ΜΑΡΙΑΣ Σ. ΖΕΡΒΟΥ
ΚΑΘΗΓΗΤΡΙΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ
ΤΗΣ Α΄ ΤΑΞΕΩΣ ΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ
ΚΑΙ ΤΗΣ
ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΟΥ ΤΑΞΕΩΣ ΤΩΝ ΙΣΟΔΥΝΑΜΩΝ ΣΧΟΛΕΙΩΝ

Ἀριθ. Πράξ. Ἐκπ. Συμβ. $\frac{198}{27\text{-}9\text{-}27}$

Τιμᾶται μετὰ τοῦ βιβλιοσήμου καὶ φόρου Δρ. 36.55
Ἀξία βιβλιοσήμου . . . . » 13.05
Πρόσθετος φόρος ἀναγκαστικοῦ δανείου . » 3.90

ΕΚΔΟΣΙΣ ΤΡΙΤΗ

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΙΩΑΝΝΟΥ Ν. ΣΙΔΕΡΗ
ΟΔΟΣ ΣΤΑΔΙΟΥ (Μέγαρον Ἀρσακείου)
1927

ΜΑΡΙΑΣ Σ. ΖΕΡΒΟΥ
ΚΑΘΗΓΗΤΡΙΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ
ΤΗΣ Α΄ ΤΑΞΕΩΣ ΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ
ΚΑΙ ΤΗΣ
ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΟΥ ΤΑΞΕΩΣ ΤΩΝ ΙΣΟΔΥΝΑΜΩΝ ΣΧΟΛΕΙΩΝ

Ἐγκριθεῖσα διὰ τῆς ὑπ᾽ ἀριθ. 20999 ἀποφάσεως τοῦ Ὑπουργ. τῆς Παιδείας τῆς 7 Ἰουνίου 1927.

ΕΚΔΟΣΙΣ ΤΡΙΤΗ

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΙΩΑΝΝΟΥ Ν. ΣΙΔΕΡΗ
ΟΔΟΣ ΣΤΑΔΙΟΥ (Μέγαρον Ἀρσακείου)
1927

Ἐν Ἀθήναις τῇ 7 Ἰουνίου 1927.

Ἀριθ. Πρωτ. 20999

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΝ
ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

Πρὸς τὴν κ. Μαρίαν Ζερβοῦ

Ἀνακοινοῦμεν ὑμῖν, ὅτι δι᾽ ἡμετέρας πράξεως τῇ 12 τοῦ παρελθόντος μηνὸς ἐκδοθείσης καὶ τῇ 27 τοῦ αὐτοῦ δημοσιευθείσης ἐν τῷ ὑπ᾽ ἀριθ. 41 φύλλῳ τῆς Ἐφημερίδος τῆς Κυβερνήσεως ἐνεκρίθη τὸ βιβλίον ὑμῶν Θεωρητικὴ Ἀριθμητικὴ πρὸς χρῆσιν τῆς Α΄ τάξεως τῶν γυμνασίων καὶ τῆς ἀντιστοίχου τάξεως τῶν ἰσοδυνάμων σχολείων διὰ μίαν δεκαετίαν, λογιζομένην ἀπὸ τοῦ σχολικοῦ ἔτους 1927—28, ὑπὸ τὸν ὅρον ὅπως συμμορφωθῆτε πρὸς τὰς ἐν ταῖς σχετικαῖς ἐκθέσεσιν ὑποδείξεις τῆς κριτικῆς ἐπιτροπείας.

Ἐντολῇ τοῦ Ὑπουργοῦ
Ὁ Διευθυντὴς
Ε. Κακοῦρος

Ἀκριβὲς ἀντίγραφον
αὐθημερὸν
Ὁ τμηματάρχης
Κ. Καμπέρης

Πᾶν ἀντίτυπον φέρει τὴν ἰδιόχειρον ὑπογραφὴν τῆς συγγραφέως καὶ τὴν σφαγῖδα τοῦ ἐκδότου.

ΙΩΑΝΝΗΣ Ν. ΣΙΔΕΡΗΣ
ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΗΣ ΚΑΙ ΕΚΔΟΤΗΣ
ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ

ΜΖερβοῦ

ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

ΒΙΒΛΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄.

ΑΡΙΘΜΗΣΙΣ

Προκαταρκτικαὶ ἔννοιαι.

1.— Πόσα δένδρα ὑπάρχουσιν εἰς αὐτὴν τὴν δενδροστοιχίαν;

— Πόσους κατοίκους ἔχει τὸ χωρίον αὐτό;

— Πόσα μίλια διήνυσε τὸ τάδε ἀτμόπλοιον, ἵνα φθάσῃ ἀπὸ τοῦ λιμένος Πειραιῶς εἰς τὸν λιμένα Σύρου;

Διὰ ν' ἀπαντήσῃ τις εἰς τὰ ἐρωτήματα ταῦτα, χρειάζεται ἀριθμούς.

2.—Δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν, ὅτι ἔννοιαν ἀριθμοῦ ἀρχικῶς σχηματίζομεν, ὅταν παρατηροῦντες ὅμοια πράγματα κεχωρισμένα ἀπ' ἀλλήλων πρόκειται ν' ἀπαντήσωμεν εἰς τὸ ἐρώτημα: πόσα εἶναι ταῦτα; Π. χ. εἰς τὰς φράσεις ὀκτὼ ἄνθρωποι, ἑκατὸν βιβλία, αἱ λέξεις ὀκτώ, ἑκατὸν ἐκφράζουσιν ἀριθμούς, ἤτοι: ἡ ἔννοια δι' ἧς ὁρίζομεν τὸ πλῆθος εἶναι ἀριθμός.

3.—Ἡ ταχύτης ἑνὸς πλοίου δυνατὸν νὰ αὐξηθῇ ἢ νὰ ἐλαττωθῇ· τὰ δένδρα μιᾶς δενδροστοιχίας δυνατὸν νὰ γίνωσι περισσότερα ἢ ὀλιγώτερα· ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος δυνατὸν νὰ λάβωμεν περισσότερον ἢ ὀλιγώτερον κ. ο. κ. Ταῦτα λέγομεν ποσὰ καὶ γενικῶς:

Ποσὸν καλεῖται πᾶν τὸ ἐπιδεχόμενον αὔξησιν ἢ ἐλάττωσιν.

4.— Τὰ ζῷα ταῦτα εἶναι δεκαεπτά· τὸ μῆκος τοῦ ὑφάσματος τούτου εἶναι δεκαεπτὰ πήχεων. Σύγκρισιν κάμνομεν καὶ τὴν πρώτην καὶ τὴν δευτέραν φοράν· ἀπὸ τὴν σύγκρισιν αὐτήν, τὴν ὁποίαν καὶ μέτρησιν καλοῦμεν, προέκυψεν εἰς ἀμφοτέρας τὰς περιπτώσεις ὁ ἀριθμὸς δεκαεπτά. Ἔστω ὅτι τὰ ζῷα γίνονται περισσότερα ἀπὸ δεκαεπτά· τότε εὐθὺς μετὰ τὰ δεκαεπτὰ πόσα εἶναι δυνατὸν νὰ γίνωσι, τὸ ὀλιγώτερον; Δεκαοκτώ. Ἔπειτα: δεκαεννέα κ. ο. κ.

Ἡ μέτρησις ἐνταῦθα εἶναι οὕτως εἰπεῖν ἀπαρίθμησις.

Ἐνῷ, ἐὰν φαντασθῶμεν αὐξανόμενον τὸ ποσὸν τῶν δεκαεπτὰ πήχεων, δὲν δυνάμεθα νὰ λέγωμεν ὅτι μετὰ τοὺς δεκαεπτὰ πήχεις εὐθὺς ἀμέσως ἔρχεται τὸ ποσὸν τῶν δεκαοκτὼ πήχεων ἢ ἄλλο. διότι καὶ δεκαεπτάμισυ πήχεις ἔχομεν καὶ δεκαεπτὰ καὶ ἓν τέταρτον κ. ο. κ. Διακρίνομεν λοιπὸν ἀμέσως δύο εἴδη ποσῶν.

Πρῶτον· ποσὰ διὰ τὴν μέτρησιν τῶν ὁποίων κάμνομεν ἀπαρίθμησιν, ὅπως, ἐπὶ παραδείγματι, ὅταν πρόκειται νὰ μετρήσωμεν βιβλία, δένδρα, πρόβατα καὶ ἐν γένει πράγματα κεχωρισμένα ἀπ᾽ ἀλλήλων· καὶ δεύτερον· ποσὰ συνεχῆ, ὅπως π. χ. τὸ μῆκος ὑφάσματος, τὸ βάρος σώματος, ὁ χρόνος κ.λ.π.

5.— Τὸ ποσόν, πρὸς ὃ κάμνομεν τὴν σύγκρισιν, (ἓν ζῷον, ἓν δένδρον, εἷς πῆχυς, μία ὀκᾶ) λέγεται μονὰς ἢ καὶ ἀκεραία μονάς· ὥστε: μέτρησις ποσοῦ καλεῖται ἡ σύγκρισις αὐτοῦ πρὸς τὸ ὁμοειδὲς ποσόν, τὸ ὁποῖον λαμβάνομεν ὡς μονάδα.

6.—Ἡ ἐπιστήμη ἥτις πραγματεύεται τὰς μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν σχέσεις καλεῖται Ἀριθμητική.

Ἀρίθμησις τῶν ἀκεραίων.

7.—Ἀκέραιος ἀριθμὸς ἢ καὶ ἁπλῶς ἀκέραιος καλεῖται πᾶσα συλλογὴ ἀκεραίων μονάδων, ὅπως ἐπίσης καὶ ἡ ἀκεραία μονάς.

8. – Πῶς σχηματίζονται οἱ ἀκέραιοι καὶ πόσοι εἶναι:

Ἡ μονάς, ὅταν θεωρῆται ὡς ἀριθμός, λέγεται ἓν καὶ παρίσταται διὰ τοῦ συμβόλου 1.

Ἐὰν εἰς τὴν μονάδα προστεθῇ καὶ ἄλλη μονάς, σχηματίζεται ὁ ἀριθμὸς δύο, ὅστις παρίσταται διὰ τοῦ συμβόλου 2. Ἐὰν προστεθῇ καὶ ἄλλη ἀκόμη μονάς, σχηματίζεται ὁ τρία κ. ο. κ.

Σχηματίζονται οὕτω οἱ ἀκέραιοι· ὥστε ἕκαστος ἀκέραιος σχηματίζεται ἐκ τοῦ προηγουμένου του τῇ προσθήκῃ μιᾶς μονάδος. Ὅθεν ἐξ ἑκάστου ἀκεραίου δύναται νὰ σχηματισθῇ κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον πάντοτε ἄλλος ἀκέραιος· δὲν ὑπάρχει λοιπὸν ἀκέραιος τελευταῖος πάντων· ἤτοι οἱ ἀκέραιοι εἶναι ἄπειροι τὸ πλῆθος, δι' ὃ καὶ ἐὰν ἠθέλομεν, δὲν θὰ ἠδυνάμεθα νὰ ἔχωμεν ὀνόματα καὶ σύμβολα νέα δι' ἕκαστον νέον ἀκέραιον. Ὡς ἐκ τούτου ἐπενόησαν μέθοδον οἱ ἄνθρωποι, δι' ἧς μὲ ὀλίγας λέξεις καὶ ὀλίγα σύμβολα κατορθώνουν νὰ ὀνομάζωσι καὶ νὰ γράφωσι τὸν τυχόντα ἀκέραιον ἀριθμόν.

ΣΗΜ. Εἰς τὰ κατωτέρω μέχρις οὗ συναντήσωμεν τὰ κλάσματα, ὅταν λέγωμεν ἀριθμόν, θὰ ἐννοῶμεν πάντοτε ἀκέραιον.

9.—Ἡ διδασκαλία τῆς μεθόδου ταύτης, ἤτοι ἡ διδασκαλία περὶ τῆς ὀνομασίας τῶν ἀριθμῶν καὶ τῆς γραφῆς αὐτῶν, λέγεται ἀρίθμησις.

10.— ***Προφορικὴ ἀρίθμησις.***— Εἰς τὸ ἐν χρήσει σύστημα ἀριθμήσεως, ὅπερ δεκαδικὸν καλεῖται, μεταχειριζόμεθα πρῶτον τὰ ἑξῆς κατὰ σειρὰν διάφορα ὀνόματα :

Ἕν, δύο. τρία, τέσσαρα, πέντε, ἕξ, ἑπτά, ὀκτώ, ἐννέα.

Τὸ ἓν λέγεται καὶ ἁπλῆ μονὰς ἢ καὶ μονὰς πρώτης τάξεως.

Ὅταν εἰς τὸν ἐννέα προσθέσωμεν ἕν, σχηματίζομεν τὸν ἀριθμὸν δέκα. Τοῦτον θεωροῦμεν ὡς μονάδα δευτέρας τάξεως· τὸν καλοῦμεν δὲ καὶ δεκάδα.

Ὅταν εἰς τὸν δέκα προσθέσωμεν ἕν, ἔχομεν τὸν ἕνδεκα. Ὁμοίως προχωροῦντες σχηματίζομεν τοὺς ἀριθμοὺς δώδεκα, δεκατρία . . . δεκαεννέα.

Ὅταν εἰς τὸ δεκαεννέα προσθέσωμεν μίαν μονάδα, ἔχομεν ὅ,τι θὰ εἴχομεν, ἐὰν προσεθέτομεν δέκα καὶ δέκα, ἤτοι δύο μονάδας δευτέρας τάξεως. Τὸν ἀριθμὸν τοῦτον, ὅστις σχηματίζεται ἀπὸ δύο δεκάδας, καλοῦμεν εἴκοσιν. Ὁμοίως τοὺς ἀριθμοὺς τοὺς σχηματιζομένους ἀπὸ δεκάδας τρεῖς, τέσσαρας, πέντε, ἕξ, ἑπτά, ὀκτώ, ἐννέα καλοῦμεν τριάκοντα, τεσσαράκοντα, πεντήκοντα, ἑξήκοντα, ἑβδομήκοντα, ὀγδοήκοντα, ἐνενήκοντα.

Εἰς τὸ εἴκοσι προσθέτοντες τὰ ὀνόματα τῶν ἐννέα πρώτων μονάδων σχηματίζομεν τὰ ὀνόματα τῶν μεταξὺ εἴκοσι καὶ τριάκοντα ἀριθμῶν. Οὗτοι περιέχουσι δύο δεκάδας καὶ τὰς ὁμοῦ προφερομένας μονάδας.

Καθ' ὅμοιον τρόπον ὀνομάζονται οἱ μεταξὺ δύο οἱωνδήποτε διαδοχικῶν δεκάδων σχηματιζόμενοι ἀριθμοί.

11.— Οὕτω φθάνομεν μέχρι τοῦ ἐνενήκοντα ἐννέα. Ἐὰν εἰς τοῦτον προσθέσωμεν μίαν μονάδα, ἔχομεν ἀριθμόν, τὸν ὁποῖον καλοῦμεν ἑκατόν· οὗτος σχηματίζεται ἀπὸ δέκα δεκάδας· λαμβάνομεν αὐτὸν ὡς μονάδα τρίτης τάξεως καλουμένην ἑκατοντάδα· τοὺς ἀριθμοὺς τοὺς σχηματιζομένους ἀπὸ ἑκατοντάδας δύο, τρεῖς, τέσσαρας, πέντε, ἕξ, ἑπτά, ὀκτώ, ἐννέα καλοῦμεν :

διακόσια, τριακόσια, τετρακόσια, πεντακόσια, ἑξακόσια, ἑπτακόσια, ὀκτακόσια, ἐννεακόσια.

12.—Εἰς τὸ ἑκατὸν προσθέτοντες τὰ ὀνόματα τῶν ἐνενήκοντα ἐννέα πρώτων ἀριθμῶν σχηματίζομεν τὰ ὀνόματα τῶν μεταξὺ ἑκατὸν καὶ διακόσια ἀριθμῶν· εἰς τὸ διακόσια προσθέτοντες τὰ ὀνόματα τῶν ἐνενήκοντα ἐννέα πρώτων ἀριθμῶν σχηματίζομεν τὰ ὀνόματα τῶν μεταξὺ διακόσια καὶ τριακόσια· ὁμοίως προχωροῦντες φθάνομεν μέχρι τοῦ ἐννεακόσια ἐνενήκοντα ἐννέα· ἐὰν εἰς τοῦτον προσθέσωμεν μίαν μονάδα, ἔχομεν ἀριθμόν, τὸν ὁποῖον καλοῦμεν χίλια· οὗτος σχηματίζεται ἀπὸ δέκα ἑκατοντάδας· λαμβάνεται ὡς μονὰς τετάρτης τάξεως· καλεῖται δὲ καὶ χιλιάς.

Ὅπως ἐσχηματίσαμεν ἐκ τῆς μονάδος τοὺς ἐννέα πρώτους ἀριθμούς, οὕτω σχηματίζομεν ἐκ τοῦ χίλια τοὺς ἀριθμοὺς δύο χιλιάδες, τρεῖς χιλιάδες, κ.τ.λ. μέχρις ἐννέα χιλιάδες· εἰς τὸν χίλια προσθέτοντες κατὰ σειρὰν τοὺς ἐννεακοσίους ἐνενήκοντα ἐννέα πρώτους ἀριθμοὺς σχηματίζομεν τοὺς ἀριθμοὺς τοὺς περιλαμβανομένους μεταξὺ χίλια καὶ δύο χιλιάδες· καθ' ὅμοιον τρόπον σχηματίζομεν τοὺς περιλαμβανομένους μεταξὺ δύο χιλιάδες καὶ τρεῖς χιλιάδες· οὕτω προχωροῦντες φθάνομεν μέχρι τοῦ ἐννέα χιλιάδες ἐννεακόσια ἐνενήκοντα ἐννέα. Ἐὰν εἰς τοῦτον προσθέσωμεν μίαν μονάδα, ἔχομεν ἀριθμὸν σχηματιζόμενον ἀπὸ δέκα χιλιάδας· οὗτος λαμβάνεται ὡς μονὰς πέμπτης τάξεως· καλεῖται δεκὰς χιλιάδων ἢ καὶ μυριάς.

Καθ' ὅμοιον τρόπον αἱ δέκα μονάδες πέμπτης τάξεως σχηματίζουσι μίαν μονάδα ἕκτης τάξεως (ἑκατοντάδα χιλιάδων)· αἱ δέκα μονάδες ἕκτης τάξεως (χίλιαι χιλιάδες) σχηματίζουσι μίαν μονάδα ἑβδόμης τάξεως τὴν ὁποίαν καλοῦμεν ἑκατομμύριον, κ.ο.κ. Τὸν ἀριθμὸν χίλια ἑκατομμύρια καλοῦμεν δισεκατομμύριον· τὸν ἀριθμὸν χίλια δισεκατομμύρια καλοῦμεν τρισεκατομμύριον κ.ο.κ.

Τὴν μονάδα, τὴν χιλιάδα, τὸ ἑκατομμύριον κ.λ.π. καλοῦμεν πρωτευούσας μονάδας.

13. —Ἡ ἐργασία ἡ γενομένη πρὸς σχηματισμὸν τῶν ἀριθμῶν τῶν μεταξὺ δέκα καὶ ἑκατόν, μεταξὺ ἑκατὸν καὶ χίλια, μεταξὺ χίλια καὶ δέκα χιλιάδες, συνεχίζεται διὰ νὰ σχηματίσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς τοὺς μεταξὺ δέκα χιλιάδες καὶ ἑκατὸν χιλιάδες κ.τ.λ.

14.—Κατὰ τὰ ἀνωτέρω δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ὅτι πᾶς ἀριθμὸς μεταξὺ τοῦ δέκα καὶ ἑκατὸν ἀποτελεῖται ἀπὸ δεκάδος οὐχὶ περισσοτέρας τῶν ἐννέα καὶ μονάδας (ἐὰν ἔχῃ) οὐχὶ περισσοτέρας τῶν ἐννέα· πᾶς ἀριθμὸς μεταξὺ τοῦ ἑκατὸν καὶ χίλια ἀποτελεῖται ἀπὸ ἑκατοντάδας οὐχὶ περισσοτέρας τῶν ἐννέα, δεκάδας (ἐὰν ἔχῃ) οὐχὶ περισσοτέρας τῶν ἐννέα καὶ μονάδας (ἐὰν ἔχῃ) οὐχὶ περισσοτέρας τῶν ἐννέα· καὶ γενικῶς:

πᾶς ἀριθμὸς ἀποτελεῖται ἐκ μονάδων διαφόρων τάξεων οὕτως, ὥστε ἐξ ἑκάστης τάξεως νὰ μὴ ἔχῃ περισσοτέρας τῶν ἐννέα.

Βοηθούμεθα οὕτω εἰς τὸ νὰ ἀπαγγείλωμεν οἱονδήποτε ἀριθμόν· π.χ. θεωρήσωμεν ἀριθμόν, ὅστις ἔχει τρεῖς μονάδας πρώτης τάξεως, ἑπτὰ μονάδας τρίτης, τέσσαρας μονάδας τετάρτης, ἐννέα μονάδας πέμπτης καὶ δύο μονάδας ἑβδόμης τάξεως· θὰ τὸν ἀπαγγείλωμεν ἀρχίζοντες ἀπὸ τῆς ἀνωτάτης τάξεως ὡς ἑξῆς: δύο ἑκατομμύρια, ἐννέα δεκάδες χιλιάδων, τέσσαρες χιλιάδες ἑπτὰ ἑκατοντάδες, τρεῖς μονάδες.

Εὐκολύνεται ἡ ἀπαγγελία ἀριθμοῦ, ἐὰν ἀπαγγείλωμεν διὰ μιᾶς πόσας πρωτευούσας μονάδας ἑκάστου εἴδους περιέχει· π χ. ὁ ἀνωτέρω ἀριθμὸς ἀπαγγέλλεται καὶ ὡς ἑξῆς: δύο ἑκατομμύρια ἐνενήκοντα τέσσαρες χιλιάδες ἑπτακόσια τρία.

15. – ***Γραπτὴ ἀρίθμησις.*** Διὰ τοὺς ἐννέα πρώτους ἀριθμοὺς ἕν, δύο, τρία, τέσσαρα, πέντε, ἕξ, ἑπτά, ὀκτώ, ἐννέα, ἔχομεν τὰ ἑξῆς σύμβολα:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,

τὰ ὁποῖα καλοῦμεν σημαντικὰ ψηφία.

Ἵνα γράψωμεν τὸν ἀριθμὸν δέκα, μεταχειριζόμεθα δύο σύμβολα· τὸ σύμβολον 1 καὶ ἓν ἕτερον σύμβολον 0, καλούμενον μηδέν, διὰ τοῦ ὁποίου παριστῶμεν τὴν ἔλλειψιν μονάδων· τουτέστι τὸν δέκα θὰ παραστήσωμεν διὰ τοῦ 10. Τὸ σύμβολον 1 κατέχει ἐδῶ τὴν δευτέραν πρὸς τὰ ἀριστερὰ θέσιν ὡς ἀντιπροσωπεῦον μίαν μονάδα δευτέρας τάξεως, ἤτοι γράφοντες 10 ἐννοοῦμεν μίαν μονάδα δευτέρας τάξεως καὶ καμμίαν πρώτης· τὸν ἕνδεκα παριστῶμεν διὰ τοῦ 11, ἤτοι τὸ 1 τῆς πρώτης ἐκ δεξιῶν θέσεως ἀντιπροσωπεύει μίαν μονάδα πρώτης τάξεως ἢ ἁπλῆν μονάδα, ἐνῷ τὸ 1 τῆς δευτέρας θέσεως ἀντιπροσωπεύει μίαν μονάδα τῆς δευτέρας τάξεως ἢ μίαν δεκάδα· καθ' ὅμοιον τρόπον, ἵνα παραστήσωμεν τὸν τυχόντα μεταξὺ δέκα καὶ ἑκατὸν ἀριθμόν, μεταχειριζόμεθα δύο σύμβολα. Τὸ σύμβολον τῆς δευτέρας ἐκ δεξιῶν θέσεως θὰ εἶναι σημαντικὸν ψηφίον ἀντιπροσωπεῦον τὰς μονάδας δευτέρας τάξεως (δεκάδας) καὶ τὸ σύμβολον τῆς πρώτης ἐκ δεξιῶν θέσεως θὰ εἶναι ἢ 0, ἐὰν δὲν ἔχῃ ἁπλᾶς μονάδας ὁ ἀριθμός, ἢ σημαντικὸν ψηφίον ἀντιπροσωπεῦον τὰς ἁπλᾶς μονάδας τοῦ ἀριθμοῦ· π.χ. ὁ τριάκοντα παρίσταται διὰ τοῦ 30, ὁ τριάκοντα ἐννέα παρίσταται διὰ τοῦ 39.

Ἵνα γράψωμεν τὸν ἀριθμὸν ἑκατόν, τοποθετοῦμεν 1 εἰς τὴν τρίτην πρὸς τὰ δεξιὰ θέσιν, εἰς δὲ τὰς ἄλλας πρώτην καὶ δευτέραν μηδενικά. Τουτέστι τὸν ἑκατὸν θὰ παραστήσωμεν διὰ τοῦ 100·

ὁμοίως τὸν χίλια παριστῶμεν	διὰ τοῦ 1000
τὸν δέκα χιλιάδες	διὰ τοῦ 10000
τὸν ἑκατὸν χιλιάδες	διὰ τοῦ 100000
τὸν ἓν ἑκατομμύριον	διὰ τοῦ 1000000 κ. ο. κ.

Γενικῶς δὲ ἡ γραφὴ παντὸς ἀριθμοῦ γίνεται ἐπὶ τῇ βάσει τῆς ἑξῆς συμφωνίας:

Ὅταν ἓν ψηφίον ἀνέρχεται κατὰ μίαν θέσιν ἐκ δεξιῶν πρὸς τὰ ἀριστερά, ἀντιπροσωπεύει μονάδας δεκάκις περισσοτέρας ἐκείνων τὰς ὁποίας ἀντεπροσώπευεν εἰς τὴν προηγουμένην θέσιν. Τουτέστι γράφομεν τὰ ψηφία τῶν διαφόρων μονάδων εἰς μίαν σειρὰν οὕτως, ὥστε εἰς τὴν πρώτην πρὸς τὰ δεξιὰ θέσιν νὰ εὑρεθῇ γεγραμμένον τὸ ψηφίον τῶ ἁπλῶν μονάδων, εἰς τὴν δευτέραν τὸ τῶν δεκάδων καὶ οὕτω καθεξῆς. Ἐὰν δὲ ἐλλείπωσι μονάδες τάξεως κατωτέρας τῆς μεγίστης τοῦ ἀριθμοῦ, εἰς τὴν θέσιν αὐτῶν γράφομεν 0.

16.—***Ἀπαγγελία ἀριθμοῦ γεγραμμένου διὰ ψηφίων.*** Ἡ ἀπαγγελία ἀριθμοῦ μείζονος τοῦ 100, γεγραμμένου κατὰ τὰ ἀνωτέρω, γίνεται ἐπὶ τῇ βάσει τῶν πρωτευουσῶν μονάδων του, ἤτοι: χωρίζομεν αὐτὸν εἰς τριψήφια τμήματα ἐκ δεξιῶν πρὸς τὰ ἀριστερά. Ἕκαστον τῶν τμημάτων τούτων εἶναι ἀριθμὸς μικρότερος τοῦ χίλια· ἀπαγγέλλομεν αὐτὸν ὡς γνωρίζομεν ἤδη καὶ προσθέτομεν τὴν ὀνομασίαν τῆς πρωτευούσης μονάδος, ἵνα ἐκφράσωμεν πόσας πρωτευούσας μονάδας ἑκάστου εἴδους περιέχει· π χ. τὸν ἀριθμὸν ἑπτὰ ἑκατοντάδες ἑκατομμυρίων, δύο δεκάδες ἑκατομμυρίων, πέντε δεκάδες χιλιάδων, τρεῖς ἁπλαῖ δεκάδες καὶ δύο μονάδες γράφομεν 720 050 032 καὶ ἀπαγγέλλομεν ὡς ἑξῆς: Ἑπτακόσια εἴκοσιν ἑκατομμύρια πεντήκοντα χιλιάδες τριάκοντα δύο.

Ἀσκήσεις.

1) Ποῖον ἔχει ὡς ψηφίον ἑκατοντάδων πᾶς ἀριθμὸς περιλαμβανόμενος μεταξὺ χίλια τριακόσια καὶ χίλια τετρακόσια;

2) Πόσας δεκάδας περιέχει ἡ χιλιάς, ἡ δεκὰς χιλιάδων, τὸ ἑκατομμύριον;

3) Πῶς γράφονται οἱ ἀριθμοὶ δεκατρία ἑκατομμύρια καὶ ἑπτὰ μονάδες· τρία ἑκατομμύρια ἑπτὰ χιλιάδες καὶ πέντε μονάδες· δύο τρισεκατομμύρια καὶ πέντε μονάδες;

4) Νὰ ἀπαγγελθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ 1001001, 111111, 2222, 123456789.

5) Ποσάκις τὸ ψηφίον 3 θὰ εὑρεθῇ γεγραμμένον εἰς τὸν πίνακα τῶν ἀκεραίων ἀπὸ 1 μέχρι 200;

6) Ποίους διψηφίους δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν μὲ τὰ ψηφία 1, 2, 3;

7) Πόσα ψηφία ἔχει ἀριθμός οὗ τὸ ψηφίον ἀνωτέρας τάξεως δηλοῖ ἑκατοντάδας τρισεκατομμυρίων;

8) Εἰς πάντα ἀριθμὸν μία μονὰς τῆς ἀνωτέρας τάξεως σημαίνει ἀριθμὸν μεγαλύτερον ἐκείνου, ὅστις σχηματίζεται, ἂν ἀποκοπῇ τὸ πρῶτον ἐξ ἀριστερῶν ψηφίον τοῦ ἀριθμοῦ.

Ἕτερα συστήματα ἀριθμήσεως

17.—Ἵνα σχηματίσωμεν ἀριθμόν τινα εἰς τὸ δεκαδικὸν σύστημα, συνεφωνήσαμεν ὅπως δέκα μονάδες μιᾶς τάξεως ἀποτελῶσι μίαν μονάδα τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως καὶ ὅπως ἓν ψηφίον ἀνερχόμενον κατὰ μίαν θέσιν λαμβάνῃ σημασίαν δεκάκις μείζονα.

18.—Ἂς ἀναχωρήσωμεν ἤδη ἐξ ἄλλης συμφωνίας ἀναλόγου. «Θεωροῦμεν ὡς μονοψηφίους ἀριθμοὺς τοὺς 1, 2, 3, 4, 5, 6· συμφωνοῦ εν δὲ ἑπτὰ ἁπλαῖ μονάδες νὰ ἀποτελῶσι μίαν μονάδα δευτέρας τάξεως, ἣν ἂς καλέσωμεν ἑπτάδα, καὶ πάλιν ἑπτὰ ἑπτάδες νὰ ἀποτελῶσι μίαν μονάδα τρίτης τάξεως καὶ οὕτω καθεξῆς». Ἡ συμφωνία αὕτη συνεπάγεται τὴν ἑξῆς: Τὸ ψηφίον 1 τοποθετημένον εἰς τὴν δευτέραν θέσιν νὰ ἀντιπροσωπεύῃ ἑπτὰ μονάδας, εἰς τὴν τρίτην θέσιν ἑπτὰ ἑπτάδας, ἤτοι τεσσαράκοντα ἐννέα μονάδας καὶ οὕτω καθεξῆς· οὕτως ὁ ἀριθμὸς 546 κατὰ τὰς συμφωνίας αὐτὰς σημαίνει τὸ σύνολον ἓξ μονάδων, τεσσάρων ἑπτάδων καὶ πέντε μονάδων τρίτης τάξεως.

Ἔχομεν οὕτω νέον σύστημα ἀριθμήσεως μὲ βάσιν τὸ ἑπτά, τὸ καλούμενον ἑπταδικόν.

Καὶ ἐν γένει:

19.—Ἵνα σχηματίσωμεν σύστημα ἀριθμήσεως μὲ βάσιν ἀριθμόν τινα ν, παριστῶμεν δι' ἁπλῶν ψηφίων τοὺς πρώτους ἀριθμοὺς ἀπὸ τῆς μονάδος μέχρι τοῦ ἀριθμοῦ ὅστις προηγεῖται τοῦ ν. (Ἂν ὁ ν ὑποτεθῇ πέρα τοῦ δέκα, τότε, διὰ νὰ παραστήσωμεν τὸν μονοψήφιον δέκα, μεταχειριζόμεθα νέον σύμβολον, ὡς π. χ. τὸ α κλπ.). Συμφωνοῦμεν δὲ ὅπως ν ἁπλαῖ μονάδες ἀποτελῶσι μίαν μονάδα δευτέρας τάξεως, ν μονάδες δευτέρας τάξεως μίαν μονάδα τρίτης κ. ο. κ. Μεταχειριζόμεθα δὲ τὸ 0 (μηδὲν) ὅπως καὶ εἰς τὸ δεκαδικὸν σύστημα. Οὕτως ἔχομεν δυαδικόν, τριαδικόν,... δωδεκαδικόν, δεκατριαδικόν... κλπ. σύστημα.

ΣΗΜ. Κατωτέρω θὰ ἴδωμεν πῶς τρέπομεν ἀριθμόν τινα ἑνὸς συστήματος εἰς ἀριθμὸν ἄλλου συστήματος.

Ἀσκήσεις.

9) Τίνα βάσιν ἔχει τὸ σύστημα ἐν ᾧ ἡ μονὰς τῆς τρίτης τάξεως ἀντιπροσωπεύει εἴκοσι πέντε μονάδας; τίνα, ὅταν ἐννέα; τίνα, ὅταν δεκαέξ;

10) Ὁ ἀριθμὸς 100 τοῦ δυαδικοῦ συστήματος ἀπὸ πόσας ἁπλᾶς μονάδας σχηματίζεται;

11) Πόσα ψηφία χρειαζόμεθα εἰς τὸ δυαδικὸν σύστημα;

12) Πόσα ψηφία χρειαζόμεθα εἰς τὸ δωδεκαδικὸν σύστημα;

Ὁρισμοὶ ἰσότητος καὶ ἀνισότητος.

20.—Εἰς ἕκαστον κεφαλαῖον γράμμα τοῦ ἀλφαβήτου ἀντιστοιχεῖ ἓν μικρὸν καὶ τἀνάπαλιν. Λέγομεν δι' αὐτό, ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν κεφαλαίων γραμμάτων τοῦ ἀλφαβήτου εἶναι ἴσος μὲ τὸν ἀριθμὸν τῶν μικρῶν. Δι' ὅμοιον λόγον ὁ ἀριθμὸς τῶν δακτύλων τῆς δεξιᾶς χειρὸς τοῦ ἀνθρώπου εἶναι ἴσος πρὸς τὸν τῆς ἀριστερᾶς.

21.—Δύο ἀριθμοὶ λέγονται ἴσοι, ὅταν εἰς ἑκάστην μονάδα τοῦ ἑνὸς ἀντιστοιχῇ μία μονὰς τοῦ ἑτέρου καὶ τἀνάπαλιν. Ἄνισοι λέγονται δύο ἀριθμοί, ὅταν μονάδες τινὲς τοῦ ἑνὸς δὲν ἔχωσιν ἀντιστοίχους εἰς τὸν ἄλλον· καὶ μεγαλύτερος λέγεται ὁ ἔχων πλὴν τῶν μονάδων τῶν ἀντιστοίχων πρὸς τὰς μονάδας τοῦ ἑτέρου καὶ ἄλλας προσέτι, ὁπότε ὁ ἄλλος λέγεται μικρότερος.

22.—Σημεῖα διὰ μὲν τὴν ἰσότητα ἔχομεν τὸ ἑξῆς $=$ (ὅπερ ἀπαγγέλλεται ἴσον), π. χ. $6=6$, διὰ δὲ τὴν ἀνισότητα τὸ ἑξῆς: $<$. Ὁ μικρότερος ἀριθμὸς γράφεται πρὸς τὴν κορυφὴν τῆς γωνίας π. χ. $6<7$, $14>12$.

Εἰς μίαν ἰσότητα ὁ πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ $=$ γεγραμμένος ἀριθμὸς καλεῖται πρῶτον μέλος τῆς ἰσότητος, ὁ δὲ πρὸς τὰ δεξιὰ καλεῖται δεύτερον μέλος τῆς ἰσότητος.

Ὁμοίως τοὺς ἑκατέρωθεν τοῦ σημείου ἀνισότητος γεγραμμένους ἀριθμοὺς καλοῦμεν μέλη τῆς ἀνισότητος.

23.— Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς ἰσότητος ἕπονται ἀμέσως αἱ ἑξῆς ἰδιότητες:

α'.) Οἱ τῷ αὐτῷ ἀριθμῷ ἴσοι εἶναι καὶ πρὸς ἀλλήλους ἴσοι.

β'.) Ἐὰν εἰς ἴσους ἀριθμοὺς προστεθῶσιν ἴσοι, οἱ προκύπτοντες θὰ εἶναι ἴσοι.

γ'.) Ἐὰν εἰς ἀνίσους ἀριθμοὺς προστεθῶσιν ἴσοι, ὁ μεγαλύτερος ἐξακολουθεῖ ὢν μεγαλύτερος τοῦ ἄλλου.

Ἀσκήσεις.

13) Οἱ διπλάσιοι τῶν ἴσων εἶναι ἴσοι· οἱ τριπλάσιοι ἐπίσης κ. ο. κ.

14) Οἱ διπλάσιοι τῶν ἀνίσων εἶναι ἄνισοι· οἱ τριπλάσιοι ὁμοίως ἄνισοι κ. ο. κ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄.

ΑΙ ΤΕΣΣΑΡΕΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΠΡΑΞΕΙΣ

ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ

24.—Πρόσθεσις λέγεται ἡ πρᾶξις δι' ἧς σχηματίζομεν ἕνα ἀριθμόν, ἑνώνοντες πάσας τὰς μονάδας τὰς ὁποίας ἔχουσι δύο ἢ περισσότεροι δοθέντες ἀριθμοί Τὸ ἐξαγόμενον καλεῖται ἄθροισμα, οἱ δὲ προστιθέμενοι ἀκέραιοι λέγονται προσθετέοι.

Σημεῖον τῆς προσθέσεως εἶναι τὸ +, ἀπαγγέλλεται δὲ σύν· π. χ. 7 + 5 παριστᾷ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν ἑπτὰ καὶ πέντε.

Ἰδιότητες τῆς προσθέσεως

25. — Θεωρήσωμεν ἀριθμόν τινα, ἔστω τὸν 4· ἀποτελεῖται οὗτος ἐκ μονάδων 1, 1, 1, 1. Καθ' οἱονδήποτε τρόπον καὶ ἂν φαντασθῶμεν ὅτι ἑνοῦμεν αὐτάς, πάντοτε θὰ ἔχωμεν τὸν ὡρισμένον ἀριθμὸν 4· ἤτοι:

Ἐὰν ἀλλάξωμεν τὴν τάξιν, καθ' ἣν ἑνώνομεν μονάδας τινάς, δὲν ἀλλάσσει ὁ ἀριθμὸς ὅστις θὰ προκύψῃ.

Καὶ γενικῶς. Ἂς ζητήσωμεν ἐπὶ παραδείγματι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν 5, 3, 6. Ἔχομεν νὰ ἑνώσωμεν πέντε μονάδας, τρεῖς μονάδας καὶ ἓξ μονάδας. Δὲν ὑπάρχει ἀνάγκη νὰ προσέξωμεν εἰς τὴν τάξιν καθ' ἣν θὰ τὰς ἑνώσωμεν, ἀρκεῖ νὰ τὰς λάβωμεν ὅλας· ὅθεν ἔχομεν ὅτι:

«Καθ' οἱανδήποτε τάξιν καὶ ἂν προσθέσωμεν δοθέντας ἀριθμούς, εὑρίσκομεν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ὡς ἄθροισμα».

Ἡ ἰδιότης αὕτη εἶναι θεμελιώδης καὶ λέγεται εἴτε ἀδιαφορία ὡς πρὸς τὴν τάξιν εἴτε ἰδιότης ἀντιμεταθέσεως.

26.—Κατὰ ταῦτα, ἐὰν τοὺς προσθετέους τοὺς δεδομένους παραστήσωμεν διὰ τῶν α, β, γ, δ, ε, θὰ δυνάμεθα νὰ λέγωμεν ὅτι:

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon=\gamma+\beta+\alpha+\varepsilon+\delta=\beta+\delta+\alpha+\varepsilon+\gamma \text{ κ λ π.}$$

Ἐλάβομεν πέντε προσθετέους, ἀλλ' ἠδυνάμεθα νὰ λάβωμεν ὁσουσδήποτε.

Ἐκ τῆς θεμελιώδους ἰδιότητος ἕπονται αἱ ἑξῆς:

27.—α'.) Ἔστω ὅτι ἐδόθη τὸ ἄθροισμα $3+5+2$· ὅπως τὸ ἐσημειώσαμεν ἐδῶ σημαίνει νὰ λάβωμεν 3 μονάδας καὶ εἰς αὐτὰς νὰ ἑνώσωμεν 5, ὁπότε εὑρίσκομεν 8· εἰς αὐτὰς δὲ νὰ ἑνώσωμεν 2 μονάδας, ὁπότε εὑρίσκομεν 10. Κατὰ τὴν θεμελιώδη ὅμως ἰδιότητα ἔχομεν $3+5+2=5+2+3$· ἤτοι τὸ αὐτὸ ἄθροισμα εὑρίσκομεν, ἐὰν ἑνώσωμεν πρῶτον τὰς 5 μονάδας καὶ τὰς 2, ὁπότε εὑρίσκομεν 7, εἰς αὐτὰς δὲ κατόπιν τὰς 3. Ἤτοι τὸ ἄθροισμα 10 δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ὡς ἄθροισμα δύο προσθετέων, τῶν 7 καὶ 3, εἴτε τῶν 3 καὶ 7, ἤτοι :

$$3+5+2=3+(5+2),$$

ὅπου διὰ τῆς παρενθέσεως ἐννοοῦμεν ὅτι ἐξετελέσαμεν τὴν πρόσθεσιν τῶν 5 καὶ 2 καὶ ἐθεωρήσαμεν τὸ ἄθροισμα ὡς δεύτερον προσθετέον.

Ἤ, ἐὰν ἀντὶ τῶν 3, 5 καὶ 2 φαντασθῶμεν οἱουσδήποτε ἀκεραίους α, β, γ, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν ὅτι :

$$\alpha+\beta+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$$

Τουτέστι· δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν τὸν δεύτερον καὶ τρίτον προσθετέον διὰ τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν. Καὶ γενικώτερον :

Εἰς πᾶν ἄθροισμα δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν ὁσουσδήποτε προσθετέους διὰ τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν.

β'.) Φανερὸν εἶναι ὅτι ἰσχύει καὶ τὸ ἀντίστροφον· δηλαδή, ὅπως συνεπτύξαμεν διαφόρους προσθετέους εἰς ἕνα, οὕτω δυνάμεθα καὶ νὰ ἀναπτύξωμεν ἕνα προσθετέον ἤτοι :

Δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν (εἰς τὸ δοθὲν ἄθροισμα) ἕνα προσθετέον δι' ἄλλων ἐχόντων αὐτὸν ἄθροισμα.

Κατὰ ταῦτα

$$3+7=3+5+2 \quad \text{ἢ καὶ} \quad 3+(5+2)=3+5+2$$

καὶ γενικῶς

$$\alpha+(\beta+\gamma)=\alpha+\beta+\gamma$$

$$\alpha+(\beta+\delta+\varepsilon)+\zeta=\alpha+\beta+\delta+\varepsilon+\zeta \text{ κ. ο. κ.}$$

Π. χ. $8+17+6=8+10+2+5+6$.

Πῶς προστίθεται ἀριθμὸς εἰς ἄθροισμα ;

γ'.) Τὸ ἄθροισμα $\alpha+\beta+\gamma+\delta$ ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι

$$(\alpha+\beta+\gamma)+\delta\cdot$$

ἀλλὰ τὸ αὐτὸ ἄθροισμα ἰσοῦται κατὰ τὴν προηγουμένην ἰδιότητα α' καὶ πρὸς τὸ ἄθροισμα

$$\alpha+(\beta+\delta)+\gamma\cdot$$

ὅθεν καὶ (§ 23)

$$(\alpha+\beta+\gamma)+\delta=\alpha+(\beta+\delta)+\gamma.$$ Ἄρα:

Προστίθεται ἀριθμὸς εἰς ἄθροισμα, καὶ ἐὰν προστεθῇ εἰς ἕνα τῶν προσθετέων.

Π. χ. $(12+3+6)+7=12+10+6$

Πῶς προσθέτομεν διάφορα ἀθροίσματα;

δ'.) Ἔστω τὸ ἄθροισμα

$$(\alpha+\beta+\gamma)+(\delta+\varepsilon)$$

Τοῦτο κατὰ τὴν ἰδιότητα β' ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα

$$(\alpha+\beta+\gamma)+\delta+\varepsilon$$

καὶ τοῦτο πάλιν πρὸς τὸ ἄθροισμα

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon$$

ὥστε:

Προσθέτομεν διάφορα ἀθροίσματα, καὶ ἐὰν σχηματίσωμεν ἓν ἄθροισμα ἐξ ὅλων τῶν προσθετέων.

Κατὰ ταῦτα·

$$(\alpha+\beta+\gamma)+(\delta+\varepsilon)=\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon\cdot$$

Π. χ. $36+19=(30+6)+(10+9)=30+6+10+9$

Ἐφαρμογὴ τῶν ἰδιοτήτων τούτων εἰς τὴν ἐκτέλεσιν τῆς προσθέσεως.

28.—Πῶς θὰ προσθέσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς 5364 καὶ 237;

Θεωροῦμεν αὐτοὺς ὡς δύο ἀθροίσματα $5000+300+60+4$ καὶ $200+30+7$. Κατὰ τὴν ἰδιότητα (27 δ'.) ἔχομεν:

$$5000+300+60+4+200+30+7.$$

Τοῦτο ὅμως κατὰ τὴν ἰδιότητα (§ 27 α΄.) ἰσοῦται πρὸς τὸ

$$5000 + (300 + 200) + (60 + 30) + (4 + 7) =$$
$$= 5000 + 500 + 90 + 11,$$

ὅπερ εἶνε ἴσον κατὰ τὴν ἰδιότητα (§ 27 β΄.) πρὸς τὸ

$$5000 + 500 + 90 + 10 + 1 =$$
$$= 5000 + 500 + 100 + 1 = 5000 + 600 + 1 = 5601\cdot$$

οὕτως ἐξηγεῖται διατί προσθέτομεν διαφόρους ἀριθμοὺς κατὰ τὸν γνωστὸν κανόνα· τουτέστιν:

29. — Ἵνα προσθέσωμεν ἀκεραίους, γράφομεν συνήθως αὐτοὺς οὕτως, ὥστε αἱ μονάδες νὰ εὑρίσκωνται ὑπὸ τὰς μονάδας, αἱ δεκάδες ὑπὸ τὰς δεκάδας κ. ο. κ.· προσθέτομεν κατόπιν τὰς μονάδας χωριστά, ὅπως καὶ τὰς δεκάδας, ἑκατοντάδας κ. λ. π. Ὅταν τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων μιᾶς στήλης δὲν ὑπερβαίνῃ τὸ 9, γράφομεν αὐτὸ ὑπὸ τὴν αὐτὴν στήλην· ἐὰν δὲ ὑπερβαίνῃ τὸ 9, γράφομεν μόνον τὰς μονάδας τοῦ ἀθροίσματος ὑπὸ τὴν αὐτὴν στήλην, τὰς δὲ δεκάδας προσθέτομεν εἰς τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τῆς ἀκολούθου πρὸς τὰ ἀριστερὰ στήλης. Τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τῆς τελευταίας στήλης τὸ γράφομεν ὁλόκληρον.

Βάσανος τῆς προσθέσεως.

30. — Βάσανος πράξεώς τινος καλεῖται ἡ δοκιμὴ τὴν ὁποίαν κάμνομεν, ἵνα ἐξελέγξωμεν ἂν ἐγένετο λάθος τι.

Τὴν βάσανον τῆς προσθέσεως κάμνομεν στηριζόμενοι ἐπὶ τῆς θεμελιώδους ἰδιότητος (§ 27). Δηλαδὴ προσθέτομεν τοὺς αὐτοὺς ἀριθμοὺς κατ' ἄλλην τάξιν. Ἐὰν δὲν εὕρωμεν τὸ αὐτὸ ἄθροισμα, τότε ἐγένετο λάθος ἢ εἰς τὴν πρώτην ἢ εἰς τὴν δευτέραν πρᾶξιν.

Ἀσκήσεις.

15). Ποίας ἰδιότητας ἐφαρμόζομεν διὰ τὰς ἰσότητας:

$$5 + 6 + 2 + 4 + 9 = 5 + 10 + 2 + 9,$$
$$14 + 7 + 32 = 10 + 2 + 4 + 7 + 30.$$

16). Τὸ ἄθροισμα $21 + 12 + 13$ νὰ γραφῇ ὡς ἄθροισμα ἓξ προσθετέων, ὧν οἱ τρεῖς λήγουσιν εἰς 0, οἱ δὲ λοιποὶ ἔχουσιν ἄθροισμα μικρότερον τοῦ δέκα· κατὰ πόσους τρόπους γίνεται τοῦτο;

17) Διατί ἀρχίζομεν τὴν πρόσθεσιν ἐκ δεξιῶν καὶ πότε δὲν γίνεται πολυπλοκωτέρα ἡ πρόσθεσις, ὅταν ἀρχίζωμεν ἐξ ἀριστερῶν;

18). Θεωρουμένων ὡς θεμελιωδῶν ἰδιοτήτων τῆς προσθέσεως τῶν ἑξῆς:

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha \text{ καὶ } \alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$$

νὰ ἐξαχθῶσιν αἱ λοιπαί.

19). Πῶς συντομεύεται ἡ πρόσθεσις, ὅταν πάντες οἱ προσθετέοι λήγωσιν εἰς μηδενικά;

ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ

31. Ἀφαίρεσις λέγεται ἡ πρᾶξις, δι' ἧς ἐλαττοῦμεν δοθέντα ἀριθμὸν κατὰ τόσας μονάδας ὅσας ἔχει ἄλλος τις δοθεὶς ἀριθμός.

Ὁ ἀριθμὸς ὅστις πρόκειται νὰ ἐλαττωθῇ λέγεται μειωτέος καὶ ὁ ἄλλος, ὁ ὁποῖος δεικνύει κατὰ πόσας μονάδας θὰ ἐλαττωθῇ ὁ μειωτέος, λέγεται ἀφαιρετέος· τὸ δὲ ἐξαγόμενον καλεῖται διαφορὰ ἢ ὑπόλοιπον.

Ἐὰν καλέσωμεν α τὸν μειωτέον, β τὸν ἀφαιρετέον καὶ δ τὸ ὑπόλοιπον, σημειοῦται ἡ ῥηθεῖσα ἀφαίρεσις ὡς ἑξῆς: $\alpha - \beta = \delta$. Τὸ σημεῖον τῆς ἀφαιρέσεως, ἤτοι τὸ —, λέγεται πλήν.

Κατὰ τοὺς ἀνωτέρω ὁρισμοὺς τὸ ὑπόλοιπον σχηματίζεται ἀπὸ τὰς μονάδας, αἱ ὁποῖαι μένουσιν ὅταν ἀπὸ τῶν μονάδων τοῦ μειωτέου ἀφαιρέσωμεν τὰς μονάδας τοῦ ἀφαιρετέου· ἐπομένως ἐὰν ἑνώσωμεν ἐκ νέου τὰς μονάδας τοῦ ὑπολοίπου μὲ τὰς μονάδας τοῦ ἀφαιρετέου, θὰ ἔχωμεν τὰς μονάδας τοῦ μειωτέου· ἤτοι:

Ἡ ἰσότης $\alpha - \beta = \delta$ γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς: $\alpha = \beta + \delta$ ὅθεν:

Ἡ ἀφαίρεσις εἶναι πρᾶξις σκοπὸν ἔχουσα, ὅταν δίδεται τὸ ἐξαγόμενον τῆς προσθέσεως δύο ἀριθμῶν καὶ ὁ εἷς ἐξ αὐτῶν, νὰ εὑρίσκεται ὁ ἕτερος.

Π.χ. Ποῖον ἀριθμὸν πρέπει νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸ 5, ἵνα εὕρωμεν ὡς ἄθροισμα τὸ 12;

Ἡ πρᾶξις ἡ ὁποία θὰ γίνῃ λέγεται ἀφαίρεσις.

Ἡ ἀφαίρεσις εἶναι πρᾶξις ἀντίστροφος τῆς προσθέσεως.

32.—Ἡ ἀφαίρεσις εἶναι δυνατὴ μόνον ὅταν ὁ μειωτέος ἔχῃ μονάδας περισσοτέρας τῶν τοῦ ἀφαιρετέου, ἤτοι ὅταν εἶναι μεγαλύτερος αὐτοῦ.

Ἵνα λέγωμεν, ὅτι εἶναι δυνατὴ ἡ ἀφαίρεσις, καὶ ὅταν ὁ μειωτέος καὶ ὁ ἀφαιρετέος εἶναι ἴσοι, θὰ παραδεχθῶμεν τὸ μηδὲν (0) ὡς ἀριθμόν. Δυνάμεθα μάλιστα νὰ ὁρίσωμεν τὸ 0 ὡς διαφορὰν δύο ἴσων ἀριθμῶν.

Ἰδιότητες τῆς ἀφαιρέσεως.

33.—Κατὰ τὰ ἀνωτέρω ἡ ἰσότης $\alpha-\beta=\delta$ γραφεται καὶ ὡς ἑξῆς: $\alpha=\beta+\delta$· καὶ ἀντιστρόφως.

Τοῦτο ἔχοντες ὑπ' ὄψει δυνάμεθα ἐκ τῶν ἰδιοτήτων τῆς προσθέσεως νὰ ἐξαγάγωμεν τὰς ἰδιότητας τῆς ἀφαιρέσεως.

Ἐὰν προσθέσωμεν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν εἰς τὸν μειωτέον καὶ ἀφαιρετέον, μεταβάλλεται τὸ ὑπόλοιπον:

α΄) Ἔστω $\alpha-\beta=\delta$· ἔχομεν:

$$\alpha=\beta+\delta.$$

Καὶ κατὰ τὴν ἰδιότητα (§ 27 γ΄)

$$\alpha+\gamma=(\beta+\gamma)+\delta.$$

ὅθεν

$$(\alpha+\gamma)-(\beta+\gamma)=\delta.$$

Ἄρα: Ἐὰν προσθέσωμεν καὶ εἰς τὸν μειωτέον καὶ εἰς τὸν ἀφαιρετέον τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, τὸ ὑπόλοιπον δὲν μεταβάλλεται.

Παρατήρησις. Εἰς τὸ αὐτὸ συμπέρασμα καταλήγομεν καὶ ὡς ἑξῆς.

Ἐὰν προσθέσωμεν εἰς τὸν μειωτέον μίαν μονάδα, αὐξάνει τὸ ὑπόλοιπον κατὰ μονάδα. (§ 31).

Ἐὰν προσθέσωμεν εἰς τὸν ἀφαιρετέον μίαν μονάδα, τὸ ὑπόλοιπον ἐλαττοῦται κατὰ μονάδα· ἐπομένως:

Ἐὰν προσθέσωμεν καὶ εἰς τὸν μειωτέον καὶ εἰς τὸν ἀφαιρετέον μίαν μονάδα, τὸ ὑπόλοιπον δὲν ἀλλάσσει.

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἰδιότητος ἕπεται ἀμέσως καὶ ἡ ἑξῆς:

β΄) Ἐὰν ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ μειωτέου καὶ ἀπὸ τοῦ ἀφαιρετέου τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, τὸ ὑπόλοιπον δὲν μεταβάλλεται.

Πῶς ἀφαιρεῖται ἀριθμὸς ἀπὸ ἀθροίσματος:

γ΄) Ἔστω πρῶτον ὅτι ἔχομεν νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ ἀθροίσματος ἕνα τῶν προσθετέων του·
π. χ. ἔστω ἡ διαφορὰ

$$(8+5+9)-5$$

Αὕτη ἰσοῦται πρὸς τὴν διαφορὰν $(5+8+9)-5$· ἀλλὰ (§ 31) $(5+8+9)-5=8+9$.
Ἤτοι:

Ἵνα ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ ἀθροίσματος ἕνα ἐκ τῶν προσθετέων του ἀρκεῖ νὰ ἐξαλείψωμεν αὐτόν.

δ΄) Ἔστω τώρα ὅτι ἔχομεν ν' ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ ἀθροίσματος ἀριθμὸν καὶ ὅτι εἷς τοὐλάχιστον προσθετέος τοῦ ἀθροίσματος εἶναι μεγαλύτερος τοῦ ἀριθμοῦ αὐτοῦ. π. χ. ἔστω ἡ διαφορὰ

$$(8+5+9)-6$$

Αὕτη γράφεται (§ 27 β΄) καὶ ὡς ἑξῆς:

$$(6+2+5+9)-6$$

ἰσοῦται δὲ κατὰ τὴν ἀνωτέρω ἰδιότητα πρὸς τὸ $2+5+9$
ἄρα:

$$(8+5+9)-6=(8-6)+5+9$$

Ἤτοι:

Ἀφαιρεῖται ἀριθμὸς ἀπὸ ἀθροίσματος, καὶ ἐὰν ἀφαιρεθῇ ἀπὸ ἑνὸς ἐκ τῶν προσθετέων.

Καὶ ἡ πρότασις αὕτη πηγάζει ἐκ τῆς ἰδιότητος (§ 27 γ΄.)

Ἔχομεν τουτέστιν

$$(\alpha+\beta)-\gamma=(\alpha-\gamma)+\beta$$

διότι

$$[(\alpha-\gamma)+\beta]+\gamma=[(\alpha-\gamma)+\gamma]+\beta=\alpha+\beta.$$

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἰδιότητος ἕπεται καὶ ἡ ἑξῆς·

ε΄) Ἵνα προστεθῇ εἰς ἀριθμὸν ἡ διαφορὰ δύο ἄλλων, ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν εἰς αὐτὸν τὸν μειωτέον τῆς διαφορᾶς καὶ νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸν ἀφαιρετέον.

Ἔχομεν τουτέστιν

$$\alpha+(\beta-\gamma)=(\alpha+\beta)-\gamma$$

διότι κατὰ τὴν προηγουμένην ἰδιότητα

$$(\alpha+\beta)-\gamma=\alpha+(\beta-\gamma)$$

Ἡ πρότασις αὕτη πηγάζει ἀμέσως καὶ ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς ἀφαιρέσεως.

Πῶς ἀφαιρεῖται ἄθροισμα ἀπὸ ἀριθμοῦ:

στ΄) Ἔστω ἡ διαφορὰ

$$\alpha-(\beta+\gamma)$$

Παρατηροῦμεν ὅτι ἀντὶ νὰ ἀφαιρέσω διὰ μιᾶς πάσας τὰς μονάδας τοῦ ἀφαιρετέου δύναμαι νὰ ἀφαιρέσω πρῶτον τὰς β μονάδας καὶ ἔπειτα τὰς γ μονάδας· ὅθεν:

Ἀφαιροῦμεν ἄθροισμα ἀπὸ ἀριθμοῦ, καὶ ἐὰν ἀφαιρέσωμεν πάντας τοὺς προσθετέους τοῦ ἀθροίσματος τὸν ἕνα μετὰ τὸν ἄλλον· ἤτοι:

$$\alpha-(\beta+\gamma)=(\alpha-\beta)-\gamma$$

Ἡ πρότασις αὕτη προκύπτει καὶ ἐκ τῆς (α΄) ἰδιότητος.

Καὶ τῷ ὄντι ἔχομεν:

$$(\alpha-\beta)-\gamma=[(\alpha-\beta)+\beta]-(\gamma+\beta)=\alpha-(\beta+\gamma)$$

ὅθεν:

$$\alpha-(\beta+\gamma)=(\alpha-\beta)-\gamma$$

Πῶς προσθέτομεν διαφοράς:

ζ΄) Ἔστω πρῶτον το ἄθροισμα

$$(12-7)+(8-5).$$

Κατὰ τὴν ἰδιότητα ε΄ ἔχομεν

$$(12-7)+(8-5)=[(12-7)+8]-5=[(12+8)-7]-5,$$

ἀλλὰ παρατηροῦμεν ὅτι κατὰ τὰ προηγούμενα (στ΄) ἔχομεν

$$[(12+8)-7]-5=(12+8)-(7+5)$$

ἄρα:

$$(12-7)+(8-5)=(12+8)-(7+5)$$

Ἔστω τώρα τὸ ἄθροισμα

$$(12-7)+(8-5)+(9-3)\cdot$$

τοῦτο κατὰτὰ ἀνωτέρω ἰσοῦται πρὸς τὸ

$$[(12+8)-(7+5)]+(9-3)=(12+7+9)-(8+5+3)$$

ἄρα:

$$(12-7)+(8-5)+(9-3)=(12+7+9)-(8+5+3)$$

Ἤτοι:

Ἵνα προσθέσωμεν διαφοράς, ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν χωριστὰ τοὺς μειωτέους, χωριστὰ τοὺς ἀφαιρετέους καὶ νὰ ἀφαιρέσωμεν.

Πῶς ἀφαιρεῖται διαφορὰ ἀπὸ ἀριθμοῦ;

η΄) Ἔστω ἡ διαφορὰ

$$\alpha - (\beta - \gamma).$$

Κατὰ τὴν ἰδιότητα (α΄) ἔχομεν:

$$\alpha - (\beta - \gamma) = (\alpha + \gamma) - [(\beta - \gamma) + \gamma] = (\alpha + \gamma) - \beta,$$

ὥστε $$\alpha - (\beta - \gamma) = (\alpha + \gamma) - \beta,$$

ἄρα:

Ἀπὸ ἀριθμοῦ ἀφαιροῦμεν διαφορὰν δύο ἄλλων καὶ ὡς ἑξῆς: Προσθέτομεν εἰς αὐτὸν τὸν ἀφαιρετέον τῆς διαφορᾶς καὶ ἀπὸ τοῦ ἀθροίσματος ἀφαιροῦμεν τὸν μειωτέον.

Ἐφαρμογὴ τῶν ἰδιοτήτων τούτων εἰς τὴν ἐκτέλεσιν τῆς ἀφαιρέσεως.

