Π. ΤΟΓΚΑ – Θ. ΠΑΣΣΑ – Ν. ΝΙΚΟΛΑΟΥ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

ΔΙΑ ΤΑΣ ΚΑΤΩΤΕΡΑΣ ΤΑΞΕΙΣ ΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ 1956

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

Π. ΤΟΓΚΑ – Θ. ΠΑΣΣΑ – Ν. ΝΙΚΟΛΑΟΥ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

ΔΙΑ ΤΑΣ ΚΑΤΩΤΕΡΑΣ ΤΑΞΕΙΣ ΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ 1956

ΒΙΒΛΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ

ΟΙ ΑΚΕΡΑΙΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄

ΑΡΙΘΜΗΣΙΣ

1. ΠΡΟΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑΙ ΓΝΩΣΕΙΣ

§ 1. Ἔννοια τοῦ ἀκεραίου ἀριθμοῦ. Ἐὰν ρίψωμεν ἕνα βλέμμα γύρω μας, θὰ διακρίνωμεν πλῆθος πραγμάτων. Μεταξὺ αὐτῶν ὑπάρχουν καὶ ὅμοια.

Ὅταν παρατηροῦμεν ὅμοια πράγματα, π. χ. μαθητὰς ἢ πρόβατα ἢ αὐτοκίνητα ἢ οἰκίας ἢ δένδρα κ.τ.λ, κάθε ἕνα ἀπὸ αὐτὰ λαμβάνεται ὡς **ἀκεραία μονάς.**

Ὥστε ὁ μαθητής, τὸ πρόβατον, τὸ αὐτοκίνητον, ἡ οἰκία, τὸ δένδρον κ.τ.λ. εἶναι μία ἀκεραία μονάς.

Εἶναι δυνατὸν ὅμως μὲ πολλοὺς μαθητὰς νὰ σχηματίσωμεν τάξεις, μὲ πολλὰ πρόβατα νὰ σχηματίσωμεν ποίμνια κ.τ.λ. Τότε μονὰς εἶναι ἡ τάξις, τὸ ποίμνιον κ.τ.λ. Ὥστε:

Μονὰς λέγεται ἕκαστον ἀπὸ πολλὰ ὅμοια πράγματα ἢ καὶ πολλὰ ὅμοια πράγματα, τὰ ὁποῖα θεωροῦμεν ὡς ἕνα.

Τὸ πλῆθος ὁμοίων πραγμάτων εἶναι ὡρισμένον, ὅταν γνωρίζωμεν ἀπὸ πόσας ἀκεραίας μονάδας ἀποτελεῖται αὐτό.

Π. χ. ὅταν λέγωμεν ὅτι τὰ θρανία τῆς τάξεως εἶναι **εἴκοσι,** ὁρίζομεν τὸ πλῆθος τῶν θρανίων· ἡ δὲ ἔννοια, μὲ τὴν ὁποίαν ὁρίζομεν τὸ πλῆθος αὐτό, λέγεται **ἀκέραιος ἀριθμός.** Ὥστε:

Ἀκέραιος ἀριθμὸς λέγεται ἡ ἔννοια, ἡ ὁποία ὁρίζει τὸ πλῆθος ὁμοίων πραγμάτων.

Διὰ νὰ εὕρωμεν ὅμως τὸν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος ὁρίζει ἕνα πλῆθος, εἶναι ἀνάγκη νὰ συγκρίνωμεν αὐτὸ πρὸς ὡρισμένην μονάδα.

Ἡ ἐργασία αὐτή, ποὺ γίνεται διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ ἀριθμοῦ, λέγεται **ἀρίθμησις** τοῦ πλήθους αὐτοῦ.

§ 2. Πότε δύο ἀριθμοὶ εἶναι ἴσοι. Ἔστω ὅτι ἔχομεν ἕνα κυτίον μὲ πέννας καὶ δίδομεν εἰς ἕκαστον μαθητὴν μιᾶς τάξεως ἀπὸ μίαν πένναν.

Ἂν λάβουν ὅλοι οἱ μαθηταὶ ἀπὸ μίαν πένναν καὶ δὲν μείνῃ καμμία εἰς τὸ κυτίον, θὰ λέγωμεν ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν μαθητῶν εἶναι **ἴσος** μὲ τὸν ἀριθμὸν τῶν πεννῶν.

Γενικῶς θὰ λέγωμεν ὅτι :

Δύο ἀριθμοὶ εἶναι ἴσοι, ἂν εἰς κάθε μίαν μονάδα τοῦ καθενὸς ἀντιστοιχῇ μία μονὰς τοῦ ἄλλου.

Διὰ νὰ δείξωμεν ὅτι δύο ἀριθμοὶ εἶναι ἴσοι, τοὺς χωρίζομεν μὲ τὸ σημεῖον =, τὸ ὁποῖον ἀπαγγέλλεται **ἴσον.**

Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ γράψωμεν : πέντε = πέντε καὶ νὰ ἀπαγγείλωμεν : πέντε ἴσον πέντε.

Οἱ δύο ἴσοι ἀριθμοὶ καὶ τὸ μεταξὺ αὐτῶν σημεῖον = ἐκφράζουν μίαν σχέσιν, ἡ ὁποία λέγεται **ἰσότης.**

Οἱ ἑκατέρωθεν τοῦ ἴσον ἀριθμοὶ καλοῦνται **μέλη τῆς ἰσότητος.** Καὶ ὁ μὲν πρὸς τὰ ἀριστερὰ λέγεται **πρῶτον μέλος τῆς ἰσότητος,** ὁ δὲ πρὸς δεξιὰ **δεύτερον μέλος αὐτῆς.**

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῶν ἴσων ἀριθμῶν προκύπτει ὅτι εἶναι δυνατὸν νὰ θέτωμεν τὸ πρῶτον μέλος μιᾶς ἰσότητος ὡς δεύτερον καὶ τὸ δεύτερον μέλος ὡς πρῶτον.

§ 3. Πότε δύο ἀριθμοὶ εἶναι ἄνισοι. Ἂν κατὰ τὴν προηγουμένην διανομὴν περισσεύσουν μερικαὶ πένναι εἰς τὸ κυτίον, θὰ λέγωμεν ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν μαθητῶν εἶναι **μικρότερος** τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πεννῶν.

Ἂν ὅμως δὲν ἐπερίσσευε καμμία πένα, ἔμενον δὲ ἕνας ἢ καὶ περισσότεροι μαθηταὶ χωρὶς νὰ λάβουν πένναν, θὰ ἐλέγομεν ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν μαθητῶν εἶναι **μεγαλύτερος** τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πεννῶν.

Γενικῶς θὰ λέγωμεν ὅτι :

Δύο ἀριθμοὶ εἶναι ἄνισοι, ἂν μονάδες τινὲς τοῦ ἑνὸς δὲν ἔχουν ἀντιστοίχους μονάδας εἰς τὸν ἄλλον.

Ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἔχει τὰς περισσοτέρας μονάδας, λέγεται **μεγαλύτερος** τοῦ ἄλλου. Ὁ δὲ ἄλλος **μικρότερος** τοῦ πρώτου.

Διὰ νὰ δείξωμεν, ὅτι ἕνας ἀριθμὸς εἶναι μικρότερος ἑνὸς ἄλλου χρησιμοποιοῦμεν τὸ σημεῖον $>$ ἢ $<$.

Π. χ. δυνάμεθα νὰ γράψωμεν : ἕνα $<$ δύο· ἀπαγγέλλομεν δέ : ἕνα μικρότερον τοῦ δύο.

Διὰ νὰ δείξωμεν ὅτι ὁ τρία εἶναι μεγαλύτερος τοῦ δύο, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν : τρία $>$ δύο· ἀπαγγέλλομεν δέ : τρία μεγαλύτερον τοῦ δύο.

Οἱ δύο ἄνισοι ἀριθμοὶ καὶ τὸ μεταξὺ αὐτῶν σημεῖον $>$ ἢ $<$ ἐκφράζουν μίαν σχέσιν, ἡ ὁποία λέγεται **ἀνισότης.**

Οἱ ἑκατέρωθεν τοῦ σημείου τῆς ἀνισότητος ἀριθμοὶ καλοῦνται **μέλη** τῆς ἀνισότητος. Καὶ ὁ μὲν πρὸς τὰ ἀριστερὰ λέγεται πρῶτον μέλος, ὁ δὲ πρὸς τὰ δεξιὰ **δεύτερον** μέλος.

§ 4. Χρῆσις τῶν γραμμάτων. Ἐὰν δὲν θέλωμεν νὰ ὁρίσωμεν ἀπὸ πόσα ἀντικείμενα ἀποτελεῖται ἕνα πλῆθος καὶ θέλωμεν νὰ παραστήσωμεν αὐτὸ δι᾿ ἀριθμοῦ, πρὶν ἢ ἀριθμήσωμεν αὐτά, κάμνομεν χρῆσιν τῶν γραμμάτων τοῦ ἀλφαβήτου :

Λέγομεν π. χ. ὅτι τὸ κυτίον ἔχει **α** πέννας, ἡ σάκκα ἔχει **β** τετράδια, ἡ τάξις ἔχει **δ** θρανία κ.τ.λ.

§ 5. Συγκεκριμένοι καὶ ἀφηρημένοι ἀριθμοί. Οἱ ἀριθμοί : εἴκοσι πρόβατα, δέκα βῶλοι, τριάκοντα δένδρα, λέγονται **συγκεκριμένοι** ἀριθμοί. Ὥστε :

Ἕνας ἀριθμὸς λέγεται συγκεκριμένος, ἂν φανερώνῃ καὶ τὸ εἶδος τῶν μονάδων του.

Ὅταν ἕνα παιδίον λέγῃ ἁπλῶς : ἕνα, δύο, τρία κ.τ.λ., ἐκφωνεῖ ἀφηρημένους ἀριθμούς. Ὥστε :

Ἕνας ἀριθμὸς λέγεται ἀφηρημένος, ἂν δὲν φανερώνῃ τὸ εἶδος τῶν μονάδων του.

§ 6. Σχηματισμὸς τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν. Ἔστω ὅτι ἔχομεν μίαν σάκκαν κενὴν καὶ βώλους. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν ὅτι ἡ σάκκα ἔχει **μηδὲν** βώλους.

Θέτομεν ἔπειτα εἰς τὴν σάκκαν **ἕνα** βῶλον.

Ἐὰν εἰς τὴν σάκκαν θέσωμεν ἕνα βῶλον ἀκόμη, ὁ ἀριθμὸς τῶν βώλων, ποὺ περιέχει ἡ σάκκα, εἶναι **ἕνας καὶ ἕνας** ἢ **δύο.**

Ἐὰν θέσωμεν εἰς τὴν σάκκαν ἕνα νέον βῶλον, ὁ ἀριθμὸς τῶν βώλων, ποὺ θὰ περιέχῃ ἡ σάκκα, θὰ εἶναι **ἕνας καὶ ἕνας καὶ ἕνας** ἢ **τρεῖς.**

῞Ωστε κάθε φοράν, ποὺ θέτομεν ἕνα νέον βῶλον εἰς τὴν σάκκαν, δηλ. κάθε φοράν, ποὺ ἑνώνομεν **μίαν νέαν μονάδα** μὲ τὰς ἄλλας, σχηματίζομεν ἕνα νέον ἀκέραιον **ἀριθμόν.**

Οὕτω σχηματίζεται ἡ **φυσικὴ σειρὰ** τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν :

῞Ενα, δύο, τρία, τέσσαρα, πέντε ἕξ, ἑπτά, ὀκτώ, ἐννέα κ.τ.λ., ἡ ὁποία προφανῶς εἶναι ἄπειρος.

2. ΠΡΟΦΟΡΙΚΗ ΑΡΙΘΜΗΣΙΣ

§ 7. Σκοπὸς τῆς προφορικῆς ἀριθμήσεως. ᾽Εὰν εἰς κάθε νέον ἀριθμόν, ποὺ θὰ προέκυπτε κατὰ τὸν τρόπον, ποὺ ἐδείξαμεν εἰς τὴν προηγουμένην παράγραφον, ἐδίδομεν ἰδιαίτερον ὄνομα, θὰ ἐχρειαζόμεθα ἄπειρα ὀνόματα, διὰ νὰ τοὺς ὀνομάσωμεν. Εὐκόλως ὅμως ἐννοοῦμεν ὅτι καὶ ἡ πλέον ἰσχυρὰ μνήμη δὲν θὰ ἠδύνατο νὰ συγκρατήσῃ αὐτὰ τὰ ὀνόματα. Διὰ τοῦτο οἱ ἄνθρωποι ἠναγκάσθησαν νὰ ἐπινοήσουν μίαν ἁπλῆν μέθοδον, διὰ νὰ ὀνομάζουν μὲ ὀλίγας λέξεις **τοὺς ἀριθμούς.**

Τὸ σύνολον τῶν κανόνων, οἱ ὁποῖοι βοηθοῦν εἰς τοῦτο, λέγεται καὶ αὐτὸ **ἀρίθμησις.**

῾Η ἀρίθμησις διακρίνεται εἰς **προφορικὴν** καὶ εἰς **γραπτήν.**

῾Η προφορικὴ ἀρίθμησις ἔχει ὡς σκοπὸν νὰ μᾶς διδάξῃ πῶς νὰ ὀνομάζωμεν τοὺς ἀριθμοὺς μὲ ὀλίγας λέξεις.

§ 8. Οἱ δέκα πρῶτοι ἀριθμοί. Διὰ νὰ ὀνομάσουν τοὺς δέκα πρώτους ἀριθμούς, ἔδωσαν τὰ ἑξῆς ὀνόματα κατὰ σειράν :

῞Ενα, δύο, τρία, τέσσαρα, πέντε, ἕξ, ἑπτά, ὀκτώ, ἐννέα, δέκα.

§ 9. Μονάδες διαφόρων τάξεων. Διὰ νὰ ὀνομάσουν τοὺς ἄλλους ἀριθμούς, παρεδέχθησαν τὰ κάτωθι :

Δέκα μονάδες (ἁπλαῖ) σχηματίζουν μίαν νέαν μονάδα, ἡ ὁποία ὀνομάζεται μονὰς δευτέρας τάξεως ἢ δεκάς.

Δέκα μονάδες τῆς δευτέρας τάξεως ἢ δεκάδες σχηματίζουν μίαν νέαν μονάδα, ἡ ὁποία λέγεται μονὰς τρίτης τάξεως ἢ ἑκατοντάς.

Δέκα μονάδες τῆς τρίτης τάξεως ἢ ἑκατοντάδες σχηματίζουν μίαν μονάδα τῆς τετάρτης τάξεως ἢ μίαν χιλιάδα.

Καὶ γενικῶς· **Δέκα μονάδες ἀπὸ κάθε τάξιν σχηματίζουν μίαν μονάδα τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως.**

§ 10. Βάσις τοῦ συστήματος ἀριθμήσεως. Ὁ ἀριθμὸς δέκα, ὁ ὁποῖος φανερώνει πόσας μονάδας μιᾶς ὡρισμένης τάξεως πρέπει νὰ λάβωμεν, διὰ νὰ σχηματίσωμεν μίαν μονάδα τῆς ἀμέσου ἀνωτέρας τάξεως, λέγεται **βάσις τοῦ συστήματος ἀριθμήσεως***.

Τὸ δὲ σύστημα τῶν ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι σχηματίζονται μὲ βάσιν τὸν δέκα, λέγεται **δεκαδικὸν σύστημα ἀριθμήσεως.**

§ 11. Οἱ ἀριθμοὶ ἀπὸ δέκα ἕως χίλια. Ἂν λάβωμεν ὡς μονάδα μίαν **δεκάδα** καὶ ἐργασθῶμεν, ὅπως εἰργάσθημεν διὰ τὸν σχηματισμὸν τῶν δέκα πρώτων ἀριθμῶν, δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν τοὺς ἀριθμούς: **δύο δεκάδας** (ἢ εἴκοσι), **τρεῖς δεκάδας** (ἢ τριάκοντα),. . . **δέκα δεκάδας** (ἢ ἑκατόν).

Οἱ μεταξὺ δύο διαδοχικῶν δεκάδων περιεχόμενοι ἀριθμοὶ λαμβάνουν τὰ ὀνόματα τῶν δεκάδων καὶ τῶν ἁπλῶν μονάδων, προτασσομένων τῶν ὀνομάτων τῶν δεκάδων. Οὕτω λέγομεν **ἕνδεκα** (ἀντὶ δέκα ἕν), **δώδεκα** (ἀντὶ δέκα δύο), **δεκατρία, δεκατέσσαρα,... εἴκοσι ὀκτώ, . . . ἐνενήκοντα ἐννέα.**

Ἐὰν λάβωμεν ὡς μονάδα μίαν ἑκατοντάδα, σχηματίζομεν, ὅπως ἐδείχθη ἀπὸ τὰς μονάδας καὶ δεκάδας, τοὺς ἀριθμούς: **δύο ἑκατοντάδας** (ἢ διακόσια), **τρεῖς ἑκατοντάδας** (ἢ τριακόσια), **τέσσαρας ἑκατοντάδας** (ἢ τετρακόσια),.... **ἐννέα ἑκατοντάδας** (ἢ ἐννεακόσια, **δέκα ἑκατοντάδας** (ἢ χίλια).

Οἱ ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι περιέχονται μεταξὺ δύο διαδοχικῶν ἑκατοντάδων, λαμβάνουν τὰ ὀνόματα τῶν ἑκατοντάδων καὶ τὰ ὀνόματα ἀπὸ τοῦ ἕνα μέχρις ἐνενήκοντα ἐννέα· π.χ. ἑπτακόσια εἴκοσι πέντε.

---

* Θὰ ἠδυνάμεθα, ἀντὶ τοῦ ἀριθμοῦ δέκα νὰ ἐκλέξωμεν ἕνα ἄλλον ἀριθμόν, διὰ νὰ τὸν χρησιμοποιήσωμεν ὡς βάσιν. Οὕτω θὰ ἠδυνάμεθα νὰ παραδεχθῶμεν ὅτι ὀκτὼ μονάδες μιᾶς τάξεως σχηματίζουν μίαν μονάδα τῆς ἀκολούθου τάξεως. Τὸ σύστημα αὐτὸ θὰ ἦτο διάφορον τοῦ προηγουμένου. Ἡ ἐκλογὴ τοῦ ἀριθμοῦ δέκα, τὸν ὁποῖον παρεδέχθησαν ὅλοι οἱ λαοί, φαίνεται ὅτι προῆλθεν ἐκ τοῦ ὅτι ἔχομεν δέκα δακτύλους καὶ ὅτι οἱ ἄνθρωποι κατ' ἀρχὰς ἐλογάριαζον μὲ τοὺς δακτύλους.

§ 12. **Οἱ ἀριθμοὶ ἀπὸ τοῦ χίλια καὶ ἄνω.** Ἀπὸ τοῦ χίλια καὶ πέραν, διὰ νὰ ἀποφύγωμεν νὰ χρησιμοποιοῦμεν ἕνα πλῆθος νέων λέξεων, παρεδέχθημεν νὰ σχηματίζωμεν τοὺς ἀριθμοὺς ἀνὰ χιλιάδας, ὅπως σχηματίζομεν αὐτοὺς ἀνὰ ἁπλᾶς μονάδας.

Οὕτω λέγομεν: **δύο χιλιάδες, τρεῖς χιλιάδες,** μέχρι τοῦ **δέκα χιλιάδες,** ἡ ὁποία εἶναι ἡ μονὰς **τῆς πέμπτης τάξεως.**

Ἔπειτα: **εἴκοσι χιλιάδες, τριάκοντα χιλιάδες,..** μέχρι τοῦ **ἑκατὸν χιλιάδες,** ἡ ὁποία εἶναι μονὰς τῆς **ἕκτης τάξεως.**

Ἔπειτα λέγομεν: **διακόσιαι χιλιάδες, τριακόσιαι χιλιάδες,...** μέχρι τοῦ **χίλιαι χιλιάδες,** αἱ ὁποῖαι ὀνομάζονται μὲ ἕνα νέον ὄνομα: **ἑκατομμύριον** καὶ ἡ ὁποία εἶναι μονὰς τῆς **ἑβδόμης τάξεως.**

Ὁμοίως σκεπτόμενοι καὶ ἐπαναλαμβάνοντες κάθε νέαν μονάδα δέκα φοράς, εὑρίσκομεν νέας μονάδας, αἱ ὁποῖαι ὀνομάζονται κατὰ σειράν: **δεκὰς ἑκατομμυρίων** ἢ μονὰς **ὀγδόης τάξεως, ἑκατοντὰς ἑκατομμυρίων** ἢ μονὰς **ἐνάτης τάξεως, χιλιὰς ἑκατομμυρίων** ἢ μονὰς **δεκάτης τάξεως.**

Ἡ τελευταία αὐτὴ μονὰς ὀνομάζεται **δισεκατομμύριον.**

Ἐκ τοῦ δισεκατομμυρίου σχηματίζομεν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον τὴν **δεκάδα δισεκατομμυρίων** ἢ μονάδα **ἑνδεκάτης τάξεως,** τὴν **ἑκατοντάδα δισεκατομμυρίων** ἢ μονάδα **δωδεκάτης τάξεως,** τὴν **χιλιάδα δισεκατομμυρίων** ἢ **τρισεκατομμύριον** ἢ μονάδα **δεκάτης τρίτης τάξεως** κ. ο. κ.

§ 13. **Πῶς γίνονται οἱ ἀριθμοὶ ἀπὸ τὰς μονάδας διαφόρων τάξεων.** Ἕνα πλῆθος βώλων χωρίζεται π.χ. εἰς τρεῖς σωροὺς ἀπὸ δέκα βώλους ὁ καθένας, καὶ εἰς ἑπτὰ βώλους. Λέγομεν λοιπὸν ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν βώλων ἔχει: τρεῖς δεκάδας καὶ ἑπτὰ μονάδας.

Ἐπίσης ἕνα πλῆθος φασολίων δύναται νὰ χωρισθῇ π. χ. εἰς δύο ἑκατοντάδας εἰς πέντε δεκάδας καὶ εἰς ἓξ ἁπλᾶς μονάδας. Ὥστε:

Κάθε ἀριθμὸς ἀποτελεῖται ἀπὸ μονάδας διαφόρων τάξεων καὶ ἀπὸ κάθε τάξιν ἔχει ὀλιγωτέρας τῶν δέκα.

Διὰ νὰ ὀνομάσωμεν δὲ ἕνα ἀριθμόν, ἀρκεῖ νὰ δηλώσωμεν ποίας μονάδας ἔχει καὶ πόσας ἀπὸ κάθε τάξιν.

Π. χ. ἂν εἴπωμεν: δύο ἑκατοντάδας τρεῖς δεκάδας πέντε ἁπλᾶς μονάδας, ὀνομάζομεν ἕνα ἀριθμόν· μὲ τὰς γνωστὰς δὲ συντομίας αὐτὸς ὀνομάζεται **διακόσια τριάκοντα πέντε.**

Ὁμοίως ὁ ἀριθμός: πέντε δεκάδες χιλιάδων τρεῖς χιλιάδες ὀκτὼ ἑκατοντάδες καὶ ἓξ ἁπλαῖ μονάδες, λέγεται συντόμως **πεντήκοντα τρεῖς χιλιάδες ὀκτοκόσια ἓξ** κ.τ.λ.

§ 14. Κλάσεις μονάδων διαφόρων τάξεων. Ἡ ἁπλῆ μονάς, ἡ χιλιάς, τὸ ἑκατομμύριον, τὸ δισεκατομμύριον κ.τ.λ. λέγονται **πρωτεύουσαι μονάδες.** Ὥστε:

Χίλιαι πρωτεύουσαι μονάδες μιᾶς τάξεως ἀποτελοῦν μίαν πρωτεύουσαν μονάδα τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως.

Κατὰ ταῦτα ἀπὸ μίαν πρωτεύουσαν μονάδα μέχρι τῆς ἑπομένης ὑπάρχουν τρεῖς μονάδες διαφόρων τάξεων. Αὐταὶ ἀποτελοῦν μίαν κλάσιν μονάδων.

Ἡ κλάσις αὐτὴ φέρει τὸ ὄνομα τῆς πρωτευούσης μονάδος, τὴν ὁποίαν ἔχει.

Ὑπάρχει λοιπὸν **κλάσις ἁπλῶν μονάδων, κλάσις χιλιάδων, κλάσις ἑκατομμυρίων** κ.τ.λ.

Πίναξ τῶν κλάσεων καὶ τῶν τάξεων

Κλάσεις	....			τῶν δισεκατομμυρίων			τῶν ἑκατομμυρίων			τῶν χιλιάδων			τῶν ἁπλῶν μονάδων		
				ἑκ.	δεκ.	μον.	ἑκ.	δεκ.	μον.	ἑκ.	δεκ.	μον.	ἑκ.	δεκ.	μον.
Τάξεις	.	..	...	12η	11η	10η	9η	8η	7η	6η	5η	4η	3η	2α	1η

Ἀσκήσεις

1) Μία ἀνδρικὴ ἐνδυμασία κατὰ τὰ ἔτη 1946—1952 ἐκόστιζεν: ὀκτὼ ἑκατοντάδας χιλιάδων πέντε δεκάδας χιλιάδων ὀκτὼ χιλιάδας καὶ τρεῖς ἑκατοντάδας δραχμῶν. Νὰ ἀπαγγείλητε τὸν ἀριθμὸν αὐτόν.

2) Κατὰ τὸ παρελθὸν ἔτος ὁ Ἑλληνικὸς Ἐρυθρὸς Σταυρὸς διένειμεν εἰς ἀπόρους οἰκογενείας: μίαν χιλιάδα μίαν ἑκατοντάδα μίαν δεκάδα καὶ ἐννέα κυτία μὲ κόνιν αὐγῶν. Νὰ ἀπαγγείλητε τὸν ἀριθμὸν τῶν κυτίων αὐτῶν.

3) Ὁ ἔρανος διὰ τὴν φανέλλαν τοῦ μαχομένου στρατιώτου ὑπὸ τὴν προστασίαν τῆς Α. Μ. τῆς Βασιλίσσης ἀπέδωκεν εἰς μετρητά: ἕνα δισεκατομμύριον ἓξ ἑκατοντάδας ἑκατομμυρίων πέντε δεκάδας

ἑκατομμυρίων ἑπτὰ ἑκατοντάδας χιλιάδων δραχμῶν καὶ πέντε δραχμάς. Νὰ ἀπαγγείλητε αὐτὸν τὸν ἀριθμόν.

4) Τὸ Ὑπουργεῖον τῶν Δημοσίων Ἔργων ἐδαπάνησε κατὰ τὸ ἔτος 1 948 μίαν ἑκατοντάδα καὶ τρεῖς δεκάδας ἑκατομμυρίων δραχμῶν διὰ τὴν συμπλήρωσιν καὶ ἐπισκευὴν τῆς ὁδοῦ Λαρίσης-Ἀγυιᾶς. Νὰ ἀπαγγείλητε τὸν ἀριθμὸν αὐτόν.

5) Ὁ Σύνδεσμος τῶν Ἑλλήνων Βιομηχάνων ἀνεκοίνωσεν ὅτι κατὰ τὸ ἔτος 1 947 ἡ ἀξία τῆς βιομηχανικῆς παραγωγῆς εἰς ὅλην τὴν Ἑλλάδα ἀνῆλθεν εἰς δύο μονάδας τρισεκατομμυρίων καὶ ἓξ δεκάδας δισεκατομμυρίων δραχμῶν. Νὰ ἀπαγγείλητε αὐτὸν τὸν ἀριθμόν.

3. ΓΡΑΠΤΗ ΑΡΙΘΜΗΣΙΣ

§ 15. Γραπτὴ ἀρίθμησις. Διὰ νὰ παραστήσωμεν τοὺς ἀριθμούς: **μηδέν, ἕνα, δύο, τρία, τέσσαρα, πέντε, ἕξ, ἑπτά, ὀκτώ, ἐννέα** χρησιμοποιοῦμεν τὰ κάτωθι σύμβολα, τὰ ὁποῖα λέγονται ψηφία*.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Τὰ ψηφία αὐτά, ἐκτὸς τοῦ μηδενός, λέγονται **σημαντικὰ ψηφία**, διότι αὐτὰ παριστάνουν μονάδας διαφόρων τάξεων.

Ἡ γραπτὴ ἀρίθμησις ἔχει σκοπὸν νὰ μᾶς διδάξῃ πῶς νὰ γράφωμεν ὅλους τοὺς ἀριθμοὺς μὲ τὰ δέκα προηγούμενα ψηφία.

§ 16. Ἀνάλυσις ἑνὸς ἀριθμοῦ εἰς μονάδας διαφόρων τάξεων. Ἀνωτέρω εἴδομεν ὅτι κάθε ἀκέραιος ἀριθμὸς δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς σύνολον μονάδων διαφόρων τάξεων.

Οὕτως ὁ ἀριθμὸς

τριακόσια πεντήκοντα ἑπτὰ

ἀποτελεῖται ἀπὸ ἑπτὰ ἁπλᾶς μονάδας, πέντε δεκάδας καὶ τρεῖς ἑκατοντάδας.

Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ παραστήσωμεν ἕνα ἀριθμόν, ἂν γράψωμεν τὰ **ψηφία** τῶν μονάδων τῶν διαφόρων τάξεων, τὰς ὁποίας περιέχει. Τοῦτο ἐπιτυγχάνομεν χάρις εἰς τὴν ἀκόλουθον συνθήκην:

* Ἡ γραφὴ τῶν ἀριθμῶν μὲ τὰ ἀνωτέρω δέκα ψηφία λέγεται **ἀραβική**, τὰ δὲ ψηφία **ἀραβικοὶ χαρακτῆρες**. Διότι μετεδόθη ἡ γνῶσις αὐτῶν εἰς ἡμᾶς **ἐκ** τῶν Ἀράβων (περὶ τὸν 12ον αἰῶνα μ. Χ.).

§ 17. **Συνθήκη. Κάθε ψηφίον, τὸ ὁποῖον γράφεται ἀμέσως πρὸς τὰ ἀριστερὰ ἄλλου, παριστάνει μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως.**

Κατὰ τὴν συνθήκην αὐτὴν δυνάμεθα νὰ γράψωμεν ὅλους τοὺς ἀκεραίους ἀριθμοὺς μὲ τὰ δέκα ψηφία.

Π. χ. ὁ ἀριθμὸς 3 χιλιάδες 5 ἑκατοντάδες 6 δεκάδες καὶ 4 μονάδες γράφεται 3 564.

Ἐὰν μονάδες μιᾶς τάξεως δὲν ὑπάρχουν, γράφομεν εἰς τὴν θέσιν αὐτῶν τὸ 0.

Π. χ. ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἔχει 7 χιλιάδας 3 δεκάδας καὶ 5 μονάδας γράφεται : 7 035.

§ 18. **Γραφὴ ἀπαγγελλομένου ἀριθμοῦ.** Διὰ νὰ γράψωμεν ἕνα ἀριθμόν, διακρίνομεν δύο περιπτώσεις, καθόσον ὁ ἀριθμὸς εἶναι μικρότερος ἢ μεγαλύτερος τοῦ χίλια.

Περίπτωσις Ι. **Διὰ νὰ γράψωμεν ἕνα ἀριθμὸν μικρότερον τοῦ χίλια, γράφομεν διαδοχικῶς ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιὰ τὸ ψηφίον τῶν ἑκατοντάδων, τῶν δεκάδων καὶ τῶν μονάδων.**

Π. χ. ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ γράψωμεν τὸν ἀριθμὸν τριακόσια ἑβδομήκοντα πέντε. Ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς ἀποτελεῖται ἀπὸ **τρεῖς** ἑκατοντάδας, **ἑπτὰ** δεκάδας καὶ **πέντε** μονάδας καὶ γράφεται 375. Ὁμοίως ὁ ἀριθμὸς πεντακόσια ὀκτὼ ἀποτελεῖται ἀπὸ **πέντε** ἑκατοντάδας, **μηδὲν** δεκάδας καὶ **ὀκτὼ** μονάδας καὶ κράφεται 508.

Περίπτωσις ΙΙ. **Διὰ νὰ γράψωμεν ἕνα ἀριθμὸν μεγαλύτερον τοῦ χίλια, χωρίζομεν νοερῶς τὸν ἀριθμὸν εἰς κλάσεις καὶ γράφομεν διαδοχικῶς ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιὰ τοὺς ἀριθμοὺς τῶν διαφόρων κλάσεων κατὰ τὴν σειράν, καθ' ἣν ἀπαγγέλλονται, δηλ. ἀρχίζοντες ἀπὸ τὴν ἀνωτάτην κλάσιν.**

Εἰς τὰς θέσεις τῶν μονάδων τῶν διαφόρων τάξεων, αἱ ὁποῖαι τυχὸν λείπουν, γράφομεν μηδενικά.

Π. χ. ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ γράψωμεν τὸν ἀριθμὸν
πέντε ἑκατομμύρια τριακόσιαι εἴκοσι ὀκτὼ χιλιάδες πεντακόσια δύο.
Ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς ἀποτελεῖται ἀπό :
5 ἑκατομμύρια, 328 χιλιάδας καὶ 502 μονάδας καὶ γράφεται 5 328 502.

Ὁμοίως ὁ ἀριθμὸς 24 δισεκατομμύρια τριακόσια ἑξήκοντα ὀκτὼ ἑκατομμύρια δέκα πέντε χιλιάδες γράφεται 24 368 015 000.

§ 19. **Ἀπαγγελία ἑνὸς ἀριθμοῦ.** Διὰ νὰ ἀπαγγείλωμεν ἕνα ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος ἔχει γραφῇ, διακρίνομεν δύο περιπτώσεις, καθ' ὅσον ὁ ἀριθμὸς ἔχει τὸ πολὺ τρία ἢ περισσότερα ἀπὸ τρία ψηφία.

Περίπτωσις I. **Διὰ νὰ ἀπαγγείλωμεν ἕνα ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος ἔχει τρία ψηφία ἢ ὀλιγώτερα τῶν τριῶν ψηφίων, ἀπαγγέλλομεν διαδοχικῶς τὰ ψηφία, ἀπὸ τὰ ἀριστερὰ πρὸς τὰ δεξιά, δίδοντες εἰς κάθε ψηφίον τὸ ὄνομα τῆς μονάδος, τὴν ὁποίαν παριστάνει.**

Π. χ. ὁ ἀριθμὸς 675 ἀπαγγέλλεται : ἑξακόσια ἑβδομήκοντα πέντε
ὁ ἀριθμὸς 304 ἀπαγγέλλεται : τριακόσια τέσσαρα.

Περίπτωσις II. **Διὰ νὰ ἀπαγγείλωμεν ἕνα ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος ἔχει περισσότερα ἀπὸ τρία ψηφία, χωρίζομεν τὸν ἀριθμὸν εἰς τριψήφια τμήματα, ἀρχίζοντες ἀπὸ τὰ δεξιὰ πρὸς τὰ ἀριστερὰ** *(τὸ τελευταῖον πρὸς τὰ ἀριστερὰ τμῆμα δύναται νὰ ἔχῃ ἕνα ἢ δύο ψηφία).* **Κάθε τμῆμα παριστάνει μίαν κλάσιν. Ἀπαγγέλλομεν διαδοχικῶς, ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιά, ἕκαστον τμῆμα μὲ τὸ ὄνομα τῆς κλάσεώς του.**

Διὰ νὰ εὐκολύνωμεν τὴν ἀπαγγελίαν ἑνὸς πολυψηφίου ἀριθμοῦ, διαχωρίζομεν τὰ τμήματά του. Πρέπει ὅμως νὰ προσέχωμεν νὰ μὴ θέτωμεν μεταξὺ τῶν χωρισμένων τμημάτων κανένα σημεῖον, οὔτε τελείαν οὔτε κόμμα, καὶ νὰ ἔχωμεν ὑπ' ὄψιν ὅτι ὁ ἀριθμός, τὸν ὁποῖον σχηματίζουν τὰ ψηφία ἑνὸς τμήματος, παριστάνει χιλιάδας, ἂν δεξιὰ ἀπ' αὐτὸν ὑπάρχουν τρία ἄλλα ψηφία, παριστάνει δὲ ἑκατομμύρια, ἂν δεξιά του ὑπάρχουν ἓξ ἄλλα ψηφία καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

Παράδειγμα. Ὁ ἀριθμὸς 504 725 306 ἀπαγγέλλεται πεντακόσια τέσσαρα ἑκατομμύρια ἑπτακόσιαι εἴκοσι πέντε χιλιάδες τριακόσια ἕξ.

Ὁ ἀριθμὸς 5 000 230 007 ἀπαγγέλλεται 5 δισεκατομμύρια διακόσιαι τριάκοντα χιλιάδες ἑπτά.

§ 20. **Σύνολον μονάδων μιᾶς τάξεως ἑνὸς ἀριθμοῦ.** Ἔστω ὁ ἀριθμὸς 150 637. Ἂν ἀποκόψωμεν τὸ ψηφίον 7, ὁ ἀριθμὸς 15 063 φανερώνει τὰς ἐν ὅλῳ δεκάδας αὐτοῦ.

Ἤτοι τὸ σύνολον τῶν δεκάδων τοῦ ἀριθμοῦ εἶναι 15 063.

Ἂν ἀποκόψωμεν τὸν ἀριθμὸν 37, δηλαδὴ τὸν ἀριθμόν, ποὺ ἀποτελοῦν τὰ δύο τελευταῖα ψηφία, ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος μένει, δηλ. ὁ 1 506 φανερώνει τὰς ἐν ὅλῳ ἑκατοντάδας αὐτοῦ.

Ἤτοι τὸ σύνολον τῶν ἑκατοντάδων τοῦ ἀριθμοῦ εἶναι 1 506.

Ὁμοίως ἐργαζόμενοι εὑρίσκομεν ὅτι τὸ σύνολον τῶν χιλιάδων εἶναι 150, τὸ σύνολον τῶν δεκάδων χιλιάδων αὐτοῦ εἶναι 15 κ.ο.κ.

Ὥστε : **Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ σύνολον τῶν μονάδων μιᾶς τάξεως δοθέντος ἀριθμοῦ, ἀποκόπτομεν ἀπὸ τὰ δεξιά του ὅλα τὰ ψηφία, τὰ ὁποῖα εὑρίσκονται μετὰ τὸ ψηφίον τῆς τάξεως ἐκείνης.**

Ἀσκήσεις

Α' Ὁμάς. 6) Ὁ νικηφόρος κατὰ τῆς Ἰταλίας πόλεμος τοῦ Ἑλληνικοῦ στρατοῦ ἐκηρύχθη ὑπὸ τῆς Ἰταλίας τὸ ἔτος χίλια ἐννεακόσια σαράντα. Νὰ γράψητε τὸν ἀριθμὸν αὐτόν.

7) Ὁ Ἑλληνικὸς στρατὸς ἠλευθέρωσε τὴν Θεσσαλονίκην τὸ ἔτος χίλια ἐννεακόσια δώδεκα. Νὰ γράψητε τὸν ἀριθμὸν αὐτόν.

8) Ὁ μεγαλύτερος ποταμὸς τῆς Γῆς, ὁ Μισισιπῆς τῆς Βορείου Ἀμερικῆς, ἔχει μῆκος ἓξ ἑκατομμύρια ἐννεακοσίας ἑβδομήκοντα χιλιάδας μέτρα. Νὰ γράψητε τὸν ἀριθμὸν αὐτόν.

