ΧΡΙΣΤΟΥ Ε. ΠΑΠΑΝΑΣΤΑΣΙΟΥ
Καθηγητοῦ τῶν Φυσικῶν ἐν τῇ Βαρβακείῳ Προτύπῳ Σχολῇ τοῦ Διδασκαλείου
τῆς Μέσης Ἐκπαιδεύσεως.

Η. Μ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΚΑΙ ΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΑΥΤΩΝ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ

τῶν μαθητῶν τῶν Πρακτικῶν Λυκείων, τῶν ὑποψηφίων τοῦ Πολυτεχνείου, τοῦ Πανεπιστημίου καὶ τῶν ἄλλων Ἀνωτέρων Σχολῶν.

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΕΚ ΤΟΥ ΤΥΠΟΓΡΑΦΕΙΟΥ ΑΘ. Α. ΠΑΠΑΣΠΥΡΟΥ
ΟΔΟΣ ΛΕΚΑ—ΣΤΟΑ ΣΙΜΟΠΟΥΛΟΥ
1931

ΧΡΙΣΤΟΥ Ε. ΠΑΠΑΝΑΣΤΑΣΙΟΥ
Καθηγητοῦ τῶν Φυσικῶν ἐν τῇ Βαρβακείῳ Προτύπῳ Σχολῇ τοῦ Διδασκαλείου
τῆς Μέσης Ἐκπαιδεύσεως.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΑΥΤΩΝ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ

τῶν μαθητῶν τῶν Πρακτικῶν Λυκείων, τῶν ὑποψηφίων τοῦ Πολυτεχνείου, τοῦ Πανεπιστημίου καὶ τῶν ἄλλων Ἀνωτέρων Σχολῶν.

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΕΚ ΤΟΥ ΤΥΠΟΓΡΑΦΕΙΟΥ ΑΘ. Α. ΠΑΠΑΣΠΥΡΟΥ
ΟΔΟΣ ΛΕΚΑ—ΣΤΟΑ ΣΙΜΟΠΟΥΛΟΥ
1931

Πᾶν ἀντίτυπον φέρει τὴν ὑπογραφὴν τοῦ συγγραφέως.

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ

ΓΕΝΙΚΑΙ ΕΝΝΟΙΑΙ ΚΑΙ ΤΥΠΟΙ ΤΗΣ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

Ι. ΜΗΧΑΝΙΚΗ

Α'. ΓΕΝΙΚΟΙ ΤΥΠΟΙ ΤΗΣ ΚΙΝΗΤΙΚΗΣ

α'. Ὁμαλὴ κίνησις.

Τὰ διανυόμενα διαστήματα εἶναι ἀνάλογα τῶν χρόνων. Ἡ ταχύτης εἶναι σταθερά. Ἡ ἐπιτάχυνσις εἶναι μηδέν. Αἱ ἐξισώσεις τῆς κινήσεως εἶναι :

Διάστημα : $e = e_0 + \upsilon t$

Ταχύτης : $\upsilon = \dfrac{e - e_0}{t} = \pm$ σταθερὰ

Ἐπιτάχυνσις : $\gamma = 0$

β'. Κίνησις ὁμαλῶς μεταβαλλομένη.

Ἡ ταχύτης μεταβάλλεται ἀναλόγως τοῦ χρόνου. Ἡ ἐπιτάχυνσις εἶναι σταθερά. Αἱ ἐξισώσεις τῆς κινήσεως εἶναι :

Διάστημα : $e = e_0 + \upsilon_0 t + \frac{1}{2} \gamma t^2$

Ταχύτης : $\upsilon = \upsilon_0 + \gamma t$

Ἐπιτάχυνσις : $\gamma = \pm$ σταθερά.

Ἡ κίνησις εἶναι ἐπιταχυνομένη ἐὰν ἡ ταχύτης αὐξάνει, ἐπιβραδυνομένη δὲ ἐὰν ἡ ταχύτης ἐλαττοῦται.

γ'. Κίνησις μεταβαλλομένη.

Ὅταν τὰ διαστήματα καὶ αἱ ταχύτητες δὲν εἶναι ἀνάλογοι τῶν χρόνων.

1) Ταχύτης: Εἰς χρόνον t καὶ $t + \Delta \tau$ τὸ κινητὸν κατέχει τὰς θέσεις M καὶ M_i διανύον διαστήματα e καὶ $e + \Delta e$.

Ἡ μέση ταχύτης μεταξὺ M καὶ M_i εἶναι:

$$\upsilon = \frac{\Delta e}{\Delta t}$$

2) Ἡ μέση ἐπιτάχυνσις μεταξὺ M καὶ M_i εἶναι:

$$\gamma = \frac{\Delta \upsilon}{\Delta t}$$

Ἡ κίνησις εἶναι ἐπιταχυνομένη ἢ ἐπιβραδυνομένη αὐξανομένης ἢ ἐλαττουμένης τῆς ταχύτητος.

δ'. Κίνησις καμπυλόγραμμος ἢ κυκλική.

Εἰς τὴν καμπυλόγραμμον κίνησιν ἡ τροχιὰ εἶναι μία οἱαδήποτε καμπύλη.

1ον ***Καμπυλόγραμμος κίνησις.*** Εἰς χρόνους t καὶ $t + \Delta t$, τὸ κινητὸν κατέχει ἐπὶ τῆς τροχιᾶς τὰς θέσεις M καὶ M_i διανύον τμήματα s καὶ $s + \Delta s$.

Ἡ μέση ταχύτης μεταξὺ τῶν σημείων M καὶ M_i εἶναι:

$$\upsilon = \frac{\text{χορδὴ } M M_i}{\Delta t}$$

2ον ***Κυκλικὴ ὁμαλὴ κίνησις.*** Ἡ τροχιὰ εἶναι περιφέρεια καὶ ἡ γωνιώδης καὶ ἡ γραμμικὴ ταχύτης σταθεραί.

Γραμμικὴ ταχύτης: $\upsilon = \pm \frac{2\pi R}{T}$ ὅπου R ἡ ἀκτὶς καὶ T ὁ χρόνος.

Γωνιώδης ταχύτης: $\omega = \pm \frac{2\pi}{T}$

T εἶναι ἡ διάρκεια μιᾶς πλήρους περιστροφῆς τοῦ κινητοῦ.

Ἐὰν N εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν στροφῶν κατὰ λεπτὸν

$$T = \frac{60}{N}$$

$$\upsilon = \frac{2\pi R N}{60} = \frac{\pi R N}{30}$$

καὶ $\omega = \frac{\pi N}{30}$

Ἡ ἐπιτάχυνσις εἶναι σταθερά:

$$\gamma = \frac{\upsilon^2}{R} = \omega^2 R = \frac{4\pi^2 R}{T^2}$$

Β'. ΕΛΕΥΘΕΡΑ ΠΤΩΣΙΣ ΣΩΜΑΤΩΝ

α'. Ἐπιτάχυνσις βαρύτητος.

Εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς γῆς, ἡ πτῶσις σώματος ἐν τῷ κενῷ εἶναι κίνησις κατακόρυφος καὶ ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένη.

Εἰς τὸν αὐτὸν τόπον ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς βαρύτητος g εἶναι αἰσθητῶς σταθερά.

Ἡ ἐπιτάχυνσις g μεταβάλλεται μετὰ τοῦ ὕψους h, κατὰ λόγον ἀντιστρόφως ἀνάλογον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ἀποστάσεως ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς γῆς.

$$\frac{g}{g'} = \frac{(R+h)^2}{R^2}$$ ὅπου R ἡ ἀκτὶς τῆς γῆς.

Ἡ ἐπιτάχυνσις g μεταβάλλεται μετὰ τοῦ πλάτους:

Διότι $g = 9{,}831$ μ. εἰς τοὺς Πόλους
$g = 9{,}809$ μ. εἰς Παρισίους
$g = 9{,}781$ μ. εἰς τὸν Ἰσημερινόν.

1ον ***Ἐλευθέρα πτῶσις***:

Ὕψος πτώσεως: $h = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$

Ταχύτης: $v = v_0 + gt = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$

Ἄνευ ἀρχικῆς ταχύτητος ($v_0 = 0$).

$$h = \frac{1}{2} g t^2 \quad \text{καὶ} \quad v = gt = \sqrt{2gh}$$

2ον ***Κίνησις ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω***:

Ὕψος ἀνόδου: $h = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$

Ταχύτης: $v = v_0 - gt = \sqrt{v_0^2 - 2gh}$

Μέγιστον ὕψος: $h_1 = \frac{v_0^2}{2g} \left(v_1 = 0 \quad \text{καὶ} \quad t_1 = \frac{v_0}{g} \right)$

Γ'. ΚΙΝΗΣΙΣ ΒΛΗΜΑΤΩΝ ΕΝ ΤΩ ΚΕΝΩ

α'. Βλῆμα ἀφιέμενον κατακορύφως μετὰ ταχύτητος v_0.

Ὅταν τὸ βλῆμα ρίπτεται πρὸς τὰ κάτω, λαμβάνομεν ὡς ἀρχὴν τῶν διαστημάτων τὸ σημεῖον ὅπου εἶναι τὸ κινητὸν εἰς τὴν ἀρχὴν τῶν χρόνων. Οἱ τύποι εἶναι :

Διάστημα : $e = \upsilon_0 t + \frac{1}{2} g t^2$

Ταχύτης : $\upsilon = \upsilon_0 + g t$

Ὅταν τὸ βλῆμα ῥίπτεται πρὸς τὰ ἄνω, οἱ τύποι εἶναι :

Ὕψος : $h = \upsilon_0 t - \frac{1}{2} g t^2$

Ταχύτης : $\upsilon = \upsilon_0 - g t$

Μέγιστον ὕψος ἀνόδου : $h = \frac{\upsilon_0^2}{2g}$

Ἡ διάρκεια τῆς ἀνόδου εἶναι ἴση πρὸς τὴν διάρκειαν τῆς καθόδου : $t = \frac{\upsilon_0}{g}$

β΄. Βλῆμα ῥιπτόμενον ὁριζοντίως μετὰ ταχύτητος υ_0.

Αἱ ἐξισώσεις ἐπὶ τῶν ἀξόνων εἶναι αἱ ἑξῆς :

Ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἄξονος : $x = \upsilon_0 t$

$\upsilon_x = \upsilon_0$

Ἐπὶ τοῦ κατακορύφου ἄξονος : $y = \frac{1}{2} g t^2$

$\upsilon_y = g t$

Τὸ κινητὸν γράφει παραβολὴν ἐξισώσεως :

$$y = \frac{g x^2}{2\upsilon_0^2}$$

γ΄. Βλῆμα ῥιπτόμενον μετὰ ταχύτητος υ_0 κατὰ διεύθυνσιν σχηματίζουσαν μετὰ τοῦ ὁρίζοντος γωνίαν α. (α εἶναι ἄνωθεν τοῦ ὁρίζοντος).

Αἱ ἐξισώσεις ἐπὶ τῶν ἀξόνων εἶναι :

$$x = \upsilon_0 t \text{ συν } \alpha$$

$$y = \upsilon_0 t \text{ ἡμ.}\alpha - \frac{1}{2} g t^2$$

Τὸ κινητὸν γράφει παραβολήν :

$$y = x \text{ εφ } \alpha - \frac{g x^2}{2\upsilon_0^2 \text{ συν}^2 \alpha}$$

Τὸ βεληνεκὲς εἶναι : $x = \frac{\upsilon_0^2}{g}$ ἡμ 2α

Ὕψος βλήματος : $h = \frac{\upsilon \text{ ἡμ}^2 \alpha}{2g}$

Τὸ ὕψος τοῦτο ἀντιστοιχεῖ εἰς χρόνον : $t = \frac{\upsilon_0}{g}$ ἡμ α.

Ἡ ταχύτης τοῦ κινητοῦ εἰς κάθε στιγμὴν εἶναι :

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_0^2 - 2gy}$$

Δ΄. ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΚΑΙ ΜΑΖΑ

α΄. Σχέσεις δυνάμεων πρὸς τὰς ἐπιταχύνσεις.

Αἱ ἐπιταχύνσεις $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \ldots\ldots$ ἃς λαμβάνει σῶμα τι ὑπὸ τὴν ἐνέργειαν δυνάμεων $F_1, F_2, F_3 \ldots\ldots$ εἶναι ἀνάλογοι τῶν δυνάμεων τούτων.

Ἤτοι : $\frac{F_1}{\gamma_1} = \frac{F_2}{\gamma_2} = \frac{F_3}{\gamma_3} = \ldots\ldots = \frac{F_\nu}{\gamma_\nu}$

β΄. Μᾶζα. Θεμελιώδης ἐξίσωσις.

Ὁ λόγος δυνάμεώς τινος F, ἐνεργούσης ἐπὶ τοῦ σώματος, πρὸς τὴν ἐπιτάχυνσιν γ, ἥν μεταδίδει εἰς αὐτό, εἶναι ἀριθμὸς σταθερὸς καὶ πάντοτε ὁ αὐτὸς δι᾽ ἓν καὶ τὸ αὐτὸ σῶμα καὶ ὀνομάζεται ***Μᾶζα*** τοῦ σώματος.

Τουτέστι : $\frac{F}{\gamma} = m =$ μᾶζα

ἢ $F = m \cdot \gamma$

Διὰ τὴν βαρύτητα : $P = m\, g$

γ΄. Μονὰς μάζης καὶ μονὰς δυνάμεως.

Ὡς μονὰς μάζης λαμβάνεται τὸ γραμμάριον, ἤτοι ἡ μάζα ἑνὸς κυβικοῦ ἑκατοστομέτρου ὕδατος εἰς 4° Κελσίου. Εἰς τὰς ἐφαρμογὰς ὡς μονὰς μάζης λαμβάνεται τὸ ***χιλιόγραμμον***, ὅπερ ἰσοῦται πρὸς 1000 γραμμάρια ἢ τὸ χιλιοστόγραμμον, δηλαδὴ τὸ 0,001 τοῦ γραμμαρίου.

Μονὰς δυνάμεως. Ἐκ τῆς ἐξισώσεως $F = m.\gamma$ ἔχομεν τὸν ὁρισμὸν τῆς μονάδος δυνάμεως. Αὕτη εἶναι ἡ δύναμις, ἥτις συνεχῶς ἐνεργοῦσα ἐπὶ τῆς μάζης ἑνὸς γραμμαρίου δίδει εἰς αὐτὴν ἐπιτάχυνσιν 1 ἑκατοστομέτρου.

Ἑπομένως $F = 1$ γρ. $\times 1$ ἑκατ. $= 1$ Δύνη

Ἡ μονὰς δυνάμεως καλεῖται Δύνη εἰς τὸ σύστημα C. G. S., εἶναι δὲ πολὺ μικρά.

Ἐπειδὴ δὲ ἡ βαρύτης δίδει εἰς τὰ πίπτοντα σώματα ἐπιτάχυνσιν $g = 981$ ἑκατοστ., ἕπεται ὅτι τὸ βάρος P τῆς μάζης ἑνὸς γραμμαρίου εἶναι :

$P = 1$ γραμ. $\times 981$ ἑκατ. $= 981$ δύνας $= 1$ γραμ. βάρους,

ἤτοι ἡ δύνη εἶναι 1/981 τοῦ βάρους ἑνὸς γραμμαρίου.

Ἔχομεν λοιπόν : 1 δύνη $= \frac{1}{981}$ γραμμάρια.

Καὶ βάρος 1 γραμ. = 981 δύνας, ὅθεν βάρος 1 χιλιογρ. ἰσοῦται πρὸς 981000 δύνας.

Ε΄. ΣΥΝΘΕΣΙΣ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΣΙΣ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

α΄. Δυνάμεις ἐνεργοῦσαι εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον καὶ τῆς αὐτῆς διευθύνσεως.

Ἡ συνισταμένη ἰσοῦται μὲ τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν συνιστωσῶν δυνάμεων.

Ἤτοι : $R = F_1 + F_2$ ἔνθα R ἡ συνισταμένη καὶ F_1 καὶ F_2 αἱ δυνάμεις.

β΄. Δυνάμεις ἐνεργοῦσαι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου καὶ σχηματίζουσαι γωνίαν.

Ἡ συνισταμένη ἰσοῦται μὲ τὴν διαγώνιον τοῦ παραλληλογράμμου τοῦ σχηματιζομένου ὑπὸ τῶν δύο δυνάμεων.

Ἵνα ὑπολογίσωμεν τὴν συνισταμένην χρησιμοποιοῦμεν τοὺς τύπους τῆς ἐπιλύσεως τῶν τριγώνων. Ἂν R ἡ συνισταμένη καὶ F_1 καὶ F_2 αἱ δυνάμεις, τότε.

$$\frac{F_1}{\text{ἡμ}(\overline{R,F_2})} = \frac{F_2}{\text{ἡμ}(\overline{R,F_1})} = \frac{R}{\text{ἡμ}(\overline{F_1,F_2})}$$

$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2\,F_1\,F_2 \text{ συν } (F_1, F_2)$$

$$\left.\begin{array}{l} F_1 = R \text{ συν } \alpha \quad \text{καὶ} \quad F_2 = R \text{ συν } \beta \\ \text{καὶ} \quad R^2 = F_1^2 + F_2^2 \end{array}\right\} \text{Δυνάμεις κάθετοι}$$

γ΄. Σύνθεσις τριῶν δυνάμεων ἐφηρμοσμένων ἐπὶ σημείου καὶ σχηματιζουσῶν ἀνὰ δύο γωνίαν.

Ἡ συνισταμένη εἶναι ἡ διαγώνιος τοῦ παραλληλεπιπέδου τῶν δυνάμεων.

Συνισταμ. $R = (F_1) + (F_2) + (F_3)$

$$\left.\begin{array}{l} F_1 = R \text{ συν } \alpha \quad F_2 = R \text{ συν } \beta \\ \text{καὶ } R^2 = F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 \end{array}\right\} \text{Δυνάμεις κάθετοι.}$$

δ΄. Σύνθεσις δύο δυνάμεων παραλλήλων καὶ ὁμορρόπων.

Ἡ συνισταμένη ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο δυνάμεων καὶ τέμνει τὴν εὐθεῖαν τὴν ἑνοῦσαν τὰς δύο δυνάμεις εἰς τὸ σημεῖον K, σημεῖον ἐφαρμογῆς τῆς συνισταμένης, οὕτως ὥστε:

$$\frac{AK}{BK} = \frac{F_2}{F_1} \quad \text{ἐξ οὗ} \quad \frac{F_1}{BK} = \frac{F_2}{AK} = \frac{R}{AB}$$

Ἀνάλυσις τῆς συνισταμένης. $F_1 = R \times \frac{BK}{AB}$ καὶ $F_2 = R \times \frac{AK}{AB}$

ε΄. Σύνθεσις δύο δυνάμεων παραλλήλων καὶ ἀντιρρόπων.

Αἱ δύο δυνάμεις δύνανται νὰ εἶναι ἴσαι ἢ ἄνισοι.

1ον ***Δυνάμεις ἄνισοι :*** $R = F_1 - F_2$ ($F_1 > F_2$) τὸ σημεῖον K τῆς ἐφαρμογῆς τῆς συνισταμένης εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς εὐθείας τῆς ἑνούσης τὰς δύο δυνάμεις, πρὸς τὸ μέρος τῆς μεγαλειτέρας καὶ εἶναι :

$$\frac{F_1}{BK} = \frac{F_2}{AK} = \frac{R}{AB}$$

2ον ***Δυνάμεις ἴσαι :*** Συνισταμένη δὲν ὑπάρχει καὶ τότε λέγομεν ὅτι αἱ δύο δυνάμεις σχηματίζουσι ***ζεῦγος.***

ς΄. ΕΡΓΟΝ ΚΑΙ ΕΝΕΡΓΕΙΑ

Τὸ Ἔργον ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῆς δυνάμεως ἐπὶ τὴν μετάθεσιν. $W = F.e$ ἔνθα F ἡ δύναμις καὶ e ἡ μετάθεσις,

ἢ $W = F.e$ συν α (α εἶναι γωνία δυνάμεως μετὰ τῆς τροχιᾶς)

Ἐὰν	$\alpha < 90^0$	$W > 0$	ἔργον	κινητήριον
Ἐὰν	$\alpha > 90^0$	$W < 0$	»	ἀνθιστάμενον
Ἐὰν	$\alpha = 90^0$	$W = 0$	»	μηδὲν

Μονάδες ἔργου.

α΄. Σύστημα μηχανικῶν μονάδων.

Εἰς τὸ σύστημα τοῦτο ὡς μονὰς ἔργου λαμβάνεται τὸ ***χιλιογραμμόμετρον***, ὅπερ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἔργον ὅπερ παράγεται ὅταν 1 χιλιογραμμότερον ὑψοῦται εἰς 1 μέτρον.

Μονὰς ἰσχύος. Εἰς τὸ σύστημα τοῦτο ὡς μονὰς ἰσχύος λαμβάνεται ὁ ***ἵππος***, ἔργον δηλαδὴ 75 χιλιογραμμομέτρων κατὰ δευτερόλεπτον.

β΄. Ἀπόλυτον σύστημα μονάδων C. G. S.

Εἰς τὸ σύστημα τοῦτο ὡς μονὰς ἔργου λαμβάνεται τὸ ***ἔργιον***, δηλαδὴ τὸ ἔργον δυνάμεως 1 δύνης, ἥτις μεταθέτει τὸ σημεῖον τῆς ἐφαρμογῆς της κατὰ 1 ἑκατοστόμετρον καὶ κατὰ τὴν διεύθυνσίν της.

Ἡ μονὰς αὕτη εἶναι πολὺ μικρά. Διότι 1 χιλιόγραμμον $=$ 981000 δύνας, καὶ 1 μ $=$ 100 ἑκατοστόμ. ἑπομένως 1 χιλιογραμμόμετρον $=$ 98 100 000 ἔργια ἢ $9{,}81 \times 10^7$.

Εἰς τὰς πρακτικὰς ἐφαρμογὰς χρησιμοποιεῖται ἡ ***Ἰούλιος*** μονάς, ἥτις ἰσοῦται πρὸς 10^7 ἔργια.

1 χιλιογραμμόμετρον $=$ 9,81 Ἰουλίους μονάδας.

$$1 \text{ Ἰούλιος} = \frac{1 \text{ χιλγρ.}}{9{,}81} = 0{,}102 \text{ χιλιογραμμόμετρα.}$$

Εἰς τὸ σύστημα C. G. S. ὡς μονὰς ἰσχύος λαμβάνεται ἡ ***Βάτ***, δηλαδὴ ἔργον μιᾶς Ἰουλίου κατὰ δευτερόλεπτον.

Διὰ τὰς μεγάλας ἰσχῦς εἰς τὸν ἠλεκτρισμόν, λαμβάνεται ὡς μονὰς τὸ Χιλιοβάτ ἢ Κιλοβάτ δηλαδὴ ἰσχὺς 1000 βάτ.

1 ἵππος $=$ 75 χιλιογραμμόμ. κατὰ δευτερόλεπτον $= 75 \times 9{,}81$ Ἰουλίους κατὰ δευτερόλεπτον.

Ἑπομένως 1 ἵππος $=$ 736 βάτ

καὶ 1 Κιλοβάτ $=$ 1,36 ἵπποι.

γ΄. Δρῶσα δύναμις.

Καλοῦμεν δρῶσαν δύναμιν ὑλικοῦ σημείου ἐν κινήσει τὸ γινόμενον τῆς μάζης του ἐπὶ τὸ τετράγωνον τῆς ταχύτητός του. Ἂν m ἡ μᾶζα καὶ υ ἡ ταχύτης, τότε $T = m.\upsilon^2$

1ον ***Κινητικὴ ἐνέργεια*** ὑλικοῦ σημείου εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς δρώσης δυνάμεως.

$$T = \frac{1}{2}\, m.\, \upsilon^2$$

2ον ***Θεώρημα κινητικῆς ἐνεργείας ἢ ῥύμης.*** Τὸ ἔργον τῆς δυνάμεως, τῆς ἐνεργούσης ἐπί τινος σημείου ὑλικοῦ ἐπὶ ὡρισμένον χρόνον, εἶναι ἴσον πρὸς τὴν μεταβολὴν ἣν ὑπέστη ἡ ῥύμη κατὰ τὸν χρόνον τῆς ἐνεργείας τῆς δυνάμεως.

$T = \frac{1}{2}\, m.\, \upsilon^2 - \frac{1}{2}\, m\, \upsilon_0^2$ ὅπου υ καὶ υ^0 αἱ ταχύτητες, ἡ τελικὴ καὶ ἡ ἀρχικὴ τοῦ ὑλικοῦ σημείου.

Ζ΄. ΕΚΚΡΕΜΕΣ. ΠΑΓΚΟΣΜΙΟΣ ΕΛΞΙΣ. ΦΥΓΟΚΕΝΤΡΟΣ ΔΥΝΑΜΙΣ

α΄. Τύπος ἁπλοῦ ἐκκρεμοῦς.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \qquad (1)$$

καὶ ἂν $\frac{T}{2} = t$, τότε $g = \frac{\pi^2 l}{t^2}$ ἔνθα g ἡ ἔντασις τῆς βαρύτητος, l τὸ μῆκος τοῦ ἐκκρεμοῦς, T ὁ χρόνος μιᾶς πλήρους αἰωρήσεως.

β΄. Σύνθετον ἐκκρεμές.

Ὁ τύπος τοῦ συνθέτου ἐκκρεμοῦς εἶναι : (2) $T = 2\pi \sqrt{\frac{K}{m.g.\alpha}}$ ἔνθα K ἡ ῥοπὴ ἀδρανείας τοῦ ἐκκρεμοῦς ὡς πρὸς τὸν ἄξονα ἐξαρτήσεως, m ἡ μᾶζα αὐτοῦ, καὶ α ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου τοῦ βάρους του ἀπὸ τὸν ἄξονα ἐξαρτήσεως.

Ἐκ τῶν τύπων (1) καὶ (2) συνάγομεν ὅτι τὸ μῆκος τοῦ ἰσοχρόνου ἁπλοῦ ἐκκρεμοῦς εἶναι :

$$l = \frac{K}{m.\alpha}$$

γ΄. Παγκόσμιος ἕλξις.

Ὁ τύπος τῆς παγκοσμίου ἕλξεως εἶναι : $F = K.\frac{m_1.m_2}{r^2}$ ὅπου m_1 καὶ m_2 αἱ μᾶζαι τῶν δύο σωμάτων καὶ r ἡ ἀπόστασις αὐτῶν, F ἡ ἕλκουσα δύναμις καὶ K συντελεστὴς καλούμενος παγκοσμία σταθερά.

Ἡ ἔντασις τῆς βαρύτητος εἶναι σταθερὰ καὶ ἀνεξάρτητος τῆς μάζης τοῦ σώματος.

Ὄντως ἔχομεν $F = K\frac{mM}{R^2}$

ἐξ ἧς $\frac{F}{m} = g = K\frac{M}{R^2}$

Ἐπειδὴ K, M (μᾶζα γῆς) καὶ R (ἀκτὶς γῆς) εἶναι σταθερά, ἡ ἐπιτάχυνσις g εἶναι σταθερά.

δ'. Φυγόκεντρος δύναμις.

Ὁ τύπος τῆς φυγοκέντρου δυνάμεως εἶναι : $F = m. \frac{\upsilon^2}{R}$ ὅπου m ἡ μᾶζα, υ ἡ ταχύτης, καὶ R ἡ ἀκτὶς τῆς περιφορᾶς.

Καὶ $F = \frac{m.4\pi^2 r}{T^2}$ ὅταν ὁ χρόνος περιφορᾶς εἶναι σταθερός.

ε'. Πυκνότης καὶ Εἰδικὸν βάρος.

Πυκνότης σώματός τινος καλεῖται ὁ λόγος τῆς μάζης m τοῦ σώματος πρὸς τὸν ὄγκον αὐτοῦ υ. Ἤτοι ;

$$d = \frac{m}{\upsilon} = \text{ἡ μᾶζα 1 κυβ. ἑκ. εἰς γραμ.}$$

Εἰδικὸν βάρος ρ τοῦ σώματος καλεῖται ὁ λόγος τοῦ βάρους B τοῦ σώματος (εἰς δύνας) πρὸς τὸν ὄγκον αὐτοῦ υ (εἰς κυβ. ἑκαστοστὰ) ἤτοι:

$$\rho = \frac{B}{\upsilon} = \frac{m.\, g}{\upsilon} = d.\, g$$

Ἐπειδὴ ὁ ὄγκος υ τοῦ ὕδατος εἰς 4° Κελσίου παρίσταται διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ὅστις ἐκφράζει καὶ τὴν μᾶζαν μ τοῦ ὕδατος, ἕπεται ὅτι ἔχομεν:

$$\text{Πυκνότης σώματος: } d = \frac{m}{\upsilon} = \frac{m}{\mu} = \frac{m.g}{\mu.\, g} = \frac{B}{\beta}$$

ἤτοι ἡ πυκνότης τοῦ σώματος d ἰσοῦται τῷ λόγῳ τοῦ βάρους τοῦ σώματος πρὸς τὸ βάρος ἴσου ὄγκου ὕδατος εἰς 4° Κελσίου.

II. ΥΔΡΟΣΤΑΤΙΚΗ

α'. Ὑδροστατικὴ πίεσις. Καλεῖται τὸ πηλίκον τῆς ἐπί τινος ἐλαχίστης ἐπιφανείας ε ἐνεργούσης δυνάμεως f διὰ τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ἐπιφανείας :

$$p = \frac{f}{\varepsilon}$$

β'. Μονάδες πιέσεως. Ὡς θεωρητικὴ μονὰς λαμβάνεται ἡ πίεσις μιᾶς δύνης κατὰ τετραγωνικὸν ἑκατοστόμετρον :

Πίεσις 1 C. G. S. = 1 δύνη κατὰ τετραγ. ἑκατοστ. = 1 Βάρυον.

Συνήθως λαμβάνεται ὡς μονὰς τὸ χιλιοβάρυον.

1 χιλιοβάρυον = 1000 C. G. S.

Ὡς πρακτικὴ μονὰς πιέσεως λαμβάνεται ἡ πίεσις ἑνὸς χιλιογράμμου βάρους κατὰ τετραγ. ἑκατοστόν.

Ἐκτὸς ὅμως αὐτῆς λαμβάνεται εἰς τὴν πρᾶξιν ὡς μονὰς καὶ ἡ πίεσις μιᾶς ἀτμοσφαίρας.

γ'. Ἀρχὴ *Pascal*. Πᾶσα πίεσις ἐπιφερομένη ἐπὶ τμήματος ἐπιφανείας ὑγροῦ ἐν ἰσορροπίᾳ μεταδίδεται καθ' ὅλας τὰς διευθύνσεις, καὶ ἡ ἀσκουμένη δύναμις εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὴν ἔκτασιν τῆς ἐπιφανείας.

$$\text{Ἤτοι } \frac{f}{f'} = \frac{\sigma}{\sigma'}$$

δ'. Πίεσις ἐπὶ οἱασδήποτε ἐπιφανείας. Ἡ ἐπὶ οἱασδήποτε ἐπιφανείας ἐξασκουμένη ὁλικὴ δύναμις ἐκ τοῦ βάρους τοῦ ὑγροῦ, ἰσοῦται πρὸς τὸ βάρος ὑγρᾶς στήλης, ἐχούσης βάσιν μὲν τὴν θεωρουμένην ἐπιφάνειαν, ὕψος δὲ τὴν κατακόρυφον ἀπόστασιν τοῦ κέντρου βάρους αὐτῆς ἀπὸ τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ.

Πίεσις ὑγρᾶς στήλης σημείου $p = d.\,h.\,g.$

ὅπου d = πυκνότης ὑγροῦ, h τὸ ὕψος τῆς στήλης καὶ $g = 981$.

ε'. Θεμελιῶδες θεώρημα. Ἡ διαφορὰ τῶν πιέσεων μεταξὺ δύο σημείων ὑγροῦ ἐν ἰσορροπίᾳ ἰσοῦται πρὸς τὸ βάρος ὑγροῦ κυλίνδρου ἔχοντος βάσιν τὴν μονάδα ἐπιφανείας καὶ ὕψος τὴν κατακόρυφον ἀπόστασιν τῶν δύο σημείων.

$$p_1 - p_2 = h.\,d.$$

ϛ'. Ἀρχὴ Ἀρχιμήδους. Πᾶν σῶμα εὑρισκόμενον ἐντὸς ὑγροῦ ὑφίσταται πίεσιν κατακόρυφον ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω, ὀνομαζομένην ἄνωσιν, ἴσην πρὸς τὸ βάρος τοῦ ἐκτοπιζομένου ὑγροῦ.

ζ'. ***Συγκοινωνοῦντα δοχεῖα***. Τὰ ὕψη τῶν ἐλευθέρων ἐπιφανειῶν δύο ἑτεροπύκνων ὑγρῶν ἰσορροπούντων ἐντὸς συγκοινωνούντων δοχείων, εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα τῶν πυκνοτήτων τῶν δύο ὑγρῶν.

$$\frac{h}{h'} = \frac{d'}{d}$$

III. ΑΕΡΟΣΤΑΤΙΚΗ

α΄. Ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις. Ἡ ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις ἰσορροπεῖ εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς θαλάσσης στήλην ὑδραργυρικὴν ὕψους 76 ἑκατοστομέτρων.

Ἡ πίεσις αὕτη εἶναι ἴση πρὸς 1033 γραμμάρια ἐπὶ 1 **τετρ.** ἑκατ.

Προσδιορισμὸς ὕψους. Τύπος *Babinet.*

$$Z = 16000 \left[1 + \frac{2(t+t')}{1000} \right] \frac{H - H'}{H + H'}$$

t ἡ θερμοκρασία, H ἡ πίεσις εἰς τὸν κάτω τόπον

t′ » H′ » » ἄνω τόπον

β΄. Νόμος *Mariotte Boyle.* Ὁ ὄγκος ὡρισμένης ποσότητος ἀερίου εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογος πρὸς τὴν πίεσιν ὑπὸ σταθερὰν θερμοκρασίαν.

$$\text{Ἤτοι} \quad \frac{V}{V'} = \frac{P'}{P} \quad \text{ἢ} \quad VP = V'P' = \text{σταθερά.}$$

Τουτέστι τὸ γινόμενον τοῦ ὄγκου ἐπὶ τὴν πίεσιν, ὑπὸ σταθερὰν θερμοκρασίαν, εἶναι ἀριθμὸς σταθερός.

γ΄. Ἀπόλυτος πυκνότης ἀερίου. Εἶναι ὁ λόγος τῆς μάζης αὐτοῦ πρὸς τὸν ὄγκον.

δ΄. Σχετικὴ πυκνότης ἀερίου. Εἶναι ὁ λόγος τῆς μάζης τοῦ ἀερίου πρὸς τὴν μάζαν ἴσου ὄγκου ἀτμοσφαιρικοῦ ἀέρος ὑπὸ τὴν αὐτὴν πίεσιν καὶ θερμοκρασίαν.

Ἂν d ἡ ἀπόλυτος πυκνότης τοῦ ἀερίου, καὶ d′ ἡ ἀπόλυτος πυκνότης τοῦ ἀτμοσφαιρικοῦ ἀέρος, ἡ σχετικὴ πυκνότης τοῦ ἀερίου θὰ εἶναι:

$$\delta = \frac{d}{d'} \quad \text{καὶ} \quad d = \delta . d'$$

ε΄. Ἀεραντλίαι. Ἐὰν παρασταθῇ διὰ Β ἡ χωρητικότης τοῦ κώδωνος ἐξ οὗ ἀφαιροῦμεν ἀέρα, καὶ β ἡ χωρητικότης τοῦ κυλίνδρου ἡ κάτωθεν τοῦ ἐμβολέως ὅταν ὁ ἐμβολεὺς εὑρίσκεται εἰς τὴν ἀνωτάτην θέσιν, H ἡ πίεσις ἡ ἀρχικὴ τοῦ ἐντὸς τοῦ κώδωνος ἀέρος, ἡ πίεσις H_ν τοῦ ἐντὸς τοῦ κώδωνος ἀέρος μετὰ ν ἀνελκύσεις τοῦ ἐμβολέως εὑρίσκεται ἐκ τοῦ τύπου :

$$H_\nu = H \left(\frac{B}{B + \beta} \right)^\nu$$

ς'. ***Ἀεροθλιπτικὴ μηχανή.*** Ἡ πίεσις τοῦ ἐν χώρῳ εἰσαγομένου ἀερίου μὲ ν ἀνελκύσεις καὶ καταπιέσεις τοῦ ἐμβολέως εἶναι :

$$H_\nu = H_0 + \nu H \frac{\beta}{B}$$

ὅπου H_0 ἡ ἀρχικὴ ἐλαστικότης τοῦ ἐν τῷ δοχείῳ -ἀερίου καὶ H ἡ πίεσις τοῦ ἐξωτερικοῦ ἀέρος, ἥτις ὑποτίθεται σταθερά.

IV. ΘΕΡΜΟΤΗΣ

Α'. ΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΑ

α'. Θερμομετρικαὶ κλίμακες ἐν χρήσει εἶναι τρεῖς.

1.	Κελσίου	ἀπὸ	0°	μέχρι	100°
2.	Ρεωμύρου	»	0°	»	80°
3.	Φαρενάϊτ	»	32°	»	212°

$$100\ K = 80\ R = 180\ \Phi.$$

$$1\ K = \frac{4}{5}\ R = \frac{9}{5}\ \Phi.$$

β'. Ἀναγωγὴ θερμοκρασιῶν :

$$T_\varrho = T_\varkappa \times \frac{4}{5} \qquad T_\varkappa = T_\varrho \times \frac{5}{4}$$

$$T_\varphi = T_\varkappa \times \frac{9}{5} + 32 \qquad T_\varkappa = \left(T_\varphi - 32\right) \times \frac{5}{9}$$

Β'. ΔΙΑΣΤΟΛΗ ΣΤΕΡΕΩΝ

α'. Γραμμικὴ διαστολὴ στερεῶν. Καλεῖται συντελεστὴς τῆς γραμμικῆς διαστολῆς στερεοῦ σώματος, ἡ ἐπιμήκυνσις, ἥν λαμβάνει ἡ μονὰς τοῦ μήκους τοῦ σώματος εἰς 0°, ὅταν ἡ θερμοκρασία αὐξηθῇ κατὰ 1°.

Ἐὰν **λ** ὁ συντελεστὴς τῆς γραμμικῆς διαστολῆς, τότε τὸ μῆκος l ῥάβδου εἰς t° θὰ εἶναι :

$$l_t = l_0 \left(1 + \lambda t\right) \text{ ὅπου } l_0 \text{ τὸ μῆκος εἰς } 0^\circ.$$

καὶ $l_0 = \dfrac{l_t}{1+\lambda t}$. Τὸ $\left(1 + \lambda t\right)$ καλεῖται ***διώνυμον τῆς γραμμικῆς διαστολῆς.***

β΄. Ἐπιφανειακὴ διαστολή. Καλεῖται συντελεστὴς τῆς κατ᾽ ἐπιφάνειαν διαστολῆς, ἡ αὔξησις τῆς μονάδος τῆς ἐπιφανείας εἰς 0^{0} δι᾽ αὔξησιν τῆς θερμοκρασίας κατὰ 1^{0}.

Τὸ ἐμβαδὸν E_t ἐπιφανείας εἰς t^{0} θὰ εἶναι:

$E_t = E_0 \left(1 + \varepsilon t\right)$ ὅπου E_0 τὸ ἐμβαδὸν εἰς 0^{0} καὶ ε ὁ συντελεστὴς ὁ ἐπιφανειακός.

Σχέσις ε καὶ λ : $\varepsilon = 2\lambda$.

γ΄. Κυβικὴ διαστολή. Συντελεστὴς τῆς κυβικῆς διαστολῆς καλεῖται ἡ αὔξησις, ἥν λαμβάνει ἡ μονὰς τοῦ ὄγκου εἰς 0^{0} ἂν ὑψωθῇ ἡ θερμοκρασία κατὰ 1^{0}.

Ἐὰν V_0 εἶναι ὁ ὄγκος εἰς 0^{0} καὶ V_t ὁ ὄγκος εἰς t^{0} καὶ κ ὁ συντελεστὴς τῆς κυβικῆς διαστολῆς ἔχομεν: $V_t = V_0 (1 + \kappa t)$

δ΄. Σχέσις κ καὶ λ: $\kappa = 3\lambda$

ε΄. Σχέσις μεταξὺ τῶν πυκνοτήτων ἑνὸς σώματος εἰς t^{0} καὶ εἰς t':

$$\frac{d}{d'} = \frac{1 + \kappa t'}{1 + \kappa t}$$

καὶ ἂν $t = o$ ἔχομεν:

$$d_t = \frac{d_0}{1 + \kappa t}$$

Γ΄. ΔΙΑΣΤΟΛΗ ΥΓΡΩΝ

α΄. Φαινομένη διαστολὴ λέγεται ἡ αὔξησις τοῦ ὄγκου ἥν φαίνεται λαμβάνον ὑγρόν τι ἐντὸς δοχείου ἐπίσης διαστελλομένου.

β΄. Ἀπόλυτος διαστολὴ ἢ πραγματικὴ διαστολὴ εἶναι ἡ αὔξησις ὄγκου, ἥν πράγματι τὸ ὑγρὸν ὑφίσταται ἐν τῷ δοχείῳ.

γ΄. Συντελεστὴς διαστολῆς ἑνὸς ὑγροῦ εἶναι ἡ αὔξησις, ἥν λαμβάνει ἡ μονὰς τοῦ ὄγκου εἰς 0^{0}, ὅταν ἡ θερμοκρασία αὐτοῦ ὑψωθῇ ἀπὸ 0^{0} εἰς 1^{0}.

Σχέσις μεταξὺ τῶν δύο συντελεστῶν. Ὁ συντελεστὴς τῆς ἀπολύτου διαστολῆς ὑγροῦ τινος, ἰσοῦται πρὸς τὸν συντελεστὴν τῆς φαινομένης διαστολῆς, ηὐξημένον κατὰ τὸν συντελεστὴν τῆς διαστολῆς τοῦ δοχείου.

Ἤτοι $\Delta = \delta + \kappa$

Ἂν V_t εἶναι ὁ ὄγκος ὑγροῦ τινος εἰς t^0 καὶ V ὁ ὄγκος τοῦ αὐτοῦ ὑγροῦ εἰς 0^0, τότε :

$V_t = V_0 \left(1 + \alpha t\right)$ ὅπου α ὁ συντελεστὴς ὁ ἀπόλυτος τοῦ ὑγροῦ.

δ'. Ἀναγωγὴ τοῦ βαρομετρικοῦ ὕψους εἰς O^0.

Βαρομ. ὕψος $H_0 = \frac{H_t}{1 + \alpha t}$ ὅπου H_t τὸ παρατηρηθὲν ὕψος εἰς θερμοκρασίαν t^0 καὶ α ὁ συντελεστὴς τῆς πραγματικῆς διαστολῆς τοῦ ὑδραργύρου.

ε'. Θερμόμετρον διὰ βάρους. Ὁ τύπος εἶναι :

$$P\,(1 + \kappa t) = (P - p)\;(1 + mt)$$

ἔνθα P τὸ βάρος τοῦ ἐν τῷ σωλῆνι ὑδραργύρου εἰς 0^0, p τὸ βάρος τοῦ ἐξελθόντος ὑδραργύρου εἰς t^0, m ὁ ἀπόλυτος συντελεστὴς τοῦ ὑδραργύρου, καὶ κ ὁ συντελεστὴς τοῦ δοχείου.

Δ'. ΔΙΑΣΤΟΛΗ ΑΕΡΙΩΝ

α'. Συντελεστὴς διαστολῆς τῶν ἀερίων ὑπὸ πίεσιν σταθερὰν εἶναι ἡ αὔξησις, ἥν ὑφίσταται ἡ μονὰς τοῦ ὄγκου τοῦ ἀερίου, ὅταν ἡ θερμοκρασία του αὐξηθῇ κατὰ 1 βαθμόν, χωρὶς νὰ μεταβληθῇ ἡ πίεσίς του.

Ἐὰν α ὁ συντελεστής, τότε : $\alpha = \frac{V_t - V_0}{V_0\, t}$

Μεταξὺ τῶν ὄγκων V_t καὶ V_0 ὑφίσταται ἡ σχέσις :

$$V_t = V_0\;(1 + \alpha t)$$

β'. Συντελεστὴς πιέσεως τῶν ἀερίων ὑπὸ σταθερὸν ὄγκον εἶναι ἡ αὔξησις, ἥν ὑφίσταται ἡ μονὰς τῆς πιέσεως τοῦ ἀερίου, ὅταν ἡ θερμοκρασία αὐτοῦ αὐξήσῃ κατὰ 1 βαθμόν, χωρὶς μεταβολὴν τοῦ ὄγκου.

Ἐὰν β εἶναι ὁ συντελεστὴς πιέσεως, τότε :

$$\beta = \frac{P_t - P_0}{P_0\, t}$$

Μεταξὺ τῶν πιέσεων P_t καὶ P_0 ὑφίσταται ἡ σχέσις

$$P_t = P_0\,(1 + \beta t)$$

Ὁ συντελεστὴς διαστολῆς τῶν ἀερίων εἶναι αἰσθητῶς σταθερὸς δι' ὅλα τὰ ἀέρια καὶ ἀνεξάρτητος τῆς πιέσεως : $\alpha = \beta = 0{,}00367 = \frac{1}{273}$.

γ'. Νόμος Gay Lussac ἢ τῶν τελείων ἀερίων. Τὸ γινόμενον ὡρισμένης ποσότητος ἀερίου ἐπὶ τὴν πίεσίν του, διαιρεθὲν διὰ τοῦ διωνύμου τῆς διαστολῆς, εἶναι ἀριθμὸς σταθερός.

$$\frac{PV}{1+\alpha t} = \frac{P'V'}{1+\alpha t'} = \text{σταθερὸν}$$

δ'. Σχέσις μεταξὺ τῆς πυκνότητος, τῆς θερμοκρασίας, καὶ τῆς πιέσεως ἑνὸς ἀερίου :

$$\frac{d}{d'} = \frac{P}{P'} \cdot \frac{1+\alpha t'}{1+\alpha t}$$

ὅπου d ἡ πυκνότης εἰς πίεσιν P καὶ εἰς θερμοκρασίαν t
καὶ d' » » » P' » » » t'

ε'. Μᾶζα ἑνὸς ὡρισμένου ὄγκου ἀερίου εἰς t^0 καὶ ὑπὸ πίεσιν P:

$$M = \frac{V.d.\beta.P}{76\,(1+\alpha t)}$$

ὅπου d ἡ πυκνότης τοῦ ἀερίου ἐν σχέσει πρὸς τὸν ἀέρα, καὶ β τὸ βάρος μιᾶς λίτρας ἀέρος 1,293 γραμμάρια.

ϛ'. Μῖγμα πολλῶν ἀερίων διαφόρων πιέσεων καὶ θερμοκρασιῶν :

$$\frac{vp}{1+\alpha t} + \frac{v'p'}{1+\alpha t'} + \frac{v''p''}{1+\alpha t''} + \ldots\ldots = \frac{VP}{1+\alpha T} = V_0 P_0$$

Εἰς τὸν τύπον τοῦτον, V εἶναι ὁ κοινὸς ὄγκος, P εἶναι ἡ τελικὴ πίεσις, δηλαδὴ τὸ ἄθροισμα τῶν μερικῶν πιέσεων ἑκάστου ἀερίου, καὶ T ἡ τελικὴ θερμοκρασία.

Βάρος ἑνὸς ὄγκου V ἀερίου πυκνότητος d, εἰς θερμοκρασίαν t, καὶ ὑπὸ πίεσιν P :

$$B = V \times 1{,}293 \times d \times \frac{P}{760} \times \frac{1}{1+\alpha t}$$

Ἐὰν τὸ V ἐκφράζεται εἰς λίτρας, τὸ B θὰ ἐκφράζεται εἰς γραμμάρια.

Ε'. ΑΤΜΟΙ ΚΑΙ ΥΓΡΟΜΕΤΡΙΑ

α'. Ἀτμὸς κεκορεσμένος ἔχει εἰς κάθε θερμοκρασίαν μίαν ὡρισμένην ἐλαστικὴν δύναμιν ὀνομαζομένην ***μεγίστην τάσιν***.

Πυκνότης ἀτμοῦ. Εἶναι ὁ λόγος τοῦ βάρους ὡρισμένου ὄγκου τοῦ ἀτμοῦ τούτου, πρὸς τὸ βάρος ἴσου ὄγκου ἀέρος ὑπὸ τὰς αὐτὰς συνθήκας θερμοκρασιας καὶ πιέσεως.

$$\text{Πυκνότης τοῦ ἀτμοῦ ὕδατος} = 0{,}622 = \frac{5}{8}$$

β.′ *Βάρος ἑνὸς ὄγκου* V *ἀτμοῦ*, πυκνότητος d, εἰς τὴν θερμοκρασίαν t καὶ ὑπὸ πίεσιν P.

$$B = V \times 1{,}293 \times d \times \frac{F}{760} \times \frac{1}{1+\alpha t}$$

ὅπου F ἡ μεγίστη τάσις τοῦ ἀτμοῦ εἰς θερμοκρασίαν t.

γ′. *Βάρος ὄγκου* V *ἀέρος κεκορεσμένου ὑγρασίας* εἰς t^0 καὶ ὑπὸ πίεσιν F.

$$B = V \times 1{,}293 \times \frac{P - \frac{3}{8}F}{760} \times \frac{1}{1+\alpha t}$$

ὅπου F ἡ μεγίστη τάσις τοῦ ἀτμοῦ εἰς t^0.

δ.′ *Ἀπόλυτος ὑγρασία ἀέρος*. Καλεῖται τὸ ποσὸν τῶν ὑδρατμῶν αὐτοῦ κατά τινα χρονικὴν στιγμήν.

ε′. *Σχετικὴ ὑγρασία*. Εἶναι ὁ λόγος τῆς ποσότητος τῶν ὑδρατμῶν τοῦ ἀέρος πρὸς τὴν ποσότητα, ἥν θὰ εἶχεν οὗτος, ἐάν, ὑπὸ τὴν αὐτὴν θερμοκρασίαν, ἦτο εἰς τὴν κατάστασιν τοῦ κόρου.

$$\text{Ὑγρομετρικὴ κατάστασις} \quad E = \frac{f}{F} = \frac{m}{M}$$

ϛ′. ΘΕΡΜΙΔΟΜΕΤΡΙΑ

α′. *Μονὰς θερμότητος*. Ἡ ***θερμὶς*** (calorie) εἶναι ἡ ποσότης τῆς θερμότητος ἡ ἀναγκαία διὰ νὰ ὑψωθῇ ἡ θερμοκρασία ἑνὸς γράμμου ὕδατος ἀπεσταγμένου κατὰ 1^0.

β′. *Εἰδικὴ θερμότης ἑνὸς σώματος*. Εἶναι ἡ ποσότης τῆς θερμότητος ἡ ἀναγκαία διὰ νὰ ὑψωθῇ ἡ θερμοκρασία ἑνὸς γράμμου τοῦ σώματος κατὰ ἕνα βαθμόν.

Εἰδικὴ θερμότης ὕδατος = 1.

γ′. *Θερμοχωρητικότης σώματος* εἶναι τὸ γινόμενον τῆς μάζης τοῦ σώματος ἐπὶ τὴν εἰδικὴν θερμότητα.

Τὸ ποσὸν τῆς θερμότητος ὅπερ λαμβάνει σῶμα τι ἵνα ἡ θερμοκρασία τοῦ σώματος ὑψωθῇ ἀπὸ t_1 εἰς t_2 εἶναι : $Q = m.\ c\ (t_2 - t_1)$ ὅπου m ἡ μᾶζα καὶ c ἡ εἰδικὴ θερμότης τοῦ σώματος.

δ'. Μέθοδος τήξεως τοῦ πάγου πρὸς εὕρεσιν τῆς εἰδικῆς θερμότητος. Ὁ τύπος εἶναι :

$$m.\ c.\ t = M.\ \lambda$$

ὅπου m τὸ βάρος τοῦ σώματος καὶ t ἡ θερμοκρασία του, c ἡ ζητουμένη εἰδικὴ θερμότης, M τὸ βάρος τοῦ ὕδατος τοῦ ἐκ τῆς τήξεως προελθόντος, καὶ λ ἡ εἰδικὴ θερμότης τοῦ πάγου.

ε'. Μέθοδος μιγμάτων. Μὲ τὴν μέθοδον ταύτην πρέπει νὰ χρησιμοποιήσωμεν τὸν τύπον :

$$m.\ \chi\,(\vartheta' - T) = M\,(T - \vartheta) + B.\ c.\ (T - \vartheta).$$

ὅπου m τὸ βάρος τοῦ σώματος καὶ ϑ' ἡ θερμοκρασία αὐτοῦ, ϑ ἡ θερμοκρασία τοῦ ὕδατος τοῦ θερμιδομέτρου καὶ T ἡ τελικὴ θερμοκρασία μετὰ τὴν μῖξιν. B τὸ βάρος τοῦ δοχείου, καὶ c ἡ εἰδικὴ θερμότης τοῦ μετάλλου τοῦ θερμιδομέτρου, M τὸ βάρος τοῦ ἐν τῷ δοχείῳ ὕδατος, καὶ χ ἡ ζητουμένη εἰδικὴ θερμότης τοῦ σώματος.

ς'. Θερμότης τήξεως σώματός τινος στερεοῦ, καλεῖται τὸ ποσὸν τῆς θερμότητος, ὅπερ ἀπαιτεῖται ἵνα τακῇ ἓν γραμμάριον τοῦ σώματος τούτου, ἄνευ ὑψώσεως τῆς θερμοκρασίας.

Πρὸς προσδιορισμὸν αὐτῆς χρησιμοποιοῦμεν τὸν τύπον :

$$\lambda = \frac{m\,(\vartheta' - \vartheta) - M.\ \varepsilon\,(T - \vartheta')}{M}$$

ὅπου M τὸ βάρος τοῦ σώματος, T ἡ θερμοκρασία τήξεως αὐτοῦ, m τὸ βάρος τοῦ ὕδατος καὶ ϑ ἡ θερμοκρασία αὐτοῦ, ε ἡ εἰδικὴ θερμότης τοῦ σώματος, καὶ ϑ' ἡ τελικὴ θερμοκρασία τοῦ σώματος μετὰ τὴν ψῦξιν.

ζ'. Θερμότης ἐξαερώσεως ὑγροῦ τινος καλεῖται τὸ ποσὸν τῆς θερμότητος, ὅπερ ἀπαιτεῖται ἵνα 1 γράμμον ὑγροῦ ἐξαερωθῇ ἄνευ ὑψώσεως τῆς θερμοκρασίας.

Πρὸς προσδιορισμὸν αὐτῆς κάμνομεν χρῆσιν τοῦ τύπου :

$$(1)\quad M\,(\vartheta' - \vartheta) = m.\ \lambda. + m\,(T - \vartheta)$$

ὅπου m τὸ βάρος τοῦ συμπυκνωθέντος ἀτμοῦ, T ἡ θερμοκρασία αὐτοῦ κατὰ τὴν εἴσοδον ἐν τῷ σωλῆνι συμπυκνώσεως, καὶ λ ἡ θερμότης ἐξαερώσεως. M τὸ βάρος τοῦ ὕδατος καὶ τοῦ ὀφιοειδοῦς σωλῆνος, θερμομέτρου καὶ ἐξαρτημάτων ἀνηγμένων εἰς ὕδωρ, ϑ ἡ ἀρχικὴ θερμοκρασία τοῦ ὕδατος, καὶ ϑ' ἡ τελικὴ θερμοκρασία αὐτοῦ.

Λύοντες τὸν ἄνω (1) τύπον ὡς πρὸς λ λαμβάνομεν :

$$\lambda = \frac{M(\vartheta' - \vartheta) - m(T - \vartheta)}{m}$$

*η'. **Μηχανικὸν ἰσοδύναμον τῆς μεγάλης θερμίδος*** εἶναι ἴσον πρὸς 425 χιλιογραμμόμετρα :

$$E = 425 \text{ χιλιογραμμόμετρα.}$$

Μηχανικὸν ἰσοδύναμον τῆς μικρᾶς θερμίδος εἰς μονάδας C. G. S. εἶναι :

$$q = 4,17 \times 10^7 \text{ ἔργια} = 4,17 \text{ Ἰουλίους}$$

Ἡ Ἰούλιος μονὰς ἰσοῦται πρὸς $\frac{1}{9,81}$ χιλιογραμμόμετρα.

Ζ'. ΘΕΡΜΟΜΗΧΑΝΑΙ

α'. Ὑπολογισμὸς τοῦ ἔργου. Ἔστω P ἡ πίεσις τοῦ εἰσρέοντος ἀτμοῦ, π ἡ πίεσις τῆς ἀτμοσφαίρας, s ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐμβόλου, Λ τὸ μῆκος τῆς διαδρομῆς αὐτοῦ, καὶ n ὁ ἀριθμὸς τῶν διαδρομῶν κατὰ δευτερόλεπτον. Ἡ κινοῦσα δύναμις ἐπὶ τοῦ ἐμβολέως εἶναι $F = Ps - \pi s = (P - \pi)\,s$, τὸ δὲ παραγόμενον εἰς n διαδρομὰς ἔργον κατὰ δευτερόλεπτον, ἤτοι ἡ ἰσχὺς τῆς μηχανῆς εἶναι :

$$W = (P - \pi)\,s.\,\Lambda.\,n.$$

β'. Ἀπόδοσις Θερμομηχανῆς. Καλεῖται ὁ λόγος τοῦ ποσοῦ τῆς θερμότητος τῆς μετατραπείσης εἰς ἔργον, πρὸς τὴν ὅλην παρασχεθεῖσαν θερμότητα.

Ἐὰν ὁ εἰσαχθεὶς ἀτμὸς εἶχε θερμότητα Q_1 θερμίδων, ὁ δὲ ἐξερχόμενος ἀτμὸς ἔχει Q_2 θερμίδας, ἡ μετατραπεῖσα εἰς ἔργον θερμότης εἶναι $Q_1 - Q_2$ καὶ ἡ ἀπόδοσις τῆς μηχανῆς εἶναι :

$$A = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$$

V. ΑΚΟΥΣΤΙΚΗ

α'. Ταχύτης ἤχου. Ἡ ταχύτης V τοῦ ἤχου ἔν τινι ἀερίῳ παρέχεται ὑπὸ τοῦ ἑξῆς τύπου τοῦ Νεύτωνος :

$V = V_0 \sqrt{\frac{1 + \alpha t}{d}}$ ἔνθα t ἡ θερμοκρασία τοῦ ἀερίου, α ὁ συντελεστὴς διαστολῆς τῶν ἀερίων, d ἡ πυκνότης του ὡς πρὸς τὸν ἀέρα, καὶ V_0 ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου ἐν τῷ ξηρῷ ἀέρι εἰς 0^o ἤτοι $V_0 =$ 331,4 μ.

β'. Ὕψος ἤχου. Εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν παλμῶν κατὰ δευτερόλεπτον.

Μεταξὺ τοῦ ὕψους, τῆς ταχύτητος, καὶ τοῦ μήκους κύματος, ὑπάρχει ἡ σχέσις :

$V = N. \lambda.$, ὅπου λ εἶναι τὸ μῆκος κύματος, καὶ N ἡ συχνότης.

γ'. Μουσικὴ κλῖμαξ.

1. Φθόγγοι.	ut	re	mi	fa	sol	la	si	út$_2$
2. Διαστήματα Τονικῆς . .	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{15}{8}$	2
3. Διαστήματα διαδοχικὰ . .	$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{16}{15}$	

δ'. Κύρια διαστήματα.

1. ***Διάστημα ὀγδόης*** $= 2$, διάστημα πέμπτης $= \frac{3}{2}$

διάστημα τρίτης $= \frac{5}{4}$

2. ***Τελεία συμφωνία :*** ut — mi — sol

Δίεσις τοῦ $\overset{d}{\text{ré}} = \text{rè} \times \frac{25}{24}$. Ὕφεσις τοῦ $\overset{\beta}{\text{mi}} = \text{mi} \times \frac{24}{25}$

Ἡ τονικὴ $= la_3 = 435$ διπλοῦς παλμοὺς κατὰ δευτερόλεπτον.

ε'. Νόμοι παλλομένων χορδῶν. Ὁ τύπος, ὅστις μᾶς δίδει τοὺς νόμους εἶναι :

$$N = \frac{1}{2rl} \cdot \sqrt{\frac{M.g}{\pi.\, d}}$$ ὅπου N ἡ συχνότης, 2r ἡ διάμετρος, l τὸ μῆκος, d ἡ πυκνότης τῆς οὐσίας, καὶ M.g τὸ τεῖνον βάρος.

ς'. Ἠχητικοὶ σωλῆνες.

1. ***Ἀνοικτὸς σωλήν.*** Οἱ ἁρμονικοὶ ἀνοικτοῦ σωλῆνος δίδονται ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$N = (2p + 1)\frac{V}{4L}$$ ὅπου p εἶναι ὁ θεμελιώδης $p = 0$, V ἡ ταχύτης διαδόσεως τοῦ ἤχου ἐν τῷ ἀέρι, καὶ L τὸ μῆκος τοῦ σωλῆνος.

2. ***Κλειστὸς σωλήν.*** Οἱ ἁρμονικοὶ δίδονται ὑπὸ τοῦ τύπου:

$$N = p.\frac{V}{2L}$$ ὅπου ὁ θεμελιώδης του ἦχος $p = 1$.

VI ΟΠΤΙΚΗ

Α΄. ΦΩΤΟΜΕΤΡΙΑ

α΄. Φωτεινὴ ῥύσις. Εἶναι ἡ ποσότης τῆς φωτεινῆς ἐνεργείας ἥτις διέρχεται τομήν τινα τῆς φωτεινῆς δέσμης εἰς τὴν μονάδα τοῦ χρόνου.

Ἔντασις φωτεινῆς πηγῆς. Εἶναι ἡ ῥύσις ἥτις διέρχεται καθέτως τὴν μονάδα τῆς ἐπιφανείας εὑρισκομένης εἰς ἀπόστασιν ἴσην πρὸς τὴν μονάδα.

Ἐὰν Φ εἶναι ἡ ὁλικὴ ῥύσις φωτεινῆς πηγῆς, τότε τὴν μονάδα τῆς ἐπιφανείας σφαίρας ἀκτῖνος 1, διέρχεται φωτεινὴ ἐνέργεια: $\frac{\Phi}{4\pi} = I$ ἔντασις.

β΄. Φωτισμὸς καλεῖται ἡ φωτεινὴ ῥύσις ἥτις προσπίπτει ἐπὶ τῆς μονάδος τῆς ἐπιφανείας ταύτης, ὁμοιομόρφως φωτιζομένης.

Φωτισμὸς $\varepsilon = \frac{\Phi}{s}$ ὅπου s τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας

1. ***Νόμος φωτομετρίας.*** Αἱ ἐντάσεις δύο φωτεινῶν πηγῶν εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν ἀποστάσεων αὐτῶν ἀπὸ τῆς ἐπιφανείας, ἥν ἐξ ἴσου φωτίζουσι:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}$$

2. ***Λαμπρότης φωτεινῆς πηγῆς.*** Καλεῖται ὁ λόγος τῆς ἐντάσεως πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς φωτεινῆς πηγῆς.

3. ***Νόμος φωτισμοῦ.*** Ὁ φωτισμός, τὸν ὁποῖον δέχεται ἐπιφάνειά τις ἀπὸ φωτεινῆς πηγῆς, εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογος πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ἀποστάσεως αὐτῆς ἀπὸ τῆς πηγῆς, καὶ ἀνάλογος πρὸς τὸ συνημίτονον τῆς γωνίας ἥν σχηματίζουσιν αἱ φωτειναὶ ἀκτῖνες πρὸς τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν ἐπιφάνειαν:

$$\varepsilon_1 = \frac{I}{P^2} \text{ συν } \alpha$$ ἔνθα ε_1 ὁ φωτισμός, I ἡ ἔντασις, P ἡ ἀκτὶς καὶ α ἡ γωνία.

Μονάδες ἐντάσεως :

1 Carcel = 0,481 Violle = 10,9 Hefner

Β΄. ΑΝΑΚΛΑΣΙΣ ΦΩΤΟΣ

α΄. Νόμοι ἀνακλάσεως. Ἡ προσπίπτουσα καὶ ἡ ἀνακλωμένη ἀκτὶς εὑρίσκονται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου καθέτου πρὸς τὴν ἀνακλῶσαν ἐπιφάνειαν.

1. ***Ἐπίπεδα κάτοπτρα.*** Τὸ εἴδωλον εἶναι φανταστικὸν καὶ συμμετρικὸν τοῦ ἀντικειμένου ὡς πρὸς τὸ κάτοπτρον.

2. ***Κοῖλα κάτοπτρα.*** Γενικὸς τύπος :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}$$

p εἶναι ἡ ἀπόστασις τοῦ ἀντικειμένου ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ κυτόπτρου
p΄ » » » » εἰδώλου » » » » »
f εἶναι ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις.

Σχέσις μεταξὺ τοῦ μεγέθους τοῦ εἰδώλου καὶ τοῦ ἀντικειμένου.

$$\frac{i}{o} = \frac{p'}{p} = \frac{f}{p - f}$$

3. ***Κυρτὰ κάτοπτρα.*** Γενικὸς τύπος:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = -\frac{1}{f}$$

Σχέσις μεγέθους μεταξὺ εἰδώλου καὶ ἀντικειμένου.

$$\frac{i}{o} = \frac{p'}{p} = \frac{f}{p + f}$$

4. ***Τύπος Νεύτωνος.*** Καλοῦντες π καὶ π΄ τὰς ἀποστάσεις τοῦ εἰδώλου καὶ τοῦ ἀντικειμένου ἀπὸ τῆς ἑστίας, ἔχομεν τὴν σχέσιν :

$$\frac{i}{o} = \frac{\pi'}{f} = \frac{f}{\pi}$$

ἐξ οὗ $\pi \, \pi' = f$

Ὁ τύπος οὗτος ἐφαρμόζεται εἰς τὰ κοῖλα καὶ κυρτὰ σφαιρικὰ κάτοπτρα

Γ΄. ΔΙΑΘΛΑΣΙΣ ΦΩΤΟΣ

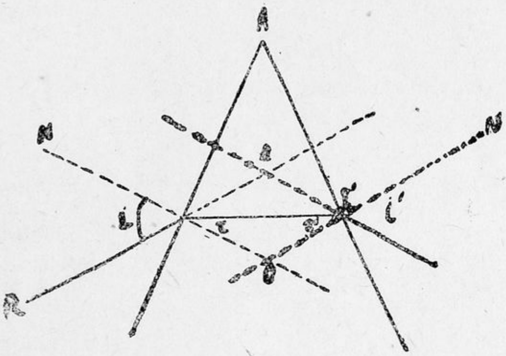
α΄. Νόμος διαθλάσεως. Τὸ ἡμίτονον τῆς γωνίας προσπτώσεως διὰ τοῦ ἡμιτόνου τῆς γωνίας διαθλάσεως εἶναι σταθερὸς ἀριθμὸς καὶ καλεῖται δείκτης διαθλάσεως τοῦ δευτέρου μέσου ὡς πρὸς τὸ πρῶτον :

$$\frac{\text{ἡμ}\, i}{\text{ἡμ}\, r} = n$$

Ὁρικὴ γωνία. Εἶναι ἐκείνη ἡ ὁποία ἔχει ὡς ἡμίτονον τὸ ἀντίστροφον τοῦ δείκτου διαθλάσεως.

$$\text{ἡμ.}\, L = \frac{1}{n}$$

1. ***Τύποι πρίσματος :***



$$\frac{\text{ἡμ}\, i}{\text{ἡμ}\, r} = \frac{\text{ἡμ}\, i'}{\text{ἡμ}\, r'} = n$$

$$A = r + r'$$

$$\Delta = \iota + \iota' - A$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς ἐλαχίστης ἐκτροπῆς : $i = i'$ καὶ $r = r'$

ἐξ οὗ

$$A = 2r$$

$$\Delta = 2i - 2r$$

$$\frac{\text{ἡμ}\, \frac{\Delta + A}{2}}{\text{ἡμ}\, \frac{A}{2}} = n$$

Διὰ μικρᾶς γωνίας $i = n\,r$

$$\Delta = (n - 1)\,A.$$

2. ***Φακοὶ συγκλίνοντες.*** Τύπος : $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}$

Μέγεθος εἰδώλου καὶ ἀντικειμένου : $\frac{i}{o} = \frac{p'}{p} = \frac{f}{p-f}$

Ὑπολογισμὸς τῆς ἑστιακῆς ἀποστάσεως συναρτήσει τοῦ δείκτου διαθλάσεως n καὶ τῶν ἀκτίνων καμπυλότητος R_1 καὶ R_2

$$(n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \frac{1}{f}$$

3. ***Ἀποκλίνοντες φακοί.*** Τύπος : $\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f}$

Μέγεθος εἰδώλου καὶ ἀντικειμένου : $\frac{i}{o} = \frac{p'}{p} = \frac{f}{p+f}$

Ὁ τύπος $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \left(n-1\right)\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)$

καὶ $\frac{i}{o} = \frac{p'}{p}$

ἐφαρμόζεται εἰς ὅλας τὰς περιπτώσεις τῶν συγκλινόντων καὶ ἀποκλινόντων φακῶν, ἐὰν ὑποθέσωμεν τὰ p, p′ καὶ f θετικὰ διὰ τὰ πραγματικὰ εἴδωλα, καὶ ἀρνητικὰ διὰ τὰ φανταστικὰ εἴδωλα.

4. ***Ἰσχὺς φακῶν.*** Ἰσχὺς ἑνὸς φακοῦ λέγεται τὸ ἀντίστροφον τῆς ἑστιακῆς ἀποστάσεως. Ἐὰν ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις ἐκφράζεται εἰς μέτρα, ἡ ἰσχὺς θὰ ἐκφράζεται εἰς διοπτρίας.

5. ***Μεγένθυσις φακοῦ.*** Ἡ μεγέθυνσις φακοῦ ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῆς ἰσχύος Π ἐπὶ τὴν ἐλαχίστην ἀπόστασιν Δ τῆς εὐκρινοῦς ὁράσεως τοῦ ὀφθαλμοῦ τοῦ παρατηρητοῦ.

Ἤτοι $M = \Pi \times \Delta = \frac{1}{f} \times \Delta$

6. ***Μεγέθυνσις μικροσκοπίου.*** Ἡ μεγέθυνσις τοῦ μικροσκοπίου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς μεγεθύνσεως τοῦ προσοφθαλμίου ἐπὶ τὴν μεγέθυνσιν τοῦ ἀντοφθαλμίου.

Ἤτοι $M = g \times g'$

7. ***Μεγένθυσις ἀστρονομικῆς διόπτρας.*** Εἶναι τὸ πηλίκον τῆς ἑστιακῆς ἀποστάσεως τοῦ ἀντικειμενικοῦ, διὰ τῆς ἑστιακῆς ἀποστάσεως τοῦ προσοφθαλμίου.

8. ***Μῆκος φωτεινοῦ κύματος*** καλεῖται ἡ ἀπόστασις, εἰς ἥν μεταδίδεται ἡ παλμικὴ κίνησις κατὰ τὴν διάρκειαν μιᾶς περιόδου T.

Τὸ μῆκος κύματος λ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου : $\lambda = V.T$ ὅπου V ἡ ταχύτης καὶ T ἡ περίοδος.

Ἐὰν N ὁ ἀριθμὸς τῶν παλμῶν κατὰ δευτερόλεπτον, τότε $NT = 1$

καὶ $V = N.\lambda$

VII. ΗΛΕΚΤΡΙΣΜΟΣ

Α'. ΣΤΑΤΙΚΟΣ ΗΛΕΚΤΡΙΣΜΟΣ

α'. Νόμος ἕλξεων καὶ ὤσεων.

$$f = \varkappa . \frac{m . m'}{d^2} \qquad \text{εἰς τὸν ἀέρα} \quad \varkappa = 1$$

τὸ f ἐκφράζεται εἰς δύνας.

m καὶ m' εἰς ἠλεκτροστατικὰς μονάδας ποσότητος

d εἰς ἑκατοστόμετρα.

β'. Ἠλεκτρικὴ πυκνότης σφαίρας ἠλεκτρισμένης.

$$\sigma = \frac{m}{4\pi R^2} \text{ ἠλεκτροστ. μονάδας C. G. S.}$$

γ'. Σχέσις μεταξὺ τοῦ δυναμικοῦ V, τοῦ φορτίου Q, καὶ τῆς χωρητικότητος C ἑνὸς ἀγωγοῦ.

$$C = \frac{Q}{V} \quad \text{ἢ} \quad Q = CV$$

Ἐὰν ὁ ἀγωγός εἶναι σφαῖρα, τότε $C = R$ ἐξ οὗ

$Q = VR$ U. E. S ἠλεκτροστατικαὶ μονάδες.

δ'. Διανομὴ τοῦ ἠλεκτρισμοῦ μεταξὺ δύο ἀγωγῶν τεθέντων εἰς συγκοινωνίαν.

α') προτοῦ συγκοινωνήσουν $\left\{ \begin{array}{l} m = cv \\ m' = c'v' \end{array} \right.$

β') ἀφοῦ συγκοινωνήσουν :

$$m + m' = cv + c'v' = (c + c')\,v$$

ἐξ οὗ $\quad V = \dfrac{cv + c'v'}{c + c'}$

ε'. Ἐνέργεια ἀγωγοῦ ἠλεκτρισμένου καὶ μεμονωμένου. Ἔργον παραγόμενον κατὰ τὴν ἐκφόρτωσίν του.

$$W = \frac{QV}{2} = \frac{CV^2}{2}$$ ἔργια (τὸ W εἶναι ἔργια)

ϛ'. Πρακτικαὶ μονάδες.

1) Ποσότητος :	Coulomb	ἰσοδυναμοῦν	3×10^9	U.E.S.
2) Δυναμικοῦ :	Volt	»	$\frac{1}{300}$	»
3) Χωρητικότητος:	Farad	»	9×10^{11}	»
	Microfarad	»	9×10^5	»
4) Ἐνεργείας :	Joule	»	10^7	ἔργια
5) Ἰσχύος ;	Watt (1 joule κατὰ δευτερόλεπτον) ἰσοδυναμοῦν πρὸς		10^7	»

Αἱ μονάδες ἐλήφθησαν κατὰ τρόπον ὥστε Q ἐκφράζεται εἰς coulombs, V εἰς volts, C εἰς farads, καὶ ὁ τύπος $Q = CV$ ἐφαρμόζεται. Ὁ δὲ τύπος $W = \frac{CV^2}{2}$ παριστᾷ τότε joules.

Β'. ΔΥΝΑΜΙΚΟΣ ΗΛΕΚΤΡΙΣΜΟΣ

α'. Πρακτικαὶ μονάδες.

1. ***Μονὰς ποσότητος.*** Εἶναι ἡ Coulomb, ἡ ποσότης τοῦ ἠλεκτρισμοῦ, ἥτις ἀποσυνθέτει κατὰ τὴν ἠλεκτρόλυσιν τοῦ ὕδατος $\frac{1}{96600}$ γραμ. ὑδρογόνου.

2. ***Μονὰς ἐντάσεως***. Εἶναι ἡ ampère, ἡ ἔντασις τοῦ ῥεύματος ἥτις ἀποσυνθέτει $\frac{1}{96600}$ γραμ. ὑδρογόνου εἰς ἓν δευτερόλεπτον.