34.—Ἔστω πρὸς ἀφαίρεσιν ἀπὸ τοῦ 459 ὁ 168. Δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τοὺς δύο ἀριθμοὺς ὡς ἀθροίσματα, ὁπότε ἔχομεν:

$$(400 + 50 + 9) - (100 + 60 + 8).$$

Κατὰ τὴν ἰδιότητα (§ 33. στ΄) ἀρκεῖ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἕκαστον προσθετέον τοῦ δευτέρου ἀθροίσματος ἀπὸ τοῦ μειωτέου. Ἀφαιροῦμεν τὸν 8 ἀπὸ τοῦ πρώτου ἀθροίσματος· ἀρκεῖ πρὸς τοῦτο (§ 33. γ΄) νὰ ἀφαιρέσωμεν αὐτὸν ἀπὸ τοῦ 9· μένει 1. Ἔπειτα ἔχομεν νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸν ἕτερον προσθετέον 60, ἤτοι τὰς 6 δεκάδας. Ἐπειδὴ δὲν ἀφαιροῦνται ἀπὸ τῶν 5 δεκάδων τοῦ μειωτέου, θὰ στηριχθῶμεν εἰς τὴν ἰδιότητα (§ 33. α΄). Προσθέτομεν τουτέστιν εἰς τὸν μειωτέον δέκα δεκάδας, τὰς ὁποίας κατόπιν θὰ προσθέσωμεν καὶ εἰς τὸν ἀφαιρετέον, καὶ οὕτως αἱ 5 δεκάδες τοῦ μειωτέου μετὰ τὴν πρόσθεσιν γίνονται 15 δεκάδες· δὲν προσθέτομεν ἀμέσως καὶ τὰς δέκα δεκάδας εἰς τὸν ἀφαιρετέον, διότι ἄλλως πάλιν δὲν θὰ ἀφῃροῦντο αἱ δεκάδες τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τῶν ἀντιστοίχων τοῦ μειωτέου· ἀφαιροῦμεν τουτέστι προηγουμένως τὰς 6 δεκάδας τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τῶν 15 τοῦ μειωτέου· μένουν 9 δεκάδες εἰς τὸ ὑπόλοιπον· καὶ κατόπιν προσθέτομεν εἰς τὸν ἀφαιρετέον τὰς δέκα δεκάδας (τὰς ἀντιστοιχούσας πρὸς τὰς προστεθείσας εἰς τὸν μειωτέον), ἤτοι μίαν ἑκατοντάδα, καὶ τότε αἱ ἑκατοντάδες τοῦ ἀφαιρετέου γίνονται 2· ἀφαιροῦμεν ταύτας ἀπὸ τῶν τεσσάρων τοῦ μειωτέου· μένουν 2. Ὅθεν ὁ κανών:

35.—Ἵνα ἀφαιρέσωμεν ἀριθμὸν ἀπὸ ἄλλου, γράφομεν τὸν μικρότερον ὑπὸ τὸν μεγαλύτερον οὕτως, ὥστε αἱ μονάδες νὰ εὑρίσκωνται ἐν τῇ αὐτῇ στήλῃ, αἱ δεκάδες ἐπίσης κτλ. ἀφαιροῦμεν ἔπειτα τὰς μονάδας ἑκάστης τάξεως τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τῶν ἀντιστοίχων τοῦ μειωτέου ἀρχόμενοι ἐκ δεξιῶν. Ὅταν ἡ ἀφαίρεσις αὕτη δὲν γίνεται, προσθέτομεν εἰς τὸ ἀντίστοιχον ψηφίον τοῦ μειωτέου 10 μονάδας, ἀλλ' ἔπειτα ἐρχόμενοι εἰς τὸ ἀκόλουθον πρὸς τὰ ἀριστερὰ ψηφίον τοῦ ἀφαιρετέου προσθέτομεν εἰς αὐτό, πρὶν τὸ ἀφαιρέσωμεν, μίαν μονάδα.

Βάσανος τῆς ἀφαιρέσεως.

36.—Ἡ βάσανος τῆς ἀφαιρέσεως γίνεται, ἐὰν προσθέσωμεν τὸ ὑπόλοιπον καὶ τὸν ἀφαιρετέον. Ἂν ὡς ἄθροισμα εὑρεθῇ ὁ μειωτέος, τότε τοῦτο εἶναι ἔνδειξις ὅτι δὲν ὑπεπέσαμεν εἰς λάθος.

Ἀσκήσεις.

20) Ἀπὸ τίνας ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἰδιότητας προκύπτουσιν ἀμέσως αἱ ἰσότητες:

α') $2563 - 1483 = 2570 - 1490$

β') $1328 - 828 = 1300 - 800$

γ') $2501 - 1499 = (2500 - 1500) + 2$

δ') $78999 - 5032 = 79000 - 5000 - 1 - 32$

21) Ἐὰν ἀπὸ ἴσων ἀφαιρεθῶσιν ἴσοι, προκύπτουσιν ἀριθμοὶ ἴσοι.

22) Ἐὰν ἀπὸ ἀνίσων ἀφαιρεθῶσιν ἴσοι, προκύπτουσιν ἀριθμοὶ ὁμοίως ἄνισοι.

23) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ ἐξαγόμενα τῶν πράξεων

$$2386 - (475 - 4), 2974 - (900 + 70 + 4)$$

μὲ ἐκτελέσεις πράξεων διαφόρους τῶν σεσημειωμένων.

24) Τρεῖς διαδοχικοὶ ἀριθμοὶ δύνανται νὰ γραφῶσι πάντοτε ὑπὸ μορφὴν $\alpha - 1, \alpha, \alpha + 1$. —Ὅθεν τὸ ἄθροισμα τριῶν διαδοχικῶν

ἀριθμῶν ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τριῶν προσθετέων ἴσων τῷ μεσαίῳ.

25) Ποῖα λάθη πρέπει νὰ γίνωσιν εἰς τὴν βάσανον τῆς ἀφαιρέσεως καὶ εἰς τὴν ἀφαίρεσιν, ὥστε νὰ νομισθῇ ὅτι ἐγένετο ἡ πρᾶξις ὀρθὴ χωρὶς νὰ ἔχῃ γίνῃ;

26) Ἐὰν τριψηφίου τινος ἀριθμοῦ μεταθέσωμεν ἐναλλὰξ τὰ ψηφία ἑκατοντάδων καὶ μονάδων (ὑποτιθέμενα διάφορα) καὶ ἀφαιρέσωμεν τὸν μικρότερον τριψήφιον ἀπὸ τοῦ μεγαλυτέρου, θὰ εὑρεθῇ διαφορὰ μὲ ψηφίον δεκάδων 9.

27) Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς διαδοχικοὶ ἀριθμοὶ ἔχοντες ἄθροισμα 3003.

28) Ἐὰν ἀπὸ ἀριθμοῦ σχηματιζομένου μὲ τρία διαδοχικὰ ψηφία ἀφαιρέσωμεν τὸν σχηματιζόμενον μὲ τὰ ἴδια ψηφία, ἀλλὰ κατ᾽ ἀντίστροφον τάξιν, εὑρίσκομεν διαφορὰν 198.

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ

37.— Πολλαπλασιασμὸς καλεῖται ἡ πρᾶξις δι᾽ ἧς ἐπαναλαμβάνομεν ἕνα ἀριθμὸν πολλάκις καὶ σχηματίζομεν ἄλλον ἀριθμόν.

Ὅταν, ἐπὶ παραδείγματι, ἐπαναλαμβάνω τὸν 7 τέσσαρας φοράς, 7 καὶ 7 καὶ 7 καὶ 7, σχηματίζω ἐξ αὐτοῦ τὸν 28. Ἡ πρᾶξις αὕτη εἶναι πολλαπλασιασμός.

Ἤτοι:

Πρόσθεσις ἐν ᾗ πάντες οἱ προσθετέοι εἶναι ἴσοι ὀνομάζεται πολλαπλασιασμός.

Πολλαπλασιασμὸς λέγεται καὶ ἡ πρᾶξις δι᾽ ἧς ἐκτελοῦμεν συντόμως τοιαύτην πρόσθεσιν.

Εἷς οἱοσδήποτε ἐκ τῶν ἴσων προσθετέων λέγεται πολλαπλασιαστέος, ἐνῷ ὁ ἀριθμὸς ὁ δεικνύων τὸ πλῆθος τῶν προσθετέων λέγεται πολλαπλασιαστής.

Τὸ ἐξαγόμενον (τουτέστι τὸ ἄθροισμα) ἐδῶ λέγεται γινόμενον.

Ὁ πολλαπλασιαστέος καὶ ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι οἱ δύο παράγοντες τοῦ γινομένου.

Παριστῶμεν γινόμενον γράφοντες τὸν πολλαπλασιαστέον καὶ τὸν πολλαπλασιαστὴν κατὰ σειρὰν καὶ χωρίζοντες αὐτοὺς διὰ τοῦ

$\times$ ἢ διὰ μιᾶς στιγμῆς, ἢ καὶ χωρὶς κανὲν σημεῖον. Τὸ σημεῖον εἶναι ἀπαραίτητον, ὅταν οἱ δύο παράγοντες εἶναι ἀριθμοί.

Εἰς τὴν ἀπαγγελίαν μεταχειριζόμεθα τὸ ἐπί.

Κατὰ ταῦτα

$\alpha \times \beta$ ἢ $\alpha . \beta$ ἢ καὶ $\alpha\, \beta$ παριστᾷ τὸ ἄθροισμα

$$\alpha + \alpha + \alpha + \alpha + \ldots + \alpha,$$

ὅπου τὸ πλῆθος τῶν προσθετέων εἶναι β.

Τὸ 23×12 ἢ 23.12 παριστᾷ τὸ ἄθροισμα 12 προσθετέων ἴσων πρὸς 23.

Γενόμενον πολλῶν παραγόντων.

38. — Ἔστω ὅτι ἐτοποθετήσαμεν κατὰ τάξιν τινὰ τρεῖς ἀριθμοὺς

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma$$

καὶ σημειοῦμεν μεταξὺ αὐτῶν τὸ $\times$, ἤτοι ὅτι γράφομεν

$$\alpha \times \beta \times \gamma$$

διὰ τούτου θὰ ἐννοῶμεν ὅτι ζητεῖται τὸ ἐξαγόμενον, ὅπερ εὑρίσκομεν, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸν α ἐπὶ β καὶ τὸ εὑρεθὲν γινόμενον ἐπὶ γ, ἐνῷ

$$\alpha \times \gamma \times \beta$$

σημαίνει τὸ ἐξαγόμενον ὅπερ εὑρίσκομεν, ἐὰν πολλαπλασιάσωμε τὸν α ἐπὶ γ καὶ τὸ εὑρεθὲν γινόμενον ἐπὶ β· ὁμοίως

$$\alpha \times \beta \times \gamma \times \delta$$

σημαίνει νὰ εὕρωμεν ὡς ἀνωτέρω τὸ γινόμενον τῶν τριῶν πρώτων καὶ κατόπιν νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸν τέταρτον κ. ο. κ. Κατὰ ταῦτα·

$$3 \times 5 \times 2 = 15 \times 2 = 30 \text{ καὶ } 3 \times 5 \times 2 \times 4 = 30 \times 4 = 120,$$

$$\text{ἐνῷ } 3 \times 5 \times 4 \times 2 = 60 \times 2 = 120.$$

39. —Παρατηροῦμεν ἐντεῦθεν ὅτι ἄλλον τρόπον ἐκτελέσεως πολλαπλασιασμοῦ ἐννοοῦμεν, ὅταν γράφωμεν

$$3 \times 5 \times 2 \times 4$$

καὶ ἄλλον, ὅταν γράφωμεν

$$3 \times 5 \times 4 \times 2 .$$

φθάνομεν ὅμως εἰς τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον.

Προκύπτει τὸ ἑξῆς ἐρώτημα: Εἰς τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον φθάνομεν, καθ' οἱανδήποτε τάξιν φαντασθῶμεν ὅτι ἐκτελοῦμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν ἰδίων παραγόντων;

Αὐτὴ ἀκριβῶς εἶναι ἡ θεμελιώδης ἰδιότης τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, ὅτι:

«Καθ' οἱανδήποτε τάξιν καὶ ἂν ἐκτελέσωμεν τὸν πολλαπλασιασμόν, εἰς τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον φθάνομεν».

Πρὶν ἢ φθάσωμεν ὅμως εἰς τὸ γενικὸν αὐτὸ συμπέρασμα, θὰ ἀποδείξωμεν τὸ ἀληθὲς τῆς ἰδιότητος ταύτης εἰς μερικὰς περιπτώσεις

40.—Ἔστω τὸ γινόμενον 5×2. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἔχομεν νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ ἄθροισμα $5+5$. Τοῦτο δὲ κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς προσθέσεως σημαίνει νὰ ἑνώσωμεν τὰς μονάδας τοῦ ἑξῆς πίνακος:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

ἀλλ' ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς προκύπτει, ἐὰν ἑνώσωμεν πρῶτον τὰς μονάδας τῆς πρώτης στήλης, ἔπειτα τὰς τῆς δευτέρας κ. ο. κ. καὶ κατόπιν ἀθροίσωμεν τοὺς οὕτω προκύπτοντας ἀριθμούς, ἤτοι ἐὰν ζητήσωμεν τὸ ἄθροισμα $2+2+2+2+2$. Τοῦτο ὅμως ἰσοῦται μὲ 2×5· ἄρα:

Ἐὰν εἰς γινόμενον δύο παραγόντων ὁ πολλαπλασιαστέος γίνῃ πολλαπλασιαστὴς καὶ ὁ πολλαπλασιαστὴς πολλαπλασιαστέος, δὲν ἀλλάσσει τὸ ἐξαγόμενον.

41.—Ἔστω ἤδη τὸ γινόμενον

$$8 \times 3 \times 2\cdot$$

ὡς εἶναι γεγραμμένον σημαίνει εἰς τὸν ἑξῆς πίνακα

$$\begin{array}{c} 8+8+8 \\ 8+8+8 \end{array}$$

νὰ προσθέσωμεν πρῶτον τὰ 8 τῆς πρώτης γραμμῆς καὶ ἔπειτα τὰ τῆς δευτέρας, καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ μερικὰ ἀθροίσματα. Ἀλλὰ προφανῶς εἰς τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον φθάνομεν, ἐὰν προσθέσωμεν τὰ 8 κατὰ στήλας, ἤτοι ἐὰν ὑπολογίσωμεν τὸ γινόμενον

$$8 \times 2 \times 3$$

Ὅθεν

Εἰς γινόμενον τριῶν παραγόντων δυνάμεθα νὰ ἀντιστρέψωμεν τὴν τάξιν τῶν δύο τελευταίων,

42.—Ἔστω τὸ γινόμενον

$$6 \times 5 \times 9 \times 3 \times 7 \times 8 \times 2$$

θὰ δείξω ὅτι τοῦτο ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον

$$6 \times 5 \times 9 \times 7 \times 3 \times 8 \times 2$$

Θεωρήσωμεν τὸ πρῶτον γινόμενον· κατὰ τὸν ὁρισμὸν (§ 38) ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν πρῶτον παράγοντα 6 ἐπὶ τὸν δεύτερον 5· τὸ εὑρεθὲν γινόμενον 30 ἐπὶ τὸν τρίτον παράγοντα 9· τὸ εὑρεθὲν γινόμενον 270 ἐπὶ τὸν παράγοντα 3 κ. ο. κ. Οὕτω λαμβάνομεν ἔχοντες πάντοτε ὑπ᾿ ὄψιν τὸν ὁρισμὸν (§ 38)

$$6 \times 5 \times 9 \times 3 \times 7 \times 8 \times 2 = 30 \times 9 \times 3 \times 7 \times 8 \times 2 =$$
$$= 270 \times 3 \times 7 \times 8 \times 2 = \ldots$$

ἢ καὶ $6 \times 5 \times 9 \times 3 \times 7 \times 8 \times 2 = (6 \times 5) \times 9 \times 3 \times 7 \times 8 \times 2 =$

$$= (6 \times 5 \times 9) \times 3 \times 7 \times 8 \times 2 = \ldots$$

ἤτοι ἡ ἀντικατάστασις τῶν δύο ἢ τριῶν κλπ. πρώτων παραγόντων διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν δὲν βλάπτει τὸ γινόμενον. Δι᾿ αὐτὸ δυνάμεθα νὰ λέγωμεν καὶ ὅτι

$$6 \times 5 \times 9 \times 3 \times 7 \times 8 \times 2 = (6 \times 5 \times 9 \times 3 \times 7) \times 8 \times 2$$

Δι᾿ ὅμοιον λόγον ἔχομεν

$$6 \times 5 \times 9 \times 7 \times 3 \times 8 \times 2 = (6 \times 5 \times 9 \times 7 \times 3) \times 8 \times 2$$

ἑπομένως ἵνα δείξωμεν ὅτι τὰ πρῶτα μέλη τῶν δύο τούτων ἰσοτήτων εἶναι ἴσα ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι:

$$6 \times 5 \times 9 \times 3 \times 7 = 6 \times 5 \times 9 \times 7 \times 3.$$

Ἀλλὰ τὸ πρῶτον μέλος ἰσοῦται (κατὰ τὰ προηγούμενα) πρὸς $(6 \times 5 \times 9) \times 3 \times 7$ καὶ τὸ δεύτερον ἰσοῦται πρὸς $(6 \times 5 \times 9) \times 7 \times 3$. Ταῦτα ὅμως εἶναι ἴσα (§ 41)· ἄρα:

Ἐὰν ἀνταλλάξωμεν δύο ἐφεξῆς παράγοντας γινομένου ὁσωνδήποτε παραγόντων, δὲν ἀλλάσσει τὸ ἐξαγόμενον.

43.— Ἔστω ἤδη τὸ τυχὸν γινόμενον.

$$\alpha \times \beta \times \gamma \times \delta \times \varepsilon \times \zeta \times \eta.$$

Ἂς λάβω τὸν τυχόντα παράγοντα δ· δύναμαι νὰ τὸν φέρω εἰς οἱανδήποτε προηγουμένην θέσιν, π. χ. εἰς τὴν δευτέραν, διότι (§ 42)

$$\alpha \times \beta \times \gamma \times \delta \times \varepsilon \times \zeta \times \eta = \alpha \times \beta \times \delta \times \gamma \times \varepsilon \times \zeta \times \eta =$$
$$= \alpha \times \delta \times \beta \times \gamma \times \varepsilon \times \zeta \times \eta.$$

44.— Καὶ γενικῶς δυνάμεθα ὅλους τοὺς παράγοντας νὰ φέρωμεν εἰς ἃς θέσεις θέλομεν· π. χ. τὸ γινόμενον

$$\alpha \times \beta \times \gamma \times \delta \times \varepsilon \times \zeta$$

γράφεται καὶ

$$\delta \times \beta \times \zeta \times \gamma \times \alpha \times \varepsilon \text{ διότι :}$$

$$\alpha \times \beta \times \gamma \times \delta \times \varepsilon \times \zeta = \delta \times \alpha \times \beta \times \gamma \times \varepsilon \times \zeta \text{ (§ 43)}$$

καὶ τοῦτο πάλιν ἰσοῦται πρὸς

$$\delta \times \beta \times \alpha \times \gamma \times \varepsilon \times \zeta = \delta \times \beta \times \zeta \times \alpha \times \gamma \times \varepsilon =$$
$$= \delta \times \beta \times \zeta \times \gamma \times \alpha \times \varepsilon.$$

Ἄρα· «ἐὰν ἀλλάξωμεν τὴν τάξιν ὁπωσδήποτε τῶν παραγόντων οἱουδήποτε γινομένου, τὸ ἐξαγόμενον δὲν ἀλλάσσει».

Ἡ ἰδιότης αὕτη λέγεται εἴτε ἀδιαφορία ὡς πρὸς τὴν τάξιν τῶν παραγόντων εἴτε ἰδιότης τῆς ἀντιμεταθέσεως, ὅπως ὠνομάσθη καὶ ἡ ἀνάλογος εἰς τὴν πρόσθεσιν. Ἔχομεν δὲ καὶ ἐνταῦθα τὰς ἑξῆς ὅλως ἀναλόγους πρὸς τὰς ἐκεῖ ἰδιότητας:

45.— α΄) Εἰς πᾶν γινόμενον δύναμαι ν᾽ ἀντικαταστήσω ὁσουσδήποτε παράγοντας διὰ τοῦ εὑρεθέντος γινομένου αὐτῶν. Τουτέστι γινόμενον πολλῶν παραγόντων δὲν μεταβάλλεται, ἂν συμπτύξωμεν δύο ἢ περισσοτέρους παράγοντας εἰς ἕνα μόνον πολλαπλασιάζοντες αὐτούς.

Π. χ. $3 \times 5 \times 2 \times 6 = 3 \times (5 \times 6) \times 2$

Διότι (§ 44)

$$3 \times 5 \times 2 \times 6 = 5 \times 6 \times 3 \times 2 = (5 \times 6) \times 3 \times 2$$

καὶ τοῦτο πάλιν (§ 44) ἰσοῦται πρὸς τὸ

$$3 \times (5 \times 6) \times 2.$$

β΄) Εἰς πᾶν γινόμενον δύναμαι ν᾽ ἀντικαταστήσω οἱονδήποτε παράγοντα δι᾽ ἄλλων ἀριθμῶν ἐχόντων αὐτὸν ὡς γινόμενον. Τουτέστι, εἰς γινόμενον πολλῶν παραγόντων δύναμαι ἕνα παράγοντα νὰ ἀναλύσω εἰς δύο ἢ περισσοτέρους ἄλλους, οἱ ὁποῖοι ἔχουν αὐτὸν ὡς γινόμενον.

Π. χ.

$$8 \times 12 \times 5 = 8 \times 3 \times 4 \times 5$$

Διότι δυνάμει τῆς προηγουμένης προτάσεως ἔχομεν

$$8 \times 3 \times 4 \times 5 = 8 \times 12 \times 5$$

γ') Πολλαπλασιάζεται γινόμενον ἐπὶ ἀριθμὸν, καὶ ἐὰν πολλαπλασιασθῇ εἷς τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου ἐπὶ τὸν ἀριθμόν.

Τουτέστι, διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν γινόμενον πολλῶν παραγόντων ἐπὶ ἀριθμὸν ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἕνα μόνον παράγοντα τοῦ γινομένου ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τοῦτον καὶ ἔπειτα νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον τοῦ ἐξαγομένου καὶ τῶν λοιπῶν παραγόντων.

Π. χ.

$$(3 \times 5 \times 7) \times 2 = 3 \times 10 \times 7.$$

Διότι $(3 \times 5 \times 7) \times 2 = 3 \times 5 \times 7 \times 2 = 3 \times (5 \times 2) \times 7 =$

$$= 3 \times 10 \times 7.$$

δ') Πολλαπλασιάζονται δύο γινόμενα, καὶ ἐὰν πολλαπλασιασθῶσιν ὁμοῦ πάντες οἱ παράγοντες ἀμφοτέρων τῶν γινομένων.

Τουτέστι γινόμενον δύο γινομένων ἰσοῦται πρὸς γινόμενον ἔχον παράγοντας πάντας τοὺς παράγοντας τῶν δύο γινομένων καὶ τούτους μόνον.

Π. χ.

$$(2 \times 3) \times (5 \times 7 \times 9) = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 9.$$

Ἐπιμεριστικὴ ἰδιότης.

Πῶς πολλαπλασιάζεται ἄθροισμα ἐπὶ ἀριθμόν :

46 — Ἔστω :

$$(7 + 4 + 5) \times 3.$$

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἔχομεν :

$$(7 + 4 + 5) + (7 + 4 + 5) + (7 + 4 + 5)$$

ἢ καὶ (§ 27) δ')

$$7 + 4 + 5 + 7 + 4 + 5 + 7 + 4 + 5$$

ἢ (§ 27) α') $(7 + 7 + 7) + (4 + 4 + 4) + (5 + 5 + 5) =$

$= (7 \times 3) + (4 \times 3) + (5 \times 3)$ ὅθεν :

«Πολλαπλασιάζεται ἄθροισμα ἐπὶ ἀριθμὸν καὶ ὡς ἑξῆς: πολλαπλασιάζομεν ἕκαστον τῶν προσθετέων τοῦ ἀθροίσματος ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν καὶ προσθέτομεν τὰ μερικὰ γινόμενα».

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἰδιότητος, ἥτις καλεῖται ἐπιμεριστική, ἕπονται αἱ ἑξῆς:

α΄) Πολλαπλασιάζεται ἀριθμὸς ἐπὶ ἄθροισμα καὶ ὡς ἑξῆς:

Πολλαπλασιάζομεν αὐτὸν ἐφ' ἕκαστον τῶν προσθετέων καὶ προσθέτομεν τὰ μερικὰ γινόμενα·
οὕτως:

$$\alpha \times (\beta + \gamma + \delta) = (\alpha \times \beta) + (\alpha \times \gamma) + (\alpha \times \delta).$$

β΄) Πολλαπλασιάζεται ἄθροισμα ἐπὶ ἄθροισμα καὶ ὡς ἑξῆς:

Πολλαπλασιάζομεν ἕκαστον προσθετέον τοῦ πρώτου ἐφ' ἕκαστον προσθετέον τοῦ δευτέρου καὶ προσθέτομεν τὰ μερικὰ ταῦτα γινόμενα.

Οὕτως:
$$(\alpha + \beta + \gamma) \times (\delta + \varepsilon) =$$
$$= (\alpha \times \delta) + (\beta \times \delta) + (\gamma \times \delta) + (\alpha \times \varepsilon) + (\beta \times \varepsilon) + (\gamma \times \varepsilon).$$

Ἀσκήσεις.

29.) Νὰ ἐκτελεσθῇ κατὰ διαφόρους τρόπους ὁ πολλαπλασιασμός.
$$5 \times 8 \times 3$$

30.) Νὰ γραφῶσιν ὡς ἀθροίσματα γινομένων τὰ γινόμενα
$$\alpha.\ (\beta + \gamma).\ \delta$$
$$(\alpha_1 + \alpha_2).\ (\alpha_3 + \alpha_4).\ (\alpha_5 + \alpha_6),$$
ὅπου τὰ α_1, α_2, ... δηλοῦσι διαφόρους ἀριθμούς.

31.) Νὰ γραφῶσιν ὡς γινόμενα δύο παραγόντων τὰ ἀθροίσματα
$(\alpha \times \delta) + (\beta \times \delta) + (\gamma \times \delta)$, $(\alpha + \beta) \times \lambda + (\beta + \gamma) \times \lambda + (\gamma + \alpha) \times \lambda$.

32.) Πόσον μεταβάλλεται τὸ γινόμενον $\alpha \times \beta \times \gamma$, ὅταν προστεθῶσιν εἰς μὲν τὸν α μία μονάς, εἰς δὲ τὸν β δύο;

33.) Ἐὰν σχηματίσω ἓξ διψηφίους ἀριθμοὺς λαμβάνων ἐκ τριῶν διαφόρων ψηφίων τὰ δύο καθ' ὅλους τοὺς δυνατοὺς τρόπους, καὶ προσθέσω αὐτούς, θὰ εὕρω ὅσον καὶ ἂν ἐπολλαπλασίαζα τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν ψηφίων ἐπὶ 22. Γενίκευσις (εἰς ἓξ ἀριθμοὺς τριψηφίους μὲ τρία διάφορα ψηφία).

34.) Ἐὰν τριψηφίου ἀριθμοῦ λάβωμεν τὸ πρῶτον ψηφίον, διπλασιάσωμεν αὐτὸ και προσθέσωμεν 5 εἰς τὸ ἐξαγόμενον, τὸ δὲ ἄθροισμα τοῦτο πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 5 καὶ εἰς τὸ γινόμενον προσθέσωμεν τὸ δεύτερον ψηφίον, ἔπειτα δὲ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 10 καὶ προσθέσωμεν εἰς τὸ γινόμενον τὸ τρίτον ψηφίον, ἀφαιρέσωμεν δὲ ἀπὸ τοῦ ἐξαγομένου τὸν 250, εὑρίσκομεν τὸν ἀρχικῶς δοθέντα τριψήφιον.

35.) Ἐὰν $\alpha > \beta$,

τότε καὶ $\alpha \times \gamma > \beta \times \gamma$

Ἐφαρμογὴ τῶν ἰδιοτήτων τούτων εἰς τὴν ἐκτέλεσιν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

47. —Παρατηροῦμεν κατ' ἀρχάς, ὅτι ὁ πολλαπλασιασμὸς μονοψηφίου ἐπὶ μονοψήφιον γίνεται εὐκόλως. Ἐπειδὴ ὅμως πᾶς πολλαπλασιασμὸς θὰ ἀναχθῇ εἰς τοιοῦτον πολλαπλασιασμόν, πρέπει νὰ γνωρίζωμεν ἀπὸ μνήμης ὅλα τὰ γινόμενα δύο μονοψηφίων.

Ταῦτα περιέχονται εἰς τὸν Πυθαγόρειον πίνακα

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

ὅπου, ἵνα εὕρωμεν π. χ. τὸ γινόμενον 5×9, ζητοῦμεν τὸν ἀριθμὸν ὅστις εὑρίσκεται εἰς τὴν πέμπτην γραμμὴν καὶ εἰς τὴν ἐνάτην στήλην ἢ καὶ ἀντιστρόφως.

Πολλαπλασιασμὸς πολυψηφίου ἐπὶ μονοψήφιον.

48.—Ἔστω ὅτι ζητεῖται τὸ γινόμενον 256×7. Παρατηρῶ ὅτι ἔχομεν (§ 46)

$$(200 + 50 + 6) \times 7 = (200 \times 7) + (50 \times 7) + (6 \times 7)$$

καὶ τοῦτο (§ 45) ἰσοῦται πρὸς

$(2 \times 100 \times 7) + (5 \times 10 \times 7) + (6 \times 7) =$
(2×7) ἑκατοντάδες $+ (5 \times 7)$ δεκάδες $+ 6 \times 7 =$
(2×7) ἑκ. $+ (5 \times 7)$ δεκ. $+ 42 =$
(2×7) ἑκ. $+ (5 \times 7)$ δεκ. $+ 4$ δεκ. $+ 2 =$
(2×7) ἑκ. $+ 39$ δεκ. $+ 2 =$
(2×7) ἑκ. $+ 3$ ἑκ. $+ 9$ δεκ. $+ 2 = 1792.$

Ἡ πρᾶξις αὕτη διατάσσεται ὡς ἑξῆς:

$$\begin{array}{r} 256 \\ 7 \\ \hline 1792 \end{array}$$

Προφανῶς δὲ καταλήγομεν εἰς τὸν ἑξῆς κανόνα:

Πολλαπλασιάζομεν διαδοχικῶς ἕκαστον ψηφίον τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστὴν ἀρχόμενοι ἐκ δεξιῶν· ἂν τὸ γινόμενον εἶναι διψήφιον, κρατοῦμεν τὰς δεκάδας του διὰ τὸ ἑπόμενον γινόμενον, ὅπως εἰς τὴν πρόσθεσιν.

49.— Πολλαπλασιασμὸς ἐπὶ 10, 100, 1000 κτλ. — Ἀκέραιος πολλαπλασιάζεται ἐπὶ 10, 100, 1000 κτλ., ἐὰν γράψωμεν εἰς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ ἕν, δύο, τρία, . . . μηδενικά.

Π. χ. $100 \times 47 = 4700$

Διότι $100 \times 47 = 47$ ἑκατοντ. $= 4700$ (§ 15).

Πολλαπλασιασμὸς πολυψηφίου ἐπὶ πολυψήφιον.

50.— Ἔστω τὸ γινόμενον 98574×236· γράφομεν αὐτὸ ὡς ἑξῆς:

$$\begin{array}{r} 98574 \\ 236 \\ \hline \end{array}$$

Κατὰ τὴν § 46 ἔχομεν νὰ προσθέσωμεν τὰ ἑξῆς τρία μερικὰ γινόμενα:

$98574 \times 6 = 591444 =$	591444	μον.	Διάταξις
$98574 \times 30 = 2957220 =$	295722	δεκ.	τῆς
$98574 \times 200 = 19714800 =$	197148	ἑκατ.	πράξεως
	23263464		

Ὅθεν ὁ κανών: Γράφομεν τὸν πολλαπλασιαστὴν ὑπὸ τὸν πολλαπλασιαστέον, πολλαπλασιάζομεν τὸν πολλαπλασιαστέον ἐφ' ἕκαστον ψηφίον τοῦ πολλαπλασιαστοῦ ἀρχόμενοι ἐκ δεξιῶν, γράφομεν δὲ ἕκαστον μερικὸν γινόμενον οὕτως, ὥστε τὸ τελευταῖον ψηφίον του νὰ κεῖται ὑπὸ τὸ ψηφίον ἐφ' ὃ ἐπολλαπλασιάσαμεν καὶ προσθέτομεν ταῦτα ὡς ἐγράφησαν.

51.—*Παρατήρησις.* Ἐὰν ὁ εἷς ἢ καὶ ἀμφότεροι οἱ παράγοντες λήγωσιν εἰς μηδενικά, πολλαπλασιάζομεν χωρὶς αὐτά, τὰ γράφομεν ὅμως εἰς τὸ τέλος τοῦ ὑπολογισθέντος γινομένου.

Π. χ. $3850 \times 4500 = (385 \times 45)\,000 = 17325000.$

Διότι $3850 \times 4500 = (385 \times 10) \times (45 \times 100) =$

$= 385 \times 10 \times 45 \times 100 = (385 \times 45) \times 1000.$

Βάσανος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

52.— Ἡ βάσανος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ γίνεται, ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν ἐκ νέου, ἀλλὰ κατ' ἄλλην τάξιν, ὁπότε (§ 44) πρέπει νὰ εὕρωμεν τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον.

Π. χ. ἔστω τὸ γινόμενον 47×63· καὶ ἔστω ὅτι ἐκτελοῦμεν τὸν πολλαπλασιασμόν· συμφώνως πρὸς τὸν ὁρισμὸν (§ 37) θὰ θεωρήσωμεν τὸν 47 ὡς πολλαπλασιαστέον καὶ τὸν 63 ὡς πολλαπλασιαστήν. Διὰ νὰ δοκιμάσωμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν τοῦτον, ἐπαναλαμβάνομεν αὐτόν, λαμβάνοντες τὸν 63 ὡς πολλαπλασιαστέον καὶ τὸν 47 ὡς πολλαπλασιαστήν· ἐὰν καὶ πάλιν εὕρωμεν τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον, τοῦτο εἶναι ἔνδειξις ὅτι ἡ πρᾶξις ἐγένετο ἄνευ λάθους.

Ἀσκήσεις.

36) Νὰ ἐκφρασθῶσι δι' ἰσοτήτων γενικῶς αἱ ἰδιότητες (§ 45 α΄. β΄. γ΄. δ΄.)

37.) Ὁ πολλαπλασιασμὸς δύο διψηφίων ἐχόντων τὸ αὐτὸ ψηφίον δεκάδων γίνεται καὶ ὡς ἑξῆς: Προσθέτομεν τὰς μονάδας τοῦ ἑνὸς εἰς τὸν ἄλλον καὶ τὸ ἄθροισμα πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν ὃν σχηματίζουσιν αἱ δεκάδες ἑνὸς ἐξ αὐτῶν καὶ προσθέτομεν τὸ γινόμενον τῶν μονάδων.

38.) Πῶς εὑρίσκεται τὸ γινόμενον ἀριθμοῦ ἐπὶ 11 δι' ἁπλῆς προσθέσεως;

39.) Πῶς εὑρίσκεται τὸ γινόμενον ἀριθμοῦ ἐπὶ 1001 δι' ἁπλῆς προσθέσεως;

40.) Νὰ εὑρεθῇ τὸ τελευταῖον ψηφίον τοῦ γινομένου

$$37 \times 59 \times 62 \times 2594.$$

41.) $1007 \times 1008 = (1000 \times 1000) + (1000 \times 15) + (7 \times 8)$

42.) Τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν θὰ ἔχῃ τόσα ψηφία, ὅσα ἔχουν καὶ αἱ δύο ὁμοῦ ἢ ἓν ὀλιγώτερον.

43.) Κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ 756 ἐπὶ ἀριθμόν τινα εὑρέθη ὡς γινόμενον 20412· ἐλήφθη ὅμως ὡς τελευταῖον ψηφίον τοῦ πολαπλασιαστοῦ τὸ 7 ἀντὶ τὸ 9· πόσον τὸ λάθος καὶ ποῖον τὸ ζητούμενον γινόμενον;

44.) Τὰ τρία τελευταῖα πρὸς τὰ δεξιὰ ψηφία γινομένου εἶναι 652 καὶ τὰ τρία τελευταῖα ψηφία τοῦ πολλαπλασιαστοῦ εἶναι 257. Νὰ εὑρεθῶσι τὰ τρία τελευταῖα ψηφία τοῦ πολλαπλασιαστέου.

45.) Νὰ εὑρεθῇ τὸ πλῆθος τῶν ψηφίων τοῦ μικροτέρου τῶν ἀριθμῶν, τοὺς ὁποίους δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν πολλαπλασιάζοντες 10 πενταψηφίους.

46.)

$$\begin{array}{r} \ldots \\ 2 \\ \hline 1468 \end{array}$$

Μὲ ποῖα ψηφία πρέπει νὰ ἀντικαταστήσω τὰς στιγμὰς εἰς τὸν σημειωθέντα πολλαπλασιασμόν;

Πολλαπλασιασμὸς διαφορᾶς ἐπὶ ἀριθμόν.

33. —Ἔστω τὸ γινόμενον

$$(8 - 5) \times 3\cdot$$

τοῦτο ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα

$$(8 - 5) + (8 - 5) + (8 \quad 5).$$

καὶ τοῦτο πάλιν (§ 33ζ') ἰσοῦται πρὸς τὴν διαφορὰν

$$(8+8+8)-(5+5+5)$$

ὅθεν κατὰ τὸν ὁρισμὸν (§ 37) ἔχομεν

$$(8-5)\times 3=(8\times 3)-(5\times 3)\cdot \quad \text{τοῦτέστιν:}$$

Ἵνα πολλαπλασιάσωμεν διαφορὰν ἐπὶ ἀριθμόν, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν μειωτέον καὶ ἀφαιρετέον τῆς διαφορᾶς ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τοῦτον καὶ ἀπὸ τοῦ πρώτου γινομένου νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ δεύτερον. Ἤτοι:

$$(\alpha-\beta)\times\gamma=(\alpha\times\gamma)-(\beta\times\gamma).$$

Ἀσκήσεις.

47) Δίδεται τὸ γινόμενον $3\times 5\times 19$. Κατὰ πόσον αὐξάνεται τὸ γινόμενον ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν τὸν παράγοντα 19 διὰ τοῦ 20;

48) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ ἑπόμεναι πράξεις κατὰ σύντομον τρόπον λαμβανομένων ὑπ' ὄψιν τῶν ἰδιοτήτων (§ 46, 53).

$$(80-1)\times(80+1),$$

$$(354-201)\times 7-(354\times 6)+201\times 6,$$

$$85999\times 10001.$$

49) Πῶς ἐκτελεῖται ὁ πολλαπλασιασμὸς συντόμως, ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι 9 ἢ 999 κτλ.;

50) Πόσον ἐλαττοῦται ἓν γινόμενον, ὅταν εἷς τῶν παραγόντων του ἐλαττωθῇ κατὰ μονάδας τινὰς καὶ ποῖον παράγοντα πρέπει νὰ ἐλαττώσωμεν, ὥστε νὰ ἔχωμεν τὴν μεγαλυτέραν μείωσιν;

51) Διατί τὸ γινόμενον 12345679×9 δίδει 111111111;

52) Νὰ ἀναπτυχθῇ τὸ γινόμενον $(\alpha+\beta)\times(\gamma-\delta)$.

53) Νὰ εὑρεθῇ τὸ γινόμενον 7694×5999 διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ ἓν ψηφίον μόνον.

54) Πῶς μεταβάλλεται γινόμενον δύο παραγόντων, ὅταν αὐξήσωμεν τὸν ἕνα καὶ ἐλαττώσωμεν τὸν ἕτερον κατὰ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν;

55) Νὰ χωρισθῇ ὁ ἀριθμὸς 214 εἰς δύο ἀριθμοὺς τοιούτους, ὥστε τὸ γινόμενον αὐτῶν νὰ εἶναι ὅσῳ τὸ δυνατὸν μεγαλύτερον.

Δύναταί τις εὐκόλως ν' ἀποδείξῃ ὅτι τὸ τοιοῦτον γινόμενον θὰ εἶναι τὸ 107 × 107 στηριζόμενος ἐπὶ τῶν ἀσκήσεων 54, 50.

ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ

34.—Πρόβλημα α'. Ἐὰν θέλωμεν νὰ μοιράσωμεν ἐξ ἴσου 63 τετράδια εἰς 7 μαθητάς, πόσα θὰ λάβῃ ἕκαστος μαθητής;

Τοῦτο εἶναι πρόβλημα μερισμοῦ· ἔχομεν νὰ μοιράσωμεν τὸν 63 εἰς 7 ἴσα μέρη· ἀρκεῖ ἑπομένως νὰ λύσωμεν τὸ ἑξῆς πρόβλημα: Ἐὰν ἔχωμεν 7 ἴσους προσθετέους καὶ ἄθροισμα αὐτῶν 63 ποῖος εἶναι ὁ ἐπαναλαμβανόμενος προσθετέος; Τουτέστι:

Δίδεται τὸ ἄθροισμα τῶν ἴσων προσθετέων καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν προσθετέων καὶ ζητεῖται ὁ ἐπαναλαμβανόμενος προσθετέος· ἢ καὶ (§ 37)

Δίδεται τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν καὶ ὁ πολλαπλασιαστής· ζητεῖται δὲ ὁ πολλαπλασιαστέος.

35.—Πρόβλημα β'. Εἰς ἕκαστον μαθητὴν μιᾶς τάξεως ἐδόθησαν 7 τετράδια. Διενεμήθησαν δὲ οὕτω 63 τετράδια ἐν ὅλῳ. Πόσοι ἦσαν οἱ μαθηταὶ τῆς τάξεως;

Τοῦτο εἶναι πρόβλημα μετρήσεως· ζητοῦμεν πόσας φορὰς χωρεῖ ὁ 7 εἰς τὸν 63· ἤτοι ζητοῦμεν πόσα 7 ἀθροιζόμενα δίδουσι 63. Τουτέστι:

Δίδεται τὸ ἄθροισμα ἴσων προσθετέων καὶ εἷς ἐξ αὐτῶν· ζητεῖται δὲ τὸ πλῆθος τῶν προσθετέων·
ἢ καὶ (§ 37)·

Δίδεται τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν καὶ ὁ πολλαπλασιαστέος, ζητεῖται δὲ ὁ πολλαπλασιαστής.

36.— Καὶ τὰ δύο ἀνωτέρω ζητήματα λύονται διὰ διαιρέσεως. Ὥστε:

Ἡ διαίρεσις εἶναι πρᾶξις σκοπὸν ἔχουσα, ὅταν δίδεται τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν καὶ ὁ εἷς ἐξ αὐτῶν, νὰ εὑρίσκεται ὁ ἕτερος.

Τὸ γινόμενον εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην καλοῦμεν διαιρετέον καὶ τὸν δεδομένον παράγοντα διαιρέτην, τὸν δὲ ζητούμενον πηλίκον.

Σημεῖον διαιρέσεως εἶναι τό : ἀπαγγελλόμενον διά.

π. χ. $12 : 4 = 3$ διότι $3 \times 4 = 12$.

37.— *Παρατήρησις*. Ὅταν δίδεται τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν καὶ ὁ πολλαπλασιαστὴς ἡ διαίρεσις λέγεται μερισμὸς ἢ καὶ διαίρεσις μερισμοῦ· ὅπως, ἐπὶ παραδείγματι, εἰς τὸ α΄. πρόβλημα ὅπου μερίζομεν ἀριθμὸν εἰς ἴσα μέρη.

Ὅταν δίδεται νὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν καὶ ὁ πολλαπλασιαστέος ἡ διαίρεσις λέγεται μέτρησις ἢ καὶ διαίρεσις μετρήσεως, ὅπως, ἐπὶ παραδείγματι, εἰς τὸ β΄ πρόβλημα, ὅπου μετροῦμεν πόσας φορὰς χωρεῖ ἀριθμὸς εἰς ἄλλον.

Γενικὸς ὁρισμός. (*Τελεία διαίρεσις καὶ ἀτελής*).

38.—Δίδονται δύο ἀριθμοί, οἱ 66 καὶ 7· ζητῶ ἀκέραιον ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ 7 νὰ δίδῃ 66. Ἐὰν ὑπῆρχε τοιοῦτος, θὰ ἔλεγον αὐτὸν πηλίκον τῆς διαιρέσεως. Τοιοῦτος ἐνταῦθα δὲν ὑπάρχει Ζητῶ ἀκέραιον ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ 7 νὰ δίδῃ 65· ἐπίσης δὲν ὑπάρχει· ἔπειτα 64 καὶ πάλιν δὲν ὑπάρχει· τέλος 63· τοιοῦτος ὑπάρχει καὶ εἶναι ὁ 9· ὥστε, ὅταν τὸν 66 ἐλαττώσω κατὰ τρεῖς μονάδας, εὑρίσκω τὸν 9, ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ 7 δίδει τὸν 66—3. Ἡ πρᾶξις αὕτη λέγεται διαίρεσις ὁ 9 λέγεται πηλίκον τῆς διαιρέσεως 66 : 7 καὶ ὁ 3 ὑπόλοιπον. Ἤτοι ὁ 7 χωρεῖ 9 φορὰς εἰς τὸ 66 καὶ εἰς τὸ 65 καὶ εἰς τὸ 64 καὶ εἰς τὸ 63. Πηλίκον τουτέστιν εἶναι τὸ αὐτό, οἱονδήποτε ἐξ αὐτῶν καὶ ἂν λάβωμεν ὡς διαιρετέον. Ὑπόλοιπα ἔχομεν διάφορα.

Καὶ ἀντιστρόφως ἠδυνάμην νὰ ἐργασθῶ· δηλαδὴ ἀπὸ τοῦ 66 ν' ἀφαιρέσω τὸ 7 καὶ ἀπὸ τοῦ ὑπολοίπου 59 πάλιν τὸ 7 κ.ο.κ. εὑρίσκω πάλιν ὅτι χωρεῖ 9 φορὰς καὶ περισσεύουν 3.

ἤτοι :

$$66 = 7 \times 9 + 3.$$

Κατὰ ταῦτα τὸ γινόμενον 7×9 ἰσοῦται πρὸς ἀριθμὸν ὅστις περιέχεται εἰς τὸν 66· ἐνῷ τὸ γινόμενον 7×10 ἰσοῦται πρὸς ἀριθμόν, ὅστις ὑπερβαίνει τὸν 66. Τουτέστιν ὁ 9 εἶναι ὁ μεγαλύτερος τῶν ἀριθμῶν, οἵτινες πολλαπλασιαζόμενοι ἐπὶ 7 δίδουσι γινόμενα περιεχόμενα εἰς τὸν 66.

Καὶ γενικῶς· ἐὰν ἔχω τὴν ἰσότητα

(1) $$\alpha = \beta \times \pi + \upsilon,$$

ὅπου υ μικρότερον β, λέγω ὅτι τὸ α: β δίδει πηλίκον π καὶ ὑπόλοιπον υ· ὁ π δὲ τότε εἶναι προφανῶς ὁ μεγαλύτερος τῶν ἀριθμῶν, οἵτινες πολλαπλασιαζόμενοι ἐπὶ β δίδουσι γινόμενα περιεχόμενα εἰς τὸν α· ὥστε:

Διαίρεσις εἶναι ἡ πρᾶξις ἐν ᾗ δίδονται δύο ἀριθμοὶ α καὶ β καὶ ζητεῖται ὁ μεγαλύτερος ἀκέραιος ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ β δίδει ἀριθμὸν χωροῦντα εἰς τὸν α.

π. χ. $59:8$· ὁ μεγαλύτερος ἀκέραιος ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ 8 δίδει ἀριθμὸν χωροῦντα εἰς τὸν 59 εἶναι ὁ 7, διότι $7 \times 8 = 56$· ἀλλὰ $8 \times 8 = 64$.

59 —Προφανῶς δυνάμεθα νὰ δώσωμεν καὶ τὸν ἑξῆς ὁρισμόν:

Διαίρεσις εἶναι ἡ πρᾶξις ἐν ᾗ δοθέντων δύο ἀκεραίων α καὶ β εὑρίσκομεν δύο ἀριθμοὺς π καὶ υ τοιούτους, ὥστε νὰ ἔχωμεν τὴν ἰσότητα (1), ὅπου υ νὰ εἶναι εἷς ἐκ τῶν ἀριθμῶν

$$0, 1, 2, \ldots, (\beta - 1).$$

Ἐὰν τὸ ὑπόλοιπον $\upsilon = 0$, ἐπαναπίπτομεν εἰς τὸν πρῶτον ὁρισμὸν (§ 56) καὶ ἡ διαίρεσις τότε λέγεται *τελεία*. Ἐὰν δὲ τὸ ὑπόλοιπον εἶναι διάφορον τοῦ μηδενὸς ἡ διαίρεσις λέγεται *ἀτελής*.

Ἰδιότης τῆς ἰσότητος.

60 —Ἴσοι ἀριθμοὶ διαιρούμενοι διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ δίδουσι πηλίκα ἴσα (ἡ διαίρεσις ὑποτίθεται τελεία).

Ἔστω $\alpha = \beta$ καὶ ἂς ὑποθέσω ὅτι ἡ διαίρεσις $\alpha:\gamma$ εἶναι τελεία· τότε ἡ διαίρεσις $\beta:\gamma$ θὰ εἶναι τελεία καὶ πηλίκον θὰ δίδῃ τὸ αὐτό.

Διότι ἐὰν καλέσω π τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως $\alpha:\gamma$ θὰ ἔχω (§ 56) $\alpha = \gamma \times \pi$· ὅθεν (§ 23) καὶ $\beta = \gamma \times \pi$ ἑπομένως $\beta:\gamma = \pi$. (§ 56).

Ἀσκήσεις.

56) Ἐὰν εἰς τὸν διαιρετέον προστεθῇ ὁ διαιρέτης κατὰ πόσον αὐξάνει τὸ πηλίκον;

57). Νὰ δειχθῇ ὅτι ἵνα διαιρέσωμεν ἀριθμὸν διὰ 10, 100,... ἀρκεῖ νὰ ἀποκόψωμεν ἕν, δύο, τρία, ... ψηφία ἐκ δεξιῶν τοῦ ἀριθμοῦ. Τὸ μέρος τὸ ὁποῖον ἀποκόπτομεν εἶναι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως.

58). Ἐὰν καλέσωμεν πηλίκον εἰς τὴν διαίρεσιν 59 : 8 τὸν 8, τότε πρέπει νὰ ἀφαιρῆται τὸ ὑπόλοιπον ἀπὸ τοῦ γινομένου τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον, ἵνα εὑρίσκωμεν τὸν διαιρετέον. Ποῖον καλοῦμεν ὑπόλοιπον; Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τοῦ ὑπολοίπου τούτου καὶ τοῦ πραγματικοῦ ὑπολοίπου. Γενίκευσις.

59). Πότε τὸ πηλίκον διαιρέσεως δὲν βλάπτεται, ἐὰν προστεθῇ μία μονὰς εἰς τὸν διαιρετέον; Καὶ γενικῶς· πόσαι μονάδες τοὐλάχιστον πρέπει νὰ προστεθῶσιν εἰς τὸν διαιρετέον, διὰ νὰ ἀλλάξῃ τὸ πηλίκον;

60) Ἴσοι διαιρούμενοι δι' ἀνίσων δίδουσι πηλίκα ἄνισα, τῶν διαιρέσεων γινομένων ἀκριβῶς.

61). Ἔστω ὅτι οἱ α καὶ β διαιροῦνται ἀκριβῶς διὰ τοῦ γ· τότε

$$\text{ἐὰν } \alpha > \beta$$

θὰ ἔχωμεν καὶ

$$\alpha : \gamma > \beta : \gamma.$$

Ἰδιότητες διαιρέσεως.

Πῶς διαιρεῖται ἄθροισμα δι' ἀριθμοῦ;

61.—Ἔστω ἡ διαίρεσις

$$(\alpha + \beta + \gamma) : \delta,$$

ὅπου ὑποθέτομεν ὅτι πάντες οἱ προσθετέοι τοῦ διαιρετέου διαιροῦνται ἀκριβῶς ὑπὸ τοῦ δ· παρατηροῦμεν ὅτι, ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν πηλίκων

$$(\alpha : \delta) + (\beta : \delta) + (\gamma : \delta)$$

πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ δ, εὑρίσκομεν (§ 46)

$$\alpha + \beta + \gamma \qquad \text{ὅθεν}$$

$$(\alpha + \beta + \gamma) : \delta = (\alpha : \delta) + (\beta : \delta) + (\gamma : \delta) \qquad \text{ἄρα}$$

Ἄθροισμα διαιρεῖται δι' ἀριθμοῦ, καὶ ἐὰν διαιρεθῇ ἕκαστος προσθετέος διὰ τοῦ ἀριθμοῦ καὶ προστεθῶσι τὰ πηλίκα, ὅταν πᾶσαι αἱ διαιρέσεις γίνωνται ἀκριβῶς.

Πῶς διαιρεῖται διαφορὰ δι' ἀριθμοῦ;

62.—Ἔστω ἡ διαίρεσις

$$(\alpha - \beta) : \gamma\cdot$$

παρατηροῦμεν ὅτι (§ 53)

$$[(\alpha : \gamma) - (\beta : \gamma)] \times \gamma = \alpha - \beta \qquad \text{ὅθεν}$$

$$(\alpha - \beta) : \gamma = (\alpha : \gamma) - (\beta : \gamma) \qquad \text{ἄρα}$$

Διαφορὰ διαιρεῖται δι' ἀριθμοῦ, καὶ ἐὰν μειωτέος καὶ ἀφαιρετέος διαιρεθῶσι διὰ τοῦ ἀριθμοῦ καὶ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ πρώτου πηλίκου τὸ δεύτερον.

Πῶς διαιρεῖται γινόμενον δι' ἀριθμοῦ;

63.—Ἔστω ἡ διαίρεσις

$$(\alpha \times \beta \times \gamma) : \delta,$$

ὅπου ὑποθέτω ὅτι παράγων τις τοῦ διαιρετέου, ἔστω ὁ β, διαιρεῖται διὰ τοῦ δ· παρατηροῦμεν ὅτι (§ 45 γ΄.)

$$[\alpha \times (\beta : \delta) \times \gamma] \times \delta = \alpha \times [(\beta : \delta) \times \delta] \times \gamma = \alpha \times \beta \times \gamma$$

ὅθεν $\qquad (\alpha \times \beta \times \gamma) : \delta = \alpha \times (\beta : \delta) \times \gamma \qquad$ ἄρα

Γινόμενον διαιρεῖται δι' ἀριθμοῦ, καὶ ἐὰν εἷς παράγων (διαιρούμενος ἀκριβῶς διὰ τοῦ ἀριθμοῦ) διαιρεθῇ δι' αὐτοῦ.

Ἐντεῦθεν ἕπεται καὶ ὅτι, ἵνα διαιρέσωμεν δι' ἑνὸς τῶν παραγόντων του ἓν γινόμενον, ἀρκεῖ νὰ ἐξαλείψωμεν τὸν παράγοντα τοῦτον.

Πῶς διαιρεῖται ἀριθμὸς διὰ γινομένου;

64.—Ἔστω

$$60 : (2 \times 3 \times 5),$$

ὅπου ἡ διαίρεσις γίνεται ἀκριβῶς· καλέσωμεν π τὸ πηλίκον· ἔχομεν (§ 56)

$$60 = 2 \times 3 \times 5 \times \pi.$$

Διαιροῦμεν ἀμφότερα τὰ μέλη διὰ 2· λαμβάνομεν (§ 60, 63).

$$60 : 2 = 3 \times 5 \times \pi\cdot$$

διαιροῦμεν διὰ 3 καὶ λαμβάνομεν

$$(60 : 2) : 3 = 5 \times \pi.$$

Τέλος διαιροῦμεν διὰ 5 καὶ λαμβάνομεν

$$[\,(60:2):3\,]:5 = \pi.$$ ὅθεν

$$60:(2\times3\times5) = [\,(60:2):3\,]:5.$$

Καὶ γενικῶς·

$$\alpha:(\beta\times\gamma\times\delta) = [\,(\alpha:\beta).\gamma\,]:\delta.$$ ἤτοι

Ἵνα διαιρέσωμεν ἀριθμὸν διὰ γινομένου, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν ἀλλεπαλλήλως διὰ πάντων τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου τὸν ἀριθμὸν τοῦτον καὶ τὰ διαδοχικὰ πηλίκα (ὑποτιθεμένου ὅτι αἱ διαιρέσεις γίνονται πᾶσαι ἀκριβῶς).

Ὅταν πολλαπλασιάσωμεν διαιρετέον καὶ διαιρέτην ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, τί γίνεται τὸ πηλίκον καὶ τί τὸ ὑπόλοιπον;

63 —Ἔστω π τὸ πηλίκον καὶ υ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως $\alpha:\beta$· ἔχομεν (§ 58)

$$\alpha = \beta\times\pi+\upsilon$$

ὅθεν (§ 46)·

$$\alpha\times\rho = (\beta\times\pi)\times\rho+\upsilon\times\rho$$ ἢ (§ 45 γ΄.)

$$\alpha\times\rho = (\beta\times\rho)\times\pi+\upsilon\times\rho$$

Παρατηροῦμεν δὲ ὅτι, ἐπειδὴ $\upsilon<\beta$ (§ 59),

ἔχομεν $$\upsilon\times\rho<\beta\times\rho$$

Ἑπομένως, ἐὰν λάβωμεν διαιρετέον τὸν $\alpha\times\rho$ καὶ διαιρέτην τὸν $\beta\times\rho$, πηλίκον θὰ ἔχωμεν, ὡς ἡ ἀνωτέρω ἰσότης δεικνύει, τὸ π καὶ ὑπόλοιπον τὸ $\upsilon\times\rho$· ἄρα·

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν διαιρετέον καὶ διαιρέτην ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, τὸ πηλίκον μὲν δὲν ἀλλάσσει, τὸ ὑπόλοιπον ὅμως πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸ αὐτὸν ἀριθμόν.

Π.χ. ἐκ τοῦ ὅτι ἡ διαίρεσις 9 : 2 δίδει πηλίκον 4 καὶ ὑπόλοιπον 1, ἐξάγομεν ὅτι ἡ διαίρεσις 90 : 20 δίδει πηλίκον 4 καὶ ὑπόλοιπον 10, ἡ διαίρεσις 900 : 200 δίδει πηλίκον 4 καὶ ὑπόλοιπον 100 κ.ο.κ.

Ἕπεται ἐντεῦθεν ὅτι·

Ἐὰν διαιρετέος καὶ διαιρέτης, λήγωσιν εἰς 0, καὶ τὸ ὑπόλοιπον θὰ λήγῃ εἰς 0, ἐὰν λήγωσιν εἰς δύο μηδενικὰ καὶ τὸ ὑπόλοιπον θὰ λήγῃ εἰς δύο μηδενικὰ κ. ο. κ.

Ἔχομεν ἐπίσης ὅτι:

Ἐὰν εἰς τελείαν διαίρεσιν πολλαπλασιάσωμεν διαιρετέον καὶ διαιρέτην ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, θὰ προκύψῃ πάλιν διαίρεσις τελεία.

Ἀσκήσεις.

62.) Πότε δὲν βλάπτεται τὸ πηλίκον, ἐὰν εἰς τὸν διαιρέτην προσθέσω μίαν μονάδα, πότε δύο κ. ο. κ.;

63) Πότε δὲν βλάπτεται τὸ πηλίκον, ἐὰν ἀφαιρέσω ἀπὸ τοῦ διαιρέτου μίαν μονάδα ἢ δύο ἢ τρεῖς κλπ.;

64) Εἰς πᾶσαν διαίρεσιν δίδουσαν πηλίκον διάφορον τοῦ μηδενὸς ὁ διαιρετέος εἶναι μεγαλύτερος τοῦ διπλασίου τοῦ ὑπολοίπου.

Ἀρκεῖ νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι οὔτε ἴσος πρὸς τὸ διπλάσιον τοῦ ὑπολοίπου δύναται νὰ εἶναι ὁ διαιρετέος οὔτε μικρότερος.

65) Εἰς τὸν διαιρετέον καὶ διαιρέτην μιᾶς διαιρέσεως προσθέτω τὸν αὐτὸν ἀκέραιον. Νὰ εὑρεθῶσι περιπτώσεις καθ' ἃς τὸ πηλίκον δὲν ἀλλάσσει.

66) Τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν αὐξανόμενον κατὰ 10 γίνεται 7130· ἐὰν ὁ εἷς ἐξ αὐτῶν εἶναι 356, τίς ὁ ἕτερος;

67) Πολλαπλασιάζομεν ἀριθμόν τινα κατ' ἀρχὰς ἐπὶ 6 καὶ ἔπειτα ἐπὶ 9· τὰ δύο γινόμενα ὑπερβαίνουσιν ἕτερον ἀριθμόν, τὸ μὲν πρῶτον κατὰ 18 μονάδας, τὸ δὲ δεύτερον κατὰ 30. Ποῖον ἀριθμὸν ἐπολλαπλασιάσαμεν;

68) Ζητεῖται ἀριθμὸς τοῦ ὁποίου τὸ τετραπλάσιον ὑπερβαίνει τὸν 12 κατὰ τόσας μονάδας, ὅσας ὁ 12 ὑπερβαίνει τὸ διπλάσιον τοῦ ζητουμένου.

69) Ἀντηλλάγησαν δελτάρια μεταξὺ μαθητῶν τῆς α' καὶ β' τάξεως. Εἷς μαθητὴς τῆς α' τάξεως ἔστειλεν ἀνὰ ἓν δελτάριον εἰς 8 μαθητὰς τῆς δευτέρας· ἐπίσης δεύτερος τῆς πρώτης εἰς 9 τῆς δευτέρας· τρίτος τῆς πρώτης εἰς 10 τῆς δευτέρας κ. ο. κ καὶ ὁ τελευταῖος εἰς ὅλους τῆς δευτέρας. Πόσοι ἦσαν οἱ μαθηταὶ ἑκάστης τάξεως, γνωστοῦ ὄντος ὅτι οἱ μαθηταὶ καὶ τῶν δύο τάξεων ἐν ὅλῳ ἦσαν 73;

70) Διατὶ δὲν ὑπάρχει τριψήφιος ὅστις διαιρούμενος δι' ἄλλου νὰ δίδῃ πηλίκον 65 καὶ ὑπόλοιπον 41;

Ἀρκεῖ νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ὁ διαιρέτης θὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 41.

Ἐφαρμογὴ τῶν ἰδιοτήτων τούτων εἰς τὴν ἐκτέλεσιν τῆς διαιρέσεως.

66.—Πλῆθος τῶν ψηφίων τοῦ πηλίκου. Ἔστω ἡ διαίρεσις

$$89543 : 28\cdot$$

παρατηροῦμεν ὅτι

$$28000 < 89543 < 280000\cdot$$

ἐπομένως τὸ πηλίκον περιέχεται μεταξὺ 1000 καὶ 10000, ἤτοι εἶναι ἀριθμὸς τετραψήφιος· ὅθεν

Ὅσα τὸ ὀλιγώτερον μηδενικὰ ἀπαιτεῖται νὰ προσγράψωμεν εἰς τὸν διαιρέτην, ἵνα ὑπερβῶμεν τὸν διαιρετέον, τόσα εἶναι τὰ ψηφία τοῦ πηλίκου.

Διαίρεσις, ὅταν ὁ διαιρέτης λήγῃ εἰς μηδενικά.

67.—Ἔστω ἡ διαίρεσις

$$72863475 : 619000\cdot$$

παρατηρῶ ὅτι αἱ διαιρέσεις

$$72863 : 619$$

καὶ $$72863000 : 619000$$

δίδουσι τὸ αὐτὸ πηλίκον (§ 65)· ἂς καλέσωμεν αὐτὸ π· ἐὰν διὰ τοῦ υ παραστήσω τὸ ὑπόλοιπον τῆς πρώτης ἐξ αὐτῶν θὰ ἔχω, ὅτι $υ \times 1000$ εἶναι τὸ ὑπόλοιπον τῆς δευτέρας (§ 65)·

ἤτοι $$72863000 = 619000 \times π + υ \times 1000$$

καὶ ἐπομένως $$72863475 = 619000 \times π + υ \times 1000 + 475$$

ἀλλὰ τὸ υ (ὡς ὑπόλοιπον διαιρέσεως ἐχούσης διαιρέτην τὸν 619) δὲν δύναται νὰ ὑπερβαίνῃ τὸν 618· ἄρα καὶ τὸ $υ \times 1000$ δὲν δύναται νὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ 618000· ὅθεν τὸ $υ \times 1000 + 475$ θὰ εἶναι μικρότερον τοῦ 619000 καὶ ἡ προηγουμένη ἰσότης δεικνύει (§ 59), ὅτι ἡ διαίρεσις

$$72863475 : 619000$$

δίδει πηλίκον π καὶ ὑπόλοιπον τὸ $υ \times 1000 + 475$, ἤτοι τὸν ἀριθμὸν ὅστις προκύπτει ὅταν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου υ γράψωμεν τὸν 475.