9) Κατὰ τὴν ἀπογραφὴν τοῦ 1 928, αἱ Ἀθῆναι εἶχον τετρακοσίας πεντήκοντα δύο χιλιάδας ἐννεακοσίους δώδεκα κατοίκους. Νὰ γράψητε τὸν ἀριθμὸν αὐτόν.

10) Κατὰ τὴν ἰδίαν ἀπογραφήν, ὁ Πειραιεὺς εἶχε διακοσίας πεντήκοντα μίαν χιλιάδας τριακοσίους ὀκτὼ κατοίκους. Νὰ γράψητε τὸν ἀριθμὸν αὐτόν.

Β' Ὁμάς. 11) Κατὰ τὸ ἔτος 1 945 τὸ Κράτος ἐδαπάνησε 14 000 000 000 δραχμάς. Νὰ ἐκτιμήσητε τὴν δαπάνην ταύτην εἰς ἑκατομμύρια δραχμῶν.

12) Ἀπὸ 1ης Ἀπριλίου 1 927 μέχρι τέλους Μαΐου 1 948 τὰ ἔσοδα τοῦ Κράτους ἀνῆλθον εἰς 2 614 218 000 000 δραχμάς. Νὰ ἐκτιμήσητε τὰ ἔσοδα αὐτὰ εἰς ἑκατομμύρια δραχμῶν.

13) 1ον. Πόσας ἑκατοντάδας καὶ πόσας δεκάδας ἔχει μία ἑκατοντὰς χιλιάδων ; 2ον. Πόσας τὸ ὅλον δεκάδας, μονάδας χιλιάδων, δεκάδας χιλιάδων ἔχει ἕνα ἑκατομμύριον ; 3ον. Πόσας ἑκατοντάδας χιλιάδων, μονάδας χιλιάδων ἔχουν τὰ 35 ἑκατομμύρια ;

Γ' Ὁμάς. 14) Μὲ τὰ ψηφία 7, 6, 3, 8, 2 νὰ σχηματίσητε τὸν μικρότερον καὶ τὸν μεγαλύτερον πενταψήφιον ἀριθμόν.

15) Θέσατε κατὰ σειρὰν ὕψους τὰ κάτωθι ὄρη, ἀρχίζοντες ἀπὸ τοῦ χαμηλοτέρου : Αἰγάλεω 1 217 μ., Ἀραχναῖον 1 198 μ., Ἀρτεμί-

σιον 1 772 μ., Ἐρύμανθος 2 223 μ., Κυλλήνη 2 375 μ., Λύκαιον 1 333 μ., Μαίναλον 1 980 μ., Παναχαϊκὸν 1 925 μ., Πάρνων 1 935 μ., Ταΰγετος 2 407 μ., Ἀροάνια 2 555 μ.

16) Θέσατε κατὰ σειρὰν ὕψους τὰ κάτωθι ὄρη τῆς Στερεᾶς Ἑλλάδος, ἀρχίζοντες ἀπὸ τοῦ ὑψηλοτέρου : Γκιῶνα 2 512 μ., Ἑλικὼν 1 748 μ., Καλλίδρομον 1 371 μ., Κιθαιρὼν 1 408 μ., Οἴτη 2 483 μ., Παναιτωλικὸν 1 924 μ., Παρνασσὸς 2 459 μ., Πάρνης 1 412 μ.

§ 21. **Ἑλληνικὴ γραφὴ ἀριθμῶν.** Οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες, διὰ νὰ γράψουν τοὺς ἀριθμούς, ἐχρησιμοποίουν τὰ 24 γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου καὶ τὰ σημεῖα ϛ (στίγμα), ὄχι στ, ὅπως τὸ γράφουν συνήθως ἐσφαλμένως, ϟ (κόππα) καὶ ϡ (σαμπί). Δεξιὰ καὶ ὀλίγον ἄνω αὐτῶν ἔθετον ἕνα τόνον.

Ὁ κατωτέρω πίναξ δεικνύει τὴν ἀντιστοιχίαν μεταξὺ τῆς ἀραβικῆς καὶ τῆς ἑλληνικῆς γραφῆς τῶν ἀριθμῶν :

Μονάδες	Δεκάδες	Ἑκατοντάδες
1 ......α΄	10 .....ι΄	100 ......ρ΄
2 ......β΄	20 .....κ΄	200 ......σ΄
3 ......γ΄	30 .....λ΄	300 ......τ΄
4 ......δ΄	40 .....μ΄	400 ......υ΄
5 ......ε΄	50 .....ν΄	500 ......φ΄
6 ......ϛ΄	60 .....ξ΄	600 ......χ΄
7 ......ζ΄	70 .....ο΄	700 ......ψ΄
8 ......η΄	80 .....π΄	800 ......ω΄
9 ......θ΄	90 .....ϟ΄	900 ......ϡ΄

Μὲ τὰ ἀνωτέρω γράμματα παρίστανον ὅλους τοὺς ἀριθμοὺς ἀπὸ τοῦ 1 μέχρι τοῦ 999.

Οὕτως οἱ ἀριθμοὶ	11	12	13	14	15	19
γράφονται	ια΄	ιβ΄	ιγ΄	ιδ΄	ιε΄	ιθ΄
Ἐπίσης οἱ ἀριθμοὶ	31	32	33	34	35	39
γράφονται	λα΄	λβ΄	λγ΄	λδ΄	λε΄	λθ΄
Ὁμοίως οἱ ἀριθμοὶ	152	236	362	479	892	908
γράφονται	ρνβ΄	σλϛ΄	τξβ΄	υοθ΄	ωϟβ΄....	ϡη΄

Προκειμένου νὰ γράψουν μονάδας, δεκάδας καὶ ἑκατοντάδας χιλιάδων, μετεχειρίζοντο τὰ ἴδια γράμματα, ἔθετον ὅμως τὸν τόνον ἀριστερὰ καὶ ὀλίγον ὑποκάτω τοῦ γράμματος.

Π.χ. οἱ ἀριθμοὶ	1 000	2 000	3 000	9 0000
γράφονται	,α	,β	,γ	,ϟ
Κατὰ ταῦτα οἱ ἀριθμοὶ		1 745	46 798	998 672
γράφονται		,αψμε΄	,μςψϟη΄	,ϡϟηχοβ΄

Σημείωσις. Ἡ Ἑλληνικὴ γραφὴ χρησιμοποιεῖται σήμερον εἰς ὡρισμένας περιπτώσεις ἀριθμήσεως. Οὕτω προκειμένου νὰ ἀριθμήσωμεν τὰς σελίδας τοῦ προλόγου ἑνὸς βιβλίου, γράφομεν: σελὶς α΄, σελὶς β΄,...

Ὁμοίως διὰ νὰ ἀριθμήσωμεν τὰ κεφάλαια ἑνὸς βιβλίου, γράφομεν : κεφάλαιον Α΄ (πρῶτον), κεφάλαιον Β΄ (δεύτερον) κ.ο.κ.

Ἐπίσης διὰ νὰ ὀνομάσωμεν τὰ Γυμνάσια μιᾶς πόλεως, τὰς τάξεις ἑνὸς σχολείου, τὰ σώματα στρατοῦ κ.τ.λ. χρησιμοποιοῦμεν τὰ κεφαλαῖα γράμματα : Α΄, Β΄, Γ΄,...

§ 22. Ρωμαϊκὴ γραφή. Οἱ Ρωμαῖοι μετεχειρίζοντο γραφὴν τῶν ἀριθμῶν διάφορον ἀπὸ τὴν γραφὴν τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων. Ἐπειδὴ δὲ καὶ σήμερον χρησιμοποιεῖται εἰς μερικὰς περιπτώσεις (π. χ. εἰς τὰς πλάκας τῶν ὡρολογίων κ.λ.π.), καλὸν εἶναι νὰ γνωρίζωμεν αὐτήν.

Οἱ Ρωμαῖοι μετεχειρίζοντο ἑπτὰ ἀπὸ τὰ γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου διὰ τὴν γραφὴν τῶν ἀριθμῶν. Ἦσαν δὲ τὰ κάτωθι, μὲ τὰς ἀντιστοίχους τιμάς των :

I	V	X	L	C	D	M
ἕνα	πέντε	δέκα	πεντήκοντα	ἑκατὸν	πεντακόσια	χίλια

Διὰ νὰ γράψουν τοὺς ἀριθμοὺς μὲ τὰ ρωμαϊκὰ αὐτὰ γράμματα παρεδέχοντο ὅτι :

1ον. Πολλὰ ὅμοια ψηφία, τὰ ὁποῖα ἔχουν γραφῆ τὸ ἕνα πλησίον τοῦ ἄλλου, θεωροῦνται ὅτι προστίθενται. Π.χ.

II	παριστάνει	ἕνα καὶ ἕνα, δηλ. 2
III	»	ἕνα καὶ ἕνα καὶ ἕνα, δηλ. 3
XX	»	δέκα καὶ δέκα, δηλ. 20
CCC	»	ἑκατὸν καὶ ἑκατὸν καὶ ἑκατόν, δηλ. 300.

2ον. Κάθε ψηφίον, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται πρὸς τὰ δεξιὰ ἑνὸς ψηφίου μεγαλυτέρου του, θεωρεῖται ὅτι προστίθεται μὲ ἐκεῖνο. Π.χ.

VI παριστάνει πέντε καὶ ἕνα, δηλ. 6
XV » δέκα καὶ πέντε, δηλ. 15
CLX » ἑκατὸν καὶ πεντήκοντα καὶ δέκα, δηλ. 160.

3ον. Κάθε ψηφίον, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται πρὸς τὰ ἀριστερὰ ἑνὸς μεγαλυτέρου ψηφίου, θεωρεῖται ὅτι ἀφαιρεῖται ἀπὸ ἐκεῖνο. Π.χ.

IV παριστάνει τὸν 4
XL » » 40
XC » » 90

4ον. Κάθε ἀριθμός, ἄνωθεν τοῦ ὁποίου γράφεται μία (εὐθεῖα) γραμμή, παριστάνει χιλιάδας, δύο γραμμαὶ παριστάνει ἑκατομμύρια καὶ τρεῖς γραμμαὶ δισεκατομμύρια. Π. χ.

ὁ ἀριθμὸς $\overline{\text{VIII}}$ παριστάνει 8 χιλιάδας
» $\overline{\overline{\text{XIX}}}$ » 19 ἑκατομμύρια
» $\overline{\overline{\overline{\text{CX}}}}$ » 110 δισεκατομμύρια

Ἀσκήσεις

17) Νὰ γράψητε τοὺς ἀριθμοὺς 36, 79, 289, 307, 5 994 μὲ Ἑλληνικοὺς καὶ Ρωμαϊκοὺς χαρακτῆρας.

18) Νὰ γράψητε τοὺς ἀριθμοὺς ϟθ', σοα', ϡϟθ' ͵βωϟα' μὲ Ἀραβικὰ ψηφία.

19) Νὰ γράψητε τοὺς κατωτέρω ἀριθμοὺς μὲ Ἀραβικὰ ψηφία:

1. CC, DCLV, DCCXL, CMXII, MCXXXV.
2. MM, MCD, $\overline{\text{V}}$DCCV, $\overline{\text{X}}$CMLXI, $\overline{\text{L}}$LXXXIII.
3. MMMMCCCLXXX, $\overline{\text{XXII}}$DCCXIV, $\overline{\overline{\text{VII}}}$CM, $\overline{\overline{\overline{\text{LI}}}}$.

20) Νὰ γράψητε τοὺς κατωτέρω ἀριθμοὺς μὲ Ρωμαϊκὰ ψηφία:
274, 749, 1 658, 4 375, 22 714, 1 890.

4. ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΠΟΣΩΝ

§ 23. Ποσόν. Ἕνα πλῆθος μήλων δύναται νὰ ἀποτελῆται ἀπὸ πολλὰ ἢ ὀλίγα μῆλα. Ἕνα μῆκος, π. χ. τὸ μῆκος ἑνὸς ὑφάσματος, δύναται νὰ εἶναι μεγαλύτερον ἢ μικρότερον. Τὰ ἔξοδα τῆς ἡμέρας δύναμαι νὰ τὰ αὐξήσω ἢ νὰ τὰ ἐλαττώσω.

Κάθε πρᾶγμα, τὸ ὁποῖον δύναται νὰ αὐξηθῇ ἢ νὰ ἐλαττωθῇ, λέγεται ποσὸν ἢ μέγεθος.

Ὥστε τὰ μῆλα, τὸ μῆκος ἑνὸς ὑφάσματος, ἑνὸς δρόμου κ.λ.π. εἶναι ποσά. Διὰ τοῦτο ἐπεκράτησε νὰ λέγωμεν ὅτι ἔχομεν ἕνα ποσὸν χρημάτων, μίαν ποσότητα ἐλαίου κ.τ.λ.

§ 24. Ὁμοειδῆ καὶ ἑτεροειδῆ ποσά. Δύο σωροὶ μήλων εἶναι ποσὰ τοῦ αὐτοῦ εἴδους. Δι' αὐτὸ λέγονται **ὁμοειδῆ ποσά.**

Ἕνας σωρὸς μήλων καὶ ἕνας σωρὸς βώλων εἶναι ποσὰ διαφόρου εἴδους. Δι' αὐτὸ λέγονται **ἑτεροειδῆ ποσά.** Ὥστε:

Δύο ποσὰ λέγονται ὁμοειδῆ, ἂν ἀποτελοῦνται ἀπὸ τὸ αὐτὸ εἶδος πραγμάτων.

Δύο δὲ ποσὰ λέγονται ἑτεροειδῆ, ἂν ἀποτελοῦνται ἀπὸ διάφορα πράγματα.

Οἱ συγκεκριμένοι ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι παριστάνουν ὁμοειδῆ ποσά, λέγονται **ὁμοειδεῖς ἀριθμοί.**

Ὅσοι δὲ παριστάνουν ἑτεροειδῆ ποσὰ λέγονται **ἑτεροειδεῖς ἀριθμοί.**

§ 25. Συνεχῆ καὶ ἀσυνεχῆ ποσά. Ἔστω ὅτι ἔχομεν ἕνα τεμάχιον ὑφάσματος καὶ ἕνα σωρὸν μήλων. Δυνάμεθα νὰ φαντασθῶμεν ὅτι τὸ ὕφασμα ἀποτελεῖται ἀπὸ μέρη, τὰ ὁποῖα συνέχονται μεταξύ των καὶ ἀποτελοῦν ἓν σύνολον. Ἐνῷ τὰ μέρη τοῦ δευτέρου ποσοῦ, δηλαδὴ τὰ μῆλα, εἶναι ἀνεξάρτητα τὸ ἕνα ἀπὸ τὸ ἄλλο. Διὰ τοῦτο τὸ πρῶτον ποσὸν λέγεται **συνεχές,** τὸ δὲ δεύτερον λέγεται **πλῆθος** ἢ **ἀσυνεχὲς ποσόν.**

Ἕνας σωρὸς βώλων, ἕνα πλῆθος μαθητῶν κ.τ.λ. εἶναι ἀσυνεχῆ ποσά.

Τὰ μήκη, αἱ ἐπιφάνειαι, τὰ βάρη, ὁ χρόνος κ.τ.λ. εἶναι συνεχῆ ποσά. Ὥστε:

Ἀσυνεχῆ ποσὰ λέγονται ἐκεῖνα, τῶν ὁποίων τὰ μέρη εἶναι χωρισμένα· συνεχῆ δὲ ἐκεῖνα, τῶν ὁποίων τὰ μέρη συνέχονται καὶ ἀποτελοῦν ἓν ὅλον.

§ 26. Μέτρησις ποσῶν. Εἰς τὴν § 1 εἴδομεν ὅτι, διὰ νὰ ὁρίσωμεν ἀπὸ πόσα μέρη ἀποτελεῖται ἕνα πλῆθος ὁμοίων πραγμάτων, ἐκάμαμεν σύγκρισιν αὐτοῦ πρὸς ἕνα ἀπὸ τὰ πράγματα, ποὺ τὸ ἀποτελοῦν. Ἐκαλέσαμεν δὲ τοῦτο **μονάδα** καὶ τὸ ἐκ τῆς συγκρίσεως ἐξαγόμενον **ἀριθμόν**.

Ἡ τοιαύτη σύγκρισις ἑνὸς ποσοῦ πρὸς ἕνα ἄλλο ὁμοειδὲς ποσόν, τὸ ὁποῖον λαμβάνεται ὡς μονάς, λέγεται **μέτρησις** τοῦ ποσοῦ.

Ὥστε διὰ νὰ γίνῃ μέτρησις ἑνὸς ποσοῦ, πρέπει νὰ ὑπάρχῃ ἡ ἀντίστοιχος **μονάς του**.

Εἶναι φανερὸν ὅτι διὰ τὰ ἀσυνεχῆ ποσὰ ὑπάρχουν τόσαι μονάδες, ὅσα εἶναι καὶ τὰ εἴδη τῶν ποσῶν αὐτῶν.

Διὰ νὰ μετρήσωμεν ὅμως ἕνα συνεχὲς ποσόν, π.χ. νὰ εὕρωμεν τὸ μῆκος ἑνὸς θρανίου, τὸ ὕψος μιᾶς αἰθούσης, τὸ βάρος ἑνὸς λίθου κ.τ.λ., πρέπει νὰ ὁρίσωμεν τὴν κατάλληλον μονάδα μετρήσεως τῶν ποσῶν αὐτῶν.

Περὶ τῶν μονάδων μετρήσεως τῶν ποσῶν αὐτῶν θὰ γίνῃ λεπτομερὴς ἐξέτασις εἰς ἰδιαίτερον κεφάλαιον.

Αἱ συνήθεις μονάδες μετρήσεως, τὰς ὁποίας χρησιμοποιοῦμεν εἰς τὴν Ἑλλάδα, εἶναι :

1ον. Διὰ τὴν εὕρεσιν ἑνὸς μήκους χρησιμοποιοῦμεν, ὡς μονάδας : τὸ μέτρον, τὸ χιλιόμετρον (1 000 μέτρα), τὸν πῆχυν, κ.τ.λ.

2ον. Διὰ τὴν μέτρησιν τῶν ἐπιφανειῶν χρησιμοποιοῦμεν ὡς μονάδας : τὸ τετραγωνικὸν μέτρον, τὸ βασιλικὸν στρέμμα (1 000 τετραγωνικὰ μέτρα).

3ον. Διὰ τὴν μέτρησιν τοῦ βάρους τῶν διαφόρων σωμάτων χρησιμοποιοῦμεν ὡς μονάδας : τὴν ὀκᾶν, τὸ χιλιόγραμμον κ.τ.λ.

4ον. Διὰ τὴν μέτρησιν τοῦ χρόνου χρησιμοποιοῦμεν ὡς μονάδας : τὴν ὥραν, τὴν ἡμέραν, τὸ ἔτος κ.τ.λ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄

ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ ΤΩΝ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

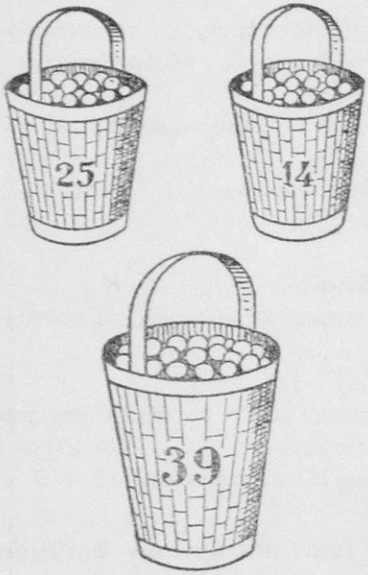
1. ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΡΟΣΘΕΣΕΩΣ

§ 27. Ὁρισμοί. *Παράδειγμα 1ον.* Ἔστω ὅτι ἔχομεν 25 μῆλα εἰς ἕνα καλάθι καὶ ἄλλα 14 μῆλα εἰς ἕνα δεύτερον καλάθι.

Ἐὰν θέσωμεν ὅλα τὰ μῆλα εἰς ἕνα τρίτον καλάθι, θὰ λέγωμεν ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν μήλων, ποὺ εὑρίσκονται εἰς τὸ τρίτον καλάθι, εἶναι τὸ **ἄθροισμα** αὐτῶν.

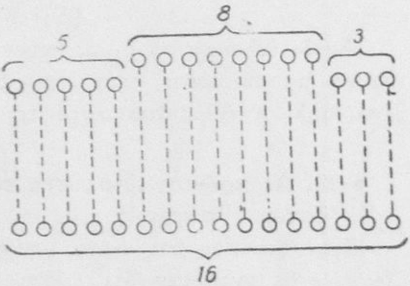
Ἂν ἀριθμήσωμεν ἕνα πρὸς ἕνα τὰ μῆλα ποὺ περιέχει τὸ τρίτον καλάθι, θὰ εὕρωμεν 39 μῆλα.

Ὁ ἀριθμὸς 39 εἶναι τὸ **ἄθροισμα** τῶν ἀριθμῶν 25 καὶ 14.



Σχ. 1

Παράδειγμα 2ον. Ὁ Παῦλος εἶχε κατ' ἀρχὰς 5 βώλους· τοῦ ἔδωσαν ἔπειτα 8 βώλους καὶ τέλος 3 βώλους (σχ. 2)



Σχ. 2

Ἐὰν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν πόσους βώλους ἔχει τὸ ὅλον, δηλαδὴ ἂν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὸ **ἄθροισμα τῶν βώλων,** τοὺς ὁποίους ἔχει, πρέπει νὰ ἑνώσωμεν μὲ τοὺς βώλους, ποὺ εἶχε, τοὺς βώλους, ποὺ τοῦ ἔδωσαν τὴν πρώτην καὶ τὴν δευτέραν φοράν.

Ἡ πρᾶξις αὐτή, διὰ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν τὸ **ἄθροισμα** δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν, λέγεται **πρόσθεσις**. Ὥστε:

Πρόσθεσις δοθέντων ἀριθμῶν εἶναι μία πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν ἕνα νέον ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος περιέχει ὅλας τὰς μονάδας αὐτῶν καὶ μόνον αὐτάς.

Οἱ διάφοροι ἀριθμοί, ποὺ προστίθενται, λέγονται **προσθετέοι** ἢ **ὅροι τοῦ ἀθροίσματος**.

Εἶναι φανερὸν ὅτι, ὅταν οἱ προσθετέοι εἶναι συγκεκριμένοι, πρέπει νὰ εἶναι ὁμοειδεῖς. Τὸ δὲ ἄθροισμα αὐτῶν θὰ εἶναι ὁμοειδὲς πρὸς αὐτούς.

§ 28. Σημεῖον προσθέσεως. Μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν, τοὺς ὁποίους πρόκειται νὰ προσθέσωμεν, θέτομεν τὸ σημεῖον $+$, τὸ ὁποῖον ἀπαγγέλλεται **σὺν** ἢ **καὶ** ἢ **πλέον**.

Οὕτω, διὰ νὰ δείξωμεν ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν 2, 3, 5, γράφομεν: $2+3+5$.

Τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν αὐτῶν ἀριθμῶν εἶναι 10. Ἤτοι:

$$2+3+5=10.$$

Ἡ ἰσότης αὐτὴ ἀπαγγέλλεται:

Δύο σὺν τρία σὺν πέντε ἴσον δέκα.

Ἂν θέλωμεν νὰ νοοῦμεν ἕνα ἄθροισμα, ὡς εὑρεθέν, τὸ θέτομεν ἐντὸς παρενθέσεως. Οὕτω:

$$(5+3+2).$$

Ἂν δὲ θέλωμεν νὰ δηλώσωμεν ὅτι εἰς αὐτὸ τὸ ἄθροισμα πρέπει νὰ προσθέσωμεν, π. χ. τὸν 8, γράφομεν: $(5+3+2)+8$. Εἶναι δηλ. τὸ ἄθροισμα αὐτὸ τὸ ἴδιον μὲ τὸ ἄθροισμα $10+8$.

§ 29. Αἱ πρῶται ἰδιότητες τῶν ἴσων καὶ ἀνίσων ἀριθμῶν.

I. Ἔστω ἡ ἰσότης $\alpha=8$.

Εἶναι φανερὸν ὅτι ὅσας μονάδας ἔχει ὁ 8 τόσας ἔχει καὶ ὁ α. Εὐκόλως δὲ ἐννοοῦμεν ὅτι: ὅσας μονάδας ἔχει ὁ $8+3$ τόσας θὰ ἔχῃ καὶ ὁ $\alpha+3$· θὰ εἶναι λοιπὸν

$$\alpha+3=8+3.$$

Ὁμοίως ἐννοοῦμεν ὅτι καὶ $\alpha+10=8+10$. Ὥστε:

Ἂν εἰς ἴσους ἀριθμοὺς προσθέσωμεν τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, εὑρίσκομεν ἴσα ἀθροίσματα.

Καὶ γενικῶς :

Ἂν εἶναι $\boxed{\alpha = \beta}$, θὰ εἶναι καὶ $\boxed{\alpha + \gamma = \beta + \gamma}$

II. Ἔστω ἡ ἀνισότης $\alpha > 6$.

Εἶναι φανερὸν ὅτι ὁ α ἔχει περισσοτέρας μονάδας ἀπὸ τὸν 6. Ἀλλὰ τότε καὶ ὁ $\alpha + 4$ θὰ ἔχῃ περισσοτέρας μονάδας ἀπὸ τὸν $6 + 4$· δηλ. θὰ εἶναι : $\alpha + 4 > 6 + 4$. Ὥστε :

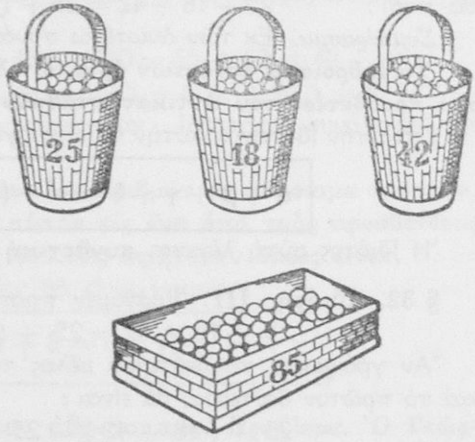
Ἂν εἰς δύο ἀνίσους ἀριθμοὺς προσθέσωμεν τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, εὑρίσκομεν ὁμοίως ἄνισα ἀθροίσματα.

Καὶ γενικῶς :

Ἂν εἶναι $\boxed{\alpha > \beta}$, θὰ εἶναι καὶ $\boxed{\alpha + \gamma > \beta + \gamma}$

2. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΡΟΣΘΕΣΕΩΣ

§ 30. Ἰδιότης Ι. *Παράδειγμα.* Ἔχομεν τρία καλάθια μὲ μῆλα (σχ. 3). Τὸ πρῶτον καλάθι περιέχει 25 μῆλα, τὸ δεύτερον 18 καὶ τὸ τρίτον 42.



Σχ. 3

Ἐὰν ἀδειάσωμεν εἰς ἕνα κενὸν κιβώτιον τὰ μῆλα, ποὺ περιέχουν τὰ καλάθια, κατὰ τὴν σειράν: 25 μῆλα, 18 μῆλα, 42 μῆλα, τότε ἐντὸς τοῦ κιβωτίου θὰ ὑπάρχουν :

25 μῆλα + 18 μῆλα + 42 μῆλα = 85 μῆλα.

Εἶναι ὅμως φανερὸν ὅτι ἐντὸς τοῦ κιβωτίου θὰ εὑρίσκωνται πάλιν 85 μῆλα, ἂν ἀδειάσωμεν αὐτὰ κατὰ τὴν σειρὰν 18 μῆλα, 42 μῆλα, 25 μῆλα. Εἶναι δηλ. πάλιν :

$$18 \text{ μῆλα} + 42 \text{ μῆλα} + 25 \text{ μῆλα} = 85 \text{ μῆλα}.$$

Θὰ εἶναι λοιπόν : $25 + 18 + 42 = 18 + 42 + 25$.

Συμπέρασμα. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὴν κάτωθι ἰδιότητα:

Τὸ ἄθροισμα δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται, καθ' οἱανδήποτε τάξιν καὶ ἂν προσθέσωμεν αὐτούς.

Κατὰ τὴν ἰδιότητα αὐτὴν θὰ εἶναι γενικῶς :

$$\boxed{\alpha + \beta + \gamma + \delta = \gamma + \alpha + \delta + \beta = \gamma + \delta + \beta + \alpha}$$

Ἡ ἰδιότης αὐτὴ λέγεται **ἰδιότης τῆς ἀντιμεταθέσεως.**

§ 31. Ἰδιότης II. Ἂν εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα θέσωμεν κατ' ἀρχὰς τὰ 18 μῆλα τοῦ 2ου καλαθίου εἰς τὸ τρίτον, τότε τὸ τρίτον θὰ ἔχῃ (18 + 42) μῆλα. Ἐὰν τώρα ἀδειάσωμεν τὰ μῆλα τοῦ καλαθίου αὐτοῦ καὶ τοῦ πρώτου εἰς τὸ κιβώτιον, τὸ κιβώτιον θὰ ἔχῃ πάλιν 85 μῆλα. Ἤτοι :

$$25 \text{ μῆλα} + (18 + 42) \text{ μῆλα} = 85 \text{ μῆλα}.$$

Ἐπειδὴ δὲ εἶναι καὶ

$$25 \text{ μῆλα} + 18 \text{ μῆλα} + 42 \text{ μῆλα} = 85 \text{ μῆλα}$$

θὰ εἶναι : $25 + 18 + 42 = 25 + (18 + 42)$.

Συμπέρασμα. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὴν κάτωθι ἰδιότητα:

Τὸ ἄρθροισμα δοθέντων ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται, ἂν μερικοὶ προσθετέοι του ἀντικατασταθοῦν μὲ τὸ ἄθροισμά των.

Κατὰ τὴν ἰδιότητα αὐτὴν θὰ εἶναι γενικῶς :

$$\boxed{\alpha + \beta + \gamma + \delta = \alpha + (\beta + \gamma) + \delta}$$

Ἡ ἰδιότης αὐτὴ λέγεται **συνθετική.**

§ 32. Ἰδιότης III. Ἐμάθομεν προηγουμένως ὅτι :

$$25 + 18 + 42 = 25 + (18 + 42).$$

Ἂν γράψωμεν τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἰσότητος αὐτῆς πρῶτον καὶ τὸ πρῶτον δεύτερον, θὰ εἶναι :

$$25 + (18 + 42) = 25 + 18 + 42.$$

Ἐξ αὐτῶν συνάγομεν, ὅτι :

Ἂν εἰς ἕνα ἄθροισμα ἀντικαταστήσωμεν προσθετέον τινά μὲ ἄλλους, οἱ ὁποῖοι ἔχουν αὐτὸν ἄθροισμα, τὸ ἀρχικὸν ἄθροισμα δὲν μεταβάλλεται.

Κατὰ τὴν ἰδιότητα αὐτὴν θὰ εἶναι γενικῶς :

$$\boxed{\alpha + (\beta + \gamma) + \delta = \alpha + \beta + \gamma + \delta}$$

Ἡ ἰδιότης αὐτὴ λέγεται **ἀναλυτική.**

§ 33. Πῶς προσθέτομεν ἀριθμὸν εἰς ἄθροισμα. *Πρόβλημα.* **Ἡ πρώτη τάξις ἑνὸς σχολείου εἶχεν 65 μαθητάς, ἡ δευτέρα 52 καὶ ἡ τρίτη 48. Εἰς τὴν δευτέραν τάξιν ἐνεγράφησαν 10 μαθηταί. Νὰ εὑρεθῇ τὸ πλῆθος τῶν μαθητῶν τῶν τριῶν αὐτῶν τάξεων.**

Λύσις. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ πλῆθος αὐτό, πρέπει εἰς τὸ ἄθροισμα $65 + 52 + 48$ τῶν πρώτων μαθητῶν νὰ προσθέσωμεν τοὺς 10 νέους μαθητάς. Εἶναι λοιπὸν οἱ μαθηταί :

$$(65 + 52 + 48) + 10 \text{ ἢ } 165 + 10 \text{ ἢ } 175.$$

Ἄλλη λύσις. Ἐπειδὴ οἱ νέοι 10 μαθηταὶ ἐνεγράφησαν εἰς τὴν β΄ τάξιν, αὕτη θὰ ἔχῃ

$$(52 + 10) \text{ μαθητὰς ἢ } 62 \text{ μαθητάς.}$$

Αἱ δὲ τρεῖς τάξεις θὰ ἔχουν

$$65 + (52 + 10) + 48 \text{ ἢ } 65 + 62 + 48 \text{ ἢ } 175 \text{ μαθητάς.}$$

Ἐπειδὴ καὶ αἱ δύο λύσεις δίδουν τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν

$$(65 + 52 + 48) + 10 = 65 + 62 + 48$$

$$\text{ἢ } (65 + 52 + 48) + 10 = 65 + (52 + 10) + 48.$$

Συμπέρασμα. Ἀπὸ τὴν τελευταίαν ἰσότητα συνάγομεν τὴν κάτωθι ἰδιότητα :

IV. Διὰ νὰ προσθέσωμεν ἕνα ἀριθμὸν εἰς ἄθροισμα ἀριθμῶν, προσθέτομεν τὸν ἀριθμὸν αὐτὸν εἰς ἕνα ἀπὸ τοὺς προσθετέους τοῦ ἀθροίσματος, τοὺς δὲ ἄλλους ἀφήνομεν ὅπως εἶναι.

Κατὰ τὴν ἰδιότητα αὐτὴν θὰ εἶναι γενικῶς :

$$\boxed{(\alpha + \beta + \gamma) + \delta = \alpha + (\beta + \delta) + \gamma}$$

§ 34. Πῶς προσθέτομεν ἀθροίσματα. *Πρόβλημα.* **Ὁ Γεώργιος ἐξώδευσε τὴν Δευτέραν 8 χιλιόδραχμα διὰ τετράδια, 4 χιλιόδρ. διὰ μολύβια καὶ 25 χιλιόδρ. διὰ βιβλία. Τὴν Τρίτην 6 χιλιόδρ. διὰ μελάνην καὶ 3 χιλιόδρ. διὰ πέννας. Πόσα χρήματα ἐξώδευσε τὸ ὅλον κατὰ τὰς δύο αὐτὰς ἡμέρας ;**

Λύσις. Τὴν Δευτέραν ἐξώδευσεν

8 χιλιοδρ. + 4 χιλιόδρ. + 25 χιλιόδρ. = 37 χιλιόδρ.

Τὴν Τρίτην ἐξώδευσε 6 + 3 = 9 χιλιόδρ. Ἑπομένως κατὰ τὰς δύο ἡμέρας ἐξώδευσε τὸ ὅλον :

(8 + 4 + 25) χιλιόδρ. + (6 + 3) χιλιόδρ.

ἢ 37 χιλιόδρ. + 9 χιλιόδρ. ἢ 46 χιλιόδρ.

Ἄλλη λύσις. Ἀντὶ νὰ ὑπολογίσωμεν τὰ ἔξοδα, χωριστὰ τὴν Δευτέραν καὶ χωριστὰ τὴν Τρίτην, δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν αὐτὰ συνολικῶς κατὰ τὰς δύο ἡμέρας.

Ἐξώδευσε λοιπόν :

8 χδρ. + 4 χδρ. + 25 χδρ. + 6 χδρ. + 3 χδρ. ἢ 46 χιλιόδρ.

Ἐπειδὴ αἱ δύο λύσεις δίδουν τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον 46, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν :

$$(8+4+25)+(6+3)=8+4+25+6+3.$$

Συμπέρασμα. Ἀπὸ τὴν ἰσότητα αὐτὴν συνάγομεν τὴν κάτωθι ἰδιότητα :

V. Διὰ νὰ προσθέσωμεν ἀθροίσματα, σχηματίζομεν ἕνα ἄθροισμα, τὸ ὁποῖον νὰ περιέχῃ ὅλους τοὺς προσθετέους τῶν δοθέντων ἀθροισμάτων καὶ μόνον αὐτούς.

Κατὰ τὴν ἰδιότητα αὐτὴν θὰ εἶναι γενικῶς :

$$\boxed{(\alpha+\beta+\gamma)+(\delta+\epsilon)=\alpha+\beta+\gamma+\delta+\epsilon}$$

Περίληψις τῶν ἰδιοτήτων τῆς προσθέσεως

1.	$\alpha+\beta+\gamma+\delta$	$=\beta+\alpha+\delta+\gamma$
2.	$\alpha+\beta+\gamma+\delta$	$=\alpha+(\beta+\delta)+\gamma$
3.	$\alpha+(\beta+\gamma)+\delta$	$=\alpha+\beta+\gamma+\delta$
4.	$(\alpha+\beta+\gamma)+\delta$	$=\alpha+(\beta+\delta)+\gamma$
5.	$(\alpha+\beta+\gamma)+(\delta+\varepsilon)$	$=\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon$

3. ΕΚΤΕΛΕΣΙΣ ΤΗΣ ΠΡΟΣΘΕΣΕΩΣ

§ 35. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς προσθέσεως, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα πολλῶν ἀριθμῶν, ἂν προσθέσωμεν διαδοχικῶς εἰς τὸν ἕνα ἐξ αὐτῶν τὰς μονάδας, τὰς ὁποίας ἔχουν οἱ ἄλλοι ἀριθμοί.

Τοῦτο εἶναι πρακτικῶς εὔκολον, ὅταν οἱ προστιθέμενοι ἀριθμοὶ εἶναι μικροί· ἀλλ' ὅταν οἱ προστιθέμενοι ἀριθμοὶ εἶναι μεγάλοι, ὁ τρόπος αὐτὸς τῆς εὑρέσεως τοῦ ἀθροίσματός των καταντᾷ ἀνιαρὸς καὶ κοπιώδης. Διὰ τοῦτο χρησιμοποιοῦμεν μίαν σύντομον μέθοδον, τὴν ὁποίαν θὰ ἀναφέρωμεν κατωτέρω.

§ 36. Ἄθροισμα δύο μονοψηφίων ἀριθμῶν. Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα $5+3$.

Προσθέτομεν εἰς τὸν 5 διαδοχικῶς τὰς τρεῖς μονάδας τοῦ ἄλλου καὶ λέγομεν 5 καὶ 1 6· 6 καὶ 1 7· 7 καὶ 1 8. Ὁ 8 εἶναι τὸ ζητούμενον ἄθροισμα.

Εἰς τὴν πρᾶξιν ὅμως λέγομεν ἀμέσως : 5 καὶ 3 8.

Εἶναι ἀνάγκη λοιπὸν νὰ γνωρίζωμεν ἀπὸ μνήμης τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν ἀνὰ δύο.

Τὰ ἀθροίσματα δύο οἱωνδήποτε μονοψηφίων ἀριθμῶν περιέχονται εἰς τὸν κατωτέρω πίνακα :

Πίναξ προσθέσεως δύο μονοψηφίων ἀριθμῶν

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Τὸν πίνακα αὐτὸν σχηματίζομεν ὡς ἑξῆς :

Εἰς τὴν πρώτην γραμμήν, γράφομεν κατὰ σειρὰν τοὺς ἀριθμοὺς 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Ὑποκάτω ἑκάστου γράφομεν τὸ ἄθροισμα αὐτοῦ καὶ τοῦ 1. Ὑποκάτω ἑκάστου ἀριθμοῦ τῆς δευτέρας σειρᾶς γράφομεν τὸ ἄθροισμα αὐτοῦ καὶ τοῦ 1. Ὑποκάτω ἑκάστου ἀριθμοῦ τῆς τρίτης σειρᾶς γράφομεν τὸ ἄθροισμα αὐτοῦ καὶ τοῦ 1 κ.ο.κ., μέχρις ὅτου γράψωμεν 10 σειράς.

