὶ kW.

Λύσις. Ἡ ἰσχύς, ὡς γνωστόν, εἶναι τὸ πηλίκον τοῦ παραγομένου ἔργου A διὰ τοῦ ἀντιστοίχου χρόνου t. Ἤτοι :

$$N = \frac{A}{t} \qquad (1)$$

Ἀλλά, ὡς γνωστόν, $A = B \cdot h$, ὅπου B τὸ ἀνυψούμενον βάρος καὶ h ἡ ἀνύψωσις. Συνεπῶς ἡ σχέσις (1) δύναται γραφῇ :

$$N = \frac{B \cdot h}{t} \qquad (2)$$

Ἐργαζόμενοι εἰς τὸ Τεχνικὸν Σύστημα θέτομεν εἰς τὴν σχέσιν (2) : $B = 500$ kgr*, $h = 1,5$ m, $t = 4$ sec, καὶ εὑρίσκομεν :

$$N = \frac{500 \cdot 1,5}{4} = 189,5 \text{ kgr*m/sec.}$$

Γνωρίζομεν ὅμως ὅτι 1 PS = 75 kgr*m/sec, καὶ συνεπῶς προκύπτει ὅτι :

$$\underline{N = 2,5 \text{ PS.}}$$

Ἐπίσης γνωρίζομεν ὅτι 1 PS = 0,736 kW καὶ συνεπῶς προκύπτει ὅτι :

$$\underline{N} = 2,5 \cdot 0,736 = \underline{1,84 \text{ kW.}}$$

473. Εἰς πόσον χρόνον ποδηλάτης συνολικοῦ βάρους 80 kgr* διανύει ἀνωφερικὸν δρόμον παρουσιάζοντα διαφορὰν ὕψους 120 m, ὅταν ἀποδίδῃ ἰσχὺν 1/5 HP.

Λύσις. Ὡς γνωστόν, τὸ ἔργον τοῦ πεδίου βαρύτητος εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ δρόμου καὶ ἐξαρτᾶται μόνον ἀπὸ τὸ βάρος B τοῦ σώματος καὶ ἀπὸ τὸ ὕψος h εἰς τὸ ὁποῖον ἀνέρχεται τοῦτο. Ἄρα θὰ ἔχωμεν :

$$A = B \cdot h \qquad (1)$$

Ἐὰν τὴν ἀνωτέρω σχέσιν (1) διαιρέσωμεν κατὰ μέλη διὰ τοῦ χρόνου t, εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἀποδιδομένη ἰσχὺς εἶναι :

$$N = \frac{B \cdot h}{t} \qquad (2)$$

Λύομεν τὴν σχέσιν (2) ὡς πρὸς τὸν χρόνον t καὶ λαμβάνομεν :

$$t = \frac{B \cdot h}{N} \qquad (3)$$

Ἂς ἐργασθῶμεν εἰς τὸ Τεχνικὸν Σύστημα. Πρὸς τοῦτο θέτομεν εἰς τὴν σχέσιν (3) : $B = 80$ kgr*, $h = 120$ m καὶ τὴν ἰσχὺν N εἰς kgr*m/sec. Διὰ νὰ μετατρέψωμεν τὴν ἰσχὺν ἀπὸ HP εἰς kgr*m/sec, χρησιμοποιοῦμεν τὴν γνωστὴν σχέσιν 1 HP = 76 kgr*m/sec, ὁπότε θέτομεν $N = \frac{1}{5} \cdot 746$ kgr*m/sec. Οὕτω εὑρίσκομεν ὅτι :

$$\underline{t = 640 \text{ sec.}}$$

474. Πόσον ὕδωρ δύναται νὰ ἀνυψώσῃ ἀντλία ἰσχύος 100 PS ἐντὸς 24 ὡρῶν ἀπὸ φρέατος βάθους 300 m.

Λύσις. Ἂς καλέσωμεν B τὸ βάρος τοῦ ἀνυψουμένου ὕδατος καὶ h τὸ ὕψος εἰς τὸ ὁποῖον ἀνυψοῦται τοῦτο ὑπὸ τῆς ἀντλίας. Τότε, ὡς γνωστόν, τὸ παραγόμενον ὑπὸ τῆς ἀντλίας ἔργον θὰ εἶναι:

$$A = B \cdot h \tag{1}$$

Διαιροῦμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς σχέσεως (1) διὰ τοῦ χρόνου t, ἐντὸς τοῦ ὁποίου γίνεται ἡ ἀνύψωσις, καὶ λαμβάνωμεν:

$$N = \frac{B \cdot h}{t} \tag{2}$$

ὅπου $N = A / t$ ἡ ἰσχὺς τῆς ἀντλίας. Λύομεν τὴν σχέσιν (2) ὡς πρὸς τὸ βάρος B καὶ ἔχομεν:

$$B = \frac{N \cdot t}{h} \tag{3}$$

Μετατρέπομεν τὴν ἰσχὺν ἀπὸ ἵππους εἰς kgr*m/sec, χρησιμοποιοῦντες τὴν γνωστὴν σχέσιν 1 PS = 75 kgr*m/sec, καὶ ἐργαζόμεθα εἰς τὸ Τεχνικὸν Σύστημα, θέτοντες εἰς τὴν σχέσιν (3): $N = 100 \cdot 75$ kgr* m/sec, $t = 24 \cdot 3\,600$ sec, $h = 300$ m. Οὕτω εὑρίσκομεν:

$$\underline{B = 2{,}16 \cdot 10^4 \text{ kgr*}.}$$

475. Γερανὸς ἀνυψώνει φορτίον βάρους 10 ton* ἀπὸ τοῦ κύτους πλοίου μέχρι τοῦ καταστρώματος, εὑρισκομένου εἰς ὕψος 12 m ἀπὸ τοῦ κύτους, εἰς χρόνον 30 sec. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἰσχὺς εἰς kgr*m/sec, ἵππους καὶ kW.

Λύσις. Ἐκ τοῦ γνωστοῦ τύπου τῆς ἰσχύος:

$$N = \frac{A}{t} = \frac{B \cdot h}{t}$$

θέτοντες τὰ δεδόμενα τῆς ἀσκήσεως εὑρίσκομεν:

$$\underline{N} = \frac{10\,000 \cdot 12}{30} = \underline{4\,000 \text{ kgr*m/sec.}}$$

Ἐπειδὴ δὲ γνωρίζομεν ὅτι 1 PS = 75 kgr*m/sec, προκύπτει ὅτι:

$$\underline{N} = \frac{4\,000}{75} = \underline{53{,}33 \text{ PS.}}$$

Ἐπίσης, ἐπειδὴ 1 PS = 0,736 kW, προκύπτει ὅτι:

$$\underline{N} = 53{,}33 \cdot 0{,}736 = \underline{39{,}24 \text{ kW.}}$$

476. Μία ἠλεκτρικὴ μηχανὴ δύναται νὰ τροφοδοτῇ 20 000 λυχνίας, ἑκάστη τῶν ὁποίων ἔχει ἰσχὺν 40 Watt. Πόση ἡ ἰσχὺς τῆς μηχανῆς εἰς kW καὶ HP.

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν N τὴν ἰσχὺν ἑκάστης λυχνίας καὶ α τὸν ἀριθμὸν τῶν λυχνιῶν, τότε ἡ καταναλισκομένη ἰσχὺς ὑπὸ ὅλων τῶν λυχνιῶν καὶ συνεπῶς ἡ ἰσχὺς τῆς μηχανῆς ἡ ὁποία τροφοδοτεῖ ὅλας τὰς λυχνίας θὰ εἶναι:

$$N_{ὁλ.} = \alpha \cdot N \tag{1}$$

Θέτομεν εἰς τὴν σχέσιν (1) τὰ δεδομένα: $\alpha = 20\,000$, $N = 40$ W, καὶ εὑρίσκομεν:

$$\underline{N_{ὁλ.}} = 800 \cdot 10^3 \text{ W} = 800 \underline{\text{ kW}}$$

Διὰ νὰ μετατρέψωμεν τὴν ἰσχὺν ἀπὸ kW εἰς HP, χρησιμοποιοῦμεν τὴν γνωστὴν σχέσιν 1 HP = 0, 746 kW καὶ ἔχομεν:

$$\underline{N} = \frac{800}{0{,}746} = \underline{1\,072{,}3 \text{ HP.}}$$

477. Μία ἀντλία δύναται νὰ χορηγῇ 5 000 kgr* ὕδατος ἐντὸς ὑδαταποθήκης εἰς 3 ὥρας. Τὸ μέσον ὕψος ἀντλήσεως τοῦ ὕδατος εἶναι 30 m. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἰσχὺς τῆς ἀντλίας, λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν ὅτι 20 % καταναλίσκεται εἰς ἀπωλείας λόγῳ τριβῆς.

Λύσις. Ἔστω B τὸ βάρος τοῦ ἀντλουμένου ὕδατος, h τὸ ὕψος ἀντλήσεως καὶ $N_{\text{ὠφ.}}$ ἡ ὠφέλιμος ἰσχὺς τῆς ἀντλίας. Τότε θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις:

$$N_{\text{ὠφ.}} = \frac{B \cdot h}{t} \qquad (1)$$

Ἐὰν καλέσωμεν η τὸν συντελεστὴν ἀποδόσεως τῆς ἀντλίας καὶ $N_{\text{διατ.}}$ τὴν συνολικῶς ὑπ' αὐτῆς διατιθεμένην ἰσχύν, ἤτοι τὴν ἰσχὺν πρὸς ἀνύψωσιν τοῦ ὕδατος καὶ τὴν ἰσχὺν λόγῳ ἀπωλειῶν, τότε θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις:

$$\eta = \frac{N_{\text{ὠφέλ.}}}{N_{\text{διατ.}}} \qquad (2)$$

Ἐκ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) προκύπτει ὅτι:

$$N_{\text{διατ.}} = \frac{B \cdot h}{t \cdot \eta} \qquad (3)$$

Ἐπειδὴ ἡ ἀπώλεια εἶναι 20 %, ἕπεται ὅτι ἡ ἀπόδοσις τῆς ἀντλίας θὰ εἶναι 80 % καὶ συνεπῶς ὁ συντελεστὴς ἀποδόσεως αὐτῆς 0,8. Θέτοντες εἰς τὴν σχέσιν (3) τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως, ἐργαζόμενοι εἰς τὸ Τεχνικὸν Σύστημα, εὑρίσκομεν:

$$\underline{N_{\text{διατ.}}} = \frac{5\,000 \cdot 30}{3 \cdot 3600 \cdot 0{,}8} = \underline{17{,}38 \text{ kgr*m/sec.}}$$

478. Δύναμις 25 dyn ἐπενεργεῖ ἐπὶ μάζης 100 gr ἐπὶ 8 sec. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ κινητικὴ ἐνέργεια τῆς μάζης τῶν 100 gr.

Λύσις. Τὸ ἔργον τῆς δυνάμεως εὑρίσκεται ἐκ τοῦ τύπου:

$$A = F \cdot s \qquad (1)$$

ὅπου A εἶναι τὸ ἔργον, F ἡ δύναμις καὶ s ἡ μετατόπισις κατὰ τὴν φορὰν τῆς δυνάμεως.

Ἡ κίνησις ὅμως τοῦ σώματος ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς σταθερᾶς δυνάμεως θὰ εἶναι ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένη καὶ συνεπῶς θὰ ἔχωμεν ὅτι:

$$s = \frac{1}{2} \gamma \cdot t^2 \qquad (2)$$

Ἄρα ὁ τύπος (1) δύναται νὰ γραφῇ:

$$A = \frac{F \cdot \gamma \cdot t^2}{2} \qquad (3)$$

Ἐκ τοῦ θεμελιώδους νόμου τῆς Μηχανικῆς γνωρίζομεν ὅτι $\gamma = F/m$ καὶ δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὸν τύπον (3) προκύπτει ὁ γενικὸς τύπος:

$$A = \frac{F^2 \cdot t^2}{2\,m} \qquad (4)$$

Ἐπειδὴ αἱ τιμαὶ τῶν μεγεθῶν ἔχουν δοθῆ εἰς τὸ σύστημα C. G. S., προτιμῶμεν νὰ ἐργασθῶμεν εἰς τὸ σύστημα τοῦτο. Οὕτω ἐκ τῆς σχέσεως (4) εὑρίσκομεν:

$$\underline{A = 200 \text{ erg.}}$$

Ἐκ τοῦ μαθήματος τῆς Φυσικῆς εἶναι γνωστὸν ὅτι ἡ κινητικὴ ἐνέργεια ($E_{\text{κιν.}}$) τοῦ σώματος εἶναι ἴση μὲ τὸ ἔργον A, τὸ ὁποῖον κατηναλώθη διὰ νὰ ἀποκτήσῃ τὸ σῶμα τὴν ταχύτητα τὴν ὁποίαν ἔχει. Συνεπῶς θὰ ἔχωμεν:

$$\underline{E_{\text{κιν.}} = A = 200 \text{ erg.}}$$

479. Δύναμις ἐπενεργοῦσα ἐπὶ μάζης 1 kgr μεταδίδει εἰς αὐτὴν ταχύτητα 120 m/min. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ κινητικὴ ἐνέργεια εἰς erg.

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν m τὴν μᾶζαν τοῦ σώματος καὶ υ τὴν ταχύτητα αὐτοῦ, τότε ἡ κινητική του ἐνέργεια δίδεται διὰ τοῦ τύπου:

$$E_{\kappa\iota\nu.} = \frac{1}{2} m \cdot \upsilon^2 \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ ἡ κινητικὴ ἐνέργεια ζητεῖται νὰ ὑπολογισθῇ εἰς ἔργια, εἶναι προτιμότερον νὰ ἐργασθῶμεν εἰς τὸ σύστημα C.G.S. Πρὸς τοῦτο μετατρέπομεν τὴν τιμὴν τῆς μάζης ἀπὸ kgr εἰς gr καὶ τὴν τιμὴν τῆς ταχύτητος ἀπὸ m/min εἰς cm/sec: Οὕτω ἔχομεν: m = 1 kgr = 1 000 gr, υ = 120 m/min = 12 000/60 = 200 cm/sec.

Θέτοντες τὰς τιμὰς ταύτας εἰς τὸν τύπον εὑρίσκομεν:

$$\underline{E_{\kappa\iota\nu.} = 2 \cdot 10^7 \text{ erg.}}$$

480. Πόση εἶναι ἡ κινητικὴ ἐνέργεια ταχείας ἁμαξοστοιχίας βάρους 400 τόννων, ἐχούσης ταχύτητα 90 km/h, εἰς erg, Joule καὶ kWh.

Λύσις. Ἡ κινητικὴ ἐνέργεια $E_{\kappa\iota\nu.}$ ἑνὸς σώματος εὑρίσκεται ἐκ τοῦ γνωστοῦ τύπου:

$$E_{\kappa\iota\nu.} = \frac{1}{2} m \cdot \upsilon^2 \qquad (1)$$

ὅπου m εἶναι ἡ μᾶζα τοῦ σώματος καὶ υ ἡ ταχύτης αὐτοῦ.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν κινητικὴν ἐνέργειαν εἰς erg, ἐργαζόμεθα εἰς τὸ σύστημα C.G.S. Πρὸς τοῦτο μετατρέπομεν τὴν τιμὴν τῆς μάζης τοῦ σώματος ἀπὸ ton εἰς gr καὶ τὴν τιμὴν τῆς ταχύτητος ἀπὸ km/h εἰς cm/sec. Οὕτω: m = 400 ton = $4 \cdot 10^8$ gr, υ = $90 \cdot 10^5/3\,600$ = 2 500 cm/sec.

Θέτοντες τὰς τιμὰς ταύτας εἰς τὸν τύπον (1) εὑρίσκομεν:

$$\underline{E_{\kappa\iota\nu.} = 1{,}25 \cdot 10^{15} \text{ erg.}}$$

Διὰ νὰ μετατρέψωμεν τὴν τιμὴν τῆς κινητικῆς ἐνεργείας ἀπὸ erg εἰς Joule, χρησιμοποιοῦμεν τὴν γνωστὴν σχέσιν: 1 Joule = 10^7 erg. Οὕτω προκύπτει ὅτι:

$$\underline{E_{\kappa\iota\nu.} = 1{,}25 \cdot 10^8 \text{ Joule.}}$$

Τέλος μετατρέπομεν τὴν τιμὴν τῆς κινητικῆς ἐνεργείας ἀπὸ Joule εἰς kWh χρησιμοποιοῦντες τὴν γνωστὴν σχέσιν: 1 kWh = 3 600 000 Joule. Οὕτω εὑρίσκομεν ὅτι:

$$\underline{E_{\kappa\iota\nu.} = 34{,}7 \text{ kWh.}}$$

481. Σῶμα μάζης 400 gr βάλλεται μὲ κινητικὴν ἐνέργειαν 981 Joule κατακορύφως πρὸς τὰ ἄνω. Μέχρι ποίου σημείου ἀνέρχεται τὸ σῶμα. (g = 9,81 m/sec².)

Λύσις. Ὅταν τὸ σῶμα φθάσῃ εἰς τὸ ἀνώτατον ὕψος, ἡ κινητικὴ ἐνέργεια αὐτοῦ θὰ ἔχῃ μετατραπῇ ἐξ ὁλοκλήρου εἰς δυναμικήν. Ἄρα θὰ ἔχωμεν:

$$E_{\delta\upsilon\nu.} = E_{\kappa\iota\nu.} \qquad (1)$$

Ἐὰν καλέσωμεν B τὸ βάρος τοῦ σώματος καὶ h τὸ ὕψος εἰς τὸ ὁποῖον ἀνέρχεται, τότε ἡ δυναμική του ἐνέργεια εἰς τὸ ὕψος τοῦτο θὰ εἶναι:

$$E_{\delta\upsilon\nu.} = B \cdot h \qquad (2)$$

καὶ συνεπῶς ἡ σχέσις (1) δύναται νὰ γραφῇ:

$$B \cdot h = E_{\kappa\iota\nu.} \qquad (3)$$

Λύομεν τὴν σχέσιν (3) ὡς πρὸς τὸ h καὶ λαμβάνομεν:

$$h = \frac{E_{\kappa\iota\nu.}}{B} \qquad (4)$$

Ἐργαζόμεθα εἰς τὸ Τεχνικὸν Σύστημα. Πρὸς τοῦτο μετατρέπομεν τὴν τιμὴν τῆς κινητικῆς ἐνεργείας ἀπὸ Joule εἰς kgr*m (1 kgr*m = 9,81 Joule) καὶ τὴν τιμὴν τοῦ βάρους ἀπὸ gr* εἰς kgr*:

$$E_{\kappa\iota\nu.} = \frac{981}{9{,}81} = 100 \text{ kgr*m} \quad \text{καὶ} \quad B = 400 \cdot 10^{-3} \text{ kgr*}.$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν σχέσιν (4) τὰ μεγέθη διὰ τῶν ἀνωτέρω εὑρεθεισῶν τιμῶν, ὅτε προκύπτει :

$$\underline{h = 250 \text{ m.}}$$

482. Λίθος ἔχει μᾶζαν 20 gr καὶ βάλλεται κατακορύφως πρὸς τὰ ἄνω ὑπὸ ταχύτητα 2 000 cm/sec. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ κινητικὴ ἐνέργεια α) κατὰ τὴν στιγμὴν τῆς βολῆς, β) κατὰ τὸ τέλος τοῦ πρώτου δευτερολέπτου καὶ γ) κατὰ τὸ τέλος τοῦ τετάρτου δευτερολέπτου. (g = 10 m/sec².)

Λύσις. α) Καλοῦμεν m τὴν μᾶζαν τοῦ λίθου καὶ υ τὴν ταχύτητα αὐτοῦ. Θὰ ἰσχύῃ, ὡς γνωστόν, ὁ τύπος τῆς κινητικῆς ἐνεργείας :

$$E_{\kappa\iota\nu.} = \frac{1}{2} m \cdot \upsilon^2 \tag{1}$$

Ἐργαζόμενοι εἰς τὸ σύστημα C. G. S. θέτομεν : m = 20 gr, υ = 200 cm/sec, καὶ εὑρίσκομεν :

$$\underline{E_{\kappa\iota\nu.} = 4 \cdot 10^7 \text{ erg}}$$

ἤ

$$\underline{E_{\kappa\iota\nu.} = 4 \text{ Joule.}}$$

β) Ἂς καλέσωμεν υ_1 τὴν ταχύτητα τοῦ λίθου κατὰ τὸ τέλος τοῦ χρόνου t_1. Θὰ ἔχωμεν, ὡς γνωστόν :

$$\upsilon_1 = \upsilon - g \cdot t_1 \tag{2}$$

Λόγῳ τῆς σχέσεως (2), ὁ τύπος ὁ ὁποῖος δίδει τὴν κινητικὴν ἐνέργειαν γράφεται :

$$E_{\kappa\iota\nu.} = \frac{1}{2} m \, (\upsilon - g \cdot t_1) \tag{3}$$

Θέτομεν εἰς τὴν σχέσιν (3) : m = 20 gr, υ = 200 cm/sec, g = 1 000 cm/sec², t_1 = 1 sec, καὶ εὑρίσκομεν :

$$\underline{E_{\kappa\iota\nu.} = 10^7 \text{ erg}}$$

ἤ

$$\underline{E_{\kappa\iota\nu.} = 1 \text{ Joule.}}$$

γ) Ἐὰν καλέσωμεν t_2 τὸν χρόνον εἰς τὸ τέλος τοῦ ὁποίου ζητεῖται ἡ κινητικὴ ἐνέργεια, θὰ ἔχωμεν :

$$E_{\kappa\iota\nu.} = \frac{1}{2} m \, (\upsilon - g \cdot t_2) \tag{4}$$

Θέτοντες δὲ εἰς τὴν σχέσιν (4) : m = 20 gr, υ = 200 cm/sec καὶ t_2 = 4 sec, εὑρίσκομεν :

$$\underline{E_{\kappa\iota\nu.} = 4 \cdot 10^7 \text{ erg} = 4 \text{ Joule.}}$$

483. Πλίνθος μάζης 2,5 kgr εὑρίσκεται εἰς τὴν κορυφὴν καπνοδόχου ὕψους 50 m. α) Πόση ἡ δυναμική της ἐνέργεια. β) Ἐὰν ἀποσπασθῇ ἀπὸ τῆς καπνοδόχου, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ κινητική της ἐνέργεια καὶ γ) ἡ δυναμική της ἐνέργεια εἰς τὸ τέλος τοῦ τρίτου δευτερολέπτου. (g = 10 m/sec².)

Λύσις. α) Ἡ δυναμικὴ ἐνέργεια τῆς πλίνθου θὰ εἶναι :

$$E_{\delta\upsilon\nu.} = B \cdot h \tag{1}$$

ὅπου B τὸ βάρος τῆς πλίνθου καὶ h τὸ ὕψος τῆς καπνοδόχου. Ἐκ τῆς σχέσεως (1), ἐργαζόμενοι εἰς τὸ Τεχνικὸν Σύστημα, εὑρίσκομεν:

$$\underline{E_{\delta\upsilon\nu.} = 2{,}5 \cdot 50 = 125 \text{ kgr*m.}}$$

β) Ὅταν ἡ πλίνθος ἀποσπασθῇ ἀπὸ τῆς καπνοδόχου, θὰ ἀποκτήσῃ εἰς χρόνον t ταχύτητα $\upsilon = g \,.\, t$ καὶ συνεπῶς ἡ κινητική της ἐνέργεια θὰ εἶναι:

$$E'_{\kappa\iota\nu.} = \frac{1}{2}\, m \,.\, \upsilon^2 = \frac{1}{2}\, m \,.\, g^2 \cdot t^2 \qquad (2)$$

Ἐργαζόμενοι εἰς τὸ Τεχνικὸν Σύστημα θέτομεν εἰς τὴν σχέσιν (2): $m = 2{,}5/10$ Τ. Μ. μάζης, $g = 10\ m/sec^2$, $t = 3$ sec, καὶ εὑρίσκομεν:

$$\underline{E'_{\kappa\iota\nu.} = 112{,}5 \text{ kgr*m.}}$$

γ) Γνωρίζομεν ὅτι τὸ ἄθροισμα τῆς κινητικῆς καὶ δυναμικῆς ἐνεργείας εἶναι σταθερόν, ἐφ' ὅσον δὲν λαμβάνει χώραν μετατροπὴ τῆς μηχανικῆς ἐνεργείας εἰς θερμότητα λόγῳ τριβῶν. Ἄρα θὰ ἔχωμεν κατὰ τὴν στιγμὴν ταύτην:

$$E'_{\delta\upsilon\nu.} = E_{\kappa\iota\nu.}$$

καὶ συνεπῶς εὑρίσκομεν ὅτι:

$$\underline{E'_{\delta\upsilon\nu.} = 112{,}5 \text{ kgr*m.}}$$

484. Σῶμα βάρους 5 kgr* βάλλεται ἀπὸ ὡρισμένου ὕψους μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα 10 m/sec κατακορύφως ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω. Εἰς ἀπόστασιν 4 m ἀπὸ τοῦ ἐδάφους τὸ σῶμα ἔχει κινητικὴν ἐνέργειαν 200 kgr*m. Ἐκ ποίου ὕψους ἐβλήθη τὸ σῶμα. ($g = 10\ m/sec^2$.)

Λύσις. Τὸ σῶμα κατὰ τὴν στιγμὴν τῆς βολῆς εἶχε κινητικὴν ἐνέργειαν:

$$\frac{1}{2}\, m \cdot \upsilon^2 \qquad (1)$$

ὅπου m ἡ μᾶζα τοῦ σώματος καὶ υ ἡ ταχύτης βολῆς. Ἐπίσης, ἐὰν καλέσωμεν h τὸ ὕψος εἰς τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται τὸ σῶμα κατὰ τὴν στιγμὴν τῆς βολῆς, θὰ ἔχῃ καὶ δυναμικὴν ἐνέργειαν:

$$E_{\delta\upsilon\nu.} = m \cdot g \cdot h \qquad (2)$$

Ἄρα ἡ ὁλικὴ μηχανικὴ ἐνέργεια θὰ εἶναι:

$$E_{\delta\lambda.} = E_{\kappa\iota\nu.} + E_{\delta\upsilon\nu.} \qquad (3)$$

Ἐὰν τώρα τὸ σῶμα κατερχόμενον εὑρεθῇ εἰς ὕψος h′, ἡ δυναμική του ἐνέργεια θὰ εἶναι:

$$E'_{\delta\upsilon\nu.} = m \cdot g \cdot h' \qquad (4)$$

Ἔστω δὲ ὅτι θὰ ἔχῃ καὶ κινητικὴν ἐνέργειαν εἰς τὴν νέαν θέσιν $E'_{\kappa\iota\nu.}$

Συμφώνως πρὸς τὴν Ἀρχὴν τῆς διατηρήσεως τῆς μηχανικῆς ἐνεργείας, θὰ ἔχωμεν:

$$E_{\kappa\iota\nu.} + E_{\delta\upsilon\nu.} = E'_{\kappa\iota\nu.} + E'_{\delta\upsilon\nu.} \qquad (5)$$

Ἢ λόγῳ τῶν σχέσεων (1), (2) καὶ (4):

$$\frac{1}{2}\, m \cdot \upsilon^2 + m \cdot g \cdot h = E'_{\kappa\iota\nu.} + m \cdot g \cdot h' \qquad (6)$$

Λύομεν τὴν σχέσιν (6) ὡς πρὸς τὸ ζητούμενον ὕψος h καὶ λαμβάνομεν:

$$h = \frac{E'_{\kappa\iota\nu.}}{m \cdot g} + h' - \frac{\upsilon^2}{2g} \qquad (7)$$

Ἐργαζόμενοι εἰς τὸ Τεχνικὸν Σύστημα θέτομεν εἰς τὴν σχέσιν (7): $E'_{\kappa\iota\nu.} = 200$ kgr*m, $m = 0{,}5$ Τ. Μ. μάζης, $h' = 4$ m, $\upsilon = 10$ m/sec, καὶ εὑρίσκομεν:

$$\underline{h = 39 \text{ m.}}$$

485. Σῶμα βάλλεται μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα 20 m/sec κατακορύφως πρὸς τὰ ἄνω. Εἰς ποῖον ὕψος ἀπὸ τοῦ ἐδάφους ἡ ταχύτης του θὰ ἔχῃ ἐλαττωθῆ εἰς τὸ ἥμισυ τῆς ἀρχικῆς τιμῆς. ($g = 10$ m/sec².)

Λύσις. Ἔστω m ἡ μᾶζα τοῦ σώματος, υ_0 ἡ ἀρχικὴ ταχύτης αὐτοῦ καὶ υ ἡ ζητουμένη ταχύτης τοῦ σώματος ὅταν τοῦτο εὑρίσκεται εἰς ὕψος h. Τὸ σῶμα κατὰ τὴν στιγμὴν τῆς βολῆς θὰ ἔχῃ κινητικὴν ἐνέργειαν $1/2 \cdot m \cdot \upsilon_0^2$ καὶ δυναμικὴν ἐνέργειαν μηδέν.

Εἰς ὕψος h θὰ ἔχῃ κινητικὴν ἐνέργειαν $1/2 \cdot m \cdot \upsilon^2$ καὶ δυναμικὴν ἐνέργειαν $m \cdot g \cdot h$.

Συμφώνως δὲ πρὸς τὴν Ἀρχὴν τῆς διατηρήσεως τῆς μηχανικῆς ἐνεργείας θὰ ἔχωμεν:

$$\frac{1}{2} m \cdot \upsilon_0^2 + 0 = \frac{1}{2} m \cdot \upsilon^2 + m \cdot g \cdot h \qquad (1)$$

ἢ

$$\frac{1}{2} \upsilon_0^2 = \frac{1}{2} \upsilon^2 + g \cdot h \qquad (2)$$

Ἐκ τῆς σχέσεως ταύτης λαμβάνομεν τὸν γνωστὸν τύπον:

$$h = \frac{\upsilon_0^2 - \upsilon^2}{2g} \qquad (3)$$

Ἐπειδὴ ἔχει δοθῆ ὅτι εἰς ὕψος h ἡ ταχύτης τοῦ σώματος θὰ εἶναι $\upsilon = \upsilon_0/2$, ὁ τύπος (3) γράφεται:

$$h = \frac{\upsilon_0^2 - \frac{\upsilon_0^2}{4}}{2g} \quad (4) \qquad \text{ἢ} \qquad h = \frac{3\,\upsilon_0^2}{8g} \quad (5)$$

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (5): $\upsilon_0 = 10$ m/sec, $g = 10$ m/sec², εὑρίσκομεν:

$$\underline{h = 15 \text{ m.}}$$

486. Σῶμα βάλλεται ἐξ ὕψους 10 m καὶ μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα 6 m/sec κατακορύφως ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω. Τὸ σῶμα φθάνον εἰς τὸ ἔδαφος εἰσχωρεῖ ἐντὸς αὐτοῦ εἰς βάθος 10 cm. Πόση ἡ ἐπιβράδυνσις τὴν ὁποίαν ὑφίσταται τὸ σῶμα. ($g = 9{,}81$ m/sec².)

Λύσις. Ἔστω ὅτι τὸ σῶμα ἔχει μᾶζαν m, εὑρίσκεται εἰς ὕψος h καὶ ὅτι βάλλεται πρὸς τὰ κάτω μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα υ_0. Εἰς τὸ ὕψος h καὶ κατὰ τὴν στιγμὴν τῆς βολῆς ἡ ὁλικὴ ἐνέργεια τοῦ σώματος θὰ εἶναι δυναμικὴ καὶ κινητικὴ ἐνέργεια καὶ συνεπῶς θὰ ἔχωμεν:

$$E_{\delta\lambda.} = m \cdot g \cdot h + \frac{1}{2} m \cdot \upsilon_0^2 \qquad (1)$$

Ἡ ἐνέργεια αὕτη, ὅταν τὸ σῶμα φθάσῃ εἰς τὸ ἔδαφος, θὰ δαπανηθῇ ἵνα εἰσχωρήσῃ τοῦτο εἰς τὸ ἔδαφος. Ἐὰν δὲ καλέσωμεν s τὸ βάθος εἰς τὸ ὁποῖον εἰσχωρεῖ τὸ σῶμα εἰς τὸ ἔδαφος καὶ F τὴν δύναμιν (ἀντίστασιν) τὴν ὁποίαν ὑπερνικᾷ πρὸς τοῦτο, τὸ παραγόμενον ἔργον θὰ εἶναι:

$$A = F \cdot s \qquad (2)$$

Συμφώνως τώρα πρὸς τὴν θεμελιώδη Ἀρχὴν τῆς διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας, θὰ ἔχωμεν τὴν σχέσιν:

$$A = E_{\delta\lambda.} \quad \text{ἢ} \quad F \cdot s = m \cdot g \cdot h + \frac{1}{2} m \cdot \upsilon_0^2 \qquad (3)$$

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ γ τὴν ζητουμένην ἐπιβράδυνσιν, θὰ ἔχωμεν ἀπὸ τὸν θεμελιώδη νόμον τῆς Μηχανικῆς $F = m \cdot \gamma$, καὶ οὕτω ἡ σχέσις (3) δύναται νὰ γραφῇ:

$$\gamma \cdot s = g \cdot h + \frac{1}{2} \upsilon_0^2 \qquad (4)$$

Λύοντες τὴν σχέσιν (4) ὡς πρὸς γ λαμβάνομεν:

$$\gamma = \frac{\upsilon_0^2}{2s} + \frac{g \cdot h}{s} \qquad (5)$$

Θέτομεν ἀκολούθως εἰς τὴν σχέσιν (5): $\upsilon_0 = 6$ m/sec, $g = 9{,}81$ m/sec², $h = 10$ m, $s = 10$ cm $= 0{,}1$ m, καὶ εὑρίσκομεν:

$$\underline{\gamma = 1\,161 \text{ m/sec}^2.}$$

487. Σφαῖρα βάρους 5 kgr* ἐξέρχεται ἀπὸ τῆς κάννης πυροβόλου μὲ ταχύτητα 800 m/sec, τὸ δὲ μῆκος τοῦ σωλῆνος τοῦ πυροβόλου εἶναι 2 m. Ζητοῦνται ἡ κινητήριος δύναμις, ὑποτιθεμένη σταθερά, ἡ ἐπενεργοῦσα ἐπὶ τοῦ βλήματος ἐντὸς τοῦ σωλῆνος, εἰς dyn καὶ kgr*, ὡς καὶ ἡ κινητικὴ ἐνέργεια τοῦ βλήματος, καθ' ἣν στιγμὴν ἐξέρχεται τοῦ πυροβόλου, εἰς erg καὶ kgr*m. ($g = 10$ m/sec².)

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν F τὴν σταθερὰν κινητήριον δύναμιν καὶ s τὸ μῆκος τοῦ σωλῆνος, τότε τὸ παραγόμενον ἔργον θὰ εἶναι: $A = F \cdot s$. Τὸ ἔργον τοῦτο δαπανᾶται ἐξ ὁλοκλήρου διὰ νὰ προσδώσῃ εἰς τὸ βλῆμα τὴν κινητικὴν ἐνέργειαν: $E_{\kappa\iota\nu.} = \frac{1}{2} m \cdot \upsilon^2$, ὅπου m ἡ μᾶζα τοῦ σώματος καὶ υ ἡ ταχύτης αὐτοῦ ὅταν ἐξέρχεται τοῦ πυροβόλου. Συνεπῶς θὰ ἔχωμεν:

$$F \cdot s = \frac{1}{2} m \cdot \upsilon^2 \quad \text{ἢ} \quad F = \frac{m \cdot \upsilon^2}{2\,s} \tag{1}$$

Τὰ δεδομένα εἶναι: $m = 0{,}5$ Τ. Μ. μάζης, $\upsilon = 800$ m/sec, $s = 2$ m· ὅτε ἐκ τοῦ τύπου (1) εὑρίσκομεν:

$$\underline{F = 8 \cdot 10^4 \text{ kgr}^*.}$$

Ἐπειδὴ 1 kgr* $= 1 \cdot 10^6$ dyn, ἔχομεν καί:

$$\underline{F = 8 \cdot 10^{10} \text{ dyn.}}$$

Ἡ κινητικὴ ἐνέργεια τοῦ βλήματος θὰ εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἔργον τὸ ὁποῖον τὴν παρήγαγε:

$$E_{\kappa\iota\nu.} = F \cdot s \tag{2}$$

Ἐκ τοῦ τύπου (2), ἐργαζόμενοι εἰς τὸ σύστημα C.G.S., εὑρίσκομεν:

$$\underline{E_{\kappa\iota\nu.} = 16 \cdot 10^{12} \text{ erg}}$$

καὶ εἰς τὸ Τεχνικὸν Σύστημα:

$$\underline{E_{\kappa\iota\nu.} = 16 \cdot 10^4 \text{ kgr}^*\text{m.}}$$

488. Σφυρίον βάρους 2 kgr* κινεῖται ὑπὸ ταχύτητα 15 m/sec καὶ προσκροῦον ἐπὶ καρφίου ἀναγκάζει αὐτὸ νὰ εἰσχωρήσῃ κατὰ 2,5 cm. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ μέση δύναμις ἡ ἀσκουμένη ἐπὶ τοῦ καρφίου. Ἐὰν ἡ ἀνωτέρω διεργασία διαρκῇ 1/50 sec, πόση θὰ εἶναι ἡ ἰσχὺς τοῦ κτυπήματος. ($g=10$ m/sec².)

Λύσις. Τὸ σφυρίον θὰ ἔχῃ κινητικὴν ἐνέργειαν:

$$E_{\kappa\iota\nu.} = \frac{1}{2} m \cdot \upsilon^2 \tag{1}$$

ὅπου m ἡ μᾶζα τοῦ σφυρίου καὶ υ ἡ ταχύτης αὐτοῦ. Ἡ ἐνέργεια αὕτη μετατρέπεται ἐξ ὁλοκλήρου εἰς ἔργον, ἵνα εἰσχωρήσῃ τὸ καρφίον. Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ μέση ἐξασκουμένη δύναμις ἐπὶ τοῦ καρφίου εἶναι F καὶ ὅτι τὸ καρφίον εἰσχωρεῖ εἰς βάθος s, τότε τὸ παραγόμενον ἔργον εἶναι:

$$A = F\,.\,s \tag{2}$$

καὶ συμφώνως πρὸς τὴν Ἀρχὴν τῆς διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις:

$$A = E_{\kappa\iota\nu.} \quad \text{ἢ} \quad F\,.\,s = \frac{1}{2} m \cdot \upsilon^2 \tag{3}$$

Λύομεν τὴν σχέσιν (3) ὡς πρὸς F καὶ λαμβάνομεν:

$$F = \frac{m \cdot \upsilon^2}{2\,s}$$

Ἐργαζόμενοι δὲ εἰς τὸ Τεχνικὸν Σύστημα εὑρίσκομεν :

$$\underline{F = 900 \text{ kgr}^*.}$$

Ἐὰν δὲ καλέσωμεν t τὸν χρόνον κατὰ τὸν ὁποῖον παράγεται τὸ ἔργον τοῦτο, τότε ἡ ζητουμένη ἰσχὺς θὰ εἶναι :

$$N = \frac{A}{t} = \frac{F \cdot s}{t} \qquad (4)$$

καὶ ἐργαζόμενοι πάλιν εἰς τὸ Τεχνικὸν Σύστημα εὑρίσκομεν :

$$\underline{N = 1\,125 \text{ kgr}^*/\text{sec}.}$$

489. Σιδηροδρομικὸς συρμὸς 500 τόννων πρέπει νὰ ἀποκτήσῃ ἐκ τῆς ἠρεμίας, ἀφοῦ διανύσῃ διάστημα 10 km εἰς κεκλιμένον ἐπίπεδον 1 : 1000, ταχύτητα $\upsilon = 36$ km/h. Πόση εἶναι ἡ ἕλξις τὴν ὁποίαν ἀσκεῖ ἡ ἀτμομηχανὴ ἐπὶ τοῦ συρμοῦ, ὑποτιθεμένης αὐτῆς σταθερᾶς. ($g = 10$ m/sec².)

Λύσις. Διὰ νὰ κινῆται ὁ σιδηρόδρομος μὲ κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην ἐπὶ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου, πρέπει ἡ δύναμις F, τὴν ὁποίαν ἀσκεῖ ἐπ' αὐτοῦ ἡ ἀτμομηχανή, νὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς συνιστώσης $B \cdot \text{ημ}\,\alpha$ τοῦ βάρους του, ἥτις ἀντιτίθεται εἰς τὴν κίνησιν αὐτοῦ, κατὰ τὴν ἐπιταχύνουσαν δύναμιν F_ε. Ἤτοι :

$$F = B \cdot \text{ημ}\,\alpha + F_\varepsilon \qquad (1)$$

Ἐὰν καλέσωμεν m τὴν μᾶζαν τοῦ σιδηροδρόμου καὶ γ τὴν ἐπιτάχυνσιν μὲ τὴν ὁποίαν κινεῖται ἐπὶ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου, θὰ ἔχωμεν :

$$F_\varepsilon = m \cdot \gamma \text{ (θεμελιώδης νόμος τῆς Μηχανικῆς)} \qquad (2)$$

Λόγῳ τῆς σχέσεως (2) ἡ σχέσις (1) δύναται νὰ γραφῇ τώρα :

$$F = B \cdot \text{ημ}\,\alpha + m \cdot \gamma \qquad (3)$$

Ἐξ ἄλλου, ἐπειδὴ ἡ κίνησις τοῦ σιδηροδρόμου εἶναι ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένη, ἄνευ ἀρχικῆς ταχύτητος, θὰ ἰσχύουν αἱ σχέσεις :

$$\upsilon = \gamma \cdot t \quad (4) \quad \text{καὶ} \quad s = \frac{1}{2}\gamma \cdot t^2 \qquad (5)$$

Ἐὰν μεταξὺ τῶν σχέσεων (4) καὶ (5) ἀπαλείψωμεν τὸν χρόνον t, λαμβάνομεν :

$$\gamma = \frac{\upsilon^2}{2s} \qquad (6)$$

καὶ οὕτω ἡ σχέσις (3) δύναται νὰ γραφῇ τελικῶς :

$$F = B \cdot \text{ημ}\,\alpha + \frac{m \cdot \upsilon^2}{2s} \qquad (7)$$

Ἐργαζόμενοι εἰς τὸ Τεχνικὸν Σύστημα θέτομεν εἰς τὴν σχέσιν (7) : $B = 500 \cdot 10^3$ kgr*, $\text{ημ}\,\alpha = 1/1\,000 = 0{,}001$, $m = 500 \cdot 10^2$ T. M. μάζης, $\upsilon = 36 \cdot 10^3/3\,600 = 10$ m/sec, $s = 10 \cdot 10^3$ m, καὶ εὑρίσκομεν :

$$\underline{F = 750 \text{ kgr}^*.}$$

490. Μικρὰ σφαῖρα ἀφίεται ἐκ τοῦ σημείου Α ἡμικυλινδρικῆς ἐπιφανείας (βλ. σχῆμα) τῆς ὁποίας ὁ ἄξων εἶναι ὁριζόντιος. Νὰ εὑρεθῇ ποία δύναμις ἐξασκεῖται ἐπὶ τῆς σφαίρας ἀπὸ τὴν ἐπιφάνειαν, ὅταν αὕτη διέρχεται διὰ τοῦ κατωτάτου σημείου Γ.

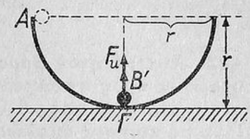
Λύσις. Ὅταν ἡ σφαῖρα διέρχεται διὰ τοῦ σημείου Γ, θὰ ἐξασκοῦνται ἐπ' αὐτῆς, ἐκ μέρους τῆς ἐπιφανείας, πρῶτον ἡ δύναμις B', ἡ ὁποία προέρχεται ἀπὸ τὴν ἐπιφάνειαν καὶ εἶναι ἴση καὶ ἀντίθετος πρὸς τὸ βάρος τοῦ σώματος, καὶ δεύτερον ἡ κεντρομόλος δύναμις F_κ, ἡ ὁποία περιστρέφει τὸ σῶμα καὶ ἐξασκεῖται ἐπ' αὐτοῦ ἐπίσης ἀπὸ τὴν ἐπιφάνειαν. Ἄρα ἡ συνολικῶς ἐπὶ τῆς σφαίρας ἐξασκουμένη δύναμις ὑπὸ τῆς ἐπιφανείας εἶναι :

$$F = B + F_\kappa \qquad (1)$$

Θέτοντες εἰς τὴν σχέσιν (1) : $B = m \cdot g$ καὶ $F_\kappa = m \cdot \upsilon^2/r$, λαμβάνομεν :

$$F = m \cdot g + \frac{m \cdot \upsilon^2}{r} \qquad (2)$$

Ἐξ ἄλλου, ὅταν ἡ σφαῖρα διέρχεται διὰ τοῦ σημείου Γ, θὰ ἔχῃ κινητικὴν ἐνέργειαν $^1/_2 \cdot m \cdot \upsilon^2$, ἴσην πρὸς τὴν δυναμικὴν ἐνέργειαν $m \cdot g \cdot r$, τὴν ὁποίαν εἶχε εἰς τὸ σημεῖον Α. Ἤτοι :



$$\frac{1}{2} m \cdot \upsilon^2 = m \cdot g \cdot r \quad \text{ἢ} \quad \upsilon^2 = 2\, g \cdot r \qquad (3)$$

Θέτοντες τὴν τιμὴν τοῦ υ^2 εἰς τὴν σχέσιν (2) λαμβάνομεν :

$$\underline{F} = m \cdot g + 2\, m \cdot g = \underline{3\ B}$$

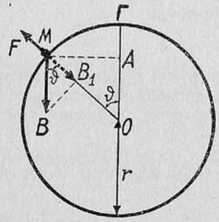
Ἄρα ἡ δύναμις ἡ ἐξασκουμένη ἐπὶ τῆς σφαίρας ἀπὸ τὴν ἐπιφάνειαν ἰσοῦται μὲ τὸ τριπλάσιον τοῦ βάρους αὐτῆς.

491. Μικρὰ σφαῖρα ἀφίεται, ἄνευ ἀρχικῆς ταχύτητος, ἔκ τινος σημείου Α εὑρισκομένου πλησίον τοῦ ἀνωτέρου σημείου Γ κυλίνδρου τοῦ ὁποίου αἱ βάσεις εἶναι κατακόρυφοι. Εἰς ποῖον σημεῖον θὰ ἐγκαταλείψῃ αὕτη τὸν κύλινδρον ὀλισθαίνουσα ἄνευ τριβῶν ἐπ' αὐτοῦ.

Λύσις. Ὅταν ἡ σφαῖρα ἀφεθῇ ἐλευθέρα ἀπὸ τὸ ἀναφερόμενον σημεῖον τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας καὶ ἀρχίσῃ νὰ ὀλισθαίνῃ ἐπ' αὐτῆς, θὰ ὑφίσταται τὴν ἐπενέργειαν τῶν ἀκολούθων δυνάμεων : α) Τοῦ βάρους αὐτῆς $B = m \cdot g$, τὸ ὁποῖον εἶναι κατακόρυφον (βλ. σχῆμα). β) Τῆς δυνάμεως F ἡ ὁποία προέρχεται ἀπὸ τὴν κυλινδρικὴν ἐπιφάνειαν καὶ ἔχει φορὰν ἀπὸ τοῦ Ο πρὸς τὸ Μ. Κατὰ τὴν διεύθυνσιν ΟΜ ἐξασκεῖται ἐπὶ τῆς σφαίρας ἐκτὸς τῆς δυνάμεως F καὶ ἡ δύναμις $B_1 = B \cdot \text{συν}\,\theta = m \cdot g \cdot \text{συν}\,\theta$. Αἱ δύο αὗται δυνάμεις δίδουν προφανῶς συνισταμένην F_κ μὲ φορὰν πρὸς τὸ κέντρον Ο. Ἤτοι :

$$F_\kappa = m \cdot g \cdot \text{συν}\,\theta - F \qquad (1)$$

Ἡ δύναμις ὅμως F_κ ὡς ἔχουσα φορὰν πρὸς τὸ κέντρον Ο εἶναι ἡ ἐπὶ τῆς σφαίρας ἐνεργοῦσα κεντρομόλος δύναμις καὶ ἀναγκάζει τὸ σῶμα νὰ στρέφεται περὶ τὸ σημεῖον τοῦτο μὲ ταχύτητα υ. Συνεπῶς ἡ σχέσις (1) δύναται νὰ γραφῇ :



$$m \cdot \frac{\upsilon^2}{r} = m \cdot g \cdot \text{συν}\,\theta - F \qquad (2)$$

Ἐὰν τώρα ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ μικρὰ σφαῖρα χάνει τὴν ἐπαφήν της μὲ τὴν κυλινδρικὴν ἐπιφάνειαν εἰς τὸ σημεῖον Μ, τότε εἰς τὸ ἐν λόγῳ σημεῖον ἡ δύναμις F μηδενίζεται καὶ ἡ σχέσις (2) γράφεται :

$$m \cdot \frac{\upsilon^2}{r} = m \cdot g \cdot \text{συν}\,\theta \quad \text{ἢ} \quad \frac{\upsilon^2}{r} = g \cdot \text{συν}\,\theta \qquad (3)$$

Ἡ σφαῖρα, ὅταν εὑρεθῇ εἰς τὴν θέσιν Μ, θὰ ἔχῃ κατέλθει (κατακορύφως) κατά :

$$ΓA = r - (OA) = r - r \cdot \text{συν}\,\theta$$

καὶ θὰ ἔχῃ ἀποκτήσει κινητικὴν ἐνέργειαν ἴσην μὲ τὴν δυναμικὴν ἐνέργειαν, τὴν ὁποίαν ἀπώλεσε ἡ σφαῖρα κατερχομένη ἐκ τοῦ σημείου Γ εἰς τὸ σημεῖον Α. Ἄρα θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις :

$$\frac{1}{2} m \cdot \upsilon^2 = m \cdot g\,(r - r \cdot \text{συν}\,\theta)$$

ἢ

$$\upsilon^2 = 2\, g\,(r - r \cdot \text{συν}\,\theta) \qquad (4)$$

Λόγῳ τῆς σχέσεως (4) ἡ σχέσις (3) λαμβάνει τὴν μορφήν :

$$2\,(1 - \text{συν}\,\theta) = \text{συν}\,\theta$$

ἐκ τῆς ὁποίας προκύπτει ὅτι : $\sigma\upsilon\nu\,\theta = \frac{2}{3}$

καὶ $\underline{\theta = 48^\circ\ 11'\ 30''.}$

Οὕτω τὸ σημεῖον Μ, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ σφαῖρα θὰ ἐγκαταλείψῃ τὴν κυλινδρικὴν ἐπιφάνειαν, προσδιορίζεται ἐκ τῆς γωνίας θ = 48° 11′ 30″, τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ ἀκτὶς ΟΜ μὲ τὴν κατακόρυφον ἀκτῖνα ΟΓ.

492. Αὐτοκίνητον βάρους 750 kgr* κινεῖται ἐπὶ ὁριζοντίας ὁδοῦ. Αἱ τριβαὶ ἰσοδυναμοῦν πρὸς σταθερὰν δύναμιν ἀντιθέτου φορᾶς πρὸς τὴν φορὰν τῆς κινήσεως καὶ ἴσην πρὸς 0,04 τοῦ βάρους του. Ἀναχωρεῖ ἐκ τῆς ἠρεμίας καὶ κινεῖται μὲ κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην, μέχρις ὅτου ἀποκτήσῃ σταθερὰν ταχύτητα 72 km/h, ἀφοῦ διανύσῃ διάστημα 100 m. Ζητοῦνται: α) Ὁ χρόνος ἀπὸ τῆς ἐκκινήσεως μέχρις ὅτου ἀποκτήσῃ τὴν σταθερὰν ταχύτητα. β) Ἡ δύναμις τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ ἀναπτύξῃ ἡ μηχανὴ κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς κινήσεως, ἵνα ἔχωμεν τὸ ἀποτέλεσμα τοῦτο. γ) Τὸ ἔργον τὸ δαπανώμενον ὑπὸ τῆς μηχανῆς καὶ ἡ κινητικὴ ἐνέργεια, ὅταν φθάσῃ τὴν ταχύτητα 72 km/h. δ) Ἐάν, ἀφοῦ κινηθῇ ἐπί τινα χρόνον μὲ σταθερὰν ταχύτητα, σταματήσῃ ἀποτόμως ἡ μηχανή, ἐπὶ πόσον χρόνον θὰ ἐξακολουθήσῃ κινούμενον τὸ αὐτοκίνητον καὶ πόσον διάστημα θὰ διανύσῃ. ($g = 10$ m/sec².)

Λύσις. α) Ἐκ τῶν τύπων τῆς ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένης κινήσεως (ἄνευ ἀρχικῆς ταχύτητος):

$$\upsilon = \gamma \cdot t \quad (1) \qquad \text{καὶ} \qquad s = \frac{1}{2}\,\gamma \cdot t^2 \quad (2)$$

προκύπτει ὅτι ὁ ζητούμενος χρόνος εἶναι :

$$t = \frac{2\,s}{\upsilon} \quad (3)$$

Ἐὰν εἰς τὸν τύπον (3) θέσωμεν τὰ δεδομένα : $s = 100$ m καὶ $\upsilon = 72 \cdot 10^3/3\,600 = 20$ m/sec, εὑρίσκομεν :

$$\underline{t = 10\ \text{sec.}}$$

β) Ἡ δύναμις, τὴν ὁποίαν ἀναπτύσσει ἡ μηχανή, ἀφ' ἑνὸς ὑπερνικᾷ τὴν τριβὴν Τ καὶ ἀφ' ἑτέρου προσδίδει καὶ ἐπιτάχυνσιν γ εἰς τὸ αὐτοκίνητον. Ἐὰν συνεπῶς καλέσωμεν m τὴν μᾶζαν τοῦ αὐτοκινήτου, θὰ ἔχωμεν :

$$F = T + m \cdot \gamma \quad (4)$$

Ἐκ τῶν τύπων ὅμως (1) καὶ (2) προκύπτει ὅτι :

$$\gamma = \frac{\upsilon^2}{2\,s} \quad (5)$$

καὶ συνεπῶς ὁ τύπος (4) γράφεται :

$$F = T + m \cdot \frac{\upsilon^2}{2\,s} \quad (6)$$

Θέτομεν εἰς τὸν τύπον (6) τὰ δεδομένα : $T = 0{,}04 \cdot 750$ kgr*, $m = 75$ Τ·Μ·μάζης, $\upsilon = 20$ m/sec, $s = 100$ m, καὶ εὑρίσκομεν :

$$\underline{F = 180\ \text{kgr*}.}$$

γ) τὸ ἔργον τὸ ὁποῖον δαπανᾷ ἡ μηχανὴ εἶναι προφανῶς τὸ ἔργον τὸ ὁποῖον προκύπτει ἀπὸ τὴν μετατόπισιν τοῦ σημείου ἐφαρμογῆς τῆς ὁλικῆς δυνάμεως F τὴν ὁποίαν ἀναπτύσσει ἡ μηχανή.

Ἤτοι : $$A = F \cdot s \quad (7)$$

Ἐργαζόμενοι εἰς τὸ Τεχνικὸν Σύστημα εὑρίσκομεν ἐκ τοῦ τύπου (7) ὅτι :

$$\underline{A = 18\,000\ \text{kgr*m}.}$$

Ἡ κινητικὴ ἐνέργεια εὑρίσκεται ἐκ τοῦ τύπου: $E_{\kappa\iota\nu.} = \frac{1}{2} m \cdot \upsilon^2$ ὅτι εἶναι:

$$\underline{E_{\kappa\iota\nu.} = 1\,500 \text{ kgr*m.}}$$

δ) Εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν σταματᾷ ἀποτόμως ἡ μηχανὴ λειτουργοῦσα, τὸ αὐτοκίνητον λόγῳ τῆς τριβῆς T θὰ κινηθῇ μὲ κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιβραδυνομένην ἐπὶ χρόνον t_1 καὶ θὰ διανύσῃ διάστημα s_1. Δυνάμεθα νὰ σκεφθῶμεν ὅτι, ἐὰν ἀντιστρόφως τὸ αὐτοκίνητον ἐκινεῖτο ἐκ τῆς ἠρεμίας κινούμενον ὑπὸ τὴν ἐπενέργειαν μόνον τῆς δυνάμεως T, ἕως ὅτου ἀποκτήσῃ ταχύτητα $\upsilon = 72$ km/h, θὰ διήνυε τὸ αὐτὸ διάστημα s_1 εἰς χρόνον t_1 μὲ μέσην ταχύτητα $\overline{\upsilon} = \upsilon/2$. Ἄρα θὰ ἔχωμεν:

$$s_1 = \frac{1}{2} \upsilon \cdot t_1 \tag{8}$$

Ἐξ ἄλλου, ἀπὸ τὸν θεμελιώδη νόμον τῆς Μηχανικῆς ἔχομεν:

$$T = m \cdot \gamma = m \cdot \frac{\upsilon}{t} \tag{9}$$

Ἐκ τῶν σχέσεων (8) καὶ (9) προκύπτει ὅτι:

$$s = \frac{m \cdot \upsilon^2}{2T} \tag{10}$$

καὶ δι' ἀντικαταστάσεως εὑρίσκομεν:

$$\underline{s = 500 \text{ m.}}$$

493. Ἀνελκυστὴρ ἀναχωρεῖ ἐκ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ἐδάφους ἄνευ ἀρχικῆς ταχύτητος καὶ κινούμενος μὲ κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην, κατακορύφως πρὸς τὰ ἄνω, διέρχεται μετὰ πάροδον 10 sec δι' ἑνὸς σημείου τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται εἰς ὕψος 20 m. Νὰ εὑρεθῇ ποία ἡ μέση ἰσχὺς τοῦ κινητῆρος τοῦ ἀνελκυστῆρος διὰ τὸ χρονικὸν διάστημα τῶν 10 sec. Δίδονται: Μᾶζα κινητῆρος m = 0,5 τόννοι καὶ g = 10 m/sec².

Λύσις. Ἡ μέση ἰσχὺς N τοῦ κινητῆρος εἶναι τὸ πηλίκον τοῦ παραγομένου ἔργου A ὑπ' αὐτοῦ διὰ τοῦ ἀντιστοίχου χρόνου t. Ἤτοι:

$$N = \frac{A}{t} \tag{1}$$

Τὸ παραγόμενον, εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην, ἔργον θὰ εἶναι τὸ γινόμενον τῆς σταθερᾶς δυνάμεως F, ἡ ὁποία ἐξασκεῖται ἐπὶ τοῦ ἀνελκυστῆρος ὑπὸ τοῦ καλωδίου, ἐπὶ τὸ ὕψος h εἰς τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται τὸ ἀναφερόμενον σημεῖον. Ἤτοι:

$$A = F \cdot h \tag{2}$$

Ἡ δύναμις F, ἡ ὁποία ἐξασκεῖται ἐπὶ τοῦ ἀνελκυστῆρος ὑπὸ τοῦ καλωδίου, θὰ εἶναι ἴση μὲ τὸ βάρος αὐτοῦ B, σὺν τὴν δύναμιν $m \cdot \gamma$, ἡ ὁποία ἐπιταχύνει αὐτόν.

Δηλαδὴ θὰ εἶναι:

$$F = B + m \cdot \gamma \tag{3}$$

καὶ συνεπῶς ἡ σχέσις (2) γράφεται:

$$A = (B + m \cdot \gamma) \cdot h \tag{4}$$

Οὕτω ἐκ τῶν σχέσεων (4) καὶ (1) προκύπτει ὅτι:

$$N = \frac{(B + m \cdot \gamma) \cdot h}{t} \tag{5}$$

Ἐπειδὴ ὅμως ἡ κίνησις τοῦ ἀνελκυστῆρος εἶναι ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένη, θὰ ἰσχύῃ ὁ τύπος:

$$h = \frac{1}{2} \gamma \cdot t^2 \quad \text{ἐξ οὗ:} \quad \gamma = \frac{2h}{t^2}$$

καὶ συνεπῶς ἡ σχέσις (5) γράφεται:

$$N = \frac{\left(B + \frac{m \cdot 2h}{t^2}\right) \cdot h}{t} \tag{6}$$

Θέτοντες εἰς τὴν σχέσιν (6) : $B = 500$ kgr*, $m = 50$ Τ.Μ. μάζης, $h = 20$ m, $t = 10$ sec, εὑρίσκομεν :

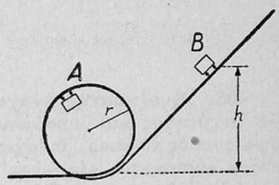
$$\underline{N = 52 \text{ kgr*m/sec}}$$

ἢ $$\underline{N = 0{,}69 \text{ PS.}}$$

494. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐλάχιστον ὕψος h ἐκ τοῦ ὁποίου πρέπει νὰ ἀφεθῇ τὸ ἁμάξιον τῆς συσκευῆς τοῦ σχήματος, ἵνα ἐκτελέσῃ μὲ ἀσφάλειαν τὴν ἀνακύκλωσιν.

Λύσις. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ ἁμάξιον, ὅταν διέρχεται διὰ τῆς ἀνωτάτης θέσεως Α τῆς τροχιᾶς του, ἔχει τόσον μεγάλην ταχύτητα, ὥστε νὰ συγκρατῆται ἐπὶ τῆς τροχιᾶς του. Εἰς τὴν θέσιν ταύτην Α ἐξασκοῦνται ἐπὶ τοῦ ἁμαξίου δύο δυνάμεις, ἤτοι α) τὸ βάρος αὐτοῦ $B = m \cdot g$ καὶ β) ἡ δύναμις Κ ἡ ἐξασκουμένη ἐπ' αὐτοῦ ὑπὸ τῆς τροχιᾶς.

Προφανῶς ἡ συνισταμένη τῶν δύο τούτων δυνάμεων θὰ ἔχῃ φορὰν πρὸς τὸ κέντρον Ο τῆς περιστροφῆς καὶ θὰ εἶναι ἡ κεντρομόλος δύναμις F_κ ἡ ὁποία περιστρέφει τὸ ἁμάξιον. Ἄρα θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις :



$$F_\kappa = B + K \qquad (1)$$

ἢ $$\frac{m \cdot \upsilon^2}{r} = m \cdot g + K \qquad (2)$$

Ἐκ τῆς σχέσεως (2) λαμβάνομεν :

$$m\left(\frac{\upsilon^2}{r} - g\right) = K \qquad (3)$$

Ἐὰν τώρα ὑποθέσωμεν ὅτι $\upsilon^2 = r \cdot g$, δηλ. :

$$\upsilon = \sqrt{r \cdot g} \qquad (4)$$

τότε προκύπτει ἐκ τῆς (3) ὅτι $K = 0$ καὶ ἐκ τῆς (1) ὅτι $F_\kappa = B$. Τοῦτο σημαίνει ὅτι ὑπάρχει μία ἐλαχίστη τιμὴ τῆς ταχύτητος $\upsilon_{\delta\rho.} = \sqrt{r \cdot g}$, διὰ τὴν ὁποίαν τὸ ἁμάξιον, ὅταν εὑρίσκεται εἰς τὸ σημεῖον Α, δὲν δέχεται δύναμιν ἀπὸ τὴν τροχιὰν καὶ ὅτι ἡ κεντρομόλος δύναμις ἡ ὁποία τὸ περιστρέφει εἶναι μόνον αὐτὸ τοῦτο τὸ βάρος τοῦ σώματος.

Δέον νὰ σημειωθῇ ὅτι τὸ κινητὸν διερχόμενον διὰ τῆς θέσεως ταύτης Α μὲ τὴν ἐλαχίστην ταύτην ταχύτητα δὲν χάνει τὴν ἐπαφήν του μὲ τὴν τροχιὰν καὶ συνεπῶς ἐκτελεῖ μὲ ἀσφάλειαν τὴν ἀνακύκλωσιν.

Διὰ νὰ ἀποκτήσῃ τὸ ἁμάξιον τὴν ἀπαιτουμένην ταχύτητα $\upsilon_{\delta\rho.} = \sqrt{r \cdot g}$, ἔστω ὅτι ἀφίεται ἀπὸ ὕψους h. Εἰς τὴν θέσιν Α θὰ ἔχῃ ἐλαττωθῆ ἡ δυναμική του ἐνέργεια κατά :

$$m \cdot g \cdot x = m \cdot g\,(h - 2r)$$

καὶ θὰ ἔχῃ ἀποκτήσει κινητικὴν ἐνέργειαν $1/2 \cdot m \cdot \upsilon^2_{\delta\rho.}$ Οὕτω, συμφώνως πρὸς τὴν Ἀρχὴν τῆς διατηρήσεως τῆς μηχανικῆς ἐνεργείας, θὰ ἔχωμεν :

$$m \cdot g\,(h - 2r) = \frac{1}{2}\, m \cdot \upsilon^2_{\delta\rho.}$$

ἢ $$g\,(h - 2r) = \frac{1}{2}\, \upsilon^2_{\delta\rho.} \qquad (5)$$

Ἡ σχέσις (5) ἐν συνδυασμῷ μὲ τὴν σχέσιν (4) γράφεται :

$$g\,(h - 2r) = \frac{1}{2}\, r \cdot g \qquad (6)$$

ἐξ ἧς εὑρίσκομεν :

$$\underline{h = \frac{5r}{2}}$$

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Β'

495. Βάρος 8 kgr* ἀνυψοῦται κατὰ 30 cm ἐντὸς 3 sec. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἔργον. ('Απ. A = 2,4 kgr*m.)

496. Σῶμα μάζης 4 000 gr διατρέχει διάστημα 15 m μὲ ἐπιτάχυνσιν 5 cm/sec^2. Ποῖον τὸ παραχθὲν ὑπὸ τῆς ἐπιταχυνούσης δυνάμεως ἔργον.
('Απ. A = $3 \cdot 10^7$ erg, 0,306 kgr*m.)

497. Κλῖμαξ ἔχει μῆκος 5 m καὶ ζυγίζει 25 kgr*, ἐνῷ τὸ κέντρον βάρους της εὑρίσκεται 2 m ἀπὸ τῆς βάσεως καὶ βάρος 4 kgr* εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς κορυφῆς της. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἔργον τὸ ὁποῖον ἀπαιτεῖται διὰ νὰ ἀνυψωθῇ ἡ κλῖμαξ ἀπὸ τῆς ὁριζοντίας θέσεως ἐπὶ τοῦ ἐδάφους εἰς κατακόρυφον διεύθυνσιν. ('Απ. A = 70 kgr*m.)

498. Δύναμις 2 kgr* μετατοπίζει τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς της κατὰ 5 m κατὰ τὴν ἰδίαν διεύθυνσιν. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἔργον εἰς erg καὶ Joule.
('Απ. $98 \cdot 10^7$ erg, 98 Joule.)

499. Αὐτοκίνητον κινούμενον ὑπὸ σταθερὰν ταχύτητα 90 km/h παρέχει ὅλην τὴν ἰσχὺν τῆς μηχανῆς του ἀνερχομένην εἰς 20 PS. Ποία θὰ εἶναι ἡ τιμὴ τῆς δυνάμεως ἥτις ἀντιτίθεται εἰς τὴν κίνησιν τοῦ αὐτοκινήτου. ('Απ. 60 kgr*.)

500. Δύο δυνάμεις $F_1 = 30$ kgr* καὶ $F_2 = 40$ kgr* ἐφαρμόζονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον A κατὰ διευθύνσεις σχηματιζούσας μεταξύ των ὀρθὴν γωνίαν. Ζητεῖται: α) Νὰ εὑρεθῇ ἡ συνισταμένη των. β) Ἐὰν τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς τῶν δυνάμεων τούτων μετατοπίζεται μὲ κίνησιν ὁμαλὴν καὶ ταχύτητα $v = 2$ m/sec κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς συνισταμένης των, πόσον τὸ ὑπὸ τῶν δυνάμεων παραγόμενον ἔργον ἐντὸς 2 min. γ) Πόση ἡ ἰσχὺς κινητῆρος ἱκανοῦ νὰ παράγῃ τὸ ἔργον τοῦτο εἰς 25 sec. ('Απ. α' 50 kgr*. β' 12 000 kgr*m. γ' 480 kgr*m/sec ἢ 6,4 PS.)

501. Σπειροειδὲς ἐλατήριον τείνεται ὑπὸ δυνάμεως 10 kgr*. Ἡ τείνουσα δύναμις αὐξάνεται βαθμιαίως μέχρι 15 kgr*, ὁπότε τὸ μῆκος τοῦ ἐλατηρίου αὐξάνεται κατὰ 30 cm. Ποῖον τὸ παραγόμενον ὑπ' αὐτῆς ἔργον κατὰ τὴν πρόσθετον ἐπιμήκυνσιν.
('Απ. 3,75 kgr*m.)

502. Ἀντλία τροφοδοτεῖ μὲ 300 m^3 ὕδατος ὡριαίως ὑδαταποθήκην κειμένην εἰς ὕψος 80 m ἀπὸ τοῦ ἐδάφους. Ζητεῖται: α) Ποία ἡ ἰσχὺς τοῦ κινητῆρος, τοῦ κινοῦντος τὴν ἀντλίαν, ὅταν ἡ ἀπόδοσις εἶναι 80 %. β) Ποῖον τὸ κόστος συνεχοῦς ἐπὶ μίαν ἑβδομάδα ἀντλήσεως, ὅταν ἡ ἠλεκτρικὴ ἐνέργεια τιμᾶται πρὸς 1,20 δραχμὰς τὸ kWh. ('Απ. α' N = 111,1 PS ἢ 81,8 kW. β' 16 490 δραχμαί.)

503. Εἰς πόσον χρόνον ἀεροπλάνον ἱπτάμενον ὁριζοντίως διανύει ἀπόστασιν 30 km, ὅταν ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀέρος εἶναι 500 kgr* καὶ ὁ κινητὴρ αὐτοῦ εἶναι ἰσχύος 1 000 PS. Ποία ἡ ταχύτης τοῦ ἀεροπλάνου. ('Απ. 3 min 20 sec, 540 km/h.)

504. Μοτοποδήλατον ζυγίζον μετὰ τῆς μηχανῆς του 80 kgr* μετατοπίζεται ὁριζοντίως μὲ ταχύτητα 18 km/h. Ἡ δύναμις τριβῶν ἔχει ὑπὸ τοὺς ὅρους αὐτοὺς τιμὴν 0,7 kgr* καὶ ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀέρος 0,5 kgr*. Ζητοῦνται: α) Τὸ παραγόμενον ὑπὸ τοῦ μοτοποδηλάτου ἔργον κατὰ χιλιόμετρον δρόμου, κινουμένου ἐπὶ ὁμαλοῦ καὶ ἐπιπέδου ἐδάφους. β) Ἡ ὑπὸ τοῦ μοτοποδηλάτου ἀναπτυσσομένη ἰσχύς. γ) Ἡ ἰσχὺς τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ ἀναπτύξῃ, ἐὰν ἀνέρχεται πλευρὰν κλίσεως 2 % διατηρῶν τὴν αὐτὴν ὅπως καὶ προηγουμένως ταχύτητα. (Ὅταν ἀνέρχεται δρόμον κλίσεως 2 %, ἀνυψοῦται κατακορύφως 2 m διανύον διάστημα 100 m.)
('Απ. α' 1 200 kgr*m. β' 6 kgr*m/sec ἢ 0,08 PS. γ' 14 kgr*m/sec ἢ 0,187 PS.)

9

505. Κινητὴρ ἔχει ἰσχὺν 12 PS καὶ χρησιμοποιεῖται διὰ τὴν ἀνύψωσιν φορτίου 600 kgr* εἰς ὕψος 10 m. Πόσος χρόνος ἀπαιτεῖται πρὸς τοῦτο. (Ἀπ. 6,67 sec.)

506. Πόσον εἶναι εἰς kgr*m τὸ ἔργον A τὸ χορηγούμενον εἰς 1 h ὑπὸ πτώσεως ὕδατος 40 m ὕψους καὶ παροχῆς 150 m^3/min. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἰσχὺς τῆς πτώσεως ταύτης εἰς PS καὶ kW· (Ἀπ. $A = 3{,}6 \cdot 10^8$ kgr*m, N = 1 330 PS = 981 kW.)

507. Ὑδραντλία λειτουργεῖ μὲ κινητῆρα ἰσχύος 5 PS, τοῦ ὁποίου ἡ ἀπόδοσις εἶναι 40 %, καὶ ἀνυψώνει ὕδωρ ἐντὸς δεξαμενῆς εὑρισκομένης εἰς ὕψος 30 m ἄνωθεν τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὕδατος ἐν τῷ φρέατι. Πόσος ὁ παρεχόμενος ὄγκος ὕδατος καθ' ὥραν. (Ἀπ. 18 m^3/h.)

508. Ἀτμομηχανὴ πρέπει νὰ ἐξασκῇ ὁριζοντίως δύναμιν 5 kgr* κατὰ τόννον φορτίου ἕλξεως, ὅταν ἡ ταχύτης εἶναι 40 km/h. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἔργον τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ χορηγήσῃ καθ' ὥραν, ὅταν ρυμουλκῇ αὕτη ὁριζοντίως ἁμαξοστοιχίαν 360 τόννων καὶ ὑπὸ τὴν ταχύτητα τῶν 40 km/h. Πόση εἶναι ἡ ὑπὸ τῆς μηχανῆς ἀναπτυσσομένη ἰσχὺς εἰς PS καὶ kW ὑπὸ τὰς συνθήκας ταύτας.
(Ἀπ. 267 PS ἢ 196 kW.)

509. Μηχανὴ ἐξάγει εἰς 3 min φορτίον ἄνθρακος ζυγίζον 1 800 kgr*, λαμβανόμενον ἐκ βάθους 400 m. Πόση ἡ ἰσχὺς τῆς μηχανῆς εἰς PS καὶ kW.
(Ἀπ. 53,3 PS ἢ 39,2 kW.)

510. Ἄνθρωπος βάρους 65 kgr* ἀνέρχεται κλίμακα καὶ ἀνυψοῦται εἰς ὕψος 15 m. Ζητεῖται: α) Πόσον τὸ παραγόμενον ἔργον, εἰς kgr*m καὶ Joule. β) Πόση ἡ ἀναπτυσσομένη ἰσχὺς εἰς Watt καὶ PS, ὅταν ἡ ἄνοδος διαρκῇ 1 min. γ) Εἰς πόσον χρόνον πρέπει νὰ ἀνέλθῃ ὕψος 18 m, ἵνα ἀναπτύξῃ ἰσχὺν 1/10 PS.
(Ἀπ. α' 975 kgr*m ἢ 9 560 Joule. β' 159 W ἢ 0,217 PS. γ' 2 min 36 sec.)

511. Πόσην ἰσχὺν εἰς kW πρέπει κατὰ μέσον ὅρον νὰ ἀποδίδῃ ὑδραυλικὴ ἐγκατάστασις, ὅταν εἰς 1 sec διέρχωνται διὰ τοῦ ὑδροστροβίλου 89 m^3 ὕδατος. Ἡ διαφορὰ ὕψους μεταξὺ ἐργοστασίου καὶ ἀποθήκης ὑδατοπτώσεως εἶναι 200 m.
(Ἀπ. $1{,}78 \cdot 10^7$ kgr*m/sec = $1{,}74 \cdot 10^5$ kW.)

512. Πόση ἰσχὺς εἰς κιλοβὰττ διατίθεται εἰς κινητῆρα ἰσχύος 12 ἵππων ἔχοντα ἀπόδοσιν 90 %, ὅταν ἀποδίδῃ οὗτος τὸ μέγιστον ἔργον. (Ἀπ. 9,95 kW.)

513. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἰσχὺς μηχανῆς εἰς Watt ἡ ὁποία ἀνυψώνει σῶμα βάρους 500 kgr* εἰς ὕψος 20 m ἐντὸς 1 min. (Ἀπ. 1 630 Watt.)

514. Ἀτμομηχανὴ ἐξασκεῖ ἐπὶ τῶν κρίκων συνδέσεώς της μετὰ ὀχήματος δύναμιν ἕλξεως 6 000 kgr*. Ἡ ταχύτης τοῦ ὀχήματος εἶναι 72 km/h. Νὰ ὑπολογισθῇ εἰς PS ἡ ἰσχὺς τῆς μηχανῆς. (Ἀπ. 1 600 PS.)

515. Ἠλεκτρικὸς κινητὴρ ἰσχύος $^1/_2$ HP ἐνεργεῖ συνεχῶς ἐπὶ φορτίου ἐπὶ 5 h. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἔργον τὸ ἐπιτελούμενον ὑπὸ τοῦ κινητῆρος. Τὸ ἔργον νὰ ἐκφρασθῇ εἰς ὡριαίους ἵππους (HPh), Joule καὶ kWh.
(Ἀπ. 2,5 HPh, $12{,}1 \cdot 10^6$ Joule, 3,35 kWh.)

516. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ κινητικὴ ἐνέργεια μάζης 1 kgr, ὅταν πίπτῃ καὶ διανύῃ διάστημα 1 m. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ κτηθεῖσα ταχύτης.
(Ἀπ. $9{,}81 \cdot 10^7$ erg, 443 cm/sec.)

517. Μᾶζα 6 kgr κινεῖται ὑπὸ ταχύτητα 60 cm/sec. Πόση ἡ κινητικὴ ἐνέργεια αὐτῆς. Ἐὰν τεθῇ ἐν ἠρεμίᾳ ὑπὸ σταθερᾶς δυνάμεως, ἀφοῦ διανύσῃ 100 cm, πόση εἶναι ἡ δύναμις αὕτη. (Ἀπ. $108 \cdot 10^5$ erg, $108 \cdot 10^3$ dyn.)

518. Ἁμαξοστοιχία 600 τόννων κινεῖται ἐπὶ ὁριζοντίας ὁδοῦ ὑπὸ ταχύτητα 180 km/h. Νὰ ὑπολογισθοῦν: α) Ἡ κινητικὴ ἐνέργεια μετατοπίσεως τῆς ἁμαξοστοιχίας. β) Ἡ δύναμις ἥτις πρέπει νὰ ἐφαρμοσθῇ ἐπὶ τῶν τροχοπεδῶν, ἵνα ἡ ἁμαξοστοιχία σταματήσῃ ἀφοῦ διανύσῃ διάστημα 180 m. γ) Ὁ ἀπαιτούμενος χρόνος μέχρις ὅτου σταματήσῃ αὕτη. (Ἀπ. α′ $275 \cdot 10^5$ kgr*m. β′ 153 000 kgr*. γ′ 12 sec.)

519. Ἁμαξοστοιχία ἀναχωρεῖ ἐκ τῆς ἠρεμίας ἐπὶ ὁριζοντίας ὁδοῦ καὶ φθάνει τὴν ταχύτητα 90 km/h. Αἱ παθητικαὶ ἀντιστάσεις ἀπορροφοῦν 5 % τῆς ἐνεργείας τῆς χορηγουμένης ὑπὸ τῆς μηχανῆς. Ἡ κίνησις κατὰ τὴν ἐκκίνησιν δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς κίνησις ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένη, ἐπιταχύνσεως 50 m/sec². Νὰ ὑπολογισθοῦν: α) Ἡ διάρκεια τῆς ἐκκινήσεως. β) Τὸ κατὰ τὴν ἐκκίνησιν διανυθὲν διάστημα. γ) Τὸ ὑπὸ τῆς μηχανῆς καταναλωθὲν ἔργον, κατὰ τόννον τῆς ἁμαξοστοιχίας, κατὰ τὴν ἐκκίνησιν. δ) Ἡ μέση δύναμις ἡ ἀναπτυσσομένη ὑπὸ τῆς μηχανῆς κατὰ τόννον τῆς ἁμαξοστοιχίας. ($g = 980$ cm/sec².)
(Ἀπ. α′ 50 sec. β′ 625 m. γ′ 657 895 Joule. δ′ 51 kgr*.)

520. Σῶμα μάζης 6 gr πίπτει ἐξ ὕψους 20 cm. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ κινητικὴ του ἐνέργεια, ὅταν φθάνῃ εἰς τὸ ἔδαφος. Ποία ἡ δυναμικὴ του ἐνέργεια, ὅταν εὑρίσκετο εἰς ὕψος 20 cm. (Ἀπ. 118 000 erg, 118 000 erg.)

521. Ὀβὶς πυροβόλου 520 mm ζυγίζουσα 1 250 kgr* ἔχει ταχύτητα 800 m/sec εἰς τὸ στόμιον τοῦ πυροβόλου. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ κινητικὴ ἐνέργεια τοῦ βλήματος. α) Εἰς Joule. β) Εἰς τὸ Τεχνικὸν Σύστημα μονάδων.
(Ἀπ. $4 \cdot 10^8$ Joule, 40 775 000 kgr*m.)

522. Πυροβόλον, τοῦ ὁποίου ὁ σωλὴν ἔχει μῆκος 1,50 m, ἐκτοξεύει βλῆμα 7,5 kgr καὶ ὑπὸ ταχύτητα 600 m/sec. Νὰ ὑπολογισθοῦν: α) Ἡ ἰσχὺς εἰς kW καὶ PS, ἡ ἀναπτυσσομένη τὴν στιγμὴν καθ' ἣν τὸ βλῆμα ἐξέρχεται τοῦ σωλῆνος. β) Τὸ ἔργον εἰς kWh καὶ PSh τῆς ἀνακρούσεως.
(Ἀπ. α′ 270 000 kW, 367 000 PS. β′ 0,375 kWh, 0,51 PSh.)

523. Βόμβα μάζης 200 kgr ἀφίεται ἀπὸ ἀεροπλάνου εὑρισκομένου εἰς ὕψος 225 m. Πόση ἡ ἀρχικὴ δυναμικὴ ἐνέργεια τῆς βόμβας ἐν σχέσει πρὸς τὸ ἔδαφος.
(Ἀπ. $4{,}41 \cdot 10^5$ Joule.)

524. Σφαῖρα μάζης 0,25 kgr βάλλεται κατακορύφως πρὸς τὰ ἄνω μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα 8 m/sec. Ζητεῖται: α) Ἡ ἀρχικὴ κινητικὴ ἐνέργεια τῆς σφαίρας. β) Ἡ κινητικὴ ἐνέργεια τῆς σφαίρας ὅταν φθάσῃ εἰς τὸ μέγιστον ὕψος. γ) Ἡ δυναμικὴ ἐνέργεια τῆς σφαίρας εἰς τὸ ἀνώτατον σημεῖον τῆς τροχιᾶς της, ἐν σχέσει πρὸς τὸ σημεῖον ἐξ οὗ ἐβλήθη. δ) Τὸ μέγιστον ὕψος εἰς τὸ ὁποῖον φθάνει.
(Ἀπ. α′ 8 Joule. β′ 0. γ′ 8 Joule. δ′ 3,26 m.)

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Γ′

525. Ἠλεκτρικὴ γεννήτρια ἰσχύος 50 kW ἐργάζεται συνεχῶς ὑπὸ πλῆρες φορτίον ἐπὶ 8 h. Πόσον ἔργον ἀποδίδεται. Νὰ ἐκφρασθῇ τὸ ἔργον εἰς HPh, Joule, kWh.

526. Σῶμα 4 kgr* ὀλισθαίνει ἐπὶ τραχέος κεκλιμένου ἐπιπέδου μήκους 30 m καὶ γωνίας κλίσεως 30° πρὸς τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον καὶ ἀποκτᾷ ταχύτητα 16 m/sec. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἔργον τὸ καταναλισκόμενον εἰς τριβάς.

527. Ἀθλητὴς ἐκτελεῖ κάμψιν τῶν γονάτων. Πόσον ἔργον παράγεται, ὅταν ἐκτελῇ 40 κάμψεις καὶ καθ' ἑκάστην τούτων τὸ κέντρον βάρους τοῦ σώματος ἀνέρχεται ἢ κατέρχεται κατὰ 45 cm, ὅταν ἡ μᾶζα τοῦ σώματος τοῦ ἀθλητοῦ εἶναι 70 kgr.

528. Στήλη ὀρθογώνιος ἐκ μαρμάρου ἔχει διαστάσεις μήκους 180 cm, πλάτους 7,5 cm, πάχους 7,5 cm, ζυγίζει δὲ 200 kgr* καὶ κεῖται ἐπὶ ὁριζοντίου ἐπιπέδου. Πόσον ἔργον ἀπαιτεῖται, διὰ νὰ τοποθετήσωμεν τὴν στήλην κατακορύφως.

529. Ὁμοιόμορφος χαλυβδίνη ἅλυσις μήκους 90 cm καὶ ζυγίζουσα 1 600 gr* εἶναι ἐξηρτημένη κατακορύφως. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἔργον τὸ ἀπαιτούμενον διὰ τὴν περιέλιξίν της.

530. Κλῖμαξ μήκους 7 m στηρίζεται ἐπὶ οἰκίας καὶ ἡ κλίσις αὐτῆς πρὸς τὴν κατακόρυφον εἶναι 25°. Ἐργάτης βάρους 75 kgr* ἀνέρχεται ἐπὶ τῆς κλίμακος κατὰ διάστημα ἀπέχον 120 cm ἀπὸ τῆς κορυφῆς αὐτῆς μετρούμενον κατὰ μῆκος τῆς κλίμακος. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἔργον.

531. Ἵππος ρυμουλκεῖ ἐντὸς ποταμοῦ φορτηγίδα μέσῳ σχοινίου τὸ ὁποῖον σχηματίζει γωνίαν 20° πρὸς τὴν διεύθυνσιν τῆς κινήσεως. Ἡ τάσις τοῦ σχοινίου εἶναι 50 kgr*. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἔργον, ὅταν ἡ φορτηγὶς μετατοπίζεται κατὰ 3 200 m.

532. Ἀνυψωτικὴ μηχανὴ ἀνυψώνει 2 000 πλίνθους, ἑκάστη τῶν ὁποίων ζυγίζει 2,5 kgr*, καὶ 50 σάκκους τσιμέντου, ἕκαστος τῶν ὁποίων ζυγίζει 50 kgr*, εἰς ὕψος 14 m ἐντὸς 1,5 min. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἔργον καὶ ἡ ἰσχύς, ὑποτιθεμένου ὅτι 40 % καταναλίσκονται πρὸς ἀντιμετώπισιν τῶν τριβῶν.

533. Ἀνελκυστήρ, ὁ ὁποῖος μετὰ τοῦ φορτίου του ἔχει συνολικὸν βάρος 1 200 kgr*, ἐκκινεῖ ἐκ τοῦ πρώτου ὀρόφου οἰκοδομῆς καὶ μετὰ πάροδον 1/2 min διέρχεται διὰ τοῦ πέμπτου ὀρόφου, εὑρισκομένου εἰς ὕψος 18 m ἀπὸ τοῦ σημείου ἐκκινήσεως, ὑπὸ ταχύτητα 9 m/sec. Ζητεῖται ἡ μέση ἰσχὺς ἡ καταναλισκομένη ὑπὸ τοῦ ἀνελκυστῆρος. ($g = 10$ m/sec².)

(Ε. Μ. Πολυτεχνεῖον, Σχολὴ Πολιτικῶν Μηχανικῶν, 1952.)

534. Ἄνθρωπος ζυγίζων 90 kgr* ἀνέρχεται κλίμακα ἐντὸς 2 min. Ἐὰν ἡ πρὸς τὰ ἄνω μετατόπισίς του εἶναι 18 m, πόσον ἔργον παράγει οὗτος λόγῳ τοῦ πεδίου βαρύτητος τῆς Γῆς. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ μέση ἰσχὺς εἰς ἵππους.

535. Ἀνελκυστὴρ μάζης 2 τόννων ἀνέρχεται εἰς ὕψος 18 m εἰς 45 sec, ὑπὸ σταθερὰν ταχύτητα. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἔργον καὶ ἡ ἰσχὺς τοῦ ἀνελκυστῆρος.

536. Κινητὴρ ἰσχύος 2 HP χρησιμοποιεῖται διὰ νὰ ἀνυψώσῃ ἀνελκυστῆρα μάζης 1 τόννου. Εἰς πόσον ὕψος ἀνέρχεται ὁ ἀνελκυστὴρ εἰς 1 min, ὑποτιθεμένης σταθερᾶς τῆς ταχύτητος αὐτοῦ.

537. Φορτηγὸν αὐτοκίνητον 3 τόννων καταναλίσκει ἰσχὺν 21 ἵππων, ὅταν κινῆται ἐπὶ ὁριζοντίου δρόμου ὑπὸ ταχύτητα 50 km/h. Πόση πρόσθετος ἰσχὺς ἀπαιτεῖται διὰ νὰ διατηρηθῇ ἡ αὐτὴ ταχύτης, ὅταν τὸ αὐτοκίνητον κινῆται ἐπὶ δρόμου παρουσιάζοντος κλίσιν 30 cm κατὰ 6 m, ὑποτιθεμένου ὅτι ἡ τριβὴ παραμένει ἡ αὐτή.

538. Κινητὴρ ἔχει ἀπόδοσιν 90 % καὶ χρησιμεύει διὰ τὴν λειτουργίαν γερανοῦ ἔχοντος ἀπόδοσιν 40 %. Μετὰ πόσης ταχύτητος ὁ γερανὸς θὰ ἀνυψώνῃ βάρος 880 kgr*, ἐὰν ἡ ἰσχὺς τοῦ κινητῆρος εἶναι 5 kW.

539. Σύστημα τροχαλιῶν χρησιμεύει διὰ τὴν ἀνύψωσιν βάρους 150 kgr* εἰς ὕψος 6 m ἐντὸς 30 sec. Ἡ ἀπόδοσις τοῦ συστήματος εἶναι 75 %. Νὰ προσδιορισθῇ ἡ μέση ἰσχὺς εἰς ἵππους ἡ παρεχομένη εἰς τὸ σύστημα.

540. Αὐτοκίνητον μάζης 900 kgr κινεῖται ἐπὶ κεκλιμένου δρόμου 3 % ὑπὸ ταχύτητα 60 km/h. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀπαιτουμένη ἰσχύς.

541. Ὕδωρ πίπτει ἀπὸ δεξαμενῆς ἐπὶ στροβίλου εὑρισκομένου κάτωθεν εἰς ἀπόστασιν 70 m. Ἡ ἀπόδοσις τοῦ στροβίλου εἶναι 80 % καὶ προσλαμβάνει ὕδωρ 500 *lt*/min. Παραλειπομένης τῆς τριβῆς εἰς τοὺς σωλῆνας, νὰ ὑπολογισθῇ εἰς ἵππους ἡ ἀπαιτουμένη ἰσχὺς ὑπὸ τοῦ στροβίλου.

542. Ἱμὰς κινεῖ τροχαλίαν διαμέτρου 30 cm ὑπὸ συχνότητα 140 στρ./min. Ἡ τάσις τοῦ ἱμάντος εἶναι 12,5 kgr*. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἰσχύς.

543. Διὰ τῆς ἐγκαρσίας τομῆς ἑνὸς ποταμοῦ διέρχονται εἰς 1 sec 220 m^3 ὕδατος ὑπὸ ταχύτητα 2 m/sec. Πόσην ἐνέργειαν ἐκπροσωπεῖ ἡ ροὴ αὕτη τοῦ ὕδατος.

544. Τὸ πῖπτον μέρος σφυρίου ἔχει βάρος 650 kgr* καὶ πίπτει ἀπὸ 2,5 m, ἐνῷ ὁ πάσσαλος εἰσχωρεῖ κατὰ 5 cm. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ μέση δύναμις ἡ ὠθοῦσα τὸν πάσσαλον πρὸς τὰ κάτω, ὡς καὶ ἡ ταχύτης τοῦ πίπτοντος βάρους, ὅταν τοῦτο φθάσῃ ἐπὶ τοῦ πασσάλου.

545. Αὐτοκίνητον ζυγίζει 2 ton* καὶ κινεῖται ὑπὸ ταχύτητα 50 km/h, τίθεται δὲ ἐν ἠρεμίᾳ ἀφοῦ διανύσῃ 20 m. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ μέση δύναμις τριβῆς ἡ ἀσκουμένη ἐπὶ τοῦ αὐτοκινήτου, ὡς καὶ ὁ χρόνος ὁ ἀπαιτούμενος διὰ νὰ ἠρεμήσῃ.

546. Ἐκκρεμὲς μήκους 1 m φέρει σφαῖραν μάζης 10 kgr. α) Πόσον ἔργον εἰς kgr*m ἀπαιτεῖται διὰ τὴν μετατόπισιν τοῦ ἐκκρεμοῦς ἀπὸ τῆς κατακορύφου θέσεως, μέχρις ὅτου τοῦτο διατεθῇ ὁριζοντίως. β) Ἐὰν τὸ ἐκκρεμὲς ἀφίεται νὰ πέσῃ ἀπὸ τῆς ὁριζοντίας θέσεως, πόση θὰ εἶναι ἡ ταχύτης καὶ ἡ κινητικὴ ἐνέργεια τῆς σφαίρας κατὰ τὴν στιγμὴν καθ' ἣν διέρχεται διὰ τῆς κατωτάτης θέσεως.

547. Βλῆμα μάζης 7 kgr ἀποκτᾷ ταχύτητα 600 m/sec ἐντὸς κάννης μήκους 2,5 m. Νὰ καθορισθῇ ἡ μέση δύναμις ἡ ἐπενεργοῦσα ἐπὶ τοῦ βλήματος κατὰ τὴν ἔκρηξιν.

548. Σῶμα βάρους 300 kgr* πίπτει ἐξ ὕψους 3 m ἐπὶ τοῦ ἐδάφους. Πόση εἶναι ἡ ταχύτης καὶ ἡ ἐνέργεια αὐτοῦ, ὅταν φθάνῃ εἰς τὸ ἔδαφος. Ἐὰν τὸ σῶμα πρέπῃ ν' ἀνυψοῦται πέντε φορὰς ἐντὸς 1 min μέχρις ὕψους 3 m ἐκ τοῦ ἐδάφους, πόση ἡ ἀπαιτουμένη μέση ἰσχύς.

549. Ὡς συνάγεται ἐκ μετρήσεων, ἡ ἰσχὺς τὴν ὁποίαν καταβάλλει ποδηλάτης ὑπὸ ταχύτητα 15 km/h εἶναι 120 Watt. Πόσην δύναμιν καταβάλλει ὁ ποδηλάτης ὑπὸ τὴν ταχύτητα ταύτην.

550. Δύο ἕλκηθρα Α καὶ Β, μάζης 50 kgr ἕκαστον, εὑρίσκονται ἀρχικῶς εἰς ὕψος 10 m ἀπὸ τοῦ ἐδάφους. Τὸ ἓν τῶν ἑλκήθρων Α ἀφίεται νὰ πέσῃ κατακορύφως πρὸς τὸ ἔδαφος καὶ τὸ ἕτερον Β νὰ πίπτῃ ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου γωνίας 30°. Νὰ ὑπολογισθοῦν: α) Ἡ μεταβολὴ τῆς δυναμικῆς ἐνεργείας τοῦ ἑλκήθρου Α. β) Ἡ δυναμικὴ ἐνέργεια τοῦ ἑλκήθρου Β. γ) Ἡ κινητικὴ ἐνέργεια τοῦ ἑλκήθρου Α τὴν στιγμὴν καθ' ἣν φθάνει εἰς τὸ ἔδαφος. δ) Ἡ κινητικὴ ἐνέργεια τοῦ ἑλκήθρου Β, ὅταν φθάνῃ εἰς τὸ ἔδαφος. ε) Αἱ ταχύτητες τῶν δύο ἑλκήθρων, ὅταν φθάνουν εἰς τὸ ἔδαφος.

551. Δύο σφαῖραι, ἑκάστη τῶν ὁποίων ἔχει μᾶζαν 60 gr, βάλλονται ἀπὸ τῆς κορυφῆς οἰκοδομῆς ὕψους 11 m. Ἡ σφαῖρα Α βάλλεται καθέτως πρὸς τὰ κάτω μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα 20 m/sec καὶ ἡ σφαῖρα Β βάλλεται κατακορύφως πρὸς τὰ ἄνω μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα 20 m/sec. Νὰ εὑρεθοῦν: α) Αἱ ἀρχικαὶ δυναμικαὶ ἐνέργειαι τῶν δύο σφαιρῶν ἐν σχέσει πρὸς τὸ ἔδαφος. β) Αἱ ἀρχικαὶ κινητικαὶ ἐνέργειαι τῶν δύο σφαιρῶν. γ) Αἱ ταχύτητες τῶν δύο σφαιρῶν 2 sec μετὰ τὴν βολὴν αὐτῶν. δ) Αἱ τελικαὶ ταχύτητες τῶν δύο σφαιρῶν ὅταν φθάνουν εἰς τὸ ἔδαφος.

552. Μία ὑδραυλικὴ ἐγκατάστασις ἐκμεταλλεύεται διαφορὰν ὕψους 200 m καὶ παρέχει ἰσχὺν 170 000 HP. Πόση ἡ κατανάλωσις ὕδατος τὸ εἰκοσιτετράωρον.

553. Φορτηγὸν αὐτοκίνητον μάζης 2 τόννων φέρει ὠφέλιμον φορτίον μάζης 10 τόννων, πρέπει δὲ ἀπὸ τῆς στιγμῆς τῆς ἐκκινήσεως νὰ ἀποκτήσῃ τὴν μεγίστην του ταχύτητα 54 km/h, ἐντὸς ἑνὸς πρώτου λεπτοῦ. Πόση ἡ ἐπιτάχυνσις καὶ τὸ διάστημα τὸ διανυόμενον μέχρις ἀποκτήσεως τῆς μεγίστης ταχύτητος, ὡς καὶ ἡ ἀναπτυσσομένη δύναμις. Πόσον ἐπίσης τὸ ἔργον καὶ ἡ ἀναπτυσσομένη μέση ἰσχύς.

554. Πόσους ἵππους ἀπαιτεῖται νὰ ἀναπτύσσῃ μηχανὴ συρμοῦ ἀποτελουμένου ἐξ 8 βαγονίων, ἵνα μεταδίδῃ εἰς τὸν συρμὸν ἐντὸς 2 min ταχύτητα 72 km/h. Πόσην δύναμιν ἀναπτύσσει ἡ μηχανή. Ἡ μηχανὴ ἔχει μᾶζαν 150 τόννων καὶ ἕκαστον βαγόνιον ἔχει μᾶζαν 45 τόννων. Τριβαὶ ἀμελητέαι.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΑ΄

ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ ΚΑΙ ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΟΥ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗ ΣΩΜΑΤΟΣ

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Α΄

555. Ἀκονιστικὸς τροχὸς διαμέτρου 20 cm καὶ πάχους 4 cm κινεῖται ὑπὸ συχνότητα 50 στροφῶν ἀνὰ sec. Ἡ μᾶζα του εἶναι 3 kgr. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ κινητικὴ του ἐνέργεια. (Ροπὴ ἀδρανείας $\Theta = {}^1/_2 \cdot m \cdot r^2$, $g = 10$ m/sec^2.)

Λύσις. Ἡ κινητικὴ ἐνέργεια τοῦ περιστρεφομένου τροχοῦ εὑρίσκεται ἐκ τοῦ γνωστοῦ τύπου:

$$E_{\kappa\iota\nu.} = \frac{1}{2}\,\Theta \cdot \omega^2 \qquad (1)$$

ὅπου Θ εἶναι ἡ ροπὴ ἀδρανείας τοῦ τροχοῦ καὶ ω ἡ γωνιακὴ ταχύτης περιστροφῆς αὐτοῦ. Ἐπειδὴ ὅμως $\omega = 2\pi \cdot \nu$, ὁ τύπος (1) γράφεται:

$$E_{\kappa\iota\nu.} = 2\,\Theta \cdot \pi^2 \cdot \nu^2 \qquad (2)$$

Γνωρίζομεν ὅμως ὅτι $\Theta = \frac{1}{2}\, m \cdot r^2$ καὶ δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὸν τύπον (2) προκύπτει ὅτι:

$$E_{\kappa\iota\nu.} = m \cdot \pi^2 \cdot \nu^2 \cdot r^2 \qquad (3)$$

Θέτομεν εἰς τὴν σχέσιν (3) τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως, εἰς τὸ Τεχνικὸν Σύστημα, ἤτοι: $r = 0{,}1$ m, $m = 0{,}3$ Τ.Μ. μάζης, $\nu = 50$ στρ./sec, καὶ εὑρίσκομεν:

$$\underline{E_{\kappa\iota\nu.} = 73{,}95 \text{ kgr*m.}}$$

556. Τροχὸς 35 kgr*, ἀκτῖνος 60 cm, κατέρχεται ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου ὕψους 15 m. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ταχύτης μεταφορᾶς τοῦ τροχοῦ, ὅταν εὑρίσκεται εἰς τὴν βάσιν τοῦ ἐπιπέδου. Νὰ θεωρηθῇ ὅτι τὸ βάρος τοῦ τροχοῦ συγκεντροῦται ἐπὶ τῆς περιφερείας του. ($g = 9{,}8$ m/sec^2.)

Λύσις. Ἡ ἐλάττωσις τῆς δυναμικῆς ἐνεργείας τοῦ τροχοῦ ἰσοῦται πρὸς τὴν κτηθεῖσαν κινητικὴν ἐνέργειαν περιστροφῆς καὶ μεταφορᾶς, ἤτοι:

$$m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2}\,\Theta \cdot \omega^2 + \frac{1}{2}\,m \cdot \upsilon^2$$

Ἀλλὰ $\Theta = m \cdot r^2$ καὶ $\omega = \upsilon/r$, ὅθεν: $m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2}\,m \cdot r^2 \cdot \frac{\upsilon^2}{r^2} + \frac{1}{2}\,m \cdot \upsilon^2 = m \cdot \upsilon^2$

καὶ $$\underline{\upsilon} = \sqrt{g \cdot h} = \sqrt{9{,}8 \cdot 15} = \underline{12{,}12 \text{ m/sec.}}$$

557. Σφαῖρα μάζης 1 kgr κυλίεται ἐπὶ ὁριζοντίας ἐπιφανείας μὲ ταχύτητα 20 m/sec. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ κινητική της ἐνέργεια εἰς Joule. (Ἡ ροπὴ ἀδρανείας τῆς σφαίρας ὡς πρὸς ἄξονα διερχόμενον διὰ τοῦ κέντρου της ἰσοῦται πρὸς $\Theta = 2/5\; m \cdot r^2$.)

Λύσις. Ἡ ὁλικὴ κινητικὴ ἐνέργεια ἰσοῦται πρὸς τὴν κινητικὴν ἐνέργειαν περιστροφῆς καὶ μεταφορᾶς, ἤτοι:

$$E_{\kappa\iota\nu.} = \frac{1}{2}\,\Theta \cdot \omega^2 + \frac{1}{2}\,m \cdot \upsilon^2$$

ἢ $$E_{\kappa\iota\nu.} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}\,m \cdot r^2 \cdot \frac{\upsilon^2}{r^2} + \frac{1}{2}\,m \cdot \upsilon^2 = \frac{7}{10}\,m \cdot \upsilon^2$$

Θέτομεν: $m = 1\,000$ gr, $\upsilon = 2\,000$ cm/sec, καὶ εὑρίσκομεν:

$$\underline{E_{\kappa\iota\nu.}} = 28 \cdot 10^8 \text{ erg} = \underline{280 \text{ Joule.}}$$

558. Τροχὸς μάζης 45 kgr ἔχει ἀκτῖνα περιφορᾶς 45 cm. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ γωνιακὴ ταχύτης ἡ ἀναπτυσσομένη ἐπ' αὐτοῦ, ὅταν λαμβάνῃ τὴν κίνησίν του ἀπὸ κινητῆρα ἰσχύος 3/4 HP εἰς χρονικὸν διάστημα 6 sec, ἔχοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι δὲν λαμβάνει χώραν ἀπώλεια ἐνεργείας. ($g = 10$ m/sec^2.)

Λύσις. Τὸ ἔργον τοῦ κινητῆρος ἰσχύος 3/4 ἵππου εἰς 6 sec ἰσοῦται πρὸς τὴν κινητικὴν ἐνέργειαν τοῦ τροχοῦ κινουμένου ὑπὸ γωνιακὴν ταχύτητα ω, ἤτοι:

$$E_{\kappa\iota\nu.} = \frac{1}{2}\,\Theta \cdot \omega^2 \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ ἡ ἰσχὺς εἶναι πηλίκον τοῦ ἔργου διὰ τοῦ χρόνου, ἐκ τῆς σχέσεως (1) προκύπτει:

$$N = \frac{{}^1\!/_2 \cdot \Theta \cdot \omega^2}{t} \qquad (2)$$

Λύομεν τὴν σχέσιν (2) ὡς πρὸς ω καὶ λαμβάνομεν:

$$\omega = \sqrt{\frac{2\,N \cdot t}{\Theta}} \quad \text{ἢ} \quad \omega = \sqrt{\frac{2\,N \cdot t}{m \cdot r^2}}$$

(διότι $\Theta = m \cdot r^2$).

Θέτομεν: $N = 3/4 \cdot 76 = 57$ kgr*m/sec, $t = 6$ sec, $m = 45/10 = 4{,}5$ Τ.Μ. μάζης, $r = 0{,}45$ m, καὶ εὑρίσκομεν:

$$\underline{\omega = 27{,}6 \text{ rad/sec.}}$$

559. Τροχὸς μετ' ἄξονος τίθεται εἰς περιστροφὴν περὶ τὸν ὁριζόντιον ἄξονά του μὲ τὴν βοήθειαν βάρους B = 4 kgr* προδεδεμένου ἐπὶ σχοινίου τὸ ὁποῖον περιτυλίσσεται περὶ τὸν ἄξονα αὐτοῦ ἀκτῖνος r = 5 cm. Τὸ βάρος πίπτει κατακορύφως διανύον διάστημα s = 2 m εἰς χρόνον t = 10 sec, ἀναχωροῦν ἐκ τῆς ἠρεμίας. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ροπὴ ἀδρανείας Θ τοῦ τροχοῦ καὶ ἄξονος.

Λύσις. Ἡ ῥοπὴ ἀδρανείας Θ εὑρίσκεται ἐκ τοῦ γνωστοῦ τύπου:

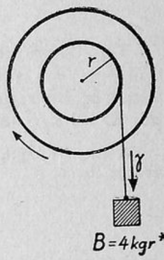
$$\Theta = \frac{M}{\omega'} \qquad (1)$$

ὅπου M ἡ ῥοπὴ περιστροφῆς καὶ ω' ἡ γωνιακὴ ἐπιτάχυνσις. Ὡς γνωστὸν ὅμως ἡ ῥοπὴ M ἰσοῦται μὲ τὴν τάσιν (δύναμιν) τοῦ σχοινίου T ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα r τοῦ ἄξονος, ἤτοι:

$$M = T \cdot r \qquad (2)$$

Ἡ σχέσις (1) ἐπὶ τῇ βάσει τῆς σχέσεως (2) γράφεται:

$$\Theta = \frac{T \cdot r}{\omega'} \qquad (3)$$



Ἡ τάσις ὅμως T εἶναι προφανῶς ἴση πρὸς τὸ ἀνηρτημένον βάρος B μεῖον τὴν δύναμιν ἐπιταχύνσεως τῆς μάζης αὐτοῦ, ἤτοι:

$$T = B - m \cdot \gamma \qquad (4)$$

Ἐκ τῆς σχέσεως (4) προκύπτει λοιπὸν ὅτι:

$$\Theta = \frac{(B - m \cdot \gamma) \cdot r}{\omega'} \qquad (5)$$

Ἐπίσης ἡ γωνιακὴ ταχύτης ω' ὑπολογίζεται ἐκ τοῦ γνωστοῦ τύπου:

$$\omega' = \gamma / r \qquad (6)$$

ὅπου γ ἡ γραμμικὴ ἐπιτάχυνσις καὶ r ἡ ἀκτὶς τοῦ ἄξονος. Βάσει τῆς σχέσεως (6) ἡ (5) γράφεται:

$$\Theta = \frac{(B - m \cdot \gamma)\, r^2}{\gamma} \qquad (7)$$

Ἐξ ἄλλου ἡ ἐπιτάχυνσις γ εὑρίσκεται ἐκ τοῦ γνωστοῦ τύπου $s = 1/2 \cdot \gamma \cdot t^2$ τῆς ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένης κινήσεως, ἄνευ ἀρχικῆς ταχύτητος, ὅτε εἶναι $\gamma = 2\,s/t^2$, καὶ οὕτω ἐκ τῆς σχέσεως (7) δι' ἀντικαταστάσεως τοῦ γ προκύπτει ὁ τελικὸς τύπος τῆς ῥοπῆς ἀδρανείας:

$$\Theta = \frac{\left(B - m \cdot \frac{2\,s}{t^2}\right) r^2 \cdot t^2}{2\,s}$$

Θέτομεν: $B = 4$ kgr* $= 4 \cdot 981\,000$ dyn, $m = 4\,000$ gr, $s = 200$ cm, $t = 10$ sec, $r = 5$ cm, καὶ εὑρίσκομεν:

$$\underline{\Theta = 2{,}44 \cdot 10^7 \text{ gr} \cdot \text{cm}^2.}$$

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Β'

560. Τροχὸς ἀκτῖνος 4 cm καὶ ῥοπῆς ἀδρανείας 3 200 gr · cm² ὑφίσταται τὴν ἐπενέργειαν δυνάμεως 5 gr* ἐφηρμοσμένης ἐφαπτομενικῶς ἐπὶ τῆς περιφερείας. Νὰ προσδιορισθοῦν: α) Ἡ γωνιακὴ ἐπιτάχυνσις. β) Ἡ γωνιακὴ ταχύτης μετὰ 3 sec ἀπὸ τῆς ἠρεμίας. γ) Ὁ ἀριθμὸς στροφῶν τοὺς ὁποίους ἐκτελεῖ εἰς χρόνον 3 sec ἐκ τῆς ἠρεμίας. (Ἀπ. α' $\omega' = 6{,}12$ rad/sec². β' $\omega = 18{,}4$ rad/sec. γ' 4,39 στροφαί.)

561. Ὅταν καταναλίσκεται ἔργον 10^9 erg ἐπὶ σφονδύλου, ἡ συχνότης του αὐξάνεται ἀπὸ 60 στρ./min εἰς 180 στρ./min. Πόση εἶναι ἡ ῥοπὴ ἀδρανείας τοῦ σφονδύλου. (Ἀπ. $6{,}33 \cdot 10^6$ gr · cm².)

562. Τροχὸς μετ' ἄξονος ἔχει ὁλικὴν ροπὴν ἀδρανείας 200 000 $gr \cdot cm^2$ καὶ τίθεται εἰς περιστροφὴν περὶ ὁριζόντιον ἄξονα διὰ βάρους 80 gr* προσηρμοσμένου εἰς τὸ ἄκρον σχοινίου περιβεβλημένου περὶ τὸν ἄξονα. Ἡ ἀκτὶς τοῦ ἄξονος εἶναι 2 cm. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ κατακόρυφος ἀπόστασις καθ' ἣν πρέπει νὰ πέσῃ τὸ βάρος, ἵνα μεταδώσῃ εἰς τὸν τροχὸν συχνότητα 3 στρ./sec ἀπὸ τῆς ἠρεμίας.
(Ἀπ. 453 cm.)

563. Τροχὸς μάζης 10 kgr κυλιέται ἐπὶ ὁριζοντίου ἐπιφανείας ὑπὸ ταχύτητα 4 m/sec. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ὁλική του κινητικὴ ἐνέργεια, ἐπὶ τῇ ὑποθέσει ὅτι ἡ μᾶζα εἶναι συγκεντρωμένη εἰς τὴν περιφέρειαν τοῦ τροχοῦ. (Ἀπ. 160 Joule.)

564. Ὁριζοντία ράβδος μήκους l εἶναι πακτωμένη εἰς τὸ μέσον της ἐπὶ κατακορύφου ἄξονος, στρεφομένου μὲ 3 000 στρ./min, καὶ φέρει εἰς τὰ ἄκρα της ἀνὰ μίαν σφαῖραν, ἀμελητέας διαμέτρου, μάζης m. Κατά τινα στιγμὴν αἱ σφαῖραι μετατοπίζονται ἄνευ ἀπωλείας κινητικῆς ἐνεργείας ἐπὶ τῆς ράβδου πρὸς τὸν ἄξονα καὶ σταματοῦν εἰς ἀπόστασιν 1/4 ἀπ' αὐτοῦ. Ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι ὁ ἄξων καὶ ἡ ράβδος ἔχουν ἀμελητέαν μᾶζαν, νὰ εὑρεθῇ ἡ νέα γωνιακὴ ταχύτης τοῦ ἄξονος.
(Ἀπ. 628 rad/sec.) (Ε. Μ. Πολυτεχνεῖον, Σχολαὶ Ἀρχιτεκτ. - Τοπογράφων, 1955.)

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Γ'

565. Ὁ κινητήριος τροχὸς ἱμάντος προσηρμοσμένος εἰς ἠλεκτρικὸν κινητῆρα ἔχει διάμετρον 35 cm καὶ στρέφεται ὑπὸ συχνότητα 1 200 στρ./min. Ἡ τάσις τοῦ ἱμάντος εἶναι 15 kgr* εἰς τὸ ὀλιγώτερον τεταμένον μέρος καὶ 60 kgr* εἰς τὸ ἕτερον μέρος. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἰσχὺς εἰς ἵππους ἡ μεταβιβαζομένη ὑπὸ τοῦ ἱμάντος.

566. Σιδηροῦς σφόνδυλος σχήματος δίσκου διαμέτρου 40 cm καὶ μάζης 20 kgr ἀποκτᾷ συχνότητα 1 000 στρ./min ἐντὸς 5 sec. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ κινητήριον ζεῦγος (ὑποτιθέμενον σταθερὸν) εἰς μονάδας C.G.S. (Ροπὴ ἀδρανείας $\Theta = 1/2 \cdot m \cdot r^2$.)

567. Κυλινδρικὴ σφαῖρα πυροβόλου ὅπλου διαμέτρου 2 cm καὶ μάζης 40 kgr ἐξέρχεται ἐκ τοῦ στομίου καὶ κινεῖται ὑπὸ ταχύτητα 2 000 m/sec, ἐνῷ συγχρόνως περιστρέφεται περὶ τὸν ἄξονά της ὑπὸ συχνότητα 1 000 στρ./sec. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ κινητικὴ ἐνέργεια αὐτῆς. Ἐὰν ἡ ἐνέργεια αὕτη διατίθεται ἐντὸς 0,0001 sec, πόση ἡ ἰσχὺς τῆς ἐκρήξεως εἰς Watt. (Ροπὴ ἀδρανείας $\Theta = 1/2 \cdot m \cdot r^2$.)

568. Πλήρης ὁμογενὴς κύλινδρος, ἀκτῖνος r καὶ μάζης m, κυλίεται ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου γωνίας θ, χωρὶς νὰ ὀλισθαίνῃ. Νὰ καθορισθῇ ἡ θέσις αὐτοῦ συναρτήσει τοῦ χρόνου. (Ροπὴ ἀδρανείας κυλίνδρου $\Theta = 1/2 \cdot m \cdot r^2$.)

569. Νὰ δειχθῇ ὅτι εἰς κυλιομένην σφαῖραν ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου ἡ συνολικὴ ἐλάττωσις τῆς κινητικῆς ἐνεργείας τῆς βαρύτητος ἐμφανίζεται ὡς κινητικὴ ἐνέργεια περιστροφῆς. (Ροπὴ ἀνδρανείας $\Theta = 2/5 \cdot m \cdot r^2$.)

570. Τροχὸς μάζης 7 kgr καὶ ἀκτῖνος 20 cm ὑφίσταται τὴν ἐπενέργειαν δυνάμεως 1,2 kgr* ἐφηρμοσμένης καθέτως πρὸς τὴν ἀκτῖνα καὶ εἰς ἀπόστασιν 15 cm ἀπὸ τοῦ κέντρου. Νὰ ὑπολογισθοῦν: α) Ἡ γωνιακὴ ἐπιτάχυνσις. β) Ἡ γωνιακὴ ταχύτης μετὰ πάροδον 4 sec. γ) Ἡ γραμμικὴ ταχύτης μετὰ πάροδον 4 sec ἑνὸς σημείου ἐπὶ τῆς περιφερείας. δ) Ὁ ἀριθμὸς τῶν στροφῶν τῶν ἐκτελεσθεισῶν εἰς 4 sec. ε) Τὸ ἔργον τὸ παραχθὲν εἰς 4 sec.

571. Κύλινδρος ($\Theta = 1/2 \cdot m \cdot r^2$), ἀκτῖνος 14 cm, κατέρχεται κυλιόμενος ἐπὶ λείου κεκλιμένου ἐπιπέδου 2 m ὕψους. Πόση ἡ ταχύτης τοῦ κυλίνδρου, ὅταν οὗτος εὑρίσκεται εἰς τὴν βάσιν τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΣΤ΄

ΟΡΜΗ. ΚΡΟΥΣΙΣ

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Α΄

572. Δύναμις 2 000 dyn ἐπενεργεῖ ἐπὶ σώματος μάζης 400 gr. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ταχύτης καὶ ἡ ὁρμὴ τοῦ σώματος μετὰ παρέλευσιν 8 sec.

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν γ τὴν ἐπιτάχυνσιν τὴν ὁποίαν ἀποκτᾷ τὸ σῶμα, τότε, μετὰ παρέλευσιν χρόνου t ἀπὸ τῆς ἐνεργείας τῆς δυνάμεως, ἡ ταχύτης τοῦ σώματος θὰ εἶναι $\upsilon = \gamma \cdot t$ καὶ ἑπομένως ὁ θεμελιώδης τύπος τῆς Δυναμικῆς $F = m \cdot \gamma$ δύναται νὰ γραφῇ :

$$F = m \cdot \frac{\upsilon}{t} \qquad (1)$$

Λύοντες τὸν τύπον (1) ὡς πρὸς τὴν ταχύτητα υ λαμβάνομεν :

$$\upsilon = \frac{F \cdot t}{m} \qquad (2)$$

Ἐπειδὴ αἱ τιμαὶ τῶν μεγεθῶν ἔχουν δοθῇ εἰς τὸ σύστημα C.G.S., προτιμῶμεν νὰ ἐργασθῶμεν εἰς τὸ σύστημα τοῦτο. Οὕτω θέτοντες εἰς τὸν τύπον (2) : $m = 400$ gr, $F = 2\,000$ dyn καὶ $t = 8$ sec, εὑρίσκομεν :

$$\underline{\upsilon = 40 \text{ cm/sec.}}$$

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ζητουμένην ὁρμὴν τοῦ σώματος, χρησιμοποιοῦμεν τὸν γνωστὸν τύπον τῆς ὁρμῆς :

$$J = m \cdot \upsilon \qquad (3)$$

καὶ ἐργαζόμενοι εἰς τὸ σύστημα C.G.S. εὑρίσκομεν ἐκ τοῦ τύπου τούτου :

$$\underline{J = 16\,000 \text{ gr} \cdot \text{cm} \cdot \text{sec}^{-1}.}$$

573. Σῶμα μάζης 2 kgr κινεῖται ὑπὸ ταχύτητα 1 m/sec. Πόση ἡ ὁρμή του. ($g = 10$ m/sec^2.)

Λύσις. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ὁρμὴν τοῦ σώματος, ἐφαρμόζομεν τὸν τύπον τῆς ὁρμῆς :

$$J = m \cdot \upsilon \qquad (1)$$

ὅπου m εἶναι ἡ μᾶζα τοῦ σώματος καὶ υ ἡ ταχύτης αὐτοῦ.

Ἐργαζόμενοι εἰς τὸ Τεχνικὸν Σύστημα θέτομεν εἰς τὸν τύπον (1) : $m = 0{,}2$ T. M. μάζης, $\upsilon = 1$ m/sec, καὶ εὑρίσκομεν :

$$\underline{J = 0{,}2 \text{ kgr}^* \cdot \text{sec.}}$$

574. Πόση δύναμις ἀπαιτεῖται, ἵνα μᾶζα 500 gr μεταβάλῃ τὴν ταχύτητά της κατὰ 1 m/sec ἐντὸς 2 sec.

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν F τὴν ἀπαιτουμένην δύναμιν ἵνα μεταβληθῇ ἡ ὁρμὴ καὶ t τὸν ἀντίστοιχον χρόνον, τότε ἡ ὤθησις τῆς δυνάμεως Ω θὰ εἶναι :

$$\Omega = F \cdot t \qquad (1)$$

Ἐπίσης, ἐὰν καλέσωμεν m τὴν μᾶζαν τοῦ σώματος καὶ $(\upsilon - \upsilon_0)$ τὴν μεταβολὴν τῆς ταχύτητος αὐτοῦ, τότε ἡ μεταβολὴ τῆς ὁρμῆς ΔJ τοῦ σώματος θὰ εἶναι :

$$\Delta J = m\,(\upsilon - \upsilon_0) \qquad (2)$$

Ἐπειδὴ ὅμως, ὡς γνωστόν, ἡ ὤθησις τῆς δυνάμεως ἰσοῦται μὲ τὴν μεταβολὴν τῆς ὁρμῆς, θὰ ἔχωμεν τὴν σχέσιν :

$$F \cdot t = m\,(\upsilon - \upsilon_0) \qquad (3)$$

Λύομεν τὴν σχέσιν (3) ὡς πρὸς F καὶ λαμβάνομεν :

$$F = \frac{m\,(\upsilon - \upsilon_0)}{t} \qquad (4)$$

Θέτομεν εἰς τὴν σχέσιν (4) τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως εἰς τὸ σύστημα C.G.S. καὶ εὑρίσκομεν :

$$\underline{F = 25\,000 \text{ dyn.}}$$

575. Ἡ ὁρμὴ σώματος εἶναι 40 000 gr · cm · sec^{-1}. Πόση δύναμις ἀπαιτεῖται, διὰ νὰ τεθῇ τὸ σῶμα ἐν ἠρεμίᾳ ἐντὸς 8 sec.

Λύσις. Ὡς γνωστόν, ἡ ὤθησις τῆς δυνάμεως Ω θὰ ἰσοῦται μὲ τὴν μεταβολὴν τῆς ὁρμῆς ΔJ τὴν ὁποίαν προκαλεῖ. Συνεπῶς θὰ ἔχωμεν τὴν σχέσιν :

$$\Omega = \Delta J \tag{1}$$

ἤ, ἐπειδὴ $\Omega = F \cdot t$ καὶ $\Delta J = m\,(\upsilon - \upsilon_0)$, ἔχομεν :

$$F \cdot t = m\,(\upsilon - \upsilon_0) \tag{2}$$

Ἐκ τῆς σχέσεως (2) λύοντες ὡς πρὸς F καὶ θέτοντες τὰ δεδομένα : $\Delta J = 40\,000$ gr · cm · sec^{-1} καὶ $t = 8$ sec, εὑρίσκομεν :

$$\underline{F = 5\,000 \text{ dyn.}}$$

576. Σφαῖρα μάζης 8 gr βάλλεται ὁριζοντίως καὶ εἰσχωρεῖ ἐντὸς τεμαχίου ξύλου βάρους 9 kgr*, τὸ ὁποῖον δύναται νὰ κινῆται ἐλευθέρως. Ἡ ταχύτης τοῦ ξύλου καὶ τῆς σφαίρας μετὰ τὴν κροῦσιν εἶναι 40 cm/sec. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀρχικὴ ταχύτης τῆς σφαίρας.

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν m καὶ υ τὴν μᾶζαν καὶ τὴν ταχύτητα τῆς σφαίρας πρὸ τῆς κρούσεως, υ_1 τὴν κοινὴν ταχύτητα τοῦ συστήματος μετὰ τὴν κροῦσιν καὶ M τὴν μᾶζαν τοῦ τεμαχίου τοῦ ξύλου, θὰ ἔχωμεν ὅτι ἡ ὁρμὴ τοῦ συστήματος πρὸ τῆς κρούσεως ($J_{\pi\rho\grave{o}}$) ἰσοῦται πρός :

$$J_{\pi\rho\grave{o}} = m \cdot \upsilon + M \cdot 0 \tag{1}$$

καὶ ἡ ὁρμὴ τοῦ συστήματος μετὰ τὴν κροῦσιν ($J_{\mu\varepsilon\tau\grave{\alpha}}$) ἰσοῦται πρός :

$$J_{\mu\varepsilon\tau\grave{\alpha}} = (m + M) \cdot \upsilon_1 \tag{2}$$

Συμφώνως πρὸς τὴν Ἀρχὴν τῆς διατηρήσεως τῆς ὁρμῆς θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις :

$$m \cdot \upsilon = (m + M) \cdot \upsilon_1 \tag{3}$$

Λύοντες τὴν σχέσιν (3) ὡς πρὸς τὴν ζητουμένην ταχύτητα υ λαμβάνομεν :

$$\upsilon = \frac{(m + M)\,\upsilon_1}{m} \tag{4}$$

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (4) τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως : $m = 8$ gr, $M = 9\,000$ gr καὶ $\upsilon_1 = 40$ cm/sec, εὑρίσκομεν :

$$\underline{\upsilon = 45\,050 \text{ cm/sec.}}$$

577. Πυροβόλον 600 kgr* εἶναι τοποθετημένον ἐπὶ τροχοφόρου ὀχήματος καὶ βάλλει βλῆμα 10 kgr* ὑπὸ ταχύτητα 700 m/sec, ὑπὸ γωνίαν 30° ὡς πρὸς τὴν ὁριζοντίαν. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ὁριζοντία ταχύτης ἀνακρούσεως τοῦ πυροβόλου.

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν M τὴν μᾶζαν τοῦ ὀχήματος καὶ υ_1 τὴν ζητουμένην ταχύτητα ἀνακρούσεως τοῦ πυροβόλου, θὰ ἔχωμεν ὅτι ἡ ὁρμὴ πυροβόλου μετὰ τὴν ἀνάκρουσιν ($J_{\pi\upsilon\rho.}$) ἰσοῦται πρός :

$$J_{\pi\upsilon\rho.} = M \cdot \upsilon_1 \tag{1}$$

Ἐπίσης, ἐὰν καλέσωμεν m τὴν μᾶζαν τοῦ βλήματος καὶ υ_2 τὴν ταχύτητα μὲ τὴν ὁποίαν ἐξέρχεται τὸ βλῆμα ἐκ τοῦ πυροβόλου, θὰ ἔχωμεν ὅτι ἡ ὁρμὴ τοῦ βλήματος (ὁριζοντίως) μετὰ τὴν ἀνάκρουσιν ($J_{\beta\lambda\eta\mu.}$) ἰσοῦται πρός :

$$J_{\beta\lambda\acute{\eta}\mu.} = m \cdot \upsilon_2 \cdot \sigma\upsilon\nu\, 30^\circ \tag{2}$$

Δεδομένου ὅτι ἡ ὁρμὴ τοῦ συστήματος πρὸ τῆς ἀνακρούσεως ἦτο μηδὲν καὶ συμφώνως πρὸς τὴν Ἀρχὴν τῆς διατηρήσεως τῆς ὁρμῆς, θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις :

$$M \cdot \upsilon_1 = m \cdot \upsilon_2 \cdot \sigma\upsilon\nu\, 30^\circ \tag{3}$$

Λύομεν τὴν σχέσιν (3) ὡς πρὸς τὴν ζητουμένην ταχύτητα υ_1 τοῦ πυροβόλου καὶ λαμβάνομεν :

$$\upsilon_1 = \frac{m}{M} \cdot \upsilon_2 \cdot \sigma\upsilon\nu\, 30^0$$

Ἐκ τῶν δεδομένων τῆς ἀσκήσεως : $m = 10$ kgr, $M = 600$ kgr, $\upsilon_2 = 700$ m/sec, $\sigma\upsilon\nu\, 30^0 = 0,866$, προκύπτει ὅτι :

$$\underline{\upsilon_1 = 10,1 \text{ m/sec.}}$$

578. Τεμάχιον σκυροκονιάματος (beton) διαστάσεων 0,07 m, 0,07 m, 0,07 m πίπτει ἐλευθέρως ἄνευ ἀρχικῆς ταχύτητος ἐξ ὕψους 11 m ἀπὸ οἰκοδομῆς. Ζητοῦνται: α) Ἡ ὁρμὴ καὶ ἡ κινητικὴ ἐνέργεια αὐτοῦ εἰς ὕψος ἀπὸ τοῦ ἐδάφους ἴσον πρὸς τὸ ὕψος μέσου ἀνδρὸς (1,7 m). β) Ἡ δύναμις τὴν ὁποίαν ἐξασκεῖ εἰς τὸ ὕψος αὐτὸ διὰ προσκρούσεως ἐπὶ κωλύματος, ἂν ὑποτεθῇ ὅτι αὕτη διαρκεῖ 0,1 sec. Δίδεται ἡ πυκνότης τοῦ σκυροκονιάματος $\rho = 2,2$ gr/cm^3. ($g = 10$ m/sec^2.)

Λύσις. α) Ἐὰν καλέσωμεν m τὴν μᾶζαν τοῦ τεμαχίου τοῦ σκυροκονιάματος καὶ υ τὴν ταχύτητα τὴν ὁποίαν ἀποκτᾷ τοῦτο εἰς ὕψος ἀναστήματος μέσου ἀνδρός, τότε ἡ ὁρμή του δίδεται διὰ τοῦ τύπου :

$$J = m \cdot \upsilon \tag{1}$$

Ἐπειδὴ ὅμως $m = \rho \cdot V$ (2), ὅπου ρ ἡ πυκνότης τοῦ σώματος καὶ V ὁ ὄγκος αὐτοῦ, καὶ $\upsilon = \sqrt{2g \cdot h}$ (3), ὅπου h τὸ διάστημα τὸ ὁποῖον διήνυσε διὰ νὰ ἀποκτήσῃ ταχύτητα υ, ὁ τύπος (1) γράφεται :

$$J = \rho \cdot V \cdot \sqrt{2g \cdot h} \tag{4}$$

Ἐκ τῆς σχέσεως (4), ἐὰν θέσωμεν τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως ἐργαζόμενοι εἰς τὸ Τεχνικὸν Σύστημα : $\rho = 2,2$ gr/cm^3 = 220 kgr* · sec^2 · m^{-4}, $V = (0,07)^3 = 3,4 \cdot 10^{-4}$ m, $h = 11 - 1,7 = 9,3$ m, εὑρίσκομεν :

$$\underline{J = 1,02 \text{ kgr*} \cdot \text{sec.}}$$

Ἡ κινητικὴ ἐνέργεια εὑρίσκεται ἐκ τοῦ γνωστοῦ τύπου :

$$E_{\kappa\iota\nu.} = \frac{1}{2} m \cdot \upsilon^2 \tag{5}$$

Ἄρα θὰ ἔχωμεν, λόγῳ τῶν σχέσεων (2) καὶ (3), ὅτι:

$$E_{\kappa\iota\nu.} = \rho \cdot V \cdot g \cdot h \tag{6}$$

ὅτε προκύπτει ὅτι :

$$\underline{E_{\kappa\iota\nu.} = 7,07 \text{ kgr*m.}}$$

β) Γνωρίζομεν ὅτι ἡ ὤθησις τῆς δυνάμεως Ω ἰσοῦται πρὸς τὴν μεταβολὴν τῆς ὁρμῆς ΔJ, τὴν ὁποία προκαλεῖ. Ἤτοι : $\Omega = \Delta J$, ἤ :

$$F \cdot t = \Delta J \tag{7}$$

δεδομένου δὲ ὅτι ἡ ἀρχικὴ ὁρμὴ εἶναι μηδέν, θὰ ἔχωμεν ὅτι :

$$F \cdot t = J \tag{8}$$

Λύοντες τὴν σχέσιν (8) ὡς πρὸς F λαμβάνομεν :

$$F = \frac{J}{t} \tag{9}$$

Ἐργαζόμενοι εἰς τὸ Τεχνικὸν Σύστημα καὶ θέτοντες : $J = 1,02$ kgr* · sec καὶ $t = 0,1$ sec, εὑρίσκομεν :

$$\underline{F = 10,2 \text{ kgr*}.}$$

579. Σφαῖρα πυροβόλου ὅπλου μάζης m = 20 gr κινουμένη ὁριζοντίως ὑπὸ ταχύτητα υ ἐνσφηνοῦται ἐπὶ τεμαχίου ξύλου μάζης M = 1 kgr τὸ ὁποῖον εἶναι προσδεδεμένον διὰ νήματος μήκους l = 1 m ἀπὸ σταθερὸν σημεῖον Ο. Τὸ τεμάχιον τοῦ ξύλου, ὅταν ἐνσφηνωθῇ ἐπ' αὐτοῦ ἡ σφαῖρα, ἐκτρέπεται καὶ σχημα-

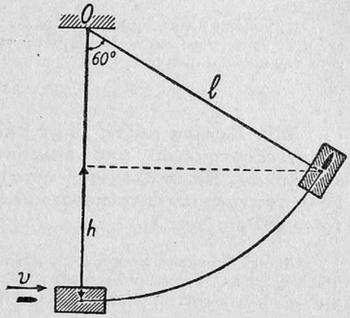
τίζει τὸ νῆμα γωνίαν 60^o μετὰ τῆς κατακορύφου. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ποσὸν τῆς κινητικῆς ἐνεργείας τῆς σφαίρας τὸ ὁποῖον μετετράπη εἰς θερμότητα. ($g = 10$ m/sec^2.)