Ἐντεῦθεν ὁ κανών:

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον διαιρέσεως, ὅταν ὁ διαιρέτης λήγῃ εἰς μηδενικά, ἀρκεῖ νὰ ἀποκόψωμεν ταῦτα καὶ ἰσάριθμα ψηφία ἀπὸ τοῦ τέλους τοῦ διαιρετέου καὶ νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως ἐπὶ τῶν μενόντων ἀριθμῶν, ὁπότε τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως ταύτης εἶναι τὸ ζητούμενον· τὸ δὲ ὑπόλοιπον εὑρίσκομεν ἐὰν γράψωμεν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου τῆς ἐκτελεσθείσης διαιρέσεως τὰ ἀποκοπέντα ἀπὸ τοῦ διαιρετέου ψηφία, ὡς ἔχουσιν ἐν αὐτῷ.

68. Παρατήρησις. Ἔστω ἡ διαίρεσις

$$72863475 : 619532$$

Τὸ πηλίκον αὐτῆς προφανῶς δὲν θὰ ὑπερβαίνῃ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως

$$72863475 : 619000$$

ἑπομένως (§ 67) δὲν θὰ ὑπερβαίνῃ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως

$$72863 : 619$$

Ἤτοι:

Ἐὰν εἰς διαίρεσίν τινα ἀπὸ τοῦ διαιρετέου καὶ τοῦ διαιρέτου ἀποκόψωμεν ἰσάριθμα ἀπὸ τοῦ τέλους ψηφία, τὸ πηλίκον δὲν ἐλαττοῦται.

Πῶς ἐκτελεῖται ἡ διαίρεσις ὅταν τὸ πηλίκον εἶναι μονοψήφιον.

69. α΄ περίπτωσις. Διαιρέτης μονοψήφιος.

Τότε ἡ διαίρεσις γίνεται ἀπὸ μνήμης· π. χ. διὰ τὴν διαίρεσιν

$$59 : 7$$

ἐκ τοῦ πυθαγορείου πίνακος ἀμέσως ἐνθυμούμεθα ὅτι

$$7 \times 8 = 56, \qquad 7 \times 9 = 63$$

ὅθεν πηλίκον εἶναι 8 καὶ ὑπόλοιπον 3·

70. β΄ περίπτωσις. Διαιρέτης πολυψήφιος.

Ἔστω ἡ διαίρεσις

$$7396 : 985$$

Κατὰ τὰ προηγούμενα (§ 68) τὸ πηλίκον δὲν δύναται νὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ πηλίκου τῆς διαιρέσεως 73 : 9, ἤτοι τοῦ 8· δοκιμάζομεν ἂν εἶναι τὸ 8· τουτέστι πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 8 τὸ 985·

εὑρίσκομεν 7880, ὅπερ ὑπερβαίνει τὸν 7396· δοκιμάζομεν τὸ 7· εὑρίσκομεν 6895· ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ διαιρετέου καὶ ἔχομεν ὑπόλοιπον 501.

Διάταξις πράξεως

$$\begin{array}{r|l} 7396 & 985 \\ \cline{2-2} 6895 & 7 \\ \hline 501 & \end{array}$$

Ἐντεῦθεν ὁ κανών·

Ἵνα εὕρωμεν τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως δύο ἀριθμῶν, ὅταν εἶναι μονοψήφιον, διαιροῦμεν τὸ πρῶτον ψηφίον τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ πρώτου ψηφίου τοῦ διαιρέτου (ἂν εἶναι ἰσοψήφιοι) ἢ τὸ πρῶτον διψήφιον τμῆμα τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ πρώτου ψηφίου τοῦ διαιρέτου (ἂν ἔχῃ ὁ διαιρετέος ἓν ψηφίον περισσότερον). Τὸ πηλίκον, τὸ οὕτω εὑρισκόμενον, θὰ εἶναι ἴσον ἢ μεγαλύτερον τοῦ ζητουμένου. Δοκιμάζομεν ἂν τὸ εὑρεθὲν ψηφίον εἶναι πηλίκον πολλαπλασιάζοντες τοῦτο ἐπὶ τὸν διαιρέτην· ἂν τὸ γινόμενον χωρῇ εἰς τὸν διαιρετέον, τότε τὸ δοκιμαζόμενον ψηφίον εἶναι τὸ ζητούμενον πηλίκον, εἰ δὲ μή, δοκιμάζομεν τὸ κατὰ μονάδα μικρότερον, καὶ οὕτω καθεξῆς, μέχρις οὗ εὕρωμεν γινόμενον μικρότερον τοῦ διαιρετέου.

Πῶς ἐκτελεῖται ἡ διαίρεσις ὅταν τὸ πηλίκον εἶναι πολυψήφιον.

71.—Ἔστω ἡ διαίρεσις.

196438 : 57

ἢ νὰ μοιράσωμεν 196438 δραχμὰς εἰς 57 ἀνθρώπους· ἐπειδὴ ὁ 196 διαιρούμενος διὰ 57 δίδει πηλίκον μονοψήφιον, χωρίζω τὸν διαιρετέον ὡς ἑξῆς:

$$196 \times 1000 + 4 \times 100 + 3 \times 10 + 8$$

ἢ καὶ

196 χιλιάδες + 4 ἑκατ. + 3 δεκ. + 8 μον.

Μοιράζομεν τὰς 196 χιλιάδας εἰς τοὺς 57 ἀνθρώπους· ἔχομεν πρὸς τοῦτο τὴν διαίρεσιν

$$\begin{array}{r|l} 196\ \text{χιλ.} & 57 \\ \cline{2-2} 25\ \text{χιλ.} & 3\ \text{χιλ.} \end{array}$$

Συμφώνως πρὸς ταύτην λαμβάνει ἕκαστος 3 χιλιάδας καὶ περισσεύουσι 25 χιλιάδες· αὗται ὁμοῦ μὲ τὰς 4 ἑκατοντάδας, τὰς ὁποίας ἔχομεν ἀνωτέρω, ἀποτελοῦσι 254 ἑκατοντάδας· μοιράζομεν αὐτὰς εἰς τοὺς 57 ἀνθρώπους· ἔχομεν πρὸς τοῦτο τὴν διαίρεσιν.

254 ἑκ.	57
26 ἑκ.	4 ἑκ.

Συμφώνως πρὸς ταύτην λαμβάνει ἕκαστος 4 ἑκατοντάδας καὶ περισσεύουσιν 26 ἑκατοντάδες· αὗται ὁμοῦ μὲ τὰς 3 δεκάδας ἀποτελοῦσι 263 δεκάδας· μοιράζομεν αὐτὰς εἰς τοὺς 57 ἀνθρώπους· ἔχομεν πρὸς τοῦτο τὴν διαίρεσιν·

263 δεκ.	57
35 δεκ.	4 δεκ.

Λαμβάνει οὕτω ἕκαστος 4 δεκάδας καὶ περισσεύουσι 35 δεκάδες· αὗται ὁμοῦ μὲ τὰς 8 μονάδας ἀποτελοῦσι 358 μονάδας· μοιράζομεν αὐτὰς εἰς τοὺς 57 ἀνθρώπους· ἔχομεν πρὸς τοῦτο τὴν διαίρεσιν·

358	57
16	6

Λαμβάνει οὕτω ἕκαστος 6 μονάδας καὶ περισσεύουσι 16 μονάδες.

Κατὰ ταῦτα ἕκαστος ἐν ὅλῳ λαμβάνει·

3 χιλιάδας + 4 ἑκατοντ. + 4 δεκ. + 6 μον.

ἤτοι 3446 καὶ περισσεύουσι 16 μονάδες.

Ἡ διάταξις τῆς πράξεως γίνεται ὡς ἑξῆς:

196438	57
254	3446
263	
358	
16	

72. — Ἐκ τῶν προηγουμένων συνάγεται ὁ κανών·

Πρὸς ἐκτέλεσιν διαιρέσεώς τινος λαμβάνομεν, ἀρχόμενοι ἐξ ἀριστερῶν τοῦ διαιρετέου, τόσα ψηφία, ὅσα θὰ ἐχρειάζετο, ἵνα τὸ πηλίκον εἶνε μονοψήφιον· διαιροῦμεν τὸν μερικὸν τοῦτον διαιρετέον διὰ τοῦ διαιρέτου, τὸ δὲ εὑρισκόμενον μονοψήφιον πηλίκον πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸν διαιρέτην· τὸ γινόμενον τοῦτο ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ ληφθέντος μερικοῦ διαιρετέου· εἰς τὸ ὑπόλοιπον (πρὸς τὰ δεξιὰ) καταβιβάζομεν τὸ πρῶτον ἐκ τῶν παραλειφθέντων ψηφίων τοῦ διαιρετέου· τὸν σχηματιζόμενον ἀριθμὸν θεωροῦμεν ὡς νέον διαιρετέον καὶ ἐργαζόμεθα καθ' ὅμοιον τρόπον, μέχρις οὗ ληφθῶσι καὶ αἱ μονάδες τοῦ ἀρχικοῦ διαιρετέου.

73.—*Παρατηρήσεις.* 1η) Ἂν εἷς ἐκ τῶν ἄνω σχηματιζομένων μερικῶν διαιρετέων εἶναι μικρότερος τοῦ διαιρέτου, τότε γράφομεν 0 δεξιᾷ τῶν εὑρεθέντων ψηφίων τοῦ πηλίκου, ἵνα διατηρῆται ἡ ἀξία των· π.χ.

23627	58
427	407
21	

2α) Ἐὰν ὁ διαιρέτης εἶναι 10, προφανῶς τὸ πηλίκον θὰ εἶναι ὁ ἀριθμὸς ὅλων τῶν δεκάδων τοῦ διαιρετέου, τὸ δὲ ὑπόλοιπον ἰσοῦται πρὸς τὸ ψηφίον τῶν μονάδων τοῦ διαιρετέου· ἀνάλογα δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν διὰ τὴν διαίρεσιν διὰ 100, 1000 κ.τ.λ. π. χ. εἰς τὴν διαίρεσιν 47588 : 100 ἔχομεν πηλίκον 475 καὶ ὑπόλοιπον 88.

Βάσανος τῆς διαιρέσεως.

74.—Πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸ εὑρεθὲν πηλίκον καὶ εἰς τὸ γινόμενον προσθέτομεν τὸ ὑπόλοιπον. Ἐὰν ἐγένετο ἡ πρᾶξις ὀρθῶς, πρέπει νὰ εὕρωμεν (§ 58) τὸν διαιρετέον.

Ἀσκήσεις.

71) Νὰ εὑρεθῶσι διαιρέσεις ὅπου ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης δὲν ὑπερβαίνουσι τὸν 1000, πηλίκον δὲ εἶναι ὁ ἀριθμὸς 27 καὶ ὑπόλοιπον 19· ποία ἐξ αὐτῶν τῶν διαιρέσεων θὰ ἔχῃ τὸν μεγαλύτερον διαιρετέον;

72) Ἐὰν ὁ διαιρετέος εἶναι 82546 καὶ τὸ πηλίκον 358 ποῖος εἶναι ὁ διαιρέτης καὶ ποῖον τὸ ὑπόλοιπον;

73) Νὰ εὑρεθῶσι διαιρέτης καὶ πηλίκον τοιοῦτοι ὥστε ὁ διαιρετέος νὰ εἶναι 719 καὶ τὸ ὑπόλοιπον 89.

74) Τὰ ψηφία τοῦ πηλίκου εἶναι τόσα, ὅσα ἔχει ὁ διαιρετέος περισσότερα τοῦ διαιρέτου ἢ ἀκόμη ἕν.

75) Ἐὰν διαιρέσωμεν διαιρετέον καὶ διαιρέτην δι' ἀριθμοῦ ὅστις νὰ διαιρῇ ἀμφοτέρους, τὸ πηλίκον δὲν ἀλλάσσει, τὸ ὑπόλοιπον ὅμως διαιρεῖται διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ

76) Πῶς δύναται νὰ συντομευθῇ ἡ διαίρεσις, ὅταν τὰ ψηφία τοῦ διαιρέτου εἶναι πάντα 9;

77) Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ α καὶ β διαιρούμενοι δι' ἄλλου δ δίδωσιν ἴσα ὑπόλοιπα, τότε καὶ τὰ γινόμενα ρα καὶ ρβ (ὅπου ρ τυχὼν ἀκέραιος) διαιρούμενα διὰ ρδ δίδουσιν ἴσα ὑπόλοιπα.

78) Ἐὰν ἀριθμὸς διαιρῇ ἀκριβῶς δύο ἄλλους, θὰ διαιρῇ ἀκριβῶς καὶ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως αὐτῶν.

Δυνάμεις τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν.

75.—Ὅταν οἱ παράγοντες γινομένου εἶναι πάντες ἴσοι, ὁ πολλαπλασιασμὸς καλεῖται ὕψωσις εἰς δύναμιν· ἤτοι: ὑψοῦμεν τὸν ἀριθμὸν α εἰς δύναμίν τινα, π. χ. τὴν πέμπτην, ὅταν σχηματίζωμεν γινόμενον 5 παραγόντων ἴσων πρὸς τὸ α· σημειοῦται δὲ ὡς ἑξῆς α^5· ὁ α λέγεται βάσις, ὁ 5 ἐκθέτης, τὸ δὲ ἐξαγόμενον δύναμις· π. χ. ὁ 1000 εἶναι τρίτη δύναμις τοῦ 10 ἢ $10^3 = 1000$. Ἡ δευτέρα δύναμις ἀριθμοῦ λέγεται καὶ τετράγωνον, ἡ τρίτη λέγεται καὶ κύβος. Καὶ ἐν γένει.

Νυοστὴ δύναμις ἀριθμοῦ λέγεται τὸ γινόμενον ν παραγόντων ἴσων πρὸς τὸν ἀριθμὸν τοῦτον.

Ἰδιότητες τῶν δυνάμεων.

76.—Τὸ γινόμενον δύο δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ πρὸς ποίαν δύναμιν τοῦ ἀριθμοῦ τούτου ἰσοῦται;

α') Ἔστω τὸ γινόμενον $\alpha^3 \times \alpha^5$· παρατηροῦμεν ὅτι κατὰ τὸν ὁρισμὸν (§ 75) ἔχομεν

$$\alpha^3 \times \alpha^5 = (\alpha \times \alpha \times \alpha) \times (\alpha \times \alpha \times \alpha \times \alpha \times \alpha) =$$

$$= \alpha \times \alpha \times \alpha \times \alpha \times \alpha \times \alpha \times \alpha \times \alpha \quad (\S\ 45\ \delta')$$

ἢ καὶ $\quad \alpha^3 \times \alpha^5 = \alpha^8 \quad$ (§ 75) $\quad$ ὅθεν

Τὸ γινόμενον δύο δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ εἶναι δύναμις τοῦ αὐταῦ ἀριθμοῦ μὲ ἐκθέτην τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν.

Ὁμοίως ἔχομεν

$$\alpha^{\mu} \times \alpha^{\nu} \times \alpha^{\varrho} = \alpha^{\mu+\nu+\varrho}$$

ὅπου οἱ μ, ν καὶ ρ ὑποτίθενται ἀκέραιοι μεγαλύτεροι τῆς μονάδος.

Ἵνα ἡ ἰδιότης αὕτη ἰσχύῃ, καὶ ὅταν ἐκθέτης τοῦ α εἶναι ἡ μονάς, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ θεωρῶμεν ὅτι

$$\alpha^{1} = \alpha$$

ὁπότε ἐπιτρέπεται νὰ λέγωμεν ὅτι π. χ.

$$\alpha^{5} \times \alpha^{1} = \alpha^{5+1} = \alpha^{6}\cdot$$

δι' ὅμοιον λόγον δεχόμεθα ὅτι

$$\alpha^{0} = 1,$$

ὁπότε δυνάμεθα νὰ λέγωμεν ὅτι π. χ.

$$\alpha^{0} \times \alpha^{3} = \alpha^{0+3} = \alpha^{3}.$$

Κατὰ ταῦτα

$$2^{0} = 1, \qquad 5^{0} = 1, \qquad 2^{1} = 2, \qquad 5^{1} = 5.$$

Τὸ πηλίκον δύο δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ πρὸς ποίαν δύναμιν τοῦ ἀριθμοῦ τούτου ἰσοῦται;

β') Ἔστω ἡ διαίρεσις

$$\alpha^{8} : \alpha^{5}$$

παρατηροῦμεν ὅτι

$$\alpha^{3} \times \alpha^{5} = \alpha^{8} \qquad \text{ὅθεν}$$

$$\alpha^{8} : \alpha^{5} = \alpha^{3}$$

Καὶ γενικῶς

$$\alpha^{\mu} : \alpha^{\nu} = \alpha^{\mu-\nu}. \qquad (\mu > \nu)$$

ὅθεν ὁ κανών.

Τὸ πηλίκον δύο δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ εἶναι δύναμις τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ μὲ ἐκθέτην τὴν διαφορὰν τῶν ἐκθετῶν.

π. χ. $2^{5} : 2^{3} = 2^{2} = 4 \qquad 7^{12} : 7^{9} = 7^{3} = 343$

Πῶς ὑψοῦται δύναμις εἰς δύναμιν;

γ') Ἔστω $(\alpha^{3})^{4}\cdot$ τοῦτο ἰσοῦται πρὸς

$$\alpha^{3} \times \alpha^{3} \times \alpha^{3} \times \alpha^{3} = \alpha^{3+3+3+3} = \alpha^{3\times 4} = \alpha^{12}$$

καὶ γενικῶς $\qquad (\alpha^{\mu})^{\nu} = \alpha^{\mu\times\nu} \qquad$ ὅθεν

Δύναμις ὑψοῦται εἰς δύναμιν, ἐὰν ἡ βάσις ὑψωθῇ εἰς δύναμιν μὲ ἐκθέτην γινόμενον τῶν ἐκθετῶν.

Πῶς ὑψοῦται γινόμενον εἰς δύναμιν;

δ΄) Παρατηροῦμεν ὅτι

$$(\alpha \times \beta \times \gamma)^2 = (\alpha \times \beta \times \gamma) \times (\alpha \times \beta \times \gamma) =$$
$$= \alpha \times \alpha \times \beta \times \beta \times \gamma \times \gamma = \alpha^2 \times \beta^2 \times \gamma^2$$

καὶ γενικῶς

$$(\alpha \times \beta \times \gamma)^\nu = \alpha^\nu \times \beta^\nu \times \gamma^\nu \cdot \qquad \text{ὅθεν}$$

Γινόμενον ὑψοῦται εἰς δύναμιν, ἐὰν ὑψωθῇ ἕκαστος τῶν παραγόντων εἰς τὴν δύναμιν ταύτην.

Π. χ.
$$(2 \times 5)^4 = 2^4 \times 5^4$$

καὶ ἀντιστρόφως·

$$2^7 \times 5^7 = (2 \times 5)^7 = 10^7 \qquad 2^\nu \times 5^\nu = 10^\nu.$$

Ἀσκήσεις.

79) Εἰς ποῖον ψηφίον λήγει ὁ ἀριθμὸς 2344^{83}; εἰς ποῖον ὁ ἀριθμὸς 2356^{100};

80) Τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν ἐπὶ τὴν διαφορὰν αὐτῶν ἰσοῦται πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων αὐτῶν.

81) Ἔστω εἰς τὸ ἑπταδικὸν σύστημα (§ 18) ὁ ἀριθμὸς 5226. Πῶς θὰ γραφῇ εἰς τὸ κοινὸν σύστημα, ἤτοι τὸ δεκαδικόν;

Παρατηροῦμεν (§ 18) ὅτι

$$5326 = 5 \times 7^3 + 3 \times 7^2 + 2 \times 7 + 6 =$$
$$5 \times 343 + 3 \times 49 + 2 \times 7 + 6 =$$
$$1715 + 147 + 14 + 6 = 1882.$$

Ἀντιστρόφως· ἔστω ὁ ἀριθμὸς 241 τοῦ δεκαδικοῦ. Νὰ τραπῇ εἰς ἀριθμὸν τοῦ πενταδικοῦ.

Παρατηροῦμεν ὅτι

$$241 = 5 \times 48 + 1 = 5 \times (5 \times 9 + 3) + 1 =$$
$$5^2 \times 9 + 5 \times 3 + 1 =$$
$$5^2 \times (5 \times 1 + 4) + 5 \times 3 + 1 =$$
$$5^3 \times 1 + 5^2 \times 4 + 5 \times 3 + 1$$

ἑπομένως (§ 19) ὁ ἀριθμὸς 241 τοῦ δεκαδικοῦ γράφεται εἰς τὸ πενταδικὸν ὡς ἑξῆς· 1431.

Οὕτω δ' ἐξάγομεν εὐκόλως κανόνα τροπῆς ἀριθμοῦ συστήματός τινος εἰς τὸ δεκαδικὸν καὶ τἀνάπαλιν.

82) Νὰ τραπῇ ὁ ἀριθμὸς 324 τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος εἰς ἀριθμὸν τοῦ πενταδικοῦ καὶ ἀντιστρόφως ὁ 324 τοῦ πενταδικοῦ νὰ τραπῇ εἰς ἀριθμὸν τοῦ δεκαδικοῦ.

83) Νὰ τραπῇ

α΄) ὁ ἀριθμὸς 21011001 τοῦ τριαδικοῦ συστήματος εἰς ἀριθμὸν τοῦ δεκαδικοῦ.

β΄) Ὁ ἀριθμὸς 1000110 τοῦ δυαδικοῦ συστήματος εἰς ἀριθμὸν τοῦ δεκαδικοῦ.

γ΄) Ὁ ἀριθμὸς 3α τοῦ ἑνδεκαδικοῦ (§ 21) νὰ γραφῇ κατὰ τὸ δεκαδικόν.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄

ΔΙΑΙΡΕΤΟΤΗΣ

77.—Ἔστω ὅτι ἀριθμός τις α διαιρεῖται ἀκριβῶς δι' ἄλλου β, ἤτοι ἔστω ὅτι ὑπάρχει ἀριθμὸς π ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ β δίδει τὸν α. Τότε ὁ α λέγεται διαιρετὸς διὰ β ἢ ἀκόμη ὁ α λέγεται πολλαπλάσιον τοῦ β, διότι σύγκειται ἀπὸ πολλὰ β, ἐνῷ ὁ β λέγεται διαιρέτης τοῦ α ἢ καὶ ὑποπολλαπλάσιον τοῦ α ἢ καὶ παράγων αὐτοῦ.

Κατὰ ταῦτα ὁ ἀριθμὸς 24 εἶναι διαιρετὸς διὰ τῶν ἀριθμῶν 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24, ὅπως ἐπίσης εἶναι πολλαπλάσιον αὐτῶν (θεωρουμένου καὶ τοῦ 24 ὡς πολλαπλασίου τοῦ 24).

Ἀρχαὶ διαιρετότητος.

Ἐὰν ἀριθμός τις διαιρῇ ἄλλους, θὰ διαιρῇ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν καὶ διατί;

78.—Ἔστω ὅτι δύο ἀριθμοὶ εἶναι πολλαπλάσια ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ· π. χ. ὁ 78 καὶ ὁ 12 εἶναι πολλαπλάσια τοῦ 6, ἤτοι εἶναι ἀμφότεροι ἀθροίσματα προσθετέων ἴσων τῷ 6· προφανῶς καὶ τὸ ἄθροισμά των 78 + 12 εἶναι ἓν ἄλλο ἄθροισμα προσθετέων ἴσων τῷ 6 καὶ γενικῶς·

Ἐὰν δύο ἢ πλειότεροι ἀριθμοὶ εἶναι πολλαπλάσια ἑνὸς ἄλλου, καὶ τὸ ἄθροισμά των θὰ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ ἤ, ὅπερ τὸ αὐτό·

Ἐὰν ἀριθμὸς διαιρῇ ἄλλους, διαιρεῖ καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν.

Τοῦτο προέκυπτε καὶ ἀμέσως ἐκ τῆς πρώτης ἰδιότητος τῆς διαιρέσεως (§ 61).

79.—Συνάγομεν ἀμέσως ἐκ τοῦ προηγουμένου ὅτι·

Ἐὰν ἀριθμός τις β διαιρῇ ἕτερον α, θὰ διαιρῇ καὶ πᾶν πολλαπλάσιον τοῦ α.

Π. χ. ὁ 7 ὡς διαιρῶν τὸν 35 θὰ διαιρῇ καὶ τὸν 35 × ρ, ὅπου ρ τυχὼν ἀκέραιος.

Ἐὰν ἀριθμός τις διαιρῇ δύο ἄλλους, θὰ διαιρῇ καὶ τὴν διαφορὰν αὐτῶν· καὶ διατί;

80. – Οἱ ἀριθμοὶ 48 καὶ 32 εἶναι πολλαπλάσιά τοῦ 8 ἤτοι

$$48 = 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8,$$

$$32 = 8 + 8 + 8 + 8 \ldots \qquad \text{ὅθεν}$$

καὶ ἡ διαφορὰ αὐτῶν θὰ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 8, ἤτοι·

Ἐὰν ἀριθμὸς διαιρῇ δύο ἄλλους, διαιρεῖ καὶ τὴν διαφορὰν αὐτῶν.

Ὅταν λοιπὸν ἔχωμεν

$$\alpha - \beta = \gamma$$

τότε, ἐὰν ὁ δ διαιρῇ τὸν α καὶ τὸν β, θὰ διαιρῇ καὶ τὸν γ. Ἀλλὰ ἡ ἀνωτέρω ἰσότης γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς·

$$\alpha = \beta + \gamma \qquad (\S\ 31).$$

Εἶναι λοιπὸν ὁ α ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν β καὶ γ· ἑπομένως δυνάμεθα τὴν ἀνωτέρω ἰδιότητα νὰ ἐκφράσωμεν καὶ ὡς ἑξῆς·

Ἐὰν ἀριθμός τις διαιρῇ ἄθροισμα δύο ἄλλων καὶ τὸν ἕνα τῶν προσθετέων τοῦ ἀθροίσματος, θὰ διαιρῇ καὶ τὸν ἕτερον προσθετέον.

Π. χ. ὁ 3 διαιρεῖ τὸν 30, ὅστις εἶναι ἄθροισμα τῶν 12 καὶ 18, διαιρεῖ τὸν 12· ἄρα θὰ διαιρῇ καὶ τὸν 18.

Τί γίνεται τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως, ἐὰν εἰς τὸν διαιρετέον προστεθῇ πολλαπλάσιον τοῦ διαιρέτου;

81.—Ἔστω ἡ διαίρεσις 68 : 9· ἔχομεν πηλίκον 7 καὶ ὑπόλοιπον 5 ὅθεν (§ 58)

$$68 - 5 = 9 \times 7$$

ἔστω ρ τυχὼν ἀκέραιος· προσθέτοντες εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἰσότητος τὸ 9 × ρ ἔχομεν (§ 23)

$$(68 - 5) + 9 \times \rho = 9 \times 7 + 9 \times \rho\cdot$$

ἵνα ὅμως προσθέσωμεν ἀριθμὸν εἰς διαφοράν, ἀρκεῖ νὰ τὸν προσθέσωμεν εἰς τὸν μειωτέον (§ 33 ε΄) ἤτοι·

$$[68 + (9 \times \rho)] - 5 = 9 \times (7 + \rho)\cdot \qquad (\S\ 46)$$

ἑπομένως (§ 59) ὁ ἀριθμὸς $68 + 9 \times \rho$ διαιρούμενος διὰ 9 δίδει πάλιν ὑπόλοιπον 5· ὅθεν·

Ἐὰν προσθέσωμεν εἰς τὸν διαιρετέον πολλαπλάσιον τοῦ διαιρέτου, τὸ ὑπόλοιπον δὲν μεταβάλλεται.

Ἐὰν ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ διαιρετέου πολλαπλάσιον τοῦ διαιρέτου, τί γίνεται τὸ ὑπόλοιπον;

82.—Κατὰ τὸν αὐτὸν ὡς ἄνω τρόπον ἀποδεικνυεται ὅτι·

Ἐὰν ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ διαιρετέου πολλαπλάσιον τοῦ διαιρέτου, τὸ ὑπόλοιπον δὲν ἀλλάσσει.

Ἀσκήσεις.

84) Ἐὰν ἀριθμὸς διαιρῇ τὸ ἄθροισμα δύο ἄλλων καὶ δὲν διαιρῇ τὸν ἕνα, δὲν θὰ διαιρῇ οὔτε τὸν ἄλλον.

85) Ἐὰν ἀριθμὸς διαιρῇ τὸ ἄθροισμα ν προσθετέων καὶ τοὺς $\nu-1$ προσθετέους χωριστά, θὰ διαιρῇ καὶ τὸν ἀπομένοντα προσθετέον. (§ 27 α΄. § 78, 80)

86) Ἐὰν διαιρέσωμεν δύο ἀριθμοὺς χωριστὰ διὰ τοῦ αὐτοῦ διαιρέτου καὶ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ἀριθμούς, ἀπὸ δὲ τοῦ γινομένου ἀφαιρέσωμεν τὸ γινόμενον τῶν δύο ὑπολοίπων, εὑρίσκομεν πολλαπλάσιον τοῦ διαιρέτου. (§ 58. § 46 β΄.)

87) Τί γίνεται τὸ πηλίκον καὶ τὸ ὑπόλοιπον, ὅταν μόνον τὸν διαιρετέον πολλαπλασιάσωμεν ἐπί τινα ἀριθμόν; Εἰς ποίαν περίπτωσιν ὁ νέος διαιρετέος εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ διαιρέτου;

88) Νὰ δειχθῇ ὅτι δὲν ὑπάρχει ἀριθμὸς ὅστις διαιρούμενος διὰ 18 νὰ δίδῃ ὑπόλοιπον 5, διαιρούμενος δὲ διὰ τοῦ 12 νὰ δίδῃ ὑπόλοιπον 3. (Ἀρκεῖ νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ἀριθμὸς διαιρούμενος διὰ 12 καὶ δίδων ὑπόλοιπον 3 διαιρεῖται διὰ τοῦ 3).

Χαρακτῆρες διαιρετότητος.

83.— Παρατηροῦμεν ὅτι, ἐὰν ἐνδιαφέρῃ ἡμᾶς μόνον τὸ ὑπόλοιπον μιᾶς διαιρέσεως, ἡ ἀνωτέρω ἰδιότης (§ 82) μᾶς ἐπιτρέπει νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ διαιρετέου πολλαπλάσιον τοῦ διαιρέτου· τοῦτο ἐφαρμόζοντες εὑρίσκομεν χαρακτηριστικὰς ἰδιότητας τῶν ὑπολοίπων τῶν διαιρέσεων διὰ διαφόρων ἀριθμῶν· π. χ. τοῦ 2, 3, 5κτλ.

84.—Διαιρέτης 2.

Ἔστω ἡ διαίρεσις

$$7239 : 2$$

ἔχομεν

$$7239 = 723 \times 10 + 9 = 723 \times 5 \times 2 + 9 =$$
$$2 \times (723 \times 5) + 9 \cdot$$

ὁ πρῶτος προσθετέος εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 2 καὶ ἡ ἀφαίρεσίς του δὲν μεταβάλλει τὸ ὑπόλοιπον· ἤτοι

Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀριθμοῦ τινος διὰ 2 εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων του διὰ 2· ὅθεν καί·

Ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς διὰ 2, ἐὰν τὸ τελευταῖον αὐτοῦ ψηφίον εἶναι διαιρετὸν διὰ 2· ἤτοι ἐὰν εἶναι 0, 2, 4, 6, 8.

Τοὺς τοιούτους ἀριθμοὺς καλοῦμεν ἀρτίους, τοὺς δὲ μὴ διαιρετοὺς διὰ 2 περιττούς.

Κατὰ ταῦτα· Πᾶς ἄρτιος ἀριθμὸς δύναται νὰ γραφῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν 2ν καὶ πᾶς περιττὸς ὑπὸ τὴν μορφὴν $2\nu + 1$ π. χ.

$$26 = 2 \times 13 \text{ καὶ } 15 = 2 \times 7 + 1$$

85.- Διαιρέτης 5.

Ὁμοίως σκεπτόμενοι εὑρίσκομεν ὅτι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀριθμοῦ διὰ 5 εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων του διὰ 5· ὅθεν καὶ

Ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς διὰ 5, ὅταν λήγῃ εἰς 0 ἢ εἰς 5.

86. Διαιρέτης 4 ἢ 25.

Ἔστω 68957 διαιρετέος· παρατηροῦμεν ὅτι

$$68957 = 689 \times 100 + 57 = 689 \times 25 \times 4 + 57. \qquad \text{ἄρα·}$$

Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀριθμοῦ τινος διὰ 4 ἢ 25 εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμοῦ τὸν ὁποῖον ἀποτελοῦσι τὰ δύο τελευταῖα ψηφία του· ὅθεν καὶ

Ἀριθμός τις διαιρεῖται διὰ 4 ἢ 25, ὅταν τὰ δύο τελευταῖα ψηφία του σχηματίζωσιν ἀριθμὸν διαιρετὸν διὰ 4 ἢ 25 (καθ' ἣν τάξιν εἶνε γεγραμμένα).

87.—Διαιρέτης 8 ἢ 125.

Εὑρίσκομεν, ὅπως καὶ ἀνωτέρω ὅτι

Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀριθμοῦ τινος διὰ 8 ἢ 125 εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμοῦ, ὃν ἀποτελοῦσι τὰ τρία τελευταῖα ψηφία του ὅθεν καὶ

Ἀριθμός τις διαιρεῖται διὰ 8 ἢ 125, ὅταν τὰ τρία τελευταῖα ψηφία του σχηματίζωσιν ἀριθμὸν διαιρετὸν διὰ 8 ἢ διὰ 125 (καθ' ἣν τάξιν εἶναι γεγραμμένα).

Καὶ γενικῶς ἀριθμός τις διαιρεῖται διὰ 2^ν ἢ διὰ 5^ν, ὅταν τὰ ν τελευταῖα ψηφία του σχηματίζωσιν ἀριθμὸν διαιρετὸν διὰ 2^ν ἢ διὰ 5^ν.

88.—Διαιρέτης 9 ἢ 3.

Ἔστω τυχὼν ἀριθμὸς 58737 ὡς διαιρετέος.

Ἔχομεν: $$58737 = 50000 + 8000 + 700 + 30 + 7 =$$
$$= 5 \times 10000 + 8 \times 1000 + 7 \times 100 + 3 \times 10 + 7 =$$
$$5\times(9999+1)+8\times(999+1)+7\times(99+1)+3\times(9+1)+7$$

Ἀλλὰ $1 \times 9 = 9$, $11\times9=99$, $111 \times 9 = 999$, κ. ο. κ. ὅθεν
$$58737=5\times1111\times9+5+8\times111\times9+8+7\times11\times9+7+$$
$$+3\times9+3+7=$$
$$(5\times1111+8\times111+7\times11+3)\times9+(5+8+7+3+7)$$

ἄρα. Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀριθμοῦ τινος διὰ 9 λαμβάνομεν, ἐὰν διαιρέσωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων του

Ὅθεν καὶ

Ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς διὰ 9, ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων του διαιρῆται διὰ 9 καὶ τότε μόνον.

Ἐπειδὴ ὁ 9 εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 3, ἕπεται ὅτι τὸ ἀνωτέρω ἄθροισμα, εἰς τὸ ὁποῖον κατελήξαμεν γράφεται καὶ ὡς πολλαπλάσιον τοῦ 3 ηὐξημένον κατὰ τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων του· ἄρα·

Ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς διὰ 3, ὅταν τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων του εἶναι διαιρετὸν διὰ 3.

89.—Διαιρέτης 11.

Ἔστω ὁ τυχὼν διαιρετέος 5378946· οὗτος γράφεται
$$5000000 + 370000 + 8900 + 46$$
$$= 5 \times 10^6 + 37 \times 10^4 + 89 \times 10^2 + 46.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι πᾶσα ἀρτία δύναμις τοῦ 10 εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 11 ηὐξημένον κατὰ μονάδα· καὶ τῷ ὄντι.

$$10^2 = 100 = 99 + 1 = 9 \times 11 + 1,$$
$$10^4 = 10000 = 9999 + 1 =$$
$$9900 + 99 + 1 = 99 \times 101 + 1 =$$
$$9 \times 11 \times 101 + 1 \text{ κ. ο. κ. ἑπομένως:}$$

$5378946 =$ πολλαπλάσιον τοῦ $11 + (5 + 37 + 89 + 46)$· ὅθεν

Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀριθμοῦ διὰ 11 ἰσοῦται τῷ ὑπολοίπῳ τῆς διαιρέσεως διὰ 11 τοῦ ἀριθμοῦ, ὃν σχηματίζομεν χωρίζοντες αὐτὸν εἰς διψήφια τμήματα (ἀπὸ τῶν ἁπλῶν μονάδων) καὶ προσθέτοντες αὐτά· ἑπομένως·

Ἀριθμός τις διαιρεῖται διὰ 11, ἐὰν διαιρῆται διὰ 11 ὁ ἀριθμός, ὃν σχηματίζομεν χωρίζοντες αὐτὸν εἰς διψήφια τμήματα ἀπὸ τῶν ἁπλῶν μονάδων καὶ προσθέτοντες αὐτά.

90. — ***Διαιρέτης 7.*** Ἔστω ὁ τυχὼν διαιρετέος 1654. Ἑκάστη δεκὰς ἰσοῦται πρὸς $7 + 3$· ἑπομένως·

$$1654 = 165 \times 7 + 165 \times 3 + 4·$$

ἄρα τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀριθμοῦ διὰ 7 συμπίπτει μὲ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως διὰ 7 τοῦ ἀριθμοῦ, ὅστις εἶναι ἄθροισμα τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων καὶ τοῦ τριπλασίου τοῦ ὅλου ἀριθμοῦ τῶν δεκάδων. Ὅθεν καὶ

Ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς διὰ 7, ἐὰν τὸ ἄθροισμα τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων καὶ τοῦ τριπλασίου τοῦ ὅλου ἀριθμοῦ τῶν δεκάδων του εἶναι διαιρετὸν διὰ 7.

91. — ***Διαιρέτης 10, 100, . .*** Ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς διὰ 10, ὅταν τελειώνῃ εἰς 0, διὰ 100, ὅταν τελειώνῃ εἰς δύο μηδενικὰ κ. ο. κ. (§ 67).

Ἀσκήσεις.

89. Ἐκ τῶν ἀριθμῶν 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 25, 100, 125 τίνες εἶναι διαιρέται τοῦ ἀριθμοῦ 24876, τίνες τοῦ 68645, τίνες τοῦ 2439360, τίνες τοῦ 17920 καὶ τίνες τοῦ 352500;

90) Νὰ εὑρεθῶσι τετραψήφιοι τοιοῦτοι, ὥστε, ἐὰν γραφῇ πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτῶν τὸ ψηφίον 5, νὰ σχηματίζηται πενταψήφιος διαιρετὸς διὰ 11.

91) Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμὸς ἐπὶ τὸν ὁποῖον ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ὁ 12345679 εὑρίσκεται γινόμενον μὲ πάντα τὰ ψηφία ἴσα.

92) Τὸ ἄθροισμα δύο διαδοχικῶν ἀριθμῶν εἶναι περιττός

93) Τὸ γινόμενον δύο διαδοχικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἄρτιος.

94) Τὸ γινόμενον ἀρτίων ἐπὶ οἱονδήποτε ἀκέραιον εἶναι ἄρτιος ἀριθμός.

95) Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ διαιρεθῶσι διὰ τῆς διαφορᾶς των, δίδουσιν ὑπόλοιπα ἴσα καὶ πηλίκα διαφέροντα κατὰ μονάδα (§ 81, 82).

96) Ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς διὰ 20, ἐὰν τὸ ψηφίον τῶν μονάδων του εἶναι 0, τὸ δὲ τῶν δεκάδων εἶναι ἢ 0 ἢ ἄρτιος.

97) Ἀριθμός τις τοῦ ὁποίου ὅλα τὰ ψηφία εἶναι 1 τότε μόνον εἶναι διαιρετὸς διὰ 9, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν ψηφίων του εἶναι διαιρετὸς διὰ 9. Ἡ αὐτὴ πρότασις ἰσχύει, καὶ ὅταν τὰ ψηφία ὅλα εἶναι 2 ἢ 4 ἢ 5 ἢ 7 ἢ 8.

98) Ἵνα ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς διὰ 11, πρέπει καὶ ἀρκεῖ ἡ διαφορὰ μεταξὺ τοῦ ὅλου ἀριθμοῦ τῶν δεκάδων του καὶ τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων του νὰ εἶνπι πολλαπλάσιον τοῦ 11.

Ἀρκεῖ νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι $10 = 11 - 1$ καὶ νὰ λάβωμεν ὑπ᾽ ὄψιν τὰς προτάσεις (§ 53 § 33η´.)

99) Διακρίνομεν ἂν ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς διὰ 11 καὶ ὡς ἑξῆς· Προσθέτομεν τὰ ψηφία τάξεως περιττῆς (ἀπὸ τῶν ἁπλῶν μονάδων) καὶ τὰ ψηφία τάξεως ἀρτίας· ἀπὸ δὲ τοῦ πρώτου ἀθροίσματος (αὐξανομένου ἐν ἀνάγκῃ κατὰ πολλαπλάσιον τοῦ 11) ἀφαιροῦμεν τὸ δεύτερον. Ἐὰν ἡ διαφορὰ εἶναι 0 ἢ πολλαπλάσιον τοῦ 11, τότε ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς εἶναι διαιρετὸς διὰ 11 (§ 89, § 82, § 33).

100) Ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς διὰ 6, ὅταν τὸ ψηφίον τῶν μονάδων του προστιθέμενον εἰς τὸ τετραπλάσιον τοῦ ἀθροίσματος πάντων τῶν λοιπῶν δίδῃ ἄθροισμα διαιρετὸν διὰ 6.

101) Ἔχομεν ἀριθμὸν διαιρετὸν διὰ 12, ἐὰν προσθέτοντες εἰς τὸν ἀριθμὸν τὸν σχηματιζόμενον ἐκ τῶν δύο τελευταίων ψηφίων τὸ τετραπλάσιον τοῦ ἀθροίσματος πάντων τῶν λοιπῶν, λαμβάνωμεν ἀριθμὸν διαιρετὸν διὰ 12.

Ἡ ἀπόδειξις στηρίζεται εἰς τοῦτο· ὅτι οἱ ἀριθμοὶ 100, 1000, ... διαιρούμενοι διὰ 12 δίδουσιν ὑπόλοιπον 4.

102) Διακρίνομεν ἂν ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς διὰ 15, καὶ ὡς ἑξῆς· προσθέτομεν εἰς τὸν ἀριθμὸν τὸν σχηματιζόμενον ἐκ τῶν δύο

τελευταίων ψηφίων (κατὰ τὴν τάξιν αὐτῶν λαμβανομένων) τὸ δεκαπλάσιον τοῦ ἀθροίσματος πάντων τῶν λοιπῶν· ἐὰν λάβωμεν ἀριθμὸν διαιρετὸν διὰ 15, τότε καὶ ὁ δοθεὶς εἶναι διαιρετὸς διὰ 15.

103) Νὰ εὑρεθῶσι χαρακτῆρες διαιρετότητος διὰ τοὺς ἀριθμοὺς 13, 37. (§ 82).

104) Τὸ γινόμενον τριῶν διαδοχικῶν ἀριθμῶν διαιρεῖται διὰ 3, τεσσάρων διαδοχικῶν διὰ 4 καὶ γενικῶς ν διαδοχικῶν διὰ ν (διότι εἷς ἐκ τῶν παραγόντων θὰ διαιρῆται δι' αὐτοῦ).

Βάσανος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ τῆς διαιρέσεως διὰ τοῦ 9.

Τί γίνεται τὸ ὑπόλοιπον διαιρέσεως ἀθροίσματος δι' ἀριθμοῦ, ἐὰν ἕκαστος προσθετέος ἀντικατασταθῇ διὰ τοῦ ὑπολοίπου του ὡς πρὸς τὸν αὐτὸν διαιρέτην;

92.—Ἔστω ὅτι αἱ διαιρέσεις $\alpha : \delta$, $\beta : \delta$, $\gamma : \delta$ δίδουσι πηλίκα π, π', π'' καὶ ὑπόλοιπα υ, υ', υ''· ἔχομεν (§ 58)

$$\alpha = \delta \times \pi + \upsilon,$$
$$\beta = \delta \times \pi' + \upsilon',$$
$$\gamma = \delta \times \pi'' + \upsilon''.$$

ὅθεν· $\alpha + \beta + \gamma = \delta \times (\pi + \pi' + \pi'') + (\upsilon + \upsilon' + \upsilon'')$

ἐξ οὗ βλέπομεν ὅτι τὸ ἄθροισμα

$$\alpha + \beta + \gamma$$

καὶ τὸ ἄθροισμα

$$\upsilon + \upsilon' + \upsilon''$$

διαφέρουσι κατὰ πολλαπλάσιον τοῦ διαιρέτου καὶ ἑπομένως τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως

$$(\alpha + \beta + \gamma) : \delta$$

συμπίπτει μὲ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως

$$(\upsilon + \upsilon' + \upsilon'') : \delta \qquad (\S\ 82)$$

ἄρα· Τὸ ὑπόλοιπον ἀθροίσματος ὡς πρὸς οἱονδήποτε διαιρέτην δεν βλάπτεται, ἂν ἀντικαταστήσωμεν ἕκαστον προσθετέον διὰ τοῦ ὑπολοίπου του ὡς πρὸς τὸν αὐτὸν διαιρέτην.

Π. χ. τὸ ἄθροισμα 15+23 διαιρούμενον διὰ 6 δίδει ὑπόλοιπον ἴσον πρὸς τὸ εὑρισκόμενον ἐκ τῆς διαιρέσεως (3+5):6

ΣΗΜ. Ἡ ἀνωτέρω πρότασις (ὅπως καὶ ἄλλαι προηγούμεναι) καλεῖται καὶ θεώρημα, καθόσον ὑπάρχει ἀνάγκη συλλογισμῶν τινων, ἵνα γίνῃ φανερὰ ἡ ἀλήθεια αὐτῶν. Οἱ συλλογισμοὶ οὗτοι ἀποτελοῦσι τὴν ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματος.

93. - Ἔστω ὅτι αἱ διαιρέσεις $\alpha:\delta$ καὶ $\beta:\delta$ δίδουσι πηλίκα π καὶ π', ὑπόλοιπα δὲ υ καὶ υ' ἔχομεν·

$$\alpha = \delta \times \pi + \upsilon \text{ καὶ } \beta = \delta \times \pi' + \upsilon'.$$

Ὅθεν·

$$\alpha \times \beta = \delta \times \pi \times \delta \times \pi' + \delta \times \pi \times \upsilon' + \delta \times \pi' \times \upsilon + \upsilon \times \upsilon'$$

Οἱ τρεῖς πρῶτοι προσθετέοι εἶναι προφανῶς πολλαπλάσια τοῦ δ· ὅθεν :

$$\alpha \times \beta = \text{πολλαπλάσιον τοῦ } \delta + (\upsilon \times \upsilon').$$

Ἑπομένως (§ 82) οἱ ἀριθμοὶ $\alpha \times \beta$ καὶ $\upsilon \times \upsilon'$ διαιρούμενοι διὰ δ δίδουσι τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον ἄρα·

Τὸ ὑπόλοιπον γινομένου δύο ἀριθμῶν ὡς πρὸς οἱονδήποτε διαιρέτην δὲν βλάπτεται, ἐὰν ἕκαστον παράγοντα ἀντικαταστήσωμεν διὰ τοῦ ὑπολοίπου του ὡς πρὸς τὸν αὐτὸν διαιρέτην· π.χ. τὸ γινόμενον 394×573 διαιρούμενον διὰ 9 θὰ δώσῃ ὑπόλοιπον ἴσον πρὸς τὸ διδόμενον ἐν τῇ διαιρέσει.

$$(7 \times 6) : 9.$$

94 —Ἐφαρμόζοντες τὰ ἀνωτέρω πρὸς ἐκτέλεσιν δοκιμῆς τοῦ πολλαπλασιασμοῦ φθάνομεν εἰς τὸν ἑξῆς κανόνα·

Ἐὰν λάβωμεν τὰ ὑπόλοιπα τῶν διαιρέσεων διὰ 9 τοῦ πολλαπλασιαστέου, τοῦ πολλαπλασιαστοῦ καὶ τοῦ γινομένου καὶ πολλαπλασιάσωμεν τὰ δύο πρῶτα ὑπόλοιπα καὶ τοῦ γινομένου αὐτοῦ λάβωμεν τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως διὰ 9, πρέπει νὰ εὕρωμεν τὸ τρίτον ὑπόλοιπον.

Ἐννοεῖται ὅτι ἠδύνατο νὰ γίνῃ καὶ μὲ ἄλλον διαιρέτην, π.χ. τὸν 11. Προτιμῶμεν ὅμως τὸν 9, διότι τὰ ὑπόλοιπα εὑρίσκομεν εὐκόλως καὶ διότι διὰ τὴν βάσανον μεταχειριζόμεθα ὅλα τὰ ψηφία τῶν παραγόντων καὶ τοῦ γινομένου (§ 88).

Διατάσσομεν τὴν πρᾶξιν καὶ ὡς ἑξῆς.

$$\begin{array}{rl}
394 & \text{ὑπόλ. } 7 \\
573 & \text{ὑπόλ. } 6 \\
\hline
1182 & \\
2758 & \\
1970 & \\
\hline
\text{Γινόμ. } 225762 & \text{ὑπόλ. } 6
\end{array}
\qquad 7 \times 6 = 42, \text{ ὑπόλ. } 6.$$

Παρατηρητέον ὅτι ἡ δοκιμὴ αὕτη παρέχει μόνον πιθανότητα τοῦ ὅτι ἡ πρᾶξις ἐγένετο ὀρθῶς.

95. — Βάσανος τῆς διαιρέσεως διὰ τοῦ 9. Ἐὰν ἡ διαίρεσις εἶναι τελεία, πρέπει καὶ τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον νὰ ἰσοῦται πρὸς τὸν διαιρετέον· ἑπομένως ἐφαρμόζομεν τὰ προηγούμενα· ἐὰν ὅμως εὑρίσκωμεν ὑπόλοιπον, πρέπει ἡ διαφορὰ διαιρετέου καὶ ὑπολοίπου νὰ εἶναι γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον· ἐπανερχόμεθα τουτέστι πάλιν εἰς τὴν προηγουμένην περίπτωσιν.

Ἀσκήσεις.

105) Τὸ ὑπόλοιπον τοῦ γινομένου πολλῶν παραγόντων ὡς πρὸς οἱονδήποτε διαιρέτην δὲν ἀλλάσει, ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν ἕκαστον τῶν παραγόντων διὰ τοῦ ὑπολοίπου τῆς διαιρέσεως αὐτοῦ ὡς πρὸς τὸν αὐτὸν διαιρέτην.

106) Ποῖον τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως διὰ 9 τοῦ ἀριθμοῦ 73^{15689}; (§ 93).

107) Διατί ἡ βάσανος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ διὰ 9 (§ 94) δὲν μᾶς βεβαιώνει διὰ τὸ ὀρθὸν τῆς πράξεως;

108) Ἐὰν α καὶ β διαιρούμενοι διὰ δ δίδωσιν ὑπόλοιπα υ καὶ υ′, τότε ἡ διαφορὰ α—β διαιρουμένη διὰ δ δίδει ὑπόλοιπον ἴσον πρὸς τὴν διαφορὰν υ—υ′, ἐὰν υ > υ′.

109) Νὰ εὑρεθῇ βάσανος τῆς ἀφαιρέσεως διὰ 9 ἐπὶ τῇ βάσει τῆς προηγουμένης προτάσεως.

110) Ἐὰν διαιρέσωμεν τὸ γινόμενον δύο διαδοχικῶν ἀριθμῶν διὰ 2 καὶ τὸ πηλίκον διὰ 3, θὰ εὕρωμεν ὑπόλοιπον διάφορον τοῦ 2.

Παρατηροῦμεν ὅτι ἢ ὁ εἷς ἐκ τῶν δύο διαδοχικῶν θὰ διαιρῆται διὰ 3, ἢ ὁ μὲν εἷς διαιρούμενος διὰ 3 θὰ δίδῃ ὑπόλοιπον 1, ὁ δὲ ἄλλος 2.

111) Νὰ δειχθῇ ἐκ τῆς προτάσεως (§ 93), ὅτι ἡ διαφορὰ $α^{ν} — β_{ν}$ διαιρεῖται διὰ α — β.

Παρατηροῦμεν ὅτι (ἄσκ. 95) αἱ διαιρέσεις

$$α : (α — β) \text{ καὶ } β : (α — β)$$

(§ 92, § 93)

δίδουσιν ἴσα ὑπόλοιπα.

112) Ἐὰν ἀριθμός τις ὑπερβαίνῃ κατὰ μονάδα πολλαπλάσιον

ἄλλου, οἱαδήποτε δύναμις τοῦ πρώτου θὰ εἶναι ἄθροισμα τῆς μονάδος καὶ πολλαπλασίου τινὸς τοῦ δευτέρου (§ 93).

113) Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων δύο ἀριθμῶν δὲν δύναται νὰ εἶναι διαιρετὸν διὰ 11 ἐὰν ἑκάτερος τῶν ἀριθμῶν τούτων δὲν εἶναι διαιρετὸς διὰ 11, (§ 92, § 93).

114) Τὸ ἄθροισμα ἀριθμοῦ μὲ ἄρτιον πλῆθος ψηφίων καὶ τοῦ διὰ τῶν αὐτῶν ψηφίων κατ' ἀντίστροφον τάξιν γεγραμμένου ἀριθμοῦ εἶναι πάντοτε πολλαπλάσιον τοῦ 11. (Ἄσκ. 99).

115.) Πόσοι τριψήφιοι ἀριθμοὶ λήγοντες εἰς 0 μὲ ψηφία διάφορα σχηματίζονται διαιρετοὶ διὰ 4;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄.

ΜΕΓΙΣΤΟΣ ΚΟΙΝΟΣ ΔΙΑΙΡΕΤΗΣ

96.—Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ

20, 30, 40

Ὁ ἀριθμὸς 2 διαιρεῖ πάντας αὐτοὺς ἀκριβῶς· λέγεται δι' αὐτὸ κοινὸς διαιρέτης τῶν δοθέντων· ὁμοίως κοινοὶ διαιρέται εἶναι καὶ οἱ ἀριθμοὶ 5 καὶ 10· ὁ μεγαλύτερος δὲ τούτων, ὁ 10, λέγεται μέγιστος κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν. Καὶ γενικῶς·

Κοινὸς διαιρέτης πολλῶν ἀριθμῶν λέγεται ὁ ἀριθμὸς ὅστις διαιρεῖ πάντας αὐτοὺς ἀκριβῶς. Ὁ μεγαλύτερος δ' ἐκ τῶν κοινῶν διαιρετῶν λέγεται μέγιστος κοινὸς διαιρέτης.

Τὸν κοινὸν διαιρέτην παριστῶμεν διὰ κ. δ., τὸν δὲ μέγιστον κοινὸν διαιρέτην διὰ μ. κ. δ.

97.—Ἔστω ὁ τυχὼν ἀριθμὸς 6· οὗτος θὰ εἶναι διαιρέτης τοῦ ἑαυτοῦ του, ἐπίσης τοῦ διπλασίου του, ἤτοι τοῦ $2 \times 6 = 12$, τοῦ τριπλασίου του 18 κ.ο.κ. Ἂν λάβωμεν ὁσουσδήποτε ἐξ αὐτῶν, π. χ. τοὺς 12, 18, 36, οὗτοι θὰ ἔχωσι κοινὸν διαιρέτην τὸν 6. Ἐὰν ὅμως ἐλαμβάνομεν καὶ τὰ πολλαπλάσια τοῦ 2, θὰ εὑρίσκομεν μεταξὺ αὐτῶν τοὺς

12, 18, 36.

ἤτοι οἱ ἀμιθμοὶ 12, 18, 36 ἔχουσι κοινὸν διαιρέτην καὶ τὸν 2·

τουτέστι δύο ἢ πλειότεροι ἀριθμοὶ δυνατὸν νὰ ἔχωσι πολλοὺς κοινὸν διαιρέτας.

98. — Δύο ἢ περισσότεροι ἀριθμοὶ λέγονται πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ἐὰν δὲν ἔχωσιν ἄλλον κοινὸν διαιρέτην πλὴν τῆς μονάδος, ὁπότε λέγομεν ὅτι ἔχουσι μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τὴν μονάδα.

Π. χ. οἱ ἀριθμοὶ 7, 10 25 εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Ἰδιότητες κοινῶν διαιρετῶν.

Ποῖος εἶναι ὁ μ. κ. δ. ἀριθμῶν ὧν ὁ μικρότερος διαιρεῖ τοὺς λοιπούς;

99. — Ἔστω ὅτι $\alpha > \beta > \gamma > \delta$ καὶ ὅτι ὁ δ διαιρεῖ τοὺς α, β, γ· τότε ὁ δ εἶναι κ. δ. τῶν ἀριθμῶν

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma, \quad \delta.$$

Ἄλλος δὲ κοινὸς διαιρέτης μεγαλύτερος τοῦ δ δὲν ὑπάρχει, διότι εἷς ἐκ τῶν δεδομένων ἀριθμῶν εἶναι καὶ ὁ δ· ὅθεν

Ἐὰν ἀριθμοὶ διαιροῦνται διὰ τοῦ ἐλαχίστου ἐξ αὐτῶν, θὰ ἔχωσιν αὐτὸν ὡς μ. κ. δ.

π. χ. οἱ 6, 12, 18, 48 ἔχουσι μ. κ. δ. τὸν 6.

Τί γίνονται οἱ κ. δ. δύο ἀριθμῶν, ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν τὸν μεγαλύτερον διὰ τοῦ ὑπολοίπου τῆς διαιρέσεως αὐτοῦ διὰ τοῦ μικροτέρου;

100. — Ἔστω υ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως $\alpha : \beta$.

Ἂς θεωρήσωμεν τὸν τυχόντα κ. δ. τῶν ἀριθμῶν

$$\alpha, \quad \beta.$$

Οὗτος ὡς διαιρῶν τὸν διαιρετέον καὶ τὸν διαιρέτην θὰ διαιρῇ καὶ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως αὐτῶν, ἤτοι τὸ υ (§ 58, 79, 80), ἑπομένως θὰ εἶναι κ. δ. καὶ τῶν ἀριθμῶν

$$\upsilon, \quad \beta$$

καὶ ἀντιστρόφως ὁ τυχὼν κ. δ. τῶν ἀριθμῶν

$$\upsilon, \quad \beta$$

θὰ εἶναι προφανῶς καὶ διαιρέτης τοῦ

$$\beta \times \pi + \upsilon$$

(ἐὰν π καλέσωμεν τὸ πηλίκον), ἤτοι τοῦ α· ὥστε θὰ εἶναι καὶ κ. δ. τῶν

α, β.

ἄρα

Οἱ κοινοὶ διαιρέται δύο ἀριθμῶν δὲν βλάπτονται, ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν τὸν μεγαλύτερον διὰ τοῦ ὑπολοίπου τῆς διαιρέσεως αὐτοῦ διὰ τοῦ μικροτέρου.

Ὅθεν καὶ

Ὁ μ. κ. δ. δύο ἀριθμῶν, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ μικρότερος δὲν διαιρεῖ τὸν μεγαλύτερον, δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν τὸν μεγαλύτερον μὲ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως αὐτοῦ διὰ τοῦ μικροτέρου.

Πῶς γενικεύεται ἡ ἀνωτέρω πρότασις:

101.—Ἔστω ἤδη $\alpha > \beta > \gamma > \delta$· ζητῶ τοὺς κοινοὺς διαιρέτας τῶν ἀριθμῶν τῆς σειρᾶς

α, β, γ, δ

διαιρῶ τοὺς α, β, γ διὰ δ· ἔστωσαν ὑπόλοιπα τὰ υ, υ′, υ″, σχηματίζω τότε τὴν σειρὰν

υ, υ′, υ″, δ.

Πᾶς κ. δ. τῶν ἀριθμῶν τῆς πρώτης σειρᾶς εἶναι κ. δ. καὶ τῶν ἀριθμῶν τῆς δευτέρας, ὅπως εἴδομεν (§ 100); καὶ ἀντιστρόφως πᾶς κ. δ. τῶν ἀριθμῶν τῆς δευτέρας εἶναι καὶ τῶν τῆς πρώτης (§ 100)· ὅθεν·

Οἱ κοινοὶ διαιρέται ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν δὲν βλάπτονται, ἐὰν ἀντικαταστήσωμέν τινας ἐξ αὐτῶν διὰ τῶν ὑπολοίπων τῆς διαιρέσεως αὐτῶν δι᾽ ἑνὸς ἄλλου ἀριθμοῦ τῆς σειρᾶς μικροτέρου αὐτῶν.

Π. χ. οἱ ἀριθμοὶ

96, 44, 20

ἔχουσι τοὺς αὐτοὺς κοινοὺς διαιρέτας μὲ τοὺς

16, 4, 20.

102.—Ὁ μ. κ. δ. πολλῶν ἀριθμῶν δὲν ἀλλάσσει, ὅταν ἀντικαταστήσωμεν μερικοὺς ἐξ αὐτῶν διὰ τοῦ ὑπολοίπου τῆς διαιρέσεως αὐτῶν δι᾽ ἑνὸς ἄλλου (ἐξ αὐτῶν) μικροτέρου των.

Εὕρεσις τοῦ μ. κ. δ.

Πῶς εὑρίσκομεν τὸν μ. κ. δ. δύο ἀριθμῶν ;

103.—Ἂς ζητήσωμεν τὸν μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν 208, 164. Κατὰ τὴν πρότασιν (§ 100) ἀντικαθιστῶμεν τὸν 208 διὰ τοῦ ὑπολοίπου τῆς διαιρέσεως 208 : 164, ἤτοι ἀντὶ τῆς σειρᾶς

208, 164.

λαμβάνω τὴν σειρὰν

44, 164·

διαιρῶ πάλιν τὸ 164 διὰ 44 καὶ ἀντὶ 164 γράφω τὸ ὑπόλοιπον 32 καὶ ἔχω τὴν σειρὰν

44, 32·

κ. ο. κ.

Οἱ ἀριθμοὶ ἑκάστης τῶν σειρῶν αὐτῶν ἔχουσι τὸν αὐτὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην (§ 100).

Προχωρῶ, μέχρις οὗ εὕρω σειρὰν εἰς τὴν ὁποίαν ὁ εἷς διαιρεῖ τὸν ἄλλον, διότι τότε αὐτὸς θὰ εἶναι ὁ μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν τῆς σειρᾶς ταύτης (§ 99).