Τὸ ἄθροισμα δύο μονοψηφίων ἀριθμῶν, π.χ. 8 + 9 εὑρίσκεται εἰς τὴν διασταύρωσιν δύο γραμμῶν, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μία ἀρχίζει ἀπὸ τὸν 8 καὶ ἡ ἄλλη ἀπὸ τὸν 9.

§ 37. Ἄθροισμα ἑνὸς πολυψηφίου ἀριθμοῦ καὶ ἑνὸς μονοψηφίου. 1ον. Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα 863 + 5. Ἐπειδὴ ὁ 863 = 860 + 3 δυνάμεθα (§ 33) νὰ προσθέσωμεν τὸν 5 εἰς τὸν 3. Προσθέτομεν λοιπὸν τὸν 5 εἰς τὸν 3 καὶ λέγομεν 5 καὶ 3 8. Ἄρα θὰ εἶναι 863 καὶ 5 ἴσον μὲ 868.

2ον. Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα 487 + 6.

Διατάσσομεν τὴν πρᾶξιν ὡς ἑξῆς :

$$\begin{array}{r} 487 \\ 6 \\ \hline 493 \end{array}$$

καὶ λέγομεν 6 καὶ 7 13. Ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα 13 ὑπερβαίνει τὸ 9 γράφομεν 3 καὶ κρατοῦμεν 1 (μίαν δεκάδα)· 1 τὸ κρατούμενον καὶ 8 9. Ἔπειτα καταβιβάζομεν τὸ ψηφίον 4 τῶν ἑκατοντάδων. Ἤτοι τὸ ζητούμενον ἄθροισμα 487 + 6 εἶναι 493.

Σημείωσις. Πρακτικῶς πρέπει νὰ συνηθίσωμεν νὰ κάμνωμεν τὴν πρόσθεσιν ἀπὸ μνήμης καὶ νὰ εὑρίσκωμεν ἀμέσως τὸ ἐξαγόμενον. Δηλαδὴ νὰ λέγωμεν 863 καὶ 5 868· 487 καὶ 6 493.

§ 38. Ἄθροισμα πολλῶν οἱωνδήποτε ἀριθμῶν. Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα 2 568 + 323 + 54.

Διατάσσομεν τὴν πρᾶξιν, ὡς γνωρίζομεν, οὕτως :

$$\begin{array}{r} 2\,568 \\ 323 \\ 54 \\ \hline 2\,945 \end{array}$$

Εὑρίσκομεν πρῶτον τὸ ἄθροισμα τῶν μονάδων· λέγομεν 4 καὶ 3 7 καὶ 8 15· γράφομεν 5 καὶ κρατοῦμεν 1 (μίαν δεκάδα). Ἔπειτα λέγομεν 1 τὸ κρατούμενον καὶ 5 6 καὶ 2 8 καὶ 6 14· γράφομεν 4 καὶ κρατοῦμεν 1 (ἑκατοντάδα). Ἔπειτα λέγομεν 1 τὸ κρατούμενον καὶ 3 4 καὶ 5 9· γράφομεν τὸ 9 εἰς τὴν στήλην τῶν ἑκατοντάδων καὶ τέλος καταβιβάζομεν τὸ ψηφίον 2 τῶν χιλιάδων. Τὸ ζητούμενον λοιπὸν ἄθροισμα εἶναι 2 945.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὸν γνωστὸν κανόνα τῆς προσθέσεως.

§ 39. Ἐξήγησις τοῦ κανόνος τῆς προσθέσεως. Κατὰ τὴν ἀναλυτικὴν ἰδιότητα (§ 32) δυνάμεθα νὰ ἀναλύσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς 2 568, 323, 54 εἰς τὰς μονάδας τῶν διαφόρων τάξεων καὶ ἔπειτα, κατὰ τὴν συνθετικὴν ἰδιότητα, νὰ προσθέσωμεν μεταξύ των τὰς ἁπλᾶς μονάδας, τὰς δεκάδας κ. ο. κ. καὶ τέλος νὰ ἑνώσωμεν τὰ προκύπτοντα μερικὰ ἀθροίσματα.

Οὕτω, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα 2 568 + 323 + 54, γράφομεν :

2 568 = 2 χιλ. + 5 ἑκατοντ. + 6 δεκάδ. + 8 μονάδ.
323 = 0 χιλ. + 3 ἑκατοντ. + 2 δεκάδ. + 3 μονάδ.
54 = 0 χιλ. + 0 ἑκατοντ. + 5 δεκάδ. + 4 μονάδ.

Προσθέτομεν ἔπειτα τὰς μονάδας ἑκάστης τάξεως καὶ εὑρίσκομεν :

2 χιλ. + 8 ἑκατοντ. + 13 δεκάδ. + 15 μονάδ.
ἢ 2 χιλ. + 8 ἑκατοντ. + 14 δεκάδ. + 5 μονάδ.
ἢ 2 χιλ. + 9 ἑκατοντ. + 4 δεκάδ. + 5 μονάδ.

Τὸ ζητούμενον ἄθροισμα εἶναι ὁ ἀριθμὸς 2 945.

§ 40. Δοκιμὴ τῆς προσθέσεως. Ὅταν λέγωμεν ὅτι θὰ κάμωμεν **δοκιμὴν** μιᾶς πράξεως, σημαίνει ὅτι θὰ κάμωμεν μίαν ἄλλην πρᾶξιν, διὰ νὰ ἴδωμεν, ἂν τὸ ἐξαγόμενον τῆς πρώτης εἶναι ἀκριβές.

Διὰ νὰ κάμωμεν τὴν δοκιμὴν μιᾶς προσθέσεως, στηριζόμεθα εἰς τὴν ἰδιότητα τῆς ἀντιμεταθέσεως (§ 30) καὶ ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς :

Ἐπαναλαμβάνομεν τὴν πρόσθεσιν ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω, ἐὰν προηγουμένως ἡ πρόσθεσις ἔγινεν ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω· ἢ ἀλλάσσομεν τὴν θέσιν τῶν προσθετέων μεταξύ των καὶ ἐπαναλαμβάνομεν τὴν πρόσθεσιν. Καὶ ἐὰν αἱ δύο προσθέσεις γίνουν χωρὶς λάθος, πρέπει νὰ εὕρωμεν τὸ **αὐτὸ ἄθροισμα.**

Ἡ δοκιμὴ τῆς προσθέσεως, ὅταν οἱ προσθετέοι εἶναι πολλοί, δύναται νὰ γίνῃ καὶ ὡς ἑξῆς :

Χωρίζομεν τοὺς προσθετέους εἰς ὁμάδας καὶ εὑρίσκομεν τὸ ἄθροισμα τῶν προσθετέων ἑκάστης ὁμάδος.	2 348 7 753 1 261 57 2 475	13894
Προσθέτομεν ἔπειτα τὰ μερικὰ αὐτὰ ἀθροίσματα καί, ἂν αἱ πράξεις αὐταὶ γίνουν χωρὶς λάθος, πρέπει νὰ εὕρωμεν τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον.	1 749 105 3 078 415	5 347
	19 241	19 241

Ἀσκήσεις

21) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ κάτωθι ἀθροίσματα κατὰ δύο τρόπους (§ 34).

1. $(5+7+8)+(9+15)$ 3. $(3+19)+(5+7+21)$
2. $(12+9+6)+(24+32)$ 4. $(12+8)+(15+4+9)$

22) Νὰ ἐκτελεσθοῦν γραπτῶς αἱ κάτωθι προσθέσεις, χωρὶς νὰ τεθοῦν οἱ ἀριθμοὶ ὁ ἕνας κάτωθεν τοῦ ἄλλου :

1. 4 534 + 45 678 + 753 + 9 578 + 87 + 15 623
2. 75 428 + 22 7654 + 39 642 + 847 + 17 049

23) Νὰ συμπληρωθῇ ὁ κάτωθι πίναξ :

Εἰσπράξεις πραγματοποιηθεῖσαι κατὰ τὴν διάρκειαν μιᾶς ἑβδομάδος ὑπὸ τῶν 3 ταμείων ἑνὸς καταστήματος

	1ον ταμεῖον	2ον ταμεῖον	3ον ταμεῖον	Σύνολον
Δευτέρα........	953 200	1 645 000	3 048 700	....
Τρίτη..........	875 640	2 972 700	2 854 740	....
Τετάρτη........	785 945	1 248 500	2 593 780	....
Πέμπτη........	693 200	2 449 675	3 000 900	....
Παρασκευὴ	800 575	1 875 635	2 358 480	....
Σάββατον......	987 300	2 148 750	1 975 000	....
Σύνολον........				

4. ΣΥΝΤΟΜΙΑΙ ΠΡΟΣΘΕΣΕΩΣ ΚΑΙ ΕΥΡΕΣΙΣ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ ΑΡΙΘΜΩΝ ΑΠΟ ΜΝΗΜΗΣ

§ 41. Συντομίαι εἰς τὴν ἐκτέλεσιν τῆς προσθέσεως. Στηριζόμενοι εἰς τὰς ἰδιότητας τῆς προσθέσεως δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἀπὸ μνήμης τὸ ἄθροισμα δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν.

Ἡ ἀπὸ μνήμης εὕρεσις τοῦ ἀθροίσματος δοθέντων ἀριθμῶν συντομεύει κατὰ πολὺ τὰς πράξεις. Διὰ τοῦτο εἶναι ἀνάγκη νὰ ἐξασκηθῶμεν πολὺ εἰς τὸν ἀπὸ μνήμης λογισμόν.

Διὰ νὰ ἐκτελοῦμεν συντόμως καὶ ἀπὸ μνήμης τὴν πρόσθεσιν ἀριθμῶν, πρέπει νὰ ἔχωμεν ὑπ' ὄψιν τὰ κάτωθι :

Ι. Πρόσθεσις δύο διψηφίων ἀριθμῶν. 1ον. Ὅταν οἱ δύο ἀριθμοὶ λήγουν εἰς 0, προσθέτομεν τὰς δεκάδας των καὶ εἰς τὸ ἐξαγόμενον παραθέτομεν ἕνα 0.

Π. χ. διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα 50 + 40 λέγομεν : 5 καὶ 4 9· 90. Ὁμοίως, ἐὰν ἔχωμεν 60 + 90, λέγομεν : 6 καὶ 9 15· 150.

2ον. Ὅταν ὁ ἕνας μόνον ἐκ τῶν ἀριθμῶν λήγῃ εἰς 0, προσθέτομεν τὰς δεκάδας του εἰς τὰς δεκάδας τοῦ ἄλλου καὶ παραθέτομεν εἰς τὸ ἐξαγόμενον τὰς μονάδας.

Π. χ. ἐὰν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα 65 + 50 λέγομεν : 6 καὶ 5 11 δεκάδες καὶ 5 ἁπλαῖ μονάδες, 115. Συνήθως δὲ λέγομεν : 6 καὶ 5 11· 115.

3ον. Ὅταν οἱ δύο ἀριθμοὶ δὲν λήγουν εἰς 0, προσθέτομεν εἰς τὸν πρῶτον ἀριθμὸν κατ' ἀρχὰς τὰς δεκάδας καὶ ἔπειτα τὰς μονάδας τοῦ ἄλλου.

Π. χ. διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα 48 + 36 λέγομεν : 48 καὶ 30 78 καὶ 6 84. Ὁμοίως διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα : 57 + 68 λέγομεν 57 καὶ 60 117 καὶ 8 125.

Παρατήρησις. Κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πράξεων ἀπὸ μνήμης πρέπει νὰ συνηθίσωμεν νὰ λέγωμεν ὅσον τὸ δυνατὸν ὀλιγωτέρας λέξεις. Οὕτως εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα ἀρκούμεθα εἰς τὸ νὰ ἀπαγγέλλωμεν νοερῶς τὰ διαδοχικὰ ἐξαγόμενα 57, 117, 125.

ΙΙ. Πρόσθεσις δύο οἱωνδήποτε ἀριθμῶν. Προσθέτομεν εἰς τὸν πρῶτον ἀριθμὸν τὰς μονάδας τῶν διαφόρων τάξεων τοῦ δευτέρου ἀριθμοῦ, ἀρχόμενοι ἀπὸ τὰς μονάδας τῆς ἀνωτέρας τάξεως.

Π. χ. ἐὰν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα 240 + 54, λέγομεν :

240 καὶ 50 290 καὶ 4 294. Ὁμοίως, ἐὰν ἔχωμεν 2 374 + 568, λέγομεν: 2 374 καὶ 500 2 874 καὶ 60 2 934 καὶ 8 2 942.

III. Πρόσθεσις ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν. Προσθέτομεν τοὺς δύο πρώτους ἀριθμούς· εἰς τὸ ἐξαγόμενον προσθέτομεν τὸν τρίτον· εἰς τὸ νέον ἐξαγόμενον προσθέτομεν τὸν τέταρτον κ.ο.κ, ἐφαρμόζοντες τὰς προηγουμένας μεθόδους συντομίας.

Π. χ. ἐὰν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα 156 + 45 + 30, λέγομεν: 156 καὶ 40 196 καὶ 5 201 καὶ 30 231.

Ἄσκησις

24) Νὰ εὑρεθοῦν ἀπὸ μνήμης τὰ κάτωθι ἀθροίσματα:

1.	60 + 30	80 + 50	70 + 60
2.	59 + 70	40 + 74	90 + 73
3.	63 + 45	78 + 94	85 + 36
4.	645 + 93	368 + 94	543 + 96
5.	252 + 159	272 + 189	139 + 142
6.	4 652 + 325	3 893 + 247	5 654 + 947

Προβλήματα προσθέσεως

Α′ Ὁμάς. 25) Οἱ Ὀλυμπιακοὶ ἀγῶνες ἤρχισαν τὸ ἔτος 777 π. Χ. Πόσα ἔτη ἐπέρασαν μέχρι σήμερον;

26) Ἡ ἐν Μαραθῶνι μάχη ἔγινε τὸ ἔτος 490 π. Χ. Νὰ εὕρητε πόσα ἔτη ἐπέρασαν μέχρι σήμερον.

27) Ἔμπορός τις ἠγόρασεν ὕφασμα ἀντὶ 836 500 δραχμῶν. Πόσον πρέπει νὰ τὸ πωλήσῃ, ἂν θέλῃ νὰ κερδίσῃ 26 750 δραχμάς;

28) Μία κόρη ἠγόρασε δύο τεμάχια κορδέλλας. Διὰ τὸ πρῶτον ἐπλήρωσεν 27 659 δραχ. καὶ διὰ τὸ δεύτερον 15 370 δραχ. Πόσα ἐπλήρωσεν ἐν ὅλῳ;

29) Ὅταν ἐγεννήθη ἕνα παιδίον, ἡ μήτηρ του ἦτο 27 ἐτῶν, ὁ δὲ πατήρ του ἦτο 9 ἔτη μεγαλύτερος τῆς μητρός του· τώρα τὸ παιδίον εἶναι 17 ἐτῶν. Πόσων ἐτῶν εἶναι καθένας ἀπὸ τοὺς γονεῖς του;

Β′ Ὁμάς. 30) Παντοπώλης τις ἠγόρασε δύο κιβώτια σάπωνος· τὸ πρῶτον περιεῖχε 36 ὀκάδας σάπωνος καὶ ἐκόστιζε 261 000 δραχ, τὸ δὲ δεύτερον περιεῖχε 49 ὀκ. καὶ ἐκόστιζε 407 325 δρχ. Πόσας ὀκάδας σάπωνος ἠγόρασε καὶ πόσον ἐπλήρωσεν;

31) Ὑπάλληλος παντοπωλείου ἠγόρασε, μὲ τὰς οἰκονομίας του μίαν ἐνδυμασίαν ἀντὶ 179 350 δρχ, ἕνα ζεῦγος ὑποδημάτων ἀντὶ 125 000 δρχ. καὶ ἕνα ζεῦγος καλτσῶν ἀντὶ 8 500 δρχ. Ἔμειναν δὲ εἰς αὐτὸν 46 350 δρχ. Πόσας δραχμὰς εἶχεν ἐξοικονομήσει ἐν ὅλῳ ;

Γ' Ὁμάς. 32) Χωρικός τις ἠγόρασε δύο χωράφια· διὰ τὸ ἕνα ἔδωσεν 6 738 950 δραχ. καὶ διὰ τὸ ἄλλο 2 376 400 δραχ. περισσοτέρας τοῦ πρώτου. Πόσας δραχμὰς ἔδωσε καὶ διὰ τὰ δύο χωράφια ;

33) Ἕνα ποσὸν ἀλεύρου ἐμοιράσθη μεταξὺ τῶν κατοίκων τριῶν χωρίων ὡς ἑξῆς: Τὸ α' ἔλαβε 3 725 ὀκάδας, τὸ β' 387 ὀκάδας ἐπὶ πλέον τοῦ α' καὶ τὸ γ' 564 ὀκάδας ἐπὶ πλέον τοῦ β'. Πόσον ἦτο τὸ μοιρασθὲν ποσὸν ἀλεύρου ;

34) Ἕνα χρηματικὸν ποσὸν ἐμοιράσθη μεταξὺ τριῶν προσώπων. Τὸ πρῶτον ἔλαβε 427 650 δραχμάς, τὸ δεύτερον 36 750 δραχμὰς περισσοτέρας τοῦ πρώτου καὶ τὸ τρίτον 52 480 δραχμὰς περισσοτέρας τοῦ δευτέρου. Πόσον ἦτο τὸ ποσόν ;

35) Τέσσαρες ἀριθμοὶ ἔχουν γραφῆ εἰς σειράν. Ὁ πρῶτος ἐξ αὐτῶν, ὁ ὁποῖος εἶναι ὁ 3 059, εἶναι μικρότερος ἀπὸ τὸν δεύτερον κατὰ 908, ὁ δεύτερος εἶναι μικρότερος ἀπὸ τὸν τρίτον πάλιν κατὰ 908 κ. ο. κ. Δηλαδὴ καθένας ἀπ' αὐτοὺς εἶναι μικρότερος ἀπὸ τὸν ἑπόμενόν του κατὰ 908. Πόσον εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν τεσσάρων αὐτῶν ἀριθμῶν ;

Δ' Ὁμάς. 36) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα $42\,729 + \alpha$, ὅταν εἶναι: 1ον $\alpha = 9\,073$, 2ον $\alpha = 38\,009$.

37) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα $\alpha + \beta + \gamma$, ὅταν εἶναι $\alpha = 3\,078$, $\beta = 4\,069$ καὶ $\gamma = 39\,017$.

38) Τὸ Α' Γυμνάσιον μιᾶς πόλεως εἶχε τὸ παρελθὸν σχολικὸν ἔτος 760 μαθητάς, τὸ δὲ Β' εἶχε χ περισσοτέρους μαθητάς. Νὰ παραστήσητε τὸν ἀριθμὸν τῶν μαθητῶν τοῦ Β' Γυμνασίου. Ἔπειτα δὲ νὰ εὕρητε τὸν ἀριθμὸν τοῦτον, ἂν $\chi = 25$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ΄

ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ ΤΩΝ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

1. ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΑΦΑΙΡΕΣΕΩΣ

§ 42. Ὁρισμοί. *Παράδειγμα.* **Ὁ Θεόδωρος εἶχε 15 βώλους καί ἔδωσεν εἰς ἕνα συμμαθητήν του 4 βώλους. Θέλομεν νὰ μάθωμεν πόσοι βῶλοι τοῦ ἔμειναν.**

Πρὸς τοῦτο σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς: Ἂν ὁ Θεόδωρος ἔδιδεν ἀπὸ ἕνα βῶλον, θὰ ἔμενον εἰς αὐτὸν κατὰ σειρὰν πρῶτον 14 βῶλοι, ἔπειτα 13, ἔπειτα 12 καὶ τέλος 11 βῶλοι.

Παρατηροῦμεν ὅτι ὁ Θεόδωρος ἔδωσε τόσας φορὰς ἀπὸ ἕνα βῶλον, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ 4, δηλ. ἠλάττωσε τὸν 15 κατὰ 4 μονάδας. Ἡ πρᾶξις αὐτὴ λέγεται **ἀφαίρεσις**. Ὥστε:

Ἀφαίρεσις εἶναι πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας ἐλαττώνομεν δοθέντα ἀριθμὸν κατὰ τόσας μονάδας, ὅσας ἔχει ἄλλος δοθεὶς ἀριθμός.

Ὁ ἀριθμός, τὸν ὁποῖον ἐλαττώνομεν, λέγεται **μειωτέος**, ὁ δὲ ἀριθμός, ποὺ δεικνύει κατὰ πόσας μονάδας πρέπει νὰ ἐλαττωθῇ ὁ μειωτέος, λέγεται **ἀφαιρετέος**.

Τὸ ἐξαγόμενον τῆς ἀφαιρέσεως λέγεται **ὑπόλοιπον** ἢ **διαφορά**.

Εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα μειωτέος εἶναι ὁ 15, ἀφαιρετέος ὁ 4 καὶ ὑπόλοιπον ὁ 11.

Ὁ μειωτέος καὶ ὁ ἀφαιρετέος λέγονται μαζὶ **ὅροι τῆς διαφορᾶς.**

§ 43. Γενικὸς ὁρισμὸς τῆς ἀφαιρέσεως. Ἐὰν ὁ συμμαθητὴς τοῦ Θεοδώρου ἐπιστρέψῃ εἰς αὐτὸν τοὺς 4 βώλους, ποὺ ἔλαβε, τότε ὁ Θεόδωρος θὰ ἔχῃ πάλιν 15 βώλους· ἤτοι: $11 + 4 = 15$.

Ἐκ τούτου παρατηροῦμεν ὅτι ὁ μειωτέος 15 εἶναι ἄθροισμα τοῦ ἀφαιρετέου 4 καὶ τῆς διαφορᾶς 11.

Ἑπομένως δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν τὴν ἀφαίρεσιν καὶ ὡς ἑξῆς:

Ἀφαίρεσις εἶναι πρᾶξις, εἰς τὴν ὁποίαν μᾶς δίδονται δύο

ἀριθμοί, ἤτοι ὁ μειωτέος καὶ ὁ ἀφαιρετέος, καὶ εὑρίσκεται τρίτος, ὁ ὁποῖος προστιθέμενος εἰς τὸν ἀφαιρετέον δίδει τὸν μειωτέον.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει ὅτι ἡ ἀφαίρεσις εἶναι πρᾶξις ἀντίστροφος τῆς προσθέσεως.

§ 44. Σημεῖον ἀφαιρέσεως. Διὰ νὰ σημειώσωμεν τὴν διαφορὰν δύο ἀριθμῶν, θέτομεν μεταξὺ τοῦ μειωτέου καὶ τοῦ ἀφαιρετέου τὸ σημεῖον —, τὸ ὁποῖον ἀπαγγέλλεται **πλὴν** ἢ **μεῖον** ἢ **ἀπό.**

Οὕτω $15-4$ σημαίνει νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸν 4 ἀπὸ τὸν 15 καὶ ἀπαγγέλλεται: 15 πλὴν 4 ἢ 15 μεῖον 4 ἢ 4 ἀπὸ 15.

Διὰ νὰ δηλώσωμεν ὅτι ἡ διαφορὰ $15-4$ εἶναι 11, γράφομεν

$$15-4=11$$

καὶ ἀπαγγέλλομεν: 15 πλὴν 4 ἴσον 11.

Ὅταν ὁ ἕνας ἢ καὶ οἱ δύο ὅροι μιᾶς διαφορᾶς παρίστανται διὰ γραμμάτων, δὲν δυνάμεθα νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν πρᾶξιν, διότι δὲν γνωρίζομεν ποίους ἀριθμοὺς παριστάνουν τὰ γράμματα αὐτά. Δυνάμεθα ὅμως νὰ σημειώσωμεν τὴν πρᾶξιν.

Οὕτως $\alpha-\beta$ **παριστάνει** τὴν διαφορὰν τοῦ β ἀπὸ τοῦ α. Ἐπίσης $\chi-8$ **σημαίνει** ὅτι πρέπει ἀπὸ τὸν χ νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸν 8.

Εἰς τὰ παραδείγματα αὐτὰ παραδεχόμεθα ὅτι ὁ μειωτέος εἶναι μεγαλύτερος τοῦ ἀφαιρετέου ἢ ἴσος πρὸς αὐτόν· διότι, ἐὰν ὁ μειωτέος εἶναι μικρότερος τοῦ ἀφαιρετέου, ὅπως π.χ. $5-8$, ἡ ἀφαίρεσις εἶναι ἀδύνατος.

Ἂν δὲ ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ διαφορὰ τοῦ β ἀπὸ τοῦ α εἶναι δ, κατὰ τὸν γενικὸν ὁρισμὸν τῆς ἀφαιρέσεως θὰ εἶναι $\alpha=\beta+\delta$. Ὥστε:

Ἂν εἶναι $\boxed{\boldsymbol{\alpha-\beta=\delta}}$, θὰ εἶναι $\boxed{\boldsymbol{\alpha=\beta+\delta}}$

§ 45. Παρατηρήσεις. 1η. Ὅπως εἰς τὴν πρόσθεσιν, οὕτω καὶ εἰς τὴν ἀφαίρεσιν συγκεκριμένων ἀριθμῶν, ὁ μειωτέος καὶ ὁ ἀφαιρετέος πρέπει νὰ εἶναι ὁμοειδεῖς. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ διαφορά των θὰ εἶναι ὁμοειδὴς πρὸς αὐτούς.

2α. Ὅπως τὸ ἄθροισμα, οὕτω καὶ τὴν διαφορὰν τὴν κλείομεν ἐντὸς παρενθέσεως, ἐὰν θέλωμεν νὰ φανερώσωμεν ὅτι αὐτὴ εὑρέθη.

Π. χ. γράφομεν (15 — 4).

3η. Ἡ διαφορὰ δύο ἴσων ἀριθμῶν εἶναι μηδέν. Ἤτοι εἶναι :

$$8 - 8 = 0 \cdot \text{ ἐπίσης εἶναι } \alpha - \alpha = 0.$$

4η. Εἶναι φανερὸν ὅτι $5 - 0 = 5$, καὶ $\beta - 0 = \beta$.

Διατυπώσατε τὸν σχετικὸν κανόνα.

§ 46. **Ἄλλη ἰδιότης τῶν ἴσων καὶ ἀνίσων ἀριθμῶν.** Ι. Ἔστω ἡ ἰσότης $8 = \alpha$.

Εἶναι φανερὸν ὅτι ὁ α ἔχει τόσας μονάδας, ὅσας ἔχει ὁ 8. Εὐκόλως δὲ ἐννοοῦμεν ὅτι καὶ οἱ ἀριθμοὶ $8 - 3$ καὶ $\alpha - 3$ ἔχουν τὸ αὐτὸ πλῆθος μονάδων.

Θὰ εἶναι λοιπὸν $8 - 3 = \alpha - 3$. Καὶ γενικῶς :

Ἂν εἶναι $\boxed{\alpha = \beta}$, θὰ εἶναι καὶ $\boxed{\alpha - \mu = \beta - \mu}$,

ἂν βέβαια ἡ ἀφαίρεσις τοῦ μ ἀπὸ τοῦ β εἶναι δυνατή.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι :

Ἂν ἀπὸ ἴσους ἀριθμοὺς ἀφαιρέσωμεν τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, εὑρίσκομεν πάλιν ἴσους ἀριθμούς.

ΙΙ. Ἔστω ἡ ἀνισότης $\alpha > \beta$· εἶναι φανερὸν ὅτι ὁ α ἔχει περισσοτέρας μονάδας ἀπὸ τὸν β. Εὐκόλως δὲ ἐννοοῦμεν ὅτι, ἐὰν ἀφαιρέσωμεν καὶ ἀπὸ τὸν α καὶ ἀπὸ τὸν β 3 μονάδας, θὰ μείνουν περισσότεραι μονάδες εἰς τὸν α. Θὰ εἶναι λοιπὸν $\alpha - 3 > \beta - 3$. Καὶ γενικῶς :

Ἂν εἶναι : $\boxed{\alpha > \beta}$, θὰ εἶναι καὶ $\boxed{\alpha - \mu > \beta - \mu}$,

ἂν ἡ ἀφαίρεσις τοῦ μ ἀπὸ τοῦ β εἶναι δυνατή.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι :

Ἂν ἀπὸ δύο ἀνίσους ἀριθμοὺς ἀφαιρέσωμεν τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, εὑρίσκομεν ὁμοίως ἀνίσους ἀριθμούς.

2. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΑΦΑΙΡΕΣΕΩΣ

§ 47. **Ἰδιότης Ι.** *Πρόβλημα.* **Ὁ Γεώργιος ἔχει 8 βώλους, ὁ δὲ Παῦλος 5 βώλους. Πόση εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν ἀριθμῶν τῶν βώλων αὐτῶν καὶ πόση θὰ εἶναι : 1ον. Ἂν δώσωμεν**

εἰς τὸν καθένα ἀπὸ 4 βώλους ἀκόμη ; 2ον. Ἂν πάρωμεν ἀπὸ τὸν καθένα 2 βώλους;

Λύσις. 1ον Ὁ Γεώργιος ἔχει o o o o o o o o 8 βώλους
Ὁ Παῦλος ἔχει o o o o o 5 βώλους

Ἡ διαφορὰ τῶν βώλων των εἶναι 3 βῶλοι, ἤτοι :

8 βῶλοι − 5 βῶλοι = 3 βῶλοι.

Ἂν δώσωμεν ἀπὸ 4 βώλους καὶ εἰς τοὺς δύο, τότε ὁ
Γεώργιος θὰ ἔχῃ o o o o | o o o o o o o o (8 + 4) βώλους
ὁ Παῦλος θὰ ἔχῃ o o o o | o o o o o (5 + 4) βώλους

Ἡ διαφορὰ τῶν βώλων θὰ εἶναι πάλιν 3 βῶλοι, ἤτοι εἶναι :

$$(8+4)-(5+4)=3.$$

2ον Ἂν πάρωμεν ἀπὸ δύο βώλους καὶ ἀπὸ τοὺς δύο, τότε
ὁ Γεώργιος θὰ ἔχῃ o o | o o o o o o (8 − 2) βώλους
ὁ Παῦλος θὰ ἔχῃ o o | o o o (5 − 2) βώλους

καὶ ἡ διαφορὰ τῶν βώλων θὰ εἶναι πάλιν 3 βῶλοι, ἤτοι εἶναι :

$$(8-2)-(5-2)=3.$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω παρατηροῦμεν ὅτι :

$8-5=(8+4)-(5+4)$ καὶ $8-5=(8-2)-(5-2)$.

Συμπέρασμα. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὴν κάτωθι ἰδιότητα:

1ον. Ἂν προσθέσωμεν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν καὶ εἰς τὸν μειωτέον καὶ εἰς τὸν ἀφαιρετέον μιᾶς διαφορᾶς, ἡ διαφορὰ δὲν μεταβάλλεται.

2ον. Ἂν ἀφαιρέσωμεν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν καὶ ἀπὸ τὸν μειωτέον καὶ ἀπὸ τὸν ἀφαιρετέον μιᾶς διαφορᾶς, ἡ διαφορὰ δὲν μεταβάλλεται.

Γενικῶς κατὰ τὴν ἰδιότητα αὐτὴν θὰ εἶναι :

$$\boxed{\alpha-\beta=(\alpha+\gamma)-(\beta+\gamma)}\;,\quad \boxed{\alpha-\beta=(\alpha-\gamma)-(\beta-\gamma)}$$

Ἡ ἰδιότης αὐτὴ εἶναι θεμελιώδης.

§ 48. Πῶς ἀφαιροῦμεν ἀριθμὸν ἀπὸ ἄθροισμα. *Πρόβλημα.* **Ἡ Ἑλένη εἶχε 15 καρύδια· ὁ πατήρ της τῆς ἔδωσεν ἀκόμη 25 καρύδια καὶ ἡ μήτηρ της 10 καρύδια. Ἔδωσεν ἔπειτα εἰς τὴν ἀδελφήν της 8 καρύδια. Πόσα καρύδια τῆς ἔμειναν;**

Λύσις. Ἡ Ἑλένη, πρὶν δώσῃ εἰς τὴν ἀδελφήν της καρύδια, εἶχε (15 + 25 + 10) καρύδια ἢ 50 καρύδια.

Ἐπειδὴ δὲ ἔδωσεν 8 καρύδια, τῆς ἔμειναν:
$(15+25+10)$ καρ. -8 καρ. ἢ 50 καρ. -8 καρ. ἢ 42 καρ.

Ἄλλη λύσις. Ἂν ἔδιδε τὰ 8 καρύδια εἰς τὴν ἀδελφήν της ἀπὸ τὰ 25 καρύδια, ποὺ τῆς ἔδωσεν ὁ πατήρ της, θὰ τῆς ἔμεναν
$25-8$ καρύδια ἢ 17 καρύδια καὶ ἑπομένως θὰ εἶχε συνολικῶς:
$15+(25-8)+10$ καρύδια ἢ $15+17+10$ καρύδια ἢ 42 καρύδια.

Ἐπειδὴ καὶ αἱ δύο λύσεις δίδουν τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον, ἐννοοῦμεν ὅτι: $(15+25+10)-8=15+(25-8)+10$.

Συμπέρασμα. Ἀπὸ τὴν ἰσότητα αὐτὴν συνάγομεν τὴν κάτωθι ἰδιότητα:

II. Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀριθμὸν ἀπὸ ἄθροισμα, δυνάμεθα νὰ ἀφαιρέσωμεν αὐτὸν ἀπὸ ἕνα μόνον προσθετέον τοῦ ἀθροίσματος, τοὺς δὲ ἄλλους νὰ ἀφήσωμεν, ὅπως ἔχουν.

Κατὰ τὴν ἰδιότητα αὐτὴν θὰ εἶναι γενικῶς:

$$\boxed{(\alpha+\beta+\gamma)-\delta=\alpha+(\beta-\delta)+\gamma}$$

§ 49. Πῶς ἀφαιροῦμεν ἄθροισμα ἀπὸ ἀριθμόν. *Πρόβλημα.* **Ὁ Πέτρος εἶχε 50 χιλιόδραχμα καὶ ἔδωσεν 28 χιλιόδραχμα διὰ νὰ ἀγοράσῃ ἕνα βιβλίον καὶ 12 χιλιόδραχμα διὰ τετράδια. Πόσα χιλιόδραχμα τοῦ ἔμειναν; ***

Λύσις. Διὰ τὸ βιβλίον καὶ διὰ τὰ τετράδια ἔδωσεν $(28+12)$ χιλιόδρ. ἢ 40 χιλιόδρ.· ἑπομένως τοῦ ἔμειναν 50 χιλιόδρ. $-(28+12)$ χιλιόδρ. ἢ 50 χιλιόδρ. -40 χιλιόδρ. ἢ 10 χιλιόδρ.

Ἄλλη λύσις. Ὅταν ἐπλήρωσε τὸ βιβλίον, τοῦ ἔμειναν 50 χιλιόδρ.$-$ 28 χιλιόδρ. ἢ $(50-28)$ χιλιόδρ. ἢ 22 χιλιόδρ.

Ὅταν δὲ ἐπλήρωσε καὶ τὰ τετράδια τοῦ ἔμειναν $(50-28)$ χιλιόδρ. -12 χιλιόδρ. ἢ 22 χιλιόδρ. -12 χιλιόδρ. ἢ 10 χιλιόδρ.

Ἐπειδὴ καὶ αἱ δύο λύσεις δίδουν τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον 10, ἐννοοῦμεν ὅτι: $50-(28+12)=(50-28)-12$.

Συμπέρασμα. Ἀπὸ τὴν ἰσότητα αὐτὴν συνάγομεν τὴν κάτωθι ἰδιότητα:

III. Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἄθροισμα ἀπὸ ἀριθμόν, δυνάμεθα νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν τὸν πρῶτον προσθετέον τοῦ

---

* *Σημείωσις.* Τὰ προβλήματα ἔχουσι συνταχθῆ πρὸ τῆς νομισματικῆς ἀναπροσαρμογῆς.

ἀθροίσματος, ἀπὸ τὸ ὑπόλοιπον τὸ δεύτερον, ἀπὸ τὸ νέον ὑπόλοιπον τὸν τρίτον καὶ οὕτω καθεξῆς, μέχρις ὅτου τελειώσουν ὅλοι οἱ προσθετέοι.

Κατὰ τὴν ἰδιότητα αὐτὴν θὰ εἶναι γενικῶς :

$$\boxed{\alpha - (\beta + \gamma) = (\alpha - \beta) - \gamma}$$

Περίληψις τῶν ἰδιοτήτων τῆς ἀφαιρέσεως

1.	$\alpha - \beta = (\alpha + \gamma) - (\beta + \gamma)$
2.	$\alpha - \beta = (\alpha - \gamma) - (\beta - \gamma)$
3.	$(\alpha + \beta + \gamma) - \delta = \alpha + (\beta - \delta) + \gamma$
4.	$\alpha - (\beta + \gamma) = (\alpha - \beta) - \gamma$

3. ΕΚΤΕΛΕΣΙΣ ΤΗΣ ΑΦΑΙΡΕΣΕΩΣ

§ 50. Κατὰ τὸν γενικὸν ὁρισμὸν τῆς ἀφαιρέσεως (§ 43), διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν διαφορὰν δύο ἀριθμῶν, δυνάμεθα νὰ προσθέτωμεν διαδοχικῶς 1 εἰς τὸν μικρότερον ἀριθμὸν (ἀφαιρετέον), μέχρις ὅτου εὕρωμεν τὸν μεγαλύτερον (μειωτέον). Ὁ ἀριθμὸς τῶν προστιθεμένων μονάδων θὰ εἶναι ὁ ζητούμενος ἀριθμός.

Ὁ τρόπος αὐτός, ὁ ὁποῖος εἶναι εὔκολος, ὅταν ἡ ζητουμένη διαφορὰ εἶναι μικρά, θὰ ἦτο γενικῶς πολὺ κοπιώδης, ὅταν ἡ διαφορὰ τῶν δοθέντων ἀριθμῶν ἦτο πολὺ μεγάλη. Διὰ τοῦτο χρησιμοποιοῦμεν συνήθως μίαν σύντομον μέθοδον, τὴν ὁποίαν θὰ ἀναφέρωμεν κατωτέρω :

I. Ὅταν ὁ ἀφαιρετέος καὶ ἡ διαφορὰ εἶναι μονοψήφιοι ἀριθμοί.

Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὴν διαφορὰν 12 – 3.

Ἀντὶ νὰ ἀφαιρέσωμεν μίαν πρὸς μίαν τὰς μονάδας τοῦ ἀφαιρετέου 3 ἀπὸ τὸν 12, φθάνομεν ταχύτερον εἰς τὸ ἐξαγόμενον, ἂν ζητήσωμεν νὰ εὕρωμεν τὸν ἀριθμὸν ἐκεῖνον, ὁ ὁποῖος προστιθέμενος εἰς τὸν 3 δίδει τὸν 12. Πρέπει λοιπὸν νὰ εἴπωμεν 12 πλὴν 3 ἴσον 9, διότι 9 καὶ 3 κάνουν 12. Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι 15 — 8 = 7.

Τὰ ἐξαγόμενα αὐτὰ εὑρίσκομεν καὶ ἀπὸ τὸν πίνακα τῆς προσθέσεως δύο ἀριθμῶν (§ 36).