Λύσις. Ἔστω $υ_κ$ ἡ ταχύτης τοῦ συστήματος ξύλου - σφαίρας ἀμέσως μετὰ τὴν ἐνσφήνωσιν, m ἡ μᾶζα τῆς σφαίρας καὶ M ἡ μᾶζα τοῦ ξύλου. Ἐὰν τὸ σύστημα μετὰ τὴν ἐνσφήνωσιν ἀνέρχεται εἰς ὕψος h, τότε συμφώνως πρὸς τὸ σχῆμα θὰ ἔχωμεν $h = l/2$ καὶ ἐπομένως καὶ ἡ δυναμικὴ αὐτοῦ ἐνέργεια μεταβάλλεται κατά:

$$E_{δυν.} = (M+m)\,g \cdot \frac{l}{2} \qquad (1)$$

Ἡ μεταβολὴ αὕτη τῆς δυναμικῆς ἐνεργείας θὰ προέρχεται ἀπὸ τὴν κινητικὴν ἐνέργειαν τοῦ συστήματος, τὸ ὁποῖον ἐκινήθη μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα $υ_κ$ ἀνερχόμενον, καὶ ἡ ὁποία εἶναι:

$$E_{κιν.} = \frac{1}{2}\,(M+m) \cdot υ_κ^{\,2} \qquad (2)$$



Ἐκ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν ὅτι:

$$υ_κ = \sqrt{g \cdot l} \qquad (3)$$

Ἐξ ἄλλου εἶναι φανερὸν ὅτι ἡ κινητικὴ ἐνέργεια τῆς σφαίρας:

$$E'_{κιν.} = \frac{1}{2}\,m \cdot υ^2 \qquad (4)$$

μετετράπη ἀφ' ἑνὸς μὲν εἰς τὴν δυναμικὴν ἐνέργειαν $E_{δυν.}$ καὶ ἀφ' ἑτέρου εἰς θερμότητα Q, λόγῳ τριβῶν. Ἐπομένως θὰ ἔχωμεν:

$$\frac{1}{2}\,m \cdot υ^2 = (M+m)\,g \cdot \frac{l}{2} + Q \qquad (5)$$

ἢ

$$Q = \frac{1}{2}\,m \cdot υ^2 - (M+m)\,g \cdot \frac{l}{2} \qquad (6)$$

Συμφώνως ὅμως πρὸς τὴν Ἀρχὴν τῆς διατηρήσεως τῆς ὁρμῆς, θὰ ἔχωμεν:

$$m \cdot υ = (M+m) \cdot υ_κ \qquad (7)$$

Θέτομεν τὴν τιμὴν τοῦ $υ_κ$ ἐκ τῆς σχέσεως (3) εἰς τὴν σχέσιν (7) καὶ λαμβάνομεν:

$$υ = \frac{(M+m) \cdot \sqrt{g \cdot l}}{m} \qquad (8)$$

Ἐὰν τώρα εἰς τὴν σχέσιν (6) θέσωμεν τὴν τιμὴν τοῦ υ ἐκ τῆς ἄνω σχέσεως (8), εὑρίσκομεν τὸν γενικὸν τύπον:

$$Q = \frac{1}{2}\,(M+m) \cdot g \cdot l \cdot \left(\frac{M+m}{m} - 1\right) \qquad (9)$$

Θέτομεν εἰς τὸν γενικὸν τύπον (9) τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως, ἐργαζόμενοι εἰς τὸ Τεχνικὸν Σύστημα, ἤτοι: $M = 1$ kgr $= 0{,}1$ Τ. Μ. μάζης, $m = 20$ gr $= 0{,}002$ Τ. Μ. μάζης, $l = 1$ m, ὅτε εὑρίσκομεν:

$$\underline{Q = 25{,}5 \text{ kgr*m.}}$$

580. Δύο μὴ ἐλαστικαὶ μᾶζαι 16 gr καὶ 4 gr κινοῦνται κατ' ἀντιθέτους διευθύνσεις ὑπὸ ταχύτα 30 cm/sec καὶ 50 cm/sec ἀντιστοίχως. Νὰ προσδιορισθῇ ἡ κοινὴ ταχύτης υ μετὰ τὴν σύγκρουσιν.

Λύσις. Ἂς καλέσωμεν m_1, m_2 τὰς μάζας τῶν δύο σωμάτων καὶ $υ_1$, $υ_2$ ἀντιστοίχως τὰς ταχύτητας τὰς ὁποίας ἔχουν ταῦτα πρὸ τῆς κρούσεως. Ἐπίσης, ἂς καλέσωμεν υ τὴν κοινὴν ταχύτητα αὐτῶν μετὰ τὴν κροῦσιν. Τότε θὰ ἔχωμεν ὅτι ἡ ὁρμὴ τοῦ συστήματος πρὸ τῆς κρούσεως ($J_{\pi\rho\grave{o}}$) θὰ ἰσοῦται πρός:

$$J_{\pi\rho\grave{o}} = m_1 \cdot \upsilon_1 - m_2 \cdot \upsilon_2 \tag{1}$$

Ἐπίσης ἡ ὁρμὴ τοῦ συστήματος μετὰ τὴν κροῦσιν ($J_{\mu\varepsilon\tau\grave{\alpha}}$):

$$J_{\mu\varepsilon\tau\grave{\alpha}} = (m_1 + m_2) \cdot \upsilon \tag{2}$$

Συμφώνως δὲ πρὸς τὴν Ἀρχὴν τῆς διατηρήσεως τῆς ὁρμῆς θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις:

$$m_1 \cdot \upsilon_1 - m_2 \cdot \upsilon_2 = (m_1 + m_2) \cdot \upsilon \tag{3}$$

Λύομεν τὴν σχέσιν (3) ὡς πρὸς υ καὶ λαμβάνομεν:

$$\upsilon = \frac{m_1 \cdot \upsilon_1 - m_2 \cdot \upsilon_2}{m_1 + m_2} \tag{4}$$

Ἐργαζόμενοι εἰς τὸ σύστημα C.G.S. θέτομεν εἰς τὴν σχέσιν (4) τὰς τιμάς: $m_1 = 16$ gr, $m_2 = 4$ gr, $\upsilon_1 = 30$ cm/sec, $\upsilon_2 = 50$ cm/sec, καὶ εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ζητουμένη ταχύτης τοῦ συστήματος μετὰ τὴν κροῦσιν εἶναι:

$$\underline{\upsilon = 14 \text{ cm/sec.}}$$

581. Σφαῖρα μάζης 15 gr βάλλεται ὁριζοντίως ἐπὶ ξυλίνου τεμαχίου μάζης 3 kgr ἐξηρτημένου ἀπὸ ἐπίμηκες νῆμα καὶ ἡ σφαῖρα ἐνσωματοῦται ἐντὸς τοῦ ξύλου. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ταχύτης τῆς σφαίρας, ὅταν κατὰ τὴν κροῦσιν τὸ ξύλινον τεμάχιον ἐκτρέπεται καὶ ἀνυψοῦται κατὰ 10 cm ἀπὸ τῆς ἀρχικῆς θέσεως. ($g = 981$ cm/sec^2.)

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν m_1 τὴν μᾶζαν τῆς σφαίρας, m_2 τὴν μᾶζαν τοῦ τεμαχίου τοῦ ξύλου καὶ υ τὴν ταχύτητα τὴν ὁποίαν λαμβάνει τὸ σύστημα σφαίρας καὶ τεμαχίου ξύλου ἀμέσως μετὰ τὴν ἐνσφήνωσιν, τότε ἡ κινητικὴ ἐνέργεια τοῦ συστήματος κατὰ τὴν στιγμὴν ταύτην θὰ εἶναι:

$$E_{\kappa\iota\nu.} = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \cdot \upsilon^2 \tag{1}$$

Ἐπίσης, ἐὰν καλέσωμεν h τὴν ἀνύψωσιν τὴν ὁποίαν ὑφίσταται τὸ σύστημα, ἡ δυναμική του ἐνέργεια μεταβάλλεται κατά:

$$E_{\delta\upsilon\nu.} = (m_1 + m_2)\, g \cdot h \tag{2}$$

Ἐπειδὴ ὅμως ἡ μηχανικὴ ἐνέργεια τοῦ συστήματος πρέπει νὰ διατηρῆται σταθερά, λαμβάνομεν δι' ἐξισώσεως τῶν δευτέρων μελῶν τῶν σχέσεων (1) καὶ (2):

$$\upsilon = \sqrt{2\, g \cdot h} \tag{3}$$

Πρὸ τῆς ἐνσφηνώσεως, ἐὰν ἡ ταχύτης τῆς σφαίρας εἶναι υ_1, ἡ ὁρμὴ αὐτῆς θὰ εἶναι $m_1 \cdot \upsilon_1$, ἡ δὲ ὁρμὴ τοῦ τεμαχίου τοῦ ξύλου μηδέν, καθόσον ἡ ταχύτης αὐτοῦ εἶναι μηδέν. Ἑπομένως θὰ ἔχωμεν ὅτι ἡ ὁρμὴ τοῦ συστήματος πρὸ τῆς κρούσεως ($J_{\pi\rho\grave{o}}$) ἰσοῦται πρός:

$$J_{\pi\rho\grave{o}} = m_1 \cdot \upsilon_1 \tag{4}$$

Ἐξ ἄλλου ἔχομεν ὅτι ἡ ὁρμὴ τοῦ συστήματος μετὰ τὴν κροῦσιν ($J_{\mu\varepsilon\tau\grave{\alpha}}$) θὰ ἰσοῦται πρός:

$$J_{\mu\varepsilon\tau\grave{\alpha}} = (m_1 + m_2) \cdot \upsilon \tag{5}$$

Ἐφαρμόζοντες τὴν Ἀρχὴν τῆς διατηρήσεως τῆς ὁρμῆς ἔχομεν τὴν σχέσιν:

$$m_1 \cdot \upsilon_1 = (m_1 + m_2) \cdot \upsilon \tag{6}$$

Λύομεν τὴν σχέσιν (6) ὡς πρὸς τὴν ζητουμένην ταχύτητα τῆς σφαίρας υ_1 καὶ λαμβάνομεν:

$$\upsilon_1 = \frac{(m_1 + m_2) \cdot \upsilon}{m_1} \tag{7}$$

Θέτοντες εἰς τὴν σχέσιν (7) τὴν τιμὴν τῆς ταχύτητος υ τοῦ συστήματος ἐκ τῆς σχέσεως (3) ἔχομεν ὅτι :

$$υ = \frac{(m_1 + m_2) \cdot \sqrt{2g \cdot h}}{m_1} \qquad (8)$$

Ἐργαζόμενοι εἰς τὸ σύστημα C.G.S. καὶ θέτοντες : $m_1 = 15$ gr , $m_2 = 3\,000$ gr , $g = 981$ cm/sec² καὶ $h = 10$ cm , εὑρίσκομεν ὅτι :

$$υ = 28\,140 \text{ cm/sec} \quad \text{ἢ} \quad \underline{υ = 281{,}4 \text{ m/sec.}}$$

582. Δύο σφαῖραι μάζης 30 gr καὶ 80 gr κινοῦνται κατ' ἀντιθέτους φορὰς μὲ ταχύτητας — 6 m/sec καὶ + 4 m/sec ἀντιστοίχως. Ποία ἡ ταχύτης αὐτῶν μετὰ τὴν κροῦσιν. (Ὁ συντελεστὴς κρούσεως εἶναι κ = 0,4.)

Λύσις. Καλοῦμεν m_1, m_2 τὰς μάζας τῶν σφαιρῶν καὶ $υ_1$, $υ_2$ ἀντιστοίχως τὰς ταχύτητας αὐτῶν πρὸ τῆς κρούσεως. Θὰ ἔχωμεν τότε ὅτι ἡ ὁρμὴ τοῦ συστήματος πρὸ τῆς κρούσεως ($J_{πρὸ}$) ἰσοῦται πρός :

$$J_{πρὸ} = m_1 \cdot υ_1 + m_2 \cdot υ_2 \qquad (1)$$

Ἐπίσης καλοῦμεν $υ_1'$ καὶ $υ_2'$ τὰς ταχύτητας ἀντιστοίχως τῶν δύο σφαιρῶν μετὰ τὴν κροῦσιν. Θὰ ἔχωμεν τότε ὅτι ἡ ὁρμὴ τοῦ συστήματος μετὰ τὴν κροῦσιν ($J_{μετὰ}$) ἰσοῦται πρός :

$$J_{μετὰ} = m_1 \cdot υ_1' + m_2 \cdot υ_2' \qquad (2)$$

Ἐκ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) δι' ἐφαρμογῆς τῆς Ἀρχῆς τῆς διατηρήσεως τῆς ὁρμῆς προκύπτει ἡ σχέσις :

$$m_1 \cdot υ_1 + m_2 \cdot υ_2 = m_1 \cdot υ_1' + m_2 \cdot υ_2' \qquad (3)$$

Ἐξ ἄλλου εἶναι γνωστὸν ὅτι ὁ συντελεστὴς κρούσεως κ δίδεται διὰ τῆς σχέσεως

$$κ = -\frac{υ_1' - υ_2'}{υ_1 - υ_2} = \frac{υ_2' - υ_1'}{υ_1 - υ_2} \qquad (4)$$

Ἐὰν λύσωμεν τὴν σχέσιν (4) ὡς πρὸς $υ_2$, λαμβάνομεν : $υ_2' = κ\,(υ_1 - υ_2) + υ_1$, καὶ ἀκολούθως, ἐὰν θέσωμεν τὴν τιμὴν ταύτην εἰς τὴν (3), προκύπτει δι' ἐκτελέσεως τῶν πράξεων ὅτι :

$$υ_1' = \frac{m_1 \cdot υ_1 + m_2 \cdot υ_2 - κ \cdot m_2\,(υ_1 - υ_2)}{m_1 + m_2} \qquad (5)$$

Ἐργαζόμενοι εἰς τὸ σύστημα C.G.S. καὶ θέτοντες εἰς τὴν σχέσιν (5) τὰ δεδομένα εὑρίσκομεν ὅτι :

$$\underline{υ_1' = 418{,}2 \text{ cm/sec.}}$$

Ἀκολούθως ἐκ τῆς σχέσεως (4) εὑρίσκομεν :

$$\underline{υ_2' = 18{,}2 \text{ cm/sec.}}$$

583. Εἰς τὸ ἄνω πρόβλημα, πόση ἐνέργεια μετατρέπεται εἰς θερμότητα κατὰ τὴν κροῦσιν.

Λύσις. Πρὸ τῆς κρούσεως ἡ κινητικὴ ἐνέργεια τοῦ συστήματος εἶναι :

$$E_{κιν.} = \frac{1}{2}\,m_1 \cdot υ_1^2 + \frac{1}{2}\,m_2 \cdot υ_2^2 \qquad (1)$$

μετὰ δὲ τὴν κροῦσιν εἶναι :

$$E'_{κιν.} = \frac{1}{2}\,m_1 \cdot υ_1'^2 + \frac{1}{2}\,m_2 \cdot υ_2'^2 \qquad (2)$$

Ἐὰν καλέσωμεν τὴν ἐνέργειαν ἡ ὁποία μετατρέπεται εἰς θερμότητα Q, θὰ ἔχωμεν προφανῶς :

$$Q = E'_{κιν.} - E_{κιν.}$$

ἢ

$$Q = \frac{1}{2}\,m_1\,(υ_1^2 - υ_1'^2) + \frac{1}{2}\,m_2\,(υ_2^2 - υ_2'^2) \qquad (3)$$

Ἐκ τοῦ τύπου (3), ὅταν ἐργασθῶμεν εἰς τὸ σύστημα C.G.S., προκύπτει ὅτι :

$$\underline{Q = 0{,}263 \cdot 10^7 \text{ erg.}}$$

Δεδομένου δὲ ὅτι 1 Joule = 10^7 erg, ἔχομεν καί:

$$\underline{Q = 0{,}263 \text{ Joule.}}$$

584. Σῶμα μάζης 400 gr κινεῖται ἐπ' εὐθείας ὑπὸ ταχύτητα 8 m/sec. Ἕτερον σῶμα μάζης 600 gr κινεῖται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας καὶ κατὰ τὴν ἰδίαν διεύθυνσιν ὑπὸ ταχύτητα 12 m/sec. Τὸ δεύτερον σῶμα προσκρούει ἐπὶ τοῦ πρώτου καὶ ἐφ' ὅσον ἡ κροῦσις θεωρεῖται μὴ ἐλαστική, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ κοινὴ ταχύτης τῶν δύο σωμάτων μετὰ τὴν κροῦσιν.

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν m_1, m_2 τὰς μάζας τῶν σωμάτων καὶ υ_1, υ_2 τὰς ταχύτητας αὐτῶν ἀντιστοίχως πρὸ τῆς κρούσεως καὶ υ τὴν κοινὴν ταχύτητα μετὰ τὴν κροῦσιν, τότε θὰ ἔχωμεν ὅτι ἡ ὁρμὴ τοῦ συστήματος πρὸ τῆς κρούσεως ($J_{\pi\rho\grave{o}}$) ἰσοῦται πρός:

$$J_{\pi\rho\grave{o}} = m_1 \cdot \upsilon_1 + m_2 \cdot \upsilon_2 \qquad (1)$$

καὶ ἡ ὁρμὴ τοῦ συστήματος μετὰ τὴν κροῦσιν ($J_{\mu\varepsilon\tau\grave{\alpha}}$) ἰσοῦται πρός:

$$J_{\mu\varepsilon\tau\grave{\alpha}} = (m_1 + m_2) \cdot \upsilon \qquad (2)$$

Ἐφαρμόζοντες τὴν Ἀρχὴν τῆς διατηρήσεως τῆς ὁρμῆς προκύπτει ὅτι:

$$\upsilon = \frac{m_1 \cdot \upsilon_1 + m_2 \cdot \upsilon_2}{m_1 + m_2} \qquad (3)$$

Ἐργαζόμενοι εἰς τὸ Τεχνικὸν Σύστημα θέτομεν εἰς τὴν σχέσιν (3): $m = 0{,}4/9{,}81$ Τ.Μ. μάζης, $m_2 = 0{,}6/9{,}81$ Τ.Μ. μάζης, $\upsilon_1 = 8$ m/sec, $\upsilon_2 = 12$ m/sec, καὶ εὑρίσκομεν:

$$\underline{\upsilon = 10{,}4 \text{ m/sec.}}$$

585. Νὰ ὑπολογισθῇ εἰς τὴν περίπτωσιν κεντρικῆς καὶ μὴ ἐλαστικῆς κρούσεως τὸ ποσὸν τῆς ἐνεργείας, τὸ ὁποῖον μετατρέπεται κατὰ τὴν κροῦσιν τῶν σωμάτων εἰς θερμότητα. Μᾶζαι σωμάτων m_1 καὶ m_2, ταχύτητες αὐτῶν υ_1 καὶ υ_2.

Λύσις. Καλοῦμεν m_1, m_2 τὰς μάζας τῶν δύο σωμάτων, υ_1, υ_2 τὰς ταχύτητας αὐτῶν πρὸ τῆς κρούσεως καὶ υ τὴν κοινὴν ταχύτητα αὐτῶν μετὰ τὴν κροῦσιν. Ἐπειδὴ ἡ κροῦσις εἶναι τελείως μὴ ἐλαστική, θὰ ἰσχύῃ, συμφώνως πρὸς τὴν Ἀρχὴν τῆς διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας, ἡ σχέσις:

$$\frac{1}{2} m_1 \cdot \upsilon_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot \upsilon_2^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \cdot \upsilon + Q \qquad (1)$$

ὅπου Q εἶναι τὸ ποσὸν τῆς θερμότητος τὸ ὁποῖον παράγεται λόγῳ τῶν τριβῶν.

Ἐπίσης, συμφώνως πρὸς τὴν Ἀρχὴν τῆς διατηρήσεως τῆς ὁρμῆς, θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις:

$$m_1 \cdot \upsilon_1 + m_2 \cdot \upsilon_2 = (m_1 + m_2) \cdot \upsilon \qquad (2)$$

Λύομεν τὴν σχέσιν (2) ὡς πρὸς υ καὶ λαμβάνομεν:

$$\upsilon = \frac{m_1 \cdot \upsilon_1 + m_2 \cdot \upsilon_2}{m_1 + m_2} \qquad (3)$$

Ἐὰν θέσωμεν τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ υ εἰς τὴν σχέσιν (1), προκύπτει:

$$m_1 \cdot \upsilon_1^2 + m_2 \cdot \upsilon_2^2 = \frac{(m_1 \cdot \upsilon_1 + m_2 \cdot \upsilon_2)^2}{m_1 + m_2} + 2Q \qquad (4)$$

Ἐκ τῆς σχέσεως (4) δι' ἐκτελέσεως τῶν πράξεων εὑρίσκομεν τελικῶς ὅτι ἡ ζητουμένη ἐνέργεια, ἡ ὁποία μετατρέπεται εἰς θερμότητα κατὰ τὴν τελείως μὴ ἐλαστικὴν κροῦσιν, δίδεται διὰ τοῦ τύπου:

$$Q = \frac{m_1 \cdot m_2 \, (\upsilon_1 - \upsilon_2)^2}{2 \, (m_1 + m_2)}$$

586. Δύο σώματα ζυγίζουν ὁμοῦ 20 kgr* καὶ κινοῦνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, ἀλλὰ κατ' ἀντιθέτους φοράς, τὸ ἓν μὲ ταχύτητα 4 m/sec καὶ τὸ ἄλλο μὲ ταχύτητα 12 m/sec, καὶ συγκρούονται. Ἡ κροῦσις θεωρεῖται μὴ ἐλαστική, ἡ δὲ κοινὴ ταχύτης τῶν δύο σωμάτων εἶναι 3 m/sec κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς κινήσεως τοῦ πρώτου σώματος. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ βάρος ἑκάστου τῶν σωμάτων.

Λύσις. Ἔστω ὅτι αἱ μᾶζαι τῶν σωμάτων εἶναι m_1 καὶ m_2. Ἐπίσης v_1 καὶ v_2 αἱ ταχύτητες αὐτῶν ἀντιστοίχως πρὸ τῆς κρούσεως καὶ v ἡ κοινὴ ταχύτης τοῦ συστήματος μετὰ τὴν κροῦσιν. Συμφώνως πρὸς τὴν Ἀρχὴν τῆς διατηρήσεως τῆς ὁρμῆς θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις :

$$m_1 \cdot v_1 - m_2 \cdot v_2 = (m_1 + m_2) \cdot v \qquad (1)$$

Ἐὰν καλέσωμεν M τὴν συνολικὴν μᾶζαν τῶν δύο σωμάτων, θὰ ἔχωμεν : $M = m_1 + m_2$ καὶ συνεπῶς :

$$m_2 = M - m_1 \qquad (2)$$

Οὕτω ἡ σχέσις (1) δύναται νὰ γραφῇ :

$$m_1 \cdot v_1 - (M - m_1) \cdot v_2 = M \cdot v \qquad (3)$$

Λύοντες τὴν σχέσιν (3) ὡς πρὸς m_1 εὑρίσκομεν :

$$m_1 = \frac{M\ (v + v_2)}{v_1 + v_2} \qquad (4)$$

Διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ g ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς σχέσεως (4) προκύπτει :

$$m_1 \cdot g = \frac{M \cdot g\ (v + v_2)}{v_1 + v_2} \quad \text{ἢ} \quad B_1 = \frac{B\ (v + v_2)}{v_1 + v_2} \qquad (5)$$

ὅπου B_1 εἶναι τὸ βάρος τῆς μάζης m_1 καὶ B_2 τὸ βάρος τῆς μάζης M.

Θέτομεν εἰς τὴν σχέσιν (5) : $B = 20$ kgr*, $v = 3$ m/sec, $v_1 = 4$ m/sec, $v_2 = 12$ m/sec, καὶ εὑρίσκομεν ὅτι :

$$\underline{B_1 = 18{,}75 \text{ kgr}^*}$$

καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι καί :

$$\underline{B_2 = 20 - 18{,}75 = 1{,}25 \text{ kgr}^*.}$$

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Β΄

587. Αὐτοκίνητον μάζης 1 500 kgr κινεῖται ὑπὸ ταχύτητα 20 m/sec. Πόση ἡ ὁρμὴ τοῦ αὐτοκινήτου. (Ἀπ. 3 000 kgr* · sec.)

588. Ἐξ ἑνὸς τηλεβόλου μάζης 4 000 kgr ἐξακοντίζεται βλῆμα μάζης 24,5 kgr. Τὸ τηλεβόλον κατὰ τὴν ἐκσφενδόνισιν τοῦ βλήματος ὠθεῖται πρὸς τὰ ὀπίσω μὲ ταχύτητα 1,4 m/sec. Ποίαν ταχύτητα ἀπέκτησε τὸ βλῆμα. (Ἀπ. 228,6 m/sec.)

589. Πυροβόλον τῶν 15 cm βάλλει βλῆμα βάρους 40 kgr*, τὸ ὁποῖον ἐξερχόμενον τοῦ σωλῆνος τοῦ πυροβόλου ἔχει ταχύτητα 500 m/sec. Ὁ σωλὴν ἔχει βάρος 1 000 kgr*, ἐκτελεῖ δὲ κίνησιν ἀνακρούσεως μετατοπιζόμενος πρὸς τὰ ὀπίσω κατὰ 1 m. Νὰ ὑπολογισθῇ α) ἡ μεγίστη ταχύτης ἀνακρούσεως τοῦ σωλῆνος, β) ἡ ἐξασκουμένη ἐπὶ τοῦ σωλῆνος δύναμις πεδήσεως. (Ἀπ. 20 m/sec, 20 tcn*.)

590. Σφαῖρα χαλυβδίνη μάζης 200 gr βάλλεται ἐπὶ χαλυβδίνης πλακός. Ἡ σφαῖρα προσκρούει ἐπὶ τῆς πλακὸς κατακορύφως καὶ ἀναπηδᾷ. Ἐὰν ἡ ταχύτης πρὸ τῆς κρούσεως εἶναι 20 m/sec καὶ μετὰ τὴν κροῦσιν 18 m/sec, πόση ἡ συνολικὴ μεταβολὴ τῆς ὁρμῆς τῆς σφαίρας. (Ἀπ. 0,76 kgr* · sec.)

591. Πυροβόλον μήκους 4 m ρίπτει βλῆμα βάρους 30 kgr* ὑπὸ ἀρχικὴν ταχύτητα 600 m/sec. Ζητοῦνται : α) Ἡ ἔντασις τῆς ὠθούσης αὐτὸ δυνάμεως ἐντὸς τοῦ πυροβόλου, ὑποτιθεμένης σταθερᾶς, εἰς kgr* καὶ dyn. β) Τὸ ἔργον τῆς δυνάμεως ταύτης εἰς kgr*m καὶ Joule. γ) Ἡ ἀντιστοιχοῦσα ἰσχὺς εἰς Watt καὶ HP.
(Ἀπ. α΄ 135 000 kgr*, $135 \cdot 10^9$ dyn. β΄ 540 000 kgr*m, $54 \cdot 10^5$ Joule.
γ΄ $405 \cdot 10^6$ Watt, 526 666 HP.)

592. Πυροβόλον μάζης 2 000 kgr βάλλει βλῆμα μάζης 5 kgr, τὸ ὁποῖον κατὰ τὴν ἔξοδον ἐκ τοῦ σωλῆνος, ἔχοντος μῆκος 2 m, κινεῖται μὲ ταχύτητα 800 m/sec. Ζητεῖται : α) Ποία ἡ ὠστικὴ δύναμις τῶν ἀερίων εἰς dyn καὶ kgr*. β) Ποία ἡ κινητικὴ ἐνέργεια τοῦ βλήματος εἰς τὸ στόμιον τοῦ σωλῆνος. γ) Πόση εἶναι κατ' ἀπόλυτον τιμὴν ἡ ταχύτης ἀνακρούσεως τοῦ ὅπλου.

('Απ. α' $8 \cdot 10^{10}$ dyn = 81 550 kgr*. β' $16 \cdot 10^{12}$ erg. γ' 2 m/sec.)

593. 'Εὰν ἡ μᾶζα αὐτοκινήτου εἶναι 3 τόννοι, κινεῖται δὲ ὑπὸ ταχύτητα 60 km/h καὶ προσκρούει ἐπὶ κωλύματος, ἡ δὲ κροῦσις διαρκῇ ἐπὶ 0,1 sec, πόση ἡ ἀναπτυσσομένη δύναμις. ('Απ. 49 980 kgr*.)

594. Σφαῖρα ἐξ ἐλεφαντοστοῦ μάζης 400 gr κινούμενη ὑπὸ ταχύτητα 5 m/sec ὑφίσταται κεντρικὴν κροῦσιν μὲ ἑτέραν σφαῖραν ὁμοίαν, μάζης 100 gr, εὑρισκομένην ἐν ἠρεμίᾳ. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ταχύτητες τῶν δύο σφαιρῶν μετὰ τὴν κροῦσιν. ('Απ. $\upsilon = 300$ cm/sec, $\upsilon' = 800$ cm/sec.)

595. Σφαῖρα ἐξ ἐλεφαντοστοῦ μάζης 400 gr κινουμένη ὑπὸ ταχύτητα 5 m/sec προσκρούει κεντρικῶς μὲ ἑτέραν μάζης 100 gr κινουμένην ὑπὸ ταχύτητα 2 m/sec. Γνωστοῦ ὄντος ὅτι αἱ ταχύτητες αὐτῶν ἦσαν πρὸ τῆς κρούσεως τῆς αὐτῆς φορᾶς, νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ταχύτητες τῶν δύο σφαιρῶν μετὰ τὴν κροῦσιν.

('Απ. 3,80 m/sec, 6,80 m/sec.)

596. Σφαῖρα ἐλαστικὴ μάζης 400 gr, κινουμένη ὑπὸ ταχύτητα 5 m/sec, προσκρούει κεντρικῶς μὲ ἑτέραν ὁμοίαν μάζης 100 gr κινουμένην ὑπὸ ταχύτητα 2 m/sec. Γνωστοῦ ὄντος ὅτι αἱ ταχύτητες τῶν δύο σφαιρῶν εἶχον πρὸ τῆς κρούσεως ἀντιθέτους φοράς, νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ταχύτητες τῶν σφαιρῶν μετὰ τὴν κροῦσιν.

('Απ. 2,2 m/sec, 9,2 m/sec.)

597. Δίδονται δύο τελείως ἐλαστικαὶ σφαῖραι, Α καὶ Β. Ἡ μᾶζα τῆς Α εἶναι 100 gr καὶ κινεῖται ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιὰ μὲ ταχύτητα 20 cm/sec. Εὕρετε τὰς ταχύτητας τῶν σφαιρῶν μετὰ τὴν κροῦσιν κατὰ τὰς ἀκολούθους περιπτώσεις: α) Ὅταν ἡ Β ἠρεμῇ τὴν στιγμὴν τῆς κρούσεως, β) ὅταν ἡ Β κινῆται κατ' ἀντίθετον διεύθυνσιν ὡς πρὸς τὴν Α, μὲ ταχύτητα 50 cm/sec, γ) ὅταν ἡ Β κινῆται κατὰ τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν μὲ τὴν Α, μὲ ταχύτητα 50 cm/sec.

('Απ. α' $\upsilon_1' = +13,3$ cm/sec, $\upsilon_2' = +20$ cm/sec. β' $\upsilon_1' = -3,3$ cm/sec, $\upsilon_2' = +20$ cm/sec. γ' $\upsilon_1' = +30$ cm/sec, $\upsilon_2' = +20$ cm/sec.)

598. Δύο ὅμοιαι μὴ ἐλαστικαὶ σφαῖραι Σ_1 καὶ Σ_2 μαζῶν m_1 καὶ m_2 κινοῦνται μὲ ταχύτητας υ_1 καὶ υ_2 πρὸς τὴν ἀρχὴν συστήματος ὀρθογωνίων συντεταγμένων καὶ ἡ μὲν πρώτη ἐντὸς τοῦ δευτέρου τεταρτημορίου ὑπὸ γωνίαν α_1 πρὸς τὸν θετικὸν ἡμιάξονα τοῦ y, ἡ δὲ δευτέρα ἐντὸς τοῦ πρώτου τεταρτημορίου, ὑπὸ γωνίαν α_1 πρὸς αὐτόν. Ὑπὸ ποίας γωνίας πρὸς τὸν ἀρνητικὸν ἡμιάξονα τῶν y κινοῦνται καὶ μὲ ποίας ταχύτητας μετὰ τὴν κροῦσιν, ἥτις ὑποτίθεται ἄνευ τριβῆς. 'Αριθμητικὴ ἐφαρμογή: $m_1 = 20$ kgr, $m_2 = 10$ kgr. $\upsilon_1 = 2$ m/sec, $\upsilon_2 = 1$ m/sec, $\alpha_1 = 45^o$, $\alpha_2 = 30^o$.

('Απ. $\beta_1 = 28^o\ 46'$, $\beta_2 = 41^o\ 52'$, $\upsilon_1' = 1,61$ m/sec, $\upsilon_2' = 1,16$ m/sec.)

599. Σφαῖρα Α μάζης m_1 καὶ ἑτέρα Β μάζης m_2 κινοῦνται ἐπὶ τῆς ἑνούσης τὰ κέντρα αὐτῶν εὐθείας, κατά τινα δὲ στιγμὴν αἱ δύο σφαῖραι συναντῶνται καὶ ἐκτελοῦν κροῦσιν τελείως ἐλαστικήν. Μετὰ τὴν κροῦσιν αἱ ταχύτητες τῶν δύο σφαιρῶν εἶναι υ_1' καὶ υ_2'. Ποῖαι αἱ ταχύτητες τῶν σφαιρῶν πρὸ τῆς κρούσεως. 'Αριθμητικὴ ἐφαρμογή : $m_1 = 600$ gr, $m_2 = 400$ gr, $\upsilon_1' = 4$ m/sec, $\upsilon_2' = 1$ m/sec.

('Απ. $\upsilon_1 = 1,6$ m/sec, $\upsilon_2 = 4,6$ m/sec.)

600. 'Ελαστικὴ σφαῖρα βάρους 2 kgr* συναντᾶται μετ' ἄλλης σφαίρας βάρους 1 kgr* καὶ ταχύτητος 2 m/sec καὶ ἐκτελεῖ μετ' αὐτῆς κεντρικὴν κροῦσιν τελείως ἐλαστικήν. Ζητεῖται: α) Ποίαν ταχύτητα πρέπει νὰ κέκτηται ἡ πρώτη σφαῖρα πρὸ τῆς κρούσεως, ἵνα ἡ δευτέρα ἠρεμῇ μετὰ ταύτην. 2) Ποία ἡ ταχύτης τῆς πρώτης σφαίρας μετὰ τὴν κροῦσιν εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν.

('Απ. α' 0,5 m/sec. β' 1,5 m/sec.)

601. Χαλυβδίνη σφαῖρα προσπίπτει κατακορύφως ἀπὸ ὕψους 1,8 m ἐπὶ χαλυβδίνης πλακός, ἐχούσης ὡς πρὸς τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον κλίσιν 30°, καὶ ἀναπηδᾷ ἐκτελοῦσα κροῦσιν τελείως ἐλαστικήν. Ζητεῖται: α) Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ σημείου τῆς πρώτης προσπτώσεως συναντᾷ ἡ σφαῖρα διὰ δευτέραν φορὰν τὴν πλάκα. β) Ποῖος ὁ χρόνος ὁ παρερχόμενος μεταξὺ τῆς πρώτης καὶ δευτέρας ἀναπηδήσεως. $(g = 10 \text{ m/sec}^2.)$

$$\left('\text{Απ. α}' \quad l = 8 \cdot h \cdot \text{ημ}\,\alpha = 7{,}2 \text{ m.} \quad \beta' \quad t = \frac{l \cdot \text{συν}\,\alpha}{\sqrt{2g \cdot h} \cdot \text{ημ}\,2\alpha} = 1{,}2 \text{ sec.}\right)$$

602. Χαλυβδίνη σφαῖρα βάρους 0,5 kgr* ρίπτεται καθέτως ἀπὸ ὕψους 5 m ἐπὶ χαλυβδίνης πλακὸς μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα 10 m/sec. Κατὰ τὴν πρόσπτωσιν, 20 % τῆς κινητικῆς ἐνεργείας τῆς σφαίρας μετατρέπεται εἰς θερμότητα. Εἰς ποῖον ὕψος ἀνέρχεται ἡ σφαῖρα μετὰ τὴν ἀναπήδησιν. $(g = 10 \text{ m/sec}^2.)$

$$\left('\text{Απ.}\ h_1 = \frac{2}{5}\left(2h + \frac{\upsilon_0^2}{g}\right) = 8 \text{ m περίπου.}\right)$$

603. Τέσσαρες τελείως ἐλαστικαὶ σφαῖραι ἐξαρτῶνται ἐκ τεσσάρων νημάτων κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε νὰ ἐφάπτωνται ἀπ' εὐθείας καὶ τὰ κέντρα αὐτῶν νὰ κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς ὁριζοντίας εὐθείας. Αἱ μᾶζαι αὐτῶν εἶναι κατὰ σειρὰν 2 kgr, 3 kgr, 1 kgr καὶ 4 kgr. Κατά τινα στιγμὴν ἡ πρώτη σφαῖρα προσπίπτει μὲ ταχύτητα 2 m/sec ἐπὶ τῆς δευτέρας. Μὲ ποίαν ταχύτητα ἐκτινάσσεται ἡ τετάρτη σφαῖρα εἰς τὸ ἕτερον ἄκρον τῆς σειρᾶς. Ποία ἡ ταχύτης αὐτῆς, ὅταν αἱ μᾶζαι τῶν σφαιρῶν εἶναι ἴσαι.

$$('\text{Απ.}\ \upsilon_4 = \frac{8\,m_1 \cdot m_2 \cdot m_3}{(m_1 + m_2)\,(m_2 + m_3)\,(m_3 + m_4)} \cdot \upsilon_1, \quad 0{,}96 \text{ m/sec}, \quad \upsilon_1 = \upsilon_4.)$$

604. Χάρις εἰς εἰδικὴν διάταξιν σφαῖρα ἐκ χάλυβος μάζης 5 gr ἀναπηδᾷ 120 φορὰς ἀνὰ min ἐπὶ τοῦ ἑνὸς δίσκου ζυγοῦ. Πόσον βάρος πρέπει νὰ τεθῇ ἐπὶ τοῦ ἑτέρου δίσκου τοῦ ζυγοῦ, ἵνα οὗτος ἰσορροπῇ, ἐὰν τὸ ὕψος πηδήματος τῆς σφαίρας εἶναι 75 cm. $(g = 980 \text{ cm/sec}^2.)$ ('Απ. 7,82 gr*.)

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Γ'

605. Νὰ συγκριθῇ ἡ ὁρμὴ πλοίου μάζης 20 000 ton κινουμένου ὑπὸ ταχύτητα 10 mil/h πρὸς τὴν ὁρμὴν ὀβίδος τηλεβόλου 900 kgr κινουμένης ὑπὸ ταχύτητα 500 m/sec.

606. Σφαῖρα μάζης 30 gr ἐκφεύγει ἀπὸ πυροβόλου ὅπλου μάζης 6 kgr ὑπὸ ταχύτητα 700 m/sec. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ταχύτης ἀνακρούσεως τοῦ ὅπλου.

607. Σιδηρᾶ μᾶζα 16 kgr ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ ἄκρον νήματος. Σφαῖρα κινουμένη ὁριζοντίως ὑπὸ ταχύτητα 600 m/sec συναντᾷ τὴν σιδηρᾶν μᾶζαν καὶ προσκρούει ἐπ' αὐτῆς. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ταχύτης μὲ τὴν ὁποίαν ἄρχεται κινουμένη ἡ σιδηρᾶ μᾶζα, δεδομένου ὅτι ἡ μᾶζα τῆς σφαίρας εἶναι 30 gr.

608. Ὄχημα 15 ton προσκρούει ὑπὸ ταχύτητα 1 m/sec ἐπὶ κωλύματος. Κατὰ τὴν Ἀρχὴν τῆς διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας νὰ ὑπολογισθῇ ἡ συστολὴ ἑνὸς ἐλατηρίου συγκρουστῆρος, ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι ὅλα τὰ ἐλατήρια τῶν 4 συγκρουστήρων αὐτοῦ συμπτύσσονται ὁμοιομόρφως καὶ ἔχουν τὴν αὐτὴν σταθερὰν $k = 3 \cdot 10^5$ kgr*/m.

609. Ποίαν ταχύτητα ἀποκτᾷ πυροβόλον ὅπλον, ὅταν τὸ βάρος του εἶναι 4 kgr* καὶ ἡ σφαῖρα, τῆς ὁποίας τὸ βάρος εἶναι 10 gr*, ἐξέρχεται τοῦ ὅπλου ὑπὸ ταχύτητα 900 m/sec.

610. Πυροβόλον ἔχει βάρος 450 kgr*, ἡ δὲ ὀβὶς βάρος 16 kgr*. Πόση ἡ ταχύτης ἀνακρούσεως τοῦ σωλῆνος τοῦ πυροβόλου, ὅταν ἡ ὀβὶς ἐξέρχεται ἐξ αὐτοῦ ὑπὸ ταχύτητα 550 m/sec, καὶ πόση ἡ ἐνέργεια τὴν ὁποίαν ἀναπτύσσει ἡ ἐκρηκτικὴ ὕλη.

611. Σῶμα μάζης 11 kgr ὑφίσταται τὴν ἐπενέργειαν ἐξωτερικῶν δυνάμεων τῶν ὁποίων ἡ συνισταμένη εἶναι 55 kgr*. Νὰ εὑρεθῇ ἡ μεταβολὴ τῆς ὁρμῆς ἀνὰ μονάδα χρόνου.

612. Ἐὰν εἰς τὸ πρόβλημα 611 τὸ σῶμα εὑρίσκεται ἐν ἠρεμίᾳ, πόση ἡ ὁρμὴ τὴν ὁποίαν τοῦτο ἀποκτᾷ, ὅταν ἡ δύναμις τῶν 55 kgr* ἐπενεργῇ ἐπὶ 10 sec. Πόση ἡ ταχύτης τοῦ σώματος εἰς τὸ τέλος τῶν 10 sec.

613. Αὐτοκίνητον 20 ton προσκρούει ἐπὶ στερεοῦ κωλύματος. Πρὸς τὰ ἐμπρὸς φέρει δύο συγκρουστῆρας, ἕκαστον σταθερᾶς ἐλατηρίου $k = 3 \cdot 10^5$ kgr*/m. Ποία ἡ ἐξασκουμένη ἐπ' αὐτοῦ δύναμις, ὅταν σταματᾷ εἰς ἀπόστασιν 10 cm. Μὲ ποίαν μεγίστην ταχύτητα πρέπει τοῦτο νὰ προσπέσῃ ἐπὶ τοῦ κωλύματος. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ χρόνος τῆς πεδήσεως.

614. Σφαῖρα μάζης 14 kgr κινεῖται ὑπὸ ταχύτητα 14 m/sec καὶ προσκρούει ἐπὶ ἑτέρας σφαίρας μάζης 12 kgr κινουμένης ὑπὸ ταχύτητα 10 m/sec. Ἐὰν ὁ συντελεστὴς κρούσεως εἶναι $\kappa = 0{,}7$, νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ταχύτητες τῶν δύο σφαιρῶν μετὰ τὴν κροῦσιν.

615. Ὑπὸ ποίαν ἀναλογίαν μάζης δύναται μία σφαῖρα ἡ ὁποία συγκρούεται ἐλαστικῶς καὶ κεντρικῶς μετὰ ἠρεμούσης σφαίρας νὰ δίδῃ εἰς αὐτὴν τὴν μεγίστην ἐνέργειαν.

616. Δίδονται δύο σφαῖραι μαζῶν m καὶ m_1, $m > m_1$. Αἱ δύο σφαῖραι συνδέονται διὰ νήματος τὸ ὁποῖον διέρχεται διὰ τροχαλίας. Ἡ μεγάλης μάζης σφαῖρα ἐν ἀρχῇ ἐπαναπαύεται ἐπὶ βάσεως, ἡ δὲ μικρᾶς μάζης σφαῖρα ἀνυψοῦται εἰς ὕψος h ἐκ τοῦ ὁποίου ἀφίεται νὰ πίπτῃ ἐλευθέρως. Ζητοῦνται: μὲ πόσην ταχύτητα ἐκκινεῖ ἡ μεγάλης μάζης σφαῖρα, μὲ πόσην ταχύτητα ἐπανέρχεται εἰς τὴν βάσιν της, ἐπὶ πόσον χρόνον κινεῖται. Ἐπεξήγησις: Αἱ δύο σφαῖραι ἀποτελοῦν ἓν ἑνιαῖον σύστημα, μόνον ὅταν τὸ νῆμα εἶναι τεταμένον. (h παριστᾷ τὸ ὕψος ἐξ οὗ πίπτει ἡ μᾶζα μέχρις ὅτου ταθῇ τὸ νῆμα.)

617. Πυροβόλον 200 kgr βάλλει βλῆμα 1 kgr ὑπὸ ταχύτητα 650 m/sec. Νὰ προσδιορισθῇ ἡ ταχύτης ἀνακρούσεως τοῦ πυροβόλου.

618. Ἀτμομηχανὴ 10 τόννων κινουμένη ὑπὸ ταχύτητα 1 m/sec συγκρούεται καὶ συμπλέκεται πρὸς αὐτοκινητάμαξαν 40 τόννων εὑρισκομένην ἐν ἠρεμίᾳ. Πόση ἡ κοινὴ ταχύτης μετὰ τὴν κροῦσιν.

619. Δύο μὴ ἐλαστικὰ σώματα 6 kgr καὶ 1 kgr κινοῦνται κατ' ἀντιθέτους διευθύνσεις ὑπὸ ταχύτητα 12 m/sec καὶ 17 m/sec ἀντιστοίχως. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ συνισταμένη ταχύτης μετὰ τὴν σύγκρουσιν.

620. Ἐὰν σταθερὰ δύναμις 12 kgr* ἐπενεργῇ ἐπὶ σώματος, πόση εἶναι ἡ μεταβολὴ τῆς ὁρμῆς του εἰς τὴν μονάδα τοῦ χρόνου.

621. Ἐὰν εἰς τὸ πρόβλημα 620 τὸ σῶμα εὑρίσκεται ἐν ἠρεμίᾳ, πόση ἡ ὁρμή του μετὰ παρέλευσιν 8 sec. Πόση εἶναι ἡ ταχύτης του εἰς τὸ τέλος τοῦ 8ου δευτερολέπτου ἀφ' ἧς στιγμῆς ἐπενεργεῖ ἡ δύναμις, ἐὰν ἡ μᾶζα τοῦ σώματος εἶναι 3,75 kgr.

622. Σφαῖρα μάζης 1 kgr εὑρίσκεται ἐν ἠρεμίᾳ καὶ μεταδίδεται εἰς αὐτὴν ταχύτης 4 m/sec. Πόση ἡ μεταβολὴ τῆς ὁρμῆς τῆς σφαίρας. Πόση ἡ ὤθησις δυνάμεως.

623. Σφαῖρα μάζης 1 kgr εὑρίσκεται ἐν ἠρεμίᾳ καὶ ἀποκτᾷ ταχύτητα 6 m/sec, ὅταν κρούεται ὑπὸ σφύρας. Πόση ἡ μεταβολὴ τῆς ὁρμῆς τῆς σφαίρας. Πόση ἡ ὤθησις δυνάμεως τῆς σφαίρας, ἐὰν ἡ σφῦρα εὑρίσκεται ἐν ἐπαφῇ πρὸς τὴν σφαῖραν ἐπὶ 0,02 sec. Πόση ἡ μέση τιμὴ τῆς δυνάμεως, τὴν ὁποίαν ἀσκεῖ αὕτη ἐπὶ τῆς σφαίρας.

624. Χαλυβδίνη σφαῖρα 500 gr πίπτει κατακορύφως ἐπὶ χαλυβδίνης πλακός. Ἡ ταχύτης προσκρούσεως εἶναι 30 m/sec, ἡ δὲ σφαῖρα ἀναπηδᾷ μετὰ τὴν κροῦσιν ὑπὸ ταχύτητα 20 m/sec. Πόση ἡ ὤθησις δυνάμεως κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς κρούσεως τῆς σφαίρας. Ἐὰν ἡ σφαῖρα εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς πλακὸς εἰς ἐπαφὴν ἐπὶ 0,01 sec, πόση ἡ δύναμις ἡ ἀσκουμένη ἐπ' αὐτῆς.

625. Σφαῖρα μολυβδίνη 7,5 kgr πίπτει ἐξ ὕψους 25 m ἐπὶ λασπώδους ἐδάφους καὶ ἠρεμεῖ μετὰ παρέλευσιν 0,5 sec. Πόση ἡ δύναμις ἡ ὁποία θέτει τὴν σφαῖραν ἐν ἠρεμίᾳ.

626. Δύο τελείως ἐλαστικαὶ σφαῖραι μάζης m_1 καὶ m_2 καὶ ἀκτῖνος r ἐξαρτῶνται ἑκάστη διὰ δύο νημάτων κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε εἰς τὴν θέσιν ἰσορροπίας νὰ ἐφάπτωνται καὶ ἡ εὐθεῖα ἡ ἑνοῦσα τὰ κέντρα αὐτῶν νὰ εἶναι ὁριζοντία. Τὰ δύο νήματα ἐξαρτήσεως ἑκάστης σφαίρας σχηματίζουν μεταξύ των γωνίαν α καὶ ἔχουν μῆκος l. Ἡ πρώτη σφαῖρα m_1 ἐκτρέπεται τῆς θέσεως ἰσορροπίας κατὰ γωνίαν φ καὶ ἀφίεται νὰ προσπέσῃ ἐπὶ τῆς δευτέρας σφαίρας. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ταχύτητες υ_1' καὶ υ_2' τῶν δύο σφαιρῶν μετὰ τὴν κροῦσιν εἰς τὰς κατωτέρω περιπτώσεις: α) $m_1 > m_2$, β) $m_1 = m_2$, γ) $m_1 < m_2$. Ἀριθμητικὴ ἐφαρμογή: $m_2 = 200$ gr, $l = 3$ m, r = 2 cm, $\alpha = 60^0$, $\varphi = 30^0$, m_1 εἶναι α' 300 gr, β' 200 gr, γ' 100 gr.

627. Δύο τελείως ὅμοιαι ἐλαστικαὶ σφαῖραι κινοῦνται μὲ ταχύτητας υ_1 καὶ υ_2, κατά τινα δὲ στιγμήν, καθ' ἣν αἱ ταχύτητες αὐτῶν σχηματίζουν μετὰ τῆς ἑνούσης τὰ κέντρα των εὐθείας γωνίας α_1 καὶ α_2 ἀντιστοίχως, αἱ σφαῖραι συγκρούονται. Ζητεῖται: α) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ταχύτητες καὶ αἱ γωνίαι αὐτῶν μετὰ τῆς ἀνωτέρω εὐθείας, μετὰ τὴν κροῦσιν. β) Νὰ ἐξετασθῇ ἡ περίπτωσις καθ' ἣν ἡ δευτέρα σφαῖρα ἠρεμεῖ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ζ'

ΑΠΛΑΙ ΜΗΧΑΝΑΙ

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Α'

628. Διὰ νὰ ἐξαγάγωμεν ἓν καρφίον ἀπὸ τεμαχίου ξύλου, ἀπαιτεῖται δύναμις 100 kgr*. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ δύναμις ἡ ἀπαιτουμένη διὰ τὴν ἐξαγωγὴν τοῦ καρφίου μὲ κατάλληλον ἐξολκέα, τοῦ ὁποίου τὸ ὑπομόχλιον ἀπέχει 4 cm ἀπὸ τοῦ καρφίου καὶ ἡ λαβὴ 20 cm ἀπὸ τοῦ ὑπομοχλίου.

Λύσις. Ἂς καλέσωμεν F τὴν ἀπαιτουμένην δύναμιν, τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ ἐφαρμόσωμεν εἰς τὴν λαβὴν τοῦ ἐξολκέως πρὸς ἐξαγωγὴν τοῦ καρφίου καὶ δ τὴν ἀπόστασιν αὐτῆς ἀπὸ τοῦ ὑπομοχλίου. Ἐπίσης ἂς καλέσωμεν Α τὴν δύναμιν τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ ἐφαρμόσωμεν ἀπ' εὐθείας ἐπὶ τῆς κεφαλῆς τοῦ καρφίου, ἵνα ἐπιτευχθῇ ἡ ἐξαγωγὴ αὐτοῦ, καὶ α τὴν ἀπόστασιν τῆς κεφαλῆς τοῦ καρφίου ἀπὸ τὸ ὑπομόχλιον. Συμφώνως πρὸς τὸ θεώρημα τῶν ῥοπῶν θὰ ἔχωμεν:

$$F \cdot \delta = A \cdot \alpha \qquad (1)$$

Λύοντες τὴν σχέσιν (1) ὡς πρὸς F λαμβάνομεν:

$$F = A \cdot \frac{\alpha}{\delta} \qquad (2)$$

Θέτοντες εἰς τὴν σχέσιν (2) τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως, ἤτοι: $A = 100\ \text{kgr}^*$, $\alpha = 4\ \text{cm}$ καὶ $\delta = 20\ \text{cm}$, εὑρίσκομεν:

$$\underline{F = 20\ \text{kgr}^*.}$$

629. Χειραμάξιον μετὰ τοῦ φορτίου του ζυγίζει 60 kgr*. Ἡ ὁριζοντία ἀπόστασις τῶν λαβῶν ἀπὸ τοῦ κέντρου βάρους τοῦ φορτισμένου ἁμαξίου εἶναι 120 cm καὶ ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου βάρους ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ τροχοῦ εἶναι 45 cm. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ δύναμις, ἡ ὁποία πρέπει νὰ ἐφαρμοσθῇ ἐπὶ ἑκάστης λαβῆς τοῦ ἁμαξίου, διὰ νὰ διατίθεται τὸ χειραμάξιον ὁριζοντίως.

Λύσις. Ἔστω F ἡ δύναμις ἡ ἐφαρμοζομένη ἐπὶ ἑκάστης λαβῆς τοῦ ἁμαξίου καὶ δ ἡ ἀπόστασις αὐτῆς ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ τροχοῦ (ὑπομόχλιον). Ἐπὶ τῶν δύο λαβῶν θὰ ἐξασκῆται συνολικῶς δύναμις 2 F καὶ συνεπῶς ἡ ῥοπὴ M_1 τῆς δυνάμεως 2F ὡς πρὸς τὸ κέντρον τοῦ τροχοῦ θὰ εἶναι:

$$M_1 = 2\,F \cdot \delta \qquad (1)$$

Ἐπίσης, ἔστω B τὸ συνολικὸν βάρος ἁμαξίου καὶ φορτίου καὶ α ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου βάρους ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ τροχοῦ. Ἡ ῥοπὴ M_2 τοῦ βάρους B ὡς πρὸς τὸ κέντρον τοῦ τροχοῦ θὰ εἶναι:

$$M_2 = B \cdot \alpha \qquad (2)$$

Ἐφαρμόζοντες τὸ θεώρημα τῶν ῥοπῶν ὡς πρὸς τὸ κέντρον τοῦ τροχοῦ θὰ ἔχωμεν:

$$2\,F \cdot \delta = B \cdot \alpha \qquad (3)$$

Λύομεν τὴν σχέσιν (3) ὡς πρὸς F καὶ προκύπτει ὅτι ἡ ἐφαρμοζομένη ἐπὶ ἑκάστης λαβῆς δύναμις εἶναι:

$$F = \frac{B \cdot \alpha}{2\,\delta} \qquad (4)$$

Θέτομεν εἰς τὴν σχέσιν (4) τὰ δεδομένα: $B = 60\ \text{kgr}^*$, $\alpha = 45\ \text{cm}$, $\delta = 120 + 45 = 165\ \text{cm}$, καὶ εὑρίσκομεν:

$$\underline{F = 8{,}18\ \text{kgr}^*}$$

630. Εἰς μοχλὸν μὲ δύο ἀνίσους βραχίονας ὁ βραχίων ἀντιστάσεως εἶναι 30 cm καὶ ὁ βραχίων δυνάμεως 70 cm. Πόση εἶναι ἡ δύναμις, ἡ ὁποία ἰσορροπεῖ φορτίον 84 kgr*, καὶ πόσος εἶναι ὁ δρόμος τὸν ὁποῖον πρέπει νὰ διανύσῃ ἡ δύναμις, ὅταν τὸ φορτίον ἀνυψοῦται κατὰ 9 cm.

Λύσις. Ἐφαρμόζοντες τὸν τύπον τῶν μοχλῶν $F \cdot \delta = A \cdot \alpha$ καὶ λύοντες ὡς πρὸς F εὑρίσκομεν:

$$F = \frac{A \cdot \alpha}{\delta} \qquad (1)$$

Θέτοντες εἰς τὴν σχέσιν (1) τὰ δεδομένα: Ἀντίστασις $A = 84\ \text{kgr}^*$, βραχίων ἀντιστάσεως $\alpha = 30\ \text{cm}$, βραχίων δυνάμεως $\delta = 70\ \text{cm}$, εὑρίσκομεν:

$$\underline{F = 36\ \text{kgr}^*.}$$

Ἐὰν ἐπίσης καλέσωμεν x τὴν κατακόρυφον μετατόπισιν τοῦ σημείου ἐφαρμογῆς τῆς δυνάμεως καὶ y τὴν κατακόρυφον μετατόπισιν τοῦ φορτίου, τότε, συμφώνως πρὸς τὸν χρυσοῦν κανόνα τῆς Δυναμικῆς « ἔργον δυνάμεως = ἔργον ἀντιστάσεως », θὰ ἔχωμεν:

$$F \cdot x = A \cdot y \qquad (2)$$

Θέτοντες εἰς τὴν σχέσιν (2) τὰ δεδομένα καὶ λύοντες ὡς πρὸς x εὑρίσκομεν:

$$\underline{x = 21\ \text{cm}.}$$

631. Μεταθετὴ τροχαλία ζυγίζει μετὰ τῆς τροχαλιοθήκης 2 kgr*. Πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἐλαχίστη δύναμις, διὰ νὰ ἀνυψώσῃ φορτίον 125 kgr*, ὅταν ἡ τριβὴ εἶναι ἀμελητέα.

Λύσις. Ἐκ τῆς σπουδῆς τῆς μεταθετῆς τροχαλίας γνωρίζομεν ὅτι, διὰ νὰ ἀνυψώσωμεν ἓν ὡρισμένον βάρος μὲ τὴν μικροτέραν δυνατὴν δύναμιν, πρέπει τὰ δύο νήματα νὰ εἶναι μεταξύ των παράλληλα. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην, ἐπειδὴ τὸ φορτίον διαμοιράζεται ἐξ ἴσου καὶ εἰς τὰ δύο νήματα, ἔπεται ὅτι ἕκαστον νῆμα δέχεται δύναμιν ἴσην μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ φορτίου καὶ ἐπομένως εἰς τὸ ἐλεύθερον ἄκρον τοῦ νήματος πρέπει, διὰ νὰ ἰσορροπήσωμεν τὸ σύστημα, νὰ ἐφαρμόσωμεν δύναμιν:

$$F = \frac{B}{2} \qquad (1)$$

ὅπου Β εἶναι τὸ συνολικῶς ἀνυψούμενον βάρος τροχαλίας καὶ φορτίου.

Θέτομεν εἰς τὸν τύπον (1): $B = 125 + 2 = 127$ kgr* καὶ εὑρίσκομεν:

$$\underline{F = 63{,}5 \text{ kgr}^*.}$$

632. Πολύσπαστον περιλαμβάνει τροχαλιοθήκας, ἑκάστη τῶν ὁποίων περιέχει 4 τροχαλίας. Ἡ κινητὴ τροχαλιοθήκη ζυγίζει 4 kgr*. Ποία δύναμις ἀπαιτεῖται διὰ τὴν ἀνύψωσιν βάρους 640 kgr*. Πόσος εἶναι ὁ δρόμος, τὸν ὁποῖον διανύει τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς τῆς δυνάμεως, ὅταν τὸ φορτίον ἀνυψοῦται κατὰ 2,4 m.

Λύσις. Ἐφ' ὅσον τὸ βάρος $640 + 4 = 644$ kgr* τείνει ἐξ ἴσου τὰ ὀκτὼ νήματα τοῦ πολυσπάστου, ἔπεται ὅτι τὸ βάρος αὐτὸ θὰ διαμοιράζεται ἐξ ἴσου εἰς τὰ ὀκτὼ νήματα καὶ συνεπῶς πρέπει εἰς τὸ ἐλεύθερον ἄκρον τοῦ νήματος νὰ ἐφαρμόσωμεν, πρὸς ἰσορροπίαν τοῦ συστήματος, δύναμιν:

$$\underline{F = 644/8 = 80{,}5 \text{ kgr}^*.}$$

Προφανῶς, ὅταν τὸ φορτίον ἀνυψοῦται κατὰ 2,4 m, τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς τῆς δυνάμεως θὰ διανύῃ δρόμον ὀκτὼ φορὰς μεγαλύτερον καὶ συνεπῶς ὁ ζητούμενος δρόμος θὰ εἶναι:

$$\underline{s = 8 \cdot 2{,}4 = 19{,}2 \text{ m}.}$$

633. Εἰς ζυγὸν μὲ δύο βραχίονας ὁ εἷς τῶν βραχιόνων εἶναι ὀλίγον μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν ἄλλον. Ἐὰν ἀντικείμενον εὑρίσκεται εἰς τὸν δίσκον A_1, ἰσορροπεῖται μὲ σταθμὰ 24,98 gr* τιθέμενα εἰς τὸν δίσκον A_2. Ὅταν τὸ ἀντικείμενον τεθῇ εἰς τὸν δίσκον A_2, τότε ἰσορροπεῖται μὲ σταθμὰ 24,50 gr* τιθέμενα εἰς τὸν δίσκον A_1. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ λόγος τῶν βραχιόνων τοῦ ζυγοῦ καὶ τὸ πραγματικὸν βάρος τοῦ σώματος.

Λύσις. Ἔστω ὅτι θέτομεν τὸ βάρος Β εἰς τὸν δίσκον A_1 τοῦ ζυγοῦ, εἰς τὸν ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ βραχίων l_1 καὶ ἰσορροποῦμεν μὲ σταθμὰ β_1, τιθέμενα εἰς τὸν δίσκον A_2 εἰς τὸν ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ βραχίων l_2. Ἐφαρμόζοντες τὸ θεώρημα τῶν ροπῶν ὡς πρὸς τὸ σημεῖον περιστροφῆς τῆς φάλαγγος ἔχομεν τὴν σχέσιν:

$$B \cdot l_1 = \beta_1 \cdot l_2 \qquad (1)$$

Ἐὰν ὅμως τοποθετήσωμεν τὸ βάρος Β εἰς τὸν δίσκον A_2, τότε διὰ τὴν ἰσορροπίαν τῆς φάλαγγος πρέπει νὰ θέσωμεν εἰς τὸν δίσκον A_1 ἄλλα σταθμά, ἔστω β_2, καὶ θὰ ἰσχύῃ τώρα ἡ σχέσις:

$$\beta_2 \cdot l_1 = B \, . \, l_2 \qquad (2)$$

Διαιροῦμεν τὰς σχέσεις (1) καὶ (2) κατὰ μέλη, ὁπότε ἔχομεν τὴν σχέσιν:

$$\frac{B}{\beta_2} = \frac{\beta_1}{B} \qquad (3)$$

ἐξ ἧς προκύπτει ὅτι τὸ βάρος τοῦ σώματος θὰ εἶναι:

$$B = \sqrt{\beta_1 \cdot \beta_2} \qquad (4)$$

Θέτοντες εἰς τὴν σχέσιν (4): $\beta_1 = 24{,}98$ gr* καὶ $\beta_2 = 24{,}50$ gr*, εὑρίσκομεν:

$$\underline{B = 24{,}74 \text{ gr}^*.}$$

Ὁ λόγος τῶν βραχιόνων εὑρίσκεται ἐκ τῆς σχέσεως (1), ἐὰν θέσωμεν: $\beta_1 = 24{,}98$ gr* καὶ $B = 24{,}74$ gr*. Οὕτω ἔχομεν:

$$\underline{\frac{l_1}{l_2} = 1{,}019.}$$

Βοηθητικαὶ γνώσεις.

Μηχανικὸν πλεονέκτημα. Λόγος ταχυτήτων. Ἀπόδοσις.

α) Μηχανικὸν πλεονέκτημα. Προκειμένου περὶ ἁπλῶν μηχανῶν, καλοῦμεν μηχανικὸν πλεονέκτημα (Μ.Π.) τὸν λόγον τῆς ἀντιστάσεως ἢ φορτίου διὰ τῆς καταβαλλομένης δυνάμεως πρὸς ἰσορρόπησιν αὐτοῦ, ἤτοι :

$$\text{μηχανικὸν πλεονέκτημα} = \frac{\text{φορτίον}}{\text{δύναμις}} = \frac{F_\varphi}{F_\delta} \qquad (1)$$

Παράδειγμα: Ἐὰν μηχανὴ εἶναι κατεσκευασμένη οὕτως, ὥστε διὰ δυνάμεως $F_\delta = 25$ kgr* νὰ ἰσορροποῦμεν φορτίον $F_\varphi = 500$ kgr*, τότε θὰ εἶναι :

$$\text{Μ. Π.} = \frac{500}{25} = 20$$

Γενικῶς δὲ αἱ ἁπλαῖ μηχαναὶ ἔχουν μηχανικὸν πλεονέκτημα μεγαλύτερον τῆς μονάδος.

β) Λόγος ταχυτήτων. Ἐὰν ἡ δύναμις F_δ μετατοπίσῃ τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς της κατὰ s_δ εἰς χρόνον t, τότε εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς τῆς ἀντιστάσεως ἢ φορτίου F_φ μετατοπίζεται κατὰ s_φ. Ἐὰν δὲ διὰ υ_φ καὶ υ_δ καλέσωμεν ἀντιστοίχως τὰς ταχύτητας μετατοπίσεως τῶν σημείων ἐφαρμογῆς φορτίου καὶ δυνάμεως, τότε θὰ εἶναι :

$$t = \frac{s_\varphi}{\upsilon_\varphi} \quad \text{καὶ} \quad t = \frac{s_\delta}{\upsilon_\delta} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\upsilon_\delta}{\upsilon_\varphi} = \frac{s_\delta}{s_\varphi} \qquad (2)$$

Τὸ πηλίκον τοῦτο τῶν ταχυτήτων (ἢ τὸ ἴσον πρὸς αὐτὸ τῶν μετατοπίσεων) καλοῦμεν λόγον ταχυτήτων (Λ.Τ), ἤτοι :

$$\text{λόγος ταχυτήτων} = \frac{\text{ταχύτης δυνάμεως}}{\text{ταχύτης φορτίου}} = \frac{\text{μετατόπισις δυνάμεως}}{\text{μετατόπισις φορτίου}} \qquad (3)$$

γ) Ἀπόδοσις. Εἰς ὅλας τὰς πρακτικὰς ἐφαρμογὰς τῶν ἁπλῶν μηχανῶν δὲν ἰσχύει ἀκριβῶς ἡ ἐξίσωσις τοῦ χρυσοῦ κανόνος. Πράγματι, λόγῳ τῶν ἀναποφεύκτων τριβῶν, τὸ ἀποδιδόμενον ἔργον εἶναι μικρότερον τοῦ προσφερομένου. Εἰς τὰς μηχανὰς (ἁπλᾶς ἢ συνθέτους) ἐπιδιώκεται πάντοτε, ὅπως ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῶν δύο ἀνωτέρω ἔργων εἶναι ὅσον τὸ δυνατὸν μικροτέρα. Ἐκφράζομεν δὲ τὰς ἐκ τῶν τριβῶν ἀπωλείας διὰ τοῦ μεγέθους ἀπόδοσις. Καλοῦμεν ἀπόδοσιν ἁπλῆς μηχανῆς τὸν λόγον τοῦ ἔργου (ὠφελίμου ἔργου), τοῦ παραγομένου ὑπὸ τοῦ φορτίου κατά τι χρονικὸν διάστημα, πρὸς τὸ ἔργον (διατιθέμενον ἔργον), τὸ παραγόμενον ὑπὸ τῆς δυνάμεως κατὰ τὸ αὐτὸ χρονικὸν διάστημα, ἤτοι :

$$\text{ἀπόδοσις} = \frac{\text{ἔργον φορτίου}}{\text{ἔργον δυνάμεως}} = \frac{F_\varphi \cdot s_\varphi}{F_\delta \cdot s_\delta} \qquad (4)$$

Ἡ ἐξίσωσις ὅμως (4) ἐπὶ τῇ βάσει τῶν (1) καὶ (2) δύναται νὰ γραφῇ :

$$\text{ἀπόδοσις} = \frac{F_\varphi \cdot s_\varphi}{F_\delta \cdot s_\delta} = \frac{F_\varphi \,/\, F_\delta}{s_\delta \,/\, s_\varphi} = \frac{\text{Μ. Π.}}{\text{Λ. Τ.}} \qquad (5)$$

ἤτοι, ἡ ἀπόδοσις ἁπλῆς μηχανῆς ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τοῦ Μ. Π. καὶ τοῦ Λ.Τ. Εἰς περίπτωσιν μηχανῆς ἄνευ ἀπωλειῶν (ἀπηλλαγμένης τριβῶν), ἡ ἀπόδοσις ἰσοῦται πρὸς τὴν μονάδα καὶ ἑπομένως Μ. Π. = Λ. Τ. Εἰς περίπτωσιν ὅμως μηχανῆς μετ' ἀπωλειῶν, ἡ ἀπόδοσις εἶναι μικροτέρα τῆς μονάδος καὶ ἑπομένως Μ. Π. < Λ. Τ.

Οὕτω, εἰς τὴν προηγουμένην μηχανὴν ἄνευ ἀπωλειῶν, ἡ μετατόπισις τῆς δυνάμεως εἶναι 20 φορὰς μεγαλυτέρα τῆς τοῦ φορτίου, ἑπομένως θὰ εἶναι Λ. Τ. = 20, ἤτοι :

$$\text{ἀπόδοσις} = \frac{\text{Μ. Π.}}{\text{Λ. Τ.}} = \frac{20}{20} = 1 \quad \text{ἤ, ἄλλως,} \quad 100\,\%.$$

Ἀριθμητικὸν παράδειγμα : Ἔστω ὅτι μηχανὴ εἶναι κατεσκευασμένη οὕτως, ὥστε νὰ ἔχῃ Λ.Τ. = 12, καὶ ὅτι ἡ ἐφαρμοζομένη δύναμις $F_\delta = 10$ kgr* ἰσορροπεῖ φορτίον 100 kgr*.

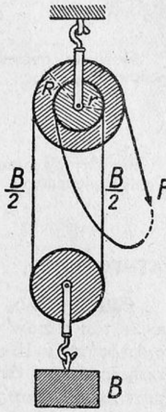
Τὸ Μ. Π. τῆς μηχανῆς εἶναι προδήλως 100 : 10 = 10· ἐπειδὴ δὲ τοῦτο εἶναι μικρότερον τοῦ Λ. Τ., ἡ μηχανὴ παρουσιάζει ἀπωλείας, ἡ δὲ ἀπόδοσις αὐτῆς εἶναι :

$$\text{ἀπόδοσις} = \frac{\text{Μ. Π.}}{\text{Λ. Τ.}} = \frac{10}{12} = 0{,}83 \quad \text{ἤ, ἄλλως,} \quad 83\,\%.$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ. Συνήθως τὸ μηχανικὸν πλεονέκτημα καλεῖται καὶ πραγματικὸν μηχανικὸν πλεονέκτημα, ἐνῷ ὁ λόγος ταχυτήτων καλεῖται καὶ θεωρητικὸν μηχανικὸν πλεονέκτημα.

634. Διαφορικὴ τροχαλία ἀποτελεῖται ἐκ διδύμου ἀμεταθέτου τροχαλίας, τῆς ὁποίας αἱ τροχαλίαι ἔχουν ἀκτῖνας r = 10 cm καὶ R = 11 cm, καὶ ἐκ μιᾶς μεταθετῆς τροχαλίας. Συνεχὲς σχοινίον διέρχεται διὰ τῆς ἄνω τροχαλίας 11 cm, ἀκολούθως διὰ τῆς ἐλευθέρας τροχαλίας πρὸς τὰ κάτω καὶ τέλος διὰ τῆς τροχαλίας 10 cm. Ἡ δύναμις F ἐξασκεῖται πρὸς τὰ κάτω ἐπὶ τοῦ σχοινίου καὶ χρησιμεύει διὰ τὴν ἀνύψωσιν τοῦ βάρους B. Νὰ καθορισθῇ α) τὸ θεωρητικὸν μηχανικὸν πλεονέκτημα (Θ.Μ.Π.) καὶ β) πόση ἡ ἀπόδοσις τῆς μηχανῆς, ἐὰν δύναμις F = 50 kgr* ἀπαιτῆται διὰ τὴν ἀνύψωσιν φορτίου 700 kgr*.

Λύσις. α) Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ δύναμις F μετατοπίζεται πρὸς τὰ κάτω εἰς τοιαύτην ἀπόστασιν, ὥστε ἡ δίδυμος τροχαλία νὰ ἐκτελῇ μίαν πλήρη περιστροφήν. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην εἶναι προφανὲς ὅτι τὸ σχοινίον μεταξὺ τῶν ἄνω καὶ κάτω τροχαλιῶν βραχύνεται κατ' ἀπόστασιν ἴσην πρὸς τὴν περιφέρειαν ($2\pi R$) τῆς μεγάλης τροχαλίας καὶ ἐπιμηκύνεται κατὰ μῆκος ἴσον πρὸς τὴν περιφέρειαν ($2\pi r$) τῆς μικροτέρας τροχαλίας. Συνεπῶς τὸ μὲν βάρος B θὰ μετατοπίζεται κατ' ἀπόστασιν ἴσην πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς διαφορᾶς τῶν δύο περιφερειῶν, ἤτοι $1/2 \cdot (2\pi R - 2\pi r)$, ἡ δὲ δύναμις θὰ μετατοπίζεται κατὰ $2\pi R$ καὶ θὰ ἔχωμεν:



$$\Theta.\text{Μ}.\Pi. = \frac{\text{μετατόπισις } F}{\text{μετατόπισις } B} = \frac{2\pi \cdot R}{1/2\,(2\pi \cdot R - 2\pi \cdot r)} = \frac{2R}{R - r} \quad (1)$$

Ἐκ τῆς σχέσεως (1) προκύπτει συμφώνως πρὸς τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως ὅτι:

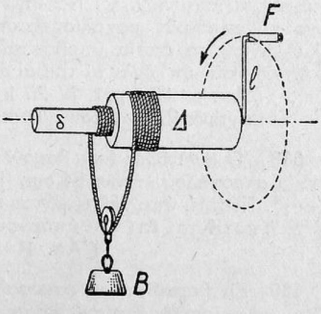
$$\underline{\Theta.\text{Μ}.\Pi. = 22.}$$

β) Ὅταν ἡ δύναμις F μετατοπίζεται κατὰ $s_\delta = 22$ cm, τὸ φορτίον ἀνυψοῦται κατὰ $s_\varphi = 1$ cm καὶ ἑπομένως ἔχομεν:

$$\text{ἀπόδοσις} = \frac{\text{ἔργον ἀποδιδόμενον}}{\text{ἔργον διατιθέμενον}} = \frac{B \cdot s_\varphi}{F \cdot s_\delta} = \frac{700 \cdot 1}{50 \cdot 14} \quad (2)$$

ἤτοι: $\underline{\text{ἀπόδοσις} = 0{,}64}$ ἢ $64\,\%$.

635. Τὰ δύο τύμπανα διαφορικοῦ βαρούλκου ἔχουν διαμέτρους 30 cm καὶ 20 cm ἀντιστοίχως. Τὸ μῆκος τοῦ στροφάλου εἶναι 40 cm. Ἐὰν ἐργάτης ἀσκῇ ἐπὶ τοῦ στροφάλου καθέτως δύναμιν 18 kgr*, ποῖον βάρος δύναται νὰ ἀνυψώσῃ, ὅταν ὁ συντελεστὴς ἀποδόσεως τῆς μηχανῆς ταύτης εἶναι 0,8.



Λύσις. Ἔστω ὅτι ἡ διάμετρος (μεγάλη) τοῦ ἑνὸς τυμπάνου εἶναι Δ, ἡ διάμετρος (μικρὰ) τοῦ ἄλλου τυμπάνου δ, τὸ μῆκος τοῦ στροφάλου l, ἡ ἐξασκουμένη δύναμις ἐπὶ τοῦ ἄκρου τοῦ στροφάλου F καὶ τὸ ἀνυψούμενον βάρος B. Ὅταν τὸ βαροῦλκον ἐκτελῇ μίαν περιστροφήν, τότε τὸ μὲν σημεῖον ἐφαρμογῆς τῆς δυνάμεως θὰ μετατοπίζεται κατὰ $s_1 = 2\pi \cdot l$, τὸ δὲ σημεῖον ἐφαρμογῆς τοῦ ἀνυψουμένου βάρους θὰ μετατοπίζεται κατά:

$$s_2 = \frac{1}{2}\,(\pi \cdot \Delta - \pi \cdot \delta) = \frac{1}{2}\,\pi\,(\Delta - \delta)$$

Ἄρα θὰ ἔχωμεν ὅτι τὸ ἀποδιδόμενον ἔργον ὑπὸ τοῦ βαρούλκου (ὠφέλιμον ἔργον) εἶναι:

$$A_{\text{ὠφελ.}} = B \cdot s_2 = B \cdot \frac{1}{2}\,\pi\,(\Delta - \delta) \quad (1)$$

καὶ ὅτι τὸ διατιθέμενον ἔργον εἶναι :

$$A_{\delta\iota\alpha\tau.} = F \cdot s_1 = 2F \cdot \pi \cdot l \qquad (2)$$

Ἐὰν καλέσωμεν η τὸν συντελεστὴν ἀποδόσεως, θὰ εἶναι, ὡς γνωστόν :

$$\eta = \frac{N_{\omega\varphi\varepsilon\lambda.}}{N_{\delta\iota\alpha\tau.}} \qquad (3)$$

καὶ οὕτω λαμβάνομεν, λόγῳ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) :

$$\eta = \frac{B \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi (\Delta - \delta)}{2F \cdot \pi \cdot l} = \frac{1}{4} \cdot \frac{B(\Delta - \delta)}{F \cdot l} \qquad (4)$$

Λύομεν τὴν σχέσιν (4) ὡς πρὸς τὸ ζητούμενον βάρος B τὸ ὁποῖον δυνάμεθα νὰ ἀνυψώσωμεν καὶ προκύπτει ὁ τύπος :

$$B = \frac{4F \cdot l \cdot \eta}{\Delta - \delta} \qquad (5)$$

Ἐὰν εἰς τὸν τύπον (5) θέσωμεν : $F = 18$ kgr*, $l = 40$ cm, $\eta = 0{,}8$, $\Delta = 30$ cm καὶ $\delta = 20$ cm, εὑρίσκομεν :

$$\underline{B = 230{,}4 \text{ kgr*}.}$$

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Β΄

636. Μοχλὸς ΑΒ ἀποτελεῖται ἀπὸ ράβδον, μήκους 1,80 m, κινητὴν πέριξ τοῦ ἑνὸς ἐκ τῶν ἄκρων της Α. Ἡ ράβδος αὕτη στηρίζεται ἐπὶ ὑποστηρίγματος εὑρισκομένου εἰς ἀπόστασιν 15 cm ἀπὸ τοῦ σταθεροῦ ἄκρου, ὅπερ κρατεῖ τὴν ράβδον ὁριζοντίαν. Πόση θὰ εἶναι ἡ δύναμις ἡ ἐξασκουμένη ἐπὶ τοῦ ὑποστηρίγματος ὑπὸ βάρους 20 kgr*, ἐξηρτημένου ἀπὸ τὸ ἕτερον ἄκρον Β τῆς ράβδου, καὶ πόση ἡ δύναμις ἡ ἐπιφερομένη ἐπὶ τοῦ σταθεροῦ σημείου Α. (Ἀπ. 240 kgr*, 220 kgr*.)

637. Τροχαλία σταθερὰ καὶ ἑτέρα μεταθετὴ διατίθενται εἰς τρόπον ὥστε νὰ ἀνυψώνουν βάρος 40 kgr*. Ἡ δύναμις ἕλξεως ἐπὶ τοῦ ἐλευθέρου ἄκρου τοῦ σχοινίου σχηματίζει γωνίαν 60° μετὰ τῆς κατακορύφου. Ζητεῖται : α) Πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ δύναμις ἕλξεως. β) Πόσην δύναμιν ὑφίσταται ὁ σταθερὸς κρίκος εἰς τὸν ὁποῖον εἶναι συνδεδεμένον τὸ σχοινίον. γ) Νὰ ὑπολογισθῇ κατὰ μέγεθος καὶ διεύθυνσιν ἡ ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῆς σταθερᾶς τροχαλίας ἐξασκουμένη δύναμις. Ὑποτίθεται ὅτι τὰ δύο τμήματα τοῦ σχοινίου τὰ ὁποῖα ὑποβαστάζουν τὴν κινητὴν τροχαλίαν εἶναι κατακόρυφα. Δὲν θὰ ληφθοῦν ὑπ' ὄψιν αἱ τριβαὶ ὡς καὶ τὸ βάρος τοῦ σχοινίου καὶ τῶν δύο τροχαλιῶν. (Ἀπ. α΄ 20 kgr*. β΄ 20 kgr*. γ΄ Ἡ ἐπὶ τοῦ ἄξονος ἐξασκουμένη δύναμις σχηματίζει γωνίαν 30° μετὰ τῆς κατακορύφου, ἔχει δὲ τιμὴν 34,6 kgr*.)

638. Ὁ κύλινδρος ἑνὸς βαρούλκου ἔχει διάμετρον 12 cm καὶ περιστρέφεται τῇ βοηθείᾳ στροφάλου μήκους 54 cm. Ἐργάτης ἐκτελεῖ 40 στρ./min ἀνυψώνων βάρος 30 kgr*. Πόση ἡ ὑπὸ τοῦ ἐργάτου καταβαλλομένη δύναμις. Πόση ἡ ἀναπτυσσομένη ἰσχύς. Ὑποτίθεται ὅτι δὲν ὑπάρχουν τριβαί.
(Ἀπ. F = 3,33 kgr*, N = 7,53 kgr*m/sec ἢ 0,10 PS.)

639. Εἰς βαροῦλκον ὁ στρόφαλος ἔχει μῆκος 60 cm καὶ ὁ κύλινδρος διάμετρον 12 cm. Ὁ χειριστὴς δαπανᾷ ἰσχὺν 1/12 PS, ἵνα ἀνυψώσῃ βάρος 25 kgr*. Γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ ἀπόδοσις τοῦ βαρούλκου εἶναι 60 %, ζητεῖται πόσας στρ./min θὰ ἐκτελέσῃ ὁ χειριστὴς τοῦ στροφάλου καὶ πόση ἡ δύναμις ἡ ἐξασκουμένη εἰς τὸ ἄκρον τοῦ στροφάλου. (Ἀπ. 24 στρ./min, 4,17 kgr*.)

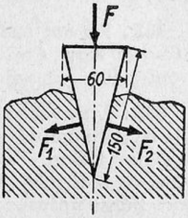
640. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ βραχύτατον μῆκος κεκλιμένου ἐπιπέδου, ἄνευ τριβῆς, τὸ ἀπαιτούμενον διὰ τὴν ἀνύψωσιν βάρους 250 kgr* εἰς ὕψος 1 m μὲ δύναμιν 50 kgr* ἐνεργοῦσαν παραλλήλως πρὸς τὸ κεκλιμένον ἐπίπεδον. (Ἀπ. 5 m.)

641. Πόση δύναμις παράλληλος πρὸς τὸ κεκλιμένον ἐπίπεδον ἀπαιτεῖται διὰ νὰ σύρωμεν βάρος 60 kgr* ἐπ' αὐτοῦ, ἄνευ τριβῆς, καὶ κλίσεως 30° ὡς πρὸς τὴν ὁριζοντίαν. (Ἀπ. 30 kgr*.)

642. Ἐργάτης, ἵνα φορτώσῃ βαρέλιον ἐπὶ ἁμάξης, κυλίει αὐτὸ κατὰ μῆκος κεκλιμένου ἐπιπέδου. Τὸ βαρέλιον ζυγίζει 240 kgr* καὶ τὸ δάπεδον τῆς ἁμάξης εἶναι 1,10 m ἄνωθεν τοῦ ἐδάφους. Πόσον πρέπει νὰ εἶναι τὸ μῆκος τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου, ἵνα ὁ ἐργάτης καταβάλλῃ δύναμιν 40 kgr*. (Ἀπ. 6,60 m.)

643. Ἐπὶ τοῦ διπλοῦ σφηνὸς τοῦ σχήματος ἐπενεργοῦμεν μέσῳ σφύρας διὰ δυνάμεως $F = 32$ kgr*. Ποῖαι αἱ πλευρικαὶ δυνάμεις F_1 καὶ F_2 ἐπὶ τῶν δύο τμημάτων τοῦ τεμνομένου σώματος.

(Ἀπ. $F_1 = F_2 = 80$ kgr*.)



Πρόβλημα 643.

644. Ὁ σφὴν τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος εἰσάγεται ἐντὸς ἑτέρου ὑλικοῦ, τὸ ὁποῖον ἐξασκεῖ ἐπὶ ἑκάστης τῶν πλευρῶν αὐτοῦ δύναμιν $F_1 = F_2 = 45$ kgr*. Μὲ ποίαν δύναμιν πρέπει νὰ ἐνεργήσωμεν ἐπὶ τοῦ σφηνός, διὰ νὰ τμηθῇ τὸ σῶμα. (Ἀπ. $F = 18$ kgr*.)

645. Δύο σφαῖραι τοῦ αὐτοῦ βάρους B εἰς τὸ κενὸν ἔχουν πυκνότητας $\rho_1 = 5$ gr/cm³ καὶ $\rho_2 = 10$ gr/cm³. Ἐξαρτῶνται ἐκ τῶν ἄκρων μοχλοῦ καὶ βυθίζονται ἐντὸς τοῦ ὕδατος. Ζητεῖται ὁ λόγος τῶν βραχιόνων l_1 καὶ l_2 τοῦ μοχλοῦ, ἵνα οὗτος εὑρίσκεται εἰς θέσιν ὁριζοντίαν. (Ἀπ. 9 : 8.)
(Πανεπιστήμιον Ἀθηνῶν, Τμῆμα Φαρμακευτικόν, 1952.)

646. Εἷς τῶν βραχιόνων φάλαγγος ζυγοῦ ἔχει μῆκος 164,80 mm, ἐνῷ ὁ ἕτερος εἶναι ὀλίγον βραχύτερος. Ἡ βελόνη τοῦ δείκτου σταματᾷ εἰς τὸ μηδὲν τῆς κλίμακος, ὅταν οἱ δίσκοι εἶναι κενοὶ καὶ ὅταν εἶναι φορτισμένοι μὲ 312,8 gr καὶ 314,5 gr ἀντιστοίχως. Πόσον τὸ μῆκος τοῦ δευτέρου βραχίονος τῆς φάλαγγος. (Ἀπ. 163,91 mm.)

647. Οἱ δύο βραχίονες φάλαγγος ζυγοῦ ἔχουν μῆκος ἀντιστοίχως 159,2 mm καὶ 160,4 mm. Ὅταν οἱ δίσκοι εἶναι κενοί, ἡ βελόνη σταματᾷ εἰς τὴν ὑποδιαίρεσιν + 2. Τίθενται 120,5 gr εἰς τὸν δίσκον τὸν ἀντιστοιχοῦντα εἰς τὸν μικρότερον βραχίονα. Πόσον βάρος πρέπει νὰ τεθῇ ἐπὶ τοῦ ἑτέρου δίσκου, ἵνα ἡ βελόνη ἐπανέλθῃ εἰς τὴν πρώτην της θέσιν. (Ἀπ. 121,4 gr*.)

648. Ἡ βελόνη ἑνὸς ζυγοῦ δεικνύει τὴν ὑποδιαίρεσιν 6 πρὸς τὰ δεξιά, ὅταν οἱ δίσκοι εἶναι κενοί. Βάρος 1 gr* τιθέμενον ἐπὶ τοῦ δεξιοῦ δίσκου φέρει τὴν βελόνην εἰς τὴν ὑποδιαίρεσιν 4 πρὸς τὰ ἀριστερά. Πόσον πρόσθετον βάρος πρέπει νὰ τεθῇ ἐπὶ τοῦ δεξιοῦ δίσκου, ἵνα ἡ βελόνη ἔλθῃ εἰς τὸ μηδέν. Αἱ ὑποδιαιρέσεις ἀπέχουν ἴσον μεταξύ των καὶ αἱ μικραὶ μετατοπίσεις τῆς βελόνης εἶναι ἀνάλογοι τῶν ἐπιφορτήσεων. (Ἀπ. 0,06 gr*.)

649. Εἰς τὸν ἕνα δίσκον ζυγοῦ μὲ ἀνίσους βραχίονας θέτομεν σῶμα ἀγνώστου βάρους. Διὰ νὰ ἐπέλθῃ ἰσορροπία, θέτομεν εἰς τὸν ἄλλον δίσκον σταθμὰ 225 gr*. Ἀλλάσσομεν κατόπιν ἀμοιβαίως τὴν θέσιν τῶν σταθμῶν καὶ τοῦ σώματος ἐπὶ τῶν δίσκων. Τότε πρέπει νὰ προσθέσωμεν εἰς τὰ σταθμὰ 31 gr*, ἵνα ἀποκατασταθῇ καὶ πάλιν ἡ ἰσορροπία. Νὰ εὑρεθοῦν: α) Τὸ ἀληθὲς βάρος τοῦ σώματος. β) Ὁ λόγος τῶν μηκῶν τῶν δύο βραχιόνων τῆς φάλαγγος. (Ἀπ. α' 240 gr*. β' 15 : 16.)

650. Εὐθεῖα δοκὸς ὑποστηρίζεται εἰς τὸ κέντρον βάρους αὐτῆς εἰς τρόπον ὥστε νὰ δύναται νὰ περιστρέφεται περὶ ἄξονα. Λόγῳ ὅμως κακῆς κατεργασίας αὐτῆς οἱ δύο βραχίονες τῆς δοκοῦ εἶναι ἄνισοι. Ἡ δοκὸς αὕτη πρόκειται νὰ χρησιμοποιηθῇ ὡς ζυγὸς καὶ εἰς τὸ ἓν ἄκρον τίθεται τὸ ἐμπόρευμα, ἐνῷ εἰς τὸ ἄλλο ἄκρον τὸ βάρος. Σῶμα τὸ ὁποῖον ἔχει ἀληθὲς βάρος B δεικνύει, ὅταν ἐξαρτηθῇ ἀπὸ τὸ ἓν ἄκρον, βάρος $B_1 = 534$ gr* καὶ ἀπὸ τὸ ἄλλο ἄκρον βάρος $B_2 = 596$ gr*. Ποῖον εἶναι τὸ πραγματικὸν βάρος B. Ποῖος ὁ λόγος μεταξὺ τῶν δύο βραχιόνων καὶ τί διορθώσεις πρέπει νὰ ἐπιφέρωμεν εἰς τὰς ἐνδείξεις μάζης τοῦ ζυγοῦ.

('Απ. 564 gr*, $\alpha_2/\alpha_1 = 1{,}056$, $\alpha_1/\alpha_2 = 0{,}947$.)

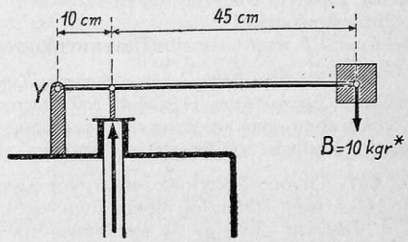
ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Γ'

651. Βάρος 200 gr* ἰσορροπεῖ βάρος 360 gr* εὑρισκόμενον εἰς τὸ ἄκρον μοχλοῦ μήκους 30 cm. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ μήκη τῶν βραχιόνων τοῦ μοχλοῦ.

652. Ράβδος ὁμοιόμορφος μήκους 100 cm καὶ βάρους 300 gr* διατηρεῖται εἰς ὁριζοντίαν θέσιν, ὅταν τοποθετῆται ἐπὶ ὑπομοχλίου καὶ εἰς τὰ ἄκρα αὐτῆς ἐφαρμόζωνται δυνάμεις 400 gr* καὶ 500 gr*. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ θέσις τοῦ ὑπομοχλίου O.

653. Στέλεχος κυλινδρικὸν ὁμογενὲς στηρίζεται ἐκ τοῦ μέσου αὐτοῦ O ἐπὶ ἀκμῆς, ὥστε νὰ εἶναι ὁριζόντιον. Ἔχει μῆκος 3,2 m καὶ εἶναι ἐξηρτημένον ἀπὸ τὸ ἄκρον αὐτοῦ A φορτίον 100 kgr* καὶ ἀπὸ τὸ ἕτερον ἄκρον B φορτίον 200 kgr*. Εἰς ποῖον σημεῖον πρέπει νὰ ἐξαρτηθῇ νέον φορτίον 200 kgr*, ἵνα ἡ ράβδος παραμείνῃ ἐν ἰσορροπίᾳ. Πόσον βάρος πρέπει νὰ ἐφαρμοσθῃ εἰς ἀπόστασιν 1,2 m ἀπὸ τοῦ A, ἵνα ἔχωμεν τὸ ἀποτέλεσμα τοῦτο.

654. Βαλβὶς ἀσφαλείας εἶναι μοχλὸς δευτέρου εἴδους. Ἡ ἀπόστασις τῆς βαλβῖδος ἀπὸ τοῦ ὑπομοχλίου εἶναι 10 cm καὶ ἡ ἀπόστασις τοῦ βάρους ἀπὸ τοῦ ὑπομοχλίου εἶναι 45 cm (βλ. σχῆμα). Ἐὰν τὸ βάρος εἶναι 10 kgr*, πόσην δύναμιν πρέπει νὰ ἀσκῇ ὁ ἀτμὸς εἰς τρόπον ὥστε νὰ εὑρίσκεται εἰς θέσιν νὰ θέσῃ τὴν βαλβῖδα εἰς λειτουργίαν.



655. Διὰ νὰ ἀνυψωθῇ βάρος 40 kgr* μὲ μίαν τροχαλίαν, πρέπει νὰ ἐξασκηθῇ δύναμις ἕλξεως 45 kgr*. Πόση ἡ ἀπόδοσις τῆς τροχαλίας.

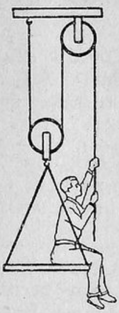
656. Αἱ διάμετροι διδύμου διαφορικῆς τροχαλίας εἶναι 25 cm καὶ 23 cm ἀντιστοίχως. Ἐὰν ἡ ἀπόδοσις τῆς μηχανῆς εἶναι 45 %, πόση δύναμις ἀπαιτεῖται διὰ τὴν ἀνύψωσιν φορτίου 350 kgr*.

657. Ἐὰν ὁ ἄνθρωπος (βλ. σχῆμα) ζυγίζῃ 70 kgr*, πόσην δύναμιν πρέπει νὰ ἐξασκῇ διὰ νὰ ἀνέρχεται.

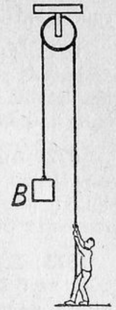
658. Εὰν τὸ βάρος B εἶναι 50 kgr* (βλ. σχῆμα) καὶ ὁ ἄνθρωπος ζυγίζῃ 75 kgr*, μὲ πόσην δύναμιν οἱ πόδες του θὰ πιέζουν τὸ ἔδαφος.

659. Ἄνθρωπος ζυγίζων 75 kgr* ἀνασύρεται ἀπὸ φρέαρ μέσῳ βαρούλκου, τοῦ ὁποίου ὁ κύλινδρος ἔχει διάμετρον 20 cm, ὁ δὲ μοχλὸς αὐτοῦ (στρόφαλος) ἔχει μῆκος 60 cm. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ δύναμις ἡ ἀπαιτουμένη νὰ ἐφαρμόζεται εἰς τὴν λαβήν.

660. Βαροῦλκον ἀκτῖνος 10 cm ἔχει στρόφαλον μήκους 0,30 m καὶ τὸ πρὸς ἀνύψωσιν βάρος ζυγίζει 150 kgr*. Πόση εἶναι ἡ ἐλαχίστη δύναμις τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ καταβάλῃ ὁ χειριστὴς ἐπὶ τοῦ στροφάλου διὰ τὴν ἀνύψωσιν τοῦ βάρους.



Πρόβλημα 657.



Πρόβλημα 658.

661. Βάρος 320 kgr* σύρεται ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου, ἄνευ τριβῆς, μήκους 600 cm καὶ ὕψους 150 cm ἀπὸ τοῦ ἐδάφους. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ παράλληλος δύναμις πρὸς τὸ κεκλιμένον ἐπίπεδον καὶ τὸ παραγόμενον ἔργον διὰ νὰ φθάσῃ τὸ σῶμα εἰς τὴν κορυφὴν τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου.

662. Εἰς ἀνυψωτῆρα αὐτοκινήτου (γρύλλος) ὁ μοχλὸς ἔχει μῆκος 45 cm καὶ τὸ βῆμα τοῦ κοχλίου εἶναι 0,8 cm. Ἐὰν ἡ ἀπόδοσις εἶναι 30 %, πόση δύναμις F ἀπαιτεῖται διὰ νὰ ἀνυψώσῃ φορτίον B ἴσον πρὸς 1 000 kgr*.

663. Ἀνυψωτὴρ αὐτοκινήτου (γρύλλος) ἔχει θεωρητικὸν μηχανικὸν πλεονέκτημα 25 καὶ δύναμις 20 kgr* ἀπαιτεῖται διὰ τὴν ἀνύψωσιν φορτίου 150 kgr*. Ποία ἡ ἀπόδοσις τῆς μηχανῆς αὐτῆς. Πόσον φορτίον δύναται νὰ ἀνυψώσῃ, ἐὰν ἐφαρμόζεται δύναμις 30 kgr*.

664. Κοχλίας πιεστηρίου ἔχει 2 βήματα κατὰ cm καὶ ἡ διάμετρος τοῦ τροχοῦ διὰ τοῦ ὁποίου ἐφαρμόζεται ἡ δύναμις εἶναι 50 cm. Ἐὰν ἡ ἀπόδοσις εἶναι 40 %, πόση δύναμις ἀπαιτεῖται διὰ νὰ ἀναπτύξωμεν δύναμιν 1 350 kgr* ἐπὶ τῆς πλακός του.

665. Ὑδροστρόβιλος τροφοδοτεῖται ἀπὸ πτῶσιν 50 m^3 ὕδατος ἐξ 20 m ὕψους καὶ χορηγεῖ εἰς ἐργοστάσιον ἔργον 900 000 kgr*m. Πόση ἡ ἀπόδοσις τοῦ ὑδροστροβίλου.

666. Ὁ βραχίων στροφάλου ποδηλάτου ἔχει μῆκος 17,5 cm καὶ ὁ τροχὸς ἔχει διάμετρον 70 cm. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐφαπτομένη δύναμις ἡ ἀσκουμένη ἐπὶ τοῦ ἐδάφους ὑπὸ τοῦ ἐλαστικοῦ, ὅταν ὁ ποδηλάτης ἐπενεργῇ πρὸς τὰ κάτω μετὰ δυνάμεως 22,5 kgr* ἐπὶ τοῦ βραχίονος τοῦ στροφάλου, ὅταν οὗτος εἶναι ὁριζοντίως, λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν ὀδόντων τῆς διατάξεως μεταβιβάσεως τῆς κινήσεως εἶναι 28 καὶ 8. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ δύναμις, ὅταν ὁ βραχίων σχηματίζει 30^o πρὸς τὴν ὁριζοντίαν. Πόσον διάστημα διανύει τὸ ποδήλατον, ὅταν ὁ στρόφαλος ἐκτελῇ μίαν στροφήν.

667. Κεκλιμένον ἐπίπεδον ἔχει μῆκος 3 m καὶ ὕψος 1 m. Ζητοῦνται : α) Τὸ θεωρητικὸν μηχανικὸν πλεονέκτημα. β) Πόση δύναμις παράλληλος πρὸς τὸ κεκλιμένον ἐπίπεδον ἀπαιτεῖται διὰ τὴν ἀνύψωσιν κιβωτίου βάρους 100 kgr*, συρομένου κατὰ μῆκος τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου χωρὶς νὰ ὑφίσταται τριβήν. γ) Πόσον εἶναι τὸ πραγματικὸν μηχανικὸν πλεονέκτημα καὶ ἡ ἀπόστασις, ἐὰν ἀπαιτῆται δύναμις 25 kgr* διὰ τὴν μετατόπισιν τοῦ κιβωτίου 100 kgr* ἐπὶ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου.

668. Ἐπὶ τριγωνικοῦ διπλοῦ σφηνὸς αἱ πλευραὶ πρὸς τὴν βάσιν ἔχουν λόγον 24 : 4. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ δύναμις ἡ ἀσκουμένη καθέτως ἐπὶ τῆς βάσεως τοῦ σφηνὸς διὰ τὴν ἀντιμετώπισιν πλευρικῆς δυνάμεως 150 kgr*.

669. Ἐὰν τὸ ἄκρον τοῦ στροφάλου μήκους 30 cm διαφορικοῦ βαρούλκου περιστρέφεται ὑπὸ ταχύτητα 40 cm/sec, μὲ ποίαν ταχύτητα θὰ ἀνέρχεται τὸ ἀνυψούμενον βάρος, ἐὰν αἱ ἀκτῖνες τῶν κυλίνδρων εἶναι 25 cm καὶ 10 cm.

670. Διὰ πολυσπάστου συνήθους τύπου περιέχοντος τέσσαρας μεταθετὰς καὶ τέσσαρας ἀμεταθέτους τροχαλίας ἀπαιτεῖται δύναμις 60 kgr* διὰ τὴν ἀνύψωσιν φορτίου 200 kgr*. Ζητοῦνται: α) Ὁ λόγος ταχυτήτων (Λ.Τ.). β) Τὸ μηχανικὸν πλεονέκτημα (Μ.Π.). γ) Ἡ ἀπόδοσις.

671. Ἔμπορος κάμνει 100 ζυγίσεις τοῦ 1 kgr, θέτων τὸ πρὸς ζύγισιν σῶμα ἐναλλὰξ εἰς τοὺς δύο δίσκους τοῦ ζυγοῦ. Ὁ ζυγὸς δὲν εἶναι ἀκριβής, καθότι ὁ εἷς βραχίων αὐτοῦ α_1 εἶναι μεγαλύτερος τοῦ ἑτέρου α_2 κατὰ $0{,}01\,\alpha_2$. Ποῖον τὸ κέρδος ἢ ἡ ζημία τοῦ ἐμπόρου ἐπὶ τοῦ παραδιδομένου ἐμπορεύματος.

672. Διὰ νὰ ἰσορροπήσῃ βάρος 100 gr* τοποθετημένον ἐπὶ τοῦ ἑνὸς τῶν δίσκων ζυγοῦ, πρέπει νὰ τοποθετηθοῦν 100,1 gr* εἰς τὸν ἕτερον δίσκον. Ζητεῖται νὰ καθορισθῇ πόσα γραμμάρια πρέπει νὰ θέσῃ τις εἰς τὸν δεύτερον δίσκον, διὰ νὰ ἐπέλθῃ ἰσορροπία βάρους 1 kgr* τιθεμένου εἰς τὸν πρῶτον δίσκον.

673. Σῶμα τίθεται ἐπὶ ζυγοῦ τοῦ ὁποίου οἱ δύο βραχίονες εἶναι ἄνισοι. Ὅταν τοῦτο τεθῇ ἐπὶ τοῦ ἑνὸς δίσκου, εὑρίσκεται τὸ βάρος του $\beta_1 = 434$ gr*, ὅταν δὲ τεθῇ ἐπὶ τοῦ ἄλλου δίσκου, εὑρίσκεται $\beta_2 = 496$ gr*. Ποῖον εἶναι τὸ ἀκριβὲς βάρος Β τοῦ σώματος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Η΄

ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Α΄

674. Μᾶζα ἐκτελεῖ γραμμικὴν ἁρμονικὴν ταλάντωσιν, τῆς ὁποίας ἡ περίοδος εἶναι 2 sec καὶ τὸ πλάτος 20 cm. α) Πόση εἶναι ἡ ταχύτης κατὰ τὴν δίοδον αὐτῆς ἀπὸ τῆς θέσεως ἰσορροπίας, β) ποία ἡ ἀπόκλισίς της μετὰ χρόνον 0,2 sec ἀπὸ τῆς διελεύσεως αὐτῆς ἐκ τῆς θέσεως ἰσορροπίας καὶ γ) πόση εἶναι εἰς τὴν θέσιν ταύτην ἡ ταχύτης της.

Λύσις. α) Ἐὰν καλέσωμεν υ τὴν ταχύτητα τῆς μάζης κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν t καὶ υ_0 τὴν μεγίστην ταχύτητα τῆς γραμμικῆς ἁρμονικῆς ταλαντώσεως, θὰ ἰσχύσῃ, ὡς γνωστόν, ἡ σχέσις:

$$\upsilon = \upsilon_0 \cdot \text{συν}\, \omega \cdot t \qquad (1)$$

Τὴν στιγμὴν ὅμως κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ μᾶζα διέρχεται ἀπὸ τὴν θέσιν ἰσορροπίας, ἐπειδὴ εἶναι $\omega \cdot t = \varphi = 0^\circ$ καὶ $\text{συν}\, \omega \cdot t = 1$, θὰ ἔχωμεν ἐκ τῆς σχέσεως (1) ὅτι: $\upsilon = \upsilon_0$. Ἀκολούθως, ἐπειδὴ $\upsilon_0 = \omega \cdot \alpha = \frac{2\pi}{T} \cdot \alpha$, θὰ ἔχωμεν καί:

$$\upsilon = \frac{2\pi}{T} \cdot \alpha \qquad (2)$$

καὶ συνεπῶς ἡ ζητουμένη ταχύτης υ εὑρίσκεται ἐκ τῆς σχέσεως (2) ὅτι εἶναι:

$$\underline{\upsilon = 62{,}8 \text{ cm/sec.}}$$

β) Ἡ ἀπόκλησις x δίδεται ἐκ τοῦ τύπου:

$$x = \alpha \cdot \text{ημ}\, \omega \cdot t = \alpha \cdot \text{ημ}\, \frac{2\pi}{T} \cdot t$$

Ἄρα κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν t = 0,2 sec εὑρίσκομεν ὅτι:

$$x = 2\pi \cdot \text{ημ}\, \frac{2\pi}{2} \cdot 0{,}2 = 20 \;\text{ημ}\; 36^\circ$$

καὶ τελικῶς:

$$\underline{\underline{x = 11{,}76 \text{ cm.}}}$$

γ) Ἡ ταχύτης υ κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν t = 0,2 sec θὰ εἶναι :

$$υ = υ_0 \text{ συν } \frac{2\pi}{T} \cdot t = 62{,}8 \cdot \text{συν } \frac{2\pi}{2} \cdot 0{,}2 = 62{,}8 \cdot \text{συν } 36^o$$

ὁπότε εὑρίσκομεν τελικῶς ὅτι :

$$\underline{υ = 50{,}8 \text{ cm/sec.}}$$

675. Ἐπὶ μάζης δυναμένης νὰ ἐκτελῇ γραμμικὴν ἁρμονικὴν ταλάντωσιν, ὅταν εὑρίσκεται εἰς τὴν θέσιν ἰσορροπίας, μεταδίδεται ταχύτης 1 m/sec, συνεπείᾳ τῆς ὁποίας ἀποκτᾷ αὕτη πλάτος 10 cm. α) Ποία εἶναι ἡ περίοδος τῆς ταλαντώσεως καὶ πόση ἡ ἀπόκλισις αὐτῆς μετὰ παρέλευσιν 4 sec. β) Μετὰ πόσον χρόνον ἡ κινουμένη μᾶζα διέρχεται διὰ δευτέραν φορὰν δι' ἑνὸς σημείου, τοῦ ὁποίου ἡ ἀπόκλισις εἶναι 8 cm.

Λύσις. α) Ἔστω ὅτι ἡ μεταδιδομένη ἐπὶ τῆς μάζης ταχύτης εἶναι υ. Ἐπειδὴ αὕτη εἶναι ἡ ταχύτης τοῦ κινητοῦ, ὅταν τοῦτο διέρχεται διὰ τῆς θέσεως ἰσορροπίας, θὰ εἶναι καὶ ἡ μεγίστη ταχύτης αὐτοῦ, ἤτοι : $υ = υ_0$.

Γνωρίζομεν ὅμως ὅτι εἶναι : $υ_0 = \frac{2\pi}{T} \cdot α$

ἐξ οὗ :

$$T = \frac{2\pi \cdot α}{υ_0} \qquad (1)$$

Θέτομεν τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως εἰς τὴν σχέσιν (1) : $υ_0 = 100$ cm/sec, $α = 10$ cm, καὶ εὑρίσκομεν :

$$\underline{T = 0{,}628 \text{ sec.}}$$

Ἡ ἀπόκλισις x, μετὰ πάροδον χρόνου t = 4 sec, εὑρίσκεται ἐκ τοῦ γνωστοῦ τύπου $x = α \cdot \text{ημ} \frac{2\pi}{T} \cdot t$, ὅτι εἶναι :

$$x = 10 \cdot \text{ημ} \frac{6{,}28}{0{,}628} \cdot 4 = 10 \cdot \text{ημ } (40 \text{ rad})$$

ἢ $x = 10 \cdot \text{ημ } (6 \cdot 6{,}28 + 2{,}32) = 10 \text{ ημ} \cdot (2{,}32 \text{ rad}) = 10 \text{ ημ } (3{,}14 - 2{,}32)$

καὶ τελικῶς :

$$\underline{x = 7{,}5 \text{ cm.}}$$

β) Ἔστω ὅτι ἡ κινουμένη μᾶζα διέρχεται διὰ πρώτην φορὰν ἀπὸ τὴν θέσιν $x_1 = 8$ cm εἰς χρόνον t_1. Θὰ ἔχωμεν :

$$x_1 = α \cdot \text{ημ} \frac{2\pi}{T} \cdot t_1 \qquad (2)$$

Ἡ σχέσις (2) λυομένη ὡς πρὸς t_1 δίδει :

$$t_1 = \frac{x_1}{α \cdot \text{ημ} \frac{2\pi}{T}} \qquad (3)$$

Ἀπὸ τὴν θέσιν ταύτην, ἵνα φθάσῃ εἰς τὸ ἀκρότατον σημεῖον τῆς τροχιᾶς, θὰ παρέλθῃ χρόνος ἔστω t_2, ὁ ὁποῖος θὰ εἶναι ἴσος πρὸς τὸ $^1/_4$ τῆς περιόδου μεῖον τὸν χρόνον t_1. Ἤτοι :

$$t_2 = \frac{T}{4} - t_1 \qquad (4)$$

Διὰ νὰ ἐπιστρέψῃ δὲ εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον (x = 8 cm), θὰ χρειασθῇ ἐπίσης χρόνον t_2 καὶ συνεπῶς ὁ ζητούμενος χρόνος, ἵνα διὰ δευτέραν φορὰν διέλθῃ διὰ τοῦ ἀναφερομένου σημείου, θὰ εἶναι :

$$t_{δλ.} = t_1 + 2\,t_2 = \frac{T}{2} - \frac{x_1}{α \cdot \text{ημ} \frac{2\pi}{T}} \qquad (5)$$

Θέτομεν εἰς τὴν σχέσιν (5) : $x_1 = 8$ cm, $α = 10$ cm, $T = 0{,}628$ sec, καὶ εὑρίσκομεν :

$$\underline{t_{δλ.} = 0{,}314 - 0{,}09 = 0{,}224 \text{ sec.}}$$

676. Σπειροειδὲς ἐλατήριον ἔχει σταθερὰν 8 000 dyn/cm καὶ μᾶζαν ἀμελητέαν. Ζητεῖται : α) Πόση μᾶζα πρέπει νὰ ἐξαρτηθῇ ἀπὸ τὸ ἐλατήριον, ἵνα ἡ περίοδος τῆς κινήσεως εἶναι π/10 sec. β) Πόση εἶναι ἡ ἀπόκλισις. γ) Πόση ἡ ταχύτης τῆς μάζης μετὰ 1 sec ἀπὸ τῆς διόδου διὰ τῆς θέσεως ἰσορροπίας, ὅταν τὸ πλάτος τῆς ταλαντώσεως εἶναι 5 cm.

Λύσις. α) Ἐὰν καλέσωμεν F τὴν δύναμιν, ἡ ὁποία προκαλεῖ τὴν ἁπλῆν ἁρμονικὴν κίνησιν τοῦ σημείου, τότε ἡ δύναμις αὕτη εἶναι ἀνάλογος τῆς ἀποκλίσεως x. Ἤτοι :

$$F = m \cdot k \cdot x \qquad (1)$$

ὅπου m εἶναι ἡ μᾶζα τοῦ σώματος καὶ k μία σταθερὰ ἴση πρός :

$$k = \frac{\upsilon_0^2}{\alpha^2} = \frac{4\pi^2}{T^2} \qquad (2)$$

Ἡ σχέσις λοιπὸν (1) δύναται νὰ γραφῇ :

$$F = m \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot x \qquad (3)$$

Λύοντες δὲ ὡς πρὸς τὸ m λαμβάνομεν :

$$m = \frac{\dfrac{F}{x}}{\dfrac{4\pi^2}{T^2}} \qquad (4)$$

Εἰς τὴν παροῦσαν ἄσκησιν, ἐὰν καλέσωμεν Λ τὴν σταθερὰν τοῦ ἐλατηρίου, φαίνεται σαφῶς ὅτι ἡ σταθερὰ αὕτη εἶναι τὸ πηλίκον $\frac{F}{x}$. Ἤτοι :

$$\Lambda = \frac{F}{x} \qquad (5)$$

Οὕτω ἐκ τῶν σχέσεων (4) καὶ (5) προκύπτει ὅτι ἡ ζητουμένη μᾶζα θὰ εἶναι :

$$m = \frac{\Lambda \cdot T^2}{4\pi^2} \qquad (6)$$

Θέτομεν εἰς τὴν σχέσιν (6) : Λ = 8 000 dyn/cm καὶ T = π/10 sec, ὅτε εὑρίσκομεν :

$$\underline{m = 20 \text{ gr.}}$$

β) Ἡ ἀπόκλισις μετὰ χρόνον t = 1 sec εἶναι :

$$x = \alpha \cdot \eta\mu \frac{2\pi}{T} \cdot t = 5 \cdot \eta\mu \frac{2\pi}{\pi/10} \cdot 1 = 5\, \eta\mu\, (20 \text{ rad})$$

ἢ

$$x = 5 \cdot \eta\mu\, (3 \cdot 6{,}28 + 1{,}16) = 5 \cdot \eta\mu\, (1{,}16 \text{ rad})$$

καὶ τελικῶς :

$$\underline{x = 4{,}56 \text{ cm.}}$$

γ) Ἡ ταχύτης θὰ εἶναι :

$$\upsilon = \upsilon_0 \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{2\pi}{T} \cdot t = \frac{2\pi\alpha}{T} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{2\pi}{\pi/10} \cdot 1 = 100 \cdot \sigma\upsilon\nu\, (20 \text{ rad})$$

ἢ

$$\upsilon = 100 \cdot \sigma\upsilon\nu\, (1{,}16 \text{ rad})$$

ἤτοι :

$$\underline{\upsilon = 40{,}8 \text{ cm/sec.}}$$

677. Ἐπὶ κατακορύφως στηριζομένου ἐλατηρίου ἐξαρτῶμεν κατ' ἀρχὰς βάρος 300 gr* καὶ ἀκολούθως φορτίζομεν μὲ βάρος 400 gr*, ὁπότε ὑφίσταται πρόσθετον ἐπιμήκυνσιν 6,4 cm. Ζητεῖται πόση εἶναι ἡ περίοδος τῆς ταλαντώσεως μάζης 500 gr ἐξηρτημένης ἀπὸ τὸ ἐλατήριον.

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν F τὴν δύναμιν ἡ ὁποία δρᾷ ἐπὶ τοῦ ἐλατηρίου καὶ προκαλεῖ ἐπιμήκυνσιν x, θὰ ἔχωμεν (βλ. προηγουμένην ἄσκησιν):

$$F = m \cdot k \cdot x \tag{1}$$

Ἐπίσης, ὡς εἴδομεν εἰς τὴν προηγουμένην ἄσκησιν, εἶναι:

$$k = \frac{4\pi^2}{T^2} \tag{2}$$

καὶ συνεπῶς ἐκ τῶν (1) καὶ (2) προκύπτει ὅτι:

$$F = m \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot x \tag{3}$$

Λύομεν τὴν (3) ὡς πρὸς T καὶ λαμβάνομεν:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m \cdot x}{F}} \tag{4}$$

Θέτομεν εἰς τὴν σχέσιν (4): $m = 500$ gr, $F = 400 - 300 = 100$ gr* $= 98\,100$ dyn, $x = 6{,}4$ cm, καὶ εὑρίσκομεν:

$$\underline{T = 1{,}14 \text{ sec.}}$$

678. Σπειροειδὲς ἐλατήριον ἐπιμηκύνεται κατὰ 4,9 cm ὑπὸ μάζης 200 gr. Ζητεῖται α) πόση εἶναι ἡ περίοδος τῆς ταλαντώσεως μάζης 400 gr ἐξηρτημένης ἀπὸ τὸ ἐλατήριον καὶ β) πόση θὰ εἶναι ἡ μεγίστη ταχύτης τῆς μάζης, ὅταν τὸ πλάτος τῆς ταλαντώσεως εἶναι 3 cm. ($g = 981$ cm/sec^2.)

Λύσις. α) Εἰς τὴν ἄσκησιν ταύτην θὰ ἰσχύσῃ ἡ σχέσις (4) τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως. Ἤτοι:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m \cdot x}{F}} \tag{1}$$

Θέτομεν: $m = 400$ gr, $x = 4{,}9$ cm, $F = 200 \cdot 981$ dyn, καὶ εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ζητουμένη περίοδος T εἶναι:

$$\underline{T = 0{,}628 \text{ sec.}}$$

β) Ἡ μεγίστη ταχύτης θὰ δίδεται ἀπὸ τὸν τύπον:

$$\upsilon_0 = \frac{2\pi\alpha}{T} \tag{2}$$

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (2) τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως εὑρίσκομεν:

$$\underline{\upsilon_0 = 30 \text{ cm/sec.}}$$

679. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ περίοδος τῆς κινήσεως ὑλικοῦ σημείου ἐκτελοῦντος ἁρμονικὴν ταλάντωσιν, τὸ ὁποῖον ἔχει ἐπιτάχυνσιν 64 cm/sec^2, ὅταν ἡ ἀπόκλισις αὐτοῦ εἶναι 16 cm.

Λύσις. Ἡ μεγίστη ἐπιτάχυνσις δίδεται διὰ τοῦ τύπου:

$$\gamma_0 = \frac{4\pi^2\alpha}{T^2}$$

ἐξ οὗ προκύπτει ὅτι:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\alpha}{\gamma_0}}$$

Θέτοντες δέ: $\gamma_0 = 64$ m/sec^2 καὶ $\alpha = 16$ m, εὑρίσκομεν ὅτι:

$$\underline{T = 3{,}14 \text{ sec.}}$$

680. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς βαρύτητος εἰς τόπον, ὅπου μαθηματικὸν ἐκκρεμὲς μήκους 100 cm ἐκτελεῖ 100 πλήρεις αἰωρήσεις ἐντὸς 246 sec.

Λύσις. Ὁ τύπος τοῦ μαθηματικοῦ ἐκκρεμοῦς εἶναι :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{1}$$

ὅπου l τὸ μῆκος τοῦ ἐκκρεμοῦς καὶ g ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς βαρύτητος εἰς τὸν τόπον ὅπου ἡ περίοδος αὐτοῦ εἶναι T. Λύοντες ὡς πρὸς g εὑρίσκομεν :

$$g = \frac{4\,\pi^2 \cdot l}{T^2}$$

Θέτομεν : $l = 100$ cm, $T = \frac{246}{100} = 2{,}46$ sec, καὶ λαμβάνομεν :

$$\underline{g = 979\ \text{cm/sec}^2.}$$

681. Μᾶζα 500 gr εἶναι ἐξηρτημένη ἀπὸ ἐπίμηκες καὶ ἐλαφρὸν σπειροειδὲς ἐλατήριον. Πρόσθετος δύναμις 10 gr* διατείνει τὸ ἐλατήριον κατὰ 1 cm. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ περίοδος τῆς κινήσεως μάζης 500 gr, ὅταν τὸ ἐλατήριον διατείνεται κατὰ 2 cm καὶ ἀφίεται ἀκολούθως ἐλεύθερον.

Λύσις. Ἡ ζητουμένη περίοδος εὑρίσκεται ἐκ τῆς σχέσεως :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m \cdot x}{F}} \qquad \text{(βλ. ἄσκησιν 677)}$$

Θέτομεν : $m = 500$ gr, $x = 1$ cm, $F = 10\ gr^* = 9\,810$ dyn, καὶ εὑρίσκομεν :

$$\underline{T = 1{,}4\ \text{sec.}}$$

682. Ἐκκρεμὲς ἀποτελεῖται ἀπὸ λεπτὸν χαλύβδινον σύρμα μήκους 6 m, ἀπὸ τὸ ὁποῖον ἐξαρτᾶται μικρὰ βαρεῖα σφαῖρα. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ περίοδος τῆς κινήσεως καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν πλήρων αἰωρήσεων ἀνὰ πρῶτον λεπτόν. ($g = 9{,}81$ m/sec^2.)

Λύσις. Εἰς τὸν τύπον τοῦ μαθηματικοῦ ἐκκρεμοῦς :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

ἐὰν θέσωμεν $l = 6$ m καὶ $g = 9{,}81$ m/sec^2, εὑρίσκομεν :

$$\underline{T = 4{,}91\ \text{sec.}}$$

Ὁ ἀριθμὸς τῶν πλήρων αἰωρήσεων ἀνὰ min θὰ εἶναι :

$$\nu = \frac{1}{4{,}91} \cdot 60 = 12{,}2\ \text{min}^{-1}$$

ἤτοι :

$$\underline{\nu = 12{,}2\ \text{min}^{-1}.}$$

683. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος ἐκκρεμοῦς δευτερολέπτων εἰς τὸν Ἰσημερινόν, ὅπου ἡ ἐπιτάχυνσις εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς θαλάσσης εἶναι 978,049 cm/sec^2.

Λύσις. Συμφώνως πρὸς τὴν ἐκφώνησιν τῆς ἀσκήσεως, τὸ ἐκκρεμὲς θὰ κτυπᾷ τὰ δευτερόλεπτα καὶ συνεπῶς θὰ ἔχῃ περίοδον $T = 2$ sec. Λύομεν τὸν τύπον τοῦ μαθηματικοῦ ἐκκρεμοῦς $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ ὡς πρὸς l, ὅτε εὑρίσκομεν :

$$l = \frac{T^2 \cdot g}{4\,\pi^2}$$

Θέτομεν : $T = 2$ sec καὶ $g = 978{,}049$ cm/sec², ὅτε λαμβάνομεν :

$$\underline{l = 99{,}09 \text{ cm.}}$$

684. Μαθηματικὸν ἐκκρεμὲς ἐκτελεῖ εἰς 1 min 60 πλήρεις ταλαντώσεις. Κατὰ πόσον πρέπει νὰ βραχυνθῇ, ἵνα τοῦτο ἐκτελῇ εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον 90 πλήρεις ταλαντώσεις. ($g = 981$ cm/sec².)

Λύσις. Ἔστω ὅτι εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν ἡ περίοδος τοῦ μαθηματικοῦ ἐκκρεμοῦς εἶναι T_1 καὶ τὸ μῆκος αὐτοῦ l_1 καὶ εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν ὅτι ἡ περίοδος αὐτοῦ εἶναι T_2 καὶ τὸ μῆκος αὐτοῦ l_2.

Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν θὰ ἰσχύσῃ ἡ σχέσις :

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g}} \tag{1}$$

καὶ εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν ἡ σχέσις :

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l_2}{g}} \tag{2}$$

Ἐκ τῆς (1), ἐὰν λύσωμεν ὡς πρὸς l_1, προκύπτει ὅτι :

$$l_1 = \frac{T_1^2 \cdot g}{4\pi^2} \tag{3}$$

καὶ ἐκ τῆς (2), ἐὰν λύσωμεν ὡς πρὸς l_2, προκύπτει :

$$l_2 = \frac{T_2^2 \cdot g}{4\pi^2} \tag{4}$$

Ἀφαιροῦντες τὰς ἐξισώσεις (3) καὶ (4) κατὰ μέλη λαμβάνομεν :

$$l_1 - l_2 = \frac{g}{4\pi^2}\left(T_1^2 - T_2^2\right) \tag{5}$$

ὅπου τὸ $l_1 - l_2$ εἶναι προφανῶς ἡ ζητουμένη βράχυνσις τοῦ μήκους τοῦ ἐκκρεμοῦς.

Θέτομεν εἰς τὴν (5) : $T_1 = \frac{60}{60} = 1$ sec, $T_2 = \frac{60}{90} = \frac{2}{3}$ sec καὶ $g = 981$ cm/sec², καὶ εὑρίσκομεν ὅτι :

$$\underline{l_1 - l_2 = 13{,}84 \text{ cm.}}$$

685. Ἐκκρεμὲς ἔχει περίοδον κινήσεως 2,14 sec εὑρισκόμενον εἰς ὕψος 5 km ὑπὲρ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς θαλάσσης. Ποία ἡ περίοδος τοῦ ἰδίου ἐκκρεμοῦς εἰς ὕψος 32 km ἀπὸ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς θαλάσσης. (Δίδεται ἡ ἀκτὶς τῆς Γῆς $R = 6{,}3 \cdot 10^8$ cm.)

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἡ ἄσκησις αὕτη ἔχει λυθῆ ὑποδειγματικῶς εἰς τὴν σελίδα 11 τοῦ βιβλίου.

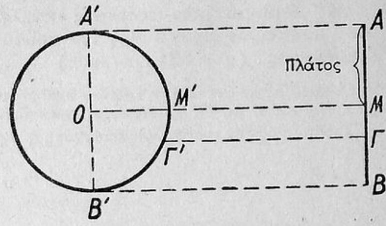
ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Β΄

686. Ἐλατήριον ἐκτελεῖ 100 πλήρεις αἰωρήσεις εἰς 5 sec. Νὰ προσδιορισθῇ ἡ περίοδος T καὶ ἡ συχνότης ν. (Ἀπ. $T = 0{,}05$ sec, $\nu = 20$ sec⁻¹.)

687. Βάρος 150 gr*, ὅταν ἐξαρτᾶται ἀπὸ ἐπίμηκες καὶ ἐλαφρὸν ἐλατήριον, διατείνεται κατὰ 40 cm. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ περίοδος τῆς κινήσεως, ὅταν μετατοπίζεται ὀλίγον πρὸς τὰ κάτω καὶ ἀκολούθως ἀφίεται ἐλεύθερον. ($g = 980$ cm/sec².)

(Ἀπ. 1,27 sec.)

688. Σῶμα μάζης 100 gr ταλαντοῦται πρὸς τὰ ἄνω καὶ κάτω κατὰ μῆκος εὐθείας γραμμῆς ΑΒ, μήκους 10 cm, καὶ ἐκτελεῖ ἁρμονικὴν κίνησιν, τῆς ὁποίας ἡ περίοδος εἶναι 2 sec. Νὰ προσδιορισθοῦν: α) Ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου ἀναφορᾶς. β) Ἡ ταχύτης ἑνὸς σημείου ἐπὶ τοῦ κύκλου ἀναφορᾶς. γ) Ἡ ταχύτης καὶ ἡ ἐπιτάχυνσις τοῦ ταλαντευομένου σώματος εἰς τὸ κέντρον Μ τῆς κινήσεως. δ) Ἡ ταχύτης καὶ ἡ ἐπιτάχυνσις εἰς τὸ ἀκραῖον σημεῖον Β. ε) Ἡ ἐπενεργοῦσα δύναμις ὅταν τὸ σῶμα εἶναι εἰς Β. στ) Ἡ ἐπενεργοῦσα δύναμις ὅταν τὸ σῶμα εἶναι μετατοπισμένον κατὰ 2 cm ἀπὸ τοῦ κέντρου Μ. (Ἀπ. α′ $r = 5$ cm. β′ $\upsilon = 15{,}7$ cm/sec. γ′ $\upsilon = 15{,}7$ cm/sec, $\gamma = 0$. δ′ $\upsilon' = 0$, $\gamma' = 49{,}3$ cm/sec^2. ε′ $F = 4\,930$ dyn. στ′ $F' = 1\,970$ dyn.)



689. Σῶμα μάζης 500 gr ἐξαρτώμενον ἐξ ἑνὸς ἐλατηρίου τίθεται εἰς ταλάντωσιν πλάτους 6 cm. Ποία ἡ ταχύτης τῆς μάζης, ὅταν διέρχεται διὰ τοῦ σημείου τοῦ ἔχοντος ἀπόκλισιν 4 cm, ἐὰν τὸ ἐλατήριον ὑφίσταται ὑπὸ δυνάμεως 200 gr* πρόσθετον ἐπιμήκυνσιν 5 cm. ($g = 10$ m/sec^2.) (Ἀπ. $\pm$ 39,6 cm/sec.)