3. ***Μονὰς ἠλεκτρεγερτικῆς δυνάμεως***: Volt $= \frac{1}{300}$ U.E.S. τοῦ δυναμικοῦ.

4. ***Μονὰς ἀντιστάσεως***. Ἡ ohm, ἡ ἀντίστασις ἣν προβάλλει στήλη ὑδραργύρου εἰς 0^0 τομῆς 1 τετραγ. χιλιοστ. καὶ μήκους 106 ἑκατοστομέτρων.

Ἡ ohm $= 10^9$ ἠλεκτρομαγνητικαὶ μονάδες C.G.S.

5. ***Μονὰς ἔργου***. Ἡ joule $= 10^7$ ἔργια.

Μονὰς ἰσχύος. Ἡ Watt $=$ 1 joule κατὰ δευτερόλεπτον. Εἰς τοὺς τύπους, τοὺς ὁποίους θὰ χρησιμοποιήσωμεν κατωτέρω, θὰ παριστάνωμεν τὴν μὲν ἔντασιν εἰς ampères διὰ I, τὴν ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν εἰς volts διὰ E, τὴν ἀντίστασιν εἰς ohm διὰ R, ἢ r, ἢ ρ, τὸ ἔργον ἢ τὴν ἰσχὺν διὰ W, καὶ τὰς ποσότητας τοῦ ἠλεκτρισμοῦ ἢ τὴν θερμότητα διὰ Q.

β'. Νόμος *ohm*. Ἡ ἔντασις ῥεύματος εἶναι ἀνάλογος τῆς διαφορᾶς δυναμικοῦ καὶ ἀντιστρόφως ἀνάλογος τῆς ἀντιστάσεως.

1. Ἡ ἔντασις I μεταξὺ δύο σημείων A καὶ B κυκλώματος, ἐὰν παραστήσωμεν διὰ V καὶ V' τὰ δυναμικὰ εἰς τὰ σημεῖα A καὶ B καὶ r τὴν ἀντίστασιν τοῦ ἀγωγοῦ, εἶναι:

$$I = \frac{V - V'}{r}$$

καὶ ἂν $V - V' = e$ ἔχομεν $I = \frac{e}{r}$

2. Ἡ ἔντασις εἰς ὅλον τὸ κύκλωμα, ἂν E εἶναι ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τοὺς δύο πόλους ἀνοικτοῦ κυκλώματος, R ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις τῆς στήλης, r ἡ ἐξωτερικὴ ἀντίστασις καὶ e ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τοὺς δύο πόλους κλειστοῦ κυκλώματος, εἶναι:

$$I = \frac{E}{R + r}$$

Εἰς τὸν ἐξωτερικὸν ἀγωγόν: $I = \frac{e}{r}$

Εἰς τὴν στήλην: $I = \frac{E - e}{R}$

γ'. Συνένωσις στοιχείων.

1. ***Ἐν σειρᾷ ἢ κατὰ τάσιν.*** Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ n τὸν ἀριθμὸν τῶν στοιχείων, διὰ R τὴν ἀντίστασιν ἑνὸς στοιχείου, διὰ r τὴν ἐξωτερικὴν ἀντίστασιν, καὶ διὰ E τὴν ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν ἑνὸς στοιχείου, ἔχομεν :

$$I = \frac{nE}{nR + r}$$

2. ***Κατὰ ποσότητα ἢ ἐν παραλλήλῳ.*** Ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις εἶναι τοῦ ἑνὸς στοιχείου, καὶ ἡ ἀντίστασις καθίσταται n φορὰς μικροτέρα. Ἡ ἔντασις εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἔντασιν ἑνὸς στοιχείου ἐπιφανείας n φορὰς μεγαλητέρας :

$$I = \frac{E}{\frac{R}{n} + r} = \frac{nE}{R + nr}$$

3. ***Μικτή.*** Σχηματίζομεν n σειρὰς ἐκ m στοιχείων ἐν παραλλήλῳ καὶ συνδέομεν τὰς n σειρὰς κατὰ τάσιν

$$I = \frac{nE}{\frac{nR}{m} + r} = \frac{E}{\frac{R}{m} + \frac{r}{n}}$$

Τὸ μέγιστον τῆς ἐντάσεως εἶναι ὅταν ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἐξωτερικὴν ἀντίστασιν :

$$\frac{nR}{m} = r$$

δ'. Ἀντιστάσεις.

1. ***Εἰδικὴ ἀντίστασις.*** Εἶναι ἡ ἀντίστασις σύρματος, ὅπερ ἔχει μῆκος 1 ἑκατοστόμετρον καὶ τομὴν 1 τετραγ. ἑκατοστομ.

Ἡ ἀντίστασις ἀγωγοῦ τομῆς s καὶ μήκους l εἶναι :

$$r = \rho \frac{l}{s} \quad \text{ὅπου } \rho \text{ ἡ εἰδικὴ ἀντίστασις.}$$

2. ***Ρεῦμα εἰς κύκλωμα ἁπλοῦν.*** Ἐὰν ἀγωγὸς ἀποτελεῖται ἀπὸ τρεῖς ἄλλους ἀγωγοὺς ἐν σειρᾷ, ἀντιστάσεων r, r', r'' καὶ R ἡ ἀντίστασις τῆς στήλης, τότε ἡ ἔντασις εἰς τὸ κύκλωμα εἶναι ;

$$I = \frac{E}{R + r + r' + r''}$$

Ἂν e , e′ , e″ εἶναι ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ μεταξὺ τῶν σημείων Α καὶ Β, καὶ Β, Γ, καὶ Γ, Δ, ἔχομεν :

$$e = I\,r \quad , \quad e' = I\,r' \quad e'' = I\,r''$$

ε′. ***Νόμος*** *joule*. Ἡ ποσότης τῆς θερμότητος ἡ ἀναπτυσσομένη εἰς κύκλωμα ἀντιστάσεως R εἶναι :

$$Q = A\,I^2\,R\,t = A\,E\,I\,t$$

Τὸ A εἶναι ἰσοδύναμον τῆς θερμότητος εἰς joule ἰσοδυναμοῦν πρὸς $\frac{1}{4{,}18}$ θερμίδας.

Ἠλεκτρικὴ ἰσχὺς πηγῆς εἰς *Watt*.

$$\text{Ἰσχὺς} \quad P = I^2R = EI = \frac{E^2}{R}$$

ϛ′. ***Χημικὰ ἀποτελέσματα ῥεύματος. Νόμος*** *Faraday*.

1. Τὸ βάρος τοῦ ἐκλυομένου ὑδρογόνου ὑπὸ ἠλεκτρικοῦ ῥεύματος ἐντὸς βολταμέτρου εἶναι ἀνάλογον τῆς ἐντάσεως τοῦ ῥεύματος. Τὸ βάρος τοῦτο εἶναι $\frac{1}{96600}$ γραμ. ἢ 0,01035 χιλιοστόγρ. ὑδρογόνου κατὰ ampère εἰς ἕν δευτερόλεπτον, ἢ ὑπὸ coulomb εἰς οἱανδήποτε χρόνον.

2. Τὸ βάρος M τοῦ ἠλεκτρολυομένου μετάλλου εἶναι ἀνάλογον τοῦ ἠλεκτροχημικοῦ ἰσοδυνάμου e τοῦ μετάλλου τούτου.

3) ***Ἠλεκτροχημικὸν ἰσοδύναμον.*** Εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀτομικοῦ βάρους διὰ τῶν μονάδων συγγενείας τοῦ σώματος.

Διὰ ῥεῦμα ἐντάσεως I ampères , ἡ μᾶζα τοῦ ἠλεκτρολυομένου μετάλλου εἰς t δευτερόλεπτα θὰ εἶναι :

$$M = \frac{e.\ I.\ t.}{96600}$$

ζ′. ***Ρεύματα διακλαδώσεως. Κανόνες*** *Kirchhyoff*. Ὅταν ἀγωγὸς διακλαδίζεται εἰς τρεῖς ἄλλους εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β, ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ μεταξὺ Α καὶ Β εἶναι $V - V' = e$, καὶ ἡ ὁλικὴ ἔντασις εἶναι εἰς τὸν ἁπλοῦν ἀγωγόν : $\quad I = i + i' + i''$

καὶ ἡ πτῶσις τοῦ δυναμικοῦ μεταξὺ τῶν αὐτῶν σημείων εἶναι

$$e = i\,r = i'\,r' = i''\,r''$$

Συνένωσις ἀγωγῶν. Ἕνωσις ἐν σειρᾷ :

$$R = R_1 + R_2 + R_3 \ldots.$$

Ἕνωσις κατὰ διακλάδωσιν ἢ ἐν παραλλήλῳ :

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

Γ΄. ΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ ΚΑΙ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ

α΄. ***Νόμος ἕλξεων καὶ ὤσεων.***

$$f = K. \frac{m.m'}{d^2}$$

τὸ f ἐκφράζεται εἰς δύνας. m καὶ m' εἶναι αἱ μαγνητικαὶ μᾶζαι. Τὸ d ἐκφράζεται εἰς ἑκατοστόμετρα. Τὸ K = 1 εἰς τὸν ἀέρα.

β΄. ***Μαγνητικὴ ροπὴ*** ράβδου μαγνητισμένης μήκους L, τῆς ὁποίας ἕκαστος πόλος ἔχει μαγνητικὴν μᾶζαν m εἶναι :

$$M = L.\ m$$

γ΄. ***Μαγνητικὴ κατάστασις*** σώματός τινος μαγνητικῆς ῥοπῆς M καὶ ὄγκου υ εἶναι ἡ ἔντασις μαγνητίσεως j.

$$j = \frac{M}{\upsilon}$$

δ΄. ***Ἔντασις μαγνητικοῦ πεδίου*** εἰς ἓν σημεῖον εἶναι ἡ ἐνέργεια, ἥν τὸ πεδίον ἐξασκεῖ ἐπὶ πόλου μαγνήτου μαγνητικῆς μάζης + 1 τοποθετημένου εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο.

$$\text{Ἔντασις μαγν. πεδίου } H = \frac{f}{m}$$

f εἶναι ἡ δύναμις ἡ ἐξασκουμένη ἐπὶ τῆς μαγνητικῆς μάζης m.

Μονὰς ἐντάσεως εἶναι ἡ *gauss*, δηλαδὴ ἡ ἔντασις μαγνητικοῦ πεδίου, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ μονὰς τοῦ μαγνητισμοῦ ὑφίσταται δύναμιν ἴσην πρὸς 1 δύνην. Ἐὰν ἡ δύναμις ἰσοδυναμεῖ πρὸς H δύνας, τὸ πεδίον ἰσοδυναμεῖ πρὸς H gauss.

1. ***Μαγνητικὴ ῥοή*** διὰ μέσου μιᾶς ἐπιφανείας S εἶναι HS. Μονὰς ῥοῆς εἶναι ἡ maxwell.

2. ***Μαγνητικὴ ἔντασις εἰς τόπον τινὰ*** εἶναι ἡ δύναμις T ἡ ὀφειλομένη εἰς τὸ γήϊνον πεδίον, ὅπερ ἐνεργεῖ ἐπὶ τῆς μονάδος τοῦ μαγνητισμοῦ εἰς τὸν τόπον τοῦτον.

Ἡ δύναμις, ἥτις ἐνεργεῖ ἐπὶ ἑνὸς πόλου μάζης m εἶναι :

$$F = T\ m.$$

3. ***Ἔντασις πεδίου σωληνοειδοῦς.*** Εἰς τὸ ἐσωτερικὸν πηνίου μήκους l, τομῆς S, σχηματιζομένου ἀπὸ N σπείρας καὶ διαρρεομένου ὑπὸ I ἀμπὲρ εἶναι :

$$H = \frac{4\pi NI}{10.l} = 1{,}25.\ n.\ I \text{ gauss}$$

$n = \frac{N}{l}$ εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν στροφῶν, καὶ nI ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀμπεροστροφῶν κατὰ ἑκατοστόμετρον,

4. ***Μαγνητικὴ ῥοπὴ πηνίου ἄνευ σιδήρου :***

$$M = \frac{NIS}{10}$$

5. ***Μαγνητικὴ διαπερατότης.*** Ἔστω H ἡ τιμὴ μαγνητικοῦ πεδίου εἰς τὸν ἀέρα ἐντὸς πηνίου, καὶ B ἡ τιμὴ τὴν ὁποίαν λαμβάνει τὸ ἴδιον πεδίον ἐντὸς τοῦ σιδήρου, τὸν ὁποῖον εἰσάγει τις ἐντός, τότε :

$\mu = \frac{B}{H}$ εἶναι ἡ μαγνητικὴ διαπερατότης τοῦ μέσου τούτου. Ἡ τιμὴ B ὀνομάζεται ***μαγνητικὴ ἐπαγωγὴ*** τοῦ μέσου τούτου.

6. ***Ἔντασις μαγνητίσεως ἠλεκρομαγνήτου :***

$$j = \frac{B}{4\pi} = \frac{NI\mu}{10.l}$$

Δ'. ΗΛΕΚΤΡΙΚΑΙ ΜΗΧΑΝΑΙ

α'. Ἔργον πρὸς λειτουργίαν δυναμομηχανῆς. Ἀπόδοσις.

1. Ἵνα παραχθῇ ῥεῦμα ἐν τῇ μηχανῇ, δέον νὰ δαπανηθῇ μηχανικὸν ἔργον. Ἔστω E Volt ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις τῆς μηχανῆς, R ἡ ἐξωτερικὴ καὶ r ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις, καὶ i ἡ ἔντασις τοῦ ῥεύματος.

Τότε : $\quad i = \frac{E}{R+r}$

Ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ e εἰς τοὺς πόλους τῆς μηχανῆς θὰ εἶναι : $e = Ri$ ὅθεν $e = E - ri$

Ἡ ὁλικὴ ἰσχὺς τῆς μηχανῆς θὰ εἶναι : $W_o = Ei$, ἡ δὲ διαθέσιμος ἰσχὺς αὐτῆς (W) ἥν δύναται νὰ παράσχῃ εἰς τὸ ἐξωτερικὸν κύκλωμα εἶναι e.i , ὅθεν :

$$W = ei = Ei - ri^2$$

Ἡ ἐνέργεια ri^2 θερμαίνει τὴν μηχανὴν καὶ καταναλίσκεται.

2. ***Ἀπόδοσις δυναμομηχανῆς*** καλεῖται ὁ λόγος τῆς ὠφελίμου ἰσχύος W πρὸς τὴν ὅλην ἰσχὺν W_m ἥν δαπανᾷ ἡ κινοῦσα ταύτην ἀτμομηχανή.

Ἡ μεγίστη ἰσχὺς τῆς μηχανῆς εἶναι :

$$W \text{ μεγίστη} = E \times \frac{E}{r} = \frac{E^2}{r}$$ watts ὅταν μηδενίζεται ἡ ἀντίστασις R.

3. ***Ἀπόδοσις κινητῆρος*** καλεῖται ὁ λόγος τῆς μηχανικῆς ἰσχύος P' ἣν ὁ κινητὴρ παρέχει ἐπὶ τοῦ ἄξονος, πρὸς τὴν παρεχομένην ἰσχὺν P εἰς τὸν κινητῆρα, ἤτοι :

$$n = \frac{P'}{P}$$

Λόγῳ τῶν ἀπωλειῶν καὶ τῆς τριβῆς ἡ ἰσχὺς P' εἶναι μικροτέρα τῆς P.

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΑΥΤΩΝ

I. ΜΗΧΑΝΙΚΗ

Α΄. ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΚΑΙ ΔΥΝΑΜΙΚΗ

1. Ἡ ἀπόστασις δύο σταθμῶν σιδηροδρόμου εἶναι ἴση πρὸς 10 χιλιόμ., καὶ διανύεται ὑπὸ τούτου μετὰ κινήσεως ὁμαλῆς ἐντὸς 10 πρώτων λεπτῶν. Ποία εἶναι ἡ ταχύτης καθ' ὥραν τοῦ σιδηροδρόμου;

Λύσις: $$e = \upsilon t \quad \text{καὶ} \quad \upsilon = \frac{e}{t}$$

ἑπομένως $$10000 : \frac{10}{60} = 60000 \text{ μ.}$$

2. Κινητὸν ἀναχωρῆσαν ἐκ τῆς ἠρεμίας διήνυσε 90 χιλμ. μὲ ἐπιτάχυνσιν 5 χλμ. τὴν ὥραν. Ποία νῦν ἡ ταχύτης τοῦ κινητοῦ; Ποία ἡ ταχύτης του μετὰ παρέλευσιν 45 πρώτων λεπτῶν καὶ ἐντὸς πόσου χρόνου θὰ γίνῃ 60 χιλιόμετρα;

Λύσις: $$\upsilon = \sqrt{2.5.90} = 30 \text{ χλμ.}$$

$$\upsilon_{45'} = 5.\frac{45}{60} = 3\,\frac{3}{4} \text{ χιλμ.}$$

$$x = \frac{60}{5} = 12 \text{ ὧραι.}$$

3. Κινητὸν ἀναχωρεῖ ἐκ τῆς ἠρεμίας. Ποῖον τὸ διάστημα μετὰ 3 ὥρας, ἐὰν $\gamma = \pm\, 2$ καθ' ὥραν;

Λύσις: $$e = \frac{1}{2}\left(\pm 2\right) 3^2 = \pm\, 9 \text{ χλμ.}$$

4. Ποῖον πρέπει νὰ εἶναι τὸ διανυθὲν διάστημα ὑπὸ σώματος ἔχοντος κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην, ὥστε ἡ ταχύτης νὰ ἰσοῦται ἀριθμητικῶς πρὸς τὸ ἥμισυ τοῦ διανυθέντος διαστήματος ;

Λύσις : $\upsilon = \sqrt{2\gamma e}$ ὥστε $\frac{e}{2} = \sqrt{2\gamma e}$ καὶ $\frac{e^2}{4} = 2\gamma e$

καὶ $e^2 = 8\gamma e$ ἑπομένως $e = 8\gamma$

5. Δύο κινητὰ ἀναχωροῦσιν ἐκ τῶν δύο ἄκρων A καὶ B εὐθείας, οὕτως ὥστε νὰ συναντηθῶσι, μὲ ταχύτητας υ καὶ υ'. Ζητεῖται νὰ προσδιορισθῇ τὸ σημεῖον C τῆς συναντήσεώς των.

Λύσις. Ἔστω C τὸ σημεῖον συναντήσεως καὶ ἔστω $AC = x$, $AB = \alpha$, τότε $CB = \alpha - x$.

Ἔστω t ὁ χρόνος εἰς τὸ τέλος τοῦ ὁποίου θὰ γίνῃ ἡ συνάντησις. Γνωρίζομεν ὅτι $e = \upsilon t$ τότε $x = \upsilon t$ καὶ $\alpha - x = \upsilon' t$ ἐξ

οὗ $t = \frac{x}{\upsilon}$ καὶ $t = \frac{\alpha - x}{\upsilon'}$ τότε $\frac{x}{\upsilon} = \frac{\alpha - x}{\upsilon'}$ καὶ λύοντες ἔχομεν :

$\upsilon x + x\upsilon' = \alpha\upsilon$ καὶ $x = \frac{\alpha\upsilon}{\upsilon + \upsilon'}$ ἐπειδὴ δὲ $x = \upsilon t$

ἔχομεν $\upsilon t = \frac{\alpha\upsilon}{\upsilon + \upsilon'}$ ἐξ οὗ $t = \frac{\alpha}{\upsilon + \upsilon'}$

6. Σῶμα ἔχον κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην ἀναχωρεῖ ἐκ τῆς ἠρεμίας καὶ διανύει 5 μέτρα κατὰ τὸ πρῶτον δευτερόλεπτον. Ζητεῖται α΄. Ποῖον εἶναι τὸ διανυθὲν διάστημα ἐντὸς 8 δευτερολέπτων. β΄. Ποία εἶναι ἡ ταχύτης εἰς τὸ τέλος τοῦ αὐτοῦ χρόνου.

Λύσις : $e = \frac{1}{2} \cdot 5 .\ 64 = 160$ καὶ $\upsilon = 5 \times 8 = 40.$

7. Κινητὸν ἀναχωρεῖ ἐκ τῆς ἠρεμίας καὶ διανύει 110 χλμ. μετ᾽ ἐπιταχύνσεως 2 χλμ. καθ᾽ ὥραν. Ποία ἡ ταχύτης τοῦ κινητοῦ μετὰ παρέλευσιν 50″ καὶ ἐντὸς πόσου χρόνου ἡ ταχύτης θὰ γίνῃ 70 χιλιόμετρα ;

Λύσις: $\upsilon = \sqrt{2 e \gamma} = 21$

$$\upsilon_1 = 2 \times \frac{50}{3600} = 0{,}027$$

$$x = \frac{70}{2} = 35 \text{ ὧραι.}$$

8. Σημεῖον κείμενον εἰς τὸν Ἰσημερινὸν τῆς γῆς διατρέχει εἰς 24 ὥρας μίαν περιφέρειαν ἀκτῖνος 6378200 μέτρων. Ποία ἡ ταχύτης του κατὰ δευτερόλεπτον ;

Λύσις ; $\upsilon = \frac{2\pi R}{t}$ $\upsilon = \frac{6378200 \times 2\pi}{86400}$ =464,9 μέτρα.

9. Ποία εἶναι ἡ γωνιώδης ταχύτης τῆς γῆς ὅταν ἡ περιστροφή της γίνεται εἰς 24 ὥρας ἢ 86400 δευτερόλεπτα ;

Λύσις : $\omega = \frac{2\pi}{t} = \frac{2 \times 3,14}{86400} = 0,000072722\ldots$

10. Σημεῖον κείμενον ἐπὶ τῆς περιφερείας δίσκου ἐν περιστροφῇ ἔχει γραμμικὴν ταχύτητα 1,20 μέτρα κατὰ δευτερόλεπτον. Ὁ δίσκος ἔχει ἀκτῖνα 0,40 μέτρα. Ζητεῖται ἡ γωνιώδης ταχύτης.

Λύσις : $\omega = \frac{\upsilon}{t} = \frac{1,20}{0,40} = 3.$

11. Τροχὸς περιστρεφόμενος ἔχει γωνιώδη ταχύτητα ἴσην πρὸς 6. Ποία θὰ εἶναι ἡ γραμμικὴ ταχύτης σημείου κειμένου εἰς ἀπόστασιν 0,98 μέτρων ἀπὸ τοῦ ἄξονος ;

Λύσις : $\upsilon = \omega r$ $\upsilon = 6 \times 0,98 = 5,98$ μέτρα.

12. Νὰ εὑρεθῇ ἡ γωνιώδης ταχύτης ἑνὸς βολὰν τὸ ὁποῖον ἐκτελεῖ 45 στροφὰς εἰς τὸ λεπτόν.

Λύσις : $\omega = \frac{n\pi}{30}$ $\omega = \frac{45 \times 3,14}{30} = 4,71.$

13. Ὀδοντωτὸς τροχὸς κινεῖται μὲ γωνιώδη ταχύτητα 5. Πόσας στροφὰς κάμνει εἰς τὸ λεπτόν ;

Λύσις : $n = \frac{30\,\omega}{\pi}$ $n = \frac{30 \times 5}{3,14} = 47,7.$

14. Ὁ μυλόλιθος μύλου ἐκτελεῖ 115 στροφὰς εἰς τὸ λεπτόν. Ποία ἡ γωνιώδης ταχύτης τοῦ μυλολίθου ;

Λύσις : $\omega = \frac{115 \times 3,14}{30} = 12,04$

15. Σῶμα τι κατὰ τὴν πτῶσιν του διατρέχει τὸ $\frac{1}{n}$ τοῦ ὁλικοῦ ὕψους κατὰ τὸ τελευταῖον δευτερόλεπτον. Νὰ προσδιορισθῇ α΄. τὸ ὁλικὸν ὕψος h , καὶ β΄. ὁ χρόνος t τῆς πτώσεως.

Λύσις : 1ον. Τὸ ὁλικὸν ὕψος $h = \frac{1}{2} g t^2$

2ον. Τὸ ὕψος $h' = \frac{h}{n} = \frac{1}{2} gt^2 - \frac{1}{2} g \left(t-1\right)^2$

ἐξ οὗ $2t - 1 = \frac{t^2}{n}$ ἢ $t^2 - 2nt + n = 0$

καὶ $t = n \pm \sqrt{n^2 - n}$

16. Σῶμα τι πίπτει ἐλευθέρως ἐξ ὕψους 144 μέτρων. Ὅταν διανύσῃ διάστημα 25 μέτρων, ἀφίεται νὰ πέσῃ ἐκ τοῦ αὐτοῦ ὕψους ἄλλο σῶμα ἀκολουθοῦν τὴν κατακόρυφον. Μετὰ ποίας ταχύτητος ἀφέθη νὰ πέσῃ τὸ δεύτερον σῶμα ὥστε νὰ φθάσῃ εἰς τὸ ἔδαφος συγχρόνως μὲ τὸ πρῶτον ;

Λύσις : $h = 144$ μετρ. $d = 25$ μέτρα . Ἡ ἀρχικὴ ταχύτης τοῦ δευτέρου κινητοῦ εἶναι $υ_0$. Ὁ χρόνος t τὸν ὁποῖον χρειάζεται τὸ πρῶτον κινητὸν ἵνα διατρέξῃ τὸ ὕψος h — d εἶναι ἴσος μὲ τὸν χρόνον ποὺ χρειάζεται τὸ δεύτερον κινητὸν διὰ νὰ διατρέξῃ τὸ ὕψος h.

Ὥστε ἔχομεν $t = \sqrt{\frac{2h}{g}} - \sqrt{\frac{2d}{g}} = \sqrt{\frac{2k}{g}}$ $\left[\text{θέτοντες } \sqrt{k} = \sqrt{h} - \sqrt{d}\right]$

καὶ $h = υ_0 t + \frac{1}{2} gt^2 = υ_0 \sqrt{\frac{2k}{g}} + k$ ἐξ οὗ

$υ_0 = \sqrt{\frac{g}{2}} \left(\frac{h-k}{\sqrt{k}}\right)$ Τὸ πρόβλημα ἀληθεύει πάντοτε διότι $h > k$

17. Αἱ δύο μᾶζαι μηχανῆς Atwood ζυγίζουσιν ἑκάστη 150 γραμμάρια. Ποῖον πρόσθετον βάρος πρέπει νὰ θέσωμεν εἰς τὴν μίαν ἐξ αὐτῶν, ἵνα ἡ ταχύτης εἰς Παρισίους γίνῃ 1,20 μέτρα κατὰ δευτερόλεπτον εἰς τὸ τέλος τοῦ τρίτου δευτερολέπτου ;

Λύσις : Ἔστω x τὸ πρόσθετον βάρος. Ἡ κινοῦσα δύναμις ἡ ἐπιταχυνομένη θὰ εἶναι x.g δύναι.

Ὁ τύπος $F = m\gamma$ μᾶς δίδει

$$xg = (2 \times 150 + x)\ \gamma \qquad (1)$$

εἰς τὸ τέλος τῶν 3 δευτερολέπτων ἡ ταχύτης εἶναι 120 ἑκατοστ. Ἡ ἐξίσωσις $\upsilon = \gamma t$ δίδει $120 = \gamma \times 3$ ἐξ οὗ $\gamma = 40$ καὶ ἐκ τῆς (1)

ἔχομεν $x = \dfrac{12000}{981 - 40} = \dfrac{12000}{941} = 12,753$ γραμμάρια.

18. Μηχανὴ Atwood ἔχει δύο κυρίας μάζας ἴσας πρὸς 230 γραμ. ἑκάστην. Ἡ πρόσθετος μᾶζα εἶναι 10 γραμ. Ζητεῖται α΄. τὸ διανυθὲν διάστημα κατὰ τὸ 4ον δευτερόλεπτον. β΄. ὁ χρόνος εἰς τὸ τέλος τοῦ ὁποίου ἡ κτηθεῖσα ταχύτης εἶναι ἴση πρὸς $\frac{g}{5}$. Τὸ $g = 980$.

Λύσις : Ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς κινήσεως δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου $F = m\gamma$

ἐξ οὗ $\gamma = \dfrac{F}{m} = \dfrac{980 \times 10}{470} = \dfrac{980}{47}\ \dfrac{cm}{sec^2}$

Τὸ ζητούμενον διάστημα εἶναι ἡ διαφορὰ μεταξὺ τοῦ διαστήματος τοῦ διανυθέντος κατὰ τὰ 4 πρῶτα δευτερόλεπτα καὶ τοῦ διαστήματος τοῦ διανυθέντος κατὰ τὰ 3 δευτερόλεπτα.

Ἔχομεν λοιπὸν $x = \frac{1}{2}\gamma \times 16 - \frac{1}{2}\gamma \times 9 = \frac{1}{2}\gamma \times 7$

Ἀντικαθιστῶντες τὸ γ διὰ τῆς τιμῆς του ἔχομεν :

$$x = \frac{1}{2} \times \frac{980}{47} \times 7 = 72,98 \text{ ἑκατοστόμετρα.}$$

β΄. Ὁ τύπος τῆς ταχύτητος $\upsilon = \gamma t$ δίδει $t = \dfrac{\upsilon}{\gamma}$

ἐξ οὗ $t = \dfrac{g}{5} : \dfrac{980}{47} = \dfrac{47}{5}$ ἢ 9,4 δευτερόλεπτα.

19. Ὁ κενὸς δακτύλιος καὶ ὁ πλήρης δακτύλιος μηχανῆς Atwood εἶναι τοποθετημένοι, ὁ μὲν πρῶτος εἰς ἀπόστασιν 32 ἑκατοστομέτρων ἐκ τῆς ἀρχῆς τῆς κλίμακος, ὁ δὲ δεύτερος εἰς ἀπόστασιν 1,50 μέτρων. Ἕκαστος τῶν κυλίνδρων τῆς μηχανῆς οἵτινες κρέμανται ἐκ τῶν ἄκρων σχοινίου εἶναι 100 γραμ. Ἐπιφορτίζομεν τὸν ἕνα ἐκ τῶν κυλίνδρων διὰ δύο μαζῶν, 10 γραμ. ἑκατέρας, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μία δύναται νὰ κρατηθῇ διὰ τοῦ διατρήτου δακτυλίου. Ἀφίνεται τὸ σύστημα νὰ κινηθῇ ἄνευ ἀρχικῆς ταχύτητος. Ζητεῖται νὰ εὑρεθῶσιν:

1ον. Οἱ ἀπαιτούμενοι χρόνοι α΄.) Διὰ νὰ κρατηθῇ ἡ πρόσθετος μᾶζα ὅταν διέρχεται διὰ τοῦ διατρήτου δακτυλίου. β΄.) Διὰ τὴν ὁλικὴν διαδρομὴν τοῦ 1,30 μέτρου.

2ον. Ἡ ταχύτης ἥν θὰ ἔχῃ ὅταν θὰ φθάσῃ ἐπὶ τοῦ πλήρους δίσκου.

Τὸ $g = 981$. Ἡ μᾶζα τῆς τροχαλίας, τοῦ σχοινίου, καὶ ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀέρος, δὲν λαμβάνονται ὑπ' ὄψιν.

Λύσις : 1ον Ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς κινήσεως εἶναι :

$$\gamma = g \times \frac{2 \times 10}{220} = \frac{981}{11} \frac{cm}{sec^2}$$

α΄.) Τὸ ὕψος $h = 32$ ἑκατοστ. θὰ διανυθῇ εἰς χρόνον t τοιοῦτον ὥστε: $h = \frac{1}{2} \gamma t^2$

ἐξ οὗ $t = \sqrt{\frac{2h}{\gamma}} = \sqrt{\frac{2 \times 32 \times 11}{981}} = 0{,}847$ δευτερόλεπτα.

β΄.) Κατόπιν τούτου ἡ ἐπιτάχυνσις γ' εἶναι :

$$\gamma' = g \times \frac{10}{210} = \frac{981}{21}$$

Τὸ διάστημα $h' = 150 - 32 = 118$ ἑκαστ. θὰ διανυθῇ εἰς χρόνον t' τοιοῦτον ὥστε : $h' = \upsilon_0 t' + \frac{1}{2} \gamma' t'^2$

καὶ ἀφοῦ $\upsilon_0 = \gamma t = \sqrt{2 \gamma h} = \sqrt{64 \times \frac{981}{11}} = 75{,}54$ ἑκατοστόμετρα, θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν :

$$118 = 8 \sqrt{\frac{991}{11}}\, t' + \frac{1}{2} \times \frac{981}{21} t'^2$$

Ἡ θετικὴ ῥίζα $t' = 1{,}15''$ μόνον ἀληθεύει.

Ὁ χρόνος ὁ ὁλικὸς εἶναι $\vartheta = t + t'$ ὀλίγον διάφορος τοῦ 2΄.

2ον. Ἡ ταχύτης τὴν στιγμὴν ταύτην εἶναι :

$$\upsilon = \upsilon_0 + \gamma' t' = 129{,}37 \text{ ἑκατοστόμετρα.}$$

20. Αἱ δύο ἴσαι μᾶζαι μηχανῆς Atwood εἶναι ἑκάστη ἴση πρὸς 40 γραμ. Ἐπιφορτίζομεν τὴν μίαν ἐξ αὐτῶν διὰ μιᾶς μάζης προσθέτου κυλινδρικῆς 1 γραμ. καὶ μιᾶς μάζης προσθέτου ἐπιμήκους 1 γραμ. Ἡ τελευταία αὕτη πρόσθετος μᾶζα κρατεῖται ὑπὸ δακτυλίου διατρήτου μετὰ παρέλευσιν 1″ ἀφ᾽ ὅτου ἤρχισε νὰ κινῆται. Ζητεῖται 1ον) ἡ σχέσις τῶν διανυομένων διαστημάτων κατὰ τὸ 1ον καὶ κατὰ τὸ 2ον δευτερόλεπτον τῆς πτώσεως. 2ον) αἱ ἐπιταχύνσεις κατὰ τὴν πτῶσιν, γνωστοῦ ὄντος ὅτι τὸ g εἶναι 981 C. G. S εἰς τὸν τόπον τοῦ πειράματος.

Λύσις : 1ον. Κατὰ τὸ 1ον δευτερόλεπτον, ἡ δύναμις τῆς ἐπιταχύνσεως 2g μεταδίδει εἰς τὴν ὁλικὴν μᾶζαν $2 \times 40 + 2 = 82$ γραμ. μίαν ἐπιτάχυνσιν γ τοιαύτην ὥστε $2g = 82\,\gamma$.

$$\text{ἐξ οὗ} \quad \gamma = g \times \frac{2}{82} = \frac{981}{41} = 23{,}927 \text{ ἑκατοστόμ. (1)}$$

Κατὰ τὸ δεύτερον δευτερόλεπτον ἡ δύναμις τῆς ἐπιταχύνσεως εἶναι μόνον $g = 881$ δύνας, καὶ ἡ παρασύρουσα μᾶζα $2 \times 40 + 1 = 81$ γραμ. Ὁ τύπος $F = M.\gamma$ δίδει διὰ τὴν νέαν ἐπιτάχυνσιν $\gamma' = \frac{g}{81} = \frac{981}{81} =$ 12,111 ἑκατοστόμετρα.

2ον. Τὸ διανυθὲν διάστημα κατὰ τὴν πτῶσιν εἰς τὸ τέλος τοῦ 1ου δευτερολέπτου εἶναι :

$$e_1 = \frac{1}{2}\gamma t^2 = \frac{\gamma}{2} = \frac{981}{81} \text{ ἑκατοστόμ.}$$

καὶ ἡ ταχύτης $\upsilon_1 = \gamma t = \frac{981}{41}$ ἑκατοστομ. κατὰ δευτερόλεπτον, τὸ διανυθὲν διάστημα κατὰ τὸ δεύτερον δευτερόλεπτον εἶναι κατόπιν τοῦ τύπου $e = \upsilon_0 t + \frac{1}{2}\gamma t^2$

$$e_2 = \upsilon_1 + \frac{1}{2}\gamma' = \gamma + \frac{\gamma'}{2}$$

$$\text{καὶ } e_2 = \frac{g}{41} + \frac{g}{162} = g\left(\frac{203}{41 \times 162}\right) \text{ καὶ ἀφοῦ } e_1 = \frac{\gamma}{2} = \frac{g}{41 \times 2}$$

$$\text{ἔχομεν τέλος } \frac{e_1}{e_2} = \frac{81}{283}.$$

21. Λίθος ἀφίεται ἐλεύθερος νὰ πέσῃ ἄνευ ἀρχικῆς ταχύτητος, ἐντὸς φρέατος βάθους 500 μέτρων. Ζητεῖται ὁ χρόνος τῆς πτώσεως τοῦ λίθου, καὶ ἡ ταχύτης του τὴν στιγμὴν ὅπου φθάνει εἰς τὸ βάθος τοῦ φρέατος. Ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀέρος δὲν λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν.

Λύσις : Ὁ χρόνος τῆς πτώσεως :

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \times 500}{9{,}81}} = \sqrt{101{,}936} = 10{,}09 \text{ δευτερόλεπτα.}$$

2ον. Ἡ ταχύτης μετὰ τὸν χρόνον τοῦτον :

$$\upsilon = \sqrt{2gh} = \sqrt{9 \times 810} = 99{,}04 \text{ μέτρα.}$$

22. Παρατηρητὴς ἱστάμενος εἰς ὕψος h βλέπει νὰ διέρχεται ἔμπροσθεν αὐτοῦ σῶμα ῥιφθὲν ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω. Μετὰ παρέλευσιν θ δευτερολέπτων βλέπει τὸ σῶμα τοῦτο νὰ διέρχεται ἐκ νέου ἔμπροσθέν του. Ζητεῖται ἡ ἀρχικὴ ταχύτης τοῦ σώματος, καὶ τὸ μέγιστον ὕψος εἰς ὅ τὸ σῶμα τοῦτο ἀνῆλθε.

Λύσις : Ὁ τύπος τοῦ διαστήματος εἶναι $h = \upsilon_0 t - \frac{1}{2} g t^2$

Λύομεν ὡς πρὸς t.

$$\frac{1}{2} g t^2 - \upsilon_0 t + h = 0 \quad \text{ἐξ οὗ} \quad t = \frac{\upsilon_0 \pm \sqrt{\upsilon_0^2 - 2gh}}{g}$$

ἡ διαφορὰ τῶν ῥιζῶν $t' - t'' = \vartheta$

$$\text{δηλαδὴ } \vartheta = \frac{2\sqrt{\upsilon_0^2 - 2gh}}{g}$$

$$\text{ὥστε ἡ ἀρχικὴ ταχύτης } \upsilon_0 = \frac{1}{2}\sqrt{g(g\vartheta^2 + 8h)}$$

$$\text{Τὸ μέγιστον ὕψος τῆς ἀνόδου } h_1 = \frac{\upsilon_0^2}{2g} = h + \frac{\vartheta}{8}$$

23. Μικρὰ σφαῖρα ἐκ μολύβδου, πίπτουσα ἐλευθέρως, διέρχεται τὴν $10^{\eta\nu}$ ὥραν ἔμπροσθεν παρατηρητοῦ τοποθετημένου εἰς ὕψος 300 μέτρων ἀπὸ τοῦ ἐδάφους, φθάνει δὲ ἕτερον παρατηρητὴν τοποθετημένον εἰς ὕψος 200 μέτρων τὴν $10^{\eta\nu}$ ὥραν καὶ 2 δεύτερα λεπτά. Ζητεῖται 1ον) ἀπὸ ποῖον ὕψος πίπτει ; 2ον) εἰς ποίαν ὥραν θὰ φθάσῃ εἰς τὸ ἔδαφος ; 3ον) ποία θὰ εἶναι τὴν στιγμὴν ταύτην ἡ ταχύτης της ; Ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀέρος δὲν λαμβάνεται ὑπ᾿ ὄψιν.

Λύσις : Ἔστω x τὸ ὕψος ἐξ οὗ πίπτει μέχρι τοῦ σημείου τῶν 200 μέτρων, t ὁ χρόνος τῆς πτώσεως μέχρι τοῦ σημείου τούτου, καὶ t_0 ὁ χρόνος τῆς πτώσεως μέχρι τοῦ ἐδάφους.

1ον. Γνωρίζομεν ὅτι $x = \frac{1}{2} g t^2$ (1) καὶ $\frac{g(t-2)^2}{2} = x - 100$ (2)

ἀφαιροῦντες τὴν (2) τῆς (1)

ἔχομεν : $2gt - 2g = 100$ ἢ $t = \frac{50 + 9{,}8}{9{,}8} = 6{,}1$ δευτερόλεπτα.

Τὸ ὕψος τῆς πτώσεως εἶναι :

$$\frac{9{,}8 \times 6{,}1^2}{2} + 200 = 382 \text{ μέτρα}$$

2ον. $\frac{9{,}8 \times t_0^2}{2} = 382$ καὶ $t_0 = \sqrt{\frac{2 \times 382}{9{,}8}} = 8{,}83$ δευτερόλεπτα.

Ἡ σφαῖρα θὰ φθάσῃ εἰς τὸ ἔδαφος εἰς τὰς $10^{\omega\varrho}$ $2'' + \left(8{,}83 - 6{,}1\right)'' = 10^{\omega\varrho}$ καὶ 4,73 δευτερόλεπτα.

3ον. $\upsilon = 9{,}8 \times 8{,}83 = 86{,}53$ μέτρα κατὰ δευτερόλεπτον.

24. Βλῆμα ῥιπτόμενον κατακορύφως ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω, ἐπανέρχεται εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἀναχωρήσεως μετὰ παρέλευσιν ϑ δευτερολέπτων. Ποία ἦτο ἡ ἀρχικὴ ταχύτης του υ_0 καὶ εἰς ποῖον ὕψος h ἔφθασε ;

Λύσις : Ἡ διάρκεια τῆς ἀνόδου εἶναι $\frac{\vartheta}{2}$ ἑπομένως $\frac{\vartheta}{2} = \frac{\upsilon_0}{g}$

ἐξ οὗ $\upsilon_0 = \frac{g\vartheta}{2}$

Τὸ μέγιστον ὕψος:

$$h = \frac{\upsilon_0^2}{2g} = \frac{g\vartheta^2}{8}$$

25. Βλῆμα ῥίπτεται κατακορύφως ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω μὲ ταχύτητα $\upsilon_0 = 100$ μέτρα. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μέγιστον ὕψος εἰς τὸ ὁποῖον θὰ φθάσῃ, καὶ τὸ διανυθὲν διάστημα κατὰ τὸ πρῶτον δευτερόλεπτον τῆς κινήσεώς του.

Λύσις: Τὸ μέγιστον ὕψος:

$$h = \frac{\upsilon_0^2}{2g} = \frac{100^2}{2 \times 9{,}81} = 509{,}683 \text{ μέτρα.}$$

Κατὰ τὸ πρῶτον δευτερόλεπτον θὰ διανύσῃ διάστημα

$$h_1 = \upsilon_0 - \frac{1}{2} g = 100 - \frac{9{,}81}{2} = 95{,}095 \text{ μέτρα.}$$

26. Ἐκ δύο σημείων A καὶ B, εὑρισκομένων ἐπὶ τῆς αὐτῆς κατακορύφου καὶ εἰς ἀπόστασιν d, πίπτουσι δύο κινητὰ μὲ ἀρχικὰς ταχύτητας υ καὶ υ′. Τὸ εὑρισκόμενον εἰς τὸ ὑψηλότερον σημεῖον A ἀναχωρεῖ ϑ δευτερόλεπτα πρότερον ἐκείνου ποὺ εὑρίσκεται εἰς τὸ σημεῖον B. Εἰς τὸ τέλος ποίου χρόνου θὰ συναντηθῶσι; Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ σημείου B εὑρίσκεται τὸ σημεῖον τῆς συναντήσεως;

Λύσις: Ἔστω C τὸ σημεῖον τῆς συναντήσεως. Θέτομεν $BC = y$. Αἱ ἐξισώσεις τῆς κινήσεως τῶν δύο κινητῶν εἶναι:

$$AC = d + y = \upsilon\,(t + \vartheta) + \frac{1}{2} g\,(t + \vartheta)^2$$

$$BC = y = \upsilon' t + \frac{1}{2} g t^2$$

ἀφαιροῦντες ἔχομεν:

$$d = \left(\upsilon - \upsilon' + g\vartheta\right) t + \upsilon\vartheta + \frac{1}{2} g \vartheta^2, \quad \text{ἐξ οὗ}$$

$$t = \frac{d - \left(\upsilon\vartheta + \frac{1}{2} g \vartheta^2\right)}{\upsilon + g\vartheta - \upsilon'} = \frac{d - e_1}{\upsilon_1 - \upsilon'} \qquad (1)$$

ἂν $e_1 = \upsilon\vartheta + \frac{1}{2} g \vartheta^2$ καὶ $\upsilon_1 = \upsilon + g\vartheta$ ὅπου e_1 διάστημα διανυθέν, καὶ υ_1 κτηθεῖσα ταχύτης ὑπὸ τοῦ πρώτου κινητοῦ κατὰ τὸν χρόνον τὸν πρότερον τοῦ θ. Ἡ ἀπόστασις $BC = y = \upsilon' t + \frac{1}{2} g t^2$

ὅπου t ἔχει τὴν τιμὴν (1).

27. Νὰ δειχθῇ ὅτι κατὰ τὴν πτῶσιν σώματος ἐν τῷ κενῷ, τὰ διανυόμενα διαστήματα κατὰ τὰ διαδοχικὰ δευτερόλεπτα αὐξάνουσι κατὰ ἀριθμητικὴν πρόοδον.

Λύσις :
$$\Delta_t = \frac{1}{2} g t^2 - \frac{1}{2} g \left(t-1\right)^2 = g t - \frac{g}{2}$$
$$\Delta_{t+1} = \frac{1}{2} g \left(t+1\right)^2 - \frac{1}{2} g t^2 = g t + \frac{g}{2}$$

ἡ αὔξησις g εἶναι ποσότης σταθερά.

28. Βλῆμα ῥίπτεται ὑπὸ γωνίαν 45^0 μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα 500 μέτρων κατὰ δευτερόλεπτον. Εἰς ποῖον ὕψος θὰ φθάσῃ τὸ βλῆμα, καὶ εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ σημείου τῆς ἀναχωρήσεως θὰ συναντήσῃ πῖπτον τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον ;

Λύσις : Τὸ ὕψος τῆς βολῆς εἶναι :
$$h = \frac{\upsilon_0^2 \,\eta\mu^2\alpha}{2\, g} = \frac{\overline{500}^2 \times \frac{1}{2}}{2 \times 9{,}81} = \frac{62500}{9{,}81} = 6371{,}05 \text{ μέτρα.}$$

Ἡ ἔκτασις τῆς βολῆς εἶναι :
$$d = \frac{\upsilon_0^2 \,\eta\mu\, 2\alpha}{g} = \frac{\overline{500}^2}{g} = 25484{,}19 \text{ μέτρα.}$$

29. Βλῆμα ῥιπτόμενον ὑπὸ γωνίαν α, συναντᾷ τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον εἰς ἀπόστασιν d ἀπὸ τοῦ σημείου τῆς ἀφέσεως. Νὰ προσδιορισθῇ ἡ ἀρχικὴ ταχύτης υ_0 τοῦ βλήματος, καὶ τὸ ὕψος εἰς τὸ ὁποῖον τοῦτο ἀνῆλθε.

Ἐφαρμογή. $\alpha = 30^0$ καὶ $d = 800$ μέτρα.

Λύσις : Ἡ ἀπόστασις εἰς ἥν συναντᾷ τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον
$$d = \frac{\upsilon_0^2 \,\eta\mu\, 2\alpha}{g} \quad \text{ἐξ οὗ ἡ ἀρχικὴ ταχύτης } \upsilon_0 = \sqrt{\frac{d.\, g}{\eta\mu.2\alpha}}$$

Τὸ ὕψος εἰς ὅ ἀνῆλθε : $h = \frac{\upsilon_0^2 \,\eta\mu^2\alpha}{2\, g} = \frac{d\,.\,g\,\eta\mu^2\alpha}{2\, g\, \eta\mu\, 2\alpha} = \frac{d}{4}$ εφ. α

Διὰ $\alpha = 30^0$ καὶ $d = 800$ ἔχομεν :

$$\upsilon_0 = \sqrt{\frac{800 \times 9,81 \times 2\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{9061,82} = 95,19 \text{ μέτρα}$$

καὶ $h = 200 \times$ εφ. $30^0 = 200 \times 0,5773 = 115,46$ μέτρα.

30. Βάρος κατέρχεται ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου γωνίας 45^0. Νὰ προσδιορισθῇ ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς κινήσεώς του, καὶ ἡ ταχύτης του ὅταν ἔχῃ διανύσει μῆκος 3 μέτρων ἐπὶ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου.

Λύσις : Ἔστω γ ἡ ζητουμένη ἐπιτάχυνσις. Αὕτη παράγεται ὑπὸ τῆς δυνάμεως $F = p$ ημ. α

Γνωρίζομεν ὅτι $\frac{\gamma}{g} = \frac{p \text{ ημ. } \alpha}{p}$ καὶ $\gamma = g$ ημ. α

Ἡ ταχύτης εἶναι $\upsilon = \gamma t$ καὶ μῆκος $l = \frac{1}{2} \gamma t^2$

ἡ ταχύτης $\upsilon = \sqrt{2 \gamma l}$

31. Σφαῖρα κυλιομένη ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου, διανύει 0,50 μ. κατὰ τὸ τρίτον δευτερόλεπτον. Ζητεῖται ἡ σχέσις $\frac{h}{l}$ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου (κλίσις), καὶ τὸ διανυθὲν διάστημα κατὰ τὸ δεύτερον δευτερόλεπτον.

Λύσις : Ἔστω γ ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς σφαίρας. Τὸ διανυθὲν διάστημα κατὰ τὸ τρίτον δευτερόλεπτον εἶναι :

$$0,50 = \frac{1}{2} \gamma \left(3^2 - 2^2 \right) = \frac{5}{2} \gamma$$

ἐξ οὗ $\gamma = \frac{2}{5} \times 0,50 = 0,20$ μ.

Ἡ σχέσις τοῦ ὕψους πρὸς τὸ μῆκος $\frac{h}{l} =$ ημ. $\alpha = \frac{\gamma}{g}$

ἑπομένως $\frac{h}{l} = \frac{0,20}{9,81} = 0,02039$

Τὸ διανυθὲν διάστημα κατὰ τὸ δεύτερον δευτερόλεπτον εἶναι :

$$e = \frac{1}{2} \gamma \left(2^2 - 1^2 \right) = 0,20 \times \frac{3}{2} = 0,30 \text{ μέτρα.}$$

32. Αἱ δύο μᾶζαι μηχανῆς Atwood ζυγίζουσιν ἑκατέρα 20 γραμ. Ἐπιφορτίζομεν τὴν μίαν διὰ βάρους ἑνὸς γραμμαρίου. Ποία θὰ εἶναι ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς πτώσεως ἐν τόπῳ ἔνθα τὸ $g=981$;

Λύσις : Αἱ ἐπιταχύνσεις ἅς μία καὶ ἡ αὐτὴ δύναμις, μεταδίδει εἰς δύο διαφόρους μάζας εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι πρὸς τὰς μάζας ταύτας.

Ἤτοι $\frac{\gamma}{g}=\frac{m}{2M+m}$ ἐκ τούτου $\gamma=g\,\frac{m}{2M+m}$

ὥστε $\gamma=981\,.\,\frac{1}{41}=23{,}92.$

33. Σῶμα βάρους p τίθεται ὑπὸ τὴν ἐνέργειαν δυνάμεως σταθερᾶς F ἐπὶ t δευτερόλεπτα. Κατόπιν τοῦ χρόνου τούτου ἡ δύναμις σταματᾷ τὴν ἐνέργειάν της, καὶ τὸ κινητὸν διανύει μετὰ κινήσεως ὁμαλῆς διάστημα e εἰς ϑ δευτερόλεπτα. Παία ἡ ἔντασις τῆς δυνάμεως;

Λύσις : $F=\frac{\gamma}{g}\,p$ καὶ $\upsilon=\gamma t$ ἐξ οὗ $F=\frac{\upsilon}{gt}\,.\,p$

ἑπομένως $\upsilon=\frac{e}{\vartheta}$ καὶ $F=\frac{e}{gt\vartheta}\,.\,p$

Ἐφαρμογή : Διὰ $p=1$ χιλιόγραμ. $t=3''$ $e=90$ μέτρα καὶ $\vartheta=5'$

ἔχομεν $F=\frac{90}{9{,}81\times3\times5}\times1=0{,}611$ χιλιόγραμ.

34. Ἐκ τῶν δύο ἄκρων τοῦ νήματος τῆς μηχανῆς Atwood ἐξαρτῶνται βάρη ἕκαστον 500 γραμμαρίων. Θέτομεν εἰς τὸ ἓν ἐξ αὐτῶν πρόσθετον βάρος 10 γραμ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐπιτάχυνσις ἡ λαμβανομένη διὰ τοῦ συστήματος, τὸ διανυόμενον διάστημα μετὰ πτῶσιν 2 δευτερολέπτων, καὶ ἡ ταχύτης κατὰ τὴν στιγμὴν ταύτην.

Λύσις : Τὸ πρόσθετον βάρος $m=10$ γραμ. δίδει εἰς τὸ ὁλικὸν βάρος $2M+m=1010$ γραμ. ἐπιτάχυνσιν γ δηλαδὴ $\frac{\gamma}{g}=\frac{m}{2M+m}$

καὶ $\gamma=\frac{m}{2M+m}\,.\,g=\frac{10\times9{,}81}{1010}=0{,}097$ μ.

Τὸ διανυθὲν διάστημα μετὰ 2″ εἶναι :

$$e = \frac{1}{2}\gamma t^2 = \frac{1}{2} \times 0{,}097 \times 4 = 0{,}194 \text{ μέτρα.}$$

Ἡ ταχύτης τὴν στιγμὴν ταύτην εἶναι :

$$\upsilon = \gamma t = 0{,}097 \times 2 = 0{,}194 \text{ μέτρα.}$$

35. Ἕκαστος τῶν κυλίνδρων μηχανῆς Atwood ἔχει βάρος B. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ πρόσθετον βάρος β τὸ ὁποῖον τίθεται εἰς τὸν ἕνα ἐκ τῶν δύο κυλίνδρων, ὥστε τὸ διανυθὲν διάστημα κατὰ τὸ πρῶτον δευτερόλεπτον νὰ εἶναι h, καὶ ἡ ταχύτης εἰς χρόνον t νὰ εἶναι υ.

Λύσις : Ἡ ἐπιτάχυνσις εἶναι τὸ διπλάσιον τοῦ κατὰ τὴν πρώτην χρονικὴν μονάδα διανυθέντος διαστήματος :

$\gamma = 2h$ ὁ δὲ τύπος $\frac{\gamma}{g} = \frac{\beta}{2B+\beta}$ δίδει $\beta = \frac{2\gamma}{g-\gamma} \cdot B = \frac{4h}{g-2h} \cdot B$

Ἡ ταχύτης εἶναι $\upsilon = \gamma t$ ἐξ οὗ $\gamma = \frac{\upsilon}{t}$

$$\text{ὥστε } \beta = \frac{2\gamma}{g-\gamma} \cdot B = \frac{2\upsilon}{gt-\upsilon} \cdot B$$

36. Δύο σώματα πίπτουσιν ἐκ τοῦ αὐτοῦ ὕψους 50 μέτρων κατὰ χρόνους διαφέροντας κατὰ δευτερόλεπτον. Ποία θὰ εἶναι ἡ ἀπόστασίς των d ὅταν τὸ πρῶτον ἐγγίσῃ τὸ ἔδαφος ;

Λύσις : Ἡ ἐξίσωσις τῆς κινήσεως τοῦ πρώτου σώματος εἶναι :

$$5000 = \frac{gt^2}{2} \quad \text{καὶ} \quad t = \frac{100}{\sqrt{g}}$$

Ἡ ἐξίσωσις τῆς κινήσεως τοῦ δευτέρου σώματος εἶναι :

$$5000 - d = \frac{g(t-1)^2}{2} = \frac{gt^2}{2} - gt + \frac{g}{2}$$

ἀφαιροῦμεν τὴν δευτέραν ἐξίσωσιν ἐκ τῆς πρώτης καὶ λαμβάνομεν :

$$d = gt - \frac{g}{2} = g \cdot \frac{100}{\sqrt{g}} - \frac{g}{2} = 2639 = 26{,}39 \text{ μέτρ.}$$

37. Αἱ δύο μᾶζαι τῶν κυλίνδρων μηχανῆς Atwood εἶναι ἑκάστη ἴση πρὸς 100 γραμμάρια. Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ πρόσθετος μᾶζα x ἵνα μετὰ τέσσαρα δευτερόλεπτα ἡ ταχύτης γίνῃ 200 ἑκατοστόμετρα ;

Λύσις : Ἔστω γ ἡ ἐπιτάχυνσις εἰς τὴν βραδεῖαν κίνησιν : $200 = 4\gamma$ καὶ $\gamma = 50$.

Ἐπίσης : $(200 + x)\,50 = x.\,981$.

$$\text{καὶ} \quad x = \frac{10000}{981} = 10{,}74 \text{ γραμμάρια.}$$

38. Ἀπὸ ποῖον ὕψος h πρέπει νὰ πέσῃ λίθος, ἵνα ἡ ταχύτης του γίνῃ 100 μέτρα ὅταν φθάνῃ εἰς τὸ ἔδαφος ;

Λύσις : Γνωρίζομεν τὴν σχέσιν $\upsilon = \sqrt{2gh}$

$$\text{καὶ} \quad h = \frac{\upsilon^2}{2g} = \frac{10000}{2.981} \qquad h = 509{,}7 \text{ μέτρα}$$

39. Τῇ βοηθείᾳ μηχανῆς Atwood βάρος 10 γραμμαρίων ἐνεργεῖ καὶ σύρει ὁλικὴν μᾶζαν 500 γραμμαρίων μὲ ἐπιτάχυνσιν 19 ἑκατοστομέτρων κατὰ δευτερόλεπτον. Ποία εἶναι ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς βαρύτητος g εἰς τὸν τόπον τοῦτον ;

Λύσις :

$$m\,g = \left(2M + m\right)\gamma \quad \text{καὶ} \quad g = \frac{510}{10}\,.\,19 = 969$$

40. Βάρος 8 χιλιογράμμων διαμοιράζεται κατὰ τοιοῦτον τρόπον εἰς δύο μέρη, ὥστε ταῦτα ἐξαρτώμενα ἐκ τῶν ἄκρων νήματος μηχανῆς Atwood νὰ δίδωσιν εἰς τὸ σύστημα μίαν ἐπιτάχυνσιν 0,69 μέτρων. Ποῖον εἶναι τὸ βάρος ἑκάστου ἐκ τῶν δύο μερῶν ;

Λύσις ; Ἔστωσαν x καὶ y τὰ βάρη τῶν δύο μερῶν, καὶ τὸ x βαρύτερον τοῦ y. Τὸ πρόσθετον βάρος $(x - y)$ δίδει εἰς τὸ σύστημα $(x + y)$ ἐπιτάχυνσιν γ.

$$\text{ὥστε} \quad \frac{x-y}{\gamma} = \frac{x+y}{g} \quad \text{ἢ} \quad \frac{x-y}{x+y} = \frac{\gamma}{g} \quad \text{ἐξ οὗ}$$

$$\frac{2x}{x+y} = \frac{\gamma+g}{g} \quad \text{καὶ} \quad x = \frac{\gamma+g}{2\,g}\left(x + y\right) = \frac{0{,}69+9{,}81}{19{,}62} \times 8 = 4{,}28$$

ἑπομένως : $x = 4{,}28$ καὶ $y = 3{,}72$ χιλιόγραμμα.

41. Ἐκ τῶν δύο ἄκρων νήματος διερχομένου διὰ μονίμου εὐπαθοῦς τροχαλίας, κρέμανται βάρη p καὶ p′ ($p < p'$). Ἀφίνομεν νὰ πέσῃ τὸ βάρος p ἐξ ἑνὸς ὕψους h ἀρκετοῦ διὰ νὰ ἀνυψώσῃ τὸ βάρος p′. Ζητεῖται τὸ ὕψος h εἰς τὸ ὁποῖον τὸ βάρος p θὰ ἀνυψώσῃ τὸ p′, καὶ ποῖος ὁ χρόνος τῆς ἀνόδου ;

Λύσις : Ὅταν τὸ p ἀρχίσῃ νὰ κινῇ τὸ p′, ἔχει πέσει ἐλευθέρως ἐκ τοῦ ὕψους h καὶ ἔχει ἀποκτήσει μίαν ταχύτητα $\upsilon_0 = \sqrt{2gh}$.

Ἡ κίνησις τοῦ συστήματος $p' + p$ εἶναι ὁμαλῶς ἐπιβραδυνομένη. Αἰτία τῆς ἐπιβραδύνσεως εἶναι ἡ διαφορὰ $p' - p$. Ἡ ἐπιτάχυνσις ἡ ἀρνητικὴ εἶναι :

$$-\gamma = \frac{p'-p}{p'+p} \cdot g$$

Τὸ σύστημα σταματᾷ ὅταν ἡ ταχύτης εἶναι μηδέν :

τότε $\upsilon_0^2 - 2\gamma h' = 0$ ἢ $\upsilon_0 - \gamma t = 0$

Τὸ ὕψος τῆς ἀνόδου :

$$h' = \frac{\upsilon_0^2}{2\gamma} = \frac{\upsilon_0^2}{2g} \cdot \frac{p'+p}{p'-p} = \frac{p'+p}{p'-p} \cdot h$$

Ἡ διάρκεια τῆς ἀνόδου :

$$t = \frac{\upsilon_0}{\gamma} = \frac{p'+p}{p'-p} \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

42. Ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου σχηματίζοντος γωνίαν 30° μετὰ τοῦ ὁριζοντίου, κατέρχεται ἄνευ τριβῆς μᾶζα M_1, ἥτις ἀνυψώνει τῇ βοηθείᾳ παγίας τροχαλίας κατακορύφως, ἑτέραν μᾶζαν M, εἰς ὕψος 245,25 μέτρων ἐντὸς 20 δευτερολέπτων. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν δύο μαζῶν M_1 καὶ M.

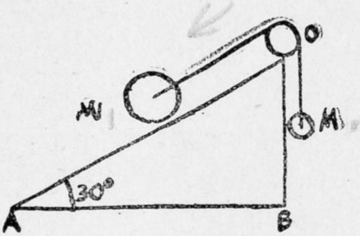
Λύσις : Γνωστὸν ὅτι $F = m \cdot \gamma$ καὶ $g = \left(2M + m\right)\gamma$

$$\text{καὶ } m = \frac{M_1}{2} - M$$

$$\text{ἑπομένως: } \gamma = \frac{F}{m} = \frac{g\left(\frac{M_1}{2} - M\right)}{\left(M_1 + M\right)} = \frac{g\left(M_1 - 2M\right)}{2\left(M_1 + M\right)}$$

Θέτοντες $\frac{M_1}{M} = x$ λαμβάνομεν :

$$\gamma = \frac{g\left(x-2\right)}{2\left(x+1\right)} \qquad (1)$$



Ἐκ τῆς ἐξισώσεως $e = \frac{1}{2}\gamma t^2$ λαμβάνομεν :

$$\gamma = \frac{2e}{t^2} = \frac{490{,}50}{400} = \frac{4{,}905}{4} \qquad (2)$$

Ἐξισώνοντες τὰς (1) καὶ (2) ἔχομεν :

$$\frac{9{,}81\left(x-2\right)}{2\left(x+1\right)} = \frac{4{,}905}{4} \quad \text{ἐξ οὗ} \quad x = 3.$$

43. Δύναμις 150 γραμμαρίων ἐξασκεῖ ἐπὶ σώματος βάρους 600 γραμμαρίων τὴν ἐνέργειάν της. Κατόπιν ποίου χρόνου ἡ κτηθεῖσα ταχύτης θὰ γίνῃ 4,90 μέτρα ;

Λύσις : Ἔστω $F = 150$ καὶ $P = 600$.

$$F = \frac{\gamma}{g}P \qquad \text{καὶ} \qquad \upsilon = \gamma t$$

$$F = \frac{\upsilon}{gt} . P \quad \text{καὶ} \quad t = \frac{P.\upsilon}{Fg} = \frac{600 \times 4,90}{150 \times 9,81} = 2 \text{ δευτερόλεπτα.}$$

44. Σῶμα 5 χιλιογράμμων λαμβάνει ταχύτητα 100 μέτρων εἰς τρία δευτερόλεπτα ὑπὸ τὴν ἐνέργειαν δυνάμεως σταθερᾶς. Ποία ἡ ἔντασις τῆς δυνάμεως ταύτης ;

Λύσις : $F = \frac{\gamma}{g} . P$ καὶ $\upsilon = \gamma t$

$$F = \frac{\upsilon}{\gamma t} . P = \frac{100}{9,81 \times 3} \times 5 = 16,99 \text{ χιλιόγραμμα.}$$

45. Δύναμις 500 γράμμων ἐνεργεῖ ἐπὶ σώματος εὑρισκομένου ἐν ἠρεμίᾳ, βάρους ἑνὸς χιλιογράμμου· ζητεῖται α'.) Ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς παραγομένης κινήσεως. β'.) Τὸ διανυθὲν διάστημα εἰς πέντε δευτερόλεπτα καὶ γ'.) Ἡ ταχύτης κατὰ τὸν χρόνον τοῦτον.

Λύσις : α.' $m = \frac{F}{g} = \frac{P}{g}$ ἔνθα $F = 500$ καὶ $P = 1$

$$= \frac{Fg}{P} = \frac{1}{2} g = 4,90 \text{ μ.}$$

β.' $e = \frac{1}{2} \gamma t^2 = \frac{9,81 \times 25}{4} = 61,31$ μέτρα

γ'. $\upsilon = \gamma t = 4,90 \times 5 = 24,53$ μέτρα.

46. Ποία εἶναι ἡ δύναμις ἡ ἐφαρμοζομένη εἰς κινητὸν βάρος P, τὸ ὁποῖον ἀναχωροῦν ἐκ τῆς ἠρεμίας διατρέχει μετὰ κινήσεως ὁμαλῶς μεταβαλλομένης διάστημα e εἰς t δευτερόλεπτα ;

Λύσις : $F = m . \gamma = \frac{P}{g} . \gamma$ καὶ $e = \frac{1}{2} \gamma t^2$

$$F = \frac{2e}{gt^2} . P$$

ἂν $P = 2$ χιλγρ. $e = 98,10$ μέτρα καὶ $t = 4''$

τότε $F = \frac{2 \times 98,10}{9,81 \times 16} \times 2 = 2,5$ χιλιόγραμμα.

47. Ἐπὶ σημείου ὑλικοῦ εἶναι ἐφαρμοσμέναι δύο δυνάμεις, ἡ μία 30 καὶ ἡ ἑτέρα 40 χιλιογράμμων, σχηματίζουσαι γωνὶαν 22°. Ποία ἡ ἔντασις τῆς συνισταμένης ;

Λύσις : Ἐὰν α ἡ γωνία τῶν δύο δυνάμεων

$$\text{τότε :} \quad \Sigma = \sqrt{\mathrm{B}^2+\Gamma^2+2\mathrm{B}\Gamma \,\text{συν}\, \alpha} =$$

$$= \sqrt{30^2+40^2+(2\times30\times40)\ \text{συν.}\ 22^\circ} = 68{,}74.$$

48. Εἰς τὰ ἄκρα εὐθείας AB ἐνεργοῦσι δύο δυνάμεις παράλληλοι καὶ ὁμόρροποι ἡ $\Delta_1=3$ χλγρ. καὶ ἡ Δ_2. Ἡ συνισταμένη αὐτῶν ἔχει ἔντασιν 8 χλγρ. καὶ εἶναι ἐφηρμοσμένη εἰς ἀπόστασιν 15 ἑκατοστομέτρων ἀπὸ τοῦ ἄκρου A τῆς εὐθείας AB. Ποῖον τὸ μῆκος τῆς AB ;

Λύσις : Ἡ δύναμις $\Delta_2 = 8 - 3 = 5$ χλγρ.

Ἔστω O τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς τῆς συνισταμένης.

Τότε $\quad 5 \times \mathrm{OB} = 3 \times 15 \quad$ ὅθεν $\quad \mathrm{OB} = 9$

καὶ $\quad \mathrm{AB} = 15 + 9 = 24.$

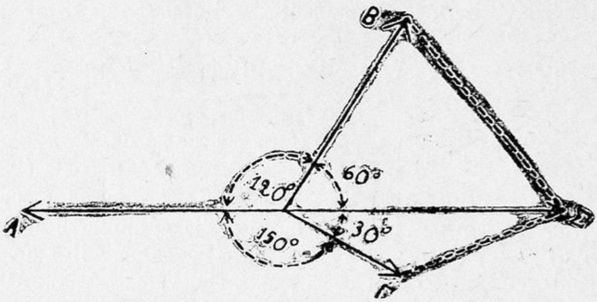
49. Τρεῖς δυνάμεις A, B, Γ, τὸ ἄθροισμα τῶν ἐντάσεων τῶν ὁποίων ἰσοῦται πρὸς 100 χιλιόγραμμα εὑρίσκονται ἐν ἰσορροπίᾳ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἔντασις ἑκάστης τῶν τριῶν τούτων δυνάμεων, γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ A σχηματίζει μετὰ τῆς B γωνίαν 120°, καὶ ἡ A μετὰ τῆς Γ γωνίαν 150°.

Λύσις : Λόγῳ τοῦ ὅτι ἰσορροποῦν, ἑκάστη εἶναι ἴση κατὰ τὴν ἔντασιν καὶ ἀντίθετος πρὸς τὴν συνισταμένην τῶν δύο ἄλλων. Αἱ γωνίαι 120° καὶ 150° κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς A, καὶ ἡ B καὶ Γ σχηματίζουν γωνίαν 90°. Ἡ συνισταμένη αὐτῶν $\Sigma = \mathrm{A}$ κεῖται ἐπ' εὐθείας μετὰ τῆς A, θὰ σχηματίσῃ μετὰ τῆς B γωνίαν 60°. Τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον μὲ πλευρὰς τὰς B καὶ Γ καὶ ὑποτείνουσαν $\Sigma = \mathrm{A}$ ἔχει μίαν γωνίαν 30° καὶ ἄλλην 60°. Ἑπομένως καὶ ἡ πλευρὰ ἡ ἀπέναντι τῶν 30° εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ὑποτεινούσης, ἤτοι $\Gamma = \dfrac{\mathrm{A}}{2}$.

Ἐκ τοῦ αὐτοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ἔχομεν :

$$\mathrm{B}^2 = \mathrm{A}^2 - \frac{\mathrm{A}^2}{4} = \frac{3\mathrm{A}^2}{4} \qquad \text{καὶ} \qquad \mathrm{B} = \frac{\mathrm{A}\sqrt{3}}{2}$$

Καὶ $$A + \frac{A}{2} + \frac{A\sqrt{3}}{2} = 100$$



$$2A + A + A\sqrt{3} = 200$$

$$3A + A\sqrt{3} = 200$$

$$A\left(3 + \sqrt{3}\right) = 200$$

$$A = \frac{200}{3+\sqrt{3}} = 42,26$$

$$\Gamma = \frac{42,26}{2} = 21,13$$

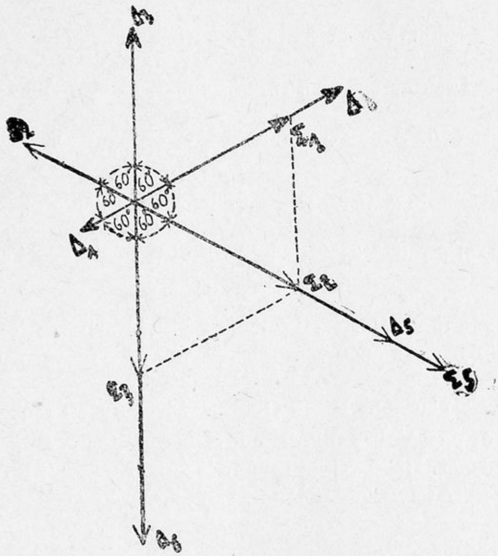
$$B = 21,13\sqrt{3} = 36,60$$

50. Εἴς τι σημεῖον Ο ἑνὸς σώματος, εἶναι ἐφηρμοσμέναι αἱ δυνάμεις $\Delta_1 = 1$ χλγρ., $\Delta_2 = 2$ χλγρ., $\Delta_3 = 3$ χλγρ., $\Delta_4 = 4$ χλγρ., $\Delta_5 = 5$ χλγρ., $\Delta_6 = 6$ χλγρ., σχηματίζουσαι ἀνὰ δύο πρὸς ἀλλήλας γωνίας 60^o. Νὰ προσδιορισθῇ ἡ συνισταμένη αὐτῶν.

Λύσις: Γωνία $\Delta_1 O \Delta_4 = 180^o$, ἄρα Δ_1 καὶ Δ_4 κεῖνται ἐπ' εὐθείας καὶ συνισταμένη $\Sigma_1 = \Delta_4 - \Delta_1 = 4 - 1 = 3$.
Ἐπίσης $\Sigma_2 = \Delta_5 - \Delta_2 = 5 - 2 = 3$ καὶ $\Sigma_3 = \Delta_6 - \Delta_3 = 6 - 3 = 3$.

Φέρομεν τὰς $\Sigma_1\ \Sigma_2$ καὶ $\Sigma_2\ \Sigma_3$. Τὸ τετράπλευρον εἶναι ρόμβος, διότι τὰ τρίγωνα εἶναι ἰσογώνια, ἄρα καὶ ἰσόπλευρα. Ἑπομένως ἡ συνισταμένη τῶν Σ_1 καὶ Σ_3 ἡ Σ_4 ταυτίζεται μετὰ τῆς Σ_2 δηλαδὴ εἶναι ἴση πρὸς

3 χλγρ. Συνθέτομεν τὰς Σ_1 καὶ Σ_2 αἵτινες ἔχουν συνισταμένην Ο Σ_5



ἤτοι $\Sigma_5 = 3 + 3 = 6$ χλγρ.

51. Ἐπὶ εὐθείας ΑΒ μήκους 88 δακτύλων ἐνεργοῦσι τρεῖς δυνάμεις Δ_1, Δ_2, Δ_3 παράλληλοι καὶ ὁμόρροποι. Ἐκ τούτων ἡ μὲν $\Delta_1 =$ 10 χιλιόγρ. καὶ $\Delta_3 = 30$ χιλιόγρ, εἰς τὰ ἄκρα τῆς εὐθείας, ἡ δὲ $\Delta_2 =$ 4 χιλιόγρ. εἰς τὸ μέσον. Νὰ προσδιορισθῇ ἡ δύναμις ἡ δυναμένη νὰ ἰσορροπήσῃ τὰς τρεῖς ταύτας δυνάμεις.

Λύσις: Ἡ ζητουμένη δύναμις θὰ εἶναι ἴση καὶ ἀντίθετος πρὸς τὴν συνισταμένην τῶν δυνάμεων τούτων.

Συνισταμένη τῶν Δ_2 καὶ $\Delta_3 = \Sigma_1 = 30 + 4$ ἤτοι $\Sigma_1 = 34$.

Τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς Λ τὸ εὑρίσκομεν ὡς ἑξῆς:

Ἔστω $ΚΛ = x$ τότε $ΛΒ = 44 - x$. Γνωρίζομεν ὅμως ὅτι: $4x = 30\,(44 - x)$

καὶ $4\,x = 1320 - 30\,x$ καὶ $34\,x = 1320$ ἄρα $x = 38\,\frac{14}{17}$ δάκτυλοι.

$$\text{καὶ } ΑΛ = 44 + 38\ \frac{14}{17} = 82\ \frac{14}{17}\ \text{δακτ.}$$

$$\text{ἤτοι τὸ } Λ \text{ ἀπέχει τοῦ } Α \text{ κατὰ } 82\ \frac{14}{17}\ \text{δακτ.}$$

Τώρα συνισταμένη τῆς $Σ_1$ καὶ $Δ_1$ ἔστω ἡ $Λ'Σ_2$

$$\text{ἂν } ΑΛ' = ψ \quad \text{τότε} \quad ΛΛ' = 82\ \frac{14}{17} - ψ$$

$$\text{ἑπομένως} \quad 34\ (82\ \frac{14}{17} - ψ) = 10\ ψ$$

$$\text{καὶ } 2788 + 28 - 34ψ = 10ψ \quad \text{ἢ} \quad 2816 = 44ψ$$

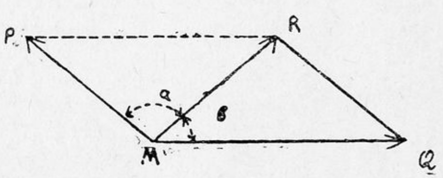
$$\text{καὶ } ψ = 64.$$

Συνεπῶς τὸ σημεῖον τῆς ἐφαρμογῆς τῆς ζητουμένης δυνάμεως εἶναι τὸ Λ′ ἀπέχον 64 δακτύλους ἀπὸ τοῦ Α, ἡ δὲ ἔντασις αὐτῆς εἶναι 44 χιλιόγραμμα.

52. Δύο δυνάμεις P καὶ Q ἔχουν λόγον πρὸς ἀλλήλας ὃν λόγον ἔχουν οἱ ἀριθμοὶ $\sqrt{3}$ καὶ 2. Ἡ συνισταμένη αὐτῶν R ἔχει ἔντασιν 1 χιλιογράμμου. Ποίαν γωνίαν σχηματίζουσιν αἱ δύο δυνάμεις P καὶ Q;

Λύσις: Τὸ τρίγωνον MRQ εἶναι ὀρθογώνιον εἰς R διότι $Q^2 = R^2 + P^2$

$$\text{ἑπομένως ἡμ } β = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{καὶ} \quad β = 60^0.$$



Συνεπῶς ἡ γωνία τῶν συνιστωσῶν εἶναι $α + β = 150^0$.

53. Νὰ ἀναλυθῇ ἡ δύναμις R = 20 χιλιόγραμμα, εἰς δύο συνιστώσας P καὶ Q, σχηματιζούσας μετὰ τῆς R γωνίας $α = 15^0$ καὶ $β = 45^0$.

Λύσις: Αἱ σχέσεις τῶν ἡμιτὸνων εἶναι:

$$\frac{P}{\eta\mu\,\beta} = \frac{Q}{\eta\mu\;\alpha} = \frac{R}{\eta\mu\,(\alpha+\beta)}$$

$$\text{Ἑπομένως } P = \frac{R\,\eta\mu\,45^0}{\eta\mu\;60^0} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \times 20 = 16{,}33 \text{ χιλιόγρμ.}$$

$$Q = \frac{R\,\eta\mu\,15^0}{\eta\mu\;60^0} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \times 20 = 5\,,98 \text{ χιλιόγραμ.}$$

54. Νὰ ἀναλυθῇ ἡ δύναμις $R = 10$ χιλιόγρ. εἰς δύο συνιστώσας P καὶ Q σχηματιζούσας μεταξύ των γωνίαν $\alpha = 60^0$. α'.) Ὅταν $P=Q$. β') Ὅταν $P + Q = 12$ χιλιόγραμ. καὶ γ') Ὅταν $P - Q = 7$ χιλιόγραμμα.

Λύσις: Ἐνταῦθα χρησιμοποιοῦμεν τὸν τύπον:

$$R^2 = P^2 + Q^2 + PQ = 100 \quad \text{διότι συν } 60^0 = \frac{1}{2}$$

α'.) Ὅταν $P = Q$ τότε $R^2 = 3P^2$

$$\text{ἐξ οὗ } P = \frac{R}{\sqrt{3}} = \frac{10\sqrt{3}}{3} = 5{,}77 \text{ χιλιόγρ.}$$

β'.) Τὸ ἄθροισμα $P + Q$ εἶναι δεδομένον:

ὥστε: $P^2 + Q^2 + PQ = 100$

καὶ $P + Q = 12$

ἐξ οὗ $PQ = 44$

P καὶ Q εἶναι αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως:

$$x^2 - 12\,x + 44 = 0 \quad \text{ὅπου} \quad x = 6 \pm \sqrt{36-44}$$

Αἱ ῥίζαι εἶναι φανταστικαί. Τὸ ἄθροισμα $P + Q$ ὀφείλει νὰ εἶναι μικρότερον τοῦ 12 χιλιογρ. ὅπως θὰ ἐξηγήσωμεν εἰς τὸ κατωτέρω πρόβλημα.

γ') Γνωρίζομεν ὅτι:

$$P^2 + Q^2 + PQ = 100$$
$$P - Q = 7$$

ἐξ οὗ $PQ=17$ καὶ $P+Q = \sqrt{117} = 10{,}82$ ἑπομένως

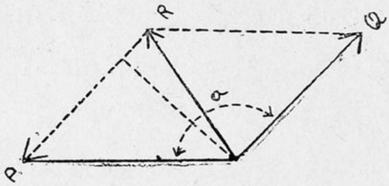
$P = 8{,}91$ χιλιόγρ. καὶ $Q = 1{,}91$ χιλιόγρ.

55. Δύο δυνάμεις σχηματίζουσι γωνίαν $\alpha = 135^0$. Ζητεῖται ἡ σχέσις ἡ ὁποία πρέπει νὰ ὑπάρχῃ μεταξὺ τῶν δυνάμεων τούτων, ἵνα ἡ συνισταμένη εἶναι ἴση πρὸς τὴν μικροτέραν.

Λύσις : Ἔστω Q ἡ μικροτέρα τῶν συνιστωσῶν. Γνωρίζομεν ὅτι :

$$\text{συν}\ 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

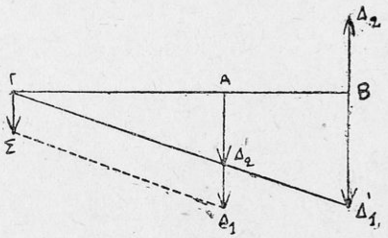
Ἐπειδὴ ἡ συνισταμένη εἶναι ἴση πρὸς τὴν Q, ἔχομεν :



$$Q^2 = P^2 + Q^2 - PQ\sqrt{2} \quad \text{ἐξ οὗ} \quad \frac{P}{Q} = \sqrt{2}\ .$$

56. Νὰ εὑρεθῇ γραφικῶς ἡ συνισταμένη δύο δυνάμεων παραλλήλων καὶ ἀντιρρόπων.

Λύσις : Ἔστωσαν αἱ δύο δυνάμεις Δ_1 καὶ Δ_2 , καὶ $\Delta_1 > \Delta_2$. Ἐκ τοῦ Β φέρω τὸ τμῆμα $B\Delta_1'$ ἴσον πρὸς τὸ $\Delta_1 A$. Ἐπὶ τῆς $A\Delta_1$ λαμ-



βάνω $A\Delta'_2 = B\Delta_2$. Ἑνώνω τὰ Δ'_1 καὶ Δ'_2 , καὶ προεκτείνω τὴν $\Delta'_1\,\Delta'_2$. Αὔτη τέμνει τὴν ΑΒ εἰς τὸ σημεῖον Γ. Μὲ τὰ τμήματα $\Gamma\Delta'_2$ καὶ $\Delta'_2\ \Delta_1$ κατασκευάζω παραλληλόγραμμον. Ἡ ΓΣ εἶναι ἡ συνισταμένη τῶν Δ_1

καὶ Δ_2. Διότι ἐκ τῆς κατασκευῆς καὶ τῶν ὁμοίων τριγώνων $\text{ΑΓΔ}'_2$ καὶ $\text{ΒΓΔ}_1'$ συνάγεται $\Sigma = \Delta_1 - \Delta_2$ καὶ $\dfrac{\Delta_1}{\Delta_2} = \dfrac{\text{ΒΓ}}{\text{ΑΓ}}$.

57. Νὰ ἀναλυθῇ μία δύναμις R εἰς δύο ἄλλας σχηματιζούσας γωνίαν α, οὕτως ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν δύο συνιστωσῶν νὰ εἶναι μέγιστον.

Λύσις : Ἔστωσαν P καὶ Q αἱ δύο συνιστῶσαι, β καὶ γ αἱ γωνίαι των μετὰ τῆς R. Τότε $\beta + \gamma = \alpha$.

Εἰς τὸ τρίγωνον τῶν δυνάμεων, ἡ σχέσις τῶν ἡμιτόνων εἶναι :

$$\frac{R}{\eta\mu\,\alpha} = \frac{P}{\eta\mu\,\gamma} = \frac{Q}{\eta\mu\,\beta} = \frac{P+Q}{2\,\eta\mu\,\frac{\beta+\gamma}{2}\,\sigma\upsilon\nu\,\frac{\beta-\gamma}{2}}$$

ἐξ οὗ $$P + Q = 2R\,\eta\mu\,\alpha\,\eta\mu\,\frac{\alpha}{2}\,\sigma\upsilon\nu\,\frac{\beta-\gamma}{2}$$

Τὸ ἄθροισμα $P + Q$ θὰ εἶναι μέγιστον διὰ $\sigma\upsilon\nu\,\dfrac{\beta-\gamma}{2} = 1$ ἢ $\beta = \gamma$

δηλαδὴ ὅταν $P = Q$ τότε $R = 2P\,\sigma\upsilon\nu\,\dfrac{\alpha}{2}$ ἐξ οὗ $P + Q = \dfrac{R}{\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}}$

58. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἔντασις τῆς συνισταμένης δύο δυνάμεων $P=5$ χιλιόγρ. καὶ $Q = 4$ χιλιόγρ. τεμνομένων. α'.) Ὅταν σχηματίζωσι ὀρθὴν γωνίαν, καὶ β'.) Ὅταν σχηματίζωσι γωνίαν 45^0, 60^0, καὶ 10^0.

Λύσις : α'.) $R = \sqrt{P^2+Q^2} = \sqrt{25+16} = \sqrt{41} = 6{,}40$ χλγρ.

β'.) $R = \sqrt{P^2+Q^2+2PQ\,\sigma\upsilon\nu\,(PQ)}$.

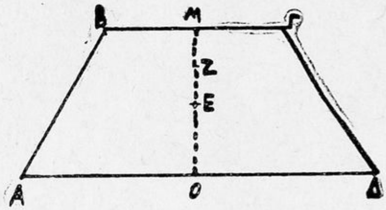
ἔχομεν : $\sigma\upsilon\nu\,45^0 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ καὶ $R = \sqrt{41+20\sqrt{2}} = 8{,}32$ χλγρ.

συν. $60^0 = \dfrac{1}{2}$ καὶ $R = \sqrt{41+20} = 7{,}81$ χιλγρ.

συν. $10^0 = 0{,}99$ καὶ $R = \sqrt{41+39{,}4} = 8{,}97$ χιλιόγρ

59. Νὰ εὑρεθῇ τὸ κέντρον βάρους τῶν ἑξῆς περιμέτρων : α'.) Ἑνὸς κανονικοῦ ἡμιεξαγώνου. β'.) Ἑνὸς κανονικοῦ ἡμιοκταγώνου. γ'.) Τοῦ τραπεζίου τοῦ κατασκευαζομένου διὰ τῆς ἑνώσεως τῶν μέσων τῶν δύο πλευρῶν ἰσοπλεύρου τριγώνου.

Λύσις : α΄.) Ἔστω ΟΜ ἡ ἑνοῦσα τὰ μέσα τῶν δύο βάσεων. Αἱ πλευραὶ ΑΒ καὶ ΓΔ ἔχουσι τὴν συνισταμένην των εἰς τὸ μέσον Ε τῆς ΟΜ. Ἡ πλευρὰ ΒΓ ἔχει τὸ κέντρον βάρους της εἰς τὸ σημεῖον Μ. Ἐὰν



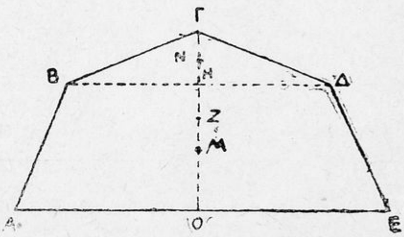
λάβωμεν ὡς μονάδα δυνάμεως τὸ βάρος μιᾶς πλευρᾶς τοῦ ἑξαγώνου, εἰς τὸ Μ θὰ εἶναι ἐφηρμοσμένον βάρος 1, εἰς τὸ Ε ἓν βάρος 2, καὶ εἰς τὸ σημεῖον Ζ, δηλαδὴ εἰς τὸ ζητούμενον κέντρον βάρους, ἓν βάρος 3.

Ἂν καλέσωμεν τὴν ΟΖ διὰ x καὶ ΟΜ διὰ h ἔχομεν :

$$3x = 1 \times h + 2 \times \frac{h}{2} = 2h$$

ἐξ οὗ $\qquad x = \frac{2}{3}\, h$

β΄) Αἱ πλευραὶ ΑΒ καὶ ΔΕ ἔχουσι τὴν συνισταμένην των εἰς Μ.



Αἱ πλευραὶ ΒΓ καὶ ΓΔ εἰς Ν. Λαμβάνοντες τὰς ῥοπὰς ὡς πρὸς τὸ σημεῖον Ο ἔχομεν : $4 \times OZ = 2 \times OM + 2 \times ON$

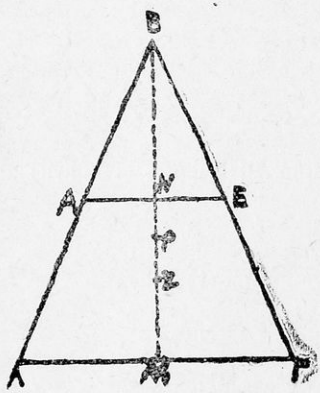
λοιπὸν $OM = \frac{OH}{2} = \frac{R\sqrt{2}}{4}$

$$ON = OH + \frac{\Gamma H}{2} = \frac{R\sqrt{2}}{2} + \frac{R(2-\sqrt{2})}{4} = \frac{R(2+\sqrt{2})}{4}$$

ἐξ οὗ $4 \times OZ = \frac{R\sqrt{2}}{2} + \frac{R(2+\sqrt{2})}{2} = R(1+\sqrt{2})$

καὶ $OZ = \frac{R(1+\sqrt{2})}{4}$

γ'.) Τὸ τραπέζιον ΑΔΕΓ εἶναι κανονικὸν ἡμιεξάγωνον. Ἂν παρα-



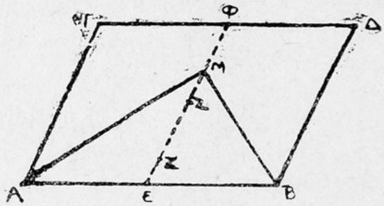
στήσωμεν τὴν MN διὰ h, καὶ λάβωμεν τὰς ῥοπὰς ὡς πρὸς τὸ σημεῖον M ἔχομεν :

$$5 \times MZ = 2 \times MP + 1 \times MN = 2 \times \frac{h}{2} + h$$

ἐξ οὗ $MZ = \frac{2h}{5}$

60. Νὰ εὑρεθῇ ἐντὸς τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ σημεῖον Μ, τὸ ὁποῖον νὰ εἶναι τὸ κέντρον βάρους τοῦ πενταγώνου ΜΑΓΔΒ, τοῦ λαμβανομένου δι' ἀφαιρέσεως τοῦ τριγώνου ΜΑΒ.

Λύσις : Ἔστωσαν Ζ καὶ Ζ′ τὰ κέντρα βάρους τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ καὶ τοῦ τριγώνου ΑΜΒ, τῶν ὁποίων τὰ ἐμβαδὰ εἶναι Σ καὶ Σ′. Τὸ ζητούμενον σημεῖον Μ εὑρίσκεται ὡς καὶ τὰ δύο ἄλλα κέντρα ἐπὶ τῆς διαμέσου ΕΦ. Θέτομεν ΕΦ = α καὶ ΕΜ = x.



Λαμβάνομεν τὰς ῥοπὰς τῶν ἐπιφανειῶν ὡς πρὸς τὸ σημεῖον Ε.

$$\Sigma \times \frac{\alpha}{2} = \Sigma' \times \frac{x}{3} + (\Sigma - \Sigma' x) \qquad (1)$$

τότε $\dfrac{\Sigma}{\Sigma'} = \dfrac{\alpha}{\frac{x}{2}}$ διότι ἡ ΑΒ εἶναι μία κοινὴ βάσις καὶ τὰ ὕψη εἶναι ἀνάλογα τῶν διαμέσων.

Εἶναι φανερὸν ὅτι ἐκ τῆς (1) ἔχομεν :

$$\frac{\alpha^2}{2} = \frac{x^2}{6} + \left(\alpha - \frac{x}{2}\right)x \quad \text{ἢ} \quad 2x^2 - 6\alpha x + 3\alpha x^2 = 0 \qquad (2)$$

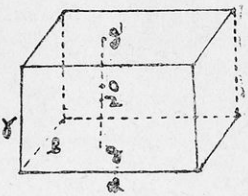
$$\text{ἐξ οὗ} \quad x = \frac{3\alpha \pm \sqrt{9\alpha^2 - 6\alpha^2}}{2} = \frac{\alpha(3 \pm \sqrt{3})}{2}$$

Ἡ θετικὴ τιμὴ ἀπορρίπτεται ἀφοῦ $x < \alpha$, μένει λοιπὸν

$$x = \frac{\alpha(3 - \sqrt{3})}{2}$$

61. Ποῖον εἶναι τὸ κέντρον βάρους τῆς ἐπιφανείας τῶν πέντε ἑδρῶν ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, τὸ ὁποῖον ἔχει ἀκμὰς α, β, καὶ γ, ;

Λύσις : Ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια τῶν ἓξ ἑδρῶν $\Sigma = 2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)$ εἶναι ἓν βάρος ἐφηρμοσμένον εἰς τὸ κέντρον O τοῦ στερεοῦ.



Ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ ἀφαιρεθεῖσα ἕδρα εἶναι ἡ ἕδρα ἡ ἀνωτέρα τοῦ ἐμβαδοῦ $\Sigma' = \alpha\,\beta$.

Ἀρκεῖ νὰ συνθέσωμεν μίαν δύναμιν Σ εἰς O μετὰ μιᾶς ἄλλης παραλλήλου $-\Sigma'$ εἰς g'.

Τὸ κέντρον βάρους τῶν πέντε ἑδρῶν εἶναι ἓν σημεῖον Z ἐπὶ τῆς προεκτάσεως g' O τοιοῦτον ὥστε : $\dfrac{OZ}{Og'} = \dfrac{\Sigma'}{\Sigma - \Sigma'}$, ἐξ οὗ

$OZ = \dfrac{\gamma}{2} \times \dfrac{\alpha\,\beta}{\alpha\beta + 2(\alpha\gamma + \beta\gamma)}$ Ἀκολουθοῦντες τὴν ἀφαιρεθεῖσαν ἕδραν

θὰ ἔχωμεν : $$OZ' = \frac{\beta}{2} \times \frac{\alpha\,\gamma}{\alpha\gamma + 2\,(\alpha\beta + \beta\gamma)}$$

καὶ $$OZ'' = \frac{\alpha}{2} \times \frac{\beta\,\gamma}{\beta\gamma + 2(\alpha\beta + \alpha\gamma)}$$

ἀποστάσεις λαμβανομένας ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς εὐθείας ἥτις ἑνώνει τὸ κέντρον βάρους μετὰ τῆς ἀφαιρουμένης ἕδρας ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ παραλληλεπιπέδου.

Μερικὴ περίπτωσις. Εἰς τὸν κύβον, αἱ ἀκμαὶ εἶναι ἴσαι, τότε :

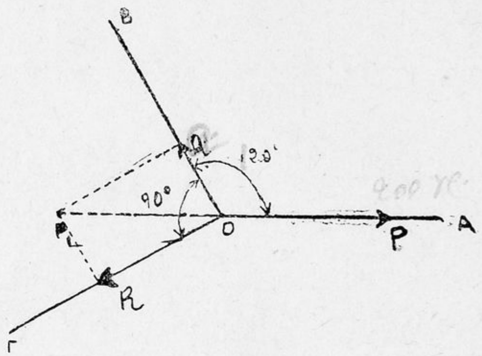
$$OZ = OZ' = OZ'' = \frac{\alpha}{10}$$

62. Τρία σχοινία AO , BO , ΓO ἐφαρμόζονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον O. Διερχόμενα δὲ τὰ σχοινία διὰ τροχαλιῶν τείνονται διὰ βαρῶν ἐξηρτημένων ἐκ τῶν ἄκρων τῶν τριῶν νημάτων. Τὰ σχοινία AO καὶ

ΒΟ σχηματίζουσι γωνίαν 120^0. Τὰ σχοινία ΓΟ καὶ ΒΟ γωνίαν 90^0. Τοῦ σημείου Ο εὑρισκομένου ἐν ἰσορροπίᾳ καὶ τοῦ βάρους τοῦ ἐξηρτημένου ἐκ τοῦ σχοινίου ΑΟ ὄντος 200 γραμμαρίων νὰ προσδιορισθῶσι τὰ βάρη τὰ ἐξηρτημένα ἐκ τῶν σχοινίων ΒΟ καὶ ΓΟ.

Λύσις : Ἔστωσαν P , Q καὶ R τὰ βάρη. $P = 200$ γραμ.

Ἀφοῦ τὰ βάρη εἶναι ἐν ἰσορροπίᾳ, τὸ P εἶναι ἴσον καὶ ἀντίθετον



πρὸς τὴν συνισταμένην P_1 τῶν Q καὶ R, ἄρα $P = P_1$. Τότε ἔχομεν

$$Q = P_1 \times \text{συν}\, 60^0 = \frac{P}{2} = 100 \text{ γραμ.}$$

καὶ $$R = P_1 \times \text{συν}\, 30^0 = \frac{P\sqrt{3}}{2} = 173{,}2 \text{ γραμ.}$$

63. Αἱ ἐντάσεις τριῶν δυνάμεων εὑρισκομένων ἐν ἰσορροπίᾳ εἶναι $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ καὶ $\sqrt{5-\sqrt{6}}$. Ποῖαι εἶναι αἱ γωνίαι, τὰς ὁποίας αἱ δυνάμεις αὗται σχηματίζουσι μεταξύ των;

Λύσις: Ἔστωσαν P , Q καὶ R αἱ τρεῖς δυνάμεις ἐν ἰσορροπίᾳ. Ἡ P εἶναι ἴση καὶ ἀντίθετος πρὸς τὴν P_1 συνισταμένην τῶν Q καὶ R. Εἰς τὸ τρίγωνον OP_1Q αἱ τρεῖς πλευραὶ εἶναι γνωσταί.

Η ἡμιπερίμετρος $\pi = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{6}\right) = 2{,}3716$

Παρατηροῦμεν ὅτι $\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2 = 5 - 2\sqrt{6}$

συνεπῶς $\varepsilon\varphi \dfrac{OQP_1}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ ἐξ οὗ $OQP_1 = 60^\circ$

ἐπίσης $\varepsilon\varphi \dfrac{QOP_1}{2} = \sqrt{\dfrac{(\pi-\sqrt{2})(\pi-\sqrt{5}-\sqrt{6})}{\pi(\pi-\sqrt{3})}}$

ἐξ οὗ $QOP_1 = 69^\circ{,}55'$

καὶ $\varepsilon\varphi \dfrac{OP_1Q}{2} = \sqrt{\dfrac{(\pi-\sqrt{3})(\pi-\sqrt{5}-\sqrt{6})}{\pi(\pi-\sqrt{2})}}$

ἐξ οὗ $OP_1Q = 50^\circ, 5'$.

Συμπεραίνοντες ἔχομεν γωνίας δυνάμεων :

$POQ = 110^\circ{,}5'$, $POR = 129^\circ{,}55'$, $QOR = 120^\circ$.

64. Πέντε δυνάμεις ἐφηρμοσμέναι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου, καὶ εὑρισκόμεναι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, ἔχουσιν ἐντάσεις ἀναλόγους πρὸς $3\sqrt{2}$, 4, 5, 7, καὶ 2. Ἡ πρώτη ἐκ τῶν δυνάμεων σχηματίζει μεθ' ἑκάστης ἐκ τῶν ἄλλων διαδοχικῶς γωνίας 45°, 135°, 225° καὶ 315°. Νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ δυνάμεις αὗται εὑρίσκονται ἐν ἰσορροπίᾳ καὶ τὸ σύστημα ἰσορροπεῖ.

Λύσις : Ἔστωσαν αἱ πέντε δυνάμεις F_1, F_2, F_3, F_4 καὶ F_5 καὶ M τὸ σημεῖον τῆς ἐφαρμογῆς αὐτῶν.

Προβάλλομεν αὐτὰς κατὰ τὴν διεύθυνσιν MF_1 καὶ ἐπὶ διευθύνσεως καθέτου.

Αἱ προβολαὶ X καὶ Ψ τῆς συνισταμένης εἶναι :

$X = F_1 + F_2\,\sigma\upsilon\nu\,45^\circ + F_3\,\sigma\upsilon\nu\,135^\circ + F_4\,\sigma\upsilon\nu.\,225^\circ + F_5\,\sigma\upsilon\nu.\,315^\circ$

καὶ $\Psi = F_2\,\eta\mu\,45^\circ + F_3\,\eta\mu\,135^\circ + F_4\,\eta\mu\,225^\circ + F_5\,\eta\mu\,315^\circ$

ὥστε $\sigma\upsilon\nu.\,45^\circ = \eta\mu\,45^\circ = \eta\mu\,135^\circ = \sigma\upsilon\nu\,315^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

καὶ $\sigma\upsilon\nu\,135^\circ = \sigma\upsilon\nu\,225^\circ = \eta\mu\,225^\circ = \eta\mu\,315^\circ = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

ἐξ οὗ $X = 3\sqrt{2} + 4\dfrac{\sqrt{2}}{2} - 5\dfrac{\sqrt{2}}{2} - 7\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{2\sqrt{2}}{2} = 0$

$$\text{καί} \quad \Psi = 4\frac{\sqrt{2}}{2} + 5\frac{\sqrt{2}}{2} - 7\frac{\sqrt{2}}{2} - 2\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

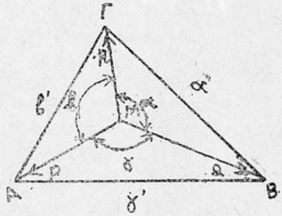
$$\text{ἑπομένως} \quad X = 0 \quad \text{καὶ} \quad \Psi = 0$$

τὸ σύστημα τῶν δυνάμεων εἶναι συνεπῶς ἐν ἰσορροπίᾳ.

65. Ποῖαι πρέπει νὰ εἶναι αἱ ἐντάσεις τῶν δυνάμεων τῶν ἐφηρμοσμένων εἰς τὸ σημεῖον τῆς συναντήσεως : α'.) τῶν ὕψῶν ἑνὸς τριγώνου. β'.) τῶν διαμέσων. γ'.) τῶν διχοτόμων, ἵνα τὸ σύστημα τῶν τριῶν δυνάμεων εὑρίσκεται ἐν ἰσορροπίᾳ ;

Λύσις : Ἔστωσαν τρεῖς δυνάμεις P , Q , R ἐφηρμοσμέναι εἰς τὸ σημεῖον M ἐντὸς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἰσορροποῦσαι κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῶν κορυφῶν τοῦ τριγώνου. Αἱ δυνάμεις σχηματίζουσιν ἀνὰ δύο τὰς γωνίας α, β, γ.

Αἱ δυνάμεις ἰσορροποῦσιν ἀλλήλας, συνεπῶς τὸ ἄθροισμα τῶν προ-



βολῶν ἐπὶ τῶν δύο μὴ παραλλήλων ἀξόνων εἶναι μηδέν. Ἐκλέγομεν τοὺς ἄξονας ἀμοιβαίως καθέτως πρὸς MA καὶ MB.

$$\text{Ἔχομεν :} \quad Q\,\text{ημ}\,\gamma = R\,\text{ημ}\,\beta$$

$$\text{καὶ} \quad P\,\text{ημ}\,\gamma = R\,\text{ημ}\,\alpha$$

$$\text{ἐξ οὗ} \quad \frac{P}{\text{ημ}\,\alpha} = \frac{Q}{\text{ημ}\,\beta} = \frac{R}{\text{ημ}\,\gamma}$$

α'.) Ἔστω M τὸ σημεῖον συναντήσεως τῶν ὕψῶν. Αἱ γωνίαι α, β, γ, εἶναι συμπληρωματικαὶ τῶν γωνιῶν Α, Β, Γ :

$$\frac{P}{\text{ημ}\,A} = \frac{Q}{\text{ημ}\,B} = \frac{R}{\text{ημ}\,\Gamma} \quad \text{ἐξ οὗ} \quad \frac{P}{\alpha'} = \frac{Q}{\beta'} = \frac{R}{\gamma'}$$

ἀφοῦ ὁ λόγος ἑκάστης πλευρᾶς ἑνὸς τριγώνου πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς ἀπέναντι γωνίας εἶναι σταθερός.

Αἱ ἐντάσεις τῶν δυνάμεων κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῶν ὑψῶν πρέπει νὰ εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰς πλευράς.

β'.) Ὅταν τὸ σημεῖον Μ εἶναι τὸ σημεῖον τῆς συναντήσεως τῶν τριῶν διαμέσων, τὰ τρίγωνα ΜΓΒ, ΜΑΓ, ΜΒΑ εἶναι ὅμοια :

$$\mathrm{MB}.\ \mathrm{M\Gamma}\ \eta\mu\ \alpha = \mathrm{M\Gamma}.\ \mathrm{MA}\ \eta\mu\ \beta = \mathrm{MA}.\ \mathrm{MB}\ \eta\mu\ \gamma$$

ἐξ οὗ
$$\frac{\eta\mu\,\alpha}{\mathrm{MA}} = \frac{\eta\mu\,\beta}{\mathrm{MB}} = \frac{\eta\mu\,\gamma}{\mathrm{M\Gamma}}$$

ὥστε
$$\frac{P}{\mathrm{MA}} = \frac{Q}{\mathrm{MB}} = \frac{R}{\mathrm{M\Gamma}}$$

αἱ ἐντάσεις τῶν δυνάμεων πρέπει νὰ εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰς διαμέσους τοῦ τριγώνου.

γ'.) Εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν τὸ σημεῖον Μ εἶναι ἡ συνάντησις τῶν τριῶν διχοτόμων, ἔχομεν :

$$\alpha = \pi - \frac{B+\Gamma}{2}, \quad \beta = \pi - \frac{A+\Gamma}{2}, \quad \gamma = \pi - \frac{A+B}{2}$$

ἐξ οὗ
$$\frac{P}{\sigma\upsilon\nu\,\frac{A}{2}} = \frac{Q}{\sigma\upsilon\nu\,\frac{B}{2}} = \frac{R}{\sigma\upsilon\nu\,\frac{\Gamma}{2}}$$

66. Ἐπὶ μεταλλίνης ῥάβδου ΑΔ, ἥτις μετὰ τῆς ὁριζοντίας εὐθείας ΑΧ σχηματίζει γωνίαν 30° εἶναι ἐφηρμοσμέναι τέσσαρες δυνάμεις ἰσορροποῦσαι ἀλλήλας. Ἡ πρώτη δύναμις F_1 εἶναι κατακόρυφος καὶ ἐνεργεῖ ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω, ἡ δευτέρα F_2 εἶναι ἴση πρὸς 1 χιλιόγραμμον καὶ ἐνεργεῖ κατακορύφως ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω, αἱ δύο ἄλλαι F_3 καὶ F_4 εἶναι κάθετοι πρὸς τὴν ῥάβδον καὶ ἐνεργοῦσι ἀντιθέτως. Ἡ ἀπόστασις ΑΒ = 0,40 μέτρ. ἡ ΒΓ = 0,30 μ. καὶ ἡ ΓΔ = 0,25 μ. Ζητεῖται νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ τρεῖς ἄγνωστοι δυνάμεις F_1, F_3 καὶ F_4.

Λύσις : Προβάλλομεν τὰς δυνάμεις ἐπὶ τοῦ ἄξονος ΑΧ καὶ ἐπὶ ἄξονος καθέτου μὲ ἀρχὴν τὸ σημεῖον Α.

Ἐκ κατασκευῆς ἔχομεν :

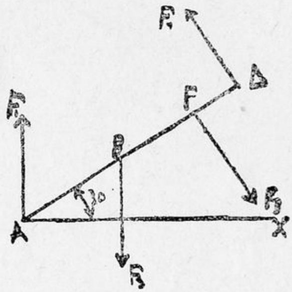
$$F_3 = -F_4$$

καὶ $F_1 = -F_2 = -1$ χιλιόγρ.

Ἡ συνισταμένη ῥοπὴ ἐν σχέσει πρὸς τὸ σημεῖον Α εἶναι μηδέν,

ἐξ οὗ $$1 \times 20\sqrt{3} = F_3\,(95 - 70)$$

ὥστε $$F_3 = \frac{4}{5}\sqrt{3} \quad \text{καὶ} \quad F_4 = -\frac{4}{5}\sqrt{3}$$



67. Ἐκ δύο σημείων Α καὶ Β εὑρισκομένων ἐπὶ τῆς αὐτῆς ὁριζοντίου εὐθείας ἐξαρτῶνται δύο νήματα. Τὸ ἓν ἄκρον τοῦ ἑνὸς νήματος φέρει κρίκον Γ, διὰ μέσου τοῦ ὁποίου διέρχεται τὸ ἕτερον νῆμα εἰς τὸ ἄκρον τοῦ ὁποίου κρέμαται βάρος Κ. Νὰ προσδιορισθῇ ἡ θέσις τῆς ἰσορροπίας.

Λύσις: Ὅταν τὸ σύστημα ἰσορροπεῖ, ἔχομεν:

$$AB = 2\lambda \quad \text{καὶ} \quad A\Gamma = \lambda$$

Ἔστω Τ ἡ τάσις τοῦ νήματος ΑΓ, ἡ τάσις τοῦ νήματος ΒΓ εἶναι Κ.

Ἡ συνισταμένη τῶν τάσεων τῶν ἴσων πρὸς τὰ τμήματα ΓΒ καὶ ΓΚ διευθύνεται κατὰ τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας ΒΓΚ = 2 δ.

Ἔχομεν: $$\delta = \frac{\pi}{2} - \alpha = \alpha + \beta \qquad (1)$$

ἐξ οὗ $$\beta = \frac{\pi}{2} - 2\alpha \qquad (2)$$

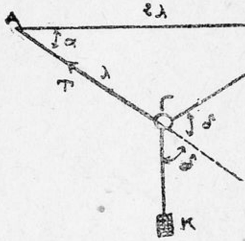
Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ μᾶς δίδει τὰς σχέσεις:

$$\frac{\lambda}{2\lambda} = \frac{\eta\mu\,\beta}{\eta\mu\,(\alpha+\beta)} = \frac{1}{2}$$

κατ᾽ ἀκολουθίαν: $$\eta\mu\,(\alpha+\beta) = 2\,\eta\mu\,\beta$$

Ἐκ τῆς (1) καὶ (2) λαμβάνομεν :

$$συν\ α = 2\ συν\ 2α = 2\ (2\ συν^2 α - 1)$$



ἐξ οὗ ἡ ἐξίσωσις : $4\ συν^2 α - συν\ α - 2 = 0$

Λύοντες ἔχομεν : $συν\ α = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{8}$

καὶ $α = 32^o\ 32'\ 1''$

Ἡ τάσις τοῦ νήματος ΑΓ. Τὸ ἄθροισμα τῶν προβολῶν τῶν δυνάμεων ἐπὶ ΑΓ εἶναι μηδέν :

$$T - 2K\ συν\ δ = T - 2K\ ημ\ α = 0$$

καὶ ἡ τάσις $T = 2K\ ημ\ 32^o\ 32'\ 1'' = 1{,}0756\,K$.

68. Τρίγωνον ὁμογενὲς βάρους P εἶναι ἐξηρτημένον διὰ νήματος ἐκ μιᾶς τῶν κορυφῶν του. Τοῦ τριγώνου εἶναι γνωσταὶ αἱ πλευραὶ καὶ αἱ γωνίαι. Ποῖον βάρος πρέπει νὰ ἐξαρτήσωμεν ἐκ μιᾶς τῶν δύο κορυφῶν ἵνα ἡ βάσις εἶναι ὁριζοντία ;

Λύσις : Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἐξηρτημένον ἐκ τῆς κορυφῆς Α. Τὸ τρίγωνον δὲν ἔχει ἄλλην κίνησιν ἐκτὸς τῆς περιστροφῆς περὶ τὸ σημεῖον Α. Δὲν ὑπάρχει λοιπὸν παρὰ μία θέσις ἰσορροπίας.

Ροπὴ ὡς πρὸς τὸ Α.

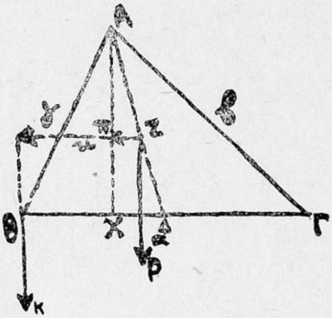
$$P \times π - K \times κ = 0 \qquad (1)$$

Ἂν δ ἡ πυκνότης, τότε ἔχομεν :

$$P = \delta \frac{\alpha h}{2} \qquad \pi = \frac{2}{3} X\Delta$$

Ἡ ἐξίσωσις (1) γίνεται :

$$K = \frac{\delta}{6} \times \alpha \times 2\,X\Delta \times \varepsilon\varphi\, B$$



$$\text{ὥστε} \qquad \alpha = \Gamma X + BX$$

$$\text{καὶ} \qquad 2X\Delta = \Gamma X - BX$$

$$\text{ἐξ οὗ} \qquad \alpha \times 2\,X\Delta = \overline{\Gamma X}^2 - \overline{BX}^2 = \beta^2 - \gamma^2$$

$$\text{Ὥστε} \qquad K = \frac{\delta}{6}\left(\beta^2 - \gamma^2\right) \varepsilon\varphi\, B$$

69. Ἐκ τῶν δύο ἄκρων A καὶ B γωνιώδους μοχλοῦ AOB, κινουμένου περὶ τὸ σημεῖον O κρέμανται βάρη P καὶ K. Τοῦ μοχλοῦ εὑρισκομένου ἐν ἰσορροπίᾳ νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι α, καὶ β, τὰς ὁποίας σχηματίζουσι οἱ βραχίονες τοῦ μοχλοῦ μετὰ τῆς κατακορύφου τῆς ἀγομένης ἐκ τοῦ σημείου O. Τὸ βάρος τοῦ μοχλοῦ δὲν λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν.

Λύσις : Ἔστω $\vartheta = \alpha + \beta$ ἡ γωνία τοῦ μοχλοῦ.

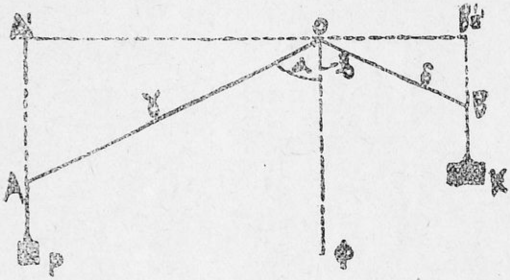
Αἱ ῥοπαὶ ὡς πρὸς τὸ O εἶναι :

$$P \times OA' - K \times OB' = 0$$

$$\text{ἢ} \quad P\gamma\,.\,\eta\mu\,\alpha = K\,\delta\,\eta\mu\,\beta$$

ἐξ οὗ $\quad \dfrac{\text{ἡμ}\,\alpha}{\text{ἡμ}\,\beta} = \dfrac{K\delta}{P\gamma}$ ἡ σχέσις αὕτη δύναται νὰ γραφῇ οὕτω :

$$\frac{\eta\mu\,\alpha - \eta\mu\,\beta}{\eta\mu\,\alpha + \eta\mu\,\beta} = \frac{K\delta - P\gamma}{K\delta + P\gamma}$$



ἢ $\quad \dfrac{\varepsilon\varphi\,\frac{1}{2}\left(\alpha - \beta\right)}{\varepsilon\varphi\,\frac{1}{2}\left(\alpha + \beta\right)} = \dfrac{\varepsilon\varphi.\varphi - 1}{\varepsilon\varphi.\varphi + 1}$ θέτοντες $\varepsilon\varphi\,.\,\varphi = \dfrac{K\delta}{P\gamma}$

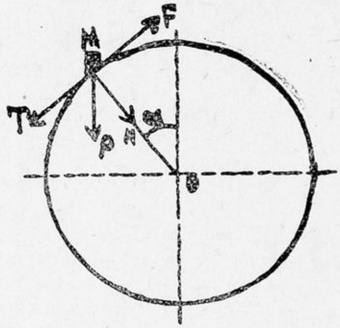
ὥστε : $\quad \varepsilon\varphi\,\dfrac{1}{2}\left(\alpha - \beta\right) = \varepsilon\varphi\,\dfrac{\vartheta}{2} \times \varepsilon\varphi\left(\varphi - 45^\circ\right)$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη συνδυαζομένη μετὰ τῆς $\vartheta = \alpha + \beta$ δίδει τὰς γωνίας α καὶ β.

70. Σῶμα ἔχον βάρος τοποθετεῖται ἐπὶ περιφερείας λείας, τῆς ὁποίας τὸ ἐπίπεδον εἶναι κατακόρυφον. Γνωστοῦ ὄντος, ὅτι ἡ τριβὴ κατὰ τὴν ἀναχώρησιν εἶναι $0{,}20 = f$, ποία εἶναι ἡ χαμηλοτέρα θέσις, τὴν ὁποίαν δύναται νὰ καταλάβῃ τὸ σῶμα χωρὶς νὰ παρασυρθῇ ;

Λύσις : Ἡ ζητουμένη θέσις Μ θὰ καθορισθῇ διὰ τῆς γωνίας α, τῆς ἀκτῖνος ΜΟ καὶ τῆς κατακορύφου.

Τὸ βάρος Ρ ἀναλύεται εἰς δύο δυνάμεις. Ἡ μία Ν κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς ἀκτῖνος, καὶ ἡ ἄλλη ἐφαπτομένη Τ. Ἡ πρώτη δίδει μίαν δύναμιν τριβῆς $F = Nf$ ἥτις ὀφείλει νὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν T κατὰ τὴν ἀναχώρησιν.



$$\text{Ἔχομεν : } \quad Nf = T$$

$$\text{ἢ} \quad P \text{ συν } \alpha \times f = P \text{ ἡμ } \alpha$$

$$\text{ἐξ οὗ} \quad f = \text{εφ } \alpha = \text{εφ. } \varphi$$

$$\text{κατ' ἀκολουθίαν } \varphi = \alpha$$

Ἡ χαμηλοτέρα λοιπὸν θέσις εἶναι ἐκείνη καθ' ἥν ἡ ἀκτὶς σχηματίζει μετὰ τῆς κατακορύφου γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν γωνίαν τριβῆς κατὰ τὴν ἀναχώρησιν.

Β'. ΕΡΓΟΝ ΚΑΙ ΕΝΕΡΓΕΙΑ.

---

71. Ποῖον εἶναι τὸ ἔργον, τὸ ὁποῖον ἐκτελεῖται κατὰ τὴν πτῶσιν ὕδατος ἐκ τριῶν μέτρων, καὶ τὸ ὁποῖον παρέχει 2000 κυβικὰ μέτρα ὕδατος τὴν ὥραν ;

Λύσις : Ἡ ποσότης ἐκ τῆς πτώσεως κατὰ δευτερόλεπτον εἶναι :

$$\frac{2000000}{3600} = 555\,\frac{5}{9}$$

Τὸ ἔργον εἰς ἀτμοΐππους εἶναι :

$$T = \frac{555\frac{5}{9} \times 3}{75} = 22{,}22 \text{ ἀτμόϊπποι.}$$

72. Νὰ ὑπολογισθῇ εἰς χιλιογραμμόμετρα, ἡ κινητικὴ ἐνέργεια βλήματος 350 χιλιογράμμων, ἀφιεμένου μετὰ ταχύτητος 800 μέτρων.

Λύσις : $\frac{1}{2} \times 350000\ (80000)^2$ ἔργια ἢ $32 \times 35 \times 10^5$ Ἰουλίους, δηλαδὴ $\frac{32 \times 35 \times 10^5}{9{,}81}$ χιλιογραμμόμετρα.

73. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ κινητικὴ ἐνέργεια τῆς μάζης τοῦ ἑνὸς χιλιοστοῦ τοῦ χιλιοστογράμμου τὸ ὁποῖον κινεῖται μὲ τὴν ταχύτητα τοῦ φωτός.

Λύσις : $\frac{1}{2} \times \overline{10}^{6} \left(3 \times 10^{10}\right)^2$ ἔργια ἢ $\frac{1}{2} \times 9 \times \frac{10^7}{9{,}81}$ χιλιογραμμόμετρα.

74. Ποῖον ἔργον πρέπει νὰ δαπανήσῃ τις διὰ νὰ μεταδώσῃ μίαν ἀρχικὴν ταχύτητα 800 μέτρων κατὰ δευτερόλεπτον εἰς ἓν βλῆμα 300 χιλιογράμμων ;

Λύσις : $\frac{1}{2}\ 300000\ (80000)^2$ ἔργια ἢ 96×10^6 Ἰούλιαι μονάδες.

75. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ κινητικὴ ἐνέργεια πλοίου ἐκτοπίσματος 10 χιλιάδων τόννων καὶ διανύοντος 20 μίλια τὴν ὥραν. [1 μίλιον = 1852 μέτρα).

Λύσις : Ταχύτης πλοίου : $\frac{20 \times 185200}{3600} = 1029$ ἑκατοστόμετρα.

Μάζα πλοίου : 10^{10} γραμμάρια.

Κινητικὴ ἐνέργεια : $\frac{1}{2} \times 10^{10} \times (1029)^2$ ἔργια.

76. Σῶμα βάρους 5 χιλιογράμμων πίπτει εἰς τόπον ὅπου g=980. Ποία θὰ εἶναι ἡ κινητική του ἐνέργεια μετὰ πτῶσιν 4 δευτερολέπτων ;

Λύσις : Συμφώνως μὲ τὸν νόμον τῶν ταχυτήτων κατὰ τὴν πτῶσιν τῶν σωμάτων, ἡ ταχύτης τοῦ σώματος μὲ παρέλευσιν 4 δευτερολέπτων θὰ εἶναι $\upsilon = 980 \times 4$.

$$\frac{1}{2} m \upsilon^2 = \frac{1}{2} \times 5000 \, (980 \times 4)^2 \text{ ἔργια} = 3{,}8 \times 10^{10} \text{ ἔργια}$$

ἢ 3800 Ἰούλιαι μονάδες.

77. Σφαῖρα τηλεβόλου 10 χιλιογράμμων, ῥίπτεται μετὰ ταχύτητος 600 μέτρων κατὰ δευτερόλεπτον. Ποία εἶναι ἡ κινητική της ἐνέργεια ;

Λύσις : $\frac{1}{2}$ $10000. (60000)^2 = 18 \times 10^{12}$ ἔργια

ἢ 1800000 Ἰούλιαι μονάδες.

78. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἰσχὺς πτώσεως ὕδατος ποσότητος 240 κυβικῶν μέτρων κατὰ λεπτόν, καὶ ταχύτητος 5 μέτρων κατὰ δευτερόλεπτον.

Λύσις : Ἡ ποσότης κατὰ δευτερόλεπτον εἶναι :

$\frac{240}{60} = 4$ κυβικὰ μέτρα ὕδατος ἢ 4×10^6 γραμμάρια.

Ἐξ ἄλλου $\upsilon = 500$ ἑκατοστόμετρα.

ὥστε $\frac{1}{2} m \upsilon^2 = \frac{1}{2} \times 4 \times 10^6 \, (500)^2 = 50 \times 10^{10}$ ἔργια.

Ἡ ἰσχὺς θὰ εἶναι 50000 βάτ.

79. Εἰς τόπον ὅπου τὸ $g = 980$, μᾶζα 24 χιλιογράμμων ὑψώθη εἰς ὕψος 8 μέτρων. Ποία εἶναι ἡ δυναμικὴ ἐνέργεια τῆς μάζης ;

Λύσις : $24000 \times 980 \times 800 = 1881{,}6 \times 10^7$ ἔργια.

80. Ἀτμομηχανὴ βάρους 10 τόννων μεταφέρει 900 ἐπιβάτας μέσου βάρους 65 κοιλῶν. Κινεῖται μετὰ ταχύτητος 18 χιλιομέτρων τὴν ὥραν. Ποία εἶναι ἡ κινητική της ἐνέργεια ;

Λύσις : $m = 10000000 + 65000 \times 900 = 68500000$ γραμμ.

$\upsilon = \frac{1800000}{3600} = 500$ ἑκατοστόμετρα

$\frac{1}{2} m\upsilon^2 = \frac{1}{2} \, 685 \times 10^5 \, (500)^2 = \frac{1}{2} \, 685 \times 25 \times 10^2$ Ἰούλιαι μονάδες

81. Σφαῖρα ὅπλου ἔχει μᾶζαν ἴσην πρὸς 12,8 γραμμάρια. Ἐξέρχεται τοῦ ὅπλου μετὰ ταχύτητος 720 μέτρων κατὰ δευτερόλεπτον. Ζητεῖται α΄.) νὰ εὑρεθῇ εἰς Ἰουλίους μονάδας καὶ εἰς χιλιογραμμόμετρα ἡ κινητική της ἐνέργεια κατὰ τὴν στιγμὴν τῆς ἐξόδου. β΄.) Ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι ἐντὸς τῆς κάννης τοῦ ὅπλου μήκους 80 ἑκατοστομέτρων ἡ σφαῖρα ἀποκτᾷ κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην, ζητεῖται ὁ χρόνος τὸν ὁποῖον θὰ χρειασθῇ ἵνα διατρέξῃ τὴν κάννην.

Λύσις : α΄.) Ἡ κινητικὴ ἐνέργεια τῆς σφαίρας εἶναι :

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{m}\,\upsilon^2 = \frac{1}{2} \times 12,8 \times (72000)^2 = 33177600000 \text{ ἔργια}$$

ἢ 3317,76 Ἰούλιαι μονάδες

$$\text{ἢ} \quad \frac{3317,76}{9,81} = 338,2 \text{ χιλιογραμμόμετρα}$$

$$\beta'.)\ \text{Γνωρίζομεν, ὅτι} \quad \frac{1}{2}\gamma\, t^2 = \frac{1}{2}\gamma\, t\,.\, t = \frac{1}{2}\,\upsilon\,.\,t$$

$$\text{ἐξ οὗ} \quad \frac{1}{2}\,\upsilon\, t = 80 \text{ ἑκατοστ.}$$

$$\text{καὶ} \quad t = \frac{80\times2}{\upsilon} = \frac{80\times2}{72000} = \frac{1}{450} \text{ δευτερόλεπτα.}$$

82. Βλῆμα 20 χιλιογράμμων ῥίπτεται μετ᾽ἀρχικῆς ταχύτητος 300 μέτρων κατὰ δευτερόλεπτον, κατὰ διεύθυνσιν σχηματίζουσαν γωνίαν 60^0 μετὰ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου. Νὰ ὑπολογισθῇ εἰς χιλιογραμμόμετρα καὶ εἰς Ἰουλίους μονάδας, ἡ δρῶσα δύναμις τοῦ βλήματος μετὰ 5 δευτερόλεπτα ἀπὸ τῆς ἀφέσεώς του.

Λύσις : Τὸ τετράγωνον τῆς ταχύτητος μετὰ 5 δευτερόλεπτα εἶναι :

$$\upsilon^2 = \upsilon_0^2 + g^2 t^2 - 2\upsilon_0 g t \,\eta\mu\, \alpha = 92405,9 - 25486,4 = 66919,5.$$

$$\text{Ἡ δρῶσα δύναμις } m\upsilon^2 = \frac{20\times66919,5}{9,81} = 136431 \text{ χιλιογραμμόμε-}$$

τρα ἢ $m\upsilon^2 = 20 \times 66919,5 = 1338390$ Ἰουλίους μονάδας, διότι 1 χιλιογραμμόμετρον ἰσοδυναμεῖ πρὸς 9,81 Ἰουλίους.

Σύστημα *C. G. S.* Ἡ μᾶζα τοῦ βλήματος m = 20000 γραμμάρια, τὸ βάρος του p=mg=20000 × 981=1962000 δύναι. Ἡ δρῶσα δύναμις :

$$m\upsilon^2 = (20000 \times 669195000) \text{ ἔργια} = 1338390 \text{ Ἰουλίους.}$$

83. Ἕν κινητὸν βάρους 10 χιλιογράμμων, ρίπτεται ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω μὲ ταχύτητα 50 μέτρων κατὰ δευτερόλεπτον. α'.) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ κινητικὴ ἐνέργεια ἡ χανομένη κατόπιν ἀνόδου 3 δευτερολέπτων. β'.) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ δυναμικὴ ἐνέργεια τοῦ σώματος ἡ ὀφειλομένη εἰς τὴν βαρύτητα, ηὐξήθη κατὰ τὸ αὐτὸ ποσόν.

Λύσις: Ἔστω P τὸ βάρος τοῦ κινητοῦ, υ ἡ ταχύτης του καὶ h τὸ ὕψος του μετὰ ἄνοδον t δευτερολέπτων.

Ἔχομεν : $\upsilon = \upsilon_0 - gt = 50 - 9{,}81 \times 3 = 20{,}57$ μέτρα

καὶ $h = \upsilon_0 t - \frac{1}{2} gt^2 = 150 - 44{,}145 = 105{,}86$ μέτρα.

Ἡ μεταβολὴ τῆς κινητικῆς ἐνεργείας εἶναι :

$$T = \frac{1}{2} m (\upsilon^2 - \upsilon_0^2) = \frac{10}{2 \times 9{,}81} \times (\overline{20{,}57}^2 - 50^2) = -1058{,}55 \text{ χιλ.}$$

β'.) Τὸ σῶμα τοποθετούμενον εἰς ὕψος h ἄνωθεν τοῦ ἀρχικοῦ του ὕψους, κέκτηται μίαν δυναμικὴν ἐνέργειαν συμπληρωτικῶς ἴσην πρὸς Ph.

$$\text{Συνεπῶς } Ph = mg \times \frac{\upsilon_0^2 - \upsilon^2}{2g} = \frac{1}{2} m(\upsilon_0^2 - \upsilon^2) = +1058{,}55 \text{ χιλ.}$$

$$\text{διότι } \upsilon = \sqrt{\upsilon_0^2 - 2gh}$$

Ἐπαλήθευσις : $Ph = 10 \times 105{,}86 = 1058{,}60$ χιλιογραμμόμετρα.

84. Ἵππος ἐζευγμένος εἰς μάγγανον ἐξασκεῖ ἕλξιν σταθερὰν 35 χιλιογράμμων. Ὁ στίβος εἰς τὸν ὁποῖον κινεῖται ὁ ἵππος ἔχει ἀκτῖνα 3 μέτρων, καὶ στρέφεται ὁ ἵππος εἰς τρία λεπτὰ ἐκτελῶν 10 στροφάς. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἔργον εἰς χιλιογραμμόμετρα καθ' ὥραν, καὶ ἡ ἰσχὺς εἰς ἀτμοΐππους.

Λύσις: Εἰς μίαν στροφήν, ὁ ἵππος ἐκτελεῖ ἓν ἔργον :

$$TF = 35 \times 2\pi \times 3 = 35 \times 18{,}85 = 659{,}75 \text{ χλγμ.}$$

Εἰς μίαν ὥραν ὁ ἵππος κάμνει : $10 \times \frac{60}{3} = 200$ στροφὰς καὶ ἐκτελεῖ ἔργον :

$$TF = 659{,}75 \times 200 = 131{,}950 \text{ χιλιογρμ. τὴν ὥραν.}$$

Ἡ ἰσχὺς εἶναι τὸ ἔργον κατὰ δευτερόλεπτον.

Δηλαδή: $\frac{131,950}{60 \times 60} = 36,66$ χιλιογραμμόμετρα

ἢ $\frac{36,65}{75} = 0,488$ ἵππους

85. Ἀνὴρ ἐνεργεῖ διὰ δυνάμεως 20 χιλιογράμμων ἐπὶ τῆς χειρολαβῆς βαρούλκου ἀκτῖνος 0,30 μ. ἐπιτυγχάνων περιστροφὴν τῆς χειρολαβῆς ἐντὸς τριῶν δευτερολέπτων. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἔργον εἰς χιλιογραμμόμετρα κατὰ δευτερόλεπτον.

Λύσις : $TF = F \times 2\pi R$.
Ἔργον εἰς μίαν στροφὴν εἶναι $20 \times 2\pi \times 0,30 = 37,7$ χιλιογραμόμ.

Τὸ ἔργον κατὰ δευτερόλεπτον εἶναι: $\frac{37,7}{3} = 12.567$ χλγμόμ.

86. Σῶμα βάρους 10 χιλιογράμμων, ἀφίεται ἐλεύθερον νὰ πέσῃ ἐξ ὕψους 20 μέτρων ἀπὸ τοῦ ἐδάφους. Ζητεῖται εἰς χιλιογραμμόμετρα καὶ εἰς ἔργια, ἡ δρῶσα δύναμις τὴν ὁποίαν κέκτηται τὸ σῶμα φθάνον εἰς τὸ ἔδαφος, καὶ τὸ ἔργον ὅπερ παράγεται εἰς ἐμπόδιον ἀνθιστάμενον πλήρως εἰς τὴν κίνησιν τοῦ σώματος κατὰ τὴν στιγμὴν ταύτην.

Λύσις : Τὸ σῶμα ἀναχωρεῖ ἄνευ ἀρχικῆς ταχύτητος : $\upsilon_0 = 0$.
Ἡ δρῶσα δύναμις, ὅταν φθάνει εἰς τὸ ἔδαφος εἶναι :

$$m\upsilon^2 = \frac{10}{g} \times 2gh = 2 \times 10 \times 20 = 400 \text{ χιλιογραμμόμετρα.}$$

Ἡ τιμὴ αὕτη, ἐκφραζομένη εἰς ἔργια, εἶναι :

$$400 \times 9,81 \times 10^7 \text{ ἔργια} = 3924 \times 10^7 \text{ ἔργια.}$$

Τὸ ἔργον τὸ παραγόμενον ἐναντίον τοῦ κωλύματος εἶναι :

$$T = \frac{1}{2} m\upsilon^2, \text{ ἀφοῦ τὸ σῶμα μεταπίπτει εἰς ἠρεμίαν.}$$

δηλαδὴ $T = 200$ χιλιογραμμόμετρα $= 1962 \times 10^7$ ἔργια.

87. Ὑδραυλικὸς τροχὸς δέχεται 1800 κυβικὰ μέτρα ὕδατος τὴν ὥραν. Τὸ ὕδωρ πίπτει ἐξ ὕψους 6 μέτρων μὲ ταχύτητα 4 μέτρων κατὰ δευτερόλεπτον. Ζητεῖται τὸ θεωρητικὸν ἔργον τοῦ ὕδατος εἰς ἀτμοΐππους.

Λύσις :

1ον Εἴσοδος ἐντὸς τοῦ τροχοῦ.

Ὁ ὄγκος τοῦ ὕδατος κατὰ δευτερόλεπτον εἶναι: $\frac{1800}{3600} = 0{,}500$ κυβ.μ.

Ἡ δρῶσα ἰσχύς: $\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} \times \frac{500}{9{,}81} \times 4^2 = 407{,}75$ χιλιογρμ.

2ον Ἔργον ἐντὸς τοῦ τροχοῦ.

Τὸ ὕδωρ ἐνεργεῖ διὰ τοῦ βάρους του ἀπὸ ὕψος $h = 6$ μέτρα, τὸ ἀντιστοιχοῦν ἔργον εἶναι $T = Ph = 500 \times 6 = 3000$ χιλιογραμμόμετρα κατὰ δευτερόλεπτον.

3ον Ὁλικὸν ἔργον.

Τὸ θεωρητικῶς ὁλικὸν ἔργον εἶναι : 3407,75 χιλιογραμμόμετρα κατὰ δευτερόλεπτον, ἢ $\frac{3407{,}75}{75} = 45{,}43$ ἀτμόϊπποι.

88. Πιεστήριον δι' ἀτμοῦ, βάρους 20 τόννων, πίπτει ἐξ ὕψους 2 μέτρων ἐπὶ ἑνὸς ὄγκου χάλυβος. Ὁ ὄγκος οὗτος πλατύνεται κατὰ 2 ἑκατοστόμετρα. Ζητεῖται ἡ ἀντίστασις ἡ προβαλλομένη ὑπὸ τοῦ χάλυβος.

Λύσις : Ὑποθέτομεν τὴν ἀντίστασιν R σταθερὰν κατὰ τὴν θλῖψιν. Ἡ ῥύμη τοῦ ὄγκου τοῦ χάλυβος εἶναι :

$$T_1 = R \times 0{,}02 \qquad (1)$$

Τὸ πιεστήριον κτυπᾷ τὸν ὄγκον μὲ μίαν ταχύτητα v ἥτις δίδεται ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως : $v^2 = 2gh = 2 \times 9{,}81 \times 2{,}00$.

Ἡ κινητική του ἐνέργεια εἶναι :

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \times \frac{20000}{9{,}81} \times 2 \times 9{,}81 \times 2{,}00 = 20000 \times 2{,}00$$

ἢ $\frac{1}{2} m v^2 = Ph = 40000$ χιλιογραμμόμετρα. (2)

Ἐξισοῦντες τὰς (1) καὶ (2) λαμβάνομεν :

$$R = \frac{40000}{0{,}02} = 2{,}000{,}000 \text{ χιλιόγραμμα.}$$

89. Σφαῖρα ὅπλου διαμέτρου 8 χιλιοστῶν ζυγίζει 15 γραμμάρια. Κατὰ τὴν ἔξοδον ἐκ τῆς κάννης τοῦ ὅπλου μήκους 1,20 μ. κέκτηται ταχύτητα 600 μέτρων. Ποία εἶναι εἰς χιλιόγραμμα κατὰ τετραγωνικὸν ἑκατοστόν, ἡ μέση τάσις τῶν ἀερίων τῶν παραγομένων κατὰ τὴν καῦσιν τῆς πυρίτιδος ;

Λύσις : Ἔστω P ἡ τάσις κατὰ τετραγωνικὸν ἑκατοστόν, ὑποτιθεμένη σταθερὰ κατὰ τὸ διάστημα καθ' ὃ ἡ σφαῖρα διατρέχει τὴν κάννην τοῦ ὅπλου. Ἔστω d ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας εἰς ἑκατοστόμετρα. Ἡ ἐξίσωσις εἶναι :

$$T = P \times \frac{\pi d^2}{4} \times 1{,}20 = \frac{1}{2} \times \frac{0{,}015}{9{,}81} \times \overline{600}^2$$

δηλαδὴ $P \times 0{,}5026 \times 1{,}20 = 275{,}23$ χιλιογραμμόμετρα.

Ἡ δὲ μέση τάσις εἶναι :

$$P = \frac{275{,}23}{0{,}60312} = 456{,}3 \text{ χιλιόγρ. κατὰ τετρ. ἑκ.}$$

90. Σφαῖρα τηλεβόλου βάρους 50 χιλιογράμμων κτυπᾷ τὴν πλευρὰν θωρηκτοῦ πλοίου μὲ ταχύτητα 600 μέτρων κατὰ δευτερόλεπτον, καὶ εἰσέρχεται ἐντὸς τῆς ἐκ χάλυβος πλευρᾶς κατὰ 0,15 μέτρα. Ποία εἶναι ἡ μέση ἀντίστασις, ἡ προβαλλομένη ὑπὸ τοῦ χάλυβος τῆς πλευρᾶς τοῦ θωρηκτοῦ εἰς τὴν σφαῖραν ;

Λύσις : $T_1 = \frac{1}{2} mv^2 = R \times 0{,}15$. Ἡ ἐξίσωσις αὕτη μᾶς δίδει :

$$R = \frac{50 \times \overline{600}^2}{2 \times 9{,}81 \times 0{,}15} = 6116207 \text{ χιλιόγραμμα.}$$

91. Σφαῖρα ὅπλου βάρους 25 γραμμαρίων ῥίπτεται ὑπὸ ὅπλου μήκους 1,25 μέτρων καὶ ἐξέρχεται μὲ ταχύτητα 100 μέτρων. Ἐὰν ὑποτεθῇ ὅτι ἡ διάρκεια τῆς ἐνεργείας τῆς πυρίτιδος ἦτο $\frac{1}{1000}$ τοῦ δευτερολέπτου, καὶ ὅτι ἡ ἐνέργεια αὕτη παραμένει σταθερά, ζητεῖται α'.) Τὸ μέγεθος τῆς πιέσεως τῆς ἐξασκηθείσης ἐπὶ τῆς σφαίρας καὶ β'.) Τὸ ὑπὸ τῆς πυρίτιδος ἐκτελούμενον ἔργον.

Λύσις: Ἔστω $m = \frac{P}{g}$ ἡ μάζα τῆς σφαίρας, καὶ F ἡ πίεσις ἡ ἐξασκουμένη ἐπ' αὐτῆς ὑπὸ τῶν ἀερίων τῆς πυρίτιδος, ὑποτιθεμένης τῆς πιέσεως σταθερᾶς.

α΄.) Ἡ σφαῖρα λαμβάνει ἐντὸς τοῦ ὅπλου μίαν κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην μὲ ἐπιτάχυνσιν :

$$\gamma = \frac{\upsilon}{t} = \frac{100}{\frac{1}{1000}} = 100000 \text{ μέτρα.}$$

Κατ' ἀκολουθίαν ἡ πίεσις :

$$F = m\gamma = \frac{P\gamma}{g} = \frac{0{,}025 \times 100000}{9{,}81} = 254{,}84 \text{ χιλιόγραμμα.}$$

β΄.) Τὸ ἀντιστοιχοῦν ἔργον εἶναι :

$$T = F \,.\, e = 254{,}84 \times 1{,}25 = 318{,}55 \text{ χιλγρμόμ.}$$

Γ΄. ΑΠΛΑΙ ΜΗΧΑΝΑΙ

---

92. Σφαῖρα ἐκ μολύβδου ἀφίεται ἐλευθέρα εἰς τὴν κορυφὴν ἑνὸς κεκλιμένου ἐπιπέδου μήκους λ. Νὰ διαιρεθῇ τὸ μῆκος λ, εἰς ν μέρη, τὰ ὁποῖα νὰ διανύωνται ὑπὸ τῆς σφαίρας εἰς ἴσους χρόνους.

Ἐφαρμογή : λ = 2,70 μέτρα καὶ ν = 3.

Λύσις : Ἔστωσαν x , y . z . . . τὰ διαστήματα ταῦτα. Γνωρίρίζομεν ὅτι τὰ διανυόμενα διαστήματα ἀπὸ τῆς ἀρχῆς τῶν χρόνων εἶναι ἀνάλογα τῶν τετραγώνων τῶν χρόνων :

$$\frac{x}{1} = \frac{x+y}{4} = \frac{x+y+z}{9} = \ldots\ldots \frac{\lambda}{\nu^2}$$

ἐξ οὗ ἀφαιροῦντες χωριστὰ τοὺς ἀριθμητὰς μεταξύ των καὶ τοὺς παρονομαστὰς μεταξύ των ἔχομεν :

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5} = \ldots \frac{\lambda}{\nu^2}$$

Ἑπομένως $x = 1 \,.\, \frac{\lambda}{\nu^2}$

$$y = 3 \,.\, \frac{\lambda}{\nu^2}$$

$$z = 5 \,.\, \frac{\lambda}{\nu^2}$$

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι τὰ τμήματα τὰ διανυόμενα εἰς ἴσους χρόνους, εἶναι ἀνάλογα πρὸς τοὺς Κ πρώτους περιττοὺς ἀριθμούς :

Ἐφαρμογή : $\frac{\lambda}{\nu^2} = \frac{2,70}{9} = 0,30$ μέτρα

καὶ $x = 0,30$

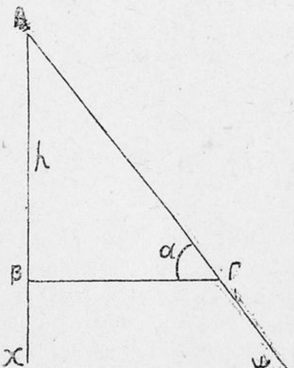
$y = 0,90$

$z = 1,50$ μέτρα.

93. Κεκλιμένον ἐπίπεδον σχηματίζει μετὰ τοῦ ὁρίζοντος γωνίαν α. Ἐκ τοῦ σημείου Α ἀφίεται ἐλεύθερον, ἄνευ ἀρχικῆς ταχύτητος, ὑλικὸν σημεῖον, τὸ ὁποῖον πίπτει κατὰ τὴν κατακόρυφον Αx. Τὴν αὐτὴν στιγμήν, δεύτερον ὑλικὸν σημεῖον διαγράφει τὴν Αψ ἀφιέμενον ἐκ τοῦ Α μετ' ἀρχικῆς ταχύτητος υ_0. Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἀρχικὴ ταχύτης υ_0 ἵνα καὶ τὰ δύο ὑλικὰ σημεῖα εὑρεθῶσιν ἐπὶ τῆς αὐτῆς ὁριζοντίου ΒΓ, ὅταν τὸ πρῶτον σημεῖον ἔχει διανύσει μῆκος $AB = h$;

Νὰ ἐκφρασθῇ ἀριθμητικῶς τὸ υ_0 διὰ τὴν περίπτωσιν ὅπου $\alpha = 30^\circ$, $g = 980$ ἑκατ. καὶ $h = 1960$ ἑκατ.

Λύσις : Ὁ δρόμος ὁ διανυόμενος ὑπὸ τοῦ δευτέρου κινητοῦ κατὰ



τὴν Αψ εἶναι : $e = \upsilon_0 t + \frac{1}{2}\, g$ ἡμ. $\alpha\, t^2$.

Ἡ προβολή του ἐπὶ τῆς Ax εἶναι :

$$e' = \upsilon_0 t \;\eta\mu\; \alpha + \frac{1}{2} g \;\eta\mu^2\; \alpha\, t^2$$

Ὁ δρόμος e΄ εἶναι ἴσος πρὸς τὸν δρόμον $h = \frac{1}{2} g\, t^2$. (1)

Ἐπομένως θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν :

$$\upsilon_0 t \;\eta\mu\; \alpha + \frac{1}{2} g \;\eta\mu^2\; \alpha t^2 = \frac{1}{2} g\, t^2 \qquad (2)$$

Ἡ πρώτη ἐξίσωσις δίδει : $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

Καὶ ἡ δευτέρα γίνεται :

$$\upsilon_0 \;\eta\mu\; \alpha \times \sqrt{\frac{2h}{g}} + h \;\eta\mu^2\; \alpha = h$$

ἐξ οὗ $$\upsilon_0 = \frac{h \;\sigma\upsilon\nu^2\; \alpha}{\eta\mu\; \alpha \sqrt{\frac{2h}{g}}}$$

Ἀριθμητικῶς : $t = \sqrt{\frac{2 \times 1960}{980}} = 2$ δευτερόλεπτα

$$\upsilon_0 = \frac{1960 \times \sqrt{3} \times \sqrt{3}}{2\sqrt{\frac{1960 \times 2}{980}}} = \frac{1960 \times 3}{4} = 1470 \text{ ἑκατοστ.}$$

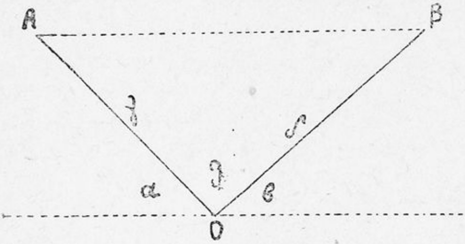
94. Δύο κινητὰ κατέρχονται κατὰ μῆκος δύο κεκλιμένων ἐπιπέδων AO καὶ BO. Ἀναχωροῦσιν ἄνευ ἀρχικῆς ταχύτητος ἐκ τῶν σημείων A καὶ B καὶ εἶναι $AO = \gamma$ καὶ $BO = \delta$. Γνωστῆς οὔσης τῆς γωνίας $AOB = \vartheta$, νὰ προσδιορισθῶσιν αἱ γωνίαι τῆς κλίσεως α καὶ β, ἵνα τὰ δύο κινητὰ φθάσωσι συγχρόνως εἰς τὸ σημεῖον O.

Λύσις : Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι $\gamma > \delta$ καὶ $\alpha > \beta$

Ἔστω t ὁ κοινὸς χρόνος τῆς καθόδου

Ἐκ τῆς σχέσεως :

$$\frac{\gamma}{\delta} = \frac{\frac{1}{2}\, g\ \text{ἡμ}\ \alpha t^2}{\frac{1}{2}\, g\ \text{ἡμ}\ \beta t^2} = \frac{\text{ημ}\ \alpha}{\text{ημ}\ \beta}$$



ἔχομεν : $\frac{\gamma-\delta}{\gamma+\delta} = \frac{\text{ημ}\ \alpha - \text{ημ}\ \beta}{\text{ημ}\ \alpha + \text{ημ}\ \beta} = \frac{\text{εφ}\ \frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\text{σφ}\ \frac{1}{2}\ \vartheta}$

καὶ $\text{εφ}\ \frac{1}{2}\left(\alpha-\beta\right) = \frac{\gamma-\delta}{\gamma+\delta}\ \text{σφ}\ \frac{1}{2}\vartheta$

Γνωρίζοντες $\frac{\alpha-\beta}{2}$ καὶ $\frac{\alpha+\beta}{2} = 90^\circ - \frac{\vartheta}{2}$ εὑρίσκομεν τὰς α καὶ β διὰ μιᾶς προσθέσεως, καὶ μιᾶς ἀφαιρέσεως.

95. Διὰ πρωτογενοῦς μοχλοῦ μετακινοῦμεν βάρος 400 ὀκάδων, διὰ δυνάμεως 50 ὀκάδων. Ὁ βραχίων τῆς ἀντιστάσεως εἶναι 2 μέτρα. Ποῖον τὸ μῆκος τοῦ μοχλοῦ ;

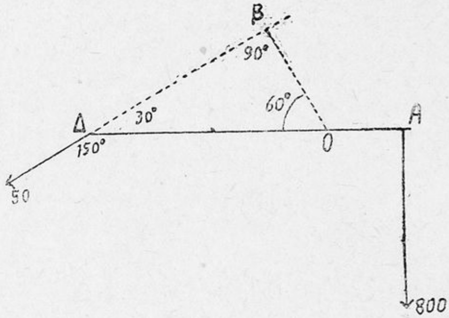
Λύσις : Ἀφοῦ ἡ ἀντίστασις εἶναι ὀκτὼ φορὰς μεγαλητέρα τῆς δυνάμεως, καὶ ὁ βραχίων τῆς δυνάμεως θὰ εἶναι ὀκταπλάσιος τοῦ τῆς ἀντιστάσεως ἤτοι 16 μέτρα.

Ἄρα μῆκος μοχλοῦ : $16+2 = 18$ μέτρα.