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς·

	1	3	1	2	1	2
208 44	164 32	44 12	32 8	12 4	8 0	4

Κανών. Πρὸς εὕρεσιν τοῦ μ. κ. δ. δύο ἀριθμῶν διαιροῦμεν τὸν μεγαλύτερον διὰ τοῦ μικροτέρου· ἐὰν εὑρεθῇ ὑπόλοιπον διάφορον τοῦ 0, διαιροῦμεν τὸν μικρότερον διὰ τοῦ ὑπολοίπου τούτου καὶ ἐξακολουθοῦμεν οὕτω διαιροῦντες ἕκαστον διαιρέτην διὰ τοῦ ἀντιστοιχοῦντος πρὸς αὐτὸν ὑπολοίπου, μέχρις οὗ εὕρωμεν ὑπόλοιπον 0· ὁ τελευταῖος διαιρέτης εἶναι ὁ μ. κ. δ.

Πῶς εὑρίσκομεν τὸν μ. κ. δ. πολλῶν ἀριθμῶν ;

104—Στηριζόμενοι ἐπὶ τῆς § 102 καὶ σκεπτόμενοι ὡς ἐν § 103 συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ μ. κ. δ. πολλῶν ἀριθμῶν.

Διαιροῦμεν πάντας τοὺς ἄλλους διὰ τοῦ ἐλαχίστου ἐξ αὐτῶν· ἂν ὅλα τὰ ὑπόλοιπα εἶναι 0, ὁ ἐλάχιστος εἶναι ὁ μ. κ. δ,, εἰδεμή,

ἀντικαθιστῶμεν τοὺς ἀριθμοὺς ὧν τὰ ὑπόλοιπα δὲν εἶναι 0 ἕκαστον διὰ τοῦ ὑπολοίπου του. Ἔχομεν οὕτω νέαν σειρὰν ἀριθμῶν οἵτινες ἔχουσι τὸν αὐτὸν μ. κ. δ. Εἰς αὐτὴν πράττομεν τὸ αὐτό, μέχρις οὗ εὕρωμεν σειρὰν ἀριθμῶν ὧν ὁ μικρότερος νὰ διαιρῇ πάντας τοὺς ἄλλους· οὗτος θὰ εἶναι ὁ ζητούμενος μ.κ.δ.
Π. χ. μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν

	5628	2596	352	160	εἶναι ὁ
μ. κ. δ. τῶν	28	36	32	160	
ἢ τῶν	28	8	4	20	
» »	0	0	4	0	ἤτοι ὁ 4.

Ἰδιότητες τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου.

Τίνες ἐκ τῶν μικροτέρων τοῦ μ. κ. δ. δεδομένων ἀριθμῶν εἶνε κοινοὶ διαιρέται τούτων;

105.— Οἱ ἀριθμοὶ ἑκάστης σειρᾶς ἐκείνων τὰς ὁποίας σχηματίζομεν πρὸς εὕρεσιν τοῦ μ. κ. δ. ἔχουσι τοὺς αὐτοὺς κοινοὺς διαιρέτας· ἐπομένως ὁ τυχὼν κ. δ. τῶν ἀριθμῶν τῆς πρώτης σειρᾶς εἶναι καὶ τῶν ἀριθμῶν τῆς τελευταίας, ὅθεν εἶναι διαιρέτης καὶ τοῦ μ. κ. δ. καὶ ἀντιστρόφως ὁ τυχὼν διαιρέτης τοῦ μ. κ. δ. εἶναι κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν τῆς τελευταίας σειρᾶς, ἄρα καὶ τῆς πρώτης ὅθεν

Κοινοὶ διαιρέται δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν εἶναι μόνον οἱ διαιρέται τοῦ μ. κ. δ. αὐτῶν.

π.χ. εἰς τὸ παράδειγμα τῆς (§ 104) κοινοὶ διαιρέται τῶν ἀριθμῶν

5628 2596, 352, 160

εἶναι μόνον οἱ διαιρέται τοῦ 4, ἤτοι οἱ ἀριθμοὶ

1, 2, 4.

Ἐὰν δύο ἢ πλειότεροι ἀριθμοὶ πολλαπλασιασθῶσιν ἐπί τινα ἀριθμόν, ποίαν μεταβολὴν πάσχει ὁ μ. κ. δ. αὐτῶν;

106.—Ἔστω

$$(1). \qquad \alpha > \beta > \gamma > \delta.$$

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν τούτων θὰ σχηματίσωμεν (§ 104) ἐκ τῆς σειρᾶς

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma, \quad \delta$$

ἄλλην σειρὰν ἀριθμῶν, ἔστω τὴν

$$υ,\quad υ',\quad υ'',\quad δ.$$

καὶ ἐκ ταύτης ἄλλην κ. ο. κ. Ἔστω δὲ ὅτι ἡ τελευταία σειρὰ εἶναι

$$0,\quad μ,\quad 0,\quad 0.$$

τότε ὁ μ κατὰ (§ 104) θὰ εἶναι ὁ μ. κ. δ. τῶν α, β, γ. δ. Ζητήσωμεν ἤδη τὸν μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν

$$α \times ρ,\quad β \times ρ,\quad γ \times ρ,\quad δ \times ρ\cdot$$

παρατηροῦμεν ὅτι ἐκ τῶν ἀνισοτήτων (1) ἕπονται αἱ ἀνισότητες

$$α \times ρ > β \times ρ > γ \times ρ > δ \times ρ$$

διαιροῦντες λοιπὸν διὰ $δ \times ρ$ τοὺς $α \times ρ$, $β \times ρ$, $γ \times ρ$ πρὸς σχηματισμὸν τῆς νέας σειρᾶς θὰ ἔχωμεν τὴν ἑξῆς (§ 65)·

$$υ \times ρ,\quad υ' \times ρ,\quad υ'' \times ρ,\quad δ \times ρ,$$

ἤτοι θὰ ἔχωμεν τὴν δευτέραν σειρὰν ἐνταῦθα, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ ρ τοὺς ἀριθμοὺς τῆς δευτέρας σειρᾶς τῆς προκυψάσης ἐκ τῶν α, β, γ, δ· ὁμοίως εὑρίσκομεν τὴν τρίτην σειράν, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ ρ τοὺς ἀριθμοὺς τῆς ἀντιστοίχου ἀρχικῆς σειρᾶς κ. ο. κ. ὥστε, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ ρ τὴν τελευταίαν ἀρχικὴν σειράν, ἤτοι τὴν 0, μ, 0, 0, θὰ ἔχωμεν τὴν τελευταίαν σειρὰν ἐνταῦθα, ἤτοι τὴν

$$0,\quad μ \times ρ.\quad 0,\quad 0\cdot$$

ἐπομένως μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν

$$α \times ρ,\quad β \times ρ,\quad γ \times ρ,\quad δ \times ρ$$

εἶναι ὁ $μ \times ρ$· ὅθεν

Ἐὰν δύο ἢ περισσότεροι ἀριθμοὶ πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ ἕνα ἀριθμόν, καὶ ὁ μ. κ. δ. αὐτῶν πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν·

π, χ. ἐκ τοῦ ὅτι ὁ μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν 75, 125, 625 εἶναι ὁ 25 ἐξάγομεν ὅτι

μ. κ. δ. τῶν 75000, 125000, 625000 εἶναι ὁ 25000.

Ἐὰν δύο ἢ πλειότεροι ἀριθμοὶ διαιρεθῶσι δι' ἑνὸς ἀριθμοῦ, ποίαν μεταβολὴν πάσχει ὁ μ. κ. δ. αὐτῶν;

107.—Ἔστω δ κοινός τις διαιρέτης τῶν α, β, γ. Καλέσωμεν α΄, β΄, γ΄ τὰ πηλίκα τῶν διαιρέσεων α : δ, β : δ, γ : δ· ἔχομεν

$$\alpha = \alpha' \times \delta, \quad \beta = \beta' \times \delta, \quad \gamma = \gamma' \times \delta \cdots$$

ἐὰν ἤδη καλέσωμεν μ΄ τὸν μ. κ. δ. τῶν

$$\alpha', \quad \beta', \quad \gamma'$$

καὶ μ τὸν μ. κ. δ. τῶν

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma \cdot$$

κατὰ τὴν προηγουμένην πρότασιν θὰ ἔχωμεν $\mu = \mu' \times \delta$· ὅθεν

$$\mu' = \mu : \delta \cdot$$

ἄρα·

Ἐὰν δύο ἢ περισσότεροι ἀριθμοὶ διαιρεθῶσι διά τινος κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν, καὶ ὁ μ. κ. δ. διαιρεῖται διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.

Πολλάκις οὕτως ἐπέρχεται ἁπλοποίησις εἰς τὴν εὕρεσιν τοῦ μ. κ. δ. Ἵνα εὕρωμεν ἐπὶ παραδείγματι τὸν μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν

18000000, 24000000, 12000000,

διαιροῦμεν αὐτούς διὰ 1000.000 καὶ εὑρίσκομεν τὸν μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν

18, 24, 12,

ὅστις εἶναι ὁ 6· ἄρα τῶν δοθέντων εἶναι ὁ 6000.000.

Τίνα συμπεράσματα ἐξάγομεν ἐκ τῆς προτάσεως ταύτης;

108.—1ον). Ἐὰν ἀριθμοὶ διαιρεθῶσι διὰ τοῦ μ. κ. δ. αὐτῶν, θὰ δώσωσι πηλίκα πρῶτα πρὸς ἄλληλα.

109.—2ον). Ἐὰν διαιροῦντες ἀριθμούς τινας διά τινος κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν εὕρωμεν πηλίκα πρῶτα πρὸς ἄλληλα, συμπεραίνομεν ὅτι ὁ ληφθεὶς κοινὸς εἶναι καὶ μέγιστος.

ΣΗΜ. Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ὑπόθεσις ἐν τῇ προτάσει (§ 108) εἶναι συμπέρασμα ἐν τῇ προτάσει (§ 109) καὶ ἀντιστρόφως· διὸ αἱ προτάσεις (§ 108) καὶ (§ 109) λέγονται ἀντίστροφοι.

Ἀσκήσεις.

116). Εὑρεῖν τοὺς κοινοὺς διαιρέτας τῶν ἀριθμῶν

360, 164, 280, 96.

117). Εὑρεῖν τοὺς κοινοὺς διαιρέτας τῶν ἀριθμῶν

100, 58200, 35000

118). Νὰ εὑρεθῇ ὁ μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν

$$28 \times 5, \; 42 \times 10, \; 63 \times 20.$$

119). Ὁ μ. κ. δ. δύο ἀριθμῶν εἶναι 2, τὰ δὲ πηλίκα τῶν γενομένων διαιρέσεων πρὸς εὕρεσιν αὐτοῦ εἶναι 2, 5, 4, 7· τίνες οἱ δύο οὗτοι ἀριθμοί; (§ 103, § 58)

120). Ὁ μ. κ. δ. δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν δὲν βλάπτεται, ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν δύο ἢ περισσοτέρους ἐξ αὐτῶν διὰ τοῦ μ. κ. δ. αὐτῶν. (§ 105)

121). Ἐὰν ὁ μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν Α, Β καὶ ὁ τῶν Γ, Δ πολλαπλασιασθῶσι, τὸ προκῦπτον γινόμενον εἶναι μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν

$$A \times \Gamma, \; B \times \Gamma, \; A \times \Delta, \; B \times \Delta$$

122). Ὁ μ. κ. δ. δύο ἀριθμῶν α, β εἶναι ὁ αὐτὸς μὲ τὸν μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν β, $\beta - \upsilon$, ὅπου υ εἶναι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ α διὰ β (§ 80).

123 Ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ ἔχωσι μ. κ. δ. τὸν Δ, οἱ ἀριθμοὶ $\beta \times \gamma$, $\gamma \times \alpha$, $\alpha \times \beta$ ἔχουσι μ. κ. δ. ἀριθμὸν διαιρετὸν διὰ τοῦ Δ^2. Πότε ὁ μ. κ. δ. αὐτῶν εἶναι ἀκριβῶς Δ^2;

Παρατηροῦμεν ὅτι

$$\alpha = \Delta . \Pi, \quad \beta = \Delta . \Pi', \quad \gamma = \Delta . \Pi'' \quad \ldots$$

ὅπου Π, Π΄, Π΄΄ εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους (§ 108).

124). Καλέσωμεν Δ τὸν μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν α, β, γ. Ἐὰν ὁ δ διαιρῇ τὰ γινόμενα

$$\alpha \times \lambda, \quad \beta \times \lambda, \quad \gamma \times \lambda,$$

θὰ διαιρῇ καὶ τὸ γινόμενον $\Delta \times \lambda$ (§ 106)

125). Ἔστω Δ ὁ μ. κ. δ. δύο ἀριθμῶν α καὶ β· τότε ὁ Δ θὰ εἶναι καὶ μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν

$$5\alpha + 3\beta \qquad 13\alpha + 8\beta$$

Παρατηροῦμεν (§ 80) ὅτι οἱ κοινοὶ διαιρέται τῶν ἀριθμῶν

$$5\alpha + 3\beta \qquad 13\alpha + 8\beta$$

εἶναι οἱ αὐτοὶ μὲ τοὺς κοινοὺς διαιρέτας τῶν ἀριθμῶν

$$5\alpha + 3\beta \qquad 8\alpha + 5\beta$$

προχωροῦντες οὕτω διὰ διαδοχικῶν ἀφαιρέσεων ἀποδεικνύομεν τὴν πρότασιν.

126). Ὁ μ. κ. δ. τριῶν ἀριθμῶν

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma$$

ἴσοῦται πρὸς τὸν μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν

$$\Delta, \quad \Delta',$$

ἐὰν Δ εἶναι ὁ μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν α καὶ γ καὶ Δ' ὁ μ. κ. δ. τῶν β καὶ γ (§ 105)

127). Ὁ μ. κ. δ. δύο ἀριθμῶν α καὶ β εἶναι καὶ μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν

$$\alpha + \beta\gamma \quad \text{καὶ} \quad \alpha + \beta(\gamma - 1)$$

Παρατηροῦμεν πρὸς τοῦτο (§ 53 § 33 γ', η'.)ὅτι, ἐὰν ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ πρώτου τὸν δεύτερον, εὑρίσκομεν τὸν β.

128). Ἔστωσαν τέσσαρες ἀριθμοὶ λ, μ, ν, ρ τοιοῦτοι. ὥστε

$$\lambda\nu - \rho\mu = 1.$$

τότε ὁ μ. κ. δ. δύο ἀριθμῶν α καὶ β εἶναι μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν

$$\lambda\alpha + \rho\beta, \quad \mu\alpha + \nu\beta.$$

Παρατηροῦμεν (§ 46, § 33, στ' γ' § 53) ὅτι οἱ ἀριθμοὶ

$$(\lambda\alpha + \rho\beta)\nu \text{ καὶ } (\mu\alpha + \nu\beta)\rho$$

ἔχουσι διαφορὰν τὸν ἀριθμὸν $(\lambda\nu - \rho\mu)\alpha = \alpha$ κτλ.

129). Ἔστωσαν οἱ πέντε ἀριθμοὶ

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3, \quad \alpha_4, \quad \alpha_5$$

καὶ μ. κ. δ. αὐτῶν ὁ Δ, τὸ δὲ ἄθροισμα αὐτῶν Κ. οἱ ἀριθμοὶ

$$K - \alpha_1, \; K - \alpha_2, \; K - \alpha_3, \; K - \alpha_4, \; K - \alpha_5$$

ἔχουσι μ. κ. δ. ἢ τὸν Δ ἢ τὸν $\Delta \times 2$ ἢ τὸν $\Delta \times 4$

Πρὸς ἀπόδειξιν παρατηροῦμεν ὅτι, ἐὰν ἀπὸ τοῦ ἀθροίσματος τεσσάρων ἀριθμῶν τῆς δευτέρας σειρᾶς ἀφαιρέσωμεν τὸ τριπλάσιον τοῦ ὑπολειπομένου, εὑρίσκομεν τὸ τετραπλάσιον τοῦ ἀντιστοιχοῦντος πρὸς αὐτὸν ἀριθμοῦ τῆς πρώτης σειρᾶς· συμπεραίνομεν ἐξ αὐτοῦ ὅτι ὁ μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν τῆς δευτέρας σειρᾶς εἶναι καὶ κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν

$$4\times\alpha_1, \quad 4\times\alpha_2, \quad 4\times\alpha_3, \quad 4\times\alpha_4, \quad 4\times\alpha_5.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ΄.

ΕΛΑΧΙΣΤΟΝ ΚΟΙΝΟΝ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΟΝ

110.—Πολλαπλάσια τοῦ 2 εἶναι

οἱ ἀριθμοὶ	$2,\ 2\times2,\ 2\times3,\ 2\times4, \ldots\ldots$	(A)
τοῦ 3 οἱ ἀριθμοὶ	$3,\ 3\times2,\ 3\times3,\ 3\times4, \ldots\ldots$	
τοῦ 4 οἱ ἀριθμοὶ	$4,\ 4\times2,\ 4\times3,\ 4\times4, \ldots\ldots$	
τοῦ 6 οἱ ἀριθμοὶ	$6,\ 6\times2,\ 6\times3,\ 6\times4, \ldots\ldots$	

Ζητήσωμεν ἀριθμοὺς κοινοὺς καὶ εἰς τὰς τέσσαρας σειράς· τοιοῦτοι προφανῶς εὑρίσκονται ἄπειροι, π. χ ὁ ἀριθμὸς

$$2\times3\times4\times6=144$$

θὰ εὑρεθῇ εἰς ὅλας ὅπως καὶ πᾶν πολλαπλάσιον αὐτοῦ. Ἐκτὸς ὅμως αὐτῶν καὶ ἄλλος μικρότερος τοῦ 144 εὑρίσκεται ἐνταῦθα π. χ. ὁ 12, ὅστις ἰσοῦται μὲ 2×6, 3×4 4×3, 6×2.

Οἱ τοιοῦτοι ἀριθμοὶ ὅπως 144, 12 κ. τ. λ. λέγονται κοινὰ πολλαπλάσια τῶν ἀριθμῶν 2, 3, 4 καὶ 6· ἤτοι

Κοινὸν πολλαπλάσιον ἀριθμῶν λέγεται ἕτερος ἀριθμός, ὅστις εἶναι διαιρετὸς δι' ἑκάστου ἐξ αὐτῶν.

Τὸ κοινὸν πολλαπλάσιον παρίσταται διὰ κ. π.

111.—Ὅταν εὕρωμεν ἓν κ. π. ἀριθμῶν, εὑρίσκομεν ὅσα δήποτε ἄλλα, πολλαπλασιάζοντες αὐτὸ ἐπὶ 2, 3, 4, ... Θὰ εἶναι δὲ ταῦτα προφανῶς τὸ ἓν μεγαλύτερον τοῦ ἄλλου, ὥστε δὲν ὑπάρχει μέγιστον.

Ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον πολλῶν ἀριθμῶν λέγεται τὸ μικρότερον ἐκ τῶν κοινῶν πολλαπλασίων αὐτῶν. Σημειοῦται δὲ διὰ τοῦ ε. κ. π.

Ἰδιότητες ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου.

Ποῖον εἶναι τὸ ε, κ. π. ἀριθμῶν ὧν ὁ μεγαλύτερος διαιρεῖται διὰ πάντων τῶν λοιπῶν;

112.—Ἔστωσαν τυχόντες ἀριθμοὶ α, β, γ. δ τοιοῦτοι, ὥστε ὁ μεγαλύτερος ἐξ αὐτῶν νὰ διαιρῆται ὑπὸ τῶν ἄλλων· τότε οὗτος θὰ εἶναι κοινὸν πολλαπλάσιον προφανῶς ὅλων. Ἄλλο κοινὸν πολλαπλάσιον μικρότερον αὐτοῦ δὲν ὑπάρχει, διότι ἀριθμός τις δὲν δύναται νὰ ἔχῃ ὡς πολλαπλάσιον ἀριθμὸν μικρότερόν του· ἄρα:

Τὸ ε. κ. π. ἀριθμῶν ὧν ὁ μεγαλύτερος διαιρεῖται διὰ πάντων τῶν λοιπῶν εἶναι αὐτὸς οὗτος.

Π. χ. οἱ ἀριθμοὶ 36, 12, 6, 3 ἔχουσιν ε. κ. π. τὸν 36.

Πῶς εὑρίσκομεν τὸ ε. κ. π. ἀριθμῶν ὧν ὁ μεγαλύτερος δὲν διαιρεῖται δι' ὅλων τῶν ἄλλων;

113.—Ἂς θεωρήσωμεν π. χ. τοὺς ἐν τῇ (§ 110) δοθέντας ἀριθμοὺς

$$2, \quad 3, \quad 4, \quad 6$$

Τότε θὰ ζητήσωμεν τὸν μικρότερον ἀριθμὸν ἐκ τῶν κοινῶν καὶ εἰς τὰς τέσσαρας σειρὰς (Α). Ἔστω οὗτος ὁ β. δηλαδὴ

$$\beta = 2 \times \lambda = 3 \times \mu = 4 \times \nu = 6 \times \rho$$

ὅπου ἕκαστον τῶν λ, μ, ν, ρ δεικνύει τὴν στήλην ἐν ᾗ εὑρίσκεται τὸ πολλαπλάσιον τοῦτο ἐν τῇ α', β', γ', δ' σειρᾷ· προφανῶς ἐκ τῶν ἰσοτήτων τούτων προκύπτει ὅτι $\rho < \nu < \mu < \lambda$.

Ὥστε, ἵνα εὕρωμεν τὸ ζητούμενον ε. κ. π. τῶν ἀριθμῶν 2, 3, 4, 6 συμφέρει νὰ ζητήσωμεν αὐτὸ εἰς τὴν τελευταίαν σειράν· ὅθεν·

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ ε. κ. π. ἀριθμῶν ὧν ὁ μεγαλύτερος δὲν διαιρεῖται διὰ πάντων τῶν λοιπῶν παρατηροῦμεν ἂν τὸ διπλάσιον τοῦ μεγαλυτέρου εἶναι κ. π. καὶ τῶν λοιπῶν, ὁπότε θὰ εἶναι καὶ τὸ ε. κ. π. ὅλων· ἄλλως παρατηροῦμεν τὸ τριπλάσιον κ. ο. κ. Τὸ πρῶτον εὑρεθησόμενον τοιοῦτον κ. π. θὰ εἶναι τὸ ζητούμενον ε. κ. π.

Οὕτως εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα (§ 110) ε. κ. π. εἶναι τὸ 12· ὁμοίως τῶν ἀριθμῶν 11, 22, 33, 44 εἶναι τὸ $44 \times 3 = 132$.

Τίνες ἀριθμοὶ μεγαλύτεροι τοῦ ε. κ. π. δεδομένων ἀριθμῶν εἶναι κοινὰ πολλαπλάσια αὐτῶν;

114.—Ἔστωσαν α, β, γ, δ ἀριθμοί, ὧν ε. κ. π. εἶναι τὸ Ε καὶ ἕτερον τυχὸν κ. π. αὐτῶν τὸ Π· διαιροῦμεν τὸ Π διὰ τοῦ Ε· ἔστω Ρ τὸ πηλίκον καὶ Υ τὸ ὑπόλοιπον· θὰ ἔχωμεν

$$\Pi = \mathrm{E} \times \mathrm{P} + \Upsilon.$$

Οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ, δ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι διαιρέται τοῦ Π καὶ τοῦ Ε· ἄρα εἶναι διαιρέται τοῦ Π καὶ τοῦ Ε × Ρ, ἑπομένως καὶ τοῦ

Υ (§ 80)· ὅθεν τὸ Υ θὰ ἦτο κ. π. τῶν ἀριθμῶν α, β, γ, δ· ἀλλὰ τὸ Υ ὡς ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως Π : Ε θὰ εἶναι μικρότερον τοῦ Ε, ὅπερ ὑπετέθη ε. κ. π.· ἐπομένως τὸ Υ κατ' ἀνάγκην εἶναι 0, διότι ἄλλως θὰ εἴχομεν ἀριθμὸν μικρότερον τοῦ Ε ὅστις θὰ ἦτο κ. π. καὶ ἑπομένως ὁ Ε δὲν θὰ ἦτο ε. κ. π., ὡς ὑπετέθη· ὅθεν :

Πᾶν κοινὸν πολλαπλάσιον ἀριθμῶν εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ ε. κ. π. αὐτῶν.

Ἰσχύει δὲ προφανῶς καὶ τὸ ἀντίστροφον· τουτέστιν ὅτι.

Τὸ τυχὸν πολλαπλάσιον τοῦ ε. κ. π. εἶναι καὶ κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν α, β, γ, δ· ἄρα·

Ἵνα ἀριθμός τις εἶναι κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν ἄλλων, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ ε. κ. π. αὐτῶν.

Π. χ., ἵνα εὕρωμεν κ. π. ἀριθμῶν τινων α, β, γ ἐχόντων ὡς ε. κ, π. τὸν ἀριθμὸν 100, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν ἀριθμὸν λήγοντα εἰς ἄρτιον ἀρ θμὸν μηδενικῶν.

Τί γίνεται τὸ ε. κ. π. δεδομένων ἀριθμῶν, ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν μερικοὺς ἐκ τούτων διὰ τοῦ ε. κ. π. αὐτῶν ;

115.—Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ

Α, Β, Γ, Δ

καὶ Ε τὸ ε. κ. π. δύο ἐξ αὐτῶν, π. χ. τῶν Α καὶ Β· τότε πᾶν κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν ἀριθμῶν

Ε, Γ, Δ

εἶναι προφανῶς καὶ κ. π, τῶν δοθέντων.

Καὶ ἀντιστρέφως· πᾶν κ. π. τῶν

Α, Β, Γ, Δ

εἶναι καὶ κ. π. τῶν

Ε, Γ, Δ. (§ 114)

ὅθεν :

Τὰ κοινὰ πολλαπλάσια ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλονται, ἂν ἀντικαταστήσωμεν δύο ἐξ αὐτῶν διὰ τοῦ ε. κ. π. αὐτῶν.

Ἕτερος τρόπος εὑρέσεως ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου.

116.—Ἐκ τῆς ἀνωτέρω προτάσεως συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα·

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ ε. κ. π, ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν εὑρίσκομεν τὸ ε. κ. π. δύο ἐξ αὐτῶν καὶ ἀντικαθιστῶμεν τούτους διὰ τοῦ εὑρεθέντος ε. κ. π. αὐτῶν· καὶ πάλιν εἰς τὴν νέαν σειρὰν ἀντικαθιστῶμεν δύο διὰ τοῦ ε. κ. π. αὐτῶν κ. ο. κ.

Π. χ. τὸ ε. κ. π. τῶν ἀριθμῶν

18, 30, 48

συμπίπτει μὲ τὸ ε. κ. π. τῶν ἀριθμῶν

90, 48·

ἤτοι εἶναι ὁ 720.

Ἀσκήσεις.

130). Νὰ εὑρεθῇ τὸ ε. κ. π. τῶν ἀριθμῶν·

120, 125, 230·

ἐπίσης τῶν ἀριθμῶν

12, 24, 48, 96, 984, 328

131). Τὸ ε. κ. π. δύο διαδοχικῶν περιττῶν εἶναι τὸ γινόμενον αὐτῶν. (§ 84, § 113).

132), Πρὸς εὕρεσιν τοῦ ε. κ. π. τριῶν ἀριθμῶν

α, β, γ

ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὸ ε. κ. π. τῶν ἀριθμῶν

Ε, Ε΄,

ἐὰν Ε εἶναι τὸ ε. κ. π. τῶν α. γ καὶ Ε΄ τὸ ε. κ. π. τῶν β. γ.

133). Θεωρήσωμεν τὰς σειρὰς (Α) τῆς § 110· τότε, ἐὰν ἀπηγορεύετο νὰ ἐργασθῶμεν μὲ τὴν τελευταίαν σειρὰν πρὸς εὕρεσιν τοῦ ε. κ. π., μὲ ποίαν σειρὰν συνέφερε νὰ ἐργασθῶμεν;

134). Νὰ εὑρεθῶσιν ἀριθμοὶ οἵτινες διαιρούμενοι διὰ 9, 12, 15 νὰ δίδωσι πάντοτε ὡς ὑπόλοιπον 5, καὶ τὶς ἐξ αὐτῶν εἶναι ὁ ἐλάχιστος.

135). Τὸ ε. κ. π. τῶν ἀριθμῶν

1, 2, 3, ... 14

εἶναι καὶ ε. κ. π. τῶν ἀριθμῶν

8, 9, 10, . . . 14

καὶ γενικῶς τὸ ε. κ. π. τῶν ἀριθμῶν

1, 2, 3, . . . 2ν

εἶναι καὶ ε. κ. π. τῶν ἀριθμῶν

ν + 1, ν + 2, ... 2ν

Πρὸς ἀπόδειξιν παρατηροῦμεν ὅτι ὁ τυχὼν ἀριθμὸς τῆς πρώτης σειρᾶς θὰ διαιρῇ ἕνα τοὐλάχιστον ἀριθμὸν τῆς δευτέρας.

136) Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμὸς ὅστις διαιρούμενος διὰ 2 δίδει ὑπόλοιπον 1, διὰ 3 δίδει ὑπόλοιπον 2 καὶ διὰ 4 δίδει ὑπόλοιπον 3. Ποῖος ὁ ἐλάχιστος;

Παρατηροῦμεν ὅτι πᾶς ἀριθμὸς ὅστις διαιρούμενος διὰ 3 δίδει ὑπόλοιπον 2 εἶναι καὶ πολλαπλάσιον τοῦ 3 ἠλαττωμένον κατὰ μονάδα.

137). Ἔστω ὅτι οἱ τρεῖς ἀριθμοὶ α, β, γ ἔχουσι μ. κ. δ. διάφορον τῆς μονάδος· τότε θὰ εὑρίσκεται ἀριθμός τις ρ μικρότερος τοῦ γ τοιοῦτος, ὥστε οἱ ἀριθμοὶ ρα καὶ ρβ νὰ εἶναι πολλαπλάσια τοῦ γ. Ἔστω Δ ὁ μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν α, β, γ· τότε $\gamma \times \Delta$ θὰ εἶναι ὁ μ. κ. δ. τῶν $\gamma \times \alpha$, $\gamma \times \beta$, $\gamma \times \gamma$ (§ 106)· ὅθεν (§ 107 § 63) γ θὰ εἶναι ὁ μ. κ. δ· τῶν

$$(\gamma : \Delta) \times \alpha,\ (\gamma : \Delta) \times \beta,\ (\gamma : \Delta) \times \gamma.$$

138). Ἔστωσαν τέσσαρα σημεῖα ὡρισμένα ἐπὶ τεσσάρων περιφερειῶν καὶ ὅτι ἐκ τούτων ἐκκινοῦσι συγχρόνως 4 κινητά. Ἐν ᾧ χρόνῳ τὸ πρῶτον κάμνει τέσσαρας περιστροφάς, τὸ δεύτερον κάμνει 10. τὸ τρίτον 14 τὸ δὲ τέταρτον 16. Μετὰ πόσας περιστροφὰς τοῦ τρίτου θὰ εὑρεθῶσι πάλιν κατὰ τὴν αὐτὴν στιγμὴν εἰς τὰ σημεῖα, ἐξ ὧν ἐξεκίνησαν;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ'.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΠΡΩΤΩΝ ΠΡΟΣ ΑΛΛΗΛΟΥΣ ΑΡΙΘΜΩΝ

Ἐὰν ἀριθμὸς εἶναι πρῶτος πρὸς ἕκαστον παράγοντα γινομένου, τίνες οἱ κ. δ. αὐτοῦ καὶ τοῦ γινομένου;

117.—Α'.) Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ἀριθμός τις Ν εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν Α καὶ πρὸς τὸν Β. Ζητήσωμεν κοινοὺς διαιρέτας τῶν δύο ἀριθμῶν

$$N \text{ καὶ } A \times B.$$

Ἔστω τοιοῦτος κ. δ. ὁ Δ· οὗτος ὡς διαιρῶν τὸν N διαιρεῖ καὶ τὸν $N \times A$· ὥστε ὁ Δ διαιρεῖ τούς ἀριθμοὺς

$$N \times A,\ B \times A,$$

ἄρα καὶ τὸν μ. κ. δ. αὐτῶν (§ 105). Ἐξ ὑποθέσεως ὅμως οἱ ἀριθμοὶ N, B ἔχουσι μ. κ. δ. τὴν μονάδα· ἑπομένως οἱ ἀριθμοὶ $N \times A$, $B \times A$ θὰ ἔχωσι μ. κ. δ. τὸν A. (§ 106). Ὅθεν ὁ Δ θὰ διαιρῇ τὸν A (§ 105). Ἀλλὰ τότε οἱ ἀριθμοὶ N καὶ A, οἵτινες ὑπετέθησαν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, θὰ εἶχον κ. δ. τὸν Δ· ἄρα $\Delta = 1$· ἐξ οὗ συνάγομεν ὅτι·

Ἐὰν ἄριθμός τις εἶναι πρῶτος πρὸς δύο ἄλλους, εἶναι πρῶτος καὶ πρὸς τὸ γινόμενον αὐτῶν.

Ἔστω ἤδη ὅτι ἀριθμός τις N εἶναι πρῶτος πρὸς τοὺς τρεῖς παράγοντας τοῦ γινομένου $A \times B \times \Gamma$· τότε, ὡς ἀπεδείξαμεν, οἱ ἀριθμοὶ N καὶ $A \times B$ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως καὶ οἱ ἀριθμοὶ N καὶ Γ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· ἄρα ὁ N θὰ εἶναι πρῶτος καὶ πρὸς τὸ γινόμενον

$$(A \times B) \times \Gamma = A \times B \times \Gamma.$$

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον δεικνύεται δι' ὁσουσδήποτε παράγοντας ἡ ἑξῆς πρότασις·

Ἀριθμὸς πρῶτος πρὸς ἕκαστον τῶν παραγόντων γινομένου εἶναι πρῶτος καὶ πρὸς αὐτὸ τὸ γινόμενον.

Π. χ. ὁ 8 εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν 9, τὸν 15 καὶ τὸν 27· ἄρα θὰ εἶναι πρῶτος καὶ πρὸς τὸ γινόμενον $9 \times 15 \times 27$.

Ἀριθμῶν πρώτων πρὸς ἀλλήλους αἱ δυνάμεις τίνας κ. δ. ἔχουσιν;

118.—Β'.) Ἔστωσαν α καὶ β δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· ὁ α θὰ εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν

$$\beta \times \beta \times \ .\ .\ .\ .\ \times \beta = \beta^{\mu} \qquad (\S\ 117)$$

ὅθεν ἕπεται καὶ ὅτι ὁ β^{μ} εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν

$$\alpha \times \alpha \times \ .\ .\ .\ .\ \times \alpha = \alpha^{\nu}$$

ἄρα·

Ἀριθμῶν πρώτων πρὸς ἀλλήλους καὶ αἱ τυχοῦσαι δυνάμεις εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Π. χ. Ἀφοῦ οἱ ἀριθμοὶ 4 καὶ 25 εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, καὶ οἱ ἀριθμοὶ 4^3 καὶ 25^3, ἤτοι οἱ ἀριθμοὶ 64 καὶ 15625, εἶναι ἀριθμοί πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Ἐὰν ἀριθμὸς εἶναι διαιρέτης τοῦ γινομένου δύο ἄλλων καὶ εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν ἕνα, τί θὰ εἶναι ὡς πρὸς τὸν ἄλλον;

119. — Γ'). Ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους π. χ. οἱ 8 καὶ 15· καὶ ἔστω ὅτι ὁ 15 διαιρεῖ τὸ γινόμενον $8\times\Pi$· παρατηρῶ ὅτι ἀφοῦ οἱ 8 καὶ 15 ἔχουσι μ. κ. δ. τὸν 1

οἱ $8\times\Pi$ καὶ $15\times\Pi$ θὰ ἔχωσι μ. κ. δ. τὸν $1\times\Pi=\Pi$ (§106) ἀλλὰ ὁ 15 ἐξ ὑποθέσεως διαιρεῖ τὸν $8\times\Pi$· διαιρεῖ ἀφ' ἑτέρου καὶ τὸν $15\times\Pi$ ὡς πολλαπλάσιόν του· ἄρα (§ 105) θὰ διαιρῇ καὶ τὸν μ. κ. δ. αὐτῶν ἤτοι τὸν Π· ἄρα

Ἐὰν ἀριθμός τις διαιρῇ τὸ γινόμενον δύο ἄλλων καὶ εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν ἕνα, θὰ διαιρῇ τὸν ἄλλον.

Π. χ. ὁ 12 διαιρεῖ τὸν 12000, ὅστις ἰσοῦται μὲ 480×25 εἶναι δὲ πρῶτος πρὸς τὸν 25· κατὰ τὰ ἀνωτέρω θὰ διαιρῇ τὸν 480.

Τίς ὁ μ. κ. δ. τῶν πηλίκων τῆς διαιρέσεως τοῦ ε. κ. π. δεδομένων ἀριθμῶν δι' ἑκάστου τούτων:

120.—Δ'). Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ Α, Β, Γ, καὶ Ε τὸ ε. κ. π. αὐτῶν. Διαιρῶ τοῦτο δι' ἑνὸς ἑκάστου ἐξ αὐτῶν, ἤτοι σχηματίζω

τὰ πηλίκα $\left\{\begin{array}{l} E : A \\ E : B \\ E : \Gamma \end{array}\right.$ Τὰ πηλίκα ταῦτα εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι

πρὸς ἀλλήλους. Διότι, ἐὰν εἶχον κοινόν τινα διαιρέτην Δ διάφορον τῆς μονάδος, θὰ ἠλήθευον αἱ ἰσότητες

$$E : A = \Delta \times \Pi$$
$$E : B = \Delta \times P$$
$$E : \Gamma = \Delta \times \Sigma$$

ὅθεν $E=A\times\Delta\times\Pi=B\times\Delta\times P=\Gamma\times\Delta\times\Sigma$

ἐξ οὗ $E : \Delta=A\times\Pi=B\times P=\Gamma\times\Sigma$ ἤτοι

ὁ $E : \Delta$ θὰ ἦτο κ. π. τῶν Α, Β, Γ, ἀλλὰ $E : \Delta$ εἶναι ἀριθμὸς μικρότερος τοῦ Ε, ὅταν $\Delta>1$· θὰ εἴχομεν ἑπομένως καὶ κ. π. τῶν Α, Β, Γ, μικρότερον τοῦ ἐλαχίστου, ὅπερ ἄτοπον. Ὅθεν·

Ἐὰν διαιρεθῇ τὸ ε. κ. π. ἀριθμῶν δι' ἑκάστου ἐξ αὐτῶν, εὑρίσκονται πηλίκα ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Π. χ. τῶν ἀριθμῶν 12, 20 καὶ 36 ε. κ. π. εἶναι ὁ 180. Τὰ πηλίκα 180 : 12, 180 : 20, 180 : 36, ἤτοι οἱ ἀριθμοὶ 15, 9, 5, εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Ποῖον κ. π. δεδομένων ἀριθμῶν διαιρούμενον δι' αὐτῶν δίδει πηλίκα ἀριθμούς πρώτους πρὸς ἀλλήλους;

121.—Ε'). Ἔστω ὅτι ἀριθμός τις Ε διαιρούμενος ἀκριβῶς διὰ τῶν Α, Β, Γ, δίδει πηλίκα Π, Π', Π'' ἀριθμοὺς πρώτους πρὸς ἀλλήλους· ἐπειδὴ ὁ Ε εἶναι ἐξ ὑποθέσεως κ. π. τῶν Α, Β, Γ, θὰ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ ε. κ. π. αὐτῶν Ε' (§ 114) ἤτοι·

$$E = E' \times \rho.$$

Ἀλλὰ (§ 120) οἱ ἀριθμοὶ

$$E' : A,\ E' : B,\ E' : \Gamma$$

εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους καὶ ἑπομένως οἱ

$$(E' \times \rho) : A,\ (E' \times \rho) : B,\ (E' \times \rho) : \Gamma,$$

ἤτοι οἱ

$$E : A,\quad E : B,\quad E : \Gamma$$

θὰ ἔχωσι μ. κ. δ. τὸν ρ· ἀλλ' ὑπετέθησαν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· ἑπομένως $\rho = 1$· τουτέστιν Ε εἶναι τὸ ε. κ. π.· ἄρα·

Ἐὰν κοινόν τι πολλαπλάσιον τῶν Α, Β, Γ, διαιρούμενον διὰ τῶν Α, Β, Γ, δίδῃ πηλίκα ἀριθμοὺς πρώτους πρὸς ἀλλήλους, τότε τοῦτο εἶναι καὶ τὸ ε. κ. π.

Π. χ. ὁ 3600 εἶναι κ. π. τῶν ἀριθμῶν

720, 900, 1800.

Ἐπειδὴ τὰ πηλίκα

3600 : 720, 3600 : 900, 3600 : 1800,

ἤτοι τὰ 5, 4, 2, εἶναι πρῶτα πρὸς ἄλληλα, ὁ 3600 εἶναι τὸ ε. κ. π. τῶν ἀριθμῶν 720, 900, 1800.

Ἀριθμὸς διαιρετὸς δι' ἄλλων πρώτων πρὸς ἀλλήλους ἀνὰ δύο διαιρεῖται διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν; καὶ διατί;

122.—Ϛ'). Ἔστω ὅτι ἀριθμός τις Α εἶναι κ. π. δύο ἄλλων Β, Γ πρώτων πρὸς ἀλλήλους. Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ γινόμενον Β×Γ διαιρούμενον διὰ τῶν Β, Γ δίδει πηλίκα Γ, Β πρῶτα πρὸς ἄλληλα· ὅθεν (§ 121) εἶναι ε. κ. π. τῶν Β, Γ. Ἑπομένως τὸ Α ὡς κ. π. τῶν Β, Γ θὰ εἶναι (§ 114) πολλαπλάσιον τοῦ ε. κ. π. αὐτῶν ἤτοι τοῦ Β×Γ· ἄρα·

Ἐὰν ἀριθμός τις Α διαιρῆται διὰ δύο ἄλλων πρώτων πρὸς ἀλλήλους, θὰ διαιρῆται καὶ διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν.

Π. χ. Ἐὰν ἀριθμός τις διαιρῆται διὰ 8 καὶ 15, θὰ διαιρῆται καὶ διὰ τοῦ 120.

Ἔστωσαν ἤδη τρεῖς ἀριθμοὶ Β, Γ, Δ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀνὰ δύο. Ἐάν ἀριθμός τις Α διαιρῆται διὰ τῶν Β, Γ, θὰ διαιρῆται καὶ διὰ τοῦ γινομένου Β×Γ, ὡς προηγουμένως εἴδομεν· ἀφ' ἑτέρου ὁ Δ θὰ εἶναι πρῶτος πρὸς τὸ γινόμενον Β×Γ (§ 117). Ὥστε, ἐὰν ὁ Α διαιρῆται καὶ διὰ Δ, θὰ διαιρῆται καὶ διὰ τοῦ γινομένου (Β×Γ)×Δ, ἤτοι τοῦ Β×Γ×Δ. Καὶ γενικῶς·

Ἐὰν ἀριθμός τις Α διαιρῆται δι' ἄλλων Β, Γ, Δ, Ε . . πρώτων πρὸς ἀλλήλους ἀνὰ δύο θὰ διαιρῆται κα διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν.

Π. χ. Ὁ ἀριθμὸς 31500 διαιρεῖται διὰ τῶν 4, 7, 15, οἵτινες εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀνὰ δύο· θὰ διαιρῆται καὶ διὰ τοῦ

$$4\times7\times15=420.$$

Σημ. Ἐφαρμόζοντες τὴν πρότασιν ταύτην δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν πολλοὺς χαρακτῆρας διαιρετότητος.

Π. χ. Ἐπειδὴ 18=2×9 καὶ 2, 9 εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ἕπεται ὅτι πᾶς ἀριθμὸς διαιρετὸς διὰ 2 καὶ 9 διαιρεῖται καὶ διὰ 18.

Εὑρίσκομεν οὕτω (§ 79) ὅτι·

Ἵνα ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς διὰ 6, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ διαιρῆται διὰ τοῦ 2 καὶ διὰ τοῦ 3.

Ἵνα ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 12, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ διαιρῆται διὰ τοῦ 3 καὶ διὰ τοῦ 4.

Ἵνα ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 20, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 4 καὶ διὰ τοῦ 5.

Καὶ γενικῶς·

Ἵνα ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ γινομένου δύο διαδοχικῶν ἀριθμῶν, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι διαιρετὸς δι' ἑκατέρου ἐξ αὐτῶν.

Ἵνα ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς διὰ 15, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι διαιρετὸς διὰ 3 καὶ διὰ 5.

Σχέσις μεταξὺ δύο ἀριθμῶν. τοῦ μ. κ. δ. καὶ τοῦ ε. κ. π. αὐτῶν.

123. — Ἔστωσαν Π, Π′ τὰ πηλίκα τῆς διαιρέσεως δύο ἀριθμῶν Α, Β διὰ τοῦ μ. κ. αὐτῶν Δ, Τότε·

$$A = \Delta \times \Pi \text{ καὶ } B = \Delta \times \Pi' \text{ ὅθεν}$$
$$A \times B = \Delta \times \Pi \times B \text{ καὶ } B \times A = \Delta \times \Pi' \times A$$
$$(A \times B) : \Delta = \Pi \times B \text{ καὶ } (B \times A) : \Delta = \Pi' \times A.$$

Ἐξ οὗ βλέπομεν ὅτι, ἐὰν τὸν ἀριθμὸν $(A \times B) : \Delta$ διαιρέσωμεν διὰ B, εὑρίσκομεν Π, ἐὰν δὲ διὰ A, εὑρίσκομεν Π'· ἤτοι ὁ ἀριθμὸς $(A \times B) : \Delta$ διαιρούμενος διὰ τῶν A, B δίδει πηλίκα ἀριθμοὺς πρώτους πρὸς ἀλλήλους (§ 108)· ὥστε εἶναι τὸ ε. κ. π. τῶν A, B (§ 121).

ἤτοι : $(A \times B) : \Delta = E.$ ὅθεν

(1) $A \times B = \Delta \times E.$ ἄρα :

Τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ μ. κ. δ. ἐπὶ τὸ ε. κ. π. αὐτῶν.

124.—Ἐφαρμογή. Ἐκ τῆς ἰσότητος (1) προκύπτει ὅτι τὸ ε. κ. π. δύο ἀριθμῶν εὑρίσκεται, ἐὰν τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν διαιρεθῇ διὰ τοῦ μ. κ. δ. αὐτῶν.

Ἀσκήσεις.

139). Δίδανται δύο ἀριθμοὶ καὶ τὸ ε. κ. π. αὐτῶν. Νὰ εὑρεθῇ ὁ μ. κ. δ. αὐτῶν.

140). Δύο περιττοὶ διαδοχικοὶ ἀριθμοὶ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

141). Πάντες οἱ περιττοὶ οἱ μὴ λήγοντες εἰς 5 εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς τὸν 10. Ἐξ αὐτῶν δὲ ὅσοι ἔχουσιν ὡς ἄθροισμα ψηφίων ἀριθμὸν μὴ διαιρετὸν διὰ 3 εἶναι πρῶτοι καὶ πρὸς τὸν 30.

142). Νὰ εὑρεθῶσι χαρακτῆρες διαιρετότητος διὰ 21, 30, 63, 105.

143). Ἐὰν εἷς προσθετέος ἀθροίσματος εἶναι πρῶτος πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν λοιπῶν προσθετέων, θὰ εἶναι πρῶτος καὶ πρὸς τὸ ὅλον ἄθροισμα.

144). Πολλαπλασιάζοντες τοὺς ἀριθμοὺς 1, 2, 3, ... 9 ἐπὶ 7 λαμβάνομεν ἐννέα ἀριθμοὺς λήγοντας εἰς ἐννέα διάφορα ἀπ' ἀλλήλων ψηφία καὶ γενικώτερον τὸ αὐτὸ συμβαίνει, ἂν λάβωμεν ὡς πολλαπλασιαστὴν ἀντὶ τοῦ 7 οἱονδήποτε ἀριθμὸν πρῶτον πρὸς τὸν 10.

Παρατηροῦμεν πρὸς τοῦτο ὅτι πᾶς ἀριθμὸς πρῶτος πρὸς τὸν 10 θὰ λήγῃ εἰς 1 ἢ 3 ἢ 7 ἢ 9.

145). Οἱ ἀριθμοὶ

$$A, \quad A+1, \quad 2A+1$$

εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀνὰ δύο (§ 80, § 78).

146). Ἐὰν εἰς δοθέντα περιττὸν προσθέσωμεν τὴν μονάδα, τὸ δὲ ἄθροισμα διαιρέσωμεν διὰ 2, εὑρίσκομεν ἀριθμὸν πρῶτον πρὸς τὸν δοθέντα (§ 84).

147). Οἱ ἀριθμοὶ

$$A \quad \text{καὶ} \quad AB+1$$

εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Παρατηροῦμεν ὅτι πᾶς διαιρέτης τοῦ A εἶναι διαιρέτης τοῦ AB (§ 79).

148). Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων δύο ἀριθμῶν πρώτων πρὸς τὸν 3 δὲν εἶναι διαιρετὸν διὰ 3.

Παρατηροῦμεν ὅτι πᾶς ἀριθμὸς πρῶτος πρὸς τὸν 3 διαιρούμενος διὰ 3 δίδει ὑπόλοιπον 1 ἢ 2· κατόπιν δὲ λαμβάνομεν ὑπ' ὄψιν τὰ θεωρήματα (§ 92 καὶ 93).

149) Ἐὰν δύο ἢ πλειότεροι ἀριθμοὶ πολλαπλασιασθῶσι ἐπί τινα ἀριθμόν, καὶ τὸ ε. κ. π. αὐτῶν πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

Τῷ ὄντι ἔστω E τὸ ε. κ. π. τῶν ἀριθμῶν

$$A \quad B \quad \Gamma\cdot$$

οἱ ἀριθμοὶ

$$E:A \quad E:B \quad E:\Gamma$$

εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους (§ 120) ἢ καὶ οἱ ἀριθμοὶ

$$\rho E:\rho A \quad \rho E:\rho\Gamma \quad \rho E:\rho\Gamma$$

εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· ὥστε (§ 121) τὸ ρE εἶναι ε. κ. π. τῶν ἀριθμῶν $\rho A, \quad \rho B, \quad \rho\Gamma.$

150) Ὁ μ. κ. δ. τριῶν περιττῶν ἀριθμῶν A, B, Γ, εἶναι καὶ μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν

$$(A+B):2 \quad (B+\Gamma).2, \quad (\Gamma+A):2.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι 1) τὰ πηλίκα εἶναι ἀριθμοὶ ἀκέραιοι διότι οἱ $A+B, \quad B+\Gamma, \quad \Gamma+A$ εἶναι ἄρτιοι

2) Πᾶς κ. δ. τῶν Α, Β, Γ, εἶναι καὶ κ. δ. τῶν

$$(A+B):2, \quad (B+\Gamma):2 \quad (\Gamma+A):2$$

ὡς διάφορος τοῦ 2 (Α, Β, Γ περιττοὶ § 78 § 118).

3) Πᾶς κ. δ. τῶν $(A+B):2$, $(B+\Gamma):2$, $(\Gamma+A):2$ εἶναι καὶ κ. δ. τῶν Α, Β, Γ.

151). Ἔστω Μ. ὁ μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν Α καὶ α· Μ′ ὁ τῶν Α καὶ β καὶ Μ″ ὁ τῶν Α καὶ γ. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ Μ. Μ′, Μ″ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀνὰ δύο, τότε τὸ γινόμενον $M\times M'\times M''$ εἶναι ὁ μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν Α καὶ $\alpha\times\beta\times\gamma$.

Παρατηροῦμεν ὅτι οἱ ἀριθμοὶ $A:M$ καὶ $\alpha:M$ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους (§ 108). Ἑπομένως καὶ ὁ ἀριθμὸς

$$A:(M\times M'\times M'')$$

θὰ εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν $\alpha:M$ (§ 79), ἐπίσης θὰ εἶναι πρῶτος καὶ πρὸς τὸν $\beta:M'$ καὶ τὸν $\gamma:M''$· ὅθεν (§ 117, 109) ἕπεται ἡ πρότασις.

152). Δίδονται οἱ ἀριθμοὶ

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma, \quad \delta, \quad \varepsilon.$$

Πόσας ἀκεραίας τιμὰς οὐχὶ μεγαλυτέρας τοῦ ε δύναμαι νὰ δώσω εἰς τὸ ρ τοιαύτας, ὥστε τὰ γινόμενα

$$\alpha\times\rho, \quad \beta\times\rho, \quad \gamma\times\rho, \quad \delta\times\rho$$

νὰ εἶναι πολλαπλάσια τοῦ ε;
(μία τιμὴ τοῦ ρ εἶναι $\varepsilon:\Delta$ ὅπου $\Delta=$ μ. κ. δ. δεδομένων). (Ἄσκ. 137).

153). Ἐὰν Μ ὁ μ. κ. δ. τῶν Α, Β καὶ Μ′ ὁ μ. κ. δ. τῶν Α, Γ, οἱ δὲ ἀριθμοὶ Α, Β, Γ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, τότε ὁ μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν

$$A, \quad B\times\Gamma$$

εἶναι ὁ ἀριθμὸς $\quad M\times M'$.

Παρατηροῦμεν πρὸς τοῦτο ὅτι οἱ ἀριθμοὶ Μ καὶ Μ′ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους (§ 105). Ἑπομένως ὁ Α εἶναι διαιρετὸς διὰ $M\times M'$, ἤτοι $A=M\times M'\times \Pi$· ἀφ᾽ ἑτέρου $B=M\times\Pi'$ καὶ $\Gamma=M'\times\Pi''$· ἀλλ᾽ οἱ ἀριθμοὶ $A:M$ καὶ Π′ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· ἐπομένως καὶ οἱ Π, Π′ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους·

ὁμοίως οἱ Π καὶ Π΄΄ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· ἄρα οἱ ἀριθμοὶ Π καὶ $\Pi' \times \Pi''$ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους (§ 117)· ὅθεν (§ 109) $M \times M'$ εἶναι ὁ μ. κ. δ. τῶν Α. καὶ $B \times \Gamma$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε΄.

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΠΡΩΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

125.—Ζητήσωμεν τοὺς διαιρέτας τοῦ 6· εἶνε τοιοῦτοι οἱ ἀριθμοὶ 1, 2, 3, 6.

Ζητήσωμεν τοὺς διαιρέτας τοῦ 5· εἶναι τοιοῦτοι μόνον οἱ 1, 5. Παρατηροῦμεν ὅτι ὁ 6 ἔχει πλὴν τοῦ ἑαυτοῦ του καὶ τῆς μονάδος καὶ ἄλλους διαιρέτας τοὺς 2, 3 ἐνῷ ὁ 5 ἔχει μόνον τοὺς 1, 5. Ἕνεκα τῆς ἰδιότητος αὐτῆς ὁ 5 λέγεται πρῶτος, ἐνῷ ὁ 6 λέγεται σύνθετος· τουτέστι:

Πρῶτος ἀριθμὸς λέγεται ὁ μὴ ἔχων ἄλλους διαιρέτας εἰμὴ ἑαυτὸν καὶ τὴν μονάδα.

Σύνθετος δὲ λέγεται ὁ ἔχων καὶ ἄλλους διαιρέτας πλὴν αὐτῶν.

Π. χ. οἱ ἀριθμοὶ

	1,	2,	3,	5,	7,	11,	13	εἶναι πρῶτοι.
οἱ	4,	6,	8,	9,	10,	12,	14,	15 εἶναι σύνθετοι.

Παρατηροῦμεν ὅτι ἀριθμοί τινες δυνατὸν νὰ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους χωρὶς νὰ εἶναι πρῶτοι. Π. χ. οἱ ἀνωτέρω σύνθετοι εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Ἔστω τυχὼν σύνθετος ὁ 15· διαιρέται αὐτοῦ εἶναι οἱ ἀριθμοὶ 1, 3, 5, 15· ὁ 3 εἶναι δεύτερος διαιρέτης τοῦ 15· ἤτοι·

Δεύτερος διαιρέτης ἀριθμοῦ λέγεται ὁ μετὰ τὴν μονάδα διαιρέτης αὐτοῦ.

Ἰδιότητες τῶν πρώτων ἀριθμῶν.

126.—Α΄.) Ἐκ τῶν διαιρετῶν ἀριθμοῦ τινος Α συνθέτου τινὲς εἶναι σύνθετοι, τινὲς πρῶτοι. Θεωρήσωμεν τὸν δεύτερον διαιρέτην τοῦ Α· οὗτος δὲν εἶναι πολλαπλάσιον ἄλλου ἀριθμοῦ γ μεγαλυτέρου τῆς μονάδος, διότι ἐν ἐναντίᾳ περιπτώσει καὶ ὁ Α θὰ ἦτο πολλαπλάσιον αὐτοῦ τοῦ ἄλλου ἀριθμοῦ γ, ἤτοι ὁ Α θὰ εἶχε καὶ διαιρέτην μικρότερον τοῦ ὑποτεθέντος ὡς δευτέρου· ὥστε·

Παντὸς ἀριθμοῦ ὁ δεύτερος διαιρέτης εἶναι ἀριθμὸς πρῶτος.

Ἐκ τῶν προηγουμένων συνάγεται ὅτι·

α΄.) Πᾶς σύνθετος θὰ ἔχῃ διαιρέτην ἀριθμὸν πρῶτον.

Π. χ. ὁ 77 ἔχει δεύτερον διαιρέτην τὸν 7, ὅστις εἶναι πρῶτος.

β΄.) Ἐὰν ἀριθμοί τινες ἔχωσι μ. κ. δ. διάφορον τῆς μονάδος, ἤτοι ἐὰν δὲν εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, θὰ ἔχωσιν ὡς κ. δ. ἀριθμὸν πρῶτον (§ 105).

127.—Β΄.) Ὁ τυχὼν πρῶτος δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς γινόμενον τοῦ ἑαυτοῦ του ἐπὶ τὴν μονάδα.

Ἔστω ἤδη τυχὼν σύνθετος ἀριθμὸς Α καὶ δεύτερος αὐτοῦ διαιρέτης ὁ δ. Τότε $Α = δ \times π$, ὅπου π θὰ εἶναι ἀκέραιος μικρότερος τοῦ Α· ἐὰν ὁ π εἶναι πρῶτος, τότε ὁ Α ἀνελύθη εἰς γινόμενον δύο πρώτων· ἐὰν ὁ π εἶναι σύνθετος τότε θὰ ἔχῃ ὡς δεύτερον διαιρέτην ἀριθμόν τινα δ΄, ὅστις πάλιν θὰ εἶναι πρῶτος·

ἤτοι· $π = δ' \times π'$ ὅπου $π' < π$.

Ἐὰν π΄ εἶναι καὶ αὐτὸς πρῶτος, τότε ὁ Α ἀνελύθη εἰς γινόμενον τριῶν πρώτων παραγόντων. Ἄλλως προχωροῦμεν καθ' ὅμοιον τρόπον. Παρατηροῦμεν ἤδη ὅτι οἱ ἀριθμοὶ π, π΄... εἶναι ἀκέραιοι τοιοῦτοι ὥστε $π > π' > \ldots$ Ἀπὸ τοῦ π φθάνομεν εἰς τὸ π΄ καὶ δι' ἀφαιρέσεως μονάδων τινῶν, ὅπως ἐπίσης ἀπὸ τοῦ π΄ εἰς τὸ π΄΄ φθάνομεν πάλιν καὶ δι' ἀφαιρέσεως μονάδων κ. ο. κ. ἀλλὰ ὁ π εἶναι ἀκέραιός τις πεπερασμένος, δὲν δυνάμεθα ἑπομένως νὰ ἀφαιρῶμεν ἀδιακόπως ἀπ' αὐτοῦ μονάδας· ἄρα κατ' ἀνάγκην φθάνομεν εἰς ἀριθμόν τινα μὴ ἔχοντα ἄλλον διαιρέτην μικρότερόν του πλὴν τῆς μονάδος καὶ τότε θὰ ἔχωσιν εὑρεθῇ πάντες οἱ πρῶτοι παράγοντες, ὧν γινόμενον εἶναι ὁ Α· ἄρα·

Πᾶς ἀριθμὸς εἶναι γινόμενον παραγόντων πρώτων.

128.—Γ΄.) Ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ Α, Β, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ μὲν εἷς, ἔστω ὁ Α, εἶναι πρῶτος, ὁ δὲ ἕτερος Β δὲν διαιρεῖται διὰ τοῦ Α· τότε οἱ ἀριθμοὶ Α, Β δὲν δύνανται νὰ ἔχωσι κοινὸν διαιρέτην διάφορον τῆς μονάδος, διότι ὁ Α δὲν ἔχει ἄλλον διαιρέτην πλὴν τῆς μονάδος καὶ τοῦ ἑαυτοῦ του, ὅστις ὅμως ἐξ ὑποθέσεως δὲν δύναται νὰ χρησιμεύσῃ ὡς κοινὸς διαιρέτης· ἄρα:

Πᾶς πρῶτος εἶναι πρῶτος πρὸς πάντα μὴ διαιρούμενον δι' αὐτοῦ. Π. χ. ὁ 11 δὲν διαιρεῖ τὸν 100· ἄρα εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν 100.

129.—Δ'. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι δύο γινόμενα παραγόντων πρώτων εἶναι ἴσα· ἔστωσαν δηλαδὴ ἀριθμοὶ

$$A, B, \Gamma, \ldots\ldots, A' \; B', \; \Gamma', \ldots\ldots$$

πρῶτοι καὶ ὅτι

$$A \times B \times \Gamma \times \ldots\ldots = A' \times B' \times \Gamma' \times \ldots$$

Ὁ τυχὼν παράγων Α' τοῦ δευτέρου γινομένου, ἐὰν δὲν εἶναι ἴσος μὲ τὸν Α, δὲν θὰ τὸν διαιρῇ, διότι ὁ Α ὑπετέθη πρῶτος· ἀλλὰ τότε ὁ Α' (§ 128) θὰ εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν Α· ὁμοίως φαίνεται ὅτι, ἐὰν ὁ Α' δὲν ἦτο ἴσος πρὸς ἄλλον παράγοντα τοῦ πρώτου γινομένου, θὰ ἦτο πρῶτος πρὸς ἕκαστον ἐξ αὐτῶν· ἄρα ὁ Α' (§ 117) θὰ ἦτο πρῶτος καὶ πρὸς τὸ γινόμενον

$$A \times B \times \Gamma \times \ldots\ldots$$

ὁπότε κατ' ἀνάγκην ὁ Α' θὰ ἦτο πρῶτος καὶ πρὸς τὸ ἴσον γινόμενον $A' \times B' \times \Gamma' \times \ldots\ldots$ ὅπερ ἄτοπον· ἄρα ὁ Α' εἶναι ἴσος πρὸς ἕνα τῶν παραγόντων τοῦ πρώτου γινομένου. Δὲν εἶναι δὲ δυνατὸν τὸ πρῶτον γινόμενον νὰ ἔχῃ παράγοντας ἴσους πρὸς τὸ Α περισσοτέρους ἢ ὀλιγωτέρους ἀπὸ τὸ δεύτερον γινόμενον· διότι ἔστω ὅτι τὸ πρῶτον γινόμενον εἶχε τρεῖς παράγοντας ἴσους πρὸς τὸ Α' τὸ δὲ δεύτερον δύο τοιούτους· τότε διαιροῦντες τὰ ἴσα γινόμενα διὰ τοῦ $A' \times A'$ θὰ ἔχωμεν δύο ἕτερα γινόμενα ἴσα (§ 60), ἐξ ὧν τὸ ἓν θὰ περιεῖχε τὸν πρῶτον παράγοντα Α', ἐνῷ τὸ ἕτερον οὐχί· ἄρα:

Ἐὰν δύο γινόμενα παραγόντων πρώτων εἶναι ἴσα θὰ ἔχωσι τοὺς αὐτοὺς πρώτους παράγοντας καὶ ἕκαστον παράγοντα τοσάκις τὸ ἓν ὁσάκις καὶ τὸ ἕτερον· ἤτοι δύο γινόμενα παραγόντων πρώτων ἴσα θὰ ἔχωσι τοὺς αὐτοὺς πρώτους παράγοντας καὶ ἐκθέτας τῶν ἴσων παραγόντων τοὺς ἰδίους· π.χ. τὸ γινόμενον $5^2 \times 7 \times 11$ δὲν εἶναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον $5 \times 7 \times 11^2$, οὐδὲ τὸ γινόμενον $3^2 \times 7 \times 11^2$ πρὸς τὸ γινόμενον $3 \times 7^2 \times 17$.