690. Ἐκκρεμὲς ἐκτελεῖ 90 πλήρεις αἰωρήσεις ἐντὸς 1 min. Νὰ προσδιορισθῇ ἡ περίοδος καὶ ἡ συχνότης. (Ἀπ. 0,67 sec, 1,5 sec^{-1}.)

691. Ὡρολόγιον ἔχον ἐκκρεμὲς δευτερολέπτων ($T = 2$ sec) κερδίζει 2 min τὴν ἡμέραν. Ποῖον εἶναι τὸ σφάλμα εἰς τὸ μῆκος τοῦ ἐκκρεμοῦς. (Ἀπ. 1,58 cm.)

692. Εἰς μαθηματικὸν ἐκκρεμὲς μήκους 8,94 m, εὑρισκόμενον κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν $t = 0$ εἰς τὴν θέσιν ἰσορροπίας, προσδίδομεν μικρὰν ὤθησιν οὕτως ὥστε τοῦτο νὰ ἐκτελῇ ταλάντωσιν πλάτους 50 cm. α) Νὰ ὑπολογισθοῦν ἡ ἀπόκλισις, ἡ ταχύτης καὶ ἡ ἐπιτάχυνσις τοῦ σφαιριδίου κατὰ τὰς χρονικὰς στιγμὰς 1,5 sec, 3 sec καὶ 5 sec. β) Νὰ εὑρεθῇ εἰς ποίαν χρονικὴν στιγμὴν ἡ ἀπόκλισις εἶναι -25 cm. ($g = 9{,}81$ m/sec^2.) (Ἀπ. α′ 50 cm, 0 cm, $-43{,}30$ cm. 0, $-52{,}4$, 26,2 cm/sec. $-54{,}8$, 0, 47,5 cm/sec^2. β′ 3,5 sec.)

693. Ἐκκρεμὲς κτυπᾷ τὰ δευτερόλεπτα, ὅταν ἡ ἡμιπερίοδος αὐτοῦ εἶναι 1 sec. Ζητοῦνται: α) Πόσον τὸ μῆκος τοῦ ἁπλοῦ ἐκκρεμοῦς εἰς τόπον ὅπου $g = 980$ cm/sec^2. β) Πόσον εἶναι τὸ μῆκος ἁπλοῦ ἐκκρεμοῦς τὸ ὁποῖον κτυπᾷ τὸ ἥμισυ τοῦ δευτερολέπτου, δηλ. ἡ περίοδος αὐτοῦ εἶναι 1 sec, εἰς τόπον ὅπου $g = 980$ cm/sec^2. (Ἀπ. α′ 99,3 cm. β′ 24,8 cm.)

694. Δύο ἁπλᾶ ἐκκρεμῆ ἐκτελοῦν εἰς 1 πρῶτον λεπτὸν 18 καὶ 24 πλήρεις ταλαντώσεις ἀντιστοίχως, κατά τινα δὲ χρονικὴν στιγμὴν ἀμφότερα ἔχουν ταὐτοχρόνως τὸ μέγιστον τῆς ἀποκλίσεως αὐτῶν, λογιζομένης κατὰ τὴν θετικὴν διεύθυνσιν. Ζητεῖται ὁ λόγος τῶν μηκῶν l_1/l_2 τῶν δύο ἐκκρεμῶν καὶ ὁ χρόνος ὅστις παρέρχεται μέχρις ὅτου τὰ δύο ἐκκρεμῆ εὑρεθοῦν καὶ πάλιν διὰ πρώτην φορὰν ἐν φάσει. (Ἀπ. 16 : 9, 10 sec.)

695. Ἁπλοῦν ἐκκρεμὲς συνίσταται ἐκ σφαιριδίου μάζης 2 kgr, ἐξαρτωμένου εἰς τὸ ἄκρον νήματος τάσεως θραύσεως 3 kgr*. Κατὰ ποίαν γωνίαν πρέπει νὰ ἐκτοπισθῇ τὸ ἐκκρεμὲς ἐκ τῆς θέσεως ἰσορροπίας, ἵνα κατὰ τὴν κίνησιν τὸ νῆμα θραυσθῇ. (Ἀπ. 41° 25′.)

696. Ἐκκρεμὲς ὡρολόγιον ὑστερεῖ 3 min καθ' ἡμέραν. Διὰ βραχύνσεως τοῦ μήκους αὐτοῦ κατὰ 4,15 mm τοῦτο ἐγένετο καὶ πάλιν ἀκριβές. Ποῖον ἦτο τὸ ἀρχικὸν μῆκος αὐτοῦ. ('Απ. 997 mm.)

697. Τὸ μῆκος ἁπλοῦ ἐκκρεμοῦς, τὸ ὁποῖον κτυπᾷ τὸ δευτερόλεπτον, εἶναι εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς θαλάσσης 994 mm. Ζητεῖται: α) Πόση ἡ τιμὴ τοῦ g εἰς τὸν τόπον αὐτόν. β) Κατὰ πόσον πρέπει νὰ βραχυνθῇ τὸ μῆκος τοῦ νήματος, ἵνα τὸ ἐκκρεμὲς ἀναβιβαζόμενον εἰς τὸ αὐτὸ γεωγραφικὸν πλάτος εἰς ὕψος 3 500 m κτυπᾷ καὶ πάλιν τὸ δευτερόλεπτον. ('Απ. α' $g = 981{,}05$ cm/sec². β' $\Delta l = 0{,}11$ cm.)

698. 'Απλοῦν ἐκκρεμὲς μήκους 1 m ἐκτελεῖ 100 πλήρεις αἰωρήσεις εἰς 200,5 sec. α) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος τοῦ ἐκκρεμοῦς τὸ ὁποῖον εἰς τὸν τόπον τοῦτον κτυπᾷ τὸ δευτερόλεπτον. β) Πόση ἡ τιμὴ τοῦ g εἰς τὸν αὐτὸν τόπον.

('Απ. α' 99,50 cm. β' 982,06 cm/sec².)

699. 'Απλοῦν ἐκκρεμὲς ἔχει μῆκος 1 m. 'Εὰν εἰς τὴν κίνησιν τοῦ ἐκκρεμοῦς παρεμβάλωμεν ἄνωθεν τοῦ κατωτάτου σημείου τῆς τροχιᾶς καὶ καθέτως πρὸς τὸ ἐπίπεδον τῆς κινήσεως μικρὸν ραβδίον εἰς ἀπόστασιν 36 cm ἀπὸ τοῦ σφαιριδίου, ἡ σφαῖρα λόγῳ τῆς ἀδρανείας της θὰ ἐξακολουθήσῃ κινουμένη. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ χρόνος μιᾶς πλήρους αἰωρήσεως τοῦ νέου ἐκκρεμοῦς. ('Απ. 1,6 sec.)

700. 'Εκκρεμὲς μήκους $l = 4$ m αἰωρεῖται περὶ τὸ σημεῖον Ο μὲ πλάτος 5,5° εἰς τόπον ὅπου $g = 980$ cm/sec². Ζητεῖται: α) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ περίοδος τοῦ ἐκκρεμοῦς. β) Ἡ ταχύτης του ὅταν διέρχεται διὰ τῆς κατακορύφου τοῦ Ο. γ) 'Εὰν κοπῇ αἴφνης τὸ νῆμα, καθ' ἣν στιγμὴν τὸ ἐκκρεμὲς διέρχεται διὰ τῆς κατακορύφου τοῦ Ο, ἡ σφαῖρα ἐκτοξεύεται τότε μετὰ τῆς προηγουμένης ταχύτητος. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην νὰ μελετηθῇ ἡ τροχιά της καὶ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ὁριζοντία ἀπόστασις ἀπὸ τῆς κατακορύφου τοῦ Ο, ὅταν συναντᾷ τὸ ἔδαφος. Ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου Ο ἐξαρτήσεως τοῦ ἐκκρεμοῦς ἀπὸ τοῦ ἐδάφους, μετρουμένη ἐπὶ τῆς κατακορύφου τοῦ Ο, εἶναι 16,9 m. ('Απ. α' 4 sec περίπου. β' 62,62 cm/sec. γ' 111,7 cm.)

701. 'Απλοῦν ἐκκρεμές, μὴ γνωστοῦ μήκους, ἐκτελεῖ 100 αἰωρήσεις εἰς 375,6 sec. Τὸ μῆκος τοῦ ἐκκρεμοῦς ἐλαττοῦται κατὰ 50, 100, 150, 200, 250 cm καὶ εἰς ἑκάστην περίπτωσιν ἡ διάρκεια 100 αἰωρήσεων εὑρίσκεται ἀντιστοίχως 347,7, 317,4, 283,9, 254,9, 200,7 sec. Νὰ ὑπολογισθῇ γραφικῶς καὶ λογιστικῶς: α) Τὸ μῆκος τοῦ ἐκκρεμοῦς. β) Ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς βαρύτητος εἰς τὸν τόπον τοῦ πειράματος.

('Απ. α' 350 cm. β' 980 cm/sec².)

702. Πρόκειται νὰ προσδιορισθῇ ἡ ἔντασις τῆς βαρύτητος εἰς ἕνα τόπον δι' ἀναστρεψίμου ἐκκρεμοῦς, τὸ ὁποῖον αἰωρεῖται ἰσοχρόνως περὶ τοὺς δύο αὐτοῦ ἄξονας, ἀπέχοντας ἀλλήλων 143,5 cm. 'Εὰν τὸ ἐκκρεμὲς τοῦτο ἐκτελῇ 50 ἁπλᾶς αἰωρήσεις εἰς 60 sec, ποία εἶναι ἡ ζητουμένη ἔντασις τῆς βαρύτητος. ('Απ. 982,53 cm/sec².)

703. Ὁ τροχὸς ὡρολογίου ἐκτελεῖ 2 πλήρεις αἰωρήσεις ἀνὰ sec. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ μεγίστη γωνιακὴ ἐπιτάχυνσις, ὅταν οὗτος στρέφεται κατὰ 15° ἀπὸ τῆς θέσεως ἰσορροπίας καὶ ἀκολούθως ἀφίεται ἐλεύθερος. ('Απ. 41,3 rad/sec².)

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Γ'

704. Πόση εἶναι ἡ περίοδος ταλαντευομένου σωματίου τὸ ὁποῖον ἔχει ἐπιτάχυνσιν 45 cm/sec², ὅταν ἡ ἀπόκλισις αὐτοῦ εἶναι 7,5 cm.

705. Σημεῖον ἐκτελεῖ ἁπλᾶς ἁρμονικὰς ταλαντώσεις. 'Εὰν ἡ περίοδος εἶναι 0,3 sec καὶ τὸ πλάτος 30 cm, εὕρετε τὴν μεγίστην ταχύτητα καὶ τὴν μεγίστην ἐπιτάχυνσιν.

706. Μᾶζα 49 gr ἐκτελεῖ ἁρμονικὴν κίνησιν καὶ ἐκτελεῖ 4 πλήρεις αἰωρήσεις εἰς

1 sec. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐπιτάχυνσις καὶ ἡ ἐπενεργοῦσα δύναμις ἐπὶ τοῦ σώματος, ὅταν ἡ ἀπόκλισις αὐτοῦ ἀπὸ τοῦ κέντρου εἶναι 2 cm.

707. Μᾶζα 1 kgr κινεῖται κατὰ μῆκος εὐθείας μήκους 20 cm ἐκτελοῦσα ἁρμονικὴν κίνησιν μὲ περίοδον 4 sec. Νὰ προσδιορισθοῦν: α) Ὁ κύκλος ἀναφορᾶς. β) Ἡ ταχύτης σημείου ἐπὶ τοῦ κύκλου ἀναφορᾶς. γ) Ἡ ταχύτης καὶ ἡ ἐπιτάχυνσις τοῦ παλλομένου σώματος εἰς τὸ μέσον τῆς τροχιᾶς του. δ) Ἡ ταχύτης καὶ ἡ ἐπιτάχυνσις τοῦ σώματος εἰς τὸ ἄκρον τῆς τροχιᾶς. ε) Ἡ ἐπενεργοῦσα δύναμις, ὅταν τὸ σῶμα εὑρίσκεται εἰς τὸ μέσον τῆς τροχιᾶς. στ) Ἡ ἐπενεργοῦσα δύναμις, ὅταν εὑρίσκεται εἰς τὸ ἄκρον τῆς τροχιᾶς. ζ) Ἡ ἐπενεργοῦσα δύναμις, ὅταν ἡ ἀπόκλισις εἶναι 8 cm.

708. Μᾶζα 2 kgr ἐξαρτᾶται ἀπὸ σπειροειδὲς ἐλατήριον στερεωμένον μονίμως κατὰ τὸ ἓν ἄκρον αὐτοῦ. Ἡ ἐξηρτημένη μᾶζα λόγῳ τοῦ βάρους της προκαλεῖ διάτασιν τοῦ ἐλατηρίου κατὰ 20 cm. Ἐὰν ἐκτοπίσωμεν τὸ σῶμα καὶ ἀφήσωμεν αὐτὸ ἀκολούθως ἐλεύθερον, τοῦτο ἐκτελεῖ ἁπλῆν ἁρμονικὴν κίνησιν. Ζητοῦνται: α) Διὰ ποῖον λόγον τὸ σῶμα ἐκτελεῖ ἁπλῆν ἁρμονικὴν κίνησιν. β) Πῶς ἐκφράζεται ἡ κινητήριος δύναμις συναρτήσει τῆς ἀποκλίσεως. γ) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ περίοδος τῆς κινήσεως. Δεδομένον 1 kgr* $= 10^6$ dyn.

709. Μᾶζα 100 gr ἐκτελεῖ ἁπλῆν ἁρμονικὴν κίνησιν τῇ βοηθείᾳ ἐλατηρίου, τοῦ ὁποίου ἡ δύναμις ἐπαναφορᾶς εἶναι 10 000 δύναι ἀνὰ ἑκατοστόμετρον ἐπιμηκύνσεως. α) Εὕρετε τὴν περίοδον μιᾶς πλήρους ταλαντώσεως. β) Ἐὰν τὸ πλάτος τῆς ταλαντώσεως εἶναι 10 cm, εὕρετε τὴν ἀπομάκρυνσιν τῆς μάζης, ὅταν ἡ δυναμικὴ ἐνέργεια ἰσοῦται μὲ τὴν κινητικήν.

710. Σῶμα κινεῖται ἐπὶ περιφερείας κύκλου ἀκτῖνος 10 cm μὲ σταθερὰν γραμμικὴν ταχύτητα 20 cm/sec. Εὕρετε: α) Τὴν περίοδον Τ. β) Τὴν γωνιακὴν ταχύτητα. γ) Τὴν θέσιν τοῦ σώματος, ὡς πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x, $\pi/8$ sec μετὰ τὴν διέλευσιν αὐτοῦ ἀπὸ τοῦ μέσου σημείου κατὰ τὴν θετικὴν φοράν.

711. Θεωροῦμεν τὴν ἁπλῆν ἁρμονικὴν κίνησιν τῆς προβολῆς τοῦ σώματος, τοῦ προβλ. 710, ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x, ὁ ὁποῖος διέρχεται ἐκ τοῦ κέντρου τῆς περιφερείας. Εὕρετε τὴν ἀπόκλισιν x, ὅταν ἡ γωνία φάσεως εἶναι α) 45°, β) 90°, γ) 180°, δ) 225°.

712. Εὕρετε τὴν ταχύτητα υ_x τοῦ σώματος (πρόβλημα 710), ὅταν ἡ γωνία φάσεως εἶναι α) 45°, β) 90°, γ) 180°, δ) 225°. Εἰς ποῖα σημεῖα ἡ ταχύτης ἔχει μεγίστας καὶ ἐλαχίστας τιμάς. Ποία ἡ ἔννοια τῶν ἀρνητικῶν σημείων ἅτινα ἐμφανίζονται εἰς τὰς ἀπαντήσεις (γ) καὶ (δ).

713. Εὕρετε τὴν ἐπιτάχυνσιν γ_x τοῦ σώματος (πρόβλημα 710), ὅταν ἡ γωνία φάσεως εἶναι α) 45°, β) 90°, γ) 180°, δ) 225°. Ποία ἡ ἔννοια τοῦ ἀρνητικοῦ σημείου τὸ ὁποῖον ἐμφανίζεται εἰς τὴν ἐξίσωσιν τῆς ἐπιταχύνσεως.

714. Σῶμα ἐξηρτημένον εἰς τὸ κάτω ἄκρον σπειροειδοῦς ἐλατηρίου ἐκτελεῖ ἁπλῆν ἁρμονικὴν κίνησιν. Ἀνάγομεν τὴν κίνησιν ταύτην εἰς κίνησιν ὑλικοῦ σημείου ἐπὶ περιφερείας καὶ θεωροῦμεν τὴν κίνησιν ὡς πρὸς τὸν ἄξονα τῶν y. α) Εὕρετε τὴν γωνιακὴν ταχύτητα ω εἰς ἀκτίνια καὶ μοίρας. β) Μετροῦντες τὸν χρόνον ἀπὸ τὸ μέσον σημεῖον τῆς τροχιᾶς τῆς κινήσεως, εὕρετε τὴν ἀπόκλισιν y εἰς 0,5 sec, 1 sec, 2 sec.

715. Κλωβὸς μάζης 1 000 gr ἐξαρτᾶται εἰς τὸ κάτω ἄκρον σπειροειδοῦς ἐλατηρίου. Ὅταν ἓν μικρὸν πτηνὸν 200 gr κλείεται ἐντὸς αὐτοῦ, τοῦτο κατέρχεται 0,5 cm. Εὕρετε τὴν περίοδον ταλαντώσεως τοῦ κλωβίου, α) ὅταν τοῦτο εἶναι κενόν, β) ὅταν ἐντὸς αὐτοῦ εὑρίσκεται τὸ πτηνόν.

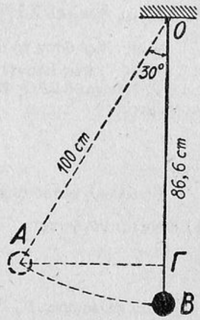
716. Πόσας πλήρεις αἰωρήσεις ἀνὰ λεπτὸν ἐκτελεῖ ἓν ἐκκρεμὲς μήκους 90 cm εἰς τόπον ὅπου $g = 980$ cm/sec^2.

717. Ἐκκρεμὲς ὡρολόγιον, ὅταν ἔχῃ κανονικὴν πορείαν, ἔχει περίοδον 1 sec. Ἐὰν τὸ ὡρολόγιον ὑστερῇ ἐντὸς εἰκοσιτετραώρου κατὰ 2,3 min, κατὰ πόσον πρέπει νὰ μεταβληθῇ τὸ μῆκος τοῦ ἐκκρεμοῦς, ἵνα τὸ ὡρολόγιον ἀποκτήσῃ κανονικὴν πορείαν.

718. Τὸ ἐκκρεμὲς ὡρολογίου ἔχει μῆκος 100 cm καὶ κτυπᾷ τὰ δευτερόλεπτα. Θὰ κερδίζῃ ἢ θὰ χάνῃ εἰς τόπον ὅπου ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς βαρύτητος εἶναι 980 cm/sec². Πόσον θὰ κερδίζῃ ἢ θὰ χάνῃ εἰς 24 ὥρας.

719. Κατὰ πόσα δευτερόλεπτα ἐντὸς μιᾶς ἡλιακῆς ἡμέρας ὀπισθοδρομεῖ ὡρολόγιον, ὅταν μετατεθῇ ἀπὸ τόπου ὅπου ἡ ἐπιτάχυνσις $g_1 = 9{,}8121$ m/sec² εἰς τὸν Ἰσημερινὸν ὅπου $g_2 = 9{,}7810$ m/sec².

720. Ἐκκρεμὲς ἔχει μῆκος 1 m καὶ ἐκτοπίζεται κατὰ 30° (βλ. σχῆμα). Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ταχύτης του εἰς τὸ κατώτερον σημεῖον.



721. Ἐκκρεμὲς ἡμίσεος δευτερολέπτου ἔχει εἰς τὸν Ἰσημερινὸν μῆκος 247,75 mm. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τοῦ g εἰς τὸν Ἰσημερινόν.

722. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ περίοδος τῆς κατακορύφου ταλαντώσεως σώματος ἐξηρτημένου ἀπὸ μακρὸν καὶ ἐλαφρὸν σπειροειδὲς ἐλατήριον εἶναι ἡ αὐτὴ πρὸς τὴν περίοδον ἁπλοῦ ἐκκρεμοῦς τοῦ ὁποίου τὸ μῆκος εἶναι ἴσον πρὸς τὴν μεγίστην ἀπόκλισιν τοῦ ἐλατηρίου τὴν ὀφειλομένην εἰς τὸ βάρος τοῦ σώματος.

723. Ὁμοιόμορφος ράβδος ἀποτελεῖ σύνθετον ἐκκρεμὲς αἰωρούμενον περὶ ὁριζόντιον ἄξονα ἀπέχοντα 15 cm ἀπὸ τοῦ ἀνωτάτου ἄκρου. α) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ περίοδος τῆς κινήσεως. β) Πόσον τὸ μῆκος τοῦ ἰσοχρόνου ἁπλοῦ ἐκκρεμοῦς. γ) Ὡς πρὸς ποῖον ἄλλο σημεῖον ἐξαρτήσεως τὸ ἐκκρεμὲς δύναται νὰ ἔχῃ τὴν αὐτὴν περίοδον κινήσεως.

724. Ὡρολόγιον ἐκκρεμὲς ἀκριβείας εὑρίσκεται εἰς τὴν ἐπιφένειαν τῆς θαλάσσης εἰς τόπον ὅπου $g = 981$ cm/sec² καὶ ἡ ἀκτὶς τῆς Γῆς $R = 6\,360$ km. Μεταφέρομεν τὸ ὡρολόγιον, ἐπὶ τῆς κατακορύφου τοῦ τόπου, εἰς ὕψος 6 360 m. Ζητεῖται νὰ προσδιορισθοῦν: α) Ἡ φορὰ καὶ ἡ τιμὴ τῆς ἡμερησίας μεταβολῆς τὴν ὁποίαν ὑφίσταται τὸ ὡρολόγιον. β) Τὸ ἀρχικὸν μῆκος του καὶ ἡ φορά, καθ' ἣν πρέπει νὰ μεταβάλωμεν τὸ μῆκος τοῦ ἐκκρεμοῦς, ἵνα διορθωθῇ ἡ παρατηρηθεῖσα μεταβολή.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Θ΄

ΤΡΙΒΗ. ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΣ

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Α΄

725. Δύναμις 10 kgr* σύρει σῶμα μάζης 10 Τ.Μ. ἐπὶ ὁριζοντίου ἐδάφους. Ὁ συντελεστὴς τριβῆς ὀλισθήσεως εἶναι $\eta = 0{,}04$. Τί κίνησις προκύπτει. ($g = 10$ m/sec².)

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν Τ τὴν ἀναπτυσσομένην τριβὴν ὀλισθήσεως, F_κ τὴν δύναμιν ἡ ὁποία ἐξασκεῖται καθέτως ἐπὶ τῶν τριβομένων ἐπιφανειῶν καὶ η τὸν συντελεστὴν τριβῆς, τότε ὁ τύπος τῆς τριβῆς εἶναι :

$$T = \eta \cdot F_\kappa \qquad (1)$$

Ἡ δύναμις ὅμως ἡ ὁποία ἐξασκεῖται καθέτως ἐπὶ τῶν τριβομένων ἐπιφανειῶν εἶναι μόνον τὸ βάρος B τοῦ σώματος καὶ ἑπομένως ἡ σχέσις (1) γράφεται :

$$T = \eta \cdot B \qquad (2)$$

Ἐκ τῆς (2), ἐὰν θέσωμεν : $B = 10 \cdot 10 = 100$ kgr* καὶ $\eta = 0{,}04$, εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἀναπτυσσομένη τριβὴ εἶναι $T = 4$ kgr*.

Ἐπειδὴ ἐπὶ τοῦ σώματος ἐξασκεῖται δύναμις $F = 10$ kgr*, ἕπεται ὅτι τὸ σῶμα θὰ κινῆται μὲ ἐπιτάχυνσιν προερχομένην ἀπὸ τὴν δύναμιν $F_1 = F - T = 10 - 4 = 6$ kgr*. Ἤτοι :

$$\underline{\gamma} = \frac{F_1}{m} = \frac{6}{10} = \underline{0{,}6 \text{ m/sec}^2}.$$

726. Πόση εἶναι ἡ ἀρχικὴ ταχύτης σώματος, τὸ ὁποῖον ἀφοῦ διανύσῃ διάστημα 100 m ἠρεμεῖ λόγῳ τριβῆς. ($\eta = 0{,}01$.)

Λύσις. Ἐφ' ὅσον τὸ σῶμα διανύει μέγιστον διάστημα s_m ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν σταθερᾶς δυνάμεως τριβῆς T, ἥτις ἐνεργεῖ κατὰ φορὰν ἀντίθετον τῆς φορᾶς τῆς ἀρχικῆς ταχύτητος υ_0, ἡ κίνησις τοῦ σώματος θὰ εἶναι ὁμαλῶς ἐπιβραδυνομένη μὲ ἐπιτάχυνσιν γ καὶ θὰ ἰσχύῃ ὁ γνωστὸς τύπος τοῦ μεγίστου διαστήματος :

$$s_m = \frac{\upsilon_0^2}{2\gamma} \qquad (1)$$

Ἐξ ἄλλου, ἐκ τοῦ θεμελιώδους νόμου τῆς Μηχανικῆς ἔχομεν : $\gamma = \frac{F}{m} = \frac{T}{m}$ καὶ οὕτω ὁ τύπος (1) δύναται νὰ γραφῇ :

$$s_m = \frac{\upsilon_0^2 \cdot m}{2T} \qquad (2)$$

Ἐὰν καλέσωμεν F_κ τὴν δύναμιν ἡ ὁποία ἐξασκεῖται καθέτως ἐπὶ τῶν τριβομένων ἐπιφανειῶν καὶ η τὸν συντελεστὴν τριβῆς, τότε, ὡς γνωστόν, ἡ τριβὴ θὰ εἶναι :

$$T = \eta \cdot F_\kappa \qquad (3)$$

ἢ ἐπειδὴ $F_\kappa = B$ (βάρος τοῦ σώματος) :

$$T = \eta \cdot B \qquad (4)$$

Βάσει τῆς σχέσεως (4) ὁ τύπος (2) γράφεται :

$$s_m = \frac{\upsilon_0^2}{2\eta \cdot g} \qquad (5)$$

Λύομεν τὴν σχέσιν (5) ὡς πρὸς υ_0 καὶ λαμβάνομεν :

$$\upsilon_0 = \sqrt{2\eta \cdot g \cdot s_m}$$

Θέτομεν : $s_m = 100$ m, $\eta = 0{,}01$ καὶ $\gamma = 10$ m/sec², καὶ εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἀρχικὴ ταχύτης τοῦ σώματος εἶναι :

$$\underline{\upsilon_0 = 4{,}43 \text{ m/sec.}}$$

727. Πόση ἡ ἀρχικὴ ταχύτης αὐτοκινήτου, ὅταν δι' ἀποτόμου λειτουργίας τῶν φρένων του ἐπὶ ὁριζοντίου ἐδάφους διανύῃ 20 m μέχρις ὅτου ἠρεμήσῃ. ($\eta = 0{,}5$, $g = 10$ m/sec².)

Λύσις. Ὅπως εἰς τὴν ἄσκησιν 726, οὕτω καὶ ἐδῶ θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις :

$$\upsilon_0 = \sqrt{2 \cdot \eta \cdot g \cdot s_m}$$

Θέτομεν : $\eta = 0{,}5$, $g = 10$ m/sec² καὶ $s_m = 20$ m, καὶ εὑρίσκομεν :

$$\underline{\upsilon_0 = 14{,}2 \text{ m/sec} = 51{,}1 \text{ km/h.}}$$

728. Αὐτοκίνητον κινούμενον ἐπὶ ὁριζοντίου ἐδάφους ὑφίσταται πέδησιν καὶ διανύει διάστημα 40 m διὰ νὰ ἠρεμήσῃ. Ἐὰν δεχθῶμεν συντελεστὴν τριβῆς ὀλισθήσεως $\eta = 0{,}5$, πόση εἶναι ἡ ἀρχικὴ ταχύτης καὶ ἡ ἐπιβράδυνσις κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς πεδήσεως. ($g = 10$ m/sec².)

Λύσις. Ὅπως εἰς τὴν ἄσκησιν 726, θὰ ἰσχύῃ καὶ ἐδῶ ἡ σχέσις:

$$\upsilon_0 = \sqrt{2 \cdot \eta \cdot g \cdot s_m} \qquad (1)$$

Θέτομεν εἰς τὸν τύπον (1): $\eta = 0{,}5$, $g = 10$ m/sec² καὶ $s_m = 40$ m, ὅτε εὑρίσκομεν:

$$\underline{\upsilon_0 = 20 \text{ m/sec}}$$

Ἡ ἐπιτάχυνσις γ εὑρίσκεται ἐκ τοῦ τύπου τοῦ μεγίστου διαστήματος $s_m = \upsilon_0^2/2\gamma$ ὅτι εἶναι:

$$\gamma = \frac{\upsilon_0^2}{2\, s_m} \qquad (2)$$

Δι' ἀντικαταστάσεως διὰ τῶν τιμῶν εἰς τὸν τύπον (2) εὑρίσκομεν:

$$\underline{\gamma = 5 \text{ m/sec}^2.}$$

729. Σῶμα μάζης 20 gr, ἐπὶ τοῦ ὁποίου ἐπενεργεῖ σταθερὰ δύναμις 800 dyn, διανύει ἐντὸς 4 sec ἐπὶ ὁριζοντίου ἐδάφους διάστημα 200 cm. Πόση εἶναι ἡ τριβή του.

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν F τὴν δύναμιν ἡ ὁποία ἐνεργεῖ ἐπὶ τοῦ σώματος καὶ T τὴν δύναμιν τριβῆς, τότε ἡ ἐπιταχύνουσα τὸ σῶμα δύναμις θὰ εἶναι $F_\varepsilon = F - T$ καὶ συνεπῶς ἡ τριβὴ θὰ εἶναι:

$$T = F - F_\varepsilon \qquad (1)$$

Ἀλλὰ ἐκ τοῦ θεμελιώδους νόμου τῆς Μηχανικῆς ἔχομεν ὅτι $F_\varepsilon = m \cdot \gamma$ καὶ συνεπῶς ἡ σχέσις (1) γράφεται:

$$T = F - m \cdot \gamma \qquad (2)$$

Ἐξ ἄλλου, ἐπειδὴ ἡ κίνησις εἶναι ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένη ἄνευ ἀρχικῆς ταχύτητος, θὰ ἰσχύῃ ὁ τύπος $s = \frac{1}{2}\gamma t^2$ ἐκ τοῦ ὁποίου προκύπτει ὅτι $\gamma = \frac{2\,s}{t^2}$ καὶ συνεπῶς ἡ σχέσις (2) γράφεται:

$$T = F - \frac{m \cdot 2\,s}{t^2} \qquad (3)$$

Θέτομεν: $m = 20$ gr, $s = 200$ cm, $t = 4$ sec καὶ $F = 800$ dyn, καὶ εὑρίσκομεν:

$$\underline{T = 300 \text{ dyn.}}$$

730. Πόση δύναμις ἀπαιτεῖται, ἵνα μεταδοθῇ εἰς ὄχημα βάρους 18 ton* καὶ ἐπὶ ὁριζοντίου ἐδάφους ἐντὸς 1 min ταχύτης ἐκ τῆς ἠρεμίας ἴση πρὸς 10 m/sec. ($\eta = 0{,}005$, $g = 10$ m/sec².)

Λύσις. Ἡ ἀπαιτουμένη δύναμις F θὰ εἶναι ἴση μὲ τὴν ἐπιταχύνουσαν δύναμιν F_ε σὺν τὴν δύναμιν ἡ ὁποία καταβάλλεται πρὸς ὑπερνίκησιν τῆς τριβῆς T, ἤτοι:

$$F = F_\varepsilon + T \qquad (1)$$

Ἐὰν καλέσωμεν m τὴν μᾶζαν τοῦ ὀχήματος καὶ γ τὴν ἐπιτάχυνσιν τὴν ὁποίαν προσλαμβάνει τοῦτο ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς δυνάμεως F_ε, τότε ἐκ τοῦ θεμελιώδους νόμου τῆς Μηχανικῆς ἔχομεν:

$$F_\varepsilon = m \cdot \gamma \quad \text{ἢ} \quad F_\varepsilon = m \cdot \frac{\upsilon}{t} \qquad (2)$$

Ἐπίσης, ἐὰν καλέσωμεν F_κ τὴν κάθετον δύναμιν, ἐπειδὴ ἡ καθέτως ἐξασκουμένη δύναμις ἐπὶ τῶν τριβομένων ἐπιφανειῶν εἶναι μόνον τὸ βάρος τοῦ σώματος, ὁ τύπος τῆς τριβῆς: $T = \eta \cdot F_\kappa$ γράφεται:

$$T = \eta \cdot m \cdot g \qquad (3)$$

Λόγῳ τῶν σχέσεων (2) καὶ (3) ἡ σχέσις (1) δύναται τώρα νὰ γραφῇ :

$$F = \frac{m \cdot \upsilon}{t} + \eta \cdot m \cdot g \qquad (4)$$

Ἐργαζόμενοι εἰς τὸ Τεχνικὸν Σύστημα, θέτομεν εἰς τὴν (4) : $m = 18\,000$ kgr $= 1\,800$ Τ.Μ. μάζης, $\upsilon = 10$ m/sec, $g = 10$ m/sec², $t = 60$ sec, $\eta = 0{,}005$, καὶ εὑρίσκομεν :

$$\underline{F = 390 \text{ kgr}^*.}$$

731. Αὐτοκίνητον βάρους 1 000 kgr* κινεῖται ἐπὶ ὁριζοντίου δρόμου ὑπὸ ταχύτητα 72 km/h. Ποίαν ἰσχὺν ἀποδίδει ὁ κινητήρ του, ὅταν $\eta = 0{,}02$ καὶ ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀέρος ἀντιστοιχῇ εἰς δύναμιν 10 kgr*.

Λύσις. Ἐφ' ὅσον τὸ αὐτοκίνητον κινεῖται μὲ σταθερὰν ταχύτητα ἐπὶ ὁριζοντίου δρόμου, ἡ δύναμις τοῦ κινητῆρος θὰ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῆς τριβῆς Τ καὶ τῆς ἀντιστάσεως τοῦ ἀέρος F'. Ἤτοι :

$$F = T + F' \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ ὅμως ἡ τριβὴ εἶναι : $T = \eta \cdot F_\kappa = \eta \cdot B$, ἡ σχέσις (1) γράφεται :

$$F = \eta \cdot B + F' \qquad (2)$$

Ἡ ἰσχὺς τοῦ κινητῆρος θὰ εἶναι :

$$N = \frac{A}{t} = \frac{F \cdot s}{t} = F \cdot \upsilon \qquad (3)$$

ὅπου υ ἡ ταχύτης μὲ τὴν ὁποίαν κινεῖται τὸ αὐτοκίνητον. Ἡ σχέσις (3) λόγῳ τῆς σχέσεως (2) γράφεται :

$$N = (\eta \cdot B + F') \cdot \upsilon \qquad (4)$$

Ἐργαζόμενοι εἰς τὸ Τεχνικὸν Σύστημα θέτομεν εἰς τὴν σχέσιν (4) : $B = 1\,000$ kgr*, $\eta = 0{,}02$, $F' = 10$ kgr* καὶ $\upsilon = 72$ km/h $= 20$ m/sec, καὶ εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ζητουμένη ἰσχὺς εἶναι :
$N = (0{,}02 \cdot 1\,000 + 10) \cdot 20 = 600$ kgr*m/sec ἢ δεδομένου ὅτι 1 PS = 75 kgr*m/sec :

$$\underline{N = 8 \text{ PS}.}$$

732. Σῶμα μάζης 1 kgr εὑρίσκεται ἐπὶ ὁριζοντίου ἐπιπέδου. Ἐπὶ τοῦ σώματος προσαρμόζομεν ὁριζόντιον σχοινίον, τὸ ὁποῖον διέρχεται διὰ τροχαλίας ἄνευ τριβῆς καὶ φορτίζεται κατὰ τὸ ἕτερον ἄκρον αὐτοῦ ὑπὸ βάρους 400 gr*. Ζητεῖται: α) Πόση θὰ ἦτο ἡ ἐπιτάχυνσις τοῦ σώματος, ἐὰν τὸ ἐπίπεδον δὲν παρουσιάζῃ τριβήν. β) Πόση ἡ ἐπιτάχυνσις, ὅταν $\eta = 0{,}2$. ($g = 981$ cm/sec².)

Λύσις. Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν, ἐπειδὴ ἡ κίνησις διεξάγεται ἄνευ τριβῶν, ἡ ἐπιταχύνουσα τὸ σύστημα δύναμις F_ε εἶναι τὸ βάρος $m \cdot g$ τοῦ φορτίου καὶ θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις :

$$F_\varepsilon = m \cdot g = (M + m) \cdot \gamma \qquad (1)$$

ὅπου Μ ἡ μᾶζα τοῦ σώματος καὶ m ἡ μᾶζα τοῦ φορτίου. Λύομεν τὴν σχέσιν (1) ὡς πρὸς γ καὶ λαμβάνομεν :

$$\gamma = \frac{m}{M + m} \cdot g \qquad (2)$$

Θέτομεν εἰς τὴν σχέσιν (2) : $M = 10^3$ gr, $m = 400$ gr καὶ $g = 981$ cm/sec², καὶ εὑρίσκομεν :

$$\underline{\gamma = 280 \text{ cm/sec}^2.}$$

Εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν, ἐὰν καλέσωμεν γ_1 τὴν ζητουμένην ἐπιτάχυνσιν, τότε ἡ ἐπιταχύνουσα τὸ σύστημα δύναμις θὰ εἶναι :

$$F'_\varepsilon = (M + m) \cdot \gamma_1 \qquad (3)$$

λύοντες δὲ ὡς πρὸς τὴν ζητουμένην ἐπιτάχυνσιν θὰ ἔχωμεν :

$$\gamma_1 = \frac{F'_\varepsilon}{M + m} \qquad (4)$$

Ἡ ἐπιταχύνουσα ὅμως τὸ σύστημα δύναμις εἶναι $F'_\varepsilon = \beta - T = \beta - \eta \cdot B$, ὅπου β τὸ βάρος τοῦ φορτίου, Β τὸ βάρος τοῦ σώματος καὶ η ὁ συντελεστὴς τριβῆς, καὶ συνεπῶς ἡ σχέσις (4) γράφεται :

$$\gamma_1 = \frac{\beta - \eta \cdot B}{M + m} = \frac{m - \eta \cdot M}{M + m} \cdot g \qquad (5)$$

Ἐκ τῆς σχέσεως (5), ἐὰν θέσωμεν τὰ δεδομένα : $m = 400$ gr, $M = 1\,000$ gr, $\eta = 0{,}2$ καὶ $g = 981$ cm/sec², εὑρίσκομεν :

$$\underline{\gamma_1 = 140 \text{ cm/sec}^2.}$$

733. Αὐτοκίνητον κινεῖται ἐπὶ ἀσφαλτικοῦ αὐτοκινητοδρόμου καὶ ἐπιδιώκει νὰ διαγράψῃ καμπύλην διαδρομὴν ἀκτῖνος 10 m. Πόση ἡ ἀνωτέρα ἐπιτρεπομένη ταχύτης, τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ ἀναπτύξῃ ὁ ὁδηγός, δεδομένου ὅτι $\eta = 0{,}3$. ($g = 10$ m/sec².)

Λύσις. Διὰ νὰ διαγράψῃ τὸ αὐτοκίνητον τὴν καμπύλην μὲ ἀσφάλειαν, πρέπει ἡ κεντρομόλος δύναμις F_κ , ἥτις ἐνεργεῖ ἐπὶ τοῦ αὐτοκινήτου, νὰ εἶναι τοὐλάχιστον ἴση μὲ τὴν τριβὴν Τ. Ἤτοι $F_\kappa = T$. Ἐπειδὴ ὅμως $F_\kappa = \frac{m \cdot \upsilon^2}{r}$ καὶ $T = \eta \cdot m \cdot g$, θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις :

$$\frac{\upsilon^2}{r} = \eta \cdot g$$

Συνεπῶς ἡ ἐπιτρεπομένη ἐλαχίστη ταχύτης θὰ εἶναι :

$$\upsilon_{\dot{\epsilon}\lambda.} = \sqrt{\eta \cdot g \cdot r}$$

Θέτομεν εἰς τὴν σχέσιν ταύτην : $\eta = 0{,}3$; $g = 10$ m/sec² καὶ $r = 10$ m, ὅτε εὑρίσκομεν:

$$\underline{\upsilon_{\dot{\epsilon}\lambda.} = 5{,}4 \text{ m/sec.}}$$

734. Ἄνθρωπος δύναται ἐπὶ βραχὺ χρονικὸν διάστημα ν' ἀναπτύξῃ δύναμιν 70 kgr*. Μὲ τὴν δύναμιν ταύτην ἐκσφενδονίζει ὁριζοντίως ἐπὶ παγωμένης λίμνης τεμάχιον πάγου μάζης 8 kgr. Ἐὰν κατὰ τὴν ἐκσφενδόνισιν ἡ χεὶρ διαγράφῃ διάστημα 120 cm, ἐπὶ πόσον χρόνον θὰ κινῆται ὀλισθαῖνον τὸ τεμάχιον πάγου ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς παγωμένης λίμνης, ὅταν ὁ συντελεστὴς τριβῆς ὀλισθήσεως εἶναι $\eta = 0{,}02$. ($g = 10$ m/sec².)

Λύσις. Ἔστω ὅτι ὁ πάγος ἐκσφενδονίζεται ὑπὸ ἀρχικὴν ταχύτητα υ_0 καὶ κινεῖται ἐπὶ χρόνον t, ἕως ὅτου ἠρεμήσῃ ἐπὶ τῆς παγωμένης λίμνης. Ἐπειδὴ ἐπὶ τοῦ πάγου θὰ ἐξασκῆται ἀντιθέτως-πρὸς τὴν ταχύτητα αὐτοῦ ἡ σταθερὰ δύναμις Τ τῆς τριβῆς, ἡ κίνησις αὐτοῦ θὰ εἶναι ὁμαλῶς ἐπιβραδυνομένη καὶ θὰ ἰσχύῃ ὁ γνωστὸς τύπος τοῦ μεγίστου χρόνου :

$$t = \frac{\upsilon_0}{\gamma} \qquad (1)$$

Ἡ ἀρχικὴ ταχύτης υ_0 θὰ εἶναι ἡ τελικὴ ταχύτης τὴν ὁποίαν ἀποκτᾷ ὁ πάγος ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς δυνάμεως F τὴν ὁποίαν ἐξασκεῖ ἡ χεὶρ τοῦ ἀνθρώπου καὶ συνεπῶς, ἐὰν καλέσωμεν γ_1 τὴν ἐπιτάχυνσιν καὶ s τὸ διάστημα τὸ ὁποῖον διανύει ὁ πάγος ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς δυνάμεως F, θὰ ἔχωμεν :

$\upsilon_0 = \sqrt{2\gamma_1 \cdot s}$ ἢ ἐπειδὴ $\gamma_1 = \frac{F}{m}$

$$\upsilon_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot F \cdot s}{m}} \qquad (2)$$

Οὕτω ἡ σχέσις (1) γράφεται :

$$t = \frac{\sqrt{\frac{2F \cdot s}{m}}}{\gamma} \qquad (3)$$

Ἡ ἐπιβράδυνσις ὅμως γ, ἡ ὁποία προέρχεται ἀπὸ τὴν τριβὴν Τ, θὰ εἶναι $\gamma = \frac{T}{m}$, ἢ ἐπειδὴ $T = \eta \cdot B = \eta \cdot m \cdot g$ θὰ εἶναι :

$$\gamma = \frac{\eta \cdot B}{m} = \eta \cdot g \qquad (4)$$

Οὕτω λόγῳ τῆς σχέσεως (4) ἡ (3) δύναται τώρα νὰ γραφῇ :

$$t = \frac{\sqrt{\frac{2F \cdot s}{m}}}{\eta \cdot g} \qquad (5)$$

Ἐκ τῆς σχέσεως (5) ἐργαζόμενοι εἰς τὸ Τεχνικὸν Σύστημα καὶ θέτοντες : $F = 70$ kgr*, $m = 0{,}8$ Τ.Μ. μάζης, $s = 1{,}2$ m, $g = 10$ m/sec², εὑρίσκομεν :

$$\underline{t = 72{,}5 \text{ sec.}}$$

735. Ἐλαστικὴ ράβδος μήκους 4 m καὶ τομῆς 0,5 cm² ἐπιμηκύνεται κατὰ 1 mm, ὅταν ἐξαρτηθῇ ἀπὸ αὐτὴν βάρος 225 kgr*. Πόσον τὸ μέτρον ἐλαστικότητος τῆς ράβδου. ($g = 10$ m/sec².)

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν Δl τὴν ἐπιμήκυνσιν τὴν ὁποίαν ὑφίσταται ἡ ράβδος, E τὸ μέτρον ἐλαστικότητος, F τὴν τείνουσαν δύναμιν, S τὸ ἐμβαδὸν τῆς τομῆς τῆς ράβδου καὶ l τὸ μῆκος αὐτῆς, τότε κατὰ τὸν νόμον τοῦ Hooke θὰ ἔχωμεν τὴν σχέσιν :

$$\Delta l = \frac{1}{E} \cdot \frac{F}{S} \cdot l \qquad (1)$$

ἐξ ἧς λύοντες ὡς πρὸς E λαμβάνομεν :

$$E = \frac{F \cdot l}{\Delta l \cdot S} \qquad (2)$$

Ἐργαζόμενοι εἰς τὸ σύστημα C.G.S. θέτομεν εἰς τὸν τύπον (2) : $F = 225 \cdot 10^6$ dyn, $l = 400$ cm, $S = 0{,}5$ cm², $\Delta l = 0{,}1$ cm, καὶ εὑρίσκομεν ὅτι τὸ μέτρον ἐλαστικότητος εἶναι :

$$\underline{E = 18 \cdot 10^{11} \text{ dyn/cm}^2.}$$

736. Ἡ διάμετρος ὀρειχαλκίνης ράβδου εἶναι 6 mm. Ζητεῖται πόση δύναμις εἰς dyn δύναται νὰ προκαλέσῃ ἐπιμήκυνσιν αὐτῆς κατὰ 0,20 % τοῦ μήκους της. (Μέτρον ἐλαστικότητος ὀρειχάλκου $9 \cdot 10^{11}$ dyn/cm².)

Λύσις. Ἐπιμήκυνσις 0,2 % ἰσοῦται μὲ ἐπιμήκυνσιν 2 ‰, τοῦτο δὲ σημαίνει ὅτι, ἐὰν ἡ ράβδος ἔχῃ μῆκος l, τότε ἡ ἐπιμήκυνσις αὐτῆς εἶναι $\Delta l = 0{,}002\, l$. Ἐπίσης, ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ ράβδος ἔχει ἀκτῖνα τομῆς r, τότε τὸ ἐμβαδὸν τῆς τομῆς θὰ εἶναι $S = 4\pi r^2$ καὶ συνεπῶς ὁ τύπος :

$$\Delta l = \frac{1}{E} \cdot \frac{F}{S} \cdot l \quad \text{(νόμος τοῦ Hooke)}$$

δύναται νὰ γραφῇ :

$$0{,}002\, l = \frac{1}{E} \cdot \frac{F}{\pi r^2} \cdot l$$

Ἐκ τῆς σχέσεως ταύτης λύοντες ὡς πρὸς F λαμβάνομεν :

$$F = 0{,}002 \cdot E \cdot 4\pi r^2$$

καὶ ἀφοῦ θέσωμεν : $E = 9 \cdot 10^{11}$ dyn/cm² καὶ $r = 0{,}3$ cm, εὑρίσκομεν :

$$\underline{F = 5{,}1 \cdot 10^8 \text{ dyn.}}$$

737. Ράβδος ἐκ σιδήρου μήκους 4 m καὶ τομῆς 1 cm² ἐπιμηκύνεται κατὰ 0,46 mm, διὰ φορτίου 100 kgr*. Πόσον τὸ μέτρον ἐλαστικότητος τοῦ σιδήρου εἰς kgr*/mm² καὶ dyn/cm².

Λύσις. Ἐκ τοῦ γνωστοῦ νόμου τοῦ Hooke ἔχομεν τὸν τύπον $\Delta l = \frac{1}{E} \cdot \frac{F}{S} \cdot l$, ἐὰν δὲ λύσωμεν αὐτὸν ὡς πρὸς E, λαμβάνομεν :

$$E = \frac{F \cdot l}{\Delta l \cdot S}$$

Θέτομεν: $l = 4 \cdot 10^3$ mm, $S = 10^2$ mm², $\Delta l = 46 \cdot 10^{-2}$ mm, $F = 10^3$ kgr*, καὶ εὑρίσκομεν:

$$\underline{E = 87 \cdot 10^2 \text{ kgr*/mm}^2.}$$

Διὰ νὰ μετατρέψωμεν τὴν τιμὴν τοῦ μέτρου ἐλαστικότητος ἀπὸ kgr*/mm² εἰς dyn/cm², τρέπομεν τὰ kgr* εἰς dyn (1 kgr* = 981 000 dyn) καὶ τὰ mm² εἰς cm² (1 mm = 10^{-2} cm²). Οὕτω θὰ ἔχωμεν:

$$\underline{E = 8{,}5 \cdot 10^{11} \text{ dyn/cm}^2.}$$

738. Κατακορύφως ἐξηρτημένον σπειροειδὲς ἐλατήριον ἐπιμηκύνεται κατὰ 8 cm ὑπὸ βάρους 120 gr*. Πόση ἡ σταθερὰ τοῦ ἐλατηρίου καὶ πόσον τὸ βάρος ἐξηρτημένου σώματος, τὸ ὁποῖον διατείνει τὸ ἐλατήριον κατὰ 14,6 cm.

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν F τὴν τείνουσαν τὸ ἐλατήριον δύναμιν καὶ Δl τὴν ἐπιμήκυνσιν τοῦ ἐλατηρίου, τότε, ἐφ' ὅσον δὲν ὑπερβαίνομεν τὸ ὅριον ἐλαστικότητος, ἰσχύει ἡ σχέσις $F = k \cdot \Delta l$, ὅπου k εἶναι ἡ σταθερὰ τοῦ ἐλατηρίου. Ἐκ τῶν δεδομένων τῆς ἀσκήσεως ἐξάγεται ὅτι:

$$\underline{k} = \frac{F}{\Delta l} = \frac{120}{8} = \underline{15 \text{ gr*/cm.}}$$

Ἐὰν τώρα καλέσωμεν Β τὸ βάρος τὸ ὁποῖον ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ ἐλατηρίου καὶ ἐπιμηκύνει τοῦτο κατὰ Δl_1, θὰ ἔχωμεν:

$$B = k \cdot \Delta l_1$$

Θέτομεν: $k = 15$ gr*/cm, $\Delta l_1 = 14{,}6$ cm, καὶ εὑρίσκομεν:

$$\underline{B = 219 \text{ gr*}.}$$

739. Σύρμα χαλύβδινον μήκους 4 m καὶ τομῆς 2 mm² ἐξηρτημένον μονίμως κατὰ τὸ ἓν ἄκρον ὑφίσταται κατὰ τὸ ἕτερον ἄκρον δύναμιν 40 kgr*. Τὸ μέτρον ἐλαστικότητος εἶναι $2{,}2 \cdot 10^4$ kgr*/mm². Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐπιμήκυνσις τοῦ σύρματος.

Λύσις. Ἐὰν εἰς τὸν γνωστὸν τύπον:

$$\Delta l = \frac{1}{E} \cdot \frac{F}{S} \cdot l \qquad \text{(νόμος τοῦ Hooke)}$$

θέσωμεν: $E = 2{,}2 \cdot 10^4$ kgr*/mm², $l = 4 \cdot 10^3$ mm, $S = 2$ mm² καὶ $F = 40$ kgr*, εὑρίσκομεν:

$$\underline{\Delta l = 3{,}64 \text{ mm.}}$$

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Β΄

740. Ἄνθρωπος κρατεῖ βιβλίον βάρους 3 kgr* μεταξὺ τῶν παλαμῶν του καὶ δὲν τὸ ἀφίνει νὰ πέσῃ πιέζων ἀμφοτέρας τὰς παλάμας του ὁριζοντίως. Ἐὰν ἡ δύναμις ἡ ἐξασκουμένη ὑπὸ ἑκάστης παλάμης εἶναι 7,5 kgr*, ποῖος ὁ συντελεστὴς τριβῆς μεταξὺ βιβλίου καὶ παλαμῶν. (Ἀπ. 0,20.)

741. Ἕλκηθρον βάρους 100 kgr* φθάνει εἰς τοὺς πρόποδας λόφου μὲ ταχύτητα 12,2 m/sec. Ὁ συντελεστὴς τριβῆς ὀλισθήσεως μεταξὺ ἑλκήθρου καὶ ὁριζοντίας ἐπιφανείας τῆς χιόνος εἶναι 0,03. Ποῖον διάστημα θὰ διανύσῃ τὸ ἕλκηθρον ἐπὶ τῆς χιόνος. (Ἀπ. 251,17 m.)

742. Πιάνο βάρους 500 kgr* σύρεται ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου δαπέδου κατὰ 6 m ὑπὸ ὁριζοντίας δυνάμεως 75 kgr*. Εὕρετε τὸν συντελεστὴν τῆς τριβῆς ὀλισθήσεως. Τί συνέβη εἰς τὴν καταναλωθεῖσαν ἐνέργειαν; (Ἀπ. 0,15).

743. Κιβώτιον βάρους 150 kgr* κινεῖται κατὰ μῆκος ὁριζοντίου δαπέδου συρόμενον ὑπὸ σχοινίου προσδεδεμένου εἰς τὴν ἐμπροσθίαν πλευρὰν αὐτοῦ. Ἐὰν τὸ σχοινίον σχηματίζῃ γωνίαν 30° μὲ τὸ δάπεδον καὶ ὁ συντελεστὴς τριβῆς ὀλισθήσεως μεταξὺ κιβωτίου καὶ δαπέδου εἶναι 0,4, εὕρετε τὴν δύναμιν τὴν ἐξασκουμένην ὑπὸ ἀνθρώπου ἕλκοντος τὸ σχοινίον. (Ἀπ. 56,3 kgr*.)

744. Κινητὸν διανύει 35 m κατερχόμενον κατὰ μῆκος κεκλιμένου ἐπιπέδου. Πόση εἶναι ἡ διάρκεια τῆς τροχιᾶς ταύτης, γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ ὁριζοντία προβολὴ τοῦ διανυθέντος διαστήματος εἶναι 18 m καὶ ὁ συντελεστὴς τριβῆς ὀλισθήσεως 0,20. (Ἀπ. 3,07 sec.)

745. Νὰ εὑρεθῇ ὁ συντελεστὴς τριβῆς ὀλισθήσεως κατὰ τὴν ἐκκίνησιν τεμαχίου χυτοσιδήρου ὀλισθαίνοντος ἐπὶ χυτοσιδήρου, γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἵνα παραχθῇ κίνησις ὀλισθήσεως τεμαχίου χυτοσιδήρου ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου ἐκ χυτοσιδήρου πρέπει ἡ κλίσις αὐτοῦ νὰ εἶναι 9°. (Ἀπ. $\eta = 0{,}158$.)

746. Ἡ δύναμις ἕλξεως ἐπὶ τῆς ράβδου συνδέσεως ἁμαξοστοιχίας ἡ ὁποία σύρει δύο ὀχήματα 15 ton*, εἶναι 4 500 kgr*. Γνωστοῦ ὄντος ὅτι ὁ συντελεστὴς τριβῆς εἰς τὴν ἕλξιν εἶναι 0,004, νὰ ὑπολογισθοῦν ὁ χρόνος καὶ τὸ διάστημα τὰ ὁποῖα χρειάζεται ἡ ἁμαξοστοιχία, ἵνα ὁριζοντίως κινουμένη ἀποκτήσῃ ταχύτητα 72 km/h. (Ἀπ. 185 sec, 1 848 m.)

747. Ἐπὶ σώματος βάρους 2 kgr*, τὸ ὁποῖον ἠρεμεῖ ἐπὶ ὁριζοντίου ἐδάφους, ἐπενεργεῖ δύναμις 800 gr* ἐπὶ 8 sec. Τὸ σῶμα κινεῖται ὀλισθαῖνον, ὁ δὲ συντελεστὴς τριβῆς ὀλισθήσεως εἶναι 0,2. Ζητεῖται: α) Πόσον διάστημα θὰ διανύσῃ τὸ σῶμα ἐντὸς 8 sec. β) Ἐὰν κατὰ τὸ τέλος τοῦ ὀγδόου sec παύσῃ νὰ ἐπενεργῇ ἡ κινητήριος δύναμις, πόσον ἐπὶ πλέον διάστημα θὰ διανύσῃ τὸ σῶμα. ($g = 10\ \text{m/sec}^2$.) (Ἀπ. α′ 64 m. β′ 64 m.)

748. Συρμὸς βάρους 400 ton* ἀνέρχεται ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου μὲ ταχύτητα 54 km/h. Κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς ἀνόδου οἱ κινητῆρες λειτουργοῦν ὑπὸ ἰσχὺν 2 400 PS καὶ ὁ συντελεστὴς τριβῆς εἶναι 0,005. Ποία ἡ κλίσις τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου. (Ἀπ. 25 ‰.)

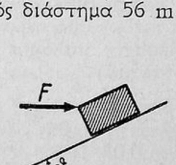
749. Ποία ἡ μέση ἰσχύς, ἡ ἀναπτυσσομένη ὑπὸ τροχιοδρομικοῦ ὀχήματος μεταφέροντος 60 ἐπιβάτας εἰς διάστημα 600 m ἐντὸς 3 min. Τὸ βάρος τοῦ ὀχήματος εἶναι 14 ton*, τὸ μέσον βάρος ἑκάστου ἐπιβάτου 70 kgr*, ἡ κλίσις τοῦ ἐδάφους 50 ‰ καὶ ὁ συντελεστὴς τριβῆς 0,01. (Ἀπ. N = 48,5 PS.)

750. Χιονοδρόμος βάρους 70 kgr* κατέρχεται ἄνευ ἀρχικῆς ταχύτητος ὕψωμα ὕψους 10 m, εἰς τὴν βάσιν τοῦ ὁποίου ἄρχεται ἀμέσως ἀνωφέρεια, ἐπὶ τῆς ὁποίας οὗτος, λόγῳ τῆς κεκτημένης ταχύτητος, ἀνέρχεται εἰς ὕψος 6 m. Ποία ἡ μέση δύναμις τριβῆς, ἐὰν ὁ χιονοδρόμος διέτρεξε συνολικῶς διάστημα 56 m. (Ἀπ. 5 kgr*.)

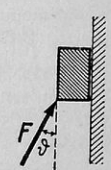
751. Εἰς τὸ σχῆμα (α) νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ὁριζοντία δύναμις F ἡ ἀπαιτουμένη διὰ νὰ ἐκκινήσῃ τὸ σῶμα, βάρους B, ἀνερχόμενον ἐπὶ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου, παρέχεται ὑπὸ τοῦ τύπου:

$$F = B \cdot \frac{\eta \cdot \text{συν}\,\theta + \text{ημ}\,\theta}{\text{συν}\,\theta - \eta \cdot \text{ημ}\,\theta}$$

καὶ ὅτι ἡ δύναμις F_κ ἡ ἀσκουμένη καθέτως ἐπὶ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου εἶναι: $F_\kappa = B / (\text{συν}\,\theta - \eta \cdot \text{ημ}\,\theta)$.



(α)



(β)

752. Εἰς τὸ σχῆμα (β), πόση δύναμις F ἐνεργοῦσα ὑπὸ γωνίαν θ = 30°

ἀπαιτεῖται διὰ νὰ ἐμποδίσῃ σῶμα 15 kgr* τοῦ νὰ ὀλισθαίνῃ κατακορύφως πρὸς τὰ κάτω ἐπὶ κατακορύφου τοίχου, ἐὰν $\eta = 0{,}44$. Πόση δύναμις ἀπαιτεῖται διὰ νὰ ἀνέρχεται τὸ σῶμα πρὸς τὰ ἄνω. ('Απ. 13,8 kgr*, 23,2 kgr*.)

753. Σῶμα βάρους $B = 10$ kgr* κινεῖται εὐθυγράμμως, ὀλισθαῖνον ἐπὶ ὁριζοντίου ἐπιπέδου, μὲ ἐπιτάχυνσιν $\gamma = 380$ cm/sec², τῇ ἐπενεργείᾳ δυνάμεως $F = 6$ kgr*, σχηματιζούσης γωνίαν 45^o μετὰ τῆς ὁριζοντίας διευθύνσεως τῆς κινήσεως πρὸς τὰ ἄνω. Νὰ εὑρεθῇ ὁ συντελεστὴς τριβῆς μεταξὺ σώματος καὶ ἐπιπέδου. ('Απ. 0,07.)
(Ε. Μ. Πολυτεχνεῖον, Σχολαὶ 'Αρχιτεκτόνων - Τοπογράφων, 1955.)

754. Σύρμα διαμέτρου 3 mm συνίσταται ἀπὸ ἓν ἐξωτερικὸν περίβλημα νικελίου καὶ ἀπὸ τὸν ἐσωτερικὸν κορμὸν ἐκ χαλκοῦ διαμέτρου 2 mm. 'Εὰν τὸ σύρμα ἔχῃ μῆκος 4 m καὶ εἰς τὸ κάτω ἄκρον αὐτοῦ ἐξαρτήσωμεν μᾶζαν 10 kgr, ποία θὰ εἶναι ἡ ἐπιμήκυνσις. (Τὸ μέτρον τοῦ Young διὰ τὸ νικέλιον εἶναι $20 \cdot 10^{11}$ dyn/cm², διὰ τὸν χαλκὸν $12 \cdot 10^{11}$ dyn/cm².) ('Απ. 0,0353 cm.)

755. Δύο σύρματα, τὸ ἓν ἐκ χαλκοῦ καὶ τὸ ἄλλο ἐκ σιδήρου, ἕκαστον διαμέτρου 1 mm, ἑνοῦνται ἐν σειρᾷ. Τὸ χάλκινον σύρμα ἔχει μῆκος 2 m καὶ τὸ σιδηροῦν 3 m. 'Εὰν τὸ μέτρον τοῦ Young εἶναι διὰ τὸν χαλκὸν $12 \cdot 10^{11}$ dyn/cm² καὶ διὰ τὸν σίδηρον $19 \cdot 10^{11}$ dyn/cm², ποία θὰ εἶναι ἡ ὁλικὴ ἐπιμήκυνσις, ὅταν μᾶζα 2 kgr ἀναρτηθῇ εἰς τὸ κάτω ἄκρον τοῦ σύρματος. ('Απ. 0,081 cm.)

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Γ'

756. Ἄνθρωπος ἐξασκεῖ ὁριζοντίαν δύναμιν $80 \cdot 10^5$ dyn ἐπὶ κιβωτίου μάζης 30 kgr ὠθῶν τοῦτο ὁριζοντίως ἐπὶ ἐδάφους. 'Εὰν τὸ κιβώτιον ὑφίσταται ἐπιτάχυνσιν 0,5 m/sec², νὰ ὑπολογισθῇ ὁ συντελεστὴς τριβῆς μεταξὺ κιβωτίου καὶ ἐδάφους. Πόσην δύναμιν ἐξασκεῖ τὸ κιβώτιον ἐπὶ τοῦ ἀνθρώπου. Πόσην ὁριζοντίαν δύναμιν ἐξασκεῖ τὸ κιβώτιον ἐπὶ τοῦ ἐδάφους.

757. 'Επὶ ἁμαξίου μάζης 30 kgr κινουμένου ἐπὶ ὁριζοντίου ἐπιπέδου ἐξασκεῖ ἄνθρωπος ὁριζοντίαν δύναμιν. 'Εὰν τὸ ἁμάξιον ὑφίσταται τὴν ἐπιτάχυνσιν 0,5 m/sec² καὶ ἐὰν ὁ συντελεστὴς τριβῆς μεταξὺ ἁμαξίου καὶ ἐδάφους εἶναι 0,2, πόσην δύναμιν ἐξασκεῖ ὁ ἄνθρωπος. Πόσην δύναμιν ἐξασκεῖ τὸ ἁμάξιον ἐπὶ τοῦ ἀνθρώπου.

758. Σῶμα βάρους 10 kgr* ἐκσφενδονίζεται ὁριζοντίως ἐπὶ ἐδάφους ὑπὸ ταχύτητα 25 m/sec. Ὁ συντελεστὴς τριβῆς μεταξὺ σώματος καὶ ἐδάφους εἶναι 0,25. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ χρόνος καὶ ἡ ἀπόστασις μέχρις ὅτου τὸ σῶμα ἠρεμήσῃ.

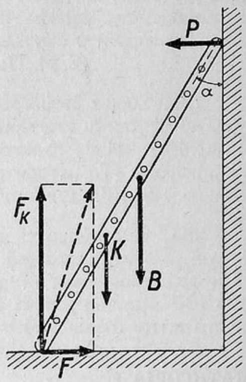
759. Αὐτοκίνητον μάζης 1 250 kgr διαγράφει κύκλον ἀκτῖνος 90 m ἐπὶ ἐπιπέδου ἐδάφους. 'Εὰν ἡ κεντρομόλος δύναμις προέρχεται μόνον ἐκ τριβῆς, πόση ἡ μεγίστη ταχύτης τοῦ αὐτοκινήτου χωρὶς νὰ ἐξολισθαίνῃ, ἐὰν ὁ συντελεστὴς τριβῆς μεταξὺ ἐλαστικοῦ καὶ ἐδάφους εἶναι 0,3.

760. Εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα νὰ ὑπολογισθῇ ἡ μεγίστη ταχύτης, ἐὰν ἡ ἀκτὶς τῆς τροχιᾶς εἶναι 65 m καὶ ὁ συντελεστὴς τῆς τριβῆς 0,4.

761. 'Επὶ ὁριζοντίας ἐπιφανείας πάγου ὑπάρχει λίθος βάρους 8 kgr*. 'Επὶ τοῦ λίθου τούτου προσπίπτει τεμάχιον πάγου βάρους 3 kgr*. 'Επὶ τῇ ὑποθέσει ὅτι ἡ κροῦσις εἶναι κεντρικὴ καὶ τελείως μὴ ἐλαστική, ὁ λίθος καὶ τὸ τεμάχιον πάγου διανύουν ὡς ἓν σῶμα διάστημα 18 m. 'Εὰν ὁ συντελεστὴς τριβῆς εἶναι 0,02, πόση ἡ ταχύτης τοῦ τεμαχίου πάγου κατὰ τὴν στιγμὴν τῆς κρούσεως.

762. Μὲ πιστόλιον δι' ἐλατηρίου βάλλομεν ὁριζοντίως ἐπὶ εὐκινήτου ξυλίνης σφαίρας βάρους 20 gr* (τελείως μὴ ἐλαστικὴ κροῦσις). Λόγῳ τῆς κρούσεως ἡ ξυλίνη σφαῖρα μετατοπίζεται ἐπὶ τῆς ὁριζοντίας βάσεώς της κατὰ 8 cm. Ἐὰν ὁ συντελεστὴς τριβῆς ληφθῇ ἴσος πρὸς 0,2 καὶ ἡ σφαῖρα τοῦ πιστολίου ἔχῃ βάρος 1 gr*, μὲ πόσην ταχύτητα προσέκρουσεν ἡ σφαῖρα τοῦ πιστολίου ἐπὶ τῆς σφαίρας βάρους 20 gr*.

763. Τὸ σχῆμα παριστᾷ κλίμακα μήκους 6 m, βάρους 35 kgr*, τῆς ὁποίας τὸ κέντρον βάρους K εὑρίσκεται 2 m ἀπὸ τοῦ κατωτέρου ἄκρου αὐτῆς. Ἡ βάσις τῆς κλίμακος στηρίζεται ἐπὶ ἐδάφους μὲ συντελεστὴν τριβῆς $\eta = 0{,}6$. Ἡ κορυφή της στηρίζεται ἐπὶ λείου τοίχου ἄνευ τριβῆς. Ἡ δύναμις B ὀφείλεται εἰς τὸ βάρος ἑνὸς ἀνθρώπου 85 kgr*. Ζητοῦνται: α) Ποία ἡ μεγίστη γωνία α τὴν ὁποίαν δύναται νὰ σχηματίζῃ ἡ κλῖμαξ, διὰ νὰ δύναται ὁ ἄνθρωπος νὰ ἀνέλθῃ εἰς ἀπόστασιν ἐπὶ τῆς κλίμακος ἴσην πρὸς 5,5 m μετρουμένην ἀπὸ τὴν βάσιν της. β) Ποῖος ὁ λόγος F/F_κ, ὅταν $\alpha = 20^o$ καὶ ὁ ἄνθρωπος ἀνέρχεται 5,5 m ἀπὸ τῆς βάσεως.



764. Σῶμα ζυγίζει 10 kgr* καὶ εὑρίσκεται ἐν ἰσορροπίᾳ ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου γωνίας 40^o. Ἐὰν $\eta = 0{,}5$, πόση ἡ ἐλαχίστη δύναμις ἐπὶ τοῦ σώματος ἐφηρμοσμένη, παραλλήλως πρὸς τὸ κεκλιμένον ἐπίπεδον, ἡ ὁποία θὰ συγκρατῇ τὸ σῶμα ἀπὸ τοῦ νὰ ἀρχίσῃ ὀλισθαῖνον πρὸς τὰ κάτω τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου. Πόση δύναμις πρέπει νὰ ἐφαρμοσθῇ παραλλήλως πρὸς τὸ κεκλιμένον ἐπίπεδον, ἵνα ἀναγκάσῃ τὸ σῶμα νὰ ἀνέρχεται ἐπὶ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου.

765. Ἀπὸ ὑψηλοῦ ὄρους ἀποσπᾶται λιθίνη μᾶζα ὄγκου 200 000 m^3 καὶ φθάνει εἰς τὴν πεδιάδα. Ἐὰν τὸ ὕψος ἐξ οὗ ἀπεσπάσθη ἡ μᾶζα εἶναι 160 m, ἡ δὲ πυκνότης τοῦ ὑλικοῦ 2,8 ton/m^3, ὁ συντελεστὴς τριβῆς 0,6 καὶ ἡ κλίσις τοῦ δρόμου τὸν ὁποῖον ἠκολούθησεν 60^o, μὲ πόσην ταχύτητα εἰς km/h φθάνει εἰς τὴν πεδιάδα καὶ πόση ἡ κινητικὴ ἐνέργεια αὐτῆς εἰς κιλοβατώρια (kWh).

766. Πόση δύναμις παράλληλος πρὸς κεκλιμένον ἐπίπεδον ἀπαιτεῖται διὰ τὴν ἐξουδετέρωσιν βάρους 100 kgr* ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου ὕψους 90 m καὶ βάσεως 120 m, ἐὰν ὁ συντελεστὴς τριβῆς εἶναι 0,3. β) Πόση δύναμις ἀπαιτεῖται διὰ τὴν μετατόπισιν τοῦ βάρους ἐκ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου ὑπὸ σταθερὰν ταχύτητα. γ) Ἐὰν δύναμις 40 kgr* παράλληλος πρὸς τὸ κεκλιμένον ἐπίπεδον ἐφαρμόζεται ἐπὶ τοῦ σώματος, τί θὰ συμβῇ μετὰ τὴν ἐκκίνησιν ὅταν ἡ τριβὴ ὑπερνικᾶται. δ) Πόσον διάστημα θὰ διανύσῃ τὸ βάρος εἰς 10 sec ἐκκινοῦν ἐκ τῆς ἠρεμίας. ε) Ἐὰν δύναμις 25 kgr* παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον ἐφαρμόζεται ἐπὶ τοῦ σώματος, τί θὰ συμβῇ. στ) Ἐὰν δύναμις 12 kgr*, παράλληλος πρὸς τὸ κεκλιμένον ἐπίπεδον, ἐφαρμόζεται ἐπὶ τοῦ βάρους, τί θὰ συμβῇ. ζ) Πόσον διάστημα θὰ διανύσῃ τὸ βάρος ἐντὸς 10 sec, ἐκκινοῦν ἐκ τῆς ἠρεμίας.

767. Χαλύβδινον σύρμα μήκους 4 m καὶ τομῆς 0,01 cm^2, ἐπιμηκύνεται κατὰ 0,3 mm ὑπὸ δυνάμεως 2 kgr*. Εὕρετε τὸ μέτρον τοῦ Young διὰ τὸ σύρμα τοῦτο α) εἰς gr*/cm^2, β) εἰς dyn/cm^2.

768. Δύο σύρματα, τὸ ἓν ἐκ χαλκοῦ καὶ τὸ ἕτερον ἐκ σιδήρου, ἕκαστον διαμέτρου 1 mm καὶ τοῦ αὐτοῦ μήκους, τίθενται παραλλήλως καὶ εἰς τὸ κάτω ἄκρον αὐτῶν ἀναρτᾶται μᾶζα 5 kgr κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε τὰ μήκη των νὰ παραμένουν πάντοτε τὰ αὐτά. Ποία ἡ τάσις εἰς ἕκαστον ἐξ αὐτῶν.

769. Μία στήλη ὕδατος ὕψους 4 m καὶ καθέτου τομῆς 2 cm^2 ἐλαττοῦται κατ' ὄγκον κατὰ 1,96 cm^3, ὑπὸ δυνάμεως 100 kgr*. Εὕρετε τὸν συντελεστὴν ἐλαστικότητος τοῦ ὕδατος α) εἰς μονάδας τοῦ συστήματος C.G.S., β) εἰς μονάδας τοῦ Τεχνικοῦ Συστήματος.

770. Σύρμα διαμέτρου 0,5 mm καὶ μήκους 10 m ἐξαρτᾶται ἀπὸ ἀκλόνητον στήριγμα καὶ φορτίζεται κατὰ τὸ κάτω ἄκρον ὑπὸ βάρους 5 kgr* τὸ ὁποῖον προκαλεῖ ἐπιμήκυνσιν κατὰ 0,25 cm. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέτρον Young τοῦ σύρματος.

771. Νὰ συγκριθῇ τὸ μέτρον Young δύο συρμάτων τοῦ αὐτοῦ μήκους ἀλλὰ μὲ διαμέτρους ἐχούσας λόγον 2 : 1, ὅταν βάρος 10 kgr* προκαλῇ ἐπιμήκυνσιν ἔχουσαν λόγον 1 : 2.

772. Ἐὰν τὸ μέτρον Young δείγματος χάλυβος εἶναι $20 \cdot 10^{11}$ dyn/cm², νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐπιμήκυνσις τὴν ὁποίαν ὑφίσταται σύρμα διαμέτρου 1 mm καὶ μήκους 5 m, ὅταν φορτίζεται ὑπὸ βάρους 900 gr*.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι΄

ΥΔΡΟΣΤΑΤΙΚΗ

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Α΄

773. Πόση εἶναι α) ἡ πίεσις στήλης ὑδραργύρου ὕψους 760 mm, β) πόσον τὸ ὕψος στήλης ὑδραργύρου, ἡ ὁποία ἀσκεῖ πίεσιν 1 at. ($\epsilon_{ὑδρ.} = 13{,}6$ gr*/cm³.)

Λύσις. α) Ἐὰν καλέσωμεν p τὴν ζητουμένην πίεσιν, ε τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ὑδραργύρου καὶ h τὸ ὕψος τῆς ὑδραργυρικῆς στήλης, τότε ὁ τύπος τῆς ὑδροστατικῆς πιέσεως εἶναι :

$$p = \varepsilon \cdot h \tag{1}$$

Θέτομεν : $\varepsilon = 13{,}6$ gr*/cm³, $h = 76$ cm, καὶ εὑρίσκομεν :

$$\underline{p = 1\,033{,}6 \text{ gr*/cm}^2.}$$

β) Λύομεν τὸν τύπον (1) ὡς πρὸς h, ὅτε ἔχομεν :

$$h = \frac{p}{\varepsilon} \tag{2}$$

Θέτομεν : $p = 1 \text{ at} = 1\,000$ gr*/cm², $\varepsilon = 13{,}6$ gr*/cm³, καὶ εὑρίσκομεν ὅτι τὸ ζητούμενον ὕψος εἶναι :

$$\underline{h = 73{,}6 \text{ cm} = 736 \text{ mm.}}$$

774. Πόσην δύναμιν ἀσκεῖ τὸ ὕδωρ ἐπὶ ἐπιφανείας 1 dm² εἰς βάθος 50 m.

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν S τὸ ἐμβαδὸν τῆς πιεζομένης ἐπιφανείας καὶ p τὴν πίεσιν ἡ ὁποία ἐξασκεῖται ἐπ' αὐτῆς, τότε ἡ δύναμις ἡ ἐξασκουμένη ἐπ' αὐτῆς θὰ εἶναι :

$$F = p \cdot S \tag{1}$$

ἤ, ἐπειδὴ $p = \varepsilon \cdot h$, ἡ σχέσις (1) γράφεται :

$$F = \varepsilon \cdot h \cdot S \tag{2}$$

Θέτομεν εἰς τὴν σχέσιν (2) : $\varepsilon = 1$ gr*/cm³, $h = 5\,000$ cm, $S = 100$ cm², καὶ εὑρίσκομεν :

$$F = 1 \cdot 5\,000 \cdot 100 = 5 \cdot 10^5 \text{ gr*}$$

ἤτοι :

$$\underline{F = 500 \text{ kgr*}.}$$

775. Ποῖα εἶναι ἀντιστοίχως τὰ ὕψη στηλῶν ὑδραργύρου, ὕδατος καὶ οἰνοπνεύματος, αἱ ὁποῖαι ἀσκοῦν πίεσιν 5 000 μBar. ($\epsilon_{ὑδρ.} = 13{,}6$ gr*/cm³, $\epsilon_{οἰνόπ.} = 0{,}79$ gr*/cm³.)

Λύσις. Είναι γνωστόν ότι 1 μBar = 1 dyn/cm² καὶ ἐπομένως θὰ εἶναι 5 000 μBar = 5 · 10³ dyn/cm². Ἐκ τοῦ τύπου τῆς ὑδροστατικῆς πιέσεως θὰ ἔχωμεν εἰς ἑκάστην περίπτωσιν :

α) Ὕψος ὑδραργύρου : $\underline{h_1} = \frac{p}{\varepsilon_{\text{ὑδρ.}}} = \frac{5 \cdot 10^3}{13{,}6 \cdot 981} = \underline{0{,}376 \text{ cm.}}$

β) Ὕψος ὕδατος : $\underline{h_2} = \frac{p}{\varepsilon_{\text{ὑδ.}}} = \frac{5 \cdot 10^3}{1 \cdot 981} = \underline{5{,}1 \text{ cm.}}$

γ) Ὕψος οἰνοπνεύματος : $\underline{h_3} = \frac{p}{\varepsilon_{\text{οἰν.}}} = \frac{5 \cdot 10^3}{0{,}79 \cdot 981} = \underline{6{,}45 \text{ cm.}}$

776. Εἰς ὑδραυλικὸν πιεστήριον ὁ μέγας ἐμβολεὺς ἔχει διάμετρον 1 m καὶ ὁ μικρὸς 5 cm. Διὰ τοῦ πιεστηρίου θέλομεν νὰ ἀναπτύξωμεν δύναμιν 80 ton*. Πόση δύναμις πρέπει νὰ ἐφαρμοσθῇ ἐπὶ τοῦ μικροῦ ἐμβολέως. Πόση εἶναι ἡ πίεσις ἐντὸς τοῦ πιεστηρίου.

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν F_1 τὴν δύναμιν τὴν ὁποίαν ἐξασκοῦμεν ἐπὶ τοῦ μικροῦ ἐμβολέως, S_1 τὸ ἐμβαδὸν τῆς τομῆς τοῦ μικροῦ ἐμβολέως, F_2 τὴν δύναμιν τὴν ὁποίαν λαμβάνομεν ἐπὶ τοῦ μεγάλου ἐμβολέως καὶ S_2 τὸ ἐμβαδὸν τῆς τομῆς τοῦ μεγάλου ἐμβολέως, τότε, ὡς γνωστόν, ἰσχύει ἡ σχέσις :

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{S_1}{S_2} \tag{1}$$

Ἐπειδὴ δὲ $S_1 = \frac{\pi \cdot \delta_1^2}{4}$ καὶ $S_2 = \frac{\pi \cdot \delta_2^2}{4}$, ἡ σχέσις (1) γράφεται :

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{\delta_1^2}{\delta_2^2} \tag{2}$$

Λύομεν τὴν σχέσιν (2) ὡς πρὸς F_1 καὶ εὑρίσκομεν :

$$F_1 = F_2 \cdot \frac{\delta_1^2}{\delta_2^2} \tag{3}$$

Θέτοντες εἰς τὴν σχέσιν (3) τὰ δεδομένα, ἤτοι : $F_2 = 80 \cdot 10^3$ kgr*, $\delta_1 = 5$ cm, $\delta_2 = 100$ cm, εὑρίσκομεν :

$$\underline{F_1 = 200 \text{ kgr*}}.$$

Ἐξ ἄλλου :

$$p = \frac{F_1}{S_1} = \frac{F_1}{\pi \cdot \delta_1^2/4} \tag{4}$$

ὁπότε δι' ἀντικαταστάσεως τῶν μεγεθῶν διὰ τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ζητουμένη πίεσις εἶναι :

$$\underline{p = 10{,}2 \text{ kgr*/cm}^2 = 10{,}2 \text{ at.}}$$

777. Τεμάχιον χαλκοῦ, εἰδικοῦ βάρους $\varepsilon_1 = 8{,}9$ gr*/cm³, ἔχει βάρος 523 gr* εἰς τὸν ἀέρα καὶ 447 gr* ὅταν εἶναι βυθισμένον εἰς ὕδωρ. Νὰ ἐξακριβωθῇ, ἐὰν τὸ σῶμα εἶναι πλῆρες ἢ κοῖλον· ἐὰν εἶναι κοῖλον, νὰ καθορισθῇ ὁ ὄγκος τῆς κοιλότητος.

Λύσις. Ἐφ' ὅσον τὸ τεμάχιον τοῦ χαλκοῦ ζυγίζει εἰς τὸν ἀέρα 523 gr* καὶ εἰς τὸ ὕδωρ 447 gr*, ἕπεται ὅτι ἡ ἄνωσις τὴν ὁποίαν ὑφίσταται τοῦτο ἀπὸ τὸ ὕδωρ εἶναι :

$$A = 523 - 447 = 76 \text{ gr*}.$$

Ἐπειδὴ ὅμως ἡ ἄνωσις A εἶναι γινόμενον τοῦ ὄγκου V τοῦ σώματος ἐπὶ τὸ εἰδικὸν βάρος ε τοῦ ὑγροῦ, ἤτοι $A = \varepsilon \cdot V$, ὁ ὄγκος τοῦ σώματος θὰ εἶναι :

$$V = \frac{A}{\varepsilon} = \frac{76}{1} = 76 \text{ cm}^3.$$

Τὸν ὄγκον ὅμως τοῦ σώματος, ἐὰν τοῦτο εἶναι συμπαγές, δυνάμεθα νὰ τὸν εὕρωμεν ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ εἰδικοῦ βάρους ($\varepsilon_1 = B/V$). Οὕτω εὑρίσκομεν ὅτι :

$$V_1 = \frac{B}{\varepsilon_1} = \frac{523}{8,9} = 58,67 \text{ cm}^3.$$

Διαπιστοῦμεν λοιπὸν ὅτι ὁ ὄγκος ὁ εὑρισκόμενος ἐκ τοῦ τύπου τῆς ἀνώσεως εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν ὄγκον τὸν εὑρισκόμενον ἐκ τοῦ τύπου τοῦ εἰδικοῦ βάρους, καὶ προφανῶς τοῦτο συμβαίνει, διότι τὸ σῶμα θὰ ἔχῃ ὁπωσδήποτε κοιλότητα. Ὁ ὄγκος τῆς κοιλότητος εἶναι:

$$V_{\text{κοιλ.}} = V - V_1$$

Ὅτε δι' ἀντικαταστάσεως διὰ τῶν τιμῶν εὑρίσκομεν:

$$\underline{V_{\text{κοιλ.}} = 17,33 \text{ cm}^3.}$$

778. Ἡ βάσις ὑαλίνου δοχείου ἔχει διάμετρον 20 cm καὶ ἡ κορυφὴ 30 cm, ἐνῷ τὸ βάθος του εἶναι 22 cm καὶ τὸ βάρος αὐτοῦ 1,5 kgr*. Τὸ δοχεῖον τοποθετεῖται ἐπὶ τραπέζης καὶ πληροῦται δι' ὕδατος. (Ὁ ὄγκος τοῦ δοχείου εἶναι 10,9 λίτρα). Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ δύναμις ἡ ἀσκουμένη ἐπὶ τοῦ πυθμένος τοῦ δοχείου, ὡς καὶ ἡ δύναμις ἡ ἀσκουμένη, ὑπὸ τοῦ δοχείου καὶ τοῦ περιεχομένου αὐτοῦ, ἐπὶ τῆς τραπέζης.

Λύσις. Ἡ δύναμις F ἡ ἐξασκουμένη ἐπὶ τοῦ πυθμένος εἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ βάρους τοῦ περιεχομένου ὑγροῦ (ὑδροστατικὸν παράδοξον), ἐξαρτᾶται δὲ μόνον ἀπὸ τὸ ἐμβαδὸν S τοῦ πυθμένος, ἀπὸ τὸ ὕψος h τοῦ ὑγροῦ καὶ ἀπὸ τὸ εἰδικὸν βάρος ε τοῦ ὑγροῦ. Ἤτοι:

$$F = \varepsilon \cdot h \cdot S$$

ἤ, ἐπειδὴ $S = \pi \cdot \delta^2/4$, ἔχομεν:

$$F = \varepsilon \cdot h \cdot \frac{\pi \cdot \delta^2}{4}$$

Θέτομεν: $\varepsilon = 1$ gr*/cm³, $h = 22$ cm, $\delta = 20$ cm, καὶ εὑρίσκομεν:

$$\underline{F = 6\,908 \text{ gr}^*.}$$

Ἡ δύναμις F_1 ἡ ἐξασκουμένη ἐπὶ τῆς τραπέζης θὰ εἶναι προφανῶς τὸ βάρος B_1 τοῦ ὕδατος σὺν τὸ βάρος B_2 τοῦ δοχείου. Ἤτοι:

$$F_1 = B_1 + B_2$$

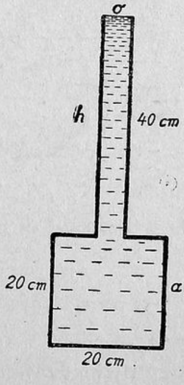
ἤ, ἐπειδὴ $B_1 = \varepsilon \cdot V$, θὰ ἔχωμεν:

$$F_1 = \varepsilon \cdot V + B_2$$

Θέτομεν: $\varepsilon = 1$ gr*/cm³, $V = 10,9\ lt = 10\,900$ cm³, $B_2 = 1\,500$ gr*, καὶ εὑρίσκομεν:

$$\underline{F_1 = 12\,400 \text{ gr}^*.}$$

779. Κλειστὸν δοχεῖον κυβικοῦ σχήματος, πλευρᾶς 20 cm, φέρει κατὰ τὴν ἄνω ἕδραν σωλῆνα ὕψους 40 cm καὶ τομῆς 10 cm². Ἐὰν τὸ δοχεῖον καὶ ὁ σωλὴν πληροῦνται τελείως δι' ὕδατος, νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ δυνάμεις ἐπὶ ἑκάστης τῶν ἑδρῶν.



Λύσις. Ἔστω α ἡ ἀκμὴ τοῦ κυβικοῦ δοχείου, h τὸ ὕψος τοῦ σωλῆνος καὶ σ ἡ τομὴ αὐτοῦ. Αἱ δυνάμεις αἱ ἐξασκούμεναι ἐπὶ ἑκάστης τῶν ἑδρῶν εἶναι αἱ ἑξῆς:

α) Ἐπὶ τῆς κάτω ἐπιφανείας:

$$\underline{p_1} = \varepsilon\,(h + \alpha) \cdot \alpha^2 = 1\,(40 + 20) \cdot 20^2 = \underline{24\,000 \text{ gr}^*.}$$

β) Ἐπὶ τῆς ἄνω ἐπιφανείας:

$$\underline{p_2} = \varepsilon \cdot h\,(\alpha^2 - \sigma) = 1 \cdot 40\,(20^2 - 10) = \underline{15\,600 \text{ gr}^*.}$$

γ) Ἐπὶ ἑκάστης ἐκ τῶν πλευρικῶν ἐπιφανειῶν:

$$\underline{p_3} = \varepsilon \left(h + \frac{\alpha}{2}\right) \alpha^2 = 1 \cdot (40 + 10) \cdot 20^2 = \underline{20\,000 \text{ gr}^*.}$$

780. Τεμάχιον ὀρειχάλκου ἔχει βάρος 400 gr* καὶ ἀποτελεῖται κατὰ 65 % τοῦ βάρους αὐτοῦ ἀπὸ χαλκὸν καὶ κατὰ 35 % ἀπὸ ψευδάργυρον. Πόσην ἄνωσιν ὑφίσταται ἐντὸς ἐλαίου εἰδ. βάρους 0,87 gr*/cm³. ($\epsilon_{\chi\alpha\lambda\kappa o\tilde{\upsilon}} = 8{,}9$ gr*/cm³, $\epsilon_{\psi\epsilon\upsilon\delta.} = 7{,}1$ gr*/cm³.)

Λύσις. Διὰ τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν εὑρίσκομεν ὅτι τὸ βάρος τοῦ χαλκοῦ εἶναι $B_{\chi\alpha\lambda\kappa.} = \frac{65 \cdot 400}{100} = 260$ gr* καὶ τὸ βάρος τοῦ ψευδαργύρου $B_{\psi\epsilon\upsilon\delta.} = 140$ gr*. Ἂς καλέσωμεν $V_{\chi\alpha\lambda\kappa.}$ τὸν ὄγκον τοῦ χαλκοῦ, $V_{\psi\epsilon\upsilon\delta.}$ τὸν ὄγκον τοῦ ψευδαργύρου καὶ $\varepsilon_{\chi\alpha\lambda\kappa.}$, $\varepsilon_{\psi\epsilon\upsilon\delta.}$ ἀντιστοίχως τὰ εἰδικὰ βάρη αὐτῶν.

Ἐκ τοῦ τύπου τοῦ εἰδικοῦ βάρους ($\varepsilon = B/V$) θὰ ἔχωμεν ὅτι:

$$V_{\chi\alpha\lambda\kappa.} = \frac{B_{\chi\alpha\lambda\kappa.}}{\varepsilon_{\chi\alpha\lambda\kappa.}} \qquad \text{καὶ} \qquad V_{\psi\epsilon\upsilon\delta.} = \frac{B_{\psi\epsilon\upsilon\delta.}}{\varepsilon_{\psi\epsilon\upsilon\delta.}} \qquad (1)$$

καὶ συνεπῶς ὁ ὄγκος τοῦ ὀρειχάλκου θὰ εἶναι:

$$V_{\dot{o}\rho\epsilon\iota\chi.} = \frac{B_{\chi\alpha\lambda\kappa.}}{\varepsilon_{\chi\alpha\lambda\kappa.}} + \frac{B_{\psi\epsilon\upsilon\delta.}}{\varepsilon_{\psi\epsilon\upsilon\delta.}} \qquad (2)$$

Ἐὰν τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ἐλαίου εἶναι ε, τότε τὸ τεμάχιον τοῦ ὀρειχάλκου ἐντὸς αὐτοῦ θὰ ὑφίσταται ἄνωσιν: $A = \varepsilon \cdot V_{\dot{o}\rho\epsilon\iota\chi.}$, ἢ λόγῳ τῆς (2):

$$A = \varepsilon \cdot \left(\frac{B_{\chi\alpha\lambda\kappa.}}{\varepsilon_{\chi\alpha\lambda\kappa.}} + \frac{B_{\psi\epsilon\upsilon\delta.}}{\varepsilon_{\psi\epsilon\upsilon\delta.}} \right) \qquad (3)$$

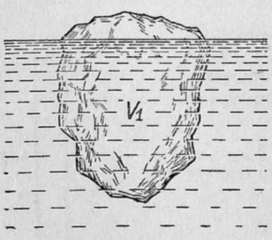
Θέτομεν τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως: $B_{\chi\alpha\lambda\kappa.} = 260$ gr*, $B_{\psi\epsilon\upsilon\delta.} = 140$ gr*, $\varepsilon_{\chi\alpha\lambda\kappa.} = 8{,}9$ gr*/cm³, $\varepsilon_{\psi\epsilon\upsilon\delta.} = 7{,}1$ gr*/cm³, $\varepsilon = 0{,}87$ gr*/cm³, καὶ εὑρίσκομεν:

$$\underline{A = 42{,}56 \text{ gr*}.}$$

781. Τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ θαλασσίου ὕδατος εἰς 0° C εἶναι 1,03 gr*/cm³. Πόσον τοῖς ἑκατὸν τοῦ ὄγκου ἑνὸς παγοβούνου βυθίζεται ἐντὸς τοῦ ὕδατος, ὅταν τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ πάγου εἶναι 0,917 gr*/cm³.

Λύσις. Ἐφ' ὅσον τὸ παγόβουνον ἐπιπλέει, εὑρίσκεται εἰς ἰσορροπίαν καὶ ἐπομένως ἡ ἄνωσις αὐτοῦ θὰ εἶναι ἴση μὲ τὸ βάρος του. Ἤτοι:

$$A = B \qquad (1)$$



Ἐὰν ὁ ὄγκος τοῦ παγοβούνου εἶναι V καὶ ὁ ὄγκος ὁ εὑρισκόμενος ἐντὸς τοῦ ὕδατος εἶναι V_1, τότε ἡ ἄνωσις θὰ εἶναι:

$$A = \varepsilon_1 \cdot V_1 \qquad (2)$$

ὅπου ε_1 τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ θαλασσίου ὕδατος. Ἐξ ἄλλου τὸ βάρος τοῦ παγοβούνου B εἶναι:

$$B = \varepsilon \cdot V \qquad (3)$$

ὅπου ε τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ πάγου.

Βάσει τῶν σχέσεων (1) καὶ (3) θὰ ἔχωμεν:

$$\varepsilon_1 \cdot V_1 = \varepsilon \cdot V \qquad (4)$$

καὶ δι' ἐπιλύσεως ὡς πρὸς V_1 προκύπτει ὁ τύπος:

$$V_1 = \frac{\varepsilon \cdot V}{\varepsilon_1} \qquad (5)$$

Θέτοντες εἰς τὴν (5) τὰ δεδομένα: $\varepsilon = 0{,}917$ gr*/cm³ καὶ $\varepsilon_1 = 1{,}03$ gr*/cm³, εὑρίσκομεν:

$$\underline{V_1 = 0{,}89\ V.}$$

Ἤτοι ὁ βυθισμένος ὄγκος τοῦ παγοβούνου εἶναι τὰ 89 % τοῦ ὄγκου αὐτοῦ.

782. Ἡ πυκνότης τοῦ θαλασσίου ὕδατος εἶναι 1,03 gr/cm³. Νὰ καθορισθῇ ὁ ἀριθμὸς τῶν κυβικῶν μέτρων τοῦ ἐκτοπιζομένου θαλασσίου ὕδατος ὑπὸ πλοίου ἐκτοπίσματος 5 000 τόννων.

Λύσις. Ἐφ' ὅσον τὸ πλοῖον εἶναι ἐκτοπίσματος 5 000 τόννων, ἕπεται ὅτι ἡ μᾶζα m τοῦ ἐκτοπιζομένου θαλασσίου ὕδατος θὰ εἶναι 5 000 τόννοι καὶ συνεπῶς ὁ ὄγκος αὐτοῦ δύναται νὰ εὑρεθῇ ἀπὸ τὸν τύπον τῆς πυκνότητος: $\left(\rho = \frac{m}{V}\right)$ ὅτι εἶναι:

$$V = \frac{m}{\rho}$$

Θέτομεν: $m = 5 \cdot 10^9$ gr, $\rho = 1{,}03$ gr/cm³, καὶ εὑρίσκομεν:

$$V = \frac{5 \cdot 10^9}{1{,}03} = 4{,}86 \cdot 10^9 \text{ cm}^3$$

ἤτοι:

$$\underline{V = 4{,}86 \cdot 10^3 \text{ m}^3.}$$

783. Τεμάχιον ξύλου διαστάσεων 5 cm × 4 cm καὶ ὕψους 3 cm ἐπιπλέει εἰς ὕδωρ βυθιζόμενον κατὰ 2,5 cm. Πόση μᾶζα ἀργιλίου (πυκνότητος 2,6 gr/cm³) πρέπει νὰ τοποθετηθῇ ἐπὶ τῆς κορυφῆς τοῦ τεμαχίου ξύλου, ἵνα τοῦτο μετὰ τοῦ ἀργιλίου βυθίζεται τελείως ἐντὸς τοῦ ὕδατος.

Λύσις. Ἔστω ὅτι τὸ τεμάχιον τοῦ ξύλου ἔχει βάρος B, βάσιν S καὶ βυθίζεται ἡ βάσις του ἐντὸς τοῦ ὕδατος κατὰ h, ὅταν ἐπιπλέῃ. Ἐπειδὴ τὸ τεμάχιον τοῦ ξύλου ἰσορροπεῖ, θὰ εἶναι τὸ βάρος αὐτοῦ ἴσον πρὸς τὴν ἄνωσιν τὴν ὁποίαν ὑφίσταται ὑπὸ τοῦ ὕδατος. Ἤτοι:

$$B = A \tag{1}$$

Ἐὰν δὲ καλέσωμεν ρ τὴν πυκνότητα τοῦ ὕδατος, τότε ἡ ἄνωσις εἶναι συμφώνως πρὸς τὸν τύπον τῆς ἀνώσεως:

$$A = \rho \cdot g \cdot S \cdot h \tag{2}$$

καὶ συνεπῶς ἡ σχέσις (1) γράφεται:

$$B = \rho \cdot g \cdot S \cdot h \tag{3}$$

Καλοῦμεν m_1 τὴν μᾶζαν τοῦ ἀργιλίου τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ θέσωμεν ἄνωθεν τοῦ ξύλου, ἵνα τὸ σύστημα ἀργιλίου καὶ ξύλου αἰωρῆται ἐντὸς τοῦ ὕδατος. Ἐπειδὴ τὸ σύστημα εὑρίσκεται εἰς ἰσορροπίαν, τὸ βάρος αὐτοῦ Βολ. θὰ ἰσοῦται πρὸς τὴν ἄνωσιν Αολ. τὴν ὁποίαν ὑφίσταται. Ἤτοι:

$$B_{\text{ολ.}} = A_{\text{ολ.}} \tag{4}$$

Εἶναι ὅμως Βολ. τὸ βάρος τοῦ ξύλου καὶ ἀργιλίου, δηλ.:

$$B_{\text{ολ.}} = B + m_1 \cdot g \tag{5}$$

καὶ Αολ. ἡ ἄνωσις τοῦ ξύλου καὶ ἡ ἄνωσις τοῦ ἀργιλίου, δηλ.:

$$A_{\text{ολ.}} = \rho \cdot g \cdot V + \rho \cdot g \cdot V_1 \tag{6}$$

ὅπου V ὁ ὄγκος τοῦ ξύλου καὶ V_1 ὁ ὄγκος τοῦ ἀργιλίου. Οὕτω ἡ σχέσις (4) γράφεται:

$$B + m_1 \cdot g = \rho \cdot g \cdot V + \rho \cdot g \cdot V_1 \tag{7}$$

ἢ λόγῳ τῆς (3):

$$\rho \cdot g \cdot S \cdot h + m_1 \cdot g = \rho \cdot g \cdot V + \rho \cdot g \cdot V_1 \tag{8}$$

Ἐὰν δὲ θέσωμεν εἰς τὴν (8): $V_1 = m_1/\rho_1$, ὅπου ρ_1 ἡ πυκνότης τοῦ ἀργιλίου, λαμβάνομεν:

$$\rho \cdot S \cdot h + m_1 = \rho \cdot V + \rho \cdot \frac{m_1}{\rho_1} \tag{9}$$

Ἀκολούθως λύομεν τὴν σχέσιν (9) ὡς πρὸς τὴν ζητουμένην μᾶζαν m_1 τοῦ ἀργιλ ου καὶ προκύπτει οὕτω ὁ γενικὸς τύπος:

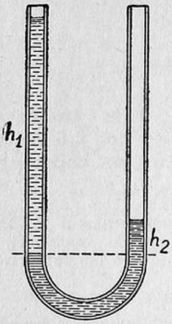
$$m_1 = \frac{\rho \cdot \rho_1 (V - S \cdot h)}{\rho_1 - \rho} \tag{10}$$

Θέτομεν εἰς τὸν τύπον (10) τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως ὡς εἶναι, δηλ. εἰς τὸ σύστημα C.G.S., καὶ εὑρίσκομεν :

$$\underline{m_1 = 16{,}25 \text{ gr.}}$$

784. Εἰς σωλῆνα σχήματος U (βλ. σχῆμα) τὸ δεξιὸν σκέλος περιέχει ὑδράργυρον, ἐνῷ τὸ ἕτερον πληροῦται μὲ ὑγρὸν ἀγνώστου πυκνότητος. Τὸ ὕψος τῶν στηλῶν τοῦ ὑγροῦ εἰς τὰ δύο σκέλη ἀπὸ τῆς ὁρικῆς ἐπιφανείας τῆς διαχωριζούσης τὰ δύο ὑγρὰ εἶναι εἰς τὸ δεξιὸν σκέλος 2 cm καὶ εἰς τὸ ἀριστερὸν 14 cm. Πόση ἡ πυκνότης τοῦ ὑγροῦ. ($\rho_{ύδρ.}$ = 13,6 gr/cm³.)

Λύσις. Ἔστω ὅτι ἡ ζητουμένη πυκνότης εἶναι ρ_1, τὸ ὕψος τοῦ ὑγροῦ h_1, ἡ πυκνότης τοῦ ὑδραργύρου ρ_2 καὶ τὸ ὕψος τοῦ ὑδραργύρου h_2. Ἐπὶ τῆς διαχωριστικῆς ἐπιφανείας αἱ πιέσεις αἱ ὁποῖαι ἐξασκοῦνται ὑπὸ τῶν δύο ὑγρῶν θὰ εἶναι ἴσαι, διότι ἡ διαχωριστικὴ ἐπιφάνεια εἶναι ὁριζόντιον ἐπίπεδον. Ἄρα θὰ ἔχωμεν :



$$p_1 = p_2 \quad (1)$$

Ἀλλὰ ἐκ τοῦ τύπου τῆς ὑδροστατικῆς πιέσεως ἔχομεν :

$$p_1 = \rho_1 \cdot g \cdot h_1$$

καὶ

$$p_2 = \rho_2 \cdot g \cdot h_2$$

ὅτε ἡ σχέσις (1) γίνεται :

$$\rho_1 \cdot g \cdot h_1 = \rho_2 \cdot g \cdot h_2 \quad (2)$$

Ἐκ τῆς σχέσεως (2) λαμβάνομεν, ἐὰν λύσωμεν ὡς πρὸς ρ_1 :

$$\rho_1 = \frac{\rho_2 \cdot h_2}{h_1}$$

καὶ ἐὰν θέσωμεν τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως : $\rho_2 = 13{,}6$ gr/cm³, $h_2 = 2$ cm, $h_1 = 14$ cm, εὑρίσκομεν :

$$\underline{\rho_1 = 1{,}94 \text{ gr/cm}^3.}$$

785. Τεμάχιον σμύριδος ζυγίζει 52 gr* εἰς τὸν ἀέρα καὶ 39 gr* εἰς τὸ ὕδωρ. Πόσον τὸ εἰδικὸν βάρος τῆς σμύριδος.

Λύσις. Προφανῶς ἡ ἄνωσις A τὴν ὁποίαν δέχεται ἡ σμύρις ὑπὸ τοῦ ὕδατος εἶναι :

$$A = B - B' \quad (1)$$

ὅπου B τὸ βάρος αὐτῆς εἰς τὸν ἀέρα καὶ B' τὸ βάρος αὐτῆς εἰς τὸ ὕδωρ. Ἐὰν καλέσωμεν ε' τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ὕδατος καὶ V τὸν ὄγκον τῆς σμύριδος, θὰ ἔχωμεν ὅτι ἡ ἄνωσις αὐτῆς εἶναι :

$$A = \varepsilon' \cdot V \quad (2)$$

Οὕτω ἡ σχέσις (1) γράφεται :

$$\varepsilon' \cdot V = B - B' \quad (3)$$

Ἐκ τῆς σχέσεως (3) εὑρίσκομεν, λύοντες ὡς πρὸς V, ὅτι ὁ ὄγκος τῆς σμύριδος εἶναι :

$$V = \frac{B - B'}{\varepsilon'} \quad (4)$$

καὶ συνεπῶς τὸ εἰδικὸν βάρος ε τῆς σμύριδος δίδεται διὰ τοῦ τύπου :

$$\varepsilon = \frac{B}{V} = \frac{B \cdot \varepsilon'}{B - B'} \quad (5)$$

Θέτομεν εἰς τὴν σχέσιν (5) τὰ δεδομένα : B = 52 gr*, B' = 39 gr*, ε = 1 gr*/cm³, καὶ εὑρίσκομεν :

$$\underline{\varepsilon = 4 \text{ gr}^*/\text{cm}^3.}$$

786. Τεμάχιον ἀργιλίου πυκνότητος 2,7 gr/cm³ ζυγίζει 67 gr* εἰς τὸν ἀέρα καὶ 45 gr* ὅταν βυθίζεται εἰς τερεβινθέλαιον. Ποία ἡ πυκνότης τοῦ τερεβινθελαίου.

Λύσις. Ἔστω B τὸ βάρος τοῦ ἀργιλίου εἰς τὸν ἀτμοσφαιρικὸν ἀέρα, B′ τὸ βάρος αὐτοῦ εἰς τὸ τερεβινθέλαιον καὶ ρ′ ἡ πυκνότης τοῦ τερεβινθελαίου. Προφανῶς ἡ ἄνωσις A τὴν ὁποίαν ὑφίσταται τὸ ἀργίλιον ἐντὸς τοῦ τερεβινθελαίου θὰ εἶναι ἴση πρὸς B − B′. Ἤτοι:

$$A = B - B' \tag{1}$$

ἤ, ἐπειδὴ ἐκ τοῦ τύπου τῆς ἀνώσεως ἔχομεν:

$$A = \rho' \cdot g \cdot V \tag{2}$$

ὅπου V ὁ ὄγκος τοῦ ἀργιλίου, ἡ σχέσις (1) γράφεται:

$$\rho' \cdot g \cdot V = B - B' \tag{3}$$

Δυνάμεθα ὅμως εἰς τὴν σχέσιν (3) νὰ ἀντικαταστήσωμεν τὸν ὄγκον V τοῦ ἀργιλίου θέτοντες:

$$V = \frac{m}{\rho} \tag{4}$$

ὅπου m ἡ μᾶζα τοῦ ἀργιλίου καὶ ρ ἡ πυκνότης αὐτοῦ. Οὕτω ἡ σχέσις (3) γράφεται τώρα:

$$\rho' \cdot g \cdot \frac{m}{\rho} = B - B' \tag{5}$$

καὶ ἐξ αὐτῆς λύοντες ὡς πρὸς ρ′ λαμβάνομεν τὸν γενικὸν τύπον:

$$\rho' = \frac{\rho\,(B - B')}{m \cdot g} \tag{6}$$

ἢ

$$\rho' = \frac{\rho\,(B - B')}{B} \tag{7}$$

(διότι $B = m \cdot g$). Θέτομεν εἰς τὴν σχέσιν (7) τὰ δεδομένα: $\rho = 2{,}7$ gr/cm³, $B = 67$ gr*, $B' = 45$ gr*, καὶ εὑρίσκομεν:

$$\underline{\rho' = 0{,}88 \text{ gr/cm}^3.}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ: Αἱ τιμαὶ τῶν μεγεθῶν αἱ ὁποῖαι ἐτέθησαν εἰς τὸν γενικὸν τύπον δὲν εἶναι τοῦ αὐτοῦ συστήματος. Τοῦτο δὲν βλάπτει, διότι τὸ πηλίκον B—B′/B ὡς πηλίκον ὁμοειδῶν μεγεθῶν εἶναι καθαρὸς ἀριθμός.

787. Σῶμα μάζης 36 gr ἔχει βάρος 31,96 gr*, ὅταν βυθίζεται ἐντὸς ὑγροῦ εἰδικοῦ βάρους 1,26 gr*/cm³. Πόση ἡ πυκνότης τοῦ σώματος.

Λύσις. Ἂς καλέσωμεν m τὴν μᾶζαν τοῦ σώματος καὶ B′ τὸ βάρος αὐτοῦ, ὅταν βυθίζεται ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ. Ἐπίσης, ἂς καλέσωμεν V τὸν ὄγκον τοῦ σώματος, ρ τὴν πυκνότητα αὐτοῦ καὶ ε′ τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ὑγροῦ. Προφανῶς τὸ βάρος τοῦ σώματος θὰ εἶναι $B = m \cdot g$ καὶ ἡ ἄνωσις A, τὴν ὁποίαν δέχεται ὑπὸ τοῦ ὑγροῦ, θὰ εἶναι $m \cdot g - B'$. Ἄρα θὰ ἔχωμεν:

$$m \cdot g - B' = A \tag{1}$$

Ἐκ τοῦ τύπου τῆς ἀνώσεως ἔχομεν:

$$A = \varepsilon' \cdot V \tag{2}$$

καὶ συνεπῶς ἡ σχέσις (1) γράφεται:

$$m \cdot g - B' = \varepsilon' \cdot V \tag{3}$$

Θέτομεν εἰς τὴν (3): $V = \frac{m}{\rho}$ $\left(\text{διότι } \rho = \frac{m}{V}\right)$, καὶ λαμβάνομεν:

$$m \cdot g - B' = \varepsilon \cdot \frac{m}{\rho} \tag{4}$$

Ἐὰν δὲ λύσωμεν τὴν σχέσιν (4) ὡς πρὸς τὴν ζητουμένην πυκνότητα τοῦ σώματος, εὑρίσκομεν τὸν γενικὸν τύπον:

$$\rho = \frac{\varepsilon' \cdot m}{m \cdot g - B'} \qquad (5)$$

Ἐργαζόμενοι εἰς τὸ σύστημα C.G.S. θέτομεν εἰς τὴν (5): $\varepsilon' = 1{,}26 \cdot 981$ dyn/cm^3, $m = 36$ gr, $g = 981$ cm/sec^2, $B' = 31{,}96 \cdot 981$ dyn, καὶ εὑρίσκομεν:

$$\underline{\rho = 11{,}25 \text{ grc/m}^3.}$$

788. Ἓν λίτρον γάλακτος ζυγίζει 1 032 gr* καὶ τὸ βούτυρον τὸ ὁποῖον περιέχει εἶναι 4 % κατ' ὄγκον καὶ ἔχει πυκνότητα 0,865 gr/cm³. Πόση ἡ πυκνότης τοῦ ἀποβουτυρωθέντος γάλακτος.

Λύσις. Ἐὰν V_1 εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ γάλακτος, τότε ὁ ὄγκος τοῦ βουτύρου θὰ εἶναι $V_2 = 0{,}04\, V_1$ καὶ συνεπῶς ὁ ὄγκος τοῦ ἀποβουτυρωθέντος γάλακτος θὰ εἶναι:

$$V = V_1 - 0{,}04 \cdot V_1 = 0{,}96 \cdot V_1 \qquad (1)$$

Ἐπίσης, ἐὰν καλέσωμεν ρ_2 τὴν πυκνότητα τοῦ βουτύρου, τότε τὸ βάρος αὐτοῦ θὰ εἶναι:

$$B_2 = \rho_2 \cdot g \cdot 0{,}04 \cdot V_1 \qquad (2)$$

καὶ ἐὰν καλέσωμεν B_1 τὸ βάρος τοῦ γάλακτος, τότε προφανῶς τὸ βάρος B τοῦ ἀποβουτυρωθέντος γάλακτος θὰ εἶναι:

$$B = B_1 - B_2 = B_1 - 0{,}04 \cdot \rho_2 \cdot g \cdot V_1 \qquad (3)$$

Πρὸς εὕρεσιν τῆς πυκνότητος τοῦ ἀποβουτυρωθέντος γάλακτος, ἐφαρμόζομεν τὸν τύπον τοῦ εἰδικοῦ βάρους καὶ ἔχομεν:

$$\varepsilon = \frac{B}{V} = \frac{B_1 - 0{,}04 \cdot \rho_2 \cdot g \cdot V_1}{0{,}96 \cdot V_1} \qquad (4)$$

ἤ, ἐπειδὴ $\varepsilon = \rho \cdot g$, ἔχομεν:

$$\rho \cdot g = \frac{B_1 - 0{,}04 \cdot \rho_2 \cdot g \cdot V_1}{0{,}96 \cdot V_1} \qquad (5)$$

Λύομεν τώρα τὴν σχέσιν (5) ὡς πρὸς τὴν ζητουμένην πυκνότητα ρ τοῦ ἀποβουτυρωθέντος γάλακτος καὶ εὑρίσκομεν οὕτω τὸν γενικὸν τύπον:

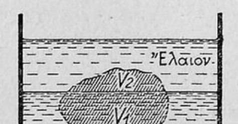
$$\rho = \frac{B_1}{0{,}96 \cdot g \cdot V_1} - \frac{\rho_2}{24} \qquad (6)$$

Θέτοντες δὲ εἰς τὸν γενικὸν τύπον τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως εἰς τὸ σύστημα C.G.S.: $B_1 = 1\,032 \cdot 981$ dyn, $\rho_2 = 0{,}865$ gr/cm^3, $g = 981$ cm/sec^2 καὶ $V_1 = 1\,000$ cm^3, εὑρίσκομεν:

$$\underline{\rho = 1{,}04 \text{ gr/cm}^3.}$$

789. Δοχεῖον περιέχει ὕδωρ καὶ ἔλαιον πυκνότητος 0,87 gr/cm³, τὰ ὁποῖα διαχωρίζονται δι' ὁρικῆς ἐπιφανείας. Στερεὸν σῶμα ἐπιπλέει βυθιζόμενον κατὰ 70 % τοῦ ὄγκου του εἰς τὸ ὕδωρ καὶ κατὰ τὸ ὑπόλοιπον εἰς τὸ ἔλαιον. Πόση ἡ πυκνότης τοῦ στερεοῦ σώματος.

Λύσις. Ἐὰν ὁ ὄγκος τοῦ σώματος εἶναι V, τότε ὁ ὄγκος τοῦ σώματος ὁ ὁποῖος εὑρίσκεται εἰς τὸ ὕδωρ θὰ εἶναι $V_1 = 0{,}7 \cdot V$ καὶ ὁ ὄγκος ὁ ὁποῖος εὑρίσκεται εἰς τὸ ἔλαιον θὰ εἶναι $V_2 = 0{,}3 \cdot V$.



Ἡ ἄνωσις ἡ προερχομένη ὑπὸ τοῦ ὕδατος θὰ εἶναι: $A_1 = \rho_1 \cdot g \cdot 0{,}7 \cdot V$, καὶ ἡ προερχομένη ὑπὸ τοῦ ἐλαίου θὰ εἶναι: $A_2 = \rho_2 \cdot g \cdot 0{,}3 \cdot V$, ὅπου ρ_1 ἡ πυκνότης τοῦ ὕδατος καὶ ρ_2 ἡ πυκνότης τοῦ ἐλαίου καὶ συνεπῶς ἡ ὁλικὴ ἄνωσις θὰ εἶναι: $A = A_1 + A_2$. Προφανῶς, ἀφοῦ τὸ σῶμα ἰσορροπεῖ, ἡ ἄνωσις θὰ εἶναι ἴση μὲ τὸ βάρος του. Ἤτοι:

$$B = A_1 + A_2 \qquad (1)$$

ἤ $$\rho \cdot g \cdot V = \rho_1 \cdot g \cdot 0{,}7 \cdot V + \rho_2 \cdot g \cdot 0{,}3 \cdot V \qquad (2)$$

ἤ $$\rho = 0{,}7 \cdot \rho_1 + 0{,}3 \cdot \rho_2 \qquad (3)$$

ὅπου ρ ἡ ζητουμένη πυκνότης τοῦ σώματος. Θέτομεν εἰς τὴν (3) : $\rho_1 = 1$ gr/cm³, $\rho_2 = 0,87$ gr/cm³, καὶ εὑρίσκομεν :

$$\rho = 0,951 \text{ gr/cm}^3.$$

790. Σῶμα ἔχει ἐντὸς τοῦ ἀέρος βάρος 33 gr* καὶ ἐντὸς τοῦ ὕδατος 30 gr*. Τὸ σῶμα προσαρμόζεται ἐπὶ τεμαχίου ξύλου, τὸ ὁποῖον ζυγίζει εἰς τὸν ἀέρα 10 gr*. Ὅταν τὸ σύστημα βυθίζεται ἐντὸς τοῦ ὕδατος, ζυγίζει 20 gr*. Πόση ἡ πυκνότης τοῦ ξύλου.

Λύσις. Ἐφ' ὅσον ἡ μᾶζα τοῦ ξύλου εἶναι γνωστή, διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν πυκνότητα αὐτοῦ ἀρκεῖ νὰ ὑπολογίσωμεν τὸν ὄγκον του. Διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ ὄγκου τοῦ ξύλου ἐργαζόμεθα ὡς ἀκολούθως. Καλοῦμεν B_1 τὸ βάρος τοῦ σώματος εἰς τὸν ἀέρα καὶ B_2 τὸ βάρος αὐτοῦ ἐντὸς τοῦ ὕδατος, ὁπότε θὰ ἔχωμεν ὅτι ἡ ἄνωσις A_1 τὴν ὁποίαν δέχεται τοῦτο ὑπὸ τοῦ ὕδατος εἶναι :

$$A_1 = B_1 - B_2 \tag{1}$$

Ἐὰν ἀκολούθως ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ σῶμα προσαρμόζεται ἐπὶ τοῦ τεμαχίου τοῦ ξύλου, τὸ ὁποῖον ἔχει βάρος ἔστω B, καὶ ὅτι τὸ σύστημα σῶμα καὶ τεμάχιον ξύλου ζυγίζει ἐντὸς τοῦ ὕδατος B′, τότε ἡ ἄνωσις A_2, τὴν ὁποίαν θὰ δέχεται τοῦτο, θὰ εἶναι :

$$A_2 = B_1 + B - B' \tag{2}$$

Καθίσταται τώρα φανερὸν ὅτι, ἐὰν ἀφαιρέσωμεν κατὰ μέλη τὴν σχέσιν (1) ἀπὸ τὴν (2), προκύπτει ἡ ἄνωσις A, τὴν ὁποίαν δέχεται τὸ ξύλον ἐντὸς τοῦ ὕδατος. Ἤτοι :

$$A = B + B_2 - B' \tag{3}$$

Ἔχομεν ὅμως ἐκ τοῦ γνωστοῦ τύπου τῆς ἀνώσεως ὅτι :

$$A = \varepsilon' \cdot V \tag{4}$$

ὅπου ε′ τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ὕδατος καὶ V ὁ ὄγκος τοῦ ξύλου. Ἀντικαθιστῶντες τὴν τιμὴν τοῦ A ἐκ τῆς σχέσεως (4) εἰς τὴν σχέσιν (3) λαμβάνομεν :

$$\varepsilon' \cdot V = B + B_2 - B' \tag{5}$$

καὶ ἐξ αὐτῆς λύοντες ὡς πρὸς V ἔχομεν :

$$V = \frac{B + B_2 - B'}{\varepsilon'} \tag{6}$$

Πρὸς εὕρεσιν τῆς ζητουμένης πυκνότητος ρ τοῦ ξύλου διαιροῦμεν τὴν μᾶζαν $m = B/g$ τοῦ ξύλου διὰ τοῦ ὄγκου V αὐτοῦ, ὅτε λόγῳ τῆς σχέσεως (6) λαμβάνομεν τὸν γενικὸν τύπον :

$$\rho = \frac{\varepsilon' \cdot B}{(B + B_2 - B') \cdot g} \tag{7}$$

Θέτοντες εἰς τὸν γενικὸν τύπον (7) τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως : $\varepsilon' = 981$ dyn/cm³, B = 10 gr*, B′ = 20 gr*, $B_2 = 30$ gr*, g = 991 cm/sec², εὑρίσκομεν :

$$\rho = 0,5 \text{ gr/cm}^3.$$

791. Τεμάχιον σακχάρου ζυγίζει εἰς τὸν ἀέρα 20 gr*, ἐνῷ ὅταν βυθίζεται ἐντὸς κηροζίνης, εἰς τὴν ὁποίαν δὲν διαλύεται, ζυγίζει 10 gr*. Ἡ πυκνότης τῆς κηροζίνης εἶναι 0,8 gr/cm³. Νὰ καθορισθοῦν : α) Ἡ πυκνότης τοῦ σακχάρου ἐν σχέσει πρὸς τὴν κηροζίνην. β) Ἡ πυκνότης τοῦ σακχάρου ἐν σχέσει πρὸς τὸ ὕδωρ.

Λύσις. Ἂς καλέσωμεν B_1 τὸ βάρος τοῦ σακχάρου εἰς τὸν ἀέρα καὶ B_2 τὸ βάρος αὐτοῦ ἐντὸς τῆς κηροζίνης. Ἡ ἄνωσις A τὴν ὁποίαν θὰ δέχεται ἐντὸς τῆς κηροζίνης θὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν βαρῶν B_1 καὶ B_2. Ἤτοι :

$$A = B_1 - B_2 \tag{1}$$

Ἐπειδὴ δὲ ἡ ἄνωσις A εἶναι ἴση πρὸς τὸ βάρος B τῆς ἐκτοπιζομένης κηροζίνης, ἡ σχέσις (1) γράφεται :

$$B = B_1 - B_2$$

α) Πρὸς εὕρεσιν τῆς σχετικῆς πυκνότητος τοῦ σακχάρου ὡς πρὸς τὴν κηροζίνην, διαιροῦμεν τὴν μᾶζαν τοῦ σακχάρου m_1 διὰ τῆς μάζης m τῆς ἐκτοπιζομένης κηροζίνης. Ἤτοι:

$$\rho_1 = \frac{m_1}{m} \tag{2}$$

ἤ, ἐπειδὴ ἐκ τοῦ θεμελιώδους νόμου τῆς Μηχανικῆς ἔχομεν $B = m \cdot g$, ἡ σχέσις (2) γίνεται:

$$\rho_1 = \frac{B_1/g}{B/g} = \frac{B_1}{B} = \frac{B_1}{B_1 - B_2} \tag{3}$$

Θέτομεν εἰς τὴν σχέσιν (3) τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως: $B_1 = 20$ gr*, $B_2 = 10$ gr*, καὶ εὑρίσκομεν ὅτι ἡ σχετικὴ πυκνότης $\rho_{1,\sigma\chi.}$ τοῦ σακχάρου ὡς πρὸς τὴν κηροζίνην εἶναι:

$$\underline{\rho_{1,\sigma\chi.} = 2.}$$

β) Ἡ σχετικὴ πυκνότης ἑνὸς σώματος ὡς πρὸς τὸ ὕδωρ ἰσοῦται ἀριθμητικῶς, ὡς γνωστόν, πρὸς τὴν ἀπόλυτον πυκνότητα αὐτοῦ εἰς τὸ σύστημα C.G.S.

Ἡ ἀπόλυτος ὅμως πυκνότης ἑνὸς σώματος εἶναι ἴση πρὸς τὴν σχετικὴν πυκνότητα αὐτοῦ ὡς πρὸς ἓν ἄλλο σῶμα ἐπὶ τὴν ἀπόλυτον πυκνότητα τοῦ ἄλλου σώματος καὶ συνεπῶς ἡ μὲν ἀπόλυτος πυκνότης τοῦ σακχάρου θὰ εἶναι: $\rho = 2 \cdot 0{,}8 = 1{,}6$ gr/cm³, ἡ δὲ σχετικὴ πυκνότης αὐτοῦ $\rho_{\sigma\chi.}$ ὡς πρὸς τὸ ὕδωρ:

$$\underline{\rho_{\sigma\chi.} = 1{,}6.}$$

792. Νὰ καθορισθῇ ἡ πυκνότης τῆς γλυκερίνης ἐκ τῶν ἀκολούθων δεδομένων. Δοχεῖον μάζης 15 gr πληροῦται ὑπὸ ὕδατος καὶ τὸ σύνολον ζυγίζει 65 gr*. Ἀκολούθως τὸ αὐτὸ δοχεῖον πληροῦται μὲ γλυκερίνην καὶ τὸ σύνολον ζυγίζει 78 gr*.

Λύσις. Καλοῦμεν m_1 τὴν μᾶζαν τοῦ δοχείου καὶ B_2 τὸ συνολικὸν βάρος τοῦ δοχείου, ὅταν εἶναι πλῆρες γλυκερίνης. Ἐπειδὴ τὸ βάρος τοῦ δοχείου εἶναι $m_1 \cdot g$, ἕπεται ὅτι τὸ βάρος B τῆς γλυκερίνης θὰ εἶναι:

$$B = B_2 - m_1 \cdot g \tag{1}$$

Ἐὰν δὲ καλέσωμεν B_3 τὸ συνολικὸν βάρος τοῦ δοχείου, ὅταν εἶναι πλῆρες ὕδατος, τότε τὸ βάρος B′ τοῦ ὕδατος εἶναι:

$$B' = B_3 - m_1 \cdot g \tag{2}$$

Ἐκ τῆς σχέσεως (1), ἐν συνδυασμῷ πρὸς τὸν θεμελιώδη νόμον τῆς Μηχανικῆς ($B = m \cdot g$), εὑρίσκομεν ὅτι ἡ μᾶζα m τῆς γλυκερίνης εἶναι:

$$m = \frac{B_2 - m_1 \cdot g}{g} \tag{3}$$

καὶ ἐκ τῆς σχέσεως (2), ἐν συνδυασμῷ πρὸς τὸν τύπον τοῦ εἰδικοῦ βάρους ($\varepsilon = B/V$), εὑρίσκομεν ὅτι ὁ ὄγκος V τοῦ ὕδατος καὶ συνεπῶς καὶ ὁ ὄγκος τῆς γλυκερίνης εἶναι:

$$V = \frac{B_3 - m_1 \cdot g}{\varepsilon'} = \frac{B_3 - m_1 \cdot g}{\rho' \cdot g} \tag{4}$$

ὅπου ε' καὶ ρ' ἀντιστοίχως τὸ εἰδικὸν βάρος καὶ ἡ πυκνότης τοῦ ὕδατος. Πρὸς εὕρεσιν τῆς πυκνότητος τῆς γλυκερίνης διαιροῦμεν τὴν μᾶζαν m τῆς γλυκερίνης διὰ τοῦ ὄγκου V αὐτῆς καὶ εὑρίσκομεν, βάσει τῶν σχέσεων (3) καὶ (4), ὅτι ἡ ζητουμένη πυκνότης ρ τῆς γλυκερίνης εἶναι:

$$\rho = \frac{(B_2 - m_1 \cdot g) \cdot \rho'}{(B_3 - m_1 \cdot g)} \tag{5}$$

Θέτομεν εἰς τὸν τύπον (5) τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως εἰς τὸ σύστημα C.G.S.: $m_1 = 15$ gr, $B_2 = 78 \cdot 981$ dyn, $B_3 = 65 \cdot 981$ dyn, $\rho' = 1$ gr/cm³, καὶ εὑρίσκομεν:

$$\underline{\rho = 1{,}26 \text{ gr/cm}^3.}$$

793. Ὁμογενὲς μεταλλικὸν σῶμα ζυγίζει εἰς τὸν ἀέρα 40,47 gr* καὶ ἐντὸς τοῦ ὕδατος 34,77 gr*. α) Πόσον εἶναι τὸ εἰδικὸν βάρος αὐτοῦ καὶ β)

πόσον ζυγίζει ἐντὸς τοῦ οἰνοπνεύματος. (Εἰδ. βάρος οἰνοπνεύματος $\varepsilon = 0{,}79$ gr^*/cm^3.)

Λύσις. Ἔστω ὅτι τὸ βάρος τοῦ σώματος εἰς τὸν ἀέρα εἶναι B καὶ ἐντὸς τοῦ ὕδατος B'. Προφανῶς ἡ ἄνωσις A, τὴν ὁποίαν ὑφίσταται τὸ σῶμα ὑπὸ τοῦ ὕδατος, εἶναι B – B' καὶ θὰ ἔχωμεν :

$$A = B - B' \qquad (1)$$

Ἡ ἄνωσις ὅμως, ὡς γνωστόν, εἶναι ἴση πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ ὄγκου V τοῦ σώματος ἐπὶ τὸ εἰδικὸν βάρος ε' τοῦ ὕδατος. Ἤτοι :

$$A = \varepsilon' \cdot V \qquad (2)$$

καὶ συνεπῶς ἐκ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) λαμβάνομεν :

$$\varepsilon' \cdot V = B - B' \qquad (3)$$

Λύομεν τὴν σχέσιν (3) ὡς πρὸς τὸν ὄγκον V τοῦ σώματος καὶ εὑρίσκομεν :

$$V = \frac{B - B'}{\varepsilon'} \qquad (4)$$

α) Πρὸς εὕρεσιν τώρα τοῦ εἰδικοῦ βάρους ε τοῦ σώματος διαιροῦμεν τὸ βάρος τοῦ σώματος B διὰ τοῦ ὄγκου αὐτοῦ V καὶ λόγῳ τῆς σχέσεως (4) λαμβάνομεν :

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon' \cdot B}{B - B'} \qquad (5)$$

Θέτομεν εἰς τὴν σχέσιν (5) τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως : $B = 40{,}47\ gr^*$, $B' = 34{,}77\ gr^*$, $\varepsilon' = 1\ gr^*/cm^3$, καὶ εὑρίσκομεν :

$$\underline{\varepsilon = 7{,}1\ gr^*/cm^3.}$$

β) Διὰ νὰ εὕρωμεν πόσον ζυγίζει τὸ σῶμα ἐντὸς τοῦ οἰνοπνεύματος, ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὸ βάρος τοῦ σώματος B τὴν ἄνωσιν A', τὴν ὁποίαν δέχεται τοῦτο ἀπὸ τὸ οἰνόπνευμα. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ἄνωσις τὴν ὁποίαν δέχεται τὸ σῶμα εἰς τὸ οἰνόπνευμα ἰσοῦται μὲ τὸ εἰδικὸν βάρος ε_1 τοῦ οἰνοπνεύματος ἐπὶ τὸν ὄγκον V τοῦ σώματος, καὶ λόγῳ τῆς σχέσεως (4) προκύπτει ὅτι τὸ βάρος B_1 τοῦ σώματος ἐντὸς τοῦ οἰνοπνεύματος εἶναι :

$$B_1 = B - \varepsilon_1 \cdot V = B - \varepsilon_1 \cdot \frac{B - B'}{\varepsilon'} \qquad (6)$$

Θέτομεν εἰς τὴν σχέσιν (6) τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως : $\varepsilon_1 = 0{,}79\ gr^*/cm^3$, $B = 40{,}47\ gr^*$, $B' = 34{,}77\ gr^*$, $\varepsilon' = 1\ gr^*/cm^3$, καὶ εὑρίσκομεν :

$$\underline{B_1 = 35{,}97\ gr^*.}$$

794. Διὰ τὸν προσδιορισμὸν τοῦ εἰδικοῦ βάρους τῆς παραφίνης γίνονται αἱ ἀκόλουθοι μετρήσεις. Ἡ παραφίνη ζυγίζεται εἰς τὸν ἀέρα, ὅτε τὸ βάρος αὐτῆς εὑρίσκεται 7,83 gr*. Ἀκολούθως διὰ νήματος ἀμελητέου βάρους ἐξαρτῶμεν ἀπὸ τὴν παραφίνην μεταλλικὸν τεμάχιον καί, ὅταν ἡ παραφίνη εὑρίσκεται εἰς τὸν ἀέρα καὶ τὸ μέταλλον ἐντὸς τοῦ ὕδατος, τὸ σύστημα ἔχει βάρος 43,38 gr*. Τέλος, ὅταν καὶ ἡ παραφίνη καὶ τὸ μέταλλον βυθίζωνται εἰς τὸ ὕδωρ, τὸ βάρος τοῦ συστήματος εἶναι 34,38 gr*.