96. Εἰς τὸ ἓν ἄκρον πρωτογενοῦς μοχλοῦ μήκους 100 παλαμῶν, ἐνεργεῖ δύναμις 50 χιλιογράμμων, ἧς ἡ διεύθυνσις σχηματίζει μετὰ τοῦ μοχλοῦ γωνίαν 150^0, εἰς δὲ τὸ ἕτερον ἄκρον κρέμαται βάρος 800 χιλιογράμμων. Τοῦ μοχλοῦ εὑρισκομένου ἐν ἰσορροπίᾳ ὁριζοντίως, ζητεῖται ἡ ἀπόστασις τοῦ ὑπομοχλίου ἀπὸ τῆς ἀντιστάσεως.

Λύσις : Ἔστω Ο τὸ ὑπομόχλιον. Τότε βραχίων δυνάμεως εἶναι ἡ κάθετος ΟΒ.

Ἐπειδὴ δὲ ἡ μία τῶν γωνιῶν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι τὸ



ἥμισυ τῆς ἄλλης, ἡ $ΟΒ = \frac{ΟΔ}{2}$.

Ἔστω x ἡ ζητουμένη ἀπόστασις ΑΟ, τότε $ΟΔ = 100 - x$ καὶ $ΟΒ = \frac{100 - x}{2}$ καὶ ἐπειδὴ ὁ μοχλὸς εὑρίσκεται ἐν ἰσορροπίᾳ, θὰ ἔχωμεν : $800 \cdot x = 50 \times \frac{100 - x}{2}$ καὶ $x = 3\frac{1}{3}$ παλάμαι.

97. Μοχλὸς ὁμοιογενὴς μήκους 0,60 μέτρων καὶ βάρους 20 χιλιογράμμων, φέρει εἰς τὰ ἄκρα του βάρη 50 χιλιογράμμων καὶ 110 χιλιογράμμων. Εἰς ποῖον σημεῖον τοῦ μοχλοῦ πρέπει νὰ εἶναι τὸ ὑπομόχλιον, ἵνα ὁ μοχλὸς εὑρίσκεται ἐν ἰσορροπίᾳ ;

Λύσις : Ἔστω ΟΚ ἡ ἀπόστασις τοῦ ὑπομοχλίου ἀπὸ τοῦ μέσου Κ τοῦ μοχλοῦ.

Ἡ ῥοπὴ τῆς συνισταμένης τῶν τριῶν δυνάμεων ὡς πρὸς τὸ Ο εἶναι μηδέν.

Ἔχομεν : $P \times OK + F_1 \times AO = F_2 \times BO$

Ἂν $AB = \lambda$ καὶ $OK = x$, τότε $AK = \frac{\lambda}{2}$

Ἀντικαθιστῶντες ἔχομεν :

$$20\,x + 50\,(0{,}30 + x) = 110\,(0{,}30 - x)$$

ἐξ οὗ $180\,x = 18$ καὶ $x = 0{,}10$

98. Μοχλὸς ὁμοιογενὴς ΑΟΓ εὑρίσκεται ὁριζοντίως ἐν ἰσορροπίᾳ ὑπὸ τὴν ἐνέργειαν τοῦ βάρους του, τὸ ὁποῖον εἶναι 100 γραμμάρια κατὰ ἑκατοστόμετρον, καὶ δύο κατακορύφων δυνάμεων $P = 10$ χιλιόγραμμα καὶ $Q = 15$ χιλιόγραμμα. Ἡ πρώτη δύναμις ἐφαρμόζεται εἰς τὸ ἄκρον Α τοῦ μοχλοῦ καὶ εἰς ἀπόστασιν α ἀπὸ τοῦ ὑπομοχλίου. Ἡ δευτέρα ἐφαρμόζεται εἰς τὸν βραχίονα ΟΓ καὶ εἰς ἀπόστασιν 12 ἑκατοστομέτρων ἀπὸ τοῦ ὑπομοχλίου. Τὸ μῆκος ΟΓ τοῦ βραχίονος εἶναι ἄγνωστον. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις ἰσορροπίας τοῦ μοχλοῦ, καὶ νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος $O\Gamma = x$ συναρτήσει τοῦ α.

Λύσις : Ἡ συνισταμένη τῶν βαρῶν διέρχεται διὰ τοῦ ὑπομοχλίου Ο. Αἱ ῥοπαὶ ὡς πρὸς τὸ σημεῖον Ο, δίδουσι τὴν ἐξίσωσιν τῆς ἰσορροπίας :

$$10 \times \alpha + 0{,}1\,(\alpha + x)\left(\frac{\alpha - x}{2}\right) - 15 \times 12 = 0$$

$$\text{ἢ} \quad 200\,\alpha + \alpha^2 - x^2 - 3600 = 0$$

$$\text{ἐξ οὗ} \quad x^2 = \alpha^2 + 200\,\alpha - 3600$$

99. Ἡ ὁριζοντία φάλαγξ ζυγοῦ ἔχει ὁλικὸν μῆκος 0,20 μέτρων καὶ βάρος 20 γραμμαρίων. Ζητεῖται ἡ γωνία καθ' ἣν θὰ κλίνῃ ἡ φάλαγξ ὑπὸ τὴν ἐνέργειαν βάρους ἑνὸς ἑκατοστογράμμου. Τὸ κέντρον βάρους εὑρίσκεται κάτωθεν τοῦ ἄξονος αἰωρήσεως εἰς ἀπόστασιν δύο ἑκατοστομέτρων.

Λύσις: Ὁ τύπος εἶναι :

$$\varepsilon\varphi\,\alpha = \frac{pl}{\pi\,d} \qquad \varepsilon\varphi\,\alpha = \frac{0{,}01 \times 10}{20 \times 2} = \frac{1}{400} \quad \text{καὶ} \quad \alpha = 8'\,35''$$

100. Ζυγίζομεν σῶμά τι θέτοντες τοῦτο ἐπὶ τῆς μιᾶς τῶν πλαστίγγων ζυγοῦ, καὶ τὸ ἰσορροποῦμεν διὰ βάρους 100 γραμμαρίων. Θέτομεν τὸ σῶμα ἐπὶ τῆς ἑτέρας πλάστιγγος τοῦ ζυγοῦ καὶ τὸ ἰσορροποῦμεν διὰ βάρους 105 γραμμαρίων. Νὰ εὑρεθῇ τὸ βάρος τοῦ σώματος, καὶ ἡ σχέσις μεταξὺ τῶν βραχιόνων τῆς φάλαγγος.

Λύσις: Ἔστω p τὸ ζητούμενον βάρος, καὶ l καὶ l′ τὰ μήκη τῶν βραχιόνων τοῦ ζυγοῦ.

Εἰς τὴν πρώτην ζύγισιν τὸ σῶμα εἶναι εἰς τὸ ἄκρον τοῦ βραχίονος l.

Ὥστε $$pl = 0{,}100 \times l' \quad (1)$$

Εἰς τὴν δευτέραν ζύγισιν : $$pl' = 0{,}105 \times l \quad (2)$$

Πολλαπλασιάζομεν κατὰ μέλη :

$$p^2 = 0{,}100 \times 0{,}105$$

καὶ $$p = \sqrt{0{,}100 \times 0{,}105} = 0{,}1025 \text{ χιλιόγραμμα.}$$

Διαιροῦμεν κατὰ μέλη τὰς (1) καὶ (2) καὶ ἔχομεν :

$$\frac{l}{l'} = \frac{0{,}100}{0{,}105} \times \frac{l'}{l}$$

Δηλαδὴ $$\frac{l^2}{l'^2} = \frac{0{,}100}{0{,}105}$$

καὶ $$\frac{l}{l'} = \sqrt{\frac{0{,}100}{0{,}105}} = \frac{1}{1{,}025} = 0{,}975$$

101. Ἓν δυναμόμετρον εἶναι βαθμολογημένον εἰς τόπον ὅπου τὸ g = 982. Εἰς τόπον δὲ ὅπου τὸ g = 980 δεικνύει δι' ἓν σῶμα, βάρος 8 χιλιογράμμων. Ποία εἶναι ἡ μᾶζα τοῦ σώματος τούτου ;

Λύσις: Ἡ ἐνέργεια ἡ ἐξασκουμένη ὑπὸ τοῦ σώματος ἐπὶ τοῦ δυναμομέτρου εἶναι : 8000×982.

Ἐὰν τὸ δυναμόμετρον εἶχε βαθμολογηθῆ εἰς τὸν τόπον ὅπου τὸ g = 980, ἡ ἐνέργεια θὰ ἦτο $x \times 980$, τιμὴ ἀπόλυτος τοῦ βάρους εἰς τόπον ὅπου g = 980.

$$8000 \,.\, 982 = x \,.\, 980 \quad \text{ἐξ οὗ} \quad x = 8016 \text{ γραμμάρια.}$$

102. Ποία εἶναι ἡ ἐνέργεια ἡ ἐξασκουμένη ἐπὶ τῆς πλάστιγγος ζυγοῦ, ὑπὸ σώματος μάζης 12 γραμμαρίων, εἰς τόπον ὅπου ἡ ἔντασις τῆς βαρύτητος εἶναι 980 ;

Λύσις: 12 . 980 δύναι = 11760.

103. Οἱ δύο βραχίονες τῆς φάλαγγος ζυγοῦ εἶναι ἴσοι κατὰ τὸ μῆκος. Τὸ κέντρον βάρους ὅμως τῆς φάλαγγος ἀπέχει ἀπὸ τοῦ σημείου τῆς στηρίξεως τῆς φάλαγγος κατὰ d. Ζυγίζομεν σῶμά τι τοποθετοῦντες αὐτὸ καὶ ἐπὶ τῶν δύο πλαστίγγων καὶ τὸ ἰσορροποῦμεν διὰ 24 καὶ κατόπιν διὰ 26 γραμμαρίων. Ποῖον εἶναι τὸ ἀληθὲς βάρος τοῦ σώματος ;

Λύσις: Ἔστω α τὸ μῆκος ἑκάστου τῶν βραχιόνων, π τὸ βάρος τῆς φάλαγγος, καὶ x τὸ ζητούμενον βάρος.

Ὅταν τὸ σῶμα τοποθετεῖται πρὸς τὸ μέρος τοῦ κέντρου βάρους, ἔχομεν :

$$(26 - x)\,\alpha = \pi\,.\,d.$$

Ὅταν τὸ σῶμα τοποθετεῖται ἀντιθέτως, ἔχομεν :

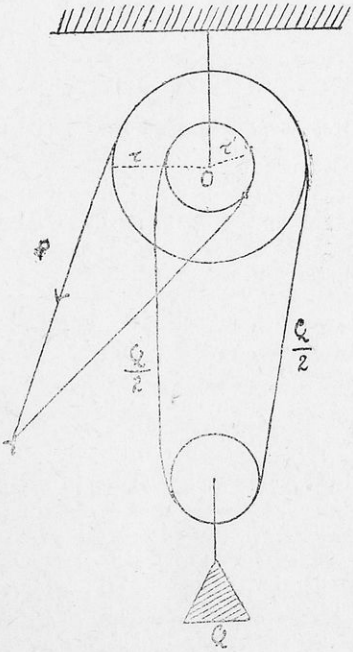
$$(x - 24)\,\alpha = \pi\,.\,d.$$

Ἐξ αὐτῶν λαμβάνομεν :

$$x - 24 = 26 - x \quad \text{καὶ} \quad x = 25.$$

104. Νὰ εὑρεθῇ ἡ συνθήκη ἰσορροπίας εἰς τὸ διαφορικὸν πολύσπαστον.

Λύσις : Ἔστωσαν r καὶ r′ αἱ ἀκτῖνες τῆς μεγάλης καὶ τῆς μικρᾶς τροχαλίας.



Αἱ ῥοπαὶ ἐν σχέσει πρὸς τὸν ἄξονα O εἶναι :

$$\frac{Q}{2} \cdot r = P \cdot r + \frac{Q}{2} \cdot r' \quad \text{καὶ} \quad Pr = \frac{Q}{2}\left(r - r'\right)$$

$$\text{καὶ} \qquad P = \left(\frac{r - r'}{2\,r}\right) . Q$$

105. Διαφορικὸν πολύσπαστον ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο τροχαλίας διαμέτρων 0,50 μέτρων καὶ 0,45 μ. Ποία δύναμις πρέπει νὰ ἐφαρμοσθῇ διὰ νὰ ὑψώσῃ βάρος 500 χιλιογράμμων, ἐξηρτημένον ἐκ τῆς ἐλευθέρας τροχαλίας;

Λύσις : Ὁ τύπος εἶναι : $P = Q \cdot \frac{R - r}{2\,R}$

Ἑπομένως : $p = 500 \times \frac{50 - 45}{100} = 25$ χιλιόγραμμα.

106. Ποία εἶναι ἡ συνθήκη ἰσορροπίας εἰς τὸν κοχλίαν ;

Λύσις : Ἔστω μ ἡ ἀπόστασις τοῦ ἄξονος τοῦ κοχλίου ἀπὸ τοῦ σημείου ἐφαρμογῆς τῆς δυνάμεως F, καὶ β τὸ βῆμα τοῦ κοχλίου. Ἂν ὁ κοχλίας στραφῇ κατὰ 360°, τὸ κάτω ἄκρον τοῦ κοχλίου προχωρεῖ κατὰ ἓν βῆμα, τὸ δὲ σημεῖον ἐφαρμογῆς τῆς δυνάμεως διαγράφει περιφέρειαν μήκους 2πμ.

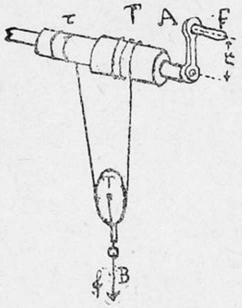
Ἔχομεν ἔργον δυνάμεως $F \times 2\pi\mu$.

Καὶ ἔργον ἀντιστάσεως $f \times \beta$

Ὅθεν $F \times 2\pi\mu = f \times \beta$ καὶ $\frac{F}{f} = \frac{\beta}{2\pi\mu}$.

107. Ποία ἡ συνθήκη ἰσορροπίας εἰς τὸ διαφορικὸν βαροῦλκον;

Λύσις : Ἔστω μ ὁ βραχίων τῆς δυνάμεως F, καὶ T καὶ τ αἱ ἀκτῖνες τῶν δύο τυμπάνων, καὶ θεωρήσωμεν μίαν ὁλόκληρον περιστροφὴν τοῦ ἄξονος. Τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς τῆς δυνάμεως F θὰ μετακινηθῇ κατὰ 2 πμ, ἑπομένως ἔργον $F \times 2\pi\mu$, τὸ σχοινίον θὰ περιτυλιχθῇ εἰς τὸ τύμπανον T κατὰ ἕνα γῦρον, ἤτοι θὰ βραχυνθῇ κατὰ 2πT, θὰ ἐκτυλιχθῇ δὲ ἀπὸ τὸ τύμπανον τ κατὰ ἕνα γῦρον, ἤτοι κατὰ 2πτ, ἑπομένως θὰ βραχυνθῇ ἐν ὅλῳ κατὰ $2\pi\,(T-\tau)$, καὶ τὸ B θὰ ἀνέλθῃ κατὰ τὸ ἥμισυ τοῦ μήκους τούτου, ἤτοι : $f \times \pi\,(T-\tau)$.

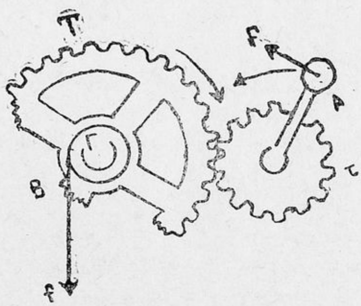


ὅθεν $$F \times 2\pi\mu = f \times \pi\,(T-\tau)$$

καὶ $$\frac{f}{F} = \frac{2\,\mu}{(T-\tau)}$$

108. Ποία ἡ συνθήκη ἰσορροπίας εἰς τὸ σύνθετον βαροῦλκον ;

Λύσις : Ἡ δύναμις F ἐνεργεῖ διὰ μοχλοβραχίονος A καθέτως ἐπὶ τὴν λαβήν, πάντοτε ἐπὶ τοῦ ὀδοντωτοῦ τροχοῦ ὅστις φέρει τ ὀδόντας. Οἱ



ὀδόντες τοῦ τ, ἐμπλέκονται εἰς τοὺς ὀδόντας T ἐν ὅλῳ τοῦ ὀδοντωτοῦ τροχοῦ Τ ὅστις συνδέεται διὰ κοινοῦ ἄξονος μετὰ τοῦ τυμπάνου Γ οὗ ἡ ἀκτὶς εἶναι Γ.

Ἐὰν ὁ τροχὸς τ κάμῃ μίαν πλήρη περιστροφήν, τὸ σημεῖον τῆς ἐφαρμογῆς τῆς F μετατίθεται κατὰ 2πΑ.

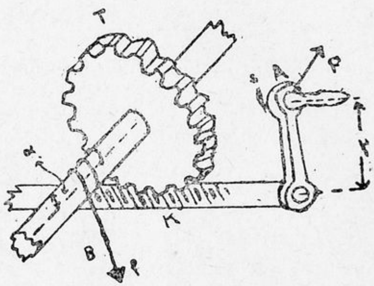
Ὁ τροχὸς Τ ἐκτελεῖ μέρος περιστροφῆς $\frac{\tau}{T}$ καὶ τὸ σχοινίον προχωρεῖ κατὰ $2\pi\Gamma.\frac{\tau}{T}$.

Ἔχομεν λοιπὸν $F \times 2\pi A = f \times 2\pi\Gamma \frac{\tau}{T}$

καὶ $$\frac{F}{f} = \frac{2\pi\Gamma\frac{\tau}{T}}{2\pi A} = \frac{\Gamma\tau}{AT}$$

109. Ποία ἡ συνθήκη ἰσορροπίας εἰς τὸν ἀτέρμονα κοχλίαν ;

Λύσις : Ἔστω ὅτι ὁ ὀδοντωτὸς τροχὸς ἔχει ν ὀδόντας, ὁ δὲ ἄξων αὐτοῦ ἔχει ἀκτῖνα α καὶ εἰς τὸ ἄκρον τοῦ περιελισσομένου σχοινίου



ἐνεργεῖ ἡ δύναμις f ἰσορροποῦσα τὴν F. Εἰς κάθε περιστροφὴν τοῦ κοχλίου ὁ τροχὸς Τ στρέφεται κατὰ ἕνα ὀδόντα. Ἑπομένως διὰ νὰ στραφῇ ὁ Τ κατὰ μίαν πλήρη περιστροφὴν πρέπει ὁ κοχλίας Κ νὰ περιστραφῇ ν φοράς.

Ἔχομεν λοιπὸν $F \times \nu \,.\, 2\pi\mu = f \times 2\pi\alpha$

καὶ $$\frac{F}{f} = \frac{2.\pi\alpha}{\nu.2\pi\mu} = \frac{\alpha}{\nu.\mu.}$$

Δ'. ΕΚΚΡΕΜΕΣ. ΦΥΓΟΚΕΝΤΡΟΣ ΔΥΝΑΜΙΣ. ΠΑΓΚΟΣΜΙΟΣ ΕΛΞΙΣ.

110. Ποῖον εἶναι εἰς Παρισίους τὸ μῆκος ἁπλοῦ ἐκκρεμοῦς, τὸ ὁποῖον μᾶς δίδει τὸ δευτερόλεπτον (διάρκεια μιᾶς ἁπλῆς αἰωρήσεως) ;

Λύσις : Ἡ διάρκεια μιᾶς ἁπλῆς αἰωρήσεως εἶναι :

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \qquad \text{ἐξ οὗ} \qquad l = g \frac{t^2}{\pi^2}$$

ἐνταῦθα ὁ χρόνος $t = 1$

τὸ μῆκος συνεπῶς τοῦ ἐκκρεμοῦς, τὸ ὁποῖον δίδει τὸ δευτερόλεπτον

εἶναι : $$l = 9{,}81 \times \frac{1}{\pi^2} = 0{,}99397 \text{ μέτρα}$$

111. Ποῖον μῆκος πρέπει νὰ ἔχῃ ἁπλοῦν ἐκκρεμές, ἵνα ἡ διάρκεια τῶν αἰωρήσεων μικροῦ πλάτους εἶναι $\frac{1}{2}$ τοῦ δευτερολέπτου; Τὸ $g = 9{,}81$.

Λύσις : $$l = g \frac{t^2}{\pi^2} = 0{,}99396\ t^2$$

ἐνταῦθα $t = \frac{1}{2}$ δευτερολέπτου, συνεπῶς $l = 0{,}24849$ μέτρα.

112. Εἰς τὸν Ἰσημερινόν, ἓν ἐκκρεμὲς ἐκτελεῖ 2400 αἰωρήσεις τὴν ὥραν. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τοῦ ἐκκρεμοῦς, καὶ τὸ μῆκος τοῦ ἐκκρεμοῦς, τὸ ὁποῖον δίδει τὸ δευτερόλεπτον. Τὸ $g = 781$.

Λύσις : Εἰς τὸν Ἰσημερινόν, τὸ μῆκος τοῦ ἐκκρεμοῦς εἶναι :

$$l = g \frac{t^2}{\pi^2} = 0{,}99102\ t^2.$$

Ἡ διάρκεια μιᾶς αἰωρήσεως εἶναι : $t = \frac{3600}{2400} = 1\frac{1}{2}$ δευτερόλ.

ἐξ οὗ $$l = 0{,}99102 \times \frac{9}{4} = 2{,}2297 \text{ μέτρα.}$$

Τὸ μῆκος τοῦ ἐκκρεμοῦς τὸ ὁποῖον δίδει τὸ δευτερόλεπτον εἶναι :

$$l' = 0{,}99102 \text{ μέτρα.}$$

113. Ποία θὰ εἶναι ἡ ἔντασις τῆς βαρύτητος εἰς τόπον ὅπου τὸ μῆκος τοῦ ἐκκρεμοῦς τὸ ὁποῖον μᾶς δίδει τὸ δευτερόλεπτον εἶναι 99,5 ἑκατοστόμετρα ;

Λύσις: $$t = 1 = \pi\sqrt{\frac{99{,}5}{g}}$$

ἐξ οὗ $$g = \pi^2 . 99{,}5 = 9{,}8696 \times 99{,}5 = 982{,}02$$

114. Ἐκκρεμὲς ὡρολογίου καθυστερεῖ 24 δευτερόλεπτα τὴν ἡμέραν. Πόσον πρέπει νὰ ἐλαττωθῇ τὸ μῆκος του, ἵνα μᾶς δίδῃ τὸ δευτερόλεπτον ;

Λύσις: Ἔστω t ἡ διάρκεια τῆς αἰωρήσεως τοῦ ἐκκρεμοῦς τούτου καὶ l' τὸ μῆκος του. Ἔστω 1 καὶ l, ἡ διάρκεια καὶ τὸ μῆκος τοῦ ἐκκρεμοῦς τὸ ὁποῖον μᾶς δίδει τὸ δευτερόλεπτον εἰς τὸν αὐτὸν τόπον ;

$$1 = \pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad t = \pi\sqrt{\frac{l'}{g}}$$

$$t^2 = \frac{l'}{l} \qquad \frac{t^2 - 1}{t^2} = \frac{l' - l}{l'}$$

Καθ' ὥραν τὸ ἐκκρεμὲς τοῦτο κάμνει 3599 αἰωρήσεις, ἀντὶ τῶν 3600:

$$t = \frac{3600}{3599}, \quad \frac{t^2 - 1}{t^2} = \frac{1 + 2 \times 3599}{(3600)^2} = \frac{7199}{(3600)^2}$$ Κατὰ τὸ κλάσμα τοῦτο πρέπει νὰ ἐλαττωθῇ τὸ μῆκος τοῦ ἐκκρεμοῦς.

115. Πόσον θὰ ἐλαττωθῇ ἡ διάρκεια τῶν αἰωρήσεων ἐκκρεμοῦς ὡρολογίου δίδοντος τὸ δευτερόλεπτον εἰς τὸν ἰσημερινόν, ἐὰν μεταφέρωμεν τὸ ἐκκρεμὲς εἰς τὸν πόλον ; $g = 983$ εἰς τὸν πόλον, καὶ $g = 978$ εἰς τὸν ἰσημερινόν.

Λύσις: $$1 = \pi\sqrt{\frac{l}{978}} \quad t = \pi\sqrt{\frac{l}{983}} \quad \frac{t}{1} = \sqrt{\frac{978}{983}}$$

Ἡ ἐλάττωσις εἶναι 1 — t.

116. Ὁ χρόνος αἰωρήσεως μιᾶς φάλαγγος ζυγοῦ εἶναι 4 δευτερόλεπτα. Ποῖον εἶναι τὸ μῆκος τοῦ συγχρόνου ἐκκρεμοῦς εἰς τόπον ὅπου ἡ ἔντασις τῆς βαρύτητος εἶναι 981 ;

Λύσις: Ἐκ τῆς ἐξισώσεως $4 = \pi\sqrt{\frac{1}{981}}$

ἔχομεν : $1 = \frac{16 \times 981}{\pi^2}$

117. Τὸ μῆκος ἐκκρεμοῦς τὸ ὁποῖον δίδει τὸ δευτερόλεπτον εἴς τινα τόπον εἶναι 0,985 μέτρα. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος ἑνὸς ἐκκρεμοῦς, τὸ ὁποῖον εἰς τὸν ἴδιον τόπον ἐκτελεῖ 22 αἰωρήσεις κατὰ λεπτόν, καὶ νὰ εὑρεθῇ ἡ ἔντασις τῆς βαρύτητος εἰς τὸν τόπον τοῦτον.

Λύσις : Διὰ τὸ πρῶτον ἐκκρεμὲς ἔχομεν : $1'' = \pi\sqrt{\frac{985}{g}}$.

Διὰ τὸ δεύτερον $\frac{60''}{44} = \pi\sqrt{\frac{1}{g}}$

Ἡ πρώτη ἐξίσωσις δίδει $g = 98{,}5\ \pi^2 = 972{,}16$ ἑκατοστόμετρα.

Καὶ ἡ δευτέρα : $1 = 98{,}50 \times \left(\frac{15}{11}\right)^2 = 183{,}16$ ἑκατοστόμετρα.

118. Εἰς ὡρισμένον τόπον, ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς πτώσεως τῶν σωμάτων εἶναι μεγαλητέρα τῆς εἰς τὸν Ἰσημερινὸν ἐπιταχύνσεως κατὰ $\frac{1}{200}$. Πόσα δευτερόλεπτα καθ' ἡμέραν 24 ὡρῶν καθυστερεῖ ὡρολόγιον εἰς δευτερόλεπτα, κανονισμένον εἰς τὸν ὡρισμένον τόπον, ὅταν τὸ μεταφέρωμεν εἰς τὸν Ἰσημερινόν ;

Λύσις : Ἐφαρμόζοντες τὸν τύπον $T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{g}}$ διὰ τὴν αἰώρησιν τοῦ ἐκκρεμοῦς κατ' ἀρχὰς εἰς τὸν Ἰσημερινόν, καὶ κατόπιν εἰς τὸν ὑποτιθέμενον τόπον, ἔχομεν :

$$2 = 2\pi\sqrt{\frac{1}{g'}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{g}}$$

ἐξ οὗ διὰ τὴν διάρκειαν τῆς περιόδου :

$$T = 2\sqrt{\frac{g'}{g}} = 2\sqrt{\frac{201}{200}} \text{ δευτερόλεπτα.}$$

Καὶ διὰ τὴν ἁπλῆν αἰώρησιν :

$$\frac{T}{2} = \sqrt{\frac{201}{200}} \text{ δευτερόλεπτα}$$

Ὁ ἀριθμὸς τῶν αἰωρήσεων τοῦ ἐκκρεμοῦς θὰ εἶναι :

$$N = \frac{86400}{\frac{T}{2}} = 86400\sqrt{\frac{200}{201}} = 86184$$

Καὶ ἡ καθυστέρησις $R = 86400 - 86184 = 216$

$$R = 216 \text{ δευτερόλεπτα.}$$

119. Ὡρολόγιον, τοῦ ὁποίου ἡ πορεία εἶναι κανονικὴ ἐν Παρισίοις, προπορεύεται κατὰ δύο δευτερόλεπτα τὴν ἡμέραν ὅταν τὸ μεταφέρωμεν εἰς ἕνα ὡρισμένον τόπον. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς βαρύτητος εἰς τὸν τόπον τοῦτον.

Λύσις : Τὸ ἐκκρεμὲς τοῦ ὡρολογίου ἐκτελεῖ $86400 + 120 = 86520$ αἰωρήσεις ἁπλᾶς τὴν ἡμέραν.

Ἡ διάρκεια μιᾶς τῶν αἰωρήσεων τούτων εἶναι : $t = \frac{86400}{86520}$ δευτερόλεπτα.

Ἡ ἐπιτάχυνσις g δίδεται διὰ τῆς ἀναλογίας : $\frac{g}{9{,}81} = \frac{1}{t^2}$

ἐξ οὗ $g = 9\ 81 \times \left(\frac{86520}{86400}\right)^2 = 9{,}81 \times \left(\frac{721}{720}\right)^2 = 9{,}84$ μέτρα.

120. Σφαῖρα μεταλλικὴ μάζης 500 γράμμων, προσδεδεμένη εἰς τὸ ἄκρον σχοινίου μήκους ἑνὸς μέτρου, περιστρέφεται περὶ τὸ ἕτερον αὐτοῦ ἄκρον μετὰ ταχύτητος τοιαύτης, ὥστε νὰ διαγράφῃ μίαν καὶ ἡμίσειαν στροφὴν κατὰ δευτερόλεπτον. Νὰ προσδιορισθῇ ἡ τάσις, τὴν ὁποίαν θὰ ὑποστῇ τὸ νῆμα.

Λύσις : Ὁ τύπος εἶναι : $F = \frac{M\upsilon^2}{r}$

Συνεπῶς : $$F = \frac{500\ (3\pi\alpha)^2}{100} = \frac{500\ (3 \times 3{,}14 \times 100)^2}{100}$$

121. Ποία θὰ εἶναι ἡ διάρκεια τῆς αἰωρήσεως ἐκκρεμοῦς μήκους 1 μέτρου, ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ Ἡλίου ;

Λύσις : $\gamma = 28\ g$ καὶ $t = \pi \sqrt{\frac{100}{28 \times 981}}$

122. Μᾶζα 2 χιλιογράμμων σχήματος φακοῦ, ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ ἄκρου σύρματος μήκους 2 μέτρων, σχηματίζουσα ἐκκρεμές. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐνέργεια τοῦ ἐκκρεμοῦς τούτου ὑποτιθεμένου ὡς ἁπλοῦ, ὅταν τὸ σύρμα σχηματίζει γωνίαν 60^0 μετὰ τῆς κατακορύφου, εἰς τόπον ὅπου τὸ $g = 981$.

Λύσις : Ἡ μᾶζα αὔτη τῶν 2 χιλιογράμμων δύναται νὰ πέσῃ ἐκ τοῦ ὕψους :

$$200 \left(1 - \text{συν}\ 60^0\right) = 100$$

Ἡ δυναμική της ἐνέργεια εἶναι :

$$2000 \times 981 \times 100 = 19{,}62 \times 10^7 \text{ ἔργια.}$$

123. Ἡ μᾶζα τῆς γῆς εἶναι $5{,}95 \times 10^{27}$, καὶ ἡ ἀκτίς της εἶναι $6{,}37 \times 10^8$. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τιμὴ τῆς σταθερᾶς G τῆς παγκοσμίου ἕλξεως.

Λύσις : Θὰ ὑποθέσωμεν μίαν μᾶζαν 1 γράμμου ἥτις πίπτει εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς γῆς καὶ θὰ ἐφαρμόσωμεν τὴν σχέσιν $f = G . \frac{m\, m'}{r^2}$.

$$f = 981 \qquad m = 1 \qquad m' = 5{,}95 \times 10^{27}$$

$$G = \frac{981\ (6{,}37)^2 . 10^{16}}{5{,}95 \times 10^{27}} = \frac{6{,}69}{10^8}$$

124. Σῶμα βάρους 1 χιλιογράμμου, μεταφέρεται ἐκ τῆς βάσεως εἰς τὴν κορυφὴν τοῦ πύργου Ἄϊφελ. Πόσον θὰ ἐλαττωθῇ τὸ βάρος του ;

Λύσις : $\frac{g'}{g} = \frac{R^2}{(R+h)^2} = 1 - \frac{2h}{R}$

$$2\,h = 600 \text{ μέτρα} \qquad R = 6{,}000{,}000$$

$$\frac{2\,h}{R} = \frac{1}{100000}$$

Ἡ ἐλάττωσις τοῦ βάρους θὰ εἶναι 1 δέκατον τοῦ γραμμαρίου.

125. Ὑποτιθεμένης τῆς γῆς σφαιρικῆς, ζητεῖται ἡ ταχύτης καὶ ἡ διάρκεια τῆς περιφορᾶς ἑνὸς πλανήτου, ὅστις θὰ περιγράφῃ μίαν τροχιὰν κυκλικὴν ἀκτῖνος R, ἴσης πρὸς 60 γηΐνας ἀκτῖνας.

Λύσις: $F = m\gamma = \frac{m\upsilon^2}{R}$.

$$\upsilon = \sqrt{\gamma R} = \sqrt{\frac{g}{60^2} \times 60r} = \sqrt{\frac{9{,}81 \times 6366000}{60}} = 1020 \text{ μέτρα}$$

κατὰ δευτερόλεπτον.

Ἡ διάρκεια τῆς περιφορᾶς:

$$t = \frac{2\pi R}{\upsilon} = 2352940 \text{ δευτερόλεπτα}$$

δηλαδὴ 275 ὧραι καὶ 35 λεπτά.

126. Ἀτμομηχανὴ βάρους 50 τόννων διατρέχει, μὲ ταχύτητα 60 χιλιομέτρων τὴν ὥραν, καμπύλην ἀκτῖνος 500 μέτρων. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ φυγόκεντρος δύναμις, καὶ ἡ κλίσις ἡ ὁποία θὰ δοθῇ εἰς τὴν σιδηροδρομικὴν γραμμήν.

Λύσις: Ἡ ταχύτης τῆς ἀτμομηχανῆς κατὰ δευτερόλεπτον εἶναι:

$$\upsilon = \frac{60000}{3600} = \frac{100}{6} \text{ μέτρα}$$

Ἡ φυγόκεντρος δύναμις εἶναι:

$$F = \frac{m\upsilon^2}{r} = \frac{50000}{9{,}81} = \frac{\left(\frac{100}{6}\right)^2}{500} = 2831{,}57 \text{ χιλιόγρ.}$$

Ἡ κλίσις ἐπὶ τοῦ ὁρίζοντος εἶναι:

$$\varepsilon\varphi\, \alpha = \frac{F}{P} = \frac{2831{,}57}{50000} = 0{,}0566314$$

καὶ $\alpha = 3^\circ\ 14'\ 28''$

II. ΥΔΡΟΣΤΑΤΙΚΗ

127. Δοχεῖον πλῆρες ὕδατος σχήματος ὀρθοῦ κώνου, εἶναι τοποθετημένον ἐπὶ ὁριζοντίου ἐπιπέδου. Ἡ βάσις του ἔχει ἐπιφάνειαν 1 τετραγωνικοῦ δεκατομέτρου, καὶ ὁ ὄγκος του εἶναι 1 κυβικὸν δεκατόμετρον. Ποία εἶναι ἡ πίεσις ἐπὶ τῆς βάσεώς του ;

Λύσις : Ἔστω Η τὸ ὕψος τοῦ κώνου. Ὁ ὄγκος του εἶναι :

$$1000 = 100 \, . \, \frac{H}{3} \quad \text{ἐξ οὗ} \quad H = 30$$

Ἡ πίεσις ἐπὶ τῆς βάσεως εἶναι : $100 \times 30 \times 981 = 2943000$ δύναι δηλαδή, τὸ τριπλάσιον τοῦ βάρους τοῦ ὕδατος τοῦ περιεχομένου εἰς τὸ δοχεῖον.

128. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πίεσις ἐπὶ ἑνὸς κυκλικοῦ δίσκου διαμέτρου 16 ἑκατοστομέτρων, βυθισμένου ἐντὸς ὑδραργύρου. Τὸ κέντρον τοῦ κύκλου εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν 25 ἑκατοστομέτρων ἀπὸ τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας τοῦ ὑδραργύρου.

Λύσις : Ἡ πίεσις εἶναι ἴση πρὸς τὸ βάρος στήλης ὑγροῦ ἥτις ἔχει ὡς βάσιν τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κύκλου, καὶ ὕψος τὴν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ κέντρου βάρους τοῦ κύκλου, μέχρι τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ :

$$3{,}1416 \times 8^2 \times 25 \times 13{,}6 \times 981 = 68361 \times 981 \text{ δύναι.}$$

129. Ποία εἶναι ἡ πίεσις ἡ ἐξασκουμένη ἐφ᾽ ἑνὸς τετραγωνικοῦ ἑκατοστομέτρου, ὑπὸ στήλης ὑδραργύρου ὕψους 1 μέτρου ;

Λύσις : $1 \times 100 \times 13{,}6 \times 981 = 1360 \times 981 = 1334160$ δύναι.

130. Ὄγκος στερεὸς μὲ βάσεις σχήματος ὀρθογωνίου καὶ παραλλήλους ἐπιφανείας 1 τετραγωνικοῦ μέτρου, ζυγίζει 200 χιλιόγραμμα. Νὰ ὑπολογισθῇ : α΄.) ἡ πίεσις τὴν ὁποίαν ἐξασκεῖ ἐπὶ τετραγωνικοῦ ἑκατοστομέτρου ὅταν εἶναι τοποθετημένον ἐπὶ ὁριζοντίου ἐπιπέδου. β΄.) ἡ πίεσις, τὴν ὁποίαν ἐξασκεῖ κατὰ τετραγωνικὸν ἑκατοστόμετρον ἐὰν σχηματίζῃ μίαν τράπεζαν στηριζομένην διὰ τριῶν ποδῶν, οἱ ὁποῖοι ἐφάπτονται ἕκαστος ἐπὶ τοῦ ἐδάφους διὰ κύκλου ἐπιφανείας 20 τετραγωνικῶν ἑκατοστῶν.

Λύσις:

α′. $P = \frac{200}{10000} = 0{,}02$ χιλιόγραμμα

β′. $P' = \frac{200}{3.20} = \frac{10}{3}$ χιλιόγραμμα.

131. Δύο μεταλλικαὶ σφαῖραι, τῶν ὁποίων αἱ πυκνότητες εἶναι 5 καὶ 10, ἔχουσι τὸ αὐτὸ βάρος P εἰς τὸ κενόν. Ἐξαρτῶμεν αὐτὰς ἐκ τῶν ἄκρων μοχλοῦ καὶ κάμνομεν νὰ βυθισθῶσιν ἐντὸς ὕδατος. Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ σχέσις $\frac{l}{l'}$ τῶν δύο βραχιόνων τοῦ μοχλοῦ, ἵνα εὑρίσκεται ἐν ἰσορροπίᾳ ;

Λύσις: Ἔστωσαν r καὶ r′ αἱ ἀκτῖνες τῶν δύο σφαιρῶν. Αἱ ἀνώσεις ἐντὸς τοῦ ὕδατος εἶναι:

$$\frac{4}{3}\pi r^3 g \quad \text{καὶ} \quad \frac{4}{3}\pi r'^3 g$$

Ἡ ἐξίσωσις τῆς ἰσορροπίας τοῦ μοχλοῦ θὰ εἶναι :

$$\frac{4}{3}\pi r^3 (5-1)\, l\, g = \frac{4}{3}\pi r'^3 (10-1)\, l'\, g$$

$$\text{ἐξ οὗ} \quad 4 r^3 l = 9 r'^3 l' \quad \text{καὶ} \quad \frac{l}{l'} = \frac{9 r'^3}{4 r^3}$$

Ἐξ ἄλλου $P = \frac{4}{3}\pi r^3 . 5\ g = \frac{4}{3}\pi r'^3 10 g$ ἢ $5 r^3 = 10 r'^3$

$$\text{καὶ} \quad \frac{r'^3}{r^3} = \frac{1}{2} \quad \text{ἑπομένως} \quad \frac{l}{l'} = \frac{9}{8}.$$

132. Ἀντικείμενον ἐκ χρυσοῦ, πυκνότητος 19 , 25 ζυγίζει 96 , 25 γραμμάρια. Βυθιζόμενόν ἐντὸς τοῦ ὕδατος, ἐκτοπίζει ὄγκον ὕδατος, τοῦ ὁποίου τὸ βάρος εἶναι 6 γραμμάρια. Τὸ ἀντικείμενον εἶναι πλῆρες ἢ κοῖλον, καὶ ποῖον τὸ μέγεθος τῆς κοιλότητος ;

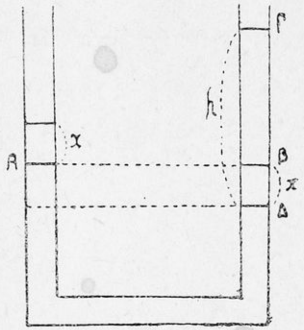
Λύσις: Ἔστω υ ὁ ὄγκος τοῦ πλήρους μέρους τοῦ ἀντικειμένου :

$$\upsilon \times 19\,,25 = 96{,}25 \quad \text{καὶ} \quad \upsilon = 5 \text{ κυβ. ἑκατ.}$$

Ὁ ἐξωτερικὸς ὄγκος εἶναι ἴσος πρὸς 6 κυβικὰ ἑκατοστόμετρα, τὸ σῶμα συνεπῶς εἶναι κοῖλον καὶ ἡ κοιλότης εἶναι 1 κυβικὸν ἑκατοστόν.

133. Δύο κατακόρυφοι σωλῆνες τομῆς 2 τετραγωνικῶν ἑκατοστῶν συγκοινωνοῦσι δι᾽ ὁριζοντίου σωλῆνος περιέχοντος ὑδράργυρον μέχρι ὕψους ὀλίγων ἑκατοστομέτρων. Ρίπτομεν εἰς τὸν ἕνα ἐκ τῶν σωλήνων 60 γραμμάρια ὑγροῦ ἐλαφροτέρου τοῦ ὑδραργύρου. Γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ πυκνότης τοῦ ὑδραργύρου εἶναι 13,6, νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος εἰς τὸ ὁποῖον θὰ φθάσῃ ὁ ὑδράργυρος εἰς τὸν ἄλλον σωλῆνα.

Λύσις: Ἔστω ΑΒ τὸ ἀρχικὸν ὕψος τοῦ ὑδραργύρου. Ὅταν ρί-



ψωμεν ὑγρὸν εἰς τὸν βραχίονα Β, τότε ὁ ὑδράργυρος θὰ κατέλθῃ ἐκ τοῦ Β εἰς τὸ Δ, δηλαδὴ κατὰ x καὶ θὰ ἀνέλθῃ εἰς τὸ Α κατὰ x.

Ἔστω d ἡ πυκνότης, καὶ h τὸ ὕψος ΓΔ τοῦ ῥιφθέντος ὑγροῦ. Τὰ ὕψη ἄνωθεν τῆς διαχωριστικῆς ἐπιφανείας θὰ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα τῶν πυκνοτήτων. Ἑπομένως ἔχομεν:

$$\frac{h}{2x} = \frac{13,6}{d} \quad \text{ἐξ οὗ} \quad x = \frac{hd}{27,2}.$$

Ἐξ ἄλλου τὸ ὕψος h τῶν 60 γραμμαρίων τοῦ ριφθέντος ὑγροῦ εἶναι:

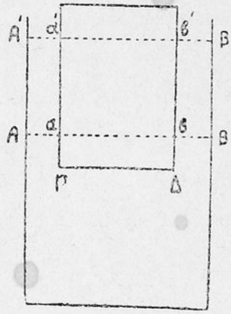
$$h = \frac{60}{2d} = \frac{30}{d} \text{ ἑκατοστόμετρα.}$$

Ἀντικαθιστῶντες τὴν τιμὴν τοῦ h εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν τοῦ x:

$$x = \frac{30}{d} \times \frac{d}{27,2} = \frac{30}{27,2} = 1,1 \text{ ἑκατοστόμετρα.}$$

134. Κυλινδρικὸν δοχεῖον τομῆς 120 τετρ. ἑκατοστῶν, περιέχει ὕδωρ μέχρι ὕψους 30 ἑκατοστῶν ἀπὸ τοῦ πυθμένος τοῦ δοχείου. Ἐντὸς τοῦ ὕδατος τοῦ δοχείου ρίπτομεν κύλινδρον ἐκ ξύλου, τομῆς 80 τετραγωνικῶν ἑκατοστῶν καὶ ὕψους 10 ἑκατοστομέτρων, ὁ ὁποῖος ἐπιπλέει. Ζητεῖται κατὰ πόσον θὰ ὑψωθῇ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὕδατος ἐντὸς τοῦ δοχείου; Ἡ πυκνότης τοῦ ξύλου εἶναι 0,7.

Λύσις: Ὑποθέτομεν ὅτι ὁ κύλινδρος ἐπιπλέει κατὰ τρόπον ὥστε αἱ βάσεις του νὰ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὕδατος. Ἡ



εἴσοδος τοῦ κυλίνδρου κάμνει νὰ ἀνέλθῃ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὕδατος ἐκ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου ΑΒ, εἰς τὸ Α'Β'.

Ἡ ἐξίσωσις ἰσορροπίας τοῦ ἐπιπλέοντος σώματος εἶναι :

Βάρος κυλίνδρου = Βάρος ἐκτοπιζομένου ὕδατος

$$80 \times 10 \times 0{,}7 = 560 \text{ γραμ.}$$

Τὸ βάρος τοῦ ἐκτοπιζομένου ὕδατος εἶναι 560 γραμ. Ὁ ὄγκος τοῦ ἐκτοπιζομένου ὕδατος εἶναι 560 κυβ. ἑκατοστά.

Ὁ ὄγκος οὗτος παρίσταται ὑπὸ τοῦ κυλίνδρου ΑΒΑ'Β'.

Πράγματι ἔχομεν :

ὄγκ. $\alpha'\,\beta'\,\Gamma\Delta =$ ὄγκ. $\alpha'\,\beta'\,\alpha\,\beta +$ ὄγκ. $\alpha\,\beta\,\Gamma\Delta$.

Καὶ ὄγκ. $\alpha'\,\beta'\,\Gamma\Delta =$ ὄγκ. $\alpha'\,\beta'\,\alpha\,\beta +$ ὄγκ. παράπλευρον $=$ ὄγκ. ΑΒΑ'Β'

Γνωρίζοντες δὲ ὅτι ἡ τομὴ τοῦ δοχείου εἶναι 120 τετρ. ἑκ. ἔχομεν :

$$120 \times AA' = 560$$

ἐξ οὗ $\quad AA' = 4{,}66$ ἑκατοστόμετρα.

135. Σῶμα πυκνότητος 8,4 ἐπιπλέει ἐπὶ τῆς διαχωριστικῆς ἐπιφανείας δύο ὑγρῶν πυκνότητος 13,6 καὶ 5,8. Ποία εἶναι ἡ σχέσις τῶν ὄγκων τοῦ σώματος τῶν βυθισμένων ἐντὸς τῶν δύο ὑγρῶν ;

Λύσις : Ἐπειδὴ τὸ σῶμα ἰσορροπεῖ εἰς τὸ μέσον τῆς ὑγρᾶς μάζης τῶν δύο ὑγρῶν, τὸ βάρος του εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν βαρῶν τῶν ἐκτοπιζομένων ὑγρῶν. Ἔστω υ ὁ ὄγκος τοῦ μέρους τοῦ σώματος τοῦ βυθισμένου ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ πυκνότητος 5,8 καὶ υ′ ὁ ὄγκος τοῦ μέρους τοῦ σώματος τοῦ εὑρισκομένου ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ πυκνότητος 13,6. Ὁ ὄγκος τοῦ σώματος εἶναι υ + υ′, τὸ βάρος του θὰ εἶναι,

$$P = (\upsilon + \upsilon') \; 8{,}4 \qquad \text{διότι} \qquad P = Vd$$

Τὸ βάρος τῶν ἐκτοπιζομένων ὑγρῶν εἶναι :

$$\pi = \upsilon \times 5{,}8 \qquad \text{καὶ} \qquad \pi' = \upsilon' \times 13{,}6$$

Ἑπομένως θὰ ἔχωμεν :

$$(\upsilon + \upsilon') . 8{,}4 = \upsilon \times 5{,}8 + \upsilon' \times 13{,}6$$

$$2{,}6 . \upsilon = 5{,}6 . \upsilon'$$

$$\text{καὶ} \qquad \frac{\upsilon}{\upsilon'} = \frac{5{,}6}{2{,}6} = 2.$$

136. Ὄγκος πάγου σχήματος παραλληλεπιπέδου τοῦ ὁποίου τὸ ὕψος εἶναι 6 μέτρα ἐπιπλέει ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς θαλάσσης. Ποῖον θὰ εἶναι τὸ ὕψος τοῦ πρίσματος τοῦ ἄνωθεν τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ ; Πυκνότης τοῦ πάγου 0,93, πυκνότης θαλασσίου ὕδατος 1,026.

Λύσις : Ἔστω σ τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως εἰς τετραγωνικὰ μέτρα. Ὁ ὄγκος θὰ εἶναι 3×6 κυβ. μέτρα, καὶ τὸ βάρος τοῦ πρίσματος θὰ εἶναι :

$$\sigma \times 6 \times 0{,}93 \quad \text{τόννοι.}$$

Τὸ βάρος τοῦ ἐκτοπιζομένου ὕδατος εἶναι :

$$\sigma \times x \times 1{,}026 \text{ τόννοι, ὅπου } x \text{ τὸ ὕψος.}$$

Ἑπομένως πρέπει νὰ ἔχωμεν συμφώνως πρὸς τὴν συνθήκην ἰσορροπίας τῶν ἐπιπλεόντων σωμάτων :

$$\sigma \times 6 \times 0{,}93 = \sigma \times x \times 1{,}026$$

$$\text{καὶ} \qquad x = \frac{6 \times 0{,}93}{1{,}026} = 5{,}438 \text{ μέτρα.}$$

τὸ ζητούμενον = 6 − 5,438

137. Ποία εἶναι ἡ δύναμις ἡ ἐξασκουμένη ἐπὶ τῆς βάσεως δοχείου περιέχοντος ὕδωρ, ὅταν ἡ ἐπιφάνεια τῆς βάσεως ταύτης εἶναι 12 ὑφεκατόμετρα, καὶ ἡ ἐλευθέρα ἐπιφάνεια τοῦ ὑγροῦ εὑρίσκεται εἰς 60 ὑφεκατομέτρων ὕψος;

Λύσις : Ἡ ἐξασκουμένη δύναμις εἶναι :

$$12 \times 60 \times 1 = 720 \text{ κυβικὰ ἑκατοστὰ}$$

τουτέστι 720 γραμμάρια.

138. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ κατακόρυφος ἀπόστασις δύο σημείων εὑρισκομένων ἐν τῷ ὑδραργύρῳ, γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ διαφορὰ τῶν πιέσεων εἰς τὰ σημεῖα ταῦτα εἶναι 1 χιλιόγραμμον. Εἰδικὸν βάρος ὑδραργύρου 13,6.

Λύσις : Γνωστὸν εἶναι ὅτι :

$$p = \upsilon . d \quad \text{καὶ} \quad p' = \upsilon' d$$

$$\text{καὶ} \quad p - p' = (\upsilon - \upsilon')\, d \quad \text{τὸ} \quad \upsilon - \upsilon' = h$$

$$\text{Ἑπομένως} \quad p - p' = h . d$$

$$\text{ὥστε} \quad 1000 \text{ γραμ.} = h . 13,6$$

$$\text{καὶ} \quad h = \frac{1000}{13,6} = \frac{10000}{136} = 73,5 \text{ ἑκατοστόμετρα.}$$

139. Ἡ δύναμις μεθ' ἧς λειτουργεῖ ὑδραυλικὸν πιεστήριον εἶναι 20 χιλιόγραμμα. Ὁ μοχλοβραχίων τῆς δυνάμεως εἶναι πεντάκις μείζων τοῦ τῆς ἀντιστάσεως, καὶ αἱ ἐπιφάνειαι τῶν ἐμβολέων εἶναι ἡ μὲν 10 τετραγ. ἑκατοστ. ἡ δὲ ἄλλη 700 τετραγ. ἑκατοστ. Ζητεῖται· α'.) ἡ ἐξασκουμένη δύναμις ὑπὸ τοῦ μεγάλου ἐμβολέως, καὶ β'.) εἰς ποῖον ὕψος θὰ ἀνυψοῦτο τὸ ὕδωρ σωλῆνος κατακορύφου συγκοινωνοῦντος μετὰ τοῦ μεγάλου κυλίνδρου;

Λύσις: Ἔστωσαν E_1 καὶ E_2 τὰ ἐμβαδὰ τοῦ μικροῦ καὶ τοῦ μεγάλου ἐμβολέως, καὶ Δ_1 καὶ Δ_2 αἱ ἐπ' αὐτῶν ἐπιφερόμεναι πιέσεις.

Ἡ συνθήκη ἰσορροπίας εἶναι $\dfrac{\Delta_1}{\Delta_2} = \dfrac{E_1}{E_2}$.

α'.) $\dfrac{20 \times 5}{\Delta_2} = \dfrac{10}{700}$ καὶ $\Delta_2 = \dfrac{100 \times 700}{10} = 7000$ χιλιόγραμμα.

β'.) Τὸ βάρος τῆς στήλης εἶναι 7000 χιλιόγρ. 1 κυβ. παλάμη ὕδατος ἔχει βάρος 1 χιλιόγραμμον.

Ἄρα ἡ ἄνω στήλη ἔχει ὄγκον : $\frac{7000}{1} = 7000$ κυβ. παλάμας.

Ἡ βάσις τῆς στήλης εἶναι : 700 ἑκ^2 = 7 τετραγ. παλάμαι.

Ἐπομένως τὸ ὕψος τῆς στήλης εἶναι :

$$\frac{7000}{7} = 1000 \text{ παλάμαι} = 100 \text{ μέτρα.}$$

140. Σφαῖρα κοίλη πυκνότητος Δ καὶ τῆς ὁποίας τὸ πάχος τῶν τοιχωμάτων εἶναι ε, ἐγκλείει ὑγρὸν πυκνότητος d. Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἐσωτερικὴ ἀκτὶς τῆς σφαίρας, ἵνα αὕτη εὑρίσκεται ἐν ἰσορροπίᾳ ἐντὸς ὑγροῦ πυκνότητος d' ;

Λύσις : Ἔστω x ἡ ζητουμένη ἀκτίς. Ὁ ἐξωτερικὸς ὄγκος τῆς σφαίρας εἶναι ἴσος πρὸς

$$\frac{4}{3}\pi(x+\varepsilon)^3$$

Ὁ ὄγκος τοῦ κοίλου μέρους εἶναι : $\frac{4}{3}\pi x^3$.

Ὁ ὄγκος τοῦ πλήρους μέρους τῆς σφαίρας θὰ εἶναι :

$$\frac{4}{3}\pi(x+\varepsilon)^3 - \frac{4}{3}\pi x^3 = \frac{4}{3}\pi[(x+\varepsilon)^3 - x^3].$$

Τὸ βάρος τῆς κοίλης σφαίρας θὰ εἶναι :

$$P = \frac{4}{3}\pi[(x+\varepsilon)^3 - x^3] \, . \, \Delta$$

Τὸ βάρος τοῦ περιεχομένου ὑγροῦ εἶναι :

$$P' = \frac{4}{3}\pi x^3 d$$

Καὶ ὁ ὄγκος τοῦ ἐκτοπιζομένου ὑγροῦ εἶναι :

$$P'' = \frac{4}{3}\pi(x+\varepsilon)^3 \, . \, d'$$

Ἡ σφαῖρα εὑρισκομένη ἐν ἰσορροπίᾳ ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ πυκνότητος d', ἔχει βάρος ἴσον πρὸς τὸ βάρος τοῦ ἐκτοπιζομένου ὑγροῦ :

$$P + P' = P''.$$

Ἀντικαθιστῶντες ἔχομεν :

$$\frac{4}{3}\pi\Big[(x+\varepsilon)^3 - x^3\Big]\Delta + \frac{4}{3}\pi x^3 d = \frac{4}{3}\pi(x+\varepsilon)^3 \, . \, d'$$

Ἐξ αὐτῆς λαμβάνομεν:

$$(x+\varepsilon)^3\,(\Delta - d') = x^3\,(\Delta - d)$$

καὶ $$\left(\frac{x+\varepsilon}{x}\right)^3 = \frac{\Delta - d}{\Delta - d'}$$

καὶ $$\frac{x+\varepsilon}{x} = \sqrt[3]{\frac{\Delta - d}{\Delta - d'}}$$

ἐξ οὗ $$x = \frac{\varepsilon}{\sqrt[3]{\dfrac{\Delta - d}{\Delta - d'}} - 1}.$$

141. Δύο συγκοινωνοῦντα κυλινδρικὰ δοχεῖα Α καὶ Β περιέχουν ὑδράργυρον. Ἐν τῷ δοχείῳ Α προστίθεται ὕδωρ, ὅπερ ἀποτελεῖ στήλην 10 ἑκατοστῶν ὕψους, εἶτα ἔλαιον, ἀποτελοῦν στήλην 11,5 ἑκατοστῶν. Ζητεῖται τὸ ὕψος τοῦ ὑδραργύρου ἐν τῷ βραχίονι Β ὑπεράνω τῆς ἐπιφανείας τῆς διαχωριζούσης τὸ ὕδωρ ἀπὸ τοῦ ὑδραργύρου. Πυκνότης τοῦ μὲν ὑδραργύρου 13,6, τοῦ δὲ ἐλαίου 0,92.

Λύσις: Ἡ πίεσις ἣν δέχεται ἡ ἐπιφάνεια τοῦ Β ἡ εὑρισκομένη ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου εἰς ὃ εὑρίσκεται καὶ ὁ ὑδράργυρος εἰς τὸ Α εἶναι: $p = \varepsilon \,.\, h \,.\, 13{,}6$ ὅπου ε ἡ ἐπιφάνεια, καὶ h τὸ ὕψος.

Ἡ πίεσις, ἣν δέχεται ὁ ὑδράργυρος εἰς τὸν σωλῆνα Α, εἶναι:

$p = \varepsilon \,.\, \upsilon \,.\, 0{,}92 + \varepsilon \,.\, \upsilon' \,.\, 1$ ὅπου υ καὶ υ′ τὰ ὕψη.

Αἱ πιέσεις ὅμως αὗται εἶναι ἴσαι.

Ὥστε $$\varepsilon \,.\, h \,.\, 13{,}6 = \varepsilon \,.\, \upsilon \,.\, 0{,}92 + \varepsilon \,.\, \upsilon' \,.\, 1$$

καὶ $$h \,.\, 13{,}6 = 11{,}5 \times 0{,}92 + 10 \,.\, 1 = 20{,}68$$

$$h = \frac{20{,}68}{13{,}6} = 1{,}5 \text{ ἑκατοστόμετρα,}$$

142. Ποία εἶναι εἰς χιλιόγραμμα κατὰ τετραγωνικὸν ἑκατοστόμετρον, ἡ πίεσις ἐπὶ τῆς ἐσωτερικῆς ἐπιφανείας ὑδραγωγοῦ σωλῆνος συγκοινωνοῦντος μετὰ δεξαμενῆς, εἰς τὴν ὁποίαν ἡ ἐλευθέρα ἐπιφάνεια τοῦ ὕδατος εὑρίσκεται εἰς ὕψος 20 μέτρων ἄνωθεν τοῦ σημείου τοῦ σωλῆνος ἐφ' οὗ ἐξασκεῖται ἡ πίεσις;

Λύσις: $$P = h.\, d.$$

καὶ $$p = 2000 \times 1 = 2000 \text{ γραμμάρια.}$$

143. Δύο συγκοινωνοῦντα δοχεῖα κυλινδρικὰ Α καὶ Β περιέχουν ὑδράργυρον. Τὸ δοχεῖον Α εἶναι κλειστὸν δι' ἐμβολέως ἄνευ βάρους, τὸ δὲ Β, ἐπὶ τοῦ ὁποίου ἐτέθη βάρος 1340 γραμμαρίων, εἶναι ἀνοικτόν. Ζητεῖται ποία θὰ εἶναι ἡ διαφορὰ ὕψους τῶν ἐπιφανειῶν τοῦ ὑγροῦ εἰς τὰ δοχεῖα ; Τομὴ τοῦ μὲν δοχείου Α=12 τετραγ. ἑκ. τοῦ δὲ Β=4 τετρ. ἑκ. καὶ πυκνότης τοῦ ὑδραργύρου = 13,6.

Λύσις : Ἡ πίεσις εἰς τὸ δοχεῖον Α καὶ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας, ἥτις εὑρίσκεται εἰς τὸ αὐτὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον μὲ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑδραργύρου τοῦ δοχείου Β, εἶναι $P =$ ἐπιφ. $\times$ ὕψος $\times$ εἰδ. βάρ.

Ὥστε $P = \varepsilon \times h \times d$

καὶ $P = 12 \times h \times 13{,}6 = 1340$

καὶ $h = 8{,}2$ ἑκατοστόμετρα.

144. Σῶμά τι ἔχει βάρος 40 γραμμαρίων. Τὸ βάρος τοῦτο, ὅταν τὸ σῶμα εὑρίσκεται ἐντὸς τοῦ ὕδατος, φαίνεται ἴσον πρὸς 22 γραμμάρια. Ποῖος εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ σώματος, καὶ ποῖον τὸ εἰδικὸν βάρος του ;

Λύσις : Ὁ ὄγκος τοῦ σώματος ἰσοῦται μὲ τὴν ἄνωσιν :

$$V = 40 - 22 = 18 \text{ κυβ. ἑκ.}$$

Καὶ τὸ εἰδικὸν βάρος $d = \dfrac{40}{18} = 2{,}22.$

145. Στέφανος χρυσοῦς ζυγίζει 300 γραμμάρια. Ἐπειδὴ ὑπάρχει ὑποψία ὅτι ὁ χρυσὸς τοῦ στεφάνου τούτου δὲν εἶναι καθαρός, ἀλλὰ περιέχει καὶ ἄργυρον, ὁ στέφανος ἐτέθη ἐν ὕδατι καὶ εὑρέθη ὅτι τότε χάνει βάρος ἴσον πρὸς 20 γραμμάρια. Περιέχει ἆρά γε ἄργυρον, καὶ ποία ἡ ποσότης τοῦ περιεχομένου ἀργύρου ; Πυκνότης τοῦ μὲν χρυσοῦ 19,5, τοῦ δὲ ἀργύρου 10,5.

Λύσις : Ἔστωσαν x τὸ βάρος τοῦ χρυσοῦ, καὶ ψ τὸ τοῦ ἀργύρου, ἅτινα περιέχονται εἰς τὸν στέφανον.

Τότε : $$x + \psi = 300 \qquad (1)$$

Ἡ ἄνωσις εἶναι 20 κυβ. ἑκ.

Ἐκ τοῦ τύπου $P = Vd$ εὑρίσκομεν τὸν ὄγκον τοῦ χρυσοῦ τοῦ στεφάνου $= \dfrac{x}{19{,}5}$, καὶ τὸν ὄγκον τοῦ ἀργύρου, ὅστις εἶναι $\dfrac{\psi}{10{,}5}$.

Ἔχομεν λοιπὸν τὴν ἐξίσωσιν : $\frac{x}{19,5} + \frac{\psi}{10,5} = 20$ (2)

Λύοντες τὸ σύστημα (1) καὶ (2), εὑρίσκομεν $x = 195$ γραμμάρια καὶ $\psi = 105$ γραμμάρια.

146. Ράβδος ἐκ χαλκοῦ ζυγίζει 9000 γραμμάρια ἐντὸς τοῦ ἀέρος, καὶ 7990 γραμμάρια ἐντὸς τοῦ ὕδατος. Ποία εἶναι ἡ πυκνότης τοῦ χαλκοῦ ;

Λύσις: $P = 9000$ $V = 9000 - 7990 = 1010$

$$d = \frac{P}{V} = 8,91$$

147. Σῶμά τι ζυγίζει 24 γραμμάρια ἐντὸς τοῦ ἀέρος καὶ 20 γραμμάρια ἐντὸς τοῦ ὕδατος. Ποῖον εἶναι τὸ φαινομενικὸν βάρος του ἐντὸς ὑγροῦ πυκνότητος 0,75 ;

Λύσις: Ὄγκος τοῦ σώματος $24 - 20 = 4$.

Βάρος εἰς γραμμάρια τοῦ ἐκτοπιζομένου ὑγροῦ : $4 \times 0,75 = 3$.

Φαινομενικὸν βάρος ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ : $24 - 3 = 21$.

148. Σφαῖρα χαλκίνη ἔχει βάρος 880 γραμμάρια. Τιθεμένη ἐν ὕδατι ἔχει βάρος 620 γραμμάρια. Ζητεῖται ἐὰν ἡ σφαῖρα αὕτη εἶναι κοίλη ἢ πλήρης, γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ πυκνότης τοῦ χαλκοῦ εἶναι 8,8.

Λύσις: $880 - 620 = 260$ ἄνωσις.

Ὄγκος ἐκτοπιζομένου ὕδατος 260 κυβ. ἑκ.

Ἐκ τοῦ τύπου $V = \frac{P}{d}$ ἔχομεν $\frac{880}{8,8} = 100$ κυβ. ἑκ.

Ἑπομένως ὄγκος σφαίρας 100 κυβ. ἑκ.

Ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ ἐκτοπίζει μεγαλειτέραν ποσότητα παρ᾽ ὅσον εἶναι ὁ πραγματικός της ὄγκος. Ἑπομένως ἡ σφαῖρα εἶναι κοίλη. Τὸ κοῖλον ἔχει ὄγκον,

$$260 - 100 = 160 \text{ κυβ. ἑκ.}$$

149. Σφαῖρα ἐκ πλατίνης ζυγίζει 20,86 γραμμάρια εἰς τὸν ἀέρα, 19,86 γραμ. ἐντὸς ὕδατος, καὶ 19,36 γραμμάρια ἐντὸς θειϊκοῦ ὀξέος. Ποῖαι εἶναι αἱ πυκνότητες τῆς πλατίνης καὶ τοῦ θειϊκοῦ ὀξέος ;

Λύσις:

Διὰ τὴν πλάτιναν : $d = \frac{20,86}{20,86 - 19,86} = 20,86.$

Διὰ τὸ θειϊκὸν ὀξύ: $d' = \frac{20,86 - 19,36}{20,86 - 19,86} = 1,5.$

130. Ἡ πυκνότης τοῦ ψευδαργύρου εἶναι 7, καὶ ἡ τοῦ χαλκοῦ 9. Ποῖαι ποσότητες ψευδαργύρου καὶ χαλκοῦ πρέπει νὰ ληφθῶσιν, ἵνα ἐξ αὐτῶν σχηματισθῇ κρᾶμα ἔχον βάρος 50 γραμ. καὶ πυκνότητα 8,2. (Δεχόμεθα ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ κράματος θὰ εἶναι ἴσος πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ὄγκων τῶν δύο μετάλλων).

Λύσις: Ὄγκος κράματος εἶναι: $\frac{50}{8,2} = 6,1$ κυβ. ἑκ.

Ἔστωσαν y καὶ x αἱ ποσότητες εἰς γραμμάρια τοῦ ψευδαργύρου καὶ τοῦ χρυσοῦ. Τότε:

$$y + x = 50 \text{ γραμ.} \qquad (1)$$

Ἐπίσης ἐκ τοῦ τύπου $V = \frac{P}{d}$ ἔχομεν:

$$\frac{y}{7} + \frac{x}{9} = 6,1.$$

Ἐκ τοῦ συστήματος τῶν δύο ἐξισώσεων (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν τὰς τιμὰς τοῦ y καὶ x.

$$y = 17,15 \quad \text{καὶ} \quad x = 32,85.$$

131. Μία σφαῖρα ἔχουσα πυκνότητα 0,95 καὶ ὄγκον 100 κυβ. ἑκατοστ. ἐπιπλέει ἐπὶ τοῦ ὕδατος δοχείου. Ἐπὶ τούτου χύνεται ἔλαιον πυκνότητος 0,9, οὕτως ὥστε νὰ καλυφθῇ τελείως ἡ σφαῖρα. Ποῖος εἶναι ὁ ἐν τῷ ὕδατι ὄγκος τῆς σφαίρας;

Λύσις: Ἔστωσαν v καὶ v′ οἱ ὄγκοι τῆς σφαίρας ἐντὸς τοῦ ἐλαίου καὶ τοῦ ὕδατος.

Τότε ἔχομεν $v + v' = 100.$

Ἐπίσης γνωστὸν ὅτι: $v.0,9\,g + v'.1.g = 100 \times 0,95\,g$

Ἐκ τῶν δύο ἐξισώσεων λαμβάνομεν $v' = 50.$

132. Ἐντὸς ὑοειδοῦς σωλῆνος μετὰ δύο κατακορύφων βραχιόνων τίθεται πρῶτον ὑδράργυρος καὶ εἶτα εἰς τὸν ἕνα τῶν βραχιόνων ἄλλο τι ὑγρόν. Αἱ ἐλεύθεραι ἐπιφάνειαι τοῦ ὑδραργύρου καὶ τοῦ ὑγροῦ εἶναι τοῦ μὲν πρώτου εἰς 17,5 ἑκατοστά, τοῦ δὲ δευτέρου εἰς 42 ἑκατοστὰ ἄνωθεν τῆς διαχωριζούσης τὰ ὑγρὰ ἐπιφανείας. Ζητεῖται ἡ πυκνότης τοῦ δευτέρου ὑγροῦ, γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ πυκνότης τοῦ ὑδραργύρου εἶναι 13,6.

Λύσις: Εἶναι γνωστὸν ὅτι $\frac{h}{h'} = \frac{d'}{d}$

Ὥστε: $\frac{17,5}{42} = \frac{x}{13,6}$ καὶ $\frac{17,5 \times 13,6}{42} = x.$

καὶ $x = 5,66.$

153. Ἓν λίτρον ὑγροῦ πυκνότητος 1,56 ἀναμιγνύεται μετὰ τριῶν λίτρων ἄλλου ὑγροῦ πυκνότητος 0,8. Τὸ ὑγρὸν μῖγμα παρουσιάζει μίαν συστολὴν κατὰ $\frac{1}{10}$. Ποία εἶναι ἡ πυκνότης του d;

Λύσις: Ὁλικὸς ὄγκος μίγματος ἄνευ συστολῆς εἶναι 4000 κυβ. ἐκ.

Ὄγκος μίγματος: $\frac{9}{10} \cdot 4000 = 3600$ κυβ. ἐκ.

Γνωρίζομεν ὅτι ἡ μᾶζα εἶναι ἀμετάβλητος:

$$1000 \times 1,56 + 3000 \times 0,8 = 3600 \times d$$

καὶ $d = 1,1$

III. ΑΕΡΟΣΤΑΤΙΚΗ

154. Ποίαν δύναμιν ἐξασκεῖ ἡ ἀτμόσφαιρα ἐπὶ 1 τετραγ. μέτρου, εὑρισκομένου εἰς τὴν κορυφὴν ὄρους, ἔνθα τὸ βαρόμετρον δεικνύει 70 ἑκατοστά; Τὸ g=9,81.

Λύσις: $10000 \times 70 \times 13,6 = 9520$ χιλιόγραμμα.

155. Ποῖον εἶναι τὸ ὕψος χ στήλης ἀέρος, ἥτις εἰς θερμοκρασίαν 0° καὶ ὑπὸ πίεσιν 76 ἐξασκεῖ τὴν αὐτὴν πίεσιν, ἥν ἐξασκεῖ στήλη 1 ἑκατοστομέτρου ὑδραργύρου; Ἡ πυκνότης τοῦ ἀέρος εἰς 0° καὶ ὑπὸ πίεσιν 76 εἶναι 0,001293.

Λύσις: $\chi \times 0,001293 \times 981 = 1 \times 13,6 \times 981$ καὶ $\chi = 10518$ ἑκατοστόμετρα.

156. Ποῖον θὰ ἦτο τὸ ὕψος τῆς ἀτμοσφαίρας εἰς ἕνα τόπον, εἰς τὸν ὁποῖον τὸ βαρόμετρον δεικνύει 76, ἐὰν ὁ ἀὴρ εἶχε πυκνότητα σταθερὰν πανταχοῦ, καὶ ἐὰν τὸ g δὲν μετεβάλλετο μετὰ τοῦ ὕψους ;

Λύσις : $$\chi \times 0{,}001293 = 76 \times 13{,}6$$

καὶ $\chi = 799381$ ἑκατοστόμετρα $= 8$ χιλιόμετρα περίπου.

157. Ἡ διάμετρος ἑνὸς βαρομετρικοῦ σωλῆνος εἶναι 2 ἑκατοστόμετρα, ἡ δὲ διάμετρος τῆς λεκάνης τοῦ βαρομέτρου εἶναι 4 ἑκατοστόμετρα. Κατὰ πόσον θὰ ἀνυψοῦται ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὑδραργύρου ἐν τῇ λεκάνῃ, ὅταν τὸ βαρόμετρον πίπτῃ κατὰ 5 χιλιοστά ;

Λύσις : $\pi \times 1 \times 0{,}5 = \pi\,(2^2-1)\,\chi$ καὶ $\chi = \frac{1}{6}$ ἑκατοστόμετρα.

158. Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ χωρητικότης ἑνὸς δοχείου περιέχοντος 3 γράμμα ἀέρος εἰς 0^0, ἵνα ὁ ἀὴρ οὗτος ἐξασκεῖ πίεσιν 500 γράμμων ἐπὶ ἑκάστου τετραγωνικοῦ ἑκατοστομέτρου ; Πυκνότης τοῦ ἀέρος 0,013.

Λύσις : Ἡ πίεσις τῶν 500 γράμμων κατὰ τετραγωνικὸν ἑκατοστόμετρον ἰσοδυναμεῖ πρὸς κλάσμα τῆς ἀτμοσφαιρικῆς πιέσεως ἴσον πρὸς $\frac{500}{1033}$. Παριστῶμεν διὰ χ τὴν χωρητικότητα εἰς κυβ. ἑκατοστ. Ὁ ἀὴρ οὗτος εἰς τὴν πίεσιν τῶν 500 γραμ. κατὰ τετραγωνικὸν ἑκατοστ. ζυγίζει 3 γραμμάρια.

$$\chi \times 0{,}0013 \times \frac{500}{1033} = 3 \quad \text{ἐξ οὗ} \quad \chi = 4767{,}7 \text{ κυβ. ἑκ.}$$

159. Μᾶζα ἀερίου καταλαμβάνει ὑπὸ πίεσιν 74 ἑκατοστομ., ὄγκον 646 κυβ. ἑκατοστ. Ποῖος ὁ ὄγκος της ὑπὸ πίεσιν 76 ἑκατοστομέτρων;

Λύσις : $646 \times 74 = \chi \times 76$ ἐξ οὗ $\chi = 629$ κυβ. ἑκατοστ.