130.—Ε'. Ἔστω ὅτι γινόμενόν τι $A \times B \times \Gamma$ διαιρεῖται δι' ἑνὸς πρώτου ἀριθμοῦ δ· τότε

$$A \times B \times \Gamma = \delta \times \Pi.$$

Ἐὰν φαντασθῶμέν ὅτι ἀναλύομεν τοὺς Α, Β, Γ καὶ Π εἰς πρώτους παράγοντας, θὰ ἔχωμεν δύο γινόμενα παραγόντων πρώτων ἴσα· ἐπομένως (§ 129) ὁ δ πρέπει νὰ εὑρεθῇ μεταξὺ τῶν πρώτων παραγόντων τοὐλάχιστον ἑνὸς ἐκ τῶν Α, Β, Γ· ὅθεν ὁ δ θὰ διαιρῇ τοὐλάχιστον ἕνα τῶν παραγόντων Α, Β, Γ· ἄρα·

Ἐὰν ἀριθμὸς πρῶτος διαιρῇ γινόμενον, θὰ διαιρῇ τοὐλάχιστον ἕνα τῶν παραγόντων.

Ἐκ τούτου ἕπεται:

Ἐὰν ἀριθμὸς πρῶτος διαιρῇ δύναμιν ἀριθμοῦ, θὰ διαιρῇ καὶ αὐτὸν τὸν ἀριθμόν.

Παραδείγματα. Ὁ 3 διαιρῶν τὸ γινόμενον $4 \times 75 = 300$ θὰ διαιρῇ καὶ ἕνα τοὐλάχιστον τῶν παραγόντων, καὶ πράγματι διαιρεῖ τὸν 75. Ἐπίσης ὁ 5 διαιρῶν τὸ $25^2 = 625$ θὰ διαιρῇ καὶ τὸ 25.

Ἀσκήσεις.

154) Ἀριθμὸς πρῶτος δὲν δύναται νὰ διαιρῇ τὸ γινόμενον ὁσωνδήποτε ἀκεραίων μικροτέρων αὐτοῦ.

155) Ἐὰν οὐδεὶς ἐκ τῶν παραγόντων γινομένου διαιρῆται διὰ πρώτου τινὸς α, τότε καὶ τὸ γινόμενον δὲν θὰ διαιρῆται δι' οὐδενὸς πολλαπλασίου τοῦ α.

156) Τὸ ε. κ. π. καὶ ὁ μ. κ. δ. δύο ἀριθμῶν Α καὶ Β ἔχουσι τοὺς αὐτοὺς κοινοὺς διαιρέτας οὓς καὶ οἱ ἀριθμοὶ Α Β.

157) Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ προστιθέμενοι δίδωσιν ὡς ἄθροισμα ἀριθμὸν πρῶτον, εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

158) Ἐὰν ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων δύο ἀριθμῶν Α καὶ Β εἶναι ἀριθμὸς πρῶτος, οἱ ἀριθμοὶ Α καὶ Β εἶναι διαδοχικοί. (Ἄσκ. 80).

159) Ἐὰν Α καὶ Β εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, τότε τὸ ἄθροισμα $A + B$ καὶ τὸ γινόμενον ΑΒ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. (§ 126, § 130, § 80).

160) Τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν ἀκεραίων τῶν μικροτέρων ἑνὸς πρώτου εἶναι διαιρετὸν δι' αὐτοῦ. Γενίκευσις.

Ἔστω τὸ ἄθροισμα $1 + 2 + 3 + 4$ τοῦτο γράφεται καὶ

$$4 + 3 + 2 + 1$$

ὅθεν τὸ διπλάσιον τοῦ δοθέντος ἀθροίσματος ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα

$$5+5+5+5=5\times 4.$$ ἐντεῦθεν ἡ πρότασις.

161) Πᾶς πρῶτος μεγαλύτερος τοῦ 3 θὰ εἶναι ἴσος πρὸς πολλαπλάσιον τοῦ 6 ηὐξημένον ἢ ἠλαττωμένον κατὰ μονάδα, τουτέστι θὰ γράφεται.

ἢ ὑπὸ τὴν μορφὴν $6\nu+1$

ἢ ὑπὸ τὴν μορφὴν $6\nu-1$.

162) Ἡ προηγουμένη πρότασις μόνον διὰ τοὺς πρώτους ἰσχύει :

153) Διὰ πάντα ἀριθμὸν Α μείζονα τοῦ 4 καὶ ἴσον πρὸς Π^{λ}, ὅπου Π εἶναι πρῶτος καὶ $\lambda>1$, ἰσχύει ἡ πρότασις ὅτι τὸ γινόμενον

$$1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ (A-1)$$

εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ Α.

Ἐὰν παρατηρήσωμεν ὅτι $A-1>\Pi^{\lambda-1}$, εὐκόλως συνάγομεν τὴν πρότασιν.

164) Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμὸς μεγαλύτερος τοῦ 3 πρῶτος, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον ἐλαττούμενον κατὰ μονάδα καὶ διαιρούμενον διὰ 8 δίδει ὡς πηλίκον ἀριθμὸν πρῶτον.

Πρὸς εὕρεσιν αὐτοῦ παρατηροῦμεν ὅτι πᾶς πρῶτος πλὴν τοῦ 3 δὲν διαιρεῖται διὰ 3· ἄρα εἷς ἐκ τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου $(A-1)(A+1)$ διαιρεῖται διὰ 3, ἐὰν Α ὑποτεθῇ πρῶτος διάφορος τοῦ 3 ἑπομένως, ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ Α εἶναι τοιοῦτος, ὥστε ἡ διαφορὰ A^2-1 νὰ διαιρῆται διὰ 8, τότε τὸ προκῦπτον πηλίκον διαιρεῖται διὰ 3 (Ἄσκ. 80, § 129, § 119), ὅθεν, ἵνα τὸ πηλίκον αὐτὸ εἶναι ἀριθμὸς πρῶτος, πρέπει νὰ εἶναι ἴσον τῷ 3 καὶ ὁ A^2-1 νὰ εἶναι ἴσος τῷ 24· ἑπομένως ὁ $A^2=25$ ἤτοι $A=5$.

Εὕρεσις τῶν πρώτων ἀριθμῶν.

131.— Κόσκινον τοῦ Ἐρατοσθένους. Ζητήσωμεν τοὺς πρώτους τοὺς περιλαμβανομένους μεταξὺ 1 καὶ 50. Γράφομεν αὐτοὺς κατὰ σειράν. Διαγράφομεν ἐξ αὐτῶν κατ' ἀρχὰς τὰ πολλαπλάσια τοῦ 2· κατόπιν παρατηροῦμεν ὅτι ἐκ τῶν πολλαπλασίων τοῦ 3 τινὰ εἶναι ἤδη διαγεγραμμένα ὡς πολλαπλάσια τοῦ 2, τουτέστι: τὰ

$$2\times3,\quad 4\times3,\quad 6\times3 \qquad \text{κ.τ.λ.},$$

ἐνῶ τὰ μὴ διαγεγραμμένα εἶναι τὰ

$$3\times3,\quad 5\times3,\quad 7\times3 \qquad \text{κ.τ.λ.}$$

διαγράφω ταῦτα.

Τὰ πολλαπλάσια τοῦ 4 εἶναι ἤδη διαγεγραμμένα ὡς πολλαπλάσια τοῦ 2. Ἐκ τῶν πολλαπλασίων τοῦ 5 τὸ πρῶτον μὴ διαγεγραμμένον εἶναι τὸ 5×5· διαγράφομεν τοῦτο ὅπως καὶ ὅσα δὲν ἔχουσιν ἤδη διαγραφῆ. Ἐκ τῶν πολλαπλασίων τοῦ 7 τὸ πρῶτον μὴ διαγεγραμμένον εἶναι τὸ 7×7.

Παρατηροῦμεν ἤδη ὅτι οἱ ἐναπομείναντες ἐν τῷ πίνακι ἀριθμοὶ εἶναι πρῶτοι, διότι οὗτοι δὲν θὰ διαγραφῶσιν, ὅσον καὶ ἂν προχωρήσωμεν, καὶ ἑπομένως οὐδενὸς ἀριθμοῦ εἶναι πολλαπλάσια. Ὁμοίως θὰ ἐργασθῶμεν, ἐὰν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν πάντας τοὺς πρώτους ἀπὸ τοῦ 1 μέχρι τοῦ 1000, ὁπότε ὅμως δὲν θὰ σταματήσωμεν εἰς τὸ 7, ἀλλ' εἰς τὸ 31, διότι, ὅταν διαγράψωμεν τὰ πολλαπλάσια τῶν πρώτων

$$2,\ 3,\ 5,\ \ldots\ldots\ldots\ 31,$$

τότε τῶν ἀριθμῶν

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots\ 36$$

ἔχουν διαγραφῆ πάντα τὰ πολλαπλάσια ὥστε τὸ πρῶτον μὴ διαγραφὲν θὰ ἦτο τὸ 37×37. Ἀλλὰ τοῦτο δὲν ὑπάρχει ἐν τῷ πίνακι ὡς μεγαλύτερον τοῦ 1000. Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι οἱ πρῶτοι ἀριθμοὶ οἱ μεταξὺ 1 καὶ 100 εἶναι οἱ ἑξῆς·

1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37,
41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

ΣΗΜ. Ὑπάρχουσι πίνακες τῶν πρώτων ἀριθμῶν ἐκτεταμένοι. Εἰς τοὺς λογαριθμικοὺς πίνακας Dupuis εὑρίσκονται οἱ πρῶτοι ἀριθμοὶ ἀπὸ 1 μέχρι 10000.

'Ασκήσεις.

165) Νὰ εὑρεθῶσι πάντες οἱ πρῶτοι οἱ περιλαμβανόμενοι μεταξὺ 100 καὶ 200.

166) Ὁ ἀριθμὸς 1036 εἶναι πρῶτος ἢ σύνθετος;

Ὁ ἀριθμὸς 1409 εἶναι πρῶτος ἢ σύνθετος;

Πλῆθος τῶν πρώτων ἀριθμῶν.

132.— Ἔστω ὅτι ἐδόθησαν ὁσοιδήποτε πρῶτοι

$$A, \quad B, \quad \Gamma \ldots, \quad K.$$

Πολλαπλασιάζομεν αὐτοὺς καὶ προσθέτομεν τὴν μονάδα· ἔστω

$$A \times B \times \Gamma \times \ldots\ldots \times K + 1 = N.$$

τότε ὁ N ἢ εἶναι πρῶτος ἢ σύνθετος· καὶ ἂν μὲν εἶναι πρῶτος, θὰ εἶναι προφανῶς πρῶτος διάφορος τῶν

$$A, \quad B, \quad \Gamma, \ldots\ldots, \quad K$$

ἐὰν δὲ εἶναι σύνθετος, θὰ ἔχῃ (§ 126) ὡς δεύτερον διαιρέτην ἀριθμόν τινα πρῶτον, ὃν ἂς καλέσω δ. Οὗτος θὰ εἶναι διάφορος τῶν

$$A, \quad B, \quad \Gamma, \ldots\ldots, \quad K,$$

διότι, ἐὰν π.χ. εἴχομεν $B = \delta$, τότε ὁ δ θὰ διῄρει ὄχι μόνον τὸν N ἀλλὰ καὶ τὸν $A \times B \times \Gamma \times \ldots\ldots \times K$, ἑπομένως θὰ διῄρει καὶ τὴν διαφοράν των, ἤτοι τὴν μονάδα, ὅπερ ἄτοπον· ὥστε ὁσοιδήποτε πρῶτοι καὶ ἂν δοθῶσιν, εὑρίσκεται πάντοτε νέος πρῶτος· ἄρα·

Τὸ πλῆθος τῶν πρώτων ἀριθμῶν εἶναι ἄπειρον.

'Ασκήσεις.

167) Νὰ εὑρεθῶσιν ἀριθμητικὰ παραδείγματα ὅπου ὁ ἀριθμὸς N τῆς ἀνωτέρω προτάσεως νὰ εἶναι διαιρετὸς διὰ 3.

Νὰ σχηματισθῇ κανὼν πρὸς εὕρεσιν τοιούτων παραδειγμάτων.

168) Ἔστω π ἀριθμὸς πρῶτος· πῶς πρέπει νὰ ἐκλέγωμεν ἀριθμοὺς πρώτους τοιούτους ὥστε τὸ γινόμενον αὐτῶν αὐξανόμενον κατὰ μονάδα νὰ δίδῃ ἀριθμὸν διαιρετὸν ὑπὸ π;

Ἀνάλυσις συνθέτου ἀριθμοῦ εἰς τοὺς πρώτους αὐτοῦ παράγοντας.

133. —Ἔστω π.χ. ὁ 90. Ἐργαζόμενοι κατὰ τὸν τρόπον τὸν ὑποδεικνυόμενον ἀλλαχοῦ (§ 127) λαμβάνομεν

$$90 = 2 \times 45 = 2 \times 3 \times 15 = 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 2 \times 3^2 \times 5.$$

Διατάσσεται δὲ ἡ πρᾶξις ὡς ἑξῆς·

$$\begin{array}{r|l} 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Ἔστω ἐπίσης πρὸς ἀνάλυσιν ὁ ἀριθμὸς 924· ἐργαζόμενοι ὁμοίως εὑρίσκομεν

$$\begin{array}{r|l} 924 & 2 \\ 462 & 2 \\ 231 & 3 \\ 77 & 7 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

$$924 = 2^2 \times 3 \times 7 \times 11$$

καὶ γενικῶς.

Διὰ ν' ἀναλύσωμεν ἀριθμὸν σύνθετον εἰς τοὺς πρώτους αὐτοῦ παράγοντας, διαιροῦμεν αὐτὸν διὰ τοῦ δευτέρου του διαιρέτου (§ 126). Τὸ πηλίκον θεωροῦμεν ὡς νέον διαιρετέον, ἐργαζόμεθα δὲ ὅπως καὶ μὲ τὸν δοθέντα ἀριθμόν, καὶ ἐξακολουθοῦμεν οὕτω μέχρις οὗ εὕρωμεν πηλίκον τὴν μονάδα.

Ἡ διάταξις δὲ τῆς πράξεως γίνεται ὡς ἑξῆς: Πάντας τοὺς διαιρετέους γράφομεν κατὰ σειρὰν εἰς μίαν στήλην· δεξιὰ δὲ ταύτης γράφομεν τοὺς ἀντιστοίχους διαιρέτας· τὸ γινόμενον τῶν διαιρετῶν τούτων εἶναι γινόμενον πρώτων παραγόντων ἴσον πρὸς τὸν πρῶτον διαιρετέον.

Ἐνίοτε συμφέρει ν' ἀναλύωμεν ἀριθμόν τινα σύνθετον εἰς γινόμενα ἄλλων συνθέτων εὐκόλως ἀναλυομένων.

Π. χ. $72000 = 72 \times 1000 = 8 \times 9 \times 1000 =$

$$2^3 \times 3^2 \times 2^3 \times 5^3 = 2^6 \times 3^2 \times 5^3.$$

Ἐὰν ἀνελύετο ὁ 72000 εἰς πρώτους παράγοντας, κατὰ τὸν προηγούμενον κανόνα θὰ εὑρίσκομεν τὸ αὐτὸ γινόμενον, ὡς ἀμέσως ἕπεται ἐκ τῆς προτάσεως (§ 129)· καὶ γενικῶς.

Καθ' οἱονδήποτε τρόπον καὶ ἂν ἀναλύσωμεν ἀριθμὸν εἰς πρώτους παράγοντας πάντοτε τοὺς αὐτοὺς παράγοντας θὰ εὕρωμεν.

Ἐφαρμογαί.

Πολλαὶ ἰδιότητες τῶν ἀριθμῶν καθίστανται προφανεῖς ὅταν ἔχωμεν αὐτοὺς ἀναλελυμένους εἰς τοὺς πρώτους αὐτῶν παράγοντας.

Α΄. *Πολλαπλασιασμός*.

Τὸ γινόμενον ἀριθμῶν πρὸς ποῖον γινόμενον πρώτων παραγόντων ἰσοῦται;

134.—Ἔστω ὅτι

$$A = 2^3 \times 3^5 \times 7^2$$

καὶ

$$B = 2^2 \times 3^4 \times 7^2 \times 11$$

τότε,

$$A \times B = (2^3 \times 3^5 \times 7^2) \times (2^2 \times 3^4 \times 7^2 \times 11)$$

Ὅθεν (§ 45, δ΄.).

$$A \times B = 2^3 \times 3^5 \times 7^2 \times 2^2 \times 3^4 \times 7^2 \times 11 = 2^5 \times 3^9 \times 7^4 \times 11$$

(§ 45, α΄, 76 α΄.).

ἤτοι τὸ γινόμενον $A \times B$, ἰσοῦται πρὸς γινόμενον ἔχον πρώτους παράγοντας πάντας τοὺς πρώτους, τοὺς παρουσιαζομένους εἰς τὰ γινόμενα τὰ ἴσα πρὸς Α καὶ Β καὶ ἐκθέτην εἰς ἕκαστον ἐξ αὐτῶν τὸ ἄθροισμα τῶν ἀντιστοίχων ἐκθετῶν ἐν τοῖς Α καὶ Β.

Καὶ γενικῶς·

Τὸ γινόμενον ἀριθμῶν εἶναι γινόμενον περιέχον πάντας τοὺς πρώτους παράγοντας αὐτῶν καὶ ἕκαστον μὲ ἐκθέτην ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἀντιστοίχων ἐκθετῶν.

Πῶς ἀριθμὸς ἀναλελυμένος εἰς πρώτους παράγοντας ὑψοῦται εἰς τὴν δευτέραν, τρίτην, . . . νυοστὴν δύναμιν;

135.—Ἔστω.

$$A=2^3\times3^5\times7^2\times11$$

τότε (§ 130). $A^2=2^{3\times2}\times3^{5\times2}\times7^{2\times2}\times11^{1\times2}$

$$A^3=2^{3\times3}\times3^{5\times3}\times7^{2\times3}\times11^{1\times3}$$

. . . .

$$A^\nu=2^{3\times\nu}\times3^{5\times\nu}\times7^{2\times\nu}\times11^{1\times\nu}$$

ὅθεν:

Ἀριθμὸς ἀναλελυμένος εἰς πρώτους παράγοντας ὑψοῦται εἰς τὴν δευτέραν, τρίτην, . . . νυοστὴν δύναμιν ἐὰν οἱ ἐκθέται πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ 2, 3, . . . ν.

Πῶς διακρίνομεν ἂν ἀριθμός τις ἀναλελυμένος εἰς πρώτους παράγοντα; εἶναι τετράγωνον ἄλλου ἢ κύβος ἄλλου κ.τ.λ:

136.—α΄.) Ἔστω $A=2^6\times3^8\times7^4$,

ὅπου πάντες οἱ ἐκθέται εἶναι ἄρτιοι· τότε διαιροῦμεν αὐτοὺς διὰ 2 καὶ σχηματίζομεν τὸ γινόμενον $2^3\times3^4\times7^2$. τὸ τετράγωνον τούτου (§ 135) εἶναι ὁ δοθεὶς ἀριθμός.

β΄.) Ἔστω $A=2^7\times3^8\times7^4$,

ὅπου δὲν εἶναι πάντες οἱ ἐκθέται ἄρτιοι. Παρατηροῦμεν ὅτι, ἐὰν ὑπῆρχεν ἄλλος τις ἀριθμὸς B τοιοῦτος ὥστε $A=B^2$, τότε ἀναλύοντες εἰς πρώτους παράγοντας τὸν B καὶ ὑψοῦντες εἰς τὸ τετράγωνον θὰ ἐλαμβάνομεν (§ 135) ἐκθέτας ἀρτίους· ὥστε δὲν εἶναι δυνατὸν ὁ B^2 νὰ δώσῃ $2^7\times3^8\times7^4$. ἄρα:

Ἀριθμός τις εἶναι τέλειον τετράγωνον, ἐὰν οἱ ἐκθέται ἐν τῷ γινομένῳ τῶν πρώτων παραγόντων εἰς οὓς ἀναλύεται εἶναι ἄρτιοι καὶ τότε μόνον.

Ὁμοίως παρατηροῦμεν ὅτι·

Ἀριθμός τις εἶναι κύβος ἄλλου, ἐὰν οἱ ἐκθέται τῶν πρώτων παραγόντων του εἶναι διαιρετοὶ διὰ 3 καὶ τότε μόνον. Καὶ γενικῶς.

Ἀριθμός τις εἶναι νυοστὴ δύναμις ἄλλου, ἐὰν οἱ ἐκθέται τῶν πρώτων αὐτοῦ παραγόντων εἶναι διαιρετοὶ διὰ ν καὶ τότε μόνον.

Ἀσκήσεις.

169) Ἔστωσαν

$$A = 2^3 \times 3^5 \times 11, \ B = 2 \times 3^4, \ \Gamma = 2^2 \times 5 \times 23$$

Νὰ παρασταθῇ τὸ γινόμενον

$$A^2 \times B^5 \times \Gamma^3$$

ἀναλελυμένον εἰς τοὺς πρώτους αὐτοῦ παράγοντας.

170) Ἀριθμός τις εἶναι τετράγωνον ἄλλου, διαιρεῖται δὲ διὰ τοῦ 8. Νὰ δειχθῇ ὅτι θὰ διαιρῆται διὰ τοῦ 16. § (136)

171) Ἔστω ὅτι ἀριθμός τις Α εἶναι διαιρετὸς διὰ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ καὶ δὲν εἶναι διὰ τοῦ τετραγώνου του· τότε ὁ Α δὲν εἶναι τετράγωνον. (§ 136)

172) Ἐὰν ἀριθμός τις εἶναι διαφορὰ δύο τετραγώνων, θὰ εἶναι ἢ περιττὸς ἢ πολλαπλάσιον τοῦ 4 (ἄσκ. 80).

173) Ἐὰν ἀριθμός τις Α εἶναι τετράγωνον ἄλλου, τότε ὁ ἀριθμὸς $A \times \Pi$. ὅπου Π εἶναι οἱοσδήποτε πρῶτος, δὲν εἶναι τετράγωνον ἄλλου. (§ 134, 136)

Β΄. Ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη ἵνα ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς δι' ἄλλου.

Πῶς διακρίνομεν ἀμέσως, ὅταν ἔχωμεν δύο ἀριθμοὺς ἀναλελυμένους εἰς πρώτους παράγοντας, ἂν ὁ εἷς εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ ἄλλου;

137.—Ἔστω

$$A = 2^5 \times 3^4 \times 7^2 \times 11 \text{ καὶ } B = 2^3 \times 3^4 \times 11$$

Εἰς τὸ παράδειγμα τοῦτο οἱ πρῶτοι παράγοντες τοῦ Β ἀποτελοῦσιν ἓν μέρος τῶν πρώτων παραγόντων τοῦ Α· οἱ ἐπίλοιποι, οἵτινες εἶναι παράγοντες τοῦ Α χωρὶς νὰ εἶναι τοῦ Β, σχηματίζουσιν ἀριθμόν τινα Π καὶ ἔχομεν·

$$A = (2^3 \times 3^4 \times 11) \times (2^2 \times 7^2) = B \times \Pi,$$

Ὥστε, ἐὰν οἱ πρῶτοι παράγοντες τοῦ Β εἶναι καὶ πρῶτοι παράγοντες τοῦ Α καὶ μὲ ἐκθέτην οὐχὶ μικρότερον, ὁ Α διαιρεῖται διὰ τοῦ Β.

Ἔστω

$$A = 2^5 \times 3^4 \times 7^2 \times 11 \text{ καὶ } B = 2 \times 3 \times 7^2 \times 13.$$

Ἐὰν ὁ A διῃρεῖτο διὰ τοῦ B, θὰ εἴχομεν·

$$2^5 \times 3^4 \times 7^2 \times 11 = 2 \times 3 \times 7^2 \times 13 \times \Pi.$$

Ἀπὸ οἱουσδήποτε πρώτους παράγοντας καὶ ἂν ἀποτελῆται ὁ Π, θὰ ἔχωμεν εἰς τὸ δεύτερον γινόμενον τὸν παράγοντα 13 μὴ περιεχόμενον εἰς τὸ πρῶτον· ἑπομένως (§ 129) ἡ ἰσότης αὕτη δὲν εἶναι δυνατή· λοιπὸν ὁ A δὲν διαιρεῖται διὰ τοῦ B. Ἄρα.

Ἵνα ἀριθμός τις A διαιρῆται δι' ἄλλου B, πρέπει νὰ περιέχῃ πάντας τοὺς πρώτους παράγοντας τοῦ B καὶ μὲ ἐκθέτην οὐχὶ μικρότερον· τοῦτο δὲ καὶ ἀρκεῖ.

Κατὰ ταῦτα ὁ ἀριθμὸς $3^5 \times 7 \times 13^4$ διαιρεῖται διὰ τοῦ $3^4 \times 7 \times 13^2$, δὲν διαιρεῖται δὲ διὰ τοῦ 3^6· ἐπίσης ὁ $2^7 \times 3 \times 5^8 \times 17^2$ διαιρεῖται διὰ τοῦ $2^5 \times 3 \times 5^2 \times 17$, ἀλλὰ δὲν διαιρεῖται διὰ τοῦ 3^2.

138.— Ἔστω ὅτι ἀριθμός τις A δὲν διαιρεῖται δι' οὐδενὸς ἐκ τῶν πρώτων, ὧν τὰ τετράγωνα περιέχει· ὅπως π. χ. ὁ 43· οὗτος περιέχει τοὺς 2^2, 3^2, 5^2 δὲν διαιρεῖται διὰ 2, οὔτε διὰ 3, οὔτε διὰ 5.

Ἐὰν ὁ A ἦτο σύνθετος θὰ ἀνελύετο εἰς γινόμενον παραγόντων πρώτων (§ 127), ἑκάστου τῶν ὁποίων τὸ τετράγωνον θὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ A. Ἤτοι, ἐὰν

$$A = \alpha \times \beta \times \ldots$$

θὰ ἔχωμεν κατὰ τὴν ὑπόθεσιν $\alpha^2 > A$, $\beta^2 > A$·
καὶ ἑπομένως

$$\alpha^2 \times \beta^2 > A \times A$$

Ἀλλ' ἡ ἀνισότης αὐτὴ δὲν δύναται νὰ συνυπάρχῃ μὲ τὴν ἰσότητα

$$A = \alpha \times \beta \times \ldots$$

ὅθεν ὁ A εἶναι πρῶτος·

Ἤτοι

Ἐὰν ἀριθμὸς δὲν διαιρεῖται δι' οὐδενὸς ἐκ τῶν πρώτων, ὧν τὰ τετράγωνα περιέχει εἶναι πρῶτος.

Ἀσκήσεις.

174) Τὸ ὑπόλοιπον διαιρέσεως περιττοῦ δι' ἀρτίου οὐδέποτε εἶναι μηδὲν (§ 137)

175) $A = 2^7 \times 3^5 \times 5^4 \times 7$, $B = 2^4 \times 3^2 \times 5^2 \times \beta^\lambda$

ὁ β εἶναι πρῶτος διάφορος τῶν 2, 3, 5.

Νὰ εὑρεθῶσιν αἱ τιμαὶ τῶν β, λ, ἵνα ἡ διαίρεσις A : B εἶναι τελεία.

176) Γνωστοῦ ὄντος ὅτι ὁ ἀριθμὸς

$$2 \times 3 \times 5 \times 7 + 1$$

εἶναι μικρότερος τοῦ 17^2 καὶ ὅτι δὲν διαιρεῖται διὰ 11 καὶ διὰ 13, νὰ δειχθῇ ὅτι οὗτος εἶναι πρῶτος (§ 132).

177) Πῶς εὑρίσκονται πάντες οἱ διαιρέται δεδομένων ἀριθμῶν:

Ἔστω
$$A = \alpha^\lambda \times \beta^\mu \times \gamma^\nu,$$

ὅπου α, β, γ εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι· τότε ἂς λάβωμεν ἕνα προσθετέον τοῦ ἀθροίσματος

$$1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^\lambda,$$

ἕνα προσθετέον τοῦ ἀθροίσματος

$$1 + \beta + \beta^2 + \dots + \beta^\mu$$

καὶ ἕνα προσθετέον τοῦ ἀθροίσματος

$$1 + \gamma + \gamma^2 + \dots + \gamma^\nu$$

καὶ ἂς πολλαπλασιάσωμεν αὐτούς· θὰ ἔχωμεν ἕνα διαιρέτην τοῦ A. καὶ ἀντιστρόφως πᾶς διαιρέτης τοῦ A περιλαμβάνεται εἰς τοὺς οὕτω σχηματιζομένους. (§ 137).

Ἐκ τοῦ τρόπου καθ' ὃν ἐνταῦθα ἐσχηματίσαμεν τοὺς διαιρέτας δυνάμεθα νὰ συμπεράνωμεν ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν διαιρετῶν

εἶναι
$$(\lambda + 1).(\mu + 1).(\nu + 1),$$

καὶ γενικῶς ὁ ἀριθμὸς τῶν διαιρετῶν ἑνὸς ἀριθμοῦ ἀναλελυμένου εἰς πρώτους παράγοντας ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῷ σχηματιζομένῳ μὲ παράγοντας τοὺς ἐκθέτας ηὐξημένους κατὰ μονάδα·

π. χ.· ἐὰν
$$A = 2^3 \times 3^2 \times 5^7 \times 11,$$

τότε ὁ ἀριθμὸς τῶν διαιρετῶν τοῦ Α θὰ εἶναι

$$(3+1)\times(2+1)\times(7+1)\times(1+1)=192.$$

178) Νὰ εὑρεθῶσιν ἀριθμοὶ μὲ 12 διαιρέτας. (Ἄσκ. 177).

179) Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμὸς διαιρετὸς διὰ 7, 11, 13 καὶ ἔχων 12 διαιρέτας. (Ἄσκ. 177).

180) Ποῖος εἶναι ὁ μικρότερος ἐκ τῶν ἀριθμῶν τῶν ἐχόντων 6 διαιρέτας; (Ἄσκ. 177).

181) Ἐὰν ἀριθμός τις εἶναι τετράγωνον ἄλλου, ἔχει περιττὸν πλῆθος διαιρετῶν. (Ἄσκ. 177).

182) Τὸ γινόμενον $\alpha\times(\alpha^2+20)$ διαιρεῖται διὰ τοῦ 8, ἐὰν ὁ α εἶναι ἄρτιος (§ 137).

183) Τὸ γινόμενον τεσσάρων διαδοχικῶν ἀριθμῶν εἶναι διαιρετὸν διὰ 24. (§ 122 § 137).

Εὕρεσις τοῦ μ. κ. δ. καὶ τοῦ ε. κ. π. ἀριθμῶν ἀναλελυμένων εἰς πρώτους παράγοντας.

139.—Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ Α, Β, Γ, ὅπου

$$A=2^3\times3^2\times5\times7,\quad B=2^2\times3^4\times5^2\times11$$

$$\text{καὶ } \Gamma=2\times3^5\times5\times11^2$$

Ἔστω κ ὁ τυχὼν κ. δ. αὐτῶν· πρέπει οἱ πρῶτοι παράγοντες τοῦ κ νὰ περιέχωνται καὶ εἰς τοὺς τρεῖς ἀριθμοὺς (§ 137)· ἄρα δὲν δύναται νὰ περιέχῃ ὁ κ πρώτους παράγοντας διαφόρους τῶν 2, 3 καὶ 5 οἵτινες εἶναι κοινοί· ἤτοι ὁ κ θὰ εἶναι τῆς μορφῆς

$$2^\lambda\times3^\mu\times5^\nu,$$

ὅπου ὁ λ θὰ εἶναι ἢ 0 ἢ 1 ὁ μ ἢ 0 ἢ 1 ἢ 2 καὶ ὁ ν ἢ 0 ἢ 1.

Καὶ ἀντιστρόφως· Πᾶς ἀριθμὸς τῆς μορφῆς

$$2^\lambda\times3^\mu\times5^\nu$$

(ὅπου οἱ λ, ν δὲν ὑπερβαίνουσι τὴν μονάδα καὶ ὁ μ τὸν 2) θὰ εἶναι κ. δ. τῶν Α, Β, Γ (§ 137). Ὅθεν ὁ μ. κ. δ. θὰ εἶναι

$$2^\lambda\times3^\mu\times5^\nu \text{ ὅπου } \lambda=1,\ \mu=2,\ \nu=1\cdot \qquad \text{ἤτοι·}$$

Ὁ μ. κ. δ. ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν ἀναλελυμένων εἰς πρώτους παράγοντας ἰσοῦται πρὸς γινόμενον περιέχον πάντας τοὺς κοινοὺς παράγοντας αὐτῶν ἕκαστον μὲ τὸν ἐλάχιστον ἐκθέτην.

140.—Ἂς ζητήσωμεν τὸ ε. κ. π. τῶν ἰδίων ἀριθμῶν. Ἔστω

Π τὸ τυχὸν κ. π. αὐτῶν· τὸ Π θὰ περιέχῃ τὸ 2^3, διότι ἄλλως δὲν θὰ ἦτο διαιρετὸν διὰ τοῦ Α· ὁμοίως θὰ περιέχῃ τὸ 3^5, τὸ 5^2, τὸ 7 καὶ τὸ 11^2 § 137), ἤτοι θὰ εἶναι τῆς μορφῆς

$$\Pi = 2^{\lambda} \times 3^{\mu} \times 5^{\nu} \times 7^{\rho} \times 11^{\kappa} \times \ldots \quad \text{ὅπου}$$

(1) $$\lambda \geqq 3, \ \mu \geqq 5, \ \nu \geqq 2, \ \rho \geqq 1, \ \kappa \geqq 2$$

Καὶ ἀντιστρόφως·

Πᾶς ἀριθμὸς τῆς μορφῆς

$$2^{\lambda} \times 3^{\mu} \times 5^{\nu} \times 7^{\rho} \times 11^{\kappa} \times \ldots$$

(ὅπου λ, μ, ν, ρ, κ ἔχουσι τιμὰς ὑπαγομένας εἰς τὰς σχέσεις (1)) εἶναι κ. π. τῶν ἀριθμῶν Α, Β, Γ· ὥστε τὸ ε. κ. π θὰ εἶναι

$$2^3 \times 3^5 \times 5^2 \times 7 \times 11^2 \cdot \quad \text{ἄρα·}$$

Τὸ ε. κ. π. ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν ἰσοῦται πρὸς γινόμενον περιέχον πάντας τοὺς πρώτους αὐτῶν παράγοντας κοινοὺς καὶ μὴ κοινοὺς καὶ ἕκαστον μὲ τὸν μεγαλύτερον ἐκθέτην.

Ἀσκήσεις.

Δι' ἀναλύσεως εἰς τοὺς πρώτους παράγοντας.

184) Νὰ εὑρεθῇ ὁ μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν 36, 48, 108, τῶν 15, 612, 351 καὶ τῶν 68, 136, 255.

185) Ἐπίσης τῶν 21, 147, 252, τῶν 63, 315, 567, τῶν 56, 411, 602 καὶ τῶν 8496, 3744, 3696 καὶ 3720.

186) Ἐπίσης τῶν 15, 135, 180, τῶν 116, 281, 435, τῶν 140, 175, 315, τῶν 420, 580, 160, 870 καὶ τῶν 690, 315, 720, 1012.

187) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ε. κ. π. τῶν ἀριθμῶν 15864 καὶ 21489, τῶν 99, 66, 462, 539, 1089, τῶν 225, 255, 289, 1023, 4095, τῶν 732, 428, 144, 86, τῶν 540, 270, 45, 15 καὶ τῶν 8316, 3414, 2366, 3332.

188) Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοὶ ἔχοντες μ. κ. δ. τὸν 12 καὶ ε. κ. π. τὸν 180.

Γενίκευσις.

Παρατηροῦμεν πρὸς τοῦτο ὅτι, ἐὰν καλέσωμεν α καὶ β δύο τοιούτους ἀριθμούς, ἔχομεν (§ 123)

$$\alpha \times \beta = 12 \times 180$$

καὶ $\alpha = 12 \times \Pi$, $\beta = 12 \times \Pi'$ ὅπου οἱ Π καὶ Π′ εἶνε πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους (§ 108).

Διὰ τῆς ἀναλύσεως εἰς πρώτους παράγοντας νὰ δειχθῇ ὅτι

189) α′. Πᾶν κ. π. ἀριθμῶν εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ ε. κ. π. αὐτῶν.

190) β′. Τὸ ε. κ. π. ἀριθμῶν πρώτων πρὸς ἀλλήλους ἀνὰ δύο εἶναι τὸ γινόμενον αὐτῶν (§ 140).

191) γ′. Τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ μ. κ. δ. ἐπὶ τὸ ε. κ. π. αὐτῶν καὶ γενικῶς ν' ἀποδειχθῶσιν αἱ ἰδιότητες τοῦ μ. κ. δ. καὶ ε. κ. π. (§ 105, 106, 107, 108, 109).

192) Ἐκ τοῦ μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν Α καὶ Β νὰ εὑρεθῇ ὁ μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν A^3 καὶ B^3 (§ 135 § 139).

ΒΙΒΛΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄

ΚΛΑΣΜΑΤΑ

Ὁρισμοί.

141.—Ἂς παραστήσωμεν ἓν ὁλόκληρον μῆλον διὰ τῆς μονάδος· ἐὰν κόψωμεν αὐτὸ εἰς δύο ἴσα μέρη, ἕκαστον ἐξ αὐτῶν καλεῖται ***ἓν δεύτερον*** τοῦ μήλου ἢ καὶ ***ἥμισυ*** τοῦ μήλου καὶ παρίσταται διὰ τοῦ $\frac{1}{2}$· ἐὰν δὲ κόψωμεν αὐτὸ εἰς τρία ἴσα μέρη, ἕκαστον ἐξ αὐτῶν καλεῖται ***ἓν τρίτον*** τοῦ μήλου καὶ παρίσταται διὰ τοῦ $\frac{1}{3}$, ἐὰν εἰς τέσσαρα ἴσα μέρη, ἕκαστον ἐξ αὐτῶν καλεῖται ***ἓν τέταρτον*** τοῦ μήλου $\left(\frac{1}{4}\right)$ κ.ο.κ.

Καθ᾽ ὅμοιον τρόπον ἂν παραστήσωμεν διὰ τῆς μονάδος ἕνα πῆχυν καὶ χωρίσωμεν τοῦτον εἰς δύο, τρία, τέσσαρα κ.τ.λ. ἴσα μέρη, λαμβάνομεν τὸ ἥμισυ τοῦ πήχεως $\left(\frac{1}{2}\right)$, τὸ ἓν τρίτον τοῦ πήχεως $\left(\frac{1}{3}\right)$, τὸ ἓν τέταρτον τοῦ πήχεως $\left(\frac{1}{4}\right)$ κ.τ.λ. καὶ γενικῶς ἐὰν ἓν πρᾶγμα παραστήσωμεν διὰ τῆς μονάδος καὶ μοιράσωμεν αὐτὸ εἰς δύο ἴσα μέρη, ἕκαστον ἐξ αὐτῶν καλεῖται ἓν δεύτερον ἢ καὶ ἥμισυ αὐτοῦ τοῦ πράγματος $\left(\frac{1}{2}\right)$, ἐὰν εἰς τρία ἴσα μέρη ἕκαστον ἐξ αὐτῶν καλεῖται ἓν τρίτον τοῦ πράγματος αὐτοῦ $\left(\frac{1}{3}\right)$ κ.τ.λ.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ὁρισμῶν προκύπτει ὅτι:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=1$$

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1$$

. . . .

Δηλ. παρεδέχθημεν ὅτι τὸ $\frac{1}{2}$ εἶναι ἀριθμὸς ὅστις ἐπαναλαμβανόμενος δὶς δίδει τὴν μονάδα, τὸ $\frac{1}{3}$ εἶναι ἀριθμὸς ὅστις ἐπαναλαμβανόμενος τρὶς δίδει τὴν μονάδα κ.ο.κ. Καὶ γενικῶς·

Παριστῶμεν διὰ τοῦ $\frac{1}{\mu}$ τὸν ἀριθμὸν ὅστις παραδεχόμεθα ὅτι ἐπαναλαμβανόμενος μ φορὰς δίδει τὴν μονάδα 1.

Οἱ ἀριθμοὶ

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ldots\ldots,\ \frac{1}{\mu}\ldots\ldots$$

καλοῦνται κλασματικαὶ μονάδες· ἡ δὲ μονὰς 1 λέγεται ἀκεραία μονάς. Αἱ κλασματικαὶ αὗται μονάδες καὶ οἱ δι' ἐπαναλήψεως τούτων γινόμενοι ἀριθμοὶ λέγονται κλασματικοὶ ἀριθμοὶ ἢ καὶ κλάσματα π. χ. ἡ ἐπανάληψις τοῦ $\frac{1}{5}$ τετράκις δίδει τὸ κλάσμα τέσσαρα πέμπτα, ὅπερ σημειοῦται $\frac{4}{5}$. Γενικῶς τὸ σύμβολον $\frac{\alpha}{\beta}$ θὰ δηλοῖ ὅτι τὴν κλασματικὴν μονάδα $\frac{1}{\beta}$ ἐπανελάβομεν α φοράς· καὶ ὁ α καλεῖται ἀριθμητής, ὁ δὲ β παρονομαστὴς τοῦ κλάσματος.

Ἵνα ἀπαγγείλωμεν τὸ κλάσμα, μεταχειριζόμεθα διὰ μὲν τὸν ἀριθμητὴν τὰ ὀνόματα τῶν ἀπολύτων ἀριθμητικῶν, διὰ δὲ τὸν παρονομαστὴν τὰ τῶν τακτικῶν. Ὁ ἀριθμητὴς α δηλοῖ τὸ πλῆθος τῶν ληφθεισῶν κλασματικῶν μονάδων, ἐνῷ ὁ παρονομαστὴς β δεικνύει ποία κλασματικὴ μονὰς ἐπαναμβάνεται· ἤτοι· ἐὰν ἐπαναλάβωμεν β φορὰς τὴν ληφθεῖσαν κλασματικὴν μονάδα, θὰ ἔχωμεν τὴν ἀκεραίαν.

Ὅροι κλάσματος λέγονται ὁ ἀριθμητὴς αὐτοῦ καὶ ὁ παρονομαστής.

Ἐὰν κλάσμα τι ἔχῃ ὅρους ἴσους, ὅπως $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{3}\ldots$, εἶναι προφανῶς ἴσον τῇ ἀκεραίᾳ μονάδι. Ἐπεκτείνοντες τοὺς ὁρισμοὺς ἰσότητος καὶ ἀνισότητος (§ 23) ἐπὶ τῶν κλασμάτων τῶν γινομένων δι' ἐπαναλήψεως τῆς αὐτῆς κλασματικῆς μονάδος ἔχομεν ὅτι κλάσμα εἶναι μεγαλύτερον τῆς ἀκεραίας μονάδος, ὅταν ὁ ἀριθμητὴς εἶναι μεγαλύτερος τοῦ παρονομαστοῦ.

Τροπὴ ἀκεραίου εἰς κλάσμα.

142.—Ἔχομεν τὸν ἀκέραιον 4 νὰ τρέψωμεν εἰς ἕβδομα. Ἑκάστη ἀκεραία μονὰς ἰσοῦται (§ 141) πρὸς τὸ $\frac{1}{7}$ ἑπτάκις λαμβανόμενον· ὅθεν αἱ 4 ἀκέραιαι μονάδες ἰσοῦνται πρὸς τὸ 28πλάσιον τοῦ $\frac{1}{7}$ ·ἤτοι

$$4=\frac{4\times 7}{7}$$

ὅθεν·

Πᾶς ἀκέραιος ἰσοῦται μὲ κλάσμα ἔχον παρονομαστὴν δοθέντα ἀριθμόν, ἀριθμητὴν δὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἑαυτοῦ του ἐπὶ τὸν δοθέντα.

Περὶ μικτῶν ἀριθμῶν.

143.—Ὁ $3\frac{4}{5}$ σύγκειται ἐξ ἀκεραίου καὶ κλάσματος· καλεῖται δὲ μικτός· ὅπως ἐπίσης ὁ $7\frac{2}{9}$ καὶ γενικῶς.

Μικτὸς ἀριθμὸς λέγεται ὁ συγκείμενος ἐξ ἀκεραίου καὶ κλάσματος.

Ἔστω ὁ μικτὸς $4\frac{2}{7}$· ἐπειδὴ $4=\frac{4\times 7}{7}$ ἔχομεν·

$$4\frac{2}{7}=\frac{4\times 7+2}{7}$$

ὅθεν·

Μικτὸς τρέπεται εἰς κλάσμα, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ὁ ἀκέραιος ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν καὶ προστεθῇ εἰς τὸ γινόμενον ὁ ἀριθμητής ὑπὸ τὸ ἄθροισμα δὲ αὐτὸ γραφῇ ὁ αὐτὸς παρονομαστής.

Ἐξαγωγὴ τῶν ἀκεραίων μονάδων τοῦ κλάσματος.

144.—Ἔστω τὸ κλάσμα $\frac{35}{8}$ τοῦτο ἰσοῦται πρὸς

$$\frac{8+8+8+8+3}{8}$$

ἀλλὰ τὸ αὐτὸ ἄθροισμα θὰ εἶχον, ἐὰν ἐπανελάμβανον τὸ $\frac{1}{8}$ πρῶτον 8 φοράς, ὁπότε θὰ εἶχον τὴν ἀκεραίαν μονάδα, ἔπειτα ἄλλας 8 κ. ο. κ. ὁπότε θὰ εὕρισκον $4\frac{3}{8}$· προφανῶς ὁ ἀκέραιος 4 εἶναι ἀκέραιον πηλίκον τῆς διαιρέσεως 35 : 8, ὁ δὲ ἀριθμητὴς 3 τὸ ὑπόλοιπον ὅθεν:

Διὰ νὰ ἐξαγάγωμεν τὰς ἀκεραίας μονάδας κλάσματος μείζονος τῆς μονάδος, διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητὴν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ αὐτοῦ. Τὸ πηλίκον δηλοῖ τὸν μεγαλύτερον ἀκέραιον τὸν περιεχόμενον ἐν τῷ κλάσματι, τὸ δὲ ὑπόλοιπον λαμβάνομεν ὡς ἀριθμητὴν καὶ τὸν διαιρέτην ὡς παρονομαστήν, ἵνα σχηματίσωμεν τὸ ἀπομένον κλάσμα.

Ἐὰν τὸ ὑπόλοιπον εἶναι 0, τὸ δοθὲν κλάσμα ἰσοῦται πρὸς ἀκέραιον.

Ἀσκήσεις.

193). Νὰ τραπῶσιν εἰς κλάσματα οἱ μικτοὶ

$$15\frac{2}{3},\quad 113\frac{4}{7},\quad 1043\frac{21}{31},\quad 15433\frac{25}{33},$$

$$121045\frac{106}{116},\quad 18300457\frac{1304}{2081}$$

194). Ὁμοίως οἱ μικτοὶ

$$14\frac{13}{15},\quad 2003\frac{1}{7},\quad 57\frac{31}{43},$$

$$13\frac{83}{84},\quad 106\frac{119}{851},\quad 17\frac{2605}{2859}$$

195). Νὰ ἐξαχθῶσιν αἱ ἀκέραιαι μονάδες αἱ περιεχόμεναι εἰς τὰ κλάσματα

$$\frac{41}{9},\quad \frac{311}{12},\quad \frac{767}{224},\quad \frac{472694}{1101},$$

$$\frac{1218}{11},\quad \frac{315489}{187}$$

196). Ποσάκις τὸ $\frac{1}{9}$ περιέχεται εἰς τὸ 6;

Ἰδιότητες τῶν κλασμάτων.

Πόσον εἶναι τὸ γινόμενον κλάσματός τινος ἐπὶ τὸν παρονομαστήν του;

143.—Ἔστω τὸ κλάσμα $\frac{2}{5}$· τοῦτο κατὰ τὸν ὁρισμὸν (§ 141) εἶναι διπλάσιον τοῦ $\frac{1}{5}$· ἂς λάβω 5 φορὰς τὸ $\frac{2}{5}$· ἐπαναλαμβάνω πρῶτον 5 φορὰς τὸ $\frac{1}{5}$· ἀλλὰ πεντάκις ἐπαναλαμβανόμενον τὸ $\frac{1}{5}$ δίδει τὴν μονάδα· ὥστε 2×5 φορὰς θὰ δώσῃ 2 ἀκεραίας μονάδας· ὅθεν

$$\frac{2}{5} \times 5 = 2 \cdot$$

ἤτοι·

Πᾶν κλάσμα πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸν παρονομαστήν του δίδει γινόμενον τὸν ἀριθμητήν του·

Ἄρα·

Πᾶν κλάσμα δυνάμεθα νὰ θεωρῶμεν ὡς πηλίκον τοῦ ἀριθμητοῦ του διὰ τοῦ παρονομαστοῦ του. (§ 56).

Καὶ οὕτως ἡ διαίρεσις δύο οἱωνδήποτε ἀκεραίων γίνεται τελεία, ὅταν, διὰ τὸ πηλίκον ἐπιτραπῇ νὰ μεταχειρισθῶμεν καὶ κλασματικοὺς ἀριθμούς· π. χ. τῆς διαιρέσεως 12 : 5 πηλίκον εἶναι

$$\text{τὸ } \frac{12}{5} \text{ ἤτοι τὸ } 2\,\frac{2}{5}\cdot$$

ὁμοίως πηλίκον τῆς διαιρέσεως 2 : 3 εἶναι τὸ $\frac{2}{3}$·

Τίνα μεταβολὴν πάσχει ἓν κλάσμα, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἐπί τινα ἀκέραιον τὸν ἀριθμητήν του ἢ διαιρέσωμεν αὐτὸν διά τινος ἀκεραίου.

146. Τὸ $\frac{3}{4}$ σημαίνει νὰ ἐπαναληφθῇ τρεῖς φορὰς τὸ $\frac{1}{4}$ (§ 141)· Τὸ $\frac{3 \times 5}{4}$ σημαίνει νὰ ἐπαναλάβωμεν 3×5 φορὰς τὸ $\frac{1}{4}$· εὑρίσκομεν προφανῶς ἀριθμὸν πενταπλάσιον τοῦ προηγουμένου· ἢ καὶ ἀντιστρόφως· τὸ $\frac{3}{4}$ εἶναι πεντάκις μικρότερον τοῦ $\frac{3 \times 5}{4}$· ὅθεν·

Ἐὰν ἀριθμητὴς κλάσματος πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ ἀκέραιον, τὸ κλάσμα πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀκέραιον; ἐὰν δὲ διαιρεθῇ δι᾽ ἀκεραίου τὸ κλάσμα διαιρεῖται διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀκεραίου.

Ποίαν μεταβολὴν πάσχει ἓν κλάσμα, ὅταν πολλαπλασιάσωμεν τὸν παρονομαστήν του ἐπί τινα ἀκέραιον, ἢ διαιρέσωμεν αὐτὸν διά τινος ἀκεραίου;

147. Ἔστωσαν τὰ κλάσματα $\frac{5}{6}$ καὶ $\frac{5}{18}$· εἰς μὲν τὸ πρῶτον ἔχομεν τὸ $\frac{1}{6}$ νὰ ἐπαναλάβωμεν πεντάκις, εἰς δὲ τὸ δεύτερον ἔχομεν τὸ $\frac{1}{18}$ νὰ ἐπαναλάβωμεν πεντάκις. Ἐπειδὴ ἡ κλασματικὴ μονὰς $\frac{1}{18}$ εἶναι τρὶς μικροτέρα τῆς κλασματικῆς μονάδος $\frac{1}{6}$ (ὡς φαίνεται, ἐὰν παρατηρήσωμεν ὅτι τὸ $\frac{1}{18}$ ἐπαναλαμβανόμενον 18 φορὰς δίδει τὴν μονάδα, ἐνῷ τὸ $\frac{1}{6}$ ἐπαναλαμβανόμενον 6 φορὰς δίδει τὴν μονάδα) τὸ δεύτερον κλάσμα $\frac{5}{18}$ θὰ εἶναι τρὶς μικρότερον τοῦ πρώτου $\frac{5}{6}$ ἢ καὶ ἀντιστρόφως· τὸ πρῶτον θὰ εἶναι τρὶς μεγαλύτερον τοῦ δευτέρου· ἤτοι·

Ἐὰν ὁ παρονομαστὴς κλάσματος πολλαπλασιασθῇ ἐπί τινα ἀκέραιον, τὸ κλάσμα διαιρεῖται διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀκεραίου, ἐὰν δὲ ὁ παρονομαστὴς διαιρεθῇ δι᾽ ἑνὸς ἀκεραίου, τὸ κλάσμα πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀκέραιον.

Μεταβάλλεται ἡ ἀξία ἑνὸς κλάσματος, ὅταν πολλαπλασιάσωμεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους του ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν;

148.—Ἔστω τὸ κλάσμα $\frac{5}{9}$ καὶ ρ τυχὼν ἀκέραιος· τότε τὸ

$$\frac{5 \times \rho}{9} \text{ ἰσοῦται πρὸς } \frac{5}{9} \times \rho \qquad (\S\ 146)$$

Ἀφ' ἑτέρου ἔχομεν (§ 147)

$$\frac{5 \times \rho}{9 \times \rho} = \frac{5 \times \rho}{9} : \rho = \left(\frac{5}{9} \times \rho\right) : \rho = \frac{5}{9}$$

ὅθεν.

Ἡ ἀξία ἑνὸς κλάσματος δὲν ἀλλάσσει, ὅταν πολλαπλασιάσωμεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

ἐπίσης·

Ἡ ἀξία ἑνὸς κλάσματος δὲν ἀλλάσσει, ὅταν διαιρέσωμεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.

Π. χ. τά κλάσματα

$$\frac{12}{30}, \quad \frac{6}{15}, \quad \frac{2}{5}$$

ἔχουσι τὴν αὐτὴν ἀξίαν.

Ἀσκήσεις.

197) $\frac{3}{4}$ τοῦ πήχεως διενεμήθησαν ἐξ ἴσου εἰς 8 ἀνθρώπους. πόσον θὰ λάβῃ ἕκαστος;

198) $7\frac{2}{5}$ τοῦ πήχεως διενεμήθησαν εἰς δύο ἀνθρώπους· πόσον ἔλαβεν ἕκαστος;

199) Νὰ εὑρεθῶσι κλάσματα ἴσα πρὸς τὰ ἡμίση τῶν

$$\frac{7}{8}, \quad \frac{4}{5}, \quad \frac{1}{6}.$$

200) Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον καὶ τὸ ἐλάχιστον τῶν κλασμάτων

$$\frac{2}{3}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{4}{5}.$$

201) Θεωροῦντες τὴν διαίρεσιν τῶν δύο ἀκεραίων πάντοτε ὡς τελείαν (§ 145) ἔχομεν ὅτι: τὸ πηλίκον δύο ἀκεραίων μένει τὸ

αὐτό, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν διαιρετέον καὶ διαιρέτην ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

Ἁπλοποίησις τῶν κλασμάτων.

149.—Λέγομεν ὅτι ἁπλοποιοῦμεν ἓν κλάσμα, ὅταν εὑρίσκωμεν ἄλλο ἔχον τὴν αὐτὴν ἀξίαν ἀλλ' ὅρους μικροτέρους. Εἴδομεν ὅτι

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha\times\rho}{\beta\times\rho} \qquad (\S\ 148).$$

καὶ ἐπειδὴ ὡς πολλαπλασιαστὴν ρ δυνάμεθα νὰ λάβωμεν οἱονδήποτε ἀκέραιον, ἕπεται ὅτι δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν ἀπειρίαν κλασμάτων ἰσοδυνάμων τῷ $\frac{\alpha}{\beta}$ μὲ ἀριθμητὰς καὶ παρονομαστὰς διαφόρους τῶν ἀρχικῶν.

Ἀντιστρόφως· ἐὰν διαιρέσωμεν τοὺς ὅρους ἑνὸς κλάσματος δι' ἑνὸς ἀκεραίου (κοινοῦ διαιρέτου τῶν ὅρων) λαμβάνομεν κλάσμα ἰσοδύναμον πρὸς αὐτὸ μὲ μικροτέρους ὅρους (§ 148)· ὥστε, ἐὰν δοθῇ κλάσμα μὲ ὅρους μὴ πρώτους πρὸς ἀλλήλους, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἄλλο ἰσοδύναμον πρὸς αὐτὸ μὲ ὅρους πρώτους πρὸς ἀλλήλους· ἀρκεῖ πρὸς τοῦτο προφανῶς νὰ διαιρέσωμεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους διὰ τοῦ μ. κ. δ. αὐτῶν (§ 108).

π. χ. $$\frac{48}{108}=\frac{4}{9}$$

Προκύπτει ἤδη τὸ ἑξῆς ἐρώτημα· εἶναι δυνατὸν νὰ εὕρωμεν ἄλλο κλάσμα ἰσοδύναμον πρὸς τὸ $\frac{4}{9}$ καὶ μὲ ὅρους μικροτέρους τῶν ὅρων αὐτοῦ;

150.—Ἔστω $\frac{\alpha}{\beta}$ τυχὸν κλάσμα ἐκ τῶν ἴσων ἐν γένει τῷ $\frac{4}{9}$ ἤτοι·

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{4}{9}$$

Πολλαπλασιάζω ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ πρώτου ἐπὶ 9 καὶ τοῦ δευτέρου ἐπὶ β· θὰ ἔχω (§ 148)

$$\frac{\alpha \times 9}{\beta \times 9} = \frac{4 \times \beta}{9 \times \beta}$$

τὰ κλάσματα ταῦτα ἔχουσι τοὺς αὐτοὺς παρονομαστάς, ἄρα (ὡς ἴσα) θὰ ἔχωσι καὶ τοὺς αὐτοὺς ἀριθμητὰς (§ 141), ἤτοι·

$$(1) \qquad \alpha \times 9 = 4 \times \beta$$

Ὁ ἀριθμὸς $\alpha \times 9$ ὡς ἴσος τῷ $4 \times \beta$ εἶναι διαιρετὸς διὰ 4 ἀφ' ἑτέρου εἶναι διαιρετὸς καὶ διὰ 9· ἀλλ' οἱ ἀριθμοὶ 4 καὶ 9 εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· ὥστε (§ 122) ὁ $\alpha \times 9$ θὰ εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ γινομένου 4×9· ὅθεν

$$\alpha \times 9 = 4 \times 9 \times \pi$$

ἐξ οὗ

$$\alpha = 4 \times \pi$$

Ἀντικαθιστῶντες ἤδη εἰς τὴν ἰσότητα (1) τὸν α διὰ τοῦ ἴσου του $4 \times \pi$ λαμβάνομεν

$$4 \times \pi \times 9 = 4 \times \beta$$

ὅθεν·

$$\beta = 9 \times \pi$$

Ἄρα

Ἐὰν δύο κλάσματα εἶναι ἴσα, τοῦ δὲ ἑνὸς οἱ ὅροι εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ὁ ἀριθμητὴς καὶ ὁ παρονομαστὴς τοῦ ἑτέρου κλάσματος θὰ παράγωνται ἐκ τοῦ ἀριθμητοῦ καὶ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ πρώτου διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀκέραιον.

Ἐκ τῆς προτάσεως ταύτης ἕπεται ἀμέσως ὅτι·

151.— Κλάσμα τοῦ ὁποίου οἱ ὅροι εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους δὲν ἔχει ἄλλο ἰσοδύναμον μὲ μικροτέρους ὅρους, ἤτοι δὲν ἁπλοποιεῖται πλέον.

Τὰ κλάσματα τὰ μὴ ἁπλοποιούμενα καλοῦμεν ἀνάγωγα.

Προφανὲς εἶναι ὅτι·

Πᾶν κλάσμα ἀνάγωγον θὰ ἔχῃ ὅρους πρώτους πρὸς ἀλλήλους.

Ἐκ τῆς αὐτῆς προτάσεως (§ 150) συνάγομεν καὶ τὰ ἑξῆς συμπεράσματα.

152.—1ον). Ἔστωσαν δύο ἀνάγωγα κλάσματα ἴσα πρὸς ἄλληλα·

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$$

τότε (§ 150)·

$$\gamma = \alpha \times \pi. \qquad \delta = \beta \times \pi$$

ἀλλὰ τὸ $\frac{\gamma}{\delta}$ ὑπετέθη ἀνάγωγον, ἑπομένως οἱ γ καὶ δ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· ὅθεν ὁ π θὰ ἰσοῦται τῇ μονάδι καὶ ἔχομεν·

$$\gamma = \alpha, \quad \delta = \beta$$

ἄρα·

Ἐὰν δύο ἀνάγωγα κλάσματα εἶναι ἴσα, θὰ ἔχωσιν ἴσους ἀριθμητὰς καὶ ἴσους παρονομαστάς.

183.—2ον) Πᾶν κλάσμα δὲν δύναται νὰ εἶναι ἴσον πρὸς δύο ἀνάγωγα διάφορα.

184.—3ον) Πάντα τὰ ἴσα ἀλλήλοις κλάσματα παράγονται ἐκ τοῦ αὐτοῦ ἀναγώγου διὰ πολλαπλασιασμοῦ τῶν ὅρων του ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀκέραιον.

Ἀσκήσεις.

202). Νὰ ἁπλοποιηθῶσι τὰ κλάσματα

$$\frac{13585}{27690}, \quad \frac{184568}{2189864}, \quad \frac{324}{612},$$

$$\frac{625}{9000}, \quad \frac{10265}{14371}, \quad \frac{128352}{238368}.$$

203). Νὰ εὑρεθῇ κλάσμα ἰσοδύναμον πρὸς τὸ $\frac{4}{5}$ καὶ ἔχον ὅρους, ὧν τὸ ἄθροισμα εἶναι 54.

204). Πόσα εἶναι τὰ κλάσματα τὰ ἴσα πρὸς τὸ κλάσμα $\frac{84}{108}$ καὶ ἔχοντα ὅρους μικροτέρους μὲν τῶν ὅρων αὐτοῦ, μεγαλυτέρους δὲ τῶν ὅρων τοῦ $\frac{14}{18}$;

205). Ὁ μ. κ. δ. δύο ὅρων ἑνὸς κλάσματος ἴσου πρὸς τὸ $\frac{8}{10}$ εἶναι 34. Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ ὅροι τοῦ κλάσματος. (§ 154)

206). Τὸ ε. κ. π. δύο ὅρων κλάσματος ἴσου πρὸς τὸ $\frac{36}{96}$ εἶναι 240. Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ ὅροι τοῦ κλάσματος.