Λύσις. Ἔστω B τὸ βάρος τῆς παραφίνης καὶ B_1 τὸ βάρος τοῦ μεταλλικοῦ τεμαχίου, V ὁ ὄγκος τῆς παραφίνης καὶ V_1 ὁ ὄγκος τοῦ μεταλλικοῦ τεμαχίου. Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν, ὅτε τὸ μέταλλον εὑρίσκεται ἐντὸς τοῦ ὕδατος, ἡ ἄνωσις A_1 θὰ εἶναι :

$$A_1 = B + B_1 - B_2 \qquad (1)$$

ὅπου B_2 εἶναι τὸ φαινόμενον βάρος τοῦ συστήματος. Εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν, ὅτε καὶ τὰ δύο εὑρίσκονται ἐντὸς τοῦ ὕδατος, ἡ ἄνωσις A_2 θὰ εἶναι :

$$A_3 = B + B_1 - B_3 \qquad (2)$$

ὅπου B_3 εἶναι τὸ φαινόμενον βάρος τοῦ συστήματος. Ἡ σχέσις (1), ἐὰν καλέσωμεν ε' τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ὕδατος, γράφεται:

$$\varepsilon' \cdot V_1 = B + B_1 - B_2 \qquad (3)$$

καὶ ἡ σχέσις (2) γράφεται:

$$\varepsilon' (V + V_1) = B + B_1 - B_3 \qquad (4)$$

Ἀφαιροῦμεν τὰς σχέσεις (3) καὶ (4) κατὰ μέλη, ὅτε προκύπτει ἡ σχέσις:

$$\varepsilon' \cdot V = B_2 - B_3 \qquad (5)$$

καὶ ἐξ αὐτῆς εὑρίσκεται ὁ ὄγκος τῆς παραφίνης:

$$V = \frac{B_2 - B_3}{\varepsilon'} \qquad (6)$$

Συνεπῶς τὸ εἰδικὸν βάρος τῆς παραφίνης θὰ εἶναι:

$$\varepsilon = \frac{B}{V} = \frac{\varepsilon' \cdot B}{B_2 - B_3} \qquad (7)$$

Θέτομεν εἰς τὴν σχέσιν (7) τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως: $\varepsilon' = 1$ gr*/cm³, $B = 7{,}83$ gr*, $B_2 = 43{,}38$ gr*, $B_3 = 34{,}38$ gr*, καὶ εὑρίσκομεν:

$$\underline{\varepsilon = 0{,}87 \text{ gr*/cm}^3.}$$

795. Ὡρισμένη πίεσις ἰσορροπεῖται ὑπὸ στήλης ὕδατος ὕψους 60 cm. Ἡ αὐτὴ πίεσις ἰσορροπεῖται ὑπὸ στήλης διαλύματος ἅλατος ὕψους 50 cm. Πόση ἡ πυκνότης τοῦ διαλύματος.

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν p τὴν ὡρισμένην πίεσιν, ε' τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ὕδατος, ε τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ διαλύματος, h' τὸ ὕψος τοῦ ὕδατος καὶ h τὸ ὕψος τοῦ διαλύματος τοῦ ἅλατος, τότε, συμφώνως μὲ τὴν ἐκφώνησιν τῆς ἀσκήσεως, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν τὰς σχέσεις:

$$p = \varepsilon' \cdot h' \qquad (1)$$

$$p = \varepsilon \cdot h \qquad (2)$$

ἐκ τῶν ὁποίων λαμβάνομεν τὴν σχέσιν:

$$\varepsilon \cdot h = \varepsilon' \cdot h' \qquad (3)$$

Ἐὰν ἀκολούθως καλέσωμεν ρ' τὴν πυκνότητα τοῦ ὕδατος καὶ ρ τὴν πυκνότητα τοῦ διαλύματος, θὰ ἔχωμεν $\varepsilon' = \rho' \cdot g$ καὶ $\varepsilon = \rho \cdot g$, ὅτε ἐκ τῆς σχέσεως (3) προκύπτει ὁ τύπος:

$$\rho = \frac{\rho' \cdot h'}{h} \qquad (4)$$

Ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως εἰς τὸν τύπον (4), ἤτοι: $\rho' = 1$ gr/cm³, $h' = 60$ cm, $h = 50$ cm, εὑρίσκομεν ὅτι:

$$\underline{\rho = 1{,}2 \text{ gr/cm}^3.}$$

796. Τεμάχιον ξύλου δρυὸς ζυγίζει 100 gr* εἰς τὸν ἀέρα καὶ σῶμα ζυγίζει 150 gr* εἰς τὸ ὕδωρ. Τὸ σῶμα προσαρμόζεται εἰς τὸ ξύλον καὶ τὸ σύστημα ἐντὸς τοῦ ὕδατος ζυγίζει 110 gr*. Πόσον τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ξύλου.

Λύσις. Τὸ εἰδικὸν βάρος ε τοῦ ξύλου εὑρίσκεται ἐκ τοῦ γνωστοῦ τύπου:

$$\varepsilon = \frac{B}{V} \qquad (1)$$

ὅπου B εἶναι τὸ βάρος τοῦ ξύλου καὶ V ὁ ὄγκος αὐτοῦ.

Διὰ τὸν ἀνωτέρω ὑπολογισμὸν πρέπει προηγουμένως νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον τοῦ ξύλου ἐκ τῶν δεδομένων τῆς ἀσκήσεως. Πρὸς τοῦτο ἐργαζόμεθα ὡς ἀκολούθως: Ἔστω B_1 τὸ βάρος τοῦ ξύλου εἰς τὸν ἀέρα, B_2 τὸ βάρος αὐτοῦ ἐντὸς τοῦ ὕδατος, V_1 ὁ ὄγκος αὐτοῦ καὶ ε_1 τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ὕδατος. Συμφώνως πρὸς τὴν Ἀρχὴν τῆς ἀνώσεως θὰ ἔχωμεν τὴν σχέσιν:

$$B_1 - B_2 = \varepsilon_1 \cdot V_1 \qquad (2)$$

Ἐὰν τώρα ἐφαρμόσωμεν εἰς τὸ ξύλον τὸ σῶμα καὶ καλέσωμεν B_3 τὸ βάρος τοῦ συστήματος ἐντὸς τοῦ ὕδατος, θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις :

$$B + B_1 - B_3 = \varepsilon_1 \cdot V + \varepsilon_1 \cdot V_1 \qquad (3)$$

Ἀφαιροῦμεν κατὰ μέλη τὴν σχέσιν (2) ἀπὸ τὴν (3) καὶ λαμβάνομεν τὴν σχέσιν :

$$B + B_2 - B_3 = \varepsilon_1 \cdot V \qquad (4)$$

καὶ ἐξ αὐτῆς εὑρίσκομεν ὅτι :

$$V = \frac{B + B_2 - B_3}{\varepsilon_1} \qquad (5)$$

Ἄρα λόγῳ τῆς σχέσεως (5) ἡ σχέσις (1) γράφεται :

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_1 \cdot B}{B + B_2 - B_3} \qquad (6)$$

Θέτομεν εἰς τὸν τύπον (6) τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως : $B = 100$ gr*, $B_2 = 150$ gr*, $B_3 = 110$ gr*, $\varepsilon_1 = 1$ gr*/cm³, καὶ εὑρίσκομεν ὅτι τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ξύλου εἶναι :

$$\underline{\varepsilon = 0{,}714 \text{ gr}^*/\text{cm}^3.}$$

797. Σῶμα πυκνότητος 2 gr/cm³ ἀφίεται ἐξ ὕψους 15 m ἄνωθεν τῆς ἐπιφανείας βαθείας λίμνης. Νὰ εὑρεθῇ εἰς ποῖον βάθος ἐντὸς τοῦ ὕδατος θὰ εἰσχωρήσῃ τὸ σῶμα μετὰ πάροδον 5 sec ἀπὸ τὴν στιγμὴν καθ' ἣν ἐγγίζει τὸ ὕδωρ. ($g = 10$ m/sec².)

Λύσις. Ἐντὸς τοῦ ὕδατος τὸ σῶμα θὰ ἔχῃ κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα υ_0 ἴσην πρὸς τὴν ταχύτητα τὴν ὁποίαν ἔχει ἀποκτήσει κατὰ τὴν ἐλευθέραν πτῶσιν του, ὅταν ἐγγίζῃ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὕδατος. Συνεπῶς, ἐὰν καλέσωμεν γ τὴν ἐπιτάχυνσιν τοῦ σώματος, τὸ βάθος h εἰς τὸ ὁποῖον θὰ εὑρίσκεται μετὰ πάροδον χρόνου t θὰ εἶναι :

$$h = \upsilon_0 \cdot t + \frac{1}{2}\gamma \cdot t^2 \qquad (1)$$

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ βάθος h πρέπει νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν ταχύτητα υ_0 καὶ τὴν ἐπιτάχυνσιν γ.

α) Ὑπολογισμὸς τῆς ταχύτητος. Ἔστω ὅτι τὸ ὕψος ἐξ οὗ ἀφίεται τὸ σῶμα εἶναι h_1, ὁ χρόνος τὸν ὁποῖον χρειάζεται διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὴν ἐπιφάνειαν t_1 καὶ υ_0 ἡ ταχύτης ὑπὸ τὴν ὁποίαν ἐγγίζει τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὕδατος. Θὰ ἰσχύουν, ὡς γνωστόν, αἱ σχέσεις :

$$\upsilon_0 = g \cdot t_1 \quad (2) \qquad \text{καὶ} \qquad h_1 = \frac{1}{2} g \cdot t_1^2 \qquad (3)$$

ἐκ τῶν ὁποίων προκύπτει, δι' ἀπαλοιφῆς τοῦ χρόνου t_1, ὅτι :

$$\upsilon_0 = \sqrt{2g \cdot h_1} \qquad (4)$$

β) Ὑπολογισμὸς τῆς ἐπιταχύνσεως γ. Ὅταν τὸ σῶμα βυθισθῇ ἐντὸς τοῦ ὕδατος, θὰ ἐξασκοῦνται ἐπ' αὐτοῦ ἀφ' ἑνὸς μὲν τὸ βάρος του B κατακορύφως καὶ πρὸς τὰ κάτω καὶ ἀφ' ἑτέρου ἡ ἄνωσις A κατακορύφως καὶ πρὸς τὰ ἄνω. Ἡ ἐξασκουμένη λοιπὸν συνισταμένη δύναμις θὰ εἶναι :

$$F = B - A \qquad (5)$$

Ἐὰν καλέσωμεν m τὴν μᾶζαν, V τὸν ὄγκον καὶ ρ τὴν πυκνότητα τοῦ σώματος, ὡς καὶ ρ' τὴν πυκνότητα τοῦ ὕδατος, θὰ ἔχωμεν :

$$B = \rho \cdot g \cdot V \quad \text{καὶ} \quad A = \rho' \cdot g \cdot V$$

καὶ συνεπῶς ἡ σχέσις (5) γράφεται :

$$F = (\rho - \rho') \cdot g \cdot V \qquad (6)$$

Ἄρα ἡ ἐπιτάχυνσις γ τοῦ σώματος ἐντὸς τοῦ ὕδατος θὰ εἶναι, συμφώνως πρὸς τὸν θεμελιώδη νόμον τῆς Μηχανικῆς ($F = m \cdot \gamma$) :

$$\gamma = \frac{F}{m} = \frac{(\rho - \rho') \cdot g \cdot V}{\rho \cdot V} = \frac{(\rho - \rho') \cdot g}{\rho} \qquad (7)$$

Θέτομεν ἀκολούθως τὰς εὑρεθείσας τιμὰς τοῦ $υ_0$ καὶ $γ$ εἰς τὴν σχέσιν (1) καὶ προκύπτει ὁ γενικὸς τύπος :

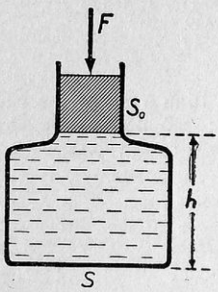
$$h = \sqrt{2g \cdot h_1} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \frac{(\rho - \rho') g}{\rho} \cdot t^2 \qquad (8)$$

Ἐκ τοῦ τύπου (8) δι' ἀντικαταστάσεως τῶν μεγεθῶν διὰ τῶν δεδομένων τιμῶν τῆς ἀσκήσεως εὑρίσκομεν :

$$\underline{h = 149{,}1 \text{ m.}}$$

798. Δοχεῖον πλῆρες ὑγροῦ, εἰδικοῦ βάρους ε, μέχρις ὕψους h ὑπεράνω τοῦ πυθμένος, κλείεται ἄνωθεν διὰ κινητοῦ ἐμβόλου ἐμβαδοῦ S_0. Ἐπὶ τοῦ ἐμβόλου ἐξασκεῖται δύναμις F. Ποία ἡ δύναμις ἐπὶ τοῦ πυθμένος, ἔχοντος ἐμβαδὸν S.

Λύσις. Ἐπὶ τοῦ πυθμένος τοῦ δοχείου θὰ ἐξασκῆται ἀφ' ἑνὸς ἡ ὑδροστατικὴ πίεσις p_1 καὶ ἀφ' ἑτέρου ἡ πίεσις p_2, ἡ ὁποία μεταδίδεται εἰς τὸν πυθμένα λόγῳ τῆς ἐξασκουμένης ἐπὶ τοῦ ἐμβόλου δυνάμεως F. Κατὰ τὸν θεμελιώδη τύπον τῆς Ὑδροστατικῆς, ἡ ὑδροστατικὴ πίεσις ἐπὶ τοῦ πυθμένος εἶναι :



$$p_1 = \varepsilon \cdot h \qquad (1)$$

Ἡ πίεσις p_2 ἡ ἐξασκουμένη ὑπὸ τῆς δυνάμεως F θὰ εἶναι κατὰ τὴν Ἀρχὴν τοῦ Pascal ἴση πρὸς τὴν πίεσιν ἡ ὁποία ἐξασκεῖται ἐπὶ τοῦ ἐμβόλου. Ἤτοι :

$$p_2 = \frac{F}{S_0} \qquad (2)$$

Ἄρα ἡ συνολικὴ πίεσις ἡ ὁποία ἐξασκεῖται ἐπὶ τοῦ πυθμένος θὰ εἶναι :

$$p = \varepsilon \cdot h + \frac{F}{S_0} \qquad (3)$$

Ἐὰν τώρα καλέσωμεν F' τὴν ζητουμένην δύναμιν ἡ ὁποία ἐξασκεῖται ἐπὶ τοῦ πυθμένος, αὐτὴ θὰ εἶναι κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς πιέσεως ($p = F'/S$) :

$$F' = p \cdot S \qquad (4)$$

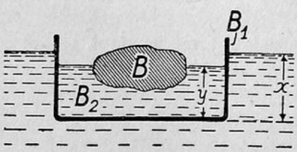
Οὕτω λόγῳ τῆς σχέσεως (3) λαμβάνομεν τὸν γενικὸν τύπον τῆς ζητουμένης δυνάμεως :

$$\underline{F' = \varepsilon \cdot S \cdot h + \frac{F \cdot S}{S_0}}$$

799. Δοχεῖον βάρους B_1 ἐπιπλέει ἐντὸς ὑγροῦ εἰδικοῦ βάρους ε καὶ περιέχει ποσότητα ἐκ τοῦ ἰδίου ὑγροῦ βάρους B_2. Ποῖον πρέπει νὰ εἶναι τὸ βάρος τοῦ σώματος B, ἵνα ὁ λόγος τῶν κατακορύφων ἀποστάσεων x : y ἰσοῦται πρὸς δοθέντα ἀριθμὸν K.

Λύσις. Ἐφ' ὅσον τὸ δοχεῖον ἐπιπλέει, πρέπει ἡ ἄνωσις τὴν ὁποίαν δέχεται ὑπὸ τοῦ ὑγροῦ νὰ εἶναι ἴση πρὸς τὸ συνολικὸν βάρος τοῦ δοχείου, ἤτοι :

$$A = B_{\text{ὀλ.}} \qquad (1)$$



Ἡ ἄνωσις A εἶναι, ὡς γνωστόν, ἴση πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ εἰδικοῦ βάρους ε τοῦ ὑγροῦ ἐπὶ τὸν ὄγκον V τοῦ βυθιζομένου μέρους τοῦ δοχείου. Ἤτοι :

$$A = \varepsilon \cdot V$$

ἤ, ἐὰν καλέσωμεν S τὴν βάσιν τοῦ δοχείου, θὰ εἶναι :

$$A = \varepsilon \cdot S \cdot x \qquad (2)$$

Ἐπίσης, τὸ συνολικὸν βάρος $B_{\text{ὀλ.}}$ τοῦ δοχείου θὰ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν βαρῶν B_1 δοχείου, B_2 ὑγροῦ καὶ B σώματος. Ἤτοι :

$$B_{\text{ὀλ.}} = B_1 + B_2 + B \qquad (3)$$

καὶ συνεπῶς ἡ σχέσις (1) γράφεται :

$$\varepsilon \cdot S \cdot x = B_1 + B_2 + B \tag{4}$$

Ἐπίσης, ἐὰν καλέσωμεν V_1 τὸν ὄγκον τοῦ μέρους τοῦ σώματος τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ, τότε ὁ ὄγκος τοῦ ὑγροῦ εἶναι $S \cdot y - V_1$ καὶ ἐπομένως τὸ βάρος B_2 τοῦ ὑγροῦ θὰ εἶναι :

$$B_2 = \varepsilon\,(S \cdot y - V_1) = \varepsilon \cdot S \cdot y - \varepsilon \cdot V_1 \tag{5}$$

Ἀλλὰ τὸ γινόμενον $\varepsilon \cdot V_1$ εἶναι ἡ ἄνωσις τὴν ὁποίαν ὑφίσταται τὸ σῶμα Β ($B = \varepsilon \cdot V_1$) καὶ οὕτω ἐκ τῆς σχέσεως (5) λαμβάνομεν :

$$\varepsilon \cdot S \cdot y = B_2 + B \tag{6}$$

Διαιροῦντες κατὰ μέλη τὰς (4) καὶ (6) λαμβάνομεν :

$$\frac{x}{y} = \frac{B_1 + B_2 + B}{B_2 + B} \tag{7}$$

ἢ ἐπειδὴ $\frac{x}{y} = K$:

$$K = \frac{B_1 + B_2 + B}{B_2 + B} \tag{8}$$

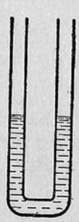
Τελικῶς δι' ἐπιλύσεως τῆς (8) ὡς πρὸς τὸ ζητούμενον βάρος τοῦ σώματος Β εὑρίσκομεν :

$$\underline{B = \frac{B_1}{K-1} - B_2}$$

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Β'

800. Νὰ προσδιορισθῇ ἡ πίεσις εἰς τὸν πυθμένα δοχείου βάθους 76 cm, ὅταν πληροῦται α) μὲ ὕδωρ, β) μὲ ὑδράργυρον. (Εἰδ. βάρος ὑδραργύρου 13,6 gr*/cm³.)
(Ἀπ. α' 76 gr*/cm² β' 1033 gr*/cm².)

801. Σωλὴν σχήματος U περιέχει ὑδράργυρον. Πόση στήλη ὕδατος πρέπει νὰ σχηματισθῇ ἄνωθεν τοῦ δεξιοῦ σκέλους διὰ νὰ ὑποβιβάσῃ τὴν στάθμην τοῦ ὑδραργύρου κατὰ 1 cm καὶ νὰ ἀναβιβάσῃ τὴν στάθμην κατὰ 1 cm εἰς τὸ ἕτερον σκέλος.
(Ἀπ. 27 cm.)

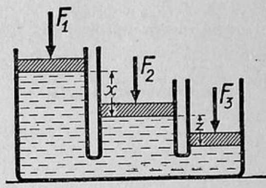


802. Ἐντὸς κυλινδρικοῦ δοχείου εὑρίσκονται ὑδράργυρος : σχετ. πυκνότητος 13,6 καταλαμβάνων ὕψος 0,8 m, πετρέλαιον : σχετ. πυκνότητος 0,8 καταλαμβάνων ὕψος 0,6 m καὶ ὕδωρ καταλαμβάνων ὕψος 1,28 m. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ὑδροστατικὴ πίεσις εἰς χιλιοστὰ ὑδραργύρου (mm Hg) εἰς τὸν πυθμένα τοῦ δοχείου καὶ εἰς τὰς ἐπιφανείας διαχωρισμοῦ τῶν ὑγρῶν.
(Ἀπ. 989,34 mm Hg, 129,4 mm Hg, 39,3 mm Hg.)
(Ε. Μ. Πολυτεχνεῖον. Σχολαὶ Ἀρχιτεκτόνων - Τοπογράφων, 1955.)

803. Ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου πυθμένος λεκάνης περιεχούσης ὕδωρ εἰδ. βάρους ε_1 τοποθετεῖται κυλινδρικὸν τεμάχιον ἐκ φελλοῦ εἰδ. βάρους ε_2 ἐπιφανείας βάσεως S καὶ ὕψους α, πιέζεται δὲ τοῦτο ἐπαρκῶς ἐπὶ τῆς ὑαλίνης πλακός, ὥστε μεταξὺ αὐτῆς καὶ τοῦ φελλοῦ νὰ μὴ παραμείνῃ ὕδωρ. Διὰ λεπτοῦ σύρματος μήκους α συμπίπτοντος μὲ τὸν ἄξονα τοῦ κυλίνδρου στερεοῦται ἐπὶ τοῦ πρώτου φελλοῦ εἷς δεύτερος, ἐπ αὐτοῦ κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον εἷς τρίτος κ.ο.κ. Τὸ σύστημα ἀποτελεῖται τελικῶς ἐκ τεμαχίων φελλοῦ, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ τελευταῖον ἀπέχει ἀπόστασιν α ἐκ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὕδατος. Ποία ἡ τιμὴ καὶ ἡ διεύθυνσις τῶν ἐπὶ τῶν τεμαχίων ἐνεργουσῶν δυνάμεων.
(Ἀπ. Πρὸς τὰ κάτω $F = n \cdot \alpha \cdot S\,[\varepsilon_1 + \varepsilon_2]$.)

804. Κυβικὸν δοχεῖον πλευρᾶς 50 cm εἶναι κλειστὸν κατὰ τὴν κορυφήν. Πρὸς τὴν μίαν πλευρὰν συνδέεται κατακόρυφος σωλὴν τῆς ὀπῆς εὑρισκομένης 30 cm ἄνωθεν τοῦ πυθμένος· τὸ ὕψος τοῦ ὕδατος εἰς τὸν σωλῆνα εἶναι 70 cm ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς ὀπῆς καὶ ἡ ἐγκαρσία τομή της εἶναι 100 cm^2. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ δύναμις ἐπὶ ἑκάστης ἐπιφανείας, συμπεριλαμβανομένης τῆς κορυφῆς καὶ τῆς τοῦ πυθμένος. ('Απ. 125 kgr* ἐπὶ τῆς κορυφῆς, 250 kgr* ἐπὶ τοῦ πυθμένος, 180 kgr* ἐπὶ τῆς κατακορύφου ἐπιφανείας τῆς φερούσης τὸν σωλῆνα καὶ 188 kgr* ἐπὶ ἑκάστης τῶν ἄλλων ἐπιφανειῶν.)

805. Τρεῖς ἐμβολεῖς ἐπιφανείας S_1, S_2 καὶ S_3, ἐπὶ τῶν ὁποίων ἐξασκοῦνται ἀντιστοίχως αἱ δυνάμεις F_1, F_2, F_3, κεῖνται ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας ὑγροῦ εἰδικοῦ βάρους ε, ὡς δεικνύεται εἰς τὸ σχῆμα. Ποῖαι αἱ κατακόρυφοι ἀποστάσεις αὐτῶν ἀνὰ δύο, x καὶ z.



$$\left('Απ.\ x = \frac{1}{ε}\left(\frac{F_2}{S_2} - \frac{F_1}{S_1}\right),\ z = \frac{1}{ε}\left(\frac{F_3}{S_3} - \frac{F_2}{S_2}\right).\right)$$

806. Ἡ μεγίστη ἀρτηριακὴ πίεσις εἶναι 25 cm Hg ὑπὲρ τὴν ἀτμοσφαιρικήν. Εἰς ποῖον ὕψος θὰ ἀνεπήδα τὸ αἷμα, ἐὰν ἀφίετο ἐλεύθερον. (Δίδεται πυκνότης τοῦ αἵματος 1,1 gr/cm^3 καὶ πυκνότης τοῦ ὑδραργύρου 13,6 gr/cm^3.) ('Απ. 3,09 m.)
(Πανεπιστήμιον 'Αθηνῶν, 'Ιατρικὴ Σχολή, 1950.)

807. Εἰς ὑδραυλικὸν πιεστήριον ἡ διάμετρος τοῦ μικροῦ ἐμβολέως εἶναι 25 mm, ὁ δὲ μοχλοβραχίων τῆς ἀντιστάσεως εἶναι 12 cm. 'Εὰν ἡ δύναμις ἡ ἀσκουμένη ὑπὸ τοῦ πιεστηρίου εἶναι 30 000 kgr*, ὅταν ἡ ἐφαρμοζομένη δύναμις εἶναι 15 kgr*, ποῖον τὸ συνολικὸν μῆκος τοῦ μοχλοῦ. ('Απ. 166,6 cm.)

808. Εἰς ὑδραυλικὸν πιεστήριον ἡ ἐπιφάνεια τοῦ μικροῦ ἐμβολέως εἶναι 20 cm^2 καὶ ἡ τοῦ μεγάλου 120 cm^2. Ὁ μοχλοβραχίων τῆς δυνάμεως εἶναι 60 cm καὶ ὁ τῆς ἀντιστάσεως 15 cm. Νὰ ὑπολογισθοῦν : α) Ἡ δύναμις ἡ ἀσκουμένη ὑπὸ τοῦ πιεστηρίου, ὅταν ἡ ἐφαρμοζομένη δύναμις εἶναι 8 kgr*. β) Ἡ μετατόπισις τοῦ μεγάλου ἐμβολέως, ὅταν ὁ μικρὸς μετακινῆται κατὰ 3 cm. γ) Τὸ ἔργον εἰς kgr*m, τὸ παραγόμενον εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ὑπὸ τοῦ μικροῦ καὶ τοῦ μεγάλου ἐμβολέως.
('Απ. α' $F_2 = 192$ kgr*. β' 0,5 cm. γ' A = 96 kgr*m.)

809. Μεταλλικὸν τεμάχιον ζυγίζει 50 gr εἰς τὸν ἀέρα, 30 gr εἰς τὸ ὕδωρ καὶ 32 gr εἰς τὴν βενζίνην. Νὰ προσδιορισθῇ τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ μετάλλου καὶ τῆς βενζίνης. ('Απ. 2,5 gr^*/cm^3, 0,90 gr^*/cm^3.)

810. Ἓν ἐλατήριον ὑποτίθεται ὅτι ἔχει κατασκευασθῆ εἴτε ἀπὸ χαλκὸν (εἰδ. βάρους 8,8 gr^*/cm^3) εἴτε ἀπὸ ὀρείχαλκον (εἰδ. βάρους 8,4 gr^*/cm^3). Τὸ ἐλατήριον ζυγίζει εἰς τὸν ἀέρα 126 gr* καὶ εἰς τὸ ὕδωρ 111 gr*. 'Απὸ ποῖον μέταλλον ἔχει κατασκευασθῆ.
('Απ. 'Απὸ ὀρείχαλκον.)

811. Τεμάχιον κυλινδρικοῦ σωλῆνος ἐξωτερικῆς διαμέτρου 20 cm, πάχους τοιχώματος 1 cm καὶ ὕψους 6 cm, ἐκ μετάλλου εἰδ. βάρους 5 gr^*/cm^3, τοποθετεῖται μὲ κατακόρυφον τὸν ἄξονά του, ἐντὸς λεκάνης ὑδραργύρου, εἰδ. βάρους 13,5 gr^*/cm^3. Ζητεῖται τὸ βάθος h μέχρι τοῦ ὁποίου θὰ εἰσχωρήσῃ ὁ σωλὴν ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ. Θὰ προτιμηθῇ λύσις εἰς τὴν ὁποίαν οὐδόλως γίνεται χρῆσις τοῦ συμβόλου π ἢ τῆς ἀριθμητικῆς τιμῆς 3,14 αὐτοῦ. ('Απ. 2,22 cm.)
(Ε. Μ. Πολυτεχνεῖον, Σχολὴ Μηχανολόγων - 'Ηλεκτρολόγων, 1955.)

812. Κοίλη σφαῖρα ἐσωτερικῆς ἀκτῖνος 9 cm καὶ ἐξωτερικῆς ἀκτῖνος 10 cm, βυθιζομένη ἐντὸς ὑγροῦ πυκνότητος 0,8 gr/cm^3, ἰσορροπεῖ κατὰ τὸ ἥμισυ αὐτῆς ἐν καταδύσει. Ποῖον τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ὑλικοῦ τῆς σφαίρας. Ποία ἔπρεπε νὰ εἶναι ἡ πυκνότης τοῦ ὑλικοῦ τούτου, ἵνα ἡ σφαῖρα ἰσορροπῇ ἐν πλήρει καταδύσει.
('Απ. 1,47 gr^*/cm^3, 2, 94 gr/cm^3.)
(Πανεπιστήμιον 'Αθηνῶν, Τμῆμα Φυσικόν, 1955.)

813. Κύβος ξύλινος ἐπιπλέων ἐντὸς τοῦ ὕδατος ὑποβαστάζει βάρος 200 gr*. Ἐὰν ἀφαιρεθῇ τὸ βάρος, ὁ κύβος ἀνέρχεται κατὰ 2 cm. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ κύβου. (Ἀπ. Ἀκμῆς 10 cm.)

814. Τεμάχιον φελλοῦ ζυγίζει 5 gr* εἰς τὸν ἀέρα. Ἕτερον σῶμα ζυγίζει 86 gr* ἐντὸς τοῦ ὕδατος. Τὸ σῶμα προσαρμόζεται ἐπὶ τοῦ φελλοῦ καὶ ἀμφότερα ζυγίζουν 71 gr* ἐντὸς τοῦ ὕδατος. Ποῖον τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ φελλοῦ. (Ἀπ. 0,25 gr*/cm^3.)

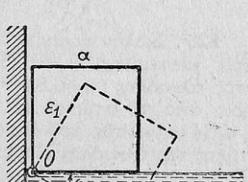
815. Τεμάχιον σκυροκονιάματος ζυγισθὲν ἐντὸς τοῦ ἀέρος εὑρέθη βάρους 1 kgr*, ἐνῷ ὑπὸ τὸ ὕδωρ τὸ βάρος αὐτοῦ εὑρέθη 495 gr*. Ζητεῖται τὸ κατ᾽ὄγκον ποσοστὸν τῶν ἐσωτερικῶν πόρων καὶ κενῶν τοῦ σκυροκονιάματος, ἐὰν ἀποδειχθῇ ὅτι ὑπάρχουν τοιοῦτοι. (Εἰδ. βάρος συμπαγοῦς μάζης σκυροκονιάματος 2 gr*/cm^3.)
(Ἀπ. 0,99%, ὄγκος πόρων 5 cm^3.)
(Ε.Μ.Πολυτεχνεῖον, Σχολὴ Ἀρχιτεκτόνων, 1953.)

816. Σῶμα ἐκ κράματος χαλκοῦ καὶ χρυσοῦ ζυγίζει εἰς τὸν ἀέρα 50 gr* καὶ ἐντὸς τοῦ ὕδατος 45 gr*. Ποία ἡ κατὰ βάρος σύνθεσις τοῦ κράματος. (Δίδονται εἰδ. βάρος χαλκοῦ 8,9 gr*/cm^3, χρυσοῦ 19,3 gr*/cm^3, ὕδατος 1 gr*/cm^3.)
(Ἀπ. Χαλκὸς 79,5%, χρυσὸς 20,5%.)

817. Ἐπὶ τεμαχίου φελλοῦ, εἰδικοῦ βάρους 0,25 gr*/cm^3, ὄγκου V_1 δημιουργοῦμεν μικρὰν ὀπήν, τὴν ὁποίαν συμπληροῦμεν ἀκολούθως διὰ μολύβδου, εἰδ. βάρους 11,3 gr*/cm^3. Ἐὰν τὸ σύστημα ἰσορροπῇ ἐντὸς ὕδατος 4° C, νὰ ἐκφρασθῇ ὁ ὄγκος τοῦ μολύβδου συναρτήσει τοῦ ὄγκου V_1. (Ἀπ. $V_2 = 0{,}068\ V_1$.)

818. Ἀφίεται νὰ πέσῃ σφαῖρα ἐξ ἀργιλίου 5 cm^3 ἐντὸς χλωροφορμίου τὸ ὁποῖον πληροῖ δοχεῖον ὕψους 2 m. Ζητεῖται ὁ χρόνος τὸν ὁποῖον χρειάζεται ἡ σφαῖρα νὰ διανύσῃ τὸ ὕψος τοῦ χλωροφορμίου, γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἀφίεται νὰ πέσῃ ἀπὸ ὕψους 2 m ἄνωθεν τοῦ ὑγροῦ. (Πυκνότης ἀργιλίου 2,5 gr/cm^3, πυκνότης χλωροφορμίου 1,5 gr/cm^3, g = 980 cm/sec^2.) (Ἀπ. 0,29 sec.)

819. Κύβος ἀκμῆς α ἐξ ὑλικοῦ εἰδικοῦ βάρους ε_1 στρεπτὸς περὶ τὸ Ο (βλ. σχῆμα) βυθίζεται ἐντὸς ὑγροῦ εἰδικοῦ βάρους ε. Ἐὰν εἶναι $\varepsilon_1/\varepsilon = 2$, νὰ εὑρεθῇ ἡ γωνία φ μεταξὺ τῆς κατωτέρας ἕδρας τοῦ κύβου καὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ, ὅταν ὁ κύβος ἰσορροπῇ ἐντὸς αὐτοῦ. (Ἀπ. φ = 68° 30′.)



820. Κοίλη ὀρειχαλκίνη σφαῖρα πάχους τοιχωμάτων 2 mm ἐπιπλέει ἐπὶ τοῦ ὕδατος κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε νὰ βυθίζεται κατὰ τὸ ἥμισυ ἐντὸς αὐτοῦ. Ποία ἡ διάμετρος αὐτῆς. ($\varepsilon_{\text{ὀρειχ.}} = 8{,}3$ gr*/cm^3.) (Ἀπ. 19,5 cm.)

821. Ὑπὸ ποίαν ἀναλογίαν βαρῶν πρέπει νὰ συνδυασθοῦν χαλκὸς ($\varepsilon_1 = 9$ gr*/cm^3) καὶ φελλὸς ($\varepsilon_2 = 0{,}25$ gr*/cm^3), ἵνα τὸ σύστημα αἰωρῆται ἐντὸς ὕδατος θερμοκρασίας 4° C. (Ἀπ. 27/8.)

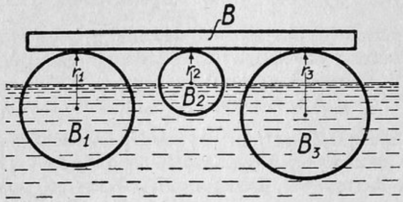
822. Κυλινδρικὴ πλὰξ ἐκ μολύβδου (εἰδικοῦ βάρους ε_1) καὶ ὕψους h_1 ἐπιπλέει ἐντὸς ὑδραργύρου (εἰδικοῦ βάρους ε_2) κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε ὁ ἄξων τοῦ κυλίνδρου νὰ εἶναι κατακόρυφος. Ἄνωθεν τοῦ ὑδραργύρου ὑπάρχει στρῶμα γλυκερίνης (εἰδικοῦ βάρους ε_3) τοιούτου πάχους, ὥστε ἡ μολυβδίνη πλὰξ νὰ καλύπτεται τελείως. Ζητεῖται: α) Πόσον μέρος τοῦ κυλίνδρου βυθίζεται ἐντὸς τοῦ ὑδραργύρου. β) Πόσον ἐὰν ἀφαιρεθῇ τὸ στρῶμα τῆς γλυκερίνης. Ἀριθμητικαὶ ἐφαρμογαί: $h_1 = 5$ cm, $\varepsilon_1 = 11{,}3$ gr*/cm^3, $\varepsilon_{\text{ὑδραρ.}} = 13{,}6$ gr*/cm^3, $\varepsilon_{\text{γλυκ.}} = 1{,}26$ gr*/cm^3. (Ἀπ. 4,07 cm, 4,10 cm.)

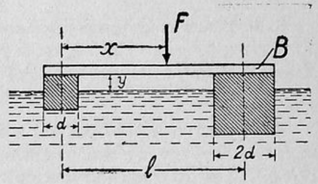
823. Ἐπὶ τριῶν ἐπιπλεόντων σφαιρῶν, βαρῶν B_1, B_2, B_3 καὶ ἀκτίνων r_1, r_2, r_3 ἀντιστοίχως κεῖται κυκλικὴ πλὰξ βάρους B (βλ. σχῆμα). Τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τῆς πλακὸς μετὰ τῶν σφαιρῶν εἶναι κορυφαὶ ἰσοπλεύρου τριγώνου. Πῶς πρέπει νὰ κατανεμηθῇ ἐπὶ τῶν τριῶν σφαιρῶν φορτίον F εὑρισκόμενον ἐπὶ τῆς πλακός, ἵνα αὕτη ἐπιπλέῃ ὁριζοντίως. Ποία ἡ ἀπόστασις αὐτῆς y εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἀπὸ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ. (Εἰδικὸν βάρος ὑλικοῦ σφαιρῶν ε_1 καὶ ὑγροῦ ε.)

('Απ. α′ Τὸ y εὑρίσκεται ἐκ τῆς ἐξισώσεως:

$$y^3 - y^2 (r_1 + r_2 + r_3) = \frac{1}{\varepsilon \cdot \pi} \left(F + B - (B_1 + B_2 + B_3) \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} - 1 \right) \right)$$

$$\beta' \quad F_1 = \frac{1}{3} \left(F - (B_2 + B_3 - 2B_1) \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} - 1 \right) + \varepsilon \pi y^2 (r_2 + r_3 - 2r_1) \right)$$



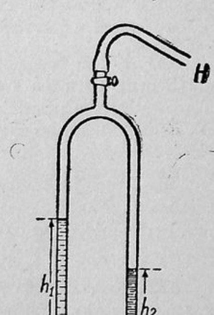


824. Πλωτὴρ συνίσταται ἐκ δύο τετραγωνικῶν δοκῶν μήκους α καὶ τομῆς d^2 καὶ $(2d)^2$ ἀντιστοίχως (βλ. σχῆμα). Ἡ ἀπόστασις τῶν μέσων αὐτῶν εἶναι *l*. Ἐπὶ τῶν δύο δοκῶν καθ' ὅλον τὸ μῆκος αὐτῶν στηρίζεται πλὰξ βάρους B. Ζητεῖται: α) Εἰς ποίαν ἀπόστασιν x πρέπει νὰ τοποθετηθῇ ἐπ' αὐτῆς φορτίον F, ἵνα ἐπιπλέῃ ὁριζοντίως. β) Ποία ἡ ἀπόστασις αὐτῆς y ἀπὸ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην. (Εἰδικὸν βάρος ὑγροῦ ε καὶ ὑλικοῦ δοκῶν ε_1.)

$$\left(\text{'Απ. } x = \frac{1}{6F} [4F + B + 4\alpha d^2 (\varepsilon - \varepsilon_1)],\ y = \frac{5}{3} d \left(1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} \right) - \frac{F + B}{3 \varepsilon \alpha d} \right)$$

825. Σωλὴν κεκαμμένος, ὡς δεικνύει τὸ σχῆμα, βυθίζεται κατὰ ἓν σκέλος αὐτοῦ ἐντὸς γλυκερίνης, ($\varepsilon_1 = 1{,}26$ gr*/cm³), ἐνῷ κατὰ τὸ ἕτερον ἐντὸς ἀλκοόλης ($\varepsilon_2 = 0{,}8$ gr*/cm³). Ἐὰν ἀναρροφήσωμεν τὸν ἀέρα ἀπὸ τὸ στόμιον H, ἡ γλυκερίνη ἀνέρχεται εἰς ὕψος $h_2 = 34$ cm ἐντὸς τοῦ δεξιοῦ σκέλους. Ποῖον τὸ ὕψος τῆς στήλης τῆς ἀλκοόλης ἐντὸς τοῦ ἀριστεροῦ σκέλους.

('Απ. $h_1 = 53{,}5$ cm.)



826. Διὰ τὸν καθορισμὸν τῶν εἰδικῶν βαρῶν τοῦ τερεβινθελαίου καὶ τοῦ σακχάρου διὰ τῆς ληκύθου ἐλήφθησαν τὰ κάτωθι ἀποτελέσματα: Μᾶζα κενῆς ληκύθου = 16,12 gr, μᾶζα ληκύθου + σακχάρου = 48,9 gr, μᾶζα ληκύθου + σακχάρου + τερεβινθελαίου = 74,64 gr, μᾶζα ληκύθου πλήρους ὑπὸ τερεβινθελαίου = 59,79 gr, μᾶζα ληκύθου πλήρους ὑπὸ ὕδατος = 66,32 gr. Ὑπολογίσατε τὰ εἰδικὰ βάρη τοῦ τερεβινθελαίου καὶ τοῦ σακχάρου.

('Απ. 0,87 gr*/cm³, 1,59 gr*/cm³.)

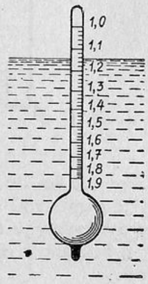
827. Τεμάχιον ἐκ κηροῦ παραφίνης περιτυλίσσεται ὑπὸ χαλκίνου σύρματος οὕτως ὥστε νὰ ἰσορροπῇ ἐντὸς τοῦ ὕδατος. Ἡ μᾶζα τοῦ κηροῦ εἶναι 27 gr καὶ ἡ μᾶζα τοῦ χαλκοῦ 3,38 gr. Εὕρετε

τὴν πυκνότητα τοῦ κηροῦ ἐκ παραφίνης. (Πυκνότης χαλκοῦ $=8{,}93$ gr/cm^3.)
('Απ. 0,9 gr/cm^3.)

828. Μία φιάλη διὰ τὴν μέτρησιν τοῦ εἰδικοῦ βάρους ζυγίζει 34 gr* κενή, 84 gr* ἐὰν πληρωθῇ ὑπὸ ὕδατος καὶ 78,5 gr* ὅταν πληροῦται ὑπό τινος ἐλαίου. Εὕρετε τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ἐλαίου. ('Απ. 0,89 gr*/cm^3.)

829. Λήκυθος ζυγίζει κενὴ 14,72 gr*, πλήρης δὲ ὕδατος 39,74 gr* καὶ πλήρης διαλύματος ἅλατος 44,85 gr*. Πόση ἡ πυκνότης τοῦ διαλύματος. ('Απ. 1,20 gr/cm^3.)

830. 'Εὰν ἐπιδιώκωμεν νὰ βαθμολογήσωμεν πυκνόμετρον (βλ. σχῆμα) τοῦ ὁποίου αἱ χαραγαὶ δι' 1 gr*/cm^3 καὶ 2 gr*/cm^3 πρέπει νὰ ἀπέχουν κατὰ 15 cm, ἐπὶ στελέχους ἐγκαρσίας τομῆς 1 cm^2, πόσος πρέπει νὰ εἶναι ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας κάτωθεν τῆς χαραγῆς 2 καὶ πόσον πρέπει νὰ εἶναι τὸ ὁλικὸν βάρος τοῦ πυκνομέτρου καὶ εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τῆς χαραγῆς 1,0 θὰ εὑρίσκεται ἡ χαραγὴ 1,5.
('Απ. 15 cm^3, 30 gr*, 10 cm.)



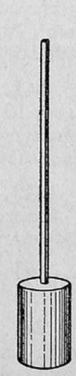
831. Κυλινδρικὸς ὑάλινος σωλὴν τομῆς 2 cm^2 ἔχει ὕψος 20 cm καὶ βάρος 2,5 gr*. Ζητεῖται: α) Πόσην κόνιν σιδήρου πρέπει νὰ ρίψωμεν ἐντὸς αὐτοῦ, ἵνα τμῆμα μήκους 2 cm ἐξέχῃ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὕδατος, ὅταν οὗτος ἐπιπλέῃ ἐντὸς αὐτοῦ. β) 'Εὰν ὁ σωλὴν μετὰ τοῦ ἕρματος χρησιμοποιηθῇ ὡς ἀραιόμετρον, νὰ ὑπολογισθῇ εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ ἀνωτέρου ἄκρου πρέπει νὰ χαραχθοῦν αἱ διαιρέσεις: 1,00, 1,10, 1,20. Ποίαν ἰδιάζουσαν ἰδιότητα παρουσιάζει ἡ προκύπτουσα κλῖμαξ.
('Απ. α' 33,5 gr*. β' $x=20-18/s$, 2,00 3,64 5,00 cm.)

832. Σύνηθες πυκνόμετρον ἔχει 4 cm τοῦ στελέχους του ἄνωθεν τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὕδατος ὅταν πλέῃ εἰς αὐτὸ καὶ 20 cm ἄνωθεν τῆς ἐπιφανείας ὅταν πλέῃ εἰς ὑγρὸν εἰδικοῦ βάρους 1,2 gr*/cm^3. Ποῖον τὸ μῆκος τοῦ στελέχους ἄνωθεν τῆς ἐπιφανείας, ὅταν τὸ πυκνόμετρον πλέῃ εἰς ὑγρὸν εἰδικοῦ βάρους 1,1 gr*/cm^3. ('Απ. 12,73 cm.)

833. 'Αραιόμετρον ἔχον βάρος 18,22 gr* καὶ διάμετρον στελέχους 8 mm πρόκειται νὰ χρησιμοποιηθῇ διὰ μέτρησιν εἰδικοῦ βάρους ἀπὸ 1,000 ἕως 0,700 gr*/cm^3. Ποῖαι πρέπει νὰ εἶναι αἱ ἀποστάσεις τῶν διαιρέσεων 0,900, 0,800 καὶ 0,700 ἐκ τῆς διαιρέσεως 1,000. ('Απ. 40,2 mm, 90,6 mm, 115,4 mm.)

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Γ'

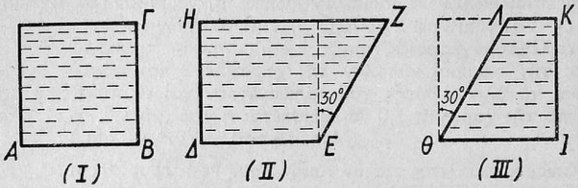
834. Κυλινδρικὸν δοχεῖον ἐκ κασσιτέρου ὕψους 15 cm καὶ διαμέτρου 10 cm φέρει σωλῆνα ὁ ὁποῖος ἔχει προσκολληθῇ ἐπὶ μικρᾶς ὀπῆς ἐπὶ τῆς κορυφῆς τοῦ δοχείου. 'Εὰν ἡ ὀπὴ τοῦ σωλῆνος ἔχῃ διάμετρον 1,5 cm καὶ τὸ μῆκος αὐτοῦ εἶναι 180 cm, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πίεσις εἰς gr*/cm^2 εἰς τὸν πυθμένα καὶ ἐπὶ τῆς κάτω ἐπιφανείας τῆς κορυφῆς, ὅταν ὁ σωλὴν ἔχῃ πληρωθῇ δι' ὕδατος. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ συνολικὴ δύναμις εἰς gr* ἐπὶ τοῦ καμπύλου τοιχώματος τοῦ κυλίνδρου, λαμβανομένης ὑπ' ὄψιν τῆς μέσης πιέσεως μεταξὺ κορυφῆς καὶ πυθμένος. Πόσον τὸ βάρος τοῦ ὕδατος ἐπὶ τοῦ ὅλου δοχείου, λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν καὶ τοῦ σωλῆνος (βλ. σχῆμα).



835. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πίεσις εἰς σημεῖον εὑρισκόμενον 2 m ὑπὸ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὕδατος.

836. Δοχεῖον σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου μήκους 20 cm, εὔρους 10 cm καὶ ὕψους 10 cm πληροῦται ὑπὸ ὕδατος. Εὕρετε τὴν δύναμιν τὴν ὀφειλομένην εἰς τὸ βάρος τοῦ ὕδατος α) ἐπὶ τοῦ πυθμένος, β) ἐπὶ μιᾶς πλευρᾶς (20×10 cm^2), γ) ἐπὶ μιᾶς πλευρᾶς (10×10 cm^2).

837. Τρία δοχεῖα I, II, III, ὡς τοῦ σχήματος, ἔχοντα πυθμένας τῆς αὐτῆς ἐπιφανείας (20 cm ἑκάστη ἀκμὴ τῆς βάσεως) καὶ πλευρὰς τοῦ αὐτοῦ ὕψους (20 cm), πληροῦνται ὑπὸ ὕδατος. Δύο ἀπέναντι πλευραὶ ἑκάστου δοχείου εἶναι κατακόρυφοι. Εἰς τὸ δοχεῖον I καὶ αἱ δύο ἄλλαι πλευραὶ εἶναι κατακόρυφοι. Εἰς τὸ δοχεῖον II ἡ μία ἐκ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν εἶναι κατακόρυφος, ἡ δὲ ἑτέρα κεκλιμένη πρὸς τὰ ἔξω, σχηματίζουσα γωνίαν 30° μὲ τὴν κατακόρυφον. Εἰς τὸ δοχεῖον III ἡ μία ἐκ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν εἶναι κατακόρυφος, ἡ δὲ ἑτέρα κεκλιμένη πρὸς τὰ ἔσω, σχηματίζουσα γωνίαν 30° μὲ τὴν κατακόρυφον. α) Εὕρετε τὸ βάρος τοῦ ὕδατος



εἰς ἕκαστον δοχεῖον. β) Εὕρετε τὴν δύναμιν τὴν ἐξασκουμένην ἐπὶ τοῦ πυθμένος ἑκάστου δοχείου ὑπὸ τοῦ ὕδατος. γ) Συγκρίνατε τὸ βάρος τοῦ ὕδατος εἰς ἕκαστον δοχεῖον μὲ τὴν ἀντίστοιχον δύναμιν τὴν ἐξασκουμένην ἐπὶ τοῦ πυθμένος. δ) Ὑπὸ ποίας συνθήκας ἡ δύναμις ἡ ἐξασκουμένη ἐπὶ τοῦ πυθμένος τοῦ δοχείου εἶναι ἴση μὲ τὸ βάρος τοῦ ὑγροῦ.

838. Μία κυλινδρικὴ δεξαμενὴ ἔχει ἀκτῖνα 3 m καὶ ὕψος 10 m. Αὕτη πληροῦται ὑπὸ ὕδατος. Εὕρετε: α) Τὸ βάρος τοῦ ὕδατος εἰς τὴν δεξαμενήν. β) Τὴν δύναμιν τὴν ἐξασκουμένην ἐπὶ τοῦ πυθμένος. γ) Τὴν ὁριζοντίαν δύναμιν ἡ ὁποία τείνει νὰ διαρρήξῃ τὴν δεξαμενήν.

839. Κατακόρυφος σωλὴν μήκους 15 m καὶ διαμέτρου 5 mm προσαρμόζεται διὰ τοῦ κατωτέρου του ἄκρου ἐπὶ τῆς ἄνω ἐπιφανείας κυλινδρικοῦ δοχείου διαμέτρου 30 cm καὶ ὕψους 1 cm καὶ τὸ ὅλον πληροῦται δι' ὕδατος (βλ. σχῆμα προβλήματος 834). Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ βάρος τοῦ ὕδατος, ἡ πίεσις ἐπὶ τοῦ πυθμένος καὶ ἡ δύναμις ἡ ἀσκουμένη ἐπὶ τοῦ πυθμένος.

840. Ἓν κυβικὸν δοχεῖον $10 \times 10 \times 10$ cm³π ληροῦται ὑπὸ ὕδατος καὶ καλύπτεται εἰς τὴν κορυφήν. Διὰ μιᾶς ὀπῆς εἰς τὴν κορυφὴν εἰσάγεται ἔμβολον, καθέτου διατομῆς 1 cm², ἐπὶ τοῦ ὁποίου ἐφαρμόζεται δύναμις 10 gr*. Πόση εἶναι ἡ δύναμις α) ἐπὶ τοῦ πυθμένος, β) ἐπὶ μιᾶς πλευρᾶς (ἕδρας), γ) ἐπὶ τῆς κορυφῆς.

841. Χαλυβδίνη ὑδατοδεξαμενὴ ἀποτελεῖται ἀπὸ ἕνα κύλινδρον ἀκτῖνος 3 m καὶ ὕψους 10 m καὶ ἀπὸ μίαν ἡμισφαιρικὴν βάσιν. Εὕρετε: α) Τὸ βάρος τοῦ ὕδατος εἰς τὴν δεξαμενήν, ὅταν εἶναι πλήρης. β) Τὴν κατακόρυφον δύναμιν τὴν ἐξασκουμένην ἐπὶ τοῦ ἡμισφαιρικοῦ πυθμένος τῆς δεξαμενῆς.

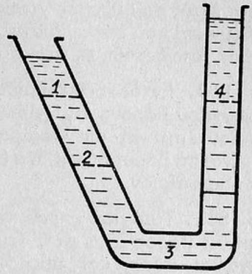
842. Ὁ φελλὸς φιάλης ἔχει διάμετρον 2 cm καὶ δύναται νὰ εἰσχωρήσῃ ἐντὸς αὐτῆς δι' ἐφαρμογῆς δυνάμεως 5 kgr*. Εἰς ποῖον βάθος λίμνης ὁ φελλὸς θὰ εἰσχωρήσῃ ἐντὸς τῆς φιάλης.

843. Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ μεγάλου ἐμβολέως ὑδραυλικοῦ πιεστηρίου, ἵνα ἡ πίεσις τοῦ ὑγροῦ εἶναι 1 000 at, ὅταν δι' αὐτοῦ ἐξασκῆται δύναμις 12 000 kgr*.

844. Ἐπὶ τοῦ πυθμένος λίμνης βάθους 20 m εὑρίσκεται σῶμα σχήματος κύβου ἀκμῆς 1 m καὶ εἰδικοῦ βάρους 2,7 gr*/cm³. Ποῖον τὸ ἀπαιτούμενον ἔργον, ἵνα ὁ κύβος ἐξαχθῇ πλήρως τοῦ ὕδατος μὲ τὰς πλευρικὰς ἀκμὰς κατακορύφως.

845. Ὁ μέγας ἐμβολεὺς ὑδραυλικοῦ πιεστηρίου ἔχει ἐμβαδὸν 200 cm^2 καὶ ὁ μικρὸς ἐμβολεὺς ἔχει ἐμβαδὸν 5 cm^2. Ἐὰν δύναμις 25 kgr* ἐφαρμόζεται ἐπὶ τοῦ μικροῦ ἐμβολέως, νὰ καθορισθῇ ἡ πίεσις καὶ ἡ δύναμις εἰς τὸν μέγαν ἐμβολέα.

846. Εἰς τὸ δοχεῖον τοῦ σχήματος, ὁ ἀριστερὸς σωλὴν καὶ τὸ κατώτερον μέρος τοῦ δεξιοῦ σωλῆνος περιέχουν ὕδωρ. Τὸ ὑπόλοιπον τοῦ δεξιοῦ σωλῆνος περιέχει κηροζίνην. Ἡ κορυφὴ τῆς στήλης κηροζίνης εἰς τὸν δεξιὸν σωλῆνα εἶναι 60 cm ἄνωθεν τῆς κορυφῆς τῆς ὑδατίνης στήλης εἰς τὸν ἀριστερὸν σωλῆνα. Ἐὰν ἡ πίεσις εἰς τὴν στάθμην (1) εἰς τὸν ἀριστερὸν σωλῆνα εἶναι 105 gr*/cm^2, ποία ἡ πίεσις εἰς τὴν στάθμην (4) εἰς τὸν δεξιὸν σωλῆνα.



847. Τρία δοχεῖα εἶναι τελείως πλήρη ὕδατος. Εἰς τὸ πρῶτον δοχεῖον τοποθετεῖται τεμάχιον ξύλου εἰδ. βάρους 0,4 gr*/cm^3 καὶ βάρους 30 gr*. Τεμάχιον μολύβδου εἰδικοῦ βάρους 11 gr*/cm^3 καὶ ὄγκου 3 cm^3 τοποθετεῖται εἰς τὸ δεύτερον δοχεῖον. Τέλος ὁ μόλυβδος καὶ τὸ ξύλον συνάπτονται μεταξύ των καὶ τοποθετοῦνται εἰς τὸ τρίτον δοχεῖον. Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἡ μεταβολή, ἐὰν τοιαύτη ὑφίσταται, ἡ ὁποία ἐπῆλθε εἰς τὸ τρίτον δοχεῖον.

848. Ποίαν ποσότητα ὕδατος πρέπει νὰ ἐκτοπίζῃ ἐπιπλέων ξύλινος κορμὸς βάρους 150 kgr*.

849. Εἰς πόσον ὕψος ἀνέρχεται τὸ ὕδωρ εἰς τὰς σωληνώσεις οἰκοδομῆς, ὅταν ἡ πίεσις τὴν ὁποίαν δεικνύει μανόμετρον εἰς τὸ ἰσόγειον εἶναι 3 kgr*/cm^2.

850. Τεμάχιον μετάλλου, μάζης 100 gr καὶ ὄγκου 10 cm^3 βυθίζεται ἐντὸς ὕδατος. α) Ποῖος ὁ ὄγκος τοῦ ἐκτοπιζομένου ὕδατος. β) Ποῖον τὸ βάρος τοῦ ἐκτοπιζομένου ὕδατος. γ) Πόση ἡ δύναμις ἀνώσεως. δ) Ποῖον τὸ βάρος αὐτοῦ εἰς τὸ ὕδωρ.

851. Κυβικὸν τεμάχιον στερεοῦ τινος, ἀκμῆς 30 cm, βυθίζεται εἰς τὸ ὕδωρ. Εὕρετε τὴν ἀνωστικὴν δύναμιν τὴν ἐξασκουμένην ὑπὸ τοῦ ὕδατος ἐπὶ τοῦ τεμαχίου, α) ὅταν ἡ ἄνω ἕδρα κεῖται ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὕδατος, β) ὅταν ἡ ἄνω ἕδρα εὑρίσκεται 30 cm κάτω τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὕδατος καὶ γ) 3 m κάτω τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὕδατος.

852. Χυτοσιδηροῦν τεμάχιον ($\varepsilon = 7{,}2$ gr*/cm^3) ζυγίζει 30 kgr* εἰς τὸν ἀέρα καὶ 19,5 kgr* εἰς τὸ ὕδωρ. Νὰ καθορισθῇ ὁ ὄγκος τῆς κοιλότητος τοῦ τεμαχίου.

853. Εἰς ὀγκομετρικὸν κύλινδρον τὸ ὕδωρ εὑρίσκεται εἰς ὕψος 110 cm^3 καί, ὅταν κρύσταλλος ἐκ χαλαζίου τίθεται ἐντὸς αὐτοῦ, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὕδατος ἀνυψοῦται εἰς ὕψος 136 cm^3. Τὸ βάρος τοῦ κρυστάλλου εἰς τὸν ἀέρα εἶναι 68,9 gr*. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ εἰδικὸν βάρος αὐτοῦ.

854. Τεμάχιον ξύλου ἐπιπλέει ἐντὸς ὕδατος μὲ τὸ 1/5 τοῦ ὄγκου του ἔξω τοῦ ὕδατος. Νὰ εὑρεθῇ τὸ εἰδικὸν βάρος αὐτοῦ.

855. Κυλινδρικὸς φελλὸς διαμέτρου 2,8 cm καὶ μήκους 4 cm προσδένεται ἐντὸς τοῦ πυθμένος δοχείου καὶ προστίθεται ὑδράργυρος μέχρις ὅτου ὁ φελλὸς βυθισθῇ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τάσις τοῦ σχοινίου. (Εἰδ. βάρος ὑδραργύρου 13,6 gr*/cm^3, φελλοῦ 0,25 gr*/cm^3.)

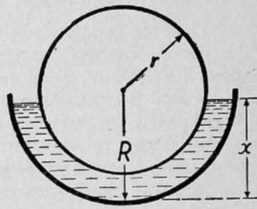
856. Ὅταν παγόβουνον ἐπιπλέῃ ἐπὶ θαλασσίου ὕδατος, πόσον τοῖς ἑκατὸν τοῦ παγοβούνου εὑρίσκεται ἐντὸς τοῦ ὕδατος. (Εἰδ. βάρος πάγου 0,922 gr*/cm*, εἰδ. βάρος θαλασσίου ὕδατος 1,03 gr*/cm^3.)

857. Αἱ ἰσορροποῦσαι στῆλαι ἐλαίου καὶ ὕδατος εἶναι 50 cm καὶ 46 cm ἀντιστοίχως. Ποία ἡ πυκνότης τοῦ ἐλαίου.

858. Ὅταν σῶμα ἐξ ὕλης εἰδικοῦ βάρους 950 kgr*/m^3 ἐπιπλέῃ ἐπὶ τῆς διαχωριζούσης ἐπιφανείας μεταξὺ ὕδατος καὶ κηροζίνης, πόσον μέρος τοῦ ὑλικοῦ εἶναι ἄνωθεν τῆς διαχωριζούσης ἐπιφανείας. (Εἰδ. βάρος κηροζίνης 800 kgr*/m^3.)

859. Δοχεῖον περιέχον ὕδωρ τοποθετεῖται εἰς τὸν ἕνα δίσκον ζυγοῦ, ἐνῷ εἰς τὸν ἕτερον τοποθετοῦνται σταθμὰ πρὸς ἀποκατάστασιν ἰσορροπίας. Τεμάχιον ψευδαργύρου(ε=7,1 gr*/cm^3) τὸ ὁποῖον ζυγίζει 85,2 gr* καὶ ἐξηρτημένον ἀπὸ λεπτὸν νῆμα βυθίζεται ἐντὸς τοῦ ὕδατος χωρὶς νὰ ἐγγίζῃ τὸ δοχεῖον. Πόσα σταθμὰ πρέπει νὰ τοποθετηθοῦν ἐπὶ τοῦ ἑτέρου δίσκου διὰ τὴν ἀποκατάστασιν τῆς ἰσορροπίας. Ἐὰν ὁ ψευδάργυρος τοποθετηθῇ εἰς τὸν πυθμένα τοῦ δοχείου, πόσα σταθμὰ πρέπει νὰ προστεθοῦν.

860. Ἐντὸς κοίλου ἡμισφαιρίου ἀκτῖνος R (βλ. σχῆμα) εὑρίσκεται ὡρισμένη ποσότης ὑγροῦ βάρους B_1 (εἰδικοῦ βάρους ε), ἐντὸς τοῦ ὁποίου ἐπιπλέει μία σφαῖρα ἀκτῖνος r. Ποῖον πρέπει νὰ εἶναι τὸ βάρος αὐτῆς, ἵνα ἐπιπλέῃ ὁμοκεντρικῶς πρὸς τὸ ἡμισφαίριον.



861. Τεμάχιον κηροῦ τοποθετεῖται ἐπὶ ζυγοῦ καὶ δεικνύει βάρος 23,4 gr*. Τεμάχιον σιδήρου ἐξαρτᾶται κάτωθεν αὐτοῦ καὶ ἀμφότερα βυθίζονται ἐντὸς τοῦ ὕδατος εἰς τρόπον ὥστε ὁ κηρὸς νὰ εὑρίσκεται εἰς τὸν ἀέρα καὶ ὁ σίδηρος ἐντὸς τοῦ ὕδατος. Τὸ βάρος ἀμφοτέρων εὑρίσκεται ἴσον πρὸς 167,6 gr*. Ἀκολούθως τοποθετοῦνται ἀμφότερα τὰ σώματα ὥστε νὰ εὑρίσκωνται ἐντὸς τοῦ ὕδατος, ὅτε τὸ βάρος αὐτῶν εὑρίσκεται 141 gr*. Νὰ εὑρεθῇ τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ κηροῦ.

862. Τεμάχιον μεταλλικὸν ζυγίζει 500 gr* καὶ ἔχει ὄγκον 75 cm^3. Πόσον εἶναι τὸ σχετικὸν εἰδ. βάρος, ὅταν βυθίζεται εἰς οἰνόπνευμα εἰδικοῦ βάρους 0,8 gr*/cm^3.

863. Στερεὸν σῶμα ζυγίζει 100 gr* εἰς τὸν ἀέρα καὶ 60 gr* εἰς ὑγρὸν πυκνότητος 0,8 gr/cm^3. Ποία ἡ πυκνότης καὶ τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ στερεοῦ.

864. Ἅλυσις ἐκ χρυσοῦ ζυγίζει εἰς τὸν ἀέρα 48 gr* καὶ εἰς τὸ ὕδωρ 45 gr*. Ποία ἡ σύνθεσις αὐτῆς, ὅταν ἡ πυκνότης τοῦ χρυσοῦ εἶναι 19,3 gr/cm^3 καὶ τοῦ ἀργύρου 10,5 gr/cm^3.

865. Ὑαλίνη σφαῖρα βάρους 320 gr*, εἶναι κοίλη περὶ τὸ κέντρον της. Ἐὰν ζυγίζῃ 110 gr* εἰς τὸ ὕδωρ καὶ ἡ πυκνότης τῆς ὑάλου εἶναι 2,54 gr/cm^3, ποῖος ὁ ὄγκος τῆς κοιλότητος.

866. Ὑάλινον σῶμα ζυγίζει 260 gr* εἰς τὸν ἀέρα, 154 gr* εἰς τὸ ὕδωρ καὶ 165 gr* εἰς τὸ ἔλαιον. Ποῖον τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ἐλαίου.

867. Φιάλη διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ εἰδικοῦ βάρους ζυγίζει κενὴ 34 gr*. Ὀλίγη ἄμμος τίθεται ἐντὸς τῆς φιάλης καὶ τότε αὕτη ζυγίζει 41,9 gr*. Ἐν συνεχείᾳ ἡ φιάλη πληροῦται ὑπὸ ὕδατος καὶ ζυγίζεται πάλιν, ὁπότε τὸ βάρος τῆς φιάλης μετὰ τῆς ἄμμου καὶ τοῦ ὕδατος εὑρίσκεται 88,9 gr*. Αὕτη κενοῦται καὶ πληροῦται μόνον ὑπὸ ὕδατος, ὅτε ζυγίζει 84 gr*. Εὕρετε τὸ εἰδικὸν βάρος τῆς ἄμμου.

868. Φιάλη ὅταν εἶναι κενὴ ζυγίζει 22,2 gr* καὶ πλήρης ὕδατος ζυγίζει 72,2 gr*, ἐνῷ μὲ γλυκερίνην ζυγίζει 85,2 gr*. Νὰ εὑρεθῇ τὸ εἰδικὸν βάρος τῆς γλυκερίνης.

869. Πρόκειται νὰ κατασκευασθῇ ἀραιόμετρον δι' ὑγρὰ εἰς τὸ ὁποῖον αἱ ἄκραι χαραγαὶ νὰ ἔχουν ἐνδείξεις 0,7 gr*/cm^3 καὶ 1 gr*/cm^3 καὶ νὰ ἀπέχουν 15 cm ἐπὶ στελέχους ἐγκαρσίας τομῆς 1 cm^2. Πόσος πρέπει νὰ εἶναι ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας κάτωθεν τῆς χαραγῆς 1 καὶ πόσον πρέπει νὰ εἶναι τὸ ὁλικὸν βάρος τοῦ ἀραιομέτρου. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τῆς ἐνδείξεως 1,0 θὰ εὑρίσκωνται αἱ ἐνδείξεις 0,9 καὶ 0,8.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΑ΄

ΑΕΡΟΣΤΑΤΙΚΗ

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Α΄

870. Ἀερόστατον ὄγκου 2 000 m^3 εἶναι πλῆρες μὲ ὑδρογόνον καὶ ἰσορροπεῖ εἰς ὕψος 3 000 m ὑπὲρ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς θαλάσσης. Εἰς τὴν περιοχὴν ταύτην ἡ πίεσις ἀνέρχεται εἰς 526 Torr εἰς θερμοκρασίαν 0° C. Πόσον τὸ ὁλικὸν βάρος τοῦ ἀεροστάτου. (Εἰδ. βάρος ἀέρος = 0,001293 gr^*/cm^3.)

Λύσις. Τὸ ὁλικὸν βάρος B τοῦ ἀεροστάτου θὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὴν ἄνωσιν A τὴν ὁποίαν δέχεται τοῦτο εἰς τὸ ὕψος τῶν 3 000 m. Ἤτοι :

$$B = A \qquad (1)$$

Ἐὰν καλέσωμεν V τὸν ὄγκον τοῦ ἀεροστάτου καὶ ε΄ τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ἀέρος εἰς τὸ ἀνωτέρω ὕψος, ἡ σχέσις (1) γράφεται :

$$B = \varepsilon' \cdot V \qquad (2)$$

Διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ βάρος B τοῦ ἀεροστάτου, πρέπει προηγουμένως νὰ εὕρωμεν τὸ εἰδ. βάρος ε΄ τοῦ ἀέρος.

Ἔστω ε τὸ εἰδ. βάρος τοῦ ἀέρος εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς θαλάσσης, ὅπου ἡ πίεσις τοῦ ἀέρος εἶναι p, καὶ ἔστω ὅτι εἰς τὸ ὕψος τῶν 3 000 m ἡ πίεσις τοῦ ἀέρος εἶναι p΄. Εἶναι γνωστὸν ὅμως ἐκ τοῦ νόμου Boyle-Mariotte, ὅτι τὰ εἰδικὰ βάρη εἶναι ἀνάλογα τῶν πιέσεων καὶ συνεπῶς θὰ ἔχωμεν :

$$\frac{\varepsilon'}{\varepsilon} = \frac{p'}{p} \quad \text{καὶ} \quad \varepsilon' = \frac{\varepsilon \cdot p'}{p} \qquad (3)$$

Οὕτω, λόγῳ τῆς σχέσεως (3), ἡ σχέσις (2) γράφεται :

$$B = \frac{\varepsilon \cdot p' \cdot V}{p} \qquad (4)$$

Θέτομεν εἰς τὴν σχέσιν (4) τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως : $\varepsilon = 0{,}001293\ gr^*/cm^3$, $p = 760$ Torr, $p' = 526$ Torr, $V = 2\,000\ m^3 = 2 \cdot 10^9\ cm^3$, καὶ εὑρίσκομεν :

$$\underline{B = 1\,680 \cdot 10^3\ gr^* = 1\,680\ kgr^*.}$$

871. Ἀπὸ μιᾶς ἡμέρας εἰς τὴν ἄλλην ἡ βαρομετρικὴ πίεσις μεταβάλλεται ἀπὸ 720 εἰς 710 Torr. Πόσον μεταβάλλεται ἡ δύναμις ἐπὶ ἀεροκένου κάψης, τῆς ὁποίας τὸ κάλυμμα παρουσιάζει ἐπιφάνειαν 100 cm^2.

Λύσις. Ἡ δύναμις, ὡς γνωστόν, εἶναι γινόμενον τῆς πιέσεως ἐπὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς πιεζομένης ἐπιφανείας καὶ συνεπῶς ἡ μεταβολὴ ΔF τῆς δυνάμεως, ἐφ' ὅσον ἡ ἐπιφάνεια παραμένει σταθερά, θὰ εἶναι γινόμενον τῆς μεταβολῆς τῆς πιέσεως Δp ἐπὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας S. Ἤτοι :

$$\Delta F = \Delta p \cdot S \qquad (1)$$

Ἡ μεταβολὴ τῆς πιέσεως ἐκ τῶν δεδομένων τῆς ἀσκήσεως εἶναι :

$$\Delta p = h \cdot \varepsilon = 720 - 710 \text{ Torr} = 10 \text{ Torr}$$

Τρέπομεν ταύτην εἰς gr^*/cm^2 καὶ λαμβάνομεν :

$$\Delta p = h \cdot \varepsilon = 1 \cdot 13{,}6 = 13{,}6\ gr^*/cm^2$$

Θέτομεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1) : $\Delta p = 13{,}6\ gr^*/cm^2$, $S = 100\ cm^2$, καὶ εὑρίσκομεν :

$$\underline{\Delta F = 1360\ gr^* = 1{,}36\ kgr^*.}$$

872. Πόση ἡ πυκνότης τοῦ ἀέρος εἰς 0° C ὑπὸ πίεσιν 285 Torr. (Ἡ πυκνότης τοῦ ἀέρος εἰς 0° C καὶ 760 Torr εἶναι 0,001293 gr/cm^3.)

Λύσις. Ὅταν ἡ θερμοκρασία ἑνὸς ἀερίου παραμένῃ σταθερά, τότε αἱ πυκνότητες αὐτοῦ εἶναι ἀνάλογοι τῶν ἐξασκουμένων πιέσεων, ἤτοι :

$$\frac{\rho}{\rho'} = \frac{p}{p'} \qquad (1)$$

Ἐκ τῆς σχέσεως (1), λύοντες ὡς πρὸς τὴν ζητουμένην πυκνότητα ρ, λαμβάνομεν :

$$\rho = \frac{\rho' \cdot p}{p'} \qquad (2)$$

Θέτοντες εἰς τὴν (2) τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως : $\rho' = 0{,}001293$ gr/cm³, $p = 285$ Torr, $p' = 760$ Torr, εὑρίσκομεν :

$$\underline{\rho = 4{,}849 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{gr/cm^3}.}$$

873. Ὑπὸ ποίαν πίεσιν εἰς Atm καταλαμβάνει 1 gr ἀέρος εἰς 0° C ὄγκον 20 cm³. ($\rho = 0{,}001293$ gr/cm³.)

Λύσις. Ὁ ὄγκος 1 gr ἀέρος ὑπὸ κανονικὴν πίεσιν εἶναι :

$$V = \frac{m}{\rho} = \frac{1}{0{,}001293}\ \mathrm{cm^3} \qquad (1)$$

Βάσει τοῦ νόμου τῶν Boyle-Mariotte : $p_1 \cdot V_1 = p_2 \cdot V_2$, ἔχομεν :

$$p_2 = \frac{p_1 \cdot V_1}{V_2} \qquad (2)$$

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (2) τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως : $p_1 = 1$ Atm, $V_1 = 1/0{,}001293$ cm³ καὶ $V_2 = 20$ cm³, εὑρίσκομεν :

$$\underline{p_2 = 39\ \mathrm{Atm}.}$$

874. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος στήλης βαρομέτρου δι' ἐλαίου, ὅταν τὸ ὕψος τῆς στήλης ὑδραργυρικοῦ βαρομέτρου εἶναι 750 mm. (Εἰδ. βάρος ἐλαίου 0,92 gr*/cm³, ὑδραργύρου 13,6 gr*/cm³.)

Λύσις. Ἔστω ὅτι $h_{ἐλ.}$ καὶ $\varepsilon_{ἐλ.}$ εἶναι ἀντιστοίχως τὸ ὕψος καὶ τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ἐλαίου· τότε ἡ πίεσις τῆς ἀτμοσφαίρας θὰ εἶναι :

$$p = \varepsilon_{ἐλ.} \cdot h_{ἐλ.} \qquad (1)$$

Ἐπίσης ἔστω $h_{ὑδρ.}$ καὶ $\varepsilon_{ὑδρ.}$ ἀντιστοίχως τὸ ὕψος καὶ τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ὑδραργύρου, τότε ἡ αὐτὴ πίεσις τῆς ἀτμοσφαίρας θὰ εἶναι :

$$p = \varepsilon_{ὑδρ.} \cdot h_{ὑδρ.} \qquad (2)$$

Ἐκ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) λαμβάνομεν :

$$\varepsilon_{ἐλ.} \cdot h_{ἐλ.} = \varepsilon_{ὑδρ.} \cdot h_{ὑδρ.}$$

ἢ

$$h_{ἐλ.} = \frac{\varepsilon_{ὑδρ.} \cdot h_{ὑδρ.}}{\varepsilon_{ἐλ.}}$$

Θέτομεν τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως : $\varepsilon_{ὑδρ.} = 13{,}6$ gr*/cm³, $h_{ὑδρ.} = 75$ cm, $\varepsilon_{ἐλ.} = 0{,}92$ gr*/cm³, καὶ εὑρίσκομεν :

$$\underline{h_{ἐλ.} = 1108{,}7\ \mathrm{cm}.}$$

875. Μᾶζα ὀξυγόνου καταλαμβάνει ὄγκον 2 λίτρων ὑπὸ πίεσιν 750 Torr. Πόσος ὁ ὄγκος αὐτῆς ὑπὸ πίεσιν 1 000 Torr, ἐφ' ὅσον ἡ θερμοκρασία διατηρεῖται σταθερά.

Λύσις. Ἐφ' ὅσον ἡ θερμοκρασία διατηρεῖται σταθερά, ἰσχύει ὁ νόμος Boyle - Mariotte, Ἐὰν λοιπὸν καλέσωμεν V τὸν ζητούμενον ὄγκον τοῦ ὀξυγόνου ὑπὸ πίεσιν p καὶ V′ τὸν ὄγκον αὐτοῦ ὑπὸ πίεσιν p′, τότε θὰ ἔχωμεν:

$$p \cdot V = p' \cdot V' \quad \text{καὶ} \quad V = \frac{p' \cdot V'}{p} \qquad (1)$$

Θέτοντες εἰς τὴν ἀνωτέρω σχέσιν (1) τὰ δεδομένα: $p' = 750$ Torr, $V' = 2\ lt$ καὶ $p = 1\,000$ Torr, εὑρίσκομεν:

$$\underline{V = 1{,}5\ lt.}$$

876. Δέκα λίτρα ὑδρογόνου ὑπὸ πίεσιν 1 ἀτμοσφαίρας περιέχονται ἐντὸς κυλίνδρου ἐφωδιασμένου δι' ἐμβολέως. Ὁ ἐμβολεὺς μετακινεῖται, τῆς θερμοκρασίας διατηρουμένης σταθερᾶς, μέχρις ὅτου ὁ ὄγκος τοῦ ἀερίου ἐλαττωθῇ εἰς 2 λίτρα. Πόση ἡ πίεσις τοῦ ἀερίου.

Λύσις. Ἐφ' ὅσον ἡ θερμοκρασία διατηρεῖται σταθερά, θὰ ἰσχύῃ ὁ νόμος Boyle - Mariotte:

$$p \cdot V = p' \cdot V' \qquad (1)$$

καὶ συνεπῶς θὰ ἔχωμεν ὅτι ἡ ζητουμένη πίεσις τοῦ ἀερίου θὰ εἶναι:

$$p = \frac{p' \cdot V'}{V} \qquad (2)$$

Θέτοντες εἰς τὴν ἀνωτέρω σχέσιν (2) τὰ δεδομένα: $p' = 1$ at, $V' = 10\ lt$, $V = 2\ lt$, εὑρίσκομεν:

$$\underline{p = 5\ \text{at.}}$$

877. Μᾶζα ἀερίου ὑπὸ ἀτμοσφαιρικὴν πίεσιν 760 Torr καταλαμβάνει ὄγκον 5 λίτρων. Ἐὰν ἡ πίεσις ἐλαττωθῇ εἰς 200 Torr, χωρὶς ἡ θερμοκρασία νὰ μεταβληθῇ, πόσος ὁ ὄγκος τῆς ἀερίου μάζης.

Λύσις. Ἐκ τοῦ νόμου Boyle - Mariotte: $p_1 \cdot V_1 = p_2 \cdot V_2$, ἔχομεν:

$$V_2 = \frac{p_1 \cdot V_1}{p_2}$$

καὶ ἐκ τῶν δεδομένων τῆς ἀσκήσεως: $p_1 = 760$ Torr, $V_1 = 5\ lt$ καὶ $p_2 = 200$ Torr, εὑρίσκομεν:

$$\underline{V_2 = 19\ lt.}$$

878. Ὁ ὄγκος ἑνὸς ἀεροστάτου εἶναι 500 m³ καὶ πληροῦται δι' ὑδρογόνου πυκνότητος 0,089 gr/lt. Ἡ πυκνότης τοῦ περιβάλλοντος ἀέρος εἶναι 1,250 gr/lt. Πόση εἶναι ἡ ἀνυψωτική του δύναμις.

Λύσις. Ἡ ἀνυψωτικὴ δύναμις F τοῦ ἀεροστάτου δίδεται ἀπὸ τὴν σχέσιν:

$$F = A - B \qquad (1)$$

ὅπου A εἶναι ἡ ἄνωσις τὴν ὁποίαν ὑφίσταται τὸ ἀερόστατον καὶ B τὸ βάρος αὐτοῦ.

Ἐὰν καλέσωμεν $\varepsilon_{\text{ὑδρ.}}$ τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ὑδρογόνου, $\varepsilon_{\text{ἀὴρ}}$ τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ἀέρος καὶ V τὸν ὄγκον τοῦ ἀεροστάτου, τότε ἔχομεν τὰς σχέσεις:

$$A = \varepsilon_{\text{ἀὴρ}} \cdot V \qquad (2)$$

$$B = \varepsilon_{\text{ὑδρ.}} \cdot V \qquad (3)$$

καὶ ἑπομένως ἡ σχέσις (1) γράφεται:

$$F = \varepsilon_{\text{ἀὴρ}} \cdot V - \varepsilon_{\text{ὑδρ.}} \cdot V$$

ἢ

$$F = V\,(\varepsilon_{\text{ἀὴρ}} - \varepsilon_{\text{ὑδρ.}}) \qquad (4)$$

Θέτομεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (4) τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως: $V = 500 \cdot 10^3\ lt$, $\varepsilon_{\text{ὑδρ.}} = 0{,}089\ gr^*/lt$, $\varepsilon_{\text{ἀὴρ}} = 1{,}25\ gr^*/lt$, καὶ εὑρίσκομεν:

$$\underline{F = 580{,}5 \cdot 10^3\ gr^* = 580{,}5\ kgr^*.}$$

879. Ἀερόστατον ἔχει χωρητικότητα 1 000 m^3. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀνυψωτικὴ δύναμις, ὅταν τοῦτο εἶναι πλῆρες ἀερίου ἡλίου. (Μέση πυκνότης ἀέρος 1,25 gr/lt, ἡλίου 0,178 gr/lt.)

Λύσις. Ὅπως εἰς τὴν ἄσκησιν 878, οὕτω καὶ ἐδῶ ἰσχύει ἡ σχέσις $F = A - B$. Ἐπειδὴ $A = \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\eta}\rho} \cdot V$ καὶ $B = \varepsilon_{\dot{\eta}\lambda.} \cdot V$, ἡ σχέσις (1) γράφεται :

$$F = V\,(\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\eta}\rho} - \varepsilon_{\dot{\eta}\lambda.})$$

Θέτομεν τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως : $V = 1\,000 \cdot 10^3\ lt$, $\varepsilon_{\dot{\eta}\lambda.} = 0{,}178\ gr^*/lt$, $\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\eta}\rho} = 1{,}25\ gr^*/lt$, καὶ εὑρίσκομεν :

$$\underline{F = 1\,072 \cdot 10^3\ gr^* = 1\,072\ kgr^*.}$$

880. Ἐξερευνητικὸν ἀερόστατον μετεωρολογίας πληροῦται ὑδρογόνου, εἰς τρόπον ὥστε νὰ παρουσιάζῃ ἀνυψωτικὴν δύναμιν 125 gr^*. Τὸ βάρος τοῦ ἐλαστικοῦ σάκκου εἶναι 30 gr^*. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ ὑδρογόνου. (Πυκνότης ἀέρος 1,250 gr/lt, ὑδρογόνου 0,090 gr/lt.)

Λύσις. Ἡ ἀνυψωτικὴ δύναμις F τοῦ ἀεροστάτου θὰ εἶναι :

$$F = A - B_{\delta\lambda.} \tag{1}$$

ὅπου A ἡ ἄνωσις τὴν ὁποίαν δέχεται τὸ ἀερόστατον καὶ $B_{\delta\lambda.}$ τὸ συνολικὸν βάρος αὐτοῦ. Τὸ συνολικὸν βάρος $B_{\delta\lambda.}$ εἶναι ἄθροισμα τοῦ βάρους τοῦ ὑδρογόνου $B_{\dot{\upsilon}\delta\rho.}$ καὶ τοῦ βάρους τοῦ σάκκου $B_{\sigma\dot{\alpha}\kappa.}$ Ἄρα ἡ σχέσις (1) γράφεται :

$$F = A - B_{\dot{\upsilon}\delta\rho.} - B_{\sigma\dot{\alpha}\kappa.} \tag{2}$$

Ἐὰν καλέσωμεν V τὸν ζητούμενον ὄγκον τοῦ ὑδρογόνου, $\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\eta}\rho}$ τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ἀέρος καὶ $\varepsilon_{\dot{\upsilon}\delta\rho.}$ τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ὑδρογόνου, τότε : $A = \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\eta}\rho} \cdot V$ καὶ $B_{\dot{\upsilon}\delta\rho.} = \varepsilon_{\dot{\upsilon}\delta\rho.} \cdot V$. Συνεπῶς ἡ σχέσις (2) γράφεται :

$$F = \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\eta}\rho} \cdot V - \varepsilon_{\dot{\upsilon}\delta\rho.}\, V - B_{\sigma\dot{\alpha}\kappa.}$$

ἢ

$$F = V\,(\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\eta}\rho} - \varepsilon_{\dot{\upsilon}\delta\rho.}) - B_{\sigma\dot{\alpha}\kappa.} \tag{3}$$

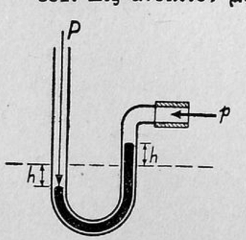
Λύομεν τὴν σχέσιν (3) ὡς πρὸς τὸν ζητούμενον ὄγκον V καὶ λαμβάνομεν :

$$V = \frac{F + B_{\sigma\dot{\alpha}\kappa.}}{\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\eta}\rho} - \varepsilon_{\dot{\upsilon}\delta\rho.}} \tag{4}$$

Θέτοντες εἰς τὴν (4) τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως : $F = 125\ gr^*$, $B_{\sigma\dot{\alpha}\kappa.} = 30\ gr^*$, $\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\eta}\rho} = 1{,}25\ gr^*/lt$, $\varepsilon_{\dot{\upsilon}\delta\rho.} = 0{,}090\ gr^*/lt$, εὑρίσκομεν :

$$\underline{V = 134\ lt.}$$

881. Εἰς ἀνοικτὸν μανόμετρον ἡ διαφορὰ στάθμης τοῦ ὑδραργύρου εἰς τὰ δύο σκέλη εἶναι 24 cm. Τὸ βαρόμετρον δεικνύει πίεσιν 750 Torr. Εἰς ποῖον κλάσμα τῆς ἀτμοσφαιρικῆς πιέσεως ἀντιστοιχεῖ ἡ πίεσις τοῦ ἀερίου.



Λύσις. Ἔστω p ἡ πίεσις τοῦ ἀερίου εἰς τὸν πρὸς μέτρησιν χῶρον. Ἐκ τοῦ σχήματος προκύπτει ὅτι ἡ ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις ἐντὸς τοῦ ἀνοικτοῦ σκέλους ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῆς πιέσεως τοῦ ἀερίου καὶ τῆς πιέσεως τὴν ὁποίαν ἐξασκεῖ ἡ διαφορὰ στάθμης τῆς ὑδραργυρικῆς στήλης, ἡ ὁποία εἶναι 240 mm. Οὕτω θὰ ἔχωμεν :

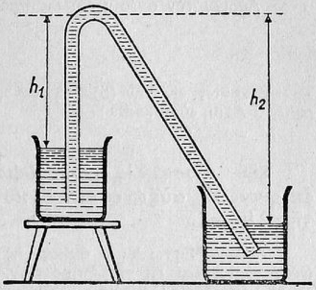
$$750 = 240 + p \qquad \text{ἐξ οὗ : } p = 510\ \text{Torr.}$$

Ἡ πίεσις αὕτη ἀντιστοιχεῖ εἰς κλάσμα τῆς ἀτμοσφαιρικῆς πιέσεως $510/760 = \underline{0{,}671}$.

882. Πόσον εἶναι τὸ μέγιστον ὕψος h, ἐκ τοῦ ὁποίου ὑγρὸν πυκνότητος $\rho = 0{,}8$ gr/cm³ δύναται νὰ μεταγγισθῇ διὰ σίφωνος. (Πυκνότης ὑδραργύρου 13,6 gr/cm³, βαρομετρικὴ πίεσις 76,2 cm Hg.)

Λύσις. Ἡ πίεσις p τὴν ὁποίαν ἐξασκεῖ τὸ ἐν λόγῳ ὑγρὸν πρέπει, ὅταν τοῦτο ἔχῃ ὕψος h_1, νὰ μὴ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἀτμοσφαιρικῆς πιέσεως p_1. Ἐπειδὴ δὲ $p = \rho \cdot g \cdot h_1$ καὶ $p_1 = \rho_{\text{ὑδρ.}} \cdot g \cdot h_{\text{ὑδρ.}}$, ὅπου ρ ἡ πυκνότης τοῦ ὑγροῦ, $\rho_{\text{ὑδρ.}}$ ἡ πυκνότης τοῦ ὑδραργύρου καὶ $h_{\text{ὑδρ.}}$ τὸ ὕψος τῆς ὑδραργυρικῆς στήλης τοῦ βαρομέτρου, θὰ ἔχωμεν :

$$\rho \cdot h_1 = \rho_{\text{ὑδρ.}} \cdot h_{\text{ὑδρ.}}$$



Οὕτω ἐκ τῆς ἀνωτέρω σχέσεως προκύπτει ὅτι τὸ ζητούμενον ὕψος h_1 δίδεται ἐκ τοῦ τύπου :

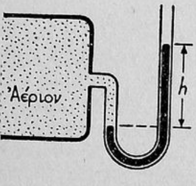
$$h_1 = \frac{\rho_{\text{ὑδρ.}} \cdot h_{\text{ὑδρ.}}}{\rho}$$

καὶ συμφώνως πρὸς τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως : $\rho_{\text{ὑδρ.}} = 13{,}6$ gr/cm³, $h_{\text{ὑδρ.}} = 76{,}2$ cm, $\rho = 0{,}8$ gr/cm³, εὑρίσκομεν ὅτι :

$$\underline{h_1 = 1\,295{,}4 \text{ cm.}}$$

883. Ἐὰν ἡ στάθμη τοῦ ὑδραργύρου εἰς τὸ ἓν σκέλος ἀνοικτοῦ μανομέτρου εὑρίσκεται κατὰ 57 cm ὑψηλότερον ἢ εἰς τὸ ἕτερον σκέλος, πόση ἡ πίεσις εἰς gr*/cm² ἡ ἐξασκουμένη ὑπὸ τοῦ ἀερίου τοῦ περιεχομένου εἰς δοχεῖον, τὸ ὁποῖον συγκοινωνεῖ πρὸς τὸ σκέλος τοῦ μανομέτρου, ὅπου ὁ ὑδράργυρος εὑρίσκεται εἰς ταπεινοτέραν στάθμην. (Εἰδ. βάρος ὑδραργύρου 13,6 gr*/cm³, βαρομετρικὴ πίεσις 760 Torr.)

Λύσις. Ἡ πίεσις p τοῦ ἀερίου θὰ ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῆς ἀτμοσφαιρικῆς πιέσεως p_1 καὶ τῆς πιέσεως p_2 τὴν ὁποίαν ἐξασκεῖ ἡ στήλη h τοῦ ὑδραργύρου. Ἤτοι :



$$p = p_1 + p_2 \qquad (1)$$

Εἶναι ὅμως $p_1 = \varepsilon \cdot h_1$ καὶ $p_2 = \varepsilon \cdot h_2$, ὅπου ε εἶναι τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ὑδραργύρου, h ἡ κατακόρυφος ἀπόστασις τῶν ἐλευθέρων ἐπιφανειῶν τοῦ ὑδραργύρου εἰς τὸν σωλῆνα καὶ h_2 τὸ ὕψος τῆς ὑδραργυρικῆς στήλης τοῦ βαρομέτρου. Ἄρα θὰ ἔχωμεν ἐκ τῆς σχέσεως (1) ὅτι :

$$p = \varepsilon\,(h_1 + h_2) \qquad (2)$$

Θέτομεν εἰς τὴν (2) : $\varepsilon = 13{,}6$ gr*/cm³, $h_1 = 57$ cm, $h_2 = 76$ cm, καὶ εὑρίσκομεν :

$$\underline{p = 1\,810 \text{ gr*/cm}^2.}$$

884. Δοχεῖον ὄγκου 10 *lt* περιέχει ὀξυγόνον πιέσεως 6 ἀτμοσφαιρῶν. Τὸ δοχεῖον τοῦτο συνδέεται πρὸς ἕτερον δοχεῖον ὄγκου 5 *lt* περιέχον ἀέρα ὑπὸ πίεσιν 3 ἀτμοσφαιρῶν. Ὑπολογίσατε τὴν τελικὴν πίεσιν.

Λύσις. Καλοῦμεν V_1 τὸν ὄγκον τοῦ ὀξυγόνου καὶ p_1 τὴν πίεσιν αὐτοῦ, V_2 τὸν ὄγκον τοῦ ἀέρος καὶ p_2 τὴν πίεσιν αὐτοῦ. Ἐὰν τώρα θεωρήσωμεν ὅτι τὰ δύο δοχεῖα συνδέονται μεταξύ των, ὁ ὄγκος τοῦ μίγματος ὀξυγόνου καὶ ἀέρος θὰ εἶναι προφανῶς $V_1 + V_2$, ἡ δὲ πίεσις τὴν ὁποίαν θὰ ἐξασκῇ τὸ μῖγμα ἔστω p. Συμφώνως πρὸς τὸν νόμον Boyle-Mariotte θὰ ἰσχύῃ διὰ τὸ ὀξυγόνον ἡ σχέσις :

$$(V_1 + V_2) \cdot p_1' = V_1 \cdot p_1 \qquad (1)$$

ὅπου p_1' εἶναι ἡ πίεσις τοῦ ὀξυγόνου ἐντὸς τοῦ νέου ὄγκου $V_1 + V_2$, καὶ διὰ τὸν ἀτμοσφαιρικὸν ἀέρα θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις :

$$(V_1 + V_2) \cdot p_2' = V_2 \cdot p_2 \qquad (2)$$

ὅπου p_2' εἶναι ἡ πίεσις τοῦ ἀτμοσφαιρικοῦ ἀέρος ἐντὸς τοῦ ὄγκου $V_1 + V_2$.

Διὰ τῆς προσθέσεως τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) κατὰ μέλη λαμβάνομεν:

$$(V_1 + V_2)\,(p_1' + p_2') = V_1 \cdot p_1 + V_2 \cdot p_2 \tag{3}$$

ἐπειδὴ ὅμως εἶναι: $p_1'+p_2'=p$ (νόμος τοῦ Dalton) ἡ σχέσις (3) γράφεται:

$$(V_1 + V_2) \cdot p = V_1 \cdot p_1 + V_2 \cdot p_2 \tag{4}$$

Λύομεν τὴν σχέσιν (4) ὡς πρὸς τὴν ζητουμένην πίεσιν p, ὅτε προκύπτει:

$$p = \frac{V_1 \cdot p_1 + V_2 \cdot p_2}{V_1 + V_2} \tag{5}$$

Θέτοντες εἰς τὴν (5) τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως: $V_1 = 10\ lt$, $p_1 = 6$ Atm, $V_2 = 5\ lt$, $p_2 = 3$ Atm, εὑρίσκομεν:

$$\underline{p = 5 \text{ Atm.}}$$

885. Φυσαλλὶς ἀέρος ὑψουμένη ἐκ τοῦ πυθμένος μιᾶς λίμνης μέχρι τῆς ἐπιφανείας αὐξάνει τὸν ὄγκον της ἀπὸ 2 cm³ εἰς 5 cm³. Ὑπολογίσατε τὸ βάθος τῆς λίμνης.

Λύσις. Ἔστω V_1 ὁ ὄγκος τῆς φυσαλλίδος ὅταν αὕτη εὑρίσκεται εἰς τὸν πυθμένα καὶ V_2 ὅταν εὑρίσκεται εἰς τὴν ἐπιφάνειαν. Ἐὰν εἰς τὸν πυθμένα ἡ φυσαλλὶς ὑφίσταται πίεσιν p_1 καὶ εἰς τὴν ἐπιφάνειαν πίεσιν p_2 (ἀεροστατικὴ πίεσις), ἡ πίεσις p_1 θὰ εἶναι ἴση πρὸς $p_2 + p$, ὅπου p εἶναι ἡ ὑδροστατικὴ πίεσις, καὶ συνεπῶς δυνάμεθα συμφώνως πρὸς τὸν νόμον Boyle - Mariotte νὰ γράψωμεν τὴν σχέσιν:

$$(p_2 + p) \cdot V_1 = p_2 \cdot V_2$$

ἢ

$$p_2 \cdot V_1 + p \cdot V_1 = p_2 \cdot V_2 \tag{1}$$

Ἐπειδὴ ὅμως ἡ ὑδροστατικὴ πίεσις p_2 ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ εἰδικοῦ βάρους ε τοῦ ὕδατος ἐπὶ τὸ βάθος h τῆς λίμνης ($p = \varepsilon \cdot h$), ἡ ἀνωτέρω σχέσις (1) γίνεται:

$$p_2 \cdot V_1 + \varepsilon \cdot h \cdot V_1 = p_2 \cdot V_2 \tag{2}$$

Λύομεν τώρα τὴν σχέσιν (2) ὡς πρὸς τὸ ζητούμενον βάθος h τῆς λίμνης, ὅτε λαμβάνομεν:

$$h = \frac{p_2\,(V_2 - V_1)}{\varepsilon \cdot V_1} \tag{3}$$

Θέτοντες εἰς τὴν σχέσιν (3) τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως: $V_1 = 2$ cm³, $V_2 = 5$ cm³, $\varepsilon = 1$ gr*/cm³, $p_2 = 1\,033$ gr*/cm², εὑρίσκομεν:

$$\underline{h = 1\,550 \text{ cm} = 15{,}5 \text{ m.}}$$

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Β'

886. Ἐὰν ἡ ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις εἶναι 720 Torr, ποία ἡ ὑπὸ τοῦ ἀέρος ἀσκουμένη δύναμις ἐπὶ τοῦ σώματος ἀνθρώπου συνολικῆς ἐπιφανείας 1,35 m². (Εἰδ. βάρος ὑδραργύρου 13,6 gr*/cm³.) (Ἀπ. 13 219 kgr*.)

887. Αἱ μεταβολαὶ τῆς πιέσεως τοῦ ἀέρος, τὰς ὁποίας προκαλοῦν εἷς ἰσχυρὸς καὶ εἷς ἀσθενὴς ἦχος, εἶναι ἀντιστοίχως 200 μBar καὶ 0,0002 μBar. Ποῖαι αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ εἰς Torr. (Ἀπ. 0,15 Torr, $1{,}5 \cdot 10^{-7}$ Torr.)

888. Ἐὰν ἡ γηΐνη ἀτμόσφαιρα ἦτο ὁμογενὴς καὶ εἶχε τὸ αὐτὸ εἰδικὸν βάρος καθ' ὅλον τὸ ὕψος αὐτῆς, πόσον θὰ ἦτο τὸ πάχος τῆς ἀτμοσφαίρας εἰς km, ὅταν ἡ πίεσις εἶναι 1 ἀτμόσφαιρα· ($\rho_{\text{ἀήρ}} = 0{,}001293$ gr/cm³.) (Ἀπ. 8 km.)

889. Πραγματοποιεῖται τὸ πείραμα τοῦ Torricelli μὲ θεϊκὸν ὀξὺ πυκνότητος 1,84 gr/cm³. Εἰς πόσον ὕψος θὰ ἀνέλθη τὸ ὑγρὸν ἐντὸς τοῦ σωλῆνος ἄνωθεν τῆς λεκάνης, ὅταν ἡ ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις εἶναι 760 Torr. (Ἀπ. 5,62 m.)

890. Πραγματοποιεῖται τὸ πείραμα τοῦ Torricelli μὲ γλυκερίνην. Εἰς ποῖον

ὕψος ἀνέρχεται τὸ ὑγρὸν ἐντὸς τοῦ σωλῆνος, ὅταν ἡ ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις εἶναι 760 Torr. (Εἰδικὸν βάρος ὑδραργύρου 13,6 gr*/cm³, γλυκερίνης 1,25 gr*/cm³.)
('Απ. 8,27 m.)

891. Ὑδραργυρικὸν βαρόμετρον βυθίζεται εἰς τὴν θάλασσαν οὕτως ὥστε ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὑδραργύρου εἰς τὴν λεκάνην νὰ εὑρίσκεται 1 m κάτωθεν τῆς ἐπιφανείας τῆς θαλάσσης. Ποία θὰ εἶναι ἡ ἔνδειξις τοῦ βαρομέτρου, ἐὰν ἡ ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις εἶναι 760 Torr. (Εἰδικὸν βάρος θαλασσίου ὕδατος = 1,03 gr*/cm³.)
('Απ. 83,6 cm.)

892. Εἰς τὸ ἓν ἄκρον τῆς φάλαγγος ζυγοῦ μὲ ἴσους βραχίονας ἐξαρτᾶται ὑαλίνη σφαῖρα ὄγκου 100 cm³, ἐνῷ εἰς τὸ ἕτερον ἄκρον μεταλλικὸν σῶμα ὄγκου 2 cm³. Ὅταν ὁ ζυγὸς εὑρίσκεται ἐντὸς τοῦ ἀέρος, ἔχομεν ἰσορροπίαν. Κατὰ πόσον μεταβάλλονται αἱ ἀνώσεις τῶν δύο σωμάτων, ἐὰν ὁ ζυγὸς τεθῇ ἐντὸς τοῦ κώδωνος ἀεραντλίας, ἐντὸς τοῦ ὁποίου, τῆς θερμοκρασίας παραμενούσης ἀμεταβλήτου, ἡ πίεσις ἔχει ἐλαττωθῇ εἰς τὸ $^1/_4$ τῆς ἀρχικῆς της τιμῆς. Τί παρατηροῦμεν εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν.
('Απ. 0,0970 gr*, 0,00194 gr*.)

893. Σῶμα ἐξ ἀργιλίου (εἰδ. βάρους 2,7 gr*/cm³) ζυγίζεται διὰ σταθμῶν ὀρειχάλκου (εἰδ. βάρους 8,3 gr*/cm³), ἐντὸς ἀέρος (εἰδ. βάρους 0,0012 gr*/cm³), τοῦ βάρους αὐτοῦ προσδιοριζομένου εἰς 12,394 gr*. Ποῖον τὸ βάρος αὐτοῦ, ὅταν ἡ ζύγισις γίνεται εἰς τὸ κενόν.
('Απ. 12,398 gr*.)

894. Κατὰ πόσον εἶναι βαρύτερον εἰς τὸ κενὸν τεμάχιον μολύβδου (εἰδ. βάρους 13,3 gr*/cm³) ἢ ἀργιλίου (εἰδ. βάρους 2,7 gr*/cm³), ἐὰν ἕκαστον ζυγίζῃ ἐντὸς τοῦ ἀέρος 1 kgr*.
('Απ. Τὸ ἀργίλιον εἶναι κατὰ 0,37 gr* βαρύτερον.)

895. Ὁριζόντιος σωλὴν σταθερᾶς τομῆς, κλειστὸς κατὰ τὸ ἓν ἄκρον καὶ κλειόμενος διὰ στρόφιγγος κατὰ τὸ ἕτερον, περιέχει σταγονίδιον ὑδραργύρου μήκους α ἀπέχον ἐκ τῆς στρόφιγγος ἀπόστασιν l. Ἐάν, τῆς στρόφιγγος παραμενούσης κλειστῆς, ὁ σωλὴν τοποθετηθῇ κατὰ τὰς δύο δυνατὰς κατακορύφους θέσεις αὐτοῦ, κατὰ πόσον θὰ κατέλθῃ τὸ σταγονίδιον, ὅταν ἡ ἀτμ. πίεσις εἶναι β. Ἀριθμητικὴ ἐφαρμογή: $l = 40$ cm, $\beta = 72$ cm Hg, $\alpha = 8$ cm Hg.

('Απ. Ἡ στρόφιγξ : Πρὸς τὰ ἄνω $x = \frac{l \cdot \alpha}{\beta - \alpha} = 5$ cm. Πρὸς τὰ κάτω $x = \frac{l \cdot \alpha}{\beta + \alpha} = 4$ cm.)

896. Ὑάλινος σωλὴν περιέχων κινητὸν ἔμβολον βυθίζεται καθέτως ἐντὸς ὑδραργύρου. Αἱ στάθμαι τοῦ ὑδραργύρου ἐντὸς τῆς σωλῆνος καὶ ἐκτὸς αὐτοῦ συμπίπτουν, τὸ δὲ ἔμβολον περικλείει ἐντὸς τοῦ σωλῆνος στήλην ἀέρος ὕψους 20 cm. Ἐὰν ἡ ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις εἶναι 720 Torr, κατὰ πόσον ἀνέρχεται ὁ ὑδράργυρος ἐντὸς τοῦ σωλῆνος, ὅταν τὸ ἔμβολον ἀνυψοῦται κατὰ 5 cm, καὶ κατὰ πόσον κατέρχεται, ὅταν τοῦτο καταβιβάζεται κατὰ τὴν αὐτὴν ἀπόστασιν.
('Απ. 38,6 mm, 39,6 mm.)

897. Ὑδραργυρικὸν βαρόμετρον περιέχει ὀλίγον ἀέρα εἰς τὸν βαρομετρικὸν θάλαμον. Ὅταν ἡ ὑδραργυρικὴ στήλη ἔχῃ ὕψος 75 cm, ὁ βαρομετρικὸς θάλαμος ἔχει μῆκος 10 cm. Ἐὰν ὁ σωλὴν βυθισθῇ εἰς τὴν λεκάνην κατὰ 6,5 cm, ἡ ὑδραργυρικὴ στήλη λαμβάνει ὕψος 73,5 cm. Ὑπολογίσατε τὴν τιμὴν τῆς ἀτμοσφαιρικῆς πιέσεως.
('Απ. 76,5 cm Hg.)

898. Ἐντὸς λεκάνης περιεχούσης ὑδράργυρον βυθίζεται κατακορύφως ἀνοικτὸς κατὰ τὰ δύο ἄκρα ὑάλινος σωλὴν εἰς τοιοῦτον βάθος, ὥστε ἄνωθεν τῆς ἐπιφανείας τῶν ὑγρῶν νὰ ἐξέχῃ τμῆμα μήκους α cm. Κλείομεν τὸ ἀνώτερον ἄκρον καὶ ἀνυψοῦμεν τὸν σωλῆνα μέχρις ὅτου ὁ ὄγκος τοῦ περικλειομένου ἀέρος αὐξηθῇ εἰς n φοράς. Ἐὰν ἡ ἀτμ. πίεσις εἶναι β cm, ποῖον τὸ ὕψος ὑδραργύρου ἐντὸς τοῦ σωλῆνος ὑπεράνω τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας εἰς τὴν λεκάνην. (Ἀπ. β (n – 1)/n cm.)

899. Ἀέριον συλλέγεται ἐντὸς δοκιμαστικοῦ σωλῆνος ἐπὶ λεκάνης μὲ ὑδράργυρον, καταλαμβάνει δὲ ὄγκον 48,3 cm^3 καὶ ὁ ὑδράργυρος ἀνυψοῦται κατὰ 8 cm ἐντὸς τοῦ δοκιμαστικοῦ σωλῆνος. Πόσος θὰ εἶναι ὁ ὄγκος ὁ καταλαμβανόμενος ὑπὸ τῶν ἀερίων, ἐὰν βυθισθῇ ὁ δοκιμαστικὸς σωλὴν εἰς τρόπον ὥστε ἡ στάθμη τοῦ ὑδραργύρου ἐντὸς τοῦ σωλῆνος νὰ εἶναι ἡ αὐτὴ μὲ τὴν τῆς λεκάνης. Ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις 750 Torr. (Ἀπ. 43,1 cm^3.)

900. Ἓν λίτρον ἀέρος ζυγίζει 1,293 gr* εἰς 0° C καὶ ὑπὸ πίεσιν 76 cm Hg. Πόσον τὸ εἰδικὸν αὐτοῦ βάρος εἰς 0° C καὶ ὑπὸ πίεσιν 4 kgr*/cm^2. ($\varepsilon_{Hg} = 13{,}6$ gr*/cm^3.) (Ἀπ. 5 gr*/cm^3.)

901. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος τὸν ὁποῖον καταλαμβάνουν 25 gr ἀέρος εἰς 0° C καὶ ὑπὸ πίεσιν 85 cm Hg, γνωστοῦ ὄντος ὅτι 1 *lt* ἀέρος εἰς 0° C καὶ ὑπὸ πίεσιν 76 cm Hg ζυγίζει 1,293 gr*. (Ἀπ. 17,3 cm^3.)

902. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος ὑπὸ πίεσιν 76 cm Hg ἀερίου μάζης ἥτις καταλαμβάνει ὄγκον 8 *lt* ὑπὸ πίεσιν 100 gr*/cm^2. (Ἀπ. 774 cm^3.)

903. Ἐντὸς κυλινδρικοῦ σωλῆνος κλειστοῦ κατὰ τὸ ἓν ἄκρον εὑρίσκεται ἀεροστεγῶς ἐφαρμόζον ἔμβολον, δυνάμενον νὰ κινῆται ἄνευ τριβῆς, τὸ ὁποῖον μέχρι τοῦ κλειστοῦ ἄκρου περικλείει ὄγκον ἀέρος μήκους α. Μεταξὺ τοῦ ἐμβόλου τούτου καὶ ἑνὸς δευτέρου περικλείεται ἕτερος ὄγκος ἀέρος μήκους β, οἱ δὲ ὄγκοι εὑρίσκονται ἀρχικῶς ὑπὸ πίεσιν 1 at. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ νέα πίεσις p_1 ἐντὸς τοῦ σωλῆνος, καθὼς καὶ ἡ μετατόπισις x τοῦ πρώτου ἐμβόλου, ὅταν τὸ δεύτερον μετατοπίζεται πρὸς τὰ ἔσω κατὰ β/2, ἡ δὲ θερμοκρασία παραμένῃ ἀμετάβλητος. Ποία δύναμις πρέπει νὰ ἐξασκῆται εἰς τὴν νέαν αὐτοῦ θέσιν ἐπὶ τοῦ δευτέρου ἐμβόλου, ἐὰν ἡ τομὴ τοῦ σωλῆνος εἶναι 35 cm^2, α = 10 cm καὶ β = 60 cm.
(Ἀπ. p_1 = 1,75 at, x = 4,29 cm, F = 61,25 kgr*.)

904. Μῖγμα ἀερίου ὑπὸ πίεσιν 1 ἀτμοσφαίρας περιέχει 65 % ἄζωτον, 15 % ὀξυγόνον καὶ 20 % διοξείδιον τοῦ ἄνθρακος κατ᾽ ὄγκον. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πίεσις τοῦ διοξειδίου τοῦ ἄνθρακος εἰς Torr. (Ἀπ. 155 Torr.)

905. Ἀερόστατον ὄγκου V = 650 m^3 πληροῦται ὑπὸ κανονικὰς συνθήκας δι᾽ ὑδρογόνου εἰδικοῦ βάρους ε = 0,1 kgr*/m^3. Ποία ἡ ἀνυψωτικὴ δύναμις, ὅταν τὸ συνολικὸν βάρος αὐτοῦ ἀνέρχεται εἰς 620 kgr*. (Εἰδικὸν βάρος ἀέρος ε′ = 0,00120 gr*/cm^3.) (Ἀπ. 95 kgr*.)

906. Εἰς κλειστὸν μανόμετρον δι᾽ ὑδραργύρου αἱ ἐλεύθεραι ἐπιφάνειαι αὐτοῦ εἰς τὰ δύο σκέλη τοῦ σωλῆνος εὑρίσκονται πρὸ τῆς χαραγῆς μηδέν, ὅταν ἡ πίεσις εἶναι 1 Atm. Εἰς ποῖον ὕψος ἀπὸ τῆς χαραγῆς μηδὲν πρέπει νὰ τεθῇ ἡ ἔνδειξις 2 Atm, ἐὰν ὁ κλειστὸς σωλὴν ἀπὸ τῆς ἐνδείξεως μηδὲν εἰς τὸ κλειστὸν ἄκρον αὐτοῦ ἔχῃ μῆκος 40 cm. (Ἀπ. 15 cm.)

907. Εἰς κλειστὸν μανόμετρον δι᾽ ὑδραργύρου αἱ ὑποδιαιρέσεις τῆς κλίμακος αὐξάνονται ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω, τὸ μηδὲν δὲ ταύτης εὑρίσκεται εἰς τὸ ἄκρον τοῦ κλειστοῦ σκέλους. Ὅταν τὸ ἀριστερὸν ἀνοικτὸν σκέλος εὑρίσκεται εἰς ἐπικοινωνίαν μετὰ τοῦ ἀέρος καὶ ἡ ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις εἶναι 716 Torr, αἱ ἐνδείξεις εἰς τὸ ἀριστερὸν καὶ δεξιὸν σκέλος τοῦ σωλῆνος εἶναι 9,40 cm καὶ 9,65 cm ἀντιστοίχως. Ἐὰν διὰ τοῦ στόματος φυσήσωμεν ἰσχυρῶς ἐντὸς τοῦ ἀνοικτοῦ σκέλους, αἱ ἐνδείξεις τοῦ ὀργάνου καθίστανται 10,30 cm καὶ 8,75 cm ἀντιστοίχως. Ποίαν ὑπερπίεσιν προκαλεῖ ὁ ὑπὸ τῶν πνευμόνων εἰσερχόμενος ἀήρ. (Ἀπ. 9,19 cm Hg.)

908. Κανονικὸν βαρόμετρον πρόκειται νὰ χρησιμοποιηθῇ ὡς μανόμετρον διὰ τὴν μέτρησιν ὑψηλῶν πιέσεων. Τὸ μῆκος τοῦ σωλῆνος ἄνωθεν τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑδραργύρου εἶναι 114 cm, τὸ ἀνώτερον δὲ τμῆμα αὐτοῦ φέρει στρόφιγγα ἀνοικτὴν κατ' ἀρχάς, τὴν ὁποίαν ἀκολούθως κλείομεν. Τὸ βαρόμετρον τίθεται κάτωθεν κώδωνος, ὅπου ἡ πίεσις καθίσταται διαδοχικῶς h = 2, 3, 4, 5, 10 Atm. Ποῦ πρέπει νὰ χαραχθοῦν αἱ ἀντίστοιχοι διαιρέσεις. Ἡ ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις εἶναι 1 Atm, ἡ δὲ στάθμη τοῦ ὑδραργύρου ἐντὸς τῆς λεκάνης τοῦ ὀργάνου δὲν μεταβάλλεται. (1 Atm = 760 Torr.) (Ἀπ. 76,0 cm, 52,1 cm, 38,0 cm, 29,3 cm, 13,1 cm.)

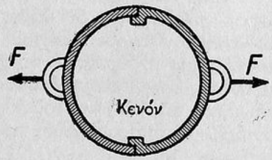
909. Ἀντλία ἀέρος, ἐκδιώκουσα ὄγκον 200 cm^3 ἀέρος καθ' ἑκάστην πλήρη διαδρομὴν τοῦ ἐμβολέως της, χρησιμοποιεῖται διὰ τὰ ἀντλήσῃ τὸν ἀέρα ἀεροθαλάμου ὄγκου 10 *lt*. Πόσαι διαδρομαὶ τοῦ ἐμβολέως ἀπαιτοῦνται, ἵνα ἡ πίεσις τοῦ ἀεροθαλάμου γίνῃ ἀπὸ μίαν ἀτμόσφαιραν 1 Torr. (Ἀπ. 335 διαδρομαί.)

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Γ'

910. Νὰ ἐκφρασθῇ ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις 5 kgr^*/cm^2 εἰς τὰς ἀκολούθους μονάδας: α) gr^*/cm^2, β) kgr^*/m^2, γ) dyn/cm^2, δ) mm Hg. (Πυκνότης Hg = 13,6 gr/cm^3.)

911. Μία αἴθουσα ἀκροατῶν ἔχει εὖρος 22,4 m, μῆκος 61 m καὶ ὕψος 6,1 m. Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ πυκνότης τοῦ ἀέρος εἶναι 0,00123 gr/cm^3, νὰ εὑρεθῇ τὸ βάρος τοῦ ἀέρος εἰς τὴν αἴθουσαν.

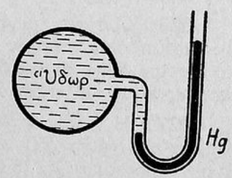
912. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ δύναμις F ἡ ἀπαιτουμένη διὰ τὸν ἀποχωρισμὸν τῶν δύο ἡμισφαιρίων τοῦ Μαγδεμβούργου, ἀπὸ τῶν ὁποίων ἔχει ἀφαιρεθῇ ὁ ἀήρ, εἶναι $F = \pi \cdot r^2 \cdot p$, ὅπου p ἡ πίεσις τῆς ἀτμοσφαίρας καὶ r ἡ ἐξωτερικὴ διάμετρος τῶν ἡμισφαιρίων.



913. Ἐὰν τὰ ἡμισφαίρια Μαγδεμβούργου ἔχουν διάμετρον 60 cm καὶ ἔχῃ ἀφαιρεθῇ ὁ ἀὴρ μέχρι 0,1 Atm, νὰ εὑρεθῇ πόση δύναμις ἀπαιτεῖται διὰ τὸν ἀποχωρισμὸν τῶν ἡμισφαιρίων, ὅταν ἡ πίεσις εἶναι 1 Atm.

914. Τὸ ὕψος τῆς ὑδραργυρικῆς στήλης βαρομέτρου εἶναι 74,6 cm καὶ ἡ θερμοκρασία 22° C. Ἐὰν ἡ πυκνότης τοῦ ὑδραργύρου εἰς τὴν θερμοκρασίαν αὐτὴν εἶναι 13,534 gr/cm^3, νὰ εὑρεθῇ ἡ πίεσις τῆς ἀτμοσφαίρας εἰς gr^*/cm^2.

915. Εἰς τὴν διάταξιν τοῦ σχήματος, ἐὰν ὁ ὑδράργυρος εὑρίσκεται εἰς ὕψος 70 cm ἀπὸ τοῦ πυθμένος τῆς δεξαμενῆς ὕδατος εἰς τὸν δεξιὸν σωλῆνα καὶ 20 cm ἀπὸ τοῦ πυθμένος τῆς δεξαμενῆς εἰς τὸν ἀριστερὸν σωλῆνα καὶ ἐὰν τὸ ὑδραργυρικὸν βαρόμετρον δεικνύῃ 730 mm Hg, νὰ εὑρεθῇ ἡ ἔνδειξις βαρομέτρου καὶ ἡ πίεσις εἰς τὸν πυθμένα τῆς δεξαμενῆς ὕδατος: α) εἰς cm Hg, β) εἰς Atm.



916. Ἐὰν τὸ ὑγρὸν εἰς ἓν βαρόμετρον εἶναι ὕδωρ, εἰς ποῖον ὕψος πρέπει νὰ εὑρίσκεται τὸ ὕδωρ, ὅταν ὑδραργυρικὸν βαρόμετρον δεικνύῃ 686 Torr. (Ἡ πίεσις τοῦ ἀτμοῦ ἄνωθεν τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὕδατος ἀμελητέα.)

917. Μᾶζα χλωρίου καταλαμβάνει 40 *lt* ὑπὸ πίεσιν 758 Torr. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος αὐτῆς εἰς 635 Torr. Ἡ θερμοκρασία παραμένει σταθερά.

918. Κύλινδρος ὕψους 50,8 cm καὶ κλειστὸς κατὰ τὸ ἓν ἄκρον πληροῦται ὑπὸ ἀέρος πιέσεως μιᾶς ἀτμοσφαίρας (76 cm Hg). Ἔμβολον ἐφαρμόζον ἀεροστεγῶς εἰσάγεται εἰς τὸ ἀνοικτὸν ἄκρον καὶ ὠθεῖται πρὸς τὰ κάτω μέχρις ἀποστάσεως 12,7 cm ἀπὸ τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου. Ποία ἡ πίεσις τοῦ ἐγκεκλεισμένου ἀέρος, ὅταν ἡ θερμοκρασία διατηρῆται σταθερά. Δώσατε ἀποτέλεσμα εἰς kgr^*/cm^2.

919. Πόση μᾶζα ὀξυγόνου εὑρίσκεται ἐντὸς φιάλης ὄγκου 40 *lt* ὑπὸ πίεσιν 150 Atm. ($\rho = 1{,}4$ gr/*lt* εἰς 1 Atm.)

920. Καταδυτικὸς κώδων κυλινδρικός, ὕψους 3,6 m, βυθίζεται μέχρις ὅτου τὸ ὕδωρ ἐντὸς αὐτοῦ ἀνέλθῃ εἰς 2,4 m. Νὰ ὑπλογισθῇ ἡ ἀπόστασις τῆς βάσεως τοῦ κώδωνος ἀπὸ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὕδατος.

921. Κυλινδρικὸς καταδυτικὸς κώδων ἔχει διάμετρον 3 m καὶ ὕψος 3,4 m καὶ ὑπὸ πίεσιν 740 mm Hg μὲ τὸ στόμιον πρὸς τὰ κάτω βυθίζεται ἐντὸς ὕδατος, ὥστε τὸ κατώτερον ἄκρον τοῦ κυλίνδρου νὰ εὑρίσκεται 10 m ὑπὸ τὴν ἐλευθέραν ἐπιφάνειαν τοῦ ὕδατος. Μέχρι ποίου ὕψους ἀνέρχεται τὸ ὕδωρ ἐντὸς τοῦ κώδωνος καὶ πόση ἡ πίεσις τοῦ ἀέρος ἐντὸς αὐτοῦ. Πόσον πρέπει νὰ εἶναι τὸ βάρος τοῦ κώδωνος, ἵνα οὗτος ἰσορροπῇ βυθισμένος.

922. Σωλὴν σχήματος U, σταθερᾶς τομῆς 0,5 cm^2, ἀνοικτὸς κατὰ τὸ ἓν ἄκρον, φέρει κατὰ τὸ ἕτερον ἄκρον αὐτοῦ στρόφιγγα. Ἀνοίγομεν ταύτην καὶ ρίπτομεν ἐντὸς τοῦ σωλῆνος τόσον ὑδράργυρον, ὥστε μεταξὺ τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας αὐτοῦ καὶ τῆς στρόφιγγος εἰς τὸ ἓν σκέλος νὰ ἀπομείνῃ ὄγκος ἀέρος μήκους 50 cm. Ἡ ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις εἶναι 720 Torr. Ἐὰν ἀκολούθως κλεισθῇ ἡ στρόφιγξ, πόσα γραμμάρια ὑδραργύρου πρέπει νὰ ριφθοῦν ἐντὸς τοῦ ἀνοικτοῦ σκέλους, ἵνα εἰς τὸ ἕτερον ἡ στάθμη αὐτοῦ ἀνέλθῃ κατὰ 10 cm.

923. Κυλινδρικὸς ὑάλινος σωλὴν μήκους $\alpha = 100$ cm, κλειστὸς κατὰ τὸ ἓν ἄκρον, πληροῦται δι' ὑδραργύρου μέχρις ὕψους $h = 80$ cm. Ἀκολούθως κλείεται τὸ ἀνοικτὸν ἄκρον διὰ τοῦ δακτύλου, ὁ σωλὴν ἀναστρέφεται καὶ βυθίζεται ἐντὸς λεκάνης ὑδραργύρου εἰς τοιοῦτον βάθος, ὥστε τὸ κατώτερον ἄκρον νὰ ἀπέχῃ τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας ἀπόστασιν $x = 10$ cm. Ἐὰν ἀκολούθως ἀνοιχθῇ τοῦτο, ποῖον τὸ μῆκος τῆς στήλης τοῦ περικλειομένου ἀέρος, μετὰ τὴν ἀποκατάστασιν τῆς ἰσορροπίας. Ἡ ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις εἶναι 700 Torr.

924. Εἰς βάθος 32 m ἀπὸ τῆς ἐπιφανείας λίμνης ἀναπτύσσεται φυσαλλὶς ἀερίου ἡ ὁποία ἀφοῦ ἀποκτήσῃ ὄγκον 1 cm^3 ἀνέρχεται πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν. Ποῖον ὄγκον ἔχει τὴν στιγμὴν κατὰ τὴν ὁποίαν ἀφίνει τὸ ὕδωρ, ὅταν ἡ ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις ἰσορροπῆται ἀπὸ στήλην ὑδραργύρου ὕψους 710 mm.

925. Δύο κοῖλα σφαιρικὰ δοχεῖα, ἐσωτερικῶν ἀκτίνων 8 cm καὶ 10 cm ἀντιστοίχως, περιέχουν ἴσας μάζας ἀερίου τινός. Εὕρετε α) τὸν λόγον τῶν πυκνοτήτων τῶν δύο ἀερίων, β) τὸν λόγον τῶν πιέσεών των.

926. Ὁ ὄγκος μεγάλου ἀεροπλοίου, πλήρους ἀερίου ἡλίου, εἶναι 100 000 m^3. Τὸ ἀερόπλοιον πλῆρες ζυγίζει 50 000 kgr*. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μέγιστον φορτίον τὸ ὁποῖον δύναται νὰ ἀνυψώσῃ τὸ ἀερόπλοιον. (Ὑποτίθενται κανονικαὶ συνθῆκαι θερμοκρασίας καὶ πιέσεως, $\varepsilon_{\dot{\eta}\lambda\acute{\iota}o\upsilon} = 0{,}178\ kgr^*/m^3$.)

927. Ἡ χωρητικότης ἀεροστάτου εἶναι 1 000 m^3. Τὸ βάρος αὐτοῦ μετὰ τῆς λέμβου κλπ. εἶναι 260 kgr*. Ἡ σχετικὴ πυκνότης τοῦ ἀερίου εἶναι 0,45 καὶ τὸ βάρος 1 m^3 ἀέρος εἶναι 1,293 kgr*. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀνυψωτικὴ δύναμις τοῦ ἀεροστάτου.

928. Ἓν ἀερόστατον ὅταν εἶναι κενὸν ζυγίζει 100 kgr, ὅταν πληροῦται ὑπὸ ὑδρογόνου πυκνότητος 0,89 gr/*lt*, ἀνυψοῖ πρόσθετον βάρος 90 kgr*. Ἡ πυκνότης τοῦ ἀέρος εἶναι 1,293 gr/*lt*. Εὕρετε τὸν ὄγκον τοῦ ἀεροστάτου ὅταν εἶναι πλῆρες.

929. Τὸ συνολικὸν βάρος ἀεροστάτου εἶναι 3 000 kgr*. Πόσος ὄγκος ἡλίου, εἰδ. βάρους 0,178 kgr^*/m^3, ἀπαιτεῖται, ἵνα ἀνυψώσῃ τὸ ἀερόστατον ἐντὸς ἀέρος εἰδικοῦ βάρους 1,292 kgr^*/m^3.

930. Εἰς ἀνοικτὸν μανόμετρον ἐλαίου, τοῦ ὁποίου τὸ εἰδ. βάρος εἶναι 0,92 gr^*/cm^3, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐλαίου εἰς τὸν ἀνοικτὸν σωλῆνα εὑρίσκεται 42 cm κάτωθεν τῆς ἐπιφανείας τοῦ ἐλαίου εἰς τὸν ἕτερον σωλῆνα, ὅστις εἶναι συνδεδεμένος πρὸς ἀεριοθάλαμον. Εὕρετε κατὰ πόσον ἡ πίεσις εἰς τὸν ἀεριοθάλαμον εἶναι ταπεινοτέρα τῆς ἀτμοσφαιρικῆς, εἰς dyn/cm^2.

931. Τὸ εἰδικὸν βάρος τῆς κηροζίνης εἶναι 0,8 gr^*/cm^3, τοῦ θειϊκοῦ ὀξέος 1,84 gr^*/cm^3, τοῦ ὑδραργύρου 13,6 gr^*/cm^3. Πόσον εἶναι τὸ μέγιστον ὕψος ἐκ τοῦ ὁποίου ἕκαστον ὑγρὸν δύναται νὰ μεταγγισθῇ διὰ σίφωνος, ὅταν ἡ βαρομετρικὴ πίεσις εἶναι 760 Torr.

932. Ὑποθέτομεν ὅτι ὁ σωλὴν σίφωνος εἶναι ὁμοιομόρφου τομῆς 1 cm^2. Τὸ ἀριστερὸν μῆκος τοῦ σωλῆνος εἶναι 20 cm, τὸ δὲ δεξιὸν αὐτοῦ μῆκος εἶναι 35 cm καὶ ἡ πυκνότης τοῦ ὑγροῦ 1,5 gr/cm^3. Εὕρετε τὴν ἐνεργὸν πίεσιν $(p - p')$, εἰς δύνας, τὴν ἀναγκάζουσαν τὸ ὑγρὸν νὰ ρεύσῃ ἀπὸ τὸν δεξιὸν βραχίονα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΒ'

ΥΔΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗ – ΑΕΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗ

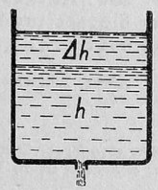
ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Α'

933. Ὕδωρ ἐκρέει ἀπὸ δεξαμενῆς ὑπὸ παροχὴν 2 *lt*/sec δι' ὀπῆς εὑρισκομένης εἰς τὸν πυθμένα τῆς δεξαμενῆς, τῆς ὁποίας τὸ βάθος εἶναι 360 cm. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ νέα παροχή, ὅταν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὕδατος ἀσκῆται πρόσθετος πίεσις 8 kgr^*/cm^2.