160. Μᾶζα ἀέρος τίθεται ἀλληλοδιαδόχως εἰς δύο σφαιρικὰ δοχεῖα ἀκτίνων 2 καὶ 5 ἑκατοστῶν. Ποῖος εἶναι ὁ λόγος τῶν πιέσεων τοῦ ἀέρος εἰς τὰς δύο περιπτώσεις ;

Λύσις : $$\frac{4}{3}\pi\, 2^3\, p = \frac{4}{3}\pi\, 5^3\, p'$$

καὶ $\frac{p}{p'} = \frac{125}{8} = 15,625.$

161. Βαρομετρικὸς σωλήν, τομῆς 1 τετραγων. ἑκατοστ. καὶ ἐν τῷ ὁποίῳ ὁ ὑδράργυρος εὑρίσκεται εἰς ὕψος 76 ἑκατοστῶν, παρουσιάζει κενὸν θάλαμον μήκους 10 ἑκατοστῶν. Ποῖος ὄγκος V ἀέρος πρέπει νὰ εἰσαχθῇ εἰς τὸν κενὸν θάλαμον ὑπὸ πίεσιν 76 ἑκατοστῶν, ἵνα ἡ ὑδραργυρικὴ στήλη πέσῃ εἰς 50 ἑκατοστά ;

Λύσις: Ὁ εἰσαχθεὶς ἀὴρ θὰ ἔχῃ μίαν πίεσιν $76-50=26$, ὑπὸ ὄγκον $10+26=36$. Ὁ ὄγκος V αὐτοῦ τοῦ ἀέρος ὑπὸ πίεσιν 76 συμφωνεῖ μὲ τὴν ἐξίσωσιν : $26 \times 36 = V \times 76$

καὶ $V = 12,3$ κυβικὰ ἑκατοστόμετρα.

162. Σωλὴν κλειστὸς κατὰ τὸ ἓν ἄκρον καὶ περιέχων ἀέριον, βυθίζεται ἐντὸς τοῦ ὑδραργύρου λεκάνης. Τὸ ἀέριον καταλαμβάνει ὕψος 10 ἑκατοστῶν, ὁ δὲ ὑδράργυρος ἔχει ἀνέλθει κατὰ 15 ἑκατοστά. Διὰ νὰ λάβῃ τὸ ἀέριον πίεσιν ἴσην πρὸς τὴν ἐξωτερικὴν ἀτμοσφαιρικήν, πρέπει νὰ βυθισθῇ ὁ σωλὴν κατὰ 17 ἑκατοστὰ ἐν τῷ ὑδραργύρῳ. Ποία εἶναι ἡ ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις ;

Λύσις : Τὸ ὕψος τοῦ ἀερίου εἶναι $10+15-17=8$ ἑκατοστόμετρα, ὅταν τὸ ὕψος εἶναι τὸ ἴδιον ἐσωτερικῶς καὶ ἐξωτερικῶς :

$$10\,(H-15) = 8\,H \quad \text{καὶ} \quad H = 75.$$

163. Τὸ ὕψος τοῦ σωλῆνος κλειστοῦ μανομέτρου εἶναι 67,7 ἑκατοστόμετρα, ὑπεράνω τοῦ σημείου εἰς ὅ σταματᾷ ὁ ὑδράργυρος ὑπὸ ἴσην πίεσιν 76 ἑκατοστῶν ἐν τῷ σωλῆνι καὶ τῇ λεκάνῃ. (Ἐπιφάνεια τοῦ ὑδραργύρου τῆς λεκάνης αἰσθητῶς ἀμετάβλητος). Ὑπὸ ποίαν πίεσιν ὁ ὑδράργυρος θὰ ἀνέλθῃ εἰς 35,2 ἑκατοστά ;

Λύσις : Ἐφαρμόζομεν τὸν νόμον τοῦ Μαριόττου εἰς τὸ ἀέριον τοῦ μανομετρικοῦ σωλῆνος :

$$67,7 \times 76 = (67,7-35,2) \quad (H-35,2) \quad \text{καὶ} \quad H = 193,5 \text{ ἑκατοστ.}$$

Ἡ πίεσις κατὰ τετραγων. ἑκατοστὸν θὰ εἶναι :

$$\frac{193,5 \times 1033}{76} = 2630,07. \quad \text{ἢ} \quad 2630,07 \times 981 \text{ δύναι.}$$

164. Ὁ ὄγκος ἀεροστάτου πεπληρωμένου διὰ φωταερίου εἶναι 1000 κυβ. μέτρα καὶ ἡ ὁλικὴ μᾶζα του (μετὰ τῆς λέμβου) εἶναι 500 χιλιόγραμμα. Πόσην μᾶζαν δύναται τὸ ἀερόστατον νὰ συγκρατήσῃ; Πυκνότης τοῦ μὲν ἀέρος 0,0013, τοῦ δὲ φωταερίου 0,0005.

Λύσις : Ἡ μᾶζα d ἑνὸς κυβ. ἑκατοστ. ἀέρος εἶναι 0,0013 γραμμάρια, ἡ μᾶζα d′ ἑνὸς κυβικοῦ μέτρου θὰ εἶναι 1,3 χιλιόγραμμα, καὶ ἡ μᾶζα ἑνὸς κυβικοῦ μέτρου φωταερίου φωτιστικοῦ 0,5 χιλιόγραμμα :

$1{,}3 \times 10^3 - 0{,}5 \times 10^3 - 5 \times 10^2 = 3 \times 10^2$ ἢ 300 χιλιόγραμμα.

165. Σφαῖρα κοίλη περιέχουσα ἀέρα ὑπὸ πίεσιν 770 χιλιοστῶν, προσαρμόζεται διὰ λαιμοῦ μετὰ στρόφιγγος εἰς τὸ ἀνώτατον μέρος τοῦ σωλῆνος βαρομέτρου ὑδραργυρικοῦ. Ὁ σωλὴν τοῦ βαρομέτρου ἔχει τομὴν 2 τετραγ. ἑκατοστ. καὶ μῆκος 90 ἑκατοστῶν ἄνωθεν τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑδραργύρου τῆς λεκάνης. Ἡ στρόφιγξ ἀνοίγεται καθ' ἣν στιγμὴν ἡ ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις εἶναι 76 ἑκατοστῶν. Ὁ ἀὴρ τῆς σφαίρας εἰσέρχεται τότε εἰς τὸν βαρομετρικὸν σωλῆνα, ὁ δὲ ὑδράργυρος κατέρχεται ἐν τούτῳ οὕτως ὥστε ἡ στήλη εἶναι νῦν μόνον 40 ἑκατοστομ. Ζητεῖται ἡ χωρητικότης τῆς σφαίρας. (Ἡ θερμοκρασία ὑποτίθεται σταθερὰ κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ πειράματος).

Λύσις: Ἐφ' ὅσον ὁ βαρομ. σωλὴν ἔχει ὕψος 90 ἑκ., ὁ ἀὴρ ὁ εἰσχωρήσας ἐν αὐτῷ ἄνωθεν ἐκ τῆς σφαίρας θὰ καταλάβῃ ὄγκον 14 κυβ. ἑκατ. (κενὸς χῶρος) + (76—40) κυβ. ἑκ. διότι ἦτο 76 ἑκ. καὶ ἔπεσε εἰς 40, ἤτοι κατέλαβε ὄγκον 50 κυβ. ἑκ. διότι $40 + 50 = 90$ ἑκ.

Ἀλλ' ἐπειδὴ ὁ σωλὴν ἔχει τομὴν 2 τετραγ. ἑκ. ἕπεται ὅτι ὁ ἀὴρ αὐτὸς κατέλαβε $50 \times 2 = 100$ κυβ. ἑκ. ἐν τῷ βαρομετρ. σωλῆνι. Ἐὰν λοιπὸν τὸν ὄγκον ποὺ εἶχεν ὁ ἀὴρ (σφαίρας) πρότερον παραστήσωμεν διὰ x κυβ. ἑκ., τώρα ποὺ συγκοινωνεῖ μὲ τὸν σωλῆνα τοῦ βαρομέτρου θὰ κατέχῃ οὗτος : $(100 + x)$ κυβ. ἑκ.

Εἰσχωρήσαντος τοῦ ἀέρος, ἐν τῷ σωλῆνι ὁ ὑδράργυρος ἀπὸ 76 ἔπεσεν εἰς τὰ 40, ἕπεται ὅτι ἡ ἐξασκηθεῖσα πίεσις (τάσις) θὰ ἰσοῦται πρὸς 76—40=36 ἑκατοστομ.

Τέλος ἐκ τῶν εὑρεθέντων, ὄγκου καὶ πιέσεως, καὶ ἐκ τοῦ τύπου

$\frac{v}{v'} = \frac{p'}{p}$ ἔχομεν :

$$\frac{x}{100 + x} = \frac{36}{77} \quad \text{καὶ} \quad 77x = 36\,(100 + x)$$

καὶ $x = 77{,}8$ κυβ. ἑκ. ἡ ζητουμένη χωρητικότης.

166. Ποῖον εἶναι τὸ μέγιστον ὕψος h, εἰς τὸ ὁποῖον δύναται νὰ φθάσῃ ἐντὸς σίφωνος ἓν ὑγρὸν πυκνότητος 1,5, ὅταν ἡ ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις εἶναι 76 ἑκατοστῶν; Εἰδ. β. ὑδραργ. 13,6.

Λύσις: $h \times 1{,}5 = 76 \times 13{,}6$ καὶ $h = 689{,}066$ ἑκατοστ.

167. Βάρος m, ὑγροῦ A, τοῦ ὁποίου ἡ πυκνότης εἶναι d, μίγνυται μετὰ βάρους 100—m ὑγροῦ B, τοῦ ὁποίου ἡ πυκνότης εἶναι d'. Ποία εἶναι ἡ θεωρητικὴ πυκνότης Δ τοῦ μίγματος;

Ἀντὶ νὰ εὑρεθῇ ἡ πυκνότης Δ, ἡ εὑρεθεῖσα πυκνότης πειραματικῶς εἶναι K, ἀνωτέρα τῆς Δ. Ποία εἶναι ἡ συστολὴ c, ἐκ τῆς μίξεως τῶν ὄγκων τοῦ A καὶ B;

Λύσις: Ὅταν δὲν συμβαίνῃ συστολή, ὁ ὄγκος τοῦ μίγματος εἶναι ἴσος πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ὄγκων τοῦ A καὶ τοῦ B.

$$\frac{m}{d} + \frac{100-m}{d'} = \frac{100}{\Delta}$$

$$\text{ἐξ οὗ} \quad \Delta = \frac{100\,dd'}{md' + (100-m)d}$$

Ὅταν συμβαίνῃ συστολή, ἡ διαφορὰ δ μεταξὺ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ὄγκων καὶ τοῦ ὄγκου τοῦ μίγματος, δηλαδὴ ἡ ἐλάττωσις τοῦ ὄγκου, εἶναι:

$$\delta = \frac{m}{d} + \frac{100-m}{d'} - \frac{100}{K}.$$

Τὸν τύπον τοῦτον δυνάμεθα νὰ τὸν θέσωμεν ὑπὸ τὴν ἑξῆς μορφήν:

$$\delta = m\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{d'}\right) + 100\left(\frac{1}{d'} - \frac{1}{K}\right).$$

Ἡ συστολὴ c εἶναι ὁ λόγος τῆς ἐλαττώσεως τοῦ ὄγκου πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν δύο μιγνυομένων ὄγκων. Συνεπῶς ἔχομεν:

$$c = \frac{\delta\Delta}{100} = \frac{d\,d'}{md' + (100-m)d} \times \left(\frac{m}{d} + \frac{100-m}{d'} - \frac{100}{K}\right).$$

168. Ποσότης 150 κυβ. ἑκατ. αἰθέρος, μίγνυται μετὰ ποσότητος οἰνοπνεύματος, οὕτως ὥστε νὰ ἀποτελεσθῇ μῖγμα 200 κυβ. ἑκατοστῶν. Παρετηρήθη ὅτι χρειάζονται πρὸς τοῦτο περισσότερα τῶν 50 κυβ. ἑκ. οἰνοπνεύματος, πρᾶγμα ὅπερ δεικνύει ὅτι τὸ μῖγμα παρακολουθεῖται ἀπὸ συστολὴν τοῦ ὄγκου. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ συστολὴ αὕτη, δηλαδὴ ὁ λόγος τῆς ἐλαττώσεως τοῦ ὄγκου πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν δύο μιγνυομένων ὄγκων, γνωστοῦ ὄντος ὅτι μία ὑαλίνη σφαῖρα ὑφίσταται ἄνωσιν 22,4 γραμμαρίων ἐντὸς τοῦ αἰθέρος, 25,6 γραμ. ἐντὸς τοῦ οἰνοπνεύματος, καὶ 24 γραμμ. ἐντὸς τοῦ λαμβανομένου μίγματος.

Λύσις: Ἔστω n κυβ. ἑκατ. ὁ ὄγκος τοῦ οἰνοπνεύματος ὁ εἰσερχόμενος ἐντὸς τῶν 200 κυβ. ἑκ. τοῦ μίγματος, καὶ x ἡ ζητουμένη συστολή.

Ἔχομεν: $$x = \frac{150 + n - 200}{150 + n} \qquad (1)$$

Ἐξ ἄλλου τὸ βάρος τοῦ μίγματος ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν βαρῶν τῶν μιγνυομένων ὑγρῶν. Καλοῦντες d, d′, d″ τὰς πυκνότητας τῶν δύο ὑγρῶν καὶ τοῦ μίγματος ἔχομεν:

$$150\,d + nd' = 200\,d'' \qquad (2)$$

Ἔστω V ὁ ὄγκος τῆς ὑαλίνης σφαίρας.

Τότε $$V \,.\, d = 22{,}4 \quad \text{ἐξ οὗ} \quad d = \frac{22{,}4}{V}$$

$$Vd' = 25{,}6 \quad \text{ἐξ οὗ} \quad d' = \frac{25{,}6}{V}$$

$$Vd'' = 24 \quad \text{ἐξ οὗ} \quad d'' = \frac{24}{V}$$

Ἀντικαθιστῶντες τὰς τιμὰς d, d′, d″ εἰς τὴν ἐξίσωσιν (2) λαμβάνομεν: $$\frac{150 \times 22{,}4}{V} + \frac{n \times 25{,}6}{V} = \frac{200 \times 24}{V}$$

ἐξ οὗ $$n = \frac{200 \times 24 - 150 \times 22{,}4}{25{,}6} = 56{,}25$$

Ἐάν θέσωμεν τὴν τιμὴν τοῦ n εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1), λαμβάνομεν τὴν τιμὴν τοῦ x.

$$x = \frac{150 + 56{,}25 - 200}{150 + 56{,}25} = \frac{1}{33}.$$

169. Δοχεῖον, ὕψους 50 ἑκατοστομέτρων, περιέχει ἀέρα ὑπὸ τὴν κανονικὴν ἀτμοσφαιρικὴν πίεσιν. Θέτομεν ἄνωθεν τοῦ ἀερίου· 1ον) Ἓν ἔμβολον βάρους 100 κοιλῶν, 2ον) Ἓν στρῶμα ὑδραργύρου ὕψους 5 ἑκατοστῶν καὶ 3ον) Στρῶμα ὕδατος 7 ἑκατοστομέτρων. Ἡ τομὴ τοῦ δοχείου εἶναι 30 τετραγ. ἑκατοστά. Ζητεῖται εἰς ποῖον σημεῖον θὰ σταματήσῃ τὸ ἔμβολον;

Λύσις: Τὸ βάρος τοῦ ὑδραργύρου εἶναι:

$$5 \times 30 \times 13{,}6 = 2040 \text{ γραμμάρια.}$$

Τὸ βάρος τοῦ ὕδατος εἶναι :

$$7 \times 30 = 210 \text{ γραμμάρια.}$$

Τὸ ἔμβολον θὰ ὑφίσταται ἐπὶ τῆς ἄνω ἐπιφανείας του πίεσιν ὁλικήν: $100 + 2{,}040 + 0{,}210 = 102{,}250$ χιλιογρ.

Ἕκαστον τετραγ. ἑκατοστ. τῆς ἐπιφανείας του θὰ δέχεται πίεσιν:

$$\frac{102{,}250}{30} = 3{,}408 \text{ χιλιόγρ.}$$

Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ x τὸ ὕψος εἰς τὸ ὁποῖον σταματᾷ τὸ ἔμβολον ἄνωθεν τῆς βάσεως τοῦ δοχείου, δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ ἀέρος παρίσταται διὰ 50, ὅταν ἡ πίεσις εἶναι 1033 γραμ. κατὰ τετραγ. ἑκατοστ. καὶ διὰ x, ὅταν ἡ πίεσις εἶναι $1033 + 3408 = 4443$ γραμμ. κατὰ τετραγ. ἑκατοστόν.

Ἐφαρμόζοντες τὸν νόμον τοῦ Μαριόττου ἔχομεν :

$$50 \times 1{,}033 = x \times 4{,}443$$

καὶ $$x = \frac{50 \times 1{,}033}{4{,}443} = 11{,}6 \text{ ἑκατοστόμετρα.}$$

170. Σωλὴν ὑοειδὴς μετὰ δύο βραχιόνων ἀνίσων ἔχει τομὴν 1 τετραγ. ἑκατοστ. Ὁ μεγαλύτερος βραχίων εἶναι κλειστὸς καὶ ὁ μικρότερος ἀνοικτός. Ὁ βαρομετρικὸς θάλαμος ΒΓ μήκους 20 ἑκατοστομέτρων περιέχει ἀέρα. Ἡ διαφορὰ τῶν ἐπιφανειῶν Α Β εἰς τοὺς δύο βραχίονας εἶναι τότε 61 ἑκατοστόμετρα. Χύνομεν διὰ τοῦ ἀνοικτοῦ βραχίονος 15 κυβ. ἑκατοστ. ὑδραργύρου, καὶ ἡ διαφορὰ τῶν ἐπιφανειῶν γίνεται 56 ἑκατοστ. Νὰ ὑπολογισθῇ. 1ον) Ἡ διαφορὰ τῶν ἐπιφανειῶν x καὶ y τοῦ ὑδραργύρου εἰς τοὺς δύο βραχίονας. 2ον). Ἡ ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις.

Λύσις: Ἔστω Η ἡ ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις εἰς ἑκατοστόμετρα ὑδραργύρου. Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν ὁ ἀήρ, ὁ περιεχόμενος εἰς τὸν βαρομετρικὸν θάλαμον, ἔχει ὄγκον 20 κυβ. ἑκ. ὑπὸ πίεσιν (Η—61) ἑκατοστομέτρων.

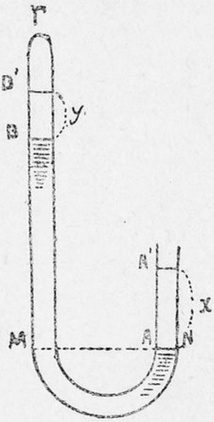
Εἰς τὴν 2αν περίπτωσιν ἔχει ὄγκον (20 — y) κυβ. ἑκατοστά, ὑπὸ πίεσιν (Η — 56) ἑκατοστομέτρων.

Ἐφαρμόζοντες τὸν νόμον τοῦ Μαριόττου ἔχομεν :

$$20\,(H - 61) = (20 - y)\,(H - 56) \qquad (1)$$

Τὸ ἄθροισμα $x + y$ παριστᾷ τὴν ποσότητα τοῦ χυθέντος ὑδραργύρου.

Ἑπομένως : $$x + y = 15 \qquad (2)$$



Διὰ νὰ ἔχωμεν καὶ τρίτην σχέσιν ἐφαρμόζομεν εἰς τὸν ὑδράργυρον τὴν περίπτωσιν ἰσορροπίας τῶν ὑγρῶν.

Λαμβάνομεν τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον τὸ διερχόμενον διὰ τοῦ ἀρχικοῦ ὕψους A τοῦ ὑδραργύρου εἰς τὸν μικρὸν βραχίονα.

Δύο στοιχεῖα ἴσα τοῦ ἐπιπέδου τούτου ὑφίστανται τὴν αὐτὴν πίεσιν.

Συνεπῶς : $$H + x = H - 56 + y + 61$$

δηλαδή : $$x - y = 5 \qquad (3)$$

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων (2) καὶ (3) λαμβάνομεν :

$$x = 10 \qquad \text{καὶ} \qquad y = 5$$

$$AA' = 10 \text{ ἑκατοστ.} \qquad \text{καὶ} \qquad BB' = 5 \text{ ἑκατοστ.}$$

Ἀντικαθιστῶμεν τὴν τιμὴν τοῦ y εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1) καὶ ἔχομεν :

$$20\,(H - 61) = 15\,(H - 56)$$

$$\text{καὶ} \quad H = \frac{380}{5} = 76 \text{ ἑκατοστόμετρα.}$$

171. Ἐντὸς λεκάνης, περιεχούσης ὑδράργυρον, ἀναστρέφομεν δύο δοκιμαστικοὺς σωλῆνας Α καὶ Β ὁμοίους, ὕψους 50 ἑκατοστομέτρων. Οὗτοι ἐγκλείουσιν ἀέρα καὶ ὁ ὑδράργυρος ὑψοῦται εἰς μὲν τὸν Α εἰς 0,40 μέτρα, εἰς δὲ τὸν Β εἰς 0,30 μέτρα. Μεταγγίζομεν τὸ ἀέριον ἐκ τοῦ Β εἰς τὸ Α. Ζητεῖται ὁ ὄγκος καὶ ἡ πίεσις τοῦ ἀερίου ἐντὸς τοῦ δοκιμαστικοῦ σωλῆνος Α μετὰ τὸ πείραμα. Ἡ βαρομετρικὴ πίεσις εἶναι 750 χιλιοστόμετρα.

Λύσις: Ἀφοῦ οἱ σωλῆνες ἔχουσι τὴν αὐτὴν τομήν, δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν τοὺς ὄγκους διὰ τῶν ἀντιστοίχων ὑψῶν. Λαμβάνοντες τὸ ἑκατοστόμετρον ὡς μονάδα μήκους, ἔχομεν οὕτω ἐντὸς τοῦ Α ὄγκον 10 ὑπὸ πίεσιν $75 - 40 = 35$, ἐντὸς τοῦ Β ὄγκον 20 ὑπὸ πίεσιν $75 - 30 = 45$.

Ἀναμιγνύομεν τὰς δύο ἀεριώδεις μάζας ἐντὸς ἑνὸς σωλῆνος Γ, καὶ ἔστω x τὸ ὕψος τοῦ ἀνερχομένου ὑδραργύρου ἐκφραζόμενον εἰς ἑκατοστόμετρα. Ὁ ὄγκος τοῦ μίγματος θὰ εἶναι $50 - x$ καὶ ἡ πίεσίς του $75 - x$.

Ἐφαρμόζοντες τὸν νόμον τῆς μίξεως τῶν ἀερίων ($VH = vh + v'h'$) θὰ ἔχωμεν:

$$(50 - x)(75 - x) = 10 \times 35 + 20 \times 45$$

$$x^2 - 125x + 2500 = 0$$

$$x = \frac{125 \pm \sqrt{125^2 - 4 \times 2500}}{2}$$

καὶ $$x = \frac{125 \pm 75}{2}$$

Ἔχομεν οὕτω δύο ρίζας:

$$x' = \frac{125 + 75}{2} = 100 \quad \text{καὶ} \quad x'' = \frac{125 - 75}{2} = 25$$

Ἡ ρίζα x′ δὲν εἶναι δεκτή, διότι ἡ τιμή της εἶναι ἀνωτέρα τοῦ μήκους τοῦ δοκιμαστικοῦ σωλῆνος. Ὥστε μόνη δεκτὴ εἶναι ἡ ρίζα x″.

Τὸ ἀεριῶδες μῖγμα θὰ καταλάβῃ ἐντὸς τοῦ δοκιμαστικοῦ σωλῆνος μῆκος 25 ἑκατοστόμετρα. Ἡ πίεσις ἐκπεφρασμένη εἰς στήλην ὑδραργύρου θὰ εἶναι:

$$75 - 25 = 50 \text{ ἑκατοστόμετρα.}$$

172. Σφαιρικὸν ἀερόστατον ζυγίζει κενὸν 63,62 χιλιόγραμμα.

Πληροῦμεν τοῦτο δι' ὑδρογόνου, τοῦ ὁποίου τὸ κυβικὸν μέτρον ζυγίζει 100 γραμμάρια. Ζητεῖται ἡ ἀνυψωτικὴ δύναμις τοῦ ἀεροστάτου, γνωστοῦ ὄντος ὅτι τὸ τετραγωνικὸν μέτρον τοῦ ὑφάσματος ὅπερ σχηματίζει τὸ περικάλυμμα ζυγίζει 200 γραμμάρια, καὶ ὅτι μία λίτρα ἀέρος ζυγίζει 1,33 γραμμ. ὑπὸ τὰς συνθήκας καθ' ἃς γίνεται τὸ πείραμα.

Λύσις: Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἀεροστάτου θὰ εἶναι: $\frac{63,6}{0,2} = 318$ τετραγ. μέτρα.

Ἐάν παραστήσωμεν διὰ R τὴν ἀκτῖνα τοῦ ἀεροστάτου, θὰ ἔχωμεν:

$$4\,\pi\,R^2 = 318$$

ἐξ οὗ $$R = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{318}{3,1416}} = 5 \text{ μέτρα.}$$

Ὁ ὄγκος τοῦ ἀεροστάτου δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου:

$$V = \frac{4}{3}\,\pi\,R^3 = \frac{4 \times 3,1416 \times 125}{3} = 523,600 \text{ κυβ. μέτρα.}$$

Ἀφοῦ 1 λίτρον ἀέρος ζυγίζει 1,33 γραμ., 1 κυβικὸν μέτρον θὰ ζυγίζῃ 1,330 χιλιόγραμμα, καὶ θὰ ἔχωμεν διὰ βάρος τοῦ ἐκτοπιζομένου ἀέρος:

$$1,330 \times 523,6 = 52,360 \text{ χιλιόγραμμα.}$$

Ἡ ἀνυψωτικὴ δύναμις, ἥτις εἶναι ἡ διαφορὰ τοῦ βάρους τοῦ ἐκτοπιζομένου ἀέρος, καὶ τοῦ ὁλικοῦ βάρους τοῦ ἀεροστάτου (ἀέριον καὶ περικάλυμμα) θὰ εἶναι ἴση πρός:

$$696,388 - (52,360 + 63,6) = 582,408 \text{ χιλιόγρ.}$$

173. Τὸ βαρομετρικὸν ὕψος εἶναι 76 εἰς τὴν βάσιν τοῦ πύργου Ἄϊφελ. Ποῖον θὰ εἶναι τὸ βαρομετρικὸν ὕψος εἰς τὴν κορυφὴν τοῦ πύργου, εἰς ὕψος 300 μέτρων; Πυκνότης τοῦ ἀέρος 0,0013.

Λύσις: Ἔστω x τὸ ὕψος τῆς ὑδαργυρικῆς στήλης τὸ ὁποῖον ἰσορροπεῖ εἰς 300 μέτρα ἀέρος:

$$x \times 13,6 \times 981 = 30000 \times 0,0013 \times 981 \quad \text{καὶ} \quad x = 2,87 \text{ ἑκατοστ.}$$

Τὸ βαρομετρικὸν ὕψος εἰς τὴν κορυφὴν θὰ εἶναι:

$$76 - 2,87 = 73,13 \text{ ἑκατοστόμετρα.}$$

174. Τὸ βαρομετρικὸν ὕψος εἶναι 76 ἑκατοστόμετρα. Ποία εἶναι ἡ ἐξασκουμένη πίεσις ὑπὸ τῆς ἀτμοσφαίρας ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ἀνθρωπίνου σώματος, ἥτις ὑποτίθεται 1,8 τετραγωνικὰ μέτρα ;

Λύσις : $18000 \times 76 \times 13{,}6 \times 981 = 18604800 \times 981$ δύνας.

Ἡ πίεσις αὕτη θὰ εἶναι ἀνωτέρα τῶν 18000 χιλιογράμμων.

175. Ποία εἶναι ἡ πυκνότης ἐλαίου, ὅπερ ἀνυψοῦται ἐντὸς βαρομετρικοῦ σωλῆνος εἰς ὕψος 11,68 μέτρων, ὅταν ὑδραργυρικὸν βαρόμετρον τὴν στιγμὴν ταύτην δεικνύει 76 ἑκατοστόμετρα ;

Λύσις : $d \times 1168 = 13{,}6 \times 76$ καὶ $d = 0{,}885$

176. Κατὰ τὴν κατασκευὴν βαρομέτρου, ὁ ἐν τῷ κυλινδρικῷ σωλῆνι αὐτοῦ ἀὴρ δὲν ἐξήχθη τελείως. Παρατηρηθείσης τῆς ὑδραργυρικῆς στήλης κατά τινα στιγμήν, ἀνευρέθη ὅτι ἡ στήλη αὕτη ἔχει ὕψος 748 χιλιοστῶν. Κατὰ τὴν αὐτὴν στιγμήν, τὸ ὑπόλοιπον μέρος τοῦ σωλῆνος, τὸ κενὸν ὑδραργύρου, ἔχει μῆκος 122 χιλιοστῶν. Ἀνειλκύσθη τότε ὀλίγον ὁ σωλὴν καὶ παρετηρήθη ὅτι τὸ μὲν ὕψος τοῦ ὑδραργύρου κατέστη 750 χιλιοστῶν, τὸ δὲ κενὸν ὑδραργύρου μέρος τοῦ σωλῆνος 141 χιλιοστῶν. Ποία εἶναι ἡ ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις κατὰ τὴν στιγμὴν τοῦ πειράματος ;

Λύσις : Ἂν παραστήσωμεν τὴν ζητουμένην πίεσιν διὰ Η, θὰ ἔχωμεν:

$$(H - 748)\,122 = (H - 750)\,141$$

$$122H - 91256 = 141\,H - 10570$$

καὶ $$H = 762{,}8 \text{ χιλιοστόμετρα.}$$

177. Ποίαν ἀκτῖνα πρέπει νὰ ἔχῃ σφαιρικὸν περικάλυμμα ἐξ ἀλουμινίου, πάχους 3 χιλιοστομέτρων καὶ ἀπολύτως κενόν, ἵνα δύναται νὰ ἵσταται εἰς τὸν ἀέρα εἰς 0° καὶ ὑπὸ πίεσιν 76 ; Πυκνότης ἀλουμινίου εἰς 0° εἶναι 2,6 , ἡ πυκνότης τοῦ ἀέρος εἰς 0° καὶ 76 εἶναι 0,001293.

Λύσις : Ἔστω R ἡ ἐξωτερικὴ ἀκτὶς τοῦ περικαλύμματος, καὶ r ἡ ἀκτὶς τῆς ἐσωτερικῆς κοιλότητος. Συμφώνως πρὸς τὸν νόμον τῶν σωμάτων τῶν βυθισμένων ἐντὸς ῥευστῶν, τὸ βάρος τῆς κοίλης σφαίρας τοῦ ἀλουμινίου εἶναι ἴσον πρὸς τὸ βάρος τοῦ ἐκτοπιζομένου ἀέρος :

$$\frac{4}{3}\pi\left(R^3 - r^3\right) 2{,}6 \times 981 = \frac{4}{3}\pi R^3 \times 0{,}001293 \times 981$$

$$\frac{2,6-0,001293}{2,6} = \frac{r^3}{R^3} \qquad \sqrt[3]{\frac{2,5987}{2,6}} = \frac{r}{R} = \frac{R-3}{R}$$

Τὸ R θὰ ἐκφράζεται εἰς χιλιοστόμετρα.

178. Ἓν ἀερόστατον περιέχει 6 λίτρας ὀξυγόνου ὑπὸ πίεσιν 4 ἀτμοσφαιρῶν. Ἓν δεύτερον ἀερόστατον ἐγκλείει 4 λίτρας ἀζώτου ὑπὸ πίεσιν 5 ἀτμοσφαιρῶν. Φέρομεν εἰς συγκοινωνίαν τὰ δύο ἀερόστατα. Ποία εἶναι ἡ ἐλαστικὴ δύναμις τοῦ μίγματος, ὅταν ἡ θερμοκρασία ἀποβῇ ἴση πρὸς τὴν ἀρχικὴν θερμοκρασίαν ;

Λύσις : Ἡ ἐλαστικὴ δύναμις τοῦ μίγματος θὰ εἶναι :

$$F = \frac{6 \times 4 + 4 \times 5}{10} = 4,4 \text{ ἀτμοσφαίρας.}$$

179. Ἀερόστατον 10 λίτρων, πλῆρες ἀέρος ὑπὸ ἀτμοσφαιρικὴν πίεσιν 76 ζυγίζει 215 γραμμάρια. Πλῆρες ἀέρος πεπιεσμένου εἰς 3 ἀτμοσφαίρας, ζυγίζει 241 γραμμάρια. Ποία εἶναι ἡ πυκνότης τοῦ ἀέρος εἰς τὴν πίεσιν 76 ;

Λύσις : Κατὰ τὸν νόμον τῆς μίξεως τῶν ἀερίων, ἡ διαφορὰ τῶν βαρῶν παριστᾷ τὴν μᾶζαν τῶν 10 λίτρων ἀέρος εἰς τὴν πίεσιν τῶν 2 ἀτμοσφαιρῶν. Κατὰ τὸν νόμον τοῦ Μαριόττου ἡ πυκνότης του εἶναι τότε δύο φορὰς μεγαλυτέρα ἢ εἰς τὴν πίεσιν 76.

$$241 - 215 = 10000 \times 2d \quad \text{καὶ} \quad d = 0,0013.$$

180. Ποία εἶναι ἡ ἀνυψωτικὴ δύναμις ἑνὸς ξυλίνου κυλίνδρου, βυθισμένου ἐντὸς ὕδατος 20 ἑκατοστομέτρων ὕψους καὶ διαμέτρου 10 ἑκατοστομέτρων ; Πυκνότης ξύλου 0,6.

Λύσις : Ἡ ἀνυψωτικὴ δύναμις εἶναι ἡ διαφορὰ μεταξὺ τοῦ βάρους τοῦ ἐκτοπιζομένου ὕδατος καὶ τοῦ βάρους τοῦ ξυλίνου κυλίνδρου :

$$\pi \times 5^2 \times 20\,(1 - 0,6) \times 981 = 628,32 \times 981.$$

181. Ὁ ὑάλινος κώδων μιᾶς πνευματικῆς μηχανῆς ἔχει χωρητικότητα 4 λίτρων, καὶ ἡ πίεσις τοῦ ἀέρος ἐντὸς αὐτοῦ εἶναι 76 ἑκατοστόμετρα. Τοῦ κυλίνδρου τῆς ἀντλίας ἔχοντος χωρητικότητα $\frac{1}{2}$ λίτρας, ποία θὰ εἶναι ἡ πίεσις ἐντὸς τοῦ κώδωνος, κατόπιν τεσσάρων ἀνυψώσεων τοῦ ἐμβολέως ;

Λύσις : $H_4 = \left(\frac{4}{4,5}\right)^4 \times 76 = 47,12$

182. Τὸ μανόμετρον μιᾶς πνευματικῆς μηχανῆς δεικνύει 5 ἑκατοστόμετρα μετὰ δέκα ἀνυψώσεις τοῦ ἐμβολέως. Ἡ ἀρχικὴ πίεσις τοῦ κώδωνος ἦτο 75. Τί θὰ δείξῃ τὸ μανόμετρον κατόπιν δέκα ἀνυψώσεων τοῦ ἐμβολέως ;

Λύσις : $5 = \left(\frac{R}{R+C}\right)^{10} \times 75$ ἐξ οὗ $\left(\frac{R}{R+C}\right)^{10} = \frac{1}{15}$

$x = \left(\frac{R}{R+C}\right)^{20} \times 75 = \left(\frac{1}{15}\right)^2 \times 75 = \frac{1}{3}$ τοῦ ἑκατοστομέτρου.

183. Ὁ σωλὴν ἀναρροφητικῆς ὑδραντλίας ἔχει μῆκος 4 μέτρων καὶ τομὴν 3 τετραγ. ἑκατοστῶν. Ἡ τομὴ τοῦ κυλίνδρου τῆς ὑδραντλίας εἶναι 200 τετραγ. ἑκατοστ. Ποῖον πρέπει νὰ εἶναι τὸ ὕψος τοῦ κυλίνδρου, ἵνα διὰ μιᾶς μόνης ἀνυψώσεως τοῦ ἐμβολέως πληρωθῇ δι᾽ ὕδατος ὁ σωλήν ; Ἡ ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις εἶναι 75 ἑκατοστῶν.

Λύσις : Ἐφαρμόζομεν τὸν νόμον τοῦ Μαριόττου εἰς τὰ ἀέρια τοῦ ἀναρροφητικοῦ σωλῆνος.

$$400 \times 3 \times 75 \times 13{,}6 = 200\ h\ (75 \times 13{,}6 - 400)$$

καὶ $h = 9{,}87$ ἑκατοστόμετρα.

184. Ὁ κύλινδρος ἀναρροφητικῆς ὑδραντλίας ἔχει μῆκος 40 ἑκατοστῶν, ἡ κατωτέρα βάσις τοῦ κυλίνδρου εἶναι 6 μέτρα ἄνωθεν τῆς ἐπιφανείας τοῦ ἀνυψουμένου ὕδατος, ἡ δὲ τομὴ τοῦ σωλῆνος εἶναι τὸ $\frac{1}{5}$ τῆς τομῆς τοῦ κυλίνδρου. Ποῖον θὰ εἶναι τὸ ὕψος τοῦ ὕδατος ἐν τῷ σωλῆνι μετὰ τὴν ἀνύψωσιν τοῦ ἐμβολέως ; Ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις 76 ἑκατοστῶν.

Λύσις: Ἔστω S ἡ τομὴ τοῦ κυλίνδρου. Ὁ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου εἶναι : 40 S. Ὁ ὄγκος τοῦ σωλῆνος εἶναι $\frac{600\ S}{5}$. Ἐφαρμόζομεν τὸν νόμον τοῦ Μαριόττου εἰς τοὺς δύο ὄγκους τοῦ ἀέρος τοῦ ἀπομεμονωμένου ἄνωθεν τῆς ἐπιφανείας τοῦ ἀνυψουμένου ὕδατος, πρὸ καὶ μετὰ τὴν ἄνοδον τοῦ ἐμβόλου :

$$\left(H - x\right)\left[\frac{S}{5}\left(600 - x + 40\ S\right)\right] = \frac{600\ SH}{5}$$

$$x^2 - x(H + 800) + 200\,H = 0 \qquad H = 76 \times 13{,}6$$

καὶ $\qquad x = 120{,}7$ ἑκατοστόμετρα.

185. Σιφώνιον κυλινδρικὸν ὕψους 25 ἑκατοστομέτρων, βυθίζεται κατὰ 20 ἑκατοστόμετρα ἐντὸς ὑδραργύρου. Κλείομεν διὰ τοῦ δακτύλου τὸ ἀνώτερον ἄκρον τοῦ σιφωνίου καὶ ἐξάγομεν αὐτὸ καθέτως ἐκ τοῦ ὑδραργύρου. Ποῖον ὕψος καταλαμβάνει ὁ ὑδράργυρος ἐντὸς τοῦ σιφωνίου, ὅταν παύσῃ ἡ ῥοή ; Ἡ ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις εἶναι 75

Λύσις : Ἔστω S ἡ τομὴ τοῦ σιφωνίου. Ὁ ἀὴρ ὁ ἐντὸς τοῦ σιφωνίου κατέχει ὄγκον 5 S εἰς τὴν πίεσιν 75, καὶ ὄγκον (25—x) S εἰς τὴν πίεσιν 75—x. Ἐφαρμόζομεν εἰς τὸν ἀέρα τοῦτον τὸν νόμον Μαριόττου:

$$5 \times 75 = (25 - x)\,(75 - x)$$

$$x^2 - 100\,x + 20 \times 75 = 0$$

καὶ $\qquad x = 18{,}3$ ἑκατοστόμετρα.

186. Ὁ ὄγκος τοῦ κώδωνος ἀντλίας ἀεροθλιπτικῆς εἶναι δεκάκις μεγαλύτερος τοῦ ὄγκου τοῦ κυλίνδρου τῆς ἀντλίας. Κατόπιν πόσων ἀνυψώσεων τοῦ ἐμβόλου ἡ πίεσις τοῦ ἀέρος τοῦ κώδωνος θὰ γίνῃ διπλασία τῆς ἐξωτερικῆς πιέσεως ;

Λύσις :

$$2\,H = H + n\,\frac{C}{10\,C}\,H\,, \qquad \text{καὶ} \qquad n = 10.$$

187. Σῶμά τι τίθεται ὑπὸ τὸν κώδωνα ἀεραντλίας. Ἡ ἀρχικὴ πίεσις εἶναι 76 ἑκατοστόμετρα. Μετὰ δύο ἀνυψώσεις τοῦ ἐμβόλου ἡ πίεσις γίνεται 19 ἑκατοστ. Ποῖος εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ σώματος; Ὄγκος τοῦ κώδωνος εἶναι 2 λίτραι. Ὄγκος τοῦ κυλίνδρου ἀντλίας, 1 λίτρα.

Λύσις : Ἔστω υ ὁ ὄγκος τοῦ σώματος.

$$\text{Τότε}: 19 = 76\left(\frac{2 - \upsilon}{2 - \upsilon + 1}\right)^2 \qquad \text{καὶ } \upsilon = 1 \text{ λίτρα.}$$

188. Κώδων ἀεραντλίας ἄνευ ἐπιζημίου χωρητικότητος, ἔχει ὄγκον μιᾶς λίτρας. Μετὰ δύο ἀνυψώσεις τοῦ ἐμβόλου ἡ ἐλαστικὴ δύναμις τοῦ περιεχομένου ἐντὸς τοῦ κώδωνος ἀέρος μεταβάλλεται ἀπὸ 80 ἑκατοστόμετρα εἰς 20 ἑκατοστ. Ἐπαναλαμβάνομεν τὸ πείραμα ἀφοῦ εἰσαγάγωμεν ἐντὸς τοῦ κώδωνος σῶμα ἀγνώστου ὄγκου. Μετὰ δύο ἀνυψώσεις τοῦ ἐμβόλου εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἀρχικὴ πίεσις 80 ἑκατοστόμετρα ἀπέβη 5 ἑκατοστόμετρα. Ποῖος ὁ ὄγκος τοῦ σώματος;

Λύσις : Ἡ ἐλαστικὴ δύναμις τοῦ ἀέρος ἐντὸς τοῦ κώδωνος ἀεραντλίας, εἶναι μετὰ n ἀνυψώσεις τοῦ ἐμβόλου :

$$H_n = H_0 \left(\frac{R}{R+V}\right)^n$$

ὅπου R ὁ ὄγκος τοῦ κώδωνος, καὶ V ὁ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου. Ἐφαρμόζοντες τὸν ἄνω τύπον ἔχομεν :

(1) $20 = 80\left(\frac{1}{1+V}\right)^2$ ἀφοῦ ὁ ὄγκος τοῦ κώδωνος εἶναι 1 λίτρα.

Παριστῶμεν διὰ x τὸν ὄγκον τοῦ σώματος ὅπερ εἰσῆλθε κατὰ τὸ δεύτερον πείραμα· ὁ ὄγκος οὗτος ὑποτίθεται ἐκπεφρασμένος εἰς λίτρας.

Ἡ χωρητικότης τοῦ κώδωνος τότε εἶναι 1 — x καὶ ὁ ἴδιος τύπος ἐφαρμοζόμενος δίδει :

$$(2) \qquad 5 = 80\left(\frac{1-x}{1-x+V}\right)^2$$

Αἱ ἐξισώσεις (1) καὶ (2) ἁπλοποιούμεναι γίνονται :

$$1 = 4\left(\frac{1}{1+V}\right)^2$$

$$1 = 16\left(\frac{1}{1-x+V}\right)^2$$

Ἐξάγοντες τὴν τετραγ. ρίζαν ἑκάστου μέλους τῶν ἐξισώσεων ἔχομεν :

$$1 = 2 \times \frac{1}{1+V}$$

$$1 = 4 \times \frac{1}{1-x+V}$$

ἐξ οὗ $\quad x = \frac{2}{3} = 0{,}66$ λίτρας.

189. Ὁ ἐμβολεὺς ἀναρροφητικῆς ὑδραντλίας ἔχει τομὴν 3 τετραγ. δεκατομέτρων. Ἡ διαδρομή του εἶναι 1 μέτρον. Ἡ τομὴ τοῦ ἀναρροφητικοῦ σωλῆνος εἶναι τὸ $\frac{1}{12}$ τῆς τομῆς τοῦ κυλίνδρου τῆς ὑδραντλίας. Ποῖον πρέπει νὰ εἶναι τὸ ὕψος τοῦ ἀναρροφητικοῦ σωλῆνος ἵνα μετὰ τὴν πρώτην ἀνύψωσιν τοῦ ἐμβολέως τὸ ὕδωρ φθάσῃ ἐντὸς τοῦ κυλίνδρου τῆς ὑδραντλίας; Ἡ ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις ἡ ἐξασκουμένη ἐπὶ 1 τετραγ. ἑκατοστ. εἶναι 1,033 χιλιόγραμμα.

Λύσις: Ἔστω x τὸ μῆκος τοῦ ἀναρροφητικοῦ σωλῆνος εἰς δεκατόμετρα. Ὁ περιεχόμενος ἀὴρ ἐντὸς τοῦ ἀναρροφητικοῦ σωλῆνος καταλαμβάνει κατ' ἀρχὰς ὄγκον $\frac{3}{12}x = \frac{x}{4}$ λίτρας, ὑπὸ πίεσιν 1,033 χιλιόγρ. κατὰ τετραγ. ἑκατοστ. Μετὰ τὴν πρώτην ἀνύψωσιν τοῦ ἐμβολέως ὁ ἀὴρ οὗτος κατέχει ὄγκον 30 λίτρων ὑπὸ πίεσιν $(1{,}033 - 0{,}01)$ χιλιόγρ. κατὰ τετραγ. ἑκατ.

Ἐφαρμόζοντες τὸν νόμον τοῦ Μαριόττου ἔχομεν:

$$\frac{x}{4} \times 1{,}033 = 30\,(1{,}033 - 0{,}01\,x)$$

καὶ $x = 68{,}9$ δηλαδὴ 6,89 μέτρα.

190. Ἡ διάμετρος τοῦ κυλίνδρου ἀεραντλίας εἶναι 6 ἑκατοστόμετρα καὶ τὸ ὕψος 20 ἑκατοστά. Τὸ ὅριον τοῦ κενοῦ ὅπερ δύναται νὰ ἐπιτευχθῇ εἶναι 1 χιλιοστόμετρον ὑδραργύρου. Ζητεῖται ὁ ὄγκος τῆς ἐπιζημίου χωρητικότητος, καί, ὑποτιθεμένης ἀπολύτως ὁριζοντίου τῆς κατωτέρας ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου τῆς ἀεραντλίας, καὶ τῆς κάτω ἐπιφανείας τοῦ ἐμβόλου, νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος τῆς στήλης τοῦ ἀέρος ἐντὸς τῆς ἐπιζημίου χωρητικότητος. Ἡ ἐξωτερικὴ πίεσις εἶναι 76 ἑκατοστόμετρα ὑδραργύρου κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ πειράματος.

Λύσις: Ἀφοῦ ἡ ἀεραντλία δὲν δύναται νὰ παραγάγῃ κενόν, ὁ ἀὴρ ὁ ἐντὸς τῆς ἐπιζημίου χωρητικότητος, εἰς τὴν ἀτμοσφαιρικὴν πίεσιν, ἀποκτᾷ μίαν ἐλαστικὴν δύναμιν ἴσην πρὸς ἐκείνην τοῦ ἀέρος τοῦ κώδωνος ὅταν ὁ ἐμβολεὺς εἶναι ἐντελῶς ὑψωμένος ἐντὸς τοῦ κυλίνδρου τῆς ἀεραντλίας. Ἔστω λοιπὸν υ ὁ ὄγκος τῆς ἐπιζημίου χωρητικότητος. Κατὰ τὸν νόμον τοῦ Μαριόττου ἔχομεν:

$$\upsilon \times 760 = \pi \times 3^2 \times 20 \times 1$$

ἐξ οὗ $$v = \frac{3{,}1416 \times 180}{760} = 0{,}744 \text{ κυβικὰ ἑκατοστ.}$$

Ὁ ὄγκος οὗτος εἶναι ὄγκος κυλίνδρου ὕψους h καὶ τομῆς πr^2.

Ἑπομένως: $$\pi \times 3^2 \times h = \frac{\pi \times 3^2 \times 20 \times 1}{760}$$

ἐξ οὗ $$h = \frac{20}{760} = 0{,}026 \text{ ἑκατοστόμετρα.}$$

191. Ἐντὸς δοχείου, χωρητικότητος 2 λίτρων καὶ ἤδη πλήρους ἀερίου, ὑπὸ πίεσιν ἴσην πρὸς τὴν ἐξωτερικήν, θέλει τις νὰ συμπυκνώσῃ ἀέρα τῇ βοηθείᾳ ἀεροθλιπτικῆς μηχανῆς, τῆς ὁποίας ὁ κύλινδρος ἔχει ὄγκον 0,25 λίτρας. Ὁ ἀὴρ οὗτος λαμβάνεται ἐκ τῆς ἀτμοσφαίρας, ἧς ἡ πίεσις εἶναι 76 ἑκατοστόμετρα. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πίεσις ἐντὸς τοῦ δοχείου μετὰ 30 ἀνυψώσεις τοῦ ἐμβολέως τῆς μηχανῆς. Ἡ πίεσις αὕτη θὰ ἐκφράζεται εἰς χιλιόγραμμα. Ἡ πυκνότης τοῦ ὑδραργύρου εἶναι 13,6.

Λύσις: Εἰς ἑκάστην ἀνύψωσιν τοῦ ἐμβολέως εἰσῆλθε ἐντὸς τοῦ δοχείου μία μᾶζα ἀέρος, ἥτις κατέλαβε ἀρχικῶς ὄγκον 0,25 ὑπὸ πίεσιν 1 ἀτμοσφ. Καταλαμβάνει ἐντὸς τοῦ δοχείου τὸν ὄγκον 2 λίτρων ὑπὸ πίεσιν p_1 διδομένην ὑπὸ τοῦ νόμου τοῦ Μαριόττου :

$$0{,}25 \times 1 = 2\, p_1$$

ἐξ οὗ $$p_1 = \frac{0{,}25}{2}$$

Κατὰ τὸν νόμον τῆς μίξεως τῶν ἀερίων ἡ πίεσις αὕτη προστίθεται εἰς τὴν ἀρχικὴν πίεσιν τοῦ ἀερίου τοῦ ἐγκεκλεισμένου ἐντὸς τοῦ δοχείου. Ὥστε μετὰ μίαν ἀνύψωσιν τοῦ ἐμβόλου, ἡ πίεσις εἰς ἀτμοσφαίρας ἰσοῦται :

$$1 + \frac{0{,}25}{2} \text{ ἀτμοσφοσφ.}$$

Εἰς τὸ τέλος τῶν 30 ἀνυψώσεων τοῦ ἐμβόλου ἡ πίεσις θὰ εἶναι ;

$$1 + \frac{30 \times 0{,}25}{2} = 4{,}75 \text{ ἀτμοσφ.}$$

Διὰ νὰ ἔχωμεν τὴν πίεσιν ταύτην εἰς χιλιόγραμμα κατὰ τετραγ. ἑκατοστ. ἐκφράζομεν κατ' ἀρχὰς εἰς χιλιόγραμμα τὴν τιμὴν τῆς ἀτμ. πιέσεως. Αὕτη ἰσοδυναμεῖ πρὸς τὸ βάρος στήλης ὑδραργύρου τομῆς 1 τετραγ. ἑκατ. καὶ ὕψους 76 ἑκατ.

Ἤτοι : $76 \times 13{,}6 = 1033{,}6$ γραμμάρια.

Ἑπομένως 4,75 ἀτμοσφ. ἰσοδυναμοῦσι πρὸς 1,0336 χιλιογρ. $\times$ 4,75 $= 4{,}906$ χιλιόγραμ.

IV. ΘΕΡΜΟΤΗΣ

Α΄. ΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΑ ΚΑΙ ΔΙΑΣΤΟΛΗ ΤΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ

192. Εἰς ποίαν θερμοκρασίαν τὰ θερμόμετρα Φαρενάϊτ καὶ Κελσίου δεικνύουν τὸν αὐτὸν βαθμόν ;

Λύσις : Ἔστω c τὸ μῆκος μιᾶς διαιρέσεως εἰς τὴν κλίμακα Κελσίου, καὶ f τὸ μῆκος μιᾶς διαιρέσεως εἰς τὴν κλίμακα Φαρενάϊτ. Παριστάνοντες διὰ x τὸν ἀριθμὸν τῶν δεικνυομένων βαθμῶν ἐπὶ τῶν δύο κλιμάκων, καὶ ἐκφράζοντες ὅτι τὸ μῆκος τὸ περιλαμβανόμενον μεταξὺ τοῦ μηδενὸς καὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ὑδραργύρου εἶναι τὸ αὐτὸ ἐπὶ τῶν δύο κλιμάκων (δυνάμεθα νὰ τὰ ὑποθέσωμεν), ἔχομεν :

$$xc = (x - 32)\,f$$

Ἐξ ἄλλου γνωρίζομεν ὅτι : $100\,c = 180\,f$

Διαιροῦντες κατὰ μέλη ἔχομεν : $\frac{x}{5} = \frac{x-32}{9}$

ἐξ οὗ $x = -40^\circ$

193. Νὰ προσδιορισθῇ ἡ θερμοκρασία διὰ τὴν ὁποίαν ὁ ἀριθμὸς τῶν δεικνυομένων βαθμῶν ὑπὸ τοῦ θερμομέτρου τοῦ Κελσίου εἶναι ὁ μέσος ὅρος τῶν δοθέντων ἀριθμῶν ὑπὸ τῶν δύο θερμομέτρων Ῥεωμύρου καὶ Φαρενάϊτ.

Λύσις : Ἔστω x ἡ θερμοκρασία τοῦ Κελσίου ἡ ἀνταποκρινομένη εἰς τὸ πρόβλημα. Ἡ ἔνδειξις ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὸ θερμόμετρον Ρεωμύρου θὰ εἶναι $\frac{4}{5}$ x, καὶ ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὸ τοῦ Φαρενάϊτ $\frac{5}{9}$ x $+ 32$.

Κατὰ τὸ πρόβλημα θὰ ἔχωμεν :

$$T_c = \frac{T_R + T_F}{2} \qquad \text{ἢ} \qquad x = \frac{\frac{4}{5}x + \left(\frac{9}{5}x + 32\right)}{2}$$

ἐξ οὗ $$2x = \frac{13}{5}x + 32$$

καὶ $$x = -\frac{160}{3} = -53^\circ \frac{1}{3}$$

Τὸ θερμόμετρον Ρεωμύρου θὰ δείξῃ :

$$-53\frac{1}{3} \times \frac{4}{5} = -42^\circ \frac{2}{3}$$

Καὶ τὸ θερμόμετρον Φαρενάϊτ :

$$-53\frac{1}{3} \times \frac{9}{5} + 32 = -64^\circ.$$

194. Κυλινδρικὸς σωλὴν ὑάλινος, κλειστὸς κατὰ τὸ κατώτερον ἄκρον του ἔχει μῆκος 1 μέτρου. Ποῖον ὕψος ὑδραργύρου εἰς 0° πρέπει νὰ ρίψωμεν, ἵνα, ὑψουμένης τῆς θερμοκρασίας, τὸ διάστημα μεταξὺ τῆς κορυφῆς τοῦ σωλῆνος καὶ τοῦ κέντρου βάρους τῆς ὑδραργυρικῆς μάζης παραμένῃ σταθερόν ;

Ὁ συντελεστὴς τῆς κυβικῆς διαστολῆς τῆς ὑάλου εἶναι $\frac{1}{38700}$. Καὶ ὁ συντελεστὴς τῆς κυβικῆς διαστολῆς τοῦ ὑδραργύρου $\frac{1}{5550}$.

Λύσις: Παριστῶμεν διὰ x τὸ καταλαμβανόμενον ὕψος ὑπὸ τοῦ ὑδραργύρου εἰς 0°, καὶ διὰ y τὸ καταλαμβανόμενον ὕψος ὑπὸ τοῦ ὑδραργύρου εἰς μίαν οἱανδήποτε θερμοκρασίαν t. Διὰ l τὸν συντελεστὴν τῆς γραμμικῆς διαστολῆς τῆς ὑάλου. Κατὰ τὸ πρόβλημα θὰ ἔχωμεν :

$$100 - \frac{x}{2} = 100\,(1 + lt) - \frac{y}{2} \qquad (1)$$

Διὰ νὰ προσδιορίσωμεν τὸ y παρατηροῦμεν ὅτι εἰς t° ὁ ὄγκος τοῦ ὑδραργύρου εἶναι :

$S\,(1 + 2\,lt)\,y$ ὅπου S ἡ τομὴ τοῦ σωλῆνος, 2l ὁ κατ' ἐπιφάνειαν συντελεστὴς τοῦ ὑάλου. Ἐξ ἄλλου, ὁ ὄγκος οὗτος δύναται νὰ ἐκφρασθῇ καὶ ὡς ἑξῆς :

$$S\,x\,(1 + m\,t)$$

ἐξ οὗ $$y\,(1 + 2\,l\,t) = x\,(1 + m\,t) \qquad (2)$$

καὶ $$y = x\,\frac{1+mt}{1+2lt} = x\left[1+\left(m-2l\right)t\right]$$

Ἀντικαθιστῶμεν τὴν τιμὴν ταύτην εἰς τὴν ἐξίσωμεν (1) καὶ ἔχομεν:

$$100-\frac{x}{2} = 100\left(1+lt\right)-\frac{x}{2}\left[1+\left(m-2l\right)t\right]$$

$$0 = 100\,lt-\frac{x}{2}\left(m-2\,l\right)t \qquad (3)$$

Ἡ σχέσις αὕτη πρέπει νὰ ὑφίσταται, οἱαδήποτε καὶ ἂν εἶναι ἡ τιμὴ τῆς θερμοκρασίας t.

Ὑποθέτοντες $t = 1$ θὰ ἔχωμεν :

$$0 = 100\,l-\frac{x}{2}\left(m-2l\right)$$

ἐξ οὗ $$x = \frac{200\,l}{m-2\,l}$$

195. Βαρομετρικὸν ὕψος 75,5 εἰς θερμοκρασίαν 15°, νὰ ἀναχθῇ εἰς θερμοκρασίαν 0°.

Λύσις:

$$H_0 = \frac{75{,}5}{1+\frac{15}{5550}} = 75{,}296$$

196. Ἐντὸς καμίνου, τῆς ὁποίας ζητοῦμεν τὴν θερμοκρασίαν, θέτομεν ῥάβδον μεταλλίνην ἔχουσαν εἰς 0° μῆκος 1,10 μέτρα. Τὸ μῆκος τῆς ῥάβδου γίνεται 1,107 μέτρα. Ποία εἶναι ἡ θερμοκρασία τῆς καμίνου ; Συντελεστὴς διαστολῆς μετάλλου 0,000012.

Λύσις: $$1{,}107 = 1{,}10\,(1+0{,}000012\,t)$$

καὶ $t = 530^{\circ}{,}3$

197. Κατὰ πόσον μεταβάλλεται τὸ μῆκος σιδηρᾶς ῥάβδου μήκος 1000 μέτρων εἰς 0°, ὅταν ἡ θερμοκρασία μεταβάλλεται ἀπὸ 0° εἰς 40° ; Ὁ συντελεστὴς τῆς γραμμικῆς διαστολῆς τοῦ σιδήρου εἶναι 0,000012.

Λύσις:

$$1000\,(1+40\times 0{,}000012)-1000 = 0{,}48 \text{ μέτρα}$$

198. Σφαῖρα σιδηρᾶ διαμέτρου 5,01 ἑκατοστῶν εἰς 0^{o} τοποθετεῖται ἐπὶ δακτυλίου ἐκ ψευδαργύρου 5 ἑκατοστῶν διαμέτρου. Εἰς ποίαν θερμοκρασίαν ἡ σφαῖρα θὰ διέλθη διὰ τοῦ δακτυλίου ; Συντελεστὴς διαστολῆς ψευδαργύρου 0,000031.

Λύσις:

$$5{,}01\,(1+0{,}0000118\ t)=5\,(1+0{,}000031\ t)$$

$$\text{καὶ}\quad t=104^{o}{,}27.$$

199. Κυλινδρικὸς σωλὴν ὑάλινος μήκους 1 μέτρου καὶ διαμέτρου 2 ἑκατοστῶν εἰς θερμοκρασίαν 0^{o} περιέχει ὑδράργυρον μέχρι μήκους 0,95 μέτρων. Εἰς ποίαν θερμοκρασίαν θὰ εἶναι ὁλόκληρος ὁ σωλὴν πλήρης; Συντελεστὴς κυβικῆς διαστολῆς τῆς ὑάλου $\frac{1}{38700}$.

Λύσις: Ὁ ὄγκος τοῦ ὑδραργύρου εἰς 0^{o} εἶναι : $\pi\times1\times95$.
Ἡ χωρητικότης τοῦ σωλῆνος εἰς 0^{o} εἶναι : $\pi\times1\times100$.
Εἰς τὴν θερμοκρασίαν x :

$$\pi\times1\times95\left(1+\frac{x}{5550}\right)=\pi\times1\times100\left(1+\frac{x}{38700}\right)$$

$$\text{καὶ}\quad x=344^{o}$$

200. Ἡ πυκνότης τοῦ ἀργύρου εἶναι 10,31 εἰς 0^{o}. Ὁ συντελεστὴς τῆς κυβικῆς διαστολῆς του εἶναι 0,000058. Νὰ εὑρεθῇ ἡ πυκνότης του εἰς 150^{o}.

Λύσις:

$$d_{150}=\frac{10{,}31}{1+0{,}000058\times150}=10{,}22.$$

201. Ἡ πυκνότης τοῦ ὑδραργύρου εἶναι 13,6 εἰς 0^{o}. Ποία ἡ πυκνότης του εἰς 20^{o} ; Συντελ. διαστολῆς ὑδραργ. $\frac{1}{5550}$.

Λύσις: $$d_{20}=\frac{13{,}6}{1+\frac{20}{5550}}=13{,}551.$$

202. Σωλὴν θερμομέτρου ἔχει διάμετρον $\frac{1}{10}$ τοῦ χιλιοστομέτρου. Τὸ δοχεῖον τοῦ θερμομέτρου εἶναι κυλινδρικὸν καὶ ἔχει ὕψος 1 ἑκατοστὸν καὶ ἀκτῖνα 2 χιλιοστομέτρων. Ποῖον εἶναι τὸ μῆκος τοῦ βαθμοῦ;

Λύσις: $V_0 \left(\frac{100}{5550} - \frac{100}{38700}\right) = 100\ v_0\left(1 + \frac{100}{38700}\right)$

$$V_0 = \pi\left(\frac{2}{10}\right)^2 \times 1 \quad \text{καὶ} \quad v_0 = \pi\left(\frac{1}{200}\right)^2 \times x$$

καὶ $x = 0{,}25$ ἢ 2,5 χιλιοστόμετρα.

203. Θερμόμετρον ὑδραργυρικὸν βυθισμένον ὁλόκληρον ἐντὸς ὑγροῦ θερμοκρασίας σταθερᾶς δεικνύει 95°. Ποίαν θερμοκρασίαν θὰ δείξῃ, ἂν βυθισθῇ μόνον τὸ δοχεῖον καὶ τὸ κάτω μέρος τοῦ στελέχους τοῦ θερμομέτρου μέχρι τοῦ βαθμοῦ 6° ; Ἡ ἐξωτερικὴ θερμοκρασία εἶναι 12°.

Λύσις: Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ 95 εἶναι ἴσον πρὸς τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν σὺν τῇ μεταβολῇ τοῦ ὄγκου ἣν δεικνύουσι $(x - 6)$ διαιρέσεις ἀπὸ 12° εἰς 95°.

Ἑπομένως ἔχομεν τὴν σχέσιν :

$$95 = x + (x - 6)\left(\frac{1}{5550} - \frac{1}{38700}\right)(95 - 12).$$

καὶ $x = 93{,}72$.

204. Θερμόμετρον Κελσίου βυθίζεται ἐντὸς ὑγροῦ μέχρι τοῦ βαθμοῦ 25. Ὁ ὑδράργυρος ἀνέρχεται μέχρι τοῦ βαθμοῦ 110. Ποῖον βαθμὸν θὰ δείξῃ τὸ θερμόμετρον τοῦτο, ἐὰν βυθισθῇ ἐντὸς θερμοῦ ὑγροῦ μέχρι τοῦ ἐπιπέδου ὅπου σταματᾷ ὁ ὑδράργυρος ; Ἡ ἐξωτερικὴ θερμοκρασία εἶναι 15°.

Λύσις: Τὸ μέρος τοῦ στελέχους τὸ περιλαμβανόμενον μεταξὺ τοῦ βαθμοῦ 25 καὶ τοῦ βαθμοῦ 110 πρέπει νὰ θερμανθῇ ἀπὸ 15° εἰς x^0. Ὁ ὑδράργυρος καὶ ἡ ὕαλος διαστέλλονται. Ὁ ἀριθμὸς τῶν βαθμῶν x δίδεται ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως :

$$x = 110 + (110 - 25)\left(\frac{1}{5550} - \frac{1}{38700}\right)(x - 15)$$

καὶ $x = 111^0{,}26$

205. Σῶμα στερεὸν ἐπιπλέει ἐντὸς ὑγροῦ θερμοκρασίας 0°, καὶ τὸ τεμάχιον τοῦ βυθισμένου ὄγκου εἶναι τὰ $\frac{98}{100}$ τοῦ ὁλικοῦ ὄγκου τοῦ σώματος. Ἡ θερμοκρασία τοῦ ὑγροῦ ἀνέρχεται εἰς 25° καὶ τὸ σῶμα βυθίζεται πλήρως ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ. Ὁ συντελεστὴς διαστολῆς τοῦ στερεοῦ σώματος K εἶναι 0,0000026. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀπόλυτος συντελεστὴς διαστολῆς τοῦ ὑγροῦ.

Λύσις: Ἔστω V_0 ὁ ὄγκος τοῦ σώματος εἰς 0°, P τὸ βάρος του, d_0 ἡ πυκνότης τοῦ ὑγροῦ εἰς 0°. Κατὰ τὸ πρόβλημα ὁ ὄγκος τοῦ ἐκτοπιζομένου ὑγροῦ εἰς 0° ὑπὸ τοῦ σώματος εἶναι $\frac{98}{100}V_0$.

Εἰς τὴν θερμοκρασίαν ταύτην τὸ βάρος τοῦ σώματος εἶναι ἴσον πρὸς τὸ βάρος τοῦ ἐκτοπιζομένου ὑγροῦ (συνθήκη ἰσορροπίας ἐπιπλεόντων σωμάτων).

$$(1) \qquad P = \frac{98}{100} V_0 D_0.$$

Εἰς 25° ὁ ὄγκος τοῦ σώματος γίνεται $V^0 (1 + 25\kappa)$.

Εἰς 25° ἡ πυκνότης τοῦ ὑγροῦ γίνεται $\frac{d_0}{1+25x}$ ὅπου x ὁ ζητούμενος συντελεστὴς διαστολῆς.

Ἡ ἀρχὴ τῶν ἐπιπλεόντων σωμάτων, εἰς τὴν θερμοκρασίαν ταύτην θὰ μᾶς δώσῃ :

$$(2) \qquad P = V_0 (1 + 25\kappa). \frac{d_0}{1+25x}.$$

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) ἐξάγομεν :

$$\frac{98}{100} V_0 D_0 = V_0 \left(1 + 25\kappa.\right). \frac{d_0}{1+25x}$$

καὶ $\frac{98}{100} = \frac{1+25\kappa}{1+25x}$ καὶ $x = 0,00084$.

206. Εἰς ἕνα τόπον ὅπου ὁ ἀὴρ εἶναι ξηρὸς καὶ ἡ θερμοκρασία 15°, μετροῦμεν διὰ κανόνος μὴ διαστελλομένου τὸ βαρομετρικὸν ὕψος, καὶ εὑρίσκομεν 725 χιλιοστόμετρα. Ζητεῖται 1ον. Ποῖον θὰ ἦτο τὸ ὕψος τοῦ ὑδραργύρου εἰς 0°, τὸ ὁποῖον θὰ ἐμέτρα τὴν αὐτὴν πίεσιν; 2ον. Ποία θὰ εἶναι ἡ νέα ἀνάγνωσις ἐπὶ τοῦ κανόνος ὅταν θὰ ὑψώσῃ τις κατακορύφως τὸ βαρόμετρον εἰς ὕψος 5 μέτρων ;

Συντελεστὴς διαστολ. ὑδραργύρου	0,00018
» » ἀέρος	0,00366
Πυκνότης ὑδραργύρου εἰς 0°	13,6
Βάρος λίτρας ἀέρος	1,293 γραμ.

Λύσις: Ὁ τύπος τῆς βαρομετρικῆς διορθώσεως εἶναι :

$H_0 = H \frac{1+\lambda t}{1+mt}$ ὅπου λ ὁ συντελεστὴς τῆς γραμμικῆς διαστολῆς τοῦ κανόνος, m ὁ συντελεστὴς τῆς κυβ. διαστ. τοῦ ὑδραργύρου. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν ἄνω τύπον ἔχομεν:

$$H_0 = 725 \times \frac{1}{1+0,00018 \times 15} = 723,04 \text{ χιλιοστόμετρα.}$$

2ον. Τὸ ὕψος τοῦ ὑψουμένου ὑδραργύρου θὰ εἶναι ὀλιγώτερον ὅταν ὑψωθῇ εἰς ὕψος 5 μέτρων. Ἡ ἐλάττωσις τοῦ βαρομετρικοῦ ὕψους θὰ εἶναι ἴση πρὸς τὸ ὕψος στήλης ὑδραργύρου εἰς 15°, ἱκανῆς νὰ ἰσορροπήσῃ μίαν στήλην ἀέρος 10 μέτρων ὕψους εἰς τὴν αὐτὴν θερμοκρασίαν. Αὕτη δίδεται ὑπὸ τῆς κατωτέρω ἐξισώσεως συμφώνως πρὸς τὴν ἀρχὴν τῶν συγκοινωνούντων δοχείων :

$$\frac{h}{5000} = \frac{0,0001293}{1+0,00366 \times 15} : \frac{13,6}{1+0,00018 \times 15}$$

Ἐκτελοῦντες τὰς πράξεις λαμβάνομεν: $h = 0,45$ χιλιοστόμ.

Τὸ βαρομετρικὸν ὕψος τὸ παρατηρηθὲν θὰ εἶναι :

$$725 - 0,45 = 724,55 \text{ χιλιοστόμετρα.}$$

207. Δύο ῥάβδοι, ἡ μία ἐξ ὑάλου, καὶ ἡ ἑτέρα ἐκ χαλκοῦ, ἔχουσιν εἰς θερμοκρασίαν 0° τὸ αὐτὸ μῆκος 4 μέτρων. Θερμαίνομεν ἀμφοτέρας εἰς τὴν αὐτὴν θερμοκρασίαν. Ἡ διαφορὰ τῶν μηκῶν εἶναι τώρα 0,004 μέτρα. Νὰ προσδιορισθῇ, ἡ θερμοκρασία μέχρι τῆς ὁποίας ἐθερμάνθησαν, καὶ ἡ σχετικὴ ἐπιμήκυνσίς των.

Συντελ. γραμ διαστ. τῆς ὑάλου 0,000018782.

» » » τοῦ χαλκοῦ 0,000017182.

Λύσις: Ἔστω l τὸ μῆκος τῆς ὑαλίνης ῥάβδου, l′ τὸ μῆκος τῆς ἐκ χαλκοῦ εἰς t_0. Καλέσωμεν d τὴν διαφορὰν $l - l'$ τῶν δύο ῥάβδων εἰς t_0.

Ἔχομεν : $l = l_0 (1 + \lambda t)$

καὶ $l' = l_0 (1 + \lambda' t)$

ἐξ οὗ $l - l' = d = l_0 t (\lambda - \lambda')$

Ἑπομένως $t = \dfrac{d}{l_0 (\lambda - \lambda')}$.

Ἀντικαθιστῶντες διὰ τῶν ἀριθμῶν ἔχομεν :

$$t = \frac{0,004}{4 \times 0,0000016} = 625^\circ$$

Ἡ αὔξησις τῆς ὑαλίνης ῥάβδου εἶναι $l - l_0$, καὶ ἀφοῦ $l = l_0 (1+\lambda t)$, ἡ ἐπιμήκυνσις αὕτη εἶναι :

$$l - l_0 = l_0 \lambda t = 4 \times 625 \times 0,000018782 = 0,046955 \text{ μ.}$$

Ἡ ἐπιμήκυνσις τῆς χαλκίνης ῥάβδου εἶναι $l' - l^0$, θὰ εἶναι :

$$l' - l_0 = l_0 \lambda' t = 4 \times 625 \times 0{,}000017182 = 0{,}042955.$$

208. Ὁ ὄγκος ὁ καταλαμβανόμενος μεταξὺ τῶν γραμμῶν 0 καὶ 100 θερμομέτρου τινὸς μετὰ στελέχους εἰς 0^0, εἶναι 5 κυβ. χιλιοστόμετρα. Ζητεῖται νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ δοχείου τοῦ θερμομέτρου, γνωστοῦ ὄντος ὅτι ὁ συντελεστὴς τῆς ἀπολύτου διαστολῆς τοῦ ὑδραργύρου εἶναι 0,00018, καὶ ὅτι ὁ συντελεστὴς τῆς κυβικῆς διαστολῆς τῆς ὑάλου εἶναι 0,000024.

Λύσις : Ἔστω V κυβ. χιλιοστόμετρα ὁ ὄγκος τοῦ δοχείου μέχρι τοῦ 0 τῆς διαιρέσεως. Ὁ ὑδράργυρος εἰς 0^0 καταλαμβάνει τὸν ὄγκον V, καὶ εἰς 100^0 θὰ καταλάβῃ ὄγκον :

$$V\ (1 + 100 \times 0{,}00018).$$

Ὁ ὄγκος οὗτος εἶναι ἐπίσης ὄγκος τοῦ θερμομέτρου μέχρι τοῦ σημείου 100 εἰς τὴν θερμοκρασίαν τῶν 100^0. Ἐξ ἄλλου ὁ ὄγκος τοῦ περιεχομένου εἰς 100^0 εἶναι :

$$(V + 5)\ (1 + 100 \times 0{,}000024).$$

Γράφομεν τὴν ἰσότητα : Ὄγκος περιέχοντος = Ὄγκον περιεχομένου :

$$(V + 5)\ (1 + 0{,}0024) = V\ (1 + 0{,}018)$$

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης ἐξάγομεν $V = 321$ κυβ. χιλιοστ.

Β΄. ΔΙΑΣΤΟΛΗ ΤΩΝ ΑΕΡΙΩΝ. ΠΥΚΝΟΤΗΣ ΤΩΝ ΑΕΡΙΩΝ.

209. Εἰς ποίαν θερμοκρασίαν πρέπει νὰ θερμάνῃ τις μίαν μᾶζαν ἀερίου εἰς 0^0, ἵνα ὁ ὄγκος του διπλασιασθῇ ;

Λύσις : Ἐὰν V_0 εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ ἀερίου εἰς 0^0, εἰς τὴν ζητουμένην θερμοκρασίαν x θὰ ἔχωμεν :

$$2\,V_0 = V_0 \left(1 + \frac{x}{273}\right)$$

καὶ $x = 273^0$

210. Ὁ ὄγκος μάζης ἀερίου εἰς 15^0 εἶναι 400 κυβικὰ ἑκατοστόμετρα. Εἰς ποίαν θερμοκρασίαν ὁ ὄγκος θὰ γίνῃ 500 κυβ. ἑκατοστόμετρα, τῆς πιέσεως διατηρουμένης σταθερᾶς ;

Λύσις : Οἱ ὄγκοι εἶναι ἀνάλογοι τῶν διωνύμων τῆς διαστολῆς.

$$\frac{500}{400}=\frac{1+\frac{t}{273}}{1+\frac{15}{273}} \quad \text{καὶ} \quad t=87^0$$

211. 15 λίτραι ἀέρος ψύχονται ἀπὸ 27° εἰς 7°. Ποία εἶναι ἡ ἐλάττωσις τοῦ ὄγκου των ;

Λύσις : $$V_{27}=V_0\left(1+\frac{27}{273}\right),\ V_7=V_0\left(1+\frac{7}{273}\right)$$

$$\frac{V_{27}-V_7}{V_{27}}=\frac{1}{15}$$

Ἡ ἐλάττωσις εἶναι μιᾶς λίτρας.