Ἔστω $\frac{\alpha}{\beta}$ τὸ ζητούμενον κλάσμα· τότε (§ 154)·

$$\alpha = 3 \times \lambda, \quad \beta = 8 \times \lambda$$

$$\text{καὶ } 240 = 3 \times \lambda \times \rho = 8 \times \lambda \times \sigma$$

ἐντεῦθεν εὐκόλως συνάγομεν (§ 120) ὅτι

$$\rho = 8 \text{ καὶ } \sigma = 3, \text{ ὅθεν } \lambda = 10.$$

207) Τὸ κλάσμα $\frac{\alpha}{15\alpha+1}$ εἶναι ἀνάγωγον, οἱουδήποτε ἀκεραίου ὄντος τοῦ α. Γενίκευσις (§ 79, § 80).

208) Τὸ κλάσμα $\frac{17\alpha+1}{18\alpha+1}$ εἶναι ἀνάγωγον, οἱουδήποτε ὄντος τοῦ α. Γενίκευσις.

209) Δίδονται δύο κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ $\frac{\gamma}{\delta}$ τοιαῦτα, ὥστε

$$\gamma\beta - \alpha\delta = 1.$$

Νὰ δειχθῇ ὅτι εἶναι ἀνάγωγα. [Παρατηροῦμεν ὅτι πᾶς κ. δ. τῶν α, β διαιρεῖ καὶ τὴν διαφορὰν γβ—αδ.]

210) Τρία κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\gamma}{\delta}$, $\frac{\lambda}{\mu}$ εἶναι τοιαῦτα ὥστε

$$\delta\gamma - \alpha\delta = \beta\lambda - \alpha\mu = 1.$$

Νὰ δειχθῇ ὅτι τὰ κλάσματα ταῦτα εἶναι ἀνάγωγα.

211) Δίδεται ὁ μ. κ. δ. τῶν ὅρων κλάσματός τινος $\frac{\alpha}{\beta}$. Ζητεῖται πόσα εἶναι τὰ κλάσματα τὰ ἰσοδύναμα πρὸς τὸ $\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ μὲ μικροτέρους ὅρους. (§ 154).

21!) Ἐὰν α, β εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, τὰ κλάσματα $\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}$ καὶ $\frac{\alpha+\beta}{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}$ εἶναι ἀνάγωγα. (Ἄσκ. 159)

213) Διὰ ποίας ἀκεραίας τιμὰς τοῦ α τὸ κλάσμα $\frac{\alpha+8}{2\alpha-5}$ ἰσοῦται πρὸς ἀκέραιον;

Διὰ νὰ εἶναι τὸ κλάσμα αὐτὸ ἴσον πρὸς τὴν μονάδα, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ἔχωμεν (§ 141).

$$\alpha + 8 = 2\alpha - 5$$

ἢ καὶ $$8 = \alpha - 5 \qquad (\text{ἄσκ. } 21)\cdot$$

ὅθεν (§ 33 α΄.) λαμβάνομεν α=13· εὐκόλως ἐξάγομεν ἐντεῦθεν ὅτι, ἵνα τὸ δοθὲν κλάσμα ἰσοῦται πρὸς ἀκέραιον διάφορον τῆς μονάδος, ἔπρεπεν ὁ α νὰ εἶναι μικρότερος τοῦ 13.

214) Ποίους ἀκεραίους δύναμαι νὰ προσθέσω εἰς τὸν ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος $\frac{17}{25}$ χωρὶς νὰ μεταβάλω τὴν ἀξίαν τοῦ κλάσματος; (§ 154).

215) Τὸ πηλίκον δύο ἀριθμῶν εἶναι $\frac{3}{7}$, τὸ δὲ ε. κ. π. αὐτῶν εἶναι 189. Τίνες οἱ ἀριθμοί;

216) Νὰ εὑρεθῶσι δύο κλάσματα ἰσοδύναμα πρὸς τὰ κλάσματα $\frac{16}{130}$, $\frac{9}{474}$ τοιαῦτα ὥστε ἐὰν προσθέσωμεν τὸν ἀριθμητὴν τοῦ πρώτου καὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦ δευτέρου, εὑρίσκομεν ἄθροισμα ὅσον καὶ ἐὰν προσθέσωμεν τὸν ἀριθμητὴν τοῦ δευτέρου καὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦ πρώτου. (§ 154, § 119).

Τροπὴ ἑτερωνύμων κλασμάτων εἰς ὁμώνυμα.

155.— Τὰ κλάσματα τὰ ἔχοντα τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν λέγονται ὁμώνυμα, τὰ δὲ μὴ τοιαῦτα ἑτερώνυμα, π.χ. τὰ κλάσματα $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{8}$ εἶναι ὁμώνυμα, τὰ δὲ $\frac{3}{8}$ $\frac{5}{9}$ ἑτερώνυμα.

156.—Ἔστωσαν τὰ ἑτερώνυμα κλάσματα

$$(1) \qquad \frac{\alpha}{\beta}, \ \frac{\gamma}{\delta}, \ \frac{\lambda}{\rho}.$$

Πολλαπλασιάσωμεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους ἑκάστου ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν τῶν λοιπῶν κλασμάτων. Εὑρίσκομεν οὕτω κλάσματα ἰσοδύναμα (§ 148) πρὸς τὰ δοθέντα τὰ ἑξῆς·

$$\frac{\alpha\times\delta\times\rho}{\beta\times\delta\times\rho}, \quad \frac{\gamma\times\beta\times\rho}{\delta\times\beta\times\rho}, \quad \frac{\lambda\times\beta\times\delta}{\rho\times\beta\times\delta}, \quad \text{ὅθεν}$$

Ἵνα τρέψωμεν ἑτερώνυμα κλάσματα εἰς ὁμώνυμα ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς δύο ὅρους ἑκάστου ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν πάντων τῶν λοιπῶν.

Π. χ. τὰ κλάσματα $\frac{5}{8}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{3}{7}$, τρέπονται εἰς τὰ

$$\frac{5 \times 9 \times 7}{8 \times 9 \times 7}, \quad \frac{4 \times 8 \times 7}{9 \times 8 \times 7}, \quad \frac{3 \times 8 \times 9}{7 \times 8 \times 9}.$$

157.— Γενικώτερον. Ἔστω π τυχὸν κ. π. τῶν παρονομαστῶν τῶν κλασμάτων (1). Δύναμαι νὰ σχηματίσω κλάσματα ἰσοδύναμα πρὸς ταῦτα καὶ μὲ παρονομαστὴν π· ἀρκεῖ πρὸς τοῦτο νὰ πολλαπλασιάσω ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ $\frac{\alpha}{\beta}$ ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀκέραιον π : β, ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ $\frac{\gamma}{\delta}$ ἐπὶ π : δ, κ. ο κ. ὅθεν·

Πάντοτε δυνάμεθα νὰ τρέψωμεν δοθέντα κλαάσματα ἑτερώνυμα εἰς ὁμώνυμα μὲ κοινὸν παρονομαστὴν τὸ τυχὸν κ. π. τῶν παρονομαστῶν.

Π. χ. Ἔστωσαν τὰ κλάσματα $\frac{5}{6}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{4}$, καὶ τυχὸν κ. π. τῶν παρονομαστῶν· ἔστω ὁ 48· δύναμαι νὰ τρέψω ταῦτα εἰς ἕτερα ἰσοδύναμα μὲ παρονομαστὴν 48, τὰ ἑξῆς· $\frac{5\times 8}{6\times 8}$, $\frac{1\times 6}{8\times 6}$, $\frac{3\times 12}{4\times 12}$,

Ἐγείρεται ἤδη τὸ ζήτημα· ποῖος εἶναι ὁ μικρότερος κοινὸς παρονομαστής, ὃν δύνανται ν' ἀποκτήσωσι διάφορα κλάσματα;

Παρατηροῦμεν πρῶτον ὅτι, ἐὰν τὰ δοθέντα κλάσματα δὲν εἶναι ἀνάγωγα, ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν κοινὸν παρονομαστήν, ὃν δύνανται ν' ἀποκτήσωσι κλάσματα ἀνάγωγα ἴσα πρὸς τὰ δοθέντα. Θεωρήσωμεν λοιπὸν ἀνάγωγα κλάσματα

π. χ. τὰ κλάσματα $\frac{7}{12}$, $\frac{9}{20}$, $\frac{8}{15}$.

Ἔστωσαν δὲ ὁμώνυμα ἴσα πρὸς ταῦτα τὰ $\frac{\alpha}{\pi}$, $\frac{\beta}{\pi}$, $\frac{\gamma}{\pi}$.

Ἐπειδὴ ἀφ' ἑνὸς μὲν οἱ ἀριθμοὶ 7 καὶ 12 εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ἀφ' ἑτέρου δ' ἔχομεν $\frac{7}{12}=\frac{\alpha}{\pi}$ ἕπεται (§ 150) ὅτι $\pi=12\times\rho$· ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι $\pi=20\times\rho'$ καὶ $\pi=15\times\rho''$, ὅθεν π εἶναι κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν 12, 20, 15. Ἐὰν δὲ θέλωμεν ὁ κοινὸς οὗτος παρονομαστὴς π νὰ ἔχῃ τὴν ἐλαχίστην δυνατὴν τιμήν, εὐνόητον εἶναι ὅτι πρέπει νὰ εἶναι τὸ ε. κ. π. τῶν παρονομαστῶν

12, 20, 15.

Ἄρα·

Ὁ ἐλάχιστος κοινὸς παρονομαστής, ὃν δύνανται ν᾿ ἀποκτήσωσι κλάσματα ἑτερώνυμα ἀνάγωγα εἶναι τὸ ε. κ. π. τῶν παρονομαστῶν αὐτῶν.

Π. χ. εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα ἐλάχιστος κοινὸς παρονομαστὴς εἶναι ὁ 60.

Ἀσκήσεις.

217) Νὰ τραπῶσιν εἰς ὁμώνυμα τὰ κλάσματα

$$\frac{11}{12},\quad \frac{19}{20},\quad \frac{30}{36}.$$

218) Νὰ τραπῶσιν εἰς ὁμώνυμα μὲ τὸν ἐλάχιστον κοινὸν παρονομαστὴν τὰ κλάσματα

$$\frac{5}{12},\quad \frac{7}{16},\quad \frac{31}{24},$$

ὅπως ἐπίσης καὶ τὰ κλάσματα·

$$\frac{11}{12},\quad \frac{108}{142},\quad \frac{57}{71},\quad \frac{140}{1065},\quad \frac{852}{2130}.$$

219) Ἐὰν ὁ ἐλάχιστος κοινὸς παρονομαστὴς ἀναγώγων κλασμάτων διαιρεθῇ δι᾿ ἑνὸς ἑκάστου τῶν παρονομαστῶν θὰ δώσῃ πηλίκα ἀριθμοὺς πρώτους πρὸς ἀλλήλους.

220) Τίνες ἄλλοι ἀριθμοί, πλὴν τοῦ γινομένου τῶν παρονομαστῶν καὶ τοῦ ε. κ. π. αὐτῶν, δύνανται νὰ χρησιμεύσωσιν ὡς κοινοὶ παρονομασταί;

221) Ἐὰν οἱ παρονομασταὶ τῶν ἀναγώγων κλασμάτων εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀνὰ δύο, τότε ὁ ἐλάχιστος κοινὸς παρονομαστής, ὃν δύνανται ν- ἀποκτήσωσι τὰ κλάσματα ταῦτα εἶναι τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν.

222) Ἐὰν οἱ παρονομασταὶ τῶν ἀναγώγων κλασμάτων $\frac{\gamma}{\alpha}$ καὶ $\frac{\delta}{\beta}$ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, τότε ὁ ἐλάχιστος κοινὸς παρονομαστὴς τῶν κλασμάτων $\frac{\gamma}{\alpha^\mu}$ καὶ $\frac{\delta}{\beta^\nu}$ εἶναι τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν· ἤτοι $\alpha^\mu \times \beta^\nu$ (§ 118)

523). Ἐὰν κοινός τις παρονομαστής, ὃν δύνανται ν' ἀποκτήσωσι κλάσματα ἀνάγωγα, διαιρούμενος διὰ τῶν παρονομαστῶν τῶν δοθέντων κλασμάτων δίδῃ πηλίκα πρῶτα πρὸς ἄλληλα, τότε αὐτὸς εἶναι ὁ ἐλάχιστος κοινὸς παρονομαστής.

ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ

138.— α') Ἔστω $\frac{3}{4}+\frac{2}{4}+\frac{1}{4}$ τοῦτο προφανῶς εἶναι ἴσον πρὸς τὸ $\frac{3+2+1}{4}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}$.

Ὁμοίως

$$\frac{2}{7}+\frac{3}{7}+\frac{4}{7}=\frac{2+3+4}{7}=\frac{9}{7}=1\ \frac{2}{7}$$

ἄρα·

Ἵνα προσθέσωμεν κλάσματα ὁμώνυμα, προσθέτομεν τοὺς ἀριθμητὰς καὶ ὑπὸ τὸ ἄθροισμα αὐτὸ γράφομεν τὸν κοινὸν παρονομαστήν.

β') Ἔστω

$$\frac{3}{4}+\frac{2}{5}+\frac{7}{10}=\frac{15}{20}+\frac{8}{20}+\frac{14}{20}=\frac{37}{20}=1\ \frac{17}{20}$$

ἤτοι :

Ἵνα προσθέσωμεν ἑτερώνυμα κλάσματα, τρέπομεν αὐτὰ εἰς ὁμώνυμα καὶ προσθέτομεν.

γ') Ἔστω

$$7\ \frac{2}{3}+5\ \frac{3}{4}=(7+5)+\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{4}\right)=12+\frac{17}{12}=13\ \frac{5}{12}$$

ἤτοι·

Ἵνα προσθέσωμεν μικτούς, προσθέτομεν χωριστὰ τοὺς ἀκεραίους καὶ χωριστὰ τὰ κλάσματα.

Ἠδυνάμεθα, ἐννοεῖται, νὰ τρέψωμεν τοὺς μικτοὺς εἰς κλάσματα καὶ νὰ ἔχωμεν οὕτω πρόσθεσιν κλασμάτων.

139.— Ἐπειδή, ὡς ἐκ τῶν προλεχθέντων εὐκόλως συνάγεται, ἡ πρόσθεσις κλασμάτων, εἴτε ἀκεραίων καὶ κλασμάτων, ἀνάγεται εἰς πρόσθεσιν ἀκεραίων, ἕπεται ὅτι ἰσχύει γενικῶς ἡ θεμελιώδης ἰδιότης τῆς προσθέσεως τῶν ἀκεραίων (§ 25) καὶ κατ' ἀκολουθίαν καὶ πᾶσαι αἱ ἄλλαι ἰδιότητες τῆς προσθέσεως αἱ ἐξ αὐτῆς ἀπορρέουσαι.

Οὕτως ἔχομεν

$$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\gamma}{\delta}+\frac{\varepsilon}{\zeta}+\frac{\eta}{\theta}=\frac{\varepsilon}{\zeta}+\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\eta}{\theta}+\frac{\gamma}{\delta}$$

$$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\gamma}{\delta}+\frac{\varepsilon}{\zeta}=\frac{\alpha}{\beta}+\left(\frac{\gamma}{\delta}+\frac{\varepsilon}{\zeta}\right) \quad \text{κ.τ.λ.}$$

ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ

160.— Ἡ ἀφαίρεσις εἶναι πρᾶξις δι' ἧς δοθέντων δύο ἀριθμῶν εὑρίσκεται τρίτος, ὅστις προστιθέμενος εἰς τὸν δεύτερον δίδει τὸν πρῶτον (§ 31).

ἔχομεν

$$\frac{5}{8}-\frac{3}{8}=\frac{5-3}{8}=\frac{2}{8}$$

ὁμοίως $\quad \dfrac{9}{17}-\dfrac{5}{17}=\dfrac{4}{17}$ ἄρα.

Ἵνα ἀφαιρέσωμεν κλάσματα ὁμώνυμα, ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ μειωτέου τὸν ἀριθμητὴν τοῦ ἀφαιρετέου καὶ ὑπὸ τὴν διαφορὰν γράφομεν τὸν κοινὸν παρονομαστήν.

Ἔχομεν

$$\frac{5}{9}-\frac{3}{8}=\frac{40}{72}-\frac{27}{72}=\frac{13}{72}.$$

ὁμοίως $\quad \dfrac{5}{8}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{5}{8}-\dfrac{2}{8}=\dfrac{3}{8}.$

Ἵνα ἀφαιρέσωμεν κλάσματα ἑτερώνυμα, τρέπομεν προηγουμένως αὐτὰ εἰς ὁμώνυμα.

Ἤδη ἐξετάσωμεν τὰς περιπτώσεις, καθ' ἃς μειωτέος καὶ ἀφαιρετέος εἶναι τυχόντες ἀριθμοί· ἀκέραιοι, κλασματικοὶ ἢ μικτοί·

α) $\quad 8-\dfrac{2}{3}=7\,\dfrac{3}{3}-\dfrac{2}{3}=7\,\dfrac{1}{3}$

β) $5\frac{3}{4} - \frac{2}{3} = 5\frac{9}{12} - \frac{8}{12} = 5\frac{1}{12}$

γ) $8\frac{5}{9} - 4 = 4\frac{5}{9}$

δ) $15 - 3\frac{3}{4} = 14\frac{4}{4} - 3\frac{3}{4} = 11\frac{1}{4}$

ε) $7\frac{2}{5} - 5\frac{3}{5} = 6\frac{7}{5} - 5\frac{3}{5} = 1\frac{4}{5}$

161.— Διὰ τῶν ἀνωτέρω πράξεων ἡ ἀφαίρεσις ἀκεραίων καὶ κλασματικῶν ἀνάγεται εἰς τὴν ἀφαίρεσιν τῶν ἀκεραίων καὶ ἑπομένως εὐκόλως φαίνεται ὅτι ἰσχύουσι καὶ ἐνταῦθα αἱ ἰδιότητες τῆς ἀφαιρέσεως τῶν ἀκεραίων· ἤτοι αἱ ἰσότητες

$$(\alpha + \gamma) - (\beta + \gamma) = \alpha - \beta,$$
$$(\alpha + \beta + \gamma) - \delta = \alpha + (\beta - \delta) + \gamma,$$
$$\gamma - (\alpha + \beta) = (\gamma - \alpha) - \beta,$$
$$\alpha - (\beta - \gamma) = (\alpha + \gamma) - \beta, \qquad \text{κ.τ.λ.}$$

ἰσχύουσι, καὶ ἐὰν τὰ α, β, γ, δ δὲν εἶναι μόνον ἀκέραιοι.

Ἀσκήσεις.

224). Ἐδαπάνησέ τις κατὰ τὸ ἔτος 1914 τὰ $\frac{3}{10}$ τῆς περιουσίας του· κατὰ τὸ 1915 τὰ $\frac{2}{7}$ αὐτῆς· ποῖον μέρος τῆς περιουσίας του ἐδαπάνησε κατὰ τὸ 1916 γνωστοῦ ὄντος ὅτι τῷ ἀπέμεινε μετὰ τὸ ἔτος αὐτὸ τὸ $\frac{1}{20}$ τῆς περιουσίας του;

225). Προσέλαβέ τις διὰ τὴν ἀντιγραφὴν ἑνὸς ἔργου τέσσαρας γραφεῖς. Ἐκ τούτων ὁ πρῶτος ἠδύνατο μόνος ν' ἀντιγράψῃ αὐτὸ εἰς 15 ἡμέρας, ὁ δεύτερος εἰς 16. ὁ τρίτος εἰς 12 καὶ ὁ τέταρτος εἰς 20 ἡμέρας. Ποῖον μέρος τοῦ ἔργου δύνανται ν' ἀντιγράψωσιν, ἐὰν ἐργασθῶσιν ὅλοι συγχρόνως ἐπὶ δύο ἡμέρας;

226) Νὰ εὑρεθῇ ἡ διαφορὰ μεταξὺ τοῦ μεγαλυτέρου καὶ τοῦ μικροτέρου τῶν κλασμάτων

$$\frac{5}{8}, \quad \frac{3}{7}, \quad \frac{4}{9}, \quad \frac{7}{15}$$

227) Ἔστωσαν τὰ κλάσματα

$$\frac{12}{25}, \quad \frac{3}{20}, \quad \frac{7}{90}, \quad \frac{45}{60},$$

Ἀθροίζω τὸ μέγιστον καὶ ἐλάχιστον τούτων, χωριστὰ δὲ τὰ δύο ἄλλα. Ποῖον ἄθροισμα εἶναι μεγαλύτερον καὶ κατὰ πόσον;

228) Ἐκ τεσσάρων κρηνῶν δεξαμενῆς αἱ δύο πρῶται δύνανται νὰ πληρώσωσι τὴν δεξαμενήν, ἡ μὲν εἰς 15 ὥρας, ἡ δὲ εἰς 24 ὥρας, αἱ δὲ δύο ἄλλαι, δύνανται νὰ κενώσωσι τὴν δεξαμενὴν ἡ μὲν εἰς 20 ὥρας ἡ δὲ εἰς 48. Τῆς δεξαμενῆς οὔσης κενῆς ἀφήνονται καὶ αἱ τέσσαρες ἀνοικταί. Μετὰ τρεῖς ὥρας τί μέρος τῆς δεξαμενῆς θὰ ἔχῃ πληρωθῇ;

229) Δύο κλάσματα ἀνάγωγα μὲ παρονομαστὰς διαφόρους προστιθέμενα δὲν δίδουσιν ἀκέραιον. (§ 80, § 119).

230) Τρία κλάσματα ἀνάγωγα ἀθροιζόμενα δὲν δίδουσιν ἀκέραιον, ἐὰν πρῶτός τις παράγων ἑνὸς τῶν παρανομαστῶν δὲν εὑρίσκεται εἰς ἕνα τοὐλάχιστον τῶν ἄλλων δύο παρανομαστῶν.

231) Τὸ ἄθροισμα δύο ἀναγώγων κλασμάτων εἶναι κλάσμα ἀνάγωγον, ἐὰν οἱ παρανομασταὶ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους καὶ κοινὸς παρανομαστὴς ὁ ἐλάχιστος. (§ 119, § 80).

232) Τὸ ἄθροισμα ἀναγώγων κλασμάτων μὲ παρανομαστὰς πρώτους πρὸς ἀλλήλους ἀνὰ δύο δὲν εἶναι ἀριθμὸς ἀκέραιος.

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ

Πῶς πολλαπλασιάζεται κλάσμα ἢ μικτὸς ἐπὶ ἀκέραιον;

162.—Εἴδομεν ὅτι (§ 146, § 147,)

$$\frac{7 \times 5}{10} = \frac{7}{10} \times 5 \text{ καὶ } \frac{7}{10 : 5} = \frac{7}{10} \times 5$$

ὅθεν καὶ

$$\frac{7}{10} \times 5 = \frac{7 \times 5}{10} \text{ καὶ } \frac{7}{10} \times 5 = \frac{7}{10:5}$$

ὥστε·

Κλάσμα πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἀκέραιον ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ὁ ἀριθμητὴς ἐπὶ τὸν ἀκέραιον ἢ διαιρεθῇ ὁ παρανομαστὴς δι᾽ αὐτοῦ, ἐὰν διαιρῆται.

Ἔστω ἤδη

$$\left(7\frac{2}{3}\right) \times 4$$

Ἔχομεν

$$\left(7\frac{2}{3}\right) \times 4 = (7 \times 4) + \left(\frac{2}{3} \times 4\right) = 28 + \frac{8}{3} = 30\frac{2}{3}$$

ἢ καὶ

$$\left(7\frac{2}{3}\right) \times 4 = \frac{23}{3} \times 4 = \frac{92}{3} = 30\frac{2}{3}$$

Ἤτοι

Πολλαπλασιάζεται μικτὸς ἐπὶ ἀκέραιον, ἢ ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὰ μέρη αὐτοῦ χωριστὰ καὶ προσθέσωμεν τὰ μερικὰ γινόμενα, ἢ ἐὰν τρέψωμεν τὸν μικτὸν εἰς κλάσμα καὶ πολλαπλασιάσωμεν κατὰ τὸν προηγούμενον κανόνα.

Γενίκευσις τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

163.—Ἔστω ὅτι ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν δύο ἀκεραίους, π. χ. 9×6. Ἵνα εὕρωμεν τὸ γινόμενον (§ 37) ἐπαναλαμβάνομεν τὸν 9 ἑξάκις, τουτέστι σχηματίζομεν ἕνα ἀριθμὸν ἐκ τοῦ 9 ὅπως ὁ 6 ἐσχηματίσθη ἐκ τῆς μονάδος. Δηλ. ὅπως

$$6 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$$

οὕτω τὸ γινόμενον θὰ ἰσοῦται πρὸς

$$9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9$$

Εἰς τοῦτο ἄλλως τε ὁδηγεῖ ἡμᾶς καὶ ἡ λύσις προβλημάτων οἷον τὸ ἑξῆς:

1 πῆχυς ὑφάσματος τιμᾶται 9 δραχ. πόσον τιμῶνται 6 πήχεις;

Ἔστω ἤδη ὅτι θέλομεν νὰ λύσωμεν πρόβλημα ὅμοιον πρὸς τὸ προηγούμενον, ὅπου ὅμως οἱ διδόμενοι ἀριθμοὶ νὰ μὴ εἶναι ἀμφότεροι ἀκέραιοι· π. χ. ἔστω ὅτι ὁ πῆχυς ὑφάσματος τιμᾶται $\frac{3}{4}$ τῆς δραχμῆς· πόσον τιμῶνται τὰ $\frac{5}{8}$ τοῦ πήχεως; ἡ πρᾶξις ἡ ὁποία πρέπει νὰ γίνῃ πρὸς εὕρεσιν τοῦ γινομένου λέγεται πάλιν πολλαπλασιασμός· πολλαπλασιαστέος εἶναι ὁ $\frac{3}{4}$ καὶ πολλαπλασιαστὴς ὁ $\frac{5}{8}$ καὶ ὅπως ἀνωτέρω ἐπειδὴ

$$6=1+1+1+1+1+1$$

ἐλάβομεν ὡς γινόμενον τὸ

$$9+9+9+9+9+9$$

οὕτω καὶ ἐδῶ ἐπειδὴ διὰ νὰ σχηματίσωμεν τὸ $\frac{5}{8}$ διαιροῦμεν τὴν μονάδα διὰ 8 (§ 145) καὶ τὸ πηλίκον λαμβάνομεν πεντάκις

$$\left(\frac{5}{8}=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)$$

οὕτω διὰ νὰ σχηματίσωμεν τὸ γινόμενον

$$\frac{3}{4}\times\frac{5}{8}$$

διαιροῦμεν τὸ $\frac{3}{4}$ διὰ 8 καὶ τὸ πηλίκον λαμβάνομεν πεντάκις· ἀλλὰ

$$\frac{3}{4}:8=\frac{3}{4\times8} \qquad (\S\ 147)$$

ἐπομένως τὸ ζητούμενον γινόμενον θὰ εἶναι

$$\frac{3}{4\times8}\times5$$

ἤτοι (§ 162) $$\frac{3\times5}{4\times8}$$

Καθ' ὅμοιον τρόπον διὰ νὰ σχηματίσωμεν τὸ γινόμενον $7\times\frac{5}{8}$

διαιροῦμεν τὸν 7 διά 8 καὶ τὸ πηλίκον λαμβάνομεν πεντάκις· ἔχομεν οὕτω

$$7\times\frac{5}{8}=\frac{7}{8}\times 5=\frac{7\times 5}{8} \qquad (\S\ 162)$$

Ὁμοίως διὰ νὰ σχηματίσωμεν τὸ γινόμενον $7\frac{3}{4}\times\frac{5}{8}$ λαμβάνομεν τὸ ὄγδοον τοῦ $7\frac{3}{4}$ πεντάκις· ἀλλὰ τὸ ὄγδοον τοῦ $7\frac{3}{4}$ εἶναι $\frac{7}{8}+\frac{3}{4\times 8}$ (διότι τοῦτο ὀκτάκις λαμβανόμενον δίδει τὸν $7\frac{3}{4}$ (§ 145, 148)) ἑπομένως τὸ ζητούμενον γινόμενον θὰ εἶναι $\frac{7\times 5}{8}+\frac{3\times 5}{4\times 8}$· τοῦτο ὅμως συμφώνως πρὸς τὰ ἀνωτέρω ἰσοῦται πρὸς $7\times\frac{5}{8}+\frac{3}{4}\times\frac{5}{8}$

Ἵνα σχηματίσωμεν τέλος τὸ γινόμενον $\alpha\times 2\frac{5}{8}$ ἐπειδὴ

$$2\frac{5}{8}=1+1+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}$$

θὰ λάβωμεν $\alpha+\alpha+(\alpha:8)+(\alpha:8)+(\alpha:8)+(\alpha:8)+(\alpha:8)$

Τοῦτο ἰσοῦται πρὸς $\alpha\times 2+(\alpha:8)\times 5$. Ἀλλὰ κατὰ τὰ προηγουμένως τεθέντα ἔχομεν $\alpha\times\frac{5}{8}=(\alpha:8)\times 5$

ὥστε

$$\alpha\times 2\frac{5}{8}=\alpha\times 2+\alpha\times\frac{5}{8}.$$

Γενικεύεται λοιπὸν ὁ πολλαπλασιασμὸς ὡς ἑξῆς:

Ὁ πολλαπλασιασμὸς ἀριθμοῦ α ἐπὶ ἄλλον β εἶναι πρᾶξις καθ' ἣν σχηματίζεται ἀριθμὸς ἐκ τοῦ α καὶ τῶν μερῶν αὐτοῦ, ὅπως ὁ β σχηματίζεται ἐκ τῆς ἀκεραίας μονάδος καὶ τῶν μερῶν αὐτῆς.

Πῶς πολλαπλασιάζεται ἀκέραιος ἐπὶ κλάσμα:

164.— Ἀριθμὸς ἀκέραιος πολλαπλασιάζεται ἐπὶ κλάσμα, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος καὶ ὑπὸ τὸ γινόμενον γραφῇ ὁ παρονομαστής.

Διότι, ὅπως ἀνωτέρω (§ 163) εἴδομεν, $7\times\frac{5}{8}=\frac{7\times 5}{8}$

Πῶς πολλαπλασιάζεται κλάσμα ἐπὶ κλάσμα;

165.— Ἵνα πολλαπλασιάσωμεν κλάσμα ἐπὶ κλάσμα, πολλαπλασιάζομεν ἀριθμητὴν ἐπὶ ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν ἐπὶ παρονομαστὴν καὶ γράφομεν τὸ δεύτερον γινόμενον ὑπὸ τὸ πρῶτον.

Π. χ. $\frac{3}{4} \times \frac{5}{8} = \frac{3 \times 5}{4 \times 8}$ (§ 163)

Πῶς πολλαπλασιάζεται μικτὸς ἐπὶ κλάσμα;

166. — Ἵνα πολλαπλασιάσωμεν μικτὸν ἐπὶ κλάσμα, πολλαπλασιάζομεν χωριστὰ τὸν ἀκέραιον καὶ χωριστὰ τὸ κλάσμα του καὶ προσθέτομεν τὰ μερικὰ γινόμενα.

Π. χ. $7\frac{3}{4} \times \frac{5}{8} = 7 \times \frac{5}{8} + \frac{3}{4} \times \frac{5}{8}$ (§ 163)

Ἠδυνάμεθα προφανῶς καὶ νὰ τρέψωμεν τὸν μικτὸν εἰς κλάσμα καὶ νὰ πολλαπλασιάσωμεν.

Πῶς πολλαπλασιάζεται ἀριθμὸς ἐπὶ μικτόν;

167.— Ἵνα πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμὸν ἐπὶ μικτόν, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν αὐτὸν χωριστὰ ἐπὶ τὸν ἀκέραιον καὶ χωριστὰ ἐπὶ τὸ κλάσμα τοῦ μικτοῦ καὶ κατόπιν νὰ προσθέσωμεν τὰ μερικὰ γινόμενα.

Οὕτω $\alpha \times 2\frac{5}{8} = \alpha \times 2 + \alpha \times \frac{5}{8}$

Π. χ. $6 \times 5\frac{1}{4} = 6 \times 5 + 6 \times \frac{1}{4} = 30 + \frac{6}{4} = 31\frac{1}{2}$

$$\frac{2}{3} \times 5\frac{1}{4} = \frac{2}{3} \times 5 + \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{2 \times 5}{3} + \frac{2 \times 1}{3 \times 4} = 3\frac{1}{2}$$

$$6\frac{2}{3} \times 5\frac{1}{4} = 6\frac{2}{3} \times 5 + 6\frac{2}{3} \times \frac{1}{4} =$$

$$= 6 \times 5 + \frac{2}{3} \times 5 + 6 \times \frac{1}{4} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} =$$

$$= 30 + \frac{10}{3} + \frac{6}{4} + \frac{2}{12} = 35$$

Γινόμενον πολλῶν παραγόντων.

168.—Ἔστωσαν πρὸς πολλαπλασιασμὸν τὰ κλάσματα (§ 38).

$$\frac{7}{8},\ \frac{4}{11},\ \frac{5}{6},\ \frac{2}{3},$$

καθ' ἣν τάξιν εἶναι γεγραμμένα· τοῦτο θὰ παριστῶμεν ὡς ἑξῆς·

$$\frac{7}{8}\times\frac{4}{11}\times\frac{5}{6}\times\frac{2}{3}$$

ἔχομεν πρῶτον $\frac{7}{8}\times\frac{4}{11}=\frac{7\times4}{8\times11}$ (§ 165) ὅθεν

$$\frac{7}{8}\times\frac{4}{11}\times\frac{5}{6}=\frac{7\times4\times5}{8\times11\times6}$$ καὶ ἐπομένως

$$\frac{7}{8}\times\frac{4}{11}\times\frac{5}{6}\times\frac{2}{3}=\frac{7\times4\times5\times2}{8\times11\times6\times3}$$

ἄρα·

Τὸ γινόμενον πολλῶν κλασμάτων εἶναι κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμητῶν καὶ παρανομαστὴν τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν.

169.—Ἔστω $5\times\frac{3}{4}\times\frac{8}{9}\times2\times\frac{6}{7}$ (§ 38)·

Ἔχομεν·

$$5\times\frac{3}{4}\times\frac{8}{9}\times2\times\frac{6}{7}=\frac{5\times3\times8\times2\times6}{4\times9\times7}\quad(\S\ 164,\ \S\ 165)$$

ἀλλὰ καὶ

$$\frac{3}{4}\times2\times\frac{6}{7}\times5\times\frac{8}{9}=\frac{3\times2\times6\times5\times8}{4\times7\times9}$$

καὶ ἐπειδὴ τὰ δεύτερα μέλη εἶναι ἴσα (§ 39) ἕπεται ὅτι

$$5\times\frac{3}{4}\times\frac{8}{9}\times2\times\frac{6}{7}=\frac{3}{4}\times2\times\frac{6}{7}\times5\times\frac{8}{9}$$

ἄρα·

Τὸ γινόμενον πολλῶν παραγόντων ἀκεραίων καὶ κλασματικῶν δὲν ἀλλάσσει, ἐὰν μεταβληθῇ. ἡ τάξις τῶν παραγόντων.

Γενικαὶ ἰδιότητες τοῦ πολαπλασιασμοῦ.

170.—Τοὺς ἀκεραίους καὶ κλασματικοὺς καλοῦμεν μὲ ἓν ὄνομα συμμέτρους.

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω ἡ ἰδιότης τῆς ἀντιμεταθέσεως (§ 44) ἰσχύει καὶ εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν συμμέτρων ἀριθμῶν· ἑπομένως καὶ αἱ ἐξ αὐτῆς ἀπορρέουσαι.

171.—Εἴδομεν ἀνωτέρω πῶς πολλαπλασιάζεται μικτὸς ἐπὶ ἀριθμόν· κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀποδεικνύομεν ὅτι·

Ἄθροισμα οἱονδήποτε πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἀριθμόν, καὶ ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ἕκαστος τῶν προσθετέων ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τοῦτον καὶ προσιεθῶσι τὰ μερικα γινόμενα.

Ὥστε καὶ ἡ δευτέρα θεμελιώδης ἰδιότης τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τουτέστιν ἡ ἐπιμεριστικὴ ἰδιότης ἰσχύει καὶ διὰ τοὺς συμμέτρους ἐν γένει ἀριθμούς, ἑπομένως καὶ αἱ ἐξ αὐτῆς πηγάζουσαι.

Πολλαπλασιασμὸς διαφορᾶς ἐπὶ τὸν ἀριθμόν.

172.— Ἔστω

$\left(\frac{3}{5} - \frac{2}{7}\right) \times \frac{4}{9}$· τοῦτο ἰσοῦται πρὸς

$$\left(\frac{3\times 7}{5\times 7} - \frac{2\times 5}{5\times 7}\right) \times \frac{4}{9} = \frac{(3\times 7)-(2\times 5)}{5\times 7} \times \frac{4}{9} =$$

$$\frac{(3\times 7\times 4)-(2\times 5\times 4)}{5\times 7\times 9} = \frac{3\times 7\times 4}{5\times 7\times 9} - \frac{2\times 5\times 4}{5\times 7\times 9}$$

$$= \left(\frac{3}{5}\times\frac{4}{9}\right) - \left(\frac{2}{7}\times\frac{4}{9}\right)$$

Καὶ γενικῶς·

$$\left(\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\gamma}{\delta}\right) \times \frac{\varepsilon}{\zeta} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\times\frac{\varepsilon}{\zeta}\right) - \left(\frac{\gamma}{\delta}\times\frac{\varepsilon}{\zeta}\right)$$

ἤτοι·

Διαφορὰ πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἀριθμὸν καὶ ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ὁ μειωτέος καὶ ὁ ἀφαιρετέος ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν καὶ ἀπὸ τοῦ πρώτου γινομένου ἀφαιρεθῇ τὸ δεύτερον.

Συμπέρασμα διὰ τὰς ἰδιότητας τῶν πράξεων.

173.— Κατὰ τὰ ἀνωτέρω δυνάμεθα νὰ λέγωμεν ὅτι αἱ ἰδιότητες αἱ παριστώμεναι διὰ τῶν ἰσοτήτων

$$\alpha \times \beta \times \gamma = \alpha \times (\beta \times \gamma)$$

$$(\alpha \times \beta \times \gamma) \times \delta = \alpha \times \beta \times (\gamma \times \delta)$$

$$(\alpha \times \beta \times \gamma) \times (\delta \times \varepsilon) = \alpha \times \beta \times \gamma \times \delta \times \varepsilon$$

$$(\alpha + \beta) \times \gamma = (\alpha \times \gamma) + (\beta \times \gamma)$$

$$(\alpha + \beta) \times (\gamma + \delta) = (\alpha \times \gamma) + (\beta \times \gamma) + (\alpha \times \delta) + (\beta \times \delta)$$

$$(\alpha - \beta) \times \gamma = (\alpha \times \gamma) - (\beta \times \gamma)$$

ἰσχύουσι, καὶ ὅταν τὰ γράμματα παριστῶσιν οἱουσδήποτε συμμέτρους.

Ἀσκήσεις.

233) Πατήρ τις ἀφήνει εἰς τοὺς 4 υἱούς του περιουσίαν ἐξ 80000 δραχμῶν. Συμφώνως πρὸς τὴν διαθήκην του δέον νὰ λάβῃ ὁ πρῶτος τὸ $\frac{1}{4}$ τῆς περιουσίας· ὁ δεύτερος τὰ $\frac{3}{5}$ τοῦ ὑπολοίπου. ὁ τρίτος τὰ $\frac{3}{5}$ τοῦ νέου ὑπολοίπου· ὁ δὲ τέταρτος τὸ τελευταῖον ὑπόλοιπον. Τί μέρος τῆς περιουσίας ἔλαβεν ὁ τέταρτος καὶ ἐκ πόσων δραχμῶν ἀπετελεῖτο;

234) Ἐλαστικὴ σφαῖρα ἀναπηδᾷ εἰς τὰ $\frac{3}{8}$ τοῦ ὕψους ἐξ οὗ πίπτει· πεσοῦσα δὲ ἀπὸ ὕψους 7 μέτρων ἀνεπήδησε τρίς· εἰς πόσον ὕψος ὑψώθη κατὰ τὴν τρίτην ἀναπήδησιν;

235) Νὰ δειχθῇ ὅτι $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha-1} - \frac{1}{\alpha+1}\right) = \frac{1}{\alpha^2-1}$

236) Πότε τὸ γινόμενον δύο ἀναγώγων κλασμάτων εἶναι ἀριθμὸς ἀκέραιος; (§ 137).

237). Ἔστωσαν δύο ἀνάγωγα κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ $\frac{\gamma}{\delta}$. πότε τὸ γινόμενόν των $\frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}$ εἶναι κλάσμα ἀνάγωγον;

238). Τὸ γινόμενον $\frac{1}{\mu}\cdot\frac{1}{\mu+1}$ νὰ γραφῇ ὡς διαφορὰ δύο κλασμάτων μὲ τοὺς αὐτοὺς παρονομαστὰς μ καὶ $\mu+1$.

239). Τὸ ἄθροισμα

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ldots\ldots+\frac{1}{\mu(\mu+1)}$$

ἰσοῦται τῇ διαφορᾷ $1-\frac{1}{\mu+1}$ (Ἄσκ. 238)

240). Τὸ γινόμενον

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot\ldots\ldots\frac{2\mu-1}{2}$$

ἰσοῦται πρὸς τὸ κλάσμα

$$\frac{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ \ldots\ldots\ (2\mu-1)\ 2\mu}{1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ldots\ldots\ \mu.\ 2^{2\mu}}$$

Ἀρκεῖ νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι

$$1.2.3.\ \ldots\ \mu.\ 2^{\mu}=(1.2).(2\ 2).(3.2)\ \ldots..\ (\mu.\ 2)=2.\ 4.\ 6\ldots.2\mu$$

καὶ ἑπομένως

$$1.\ 3.\ 5.\ 7\ \ldots.\ (2\ \mu-1)\ 1\ .\ 2\ .\ 3\ \ldots.\ \mu\ .\ 2^{\mu}=$$
$$1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ 4\ .\ 5\ .\ 6\ .\ 7\ \ldots\ (2\mu-1)\ .\ 2\mu$$

ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ

174.—Ἡ διαίρεσις εἶναι πρᾶξις δι' ἧς δοθέντων δύο ἀριθμῶν εὑρίσκομεν τρίτον ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν δεύτερον δίδει τὸν πρῶτον· ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς λέγεται πηλίκον· καὶ ἐκ τῶν δύο δεδομένων ὁ πρῶτος λέγεται διαιρετέος, ὁ δὲ δεύτερος διαιρέτης. (§ 56)

1). Διαιρέτης ἀκέραιος.

175.—α΄) Ἔχομεν· $\frac{2}{5}:7=\frac{2}{5\times 7}$ (§ 147)

ἢ καὶ $\frac{6}{7}:2=\frac{6:2}{7}$ (§ 146)

ὅθεν

Ἵνα διαιρέσωμεν κλάσμα δι' ἀκεραίου, πολλαπλασιάζομεν τὸν παρονομαστὴν ἐπὶ τὸν ἀκέραιον ἢ διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητὴν δι' αὐτοῦ, ἐὰν γίνεται ἀκριβῶς ἡ διαίρεσις.

176.—β΄ Ἔστω ἡ διαίρεσις

$$5\frac{7}{8}:4$$

ἔχομεν· $5\frac{7}{8}:4=\frac{47}{8}:4=\frac{47}{8\times 4}$ (§ 147)

ἔχομεν επίσης· $5\frac{7}{8}:4=\frac{5}{4}+\frac{7}{8\times 4}$ (§ 163) ἤτοι·

Ἵνα διαιρέσωμεν μικτὸν δι' ἀκεραίου, ἢ τρέπομεν αὐτὸν εἰς κλάσμα, ἢ διαιροῦμεν χωριστὰ τὸν ἀκέραιον καὶ χωριστὰ τὸ κλάσμα, καὶ προσθέτομεν τὰ πηλίκα.

2) Διαιρέτης κλάσμα

177.- Ἔστω

$$\alpha:\frac{4}{9}$$

ὅπου α σύμμετρος· παρατηροῦμεν ὅτι τὸ πηλίκον θὰ εἶναι τοιοῦτον ὥστε, ἐὰν λάβωμεν τὸ $\frac{1}{9}$ αὐτοῦ τετράκις, γίνεται α (§ 174) καὶ ἑπομένως τὰ 9 ἔνατα αὐτοῦ ληφθέντα τετράκις γίνονται $\alpha\times 9$, ἤτοι ὁλόκληρον τὸ πηλίκον ληφθὲν τετράκις γίνεται $\alpha\times 9$· ἄρα ληφθὲν ἅπαξ γίνεται

$$\frac{\alpha\times 9}{4}=\alpha\times\frac{9}{4}$$ ὅθεν·

Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμὸν διὰ κλάσματος, ἀρκεὶ νὰ πολλαπλασιάσωμεν αὐτὸν ἐπὶ τὸ κλάσμα ἀντεστραμμένον·

π. χ. $7\frac{1}{2} : \frac{5}{6} = 7\frac{1}{2} \times \frac{6}{5} = 9$

ἐπίσης $\frac{13}{14} : \frac{14}{13} = \frac{13}{14} \times \frac{13}{14} = \frac{13^2}{14^2}$

Διαιρέτης μικτός.

178.—Ἔστω

$$\alpha : 2\frac{5}{9}$$

ἔχομεν·

$$\alpha : 2\frac{5}{9} = \alpha : \frac{23}{9} = \alpha \times \frac{9}{23} \qquad (\S\ 177)$$

ἄρα·

Ἵνα διαιρέσωμεν ἀριθμὸν διὰ μικτοῦ τρέπομεν τὸν μικτὸν εἰς κλάσμα καὶ διαιροῦμεν.

Π χ. $4\frac{1}{2} : 2\frac{1}{4} = 4\frac{1}{2} \times \frac{4}{9} = 2.$

Γενικαὶ ἰδιότητες τῆς διαιρέσεως.

179.— 1) Ἔστω

$$\frac{3}{4} : \frac{2}{7} = \pi$$

τότε

$$\frac{3}{4} = \frac{2}{7} \times \pi \qquad \text{καὶ } (\S\ 173)$$

$$\frac{3}{4} \times \rho = \left(\frac{2}{7} \times \rho\right) \times \pi\cdot \qquad \text{ὅθεν } (\S\ 174)$$

$$\left(\frac{3}{4} \times \rho\right) : \left(\frac{2}{7} \times \rho\right) = \pi$$

καὶ γενικῶς

$$(\alpha \times \rho) : (\beta \times \rho) = \alpha : \beta$$

Ἄρα·

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν διαιρετέον καὶ διαιρέτην ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, τὸ πηλίκον δὲν μεταβάλλεται.

2) Ὁμοίως καὶ ἐὰν διαιρέσωμεν διαιρετέον καὶ διαιρέτην διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ τὸ πηλίκον δὲν ἀλλάσσει· ἤτοι·

$$(\alpha : \rho) : (\beta : \rho) = \alpha : \beta.$$

Ὅπως δὲ διὰ τοὺς ἀκεραίους (§ 61, 62, 63, 64) οὕτω καὶ ἐνταῦθα ἰσχύουσι καὶ ἀποδεικνύονται ὁμοίως αἱ ἰδιότητες αἱ παριστώμεναι διὰ τῶν ἰσοτήτων

3) $$(\alpha+\beta+\gamma) : \delta = (\alpha : \delta)+(\beta : \delta)+(\gamma : \delta)$$

4) $$(\alpha - \beta) : \gamma = (\alpha : \gamma) - (\beta : \gamma)$$

5) $$(\alpha\times\beta\times\gamma) : \delta = \alpha\times(\beta : \delta)\times\gamma$$

6) $$\alpha : (\beta\times\gamma\times\delta) = [(\alpha : \beta) : \gamma] : \delta$$

Ἀσκήσεις.

241) Κρουνὸς πληροῖ δεξαμενὴν εἰς $3\frac{1}{2}$ ὥρας, δεύτερος εἰς $2\frac{1}{2}$ καὶ τρίτος εἰς 3 ὥρας· ἕτερος δὲ κρουνὸς δύναται νὰ κενώσῃ τὴν δεξαμενὴν ἐντὸς 2 ὡρῶν. Ἂν ἀνοιχθῶσι καὶ οἱ τέσσαρες κρουνοὶ συγχρόνως εἰς πόσον χρόνον θὰ πληρωθῇ ἡ δεξαμενή;

242) Ἐλαστικὴ σφαῖρα ἀναπηδᾷ εἰς τὰ $\frac{3}{11}$ τοῦ ὕψους ἐξ οὗ πίπτει· πεσοῦσα δὲ ἀπό τινος ὕψους καὶ ἀναπηδήσασα τετράκις ὑψώθη κατὰ τὴν τετάρτην ἀναπήδησιν εἰς ὕψος $\frac{1}{12}$ τοῦ πήχεως. Πόσον εἶναι τὸ ἀρχικὸν ὕψος;

243) Ἀπὸ σταθμοῦ τινος σιδηροδρόμου ἀναχωρεῖ ἀτμάμαξα μὲ ταχύτητα $10^{\chi\lambda\mu.}$ καθ' ὥραν· ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σταθμοῦ καὶ ἐπὶ τῆς αὐτῆς ὁδοῦ ἀναχωρεῖ μετὰ ἓν τέταρτον ἄλλη ἀτμάμαξα μὲ ταχύτητα $12^{\chi\lambda\mu.}$ καθ' ὥραν. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ σταθμοῦ τῆς ἐκκινήσεως θὰ συναντηθῶσι;

244. Τέσσαρες ἐργάται πρόκειται νὰ ἐκτελέσωσιν ἔργον τι· ἡ ἐκτέλεσις τούτου, ἐὰν ἔλειπεν ὁ τέταρτος, θὰ ἀπῄτει 8 ἡμέρας, ἐνῷ, ἐὰν ἔλειπεν ὁ τρίτος, θὰ ἀπῄτει 10 ἡμέρας, ἐὰν ὁ δεύτερος 12 ἡμέρας, καὶ ἐὰν ὁ πρῶτος, 14 ἡμέρας. Εἰς πόσας ἡμέρας ἕκα-

στος ἐκ τούτων μόνος θὰ ἐξετέλει τὸ ἔργον καὶ εἰς πόσας ὅλοι ὁμοῦ;

245) Τρεῖς γεωργοὶ ἀνοίγουσιν αὔλακα διερχομένην ἀπὸ τὸν ἀγρὸν τοῦ πρώτου εἰς μῆκος 128 μέτρων, ἀπὸ τὸν τοῦ δευτέρου εἰς μῆκος 72 μέτρων καὶ ἀπὸ τὸν τοῦ τρίτου εἰς μῆκος 88. Διὰ τὸ ταχύτερον προσλαμβάνουσι καὶ τέταρτον, εἰς ὃν δίδεται ἀμοιβὴ 90 δραχμῶν. Τί θὰ πληρώσῃ ἕκαστος ἐκ τῶν τριῶν εἰς τὸν τέταρτον ἐργάτην;

246) Νὰ εὑρεθῇ κλάσμα ὅπερ διαιρούμενον διὰ τῶν κλασμάτων

$$\frac{10}{48}, \frac{56}{45}, \frac{9}{60}$$

δίδει ὡς πηλίκα ἀριθμοὺς ἀκεραίους· ποῖον τὸ μικρότερον ἐξ αὐτῶν; (§ 149, § 119).

247) Πότε τὸ πηλίκον δύο ἀναγώγων κλασμάτων εἶναι ἀριθμὸς ἀκέραιος; (§ 137)

248) Πότε τὸ πηλίκον δύο ἀναγώγων κλασμάτων εἶναι κλάσμα ἀνάγωγον;

ΣΥΝΘΕΤΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

180. — Ὅπως $\frac{\alpha}{\beta}$, ὅπου α καὶ β ἀκέραιοι, παριστᾷ τὸ πηλίκον α : β, (§ 145), οὕτω θὰ παριστῶμεν καὶ τὸ πηλίκον δύο οἱωνδήποτε συμμέτρων ἀριθμῶν α καὶ β διὰ τοῦ $\frac{\alpha}{\beta}$. Κατὰ ταῦτα.

$$9 : \frac{2}{3} = \frac{9}{\frac{2}{3}}, \qquad 9\frac{3}{7} : 4\frac{5}{6} = \frac{9\frac{3}{7}}{4\frac{5}{6}}$$

Αἱ τοιαῦται παραστάσεις λέγονται σύνθετα κλάσματα.

Γενικῶς: ἐὰν τὸ πηλίκον δύο τυχόντων συμμέτρων ἀριθμῶν, τῶν ὁποίων ὁ εἷς τοὐλάχιστον δὲν εἶναι ἀκέραιος, παραστήσωμεν ὡς κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν μὲν τὸν διαιρετέον, παρονομαστὴν δὲ τὸν διαιρέτην, προκύπτει παράστασις ἡ ὁποία λέγεται σύνθετον κλάσμα.

ΣΗΜ. Τὰ κλάσματα, ὧν οἱ ὅροι εἶναι ἀκέραιοι ἀριθμοὶ καλοῦμεν, πρὸς διάκρισιν ἀπὸ τῶν συνθέτων, ἁπλᾶ κλάσματα.

Ἰδιότητες τῶν συνθέτων κλασμάτων.

181.— Ἔστω τὸ σύνθετον κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$. σχηματίζω τὸ κλάσμα $\frac{\alpha \times \varrho}{\beta \times \varrho}$, ὅπου ρ τυχὼν σύμμετρος. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν συνθέτων κλασμάτων ἔχομεν $\frac{\alpha}{\beta} = \alpha : \beta$

καὶ $\frac{\alpha \times \varrho}{\beta \times \varrho} = (\alpha \times \rho) : (\beta \times \rho)$

ἀλλὰ (§ 179) $\alpha : \beta = (\alpha \times \rho) : (\beta \times \rho)$.

ὅθεν καὶ $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha \times \varrho}{\beta \times \varrho}$ ἄρα·

Ἐὰν ἀμφότεροι οἱ ὅροι συνθέτου κλάσματος πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ τόν αὐτὸν ἀριθμόν, ἡ ἀξία αὐτοῦ δὲν μεταβάλλεται.

Ἐφαρμογαί.—Τὴν ἰδιότητα ταύτην ἐφαρμόζομεν εἰς τὴν τροπὴν συνθέτου κλάσματος εἰς ἁπλοῦν ἰσοδύναμον καὶ εἰς τὴν τροπὴν ἑτερωνύμων συνθέτων εἰς ὁμώνυμα τοιαῦτα.

1) Ἔστω τὸ σύνθετον κλάσμα $\frac{\frac{5}{12}}{\frac{7}{15}}$, διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἀμφοτέρων τῶν ὅρων αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ε. κ. π. τῶν 12, 15 εὑρίσκομεν

$$\frac{\frac{5}{12}}{\frac{7}{15}} = \frac{\frac{5}{12} \times 60}{\frac{7}{15} \times 60} = \frac{25}{28}.$$

2) Τὰ ἑτερώνυμα κλάσματα $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{2}{5}}$, $\frac{7}{\frac{8}{9}}$, $\frac{\frac{2}{3}}{5}$ εἶναι προφανῶς ἓν πρὸς ἓν ἰσοδύναμα πρὸς τὰ ὁμώνυμα

$$\frac{\frac{3}{4}\times 9\times\frac{3}{5}}{\frac{2}{5}\times 9\times\frac{3}{5}},\quad \frac{\frac{7}{8}\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}}{9\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}},\quad \frac{2\times\frac{2}{5}\times 9}{\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}\times 9}$$

182.— 1) Ἔστω τὸ σύνθετον κλάσμα $\dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{7}}$· ἐὰν καλέσωμεν π τὸ πηλίκον τοῦ $\frac{3}{4}$ διὰ $\frac{5}{7}$, θὰ εἶναι (§ 174) $\frac{3}{4}=\frac{5}{7}\times\pi$ ὅθεν·

$$\frac{3}{4}\times\rho=\frac{5}{7}\times\left(\pi\times\rho\right)$$ (§ 173) καὶ ἐπομένως

$$\frac{\frac{3}{4}\times\rho}{\frac{5}{7}}=\pi\times\rho.$$ ἄρα·

Ἐὰν ὁ ἀριθμητὴς συνθέτου κλάσματος πολλαπλασιασθῇ ἐπί τινα ἀριθμόν, καὶ τὸ κλάσμα πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

2) Ἐκ τῆς ἰσότητος

$$\frac{3}{4}=\frac{5}{7}\times\pi$$

προκύπτει εὐκόλως ἡ ἰσότης

$$\frac{3}{4}=\frac{5}{7}\times\left[(\pi:\rho)\times\rho\right]=\frac{5}{7}\times\rho\times\left(\frac{\pi}{\rho}\right)$$ ὅθεν

$$\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{7}\times\rho}=\frac{\pi}{\rho}$$ ἄρα·

Ἐὰν ὁ παρονομαστὴς συνθέτου κλάσματος πολλαπλασιασθῇ ἐπί τινα ἀριθμόν, τὸ κλάσμα διαιρεῖται διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.

3. Κατ' ἀνάλογον τρόπον ἐργαζόμενοι συνάγομεν καὶ τὴν ἀλήθειαν τῆς ἑξῆς ἰδιότητος.

Ἐὰν ὁ ἀριθμητὴς συνθέτου κλάσματος διαιρεθῇ διά τινος ἀριθμοῦ τὸ κλάσμα διαιρεῖται διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ἐὰν δὲ ὁ παρονομαστὴς διαιρεθῇ τὸ κλάσμα πολλαπλασιάζεται.

Ἐκ τῶν προειρημένων συνάγομεν ὅτι ἐπὶ τῶν συνθέτων κλασμάτων ἰσχύουσι πᾶσαι αἱ ἐπὶ τῶν ἁπλῶν κλασμάτων ἀποδειχθεῖσαι ἰδιότητες.

Πράξεις ἐπὶ τῶν συνθέτων κλασμάτων.

183.—Ἡ πρόσθεσις τῶν συνθέτων κλασμάτων γίνεται ὅπως καὶ τῶν ἁπλῶν, ἤτοι τρέπομεν αὐτὰ εἰς ὁμώνυμα, ἐὰν εἶναι ἑτερώνυμα, καὶ προσθέτομεν κατόπιν τοὺς ἀριθμητάς, ὑπὸ δὲ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν θετομεν παρονομαστὴν τὸν κοινόν·

Ἐπίσης καὶ ἡ ἀφαίρεσις

184.—Ἔστωσαν τὰ σύνθετα κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ $\frac{\gamma}{\delta}$· ταῦτα τρεπόμενα εἰς ἁπλᾶ θὰ ἔδιδον ἀριθμούς τινας π καὶ ρ· ὅθεν·

$$\frac{\alpha}{\beta}=\pi,\ \frac{\gamma}{\delta}=\rho$$

ἢ καὶ (§ 180) $\quad \alpha:\beta=\pi, \quad \gamma:\delta=\rho$·

ἐξ οὗ
$$\alpha=\beta\times\pi$$
$$\gamma=\delta\times\rho$$

ὅθεν (§ 173)

$$\alpha\times\gamma=\beta\times\pi\times\delta\times\rho \text{ καὶ } \alpha\times\gamma=(\beta\times\delta)\times(\pi\times\rho)$$

καὶ ἑπομένως (§ 174)

$$\pi\times\rho=\frac{\alpha\times\gamma}{\beta\times\delta} \text{ ἢ } \frac{\alpha}{\beta}\times\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha\times\gamma}{\beta\times\delta}$$

Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν ὅτι

$$\frac{\alpha}{\beta}\times\frac{\gamma}{\delta}\times\frac{\varepsilon}{\zeta}=\frac{\alpha\times\gamma\times\varepsilon}{\beta\times\delta\times\zeta}$$

ἄρα·

Τὸ γινόμενον δύο ἢ καὶ περισσοτέρων κλασμάτων εἶναι κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν μὲν τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμητῶν, παρονομαστὴν δὲ τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν.

185.—Ζητήσωμεν ἤδη τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως δύο συνθέτων κλασμάτων $\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ $\frac{\gamma}{\delta}$. Ἔστω τοῦτο π· θὰ ἔχωμεν

$$\pi \times \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha}{\beta}$$

ὅθεν

$$\pi \times \frac{\gamma}{\delta} \times \frac{\delta}{\gamma} = \frac{\alpha}{\beta} \times \frac{\delta}{\gamma} \quad \text{ἢ } (\S\ 184)\ \pi = \frac{\alpha}{\beta} \times \frac{\delta}{\gamma} \quad \text{ἄρα}$$

Ἵνα διαιρέσωμεν κλάσμα διὰ κλάσματος, πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρετέον ἐπὶ τὸν διαιρέτην ἀντεστραμμένον.

Ἀσκήσεις.

249). Νὰ δειχθῇ ὅτι ἀληθεύει ἡ πρότασις ἐδ. 64 καὶ ὅταν αἱ διαιρέσεις δὲν γίνονται πᾶσαι ἀκριβῶς, τουτέστιν ὅτι κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον εὑρίσκεται τὸ ἀκέραιον πηλίκον (ἐκ τῆς Θ. Ἀριθμητικῆς Ι. Χατζιδάκι).

250) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι σημειουμένων πράξεων.

α΄) $$\frac{2}{5+\dfrac{2}{7+\dfrac{3}{4}}} \times \frac{4}{\left(3+\dfrac{2}{9}\right) : \left(3\dfrac{5}{6}-\dfrac{7}{8}\right)}$$

β΄) $$\left(\frac{3\dfrac{1}{3}}{7} + \frac{2}{10\dfrac{1}{2}} - \frac{5}{18} \times \frac{4}{7}\right) \times 1\frac{3}{4}$$

γ΄) $$\left(3\frac{1}{4} - \frac{5}{6} \times \frac{4}{15}\right) : \left(21\frac{1}{5} + \frac{3}{10} + 4\frac{1}{3} \times 5\right)$$

Δυνάμεις τῶν κλασμάτων.

186.—Ὁ ὁρισμὸς δυνάμεως (§ 75) ἐκτείνεται καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν ὁ α εἶναι κλάσμα.

Π.χ. $$\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}.$$

187.—Ἐπειδὴ

$$\left(\frac{5}{6}\right)^3=\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}$$

ἀφ' ἑτέρου δὲ (§ 168)

$$\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{5\times5\times5}{6\times6\times6}=\frac{5^3}{6^3}$$

ἕπεται ὅτι $$\left(\frac{5}{6}\right)^3=\frac{5^3}{6^3}$$

καὶ γενικῶς $$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\mu=\frac{\alpha^\mu}{\beta^\mu}.$$

Ἄρα·

Κλάσμα ὑψοῦται εἰς δύναμιν, ἐὰν ἀμφότεροι οἱ ὅροι αὐτοῦ ὑψωθῶσιν εἰς τὴν δύναμιν ταύτην.

188.—Ἰσχύει λοιπὸν ἐπὶ τῶν δυνάμεων τῶν κλασμάτων ἡ θεμελιώδης ἰδιότης τῶν δυνάμεων (§ 76 α')· ἄρα ἰσχύουσι καὶ αἱ ἄλλαι ἰδιότητες τῶν δυνάμεων (§ 76).

Ἀσκήσεις.

251) Κλάσμα τι $\frac{\alpha}{\beta}$ εἶναι ἡ μυοστὴ δύναμις ἄλλου κλάσματος ἐὰν τὸ γινόμενον $\alpha\times\beta^{\mu-1}$ εἶναι ἡ μυοστὴ δύναμις ἀκεραίου.

252) Ἡ διαφορὰ μεταξὺ ἀναγώγου κλάσματος καὶ τοῦ τετρα-

γώνου του εἶναι κλάσμα ἀνάγωγον, ὅταν ὡς παρονομαστὴς αὐτῆς ληφθῇ τὸ τετράγωνον τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ πρώτου κλάσματος.