Λύσις. Ἡ παροχὴ Π, ὡς εἶναι γνωστόν, δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου:

$$\Pi = S \cdot \upsilon \qquad (1)$$

ὅπου S εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὀπῆς καὶ υ ἡ ταχύτης ὑπὸ τὴν ὁποίαν ἐκρέει τὸ ὕδωρ. Ἐπειδὴ ὅμως ἡ ταχύτης ἐκροῆς τοῦ ὑγροῦ εἶναι κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ Torricelli $\upsilon = \sqrt{2g \cdot h}$, ὅπου h ἡ κατακόρυφος ἀπόστασις τῆς ὀπῆς ἀπὸ τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ, ὁ τύπος (1) γράφεται:



$$\Pi = S\sqrt{2g \cdot h} \qquad (2)$$

Ἔστω τώρα ὅτι προκαλοῦμεν αὔξησιν τοῦ ὕψους τοῦ ὑγροῦ κατὰ Δh, ὁπότε ἔχομεν καὶ αὔξησιν τῆς πιέσεως κατὰ Δp. Ἐπειδὴ $\Delta p = \varepsilon \cdot \Delta h$, ὅπου ε τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ὕδατος, θὰ ἔχωμεν $\Delta h = \dfrac{\Delta p}{\varepsilon}$ καὶ συνεπῶς ἡ ζητουμένη παροχὴ θὰ εἶναι τώρα:

$$\Pi' = S\sqrt{2g\left(h + \frac{\Delta p}{\varepsilon}\right)} \qquad (3)$$

Διὰ διαιρέσεως τῶν σχέσεων (2) καὶ (3) κατὰ μέλη καὶ ἐν συνεχείᾳ δι' ἐπιλύσεως ὡς πρὸς Π' λαμβάνομεν:

$$\Pi' = \Pi\sqrt{1 + \frac{\Delta p}{\varepsilon \cdot h}} \qquad (4)$$

Θέτομεν εἰς τὴν σχέσιν (4) τὰ δεδομένα: $\Pi = 2\, lt/sec$, $h = 360$ cm, $\Delta p = 8\,000\ gr^*/cm^2$, $\varepsilon = 1\ gr^*/cm^3$, καὶ εὑρίσκομεν:

$$\underline{\Pi' = 9{,}6\ lt/sec.}$$

934. Σωλὴν διοχετεύσεως ἀεριόφωτος ἔχει εἰς τὴν ἀρχήν του διάμετρον 10 mm καὶ ἀκολούθως ὁ σωλὴν ἀποστενοῦται, ὥστε ἡ διάμετρος αὐτοῦ νὰ γίνῃ 5 mm. Ἐκ τοῦ στενοῦ σωλῆνος τὸ φωταέριον ἐκρέει ὑπὸ ταχύτητα 25,1 m/sec. Ζητοῦνται: α) Πόση ἡ ταχύτης τοῦ φωταερίου εἰς τὸν εὐρὺν σωλῆνα. β) Πόση ἡ παροχὴ φωταερίου ἀπὸ τὸν στενὸν σωλῆνα εἰς cm³/sec. γ) Εἰς πόσον χρόνον ἐκρέει διὰ τοῦ σωλῆνος 1 m³ φωταερίου.

Λύσις. α) Ἐὰν καλέσωμεν υ_1 τὴν ταχύτητα τὴν ὁποίαν ἔχει τὸ φωταέριον εἰς τὴν τομὴν S_1 τοῦ εὐρέος σωλῆνος καὶ υ_2 τὴν ταχύτητα εἰς τὴν τομὴν S_2 τοῦ στενοῦ σωλῆνος, τότε κατὰ τὸν νόμον τῆς συνεχείας θὰ ἔχωμεν:

$$\frac{\upsilon_1}{\upsilon_2} = \frac{S_2}{S_1} \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ ὅμως εἶναι $S_1 = \frac{\pi \cdot \delta_1^2}{4}$ καὶ $S_2 = \frac{\pi \cdot \delta_2^2}{4}$ ἡ σχέσις (1) δύναται νὰ γραφῇ:

$$\frac{\upsilon_1}{\upsilon_2} = \frac{\delta_2^2}{\delta_1^2} \quad \text{ἢ} \quad \upsilon_1 = \upsilon_2 \left(\frac{\delta_2}{\delta_1}\right)^2 \qquad (2)$$

Θέτομεν εἰς τὴν σχέσιν (2) τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως: $\upsilon_2 = 25{,}1$ m/sec, $\delta_1 = 10$ mm, $\delta_2 = 5$ mm, καὶ εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ζητουμένη ταχύτης τοῦ φωταερίου εἶναι:

$$\underline{\upsilon_1 = 6{,}275 \text{ m/sec.}}$$

β) Ἡ παροχὴ εἰς τὸν στενὸν σωλῆνα θὰ εἶναι:

$$\Pi_2 = S_2 \cdot \upsilon_2 = \frac{\pi \cdot \delta_2^2}{4} \cdot \upsilon_2$$

ἐξ ἧς εὐκόλως εὑρίσκομεν ὅτι:

$$\underline{\Pi_2 = 492 \text{ cm}^3/\text{sec.}}$$

γ) Ἐφ' ὅσον τὰ 492 cm³ ἐκρέουν εἰς χρόνον 1 sec, τὰ 10^6 cm³ (1 m³) θὰ ἐκρέουν εἰς χρόνον:

$$t = \frac{10^6}{492} = 2\,037 \text{ sec} \quad \text{ἤτοι:} \quad \underline{t = 34 \text{ min περίπου.}}$$

935. Κατακόρυφον κυλινδρικὸν δοχεῖον περιέχει ὕδωρ, τοῦ ὁποίου ἡ στάθμη διατηρεῖται 46 cm ὑπὲρ τὴν ὀπὴν ἐκροῆς. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ταχύτης ἐκροῆς τοῦ ὕδατος. (g = 9,81 m/sec².)

Λύσις. Συμφώνως πρὸς τὸ θεώρημα τοῦ Torricelli ἡ ταχύτης ἐκροῆς υ θὰ εἶναι:

$$\upsilon = \sqrt{2\,g \cdot h}$$

ὅπου h τὸ ὕψος τῆς στάθμης τοῦ ὕδατος ὑπὲρ τὴν ὀπήν. Θέτοντες εἰς τὴν ἀνωτέρω σχέσιν τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως εἰς τὸ Τεχνικὸν Σύστημα: $g = 9{,}81$ m/sec² καὶ $h = 0{,}46$ m, εὑρίσκομεν:

$$\underline{\upsilon = 3 \text{ m/sec.}}$$

936. Κυλινδρικὸν δοχεῖον περιέχει ὕδωρ μέχρις ὕψους 40 cm. α) Πόση ἡ ταχύτης ἐκροῆς τοῦ ὕδατος ἀπὸ ὀπῆς εὑρισκομένης εἰς ἀπόστασιν 10 cm ἀπὸ τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας. β) Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ πυθμένος τοῦ δοχείου συναντᾷ ἡ ὑγρὰ φλὲψ τὸ ἔδαφος. (g = 981 cm/sec².)

Λύσις. α) Ἐὰν καλέσωμεν h τὸ ὕψος τοῦ ὕδατος ἄνωθεν τῆς ὀπῆς, τότε ἡ ταχύτης υ ἐκροῆς τοῦ ὕδατος θὰ εἶναι κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ Torricelli:

$$\upsilon = \sqrt{2\,g \cdot h} \qquad (1)$$

ἐξ οὗ προκύπτει εὐκόλως ὅτι:

$$\underline{\upsilon = 140 \text{ cm/sec.}}$$

β) Δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ὅτι ἕκαστον στοιχεῖον μάζης τοῦ ὕδατος ἔχει δύο κινήσεις, μίαν ὁριζοντίαν καὶ μίαν κατακόρυφον, καὶ ὅτι ἀμφότεραι αἱ κινήσεις διαρκοῦν ἐπὶ τὸν αὐτὸν χρόνον t. Εἰς τὴν ὁριζοντίαν του κίνησιν τὸ ὕδωρ ἔχει κίνησιν ὁμαλὴν καὶ θὰ ἰσχύη ἡ σχέσις :

$$s = \upsilon \cdot t \tag{2}$$

Εἰς δὲ τὴν κατακόρυφον κίνησίν του τὸ ὕδωρ ἔχει ἐπιτάχυνσιν g καὶ συνεπῶς θὰ ἰσχύη ἡ σχέσις :

$$h_1 = \frac{1}{2} g \cdot t^2 \tag{3}$$

Ἐκ τῶν σχέσεων (2) καὶ (3), δι' ἀπαλοιφῆς τοῦ χρόνου t, προκύπτει ὅτι ἡ ὁριζοντία ζητουμένη ἀπόστασις εἶναι :

$$s = \upsilon \sqrt{\frac{2\,h_1}{g}} \tag{4}$$

Θέτοντες εἰς τὴν σχέσιν (4) τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως εἰς τὸ σύστημα C.G.S. : $\upsilon = 140$ cm/sec, $h_1 = 30$ cm καὶ $g = 981$ cm/sec², εὑρίσκομεν :

$$\underline{s = 34{,}6 \text{ cm.}}$$

937. Νὰ καθορισθῇ ἡ δύναμις ἡ ἐπενεργοῦσα ἐπὶ κυκλικοῦ δίσκου ἐπιφανείας 16 cm², ὅταν οὗτος προσβάλλεται καθέτως ὑπὸ ρεύματος ἀέρος πυκνότητος 0,00125 gr/cm³ καὶ ταχύτητος 1 000 cm/sec. (Διὰ τὸν δίσκον εἶναι $C_{ἀντ.} = 1{,}2$.)

Λύσις. Ἡ ἔντασις τῆς δυνάμεως F ὑπολογίζεται ἐκ τῆς σχέσεως :

$$F = C_{ἀντ.} \cdot S \cdot \frac{\rho}{2} \cdot \upsilon^2 \tag{1}$$

ὅπου ρ εἶναι ἡ πυκνότης τοῦ ἀέρος, υ ἡ ταχύτης τοῦ σώματος ὡς πρὸς τὸν ἀέρα, S τὸ ἐμβαδὸν τῆς μεγίστης διατομῆς τοῦ σώματος κατὰ διεύθυνσιν κάθετον πρὸς τὴν ταχύτητα καὶ $C_{ἀντ.}$ ἀριθμητικὸς συντελεστὴς (ἄνευ διαστάσεων) καλούμενος συντελεστὴς ἀντιστάσεως.

Ἐὰν εἰς τὴν ἀνωτέρω σχέσιν (1) θέσωμεν τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως : $C_{ἀντ.} = 1{,}2$, $S = 16$ cm², $\rho = 0{,}00125$ gr/cm³ καὶ $\upsilon = 1\,000$ cm/sec, εὑρίσκομεν :

$$\underline{F = 1{,}2 \cdot 10^4 \text{ dyn.}}$$

938. Ὁ τύπος ὁ παρέχων τὴν ὁρικὴν ταχύτητα σώματος πίπτοντος εἰς τὸν ἀέρα εἶναι $\upsilon_{ορ.} = \sqrt{m \cdot g/k \cdot S}$. Ἐὰν τὸ σῶμα ἔχῃ σχῆμα σφαίρας ἀκτῖνος r καὶ ἡ πυκνότης αὐτοῦ εἶναι ρ, ποίαν μορφὴν λαμβάνει ὁ ἀνωτέρω τύπος. Τί συμπέρασμα συνάγεται.

Λύσις. Ἡ μᾶζα τοῦ σώματος δίδεται, ὡς γνωστόν, διὰ τοῦ τύπου $m = \rho \cdot V$, καὶ ἐπειδὴ ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας εἶναι $V = \frac{4}{3} \pi r^3$ θὰ ἔχωμεν ὅτι :

$$m = \rho \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot r^3 \tag{1}$$

Ἐπίσης ἡ διατομὴ S εἶναι τὸ ἐμβαδὸν μεγίστου κύκλου τῆς σφαίρας, ἤτοι :

$$S = \pi \cdot r^2 \tag{2}$$

Βάσει τῶν τύπων (1) καὶ (2) λαμβάνομεν ἐκ τοῦ τύπου τῆς ὁρικῆς ταχύτητος σώματος πίπτοντος εἰς τὸν ἀέρα :

$$\upsilon_{ὁρ.} = \sqrt{\frac{m \cdot g}{k \cdot S}} = 2\sqrt{\frac{g \cdot r \cdot \rho}{3\,k}} \tag{3}$$

Ἐκ τοῦ τύπου (3) συνάγεται ὅτι ἡ ὁρικὴ ταχύτης πιπτούσης σφαίρας εἶναι ἀνάλογος τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τῆς πυκνότητος καὶ τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τῆς ἀκτῖνος τῆς σφαίρας.

939. Νὰ καθορισθῇ ὁ λόγος τῶν ὁρικῶν ταχυτήτων δύο σφαιρῶν ἐκ ξύλου δρυὸς πυκνότητος 0,7 gr/cm^3 καὶ ἐκ μολύβδου πυκνότητος 11,3 gr/cm^3 τῆς αὐτῆς διαμέτρου, ὅταν πίπτουν ἐντὸς ἀέρος.

Λύσις. Συμφώνως πρὸς τὴν σχέσιν (4) τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως θὰ ἔχωμεν διὰ τὴν περίπτωσιν τῆς ξυλίνης σφαίρας :

$$\upsilon_{\delta\rho.} = 2\sqrt{\frac{g\cdot r\cdot \rho}{3k}} \qquad (1)$$

καὶ διὰ τὴν περίπτωσιν τῆς μολυβδίνης σφαίρας :

$$\upsilon'_{\delta\rho.} = 2\sqrt{\frac{g\cdot r\cdot \rho'}{3k}} \qquad (2)$$

Ἐὰν διαιρέσωμεν τὰς σχέσεις (1) καὶ (2) κατὰ μέλη, λαμβάνομεν :

$$\frac{\upsilon_{\delta\rho.}}{\upsilon'_{\delta\rho.}} = \sqrt{\frac{\rho}{\rho'}} \qquad (3)$$

θέτοντες δὲ τὰς δοθείσας τιμὰς τῶν πυκνοτήτων : $\rho = 0{,}7$ gr/cm^3 καὶ $\rho' = 11{,}3$ gr/cm^3, εὑρίσκομεν :

$$\underline{\frac{\upsilon_{\delta\rho.}}{\upsilon'_{\delta\rho.}} = \frac{1}{4}} \quad \text{(περίπου)}$$

940. Ἀεροπλάνον μεγίστης μετωπικῆς ἐπιφανείας 1 m^2 ἵπταται μὲ ταχύτητα 360 km/h εἰς ὕψος 2 000 m, ὅπου ἡ μέση πυκνότης τοῦ ἀέρος εἶναι 0,001 gr/cm^3. α) Ποία ἡ ἀεροαντίστασις, ἐὰν $C_{\dot{\alpha}\nu\tau.} = 0{,}05$. β) Ποίαν ἰσχὺν πρέπει νὰ ἀναπτύξῃ ὁ κινητὴρ αὐτοῦ, ἐὰν ἡ ἀπόδοσις τῆς ἕλικος εἶναι 85 %.

Λύσις. α) Τὸ μέτρον τῆς ἀντιστάσεως T τὴν ὁποίαν ὑφίσταται τὸ ἀεροπλάνον εὑρίσκεται ἐκ τοῦ τύπου :

$$T = C_{\dot{\alpha}\nu\tau.}\cdot S\cdot \frac{\rho}{2}\cdot \upsilon^2 \qquad (1)$$

ὅπου ρ εἶναι ἡ πυκνότης τοῦ ἀτμοσφαιρικοῦ ἀέρος, υ ἡ ταχύτης τοῦ ἀεροπλάνου, S ἡ μετωπικὴ ἐπιφάνεια αὐτοῦ καὶ $C_{\dot{\alpha}\nu\tau.}$ ἀριθμητικὸς συντελεστὴς ἐξαρτώμενος κυρίως ἐκ τῆς μορφῆς τοῦ ὀπισθίου τμήματος τῆς ἐπιφανείας τοῦ ἀεροπλάνου καὶ ὁ ὁποῖος καλεῖται συντελεστὴς ἀντιστάσεως.

Ἐργαζόμενοι εἰς τὸ σύστημα C.G.S. θέτομεν εἰς τὴν σχέσιν (1) : $C_{\dot{\alpha}\nu\tau.} = 0{,}05$, $\upsilon = 360\cdot 10^5/(36\cdot 10^2) = 10^4$ cm/sec, $\rho = 0{,}001$ gr/cm^3, $S = 10^4$ cm^2, καὶ εὑρίσκομεν :

$$\underline{T = 25\cdot 10^6 \text{ dyn}} \quad \text{ἢ} \quad \underline{T = 25{,}4 \text{ kgr*}}.$$

β) Ἡ ἰσχύς, ὡς πηλίκον τοῦ παραγομένου ἔργου A διὰ τοῦ χρόνου t, εἶναι :

$$N = \frac{A}{t} = \frac{F\cdot S}{t} = F\cdot \upsilon \qquad (2)$$

Ἐὰν καλέσωμεν η τὸν συντελεστὴν ἀποδόσεως τῆς ἕλικος καὶ ἀντικαταστήσωμεν τὴν F διὰ τῆς ἴσης της T, προκύπτει ὅτι ἡ ζητουμένη ἰσχὺς ὑπολογίζεται ἐκ τοῦ τύπου :

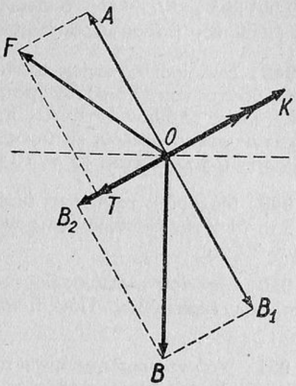
$$N = \frac{T\cdot \upsilon}{\eta} \qquad (3)$$

Θέτομεν εἰς τὸν ἀνωτέρω τύπον (3) : $T = 25{,}4$ kgr*, $\upsilon = 100$ m/sec, $\eta = 0{,}85$, καὶ εὑρίσκομεν :

$$\underline{N = 298{,}82 \text{ kgr*m/sec} = 39{,}8 \text{ PS}.}$$

941. Θεωροῦμεν ἀεροπλάνον ἐκτελοῦν πτῆσιν ἀνόδου (βλ. σχῆμα). Ἔστωσαν δὲ αἱ γωνίαι AOF = φ = 20° καὶ BOB$_1$ = θ = 30° ὡς καὶ ἡ ἀεροδύναμις OF = 1 500 kgr*. Ζητοῦνται: α) Ἡ ἄνωσις ΟΑ τοῦ ἀεροπλάνου. β) Ἡ προωστικὴ δύναμις ΟΚ αὐτοῦ.

Λύσις. α) Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου OAF (βλ. σχῆμα), προκύπτει ὅτι OA = OF · συν φ, ὁπότε διὰ OF = 1 500 kgr* καὶ φ = 20° (συν φ = 0,939), εὑρίσκομεν:



$$OA = 1\,410 \text{ kgr*}.$$

β) Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου OB$_1$B εὑρίσκομεν ὅτι: OB = OB$_1$ / συν θ καί, ἐπειδὴ ἡ συνιστῶσα OB$_1$ τοῦ βάρους εἶναι προφανῶς ἴση καὶ ἀντίθετος πρὸς τὴν ἄνωσιν OA, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν:

$$OB = \frac{OA}{\text{συν}\,\theta}$$

Οὕτω διὰ OA = 1 410 kgr* καὶ θ = 30° εὑρίσκομεν ὅτι: OB = 1 550 kgr* καὶ συνεπῶς ἡ συνιστῶσα OB$_2$ τοῦ βάρους, ὡς εὐκόλως συνάγεται ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου OB$_2$B, εἶναι:

$$OB_2 = OB \cdot \text{ημ}\,\theta = 1\,550 \cdot 0{,}5 = 775 \text{ kgr*}.$$

Ἐπίσης ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου OFT εὐκόλως συνάγεται ὅτι:

$$OT = OF \cdot \text{ημ}\,\varphi = 1\,500 \cdot \text{ημ}\,20° = 513 \text{ kgr*}.$$

Ἄρα ἡ ζητουμένη προωστικὴ δύναμις ΟΚ, ἐπειδὴ θὰ ἐξουδετερώνῃ τὴν συνιστῶσαν OB$_2$ τοῦ βάρους καὶ τὴν ὀπισθέλκουσαν δύναμιν (ἀντίστασιν) OT, θὰ εἶναι:

$$OK = OB_2 + OT = 1\,288 \text{ kgr*}.$$

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Β′

942. Διὰ κυλινδρικοῦ σωλῆνος διαμέτρου 52 mm διέρχονται 5,4 m³ ἀέρος ἀνὰ min. Ποία ἡ ταχύτης τοῦ ἀέρος ἐντὸς τοῦ σωλῆνος. (Ἀπ. 42,4 m/sec.)

943. Ἀγωγὸς ὕδατος ἀποτελεῖται ἐκ δύο τμημάτων διαμέτρων 0,4 m καὶ 0,3 m, παρέχει δὲ 240 *lt* ὕδατος ἀνὰ sec. Ποία ἡ ταχύτης τοῦ ὕδατος εἰς τὰ δύο τμήματα. (Ἀπ. υ_1 = 1,9 m/sec, υ_2 = 3,4 m/sec.)

944. Ἐντὸς αὔλακος βάθους 2 m καὶ πλάτους 5 m ρέει ὕδωρ μὲ μέσην ταχύτητα υ = 100 cm/sec. Ποία ἡ ἰσχὺς εἰς ἵππους (PS) τοῦ ρέοντος ὕδατος. (Ἀπ. 6,8 PS.)

945. Δοχεῖον ὕψους 20 cm φέρει εἰς τὸν πυθμένα αὐτοῦ ὀπὴν διαμέτρου 5 mm, εἶναι δὲ ἀρχικῶς πλῆρες ὕδατος. Ἐὰν μετὰ τὴν ἔξοδόν του ἐκ τῆς ὀπῆς τὸ ὕδωρ ἐκρέῃ διὰ σωλῆνος τομῆς 0,6 φορὰς μικροτέρας τῆς ὀπῆς, νὰ ὑπολογισθῇ μὲ πόσον ὕδωρ πρέπει νὰ τροφοδοτῆται τὸ δοχεῖον, ἵνα ἡ στάθμη αὐτοῦ παραμένῃ εἰς τὸ ἀνώτερον χεῖλος τούτου. (g = 1 000 cm/sec².) (Ἀπ. 23,4 cm³/sec.)

946. Ὑάλινος σωλὴν διαρρέεται ὑπὸ ὕδατος, ἀποτελεῖται δὲ ἐκ δύο τμημάτων τομῆς 4 cm² καὶ 1 cm². Ἐπὶ τῶν δύο τμημάτων εὑρίσκεται ἀνὰ εἷς κατακόρυφος λεπτὸς σωλήν, ἐντὸς δὲ τοῦ πρώτου ἐξ αὐτῶν τὸ ὕδωρ ἀνέρχεται εἰς ὕψος 15 cm. Ἐὰν τοῦτο ἐξέρχεται τοῦ στενοῦ τμήματος τοῦ σωλῆνος μὲ ταχύτητα 80 cm/sec, νὰ εὑρεθοῦν:

α) Τὸ ὕψος τοῦ ὕδατος ἐντὸς τοῦ δευτέρου σωλῆνος. β) Μὲ ποίαν ταχύτητα πρέπει νὰ ἐξέρχεται τὸ ὕδωρ ἐκ τοῦ στενοῦ τμήματος, ἵνα τὸ ὕψος εἰς τὸ ὁποῖον ἀνέρχεται τοῦτο ἐντὸς τοῦ πρώτου σωλῆνος παραμένῃ τὸ αὐτὸ ὡς καὶ προηγουμένως, ἐνῷ ἐντὸς τοῦ δευτέρου νὰ εἶναι μηδέν. γ) Τί θὰ συμβῇ εἰς τὸν δεύτερον σωλῆνα, ἂν ἡ ταχύτης ροῆς αὐξηθῇ πέραν ταύτης. ('Απ. 11,1 cm, 177,2 cm/sec.)

947. Μὲ ποίαν ταχύτητα υ ἐκρέει ἀὴρ πιέσεως 760 Torr καὶ εἰδικοῦ βάρους $\varepsilon = 0{,}001\,293$ gr*/cm^3 εἰς τὸ κενόν. Μεταβάλλεται αὕτη μετὰ τῆς πυκνότητος τοῦ ἀέρος; (Εἰδικὸν βάρος ὑδραργύρου $\varepsilon' = 13{,}6$ gr*/cm^3.) ('Απ. 396 m/sec, ὄχι.)

948. Σωλὴν ὀρθογωνίως κεκαμμένος καὶ ἀνοικτὸς κατὰ τὰ δύο ἄκρα βυθίζεται ἐντὸς ρέοντος ὕδατος κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε τὸ ἓν σκέλος νὰ διατεθῇ ἐντὸς αὐτοῦ ὁριζοντίως μὲ τὸ στόμιον ἀντιθέτως πρὸς τὴν φορὰν τῆς ροῆς. Τὸ ὕδωρ ἀνέρχεται ἐντὸς τοῦ κατακορύφου σκέλους εἰς ὕψος $h = 25$ cm ὑπὲρ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ. Ποία ἡ ταχύτης υ τοῦ ὕδατος. ($g = 10$ m/sec^2.) ('Απ. 2,24 m/sec.)

949. Μὲ ποίαν ταχύτητα ἐκρέει ὕδωρ ἐξ ὀπῆς, εὑρισκομένης εἰς σταθερὸν βάθος $h = 3$ m ὑπὸ τὴν ἐλευθέραν ἐπιφάνειαν, ἐὰν τὸ ὕδωρ εὑρίσκεται ὑπὸ πίεσιν στήλης ὕδατος 20 m. ('Απ. 21 m/sec.)

950. Ἐπὶ τοῦ πυθμένος δοχείου ὕψους $h = 52$ cm, τὸ ὁποῖον διατηρεῖται διαρκῶς πλῆρες, ἐκρέει ὕδωρ. Ποία ἡ ταχύτης αὐτοῦ 0,5 sec μετὰ τὴν δίοδόν του ἐκ τῆς ὀπῆς. ('Απ. 8,1 m/sec.)

951. Ὑάλινος σωλὴν κάμπτεται εἰς τὸ ἓν ἄκρον αὐτοῦ ὀρθογωνίως κατὰ μικρὸν τμῆμα. Τὸ ἕτερον ἄκρον συνδέεται μέσῳ βραχέος ἐλαστικοῦ σωλῆνος πρὸς ὁριζοντίαν στρόφιγγα ὕδατος. Ἀφίνομεν νὰ διέλθῃ μὲ ὡρισμένην ταχύτητα διὰ τοῦ σωλῆνος ὕδωρ, τὸ ὁποῖον ἐκρέει ἐκ τοῦ κεκαμμένου ἄκρου καθέτως πρὸς τὰ κάτω. Παρατηροῦμεν τότε ὅτι ἀναλόγως τῆς δυνάμεως ἀντιδράσεως τοῦ ὑγροῦ ὁ σωλὴν λαμβάνει διαφόρους θέσεις, μεταξὺ τῶν ὁποίων καὶ τὴν ὁριζοντίαν. Νὰ ὑπολογισθῇ πόσα kgr* ὕδατος ἐκρέουν εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς ὁριζοντίας θέσεως, ἐντὸς 30 sec, ἐὰν τὸ μῆκος τοῦ σωλῆνος εἶναι 60 cm, τὸ βάρος αὐτοῦ 51,5 gr* καὶ ἡ ἐσωτερική του διάμετρος 0,8 cm. (Τὸ μῆκος τοῦ κεκαμμένου τμήματος εἶναι ἀμελητέον.) ('Απ. 4,26 kgr*.)

952. Ἐκ τοῦ στομίου ἀεροσωλῆνος διαμέτρου $d = 2$ m προσφυσᾶται ἐπὶ τῶν πτερυγίων ἀνεμομύλου ρεῦμα ἀέρος ὑπὸ ταχύτητα $\upsilon_1 = 20$ m/sec ἥτις, μετὰ τὴν πρόσπτωσιν τοῦ ἀέρος ἐπὶ τῶν πτερυγίων, καθίσταται $\upsilon_2 = 5$ m/sec. Πόσην ἰσχὺν εἰς PS ἀποκτᾷ ὁ ἀνεμόμυλος. (Πυκνότης ἀέρος $\rho = 1{,}25$ kgr/m^3.) ('Απ. 20 PS.)

953. Ἀλεξιπτωτιστὴς ἐγκαταλείπει ἀεροπλάνον εἰς τοιοῦτον ὕψος, ὥστε μετὰ τὸ ἄνοιγμα τοῦ ἀλεξιπτώτου του ἡ ταχύτης πτώσεως αὐτοῦ καθίσταται σταθερὰ εἰς ὕψος 1 500 m ὑπεράνω τῆς ἐπιφανείας τῆς θαλάσσης. Ὁ ἀλεξιπτωτιστὴς προσγειοῦται εἰς ὕψος 500 m ἀπὸ τῆς ἐπιφανείας τῆς θαλάσσης, τὸ βάρος δὲ αὐτοῦ μετὰ τοῦ ἀλεξιπτώτου του ἀνέρχεται εἰς 85 kgr*. Τὸ ἀλεξίπτωτον ἔχει μορφὴν ἡμισφαιρίου διαμέτρου 6 m. Ἡ μέση πυκνότης τοῦ ἀέρος εἶναι 0,00169 gr/cm^3 καὶ $C_{\text{ἀντ.}} = 1{,}4$. Ποία ἡ ταχύτης αὐτοῦ καὶ ποῖος χρόνος ἀπαιτεῖται διὰ πτῶσιν 1 000 m.
('Απ. 6,21 m/sec, 161 sec.)

954. Ποία ἡ ἀεροαντίστασις εἰς ἀεροπλάνον τοῦ ὁποίου ὁ κινητὴρ εἶναι ἰσχύος 800 PS καὶ ἔχει ἀπόδοσιν 75%, ὅταν ἐκτελῇ ὁριζοντίαν πτῆσιν μὲ ταχύτητα 360 km/h. ('Απ. 450 kgr*.)

955. Ποία ἡ ταχύτης ἀνόδου ἀεροσκάφους βάρους 1 500 kgr*, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ ἕλξις τοῦ κινητῆρος εἶναι 300 kgr*, ἡ ἀεροαντίστασις 210 kgr* καὶ ἡ ταχύτης τῆς πτήσεως 180 km/h. ('Απ. 3 m/sec.)

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Γ'

956. Μετρητὴς Venturi εἰσάγεται ἐντὸς παροχῆς ὕδατος διαμέτρου 60 cm καὶ ἡ μικρὰ τομὴ αὐτοῦ εἶναι 20 cm. Ἡ πίεσις εἰς τὴν εἰσαγωγὴν καὶ εἰς τὴν στένωσιν τοῦ μετρητοῦ εἶναι 30 kgr^*/cm^2 καὶ 20 kgr^*/cm^2 ἀντιστοίχως. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ παροχὴ εἰς lt/min. ($g = 980$ cm/sec^2.)

957. Ὑγρὸν εἰδικοῦ βάρους 0,9 gr^*/cm^3 ρέει διὰ μέσου σωλῆνος διαμέτρου 6 cm μὲ ταχύτητα 30 cm/sec. Εἰς ἓν στένωμα τοῦ σωλῆνος, διαμέτρου 2 cm, ἡ πίεσις εὑρίσκεται ὅτι εἶναι 100 gr^*/cm^2. Ζητεῖται ἡ πίεσις εἰς τὸ λοιπὸν μέρος τοῦ σωλῆνος.

958. Ποία δύναμις ἀντιδράσεως ἐξασκεῖται ἐπὶ δοχείου, ἐκ τοῦ ὁποίου ἐκρέει ὕδωρ δι' ὀπῆς διαμέτρου 2 cm, τῆς ὁποίας τὸ κέντρον εὑρίσκεται 2 m κάτωθεν τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας τοῦ ὕδατος. ($g = 10$ m/sec^2.)

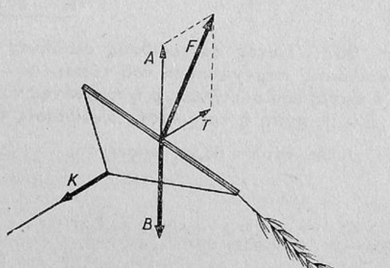
959. Κύλινδρος, ἀνοικτὸς κατὰ τὸ κατώτερον ἄκρον αὐτοῦ, κλείεται κατὰ τὸ ἀνώτερον διὰ ὑαλίνης πλακός, φερούσης εἰς τὸ μέσον αὐτῆς μικρὰν ὀπήν, πληροῦται δὲ διὰ φωταερίου καὶ βυθίζεται ἐντὸς λεκάνης ὕδατος. Ἀνοίγομεν τὴν ὀπὴν καὶ παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ἀνερχόμενον ἐντὸς τοῦ κυλίνδρου ὕδωρ ἀπαιτεῖ χρόνον 70 sec διὰ νὰ διέλθῃ ἐνώπιον δύο ἐπ' αὐτοῦ κειμένων χαραγῶν. Ἐὰν ὁ κύλινδρος ἐπληροῦτο δι' ἀέρος, ὁ χρόνος οὗτος θὰ ἦτο 105 sec. Νὰ εὑρεθῇ ἡ πυκνότης τοῦ φωταερίου ἐν σχέσει πρὸς τὸν ἀέρα.

960. Ὀχετὸς ἔχει εὖρος 30 m καὶ ὕψος 4,20 m. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ταχύτης τοῦ ὕδατος, ἐὰν ἡ παροχὴ εἶναι 300 m^3/sec.

961. Ὕδωρ ἐξέρχεται ἀπὸ δεξαμενὴν μέσῳ λεπτῆς πλευρικῆς ὀπῆς εὑρισκομένης 2,5 m κάτω τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὕδατος εἰς τὴν δεξαμενὴν καὶ 6 m ἄνω τοῦ ἐδάφους. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν θὰ συναντᾷ ἡ φλὲψ τὸ ἔδαφος. (Ἀντίστασις ἀέρος ἀμελητέα.)

962. Χαλυβδίνη δεξαμενὴ πληροῦται ὑπὸ ὕδατος μέχρις ὕψους 4,88 m, τοῦ ὕψους διατηρουμένου σταθεροῦ. Παρὰ τὴν βάσιν τῆς δεξαμενῆς καὶ εἰς μίαν πλευρὰν αὐτῆς ἀνοίγεται ὀπή, ὅπου προσαρμόζεται κυλινδρικὸς σωλὴν μικροῦ μήκους. Ἡ ὀπὴ τοῦ σωλῆνος ἔχει διατομὴν 6,45 cm^2. Πόσαι κυβικαὶ παλάμαι ὕδατος θὰ ρεύσουν μέσῳ τοῦ σωλῆνος ἀνὰ πρῶτον λεπτόν, λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν ὅτι ἡ πραγματικὴ τιμὴ ἐκροῆς ἀποτελεῖ τὰ 80% τῆς θεωρητικῆς τιμῆς.

963. Τὸ ὕδωρ εἰς μίαν δεξαμενὴν διατηρεῖται εἰς σταθερὸν ὕψος 6,1 m ἀπὸ τοῦ πυθμένος. Εὕρετε τὴν ὁλικὴν ποσότητα ὕδατος ἡ ὁποία ἐκρέει ἀνὰ ὥραν ἀπὸ δύο ὀπὰς τῆς αὐτῆς διατομῆς A, ἡ μία τῶν ὁποίων εὑρίσκεται παρὰ τὸν πυθμένα τῆς δεξαμενῆς καὶ ἡ ἄλλη 3,05 m ἀπὸ τοῦ πυθμένος. Ὁ λόγος τοῦ πραγματικῶς ἐξερχομένου ὄγκου ὕδατος πρὸς τὸν θεωρητικὸν τοιοῦτον εἶναι K.



964. Χαρταετός, ὁ ὁποῖος θεωρεῖται ἐπίπεδος ἐπιφάνεια, συγκρατεῖται ὑπὸ σχοινίου ἐντὸς τοῦ ἐπιπέδου στηρίξεως αὐτοῦ τὸ ὁποῖον ἀσκεῖ δύναμιν ἑλκτικὴν K (βλ. σχῆμα). Ποίας συνθήκας πρέπει νὰ πληροῦν ἡ δύναμις K, τὸ βάρος B, καθὼς καὶ αἱ δυνάμεις A καὶ T (τῶν ὁποίων ἡ συνισταμένη εἶναι F), ἵνα ὁ χαρταετὸς εὑρίσκεται εἰς τὸν ἀέρα ἐν ἰσορροπίᾳ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΓ΄

ΜΟΡΙΑΚΗ ΦΥΣΙΚΗ

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Α΄

965. Εἰς ὀρθογώνιον πλαίσιον ἀπὸ μεταλλικὸν σύρμα ἡ μία πλευρὰ εἶναι κινητὴ ὀλισθαίνουσα ἐπὶ τῶν δύο καθέτων πλευρῶν καὶ ἔχει μῆκος 4 cm. Ἐπὶ τοῦ πλαισίου τούτου δι᾿ ἐμβυθίσεως αὐτοῦ ἐντὸς διαλύματος σάπωνος σχηματίζομεν λεπτὸν ὑμένιον, τοῦ ὁποίου ἡ ἐπιφάνεια, ὅταν τὸ πλαίσιον διατίθεται ὁριζοντίως, λόγῳ ἐπιφανειακῆς τάσεως τείνει νὰ σμικρυνθῇ, παρασύρουσα οὕτω τὸ κινητὸν ὁριζόντιον σύρμα. Διὰ τὴν διατήρησιν τοῦ σύρματος εἰς τὴν θέσιν του, πρέπει καθέτως πρὸς τὸ σύρμα καὶ εἰς τὸ ἐπίπεδον τοῦ ὑμενίου νὰ ἐπενεργῇ δύναμις 240 mgr*. Ζητεῖται ἡ ἐπιφανειακὴ τάσις.

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν l τὸ μῆκος τῆς κινητῆς πλευρᾶς τοῦ πλαισίου, α τὸν συντελεστὴν τῆς ἐπιφανειακῆς τάσεως καὶ F τὴν ἐξασκουμένην δύναμιν, τότε, ὡς γνωστόν, ἰσχύει ἡ σχέσις :

$$F = 2\alpha \cdot l \qquad (1)$$

Ἐκ τῆς σχέσεως ταύτης, ἐὰν λύσωμεν ὡς πρὸς α, λαμβάνομεν :

$$\alpha = \frac{F}{2l} \qquad (2)$$

Ἐργαζόμενοι εἰς τὸ σύστημα C.G.S. θέτομεν εἰς τὴν σχέσιν (2) : $F = 240 \cdot 10^{-3} \cdot 981 \simeq 235$ dyn περίπου, $l = 4$ cm, καὶ εὑρίσκομεν :

$$\underline{\alpha = 29 \text{ dyn/cm}.}$$

966. Ἡ ἐν τῷ ἐσωτερικῷ σφαιρικῆς φυσαλλίδος σάπωνος ἐπικρατοῦσα ὑπερπίεσις εἶναι $\Delta p = 4\,\alpha/r$, ὅπου α ἡ ἐπιφανειακὴ τάσις καὶ r ἡ ἀκτὶς τῆς φυσαλλίδος. Ἐὰν r = 5 mm καὶ α = 25 dyn/cm, πόση ἡ ὑπερπίεσις.

Λύσις. Θέτομεν εἰς τὴν σχέσιν :

$$\Delta p = \frac{4\,\alpha}{r}$$

$\alpha = 25$ dyn/cm, $r = 0{,}5$ cm, καὶ εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ζητουμένη ὑπερπίεσις εἶναι :

$$\underline{\Delta p = 200 \text{ dyn/cm}^2.}$$

967. Ἐντὸς τριχοειδοῦς σωλῆνος βυθισμένου ἐντὸς ὕδατος ἡ τριχοειδὴς ἀνύψωσις παρέχεται ἐκ τοῦ τύπου $h = 2\,\alpha/r \cdot \rho \cdot g$, ὅπου α ἡ ἐπιφανειακὴ τάσις, r ἡ ἀκτὶς τοῦ σωλῆνος, ρ ἡ πυκνότης τοῦ ὑγροῦ. Ἐὰν εἶναι r = 1 mm καὶ α = 25 dyn/cm, πόση ἡ τριχοειδὴς ἀνύψωσις τοῦ ὕδατος.

Λύσις. Θέτομεν εἰς τὴν σχέσιν :

$$h = \frac{2\alpha}{r \cdot \rho \cdot g}$$

$\alpha = 25$ dyn/cm, $r = 0{,}1$ cm, $\rho = 1$ gr/cm^3, $g = 981$ cm/sec^2, καὶ εὑρίσκομεν ὅτι ἡ τριχοειδὴς ἀνύψωσις τοῦ ὕδατος εἶναι :

$$\underline{h = 0{,}51 \text{ cm}.}$$

968. Ἐὰν ὅλα τὰ μόρια ἀέρος, τὰ ὁποῖα περιέχονται ὑπὸ κανονικὰς συνθήκας εἰς ὄγκον 500 cm^3, ἀφῃροῦντο ἐξ αὐτοῦ καὶ ἀκολούθως διὰ μικρᾶς ὀπῆς ἀφίετο νὰ εἰσχωρήσουν ἐκ νέου ὑπὸ ρυθμὸν ἑνὸς ἑκατομμυρίου μορίων ἀνὰ

δευτερόλεπτον, πόσος χρόνος εἰς ἔτη θὰ ἀπαιτηθῇ, ἵνα ὅλα πάλιν τὰ μόρια εἰσχωρήσουν εἰς τὸ δοχεῖον. (1 ἔτος = 365 ἡμέραι.)

Λύσις. Ὡς γνωστόν, τὸ 1 cm^3 ἀέρος περιέχει ὑπὸ κανονικὰς συνθήκας $28 \cdot 10^{18}$ μόρια (σταθερὰ Avogadro). Συνεπῶς τὰ 500 cm^3 ἀέρος θὰ περιέχουν $14 \cdot 10^{21}$ μόρια. Ἀφοῦ δὲ εἰς 1 sec θὰ εἰσχωροῦν 10^6 μόρια, διὰ νὰ εἰσχωρήσουν τὰ $14 \cdot 10^{21}$ μόρια, θὰ ἀπαιτηθῇ χρόνος:

$$t = \frac{14 \cdot 10^{21}}{10^6} = 14 \cdot 10^{15}\ \text{sec}$$

ἢ

$$t = \frac{14 \cdot 10^{15}}{86\,400}\ \text{ἡμέραι (1 ἡμέρα = 86 400 sec)}$$

ἢ

$$t = \frac{14 \cdot 10^{15}}{365 \cdot 86\,400} = 4{,}3 \cdot 10^9\ \text{ἔτη.}$$

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Β'

969. Ὑπολογίσατε, εἰς χιλιοστὰ στήλης ὑδραργύρου, τὴν πίεσιν εἰς τὸ ἐσωτερικὸν σφαιρικῆς φυσαλλίδος ἀέρος ἀκτῖνος 0,1 mm, κειμένης 10 cm κάτωθεν τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὕδατος, ὅταν τὸ ὕψος τῆς στήλης ὑδραργυρικοῦ βαρομέτρου εἶναι 760 mm. (Ἐπιφανειακὴ τάσις τοῦ ὕδατος $\alpha = 73$ dyn/cm, πυκνότης ὑδραργύρου = 13,6 gr/cm^3.) (Ἀπ. 778,3 mm Hg.)

970. Τὸ κάτω ἄκρον τριχοειδοῦς σωλῆνος ἀκτῖνος 0,020 cm βυθίζεται εἰς βάθος 3 cm ἐντὸς ὑγροῦ πυκνότητος 0,85 gr/cm^3. Ἡ πίεσις τοῦ ἀέρος εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ σωλῆνος ἀνυψοῦται μέχρις ὅτου σχηματισθῇ ἡμισφαιρικὴ φυσαλλὶς εἰς τὸ κάτω ἄκρον. Ἡ ἐπὶ πλέον πίεσις ἡ ἀπαιτουμένη πρὸς τοῦτο εὑρέθη ἴση πρὸς τὴν ὀφειλομένην εἰς στήλην ὕδατος ὕψους 4,95 cm. Ζητεῖται ἡ ἐπιφανειακὴ τάσις τοῦ ὑγροῦ. (Ἀπ. 23,5 dyn/cm.)

971. Σταγὼν βροχῆς ἔχει διάμετρον 2 mm. Ἐὰν ἡ ἐπιφανειακὴ τάσις τοῦ ὕδατος εἶναι $\alpha = 71$ dyn/cm, ποία ἡ πίεσις εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς σταγόνος. (Ἀπ. 1 420 dyn/cm^2.)

972. Ὁριζοντία κυκλικὴ σπεῖρα ἐκ σύρματος, διαμέτρου 3 cm, βυθίζεται ἐντὸς ὑγροῦ. Ἡ πρόσθετος δύναμις (ἡ ὀφειλομένη εἰς τὴν ἐπιφανειακὴν τάσιν), ἡ ἀπαιτουμένη ἵνα ἀνασύρωμεν τὴν σπεῖραν ἐκ τοῦ ὑγροῦ, εἶναι 378 dyn. Ὑπολογίσατε τὴν ἐπιφανειακὴν τάσιν τοῦ ὑγροῦ. (Ἀπ. 20 dyn/cm.)

973. Τεμάχιον ὑαλίνου σωλῆνος ἐξωτερικῆς διαμέτρου 4 cm καὶ ἐσωτερικῆς διαμέτρου 3,5 cm εὑρίσκεται κατακορύφως βυθισμένον κατὰ τὸ ἓν ἄκρον ἐντὸς ὕδατος. Ποία ἡ πρὸς τὰ κάτω ἕλξις ἥτις ἐξασκεῖται ἐπὶ τοῦ σωλῆνος καὶ ἡ ὁποία ὀφείλεται εἰς τὴν ἐπιφανειακὴν τάσιν. (Ἐπιφανειακὴ τάσις τοῦ ὕδατος $\alpha = 74$ dyn/cm.) (Ἀπ. 1,78 gr*.)

974. Ποία διαφορὰ πιέσεως ὑφίσταται μεταξὺ δύο πομφολύγων σάπωνος, διαμέτρων 2 cm καὶ 8 cm, αἵτινες συνδέονται μεταξύ των διὰ λεπτοῦ σωλῆνος. ($\alpha = 29$ dyn/cm.) (Ἀπ. 87 μBar.)

975. Ἐκ κατακορύφου τριχοειδοῦς σωλῆνος διαμέτρου 1 mm ἐκρέει κατὰ σταγόνας ὕδωρ ($\alpha = 73$ dyn/cm). Ποῖον τὸ μῆκος τῆς στήλης τοῦ ὕδατος ἐντὸς τοῦ τριχοειδοῦς, μετὰ τὴν πτῶσιν τῆς τελευταίας σταγόνος. (Ἀπ. 5,96 cm.)

976. Ὀρθογώνιον πλαίσιον ἐκ σύρματος ἐξ ἐλαφροῦ μετάλλου, ἔχον τὴν μίαν τῶν πλευρῶν αὐτοῦ μήκους 5 cm κινητήν, βυθίζεται εἰς ὑδατικὸν διάλυμα σάπωνος.

Κατὰ πόσον μεταβάλλεται ἡ ἐπιφανειακὴ ἐνέργεια, ὅταν ἡ κινητὴ πλευρὰ μετατοπίζεται τόσον, ὥστε νὰ σχηματισθῇ ὑγρὰ μεμβράνη πλάτους 2 cm. ($\alpha = 30$ dyn/cm.) ('Απ. 600 erg.)

977. Εἰς τριχοειδῆ σωλῆνα ἡ αἰθυλικὴ ἀλκοόλη ($\alpha_1 = 22$ dyn/cm) ἀνέρχεται ἐντὸς αὐτοῦ μέχρις ὕψους 36 mm. Εἰς ποῖον ὕψος ἀνέρχεται τὸ ὕδωρ ($\alpha_2 = 73$ dyn/cm) ἐντὸς τοῦ αὐτοῦ τριχοειδοῦς σωλῆνος. ('Απ. $h_2 = 94{,}4$ mm.)

978. Ὑπολογίσατε τὸ ὕψος εἰς τὸ ὁποῖον θὰ ἀνέλθῃ τερεβινθέλαιον εἰς τριχοειδῆ σωλῆνα διαμέτρου 0,6 mm, δοθέντος ὅτι ἡ ἐπιφανειακὴ τάσις καὶ ἡ πυκνότης τοῦ τερεβινθελαίου εἶναι 27 dyn/cm καὶ 0,87 gr/cm^3 ἀντιστοίχως καὶ ὅτι ἡ γωνία συνεπαφῆς τερεβινθελαίου καὶ ὑάλου εἶναι 17^o. ('Απ. 2,02 cm.)

979. Ἓν γραμμομόριον ἀερίου καταλαμβάνει ὄγκον 22 400 cm^3 ὑπὸ κανονικὰς συνθήκας θερμοκρασίας καὶ πιέσεως. Ὑπ' αὐτὰς τὰς συνθήκας, πόσα μόρια θὰ εὑρίσκωνται ἐντὸς 1 cm^3 τοῦ ἀερίου. ('Απ. $2{,}68 \cdot 10^{19}$.)

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Γ'

980. Βελόνη μήκους 4 cm καὶ βάρους 0,4 gr* ἐπιπλέει εἰς ὕδωρ τοῦ ὁποίου ἡ ἐπιφανειακὴ τάσις εἶναι $\alpha = 72$ dyn/cm. Ὑπολογίσατε τὴν διαφορὰν εἰς δύνας μεταξὺ τοῦ βάρους τῆς βελόνης καὶ τῆς δυνάμεως πρὸς τὰ ἄνω τὴν ὁποίαν ἐξασκεῖ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὕδατος ἐπὶ τῆς βελόνης.

981. Κατὰ πόσον μεταβάλλεται ἡ πίεσις εἰς τὸ ἐσωτερικὸν πομφόλυγος σάπωνος διαμέτρου $d_1 = 4$ cm, ὅταν αὕτη αὐξηθῇ εἰς $d_2 = 8$ cm. ($\alpha = 3{,}3$ mgr*/mm.)

982. Φυσαλλὶς σάπωνος ἀκτῖνος 4 cm σχηματίζεται ἐκ διαλύματος ἔχοντος ἐπιφανειακὴν τάσιν 25 dyn/cm. Εὕρετε: α) Τὴν πίεσιν τὴν ἐξασκουμένην ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς φυσαλλίδος. β) Τὴν δύναμιν τὴν ἐξασκουμένην ἐπὶ τοῦ ἀέρος ἐντὸς τῆς φυσαλλίδος.

983. Φυσαλλὶς διαλύματος σάπωνος ἔχει διάμετρον 10 cm. Ἐὰν ἡ ἐπιφανειακὴ τάσις τοῦ διαλύματος εἶναι 26 dyn/cm, εὕρετε τὴν πίεσιν εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς φυσαλλίδος.

984. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐλάττωσις τῆς ἐπιφανειακῆς ἐνεργείας 1 000 σταγόνων βροχῆς (ἀκτῖνος 0,001 cm), ὅταν συνενοῦνται διὰ νὰ ἀποτελέσουν μεγάλην σταγόνα. ($\alpha = 73$ dyn/cm.)

985. Ὑπάρχουν $6{,}02 \cdot 10^{23}$ μόρια ἐντὸς μάζης οἱουδήποτε ἀερίου, ἴσης ἀριθμητικῶς εἰς γραμμάρια πρὸς τὸ μοριακὸν βάρος αὐτοῦ. Πόσα μόρια εὑρίσκονται ἐντὸς 1 cm^3 ἀζώτου ὑπὸ κανονικὰς συνθήκας.

986. Μέχρι ποίου ὕψους θὰ ἀνυψωθῇ τὸ ὕδωρ ἐντὸς τριχοειδοῦς σωλῆνος διαμέτρου 0,06 cm, ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ γωνία συνεπαφῆς εἶναι ἀσήμαντος.

987. Κατὰ πόσον ταπεινοῦται ἡ ἐπιφάνεια ὑδραργύρου εἰς ὑάλινον σωλῆνα ἀκτῖνος 0,02 cm. Ἡ γωνία συνεπαφῆς εἶναι 135^o.

988. Ὑπολογίσατε τὴν διάμετρον ὑαλίνου σωλῆνος, εἰς τὸν ὁποῖον καθαρὸν ὕδωρ ἀνέρχεται εἰς ὕψος 12 cm, τῆς γωνίας συνεπαφῆς οὔσης ἀσημάντου.

989. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἔργον διὰ τὴν προσφύσησιν φυσαλλίδος σάπωνος διαμέτρου 10 cm, ἐφ' ὅσον δὲν χάνεται ἐνέργεια εἰς θερμότητα. ($\alpha = 25$ dyn/cm.)

990. Πόσον τὸ ἔργον τὸ ἀπαιτούμενον διὰ νὰ αὐξήσωμεν τὴν διάμετρον φυσαλλίδος σάπωνος ἀπὸ 3 cm εἰς 10 cm, ἐὰν δὲν ὑφίσταται ἀπώλεια ἐκ θερμότητος. ($\alpha = 25$ dyn/cm.)

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΔ΄

ΚΥΜΑΤΑ

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Α΄

991. Ἐὰν ἡ ταχύτης διαδόσεως κύματος εἶναι 340 m/sec καὶ ἡ συχνότης 256 Hz, πόσον τὸ μῆκος κύματος.

Λύσις. Ἐὰν ἡ ταχύτης διαδόσεως τοῦ κύματος εἶναι υ, ἡ συχνότης ν καὶ τὸ μῆκος κύματος λ, τότε, ὡς γνωστόν, ἰσχύει ἡ σχέσις :

$$\upsilon = \lambda \cdot \nu$$

Ἐκ τῶν δεδομένων τῆς ἀσκήσεως : $\upsilon = 340$ m/sec καὶ $\nu = 256$ Hz, προκύπτει ὅτι τὸ ζητούμενον μῆκος κύματος εἶναι :

$$\underline{\lambda = 132{,}7 \text{ cm.}}$$

992. Πόση εἶναι ἡ συχνότης σωματίου ἐντὸς κύματος τὸ ὁποῖον διαδίδεται μὲ ταχύτητα 5 000 m/sec, ὅταν τὸ μῆκος κύματος εἶναι εἴτε 10 cm, εἴτε 200 cm.

Λύσις. Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν ἔχομεν :

$$\underline{\nu} = \frac{\upsilon}{\lambda} = \frac{500\,000}{10} = \underline{5 \cdot 10^4 \text{ Hz}}$$

καὶ εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν :

$$\underline{\nu} = \frac{\upsilon}{\lambda} = \frac{500\,000}{200} = \underline{2{,}5 \cdot 10^3 \text{ Hz.}}$$

993. Ἦχος συχνότητος 600 Hz ἀνακλᾶται καθέτως ἐπὶ στερεᾶς ἐπιφανείας καὶ ἐπιστρέφων δημιουργεῖ στάσιμα κύματα. Ζητεῖται ἡ ἀπόστασις μεταξὺ δύο διαδοχικῶν κοιλιῶν.

Λύσις. Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ l τὴν ζητουμένην ἀπόστασιν μεταξὺ δύο διαδοχικῶν κοιλῶν καὶ λ τὸ μῆκος κύματος τοῦ ἤχου, θὰ ἔχωμεν, ὡς γνωστόν :

$$l = \frac{\lambda}{2} \tag{1}$$

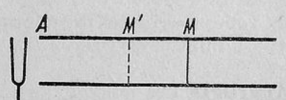
Ὑπολογίζοντες τὸ λ ἐκ τῆς σχέσεως $\upsilon = \lambda \cdot \nu$, λαμβάνομεν $\lambda = \upsilon/\nu$, καὶ ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν σχέσιν (1) ἔχομεν :

$$l = \frac{\upsilon}{2\nu} \tag{2}$$

Διὰ $\upsilon = 34\,000$ cm/sec καὶ $\nu = 600$ Hz εὑρίσκομεν ἐκ τῆς σχέσεως (2) ὅτι :

$$\underline{l = 28{,}33 \text{ cm.}}$$

994. Διαπασῶν δίδον τὸ κανονικὸν la ($la_3 = 435$ Hz) πάλλεται εἰς τὸ στόμιον κυλινδρικοῦ σωλῆνος ἀπεριορίστου μήκους. Ποία ἡ κινητικὴ κατάστασις δονήσεως τοῦ ἀέρος (πύκνωσις ἢ ἀραίωσις) εἰς ἀπόστασιν 170/29 m ἐκ τοῦ στομίου τοῦ σωλῆνος. (Ταχύτης διαδόσεως τοῦ ἤχου 340 m/sec.)



Λύσις. Ἔστω υ ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου, ν ἡ συχνότης καὶ λ τὸ μῆκος κύματος. Ἐκ τῆς γνωστῆς σχέσεως $\upsilon = \lambda \cdot \nu$ λαμβάνομεν $\lambda = \upsilon/\nu$. Ἐὰν τώρα παραστήσωμεν διὰ x τὴν ἀπόστασιν μεταξὺ A καὶ M, ὁ ἀριθμὸς μηκῶν κύματος μεταξὺ Α καὶ Μ θὰ εἶναι $x : \lambda$, ὅτε διὰ $x = 170/29$ m καὶ $\lambda = 340/435$ m λαμβάνομεν :

$$\frac{x}{\lambda} = \frac{170}{29} : \frac{340}{435} = \frac{15}{2}$$

Ἤτοι, προκύπτει περιττὸς ἀριθμὸς ἡμιμηκῶν κύματος, ὅπερ δεικνύει ὅτι ἡ κινητικὴ κατάστασις εἰς τὰς περιοχὰς Α καὶ Μ εὑρίσκεται εἰς ἀντίθεσιν φάσεως. Ἐὰν δηλαδὴ εἰς δεδομένην στιγμὴν ἔχωμεν πύκνωσιν εἰς τὸ Α, κατὰ τὴν αὐτὴν στιγμὴν εἰς τὸ Μ θὰ ἔχωμεν ἀραίωσιν.

995. Ἔλασμα μεταλλικὸν δονούμενον παράγει ἦχον συχνότητος 348 Hz. Ἐὰν ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου εἰς τὸν ἀέρα εἶναι 340 m/sec, α) πόσος χρόνος ἀπαιτεῖται, ἵνα ὁ ἦχος διαδοθῇ μέχρι σημείου εὑρισκομένου εἰς ἀπόστασιν 2,55 m ἀπὸ τῆς πηγῆς καὶ β) ποία ἡ διαφορὰ φάσεως μεταξὺ τῶν σημείων τούτων καὶ τῆς πηγῆς.

Λύσις. α) Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ s τὴν ἀπόστασιν τοῦ θεωρουμένου σημείου ἀπὸ τῆς πηγῆς, λ τὸ μῆκος κύματος, ν τὴν συχνότητα, υ τὴν ταχύτητα τοῦ ἤχου καὶ διὰ t καὶ δ ἀντιστοίχως τὰ ζητούμενα μεγέθη, χρόνον καὶ διαφορὰν φάσεως, θὰ ἔχωμεν :

$$t = \frac{s}{\upsilon} = \frac{2{,}55}{340} \text{ sec}$$

ἤτοι :

$$\underline{t = 0{,}00075 \text{ sec.}}$$

β) Πρὸς εὕρεσιν τῆς διαφορᾶς φάσεως, γνωρίζομεν ἐξ ὁρισμοῦ ὅτι μεταξὺ δύο σημείων ἀπεχόντων κατὰ λ ἔχομεν διαφορὰν φάσεως 2π· καὶ ἐὰν παρεμβάλλεται μεταξὺ δύο σημείων ἀριθμὸς μηκῶν κύματος s/λ, ἡ διαφορὰ φάσεως δ εἶναι : $\delta = 2\pi \cdot s/\lambda$. Ἀλλὰ ἐπειδὴ $\lambda = \upsilon/\nu$ καὶ $T = 1/\nu$, λαμβάνωμεν : $\delta = 2\pi \cdot s/\upsilon \cdot T$ ἢ λόγῳ τῆς σχέσεως $t = s/\upsilon$ ἔχομεν :

$$\delta = 2\pi \frac{t}{T}$$

Ὅθεν διὰ $t = 0{,}00075$ sec καὶ $T = 1/348$ sec, εὑρίσκομεν ὅτι :

$$\underline{\delta = 16{,}40 \text{ rad.}}$$

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Β'

996. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ κινητικὴ ἐνέργεια, κατὰ τὴν στιγμὴν τῆς διελεύσεως διὰ τῆς θέσεως ἰσορροπίας, ταλαντουμένου ὑλικοῦ σημείου μάζης 3 gr, ὅταν τοῦτο διὰ μίαν πλήρη ταλάντωσιν ἀπαιτῇ χρόνον $T = 0{,}2$ sec καὶ τὸ πλάτος τῆς ταλαντώσεως εἶναι $\alpha = 4$ cm. (Ἀπ. 23 687 erg.)

997. Σωλὴν κλείεται κατὰ τὸ ἓν ἄκρον αὐτοῦ διὰ στερεοῦ τοιχώματος, ἐνῷ κατὰ τὸ ἄλλο ἄκρον δι' ἐλαστικῆς μεμβράνης, καὶ πληροῦται διὰ φωταερίου θερμοκρασίας 18° C. Δι' ἑνὸς διαπασῶν συχνότητος 440 Hz, εὑρισκομένου ἔμπροσθεν τῆς μεμβράνης, παράγομεν ἐντὸς τοῦ σωλῆνος στάσιμον κῦμα, τὸ ὁποῖον δίδει εἰς τὸ μέρος τῆς μεμβράνης μίαν κοιλίαν καὶ μίαν εἰσέτι εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ σωλῆνος. Ζητεῖται : α) Ποία σχέσις ὑφίσταται μεταξὺ μήκους κύματος καὶ τοῦ μήκους τοῦ σωλῆνος. β) Ποῖον πρέπει νὰ εἶναι τὸ μῆκος αὐτοῦ, ἐὰν ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου εἰς τὸ φωταέριον εἰς 0° C εἶναι 442,1 m/sec.

(Ἀπ. $l = \dfrac{3\,\upsilon_0}{4\nu}\sqrt{\dfrac{T}{273}}$, 77,8 cm.)

998. Ἐκκρεμὲς ἐκτελεῖ 60 πλήρεις ταλαντώσεις ἀνὰ min καὶ ἕτερον ἐκτελεῖ 56 κατὰ τὸν αὐτὸν χρόνον. Ὑποτίθεται ὅτι εὑρίσκονται ἐν συμφωνίᾳ φάσεως κατὰ τὴν ἀρχὴν τῶν χρόνων καὶ ζητεῖται πόσας φορὰς θὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν κατάστασιν ἐντὸς 1 min. (Ἀπ. 4.)

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Γ'

999. Ἐὰν ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου εἶναι 340 m/sec καὶ αἱ συχνότητες δύο ἤχων εἶναι 512 sec^{-1} καὶ 768 sec^{-1}, νὰ εὑρεθοῦν τὰ μήκη κύματος αὐτῶν.

1000. Πλοῖον μήκους 180 m εἶναι ἠγκυροβολημένον εἰς βαθὺ ὕδωρ καὶ κύματα διέρχονται κατὰ μῆκος αὐτοῦ. Παρατηρεῖται ὅτι ὑπάρχουν 4 πλήρη κύματα μεταξὺ πρῴρας καὶ πρύμνης. Νὰ ὑπολογισθοῦν : α) Τὸ μῆκος τοῦ κύματος. β) Ἡ ταχύτης του. γ) Ἡ περίοδος. δ) Ἡ συχνότης. ($\upsilon = \sqrt{g \cdot \lambda / 2\pi}$)

1001. Δύο ἁρμονικαὶ ταλαντώσεις τοῦ αὐτοῦ πλάτους καὶ συχνοτήτων $\nu_1 = 440$ Hz καὶ $\nu_2 = 435$ Hz συμβάλλουν ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας. α) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς συνισταμένης. β) Ποῖος ὁ ἀριθμὸς τῶν μεγίστων ἀνὰ δευτερόλεπτον.

1002. Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ λ, ἵνα ἡ ταχύτης υ ἐπιφανειακοῦ θαλασσίου κύματος εἶναι ἴση μὲ τὴν ταχύτητα τῶν 25 κόμβων ὑπερωκεανείου. Κόμβος = 1 ναυτικὸν μίλιον/h = 1 852 m/h. ($\upsilon = \sqrt{g \cdot \lambda / 2\pi}$.)

1003. Εὔκαμπτον νῆμα, μήκους 6 m, τείνεται ὑπὸ δυνάμεως 3 kgr*. Τὸ βάρος τοῦ νήματος εἶναι 300 gr*. Εὕρετε τὴν ταχύτητα υ τοῦ κύματος ἐπὶ τοῦ νήματος. ($\upsilon = \sqrt{F/\delta}$ ὅπου F εἰς dyn καὶ δ εἰς gr/cm.)

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΕ΄

ΦΥΣΙΚΗ ΑΚΟΥΣΤΙΚΗ

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Α΄

1004. Ἡ ταχύτης διαδόσεως τοῦ ἤχου εἰς τὸν ἀέρα εἰς 0° C εἶναι 331,57 m/sec. Εἰς ποίαν θερμοκρασίαν γίνεται ἴση πρὸς 340 m/sec.

Λύσις. Ἡ ταχύτης διαδόσεως τοῦ ἤχου εἰς τὸν ἀέρα καὶ ἐν γένει εἰς τὰ ἀέρια αὐξάνεται μετὰ τῆς θερμοκρασίας θ, συμφώνως πρὸς τὴν σχέσιν :

$$\upsilon_\theta = \upsilon_0 \sqrt{1 + \alpha \cdot \theta} \qquad (1)$$

ὅπου υ_0 ἡ θερμοκρασία τοῦ ἀέρος εἰς 0° C καὶ α συντελεστής, καλούμενος θερμικὸς συντελεστὴς τῶν ἀερίων.

Λύομεν τὴν σχέσιν (1) ὡς πρὸς θ καὶ λαμβάνομεν :

$$\theta = \frac{\upsilon^2_\theta - \upsilon_0^2}{\alpha \cdot \upsilon_0^2} \qquad (2)$$

Εἰς τὴν σχέσιν (2) θέτομεν : $\upsilon_0 = 331{,}57$ m/sec, $\upsilon_\theta = 340$ m/sec, $\alpha = 1/273$ grad^{-1}, καὶ λαμβάνομεν :

$$\underline{\theta = 14{,}1^\circ \text{ C.}}$$

1005. Ἐὰν ἡ ταχύτης διαδόσεως τοῦ ἤχου εἶναι 331,36 m/sec εἰς 0° C, πόση θὰ εἶναι εἰς 12° C καὶ εἰς 25° C.

Λύσις. Εἰς τὴν γνωστὴν σχέσιν :

$$\upsilon_\theta = \upsilon_0 \cdot \sqrt{1 + \alpha \cdot \theta}$$

ἐὰν θέσωμεν : $\upsilon_0 = 331{,}36$ m/sec, $\theta = 12^\circ$ C καὶ $\alpha = 1/273$ grad^{-1}, λαμβάνομεν :

$$\underline{\upsilon_{12} = 338{,}64 \text{ m/sec.}}$$

Ἐπίσης, ἐὰν εἰς τὴν ἰδίαν σχέσιν θέσωμεν $\theta = 25^\circ$ C, λαμβάνομεν :

$$\underline{\upsilon_{25} = 346{,}53 \text{ m/sec.}}$$

1006. Εἷς γεωργὸς συγχρονίζει τὸ ὡρολόγιόν του τὴν μεσημβρίαν μὲ τὸν συριγμὸν ἐργοστασίου εὑρισκομένου εἰς ἀπόστασιν 13 μιλίων. Ποίαν διόρθωσιν πρέπει νὰ ἐπιφέρῃ, ἐὰν ὑπολογίσῃ τὸν χρόνον τὸν ὁποῖον χρειάζεται ὁ ἦχος διὰ τὴν διάδοσιν αὐτοῦ, ὅταν ἡ θερμοκρασία εἶναι 24⁰ C.

Λύσις. Ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου υ_θ εἰς θερμοκρασίαν θ εἶναι, ὡς γνωστόν :

$$\upsilon_\theta = \upsilon_0 \cdot \sqrt{1 + \alpha \cdot \theta}$$

ὅπου α εἶναι ὁ θερμικὸς συντελεστὴς τῶν ἀερίων ($\alpha = 1/273\ \text{grad}^{-1}$) καὶ υ_0 ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου εἰς θερμοκρασίαν 0^0 C. Διὰ νὰ εὕρωμεν ποίαν διόρθωσιν πρέπει νὰ ἐπιφέρῃ ὁ γεωργὸς εἰς τὸ ὡρολόγιόν του, πρέπει νὰ εὕρωμεν προφανῶς τὸν χρόνον ὁ ὁποῖος ἀπαιτεῖται ἵνα ὁ ἦχος διανύσῃ τὴν ἀναφερομένην εἰς τὴν ἄσκησιν ἀπόστασιν s. Ὁ χρόνος οὗτος ὑπολογίζεται ἐκ τοῦ τύπου τῆς ὁμαλῆς κινήσεως ὅτι εἶναι :

$$t = \frac{s}{\upsilon_\theta} = \frac{s}{\upsilon_0 \cdot \sqrt{1 + \alpha \cdot \theta}}$$

Θέτομεν εἰς τὴν ἀνωτέρω σχέσιν τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως : $s = 13$ mil $= 13 \cdot 1\,852$ m, $\upsilon_0 = 331$ m/sec, $\alpha = 1/273\ \text{grad}^{-1}$, $\theta = 24^0$ C, καὶ εὑρίσκομεν ὅτι :

$$\underline{t = 69\ \text{sec.}}$$

Συνεπῶς ὁ γεωργὸς πρέπει νὰ θέσῃ τὸ ὡρολόγιόν του 69 sec πρὸς τὰ ἐμπρός.

1007. Διαπασῶν ἐκτελεῖ 284 παλμοὺς ἀνὰ sec εἰς τὸν ἀέρα. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος τοῦ κύματος τοῦ παραγομένου ἤχου εἰς τὸν ἀέρα ὑπὸ θερμοκρασίαν 25⁰ C.

Λύσις. Τὸ μῆκος κύματος λ τοῦ παραγομένου ἤχου ὑπὸ τοῦ διαπασῶν εὑρίσκεται ἐκ τοῦ τύπου :

$$\upsilon_\theta = \lambda \cdot \nu \tag{1}$$

ὅπου υ_θ εἶναι ἡ ταχύτης διαδόσεως τοῦ ἤχου εἰς τὸν ἀέρα ὑπὸ θερμοκρασίαν θ καὶ ν ἡ συχνότης τῆς ἠχητικῆς πηγῆς. Ἐκ τοῦ τύπου (1), λύοντες ὡς πρὸς λ, εὑρίσκομεν :

$$\lambda = \frac{\upsilon_\theta}{\nu} \tag{2}$$

ἐπειδὴ ὅμως, ὡς γνωστόν, εἶναι : $\upsilon_\theta = \upsilon_0 \sqrt{1 + \alpha \cdot \theta}$ ὁ ἀνωτέρω τύπος (2) γράφεται :

$$\lambda = \frac{\upsilon_0 \cdot \sqrt{1 + \alpha \cdot \theta}}{\nu} \tag{3}$$

Θέτομεν εἰς τὸν τύπον (3) : $\upsilon_0 = 331$ m/sec, $\alpha = 1/273\ \text{grad}^{-1}$, $\theta = 25^0$ C, $\nu = 284\ \text{sec}^{-1}$, καὶ εὑρίσκομεν ὅτι τὸ ζητούμενον μῆκος κύματος τοῦ ἤχου εἶναι :

$$\underline{\lambda = 1{,}22\ \text{m.}}$$

1008. Δίσκος σειρῆνος ἐκτελεῖ 800 στροφὰς ἀνὰ λεπτὸν καὶ φέρει 72 ὀπάς. Πόση ἡ συχνότης τοῦ ἤχου.

Λύσις. Ἐὰν ὁ δίσκος περιστρέφεται ὑπὸ συχνότητα N καὶ φέρῃ n ὀπάς, τότε ἡ συχνότης ν τοῦ παραγομένου ἤχου δίδεται ἐκ τῆς σχέσεως :

$$\nu = N \cdot n$$

Θέτομεν: $N = 800/60\ \text{sec}^{-1}$, $M = 72$, καὶ εὑρίσκομεν :

$$\underline{\nu = 960\ \text{sec}^{-1}.}$$

1009. Νὰ καθορισθῇ τὸ ὕψος τοῦ ἤχου σειρῆνος, τῆς ὁποίας ὁ δίσκος φέρει 15 ὀπὰς καὶ ἐκτελεῖ 20 στροφὰς ἀνὰ sec.

Λύσις. Ἐὰν ὁ δίσκος τῆς σειρῆνος φέρῃ n ὀπὰς καὶ περιστρέφεται μὲ συχνότητα N, τότε ὁ παραγόμενος ὑπὸ τῆς σειρῆνος ἦχος ἔχει ὕψος ν, τὸ ὁποῖον δίδεται ἐκ τοῦ τύπου:

$$\nu = n \cdot N$$

Θέτοντες εἰς τὸν ἀνωτέρω τύπον: $n = 15$ καὶ $N = 20\ \mathrm{sec}^{-1}$, εὑρίσκομεν:

$$\underline{\nu = 300\ \mathrm{sec}^{-1}}.$$

1010. Τὰ ὅρια συχνοτήτων ἀκουστῶν ἤχων περιλαμβάνονται μεταξὺ 20 sec⁻¹ καὶ 20 000 sec⁻¹. Ἐὰν ληφθῇ ὡς ταχύτης διαδόσεως τοῦ ἤχου 340 m/sec, ποῖα τὰ ἀντίστοιχα μήκη κύματος.

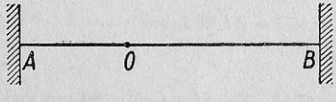
Λύσις. Ἐκ τῆς γνωστῆς σχέσεως $\upsilon = \lambda \cdot \nu$, ἡ ὁποία συνδέει τὴν ταχύτητα υ τοῦ ἤχου, τὴν συχνότητα ν καὶ τὸ μῆκος κύματος λ αὐτοῦ, εὑρίσκομεν:

α) $$\underline{\lambda} = \frac{\upsilon}{\nu} = \frac{340}{20} = \underline{17\ \mathrm{m}.}$$

β) $$\underline{\lambda} = \frac{\upsilon}{\nu} = \frac{340}{20\,000} = \underline{0{,}017\ \mathrm{m} = 1{,}7\ \mathrm{cm}.}$$

1011. Ἄνθρωπος ἱστάμενος μεταξὺ δύο τοίχων παράγει ἦχον διὰ συγκρούσεως τῶν παλαμῶν τῶν χειρῶν του. Μετὰ 0,42 sec ἡ ἠχὼ ἐπιστρέφει ἐκ τοῦ τοίχου Α καὶ μετὰ 0,12 sec βραδύτερον ἡ ἠχὼ φθάνει ἐκ τοῦ τοίχου Β. Ἐὰν ἡ θερμοκρασία εἶναι 20° C, πόση ἡ ἀπόστασις τῶν δύο τοίχων καὶ πόση ἡ ἀπόστασις τοῦ ἀνθρώπου ἐξ ἑκάστου τοίχου.

Λύσις. Ἔστω ὅτι ὁ παρατηρητὴς εὑρίσκεται εἰς τὸ σημεῖον Ο (βλ. σχῆμα). Τὸ διάστημα τὸ ὁποῖον διανύει ὁ ἦχος μὲ ταχύτητα υ_θ ἀνακλώμενος ἐπὶ τοῦ τοίχου Α εἶναι 2 (ΟΑ) καὶ τὸ διάστημα τὸ ὁποῖον διανύει ἀνακλώμενος ἐπὶ τοῦ τοίχου Β εἶναι 2 (ΟΒ). Ἐὰν καλέσωμεν υ_θ τὴν ταχύτητα τοῦ ἤχου εἰς θερμοκρασίαν 20° C καὶ t_1 τὸν χρόνον ὁ ὁποῖος ἀπαιτεῖται ἵνα ἐπιστρέψῃ ὁ ἦχος εἰς τὸν παρατηρητὴν ἀνακλώμενος ἐπὶ τοῦ τοίχου Α, θὰ ἔχωμεν τὴν σχέσιν:



$$2\,(OA) = \upsilon_\theta \cdot t_1 \qquad \text{ἢ} \qquad OA = \frac{\upsilon_\theta \cdot t_1}{2} \qquad (1)$$

Ὁμοίως, ἐὰν καλέσωμεν t_2 τὸν χρόνον ὁ ὁποῖος ἀπαιτεῖται ἵνα ἐπιστρέψῃ ὁ ἦχος ἀνακλώμενος ἐπὶ τοῦ τοίχου Β, θὰ ἔχωμεν τὴν σχέσιν:

$$2\,(OB) = \upsilon_\theta \cdot t_2 \qquad \text{ἢ} \qquad OB = \frac{\upsilon_\theta \cdot t_2}{2} \qquad (2)$$

Θέτομεν εἰς τὰς σχέσεις (1) καὶ (2):

$$\upsilon_\theta = \upsilon_0 \cdot \sqrt{1 + \alpha \cdot \theta}$$

ὅτε λαμβάνομεν ἀντιστοίχως:

$$OA = \frac{\upsilon_0 \cdot \sqrt{1 + \alpha \cdot \theta} \cdot t_1}{2} \qquad (3)$$

καὶ

$$OB = \frac{\upsilon_0 \cdot \sqrt{1 + \alpha \cdot \theta} \cdot t_2}{2} \qquad (4)$$

Ἐκ τῶν σχέσεων (3) καὶ (4) θέτοντες: $\upsilon_0 = 331\ \mathrm{m/sec}$, $\alpha = 1/273\ \mathrm{grad}^{-1}$, $\theta = 20°\ C$, $t_1 = 0{,}42\ \mathrm{sec}$ καὶ $t_2 = 0{,}42 + 0{,}12 = 0{,}56\ \mathrm{sec}$, εὑρίσκομεν:

$$\underline{OA = 71{,}58\ \mathrm{m}} \qquad \text{καὶ} \qquad \underline{OB = 92{,}03\ \mathrm{m}.}$$

Ἄρα ἡ ἀπόστασις τῶν δύο τοίχων εἶναι :

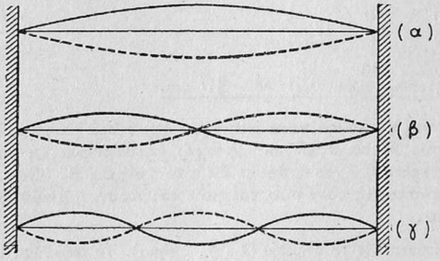
$$\underline{AB = 71{,}58 + 92{,}03 = 164 \text{ m} \quad \text{περίπου.}}$$

1012. Μεταλλικὴ χορδὴ μήκους 50 cm καὶ μάζης 0,50 gr διατείνεται ὑπὸ βάρους 9 kgr*. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ταχύτης διαδόσεως ἐγκαρσίου κύματος κατὰ μῆκος τῆς χορδῆς. Πόση εἶναι ἡ συχνότης τοῦ θεμελιώδους ἤχου (πρώτου ἁρμονικοῦ) ὡς καὶ τοῦ δευτέρου καὶ τρίτου ἁρμονικοῦ.

Λύσις. Ἡ συχνότης τοῦ θεμελιώδους ἤχου εὑρίσκεται ἐκ τοῦ τύπου τῶν παλλομένων χορδῶν :

$$\nu_1 = \frac{1}{2\,l} \cdot \sqrt{\frac{F}{\delta}}$$

ὅπου l εἶναι τὸ μῆκος τῆς χορδῆς, δ ἡ γραμμικὴ πυκνότης αὐτῆς ($\delta = m/l$) καὶ F ἡ τείνουσα δύναμις.



Θέτομεν : $l = 50$ cm, $\delta = m/l = 0{,}01$ gr/cm, $F = 9$ kgr* $= 9 \cdot 10^6$ dyn, καὶ εὑρίσκομεν ὅτι ὁ θεμελιώδης ἦχος ἔχει ὕψος :

$$\underline{\nu_1 = 300 \text{ sec}^{-1}.}$$

Ἄρα ὁ δεύτερος ἁρμονικὸς θὰ ἔχῃ ὕψος :

$$\underline{\nu_2 = 2 \cdot 300 = 600 \text{ sec}^{-1}}$$

καὶ ὁ τρίτος ἁρμονικὸς ὕψος :

$$\underline{\nu_3 = 3 \cdot 300 = 900 \text{ sec}^{-1}.}$$

Ἡ ταχύτης διαδόσεως τοῦ ἐγκαρσίου κύματος κατὰ μῆκος τῆς χορδῆς εἶναι :

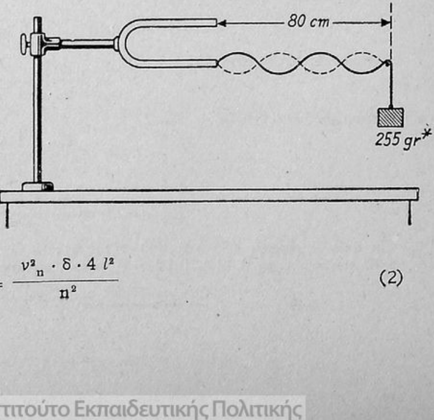
$$\upsilon = \lambda \cdot \nu_1$$

ἤ, ἐπειδὴ $\lambda = 2\,l$, θὰ ἔχωμεν : $\upsilon = 2\,l \cdot \nu = 2 \cdot 50 \cdot 300 = 300 \cdot 10^2$ cm/sec,

ἤτοι : $\underline{\upsilon = 300 \text{ m/sec.}}$

1013. Χορδὴ μήκους 80 cm καὶ μάζης 0,2 gr προσαρμόζεται εἰς τὸ ἓν σκέλος διαπασῶν ἐκτελοῦντος 250 παλμοὺς ἀνὰ sec. Ποία δύναμις πρέπει νὰ ἐφαρμόζεται ἐπὶ τῆς χορδῆς, ἵνα αὕτη ταλαντεύεται εἰς 4 τμήματα.

Λύσις. Ὅταν ἡ χορδὴ ταλαντοῦται εἰς 4 τμήματα, θὰ σχηματίζωνται 4 δεσμοὶ καὶ συνεπῶς ἡ χορδὴ θὰ παράγῃ τὸν τέταρτον ἁρμονικόν. Ἐπειδὴ δὲ εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἡ χορδὴ λόγῳ φαινομένου συντονισμοῦ θὰ ἔχῃ συχνότητα ἴσην μὲ τὴν συχνότητα τοῦ διαπασῶν, ἔπεται ὅτι θὰ παράγῃ ἦχον συχνότητος 250 Hz. Ἑπομένως πρὸς λύσιν τῆς ἀσκήσεως λαμβάνομεν τὴν σχέσιν τῶν χορδῶν :



$$\nu_n = \frac{n}{2\,l}\sqrt{\frac{F}{\delta}} \qquad (1)$$

καὶ λύομεν ὡς πρὸς F, ὁπότε ἔχομεν τὴν σχέσιν :

$$F = \frac{\nu^2_n \cdot \delta \cdot 4\,l^2}{n^2} \qquad (2)$$

Θέτομεν τὰ δεδομένα εἰς τὴν σχέσιν (2), ἤτοι : $\nu_n = 250$ Hz, $\delta = \frac{0,2}{80}$ gr/cm, $l = 80$ cm, n = 4, καὶ εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἐφαρμοζομένη δύναμις πρέπει νὰ εἶναι :

$$F = 250\,000 \text{ dyn} = 255 \text{ gr}^*.$$

1014. Χορδὴ πιάνου μήκους 72 cm καὶ γραμμικῆς πυκνότητος 0,1 gr/cm παρέχει θεμελιώδη συχνότητος 435 Hz. Πόση ἡ τείνουσα δύναμις τῆς χορδῆς.

Λύσις. Ὅπως καὶ εἰς τὴν προηγουμένην ἄσκησιν, θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις :

$$F = \frac{\nu_n^2 \cdot \delta \cdot 4\, l^2}{n^2}$$

Θέτομεν : $\nu_n = 435$ Hz , $\delta = 0,1$ gr/cm, $l = 72$ cm, n = 1, καὶ εὑρίσκομεν :

$$F = 392 \cdot 10^6 \text{ dyn} = 395 \text{ kgr}^* \text{ περίπου.}$$

1015. Πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ συχνότης τοῦ τετάρτου ἁρμονικοῦ ἤχου χορδῆς μήκους 40 cm, γραμμικῆς πυκνότητος 0,4 gr/cm καὶ ἡ ὁποία τείνεται ὑπὸ δυνάμεως 1600 gr*.

Λύσις. Ἐκ τοῦ τύπου τῶν χορδῶν :

$$\nu_n = \frac{n}{2\,l}\sqrt{\frac{F}{\delta}} \qquad (1)$$

ἐὰν θέσωμεν : n = 4, $l = 40$ cm, $\delta = 0,4$ gr/cm καὶ $F = 1\,600 \cdot 981$ dyn, εὑρίσκομεν :

$$\nu_4 = 100 \text{ Hz} \quad \text{περίπου.}$$

1016. Πόση θὰ εἶναι ἡ συχνότης τοῦ τρίτου ἁρμονικοῦ κλειστοῦ σωλῆνος μήκους 63 cm. (Ταχύτης τοῦ ἤχου εἰς τὸν ἀέρα 340 m/sec.)

Λύσις. Διὰ κλειστοὺς σωλῆνας ἰσχύει ὁ τύπος :

$$\nu_{n'} = \frac{(2\,n - 1)\,\upsilon}{4\,l} \qquad (1)$$

ὅπου (2n–1) = n′ καὶ δηλοῖ τὴν τάξιν τοῦ ἁρμονικοῦ, υ ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου καὶ l τὸ μῆκος τοῦ σωλῆνος. Θέτομεν λοιπὸν εἰς τὴν ἀνωτέρω σχέσιν : (2n–1) = n′ = 3, υ = 340 m/sec, $l = 0,63$ m, καὶ εὑρίσκομεν :

$$\nu_3 = 404 \text{ Hz.}$$

1017. Πόση εἶναι ἡ θεμελιώδης συχνότης κλειστοῦ ἠχητικοῦ σωλῆνος μήκους 67 cm, ἐὰν ἡ ταχύτης διαδόσεως τοῦ ἤχου εἶναι 348 m/sec.

Λύσις. Εἰς τὸν γνωστὸν τύπον (1) τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως, ἐὰν θέσωμεν : (2n – 1) = n′ = 1, $l = 0,67$ m καὶ υ = 348 m/sec, εὑρίσκομεν :

$$\nu_1 = 129 \text{ Hz.}$$

1018. Νὰ καθορισθῇ τὸ ἐλάχιστον μῆκος κλειστοῦ καὶ ἀνοικτοῦ ἠχητικοῦ σωλῆνος, τῶν ὁποίων οἱ ἦχοι εἰς 0° C εὑρίσκονται ἐν συντονισμῷ πρὸς διαπασῶν συχνότητος 160 sec⁻¹.

Λύσις. Προφανῶς, ἐπειδὴ οἱ ἠχητικοὶ σωλῆνες εὑρίσκονται ἐν συντονισμῷ πρὸς τὸ παλλόμενον διαπασῶν, θὰ παράγουν θεμελιώδη ἦχον μεγίστου πλάτους, τοῦ ὁποίου ἡ συχνότης εἶναι 160 sec^{-1}. Διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ (ἐλαχίστου) μήκους τοῦ κλειστοῦ σωλῆνος ἐφαρμόζομεν τὸν γνωστὸν τύπον :

$$\nu_{n'} = \frac{(2\,n - 1)\cdot\upsilon}{4\,l} \qquad (1)$$

ὅπου $\nu_n{}'$ ἡ συχνότης τοῦ ἤχου τῆς $n' = (2n - 1)$ ἁρμονικῆς τάξεως, υ ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου καὶ l τὸ μῆκος τοῦ σωλῆνος. Λύοντες τὴν σχέσιν (1) ὡς πρὸς l λαμβάνομεν :

$$l = \frac{(2n-1)\cdot \upsilon}{4\cdot \nu_{n'}} \qquad (2)$$

Θέτοντες εἰς τὴν σχέσιν (2) τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως, εὑρίσκομεν :

$$\underline{l = 0{,}517 \text{ m.}}$$

Διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ μήκους l τοῦ ἀνοικτοῦ σωλῆνος ἐφαρμόζομεν τὸν γνωστὸν τύπον :

$$\nu_n = \frac{n\cdot \upsilon}{2\cdot l}$$

ὅπου ν_n ἡ συχνότης τῆς n ἁρμονικῆς τάξεως, υ ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου καὶ l τὸ μῆκος τοῦ σωλῆνος.

Λύοντες ὡς πρὸς l τὸν ἀνωτέρω τύπον καὶ δι' ἀντικαταστάσεως διὰ τῶν δεδομένων τιμῶν τῆς ἀσκήσεως εὑρίσκομεν :

$$\underline{l = \frac{n\cdot \upsilon}{2\cdot \nu_n} = 1{,}034 \text{ m.}}$$

1019. Σωλὴν Kundt πληροῦται ὑπὸ ἀέρος θερμοκρασίας 15° C. Ἡ ἀπόστασις μεταξὺ δύο σωρῶν ρινισμάτων φελλοῦ εἶναι 10 cm. Ἐν συνεχείᾳ πληροῦται ὑπὸ ὑδρογόνου θερμοκρασίας 15° C, ὅτε ἡ ἀπόστασις μεταξὺ δύο σωρῶν εὑρίσκεται 38,5 cm. α) Καθορίσατε τὴν ταχύτητα τοῦ ἤχου εἰς τὸ ὑδρογόνον, ἐὰν ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου εἰς τὸν ἀέρα εἶναι 340 m/sec, ἀμφοτέρων τῶν ἀερίων εὑρισκομένων εἰς 15° C. β) Πόσαι ταλαντώσεις ἀνὰ sec παράγονται εἰς τὴν ράβδον.

Λύσις. Εἰς τὸν σωλῆνα Kundt οἱ σωροὶ τῶν ρινισμάτων φελλοῦ σχηματίζονται εἰς τὰ σημεῖα ὅπου ἀντιστοιχοῦν οἱ δεσμοὶ τῆς κινήσεως τοῦ στασίμου κύματος. Ἐὰν καλέσωμεν λοιπὸν l τὴν ἀπόστασιν μεταξὺ δύο διαδοχικῶν δεσμῶν, αὕτη θὰ συμπίπτῃ μὲ τὴν ἀπόστασιν δύο διαδοχικῶν σωρῶν ρινισμάτων φελλοῦ καὶ θὰ ἰσοῦται, συμφώνως πρὸς τὴν θεωρίαν τῶν στασίμων κυμάτων, μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ μήκους κύματος λ τοῦ ἠχητικοῦ κύματος. Ἤτοι :

$$l = \frac{\lambda}{2} \qquad (1)$$

Ἐὰν λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τὴν σχέσιν $\upsilon = \lambda\cdot\nu$, ὅπου λ τὸ μῆκος κύματος τοῦ παραγομένου ἤχου καὶ ν ἡ συχνότης ταλαντώσεως τῆς πηγῆς (ράβδου), ἡ σχέσις (1) γράφεται :

$$l = \frac{\upsilon}{2\nu} \qquad (2)$$

α) Καλοῦμεν l_1, l_2 τὰς ἀποστάσεις τῶν ρινισμάτων φελλοῦ ἐντὸς τοῦ ἀέρος καὶ ἐντὸς τοῦ ὑδρογόνου ὡς καὶ υ_1, υ_2 ἀντιστοίχως τὰς ταχύτητας τῶν παραγομένων ἤχων καὶ οὕτω δυνάμεθα ἐφαρμόζοντες τὴν σχέσιν (2) νὰ γράψωμεν διὰ τὰς δύο ἀναφερομένας περιπτώσεις :

$$l_1 = \frac{\upsilon_1}{2\nu} \qquad (3)$$

$$l_2 = \frac{\upsilon_2}{2\nu} \qquad (4)$$

Διὰ διαιρέσεως τῶν σχέσεων (3) καὶ (4) κατὰ μέλη καὶ δι' ἐπιλύσεως ἀκολούθως ὡς πρὸς υ_2 λαμβάνομεν τὴν σχέσιν :

$$\upsilon_2 = \frac{l_2\cdot \upsilon_1}{l_1} \qquad (5)$$

ἐκ τῆς ὁποίας, δι' ἀντικαταστάσεως τῶν μεγεθῶν διὰ τῶν δεδομένων τῆς ἀσκήσεως, εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου εἰς τὸ ὑδρογόνον εἶναι :

$$\underline{\upsilon_2 = 1\,309 \text{ m/sec.}}$$

β) Ἡ συχνότης ταλαντώσεως τῆς ράβδου εὑρίσκεται ἐκ τῆς σχέσεως (3) ἢ τῆς σχέσεως (4). Οὕτω, δι' ἐπιλύσεως ὡς πρὸς ν τῆς σχέσεως (3), ἔχομεν :

$$\nu = \frac{\upsilon_1}{2\,l_1} \qquad (6)$$

καὶ θέτοντες : $\upsilon_1 = 340$ m/sec καὶ $l_1 = 10$ cm $= 0{,}1$ m, εὑρίσκομεν :

$$\underline{\nu = 1\,700 \text{ Hz.}}$$

1020. Ἁμαξοστοιχία πλησιάζει ἀκίνητον παρατηρητὴν ὑπὸ ταχύτητα 15 m/sec. Πόσον εἶναι τὸ φαινόμενον ὕψος τοῦ ἤχου διὰ τὸν παρατηρητὴν τοῦτον, ἐὰν ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου εἶναι εἰς τὸν ἀέρα 340 m/sec καὶ ἐκ τῆς ἁμαξοστοιχίας ἐκπέμπεται ἦχος συχνότητος 870 Hz.

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν V τὴν ταχύτητα μὲ τὴν ὁποίαν μεταδίδεται ὁ ἦχος, υ τὴν ταχύτητα τῆς ἁμαξοστοιχίας καὶ ν τὴν συχνότητα τοῦ ἐκπεμπομένου ἤχου, τότε ἡ φαινομένη συχνότης ν′ τοῦ ἤχου, διὰ τὸν ἀκίνητον παρατηρητήν, ὑπολογίζεται ἐκ τοῦ τύπου :

$$\nu' = \nu \cdot \frac{V}{V - \upsilon}$$

Συνεπῶς, συμφώνως πρὸς τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως : $\nu = 870$ Hz, $V = 340$ m/sec, $\upsilon = 15$ m/sec, εὑρίσκομεν :

$$\underline{\nu' = 910 \text{ Hz.}}$$

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Β′

1021. Διὰ τὸν καθορισμὸν τῆς ταχύτητος τοῦ ἤχου ἐξελέγησαν δύο σταθμοὶ ἀπέχοντες 5 km. Εὑρέθη ὅτι τὸ χρονικὸν διάστημα τὸ ὁποῖον μεσολαβεῖ ἀφ' ὅτου βλέπομεν τὴν ἐκπυρσοκρότησιν πυροβόλου μέχρις ὅτου ἀκούσωμεν ταύτην εἶναι 15,5 sec διὰ τὸν ἕνα σταθμὸν καὶ 14,5 sec διὰ τὸν ἄλλον. Καθορίσατε τὴν ταχύτητα τοῦ ἤχου, ὡς καὶ τὴν ταχύτητα τοῦ ἀνέμου. ('Απ. 334 m/sec, 11,1 m/sec.)

1022. Ἐκ πλοίου ἐκπέμπεται ἐκ τῆς ἐπιφανείας τῆς θαλάσσης ἠχητικὸν σῆμα βραχείας διαρκείας. Τὸ σῆμα ἀνακλώμενον ἐπὶ τοῦ βυθοῦ ἐπιστρέφει εἰς τὴν ἐπιφάνειαν μετὰ 1,6 sec. Ποῖον τὸ βάθος τῆς θαλάσσης εἰς τὸ σημεῖον τῆς μετρήσεως, ὅταν ἡ ταχύτης διαδόσεως τοῦ ἤχου ἐντὸς τοῦ ὕδατος εἶναι 1 440 m/sec.
('Απ. $h = \upsilon \cdot t/2 = 1152$ m.)

1023. Μία εἰδικὴ συσκευὴ ἑνὸς πλοίου προσδιορίζει αὐτομάτως τὴν διαφορὰν χρόνου Δt μεταξὺ τῆς στιγμῆς τῆς ἀφίξεως ἑνὸς ἀκουστικοῦ σήματος, μέσῳ τοῦ θαλασσίου ὕδατος, καὶ τῆς στιγμῆς κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ αὐτὸ ἀκουστικὸν σῆμα λαμβάνεται κατόπιν διαδρομῆς ἐντὸς τοῦ ἀτμοσφαιρικοῦ ἀέρος. Διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῆς ἀποστάσεως τοῦ πλοίου ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ταὐτοχρόνου ἐκπομπῆς ἀμφοτέρων τῶν σημάτων γίνεται χρῆσις τοῦ τύπου $l = 436 \cdot \Delta t$. Ζητεῖται ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου ἐντὸς τοῦ ὕδατος, ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι ἐντὸς τοῦ ἀτμοσφαιρικοῦ ἀέρος αὕτη εἶναι 335 m/sec. ('Απ. 1 446,14 m/sec.) (Ε.Μ. Πολυτεχνεῖον, Σχολὴ Μηχανολόγων, 1954.)

1024. Δίσκος σειρῆνος φέρων 50 ὀπὰς περιστρέφεται μὲ ταχύτητα n στρ./min, ὁ δὲ ἦχος τῆς σειρῆνος προσπίπτει καὶ ἀνακλᾶται ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου καθέτου τοίχου σχηματίζων στάσιμα κύματα ἔμπροσθεν αὐτοῦ. Ζητοῦνται : α) Ποία ἡ ταχύτης περιστροφῆς τοῦ δίσκου, ἐὰν ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τῆς πρώτης κοιλίας K_1 καὶ τοῦ πέμπτου δεσμοῦ Δ_5 εἶναι 100 cm. β) Ποία τότε ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τοῦ πρώτου δεσμοῦ Δ_1 καὶ τοῦ τοίχου. (Ταχύτης τοῦ ἤχου 340 m/sec.) ('Απ. 428,4 στρ./min, μηδέν.)
(Γεωπονικὴ Σχολὴ Ἀθηνῶν, 1948.)

1025. Δίσκος σειρῆνος φέρων 25 ὀπὰς περιστρέφεται μὲ ταχύτητα n στρ./min, ὁ δὲ ἦχος τῆς σειρῆνος προσπίπτει καθέτως καὶ ἀνακλᾶται ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου τοίχου σχηματίζων στάσιμα κύματα ἔμπροσθεν αὐτοῦ. Δίδεται ἡ ταχύτης ἤχου 340 m/sec. Ζητεῖται ποία ἡ ταχύτης περιστροφῆς n τοῦ δίσκου τῆς σειρῆνος, ἐὰν ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τῆς πρώτης κοιλίας K_1 καὶ τοῦ πέμπτου δεσμοῦ Δ_5 ἐμετρήθη εἰς 200 cm.
(᾿Απ. 11,9 στρ./sec.) (Ε.Μ.Πολυτεχνεῖον, Σχολὴ ᾿Αρχιτεκτόνων, 1953.)

1026. Εἰς σωλῆνα Kundt τὰ σημεῖα στηρίξεως τῆς χρησιμοποιουμένης χαλυβδίνης ράβδου ἀπέχουν ἀλλήλων κατὰ 80 cm, ἡ δὲ ἀπόστασις μεταξὺ δύο διαδοχικῶν σωρῶν ρινισμάτων εἶναι 5,33 cm εἰς 20° C. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου εἰς τὸν χάλυβα. (᾿Απ. 5 150 m/sec.)

1027. Εἰς τὸν σωλῆνα τοῦ Kundt ἡ ταλαντουμένη ράβδος, μήκους 120 cm, παράγει 6 δεσμοὺς εἰς ἀερίαν στήλην μήκους 55,5 cm. ᾿Εὰν ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου εἰς τὸν ἀέρα εἶναι 344 m/sec, πόση εἶναι ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου εἰς τὴν ράβδον.
(᾿Απ. 5 220 m/sec.)

1028. Διαπασῶν συχνότητος 440 Hz ἠχεῖ ὑπεράνω ἀνοικτοῦ κατὰ τὰ δύο ἄκρα ὑαλίνου σωλῆνος, βυθιζομένου ἐν μέρει ἐντὸς τοῦ ὕδατος. Εἰς ποίαν θέσιν τοῦ κυλίνδρου παρατηρεῖται συνήχησις. (᾿Απ. ῞Οταν ἡ ἀέριος στήλη ἔχῃ ὕψος 19,3 cm.)

1029. Χορδὴ μήκους 33 cm δίδει ὡς τρίτον ἁρμονικὸν τὸ mi συχνότητος 1 320 Hz. Ποία ἡ ταχύτης τῶν ἐγκαρσίων κυμάτων ἐπὶ τῆς χορδῆς αὐτῆς.
(᾿Απ. 290,4 m/sec.)

1030. Χορδὴ μήκους 200 cm καὶ βάρους 0,5 gr* ἐκτελεῖ 120 ταλαντώσεις ἀνὰ sec. Ποία τάσις πρέπει νὰ ἐξασκηθῇ ἐπ᾿ αὐτῆς, ἵνα ταλαντοῦται εἰς τέσσαρα τμήματα.
(᾿Απ. 367 gr*.)

1031. Σύρμα ὑποκείμενον εἰς τάσιν ταλαντοῦται μὲ θεμελιώδη συχνότητα 256 sec^{-1}. Ποία θὰ εἶναι ἡ θεμελιώδης συχνότης, ἐὰν τὸ σύρμα εἶχε τὸ ἥμισυ μῆκος, διπλάσιον πάχος καὶ ὑπέκειτο εἰς τὸ ἓν τέταρτον τῆς τάσεως ἀπ᾿ ὅ,τι προηγουμένως.
(᾿Απ. 128 sec^{-1}.)

1032. Χορδὴ μήκους 60 cm ἔχει μᾶζαν 0,125 gr. Πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ τάσις τῆς χορδῆς, ὥστε ἡ συχνότης τοῦ θεμελιώδους νὰ εἶναι 250 ταλαντώσεις ἀνὰ sec. Ποῖον τὸ μῆκος κύματος, εἰς τὸν ἀέρα, τοῦ παραγομένου ἤχου.
(᾿Απ. $1{,}9 \cdot 10^6$ dyn, 130 cm.)

1033. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος ἑνὸς κλειστοῦ καὶ ἑνὸς ἀνοικτοῦ ἠχητικοῦ σωλῆνος ἁρμονίου οἱ ὁποῖοι δίδουν τὸν αὐτὸν θεμελιώδη ἦχον συχνότητος 32 Hz. ($\upsilon = 340$ m/sec.) (᾿Απ. 2,65 m, 5,30 m.)

1034. Πνευστὸν μουσικὸν ὄργανον ρυθμίζεται εἰς θερμοκρασίαν 5° C, ὥστε τὸ la αὐτοῦ νὰ συμφωνῇ πρὸς τὸν ἦχον διαπασῶν συχνότητος 440 Hz. Ποία ἡ συχνότης τοῦ la τοῦ ὀργάνου εἰς 20° C. (᾿Απ. 452 Hz.)

1035. ῾Ο πέμπτος ἁρμονικὸς ἑνὸς κλειστοῦ ἠχητικοῦ σωλῆνος, μήκους 1 m, συμβάλλων μὲ τὸν τρίτον ἁρμονικὸν χορδῆς, ὀλίγον χαμηλότερον τοῦ προηγουμένου, δίδει 5 διακροτήματα ἀνὰ sec. Ποία ἡ συχνότης τοῦ θεμελιώδους ἤχου τῆς χορδῆς. ($\upsilon = 340$ m/sec.) (᾿Απ. 140 sec^{-1}.)

1036. Ποῖος πρέπει νὰ εἶναι ὁ λόγος τῶν πυκνοτήτων δύο χορδῶν, ἵνα ὁ τρίτος ἁρμονικὸς τῆς χαμηλοτέρας εἶναι κατὰ ἕνα τόνον ὑψηλότερος τοῦ δευτέρου ἁρμονικοῦ τῆς χαμηλοτέρας. (᾿Απ. 9 : 16.)

1037. Χαλυβδίνη χορδὴ διαμέτρου 0,4 mm ἠχεῖ κατὰ μίαν πέμπτην ὑψηλότερον ἀπὸ μίαν ἴσου μήκους χορδὴν ἐξ ἀργιλίου διαμέτρου 0,8 mm. Ποῖος ὁ λόγος τῶν τεινόντων τὰς δύο χορδὰς δυνάμεων. ('Απ. 1,65.)

1038. Χορδὴ μήκους 73 cm καὶ διαπασῶν δίδουν ἦχον τοῦ αὐτοῦ ὕψους. 'Εὰν τὸ μῆκος τῆς χορδῆς ἐλαττωθῇ κατὰ 0,5 cm, παρατηρεῖται ὅτι οἱ δύο ἦχοι δίδουν 3 διακροτήματα ἀνὰ sec. Ποία ἡ συχνότης τοῦ διαπασῶν. ('Απ. 435 Hz.)

1039. Δύο χορδαὶ τοῦ αὐτοῦ μήκους εὑρίσκονται ἐν συντονισμῷ. 'Η πρώτη τείνεται μὲ δύναμιν τριπλασίαν τῆς δευτέρας, ὁ δὲ λόγος τῶν πυκνοτήτων τῆς πρώτης πρὸς τὴν δευτέραν εἶναι 1,2. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν διαμέτρων αὐτῶν.
('Απ. $r_2/r_1 = 0{,}63$.) (Σχολὴ Εὐελπίδων, 1956.)

1040. 'Εκ δύο χορδῶν, τοῦ αὐτοῦ ὑλικοῦ καὶ τοῦ αὐτοῦ μήκους, τῶν ὁποίων αἱ τομαὶ ἔχουν λόγον 5 : 8, ἡ λεπτοτέρα παράγει ἦχον διπλασίας συχνότητος τῆς ἄλλης. Ποῖος ὁ λόγος τῶν τεινουσῶν αὐτὰς δυνάμεων. ('Απ. 5 : 2.)

1041. 'Ανοικτὸς ἠχητικὸς σωλὴν πλήρης ἀέρος, μήκους 120 cm, παράγει ἦχον 5ον ἁρμονικόν. "Αν ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου εἰς τὸν ἀέρα εἶναι 340 m/sec, νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος τοῦ παραγομένου ἤχου καὶ τὸ μῆκος κλειστοῦ σωλῆνος ἔχοντος ὡς πρῶτον ἁρμονικὸν τὸν προηγούμενον. ('Απ. 708,3 sec^{-1}, 12 cm.)
(Πανεπιστήμιον 'Αθηνῶν, Τμῆμα Χημικόν, 1950.)

1042. 'Ανοικτὸς ἠχητικὸς σωλὴν δίδει ἐντὸς τοῦ ἀέρος ἦχον ὡρισμένης συχνότητος, ἐντὸς δὲ ἀτμοσφαίρας φωταερίου τὸ ὕψος τοῦ ἤχου αὐξάνεται κατὰ μίαν πέμπτην. Ποία ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου εἰς τὸ φωταέριον. (Ταχύτης τοῦ ἤχου εἰς τὸν ἀέρα 340 m/sec.) ('Απ. Περίπου 500 m/sec.)

1043. 'Αμαξοστοιχία ἀπομακρύνεται ἀκινήτου παρατηρητοῦ ὑπὸ ταχύτητα 15 m/sec καὶ ἐκπέμπει ἦχον συχνότητος 870 Hz. Ποῖον εἶναι τὸ φαινόμενον ὕψος τοῦ ἤχου τούτου ὑπὸ τοῦ παρατηρητοῦ. (Ταχύτης τοῦ ἤχου εἰς τὸν ἀέρα 340 m/sec.)
('Απ. 833 Hz.)

1044. Αὐτοκίνητον ἐκπέμπον ἦχον ὑπὸ συχνότητα 450 sec^{-1} διασταυροῦται μεθ' ἑτέρου αὐτοκινήτου ἐρχομένου ἀντιθέτως μετὰ ταχύτητος 72 km/h. Οἱ ἐπιβάται τοῦ δευτέρου αὐτοκινήτου ἀκούουν ἦχον συχνότητος 500 sec^{-1}. Ζητεῖται ἡ ταχύτης τοῦ πρώτου αὐτοκινήτου, ὅταν ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου εἶναι 340 m/sec. ('Απ. 56 km/h.)
(Ε.Μ. Πολυτεχνεῖον, Σχολὴ Μηχανολόγων - 'Ηλεκτρολόγων, 1947.)

1045. 'Ηχοῦν σῶμα κινεῖται μὲ ταχύτητα 81 km/h ἐκπέμπον ἦχον συχνότητος 400 Hz. 'Επὶ ἑτέρου κινητοῦ κινουμένου μὲ ταχύτητα 54 km/h εὑρίσκεται παρατηρητὴς ὅστις ἀκολουθεῖ τὸ ἠχογόνον κινητόν. Νὰ εὑρεθῇ ἡ συχνότης τὴν ὁποίαν ἀκούει ὁ παρατηρητής. ('Απ. 391,72 Hz.)
(Ε. Μ. Πολυτεχνεῖον, Σχολὴ Χημικῶν Μηχανικῶν, 1947.)

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Γ'

1046. Σειρὴν ρυθμίζεται οὕτως ὥστε νὰ παράγῃ ἦχον ἰσοϋψῆ πρὸς τὸν ἦχον δοθέντος διαπασῶν. 'Ο ἀριθμὸς τῶν ὀπῶν τοῦ δίσκου τῆς σειρῆνος εἶναι 36 καὶ ἐκτελεῖ 90 στροφὰς ἀνὰ 10 sec. Εὕρετε τὴν συχνότητα τοῦ διαπασῶν.

1047. Εὕρετε τὴν ταχύτητα διαδόσεως τοῦ ἤχου εἰς τὸν ἀέρα, εἰς cm/sec καὶ m/sec, ὅταν ἡ θερμοκρασία εἶναι α) $+ 10^0$ C, β) $- 10^0$ C.

1048. 'Ηχητικὸν σῶμα ἐκτελεῖ 100 ταλαντώσεις ἀνὰ sec. Εὕρετε τὸ μῆκος κύματος τοῦ παραγομένου ἤχου α) εἰς 20^0 C, β) εἰς $- 20^0$ C.

1049. Κατὰ τὴν διάρκειαν ὁμιχλώδους καιροῦ φάρος ἐκπέμπει ἠχητικὰ σήματα, ταὐτοχρόνως κάτω τοῦ ὕδατος (0° C) καὶ εἰς τὸν ἀέρα (10° C). Πλοῖον εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν 1 000 m ἀπὸ τοῦ φάρου. Ποία ἡ διαφορὰ χρόνου ἀφίξεως τῶν σημάτων εἰς τὸ πλοῖον. ($\upsilon_{\text{ἀήρ}} = 340$ m/sec, $\upsilon_{\text{ὕδωρ}} = 1\,400$ m/sec.)

1050. Κώδων κτυπᾶται κάτωθεν τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὕδατος καὶ ἡ ἠχὼ ἀπὸ τοῦ πυθμένος γίνεται ἀντιληπτὴ εἰς 1,5 sec. Ποῖον τὸ βάθος τοῦ ὠκεανοῦ εἰς τὴν περιοχὴν ταύτην. (Ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου εἰς τὸ ὕδωρ εἶναι 1 400 m/sec.)

1051. Ἄνθρωπος εἰς τὴν ἀκτὴν μιᾶς λίμνης παρατηρεῖ τὸν ἀτμὸν ἀπὸ τὴν σφυρίκτραν ἑνὸς πλοίου εἰς τὴν λίμνην. Μετὰ 2 sec ἀκούει τὸν ἦχον καὶ κατόπιν 5 sec τὴν ἠχὼ ἀπὸ τὴν ἀπέναντι κρημνώδη ἀκτήν. Ποῖον τὸ εὖρος τῆς λίμνης, ἐὰν ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου εἶναι 340 m/sec.

1052. Παρατηρητὴς πλησιάζων ἓν μέγα κτίριον κατὰ τὴν νύκτα κτυπᾷ τὸν πόδα του ἐπὶ τοῦ λιθοστρώτου καὶ μετὰ 0,8 sec ἀκούει τὴν ἠχώ. Πόσον ἀπέχει ὁ παρατηρητὴς οὗτος ἀπὸ τοῦ κτιρίου, λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν ὅτι ἡ θερμοκρασία εἶναι 18° C.

1053. Χορδὴ ἐκτελεῖ 256 πλήρεις ταλαντώσεις ἀνὰ sec, ὅταν ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου εἶναι 346 m/sec. Εὕρετε τὸ μῆκος κύματος τοῦ παραγομένου ἤχου.

1054. Χορδὴ ἐξ ἀργιλίου μήκους 1 m καὶ διαμέτρου 1 mm τείνεται ὑπὸ δυνάμεως 4 kgr*. Εὕρετε τὸ ὕψος τοῦ θεμελιώδους ἤχου.

1055. Χορδὴ μήκους 180 cm ταλαντοῦται εἰς 3 τμήματα ὑπὸ συχνότητα 120 ταλαντώσεων ἀνὰ sec. Ἡ χορδὴ τείνεται ὑπὸ δυνάμεως 400 gr*. Εὕρετε τὴν ὁλικὴν μᾶζαν τῆς χορδῆς.

1056. Διαπασῶν τίθεται ἄνωθεν σωλῆνος ἀνοικτοῦ περιέχοντος ὕδωρ τοῦ ὁποίου ἡ ἐπιφάνεια δύναται νὰ μεταβάλλεται. Ὅταν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὕδατος εὑρίσκεται 10 cm κάτωθεν τοῦ διαπασῶν, ἔχομεν συνήχησιν. Ἐπίσης συνήχησιν ἔχομεν, ὅταν τὸ ὕδωρ εὑρίσκεται 26 cm κάτωθεν τοῦ διαπασῶν. Λαμβάνοντες τὴν ταχύτητα τοῦ ἤχου 345 m/sec εἰς τὴν συνήθη θερμοκρασίαν, ὑπολογίσατε τὴν συχνότητα τοῦ διαπασῶν.

1057. Ὑπολογίσατε τὸν ἀριθμὸν ταλαντώσεων τοῦ θεμελιώδους τοῦ ἐκπεμπομένου εἰς 13° C ὑπὸ κλειστοῦ σωλῆνος μήκους 1 m.

1058. Πόσα διακροτήματα ἀνὰ sec θὰ παράγωνται, ἐὰν διεγείρωμεν συγχρόνως δύο ἀνοικτοὺς σωλῆνας μηκῶν 50 cm καὶ 53 cm ἀντιστοίχως, α) ὅταν ἡ θερμοκρασία τοῦ ἀέρος εἶναι 0° C, β) ὅταν ἡ θερμοκρασία εἶναι 22° C.

1059. Ὁ ἦχος σφυρίκτρας ἀτμομηχανῆς ἔχει συχνότητα 500 ταλαντώσεων ἀνὰ sec. Ἡ ἀτμομηχανὴ κινεῖται μὲ ταχύτητα 30 mil/h. Ἡ θερμοκρασία τοῦ ἀέρος εἶναι 20° C. Ἐὰν ἡ ἀτμομηχανὴ πλησιάζῃ παρατηρητήν, εὕρετε τὸ ὕψος τοῦ ἤχου τὸ ὁποῖον ἀντιλαμβάνεται οὗτος.

1060. Ἠχητικὸς σωλὴν ἀνοικτὸς κατὰ τὸ ἓν ἄκρον κλείεται εἰς τὸ ἕτερον ἄκρον ὑπὸ κινητοῦ ἐμβόλου. Μία ταλαντουμένη ράβδος κρατεῖται πλησίον τοῦ ἀνοικτοῦ ἄκρου. Ἡ ἀερία στήλη συνηχεῖ, ὅταν τὸ ἔμβολον εὑρίσκεται $k \cdot 11$ cm ἀπὸ τοῦ ἀνοικτοῦ ἄκρου, ὅπου $k = 1,2,3...$ Ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου εἶναι 333 m/sec εἰς τὸν ἀέρα. Ποία ἡ συχνότης ταλαντώσεως τῆς ράβδου.

1061. Μὲ ποίαν ταχύτητα ἄνθρωπος ἀπομακρύνεται ἀπὸ ἠχοῦν σῶμα, ἐὰν τὸ φαινόμενον ὕψος τοῦ ἤχου ταπεινοῦται κατὰ 10%. (Ταχύτης ἤχου 335,5 m/sec.)

1062. Σιδηροδρομικὸς ὑπάλληλος ἵσταται εἰς τὸ μέσον μιᾶς λίαν στενῆς γεφύρας μήκους 1 000 m, ὅταν ἀνακαλύπτῃ εἰς ἀπόστασιν ἀκριβῶς 1 500 m ἐρχόμενον ἕνα συρμόν. Ὑποτίθεται ὅτι ὁ ὑπάλληλος εἶναι εἰς θέσιν νὰ ἐκτιμήσῃ ἐπακριβῶς τὴν συχνότητα τοῦ ἀκουομένου ἤχου τῆς σφυρίκτρας τῆς ἐν κινήσει ἀτμομηχανῆς εἰς 360 Hz, ἐνῷ οὗτος γνωρίζει ὅτι ἡ ἀτμομηχανὴ ἐκπέμπει, εἰς τὴν πραγματικότητα, ἦχον συχνότητος μόνον 340 Hz. Ἀναγκαζόμενος νὰ ἐξέλθῃ ἐγκαίρως ἐκ τῆς γεφύρας ὁ ὑπάλληλος ρυθμίζει τὴν ταχύτητα πορείας αὐτοῦ εἰς τρόπον ὥστε νὰ ἀκούῃ σφυρίγματα σταθερᾶς συχνότητος 355 Hz. Ζητεῖται ἡ διαφορὰ χρόνου μεταξὺ τῆς ἀφίξεως τοῦ ὑπαλλήλου καὶ τῆς ἁμαξοστοιχίας εἰς τὸ τέρμα τῆς γεφύρας. (Ταχύτης διαδόσεως τοῦ ἤχου $\upsilon = 340$ m/sec.) (Ε.Μ. Πολυτεχνεῖον, Σχολαὶ Χημικῶν Μηχανικῶν, Ἀρχιτεκτόνων, 1948.)

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΣΤ΄

ΘΕΡΜΟΤΗΣ. ΘΕΡΜΟΜΕΤΡΙΑ

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Α΄

1063. Νὰ μετατραποῦν αἱ ἐνδείξεις θερμοκρασιῶν 70^0 F, 84^0 F, 98^0 F, 110^0 F εἰς βαθμοὺς Κελσίου.

Λύσις. Ἐκ τοῦ τύπου:

$$C = \frac{5}{9}(F - 32)$$

διὰ τοῦ ὁποίου μετατρέπομεν τὰς ἐνδείξεις τῆς κλίμακος τοῦ Φαρενάϊτ εἰς ἐνδείξεις κλίματος Κελσίου, εὑρίσκομεν:

$$\alpha)\quad \underline{C} = \frac{5}{9}(70 - 32) = \underline{21{,}1^0\ C}$$

$$\beta)\quad \underline{C} = \frac{5}{9}(84 - 32) = \underline{28{,}9^0\ C}$$

$$\gamma)\quad \underline{C} = \frac{5}{9}(98 - 32) = \underline{36{,}7^0\ C}$$

$$\delta)\quad \underline{C} = \frac{5}{9}(110 - 32) = \underline{43{,}8^0\ C}$$

1064. Νὰ μετατραποῦν αἱ ἐνδείξεις θερμοκρασιῶν 4^0 C, 15^0 C, 40^0 C, 86^0 C εἰς βαθμοὺς Fahrenheit.

Λύσις. Ἐκ τοῦ τύπου:

$$F = \frac{9}{5} C + 32$$

διὰ τοῦ ὁποίου μετατρέπομεν τὰς ἐνδείξεις τῆς κλίμακος τοῦ Κελσίου εἰς ἐνδείξεις κλίμακος Φαρενάϊτ, εὑρίσκομεν:

$$\alpha)\quad \underline{F} = \frac{9}{5}\cdot 4 + 32 = \underline{39{,}2^0\ F}$$

$$\beta)\quad \underline{F} = \frac{9}{5}\cdot 15 + 32 = \underline{59^0\ F}$$

$$\gamma)\quad \underline{F} = \frac{9}{5}\cdot 40 + 32 = \underline{104^0\ F}$$

$$\delta)\quad \underline{F} = \frac{9}{5}\cdot 86 + 32 = \underline{186^0\ F}$$

1065. Εἰς ποίαν θερμοκρασίαν αἱ ἐνδείξεις θερμομέτρων Κελσίου καὶ Φαρενάϊτ συμπίπτουν.

Λύσις. Ἔστω x ἡ θερμοκρασία εἰς βαθμοὺς Κελσίου καθ' ἣν αἱ ἐνδείξεις τῶν δύο θερμομέτρων συμπίπτουν. Τότε, ἐπειδὴ $C = x$ καὶ $F = x$, ἡ σχέσις $C = \frac{9}{5} F + 32$ γράφεται:

$$x = \frac{9}{5} x + 32$$

Δι' ἐπιλύσεως δὲ τῆς σχέσεως ταύτης εὑρίσκομεν ὅτι αἱ ἐνδείξεις συμπίπτουν εἰς τὴν θερμοκρασίαν:

$$\underline{x = -40^0\,C = -40^0\,F}$$

1066. Τὸ οἰνόπνευμα βράζει εἰς 78,5⁰ C καὶ πήγνυται εἰς — 117⁰ C. Ποῖαι αἱ ἀντίστοιχοι θερμοκρασίαι εἰς βαθμοὺς Φαρενάϊτ.

Λύσις. Ἐὰν εἰς τὴν σχέσιν $F = \frac{9}{5} C + 32$, μετατροπῆς τῶν βαθμῶν Κελσίου εἰς βαθμοὺς Fahrenheit, θέσωμεν: $C = 78{,}5^0\,C$ καὶ κατόπιν $C = -117^0\,C$, εὑρίσκομεν τὰς ἀντιστοίχους ζητουμένας θερμοκρασίας εἰς βαθμοὺς Fahrenheit. Οὕτω ἔχομεν:

$$\underline{F} = \frac{9}{5} \cdot 78{,}5 + 32 = -\underline{40^0\,F}$$

καὶ

$$\underline{F} = \frac{9}{5} (-117) + 32 = -\underline{173^0\,F}$$

1067. Ὁ ὑδράργυρος βράζει εἰς 675⁰ F καὶ πήγνυται εἰς — 38⁰ F. Ποῖαι αἱ ἀντίστοιχοι θερμοκρασίαι εἰς βαθμοὺς Κελσίου.

Λύσις. Ἐκ τῆς σχέσεως $C = \frac{5}{9} (F - 32)$ εὑρίσκομεν:

$$\underline{C} = \frac{5}{9} (675 - 32) = \underline{357^0\,F}$$

καὶ

$$\underline{C} = \frac{5}{9} (-38 - 32) = -\underline{38{,}9^0\,C}$$

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Β'

1068. Εἰς ποίαν θερμοκρασίαν ἡ ἔνδειξις θερμομέτρου Φαρενάϊτ εἶναι διπλασία τῆς ἐνδείξεως τοῦ ἑκατονταβάθμου θερμομέτρου (Κελσίου). (Ἀπ. 320⁰ F.)

1069. Ὁ φωσφόρος τήκεται εἰς 44,2⁰ C. Νὰ ἐκφρασθῇ ἡ θερμοκρασία τήξεως τοῦ φωσφόρου εἰς βαθμοὺς Ρεωμύρου, Φαρενάϊτ καὶ ἀπολύτους.
(Ἀπ. 35,4⁰ R, 111,6⁰ F, 317,3⁰ K.)

1070. Ἡ τολουόλη πήγνυται εἰς 180,1⁰ ἀπολύτους. Νὰ ἐκφρασθῇ ἡ θερμοκρασία πήξεως τῆς τολουόλης εἰς βαθμοὺς Κελσίου, Ρεωμύρου καὶ Φαρενάϊτ.
(Ἀπ. — 93⁰ C, — 74,4⁰ R, — 135,4⁰ F.)

1071. Ἓν ἀβαθμολόγητον ὑδραργυρικὸν θερμόμετρον προσαρμόζεται ἐπὶ χιλιοστομετρικῆς κλίμακος. Ὅταν τὸ κάτω ἄκρον τοῦ θερμομέτρου εὑρίσκεται ἐντὸς τηκομένου πάγου ἡ ἔνδειξις τῆς κλίμακος αὐτοῦ εἶναι 3,2 cm, ὅταν τὸ θερμόμετρον εὑρίσκεται ἐντὸς ἀτμοῦ ἡ ἔνδειξις εἶναι 21,8 cm καὶ ὅταν τοῦτο εὑρίσκεται ἐντὸς ἀτμῶν ζεούσης ἀλκοόλης ἡ ἔνδειξις τῆς κλίμακος εἶναι 17,7 cm. Ὑπολογίσατε τὴν θερμοκρασίαν τῶν ἀτμῶν τῆς ἀλκοόλης. (Ἀπ. 77,9⁰ C.)

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Γ'

1072. Τὸ ὑγρὸν ὀξυγόνον πήγνυται εἰς τοὺς $-218{,}4^0$ C καὶ ζέει εἰς τοὺς -183^0 C. Ἐκφράσατε αὐτὰς τὰς θερμοκρασίας εἰς ^{0}F.

1073. Ἡ θερμοκρασία τοῦ ξηροῦ πάγου εἶναι -109^0 F. Εἶναι οὗτος θερμότερος ἢ ψυχρότερος ἀπὸ αἰθάνιον εὑρισκόμενον εἰς τὸ σημεῖον ζέσεως τὸ ὁποῖον εἶναι -88^0 C.

1074. Ἡ βενζόλη τήκεται εἰς $41{,}7^0$ F. Νὰ ἐκφρασθῇ ἡ θερμοκρασία τήξεως τῆς βενζόλης εἰς βαθμοὺς Κελσίου, Ρεωμύρου καὶ ἀπολύτους.

1075. Ἐὰν ἡ θερμοκρασία τοῦ ἀνθρωπίνου σώματος εἶναι 37^0 C, ποία εἶναι αὕτη ἐκφραζομένη εἰς βαθμοὺς Φαρενάϊτ καὶ ἀπολύτους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΖ'

ΘΕΡΜΙΚΗ ΔΙΑΣΤΟΛΗ

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Α'

1076. Ράβδος ἐκ χαλκοῦ ἔχει μῆκος 2,45 m εἰς 20^0 C καὶ θερμαίνεται εἰς 100^0 C. Κατὰ πόσον ηὐξήθη τὸ μῆκος αὐτῆς. ($\alpha_{\chi\alpha\lambda\kappa o\tilde{\upsilon}} = 16{,}7 \cdot 10^{-6}$ grad^{-1}.)

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν τὸ ἀρχικὸν μῆκος τῆς ράβδου l_0, τότε ἡ μεταβολὴ τοῦ μήκους Δl αὐτῆς εἶναι ἀνάλογος τοῦ ἀρχικοῦ μήκους καὶ τῆς μεταβολῆς τῆς θερμοκρασίας $\Delta\theta$. Ἤτοι :

$$\Delta l = \alpha \cdot l_0 \cdot \Delta\theta \qquad (1)$$

ὅπου α εἶναι ὁ συντελεστὴς τῆς γραμμικῆς διαστολῆς τῆς ράβδου.

Θέτομεν εἰς τὴν σχέσιν (1) : $l_0 = 2{,}45$ m, $\alpha = 16{,}7 \cdot 10^{-6}$ grad^{-1}, $\Delta\theta = 100 - 20 = 80^0$ C, καὶ εὑρίσκομεν :

$$\underline{\Delta l = 0{,}327 \text{ cm}.}$$

1077. Ράβδος ὑαλίνη ἔχει εἰς 0^0 C μῆκος 412,5 mm καὶ ἐπιμηκύνεται κατὰ 0,329 mm, ὅταν ἡ θερμοκρασία αὐτῆς αὐξηθῇ εἰς 98,5^0 C, Πόσος ὁ συντελεστὴς γραμμικῆς διαστολῆς τῆς ὑάλου.

Λύσις. Ἐκ τῆς σχέσεως $\Delta l = \alpha \cdot l_0 \cdot \Delta\theta$ (βλ. ἄσκησιν 1076 προκύπτει ὅτι :

$$\alpha = \frac{\Delta l}{l_0 \cdot \Delta\theta}$$

Θέτομεν : $\Delta l = 0{,}329$ mm, $l_0 = 412{,}5$ mm, $\Delta\theta = 98{,}5^0$ C, καὶ εὑρίσκομεν :

$$\underline{\alpha = 8{,}1 \cdot 10^{-6} \text{grad}^{-1}.}$$

1078. Μὲ χαλύβδινον μετρικὸν κανόνα, ὁ ὁποῖος εἶναι ἀκριβὴς εἰς 0^0 C, μετροῦμεν εἰς 25^0 C τὸ μῆκος ὑδραργυρικῆς στήλης, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται ἴσον πρὸς 720 mm. Ποῖον τὸ ἀληθὲς μῆκος αὐτῆς καὶ πόσον τὸ μῆκος αὐτῆς εἰς 0^0 C. ($\alpha_{\chi\acute{\alpha}\lambda.} = 16 \cdot 10^{-6}$ grad^{-1}, $\gamma_{\acute{\upsilon}\delta\rho.} = 181 \cdot 10^{-6}$ grad^{-1}.)