II. Ὁ μειωτέος καὶ ὁ ἀφαιρετέος εἶναι τυχόντες ἀριθμοί.

Παράδειγμα 1ον. Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὴν διαφορὰν 784 – 253.

Ὁ ἀριθμὸς 784 ἀποτελεῖται ἀπὸ 7 ἑκατοντάδας, 8 δεκάδας καὶ 4 μονάδας. Ἐπίσης ὁ ἀριθμὸς 253 ἀποτελεῖται ἀπὸ 2 ἑκατοντάδας, 5 δεκάδας καὶ 3 μονάδας.

Ἡ ζητουμένη διαφορὰ θὰ περιλαμβάνῃ 7 – 2 ἢ 5 ἑκατοντάδας, 8 – 5 ἢ 3 δεκάδας καὶ 4 – 3 ἢ 1 μονάδα.

Ἡ ζητουμένη λοιπὸν διαφορὰ θὰ εἶναι 531.

Εἰς τὴν πρᾶξιν θέτομεν τὸν ἀφαιρετέον κάτωθεν τοῦ μειωτέου οὕτως, ὥστε αἱ μονάδες τῆς αὐτῆς τάξεως νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν στήλην. Ἔπειτα λέγομεν, ἀρχίζοντες ἀπὸ τὰ δεξιὰ πρὸς τὰ ἀριστερά, 3 ἀπὸ 4 μένουν 1 καὶ γράφομεν τὸ 1 κάτωθεν καὶ εἰς τὴν στήλην τῶν μονάδων· 5 ἀπὸ 8 μένουν 3 καὶ γράφομεν τὸ 3 κάτωθεν καὶ εἰς τὴν στήλην τῶν δεκάδων· 2 ἀπὸ 7 μένουν 5 καὶ γράφομεν τὸ 5 κάτωθεν καὶ εἰς τὴν στήλην τῶν ἑκατοντάδων.

$$\begin{array}{r} 784 \\ 253 \\ \hline 531 \end{array}$$

Παρατήρησις. Εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα ὁ μειωτέος ἐλήφθη οὕτως, ὥστε τὸ ψηφίον τῶν μονάδων μιᾶς οἱασδήποτε τάξεώς του νὰ εἶναι μεγαλύτερον (ἢ τὸ ὀλιγώτερον ἴσον) μὲ τὸ ἀντίστοιχον ψηφίον τοῦ ἀφαιρετέου καὶ οὕτως αἱ μερικαὶ ἀφαιρέσεις ἦσαν δυναταί. Δύναται ὅμως νὰ μὴ συμβαίνῃ τὸ αὐτὸ εἰς ἄλλας ἀφαιρέσεις, ὅπως φαίνεται εἰς τὸ κάτωθι παράδειγμα.

Παράδειγμα 2ον. Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὴν διαφορὰν 3 425 – 1 863.

Θέτομεν τὸν μικρότερον ἀριθμὸν κάτωθεν τοῦ μεγαλυτέρου, ὅπως εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα· ἔπειτα λέγομεν: 3 ἀπὸ 5 μένουν 2· γράφομεν 2 εἰς τὴν στήλην τῶν μονάδων. Ἀφαιροῦμεν τώρα τὰς δεκάδας· λέγομεν 6 ἀπὸ 2 δὲν ἀφαιρεῖται· διὰ τοῦτο προσθέτομεν 10 εἰς τὸ 2 καὶ γίνεται 12· ἔπειτα λέγομεν 6 ἀπὸ 12 μένουν 6· γράφομεν τὸ 6 εἰς τὴν στήλην τῶν δεκάδων. Ἐπειδὴ ἐπροσθέσαμεν 10 δεκάδας εἰς τὸν μειωτέον, διὰ νὰ μὴ μεταβληθῇ ἡ διαφορά, πρέπει νὰ προσθέσωμεν καὶ εἰς τὸν ἀφαιρετέον 10 δεκ. ἢ 1 ἑκατοντάδα (ἰδιότης I) καὶ λέγομεν 1 καὶ 8 κάνουν 9· 9 ἀπὸ 4 δὲν ἀφαιρεῖται. Προσθέτομεν πάλιν 10 εἰς τὸν 4 τοῦ μειωτέου καὶ γίνεται 14. Ἔπειτα λέγομεν 9 ἀπὸ 14

$$\begin{array}{r} 3\,425 \\ 1\,863 \\ \hline 1\,562 \end{array}$$

μένουν. 5. Γράφομεν τὸ 5 εἰς τὴν στήλην τῶν ἑκατοντάδων. Σκεπτόμενοι, ὅπως καὶ εἰς τὴν προηγουμένην μερικὴν ἀφαίρεσιν προσθέτομεν 10 ἑκατοντάδας ἢ 1 χιλιάδα εἰς τὸν 1 τοῦ ἀφαιρετέου καὶ λέγομεν 1 καὶ 1 δύο ἀπὸ 3 μένει 1. Γράφομεν τὸν 1 εἰς τὴν στήλην τῶν χιλιάδων. Ἡ διαφορὰ λοιπὸν τῶν δοθέντων ἀριθμῶν εἶναι 1 562.

Σημείωσις. Εἰς τὴν πρᾶξιν λέγομεν οὕτω: 3 ἀπὸ 5 2· 6 ἀπὸ 12 6· γράφομεν 6 καὶ κρατοῦμεν 1· 1 καὶ 8 9 ἀπὸ 14 5· γράφομεν 5 καὶ κρατοῦμεν 1· 1 καὶ 1 2 ἀπὸ 3 1· γράφομεν 1.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὸν γνωστὸν κανόνα τῆς ἀφαιρέσεως.

§ 51. Ἐξήγησις τοῦ γνωστοῦ κανόνος τῆς ἀφαιρέσεως. Ὁ κανὼν τῆς ἀφαιρέσεως δύο ἀριθμῶν στηρίζεται ἐπὶ τῶν ἰδιοτήτων I καὶ II (§ 47, 48). Οὕτω διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν 784 τὸν ἀριθμὸν 253, δηλαδὴ τὸ ἄθροισμα 2 ἑκατοντάδων + 5 δεκάδων + 3 μονάδων, ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὸν 784 διαδοχικῶς κάθε προσθετέον τοῦ ἀθροίσματος (ἰδιότης II).

Εἰς τὸ παράδειγμα 3 425 – 1 863, ὅπου ἐπρόκειτο νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸ ἄθροισμα:

3 χιλ. + 4 ἑκ. + 2 δεκ. + 5 μον.
τὸ ἄθροισμα 1 χιλ. + 8 ἑκ. + 6 δεκ. + 3 μον,

ἐφηρμόσαμεν τὴν ἰδιότητα I καὶ ἐπροσθέσαμεν 1 χιλιάδα καὶ 1 ἑκατοντάδα εἰς τὸν ἀφαιρετέον καὶ 10 ἑκατοντάδας καὶ 10 δεκάδας εἰς τὸν μειωτέον. Ἀλλὰ τότε οἱ ἀριθμοὶ γίνονται:

3 χιλ. + 14 ἑκ. + 12 δεκ. + 5 μον.
2 χιλ. + 9 ἑκ. + 6 δεκ. + 3 μον.

Καὶ ἐκτελοῦντες τὴν ἀφαίρεσιν τῶν διαφόρων μονάδων εὑρίσκομεν:

1 χιλ. + 5 ἑκ. + 6 δεκ. + 2 μον. ἢ 1 562.

§ 52. Δοκιμὴ τῆς ἀφαιρέσεως. Ἡ δοκιμὴ τῆς ἀφαιρέσεως δύναται νὰ γίνῃ κατὰ δύο τρόπους:

1ον. Διὰ προσθέσεως. Προσθέτομεν εἰς τὸ ὑπόλοιπον τὸν ἀφαιρετέον, ὁπότε κατὰ τὸν γενικὸν ὁρισμὸν τῆς ἀφαιρέσεως, πρέπει νὰ εὕρωμεν τὸν μειωτέον.

2ον. Δι' ἀφαιρέσεως. Ἀφαιροῦμεν τὸ ὑπόλοιπον ἀπὸ τὸν μειωτέον, ὁπότε πρέπει νὰ εὕρωμεν τὸν ἀφαιρετέον. (Διατί;)

Ἀσκήσεις

39) Νὰ ἐκτελέσητε τὰς κάτωθι ἀφαιρέσεις μὲ τὰς δοκιμάς των:

1.	4 567 − 3 289	3.	13 578 − 6 596
2.	20 004 − 7 895	4.	80 304 − 25 607

40) Νὰ ἐκτελέσητε τὰς κατωτέρω ἀφαιρέσεις, χωρὶς νὰ θέσητε τὸν ἀφαιρετέον κάτωθεν τοῦ μειωτέου.

1.	5 702 − 3 843	3.	13 004 − 7 349
2.	47 932 − 8 647	4.	147 285 − 59 697

41) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων κατὰ δύο τρόπους (§ 48, 49).

1.	$150 - (40 + 25)$	2.	$120 - (64 + 23 + 8)$
3.	$(56 + 28 + 74) - 30$	4.	$(67 + 32) - 24$

4. ΣΥΝΤΟΜΙΑΙ ΑΦΑΙΡΕΣΕΩΣ ΚΑΙ ΕΥΡΕΣΙΣ ΤΗΣ ΔΙΑΦΟΡΑΣ ΔΥΟ ΑΡΙΘΜΩΝ ΑΠΟ ΜΝΗΜΗΣ

§ 53. Ὅπως καὶ εἰς τὴν πρόσθεσιν ἀριθμῶν, οὕτω καὶ εἰς τὴν ἀφαίρεσιν ἀριθμῶν, στηριζόμενοι εἰς τὰς ἰδιότητας τῆς ἀφαιρέσεως, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν συντόμως ἢ καὶ ἀπὸ μνήμης τὴν διαφορὰν δύο ἀριθμῶν:

1ον. Ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὸν μεγαλύτερον διαδοχικῶς τὰς μονάδας τῶν διαφόρων τάξεων τοῦ μικροτέρου, ἀρχίζοντες ἀπὸ τὰς μονάδας τῆς ἀνωτέρας τάξεως.

Π. χ. ἐὰν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὴν διαφορὰν 57 — 34, λέγομεν 57 πλὴν 30 27. Ἔπειτα 27 πλὴν 4 23.

Ἐπίσης, ἐὰν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὴν διαφορὰν 478 — 345 λέγομεν 478 πλὴν 300 178· ἔπειτα 178 πλὴν 40 138· τέλος 138 πλὴν 5 133. Συντομώτερον λέγομεν 478, 178, 138, 133.

2ον. Ἐὰν ὁ ἀφαιρετέος λήγῃ εἰς 9 ἢ 8, προσθέτομεν καὶ εἰς τὸν μειωτέον καὶ εἰς τὸν ἀφαιρετέον ἀντιστοίχως 1 ἢ 2 καὶ ἐκτελοῦμεν ἔπειτα τὴν ἀφαίρεσιν (θεμελιώδης ἰδιότης).

Π. χ. ἐὰν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὴν διαφορὰν 73 — 49, λέγομεν $74 - 50 = 24$.

Ἐπίσης, ἂν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὴν διαφορὰν 357 — 99, λέγομεν 358 — 100 = 258.

Ὁμοίως, ἂν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὴν διαφορὰν 345 — 28, λέγομεν 347 — 30 = 317.

3ον. Ἂν ὁ ἀφαιρετέος εἶναι ὁ 11, 101, 1 001 κ.τ.λ, ἀφαιροῦμεν καὶ ἀπὸ τὸν μειωτέον καὶ ἀπὸ τὸν ἀφαιρετέον 1 καὶ ἐκτελοῦμεν ἔπειτα τὴν ἀφαίρεσιν.

Π.χ. ἂν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὴν διαφορὰν 374 — 11, λέγομεν 373 — 10 = 363.

Ὁμοίως 879 — 101 = 878 — 100 = 778.

4ον. Προσθέτομεν ἢ ἀφαιροῦμεν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν καὶ εἰς τὸν μειωτέον καὶ εἰς τὸν ἀφαιρετέον τῆς διαφορᾶς οὕτως, ὥστε ὁ ἕνας ἐξ αὐτῶν νὰ λήγῃ εἰς 0.

Π. χ. ἐὰν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὴν διαφορὰν 1 805 — 1 593, προσθέτομεν 7 καὶ εἰς τοὺς δύο ἀριθμοὺς καὶ εὑρίσκομεν 1 812 — 1 600 = 212.

Ἄσκησις

42) Νὰ ἐκτελεσθοῦν ἀπὸ μνήμης αἱ κατωτέρω ἀφαιρέσεις :

1.	120 — 70	360 — 90	4 700 — 800
2.	548 — 35	679 — 84	986 — 635
3.	78 — 29	85 — 69	354 — 99
4.	84 — 11	728 — 11	349 — 11
	632 — 101	539 — 101	2 567 — 101
5.	275 — 92	394 — 41	845 — 102
	847 — 104	964 — 96	759 — 48
6.	734 — 539	964 — 278	365 — 275
7.	1 379 — 279	964 — 264	7 379 — 879

Προβλήματα ἀφαιρέσεως

Α΄ Ὁμάς. 43) Παραπλεύρως τοῦ ὀνόματος τῶν κάτωθι διασήμων ἀνδρῶν ὑπάρχουν δύο ἀριθμοί, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ πρῶτος φανερώνει τὸ ἔτος τῆς γεννήσεως, ὁ δὲ δεύτερος τὸ ἔτος τοῦ θανάτου ἑκάστου. Νὰ εὑρεθῇ πόσα ἔτη ἔζησεν ἕκαστος :

1. Πυθαγόρας ....572 — 500 π.Χ.
2. Περικλῆς ....490 — 429 »

3.	Σωκράτης	470 – 399	π.Χ.
4.	Πλάτων	428 – 347	»
5.	Ξενοφῶν	430 – 354	»
6.	Ἀριστοτέλης	384 – 322	»
7.	Δημοσθένης ὁ ρήτωρ.	383 – 322	»
8.	Μέγας Ἀλέξανδρος..	356 – 323	»
9.	Ἀρχιμήδης	287 – 212	»

44) Πόσα ἔτη παρῆλθον μέχρι τοῦ τρέχοντος ἔτους :

1.	Ἀπὸ τῆς ἐφευρέσεως τῆς πυρίτιδος	(1 346 μ. Χ.)
2.	» » » τῆς τυπογραφίας	(1 436 μ. Χ.)
3.	» » ἀνακαλύψεως τῆς Ἀμερικῆς	(1 452 μ. Χ.)
4.	» » ἐφευρέσεως τοῦ ἀεροστάτου	(1 783 μ. Χ.)
5.	» » » τῆς ἀτμομηχανῆς	(1 799 μ. Χ.)
6.	» » » τοῦ σιδηροδρόμου	(1 831 μ. Χ.)
7.	» » » τοῦ ἠλεκτρ. τηλεγράφου	(1 832 μ. Χ.)
8.	» » » τῆς φωτογραφίας	(1 839 μ. Χ.)
9.	» » » τοῦ φωνογράφου	(1 878 μ. Χ.)

45) Ἡ ἅλωσις τῆς Κωνσταντινουπόλεως ὑπὸ τῶν Τούρκων ἔγινε τὸ ἔτος 1 453 μ. Χ. Πόσα ἔτη ἐπέρασαν ἀπὸ τότε μέχρι τῆς Ἑλληνικῆς Ἐπαναστάσεως ;

46) Ἡ ὑψηλοτέρα κορυφὴ τοῦ Ὀλύμπου ἔχει ὕψος 2 918 μέτρα ἀπὸ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς θαλάσσης. Ἡ δὲ ὑψηλοτέρα κορυφὴ τοῦ ὑψηλοτέρου ὄρους τῆς Γῆς, Ἐβερὲστ τῆς Ἀσίας, ἔχει ὕψος 8 840 μέτρα. Πόσον ὑψηλότερον ἀπὸ τὸν Ὄλυμπον εἶναι τὸ Ἐβερέστ ;

47) Ἔμπορος ἐπώλησεν ἐμπορεύματα ἀντὶ 75 350 δραχμῶν καὶ ἐκέρδισε 16 450 δραχμάς. Πόση ἦτο ἡ ἀξία των;

48) Γεωργὸς ἐπρομηθεύθη λίπασμα διὰ τοὺς ἀγρούς του βάρους 1 378 ὀκάδων. Ἐξ αὐτοῦ ἐχρησιμοποίησεν 842 ὀκάδες. Πόσον τοῦ μένει ἀκόμη ;

Β'. Ὁμάς. 49) Γεωργὸς ἠγόρασε μίαν οἰκίαν καὶ ἕνα κῆπον ἀντὶ 27 545 600 δραχμῶν. Ὁ κῆπος ἐτιμᾶτο 3 865 750 δραχμάς. Πόσον ἠγόρασε τὴν οἰκίαν καὶ πόσον ὀλιγώτερον τῆς οἰκίας ἐπλήρωσε διὰ τὸν κῆπον;

50) Γεωργὸς εἰσέπραξεν 8 474 900 δρχ. ἀπὸ σῖτον καὶ 5 654 780 δρχ. ἀπὸ γεώμηλα. Ἐκ τῶν χρημάτων αὐτῶν ἠγόρασεν ἕναν ἵππον ἀντὶ 8 652 000 δρχ. Πόσα χρήματα τοῦ ἔμειναν ;

51) Ἐργάτρια κερδίζει ἐκ τῆς ἐργασίας της 350 750 δραχμὰς κατὰ μῆνα, ἡ δὲ θυγάτηρ της 76 500 ὀλιγώτερον. Πόσα κερδίζουν καὶ αἱ δύο μαζὶ κατὰ μῆνα ;

Γ' Ὁμάς. 52) Ἂν μοῦ ἔδιδε κάποιος 17 450 δρχ. θὰ ἠδυνάμην νὰ πληρώσω 27 650 δρχ, τὰς ὁποίας ὤφειλον καὶ θὰ μοῦ ἔμενον καὶ 3 450 δρχ. Πόσας δραχμὰς εἶχον ἐξ ἀρχῆς ;

53) Ἂν μοῦ ἔδιδε κάποιος 12 600 δρχ. θὰ μοῦ ἔλειπον 3 250 δρχ. ἀκόμη διὰ νὰ πληρώσω ἕνα χρέος μου 37 450 δρχ. Πόσα χρήματα εἶχον ;

Δ' Ὁμάς. 54) Τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν εἶναι 3 748. Ὁ μικρότερος αὐτῶν εἶναι 1 859. Ποῖος εἶναι ὁ μεγαλύτερος ;

55) Ἡ διαφορὰ δύο ἀριθμῶν εἶναι 5 839. Ὁ μεγαλύτερος αὐτῶν εἶναι 14 875. Ποῖος εἶναι ὁ μικρότερος ;

56) Τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν εἶναι 2 763 καὶ ὁ μικρότερος αὐτῶν 857. Ποία εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν ἀριθμῶν ;

57) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμὸς α :

1ον. Ὅταν $\alpha + 53\,068 = 101\,001$.

2ον. Ὅταν $17\,023 - \alpha = 10\,909$.

58) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐξαγόμενον τῶν κάτωθι πράξεων :

$\alpha + \beta - \gamma$, ὅταν $\alpha = 3\,029$, $\beta = 9\,072$ καὶ $\gamma = 5\,948$

59) Νὰ ἀντικαταστήσετε τὰ γράμματα μὲ τοὺς καταλλήλους ἀριθμοὺς εἰς τὰς κατωτέρω ἰσότητας :

1. $\alpha + 4\,506 = 53\,608$ 3. $37\,153 + \gamma = 43\,628$
2. $84\,302 + \beta = 102\,032$ 4. $\delta + 537\,609 = 735\,200$

60) Νὰ ἀντικαταστήσετε τὰ ἐρωτηματικὰ μὲ τὰ κατάλληλα ψηφία εἰς τὰς κατωτέρω ἀφαιρέσεις :

$$1.\ \begin{array}{r} 7\,632 \\ \underline{;\,;\,;\,;} \\ 5\,269 \end{array} \qquad 2.\ \begin{array}{r} ;\,;\,;\,; \\ \underline{7\,689} \\ 2\,037 \end{array} \qquad 3.\ \begin{array}{r} ;\,7\,; \\ \underline{4\,;\,6} \\ 2\,1\,2 \end{array} \qquad 4.\ \begin{array}{r} 4\,;\,91 \\ \underline{2\,5\,;0} \\ ;\,67\,; \end{array}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ΄

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΤΩΝ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

1. ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ

§ 54. Ὁρισμοί. *Πρόβλημα.* **Μία ἐργάτρια ὑφαίνει 8 πήχεις ὑφάσματος κάθε ἡμέραν. Πόσους πήχεις θὰ ὑφάνῃ εἰς 3 ἡμέρας;**

Λύσις. Τὴν πρώτην ἡμέραν ὑφαίνει 8 πήχεις
» δευτέραν » » 8 »
» τρίτην » » 8 »

Ἑπομένως εἰς τὰς 3 ἡμέρας θὰ ὑφάνῃ:

8 πήχ. + 8 πήχ. + 8 πήχ. = 24 πήχ.

Εἰς τὸ πρόβλημα αὐτό, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ζητούμενον, **ἐπροσθέσαμεν** ἴσους ἀριθμούς, δηλαδὴ ἐπανελάβομεν τὸν ἴδιον ἀριθμὸν 8 τόσας φοράς, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ 3.

Ἡ ἰδιαιτέρα αὐτὴ περίπτωσις τῆς προσθέσεως λέγεται **πολλαπλασιασμός**. Ὥστε:

Πολλαπλασιασμὸς λέγεται ἡ πρᾶξις, εἰς τὴν ὁποίαν μᾶς δίδονται δύο ἀριθμοὶ καὶ ἐπαναλαμβάνομεν τὸν ἕνα ἐξ αὐτῶν τόσας φοράς, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ ἄλλος.

Ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἐπαναλαμβάνεται, λέγεται **πολλαπλασιαστέος**. Ὁ δὲ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος δεικνύει πόσας φορὰς θὰ ἐπαναληφθῇ ὁ πολλαπλασιαστέος, λέγεται **πολλαπλασιαστής**.

Τὸ ἐξαγόμενον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ λέγεται **γινόμενον**.

Ὁ πολλαπλασιαστέος καὶ ὁ πολλαπλασιαστὴς μαζὶ λέγονται **παράγοντες**.

Εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα πολλαπλασιαστέος εἶναι οἱ 8 πήχεις, πολλαπλασιαστὴς ὁ 3 καὶ γινόμενον οἱ 24 πήχεις.

§ 55. Σημεῖον πολλαπλασιασμοῦ. Διὰ νὰ σημειώσωμεν τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν, θέτομεν μεταξὺ αὐτῶν τὸ σημεῖον × ἢ μίαν τελείαν. Τὸ σημεῖον τοῦτο ἀπαγγέλλεται **ἐπί**.

Οὕτω τὸ γινόμενον τοῦ ἀριθμοῦ 8 ἐπὶ 3 γράφεται 8×3 ἢ $8 \cdot 3$ καὶ ἀπαγγέλλεται 8 ἐπὶ 3.

Διὰ νὰ δηλώσωμεν ὅτι τὸ γινόμενον 8×3 εἶναι 24, γράφομεν $8 \times 3 = 24$ καὶ ἀπαγγέλλομεν: 8 ἐπὶ 3 ἴσον 24.

§ 56. **Παρατηρήσεις**. 1η. Ἂν ὁ πολλαπλασιαστέος καὶ ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι ἀφῃρημένοι ἀριθμοί, τὸ γινόμενον θὰ εἶναι ἀφῃρημένον. Ἂν ὁ πολλαπλασιαστέος εἶναι συγκεκριμένος, ὁ πολλαπλασιαστὴς πρέπει νὰ λαμβάνηται ὡς ἀφῃρημένος, διότι ὁ πολλαπλασιαστὴς φανερώνει ἁπλῶς πόσας φορὰς θὰ ἐπαναλάβωμεν τὸν πολλαπλασιαστέον. Π. χ. πρέπει νὰ γράφωμεν ἁπλῶς:

8 πήχεις $\times\ 3 = 24$ πήχεις. Ὥστε:

Τὸ γινόμενον εἶναι πάντοτε ὁμοειδὲς μὲ τὸν πολλαπλασιαστέον.

2α. Τὸ γινόμενον ἀριθμοῦ ἐπὶ 2, 3, 4 κ.τ.λ. λέγεται ἀντιστοίχως **διπλάσιον, τριπλάσιον, τετραπλάσιον** κ.τ.λ. τοῦ ἀριθμοῦ.

Τὸ διπλάσιον, τριπλάσιον, τετραπλάσιον κ.τ.λ. ἑνὸς ἀριθμοῦ λέγονται **πολλαπλάσια** αὐτοῦ.

§ 57. **Ἄλλη ἰδιότης τῆς ἰσότητος.** Ἔστω ἡ ἰσότης $\alpha = 5$. Εἶναι φανερὸν ὅτι ὁ α ἔχει τόσας μονάδας, ὅσας ἔχει ὁ 5. Τὸ γινόμενον $\alpha \times 3$ καθὼς καὶ τὸ γινόμενον 5×3 ἔχει 3 φορὰς τὰς μονάδας τοῦ 5. Θὰ εἶναι λοιπὸν $\alpha \times 3 = 5 \times 3$. Καὶ γενικῶς:

Ἂν εἶναι $\boxed{\alpha = \beta}$, θὰ εἶναι καὶ $\boxed{\alpha \times \mu = \beta \times \mu}$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὴν κάτωθι ἰδιότητα:

Ἂν ἴσοι ἀριθμοὶ πολλαπλασιασθοῦν ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, προκύπτουν πάλιν ἴσοι ἀριθμοί.

2. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ

§ 58. **Θεμελιώδης ἰδιότης.** *Πρόβλημα.* **Πόσα γραμματόσημα ὑπάρχουν εἰς τὴν ὄπισθεν εἰκόνα;** (σχ. 4).

Ἀντὶ νὰ ἀριθμήσωμεν τὰ γραμματόσημα ἓν πρὸς ἕν, διὰ νὰ εὕρωμεν πόσα εἶναι, δυνάμεθα νὰ ἐργασθῶμεν ὡς ἑξῆς: Παρατηροῦμεν ὅτι εἰς ἑκάστην σειρὰν ὑπάρχουν 4 γραμματόσημα, ἑπομένως εἰς τὰς 3 σειρὰς θὰ ὑπάρχουν :

$$4 \text{ γραμματόσημα} \times 3 = 12 \text{ γραμματόσημα}$$

Ὁμοίως παρατηροῦμεν ὅτι εἰς ἑκάστην κατακόρυφον στήλην ὑπάρχουν 3 γραμματόσημα καὶ ἑπομένως εἰς τὰς 4 στήλας θὰ ὑπάρχουν

$$3 \text{ γραμματόσημα} \times 4 = 12 \text{ γραμματόσημα}$$

Σχ. 4

Θὰ εἶναι λοιπόν :

4×3 γραμματόσημα $= 3 \times 4$ γραμματόσημα ἢ $4 \times 3 = 3 \times 4$.

Συμπέρασμα. Ἀπὸ τὴν ἀνωτέρω ἰσότητα συνάγομεν τὴν κάτωθι θεμελιώδη ἰδιότητα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ :

I. Τὸ γινόμενον δύο παραγόντων δὲν μεταβάλλεται, ἂν ἀλλάξωμεν τὴν τάξιν των.

Κατὰ τὴν ἰδιότητα αὐτὴν θὰ εἶναι γενικῶς :

$$\boxed{\alpha \times \beta = \beta \times \alpha}$$

§ 59. Παρατήρησις. Ἂν παραδεχθῶμεν ὅτι ἡ ἰδιότης αὐτὴ ὑφίσταται καὶ ὅταν ἕνας ἐκ τῶν παραγόντων εἶναι 1 ἢ 0, τότε θὰ εἶναι :

$3 \times 1 = 1 \times 3 = 1 + 1 + 1 = 3$, ἤτοι $3 \times 1 = 3$

καὶ $6 \times 0 = 0 \times 6 = 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0$, ἤτοι $6 \times 0 = 0$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι:

Τὸ γινόμενον ἑνὸς ἀριθμοῦ ἐπὶ τὴν μονάδα ἰσοῦται μὲ τὸν ἴδιον ἀριθμόν.

Τὸ γινόμενον δύο παραγόντων εἶναι μηδέν, ὅταν ἕνας τουλάχιστον ἐκ τῶν παραγόντων εἶναι ἴσος μὲ μηδέν.

§ 60. Πῶς πολλαπλασιάζομεν ἄθροισμα ἐπὶ ἀριθμόν. *Πρόβλημα.* **Εἰς ἕνα ἐργοστάσιον εἰργάσθη ἕκαστος τῶν ἐργατῶν του τὴν Δευτέραν ἐπὶ 5 ὥρας, τὴν Τρίτην ἐπὶ 6 ὥρας καὶ τὴν Τετάρτην ἐπὶ 8 ὥρας. Ἐπὶ πόσας ὥρας εἰργάσθησαν, κατὰ τὰς τρεῖς αὐτὰς ἡμέρας, 4 ἐργάται αὐτοῦ τοῦ ἐργοστασίου;**

Λύσις. Εἶναι φανερὸν ὅτι κάθε ἐργάτης εἰργάσθη $(5 + 6 + 8)$ ὥρας ἢ 19 ὥρας καὶ ἑπομένως οἱ 4 εἰργάσθησαν:

$(5 + 6 + 8)$ ὥρας $\times 4$ ἢ 19 ὥρας $\times 4$ ἢ 76 ὥρας.

Ἄλλη λύσις. Ἐπειδὴ τὴν Δευτέραν κάθε ἐργάτης εἰργάσθη ἐπὶ 5 ὥρας, συνάγομεν ὅτι καὶ οἱ 4 εἰργάσθησαν:
5 ὥρας $\times 4$ ἢ 20 ὥρας, τὴν Τρίτην εἰργάσθησαν ἐπὶ 6 ὥρ. $\times 4$ ἢ 24 ὥρας καὶ τὴν Τετάρτην εἰργάσθησαν ἐπὶ 8 ὥρ. $\times 4$ ἢ 32 ὥρας. Ἑπομένως εἰργάσθησαν ἐν ὅλῳ:

(5×4) ὥρ. $+ (6 \times 4)$ ὥρ. $+ (8 \times 4)$ ὥρ.

ἢ 20 ὥρ. $+$ 24 ὥρ. $+$ 32 ὥρ. ἢ 76 ὥρ.

Παρατηροῦμεν ὅτι αἱ δύο λύσεις δίδουν τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον. Ἄρα θὰ εἶναι:

$$(5 + 6 + 8) \times 4 = (5 \times 4) + (6 \times 4) + (8 \times 4).$$

Συμπέρασμα. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὴν κάτωθι ἰδιότητα:

II. Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἄθροισμα ἐπὶ ἀριθμόν, δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν καθένα προσθετέον τοῦ ἀθροίσματος ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ γινόμενα.

Κατὰ τὴν ἰδιότητα αὐτὴν θὰ εἶναι γενικῶς:

$$\boxed{(\alpha + \beta + \gamma) \times \delta = (\alpha \times \delta) + (\beta \times \delta) + (\gamma \times \delta)}$$

Ἡ ἰδιότης αὐτὴ λέγεται **ἐπιμεριστικὴ** ἰδιότης.

§ 61. Πῶς πολλαπλασιάζομεν ἀριθμὸν ἐπὶ ἄθροισμα. *Πρόβλημα.* **Μία μητέρα ἠγόρασε 5 πήχεις ὕφασμα διὰ νὰ κάμῃ φόρεμα τῆς μεγαλυτέρας κόρης της καὶ 3 πήχεις ἀπὸ τὸ αὐτὸ ὕφασμα, διὰ νὰ κάμῃ φόρεμα τῆς μικροτέρας. Ἐὰν ὁ πῆχυς τοῦ ὑφάσματος ἀξίζει 25 χιλιόδραχμα, πόσον θὰ πληρώσῃ δι' ὅλον τὸ ὕφασμα, ποὺ ἠγόρασεν;**

Λύσις. Τὸ ὕφασμα εἶναι (5 + 3) πήχεις. Ἐπειδὴ διὰ κάθε πῆχυν πληρώνει 25 χιλιόδρ, διὰ τοὺς (5 + 3) πήχεις θὰ πληρώσῃ :

25 χιλιόδρ. × (5 + 3) ἢ 25 χιλιόδρ. × 8 ἢ 200 χιλιόδρ.

Ἄλλη λύσις. Διὰ τὸ φόρεμα τῆς μεγαλυτέρας κόρης θὰ πληρώσῃ 25 χιλιόδρ. × 5 ἢ 125 χιλιόδρ. Διὰ τὸ φόρεμα τῆς μικροτέρας θὰ πληρώσῃ 25 χιλιόδρ. × 3 ἢ 75 χιλιόδρ.

Ἑπομένως δι' ὅλον τὸ ὕφασμα θὰ πληρώσῃ

(25 × 5) χιλιόδρ. + (25 × 3) χιλιόδρ.

ἢ 125 χιλιόδρ. + 75 χιλιόδρ. ἢ 200 χιλιόδρ.

Ἐπειδὴ καὶ αἱ δύο λύσεις δίδουν τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον, ἕπεται ὅτι εἶναι :

$$25 \times (5 + 3) = (25 \times 5) + (25 \times 3).$$

Συμπέρασμα. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὴν κάτωθι ἰδιότητα:

III. Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμὸν ἐπὶ ἄθροισμα, δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν ἐπὶ ἕκαστον τῶν προσθετέων τοῦ ἀθροίσματος καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ γινόμενα.

Κατὰ τὴν ἰδιότητα αὐτὴν θὰ εἶναι γενικῶς :

$$\boxed{\alpha \times (\beta + \gamma + \delta) = (\alpha \times \beta) + (\alpha \times \gamma) + (\alpha \times \delta)}$$

§ 62. Πῶς πολλαπλασιάζομεν διαφορὰν ἐπὶ ἀριθμόν. *Πρόβλημα.* **Ἕνας ἐργάτης λαμβάνει ἡμερομίσθιον 9 χιλιόδραχμα καὶ ἐξοδεύει 6 χιλιόδραχμα. Πόσα χρήματα θὰ ἐξοικονομήσῃ εἰς 5 ἡμέρας;**

Λύσις. Ὁ ἐργάτης ἐξοικονομεῖ καθ' ἡμέραν (9 − 6) χιλιόδρ. ἢ 3 χιλιόδρ. Ἑπομένως εἰς τὰς 5 ἡμέρας θὰ ἐξοικονομήσῃ :

(9 − 6) χιλιόδρ. × 5 ἢ 3 χιλιόδρ. × 5 ἢ 15 χιλιόδρ.

Ἄλλη λύσις. Ὁ ἐργάτης κατὰ τὰς 5 ἡμέρας λαμβάνει

9 χιλιόδρ. × 5 ἢ 45 χιλιόδρ.

καὶ ἐξοδεύει 6 χιλιόδρ. × 5 ἢ 30 χιλιόδρ.

Καὶ ἑπομένως ἐξοικονομεῖ :

$$(9\times 5) \text{ χιλιόδρ.} - (6\times 5) \text{ χιλιόδρ.}$$

$$\text{ἢ } 45 \text{ χιλιόδρ.} - 30 \text{ χιλιόδρ. ἢ } 15 \text{ χιλιόδρ.}$$

Ἐπειδὴ καὶ αἱ δύο λύσεις δίδουν τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον, ἕπεται ὅτι θὰ εἶναι :

$$(9-6)\times 5 = (9\times 5)-(6\times 5)$$

Συμπέρασμα. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὴν κάτωθι ἰδιότητα :

IV. Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν διαφορὰν ἐπὶ ἀριθμόν, δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν καὶ τὸν μειωτέον καὶ τὸν ἀφαιρετέον τῆς διαφορᾶς ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν αὐτὸν καὶ ἀπὸ τὸ πρῶτον γινόμενον νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ δεύτερον.

Κατὰ τὴν ἰδιότητα αὐτὴν θὰ εἶναι γενικῶς :

$$\boxed{(\alpha-\beta)\times\gamma = (\alpha\times\gamma)-(\beta\times\gamma)}$$

§ 63. Πῶς πολλαπλασιάζομεν ἄθροισμα ἐπὶ ἄθροισμα.

Πρόβλημα. **Πατὴρ ἔχει 3 υἱοὺς καὶ 2 θυγατέρας καὶ ἔδωσεν εἰς ἕκαστον τέκνον του 5 χιλιόδραχμα τὸ Σάββατον καὶ 10 χιλιόδραχμα τὴν Κυριακήν. Πόσα χρήματα ἔδωσε τὸ ὅλον εἰς τὰ τέκνα του κατὰ τὰς δύο αὐτὰς ἡμέρας;**

Λύσις. Εἰς κάθε τέκνον ἔδωσε τὸ Σάββατον καὶ τὴν Κυριακὴν

$$(5+10) \text{ χιλιόδρ. ἢ } 15 \text{ χιλιόδρ.}$$

ἑπομένως διὰ τὰ (3+2) ἢ 5 τέκνα του ἔδωσε :

$$(5+10) \text{ χιλιόδρ.} \times (3+2) \text{ ἢ } 15 \text{ χιλιόδρ.} \times 5 = 75 \text{ χιλιόδρ.}$$

Ἄλλη λύσις. Ὁ πατὴρ ἔδωσε τὸ μὲν Σάββατον εἰς τοὺς υἱοὺς (5× 3) χιλιόδραχμα καὶ εἰς τὰς θυγατέρας (5× 2) χιλιόδραχμα, τὴν δὲ Κυριακὴν ἔδωσεν εἰς τοὺς υἱοὺς (10× 3) χιλιόδραχμα καὶ εἰς τὰς θυγατέρας (10× 2) χιλιόδραχμα.

Ἑπομένως ἔδωσε τὸ ὅλον :

$$(5\times 3)+(10\times 3)+(5\times 2)+(10\times 2)$$

$$\text{ἢ } 15+30+10+20 \text{ ἢ } 75 \text{ χιλιόδρ.}$$

Ἐπειδὴ καὶ αἱ δύο λύσεις δίδουν ἐξαγόμενα ἴσα, θὰ εἶναι :

$$(5+10)\times(3+2) = (5\times 3)+(10\times 3)+(5\times 2)+(10\times 2).$$

Συμπέρασμα. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὴν κάτωθι ἰδιότητα:

V. Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἄθροισμα ἐπὶ ἄθροισμα, δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἕκαστον προσθετέον τοῦ πρώτου ἀθροίσματος ἐπὶ ἕκαστον προσθετέον τοῦ δευτέρου ἀθροίσματος καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ γινόμενα.

Κατὰ τὴν ἰδιότητα αὐτὴν θὰ εἶναι γενικῶς:

$$\boxed{(\alpha + \beta)\times(\gamma + \delta) = (\alpha \times \gamma) + (\beta \times \gamma) + (\alpha \times \delta) + (\beta \times \delta)}$$

Περίληψις τῶν ἰδιοτήτων τοῦ πολλαπλασιασμοῦ

1. $\alpha \times \beta = \beta \times \alpha$
2. $(\alpha + \beta + \gamma)\times \delta = (\alpha \times \delta) + (\beta \times \delta) + (\gamma \times \delta)$
3. $\alpha \times(\beta + \gamma + \delta) = (\alpha \times \beta) + (\alpha \times \gamma) + (\alpha \times \delta)$
4. $(\alpha - \beta)\times \gamma = (\alpha \times \gamma) - (\beta \times \gamma)$
5. $(\alpha + \beta)\times(\gamma + \delta) = (\alpha \times \gamma) + (\beta \times \gamma) + (\alpha \times \delta) + (\beta \times \delta)$

3. ΕΚΤΕΛΕΣΙΣ ΤΟΥ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ

Κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ δύο ἀκεραίων ἀριθμῶν διακρίνομεν τὰς ἑξῆς περιπτώσεις:

§ 64. Περίπτωσις 1η. Ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι 10, 100, 1000 κ.τ.λ.