253) Ποία ἡ ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη ἵνα κλάσμα τι ἀνάγωγον ἰσοῦται πρὸς ἕτερον ἔχον ὡς παρονομαστὴν δύναμίν τινα τοῦ 84;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'.

ΠΕΡΙ ΔΕΚΑΔΙΚΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

189. — Τὰ κλάσματα $\frac{7}{10}$, $\frac{9}{100}$, . . . καὶ ἐν γένει τὰ ἔχοντα παρονομαστὴν δύναμιν τοῦ 10 λέγονται δεκαδικὰ κλάσματα.

Αἱ ἀντίστοιχοι μοναδες $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, . . . λέγονται δεκαδικαὶ μονάδες.

Ὡς ἐλήφθησαν ἐνταῦθα, παρατηροῦμεν ὅτι ἑκάστη δεκαδικὴ μονὰς εἶναι δεκάκις μείζων τῆς ἀμέσως ἑπομένης.

Ἀκέραιος καὶ δεκαδικὸν κλάσμα, ἢ καὶ μόνον δεκαδικὸν κλάσμα, καλεῖται δεκαδικὸς ἀριθμός.

π. χ.
$$7+\frac{3}{10}+\frac{8}{100}+\frac{9}{1000}$$

Τοὺς δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς λέγομεν καὶ δεκαδικὰ κλάσματα πρὸς διάκρισιν ἀπὸ τῶν συνήθων κλασμάτων, ἅτινα καλοῦμεν κοινά.

Γραφὴ καὶ ἀπαγγελία δεκαδικῶν.

190.—Κατὰ τὴν γραφὴν τῶν ἀκεραίων ἡ συμφωνία ἐφ' ἧς ἐβασίσθημεν ἦτο ἡ ἑξῆς·

Ἓν ψηφίον κατέχον θέσιν τινὰ ν' ἀντιπροσωπεύῃ μονάδας δεκάκις ὀλιγωτέρας ἐκείνων τὰς ὁποίας θ' ἀντεπροσώπευεν εἰς τὴν προηγουμένην πρὸς ἀριστερὰ θέσιν.

Ἵνα ἐπὶ τῆς αὐτῆς συμφωνίας βασιζόμενοι εὕρωμεν θέσεις καὶ διὰ τὰς δεκαδικὰς μονάδας, θέτομεν ὑποδιαστολὴν μετὰ τὴν θέσιν τῶν ἀκεραίων μονάδων καὶ τότε κατὰ τὴν συμφωνίαν τὸ ψηφίον τὸ γραφόμενον πρῶτον μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴν σημαίνει δέκατα, τὸ δεύτερον ἑκατοστὰ κ. ο. κ.· ὥστε, καὶ ἂν ἀκέραιος δὲν ὑπάρχῃ, γράφομεν 0 ἀντὶ ἀκεραίου, ἵνα τηρηθῇ ἡ τάξις·

οὕτω τὸ κλάσμα

$$\frac{256}{10000}=\frac{200}{10000}+\frac{50}{10000}+\frac{6}{10000}=\frac{2}{100}+\frac{5}{1000}+\frac{6}{10000}=$$

$$\overset{\text{ἀκέρ.}}{0}+\frac{0}{10}+\frac{2}{100}+\frac{5}{1000}+\frac{6}{10000}=0{,}0256$$

Κατὰ ταῦτα:

Διὰ νὰ γράψωμεν δεκαδικὸν κλάσμα ὑπὸ δεκαδικὴν μορφὴν γράφομεν μόνον τὸν ἀριθμητὴν καὶ χωρίζομεν δι' ὑποδιαστολῆς ἀπὸ τοῦ τέλους τόσα ψηφία ὅσα μηδενικὰ ἔχει ὁ παρονομαστής. Ὅταν δὲν ἀρκοῦσι πρὸς τοῦτο τὰ ψηφία τοῦ ἀριθμητοῦ γράφομεν πρὸ αὐτοῦ μηδενικὰ τόσα, ὥστε νὰ χωρίσωμεν τὰ ἀπαιτούμενα ὡς ἄνω ψηφία καὶ νὰ μείνῃ ἓν μηδενικὸν πρὸς τὰ ἀριστερὰ τῆς ὑποδιαστολῆς.

Τὰ μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴν ψηφία ἑκάστου δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ καλοῦνται δεκαδικὰ ψηφία αὐτοῦ· ταῦτα ἀποτελοῦσι τὸ δεκαδικὸν μέρος του, ἐνῷ τὰ πρὸ τῆς ὑποδιαστολῆς ψηφία ἀποτελοῦσι τὸ ἀκέραιον μέρος.

191.—Ἐκ τοῦ τρόπου καθ' ὃν γράφεται δεκαδικὸς ἐννοοῦμεν καὶ πῶς ἀπαγγέλλεται· Δυνάμεθα ν' ἀπαγγείλωμεν ἕνα δεκαδικὸν ἀριθμὸν κατὰ διαφόρους τρόπους.

1) Ἀπαγγέλλομεν πρῶτον τὸ ἀκέραιον μέρος καὶ ἔπειτα τὸν μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴν ἀριθμὸν ὡς ἐὰν ἦτο ἀκέραιος προσαρτῶντες μόνον τὸ ὄνομα τῶν μονάδων, τὰς ὁποίας παριστᾷ τὸ τελευταῖον ψηφίον· π. χ. ὁ 27, 3054 ἀπαγγέλλεται ὡς ἑξῆς· 27 ἀκέραιος καὶ 3054 δεκάκις χιλιοστά.

Ἢ ἐπίσης, ἀπαγγέλλομεν χωριστὰ τὰ δέκατα, χωριστὰ τὰ ἑκατοστὰ κ.ο.κ. Π.χ. ὁ ἀνωτέρω ἀριθμὸς ἀπαγγέλλεται καὶ ὡς ἑξῆς· 27 ἀκέραιος, 3 δέκατα, 5 χιλιοστὰ καὶ 4 δεκάκις χιλιοστά. Ἢ καὶ κατὰ τμήματα π.χ. ὁ ἀριθμὸς 4, 7183567 ἀπαγγέλλεται καὶ ὡς ἑξῆς· 4 ἀκέραιος, 718 χιλιοστά, 356 ἑκατομμυριοστά, 7 δεκάκις ἑκατομμυριοστά.

Πᾶς δεκαδικὸς ἀριθμὸς γράφεται καὶ ὡς κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν τὸν ἀκέραιον ὅστις προκύπτει ἀπαλειφομένης τῆς ὑποδιαστολῆς, καὶ παρονομαστὴν τὴν μονάδα ἀκολουθουμένην ἀπὸ τόσα μηδενικὰ ὅσα εἶναι τὰ δεκαδικὰ ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ· ἑπομένως δύναται ν' ἀπαγγελθῇ ὅπως καὶ τὸ κοινὸν αὐτὸ κλάσμα· ἤτοι·

Ἀπαγγέλλομεν τὰ ψηφία, ὡς ἐὰν ἐσχημάτιζον ἕνα ἀκέραιον. προσαρτῶμεν δὲ κατόπιν τὸ ὄνομα τῶν μονάδων τοῦ τελευταίου ψηφίου.

Π. χ. ὁ δεκαδικὸς 5,67 ἀπαγγέλλεται καὶ ὡς ἑξῆς· 567 ἑκατοστά.

Ἰδιότητες τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν.

192 — α') Ὁ ἀκέραιος 125 εἶναι δεκάκις μικρότερος τοῦ 1250,
ἐνῷ ὁ 1,25 εἶναι ἴσος πρὸς τὸ 1,250
διότι

$$1{,}25 = \frac{125}{100}$$

$$\text{καὶ} \quad 1{,}250 = \frac{1250}{1000}$$

ἀλλὰ $\dfrac{125}{100} = \dfrac{125 \times 10}{100 \times 10} = \dfrac{1250}{1000}$, ὅθεν καὶ $1{,}25 = 1.250$.

ὁμοίως φαίνεται ὅτι $1{,}25 = 1{,}2500$ κ.ο.κ. Ἤτοι:

Ἡ ἀξία δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ μένει ἡ αὐτή, ὅταν γραφῶσιν ὁσαδήποτε μηδενικὰ εἰς τὸ τέλος αὐτοῦ.

Πῶς πολλαπλασιάζεται ἢ διαιρεῖται δεκαδικὸς ἀριθμὸς
διὰ 10, 100, 1000, 10000 κ.τ.λ;

193. — β') Ἂς μεταθέσωμεν τὴν ὑποδιαστολὴν ἑνὸς δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ μίαν θέσιν πρὸς τὰ δεξιά· π.χ. ἀντὶ τοῦ 17,954 ἂς γράψωμεν 179,54·

Παρατηροῦμεν ὅτι $17{,}954 = \dfrac{17954}{1000}$

$$\text{καὶ} \quad 179{,}54 = \frac{17954}{100}$$

ἀλλὰ $\dfrac{17954}{100} = \dfrac{17954}{1000:10} = \dfrac{17954}{1000} \times 10$ (§ 147)· ἐπομένως

$$179{,}54 = 17{,}954 \times 10$$

ὁμοίως $\quad 1795{,}4 = 17{,}954 \times 100 \qquad$ κ.τ.λ.

ὅθεν καὶ $\quad 179{,}54 : 10 = 17{,}954$

ἐπίσης $\quad 1795{,}4 : 100 = 17{,}954$

ἤτοι·

Πολλαπλασιάζεται δεκαδικὸς ἀριθμὸς ἐπὶ 10, 100, ... ἐὰν μεταθέσωμεν τὴν ὑποδιαστολὴν πρὸς τὰ δεξιὰ τόσας θέσεις, ὅσα ἔχει ὁ πολλαπλασιαστὴς μηδενικά, (τιθεμένων ἐν ἀνάγκῃ μηδενικῶν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ ἀριθμοῦ).

Διαιρεῖται δὲ δεκαδικὸς ἀριθμὸς διὰ 10, 100, ..., ἐὰν μεταθέσωμεν τὴν ὑποδιαστολὴν πρὸς τἀριστερὰ τόσας θέσεις ὅσα εἶναι τὰ μηδενικὰ τοῦ διαιρέτου.

Ἀσκήσεις.

249) Ἡ ὀκᾶ πράγματός τινος ἀξίζει $17^{\text{δρχ.}},38$. Πόσον ἀξίζουν αἱ 1000 ὀκάδες;

250) Προκειμένου νὰ τρέψωμεν ἑτερώνυμα δεκαδικὰ κλάσματα εἰς ὁμώνυμα, ποίαν παρατήρησιν δυνάμεθα νὰ κάμωμεν ὡς πρὸς τὸν κοινὸν παρονομαστήν;

251) Νὰ παρασταθῶσιν ὡς κοινὰ κλάσματα μὲ παρονομαστὴν 200 οἱ δεκαδικοὶ 5,72 καὶ 14,9.

252) Νὰ εὑρεθῇ κλάσμα ἀνάγωγον ἴσον πρὸς τὸν ἀριθμὸν 17,365.

ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ

194.—Ἔχομεν (§ 191).

$$5{,}13 + 2{,}779 + 47 + 0{,}3 =$$

$$= \frac{513}{100} + \frac{2779}{1000} + 47 + \frac{3}{10} =$$

$$= \frac{5130}{1000} + \frac{2779}{1000} + \frac{47000}{1000} + \frac{300}{1000}$$

$$= \frac{5130+2779+47000+300}{1000}$$

ἐπειδὴ δὲ

$$5130+2779+47000+300=55209$$

ἕπεται ὅτι

$$5.13+2,779+47+0,3=\frac{55209}{1000}=55,209.$$

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς·

$$\begin{array}{r} 5,13 \\ 2,779 \\ 47 \\ 0.3 \\ \hline 55,209 \end{array}$$

Ἄρα·

Προσθέτομεν τοὺς δεκαδικοὺς ὅπως καὶ τοὺς ἀκεραίους· εἰς τὸ ἄθροισμα, ἐννοεῖται, θέτομεν τὴν ὑποδιαστολὴν μετὰ τὸ ψηφίον τῶν μονάδων· τουτέστιν ἡ ὑποδιαστολὴ τοῦ ἀθροίσματος καὶ αἱ ὑποδιαστολαὶ τῶν προσθετέων εὑρίσκονται εἰς τὸ τέλος τῶν ψηφίων τῆς αὐτῆς στήλης·

ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ

195.—Ἔχομεν

$$9,235 - 7,9685 = 9,2350 - 7,9685 =$$

$$\frac{92350}{10000} - \frac{79685}{10000} = \frac{12665}{10000} = 1,2665.$$ ἄρα·

Ἀφαιροῦμεν τοὺς δεκαδικοὺς ὅπως καὶ τοὺς ἀκεραίους· διὰ δὲ τὴν τοποθέτησιν τῆς ὑποδιαστολῆς εἰς τὴν διαφορὰν παρατηροῦμεν ὅ,τι καὶ εἰς τὴν πρόσθεσιν.

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ

196.—Ἔστω τὸ γινόμενον

$$3,17 \times 0,0005$$

Τοῦτο γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς:

$$\frac{317}{100} \times \frac{5}{10000}\cdot$$ ἑπομένως ἰσοῦται πρὸς

$$\frac{317 \times 5}{1000000} = \frac{1585}{1000000} = 0,001585$$

ὥστε $$3.17 \times 0,0005 = 0,001585$$ ὅθεν

Ἵνα πολλαπλασιάσωμεν δύο δεκαδικούς, πολλαπλασιάζομεν αὐτοὺς ὡς ἐὰν ἦσαν ἀκέραιοι, χωρίζομεν δ' εἰς τὸ γινόμενον τόσα δεκαδικὰ ψηφία ὅσα ἔχουσιν οἱ δύο παράγοντες ὁμοῦ.

ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ

197.—Α'). Ὁ διαιρέτης ἀκέραιος.

Ἔστω 97,87 : 6

τοῦτο γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς·

$$\frac{9787}{100} : 6$$

Ἐπειδὴ διαιροῦντες τὸν 9787 διὰ 6 εὑρίσκομεν πηλίκον 1631 καὶ ὑπόλοιπον 1, ἕπεται ὅτι

$$9787 = 6 \times 1631 + 1$$

ἄρα·

$$97,87 : 6 = \frac{9787}{100} : 6 = \left(\frac{6 \times 1631}{100} + \frac{1}{100}\right) : 6$$

$$\text{ἢ } 97,87 : 6 = \frac{1631}{100} + \left(\frac{1}{100} : 6\right)$$

$$= 16,31 + (0,01 : 6) \qquad \text{(Κ)}$$

Ἤτοι·

Ἵνα διαιρέσωμεν δεκαδικὸν δι' ἀκεραίου, ἐκτελοῦμεν τὴν διαίρεσιν, ὡς ἐὰν ἦτο καὶ ὁ διαιρέτης ἀκέραιος, καὶ ὅσα ψηφία τοῦ πηλίκου προκύπτουσιν ἐκ τοῦ ἀκεραίου μέρους τοῦ διαιρετέου σχηματίζουσι τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ πηλίκου, τὰ δὲ λοιπὰ εἶναι τὰ δεκαδικὰ ψηφία αὐτοῦ.

Παρατηροῦμεν δ' ὅτι τὸ ὑπόλοιπον, τὸ ἀπομένον πρὸς διαίρεσιν διὰ 6, ἤτοι τὸ 1, δηλοῖ μονάδας ὁμοίας μὲ τὰς μονάδας τὰς ὁποίας παριστᾷ τὸ τελευταῖον ψηφίον τοῦ διαιρετέου, ἤτοι εἶναι 0,01.

198.—Ἠδυνάμεθα εἰς τὸ ἄθροισμα (K) ν' ἀντικαταστήσωμεν τὸν προσθετέον 0,01 : 6 μὲ τὸν 0,010 . 6 (§ 192)· ἐκτελοῦντες τὴν διαίρεσιν ταύτην κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα εὑρίσκομεν

$$0{,}010 : 6 = 0{,}001 + (0{,}004 : 6),$$

ὁπότε τὸ ἄθροισμα (K) γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς·

$$16{,}31 + 0{,}001 + (0{,}004 : 6) = 16{,}311 + (0{,}004 : 6)\cdot$$

ὅθεν διακρίνομεν ὅτι πηλίκον τῆς διαιρέσεως 97,87 : 6 δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν καὶ τὸ 16,311 ὁπότε ὑπόλοιπον εἶναι τὸ 0,004. Καὶ πάλιν τὸ 0,004 : 6 δυνάμεθα ν' ἀντικαταστήσωμεν διὰ τοῦ 0,0040 : 6 ἢ διὰ τοῦ 0,0006+(0,0004 : 6), ὁπότε τὸ ἄθροισμα (K) γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς·

$$16{,}3116 + (0{,}0004 : 6).$$

ὁπότε θεωροῦμεν ὡς πηλίκον τὸ 16,3116 καὶ ὡς ὑπόλοιπον τὸ 0,0004. Ὁμοίως ἐργαζόμενοι εὑρίσκομεν καὶ ὡς πηλίκον τὸ 16,31166 καὶ ὡς ὑπόλοιπον τὸ 0,00004 κ. ο. κ.

Ἡ πρᾶξις αὕτη διατάσσεται ὡς ἑξῆς·

```
97,87 | 6
37    |16 31166...
  18
   07
    10
     40
      40
       40
        :
```

199.— Καθ' ὅμοιον τρόπον δυνάμεθα νὰ προχωρήσωμεν καὶ εἰς τὴν διαίρεσιν ἀκεραίου δι' ἀκεραίου π. χ. ἡ διαίρεσις 9787 : 6 δίδει ὡς πηλίκον 1631, 166...., ὡς εὐκόλως ἐξάγομεν ἐκ τῶν ἀνωτέρω· ὁμοίως ἡ διαίρεσις 3 : 4 γίνεται καὶ ὡς ἑξῆς:

$$\begin{array}{r|l} 30 & 4 \\ \cline{2-2} 20 & 0,75 \\ 0 & \end{array} \quad \text{ἤτοι } \frac{3}{4} = 0,75$$

Εἰς ἀμφότερα ταῦτα τὰ παραδείγματα λέγομεν ὅτι ἐτρέψαμεν κοινὸν κλάσμα εἰς δεκαδικόν.

200.—Β') Ὁ διαιρέτης δεκαδικός. Π. χ. 671,34 : 2,1· πολλαπλασιάζομεν διαιρετέον καὶ διαιρέτην ἐπὶ 10, ὁπότε τὸ μὲν πηλίκον δὲν μεταβάλλεται ὁ δὲ διαιρέτης (§ 193) γίνεται ἀκέραιος· ἐπανερχόμεθα οὕτως εἰς τὴν προηγουμένην περίπτωσιν διότι ἔχομεν 6713,4 : 21· καὶ γενικῶς·

Ἵνα διαιρέσωμεν δεκαδικὸν διὰ δεκαδικοῦ πολλαπλασιάζομεν διαιρετέον καὶ διαιρέτην ἐπὶ δύναμιν τοῦ 10 τοιαύτην ὥστε ὁ διαιρέτης νὰ γίνεται ἀκέραιος, ὁπότε προκύπτει διαίρεσις ἀκεραίου δι' ἀκεραίου ἢ δεκαδικοῦ δι' ἀκεραίου.

Ὁ κανὼν οὗτος προφανῶς ἠδύνατο νὰ ἐξαχθῇ, καὶ ἐὰν ἐτρέπομεν τοὺς δεκαδικοὺς εἰς κοινὰ κλάσματα.

Ἀσκήσεις.

259) Ἠγόρασέ τις 12 ᾠὰ ἀντὶ 21,60 δρχ. Πόσα ἔπρεπε ν' ἀγοράσῃ μὲ τὰ αὐτὰ χρήματα, ἵνα στοιχίζῃ ἕκαστον ᾠὸν 0,60 δρχ. ὀλιγώτερον;

250) Ἔμπορός τις ἠγόρασεν ὕφασμά τι ἀντὶ 359,75 δρχ., μετεπώλησε δ' αὐτὸ ἀντὶ 400,85 δρχ. κερδίσας ἐξ ἑκάστου πήχεως 1,20 δρχ. Πόσων πήχεων ἦτο τὸ ὕφασμα;

261) Ὑπάλληλός τις ἐξώδευσε τὰ $\frac{5}{8}$ τοῦ μισθοῦ του δι' ἀγορὰν ἐνδυμασίας καὶ τὰ 0,19 τοῦ ὑπολοίπου δι' ἀγορὰν ὑποδημάτων· τῷ ἔμειναν δὲ τότε ἐκ τοῦ μισθοῦ 911,25 δρχ. Ἀντὶ πόσων δραχμῶν ἠγόρασε τὰ ὑποδήματα;

262) Ὑπάλληλός τις τοῦ δημοσίου ἀφήνει εἰς τὸ ταμεῖον λόγῳ

συντάξεως τὰ 0,90 τοῦ μισθοῦ του· εἰς δὲ τὸ μετοχικὸν ταμεῖον $5\frac{1}{3}$ δρχ. κατὰ μῆνα· Πληρώνει διὰ χαρτόσημον κατὰ μῆνα 2 δραχμάς, λαμβάνει δὲ διὰ μισθοὺς τριῶν μηνῶν 676,50 δρ. Ποῖος ὁ μηνιαῖος μισθός του;

263) Ἀξιωματικὸς διαταχθεὶς νὰ ὁδηγήσῃ 120 στρατιώτας εἴς τι μέρος λαμβάνει ἀναχωρῶν 97200 δραχμ. διὰ νὰ πληρώσῃ δρ. 4,50 εἰς ἕκαστον στρατιώτην δι' ἓν χιλιόμετρον. Μερικοὶ ἐξ αὐτῶν ἠσθένησαν· ὁ ἀξιωματικὸς φθάσας εἰς τὸν σκοπόν του πληρώνει πρῶτον τὸ ἥμισυ τοῦ κανονισθέντος εἰς τοὺς ἀσθενεῖς καὶ εἶτα τὸ ὑπόλοιπον μοιράζει ἐξ ἴσου εἰς τοὺς ἄλλους, οἵτινες ἔλαβον τότε 855 δραχμὰς ἕκαστος. Ζητεῖται 1) ὁ ἀριθμὸς τῶν χιλιομέτρων ἅτινα διέτρεξαν· 2) ὁ ἀριθμὸς τῶν στρατιωτῶν οἵτινες ἠσθένησαν.

Προσεγγίσεις.

Ὑπολογισμὸς πηλίκου κατὰ προσέγγισιν δεκαδικήν.

201.—Ἔστω ἡ διαίρεσις 97,87 : 6· ὡς πηλίκον ταύτης δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν (§ 197) τό·

$$16{,}31+\frac{0{,}01}{6}=16{,}31+\frac{1}{6}\times\frac{1}{100} \quad \text{εἶτε τὸ}$$

$$16.311+\frac{0{,}004}{6}=16{,}311+\frac{4}{6}\times\frac{1}{1000} \quad (\S\ 198)$$

ἢ καὶ τὸ

$$16{,}3116+\frac{0{,}0004}{6}=16{,}3116+\frac{4}{6}\times\frac{1}{10000} \quad \text{κ. ο. κ.}$$

Ὥστε, ἐὰν ὡς πηλίκον τῆς διαιρέσεως ταύτης λάβωμεν μόνον τὸ 16,31 παραλείπομεν τὸ $\frac{1}{6}$ τοῦ $\frac{1}{100}$ ἤτοι, ὀλιγώτερον τοῦ $\frac{1}{100}$, ἐὰν δὲ λάβωμεν τὸ 16,311 παραλείπομεν τὰ $\frac{4}{6}$ τοῦ $\frac{1}{1000}$ ἤτοι ὀλιγώτερον τοῦ $\frac{1}{1000}$ κ. ο. κ.

Ἀφ' ἑτέρου παρατηροῦμεν ὅτι ὁ 16,32 ὑπερβαίνει τὸ ἀκριβὲς πηλίκον τῆς διαιρέσεως κατὰ ποσότητα μικροτέραν τοῦ $\frac{1}{100}$ ἐπίσης ὁ 16 312 ὑπερβαίνει τὸ αὐτὸ πηλίκον κατὰ ποσότητα μικροτέραν τοῦ $\frac{1}{1000}$ κ. ο. κ.

Τὰ πρῶτα πηλίκα (§ 198) καλοῦμεν πηλίκα τῆς διαιρέσεως 97,87 : 6 κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$,.... κατ' ἔλλειψιν, ἐνῷ τὰ δεύτερα καλοῦμεν πηλίκα κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$...... καθ' ὑπεροχήν.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγεται ὁ κανών·

202.—Ἵνα ὑκολογίσωμεν πηλίκον διαιρέσεώς τινος κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{10^{\nu}}$ κατ' ἔλλειψιν προχωροῦμεν εἰς τὴν διαίρεσιν, μέχρις οὗ εὕρωμεν εἰς τὸ πηλίκον δεκαδικὸν ψηφίον τάξεως ν.

Π. χ. τὸ πηλίκον $\frac{2}{3}$ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{1000}$ εἶναι 0,666 κατ' ἔλλειψιν, ἐνῷ καθ' ὑπεροχὴν θὰ ἦτο 0,667.

Ἀσκήσεις.

264) Ἐὰν δύο κλάσματα εἶναι ἴσα ὑπολογιζόμενα κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{10^{\nu}}$ θὰ δίδωσιν ἐξαγόμενα ἴσα, οἱουδήποτε ὄντος τοῦ ν

265) Νὰ ὑπολογισθῇ κατὰ προσέγγισιν 0,0001 τὸ ἄθροισμα

$$7{,}03826 + 51{,}123 + 0{,}0124.$$

266) Νὰ ὑπολογισθῇ κατὰ προσέγγισιν 0,01 τὸ ἄθροισμα

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{1.2.3.4.5}.$$

Ὑπολογισμὸς πηλίκου κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{\nu}$.

203. — Ἐκ τῶν κλασμάτων $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{10}$, $\frac{3}{10}$ · · · τῶν ἐχόντων παρονομαστὴν 10 τὰ μὲν $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{10}$, $\frac{3}{10}$, · · · $\frac{7}{10}$ περιέχονται εἰς τὸ κλάσμα $\frac{3}{4}$, τὰ δ' ἄλλα οὐχί. Ἐξ αὐτῶν τὸ $\frac{7}{10}$ καλεῖται πηλίκον τῆς διαιρέσεως 3 : 4 κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{10}$.

Γενικῶς καλοῦμεν πηλίκον τῆς διαιρέσεως α : β κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{\nu}$ τὸ μέγιστον ἐκ τῶν κλασμάτων τῶν ἐχόντων παρονομαστὴν ν καὶ περιεχομένων εἰς τὸ κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$.

Πρὸς εὕρεσιν τοιούτου πηλίκου ἀρκεῖ νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός τις ρ ἀκέραιος τοιοῦτος ὥστε

$$\frac{\rho}{\nu} \leqq \frac{\alpha}{\beta} < \frac{\rho+1}{\nu} \qquad \text{ἢ}$$

$$\rho \leqq \frac{\alpha \times \nu}{\beta} < \rho + 1.$$

Ἐκ τούτων φαίνεται ὅτι ὁ ρ εἶναι ὁ μεγαλύτερος ἀκέραιος ἐκ τῶν περιεχομένων εἰς τὸν $\frac{\alpha \times \nu}{\beta}$. Ἄρα·

Ἵνα εὕρωμεν τὸ πηλίκον α : β κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{\nu}$ πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρετέον ἐπὶ ν καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ β, τοῦ δὲ πηλίκου τούτου τὸ ἀκέραιον μέρος διαιροῦμεν διὰ ν.

Π. χ. Τὸ πηλίκον $\frac{5}{7}$ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{79}$ εἶναι $\frac{56}{79}$.

Ἀσκήσεις.

267) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ πηλίκον 97,14 : 12,3 κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{21}$.

268) Νὰ εὑρεθῇ τὸ μεγαλύτερον ἐκ τῶν ἁπλῶν κλασμάτων τῶν ἐχόντων ἀριθμητὴν τὴν μονάδα καὶ μικροτέρων τοῦ $\frac{8}{17}$.

269) Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ἀριθμὸς 4,5234 κατὰ προσέγγισιν ἡμίσεος χιλιοστοῦ.

270) Πῶς ὑπολογίζομεν τὸ πηλίκον δύο ἀριθμῶν κατὰ προσέγγισιν $\frac{\mu}{\nu}$;

Τροπὴ κοινοῦ κλάσματος εἰς δεκαδικόν.

204.—Εἴδομεν προηγουμένως (§ 198) πῶς τρέπεται κοινὸν κλάσμα εἰς δεκαδικόν.

Ἂς τρέψωμεν ὁμοίως καὶ τὰ κλάσματα $\frac{7}{4}$, $\frac{7}{3}$ εἰς δεκαδικοὺς θεωροῦντες ταῦτα ὡς πηλίκα τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμητοῦ των διὰ τοῦ παρονομαστοῦ των.

$$\begin{array}{l|l} 7 & 4 \\ \hline 30 & 1,75 \\ \ \ 20 & \\ \ \ \ \ 0 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{l|l} 7 & 3 \\ \hline 10 & 2,333... \\ \ \ 10 & \\ \ \ \ \ 10 & \\ \ \ \ \ \ \ 1 & \\ \ \ \ \ \ \ \vdots & \end{array}$$

Παρατηροῦμεν ὅτι χωρὶς ν' ἀλλάξωμεν τὸν ἀριθμητὴν εἰς μὲν τὸ πρῶτον εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον 0, ἐνῷ εἰς τὸ δεύτερον ποτὲ δὲν φθάνομεν εἰς ὑπόλοιπον 0, ἤτοι ἄλλα μὲν κλάσματα τρέπονται, ἄλλα δὲ δὲν τρέπονται ἀκριβῶς εἰς δεκαδικούς.

Ἐντεῦθεν πηγάζει τὸ ἀκόλουθον ζήτημα·

Τίνα κλάσματα τρέπονται ἀκριβῶς εἰς δεκαδικούς;

205.—Τἀνωτέρω παραδείγματα (§ 204) ἄγουσιν ἡμᾶς εἰς τὴν σκέψιν μήπως μόνος ὁ παρονομαστὴς ἀρκεῖ νὰ λύσῃ τὴν ἀπορίαν μας ταύτην.

Ἔστω τυχὸν κοινὸν κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$· ἀναλύομεν τὸν παρονομαστὴν εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντων· διακρίνομεν δύο περιπτώσεις·

α') Ὁ β δὲν περιέχει πρώτους παράγοντας διαφόρους τῶν 2 καὶ 5, ἤτοι·

$$\beta = 2^{\lambda} \times 5^{\mu}$$

ὅπου ἢ καὶ οἱ δύο ἐκθέται εἶναι ἀκέραιοι ἢ ὁ εἷς ἀκέραιος καὶ ὁ ἄλλος 0.

Ἐὰν $\lambda = \mu$, τότε

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha}{2^{\mu} \times 5^{\mu}} = \frac{\alpha}{(2 \times 5)^{\mu}} = \frac{\alpha}{10^{\lambda}}. \qquad \text{ἤτοι}$$

τὸ $\frac{\alpha}{\beta}$ τρέπεται εἰς δεκαδικὸν ἀκριβῶς.

Ἐὰν $\lambda > \mu$, πολλαπλασιάζομεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος ἐπὶ $5^{\lambda-\mu}$ καὶ ἔχομεν

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha}{2^{\lambda} \times 5^{\mu}} = \frac{\alpha \times 5^{\lambda-\mu}}{2^{\lambda} \times 5^{\mu} \times 5^{\lambda-\mu}}. \qquad \text{ἤτοι (§ 76)}$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha \times 5^{\lambda-\mu}}{10^{\lambda}}, \qquad \text{ἤτοι}$$

τρέπεται εἰς δεκαδικὸν ἀκριβῶς.

Ἐὰν $\lambda < \mu$, πολλαπλασιάζομεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους ἐπὶ $2^{\mu-\lambda}$ καὶ εὑρίσκομεν ὁμοίως

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha \times 2^{\mu-\lambda}}{10^{\mu}}, \qquad \text{ἤτοι}$$

τρέπεται καὶ πάλιν εἰς δεκαδικὸν ἀκριβῶς·

β΄) Ὁ β περιέχει καὶ παράγοντα ἢ παράγοντας διαφόρους τῶν 2 καὶ 5.

Π. χ. $\beta = 2^{\lambda} \times 5^{\mu} \times 7^{\nu}$, ὅπου ὁ ν δὲν εἶναι 0.

Θεωρήσωμεν τὸν ἀριθμητὴν α· ἐὰν οὗτος διαιρῆται διὰ 7^{ν} τότε διαιροῦμεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ $\frac{\alpha}{\beta}$ διὰ 7^{ν}, καὶ λαμβάνομεν κλάσμα μὲ παρονομαστὴν τῆς μορφῆς $2^{\lambda} \times 5^{\mu}$ ὁπότε κατὰ τὴν πρώτην περίπτωσιν τὸ $\frac{\alpha}{\beta}$ τρέπεται ἀκριβῶς εἰς δεκαδικόν.

Ἐὰν ὁ α δὲν διαιρεῖται διὰ τοῦ 7^{ν}, τότε καθιστῶντες τὸ $\frac{\alpha}{\beta}$ ἀνάγωγον (ἐὰν δὲν εἶναι τοιοῦτον) εὑρίσκομεν κλάσμα οὗ ὁ παρονομαστὴς ἔχει τὸν παράγοντα 7,

ἔστω δὲ τοῦτο τὸ $\frac{K}{2^2 \times 5 \times 7}$

Ἐὰν δ' ὑποθέσωμεν ὅτι

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{K}{2^2\times5\times7}=\frac{M}{10^\nu}$$

πρέπει (§ 150) $10^\nu=2^2\times5\times7\times\rho$ (ἔνθα ρ ἀκέραιος) ἤ

καὶ $2^\nu\times5^\nu=2^3\times5\times7\times\rho$

ὅπερ ἄτοπον (§ 130). Τὸ κλάσμα λοιπὸν $\frac{\alpha}{\beta}$ δὲν τρέπεται εἰς δεκαδικὸν ἀκριβῶς.

Ἐκ πάντων τούτων συνάγομεν ὅτι·

Συνθήκη ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία ἵνα κλάσμα τι $\frac{\alpha}{\beta}$ τρέπηται εἰς δεκαδικὸν ἀκριβῶς εἶναι ἡ ἑξῆς·

Ὁ ἀριθμητὴ νὰ περιέχῃ πάντας τοὺς πρώτους παράγοντας τοῦ παρονομαστοῦ τοὺς διαφόρους τῶν 2 καὶ 5 καὶ οὐδένα μὲ μικρότερον ἐκθέτην.

Ὅθεν καὶ

Ὁ παρονομαστὴς ἀναγώγου κλάσματος τρεπομένου ἀκριβῶς εἰς δεκαδικὸν δὲν περιέχει πρώτους παράγοντας διαφόρους τῶν 2 καὶ 5.

Ἀσκήσεις.

271 ~~265~~) Τίνα ἐκ τῶν κλασμάτων

$$\frac{105}{14},\ \frac{21}{150},\ \frac{6}{18},\ \frac{5}{20}$$

τρέπονται εἰς δεκαδικὸν ἀκριβῶς;

272 ~~266~~) Ἐὰν κλάσμα τι ἀνάγωγον ἔχῃ παρονομαστὴν τῆς μορφῆς $2^\lambda\times5^\mu$ θὰ τρέπηται εἰς δεκαδικὸν μὲ ψηφία δεκαδικὰ λ τὸ πλῆθος, ἐὰν $\lambda>\mu$.

Ἐὰν κλάσμα τι ἀνάγωγον ἔχῃ παρονομαστὴν τῆς μορφῆς $2^\lambda\times5^\mu$ θὰ τρέπηται εἰς δεκαδικὸν μὲ δεκαδικὰ ψηφία μ τὸ πλῆθος, ἐὰν $\mu>\lambda$.

273 ~~267~~) Ἔστωσαν δύο κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ $\frac{\gamma}{\delta}$ ὧν τὸ πρῶτον τρέπεται εἰς δεκαδικὸν ἀκριβῶς. Πότε τὸ γινόμενον $\frac{\alpha}{\beta}\,\frac{\gamma}{\delta}$ τρέπεται εἰς δεκαδικὸν ἀκριβῶς; (§ 205, § 137).

274a ~~268~~) Ἔστωσαν δύο κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ $\frac{\gamma}{\delta}$ ὧν τὸ πρῶτον τρέπεται εἰς δεκαδικὸν ἀκριβῶς.

Πότε τὸ πηλίκον $\frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta}$ τρέπεται εἰς δεκαδικὸν ἀκριβῶς;

274b 269) Ἔστωσαν δύο κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ $\frac{\gamma}{\delta}$ τὰ ὁποῖα τρέπονται ἀκριβῶς εἰς δεκαδικούς. Τὸ ἄθροισμα, ἡ διαφορά, τὸ γινόμενον καὶ τὸ πηλίκον τρέπονται ἀκριβῶς εἰς δεκαδικούς;

Περιοδικὰ δεκαδικὰ κλάσματα.

206.—Εἴδομεν (§ 205) τίνα κοινὰ κλάσματα δὲν τρέπονται ἀκριβῶς εἰς δεκαδικούς· π. χ. κατὰ τὴν διαίρεσιν 3 : 7 παρέχονται ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία εἰς τὸ πηλίκον· προκύπτει ἤδη τὸ ἐρώτημα·

Τὰ ἄπειρα ταῦτα δεκαδικὰ ψηφία κατὰ τίνα νόμον διαδέχονται ἄλληλα;

Τοῦτο θὰ ἐννοήσωμεν ἀπὸ τὸν τρόπον μὲ τὸν ὁποῖον σχηματίζονται οἱ διαιρετέοι.

Ἕκαστος τούτων σχηματίζεται, ὅταν εἰς τὸ ὑπόλοιπον προσγράψωμεν ἓν μηδενικόν. Ἀλλ' ὡς ὑπόλοιπον ἐνταῦθα, ὅπου ὁ διαιρέτης εἶναι 7, δὲν δύναται νὰ ληφθῇ ἀκέραιος διάφορος τῶν ἀριθμῶν 1, 2, 3, 4, 5, 6· ἑπομένως μετὰ ἓξ τὸ πολὺ διαιρέσεις θὰ παρουσιασθῇ ὑπόλοιπον ἴσον πρὸς ἓν προηγουμένως εὑρεθέν. Ἀλλὰ τότε θὰ προκύψῃ καὶ διαιρετέος ἴσος πρὸς ἄλλον προηγουμένως εὑρεθέντα καὶ ἀφοῦ διαιρέτης εἶναι ὁ αὐτὸς θὰ ἔχωμεν τὴν αὐτὴν σειρὰν πράξεων νὰ ἐκτελέσωμεν· ἑπομένως τὰ πηλίκα καὶ τὰ ὑπόλοιπα ἐπαναλαμβάνονται τὰ αὐτὰ καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν· δηλαδὴ $\frac{3}{7} = 0{,}428571428571\ldots$

```
30 | 7
20   0,42857142...
 60
  40
   50
    10
     30
      2
      :
```

Ἄρα

Πᾶν κοινὸν κλάσμα μὴ τρεπόμενον ἀκριβῶς εἰς δεκαδικὸν παράγει δεκαδικὸν μὲ ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία διαδεχόμενα ἄλληλα κατὰ τὸν ἑξῆς νόμον· «Ἀπό τινος ψηφίου καὶ ἐφεξῆς ἐπαναλαμβάνονται ἐπ' ἄπειρον τὰ αὐτὰ ψηφία καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν».

207.—Περιοδικὸν δεκαδικὸν κλάσμα λέγεται τὸ δεκαδικὸν κλάσμα, ἐν ᾧ ἐπαναλαμβάνονται ἐπ' ἄπειρον ἀπό τινος καὶ ἐφεξῆς τὰ αὐτὰ δεκαδικὰ ψηφία καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν.

Τὸ σύνολον τῶν ψηφίων τῶν οὕτως ἐπαναλαμβανομένων λέγεται περίοδος.

Δεκαδικὸν περιοδικὸν κλάσμα λέγεται ἁπλοῦν μέν, ἂν ἡ περίοδος ἀρχίζῃ ἀπὸ τῶν ψηφίων τῶν δεκάτων,

μικτὸν δέ, ἂν ἡ περίοδος δὲν ἀρχίζῃ ἀμέσως μετὰ τὴν ὑποδιαστολήν.

Π. χ. Τὸ περιοδικὸν δεκαδικὸν κλάσμα 0,2828.... εἶναι ἁπλοῦν, ἐνῷ τὸ 9,23457457457.... εἶναι μικτόν.

Τὰ πρὸ τῆς πρώτης περιόδου δεκαδικὰ ψηφία ἀποτελοῦσι τὸ μὴ περιοδικὸν μέρος.

Κοινὸν κλάσμα ἐξ οὗ προκύπτει περιοδικὸν δεκαδικὸν κλάσμα.

208.—Ἔστω ἁπλοῦν περιοδικὸν δεκαδικὸν κλάσμα ἄνευ ἀκεραίου μέρους τὸ 0,368 368 368 . . . .

Ἄς σχηματίσωμεν δύο ἀκριβεῖς δεκαδικοὺς λαμβάνοντες πρῶτον τὰς τρεῖς περιόδους μὲ ἀκέραιον 0 καὶ ἔπειτα τὸ ἴδιον δεκαδικὸν μέρος ἀλλὰ μὲ ἀκέραιον μίαν περίοδον

τουτέστι $$0,368\,368\,368$$

$$368,368\,368\,368$$

Ἐὰν τὸν πρῶτον καλέσωμεν α_3, ὁ δεύτερος θὰ εἶναι

$$1000\alpha_3+0,000000368$$

ὅθεν, ἂν ἀπὸ τοῦ δευτέρου ἀφαιρέσωμεν τὸν πρῶτον, λαμβάνομεν

$$999\alpha_3+0,00\,000368$$

ἀφ' ἑτέρου ὅμως παρατηροῦμεν, ὅτι ἐὰν ἀφαιρέσωμεν αὐτοὺς ὡς εἶναι γεγραμμένοι ὑπὸ δεκαδικὴν μορφήν, λαμβάνομεν 368· ὅθεν

$$999\alpha_3+0,000000368=368$$

ἢ
$$999\alpha_3+\frac{368}{1000^3}=368.$$

Ὁμοίως ἂν ἐλαμβάνομεν ἐξ ἀρχῆς δεκαδικοὺς μὲ 4 περιόδους καὶ εἰργαζόμεθα κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, θὰ εὑρίσκομεν

$$999\alpha_4+\frac{368}{1000^4}=368\cdot$$

ἐὰν δὲ μὲ 5 περιόδους, θὰ εὑρίσκομεν

$$999\alpha_5+\frac{368}{1000^5}=368 \quad \text{κ.ο.κ.}$$

Παρατηροῦμεν ὅτι ὁ δεύτερος προσθετέος τοῦ πρώτου μέλους ἀπὸ $\frac{368}{1000^3}$ ἔγινε $\frac{368}{1000^4}$, ἤτοι χιλιάκις μικρότερος κ.ο.κ. καὶ ἂν ἦτο δυνατὸν νὰ συνεχισθῇ ἡ ἐργασία αὕτη οὕτως ὥστε νὰ ἔχωσι ληφθῇ πᾶσαι αἱ ἀπειροπληθεῖς περίοδοι τοῦ δοθέντος περιοδικοῦ, ὁ δεύτερος προσθετέος θὰ κατήντα μηδὲν καὶ θὰ προέκυπτε

$$999\times(0,368368\ldots)=368\cdot$$

ὅθεν ἐξάγομεν, ὅτι ἐὰν ὑπάρχῃ κοινὸν κλάσμα ἐξ οὗ παράγεται τὸ δοθὲν περιοδικόν, τὸ κλάσμα τοῦτο θὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ $\frac{368}{999}\cdot$

Καὶ πράγματι, ἐὰν παρατηρήσωμεν ὅτι ὁ 368000 διαιρούμενος διὰ 999 δίδει πηλίκον 368 καὶ ὑπόλοιπον 368, ἐξάγομεν ὅτι ἐκ τῆς τροπῆς τοῦ κλάσματος $\frac{368}{999}$ θὰ προκύπτῃ τὸ περιοδικὸν 0,368368368......

ἤτοι·

Πᾶν ἁπλοῦν περιοδικὸν ἄνευ ἀκεραίου μέρους προκύπτει ἐκ κλάσματος ἔχοντος ἀριθμηνὴν μὲν μίαν περίοδον, παρονομαστὴν δὲ ἀκέραιον, τοῦ ὁποίου πάντα τὰ ψηφία εἶναι 9 καὶ τόσα ὅσα ψηφία ἔχει ἡ περίοδος.

ΣΗΜ. Ἁπλοῦ περιοδικοῦ, τοῦ ὁποίου πάντα τὰ δεκαδικὰ ψηφία εἶναι 9, ἂν ληφθῶσιν ὅλαι αἱ μονάδες, συναποτελοῦσιν ἀκέραιον· π. χ. ὁ 17,999.... δίδει τὸν 18.

209.—Ἐπειδὴ $4,7373.... = 4 + 0,7373....$

καὶ $0,737373... = \frac{73}{99}$ (§ 208)

ἕπεται ὅτι

$$4,7373... = 4 + \frac{73}{99} = \frac{4 \times 99 + 73}{99} = \frac{4 \times (100-1) + 73}{99}$$

$$= \frac{400 - 4 + 73}{99} = \frac{473 - 4}{99}.$$ Ἄρα

Εὑρίσκομεν κοινὸν κλάσμα, ἐξ οὗ παράγεται ἁπλοῦν περιοδικὸν μετ᾽ ἀκεραίου μέρους ὡς ἑξῆς:

Σχηματίζομεν ἀκέραιον γράφοντες κατὰ σειρὰν τὰ ψηφία τοῦ ἀκεραίου μέρους καὶ μιᾶς περιόδου, ἀφαιροῦμεν ἀπ᾽ αὐτοῦ τὸ ἀκέραιον μέρος, τὴν δὲ διαφορὰν θεωροῦμεν ὡς ἀριθμητὴν κλάσματος, οὗτινος παρονομαστὴν θέτομεν τὸν ἀριθμὸν ὅστις προκύπτει ἐκ μιᾶς περιόδου, ὅταν πάντα τὰ ψηφία του γίνωσιν 9.

210.—Ἔστω ἤδη μικτὸν περιοδικὸν τὸ 3,46257257....

παρατηροῦμεν ὅτι ἐὰν κλάσμα τι $\frac{\alpha}{\beta}$ παράγῃ τὸ 3,46257257...,

τότε τὸ κλάσμα $\frac{100 \times \alpha}{\beta}$ θὰ παράγῃ τὸ 346,257257...

ἀλλὰ κατὰ τὰ προηγούμενα ἔχομεν,

$$100 \times \frac{\alpha}{\beta} = \frac{346257 - 346}{999} \qquad (§\ 209)$$

ὅθεν $$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{346257 - 346}{99900}$$

ἄρα·

Εὑρίσκομεν κοινὸν κλάσμα ἐξ οὗ παράγεται δοθὲν μικτὸν περιοδικὸν ὡς ἑξῆς: Σχηματίζομεν ἀκέραιον γράφοντες κατὰ σειρὰν τὰ ψηφία τοῦ ἀκεραίου μέρους, τοῦ μὴ περιοδικοῦ μέρους καὶ νῆς πρώτης περιόδου, ὅπως ἐπίσης σχηματίζομεν ἀκέραιον γράφοντες κατὰ σειρὰν τὰ ψηφία τοῦ ἀκεραίου μέρους καὶ τοῦ μὴ περιοδικοῦ, ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ α΄ σχηματισθέντος ἀκεραίου τὸν β΄ τοιοῦτον καὶ τὴν διαφορὰν θεωροῦμεν ὡς ἀριθμηνὴν κλάσματος οὗτινος παρονομασνὴν θέτομεν τὸν ἀριθμὸν ὅστις προκύπτει ἐκ μιᾶς περιόδου, ὅταν πάντα τὰ ψηφία της γίνωσιν 9 ἀκολουθούμενον ὑπὸ τόσων 0, ὅσα εἶναι τὰ ψηφία τοῦ μὴ περιοδικοῦ δεκαδικοῦ μέρους.

ΣΗΜ. Ἐὰν τὰ περιοδικὰ ψηφία μικτοῦ τινος περιοδικοῦ εἶναι 9, τότε δυνάμεθα νὰ θεωρῶμεν ὅτι αἱ μονάδες τοῦ μικτοῦ περιοδικοῦ, ἐὰν ἦτο δυνατὸν νὰ ληφθῶσιν ἅπασαι, θὰ συναπετέλουν ἀριθμὸν δεκαδικόν π. χ. τοῦ 32,964999. . . . αἱ μονάδες θὰ ἔδιδον τὸν 32,965.

Ἰδιότητες τῶν κοινῶν κλασμάτων ἐξ ὧν παράγονται δεκαδικὰ περιοδικά.

211 —Ἔστω ὅτι ἀνάγωγον κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ παράγει

1ον) ἁπλοῦν περιοδικόν· π. χ. τὸ 4,535353. . . .

τότε

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{453-4}{99} \qquad (\S\ 209)$$

ὅθεν ὁ 99 θὰ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ β (§ 154).

Ἀλλὰ ὁ 99 δὲν περιέχει οὔτε τὸν παράγοντα 2 οὔτε τὸν 5, ἑπομένως ὁ β δὲν δύναται νὰ περιέχῃ οὔτε τὸν 2 οὔτε τὸν 5 (§ 79)· ἄρα·

Ἐὰν ἀνάγωγον κλάσμα τρέπηται εἰς ἁπλοῦν περιοδικόν, θὰ ἔχῃ παρονομαστὴν μὴ περιέχοντα οὔτε τὸν παράγοντα 2 οὔτε τὸν 5.

2ον) μικτὸν περιοδικόν π. χ. τὸ 7,12683683....

ἔχομεν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{712683-712}{99900}$ (§ 210)

Τὸ τελευταῖον ψηφίον τῆς περιόδου 3 εἶναι διάφορον τοῦ τελευταίου ψηφίου τοῦ μὴ περιοδικοῦ μέρους του, διότι ἄλλως ἡ περίοδος δὲν θὰ ἤρχιζεν ἀπὸ τοῦ τρίτου μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴν ψηφίου· ὅθεν, ὅταν ἐκτελέσωμεν τὴν πρᾶξιν εἰς τὸν ἀριθμητήν, θὰ εὕρωμεν ἀριθμὸν μὴ λήγοντα εἰς 0, ἤτοι $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{A}{99900}$, ὅπου ὁ Α δὲν λήγει εἰς 0· ἄρα ὁ Α δὲν διαιρεῖται διὰ 10, ἤτοι θὰ εἶναι ἢ τῆς μορφῆς $2^{\rho}\times\pi$ ἢ τῆς μορφῆς $5^{\rho}\times\pi$ ἢ ἁπλῶς π, ὅπου ὁ π δὲν περιέχει οὔτε τὸν 2 οὔτε τὸν 5, ἐνῷ ὁ παρονομαστὴς ἰσοῦται πρὸς $999\times2^2\times5^2$· ὥστε καὶ μετὰ πάσας τὰς δυνατὰς ἁπλοποιήσεις εἰς τὸν παρονομαστὴν θὰ μένῃ ἀνέπαφον ἢ τὸ 2^2 ἢ τὸ 5^2 ἢ καὶ τὰ δύο· ἤτοι·

Ὁ παρονομαστὴς κοινοῦ ἀναγώγου κλάσματος τρεπομένου εἰς μικτὸν περιοδικὸν περιέχει τοὐλάχιστον τὸν ἕνα τῶν παραγόντων 2 καὶ 5 μὲ ἐκθέτην ἴσον πρὸς τὸ πλῆθος τῶν μὴ περιοδικῶν δεκαδικῶν ψηφίων.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτουσιν εὐκόλως τὰ ἀκόλουθα συμπεράσματα:

1ον) Ἐὰν ὁ παρονομαστὴς ἀναγώγου κλάσματος εἶναι τῆς μορφῆς $2^{\lambda}\times5^{\lambda}$ τὸ κλάσμα τρέπεται εἰς δεκαδικὸν ἀκριβῶς (§ 205).

2ον) Ἐὰν ὁ παρονομαστὴς ἀναγώγου κλάσματος δὲν περιέχῃ μήτε τὸν 2 μήτε τὸν 5, τὸ κλάσμα τρέπεται εἰς ἁπλοῦν περιοδικὸν (§ 205, § 206).

3ον) Ἐὰν ὁ παρονομαστὴς ἀναγώγου κλάσματος εἶναι τῆς μορφῆς $2^{\lambda}\times5^{\mu}\times\pi$, ὅπου οἱ ἐκθέται λ καὶ μ δὲν εἶναι ἀμφότεροι μηδενικά, ὁ δὲ π εἶναι ἀριθμὸς μὴ διαιρετὸς διὰ 2 μηδὲ διὰ 5, τὸ κλάσμα τρέπεται εἰς μικτὸν περιοδικὸν (§ 205, § 206, 210).

Ἀσκήσεις.

275) Τίνα ἐκ τῶν κλασμάτων

$$\frac{6}{15},\ \frac{6}{36},\ \frac{6}{48},\ \frac{6}{54},\ \frac{12}{30},\ \frac{12}{46},\ \frac{12}{48}$$

τρέπονται εἰς ἁπλᾶ περιοδικά, τίνα εἰς μικτὰ καὶ τίνα εἰς δεκαδικὰ ἀκριβῶς;

276) Ἔστω τὸ δεκαδικὸν περιοδικὸν κλάσμα 42,342342342... ἐὰν μεταθέσωμεν τὴν ὑποδιαστολὴν δύο θέσεις πρὸς τἀριστερά, θὰ ἔχωμεν περιοδικὸν ἐν ᾧ ἡ περίοδος θὰ εἶναι 423. Πῶς διακρίνομεν ἐξ αὐτοῦ ὅτι τὸ δοθὲν περιοδικὸν θὰ παράγηται ἐκ κλάσματος ἔχοντος παρονομαστὴν 999 καὶ ἀριθμητὴν λήγοντα εἰς μηδέν;

277) Ἐὰν ὁ παρονομαστὴς β ἀναγώγου κλάσματος $\frac{\alpha}{\beta}$ δὲν περιέχῃ τοὺς παράγοντας 2, 3 καὶ 5 ἡ περίοδος τοῦ ἁπλοῦ περιοδικοῦ εἰς ὃ τρέπεται τὸ $\frac{\alpha}{\beta}$ εἶναι ἀριθμὸς διαιρετὸς διὰ 9.

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ περίοδος θὰ εἶναι ἀριθμητὴς κλάσματος ἴσου πρὸς τὸ $\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ ἔχοντος παρονομαστὴν διαιρετὸν διὰ 9 (§ 211).

278) Τὸ γινόμενον δύο ἁπλῶν περιοδικῶν δεκαδικῶν κλασμάτων μικροτέρων τῆς μονάδος εἶναι ἁπλοῦν περιοδικὸν δεκαδικὸν κλάσμα (§ 211).

279) Τὸ γινόμενον δύο μικτῶν περιοδικῶν κλασμάτων δὲν εἶναι πάντοτε μικτὸν περιοδικὸν (§ 211).

280) Ἐὰν τὸ $\frac{\alpha}{\beta}$ τρέπηται εἰς περιοδικὸν μικτὸν μὲ μ τὸ πλῆθος ψηφία μὴ περιοδικά, τὸ $\frac{\alpha^2}{\beta^2}$ θὰ τρέπηται εἰς τοιοῦτον μὲ 2μ ψηφία μὴ περιοδικά.

281) Τὸ ἄθροισμα δύο ἁπλῶν περιοδικῶν κλασμάτων δὲν δίδει ποτὲ μικτὸν περιοδικὸν (§ 211).

282) Ἀριθμὸς μὴ ἔχων τὸν παράγοντα 2 μηδὲ τὸν 5 διαιρεῖ ἀριθμόν τινα οὗτινος πάντα τὰ ψηφία εἶναι 9, ἤτοι διαιρεῖ δύναμίν τινα τοῦ 10, ἀφοῦ ἀφαιρεθῇ ἀπ' αὐτῆς μία μονάς, ἤτοι ἀριθμὸν τῆς μορφῆς $10^{\varrho} - 1$.

Ἔχομεν (§ 211) ὅτι ἀριθμὸς μὴ ἔχων τὸν παράγοντα 2 μηδὲ τὸν 5 δύναται νὰ χρησιμεύσῃ ὡς παρονομαστὴς ἀναγώγου κλάσματος τρεπομένου εἰς ἁπλοῦν περιοδικὸν (§ 208).

283) Ἔστω ἀνάγωγον κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ τρεπόμενον εἰς ἁπλοῦν περιοδικὸν καὶ ἔστω ν τὸ πλῆθος τῶν ψηφίων τῆς περιόδου· τότε ὁ β διαιρεῖ τὸν $10^{\nu}-1$, ἀλλὰ δὲν διαιρεῖ τὸν $10^{\rho}-1$, ἐὰν $\rho<\nu$.

284) Αἱ περίοδοι ἁπλῶν περιοδικῶν παραγομένων ἐκ κλασμάτων ἀναγώγων ὁμωνύμων ἔχουσι τὸ αὐτὸ πλῆθος ψηφίων.

Ἀσκήσεις ἐν γένει ἐπὶ κλασμάτων κοινῶν καὶ δεκαδικῶν.

285 — Ἐκ πίθου περιέχοντος οἶνον ἀφαιρεῖται τὸ $\frac{1}{3}$ καὶ ἀναπληροῦται δι' ὕδατος· ἔπειτα ἀφαιρεῖται τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ μίγματος ἀναπληροῦται δι' ὕδατος καὶ πάλιν ἀφαιρεῖται τὸ $\frac{1}{5}$ καὶ ἀναπληροῦται δι' ὕδατος. Πόσον μέρος τοῦ ἐν ἀρχῇ οἴνου ἀποτελεῖ ὁ ἀπομείνας καθαρὸς οἶνος εἰς τὸ τελευταῖον κρᾶμα;

286) Ἀγγεῖόν τι περιέχει α ὀκάδας οἴνου· ἀφαιροῦμεν ἀπ' αὐτοῦ β ὀκάδας καὶ ἀναπληροῦμεν δι' ὕδατος· ἐκ τοῦ νέου μίγματος ἀφαιροῦμεν β ὀκάδας καὶ ἀναπληροῦμεν καὶ πάλιν δι' ὕδατος. Πόσος καθαρὸς οἶνος ἀπέμεινεν εἰς τὸ ἀγγεῖον; Ἀριθμητικὴ ἐφαρμογή.

287) Δύο ἀδελφοὶ εἶχον ἐν ὅλῳ κατατεθειμένα εἰς τὴν Τράπεζαν 58000 δραχμάς· ἵνα ὅμως πληρώσωσι κοινόν τι χρέος ἐκ 33000 δραχμῶν, ἀπέσυρεν ὁ πρῶτος τὰ $\frac{3}{4}$ τῶν καταθέσεών του καὶ ὁ δεύτερος τὰ $\frac{2}{5}$ τῶν ἰδικῶν του. Ἐκ πόσων δραχμῶν ἀπετελοῦντο αἱ καταθέσεις καὶ τί ποσὸν ἐπλήρωσεν ἕκαστος;

288) Νὰ χωρισθῇ ὁ ἀριθμὸς 340 εἰς δύο μέρη τοιαῦτα ὥστε τὰ $\frac{3}{5}$ τοῦ πρώτου καὶ τὰ $\frac{4}{7}$ τοῦ δευτέρου ν' ἀποτελῶσι τὸν ἀριθμὸν 198.

289) Μοιράζουσιν εἰς στρατιωτικόν τι ἀπόσπασμα συγκείμενον ἐξ ἑνὸς λοχίου, τριῶν δεκανέων καὶ 18 στρατιωτῶν ἀμοιβὴν ἐκ 1000 δραχμῶν διὰ τὴν σύλληψιν λῃστοῦ· ἕκαστος δεκανεὺς λαμ-

βάνει τὰ $\frac{9}{5}$ τῶν λαμβανομένων ὑφ' ἑκάστου στρατιώτου· ὁ δὲ λοχίας τὰ $\frac{7}{4}$ ἐκείνων τὰ ὁποῖα λαμβάνει ἕκαστος δεκανεύς. Ποῖον τὸ μερίδιον ἑκάστου;

290) Ἐπὶ τῆς αὐτῆς ὁδοῦ συνδεούσης δύο σημεῖα A καὶ B βαδίζουσι δύο ὁδοιπόροι κατ' ἀντίθετον διεύθυνσιν· ὁ πρῶτος διανύει ὁλόκληρον τὴν ὁδὸν εἰς 4,5 ὥρας· ὁ δεύτερος εἰς 7,2 ἐὰν ἀναχωρήσωσι συγχρόνως ἐκ τῶν A καὶ B, μετὰ πόσην ὥραν θὰ συναντηθῶσιν;

291) Δύο ἁμαξοστοιχίαι ἀναχωροῦσιν ἐκ δύο πόλεων A καὶ B ἀπεχουσῶν 460 στάδια ἀπ' ἀλλήλων· ἡ πρώτη διατρέχει καθ' ὥραν 52,5 στάδια, ἡ δευτέρα 41. Αὕτη ἀνεχώρησε τὴν 6 π. μ. ἐκ τοῦ B, ἐνῷ ἡ πρώτη τὴν 8 π. μ. ἐκ τοῦ A. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ A συνηντήθησαν;

292) Τίνος ἀριθμοῦ τὰ $\frac{2}{3}$ τῶν $\frac{5}{7}$ προσλαμβάνοντα καὶ 33 μονάδας δίδουσι τὸν ἀριθμὸν 63;

293) Παιδίον τι φέρει μεθ' ἑαυτοῦ 7 μῆλα, δεύτερον 5 καὶ τρίτον 4· προσέρχεται τέταρτον φέρον 20 καρύδια· δίδει τὰ καρύδια καὶ τρώγει μετ' αὐτῶν τὰ μῆλα. Πόσα καρύδια ἔδωκεν εἰς ἕκαστον;

294) Τίνα ἡμερομηνίαν φέρει ἡ ἡμέρα τοῦ ἔτους καθ' ἣν τὸ $\frac{1}{4}$ τῶν παρελθουσῶν ἡμερῶν τοῦ αὐτοῦ ἔτους ἰσοῦται πρὸς τὰ $\frac{2}{5}$ τῶν ὑπολειπομένων ἡμερῶν τοῦ ἔτους; (1 ἔτος $=$ 365 ἡμ.).

295) Ἔστωσαν δύο ἀνάγωγα κλάσματα μὲ παρανομαστὰς 8 καὶ 15 καὶ τρίτον κλάσμα ἀνάγωγον ὅπερ προστιθέμενον εἰς τὰ δοθέντα δίδει ἐξαγόμενον ἀκέραιον; Ποίους πρώτους παράγοντας δύναται νὰ περιέχῃ ὁ παρονομαστὴς τοῦ τρίτου αὐτοῦ κλάσματος; (§ 119).

296) Δίδονται τὰ κλάσματα $\frac{12}{400}$, $\frac{70}{216}$, $\frac{355}{2380}$. Ζητεῖται τὸ μικρότερον τῶν κλασμάτων ἅτινα εἶναι διαρετὰ καὶ διὰ τῶν τριῶν δοθέντων. (Λέγομεν ὅτι κλάσμα τι εἶναι διαιρετὸν δι' ἄλλου, ὅταν διαιρούμενον δι' αὐτοῦ δίδῃ ὡς πηλίκον ἀριθμὸν ἀκέραιον· π. χ. ὁ $\frac{9}{4}$ εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ $\frac{3}{8}$ διότι $\frac{9}{4} : \frac{3}{8} = 6$). (§ 119).