Λύσις. Ὁ χαλύβδινος μετρικὸς κανὼν εἰς θερμοκρασίαν 25^0 C δὲν παρέχει τὸ πραγματικὸν μῆκος τῆς ὑδραργυρικῆς στήλης, διότι εἰς τοὺς 25^0 C ὁ κανὼν ἔχει ὑποστῆ διαστολήν. Ἑπομένως τὸ πραγματικὸν μῆκος τῆς ὑδραργυρικῆς στήλης θὰ εἶναι μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ μετρούμενον καὶ ἴσον πρὸς 720 mm. Εἶναι προφανὲς ὅτι τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὸ νὰ εὕρωμεν ποῖον εἶναι τὸ πραγματικὸν μῆκος τοῦ κανόνος εἰς 25^0 C, ὅταν οὗτος εἰς θερμοκρασίαν 0^0 C ἔχῃ μῆκος 720 mm. Διὰ τὴν λύσιν τῆς ἀσκήσεως λαμβάνομεν τὸν τύπον τῆς γραμμικῆς θερμικῆς διαστολῆς :

$$l_\theta = l_0 \, (1 + \alpha_{\chi\acute{\alpha}\lambda.} \cdot \theta) \qquad (1)$$

ὅπου l_θ εἶναι τὸ μῆκος εἰς θερμοκρασίαν θ^0 C, l_0 τὸ μῆκος εἰς θερμοκρασίαν 0^0 C, α ὁ συντελεστὴς γραμμικῆς διαστολῆς καὶ θ ἡ θερμοκρασία τοῦ σώματος εἰς βαθμοὺς Κελσίου. Οὕτω θέτοντες εἰς τὴν ἀνωτέρω σχέσιν (1) τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως : $l_0 = 720$ mm, $\alpha_{\chi\acute{\alpha}\lambda.} = 16 \cdot 10^{-6}$ grad^{-1}, $\theta = 25^0$ C, εὑρίσκομεν ὅτι τὸ ἀληθὲς μῆκος εἶναι :

$$\underline{l_\theta = 720{,}3 \text{ mm.}}$$

'Εφ' ὅσον τώρα γνωρίζομεν τὸ πραγματικὸν μῆκος τῆς ὑδραργυρικῆς στήλης εἰς 25^0 C, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ μῆκος αὐτῆς εἰς 0^0 C ἐκ τῆς σχέσεως :

$$l_0 = \frac{l_\theta}{(1 + \gamma_{\acute{\upsilon}\delta\rho.} \cdot \theta)} \qquad (2)$$

Οὕτω ἐκ τῆς σχέσεως (2), ἐὰν θέσωμεν : $l_\theta = 720{,}3$ mm, $\gamma_{\acute{\upsilon}\delta\rho.} = 181 \cdot 10^{-6}$ grad^{-1} καὶ $\theta = 25^0$ C, εὑρίσκομεν :

$$\underline{l_0 = 717 \text{ mm.}}$$

1079. Κατὰ πόσον αὐξάνεται ἡ ἐπιφάνεια ὀρθογωνίου πλακὸς ἐκ χαλκοῦ διαστάσεων 0,8 m καὶ 1,5 m διὰ θερμάνσεως αὐτῆς ἀπὸ 5^0 C εἰς 45^0 C. ($\alpha_{\chi\alpha\lambda\kappa o\tilde{\upsilon}} = 14 \cdot 10^{-6}$ grad^{-1}.)

Λύσις. Ἡ μεταβολὴ ΔS τὴν ὁποίαν ὑφίσταται μία ἐπιφάνεια S_0 εἶναι ἀνάλογος τῆς ἐπιφανείας ταύτης καὶ ἀνάλογος τῆς θερμοκρασίας Δθ. Ἤτοι :

$$\Delta S = \beta \cdot S_0 \,.\, \Delta\theta \qquad (1)$$

ὅπου β εἶναι ὁ θερμικὸς συντελεστὴς ἐπιφανειακῆς διαστολῆς καὶ ἰσοῦται μὲ 2α (α ὁ συντελεστὴς γραμμικῆς διαστολῆς). Θέτομεν εἰς τὴν σχέσιν (1) τὴν τιμὴν β = 2α, ὅτε λαμβάνομεν :

$$\Delta S = 2\alpha \cdot S_0 \cdot \Delta\theta \qquad (2)$$

'Αντικαθιστῶμεν εἰς τὸν τύπον (2) τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως : $\alpha = 14 \cdot 10^{-6}$ grad^{-1}, $S_0 = 0{,}8 \cdot 1{,}5 = 1{,}2$ m^2 $= 1{,}2 \cdot 10^4$ cm^2, $\Delta\theta = 45 - 5 = 40^0$ C, καὶ εὑρίσκομεν :

$$\underline{\Delta S = 13{,}4 \text{ cm}^2.}$$

1080. Κυκλικὴ πλὰξ νικελίου ἔχει εἰς 15^0 C διάμετρον 100 mm. Εἰς ποίαν θερμοκρασίαν πρέπει ἡ πλὰξ νὰ θερμανθῇ, ἵνα ἡ ἐπιφάνεια αὐτῆς αὐξηθῇ κατὰ 10 mm^2. ($\alpha_{\nu\iota\kappa\epsilon\lambda\acute{\iota}o\upsilon} = 13 \cdot 10^{-6}$ grad^{-1}.)

Λύσις. Ἡ μεταβολὴ τῆς θερμοκρασίας θὰ εἶναι $\Delta\theta = \theta - \theta'$, ὅπου θ ἡ ζητουμένη θερμοκρασία καὶ θ' ἡ ἀρχικὴ θερμοκρασία τῶν 15^0 C. Οὕτω, ἐκ τοῦ γνωστοῦ τύπου $\Delta S = 2\alpha \cdot S_0 \cdot \Delta\theta$ (βλ. ἄσκησιν 1079, τύπον 2), λαμβάνομεν :

$$\Delta S = 2\,\alpha \cdot S_0 \cdot (\theta - \theta') \qquad (1)$$

'Εὰν λύσωμεν τὴν ἀνωτέρω σχέσιν ὡς πρὸς τὴν ζητουμένην θερμοκρασίαν θ, προκύπτει :

$$\theta = \frac{\Delta S}{2\,\alpha \cdot S_0} + \theta' \qquad (2)$$

'Επειδὴ ὅμως, ὡς γνωστόν, εἶναι $S_0 = \pi \cdot \delta^2/4$, ὁ τύπος (2) γίνεται :

$$\theta = \frac{4 \cdot \Delta S}{2\,\alpha \cdot \pi \cdot \delta^2} + \theta' \qquad (3)$$

Θέτομεν εἰς τὸν τύπον (3) : $\Delta S = 10$ mm^2, $\alpha = 13 \cdot 10^{-6}$ grad^{-1}, $\delta = 100$ mm καὶ $\theta' = 15^0$ C, ὅτε εὑρίσκομεν :

$$\underline{\theta = 64^0 \text{ C.}}$$

1081. Σφαῖρα ἐκ σιδήρου ἔχει εἰς 0^0 C διάμετρον 19 mm. Εἰς ποίαν θερμοκρασίαν πρέπει αὕτη νὰ θερμανθῇ, διὰ νὰ δύναται μόλις νὰ διέρχεται ἀπὸ δακτυλίου διαμέτρου 19,04 mm. Κατὰ πόσον ηὐξήθη ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας. ($\alpha_{\text{σιδήρου}} = 12 \cdot 10^{-6}$ grad^{-1}.)

Λύσις. Ἡ σχέσις ἡ ὁποία μᾶς δίδει τὴν γραμμικὴν διαστολὴν εἶναι, ὡς γνωστόν:

$$\Delta l = \alpha \cdot l_0 \cdot \Delta\theta \qquad (1)$$

Λύομεν τὴν σχέσιν (1) ὡς πρὸς Δθ καὶ λαμβάνομεν:

$$\Delta\theta = \frac{\Delta l}{\alpha \cdot l_0} \qquad (2)$$

Ἐπειδὴ ὅμως ἡ ἀρχικὴ θερμοκρασία εἶναι 0^0 C, ἕπεται ὅτι $\Delta\theta = \theta$ καὶ συνεπῶς ἡ σχέσις (2) γράφεται:

$$\theta = \frac{\Delta l}{\alpha \cdot l_0} \qquad (3)$$

Θέτομεν εἰς τὴν σχέσιν (3): $l_0 = 19$ mm, $\Delta l = 19{,}04 - 19 = 0{,}04$ mm καὶ $\alpha = 12 \cdot 10^{-6}$ grad^{-1}, καὶ εὑρίσκομεν:

$$\underline{\theta = 175{,}4^0 \text{ C}.}$$

Ἡ αὔξησις τοῦ ὄγκου τῆς σφαίρας δίδεται ἐκ τοῦ τύπου:

$$\Delta V = \gamma \cdot V_0 \cdot \Delta\theta \qquad (4)$$

ὅπου $\gamma = 3\alpha$ καὶ $\alpha = 12 \cdot 10^{-6}$ grad^{-1}. Ἐπειδὴ δὲ $V_0 = \frac{4}{3} \cdot \pi \left(\frac{\delta}{2}\right)^3 = \frac{1}{3}\pi \cdot \delta^2$, ὁ τύπος (4) γράφεται:

$$\Delta V = \frac{1}{3}\gamma \cdot \pi \cdot \delta^2 \cdot \Delta\theta \qquad (5)$$

Δι᾿ ἀντικαταστάσεως εἰς τὸν τύπον (5) εὑρίσκομεν:

$$\underline{\Delta V = 22{,}7 \text{ mm}^3.}$$

1082. Πόση ἡ μεταβολὴ ὄγκου 1 kgr ὀρειχάλκου, ὅταν ἡ θερμοκρασία του αὐξάνεται ἀπὸ 20^0 C εἰς 100^0 C. ($\rho_{\text{ὀρειχ.}}$ εἰς 20^0 C $= 8{,}4$ gr/cm^3, $\alpha_{\text{ὀρειχ.}} = 18{,}9 \cdot 10^{-6}$ grad^{-1}.)

Λύσις. Ὁ ἀρχικὸς ὄγκος τοῦ ὀρειχάλκου εὑρίσκεται, ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς πυκνότητος, ὅτι εἶναι $V_0 = m/\rho$. Οὕτω ὁ γνωστὸς τύπος τῆς κυβικῆς διαστολῆς $\Delta V = 3\alpha \cdot V_0 \cdot \Delta\theta$ γράφεται:

$$\Delta V = 3\,\alpha \cdot \frac{m}{\rho} \cdot \Delta\theta \qquad (1)$$

Εἰς τὸν ἀνωτέρω τύπον θέτομεν τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως: $\alpha = 18{,}9 \cdot 10^{-6}$ grad^{-1}, $m = 1\,000$ gr, $\rho = 8{,}4$ gr/cm^3, $\Delta\theta = 100 - 20 = 80^0$ C, καὶ εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ζητουμένη μεταβολὴ τοῦ ὄγκου εἶναι:

$$\underline{\Delta V = 0{,}54 \text{ cm}^3.}$$

1083. Νὰ ὑπολογισθῇ εἰς 80^0 C ὁ ὄγκος ὀγκομετρικῆς φιάλης ἀπὸ ὕαλον, τῆς ὁποίας ὁ ὄγκος εἰς 20^0 C εἶναι 100 cm^3. ($\alpha_{\text{ὑάλου}} = 7{,}8 \cdot 10^{-6}$ grad^{-1}.)

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν V_θ τὸν ὄγκον τῆς φιάλης εἰς θερμοκρασίαν 80^0 C καὶ V_0 τὸν ὄγκον αὐτῆς εἰς θερμοκρασίαν 20^0 C, τότε, ὡς γνωστόν, θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις:

$$V_\theta = V_0\,(1 + 3\,\alpha \cdot \Delta\theta)$$

ὅπου α εἶναι ὁ συντελεστὴς τῆς γραμμικῆς διαστολῆς τῆς ὑάλου καὶ Δθ ἡ μεταβολὴ τῆς θερμοκρασίας.

Συνεπῶς ἐκ τῆς ἀνωτέρω σχέσεως, ὅταν θέσωμεν: $V_0 = 100$ cm^3, $\alpha = 7{,}8 \cdot 10^{-6}$ grad^{-1} καὶ $\Delta\theta = 80 - 20 = 60^0$ C, εὑρίσκομεν:

$$\underline{V_\theta = 100{,}14 \text{ cm}^3.}$$

1084. Ἐὰν ἡ ὀγκομετρικὴ φιάλη τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως πληροῦται εἰς 20^0 C μὲ ὑδράργυρον, ποία ποσότης ὑδραργύρου εἰς gr πρέπει ν' ἀφαιρεθῇ εἰς 80^0 C, λόγῳ τῆς ταὐτοχρόνου διαστολῆς ὑάλου καὶ ὑδραργύρου. ($\gamma_{\text{ὑδρ.}} = 181 \cdot 10^{-6}$ grad^{-1}.)

Λύσις. Ὁ ὄγκος V_θ τοῦ ὑδραργύρου εἰς θ^0 C θὰ εἶναι:

$$V_\theta = V_0\ (1 + \gamma \cdot \Delta\theta) = 100\ 1 + 181 \cdot 10^{-6} \cdot 60) = 101{,}09\ \text{cm}^3.$$

Διὰ νὰ χωρῇ λοιπὸν εἰς τὸν ὄγκον 100,14 cm^3 τῆς φιάλης, πρέπει ν' ἀφαιρεθῇ ὄγκος ὑδραργύρου:

$$V = 101{,}09 - 100{,}14 = 0{,}95\ \text{cm}^3.$$

Δεδομένου δὲ ὅτι ἡ πυκνότης τοῦ ὑδραργύρου εἶναι $\rho = 13{,}6\ \text{gr/cm}^3$, ἡ μᾶζα ἡ ὁποία πρέπει νὰ ἀφαιρεθῇ θὰ εἶναι:

$$\underline{m = \rho \cdot V = 13{,}6 \cdot 0{,}95 = 12{,}92\ \text{gr}.}$$

1085. Ἡ πυκνότης τοῦ ὑδραργύρου εἶναι εἰς 0^0 C 13,6 gr/cm^3 καὶ ὁ συντελεστὴς κυβικῆς διαστολῆς αὐτοῦ $182 \cdot 10^{-6}$ grad^{-1}. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πυκνότης τοῦ ὑδραργύρου εἰς 50^0 C.

Λύσις. Ἐπειδὴ ὁ ὄγκος τῶν διαφόρων στερεῶν ἢ ὑγρῶν σωμάτων μεταβάλλεται μετὰ τῆς θερμοκρασίας, ἐνῷ ἡ μᾶζα των διατηρεῖται σταθερά, ἕπεται ὅτι ἡ πυκνότης τοῦ ὑδραργύρου θὰ μεταβάλλεται μετὰ τῆς θερμοκρασίας. Ἐὰν $\rho_0 = m/V_0$ εἶναι ἡ ἀρχικὴ πυκνότης τοῦ ὑδραργύρου, μετὰ τὴν θέρμανσιν αὐτοῦ κατὰ $\Delta\theta$ βαθμοὺς Κελσίου ἡ πυκνότης θὰ εἶναι:

$$\rho_\theta = \frac{m}{V_\theta} \tag{1}$$

Ἀλλά, ὡς γνωστόν, $V\theta = V_0\ (1 + \gamma \cdot \Delta\theta)$ καὶ συνεπῶς ἡ σχέσις (1) γράφεται:

$$\rho_\theta = \frac{m}{V_0 (1 + \gamma \cdot \Delta\theta)} = \frac{\rho_0}{1 + \gamma \cdot \Delta\theta}$$

ὅπου γ εἶναι ὁ συντελεστὴς τῆς κυβικῆς διαστολῆς. Ἐκ τῆς σχέσεως ταύτης, ἐὰν θέσωμεν τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως: $\rho_0 = 13{,}6\ \text{gr/cm}^3$, $\gamma = 182 \cdot 10^{-6}$ grad^{-1} καὶ $\Delta\theta = 50^0$ C, εὑρίσκομεν:

$$\underline{\rho_\theta = 13{,}48\ \text{gr/cm}^3.}$$

1086. Εἰς 18^0 C ἡ πυκνότης τοῦ ὑδραργύρου εἶναι 13,551 gr/cm^3. Πόση ἡ πυκνότης αὐτοῦ εἰς 0^0 C καὶ 100^0 C καὶ εἰς ποίαν θερμοκρασίαν εἶναι 13,6 gr/cm^3. ($\gamma_{\text{ὑδρ.}} = 181 \cdot 10^{-6}$ grad^{-1}.)

Λύσις. Εἰς 0^0 C ἡ πυκνότης ρ_0 τοῦ ὑδραργύρου εἶναι:

$$\rho_0 = \rho_{\theta_1}\ (1 + \gamma \cdot \Delta\theta) \tag{1}$$

ὅπου ρ_{θ_1} εἶναι ἡ πυκνότης τοῦ ὑδραργύρου εἰς θερμοκρασίαν $\theta_1{}^0$ C, γ ὁ συντελεστὴς τῆς κυβικῆς διαστολῆς καὶ $\Delta\theta$ ἡ μεταβολὴ τῆς θερμοκρασίας (βλ. προηγουμένην ἄσκησιν).

Συνεπῶς, ἐὰν εἰς τὴν ἀνωτέρω σχέσιν (1) θέσωμεν: $\rho_{\theta_1} = 13{,}551\ \text{gr/cm}^3$, $\gamma = 181 \cdot 10^{-6}$ grad^{-1} καὶ $\Delta\theta = 18^0$ C, εὑρίσκομεν ὅτι ἡ πυκνότης τοῦ ὑδραργύρου εἰς 0^0 C εἶναι:

$$\underline{\rho_0 = 13{,}595\ \text{gr/cm}^3.}$$

Διὰ τὴν εὕρεσιν τῆς πυκνότητος τοῦ ὑδραργύρου εἰς θερμοκρασίαν $\theta_2 = 100^0$ C θέτομεν εἰς τὴν σχέσιν (1) ὅπου θ_1 τὸ ἴσον του θ_2 καὶ λύομεν ὡς πρὸς ρ_{θ_2}, ὅτε λαμβάνομεν:

$$\rho_{\theta_2} = \frac{\rho_0}{1 + \gamma \cdot \Delta\theta} \tag{2}$$

καὶ συμφώνως πρὸς τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως εὑρίσκομεν ὅτι ἡ πυκνότης τοῦ ὑδραργύρου εἰς τὴν θερμοκρασίαν 100^0 C εἶναι:

$$\underline{\rho_{\theta_2} = 13{,}353\ \text{gr/cm}^3.}$$

Ἀκολούθως διὰ τὴν εὕρεσιν τῆς θερμοκρασίας θ_3 εἰς τὴν ὁποίαν ὁ ὑδράργυρος ἔχει πυκνότητα $\rho_{\theta_3} = 13{,}6\ gr/cm^3$ λαμβάνομεν ἐκ τῆς σχέσεως (1), θέτοντες ὅπου $\theta_1 = \theta_3$ καὶ $\Delta\theta = \theta_3$:

$$\theta_3 = \frac{\rho_0 - \rho_{\theta_3}}{\rho_{\theta_3} \cdot \gamma}$$

καὶ συμφώνως πρὸς τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως εὑρίσκομεν :

$$\underline{\theta_3 = -1{,}9^0\ C.}$$

1087. Μέχρι ποίας θερμοκρασίας πρέπει νὰ θερμανθῇ ἀέριος μᾶζα θερμοκρασίας 17^0 C, ἵνα ὑπὸ σταθερὰν πίεσιν ὁ ὄγκος αὐτῆς διπλασιασθῇ.

Λύσις. Ὁ ὄγκος V_θ ἑνὸς ἀερίου εἰς θερμοκρασίαν θ^0 C εὑρίσκεται ἐκ τοῦ νόμου τοῦ Gay–Lussac ὅτι εἶναι :

$$V_\theta = V_0\ (1 + \alpha \cdot \theta) \qquad (1)$$

ὅπου V_0 εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ ἀερίου πάντοτε ὑπὸ θερμοκρασίαν 0^0 C, καὶ $\alpha = 1/273\ grad^{-1}$ συντελεστὴς σταθερὸς δι' ὅλα τὰ ἀέρια.

Ἐὰν ἐφαρμόσωμεν τὴν σχέσιν (1) καὶ διὰ θερμοκρασίαν $\theta_1{}^0$ C, θὰ ἔχωμεν :

$$V_{\theta_1} = V_0\ (1 + \alpha \cdot \theta_1) \qquad (2)$$

Διαιροῦμεν τὰς σχέσεις (1) καὶ (2) κατὰ μέλη, ὅτε λαμβάνομεν τὴν σχέσιν :

$$\frac{V_\theta}{V_{\theta_1}} = \frac{1 + \alpha \cdot \theta}{1 + \alpha \cdot \theta_1} \qquad (3)$$

ἢ, ἐπειδὴ κατὰ τὴν ἐκφώνησιν τῆς ἀσκήσεως $V_\theta = 2\ V_{\theta_1}$, ἔχομεν :

$$2 = \frac{1 + \alpha \cdot \theta}{1 - \alpha \cdot \theta_1} \qquad (4)$$

Ἀκολούθως λύοντες τὴν σχέσιν (4), ὡς πρὸς τὴν ζητουμένην θερμοκρασίαν θ, προκύπτει ἡ σχέσις :

$$\theta = \frac{1 + 2\ \alpha \cdot \theta_1}{\alpha} \qquad (5)$$

ἐξ ἧς θέτοντες : $\alpha = 1/273\ grad^{-1}$ καὶ $\theta_1 = 18^0$ C, εὑρίσκομεν :

$$\underline{\theta = 307^0\ C.}$$

1088. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ μᾶζα ἀέρος, ἡ ὁποία καταλαμβάνει ὄγκον 20 λίτρων ὑπὸ θερμοκρασίαν 0° C καὶ πίεσιν 100 at. (Μᾶζα 1 λίτρου ἀέρος ὑπὸ κανονικὰς συνθήκας 1,293 gr.)

Λύσις. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν μᾶζαν τοῦ ἀερίου, πρέπει νὰ ἀναγάγωμεν τὸν ὄγκον αὐτοῦ εἰς θερμοκρασίαν 0^0 C καὶ ὑπὸ πίεσιν 1 ἀτμοσφαίρας (κανονικαὶ συνθῆκαι). Πρὸς τοῦτο ἐφαρμόζομεν τὸν τύπον τῆς ἰσοθέρμου μεταβολῆς (νόμος Boyle – Mariotte) :

$$p \cdot V = p_1 \cdot V_1 \qquad (1)$$

ἐξ οὗ προκύπτει ὅτι :

$$V = \frac{p_1 \cdot V_1}{p} \qquad (2)$$

Συνεπῶς, ἐὰν καλέσωμεν ρ τὴν πυκνότητα τοῦ ἀέρος ὑπὸ κανονικὰς συνθήκας, τότε ἡ ζητουμένη μᾶζα m τοῦ ἀέρος θὰ δίδεται διὰ τοῦ τύπου :

$$m = \rho \cdot V = \frac{\rho \cdot p_1 \cdot V_1}{p} \qquad (3)$$

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (3): $\rho = 1{,}293$ gr/*lt*, $V_1 = 20$ *lt*, $p_1 = 100$ at $= 100$ kgr*/cm² καὶ $p = 1{,}033$ kgr*/cm², εὑρίσκομεν:

$$\underline{m = 2\,500 \text{ gr} = 2{,}5 \text{ kgr}.}$$

1089. Ποσότης 50 λίτρων διοξειδίου τοῦ ἄνθρακος εὑρίσκεται ὑπὸ θερμοκρασίαν 280° ἀπολ. καὶ πίεσιν 840 Torr. Πόσος ὁ ὄγκος αὐτοῦ εἰς 30° C καὶ 600 Torr.

Λύσις. Ἔστω ὅτι n Mol ἀερίου εὑρίσκονται εἰς θερμοκρασίαν T_1 ἀπόλυτον, ὑπὸ πίεσιν p_1, καὶ καταλαμβάνουν ὄγκον V_1. Τότε συμφώνως πρὸς τὴν ἐξίσωσιν τῶν τελείων ἀερίων θὰ ἔχωμεν:

$$p_1 \cdot V_1 = n \cdot R \cdot T_1 \tag{1}$$

Ἐὰν δὲ ἡ αὐτὴ μᾶζα ἀερίου εὑρίσκεται εἰς θερμοκρασίαν T_2, ὑπὸ πίεσιν p_2, καὶ καταλαμβάνη ὄγκον V_2, θὰ ἔχωμεν:

$$p_2 \cdot V_2 = n \cdot R \cdot T_2 \tag{2}$$

Διαιροῦμεν τὰς σχέσεις (1) καὶ (2) κατὰ μέλη καὶ λαμβάνομεν:

$$\frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{p_2 \cdot V_2}{T_2} \quad \text{ἢ} \quad V_1 = \frac{p_2 \cdot V_2 \cdot T_1}{T_2 \cdot p_1} \tag{3}$$

Ἐὰν εἰς τὴν σχέσιν (3) θέσωμεν: $V_2 = 50$ *lt*, $T_2 = 280°$ K, $p_2 = 840$ Torr, $T_1 = 273 + 30 = 303°$ K καὶ $p_1 = 600$ Torr, εὑρίσκομεν:

$$\underline{V_1 = 75{,}75 \text{ } lt.}$$

1090. Πόσος ὁ ὄγκος ὁ καταλαμβανόμενος ὑπὸ 0,2 Mol ἀερίου ὑπὸ πίεσιν 720 Torr καὶ θερμοκρασίαν 20° C.

Λύσις. Ἐκ τῆς ἐξισώσεως τῶν τελείων ἀερίων $p \cdot V = n \cdot R \cdot T$, ἐὰν λύσωμεν αὐτὴν ὡς πρὸς V, λαμβάνομεν:

$$V = \frac{n \cdot R \cdot T}{p} \tag{1}$$

Θέτομεν: $n = 0{,}2$ Mol, $R = 8{,}31 \cdot 10^7$ erg · Mol⁻¹ · grad⁻¹, $T = 273 + 20 = 293°$ K, $p = 1\,033 \cdot 981 \cdot 720/760 = 96 \cdot 10^4$ dyn/cm² (καθότι ἡ ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις εἶναι $1\,033 \cdot 981$ dyn/cm² καὶ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν πίεσιν τὴν ὁποίαν ἐξασκεῖ στήλη ὑδραργύρου 760 mm), καὶ εὑρίσκομεν:

$$\underline{V = 5\,070 \text{ cm}^3.}$$

1091. Μᾶζα χλωρίου καταλαμβάνει ὄγκον 200 cm³ εἰς 100° C. Πόσος ὁ ὄγκος αὐτῆς εἰς 0° C ὑπὸ τὴν αὐτὴν πίεσιν.

Λύσις. Ἡ σχέσις (3) $\frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{p_2 \cdot V_2}{T_2}$ τῆς ἀσκήσεως 1089, ἐφ' ὅσον ἡ πίεσις παραμένει ἡ αὐτὴ ($p_1 = p_2$), γράφεται ὡς ἑξῆς:

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} \tag{1}$$

ἢ

$$V_1 = \frac{V_2 \cdot T_1}{T_2} \tag{2}$$

Θέτομεν: $V_2 = 200$ cm³, $T_2 = 273 + 100 = 373°$ K, $T_1 = 273°$ K, καὶ εὑρίσκομεν:

$$\underline{V_1 = 147 \text{ cm}^3.}$$

1092. Χαλύβδινον δοχεῖον περιέχει διοξείδιον τοῦ ἄνθρακος ὑπὸ θερμοκρασίαν 27° C καὶ πίεσιν 12 ἀτμοσφαιρῶν. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐσωτερικὴ πίεσις τοῦ ἀερίου, ὅταν τοῦτο θερμανθῇ μέχρις 100° C.

Λύσις. Τὸ διοξείδιον τοῦ ἄνθρακος καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις ἔχει τὸν αὐτὸν ὄγκον, δηλ. τὸν ὄγκον τοῦ δοχείου. Οὕτω, ἐὰν εἰς τὴν σχέσιν (3) $\frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{p_2 \cdot V_2}{T_2}$ τῆς ἀσκήσεως 1089 θέσωμεν $V_1 = V_2$, λαμβάνομεν :

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} \quad \text{ἢ} \quad p_1 = \frac{p_2 \cdot T_1}{T_2}$$

Θέτομεν : $p_2 = 12$ at, $T_2 = 273 + 27 = 300^0$ K, $T_1 = 273 + 100 = 373^0$ K, καὶ εὑρίσκομεν :

$$\underline{p_1 = 14{,}9 \text{ at.}}$$

1093. Ἓν λίτρον ἀερίου μάζης εὑρίσκεται ὑπὸ πίεσιν 1 ἀτμοσφαίρας καὶ θερμοκρασίαν —20° C. Τὸ ἀέριον πρέπει ὑπὸ θερμοκρασίαν 40° C νὰ καταλαμβάνῃ ὄγκον 0,5 *lt*. Πόση ἡ πίεσις αὐτοῦ.

Λύσις. Ἀπὸ τὴν σχέσιν (3) τῆς ἀσκήσεως 1089, ἤτοι :

$$\frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{p_2 \cdot V_2}{T_2}$$

λαμβάνομεν :

$$p_1 = \frac{p_2 \cdot V_2 \cdot T_1}{T_2 \cdot V_1}$$

Θέτομεν : $p_2 = 1$ at, $T_2 = 273 - 20 = 253^0$ K, $V_2 = 1\ lt$, $V_1 = 0{,}5\ lt$ καὶ $T_1 = 273 + 40 = 313^0$ K, εὑρίσκομεν :

$$\underline{p_1 = 2{,}47 \text{ at.}}$$

1094. Ἓν γραμμομόριον ἀερίου καταλαμβάνει ὑπὸ κανονικὰς συνθήκας ὄγκον 22,4 λίτρων. Ζητοῦνται : α) Πόση ἡ ἀπαιτουμένη πίεσις διὰ τὴν συμπίεσιν ἑνὸς γραμμομορίου ὀξυγόνου εἰς δοχεῖον χωρητικότητος 5 λίτρων καὶ ὑπὸ θερμοκρασίαν 100° C. β) Πόση ἡ θερμοκρασία διὰ νὰ διατηρήσωμεν τὸ ὀξυγόνον ἐντὸς τοῦ δοχείου ὑπὸ πίεσιν 3 at. γ) Πόση χωρητικότης θὰ ἀπῃτεῖτο διὰ νὰ διατηρηθῇ τὸ ὀξυγόνον ὑπὸ συνθήκας 100° C καὶ ὑπὸ πίεσιν 3 at.

Λύσις. α) Ἐκ τοῦ τύπου $\frac{p_2 \cdot V_2}{T_2} = \frac{p_1 \cdot V_1}{T_1}$ (βλ. ἄσκησιν 1089), ἐὰν λύσωμεν ὡς πρὸς p_2, λαμβάνομεν :

$$p_2 = \frac{p_1 \cdot V_1 \cdot T_2}{T_1 \cdot V_2} \qquad (1)$$

Θέτομεν : $p_1 = 1$ at, $V_1 = 22{,}4\ lt$, $T_1 = 273^0$ K, $T_2 = 373^0$ K, $V_2 = 5\ lt$, καὶ εὑρίσκομεν :

$$\underline{p_2 = 6{,}12 \text{ at.}}$$

β) Ἐκ τοῦ τύπου (1), ἐὰν λύσωμεν ὡς πρὸς T_2, λαμβάνομεν :

$$T_2 = \frac{p_2 \cdot V_2 \cdot T_1}{p_1\ V_1}$$

Θέτομεν : $p_2 = 3$ at, $V_2 = 5\ lt$, $T_1 = 273^0$ K, $p_1 = 1$ at. $V_1 = 22{,}4\ lt$, καὶ εὑρίσκομεν :

$$\underline{T_2 = 182{,}8^0 \text{ K} \quad \text{ἢ} \quad \theta = 182{,}8 - 273 = -90{,}2^0 \text{ C.}}$$

γ) Ἐκ τοῦ τύπου (1), ἐὰν λύσωμεν ὡς πρὸς V_2, λαμβάνομεν :

$$V_2 = \frac{p_1 \cdot V_1 \cdot T_2}{T_1 \cdot p_2}$$

Θέτομεν : $p_1 = 1$ at, $V_1 = 22{,}4\ lt$, $T_1 = 273^0$ K, $T_2 = 383^0$ K, $p_2 = 3$ at, καὶ εὑρίσκομεν :

$$\underline{V_2 = 10{,}2\ lt.}$$

1095. Ὑπὸ κανονικὰς συνθήκας, 28 gr ἀζώτου καταλαμβάνουν ὄγκον 22,4 λίτρων. Πόση ἡ μᾶζα 10 λίτρων ἀζώτου ὑπὸ θερμοκρασίαν 25° C καὶ πίεσιν 810 Torr.

Λύσις. Διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν μᾶζαν τοῦ ἀζώτου ὄγκου 10 *lt*, θερμοκρασίας 25° C καὶ πιέσεως 810 Torr, ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον τοῦ ἀζώτου ὑπὸ κανονικὰς συνθήκας. Ὁ ὄγκος τοῦ ἀζώτου, ὑπὸ κανονικὰς συνθήκας, εὑρίσκεται ἐκ τοῦ γνωστοῦ τύπου (βλ. ἄσκησιν 1089) :

$$\frac{p_1\ V_1}{T_1} = \frac{p_2\ V_2}{T_2}$$

ὅτι εἶναι :

$$V_1 = \frac{p_2 \cdot V_2 \cdot T_1}{T_2 \cdot p_1} = \frac{810 \cdot 10 \cdot 273}{(273 + 5) \cdot 760} = 0{,}99\ lt.$$

Ἐφ' ὅσον ὄγκος ἀζώτου 22,4 *lt* ὑπὸ κανονικὰς συνθήκας ἔχει μᾶζαν 28 gr, εὑρίσκομεν διὰ τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν ὅτι ὁ ὄγκος 0,99 *lt* ἀζώτου, ὑπὸ κανονικὰς συνθήκας, θὰ ἔχῃ μᾶζαν :

$$\underline{m = \frac{0{,}99 \cdot 28}{22{,}4} = 12{,}2\ gr.}$$

1096. Ἡ πυκνότης τοῦ ὀξυγόνου εἶναι ὑπὸ κανονικὰς συνθήκας 1,43 gr/*lt*. Πόση ἡ πυκνότης αὐτοῦ εἰς 17° C καὶ πίεσιν 700 Torr.

Λύσις. Ἐκ τοῦ τύπου τῆς πυκνότητος :

$$\rho_\theta = \rho_0 \cdot \frac{p}{p_0(1 + \alpha \cdot \theta)}$$

εὑρίσκομεν :

$$\underline{\rho_\theta} = 1{,}43 \cdot \frac{700}{760\left(1 + \frac{1}{273} \cdot 17\right)} = \underline{1{,}24\ gr/lt.}$$

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Β'

1097. Ὀρειχαλκίνη σφαῖρα ἔχει ἀκτῖνα 6 cm εἰς 0° C. Εὕρετε κατὰ πόσον αὐξάνεται ὁ ὄγκος της, ὅταν ἡ θερμοκρασία της γίνῃ 100° C. ($\alpha_{ὀρειχ.} = 0{,}0\,000\,189$ grad^{-1}.) (Ἀπ. 5,133 cm³.)

1098. Ὡρολόγιον δίδει τὴν ἀκριβῆ ὥραν εἰς 15° C. Πόσα δευτερόλεπτα θὰ χάνῃ ἐντὸς 24 ὡρῶν, ὅταν ἡ θερμοκρασία εἶναι 25° C. (Δίδεται : συντελεστὴς γραμμικῆς διαστολῆς τοῦ ἐκκρεμοῦς $\alpha = 0{,}000\,018$ grad^{-1}.) (Ἀπ. Περίπου 8 sec.)

1099. Πόσα εἶναι τὰ μήκη ῥάβδων ἐξ ὀρειχάλκου καὶ χάλυβος συνηνωμένα διὰ τὴν κατασκευὴν ἐκκρεμοῦς ἀντισταθμίσεως, τῶν ὁποίων τὸ σταθερὸν μῆκος εἶναι 0,75 m. ($\alpha_{ὀρειχ.} = 18 \cdot 10^{-6}$ grad^{-1}, $\alpha_{χάλ.} = 12 \cdot 10^{-6}$ grad^{-1}.) (Ἀπ. 150 cm, 225 cm.)

1100. Ἡ θερμοκρασία γεφύρας ἐκ χάλυβος ($\alpha = 14 \cdot 10^{-6}$ grad^{-1}), μήκους 200 m, κατέρχεται τὸν χειμῶνα εἰς — 15° C καὶ ἀνέρχεται τὸ θέρος μέχρι 40° C. Πόσον διάκενον πρέπει νὰ ἔχῃ προβλεφθῆ εἰς ἕκαστον ἄκρον αὐτῆς, ἵνα ἐπιτρέπεται ἡ ἀκώλυτος διαστολή της. (Ἀπ. 7,7 cm.)

1101. Πόση δύναμις πρέπει νὰ ἐφαρμοσθῇ εἰς σιδηρᾶν ράβδον μήκους 10 m καὶ τομῆς 5 cm^2, ἵνα ἐμποδισθῇ ἡ συστολὴ αὐτῆς, ὅταν ἡ θερμοκρασία της ἐλαττωθῇ ἀπὸ 100° C εἰς 20° C. Τὸ μέτρον ἐλαστικότητος τοῦ σιδήρου εἶναι 20 000 kgr*/mm^2. ($\alpha_{\sigma\iota\delta.} = 12 \cdot 10^{-6}$ $grad^{-1}$.) ('Απ. 9 600 kgr*.)

1102. Δύο μεταλλικαὶ ταινίαι, ἡ μία ἐκ σιδήρου καὶ ἡ ἑτέρα ἐκ χαλκοῦ, πάχους 1 mm, παρουσιάζουν εἰς 0° C τὸ αὐτὸ μῆκος. Κάμπτονται ἡ μία ἐπὶ τῆς ἄλλης καὶ φέρονται εἰς 200° C. Πόση ἡ μέση ἀκτὶς τοῦ σχηματιζομένου τόξου τοῦ κύκλου. ($\alpha_{\sigma\iota\delta.} = 12 \cdot 10^{-6}$ $grad^{-1}$, $\alpha_{\chi\alpha\lambda.} = 18 \cdot 10^{-6}$ $grad^{-1}$.) ('Απ. 83,33 cm.)

1103. Τὸ ἀκριβὲς μῆκος ὑαλίνης ράβδου καὶ κανόνος ἐξ ὀρειχάλκου εἶναι εἰς 0° C 100 cm. Ποῖον εἶναι τὸ μῆκος τῆς ράβδου εἰς 100° C, ὅταν τοῦτο μετρῆται διὰ τοῦ προηγουμένου κανόνος, εὑρισκομένου εἰς τὴν αὐτὴν θερμοκρασίαν. ($\alpha_{\upsilon\alpha\lambda.} = 8 \cdot 10^{-6}$ $grad^{-1}$, $\alpha_{o\rho\epsilon\iota\chi.} = 185 \cdot 10^{-7}$ $grad^{-1}$.) ('Απ. 998,96 mm.)

1104. Εἰς 20° C μία ὀρειχαλκίνη ράβδος ἔχει μῆκος 128,2 cm καὶ μία σιδηρᾶ 128,4 cm. Εἰς ποίαν θερμοκρασίαν θὰ ἔχουν τὸ αὐτὸ μῆκος. ($\alpha_{o\rho\epsilon\iota\chi.} = 185 \cdot 10^{-7}$ $grad^{-1}$, $\alpha_{\sigma\iota\delta.} = 12 \cdot 10^{-6}$ $grad^{-1}$.) ('Απ. 254° C.)

1105. Ὀρθογώνιος πλὰξ ἐκ ψευδαργύρου ἔχει 50 cm μῆκος καὶ 20 cm πλάτος εἰς 0° C. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τύπος ὁ ὁποῖος δίδει τὸ ἐμβαδὸν τῆς πλακὸς εἰς θερμοκρασίαν θ° C. Ἀριθμητικὴ ἐφαρμογή: θ = 20° C καὶ θ = 50° C. ($\alpha_{\psi\epsilon\upsilon\delta.} = 2{,}9 \cdot 10^{-5}$ $grad^{-1}$.) ('Απ. $S = 1\,000\,(1 + 2\,\alpha \cdot \theta)$, 1 001,16 cm^2, 1 002,9 cm^2.)

1106. Ράβδος ἔχει εἰς θερμοκρασίαν 20° C μῆκος 80 cm. Ποῖον θὰ εἶναι, μὲ προσέγγισιν 0,1 mm, τὸ ἀποτέλεσμα τῆς μετρήσεως τοῦ μήκους αὐτῆς διὰ κανόνος τῆς ἰδίας θερμοκρασίας, τοῦ ὁποίου αἱ ἐνδείξεις εἶναι ὀρθαὶ εἰς θερμοκρασίαν 0° C. ('Απ. 79,97 cm.)

1107. Κανὼν ἐξ ὀρειχάλκου ἐβαθμολογήθη εἰς θερμοκρασίαν 0° C, δι' αὐτοῦ δὲ μετρεῖται εἰς 20° C τὸ μῆκος ράβδου καὶ εὑρίσκεται ἴσον πρὸς 80 cm. Ποῖον τὸ πραγματικὸν μῆκος αὐτῆς. ($\alpha_{o\rho\epsilon\iota\chi.} = 185 \cdot 10^{-7}$ $grad^{-1}$.) ('Απ. 80,03 cm.)

1108. Λεπτὸς ὑάλινος σωλὴν τομῆς 1 mm^2 ἀπολήγει εἰς τὸ κατώτερον ἄκρον αὐτοῦ εἰς σφαιρικὸν δοχεῖον, τὸ ὁποῖον εἰς 0° C περιέχει 500 mm^3 ἀλκοόλης, ἐντὸς δὲ τοῦ σωλῆνος εὑρίσκονται εἰσέτι 10 mm^3 ὑγροῦ. Κατὰ πόσον ὑψοῦται εἰς τὸν σωλῆνα ἡ ἀλκοόλη, ἐὰν θερμανθῇ ἀπὸ 0° C εἰς 50° C. Θὰ ληφθῇ ὑπ' ὄψιν ἡ διαστολὴ τῆς σφαίρας, ἐνῷ ἡ τοῦ σωλῆνος θὰ θεωρηθῇ ἀμελητέα. ($\alpha_{\upsilon\alpha\lambda.} = 8 \cdot 10^{-6}$ $grad^{-1}$, $\gamma_{\alpha\lambda\kappa.} = 11 \cdot 10^{-4}$ $grad^{-1}$.) ('Απ. 27,4 mm.)

1109. Σωλὴν σχήματος U περιέχει τολουόλην. Τὸ ἓν σκέλος αὐτοῦ εὑρίσκεται ἐντὸς τηκομένου πάγου, τὸ δὲ ἕτερον ἐντὸς ὑδρατμοῦ θερμοκρασίας 98,80° C. Τὰ ὕψη τῶν στηλῶν τοῦ ὑγροῦ εἰς τὰ δύο σκέλη εὑρέθησαν ἴσα πρὸς 412,5 mm καὶ 456,9 mm. Ποῖος ὁ συντελεστὴς θερμικῆς διαστολῆς τῆς τολουόλης. ('Απ. 1 090 · 10^{-6} $grad^{-1}$.)

1110. Πόση μᾶζα ὑδραργύρου πρέπει νὰ εἰσαχθῇ εἰς ὑάλινον σωλῆνα 100 cm^3 εἰς τὴν θερμοκρασίαν 0° C, ἵνα ὁ φαινόμενος ὄγκος εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς θερμοκρασίας. ($\gamma_{\upsilon\delta\rho.} = 18 \cdot 10^{-5}$ $grad^{-1}$, $\gamma_{\upsilon\alpha\lambda.} = 26 \cdot 10^{-6}$ $grad^{-1}$, $\rho_{\upsilon\delta\rho.} = 13{,}6$ gr/cm^3.) ('Απ. 196,3 gr.)

1111. Δοχεῖον ὑάλινον τελείως πληρούμενον περιέχει, εἰς 0° C, 680 gr ὑδραργύρου τοῦ ὁποίου ὁ συντελεστὴς ἀπολύτου διαστολῆς εἶναι 182 · 10^{-6} $grad^{-1}$. Θερμαίνεται τὸ δοχεῖον εἰς τὴν θερμοκρασίαν 75° C, ὅτε ἐξέρχονται αὐτοῦ 7,849 gr ὑδραργύρου. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ συντελεστὴς κυβικῆς διαστολῆς τῆς ὑάλου. Πληροῦται ἀκολούθως ἀπὸ πετρέλαιον εἰς 0° C καὶ θερμαίνεται εἰς 30° C, ὅτε ἐξέρχονται αὐτοῦ 1,16

gr πετρελαίου. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ συντελεστὴς ἀπολύτου διαστολῆς πετρελαίου. ($\rho_{\text{ὑδρ.}} = 13{,}6\ gr/cm^3$, $\rho_{\text{πετρ.}} = 0{,}84\ gr/cm^3$.)
('Απ. $26 \cdot 10^{-6}\ grad^{-1}$, $973 \cdot 10^{-6}\ grad^{-1}$.)

1112. Δοχεῖον πληροῦται τελείως ἀπὸ 680 gr ὑδραργύρου εἰς 0° C καὶ ἀπὸ 669 gr εἰς 100° C. Ζητεῖται: α) Νὰ εὑρεθῇ ὁ συντελεστὴς κυβικῆς διαστολῆς τοῦ δοχείου. β) Τὸ δοχεῖον πληροῦται ὑδραργύρου εἰς 0° C καὶ θερμαίνεται ἕως 30° C. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ μᾶζα τοῦ ὑδραργύρου ἡ ὁποία θὰ ἐκρεύσῃ. ($\gamma_{\text{ὑδρ.}}$ $182 \cdot 10^{-6}\ grad^{-1}$.)
('Απ. $1{,}73 \cdot 10^{-5}\ grad^{-1}$, 3,34 gr.)

1113. Δοχεῖον ὑάλινον πληροῦται τελείως δι' ὑδραργύρου εἰς 0° C. Ὁ ὑδράργυρος τὸν ὁποῖον περιέχει ζυγίζει 333,2 gr*. Θερμαίνεται τὸ δοχεῖον μετὰ τοῦ ὑδραργύρου εἰς 100° C, ὅτε ἐκρέουν τοῦ δοχείου 5,38 gr Hg. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ συντελεστὴς διαστολῆς τοῦ δοχείου. ($\gamma_{\text{ὑδρ.}} = 182 \cdot 10^{-6}\ grad^{-1}$.) ('Απ. $1{,}77 \cdot 10^{-5}\ grad^{-1}$.)

1114. Εἰς θερμόμετρον βαθμολογηθὲν ἐσφαλμένως ἡ θερμοκρασία τοῦ τηκομένου πάγου ἀντιστοιχεῖ εἰς ἔνδειξιν + 1° C, ἐνῷ ἡ τοῦ ζέοντος ὕδατος εἰς 99° C. Ποία ἡ ὀρθὴ θερμοκρασία, ὅταν ἡ ἔνδειξις τοῦ θερμομέτρου εἶναι 25° C καὶ ποία ἡ θερμοκρασία ἡ μετρουμένη ὀρθῶς ὑπὸ τοῦ θερμομέτρου. ('Απ. 24,5° C, 50° C.)

1115. Μᾶζα ἀέρος καταλαμβάνει ὄγκον 1,50 *lt* εἰς θερμοκρασίαν 10° C. Εἰς ποίαν θερμοκρασίαν, ὑπὸ σταθερὰν πίεσιν, ὁ ὄγκος του γίνεται 2,10 *lt*. ('Απ. 123° C.)

1116. Ὡρισμένη μᾶζα ἀερίου καταλαμβάνει ὄγκον 235 cm^3 εἰς τὴν θερμοκρασίαν 18° C καὶ ὑπὸ πίεσιν 738 mm Hg. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ ἀερίου ὑπὸ κανονικὰς συνθήκας (0° C καὶ 760 Torr). ('Απ. 214 cm^3.)

1117. Φιάλη περιέχουσα ξηρὸν ἀέρα εἰς θερμοκρασίαν 100° C εἶναι ἑρμητικῶς πωματισμένη. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τιμὴ τῆς δυνάμεως ἥτις ἐξασκεῖται ἐπὶ τοῦ πώματος, ὅταν ἡ θερμοκρασία ἐλαττωθῇ εἰς 18° C. Τομὴ πώματος 16 cm^2, ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις 1 kgr^*/cm^2. ('Απ. 3,52 kgr*.)

1118. Ἀερικὸν θερμόμετρον χρησιμοποιεῖται διὰ τὸν ἔλεγχον ἑνὸς ὑδραργυρικοῦ ἑκατονταβάθμου θερμομέτρου. Εὑρέθη ὅτι ἡ πίεσις τοῦ ἀερίου εἰς τὸ ἀερικὸν θερμόμετρον ἦτο 675 mm Hg, ὅταν τοῦτο εὑρίσκετο ἐντὸς τηκομένου πάγου, καὶ 922 mm Hg, ὅταν τοῦτο εὑρίσκετο ἐντὸς λουτροῦ ἀτμῶν ζέοντος ὕδατος. Ὅταν τοῦτο βυθίζεται εἰς ὕδωρ δύο ἐνδιαμέσων θερμοκρασιῶν, αἱ πιέσεις εἰς τὸ σφαιρικὸν δοχεῖον εἶναι 782 καὶ 872 mm Hg ἀντιστοίχως. Ποῖαι πρέπει νὰ εἶναι αἱ ἀντίστοιχοι ἐνδείξεις τοῦ θερμομέτρου. ('Απ. 43,3° C, 79,7° C.)

1119. Δύο ὑάλιναι σφαῖραι, περιέχουσαι ἀέρα, συγκοινωνοῦν διὰ λεπτοῦ σωλῆνος, ἐντὸς τοῦ ὁποίου εὑρίσκεται σταγονίδιον ὑδραργύρου. Ὁ ὄγκος τοῦ περιεχομένου ἀέρος μέχρι τοῦ σταγονιδίου εἰς ἑκάστην πλευρὰν ἀνέρχεται, ὑπὸ θερμοκρασίαν 17° C, εἰς 120 cm^3. Εἰς ποίαν τιμὴν πρέπει νὰ ἀνυψωθῇ ἡ θερμοκρασία εἰς τὴν μίαν πλευρὰν (εἰς τὴν ἄλλην παραμένει ἀμετάβλητος), ἵνα κατὰ τὴν μετακίνησιν τοῦ σταγονιδίου ἐπέλθῃ εἰς ἀμφοτέρας τὰς πλευρὰς μεταβολὴ τοῦ ὄγκου τοῦ ἀέρος κατὰ 4 cm^3.
('Απ. 37° C.)

1120. Δοχεῖον περιέχει ἀέριον ὑπὸ πίεσιν 0,6 at καὶ θερμοκρασίαν 200° K. Ποία ἡ τιμὴ τῆς πιέσεως, ἐὰν ἐντὸς τοῦ δοχείου προστεθῇ πενταπλασία μᾶζα ἀερίου, ὁ ὄγκος ἐλαττωθῇ εἰς τὸ ἥμισυ καὶ ἡ θερμοκρασία αὐξηθῇ εἰς 320° K. ('Απ. 11,5 at.)

1121. Ὑάλινος σωλὴν σταθερᾶς τομῆς φέρει εἰς τὸ ἀνώτερον μέρος αὐτοῦ στρόφιγγα, βυθίζεται δὲ καθέτως ἐντὸς ὑδραργύρου μέχρι τοιούτου βάθους, ὥστε ἄνωθεν τῆς ἐπιφανείας νὰ ἐξέχῃ τμῆμα μήκους 400 mm. Ἡ ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις εἶναι 720 Torr. Ἀκολούθως κλείεται ἡ στρόφιγξ, καὶ ὁ σωλὴν ἀνυψοῦται μέχρις ὅτου τὸ μῆκος τοῦ ὑπεράνω τῆς ἐπιφανείας τμήματος τοῦ σωλῆνος γίνῃ 600 mm. Ζητεῖται: α) Ποῖον τὸ ὕψος ὑπεράνω τῆς ἐξωτερικῆς ἐπιφανείας τῆς στήλης τοῦ ὑδραργύρου ἐντὸς τοῦ σωλῆνος, ἐὰν ἡ θερμοκρασία εἶναι 170^0 C. β) Εἰς ποίαν θερμοκρασίαν πρέπει νὰ θερμανθῇ ὁ ἀὴρ ἐντὸς τοῦ σωλῆνος, ἵνα ἡ στάθμη τοῦ ὑδραργύρου ἐντὸς τοῦ σωλῆνος ἐξομοιωθῇ πρὸς τὴν ἐξωτερικὴν (ἥτις παραμένει ἀμετάβλητος).

('Απ. α' 556 mm. β' 162^0 C.)

1122. Ποῖον τὸ βάρος 1 200 cm^3 ὀξυγόνου, εἰς θερμοκρασίαν 14^0 C καὶ πίεσιν 740 Torr, ἂν 1 cm^3 ἀέρος εἰς 0^0 C καὶ 760 Torr ζυγίζῃ 0,001 293 gr* καὶ τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ὀξυγόνου ἐν σχέσει πρὸς τὸν ἀέρα εἶναι 1,106. ($\alpha = 1/127$ $grad^{-1}$.)

('Απ. 1,59 gr*.)

1123. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ἀέρος ἐκ τῶν δεδομένων τοῦ ἀκολούθου πειράματος: Ὑαλίνη σφαῖρα ὄγκου 2 *lt* πληροῦται ὑπὸ πίεσιν 718 Torr καὶ θερμοκρασίαν 16^0 C δι' ἀέρος καὶ ζυγίζεται. Ἀκολούθως ἐκκενοῦται μέχρις ὅτου ἡ πίεσις κατέλθῃ εἰς 6 Torr καὶ ζυγίζεται ἐκ δευτέρου. Ἡ διαφορὰ τῶν δύο ζυγίσεων εἶναι 2,308 gr*. ($\alpha = 1/273$ $grad^{-1}$.) ('Απ. 0,0013 gr*/cm^3.)

1124. Κοίλη χαλκίνη σφαῖρα πληροῦται, ὑπὸ πίεσιν 720 Torr καὶ θερμοκρασίαν 0^0 C, δι' ἀέρος. Ἡ ἐξωτερικὴ πίεσις ἀνυψοῦται ἀκολούθως εἰς 750 Torr, θερμαίνομεν δὲ τὸ δοχεῖον μέχρις ὅτου ἡ ὑπερπίεσις τοῦ ἀέρος ἐντὸς αὐτοῦ γίνῃ ἴση πρὸς τὸ 1/3 τῆς ἐξωτερικῆς ἀτμοσφαιρικῆς πιέσεως. Μέχρι ποίας τιμῆς ἀνῆλθεν ἡ θερμοκρασία. ($\alpha_{\chi\alpha\lambda.} = 17 \cdot 10^{-6}$ $grad^{-1}$, $\alpha = 1/273$ $grad^{-1}$.) ('Απ. 108^0 C.)

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Γ'

1125. Τὸ μῆκος ράβδου φαίνεται ὅτι εἶναι ἀκριβῶς 80 cm, ὅταν μετρῆται εἰς 30^0 C ὑπὸ κλίμακος τῆς ὁποίας αἱ ἐνδείξεις εἶναι ἀκριβεῖς εἰς 15^0 C. Ποῖον εἶναι τὸ ἀληθὲς μῆκος τῆς ράβδου, α) εἰς 30^0 C, β) εἰς 0^0 C. ($\alpha_{\kappa\lambda\iota\mu.} = 18 \cdot 10^{-6}$ $grad^{-1}$, $\alpha_{\rho\alpha\beta.} = 12 \cdot 10^{-6}$ $grad^{-1}$.)

1126. Τὸ ἄνω μέρος μεταλλικῆς γεφύρας ἔχει εἰς 0^0 C μῆκος 80 m. Κατὰ πόσον τὸ μῆκος αὐτῆς μεταβάλλεται μεταξὺ τῶν ἄκρων θερμοκρασιῶν -15^0 C τοῦ χειμῶνος καὶ $+35^0$ C τοῦ θέρους. ($\alpha_{\gamma\varepsilon\varphi.} = 1{,}22 \cdot 10^{-5}$ $grad^{-1}$.)

1127. Χάλκινος σωλὴν ἔχει εἰς θερμοκρασίαν 18^0 C μῆκος 998 mm. Ἐὰν δι' αὐτοῦ διέλθῃ ὑδρατμὸς θερμοκρασίας $98{,}5^0$ C, οὗτος ἐπιμηκύνεται κατὰ 1,34 mm. Ποῖος ὁ γραμμικὸς συντελεστὴς θερμικῆς διαστολῆς τοῦ χαλκοῦ.

1128. Ὁ χρόνος μιᾶς πλήρους αἰωρήσεως ἐκκρεμοῦς ἐξ ὀρειχάλκου εἶναι εἰς 15^0 C 1 sec. Πόσας ταλαντώσεις ὀλιγώτερον ἐκτελεῖ τὸ ἐκκρεμὲς ἡμερησίως, ἐὰν ἡ θερμοκρασία κατέλθῃ εἰς 30^0 C. ($\alpha_{\acute{o}\rho\varepsilon\iota\chi.} = 19 \cdot 10^{-6}$ $grad^{-1}$.)

1129. Μία μετροταινία ἔχει εἰς -20^0 F μῆκος 30 m καὶ γίνεται ἐπιμηκεστέρα εἰς 120^0 F κατὰ 8,25 cm. Νὰ εὑρεθῇ ὁ συντελεστὴς τῆς γραμμικῆς της διαστολῆς ἀνὰ βαθμὸν Κελσίου.

1130. Τὸ στέλεχος ὡρολογιακοῦ ἐκκρεμοῦς ἀποτελεῖται ἀπὸ ὀρείχαλκον συντελεστοῦ γραμμικῆς διαστολῆς $19 \cdot 10^{-6}$ $grad^{-1}$. Ἡ διάρκεια ἁπλῆς αἰωρήσεως αὐτοῦ εἶναι εἰς 16^0 C ἀκριβῶς 1 sec. Πόση ἡ διαφορὰ πορείας τοῦ ὡρολογίου ἐντὸς εἰκοσιτετραώρου, ὅταν ἡ θερμοκρασία ἀνέλθῃ εἰς 28^0 C.

1131. Πλὰξ ἐξ ἀργιλίου ἔχει διαστάσεις 62,5 cm $\times$ 198 cm εἰς 0^0 C. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν αὐτῆς εἰς 95^0 F καὶ 100^0 C. ($\alpha_{\acute{\alpha}\rho\gamma.} = 23 \cdot 10^{-6}$ $grad^{-1}$.)

1132. Κοίλη ὑαλίνη σφαῖρα ὄγκου $V = 400\ cm^3$ φέρει ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς μικρὰν ὀπήν, εἶναι δὲ πλήρης ὑδραργύρου θερμοκρασίας 0° C. Θερμαίνομεν αὐτὴν εἰς θερμοκρασίαν $\theta = 100°$ C, ὁπότε ἐκρέουν 6,228 cm^3 ὑδραργύρου. Ἐὰν ὁ γραμμικὸς συντελεστὴς θερμικῆς διαστολῆς τῆς ὑάλου εἶναι $\alpha = 9 \cdot 10^{-6}\ grad^{-1}$, ποῖος ὁ κυβικὸς συντελεστὴς θερμικῆς διαστολῆς τοῦ ὑδραργύρου.

1133. Ἡ πυκνότης τῆς τολουόλης εἰς θερμοκρασίαν 0° C εἶναι 0,8854 gr/cm^3, εἰς τὴν θερμοκρασίαν 15° C εἶναι 0,8715 gr/cm^3 καὶ εἰς τὴν θερμοκρασίαν 30° C εἶναι 0,8576 gr/cm^3. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ συντελεστὴς διαστολῆς τῆς τολουόλης μεταξὺ 0° C καὶ 15° C καὶ μεταξὺ 0° C καὶ 30° C.

1134. Ὑγρὸν ἔχει εἰδ. βάρος 0,736 gr^*/cm^3 εἰς 0° C καὶ 0,707 gr^*/cm^3 εἰς 25° C. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ἀπόλυτος συντελεστὴς διαστολῆς αὐτοῦ.

1135. Ἐντὸς ὑαλίνου σωληνίσκου ἀπολήγοντος εἰς τριχοειδὲς στόμιον θέτομεν ὑδράργυρον μέχρι τελείας πληρώσεως αὐτοῦ ὑπὸ θερμοκρασίαν 15° C. Ὁ σωλὴν ἀκολούθως θερμαίνεται εἰς 96° C. Ἐὰν ἡ ἀρχικὴ μᾶζα τοῦ ὑδραργύρου ἦτο 512 gr, πόσος ὑδράργυρος ἐξῆλθεν ἐκ τοῦ σωλῆνος. ($\alpha_{\text{ὑάλ.}} = 8{,}7 \cdot 10^{-6}\ grad^{-1}$, $\gamma_{\text{ὑδρ.}} = 182 \cdot 10^{-6}\ grad^{-1}$.)

1136. Φιάλη μὲ μικρὰν ὀπὴν εἰς τὸ κάλυμμα αὐτῆς ζυγίζει 15 gr. Ἐὰν πληρωθῇ μὲ γλυκερίνην ζυγίζει 65 gr. Ἐὰν ἀφεθῇ ἐντὸς λουτροῦ ὕδατος 60° C, μέρος τῆς γλυκερίνης ἐκρέει. Μετὰ ξήρανσιν τῆς φιάλης καὶ στάθμισιν αὐτῆς ζυγίζει 63,5 gr. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ συντελεστὴς διαστολῆς τῆς γλυκερίνης, μὴ λαμβανομένης ὑπ' ὄψιν τῆς διαστολῆς τῆς ὑάλου.

1137. Ποῖος ὁ ὄγκος 0,05 gr ὀξυγόνου εἰς 760 Torr καὶ – 40° C.

1138. Ποσότης ἀερίου ἔχει εἰς θερμοκρασίαν – 13° C ὄγκον 60 cm^3. Ποῖος ὁ ὄγκος αὐτῆς, ὅταν ἡ θερμοκρασία αὐξηθῇ ὑπὸ σταθερὰν πίεσιν εἰς + 117° C. ($\alpha = 1/273\ grad^{-1}$).

1139. Ὁ κύλινδρος ἀεραντλίας ἔχει ὄγκον 6 *lt*. Ποία ἡ μᾶζα τοῦ ἀντληθέντος ἀέρος, ἐὰν ὑπὸ θερμοκρασίαν 15° C ἡ πίεσις ἦτο ἀρχικῶς 725 Torr καὶ ὑπὸ σταθερὰν θερμοκρασίαν κατῆλθεν εἰς 15 Torr.

1140. Ἀέριον καταλαμβάνει, εἰς θερμοκρασίαν 250° K καὶ πίεσιν 2,5 at, ὄγκον 1 m^3. Πόσα γραμμάρια περιέχονται ἐντὸς αὐτοῦ.

1141. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ βάρος 1 *lt* ἀέρος εἰς 18° C καὶ ὑπὸ πίεσιν 750 Torr.

1142. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ βάρος ξηροῦ ἀέρος τοῦ περιεχομένου ἐντὸς αἰθούσης διαστάσεων 8 m · 6 m · 4 m. Ἡ ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις εἶναι 750 Torr καὶ ἡ θερμοκρασία 18° C.

1143. Νὰ εὑρεθῇ τὸ βάρος 4 *ll* διοξειδίου τοῦ θείου εἰς 16° C καὶ ὑπὸ πίεσιν 745 Torr. (Πυκνότης τοῦ SO_2 ὡς πρὸς τὸν ἀέρα 2,264.)

1144. Μᾶζα ἀέρος καταλαμβάνει, ὑπὸ πίεσιν 750 Torr καὶ θερμοκρασίαν 8° C, ὄγκον 112 cm^3. Εἰς ποίαν θερμοκρασίαν καταλαμβάνει αὕτη ὄγκον 136 cm^3 ὑπὸ πίεσιν 740 Torr.

1145. Πόση εἶναι ἡ διαφορὰ ἀνυψωτικῆς δυνάμεως ἡ ὁποία ὑπάρχει μεταξὺ δύο ἀεροστάτων ὄγκου 900 m^3, πεπληρωμένων δι' ἀερίων εἰς 18° C καὶ περιεχόντων τὸ μὲν ἓν ὑδρογόνον καὶ τὸ ἕτερον ἥλιον. ($\rho_{\text{ὑδρ.}} = 0{,}000\,09\ gr/cm^3$, $\rho_{\text{ἡλ.}} = 0{,}000\,18\ gr/cm^3$.)

1146. Ποία εἶναι ἡ μέση ταχύτης τῶν μορίων τοῦ Νέου (Ne) εἰς 0° C, ἐὰν ἡ πυκνότης του, ὑπὸ τὴν ἀτμοσφαιρικὴν πίεσιν, εἶναι 0,0009 gr/cm^3.

1147. Μᾶζα ἀέρος ὄγκου 12 m^3 ἐξασκεῖ εἰς θερμοκρασίαν 25° C ἐπὶ ἐπιφανείας 1 cm^2 δύναμιν 0,964 kgr*. Ποία ἡ ἐξασκουμένη δύναμις, ἂν ἡ θερμοκρασία ἀνυψωθῇ εἰς 150° C καὶ ὁ ὄγκος αὐτῆς γίνῃ 15 m^3. ($\alpha = 1/273$ $grad^{-1}$.)

1148. Εἰς ἀερικὸν θερμόμετρον τὸ σφαιρικὸν δοχεῖον αὐτοῦ εὑρίσκεται ἐμβαπτισμένον ἐντὸς τηκομένου πάγου, ὁπότε ἡ ἔνδειξις τῆς στάθμης τοῦ ὑδραργύρου εἰς τὸ κλειστὸν σκέλος τοῦ σωλῆνος τοῦ ὀργάνου εἶναι 173,4 mm, εἰς δὲ τὸ ἀνοικτὸν 141,5 mm. Ἡ ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις εἶναι 724,6 Torr. Εἰς ἄλλην μέτρησιν, τὸ δοχεῖον τοῦ θερμομέτρου ἐμβαπτίζεται ἐντὸς θερμοῦ λουτροῦ, ὁπότε ἡ ἔνδειξις τῆς στάθμης εἰς τὸ ἀνοικτὸν σκέλος εἶναι 356,8 mm. Ἡ ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις εἶναι 721,2 Torr. α) Ποία ἡ σταθερὰ τοῦ ὀργάνου. β) Ποία ἡ θερμοκρασία τοῦ λουτροῦ.

1149. Μᾶζα ἀερίου συλλέγεται ἐντὸς ὀγκομετρικοῦ κυλίνδρου ἄνωθεν ὑδραργύρου. Ὁ ὄγκος τοῦ ἀερίου εἰς 10° C εἶναι 50 cm^3 καὶ ἡ στάθμη τοῦ ὑδραργύρου ἐντὸς τοῦ σωλῆνος εἶναι 10 cm ἄνω τῆς ἐξωτερικῆς στάθμης. Ἡ βαρομετρικὴ πίεσις εἶναι 750 Torr. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τὸν ὁποῖον καταλαμβάνει τὸ ἀέριον εἰς κανονικὰς συνθήκας (0° C καὶ 760 Torr).

1150. Ἓν ἀερόστατον πληροῦται τελείως εἰς τὸ ἔδαφος ὑπὸ πίεσιν 730 Torr καὶ θερμοκρασίαν 13° C μὲ $2{,}1 \cdot 10^6$ *lt* φωταερίου. Πόσον ἀέριον, διαφεύγει ὅταν εἰς τὸ ἀερόστατον, λόγῳ ἀνόδου αὐτοῦ, ἡ πίεσις τοῦ ἀέρος ἐλαττοῦται εἰς 440 Torr, ἐνῷ ταὐτοχρόνως ἡ θερμοκρασία ἀνέρχεται εἰς 32° C.

1151. Ἐντὸς σωλῆνος σχήματος U κλειστοῦ κατὰ τὸ ἓν ἄκρον καὶ περιέχοντος ὑδράργυρον ὑπάρχει ἐγκεκλεισμένη ποσότης ἀέρος ὑπὸ πίεσιν 760 Torr ἀποτελοῦσα κατακόρυφον στήλην ὕψους 8 cm, αἱ δὲ ἐλεύθεραι ἐπιφάνειαι τοῦ ὑδραργύρου εἰς τὰ δύο σκέλη τοῦ σωλῆνος εὑρίσκονται εἰς ὕψος 2 cm ἀπὸ τοῦ κατωτάτου σημείου αὐτοῦ. Δοθέντος ὅτι ἡ ἐσωτερικὴ τομὴ τοῦ σωλῆνος εἶναι 3 cm^2 καὶ ἡ πυκνότης τοῦ ὑδραργύρου 13,6 gr/cm^3, νὰ εὑρεθῇ πόσα κυβικὰ ἑκατοστὰ ὑδραργύρου καὶ πόσα γραμμάρια πρέπει νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸ ἄλλο σκέλος τοῦ σωλῆνος, ἵνα ὁ ὄγκος τοῦ ἀέρος γίνῃ τὸ ἥμισυ τοῦ ἀρχικοῦ, τῆς θερμοκρασίας παραμενούσης σταθερᾶς εἰς 10° C. Ποῖα θὰ εἶναι τότε τὰ ὕψη τῶν ἐλευθέρων ἐπιφανειῶν τοῦ ὑδραργύρου καὶ ἡ πίεσις ἡ ἐξασκουμένη ὑπ' αὐτοῦ εἰς τὸ κατώτατον σημεῖον τοῦ σωλῆνος εἰς kgr^*/cm^2. Ἐὰν κατόπιν θερμάνωμεν τὸν ἀέρα, μέχρις ὅτου ὁ ὄγκος του γίνῃ ἴσος πρὸς τὰ 3/4 τοῦ ἀρχικοῦ, ποία θὰ εἶναι ἡ μεταβολὴ τῆς θερμοκρασίας, ποία ἡ νέα πίεσις καὶ ποῖα τὰ ὕψη τοῦ ὑδραργύρου εἰς τὰ δύο σκέλη. (Πανεπιστήμιον Θεσσαλονίκης, Ἰατρικὴ Σχολή, 1953.)

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΗ΄

ΘΕΡΜΙΔΟΜΕΤΡΙΑ

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Α΄

1152. Ποία θερμοκρασία ἀποκαθίσταται, ὅταν ἀναμιγνύωμεν 200 gr ὕδατος θερμοκρασίας 10° C μετὰ 500 gr ὕδατος θερμοκρασίας 45° C.

Λύσις. Ἔστω ὅτι ἀναμιγνύομεν ὕδωρ μάζης m_1 καὶ θερμοκρασίας θ_1 μὲ ὕδωρ μάζης m_2 καὶ θερμοκρασίας θ_2 καὶ ἔστω ἐπίσης ὅτι ἡ τελικὴ θερμοκρασία τοῦ ὕδατος μετὰ τὴν ἀποκατάστασιν θερμικῆς ἰσορροπίας εἶναι θ. Θὰ ἔχωμεν:

α) Διὰ νὰ θερμανθῇ τὸ ὕδωρ μάζης m_1 ἀπὸ τὴν θερμοκρασίαν θ_1 εἰς τὴν θερμοκρασίαν θ, προσλαμβάνει θερμότητα:

$$Q_1 = m_1 \cdot c\,(\theta - \theta_1) \qquad (1)$$

ὅπου c ἡ εἰδικὴ θερμότης τοῦ ὕδατος.

β) Διὰ νὰ ψυχθῇ τὸ ὕδωρ μάζης m_2 ἀπὸ τὴν θερμοκρασίαν θ_2 εἰς τὴν θερμοκρασίαν θ, ἀποδίδει θερμότητα :

$$Q_2 = m_2 \cdot c\ (\theta_2 - \theta) \qquad (2)$$

Ἐπειδὴ κατὰ τὴν Ἀρχὴν τῆς διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας πρέπει νὰ ἔχωμεν :

$$Q_1 = Q_2 \qquad (3)$$

προκύπτει ὅτι :

$$m_1 \cdot c\ (\theta - \theta_1) = m_2 \cdot c\ (\theta_2 - \theta) \qquad (4)$$

Δι' ἐπιλύσεως τῆς ἐξισώσεως ταύτης ὡς πρὸς θ λαμβάνομεν τὸν γενικὸν τύπον :

$$\theta = \frac{m_1 \cdot \theta_1 + m_2 \cdot \theta_2}{m_1 + m_2} \qquad (5)$$

Θέτομεν εἰς τὸν τύπον (5) τὰ δεδόμενα τῆς ἀσκήσεως : $m_1 = 200$ gr, $m_2 = 500$ gr, $\theta_1 = 10^0$ C, $\theta_2 = 45^0$ C, καὶ εὑρίσκομεν :

$$\underline{\theta = 35^0\ C.}$$

1153. Θέλομεν νὰ παρασκευάσωμεν 50 kgr ὕδατος θερμοκρασίας 35° C δι' ἀναμίξεως ὕδατος 17° C καὶ 80° C. Ποῖαι αἱ ἀντίστοιχοι ποσότητες ὕδατος 17° C καὶ 80° C.

Λύσις. Καλοῦμεν m_1 τὴν μᾶζαν τοῦ ὕδατος τῆς μικροτέρας θερμοκρασίας θ_1 καὶ m_2 τὴν μᾶζαν τοῦ ὕδατος τῆς μεγαλυτέρας θερμοκρασίας θ_2, c τὴν εἰδικὴν θερμότητα τοῦ ὕδατος καὶ m τὴν μᾶζαν τοῦ ὕδατος τῆς τελικῆς θερμοκρασίας θ, ἡ ὁποία θὰ προέλθῃ ἐκ τῆς ἀναμίξεως τοῦ ὕδατος. Θὰ ἔχωμεν προφανῶς τὰς σχέσεις :

$$m_1 \cdot c\ (\theta - \theta_1) = m_2 \cdot c\ (\theta_2 - \theta) \qquad (1)$$

καὶ

$$m_1 + m_2 = m \qquad (2)$$

Ἐκ τῶν δύο τούτων σχέσεων προκύπτει ἡ σχέσις :

$$m_1 = \frac{m\ (\theta_2 - \theta)}{\theta_2 - \theta_1} \qquad (3)$$

Θέτομεν εἰς τὴν σχέσιν (3) : $m = 50$ kgr, $\theta_2 = 80^0$ C, $\theta = 35^0$ C, $\theta_1 = 17^0$ C, καὶ εὑρίσκομεν :

$$\underline{m_1 = 35{,}7\ \text{kgr.}}$$

Ἐπίσης ἐκ τῆς σχέσεως (2) προκύπτει ὅτι :

$$\underline{m_2 = 14{,}3\ \text{kgr.}}$$

1154. Ἐντὸς γλυκερίνης θερμοκρασίας 14,5° C ρίπτονται τεμάχια ψευδαργύρου θερμοκρασίας 98,3° C. Ἡ μᾶζα γλυκερίνης καὶ ψευδαργύρου εἶναι 400 gr, ἡ δὲ θερμοκρασία ἰσορροπίας 19,6° C. Πόση ἡ μᾶζα τῆς γλυκερίνης καὶ πόση ἡ μᾶζα τοῦ ψευδαργύρου. (Εἰδ. θερμότης ψευδαργύρου 0,092 $\text{cal} \cdot \text{gr}^{-1} \cdot \text{grad}^{-1}$, γλυκερίνης 0,57 $\text{cal} \cdot \text{gr}^{-1} \cdot \text{grad}^{-1}$.)

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν m_1 τὴν μᾶζαν τῆς γλυκερίνης καὶ m τὴν συνολικὴν μᾶζαν τοῦ ψευδαργύρου καὶ τῆς γλυκερίνης, τότε ἡ μᾶζα τοῦ ψευδαργύρου θὰ εἶναι $m_2 = m - m_1$.

Ἔστω θ_1 ἡ θερμοκρασία τῆς γλυκερίνης, θ_2 ἡ θερμοκρασία τοῦ ψευδαργύρου, θ ἡ τελικὴ θερμοκρασία τοῦ μίγματος καὶ c_1 καὶ c_2 ἀντιστοίχως αἱ εἰδικαὶ θερμότητες αὐτῶν.

Ἡ θερμότης τὴν ὁποίαν ἀπορροφᾷ ἡ γλυκερίνη εἶναι :

$$Q_1 = c_1 \cdot m_1\ (\theta - \theta_1) \qquad (1)$$

ἡ δὲ θερμότης τὴν ὁποίαν ἀποδίδει ὁ ψευδάργυρος εἶναι :

$$Q_2 = c_2\ (m - m_1)\ (\theta_2 - \theta) \qquad (2)$$

Κατὰ τὴν Ἀρχὴν τῆς διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας πρέπει νὰ ἔχωμεν :

$$Q_1 = Q_2 \qquad (3)$$

καὶ συνεπῶς λαμβάνομεν δι' ἀντικαταστάσεως, βάσει τῶν σχέσεων (1) καὶ (2), ὅτι:

$$c_1 \cdot m_1 \, (\theta - \theta_1) = c_2 \, (m - m_1) \, (\theta_2 - \theta) \qquad (4)$$

καὶ δι' ἐπιλύσεως ὡς πρὸς m_1 προκύπτει ὁ γενικὸς τύπος:

$$m_1 = \frac{c_2 \cdot m \, (\theta_2 - \theta)}{c_1 \, (\theta - \theta_1) + c_2 \, (\theta_2 - \theta)} \qquad (5)$$

Θέτομεν εἰς τὸν γενικὸν τύπον (5): $m = 400$ gr, $\theta_1 = 14{,}5^0$ C, $\theta_2 = 98{,}3^0$ C, $\theta = 19{,}6^0$ C, $c_1 = 0{,}57$ cal/gr · grad, $c_2 = 0{,}092$ cal/gr · grad, καὶ εὑρίσκομεν ὅτι ἡ μᾶζα τῆς γλυκερίνης εἶναι:

$$\underline{m_1 = 285 \text{ gr.}}$$

Ἀκολούθως εὑρίσκομεν ὅτι ἡ μᾶζα τοῦ ψευδαργύρου εἶναι:

$$\underline{m_2 = 400 - 285 = 115 \text{ gr.}}$$

1155. Θερμιδόμετρον ἐκ χαλκοῦ μάζης 200 gr περιέχει 300 gr πετρελαίου. Ἡ ἀρχικὴ θερμοκρασία εἶναι 18,5° C καὶ ὅταν ἐντὸς τοῦ ὕδατος ρίψωμεν 100 gr μολύβδου θερμοκρασίας 100° C, ἡ τελικὴ θερμοκρασία καθίσταται 20° C. Πόση ἡ εἰδικὴ θερμότης τοῦ πετρελαίου, ὅταν ἡ εἰδικὴ θερμότης τοῦ χαλκοῦ εἶναι 0,092 cal · gr^{-1} · grad^{-1} καὶ τοῦ μολύβδου 0,031 cal · gr^{-1} · grad^{-1}.

Λύσις. Ἔστω m_1 ἡ μᾶζα, θ_1 ἡ ἀρχικὴ θερμοκρασία καὶ c_1 ἡ εἰδικὴ θερμότης τοῦ χαλκοῦ. Ἐὰν θ εἶναι ἡ τελικὴ θερμοκρασία τοῦ μίγματος, τότε ὁ χαλκὸς ἀπορροφᾷ θερμότητα:

$$Q_1 = c_1 \cdot m_1 \, (\theta - \theta_1) \qquad (1)$$

Ἔστω m_2 ἡ μᾶζα τοῦ πετρελαίου καὶ c_2 ἡ εἰδικὴ θερμότης αὐτοῦ. Ἡ ἀρχικὴ θερμοκρασία τοῦ πετρελαίου εἶναι θ_1. Τὸ πετρέλαιον ἀπορροφᾷ θερμότητα:

$$Q_2 = c_2 \cdot m_2 \, (\theta - \theta_1) \qquad (2)$$

Ἔστω m_3 ἡ μᾶζα, c_3 ἡ εἰδικὴ θερμότης καὶ θ_2 ἡ ἀρχικὴ θερμοκρασία τοῦ μολύβδου. Ὁ μόλυβδος ἀποδίδει θερμότητα:

$$Q_3 = c_3 \cdot m_3 \, (\theta_2 - \theta) \qquad (3)$$

Κατὰ τὴν Ἀρχὴν τῆς διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας ἔχομεν:

$$Q_1 + Q_2 = Q_3 \qquad (4)$$

Συνεπῶς προκύπτει ὅτι:

$$c_1 \cdot m_1 \, (\theta - \theta_1) + c_2 \cdot m_2 \, (\theta - \theta_1) = c_3 \cdot m_3 \, (\theta_2 - \theta) \qquad (5)$$

Λύομεν τὴν σχέσιν (5) ὡς πρὸς c_2 καὶ λαμβάνομεν τὸν γενικὸν τύπον:

$$c_2 = \frac{c_3 \cdot m_3 \, (\theta_2 - \theta) - c_1 \cdot m_1 \, (\theta - \theta_1)}{m_2 \, (\theta - \theta_1)} \qquad (6)$$

Θέτομεν τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως εἰς τὸν γενικὸν τύπον (6) καὶ εὑρίσκομεν:

$$\underline{c_2 = 0{,}488 \text{ cal/gr} \cdot \text{grad.}}$$

1156. Θερμιδόμετρον περιέχει 210 gr ὕδατος θερμοκρασίας 11,3° C. Εἰς τὸ θερμιδόμετρον προσθέτομεν 245 gr ὕδατος 31,5° C, ὅτε ἡ θερμοκρασία ἰσορροπίας εὑρίσκεται 21,7° C. Πόση ἡ θερμοχωρητικότης τοῦ θερμιδομέτρου.

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν m_1 τὴν μᾶζαν τοῦ θερμιδομέτρου, καὶ c_1 τὴν εἰδικὴν θερμότητα αὐτοῦ, τότε ἡ ζητουμένη θερμοχωρητικότης τοῦ θερμιδομέτρου θὰ εἶναι, ὡς γνωστόν, $m_1 \cdot c_1$.

Ἔστω δὲ ὅτι ἡ ἀρχικὴ θερμοκρασία τοῦ θερμιδομέτρου εἶναι θ_1 καὶ ἡ τελικὴ θερμοκρασία αὐτοῦ θ. Τὸ θερμιδόμετρον ἀπορροφᾷ θερμότητα:

$$Q_1 = c_1 \cdot m_1 \, (\theta - \theta_1) \qquad (1)$$

Ἔστω m_2 ἡ μᾶζα τοῦ ὕδατος ἐντὸς τοῦ θερμιδομέτρου καὶ c_2 ἡ εἰδικὴ θερμότης αὐτοῦ. (Ἀρχικὴ θερμοκρασία εἶναι θ_1 καὶ τελικὴ θ).

Τὸ ὕδωρ τοῦ θερμιδομέτρου ἀπορροφᾷ θερμότητα :

$$Q_2 = c_2 \cdot m_2 \, (\theta - \theta_1) \qquad (2)$$

Ἔστω m_3 ἡ μᾶζα τοῦ ὕδατος τὸ ὁποῖον προσθέτομεν καὶ θ_2 ἡ ἀρχικὴ θερμοκρασία αὐτοῦ. (Τελικὴ θερμοκρασία εἶναι θ).

Τὸ ὕδωρ τὸ ὁποῖον προσθέτομεν ἀποδίδει θερμότητα :

$$Q_3 = c_2 \cdot m_3 \, (\theta_2 - \theta) \qquad (3)$$

Συμφώνως πρὸς τὴν Ἀρχὴν τῆς διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας ἔχομεν :

$$Q_1 + Q_2 = Q_3$$

καὶ συνεπῶς προκύπτει ὅτι :

$$c_1 \cdot m_1 \, (\theta - \theta_1) + c_2 \cdot m_2 \, (\theta - \theta_1) = c_2 \cdot m_3 \, (\theta_2 - \theta) \qquad (4)$$

Λύομεν τὴν σχέσιν (4) ὡς πρὸς $c_1 \cdot m_1$ καὶ λαμβάνομεν τὸν γενικὸν τύπον :

$$c_1 \cdot m_1 = \frac{c_2 \cdot m_3 \, (\theta_2 - \theta) - c_2 \cdot m_2 \, (\theta - \theta_1)}{\theta - \theta_1} \qquad (5)$$

Θέτομεν εἰς τὸν τύπον (5) τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως : $c_2 = 1$ cal · gr^{-1} · grad^{-1}, $m_2 = 210$ gr, $m_3 = 245$ gr, $\theta_1 = 11{,}3^0$ C, $\theta_2 = 31{,}5^0$ C, $\theta = 21{,}7^0$ C, καὶ εὑρίσκομεν ὅτι ἡ θερμοχωρητικότης τοῦ θερμιδομέτρου εἶναι :

$$\underline{c_1 \cdot m_1 = 20{,}9 \text{ cal} \cdot \text{grad}^{-1}.}$$

1157. Πόσαι θερμίδες ἀπαιτοῦνται διὰ τὴν ἀνύψωσιν 100 gr χαλκοῦ ἀπὸ 10^0 C εἰς 100^0 C. Τὸ αὐτὸ ποσὸν θερμότητος προσδίδεται εἰς 100 gr ἀργιλίου 10^0 C. Ποῖον ἐκ τῶν δύο σωμάτων καθίσταται θερμότερον. (Εἰδ. θερμότης χαλκοῦ 0,093 cal · gr^{-1} · grad^{-1}, ἀργιλίου 0,217 cal · gr^{-1} · grad^{-1}.)

Λύσις. Ἂς καλέσωμεν m_1, m_2 τὰς μᾶζας τοῦ χαλκοῦ καὶ τοῦ ἀργιλίου, c_1, c_2 τὰς εἰδικὰς θερμότητας αὐτῶν ἀντιστοίχως, καθὼς καὶ θ_1 τὴν ἀρχικὴν των θερμοκρασίαν, θ_2 τὴν τελικὴν θερμοκρασίαν τοῦ χαλκοῦ καὶ θ_3 τὴν τελικὴν θερμοκρασίαν τοῦ ἀργιλίου.

Συμφώνως πρὸς τὴν θεμελιώδη ἐξίσωσιν τῆς θερμιδομετρίας θὰ ἔχωμεν διὰ τὸν χαλκόν :

$$Q_1 = m_1 \cdot c_1 \, (\theta_2 - \theta_1) \qquad (1)$$

καὶ διὰ τὸ ἀργίλιον :

$$Q_2 = m_2 \cdot c_2 \, (\theta_3 - \theta_1) \qquad (2)$$

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως (1) προκύπτει ὅτι ἡ ζητουμένη θερμότης διὰ τὴν ἀνύψωσιν τῆς θερμοκρασίας τοῦ χαλκοῦ ἀπὸ 10^0 C εἰς 100^0 C εἶναι :

$$\underline{Q_1 = 0{,}093 \cdot 100 \, (100 - 10) = 837 \text{ cal.}}$$

Διὰ συνδυασμοῦ τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) καὶ δεδομένου ὅτι $Q_1 = Q_2$ καὶ $m_1 = m_2$ προκύπτει ὅτι ἡ τελικὴ θερμοκρασία τοῦ ἀργιλίου εἶναι :

$$\theta_3 = \frac{c_1}{c_2} \, (\theta_2 - \theta_1) + \theta_1 \qquad (3)$$

Οὕτω, ἐὰν θέσωμεν εἰς τὴν (3) τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως : $c_1 = 0{,}093$ cal · gr^{-1} · grad^{-1}, $c_2 = 0{,}217$ cal · gr^{-1} · grad^{-1}, $\theta_2 = 100^0$ C καὶ $\theta_1 = 10^0$ C, εὑρίσκομεν ὅτι :

$$\underline{\theta_3 = 48{,}5^0 \text{ C.}}$$

Ἄρα ὁ χαλκὸς καθίσταται θερμότερος ἀπὸ τὸ ἀργίλιον.

1158. Διὰ νὰ προσδιορίσωμεν τὴν θερμοκρασίαν λύχνου Bunsen, ἐκτελοῦμεν τὸ κάτωθι πείραμα. Εἰς θερμιδόμετρον χαλκοῦ μάζης 152,5 gr θέτομεν 300 gr ὕδατος, ἡ δὲ ἀρχικὴ θερμοκρασία τοῦ θερμιδομέτρου καὶ ὕδατος εἶναι 18,4° C. Ἀκολούθως λαμβάνομεν τεμάχιον σιδήρου μάζης 6,85 gr, τὸ ὁποῖον θερμαίνομεν εἰς

τὸν λύχνον Bunsen **καὶ κατόπιν βυθίζομεν αὐτὸ ἐντὸς τοῦ ὕδατος τοῦ θερμιδομέτρου. Ἡ θερμοκρασία ἰσορροπίας εὑρίσκεται 21,3° C. Ἐκ τῶν δεδομένων τούτων νὰ ὑπολογισθῇ ἡ θερμοκρασία τῆς φλογὸς λύχνου** Bunsen. **(Εἰδ. θερμότης σιδήρου 0,111** $cal \cdot gr^{-1} \cdot grad^{-1}$, **χαλκοῦ 0,092** $cal \cdot gr^{-1} \cdot grad^{-1}$.**)**

Λύσις. Ἔστω θ ἡ τελικὴ θερμοκρασία τοῦ μίγματος, m_1 ἡ μᾶζα τοῦ χαλκοῦ, θ_1 ἡ ἀρχικὴ θερμοκρασία καὶ c_1 ἡ εἰδικὴ θερμότης αὐτοῦ.

Τὸ ποσὸν τῆς θερμότητος τὸ ὁποῖον ἀπερρόφησε ὁ χαλκὸς θερμαινόμενος εἶναι:

$$Q_1 = c_1 \cdot m_1 \,(\theta - \theta_1) \qquad (1)$$

Ἔστω m_2 ἡ μᾶζα τοῦ ὕδατος καὶ c_2 ἡ εἰδικὴ θερμότης αὐτοῦ. (Ἀρχικὴ θερμοκρασία τοῦ ὕδατος εἶναι θ_1).

Τὸ ποσὸν τῆς θερμότητος τὸ ὁποῖον ἀπερρόφησε τὸ ὕδωρ θερμαινόμενον εἶναι:

$$Q_2 = c_2 \cdot m_2 \,(\theta - \theta_1) \qquad (2)$$

Ἔστω, τέλος, m_3 ἡ μᾶζα τοῦ σιδήρου, c_3 ἡ εἰδικὴ θερμότης αὐτοῦ καὶ θ_2 ἡ ἀρχική του θερμοκρασία (θερμοκρασία φλογὸς λύχνου Bunsen).

Τὸ ποσὸν τῆς θερμότητος τὸ ὁποῖον ἀπέδωσε ὁ σίδηρος ψυχόμενος εἶναι:

$$Q_3 = c_3 \cdot m_3 \,(\theta_2 - \theta) \qquad (3)$$

Συμφώνως πρὸς τὴν Ἀρχὴν τῆς διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν:

$$c_1 \cdot m_1 \,(\theta - \theta_1) + c_2 \cdot m_2 \,(\theta - \theta_1) = c_3 \cdot m_3 \,(\theta_2 - \theta) \qquad (4)$$

Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν (4) ὡς πρὸς τὴν ζητουμένην θερμοκρασίαν θ_2 εὑρίσκομεν τὸν γενικὸν τύπον:

$$\theta_2 = \frac{(c_1\, m_1 + c_2\, m_2)\,(\theta - \theta_1)}{c_3 \cdot m_3} + \theta$$

Ἐὰν θέσωμεν εἰς τὸν τύπον τοῦτον τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως: $c_1 = 0{,}092$ cal/gr·grad, $c_2 = 1$ cal/gr·grad, $c_3 = 0{,}111$ cal/gr·grad, $m_1 = 152{,}5$ gr, $m_2 = 300$ gr, $m_3 = 6{,}85$ gr, $\theta_1 = 18{,}4^0$ C, $\theta = 21{,}3^0$ C, εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ζητουμένη θερμοκρασία τῆς φλογὸς τοῦ λύχνου Bunsen εἶναι:

$$\underline{\theta_2 = 1\,219^0 \text{ C.}}$$

1159. Καίονται 3 gr **ἄνθρακος πρὸς διοξείδιον τοῦ ἄνθρακος ἐντὸς θερμιδομέτρου ἐκ χαλκοῦ μάζης 1 500** gr **περιέχοντος 2 000** gr **ὕδατος. Ἡ ἀρχικὴ θερμοκρασία εἶναι 20°** C **καὶ ἡ τελικὴ 31°** C. **Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ θερμότης καύσεως τοῦ ἄνθρακος. (Εἰδ. θερμότης χαλκοῦ 0,093** $cal \cdot gr^{-1} \cdot grad^{-1}$.**)**

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν m_1 τὴν μᾶζαν τοῦ χαλκοῦ, m_2 τὴν μᾶζαν τοῦ ὕδατος, θ_1 τὴν ἀρχικὴν καὶ θ_2 τὴν τελικὴν θερμοκρασίαν, c_1 καὶ c_2 ἀντιστοίχως τὰς εἰδικὰς θερμότητας αὐτῶν, θὰ ἔχωμεν:

α) Ὁ χαλκὸς θερμαινόμενος ἀπερρόφησε θερμότητα:

$$Q_1 = c_1 \cdot m_1 \,(\theta_2 - \theta_1) \qquad (1)$$

β) Τὸ ὕδωρ θερμαινόμενον ἀπερρόφησε θερμότητα:

$$Q_2 = c_2 \cdot m_2 \,(\theta_2 - \theta_1) \qquad (2)$$

Ἐπειδὴ ἡ ὁλικὴ θερμότης $Q_1 + Q_2$ προῆλθε ἀπὸ τὴν καῦσιν τοῦ ἄνθρακος Q, θὰ ἔχωμεν συμφώνως πρὸς τὴν Ἀρχὴν τῆς διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας τὴν σχέσιν:

$$Q = Q_1 + Q_2 = c_1 \cdot m_1 \,(\theta_2 - \theta_1) + c_2 \cdot m_2 \,(\theta_2 - \theta_1)$$

ἢ

$$Q = (c_1 \cdot m_1 + c_2 \cdot m_2)\,(\theta_2 - \theta_1) \qquad (3)$$

Ἐὰν καλέσωμεν Θ_K τὴν ζητουμένην θερμότητα καύσεως, τότε: $Q = \Theta_K \cdot m$, καὶ ἡ σχέσις (3) γράφεται:

$$\Theta_K = \frac{(c_1 \cdot m_1 + c_2 \cdot m_2)\,(\theta_2 - \theta_1)}{m} \qquad (4)$$

Θέτοντες εἰς τὴν σχέσιν (4) τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως: $c_1 = 0,093$ cal/gr · grad, $c_2 = 1$ cal/gr · grad, $m_1 = 1\,500$ gr, $m_2 = 2\,000$ gr, $m = 3$ gr, $\theta_1 = 20^0$ C, $\theta_2 = 31^0$ C, εὑρίσκομεν ὅτι ἡ θερμότης καύσεως τοῦ ἄνθρακος εἶναι:

$$\Theta\kappa = 7\,845 \text{ cal/gr.}$$

1160. Ποῖον ποσὸν θερμότητος πρέπει νὰ μεταδοθῇ εἰς 1 gr Νέου εἰς 0° C, ἵνα ἡ πίεσις αὐτοῦ διπλασιασθῇ ὑπὸ σταθερὸν ὄγκον. ($c_p = 0,246$ cal · gr^{-1} · grad^{-1}, $c_p / c_\upsilon = 1,64$.)

Λύσις. Ἐκ τῆς γνωστῆς σχέσεως:

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} \tag{1}$$

ἐὰν θέσωμεν $p_2 = 2\,p_1$ λαμβάνομεν:

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{2\,p_1}{T_2} \tag{2}$$

καὶ δι' ἐπιλύσεως ὡς πρὸς T_2 προκύπτει:

$$T_2 = 2\,T_1 \tag{3}$$

Ἐκ τῆς σχέσεως (3), ἐπειδὴ $T_2 = \theta + 273^0$ καὶ $T_1 = 273^0$ C, ὅπου θ εἶναι ἡ θερμοκρασία εἰς βαθμοὺς Κελσίου, εὑρίσκομεν:

$$\theta = 273^0 \text{ C.}$$

Εἰς τὰ ἀέρια διακρίνομεν δύο εἰδικὰς θερμότητας· τὴν εἰδικὴν θερμότητα ὑπὸ σταθερὰν πίεσιν (c_p) καὶ τὴν εἰδικὴν θερμότητα ὑπὸ σταθερὸν ὄγκον (c_υ). Ὅταν θερμαίνωμεν τὰ ἀέρια εἴτε ὑπὸ σταθερὰν πίεσιν εἴτε ὑπὸ σταθερὸν ὄγκον, τότε μεταξὺ τῶν δύο εἰδικῶν θερμοτήτων ὑφίσταται ἡ σχέσις:

$$\frac{c_p}{c_\upsilon} = \kappa \tag{4}$$

Συνεπῶς λαμβάνομεν ἐκ τῆς (4) ὅτι:

$$c_\upsilon = \frac{c_p}{\kappa}$$

Ἡ ζητουμένη θερμότης, ἡ ἀπαιτουμένη ἵνα ἡ πίεσις τοῦ ἀερίου Νέου διπλασιασθῇ, ὑπὸ σταθερὸν ὄγκον, θὰ εἶναι:

$$Q = c_\upsilon \cdot m \cdot \theta = \frac{c_p}{\kappa} \cdot m \cdot \theta \tag{5}$$

Θέτοντες εἰς τὴν σχέσιν (5) τὴν εὑρεθεῖσαν τιμὴν τῆς θερμοκρασίας $\theta = 273^0$ C καὶ τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως: $c_p = 0,246$ cal/gr · grad, $m = 1$ gr καὶ $\kappa = c_p / c_\upsilon = 1,64$, εὑρίσκομεν:

$$Q = 40,95 \text{ cal.}$$

1161. Ποίαν μεταβολὴν ὄγκου ὑφίσταται ἀτμοσφαιρικὸς ἀὴρ ὑπὸ κανονικὰς συνθήκας, ὅταν ὑπὸ σταθερὰν πίεσιν προσδίδεται εἰς αὐτὸν ποσὸν θερμότητος 5 kcal. Πόση εἶναι ἡ τελικὴ θερμοκρασία, ἐὰν ὁ ἀρχικὸς ὄγκος τοῦ ἀέρος εἶναι 1 m³. ($c_p = 0,240$ cal · gr^{-1} · grad^{-1}, $\rho_{\dot{\alpha}\dot{\eta}\rho} = 0,001\,293$ gr/cm³.)

Λύσις. Ἡ θεμελιώδης ἐξίσωσις τῆς θερμιδομετρίας διὰ τὰ ἀέρια, ὅταν θερμαίνωνται ὑπὸ σταθερὰν πίεσιν, εἶναι:

$$Q = m \cdot c_p\,(\theta_2 - \theta_1) \tag{1}$$

Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν ταύτην ὡς πρὸς $\theta_2 - \theta_1$ ἔχομεν τὴν σχέσιν:

$$\theta_2 - \theta_1 = \frac{Q}{m \cdot c_p} \tag{2}$$

ἤ, ἐπειδὴ ἡ ἀρχικὴ θερμοκρασία θ_1 εἶναι μηδέν, θὰ ἔχωμεν :

$$\theta_2 = \frac{Q}{m \cdot c_p} \qquad (3)$$

Θέτοντες εἰς τὴν σχέσιν (3) : $m = \rho \cdot V$, ἔνθα ρ καὶ V ἡ πυκνότης καὶ ὁ ὄγκος τοῦ ἀέρος ὑπὸ κανονικὰς συνθήκας, λαμβάνομεν τὴν σχέσιν :

$$\theta_2 = \frac{Q}{\rho \cdot V \cdot c_p} \qquad (4)$$

Ἐκ τῆς σχέσεως (4) δι' ἀντικαταστάσεως διὰ τῶν δεδομένων τῆς ἀσκήσεως : $Q = 5\,000$ cal, $\rho = 1293 \cdot 10^{-6}$ gr/cm³, $V = 10^6$ cm³ καὶ $c_p = 0{,}24$ cal/gr · grad, εὑρίσκομεν :

$$\underline{\theta_2 = 16{,}1^0 \text{ C.}}$$

Ἀκολούθως, εἰς τὴν σχέσιν ἡ ὁποία μᾶς δίδει τὴν μεταβολὴν τοῦ ὄγκου τῶν ἀερίων ὑπὸ σταθερὰν πίεσιν :

$$\Delta V = V_\theta - V_0 = V_0 \cdot \alpha \cdot \theta \qquad (5)$$

θέτοντες $V_0 = 10^6$ cm³, $\alpha = 1/273$ grad⁻¹ καὶ $\theta = 16{,}1^0$ C, εὑρίσκομεν ὅτι ἡ μεταβολὴ τοῦ ὄγκου εἶναι :

$$\underline{\underline{\Delta V = 59\,000 \text{ cm}^3 = 59 \textit{ lt.}}}$$

1162. Αἱ συνολικαὶ ἀπώλειαι θερμότητος χώρου εἶναι 400 000 cal/h. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ποσότης εἰς kgr πετρελαίου ἡ ὁποία ἀπαιτεῖται δι' ἕνα πλήρη μῆνα (πλήρη ἡμερονύκτια) διὰ τὴν λειτουργίαν τῆς θερμάνσεως. (Συντελεστὴς ἀποδόσεως μηχανῆς $\eta = 0{,}6$, θερμότης καύσεως πετρελαίου $\Theta_\kappa = 9\,000$ cal/gr.)

Λύσις. Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ K τὰς ἀνὰ ὥραν ἀπωλείας τοῦ χώρου καὶ διὰ t τὸν χρόνον λειτουργίας τῆς μηχανῆς, τότε τὸ ποσὸν τῆς θερμότητος Q τὸ ὁποῖον ἀπόλλυται, ἰσοῦται πρός :

$$Q = K \cdot t \qquad (1)$$

Ἐξ ἄλλου, ἐὰν m παραστήσωμεν τὴν μᾶζαν τοῦ πετρελαίου τὴν ἀπαιτουμένην διὰ τὴν παραγωγὴν τοῦ ποσοῦ τούτου τῆς θερμότητος, τὸ ποσὸν τοῦτο Q ὑπολογίζεται ἐκ τοῦ τύπου :

$$Q = \eta \cdot m \cdot \Theta_\kappa \qquad (2)$$

Ἐκ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) λαμβάνομεν :

$$K \cdot t = \eta \cdot m \cdot \Theta_\kappa \qquad (3)$$

Ἐκ τῆς σχέσεως (3) προκύπτει ὁ ἀκόλουθος τύπος πρὸς ὑπολογισμὸν τῆς μάζης m :

$$m = \frac{K \cdot t}{\eta \cdot \Theta_\kappa}$$

Θέτοντες τὰ δεδόμενα τῆς ἀσκήσεως : $K = 4 \cdot 10^5$ cal/h, $t = 30 \cdot 24 = 720$ h, $\eta = 0{,}6$, $\Theta_\kappa = 9\,000$ cal/gr, εὑρίσκομεν :

$$\underline{\underline{m = 53\,330 \text{ gr} = 53{,}3 \text{ kgr.}}}$$

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Β'

1163. Ποῖον ποσὸν θερμότητος ἀπαιτεῖται, ἵνα φέρωμεν 325 gr ὕδατος ἀπὸ 18° C εἰς 50° C. ('Απ. 10 400 cal.)

1164. Μίγνυνται 250 gr ὕδατος 15° C καὶ 750 gr ὕδατος 40° C. Πόση ἡ τελικὴ θερμοκρασία τοῦ μίγματος. ('Απ. 33,75° C.)

1165. Ποία ποσότης ὕδατος θερμοκρασίας 80^0 C πρέπει νὰ ἀναμιχθῇ μὲ 10 kgr ὕδατος 12^0 C, ἵνα λάβωμεν μῖγμα 37^0 C. ('Απ. 5,81 kgr.)

1166. Ποσότης 40 gr ὕδατος θερμοκρασίας 50^0 C ρίπτεται ἐντὸς θερμιδομέτρου περιέχοντος 50 gr ὕδατος θερμοκρασίας 10^0 C. Ἡ θερμοκρασία τοῦ μίγματος εἶναι $25{,}6^0$ C. Εὕρετε τὴν θερμοχωρητικότητα τοῦ θερμιδομέτρου. ('Απ. 12,5 cal/grad.)

1167. Θερμιδόμετρον ἐκ χαλκοῦ, μάζης 32 gr καὶ εἰδικῆς θερμότητος 0,095 cal/gr · grad, περιέχει 45 gr τερεβινθελαίου, ἡ δὲ ἀρχικὴ θερμοκρασία θερμιδομέτρου καὶ ὑγροῦ εἶναι 10^0 C. Ἐντὸς τοῦ θερμιδομέτρου θέτομεν 40 gr χαλκοῦ θερμοκρασίας 100^0 C, ἡ δὲ θερμοκρασία ἰσορροπίας τοῦ συστήματος εἶναι 27^0 C. Ζητεῖται ἡ εἰδικὴ θερμότης τοῦ τερεβινθελαίου. ('Απ. 0,294 cal/gr · grad.)

1168. Ὕδωρ ρέει μέσῳ θερμιδομέτρου, σταθερᾶς ροῆς, μὲ ταχύτητα 4 *lt*/min. Ἡ θερμοκρασία τοῦ ὕδατος ὅταν εἰσέρχεται εἶναι 12^0 C καὶ ὅταν ἐξέρχεται εἶναι 42^0 C. Ποία ποσότης θερμότητος ἀνὰ δευτερόλεπτον ἀπάγεται ἀπὸ τὸ θερμιδόμετρον. ('Απ. 2 000 cal/sec.)

1169. Δοχεῖον ἀπὸ ὀρείχαλκον ζυγίζει κενὸν 50 gr. Ἡ θερμοκρασία του εἶναι 10^0 C καὶ ρίπτονται ἐντὸς αὐτοῦ 20 gr ὕδατος θερμοκρασίας 50^0 C. Ἡ τελικὴ θερμοκρασία εἶναι 42^0 C. Νὰ εὑρεθῇ ἡ εἰδικὴ θερμότης τοῦ ὀρειχάλκου. ('Απ. 0,10 cal/gr · grad.)

1170. Τεμάχιον ὀρειχάλκου, μάζης 150 gr, ψύχεται εἰς τὴν θερμοκρασίαν τοῦ στερεοῦ διοξειδίου τοῦ ἄνθρακος καὶ ρίπτεται ἐντὸς ὀρειχαλκίνου θερμιδομέτρου μάζης 120 gr, τὸ ὁποῖον περιέχει 130 gr ὕδατος εἰς 25^0 C. Ἡ θερμοκρασία τοῦ μίγματος εἶναι 16^0 C. Εὕρετε τὴν θερμοκρασίαν τοῦ στερεοῦ διοξειδίου τοῦ ἄνθρακος. (Εἰδικὴ θερμότης ὀρειχάλκου = 0,088 cal/gr · grad.) ('Απ. — $79{,}8^0$ C.)

1171. Πόσαι θερμίδες ἀπαιτοῦνται, ἵνα ὁ ὄγκος 60 m^3 ἀέρος θερμοκρασίας 0^0 C καὶ πιέσεως 760 Torr αὐξηθῇ ὑπὸ σταθερὰν πίεσιν κατὰ $1\,{}^2/_3$ φορὰς τοῦ ἀρχικοῦ. (Πυκνότης τοῦ ἀέρος 0,001293 gr/cm^3, εἰδικὴ θερμότης αὐτοῦ ὑπὸ σταθερὰν πίεσιν 0,238 cal/gr · grad, $\alpha = 1/273$ $grad^{-1}$.) ('Απ. 3360,5 kcal.)

1172. Πρὸς προσδιορισμὸν τῆς μέσης θερμοκρασίας καμίνου φέρεται ἐντὸς αὐτῆς ἐπὶ ὡρισμένον χρόνον τεμάχιον λευκοχρύσου, μάζης 150 gr, τὸ ὁποῖον ἀκολούθως βυθίζεται ταχέως ἐντὸς μάζης 800 gr ὕδατος θερμοκρασίας 12^0 C, ὁπότε μετὰ τὴν ἀποκατάστασιν θερμικῆς ἰσορροπίας παρατηροῦμεν τελικὴν θερμοκρασίαν 19^0 C. Ποία ἡ θερμοκρασία τῆς καμίνου, ἐὰν ἡ εἰδικὴ θερμότης τοῦ λευκοχρύσου εἶναι 0,032 cal/gr · grad. ('Απ. 1 200^0 C.)

1173. Ὑαλίνη σφαῖρα περιέχει 1 *lt* ἀέρος ὑπὸ πίεσιν 760 Torr καὶ θερμοκρασίαν 0^0 C. Πόσαι θερμίδες ἀπαιτοῦνται διὰ νὰ διπλασιασθῇ ἡ πίεσις ἐντὸς αὐτῆς. (Ἡ διαστολὴ τῆς ὑαλίνης σφαίρας εἶναι ἀμελητέα. Πυκνότης ἀέρος 0,001293 gr/cm^3. Εἰδικὴ θερμότης τοῦ ἀέρος ὑπὸ σταθερὸν ὄγκον 0,17 cal/gr · grad.) ('Απ. 60 cal.)

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Γ'

1174. Νὰ συγκριθοῦν αἱ θερμοχωρητικότητες ἑνὸς δοχείου ὑαλίνου ζυγίζοντος 60 gr καὶ ἑνὸς δοχείου ἐκ χαλκοῦ ζυγίζοντος 220 gr. (Εἰδικὴ θερμότης ὑάλου = 0,21 cal/gr · grad, χαλκοῦ = 0,09 cal/gr · grad.)

1175. Τεμάχιον σιδήρου 88,5 gr καὶ θερμοκρασίας 90^0 C τίθεται ἐντὸς ὕδατος 70 gr καὶ θερμοκρασίας 10^0 C. Ἐὰν ἡ τελικὴ θερμοκρασία εἶναι 20^0 C, νὰ εὑρεθῇ ἡ εἰδικὴ θερμότης τοῦ σιδήρου.

1176. Τέσσαρα δοχεῖα περιέχουν ἕκαστον 200 gr ὕδατος τῶν ὁποίων ἡ θερμοκρασία εἶναι ἀντιστοίχως 5° C, 10° C, 15° C, 20° C. Τὸ ὕδωρ ἀναμιγνύεται ἐντὸς δοχείου ἐξ ἀργιλίου ἔχοντος θερμοκρασίαν 15° C καὶ μᾶζαν 50 gr. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τελικὴ θερμοκρασία. (Εἰδικὴ θερμότης ἀργιλίου = 0,21 cal/gr · grad.)

1177. Νὰ εὑρεθῇ ἡ θερμοκρασία ἰσορροπίας, ὅταν 300 gr μολύβδου θερμοκρασίας 100° C βυθίζωνται ἐντὸς ὕδατος 500 gr θερμοκρασίας 16° C περιεχομένου ἐντὸς θερμιδομέτρου χαλκοῦ μάζης 100 gr. (Εἰδικὴ θερμότης μολύβδου = 0,032 cal/gr · grad, χαλκοῦ = 0,09 cal/gr · grad.)

1178. Εἰσάγεται ἐντὸς θερμιδομέτρου θερμοχωρητικότητος 25 cal/grad, περιέχοντος 400 gr ὕδατος θερμοκρασίας 12,45° C, τεμάχιον 200 gr νικελίου θερμοκρασίας 100° C. Μετὰ τὴν ἀνάδευσιν ἀναγινώσκεται θερμοκρασία 16,75° C. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ εἰδικὴ θερμότης τοῦ νικελίου.

1179. Τεμάχιον λευκοχρύσου θερμοκρασίας 120° C βυθίζεται ἐντὸς ὑδραργύρου θερμοκρασίας 15° C. Ἡ τελικὴ θερμοκρασία εἶναι 40° C. Τὸ αὐτὸ τεμάχιον λευκοχρύσου εἰς ἑτέραν μέτρησιν μετὰ ὑδραργύρου 20° C ἔδωσε τελικὴν θερμοκρασίαν 50° C. Ποία ἡ θερμοκρασία τοῦ λευκοχρύσου κατὰ τὴν δευτέραν μέτρησιν.

1180. Ρίπτονται 600 gr ὑδραργύρου 100° C εἰς 400 gr ὕδατος 18,6° C περιεχομένου εἰς δοχεῖον θερμικῶς μεμονωμένον (δοχεῖον Dewar), τοῦ ὁποίου ἡ θερμοχωρητικότης εἶναι 24,3 cal/grad. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ εἰδικὴ θερμότης τοῦ ὑδραργύρου, γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ τελικὴ θερμοκρασία εἶναι 22,2° C.

1181. Θερμιδόμετρον περιέχει 300 gr ὕδατος θερμοκρασίας 15° C. Τὸ δοχεῖον τοῦ θερμιδομέτρου εἶναι ἐξ ὀρειχάλκου καὶ ζυγίζει 150 gr. Εἰσάγονται ἐντὸς αὐτοῦ 590 gr μολύβδου θερμοκρασίας 100° C. Ἡ θερμοκρασία τοῦ ὕδατος ἀνέρχεται εἰς 19,7° C. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ εἰδικὴ θερμότης τοῦ μολύβδου. (Δίδεται εἰδικὴ θερμότης ὀρειχάλκου, 0,1 cal/gr · grad.)

1182. Ἀναμιγνύομεν 0,4 kgr ρινισμάτων σιδήρου θερμοκρασίας 210° C, μετὰ 0,5 kgr κόκκων ψευδαργύρου θερμοκρασίας 100° C καὶ 0,3 kgr ὕδατος θερμοκρασίας 10° C. Αἱ εἰδικαὶ θερμότητες τοῦ σιδήρου καὶ ψευδαργύρου εἶναι ἀντιστοίχως 0,11 cal/gr · grad καὶ 0,09 cal/gr · grad. Ποία ἡ τελικὴ θερμοκρασία τοῦ μίγματος.

1183. Ἀναμιγνύομεν 0,4 kgr ὑδραργύρου θερμοκρασίας 60° C μὲ 0,6 kgr ὕδατος θερμοκρασίας 25° C. Ποία ἡ τελικὴ θερμοκρασία τοῦ μίγματος, ἐὰν ἡ εἰδικὴ θερμότης τοῦ ὑδραργύρου εἶναι 0,033 cal/gr · grad.

1184. Δοχεῖον Α περιέχει 1 kgr ὑγροῦ τινος θερμοκρασίας — 30° C. Ἕτερον δοχεῖον Β περιέχει τὸ αὐτὸ ὑγρὸν θερμοκρασίας ὅμως + 50° C. Κατὰ τὴν ὥραν 10 ἀκριβῶς ἀνοίγομεν τὸν κρουνὸν Κ καὶ ρυθμίζομεν αὐτὸν δι' ἐκροὴν 1 cm^3/sec ἐκ τοῦ δοχείου Β εἰς τὸ δοχεῖον Α, ἀναμιγνύοντες ταὐτοχρόνως τὸ θερμὸν καὶ τὸ ψυχρὸν ὑγρόν. Μέσῳ δὲ θερμομέτρου φέροντος κλίμακας Κελσίου καὶ Φαρενάϊτ παρακολουθοῦμεν τὴν θερμοκρασίαν τοῦ ὑγροῦ εἰς τὸ δοχεῖον Α. Ζητοῦνται αἱ ἀκριβεῖς ὧραι, κατὰ τὰς ὁποίας θὰ διαπιστοῦμεν ἔνδειξιν ἐπὶ τῆς κλίμακος Κελσίου ἀριθμητικῶς διπλασίαν τῆς ἐπὶ τῆς κλίμακος Φαρενάϊτ καὶ ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἢ ἐκ τοῦ ἀντιθέτου σημείου. (Εἰδικὴ θερμότης τοῦ ὑγροῦ, νὰ ληφθῇ συμβολικῶς ἴση μὲ 1 cal/gr · grad.)
(Γεωπονικὴ Σχολὴ Ἀθηνῶν, 1953.)

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΘ΄

ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΤΗΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΩΣ ΤΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Α΄

1185. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τελικὴ θερμοκρασία κατὰ τὴν ἀνάμιξιν 150 gr πάγου 0° C πρὸς 300 gr ὕδατος 50° C. (Θερμότης τήξεως πάγου 80 cal/gr.)

Λύσις. Ἐκ τοῦ τύπου $Q_1 = m_1 \cdot \lambda$, ὅπου λ ἡ θερμότης τήξεως, ὑπολογίζομεν τὸ ποσὸν τῆς θερμότητος τὸ ὁποῖον ἀπορροφᾷ ὁ πάγος μάζης m_1, ἵνα τακῇ ὑπὸ τὴν θερμοκρασίαν τήξεως αὐτοῦ.

$$Q_1 = m_1 \cdot \lambda = 150 \cdot 80 = 12\,000 \text{ cal}$$

Ἐπίσης ἐκ τοῦ τύπου $Q_2 = m_2 \cdot c \cdot \theta$ ὑπολογίζομεν τὸ ποσὸν τῆς θερμότητος τὸ ὁποῖον ἀποδίδει ἡ μᾶζα m_2 τοῦ ὕδατος, ἵνα ψυχθῇ ἀπὸ θ° C εἰς 0° C:

$$Q_2 = m_2 \cdot c \cdot \theta = 300 \cdot 1 \cdot 50 = 15\,000 \text{ cal}$$

Διὰ συγκρίσεως τῶν δύο ποσῶν θερμότητος Q_1 καὶ Q_2 εὐκόλως διαπιστοῦμεν ὅτι ἡ τελικὴ θερμοκρασία θὰ εἶναι μεταξὺ 0° C καὶ θ° C.

Ἐὰν καλέσωμεν x τὴν τελικὴν θερμοκρασίαν, θὰ ἔχωμεν:

α) Ὁ πάγος ἀπορροφᾷ, διὰ νὰ τακῇ ὑπὸ τὴν θερμοκρασίαν τήξεως, θερμότητα:

$$Q_1 = m_1 \cdot \lambda$$

β) Τὸ ὕδωρ τὸ ὁποῖον προέρχεται ἀπὸ τὴν τῆξιν τοῦ πάγου ἀπορροφᾷ, ἵνα θερμανθῇ ἀπὸ 0° C εἰς x° C, θερμότητα:

$$Q_1' = m_1 \cdot c \cdot x$$

γ) Τὸ ὕδωρ τῆς θερμοκρασίας θ° C, ἵνα ψυχθῇ εἰς x° C, ἀποδίδει θερμότητα:

$$Q_2' = m_2 \cdot c\,(\theta - x)$$

Ἐπειδὴ ὅμως κατὰ τὴν Ἀρχὴν τῆς διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας ἰσχύει ἡ σχέσις:

$$Q_1 + Q_1' = Q_2'$$

θὰ ἔχωμεν:

$$m_1 \cdot \lambda + m_1 \cdot c \cdot x = m_2 \cdot c\,(\theta - x)$$

Δι' ἐπιλύσεως δὲ τῆς ἀνωτέρω σχέσεως ὡς πρὸς x, προκύπτει ὁ γενικὸς τύπος:

$$x = \frac{m_2 \cdot c \cdot \theta - m_1 \cdot \lambda}{c\,(m_1 + m_2)} = \frac{Q_2 - Q_1}{c\,(m_1 + m_2)}$$

Ἐκ τοῦ τύπου τούτου εὑρίσκομεν θέτοντες τὰς εὑρεθείσας τιμὰς τῶν Q_2 καὶ Q_1 καὶ τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως, ὅτι ἡ ζητουμένη θερμοκρασία εἶναι:

$$\underline{x = 6{,}6^\circ \text{ C.}}$$

1186. Ποία ποσότης πάγου — 15° C τήκεται ὑπὸ 1 kgr ὕδατος θερμοκρασίας 50° C. (Εἰδ. θερμότης πάγου 0,58 cal · gr⁻¹ · grad⁻¹, θερμότης τήξεως πάγου 79,7 cal/gr.)

Λύσις. Ἔστω m_1, c_1, θ_1, λ, ἀντιστοίχως ἡ μᾶζα, ἡ εἰδικὴ θερμότης, ἡ ἀρχικὴ θερμοκρασία καὶ ἡ θερμότης τήξεως τοῦ πάγου. Ἐπίσης, ἔστω m_2, c_2, θ_2, ἡ μᾶζα, ἡ εἰδικὴ θερμότης καὶ ἡ ἀρχικὴ θερμοκρασία τοῦ ὕδατος. Ἔχομεν:

α) Ἡ θερμότης τὴν ὁποίαν ἀπορροφᾷ ὁ πάγος, ἵνα θερμανθῇ ἀπὸ θ_1 εἰς 0° C, εἶναι:

$$Q_1 = m_1 \cdot c_1 \cdot \theta_1$$

β) Ἡ θερμότης τὴν ὁποίαν ἀπορροφᾷ ὁ πάγος, ἵνα τακῇ ὑπὸ τὴν θερμοκρασίαν τήξεως, εἶναι :

$$Q_2 = m_1 \cdot \lambda$$

γ) Ἡ θερμότης τὴν ὁποίαν ἀποδίδει τὸ ὕδωρ μάζης m_2 ἀπὸ θ εἰς 0° C εἶναι :

$$Q_3 = m_2 \cdot c_2 \cdot \theta_2$$

Ἐπειδὴ θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις :

$$Q_1 + Q_2 = Q_3$$

λαμβάνομεν :

$$m_1 \cdot c_1 \cdot \theta_1 + m_1 \cdot \lambda = m_2 \cdot c_2 \cdot \theta_2$$

Λύοντες τὴν σχέσιν ταύτην ὡς πρὸς m_1 λαμβάνομεν τὸν γενικὸν τύπον :

$$m_1 = \frac{m_2 \cdot c_2 \cdot \theta_2}{c_1 \cdot \theta_1 + \lambda}$$

Θέτομεν εἰς τὸν τύπον τοῦτον τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως : $m_2 = 1000$ gr, $c_2 = 1$ cal/gr · grad, $c_1 = 0{,}58$ cal/gr · grad, $\theta_2 = 50°$ C, $\theta_1 = -15°$ C καὶ $\lambda = 79{,}7$ cal/gr, καὶ εὑρίσκομεν ὅτι ἡ μᾶζα τοῦ πάγου ἡ ὁποία τήκεται εἶναι :

$$\underline{m_1 = 565 \text{ gr.}}$$

1187. Θερμιδόμετρον ἀργιλίου μάζης 80 gr περιέχει 300 gr ὕδατος 18,6° C. Ἐντὸς τοῦ θερμιδομέτρου ρίπτομεν τεμάχιον πάγου 0° C καὶ μάζης 12,5 gr καὶ ὅταν τελικῶς τακῇ ὅλος ὁ πάγος, ἡ τελικὴ θερμοκρασία εἶναι 15° C. Πόση ἡ θερμότης τήξεως τοῦ πάγου. (Εἰδ. θερμότης ἀργιλίου 0,214 cal · gr^{-1} · grad^{-1}.)

Λύσις. Καλοῦμεν m_1, c_1, τὴν μᾶζαν καὶ τὴν εἰδικὴν θερμότητα τοῦ ἀργιλίου. Ἐπίσης m_2, c_2, θ_2, τὴν μᾶζαν, τὴν εἰδικὴν θερμότητα καὶ τὴν ἀρχικὴν θερμοκρασίαν τοῦ ὕδατος. Ὡς ἐπίσης m_3, λ, τὴν μᾶζαν καὶ τὴν θερμότητα τήξεως τοῦ πάγου. Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ τελικὴ θερμοκρασία εἶναι θ, θὰ ἔχωμεν :

α) Θερμότης ἀπαιτουμένη ἵνα ψυχθῇ τὸ ἀργίλιον ἀπὸ θ_1° C εἰς θ° C :

$$Q_1 = m_1 \cdot c_1 (\theta_1 - \theta)$$

β) Θερμότης ἀπαιτουμένη ἵνα τὸ ὕδωρ ψυχθῇ ἀπὸ θ_1° C εἰς θ_2° C :

$$Q_2 = m_2 \cdot c_2 \ (\theta_1 - \theta)$$

γ) Θερμότης ἀπαιτουμένη ἵνα τακῇ ὁ πάγος ὑπὸ τὴν θερμοκρασίαν τήξεως :

$$Q_3 = m_3 \cdot \lambda$$

δ) Θερμότης ἀπαιτουμένη ἵνα τὸ ὕδωρ τὸ προερχόμενον ἐκ τῆς τήξεως τοῦ πάγου θερμανθῇ ἀπὸ 0° C εἰς θ° C :

$$Q_4 = m_3 \cdot c_2 \cdot \theta$$

Ἐπειδὴ ὅμως πρέπει, κατὰ τὴν Ἀρχὴν τῆς διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας, νὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις :

$$Q_3 + Q_4 = Q_1 + Q_2$$

λαμβάνομεν :

$$m_3 \cdot \lambda + m_3 \cdot c_2 \cdot \theta = m_1 \cdot c_1 \ (\theta_1 - \theta) + m_2 \cdot c_2 \ (\theta_1 - \theta)$$

Λύοντες τὴν ἀνωτέρω σχέσιν ὡς πρὸς λ ἔχομεν τὸν γενικὸν τύπον :

$$\lambda = \frac{(m_1 \cdot c_1 + m_2 \cdot c_2)\ (\theta_1 - \theta) - m_3 \cdot c_2 \cdot \theta}{m_3}$$

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον τοῦτον τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως, εὑρίσκομεν :

$$\underline{\lambda = 76{,}3 \text{ cal/gr.}}$$

1188. Εἰς θερμιδόμετρον πάγου τήκονται 0,72 gr πάγου, ὅταν ἐντὸς αὐτοῦ εἰσαχθῇ τεμάχιον ψευδαργύρου μάζης 6,33 gr καὶ θερμοκρασίας 98,5° C. Πόση ἡ εἰδικὴ θερμότης τοῦ ψευδαργύρου. (Θερμότης τήξεως τοῦ πάγου 79,7 cal/gr.)

Λύσις. Ἔστω m_1, c_1, θ_1 ἡ μᾶζα, ἡ εἰδικὴ θερμότης καὶ ἡ ἀρχικὴ θερμοκρασία τοῦ ψευδαργύρου, m_2, λ ἡ μᾶζα καὶ ἡ θερμότης τήξεως τοῦ πάγου. Θὰ ἔχωμεν :

α) Θερμότης ἀποδιδομένη ἀπὸ τὸν ψευδάργυρον :

$$Q_1 = m_1 \cdot c_1 \cdot \theta_1 \tag{1}$$

β) Θερμότης ἀπορροφουμένη ὑπὸ τοῦ πάγου, ἵνα τακῇ ὑπὸ τὴν θερμοκρασίαν τήξεως :

$$Q_2 = m_2 \cdot \lambda \tag{2}$$

Οὕτω λαμβάνομεν τὴν σχέσιν :

$$m_1 \cdot c_1 \cdot \theta_1 = m_2 \cdot \lambda \tag{3}$$

Ἐὰν λύσωμεν τὴν σχέσιν (3) ὡς πρὸς τὴν ζητουμένην εἰδικὴν θερμότητα τοῦ ψευδαργύρου προκύπτει :

$$c_1 = \frac{m_2 \cdot \lambda}{m_1 \cdot \theta_1} \tag{4}$$

Θέτοντες τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως : $m_2 = 0{,}72$ gr, $\lambda = 79{,}7$ cal/gr, $m_1 = 6{,}33$ gr, $\theta_1 = 98{,}5^0$ C, εὑρίσκομεν :

$$\underline{c_1 = 0{,}092 \text{ cal/gr} \cdot \text{grad.}}$$

1189. Ποσότης 5 cm³ ὑδραργύρου 20° C εὑρίσκεται εἰς περιβάλλον σταθερᾶς θερμοκρασίας —39° C. Πόσην θερμότητα ἀποδίδει ὁ ὑδράργυρος μέχρι στερεοποιήσεώς του. (Πυκνότης ὑδραργύρου 13,55 gr/cm³, εἰδ. θερμότης ὑδραργύρου 0,033 $\text{cal} \cdot \text{gr}^{-1} \cdot \text{grad}^{-1}$, θερμότης τήξεως ὑδραργύρου 2,7 cal/gr.)

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν m τὴν μᾶζαν, λ τὴν θερμότητα τήξεως, c τὴν εἰδικὴν θερμότητα, θ τὴν ἀρχικὴν θερμοκρασίαν τοῦ ὑδραργύρου καὶ θ_0 τὴν θερμοκρασίαν τήξεως αὐτοῦ, θὰ ἔχωμεν :

α) Θερμότης ἀποδιδομένη ἵνα ὁ ὑδράργυρος ψυχθῇ ἀπὸ θ^0 C εἰς $\theta_0{}^0$ C :

$$Q_1 = m \cdot c\ (\theta - \theta_0)$$

β) Θερμότης ἀποδιδομένη ἵνα στερεοποιηθῇ ὁ ὑδράργυρος ὑπὸ τὴν θερμοκρασίαν τήξεως :

$$Q_2 = m \cdot \lambda$$

Ἄρα ἡ ὁλικὴ ἀποδιδομένη θερμότης ὑπὸ τοῦ ὑδραργύρου εἶναι :

$$Q = m \cdot c\ (\theta - \theta_0) + m \cdot \lambda \tag{1}$$

Ἐπειδὴ ὅμως $m = \rho \cdot V$, ὅπου ρ ἡ πυκνότης καὶ V ὁ ὄγκος τοῦ ὑδραργύρου, ἡ σχέσις (1) γράφεται :

$$Q = \rho \cdot V \cdot c\ (\theta - \theta_0) + \rho \cdot V \cdot \lambda \tag{2}$$

Θέτομεν εἰς τὴν (2) τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως : $\rho = 13{,}55$ gr/cm³, $V = 5$ cm³, $\theta = 20^0$ C $\theta_0 = -39^0$ C, $\lambda = 2{,}7$ cal/gr, καὶ εὑρίσκομεν :

$$\underline{Q = 315 \text{ cal.}}$$

1190. Ποῖον ποσὸν θερμότητος ἀποδίδεται ὑπὸ 20 gr ἀτμοῦ θερμοκρασίας 100° C, ὅταν ὑγροποιῆται καὶ ψύχεται μέχρι 20° C. (Θερμότης ἐξαερώσεως ὕδατος εἰς 100° C 540 cal/gr.)

Λύσις. Καλοῦμεν m, θ_1 τὴν μᾶζαν καὶ τὴν ἀρχικὴν θερμοκρασίαν τοῦ ἀτμοῦ, λ, c, θ_2, τὴν θερμότητα ἐξαερώσεως, τὴν εἰδ. θερμότητα καὶ τὴν τελικὴν θερμοκρασίαν τοῦ ὕδατος. Τότε ἔχομεν :

α) Θερμότης ἀποδιδομένη ὑπὸ τοῦ ἀτμοῦ ἵνα ὑγροποιηθῇ ὑπὸ τὴν θερμοκρασίαν ὑγροποιήσεως :

$$Q_1 = m \cdot \lambda$$

β) Θερμότης ἀποδιδομένη ὑπὸ τοῦ ὕδατος, τὸ ὁποῖον προῆλθε ἀπὸ τοῦ ἀτμοῦ, ἵνα ψυχθῇ ἀπὸ θ_1 εἰς θ_2 βαθμοὺς Κελσίου :

$$Q_2 = m \cdot c\ (\theta_1 - \theta_2)$$

Ἄρα ἡ συνολικὴ ἀποδιδομένη θερμότης θὰ εἶναι :

$$Q = Q_1 + Q_2 = m \cdot \lambda + m \cdot c\ (\theta_1 - \theta_2)$$

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω τύπου, ἐὰν θέσωμεν $m = 2$ gr, $\lambda = 540$ cal/gr, $c = 1$ cal/gr · grad, $\theta_1 = 100^\circ$ C καὶ $\theta_2 = 20^\circ$ C, εὑρίσκομεν :

$$\underline{Q = 12\,400 \text{ cal.}}$$

1191. Ποῖον ποσὸν θερμότητος ἀπαιτεῖται διὰ τὴν μετατροπὴν 50 gr πάγου θερμοκρασίας — 10° C εἰς ἀτμὸν θερμοκρασίας 120° C. (Εἰδ. θερμότης πάγου 0,5 cal · gr^{-1} · grad^{-1}, ἀτμοῦ 0,5 cal · gr^{-1} · grad^{-1}, θερμότης τήξεως πάγου 80 cal/gr, θερμότης ἐξαερώσεως ὕδατος εἰς 100° C 540 cal/gr.)