Κανών. **Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμὸν ἐπὶ 10, 100, 1000 κ.τ.λ, ἀρκεῖ νὰ γράψωμεν δεξιὰ τοῦ ἀριθμοῦ ἕνα, δύο, τρία κ.τ.λ. μηδενικὰ** (§ 17).

Οὕτω θὰ εἶναι:

$$543 \times 10 = 5\,430$$
$$75 \times 100 = 7\,500$$
$$48 \times 1000 = 48\,000$$

§ 65. Περίπτωσις 2α. Οἱ δύο παράγοντες εἶναι μονοψήφιοι. *Παράδειγμα.* **Νὰ εὑρεθῇ τὸ γινόμενον 6×4.**

Ἡ εὕρεσις τοῦ γινομένου 6×4 ἀνάγεται, κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, εἰς τὴν εὕρεσιν τοῦ ἀθροίσματος 6+6+6+6. Διὰ νὰ μὴ καταφεύγωμεν εἰς τὴν πρόσθεσιν ἴσων ἀριθμῶν, διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ γινομένου δύο μονοψηφίων ἀριθμῶν, πρέπει νὰ γνωρί-

ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ

Ὁ Πυθαγόρας ἐγεννήθη ἐν Σάμῳ (580 π. Χ.). Ἵδρυσε δὲ εἰς τὴν Νότιον Ἰταλίαν τὴν περίφημον Πυθαγόρειον Φιλοσοφικὴν Σχολήν. Οὗτος καὶ οἱ μαθηταί του ἔδωσαν σπουδαίαν ὤθησιν εἰς τὴν ἀνάπτυξιν τῆς Θεωρητικῆς Γεωμετρίας.

ζωμεν ἀπὸ μνήμης τὰ τοιαῦτα γινόμενα. Τὰ γινόμενα δύο μονοψηφίων ἀριθμῶν περιέχονται εἰς τὸν κατωτέρω πίνακα:

Πυθαγόρειος πίναξ

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Τὸν πίνακα αὐτὸν σχηματίζομεν ὡς ἑξῆς:

Εἰς τὴν πρώτην γραμμὴν γράφομεν κατὰ σειρὰν τοὺς ἀριθμοὺς 1, 2, 3,....9.

Ὑποκάτω ἑκάστου γράφομεν τὸ ἄθροισμα αὐτοῦ καὶ τοῦ ἑαυτοῦ του. Ὑποκάτω ἑκάστου ἀριθμοῦ τῆς δευτέρας σειρᾶς γράφομεν τὸ ἄθροισμα αὐτοῦ καὶ τοῦ ἀντιστοίχου τῆς α' σειρᾶς. Ὑποκάτω ἑκάστου ἀριθμοῦ τῆς γ' σειρᾶς γράφομεν τὸ ἄθροισμα αὐτοῦ καὶ τοῦ ἀντιστοίχου τῆς α' σειρᾶς. Ἐξακολουθοῦμεν δὲ κατὰ τὸν τρόπον αὐτόν, ἕως ὅτου γράψωμεν 9 σειράς.

Τὸ γινόμενον δὲ π.χ. 7×4 εὑρίσκεται εἰς τὴν διασταύρωσιν δύο γραμμῶν, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μία ἀρχίζει ἀπὸ τὸν 7 καὶ ἡ ἄλλη ἀπὸ τὸν 4.

§ 66. Περίπτωσις 3η. Ὅταν ὁ πολλαπλασιαστέος εἶναι πολυψήφιος καὶ ὁ πολλαπλασιαστὴς μονοψήφιος. Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον 256×4.

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τὸ γινόμενον 256×4 εἶναι ἴσον μὲ $256 + 256 + 256 + 256 = 1\,024$.

Τὸ γινόμενον ὅμως 256×4 εὑρίσκεται εὐκολώτερον, ἂν παρατηρήσωμεν ὅτι ὁ ἀριθμὸς 256 ἀποτελεῖται

ἀπὸ 2 ἑκατοντάδας + 5 δεκάδας + 6 μονάδας.

Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν λοιπὸν τὸν 256 ἐπὶ 4, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν διαδοχικῶς ἕκαστον τῶν μερῶν του ἐπὶ 4 (Ἰδιότης II) καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ προκύπτοντα γινόμενα.

Πρακτικῶς διατάσσομεν τὴν πρᾶξιν ὡς ἔναντι καὶ λέγομεν: 4 ἐπὶ 6 24· γράφομεν 4 καὶ κρατοῦμεν 2· 4 ἐπὶ 5 20 καὶ 2 τὰ κρατούμενα 22· γράφομεν 2 καὶ κρατοῦμεν 2· 4 ἐπὶ 2 8 καὶ 2 τὰ κρατούμενα 10· γράφομεν 10.

$$\begin{array}{r} 256 \\ 4 \\ \hline 1024 \end{array}$$

Ὥστε τὸ γινόμενον τοῦ 256×4 εἶναι $1\,024$.

Ἄσκησις

61) Νὰ ἐκτελεσθοῦν οἱ κάτωθι πολλαπλασιασμοί:

1.	945 × 10	204 × 100	7 653 × 1 000	
2.	10 × 348	100 × 764	1 000 × 945	
3.	456 × 8	7 602 × 7	5 904 × 9	48 745 × 6
4.	9 × 657	8 × 4532	7 × 2069	6 × 2 394

§ 67. Περίπτωσις 4η. Ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι ἕνα σημαντικὸν ψηφίον ἀκολουθούμενον ὑπὸ μηδενικῶν. Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον 574×300.

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τὸ γινόμενον 574×300 σημαίνει νὰ σχηματίσωμεν ἕνα ἄθροισμα 300 προσθετέων ἴσων μὲ 574.

Ἀλλὰ ἡ πρόσθεσις αὐτὴ τῶν 300 προσθετέων δύναται νὰ ἀποτελεσθῇ ἀπὸ 100 μερικὰς προσθέσεις, ἑκάστη τῶν ὁποίων θὰ περιλαμβάνῃ τρεῖς ἀριθμοὺς ἴσους μὲ 574. Ἑκάστη μερικὴ πρόσθεσις δίδει ἐξαγόμενον $574 + 574 + 574 = 574 \times 3 = 1\,722$ (3η περίπτωσις).

$$\left.\begin{array}{r} 574 \\ 574 \\ 574 \\ \hline \end{array}\right\}$$

Τὸ τελικὸν ἐξαγόμενον θὰ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν μερικῶν ἐξαγομένων, δηλ. θὰ εἶναι τὸ ἄθροισμα 100 ἀριθμῶν ἴσων μὲ $1\,722$, ἤτοι $1\,722 \times 100$, τὸ ὁποῖον ἰσοῦται μὲ $172\,200$ (1η περίπτωσις). Ὥστε:

$$\left.\begin{array}{r} 574 \\ 574 \\ 574 \\ \hline \end{array}\right\}$$

Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμὸν ἐπὶ ἄλλον, τοῦ ὁποίου τὸ πρῶτον ψηφίον εἶναι σημαντικόν, τὰ δὲ ἄλλα μηδενικά, πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀριθμὸν ἐπὶ τὸ σημαντικὸν ψηφίον καὶ δεξιὰ τοῦ γινομένου γράφομεν τόσα μηδενικά, ὅσα ἔχει ὁ πολλαπλασιαστής.

Ἄσκησις

62) Νὰ ἐκτελεσθοῦν οἱ κάτωθι πολλαπλασιασμοί :

1.	78×600	$493 \times 7\,000$	$2\,965 \times 8\,000$
2.	$5\,000 \times 345$	$300 \times 1\,956$	$9\,000 \times 106$

§ 68. Περίπτωσις 5η (Γενικὴ περίπτωσις). Ὅταν καὶ οἱ δύο παράγοντες εἶναι πολυψήφιοι. Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον $6\,763 \times 248$.

Ἐπειδὴ $248 = 200 + 40 + 8$, θὰ εἶναι :

$$6\,763 \times 248 = 6\,763 \times (200 + 40 + 8) \quad (\S\ 61).$$
$$= 6\,763 \times 200 + 6\,763 \times 40 + 6\,763 \times 8$$

Πρέπει λοιπὸν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν 6 763 διαδοχικῶς ἐπὶ 200, ἐπὶ 40 καὶ ἐπὶ 8 καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ μερικὰ γινόμενα.

Θά ἔχωμεν λοιπόν :

$6\,763 \times 8$	=	54 104	μονάδας	(3η περίπτωσις)
$6\,763 \times 40$	=	270 520	»	(4η περίπτωσις)
$6\,763 \times 200$	=	1 352 600	»	(4η περίπτωσις)
Σύνολον	=	1 677 224	μονάδας	

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει ὁ γνωστὸς κανὼν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ πολυψηφίου ἀριθμοῦ ἐπὶ πολυψήφιον.

Διάταξις τῆς πράξεως

	6 763	πολλαπλασιαστέος
	248	πολλαπλασιαστὴς
$6\,763 \times 8 = 54\,104$	54 104	α′ μερικὸν γινόμενον
$6\,763 \times 40 = 170\,520$	27 052	β′ » »
$6\,763 \times 200 = 1\,352\,600$	13 526	γ′ » »
	1 677 224	ὁλικὸν γινόμενον

§ 69. Ἰδιαίτεραι περιπτώσεις. 1η. Ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς περιέχῃ ἕνα ἢ περισσότερα ἐνδιάμεσα μηδενικὰ (καθὼς ὁ 3 007), παραλείπομεν τὰ μερικὰ γινόμενα, τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχοῦν εἰς αὐτά. Πρέπει ὅμως νὰ προσέχωμεν νὰ γράφωμεν τὸ ἑπόμενον μερικὸν γινόμενον εἰς τὴν κατάλληλον θέσιν.

```
    245
  3 007
-------
  1 715
735
-------
736 715
```

2α. Ὅταν ὁ ἕνας ἢ καὶ οἱ δύο παράγοντες λήγουν εἰς μηδενικά, πολλαπλασιάζομεν αὐτοὺς χωρὶς νὰ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τὰ μηδενικά. Δεξιὰ ὅμως τοῦ τελικοῦ γινομένου πρέπει νὰ γράφωμεν τὰ παραλειφθέντα μηδενικά.

```
   13500
     970
--------
    945
  1215
--------
13095000
```

Ἀσκήσεις

63) Νὰ ἐκτελεσθοῦν οἱ κάτωθι πολλαπλασιασμοί :

1. $3\,764 \times 75$ $\quad$ $4\,793 \times 236$ $\quad$ $128 \times 7\,432$
2. 704×398 $\quad$ $2\,006 \times 847$ $\quad$ $8\,007 \times 309$
3. $245\,000 \times 3\,500$ $\quad$ $270 \times 18\,000$ $\quad$ $84\,006 \times 9\,300$

64) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ κάτωθι γινόμενα κατὰ δύο τρόπους :

1. $(5+7+8)\times 3$ $\quad$ $(10+5+11)\times 6$
2. $4\times(8+9+6)$ $\quad$ $7\times(25+13+9)$

§ 70. Δοκιμὴ πολλαπλασιασμοῦ. Διὰ νὰ κάμωμεν τὴν δοκιμὴν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, θέτομεν τὸν πολλαπλασιαστὴν εἰς τὴν θέσιν τοῦ πολλαπλασιαστέου καὶ τανάπαλιν καί, ἂν εὕρωμεν τὸ αὐτὸ γινόμενον, τὸ ὁποῖον εὑρήκαμεν προηγουμένως κατὰ τὸ πρῶτον πολλαπλασιασμόν, ἡ πρᾶξις ἔγινε πιθανὸν χωρὶς λάθος (§ 58).

4. ΣΥΝΤΟΜΙΑΙ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ ΚΑΙ ΕΥΡΕΣΙΣ ΤΟΥ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ ΔΥΟ ΑΡΙΘΜΩΝ

§ 71. Συντομία πράξεως. Ὅταν ὁ πολλαπλασιαστέος ἔχῃ ὀλιγώτερα σημαντικὰ ψηφία ἀπὸ τὸν πολλαπλασιαστὴν εἶναι προτιμότερον νὰ ἀλλάσσωμεν τὴν τάξιν των, διότι τότε κάμνομεν ὀλιγωτέρας πράξεις. Οὕτως εἰς τὰ παραδείγματα :

$35 \times 4\,769$ $\qquad$ $3\,040 \times 275$ $\qquad$ 444×68

εἶναι προτιμότερον νὰ ἀλλάξωμεν τὴν τάξιν τῶν παραγόντων, διὰ νὰ εὕρωμεν συντόμως τὸ γινόμενόν των.

§ 72. Εὕρεσις τοῦ γινομένου δύο ἀριθμῶν. Διὰ νὰ εὕρωμεν ἀπὸ μνήμης τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ ἕνας εἶναι μονοψήφιος πολλαπλασιάζομεν τὰς μονάδας τῶν διαφόρων τάξεων τοῦ πολυψηφίου ἀριθμοῦ ἐπὶ τὸν ἄλλον ἀριθμόν, ἀρχίζοντες **ἀπὸ τὰς μονάδας τῆς ἀνωτάτης τάξεως** καὶ προσθέτομεν τὰ μερικὰ γινόμενα.

Π.χ. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον 64×3, λέγομεν:

3×6 18 180· 3×4 12· 180 καὶ 12 192

Ἐπίσης, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον 254×7, λέγομεν: 7×2 14 1 400· 7×5 35 350 καὶ 1 400 1 750· 7×4 28 καὶ 1 750 1 778

§ 73. Ἐκτὸς τῆς προηγουμένης περιπτώσεως, ὑπάρχουν καὶ ἄλλαι περιπτώσεις, κατὰ τὰς ὁποίας τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν δύναται νὰ εὑρεθῇ νοερῶς χάρις εἰς μερικὰ τεχνάσματα, τὰ ὁποῖα εἶναι καλὸν νὰ γνωρίζωμεν, διὰ νὰ τὰ ἐφαρμόζωμεν, ὅταν εἶναι ἀνάγκη.

1ον. *Πολλαπλασιασμὸς ἐπὶ δύο.* Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμὸν ἐπὶ 2, προσθέτομεν τὸν ἀριθμὸν εἰς τὸν ἑαυτόν του. Π.χ. $256 \times 2 = 256 + 200 + 50 + 6$. Λέγομεν: 256 456 506 512.

Ὅταν ὁ ἀριθμὸς εἶναι πολυψήφιος τὸν χωρίζομεν συνήθως εἰς τμήματα τοιαῦτα, ὥστε νὰ ἀποφεύγωμεν, ὅσον τὸ δυνατόν, τὰ κρατούμενα, καὶ κατόπιν διπλασιάζομεν ἕκαστον τμῆμα.

Οὕτω διὰ νὰ διπλασιάσωμεν τοὺς ἀριθμούς:

734 263 2 328 4 153 35 417

τοὺς χωρίζομεν εἰς τὰ κάτωθι τμήματα, τὰ ὁποῖα διπλασιάζομεν:

7 34	26 3	23 28	4 15 3	35 4 17
14 68	52 6	46 56	8 30 6	70 8 34

2ον. *Πολλαπλασιασμὸς ἐπὶ 4.* Διπλασιάζομεν τὸν ἀριθμὸν καὶ ἔπειτα διπλασιάζομεν τὸ ἐξαγόμενον. Π.χ. 435×4. Λέγομεν: 870 1 740.

3ον. *Πολλαπλασιασμὸς ἐπὶ 9, 99, 999 κ.τ.λ.* Πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀριθμὸν ἐπὶ 10, 100, 1000 κ.τ.λ. καὶ ἀπὸ τοῦ ἐξαγομένου ἀφαιροῦμεν τὸν ἀριθμὸν αὐτόν. Π. χ.

$34 \times 99 = 34 \times (100-1)$. Λέγομεν: 3 400 πλὴν 34 ἴσον 3 366.

4ον. *Πολλαπλασιασμὸς ἐπὶ 11, 101, 1001,....* Πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀριθμὸν ἐπὶ 10, 100, 1000...καὶ προσθέτομεν εἰς τὸ ἐξαγόμενον τὸν ἀριθμὸν αὐτόν. Π. χ.

64 × 101. Λέγομεν : 6 400 καὶ 64 ἴσον 6 464.

Σημείωσις. Τὸ γινόμενον ἑνὸς διψηφίου ἀριθμοῦ ἐπὶ 11 εὑρίσκεται ἀμέσως ὡς ἑξῆς :

Προσθέτομεν τὰ δύο ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ καὶ ἐὰν τὸ ἄθροισμα αὐτῶν δὲν ὑπερβαίνῃ τὸ 9, τὸ θέτομεν μεταξὺ τῶν δύο ψηφίων.

Οὕτως εἰς τὸ γινόμενον 53×11 λέγομεν 5 καὶ 3 8· θέτομεν τὸ 8 μεταξὺ τοῦ ψηφίου 5 καὶ 3 καὶ εὑρίσκομεν τὸν ἀριθμὸν 583. Τὸ γινόμενον εἶναι 583.

Ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων του ὑπερβαίνῃ τὸν 9, θέτομεν μεταξὺ αὐτῶν τὸ ψηφίον τῶν μονάδων τοῦ ἀθροίσματος καὶ αὐξάνομεν κατὰ μονάδα τὸ πρὸς τὰ ἀριστερὰ ψηφίον τοῦ ἀριθμοῦ.

Οὕτω 57×11 = 627, διότι τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων εἶναι 12. Ἑπομένως τὸ γινόμενον εἶναι 627.

Τὸ γινόμενον ἑνὸς πολυψηφίου ἐπὶ 11 π. χ. τοῦ 5 638× 11 εὑρίσκεται ὡς φαίνεται παραπλεύρως.

$$\begin{array}{r} 5638 \\ 11 \\ \hline 5638 \\ 5638\ \ \\ \hline 62018 \end{array}$$

Ἀπὸ τὴν διάταξιν αὐτὴν βλέπομεν. ὅτι εὑρίσκομεν συντομώτερον τὸ ἐξαγόμενον ὡς ἑξῆς :

Γράφομεν τὸ ψηφίον τῶν ἁπλῶν μονάδων τοῦ πολλαπλασιαστέου. Ἀριστερὰ αὐτοῦ γράφομεν τὸ ἄθροισμα κάθε ψηφίου τοῦ πολλαπλασιαστέου μὲ τὸ προηγούμενόν του, ἀρχόμενοι ἀπὸ τὰς ἁπλᾶς μονάδας καὶ λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τὰ κρατούμενα. Τέλος γράφομεν τὸ πρῶτον ψηφίον τοῦ πολλαπλασιαστέου ἢ τὸ ἄθροισμα αὐτοῦ καὶ τοῦ κρατουμένου, ἂν ὑπάρχῃ.

Ἄσκησις

65) Νὰ εὑρεθοῦν ἀπὸ μνήμης τὰ γινόμενα :

1.	78 × 5	127 × 3	329 × 5	495 × 9
2.	745 × 2	623 × 2	8 354 × 2	5 795 × 2
3.	128 × 4	375 × 4	1 567 × 4	
4.	74 × 9	325 × 9	957 × 9	
5.	27 × 99	47 × 999	75 × 999	
6.	27 × 11	48 × 11	4 238 × 11	
7.	24 × 101	64 × 101	94 × 1 001	

5. ΧΡΗΣΙΣ ΤΟΥ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ ΠΡΟΣ ΛΥΣΙΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

§ 74. *Πρόβλημα 1ον*. **Ἕνας ἐργάτης λαμβάνει ἡμερομίσθιον 25 000 δραχ. Πόσον θὰ λάβῃ εἰς 4 ἡμέρας;**

Λύσις. Εἶναι προφανὲς ὅτι εἰς 4 ἡμέρας θὰ λάβῃ 4 φορὰς τὰς 25 000 δρχ, ἤτοι : 25 000 δρχ. × 4 = 100 000 δρχ.

Πρόβλημα 2ον. **Τὸ μέτρον ἑνὸς ὑφάσματος κοστίζει 64 000 δρχ. Πόσον κοστίζουν τὰ 15 μέτρα τοῦ αὐτοῦ ὑφάσματος;**

Λύσις. Εἶναι προφανὲς ὅτι τὰ 15 μέτρα θὰ κοστίζουν 15 φορὰς τὰς 64 000 δρχ, δηλ. 64 000 δρχ. × 15 = 960 000 δρχ.

§ 75. Εἰς τὰ δύο ἀνωτέρω προβλήματα παρατηροῦμεν ὅτι μᾶς δίδεται ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος (δηλ. τὸ κέρδος τοῦ ἐργάτου εἰς 1 ἡμέραν ἢ ἡ ἀξία τοῦ 1 μέτρου) καὶ μᾶς ζητεῖται ἡ τιμὴ τῶν πολλῶν μονάδων (δηλ. τὸ κέρδος εἰς 4 ἡμέρας ἢ ἡ ἀξία τῶν 15 μέτρων) καὶ ὅτι διὰ νὰ εὕρωμεν τὰ ζητούμενα ἐπολλαπλασιάσαμεν τὴν τιμὴν τῆς μιᾶς μονάδος ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν πολλῶν μονάδων.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι :

Κανών. **Ὅταν μᾶς δίδεται ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος καὶ θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν πολλῶν μονάδων, ὁμοειδῶν πρὸς αὐτήν, πολλαπλασιάζομεν τὴν τιμὴν τῆς μιᾶς μονάδος ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν πολλῶν μονάδων.**

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω, ἂν ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος εἶναι α δραχμαί, ἡ τιμὴ β ὁμοειδῶν μονάδων εἶναι : $\alpha \times \beta$ ἢ $\alpha \cdot \beta$ δραχμαί.

Παρατήρησις. Ὅταν λέγωμεν ὅτι ἕνας ἀριθμὸς εἶναι τιμὴ ἄλλου, δὲν ἕπεται ὅτι πρέπει νὰ παριστάνῃ αὐτὸς ὁ ἀριθμὸς πάντοτε χρήματα. Π. χ. ἐὰν δώσωμεν 2 ὀκ. βουτύρου καὶ λάβωμεν 5 ὀκ. ἐλαίου, αἱ 2 ὀκ. βουτύρου εἶναι ἡ τιμὴ τῶν 5 ὀκ. ἐλαίου καὶ ἀντιστρόφως αἱ 5 ὀκ. ἐλαίου εἶναι ἡ τιμὴ τῶν 2 ὀκ. βουτύρου.

Προβλήματα πολλαπλασιασμοῦ

Α΄ Ὁμάς. 66) Πόσον τιμῶνται 12 μέτρα ἑνὸς ὑφάσματος πρὸς 17 500 δραχ. τὸ μέτρον;

67) Θέλομεν νὰ προσθέσωμεν 350 προσθετέους ἴσους ἕκαστον μὲ 2 600. Ποῖον θὰ εἶναι τὸ ἄθροισμά των ;

68) Τροχὸς ἁμάξης κάμνει 45 στροφὰς κατὰ λεπτὸν τῆς ὥρας. Πόσας στροφὰς θὰ κάμῃ εἰς 1 ὥραν ;

69) Ἡ Φυσικὴ διδάσκει ὅτι ὁ ἦχος διατρέχει εἰς τὸν ἀέρα 340 μέτρα εἰς ἕνα δευτερόλεπτον. Εἰς μίαν Ἐθνικὴν ἑορτὴν ἕνας παρατηρητὴς ἔβλεπε τὴν λάμψιν τῶν ἐκπυρσοκροτούντων πυροβόλων τοῦ Λυκαβητοῦ καὶ ἤκουε τὸν κρότον των μετὰ 15 δευτερόλεπτα. Νὰ εὕρητε πόσον μακρὰν ἀπὸ τὸ πυροβολεῖον τοῦ Λυκαβητοῦ ἦτο ὁ παρατηρητὴς ἐκεῖνος.

Β' Ὁ μ ά ς. 70) Ἠγόρασέ τις 125 ὀκάδ. ἐλαίου πρὸς 12 600 δρχ. τὴν ὀκᾶν καὶ 245 ὀκάδ. ζυμαρικῶν πρὸς 4 600 δρχ. τὴν ὀκᾶν. Πόσον ἐπλήρωσεν ἐν ὅλῳ ;

71) Γεωργὸς ἠγόρασεν 145 ὀκ. λίπασμα πρὸς 5 425 δρχ. τὴν ὀκᾶν. Ἀπέναντι τῆς ἀξίας τοῦ λιπάσματος ἔδωσεν 79 ὀκ. σίτου πρὸς 2 015 δρχ. τὴν ὀκᾶν καὶ 367 290 δρχ. Πόσα ὀφείλει ἀκόμη ;

72) Ἐργολάβος χρησιμοποιεῖ 3 ἐργάτας, τοὺς ὁποίους πληρώνει μὲ ἡμερομίσθιον 23 000 δρχ., 25 000 δρχ. καὶ 30 000 δρχ. ἀντιστοίχως. Πόσον πληρώνει καθ' ἑβδομάδα (6 ἡμερῶν ἐργασίας) ;

73) Ἕνα ἐργοστάσιον χρησιμοποιεῖ 28 ἐργάτιδας. Αἱ 4 λαμβάνουν ἀπὸ 18 χιλιόδρ. ἡμερησίως, αἱ 12 λαμβάνουν ἀπὸ 13 χιλιόδρ. καὶ αἱ ὑπόλοιποι ἀπὸ 12 χιλιόδρ. Πόσα ἐξοδεύει ἡμερησίως τὸ ἐργοστάσιον δι' ἡμερομίσθια;

Γ' Ὁ μ ά ς. 74) Ἀτμόπλοιον ἐχρειάσθη διὰ νὰ φθάσῃ ἀπὸ τὸν Πειραιᾶ εἰς τὴν Ἀλεξάνδρειαν 42 ὥρας. Τὰς πρώτας 27 ὥρας ἔτρεχε 13 μίλια τὴν ὥραν, τὰς δὲ ἄλλας ὥρας ἔτρεχε 15 μίλια τὴν ὥραν. Πόσα μίλια ἀπέχει ἡ Ἀλεξάνδρεια ἀπὸ τὸν Πειραιᾶ ;

75) Δύο ποδηλάται ἀναχωροῦν ταυτοχρόνως ἐκ δύο πόλεων, αἱ ὁποῖαι ἀπέχουν 235 χλμ. καὶ διευθύνονται πρὸς συνάντησίν των. Πόσον θὰ ἀπέχουν μεταξύ των μετὰ 4 ὥρας, ἐὰν ὁ πρῶτος διανύῃ 16 χλμ. τὴν ὥραν καὶ ὁ δεύτερος 12 χιλμ. τὴν ὥραν ;

76) Ἕνας χωρικὸς ἔχει 2 ἀγελάδας καὶ κάθε μία δίδει ἐπὶ ἕνα μῆνα 8 ὀκ. γάλα τὴν ἡμέραν, τὸ ὁποῖον πωλεῖ πρὸς 3 000 δρχ. τὴν ὀκᾶν. Ἔχει ὅμως ἔξοδα τὴν ἡμέραν, διὰ τὴν διατροφήν των, 8 250 δρχ. διὰ κάθε ἀγελάδα. Πόσας δραχμὰς ἐκέρδισε τὸν μῆνα ἐκεῖνον (30 ἡμ.) ἀπὸ τὸ γάλα ;

Δ΄ Ὁ μ ά ς. 77) Ὁ πῆχυς ἑνὸς ὑφάσματος ἀξίζει α δραχμάς. Ἐὰν ἀγοράσωμεν τὴν μίαν ἡμέραν β πήχεις καὶ τὴν ἄλλην γ πήχεις, πόσας δραχμὰς θὰ δώσωμεν ;

78) Νὰ εὕρητε τὰ ἐξαγόμενα τῶν πράξεων :

1. $(3 \times 15) + (19 \times 27) + (12 \times 4)$
2. $(143 \times 14) + (18 \times 20 \times 2) + (12 \times 5 \times 13)$

6. ΓΙΝΟΜΕΝΟΝ ΠΟΛΛΩΝ ΠΑΡΑΓΟΝΤΩΝ

§ 76. *Πρόβλημα.* **12 ἐργάται ἐργάζονται 5 ἡμέρας τὴν ἑβδομάδα. Πόσας δραχμὰς θὰ λάβουν, ἐὰν ἐργασθοῦν ἐπὶ 8 ἑβδομάδας μὲ ἡμερομίσθιον 6 000 δραχμῶν ;**

Λύσις. Οἱ 12 ἐργάται λαμβάνουν :

εἰς 1 ἡμέραν 6 000 δρχ. × 12 ἢ 72 000 δρχ.

εἰς 1 ἑβδομάδα τῶν 5 ἐργασίμων ἡμερῶν

72 000 δρχ. × 5 ἢ 360 000 δρχ.

εἰς 8 ἑβδομάδας 360 000 δρχ. × 8 ἢ 2 880 000 δρχ.

Ὁρισμός. Παρατηροῦμεν ὅτι, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ζητούμενον, ἐπολλαπλασιάσαμεν τὸν 6 000 ἐπὶ 12, τὸ γινόμενον αὐτῶν 72 000 ἐπὶ 5, τὸ νέον γινόμενον 360 000 ἐπὶ 8. Τὸ τελικὸν ἐξαγόμενον 2 880 000 λέγεται **γινόμενον πολλῶν παραγόντων** καὶ παρίσταται ὡς ἑξῆς: $6\,000 \times 12 \times 5 \times 8$. Ὥστε :

Γινόμενον πολλῶν παραγόντων λέγεται τὸ ἐξαγόμενον, τὸ ὁποῖον εὑρίσκομεν, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸν πρῶτον παράγοντα ἐπὶ τὸν δεύτερον, τὸ γινόμενον αὐτῶν ἐπὶ τὸν τρίτον, τὸ νέον γινόμενον ἐπὶ τὸν τέταρτον καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς, μέχρις ὅτου λάβωμεν ὅλους τοὺς παράγοντας.

Παρατήρησις. Ὅπως τὸ γινόμενον 2 ἀφηρημένων παραγόντων εἶναι ἀφηρημένον, οὕτω καὶ τὸ γινόμενον πολλῶν παραγόντων εἶναι ἀφηρημένον, ὅταν ὅλοι οἱ παράγοντες αὐτοῦ εἶναι ἀφηρημένοι. Ὅταν ὅμως ὅλοι οἱ ἀριθμοὶ ἑνὸς προβλήματος εἶναι συγκεκριμένοι, μόνον ὁ ὁμοειδὴς μὲ τὸ ζητούμενον μένει συγκεκριμένος.

§ 77. **Ἰδιότης Ι (τῆς ἀντιμεταθέσεως).** Εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα εὕρομεν ὅτι οἱ 12 ἐργάται θὰ λάβουν :

6 000 δρχ. × 12 × 5 × 8 = 2 880 000 δρχ.

Τὸ πρόβλημα ὅμως αὐτὸ δυνάμεθα νὰ λύσωμεν καὶ ὡς ἑξῆς:
Ὁ ἕνας ἐργάτης λαμβάνει:

εἰς 1 ἑβδομάδα τῶν 5 ἡμερῶν	6 000 δρχ.	× 5	ἢ	30 000	δρ.
καὶ εἰς 8 ἑβδομάδας	30 000 »	× 8	ἢ	240 000	»
οἱ 12 ἐργάται θὰ λάβουν	240 000 »	× 12	ἢ	2 880 000	»

Παρατηροῦμεν ὅτι αἱ δύο λύσεις δίδουν τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον 2 880 000 δρχ. ἄρα θὰ εἶναι: $6\,000 \times 12 \times 5 \times 8 = 6\,000 \times 5 \times 8 \times 12$.

Συμπέρασμα. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὴν κάτωθι ἰδιότητα:

I. Τὸ γινόμενον πολλῶν παραγόντων δὲν μεταβάλλεται, ἂν ἀλλάξωμεν τὴν τάξιν τῶν παραγόντων του.

Κατὰ τὴν ἰδιότητα αὐτὴν θὰ εἶναι γενικῶς:

$$\boxed{\alpha \times \beta \times \gamma \times \delta = \beta \times \delta \times \gamma \times \alpha = \delta \times \gamma \times \alpha \times \beta}$$

Ἡ ἰδιότης αὕτη λέγεται **ἰδιότης τῆς ἀντιμεταθέσεως.**

Ἐφαρμογή. Ἀλλάσσοντες τὴν θέσιν τῶν παραγόντων, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν πολλάκις νοερῶς μερικὰ γινόμενα.

Οὕτω, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον $4 \times 17 \times 25$, ἀντὶ νὰ εἴπωμεν $4 \times 17 = 68$ $68 \times 25 = 1\,700$, δυνάμεθα, ἐφαρμόζοντες τὴν προηγουμένην ἰδιότητα, νὰ γράψωμεν $4 \times 25 \times 17$ καὶ νὰ εἴπωμεν $4 \times 25 = 100$, $100 \times 17 = 1\,700$.

Ἀσκήσεις

79) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ κάτωθι γινόμενα:
1. $3 \times 2 \times 5$, $8 \times 4 \times 25$
2. $8 \times 9 \times 6 \times 4$, $15 \times 7 \times 4 \times 9$, $8 \times 9 \times 5 \times 10$
3. $35 \times 403 \times 1\,604$, $8 \times 12 \times 809 \times 10$, $125 \times 4 \times 70 \times 41$

80) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ γινόμενον $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \delta$, ἐάν

1ον	$\alpha = 8$	$\beta = 4$	$\gamma = 5$	$\delta = 12$
2ον	$\alpha = 25$	$\beta = 9$	$\gamma = 4$	$\delta = 9$

§ 78. Ἰδιότης III. Τὸ πρόβλημα τῆς § 76 λύομεν καὶ ὡς ἑξῆς:

3η Λύσις. Οἱ 12 ἐργάται λαμβάνουν καθ' ἡμέραν:

6 000 δρχ. × 12

καὶ ἐπειδὴ εἰργάσθησαν $5 \times 8 = 40$ ἡμέρας θὰ λάβουν ἐν ὅλῳ

6 000 δρχ. $\times 12 \times 40 = 2\,880\,000$ δρχ.

Συγκρίνοντες τὴν λύσιν αὐτὴν μὲ τὴν α΄ λύσιν (§ 76) συνάγομεν ὅτι : $6\,000 \times 12 \times 5 \times 8 = 6\,000 \times 12 \times 40$. Ὥστε :

II. Εἰς γινόμενον πολλῶν παραγόντων δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν δύο ἢ περισσοτέρους παράγοντας μὲ τὸ γινόμενόν των.

Κατὰ τὴν ἰδιότητα αὐτὴν θὰ εἶναι γενικῶς :

$$\boxed{\alpha \times \beta \times \gamma \times \delta = \alpha \times (\beta \times \gamma) \times \delta}$$

Ἐφαρμογή. Ἐφαρμόζοντες τὴν ἰδιότητα αὐτὴν δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν νοερῶς τὸ γινόμενον πολλῶν παραγόντων. Οὕτω, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον : $2 \times 7 \times 4 \times 5 \times 25$, ἀντὶ νὰ πολλαπλασιάσωμεν κατὰ σειρὰν τοὺς παράγοντας, δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν τοὺς παράγοντας 2 καὶ 5, καθὼς καὶ τοὺς 4 καὶ 25, διὰ τοῦ γινομένου των, καὶ εὑρίσκομεν τὸ γινόμενον $7 \times 10 \times 100 = 7\,000$.

§ 79. Ἰδιότης III. Εἴδομεν προηγουμένως ὅτι :

$$6\,000 \times 12 \times 5 \times 8 = 6\,000 \times 12 \times 40.$$

Ἄρα θὰ εἶναι καί : $6\,000 \times 12 \times 40 = 6\,000 \times 12 \times 5 \times 8$. Ὥστε:

III. Εἰς γινόμενον παραγόντων δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν παράγοντά τινα δι' ἄλλων, οἱ ὁποῖοι νὰ ἔχουν αὐτὸν ὡς γινόμενον.

Κατὰ τὴν ἰδιότητα αὐτὴν θὰ εἶναι γενικῶς :

$$\boxed{\alpha \times (\beta \times \gamma) \times \delta = \alpha \times \beta \times \gamma \times \delta}$$

Ἐφαρμογή. Ἀντικαθιστῶντες παράγοντά τινα γινομένου δι' ἄλλων, οἱ ὁποῖοι ἔχουν αὐτὸν ὡς γινόμενον, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν νοερῶς μερικὰ γινόμενα. Οὕτω θὰ ἔχωμεν :

$$125 \times 16 = 125 \times 8 \times 2 = 1\,000 \times 2 = 2\,000.$$

Ὁμοίως $\quad 45 \times 18 = 45 \times 2 \times 9 = 90 \times 9 = 810.$

§ 80. Πῶς πολλαπλασιάζομεν γινόμενον παραγόντων ἐπὶ ἀριθμόν. *Πρόβλημα.* **Ἕνας γεωργὸς ἐκαλλιέργησε 3 ἀγροὺς ἀπὸ 8 στρέμματα τὸν καθένα. Κάθε στρέμμα ἀπέδωκε 200 ὀκάδας σίτου· ἐπώλησε δὲ τὸν σῖτον πρὸς 1 800 δραχ. τὴν ὀκᾶν. Πόσα χρήματα ἔλαβε ;**

Λύσις. Οἱ τρεῖς ἀγροὶ εἶχον 8 στρέμματα × 3 ἢ 24 στρέμματα.

Ἐπειδὴ ἀπὸ κάθε στρέμμα παρήχθησαν 200 ὀκάδες σίτου, ἀπὸ τὰ 24 στρέμματα παρήχθησαν 200 × 24 ὀκάδες.

Ἀπὸ αὐτὰς ἔλαβε 1 800 δρχ. × 200 × 24 ἢ 8 640 000 δρχ.

Ἄλλη λύσις. Ὁ ἕνας ἀγρὸς ἀπέδωκε 200 ὀκ. × 8. Ἀπὸ αὐτὰς ἔλαβε 1 800 δρχ. × (200 × 8) ἢ 1 800 × 200 × 8 δραχμάς.

Ἀφοῦ ἀπὸ τὸν ἕνα ἀγρὸν ἔλαβε (1 800 × 200 × 8) δραχ. ἀπὸ τοὺς τρεῖς ἀγροὺς ἔλαβε:

(1 800 × 200 × 8) × 3 ἢ 2 880 000 × 3 ἢ 8 640 000 δρχ.

Ἐπειδὴ καὶ αἱ δύο λύσεις δίδουν τὰ αὐτὰ ἐξαγόμενα, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν: (1 800 × 200 × 8) × 3 = 1 800 × 200 × 24.

Συμπέρασμα. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὴν κάτωθι ἰδιότητα:

IV. Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν γινόμενον πολλῶν παραγόντων ἐπὶ ἀριθμόν, δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἕνα μόνον ἐκ τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου ἐπὶ τὸν ἀριθμόν, τοὺς δὲ ἄλλους νὰ ἀφήσωμεν ὅπως ἔχουν.