297) Δίδονται τρία ἀνάγωγα κλάσματα· ζητεῖται ἕτερον κλάσμα διαιροῦν αὐτά, τουτέστιν ἕκαστον τῶν τριῶν δοθέντων διαιρούμενον διὰ τοῦ ζητουμένου νὰ δίδῃ πηλίκον ἀκέραιον.

290) Πόσα ἐκ τῶν κλασμάτων τῶν ἐχόντων ἀριθμητὴν τὴν μονάδα καὶ παρονομαστὰς τοὺς διαφόρους ἀκεραίους τοὺς μεταξὺ 1020 καὶ 1040 τρέπονται εἰς δεκαδικὸν ἀκριβῶς, πόσα ἐξ αὐτῶν εἰς ἁπλᾶ περιοδικὰ καὶ πόσα εἰς μικτά;

299) Πότε τὸ γινόμενον ἀναγώγου κλάσματος ἐπὶ ἀκέραιον δίδει κλάσμα ἀνάγωγον.

300) Ποίους παρονομαστὰς δύνανται νὰ ἔχωσι κλάσματα ἀνάγωγα τρεπόμενα εἰς ἁπλᾶ περιοδικὰ μὲ 2 ψηφία; (§ 211).

301) Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ παρονομασταὶ τῶν ἀναγώγων κλασμάτων ἅτινα τρεπόμενα εἰς δεκαδικὰ δίδουσι περιοδικὰ μὲ ἓν ψηφίον μὴ περιοδικὸν καὶ ἓν περιοδικὸν (§ 211).

302) Ἔστω ἀνάγωγον κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$, τοῦ ὁποίου ὁ παρονομαστὴς εἶναι τῆς μορφῆς $2^\lambda \times 5^\mu \times 3^\varrho \times 7^\sigma$ · ἐὰν ν εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν ψηφίων τῆς περιόδου τοῦ περιοδικοῦ εἰς ὃ τρέπεται, θὰ ἔχωμεν $10^\nu - 1 = 3^\varrho \times 7^\sigma \times K$. Νὰ γενικευθῇ ἡ πρότασις αὕτη. (§ 211).

ΒΙΒΛΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ

ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ ΡΙΖΑ

212.—Τετράγωνον ἀριθμοῦ (§ 75) λέγεται τὸ γινόμενον δύο παραγόντων ἴσων πρὸς τὸν ἀριθμόν. Π. χ. τετράγωνον τοῦ 6 εἶναι ὁ 6×6, ἤτοι ὁ 36

Ἐπίσης τετράγωνον τοῦ $\frac{2}{3}$ εἶναι ὁ $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$: ὁ ἀριθμὸς 6 λέγεται τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 36 ὅπως καὶ ὁ $\frac{2}{3}$ λέγεται τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ $\frac{4}{9}$ καὶ ἐν γένει· ἀριθμός τις β λέγεται τετραγωνικὴ ῥίζα ἑτέρου α, ἐὰν ὁ α εἶναι τετράγωνον τοῦ β· ἤτοι.

Τετραγωνικὴ ῥίζα ἀριθμοῦ τινος καλεῖται ἕτερος ἀριθμὸς ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν ἑαυτόν του δίδει τὸν πρῶτον. Γράφοντες ὑπὸ τὸ σημεῖον $\sqrt{}$ ἀριθμόν τινα α ἐννοοῦμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ α· π. χ. γράφοντες $\sqrt{49}$ ἐννοοῦμεν τὸν 7· ὁμοίως $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$

Τετράγωνον ἀθροίσματος.

213.—Ἔστωσαν δύο ἀκέραιοι α καὶ β· ἔχομεν κατὰ τὰς ἰδιότητας τοῦ πολλαπλασιασμοῦ·

$$(\alpha+\beta)^2 = (\alpha+\beta)\times(\alpha+\beta) = \alpha\times\alpha+\alpha\times\beta+\beta\times\alpha+\beta\times\beta$$

(§ 46 β').

ἢ $$(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2+2\times\alpha\times\beta+\beta^2$$ ὅθεν·

Τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος δύο ἀριθμῶν σύγκειται ἐκ τῶν τετραγώνων αὐτῶν καὶ ἐκ τοῦ διπλασίου γινομένου αὐτῶν·

$$\text{π. χ. } (4+3)^2 = 4^2+2\times4\times3+3^2 = 49$$

214.—Ἐπειδὴ

$$(\alpha+1)^2=\alpha^2+2\times\alpha+1 \qquad (\S\ 213)$$

ἕπεται ὅτι

$$(\alpha+1)^2-\alpha^2=2\times\alpha+1=\alpha+(\alpha+1).$$ Ἄρα·

Τὰ τετράγωνα δύο διαδοχικῶν ἀκεραίων διαφέρουσι κατὰ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν.

215.—Ἔστω δ ὁ ἀριθμὸς ὁ δεικνύων τὸ σύνολον τῶν δεκάδων ἀριθμοῦ τινος α καὶ μ τὸ ψηφίον τῶν μονάδων· ἤτοι

ἔστω $$\alpha=10\times\delta+\mu.$$

Ὑψοῦντες ἀμφότερα τὰ μέλη εἰς τὸ τετράγωνον εὑρίσκομεν

$$\alpha^2=100\times\delta^2+2\times\delta\times10\times\mu+\mu^2 \qquad (\S\ 213,\ \S\ 76\ \delta)$$

Ἐπειδὴ οἱ δύο πρῶτοι προσθετέοι τοῦ δευτέρου μέλους λήγουσιν εἰς 0, ὁ α^2 λήγει εἰς τὸ αὐτὸ ψηφίον εἰς ὃ καὶ ὁ μ^2.

Ἄρα·

Τὸ τετράγωνον παντὸς ἀκεραίου λήγει εἰς τὸ αὐτὸ ψηφίον, εἰς ὃ λήγει τὸ τετράγωνον τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων αὐτοῦ.

216.— Οὐδεὶς ἐκ τῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν ἔχει τετράγωνον λῆγον εἰς 2, 3, 7, 8· ὅθεν καὶ

Οὐδενὸς ἀκεραίου τὸ τετράγωνον λήγει εἰς 2, 3 7, 8.

217.—Ἔστω ὅτι ἀκέραιός τις ἀριθμὸς α λήγει εἰς τρία μηδενικά· τότε διαγράφοντες ταῦτα λαμβάνομεν ἀκέραιον τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον δὲν λήγει εἰς μηδέν· ἑπομένως τὸ τετράγωνον θὰ λήγῃ εἰς 6 μηδενικὰ καὶ ἐν γένει, ὅταν ἀκέραιός τις λήγῃ εἰς ν μηδενικά, τὸ τετράγωνόν του θὰ λήγῃ εἰς 2ν μηδενικά· ὅθεν·

Ἀριθμός τις ἀκέραιος λήγων εἰς περιττὸν ἀριθμῶν μηδενικῶν δὲν εἶναι τετράγωνον ἄλλου ἀκεραίου.

218.—Ὅταν ἀκέραιός τις εἶναι τετράγωνον ἄλλου ἀκεραίου, λέγεται τέλειον τετράγωνον.

Κλάσμα δὲ λέγεται τέλειον τετράγωνον, ὅταν εἶναι τετράγωνον ἄλλου κλάσματος, (διότι τὸ τετράγωνον ἀκεραίου εἶναι ἀκέραιος).

Ἀσκήσεις.

303) Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων δύο διαδοχικῶν ἀκεραίων ἐλαττούμενον κατὰ μονάδα γίνεται ἀριθμὸς διαιρετὸς διὰ 4. (§ 214).

304) Πᾶς περιττὸς μεγαλύτερος τῆς μονάδος δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς διαφορὰ δύο τετραγώνων. (§ 214).

305) Ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων δύο ἀκεραίων διαφερόντων κατὰ 2 μονάδας εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 4. (§ 213).

306) Μεταξὺ τῶν τετραγώνων δύο διαδοχικῶν ἀκεραίων περιλαμβάνονται 24 ἀκέραιοι ἀριθμοί· τίνες οἱ διαδοχικοὶ ἀκέραιοι; (§ 214).

307) Ἀκέραιος λήγων εἰς 1 ἢ 4 ἢ 9 δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον, ἐὰν ἔχῃ ψηφίον δεκάδων περιττόν. (§ 215).

308) Ἐάν ἀκέραιός τις ἔχῃ ψηφίον μονάδων 6 καὶ ψηφίον δεκάδων ἄρτιον, δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον.

309) Ἀκέραιος λήγων εἰς 5 καὶ ὢν τέλειον τετράγωνον θὰ ἔχῃ ὡς ψηφίον δεκάδων 2, ὡς ψηφίον δὲ ἑκατοντάδων 0 ἢ 2 ἢ 6.

310) Πᾶς ἄρτιος ὅστις εἶναι τέλειον τετράγωνον θὰ διαιρῆται διὰ 4. (ἄσκ. 171).

311) Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων δύο περιττῶν δὲν εἶναι τετράγωνον ἀκεραίου. (ἄσκ. 171).

312) Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀκέραιοι, ὧν τὰ τετράγωνα νὰ διαφέρωσι κατὰ 285 μονάδας. (§ 214).

313) Τὸ ἄθροισμα ἀκεραίου καὶ τοῦ τετραγώνου του εἶναι ἀριθμὸς διαιρετὸς διὰ 2.

314) Παντὸς περιττοῦ τὸ τετράγωνον εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 8 ηὐξημένον κατὰ μονάδα. (§ 84).

315) Τὸ ἄθροισμα ἀριθμοῦ τινος καὶ τοῦ τετραγώνου αὐτοῦ εἶναι 240. Τίς ὁ ἀριθμός;

Τετράγωνον γινομένου.

219.—Ὡς γνωρίζομεν, τὸ τετράγωνον γινομένου ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῶν τετραγώνων τῶν παραγόντων (§ 76. δ′) ὡς ἐπίσης (§ 136) εἴδομεν ὅτι

Ἵνα ἀριθμός τις ἀναλελυμένος εἰς πρώτους παράγοντας εἶναι τέλειον τετράγωνον πρέπει καὶ ἀρκεῖ οἱ ἐκθέται τῶν πρώτων αὐτοῦ παραγόντων νὰ εἶναι ἄρτιοι.

Ἀσκήσεις.

316) Ἐκ τῶν ἀριθμῶν, οἵτινες εἶναι πολλαπλάσια τοῦ 24, συγχρόνως δὲ καὶ τέλεια τετράγωνα, νὰ εὑρεθῇ ὁ μικρότερος.

317) Τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν πρώτων πρὸς ἀλλήλους εἶναι τέλειον τετράγωνον, ἐὰν ἑκάτερος αὐτῶν εἶναι τέλειον τετράγωνον καὶ τότε μόνον. (§ 219)

318) Τὸ γινόμενον τριῶν διαδοχικῶν ἀκεραίων δὲν δύναται νὰ εἶναι τέλειον τετράγωνον.

Παρατηροῦμεν ὅτι πᾶς πρῶτος ἀριθμὸς διάφορος τοῦ 2 δὲν δύναται νὰ εἶναι παράγων συγχρόνως δύο διαδοχικῶν ἀριθμῶν ἢ δύο ἀριθμῶν διαφερόντων κατὰ δύο μονάδας.

310) Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ εἶναι τέλεια τετράγωνα, τότε ὁ μ. κ. δ. αὐτῶν εἶναι τέλειον τετράγωνον, ὡς ἐπίσης καὶ τὸ ε. κ. π. αὐτῶν.

Τετράγωνον κλάσματος.

Τίνα ἀνάγωγα κλάσματα εἶναι τέλεια τετράγωνα;

220.—Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ ἀνάγωγον κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ εἶναι τέλειον τετράγωνον· ἐπειδὴ δὲν δύναται νὰ εἶναι τετράγωνον ἀκεραίου, θὰ εἶναι τετράγωνον κλάσματος καὶ ἔστω,

$$\frac{\alpha}{\beta}=\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^2.$$

Ἄς καλέσωμεν $\frac{\lambda}{\mu}$ τὸ ἀνάγωγον κλάσμα τὸ ἴσον πρὸς τὸ $\frac{\gamma}{\delta}$·

τότε $\frac{\alpha}{\beta}=\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^2=\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2=\frac{\lambda^2}{\mu^2}$ (§ 187) ἤτοι·

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\lambda^2}{\mu^2}$$

καὶ ἑπομένως

$$α=λ^2 \text{ καὶ } β=μ^2 \qquad (§\ 152)\text{· ἄρα}$$

Ἵνα κλάσμα τι ἀνάγωγον εἶναι τέλειον τετράγωνον, πρέπει ἑκάτερος τῶν ὅρων του νὰ εἶναι τέλειον τετράγωνον.

Π.χ. τὸ κλάσμα $\frac{5}{9}$ δὲν εἶναι τετράγωνον ἄλλου, ἐνῷ τὸ κλάσμα $\frac{18}{32}$, ἤτοι τὸ $\frac{9}{16}$ εἶναι τετράγωνον ἄλλου, τοῦ $\frac{3}{4}$

Ἀκέραιος μὴ ὢν τετράγωνον ἀκεραίου δύναται νὰ εἶναι τετράγωνον κλάσματος;

§ **221.**—Ἔστω ὅτι τὸ τετράγωνον ἑνὸς κλάσματος ἔδιδεν ἀκέραιον, ὅστις δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον· π.χ. ἔστω ὅτι $\left(\frac{α}{β}\right)^2=5$· τότε, ἐὰν $\frac{λ}{μ}$ καλέσω τὸ ἀνάγωγον τὸ ἴσον πρὸς $\frac{α}{β}$ θὰ ἔχω

$$\left(\frac{λ}{μ}\right)^2=5 \text{ ἢ } \frac{λ^2}{μ^2}=5 \qquad (§\ 187)$$

Ἐπειδὴ ὅμως τὸ $\frac{λ}{μ}$ εἶναι ἀνάγωγον, καὶ τὸ κλάσμα $\frac{λ^2}{μ^2}$, θὰ εἶναι ἀνάγωγον (§.118)· ἑπομένως ὁ $μ^2$ δὲν διαιρεῖ τὸν $λ^2$, ὅθεν ἀδύνατον νὰ ἔχωμεν

$$\frac{λ^2}{μ^2}=5 \text{ ἢ καὶ } \left(\frac{α}{β}\right)^2=5$$

ἄρα·

Τὸ τετράγωνον κλάσματος δὲν εἶναι ἀκέραιος καὶ ἑπομένως.
Ἐὰν ἀκέραιος δὲν εἶναι τετράγωνον ἀκεραίου δὲν εἶναι οὔτε κλάσματος.

Ἀσκήσεις.

320) Κλάσμα τι εἶναι τέλειον τετράγωνον ἐὰν τὸ γινόμενον τῶν ὅρων του εἶναι τέλειον τετράγωνον καὶ τότε μόνον. (§ 219, § 220).

321) Ποῖον κλάσμα αὐξηθὲν κατὰ τὸ τετράγωνόν του γίνεται ἴσον πρὸς τὰ $\frac{33}{4}$ αὐτοῦ;

322) Ποῖον κλάσμα διαιρούμενον διὰ τοῦ ἀντιστρόφου του δίδει ὡς πηλίκον $\frac{28}{63}$;

323) Ἐὰν $\frac{\alpha}{\beta} = \left(\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\gamma}\right)^2$ καὶ α διάφορον τοῦ β τότε $\gamma^2 = \alpha . \beta$

Ὑπολογισμὸς τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τῶν ἀκεραίων καὶ τῶν κλασματικῶν κατὰ προσέγγισιν μονάδος.

222.—Ἂς λάβωμεν δύο διαδοχικοὺς ἀκεραίους καὶ ἂς ὑψώσωμεν αὐτοὺς εἰς τὸ τετράγωνον· π. χ. τὸν 6 καὶ τὸν 7, τῶν ὁποίων τὰ τετράγωνα εἶναι 36 καὶ 49. Τοῦ 36 τετραγωνικὴ ῥίζα εἶναι ὁ 6 (§ 212)· τοῦ 49 ὁ 7· πᾶς ἀριθμὸς μεταξὺ τοῦ 36 καὶ τοῦ 49 θὰ λέγωμεν ὅτι ἔχει τετραγωνικὴν ῥίζαν κατὰ προσέγγισιν μονάδος τὸν 6· ὅπως π. χ. οἱ ἀριθμοὶ 37, 38, 48, $37\frac{1}{2}$ κ. ο. κ. ἤτοι

Τετραγωνικὴ ῥίζα ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν μονάδος λέγεται ὁ μέγιστος ἀκέραιος τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον περιέχεται εἰς τὸν ἀριθμὸν τοῦτον.

Π. χ. τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 160 κατὰ προσέγγισιν μονάδος εἶναι ὁ 12, διότι $12^2 = 144$ καὶ $13^2 = 169$.

Ἡ πρᾶξις δι' ἧς εὑρίσκομεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν ἀριθμοῦ καλεῖται ἐξαγωγὴ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης.

223.—Ἔστω πρῶτον δοθεὶς τυχὼν ἀκέραιος μικρότερος τοῦ 100, π. χ. ὁ 75· τότε λαμβανομένου ὑπ' ὄψει ὅτι τὰ τετράγωνα τῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

εἶναι τὰ ἑξῆς

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81

εὑρίσκομεν ἀμέσως ὅτι τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 75 κατὰ προσέγγισιν μονάδος εἶναι ὁ 8 (§ 222).

224.—Ἤδη πρὶν ἢ προχωρήσωμεν εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν, καθ' ἣν ὁ ἀριθμὸς τοῦ ὁποίου ζητοῦμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 100, παρατηροῦμεν τὰ ἑξῆς:

Ἐὰν α, β, υ εἶναι ἀκέραιοι, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ υ μικρότερος τοῦ 100, τοιοῦτοι δὲ ὥστε

$$\alpha \times 100 < \beta \times 100 + \upsilon \qquad (1)$$

τότε ὁ α δὲν ὑπερβαίνει τὸν β, διότι, ἐὰν εἴχομεν

$$\alpha > \beta, \quad \text{ἤτοι} \quad \alpha = \beta + \rho,$$

ὅπου ρ εἶναι τοὐλάχιστον ἡ μονάς, τότε θὰ ἦτο

$$\alpha \times 100 = \beta \times 100 + \rho \times 100$$

ὁπότε

$$\beta \times 100 + \rho \times 100 > \beta \times 100 + \upsilon \qquad (\text{διότι } \upsilon < 100)$$

ἢ καὶ

$$\alpha \times 100 > \beta \times 100 + \upsilon$$

ὅπερ ἀντιβαίνει πρὸς τὴν τεθεῖσαν ἀνισότητα (1)· ὁμοίως, ἐὰν

$$\alpha \times 10 < \beta \times 10 + \upsilon \qquad (2)$$

ὅπου $\upsilon < 10$, συμπεραίνομεν ὅτι ὁ α δὲν δύναται νὰ ὑπερβαίνῃ τὸν β· ἐπίσης ἂν

$$\alpha \times 100 > \beta \times 100 + \upsilon$$

τότε κατ' ἀνάγκην

$$\alpha > \beta.$$

223. Πῶς ἐξάγεται ἡ τετραγωνικὴ ρίζα ἀκεραίου μεγαλυτέρου τοῦ 100 κατὰ προσέγγισιν μονάδος;

Εὕρεσις τοῦ ἀριθμοῦ τῶν δεκάδων τῆς τετραγωνικῆς ρίζης (1). Ἔστω ἀκέραιος τοῦ ὁποίου τὰ δύο τελευταῖα ψηφία εἶναι μηδενικά· π. χ. ἔστω ὁ 5400· οὗτος γράφεται 54×10^2· ζητοῦμεν πρῶτον τὴν τετρ. ρίζαν τοῦ 54, δηλ. ζητοῦμεν ἕνα ἀκέραιον τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον νὰ χωρῇ εἰς τὸν 54 ἐνῷ τὸ τετράγωνον τοῦ κατὰ μονάδα μεγαλυτέρου νὰ μὴ χωρῇ· τοιοῦτος εἶναι ὁ 7

δηλ. $$7^2 < 54 < 8^2$$

ἐξ αὐτοῦ ἕπεται $$7^2 \times 10^2 < 54 \times 10^2 < 8^2 \times 10^2$$

(1) Ἐδῶ, ὅπως καὶ κατωτέρω, ἐκεῖ ὅπου ἀναφέρεται ἡ φράσις ***τετρ. ρίζα*** ἀριθμοῦ χωρὶς ἄλλον προσδιορισμὸν ἐννοεῖται ὅτι πρόκειται περὶ τετρ. ρίζης ἀκριβοῦς ἢ κατὰ προσέγγισιν μονάδος.

ἢ καὶ $(7\times10)^2 < 5400 < (8\times10)^2$

ἢ ἀκόμη $70^2 < 5400 < 80^2$

ὅθεν ἡ τετρ. ρίζα τοῦ 5400 θὰ εἶναι ἀκέραιός τις ἐκ τῶν 70, 71,... 79· θὰ ἔχῃ ἑπομένως 7 δεκάδας. Κατὰ ταῦτα ὁ ἀριθμὸς τῶν δεκάδων τῆς τετρ. ρίζης τοῦ 5400 ἰσοῦται πρὸς τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ 54.

Γενικῶς· ἔστω ὅτι ἀριθμοῦ τινος ἀκεραίου α τὰ δύο τελευταῖα ψηφία εἶναι μηδενικά· τότε καὶ ὁ ἀριθμὸς $\frac{\alpha}{100}$ θὰ εἶναι ἀκέραιος. Ἂς καλέσωμεν δ τὴν τετρ. ρίζαν τοῦ $\frac{\alpha}{100}$ θὰ ἔχωμεν (§ 222)

$$\delta^2 \leqq \frac{\alpha}{100} < (\delta+1)^2$$

ἑπομένως $\delta^2 \times 100 \leqq \alpha < (\delta+1)^2 \times 100$

ἢ καὶ $(\delta\times10)^2 \leqq \alpha < [(\delta+1)\times10]^2$

ἤτοι ἡ τετραγ. ρίζα τοῦ α θὰ ἔχῃ δ δεκάδας· τουτέστιν ὁ ἀριθμὸς τῶν δεκάδων τῆς τετρ. ρίζης τοῦ α θὰ ἰσοῦται πρὸς τὴν τετρ. ρίζαν τοῦ $\frac{\alpha}{100}$.

Ἔστω ἤδη ἀκέραιος τοῦ ὁποίου ἓν τοὐλάχιστον ἐκ τῶν δύο τελευταίων ψηφίων εἶναι διάφορον τοῦ μηδενός· π.χ. ἔστω ὁ 5436· λέγω ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν δεκάδων τῆς τετραγ. ρίζης τοῦ 5436 συμπίπτει μὲ τὸν ἀριθμὸν τῶν δεκάδων τῆς τετρ. ρίζης τοῦ 5400· δηλ. ἐὰν καλέσωμεν λ τὸν ἀριθμὸν τῶν δεκάδων τῆς τετρ. ρίζης τοῦ 5436 θὰ ἔχωμεν $\lambda=7$.

Πρὸς ἀπόδειξιν αὐτοῦ παρατηροῦμεν ὅτι ἀφοῦ ὁ 70^2 χωρεῖ εἰς τὸν 5400 θὰ χωρῇ καὶ εἰς τὸν 5436· ἤτοι τὸ λ δὲν εἶναι μικρότερον τοῦ 7· ἀλλὰ οὔτε καὶ μεγαλύτερον τοῦ 7 δύναται νὰ εἶναι τὸ λ διότι πρέπει ὁ $(\lambda\times10)^2$ νὰ χωρῇ εἰς τὸ 5436

ἤτοι $(\lambda\times10)^2 < 5436$ (1)·

ἢ καὶ $\lambda^2\times100 < 54\times100+36$

(1) Δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἔχωμεν $\lambda^2\times100 = 5436$ διότι τὸ πρῶτον μέλος ἰσοῦται πρὸς ἀριθμὸν τοῦ ὁποίου τὰ δύο τελευταῖα ψηφία εἶναι μηδενικά, ἐνῷ δὲν συμβαίνει τὸ αὐτὸ διὰ τὸ δεύτερον μέλος.

ἐπομένως πρέπει (§ 224) $\lambda^2 \leq 54$

ἀλλ' ὁ μεγαλύτερος ἀκέραιος τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον χωρεῖ εἰς τὸν 54 εἶναι ὁ 7·

ὥστε $\lambda = 7$

Ἤτοι·

Ὁ ἀριθμὸς δ τῶν δεκάδων τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης εὑρίσκεται, ἂν ἐξαχθῇ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τῶν ἑκατοντάδων τοῦ ἀριθμοῦ.

Εὕρεσις τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων τῆς τετρ. ῥίζης. Ἐὰν καλέσωμεν μ τὸ ψηφίον τῶν μονάδων τῆς τετρ. ῥίζης τοῦ 5436 θὰ ἔχωμεν ὅτι τὸ τετράγωνον τοῦ $70+\mu$ χωρεῖ εἰς τὸν 5436·

ἤτοι $$5436 = (70+\mu)^2 + \upsilon$$

(Ἐὰν τὸ 5436 ἦτο τέλειον τετράγωνον θὰ εἴχομεν $\upsilon = 0$).

Ἔχομεν λοιπὸν (§ 220)

$$5436 = 70^2 + 2 \times 70 \times \mu + \mu^2 + \upsilon$$

ὅθεν $$5436 - 70^2 = 2 \times 70 \times \mu + \mu^2 + \upsilon$$

ἢ καὶ $$536 = 2 \times 7 \times 10 \times \mu + \mu^2 + \upsilon \qquad (A)$$

ἢ ἀκόμη $$536 = (2 \times 7 \times \mu) \times 10 + \mu^2 + \upsilon$$

ἐπομένως $$(2 \times 7 \times \mu) \times 10 \leq 536$$

ἢ $$(2 \times 7 \times \mu) \times 10 \leq 53 \times 10 + 6$$

ἐξ οὗ (§ 224) $$2 \times 7 \times \mu \leq 53$$

ἄρα $$\mu \leq \frac{53}{2 \times 7}$$

ἀλλὰ ὁ μ εἶναι ἀκέραιος· ἄρα δὲν δύναται νὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ ἀκεραίου μέρους τοῦ $\frac{53}{2 \times 7}$

ἐξ οὗ βλέπομεν ὅτι τὸ ψηφίον τῶν μονάδων δὲν ὑπερβαίνει τὸ ψηφίον, ὅπερ εὑρίσκομεν διαιροῦντες τὸν ἀριθμὸν τῶν δεκάδων τοῦ ὑπολοίπου διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ ἀριθμοῦ τῶν δεκάδων τῆς ῥίζης.

Κατὰ ταῦτα τὸ ψηφίον τῶν μονάδων δὲν ὑπερβαίνει τὸν 3.

Ἵνα δοκιμάσωμεν ἤδη ἂν μ=3, λαμβάνομεν ὑπ' ὄψιν ἐκ τῆς ἰσότητος (Α) ὅτι

$$2 \times 7 \times 10 \times \mu + \mu^2 \leq 536$$

καὶ θέτομεν ὅπου μ τὸ 3· ἐὰν ἡ σχέσις αὕτη ἀληθεύῃ, τότε μ=3, ἄλλως δοκιμάζομεν τὸν κατά μονάδα μικρότερον. Παρατηρητέον ὅτι τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἀνισότητος (Α) γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς·

$$(2 \times 7 \times 10 + \mu) \times \mu.$$

ἢ καὶ $(140 + \mu) \times \mu$ ὥστε,

διὰ νὰ διακρίνωμεν ἂν μ=3, παρατηροῦμεν ἂν τὸ 143×3 εἶναι μικρότερον τοῦ ὑπολοίπου 536· εὑρίσκομεν οὕτως ἐνταῦθα μ=3.

Τουτέστι, πρὸς εὕρεσιν τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων σχηματίζομεν ἀριθμὸν μὲ δεκάδας 2×7 καὶ μὲ μονάδας τὸ δοκιμαζόμενον ψηφίον 3· πολλαπλασιάζομεν δὲ τοῦτον ἐπὶ τὸ δοκιμαζόμενον ψηφίον 3· ἐπειδὴ τὸ γινόμενον αὐτὸ εἶναι μικρότερον τοῦ ὑπολοίπου 536, ἕπεται ὅτι μ=3· καὶ ἐπομένως τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 5436 κατὰ προσέγγισιν μονάδος εἶναι ὁ ἀριθμὸς 73· παρατηροῦμεν δ' ὅτι, ἐὰν τὸ γινόμενον 143×3 ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ 536, θὰ εὕρωμεν ὅ,τι καὶ ἐὰν ἀφῃροῦμεν ἀπ' εὐθείας τὸ 73^2 ἀπὸ τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ καθόσον ἡ διαφορὰ

$$536 - (2 \times 7 \times 10 \times \mu + \mu^2)$$

ἰσοῦται πρὸς τὴν διαφορὰν

$$5436 - (7^2 \times 100 + 2 \times 7 \times 10 \times \mu + \mu^2).$$

ὥστε ἐὰν ἡ πρᾶξις ἐγένετο ὀρθῶς, πρέπει $73^2 + 107 = 5436$.

Ἡ διάταξις τῆς πράξεως γίνεται ὡς ἑξῆς·

$$\begin{array}{r|l} 54'36 & 73 \\ \hline 49 & 143 \\ \cline{1-1} 536 & 3 \\ \cline{2-2} 429 & 429 \\ \cline{1-1} 107 & \end{array}$$

Ζητήσωμεν ἤδη τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ ἀριθμοῦ 543678· ἔστω δ ὁ ἀριθμὸς τῶν δεκάδων αὐτῆς καὶ μ τὸ ψηφίον τῶν μονάδων· κατὰ τὰ προηγούμενα εὑρίσκομεν τὸ δ ἐξάγοντες τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ 5436, ἤτοι $\delta=73$· ἐπομένως θὰ ἔχωμεν ὡς καὶ προηγουμένως $73^2\times100+2\times73\times10\times\mu+\mu^2\leqq543678$· ἀφαιροῦμεν ὡς καὶ πρότερον τὸ $73^2\times100$· ἡ ἀφαίρεσις ὅμως τοῦ $73^2\times100$ ἀπὸ τοῦ 543678 γίνεται, καὶ ἐὰν ἀφαιρέσωμεν τὸ 73^2 ἀπὸ τοῦ 5436, εἰς δὲ τὸ ὑπόλοιπον προσγράψωμεν τὸ 78· ἀλλ' ὡς παρετηρήσαμεν ἤδη ἡ διαφορὰ $5436-73^2$ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἤδη εὑρεθὲν ὑπόλοιπον 107· ἀρκεῖ ἐπομένως νὰ προσγράψωμεν εἰς αὐτὸ 78. Προχωροῦμεν κατόπιν ὅπως καὶ ἀνωτέρω πρὸς εὕρεσιν τοῦ μ.

Διάταξις τῆς πράξεως

54'36'78	737	
49	143	1467
536	3	7
429	429	10269
10778		
10269		
509		

Κανών·

226.—Ἵνα ἐξαγάγωμεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν ἀριθμοῦ ἀκεραίου (ἀκριβῶς ἢ κατὰ προσέγγισιν μονάδος) χωρίζομεν αὐτὸν εἰς διψήφια τμήματα ἀρχόμενοι ἀπὸ τῶν ἁπλῶν μονάδων. Τὸ πρῶτον πρὸς τἀριστερὰ τμῆμα δύναται νὰ εἶναι καὶ μονοψήφιον· τούτου ἐξάγομεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν, ἥτις θὰ εἶναι καὶ τὸ πρῶτον ψηφίον τῆς ζητουμένης. Τὸ τετράγωνον τοῦ εὑρεθέντος τούτου ψηφίου ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ πρώτου τμήματος. Δεξιᾷ τοῦ μένοντος ὑπολοίπου καταβιβάζομεν τὸ δεύτερον τμῆμα, ὅτε σχηματίζεται ἀριθμός τις, ἀπὸ τοῦ ὁποίου χωρίζομεν τὸ τελευταῖον ψηφίον πρὸς τὰ δεξιά. Τὸ πρὸς τἀριστερὰ τμῆμα θεωροῦμεν ὡς διαιρετέον, ὡς διαιρέτην δὲ τὸ διπλάσιον τοῦ εὑρεθέντος πρώτου ψηφίου τῆς ρίζης. Τὸ ἀκέραιον πηλίκον, ὅπερ θὰ εὕρωμεν, γράφομεν δεξιᾷ καὶ ὑποκάτω τοῦ διαιρέτου καὶ πολλαπλασιάζομεν. Ἐὰν τὸ γινόμενον ἀφαιρῆται ἀπὸ τοῦ σχηματισθέντος ἀριθμοῦ, τότε τὸ εὑρεθὲν πηλίκον εἶναι τὸ δεύτερον ψηφίον τῆς ρίζης καὶ γράφομεν αὐτὸ δεξιᾷ τοῦ πρώτου, εἰ δὲ μή, δοκιμάζομεν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον τὸ κατὰ μονάδα μικρότερον ψηφίον κ. ο. κ. μέχρις οὗ καταστῇ δυνατὴ ἡ ἀφαίρεσις, ὁπότε ἔχομεν καὶ τὸ δεύτερον ψηφίον τῆς ρίζης. Εἰς τὸ ὑπόλοιπον τῆς ἀφαιρέσεως καταβιβάζομεν καὶ τὸ τρίτον διψήφιον τμῆμα τοῦ ἀριθμοῦ. Χωρίζομεν πάλιν ἀπ᾽ αὐτοῦ τὸ ψηφίον τῶν μονάδων, διαιροῦμεν τὸ ἀπομένον τμῆμα διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ σχηματιζομένου ὑπὸ τῶν εὑρεθέντων ἤδη ψηφίων τῆς ρίζης, προχωροῦμεν δὲ κατόπιν ὅπως καὶ προηγουμένως· τοιουτοτρόπως ἐξακολουθοῦμεν μέχρις οὗ καταβιβασθῇ καὶ τὸ τελευταῖον διψήφιον τμῆμα.

Παραδείγματα.

```
76΄78΄25 | 876
64       |  167   1746
1278     |    7      6
1169     | 1169  10476
 10925   |
 10476   |
   449   |
```

```
257056 | 507
25     |  10   1007
 07056 |          7
  7049 |       7049
     7 |
```

```
3΄78΄75 | 194
1       |  29   384
278     |   9     4
261     | 261  1536
 1775   |
 1536   |
  239   |
```

Παρατηρήσεις. Δυνατὸν νὰ συμβῇ, ὅπως εἰς τὸ δεύτερον τῶν ἀνωτέρω παραδειγμάτων, ἓν τῶν πηλίκων νὰ εἶναι 0· τότε καὶ τὸ ἀντίστοιχον ψηφίον τῆς ρίζης θὰ εἶναι τὸ 0.

Ἐπίσης δυνατόν, ὅπως εἰς τὸ τρίτον τῶν ἀνωτέρω παραδειγμάτων, πηλίκον τι νὰ εἶναι μεῖζον τοῦ 9· τότε ἀρχίζομεν τὴν δοκιμὴν ἀπὸ τοῦ ψηφίου 9.

Ἀσκήσεις.

324) Τὰ ψηφία τῆς τετραγωνικῆς ρίζης εἶναι τόσα, ὅσα καὶ τὰ τμήματα εἰς ἃ χωρίζεται ἀρχικῶς ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα.

Π.χ. ἡ τετραγωνικὴ ρίζα ἑπταψηφίου θὰ ἔχῃ τέσσαρα ψηφία.

325) Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ὑπόλοιπον τῆς πράξεως οὐδέποτε ὑπερβαίνει τὸ διπλάσιον τῆς εὑρεθείσης τετραγωνικῆς ρίζης.

Καὶ τῷόντι, ἐὰν $\upsilon \geqq 2\rho+1$, τότε $\rho^2+\upsilon \geqq (\rho+1)^2$ (§ 210, § 222).

326) Ἡ τετραγωνικὴ ρίζα κατὰ προσέγγισιν μονάδος ἀριθμοῦ μὴ ἀκεραίου εἶναι ἡ αὐτὴ μὲ τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ ἀκεραίου μέρους του.

Π. χ. τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 103,25 κατὰ προσέγγισιν μονάδος εἶναι ἡ τετραγωνικὴ ρίζα κατὰ προσέγγισιν μονάδος τοῦ 103· ἤτοι ὁ 10.

327) Τὸ ψηφίον τῶν μονάδων τῆς τετραγωνικῆς ρίζης ἀριθμοῦ οὐδέποτε εἶναι μικρότερον τοῦ πηλίκου τῆς διαιρέσεως ἐν ᾗ διαιρετέος μὲν εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν δεκάδων τοῦ ὑπολοίπου, τοῦ προκύπτοντος μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν τοῦ τετραγώνου τῶν δεκάδων τῆς ρίζης ἀπὸ τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ, διαιρέτης δὲ τὸ διπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν δεκάδων τῆς ρίζης ηὐξημένον κατὰ μονάδα·
οὕτως ἐπὶ παραδείγματι (σελ. 165) εὑρίσκομεν πρὸ τῆς δοκιμῆς ὅτι τὸ ψηφίον τῶν μονάδων τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τοῦ 5436 δὲν εἶναι μικρότερον τοῦ 3.

328). Πόσα τέλεια τετράγωνα περιέχονται εἰς τὸν ἀριθμὸν 56734;

Ὑπολογισμὸς τῆς τετραγωνικῆς ρίζης ἀριθμοῦ (ἀκεραίου ἢ κλασματικοῦ) κατὰ προσέγγισιν δοθέντος πολλοστημορίου τῆς μονάδος.

227.—Ἔστωσαν δύο ὁμώνυμα κλάσματα μὲ ἀριθμητὰς δύο διαδοχικοὺς ἀκεραίους· π.χ. $\frac{5}{7}$, $\frac{6}{7}$. Τὰ τετράγωνα αὐτῶν εἶναι $\frac{25}{49}$, $\frac{36}{49}$. Πᾶς ἀριθμὸς μεγαλείτερος τοῦ $\frac{25}{49}$ ἀλλὰ μικρότερος τοῦ $\frac{36}{49}$ ἔχει ὡς τετραγωνικὴν ρίζαν κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{7}$ τὸν $\frac{5}{7}$. Ὁμοίως πᾶς ἀριθμὸς μεταξὺ τοῦ $\left(\frac{3}{10}\right)^2$ καὶ τοῦ $\left(\frac{4}{10}\right)^2$, ὅπως π. χ. ὁ $\frac{11}{75}$, ἔχει τετραγωνικὴν ρίζαν κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{10}$ τὸν $\frac{3}{10}$, ἤτοι·

Τετραγωνικὴ ρίζα ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{\nu}$ καλεῖται τὸ μεγαλύτερον ἐκ τῶν κλασμάτων τῶν ἐχόντων παρονομαστὴν ν καὶ τῶν ὁποίων τὰ τετράγωνα περιέχονται εἰς τὸν δοθέντα ἀριθμόν.

228. —Ἔστω α ἄριθμός τις τοῦ ὁποίου ζητοῦμεν νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{\nu}$. Κατὰ τὸν ἀνωτέρω ὁρισμὸν ζητοῦμεν ἀκέραιόν τινα ρ τοιοῦτον ὥστε

$$\left(\frac{\rho}{\nu}\right)^2 \leqq \alpha \text{ καὶ } \left(\frac{\rho+1}{\nu}\right)^2 > \alpha \text{ ἢ καὶ}$$

$$\frac{\rho^2}{\nu^2} \leqq \alpha \qquad \text{καὶ} \frac{(\rho+1)^2}{\nu^2} > \alpha, \qquad \text{ἢ ἀκόμη}$$

$$\rho^2 \leqq \alpha \times \nu^2 \qquad \text{καὶ} \qquad (\rho+1)^2 > \alpha \times \nu^2$$

ἑπομένως ρ θὰ εἶναι ὁ μεγαλύτερος ἀκέραιος τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον χωρεῖ εἰς τὸν ἀριθμὸν $\alpha \times \nu^2$, ἤτοι ὁ ρ θὰ εἶναι ἡ τετραγωνικὴ ρίζα κατὰ προσέγγισιν μονάδος τοῦ ἀριθμοῦ $\alpha \times \nu^2$ ἄρα·

Ἵνα ὑπολογίσωμεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν οἱουδήποτε ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{\nu}$, πολλαπλασιάζομεν αὐτὸν ἐπὶ ν^2· τοῦ γινομένου ἐξάγομεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν κατὰ προσέγγισιν μονάδος καὶ ταύτην λαμβάνομεν ὡς ἀριθμητὴν κλάσματος ἔχοντος παρονομαστὴν τὸν ν· π. χ. εὑρίσκομεν οὕτω τοῦ 5 τετραγωνικὴν ρίζαν κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{8}$ τὸν ἀριθμὸν $\frac{17}{8}$.

Ἐφαρμογαὶ τοῦ κανόνος τούτου.

229. — Εἰς τὴν μερικὴν περίπτωσιν καθ' ἣν ὁ παρονομαστὴς ν εἶναι δύναμις τοῦ 10, ἤτοι ὅταν ζητῶμεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν δεκαδικῆς μονάδος, αἱ πράξεις γίνονται ἁπλούστεραι.

Παραδείγματα. Νὰ ἐξαχθῇ ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 2 κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{100}$.

Κατὰ τὸν κανόνα ἐξάγω τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ 2×100^2, ἤτοι τοῦ 20000, κατὰ προσέγγισιν μονάδος, ὅτε εὑρίσκω 141 καὶ ταύτην διαιρῶ διὰ τοῦ 100, ἤτοι ἡ ζητουμένη τετραγωνικὴ ρίζα εἶναι 1,41.

Ὁμοίως εὑρίσκω ὅτι ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 2,35416 κατὰ προσέγγισιν 0,01 εἶναι 1,53.

Ἀσκήσεις.

329) Νὰ ὑπολογισθῶσιν αἱ

$$\sqrt{2500},\quad \sqrt{7543{,}6},\quad \sqrt{25203},\quad \sqrt{252200},$$

$$\sqrt{9302600};\quad \sqrt{8035}$$

ἀκριβῶς ἢ κατὰ προσέγγισιν μονάδος.

330) Νὰ ἐξαχθῇ ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ κλάσματος $\frac{7}{\beta^2}$ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{\beta}$.

331) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ $\sqrt{\frac{11}{2^2\times3}}$ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{6}$.

Παρατηροῦμεν ὅτι $\frac{11}{2^2\times3}=\frac{11\times3}{(2\times3)^2}$

332) Νὰ ὑπολογισθῶσιν ἀκριβῶς ἢ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{5}$ αἱ

$$\sqrt{19},\quad \sqrt{\frac{16}{49}},\quad \sqrt{\frac{64}{49}},\quad \sqrt{\frac{39}{40}},\quad \sqrt{\frac{7}{25}},$$

333) Νὰ ὑπολογισθῶσι κατὰ προσέγγισιν 0,1 αἱ

$$\sqrt{2{,}79864},\quad \sqrt{\frac{3}{4}},\quad \sqrt{12\frac{2}{5}}\quad \sqrt{8{,}33333}$$

334) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ $\sqrt{14}$ κατὰ προσέγγισιν $\frac{3}{7}$

335) Ἡ τετραγωνικὴ ρίζα ἀκεραίου τινὸς Α καθ᾽ οἱανδήποτε προσέγγισιν εἶναι πάντοτε μικροτέρα τοῦ $\rho + \frac{\upsilon}{2\rho}$, ὅπου ρ δηλοῖ τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ αὐτοῦ ἀκεραίου κατὰ προσέγγισιν μονάδος καὶ υ τὸ ὑπόλοιπον τὸ εὑρεθὲν κατὰ τὴν τοιαύτην ἐξαγωγήν.

Ἀρκεῖ πρὸς ἀπόδειξιν νὰ λάβωμεν ὑπ᾽ ὄψει ὅτι (§ 225)

$A = \rho^2 + \upsilon$ καὶ (§ 213) $\left(\rho + \frac{\upsilon}{2\rho}\right)^2 = \rho^2 + \upsilon + \frac{\upsilon^2}{4\rho^2}$.

336) Ἐὰν κατὰ τὴν ἐξαγωγὴν τετραγωνικῆς ρίζης ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν μονάδος τὸ ὑπόλοιπον δὲν ὑπερβαίνῃ τὴν εὑρεθεῖσαν τετραγωνικὴν ρίζαν, τότε αὕτη εἶναι καὶ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{2}$ (§ 225 § 227).

337) Εἰς μίαν τάξιν σχολείου ὑπάρχουσι τόσα θρανία, ὅσοι οἱ μαθηταὶ οἱ καθήμενοι εἰς ἕκαστον θρανίον. Ἐκ τῶν 69 μαθητῶν τῆς τάξεως ταύτης 5 δὲν κάθηνται εἰς θρανία. Πόσα εἶναι τὰ θρανία;

338) Δι᾽ ἕκαστον λαχνὸν ἑνὸς λαχείου πληρώνει τις 0,50 δρχ. Πόσα χρήματα θὰ δώσῃ δι᾽ ὅλους τοὺς λαχνοὺς τοὺς φέροντας ἀριθμὸν ὅστις εἶναι τέλειον τετράγωνον καὶ εὑρίσκεται μεταξὺ 1050 καὶ 1250;

339) Ποῖον κλάσμα διαιρούμενον διὰ τοῦ ἀντιστρόφου του δίδει κλάσμα ἴσον πρὸς τὸ $\frac{2523}{4107}$;

340) Ἐὰν ἀριθμός τις ἄρτιος εἶναι ἄθροισμα δύο τετραγώνων, καὶ τὸ ἥμισυ αὐτοῦ θὰ εἶναι ἄθροισμα δύο τετραγώνων.

Ἀρκεῖ ν᾽ ἀποδείξωμεν ὅτι $\frac{\alpha^2+\beta^2}{2} = \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 + \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2$

341) Ἀριθμὸς διαιρετὸς διὰ 4, πλὴν τοῦ 4, εἶναι διαφορὰ τῶν τετραγώνων δύο ἀκεραίων.

Ἀσύμμετροι ἀριθμοί.

230. — Ἂς λάβωμεν τὸν ἀριθμὸν 7,999... καὶ ἂς φαντασθῶμεν ὅτι ἀντικαθιστῶμεν τὰ δεκαδικὰ ψηφία ὡς ἑξῆς: 7,13579111315...

ὅπου εἶναι προφανὴς ὁ νόμος, καθ' ὃν προχωροῦσι τὰ δεκαδικὰ ψηφία· παρατηροῦμεν ὅτι ὁ 7,135 εἶναι μικρότερος τοῦ 7,999 ὁμοίως ὁ 7,1357 εἶναι μικρότερος τοῦ 7,9999 κ. ο. κ. ὥστε, καὶ ὁσαδήποτε δεκαδικὰ ψηφία καὶ ἂν λάβωμεν τοῦ 7,13579111315..., δὲν ὑπερβαίνομεν ἀριθμὸν δοθέντα, ὅπως π.χ. τὸν ἀριθμὸν 7,9999... δι' αὐτὸ λέγομεν ὅτι ὁ 7,13579111315... εἶναι ἀριθμός.

231.—Ὅθεν τοιοῦτον ἄπειρον πλῆθος ἐν ᾧ αἱ μονάδες ἑκάστης τάξεως δὲν εἶναι πλείονες τῶν 9, λαμβάνεται ὡς ἀριθμός, οἱαδήποτε καὶ ἂν εἶναι ἡ σειρὰ τῶν ψηφίων δι' ὧν παρίσταται τὸ πλῆθος τῶν μονάδων ἑκάστης τάξεως· ἐὰν δὲ τὰ ψηφία ταῦτα δὲν ἐπαναλαμβάνωνται τὰ αὐτὰ καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν (περιοδικὰ δεκαδικὰ κλάσματα), ἀλλὰ βαίνωσι κατ' ἄλλον τινὰ νόμον, π. χ. ὡς ἐν § 230, τότε λέγεται ὁ ἀριθμὸς ἀσύμμετρος· ὥστε πᾶς ἀσύμμετρος εἶναι ἀριθμὸς ἔχων ἀπειρίαν δεκαδικῶν ψηφίων μὴ περιοδικῶν· π. χ. ὁ 7,353353335... εἶναι ἀσύμμετρος.

232.—Ἀριθμός τις λέγεται μείζων ἄλλου, ἂν περιέχῃ πλὴν τῶν μονάδων ἐκείνου καὶ ἄλλας,

ὡς π. χ. $7,999... > 7,353353335...$

Δύο ἀριθμοὶ λέγονται ἴσοι, ὅταν πᾶς ἀριθμὸς ἀκέραιος ἢ κλασματικὸς μικρότερος τοῦ ἑνὸς εἶναι μικρότερος καὶ τοῦ ἄλλου.

Οἱ ἀριθμοὶ 7,999... καὶ 8 εἶναι ἴσοι πρὸς ἀλλήλους, διότι δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ εὑρεθῇ ἀριθμὸς μικρότερος τοῦ ἑνὸς χωρὶς νὰ εἶναι μικρότερος καὶ τοῦ ἄλλου· π. χ. ὁ ἀριθμὸς $7\frac{237}{238}$, ὅστις εἶναι μικρότερος τοῦ 8 εἶναι μικρότερος καὶ τοῦ 7,999 (διότι ἡ διαφορὰ $8 - 7\frac{237}{238}$ εἶναι $\frac{1}{238}$, ἐνῷ ἡ διαφορὰ $8-7,999$ εἶναι μόνον $\frac{1}{1000}$) ἑπομένως εἶναι μικρότερος καὶ τοῦ 7,9999...

Καὶ τὸ ἀντίστροφον εἶναι προφανές· πᾶς ἀριθμὸς μικρότερος τοῦ 7,999... εἶναι τοῦ 8 μικρότερος.

233.—Κατὰ ταῦτα, ἵνα δύο ἀριθμοὶ γεγραμμένοι ὑπὸ τὴν δεκαδικὴν μορφὴν εἶναι ἴσοι, πρέπει ἢ τὰ ὁμοταγῆ αὐτῶν ψηφία νὰ εἶναι πάντα τὰ αὐτά, ἢ τὰ πρῶτα ὁμοταγῆ ψηφία καθ' ἃ διαφέρουσιν ἀλλήλων νὰ ἔχωσι διαφορὰν 1, τὰ δὲ λοιπὰ τοῦ μὲν ἔχοντος τὸ μικρότερον ψηφίον νὰ εἶναι ἄπειρα 9, τοῦ δὲ ἑτέρου 0·

Π. χ. οἱ ἀριθμοὶ 6,483999... καὶ 6 484 εἶναι ἴσοι ἐνῷ οἱ ἀριθμοὶ $\left\{ \begin{matrix} 4{,}278... \\ 4{,}276... \end{matrix} \right.$ δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι ἴσοι· διότι ὑπάρχει ἀριθμὸς μεγαλύτερος τοῦ 4,276... καὶ μικρότερος τοῦ 4,278... π.χ. ὁ 4,277, πολὺ δὲ περισσότερον οἱ 4,278.. καὶ 4,275 δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι ἴσοι.

234.—Τὰ δεκαδικὰ περιοδικά, ἂν καὶ ἔχωσιν ἀπειρίαν δεκαδικῶν ψηφίων, ἰσοῦνται πρὸς ἀκεραίους ἢ κλάσματα.

Θεωρήσωμεν ἤδη τὸν τυχόντα ἀσύμμετρον 2,12211221122... ἔστω ὅτι εὑρίσκεται κοινόν τι κλάσμα ἴσον πρὸς αὐτόν· θὰ εἴχομεν $\frac{\alpha}{\beta} = 2{,}12211221122...$ Ἀφ' ἑτέρου ὅμως τὸ κλάσμα θὰ τρέπηται ἢ ἀκριβῶς εἰς δεκαδικὸν ἢ εἰς περιοδικόν, ὁπότε θὰ προέκυπτε ἰσότης μεταξὺ τούτου καὶ τοῦ ἀσυμμέτρου ὅπερ ἄτοπον. (§ 233). Ἄρα

Πᾶς ἀσύμμετρος ἀριθμὸς δὲν ἰσοῦται πρὸς οὐδένα σύμμετρον.

235.—Ἔστω τυχὼν ἀκέραιος, ὁ ὁποῖος νὰ μὴ εἶναι τετράγωνον ἄλλου ἀκεραίου· ὡς εἴδομεν (§ 221) δὲν θὰ εἶναι οὐδὲ κλάσματος τετράγωνον.

Οἱ τοιοῦτοι ἀκέραιοι, οἱ μὴ ὄντες τετράγωνα ἄλλων ἀκεραίων εἶναι τετράγωνα ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν, δηλ. ὅταν ἡ ἀκριβὴς τετραγωνικὴ ῥίζα ἀκεραίου δὲν εἶναι ἀκέραιος, θὰ εἶναι ἀσύμμετρος ἀριθμός. Π. χ. ἔστω ὁ 2· ζητήσωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν αὐτοῦ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{10^{\nu}}$ ὅπου λαμβάνει διαδοχικῶς τὰς τιμὰς 1, 2, 3, 4..., δηλ. ἂς ζητήσωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ 2 κατὰ προσέγγισιν

$$\frac{1}{10},\ \frac{1}{100},\ \frac{1}{1000},\ \frac{1}{10000}\cdots$$

εὑρίσκομεν (§ 229)

$$1{,}4 \quad 1{,}41 \quad 1{,}414 \quad 1{,}4142...$$

παρατηροῦμεν ὅτι κατὰ τὰ προηγούμενα αὐτὴ ἡ ἐργασία δὲν ἔχει τέλος· καὶ ἐὰν νοήσωμεν ὅτι τὸ ν αὐξάνει ἀπεριορίστως θὰ αὐξάνῃ ἀπεριορίστως καὶ τὸ πλῆθος τῶν δεκαδικῶν ψηφίων τῆς οὕτω ὑπολογιζομένης τετρ. ῥίζης τοῦ 2· προκύπτει δὲ οὕτω ἀριθμὸς ἔχων ἀπειρίαν δεκαδικῶν ψηφίων· δὲν θὰ εἶναι δὲ οὗτος δεκαδικὸν περιοδικὸν διότι πᾶν περιοδικὸν κλάσμα ἰσοῦται μὲ κοινὸν κλάσμα· ἀλλ' οὐδενὸς κλάσματος τὸ τετράγωνον ἰσοῦται πρὸς τὸν 2 (§ 221). Ὥστε ὁ παραγόμενος δεκαδικὸς ἔχει ἀπειρίαν δεκαδικῶν ψηφίων μὴ περιοδικῶν· ἄρα (§ 231) εἶναι ἀσύμμετρος.

Γενικαὶ ἀσκήσεις ἐπὶ τῶν τεσσάρων βιβλίων.

342) Ἔστω δ κοινὸς διαιρέτης δύο ἀριθμῶν α καὶ β, ἔστω δὲ υ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως α : β. Πῶς ἐκ τῶν τριῶν πηλίκων τῶν διαιρέσεων α : δ, β : δ, α : β εὑρίσκεται τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως υ : δ;

343) Τὸ γινόμενον $(\nu+1)\ (\nu+2)\ .\ .\ .\ (2\nu-1)2\nu$ εἶναι ἀριθμὸς διαιρετὸς διὰ 2^ν.

Ἀρκεῖ (ἄσκησις 240) νὰ λάβω ὑπ' ὄψει μου τὴν προφανῆ ἰσότητα.

$$(\nu+1)\ (\nu+2)\ \ .\ .\ (2\nu-1)\ 2\nu = \frac{1.2.3.\,.\,.\nu\ (\nu+1)\ \ \ .\ .\ 2\nu}{1.2.3.\ \ .\ \ .\ \ \nu}$$

344) Διὰ ποίας ἀκεραίας τιμὰς τοῦ α ἡ διαίρεσις

$$[(\alpha+5).\ (\alpha+6)] : 6\alpha$$

εἶναι τελεία;

Παρατηροῦμεν ὅτι ὁ 6 πρέπει νὰ διαιρῇ τὸν α(α—1) καὶ ὁ α νὰ διαιρῇ τὸν 30.

245) Νὰ εὑρεθῇ ἀκέραιος διψήφιος ἴσος πρὸς τὸ διπλάσιον τοῦ γινομένου τῶν ψηφίων του.

346) Τὸ γινόμενον πέντε διαδοχικῶν ἀριθμῶν εἶναι διαιρετὸν διὰ 1. 2. 3. 4. 5. (§ 122)

347) Τὸ γινόμενον ἓξ διαδοχικῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν εἶναι διαιρετὸν διὰ 1. 2. 3. 4. 5. 6. (§ 122)

348) Τὸ γινόμενον 18 διαδοχικῶν ἀκεραίων εἶναι διαιρετὸν διὰ 720^3.

349) Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι εἶναι ἀδύνατον ὁ κύβος ἀριθμοῦ νὰ ὑπερβαίνῃ τὸ τριπλάσιον αὐτοῦ κατὰ μονάδα.

350) Τὰ πηλίκα τῆς διαιρέσεως δύο ἀριθμῶν διὰ τοῦ μ. κ. δ.

αὐτῶν ἔχουσιν ἄθροισμα 5, τὸ δὲ ε.κ.π. τῶν ἀριθμῶν εἶναι 36. Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ ἀριθμοί. (§ 108, § 123)

351) Νὰ εὑρεθῶσιν 6 ἀριθμοὶ ὧν ἕκαστος ἔχει 30 διαιρέτας καὶ εἶναι διαιρετὸς διὰ 3, 5, 7, δι' οὐδενὸς δὲ ἄλλου πρώτου διαιρεῖται. (ἄσκ. 177)

352) Πρὸς εὕρεσιν τοῦ μ.κ.δ. ἀριθμοῦ τινος Α καὶ τοῦ γινομένου ἄλλων $B \times \Gamma \times \Delta$ δυνάμεθα νὰ ἐργασθῶμεν ὡς ἑξῆς· εὑρίσκομεν τὸν μ.κ.δ. τῶν Α καὶ Β· ἔστω οὗτος ὁ Μ· διαιροῦμεν τὸν Α διὰ Μ καὶ ζητοῦμεν τὸν μ. κ. δ. τοῦ πηλίκου Π καὶ τοῦ Γ· ἔστω οὗτος ὁ Μ΄· διαιροῦμεν τὸ Π διὰ τοῦ Μ΄ καὶ ζητοῦμεν τὸν μ. κ. δ. Μ΄΄ τοῦ πηλίκου Π΄ καὶ τοῦ Δ. Ὁ μ. κ. δ. τῶν Α καὶ $B \times \Gamma \times \Delta$ θὰ εἶναι $M \times M' \times M''$.

Ἀποδεικνύομεν ὅτι ὁ $M \times M' \times M''$ διαιρεῖ τὸν ζητούμενον μ.κ.δ. καὶ ἀντιστρόφως ὁ ζητούμενος μ.κ.δ. διαιρεῖ τὸν $M \times M' \times M''$· ὅθεν ἡ πρότασις.

353) Ἐὰν α καὶ β εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι διάφοροι τοῦ 2, ὁ μ. κ. δ. τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν καὶ τῆς διαφορᾶς των εἶναι ὁ 2.

354) Ἔστω δ ὁ μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν α, β, καὶ δ΄ ὁ μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν α, β΄· τότε ὁ μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν α καὶ ββ΄ εἶναι ὁ αὐτὸς μὲ τὸν μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν α καὶ δδ΄. (§ 130, 79).

355) Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοὶ ὧν ὁ πρῶτος εἶναι τριπλάσιος τοῦ δευτέρου καὶ μ. κ. δ. αὐτῶν εἶναι ὁ 22. (§ 108)

356) Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ εἶναι τοιοῦτοι ὥστε, ὅταν αὐξήσωμεν ἢ ἐλαττώσωμεν τὸν ἕνα κατὰ μονάδα, νὰ λαμβάνωμεν πολλαπλάσια τοῦ ἄλλου, οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

357) Ἐὰν ἀριθμός τις Π. εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν α, καὶ εἶναι συγχρόνως κοινὸς διαιρέτης τῶν $\alpha\delta-\beta\gamma$ καὶ $\alpha-\gamma$, θὰ διαιρῇ καὶ τὸν $\delta-\beta$.

Ἀρκεῖ νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι

$$\alpha\delta-\beta\gamma-\beta(\alpha-\gamma)=\alpha\delta-\alpha\beta$$

358) Ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ, δ εἶναι τοιοῦτοι ὥστε $\alpha\delta-\beta\gamma=1$, τότε οἱ ἀριθμοὶ α, β εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· ἐπίσης δὲ καὶ οἱ ἀριθμοὶ $\alpha-\gamma$, $\delta-\beta$ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

359) Ἐὰν α εἶναι περιττός, τὸ γινόμενον $\alpha(\alpha^2+2)(\alpha^2+7)$ εἶναι διαιρετὸν διὰ 24.

360) Ἀριθμὸς διαιρετὸς διὰ 2 καὶ οὐχὶ διὰ 4 δὲν δύναται νὰ εἶναι ἴσος πρὸς διαφορὰν τετραγώνων δύο ἀκεραίων· (Ἄσκ. 80).

361) Τὸ γινόμενον δύο διαδοχικῶν ἀκεραίων περιττῶν ἢ ἀρτίων αὐξανόμενον κατὰ μονάδα γίνεται τέλειον τετράγωνον.

362) Τὸ τετράγωνον παντὸς πρώτου πρὸς τὸν 6 εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 24 ηὐξημένον κατὰ μονάδα.

Ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι πᾶς πρῶτος πρὸς τὸν 6 θὰ εἶναι ἢ τῆς μορφῆς $6ν-1$ ἢ τῆς μορφῆς $6ν+1$. (Ἄσκ. 161).

363) Πότε τρεῖς διαδοχικοὶ ἀκέραιοι εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀνὰ δύο;

364) Ἡ διαφορὰ ἀριθμοῦ ἀκεραίου καὶ τοῦ τετραγώνου του εἶναι ἀριθμὸς διαιρετὸς διὰ 2.

365) Ἡ τρίτη δύναμις ἀκεραίου εἶναι διαφορὰ δύο τετραγώνων. Ἀρκεῖ πρὸς τοῦτο νὰ στηριχθῶμεν ἐπὶ τῆς ἰσότητος

$$α^2(α+1)^2 - α^2(α-1)^2 = 4α.^3.$$

366) Πᾶς ἀκέραιος ὅστις εἶναι τετράγωνον ἄλλου ἢ θὰ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 4, ἢ διαιρούμενος διὰ τοῦ 4 θὰ δίδῃ ὑπόλοιπον 1.

367) Ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων δύο περιττῶν εἶναι πάντοτε ἀριθμὸς διαιρετὸς διὰ 8.

368) Ἐὰν δύο περιττοὶ διαδοχικοὶ εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι, τὸ τετράγωνον τοῦ μικροτέρου καὶ τὸ διπλάσιον αὐτοῦ προστιθέμενα δίδουσιν ὡς ἄθροισμα ἀριθμὸν ἔχοντα ἐν ὅλῳ τέσσαρας διαιρέτας.

369) Νὰ δειχθῇ ὅτι δὲν ὑπάρχει κοινὸν κλάσμα καθιστώμενον ἴσον πρὸς $\frac{4}{9}$, ὅταν προσθέσωμεν 5 εἰς τὸν ἀριθμητὴν καὶ $\frac{2}{3}$ εἰς τὸν παρονομαστήν.

370) Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀκέραιοι α καὶ β μικρότεροι τοῦ 15 τοιοῦτοι ὥστε

$$\frac{7}{45} = \frac{α}{15} + \frac{β}{15^2}$$

Ἀρκεῖ νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι

$$\frac{7}{45} = \frac{7}{3^2 \times 5} = \frac{7 \times 5}{15^2} = \frac{35}{15^2} = \frac{2}{15} + \frac{5}{15^2}$$