Λύσις. Τὸ ἀπαιτούμενον ποσὸν τῆς θερμότητος εἶναι ἄθροισμα τῶν ἑξῆς ποσοτήτων θερμότητος· α) τοῦ ποσοῦ θερμότητος Q_1, τὸ ὁποῖον ἀπαιτεῖται ἵνα θερμανθῇ ὁ πάγος ἀπὸ — 10° εἰς 0° C, β) τοῦ ποσοῦ θερμότητος Q_2 ἵνα μεταβληθῇ ἀπὸ πάγον 0° C εἰς ὕδωρ 0° C, γ) τοῦ ποσοῦ θερμότητος Q_3 ἵνα θερμανθῇ τὸ ὕδωρ ἀπὸ 0° C εἰς 100° C, δ) τοῦ ποσοῦ θερμότητος Q_4 ἵνα μετατραπῇ τὸ ὕδωρ 100° C εἰς ἀτμὸν 100° C, ε) τοῦ ποσοῦ θερμότητος Q_5 ἵνα θερμανθῇ ὁ ἀτμὸς ἀπὸ 100° C εἰς 120° C. Θὰ ἔχωμεν λοιπόν :

$$Q_1 = m \cdot c_{\pi\alpha\gamma.} \cdot \theta_{\pi\alpha\gamma.} = 50 \cdot 0{,}5 \cdot 10 = 250 \text{ cal}$$
$$Q_2 = m \cdot \lambda_{\pi\alpha\gamma.} = 50 \cdot 80 = 4\,000 \text{ cal}$$
$$Q_3 = m \cdot c_{\acute{\upsilon}\delta.} \cdot \theta_{\acute{\upsilon}\delta.} = 50 \cdot 1 \cdot 100 = 5\,000 \text{ cal}$$
$$Q_4 = m \cdot \lambda_{\acute{\upsilon}\delta.} = 50 \cdot 540 = 27\,000 \text{ cal}$$
$$Q_5 = m \cdot c_{\acute{\alpha}\tau\mu.} \cdot (\theta_{\acute{\alpha}\tau\mu.} - \theta_{\acute{\epsilon}\xi\alpha\epsilon\rho.}) = 50 \cdot 0{,}5 \cdot 20 = 500 \text{ cal}$$

καὶ

$$\underline{Q_{\acute{o}\lambda.} = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 + Q_5 = 36\,750 \text{ cal.}}$$

1192. Νὰ καθορισθῇ τὸ τελικὸν ἀποτέλεσμα, ὅταν 200 gr ὕδατος 0° C καὶ 20 gr πάγου 0° C εὑρίσκωνται ἐντὸς θερμιδομέτρου θερμοχωρητικότητος 30 cal/grad, ὅταν διὰ τοῦ συστήματος διαβιβάζωνται 10 gr ἀτμοῦ θερμοκρασίας 100° C. (Θερμότης τήξεως τοῦ πάγου 80 cal/gr, θερμότης ἐξαερώσεως ὕδατος εἰς 100° C εἶναι 540 cal/gr.)

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν m_1 τὴν μᾶζαν τοῦ πάγου καὶ λ_1 τὴν θερμότητα τήξεως τοῦ πάγου, τότε ἡ θερμότης, ἡ ἀπαιτουμένη ἵνα τακῇ ὁ πάγος ὑπὸ τὴν θερμοκρασίαν τήξεως (0° C), θὰ εἶναι :

$$Q_1 = m_1 \cdot \lambda_1 \qquad (1)$$

καὶ ἐὰν θέσωμεν $m_1 = 20$ gr καὶ $\lambda_1 = 80$ cal/gr, εὑρίσκομεν :

$$Q_1 = 1\,600 \text{ cal}$$

Ἐπίσης, ἐὰν καλέσωμεν m_2 τὴν μᾶζαν τῶν ἀτμῶν καὶ λ_2 τὴν θερμότητα ἐξαερώσεως τοῦ ὕδατος, τότε ἡ θερμότης ἡ ἀποδιδομένη κατὰ τὴν ὑγροποίησιν τῶν ἀτμῶν ὑπὸ τὴν θερμοκρασίαν ζέσεως θὰ εἶναι :

$$Q_2 = m_2 \cdot \lambda_2 \qquad (2)$$

καὶ ἐὰν θέσωμεν $m_2 = 10$ gr καὶ $\lambda_2 = 540$ cal/gr, εὑρίσκομεν :

$$Q_2 = 5\,400 \text{ cal}$$

Ἐκ τῶν δύο ἀνωτέρω ἀποτελεσμάτων προκύπτει ὅτι ἡ θερμότης, ἥτις ἀποδίδεται κατὰ τὴν ὑγροποίησιν τῶν ἀτμῶν, εἶναι ἀρκετὴ ἵνα τακῇ ἀφ' ἑνὸς μὲν ὁ πάγος καὶ ἀφ' ἑτέρου ἵνα τὸ προκῦπτον ἐξ αὐτοῦ ὕδωρ καθὼς καὶ τὸ προϋπάρχον θερμανθοῦν εἰς θερμοκρασίαν θ κειμένην μεταξὺ τῶν 0° C καὶ τῶν 100° C.

Διὰ τὴν θέρμανσιν τοῦ ὕδατος τοῦ θερμιδομέτρου καὶ τοῦ προερχομένου ἐκ τοῦ πάγου εἰς θ^0 C θὰ ἀπαιτηθῇ θερμότης :

$$Q_3 = c \cdot m_3 \cdot \theta \qquad (3)$$

καὶ διὰ τὴν θέρμανσιν τοῦ θερμιδομέτρου θὰ ἀπαιτηθῇ θερμότης :

$$Q_4 = k \cdot \theta \qquad (4)$$

ὅπου k εἶναι ἡ θερμοχωρητικότης τοῦ θερμιδομέτρου.

Ἐξ ἄλλου, κατὰ τὴν ψῦξιν τοῦ ὕδατος ἀπὸ 100^0 C εἰς θ^0 C θὰ ἀποδοθῇ θερμότης :

$$Q_5 = c \cdot m_2 \, (100 - \theta) \qquad (5)$$

Οὕτω, συμφώνως πρὸς τὴν Ἀρχὴν τῆς διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας, θὰ ἔχωμεν :

$$Q_1 + Q_3 + Q_4 = Q_2 + Q_5$$

ἢ λόγῳ τῶν σχέσεων (3), (4) καὶ (5) θὰ ἔχωμεν :

$$Q_1 + c \cdot m_3 \cdot \theta + k \cdot \theta = Q_2 + c \cdot m_2 \, (100 - \theta) \qquad (6)$$

Λύομεν τὴν σχέσιν (6) ὡς πρὸς τὴν ζητουμένην θερμοκρασίαν θ καὶ λαμβάνομεν :

$$\theta = \frac{Q_2 - Q_1 + 100\, c \cdot m_2}{c\,(m_2 + m_3) + k} \qquad (7)$$

Θέτοντες δὲ εἰς τὴν (7) τὰς εὑρεθείσας τιμὰς $Q_1 = 1\,600$ cal, $Q_2 = 5\,400$ cal καὶ τὰς δοθείσας τιμὰς $c = 1$ cal/gr · grad, $m_2 = 10$ gr, $m_3 = 200 + 20 = 220$ gr καὶ $k = 30$ cal/grad εὑρίσκομεν :

$$\underline{\theta = 18{,}4^0 \text{ C.}}$$

Ἄρα τὸ τελικὸν ἀποτέλεσμα θὰ εἶναι ὕδωρ θερμοκρασίας $18{,}4^0$ C.

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Β'

1193. Δοχεῖον περιέχει 1 *lt* ὕδατος εἰς θερμοκρασίαν 18^0 C καὶ θέλομεν νὰ τὸ ψύξωμεν μέχρι 6^0 C. Πρὸς τοῦτο εἰσάγωμεν ἐντὸς αὐτοῦ τεμάχιον πάγου. Πόσον τὸ ἐλάχιστον βάρος τοῦ ἀπαιτουμένου πάγου πρὸς ψῦξιν. (Θερμότης τήξεως πάγου 80 cal/gr.) (Ἀπ. 139,5 gr*.)

1194. Ἐπὶ τεμαχίου πάγου 0^0 C τίθεται τεμάχιον σιδήρου βάρους 500 gr* καὶ θερμοκρασίας 100^0 C. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τακεῖσα μᾶζα πάγου. (Εἰδικὴ θερμότης σιδήρου 0,113 cal/gr · grad. Θερμότης τήξεως πάγου 80 cal/gr.) (Ἀπ. 70,6 gr.)

1195. Δοχεῖον περιέχει μῖγμα πάγου καὶ ὕδατος συνολικῆς μάζης 400 gr. Ποία ποσότης πάγου περιείχετο ἐντὸς τοῦ μίγματος, ὅταν μετὰ προσθήκην ἐντὸς αὐτοῦ 300 gr ὕδατος θερμοκρασίας 80^0 C ἡ τελικὴ θερμοκρασία κατέστη 10^0 C. (Ἡ θερμοχωρητικότης τοῦ δοχείου εἶναι ἀμελητέα.) (Ἀπ. 213 gr.)

1196. Πόσα γραμμάρια πάγου θερμοκρασίας — 8^0 C δύνανται νὰ τακοῦν ὑπὸ μάζης 1,05 kgr ὕδατος θερμοκρασίας 60^0 C. (Θερμότης τήξεως πάγου 80 cal/gr.) (Ἀπ. 750 gr.)

1197. Τεμάχιον χαλκοῦ, βάρους 40 gr*, ψύχεται εἰς τὴν θερμοκρασίαν τοῦ ὑγροῦ ἀέρος καὶ ἐν συνεχείᾳ ρίπτεται ἐντὸς ὕδατος θερμοκρασίας τηκομένου πάγου. Ὁ σχηματισθεὶς πάγος ζυγίζει 7,4 gr*. Εὕρετε τὴν θερμοκρασίαν τοῦ ὑγροῦ ἀέρος. (Εἰδικὴ θερμότης χαλκοῦ = 0,08 cal/gr · grad, θερμότης τήξεως πάγου = 80 cal/gr.) (Ἀπ. — 185^0 C.)

1198. Εἰς ψυγεῖον πάγου ὑπάρχουν 4 kgr ὕδατος καὶ 12 kgr τρόφιμα. Ποία ἡ μᾶζα τοῦ ἀπαιτουμένου πάγου, ἵνα τὸ περιεχόμενον μετατραπῇ ἀπὸ τῆς

θερμοκρασίας 25° C εἰς 5° C, λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν ὅτι τὸ ποσὸν τοῦ τηκομένου πάγου ἀπάγεται ὑπὸ θερμοκρασίαν 0° C. (Εἰδικὴ θερμότης τροφίμων 0,9 cal/gr · · grad καὶ θερμότης τήξεως πάγου 80 cal/gr.) ('Απ. 3,7 kgr.)
(Πανεπιστήμιον 'Αθηνῶν, Τμῆμα Φυσικόν, 1956.)

1199. Ποσότης 5 gr χαλκοῦ θερμοκρασίας 17° C ρίπτεται ἐντὸς ὑγροῦ ὀξυγόνου εὑρισκομένου εἰς τὸ σημεῖον ζέσεως (− 183° C). Τὸ ἐξαερωθὲν ὀξυγόνον εὑρέθη ὅτι ἦτο 1020 cm^3 εἰς 15° C καὶ ὑπὸ ἀτμ. πίεσιν 760 Torr. Εὕρετε τὴν θερμότητα ἐξαερώσεως τοῦ ὑγροῦ ὀξυγόνου. (Εἰδικὴ θερμότης χαλκοῦ = 0,08 cal/gr · · grad, 32 gr ὀξυγόνου καταλαμβάνουν ὄγκον 22,4 *lt* ὑπὸ κανονικὰς συνθήκας.)
('Απ. 57,2 cal/gr.)

1200. Εἰς ἑστίαν ἐξατμίζονται 5 kgr ὕδατος ἀρχικῆς θερμοκρασίας 0° C καὶ ὑπὸ πίεσιν 760 Torr διὰ καύσεως 1 kgr ἄνθρακος θερμότητος καύσεως 7 500 kcal/ kgr. Ποία ἡ ἀπόδοσις τῆς ἑστίας. ('Απ. 42,6 %.)

1201. Πρὸς προσδιορισμὸν τῆς θερμότητος ἐξαερώσεως τοῦ ὕδατος, ὡρισμένη μᾶζα ἐξ αὐτοῦ, ἀρχικῆς θερμοκρασίας 30° C, θερμαίνεται ἐντὸς 35 sec μέχρι τοῦ σημείου ζέσεως καὶ ἐντὸς τῶν ἑπομένων 4,5 min αὕτη ἐξατμίζεται τελείως. Ποία ἡ θερμότης ἐξαερώσεως. ('Απ. 540 cal/gr.)

1202. Πόση μᾶζα ὑδρατμοῦ θερμοκρασίας 100° C πρέπει νὰ συμπυκνωθῇ ἐντὸς 100 gr ὕδατος περιέχοντος 100 gr πάγου, ἵνα ἡ τελικὴ θερμοκρασία καταστῇ 18° C.
('Απ. 18,6 gr.)

1203. Ποῖον εἶναι τὸ ἀποτέλεσμα τῆς ἐπιδράσεως ὡρισμένης μάζης ὑδρατμοῦ (100° C) ἐπὶ ἴσης μάζης πάγου (0° C).
('Απ. 1,33 m gr ὕδατος 100° C καὶ 0,61 m gr ὑδρατμῶν 100° C.)

1204. 'Ατμὸς εἰσέρχεται εἰς σῶμα ἐγκαταστάσεως καλοριφὲρ ὑπὸ θερμοκρασίαν 104° C καὶ ἐξέρχεται ὡς ὕδωρ 60° C. 'Εὰν 2 *lt* ὕδατος ἐπιστρέφουν ἐκ τοῦ σώματος ἀνὰ ὥραν, πόση θερμότης ἀπομένει εἰς τὸ σῶμα. ('Απ. 1 164 000 cal.)

1205. Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ συμπυκνώσωμεν εἰς τὰ 2/3 τοῦ βάρους 30 000 kgr* γλεύκους θερμοκρασίας 30° C μεταχειριζόμενοι ὡς καύσιμον ὕλην τὸ κώκ, τοῦ ὁποίου ἡ θερμότης καύσεως ἀνὰ kgr εἶναι 7 000 kcal. Πόσα kgr κὼκ χρειαζόμεθα, ἐὰν ὁ συντελεστὴς χρησιμοποιήσεως τῶν θερμίδων τοῦ κὼκ εἶναι 80 %. Ὡς εἰδικὴ θερμότης τοῦ γλεύκους λαμβάνεται ἡ τοῦ ὕδατος καὶ ὡς θερμότης ἐξατμίσεως τοῦ ὕδατος τοῦ γλεύκους 537 cal/gr. ('Απ. 9 964 kgr.)
(Γεωπονικὴ Σχολὴ 'Αθηνῶν, 1956.)

1206. Ποσότης 1 *lt* ὑδρατμοῦ ζυγίζει, εἰς 100° C καὶ πίεσιν 760 Torr, 0,606 gr*. 'Εκ τούτου νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πυκνότης ὑδρατμοῦ ἐν σχέσει πρὸς τὸν ἀέρα, εὑρισκομένου ὑπὸ τὰς αὐτὰς συνθήκας. (Συντελεστὴς θερμικῆς διαστολῆς τοῦ ἀέρος $\alpha = 1/273$ $grad^{-1}$, πυκνότης ἀτμοῦ εἰς 0° C καὶ 260 Torr, $\rho = 0{,}001293$ gr/cm^3.)
('Απ. 5/8.)

1207. 'Εντὸς αἰθούσης θερμοκρασίας 19,5° C τὸ σημεῖον δρόσου προσδιωρίσθη εἰς 12,0° C. Ποία ἡ ἀπόλυτος καὶ σχετικὴ ὑγρασία ἐντὸς αὐτῆς.
('Απ. 10,7 gr/m^3, 63,7 %.)

1208. Πόσα kgr ὑδρατμοῦ περιέχονται ἐντὸς αἰθούσης διαστάσεων 50 m × × 30 m × 10 m εἰς 20° C, ἐὰν ἡ σχετικὴ ὑγρασία ἀνέρχεται εἰς 80 %. ('Απ. 208 kgr.)

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Γ'

1209. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἀποτέλεσμα τῆς ἀναμίξεως 10 kgr ὕδατος 60^0 C καὶ 5 kgr πάγου θερμοκρασίας -10^0 C. (Εἰδικὴ θερμότης πάγου 0,5 cal/gr · grad.)

1210. Μᾶζα σιδήρου 200 gr θερμαίνεται εἰς 100^0 C καὶ τοποθετεῖται ἐντὸς κοιλότητος μάζης πάγου θερμοκρασίας 0^0 C. Ἐκ τοῦ πάγου τήκεται ποσότης 28,25 gr. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ εἰδ. θερμότης τοῦ σιδήρου.

1211. Εἰς θερμιδόμετρον ἐξ ἀργιλίου μάζης 25 gr καὶ εἰδικῆς θερμότητος 0,20 cal/gr · grad περιέχονται 200 gr ὕδατος 20^0 C. Εἰς τὸ ὕδωρ τοῦ θερμιδομέτρου τίθενται 22 gr πάγου θερμοκρασίας 0^0 C καὶ ἡ τελικὴ θερμοκρασία εὑρίσκεται $10{,}3^0$ C. Νὰ εὑρεθῇ ἡ θερμότης τήξεως τοῦ πάγου.

1212. Σιδηροῦν δοχεῖον μάζης 220 gr περιέχει 1 000 gr ὕδατος θερμοκρασίας 4^0 C. Ἐὰν διὰ τοῦ θερμιδομέτρου διαβιβασθῇ ἀτμὸς 100^0 C μέχρις ὅτου ἡ μᾶζα τοῦ συστήματος αὐξηθῇ κατὰ 12 gr, ποία θὰ εἶναι ἡ τελικὴ θερμοκρασία. (Δίδονται: Εἰδικὴ θερμότης σιδήρου 0,105 cal/gr · grad, θερμότης ἐξαερώσεως ὕδατος 539 cal/gr.)

1213. Πόσα γραμμάρια αἰθυλαιθέρος θερμοκρασίας 0^0 C δυνάμεθα νὰ ἐξατμίσωμεν διὰ τῆς θερμότητος ἥτις ἀπαιτεῖται, ἵνα 200 gr αἰθυλαλκοόλης θερμοκρασίας 0^0 C μεταβληθοῦν εἰς ἀτμόν.

1214. Πόσα kcal ἀπαιτοῦνται ἵνα 24 kgr πάγου θερμοκρασίας -12^0 C μετατραποῦν εἰς ὕδωρ θερμοκρασίας 22^0 C. (Εἰδικὴ θερμότης πάγου 0,5 cal/gr · grad.)

1215. Ὁ κασσίτερος ἐν στερεᾷ καὶ ὑγρᾷ καταστάσει ἔχει μεταξὺ τῶν θερμοκρασιῶν 0^0 C καὶ 400^0 C εἰδικὴν θερμότητα 0,053 cal/gr · grad. Τί συμβαίνει ὅταν ἐντὸς κοιλότητος πάγου ρίψωμεν 25 gr τετηκότος κασσιτέρου. (Σημεῖον τήξεως κασσιτέρου 232^0 C, θερμότης τήξεως 14,2 cal/gr, θερμοκρασία κασσιτέρου 400^0 C.)

1216. Θερμιδόμετρον, τοῦ ὁποίου ἡ θερμοχωρητικότης εἶναι 20 cal/grad περιέχει 200 gr ἐλαίου εἰδικῆς θερμότητος 0,6 cal/gr · grad καὶ θερμοκρασίας 20^0 C. Ποία ποσότης πάγου 0^0 C πρέπει νὰ προστεθῇ, ἵνα ἡ θερμοκρασία τοῦ ἐλαίου καταστῇ 10^0 C.

1217. Δίδεται δοχεῖον ἀνοικτόν, περιέχον τρίμματα πάγου θερμοκρασίας κάτω τοῦ μηδενός, καὶ μηχανικὸς ἀναδευτήρ. Θερμαίνομεν τὸ δοχεῖον διὰ φλογός. Νὰ εὑρεθῇ ἡ μετατροπὴ τῆς θερμοκρασίας καὶ εἰ δυνατὸν νὰ παρασταθῇ αὕτη γραφικῶς.
(Πανεπιστήμιον Ἀθηνῶν, Ἰατρικὴ Σχολή, 1948.)

1218. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἀπαιτούμενον ποσὸν θερμότητος διὰ τὴν μεταβολὴν 60 gr πάγου -10^0 C εἰς ἀτμὸν 100^0 C. Νὰ καθορισθῇ γραφικῶς ἡ μεταβολὴ τοῦ ὄγκου. (Εἰδ. θερμότης πάγου 0,5 cal/gr · grad.)

1219. Θερμιδόμετρον ἐκ χαλκοῦ, τοῦ ὁποίου ἡ εἰδ. θερμότης εἶναι 0,098 cal/gr · grad, ζυγίζει 160 gr καὶ ἐντὸς αὐτοῦ τίθεται ὕδωρ 40 gr, ἡ δὲ ἀρχικὴ θερμοκρασία τοῦ συστήματος εἶναι 25^0 C. Ἀκολούθως προσθέτομεν 20 gr πάγου θερμοκρασίας -10^0 C καὶ εἰδ. θερμότητος 0,5 cal/gr · grad. Ζητεῖται, ὅταν ἀποκατασταθῇ ἡ ἰσορροπία, πόσος πάγος θὰ ἀπομείνῃ καὶ πόση θὰ εἶναι ἡ θερμοκρασία τοῦ πάγου. (Θερμότης τήξεως πάγου 80 cal/gr.)

1220. Ὑπολογίσατε τὴν θερμότητα ἀτμοποιήσεως τοῦ ὕδατος, ὅταν τοῦτο ἀτμοποιῆται εἰς 40^0 C.

1221. Ἐντὸς χαλκίνου δοχείου 140 gr τίθενται 500 gr ὕδατος καὶ ἡ τελικὴ θερμοκρασία εἶναι 20° C. Ἀκολούθως 100 gr πάγου θερμοκρασίας 0° C τίθενται ἐντὸς τοῦ δοχείου καὶ τέλος διαβιβάζονται 15 gr ἀτμοῦ θερμοκρασίας 100° C. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τελικὴ θερμοκρασία.

1222. Μᾶζα 1 000 gr ὕδατος εὑρίσκεται εἰς κατάστασιν ὑπερτήξεως ἔχουσα θερμοκρασίαν −9° C. Δι' εἰσαγωγῆς ἐντὸς αὐτῆς κρυσταλλίου πάγου, προκαλοῦμεν τὴν ἔναρξιν τῆς πήξεως. Ποία ἡ μᾶζα τοῦ πηγνυομένου ὕδατος.

1223. Ἐπὶ τεμαχίου πάγου 0° C τίθενται 300 gr κασσιτέρου. Ἡ τακεῖσα μᾶζα τοῦ πάγου εἶναι 18,5 gr. Πόση ἦτο ἡ θερμοκρασία τοῦ κασσιτέρου. (Εἰδικὴ θερμότης κασσιτέρου 0,054 cal/gr · grad, θερμότης τήξεως πάγου 80 cal/gr.)

1224. Δεξαμενὴ εἶναι πλήρης ὕδατος καὶ ἔχει μῆκος 20 m, εὖρος 8 m καὶ βάθος 2 m. Ποία ποσότης ἀτμοῦ 100° C πρέπει νὰ διαβιβασθῇ δι' αὐτῆς, ἵνα ἡ θερμοκρασία αὐξηθῇ ἀπὸ 10° C εἰς 20° C.

1225. Θερμιδόμετρον ἐξ ἀργιλίου ἔχει μᾶζαν 110 gr. Ἐντὸς αὐτοῦ τίθεται ὕδωρ καὶ τὸ συνολικόν του βάρος γίνεται 605 gr*. Ἡ κοινὴ θερμοκρασία εἶναι 15,2° C. Διὰ τοῦ θερμιδομέτρου διαβιβάζεται ὑδρατμός, μέχρις ὅτου τὸ ὕδωρ ἀποκτήσῃ θερμοκρασίαν 35,9° C, καὶ τὸ τελικὸν βάρος τοῦ θερμιδομέτρου καὶ τοῦ περιεχομένου του γίνεται 622 gr*. Νὰ εὑρεθῇ ἡ θερμότης ἐξαερώσεως. (Εἰδ. θερμότης ἀργιλίου 0,20 cal/gr · grad.)

1226. Ἔστω μεταλλικὸν ἀντικείμενον, ἀνηρτημένον ἐκ τοῦ ἑνὸς ἄκρου τῆς φάλαγγος ἑνὸς ζυγοῦ μέσῳ λεπτοῦ σύρματος ἀμελητέας μάζης. Ἡ θερμοκρασία τοῦ ἀντικειμένου εἶναι 40° C καὶ ἡ μᾶζα αὐτοῦ 800 gr. Τὸ ἀντικείμενον τοῦτο τίθεται καταλλήλως ἐντὸς ρεύματος ὑδρατμοῦ θερμοκρασίας 100° C, ὑπὸ ἀτμοσφαιρικὴν πίεσιν 760 Torr. Μετὰ παρέλευσιν ὡρισμένου χρόνου ὁ ζυγὸς δεικνύει τὸ νέον βάρος τοῦ ἀντικειμένου 810 gr*, τὸ ὁποῖον καὶ παραμένει ἔκτοτε σταθερόν. Ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι ὁλόκληρος ἡ ποσότης τοῦ ὑγροποιηθέντος ἀτμοῦ παρέμεινεν ἐπὶ τοῦ ἀντικειμένου ὑπὸ μορφὴν ὕδατος, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ εἰδικὴ θερμότης αὐτοῦ. (Θερμότης ἐξαερώσεως τοῦ ὕδατος 500 cal/gr.)

(Ε. Μ. Πολυτεχνεῖον, Σχολὴ Χημικῶν Μηχανικῶν, Ἀρχιτεκτόνων, 1948.)

1227. Ἐκ ποσότητος ἀέρος θερμοκρασίας 25° C ἀφαιρεῖται διὰ πεντοξειδίου τοῦ φωσφόρου ἡ περιεχομένη ἐντὸς αὐτῆς ὑγρασία, ὁπότε ἡ πίεσις αὐτῆς πίπτει εἰς 15,5 mm Hg. Νὰ εὑρεθοῦν: α) Ἡ σχετικὴ ὑγρασία τοῦ ἐξετασθέντος ἀέρος. β) Ἡ ἀπόλυτος ὑγρασία αὐτοῦ. γ) Τὸ σημεῖον δρόσου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Κ'

ΔΙΑΔΟΣΙΣ ΤΗΣ ΘΕΡΜΟΤΗΤΟΣ

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Α'

1228. Σιδηρᾶ πλὰξ 2 cm πάχους ἔχει ἐγκαρσίαν τομὴν 5 000 cm². Ἡ μία πλευρὰ εὑρίσκεται ὑπὸ θερμοκρασίαν 150° C καὶ ἡ ἄλλη 140° C. Ποία ποσότης θερμότητος μεταβιβάζεται εἰς 1 sec. (k = 0,115 cal · grad⁻¹ · cm⁻¹ · sec⁻¹.)

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν Q τὸ ποσὸν τῆς θερμότητος τὸ ὁποῖον διέρχεται δι' ὁμοιομόρφου σώματος ἐγκαρσίας τομῆς S καὶ μήκους l εἰς χρόνον t, ὅταν εἰς τὸ ἄκρον αὐτοῦ ὑπάρχῃ διαφορὰ θερμοκρασίας $\theta_1 - \theta_2$, καὶ k τὸν συντελεστὴν θερμικῆς ἀγωγιμότητος, τότε, ὡς γνωστόν, θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις :

$$Q = k \cdot \frac{\theta_1 - \theta_2}{l} \cdot S \cdot t \qquad (1)$$

Θέτομεν εἰς τὴν σχέσιν (1) : $k = 0{,}115$ cal · grad^{-1} · cm^{-1} · sec^{-1}, $\theta_1 - \theta_2 = 10^\circ$ C, $l = 2$ cm, $S = 5\,000$ cm^2, $t = 1$ sec, καὶ εὑρίσκομεν :

$$\underline{Q = 2\,875 \text{ cal.}}$$

1229. Πλὰξ ἐκ νικελίου πάχους 0,4 cm ἔχει μεταξὺ τῶν δύο πλευρῶν αὐτῆς διαφορὰν θερμοκρασίας 32° C καὶ μεταβιβάζει 200 kcal καθ' ὥραν διὰ μέσου ἐμβαδοῦ 5 cm². Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ συντελεστὴς τῆς θερμικῆς ἀγωγιμότητος.

Λύσις. Ὅπως καὶ εἰς τὴν προηγουμένην ἄσκησιν, θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις :

$$Q = k \cdot \frac{\theta_1 - \theta_2}{l} \cdot S \cdot t \qquad (1)$$

Λύομεν τὴν (1) ὡς πρὸς k καὶ λαμβάνομεν :

$$k = \frac{Q \cdot l}{(\theta_1 - \theta_2) \cdot S \cdot t} \qquad (2)$$

Θέτομεν εἰς τὴν (2) τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως, ἤτοι : $Q = 200\,000$ cal, $l = 0{,}4$ cm, $\theta_1 - \theta_2 = 32^\circ$ C, $S = 5$ cm^2, $t = 3\,600$ sec, καὶ εὑρίσκομεν :

$$\underline{k = 0{,}14 \text{ cal} \cdot \text{grad}^{-1} \cdot \text{cm}^{-1} \cdot \text{sec}^{-1}.}$$

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Β'

1230. Ποῖον ποσὸν θερμότητος διέρχεται καθ' ὥραν διὰ πλακὸς ἐκ χαλκοῦ ἢ φελλοῦ ἐπιφανείας 1 dm² καὶ πάχους 10 cm, ἂν μεταξὺ τῶν δύο πλευρῶν τῆς πλακὸς ὑφίσταται διαφορὰ θερμοκρασίας 5° C. Συντελεστὴς θερμικῆς ἀγωγιμότητος χαλκοῦ 0, 94 cal/grad · cm · sec καὶ τοῦ φελλοῦ 0, 00011 cal/grad · cm · sec.) ('Απ. 169,2 kcal, 19,8 cal.)

1231. Σιδηροῦς σωλὴν μὴ μεμονωμένος θερμικῶς, ἔχων μῆκος 5 m, διάμετρον 5 cm καὶ πάχος τοιχωμάτων 4 mm, διαρρέεται ὑπὸ ὕδατος 80° C. Εἰς τὴν ἐξωτερικὴν ἐπιφάνειαν τοῦ σωλῆνος ἡ θερμοκρασία εἶναι 60° C. Ποία ποσότης θερμότητος πρέπει νὰ μεταβιβάζεται ὑπὸ τοῦ ὕδατος ἀνὰ sec, ἵνα ἡ ἀνωτέρω διαφορὰ θερμοκρασίας παραμένῃ σταθερά. ('Απ. 49,1 kcal/sec.)

1232. Τοῖχος αἰθούσης ἀποτελεῖται ἐσωτερικῶς ἐκ πλακὸς μονωτικῆς πάχους 6 cm καὶ συντελεστοῦ θερμικῆς ἀγωγιμότητος $0{,}17 \cdot 10^{-3}$ cal/grad · cm · sec, ἐξωτερικῶς δὲ ἐκ 12 cm παχέος στρώματος σκυροκονιάματος. α) Ποία ἡ θερμοκρασία εἰς τὴν ἐπιφάνειαν ἐπαφῆς τοῦ μονωτικοῦ καὶ τοῦ σκυροκονιάματος, ἐὰν ἡ ἐσωτερικὴ θερμοκρασία εἶναι 18° C καὶ ἡ ἐξωτερικὴ — 12° C. β) Ποῖον ποσὸν θερμότητος εἰς kcal ἐξέρχεται δι' ἐπιφανείας 1 m² τοῦ τοίχου τούτου καθ' ὥραν. γ) Ποῖον τὸ πάχος τὸ ἰσοδυναμοῦν μὲ τοῖχον ἐκ πλίνθων. (Συντελεστὴς θερμικῆς ἀγωγιμότητος σκυροκονιάματος 0,0028 cal/grad · cm · sec καὶ τῶν πλίνθων 0,0012 cal/grad · cm · sec. ('Απ. α' — 8,75° C. β' 27,3 kcal. γ' 47,5 cm.)

1233. Δοχεῖον μὲ θερμὸν ὕδωρ καλύπτεται ὑπὸ μονωτικοῦ ὑλικοῦ πάχους 2 cm καὶ θερμικῆς ἀγωγιμότητος $6 \cdot 10^{-4}$ cal · grad^{-1} · cm^{-1} · sec^{-1}. Ἐὰν αἱ θερμοκρασίαι τῆς ἐσωτερικῆς καὶ ἐξωτερικῆς ἐπιφανείας τοῦ μονωτικοῦ ὑλικοῦ εἶναι 60° C καὶ 20° C ἀντιστοίχως, πόσην θερμότητα θὰ χάνῃ τὸ δοχεῖον ἀνὰ m² καὶ ἀνὰ ὥραν. ('Απ. $4{,}3 \cdot 10^5$ cal.)

1234. Τὸ πάχος τοῦ πάγου λίμνης εἶναι 5 cm. Ἡ θερμοκρασία τοῦ ἐν ἐπαφῇ μὲ τὸν πάγον ἀέρος εἶναι -8^0 C καὶ ἡ θερμοκρασία τοῦ ὕδατος ἀκριβῶς κάτωθεν τοῦ πάγου εἶναι 0^0 C. Εὕρετε, κατὰ προσέγγισιν, τὴν αὔξησιν τοῦ πάχους τοῦ πάγου ἀνὰ ὥραν. (Θερμικὴ ἀγωγιμότης τοῦ πάγου $= 0,005$ cal·grad^{-1}·cm^{-1}·sec^{-1}, πυκνότης τοῦ πάγου $= 0,9$ gr/cm^3, θερμότης τήξεως πάγου $= 80$ cal/gr.) (Ἀπ. 0,4 cm.)

1235. Εἰς μίαν συσκευὴν μετρήσεως τοῦ συντελεστοῦ θερμικῆς ἀγωγιμότητος εὑρίσκεται ὅτι 280 cal/min. ρέουν διὰ μέσου τῆς ὑπὸ ἐξέτασιν ράβδου μετάλλου τινός, ὅταν ἡ θερμοκρασία τῆς ράβδου εἰς σημεῖα ἀπέχοντα 10 cm εἶναι 72^0 C καὶ 22^0 C. Ἐὰν ἡ ράβδος ἔχῃ διάμετρον 2 cm, εὕρετε τὸν συντελεστὴν θερμικῆς ἀγωγιμότητος τῆς ράβδου. (Ἀπ. 0,248 cal/grad·cm·sec.)

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Γ'

1236. Ὅταν τὸ ἓν ἄκρον ράβδου ἐκ χαλκοῦ, μήκους 30 cm καὶ διαμέτρου 8 mm, εὑρίσκεται ἐντὸς ζέοντος ὕδατος (100^0 C) καὶ τὸ ἄλλο ἐντὸς πάγου (0^0 C), εὑρίσκεται ὅτι 1,2 gr πάγου τήκονται ἀνὰ min. Ποῖος ὁ συντελεστὴς θερμικῆς ἀγωγιμότητος τῆς ράβδου.

1237. Ἡ θερμικὴ μόνωσις μαλλίνου γαντιοῦ (χειροκτίου) δυνατὸν νὰ ἐξομοιωθῇ πρὸς στρῶμα ἠρέμου ἀέρος πάχους 3 mm καὶ συντελεστοῦ θερμικῆς ἀγωγιμότητος $5,7 \cdot 10^{-5}$ cal/grad·cm·sec. Ἐὰν ἡ θερμοκρασία τῆς ἐπιδερμίδος εἶναι 35^0 C καὶ κατὰ μίαν χειμερινὴν ἡμέρα ἡ θερμοκρασία τοῦ περιβάλλοντος -5^0 C, πόσην θερμότητα χάνει εἷς ἄνθρωπος ἀνὰ min ἀπὸ τὴν χεῖρα του, ἐπιφανείας 200 cm^2.

1238. Πόσαι θερμίδες διέρχονται εἰς 1 min διὰ μέσου σιδηρᾶς ράβδου ἐγκαρσίας τομῆς 4,1 cm^2 καὶ μήκους 1,9 cm, ἐὰν ἡ διαφορὰ θερμοκρασίας μεταξὺ τῶν δύο ἄκρων εἶναι 78^0 C.

1239. Εἰς 2 min, 425 cal θερμότητος ρέουν κατὰ μῆκος ράβδου διαμέτρου 1,5 cm. Ἐὰν ἡ διαφορὰ θερμοκρασίας ἀνὰ cm εἶναι 4^0 C, ὑπολογίσατε τὸν συντελεστὴν θερμικῆς ἀγωγιμότητος τῆς ράβδου.

1240. Τὰ χαλύβδινα ὕφαλα πλοίου ἔχουν πάχος 2,54 cm καὶ συντελεστὴν θερμικῆς ἀγωγιμότητος 0,11 cal/grad·cm·sec. Ἐσωτερικῶς τὰ ὕφαλα ἔχουν ἐπενδυθῇ ὑπὸ στρώματος μονωτικοῦ ὑλικοῦ πάχους 5 cm καὶ θερμικῆς ἀγωγιμότητος $10 \cdot 10^{-5}$ cal/grad·cm·sec. Ἐὰν ἡ θερμοκρασία εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ πλοίου εἶναι 25^0 C καὶ ἡ θερμοκρασία τοῦ θαλασσίου ὕδατος 5^0 C, ὑπολογίσατε: α) Τὴν θερμοκρασίαν εἰς τὴν ἐσωτερικὴν ἐπιφάνειαν τῶν χαλυβδίνων ὑφάλων. β) Τὴν διαφορὰν θερμοκρασίας μεταξὺ τῆς ἐσωτερικῆς καὶ ἐξωτερικῆς ἐπιφανείας τοῦ μονωτικοῦ ὑλικοῦ. γ) Τὴν ποσότητα τῶν θερμίδων (cal) τὴν μεταφερομένην μέσῳ ἑκάστου m^2 ἀνὰ min.

1241. Ράβδος ἐκ χαλκοῦ ἔχει διάμετρον 2 cm καὶ μῆκος 50 cm. Τὸ ἓν ἄκρον τῆς ράβδου εὑρίσκεται ἐντὸς ζέοντος ὕδατος, τὸ ἕτερον δὲ ἄκρον ἐντὸς περιβλήματος ψυχομένου ὑπὸ ρέοντος ὕδατος τὸ ὁποῖον εἰσέρχεται ὑπὸ θερμοκρασίαν 10^0 C. Ὁ συντελεστὴς θερμικῆς ἀγωγιμότητος τοῦ χαλκοῦ εἶναι 1,02 cal/grad·cm·sec. Ἐὰν 200 gr ὕδατος ρέουν μέσῳ τοῦ περιβλήματος ἐντὸς 6 min, νὰ εὑρεθῇ κατὰ πόσον αὐξάνεται ἡ θερμοκρασία τοῦ ὕδατος τούτου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΚΑ΄

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΚ ΤΗΣ ΘΕΡΜΟΔΥΝΑΜΙΚΗΣ

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Α΄

1242. Ἠλεκτρικὸς θερμαντὴρ βυθίζεται ἐντὸς θερμιδομέτρου περιέχοντος 380 gr ὕδατος θερμοκρασίας 10° C. Ὁ θερμαντὴρ καταναλίσκει ἰσχὺν 84 Watt καὶ μετὰ 10 min ἡ θερμοκρασία τοῦ ὕδατος ἀνέρχεται εἰς 40° C. Ἐὰν ἡ θερμοχωρητικότης τοῦ θερμιδομέτρου εἶναι 20 cal · grad^{-1}, πόση ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ μηχανικοῦ ἰσοδυνάμου τῆς θερμότητος εἰς erg/cal.

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν A τὸ ἔργον (ἠλεκτρικὴ ἐνέργεια) τὸ ὁποῖον μετατρέπεται εἰς θερμότητα Q, τότε, ὡς γνωστόν, τὸ μηχανικὸν ἰσοδύναμον τῆς θερμότητος δίδεται διὰ τῆς σχέσεως :

$$J = \frac{A}{Q} \qquad (1)$$

Τὸ ἔργον τὸ ὁποῖον προσδίδει ὁ ἠλεκτρικὸς θερμαντὴρ ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς ἰσχύος αὐτοῦ N ἐπὶ τὸν χρόνον t, ἤτοι :

$$A = N \cdot t$$

Ἐπίσης, ἡ θερμότης τὴν ὁποίαν ἀπορροφᾷ τὸ ὕδωρ ἰσοῦται μὲ τὴν μᾶζαν m_1 τοῦ ὕδατος ἐπὶ τὴν εἰδικὴν θερμότητα c_1 αὐτοῦ καὶ ἐπὶ τὴν μεταβολὴν τῆς θερμοκρασίας $(\theta_1 - \theta_2)$, ἤτοι :

$$Q_1 = m_1 \cdot c_1 \, (\theta_1 - \theta_2)$$

Ἡ θερμότης τὴν ὁποίαν ἀπορροφᾷ τὸ θερμιδόμετρον εἶναι :

$$Q_2 = m_2 \cdot c_2 \, (\theta_1 - \theta_2)$$

ὅπου m_2 ἡ μᾶζα τοῦ θερμιδομέτρου καὶ c_2 ἡ εἰδικὴ θερμότης αὐτοῦ. Ἐπειδὴ δὲ $Q = Q_1 + Q_2$, ἡ σχέσις (1) γράφεται :

$$J = \frac{N \cdot t}{(m_1 \cdot c_1 + m_2 \cdot c_2) \, (\theta_1 - \theta_2)} \qquad (2)$$

Θέτομεν τὰ δεδομένα : $N = 84 \cdot 10^7$ erg/sec, $t = 10 \cdot 60$ sec, $m_1 = 380$ gr, $c_1 = 1$ cal/gr · grad, $\theta_1 - \theta_2 = 30^0$ C, $m_2 \cdot c_2 = 20$ cal/grad, καὶ εὑρίσκομεν :

$$\underline{J = 4{,}2 \cdot 10^7 \text{ erg/cal} = 4{,}2 \text{ Joule/cal.}}$$

1243. Πόση ἰσχὺς εἰς ἵππους ἀπαιτεῖται διὰ τὴν τῆξιν 60 gr πάγου 0° C ἐντὸς 15 πρώτων λεπτῶν.

Λύσις. Ἔστω N ἡ ἰσχύς, A τὸ ἔργον καὶ t ὁ χρόνος. Τότε, ὡς γνωστόν, θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις :

$$N = \frac{A}{t} \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ ὅμως τὸ ἔργον A εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ ποσὸν τῆς θερμότητος Q εἰς τὸ ὁποῖον μετατρέπεται, ἤτοι $A = J \cdot Q$, θὰ ἔχωμεν :

$$N = \frac{J \cdot Q}{t} \qquad (2)$$

Ἐὰν καλέσωμεν ἀκολούθως m τὴν μᾶζαν τοῦ πάγου καὶ λ τὴν θερμότητα τήξεως αὐτοῦ, ἡ σχέσις (2) γράφεται :

$$N = \frac{J \cdot m \cdot \lambda}{t} \qquad (3)$$

Θέτομεν εἰς τὴν σχέσιν (3) : $J = 4{,}2$ Joule/cal, $m = 60$ gr, $\lambda = 80$ cal/gr, $t = 15 \cdot 60$ sec, καὶ εὑρίσκομεν :

$$N = 22{,}4 \text{ Watt}$$

Ἐπειδὴ δὲ 1 CV = 736 Watt, ἔχομεν καί :

$$\underline{N = 0{,}03 \text{ CV}.}$$

1244. Πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ ταχύτης σφαίρας ἐκ μολύβδου θερμοκρασίας 20° C, εἰς τρόπον ὥστε ὅταν ἡ σφαῖρα προσκρούσῃ ἐπὶ τοῦ στόχου νὰ τακῇ ἐξ ὁλοκλήρου. (Εἰδ. θερμότης μολύβδου 0,032 cal · gr^{-1} · grad^{-1}, σημεῖον τήξεως μολύβδου 327° C, θερμότης τήξεως μολύβδου 5,4 cal/gr.)

Λύσις. Ἔστω m ἡ μᾶζα, υ ἡ ταχύτης, c ἡ εἰδικὴ θερμότης, θ_1 ἡ ἀρχικὴ θερμοκρασία, θ_2 ἡ τελικὴ θερμοκρασία καὶ λ ἡ θερμότης τήξεως τοῦ μολύβδου. Ἡ κινητικὴ ἐνέργεια τοῦ μολύβδου θὰ εἶναι :

$$E_{\kappa\iota\nu.} = \frac{1}{2} m \cdot \upsilon^2$$

Ὅταν ὁ μόλυβδος προσκρούσῃ ἐπὶ τοῦ τοίχου, ἡ κινητικὴ ἐνέργεια θὰ μετατραπῇ εἰς θερμότητα Q, ἡ ὁποία ὑποθέτομεν ὅτι ἀφ' ἑνὸς θ' αὐξήσῃ τὴν θερμοκρασίαν τοῦ μολύβδου ἀπὸ θ_1 εἰς θ_2 βαθμοὺς καὶ ἀφ' ἑτέρου θὰ τήξῃ αὐτόν. Ἡ θερμότης ἡ ἀπαιτουμένη διὰ τὴν θέρμανσιν τοῦ μολύβδου εἶναι :

$$Q_1 = m \cdot c\,(\theta_2 - \theta_1)$$

ἡ δὲ θερμότης ἡ ἀπαιτουμένη διὰ τὴν τῆξιν αὐτοῦ εἶναι :

$$Q_2 = m \cdot \lambda$$

Ἐπειδὴ δὲ κατὰ τὴν Ἀρχὴν τῆς διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας ἡ κινητικὴ ἐνέργεια $E_{\kappa\iota\nu.}$ θὰ ἰσοῦται μὲ τὴν θερμότητα $Q_1 + Q_2$ τὴν ὁποίαν προσλαμβάνει ὁ μόλυβδος, ἐργαζόμενοι εἰς τὸ σύστημα C.G.S. ἔχομεν :

$$\frac{1}{2} m \cdot \upsilon^2 = J \cdot [\, m \cdot c\,(\theta_2 - \theta_1) + m \cdot \lambda \,]$$

ἢ

$$\upsilon = \sqrt{2 \cdot J\,[\,c \cdot (\theta_2 - \theta_1) + \lambda\,]}$$

ὅπου $J = 4{,}2 \cdot 10^7$ erg/cal τὸ μηχανικὸν ἰσοδύναμον τῆς θερμότητος.

Θέτομεν εἰς τὴν τελευταίαν σχέσιν τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως καὶ εὑρίσκομεν :

$$\underline{\upsilon = 36\,000 \text{ cm/sec} = 360 \text{ m/sec}.}$$

1245. Τεμάχιον μετάλλου βάρους 4 kgr* πίπτει ἐξ ὕψους 106,75 m ἐπὶ τελείως μὴ ἐλαστικοῦ βάθρου, ὅτε ἡ ὅλη ἐνέργεια μετατρέπεται εἰς θερμότητα. Ποῖον ποσὸν θερμότητος ἀναπτύσσεται.

Λύσις. Ὡς γνωστὸν $A = J \cdot Q$ καὶ ἑπομένως :

$$Q = \frac{A}{J} \qquad (1)$$

Ἐὰν καλέσωμεν h τὸ ὕψος εἰς τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται τὸ σῶμα καὶ B τὸ βάρος αὐτοῦ ἡ σχέσις (1) γράφεται :

$$Q = \frac{B \cdot h}{J} \qquad (2)$$

Θέτομεν τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως : $B = 4$ kgr*, $h = 106{,}75$ m, $J = 427$ kgr*m/kcal, καὶ εὑρίσκομεν :

$$\underline{Q = 1 \text{ kcal}.}$$

1246. Κανονικὸς ἄνθρωπος, ὁ ὁποῖος δὲν ἐκτελεῖ σωματικὸν ἔργον, διὰ νὰ συντηρῆται χρειάζεται ἡμερησίως 1 800 kcal. Πόση εἶναι κατὰ μέσον ὅρον εἰς

Watt ἡ ἀπαιτουμένη ἰσχὺς διὰ τὴν διατήρησιν τῆς ζωῆς. Πόση ἡ καταναλισκομένη ἐνέργεια εἰς κιλοβατώρια εἰς ἓν ἔτος.

Λύσις. Μεταξὺ ἔργου καὶ θερμότητος ἰσχύει, ὡς γνωστόν, ἡ σχέσις:

$$A = J \cdot Q \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ ὅμως $A = N \cdot t$, ἡ σχέσις (1) γράφεται:

$$N = \frac{J \cdot Q}{t} \qquad (2)$$

Θέτομεν εἰς τὴν (2): $J = 4{,}2$ Joule/cal, $Q = 18 \cdot 10^5$ cal, $t = 24 \cdot 3\,600$ sec, καὶ εὑρίσκομεν:

$$\underline{N = 87{,}3 \text{ Watt.}}$$

Ἡ καταναλισκομένη ἐνέργεια εἰς 1 ἔτος θὰ εἶναι:

$$\underline{A = 0{,}873 \text{ kW} \cdot 365 \cdot 24 \text{ h} = 765 \text{ kWh.}}$$

1247. Πόσον μηχανικὸν ἔργον παραγόμενον διὰ τριβῆς ἀπαιτεῖται διὰ νὰ ἀνυψώσωμεν τὴν θερμοκρασίαν κοίλου κυλινδρικοῦ τυμπάνου ἐκ χαλκοῦ μάζης 150 gr περιέχοντος 600 gr ὕδατος κατὰ 5° C. (Εἰδ. θερμότης χαλκοῦ 0,092 cal · gr^{-1} · grad^{-1}.)

Λύσις. Εἰς τὸν γνωστὸν τύπον: $A = J \cdot Q$ θέτομεν:

$$Q = m_1 \cdot c_1 (\theta_1 - \theta_2) + m_2 \cdot c_2 (\theta_1 - \theta_2)$$

ἢ

$$Q = (m_1 \cdot c_1 + m_2 \cdot c_2)(\theta_1 - \theta_2)$$

καὶ λαμβάνομεν:

$$A = J (m_1 \cdot c_1 + m_2 \cdot c_2)(\theta_1 - \theta_2) \qquad (1)$$

Εἰς τὸν τύπον (1) θέτομεν τὰ δεδόμενα τῆς ἀσκήσεως: $m_1 = 150$ gr, $c_1 = 0{,}092$ cal · gr^{-1} · grad^{-1}, $m_2 = 600$ gr, $c_2 = 1$ cal · gr^{-1} · grad^{-1}, $\theta_1 - \theta_2 = 5^0$ C καὶ $J = 4{,}2$ Joule/cal, καὶ εὑρίσκομεν:

$$\underline{A = 12\,889 \text{ Joule} = 1\,310 \text{ kgr*m.}}$$

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Β′

1248. Σιδηροδρομικὸς συρμὸς μάζης 200 ton κινεῖται μὲ ταχύτητα 90 km/h. Ζητεῖται: α) Ποῖον τὸ παραγόμενον εἰς τὸ σύστημα πεδήσεως ποσὸν θερμότητος, μέχρις ὅτου ὁ συρμὸς ἠρεμήσῃ, ἐὰν παραδεχθῶμεν ὅτι ἅπασα ἡ κινητικὴ ἐνέργεια μετατρέπεται εἰς θερμότητα. β) Πόσα λίτρα ὕδατος θερμοκρασίας 0° C δυνάμεθα νὰ θερμάνωμεν μὲ ταύτην μέχρι τοῦ σημείου ζέσεως. (Ἀπ. $1{,}87 \cdot 10^4$ kcal, 187 *lt.*)

1249. Μετέωρον μάζης 15 ton πίπτει ἐπὶ τοῦ Ἡλίου μὲ ταχύτητα 100 km/sec. Ποῖον τὸ παραγόμενον ποσὸν θερμότητος κατὰ τὴν σύγκρουσιν μετὰ τῆς ἐπιφανείας τοῦ Ἡλίου. (Ἀπ. $179 \cdot 10^8$ kcal.)

1250. Σιδηροδρομικὸς συρμὸς μάζης 250 ton κινεῖται ὑπὸ ταχύτητα 90 km/h. Ποῖον ποσὸν θερμότητος ἐκλύεται εἰς τὰ φρένα, ὅταν ὁ συρμὸς τίθεται ἀποτόμως εἰς ἀκινησίαν, ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι ὅλη ἡ κινητικὴ ἐνέργεια μετατρέπεται εἰς θερμότητα. ($g = 10$ m/sec^2.) (Ἀπ. 18 296 kcal.)
(Ε. Μ. Πολυτεχνεῖον, Σχολαὶ Χημικῶν - Μεταλλειολόγων, 1955.)

1251. Σῶμα βάρους 80 kgr* διανύει ὀλισθαῖνον ἐπὶ σανίδος, ἐχούσης κλίσιν 30° ὡς πρὸς τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον, διάστημα 10 m. Ἐὰν ὁ συντελεστὴς τριβῆς εἶναι 0,4, νὰ εὑρεθῇ ἡ τελικὴ ταχύτης τοῦ σώματος καὶ τὸ διὰ τῆς τριβῆς παραχθὲν ποσὸν θερμότητος. (Ἀπ. 5,47 m/sec, 0,65 kcal.)

1252. Μεταλλικὸς κύλινδρος λεπτῶν τοιχωμάτων, διαμέτρου 5 cm, περιέχει 314 gr πάγου θερμοκρασίας 0° C. Ἡ ἐξωτερικὴ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου εὑρίσκεται εἰς στενὴν ἐπαφὴν μὲ δερμάτινον ἱμάντα ὅστις, τιθεμένου τοῦ κυλίνδρου εἰς περιστροφήν, ἐξασκεῖ δύναμιν τριβῆς 8 kgr*. Ἐὰν παραδεχθῶμεν ὅτι ἅπασα ἡ παραγομένη θερμότης μεταβιβάζεται εἰς τὸν πάγον, νὰ εὑρεθῇ μετὰ πόσας περιστροφὰς θὰ τακῇ οὗτος πλήρως. (Θερμότης τήξεως τοῦ πάγου 80 cal/gr.) (Ἀπ. 8 540.)

1253. Αὐτοκίνητον μάζης 1 500 kgr κινεῖται μὲ ταχύτητα 15 m/sec. Ἐὰν τεθῇ εἰς ἀκινησίαν ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῶν φρένων του, ποία ἡ ποσότης θερμότητος ἡ ὁποία θὰ ἀναπτυχθῇ εἰς τὰ φρένα. (Ἀπ. 40 200 cal.)

1254. Σφαῖρα ἐκ μολύβδου (εἰδ. θερμότης 0,03 cal/gr·grad) μάζης 100 gr καὶ ἀρχικῆς θερμοκρασίας 20° C, βάλλεται κατακορύφως πρὸς τὰ ἄνω μὲ ταχύτητα 420 m/sec· ἐπαναπίπτουσα δὲ εἰς τὸ σημεῖον ἐξ οὗ ἐβλήθη, συναντᾷ στρῶμα πάγου θερμοκρασίας 0° C. Ἐὰν παραδεχθῶμεν ὅτι ἅπασα ἡ κατὰ τὴν πρόσκρουσιν παραγομένη θερμότης μεταβιβάζεται εἰς τὸν πάγον, ποία μᾶζα ἐξ αὐτοῦ τήκεται. (Δίδεται θερμότης τήξεως πάγου 80 cal/gr.) (Ἀπ. 27 gr.)

1255. Διάττων ἀστήρ, κινούμενος μὲ ταχύτητα 1,5 km/sec, φέρεται εἰς ἀκινησίαν ὑπὸ τῆς γηΐνης ἀτμοσφαίρας. Εὕρετε τὴν αὔξησιν τῆς θερμοκρασίας τοῦ διάττοντος ἀστέρος, ὑποθέτοντες ὅτι ὅλη ἡ παραχθεῖσα θερμότης ἀπορροφᾶται ὑπὸ τοῦ ἀστέρος. (Εἰδικὴ θερμότης τῆς ὕλης τοῦ διάττοντος ἀστέρος = 0,15 cal/gr·grad.) (Ἀπ. 1 786° C.)

1256. Πόσοι τόννοι ἄνθρακος καταναλίσκονται καθ' ὥραν ὑπὸ ἀτμομηχανῆς ἰσχύος 3 000 HP καὶ ἀποδόσεως 9 %, ὅταν ὁ χρησιμοποιούμενος ἄνθραξ παρέχῃ 6 000 kcal/kgr. Δεδομένον: Μηχανικὸν ἰσοδύναμον τῆς θερμότητος 427 kgr*m/kcal. (Ἀπ. 3,513 τόννοι.)
(Ε. Μ. Πολυτεχνεῖον, Σχολὴ Ἀρχιτεκτόνων, 1954.)

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Γ'

1257. Ἠλεκτρικὸν ἐργοστάσιον παρέχει 120 000 kW. Πόσον ἄνθρακα πρέπει νὰ προμηθευθῶμεν διὰ λειτουργίαν ἑνὸς ἔτους. (Θερμότης καύσεως ἄνθρακος 8 000 kcal/kgr.)

1258. Κινητὴρ αὐτοκινήτου καταναλίσκει 6 kgr βενζίνης θερμότητος καύσεως 11 000 kcal/kgr καὶ ἀποδίδει ἰσχὺν 32 ἵππων. Πόση εἶναι ἡ ἀπόδοσις αὐτοῦ.

1259. Πόσα χιλιόγραμμα ἄνθρακος θερμότητος καύσεως 8 000 kal/kgr ἀπαιτοῦνται διὰ τὴν παραγωγὴν 1 κιλοβατωρίου μὲ θερμικὴν μηχανὴν συντελεστοῦ ἀποδόσεως 0,5.

1260. Διὰ τὴν παραγωγὴν ὠφελίμου ἐνεργείας εἰς μικρὰν ἐγκατάστασιν χρησιμοποιεῖται ἀτμομηχανὴ ἰσχύος 56 ἵππων. Ἡ μηχανὴ χρησιμοποιεῖ λιθάνθρακα θερμότητος καύσεως 5 600 kcal/kgr, ἐκ τῶν παραγομένων δὲ ἐκ τῆς καύσεως θερμίδων μόνον 15 % χρησιμοποιοῦνται ὠφελίμως. Ἡ μηχανὴ ἐργάζεται ἡμερησίως 10 ὥρας, πόση ἡ ἐτησία κατανάλωσις ἄνθρακος. (Ἐργάσιμον ἔτος 300 ἡμέραι.)

1261. Εἰς ὑδατοπτώσεις τὸ ὕδωρ πίπτει ἐξ ὕψους 435 m. Κατὰ πόσον θὰ ἀνυψοῦται ἡ θερμοκρασία αὐτοῦ.

1262. Πόσα κιλοβατώρια (kWh) ἀπαιτοῦνται, ἵνα ὁ ἀὴρ αἰθούσης 250 m^3 ὑπὸ πίεσιν 740 mm Hg θερμανθῇ ἀπὸ − 10° C εἰς + 20° C.

1263. Τὰ ἀκτινεργὰ στοιχεῖα διασπῶνται αὐτομάτως, τὰ δὲ θυγατρικὰ συστατικὰ εἶναι ἐπίσης ἀκτινεργά. Συνεπείᾳ τούτου ἐλευθεροῦται ἐνέργεια συνδέσεως μὲ τὴν ὁποίαν συνεκρατοῦντο προηγουμένως τὰ θυγατρικὰ συστατικά. 1 mgr ραδίου παρέχει 0, 118 cal καθ' ὥραν. Τὸ ἀκτινεργὸν στοιχεῖον ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον ἐξαντλεῖται καὶ ἐπομένως ἡ ἔκλυσις ἐνεργείας δέν διαρκεῖ αἰωνίως, ἀλλὰ παύει βραδέως. «Ἡ διάσπασις τοῦ ραδίου χωρεῖ βραδύτατα εἰς τρόπον ὥστε ἐντὸς 1 580 ἐτῶν τὸ ράδιον ἔχει ἐξαντληθῇ κατὰ τὸ ἥμισυ». Ἡ συνολικὴ διάσπασις 1 mgr ραδίου, καὶ ἐπομένως ἡ συνολικὴ ἐνέργεια τὴν ὁποίαν ἀποδίδει, ἀνέρχεται εἰς 2 630 kcal. Πόσα κιλοβατώρια ἐγκλείουν 1 kgr ραδίου· νὰ συγκριθῇ πρὸς τὴν ἐνέργειαν τὴν ὁποίαν παρέχει καιόμενον 1 kgr βενζίνης θερμότητος καύσεως 11 600 kcal/kgr.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΚΒ΄

ΘΕΡΜΙΚΑΙ ΜΗΧΑΝΑΙ

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Α'

1264. Πόσα kgr ἄνθρακος, τοῦ ὁποίου ἡ θερμότης καύσεως εἶναι 7 000 kcal/kgr, καταναλίσκονται εἰς ἀτμομηχανὴν 2 000 PS συντελεστοῦ ἀποδόσεως 16 %, διὰ συνεχῆ λειτουργίαν αὐτῆς ἐπὶ 24 ὥρας.

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν η τὸν συντελεστὴν ἀποδόσεως, $A_{\delta\alpha\pi.}$ τὸ δαπανώμενον ἔργον καὶ $A_{\omega\varphi.}$ τὸ ὠφέλιμον ἔργον, ἔχομεν :

$$A_{\delta\alpha\pi.} = \frac{A_{\omega\varphi.}}{\eta} \qquad (1)$$

Τὸ δαπανώμενον ἔργον προέρχεται ἀπὸ τὴν καῦσιν τοῦ ἄνθρακος καὶ θὰ εἶναι $A_{\delta\alpha\pi.} = J \cdot Q$, ὅπου J εἶναι τὸ μηχανικὸν ἰσοδύναμον τῆς θερμότητος, τὸ δὲ ὠφέλιμον ἔργον τὸ προερχόμενον ἐκ τῆς λειτουργίας τῆς ἀτμομηχανῆς θὰ εἶναι $A_{\omega\varphi.} = N \cdot t$. Ἄρα ἡ σχέσις (1) γράφεται :

$$J \cdot Q = \frac{N \cdot t}{\eta} \quad \text{ἤ} \quad Q = \frac{N \cdot t}{J \cdot \eta} \qquad (2)$$

Ἐὰν καλέσωμεν Θ_κ τὴν θερμότητα καύσεως καὶ α τὸν ἀριθμὸν τῶν χιλιογράμμων ἄνθρακος τὰ ὁποῖα ἀπαιτοῦνται διὰ νὰ λάβωμεν τὴν θερμότητα Q, θὰ ἔχωμεν :

$$Q = \alpha \cdot \Theta_\kappa$$

καὶ συνεπῶς ἡ σχέσις (2) γράφεται :

$$\alpha \cdot \Theta_\kappa = \frac{N \cdot t}{J \cdot \eta} \quad \text{ἤ} \quad \alpha = \frac{N \cdot t}{\Theta_\kappa \cdot J \cdot \eta} \qquad (3)$$

Θέτομεν εἰς τὴν σχέσιν (3) : $N = 2\,000$ PS $= 2\,000 \cdot 736$ Watt, $t = 24 \cdot 3\,600$ sec, $\Theta_\kappa = 7\,000 \cdot 10^3$ cal/gr, $J = 4{,}2$ Joule/sec, $\eta = 0{,}16$, καὶ εὑρίσκομεν :

$$\underline{\alpha = 27\,100 \text{ kgr} = 27{,}1 \text{ ton.}}$$

1265. Βενζινοκινητὴρ ἰσχύος 1 000 PS καὶ συντελεστοῦ ἀποδόσεως 30 % καταναλίσκει βενζίνην, τῆς ὁποίας ἡ θερμότης καύσεως εἶναι 10 200 cal/gr καὶ ἡ πυκνότης 0,72 gr/cm³. Πόσα λίτρα βενζίνης ἀπαιτοῦνται διὰ τὴν λειτουργίαν τοῦ κινητῆρος ἐπὶ μίαν ὥραν.

Λύσις. Ὅπως καὶ εἰς τὴν προηγουμένην ἄσκησιν (σχέσις 3), θὰ ἔχωμεν :

$$\alpha = \frac{N \cdot t}{\Theta_\kappa \cdot J \cdot \eta} \qquad (1)$$

Ἐὰν καλέσωμεν α τὸν ἀριθμὸν χιλιογράμμων m μάζης ἄνθρακος καὶ β τὸν ἀριθμὸν τῶν λίτρων V ὄγκου ἄνθρακος, τότε ἐκ τοῦ τύπου τῆς πυκνότητος, $\rho = m/V$, λαμβάνομεν:

$$\alpha = \rho \cdot \beta \qquad (2)$$

Οὕτω ἡ σχέσις (1) γράφεται:

$$\beta = \frac{N \cdot t}{\rho \cdot \Theta_\kappa \cdot J \cdot \eta} \qquad (3)$$

Θέτομεν εἰς τὴν σχέσιν (3): $N = 1\,000 \cdot 736$ Watt, $\rho = 0{,}72$ kgr/*lt*, $t = 3\,600$ sec, $\Theta_\kappa = 10\,200 \cdot 10^3$ cal/kgr, $J = 4{,}2$ Joule, $\eta = 0{,}3$, καὶ εὑρίσκομεν:

$$\underline{\beta = 287\ lt.}$$

1266. Αὐτοκίνητον, τοῦ ὁποίου ὁ κινητὴρ ἔχει ἰσχὺν 20 ἵππων καὶ συντελεστὴν ἀποδόσεως 25%, ἀναπτύσσει ταχύτητα 75 km/h. Πόσα λίτρα βενζίνης, τῆς ὁποίας ἡ θερμότης καύσεως εἶναι 10 000 cal/gr καὶ ἡ πυκνότης 0,72 gr/cm³, θὰ καταναλωθοῦν διὰ τὴν διαδρομὴν 100 km.

Λύσις. Ὅπως καὶ εἰς τὴν προηγουμένην ἄσκησιν, ἔχομεν:

$$\beta = \frac{N \cdot t}{\rho \cdot \Theta_\kappa \cdot J \cdot \eta} \qquad (1)$$

ὅπου β ὁ ἀριθμὸς τῶν λίτρων τῆς καταναλισκομένης βενζίνης.

Ἐπειδὴ ὅμως $t = s/\upsilon$, ὅπου s τὸ διανυόμενον διάστημα ὑπὸ τοῦ αὐτοκινήτου εἰς χρόνον t καὶ υ ἡ ταχύτης αὐτοῦ, ἡ σχέσις (1) γράφεται:

$$\beta = \frac{N \cdot s}{\rho \cdot \Theta_\kappa \cdot J \cdot \eta \cdot \upsilon} \qquad (2)$$

Θέτοντες εἰς τὴν σχέσιν (2): $N = 20 \cdot 736$ Watt, $s = 100$ km, $\upsilon = 75$ km/h $= 75/3\,600$ km/sec, $\rho = 0{,}72$ kgr/*lt*, $\Theta_\kappa = 10\,000 \cdot 10^3$ cal/kgr, $J = 4{,}2$ Joule/cal, $\eta = 0{,}25$, εὑρίσκομεν:

$$\underline{\beta = 9{,}4\ lt.}$$

1267. Νὰ καθορισθῇ ἡ θεωρητικὴ ἀπόδοσις ἀτμομηχανῆς ἐργαζομένης μεταξὺ τῶν θερμοκρασιῶν 400° C καὶ 105° C.

Λύσις. Θεωρητικῶς ἀποδεικνύεται ὅτι ὁ συντελεστὴς ἀποδόσεως η θερμικῆς μηχανῆς ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὰς ἀπολύτους θερμοκρασίας T_1 καὶ T_2 τῶν δύο δεξαμενῶν θερμότητος καὶ ἐκφράζεται διὰ τῆς σχέσεως:

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

Θέτομεν: $T_1 = 400 + 273 = 673^0$ K, $T_2 = 105 + 273 = 378^0$ K, καὶ εὑρίσκομεν:

$$\underline{\eta = 0{,}438}$$

ἤτοι ἡ θεωρητικὴ ἀπόδοσις εἶναι 43,8 %.

1268. Ἠλεκτρικὸν ψυγεῖον πρέπει νὰ ἀφαιρῇ 100 cal/sec. Ἐὰν ὁ κινητὴρ ἔχῃ συντελεστὴν ἀποδόσεως 90%, πόση ἡ ἰσχὺς αὐτοῦ.

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν N τὴν ζητουμένην ἰσχὺν τοῦ ψυγείου, τότε, ὡς γνωστόν, θὰ ἔχωμεν:

$$N = \frac{A}{t}$$

ἐπειδὴ δὲ $A = J \cdot Q$, λαμβάνομεν:

$$N = \frac{J \cdot Q}{t}$$

Ἐὰν ὁ συντελεστὴς ἀποδόσεως εἶναι η, τότε ἡ δαπανωμένη ἰσχὺς θὰ εἶναι :

$$N_{\delta\alpha\pi.} = \frac{J \cdot Q}{\eta \cdot t}$$

Θέτοντες εἰς τὴν ἀνωτέρω σχέσιν : $J = 4{,}2$ Joule/cal, $Q = 100$ cal, $\eta = 0{,}9$, $t = 1$ sec, εὑρίσκομεν τελικῶς :

$$\underline{N_{\delta\alpha\pi.} = 0{,}62 \text{ HP.}}$$

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Β'

1269. Ποία ἡ μεγίστη δυνατὴ θερμικὴ ἀπόδοσις ἀτμοστροβίλου, εἰς τὸν ὁποῖον ὁ ἀτμὸς εἰσέρχεται ὑπὸ θερμοκρασίαν 257° C, εἰς δὲ τὸν συμπυκνωτὴν ἡ θερμοκρασία εἶναι 49° C. (Ἀπ. 39 %.)

1270. Ἕκαστος τῶν τριῶν ἀτμολεβήτων πλοίου καταναλίσκει καθ' ὥραν 5,6 ton πετρελαίου θερμότητος καύσεως 9 500 kcal/kgr. Ἐὰν ἡ συνολικὴ ἰσχὺς τῆς μηχανῆς αὐτοῦ εἶναι 23 000 PS, ποία ἡ ἀπόδοσις. (Ἀπ. 9,1 %.)

1271. Ποσότης 1 kgr λιθάνθρακος καιομένη παράγει 16 kgr ἀτμοῦ διὰ τοῦ ὁποίου ἀτμομηχανὴ ἰσχύος 1 PS λειτουργεῖ ἐπὶ 2 ὥρας. Ἡ θερμότης καύσεως τοῦ λιθάνθρακος εἶναι 8 000 kcal/kgr. Ποία ἡ ἀπόδοσις τῆς μηχανῆς. (Ἀπ. 16 %.)

1272. Ἡ ἰσχὺς μηχανῆς αὐτοκινήτου εἶναι 60 HP. Τὸ καύσιμον εἶναι βενζίνη θερμότητος καύσεως 9 000 kcal/kgr μὲ βαθμὸν ἀποδόσεως $\eta = 0{,}35$. α) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ποσὸν τῆς βενζίνης, τὸ ὁποῖον ἀπαιτεῖται διὰ λειτουργίαν τῆς μηχανῆς ἐπὶ 15 h συνεχῶς. β) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τοῦ δοχείου ἐντὸς τοῦ ὁποίου θὰ ἀποταμιευθῇ ἡ ἀπαιτουμένη ποσότης βενζίνης. (Ἀπ. α' 180,6 kgr. β' 0,258 m^3.)

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Γ'

1273. Ἀτμομηχανὴ λειτουργεῖ ὑπὸ ἀπόδοσιν 15 %. Πόσην θερμότητα πρέπει νὰ προμηθεύωμεν ἀνὰ ὥραν, ἵνα αὐτὴ ἐμφανίζῃ ἰσχὺν 3 HP.

1274. Ἀτμομηχανὴ ἄνευ συμπυκνωτοῦ ἔχει κυλινδρικὸν ἔμβολον διαμέτρου 25 cm καὶ διαδρομῆς 60 cm. Ὁ ἀτμὸς εἰσέρχεται εἰς τὸν κύλινδρον ὑπὸ σταθερὰν πίεσιν 5 Atm. Ὅταν αὐτὴ ἐκτελῇ 240 στρ./min, ποία ἡ ἐμφανιζομένη ἰσχύς.

1275. Ὑπολογίσατε τὴν ἰσχὺν εἰς HP μιᾶς διπλῆς διαδρομῆς ἀτμομηχανῆς ἐχούσης τὰ κάτωθι στοιχεῖα: διάμετρος κυλίνδρου 30 cm, μῆκος διαδρομῆς 60 cm, συχνότης 300 στρ./min, μέση πίεσις ἀτμοῦ 4,5 Atm.

1276. Ἀτμομηχανὴ λειτουργεῖ μεταξὺ θερμοκρασιῶν, λέβητος 200° C καὶ συμπυκνωτοῦ 105° C. Ποία ἡ θεωρητικὴ μεγίστη ἀπόδοσις.

1277. Ἡ θερμοκρασία ἐκρήξεως εἰς μηχανὴν ἐσωτερικῆς καύσεως εἶναι 1 200° C καὶ ἡ θερμοκρασία ἐξόδου εἶναι 700° C. Ποία ἡ μεγίστη θεωρητικὴ ἀπόδοσις τῆς μηχανῆς.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΚΓ΄

ΓΕΝΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Δ΄

ΜΗΧΑΝΙΚΗ

1278. α) Νὰ δειχθῇ ἐπὶ τῇ βάσει τῶν διαστάσεων, ἐὰν ὁ τύπος $\upsilon^2 = \upsilon_0 + 2\gamma s$, ὅπου υ καὶ υ_0 ταχύτητες, γ ἐπιτάχυνσις καὶ s διάστημα, εἶναι ὀρθὸς ἢ ὄχι. Ἐὰν δὲν εἶναι ὀρθός, νὰ δειχθῇ ἐπὶ τῇ βάσει τῶν διαστάσεων πῶς πρέπει νὰ διορθωθῇ. β) Ἡ περίοδος τῆς κινήσεως σφαίρας ἐξηρτημένης ἀπὸ κατακόρυφον ἐλατήριον εἶναι $T = 2\pi\sqrt{m/c}$, ὅπου $c = F/x$. Νὰ ἀποδειχθῇ ἐπὶ τῇ βάσει τῶν διαστάσεων, ἐὰν ὁ τύπος εἶναι ὀρθός. Τὸ T παριστᾷ χρόνον, m μᾶζαν, F δύναμιν καὶ x μῆκος.

1279. Δύο ὀχήματα Α καὶ Β εὑρισκόμενα εἰς ἀπόστασιν 100 m ἀπ' ἀλλήλων ἐκκινοῦν ταὐτοχρόνως ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν μὲ ἐπιταχύνσεις $\gamma_A = 0{,}16$ m/sec² καὶ $\gamma_B = 8$ cm/sec². Ἐπὶ τοῦ ὀχήματος Α εὑρίσκεται μυῖγα Μ θεωρουμένη ὡς ὑλικὸν σημεῖον στερούμενον μάζης, ἡ ὁποία ἅμα τῇ ἐκκινήσει τοῦ Α πετᾷ εὐθυγράμμως πρὸς τὸ Β διὰ νὰ ἐπιστρέψῃ, μόλις φθάσῃ εἰς τὸ Β, πάλιν πρὸς τὸ Α καὶ οὕτω καθεξῆς μέχρι τῆς συνθλίψεώς της μεταξὺ τῶν δύο ὀχημάτων Α καὶ Β· ἡ κίνησις τῆς μυίγας Μ εἶναι ἐπιταχυνομένη μὲ ἐπιτάχυνσιν $\gamma_M = 20$ cm/sec². Ζητεῖται ἡ μεγίστη ὑπὸ τῆς μυίγας ἀναπτυχθεῖσα ταχύτης.
('Απ. 1 000 cm/sec.) (Γεωπονικὴ Σχολὴ Ἀθηνῶν, 1953.)

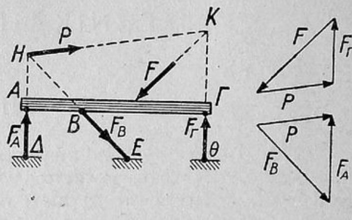
1280. Ἄνθρωπος βάρους 65 kgr* προτίθεται νὰ ἐγκαταλείψῃ φλεγόμενον κτίριον ἐξ ἑνὸς παραθύρου εὑρισκομένου εἰς ὕψος 30 m ὑπεράνω τοῦ πεζοδρομίου. Διὰ νὰ σωθῇ, δύναται νὰ χρησιμοποιήσῃ καλώδιον ἐπαρκοῦς μὲν μήκους, ἀλλ' ἀνεπαρκοῦς ἀντοχῆς, καθ' ὅσον τὸ φορτίον θραύσεως αὐτοῦ ἀνέρχεται εἰς 64 kgr*. Ζητεῖται ἡ ἐλαχίστη ταχύτης υ μετὰ τῆς ὁποίας ὁ ἄνθρωπος ὀλισθαίνων κατὰ μῆκος τοῦ κατακορύφου καλωδίου δύναται νὰ φθάσῃ εἰς τὸ πεζοδρόμιον εἰς τρόπον ὥστε ἡ κροῦσις τοῦ σώματος ἐπὶ τοῦ ἐδάφους νὰ περιορισθῇ εἰς τὸ ἐλάχιστον. ($g = 9{,}8$ m/sec².)
('Απ. 3 m/sec περίπου.)
(Γεωπονικὴ Σχολὴ Ἀθηνῶν, 1955.)

1281. Δύναμις $F = 5 \cdot 16^6$ dyn ἐνεργεῖ ἐπὶ ἑλκήθρου μάζης 20 kgr καὶ ἀναγκάζει τοῦτο νὰ κινηθῇ ὀλισθαῖνον ἐπὶ ὁριζοντίου ἐδάφους. Τὸ ἕλκηθρον ἀποκτᾷ ταχύτητα $\upsilon = 600$ cm/sec ἀφοῦ διανύσῃ 20 m. Νὰ εὑρεθῇ, ἐὰν ὑπάρχῃ τριβὴ καί, ἐὰν ὑπάρχῃ, πόση εἶναι καὶ ποία ἡ διεύθυνσίς της. ($g = 10$ m/sec².)
('Απ. $32 \cdot 10^5$ dyn, ἀντίρροπος πρὸς τὴν ἕλκουσαν δύναμιν.)
(Ε. Μ. Πολυτεχνεῖον, Σχολὴ Πολιτικῶν Μηχανικῶν, 1951.)

1282. Δοθέντος τριγώνου, ποίας δυνάμεις πρέπει νὰ ἐφαρμόσωμεν α) κατὰ τὰς διαμέσους, β) κατὰ τὰ ὕψη, γ) κατὰ τὰς ἐσωτερικὰς διχοτόμους, ἵνα ἕκαστον τῶν συστημάτων τῶν δυνάμεων τούτων ἰσορροπῇ.
('Απ. α΄ Ἀναλόγους τῶν διαμέσων. β΄ ἀναλόγους τῶν πλευρῶν. γ) ἀναλόγους πρὸς τὰ συνημίτονα τοῦ ἡμίσεος τῶν γωνιῶν.)

1283. Σανὶς ΑΒΓ ὑποστηρίζεται διὰ τριῶν στύλων, ὅπως δεικνύεται εἰς τὸ σχῆμα. Προσδιορίσατε γραφικῶς τὰς δυνάμεις τὰς δημιουργουμένας εἰς τὰς ράβδους ἀπὸ τὴν δύναμιν F ἐφαρμοζομένην εἰς τὴν σανίδα, ὡς δεικνύεται εἰς τὸ σχῆμα.

1284. Δοχεῖον πλῆρες ὕδατος περιστρέφεται ἐπὶ κατακορύφου κύκλου ἀκτῖνος 1 m τῇ βοηθείᾳ νήματος μὲ ταχύτητα 8 m/sec, εἰς δὲ τὸν πυθμένα αὐτοῦ ὑπάρχει μικρὰ ὀπή. Ζητεῖται: α) Τὸ ὕδωρ θὰ ἐκρέῃ καθέτως ὡς πρὸς τὸν πυθμένα τοῦ δοχείου ἢ ὄχι. β) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ταχύτης ἐκροῆς, ὅταν τὸ δοχεῖον εὑρίσκεται εἰς τὸ ἀνώτατον σημεῖον τῆς τροχιᾶς του. (Ὑποτίθεται ὅτι ἡ κίνησις εἶναι ὁμαλή.)

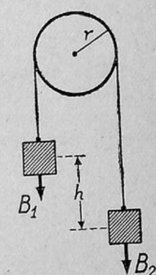


1285. Μετεωρίτης μάζης Μ περιφέρεται μὲ σταθερὰν ταχύτητα υ πέριξ τῆς Γῆς εἰς ὕψος $h = 1\,730$ km ὑπεράνω τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς. Δίδονται: Ἡ μέση ἀκτὶς τῆς Γῆς $R = 6\,366$ km καὶ ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς βαρύτητος εἰς τὸ προαναφερθὲν ὕψος h, ὅπου αὕτη εἶναι ἴση πρὸς 6,16 m/sec². Ὑπενθυμίζεται ὁ τύπος τῆς κεντρομόλου ἐπιταχύνσεως $\gamma_\kappa = \upsilon^2/R$. Ζητοῦνται: α) Ὁ χρόνος Τ μιᾶς περιφορᾶς τοῦ μετεωρίτου πέριξ τῆς Γῆς ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι τὸ βάρος αὐτοῦ ἀντισταθμίζεται ἀκριβῶς ὑπὸ τῆς φυγοκέντρου δυνάμεως. β) Ὁμοίως, ἄνευ ὅμως τῆς χρήσεως τῆς ἐννοίας τῆς φυγοκέντρου δυνάμεως. Πρὸς τοῦτο νὰ θεωρηθῇ πρὸς στιγμὴν ὅτι ὁ μετεωρίτης ὀλισθαίνει ἰσοταχῶς καὶ ἄνευ τριβῆς ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας ἑνὸς ὑποθετικοῦ κοίλου στερεοῦ ὁδηγοῦ, εὑρισκομένου εἰς ὕψος $h = 1\,730$ km ὑπεράνω τῆς ἐπιφανείας τῆς Γῆς καὶ παραλλήλως πρὸς αὐτήν. γ) Διερευνήσατε τὰς περιπτώσεις ὅπου ἡ ταχύτης τῆς περιφορᾶς τοῦ μετεωρίτου εἶναι μεγαλυτέρα, ἴση ἢ μικροτέρα τοῦ υ. Ποῖον πρακτικὸν συμπέρασμα δύναται νὰ ἐξαχθῇ, ὅσον ἀφορᾷ τὸν ὑποθετικὸν στερεὸν ὁδηγόν. δ) Θεωρήσατε τὸν μετεωρίτην, πρὸς στιγμήν, ὡς εἶδος «τεχνητοῦ δορυφόρου» ἐπὶ τοῦ ὁποίου προτίθεται νὰ ἀφιχθῇ, ἔξωθεν τῆς Γῆς προερχόμενον, ξένον ἀντικείμενον, οὐχὶ ἀμελητέας μάζης $M' = M/10$. Ὑποδείξατε τὸν μόνον ἐπιτρεπόμενον τρόπον «προσγειώσεως» τοῦ ὑποθετικοῦ διαστημοπλοίου τούτου ἐπὶ τοῦ τεχνητοῦ δορυφόρου, ἵνα ἀποτραπῇ ἡ πτῶσις ἀμφοτέρων ἐπὶ τῆς Γῆς.

(Ε. Μ. Πολυτεχνεῖον, Σχολὴ Μηχανολόγων - Ἠλεκτρολόγων, 1955.)

1286. Δύο βάρη B_1 καὶ B_2 συνδέονται μὲ εὔκαμπτον, ἀλλὰ μὴ ἐκτατὸν σχοινίον, μήκους l, τὸ ὁποῖον κρέμεται ἀπὸ τροχαλίαν ἀκτῖνος r (βλ. σχῆμα). Ἐὰν τὰ βάρη ἐκκινοῦν ἐκ τῆς ἠρεμίας μὲ μίαν ἀρχικὴν διαφορὰν ὕψους h, ὡς δεικνύεται εἰς τὸ σχῆμα, εὕρετε τὸν χρόνον t ὅστις θὰ παρέλθῃ ἕως ὅτου συναντηθοῦν. Ὑποτίθεται $B_1 > B_2$. Ἡ τριβὴ ὡς καὶ ἡ ἀδράνεια τροχαλίας καὶ σχοινίου, ἀμελητέα.

$$\left(\text{Ἀπ. } t = \sqrt{\frac{h \cdot B_1 + B_2}{g \cdot B_1 - B_2}}\right)$$



1287. Τηλεβόλον ἐστραμμένον πρὸς Νότον βάλλει βλῆμα ὑπὸ γωνίαν 60° καὶ ἀρχικὴν ταχύτητα 500 m/sec. Μετὰ t sec ἕτερον τηλεβόλον εἰς ἀπόστασιν 25 km ἀπὸ τοῦ πρώτου, ἐστραμμένον πρὸς Βορρᾶν, βάλλει βλῆμα ὑπὸ γωνίαν 36° 52′ καὶ ἀρχικὴν ταχύτητα 312,5 m/sec. Τὰ δύο βλήματα συναντῶνται εἰς σημεῖον ἀπέχον x μέτρα ἀπὸ τοῦ πρώτου τηλεβόλου καὶ y ἀπὸ τοῦ ἐδάφους. Ζητοῦνται αἱ τιμαὶ t, x καὶ y. (Διὰ τοὺς ὑπολογισμοὺς λάβετε $g = 9{,}8$ m/sec², ημ 60° = 0,866, συν 60° = 0,5, ημ 36° 52′ = 0,6, συν 36° 52′ = 0,8.) (Ἀπ. t = 68 sec, x = 21 006 m, y = 1 797 m.)

(Ε. Μ. Πολυτεχνεῖον, Σχολὴ Μηχανολόγων - Ἠλεκτρολόγων, 1948.)

1288. Ἁμαξοστοιχία ἀναχωρεῖ ἐκ τῆς ἠρεμίας ἐπὶ ὁριζοντίας ὁδοῦ διὰ νὰ φθάσῃ τὴν ταχύτητα 72 km/h. Αἱ παθητικαὶ ἀντιστάσεις ἀπορροφοῦν 5 % τῆς ὑπὸ τῶν μηχανῶν χορηγουμένης ἐνεργείας. Ἡ κίνησις κατὰ τὴν περίοδον αὐτὴν τῆς προκινήσεως ὑποτίθεται ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένη μὲ ἐπιτάχυνσιν 50 cm/sec^2. Ζητοῦνται: α) Πόσον εἶναι τὸ ὁλικὸν ἔργον τὸ παραγόμενον ὑπὸ τῆς μηχανῆς κατὰ τὴν περίοδον τῆς προκινήσεως κατὰ τόννον τῆς ἁμαξοστοιχίας. β) Πόση εἶναι ἡ διάρκεια τῆς περιόδου ταύτης. γ) Πόσον τὸ διανυθὲν διάστημα. δ) Πόση εἶναι ἡ μέση δύναμις ἡ ὁποία καταβάλλεται κατὰ τόννον ὑπὸ τῆς μηχανῆς.

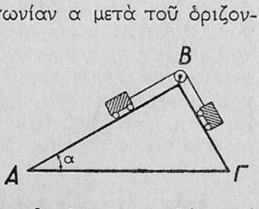
(Ἀπ. α′ 21 482 kgr*m. β′ 40 sec. γ′ 400 m. δ′ 53,7 kgr*.)

1289. Ἁμαξοστοιχία βάρους 300 ton* κινεῖται ὑπὸ σταθερὰν ταχύτητα 72 km/h. Εἰς δεδομένην στιγμὴν ὁ μηχανοδηγὸς ἐπενεργεῖ ἐπὶ τῶν τροχοπεδῶν, ὑποτίθεται δὲ τότε ὅτι ἀσκεῖται μοναδικὴ καὶ σταθερὰ δύναμις ἐπὶ τῶν τροχῶν τοῦ ὀχήματος, ἥτις καὶ προκαλεῖ τὴν ἀκινησίαν αὐτοῦ ἀφοῦ διανύσῃ διάστημα 500 m. Ζητοῦνται: α) Ἡ μέση ταχύτης τοῦ ὀχήματος ἀπὸ τῆς στιγμῆς τῆς ἐπενεργείας τῶν τροχοπεδῶν μέχρι τῆς πλήρους ἀκινησίας, ὡς καὶ ὁ ἀπαιτούμενος πρὸς τοῦτο χρόνος. β) Ἡ ἐπιβραδύνουσα δύναμις καὶ τὸ ἔργον αὐτῆς κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς ἐπιβραδύνσεως, ὡς καὶ ἡ μεταβολὴ τῆς κινητικῆς ἐνεργείας τοῦ ὀχήματος κατὰ τὸν χρόνον αὐτόν. Ποίαν παρατήρησιν ἔχετε νὰ κάμετε ἐπ' αὐτοῦ.

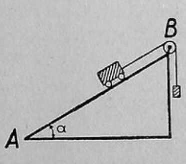
(Ἀπ. α′ $\bar{v} = 10$ m/sec, t = 50 sec. β′ F = 12 240 kgr*,
$A = 612 \cdot 10^4$ kgr*m, $E_{κιν.} = 612 \cdot 10^4$ kgr*m, $A = E_{κιν.}$)

1290. Πρόκειται νὰ ἀνέλθῃ ἁμαξοστοιχία ἐπὶ κεκλιμένης τροχιᾶς τῆς ὁποίας τὸ μῆκος εἶναι 5 km καὶ ἡ κατακόρυφος ἀπόστασις τῶν ἄκρων θέσεων εἶναι 1500 m. Κάθε ὄχημα συμπεριλαμβανομένων καὶ τῶν ταξειδιωτῶν ζυγίζει 5 ton*. Ζητεῖται: α) Ἡ δύναμις τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ ἀναπτύξῃ ὁ κινητὴρ τῆς μηχανῆς ἵνα ἑλκύσῃ ἓν ὄχημα κατὰ μῆκος τῆς κλίσεως. (Ἀπόδειξις). β) Τὸ ἀπαιτούμενον ἔργον διὰ τὴν ἀνάβασιν ἑνὸς μόνον ὀχήματος καὶ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἐὰν τὸ ὄχημα ἀνυψοῦτο μὲ καλώδιον, τὸ ἔργον θὰ ἦτο τὸ αὐτό. γ) Ἡ ἁμαξοστοιχία ἀνέρχεται τὴν κλίσιν μὲ μέσην ταχύτητα 12 km/h. Πόση εἶναι εἰς HP ἡ ἰσχὺς τοῦ κινητῆρος, ἵνα δυνηθῇ νὰ ἑλκύσῃ δύο ὀχήματα. δ) Ἐὰν ἡ χρησιμοποιουμένη ἐνέργεια προέρχεται ἀπὸ πτῶσιν ὕδατος ἐξ ὕψους 10 m, αἱ δὲ ἀπώλεια εἶναι 25 %, πόση θὰ εἶναι ἡ ποσότης ὕδατος ἥτις πρέπει νὰ παρέχεται καθ' ὥραν ἵνα κινῆται ὁ κινητήρ, ὅταν ἕλκῃ τὰ δύο ὀχήματα.

1291. Σιδηροτροχιὰ AB, μήκους 2 m, σχηματίζει γωνίαν α μετὰ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου. Μικρὸν ἁμάξιον κατέρχεται κατὰ μῆκος τῆς σιδηροτροχιᾶς ἔχον βάρος 250 gr*. 1) Νὰ ὑπολογισθῇ εἰς kgr*m τὸ ἔργον τὸ παραγόμενον ὑπὸ τῆς βαρύτητος κατὰ μῆκος τῆς σιδηροτροχιᾶς AB εἰς τὰς ἀκολούθους περιπτώσεις: α) $α = 0°$, β) $α = 90°$, γ) $α = 30°$. 2) Νὰ ὑπολογισθῇ εἰς HP καὶ εἰς Watt ἡ μέση ἰσχὺς ἡ ὀφειλομένη εἰς τὴν βαρύτητα εἰς τὴν περίπτωσιν (β), ὅταν ἡ διάρκεια κινήσεως ἐπὶ τῆς τροχιᾶς



εἶναι 0,64 sec. 3) Εἰς τὸ B τοποθετεῖται τροχαλία περὶ τὴν ὁποίαν διέρχεται ἄνευ τριβῆς νῆμα. Εἰς τὸ ἓν ἄκρον τοῦ νήματος συνδέεται ἁμάξιον καὶ εἶναι παράλληλον πρὸς τὴν σιδηροτροχιάν. Πόσον βάρος πρέπει νὰ ἐξαρτηθῇ εἰς τὸ ἕτερον ἄκρον, ἵνα τὸ σύστημα ἰσορροπῇ εἰς τὰς περιπτώσεις (β) καὶ (γ). Τί συμπέρασμα ἐξάγεται ἐκ τῆς περιπτώσεως (α). 4) Διατηροῦνται ἡ τροχαλία μετὰ τοῦ νήματος καὶ συνδέεται σιδηροτροχιὰ ΒΓ πρὸς τὴν AB. A καὶ Γ εἶναι εἰς τὸ αὐτὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον, $α = 30°$. Αἱ δύο σιδηροτροχιαὶ



εὑρίσκονται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ κατακορύφου ἐπιπέδου καὶ εἶναι κάθετοι μεταξύ των. Ἐπὶ τῆς σιδηροτροχιᾶς ΒΑ τὸ νῆμα συνδέεται πρὸς τὸ πρῶτον ἁμάξιον, ἐνῷ ἐπὶ τῆς σιδηροτροχιᾶς ΒΓ συνδέεται πρὸς δεύτερον ἁμάξιον φέρον δύο μεταβλητὰ βάρη, τὰ δὲ τμήματα τοῦ νήματος εἶναι παράλληλα πρὸς τὰς σιδηροτροχιάς. Πόσον πρέπει νὰ εἶναι τὸ ὁλικὸν βάρος τοῦ δευτέρου ὀχήματος, ἵνα τὸ σύστημα ἰσορροπῇ.

1292. Αὐτοκίνητον ἔχει μηχανὴν ἰσχύος 15 HP καὶ κινεῖται ὑπὸ ταχύτητα 90 km/h ἐπὶ ἐπιπέδου ἐδάφους. Ζητεῖται: α) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ δύναμις ἕλξεως ἡ ἐξασκουμένη ἐπὶ τοῦ ὀχήματος, ὅταν τὸ ἔδαφος εἶναι ὁριζόντιον. β) Πόση θὰ εἶναι ἡ ταχύτης τοῦ αὐτοκινήτου, ὅταν ἀνέρχεται ἐπὶ ἐδάφους κλίσεως 2 ‰. Τὸ αὐτοκίνητον ζυγίζει 500 kgr*. Δεχόμεθα ὅτι αἱ δυνάμεις τριβῶν καὶ ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀέρος εἶναι αἱ αὐταὶ καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις.

1293. Αὐτοκίνητον 10 ton* ἀνέρχεται ἐπὶ δρόμου κλίσεως 2 ‰. Ζητεῖται: α) Πόση εἶναι ἡ ἐλαχίστη δύναμις ἕλξεως τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ ἀναπτύξῃ ὁ κινητὴρ ἵνα ἑλκύσῃ τὸ ὄχημα. β) Ὁ κινητὴρ ἐξασκεῖ τὴν δύναμιν ταύτην σύρων τὸ ὄχημα ὑπὸ ταχύτητα 36 km/h. Πόση ἡ ἀναπτυσσομένη ἰσχὺς ὑπὸ τοῦ κινητῆρος εἰς kW καὶ εἰς HP. γ) Πόσον τὸ παραγόμενον ἔργον ἀφοῦ διανύσῃ διάστημα 2 km.

1294. Μοτοποδήλατον, ζυγίζον μετὰ τῆς μηχανῆς του 90 kgr*, μετατοπίζεται ἐπὶ ὁριζοντίας ὁδοῦ ὑπὸ ταχύτητα 24 km/h. Ἡ δύναμις τριβῶν ἔχει τιμήν, ὑπὸ τὰς συνθήκας ταύτας, 1,5 kgr*. Ζητοῦνται: α) Τὸ ἔργον τὸ παραγόμενον κατὰ χιλιόμετρον πορείας. β) Ἡ ἀναπτυσσομένη ἰσχύς. γ) Ἡ ἰσχὺς τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ ἀναπτύξῃ, ἐάν, διατηροῦν τὴν ἰδίαν ταχύτητα, ἀνέρχεται πλευρὰν κλίσεως 2 ‰.

1295. Αὐτοκίνητον μάζης 2,94 ton κινεῖται ἐπὶ ὁριζοντίας εὐθυγράμμου ὁδοῦ μὲ ταχύτητα 30 km/h ἄνευ τριβῆς. Ἡ ταχύτης του αὐξάνεται ἐντὸς 4 min ἀπὸ 30 km/h εἰς 80 km/h. Ζητεῖται τὸ διανυθὲν διάστημα κατὰ τὸ ἀνωτέρω χρονικὸν διάστημα, ἡ ἐνεργοῦσα δύναμις καὶ ἡ καταναλισκομένη ἰσχὺς εἰς ἵππους.

(Ἀπ. 1 667 m περίπου, 28 945 kgr*, 1,6 ἵπποι.)

(Ε.Μ. Πολυτεχνεῖον, Σχολὴ Τοπογράφων Μηχανικῶν, 1950.)

1296. Κατὰ μίαν πρόσφατον προσπάθειαν καταρρίψεως τῆς παγκοσμίου ἐπιδόσεως εἰς τὸν δρόμον τῶν 800 μέτρων, εἷς ἀθλητὴς ὑπολογίσας νὰ καλύψῃ τὴν ἀπόστασιν ἰσοταχῶς εἰς 1 min καὶ 45 sec ἠδυνήθη νὰ διατηρήσῃ τὴν ἀντίστοιχον ταχύτητα μόνον μέχρι σημείου τινός, ἀπέχοντος ὀλίγας δεκάδας μέτρων ἀπὸ τοῦ τέρματος. Ἐπιμένων νὰ ὁλοκληρώσῃ τὴν προσπάθειάν του, συνέχισεν ἀπὸ τοῦ σημείου ἐκείνου μὲ ταχύτητα ὁμαλῶς ἐπιβραδυνομένην μέχρι $\upsilon = 0$, (δηλαδὴ μέχρι ἐκμηδενισμοῦ τῆς ταχύτητός του), τερματίζων εἰς χρόνον 1 min καὶ 50 sec. Ζητεῖται ἡ κινητικὴ ἐνέργεια τοῦ σώματος τοῦ δρομέως, βάρους 65 kgr*, ὅταν εὑρίσκετο οὗτος εἰς ἀπόστασιν 20 m ἀπὸ τοῦ τέρματος. (Ἀπ. 121 kgr*m.)

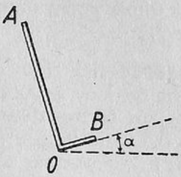
(Γεωπονικὴ Σχολὴ Ἀθηνῶν, 1952.)

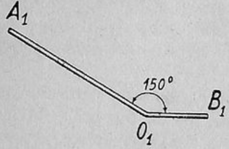
1297. Ὁ πύραυλος V_2 ἔχει βάρος 14 ton* καὶ κατὰ τὴν ἐκκίνησίν του προωθεῖται κατακορύφως ὑπὸ δυνάμεως 28 ton*. Τὰ ἀέρια καύσεως ἐξέρχονται μὲ ταχύτητα $\upsilon = 1\,500$ m/sec. Ζητοῦνται: α) Τὸ βάρος τῶν ἀνὰ δευτερόλεπτον ἐξερχομένων καυσαερίων. β) Ἡ ἐπιτάχυνσις τοῦ πυραύλου κατὰ τὴν στιγμὴν τῆς ἐκκινήσεως. (Ἀπ. $B = 182{,}934$ kgr*, $\gamma = 9{,}8$ m/sec².)

(Ε. Μ. Πολυτεχνεῖον, Σχολὴ Μηχανολόγων - Ἠλεκτρολόγων, 1953.)

1298. 1) Μοχλὸς κεκαμμένος ΑΟΒ σχηματίζεται ἀπὸ δύο βραχίονας καθέτους μεταξύ των: ΟΑ = 80 cm καὶ ΟΒ = 10 cm. Ὁ μοχλὸς εἶναι κινητὸς περὶ ἄξονα

Ο κάθετον εἰς τὸ ἐπίπεδον τοῦ σχήματος. Ὁ βραχίων ΟΒ εἶναι κατ' ἀρχὰς ὁριζόντιος καὶ τὸ σημεῖον Α ἄνωθεν τοῦ Ο· ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ Β βάρος 10 kgr* καὶ ἐξασκεῖται εἰς τὸ ἄκρον Α δύναμις F ἡ ὁποία διατηρεῖται σταθερῶς κάθετος πρὸς τὴν ΟΑ. Ζητεῖται: Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τιμὴ τῆς δυνάμεως F, ὅταν πραγματοποιηθῇ ἡ ἰσορροπία καὶ ὅταν ἡ ΟΒ σχηματίζῃ μετὰ τῆς ὁριζοντίας τὰς ἀκολούθους γωνίας $\alpha = 0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$. 2) Νὰ παρασταθοῦν τὰ ἀποτελέσματα διὰ καμπύλης, ἐὰν λάβωμεν ὡς τετμημένας τὰς γωνίας α (εἰς μοίρας) καὶ ὡς τεταγμένας τὰς δυνάμεις F (εἰς kgr*). 3) Ἕτερος μοχλὸς κεκαμμένος $A_1O_1B_1$ σχηματίζεται ἀπὸ δύο βραχίονας ὑπὸ γωνίαν 150°. Εἶναι ὁμοίως κινητὸς περὶ ἄξονα O_1 κάθετον εἰς τὸ ἐπίπεδον τοῦ σχήματος. Ὁ βραχίον O_1B_1 εἶναι ὁριζόντιος, καὶ $A_1O_1 = 2\,(O_1B_1)$. Ἐξαρτῶνται εἰς A_1 καὶ B_1 δύο βάρη β_1 καὶ β_2· Πόσος πρέπει νὰ εἶναι ὁ λόγος μεταξὺ αὐτῶν, ἵνα ὁ μοχλὸς εὑρίσκεται ἐν ἰσορροπίᾳ.

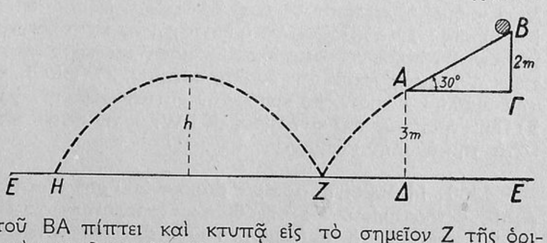




1299. Ὁ στρόφαλος βαρούλκου ἔχει μῆκος 60 cm. Ὁ κύλινδρος ἐπὶ τοῦ ὁποίου περιτυλίσσεται τὸ σχοινίον ἔχει ἀκτῖνα 15 cm. Τὸ βαροῦλκον χρησιμεύει διὰ νὰ ἀναβιβάζεται ὕδωρ ἐκ φρέατος τοῦ ὁποίου τὸ βάθος εἶναι 10 m. Ὁ χρησιμοποιούμενος κάδος ἔχει χωρητικότητα 10 *lt*. α) Πόση εἶναι εἰς kgr* ἡ ἐξασκουμένη ἐπὶ τοῦ στροφάλου δύναμις, ὅταν ἀνυψοῦται ὁ κάδος ὕδατος. β) Πόσον τὸ πραγματοποιούμενον ἔργον διὰ νὰ ἀνυψωθοῦν 100 *lt* ὕδατος. γ) Πόσον εἶναι τὸ διάστημα τὸ διανυόμενον ὑπὸ τοῦ ἄκρου τοῦ στροφάλου καὶ πόσας στροφὰς πρέπει νὰ κάμῃ, ἵνα ἀνυψώσῃ ἕνα κάδον ὕδατος. δ) Πόση ἡ μέση ἰσχὺς διὰ τὴν ἀνύψωσιν 1000 *lt* ὕδατος εἰς μίαν ὥραν. Νὰ ἐκφρασθῇ ἡ ἰσχὺς αὕτη εἰς kgr*m/sec, εἰς HP καὶ εἰς Watt.

1300. Ἁμάξιον βάρους 900 kgr* ἀνέρχεται ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου καὶ ἀνυψοῦται κατὰ 25 mm ἀνὰ μέτρον. Ζητεῖται: α) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀπαιτουμένη δύναμις ἵνα μετακινήσῃ τὸ ἁμάξιον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου, ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι αἱ τριβαὶ εἶναι ἀμελητέαι. β) Διατίθεται βαροῦλκον τοῦ ὁποίου τὸ τύμπανον ἔχει διάμετρον 30 cm καὶ ὁ στρόφαλος ἔχει μῆκος 50 cm. Τὸ ἁμάξιον εἶναι συνδεδεμένον διὰ σχοινίου ἐκ τοῦ βαρούλκου. Πόση δύναμις πρέπει νὰ ἐξασκηθῇ ἐπὶ τοῦ στροφάλου, ἵνα θέσῃ τὸ ἁμάξιον εἰς κίνησιν. γ) Πόσον τὸ παραγόμενον ἔργον τοῦ χειριστοῦ, ὅταν τὸ ἁμάξιον ἀνέρχεται κατὰ 38 m. δ) Γνωστοῦ ὄντος ὅτι ὁ χειριστὴς ἀναπτύσσει ἰσχὺν 0,08 HP, πόση ἡ ταχύτης τοῦ κινητοῦ.

1301. Σφαῖρα τίθεται ἐπὶ τῆς κορυφῆς λείου κεκλιμένου ἐπιπέδου ΒΑ σχηματίζοντος γωνίαν 30° μετὰ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου. Τὸ ὕψος ΒΓ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου, εἶναι 2 m καὶ ἡ βάσις τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου εὑρίσκεται 3 m ἄνωθεν τῆς ὁριζοντίας ἐπιφανείας ΕΕ οὔσης τελείως ἐλαστικῆς, ἤτοι ΑΔ = 3 m. Ἡ σφαῖρα κινουμένη κατὰ μῆκος τοῦ ΒΑ πίπτει καὶ κτυπᾷ εἰς τὸ σημεῖον Ζ τῆς ὁριζοντίας ἐπιφανείας. Ζητεῖται νὰ προσδιορισθῇ α) ἡ ἀπόστασις ΔΖ, β) ἡ ἀπόστασις



ΖΗ καθ' ἣν θὰ κινηθῆ ἐκ δευτέρου ἡ σφαῖρα μετὰ τὴν κροῦσιν αὐτῆς ἐπὶ τοῦ σημείου Ζ, ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι δὲν ἐγένετο ἀπώλεια τῆς κινητικῆς της ἐνεργείας, γ) νὰ ὑπολογισθῆ τὸ μέγιστον ὕψος h εἰς τὸ ὁποῖον θὰ ἀνέλθῃ ἡ σφαῖρα. ($g = 9{,}81$ m/sec^2.) ('Απ. α' ΔΖ = 2,85 m. β' ΖΗ = 9,17 m. γ' h = 3, 5 m.)

1302. Διὰ τὴν ἄρδευσιν ἑνὸς ἀγροκτήματος ἐκτάσεως 100 000 m^2, γίνεται χρῆσις ἀντλίας ἰσχύος 2 HP. Ἡ ὑψομετρικὴ διαφορὰ μεταφορᾶς μεταξὺ ἀγροκτήματος καὶ ὕδατος εἶναι 20 m. Ἡ ἀπαιτουμένη ποσότης ὕδατος ἑκάστης ἀρδεύσεως εἶναι 0,5 *lt*/m^2 ἐδάφους. Ζητεῖται ἡ δαπάνη ἑκάστης ἀρδεύσεως ὑπὸ τὰς ἑξῆς προϋποθέσεις: Συντελεστὴς ἀποδόσεως τῆς μηχανικῆς ἐγκαταστάσεως 40 %, καὶ ἀπώλεια ὕδατος 50 %. Κόστος καυσίμου ὕλης τοῦ κινητῆρος, συμβολικῶς 1000 δρχ. ἀνὰ ὡριαῖον ἵππον. ('Απ. 18 518 δρχ.) (Γεωπονικὴ Σχολὴ 'Αθηνῶν, 1954.)

1303. 'Οδοντωτὸς σιδηρόδρομος συνδέει δύο σταθμούς, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ εἷς εἶναι 800 m ἄνωθεν τοῦ ἄλλου. Ἡ ὁδὸς ἔχει μῆκος 2 km, τὸ δὲ ὄχημα ζυγίζει 5 ton* καὶ ἡ ταχύτης του εἶναι 12 km/h. Νὰ ὑπολογισθοῦν: α) Τὸ κατὰ τὴν κατάβασιν παραγόμενον ἔργον. β) Ἡ ἰσχὺς τοῦ κινητῆρος ὅστις ἐκτελεῖ τὸ ἔργον τοῦτο εἰς HP καὶ kW. γ) Ἡ ποσότης ὕδατος τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ παρέχῃ καθ' ὥραν ὑδατόπτωσις 15 m ὕψους, ἵνα θέσῃ εἰς κίνησιν τὸν κινητῆρα τοῦτον διὰ μέσου ὑδροστροβίλου καὶ ἠλεκτρικῆς ἐγκαταστάσεως τῆς ὁποίας ἡ ἀπόδοσις εἶναι 72 %.

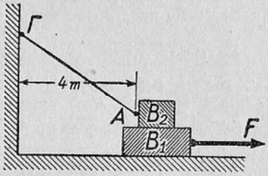
1304. 'Οδοντωτὸς σιδηρόδρομος διανύει μῆκος ὁδοῦ 6 km καὶ κατακόρυφον ἀπόστασιν τῶν ἄκρων αὐτῆς σημείων 1800 m. Ἕκαστον ὄχημα ζυγίζει 5 ton*. α) Πόσον τὸ ἀναγκαιοῦν ἔργον διὰ τὴν ἀνάβασιν ἑνὸς μόνον ὀχήματος. β) Κατά τινα ἀνάβασιν ἡ μέση ταχύτης εἶναι 10 km/h· πόση εἰς HP ἡ ἰσχὺς τοῦ κινητῆρος ὅστις θὰ ἦτο ἱκανὸς νὰ ἑλκύσῃ ἀδιακόπως δύο ὀχήματα κατὰ μῆκος τοῦ ὀδοντωτοῦ σιδηροδρόμου (1 HP=76 kgr*m/sec). γ) Ὁ κινητὴρ οὗτος χρησιμοποιεῖ τὴν ἐνέργειαν τὴν ὁποίαν χορηγεῖ πτῶσις ὕδατος ὕψους 10 m. 'Αλλὰ διὰ 100 kgr*m ἔργον χορηγηθὲν εἰς τὸν κινητῆρα ὑπὸ τῆς ὑδατοπτώσεως ὁ κινητὴρ δὲν ἀποδίδει παρὰ 75 kgr*m ὠφέλιμον ἔργον διὰ τὴν λειτουργίαν τοῦ ὀδοντωτοῦ σιδηροδρόμου. Πόση εἶναι, ὑπὸ τοὺς ὅρους τούτους, ἡ ποσότης ὕδατος ἡ ὁποία πρέπει νὰ παρέχεται καθ' ὥραν, ἵνα λειτουργῇ ὁ κινητήρ.

1305. Ὁ θάλαμος ἀνελκυστῆρος ἔχει βάρος 1000 kgr* καὶ ἐντὸς αὐτοῦ τοποθετοῦνται ἀντικείμενα μάζης 500 kgr. Ὁ θάλαμος τοῦ ἀνελκυστῆρος εἶναι ἐξηρτημένος διὰ καλωδίου διερχομένου διὰ τροχαλίας, χωρὶς νὰ παρουσιάζῃ ὀλίσθησιν, εἰς τὸ ἄκρον δὲ αὐτοῦ τὸ ἀντίβαρον ἔχει βάρος 1250 kgr*. Ὁ κινητὴρ τοῦ ἀνελκυστῆρος ἔχει ἀπόδοσιν 0,5. Ὁ ἀνελκυστὴρ κάμνει διαδρομὴν πρὸς τὰ ἄνω 15 m ἐντὸς 15,4 sec. Ἡ κίνησις αὐτοῦ εἶναι κατ' ἀρχὰς μὲν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένη ἐπὶ 0,4 sec, ἀκολούθως ὁμαλή, κατόπιν δὲ ὁμαλῶς ἐπιβραδυνομένη ἐπὶ 0,4 sec πρὶν ἢ σταματήσῃ. Νὰ εὑρεθῆ: 1) α) Ποία εἶναι ἡ ἐπιτάχυνσις κατὰ τὸν χρόνον τῆς μεταβαλλομένης κινήσεως, β) ποῖον τὸ διανυόμενον διάστημα κατὰ τὴν ἐπιταχυνομένην κίνησιν, γ) ποία ἡ ταχύτης κατὰ τὴν ὁμαλὴν κίνησιν. 2) Ποία ἡ τάσις τοῦ καλωδίου α) κατὰ τὴν ὁμαλὴν κίνησιν, β) κατὰ τὴν ἐπιταχυνομένην, γ) κατὰ τὴν ἐπιβραδυνομένην. 3) Ποία ἡ ἰσχὺς τοῦ κινητῆρος εἰς kW, ὅστις θέτει εἰς κίνησιν τὸν ἀνελκυστῆρα κατὰ τὴν ὁμαλὴν κίνησιν.

1306. Μολυβδίνη σφαῖρα βάρους 200 gr* ἐξαρτᾶται εἰς τὸ κάτω ἄκρον σπειροειδοῦς ἐλατηρίου. 'Εκ τῆς θέσεως ἰσορροπίας τὸ ἐπιμηκύνομεν πρὸς τὰ κάτω κατὰ 6 cm καὶ τὸ ἀφίνομεν. Τοῦτο ἄρχεται ἐκτελοῦν περιοδικὴν κίνησιν, τῆς ὁποίας ἡ μεγίστη ἐπιτάχυνσις εἶναι $\pm$ 15 cm/sec^2. Ὅταν ἡ σφαῖρα εὑρίσκεται εἰς τὸ ἓν τέταρτον τῆς διαδρομῆς ἀπὸ τοῦ κατωτάτου σημείου, εὕρετε α) τὴν ἐπιτάχυνσιν, β) τὴν δύναμιν ἥτις ἐπενεργεῖ ἐπὶ τῆς σφαίρας, γ) τὴν κινητικήν της ἐνέργειαν, δ) τὴν ταχύτητά της.

1307. Μία δύναμις $F = 20$ kgr* ἐπενεργεῖ ἐπὶ χρόνον $t = 1/100$ sec ἐπὶ ἠρεμοῦντος ἐκκρεμοῦς μάζης $m = 6$ kgr καὶ μήκους νήματος ἐξαρτήσεως $l = 1$ m. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀρχικὴ ταχύτης, ἡ ἐνέργεια καὶ ἡ ἀπόκλισις τοῦ ἐκκρεμοῦς.
(Ἀπ. 0,33 m/sec, 0,32 Joule, 6^o.)

1308. Σῶμα βάρους $B_1 = 200$ kgr* στηρίζεται ἐπὶ ὁριζοντίας ἐπιφανείας καὶ φέρει εἰς τὴν ἄνω ἐπιφάνειάν του ἕτερον σῶμα βάρους $B_2 = 50$ kgr*. Τὸ βάρος B_2 μέσῳ τοῦ κεκλιμένου σχοινίου ΑΓ = 5 m προσδένεται εἰς κατακόρυφον τοῖχον. Εὕρετε τὴν ὁριζοντίαν δύναμιν F τὴν ἐφηρμοσμένην εἰς τὸ σῶμα B_1 ἥτις εἶναι ἀναγκαία ἵνα τὸ σῶμα ἐκκινήσῃ. Ἡ ἀπόστασις ἐκ τοῦ Α ἕως τὸν τοῖχον εἶναι 4 m καὶ ὁ συντελεστὴς τριβῆς δι' ὅλας τὰς ἐπαφὰς $\eta = 0,3$. (Ἀπ. $F = 84,5$ kgr*.)



1309. Πόση ἡ μεγίστη ταχύτης μὲ τὴν ὁποίαν δύναται αὐτοκίνητον νὰ διαγράφῃ καμπύλην ἀκτῖνος 25 m ἐπὶ ὁριζοντίου ἐπιπέδου, ἐὰν ὁ συντελεστὴς τριβῆς μεταξὺ τοῦ ἐλαστικοῦ καὶ τοῦ δρόμου εἶναι 0,30.

1310. Βάρος 2 000 kgr* ἐκκινεῖ ἐκ τῆς ἠρεμίας καὶ κινεῖται ἐπὶ ὁριζοντίας εὐθυγράμμου τροχιᾶς ὑπὸ δυνάμεως 100 kgr* ἕως ὅτου ἀναπτύξῃ ταχύτητα 72 km/h. Ζητεῖται τὸ κατὰ τὸν χρόνον τοῦτον ἔργον τῆς δυνάμεως εἰς ὡριαίους ἵππους. α) Διὰ τὴν λειτουργίαν ἄνευ ἀντιστάσεως. β) Διὰ λειτουργίαν μὲ ἀντιστάσεις, ἐὰν ὁ συντελεστὴς τριβῆς εἶναι $\eta = 0,05$, πόση θὰ πρέπῃ νὰ εἶναι ἡ δύναμις καὶ πόσον τὸ ἔργον διὰ τὴν αὐτὴν συνθήκην.
(Ε. Μ. Πολυτεχνεῖον, Σχολὴ Χημικῶν Μηχανικῶν, 1956.)

1311. Ἀντικείμενον εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν 60 cm ἀπὸ τοῦ ἄξονος ὁριζοντίου δίσκου περιστρεφομένου περὶ τὸν ἄξονά του καὶ ὁ ὁποῖος ἐκκινεῖ ἀπὸ τῆς ἠρεμίας, ἡ δὲ ταχύτης αὐτοῦ αὐξάνεται βαθμηδόν. Ὁ συντελεστὴς τριβῆς μεταξὺ τοῦ ἀντικειμένου καὶ τοῦ δίσκου εἶναι $\eta = 0,25$. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ γωνιακὴ ταχύτης τοῦ δίσκου καθ' ἣν στιγμὴν τὸ ἀντικείμενον ἀρχίζει νὰ ἐξολισθαίνῃ.

1312. Τὸ κάτω ἄκρον μιᾶς ὑπὸ κλίσιν 30^o πρὸς τὴν ὁριζοντίαν στέγης εὑρίσκεται εἰς ὕψος 20 m, ὑπεράνω τοῦ ἐδάφους, ἐνῷ τὸ ἄνω ἄκρον τῆς στέγης ἀπέχει 25 m ἀπὸ τοῦ ἐδάφους. Θέτομεν λίθον βάρους 1 kgr* ἐπὶ τῆς κορυφῆς τῆς στέγης καὶ τὸν ἀφίνομεν νὰ ὀλισθήσῃ ἐλευθέρως κατὰ μῆκος αὐτῆς. Ζητεῖται ἡ ὁριζοντία ἀπόστασις x τοῦ σημείου πτώσεως τοῦ λίθου ἀπὸ τὴν πρόσοψιν τοῦ κτιρίου, ἐὰν ὁ συντελεστὴς τριβῆς μεταξὺ λίθου καὶ στέγης εἶναι $\eta = 0,3$. Δίδονται ἐπίσης ημ $30^o = 0,5$, συν $30^o = 0,866$ καὶ $g = 9,8$ m/sec². (Ἀπ. 10,1 m.)
(Ε. Μ. Πολυτεχνεῖον, Σχολὴ Ἀρχιτεκτονική, 1953.)

1313. Αὐτοκίνητον βάρους 2,94 ton* κινεῖται ἐπὶ ὁριζοντίας κυκλικῆς τροχιᾶς ἀκτῖνος 100 m, μὲ ταχύτητα 36 km/h καὶ μὲ ἐπιτρόχιον ἐπιτάχυνσιν $\gamma_\varepsilon = 4/3$ m/sec². Ζητοῦνται: α) Τὸ μέγεθος, εἰς χιλιόγραμμα, τῆς δυνάμεως ἥτις ἀναπτύσσεται λόγῳ τῆς ἀδρανείας τοῦ ὀχήματος ($g = 9,8$ m/sec²). β) Τὸ μέγεθος τῆς ἀπαιτουμένης ἐλαχίστης τιμῆς τοῦ συντελεστοῦ τριβῆς ὀλισθήσεως μεταξὺ τροχῶν καὶ ὁδοστρώματος, ἵνα ἀποφευχθῇ ὀλίσθησις (μὲ προσέγγισιν ἑκατοστοῦ). γ) Ἡ ἀπαιτουμένη ἰσχὺς εἰς ἵππους διὰ τὴν κίνησιν τοῦ ὀχήματος κατὰ τὴν θεωρουμένην χρονικὴν στιγμήν, μὴ λαμβανομένων ὑπ' ὄψιν ἑτέρων τυχὸν ἀναπτυσσομένων ἀντιστάσεων (μὲ προσέγγισιν ἑκατοστοῦ τοῦ ἵππου).

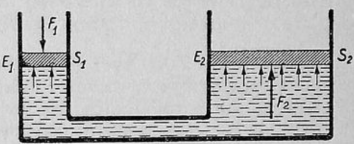
('Απ. α' 400 kgr*. β' 0,10 περίπου. γ' 53,33 ἵπποι.)

(Ε. Μ. Πολυτεχνεῖον, Σχολὴ Μηχανολόγων - 'Ηλεκτρολόγων, 1951.)

1314. Κυλινδρικὸν δοχεῖον κλειστὸν κατὰ τὸ ἓν ἄκρον διατίθεται ὁριζοντίως καὶ ἔχει τομὴν 120 cm^2. 'Εντὸς αὐτοῦ δύναται νὰ κινῆται ἐλευθέρως καὶ ἀεροστεγῶς ἐμβολεύς, ὁ ὁποῖος δύναται νὰ ἐφαρμόζῃ τελείως ἐπὶ τοῦ πυθμένος, καὶ τοῦ ὁποίου τὸ βάρος εἶναι 1,4 kgr*. 'Απομακρύνομεν τὸ ἔμβολον ἀπὸ τοῦ πυθμένος κατὰ 50 cm καὶ ἀκολούθως ἀφίνομεν αὐτὸ ἐλεύθερον, ὅτε ὑπὸ τὴν ἐπενέργειαν τῆς ἀτμοσφαιρικῆς πιέσεως, ἥτις ἀνέρχεται εἰς 760 mm Hg, τοῦτο ἐπανέρχεται εἰς τὴν ἀρχικήν του θέσιν ἐντὸς 0,5 sec. Πόση ἡ δύναμις τῆς τριβῆς ὀλισθήσεως.

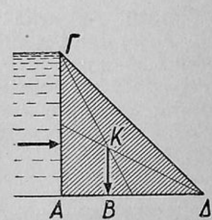
1315. Χαλύβδινον σύρμα τομῆς 1 mm^2 καὶ μήκους 5 m ἐπιμηκύνεται ὑπὸ βάρους Β = 1 kgr* κατὰ 0,32 mm. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μέτρον ἐλαστικότητος. Ποία ἡ δυναμικὴ ἐνέργεια τοῦ τεταμένου σύρματος καὶ τὸ ἔργον τὸ ὁποῖον παράγει τὸ τεῖνον βάρος. Ποῦ ὀφείλεται ἡ διαφορὰ μεταξὺ δυναμικῆς ἐνεργείας καὶ ἔργου.

1316. 'Υποθέτομεν ὅτι τὸ μικρὸν ἔμβολον E_1 (βλ. σχῆμα) εἶναι ἐλεύθερον νὰ κινῆται εἰς ἕνα ἀρκετὰ μακρὺν κατακόρυφον κύλινδρον. 'Η διάμετρος τοῦ E_2 εἶναι 60 cm καὶ τοῦ E_1 εἶναι 6 cm. "Οταν τὸ μέγα ἔμβολον E_2 ἔχῃ ταχύτητα πρὸς τὰ κάτω 60 cm/sec, ποία εἶναι ἡ πρὸς τὰ ἄνω ταχύτης τοῦ μικροῦ ἐμβόλου.



1317. 'Εντὸς ὑαλίνου σωλῆνος, κλειστοῦ κατὰ τὸ ἓν ἄκρον περικλείεται δι' ἐμβολέως, ἀεροστεγῶς ἐφαρμοζομένου καὶ δυναμένου νὰ κινῆται ἄνευ τριβῆς, ποσότης ἀέρος ὄγκου V_1. Μεταξὺ τοῦ ἐμβολέως τούτου καὶ ἑνὸς δευτέρου εὑρίσκεται ἑτέρα ποσότης ἀέρος ὄγκου V_1' καὶ μήκους α. 'Εὰν ὁ ἀὴρ ὄγκου V_1 θερμανθῇ ἀπὸ 27° C εἰς 77° C, ἡ δὲ θερμοκρασία τοῦ ἀέρος ὄγκου V_1' παραμείνῃ ἀμετάβλητος, κατὰ ποῖον τμῆμα τοῦ α πρέπει νὰ μετακινηθῇ ὁ δεύτερος ἐμβολεύς, ἵνα ὁ πρῶτος παραμείνῃ ἀκίνητος.

1318. Σκυροκονίαμα σχήματος πρίσματος καὶ τομῆς ὀρθογωνίου τριγώνου μὲ καθέτους πλευρὰς ΑΔ = 9 m, ΑΓ = 6 m καὶ μήκους 10 m (βλ. σχῆμα) χρησιμοποιεῖται ὡς φράγμα ὕδατος, διὰ τῆς κατακορύφου ἕδρας αὐτοῦ ΑΓ. Τὸ ὕψος τοῦ ὕδατος εἶναι 6 m. Τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ σκυροκονιάματος εἶναι 2,2 gr^*/cm^3. Εὕρετε: α) Τὴν ῥοπὴν τῆς δυνάμεως τὴν ὀφειλομένην εἰς τὸ ὕδωρ, ἡ ὁποία τείνει νὰ ἀνατρέψῃ τὸ πρῖσμα. β) Τὴν ῥοπὴν τῆς δυνάμεως τὴν ὀφειλομένην εἰς τὸ βάρος τοῦ πρίσματος, ἡ ὁποία τείνει νὰ κρατήσῃ τοῦτο εἰς τὴν θέσιν του.



1319. 'Υποθέτομεν ὅτι τὸ ὕδωρ πιέζει τὴν κεκλιμένην ἕδραν ΓΔ τοῦ πρίσματος (πρόβλημα 1318). Εὕρετε: α) Τὸ βάρος τοῦ ὕδατος τὸ ἐπενεργοῦν κατακορύφως πρὸς τὰ κάτω ἐπὶ τῆς κεκλιμένης ἕδρας. β) Τὴν δύναμιν τὴν ἐξασκουμένην ὑπὸ τοῦ ὕδατος ἐπὶ τῆς κεκλιμένης ἕδρας. γ) Τὴν ῥοπὴν τῆς ὁριζοντίας συνιστώσης τῆς δυνάμεως ὡς πρὸς τὸ σημεῖον Δ (βλ. σχῆμα). δ) Τὴν ῥοπὴν τῆς κατακορύφου συνιστώσης τῆς δυνάμεως ὡς πρὸς τὸ σημεῖον Δ.

1320. Κυβικὸν τεμάχιον ξύλου, μάζης 125 kgr, ἀκμῆς 60 cm, βυθίζεται εἰς δεξαμενὴν ὕδατος οὕτως ὥστε ἡ ἄνω ἕδρα τοῦ τεμαχίου νὰ κεῖται ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὕδατος. Ἡ δεξαμενὴ ἔχει βάθος 3 m. Πόσον ἔργον εἰς kgr*m ἀπαιτεῖται διὰ νὰ μετατεθῇ τὸ τεμάχιον μέχρι τοῦ πυθμένος. Ὑποθέτομεν ὅτι τὸ τεμάχιον τοῦ ξύλου ἀφίεται ἐλεύθερον, ὥστε νὰ πλέῃ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας. Ποῖον μέρος αὐτοῦ βυθίζεται.

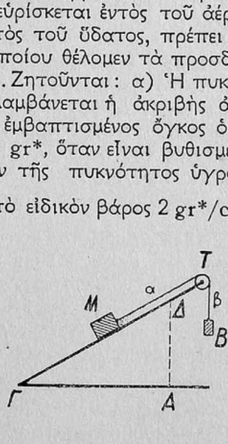
1321. Σῶμα ὄγκου 5 cm^3 καὶ πυκνότητος 2,56 gr/cm^3 ἀφίεται νὰ πέσῃ ἐντὸς δοχείου πλήρους ὑγροῦ, πυκνότητος 1,84 gr/cm^3 καὶ ὕψους 1,50 m. Ζητεῖται ὁ χρόνος τὸν ὁποῖον χρειάζεται τὸ σῶμα διὰ νὰ μεταβῇ ἀπὸ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ εἰς τὸν πυθμένα τοῦ δοχείου εἰς τὰς ἀκολούθους περιπτώσεις: α) Ἐὰν τὸ ἀφήσωμεν ἐλεύθερον νὰ πέσῃ εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ. β) Ἐὰν τὸ ἀφήσωμεν νὰ πέσῃ ἐντὸς τοῦ δοχείου ἀπὸ ὕψους 1,50 m ἄνω τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ. ($g = 980\ cm/sec^2$.) (Ἀπ. $t = 1{,}04$ sec, $t_1 = 0{,}26$ sec.)

(Ε. Μ. Πολυτεχνεῖον, Σχολὴ Χημικῶν Μηχανικῶν, 1953.)

1322. Δοκιμαστικὸς σωλήν, τελείως κυλινδρικός, διαμέτρου $d = 2$ cm καὶ μήκους $l = 20$ cm ἑρματίζεται μὲ σταγόνα ὑδραργύρου καὶ κλείεται διὰ πώματος κατὰ τὸ ἀνώτερον αὐτοῦ ἄκρον. Τὸ ὁλικὸν βάρος αὐτοῦ εἶναι 30 gr*. α) Τοποθετούμενος ἐντὸς ὑγροῦ εἰδικοῦ βάρους $\varepsilon = 1{,}5$ gr*/cm^3 λαμβάνει κατακόρυφον θέσιν ἰσορροπίας. Πόσον εἶναι τὸ μῆκος l_1 τὸ ἐμβαπτισμένον ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ. β) Ὁ σωλὴν εὑρίσκεται εἰς τὴν προηγουμένην θέσιν καὶ τοποθετεῖται ἐπὶ τοῦ πώματος συμπληρωματικὸν βάρος 10 gr*. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαπτισμένον μῆκος l_2. γ) Χωρὶς νὰ ἀφαιρεθῇ τὸ βάρος 10 gr*, ρίπτεται ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ στρῶμα ὕδατος πάχους 4 cm. Τὸ ὕδωρ καὶ τὸ ὑγρὸν δὲν μίγνυνται. Πόσον εἶναι τὸ μῆκος l_3 τὸ ἐμβαπτισμένον εἰς τὸ ὑγρὸν εἰδ. βάρους 1,5 gr*/cm^3. δ) Ἀφαιρεῖται τότε τὸ βάρος 10 gr* ἐκ τοῦ πώματος. Πόσον εἶναι τὸ μῆκος l_4 τὸ ἐμβαπτισμένον ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ.