Κατὰ τὴν ἰδιότητα αὐτὴν θὰ εἶναι γενικῶς:

$$\boxed{(\alpha \times \beta \times \gamma) \times \delta = \alpha \times (\beta \times \delta) \times \gamma}$$

§ 81. **Πῶς πολλαπλασιάζομεν γινόμενα.** *Πρόβλημα.* **Γεωργὸς ἔχει τρεῖς ἀγρούς, ἕκαστος τῶν ὁποίων εἶναι 8 στρέμματα. Διὰ τὴν λίπανσιν αὐτῶν χρειάζεται 2 σάκκους λιπάσματος κατὰ στρέμμα. Ἐὰν ὁ σάκκος τοῦ λιπάσματος τιμᾶται 50 χιλιόδραχμα, νὰ εὑρεθῇ πόσα χρήματα πρέπει νὰ δαπανήσῃ διὰ τὴν λίπανσιν;**

Λύσις. Τὰ στρέμματα ἦσαν τὸ ὅλον (8 × 3). Διὰ τὴν λίπανσιν ἑνὸς στρέμματος πρέπει νὰ δαπανήσῃ (50 × 2) χιλιόδραχμα. Ἐπομένως διὰ τὰ (8 × 3) στρέμματα θὰ δαπανήσῃ:

(50 × 2) χιλιόδρ. × (8 × 3) ἢ 100 χιλιόδρχ. × 24 ἢ 2 400 χιλιόδρχ.

Ἄλλη λύσις. Διὰ τὰ (8 × 3) στρέμματα χρειάζεται:

2 σάκ. × (8 × 3) ἢ 2 × 8 × 3 σάκκους λιπάσματος.

Διὰ τοὺς σάκκους αὐτοὺς πρέπει νὰ πληρώσῃ:

50 χιλιόδρ. × (2 × 8 × 3) ἢ 50 × 2 × 8 × 3 χιλιόδρ. ἢ 2 400 χιλιόδρ.

Παρατηροῦμεν ὅτι καὶ αἱ δύο λύσεις δίδουν τὰ αὐτὰ ἐξαγόμενα. Θὰ εἶναι λοιπόν: (50 × 2) × (8 × 3) = 50 × 2 × 8 × 3.

Συμπέρασμα. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὴν κάτωθι ἰδιότητα :

V. Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν γινόμενα, σχηματίζομεν ἕνα νέον γινόμενον, τὸ ὁποῖον περιέχει τοὺς παράγοντας τῶν γινομένων καὶ μόνον αὐτούς.

Κατὰ τὴν ἰδιότητα αὐτὴν θὰ εἶναι γενικῶς :

$$\boxed{(\alpha \times \beta \times \gamma) \times (\delta \times \epsilon) = \alpha \times \beta \times \gamma \times \delta \times \epsilon}$$

Περίληψις τῶν ἰδιοτήτων τοῦ γινομένου πολλῶν παραγόντων

1.	$\alpha . \beta . \gamma . \delta$	$= \gamma . \alpha . \delta . \beta$
2.	$\alpha . \beta . \gamma . \delta$	$= \alpha . (\beta . \delta) . \gamma$
3.	$(\alpha . \beta . \gamma) . \delta$	$= \alpha . (\beta . \delta) . \gamma$
4.	$(\alpha . \beta . \gamma) . (\delta . \varepsilon)$	$= \alpha . \beta . \gamma . \delta . \varepsilon .$

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα

81) Νὰ εὕρητε νοερῶς τὰ κάτωθι γινόμενα :

50×16	25×12	125×32
150×12	35×18	120×35

82) Ἕνα κιβώτιον ἔχει 6 στρώματα σάπωνος. Κάθε στρῶμα ἔχει 4 σειράς· κάθε σειρὰ ἔχει 5 πλάκας σάπωνος καὶ κάθε πλὰξ ἀξίζει 2 000 δρχ. Νὰ εὕρητε τὴν ἀξίαν τοῦ σάπωνος τοῦ κιβωτίου αὐτοῦ.

83) Μία κοινότης ἔχει 80 οἰκογενείας. Κάθε οἰκογενειάρχης ὑπεχρεώθη νὰ ἐργασθῇ 8 ἡμέρας διὰ τὴν κατασκευὴν μιᾶς ὁδοῦ. Τὸ ἡμερομίσθιον ἦτο 12 000 δραχ. Νὰ εὕρετε πόσα χρήματα ἐξοικονόμησε τὸ ταμεῖον τῆς κοινότητος μὲ αὐτὴν τὴν προσωπικὴν ἐργασίαν.

84) 15 πυροβολαρχίαι βάλλουν ἐπὶ 5 λεπτὰ τῆς ὥρας μίαν βολὴν καταιγισμοῦ. Ἕκαστον πυροβόλον ρίπτει 12 ὀβίδας κατὰ λεπτόν.

Νὰ εὑρεθῇ πόσας ὀβίδας ἔρριψαν αἱ πυροβολαρχίαι, ἐὰν ἑκάστη αὐτῶν ἔχῃ 4 πυροβόλα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε΄

ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ ΤΩΝ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

1. ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΔΙΑΙΡΕΣΕΩΣ

§ 82. **Διαίρεσις (μερισμός).** *Παράδειγμα.* **Ἔχομεν 12 μῆλα καὶ θέλομεν νὰ τὰ μοιράσωμεν εἰς 4 μαθητὰς οὕτως ὥστε, κάθε μαθητὴς νὰ λάβῃ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν μήλων.**

Διὰ νὰ εὕρωμεν πόσα μῆλα θὰ λάβῃ κάθε μαθητὴς θὰ ἐργασθῶμεν ὡς ἑξῆς:

Θὰ λάβωμεν κατ' ἀρχὰς 4 μῆλα ἀπὸ τὰ 12 καὶ θὰ δώσωμεν εἰς κάθε μαθητὴν ἀπὸ ἕνα, ὁπότε θὰ μείνουν 8 μῆλα. Θὰ λάβωμεν πάλιν ἄλλα 4 μῆλα καὶ θὰ δώσωμεν ἀπὸ ἕνα εἰς κάθε μαθητήν, ὁπότε θὰ μείνουν 4 μῆλα. Θὰ δώσωμεν τέλος ἀπὸ ἕνα μῆλον ἀκόμη εἰς κάθε μαθητὴν καὶ δὲν θὰ μείνῃ πλέον τίποτα. Ὥστε κάθε μαθητὴς θὰ λάβῃ 3 μῆλα, δηλ. τόσα μῆλα, ὅσας φορὰς ἀφῃρέσαμεν τὸν 4 ἀπὸ τὸν 12.

Ἡ πρᾶξις αὐτή, διὰ τῆς ὁποίας ἐμοιράσαμεν ἕνα ἀριθμὸν (12 μῆλα) εἰς ἴσα μέρη (εἰς 4 μαθητάς), διὰ διαδοχικῶν ἀφαιρέσεων, λέγεται **διαίρεσις** (μερισμός). Ὥστε:

Διαίρεσις (μερισμὸς) εἶναι ἡ πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας μοιράζομεν δοθέντα ἀριθμὸν εἰς τόσα μέρη, ὅσας μονάδας ἔχει ἄλλος δοθεὶς ἀριθμός.

Ὁ 12 λέγεται **διαιρετέος**, ὁ 4 **διαιρέτης** καὶ ὁ 3 **πηλίκον**.

§ 83. **Διαίρεσις (μέτρησις).** *Παράδειγμα.* **Ὁ Παῦλος ἔχει εἰς τὴν σάκκαν του 36 βώλους. Πόσας δωδεκάδας βώλων ἔχει;**

Διὰ νὰ εὕρωμεν πόσας δωδεκάδας βώλων ἔχει, ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς:
Λαμβάνομεν κατ' ἀρχὰς ἀπὸ τὴν σάκκαν μίαν δωδεκάδα βώλων καὶ τὴν θέτομεν κατὰ μέρος, ὅτε μένουν 24 βῶλοι. o o o o o o o o o o o o
Λαμβάνομεν ἔπειτα ἄλλην μίαν δωδεκάδα βώλων καὶ τὴν θέτομεν ὑποκάτω τῆς πρώτης, o o o o o o o o o o o o
o o o o o o o o o o o o

ὅτε μένουν 12 βῶλοι. Τέλος λαμβάνομεν καὶ τὴν δωδεκάδα, ποὺ ἔμεινεν καὶ τὴν θέτομεν ὑποκάτω τῆς δευτέρας.

Ὁ Παῦλος ἔχει λοιπὸν 3 δωδεκάδας βώλων, δηλ. τόσας δωδεκάδας, **ὅσας φορὰς ἀφῃρέσαμεν** τοὺς 12 ἀπὸ τοὺς 36 βώλους.

Ἡ πρᾶξις αὐτὴ λέγεται πάλιν **διαίρεσις.**

Διαφέρει ὅμως ἀπὸ τὴν προηγουμένην κατὰ τοῦτο : ὅτι ἐδῶ δὲν μοιράζομεν, ὅπως εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα, ἕνα ἀριθμὸν εἰς ἴσα μέρη, ἀλλὰ **μετροῦμεν**, διὰ διαδοχικῶν ἀφαιρέσεων, πόσας φορὰς χωρεῖ ἕνας ἀριθμὸς (12 βῶλοι) εἰς ἄλλον δοθέντα ἀριθμὸν (36 βώλους). Διὰ τοῦτο ἡ διαίρεσις αὐτὴ λέγεται ἰδιαιτέρως **μέτρησις.** Ὥστε:

Διαίρεσις (μέτρησις) εἶναι ἡ πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν, πόσας φορὰς χωρεῖ ἕνας ἀριθμὸς εἰς ἄλλον.

Ἐδῶ **διαιρετέος** εἶναι ὁ 36, **διαιρέτης** ὁ 12 καὶ τὸ **πηλίκον** 3.

§ 84. Γενικὸς ὁρισμὸς τῆς διαιρέσεως. *Παράδειγμα.* **Ἃς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν τώρα νὰ μοιράσωμεν ἐξ ἴσου 38 μῆλα εἰς 7 μαθητάς.**

Ἐὰν ἐργασθῶμεν ὅπως εἰς τὸ παράδειγμα τῆς § 82, εὑρίσκομεν ὅτι δυνάμεθα νὰ δώσωμεν ἀπὸ 5 μῆλα εἰς κάθε μαθητήν, διότι 5 μῆλα × 7 = 35 μῆλα, ἀλλὰ δὲν δυνάμεθα νὰ δώσωμεν ἀπὸ 6 μῆλα, διότι 6 μῆλα × 7 = 42 μῆλα.

Ἡ διανομὴ τῶν μήλων δὲν γίνεται ἐδῶ ἀκριβῶς, ὅπως εἰς τὸ παράδειγμα τῆς § 82, διότι μένουν 38 μῆλα — 35 μῆλα = 3 μῆλα, τὰ ὁποῖα εἶναι ὀλιγώτερα τῶν 7 μαθητῶν καὶ δὲν φθάνουν νὰ πάρῃ κάθε μαθητὴς ἀπὸ ἕνα.

Τὸ ὑπόλοιπον 3 τῆς προηγουμένης ἀφαιρέσεως λέγεται καὶ **ὑπόλοιπον** τῆς διαιρέσεως 38 διὰ 7.

Εἰς τὸ παράδειγμα αὐτὸ εἴχομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν 38 διὰ τοῦ 7. Εὕρομεν δὲ ὅτι ὁ μεγαλύτερος ἀκέραιος ἀριθμός, ὁ ὁποῖος πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ 7 δίδει γινόμενον, τὸ ὁποῖον περιέχεται εἰς τὸν 38, εἶναι ὁ 5. Πράγματι ὁ 38 περιέχει τὸ γινόμενον 7 × 5, ἀλλ' ὄχι καὶ τὸ 7 × 6.

Ὁμοίως ἐργαζόμεθα καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν, κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ διαίρεσις εἶναι μέτρησις. Ἑπομένως δυνάμεθα νὰ δώσωμεν τὸν ἑξῆς γενικὸν ὁρισμὸν τῆς διαιρέσεως :

Διαίρεσις εἶναι πρᾶξις, εἰς τὴν ὁποίαν δίδονται δύο ἀριθμοὶ καὶ ζητοῦμεν νὰ εὕρωμεν τὸν μεγαλύτερον ἀκέραιον ἀριθμόν, ὁ

ὁποῖος, πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν διαιρέτην δίδει γινόμενον ἴσον ἢ μικρότερον τοῦ διαιρετέου.

Εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα διαιρετέος εἶναι ὁ 38, διαιρέτης ὁ 7, πηλίκον ὁ 5 καὶ ὑπόλοιπον ὁ 3.

§ 85. Τελεία καὶ ἀτελὴς διαίρεσις. Ἡ διαίρεσις λέγεται **τελεία**, ἐὰν δίδῃ ὑπόλοιπον 0, **ἀτελής** δέ, ἐὰν τὸ ὑπόλοιπον εἶναι διάφορον τοῦ μηδενός. Εἰς τὴν ἀτελῆ διαίρεσιν τὸ ὑπόλοιπον πρέπει νὰ εἶναι μικρότερον τοῦ διαιρέτου.

Ἐὰν εἰς τὰ μῆλα, ποὺ ἔλαβον οἱ 7 μαθηταί, δηλ. εἰς τὰ 5×7, προσθέσωμεν καὶ τὰ 3 μῆλα, τὰ ὁποῖα ἔμειναν ὡς ὑπόλοιπον, εὑρίσκομεν τὸν ἀρχικὸν ἀριθμὸν τῶν μήλων, ποὺ ἐπρόκειτο νὰ μοιράσωμεν· ἤτοι εἶναι: $7 \times 5 + 3$. Δηλαδή:

$$\boxed{\textbf{Διαιρετέος} = \textbf{διαιρέτης} \times \textbf{πηλίκον} + \textbf{ὑπολοίπῳ}}$$

Ὥστε:

Εἰς κάθε ἀτελῆ διαίρεσιν ὁ διαιρετέος ἰσοῦται μὲ τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸ πηλίκον σὺν τῷ ὑπολοίπῳ.

Εἶναι δὲ φανερὸν ὅτι:

Εἰς κάθε τελείαν διαίρεσιν ὁ διαιρετέος ἰσοῦται μὲ τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸ πηλίκον.

§ 86. Σημεῖον διαιρέσεως. Διὰ νὰ σημειώσωμεν τὴν διαίρεσιν δύο ἀριθμῶν, θέτομεν μεταξὺ τοῦ διαιρετέου καὶ τοῦ διαιρέτου τὸ σημεῖον (:) τὸ ὁποῖον ἐκφωνεῖται **διά**.

Τὸ ἐξαγόμενον ὅμως τῆς διαιρέσεως δὲν δυνάμεθα νὰ σημειώσωμεν διὰ μιᾶς ἰσότητος, παρὰ μόνον εἰς τὴν περίπτωσιν, κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ διαίρεσις εἶναι τελεία. Π. χ. δυνάμεθα νὰ γράψωμεν:

$12 : 4 = 3$, ὄχι ὅμως καὶ $38 : 7 = 5$

ἢ $38 : 7 = 5 + 3$, ἀλλὰ $38 = 5 \times 7 + 3$ (§ 85).

Καὶ ἀντιστρόφως, ἐὰν ἔχωμεν τὴν ἰσότητα $39 = 8 \times 4 + 7$, δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν ὅτι ὁ 4 εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 39 διὰ 8 καὶ ὅτι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως εἶναι ὁ 7· διότι τὸ ὑπόλοιπον 7 εἶναι μικρότερον τοῦ διαιρέτου 8. Δὲν δυνάμεθα ὅμως νὰ θεωρήσωμεν τὸ 8 ὡς πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 39 διὰ 4· διότι τὸ ὑπόλοιπον 7 εἶναι μεγαλύτερον τοῦ διαιρέτου 4.

Ἐὰν ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης παρίστανται διὰ γραμμάτων, δὲν δυνάμεθα νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν αὐτῶν, διότι δὲν γνωρίζομεν τοὺς ἀριθμούς, ποὺ παριστάνουν τὰ γράμματα αὐτά. Θὰ σημειώνωμεν ἁπλῶς τὴν διαίρεσιν αὐτῶν, ὅπως καὶ ὅταν αὐτοὶ εἶναι ὡρισμένοι ἀριθμοί.

Π. χ. $\alpha : \beta$ σημαίνει ὅτι πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὸν α διὰ τοῦ β. Ἂν δὲ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως αὐτῆς εἶναι γ, θὰ εἶναι :

$\boxed{\alpha : \beta = \gamma}$ καὶ ἑπομένως $\boxed{\alpha = \beta \times \gamma}$

Ἐὰν ἡ διαίρεσις ἑνὸς ἀριθμοῦ Δ διὰ δ εἶναι ἀτελὴς καὶ δίδῃ πηλίκον π καὶ ὑπόλοιπον υ, τότε θὰ εἶναι :

$\boxed{\Delta = (\delta \times \pi) + \upsilon}$ ὅπου $\upsilon < \delta$.

§ 87. Παρατηρήσεις. 1η. Εἰς τὰς διαιρέσεις ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι παρίστανται μὲ γράμματα, ὑποτίθεται, ὅτι ὁ διαιρετέος εἶναι μεγαλύτερος ἢ ἴσος πρὸς τὸν διαιρέτην.

2α. Κατὰ τὴν διαίρεσιν (μερισμὸν) ἑνὸς συγκεκριμένου ἀριθμοῦ δι' ἄλλου συγκεκριμένου, ὁ διαιρέτης πρέπει νὰ λαμβάνεται ὡς ἀφῃρημένος ἀριθμός. Π. χ. πρέπει νὰ γράφωμεν :

12 μῆλα : 4 = 3 μῆλα.

Τὸ πηλίκον τότε, τὸ ὁποῖον λέγεται καὶ μερίδιον, εἶναι **ὁμοειδὲς μὲ τὸν διαιρετέον,** διότι εἶναι μέρος αὐτοῦ.

3η. Ἐὰν ὁ διαιρέτης εἶναι ἡ μονάς, τὸ πηλίκον ἰσοῦται μὲ τὸν διαιρετέον. Π. χ. θὰ εἶναι :

$6 : 1 = 6$ (διατί;)

4η. Ἐὰν ὁ διαιρετέος εἶναι 0, ὁ δὲ διαιρέτης διάφορος τοῦ μηδενός, τότε τὸ πηλίκον εἶναι ἴσον μὲ τὸ μηδέν. Π. χ.

$0 : 3 = 0$, διότι $0 \times 3 = 0$.

5η. Ἡ διαίρεσις ἀριθμοῦ οἱουδήποτε διὰ 0, π. χ. $8 : 0$, εἶναι ἀδύνατος· διότι δὲν ὑπάρχει ἀριθμός, ὁ ὁποῖος, πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν διαιρέτην 0, νὰ δίδῃ γινόμενον 8, δηλ. διάφορον τοῦ μηδενός.

6η. Ὅταν ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης εἶναι 0, τὸ πηλίκον δύναται νὰ εἶναι οἱοσδήποτε ἀριθμός· διότι κάθε ἀριθμός, πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν διαιρέτην 0, δίδει γινόμενον τὸν διαιρετέον 0.

§ 88. **Ἄλλη ἰδιότης τῆς ἰσότητος.** Ἔστω ἡ ἰσότης 12 = α. Εἶναι φανερὸν ὅτι ὅσας μονάδας ἔχει ὁ 12, τόσας μονάδας ἔχει καὶ ὁ α. Ἐὰν διαιρέσωμεν διὰ 2 τὰς μονάδας τοῦ 12 ἢ τὰς ἴσας πρὸς αὐτὰς μονάδας τοῦ α, θὰ εὕρωμεν τὸ αὐτὸ πηλίκον 6· ἄρα θὰ εἶναι :

$$12 : 2 = \alpha : 2.$$

Ὁμοίως ἐννοοῦμεν ὅτι $12 : 3 = \alpha : 3$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὴν κάτωθι ἰδιότητα :

Ἐὰν διαιρέσωμεν δύο ἴσους ἀριθμοὺς διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, εὑρίσκομεν πάλιν ἴσους ἀριθμούς.

Κατὰ τὴν ἰδιότητα αὐτήν, γενικῶς :

Ἂν εἶναι $\boxed{\alpha = \beta}$, θὰ εἶναι καὶ $\boxed{\alpha : \mu = \beta : \mu}$

2. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΔΙΑΙΡΕΣΕΩΣ

§ 89. **Πῶς διαιρεῖται ἄθροισμα δι' ἀριθμοῦ.** *Πρόβλημα.* **Πατήρ τις ἔδωκε μίαν ἡμέραν εἰς τοὺς τρεῖς υἱούς του 900 δραχμάς, τὴν ἄλλην ἡμέραν ἔδωκεν εἰς αὐτοὺς 600 δρχ. καὶ τὴν ἑπομένην ἡμέραν 450 δρχ. Πόσα χρήματα ἔδωκεν εἰς καθένα κατὰ τὰς τρεῖς αὐτὰς ἡμέρας;**

Λύσις. Εἰς τοὺς τρεῖς υἱοὺς ἔδωκε τὸ ὅλον :

(900 + 600 + 450) δρχ. ἢ 1 950 δρχ.

Εἰς τὸν καθένα λοιπὸν ἔδωκεν:

(900 + 600 + 450) : 3 ἢ 1 950 δρχ. : 3 ἢ 650 δρχ.

Ἄλλη λύσις. Τὴν πρώτην ἡμέραν ἔδωκεν εἰς καθένα
900 δρχ. : 3 ἢ 300 δρχ.
τὴν δευτέραν ἡμέραν ἔδωκεν 600 δρχ. : 3 ἢ 200 δρχ.
τὴν τρίτην ἡμέραν ἔδωκε 450 δρχ. : 3 ἢ 150 δρχ.
καὶ τὰς τρεῖς ἡμέρας ἔδωκεν εἰς καθένα

300 δρχ. + 200 δρχ. + 150 δρχ. ἢ 650 δρχ.

Παρατηροῦμεν ὅτι καὶ αἱ δύο λύσεις δίδουν τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον· ἄρα εἶναι :

$$(900 + 600 + 450) : 3 = (900 : 3) + (600 : 3) + (450 : 3).$$

Συμπέρασμα. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὴν κάτωθι ἰδιότητα :

I. Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἄθροισμα δι' ἀριθμοῦ, δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν ὅλους τοὺς προσθετέους τοῦ ἀθροίσματος διὰ τοῦ

ἀριθμοῦ τούτου καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ προκύπτοντα πηλίκα.

Κατὰ τὴν ἰδιότητα αὐτὴν θὰ εἶναι γενικῶς :

$$\boxed{(\alpha+\beta+\gamma):\delta=(\alpha:\delta)+(\beta:\delta)+(\gamma:\delta)}$$

Σημείωσις. Ὅπως φαίνεται καὶ ἀπὸ τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα, πρέπει αἱ διαιρέσεις αὐταὶ νὰ εἶναι ὅλαι τέλειαι.

§ 90. Πῶς διαιροῦμεν διαφορὰν δι' ἀριθμοῦ. *Πρόβλημα.* **Τρία δοχεῖα ὅμοια εἶναι πλήρη ἐλαίου καὶ ἔχουν βάρος καὶ τὰ τρία μαζὺ 450 ὀκάδας· κενὰ τὰ δοχεῖα ἔχουν βάρος 36 ὀκάδας. Πόσας ὀκάδας ἐλαίου περιέχει ἕκαστον;**

Λύσις. Τὰ τρία δοχεῖα περιέχουν ἔλαιον (450 − 36) ὀκάδας· ὥστε τὸ ἕνα θὰ περιέχῃ : (450 − 36) ὀκ. : 3 ἢ 414 ὀκ. : 3 ἢ 138 ὀκ.

Ἄλλη λύσις. Κάθε δοχεῖον πλῆρες ἔχει βάρος (450 : 3) ὀκ. ἢ 150 ὀκ., κενὸν δὲ (36 : 3) ὀκ. ἢ 12 ὀκ. Περιέχει λοιπὸν ἔλαιον (450 : 3) ὀκ. − (36 : 3) ὀκ. ἢ 150 ὀκ.−12 ὀκ. ἢ 138 ὀκ.

Παρατηροῦμεν ὅτι καὶ αἱ δύο λύσεις δίδουν τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον· ἄρα εἶναι :

$$(450-36):3=(450:3)-(36:3)$$

Συμπέρασμα. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὴν κάτωθι ἰδιότητα :

II. Διὰ νὰ διαιρέσωμεν διαφορὰν δι' ἀριθμοῦ, δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τὸν μειωτέον καὶ τὸν ἀφαιρετέον τῆς διαφορᾶς καὶ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸ πρῶτον πηλίκον τὸ δεύτερον.

Κατὰ τὴν ἰδιότητα αὐτὴν θὰ εἶναι γενικῶς :

$$\boxed{(\alpha-\beta):\gamma=(\alpha:\gamma)-(\beta:\gamma)}$$

§ 91. Πῶς διαιροῦμεν ἀριθμὸν διὰ γινομένου πολλῶν παραγόντων. *Πρόβλημα.* **Φιλάνθρωπος διέθεσεν 6 000 000 δρχ. διὰ νὰ διανεμηθοῦν ἐξ ἴσου μεταξὺ τῶν 6 τάξεων δύο ἑξαταξίων σχολείων τῆς πατρίδος του πρὸς πλουτισμὸν τῶν βιβλιοθηκῶν των. Νὰ εὑρεθῇ πόσας δραχμὰς θὰ λάβῃ ἑκάστη τάξις;**

Λύσις. Τὰ δύο σχολεῖα ἔχουν 6 × 2 ἢ 2 × 6 ἢ 12 τάξεις καὶ ἑπομένως ἑκάστη τάξις θὰ λάβῃ :

6 000 000 δρχ. : (2 × 6) ἢ 6 000 000 δρχ. : 12 ἢ 500 000 δρχ.

Ἄλλη λύσις. Ἐπειδὴ τὰ σχολεῖα εἶναι 2, ἕκαστον σχολεῖον θὰ λάβῃ 6 000 000 δρχ. : 2 ἢ 3 000 000 δρχ.

Ἂν ἕκαστον σχολεῖον μοιράσῃ τὰς (6 000 000 : 2) δρχ. ἢ 3 000 000 δρχ. εἰς τὰς 6 τάξεις του, εὑρίσκομεν ὅτι ἑκάστη τάξις θὰ λάβῃ :

(6 000 000 : 2) δρχ. : 6 ἢ 3 000 000 δρχ. : 6 ἢ 500 000 δρχ.

Ἐπειδὴ καὶ αἱ δύο λύσεις δίδουν τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν :

$$6\,000\,000 : (2 \times 6) = (6\,000\,000 : 2) : 6.$$

Συμπέρασμα. Ἀπὸ τὴν ἰσότητα αὐτὴν συνάγομεν τὴν κάτωθι ἰδιότητα :

III. Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμὸν διὰ γινομένου ὁσωνδήποτε παραγόντων, δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν διὰ τοῦ πρώτου παράγοντος, τὸ εὑρεθὲν πηλίκον διὰ τοῦ δευτέρου παράγοντος καὶ οὕτω καθεξῆς, μέχρις ὅτου τελειώσουν ὅλοι οἱ παράγοντες τοῦ γινομένου.

Κατὰ τὴν ἰδιότητα αὐτὴν θὰ εἶναι γενικῶς :

$$\boxed{\alpha : (\beta \times \gamma) = (\alpha : \beta) : \gamma}$$

§ 92. Ἰδιότης IV. *Πρόβλημα.* **Ὁ Γεώργιος ἔχει 27 χιλιόδραχμα. Πόσα βιβλία δύναται νὰ ἀγοράσῃ μὲ τὰ χρήματα αὐτά, ἂν ἕκαστον βιβλίον ἀξίζῃ 4 χιλιόδραχμα καὶ πόσα χιλιόδραχμα θὰ τοῦ μείνουν;**

Ἐπίσης ὁ Παῦλος ἔχει 270 χιλιόδραχμα. Πόσα βιβλία δύναται νὰ ἀγοράσῃ μὲ αὐτά, ἐὰν ἕκαστον βιβλίον ἀξίζῃ 40 χιλιόδραχμα καὶ πόσα χιλιόδραχμα θὰ τοῦ μείνουν;

Λύσις. Ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὰς διαιρέσεις, εὑρίσκομεν ὅτι ὁ Γεώργιος καὶ ὁ Παῦλος δύνανται νὰ ἀγοράσουν ἕκαστος ἀπὸ 6 βιβλία καὶ ὅτι εἰς μὲν τὸν Γεώργιον θὰ μείνουν 3 χιλιόδραχμα εἰς δὲ τὸν Παῦλον 30 χιλιόδραχμα.

Παρατηροῦμεν ὅτι ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης τῆς δευτέρας διαιρέσεως εἶναι ἀντιστοίχως δεκαπλάσιος τοῦ διαιρετέου καὶ διαιρέτου τῆς πρώτης διαιρέσεως καὶ ὅτι τὸ πηλίκον καὶ τῶν δύο διαιρέσεων εἶναι τὸ αὐτὸ 6, ἐνῷ τὸ ὑπόλοιπον τῆς δευτέρας διαιρέσεως εἶναι 30, ἤτοι δεκαπλάσιον τοῦ ὑπολοίπου 3 τῆς πρώτης διαιρέσεως.

Συμπέρασμα. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὴν κάτωθι ἰδιότητα :

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν διαιρετέον καὶ διαιρέτην μιᾶς ἀτελοῦς διαιρέσεως ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, τὸ μὲν πηλίκον δὲν μεταβάλλεται, τὸ δὲ ὑπόλοιπον πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

§ 93. Ἰδιότης V. Ἀπὸ τὴν λύσιν τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος συνάγομεν καὶ τὴν κάτωθι ἰδιότητα :

Ἐὰν διαιρέσωμεν διαιρετέον καὶ διαιρέτην ἀτελοῦς διαιρέσεως διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, τὸ μὲν πηλίκον δὲν μεταβάλλεται, τὸ δὲ ὑπόλοιπον διαιρεῖται διὰ τοῦ αυτοῦ ἀριθμοῦ.

§ 94. Πῶς διαιρεῖται γινόμενον δι᾽ ἀριθμοῦ. *Πρόβλημα.* **Κατὰ τὰς ἑορτὰς τῶν Χριστουγέννων οἱ μαθηταὶ τριῶν τάξεων ἑνὸς σχολείου προσέφερον ἀπὸ 600 δραχ. διὰ νὰ μοιρασθοῦν εἰς 4 πτωχὰς οἰκογενείας. Εἶχε δὲ κάθε τάξις ἀπὸ 40 μαθητάς. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ποσόν, τὸ ὁποῖον ἔλαβε κάθε οἰκογένεια.**

Λύσις. Οἱ μαθηταὶ τῶν τριῶν τάξεων ἦσαν :

40 μαθ. × 3 ἢ 120 μαθηταί.

Οἱ μαθηταὶ αὐτοὶ προσέφερον :

600 δρχ. × 40 × 3 ἢ 600 δρχ. × 120 ἢ 72 000 δρχ.

Ἑπομένως κάθε οἰκογένεια ἔλαβεν :

(600 × 40 × 3) δρχ. : 4 ἢ 72 000 δρχ. : 4 ἢ 18 000 δρχ.

Ἄλλη λύσις. Κάθε οἰκογένεια ἔλαβεν 600 δρχ. : 4 ἢ 150 δρχ. ἀπὸ κάθε μαθητήν. Ἀπὸ δὲ τοὺς 40 μαθητὰς μιᾶς τάξεως ἔλαβεν :

(600 : 4) δρχ. × 40 ἢ 150 δρχ. × 40 ἢ 6 000 δρχ.

Καὶ ἀπὸ τὰς τρεῖς τάξεις ἔλαβεν :

(600 : 4) × 40 × 3 δρχ. ἢ 6 000 × 3 δρχ. ἢ 18 000 δρχ.

Ἐπειδὴ καὶ αἱ δύο λύσεις δίδουν τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον θὰ εἶναι :

$$(600 \times 40 \times 3) : 4 = (600 : 4) \times 40 \times 3.$$

Συμπέρασμα. Ἀπὸ τὴν ἰσότητα αὐτὴν συνάγομεν ὅτι :

VI. Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἕνα γινόμενον δι᾽ ἀριθμοῦ, δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν ἕνα μόνον παράγοντα διὰ τοῦ ἀριθμοῦ αὐτοῦ, τοὺς δὲ ἄλλους νὰ ἀφήσωμεν, ὅπως ἔχουν.

Κατὰ τὴν ἰδιότητα αὐτὴν θὰ εἶναι γενικῶς :

$$\boxed{(\alpha \,.\, \beta \,.\, \gamma) : \delta = \alpha \,.\, (\beta : \delta) \,.\, \gamma}$$

§ 95. Ἰδιαιτέρα περίπτωσις. Ἔστω ὅτι ἔχομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸ γινόμενον $(9\times 4\times 16)$ διὰ τοῦ 4.

Κατὰ τὴν προηγουμένην ἰδιότητα θὰ ἔχωμεν :

$(9\times 4\times 16):4=9\times 1\times 16=9\times 16$. Ὥστε :

Διὰ νὰ διαιρέσωμεν γινόμενον πολλῶν παραγόντων διά τινος ἐκ τῶν παραγόντων του, ἀρκεῖ νὰ ἐξαλείψωμεν τὸν παράγοντα αὐτόν.

Σημείωσις. Ἂν περισσότεροι παράγοντες τοῦ γινομένου εἶναι ἴσοι πρὸς τὸν διαιρέτην, ἕνα μόνον ἀπὸ αὐτοὺς θὰ ἐξαλείψωμεν.

Κατὰ τὴν ἰδιότητα αὐτὴν θὰ εἶναι γενικῶς :

$\boxed{(\alpha\times\beta\times\gamma):\beta=\alpha\times\gamma}$ $\boxed{(\alpha\times\beta\times\beta\times\gamma):\beta=\alpha\times\beta\times\gamma}$

Περίληψις τῶν ἰδιοτήτων τῆς διαιρέσεως

1. $(\alpha+\beta+\gamma):\delta=(\alpha:\delta)+(\beta:\delta)+(\gamma:\delta)$
2. $(\alpha-\beta):\delta=(\alpha:\delta)-(\beta:\delta)$
3. $\alpha:(\beta\times\gamma)=(\alpha:\beta):\gamma$
4. $(\alpha\times\beta\times\gamma):\delta=\alpha\times(\beta:\delta)\times\gamma$

3. ΕΚΤΕΛΕΣΙΣ ΤΗΣ ΔΙΑΙΡΕΣΕΩΣ ΔΥΟ ΑΡΙΘΜΩΝ

Κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς διαιρέσεως ἑνὸς ἀριθμοῦ δι' ἄλλου διακρίνομεν τὰς ἑξῆς περιπτώσεις :

§ 96. Περίπτωσις I. Ἂν ὁ διαιρέτης καὶ τὸ πηλίκον εἶναι μονοψήφιοι. Ἔστω ἡ διαίρεσις 27 : 4.

Τὸ πηλίκον θὰ εἶναι μονοψήφιον, διότι, ἂν θέσωμεν δεξιὰ τοῦ διαιρέτου 4 ἕνα 0, προκύπτει ἀριθμὸς 40, ὁ ὁποῖος εἶναι μεγαλύτερος τοῦ διαιρετέου 27. Τὸ πηλίκον λοιπὸν εἶναι μικρότερον τοῦ 10, ἤτοι εἶναι μονοψήφιον.

Διὰ νὰ εὕρωμεν ἑπομένως τὸ μονοψήφιον πηλίκον, ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὸν μεγαλύτερον μονοψήφιον ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ 4 νὰ δίδῃ γινόμενον μικρότερον ἢ ἴσον μὲ τὸν διαιρετέον 27. Εἰς τὸ παράδειγμα αὐτὸ παρατηροῦμεν ὅτι :

$4\times 6=24$, τὸ ὁποῖον εἶναι μικρότερον τοῦ 27, ἐνῷ :

$4 \times 7 = 28$, τὸ ὁποῖον εἶναι μεγαλύτερον τοῦ 27.
Τὸ πηλίκον λοιπὸν εἶναι 6 καὶ τὸ ὑπόλοιπον $27 - 24 = 3$.

§ 97. Περίπτωσις II. Ἂν ὁ διαιρέτης εἶναι πολυψήφιος καὶ τὸ πηλίκον μονοψήφιον. Ἔστω ἡ διαίρεσις 863 : 275.

Τὸ πηλίκον εἶναι μικρότερον τοῦ 10, ἤτοι μονοψήφιον· διότι 275×10 ἢ 2 750 εἶναι μεγαλύτερον τοῦ διαιρετέου 863.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ μονοψήφιον τοῦτο πηλίκον, ἐργαζόμεθα ὅπως εἰς τὴν προηγουμένην περίπτωσιν.

Πράγματι ἀρκεῖ νὰ ζητήσωμεν νὰ εὕρωμεν ποῖος ἀριθμὸς μονοψήφιος πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν διαιρέτην δίδει τὸ μεγαλύτερον γινόμενον, τὸ ὁποῖον νὰ δύναται νὰ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τὸν διαιρετέον.

Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν ὅτι :

$$275 \times 1 = 275, \qquad 275 \times 3 = 825$$
$$275 \times 2 = 550, \qquad 275 \times 4 = 1\,100$$

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι ὁ 3 εἶναι τὸ ζητούμενον πηλίκον. Τὸ δὲ ὑπόλοιπον εἶναι $863 - 825 = 38$.

Ἡ μέθοδος αὕτη πρὸς εὕρεσιν τοῦ πηλίκου εἶναι ἀσφαλής, ἀλλὰ ἐπίπονος. Διὰ τοῦτο πρακτικῶς ἀκολουθοῦμεν ἄλλην πορείαν, τὴν ὁποίαν γνωρίζομεν καὶ διὰ τῆς ὁποίας ἐλαττοῦμεν κατὰ πολὺ τὸν ἀριθμὸν τῶν δοκιμῶν, δηλ. τῶν πολλαπλασιασμῶν.

Πρὸς τοῦτο ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς :

Λαμβάνομεν τὸ πρῶτον πρὸς τὰ ἀριστερὰ ψηφίον τοῦ διαιρέτου (ἐδῶ τὸ 2). Παρατηροῦμεν ὅτι αἱ 2 ἑκατοντάδες τοῦ διαιρέτου χωροῦν εἰς τὰς 8 ἑκατοντάδας τοῦ διαιρετέου 4 φοράς. Δοκιμάζομεν ἔπειτα, ἐὰν ὁ 4 εἶναι τὸ ζητούμενον πηλίκον. Πρὸς τοῦτο πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρέτην 275 ἐπὶ 4 καὶ εὑρίσκομεν γινόμενον 1 100, τὸ ὁποῖον εἶναι μεγαλύτερον τοῦ διαιρετέου. Τὸ πηλίκον λοιπὸν δὲν εἶναι ὁ 4, ἀλλὰ μικρότερον τοῦ 4, ἴσως ὁ 3. Πολλαπλασιάζοντες τὸν διαιρέτην ἐπὶ 3 εὑρίσκομεν γινόμενον 825, τὸ ὁποῖον εἶναι μικρότερον τοῦ διαιρετέου. Τὸ πηλίκον λοιπὸν εἶναι 3.