212. Σφαῖρα ὑαλίνη ἐγκλείει 2 λίτρας ἀνθρακικοῦ ἀερίου, ἡ θερμοκρασία εἶναι 20° καὶ ἡ πίεσις 76 ἑκατοστόμετρα ὑδραργύρου. Θερμαίνομεν τὴν σφαῖραν εἰς 220° καὶ ἀφίνομεν νὰ συγκοινωνήσῃ μετὰ τῆς ἀτμοσφαίρας. Νὰ προσδιορισθῇ τὸ βάρος τοῦ ἀερίου, τὸ ὁποῖον θὰ διαφύγῃ ἐκ τῆς σφαίρας. Συντελεστὴς γραμ. τῆς ὑάλου $\lambda=0{,}0000087$, πυκνότης τοῦ ἀερίου 1,5 , συντελεστὴς διαστολῆς τοῦ ἀερίου $\alpha=0{,}00367$.

Λύσις : Ἔστω M ἡ μᾶζα τοῦ ἀερίου πρὸ τοῦ πειράματος, καὶ M′ ἡ μᾶζα τοῦ ἀερίου ὅταν ἀνοίξωμεν τὴν σφαῖραν. Ἡ μᾶζα x τοῦ ἐξερχομένου ἀερίου θὰ εἶναι M — M′.

Ἐκ τοῦ τύπου $$M=\frac{V\,d\,\alpha\,H}{76\,(1+\alpha t)}$$

ἔχομεν $$M=\frac{2\times1{,}5\times1{,}293\times76}{76\,(1+20\times0{,}00367)}$$

Εἰς 220°, ὁ νέος ὄγκος τῆς ὑάλου εἶναι :

$$2\,\frac{(1+220\,\kappa)}{1+20\,\kappa} \quad \text{ἢ αἰσθητῶς} \quad 2\,(1+200\,\kappa)$$

Γνωρίζομεν ὅτι ὁ συντελεστὴς τῆς κυβικῆς διαστολῆς εἶναι τριπλάσιος τοῦ συντελεστοῦ τῆς γραμμικῆς διαστολῆς. Ἡ μᾶζα τοῦ ἀερίου ἡ διαμένουσα ἐντὸς τῆς σφαίρας εἶναι συνεπῶς:

$$M' = \frac{2(1+200\times3\times0,0000087)\times1,5\times1,293\times76}{76(1+220\times0,00367)}.$$

Καὶ ἐπειδὴ x εἶναι ἴσον πρὸς M — M′ ἔχομεν:

$$x = 2\times1,5\times1,293\left[\frac{1}{1+20\times0,00367} - \frac{1+0,00522}{1+220\times0,00367}\right]$$

καὶ $x = 1,45$ γραμμάρια.

213. Γνωρίζομεν ὅτι ὁ ἀτμοσφαιρικὸς ἀὴρ ἀπατελεῖται ἐξ 79% ἀζώτου καὶ 21 % ὀξυγόνου. Νὰ ὑπολογισθῇ 1ον. Ἡ πίεσις, τὴν ὁποίαν ἕκαστον τῶν ἀερίων τούτων ἐξασκεῖ ἐντὸς μιᾶς λίτρας ἀέρος. 2ον. Τὰ σχετικά των βάρη εἰς τὸν ἴδιον τοῦτον ὄγκον, γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ σχέσις τοῦ βάρους m τῆς λίτρας ἀζώτου πρὸς τὸ βάρος m′ τῆς λίτρας ὀξυγόνου εἶναι $\frac{14}{16}$, καὶ ὅτι τὸ βάρος τῆς λίτρας τοῦ ἀέρος εἶναι 1,293 γραμμάρια.

Λύσις: Τὸ πρῶτον ἐρώτημα διατυποῦται καὶ ὡς ἑξῆς: Ἀναμιγνύομεν 790 κυβ. ἑκατ. ἀζώτου εἰς τὴν πίεσιν 76 μετὰ 210 κυβ. ἑκατ. ὀξυγόνου εἰς τὴν αὐτὴν πίεσιν· ὁ ὄγκος γίνεται τότε ἴσος πρὸς μίαν λίτραν. Ποία εἶναι ἡ μερικὴ πίεσις ἑκάστου τῶν ἀερίων;

Διὰ τὴν πίεσιν τοῦ ἀζώτου, τὴν ὁποίαν παριστάνομεν διὰ x, ὁ νόμος τῆς μίξεως τῶν ἀερίων δίδει:

$$790\times76 = 1000\,x$$

ἐξ οὗ $x = \dfrac{790\times76}{1000} = 60,04$ ἑκατοστόμετρα.

Καὶ διὰ τὴν πίεσιν y τοῦ ὀξυγόνου:

$$210\times76 = 1000\,y$$

ἐξ οὗ $y = \dfrac{210\times76}{1000} = 15,96$ ἑκατοστόμετρα.

2ον. Τὸ βάρος P μιᾶς λίτρας ἀζώτου εἰς τὴν πίεσιν 60,04 ἑκατοστομ. θὰ εἶναι:

$P = \dfrac{m\times60,04}{76} = \dfrac{m\times790}{1000}$ ὅπου m τὸ βάρος τῆς λίτρας εἰς τὴν πίεσιν 76 ἑκατοστ.

Τὸ βάρος μιᾶς λίτρας ὀξυγόνου P′ εἰς τὴν πίεσιν 15,96 θὰ εἶναι :

$$P' = \frac{m' \times 15,96}{76} = \frac{m' \times 210}{1000}.$$

Διαιροῦντες κατὰ μέλη ἔχομεν :

$$\frac{P}{P'} = \frac{m \times 79}{m' \times 21} = \frac{14 \times 79}{16 \times 21}$$

Κατ᾽ ἀρχὰς ἔχομεν $P+P'=1,293$.

Ἡ λύσις τῶν δύο τούτων ἐξισώσεων δίδει τὰς δύο τιμὰς $P=0,990$ γραμμάρια, καὶ $P' = 0,303$ γραμμάρια.

Τὰ βάρη ταῦτα ἀντιστοιχοῦν ἐπὶ τοῖς ἑκατόν :

$$\frac{0,990 \times 100}{1,293} = 76,55 \text{ ἀζώτου.}$$

καὶ $$\frac{0,303 \times 100}{1,293} = 23,44 \text{ ὀξυγόνου.}$$

214. Δοχεῖον χωρητικότητος ἑνὸς λίτρου εἶναι πλῆρες ἀέρος ὑπὸ πίεσιν μιᾶς ἀτμοσφαίρας καὶ εἰς θερμοκρασίαν 17°. Τὸ δοχεῖον τοῦτο κλείεται διὰ κυκλικῆς ἐπιστομίδος ἀκτῖνος 0,02 μέτρων, ἥτις ἔχει βάρος 21 χιλιόγρ. Εἰς ποίαν θερμοκρασίαν πρέπει νὰ θερμάνῃ τις τὸ δοχεῖον ἵνα ἡ ἐπιστομὶς ὑψωθῇ ; Ἡ ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις εἶναι 760 χιλιοστόμετρα.

Λύσις : Ἡ ἐπιφερομένη πίεσις ὑπὸ τῆς ἐπιστομίδος ἐπὶ 1 τετραγ. ἑκατοστ. ἐπιφανείας εἶναι :

$$p = \frac{21}{4\pi} = 1,651 \text{ χιλιόγραμμα.}$$

Διὰ νὰ ἐκφράσωμεν τὴν πίεσιν ταύτην εἰς ἀτμοσφαίρας, ἀρκεῖ νὰ σκεφθῶμεν ὅτι στήλη ὑδραργύρου 760 χιλιοστ. ὕψους ἀντιστοιχεῖ εἰς βάρος 1,033 χιλιογρ. κατὰ τετρ. ἑκ.

Ἑπομένως $$p = \frac{1,651}{1,033} = 1,6 \text{ ἀτμόσφ.}$$

Ἡ ὁλικὴ πίεσις, ἥτις ἐξασκεῖται ἐπὶ τοῦ ἀερίου εἰς τὴν ζητουμένην θερμοκρασίαν εἶναι 2,6 ἀτμ. Παραστήσωμεν διὰ x τὴν θερμοκρασίαν, εἰς τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ θερμάνωμεν τὸ ἀέριον ἵνα ἀναπτυχθῇ ἡ ἐλαστικὴ δύναμις τῶν 2,6 ἀτμοσφαιρῶν.

Ἐφαρμόζοντες τὸν τύπον τοῦ Gay—Lussac εἰς τὸν ἀέρα τοῦ δοχείου ἔχομεν :

$\frac{1}{1+17\alpha} = \frac{2,6}{1+x\alpha}$ ὅπου α ὁ συντελεστὴς τῆς διαστολῆς τῶν ἀερίων = 0,00367.

Ἐκ τῆς σχέσεως ταύτης ἐξάγομεν :

$$x = \frac{2,6(1+17\alpha)-1}{\alpha}$$

καὶ $x = 480^0$

215. Σφαῖρα ἀεροστάτου, ἧς ὁ ὄγκος εἶναι 60 κυβ. μέτρα, εἶναι πλήρης ὑδρογόνου, τοῦ ὁποίου ἡ πυκνότης ὡς πρὸς τὸν ἀέρα εἶναι 0,069. Ποῖον πρέπει νὰ εἶναι τὸ βάρος τοῦ περικαλύμματος, ἵνα φθάνῃ εἰς ὕψος, ὅπου ἡ θερμοκρασία εἶναι 5^0 καὶ ἡ πίεσις 152 χιλιοστόμετρα ;

Λύσις : Εἰς τὸ ὕψος ὅπου τὸ ἀερόστατον θὰ σταθῇ ἐν ἰσορροπίᾳ, τὸ βάρος τοῦ ἐκτοπιζομένου ἀέρος θὰ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν βαρῶν τοῦ ἐσωτερικοῦ ἀερίου καὶ τοῦ περικαλύμματος. Ἂς καλέσωμεν **π** τὸ βάρος τοῦ περικαλύμματος :

$$60\ \frac{1,293}{1+\frac{5}{273}} \cdot \frac{15,2}{76} = 60\ \frac{1,293 \, . \, 0,069}{1+\frac{5}{273}} \cdot \frac{15,2}{76} + \pi$$

$$\pi = 60\ \frac{1,293}{1+\frac{5}{273}} \cdot \frac{15,2}{76}\left(1-0,069\right) = 14,18 \text{ χιλιόγραμμα.}$$

216. Εἰς ποίαν θερμοκρασίαν πρέπει νὰ ὑψωθῇ ὁ ἀὴρ ἀεροστάτου μὲ θερμὸν ἀέρα, τοῦ ὁποίου τὸ περικάλυμμα καὶ τὸ σκάφος ζυγίζουσι 130 χιλιόγραμμα, καὶ τοῦ ὁποίου ὁ ὄγκος εἶναι 200 κυβ. μέτρα, ἵνα σταθῇ ἐν ἰσορροπίᾳ ἐντὸς ξηροῦ ἀέρος θερμοκρασίας 0^0 ; Ὑποθέτομεν ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ ἀεροστάτου εἶναι σταθερός.

Λύσις : Ἔστω x ἡ ζητουμένη θερμοκρασία. Ἐὰν ἐκφράσωμεν τὰς μάζας εἰς χιλιόγραμμα, ἡ ἐξίσωσις τῆς ἰσορροπίας θὰ εἶναι :

$$\frac{200 \, . \, 1,293}{1+\frac{x}{273}} + 130 = 200 \, . \, 1,293.$$

καὶ $x = 276^0$.

217. Ἀερόστατον κενὸν ἔχει βάρος 1452,465 γραμ. Πλῆρες ὑπὸ ἑνὸς ξηροῦ ἀερίου εἰς τὴν πίεσιν 73 ἑκατοστ. ὑδαργύρου καὶ εἰς 12°,5 ἔχει βάρος 1465,418 γραμ. Ἡ χωρητικότης τοῦ ἀεροστάτου εἶναι 7,234 λίτραι εἰς 12°,5. Ζητεῖται τὸ βάρος μιᾶς λίτρας τοῦ ἀερίου τούτου, καὶ ἡ πυκνότης του εἰς 0° καὶ ὑπὸ πίεσιν 76 ἑκατοστομ. Τὸ ἀέριον καὶ ὁ ἀὴρ ἔχουσι τὸν αὐτὸν συντελεστὴν διαστολῆς 0,00367.

Λύσις: Ἔστω x τὸ βάρος εἰς γράμμα τῆς λίτρας τοῦ ἀερίου τούτου εἰς 0° καὶ ὑπὸ τὴν πίεσιν 76 ἑκατοστ.

Τὸ βάρος P τῶν 7,234 κυβ. μ. τοῦ ἀερίου τούτου εἰς 12°,5 καὶ ὑπὸ πίεσιν 73 θὰ εἶναι:

$$P = \frac{7,234 \times x \times 73}{76\,(1 + 12,5\alpha)}.$$

Συνεπῶς τὸ βάρος τοῦτο εἶναι ἴσον πρὸς τὴν διαφοράν:

$$1465,418 - 1452,465 = 12,953 \text{ γραμ.}$$

Θὰ ἔχωμεν λοιπόν:

$$\frac{7,234 \times 73 \times x}{76(1 + 12,5 \times 0,00367)} = 12,953 \text{ γραμ.}$$

ἐξ οὗ ἐξάγομεν: $x = 1,949$ γραμ.

Ἡ πυκνότης δὲ θὰ εἶναι:

$$d = \frac{1,949}{1,293} = 1,5$$

218. Δέκα λίτραι ἑνὸς ἀερίου εἰς 27° ὑπὸ πίεσιν 68,4 ζυγίζουσιν 16,15 γραμ. Ποία εἶναι ἡ πυκνότης τοῦ ἀερίου τούτου σχετικῶς πρὸς τὸν ἀέρα;

Λύσις: Δέκα λίτραι ἀέρος εἰς 27° καὶ ὑπὸ πίεσιν 68,4 ζυγίζουσιν:

$$\frac{10 \times 1,293\,\frac{68,4}{76}}{1 + \frac{27}{273}} = 10,59 \text{ γραμ.}$$

Ἡ πυκνότης τοῦ ἀερίου σχετικῶς πρὸς τὸν ἀέρα εἰς 27° καὶ πίεσιν 68,4 εἶναι:

$$d = \frac{16,15}{10,59} = 1,525$$

219. Εἰς ποίαν θερμοκρασίαν τὸ ὀξυγόνον, ὑπὸ πίεσιν 19, ἔχει τὴν αὐτὴν πυκνότητα τὴν ὁποίαν ἔχει καὶ τὸ ὑδρογόνον εἰς 0° καὶ πίεσιν 76; Πυκνότητες σχετικῶς πρὸς τὸν ἀέρα, τοῦ μὲν ὀξυγόνου 1,1056, τοῦ δὲ ὑδρογόνου 0,069.

Λύσις: Πυκνότης τοῦ ὀξυγόνου εἰς τὴν θερμοκρασίαν x καὶ ὑπὸ πίεσιν 19:

$$\frac{1{,}1056 \times 0{,}001293 \frac{19}{76}}{1+\frac{x}{273}}$$

Πυκνότης τοῦ ὑδρογόνου εἰς 0° καὶ 76:

$$0{,}069 \times 0{,}001293$$

Ἐξισώνομεν τὰς δύο τιμάς:

$$1{,}1056 \frac{19}{76} = 0{,}069\left((1+\frac{x}{273}\right)$$

$$\text{καὶ} \quad x = 820^\circ{,}6$$

220. Δύο δοχεῖα Α καὶ Β, χωρητικότητος 1 καὶ 2 λίτρων, περιέχουσι τὸ μὲν Α ἀέρα εἰς θερμοκρασίαν 15° καὶ ὑπὸ πίεσιν 720 χιλιοστομ. ὑδραργύρου, τὸ δὲ Β ἐπίσης ἀέρα θερμοκρασίας 20° καὶ ὑπὸ πίεσιν 4 1)2 ἀτμοσφαιρῶν. Συγκοινωνοῦμεν τὰ δύο δοχεῖα διὰ σωλῆνος ἀνοίγοντες τὰς στρόφιγγας αἵτινες θὰ κλείωσι. Ζητεῖται 1ον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ βάρος τοῦ ἀέρος τὸ ὁποῖον θὰ ἐκρεύσῃ ἐκ τοῦ δοχείου Β εἰς τὸ δοχεῖον Α, ὅταν ἡ θερμοκρασία εἰς τὰ δύο δοχεῖα θὰ ἔχῃ γίνει ἴση πρὸς τὴν τοῦ περιβάλλοντος μέσου 15°. 2ον. Νὰ προσδιορισθῇ ἡ πίεσις τοῦ ἀερίου κατὰ τὴν στιγμὴν ταύτην εἰς τὰ δύο δοχεῖα.

Τὸ βάρος μιᾶς λίτρας ἀέρος εἰς 0° καὶ ὑπὸ πίεσιν 760 χιλιοστ. εἶναι 1,293 γραμ. καὶ ὁ συντελεστὴς διαστολῆς $\frac{1}{273}$. Ὁ ὄγκος τοῦ ἐσωτερικοῦ τοῦ σωλῆνος δὲν λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν.

Λύσις: Ἔστω V′ ὁ κατεχόμενος ὄγκος ὑπὸ τοῦ ἀέρος τοῦ δοχείου Α εἰς τὴν τελικὴν πίεσιν x. Ὁ νόμος τοῦ Μαριόττου μᾶς δίδει:

$$V' = \frac{720}{x} \text{ λίτραι.}$$

Ἔστω V″ ὁ καταλαμβανόμενος ὄγκος ὑπὸ τοῦ ἀέρος τοῦ δοχείου Β εἰς τὴν πίεσιν x καὶ εἰς τὴν τελικὴν θερμοκρασίαν 15°.

Γνωρίζοντες ὅτι 4,5 ἀτμ. $= \frac{9 \times 760}{2}$ χιλιοστ. ὑδραργ., θὰ ἔχωμεν:

$$\frac{2 \times 9 \times 760}{2\,(1+20\alpha)} = \frac{V''\,x}{(1+15\alpha)}$$

ἐξ οὗ $\quad V'' = \frac{9 \times 760\,(1+15\alpha)}{x\,(1+20\,\alpha)}$ λίτρας

καὶ ἀφοῦ $V' + V'' = 2$ κυβ. παλ., δυνάμεθα νὰ γράψωμεν:

$$\frac{1}{x}\left[720 + \frac{9 \times 760\ (1+15\,\alpha)}{(1+20\,\alpha)}\right] = 3$$

ἐξ οὗ $\quad x = \frac{720}{3} + \frac{9 \times 760\,(1+15\,\alpha)}{3\,(1+20\,\alpha)} = 240 + 2241 = 2481$ χιλιοστόμ.

2ον. Ὁ ὄγκος τοῦ ἀέρος ὅστις ἐκρέει ἐκ τοῦ δοχείου B εἰς τὸ δοχεῖον A εἶναι ἴσος πρὸς $V'' - 2$

ἢ $\quad \left(\frac{9 \times 760\ (1+15\,\alpha)}{x\,(1+20\,\alpha)} - 2\right)$ λίτρας.

Τὸ βάρος τῆς λίτρας τοῦ ἀέρος εἰς τὴν τελικὴν πίεσιν x καὶ εἰς 15° εἶναι:

$$d_{15} = \frac{1{,}293 \times x}{(1+15\,\alpha)\,760}.$$

Τὸ βάρος ἑπομένως τοῦ ἀέρος τὸ ὁποῖον ἐκρέει ἐκ τοῦ B εἰς τὸ A εἶναι:

$$\frac{1{,}293 \times x}{(1+15\alpha)\,760}\left(\frac{9 \times 760\ (1+15\,\alpha)}{x\,(1+20\,\alpha)} - 2\right) = 2{,}840 \text{ γραμμάρια.}$$

221. Ὑπὸ τὴν αὐτὴν πίεσιν, μία μᾶζα ἀέρος εἰς 150° καταλαμβάνει τὸν αὐτὸν ὄγκον, ὃν καταλαμβάνει μᾶζα ὑδρογόνου εἰς 50°. Ποῖος εἶναι ὁ λόγος τῆς μάζης τοῦ ἀέρος πρὸς τὴν μᾶζαν τοῦ ὑδρογόνου; Πυκνότης ὑδρογόνου ὡς πρὸς τὸν ἀέρα 0,0692.

Λύσις: Ἔστω α ἡ πυκνότης τοῦ ἀέρος εἰς 0° καὶ 76.

$\alpha \times 0{,}0692$ θὰ εἶναι ἡ πυκνότης τοῦ ὑδρογόνου εἰς 0° καὶ 76.

Ἔστω V ὁ ὄγκος τοῦ ἀέρος καὶ τοῦ ὑδρογόνου, M ἡ μᾶζα τοῦ ἀέρος, καὶ M′ ἡ μᾶζα τοῦ ὑδρογόνου.

$$M = V \cdot \alpha \cdot \frac{H}{76} \cdot \frac{1}{1+\frac{150}{273}} \quad \text{καὶ} \quad M' = V \cdot \alpha \cdot 0{,}0692 \cdot \frac{H}{76} \cdot \frac{1}{1+\frac{50}{273}}$$

Ἑπομένως $\quad \frac{M}{M'} = \frac{273+50}{273+150} \cdot \frac{1}{0{,}0692} = 11$

Γ'. ΘΕΡΜΙΔΟΜΕΤΡΙΑ.

222. Δοχεῖον ἐξ ὀρειχάλκου βάρους 30 γραμμαρίων περιέχει 500 γραμμάρια ὕδατος εἰς 20°. Ἐμβαπτίζομεν 108 γραμμάρια σώματος θερμοῦ εἰς 100°. Ἡ τελικὴ θερμοκρασία εἶναι 21°,815. Ποία εἶναι ἡ εἰδικὴ θερμότης τοῦ σώματος; Εἰδικὴ θερμότης ὀρειχάλκου 0,09.

Λύσις : Ἐφαρμόζοντες τὸν τύπον τῆς μεθόδου τῶν μιγμάτων ἔχομεν : $(500+30\times 0{,}09)(21{,}815-20)=108\,x\,(100-21{,}815)$

καὶ $x=0{,}108.$

223. Ἡ εἰδικὴ θερμότης τοῦ χαλκοῦ εἶναι 0,095. Ὁ συντελεστὴς τῆς γραμμικῆς διαστολῆς τοῦ μετάλλου τούτου εἶναι 0,000019. Τὸ εἰδικὸν βάρος αὐτοῦ 8,87 εἰς 0°. Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ, ποῖος ὄγκος χαλκοῦ εἰς 100° πρέπει νὰ βυθισθῇ ἐντὸς 1 χιλιογράμμου ὕδατος 4°, ἵνα ἡ θερμοκρασία τοῦ ὕδατος γίνῃ 10°.

Λύσις : Ἔστω M ἡ μᾶζα τοῦ χαλκοῦ εἰς 100°. Διὰ τῆς μεθόδου τῶν μιγμάτων ἔχομεν :

$$M\times 0{,}095\,(100-10)=1000\,(10-4)$$

$$\text{καὶ}\qquad M=\frac{6000}{8{,}55}=701{,}75\ \text{γραμμάρια.}$$

Ἐξ ἄλλου, ὁ συντελεστὴς τῆς κυβ. διαστ. τοῦ χαλκοῦ εἶναι ἴσος πρὸς $3\times 0{,}000019=0{,}000057$, καὶ ἡ πυκνότης d τοῦ μετάλλου τούτου εἰς 100° εἶναι

$$d=\frac{8{,}87}{1+(100\times 0{,}000057)}=\frac{8{,}87}{1{,}0057}$$

Ἑπομένως ὁ ὄγκος V τοῦ χαλκοῦ θὰ εἶναι εἰς τὴν θερμοκρασίαν ταύτην :

$$V=\frac{701{,}75}{d}=\frac{701{,}75\times 1{,}0057}{8{,}87}=75{,}565\ \text{κυβ. ἑκατοστ.}$$

224. Ἀναμιγνύομεν 300 γραμμάρια τηκομένου πάγου μετὰ 700 γραμμαρίων ὕδατος θερμοκρασίας 100°. Ποία θὰ εἶναι ἡ τελικὴ θερμοκρασία τοῦ μίγματος;

Λύσις : $300\,(80+x)=700\,(100-x)$ καὶ $x=46°$.

225. Τεμάχιον σιδήρου βάρους 870 γραμμαρίων καλύπτεται ὑπὸ στρώματος πάγου θερμοκρασίας 0°. Ὁλόκληρον τὸ σῶμα τοῦτο βυθίζομεν ἐντὸς 1 λίτρας ὕδατος θερμοκρασίας 20° καὶ μετά τινα χρόνον ἡ θερμοκρασία τοῦ ὕδατος γίνεται 6°. Νὰ εὑρεθῇ τὸ βάρος τοῦ εἰς τὸν σίδηρον προσκεκολλημένου πάγου. Εἰδικὴ θερμότης σιδήρου 0,1138, θερμότης τήξεως πάγου 79,25 θερμίδες.

Λύσις: Τὸ ποσὸν τῆς θερμότητος τὸ ὁποῖον ἔχασε τὸ 1 χιλιόγρ. ὕδατος ἵνα κατέλθῃ ἡ θερμοκρασία του ἀπὸ 20° εἰς 6°, ἐχρησιμοποιήθη:

1ον. Διὰ νὰ ἀνέλθῃ ἡ θερμοκρασία τῶν 870 γραμ. σιδήρου ἀπὸ 0° εἰς 6°·

2ον. Διὰ νὰ τακοῦν x γραμμάρια πάγου.

3ον. Διὰ νὰ θερμανθοῦν x γραμ. ὕδατος τήξεως, ἀπὸ 0° εἰς 6°.

Ἑπομένως : $1000\,(20-6) = 6 \times 870 \times 0{,}1138 + 79{,}25\,x + 6x$.

ἐξ οὗ $\quad x = 157{,}25$ γραμμάρια.

226. Δοχεῖον περιέχει ὕδωρ θερμοκρασίας 15°. Ἕτερον δοχεῖον περιέχει ὕδωρ θερμοκρασίας 95°. Πόσον ὕδωρ πρέπει νὰ λάβωμεν ἐξ ἑκάστου δοχείου, ἵνα ἀποτελέσωμεν μῖγμα 325 κυβ. παλαμῶν θερμοκρασίας 35°;

Λύσις: Ἔστωσαν x καὶ y αἱ κυβικαὶ παλάμαι τοῦ ὕδατος τῶν δύο δοχείων.

Θερμότης ἀπορροφηθεῖσα ὑπὸ τῶν x κυβ. παλαμῶν εἶναι : $(35+15)\,x$.
Θερμότης παραχωρηθεῖσα ὑπὸ τῶν y κυβ. παλαμῶν εἶναι : $(95-35)\,y$.

Ἑπομένως : $\quad x\,(35-15) = (95-35)\,y$

ἢ $\quad \dfrac{x}{y} = \dfrac{60}{20} = 3$

καὶ $\quad x + y = 325$

Ὅθεν $\quad x = 243{,}75$ κυβ. παλ.

καὶ $\quad y = 81{,}25$ κυβ. παλ.

227. Θερμιδόμετρον περιέχει 70 γραμμάρια ὕδατος εἰς 10°. Χύνομεν ἐντὸς αὐτοῦ 50 γραμ. ὕδατος εἰς 50°. Ἡ θερμοκρασία τοῦ ἐν τῷ θερμιδομέτρῳ ὕδατος ἀνέρχεται εἰς 25°. Ποία εἶναι ἡ χωρητικότης τοῦ θερμιδομέτρου;

Λύσις:

$$(70 + A)\ (25 - 10) = 50\ (50 - 25)$$

καὶ $A = 13,33$

228. Θερμόμετρον ὑδραργυρικὸν ζυγίζει 60 γραμμάρια. Θερμαίνομεν εἰς 110° καὶ βυθίζομεν αὐτὸ ἐντὸς θερμιδομέτρου, τοῦ ὁποίου ἡ τιμὴ εἰς ὕδωρ εἶναι 160. Ἡ θερμοκρασία τοῦ ὕδατος ὑψοῦται ἀπὸ 6° εἰς 10°. Ζητεῖται νὰ προσδιορισθῇ τὸ βάρος τοῦ ὑδραργύρου τοῦ θερμομέτρου, καὶ τὸ βάρος τῆς ὑάλου, ἥτις ἀποτελεῖ τὸ θερμόμετρον.

Εἰδικὴ θερμότης ὑδραργύρου 0,03
» » ὑάλου 0,19

Λύσις: Ἔστω x τὸ βάρος τοῦ ὑδραργύρου τοῦ θερμομέτρου, καὶ y τὸ βάρος τῆς ὑάλου τοῦ θερμομέτρου.

Τότε (1) $x + y = 60$ γραμμάρια.

Ἡ ἀποδιδομένη θερμότης ὑπὸ τοῦ ὑδραργύρου, ὅστις ὑπὸ 110° γίνεται 10° εἶναι:

$$x \times 0,03\ (110 - 10) \text{ θερμίδες.}$$

Ἡ ὕαλος ὑπὸ τὰς αὐτὰς συνθήκας ἀποδίδει θερμότητα:

$$y \times 0,19\ (110 - 10) \text{ θερμίδας.}$$

Ἐξ ἄλλου τὸ θερμιδόμετρον θερμαινόμενον ἀπὸ 6° εἰς 10° κερδίζει

$$160\ (10 - 6) \text{ θερμίδας.}$$

Ἐξισοῦντες τὰς λαμβανομένας καὶ τὰς ἀποδιδομένας θερμότητας ἔχομεν:

$$x \times 0,03\ (110 - 10) + y \times 0,19\ (110 - 10) = 160\ (10 - 6).$$

$$\text{ἢ} \quad 3x + 19y = 640 \qquad (2).$$

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) λαμβάνομεν:

$$x = 28,75 \text{ γραμμάρια.}$$

καὶ $y = 31,25$ γραμμάρια

229. Ἐντὸς μάζης ὕδατος 2500 γραμμαρίων θερμοκρασίας 5°, ρίπτομεν 725 γραμμάρια πάγου ἀγνώστου θερμοκρασίας. Ἐπιτυγχάνομεν θερμικὴν ἰσορροπίαν καὶ εὑρίσκομεν ὅτι τὸ βάρος τοῦ πάγου ηὐξήθη κατὰ 64 γραμμάρια. Ποία ἦτο ἡ ἀρχικὴ θερμοκρασία τοῦ πάγου; Εἰδικὴ θερμότης τοῦ πάγου 0,5 θερμίδες. Θερμότης τήξεως πάγου 80 θερμίδες. Ἡ θερμοχωρητικότης τῶν τοιχωμάτων τοῦ δοχείου δὲν λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν.

Λύσις: Ἔστω x ἡ ἄγνωστος θερμοκρασία τοῦ πάγου εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ πειράματος. Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ τελικὴ θερμοκρασία εἶναι ἀναγκαίως 0°, ἀφοῦ τὴν στιγμὴν ταύτην ἔχομεν ἓν μῖγμα πάγου καὶ ὕδατος εἰς τὴν αὐτὴν θερμοκρασίαν. Ὁ πάγος διέρχεται ἀπὸ τὴν θερμοκρασίαν x εἰς 0° καὶ ἀπορροφᾷ.

$$725 \times 0{,}5 \times x \quad \text{θερμίδας.}$$

Τὸ ὕδωρ τοῦ θερμιδομέτρου ἀπὸ 5° εἰς 0° ἀποδίδει 2500×5 θερμίδας.

Τέλος 64 γραμ. ὕδατος εἰς 0° μετασχηματιζόμενα εἰς πάγον ἐλευθερώνουσι 64×80 θερμίδας.

Ἡ κερδηθεῖσα θερμότης εἶναι ἴση μὲ τὴν χαθεῖσαν, συνεπῶς θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν:

$$726 \times 0{,}5 \times x = 2500 \times 5 + 64 \times 80$$

$$\text{ἐξ οὗ} \quad x = \frac{17620}{362{,}5} = -48^\circ{,}6.$$

230. Δοχεῖον ἐκ σιδήρου, τοῦ ὁποίου τὸ βάρος εἶναι 7,500 χιλιόγραμμα, περιέχει 15 χιλιόγραμμα ἑνὸς σώματος, τοῦ ὁποίου τὸ σημεῖον τήξεως εἶναι 59°, ἡ θερμότης τήξεως 94, καὶ ἡ εἰδικὴ θερμότης 0,75 εἰς τὴν ὑγρὰν κατάστασιν, καὶ 0,32 εἰς τὴν στερεὰν κατάστασιν. Ποίαν ποσότητα θερμότητος θὰ ἀποδώσωσι τὸ δοχεῖον καὶ τὸ περιεχόμενον ἀπὸ 90° εἰς 40°; Εἰδ. θερμ. σιδήρου 0,11.

Λύσις: Ἡ ποσότης τῆς θερμότητος ἥτις χάνεται ὑπὸ τοῦ σιδήρου διὰ νὰ κατέλθῃ ἀπὸ 90° εἰς 40° εἰς μεγάλας θερμίδας εἶναι:

$$7{,}5 \times 0{,}11\ (90 - 40) = 41{,}25 \quad \text{θερμίδας.}$$

Ὑπὸ τὰς αὐτὰς συνθήκας, ἡ ποσότης τῆς θερμότητος ἥτις χάνεται ὑπὸ τοῦ σώματος εἶναι:

Ἵνα κατέλθῃ ἀπὸ 90° εἰς 59°.	$15 \times 0{,}75\ (90 - 59)$ θερμ.
Ἵνα στερεοποιηθῇ	15×94 »
Ἵνα κατέλθῃ ἀπὸ 59° εἰς 40°	$15 \times 0{,}32(59-40)$θερμ.
Τὸ ὅλον	1849,95 θερμίδες

Ἡ ὁλικὴ ποσότης θερμότητος ἥτις χάνεται ὑπὸ τοῦ δοχείου καὶ τοῦ περιεχομένου ὅταν ἀπὸ 90^0 γίνεται 40^0 θὰ εἶναι:

$$q = 41{,}25 + 1849{,}95 = 1891{,}20 \text{ θερμίδες.}$$

231. Ἐντὸς θερμιδομέτρου ἐκ χαλκοῦ, τὸ ὁποῖον ζυγίζει κενὸν p γραμμάρια, περιέχονται P γραμμάρια ὕδατος καὶ P′ γραμμάρια πάγου εἰς τὴν αὐτὴν θερμοκρασίαν. Διαβιβάζομεν ἐντὸς αὐτοῦ π γραμμάρια ἀτμοῦ ὕδατος θερμοκρασίας 100^0. Ποία εἶναι ἡ τελικὴ θερμοκρασία τοῦ μίγματος;

Εἰδικὴ θερμ. χαλκοῦ c

Θερμότης τήξεως πάγου l

Θερμότης ἐξαερώσεως ὕδατος λ.

Λύσις: Ἔστω x ἡ ζητουμένη θερμοκρασία, ἥν ὑποθέτομεν περιλαμβανομένην μεταξὺ 0^0 καὶ 100^0.

Τὸ βάρος π τοῦ ἀτμοῦ συμπυκνούμενον εἰς 100^0, μᾶς παρέχει μίαν ποσότητα θερμότητος ἴσην πρὸς π λ. θερμίδας. Ἡ ὑγροποίησις αὕτη δίδει π γραμ. ὕδατος εἰς 100^0, ἅτινα λαμβάνουν τὴν τελικὴν θερμοκρασίαν x, ἀποδίδοντα π (100—x) θερμίδας.

Ἐξ ἄλλου, ἀφοῦ τὸ θερμόμετρον περιέχει μῖγμα πάγου καὶ ὕδατος εἰς τὴν αὐτὴν θερμοκρασίαν, ἡ ἀρχικὴ αὕτη θερμοκρασία εἶναι ἀναγκαίως 0^0.

Τό βάρος P′ τοῦ πάγου τηκόμενον ἀπορροφᾷ P′l θερμίδας, παρέχων οὕτω P′ γραμ. ὕδατος εἰς 0^0.

Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ εἴπωμεν ὅτι τὸ θερμιδόμετρον περιέχει (P+P′) γραμ. ὕδατος, τὰ ὁποῖα διέρχονται ἀπὸ 0^0 εἰς θερμοκρασίαν x, ἀπορροφῶντα (P+P′) x θερμίδας.

Τὸ θερμιδόμετρον τοῦ ὁποίου τὸ βάρος εἶναι p καὶ ἡ εἰδικὴ θερμότης c, λαμβάνει διὰ λογαριασμόν του p c x θερμίδας.

Γνωρίζοντες ὅτι ἡ θερμότης ἡ λαμβανομένη εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀποδιδομένην, ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν:

$$\pi\lambda + \pi(100 - x) = p c x + (P + P')x + P'l$$

ἐξ οὗ

$$x = \frac{\pi(\lambda + 100) - P'l}{pc + P + P' + \pi}$$

232. Ποία μᾶζα ἀτμοῦ θερμοκρασίας 121^0 πρέπει νὰ συμπυκνωθῇ, ἵνα ἀχθῶσι 300 χιλιόγραμμα ὕδατος ἀπὸ 11^0 εἰς 28^0;

Λύσις: Ἡ θερμότης ἐξαερώσεως τοῦ ὕδατος εἰς t^0 εἶναι ἴση πρός $606{,}5 - 0{,}695\ t$.

Ἡ ἀποδιδομένη θερμότης ὑπὸ μιᾶς μάζης Μ ἀτμοῦ συμπυκνουμένου καὶ διερχομένου κατόπιν ἀπὸ 121^0 εἰς 28^0 θὰ εἶναι :

$$M\ (606{,}5 - 0{,}695 \times 121 + 121 - 28)$$

Ἐκ τῆς ἰσότητος $M\ (522{,}4 + 93) = 300 \times 17$

ἔχομεν $M = 8{,}28$ χιλιόγραμμα.

233. Κατὰ ποίαν ἀναλογίαν πρέπει νὰ μοιρασθῇ 1 χιλιόγραμμον ὕδατος 50^0 ἵνα ἡ ποσότης θερμότητος, τὴν ὁποίαν τὸ ἓν ἐκ τῶν μερῶν θὰ ἀποδώσῃ μεταβαῖνον εἰς τὴν κατάστασιν τοῦ πάγου εἰς 0^0, γίνῃ ἴση πρὸς τὴν ποσότητα τῆς θερμότητος, ἡ ὁποία πρέπει νὰ μεταδοθῇ εἰς τὸ ἄλλο μέρος, διὰ νὰ μετατραπῇ εἰς ἀτμὸν θερμοκρασίας 100^0 καὶ ὑπὸ τὴν πίεσιν τῶν 760 χιλιοστομέτρων ὑδραργύρου ; Θερμότης τήξεως πάγου 80 θερμίδες. Θερμότης ἐξαερώσεως τοῦ ὕδατος 537 θερμίδες.

Λύσις: Ἔστω x τὸ μέρος τοῦ ὕδατος τὸ μετατρεπόμενον εἰς πάγον, καὶ y τὸ δεύτερον μέρος τὸ μετατρεπόμενον εἰς ἀτμὸν 100^0.

Τότε ἔχομεν : $x + y = 1000$ γραμ. (1)

Ἡ θερμότης ἡ ἀποδιδομένη ὑπὸ τῶν x γραμ. διαμοιράζεται ὡς ἑξῆς :

Ψῦξις ἀπὸ 50^0 εἰς 0^0	50 x θερμίδες
Στερεοποίησις εἰς 0^0	80 x »
Ἄθροισμα	130 x θερμίδες

Θερμότης ἀπορροφωμένη ὑπὸ y γραμ. διαμοιράζεται ἐπίσης εἰς δύο μέρη.

Θερμότης ἀναγκαία διὰ νὰ θερμανθῇ ἡ μᾶζα y ἀπὸ 50^0 εἰς 100^0.	50 y θερμ.
Διὰ νὰ ἐξαερωθῇ	537 y »
Ἄθροισμα	587 y »

Συνεπῶς ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν :

$$130\ x = 587\ y \qquad (2)$$

Λύοντες τὸ σύστημα (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν :

$x = 818{,}7$ γραμμάρια

$y = 181{,}3$ γραμμάρια

234. Πόσας θερμίδας ἀποδίδουσι 50 λίτραι ἀέρος ψυχόμεναι ἀπὸ 25° εἰς 5°; Μᾶζα λίτρας ἀέρος 1,293 γραμ. Εἰδικὴ θερμότης ἀέρος 0,237.

Λύσις:

$$50 \times 1{,}293 \times 0{,}237\,(25-5) = 306{,}44 \text{ θερμίδες.}$$

Δ'. ΥΓΡΟΜΕΤΡΙΑ

235. Ἓν κυβικὸν μέτρον ἀέρος εἰς 20° περιέχει 10 γραμμάρια ἀτμῶν ὕδατος. Ποία εἶναι ἡ ὑγρομετρικὴ κατάστασις τοῦ ἀέρος τούτου ; $F_{20} = 17{,}4$ χιλιοστόμετρα.

Λύσις :

$$10 = \frac{1000}{1+20\times 0{,}00367} \times \frac{f}{76} \times 1{,}293 \times \frac{5}{8}.$$

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης ἐξάγομεν $f = 1{,}01$

$$\text{καὶ } \frac{f}{F} = \frac{1{,}01}{1{,}74} = 0{,}58$$

236. Δίδεται 1 λίτρον ἀέρος ὑγροῦ, τοῦ ὁποίου ἡ ὑγρομετρικὴ κατάστασις εἶναι 0,5 καὶ ἡ πίεσις 760 χιλιοστόμ. Συμπυκνοῦμεν τὸν ἀέρα τοῦτον μέχρι τοῦ σημείου ὥστε νὰ ἄρχεται ἡ ὑγροποίησις. Ζητεῖται 1ον. Ποῖαι θὰ εἶναι τὴν στιγμὴν ταύτην ἡ θερμοκρασία καὶ ἡ πίεσις ; 2ον. Ἐξακολουθοῦμεν τὴν συμπύκνωσιν μέχρις ὅτου τὸ ἥμισυ τοῦ ἀτμοῦ περιέλθῃ εἰς τὴν ὑγρὰν κατάστασιν. Ζητεῖται ποῖος θὰ εἶναι ὁ ὄγκος τὴν στιγμὴν ταύτην καὶ ποία ἡ πίεσις ; Ἡ μεγίστη τάσις τῶν ἀτμῶν τοῦ ὕδατος εἰς τὴν θερμοκρασίαν τοῦ πειράματος εἶναι 40 χιλιοστόμετρα.

Λύσις : Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν, ἡ ὑγρομετρικὴ κατάστασις εἶναι 0,5, ἡ τάσις τῶν ἀτμῶν εἶναι 20 χιλιοστ. Τὴν στιγμὴν ὅπου ἄρχεται ἡ ὑγροποίησις ὁ ἀὴρ εἶναι κεκορεσμένος. Ἡ τάσις του εἶναι 40 χιλιοστ. Ἔστω x ὁ ὄγκος τὴν στιγμὴν ταύτην. Κατὰ τὸν νόμον τοῦ Μαριόττου ἔχομεν : $1 \times 20 = x \times 40$

ἐξ οὗ $x = 0{,}5$ λίτραι.

Ὁ ξηρὸς ἀὴρ εἶχε κατ' ἀρχὰς μίαν πίεσιν :

$$760 - 20 = 740 \text{ χιλιοστόμετρα}$$

Ἡ πίεσίς του ὑπὸ ὄγκον 0,5 λίτρ. θὰ γίνῃ :

$$760 \times 2 = 1480 \text{ χιλιοστ.}$$

Ἡ τάσις ἀτμοῦ κεκορεσμένου εἶναι ἡ ἰδία εἰς ἕν ἀέριον ἢ εἰς τὸ κενόν, βλέπομεν ὅτι, ὁ ὄγκος τοῦ ὑγροῦ ἀέρος θὰ εἶναι 0,5 λίτρ. Ἡ πίεσις τοῦ ὑγροῦ ἀέρος θὰ εἶναι 1480 + 40 = 1520 χιλιοστόγραμμα.

2ον Ὅταν ὁ ἀτμὸς ὑγροποιεῖται, παραμένει κεκορεσμένος. Ἡ ἐλαστική του δύναμις εἶναι σταθερὰ καὶ ἴση πρὸς 30 χιλιοστόμετρα.

Ὅταν τὸ ἥμισυ τοῦ ἀτμοῦ συμπυκνωθῇ, ὁ ὄγκος του θὰ γίνῃ μικρότερος κατὰ τὸ ἥμισυ ἐκείνου ποῦ ἦτο, δηλαδὴ 0,25 λίτραι.

Ἡ πίεσις τοῦ ξηροῦ ἀέρος θὰ εἶναι 1480×2 = 2960 χιλιοστ. καὶ ἡ ὁλικὴ πίεσις :

$$2960 + 40 = 3000 \text{ χιλιοστ.} = 3 \text{ μέτρα.}$$

237. Ποία εἶναι ἡ ὑγρομετρικὴ κατάστασις τοῦ ἀέρος, ὅταν 3000 λίτραι ἀέρος περιέχουσι 20 γραμ. ἀτμῶν ὕδατος εἰς 18°, γνωστοῦ ὄντος ὅτι εἰς τὴν θερμοκρασίαν ταύτην ἡ μεγίστη ἐλαστικὴ δύναμις τῶν ἀτμῶν ὕδατος μετρεῖται δι' ὕψους ὑδραργύρου ἴσου πρὸς 15 χιλιοστόμετρα ;

Πυκνότης ἀτμῶν ὕδατος σχετικῶς πρὸς τὸν ἀέρα 0,622.

Λύσις : Ἔστω f ἡ ἄγνωστος τάσις τῶν ἀτμῶν ὕδατος ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ ἀέρος. Τὰ 20 γραμ. εἶναι τὸ βάρος τῶν 3000 λίτρων ἀτμοῦ ὕδατος εἰς τὴν θερμοκρασίαν 18° καὶ ὑπὸ πίεσιν f :

$$20 = 3000 \times 1{,}293 \times 0{,}622 \times \frac{f}{760} \times \frac{1}{1 + 0{,}00367 \times 17}$$

$$\text{ἐξ οὗ } f = \frac{20 \times 760 \times (1 + 0{,}00367 \times 18)}{3000 \times 1{,}293 \times 0{,}622} = 6{,}7 \text{ χιλιοστ.}$$

Ἡ ὑγρομετρικὴ κατάστασις εἶναι ἡ σχέσις τῆς νῦν τάσεως τοῦ ἀτμοῦ πρὸς τὴν ἀντιστοιχοῦσαν μεγίστην τάσιν εἰς τὴν αὐτὴν θερμοκρασίαν.

$$\text{Ἑπομένως θὰ εἶναι } \frac{6{,}7}{15} = 0{,}44$$

238. Ποία εἶναι ἡ μᾶζα τῶν 592 κυβ. ἑκατοστ. ἀέρος ὑγροῦ εἰς 15°, ὑπὸ πίεσιν 74 καὶ εἰς ὑγρομετρικὴν κατάστασιν 0,84 ; F_{15}=12,7 χιλιοστ.

Λύσις:

$$\frac{f}{F} = 0{,}84 \qquad f = 0{,}84 \times 1{,}27 = 1{,}067$$

$$M = \frac{592}{1+15\times0{,}00367} \times \frac{74-\frac{3}{8}.1{,}067}{76} \times 0{,}001293$$

καὶ $M = 0{,}668$ γραμμάρια.

239. Δύο λίτραι ἀέρος κατὰ τὸ ἥμισυ κεκορεσμένου ἀτμῶν εἰς 30° καὶ ἀρχικὴν πίεσιν 760 χιλιοστ. ἐτέθησαν εἰς πίεσιν 3,04 μέτρων ὑδραργύρου ἄνευ μεταβολῆς τῆς θερμοκρασίας. Πόσος θὰ γίνῃ ὁ ὄγκος των; Μεγίστη τάσις τῶν ἀτμῶν τοῦ ὕδατος εἰς 30° εἶναι $F_{30}=30{,}5$ χιλιοστόμ.

Λύσις: Ἀφοῦ ἡ ὑγρομετρικὴ κατάστασις εἶναι $\frac{1}{2}$, ἡ ποσότης τῶν ἀτμῶν τῶν περιεχομένων ἐντὸς τῶν 2 λίτρων ἀέρος εἶναι ἱκανὴ νὰ κορέσῃ 1 λίτρον τοῦ ἀέρος τούτου ὑπὸ τὰς αὐτὰς συνθήκας. Εἰς τὴν ἀρχικὴν πίεσιν, ἡ ἐλαστικὴ δύναμις τοῦ ξηροῦ ἀέρος εἶναι:

$$760 - \frac{30{,}5}{2} = 744{,}75 \text{ χιλιοστόμετρα.}$$

Ἐὰν εἰς τὴν πίεσιν τῶν 3040 χιλιοστ. ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ ἀτμὸς θὰ εἶναι κεκορεσμένος, ὁ ξηρὸς ἀὴρ θὰ ἔχῃ ὡς ἐλαστικὴν δύναμιν:

$$3040 - 30{,}5 = 3009{,}5 \text{ χιλιοστ.}$$

Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ x τὸν ὄγκον τοῦ ἀέρος τούτου, ὁ νόμος τοῦ Μαριόττου μᾶς δίδει:

$$2\times744{,}75 = x\times3009{,}5$$

ἐξ οὗ $$x = \frac{1489{,}5}{3009{,}5} = 0{,}494 \text{ λίτραι.}$$

Ὁ ὄγκος οὗτος εἶναι κατώτερος τῆς 1 λίτρας, καὶ πρέπει νὰ συμπεράνωμεν ὅτι ὁ ἀτμὸς εἶναι καλῶς κεκορεσμένος, καὶ ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ ὑγροῦ ἀέρος εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν εἶναι 0,494 λίτραι.

240. Ὡρισμένος ὄγκος ἀέρος κεκορεσμένος ἀτμῶν εἰς 30°, καταλαμβάνει ὄγκον 20 λίτρων ὑπὸ τὴν πίεσιν 760 χιλιοστομέτρων. Καταβιβάζομεν τὴν θερμοκρασίαν μέχρι 20° καὶ συγχρόνως ξηραίνομεν αὐτὸν μερικῶς κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε ἡ ὑγρομετρική του κατάστασις νὰ γίνῃ $\frac{3}{4}$ τῆς ἀρχικῆς εἰς τὴν θερμοκρασίαν ταύτην. Ζητεῖται πόσος ἔγινε ὁ ὄγκος του; Ἡ πίεσις μένει ἴση πρὸς 760 χιλιοστόμετρα.

Ἡ μεγίστη τάσις τῶν ἀτμῶν εἰς 30° εἶναι 0,0315 μ.
» » » » 20° » 0,0175 μ.
Συντελεστὴς διαστολῆς ἀερίων » 0,00367

Λύσις : Θὰ ὑποθέσωμεν ξηρὸν ἀέρα ὑπάρχοντα ἐντὸς τοῦ μίγματος. Κατ' ἀρχὰς ἡ πίεσίς του ἦτο :
760—31,5=728,5 χιλιοστόμ, ἀφοῦ ἡ τάσις τῶν ἀτμῶν εἶναι ἡ αὐτὴ ἐντὸς ἑνὸς ἀερίου ἢ ἐντὸς τοῦ κενοῦ εἰς τὴν αὐτὴν θερμοκρασίαν.

Εἰς τὸ τέλος τοῦ πειράματος ἡ πίεσις τῶν ἀτμῶν γίνεται :

$$\frac{3}{4}\times 17,5=13,1 \text{ χιλιοστόμετρα.}$$

Ἡ πίεσις τοῦ ξηροῦ ἀέρος θὰ εἶναι τότε :

$$760 - 13,1 = 746,9 \text{ χιλιοστόμετρα.}$$

Ἔστω x ὁ ὄγκος, τὸν ὁποῖον καταλαμβάνει ὁ ἀὴρ εἰς τὴν θερμοκρασίαν τῶν 20°. Ἐφαρμόζοντες τὸν τύπον τοῦ Gay — Lussac, ἔχομεν τὴν σχέσιν :

$$\frac{20\times 728,5}{1+0,00367\times 30}=\frac{x\times 746,9}{1+0,00367\times 20}$$

Ἐξ οὗ ἐξάγομεν $x = 18,6$ λίτρας.

241. Δοχεῖον 10 λίτρων χωρητικότητος εἶναι πλῆρες ξηροῦ ἀέρος εἰς 0° καὶ 76. Εἰσάγομεν ἐντὸς διὰ σταγονομέτρου 3 γραμμάρια ὕδατος καὶ θερμαίνομεν τὸ ὅλον εἰς 100°. Ζητεῖται 1ον. Ποία θὰ εἶναι τότε ἡ ὑγρομετρικὴ κατάστασις τοῦ ἀέρος τούτου ; 2ον. Ποία εἶναι ἡ ὁλικὴ πίεσις τοῦ ὑγροῦ τούτου ἀέρος ; Ἡ διαστολὴ τοῦ περικαλύμματος δὲν λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν.

Λύσις : $A = 100°$ $F = 76.$

Ὁ ὄγκος τῶν ἀτμῶν εἰς 0° καὶ 76 εἶναι :

$$\frac{3}{\frac{5}{8}\times 1,3} = 3,692 \text{ κυβ. παλάμαι.}$$

Ἐφαρμόζομεν εἰς τὸν ἀτμὸν τοῦ ὕδατος τὴν ἐξίσωσιν $VH=\frac{V'H'}{1+at}$.

$$3,692\times 76 = \frac{10\ H'}{1+\alpha\ 100}$$

$$H' = f = 38,3 \qquad \text{καὶ} \qquad \frac{f}{F} = \frac{38,3}{76}.$$

Ὁ ὑγρὸς ἀὴρ εἶναι μῖγμα τοῦ ὁποίου ἡ ἐλαστικὴ δύναμις εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ἐλαστικῶν δυνάμεων τοῦ ἀέρος καὶ τοῦ ἀτμοῦ.

Ἡ ἐλαστικὴ δύναμις τοῦ ξηροῦ ἀέρος δίδεται ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως:

$$V_0H_0 = \frac{V_1H_1}{1+\alpha t} \quad \text{ἢ} \quad 10\times 76 = \frac{10\,H_1}{1+\alpha 100}$$

$$H_1 = 103{,}9.$$

Ἡ ὁλικὴ πίεσις εἶναι : $H_1 + f = 103{,}9 + 38{,}3 = 142{,}2$,

242. Δοχεῖον συγκοινωνοῦν μετὰ μανομέτρου εἶναι πλῆρες ἀέρος κεκορεσμένου ἀτμῶν εἰς 20° καὶ εἰς πίεσιν 4 ἀτμοσφαιρῶν. Ὑψοῦμεν τὴν θερμοκρασίαν εἰς 100°. Ποία θὰ εἶναι ἡ νέα πίεσις τοῦ ὑγροῦ ἀέρος ; Ὁ ὄγκος τοῦ δοχείου παραμένει σταθερὸς καὶ ὑποτίθεται ὅτι ἡ πυκνότης τῶν ἀτμῶν τοῦ ὕδατος μεταβάλλεται ὡς ἡ πυκνότης τῶν ἀερίων. Ἡ ἐλαστικὴ δύναμις ἡ μεγίστη τῶν ἀτμῶν τοῦ ὕδατος εἰς 20° εἶναι 0,017 μέτρα, ἡ πυκνότης τῶν ἀτμῶν τοῦ ὕδατος εἶναι $\frac{5}{8}$.

Λύσις: Ἡ αὔξησις τῆς πιέσεως, ἣν ὑφίσταται ὁ ἀτμὸς τοῦ ὕδατος λόγῳ ὑψώσεως τῆς θερμοκρασίας τοῦ μίγματος, τοῦ ὁποίου ἀποτελεῖ μέρος, δὲν εἶναι ἀρκετὴ διὰ νὰ τὸν κάμῃ νὰ φθάσῃ τὸ σημεῖον τοῦ κόρου του εἰς 100°. Ἐφαρμόζοντες εἰς τὸν ἀτμὸν τὸν νόμον τῶν ἀερίων $\frac{V\,F}{1+\alpha t} = \frac{V'\,F'}{1+\alpha t'}$, θὰ ἔχωμεν ὡς τιμὴν τοῦ F' :

$$F' = \frac{F\,(1+\alpha t')}{1+\alpha t} = \frac{17\,(1+100\times 0{,}00367)}{(1+20\times 0{,}00267)} = 22 \text{ χιλιοστ.}$$

Ἡ τιμὴ αὕτη εἶναι πολὺ κατωτέρα τῆς τάσεως τοῦ ἀτμοῦ εἰς 100° ἥτις εἶναι 760 χιλιοστόμετρα.

Ἀλλὰ τότε τὸ μῖγμα τοῦ ἀέρος καὶ τῶν ἀτμῶν φέρεται ὡς ἓν μῖγμα ἀερίου καὶ δὲν χρειάζεται νὰ γνωρίσωμεν οὔτε τὴν τάσιν τοῦ ἀτμοῦ εἰς 20°, οὔτε τὴν πυκνότητα τῶν ἀτμῶν τοῦ ὕδατος.

Ἔχομεν ἀμέσως τὴν ζητουμένην πίεσιν, καλοῦντες αὐτὴν x :

$$\frac{4}{1+20\times 0{,}00367} = \frac{x}{1+100\times 0{,}00367}$$

ἐξ οὗ $\qquad x = 5{,}1$ ἀτμοσφαίρας.

Ε'. ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΘΕΡΜΟΤΗΤΟΣ. ΘΕΡΜΙΚΑΙ ΜΗΧΑΝΑΙ

243. Σφαῖρα ἐκ μολύβδου ἔχουσα ταχύτητα 500 μέτρων κατὰ δευτερόλεπτον ἐπιπίπτει ἐπὶ τοίχου ἀνθισταμένου. Ποία θὰ εἶναι ἡ ὕψωσις τῆς θερμοκρασίας ; Εἰδικὴ θερμότης στερεοῦ μολύβδου 0,0314, εἰδικὴ θερμότης ῥευστοῦ μολύβδου 0,0402, σημεῖον τήξεως 330°, θερμότης τήξεως 5,37.

Λύσις : Ἡ ἰσοδύναμος θερμότης πρὸς τὴν δρῶσαν δύναμιν ἥτις ἐξαφανίζεται τὴν στιγμὴν τῆς συγκρούσεως, ὑψώνει τὴν θερμοκρασίαν τοῦ στερεοῦ μολύβδου εἰς 330°, τὸν κάμνει νὰ τηχθῇ, καὶ ὑψώνει τὴν θερμοκρασίαν τοῦ τετηγμένου μολύβδου κατὰ x° :

$$\frac{m \,.\, 500^2}{2} \times \frac{1}{425} = m \times 0{,}0314 \times 330 + m \times 5{,}37 + m \times 0{,}0402x$$

Ἡ θερμοκρασία θὰ ὑψωθῇ εἰς 6955°.

244. Ὑδράργυρος πίπτει ἐξ ὕψους 5 μέτρων ἐπὶ ἐπιφανείας ἐστερημένης ἀγωγιμότητος. Κατὰ πόσους βαθμοὺς θὰ ὑψωθῇ ἡ θερμοκρασία του μετὰ τὴν πτῶσιν του ; Εἰδικὴ θερμότης ὑδραργύρου 0,033.

Λύσις : Διὰ m γραμμάρια ὑδραργύρου τὸ ἔργον τῆς πτώσεως εἶναι : $m \times 500 \times 981$ ἔργια.

Θερμότης ἰσοδύναμος εἰς θερμίδας : $\frac{m \times 500 \times 981}{4{,}17 \times 10^7} = m \times 0{,}033t = Q$

Ὕψωσις τῆς θερμοκρασίας $\frac{500 \times 981}{4{,}17 \times 10^7 \times 0{,}033} = 0^{\circ}{,}36.$

245. Νὰ ὑπολογισθῇ εἰς Ἰουλίους μονάδας ἡ ἐνέργεια ἥτις πρέπει νὰ καταναλωθῇ πρὸς ἀνάλυσιν 9 γραμμαρίων ὕδατος.

Λύσις : Ἡ ἐλευθερουμένη θερμότης διὰ τοῦ σχηματισμοῦ 9 γραμ. ὕδατος εἶναι 34500 θερμίδες.

Ἡ ἀντιστοιχοῦσα ἐνέργεια εἰς Ἰουλίους μονάδας εἶναι $34500 \times 4{,}18$.

246. Σφαῖρα μολυβδίνη ἀρχικῆς θερμοκρασίας 10°, ἀφίεται νὰ πέσῃ κατακορύφως ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω μετὰ ταχύτητος $υ_0$. Αὕτη συναντᾷ εἰς 300 μέτρων ἀπόστασιν ἐκ τοῦ σημείου τῆς πτώσεως ἕν ἐπίπεδον ἀπολύτως ἀνένδοτον καὶ ἀγωγιμότητος μὴ λαμβανομένης ὑπ' ὄψιν διὰ τὴν θερμότητα. Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ τιμὴ υ_0 ἵνα ἡ μολυβδίνη σφαῖρα τακῇ διὰ τῆς συγκρούσεως ;

Εἰδικὴ θερμότης μολύβδου	$c = 0{,}03$
Θερμοκρασία τήξεως	$t = 330^0$
Θερμότης τήξεως	$C = 5{,}4$ θερμίδες
Μηχανικὸν ἰσοδύναμον θερμίδος . .	$E = 4{,}18$ Ἰούλιαι
Ἐπιτάχυνσις τῆς βαρύτητος . . .	$g = 981$ C. G. S.

Λύσις : Ἔστω m ἡ μᾶζα τῆς σφαίρας. Διὰ νὰ τακῇ πρέπει νὰ ἀπορροφήσῃ :

$Q = m . c\,(330 - 10) + m . C = m\,(320\,c + C)$ θερμίδας, αἵτινες τιμῶνται :

$W = Q . E = m\,(320 c + C)\, 4{,}18 \times 10^7 = 62{,}7 \times 10^7\, m$ ἔργια.

Ἡ σφαῖρα πίπτουσα ἀποκτᾷ ἐνέργειαν :

$W_1 = m . g . h . = m \times 981 \times 30000 = 2{,}943 \times 10^7 m$ ἔργια.

Ἐφαρμόζομεν τὸ θεώρημα τῶν δρωσῶν δυνάμεων καλοῦντες υ_0 τὴν ἀρχικὴν ταχύτητα :

$$\frac{1}{2}\, m . \upsilon^2_0 + W_1 = W$$

ἐξ οὗ $\upsilon^2_0 = 11{,}9514 \times 10^8$

καὶ $\upsilon = 10^4\sqrt{11{,}9514} = 34570$ ἑκατοστόμετρα κατὰ δευτερόλεπτον=345,7 μέτρα κατὰ δευτερόλεπτον.

247. Ἕν γραμμάριον ἄνθρακος καιόμενον δίδει 7850 θερμίδας. Ποῖον εἶναι τὸ μηχανικὸν ἰσοδύναμον τῆς θερμότητος ταύτης εἰς ἔργια καὶ εἰς χιλιογραμμόμετρα ;

Λύσις :

Εἰς ἔργια : $7850 \times 4{,}17 + 10^7 = 32734{,}5 \times 10^7$

Εἰς χιλιογραμμόμετρα : $7850 \times 425 = 3336{,}15$.

248. Δοχεῖον μεταλλικὸν ἐγκλεῖον συμπεπυκνωμένον ἀέρα τίθεται ἐντὸς θερμιδομέτρου. Ἡ τιμὴ εἰς ὕδωρ τοῦ θερμιδομέτρου καὶ τοῦ περιεχομένου του εἶναι 10700 γραμμάρια. Ἀφίνομεν τὸν ἀέρα νὰ διαφύγῃ ἀποτόμως. Ὁ ῥέων ἀὴρ καταλαμβάνει 44 λίτρας εἰς πίεσιν 76

Παρατηροῦμεν εἰς τὸ θερμιδόμετρον μίαν ψῦξιν 0°,1. Ζητεῖται νὰ συμπεράνωμεν τὸ μηχανικὸν ἰσοδύναμον τῆς θερμίδος.

Λύσις :

Ἔργον εἰς ἔργια : $T = 1033 \times 981 \times 44000 = 1013373 \times 44000$.

Θερμότης παραχωρηθεῖσα εἰς τὸ θερμιδόμετρον :

$$Q = 10700 \times 0{,}1 = 1070$$

$$\frac{T}{Q} = 4{,}167 \times 10^7$$

249. Ποῖον εἶναι τὸ μέγεθος τῆς ἐξασκουμένης πιέσεως ὑπὸ ἀτμοῦ ὕδατος εἰς 153° ἐπὶ ἐπιφανείας 1 τετραγωνικοῦ μέτρου ; Ἡ μεγίστη ἐλαστικὴ δύναμις τοῦ ἀτμοῦ ὕδατος εἶναι 5 ἀτμοσφαιρῶν.

Λύσις : Ἡ πίεσις εἰς χιλιόγραμμα θὰ εἶναι :

$$5 \times 1{,}033 \times 10000 = 51650$$

Καὶ εἰς δύνας :

$$51650 \times 10000 \times 981 = 5066{,}86 \times 10^7$$

250. Ποία εἶναι ἡ ἀπόδοσις θερμικῆς μηχανῆς ἥτις καταναλίσκει 10 χιλιόγραμμα ἄνθρακος καθ' ὥραν, καὶ ὑψώνει κατὰ τὸν αὐτὸν χρόνον 30 κυβικὰ μέτρα ὕδατος εἰς ὕψος 50 μέτρων ;

Λύσις :

Κινητήριον ἔργον : 30000×50 χιλιογραμμόμετρα

Ἀνθιστάμενον ἔργον : $10 \times 8000 \times 425$ χιλιογραμμόμετρα.

$$\text{Ἀπόδοσις :} \quad \frac{30000 \times 50}{10 \times 8000 \times 425} = \frac{3}{68} = 0{,}044$$

251. Μηχανὴ 20 ἀτμοΐππων καταναλίσκει 56 χιλιόγραμμα ἄνθρακος καθ' ὥραν. Ποία εἶναι ἡ ἀπόδοσίς της ;

Λύσις : Τὸ κινητήριον ἔργον καθ' ὥραν εἶναι : $20 \times 75 \times 60 \times 60$ χιλιογραμμόμετρα.

Ἀνθιστάμενον ἔργον : $56 \times 8000 \times 425$

Ἡ ἀπόδοσις εἶναι τὸ πηλίκον : 0,028.

252. Μία μᾶζα μολυβδίνη ἴση πρὸς 10 γραμμάρια φθάνει ὁριζοντίως μετὰ ταχύτητος 250 μέτρων κατὰ δευτερόλεπτον ἐπὶ σφαίρας μολυβδίνης 450 γραμ. εἰς τὴν ὁποίαν προσκολλᾶται. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ θέρμανσις, ἥτις θὰ προκύψῃ ἐκ τῆς συγκρούσεως, τῆς μολυβδίνης σφαίρας οὔσης κατ' ἀρχὰς ἀκινήτου. Εἰδικὴ θερμότης μολύβδου = 0,03.

Λύσις: Ἡ ὁλικὴ μᾶζα (450+10) γραμμάρια ἀπορροφᾷ ὁλοσχερῶς τὴν ἐνέργειαν τῆς θερμότητος αὐξανομένην ἐκ τῆς κρούσεως· λαμβάνοντες δὲ 0,24 ὡς τιμὴν τοῦ θερμικοῦ ἰσοδυνάμου εἰς Ἰουλίους μονάδας, θὰ ἔχωμεν :

$$\left(m + m'\right) c\, t = \frac{0,24}{10^7} \times \frac{1}{2}\, m\, v^2$$

ἐξ οὗ
$$t = \frac{0,12}{10^7} \times \frac{m}{m+m'} \times \frac{v^2}{c}$$

Ἀριθμητικῶς:
$$t = \frac{0,12}{10^7} \times \frac{10}{460} \times \frac{(25)^2 \times 10^6}{0,03} = 5^0,43.$$

253. Ἀτμομηχανὴ 20 ἵππων καταναλίσκει 1 χιλιόγραμμον ἐλαίου κατὰ ὡριαῖον ἵππον. Ἡ ἑστία ἡ θερμαντικὴ εἶναι εἰς θερμοκρασίαν 180°. Ὁ συμπυκνωτὴς εἶναι εἰς θερμοκρασίαν 40°. Ἓν χιλιόγραμμον ἐλαίου καιόμενον δίδει 8000 μεγάλας θερμίδας. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἰσχύς, τὴν ὁποίαν θὰ ἔχῃ ἡ μηχανή, ἐὰν ὅλη ἡ παραγομένη θερμότης ἐκ τῆς καύσεως τοῦ ἐλαίου ἠδύνατο νὰ μετατραπῇ ὁλοσχερῶς εἰς ἔργον.

Λύσις: Εἰς ἓν δευτερόλεπτον ἡ μηχανὴ καταναλίσκει :

$$\frac{20}{3600} = \frac{1}{80} \text{ χιλιόγρ. ἐλαίου,}$$

ὅπερ ἀναπτύσσει $\dfrac{8000000}{180}$ μικρὰς θερμίδας.

Τοῦτο παριστᾷ μίαν ἰσχύν :

$$P = \frac{8 \times 10^6 \times 4,17}{180 \times 736} \text{ ἵππους.}$$

Ἤτοι 251,8 ἵππους.

V. ΑΚΟΥΣΤΙΚΗ.

254. Ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου εἰς τὸν ἀέρα εἰς 0° εἶναι 330,6 μέτρα· ποία εἶναι ἡ ταχύτης εἰς 30°;

Λύσις : $$V_{30} = 330,6\sqrt{1+\frac{30}{273}} = 348,45 \text{ μέτρα.}$$

255. Εἰς ποίαν θερμοκρασίαν ἡ ταχύτης τῆς μεταδόσεως τοῦ ἤχου εἰς τὸν ἀέρα εἶναι 336 μέτρα ;

Λύσις : $$330,6\sqrt{1+x.\ 0,00367} = 336$$
καὶ $$x = 8^{\circ},95.$$

256. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου ἐντὸς τοῦ ὑδρογόνου, ὅταν ἡ ταχύτης ἐντὸς τοῦ ἀέρος εἶναι 340 μέτρα.

Λύσις : $$V_{H} = \frac{340}{\sqrt{0,069}} = 1297,70 \text{ μέτρα.}$$

257. Ποῖον εἶναι τὸ μῆκος κύματος εἰς τὸν ἀέρα ἤχου, τοῦ ὁποίου ὁ ἀριθμὸς τῶν παλμῶν εἶναι 435, τῆς ταχύτητος μεταδόσεως τοῦ ἤχου εἰς τὸν ἀέρα οὔσης 331 μέτρα ;

Λύσις : $$\lambda = \frac{331}{435} = 0,761 \text{ μέτρα.}$$

258. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις, ἡ ὁποία χωρίζει δύο σταθμούς, γνωστοῦ ὄντος ὅτι ὁ κρότος τηλεβόλου διατρέχει τὴν ἀπόστασιν ταύτην ἐντὸς 20 δευτερολέπτων εἰς 22°.

Λύσις : $$e = 20\times330,6\sqrt{1+22\times0,00367} = 6869,87 \text{ μέτρα.}$$

259. Ποῖον εἶναι τὸ μῆκος κύματος εἰς τὸν ἀέρα ἤχου ἀντιστοιχοῦντος εἰς 40 παλμοὺς κατὰ δευτερόλεπτον, εἰς θερμοκρασίαν, καθ' ἣν ἡ ταχύτης τῆς μεταδόσεως τοῦ ἤχου εἰς τὸν ἀέρα εἶναι 336 μέτρα ;

Λύσις : $$\lambda = \frac{336}{40} = 8,4 \text{ μέτρα.}$$

260. Ποῖον εἶναι τὸ μῆκος κύματος ἐντὸς τοῦ ὕδατος, ἤχου ἀντιστοιχοῦντος εἰς 40 παλμοὺς κατὰ δευτερόλεπτον ; Ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου ἐντὸς τοῦ ὕδατος εἶναι 1435 μέτρα εἰς 8^0.

Λύσις : $$\lambda = \frac{1435}{40} = 35{,}87 \text{ μέτρα.}$$

261. Ὁ κινητὸς δίσκος μιᾶς σειρῆνος ἔχει 24 ὀπάς. Ποῖον εἶναι τὸ ὕψος τοῦ παραγομένου ἤχου, ὅταν κάμνει 1104 στροφὰς κατὰ λεπτόν ;

Λύσις : $24 \times \frac{1104}{60} = 441{,}6$ παλμοὶ διπλοῖ κατὰ δευτερόλεπτον.

262. Ζητεῖται τὸ βάθος φρέατος, γνωστοῦ ὄντος ὅτι, ὅταν λίθος ἀφίεται ἐλεύθερος εἰς τὸ στόμιον αὐτοῦ, ὁ κρότος τῆς πτώσεως τοῦ λίθου, ὅταν φθάνη εἰς τὸ ἐν τῷ φρέατι ὕδωρ, ἀκούεται 3 δευτερόλεπτα μετὰ τὴν στιγμὴν καθ' ἣν ἀφέθη ὁ λίθος ἐλεύθερος. Ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου κατὰ τὴν στιγμὴν τοῦ πειράματος εἶναι 340 μέτρα, καὶ τὸ $g =$ 9,8 μέτρα.

Λύσις : Παριστῶμεν διὰ t τὴν διάρκειαν τῆς πτώσεως τοῦ λίθου, καὶ διὰ ϑ τὴν διάρκειαν τῆς ἐπανόδου τοῦ ἤχου.

Τότε ἔχομεν : $x = \frac{1}{2} g\, t^2 = 340\, \vartheta. = 340\,(3 - t)$ ἀφοῦ $t + \vartheta = 3$. Ἀπαλείφοντες τὸ t ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν :

$$x^2 - 2\left[340 \times 3 + \frac{(340)^2}{9{,}8}\right] x + (340)^2 \times 3^2 = 0$$

$$x = 340.\ 3 + \frac{(340)^2}{9{,}8} \pm \sqrt{\frac{(340)^2}{9{,}8}\left[6.\ 340 + \frac{(340)^2}{9{,}8}\right]}.$$

καὶ $x = 40{,}8$

263. Χορδὴ τεινομένη διὰ βάρους 4 χιλιογράμμων ἀποδίδει ἦχον, ὅστις ἀντιστοιχεῖ εἰς 200 παλμοὺς κατὰ δευτερόλεπτον. Ζητοῦνται 1ον. Οἱ ἀριθμοὶ τῶν παλμῶν, οἵτινες θὰ ἀποδοθῶσιν ὑπὸ τῶν $\frac{4}{5}$, τῶν $\frac{2}{3}$, καὶ τοῦ $\frac{1}{2}$ τῆς χορδῆς. 2ον. Οἱ ἀριθμοὶ τῶν παλμῶν, οὓς θὰ ἀποδώση ἡ χορδή, τεινομένη ἀλληλοδιαδόχως ὑπὸ 9, 16, καὶ 25 χιλιογράμμων. 3ον. Οἱ ἀριθμοὶ τῶν παλμῶν δύο ἄλλων χορδῶν τοῦ αὐτοῦ μήκους καὶ τῆς αὐτῆς διαμέτρου, ὧν ἡ πυκνότης εἶναι τῆς μὲν μιᾶς 4 φοράς, τῆς δὲ ἄλλης 25 φορὰς μεγαλυτέρα.