1323. Διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῆς πυκνότητος ἑνὸς ὑγροῦ πραγματοποιοῦνται αἱ ἀκόλουθοι ἐργασίαι τῇ βοηθείᾳ ζυγοῦ εὐαισθήτου εἰς τὸ δέκατον τοῦ γραμμαρίου. Ἐπὶ τοῦ ἀριστεροῦ δίσκου τοποθετεῖται σταθερὸν ἀπόβαρον, ἐνῷ ἐκ τοῦ δεξιοῦ ἐξαρτᾶται στερεὸν σῶμα καὶ ἀποκαθίσταται ἡ ἰσορροπία ἐὰν προσθέσωμεν σταθμὰ ἐπὶ τοῦ δίσκου τούτου. α) Ἐὰν τὸ σῶμα εὑρίσκεται ἐντὸς τοῦ ἀέρος, προστίθενται 138,6 gr*. β) Ἐὰν τὸ σῶμα βυθισθῇ ἐντὸς τοῦ ὕδατος, πρέπει νὰ προστεθοῦν 206,2 gr*. γ) Ἐὰν βυθισθῇ εἰς ὑγρὸν τοῦ ὁποίου θέλομεν τὰ προσδιορίσωμεν τὴν πυκνότητα, πρέπει νὰ προστεθοῦν 193,6 gr*. Ζητοῦνται: α) Ἡ πυκνότης τοῦ ὑγροῦ. β) Τὰ ὅρια μεταξὺ τῶν ὁποίων περιλαμβάνεται ἡ ἀκριβὴς ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς οὕτω μετρηθείσης πυκνότητος. γ) Ὁ ἐμβαπτισμένος ὄγκος ὁμογενοῦς σφαίρας ἀκτῖνος 3,5 cm καὶ ἡ ὁποία ζυγίζει 100 gr*, ὅταν εἶναι βυθισμένη ἐντὸς τοῦ ὕδατος, καὶ ἔπειτα ἐντὸς τοῦ πρὸς μέτρησιν τῆς πυκνότητος ὑγροῦ.

1324. Σῶμα Μ τοῦ ὁποίου ὁ ὄγκος εἶναι 1 m^3 καὶ τὸ εἰδικὸν βάρος 2 gr*/cm^3 δύναται νὰ ὀλισθαίνῃ ἄνευ τριβῶν κατὰ μῆκος κεκλιμένου ἐπιπέδου ΓΔ. Δίδονται ΑΔ = 5 m, ΓΔ = 25 m, ΓΑ εἶναι ὁριζόντιον. Νῆμα εὔκαμπτον αβ, ἀμελητέου βάρους, καὶ τὸ ὁποῖον διέρχεται ἀπὸ τὴν τροχαλίαν Τ (ἄνευ τριβῶν), εἶναι συνδεδεμένον ἀφ' ἑνὸς μὲ τὸ σῶμα Μ καὶ ἀφ' ἑτέρου μὲ τὸ σῶμα Β. Τὸ τμῆμα τοῦ νήματος α εἶναι παράλληλον πρὸς τὸ ΓΔ καὶ τὸ τμῆμα β εἶναι κατακόρυφον. Ζητεῖται: α) Πόσον πρέπει νὰ εἶναι τὸ βάρος τοῦ Β, ἵνα ὑφίσταται ἰσορροπία. Πόσον εἶναι τὸ ἐκτελούμενον ὑπὸ τῶν δυνάμεων ἔργον, ὅταν τὸ σῶμα Μ ὀλισθαίνῃ κατὰ 1 m κατὰ μῆκος τῶν ΓΔ καὶ πρὸς τὸ Δ.



β) Εἰς τὸ αὐτὸ πρόβλημα, ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ βάρος Β ἐμβαπτίζεται ἐντὸς ὑγροῦ εἰδικοῦ βάρους 1,02 gr^*/cm^3 καὶ ὅτι τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ Β εἶναι 7,22 gr^*/cm^3.

1325. Σῶμα στερεὸν κυλινδρικὸν σχηματίζεται ἐκ μεταλλικοῦ μέρους πυκνότητος 7 gr/cm^3 καὶ ὕψους 1 cm καὶ ἐκ ξυλίνου μέρους πυκνότητος 0,7 gr/cm^3 καὶ ὕψους 29 cm. Ζητεῖται: α) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις μεταξὺ κέντρου βάρους καὶ κέντρου ἀνώσεως. β) Μέχρι ποίου ὕψους τὸ σῶμα βυθίζεται ἐντὸς τοῦ ὕδατος. γ) Πόση θὰ ἦτο ἡ πυκνότης τοῦ ὑγροῦ ἐντὸς τοῦ ὁποίου τὸ σῶμα πλήρως βυθιζόμενον θὰ ἰσορροπῇ.

1326. Θέλει τις νὰ κατασκευάσῃ ἀραιόμετρον σταθεροῦ βάρους τοῦ ὁποίου τὸ στέλεχος ἔχει μῆκος 10 cm καὶ τομὴν 25 mm^2, ἐπιθυμεῖ δὲ ὅπως ἐντὸς τοῦ ὕδατος βυθίζεται μέχρι τῆς βάσεως τοῦ στελέχους καὶ ἐντὸς καθαρᾶς ἀλκοόλης πυκνότητος 0,8 gr/cm^3 μέχρι τοῦ ἀνωτάτου ἄκρου αὐτοῦ. α) Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος ὁ ὁποῖος πρέπει νά δοθῇ εἰς τὸν πλωτῆρα. β) Πόσον εἶναι τὸ βάρος τῆς συσκευῆς. γ) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος x τοῦ στελέχους μέχρι τοῦ ὁποίου ἐμβαπτίζεται, ὅταν τὸ ἀραιόμετρον ἐπιπλέῃ ἐντὸς ὑγροῦ πυκνότητος 0,9 gr/cm^3.

1327. Οἰνοπνευματόμετρον τοῦ Gay-Lussac βυθίζεται μέχρι τῆς ὑποδιαιρέσεως 100 ἐντὸς καθαρᾶς ἀλκοόλης καὶ θερμοκρασίας 15° C (πυκνότητος 0,795 gr/cm^3) καὶ μέχρι τῆς ὑποδιαιρέσεως μηδὲν ἐντὸς ὕδατος πυκνότητος 1 gr/cm^3. Ζητεῖται: α) Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τοῦ ὄγκου V τοῦ κατωτάτου τμήματος τοῦ ὀργάνου μέχρι τοῦ μηδενὸς καὶ τοῦ ὄγκου v τοῦ στελέχους τοῦ περιλαμβανομένου μεταξὺ τῶν διαιρέσεων 0 καὶ 100. β) Ἐὰν ἡ ἀπόστασις ἡ ὁποία χωρίζει τὰς διαιρέσεις 0 καὶ 100 εἶναι 15 cm, πόση εἶναι ἡ ἀπόστασις ἐκείνη ἥτις χωρίζει τὰς διαιρέσεις 0 καὶ 50, γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ πυκνότης εἰς 15°C μίγματος ἀλκοόλης καὶ ὕδατος μὲ ἔνδειξιν 50° Cay-Lussac εἶναι 0,934 gr/cm^3. γ) Ἐὰν ἡ ἀπόστασις ἥτις χωρίζει τὰς διαιρέσεις 0 καὶ 70 εἶναι 7,17 cm, πόση εἶναι ἡ πυκνότης μίγματος ὕδατος καὶ ἀλκοόλης μὲ ἔνδειξιν 70° Cay-Lussac. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ ὕδατος τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ προστεθῇ εἰς 70 cm^3 καθαρᾶς ἀλκοόλης διὰ νὰ λάβωμεν 100 cm^3 μίγματος. Πόση ἡ συστολὴ ὄγκου ἥτις παρατηρεῖται ὅταν μίγνυται ὕδωρ καὶ ἀλκοόλη ὑπὸ τὰς ἀναλογίας ταύτας. Ὑπενθυμίζεται ὅτι 100 cm^3 ἀλκοόλης 70° C περιέχουν 70 cm^3 καθαρὰν ἀλκοόλην.

1328. Ἐλατήριον, εἰς τὸ ἄκρον τοῦ ὁποίου κρέμαται σῶμα βάρους 5 kgr^* καὶ πυκνότητος 1,74 gr/cm^3, ὑφίσταται ἐπιμήκυνσιν 1,4 cm/kgr^*. Θέτομεν τὸ ὅλον σύστημα ἐντὸς δοχείου σταθερᾶς θερμοκρασίας καὶ πιέζομεν τὸν ἐντὸς αὐτοῦ ἀέρα. Προκαλεῖται τότε ἐπιβράχυνσις τοῦ ἐλατηρίου κατὰ 5 mm. Ποία ἡ πίεσις τοῦ ἀέρος ἐντὸς τοῦ δοχείου. (Ἡ πυκνότης τοῦ ἀέρος ὑπὸ πίεσιν μιᾶς ἀτμοσφαίρας εἶναι 0,001 293 gr/cm^3.) (Ἀπ. 95 Atm περίπου.)

(Πανεπιστήμιον Θεσσαλονίκης, Τμῆμα Φυσιογνωστικόν, 1953.)

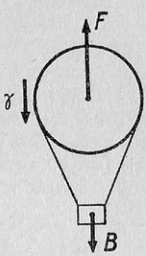
1329. Βυθίζεται κατακορύφως ἄνευ ἀναρροφήσεως σιφώνιον σχήματος κυλινδρικοῦ καὶ ὕψους 20 cm ἐντὸς ὑδραργύρου καὶ πληροῦται οὕτω κατὰ τὸ ἥμισυ. Φράσσομεν τὸ ἀνώτερον στόμιον καὶ τὸ ἐξάγομεν ἐκ τοῦ ὑδραργύρου. Ζητεῖται: α) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι θὰ ἐκρεύσῃ ἐξ αὐτοῦ ὑδράργυρος. β) Νὰ εὑρεθῇ μέχρι ποίου ὕψους θὰ μείνῃ ἐντὸς αὐτοῦ ὁ ὑδράργυρος καὶ πόση θὰ εἶναι τότε ἡ πίεσις τοῦ ἀέρος ἐντὸς τοῦ σιφωνίου. (Ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις 750 Torr.)

1330. Δοχεῖον κυλινδρικὸν καὶ κεκλισμένον διαιρεῖται εἰς δύο μέρη τῇ βοηθείᾳ κινητοῦ ἐμβόλου. Τὸ μῆκος του εἶναι 1 m καὶ ἡ τομή του 50 cm^2. Ἀρχικῶς τὸ ἔμβολον εὑρίσκεται εἰς τὸ μέσον τοῦ κυλίνδρου, τὰ δὲ δύο ἡμίση τοῦ δοχείου περιέχουν ἀέρα ὑπὸ 0° C καὶ πίεσιν 76 cm Hg. α) Μετατοπίζεται τὸ ἔμβολον κατὰ

30 cm. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πίεσις εἰς ἕκαστον τμῆμα, τῆς θερμοκρασίας διατηρουμένης 0° C. β) Πόση δύναμις πρέπει νὰ ἐνεργήσῃ ἐπὶ τοῦ ἐμβόλου, ἵνα τὸ κρατήσῃ ἀκίνητον. γ) Πόση μᾶζα ἀέρος πρέπει νὰ ἐξέλθῃ ἐκ τοῦ ἑνὸς τμήματος τοῦ δοχείου, οὕτως ὥστε τὸ ἔμβολον εἰς ἐλευθέραν κατάστασιν νὰ μένῃ ἐν ἰσορροπίᾳ. (Μᾶζα ἑνὸς λίτρου ἀέρος ὑπὸ τὰς συνθήκας τοῦ πειράματος 1,3 gr.)

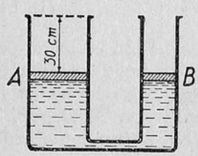
1331. Ἀερόστατον βάρους B πίπτει κατακορύφως μὲ σταθερὰν ἐπιτάχυνσιν γ. Τί βάρος B_1 πρέπει νὰ ριφθῇ ἔξω τῆς λέμβου, ἵνα δώσῃ εἰς τὸ ἀερόστατον μίαν ἴσην πρὸς τὰ ἄνω ἐπιτάχυνσιν γ. Ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀέρος θεωρεῖται ἀμελητέα.

(Ἀπ. $B_1 = 2\,B/1 + g/\gamma$.)



1332. Σῶμα στερεὸν ἐπιπλέει ἐντὸς ὕδατος εἰς τρόπον ὥστε τὸ τμῆμα αὐτοῦ τὸ εὑρισκόμενον ἐντὸς τοῦ ἀέρος νὰ ἔχῃ ὄγκον 151 cm^3. Μεταβάλλεται ἡ ἄνωθεν τοῦ ὕδατος πίεσις ἀπὸ 1 Atm εἰς 15 Atm. Ἡ θέσις τῆς ἰσορροπίας τοῦ στερεοῦ σώματος μεταβάλλεται ; Ἐὰν ναί, κατὰ ποίαν φοράν. Νὰ ὑπολογισθῇ κατὰ πόσον μεταβάλλεται ὁ ὄγκος τοῦ μέρους τοῦ εὑρισκομένου ἐντὸς τοῦ ἀέρος. (Εἰδικὸν βάρος τοῦ ἀέρος ὑπὸ τὴν ἀτμοσφαιρικὴν πίεσιν 0,001 293 gr^*/cm^3.)

1333. Δύο κύλινδροι, ὁ Α τομῆς 300 cm^2 καὶ ὁ Β τομῆς 100 cm^2, συγκοινωνοῦν κατὰ τὸ κατώτερον αὐτῶν ἄκρον καὶ περιέχουν ὕδωρ. Ὁ Β εἶναι πάντοτε ἀνοικτὸς εἰς τὸν ἀτμοσφαιρικὸν ἀέρα, ἐνῷ ὁ Α δύναται νὰ κλείεται ἑρμητικῶς. Δύο δίσκοι ἀμελητέου βάρους ἐπικαθήμενοι ἐπὶ τοῦ ὕδατος ἀποτελοῦν δύο ἑρμητικὰ ἔμβολα. Τὰ ἔμβολα κατ' ἀρχὰς εἶναι εἰς τὸ αὐτὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον, τὸ δὲ ὕψος τοῦ ἀέρος εἰς τὸν κύλινδρον Α εἶναι 30 cm. α) Τὸ Α εἶναι ἀνοικτὸν καὶ τίθεται ἐπὶ τοῦ Β βάρος 10 kgr*. Πόσον βάρος πρέπει νὰ προστεθῇ ἐπὶ τοῦ Α, ἵνα κρατηθῇ ἡ ἰσορροπία εἰς τὸ αὐτὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον. β) Ἀποσύρεται τὸ ἐπὶ τοῦ Β τεθὲν βάρος, ἀφιεμένου μόνον τοῦ ἐπὶ τοῦ Α. Νὰ εὑρεθῇ ἡ νέα θέσις τῶν δύο ἐμβόλων, ὅταν ἀποκατασταθῇ ἰσορροπία. γ) Ἀποσύρονται τὰ βάρη εἰς τὰ Α καὶ Β καὶ κλείεται διὰ καλύμματος ἑρμητικῶς τὸ Α καὶ προστίθεται ἐκ νέου ἐπὶ τοῦ Β τὸ βάρος 10 kgr*. Νὰ ὑπολογισθοῦν ὑπὸ τὰς συνθήκας αὐτὰς ἡ νέα θέσις ἰσορροπίας τῶν ἐμβόλων. Ἡ ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις κατὰ τὸ πείραμα εἶναι 1000 gr^*/cm^2.



ΑΚΟΥΣΤΙΚΗ

1334. Δύο ὡρολόγια ἐκκρεμῆ Α καὶ Β ἔχουν ἐπακριβῶς ρυθμισθῆ εἰς τὸν αὐτὸν τόπον. Τὸ ἓν ἐκ τῶν δύο τούτων ὡρολογίων, τὸ Β, μεταφέρεται εἰς ἄλλον τόπον εἰς ὕψος 4 000 m ἀπὸ τῆς στάθμης εἰς τὴν ὁποίαν εὑρίσκεται τὸ ὡρολόγιον Α. Μέσῳ ἠλεκτρικοῦ σήματος, τοῦ ὁποίου ἡ ταχύτης μεταδόσεως δύναται νὰ θεωρηθῇ ἄπειρος, τίθενται ἀμφότερα εἰς κίνησιν τὴν μεσημβρίαν. Ὅταν τὸ ὡρολόγιον Α δεικνύῃ μεσονύκτιον, ἐκπέμπεται ἐκ τοῦ σημείου ὅπου τοῦτο εὑρίσκεται ἠχητικὸν σῆμα, τὸ ὁποῖον ὁ παρατηρητής, ὁ εὑρισκόμενος πλησίον τοῦ Β, τὸ ἀντιλαμβάνεται ἀκριβῶς τὴν στιγμὴν καθ' ἣν τὸ ὡρολόγιον τοῦτο σημειώνει ἐπίσης μεσονύκτιον. Ποία ἡ μεταξὺ τῶν ὡρολογίων ἀπόστασις. (Λαμβάνεται ὡς ταχύτης τοῦ ἤχου εἰς τὸν ἀέρα 340 m/sec καὶ ἀκτὶς τῆς Γῆς R = 6 360 km.)

(Ἀπ. 9 237,8 m.)

(Ε. Μ. Πολυτεχνεῖον, Σχολὴ Χημικῶν Μηχανικῶν, 1953.)

1335. Ὀβὶς βάρους 30 kgr* ἐξέρχεται τῆς κάννης πυροβόλου μὲ ταχύτητα 800 m/sec καὶ ὁμαλῶς ἐπιβραδυνομένη προσκρούει εἰς ἀπέναντι βράχον μὲ ταχύτητα 400 m/sec, ὅτε καὶ ἐκρήγνυται. Ἡ τροχιὰ ὑποτίθεται εὐθύγραμμος. Ὁ ἦχος τῆς ἐκρήξεως ἠκούσθη ἀπὸ τὸν πυροβολητὴν 13,82 sec μετὰ τὴν ἐκ τῆς κάννης ἔξοδον. Ζητεῖται ἡ ἀπόστασις τοῦ βράχου ἀπὸ τοῦ πυροβόλου καὶ τὸ ἔργον τῆς προσκρούσεως εἰς θερμίδας. (Ἀπ. 3 000 m, 935 kcal.)
(Ε. Μ. Πολυτεχνεῖον, Σχολὴ Χημικῶν Μηχανικῶν, 1956.)

ΘΕΡΜΟΤΗΣ

1336. Ὡρολογιακὸν ἐκκρεμὲς ἐξ ὀρειχάλκου ἔχει περίοδον $T_1 = 2$ sec εἰς θερμοκρασίαν $\theta_1 = 20^\circ$ C. Ἂν ἡ θερμοκρασία γίνῃ $\theta_2 = 70^\circ$ C, κατὰ πόσον τὸ ὡρολόγιον θὰ καθυστερῇ ἐντὸς τοῦ 24ώρου, ἐὰν ὁ συντελεστὴς τῆς γραμμικῆς διαστολῆς τοῦ ὀρειχάλκου εἶναι 0,000 018 grad^{-1} καὶ ἐὰν τὸ ἐκκρεμὲς ὑπακούῃ εἰς τοὺς νόμους τοῦ μαθηματικοῦ τοιούτου. (Ἀπ. 38,88 sec.)
(Σχολὴ Ἰκάρων, 1956.)

1337. Ἐντὸς ὑαλίνου δοχείου περιέχοντος ποσότητα ὕδατος μάζης M τίθεται τεμάχιον βολφραμίου μάζης M′. Ζητεῖται ἡ ἀναλογία μαζῶν M : M′ εἰς τρόπον ὥστε ἡ στάθμη τοῦ ὕδατος ἐντὸς τοῦ δοχείου νὰ παραμένῃ ἡ αὐτὴ εἰς πᾶσαν θερμοκρασίαν. Δίδονται: ὁ γραμμικὸς συντελεστὴς διαστολῆς τῆς ὑάλου $8 \cdot 10^{-6}\ \text{grad}^{-1}$, τοῦ βολφραμίου $4{,}3 \cdot 10^{-6}\ \text{grad}^{-1}$, ὁ συντελεστὴς πραγματικῆς διαστολῆς τοῦ ὕδατος $1{,}8 \cdot 10^{-4}\ \text{grad}^{-1}$ καὶ ἡ πυκνότης τοῦ βολφραμίου 19,3 gr/cm³. (Ἀπ. 0,00369.)
(Ε. Μ. Πολυτεχνεῖον, Σχολὴ Μηχανολόγων - Ἠλεκτρολόγων, 1955.)

1338. Σφαῖρα ὑαλίνη ἑρματισμένη ἔχει εἰς τὸν ἀέρα βάρος 156,25 gr*. Ὅταν αὐτὴ βυθίζεται ἐντὸς ὑγροῦ θερμοκρασίας 15° C, τὸ βάρος της καθίσταται 57,50 gr*, καὶ ὅταν βυθίζεται ἐντὸς τοῦ αὐτοῦ ὑγροῦ θερμοκρασίας 52° C, τὸ βάρος αὐτῆς καθίσταται 58,57 gr*. Ζητεῖται ὁ συντελεστὴς τῆς πραγματικῆς διαστολῆς τοῦ ὑγροῦ. (Συντελεστὴς γραμμικῆς διαστολῆς τῆς ὑάλου 0,000 009 grad^{-1}.)
(Ἀπ. $3{,}23 \cdot 10^{-4}\ \text{grad}^{-1}$.)
(Ε. Μ. Πολυτεχνεῖον, Σχολὴ Πολιτικῶν Μηχανικῶν, 1956.)

1339. Ἐντὸς ὑαλίνου κατακορύφου κυλίνδρου ἐσωτερικῆς διαμέτρου 82,5 mm εἰσάγομεν τεμάχιον βολφραμίου καὶ ποσότητά τινα ὕδατος καὶ σημειοῦμεν τὴν στάθμην τοῦ ὕδατος ἐπὶ τῆς παρειᾶς τοῦ ὑαλίνου κυλίνδρου. Εἶτα θερμαίνομεν ἢ ψύχωμεν τὸν κύλινδρον μετὰ τοῦ περιεχομένου αὐτοῦ, μέχρις ὅτου τὸ σύνολον ἀποκτήσῃ νέαν σταθερὰν θερμοκρασίαν κατά τι μεγαλυτέραν ἢ μικροτέραν τῆς ἀρχικῆς τοιαύτης. Ζητοῦνται: α) Ἡ ἀναλογία μαζῶν βολφραμίου καὶ ὕδατος, ὥστε ἡ ἀρχικὴ στάθμη τοῦ ὕδατος ἐντὸς τοῦ κυλίνδρου νὰ παραμένῃ ἀμετάβλητος, παρὰ τὰς προκληθείσας αὐξομειώσεις τῆς θερμοκρασίας. β) Ὑπόδειξις καταλλήλου σχήματος μετὰ τῶν σχετικῶν διαστάσεων τοῦ ὡς ἄνω τεμαχίου βολφραμίου, ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι τὸ βάρος αὐτοῦ ἰσοῦται μὲ 1000 gr*. (Δίδονται: Γραμμικὸς συντελεστὴς διαστολῆς βολφραμίου $4{,}3 \cdot 10^{-6}\ \text{grad}^{-1}$. Γραμμικὸς συντελεστὴς ὑάλου $8 \cdot 10^{-6}\ \text{grad}^{-1}$. Κυβικὸς συντελεστὴς διαστολῆς ὕδατος $1{,}8 \cdot 10^{-4}\ \text{grad}^{-1}$ καὶ εἰδ. βάρος βολφραμίου 19,3 gr*/cm³.) (Γεωπονικὴ Σχολὴ Ἀθηνῶν, 1948.)

1340. Σφαῖρα ἐκ χάλυβος πυκνότητος 7,71 gr/cm³ καὶ μάζης 33,3 gr ἐξαρτᾶται διὰ νήματος ἐκ τοῦ ἑνὸς τῶν δίσκων ζυγοῦ καὶ ἀποκαθίσταται ἰσορροπία τοῦ ζυγοῦ. Ἐν συνεχείᾳ βυθίζεται ἐντὸς δοχείου περιέχοντος ἔλαιον πυκνότητος 0,810 gr/cm³. Πόσον φορτίον πρέπει νὰ προστεθῇ ἐπὶ τοῦ δίσκου, ὥστε νὰ ἀποκατασταθῇ ἡ ἰσορροπία τοῦ ζυγοῦ. Τὸ πείραμα γίνεται εἰς θερμοκρασίαν 0° C. Ἀκολούθως θερμαίνεται τὸ δοχεῖον εἰς 100° C. Γνωστοῦ ὄντος ὅτι ὁ συντελεστὴς γραμμικῆς διαστολῆς τοῦ χάλυβος εἶναι $1{,}1 \cdot 10^{-5}$ grad^{-1} καὶ ὅτι διὰ νὰ διατηρηθῇ ἡ ἰσορροπία τοῦ ζυγοῦ πρέπει νὰ ἀφαιρεθοῦν 0,240 gr ἐκ τοῦ δίσκου ἐξ οὗ εἶναι ἐξηρτημένη ἡ σφαῖρα, νὰ εὑρεθῇ ὁ συντελεστὴς διαστολῆς τοῦ ἐλαίου.

1341. Εἰς ὑδραργυρικὸν θερμόμετρον, τοῦ ὁποίου τὸ στέλεχος εἶναι διῃρημένον εἰς 100 ἴσα κατ' ὄγκον μέρη, εἶναι γνωστὸν ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ δοχείου περιλαμβάνει 6 480 φορὰς τὸν ὄγκον μιᾶς ὑποδιαιρέσεως. α) Νὰ εὑρεθῇ ὁ συντελεστὴς κυβικῆς διαστολῆς τῆς ὑάλου, ἡ ὁποία ἀποτελεῖ τὸ περίβλημα τοῦ θερμομέτρου, γνωστοῦ ὄντος ὅτι ὁ ὑδράργυρος ὁ πληρῶν τὸ δοχεῖον τοῦ θερμομέτρου μέχρι τὴν ὑποδιαίρεσιν 0 ἐντὸς τοῦ τηκομένου πάγου ἀνέρχεται μέχρι τῆς ὑποδιαιρέσεως 20 εἰς 20° C. β) Χύνεται ὁ ὑδράργυρος καὶ εἰσάγεται ἀντ' αὐτοῦ μέχρι τῆς διαιρέσεως 0 ὑγρὸν τοῦ ὁποίου ὁ συντελεστὴς διαστολῆς εἶναι ἄγνωστος. Ἡ πλήρωσις ἐγένετο εἰς τηκόμενον πάγον. Εἰς 20° C τὸ ὑγρὸν ἀνέρχεται μέχρι τῆς ὑποδιαιρέσεως 61,4. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ συντελεστὴς ἀπολύτου διαστολῆς τοῦ ὑγροῦ. (Συντελὴς ἀπολύτου διαστολῆς ὑδραργύρου 0,000 181 grad^{-1}.)

1342. Μία βαρομετρικὴ ἀνάγνωσις εἰς ὑδραργυρικὸν βαρόμετρον ἐγένετο εἰς θερμοκρασίαν 15° C. Τὸ ὕψος τῆς ὑδραργυρικῆς στήλης μετρηθείσης διὰ κανόνος ἐξ ὀρειχάλκου εὑρέθη ἴσον πρὸς 763,8 mm. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τιμὴ τῆς ἀτμοσφαιρικῆς πιέσεως εἰς cm Hg εἰς 0° C. Δίδονται: Συντελεστὴς γραμμικῆς διαστολῆς ὀρειχάλκου $1{,}8 \cdot 10^{-5}$ grad^{-1}, συντελεστὴς ἀπολύτου διαστολῆς ὑδραργύρου $1{,}82 \cdot 10^{-4}$ grad^{-1}.

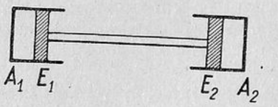
1343. Πυκνόμετρον, προοριζόμενον διὰ τὰ πυκνότερα τοῦ ὕδατος ὑγρά, βυθίζεται μέχρι τοῦ σημείου 0 ἐντὸς ὑγροῦ πυκνότητος 1 gr/cm^3 καὶ μέχρι τοῦ σημείου 15 ἐντὸς ὑγροῦ πυκνότητος 1,116 gr/cm^3. α) Πόση εἶναι ἡ πυκνότης ὑγροῦ ἐντὸς τοῦ ὁποίου βυθίζεται μέχρι τῆς διαιρέσεως 30. β) Εἰς τὸ προηγούμενον πείραμα τὸ ὑγρὸν ἦτο εἰς τὴν θερμοκρασίαν 0° C. Ἐπαναλαμβάνεται ἡ μέτρησις καὶ εἰς τὴν θερμοκρασίαν 40° C. Τὸ θερμόμετρον βυθίζεται τότε μέχρι τῆς ὑποδιαιρέσεως 26. Πόση ἡ νέα πυκνότης τοῦ ὑγροῦ. γ) Νὰ ὑπολογισθῇ, ἐὰν θεωρηθῇ ἀμελητέα ἡ διαστολὴ τοῦ πυκνομέτρου, ὁ συντελεστὴς τῆς ἀπολύτου διαστολῆς τοῦ ὑγροῦ.

1344. Βαρομετρικὸς σωλὴν σταθερᾶς τομῆς 4 cm^2 περιέχει ἐντὸς τοῦ θαλάμου του μικρὰν ποσότητα ἀέρος. Γίνεται μία πρώτη ἀνάγνωσις ἥτις δίδει 748 mm διὰ τὸ ὕψος τῆς ὑδραργυρικῆς στήλης καὶ 122 mm διὰ τὸ μῆκος τοῦ βαρομετρικοῦ θαλάμου. Ἀνυψοῦται ὀλίγον ὁ σωλὴν καὶ ἡ νέα ἀνάγνωσις δίδει τότε 750 mm καὶ 141 mm, ὑπὸ θερμοκρασίαν 0° C. Ζητοῦνται: α) Ἡ ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις. β) Ἡ μᾶζα τοῦ ἀέρος τοῦ περιεχομένου ἐντὸς τοῦ θαλάμου. (Μᾶζα ἑνὸς λίτρου ἀέρος εἰς 0° C καὶ ὑπὸ πίεσιν 760 mm Hg 1,293 gr.)

1345. Κυλινδρικὸς σωλὴν μήκους $l = 85$ cm εἶναι ἀνοικτὸς κατὰ τὰ δύο αὐτοῦ ἄκρα. Μέρος αὐτοῦ μήκους $l' = 32$ cm εἶναι κατακορύφως βυθισμένον ἐντὸς λεκάνης ὑδραργύρου. Κλείεται τότε, καὶ κρατεῖται κλειστὸν διὰ τοῦ δακτύλου, τὸ ἀνώτερον ἄκρον αὐτοῦ, ἔπειτα ἀνυψοῦται κατακορύφως μέχρις ὅτου τὸ κατώτερον αὐτοῦ ἄκρον εὑρίσκεται εἰς τὴν στάθμην τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας τοῦ ὑδραργύρου ἐντὸς τῆς λεκάνης. Ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τῶν θέσεων τὰς ὁποίας κατελάμβανε ὁ ὑδράργυρος ἐντὸς τοῦ σωλῆνος εἰς τὴν πρώτην καὶ τὴν δευτέραν θέσιν εἶναι 17 cm. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις h εἰς ὕψος στήλης ὑδραργύρου. Ὁ σωλὴν κρατεῖται εἰς τὴν δευτέραν θέσιν μὲ τὸ ἀνώτερον ἄκρον κλειστόν· εἰς ποίαν θερμοκρασίαν πρέπει νὰ θερμανθῇ ὁ ἀὴρ (προηγουμένως ἦτο 15° C) ὁ περιεχόμενος ἐντὸς τοῦ σωλῆνος, ἵνα καταπέσῃ ἡ στάθμη τοῦ Hg ἐντὸς αὐτοῦ κατὰ 1 cm. (Συντελεστὴς διαστολῆς ἀερίων $\alpha = 1/273$ grad^{-1}.)

1346. Δοχεῖον, μὴ διαστελλόμενον, ὄγκου 10 *lt* συνδέεται διὰ στρόφιγγος Σ ἥτις τοῦ ἐπιτρέπει νὰ συγκοινωνῇ μετὰ τοῦ ἀτμοσφαιρικοῦ ἀέρος. α) Τῆς στρόφιγγος Σ οὔσης κλειστῆς, τὸ δοχεῖον περιέχει ἀέρα εἰς 0° C καὶ ὑπὸ πίεσιν 114 cm Hg. Πόσον τὸ βάρος τοῦ περιεχομένου ἀέρος. β) Τῆς Σ διατηρουμένης κλειστῆς, θερμαίνεται τὸ δοχεῖον εἰς 100° C. Πόση ἡ πίεσις τοῦ ἀέρος ἐντὸς τοῦ δοχείου. γ) Ἀνοίγεται ἡ Σ καὶ παραμένει ἡ θερμοκρασία εἰς 100° C. Πόσον εἶναι τὸ βάρος τοῦ ἀέρος ὅστις παραμένει εἰς τὸ δοχεῖον. δ) Κλείεται ἡ Σ καὶ ἐπαναφέρεται ἡ θερμοκρασία εἰς 0° C. Πόση εἶναι ἡ πίεσις τοῦ ἀέρος ἐντὸς τοῦ δοχείου. (Εἰδικὸν βάρος τοῦ ἀέρος ὑπὸ κανονικὰς συνθήκας 1,3 gr*/*lt*. Ἐξωτερικὴ ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις 76 cm Hg.)

1347. Δύο ὅμοιαι ἀντλίαι A_1 καὶ A_2 ἔχουσαι τομὴν 300 cm² κλείονται ἀπὸ δύο συνηνωμένα ἔμβολα E_1 καὶ E_2. Αἱ ἀποστάσεις $E_1 A_1$ καὶ $E_2 A_2$ εἶναι ἴσαι πρὸς 22 cm καὶ οἱ κύλινδροι περιέχουν ἀέρα εἰς 0° C καὶ ὑπὸ πίεσιν 76 cm Hg. α) Θερμαίνεται ἡ ἀντλία A_1 εἰς 150° C. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ μετατόπισις x τοῦ συνόλου $E_1 E_2$, ὅταν ἡ θερμοκρασία τοῦ ἀέρος εἰς τὸ A_2 μένῃ 0° C. β) Ἐπαναφέρεται ἡ τοῦ A_1 θερμοκρασία εἰς 0° C καὶ κρατεῖται σταθερὰ ἡ θέσις τῶν E_1 E_2. Πόση εἶναι ἡ τελικὴ πίεσις εἰς τὸ A_1. γ) Πόση μᾶζα ἀέρος πρέπει νὰ ἐξέλθῃ τότε ἐκ τοῦ A_2 οὕτως ὥστε τὸ E_1 E_2 ἀφιέμενον νὰ ἐπανέλθῃ εἰς τὴν θέσιν του. Δίδεται πυκνότης ἀέρος ὑπὸ κανονικὰς συνθήκας 1,3 gr/*lt*.



1348. Περικλείεται ἀέριος μᾶζα εἰς 0° C καὶ ὑπὸ πίεσιν 76 cm Hg ἐντὸς κυλίνδρου τομῆς 2 dm² ὑπὸ ἐμβόλου ἀμελητέας μάζης κινητοῦ ἄνευ τριβῶν καὶ ὑποκειμένου ἐπὶ τῆς ἄνω αὐτοῦ ἐπιφανείας εἰς τὴν ἀτμοσφαιρικὴν πίεσιν 76 cm Hg. Τὸ ἔμβολον εἶναι ἀρχικῶς εἰς ἀπόστασιν 50 cm ἀπὸ τοῦ πυθμένος. α) Πόση δύναμις πρέπει νὰ ἐξασκηθῇ ἐπὶ τοῦ ἐμβόλου, ἵνα κρατηθῇ εἰς ἀπόστασιν 30 cm ἀπὸ τοῦ πυθμένος, τῆς θερμοκρασίας διατηρουμένης εἰς 0° C. β) Πόση δύναμις πρέπει νὰ ἐξασκηθῇ, ἵνα κρατηθῇ τὸ ἔμβολον εἰς ἀπόστασιν 30 cm ἀπὸ τοῦ πυθμένος καὶ ὑπὸ θερμοκρασίαν τοῦ περιεχομένου ἀέρος 100° C. γ) Τῆς θερμοκρασίας διατηρουμένης 100° C, ἀφίεται τὸ ἔμβολον ἐλεύθερον μέχρις ὅτου ἰσορροπήσῃ μεταξὺ τῆς ἐσωτερικῆς καὶ ἐξωτερικῆς πιέσεως. Πόση εἶναι τότε ἡ ἀπόστασις τοῦ ἐμβόλου ἀπὸ τοῦ πυθμένος τοῦ κυλίνδρου. δ) Τὸ ἔμβολον κρατεῖται εἰς ἀπόστασιν 30 cm ἀπὸ τοῦ πυθμένος καὶ ἡ θερμοκρασία εἶναι 100° C, ὅτε εἰσάγονται 5 gr ὕδατος εἰς τὸν κύλινδρον. Πόση συμπληρωματικὴ δύναμις πρέπει νὰ ἐξασκηθῇ ἐπὶ τοῦ ἐμβόλου, ἵνα διατηρηθῇ εἰς τὴν αὐτὴν θέσιν. Δίδονται: Μᾶζα ἑνὸς λίτρου ἀέρος ὑπὸ κανονικὰς συνθήκας 1,3 gr. Πυκνότης ὑδρατμοῦ 0,62 gr/cm³, συντελεστὴς διαστολῆς ἀερίων $\alpha = 1/273$ grad^{-1}.

1349. Κλειστὸν κυλινδρικὸν δοχεῖον ἐντὸς τοῦ ὁποίου ὑφίσταται κενὸν κρατεῖται εἰς τὴν σταθερὰν θερμοκρασίαν 100° C. Εἶναι διῃρημένον εἰς δύο τμήματα Α καὶ Β δι' ἐμβόλου κινητοῦ ἄνευ τριβῶν, ἕκαστον δὲ τμῆμα ἔχει μῆκος 1 m καὶ τομὴν 1 m². α) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ποσότης τοῦ ὕδατος ἥτις πρέπει νὰ εἰσαχθῇ εἰς ἓν ἀπὸ τὰ τμήματα ταῦτα ἵνα οἱ ὑδρατμοὶ εἶναι κεκορεσμένοι ἄνευ περισσείας ὑγροῦ. β) Εἰσάγονται 200 gr ὕδατος εἰς τὸ Α καὶ 2 kgr ὕδατος εἰς τὸ Β. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐπὶ τοῦ ἐμβόλου ἐξασκουμένη δύναμις. γ) Τὸ ἔμβολον ἀφίεται ἐλεύθερον. Νὰ εὑρεθῇ ἡ θέσις ἰσορροπίας. Δίδονται : Πυκνότης ὑδρατμοῦ 0,625 gr/cm³. Βάρος ἑνὸς λίτρου ἀέρος ὑπὸ κανονικὰς συνθήκας 1,3 gr*.

1350. Σωλὴν ἀνοικτὸς κατὰ τὰ δύο ἄκρα καὶ τομῆς 1 cm² βυθίζεται ὑπὸ βαρομετρικὴν πίεσιν 716 Torr καὶ 10° C ἐντὸς λεκάνης ὑδραργύρου, εἰς τρόπον ὥστε νὰ ἐξέχῃ μῆκος 115 mm τοῦ σωλῆνος, καὶ ἀκολούθως κλείεται τὸ ἄνω ἄκρον. Πόσον βάρος ἔχει ἡ ἀποκλεισθεῖσα ποσότης ἀέρος. Πόσον πρέπει νὰ ἀνασύρωμεν τὸν σωλῆνα ἐκ τοῦ ὑδραργύρου, ἵνα ὁ ἀὴρ καταλάβῃ ὄγκον τετραπλάσιον τοῦ ἀρχικοῦ. (Εἰδικὸν βάρος τοῦ ἀέρος 0,013 gr^*/cm^3 εἰς 0° C καὶ 760 Torr, συντελεστὴς διαστολῆς τοῦ ἀέρος 0,0037 $grad^{-1}$.)

1351. α) Στέλεχος ἐκ χαλκοῦ ἔχει εἰς 20° C μῆκος 50 cm. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος αὐτοῦ εἰς 100° C. β) Σφαῖρα ἐκ χαλκοῦ ἔχει διάμετρον 10 cm εἰς 20° C. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος της εἰς 300° C. γ) Τίθεται εἰς προέκτασιν χαλκίνου στελέχους μήκους x cm στέλεχος ἐκ καδμίου μήκους y cm. Εἰς 0° C $x + y = 100$ cm. Ὅταν ὑψωθῇ ἡ θερμοκρασία, τὸ σύνολον τῶν στελεχῶν διαστέλλεται, ὅπως ὁμογενὲς στέλεχος κασσιτέρου 100 cm μήκους, εἰς 0° C. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ x καὶ y. (Συντελεστὴς γραμμικῆς διαστολῆς: Χαλκοῦ $16 \cdot 10^{-6}$ $grad^{-1}$, καδμίου $42 \cdot 10^{-6}$ $grad^{-1}$, κασσιτέρου $28 \cdot 10^{-6}$ $grad^{-1}$.)

1352. Ἐξ ἑνὸς ὑποβρυχίου θαλάμου ἐσωτερικοῦ ὄγκου 1000 m^3 ἐκτοπίζεται ὁλόκληρον τὸ ἐντὸς αὐτοῦ εὑρισκόμενον ὕδωρ, δι' εἰσαγωγῆς πεπιεσμένου ἀτμοσφαιρικοῦ ἀέρος, ἀρχικῆς θερμοκρασίας 25° C, ἡ ὁποία ὅμως σταθεροποιεῖται τελικῶς εἰς 10° C ἐντὸς τοῦ θαλάμου. Ζητεῖται ὁ ἀναγκαῖος ὄγκος ἀτμοσφαιρικοῦ ἀέρος ὑπὸ πίεσιν 760 Torr. Ἡ ὀπὴ ἐκροῆς τοῦ ὕδατος ἐκ τοῦ θαλάμου εὑρίσκεται 20 m ὑπὸ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς θαλάσσης. (Εἰδικὸν βάρος θαλασσίου ὕδατος 1 030 kgr^*/m^3, τοῦ δὲ ὑδραργύρου 13 600 kgr^*/m^3.)
(Ε.Μ. Πολυτεχνεῖον, Σχολαὶ Χημικῶν Μηχανικῶν, Ἀρχιτεκτονική, 1948.)

1353. Σῶμα μάζης m_1 δύναται νὰ ὀλισθαίνῃ ἐπὶ ὁριζοντίας τραπέζης. Τὸ σῶμα τοῦτο συνδέεται μέσῳ τροχαλίας καὶ νήματος πρὸς ἕτερον σῶμα μάζης $m_2 = 100$ gr καὶ δυνάμενον νὰ πίπτῃ κατακορύφως καὶ νὰ θέτῃ εἰς κίνησιν τὸ πρῶτον σῶμα (μάζης m_1). Ζητεῖται: α) Νὰ προσδιορισθῇ ἡ μᾶζα m_1, ἐὰν ἀφήσωμεν τὸ σῶμα μάζης m_2 ἐλεύθερον νὰ κινηθῇ ἐπὶ χρόνον $t = 2$ sec, ὁπότε ἐκ τοῦ πειράματος παρατηροῦμεν ὅτι διήνυσε διάστημα $s = 2$ m. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην θεωροῦνται ἡ μᾶζα τῆς τροχαλίας καὶ αἱ τριβαὶ ἀμελητέαι. β) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ποσὸν τῆς ἀναπτυσσομένης θερμότητος εἰς περίπτωσιν καθ' ἣν θεωρηθῇ ἡ μᾶζα τῆς τροχαλίας ἀμελητέα, ἐνῷ ὑφίστανται τριβαὶ καὶ ἡ πραγματικὴ μᾶζα τοῦ πρώτου σώματος εἶναι $m_1 = 800$ gr. (Ἀπ. α' $m_1 = 881$ gr. β' $Q = 0{,}039$ cal.)

1354. Σφαῖρα ἐκ μολύβδου ἐξέρχεται ἀπὸ πυροβόλου ὅπλου μὲ ταχύτητα 250 m/sec καὶ προσκρούει ἐπὶ θώρακος ἐκ σκυροκονιάματος. Δεδομένου ὅτι τὸ ἥμισυ τῆς ἐκλυομένης θερμότητος χρησιμεύει διὰ τὴν ἀνύψωσιν τῆς θερμοκρασίας τῆς σφαίρας, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀνύψωσις αὕτη. (Εἰδ. θερμότης μολύβδου 0, 031 cal/gr·grad.) (Ε. Μ. Πολυτεχνεῖον, Σχολαὶ Χημικῶν, Μεταλλειολόγων, 1951.)

1355. Διὰ νὰ παραχθῇ 1 kgr ἀτμοῦ ξηροῦ κεκορεσμένου, ἀπολύτου πιέσεως 10 ἀτμοσφαιρῶν, ἀπὸ ὕδωρ 0° C, ἀπαιτεῖται θερμότης 664 kcal. Ὁ εἰδικὸς ὄγκος τοῦ ἀτμοῦ εἶναι 0,2 m^3/kgr καὶ ἡ θερμοκρασία του 180° C. Πόση θερμότης διετέθη εἰς kcal (μὲ προσέγγισιν μονάδος): α) Διὰ νὰ φθάσῃ τὸ ὕδωρ εἰς τὴν θερμοκρασίαν ἀτμοποιήσεως. β) Διὰ νὰ μετατραπῇ ἀπὸ ὑγρᾶς καταστάσεως εἰς ἀέριον. γ) Διὰ τὴν ἐκτέλεσιν τοῦ ἔργου τῆς ἐκτονώσεως ἀπὸ τὸν ἀρχικὸν ὄγκον τοῦ ὕδατος εἰς τὸν τελικὸν ὄγκον τοῦ ἀτμοῦ.
(Ε. Μ. Πολυτεχνεῖον, Σχολὴ Μηχανολόγων - Ἠλεκτρολόγων, 1952.)

1356. Ποσότης 147 gr οἰνοπνεύματος, θερμοκρασίας 75° C, τίθεται ἐντὸς θερμιδομέτρου περιέχοντος 660 gr τερεβινθελαίου θερμοκρασίας $10{,}6^\circ$ C, ὅτε ἡ τελικὴ θερμοκρασία ἰσορροπίας τοῦ μίγματος καθίσταται $25{,}2^\circ$ C. Ἡ θερμοχωρη-

τικότης τοῦ θερμιδομέτρου εἶναι 30 cal/grad καὶ ἡ εἰδικὴ θερμότης τοῦ τερεβινθελαίου 0,466 cal · gr^{-1} · $grad^{-1}$. Ζητεῖται ἡ εἰδικὴ θερμότης τοῦ οἰνοπνεύματος.
(Ε. Μ. Πολυτεχνεῖον, Σχολὴ Χημικῶν Μηχανικῶν, 1952.)

1357. Τὸ ἔργον μηχανῆς, ἰσχύος 5 ἀτμοΐππων, ἀπορροφᾶται ἐξ ὁλοκλήρου διὰ τὴν κίνησιν ἄξονος ἀναδεύοντος ὕδωρ μάζης 100 kgr. Τὸ ὕδωρ περιέχεται εἰς δοχεῖον μετάλλινον τοῦ ὁποίου ἡ μᾶζα μετὰ τοῦ ἐκ τοῦ αὐτοῦ μετάλλου ἀναδευτῆρος εἶναι 50 kgr. Ἐὰν ἡ εἰδικὴ θερμότης τοῦ μετάλλου εἶναι 0,1 cal/gr · grad, τὸ δὲ μηχανικὸν ἰσοδύναμον τῆς θερμότητος 427 kgr*m/kcal, νὰ εὑρεθῇ ἡ ὕψωσις τῆς θερμοκρασίας τοῦ θερμιδομέτρου εἰς 30 min. (Ἀπ. 15,05° C.)
(Πανεπιστήμιον Ἀθηνῶν, Τμῆμα Χημικόν, 1948.)

1358. Ἀνυψωτικὴ μηχανὴ κινουμένη διὰ τετραχρόνου κινητῆρος, ἀνυψοῖ κατὰ 20 m φορτίον 500 kgr* σκυροδέματος εἰς τὴν στέγην μιᾶς ὑπὸ ἐκτέλεσιν πολυκατοικίας ἐντὸς χρονικοῦ διαστήματος 1 min. Ζητεῖται ἡ ἰσχὺς τοῦ κινητῆρος καὶ ἡ δαπάνη μιᾶς ἀναβάσεως εἰς καύσιμον μόνον ὕλην (βενζίνην) ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι κατὰ τὴν καῦσιν 1 kgr βενζίνης παράγονται 9 000 kcal. Δίδονται ἡ θερμικὴ ἀπόδοσις τοῦ κινητῆρος $\eta = 0{,}20$ καὶ ἡ τιμὴ 1 kgr βενζίνης 5 δραχμαί, 1 kcal = 425 kgr*m. Δεχόμεθα ἐπὶ πλέον ὅτι 60 % τῆς ἰσχύος τοῦ κινητῆρος ἀπορροφῶνται πρὸς ὑπερνίκησιν τῆς τριβῆς κλπ. ἐντὸς τῆς ἀνυψωτικῆς ἐγκαταστάσεως.
(Ε. Μ. Πολυτεχνεῖον, Σχολὴ Ἀρχιτεκτονική, 1950.)

1359. Κύβος ἐκ πάγου μάζης 100 gr ἐπιπλέει ἐντὸς δοχείου θερμιδομέτρου περιέχοντος 1000 cm^3 ὕδατος εἰς 0° C. α) Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ ἐμβαπτισμένου μέρους τοῦ πάγου. Πόσον βάρος πρέπει νὰ τεθῇ ἐπὶ τῆς ἄνω ἐπιφανείας τοῦ κύβου, ἵνα βυθισθῇ τελείως. Δίδεται πυκνότης τοῦ πάγου 0,92 gr/cm^3. β) Τίθεται ἐντὸς τοῦ θερμιδομέτρου μεταλλικὸν τεμάχιον 300 gr θερμοκρασίας θ καὶ παρατηρεῖται ὅτι τελικῶς ὁ πάγος τήκεται καὶ ἡ θερμοκρασία τοῦ ὕδατος εἶναι 0,5° C. Νὰ εὑρεθῇ ἡ θερμοκρασία θ. Δίδονται: εἰδικὴ θερμότης τοῦ μετάλλου 0,1 cal/gr · grad, εἰδικὴ θερμότης θερμιδομέτρου 0,1 cal/gr · grad, βάρος θερμιδομέτρου 200 gr*, θερμότης τήξεως πάγου 80 cal/gr.

1360. Βαρομετρικὸς σωλὴν τομῆς 1 cm^2 εἶναι ἀνεστραμμένος ἐντὸς λεκάνης ὑδραργύρου. Ἡ ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις εἶναι 76 cm Hg καὶ ὁ ὄγκος τοῦ βαρομετρικοῦ θαλάμου εἶναι 24 cm^3. Εἰσάγονται ἐντὸς τοῦ σωλῆνος 0,05 gr πτητικοῦ ὑγροῦ τάσεως ἀτμοῦ 19 cm Hg. Περιγράψατε τὰ παρατηρούμενα φαινόμενα ἀνυψοῦντες τὸν σωλῆνα ἀπὸ τῆς ἀρχικῆς του θέσεως. Ἡ πυκνότης τοῦ κεκορεσμένου ἀτμοῦ εἶναι 0,0009 gr/cm^3.

1361. Διὰ τὸν καθορισμὸν τῆς θερμοκρασίας κλιβάνου χρησιμοποιοῦμεν μικρὰν σφαῖραν λευκοχρύσου, μάζης 100 gr, τὴν ὁποίαν εἰσάγομεν εἰς τὸν κλίβανον καὶ ἀφίνομεν αὐτὴν ἐντὸς αὐτοῦ, μέχρις ὅτου λάβῃ τὴν θερμοκρασίαν του. Ἀκολούθως ἐξάγομεν τὴν σφαῖραν ἐκ τοῦ κλιβάνου καὶ ρίπτομεν αὐτὴν ἐντὸς θερμιδομέτρου, περιέχοντος 400 gr ὕδατος (θερμοχωρητικότης θερμιδομέτρου 80 cal/grad) θερμοκρασίας 10° C. Ἡ τελικὴ θερμοκρασία ἰσορροπίας εἶναι 20° C. Ζητεῖται ἡ θερμοκρασία τοῦ κλιβάνου, γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ εἰδικὴ θερμότης τοῦ λευκοχρύσου εἶναι 0,032 cal/gr · grad.

1362. Οἰκιακὴ ἐγκατάστασις κεντρικῆς θερμάνσεως χρησιμοποιεῖ ὡς καύσιμον ἀνθρακίτην, ὁ ὁποῖος παρέχει 8 000 kcal/kgr, καταναλίσκει δὲ ἐτησίως 12 τόννους ἀξίας 2 000 δρχ. κατὰ τόννον. Ἐὰν ἀντὶ ἀνθρακίτου χρησιμοποιηθῇ ἀκάθαρτον πετρέλαιον, τὸ ὁποῖον παρέχει 11 000 kcal/kgr, πόσον πρέπει νὰ κοστίζῃ 1 kgr πετρελαίου, ἵνα ἡ δαπάνη λειτουργίας τῆς ἐγκαταστάσεως παραμένῃ ἡ αὐτὴ ὡς καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν χρησιμοποιήσεως ἀνθρακίτου.

1363. Σιδηρᾶ σφαῖρα βάρους 500 kgr* πίπτει ἐξ ὕψους 12 m ἐπὶ πλακὸς ἐκ μολύβδου βάρους 10 kgr* εὑρισκομένης εἰς θερμοκρασίαν 15° C. Ἡ σφαῖρα ἀναπηδᾷ μέχρις ὕψους 0,3 m. Εὐθὺς ἀμέσως ἡ μολυβδίνη πλὰξ βυθίζεται ἐντὸς δοχείου περιέχοντος ὕδωρ 8 kgr εὑρισκομένου εἰς θερμοκρασίαν 15° C, ὁπότε τοῦτο μετὰ τὴν ἀποκατάστασιν τῆς θερμικῆς ἰσορροπίας εὑρέθη 18,5° C. Ζητεῖται ἡ ἐκ τοῦ πειράματος τούτου τιμὴ τοῦ μηχανικοῦ ἰσοδυνάμου τῆς θερμότητος. (Εἰδικὴ θερμότης μολύβδου 0,031 cal/gr · grad.)

1364. Θερμιδόμετρον ἐκ χαλκοῦ εἰδικῆς θερμότητος 0,095 cal/gr · grad περιέχει 1 680 gr οὐσίας εἰδ. θερμότητος 0,5 cal/gr · grad. Τὸ ὑγρὸν ἀναδεύεται διὰ πτερυγίων ὁμοίως ἐκ χαλκοῦ περιστρεφομένων ὑπὸ ζεύγους ῥοπῆς 10 dyn · cm, κατόπιν δὲ 450 στροφῶν ἡ θερμοκρασία τοῦ συνόλου ἀνέρχεται κατὰ 3° C. Ἐὰν ἡ συνολικὴ μᾶζα τοῦ χαλκοῦ εἶναι 1 122 gr, νὰ εὑρεθῇ τὸ μηχανικὸν ἰσοδύναμον τῆς θερμότητος.

1365. Α) Ἓν γραμμάριον ὕδατος ἐξατμίζεται ὑπὸ πίεσιν 1 ἀτμοσφαίρας. Ζητεῖται: α) Πόση εἶναι ἡ αὔξησις τοῦ ὄγκου τὴν ὁποίαν ὑφίσταται, εἰς cm^3, β) πόσον τὸ παραγόμενον ἔργον ὑπὸ τῆς αὐξήσεως ταύτης τοῦ ὄγκου, εἰς Joule, γ) πόσον τὸ ἰσοδύναμον τοῦ ἔργου τούτου, εἰς cal. Β) Δοχεῖον σταθεροῦ ὄγκου καὶ θερμικῶς μεμονωμένον περιέχει 10 gr ἀέρος εἰς 1 000° C καὶ ὑπὸ πίεσιν 10 Atm. Εἰσάγομεν ἐντὸς αὐτοῦ 1 gr ὕδατος εἰς θερμοκρασίαν 100° C. Ζητεῖται: α) ποῖος ὁ ὄγκος τοῦ δοχείου, β) ποία ἡ θερμοκρασία καὶ γ) ποία ἡ τελικὴ πίεσις τοῦ συστήματος. Δίδονται: Πυκνότης τοῦ ἀέρος ὑπὸ κανονικὰς συνθήκας $\rho = 0{,}00129$ gr/cm^3, πυκνότης τοῦ ὑδρατμοῦ εἰς 100° C καὶ ὑπὸ πίεσιν 1 Atm $\rho' = 0{,}0006$ gr/cm^3, εἰδικὴ θερμότης τοῦ ἀέρος ὑπὸ σταθερὸν ὄγκον $c_v = 0{,}18$ cal/gr · grad, εἰδικὴ θερμότης ὑδρατμοῦ ὑπὸ σταθερὸν ὄγκον $c'_v = 0{,}38$ cal/gr · grad, θερμότης ἐξαερώσεως τοῦ ὕδατος εἰς 100° C καὶ ὑπὸ πίεσιν 760 Torr $\lambda = 540$ cal/gr, ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις 1 033 gr*/cm^2, μηχανικὸν ἰσοδύναμον τῆς θερμότητος $J = 427$ kgr*m/kcal. Ὁ ἀὴρ καὶ ὁ ὑδρατμὸς θεωροῦνται ὡς τέλεια ἀέρια.

1366. Ἐντὸς κυλίνδρου ἀτμομηχανῆς ὄγκου 100 *lt* κινεῖται ἄνευ τριβῆς ἔμβολον τοῦ ὁποίου ἡ μία ὄψις ἐπικοινωνεῖ μὲ τὸν λέβητα, ὅστις παράγει ἀτμὸν 100° C, ἡ δὲ ἑτέρα ὄψις ἐπικοινωνεῖ μὲ χῶρον πιέσεως 60 mm Hg. Πόσον ἔργον παράγεται ἀνὰ γραμμάριον καταναλισκομένου ἀτμοῦ. Ἡ σχετικὴ πυκνότης τοῦ ἀτμοῦ εἶναι 0,625, $g = 9{,}80$ m/sec^2.

1367. Πυκνωτὴς ἀτμομηχανῆς ἔχων κυλινδρικὸν σχῆμα, διαμέτρου 40 cm καὶ ὕψους 40 cm, δέχεται 100 gr ἀτμοῦ καθ' ἑκάστην κατάβασιν τοῦ ἐμβολέως, ὑποτιθεμένου εἰς χῶρον κεκορεσμένον καὶ ξηρόν, εἰς θερμοκρασίαν 30° C. Ζητεῖται τὸ βάρος τοῦ ὕδατος εἰς 10° C τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον, διὰ νὰ διατηρήσωμεν τὴν θερμοκρασίαν εἰς 40° C, δοθέντος ὅτι α) ἡ θερμότης ἐξαερώσεως τοῦ ὕδατος εἶναι ἴση πρὸς 600 cal/gr καὶ β) ὅτι ἡ θερμικὴ ἀκτινοβολία ἀφαιρεῖ ἀπὸ τὸν πυκνωτὴν εἰς ἑκάστην κατάβασιν τοῦ ἐμβολέως 1 kcal/m^2 ἐπιφανείας του. Ἡ εἰδικὴ θερμότης τοῦ ὕδατος λαμβάνεται ἴση πρὸς 1 cal/gr · grad.

1368. Θερμιδόμετρον ἀπὸ ὀρείχαλκον βάρους 300 gr* περιέχει 470 gr* ὕδατος. Τεμάχιον πάγου ὁμογενὲς βάρους 200 gr* ἐπιπλέει ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὕδατος. Τὸ σύνολον εὑρίσκεται εἰς τὴν θερμοκρασίαν 0° C. α) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τοῦ πάγου τοῦ ἐμβαπτισμένου ἐντὸς τοῦ ὕδατος. β) Εἰσάγεται ἐντὸς τοῦ θερμιδομέτρου τεμάχιον ἀργιλίου βάρους 100 gr* καὶ θερμοκρασίας 100° C. Νὰ εὑρεθῇ τὸ βάρος τοῦ πάγου ὅστις θὰ τακῇ. γ) Θέλομεν νὰ παραχθοῦν ἐντὸς τοῦ θερμιδομέτρου 50 gr ἀτμοῦ κεκορεσμένου θερμοκρασίας 100° C. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τελικὴ θερμοκρασία. Δίδονται : Πυκνότης πάγου 0,92 gr/cm^3, εἰδικὴ θερμότης τοῦ ὀρειχάλκου 0,10 cal/gr · grad, εἰδικὴ θερμότης τοῦ ἀργιλίου 0,212 cal/gr · grad, θερμότης τήξεως τοῦ πάγου 80 cal/gr, θερμότης ἀτμοποιήσεως ὕδατος εἰς 100° C 539 cal/gr.

1369. Σφαῖρα ἐκ μολύβδου μάζης 15 gr βάλλεται κατακορύφως ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω ὑπὸ ἀρχικὴν ταχύτητα 500 m/sec. Ἡ σφαῖρα ἐπανερχομένη εἰς τὸ ἔδαφος προσκρούει ἐπὶ ἀκλονήτου κωλύματος. Ζητεῖται εἰς ποίαν κατάστασιν θὰ εὑρεθῇ ἡ σφαῖρα μετὰ τὴν πρόσκρουσιν καὶ πόση ἡ τελικὴ θερμοκρασία, ὑποτιθεμένου ὅτι ἡ θερμοκρασία τοῦ περιβάλλοντος εἶναι + 15° C. Δίδονται : Σημεῖον τήξεως μολύβδου 327,4° C, εἰδικὴ θερμότης μολύβδου 0,031 cal/gr · grad, θερμότης τήξεως μολύβδου 5,5 cal/gr. Εἰδικὴ θερμότης ὑγροῦ μολύβδου 0,04 cal/gr · grad. Ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀέρος θεωρεῖται ἀμελητέα καὶ ὅλη ἡ ἐκλυομένη θερμότης ἀπορροφᾶται ὑπὸ τῆς σφαίρας.

1370. Κατακόρυφος κύλινδρος τομῆς 200 cm^2 κλείεται δι' ἐμβόλου ἀμελητέου βάρους, ἄνευ τριβῶν, εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ κυλίνδρου. Ἐπὶ τοῦ ἐμβόλου ἐξασκεῖται ἡ ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις $h = 75$ cm Hg. Ὁ κύλινδρος περιέχει ἀέρα ξηρὸν εἰς θερμοκρασίαν 15° C καὶ τὸ ἔμβολον εὑρίσκεται εἰς ὕψος 25 cm ἀπὸ τοῦ πυθμένος. α) Πόσον τὸ βάρος τοῦ ἀέρος τοῦ περιεχομένου εἰς τὸν κύλινδρον. β) Φέρεται ὁ κύλινδρος εἰς 50° C, τῆς πιέσεως διατηρουμένης σταθερᾶς. Ποίαν θέσιν λαμβάνει τὸ ἔμβολον. Θεωρεῖται ἀμελητέα ἡ διαστολὴ τοῦ κυλίνδρου. γ) Τῆς θερμοκρασίας διατηρουμένης εἰς 50° C, εἰσάγεται ὕδωρ ποσότητος ἀκριβῶς τόσης, ὥστε νὰ δώσῃ κεκορεσμένον ἀτμόν. Ποία θὰ εἶναι ἡ νέα θέσις τοῦ ἐμβόλου. δ) Τοποθετεῖται τότε ἐπὶ τοῦ ἐμβόλου βάρος 25 kgr*· πόση γίνεται ἡ πίεσις ἐντὸς τοῦ κυλίνδρου. Ποίαν θέσιν λαμβάνει τὸ ἔμβολον καὶ πόση εἶναι ἡ ποσότης τοῦ ἀτμοῦ· ἡ ὁποία συμπυκνοῦται. Δίδονται: Συντελεστὴς διαστολῆς τοῦ ἀερίου $\alpha = 1/273$ grad^{-1}, βάρος 1 *lt* ἀέρος ὑπὸ κανονικὰς συνθήκας 1,3 gr*, πυκνότης ὑδραργύρου 13,6 gr/cm^3, μεγίστη τάσις τοῦ ἀτμοῦ ὕδατος εἰς 50° C 92 mm Hg.

1371. Σφαῖρα μάζης 12,8 gr ἐξέρχεται τῆς κάννης πυροβόλου ὑπὸ ταχύτητα 720 m/sec. 1) Νὰ εὑρεθῇ ἡ κινητικὴ ἐνέργεια τῆς σφαίρας κατὰ τὴν στιγμὴν τῆς ἐξόδου. 2) Ἐὰν τὸ μῆκος τῆς κάννης εἶναι 80 cm, εἰς πόσον χρόνον θὰ τὴν διατρέξῃ ἡ σφαῖρα, δεδομένου ὅτι ἡ κίνησις εἶναι ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένη. 3) Ἐὰν ἡ σφαῖρα προσκρούσῃ ἐπὶ ἀκλονήτου κωλύματος καὶ ὁλόκληρον τὸ ποσὸν τῆς ἀναφανείσης θερμότητος ἀπορροφηθῇ ὑπὸ τῆς σφαίρας, κατὰ πόσους βαθμοὺς θὰ ἀνέλθῃ ἡ θερμοκρασία της. Δίδονται εἰδικὴ θερμότης τῆς σφαίρας 0,1 cal/gr · grad καὶ μηχανικὸν ἰσοδύναμον τῆς θερμότητος 425 kgr*m/kcal.

(Ἀπ. α′ 338,2 kgr*m. β′ 1/450 sec. γ′ 631,5° C.)
(Πανεπιστήμιον Ἀθηνῶν, Τμῆμα Χημικόν, 1954.)

1372. Ἠλεκτρόνιον μάζης $m = 9{,}106 \cdot 10^{-31}$ kgr κινεῖται μὲ ταχύτητα $\upsilon = 100\,000$ m · sec^{-1}. Τοῦτο προσκρούει ἐπὶ ἀνόδου ἐξ ἀργιλίου μάζης 10 gr καὶ ὅλη ἡ κινητική του ἐνέργεια μετατρέπεται εἰς θερμότητα. Ποῖος ὁ ἀριθμὸς τῶν ἠλεκτρονίων, τὰ ὁποῖα πρέπει νὰ προσκρούσουν ἐπὶ τῆς ἀνόδου, ἵνα ἡ θερμοκρασία ἀνέλθῃ κατὰ 50° C. Δίδεται εἰδ. θερμότης ἀργιλίου = 0,241 cal/gr · grad, 1 cal = 4,2 Joule.

(Πανεπιστήμιον Ἀθηνῶν, Τμῆμα Φυσικόν, Φυσιογνωστικόν, 1952.)

1373. Δίδεται κύλινδρος ὁ ὁποῖος χωρίζεται εἰς τὸ μέσον διὰ στερεοῦ διαφράγματος καὶ τοῦ ὁποίου ἡ θερμοκρασία παραμένει σταθερὰ εἰς 100° C. Ἡ τομὴ τοῦ σωλῆνος εἶναι 1 m^2 καὶ τὸ μῆκος 2 m. Εἰς τὸ ἓν τμῆμα τίθενται 200 gr ὕδατος, εἰς δὲ τὸ ἕτερον 2000 gr ὕδατος. Ἂν ἡ σχετικὴ πυκνότης τῶν ἀτμῶν εἶναι 0,62, νὰ εὑρεθῇ ἡ δύναμις ἡ ὁποία ἐξασκεῖται ἐπὶ τοῦ διαφράγματος.

('Απ. $F = 6\,814\,600$ gr*.)
(Πανεπιστήμιον Θεσσαλονίκης, Τμῆμα Χημικόν, 1953.)

1374. Διὰ θερμαντῆρος 2 kW, θερμαίνομεν πάγον βάρους 10 kgr* καὶ ἀρχικῆς θερμοκρασίας – 100° C. Ἀποδώσατε γραφικῶς τὴν θερμοκρασίαν συναρτήσει τοῦ χρόνου (οἱ ἄξονες ἔστωσαν βαθμολογημένοι εἰς βαθμοὺς C καὶ εἰς sec). Ἐπίσης ἀποδώσατε γραφικῶς τὸν ὄγκον συναρτήσει τοῦ χρόνου (ποιοτικὸν σχῆμα, δηλαδὴ ἄνευ βαθμολογίας ἀξόνων). Εἰδικὴ θερμότης πάγου 0,5 $cal \cdot gr^{-1}\, grad^{-1}$, θερμότης τήξεως πάγου 80 $cal \cdot gr^{-1}$. (1 Joule = 0,239 cal.)

(Πανεπιστήμιον Ἀθηνῶν, Τμῆμα Χημικόν, 1956.)

1375. Ἠλεκτρικὴ γεννήτρια τροφοδοτεῖται καταλλήλως ὑπὸ ὑδατοπτώσεως ὕψους 200 m καὶ παροχῆς ὕδατος 1 m^3/sec. Ἡ παραγομένη ἠλεκτρικὴ ἐνέργεια διατίθεται ἐξ ὁλοκλήρου πρὸς ἐξάτμισιν ὕδατος ἀρχικῆς θερμοκρασίας 20° C. Ζητεῖται ἡ ἀνὰ δευτερόλεπτον παραγωγὴ ἀτμοῦ, ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν γενικοῦ συντελεστοῦ ἀποδόσεως $\eta = 0,40$. ('Απ. 0,3047 kgr/sec.)

(Ε. Μ. Πολυτεχνεῖον, Σχολὴ Μηχανολόγων - Ἠλεκτρολόγων, 1956.)

1376. α) Τεμάχιον πάγου ὁμογενές, 100 gr, ἐπιπλέει εἰς ὕδωρ 0° C. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ τμήματος ὅπερ εἶναι ἐκτὸς τοῦ ὕδατος. β) Εἰσάγεται ἐντὸς τοῦ δοχείου τεμάχιον μετάλλου μάζης 150 gr καὶ θερμοκρασίας 100° C. Ποία ἡ ποσότης τοῦ πάγου ὅστις θὰ τακῇ. Πόση εἶναι ἡ ἐλάττωσις τοῦ ὄγκου τοῦ μίγματος πάγος - ὕδωρ· (θὰ ὑποτεθῇ ἡ θερμικὴ μόνωσις τοῦ δοχείου τελεία). Δίδονται : Πυκνότης τοῦ πάγου 0,92 gr/cm^3. Θερμότης τήξεως τοῦ πάγου 80 cal/gr. Εἰδικὴ θερμότης τοῦ μετάλλου 0,12 cal/gr · grad.

1377. Εἰς θερμιδόμετρον ἐκ χαλκοῦ βάρους 100 gr* καὶ περιέχοντος 200 gr ὕδατος εἰς 4° C εἰσάγονται 300 gr χαλκοῦ θερμοκρασίας — 20° C καὶ ἀναδεύεται μέχρι ἀποκαταστάσεως θερμικῆς ἰσορροπίας. α) Πόση ἡ τελικὴ θερμοκρασία τοῦ μίγματος. β) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι, ἐὰν ὁ εἰσαγόμενος ἐντὸς τοῦ θερμιδομέτρου χαλκὸς ἔχῃ θερμοκρασίαν — 50 C, ἓν μέρος τοῦ ὕδατος πήγνυται. γ) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πηχθεῖσα μᾶζα τοῦ ὕδατος. Δίδονται: Εἰδικὴ θερμότης τοῦ χαλκοῦ 0,095 cal/gr · grad. Θερμότης τήξεως τοῦ πάγου 80 cal/gr.

1378. α) Θερμιδόμετρον ἀπὸ ὀρείχαλκον περιέχει 150 gr ὕδατος θερμοκρασίας 15° C. Προστίθενται δὲ 100 gr ὕδατος θερμοκρασίας 50° C. Μετὰ τὴν ἀνάδευσιν ἡ τελικὴ θερμοκρασία τοῦ μίγματος εἶναι 28° C. Ἡ εἰδικὴ θερμότης τοῦ ὀρειχάλκου εἶναι 0,09 cal/gr · grad. Πόσον τὸ βάρος τοῦ θερμιδομέτρου. β) Εἰς τὸ αὐτὸ θερμιδόμετρον περιέχον 200 gr ὕδατος 15° C βυθίζεται τεμάχιον μετάλλου θερμοκρασίας 100° C. Ἡ θερμοκρασία μετὰ τὴν ἀνάδευσιν ἀνυψοῦται εἰς 28,8° C. Τὸ τεμάχιον τοῦ μετάλλου ζυγίζει 200 gr*. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ εἰδικὴ αὐτοῦ θερμότης. γ) Εἰς τὸ αὐτὸ θερμιδόμετρον περιέχον 400 gr ὕδατος 20° C εἰσάγονται 30 gr πάγου θερμοκρασίας 0° C. Πόση θὰ εἶναι ἡ τελικὴ θερμοκρασία τοῦ μίγματος μετὰ τὴν πλήρη τῆξιν τοῦ πάγου. Δίδεται θερμότης τήξεως πάγου 80 cal/gr.

1379. Μεταλλικὸν τεμάχιον μάζης 1 kgr καὶ εἰδικῆς θερμότητος 0,10 cal/gr · grad φέρει κοιλότητα ἐντὸς τῆς ὁποίας δύνανται νὰ τίθενται σώματα στερεὰ ἢ ὑγρὰ μετὰ θερμομέτρου. α) Τὸ μέταλλον εἶναι κατ' ἀρχὰς εἰς τὴν θερμοκρασίαν ζέοντος ὕδατος (100° C) καὶ εἰσάγεται ἐντὸς τῆς κοιλότητος μῖγμα ἀποτελούμενον ἀπὸ x gr τετριμμένου πάγου καὶ y gr ὕδατος. Ζητεῖται ἡ τελικὴ θερμοκρασία εἰς τὰς τρεῖς ἀκολούθους περιπτώσεις. Πρώτη περίπτωσις $x = y = 50$ gr. Δευτέρα περίπτωσις $x = 125$ gr καὶ y αὐθαίρετον. Τρίτη περίπτωσις $x = 200$ gr καὶ y αὐθαίρετον. (Παραδεχόμεθα ὡς θερμότητα τήξεως τοῦ πάγου 80 cal/gr.) β) Τὸ μεταλλικὸν τεμάχιον φέρεται εἰς τὴν θερμοκρασίαν $+30^\circ$ C καὶ εἰσάγονται ἐντὸς τῆς κοιλότητος 3 kgr ὑδραργύρου θερμοκρασίας -30° C. Ἡ τελικὴ θερμοκρασία εἶναι 0° C. Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἡ εἰδικὴ θερμότης τοῦ ὑδραργύρου.

1380. Κυλινδρικὸν δοχεῖον μὲ τοιχώματα μὴ παραμορφούμενα, τοῦ ὁποίου ἡ ἐσωτερικὴ τομὴ εἶναι κύκλος ἐμβαδοῦ 50 cm², περιέχει στρῶμα ὕδατος πάχους 1 mm καὶ ὑπὸ θερμοκρασίαν 0° C καὶ ἐπ' αὐτοῦ ἐπικάθηται ἔμβολον βάρους 20 kgr*. Ἀνυψοῦται ἡ θερμοκρασία εἰς 110° C. Τὸ ὕδωρ μετατρέπεται εἰς ἀτμὸν καὶ τὸ ἔμβολον ἀνυψοῦται. α) Πόση ἡ μεγίστη πίεσις τοῦ κεκορεσμένου ἀτμοῦ εἰς 110° C. β) Εἰς ὡρισμένην στιγμὴν ὁ ἀτμὸς ὑγροποιούμενος ἐξηφανίσθη. Μέχρι ποίου ὕψους ἀνῆλθε τὸ ἔμβολον. γ) Πόσον τὸ ὑπὸ τοῦ ἀτμοῦ παραγόμενον ἔργον εἰς kgr*m καὶ Joule. Δίδονται: Ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις 76 cm Hg. Πυκνότης ὑδραργύρου 13,6 gr/cm³. Μᾶζα ἑνὸς λίτρου ἀέρος ὑπὸ κανονικὰς συνθήκας 1,3 gr. Πυκνότης ὑδρατμοῦ 0,625 gr/cm³. Συντελεστὴς διαστολῆς τοῦ ἀερίου 1/273 grad^{-1}. Θὰ θεωρηθῇ ὁ ὑδρατμὸς ὡς τέλειον ἀέριον καὶ θὰ ὑποτεθῇ ὅτι δὲν γίνεται διαφυγὴ ἀτμοῦ καὶ αἱ τριβαὶ ἀμελητέαι.

1381. Ἔστω κλειστὸς χῶρος περιβαλλόμενος ὑπὸ τοιχώματος συνολικῆς ἐπιφανείας Ε. Ἔστω θ_0 ἡ θερμοκρασία τοῦ ἐξωτερικοῦ ἀτμοσφαιρικοῦ ἀέρος καὶ θ ἡ θερμοκρασία τοῦ ἀέρος ἐντὸς τοῦ κλειστοῦ χώρου. Ἐκ μετρήσεων ἀπεδείχθη ὅτι, ἵνα διατηρηθῇ μονίμως διαφορὰ θερμοκρασίας $\Delta\theta = \theta - \theta_0 =$ σταθερά, μεταξὺ ἐσωτερικοῦ καὶ ἐξωτερικοῦ χώρου διὰ $\theta > \theta_0$, ἀπαιτεῖται συνεχὴς προσαγωγὴ W μεγάλων θερμίδων ὡριαίως ἐντὸς τούτου, συμφώνως πρὸς τὸν τύπον $W = k \cdot E \cdot (\theta - \theta_0)$ cal·h^{-1}, ὅπου k συντελεστὴς ἐξαρτώμενος ἐκ τῆς φύσεως τῶν τοιχωμάτων καὶ τοῦ πάχους αὐτῶν. Κατὰ τὴν λειτουργίαν μιᾶς ἐγκαταστάσεως κεντρικῆς θερμάνσεως μιᾶς μικρᾶς ἐπαύλεως, ὅπου $E = 200$ m², $\theta = 18^\circ$ C $=$ σταθ., $\theta_0 = 4^\circ$ C $=$ σταθ., $K = 1,5$, τὸ ὕδωρ τοῦ λέβητος ἐξήρχετο ἐξ αὐτοῦ ὑπὸ θερμοκρασίαν 80° C, ἐκυκλοφόρει διαδοχικῶς ἐντὸς τῶν διαφόρων θερμαντικῶν σωμάτων τῆς ἐπαύλεως καὶ ἐπανήρχετο εἰς τὸν λέβητα μὲ θερμοκρασίαν 40° C. Ἐκεῖ τὸ ὕδωρ ἐθερμαίνετο πάλιν εἰς 80° C, ὁπότε καὶ ἐπανελαμβάνετο ἐκ νέου ἡ κυκλοφορία αὐτοῦ ἐντὸς τῶν θερμαντικῶν σωμάτων. Ὁ ὄγκος τοῦ κυκλοφοροῦντος ὕδατος ἦτο 35 *lt*. Χάριν τῆς ἁπλοποιήσεως τῶν ὑπολογισμῶν δεχόμεθα ὅτι ἡ διάρκεια ἑνὸς κύκλου τῆς κυκλοφορίας ὕδατος ἦτο 15 min, ἀφ' ἧς στιγμῆς δηλαδὴ τοῦτο ἐξήρχετο ἐκ τοῦ λέβητος μέχρι τῆς στιγμῆς ἐπιστροφῆς. Ζητοῦνται: α) Ὁ γενικὸς συντελεστὴς ἀποδόσεως τῆς ἐγκαταστάσεως θερμάνσεως. β) Ἡ φυσικὴ ἔννοια τοῦ συντελεστοῦ k. γ) Αἱ φυσικαὶ διαστάσεις τοῦ k.

(Ε. Μ. Πολυτεχνεῖον, Σχολὴ Ἀρχιτεκτονική, 1950.)

1382. Τὸ ἔμβολον κυλίνδρου ἀτμομηχανῆς ἔχει διάμετρον 21 cm καὶ διαδρομὴν 30 cm. Ἡ πίεσις τοῦ ἀτμοῦ εἶναι 10 kgr*/cm². Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἔργον κατὰ μίαν διαδρομήν.

1383. Θερμικὴ ἐγκατάστασις ἀποδίδει ἰσχὺν 1 000 HP. Δεδομένου ὅτι ἡ ἀπόδοσίς της εἶναι 22%, νὰ εὑρεθῇ τὸ ποσὸν τοῦ λιγνίτου τὸ ὁποῖον καταναλίσκει ἐντὸς 24 ὡρῶν. (Θερμότης καύσεως λιγνίτου 3 000 kcal/kgr.) (Ἀπ. 22 993 kgr.)

(Πανεπιστήμιον Ἀθηνῶν, Τμῆμα Χημικόν, 1952.)

ΠΙΝΑΞ ΤΩΝ ΚΥΡΙΩΤΕΡΩΝ ΤΥΠΩΝ

ΜΗΧΑΝΙΚΗ

Κίνησις εὐθύγραμμος καὶ ὁμαλή: $s = \upsilon \cdot t$

s = διάστημα, υ = ταχύτης, t = χρόνος.

Εὐθύγραμμος ὁμαλῶς μεταβαλλομένη κίνησις. Ἄνευ ἀρχικῆς ταχύτητος:

$$\upsilon = \gamma \cdot t \qquad s = \frac{1}{2}\gamma \cdot t^2 \qquad \upsilon^2 = 2\gamma \cdot s \qquad \upsilon = \sqrt{2\gamma \cdot s}$$

γ = ἐπιτάχυνσις.

Εὐθύγραμμος ὁμαλῶς μεταβαλλομένη κίνησις. Μετ' ἀρχικῆς ταχύτητος:

$$s = \upsilon_0 \cdot t + \frac{1}{2}\gamma \cdot t^2 \qquad \upsilon = \upsilon_0 + \gamma \cdot t \qquad \upsilon^2 = \upsilon_0^2 + 2\gamma \cdot s \qquad \upsilon = \sqrt{\upsilon_0^2 + 2\gamma \cdot s}$$

υ_0 = ἀρχικὴ ταχύτης, γ = ἐπιτάχυνσις θετικὴ ἢ ἀρνητική.

Κυκλικὴ ἰσοταχὴς κίνησις:

$$\nu = \frac{1}{T} \qquad \upsilon = \omega \cdot r \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} \qquad \omega = 2\pi \cdot \nu$$

$$\gamma = \frac{\upsilon^2}{r} = \omega^2 \cdot r = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot r = 4\pi^2 \cdot \nu^2 \cdot r$$

ω = γωνιακὴ ταχύτης, υ = ταχύτης, r = ἀκτὶς τροχιᾶς, T = περίοδος, ν = συχνότης, γ = κεντρομόλος ἐπιτάχυνσις.

Συνισταμένη δύο δυνάμεων, ἐνεργουσῶν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου ὑπὸ γωνίαν:

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \text{συν}\,\varphi}$$

$$\text{εφ}\,\theta = \frac{F_1 \cdot \text{ημ}\,\theta}{F_2 + F_1 \cdot \text{συν}\,\varphi}$$

F = συνισταμένη, F_1 = πρώτη συνιστῶσα, F_2 = δευτέρα συνιστῶσα, φ = γωνία σχηματιζομένη ὑπὸ τῶν F_1 καὶ F_2, θ = γωνία μεταξὺ συνισταμένης καὶ F_2

Ροπὴ δυνάμεως ὡς πρὸς σημεῖον: $M = F \cdot \alpha$

M = ροπή, F = δύναμις, α = ἀπόστασις σημείου ἀπὸ τῆς εὐθείας ἐπενεργείας τῆς δυνάμεως.

Ροπὴ ζεύγους: $M = F \cdot l$

F = ἡ μία τῶν ἴσων δυνάμεων, l = ἀπόστασις τῶν δύο δυνάμεων.

Θεμελιώδης νόμος τῆς Μηχανικῆς. Δύναμις: $F = m \cdot \gamma$

Κεντρομόλος δύναμις:

$$F = m \cdot \frac{\upsilon^2}{r} \qquad F = m \cdot \omega^2 \cdot r$$

$$F = m \cdot 4 \cdot \pi^2 \cdot \nu^2 \cdot r \qquad F = m\,\frac{4\pi^2}{T^2} \cdot r$$

F = δύναμις, m = μᾶζα σώματος, υ = ταχύτης, ω = γωνιακὴ ταχύτης, r = ἀκτὶς κυκλικῆς τροχιᾶς (ἢ ἀκτὶς καμπυλότητος τροχιᾶς), T = περίοδος, ν = συχνότης.

Παγκόσμιος ἕλξις:

$$F = k \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

F = δύναμις ἕλξεως, m_1, m_2 = αἱ μᾶζαι τῶν ἑλκομένων σωμάτων, r = ἀπόστασις αὐτῶν, k = σταθερὰ τῆς παγκοσμίου ἕλξεως.

Βάρος :

$$B = m \cdot g$$

B = βάρος, g = ἐπιτάχυνσις βαρύτητος.

Πυκνότης – Εἰδικὸν βάρος :

$$\rho = \frac{m}{V} \qquad \varepsilon = \frac{B}{V} \qquad \varepsilon = \rho \cdot g$$

ρ = πυκνότης, V = ὄγκος, ε = εἰδικὸν βάρος.

Κεκλιμένον ἐπίπεδον : $F = B \cdot \eta\mu\,\varphi$

$$\gamma = g \cdot \eta\mu\,\varphi$$

φ = γωνία κλίσεως ὡς πρὸς τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον.

Μηχανὴ Atwood :

$$\gamma = \frac{m \cdot g}{2\,M + m}$$

γ = ἐπιτάχυνσις, M = μᾶζα κυλίνδρου, m = πρόσθετος μᾶζα.

Πτῶσις σωμάτων ἐντὸς τοῦ ἀέρος :

$$T = k \cdot S \cdot \upsilon^2 \qquad T + A - B = 0$$

$$\upsilon_{o\rho} = \sqrt{\frac{m \cdot g}{k \cdot S}}$$

T = ἀντίστασις ἀέρος, k = συντελεστὴς ἀντιστάσεως, S = μετωπικὴ ἐπιφάνεια, υ = ταχύτης, A = ἄνωσις, B = βάρος τοῦ σώματος, $\upsilon_{o\rho}$ = ὁρικὴ ταχύτης.

Βολαί. α) Κατακόρυφος βολὴ πρὸς τὰ ἄνω :

$$t = \frac{\upsilon_0}{g} \qquad h_{\mu\acute{\varepsilon}\gamma.} = \frac{\upsilon_0^2}{2g}$$

$h_{\mu\acute{\varepsilon}\gamma.}$ = μέγιστον ὕψος.

β) Κατακόρυφος βολὴ πρὸς τὰ κάτω :

$$h = \upsilon_0 \cdot t + \frac{1}{2} g \cdot t^2 \qquad \upsilon = \upsilon_0 + g \cdot t$$

γ) Ὁριζοντία βολή :

$$s_x = \upsilon_0 \cdot t \qquad y = \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

δ) Βολὴ ὑπὸ γωνίαν :

$$h = \frac{\upsilon_0^2 \cdot \eta\mu^2\,\alpha}{2\,g} \qquad T = \frac{2\,\upsilon_0 \cdot \eta\mu\,\alpha}{g}$$

$$R = \frac{2\,\upsilon_0^2 \cdot \eta\mu\,\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\,\alpha}{g} = \frac{\upsilon_0^2 \cdot \eta\mu\,2\,\alpha}{g}$$

s_x = τὸ διανυόμενον διάστημα κατὰ ὁριζόντιον ἄξονα τῶν x, s_y = τὸ διανυόμενον διάστημα κατὰ τὸν ἄξονα τῶν y. Εἰς τὴν (δ) τὸ .. μέγιστον ὕψος, T = χρόνος ἀνόδου καὶ καθόδου, R = βεληνεκές, α = γωνία βολῆς.

Ἔργον : $A = F \cdot s \cdot \sigma\upsilon\nu\,\varphi$

διὰ $\varphi = 0$: $A = F \cdot s$

A = ἔργον, s = μετατόπισις, φ = γωνία σχηματιζομένη ὑπὸ τῆς δυνάμεως καὶ τῆς τροχιᾶς.

Ἰσχύς : $N = \dfrac{A}{t}$

Ἐνέργεια : $E_{\delta\upsilon\nu} = B \cdot h$

$$E_{\kappa\iota\nu.} = \frac{1}{2} m \cdot \upsilon^2 = F \cdot s$$

Γενική ἐξίσωσις ἔργου ἐπιταχύνσεως:

$$A = F \cdot s = \frac{1}{2} m \cdot \upsilon^2 - \frac{1}{2} m \cdot \upsilon_0^2$$

υ_0 = ἀρχική ταχύτης, υ = τελική ταχύτης

Ροπή ἀδρανείας ὑλικοῦ σημείου:

$$\Theta = m \cdot r^2$$

Θ = ροπή ἀδρανείας, m = μᾶζα ὑλικοῦ σημείου, r = ἀπόστασις ὑλικοῦ σημείου ἀπὸ τοῦ ἄξονος

Κινητική ἐνέργεια σώματος περιστρεφομένου περὶ σταθερὸν ἄξονα:

$$E_{\kappa\iota\nu.} = \frac{1}{2} \Theta \cdot \omega^2$$

Θ = ροπή ἀδρανείας τοῦ σώματος, ὅπου $\Theta = m_1 \cdot r_1{}^2 + m_2 \cdot r_2{}^2 + m_3 \cdot r_3{}^2 + \cdots$, ω = γωνιακή ταχύτης.

Ὁρμή: $$J = m \cdot \upsilon$$

Ὤθησις δυνάμεως: $$\Omega = F \cdot t$$

Γενική ἐξίσωσις μεταβολῆς ὁρμῆς — ὠθήσεως:

$$F \cdot t = m \cdot \upsilon \qquad F = \frac{m \cdot \upsilon}{t}$$

$$F \cdot t = m \cdot \upsilon - m \cdot \upsilon_0 \qquad F = \frac{m \cdot \upsilon - m \cdot \upsilon_0}{t}$$

υ_0 = ἀρχική ταχύτης, υ = τελική ταχύτης.

Χρυσοῦς κανὼν τῆς Μηχανικῆς: $F_1 \cdot l_1 = F_2 \cdot l_2$

Μεταθετή τροχαλία (νήματα παράλληλα): $F = \frac{B}{2}$

F = ἐφαρμοζομένη δύναμις.

Πολύσπαστον: $$F = \frac{B}{n}$$

n = ἀριθμὸς σχοινίων ἐπὶ τῶν ὁποίων διαμοιράζεται ἡ ἐπενέργεια τοῦ βάρους B.

Διαφορική τροχαλία:

$$F = \frac{R - r}{2R} \cdot B$$

ἢ

$$F = \frac{Z - z}{2Z} \cdot B$$

R = ἀκτὶς μεγάλης ἀμεταθέτου τροχαλίας, r = ἀκτὶς μικρᾶς, Z = ἀριθμὸς ὀδόντων μεγάλου τροχοῦ, z = ἀριθμὸς ὀδόντων μικροῦ τροχοῦ.

Βαροῦλκον: $$F = \frac{r}{R} \cdot B$$

r = ἀκτὶς βαρούλκου, R = βραχίων δυνάμεως.

Διπλοῦς σφήν: $$F = 2F' \cdot \eta\mu \frac{\varphi}{2}$$

φ = γωνία σφηνός.

Κοχλίας: $$F = \frac{\beta}{2\pi \cdot l} \cdot B$$

l = βραχίων δυνάμεως, β = βῆμα κοχλίου.

Συντελεστὴς ἀποδόσεως: $\eta = \dfrac{N_{\text{ὠφέλ.}}}{N_{\text{διατ.}}}$

Ζυγός. α) Μέθοδος διπλῆς ζυγίσεως:

$$B = \sqrt{\beta_1 \cdot \beta_2}$$

B = βάρος τοῦ σώματος, β_1 = βάρος σταθμῶν τιθεμένων ἐπὶ τοῦ δεξιοῦ δίσκου, β_2 = βάρος σταθμῶν τιθεμένων ἐπὶ τοῦ ἀριστεροῦ δίσκου κατὰ τὴν δευτέραν ζύγισιν.

β) Ἐξίσωσις εὐαισθησίας ζυγοῦ:

$$\text{εφ}\,\varphi = \frac{F_2 - F_1}{B \cdot s} \cdot l$$

l = μῆκος μοχλοβραχιόνων ζυγοῦ, $F_2 - F_1$ = διαφορὰ φορτίων εἰς δίσκους, B = βάρος φάλαγγος ζυγοῦ, s = ἀπόστασις κέντρου βάρους ζυγοῦ ἀπὸ σημείου ἐξαρτήσεως φάλαγγος, φ = γωνία ἐκτροπῆς δείκτου ζυγοῦ.

Ἐξίσωσις ἁρμονικῆς ταλαντώσεως:

$$x = \alpha \cdot \text{ημ}\,\varphi \qquad \varphi = \omega \cdot t$$

$$x = \alpha \cdot \text{ημ}\,\omega t \qquad x = \alpha \cdot \text{ημ}\,\frac{2\pi}{T} \cdot t$$

$$x = \alpha \cdot \text{ημ}\,2\pi \cdot \nu \cdot t$$

x = ἀπόκλισις, ω = γωνιακὴ ταχύτης, φ = ω t = φάσις, α = πλάτος.

Ταχύτης εἰς τὴν ἁρμονικὴν κίνησιν:

$$\upsilon_\alpha = \upsilon_0 \cdot \text{συν}\,\omega t \qquad \upsilon_0 = \omega \cdot \alpha$$

$$\upsilon_\alpha = \omega \cdot \alpha \cdot \text{συν}\,\omega t$$

υ_0 = σταθ. ταχύτης, υ_α = συνιστῶσα τῆς υ_0

Ἐπιτάχυνσις τῆς ἁρμονικῆς κινήσεως:

$$\gamma_\alpha = \gamma_0 \cdot \text{ημ}\,\omega t \qquad \gamma_0 = \frac{\upsilon_0^2}{\alpha} = \omega^2 \cdot \alpha$$

$$\gamma_\alpha = \frac{\upsilon_0^2}{\alpha} \cdot \text{ημ}\,\omega t = \omega^2 \cdot \alpha \cdot \text{ημ}\,\omega t$$

$$\gamma_\alpha = k \cdot x \qquad \text{ὅπου} \qquad k = \frac{\upsilon_0^2}{\alpha^2} = \omega^2$$

γ_0 = κεντρομόλος ἐπιτάχυνσις, γ_α = συνιστῶσα τῆς γ_0.

Περίοδος τῆς ἁρμονικῆς κινήσεως:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{k}} \qquad (k = \upsilon_0^2 / \alpha^2)$$

Δύναμις προκαλοῦσα τὴν ἁρμονικὴν κίνησιν:

$$F = m \cdot k \cdot x$$

Περίοδος ἐλατηρίου:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}} \qquad \text{ἢ} \qquad T = 2\pi \sqrt{\frac{m \cdot x}{F}}$$

$c = m \cdot k = F/x$ = σταθερὰ τοῦ ἐλατηρίου.

Περίοδος ταλαντώσεων στρέψεως :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\Theta}{D}}$$

Θ = ροπὴ ἀδρανείας δίσκου, D = ἀπαιτουμένη ροπὴ διὰ περιστροφὴν τοῦ δίσκου κατὰ γωνίαν $\varphi = 1$.

Ἐκκρεμές. α) Ἁπλοῦν :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

T = περίοδος, l = μῆκος ἐκκρεμοῦς, g = ἐπιτάχυνσις βαρύτητος.

β) Σύνθετον :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\Theta}{m \cdot g \cdot \alpha}}$$

m = μᾶζα τοῦ ἐκκρεμοῦς, α = ἀπόστασις κέντρου βάρους τοῦ ἐκκρεμοῦς ἀπὸ τοῦ ἄξονος περιστροφῆς.

Τριβὴ ὀλισθήσεως :

$$T = \eta \cdot F_\kappa$$

η = συντελεστὴς τριβῆς ὀλισθήσεως, F_κ = κάθετος δύναμις.

Τριβὴ κυλίσεως :

$$F = l \cdot \frac{B}{r \cdot \text{συν}\,\alpha}$$

B = βάρος σώματος, F = κινητήριος δύναμις, r = ἀκτὶς κυλιομένου σώματος, l = συντελεστὴς τριβῆς κυλίσεως (ἐνίοτε συν $\alpha = 1$).

Συντελεστὴς ἕλξεως :

$$\varphi = \frac{F}{F_\kappa}$$

Ἐπιμήκυνσις σύρματος (νόμος τοῦ Hooke) :

$$\Delta l = \frac{1}{E} \cdot \frac{F}{S} \cdot l$$

E = μέτρον ἐλαστικότητος (ἢ μέτρον τοῦ Young), F = τείνουσα δύναμις, l = μῆκος ἀρχικὸν σύρματος, S = ἐμβαδὸν τομῆς τοῦ σύρματος.

Πίεσις :

$$p = \frac{F}{S}$$

F = δύναμις ἐξασκουμένη ἐπὶ ἐπιφανείας S.

Ἔκφρασις πιέσεως διὰ τοῦ ὕψους ὑγρᾶς στήλης. Ὑδροστατικὴ πίεσις :

$$p = \varepsilon \cdot h$$

$$p = \rho \cdot g \cdot h$$

h = ὕψος ὑγρᾶς στήλης, ε = εἰδ. βάρος ὑγροῦ, ρ = πυκνότης ὑγροῦ.

Ὑδραυλικὸν πιεστήριον :

$$F_2 = F_1 \cdot \frac{S_2}{S_1}$$

F_2 = δύναμις ἐξασκουμένη ἐπὶ τοῦ μεγάλου ἐμβολέως. F_1 = δύναμις ἐξασκουμένη ἐπὶ τοῦ μικροῦ ἐμβολέως, S_2 = ἐπιφάνεια μεγάλου ἐμβόλου, S_1 = ἐπιφάνεια μικροῦ ἐμβόλου.

Ἄνωσις :

$$A = \varepsilon \cdot V$$

ε = εἰδικὸν βάρος ρευστοῦ, V = ὄγκος ἐκτοπιζομένου ρευστοῦ.

Ἀναγωγὴ ζυγίσεως εἰς τὸ κενόν:

$$m = M\left[1 + \alpha\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho'}\right)\right]$$

$\alpha = 0{,}013\ gr/cm^3$ πυκνότης ἀέρος, $m =$ ἀληθὴς μᾶζα σώματος, $M =$ φαινομένη μᾶζα σώματος, $\rho =$ πυκνότης σώματος, $\rho' =$ πυκνότης σταθμῶν.

Νόμος Boyle-Mariotte: $p \cdot V =$ σταθ. ἢ $\frac{p_2}{p_1} = \frac{V_1}{V_2}$

Νόμος Dalton:

$$PV = p_1 \cdot \upsilon_1 + p_2 \cdot \upsilon_2 + \dots$$

$\upsilon_1, \upsilon_2, \dots =$ ὄγκοι δοθέντων ἀερίων, $p_1, p_2, \dots =$ πιέσεις δοθέντων ἀερίων, $V =$ ὄγκος μίγματος, $P =$ πίεσις μίγματος.

Ἀνυψωτικὴ δύναμις ἀεροστάτου:

$$F = (\varepsilon_{\text{ἀὴρ}} - \varepsilon_{\text{ἀέριον}}) \cdot V - B_{\text{περιβλ.}}$$

$F =$ ἀνυψωτικὴ δύναμις, $\varepsilon_{\text{ἀὴρ}} =$ εἰδ. βάρος ἀτμοσφαιρικοῦ ἀέρος, $\varepsilon_{\text{ἀέριον}} =$ εἰδ. βάρος ἀερίου, $V =$ ὄγκος ἀεροστάτου, $B_{\text{περιβλ.}} =$ βάρος περιβλήματος.

Παροχή:

$$\Pi = \frac{V}{t} \qquad \Pi = S \cdot \upsilon$$

$\Pi =$ παροχή, $V =$ ὄγκος ρευστοῦ διερχομένου διά τινος τομῆς ἐντὸς χρόνου t, $\upsilon =$ ταχύτης ροῆς, $S =$ διατομὴ σωλῆνος.

Νόμος συνεχείας:

$$\frac{\upsilon_1}{\upsilon_2} = \frac{S_2}{S_1}$$

Νόμος Bernoulli:

$$p + \frac{1}{2}\rho \cdot \upsilon^2 + h \cdot \rho \cdot g = \text{σταθ.}$$

$p =$ στατικὴ πίεσις, $\rho =$ πυκνότης ρευστοῦ, $\upsilon =$ ταχύτης ρευστοῦ, $h =$ ὑψόμετρον, $g =$ ἐπιτάχυνσις βαρύτητος.

Θεώρημα Torricelli:

$$\upsilon = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$$

$\upsilon =$ ταχύτης ἐκροῆς, $h =$ ἀπόστασις ὀπῆς ἀπὸ τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ.

Δύναμις ἀσκουμένη ὑπὸ ὑγρᾶς φλεβὸς ἐν κινήσει:

$$F = S \cdot \rho \cdot \upsilon^2$$

Ἀντίστασις σωμάτων κινουμένων ἐντὸς τοῦ ἀέρος:

$$T = C_{\text{ἀντ.}}\, S \cdot \frac{\rho}{2} \cdot \upsilon^2$$

$C_{\text{ἀντ.}} =$ συντελεστὴς ἀντιστάσεως, $S =$ μετωπικὴ ἐπιφάνεια, $\rho =$ πυκνότης τοῦ ἀέρος, $\upsilon =$ ταχύτης τοῦ σώματος ὡς πρὸς τὸν ἀέρα.

Συντελεστὴς ἐπιφανειακῆς τάσεως:

$$\alpha = \frac{F}{2l}$$

$F =$ δύναμις ἐπὶ τῆς πευρᾶς μήκους l, $\alpha =$ συντελεστὴς ἐπιφανειακῆς τάσεως.

ΑΚΟΥΣΤΙΚΗ

Μῆκος κύματος: $\lambda = \upsilon \cdot T \qquad \lambda \cdot \nu = \upsilon$

λ = μῆκος κύματος, T = περίοδος, υ = ταχύτης διαδόσεως τοῦ ἤχου, ν = συχνότης.

Μεταβολὴ τῆς ταχύτητος διαδόσεως τοῦ ἤχου μετὰ τῆς θερμοκρασίας:

$$\upsilon_\theta = \upsilon_0 \sqrt{1 + \alpha \cdot \theta}$$

$\upsilon_0 = 332$ m/sec ταχύτης διαδόσεως ἤχου εἰς 0^0 C, υ_θ = ταχύτης διαδόσεως ἤχου εἰς θ^0 C, $\alpha = 1/273\ \mathrm{grad}^{-1}$.

Ταχύτης διαδόσεως ἤχου ἐντὸς ἐλαστικοῦ μέσου:

$$\upsilon = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

E = μέτρον ἐλαστικότητος (μέτρον Young), ρ = πυκνότης τοῦ μέσου.

Τύποι χορδῶν:

$$\upsilon = \sqrt{\frac{F}{\delta}}, \quad \nu_n = \frac{n}{2r \cdot l}\sqrt{\frac{F}{\pi \cdot \rho}}, \quad \nu_n = \frac{n}{2l}\sqrt{\frac{F}{\delta}}$$

υ = ταχύτης διαδόσεως κύματος κατὰ μῆκος χορδῆς, F = τείνουσα τὴν χορδὴν δύναμις, δ = γραμμικὴ πυκνότης τῆς χορδῆς, ν_n = συχνότης ἁρμονικοῦ $n^{\text{στῆς}}$ τάξεως, l = μῆκος χορδῆς, r = ἀκτὶς τῆς χορδῆς.

Τύποι ἠχητικῶν σωλήνων:

Κλειστός: $\nu_{n'} = \dfrac{(2n-1)\upsilon}{4l}$ 'Ανοικτός: $\nu_n = \dfrac{n\,\upsilon}{2l}$

l = μῆκος σωλῆνος, $\nu_{n'}$ = συχνότης τοῦ ἁρμονικοῦ $n' = (2n-1)$, υ = ταχύτης διαδόσεως τοῦ ἤχου εἰς τὸν ἀέρα.

'Αρχὴ Doppler. α) Πηγὴ κινουμένη, παρατηρητὴς ἀκίνητος:

$$\nu' = \nu \cdot \frac{V}{V \pm \upsilon}$$

ν' = φαινομένη συχνότης, ν = συχνότης πηγῆς, υ = ταχύτης πηγῆς, V = ταχύτης διαδόσεως τοῦ ἤχου.

β) Παρατηρητὴς κινούμενος, πηγὴ ἀκίνητος:

$$\nu' = \nu \cdot \frac{V \pm \upsilon}{V}$$

ΘΕΡΜΟΤΗΣ

'Αντιστοιχία ἐνδείξεων θερμομέτρων:

$$C = \frac{5}{9}(F - 32) \qquad F = \frac{9}{5}C + 32$$

C = βαθμοὶ Κελσίου, F = βαθμοὶ Fahrenheit.

Θερμικὴ διαστολή. Στερεά:

$$l = l_0\ (1 + \alpha \cdot \theta) \quad \text{ἢ} \quad l_2 = l_1\,[1 + \alpha(\theta_2 - \theta_1)]$$
$$S = S_0\ (1 + 2\alpha \cdot \theta) \quad \text{ἢ} \quad S_2 = S_1\,[1 + 2\alpha(\theta_2 - \theta_1)]$$
$$V = V_0\ (1 + 3\alpha \cdot \theta) \quad \text{ἢ} \quad V_2 = V_1\,[1 + 3\alpha(\theta_2 - \theta_1)]$$

l = μῆκος, S = ἐπιφάνεια, V = ὄγκος, α = συντελεστὴς γραμμικῆς διαστολῆς, θ = θερμοκρασία.

Ὑγρά:

$$\gamma_\pi = \gamma_\varphi + \gamma_\kappa$$

γ_π = πραγματικὸς συντελεστὴς διαστολῆς ὑγροῦ, γ_φ = φαινομενικὸς συντελεστὴς διαστολῆς ὑγροῦ, γ_κ = συντελεστὴς κυβικῆς διαστολῆς δοχείου.

Μεταβολὴ τῆς πυκνότητος στερεῶν καὶ ὑγρῶν μετὰ τῆς θερμοκρασίας:

$$\rho_\theta = \frac{\rho_0}{1+\gamma\cdot\theta} \qquad \gamma = 3\alpha$$

$$\rho_2 = \frac{\rho_1}{[1 + 3\alpha(\theta_2 - \theta_1)]}$$

Ἀέρια:

$$V_\theta = V_0(1+\alpha\cdot\theta) \quad \text{ἢ} \quad V_\theta = \frac{V_0}{273}\cdot T$$

$$p_\theta = p_0(1+\alpha\cdot\theta) \quad \text{ἢ} \quad p_\theta = \frac{p_0}{273}\cdot T$$

V_θ = ὄγκος εἰς θερμοκρασίαν θ^0 C, V_0 = ὄγκος εἰς 0^0 C, $\alpha = 1/273\ \mathrm{grad}^{-1}$, p_θ = πίεσις εἰς θ^0 C, p_0 = πίεσις εἰς 0^0 C, T = ἀπόλυτος θερμοκρασία.

Ἐξίσωσις τελείων ἀερίων:

$$p_0\cdot V_0 = \frac{p\cdot V}{1+\alpha\cdot\theta} = \text{σταθ.}$$

Κανονικαὶ συνθῆκαι ἀερίου μάζης:

$$V_0 = \frac{V}{1+\alpha\cdot\theta}\cdot\frac{h}{760}$$

V_0 = ὄγκος ἀερίου ὑπὸ κανονικὰς συνθήκας (0^0 C, 760 mm Hg), V = ὄγκος ἀερίου εἰς θερμοκρασίαν θ καὶ πίεσιν p, ἀντιστοιχοῦσαν εἰς h mm Hg.

Μεταβολὴ τῆς πυκνότητος τῶν ἀερίων μετὰ τῆς θερμοκρασίας:

$$\rho_\theta = \rho_0\frac{p_\theta}{p_0(1+\alpha\cdot\theta)}$$

p_0 = 76 cm Hg.

Σχετικὴ πυκνότης ἀερίου ὡς πρὸς τὸν ἀέρα:

$$\rho_{\sigma\chi.} = \frac{\rho_0}{0{,}001\,293}$$

ρ_0 = πυκνότης ἀερίου ὑπὸ κανονικὰς συνθήκας.

Εἰδικὴ μορφὴ ἐξισώσεως τελείων ἀερίων διὰ μᾶζαν 1 γραμμομορίου (1 Mol):

$$p\cdot V_{Mol} = R\cdot T$$

p = πίεσις εἰς $\mathrm{dyn/cm^2}$, V_{Mol} = μοριακὸς ὄγκος εἰς $\mathrm{cm^3}$ (ὄγκος 1 γραμμομορίου) ὑπὸ πίεσιν p καὶ ἀπόλυτον θερμοκρασίαν T, $R = 8{,}31\cdot10^7$ erg/grad · Mol = παγκόσμιος σταθερὰ τῶν ἀερίων.

Τύπος Clapeyron:

$$p\cdot V = n\cdot R\cdot T$$

V = ὄγκος ἀερίου ὑπὸ πίεσιν p καὶ θερμοκρασίαν T, n = μᾶζα ἀερίου εἰς Mol.

Σχέσις μοριακοῦ βάρους M ἀερίου καὶ σχετικῆς πυκνότητος ὡς πρὸς τὸν ἀέρα ρ_α.

$$M = 28{,}95\,\rho_\alpha.$$

Πίεσις ἐξασκουμένη ὑπὸ ἀερίου ἐπὶ τῶν τοιχωμάτων δοχείου:

$$p = \frac{1}{3}\cdot\rho\cdot\upsilon^2$$

υ = μέση ταχύτης τῶν μορίων, ρ = πυκνότης ἀερίου.

Ἐξίσωσις **Van der Waals** :

$$\left(p + \frac{\alpha}{V^2}\right)(V - \beta) = R \cdot T$$

α, β = σταθεραὶ ἐξαρτώμεναι ἐκ τῆς φύσεως τοῦ ἀερίου.

Θερμιδομετρικὸς τύπος :

$$Q = m \cdot c\ (\theta_2 - \theta_1)$$

Q = ποσὸν θερμότητος εἰς cal διὰ τὴν ἀνύψωσιν τῆς θερμοκρασίας μάζης m γραμμαρίων σώματός τινος, εἰδικῆς θερμότητος c, ἀπὸ τῆς θερμοκρασίας θ_1 εἰς θ_2.

Τύπος ὑπολογισμοῦ θερμότητος διαδόσεως δι' ἀγωγῆς :

$$Q = k \cdot \frac{\theta_1 - \theta_2}{l} \cdot S \cdot t$$

Q = ποσὸν θερμότητος εἰς cal, διερχόμενον διὰ τῆς ἐγκαρσίας τομῆς S cm^2 ὁμοιομόρφου ράβδου μήκους l cm εἰς χρόνον t sec, ὅταν μεταξὺ τῶν ἄκρων τῆς ράβδου ὑφίσταται διαφορὰ θερμοκρασίας $\theta_1 - \theta_2$, καὶ k ὁ συντελεστὴς θερμικῆς ἀγωγιμότητος τῆς ράβδου, ἐξαρτώμενος ἐκ τοῦ ὑλικοῦ αὐτοῦ· ἐκφράζεται εἰς cal/grad · cm · sec.

Μηχανικὸν ἰσοδύναμον θερμότητος :

$$A = J \cdot Q$$

A = ἔργον εἰς kgr*m ἰσοδυναμοῦν πρὸς Q kcal, J = μηχανικὸν ἰσοδύναμον τῆς θερμότητος = 427 kgr*m/kcal. Ἐὰν A εἰς Joule, Q εἰς cal, τότε J = 4,2 Joule/cal.

Ἀπόδοσις θερμικῶν μηχανῶν :

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

Q_1 = ποσὸν θερμότητος τὸ ὁποῖον παρέχει ἡ θερμικὴ δεξαμενὴ ἀνωτέρας θερμοκρασίας T_1 (ἀπόλυτος θερμοκρασία), Q_2 = ποσὸν θερμότητος, τὸ ὁποῖον ἀποδίδεται εἰς τὴν θερμικὴν δεξαμενὴν κατωτέρας θερμοκρασίας T_2, $Q_1 - Q_2$ ποσὸν θερμότητος μετατρεπόμενον εἰς ἔργον.

Ἰσχὺς ἀτμομηχανῶν :

$$N = (P - p) \cdot S \cdot l \cdot n$$

P = πίεσις ἀτμοῦ, p = ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις, S = ἐπιφάνεια ἐμβολέως, l = διαδρομὴ ἐμβολέως, n = ἀριθμὸς διαδρομῶν εἰς 1 sec.

Βιομηχανικὸς συντελεστὴς ἀποδόσεως :

$$\eta_{\beta\iota o\mu.} = \frac{A_{\omega\varphi\acute{\epsilon}\lambda.}}{Q}$$

$A_{\omega\varphi\acute{\epsilon}\lambda.}$ = ὠφέλιμον ἔργον, Q = προσφερομένη θερμότης.

Τύποι Einstein. α) Μᾶζα :

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}$$

m = μᾶζα κινουμένου σώματος, m_0 = μᾶζα τοῦ σώματος ἐν ἠρεμίᾳ, c = ταχύτης διαδόσεως τοῦ φωτὸς ($c = 3 \cdot 10^{10}$ cm/sec), υ = ταχύτης τοῦ σώματος.

β) Ἰσοδυναμία μάζης καὶ ἐνεργείας :

$$E = m \cdot c^2$$

E = ἐνέργεια ἀντιστοιχοῦσα εἰς μᾶζαν m, c = ταχύτης διαδόσεως τοῦ φωτός.

Διαστάσεις καὶ μονάδες μεγεθῶν Μηχανικῆς

Εἶδος μεγέθους	Ἐξίσωσις ὁρισμοῦ	Διαστάσεις εἰς σύστημα C.G.S.	Μονὰς C.G.S.	Διαστάσεις εἰς τὸ Τ. Σ.	Μονὰς Τ.Σ.	Σχέσις μονάδων C.G.S. καὶ Τ.Σ.
Χρόνος	—	T	sec	T	sec	—
Μῆκος.	—	L	cm	L	m	1 m $= 10^2$ cm
Ἐπιφάνεια . . .	$S = \alpha \cdot \beta$	L^2	cm^2	L^2	m^2	1 $m^2 = 10^4$ cm^2
Ὄγκος	$V = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma$	L^3	cm^3	L^3	m^3	1 $m^3 = 10^6$ cm^3
Γωνία	τόξον/ἀκτῖνος	—	radian	—	radian	1 rad = 57,296°
Ταχύτης	$\upsilon = \frac{s}{t}$	TL^{-1}	$cm \cdot sec^{-1}$	LT^{-1}	$m \cdot sec^{-1}$	1 m/sec = 100 cm/sec
Γωνιακὴ ταχύτης	$\omega = \frac{\varphi}{t}$	T^{-1}	$rad \cdot sec^{-1}$	T^{-1}	$rad \cdot sec^{-1}$	—
Ἐπιτάχυνσις . .	$\gamma = \frac{\Delta\upsilon}{\Delta t}$	LT^{-2}	$cm \cdot sec^{-2}$	LT^{-2}	$m \cdot sec^{-2}$	1 m/sec^2 = 100 cm/sec^2
Μᾶζα	—	M	gr	—	—	—
»	$m = \frac{F}{\gamma}$	—	—	$FL^{-1}T^2$	$kgr^* m \cdot sec^2$ ἢ T.M.	1 T.M = 9810 gr ἢ 9,81 kgr
Δύναμις.	—	—	—	F	kgr*	—
»	$F = m \cdot \gamma$	MLT^{-2}	$gr \cdot cm \cdot sec^{-2}$ ἢ δύνη	—	—	1 kgr* = 981 000 dyn
Ἔργον. Ἐνέργεια	$A = F \cdot l$	ML^2T^{-2}	$gr \cdot cm^2 \cdot sec^{-2}$ ἢ ἔργιον	FL	kgr*m	1 kgr*m $= 9{,}81 \cdot 10^7$ erg
Ἰσχὺς	$N = \frac{A}{t}$	ML^2T^{-3}	$gr \cdot cm^2 \cdot sec^{-3}$	FLT^{-1}	$kgr^* m \cdot sec^{-1}$	1 kgr*m/sec $= 9{,}81 \cdot 10^7$ erg/sec
Ροπὴ	$M = F \cdot l$	ML^2T^{-2}	$gr \cdot cm^2 \cdot sec^{-2}$	FL	kgr*m	
Ὁρμὴ	$J = m \cdot \upsilon$	MLT^{-1}	$gr \cdot cm \cdot sec^{-1}$	FT	kgr* · sec	
Ὦσις δυνάμεως .	$F \cdot t$	MLT^{-1}	$gr \cdot cm \cdot sec^{-1}$	FT	kgr* · sec	
Πίεσις	$p = \frac{F}{S}$	$ML^{-1}T^{-2}$	$gr \cdot cm^{-1} \cdot sec^{-2}$ ἢ dyn/cm^2 ἢ μB	FL^{-2}	$kgr^* \cdot m^{-2}$	1 kgr^*/m^2 = 981 000 dyn/m^2 ἢ 1 kgr^*/cm^2 = 981 000 μB

Μονάδες Ἀγγλοσαξωνικῶν χωρῶν

Μῆκος		Ἐμβαδὸν	
1 ἴντζα (in)	= 2,54 cm	1 τετρ. ἴντζα (1 in^2)	= 6,452 cm^2
1 ποὺς (ft = foot) = 12 in	= 30,5 cm	1 τετρ. ποὺς (1 ft^2)	= 0,093 m^2
1 ὑάρδα (yd) = 3 ft	= 0,914 m	1 τετρ. μίλιον (1 $mile^2$)	= 2,59 km^2
1 ἀγγλικὸν μίλιον (mile)	= 1,609 km		
Ὄγκος		**Μᾶζα**	
1 κυβικὴ ἴντζα (1 in^3)	= 16,387 cm^3	1 οὐγγία (1 oz. Av)	= 28,35 gr
1 κυβικὸς ποὺς (1 ft^3)	= 0,0283 m^3	1 λίμπρα (1 lb = pound)	= 453,6 gr
1 κυβικὴ ὑάρδα (1 yd^3)	= 0,765 m^3	1 κόκκος (1 grain)	= 64,8 mgr
1 γαλόνιον U.S. (1 gal)	= 3,785 *lt*	1 τόννος (1 ton = 2 000 lb)	= 907,18 kgr

Πυκνότης διαφόρων οὐσιῶν, εἰς gr/cm^3

Στερεὰ					
Ἀδάμας	3,52	Ὀστᾶ	1,7	Γκαζολίνη	0,79
Ἄνθραξ	1,8	Πάγος	0,917	Γλυκερίνη	1,26
Ἀργίλιον	2,65	Πλίνθος	2,10	Ἐλαιόλαδον	0,91
Ἄργυρος	10,5	Πυριτύαλος	3,70	Ἥλιον	0,15
Βάμβαξ	1,5	Σάκχαρον	1,59	Λινέλαιον	0,93
Ἤλεκτρον	1,1	Σίδηρος (σφυρ.)	7,8	Ὀξυγόνον	1,13
Κασσίτερος	7,29	Σίδηρος (χυτὸς)	7,2	Πετρέλαιον	0,8
Καουτσοὺκ	0,94	Στεφανύαλος	2,50	Τερεβινθέλαιον	0,87
Κηρὸς	0,96	Τσιμέντο	1,5	Ὑδράργυρος	13,6
Κολοφώνιον	1,07	Ὕαλος	2,5	Ὑδρογόνον	0,06
Κὼκ	1,4	Φελλὸς	0,24	Χλώριον	1,51
Λευκόχρυσος	21,4	Χαλκὸς	8,93		
Λιγνίτης	1,4	Χάλυψ	7,7	**Ἀέρια**	
Μαρμαρυγίας	2,9	Χάρτης	1,2	Ἄζωτον	0,001 25
Μάρμαρον	2,7	Χρυσὸς	19,32	Ἀὴρ	0,001 29
Μόλυβδος	11,37	Ψευδάργυρος	7,15	Ἀμμωνία	0,000 77
Νικέλιον	8,90	**Ὑγρὰ**		Ἄνθρακος διοξ.	0,001 97
Ξύλον (δρυὸς)	0,80	Ἄζωτον	0,79	Ἄνθρακος μον.	0,001 25
Ξύλον (πεύκης)	0,50	Αἰθὴρ 0° C	0,735	Ἥλιον	0,000 17
Ὀρυκτὸν ἅλας	2,35	Ἀλκοόλη 20° C	0,789	Ὀξυγόνον	0,001 43
Ὀρείχαλκος	8,60	Βαμβακέλαιον	0,96	Ὑδρογόνον	0,000 09
				Χλώριον	0,003 22

Θερμικαὶ σταθεραὶ στερεῶν σωμάτων

Οὐσία	Συντελεστὴς γραμμικῆς διαστολῆς εἰς 18° C	Εἰδικὴ θερμότης $\frac{cal}{gr \cdot grad}$	Ἀτομικὴ θερμότης $\frac{cal}{grad \cdot Mol}$	Σημεῖον τήξεως °C	Θερμότης τήξεως $\frac{cal}{gr}$	Συντελεστὴς θερμικῆς ἀγωγιμότητος $\frac{cal}{grad \cdot cm \cdot sec}$
Ἄνθραξ (Γραφίτ.)	—	0,26	3,1	3900	—	0,01
Ἄργυρος	0,0000185	0,055	5,9	960,5	26	1,006
Ἀργίλιον	218	0,214	5,8	658	77	0,48
Βισμούθιον . . .	134	0,029	5,9	271	13	0,019
Βολφράμιον . . .	035	—	—	3400	—	—
Ἐβονίτης	800	—	—	—	—	0,0004
Θεῖον	600	0,16—0,24	5,1—7,4	119	10	0,0007
Κάδμιον	286	0,055	—	320,9	14	0,22
Κασσίτερος . . .	213	0,052	6,4	231,8	14	0,15
Λευκόχρυσος .	088	0,032	6,2	1770	27	0,17
Μαγνήσιον . . .	250	0,250	6,0	651	—	0,38
Μόλυβδος . . .	288	0,031	6,4	327,4	5,5	0,08
Νικέλιον	127	0,106	5,9	1460	65	0,14
Ὀρείχαλκος . . .	185	0,093	—	900	40	0,15—0,30
Σίδηρος	120	0,105	5,6	1100—1600	30	0,14—0,17
Ταντάλιον . . .	079	0,036	—	2900	—	—
Ὕαλος	080	0,190	—	800—1400	—	0,0025
Χαλκὸς	159	0,091	5,7	1083	42	0,90
Χάλυψ	100	0,114	—	1300—1400	49	0,06—0,12
Χρυσὸς	141	0,031	6,7	1063	15,9	0,70
Ψευδάργυρος . .	286	0,091	6,9	419,4	28	0,27

Θερμικαὶ σταθεραὶ ὑγρῶν

Οὐσία	Συντελεστὴς πραγματικῆς διαστολῆς $\frac{1}{grad}$	Εἰδικὴ θερμότης εἰς 18 °C $\frac{cal}{gr \cdot grad}$	Σημεῖον τήξεως °C	Σημεῖον ζέσεως °C	Θερμότης ἐξαερώσεως $\frac{cal}{gr}$
Ἄζωτον	—	—	—210,5	— 195,8	48
Αἰθὴρ ($C_4H_{10}O$) . .	0,00163	0,56	—123,6	34,6	90
Ἀλκοόλη (C_2H_6O) . .	0,00110	0,58	—114	78,3	202
Βενζόλη (C_6H_6) . . .	0,00124	0,41	+ 5,5	80,2	94
Γλυκερίνη ($C_3H_8O_3$) .	0,00050	0,58	— 20	290	—
Διθειάνθραξ (CS_2) . .	0,00121	0,24	—112	46,2	85
Διοξείδιον ἄνθρακος .	—	—	— 57	— 78,5	142
Ἥλιον	—	—	—	— 268,8	—
Νέον	—	—	—	— 245,9	—
Ὀξυγόνον	—	—	—218	— 183,0	51
Πετρέλαιον	0,00092	0,51	—	110 — 120	75
Τερεβινθέλαιον ($C_{10}H_{16}$)	0,00094	0,42	—	161	70
Ὑδράργυρος	0,000181	0,0333	— 38,87	356,7	68
Ὑδρογόνον	—	—	—259	— 252,8	110
Ὕδωρ (εἰς 18 °C) . .	0,0018	0,999	0	100	539,1

Γωνία		ημ	συν	εφ	Γωνία		ημ	συν	εφ
Μοῖραι	Ἀκτίνια				Μοῖραι	Ἀκτίνια			
0	0,000	0,000	1,000	0,000					
1	0,017	0,018	1,000	0,018	46	0,803	0,719	0,695	1,036
2	0,035	0,035	0,999	0,035	47	0,820	0,731	0 682	1,072
3	0,052	0,052	0,999	0,052	48	0,838	0,743	0,669	1,111
4	0,070	0,070	0,998	0,070	49	0,855	0,755	0,656	1,150
5	0,087	0,087	0,996	0,088	50	0,873	0,766	0,643	1,192
6	0,105	0,105	0,995	0,105	51	0,890	0,777	0,629	1,235
7	0,122	0,122	0,993	0,123	52	0,908	0,788	0,616	1,280
8	0,140	0,139	0,990	0,141	53	0,925	0,799	0,602	1,327
9	0,157	0,156	0,988	0,158	54	0,942	0,809	0,588	1,376
10	0,175	0,174	0,985	0,176	55	0,960	0,819	0,574	1,428
11	0,192	0,191	0,982	0,194	56	0,977	0,829	0,559	1,483
12	0,209	0,208	0,978	0,213	57	0,995	0,839	0,545	1,540
13	0,227	0,225	0,974	0,231	58	1,012	0,848	0,530	1,600
14	0,244	0,242	0,970	0,249	59	1,030	0,857	0,515	1,664
15	0,262	0,259	0,966	0,268	60	1,047	0,866	0,500	1,732
16	0,279	0,276	0,961	0,287	61	1,065	0,875	0,485	1,804
17	0,297	0,292	0,956	0,306	62	1,082	0,883	0,470	1,881
18	0,314	0,309	0,951	0,325	63	1,100	0,891	0,454	1,963
19	0,332	0,326	0,946	0,344	64	1,117	0,899	0,438	2,050
20	0,349	0,342	0,940	0,364	65	1,134	0,906	0,423	2,145
21	0,367	0,358	0,934	0,384	66	1,152	0,914	0,407	2,246
22	0,384	0,375	0,927	0,404	67	1,169	0,921	0,391	2,356
23	0,401	0,391	0,921	0,425	68	1,187	0,927	0,375	2,475
24	0,419	0,407	0,914	0,445	69	1,204	0,934	0,358	2,605
25	0,436	0,423	0,906	0,466	70	1,222	0,940	0,342	2,747
26	0,454	0,438	0,899	0,488	71	1,239	0,946	0,326	2,904
27	0,471	0,454	0,891	0,510	72	1,257	0,951	0,309	3,078
28	0,489	0,470	0,883	0,532	73	1,274	0,956	0,292	3,271
29	0,506	0,485	0,875	0,554	74	1,292	0,961	0,276	3,487
30	0,524	0,500	0,866	0,577	75	1,309	0,966	0,259	3,732
31	0,541	0,515	0,857	0,601	76	1,326	0,970	0,242	4,011
32	0,559	0,530	0,848	0,625	77	1,344	0,974	0,225	4,331
33	0,576	0,545	0,839	0,649	78	1,361	0,978	0,208	4,705
34	0,593	0,559	0,829	0,675	79	1,379	0,982	0,191	5,145
35	0,611	0,574	0,819	0,700	80	1,396	0,985	0,174	5,671
36	0,628	0,588	0,809	0,727	81	1,414	0,988	0,156	6,314
37	0,646	0,602	0,799	0,754	82	1,431	0,990	0,139	7,115
38	0,663	0,616	0,788	0,781	83	1,449	0,993	0,122	8,144
39	0,681	0,629	0,777	0,810	84	1,466	0,995	0,105	9,514
40	0,698	0,643	0,766	0,839	85	1,484	0,996	0,087	11,43
41	0,716	0,658	0,755	0,869	86	1,501	0,998	0,070	14,30
42	0,733	0,669	0,743	0,900	87	1,518	0,999	0,052	19,08
43	0,751	0,682	0,731	0,933	88	1,536	0,999	0,035	28,64
44	0,768	0,695	0,719	0,966	89	1,553	1,000	0,018	57,29
45	0,785	0,707	0,707	1,000	90	1,571	1,000	0,000	∞

ΕΞΕΔΟΘΗΣΑΝ ΥΠΟ ΤΩΝ ΙΔΙΩΝ ΣΥΓΓΡΑΦΕΩΝ :

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΦΥΣΙΚΗΣ

Διὰ τοὺς ὑποψηφίους τῶν Ἀνωτάτων Σχολῶν
ὡς καὶ διὰ τοὺς μαθητὰς τῶν Πρακτικῶν Τμημάτων τῶν Γυμνασίων.

Ἐγκεκριμένον ὑπὸ τοῦ Ὑπουργείου Παιδείας.

ΤΟΜΟΣ Ι

Μηχανικὴ - Ἀκουστικὴ - Θερμότης

ΤΟΜΟΣ ΙΙ

Ὀπτικὴ - Μαγνητισμὸς - Ἠλεκτρισμὸς

Εἶναι τὸ πρῶτον Ἑλληνικὸν βιβλίον, τὸ ὁποῖον περιέχει ἅπασαν τὴν ὕλην τὴν διδασκομένην εἰς τὰ Πρακτικὰ Λύκεια καὶ Γυμνάσια πρακτικοῦ τύπου, συμφώνως πρὸς τὸ ἐπίσημον ἀναλυτικὸν πρόγραμμα τοῦ Ὑπουργείου Παιδείας. Ἐπίσης περιέχει ὅλα τὰ θέματα τὰ ἐξεταζόμενα εἰς τὰς εἰσαγωγικὰς ἐξετάσεις τῶν Ἀνωτάτων Σχολῶν τοῦ Κράτους.

ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΦΥΣΙΚΗΣ

Διὰ τοὺς μαθητὰς τῶν Κλασικῶν Γυμνασίων.

Ἐγκεκριμένον ὑπὸ τοῦ Ὑπουργείου Παιδείας.

ΤΟΜΟΣ Ι

Μηχανικὴ - Ἀκουστικὴ - Θερμότης

ΤΟΜΟΣ ΙΙ

Ὀπτικὴ - Μαγνητισμὸς - Ἠλεκτρισμὸς

Περιλαμβάνει ἅπασαν τὴν διδακτέαν ὕλην, τελείως συγχρονισμένην. Μεθοδικὴ ἐπεξεργασία τῆς ὕλης, μεγίστη σαφήνεια, ἐπιστημονικὴ ἀκριβολογία, πλῆθος σχημάτων καὶ εἰκόνων, καλλιτεχνικὴ ἐμφάνισις, εἶναι μερικὰ ἀπὸ τὰ χαρακτηριστικὰ τοῦ βιβλίου τούτου.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΦΥΣΙΚΗΣ

Διὰ τοὺς ὑποψηφίους τῶν Ἀνωτάτων Σχολῶν
ὡς καὶ διὰ τοὺς μαθητὰς τῶν Σχολείων Μέσης Ἐκπαιδεύσεως.

Ἐγκεκριμένον ὑπὸ τοῦ Ὑπουργείου Παιδείας.

ΤΟΜΟΣ Ι

Μηχανικὴ - Ἀκουστικὴ - Θερμότης

ΤΟΜΟΣ ΙΙ

Ὀπτικὴ - Μαγνητισμὸς - Ἠλεκτρισμὸς

ΦΥΣΙΚΗ

Διὰ τοὺς σπουδαστὰς τῶν Ἀνωτάτων Σχολῶν.

ΤΟΜΟΣ Ι

Μηχανικὴ - Ἀκουστικὴ - Θερμότης

ΤΟΜΟΣ ΙΙ

Ὀπτικὴ