Ἀφαιροῦμεν τώρα τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου 275 ἐπὶ τὸ πηλίκον 3, δηλ. τὸν 825, ἀπὸ τοῦ διαιρετέου καὶ εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον 38.

Τὸ πηλίκον τοῦ 863 διὰ 275 εἶναι 3 καὶ τὸ ὑπόλοιπον 38.

Διαιρετέος	863	275	διαιρέτης
	825	3	πηλίκον
Ὑπόλοιπον	38		

Παρατήρησις. Εἰς τὴν πρᾶξιν, ἀντὶ νὰ γράψωμεν κάτωθεν τοῦ διαιρετέου τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον, ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὸν διαιρετέον ἕκαστον τῶν ψηφίων τοῦ γινομένου τούτου.

Λέγομεν 3 ἐπὶ 5 15 ἀπὸ 23 8· γράφομεν 8 καὶ κρατοῦμεν 2. 3 ἐπὶ 7 21 καὶ 2 κρατούμενα 23 ἀπὸ 26 3· γράφομεν 3 καὶ κρατοῦμεν 2· 3 ἐπὶ 2 6 καὶ 2 κρατούμενα 8 ἀπὸ 8 μηδέν.

683	275
38	3

§ 98. Περίπτωσις III. Ἐὰν τὸ πηλίκον εἶναι πολυψήφιον.

Ἔστω ἡ διαίρεσις 583 : 32

Τὸ πηλίκον εἶναι μεγαλύτερον τοῦ 10, διότι 32×10 ἢ 320 εἶναι μικρότερον τοῦ 583, ἀλλὰ μικρότερον τοῦ 100, διότι 32×100 ἢ 3 200 εἶναι μεγαλύτερον τοῦ 583. Τὸ πηλίκον λοιπὸν περιλαμβάνεται μεταξὺ τοῦ 10 καὶ 100, ἤτοι εἶναι διψήφιον.

583	32
263	18
7	

Πρὸς εὕρεσιν τούτου ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς:

Χωρίζομεν ἀπὸ τὰ ἀριστερὰ τοῦ διαιρετέου τόσα ψηφία, ὅσα χρειάζονται διὰ νὰ ἀποτελεσθῇ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος νὰ περιέχῃ τοὐλάχιστον 1 φορὰν τὸν διαιρέτην, ἀλλὰ ὀλιγώτερον τῶν 10 φορῶν. Ἐδῶ ἀρκοῦν αἱ 58 δεκάδες, διὰ νὰ διαιρεθοῦν διὰ τοῦ 32. Τὸ πηλίκον τοῦ 58 διὰ 32 εἶναι 1 δεκὰς καὶ τὸ ὑπόλοιπον 26 δεκάδες.

Καταβιβάζομεν ἔπειτα τὸ ἀκόλουθον ψηφίον 3 τοῦ διαιρετέου, ὁπότε ἔχομεν νὰ διαιρέσωμεν 263 μονάδας διὰ 32 (ὁ 263 λέγεται μερικὸς διαιρετέος). Τὸ πηλίκον εἶναι 8 μονάδες καὶ τὸ ὑπόλοιπον 7. Τὸ πηλίκον λοιπὸν τοῦ 583 διὰ 32 εἶναι 18 καὶ τὸ ὑπόλοιπον 7.

Ἐκ τῆς διαιρέσεως αὐτῆς ἕπεται ὅτι:

$$583 = 32 \times 18 + 7 \quad (\S\ 85).$$

Διατυπώσατε τὸν γενικὸν κανόνα τῆς διαιρέσεως δύο ἀριθμῶν.

Σημείωσις. Μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν κάθε μερικῆς διαιρέσεως πρέπει νὰ παρατηρῶμεν, ἂν τὸ ἀντίστοιχον ὑπόλοιπον εἶναι μικρότερον τοῦ διαιρέτου. Ἂν τὸ ὑπόλοιπον εἶναι μεγαλύτερον τοῦ διαιρέτου, τὸ ἀντίστοιχον ψηφίον τοῦ πηλίκου πρέπει νὰ αὐξηθῇ.

Παρατήρησις. Κατὰ τὴν πορείαν τῆς διαιρέσεως εἶναι δυνατὸν νὰ συμβῇ, ὥστε ἕνας μερικὸς διαιρετέος νὰ εἶναι μικρότερος τοῦ διαιρέτου (ὅπως 44 : 74). Λέγομεν τότε ὅτι ὁ διαιρέτης χωρεῖ 0 φορὰς εἰς τὸν διαιρετέον καὶ γράφομεν ἕνα 0 εἰς τὸ πηλίκον καὶ ἔπειτα καταβιβάζομεν τὸ ἀκόλουθον ψηφίον τοῦ διαιρετέου.

22645	74
0445	306
01	

Τοῦτο φαίνεται εἰς τὸ παραπλεύρως παράδειγμα.

§ 99. Δοκιμὴ τῆς διαιρέσεως. Γνωρίζομεν ὅτι (§ 85)

Διαιρετέος = διαιρέτης × πηλίκον + ὑπολοίπῳ.

Ἐκ τῆς ἰσότητος αὐτῆς συμπεραίνομεν τὰ ἑξῆς:

Διὰ νὰ δοκιμάσωμεν, ἐὰν μία διαίρεσις ἔγινε χωρὶς λάθος, πρέπει, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸ πηλίκον καὶ εἰς τὸ γινόμενον προσθέσωμεν τὸ ὑπόλοιπον, νὰ εὕρωμεν τὸν διαιρετέον. Δὲν πρέπει νὰ λησμονῶμεν ὅτι πρέπει πάντοτε τὸ ὑπόλοιπον νὰ εἶναι μικρότερον τοῦ διαιρέτου.

Ἀσκήσεις

Α' Ὁμάς. *Ἀπὸ μνήμης*. 85) Μὲ ποῖον ἀριθμὸν πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν 13, διὰ νὰ εὕρωμεν γινόμενον 52, 104, 130;

86) Νὰ εὕρητε τὰ πηλίκα καὶ τὰ ὑπόλοιπα, ἐὰν ὑπάρχουν, τῶν ἑξῆς διαιρέσεων:

1. 48 : 12	4. 93 : 18	7. 548 : 10
2. 65 : 13	5. 50 : 15	8. 8 700 : 100
3. 58 : 11	6. 72 : 18	9. 8 932 : 1 000

87) Εἰς τὰς κατωτέρω ἰσότητας νὰ ἀντικαταστήσητε τὰ ἐρωτηματικὰ μὲ τοὺς καταλλήλους ἀριθμούς:

19 × ; = 57 23 × ; = 92 ; × 8 = 88

Β' Ὁμάς. *Γραπτῶς*. 88) Νὰ συμπληρώσητε τὸν κάτωθι πίνακα:

	Διαιρετέος	Διαιρέτης	Πηλίκον	Ὑπόλοιπον
1.	;	43	15	42
2.	;	57	143	6
3.	;	103	103	19

89) Ποῖοι εἶναι οἱ διαιρέται τῶν κατωτέρω διαιρέσεων, αἱ ὁποῖαι ἔχουν:

	Διαιρετέον	Διαιρέτην	Πηλίκον	Ὑπόλοιπον
1.	738	;	16	18
2.	1 047	;	12	27

90) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κατωτέρω πράξεων :

1. $(60 : 2) : 3$ 2. $(80 : 4) : 10$ 3. $(36 : 9) : 2$

91) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ κάτωθι πηλίκα κατὰ δύο τρόπους (§ 89) :

1. $(24 + 36 + 60) : 3$ 3. $(75 + 50 + 100) : 25$
2. $(45 + 35 + 25) : 5$ 4. $(20 + 28 + 44) : 4$

92) Νὰ γίνουν αἱ κάτωθι διαιρέσεις κατὰ δύο τρόπους :

1. $(18 - 12) : 3$ 3. $(32 - 24) : 8$
2. $(64 - 36) : 4$ 4. $(324 - 180) : 9$

93) Νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον τῶν κάτωθι διαιρέσεων (§ 94) :

1. $(25 \times 36) : 9$ 3. $(21 \times 14 \times 20) : 7$
2. $(35 \times 8 \times 7) : 8$ 4. $(42 \times 12 \times 7) : 42$

94) Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι διαιρέσεις καὶ νὰ γραφῇ ἡ σχέσις, ἡ ὁποία συνδέει διαιρετέον, διαιρέτην, πηλίκον καὶ ὑπόλοιπον ἑκάστης διαιρέσεως :

1. 3 564 : 15 2. 57 865 : 67
3. 10 056 : 204 4. 47 329 : 508

4. ΣΥΝΤΟΜΙΑΙ ΔΙΑΙΡΕΣΕΩΣ ΚΑΙ ΕΥΡΕΣΙΣ ΤΟΥ ΠΗΛΙΚΟΥ ΔΥΟ ΑΡΙΘΜΩΝ ΑΠΟ ΜΝΗΜΗΣ

§ 100. Συντομία πράξεως. Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν 578 942 : 2 500.

Εἰς τὸ παράδειγμα αὐτὸ κυρίως πρόκειται νὰ εὕρωμεν πόσας φορὰς χωροῦν αἱ 25 ἑκατοντάδες εἰς τὰς 5 789 ἑκατοντάδας τοῦ διαιρετέου

5789(42	25(00
78	231
39	
1442	

Ἐκτελοῦντες αὐτὴν τὴν διαίρεσιν εὑρίσκομεν πηλίκον 231 καὶ ὑπόλοιπον 14 ἑκατοντάδες. Αὐταὶ αἱ 14 ἑκατοντάδες καὶ αἱ 42 μονάδες τοῦ διαιρετέου ἀποτελοῦν τὸ ὑπόλοιπον 1442. Ὥστε:

Ὅταν ὁ διαιρέτης ἔχῃ εἰς τὸ τέλος μηδενικά, τὰ παραλείπομεν, πρὶν ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν· παραλείπομεν ὅμως καὶ ἴσον ἀριθμὸν ψηφίων ἀπὸ τὰ δεξιὰ τοῦ διαιρετέου. Ἐκτελοῦμεν ἔπειτα τὴν διαίρεσιν τοῦ ἀπομένοντος εἰς τὸν διαιρετέον ἀριθμοῦ διὰ τοῦ ἀριθμοῦ, ὁ ὁποῖος μένει εἰς τὸν διαιρέτην· ἀλλὰ εἰς τὸ ὑπόλοιπον, τὸ ὁποῖον θὰ προκύψῃ, γράφομεν δεξιά του τὰ παραλειφθέντα ψηφία τοῦ διαιρετέου.

Παραδείγματα :

$$\begin{array}{r|l} 746(200 & 5(000 \\ \cline{2-2} 24 & 149 \\ 46 & \\ 1\,200 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 549(000 & 43(000 \\ \cline{2-2} 119 & 12 \\ 33\,000 & \end{array}$$

§ 101. Διαίρεσις διὰ 10, 100, 1000 κ.τ.λ. Ἐπειδή :

$$325 = 320 + 5 \text{ ἤ } 325 = 32 \times 10 + 5$$

ἕπεται ὅτι ὁ 32 εἶναι πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 325 διὰ τοῦ 10 καὶ ὁ 5 εἶναι τὸ ὑπόλοιπον.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι τῆς διαιρέσεως 1 478 : 100 πηλίκον εἶναι 14 καὶ ὑπόλοιπον 78. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συμπεραίνομεν ὅτι :

Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμὸν διὰ 10, 100, 1000 κ.τ.λ, χωρίζομεν ἀπὸ τὰ δεξιὰ πρὸς τὰ ἀριστερά του ἕνα, δύο, τρία κ.τ.λ. ψηφία· καὶ ὁ μὲν ἀριθμός, τὸν ὁποῖον ἀποτελοῦν τὰ πρὸς τὰ ἀριστερὰ ψηφία εἶναι τὸ πηλίκον, ὁ δὲ ἀριθμός, τὸν ὁποῖον ἀποτελοῦν τὰ ἄλλα πρὸς τὰ δεξιὰ ψηφία, εἶναι τὸ ὑπόλοιπον.

§ 102. Διαίρεσις διὰ 2. Διὰ νὰ εὑρίσκωμεν ἀπὸ μνήμης τὰ πηλίκα τῶν διψηφίων ἀριθμῶν διὰ 2, εἶναι καλὸν νὰ ἐνθυμούμεθα τὰ διπλάσια τῶν 50 πρώτων ἀριθμῶν.

Τὸ ἀκριβὲς πηλίκον ἑνὸς ἀριθμοῦ διὰ 2 λέγεται **ἥμισυ** αὐτοῦ. Π. χ. ἐπειδὴ 34 × 2 = 68, τὸ ἥμισυ τοῦ 68 εἶναι 34.

Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ εὕρωμεν τὸ ἥμισυ ἑνὸς οἱουδήποτε ἀριθμοῦ, ἂν ἐργασθῶμεν εἰς τὰ κάτωθι παραδείγματα :

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἥμισυ τοῦ 748, λέγομεν : Τὸ ἥμισυ τοῦ 740 εἶναι 370· τὸ ἥμισυ τοῦ 8 εἶναι 4· ἄρα τὰ ἥμισυ τοῦ 748 εἶναι 374.

Ἐπίσης, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἥμισυ τοῦ 374 λέγομεν : Τὸ ἥμισυ τοῦ 360 εἶναι 180. τὸ ἥμισυ τοῦ 14 εἶναι 7· ἄρα τὸ ἥμισυ τοῦ 374 εἶναι 187.

Ὁμοίως διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἥμισυ τοῦ 3 286, λέγομεν : Τὸ ἥμισυ τοῦ 3 200 εἶναι 1 600· τὸ ἥμισυ τοῦ 86 εἶναι 43· ἄρα τὸ ἥμισυ τοῦ 3 286 εἶναι 1 643.

Διαίρεσις διὰ 4. Διαιροῦμεν τὸν ἀριθμὸν διὰ 2 καὶ τὸ ἐξαγόμενον διαιροῦμεν πάλιν διὰ 2.

Οὕτω, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον 72 : 4 λέγομεν 72 : 2 = 36· 36 : 2 = 18· ἑπομένως 72 : 4 = 18.

Ὁμοίως διὰ τὸ 3 656 : 4 λέγομεν: 3 656 : 2=1 828· 1828 : 2=914 ἄρα 3 656 : 4 = 914.

§ 103. Διαίρεσις ἀριθμοῦ διὰ 9, 99, 999 κ.τ.λ. *Πρόβλημα.* **Κατὰ τὰς ἑορτὰς τῶν Χριστουγέννων μία ἐνορία τῶν Ἀθηνῶν συνέλεξε 2 565 875 δραχμὰς μὲ ἔρανον τῶν εὐπόρων ἐνοριτῶν της. Τὸ ποσὸν αὐτὸ ἐπρόκειτο νὰ μοιράσῃ ἐξ ἴσου εἰς 100 πτωχοὺς τῆς ἐνορίας της. Ἐπειδὴ ὅμως ἕνας ἀπὸ αὐτοὺς ἀνεχώρησε διὰ τὴν ἰδιαιτέραν του ἐπαρχίαν, τὰ χρήματα διενεμήθησαν εἰς τοὺς ἄλλους 99 πτωχούς. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ποσόν, τὸ ὁποῖον ἔλαβεν ὁ κάθε πτωχός.**

Λύσις. Εἶναι φανερὸν ὅτι κάθε φτωχὸς ἔλαβε: 2 565 875 δρχ. : 99 Τὸ πηλίκον αὐτὸ δυνάμεθα νὰ τὸ εὕρωμεν ὡς ἑξῆς: Ἂν οἱ πτωχοὶ ἦσαν 100, θὰ ἐλάμβανεν ἕκαστος ἀπὸ 25 658 δραχ. καὶ θὰ ἐπερίσσευον 75 δρχ. Ἐπειδὴ δὲ ἔμεινε τὸ μερίδιον τοῦ ἑκατοστοῦ πτωχοῦ, ὑπάρχει ὁλικὸν ὑπόλοιπον 25 658 + 75 = 25 733 δραχμαί.

Ἀπὸ αὐτάς, κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον, λαμβάνει ἕκαστος 257 δραχ. καὶ μένουν 33 δρχ. Αὐταὶ μὲ τὸ μερίδιον τοῦ ἑκατοστοῦ πτωχοῦ ἀποτελοῦσιν ὁλικὸν ὑπόλοιπον

257 + 33 = 290 δρχ·

Ἀπὸ αὐτάς, κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον, λαμβάνει ἕκαστος 2 δραχ. καὶ μένουν 90 δραχ. Αὐταὶ δὲ μὲ τὸ μερίδιον τοῦ ἑκατοστοῦ πτωχοῦ ἀποτελοῦν τελικὸν ὑπόλοιπον 92 δραχ.

Διάταξις τῆς πράξεως

25658(75	99
75	25658
257(33	257
33	2
2(90	25917
90	
92	

Ἔλαβε λοιπὸν κάθε πτωχὸς 25 658 + 257 + 2 = 25 917 δραχ. καὶ ἐπερίσσευσαν 92 δραχ.

Κάθε φορὰν λοιπὸν τὸ μεριστέον ποσὸν διαιροῦμεν διὰ 100, τὸ δὲ μερίδιον τοῦ ἑκατοστοῦ φέρομεν ὡς ὑπόλοιπον καὶ δι' αὐτὸ τὸ προσθέτομεν μὲ τὸ ἄλλο ὑπόλοιπον. Τελειώνει δὲ ἡ πρᾶξις, ὅταν καταλήξωμεν εἰς ὑπόλοιπον μικρότερον ἀπὸ τὸν διαιρέτην.

Ἂν ὁ διαιρέτης εἶναι 9, κάθε φορὰν διαιροῦμεν διὰ 10. Ἂν δὲ εἶναι 999, διαιροῦμεν κάθε φορὰν διὰ 1 000 κ.τ.λ.

5. ΣΥΝΤΟΜΙΑΙ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ ΚΑΙ ΔΙΑΙΡΕΣΕΩΣ

§ 104. Πολλαπλασιασμὸς ἀριθμοῦ ἐπὶ 5, 50, 500.

Πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀριθμὸν ἐπὶ 10, 100, 1000 καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ 2.

Π.χ. 385 × 5
Ἐπειδὴ 385 × 10 = 3 850
καὶ 3 850 : 2 = 1 925
ἕπεται ὅτι 385 × 5 = 1 925.
85 × 50.
Ἐπειδὴ 85 × 100 = 8 500
καὶ 8 500 : 2 = 4 250
ἕπεται ὅτι 85 × 50 = 4 250.

Διαίρεσις ἀριθμοῦ διὰ 5, 50, 500.

Διπλασιάζομεν τὸν ἀριθμὸν καὶ διαιροῦμεν τὸ ἐξαγόμενον διὰ 10, 100, 1 000.

Π.χ. 370 : 5.
Ἐπειδὴ 370 × 2 = 740
καὶ 740 : 10 = 74
ἕπεται ὅτι 370 : 5 = 74.
1 450 : 50.
Ἐπειδὴ 1 450 × 2 = 2 900
καὶ 2 900 : 100 = 29
ἕπεται ὅτι 1 450 : 50 = 29.

§ 105. Πολλαπλασιασμὸς ἀριθμοῦ ἐπὶ 25, 250.

Πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀριθμὸν ἐπὶ 100, 1 000 καὶ διαιροῦμεν τὸ ἐξαγόμενον διὰ 4.

56 × 25· 56 × 100 = 5 600
5 600 : 4 = 1 400.
56 × 250· 56 × 1 000 = 56 000
56 000 : 4 = 14 000

Διαίρεσις ἀριθμοῦ διὰ 25, 250.

Πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀριθμὸν ἐπὶ 4 καὶ διαιροῦμεν τὸ γινόμενον διὰ 100, 1 000

375 : 25· 4 φορὰς 375 = 1 500.
1 500 : 100 = 15.

Ἀσκήσεις

95) Νὰ ἐκτελεσθοῦν ἀπὸ μνήμης αἱ κάτωθι διαιρέσεις:

1.	564 : 10	3 745 : 100	84 965 : 1 000
2.	648 : 2	746 : 2	5 636 : 2
3.	524 : 4	840 : 4	5 760 : 4

96) Νὰ ἐκτελεσθοῦν ἀπὸ μνήμης αἱ κάτωθι πράξεις:

1.	34 × 5	536 × 5	64 × 50	72 × 500
2.	635 : 5	840 : 5	2 356 : 50	69 500 : 500
3.	35 × 25	42 × 25	68 × 25	72 × 25
4.	725 : 25	750 : 25	32 750 : 250	96 000 : 250

97) Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι διαιρέσεις (γραπτῶς):
1. 37 542 : 4 200 2. 80 645 : 9 000 3. 38 500 : 600

6. ΧΡΗΣΙΣ ΤΗΣ ΔΙΑΙΡΕΣΕΩΣ ΠΡΟΣ ΛΥΣΙΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

§ 106. *Πρόβλημα 1ον*. **Τὰ 4 μέτρα ἑνὸς ὑφάσματος τιμῶνται 96 χιλιόδραχμα. Πόσον τιμᾶται τὸ μέτρον τοῦ αὐτοῦ ὑφάσματος;**

Λύσις. Ἀφοῦ τὰ 4 μέτρα τιμῶνται 96 χιλιόδρ. τὸ 1 μ. θὰ τιμᾶται 4 φορὰς ὀλιγώτερον τῶν 96 χιλιόδρ., ἤτοι:

96 χιλιόδρ. : 4 = 24 χιλιόδρ.

Πρόβλημα 2ον. **Ἐργάτης ἔλαβεν 125 χιλιόδραχμα δι' ἐργασίαν 5 ἡμερῶν. Πόσον ἦτο τὸ ἡμερομίσθιόν του;**

Λύσις. Ἀφοῦ εἰς 5 ἡμέρας λαμβάνει 125 χιλιόδρ., εἰς 1 ἡμέραν θὰ λάβῃ 5 φορὰς ὀλιγώτερον τῶν 125 χιλιόδρ., ἤτοι:

125 χιλιόδρ. : 5 = 25 χιλιόδρ.

§ 107. Εἰς τὰ ἀνωτέρω δύο προβλήματα δίδεται ἡ τιμὴ τῶν πολλῶν μονάδων καὶ ζητεῖται ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος ὁμοειδοῦς πρὸς ἐκείνας. Ἀπὸ τὸν τρόπον δὲ τῆς λύσεως αὐτῶν συνάγομεν ὅτι:

Ὅταν γνωρίζομεν τὴν τιμὴν πολλῶν μονάδων καὶ θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν μιᾶς μονάδος, ὁμοειδοῦς πρὸς ἐκείνας, διαιροῦμεν (μερίζομεν) τὴν τιμὴν τῶν πολλῶν μονάδων διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μονάδων τούτων.

Κάθε μία ἀπὸ τὰς προηγουμένας διαιρέσεις εἶναι μερισμός.

Εἰς αὐτὰς ὁ διαιρετέος καὶ διαιρέτης εἶναι ἑτεροειδεῖς· **τὸ δὲ πηλίκον εἶναι πάντοτε ὁμοειδὲς μὲ τὸν διαιρετέον.**

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω, ἐὰν α μονάδες τιμῶνται β δραχμάς, ἡ 1 μονὰς ἀπὸ αὐτὰς τιμᾶται β : α δραχμάς.

§ 108. *Πρόβλημα 1ον*. **Τὸ μέτρον ἑνὸς ὑφάσματος τιμᾶται 18 χιλιόδραχμα. Πόσα μέτρα τοῦ αὐτοῦ ὑφάσματος θὰ ἀγοράσωμεν μὲ 126 χιλιόδραχμα;**

Λύσις. Εἶναι φανερὸν ὅτι θὰ ἀγοράσωμεν τόσα μέτρα, ὅσας φορὰς χωροῦν τὰ 18 χιλιόδρ. εἰς τὰ 126 χιλιόδρ. Διὰ νὰ εὕρωμεν δὲ αὐτό, πρέπει νὰ κάμωμεν διαίρεσιν (μέτρησιν).

Διαιροῦντες τὸν 126 διὰ 18 εὑρίσκομεν πηλίκον 7 καὶ ὑπόλοιπον μηδέν. Ὥστε μὲ 126 χιλιόδρ. θὰ ἀγοράσωμεν 7 μ. ὑφάσματος.

Πρόβλημα 2ον. **Πόσας ἑβδομάδας κάμνουν 105 ἡμέραι;**

Λύσις. Ἐπειδὴ 1 ἑβδομὰς ἔχει 7 ἡμέρας, εἶναι φανερὸν ὅτι πρέπει νὰ ζητήσωμεν νὰ εὕρωμεν πόσας φορὰς ὁ 7 χωρεῖ εἰς τὸν 105, δηλ. νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον τοῦ 105 διὰ 7.

Διαιροῦντες τὸ 105 διὰ 7 εὑρίσκομεν πηλίκον 15. Ὥστε αἱ 105 ἡμέραι κάμνουν 15 ἑβδομάδας.

§ 109. Εἰς τὰ ἀνωτέρω προβλήματα δίδεται ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος καὶ ἡ τιμὴ τῶν πολλῶν μονάδων ὁμοειδῶν πρὸς αὐτὴν καὶ ζητεῖται τὸ πλῆθος τῶν πολλῶν μονάδων.

Διὰ νὰ εὕρωμεν δὲ τὸ ζητούμενον, διῃρέσαμεν τὴν τιμὴν τῶν πολλῶν μονάδων διὰ τῆς τιμῆς τῆς μιᾶς μονάδος. Ἀπὸ τὸν τρόπον δὲ τῆς λύσεως αὐτῶν συνάγομεν ὅτι:

Ὅταν γνωρίζωμεν τὴν τιμὴν τῆς μιᾶς μονάδος καὶ τὴν τιμὴν τῶν πολλῶν μονάδων, ὁμοειδῶν πρὸς αὐτήν, καὶ θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ πλῆθος τῶν πολλῶν αὐτῶν μονάδων, διαιροῦμεν τὴν τιμὴν τῶν πολλῶν μονάδων διὰ τῆς τιμῆς τῆς μιᾶς μονάδος.

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω, ἐὰν ἡ μία ὀκᾶ ἑνὸς πράγματος τιμᾶται α δραχμάς, μὲ β δραχμὰς θὰ ἀγοράσωμεν β : α ὀκάδας.

Εἰς τὴν μέτρησιν τὸ πηλίκον πρέπει νὰ λαμβάνῃ τὴν ὀνομασίαν, τὴν ὁποίαν ὁρίζει τὸ πρόβλημα.

§ 110. *Πρόβλημα.* **Τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν εἶναι 600 καὶ ὁ ἕνας ἐξ αὐτῶν εἶναι ὁ 12. Ποῖος εἶναι ὁ ἄλλος;**

Λύσις. Ἐπειδὴ $600 : 12 = 50$, θὰ εἶναι $600 = 12 \times 50$. Ὁ ἄλλος λοιπὸν παράγων εἶναι ὁ 50. Ἀπὸ τὸν τρόπον δὲ τῆς λύσεως αὐτοῦ συνάγομεν ὅτι:

Ἐὰν γνωρίζομεν τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν καὶ τὸν ἕνα ἐξ αὐτῶν καὶ θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸν ἄλλον, διαιροῦμεν τὸ γινόμενον διὰ τοῦ γνωστοῦ παράγοντος.

Προβλήματα διαιρέσεως

Α΄ Ὁμάς. 98) Μία οἰκογένεια ἐξοδεύει 728 550 δρχ. κατὰ μῆνα (30 ἡμέραι). Πόσας δραχμὰς ἐξοδεύει τὴν ἡμέραν;

99) Οἰκογενειάρχης ἐξοικονομεῖ 2 370 450 δρχ. κατ' ἔτος. Μετὰ πόσα ἔτη θὰ δυνηθῇ νὰ ἀγοράσῃ ἕνα κτῆμα, τὸ ὁποῖον τιμᾶται 7 111 350 δραχμάς ;

100) Εἰς τὸ ὕδωρ ὁ ἦχος διανύει 21 525 μ. εἰς 15 δευτερόλεπτα. Πόση εἶναι ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου εἰς τὸ ὕδωρ κατὰ δευτερόλεπτον ;

101) Εἰς τὸν ἀέρα ὁ ἦχος διανύει 8 500 μ. εἰς 25 δευτερόλεπτα. Πόση εἶναι ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου εἰς τὸν ἀέρα κατὰ δευτερόλεπτον ;

102) Ὁ Ἥλιος ἀπέχει ἀπὸ τὴν Γῆν 150 000 000 χιλιόμετρα. Τὸ δὲ φῶς διατρέχει 300 000 χιλιόμετρα εἰς ἕνα δευτερόλεπτον. Νὰ εὕρητε πόσον χρόνον χρειάζεται τὸ φῶς, διὰ νὰ φθάσῃ ἀπὸ τὸν Ἥλιον εἰς τὴν Γῆν.

Β' Ὁ μ ά ς. 103) Μὲ 1 200 δρχ. ἀγοράζομεν 8 λεμόνια. Πόσον ἀξίζει τὸ καθένα ; Καὶ πόσα λεμόνια ἀγοράζομεν μὲ 3 χιλιόδρ. ;

104) Ὁ οἶνος ἑνὸς βαρελίου ἀξίζει 692 250 δρχ. Ἐξάγομεν 85 ὀκ. ἐκ τοῦ οἴνου καὶ τὸ ὑπόλοιπον ἀξίζει 416 000 δρχ. Πόσας ὀκάδας οἴνου χωρεῖ τὸ βαρέλιον;

105) Ἠγόρασέ τις τεμάχιον ὑφάσματος πρὸς 190 χιλιόδρ. τὰ 5 μέτρα καὶ τὸ ἐπώλησε πρὸς 495 χιλιόδρ. τὰ 11 μέτρα. Ἐκ τῆς πωλήσεως ἐκέρδισε 224 χιλιόδρ. Πόσα μέτρα ὑφάσματος εἶχεν ἀγοράσει ;

106) Ἠγόρασέ τις ὕφασμα ἀντὶ 1 263 900 δρχ. Νὰ εὑρεθῇ πόσα μέτρα ἠγόρασεν, ἐὰν γνωρίζωμεν ὅτι,ἐὰν ἠγόραζε 5 μέτρα ἐπὶ πλέον, θὰ ἐπλήρωνε 526 625 δρχ. περισσότερον.

107) Δύο ἔμποροι ἐπλήρωσαν εἰς τὸ τελωνεῖον 4 500 000 δρχ. ὡς φόρον εἰσαγωγῆς 250 μέτρων ὑφάσματος. Νά εὑρεθῇ πόσα μέτρα εἰσήγαγεν ἕκαστος, ἐὰν γνωρίζωμεν ὅτι ὁ πρῶτος ἐπλήρωσε 3 150 000 δρχ. καὶ ὁ δεύτερος τὸ ὑπόλοιπον.

108) Γεωργὸς ἐπώλησε 564 ὀκ. σίτου ἀντὶ 1 776 600 δρχ. καὶ κριθὴν ἀντὶ 441 600 δρχ. Νὰ εὑρεθῇ πόσας ὀκάδας κριθῆς ἐπώλησεν, ἂν γνωρίζωμεν ὅτι ἡ ὀκᾶ τοῦ σίτου ἐπωλήθη κατὰ 850 δρχ. ἀκριβώτερον τῆς κριθῆς.

109) Κτηνοτρόφος ἐπώλησεν 19 πρόβατα καὶ 37 ἀρνιὰ ἀντὶ 3 949 340 δραχ. Τὰ πρόβατα ἐπώλησεν πρὸς 94 825 δρχ. τὸ ἕνα Πόσον ἐπώλησε κάθε ἀρνίον ;

110) Ἕνα ὑφαντουργεῖον ἔχει 10 ἀργαλιοὺς καὶ κάθε ἕνας ὑφαίνει 208 μέτρα ὑφάσματος τὴν ἡμέραν. Νὰ εὕρητε εἰς πόσας ἡμέρας παράγει 52 000 μέτρα τὸ ὑφαντουργεῖον τοῦτο.

Γ΄ Ὁ μ ά ς. 111) Ἐπὶ ποῖον ἀριθμὸν πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν 97 διὰ νὰ λάβωμεν ἀριθμὸν κατὰ 71 μεγαλύτερον τοῦ 13 800 ;

112) Πόσας φορὰς πρέπει νὰ ἐπαναλάβωμεν τὸν 309 διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ἀριθμὸν 18 231 ;

113) Ἐὰν γνωρίζῃς ὅτι τὸ πηλίκον τῆς τελείας διαιρέσεως $\alpha : \beta$ εἶναι π, ἠμπορεῖς νὰ εἴπῃς πόσον θὰ εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως $(\alpha \times \gamma) : (\beta \times \gamma)$; Καὶ διατί;

114) Νὰ ὑπολογίσητε τὸ $(\alpha \times \beta + \gamma) : \gamma$, ἐὰν $\alpha = 15$, $\beta = 32, \gamma = 8$

Προβλήματα ἐπὶ τῶν 4 πράξεων τῶν ἀκεραίων

Α΄ Ὁ μ ά ς. 115) Ἔμπορος ἠγόρασε 265 ὀκ. σίτου ἀντὶ 543 250 δραχ. Πόσον πρέπει νὰ πωλήσῃ τὸν σῖτον διὰ νὰ κερδίσῃ 300 δρχ. κατ᾽ ὀκᾶν ;

116) Ἔμπορος ἠγόρασεν 135 πήχεις ὑφάσματος πρὸς 28 χιλιόδρ. τὸν πῆχυν. Πόσον πρέπει νὰ πωλήσῃ τὸν πῆχυν τοῦ ὑφάσματος, διὰ νὰ κερδίσῃ ἐν ὅλῳ 405 χιλιόδρ. καὶ πόσον θὰ εἰσπράξῃ ἐκ τῆς πωλήσεως ;

117) Ἔμπορος ἠγόρασε 15 τόπια ὑφάσματος τῶν 40 μ. πρὸς 22 χιλιόδρ. τὸ μέτρον. Ἐπώλησε κατ᾽ ἀρχὰς 250 μ. πρὸς 26 χιλιόδρ. τὸ μέτρον, ἔπειτα 260 μ. πρὸς 28 χιλιόδρ. τὸ μέτρον καὶ τέλος τὸ ὑπόλοιπον πρὸς 25 χιλιόδρ. τὸ μέτρον. Πόσα ἐκέρδισεν ἐν ὅλῳ καὶ πόσον κατὰ μέτρον;

Β΄ Ὁ μ ά ς. 118) Μία μοδίστα εἰσπράττει 380 χιλιόδρ. καθ᾽ ἑβδομάδα καὶ ἐξοδεύει 25 χιλιόδρ. τὴν ἡμέραν. Μετὰ πόσον χρόνον θὰ ἐξοικονομήσῃ 1 845 000 δρχ. διὰ νὰ ἀγοράσῃ μίαν ραπτομηχανήν;

119) Μία ὑπηρέτρια λαμβάνει 120 000 δρχ. τὸν μῆνα. Ἀπὸ αὐτὰς δαπανᾷ 20 000 δρχ. τὸν μῆνα καὶ στέλλει εἰς τοὺς γέροντας γονεῖς της 40 000 δραχ. τὸν μῆνα. Πόσον χρόνον πρέπει νὰ ἐργασθῇ διὰ νὰ οἰκονομήσῃ 480 000 δραχμάς ;

120) Μία χωρικὴ ἔφερεν εἰς μίαν ἐπαρχιακὴν πόλιν 100 αὐγὰ καὶ ἐπώλησεν αὐτὰ πρὸς 1 200 δραχμὰς τὸ ζεῦγος. Ἔπειτα δὲ ἠγόρασε 2 ὀκ. σαποῦνι πρὸς 4 500 δρχ. τὴν ὀκᾶν καὶ 2 ὀκ. ρύζι πρὸς 9 000 δρχ. τὴν ὀκᾶν. Νὰ εὕρητε πόσα χρήματα ἐπερίσσευσαν εἰς αὐτήν.

121) Ἕνας γεωργὸς ἐπώλησε 2 000 ὀκάδας σίτου πρὸς 1 800

δραχ. τὴν ὀκᾶν. Ἀπὸ τὰ χρήματα δέ, τὰ ὁποῖα ἔλαβεν, ἐπλήρωσεν 650 000 δρχ., τὰς ὁποίας ἐχρεώστει εἰς τὴν Ἀγροτικὴν Τράπεζαν, καὶ ἐκράτησεν 1 600 000 δραχ. διὰ τὰς ἀνάγκας τῆς οἰκογενείας του. Μὲ τὰ ἄλλα δὲ ἠγόρασε πρόβατα πρὸς 270 000 δραχ. τὸ ἕνα. Νὰ εὕρητε πόσα πρόβατα ἠγόρασεν.

122) Ἕνας φιλάνθρωπος κατὰ τὴν ἡμέραν τῶν γενεθλίων τοῦ υἱοῦ του ἐμοίρασε 500 000 δραχ. Ἀπὸ αὐτὰς ἔδωκεν ἀπὸ 50 000 δραχ. εἰς κάθε μίαν ἀπὸ τὰς 4 ἀπόρους οἰκογενείας τῆς συνοικίας του, τὰς δὲ ἄλλας ἐμοίρασεν ἐξ ἴσου εἰς 10 ἀπόρους συμμαθητὰς τοῦ υἱοῦ του. Νὰ εὕρητε πόσα χρήματα ἔλαβε κάθε ἕνας ἀπὸ αὐτούς.

Γ' Ὁμάς. 123) Κτηνοτρόφος ἠγόρασε 575 ὀκάδας χόρτου ξηροῦ πρὸς 950 δρχ. τὴν ὀκᾶν καὶ 185 ὀκ. κριθῆς πρὸς 1 400 δρχ. τὴν ὀκᾶν. Ἀπέναντι τῆς τιμῆς αὐτῆς ἔδωσε 3 ὀκ. βουτύρου πρὸς 36 500 δρχ. τὴν ὀκᾶν, 25 ὀκ. τυροῦ πρὸς 12 250 δρχ. τὴν ὀκᾶν καὶ τὸ ὑπόλοιπον εἰς μετρητά. Πόσα μετρητὰ ἔδωκεν ;

124) Κτηνοτρόφος ἠγόρασεν 125 ἀρνιὰ πρὸς 48 000 δρχ. τὸ ἕνα. Πωλεῖ τὰ 18 πρὸς 52 000 δρχ. τὸ ἕνα, ἔπειτα 45 πρὸς 53 500 δρχ. τὸ ἕνα. Ἀπέθανον ἐξ ἀσθενείας 5 ἀρνιὰ καὶ τὰ ὑπόλοιπα ἐπώλησε πρὸς 57 800 δρχ. τὸ ἕνα. Πόσον ἐκέρδισεν, ἐὰν τὰ ἔξοδα τῆς συντηρήσεώς των ἦσαν 310 650 δραχμαί ;

Δ' Ὁμάς. 125) 20 ἐργάται καὶ 12 ἐργάτριαι ἔλαβον δι' ἐργασίαν 6 ἡμερῶν 3 032 400 δρχ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἡμερομίσθιον ἑκάστου ἐργάτου καὶ ἑκάστης ἐργατρίας, ἐὰν γνωρίζωμεν ὅτι τὸ ἡμερομίσθιον τοῦ ἐργάτου ἦτο κατὰ 4 150 δρχ. μεγαλύτερον τοῦ ἡμερομισθίου τῆς ἐργατρίας ;

126) Οἰκογενειάρχης τις ἠγόρασε ζάκχαριν πρὸς 11 600 δρχ. τὴν ὀκᾶν καὶ ἴσην ποσότητα καφὲ πρὸς 19 800 δρχ. τὴν ὀκᾶν καὶ ἐπλήρωσε διὰ τὸν καφὲ 24 600 δρχ. περισσότερον παρ' ὅ,τι ἐπλήρωσε διὰ τὴν ζάκχαριν. Νὰ εὑρεθῇ πόσας ὀκάδας ἠγόρασεν ἐξ ἑκάστου εἴδους καὶ πόσον ἐπλήρωσε δι' ἕκαστον εἶδος.