Λύσις: Τὸ ὕψος τοῦ θεμελιώδους ἤχου μιᾶς χορδῆς δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου: $n = \frac{1}{2rl}\sqrt{\frac{gp}{\pi d}}$

1ον. Τὸ ὕψος εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογον τοῦ μήκους τῆς χορδῆς. Ἑπομένως τὸ ὕψος τοῦ ἀποδιδομένου ἤχου θὰ εἶναι:

διὰ $\frac{4}{5}$ τῆς χορδῆς: $200 \times \frac{5}{4} = 250$ παλμοὶ

διὰ τὰ $\frac{2}{3}$ » » $200 \times \frac{3}{2} = 300$ »

» » $\frac{1}{2}$ » » $200 \times 2 = 400$ »

2ον. Τὸ ὕψος εἶναι ἀνάλογον τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ τείνοντος βάρους. Ἐὰν λοιπὸν ὁ ἀριθμὸς τῶν παλμῶν, ὁ ἀντιστοιχῶν εἰς βάρος 4 χιλιογράμμων εἶναι 200, θὰ ἔχωμεν:

διὰ 9 χιλιογρ.: $200 \times \frac{3}{2} = 300$ παλμοὺς

» 16 » : $200 \times \frac{4}{2} = 400$ »

» 25 » : $200 \times \frac{5}{2} = 500$ »

3ον. Τὸ ὕψος ὁμοίων χορδῶν, διαφόρων ὅμως πυκνοτήτων, εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογον τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τῆς πυκνότητος. Ἐὰν διὰ χορδὴν πυκνότητος d τὸ ὕψος $n = 200$ παλμοί, θὰ ἔχωμεν:

Διὰ πυκνότητα 4d: $\frac{200}{2} = 100$ παλμοὺς

» » 25d: $\frac{200}{5} = 40$ »

264. Χορδὴ μήκους 50 ἑκατοστομέτρων καὶ ἔχουσα μᾶζαν 80 γραμμαρίων ἐκτελεῖ 100 παλμοὺς κατὰ δευτερόλεπτον. Ποῖον εἶναι εἰς γραμμάρια τὸ τεῖνον βάρος;

Λύσις: Ἐφαρμόζομεν τὸν τύπον: $n = \frac{1}{2rl}\sqrt{\frac{pg}{\pi d}}$.

$$n = \frac{1}{2 \times 50}\sqrt{\frac{P.981}{\frac{80}{50}}}$$, καὶ P = 163099 γραμμάρια.

265. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος ἤχου παραγομένου ὑπὸ σύρματος χαλυβδίνου, πυκνότητος 7,8, ἔχοντος μῆκος 1 μέτρου, διαμέτρου 1 χιλιοστομέτρου, καὶ τεινομένου ὑπὸ βάρους 42,54 χιλιογράμμων.

Λύσις:
$$n = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{0,05}\cdot\frac{1}{100}\sqrt{\frac{42540 \times 981}{3,1416 \times 7,8}}$$
καὶ n = 130,5.

266. Δύο χορδαί, ἡ μία ἐκ χάλυβος καὶ ἡ ἄλλη ἐκ χαλκοῦ, τοῦ αὐτοῦ μήκους καὶ τῆς αὐτῆς διαμέτρου, τείνονται ἐπὶ ἑνὸς ἠχομέτρου. Αἱ δύο χορδαὶ τεινόμεναι ὑπὸ ἴσων βαρῶν ἀποδίδουσιν διαδοχικῶς ἤχους ἀντιστοιχοῦντας εἰς 261 παλμοὺς ἡ πρώτη, καὶ εἰς 245 παλμοὺς ἡ δευτέρα. Τῆς πυκνότητος τοῦ χάλυβος οὔσης 7,82, νὰ ὑπολογισθῇ 1ον. Ἡ πυκνότης τοῦ χαλκοῦ. 2ον. Ποῖος πρέπει νὰ εἶναι ὁ λόγος τῶν τεινόντων βαρῶν τῶν δύο χορδῶν, ἵνα ἀποδώσωσι καὶ αἱ δύο τὸν αὐτὸν ἦχον;

Λύσις: Ὁ τύπος εἶναι $n = \frac{1}{2rl}\sqrt{\frac{pg}{\pi d}}$

1ον. Ἂν παραστήσωμεν διὰ x τὴν πυκνότητα τοῦ χαλκοῦ, θὰ ἔχωμεν:

$$\frac{261}{245} = \sqrt{\frac{x}{7,82}}$$

ἐξ οὗ $x = 7,82 \times \left(\frac{261}{246}\right)^2$ καὶ $x = 8,87$

2ον. Ἐὰν n εἶναι τὸ ὕψος ἤχου παραγομένου ὑπὸ χορδῆς πυκνότητος d, καὶ τεινομένης ὑπὸ βάρους p, n′ τὸ ὕψος ἤχου παραγομένου ὑπὸ χορδῆς πυκνότητος d′, καὶ τεινομένης ὑπὸ βάρους p′, ὀφείλομεν νὰ ἔχωμεν:

$$\frac{n}{n'} = \sqrt{\frac{p}{p'} \times \frac{d'}{d}}$$

Ἐδῶ τὰ ὕψη εἶναι ἴσα, ἑπομένως :

$$1 = \sqrt{\frac{p}{p'} \times \frac{8,87}{7,82}} \qquad \text{ἐξ οὗ} \qquad \frac{p}{p'} = \frac{7,82}{8,87} = 0,88.$$

267. Ποῖος εἶναι ὁ φθόγγος, τὸν ὁποῖον ἀποδίδει χορδὴ μήκους 50 ἑκατοστομέτρων, ζυγίζουσα 2,31 γραμμάρια κατὰ μέτρον, καὶ τεινομένη ὑπὸ βάρους 25 κοιλῶν ; Ποῖον εἶναι τὸ μῆκος κύματος τοῦ ἤχου τούτου εἰς 10° ;

Λύσις :

$$n = \frac{1}{2 \times 50} \sqrt{\frac{25000 \times 981}{0,0231}} = 326$$

ut_3 ἀντιστοιχεῖ εἰς 261 παλμούς, $326 = 261 \times \frac{5}{4}$ εἶναι mi_3

Τὸ μῆκος κύματος $\lambda = \frac{337}{326} = 1,033$ μέτρα.

268. Δύο ὅμοιαι χορδαὶ ἀποδίδουσι δύο ἤχους εἰς τὸ διάστημα τῆς πέμπτης. Τὸ τεῖνον βάρος διὰ τὴν βαρυτέραν νόταν εἶναι 2 χιλιόγραμμα, ποῖον εἶναι τὸ τεῖνον βάρος διὰ τὴν ἄλλην ;

Λύσις :

$$\frac{n'}{n} = \frac{3}{2} = \sqrt{\frac{P'}{2}} \qquad \text{καὶ} \quad P' = 4,5 \text{ χιλιόγραμμα.}$$

269. Σωλὴν ἀνοικτὸς μήκους 64,56 ἑκατοστομέτρων εἶναι πλήρης ἀέρος εἰς θερμοκρασίαν 10°. Ποῖον εἶναι τὸ ὕψος τοῦ θεμελιώδους ἤχου ; Ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου εἰς τὸν ἀέρα εἰς 10° εἶναι 337 μέτρα.

Λύσις :

$$n = \frac{2 \times 33700}{4 \times 64,56} = 261.$$

270. Ποῖον εἶναι τὸ μῆκος ἀνοικτοῦ ἠχητικοῦ σωλῆνος, ἔχοντος εἰς θερμοκρασίαν 10° ὡς θεμελιώδη φθόγγον τὸ si_3 ;

Λύσις : Ὁ ἀριθμὸς τῶν παλμῶν τοῦ si_3 εἶναι :

$$435 \; \frac{9}{8} = 489,375$$

$$489,375 = \frac{2 \times 33700}{4\,L} \qquad \text{καὶ} \quad L = 34,4 \text{ ἑκατοστόμετρα}$$

271. Ποῖον εἶναι τὸ μῆκος κλειστοῦ ἠχητικοῦ σωλῆνος, ὅστις πλήρης ἀέρος εἰς 0^0 δίδει θεμελιώδη ἦχον 261 παλμῶν ;

Λύσις: $261 = \frac{33700}{4\,L}$ καὶ $L = 32{,}28$ ἑκατοστόμετρα.

272. Ἠχητικὸς σωλὴν κλειστὸς παράγει τὸν τέταρτον ἁρμονικὸν si_4. Ποῖος εἶναι ὁ θεμελιώδης ἦχος, ὅν παράγει ὁ σωλήν, καὶ ποῖον τὸ μῆκος τοῦ σωλῆνος τούτου ;

Λύσις : Ζητήσωμεν κατ' ἀρχὰς τὸν ἀριθμὸν τῶν παλμῶν εἰς τὴν δευτέραν, ἀντιστοιχοῦντα εἰς τὸν φθόγγον si_4.

Γνωρίζομεν ὅτι $la_3 = 435$ παλμοὶ

$$si_3 = la_3 \times \frac{9}{8} \quad \text{»}$$

$$si_4 = si_3 \times 2 = 435 \times \frac{9}{8} \times 2 = 978{,}75 \text{ παλμοὶ}$$

Τὸ ὕψος ἑνὸς ἁρμονικοῦ τοῦ παραγομένου ὑπὸ κλειστοῦ σωλῆνος, δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$n = \left(2p+1\right) \frac{V}{4L} \qquad (1)$$

εἰς τὸν ὁποῖον p εἶναι εἷς ἀριθμὸς ἀκέραιος, V ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου καὶ L τὸ μῆκος τοῦ σωλῆνος.

Ὅταν ὁ σωλὴν ἀποδίδῃ τὸν τέταρτον ἁρμονικόν, ἔχομεν :

$$435 \times \frac{9}{8} \times 2 = 9 \times \frac{V}{4L}$$

ἐξ οὗ
$$\frac{V}{4L} = \frac{435}{4} \qquad (2)$$

Διὰ νὰ ἔχωμεν τὸν θεμελιώδη ἦχον, ἀρκεῖ εἰς τὸν τύπον (1) νὰ γίνῃ $p = 0$, ὅπερ, ὑπολογιζομένου καὶ τοῦ τύπου (2), δίδει :

$$n = \frac{V}{4L} = \frac{435}{4} = la_1.$$

Οὕτω ὁ ἀντιστοιχῶν φθόγγος εἰς τὸν θεμελιώδη ἦχον εἶναι la_1.

Ἐὰν τώρα θέλωμεν νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ μῆκος τοῦ σωλῆνος, ἀρκεῖ νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ἐκ τῆς σχέσεως (2) ἐξάγεται :

$$L = \frac{V}{435}$$

῾Υποθέτοντες τὴν θερμοκρασίαν ἴσην πρὸς 0° καὶ τὸν σωλῆνα τιθέμενον εἰς παλμικὴν κίνησιν οὐχὶ διὰ τοῦ ἀέρος, ὀφείλομεν νὰ ἀντικαταστήσωμεν τὸ V μὲ 331 μέτρα, ἀριθμὸν ὅστις ἐκφράζει τὴν ταχύτητα τοῦ ἤχου εἰς τὴν θερμοκρασίαν ταύτην.

$$L = \frac{331}{435} = 0{,}76 \text{ μέτρα.}$$

273. Ἠχητικὸς σωλὴν δίδει εἰς τὸν ἀέρα, εἰς θερμοκρασίαν 10°, ἦχον 256 παλμῶν κατὰ δευτερόλεπτον. Βυθιζόμενος ἐντὸς ὕδατος δίδει 1150 παλμούς. Ἡ ταχύτης V τοῦ ἤχου εἰς τὸν ἀέρα εἰς 10° εἶναι 337 μέτρα. Ποία εἶναι ἡ ταχύτης V′ τοῦ ἤχου ἐντὸς τοῦ ὕδατος ;

Λύσις :

$$\frac{V'}{V} = \frac{1150}{256} \quad \text{καὶ} \quad V' = 1514 \text{ μέτρα.}$$

VI. ΟΠΤΙΚΗ.

Α΄. ΦΩΤΟΜΕΤΡΙΑ

274. Ποία εἶναι ἡ ἀπόστασις τῆς γῆς ἀπὸ ἀστέρος, τοῦ ὁποίου τὸ φῶς διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὴν γῆν χρειάζεται 5 ἔτη ; Ταχύτης φωτὸς 300000 χιλιόμετρα κατὰ δευτερόλεπτον.

Λύσις :

$$d = 5 \times 365 \times 24 \times 60 \times 60 \times 300000$$

$$d = 47304 \times 10^{9} \text{ χιλιόμετρα.}$$

275. Ποῖον εἶναι τὸ ὕψος πύργου, ὅστις ῥίπτει σκιὰν 42 μέτρων μήκους, ὅταν στέλεχος κατακόρυφον ὕψους 1 μέτρου ῥίπτει σκιὰν 60 ἑκατοστομέτρων ;

Λύσις : $$\frac{H}{1} = \frac{4200}{60} = 70 \text{ μέτρα}$$

276. Δύο φωτειναὶ πηγαὶ πολὺ μικραί, τῶν ὁποίων αἱ ἐντάσεις εἶναι μεταξύ των ὡς οἱ ἀριθμοὶ 1 καὶ 4, εὑρίσκονται εἰς ἀπόστασιν 2 μέτρων ἡ μία τῆς ἄλλης. Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς εὐθείας, ἥτις τὰς ἑνώνει, σημεῖον, ἐξ ἴσου φωτιζόμενον ὑφ' ἑκάστης ἐξ αὐτῶν.

Λύσις : Ἔστω C τὸ ζητούμενον σημεῖον, ἔστω δὲ x ἡ ἀπόστασίς του ἀπὸ τῆς φωτεινῆς πηγῆς Α. Αἱ ποσότητες τοῦ φωτός, αἱ λαμβανόμεναι εἰς τὸ C ἐκ μέρους τῶν δύο πηγῶν, εἶναι ἀνάλογοι τῶν ἐντάσεων τῶν πηγῶν, καὶ ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τοῦ τετραγώνου τῆς ἀποστάσεώς των ἀπὸ τὰ σημεῖα Α καὶ Β. Συνεπῶς ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος θὰ εἶναι :

$$\frac{1}{x^2} = \frac{4}{(2-x)^2}$$

ἐξ οὗ

$$4 - 4x + x^2 = 4x^2$$

$$3x^2 + 4x - 4 = 0$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16+48}}{6} = \frac{-4 \pm 8}{6}$$

$$x' = \frac{2}{3} \quad \text{καὶ} \quad x'' = -2$$

277. Δύο φλόγες ἐντάσεως 16 καὶ 9 ἀπέχουσιν ἀλλήλων 140 ἑκατοστόμετρα. Εἰς ποῖον σημεῖον τῆς εὐθείας ἥτις τὰς ἑνώνει, πρέπει νὰ τοποθετηθῇ διάφραγμα, τὸ ὁποῖον νὰ φωτίζεται ἐξ ἴσου ὑπὸ τῶν δύο φωτεινῶν πηγῶν ;

Λύσις : Ἔστω x ἡ ἀπόστασις τοῦ διαφράγματος ἀπὸ τῆς ἰσχυροτέρας φωτεινῆς πηγῆς.

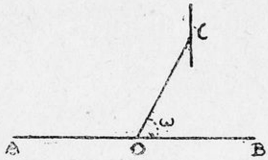
Τότε ἔχομεν : $$\frac{16}{x^2} = \frac{9}{(140-x)^2}$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη μᾶς δίδει δύο ῥίζας :

$$x = 80 \qquad \text{καὶ} \qquad x = 560$$

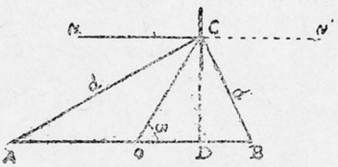
278. Δύο φωτειναὶ πηγαὶ Α καὶ Β ἔχουσιν ἐντάσεις I καὶ I' αἵτινες ἔχουσιν λόγον $\frac{I}{I'} = \sqrt{3}$. Πέριξ τοῦ σημείου Ο, μέσου τῆς ΑΒ, περιστρέφεται στέλεχος μήκους OC = OA εἰς τὸ ἄκρον C τοῦ ὁποίου εὑρίσκεται διάφραγμα λευκὸν στερεωμένον ὥστε νὰ εἶναι πάντοτε κάθετον ἐπὶ τῆς AB. Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἡ γωνία $\omega = COB$, διὰ τὴν ὁποίαν αἱ δύο ὄψεις τοῦ διαφράγματος νὰ φωτίζωνται ἐξ ἴσου ὑπὸ τῶν δύο φωτεινῶν πηγῶν.

Λύσις: Ἂν ἡ ἔντασις τῆς A εἶναι ἀνωτέρα τῆς B, τὸ σημεῖον C εἶναι πλησιέστερον πρὸς τὸ B παρὰ πρὸς τὸ A.



Ἔστω d ἡ ἀπόστασις AC καὶ d′ ἡ ἀπόστασις CB. Τὸ τρίγωνον ACB εἶναι ὀρθογώνιον εἰς C, συμπεραίνομεν ἀμέσως ὅτι ἡ γωνία προσπτώσεως ACN τῆς ἀκτῖνος AC μετὰ τῆς καθέτου NC, εἶναι ἴση πρὸς $\frac{\omega}{2}$ καὶ ὅτι ἡ γωνία προσπτώσεως N′CB ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν ἀκτῖνα BC εἶναι τὸ συμπλήρωμα τῆς $\frac{\omega}{2}$. Ἐφαρμόζοντες τὸν νόμον τῶν συνημιτόνων καὶ καλοῦντες E_1 τὸν φωτισμὸν τὸν παραγόμενον ὑπὸ τοῦ A, καὶ E_2 τὸν παραγόμενον ὑπὸ τοῦ B, θὰ ἔχωμεν

$$E_1 = \frac{I \,\sigma\upsilon\nu \frac{\omega}{2}}{d^2}$$



$$\kappa\alpha\grave{\iota} \quad E_2 = \frac{I' \,\eta\mu \,\frac{\omega}{2}}{d'^2}$$

Καὶ ἀφοῦ E_1 πρέπει νὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ E_2, ἐξάγομεν ἐκ τῶν δύο ἰσοτήτων τὴν σχέσιν :

$$\frac{I\, d'^2}{I'\, d^2} = \varepsilon\varphi \cdot \frac{\omega}{2} \qquad (1)$$

Ἐξ ἄλλου δυνάμεθα νὰ ἐκφράσωμεν τὰ d καὶ d′ συναρτήσει τῆς γωνίας ω, καὶ τότε ἔχομεν :

$$d' = \frac{CD}{\sigma\upsilon\nu \,\frac{\omega}{2}}$$

$$\kappa\alpha\grave{\iota} \quad d = \frac{CD}{\eta\mu \cdot \frac{\omega}{2}}$$

ἐξ οὗ συμπεραίνομεν :

$$\frac{d'^2}{d^2} = \frac{\eta\mu^2\frac{\omega}{2}}{\sigma\upsilon\nu^2\frac{\omega}{2}} = \varepsilon\varphi^2\,\frac{\omega}{2}$$

Ἡ ἰσότης (1) γίνεται τότε :

$$\frac{I}{I'}\,\varepsilon\varphi^2\,\frac{\omega}{2} = \frac{\varepsilon\varphi.\,\omega}{2}$$

ἢ

$$\varepsilon\varphi.\,\frac{\omega}{2} = \frac{I'}{I}.$$

Ἔστω τώρα $\frac{I}{I'} = \sqrt{3}$. $\varepsilon\varphi\,\frac{\omega}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ εἶναι ἡ ἐφαπτομένη τῆς γωνίας τῶν 30^0.

Θὰ ἔχωμεν λοιπὸν ἰσότητα τῶν δύο φωτισμῶν ἐπὶ τῶν δύο ὄψεων τοῦ διαφράγματος ὅταν τὸ στέλεχος OC θὰ σχηματίζῃ μετὰ τῆς πλευρᾶς τῆς πηγῆς τῆς μικροτέρας ἐντάσεως γωνίαν 60^0 μετὰ τῆς εὐθείας AB.

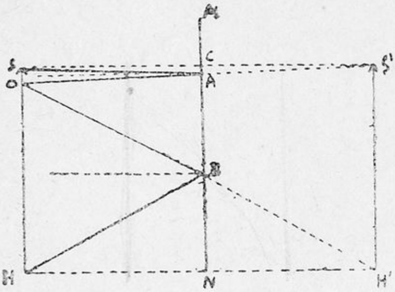
Β΄. ΑΝΑΚΛΑΣΙΣ ΦΩΤΟΣ

α΄. Ἐπίπεδα κάτοπτρα.

279. Παρατηρητὴς SH, τοῦ ὁποίου τὸ ὕψος εἶναι 1,70 μέτρα, εὑρίσκεται ἀπέναντι ἐπιπέδου κατόπτρου AB ὀρθογωνίου καὶ κατακορύφου. Ζητεῖται εἰς ποῖον ὕψος ἄνωθεν τοῦ ἐδάφους πρέπει νὰ τοποθετηθῇ τὸ κατώτερον ἄκρον B τοῦ κατόπτρου, καὶ ποῖον πρέπει νὰ εἶναι τὸ ὕψος τοῦ κατόπτρου, ἵνα ὁ παρατηρητὴς παρατηρῆται ὁλόκληρος, οἱαδήποτε καὶ ἂν εἶναι ἡ ἀπόστασίς του ἀπὸ τοῦ κατόπτρου ; Ὑποθέτομεν ὅτι ὁ ὀφθαλμὸς O εἶναι 10 ἑκατοστόμετρα ἀπὸ τῆς κορυφῆς τῆς κεφαλῆς.

Λύσις : Ὑποθέσωμεν τὸ κάτοπτρον MN μεγαλείτερον τοῦ παρατηρητοῦ καὶ τοποθετημένον κατακορύφως ἐπὶ τοῦ ἐδάφους. Ἂς ζητήσωμεν τὸ τμῆμα τοῦ MN τὸ χρήσιμον διὰ τὸ ὕψος τοῦ παρατηρητοῦ

SH καὶ τοῦ ὁποίου ὁ ὀφθαλμὸς εἶναι εἰς τὸ σημεῖον O. Τὸ εἴδωλον τοῦ SH εἶναι ἡ εἰκὼν ἡ συμμετρικὴ S'H'. Ἵνα ὁ παρατηρητὴς παρατηρῇ τὸ σημεῖον H', πρέπει ἡ ὀπτικὴ ἀκτίς OH' νὰ συναντήσῃ τὸ



κάτοπτρον, ἑπομένως νὰ ἀνακλασθῇ εἰς τὸ σημεῖον B. Συνεπῶς ἡ μεγίστη ἀπόστασις τοῦ κατωτέρου ἄκρου τοῦ κατόπτρου ἀπὸ τοῦ ἐδάφους εἶναι ἡ BN.

Ἔχομεν : $BN = \frac{OH}{2}$ ἢ $BN = \frac{1{,}60}{2} = 0{,}80$ μ.

Ἵνα ὁ παρατηρητὴς ἴδῃ τὴν κορυφὴν τοῦ εἰδώλου, πρέπει ἡ ὀπτικὴ ἀκτὶς OS' νὰ συναντᾷ τὸ κάτοπτρον. Ἑπομένως τὸ ἐλάχιστον μέγεθος τοῦ κατόπτρου πρέπει νὰ εἶναι τὸ BA.

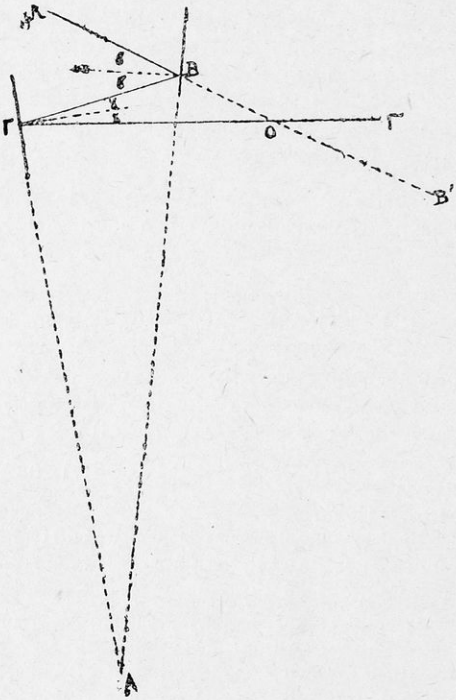
Ἀλλὰ $AB = \frac{S'H'}{2} = \frac{SH}{2}$ ἢ $BA = \frac{1{,}70}{2} = 0{,}85$ μ.

Συνεπῶς τὸ μέγεθος τοῦ κατόπτρου ὀφείλει νὰ εἶναι τὸ ὀλιγώτερον τὸ ἥμισυ τοῦ μεγέθους τοῦ ἀντικειμένου, καὶ ἡ ἀπόστασις τοῦ κατωτέρου ἄκρου τοῦ κατόπτρου ἀπὸ τοῦ ἐδάφους πρέπει νὰ εἶναι τὸ πολὺ ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ἀποστάσεως τῆς κατακορύφου τοῦ ὀφθαλμοῦ τοῦ παρατηρητοῦ ἀπὸ τοῦ ἐδάφους.

280. Ἔστωσαν δύο ἐπίπεδα κάτοπτρα B καὶ Γ κάθετα πρὸς τὸ ἐπίπεδον τῆς εἰκόνος. Νὰ δειχθῇ ὅτι, ἐὰν μία ἀκτὶς φωτεινὴ πέσῃ ἐπὶ τοῦ κατόπτρου Γ, ἀφοῦ ἀνακλασθῇ πρῶτον εἰς τὸ B, ἡ δευτέρα, ἀνακλωμένη, σχηματίζει μετὰ τῆς προσπιπτούσης εἰς τὸ B γωνίαν διπλασίαν τῆς γωνίας τῶν δύο κατόπτρων.

Λύσις: Ἔστωσαν Β καὶ Γ αἱ τομαὶ τῶν δύο κατόπτρων, καθέτων πρὸς τὸ ἐπίπεδον τῆς εἰκόνος. Ἔστω RB ἀκτὶς προσπίπτουσα ἐπὶ τοῦ Β καὶ ΓΟ ἡ ἀνακλωμένη ἀκτὶς ἐπὶ τοῦ δευτέρου κατόπτρου Γ.

Ἡ σχηματιζομένη γωνία ὑπὸ τῶν δύο διευθύνσεων RB καὶ ΓΟ



εἶναι ἡ γωνία Γ′ΟΒ′ ἢ ἡ ἴση πρὸς αὐτὴν ΓΟΒ. Πρέπει νὰ δειχθῇ ὅτι ΓΟΒ=2ΓΑΒ. Ἔστω β ἡ γωνία προσπτώσεως ἐπὶ τοῦ Β καὶ γ ἡ γωνία προσπτώσεως ἐπὶ τοῦ Γ.

Εἰς τὸ τρίγωνον ΒΟΓ ἔχομεν:

$$\text{γωνία } O + (180^\circ - 2\beta) + 2\gamma = 180^\circ$$

ἐξ οὗ $\quad$ γωνία $O = 2\,(\beta - \gamma)$

Εἰς τὸ τρίγωνον ΒΑΓ ἔχομεν ἐπίσης:

γωνία $A + (90^\circ + \gamma) + (90^\circ - \beta) = 180^\circ$

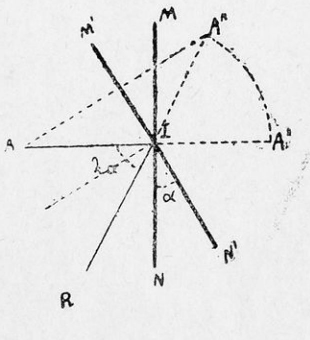
ἐξ οὗ $\quad$ γωνία $A = \beta - \gamma$

ἑπομένως $\quad$ γωνία $O = 2A$ γωνίαν.

281. Ἓν φωτεινὸν φαινόμενον ἐπαναλαμβάνεται 435 φορὰς κατὰ δευτερόλεπτον. Βλέπει τις τοῦτο παρατηρῶν τὰ εἴδωλά του τὰ διαδοχικὰ ἐντὸς ἐπιπέδου κατόπτρου τοποθετημένου εἰς ἀπόστασιν 1 μέτρου ἀπὸ τῆς φωτεινῆς πηγῆς, τὸ ὁποῖον στρέφεται καὶ ἐκτελεῖ 5 στροφὰς κατὰ δευτερόλεπτον. Ζητεῖται ἡ ἀπόστασις ἥτις χωρίζει δύο συνεχῆ εἴδωλα τοῦ φαινομένου.

Λύσις: Ἔστω Α΄ τὸ εἴδωλον τοῦ φαινομένου εἰς χρόνον t, καὶ Α΄΄ τὸ εἴδωλον εἰς χρόνον $t + \dfrac{1}{435}$.

Κατὰ τὸ $\dfrac{1}{435}$ τοῦ δευτερολέπτου τὸ κάτοπρον ἔχει στραφῆ κατὰ γωνίαν α καὶ ἡ ἀνακλωμένη ἀκτὶς IR ἔχει στραφῆ κατὰ 2α. Τὸ δεύτερον εἴδωλον Α΄΄ εὑρίσκεται ἐπὶ τόξου περιφερείας ἀκτῖνος ΙΑ΄ ἴσης πρὸς 1 μέτρον, καὶ ἡ ἀπόστασίς του ἀπὸ τοῦ πρώτου Α΄εἶναι αἰσθητῶς ἴση πρὸς τὸ μέγεθος τοῦ τόξου Α΄Α΄΄.

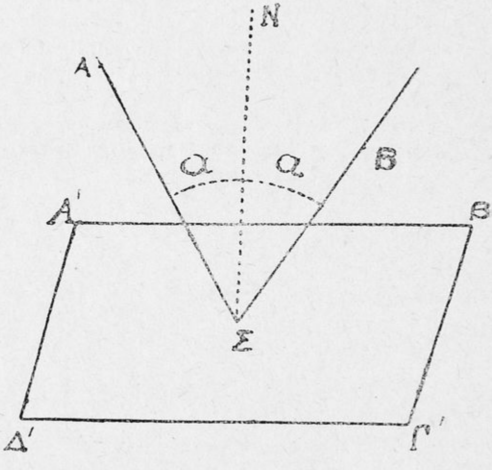


Τοῦ ἀριθμοῦ τῶν στροφῶν ὄντος 5, ἡ τιμὴ τῆς α εἰς ἀκτίνια εἶναι: $\dfrac{2\pi \times 5}{435} = \dfrac{10\pi}{435}$. Τὸ μῆκος ΑΑ΄ ἐκφραζόμενον εἰς ἑκατοστόμετρα εἶναι:

$$\frac{2 \times 10 \times 3{,}1416 \times 100}{435} = 14{,}4 \text{ ἑκατοστόμετρα.}$$

282. Δύα φωτειναὶ πηγαὶ Α καὶ Β τῆς αὐτῆς ἐντάσεως φωτίζουσι μίαν μικρὰν ἐπιφάνειαν Σ. Αἱ δύο αὗται πηγαὶ δύνανται νὰ μετατεθῶσι ἐπὶ δύο εὐθειῶν ΣΑ καὶ ΣΒ καὶ σχηματίζουσι μετὰ τῆς καθέτου ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας γωνίας ἴσας. Νὰ εὑρεθῇ ἡ σχέσις ἥτις πρέπει νὰ ὑφίσταται μεταξὺ τῶν ἀποστάσεων $ΣΑ = x$ καὶ $ΣΒ = y$, ἵνα ἡ μικρὰ ἐπιφάνεια διατηρῇ σταθερὸν φωτισμόν.

Λύσις: Ἔστω α ἡ γωνία τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ κάθετος ΣΝ μετὰ τῶν διευθύνσεων ΣΑ καὶ ΣΒ.



Αἱ ποσότητες τοῦ φωτὸς αἱ λαμβανόμεναι εἰς τὸ Σ ὑπὸ τῆς μονάδος τῆς ἐπιφανείας, εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τοῦ τετραγώνου τῆς ἀποστάσεως ἀπὸ τῆς πηγῆς, καὶ ἀνάλογοι τῶν συνημιτόνων τῆς κλίσεως τῶν ἀκτίνων.

Αὗται θὰ ἔχωσιν ἀμοιβαίως ὡς τιμάς:

$\frac{I}{x^2}$συν α καὶ $\frac{I}{y^2}$συν α ὅπου Ι ἡ ἔντασις ἑκάστης τῶν πηγῶν Α καὶ Β.

Ἑπομένως κατὰ τὸ πρόβλημα πρέπει νὰ ἔχωμεν :

$$\frac{I}{x^2}\text{συν }\alpha + \frac{I}{y^2}\text{συν }\alpha = \text{σταθερὸν}$$

δηλαδὴ $$I\,\text{συν }\alpha\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right) = \text{σταθερὸν}$$

Ὀφείλουσιν συνεπῶς τὸ x καὶ y νὰ ἐκπληροῦν τὴν σχέσιν :

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2} = \text{σταθερόν.}$$

β΄. Σφαιρικὰ κάτοπτρα.

283. Ἡ φλὸξ κηρίου ἔχει ὕψος 2 ἑκατοστὰ καὶ εὑρίσκεται καθέτως ἐπὶ τοῦ κυρίου ἄξονος κοίλου σφαιρικοῦ κατόπτρου 30 ἑκατοστῶν ἑστιακῆς ἀποστάσεως καὶ εἰς ἀπόστασιν 40 ἑκατοστομέτρων ἀπὸ τῆς κορυφῆς τούτου (ἡ βάσις τῆς φλογὸς εἶναι ἐπὶ τοῦ ἄξονος). Ζητεῖται εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τῆς κορυφῆς θὰ σχηματισθῇ τὸ εἴδωλον καὶ ποῖον τὸ μέγεθός του ;

Λύσις: Τύπος : $$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=\frac{1}{f}$$

Ἡ θέσις δίδεται ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως : $\frac{1}{p'}=\frac{1}{30}-\frac{1}{40}=\frac{1}{120}$.

Εἴδωλον ἀντεστραμένον : $p' = 120$.

Τὸ μέγεθος τοῦ εἰδώλου εἶναι : $\frac{I}{O}=\frac{120}{40}=3$ ἐξ οὗ $I = 6$ ἑκστ.

284. Ποία εἶναι ἡ διάμετρος τοῦ εἰδώλου τοῦ Ἡλίου, τοῦ σχηματιζομένου ὑπὸ κοίλου σφαιρικοῦ κατόπτρου ἀκτῖνος 2 μέτρων καὶ τοῦ ὁποίου ὁ κύριος ἄξων διευθύνεται πρὸς τὸ κέντρον τοῦ ἄστρου ; Ἡ φαινομένη διάμετρος τοῦ Ἡλίου εἶναι 32 πρῶτα λεπτά.

Λύσις: Τὸ εἴδωλον θὰ σχηματισθῇ εἰς τὸ ἑστιακὸν ἐπίπεδον. Θὰ εἶναι κύκλος ἀκτῖνος ΓΑ.

Τὸ σημεῖον Γ εἶναι τὸ εἴδωλον τοῦ κέντρου, καὶ τὸ σημεῖον Α τὸ εἴδωλον ἑνὸς σημείου τοῦ ἄκρου τοῦ ἡλίου.

Ἔχομεν δέ :
$$\text{ΑΓ} = \text{ΓΟ εφ } 16'$$
$$\text{ΑΓ} = \text{εφ } 16'$$
$$\text{ΑΑ}' = 2\text{ εφ } 16'$$

Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ ἐφαπτομένη τοῦ τόξου 16′ συμπίπτει μετὰ τοῦ τόξου 16′, ἡ τιμὴ τούτου εἰς περιφέρειαν ἀκτῖνος 1 μέτρου εἶναι

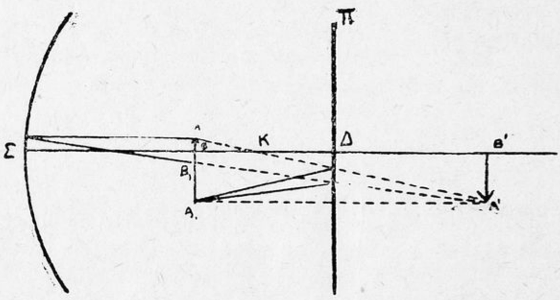
$$l = \frac{\pi \times 16}{180 \times 60}$$

$$l = 0{,}46 \text{ ἑκατοστόμετρα}$$

ἐξ οὗ $\quad AA' = 0{,}92$ ἑκατοστόμετρα.

285. Εἰς ἀπόστασιν 1,40 μ. ἀπὸ τῆς κορυφῆς Σ κοίλου σφαιρικοῦ κατόπτρου ἀκτῖνος 2 μέτρων, τίθεται μικρὸς φωτεινὸς κύκλος ἀκτῖνος 1 ἑκατοστομ,, τοῦ ὁποίου τὸ κέντρον συμπίπτει μετὰ τοῦ κυρίου ἄξονος. Ζητεῖται εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τῆς κορυφῆς Σ πρέπει νὰ τοποθετηθῇ ἐπίπεδον κάτοπτρον κάθετον πρὸς τὸν ἄξονα ἵνα τὸ κέντρον τοῦ εἰδώλου συμπέσῃ μετὰ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου. Ποία θὰ εἶναι ἡ διάμετρος τοῦ κύκλου τοῦ εἰδώλου τούτου ;

Λύσις : 1ον. Ἔστω ΑΒ ἡ ἀκτὶς τοῦ δοθέντος κύκλου. Προτοῦ τοποθετηθῇ τὸ ἐπίπεδον κάτοπτρον εἰς Δ, τὸ εἴδωλον τοῦ ΑΒ ὡς πρὸς τὸ



κοῖλον κάτοπτρον σχηματίζεται εἰς Α′Β′. Ἡ παρεμβολὴ τοῦ ἐπιπέδου κατόπτρου ἔχει ὡς σκοπὸν νὰ δώσῃ εἴδωλον πραγματικόν A_1B_1 συμμετρικὸν τοῦ εἰδώλου Α′Β′ ὡς πρὸς τὸ κάτοπτρον Π.

Τὸ κάτοπτρον Π πρέπει συνεπῶς νὰ εὑρίσκεται εἰς ἓν σημεῖον Δ μέσον τῆς εὐθείας ΒΒ′ ὅπερ χωρίζει τὸ ἀντικείμενον ΑΒ τοῦ εἰδώλου του $A'B'$, καὶ εἰς ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ Σ ἔστω d, τοιαύτην ὥστε νὰ ἔχωμεν :

$$d = \Sigma B + \frac{BB'}{2} = p + \frac{p' - p}{2} = \frac{p + p'}{2}$$

Ὑπολογίζομεν τὸ p′ ἐκ τοῦ γενικοῦ τύπου· $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}$.

$$\frac{1}{140} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{100} \quad \text{ἐξ οὗ} \quad p' = 3{,}50 \text{ μέτρα.}$$

Ἐπομένως : $d = \dfrac{3{,}50 + 1{,}40}{2}$ καὶ $d = 2{,}45$ μέτρα.

2ον. Ὅταν τὸ εἴδωλον $A'B' = A_1B_1$, τὸ μέγεθός του i δίδεται ὑπὸ τῆς σχέσεως :

$$\frac{i}{o} = \frac{p'}{p} \quad \text{ἐξ οὗ} \quad \frac{i}{1} = \frac{350}{140}$$

καὶ $i = 2{,}5$ ἑκατοστόμετρα.

Τὸ i παριστᾷ τὴν ἀκτῖνα τοῦ εἰδώλου. Ἡ διάμετρός του θὰ εἶναι 5 ἑκατοστόμετρα.

286. Φωτεινὸν σημεῖον εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν 24 ἑκατοστομέτρων ἀπὸ τῆς κορυφῆς κοίλου σφαιρικοῦ κατόπτρου ἑστιακῆς ἀποστάσεως 5 ἑκατοστῶν. Ποῦ σχηματίζεται τὸ εἴδωλόν του ; Ἐὰν τὸ φωτεινὸν σημεῖον ἀπομακρύνεται κατὰ 3 ἑκατοστομ. ἀπὸ τοῦ κατόπτρου, κατὰ πόσον μετατίθεται τὸ εἴδωλόν του ;

Λύσις :

$$\frac{1}{24} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{5}$$

$$p' = \frac{24 \times 5}{24 - 5} = \frac{120}{19} = 6{,}31 \text{ ἑκατοστόμετρα.}$$

Ἐὰν τὸ ἀντικείμενον ἀπομακρύνεται κατὰ 3 ἑκατοστόμετρα.

$$p' = \frac{27 \times 5}{27 - 5} = 6{,}13 \text{ ἑκατοστόμετρα.}$$

Ἐπομένως τὸ εἴδωλον μετατίθεται κατὰ 1,8 χιλιοστόμετρα.

287. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ κυρτοῦ σφαιρικοῦ κατόπτρου πρέπει νὰ τοποθετηθῇ πραγματικὸν ἀντικείμενον, ἵνα τὸ εἴδωλόν του σχηματισθῇ ἴσον πρὸς τὸ ἥμισυ τοῦ ἀντικειμένου ;

Λύσις :

$$\frac{I}{O} = \frac{p'}{p} = \frac{1}{2}$$

Ἡ ἐξίσωσις τῶν συζυγῶν ἑστιῶν γίνεται:

$$\frac{1}{p} - \frac{2}{p} = -\frac{1}{f} \quad \text{καὶ} \quad p = f$$

288. Ποία ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος κοίλου κατόπτρου, εἰς ὅ φωτοβόλον σημεῖον, τιθέμενον εἰς ἀπόστασιν 0,5 μ. ἀπὸ τῆς κυρίας ἑστίας, σχηματίζει τὸ καθ' ὑπόστασιν εἴδωλόν του εἰς ἀπόστασιν 12,5 μέτρων ἀπὸ τῆς κυρίας ἑστίας;

Λύσις: $p = f + 0{,}5 \qquad p' = f + 12{,}5$

$$\frac{1}{f+0{,}5} + \frac{1}{f+12{,}5} = \frac{1}{f}$$

$$f^2 + 12{,}5\,f + f^2 + 0{,}5\,f = f^2 + 0{,}5f + 12{,}5f + 6{,}25$$

$$f^2 = 6{,}25 \qquad \text{ὅθεν} \qquad f = 2{,}5 \qquad \text{καὶ} \qquad R = 5$$

289. Φωτοβόλον σημεῖον κεῖται ἐπὶ τοῦ κυρίου ἄξονος κοίλου σφαιρικοῦ κατόπτρου, εἰς ἀπόστασιν ἀπ' αὐτοῦ τετραπλασίαν τῆς ἀκτῖνος καμπυλότητος. Ποῖος ὁ λόγος τῆς ἀπὸ τοῦ κατόπτρου ἀποστάσεως τοῦ εἰδώλου αὐτοῦ πρὸς τὴν ἑστιακὴν ἀπόστασιν;

Λύσις: $p' = \dfrac{f}{1-\dfrac{f}{8f}} = \dfrac{f}{\dfrac{7}{8}} = f \times \dfrac{8}{7} \qquad \text{καὶ} \qquad \dfrac{p'}{f} = \dfrac{8}{7}$

290. Ἀντικείμενον ὕψους 4 ἑκατοστομέτρων τοποθετεῖται καθέτως ἐπὶ τοῦ κυρίου ἄξονος καὶ εἰς ἀπόστασιν 10 ἑκατοστ. ἀπὸ κυρτοῦ σφαιρικοῦ κατόπτρου ἑστιακῆς ἀποστάσεως 30 ἑκατοστομέτρων. Νὰ εὑρεθῇ ἡ θέσις καὶ τὸ μέγεθος τοῦ εἰδώλου.

Λύσις: 1ον. Θέσις τοῦ εἰδώλου. Ἐνταῦθα ἔχομεν

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{p'} = -\frac{1}{f} \quad \text{ἢ} \quad \frac{1}{10} - \frac{1}{p'} = -\frac{1}{30} \quad \text{καὶ} \quad p' = 7{,}5$$

Αὕτη εἶναι ἡ ἀπόλυτος τιμή. Διὰ νὰ ἔχωμεν τὴν θέσιν ἄνευ κατασκευῆς, λύομεν τὴν γενικὴν ἐξίσωσιν $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = -\dfrac{1}{f}$ ὡς πρὸς τὸ p':

$$\frac{1}{p'} = -\frac{4}{30} \quad \text{καὶ} \quad p' = -7{,}5$$

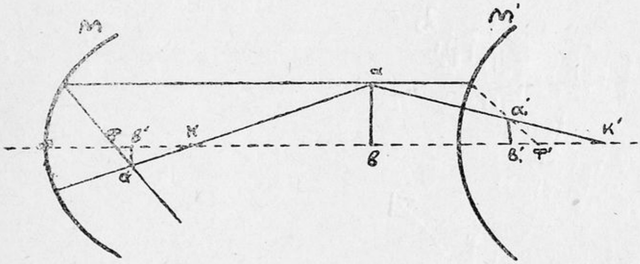
Τὸ σημεῖον τοῦ p' δεικνύει τὴν θέσιν τοῦ εἰδώλου.

2ον. Μέγεθος εἰδώλου : $\frac{I}{O} = \frac{p'}{p} = 0{,}75$ καὶ ἀφοῦ $O = 4$

$$I = 4 \times 0{,}75 = 3 \text{ ἑκατοστόμετρα.}$$

291. Ἓν κοῖλον σφαιρικὸν κάτοπτρον ἑστιακῆς ἀποστάσεως f καὶ ἓν κυρτὸν σφαιρικὸν κάτοπτρον, ἑστιακῆς ἀποστάσεως f', ἔχουσι τὸν αὐτὸν κύριον ἄξονα, καὶ τοποθετοῦνται εἰς ἀπόστασιν ἀπ' ἀλλήλων d, οὕτως ὥστε αἱ ἀνακλαστικαὶ ἐπιφάνειαι αὐτῶν νὰ εἶναι ἡ μία ἀπέναντι τῆς ἄλλης. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν μεταξὺ αὐτῶν πρέπει νὰ τοποθετηθῇ εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ τοῦ κοινοῦ ἄξονος ἵνα τὰ λαμβανόμενα ὑπὸ τῶν δύο κατόπτρων εἴδωλα εἶναι ἴσα ;

Λύσις : Ἔστω p ἡ ἀπόστασις τῆς φωτεινῆς εὐθείας αβ ἀπὸ



τὸ κοῖλον κάτοπτρον M. Ἡ ἀπόστασίς της ἀπὸ τὸ κυρτὸν κάτοπτρον M' θὰ εἶναι d — p. Ὁ τύπος τῶν κοίλων κατόπτρων δίδει :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f} \qquad (1)$$

Ὁ τύπος τῶν κυρτῶν : $\frac{1}{p_1'} - \frac{1}{d-p} = \frac{1}{f'}$ (2)

Γνωρίζομεν ὅτι τὸ μέγεθος τοῦ εἰδώλου συναρτήσει τοῦ ἀντικειμένου δίδεται ὑπὸ τῆς σχέσεως $\frac{i}{o} = \frac{p'}{p}$.

Εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ προβλήματος τὰ δύο λαμβανόμενα εἴδωλα πρέπει νὰ εἶναι ἴσα.

Ὥστε : $$\frac{p}{p'} = \frac{d-p}{p_1'} \qquad (3)$$

Διὰ νὰ ἔχωμεν τὸ p ἀρκεῖ νὰ ἐξαλείψωμεν τὰ p' καὶ p_1' μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων (1), (2) καὶ (3).

Ἐκ τῆς (1) ἐξάγομεν : $\dfrac{1}{p'} = \dfrac{1}{f} - \dfrac{1}{p}$

Ἐκ τῆς (2) : $\dfrac{1}{p_1'} = \dfrac{1}{f'} + \dfrac{1}{d-p}$ Ἀντικαθιστῶμεν τὰς τιμὰς ταύτας εἰς τὴν (3), καὶ ἔχομεν :

$$p\left(\frac{1}{f} + \frac{1}{p}\right) = \left(d-p\right)\left(\frac{1}{f'} + \frac{1}{d-p}\right)$$

$$\text{ἢ} \quad \frac{p}{f} - 1 = \frac{d-p}{f'} + 1$$

$$p\,(f + f') = f\,(d + 2f')$$

$$p = \frac{f\,(d + 2f')}{f + f'}$$

Ἵνα τὸ πρόβλημα εἶναι δυνατόν, ἡ τιμὴ τοῦ p πρέπει νὰ εἶναι μικροτέρα τοῦ d.

$$\text{Ἤτοι:} \quad \frac{f\,(d + 2f')}{f + f'} < d$$

$$\text{καὶ} \quad fd + 2ff < fd + f'd$$

$$\text{ἐξ οὗ} \quad 2f < d$$

ἀρκεῖ λοιπὸν ἵνα ἡ ἀπόστασις d γίνῃ ἀνωτέρα τῆς ἀκτῖνος καμπυλότητος τοῦ κοίλου κατόπτρου. Ἀντιλαμβάνεταί τις ὅτι εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν μόνον ἓν τοιοῦτον κάτοπτρον δίδει εἴδωλα μικρότερα τοῦ ἀντικειμένου, ἐνῷ ἓν κυρτὸν κάτοπτρον δίδει πάντοτε εἴδωλα, τῶν ὁποίων τὸ μέγεθος εἶναι μικρότερον τοῦ μεγέθους τοῦ ἀντικειμένου.

Γ'. ΔΙΑΘΛΑΣΙΣ ΦΩΤΟΣ

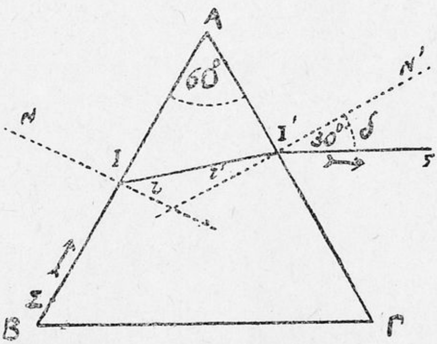
α'. Πρίσματα.

292. Ἀκτὶς μονοχρόου φωτὸς πίπτει ὑπὸ γωνίαν προσπτώσεως 90° ἐπὶ πρίσματος διαθλαστικῆς γωνίας Α καὶ ἐξερχομένη τοῦ πρίσματος σχηματίζει μετὰ τῆς καθέτου εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἐξόδου γωνίαν δ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ δείκτης διαθλάσεως τοῦ πρίσματος συναρτήσει τῆς γωνίας Α καὶ τῆς δ. Ἡ γωνία $A = 60^\circ$ καὶ ἡ $\delta = 30^\circ$.

Λύσις: Τῆς γωνίας προσπτώσεως εἰς Ι οὔσης 90°. ἐφαρμόζοντες τὸν νόμον τῆς διαθλάσεως ἔχομεν:

$$1 = n.\ \text{ἡμ}.r \qquad (1)$$

Εἰς τὸ σημεῖον Ι' ὁ ἴδιος νόμος μᾶς δίδει ἡμ $\delta = n.\ \text{ἡμ}.\ r'$ (2).



Αἱ γωνίαι Α, r καὶ r' συνδέονται διὰ τῆς σχέσεως $A = r + r'$(3). Ἐξ αὐτῆς ἐξάγομεν $r' = A - r$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (2) ἔχομεν:

$$\text{ημ}\delta = n\ \text{ημ}\ A\ \text{συν}\ r - n\ \text{ημ}\ r\ \text{συν}\ A \qquad (4)$$

Εἰς τὴν ἐξίσωσιν ταύτην λαμβάνοντες ὑπ᾽ ὄψιν τὴν (2), ἀντικαθιστῶντες ἡμ r διὰ $\frac{1}{n}$ καὶ συν r διὰ $\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{n}\sqrt{n^2-1}$ ἔχομεν:

$$\eta\mu\delta=\eta\mu\,A\,\sqrt{n^2-1}-\sigma\upsilon\nu\,A$$

ἐξ οὗ

$$\frac{\eta\mu\delta+\sigma\upsilon\nu\,A}{\eta\mu\,A}=\sqrt{n^2-1}$$

καὶ

$$n=\sqrt{\left(\frac{\eta\mu\delta+\sigma\upsilon\nu\,A}{\eta\mu A}\right)^2+1}$$

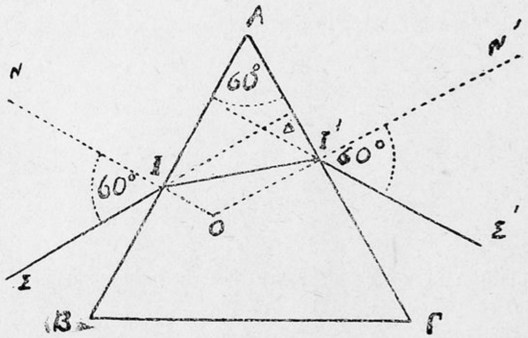
διὰ $A=60^\circ$ καὶ $\delta=30^\circ$

$$\eta\mu\,A=\frac{\sqrt{3}}{2}\qquad \sigma\upsilon\nu\,A=\frac{1}{2}\qquad \eta\mu\,\delta=\frac{1}{2}$$

$$n=\sqrt{\frac{7}{3}}=\sqrt{2,333}\qquad \text{καὶ}\qquad n=1,52.$$

293. Ἐπὶ πρίσματος διαθλαστικῆς γωνίας 60° πίπτει δέσμη φωτὸς μονοχρόου. Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ γωνία τῆς ἐξιούσης ἀκτῖνος εἶναι ἡ αὐτὴ μὲ τὴν γωνίαν προσπτώσεως ὅταν αὕτη εἶναι 60°. Ζητεῖται ὁ δείκτης διαθλάσεως τοῦ πρίσματος.

Λύσις : Ἐὰν ἡ γωνία προπτώσεως εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν τῆς



ἐξιούσης ἀκτῖνος, τότε εὑρισκόμεθα εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς ἐλαχίστης ἐκτροπῆς.

Οἱ τύποι τοῦ πρίσματος τότε εἶναι: $\Delta = 2i - A$ (1)

$$A = 2r \qquad (2)$$

Ἐκ τῆς (1) ἐξάγομεν:

$$i = \frac{\Delta + A}{2}$$

καὶ ἐκ τῆς (2): $r = \dfrac{A}{2}$

ἐξ οὗ
$$\frac{\eta\mu\ i}{\eta\mu\ r} = \frac{\eta\mu.\ \dfrac{\Delta + A}{2}}{\eta\mu\ \dfrac{A}{2}} = n$$

Ἐπομένως, ἀφοῦ $A = 60^\circ$ καὶ $\Delta = 60^\circ$

$$n = \frac{\eta\mu\ 60^\circ}{\eta\mu\ 30^\circ} = \sqrt{3}$$

294. Ὁ δείκτης διαθλάσεως τοῦ ὕδατος ὡς πρὸς τὸν ἀέρα εἶναι $\frac{4}{3}$, καὶ ὁ δείκτης διαθλάσεως τῆς ὑάλου ὡς πρὸς τὸν ἀέρα εἶναι $\frac{3}{2}$. Ποῖος ὁ δείκτης διαθλάσεως τῆς ὑάλου ὡς πρὸς τὸ ὕδωρ;

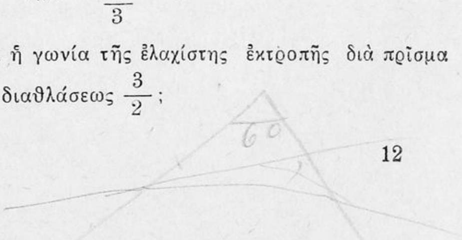
Λύσις: Ἔστω i ἡ γωνία προσπτώσεως ὅταν ἡ ἀκτὶς μεταβαίνῃ ἐκ τοῦ ὕδατος εἰς τὴν ὕαλον, i′ ἡ γωνία προσπτώσεως ἐντὸς τῆς ὑάλου. Ὁ δείκτης διαθλάσεως τῆς ὑάλου ὡς πρὸς τὸ ὕδωρ εἶναι $\frac{\eta\mu i}{\eta\mu i'}$.

Συμφώνως πρὸς τὸν νόμον τῆς διαθλάσεως ἔχομεν:

$$\frac{4}{3}\ \eta\mu\ i = \frac{3}{2}\ \eta\mu\ i'$$

καὶ λύοντες ἔχομεν:
$$\frac{\eta\mu i}{\eta\mu i'} = \frac{\dfrac{3}{2}}{\dfrac{4}{3}} = \frac{9}{8}$$

295. Ποία εἶναι ἡ γωνία τῆς ἐλαχίστης ἐκτροπῆς διὰ πρῖσμα γωνίας 60° καὶ δείκτου διαθλάσεως $\frac{3}{2}$;

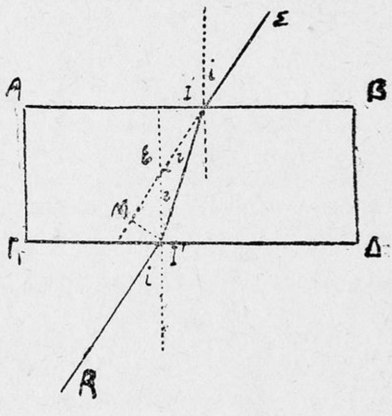


Λύσις: $\eta\mu\ i_1 = \frac{3}{2}\ \eta\mu\ 30^0 = \frac{3}{4}$

Ἐκτροπὴ $\Delta = 2\,i_1 - 60^0$

296. Φωτεινὴ ἀκτὶς πίπτουσα ὑπὸ γωνίαν προσπτώσεως i ἐπὶ πλακὸς ὑαλίνης μὲ παραλλήλους ἕδρας πάχους ε, καὶ δείκτου διαθλάσεως n, ἐξέρχεται παραλλήλως πρὸς τὴν ἀκτῖνα προσπτώσεως. Ζητεῖται νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀπόστασις ἡ μεταξὺ τῶν δύο εὐθειῶν τῆς προεκτάσεως τῆς προσπιπτούσης καὶ τῆς ἐξερχομένης ἀκτῖνος.

Λύσις: Ἔστω ΣΙ ἡ φωτεινὴ ἀκτὶς ἥτις πίπτουσα ἐπὶ τῆς ἕδρας ΑΒ ὑπὸ γωνίαν i ἐξέρχεται τῆς πλακὸς μὲ διεύθυνσιν Ι΄R παραλλήλως



τῆς προσπιπτούσης. Ζητεῖται νὰ ὑπολογισθῇ ἡ Ι΄Μ.

Φέρομεν τὰς καθέτους εἰς Ι καὶ Ι΄. Ἔστω r ἡ γωνία ἡ σχηματιζομένη μετὰ τῆς ἐσωτερικῆς ἀκτῖνος ΙΙ΄. Εἰς τὸ τρίγωνον τὸ ὀρθογώνιον Ι΄ΜΙ

ἔχομεν: $I'M = II'\ \eta\mu\ I'IM.$

$$\text{δηλαδὴ } I'M = II'\ \eta\mu\ (i - r) \qquad (1)$$

Τὸ τρίγωνον ΙΚΙ΄ εἶναι ἴσον καὶ ὀρθογώνιον καὶ ἔχομεν:

$$II' = \frac{IR'}{\sigma\upsilon\nu II'K} = \frac{\varepsilon}{\sigma\upsilon\nu\ r}$$ ὅπου ε τὸ πάχος τῆς πλακός.

Ἀντικαθιστῶμεν τὴν ΙΙ′ εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1) καὶ ἔχομεν:

$$I'M = \frac{\varepsilon}{\sigma\upsilon\nu\ r}\ \eta\mu\ (i - r)$$

$$I'M = \frac{\varepsilon}{\sigma\upsilon\nu\ r}\ (\eta\mu\ i\ \sigma\upsilon\nu\ r - \eta\mu\ r\ \sigma\upsilon\nu\ i)$$

καὶ $$I'M = \varepsilon\ (\eta\mu\ i - \sigma\upsilon\nu\ i\ \varepsilon\varphi.\ r) \qquad (2)$$

Ἐκ τοῦ νόμου τῆς διαθλάσεως ἔχομεν $\eta\mu\ i = n\ \eta\mu\ r$

ἐξ οὗ $$\varepsilon\varphi\ r = \frac{\eta\mu\ i}{\sqrt{n^2 - \eta\mu^2\ i}}$$

Λύοντες ἔχομεν: $I'M = \varepsilon\ \eta\mu\ i\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n^2 - \eta\mu^2\ i}}\right)$

6′. Φακοί.

297. Φωτεινὸν σημεῖον κεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος φακοῦ συγκλίνοντος ἑστιακῆς ἀποστάσεως f. Ζητεῖται ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου τούτου ἀπὸ τοῦ φακοῦ ἵνα τοῦ εἰδώλου σχηματιζομένου πραγματικοῦ, ἡ ἀπόστασις τοῦ εἰδώλου ἀπὸ τοῦ ἀντικειμένου εἶναι ἐλαχίστη;

Λύσις: Ἐκ τοῦ τύπου τῶν συγκλινόντων φακῶν (1) $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}$

ἐξάγομεν: $p' = \frac{pf}{p - f}$.

Ἡ ἀπόστασις τοῦ φωτεινοῦ σημείου ἀπὸ τοῦ εἰδώλου του θὰ εἶναι:

$$p + p' = p + \frac{pf}{p - f} = \frac{p^2}{p - f} \qquad (2)$$

Ἵνα εὕρωμεν τὴν ἐλαχίστην τιμὴν τῆς ἐκφράσεως αὐτῆς, θέτομεν $\frac{p^2}{p - f} = m$, καὶ λαμβάνοντες τὸ p ὡς ἄγνωστον, λύομεν τὴν ἐξίσωσιν:

$$p^2 - mp + mf = 0 \qquad (3)$$

ἐξ οὗ $$p = \frac{m}{2} \pm \sqrt{\frac{m^2}{4} - mf} \qquad (4)$$

Ἵνα αἱ ῥίζαι εἶναι πραγματικαὶ πρέπει

$$m^2 - 4\,mf > 0 \quad \text{ἤτοι} \quad m > 4f \qquad (5).$$

Ἐξ ἄλλου τὸ εἴδωλον τὸ σχηματιζόμενον ὑπὸ τοῦ φακοῦ ὀφείλει νὰ εἶναι πραγματικόν, τουτέστι:

$p > f \quad p' > f$ καὶ ἑπομένως $m > 2f$, περίπτωσις ἥτις εἶναι πάντοτε δυνατή, ἐὰν ἡ ἀνισότης (5) ἐκπληροῦται.

Ἑπομένως ἡ ἐλαχίστη τιμὴ τοῦ m εἶναι 4 f. Θέτοντες $m = 4\,f$ εἰς τὸν τύπον (4) ἔχομεν

$$p = 2\,f.$$

Συνεπῶς, διὰ νὰ ἀληθεύῃ τὸ πρόβλημα, τὸ φωτεινὸν σημεῖον πρέπει νὰ τοποθετηθῇ εἰς μίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ φακοῦ ἴσην πρὸς τὸ διπλάσιον τῆς ἑστιακῆς ἀποστάσεως.

Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην τὸ εἴδωλον εἶναι συμμετρικὸν τοῦ ἀντικειμένου ὡς πρὸς τὸν φακόν.

298. Κηρίον τοποθετεῖται εἰς ἀπόστασιν 4 μέτρων ἀπὸ διαφράγματος. Μεταξὺ τοῦ κηρίου καὶ τοῦ διαφράγματος τίθεται φακὸς ἑστιακῆς ἀποστάσεως 0,50 μ. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ κηρίου πρέπει νὰ τεθῇ φακός, διὰ νὰ λάβωμεν ἐπὶ τοῦ διαφράγματος εὐκρινὲς εἴδωλον; Ποῖον θὰ εἶναι τὸ μέγεθος τοῦ εἰδώλου, γνωστοῦ ὄντος ὅτι τὸ ὕψος τῆς φλογὸς εἶναι 5 ἑκατοστόμετρα;

Λύσις : Διὰ συγκλίνοντος φακοῦ δυνάμεθα νὰ λάβωμεν εἴδωλον ἐπὶ τοῦ διαφράγματος. Εἰς τὸν γενικὸν τύπον $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}$ ἀντικαθιστῶμεν τὸ p′ διὰ $4-p$ καὶ τὸ f διὰ 0,5. Θὰ ἔχωμεν τότε $\frac{1}{p} + \frac{1}{4-p} = \frac{1}{0{,}5}$

ἐξ οὗ:

$$4 = 8\,p - 2\,p^2$$

$$p^2 - 4\,p + 2 = 0$$

$$p = 2 \pm \sqrt{2}$$

Ἔχομεν δύο λύσεις:

$$p_1 = 2 + 1{,}414 = 3{,}14 \text{ μέτρα}$$

$$p_2 = 2 - 1{,}414 = 0{,}586 \text{ μέτρα}.$$

Καὶ αἱ δύο ῥίζαι ἀληθεύουν τὸ πρόβλημα, διότι εἶναι θετικαὶ **καὶ** μικρότεραι τῆς ἀποστάσεως τοῦ κηρίου ἀπὸ τοῦ διαφράγματος.

2ον Τὸ μέγεθος τοῦ εἰδώλου συναρτήσει τοῦ μεγέθους τοῦ ἀντικειμένου δίδεται ὑπὸ τῆς σχέσεως :

$$\frac{i}{o} = \frac{p'}{p}$$

διὰ τὴν τιμὴν p_1 θὰ ἔχωμεν $\frac{i_1}{0{,}05} = \frac{0{,}586}{3{,}1414}$

καὶ $i_1 = 0{,}085$ μέτρα

διὰ τὴν τιμὴν p_2 θὰ ἔχωμεν : $\frac{i_2}{0{,}05} = \frac{3{,}414}{0{,}586}$

καὶ $i_2 = 0{,}29$ μέτρα.

299. Ἀντικείμενον τίθεται εἰς ἀπόστασιν 15 ἑκατοστ. ἀπὸ φακοῦ ἀποκλίνοντος ἑστιακῆς ἀποστάσεως 10 ἑκατοστῶν. Ποία εἶναι ἡ θέσις τοῦ εἰδώλου, καὶ ποία ἡ σχέσις τοῦ μεγέθους τοῦ εἰδώλου πρὸς τὸ ἀντικείμενον ;

Λύσις : Ἡ θέσις τοῦ εἰδώλου καὶ τοῦ ἀντικειμένου εὑρίσκεται διὰ γεωμετρικῆς κατασκευῆς καὶ ἡ ἐξίσωσις εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην εἶναι:

$$\frac{1}{15} - \frac{1}{p'} = -\frac{1}{10} \qquad \text{καὶ} \qquad p' = 6$$

Τὸ μέγεθος εἶναι : $\frac{i}{o} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$.

300. Μικρὰ εὐθεῖα τίθεται καθέτως πρὸς τὸν κύριον ἄξονα φακοῦ συγκλίνοντος, εἰς ἀπόστασιν 3 ἑκατοστομέτρων ἀπ' αὐτοῦ, καὶ δίδει εἴδωλον φανταστικὸν 3 φορὰς μεγαλείτερον τοῦ ἀντικειμένου. Ποία ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ φακοῦ ;

Λύσις : Ἡ ἐξίσωσις τῶν συζυγῶν ἑστιῶν ἐνταῦθα εἶναι :

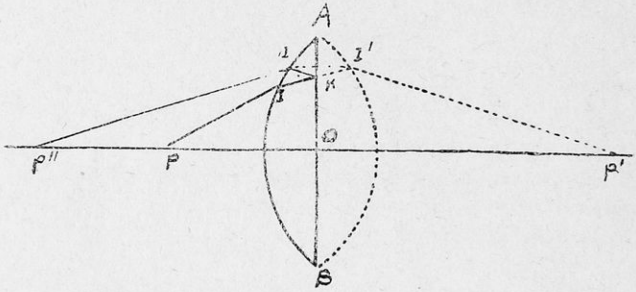
$$\frac{1}{p} - \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}$$

Ἀφοῦ $\frac{i}{o} = \frac{p'}{p} = 3$ καὶ $p = 3$

ἡ ἐξίσωσις γίνεται $\frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{1}{f}$ καὶ $f = \frac{9}{2}$

301. Φακὸς ἐπιπεδόκυρτος ἑστιακῆς ἀποστάσεως f, ἔχει τὴν ἐπίπεδον ἐπιφάνειάν του ἐπηργυρωμένην. Ἐπὶ τοῦ κυρίου ἄξονος τοῦ φακοῦ καὶ ἔμπροσθεν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του τίθεται φωτεινὸν σημεῖον. Νὰ εὑρεθῇ τὸ εἴδωλον τοῦ φωτεινοῦ τούτου σημείου.

Λύσις : Φανταζόμεθα τὸν φακὸν ἀμφίκυρτον, σχηματιζόμενον διὰ τῆς ἑνώσεως δύο ὁμοίων φακῶν, ὁμοίων πρὸς τὸν τοῦ προβλήματος.



Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ ἐπιφάνεια ἡ ἐπίπεδος AB δὲν εἶναι ἐπηργυρωμένη. Μία φωτεινὴ ἀκτὶς PI, ἀναχωροῦσα ἐκ τοῦ σημείου P, ἀφοῦ διαθλασθῇ κατὰ τὴν II′, θὰ διέλθῃ διὰ τῆς συζυγοῦς ἑστίας P′, ὥστε θὰ ἔχωμεν : $\frac{1}{OP} + \frac{1}{OP'} = \frac{1}{F}$ ὅπου F ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ πλήρους ἀμφικύρτου φακοῦ. Ἐὰν ὑποθέσωμεν νῦν ὅτι ἡ ἐπιφάνεια AB ἐνεργεῖ ὡς ἐπίπεδον κάτοπτρον, ἡ φωτεινὴ ἀκτίς, φθάνουσα εἰς τὸ K, ἀνακλᾶται κατὰ τὴν KI″.

Τὸ I″ εἶναι συμμετρικὸν τοῦ I′ ὡς πρὸς τὸ AB λόγῳ τῆς ἰσότητος τῶν γωνιῶν προσπτώσεως καὶ ἀνακλάσεως.

Ἡ ἀκτὶς KI″ σχηματίζει μετὰ τῆς πρώτης ὄψεως τοῦ φακοῦ τὴν αὐτὴν γωνίαν, τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ KI′ μετὰ τῆς δευτέρας ὄψεως, δηλαδὴ ἡ ἀκτὶς ἡ διαθλωμένη I″P″ εἶναι συμμετρικὴ τῆς I′P′ ὡς πρὸς τὸ AB.

Συνεπῶς, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ζητούμενον εἴδωλον, ἀρκεῖ νὰ κατασκευάσωμεν τὴν συζυγῆ ἑστίαν P′ τῆς P ὡς πρὸς τὸν ἀμφίκυρτον φακὸν καὶ νὰ λάβωμεν τὸ συμμετρικὸν P″ τοῦ P′ ὡς πρὸς τὸ O. Ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις F ἐκφράζεται τότε εὐκόλως συναρτήσει τῆς f. Πράγματι, ἐὰν n εἶναι ὁ δείκτης διαθλάσεως τοῦ φακοῦ καὶ R ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος αὐτοῦ, θὰ ἔχωμεν :

$$\frac{1}{F} = \left(n-1 \right) \frac{2}{R}$$

Ἐνῷ διὰ τὸν ἐπιπεδόκυρτον φακὸν εἶναι :

$$\frac{1}{f} = \left(n-1 \right) \frac{1}{R}$$

ἐξ οὗ $$F = \frac{f}{2}$$

302. Πρεσβύωψ, τοῦ ὁποίου ἡ ἐλαχίστη ἀπόστασις εἰς ἥν βλέπει εἶναι 1,20 μέτρα, ζητεῖ νὰ ἀναγιγνώσκῃ εἰς ἀπόστασιν 30 ἑκατ. Ποία θὰ εἶναι ἡ ἰσχὺς τῶν φακῶν (λίαν λεπτῶν), οὓς θὰ μεταχειρισθῇ (πρὸ τῶν ὀφθαλμῶν του ἀμέσως) ;

Λύσις: $$\frac{1}{0,30} - \frac{1}{1,20} = \frac{1}{f} \quad \text{καὶ} \quad \frac{1}{f} = 2,5 \text{ διοπτρίαι.}$$

303. Ἀντικείμενον Α εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν Δ ἀπὸ διαφράγματος Ε. Φακὸς συγκλίνων, τοῦ ὁποίου ὁ ἄξων συμπίπτει μετὰ τῆς καθέτου τῆς ἀγομένης ἐκ τοῦ Α πρὸς τὸ Ε, σχηματίζει ἐπὶ τοῦ διαφράγματος εἴδωλον εὐκρινὲς τοῦ ἀντικειμένου εἰς δύο θέσεις διαφόρους, Β καὶ Γ. Ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τῶν δύο θέσεων εἶναι δ. Ζητεῖται νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις f τοῦ φακοῦ συναρτήσει τῶν Δ καὶ δ.

Λύσις: Ἔστωσαν p′ καὶ p′, αἱ ἀποστάσεις τοῦ εἰδώλου ἀπὸ τοῦ φακοῦ διὰ τὰς θέσεις Β καὶ Γ.

Ἐὰν ὁ φακὸς εὑρίσκεται εἰς τὴν θέσιν Β, ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{\Delta - p} = \frac{1}{f}. \qquad (1)$$

Ἐὰν ὁ φακὸς εὑρίσκεται εἰς τὴν θέσιν Γ, τότε ἔχομεν :

$$\frac{1}{p+\delta} + \frac{1}{\Delta - (p+\delta)} = \frac{1}{f} \qquad (2).$$

Ἀπαλείφοντες τὸ f μεταξὺ (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν τοῦ p :

$$p = \frac{\Delta - \delta}{2}.$$

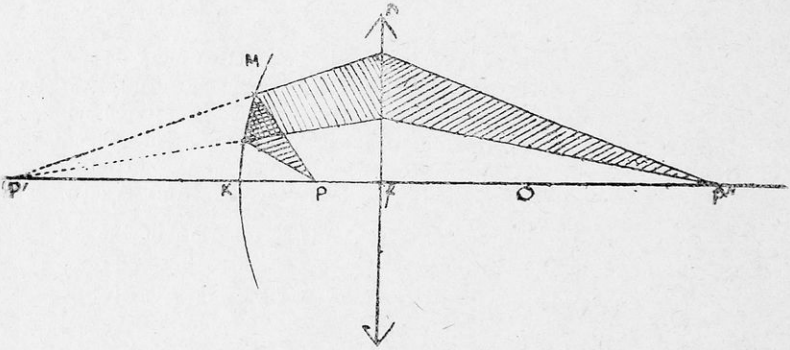
Ἀντικαθιστῶντες τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ p εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1) λαμβάνομεν :

$$f = \frac{\Delta^2 - \delta^2}{4\,\Delta}$$

304. Μεταξὺ ἑνὸς κοίλου κατόπτρου Μ καὶ τῆς κυρίας ἑστίας αὐτοῦ f τίθεται φωτεινὸν σημεῖον. Αἱ ὑπὸ τοῦ κατόπτρου ἀνακλώμεναι ἀκτῖνες διαπερῶσι κατόπιν συγκλίνοντα φακὸν Λ, εὑρισκόμενον εἰς τὴν κυρίαν ἑστίαν f τοῦ κατόπτρου. Νὰ καθορισθῇ τὸ εἴδωλον P'' τοῦ σημείου P.

Ἑστιακὴ ἀπόστασις κατόπτρου f = 5 ἑκατοστ.
Ἑστιακὴ ἀπόστασις φακοῦ f′ = 1 »
Ἀπόστασις τοῦ σημείου P ἀπὸ κατόπτρου. p = 4 ἑκατοστ.

Λύσις : Ἂς ὑποθέσωμεν φωτεινὴν δέσμην ἀναχωροῦσαν ἐκ τοῦ σημείου P καὶ προσπίπτουσαν ἐπὶ τοῦ κατόπτρου. Αὕτη ἀνακλᾶται ὡς νὰ



προέρχεται ἐκ τοῦ φανταστικοῦ σημείου P′, ὁριζομένου ὑπὸ τῆς σχέσεως :

$$\frac{1}{PK} - \frac{1}{P'K} = \frac{1}{f}. \qquad \text{Ἀλλὰ} \quad PK = p$$

Ἑπομένως : $\dfrac{1}{P'K} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{f} = \dfrac{f - p}{p\,f}$ ἐξ οὗ : $P'K = \dfrac{pf}{f - p}$

Ἡ φωτεινὴ δέσμη ἀποκλίνουσα καὶ ἔχουσα τὸ σημεῖον P′ ὡς ἀρχὴν πίπτει ἐπὶ τοῦ φακοῦ Λ καὶ διαθλωμένη θὰ συγκλίνῃ πρὸς τὸ σημεῖον P'' συζυγῆ ἑστίαν τοῦ P'. Ἡ θέσις τοῦ P'' δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου τῶν συγκλινόντων φακῶν:

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{P''f} = \frac{1}{f'}$$

ἐξ οὗ $$P''f = \frac{p_1 f'}{p_1 - f'}, \quad \text{καὶ} \quad p_1 = P'f = P'K + f.$$

$$p_1 = \frac{pf}{f - p} + f = \frac{f^2}{f - p}$$

ἐξ οὗ συμπεραίνομεν ὅτι: $$P''f = \frac{\dfrac{f^2}{f-p} . f'}{\dfrac{f^2}{f-p} - f'} = \frac{f^2 f'}{f^2 - f'(f - p)}$$

ἢ $$P''f = \frac{25}{25 - 1} = \frac{25}{24} = 1{,}04 \text{ ἑκατοστ.}$$

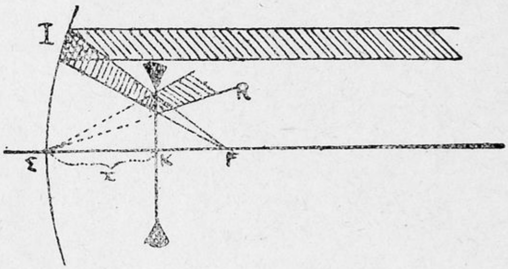
305. Ἐπὶ κοίλου κατόπτρου ἑστιακῆς ἀποστάσεως $F = 2$ μέτρων, ῥίπτομεν δέσμην ἀκτίνων παραλλήλων πρὸς τὸν κύριον ἄξονα. Αἱ ἀνακλώμεναι ἀκτῖνες πίπτουσι ἐπὶ φακοῦ ἀμφικοίλου ἑστιακῆς ἀποστάσεως $f = 0{,}50$ μέτρων, τοῦ ὁποίου ὁ ἄξων συμπίπτει μετὰ τοῦ κυρίου ἄξονος τοῦ κατόπτρου. Ζητεῖται νὰ προσδιορισθῇ ἡ ἀπόστασις x τοῦ ὀπτικοῦ κέντρου τοῦ φακοῦ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ κατόπτρου, κατὰ τρόπον ὥστε αἱ ἐκ τοῦ φακοῦ διαθλώμεναι ἀκτῖνες νὰ σχηματίζωσι φανταστικὸν εἴδωλον τὴν κορυφὴν Σ τοῦ κατόπτρου.

Λύσις: Ἔστω ἀκτὶς AI παράλληλος πρὸς τὸν κύριον ἄξονα. Ἀνακλωμένη ὑπὸ τοῦ κατόπτρου θὰ διέλθῃ διὰ τῆς κυρίας ἑστίας F. Ἀλλὰ ἡ παρεμβολὴ τοῦ φακοῦ διαθλᾷ τὰς ἀνακλωμένας ἀκτῖνας κατὰ τὴν διεύθυνσιν KR, ὥστε προεκτεινόμεναι νὰ συναντῶνται εἰς τὴν κορυφὴν Σ τοῦ κατόπτρου. Διὰ νὰ προσδιορίσωμεν τὴν ἀπόστασιν $K\Sigma = x$ πρέπει νὰ ὑποθέσωμεν τὸ F ὡς φωτεινὸν σημεῖον δεχόμενον τὸ συγκλῖνον φῶς. Εἰς τὸν τύπον τῶν ἀποκλινόντων φακῶν $\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f}$ πρέπει νὰ δώσωμεν εἰς τὸ P τιμὴν ἀρνητικήν. Εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ σχήματος θὰ ἔχωμεν: $\frac{1}{x} - \frac{1}{F - x} = \frac{1}{f}$

ἐξ οὗ: $f(F-x) - fx = x(F-x)$

$$x^2 - Fx + Ff = 0$$

$$x = \frac{F}{2} \pm \sqrt{\frac{F^2}{4} - Ff}$$



Ἵνα αἱ ῥίζαι εἶναι πραγματικαὶ πρέπει :

$$\frac{F^2}{4} - Ff \geqq 0$$

δηλαδὴ $F \geqq 4f$.

Ἀντικαθιστῶντες δι' ἀριθμῶν ἔχομεν $x = 1$ μέτρον.

306. Νὰ δειχθῇ ὅτι εἰς ἀμφίκυρτον φακόν, ἔχοντα ἴσας ἀκτῖνας καμπυλότητος, δείκτου διαθλάσεως $\frac{3}{2}$, αἱ ἑστίαι συμπίπτουσι μὲ τὰ κέντρα καμπυλότητος.

Λύσις: Ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις καὶ αἱ ἀκτῖνες καμπυλότητος τοῦ φακοῦ συνδέονται διὰ τῆς σχέσεως $\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)$

Θέτοντες $R = R'$, $n = \frac{3}{2}$ εὑρίσκομεν $f = R$

307. Φακὸς συγκλίνων ἑστιακῆς ἀποστάσεως 16 ἑκατοστῶν ἐφαρμόζεται ἐπὶ ἀποκλίνοντος φακοῦ. Ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ συστήματος εἶναι 48 ἑκατοστόμετρα. Ποία εἶναι ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ ἀποκλίνοντος φακοῦ ;

Λύσις: $\frac{1}{48} = \frac{1}{16} - \frac{1}{x}$ καὶ x=24 ἑκατοστ.

308. Δύο συγκλίνοντες λεπτοὶ φακοί, ἔχοντες τὸν αὐτὸν κύριον ἄξονα, προσκολλῶνται. Αἱ ἑστιακαὶ αὐτῶν ἀποστάσεις εἶναι 25 ἑκατοστὰ καὶ 10 ἑκατοστά. Ποία εἶναι ἡ ἰσχὺς εἰς διοπτρίας τοῦ σχηματισθέντος φακοῦ ;

Λύσις: $\frac{1}{F} = \frac{1}{0,25} + \frac{1}{0,10} = 14$ διοπτρίαι. $\frac{1}{0,10} = 10$

γ'. Ὀπτικὰ ὄργανα.

$\frac{1}{0,05} = 20$

309. Ἁπλοῦν μικροσκόπιον ἔχει πραγματικὴν ἰσχὺν 50 διοπτριῶν. Ποία εἶναι ἡ γωνία ὑπὸ τὴν ὁποίαν βλέπει διὰ μέσου τοῦ μικροσκοπίου τούτου ἀντικείμενον μήκους 1 χιλιοστομέτρου ; 30

Λύσις: Ἡ γωνία α, ὑπὸ τὴν ὁποίαν φαίνεται ἐντὸς μικροσκοπίου ἰσχύος P μικρὸν ἀντικείμενον μήκους l, εἶναι αἰσθητῶς ἴση πρὸς $\alpha = Pl$.

Ἡ τιμὴ τῆς γωνίας εἰς ἀκτίνια εἶναι συνεπῶς:

$$\alpha = 50 \times 0,001 = 0,05$$

Καὶ εἰς βαθμούς: $\alpha = \frac{180 \times 0,05}{\pi} = 2^\circ\, 51'\, 20''$

310. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἰσχὺς ἁπλοῦ μικροσκοπίου, τοῦ ὁποίου ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις εἶναι 2 ἑκατοστόμετρα, καὶ ἡ γωνία ὑπὸ τὴν ὁποίαν βλέπει 1 χιλιοστόμετρον.

Λύσις: Ἡ ἰσχὺς εἶναι αἰσθητῶς ἴση πρὸς $\frac{1}{f}$, ἡ τιμὴ τῆς ἰσχύος εἶναι ἐνταῦθα $\frac{1}{2}$ ἐὰν ληφθῇ ὡς μονὰς μήκους τὸ ἑκατοστόμετρον. Τοῦτο εἶναι ἐπίσης ἡ γωνία ὑπὸ τὴν ὁποίαν τὸ μικροσκόπιον θὰ κάμῃ νὰ φαίνεται 1 ἑκατοστόμετρον.

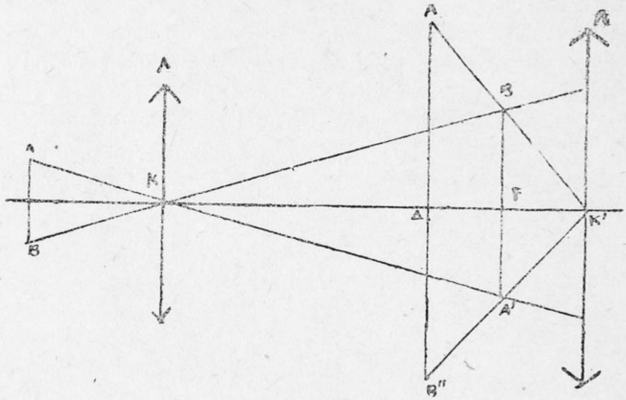
Ἡ γωνία, ὑπὸ τὴν ὁποίαν θὰ κάμῃ νὰ ἴδῃ τις 1 χιλιοστόμετρον θὰ εἶναι:

$$0,1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{20}$$

Γωνία 1 λεπτοῦ ἔχει αἰσθητῶς τιμὴν $\frac{3}{10000}$. Τὸ $\frac{1}{20}$ ἀντιστοιχεῖ εἰς $2^\circ\, 47'$.

311. Παρατηρητὴς μύωψ, τοῦ ὁποίου ἡ ἀπόστασις τῆς εὐκρινοῦς ὁράσεως εἶναι 20 ἑκατοστά, παρατηρεῖ ἐντὸς ἀστρονομικῆς διόπτρας. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ ἀντικειμενικοῦ φακοῦ τῆς διόπτρας πρέπει νὰ θέσῃ τὸν προσοφθάλμιον φακὸν διὰ νὰ ἴδῃ εὐκρινῶς τὸ εἴδωλον ἑνὸς ἀστέρος;

Λύσις: Ἔστω εὐθεῖα AB κάθετος πρὸς τὸν ἄξονα καὶ εὑρισκομένη εἰς τὸ ἄπειρον. Ὁ ἀντικειμενικὸς Λ δίδει ἓν εἴδωλον πραγματικὸν καὶ ἀντεστραμμένον A′B′ εὑρισκόμενον εἰς τὸ ἑστιακὸν ἐπίπεδον.



Ὁ προσοφθάλμιος Λ′ ἐνεργῶν ὡς ἁπλοῦς φακὸς σχηματίζει εἴδωλον τοῦ A′B′ τὸ A″B″ φανταστικὸν καὶ ὀρθὸν τὸ ὁποῖον ὁ παρατηρητὴς ῥυθμίζει καὶ τὸ φέρει εἰς τὴν ἐλαχίστην ἀπόστασιν τῆς εὐκρινοῦς ὁράσεως d. Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ ὀπτικὸν κέντρον τοῦ ὀφθαλμοῦ συμπίπτει μὲ τὸ σημεῖον K′, παριστάνοντες τὴν ἀπόστασιν K′F διὰ p, K′Δ διὰ d καὶ K′f διὰ f, καὶ ἐφαρμόζοντες τὸν τύπον τῶν φακῶν θὰ ἔχωμεν:

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{d} = \frac{1}{f}$$

ἐξ οὗ

$$p = \frac{df}{d + f}$$

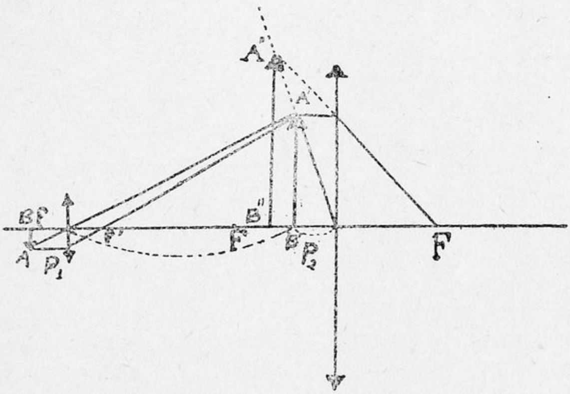
Εἰς τὸ πρόβλημα d = 20 ἑκατοστὰ καὶ f = 3 ἑκ.

$$\text{Ἔχομεν:} \quad p = \frac{20 \times 3}{23} = 2,6 \text{ ἑκατοστά.}$$

Ἡ ἀπόστασις KF εἶναι ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ ἀντικειμενικοῦ 100 ἑκατοστ. Ἑπομένως συμπεραίνομεν ὅτι οἱ δύο φακοὶ Λ καὶ Λ′ ὀφείλουν νὰ εὑρίσκωνται εἰς ἀπόστασιν 102,6 ἑκατ. ὁ εἷς τοῦ ἄλλου.

312. Μικροσκόπιον ἔχει μεγένθυσιν 800 διαμέτρων δι' ὀφθαλμὸν τοῦ ὁποίου ἡ ἐλαχίστη ἀπόστασις τῆς εὐκρινοῦς ὁράσεως εἶναι 20 ἑκατοστά. Ὁ προσοφθάλμιος φακὸς ἔχει ἑστιακὴν ἀπόστασιν 1 ἑκατοστοῦ καὶ ἡ ἀπόστασις ἥτις χωρίζει τὸν προσοφθάλμιον τοῦ ἀντικειμενικοῦ εἶναι 25 ἑκατοστόμετρα. Νὰ εὑρεθῇ 1ον. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ προσοφθαλμίου εὑρίσκεται τὸ ἀντικείμενον. 2ον. Ποία εἶναι ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ ἀντικειμενικοῦ.

Λύσις: 1ον. Ἡ μεγέθυνσις τοῦ μικροσκοπίου εἶναι τὸ γινόμενον



τῆς μεγεθύνσεως τοῦ ἀντικειμενικοῦ καὶ τοῦ προσοφθαλμίου, δηλαδὴ ἐὰν παραστήσωμεν τὸ ἀντικείμενον διὰ AB, τὸ πρῶτον εἴδωλον διὰ A′B′, καὶ τὸ τελικὸν διὰ A″B″, ἔχομεν:

$$\text{Μεγέθυνσιν Μικροσκ.} \quad M = \frac{A''B''}{A'B'} \times \frac{A'B'}{AB}$$

Ἢ παριστῶντες διὰ p_1, p_1', p_2, p'_2 τὰς ἀποστάσεις τῶν εἰδώλων καὶ τοῦ ἀντικειμένου ἀπὸ τοῦ ἀντικειμενικοῦ καὶ τοῦ προσοφθαλμίου, ἔχομεν:

$$M = \frac{p_2'}{p_2} \times \frac{p_1'}{p_1}$$

καὶ ὑποθέτοντες ὅτι ὁ ὀφθαλμὸς εὑρίσκεται εἰς τὸν φακὸν δηλαδὴ $p_2' = 20$ καὶ $p_1' = 25 - p_2$ ἔχομεν τὴν ἰσότητα:

$$800 = \frac{20}{p_2} \times \frac{25 - p_2}{p_1} \qquad (1)$$

Ἐξ ἄλλου, ἐκ τῆς ἐξισώσεως τοῦ προσοφθαλμίου φακοῦ

$$\frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_2'} = \frac{1}{F} \quad \text{ἐξάγομεν}$$

$$p_2 = \frac{p_2' f}{p_2' + f} = \frac{20 \times 1}{20 + 1} = 0{,}95 \text{ ἑκατοστ.}$$

Ἀντικαθιστῶντες τὴν τιμὴν ταύτην εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1) εὑρίσκομεν τὸ p_1:

$$p_1 = \frac{20 \times 25 - \frac{20}{21}}{800 \times \frac{20}{21}} = 0{,}63 \text{ ἑκατοστόμετρα.}$$

2ον. Διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν ἑστιακὴν ἀπόστασιν τοῦ προσοφθαλμίου, ὑπολογίζομεν κατ' ἀρχὰς τὴν τιμὴν τοῦ p_1', ἀπόστασιν τοῦ A′ B ἀπὸ τοῦ ἀντικειμενικοῦ. Ἡ ἀπόστασις αὕτη εἶναι ἴση πρὸς $25 - p_2$ ἢ $25 - 0{,}95$ ἤτοι 24,05 ἑκατοστόμετρα.

Κατόπιν ἐκ τῆς ἐξισώσεως $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1'} = \frac{1}{f}$

δηλαδὴ $\frac{1}{0{,}63} + \frac{1}{24{,}05} = \frac{1}{f}$

εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν τοῦ f

$$f = 0{,}614 \text{ ἑκατοστόμετρα.}$$

313. Ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ ἀντικειμενικοῦ φακοῦ ἑνὸς μικροσκοπίου εἶναι $\frac{1}{2}$ ἑκατοστόμετρα, ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ προσοφθαλμίου εἶναι 1 ἑκατοστόμετρον. Τῆς ἐλαχίστης ἀποστάσεως τῆς εὐκρινοῦς ὁράσεως τοῦ παρατηρητοῦ οὔσης 12 ἑκατοστῶν, ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τοῦ ἀντικειμενικοῦ καὶ τοῦ προσοφθαλμίου, ὅταν τὸ ἀντικείμενον εἶναι εἰς 5,2 χιλιοστόμετρα ἀπὸ τοῦ ἀντικειμενικοῦ ;

Λύσις : Ἔστω δ ἡ ζητουμένη ἀπόστασις μεταξὺ τοῦ ἀντικειμενικοῦ καὶ τοῦ προσοφθαλμίου. Ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἀντικειμενικοῦ εἶναι :

$$\frac{1}{0{,}52} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{0{,}5} \quad \text{καὶ} \quad p' = 13.$$

Ἡ ἐξίσωσις τοῦ προσοφθαλμίου εἶναι :

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{12} = 1 \quad \text{καὶ} \quad d = 0{,}923$$

καὶ $\delta = p' + d = 13{,}92$ ἑκατοστόμετρα.

314. Αἱ ἑστιακαὶ ἀποστάσεις συνθέτου μικροσκοπίου εἶναι 5 χιλιοστὰ διὰ τὸν ἀντικειμενικὸν καὶ 20 χιλιοστὰ διὰ τὸν προσοφθάλμιον. Τὸ ἀντικείμενον τίθεται εἰς ἀπόστασιν 5,1 χιλιοστῶν καὶ ἡ ἐλαχίστη ἀπόστασις τῆς εὐκρινοῦς ὁράσεως τοῦ παρατηρητοῦ εἶναι 20 ἑκατοστόμετρα. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ γωνία, ὑπὸ τὴν ὁποίαν θὰ ἴδῃ ὁ παρατηρητὴς 1 χιλιοστόμετρον.

Λύσις: Ἡ ἰσχὺς τοῦ μικροσκοπίου εἶναι :

$\frac{p'}{p}\left(\frac{1}{\Delta} + \frac{1}{f'}\right) = P$ ἐὰν ληφθῇ ὡς μονὰς μήκους τὸ χιλιοστόμετρον, τοῦτο θὰ εἶναι ἡ ζητουμένη γωνία.

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως τῶν συζυγῶν ἑστιῶν διὰ τὸν ἀντικειμενικὸν

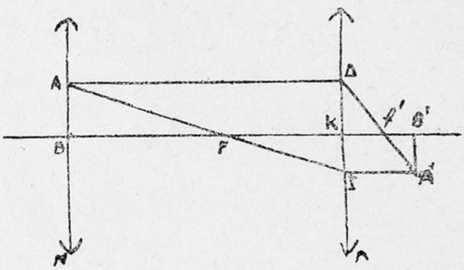
$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}$ ἔχομεν : $\frac{p'}{p} = \frac{f}{p - f} = \frac{50}{1}$

$$P = \frac{50}{1}\left(\frac{1}{200} + \frac{1}{20}\right) = \frac{11}{4}.$$

$\frac{3}{10000}$ εἶναι ἡ τιμὴ γωνίας 1 λεπτοῦ, τὸ $\frac{11}{4}$ ἀντιστοιχεῖ εἰς γωνίαν $152^{\circ}\ 46'$.

315. Ἀστρονομικὴ διόπτρα ῥυθμίζεται δι᾽ ὀφθαλμόν, ὅστις βλέπει εὐκρινῶς εἰς τὸ ἄπειρον. Ἐπὶ τοῦ ἀντικειμενικοῦ φακοῦ σημειοῦνται δύο σημεῖα μελανὰ ἀποστάσεως 5 ἑκατοστομ., καὶ φωτιζόμενα ζωηρῶς σχηματίζουσι ὄπισθεν τοῦ προσοφθαλμίου ἓν εἴδωλον πραγματικόν, καὶ τὰ μελανὰ σημεῖα τοῦ εἰδώλου εὑρίσκονται εἰς ἀπόστασιν 1 χιλιοστοῦ. Ποία εἶναι ἡ μεγέθυνσις τῆς διόπτρας ;

Λύσις: Ἔστω F ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ ἀντικειμενικοῦ, καὶ f ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ προσοφθαλμίου. Διὰ πρεσβύωπα ὀφθαλμόν, F



καὶ f συμπίπτουσι. Ἔστωσαν A καὶ B τὰ δύο μελανὰ σημεῖα. Κατασκευάζομεν τὸ εἴδωλον τοῦ AB φέροντες τὴν ἀκτῖνα AΔ παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα, καὶ τὴν ἀκτῖνα AI, ἥτις διέρχεται διὰ τοῦ f καὶ ἔμπροσθεν τοῦ προσοφθαλμίου.

Τὰ δύο ὅμοια τρίγωνα ABF καὶ IKF δίδουν τὴν σχέσιν :

$$\frac{AB}{KI} = \frac{BF}{KF}$$

Ἀλλὰ $AB = 50$ χιλιοστόμ. καὶ $KI = A'B' = 1$ χιλιοστὸν

Ἑπομένως ἔχομεν :

$$\frac{50}{1} = \frac{F}{f}$$

Ἀλλὰ $\frac{F}{f}$ εἶναι ἡ μεγέθυνσις τῆς διόπτρας ἀνεξαρτήτως τοῦ ὀφθαλμοῦ τοῦ παρατηρητοῦ.

Συνεπῶς $M = 50$.

316. Ὁ προσοφθάλμιος ἀστρονομικῆς διόπτρας ἔχει ἑστιακὴν ἀπόστασιν 1 ἑκατοστομέτρου. Διευθύνομεν τὴν διόπτραν πρὸς ἀντικείμενον πολὺ ἀπομακρυσμένον καὶ δίδομεν εἰς τὸν προσοφθάλμιον δύο θέσεις διαφόρους. Εἰς τὴν μίαν θέσιν τὸ εἴδωλον εἶναι εἰς ἀπόστασιν 20 ἑκατοστομέτρων τοῦ προσοφθαλμίου εὐκρινὲς καὶ φανταστικόν. Εἰς τὴν ἄλλην θέσιν τὸ εἴδωλον εἶναι πραγματικὸν καὶ εἰς τὴν αὐτὴν ἀπόστασιν. Ποία εἶναι ἡ μετάθεσις τοῦ προσοφθαλμίου ἀπὸ τὴν μίαν εἰς τὴν ἄλλην τῶν θέσεων τούτων;

Λύσις: Αἱ ἐξισώσεις τῶν συζυγῶν ἑστιῶν, αἵτινες ἀντιστοιχοῦσι εἰς τὰς δύο θέσεις τοῦ προσοφθαλμίου, εἶναι:

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{20} = 1 \qquad \frac{1}{p_1} + \frac{1}{20} = 1$$

$$p_1 - p = \frac{40}{399} = \text{αἰσθητῶς 1 χιλιοστόμετρον.}$$

VII. ΗΛΕΚΤΡΙΣΜΟΣ

Α΄. ΣΤΑΤΙΚΟΣ ΗΛΕΚΤΡΙΣΜΟΣ ΚΑΙ ΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ

317. Δύο σφαιρίδια εἶναι ἠλεκτρισμένα, τὸ μὲν ἓν μὲ ποσότητα ἠλεκτρισμοῦ + 10, τὸ δὲ ἄλλο μὲ — 4, εὑρίσκονται δὲ εἰς ἀπόστασιν 2 ἑκατοστομέτρων ἀπ' ἀλλήλων. Μετὰ πόσης δυνάμεως ἕλκονται;

Λύσις: $F = \frac{mm'}{d^2} = \frac{10 \times 4}{2^2} = \frac{40}{4} = 10$ δύναι

318. Δύο σφαῖραι, ἑκάστη τῶν ὁποίων φέρει ἠλεκτρισμὸν + 1 coulomb, ἀπέχουν ἀλλήλων κατὰ 10 χιλιόμετρα. Πόση εἶναι ἡ μεταξὺ τῶν δύο σφαιρῶν ὠστικὴ δύναμις;

Λύσις: 1 coulomb ἰσοδυναμεῖ πρὸς 3×10^9 ἠλεκροστατικὰς μονάδας.

Ἑπομένως $\frac{(3 \times 10^9)^2}{(1000000)^2} = 9 \times 10^6$ δύναι.

319. Σφαιρίδιον μεταλλικόν, ἠλεκτρισμένον μὲ + 0,0015 coulomb, φέρεται εἰς ἐπαφὴν πρὸς ἕτερον ὅμοιον σφαιρίδιον ἠλεκτρισμένον μὲ 0,0045 coulomb καὶ κατόπιν τὰ δύο σφαιρίδια ἀποχωρίζονται. Πόσον ἠλεκτρισμὸν φέρει ἕκαστον σφαιρίδιον;

Λύσις: $0,0015 + 0,0025 = 0,0060$

$$\text{καὶ } \frac{0,0060}{2} = 0,0030 \text{ coulomb}$$

320. Σφαιρίδιον μεταλλικὸν ἠλεκτρισμένον, φέρεται εἰς ἐπαφὴν πρὸς ὅμοιον σφαιρίδιον καὶ εἶτα ἀπομακρύνεται αὐτοῦ. Ὅταν ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τῶν δύο σφαιριδίων εἶναι 10 ἑκατοστ., ἕκαστον ἐξ αὐτῶν ἀπωθεῖ τὸ ἕτερον μετὰ δυνάμεως 9 δυνῶν. Ζητεῖται πόσον ἠλεκτρισμὸν ἔφερεν ἐν ἀρχῇ τὸ ἠλεκτρισμένον σφαιρίδιον;

Λύσις: $F = \frac{m.m'}{d^2}$ $\quad 9 = \frac{m.m'}{10^2}$ ἀλλὰ $m = m'$

$9 = \frac{m^2}{10^2}$ καὶ $m^2 = 9.(10)^2$ καὶ $m = 3 \times 10 = 30$ coulombs. $\frac{\times 2}{60}$

321. Σφαῖρα μεταλλικὴ ἀκτῖνος 5 ἑκατοστ. ἔχει δυναμικὸν 5. Μία ἄλλη σφαῖρα ἀκτῖνος 10 ἑκατοστμ. ἔχει δυναμικὸν 10. Ἑνώνομεν τὰς δύο σφαίρας διὰ σύρματος μακροῦ καὶ λεπτοῦ. Ποῖον θὰ εἶναι τὸ κοινὸν δυναμικὸν τῶν σφαιρῶν;

Λύσις: $5 \times 5 + 10 \times 10 = (5 + 10)\,\upsilon$

καὶ $\upsilon = \frac{25}{3} = 8,33.$

322. Σφαῖρα ἀκτῖνος 14 ἑκατοστομέτρων εἶναι ἠλεκτρισμένη, καὶ ἡ πυκνότης ἡ ἠλεκτρικὴ εἶναι 10. Ποῖον τὸ δυναμικὸν τῆς σφαίρας;

Λύσις: Τὸ δυναμικὸν τῆς σφαίρας εἶναι ἴσον πρὸς τὸ πηλίκον τοῦ φορτίου της διὰ τῆς ἀκτῖνος της:

$$\frac{4\,\pi \times 14^2 \times 10}{14} = 1759,296.$$

323. Ποῖον φορτίον ἠλεκτρικὸν πρέπει νὰ δώσωμεν εἰς σφαῖραν διαμέτρου 3 ἑκατοστομέτρων, ἵνα ἡ ἠλεκτρικὴ πυκνότης γίνῃ 7;

Λύσις: $\frac{m}{4\pi \times (1,5)^2} = 7$ καὶ $m = 197,82$

324. Δύο συμπυκνωταὶ σφαιρικοὶ ἔχουν χωρητικότητας 0,3 καὶ 0,8 microfarad. Οἱ ἐξωτερικοὶ ὁπλισμοὶ τῶν συμπυκνωτῶν συγκοινωνοῦσι μετὰ τοῦ ἐδάφους, οἱ δὲ ἐσωτερικοὶ εἶναι φορτισμένοι μὲ δυναμικὰ 15 καὶ 26 volts. Ζητεῖται 1ον. Τὸ φορτίον ἑνὸς ἑκάστου τῶν ἐσωτερικῶν ὁπλισμῶν. 2ον. Πῶς μετασχηματίζονται τὰ φορτία ταῦτα ὅταν ἑνωθῶσι δι' ἀγωγοῦ ἄνευ χωρητικότητος. 3ον. Ποῖον δυναμικὸν λαμβάνουν τότε ἕκαστος τῶν ἐσωτερικῶν ὁπλισμῶν;

Λύσις: 1ον. Τὸ φορτίον συμπυκνωτοῦ παρίσταται διὰ τοῦ τύπου $Q = CV$, ὅπου C ἡ χωρητικότης καὶ V τὸ δυναμικόν.

Τὸ φορτίον τοῦ πρώτου συμπυκνωτοῦ κατ' ἀκολουθίαν εἶναι $Q = 0,3 \times 15 = 4,5$ Microcoulombs.

Τὸ δὲ φορτίον τοῦ δευτέρου εἶναι :

$$Q' = 0,8 \times 26 = 20,8 \text{ microcoulobs.}$$

2ον. Ὅταν ἑνώνωμεν δύο πυκνωτὰς δι' ἀγωγοῦ ἄνευ χωρητικότητος, ἡ διανομὴ τῶν φορτίων γίνεται κατὰ τρόπον ὥστε τὸ ἄθροισμά των μένει σταθερὸν καὶ τὰ δυναμικὰ ἀποβαίνουν ἴσα.

Ἔστω x τὸ κοινὸν δυναμικὸν τῶν συμπυκνωτῶν κατόπιν τῆς ἑνώσεως. Τότε ἔχομεν :

$$Q + Q' = x\,(C + C')$$

ἐξ οὗ

$$x = \frac{Q + Q'}{C + C'} = \frac{4,5 + 20,8}{0,3 + 0,8} = 23 \text{ volts}$$

Ὁ πρῶτος συμπυκνωτὴς λαμβάνει τότε φορτίον :

$$Q_1 = C\,x = 0,3 \times 23 = 6,9 \text{ microcoulombs.}$$

Καὶ ὁ δεύτερος λαμβάνει φορτίον :

$$Q'_1 = C'x = 0,8 \times 23 = 18,4 \text{ microcoulombs.}$$

325. Δύο ἀγωγοὶ μεμονωμένοι ἔχουσι χωρητικότητας 1 microfarad καὶ $\frac{1}{2}$ microfarad. Τοὺς φορτίζομεν μὲ ἠλεκτρισμόν, τὸν πρῶτον εἰς δυναμικὸν 10^3 volts, καὶ τὸν δεύτερον εἰς δυναμικὸν 10^2 volts. Ἑνώνομεν κατόπιν τὸν ἕνα μετὰ τοῦ ἄλλου διὰ σύρματος ἄνευ χωρητικότητος. Ζητεῖται νὰ ὑπολογισθῇ 1ον. Τὸ δυναμικὸν τῆς τελικῆς ἰσορροπίας τοῦ συστήματος τῶν δύο ἀγωγῶν. 2ον. Ἡ ποσότης τοῦ ἠλεκτρισμοῦ εἰς coulomb, ἡ ὁποία θὰ διέλθῃ τὸ σύρμα κατὰ τὴν περίοδον τῆς ἀποκαταστάσεως τῆς τελικῆς ἰσορροπίας.

Λύσις: Ἔστωσαν A καὶ B οἱ δύο ἀγωγοί. C καὶ C' αἱ χωρητικότητές των, M καὶ M' τὰ φορτία των, V καὶ V' τὰ δυναμικά των.

Τότε ἔχομεν : $M = CV$ καὶ $M' = C'V'$

1ον. Ὅταν ἑνωθῶσιν οἱ δύο ἀγωγοί, ἡ χωρητικότης τοῦ συστήματος γίνεται $C + C'$, τὸ φορτίον $M + M'$, καὶ τὸ κοινὸν δυναμικὸν V''. Ἡ ὁλικὴ ὅμως ποσότης τοῦ ἠλεκτρισμοῦ δὲν μεταβάλλεται.

Συνεπῶς : $$CV + CV' = (C + C')\,V''$$

ἐξ οὗ ἐξάγομεν τὴν τιμὴν V″ εἰς volts :

$$V'' = \frac{CV + C'V'}{C + C'} = \frac{0{,}000001 \times 1000 + 0{,}0000005 \times 100}{0{,}000001 + 0{,}0000005} = 700 \text{ volts.}$$

326. Ποῖον φορτίον πρέπει νὰ δώσωμεν εἰς μίαν χωρητικότητα 100 microfarads, ἵνα ὑψώσωμεν τὸ δυναμικόν της κατὰ 50 volts.

Λύσις: Γνωρίζομεν ὅτι M = CV, ὅπου M ἐκφράζεται εἰς coulombs, C εἰς farad, καὶ V εἰς volts. Ἐκ τούτου ἔχομεν :

$$M = \frac{100}{1000000} \times 50 = \frac{5}{1000} \text{ δηλαδὴ } \frac{1}{20000} \text{ coulomb.}$$

327. Ἡ χωρητικότης ἀγωγοῦ εἶναι 700. Εἰς ποῖον δυναμικὸν πρέπει νὰ φορτίσῃ της αὐτόν, ἵνα ἡ ἐνέργεια τῆς ἀφηλεκτρίσεώς του εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς 1 θερμίδα ;

Λύσις: Ἡ ἔκφρασις τῆς ἠλεκτρικῆς ἐνεργείας εἶναι $\frac{1}{2} CV^2$.

Ὥστε : $\frac{1}{2} . 700 . x^2 = 4{,}17 \times 10^7$

1 θερμὶς εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς $4{,}17 \times 10^7$ ἔργια

καὶ $x = 345{,}2$.

328. Ποία ἐνέργεια δαπανᾶται διὰ νὰ δώσωμεν εἰς μεμονωμένην σφαῖραν ἀκτῖνος 30 ἑκατοστομ. φορτίον 1000 ἠλεκτροστατικῶν μονάδων ;

Λύσις: Γνωρίζομεν τὴν σχέσιν $\frac{M^2}{2C}$, ὅπου M εἶναι ἴσον πρὸς 1000, καὶ C πρὸς 30.

Ἡ ἐνέργεια ἡ καταναλισκομένη θὰ εἶναι :

$$\frac{1000^2}{60} = \frac{10^5}{6} \text{ ἔργια ἢ } \frac{10^7}{600} \text{ δηλαδὴ } \frac{1}{600} \text{ joules}$$

329. Πυκνωτὴς χωρητικότητος 10, φέρεται εἰς δυναμικὸν 30. Ποῖον εἶναι τὸ φορτίον του ; Ποῖον ἔργον καταναλίσκεται διὰ νὰ φορτισθῇ ;

Λύσις: Φορτίον $10 \times 30 = 300$

Ἔργον δαπανώμενον διὰ φόρτισιν : $\frac{1}{2} \times 10 \times 30^2 = 4500$ ἔργια.

330. Ποία εἶναι ἡ ἠλεκτρικὴ πυκνότης ἐπιφανείας σφαίρας ἀκτῖνος 5 ἑκατοστομ, ἐὰν τὸ δυναμικὸν τῆς σφαίρας εἶναι 20000 volts ;

Λύσις: $\frac{q}{5} = \frac{rv}{4\pi r^2} = \frac{v}{4\pi r} = \frac{\frac{20000}{300}}{4\pi \times 5} = 1,061$

$\left(\text{τὸ δυναμικὸν εἶναι } \frac{20000}{300} \text{ εἰς ἠλεκτροστατικὰς μονάδας}\right).$

331. Συμπυκνωτὴς 10 microfarads εἶναι φορτισμένος, καὶ παρουσιάζει διαφορὰν δυναμικοῦ 500 volts. Ποία εἶναι ἡ ἐνέργειά του ;

Λύσις: Ἡ ἐνέργειά του θὰ εἶναι $\frac{1}{2}$ CV^2 Ἰουλίους μονάδας, ἐὰν C εἶναι farads καὶ V volts.

Ἑπομένως ἐνταῦθα : $\frac{1}{2} \times \frac{10}{10^6} (500)^2 = 1,25$ Joules.

332. Ποίαν ἀκτῖνα ἔχει σφαῖρα, τῆς ὁποίας ἡ χωρητικότης εἶναι 1 microfarad ;

Λύσις: Ἓν microfarad ἰσοδυναμεῖ πρὸς 9×10^5 ἠλεκτροστατικὰς μονάδας χωρητικότητος ἤτοι 900000.

Ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας, ἥτις ἔχει αὐτὴν τὴν χωρητικότητα, εἶναι 900000 ἑκατοστόμετρα ἢ 9 χιλιόμετρα.

Ἡ χωρητικότης σφαίρας, ἐχούσης τὴν αὐτὴν ἐπιφάνειαν οἵαν καὶ ἡ γῆ, δὲν θὰ εἶχε παρὰ 700 microfarads.

333. Ἕνας συμπυκνωτὴς ἔχει χωρητικότητα 8000. Ἀφηλεκτρίζομεν αὐτὸν διὰ μεταλλικοῦ σύρματος, τοῦ ὁποίου ἡ θερμοχωρητικότης εἶναι 0,0006 Τὸ σύρμα φέρεται ἀπὸ τῆς θερμοκρασίας 10° εἰς 510°. Ποία ἦτο ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ τῶν ὁπλισμῶν πρὸ τῆς ἀφηλεκτρίσεως, ἐὰν ὑποτεθῇ ὅτι ὅλη ἡ θερμότης τοῦ φορτίου μετεδόθη εἰς τὸ σύρμα ;

Λύσις : $\frac{1}{2}\, 8000\, v^2 = 4,17 \times 10^7 \times 0,0006\, (510 - 10)$

καὶ $v = 59,25$

334. Εἷς πόλος μαγνητικῆς μάζης 90, ἕλκει ἕτερον πόλον εὑρισκόμενον εἰς ἀπόστασιν 2 ἑκατοστ. μὲ δύναμιν ἴσην πρὸς ἓν γραμμάριον. Ποία ἡ μαγνητικὴ μᾶζα τοῦ δευτέρου πόλου ;

Λύσις: $\frac{90 \times x}{4} = 981$ καὶ $x = 43{,}6.$

335. Ποία ἡ δύναμις ἥτις ἐξασκεῖται μεταξὺ δύο πόλων μαγνητικῶν μαζῶν 32 καὶ 40, ἐξ ἀποστάσεως 10 ἑκατοστομέτρων;

Λύσις: $\frac{32 \times 40}{(10)^2} = 12{,}8$ δύναι.

336 Ποῖον τὸ πλῆθος τῶν μαγνητικῶν μονάδων πόλου, ὅστις ἀπωθεῖται μετὰ δυνάμεως 9 δυνῶν, ὅταν τοποθετῆται ἐν μαγνητικῷ πεδίῳ ἐντάσεως 0,18;

Λύσις: $0{,}18 \times x = 9$ καὶ $x = 50.$

337. Μαγνήτης, τοῦ ὁποίου οἱ πόλοι ἔχουσι 300 μονάδας, τίθεται ἐν μαγνητικῷ πεδίῳ ὁμοιομόρφῳ, οὗτινος ἡ ἔντασις εἶναι 0,466. Ποῖαι αἱ δυνάμεις, αἱ ἐνεργοῦσαι ἐπὶ τῶν πόλων τούτων;

Λύσις: $+0{,}466 \times 300 = +139{,}8$
$-0{,}466 \times 300 = -139{,}8$

338. Μαγνήτης εὐθύγραμμος ἔχει μῆκος 10 ἑκατοστομ. μεταξὺ τῶν πόλων του, τομὴν 0,5 τετραγ. ἑκατοστ., καὶ ἡ μαγνητική του ῥοπὴ εἶναι 1000. Ποία εἶναι ἡ ἔντασις μαγνητίσεώς του A; Καὶ ποία ἡ μαγνητικὴ μᾶζα τῶν δύο πόλων του;

Λύσις: $A = \frac{1000}{10 \times 0{,}5}$, $M = \mu \times 10$, $\mu = \frac{M}{10} = \frac{1000}{10}$

Β'. ΔΥΝΑΜΙΚΟΣ ΗΛΕΚΤΡΙΣΜΟΣ

α'. Στῆλαι. Ἀντιστάσεις. Νόμος τοῦ Ohm.

339. Στήλη ἐξ 120 στοιχείων, ἀποτελεῖται ἐκ δύο ὁμάδων ἡνωμένων κατὰ ποσότητα, ἑκάστη τῶν ὁποίων περιέχει 60 στοιχεῖα κατὰ τάσιν. Ποία εἶναι ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις τῆς στήλης, γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ ἀντίστασις ἑκάστου στοιχείου εἶναι 1,5 ohm;

Λύσις: Ἑκάστη σειρὰ ἔχει ὡς ἀντίστασιν $60 \times 1{,}5 = 90$ ohms. Αἱ δύο ὁμάδες συνδεδεμέναι κατὰ ποσότητα θὰ ἔχουν ἀντίστασιν ἴσην πρὸς $\frac{90}{2} = 45$ ohms.

340. Μία στήλη ἐξ 8 στοιχείων, ἔχουσα ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν 1,8 volt καὶ ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν 0,4 ohm, ἑνοῦται διὰ τῶν ὁμωνύμων πόλων (ἀντιθέτως) μετ' ἄλλης στήλης ἐξ 6 στοιχείων ἐχούσης 1,1 volt ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν καὶ 0,3 ohm ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν. Ποία ἡ ἔντασις τοῦ ῥεύματος ἐν τῷ κυκλώματι τούτῳ;

Λύσις:
$$x = \frac{8 \times 1{,}8 - 6 \times 1{,}1}{8 \times 0{,}4 + 6 \times 0{,}3} = 1{,}56 \text{ ampère.}$$

341. Ποία εἶναι εἰς μονάδας volts, ἡ πτῶσις τοῦ δυναμικοῦ ἐπὶ σύρματος μήκους 3 χιλιομέτρων καὶ τομῆς 60 τετραγ. χιλιοστῶν, γνωστοῦ ὄντος ὅτι τὸ διαρρέον τὸ σύρμα ῥεῦμα εἶναι 10 ampères καὶ ἡ εἰδικὴ ἀντίστασίς του $\varrho = 1{,}6$ microohm κατὰ ἑκατοστόμετρον;

Λύσις:
$$R = \frac{\varrho}{100} \times \frac{\mu}{2} = \frac{1{,}6}{100} \times \frac{3000}{60} = 0{,}8$$
$$E = IR = 10 \times 0{,}8 = 8 \text{ volts}$$

342. Σύρμα μήκους 500 μέτρων καὶ διαμέτρου 0,76 χιλιοστομέτρων, ἔχει ἀντίστασιν 20 ohms. Ποία ἡ εἰδικὴ ἀντίστασις τοῦ σύρματος;

Λύσις:
$$r = \varrho \frac{l}{s} \quad \text{καὶ} \quad 20 = \varrho \frac{50000}{3{,}14(0{,}038)^2}$$
$$\text{ἐξ οὗ} \quad \varrho = \frac{1{,}8}{1000000.}$$

343. Σύρμα ἐξ ἀργύρου μήκους 1,03 μέτρων καὶ διαμέτρου 1 χιλιοστομέτρου ἔχει ἀντίστασιν 0,02 ohm. Ποία ἡ εἰδικὴ ἀντίστασις τοῦ ἀργύρου;

Λύσις: Γνωρίζομεν ὅτι $r = \varrho \frac{l}{s}$

Ἑπομένως $0{,}02 = \varrho \frac{103}{\pi(0{,}05)^2}$ καὶ $\varrho = \frac{1{,}52}{1000000}$

344. Σύρμα ἐκ χαλκοῦ μήκους 10 μέτρων ζυγίζει 20 γραμμάρια. Ἡ ἀντίστασίς του εἰς ohm εἶναι 0,715. Τῆς πυκνότητος τοῦ χαλκοῦ οὔσης 8,8, ποία ἡ εἰδικὴ ἀντίστασις αὐτοῦ;

Λύσις:
$$0{,}715 = \varrho \frac{1000}{\dfrac{20}{1000 \times 8{,}8}} \quad \text{ἐξ οὗ} \quad \varrho = \frac{1{,}6}{10^6}$$

345. Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τοὺς πόλους στήλης, ἵνα δι' αὐτῆς παραχθῇ ῥεῦμα 1,5 ampère ἐντὸς ἀγωγοῦ ἀντιστάσεως 7,5 ohms;

Λύσις: $I = \frac{E}{R}$ καὶ $E = 1{,}5 \times 7{,}5 = 11{,}25$ volts.

346. Ποία ἡ ἀντίστασις σύρματός τινος, ὅταν διὰ διαφορὰν δυναμικοῦ 120 volts παράγεται ῥεῦμα ἐντάσεως 3 ampéres;

Λύσις: $I = \frac{E}{R}$ καὶ $R = \frac{120}{3} = 40$ ohms.

347. Οἱ πόλοι στήλης 10 στοιχείων ἑνοῦνται διὰ σύρματος ὁμοιογενοῦς μήκους 16 μέτρων. Τὸ σύρμα παρουσιάζει ἀντίστασιν 0,5 ohm κατὰ μέτρον. Ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τοὺς δύο πόλους ἑκάστου στοιχείου τῆς στήλης εἶναι 1,8 volts καὶ ἡ ἀντίστασις ἑκάστου στοιχείου 0,4 ohm. Ποία εἶναι ἡ ἀπόστασις μεταξὺ δύο σημείων τοῦ σύρματος, τὸ ὁποῖα παρουσιάζουν διαφορὰν δυναμικοῦ 1 volt.

Λύσις: Ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ τῆς στήλης εἶναι 18 volts. Αὕτη διανέμεται ἐπὶ ὁλικῆς ἀντιστάσεως ἴσης πρός:

$$10 \times 0{,}4 + 16 \times 0{,}5 = 12 \text{ ohms}.$$

Διαφορὰ δυνάμικοῦ 1 volt θὰ ἀντιστοιχῇ εἰς μίαν ἀντίστασιν $\frac{12}{18} = \frac{2}{3}$ ohm, ἐκπεφρασμένην εἰς μέτρα σύρματος. Ἡ ἀντίστασις αὕτη θὰ εἶναι $\frac{4}{3}$ ἢ 1,33 ohm.

348. Κύκλωμα ἐξωτερικῆς ἀντιστάσεως 1 ohm διαρρέεται ὑπὸ ῥεύματος 5 στοιχείων ἴσων, συνηνωμένων κατὰ τάσιν. Ποία ἡ ἔντασις τοῦ ῥεύματος; Ἀντίστασις στοιχείου 0,4 ohm, διαφορὰ δυναμικοῦ 1,8 volt.

Λύσις: $$I = \frac{5 \times 1{,}8}{1+5\times 0{,}4} = 3 \text{ ampéres}$$

349. Ποία ἡ ἔντασις, ἐὰν τὰ στοιχεῖα εἶναι συνηνωμένα κατὰ ποσότητα;

Λύσις: $$I = \frac{1,8}{1 + \frac{0,4}{5}} = 1,67 \text{ ampéres}$$

350. Τὸ ῥεῦμα στήλης σταθερᾶς εἶναι 10 ampéres ὅταν διαρρέει ἐξωτερικὸν κύκλωμα 20 ohms, 8 ampères ὅταν διαρρέει κύκλωμα 40 ohms, καὶ 9 ampére, ὅταν διαρρέει σύρμα ἀγνώστου ἀντιστάσεως. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀντίστασις R τῆς στήλης, καὶ ἡ ἄγνωστος ἀντίστασις τοῦ σύρματος.

Λύσις : Ἔστω E ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τοὺς δύο πόλους τῆς στήλης :

$$10 = \frac{E}{R+20}, \quad 8 = \frac{E}{R+40}, \quad 9 = \frac{E}{R+x}$$

ἢ $$10\left(R+20\right) = 8\left(R+40\right) = 9\left(R+x\right)$$

$$R = 60 \text{ ohms} \quad \text{καὶ} \quad x = 28\frac{8}{9} \text{ ohms.}$$

351. Ἡ εἰδικὴ ἀντίστασις τοῦ λευκοχρύσου εἶναι 9. Ποία θὰ εἶναι ἡ ἀντίστασις σύρματος λευκοχρύσου μήκους 2 μέτρων, ζυγίζοντος 0,2 γραμμαρίου ; Πυκνότης λευκοχρύσου 22.

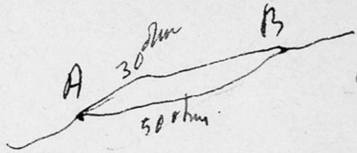
Λύσις : $$l = 200 \qquad s = \frac{0,2}{200 \times 22} \qquad \varrho = \frac{9}{1000000}$$

$$r = \varrho\frac{l}{s} = \frac{9}{1000000} \times \frac{200}{\frac{0,2}{200 \times 22}} = 39,5 \text{ ohms.}$$

352. Ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τοὺς δύο πόλους μιᾶς στήλης ἀνοικτοῦ κυκλώματος εἶναι 15 volts. Ἑνώνομεν τοὺς πόλους διὰ σύρματος καὶ ἔχομεν ῥεῦμα 2 ampères, ἡ δὲ διαφορὰ δυναμικοῦ μεταξὺ τῶν πόλων ἔγινε 10 volts. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀντίστασις τοῦ σύρματος, καὶ ἡ ἀντίστασις τῆς στήλης.

Λύσις : $$r = \frac{10}{2} = 5 \text{ ohms}$$

$$2 = \frac{15}{R+5} \quad \text{καὶ} \quad R = 2,5 \text{ ohms.}$$



$A \to B. = 100$ V

353. Ἓν κύκλωμα διχάζεται μεταξὺ δύο σημείων του A καὶ B εἰς δύο σύρματα, ὧν αἱ ἀντιστάσεις εἶναι 30 καὶ 50 ohms. Ἡ διαφορὰ τοῦ δυναμικοῦ μεταξὺ τῶν σημείων A καὶ B εἶναι 100 volts. Ποία εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ ῥεύματος ἐντὸς ἑκάστου τῶν δύο συρμάτων, καὶ ποία ἡ τοῦ ὁλικοῦ σύρματος ; Ποία δὲ ἡ ἀντίστασις ἡ ἰσοδύναμος πρὸς τὸ σύνολον τῶν δύο συρμάτων ;

Λύσις : $I_1 = \frac{V_1}{R_1}$ $\qquad I_2 = \frac{V_2}{R_2}$

$\frac{150}{8} =$

$$\frac{I}{R} = \frac{1}{30} + \frac{1}{50} = \frac{50}{1500} + \frac{30}{1500} = \frac{80}{1500} = \frac{8}{150} = 18{,}8$$

✓

$$I_1 = \frac{100}{30} = 3{,}33 \qquad I_2 = \frac{100}{50} = 2$$

$$I = \frac{100}{30} + \frac{100}{50} + \frac{5000}{1500} + \frac{3000}{1500} = \frac{80}{15} = 5{,}3.$$

354. Ρεῦμα ἐντάσεως 10 ampères διακλαδίζεται εἰς 3 ἀγωγοὺς ἀντιστάσεων 5, 2, καὶ 10 ohms. Ποία ἡ ἀντίστασις R, ἡ ἰσοδύναμος πρὸς τοὺς τρεῖς τούτους ἀγωγούς ; Ποία ἡ ἔντασις τοῦ ῥεύματος ἐντὸς ἑκάστου τῶν ἀγωγῶν, καὶ ποία ἡ διαφορὰ τοῦ δυναμικοῦ E εἰς τὰ ἄκρα των ;

Λύσις : $\frac{1}{R} = \frac{1}{5} + \frac{1}{2} + \frac{1}{10} = \frac{4}{5}$

$$I_1 = \frac{12{,}5}{2} = 6{,}25, \quad I_2 = \frac{12{,}5}{5} = 2{,}5 \quad I_3 = \frac{12{,}5}{10} = 1{,}25$$

$$I = \frac{E}{R} \qquad 10 = \frac{E}{\frac{5}{4}} \quad \text{καὶ} \quad E = 12{,}5 \text{ volts.}$$

β΄. Θερμαντικὰ καὶ χημικὰ ἀποτελέσματα τοῦ ἠλεκτρικοῦ ῥεύματος.

355. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐνέργεια ἡ ἀναπτυσσομένη καθ' ὥραν εἰς ἀγωγὸν ἀντιστάσεως 32 ohms, ὅστις παρουσιάζει εἰς τὰ ἄκρα του διαφορὰν δυναμικοῦ 40 volts.

Λύσις : $\frac{E^2}{R} = \frac{(40)^2}{32} = 50$ joules κατὰ δευτερόλεπτον.

$50 \times 3600 = 180000$ Joules καθ' ὥραν.

Ἰσοδύναμος θερμότης $\frac{180000}{4,17} = 43165$ θερμίδες.

356. Ρεῦμα ἐντάσεως 1,5 ampère διέρχεται ἐπὶ 15 λεπτὰ τῆς ὥρας διὰ σύρματος ἀντιστάσεως 3 ohms εὑρισκομένου ἐντὸς 300 γράμμων ὕδατος. Ποία εἶναι ἡ προκαλουμένη ἀνύψωσις τῆς θερμοκρασίας ;

Λύσις : Ἔργον εἰς Joules $(1,5)^2 \times 3 \times 15 \times 60$

Θερμότης ἀντίστοιχος εἰς θερμίδας, $\frac{(1,5)^2 \times 3 \times 15 \times 60}{4,17}$

Ὕψωσις τῆς θερμοκρασίας τοῦ ὕδατος :

$$\frac{(1,5)^2 \times 3 \times 15 \times 60}{4,17 \times 300} = 4^0,85$$

357. Πόσοι ἀτμόϊπποι χρειάζονται διὰ νὰ ἐπιτευχθῇ ρεῦμα 12 ampères, ἐντὸς ἀντιστάσεως 40 ohms ;

Λύσις : Ἔργον joules κατὰ δευτερόλεπτον $(12)^2 . 40 = 5760$

Ἀριθμὸς ἀτμοΐππων: $\frac{5760}{9,81 \times 75} = 6,97.$

358. Ρεῦμα 15 ampères κυκλοφορεῖ ἐντὸς ἀντιστάσεως 8 ohms. Ποία ἡ ἰσχύς του ;

Λύσις : $W = IE \qquad E = 15 \times 8 = 120$

$W = 15 \times 120 = 1800$ watts.

359. Στήλη ἐκ 10 στοιχείων Δανιὲλ συνδεδεμένων κατὰ τάσιν τίθεται εἰς κυκλοφορίαν δι' ἀγωγοῦ τοῦ ὁποίου ἡ ἀντίστασις εἶναι 5 ohms. Ποία θὰ εἶναι ἡ θερμότης ἡ ἀναπτυσσομένη ἐντὸς τοῦ ἀγωγοῦ ; Ἐσωτερικὴ ἀντίστασις ἑκάστου στοιχείου 1 ohm, ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις ἑκάστου στοιχείου 1,1 volt.

Λύσις : Γνωρίζομεν ὅτι $I = \frac{ne}{nr + R}$

Ἐπίσης $q = AI^2Rt \qquad A = \frac{1}{E}$ καὶ $E = 4,17$ joules

συνεπῶς $I = 0,73$ ampères καὶ $q = 38,7$ θερμίδες.

360. Τὸ σύρμα, τὸ ἑνῶνον τοὺς δύο πόλους στήλης, διακλαδίζεται εἰς δύο σημεῖα εἰς δύο ἀγωγούς. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ σχέσις τῶν ποσοτήτων τῆς θερμότητος τῶν ἀναπτυσσομένων εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον εἰς τοὺς δύο ἀγωγούς, γνωστοῦ ὄντος ὅτι αἱ ἀντιστάσεις των εἶναι 3 καὶ 6 ohms.

Λύσις : Ἔστωσαν i_1 καὶ i_2 αἱ ἐντάσεις ἐντὸς τῶν δύο ἀγωγῶν καὶ r_1 καὶ r_2 αἱ ἀντιστάσεις των.

Τότε : $$i_1 r_1 = i_2 r_2 \qquad (1)$$

Ἐὰν q_1 καὶ q_2 εἶναι αἱ ποσότητες τῆς θερμότητος, αἱ ἀναπτυσσόμεναι εἰς τοὺς δύο ἀγωγοὺς τοὺς διακλαδιζομένους, τότε ἔχομεν :

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{i_1^2 r_1}{i_2^2 r^2}$$

Λαμβάνοντες ὑπ᾿ ὄψιν τὴν ἐξίσωσιν (1) ἔχομεν :

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{i_1}{i_2} = \frac{r_2}{r_1}$$

καὶ $$\frac{q_1}{q_2} = \frac{6}{3} = 2.$$

361. Ρεῦμα 0,75 ampères διέρχεται ἐπὶ 5 λεπτὰ διὰ στήλης ὑδραργύρου ἀντιτάσεως 0,47 ohm. Εἰς ποίαν θερμοκρασίαν θὰ ἀνέλθῃ ὁ ὑδράργυρος μὴ λαμβανομένης ὑπ᾿ ὄψιν τῆς ἀκτινοβολίας τῆς θερμότητος ; Ἡ μᾶζα τοῦ ὑδραργύρου εἶναι 20,25 γραμμάρια, καὶ ἡ εἰδικὴ θερμότης τοῦ ὑδραργύρου 0,0322.

Λύσις : Θερμότης ἀναπτυσσομένη ὑπὸ τοῦ ῥεύματος :

$$\frac{I^2R \times 5 \times 60}{4,17} = \frac{(0,75)^2 \times 0,47 \times 300}{4,17} = 19 \text{ θερμίδες.}$$

Ἡ θερμότης αὕτη ἀπορροφᾶται ὑπὸ τῆς ὑδραργ. στήλης, ἧς ἡ θερμοκρασία ὑψοῦται κατὰ x^0.

Ἐπομένως : $19 = 20,25 \times 0,0322.\ x$ ἐξ οὗ $x = 29^0,2$.

362. Λαμπτὴρ πυρακτώσεως 16 κηρίων καίει ἐντὸς θερμιδομέτρου περιλαμβάνοντος μίαν λίτραν ὕδατος. Τὸ ὕδωρ θερμαίνεται κατὰ 2^0 ἐντὸς 5 λεπτῶν. Ποία ἰσχὺς καταναλίσκεται κατὰ κηρίον ;

Λύσις : Θερμότης ἀναπτυσσομένη κατὰ δευτερόλεπτον καὶ κατὰ κηρίον : $Q = \frac{2 \times 1000}{5 \times 60 \times 16}$

Ἰσχύς : $JQ = 4{,}17\ Q = 1{,}7$ watt.

363. Δύο σύρματα, τὸ ἓν ἐξ ἀργύρου, καὶ τὸ ἕτερον ἐκ λευκοχρύσου, τοῦ αὐτοῦ μήκους καὶ τῆς αὐτῆς διαμέτρου, εὑρίσκονται τὸ ἓν κατόπιν τοῦ ἄλλου ἐντὸς κυκλώματος. Ποία εἶναι ἡ σχέσις τῶν ποσοτήτων τῆς θερμότητος, τῆς ἀναπτυσσομένης εἰς ἕκαστον ἐξ αὐτῶν ; Εἰδικὴ ἀντίστασις λευκοχρύσου 9, ἀργύρου $\frac{3}{2}$ microohm.

Λύσις : Ἔστω P ἡ θερμότης ἡ ἀναπτυσσομένη εἰς τὸν λευκόχρυσον, καὶ A ἡ ἀναπτυσσομένη εἰς τὸν ἄργυρον, j ἡ σταθερὰ 4,17.

Τότε : $P\,j = I^2 \frac{1.9}{s} t$, καὶ $A\,j = I^2 \frac{1 . 1{,}5}{s} t$

ἄρα $\frac{P}{A} = 6$. Ὁ λευκόχρυσος λαμβάνει 6 φορὰς μεγαλυτέραν θερμότητα ἢ ὁ ἄργυρος.

364. Ποία εἶναι ἡ ἔντασις ῥεύματος, τὸ ὁποῖον ἀποσυνθέτει 1 γράμμον ὕδατος εἰς 1 δευτερόλεπτον ;

Λύσις : Ρεῦμα 1 ampère ἐκλύει $\frac{1}{96600}$ γραμμάρια ὑδρογόνου, ἀποσυνθέτει δὲ $\frac{9}{96600}$ γραμ. ὕδατος.

Διὰ νὰ ἀποσυνθέσῃ 1 γραμ ὕδατος θὰ χρειασθῇ ῥεῦμα ἐντάσεως x, ὅπερ δίδεται ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως $x . \frac{9}{96600} = 1$

καὶ $x = 10733$ ampères.

365. Ρεῦμα 5 ampères διέρχεται διὰ βολταμέτρου ὅπερ περιέχει ὕδωρ ὀξυνισμένον. Πόσος χρόνος χρειάζεται διὰ νὰ ἐπιτύχωμεν εἰς τὴν κάθοδον 1 λίτρον ὑδρογόνου ;

Λύσις : 1 λίτρον ὑδρογόνου ζυγίζει $1{,}293 \times 0{,}069 = 89$ χιλιοστόγραμμα.

5 ampères ἐκλύουν $\frac{5}{96600}$ γραμ. ὑδρογόνου κατὰ δευτερόλεπτον.

Ὁ χρόνος θὰ εἶναι : $\frac{0,089 \times 96600}{5}$ δευτερόλεπτα, ἢ 28 πρῶτα λεπτὰ καὶ 39 δεύτερα.

366. Ποία εἶναι ἡ ἔντασις ῥεύματος, ὅπερ ἀποθέτει 1 γράμμον ἀργύρου εἰς 5 λεπτά ;

Λύσις: $\frac{108}{96600}$ εἶναι τὸ βάρος τοῦ ἀποτιθεμένου ἀργύρου εἰς ἓν δευτερόλεπτον.

$$1 = x \times 5 \times 60 \times \frac{108}{96600} \quad \text{ἐξ οὗ} \quad x = 2,98 \text{ ampéres.}$$

367. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ ἐκλυομένου ὑδρογόνου εἰς 1 λεπτὸν ὑπὸ ῥεύματος 1 ampère ἐντὸς βολταμέτρου ὕδατος ὀξυνισμένου.

Λύσις: 1 κυβ. ἑκατ. ὑδρογόνου ζυγίζει $\frac{89}{1000}$ χιλιοστόγραμμα. Εἰς ἓν λεπτόν, 1 ampére ἀποσυνθέτει $\frac{60000}{96600}$ χιλιοστόγραμμα ὑδρογόνου.

$$\frac{60000}{96600} = x \times \frac{89}{1000} \quad \text{καὶ} \quad x = 6,93 \text{ κυβ. ἑκατοστά.}$$

368. Ἡ θερμότης ἡ παραγομένη ἐπὶ 40 δευτερόλεπτα ἐντὸς ἀγωγοῦ ἀντιστάσεως 12 ohms εἶναι 4132 μικραὶ θερμίδες. Ποία ἡ ἔντασις, καὶ ποία ἡ ἰσχὺς τοῦ ῥεύματος τούτου ;

Λύσις:

$$Q = \pi RI^2t \qquad W = I^2R$$

$$4132 = 0,24 \times 12 \times I^2 \times 40 \qquad W = 36 \times 12$$

$$I^2 = 36 \qquad I = 6 \qquad W = 432 \text{ watts.}$$

369. Στήλη ἀποθέτει εἰς 2 ὥρας 9,540 γραμ. ἀργύρου ἐκ διαλύσεως ἀζωτούχου ἀργύρου. Ποία ἡ ἔντασις τοῦ ῥεύματος εἰς ampères ;

Λύσις : Ἔστω x ἡ ἔντασις : $9,540 = x \times 2 \times 60 \times 60 \frac{108}{96600}$ καὶ $x = 1,18$ ampères.

370. Λαμπτὴρ πυρακτώσεως διαρρεόμενος ὑπὸ ῥεύματος 0,7 ampéres παρουσιάζει εἰς τὰ ἄκρα του διαφορὰν δυναμικοῦ 98 volts. Ποία ἡ ἀντίστασίς του;

Λύσις:

$$R = \frac{98}{0{,}7} = 140 \text{ ohms.}$$

371. Λαμπτὴρ πυρακτώσεως διαρρεόμενος ὑπὸ ῥεύματος 0,75 ampère παρουσιάζει εἰς τὰ ἄκρα του διαφορὰν δυναμικοῦ 60 volts. Ποία ἡ θερμότης ἡ ἀναπτυσσομένη ἐντὸς 1 ὥρας εἰς τὸν λαμπτῆρα;

Λύσις: Ἡ ἐνέργεια ἡ παραγομένη ἐντὸς 1 δευτερολέπτου εἰς τὸν λαμπτῆρα εἶναι $0{,}75 \times 60$ joules.

Εἰς μίαν ὥραν, ὁ ἀριθμὸς τῶν θερμίδων τῶν ἀναπτυσσομένων θὰ εἶναι:

$$\frac{0{,}75 \times 60 \times 3600}{4{,}17} = 39087 \text{ θερμίδες.}$$

372. Ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις δυναμοηλεκτρικῆς μηχανῆς εἶναι 142,5 volts, καὶ ἡ ἀντίστασίς της ἡ ἐσωτερικὴ 2 ohms. Πόσους λαμπτῆρας πυρακτώσεως δύναται νὰ τροφοδοτήσῃ αὕτη διατεταγμένους παραλλήλως, ἔχοντας ἕκαστον ἀντίστασιν 40 ohms, καὶ διαρρεομένους ὑπὸ ῥεύματος $\frac{3}{4}$ ampère;

Λύσις: Ἔστω x ὁ ἀριθμὸς τῶν λαμπτήρων. Τὸ κύριον ῥεῦμα θὰ ἔχῃ ὡς ἔντασιν $\frac{3}{4}$ x.

Ἐφαρμόζομεν τὸν νόμον τοῦ Ohm εἰς πλῆρες κύκλωμα:

$$\frac{3}{4}x = \frac{142{,}5}{2+\frac{40}{x}} \quad \text{καὶ} \quad x=75$$

373. Στήλη 20 συσσωρευτῶν ἐν σειρᾷ, ἕκαστος τῶν ὁποίων ἔχει ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν 2 volts, παρουσιάζει ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν 0,2 ohm. Αὕτη τροφοδοτεῖ 60 λαμπτῆρας παραλλήλους, τῶν ὁποίων ἡ ἀντίστασις εἶναι 0,3 ohm. Ὁ ἐξωτερικὸς ἀγωγὸς ἔχει ἀντίστασιν 0,04 ohm. Ποία εἶναι εἰς χιλιογραμμόμετρα ἡ κατανάλωσις τοῦ ἔργου ἐπὶ ἑκάστου λαμπτῆρος κατὰ δευτερόλεπτον;

Λύσις: Ἔστω I ῥεῦμα διαρρέον ἕνα λαμπτῆρα. R ἡ ἀντίστασις ἑνὸς λαμπτῆρος.

Ἡ κατανάλωσις εἶναι : I^2R joules ἢ $\frac{I^2R}{9,8}$ χιλιογραμμόμετρα.

$$I = \frac{1}{60} \times \frac{20 \times 2}{0,2 + 0,04 + 0,3} = 1,23 \quad R = 0,3 \times 60 = 18$$

$$\frac{(1,23)^2 18}{9,81} = 2,78 \text{ χιλιογραμμόμετρα.}$$

374. Ἠλεκτρικὸν ῥεῦμα ἔχει ἔντασιν 96 ὅταν ἀποσυνθέτῃ 7 χιλιοστόγραμμα ὕδατος κατὰ δευτερόλεπτον. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἔντασις τοῦ ῥεύματος ὅπερ διαβιβαζόμενον ἐντὸς βολταμέτρου καὶ ἀποσυνθέτον τὸ ἐν αὐτῷ ὕδωρ, γεμίζει διὰ τῶν ἐκλυομένων ἀερίων εἰς 3 λεπτὰ τὸν κώδωνα τοῦ βολταμέτρου τοῦ ὁποίου οὕτω καλύπτονται τὰ δύο ἠλεκτρόδια, καὶ τοῦ ὁποίου ἡ χωρητικότης εἶναι 423 κυβ. ἑκατ. Ὁ ξηρὸς ἀὴρ εἰς 25° ὑπὸ πίεσιν 750 χιλιοστομέτρων, δίδει : Βάρος κανονικὸν λίτρας ἀέρος 1,293 γραμ. Συντελεστὴς διαστολῆς ἀερίων $\alpha = 0,00366$, πυκνότης ὑδρογόνου 0,069, πυκνότης ὀξυγόνου 1,1056.

Λύσις : Τὰ 423 κυβ. ἑκ. τοῦ συλλεγέντος ἀερίου ἀποτελοῦνται ἀπὸ 141 κυβ. ἑκ. ὀξυγόνου καὶ ἀπὸ 282 κυβ. ἑκ. ὑδρογόνου. Ἐὰν λάβομεν ὡς μονάδα ὄγκου τὸ λίτρον, καὶ ὡς μονάδα βάρους τὸ γράμμον, τὸ βάρος των εἶναι :

$$P = 0,141 \times 1,293 \times 1,1056 \times \frac{750}{760} \times \frac{1}{1 + 25\alpha} + 0,282 \times$$

$$\times 1,293 \times 0,069 \times \frac{750}{760} \times \frac{1}{1 + 25\alpha}$$

Τὸ ἀνωτέρω δυνάμεθα νὰ γράψωμεν καὶ ὡς ἑξῆς :

$$P = 0,141 \times 1,293 \times \frac{75}{76} \times \frac{1}{1 + 25\alpha}(1,1056 + 2 \times 0,069)$$

καὶ $P = 0,204$ γραμμμάρια.

Εἰς 3 λεπτὰ τὸ ὑποτιθέμενον ῥεῦμα ἀποσυνθέτει 204 χιλιοστόγραμμα ὕδατος.

Εἰς 1 δευτερόλεπτον ἀποσυνθέτει $\frac{204}{3 \times 60}$ χιλιοστόγρ. ὕδατος.

Κατὰ τὸν νόμον τοῦ Φαραδάϋ ἡ χημικὴ ἐνέργεια, ἡ παραγομένη ὑπὸ ῥεύματος εἰς ὡρισμένον χρόνον, εἶναι ἀνάλογος τῆς ἐντάσεως τοῦ ῥεύματος.

Ἐὰν λοιπὸν παραστήσωμεν διὰ x τὴν ζητουμένην ἔντασιν, δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν τὴν σχέσιν:

$$\frac{96}{x} = \frac{\frac{7}{204}}{3 \times 60}$$

ἐξ οὗ $$x = \frac{96 \times 204}{3 \times 60 \times 7} = 15,5$$

375. Ἔχει τις 54 στοιχεῖα ἠλεκτρεγερτικῆς δυνάμεως ἕκαστον 1,1 volt, καὶ ἀντιστάσεως 2 ohms. Πῶς πρέπει νὰ συνδεθῶσι ταῦτα, ἵνα ἔχωμεν μέγιστον ῥεῦμα εἰς τηλεγραφικὴν γραμμὴν ἀντιστάσεως 12 ohms;

Λύσις: Ἔστω n ὁ ἀριθμὸς τῶν ὁμάδων, m ὁ ἀριθμὸς τῶν στοιχείων συνδεδεμένων κατὰ ποσότητα εἰς ἑκάστην ὁμάδα:

$$n.m = 54 \qquad \frac{n\,2}{m} = 12$$

Λύομεν τὰς ἐξισώσεις καὶ ἔχομεν

$$m = 3 \quad \text{καὶ} \quad n = 18$$

Ἑπομένως θὰ ἔχωμεν 18 ὁμάδας τῶν 3 στοιχείων συνδεδεμένων κατ' ἐπιφάνειαν.

376. Δυναμομηχανὴ παράγει συνεχὲς ῥεῦμα 125 ampères ὑπὸ 220 volts. Ποία εἶναι ἡ ἰσχὺς ἀτμομηχανῆς ἥτις ὀφείλει νὰ τὴν κινήσῃ, ἐὰν ἡ μηχανικὴ ἀπόδοσίς της εἶναι 0,745;

Λύσις: Ἡ ἠλεκτρικὴ ἰσχὺς $P = EI = 125 \times 220 = 27,5$ κιλοβάτ.

Ἡ ἰσχὺς τῆς μηχανῆς $T = \frac{27,500}{736 \times 0,745} = 50,15$ ἀτμόϊπποι.

377. Κινητὴρ δι' ἀερίου 100 ἵππων, κινεῖ δυναμομηχανήν, ἥτις παρέχει 490 ampères. Ποία ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ (voltage) μεταξὺ τῶν ἄκρων τῆς μηχανῆς; Ἡ μηχανικὴ ἀπόδοσις εἶναι 0,80.

Λύσις: Ἡ ἠλεκτρικὴ ἰσχὺς $P = 100 \times 0,80 \times 736 = 58880$ watts.

Ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ $E = \frac{P}{I} = \frac{58880}{490} = 120$ volts.

ΠΙΝΑΞ ΤΩΝ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ

ΓΕΝΙΚΑΙ ΕΝΝΟΙΑΙ ΚΑΙ ΤΥΠΟΙ ΤΗΣ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

I. ΜΗΧΑΝΙΚΗ

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΑΥΤΩΝ

I. ΜΗΧΑΝΙΚΗ

II. ΥΔΡΟΣΤΑΤΙΚΗ

III. ΑΕΡΟΣΤΑΤΙΚΗ

IV. ΘΕΡΜΟΤΗΣ

V. ΑΚΟΥΣΤΙΚΗ

VI. ΟΠΤΙΚΗ

VII. ΗΛΕΚΤΡΙΣΜΟΣ

ΠΑΡΟΡΑΜΑΤΑ

Σελὶς 47	(πρόβλημα 33)	στίχος 14	ἀντὶ	$5'$	γράφε	$5''$
» 64	(» 63)	» 16	»	$\sqrt{5}-\sqrt{6}$	»	$\sqrt{5-\sqrt{6}}$
» 124	(» 191)	» 19	»	ἀτμοσ·ροσφ.	»	ἀτμοσφαίρας

θεχ. 85