127) Οἰκογενειάρχης ἔδωκεν 136 850 δρχ. καὶ ἠγόρασεν ἔλαιον καὶ ζυμαρικά, ἴσον ἀριθμὸν ὀκάδων ἐξ ἑκάστου εἴδους. Τὸ ἔλαιον ἐτιμᾶτο 14 200 δρχ. ἡ ὀκᾶ καὶ τὰ ζυμαρικὰ 5 350 δρχ. ἡ ὀκᾶ. Πόσας ὀκάδας ἠγόρασεν ἐξ ἑκάστου εἴδους ;

128) Τρεῖς ἀδελφοὶ ἐπλήρωσαν ἕνα χρέος τοῦ πατρός των ἀνερχόμενον εἰς 920 500 δρχ. Οἱ δύο μεγαλύτεροι ἐπλήρωσαν 57 500

δρχ. ἕκαστος περισσότερον τοῦ νεωτέρου. Πόσον ἐπλήρωσεν ἕκαστος;

129) Μία ἀγελὰς μὲ τὸν μόσχον της ἐπωλήθησαν ἀντὶ 1 732 350 δρχ. Ἡ ἀξία τῆς ἀγελάδος ἦτο 7πλασία τῆς ἀξίας τοῦ μόσχου σὺν 4 350 δρχ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀξία ἑκάστου ζώου.

130) Θεῖος μοιράζει χρηματικὸν ποσὸν μεταξὺ ἑνὸς ἀνεψιοῦ καὶ μιᾶς ἀνεψιᾶς του. Τὸ μερίδιον τῆς ἀνεψιᾶς εἶναι κατὰ 255 500 δρχ. μεγαλύτερον τοῦ μεριδίου τοῦ ἀνεψιοῦ. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ δύο μερίδια, ἂν γνωρίζωμεν ὅτι τὸ μερίδιον τῆς ἀνεψιᾶς ἦτο 8πλάσιον τοῦ μεριδίου τοῦ ἀνεψιοῦ.

131) 30 μαθηταὶ ἔκαμαν μίαν ἐκδρομὴν μὲ κοινὰ ἔξοδα. Τὰ ἔξοδα ἀνῆλθον εἰς 216 χιλιόδρχ. Μερικοὶ ὅμως ἀπὸ τοὺς μαθητὰς δὲν ἠδυνήθησαν νὰ πληρώσουν τὸ ἀναλογοῦν μερίδιον τῶν ἐξόδων. Κατὰ συνέπειαν οἱ ὑπόλοιποι ἐπλήρωσαν 1 440 δρχ. ἐπὶ πλέον ἕκαστος. Πόσοι ἦσαν οἱ μαθηταὶ οἱ μὴ δυνηθέντες νὰ πληρώσουν ;

132) Ἔμπορος ἐχώρισεν ὕφασμα εἰς δύο τεμάχια, τὰ ὁποῖα διέφερον κατὰ 42 μέτρα. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ μήκη τῶν τεμαχίων, ἂν γνωρίζωμεν ὅτι τὸ πρῶτον ἦτο 4πλάσιον κατὰ μῆκος ἀπὸ τὸ δεύτερον.

133) Δύο τεμάχια ὑφάσματος ἔχουν τὸ αὐτὸ μῆκος. Τὸ μέτρον τοῦ α' τεμαχίου τιμᾶται 85 χιλιόδρ, τοῦ δὲ β' 56 χιλιόδρ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος των, ἂν γνωρίζωμεν ὅτι τὸ α' τιμᾶται 928 χιλιόδρ. περισσότερον τοῦ β'.

134) Ἐσκέφθην ἀριθμόν· τὸν διπλασιάζω καὶ εἰς τὸ ἐξαγόμενον προσθέτω 20 καὶ εὑρίσκω ἄθροισμα 90. Ποῖον ἀριθμὸν ἐσκέφθην ;

Ϛ' Ὁ μ ά ς. 135) Ποδηλάτης καὶ πεζοπόρος ἀναχωροῦν τὴν 8ην πρωϊνήν, ὁ μὲν ἐκ τῆς πόλεως Α, ὁ δὲ ἐκ τῆς πόλεως Β καὶ διευθύνονται πρὸς συνάντησίν των. Ὁ ποδηλάτης διανύει 16 χιλιόμ. τὴν ὥραν καὶ ὁ πεζοπόρος 5. Πότε καὶ εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τῆς πόλεως Α θὰ συναντηθοῦν, ἐὰν ἡ ἀπόστασις ΑΒ εἶναι 105 χλμ. ;

136) Ποδηλάτης, ὁ ὁποῖος ἀνεχώρησεν τὴν 7ην πρωινὴν ἐκ τῆς πόλεως Α μὲ ταχύτητα 16 χλμ. τὴν ὥραν, θέλει νὰ φθάσῃ πεζόν, ὁ ὁποῖος προηγεῖται αὐτοῦ κατὰ 55 χλμ. Κατὰ ποίαν ὥραν καὶ εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τῆς πόλεως Α ὁ ποδηλάτης θὰ φθάσῃ τὸν πεζόν, ἂν γνωρίζωμεν ὅτι ὁ πεζὸς κινεῖται μὲ ταχύτητα 5 χλμ. τὴν ὥραν;

137) Ἕνα ἀτμόπλοιον τρέχει 12 μίλια τὴν ὥραν. Πόσας ὥρας θὰ κάμῃ ἀπὸ τὸν Πειραιᾶ διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὸν Βόλον, ὁ ὁποῖος ἀπέχει 192 μίλια ; Καὶ ἂν ἀναχωρήσῃ τὴν 8ην πρὸ μεσημβρίας, ποίαν ὥραν θὰ φθάσῃ ;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ϛ'

ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

1. ΟΡΙΣΜΟΙ

§ 111. *Πρόβλημα 1ον.* **Μία ἐξοχικὴ οἰκία ἔχει 3 δωμάτια. Κάθε δωμάτιον ἔχει 3 παράθυρα. Πόσα παράθυρα ἔχει ἡ οἰκία αὐτή;**

Λύσις. Ἀφοῦ τὸ ἕνα δωμάτιον ἔχει 3 παράθυρα, τὰ 3 δωμάτια θὰ ἔχουν τρεῖς φορὰς περισσότερα παράθυρα, ἤτοι:

$3 \times 3 = 9$ παράθυρα.

§ 112. *Πρόβλημα 2ον.* **Ἕνα κιβώτιον ἔχει 4 στρώματα σάπωνος. Κάθε στρῶμα ἔχει 4 σειρὰς καὶ κάθε σειρὰ ἔχει 4 πλάκας σάπωνος. Πόσας πλάκας ἔχει τὸ κιβώτιον αὐτό;**

Λύσις. Ἀφοῦ ἡ μία σειρὰ ἔχει 4 πλάκας, αἱ 4 σειραὶ κάθε στρώματος ἔχουν 4×4 πλάκας. Τὰ δὲ 4 στρώματα ἔχουν:

$4 \times 4 \times 4 = 64$ πλάκας.

§ 113. Τί εἶναι δύναμις ἀριθμοῦ. Ἀπὸ τὴν λύσιν τῶν προηγουμένων προβλημάτων εὕρομεν τὰ γινόμενα:

3×3 καὶ $4 \times 4 \times 4$.

Παρατηροῦμεν λοιπὸν ὅτι εἶναι δυνατὸν οἱ παράγοντες ἑνὸς γινομένου νὰ εἶναι ὅλοι ἴσοι πρὸς ἕνα ἀριθμόν.

Τὸ γινόμενον 3×3 λέγεται **δύναμις** τοῦ 3, τὸ δὲ $4 \times 4 \times 4$ λέγεται δύναμις τοῦ 4. Γενικῶς:

Δύναμις ἑνὸς ἀριθμοῦ λέγεται κάθε γινόμενον, τοῦ ὁποίου ὅλοι οἱ παράγοντες εἶναι ἴσοι πρὸς τὸν ἀριθμὸν αὐτόν.

Βάσις. Ἕκαστος τῶν ἴσων παραγόντων μιᾶς δυνάμεως λέγεται **βάσις** αὐτῆς.

Βαθμός. Ὡς βαθμὸν μιᾶς δυνάμεως θεωροῦμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν ἴσων παραγόντων αὐτῆς.

Π. χ. ἡ δύναμις 5×5 εἶναι 2ου βαθμοῦ.
ἡ δύναμις $5 \times 5 \times 5 \times 5$ εἶναι 4ου βαθμοῦ.

Ἐκθέτης. Ὁ βαθμὸς τῆς δυνάμεως ἑνὸς ἀριθμοῦ δηλοῦται δι᾽ ἑνὸς ἀριθμοῦ, ὁ ὁποῖος ὀνομάζεται **ἐκθέτης** καὶ ὁ ὁποῖος γράφεται δεξιὰ καὶ ὀλίγον ἄνω τῆς βάσεως.

Οὕτως ἡ πέμπτη δύναμις τοῦ 4 γράφεται 4^5 καὶ ἀπαγγέλλεται 4 εἰς τὴν πέμπτην.

Ἡ **δευτέρα δύναμις** ἑνὸς ἀριθμοῦ λέγεται καὶ **τετράγωνον** τοῦ ἀριθμοῦ, ἡ δὲ **τρίτη δύναμις** λέγεται καὶ **κύβος** τοῦ ἀριθμοῦ.

Οὕτω τὸ 7×7 γράφεται 7^2 καὶ ἀπαγγέλλεται 7 εἰς τὴν δευτέραν ἢ 7 εἰς τὸ τετράγωνον.

Τὸ $5 \times 5 \times 5$ γράφεται 5^3 καὶ ἀπαγγέλλεται 5 εἰς τὴν τρίτην ἢ 5 εἰς τὸν κύβον.

Ἡ εὕρεσις μιᾶς δυνάμεως ἀριθμοῦ λέγεται **ὕψωσις** αὐτοῦ εἰς τὴν δύναμιν ταύτην.

§ 114. Παρατηρήσεις. 1η. Ἐπειδὴ $0^3 = 0 \times 0 \times 0 = 0$, ἕπεται ὅτι:
Κάθε δύναμις τοῦ μηδενὸς εἶναι ἴση μὲ μηδέν.

2α. Ἐπειδὴ $1^3 = 1 \times 1 \times 1 = 1$
$1^5 = 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1$, ἕπεται ὅτι:
Κάθε δύναμις τοῦ 1 εἶναι ἴση μὲ 1.

3η. Ἐπειδὴ $10^2 = 10 \times 10 = 100$
$10^4 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10\,000$, ἕπεται ὅτι:
Κάθε δύναμις τοῦ 10 ἰσοῦται μὲ τὴν μονάδα ἀκολουθουμένην ἀπὸ τόσα μηδενικά, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ ἐκθέτης.

4η. Δὲν πρέπει νὰ συγχέωμεν τὴν **δύναμιν** ἑνὸς ἀριθμοῦ μὲ τὸ **γινόμενον** αὐτοῦ τοῦ ἀριθμοῦ ἐπὶ ἕνα παράγοντα ἴσον μὲ τὸν βαθμὸν τῆς δυνάμεως. Π. χ. 3^4 καὶ 3×4. Διότι 3^4 σημαίνει:
$3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$, ἐνῶ 3×4 σημαίνει $3 + 3 + 3 + 3 = 12$.

Ἀσκήσεις

Α΄ Ὁμάς. 138) Γράψατε συμβολικῶς τὰς κάτωθι δυνάμεις:

1. $5 \times 5 \times 5$	3. $4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4$	5. $\alpha \times \alpha \times \alpha \times \alpha$
2. $2 \times 2 \times 2 \times 2$	4. $3 \times 3 \times 3$	6. $\beta \times \beta \times \beta \times \beta$

139) Νὰ εὕρητε:

1. Τὰ τετράγωνα τῶν ἀριθμῶν 11, 12, 13, 14, 15.
2. Τοὺς κύβους τῶν ἀριθμῶν 10, 20, 30, 40, 50.
3. Τὴν 4ην δύναμιν τοῦ 3 καὶ τὴν 5ην δύναμιν τοῦ 2.

140) Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ κάτωθι δυνάμεις :

$$2^4,\ 3^3,\ 3^5,\ 1^8,\ 5^2,\ 8^3,\ 12^3,\ 24^2.$$

141) Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις :

1. $2^3 + 3^2 + 4^2 + 1^5$ 3. $8^2 \times 10^2 \times 1^5$
2. $8^2 + 2^4 + 5^2 + 1^4$ 4. $5^2 \times 10^3 \times 2^4$

Β΄ Ὁ μ ά ς. 142) Ἕνα κιβώτιον ἔχει 6 στρώματα σάπωνος. Κάθε στρῶμα ἔχει 6 σειρὰς καὶ κάθε σειρὰ 6 πλάκας σάπωνος. Νὰ εὕρητε πόσας πλάκας ἔχουν 6 τοιαῦτα κιβώτια.

143) Ἕνας παντοπώλης ἔχει 5 κιβώτια μὲ κυτία γάλακτος. Κάθε κιβώτιον ἔχει 5 στρώματα κάθε στρῶμα ἔχει 5 σειρὰς καὶ κάθε σειρὰ ἔχει 5 κυτία. Νὰ εὕρητε πόσα κυτία ἔχει ὁ παντοπώλης οὗτος.

2. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

§ 115. Ἰδιότης I. Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον $3^2 \times 3^3$.

Ἐπειδὴ $3^2 = 3 \times 3$ καὶ $3^3 = 3 \times 3 \times 3$, ἕπεται ὅτι :

$$3^2 \times 3^3 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5.$$

Ἐπίσης εὑρίσκομεν ὅτι $3^2 \times 3^3 \times 3^4 = 3^5 \times 3^4 = 3^9$.

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι :

Τὸ γινόμενον δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ εἶναι δύναμις τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ μὲ ἐκθέτην τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν αὐτῶν.

Κατὰ τὴν ἰδιότητα αὐτὴν θὰ εἶναι γενικῶς :

$$\boxed{\alpha^\mu \cdot \alpha^\nu \cdot \alpha^\rho = \alpha^{\mu+\nu+\rho}}$$

§ 116. Ἰδιότης II. Ἀπὸ τὴν προηγουμένην ἰσότητα $3^2 \times 3^3 = 3^5$ δυνάμεθα νά εὕρωμεν τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 3^5 διὰ 3^2 ἢ τοῦ 3^5 διὰ 3^3. Βλέπομεν δηλαδὴ ὅτι :

$$3^5 : 3^2 = 3^3 \text{ καὶ } 3^5 : 3^3 = 3^2.$$

Ἀπὸ τὰς ἰσότητας αὐτὰς συνάγομεν ὅτι :

Τὸ πηλίκον μιᾶς δυνάμεως δι᾽ ἄλλης δυνάμεως τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ἰσοῦται πρὸς δύναμιν τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ μὲ ἐκθέτην

τὴν διαφορὰν τοῦ ἐκθέτου τοῦ διαιρέτου ἀπὸ τὸν ἐκθέτην τοῦ διαιρετέου.

Κατὰ τὴν ἰδιότητα αὐτὴν θὰ εἶναι γενικῶς :

$$\boxed{\alpha^{\mu} : \alpha^{\nu} = \alpha^{\mu-\nu}, \text{ἂν } \mu > \nu}$$

§ 117. **Παρατηρήσεις.** 1η. Κατὰ τὴν προηγουμένην ἰδιότητα πρέπει νὰ εἶναι $2^4 : 2^3 = 2^1$ (1)

Ἐπειδὴ δὲ $2^4 = 2\times 2\times 2\times 2$ ἢ $2^4 = (2\times 2\times 2)\times 2$ ἢ
$2^4 = 2^3 \times 2$ βλέπομεν ὅτι $2^4 : 2^3 = 2$ (2)

Ἀπὸ τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) βλέπομεν ὅτι πρέπει νὰ δεχθῶμεν ὅτι : $2^1 = 2$.

Ὁμοίως βεβαιούμεθα ὅτι πρέπει νὰ δεχθῶμεν $3^1 = 3$, $4^1 = 4$ κ.τ.λ.

Λέγομεν λοιπὸν ὅτι :

Πρώτη δύναμις ἑνὸς ἀριθμοῦ ($\neq 0$) εἶναι ὁ ἴδιος ἀριθμός.

2α. Ἂν θέλωμεν νὰ ἀληθεύῃ ἡ προηγουμένη ἰδιότης καὶ ὅταν οἱ ἐκθέται εἶναι ἴσοι, θὰ εἶναι π. χ. $3^2 : 3^2 = 3^0$. Ἐπειδὴ δὲ προφανῶς $3^2 : 3^2 = 1$, πρέπει νὰ δεχθῶμεν ὅτι $3^0 = 1$. Ὁμοίως βεβαιούμεθα ὅτι πρέπει νὰ δεχθῶμεν ὅτι $2^0 = 1$, $4^0 = 1$ κ.τ.λ.

Λέγομεν λοιπὸν ὅτι :

Μηδενικὴ δύναμις παντὸς ἀριθμοῦ ($\neq 0$) εἶναι ἡ 1.

§ 118. **Ἰδιότης III. Πῶς ὑψώνομεν γινόμενον εἰς μίαν δύναμιν.** Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὴν δευτέραν δύναμιν τοῦ 3×5, δηλαδὴ τὴν δύναμιν $(3\times 5)^2$.

Ἐπειδὴ $3\times 5 = 15$, θὰ εἶναι :

$$(3\times 5)^2 = 15^2 = 15\times 15 = 225.$$

Ἐπειδὴ δὲ εἶναι καὶ $3^2 = 9$, $5^2 = 25$, ἕπεται ὅτι θὰ εἶναι :

$$3^2\times 5^2 = 9\times 25 = 225.$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω βλέπομεν ὅτι :

$$(3\times 5)^2 = 3^2\times 5^2.$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι :

$$(2\times 3\times 5)^3 = 2^3\times 3^3\times 5^3 \text{ καὶ } (4\times 5)^4 = 4^4\times 5^4.$$

Ἀπὸ αὐτὰς τὰς ἰσότητας συνάγομεν τὴν κάτωθι ἰδιότητα :

Ἕνα γινόμενον ὑψοῦται εἰς δύναμιν, ἂν ὑψωθοῦν ὅλοι οἱ παράγοντές του εἰς τὴν δύναμιν αὐτήν.

Εἶναι λοιπὸν γενικῶς :

$$\boxed{(\alpha\times\beta\times\gamma)^{\nu} = \alpha^{\nu}\times\beta^{\nu}\times\gamma^{\nu}}$$

§ 119. Ἰδιότης IV. Πῶς ὑψώνομεν μίαν δύναμιν εἰς ἄλλην δύναμιν. Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ ὑψώσωμεν τὴν δύναμιν 5^3 εἰς τὸ τετράγωνον, δηλαδὴ νὰ εὕρωμεν τὴν δύναμιν $(5^3)^2$.

Κατὰ τὴν προηγουμένην ἰδιότητα θὰ εἶναι :

$(5^3)^2 = (5\times5\times5)^2 = 5^2\times5^2\times5^2$ ἢ $(5^3)^2 = 5^{2+2+2}$ ἢ $(5^3)^2 = 5^{2\cdot3}$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὴν κάτωθι ἰδιότητα :

Διὰ νὰ ὑψώσωμεν δύναμιν ἀριθμοῦ εἰς ἄλλην δύναμιν, ἀρκεῖ νὰ σχηματίσωμεν δύναμιν τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ μὲ ἐκθέτην τὸ γινόμενον τῶν δύο ἐκθετῶν.

Κατὰ τὴν ἰδιότητα αὐτὴν θὰ εἶναι γενικῶς :

$$\boxed{(\alpha^{\mu})^{\nu} = \alpha^{\mu\cdot\nu}}$$

Ἀσκήσεις

144) Νὰ γίνῃ μία δύναμις καθένα ἀπὸ τὰ κάτωθι γινόμενα :

1. $4^3\times4^2$
2. $2^2\times2^3\times2^4$
3. $3^2\times3\times3^5$
4. $5^3\times5^6\times5^1\times5^2$

145) 1. Νὰ ὑψωθοῦν εἰς τὸ τετράγωνον τὰ γινόμενα :

1. 2×3 2. 3×4 3. $2\times3\times5$

2. Νὰ ὑψωθοῦν εἰς τὸν κύβον τὰ κάτωθι γινόμενα :

1. $2\times3\times1$ 2. $2\times5\times10$ 3. $5\times2\times1$

146) Νὰ τρέψητε : 1ον. Τὴν δύναμιν 4^2 εἰς δύναμιν τοῦ 2.
2ον. Τὴν δύναμιν 9^2 εἰς δύναμιν τοῦ 3.

147) Νὰ τρέψητε τὰ κάτωθι γινόμενα εἰς μίαν δύναμιν :

1. 9×3^2 2. $2\times5\times10^2$ 3. $2^3\times5^3$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ζ'

ΔΙΑΙΡΕΤΟΤΗΣ

1. ΟΡΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

§ 120. Ἀριθμὸς διαιρετὸς δι' ἄλλου. Ὁ ἀριθμὸς 3 διαιρεῖ ἀκριβῶς τὸν 24. Διὰ τοῦτο ὁ 3 λέγεται **διαιρέτης** τοῦ 24. Ὁ δὲ 24 **διαιρετὸς** διὰ τοῦ 3. Διὰ τὸν ἴδιον λόγον ὁ 3 λέγεται διαιρέτης τοῦ 27 καὶ ὁ 27 διαιρετὸς διὰ τοῦ 3. Ὥστε :

Ἀριθμός τις λέγεται διαιρετὸς δι' ἄλλου, ἂν διαιρῆται ἀκριβῶς δι' αὐτοῦ.

Ἕνας ἀριθμὸς λέγεται διαιρέτης ἄλλου, ἂν διαιρῇ αὐτὸν ἀκριβῶς.

§ 121. Πολλαπλάσιον ἑνὸς ἀριθμοῦ. Ἐπειδὴ $24:3=8$, ἕπεται ὅτι $24=3\times 8$. Ὁ 24 λοιπὸν εἶναι καὶ **πολλαπλάσιον** τοῦ 3, διότι γίνεται ἐξ αὐτοῦ διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ τὸν ἀκέραιον 8. Ὁ δὲ 3 εἶναι **παράγων** ἢ ἕνα **ὑποπολλαπλάσιον** τοῦ 24. Ὥστε :

Πολλαπλάσιον ἑνὸς ἀριθμοῦ λέγεται τὸ γινόμενον αὐτοῦ ἐπὶ τυχόντα ἀκέραιον ἀριθμόν.

Ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ του παράγει ἄλλον ἀριθμόν, λέγεται παράγων αὐτοῦ.

§ 122. Χαρακτῆρες διαιρετότητος. Εἶναι φανερὸν ὅτι, ἂν διαιρέσωμεν ἕνα ἀριθμὸν δι' ἄλλου, ἀναγνωρίζομεν, ἂν ὁ πρῶτος διαιρῆται ἀκριβῶς διὰ τοῦ δευτέρου ἢ ὄχι.

Ἐνίοτε ὅμως, χωρὶς νὰ κάμωμεν τὴν διαίρεσιν, διακρίνομεν τοῦτο βοηθούμενοι ἀπὸ μερικὰ ἰδιαίτερα γνωρίσματα. Αὐτὰ τὰ γνωρίσματα λέγονται **χαρακτῆρες διαιρετότητος**. Περιέχονται δὲ εἰς τὸ περὶ διαιρετότητος κεφάλαιον αὐτὸ τῆς Ἀριθμητικῆς καὶ στηρίζονται εἰς τὰς ἀκολούθους ἰδιότητας.

§ 123. **Ἰδιότης I.** Ἐπειδὴ $24 : 3 = 8$, θὰ εἶναι $24 = 3 \times 8$. Δηλαδὴ ὁ 24, ὁ ὁποῖος εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 3, εἶναι καὶ πολλαπλάσιον αὐτοῦ.

Ἀντιστρόφως. Εἶναι φανερὸν ὅτι τυχὸν πολλαπλάσιον τοῦ 3, π.χ. τὸ 3×5, δηλαδὴ ὁ 15, διαιρεῖται διὰ τοῦ 3. Ὥστε κάθε πολλαπλάσιον τοῦ 3 εἶναι διαιρετὸν δι' αὐτοῦ.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι :

Κάθε ἀριθμὸς διαιρεῖ ἀκριβῶς τὰ πολλαπλάσιά του καὶ μόνον αὐτά.

§ 124. **Ἰδιότης II.** Ὁ 5 διαιρεῖ τοὺς ἀριθμοὺς 20 καὶ 35, διότι εἶναι πολλαπλάσια αὐτοῦ.

Ἐπειδὴ δὲ ὁ 20 ἀποτελεῖται ἀπὸ τέσσαρα 5 καὶ ὁ 35 ἀπὸ ἑπτὰ 5 τὸ ἄθροισμα $20 + 35$ ἀποτελεῖται ἀπὸ ἕνδεκα 5, ἤτοι εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 5. Ὁμοίως ἐννοοῦμεν ὅτι τὸ ἄθροισμα $20 + 35 + 15$ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 5.

Ἀπὸ τὰ παραδείγματα αὐτὰ συνάγομεν ὅτι :

Ἂν ἕνας ἀριθμὸς διαιρῇ δύο ἢ περισσοτέρους ἀριθμούς, θὰ διαιρῇ καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν.

Σημείωσις. Κατὰ τὰς ἰδιότητας αὐτὰς ὁ 2, ὡς διαιρῶν τὰ μέρη τοῦ ἀριθμοῦ 48, δηλαδὴ τὰς 4 δεκάδας καὶ τὰς 8 μονάδας, θὰ διαιρῇ καὶ ὅλον τὸν ἀριθμὸν 48, ὁ ὁποῖος εἶναι ἄθροισμα αὐτῶν.

§ 125. **Ἰδιότης III.** Ἐὰν τώρα ἀπὸ τὰ 7 πέντε τοῦ 35 ἀφαιρέσωμεν τὰ 4 πέντε τοῦ 20, θὰ μείνουν 3 πέντε.

Παρατηροῦμεν λοιπὸν ὅτι ἡ διαφορὰ $35 - 20 = 5 \times 5 \times 5$, διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ 5. Ὥστε :

Ἂν ἀριθμὸς διαιρῇ δύο ἄλλους, θὰ διαιρῇ καὶ τὴν διαφορὰν αὐτῶν.

§ 126. **Ἰδιότης IV.** Ὁ 6 διαιρεῖ τὸν 12, διαιρεῖ ὅμως καὶ τὸν 24, ἤτοι $12 + 12$ ἢ 12×2, καὶ τὸν 36, ἤτοι $12 + 12 + 12$ ἢ 12×3 κ.τ.λ. Ὥστε :

Ἂν ἕνας ἀριθμὸς διαιρῇ ἄλλον, θὰ διαιρῇ καὶ τὰ πολλαπλάσια αὐτοῦ.

Π. χ. ὁ 4 διαιρεῖ τὴν 1 ἑκατοντάδα, ἄρα θὰ διαιρῇ καὶ τὰς 7 ἑκατοντάδας ἢ τὰς 15 ἑκατοντάδας ἢ ὁσασδήποτε ἑκατοντάδας.

Ἀσκήσεις

148) Εὕρετε: 1ον. Τὰ 5 πρῶτα πολλαπλάσια τοῦ 3.
2ον. » 5 » » » 9.

149) Εὕρετε: 1ον. Τρεῖς διαιρέτας τοῦ 24. 2ον. Τέσσαρα ὑποπολλαπλάσια τοῦ 36. 3ον. Δύο παράγοντας τοῦ 15.

2. ΧΑΡΑΚΤΗΡΕΣ ΔΙΑΙΡΕΤΟΤΗΤΟΣ

§ 127. Ποῖοι ἀριθμοὶ εἶναι διαιρετοὶ διὰ 10, 100 κ.τ.λ. Τὰ πολλαπλάσια τοῦ 10 εἶναι 10, 20, 30,.. εἶναι δηλ. ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι λήγουν εἰς μηδέν. Τὰ πολλαπλάσια τοῦ 100 εἶναι ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι λήγουν εἰς δύο μηδενικὰ κ.ο.κ.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συμπεραίνομεν ὅτι:

Διὰ τοῦ 10, 100, 1000 κ.τ.λ. εἶναι διαιρετοὶ οἱ ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι λήγουν ἀντιστοίχως εἰς 1, 2, 3 κ.τ.λ. τοὐλάχιστον μηδενικά.

§ 128. Ποῖοι ἀριθμοὶ εἶναι διαιρετοὶ διὰ 2 ἢ 5. *Πρόβλημα.* **Οἰνοπώλης ἔχει 386 ὀκάδας οἴνου. Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ, ἂν δύναται νὰ θέσῃ ὅλον τὸν οἶνον αὐτὸν εἰς φιάλας τῶν 2 ὀκάδων ἢ τῶν 5 ὀκάδων.**

Εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ ζητούμενον θὰ γίνῃ, ἂν ὁ ἀριθμὸς 386 διαιρῆται ἀκριβῶς διὰ 2 ἢ 5. Διὰ νὰ ἴδωμεν δέ, ἂν ὁ 386 διαιρῆται ἀκριβῶς διὰ 2 ἢ 5, χωρὶς νὰ κάμωμεν τὴν διαίρεσιν, σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς:

Αἱ 10 ὀκάδες οἴνου εἶναι δυνατὸν νὰ τεθοῦν εἰς φιάλας τῶν 2 ἢ 5 ὀκ, διότι $2 \times 5 = 10$. Ἐπειδὴ δὲ ὁ 2 καὶ 5 διαιροῦν τὸν 10 ἢ τὴν μίαν δεκάδα, ἕπεται ὅτι θὰ διαιροῦν καὶ τὰς 38 δεκάδας.

Πρέπει λοιπὸν νὰ παρατηρήσωμεν μ ό ν ο ν, ἂν καὶ αἱ 6 ἁπλαῖ μονάδες διαιροῦνται ἀκριβῶς διὰ 2 ἢ 5. Ἐπειδὴ ὁ 6 διαιρεῖται διὰ 2 ὄχι ὅμως καὶ διὰ 5, ἐννοοῦμεν ὅτι αἱ 386 ὀκ. οἴνου μόνον εἰς φιάλας τῶν 2 ὀκάδων εἶναι δυνατὸν νὰ τεθοῦν. Ἂν δὲ τεθοῦν εἰς φιάλας τῶν 5 ὀκάδων, θὰ περισσεύσῃ μία ὀκᾶ οἴνου ἀπὸ τὰς 6 ὀκάδας. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συμπεραίνομεν ὅτι:

Ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 2 ἢ διὰ 5, ἂν τὸ τελευταῖον ψηφίον του διαιρῆται ἀκριβῶς διὰ 2 ἢ 5.

Ἐπειδὴ δὲ ἀπὸ τοὺς μονοψηφίους ἀριθμοὺς μόνον ὁ 0 καὶ ὁ 5 εἶναι διαιρετοὶ διὰ 5, συντομώτερον λέγομεν:

Διὰ τοῦ 5 διαιροῦνται, ὅσοι ἀριθμοὶ τελειώνουν εἰς 0 ἢ εἰς 5.

Οἱ ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι διαιροῦνται ἀκριβῶς διὰ 2, λέγονται **ἄρτιοι** ἢ **ζυγοί**. Ὅσοι δὲν διαιροῦνται ἀκριβῶς διὰ 2 λέγονται **περιττοὶ** ἢ καὶ **μονοὶ** ἀριθμοί.

Ἀσκήσεις

150) Ποῖοι ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 28, 354, 761, 245, 1 600 εἶναι διαιρετοὶ διὰ 2, ποῖοι διὰ 5 καὶ διατί;

151) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ὑπόλοιπα τῶν διαιρέσεων τῶν ἀριθμῶν 375, 248, 3 727, 4 560, 3 968, διὰ 2 ἢ διὰ 5, χωρὶς νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ διαιρέσεις.

152) Ποῖος εἶναι ὁ μικρότερος ἀριθμός, τὸν ὁποῖον πρέπει νὰ προσθέσωμεν εἰς ἕνα ἄρτιον ἀριθμὸν ἢ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπ' αὐτόν, διὰ νὰ γίνῃ περιττός;

153) Ποῖα εἶναι τὰ ψηφία, τὰ ὁποῖα δυνάμεθα νὰ θέσωμεν δεξιὰ τοῦ 94, διὰ νὰ σχηματίσωμεν ἕνα τριψήφιον ἀριθμὸν διαιρετὸν διὰ 2 ;

154) Νὰ διακρίνητε ποῖοι ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 200, 3 000, 12 000, 560 000, 17 304, 2 620 000 εἶναι διαιρετοὶ διὰ 2, ποῖοι διὰ 5, ποῖοι διὰ 10, ποῖοι διὰ 100 καὶ ποῖοι διὰ 1 000.

155) Ἐὰν προσθέσωμεν 1ον δύο ἀρτίους ἢ 2ον δύο περιττοὺς ἀριθμούς, θὰ προκύψῃ ἄρτιος ἢ περιττὸς ἀριθμός ; Δείξατε αὐτὸ διὰ παραδειγμάτων, καὶ διατυπώσατε τὸν σχετικὸν κανόνα.

§ 129. Ποῖοι ἀριθμοὶ εἶναι διαιρετοὶ διὰ 4 ἢ 25. *Πρόβλημα.* **Ἕνας ἔμπορος ἔχει 6 528 ὀκ. ἐλαίου. Νὰ εὑρεθῇ, ἂν ἠμπορῇ νὰ θέσῃ ὅλο τὸ ἔλαιον εἰς δοχεῖα τῶν 4 ὀκ. ἢ τῶν 25 ὀκ.**

Εἶναι φανερὸν ὅτι τοῦτο θὰ γίνῃ, ἂν ὁ ἀριθμὸς 6 528 διαιρῆται ἀκριβῶς διὰ 4 ἢ 25. Διὰ νὰ ἴδωμεν δὲ αὐτό, χωρὶς νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν, σκεπτόμεθα ὅπως καὶ εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα:

Δηλαδὴ αἱ 100 ὀκ. ἐλαίου δύνανται νὰ τεθοῦν ὅλαι εἰς δοχεῖα τῶν 4 ὀκάδων ἢ 25 ὀκάδων, διότι $100 = 4 \times 25$. Ἐπειδὴ δὲ ὁ 4 καὶ 25 διαιροῦν τὸν 100 ἢ τὴν μίαν ἑκατοντάδα, ἕπεται ὅτι θὰ διαιροῦν καὶ τὰς 65 ἑκατοντάδας.

Πρέπει λοιπὸν νὰ παρατηρήσωμεν μ ό ν ο ν, ἐὰν καὶ αἱ 28 μονάδες, δηλαδὴ ὁ ἀριθμός, τὸν ὁποῖον σχηματίζουν τὰ δύο τελευταῖα ψηφία τοῦ 6 528, διαιροῦνται ἀκριβῶς διὰ 4 ἢ 25. Ἐπειδὴ δὲ ὁ

28 διαιρεῖται διὰ 4, ὄχι ὅμως καὶ διὰ 25, ἐννοοῦμεν ὅτι ὁ 6 528 διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ 4 καὶ ὄχι διὰ 25.

Ὥστε αἱ 6 528 ὀκ. ἐλαίου μόνον εἰς δοχεῖα τῶν 4 ὀκάδων εἶναι δυνατὸν νὰ τεθοῦν.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συμπεραίνομεν ὅτι :

Ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς διὰ 4 ἢ 25, ἐὰν τὰ δύο τελευταῖα ψηφία του, ὡς ἔχουν γραφῇ, σχηματίζουν ἀριθμὸν διαιρετὸν διὰ 4 ἢ 25.

Ἂν δὲ παρατηρήσωμεν ὅτι ἀπὸ τοὺς διψηφίους ἀριθμοὺς μόνον οἱ ἀριθμοὶ 25, 50 καὶ 75 διαιροῦνται διὰ 25, ἐννοοῦμεν ὅτι :

Διὰ τοῦ 25 διαιροῦνται οἱ ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι τελειώνουν εἰς 2 μηδενικά, εἰς 25, εἰς 50 ἢ εἰς 75.

Ἀσκήσεις

156) Ποῖοι ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 764, 3 782, 5 834, 3 750, 2 700 7 625 διαιροῦνται ἀκριβῶς διὰ 4 καὶ ποῖοι διὰ 25 ;

157) Ποῖον ψηφίον πρέπει νὰ θέσωμεν δεξιὰ ἑκάστου τῶν ἀριθμῶν 32, 43, 65, 76, 57 διὰ νὰ σχηματισθῇ ἀριθμὸς τριψήφιος διαιρετὸς διὰ 4 ;

158) Ὅλα τὰ ψηφία ἑνὸς ἀριθμοῦ εἶναι 2· εἶναι διαιρετὸς ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς διὰ 4 ;

159) Δεξιὰ ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 58, 963, 3 404 νὰ γράψητε δύο ψηφία, διὰ νὰ γίνῃ καθένας διαιρετὸς διὰ τοῦ 25.

160) Ποῖος εἶναι ὁ μικρότερος ἀριθμός, τὸν ὁποῖον πρέπει νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸν 326, διὰ νὰ σχηματισθῇ ἀριθμὸς διαιρετὸς διὰ 4 ;

161) Ἕνα σχολεῖον ἔχει 415 μαθητάς. Ἂν ὁ γυμναστὴς παρατάξῃ αὐτοὺς κατὰ τετράδας, νὰ ἐξετάσητε, ἂν θὰ περισσεύσουν καὶ πόσοι μαθηταί.

§ 130. Ποῖοι ἀριθμοὶ εἶναι διαιρετοὶ διὰ 9 ἢ 3. *Πρόβλημα.* **Δυνάμεθα νὰ μοιράσωμεν ἀκριβῶς 5 427 δρχ. εἰς 9 ἢ εἰς 3 μαθητάς ;**

Λύσις. Παρατηροῦμεν ὅτι αἱ 5 427 δρχ. ἀποτελοῦνται ἀπὸ 5 χιλιόδραχμα 4 ἑκατοντάδραχμα, 2 δεκάδραχμα καὶ 7 δραχμάς. Ἂν μοιράσωμεν κάθε χιλιόδραχμον ἢ κάθε ἑκατοντάδραχμον ἢ κάθε δεκάδραχμον εἰς 9 ἢ 3 μαθητάς, περισσεύει πάντοτε 1 δραχμή.

1 000	9	100	9	100	3
10	111	10	11	10	33
10		1		1	
1					

Ἑπομένως ἀπὸ τὰ 5 χιλιόδραχμα θὰ περισσεύσουν 5 δραχ, ἀπὸ τὰ 4 ἑκατοντάδραχμα 4 δραχμαὶ ἀπὸ τὰ 2 δεκάδραχμα δραχμαὶ καὶ 7 δραχμαί, τὰς ὁποίας εἴχομεν ἐξ ἀρχῆς. Θὰ περισσεύσουν λοιπὸν ἐν ὅλῳ 5+4+2+7 ἢ 18 δρχ, αἱ ὁποῖαι δύνανται νὰ μοιρασθοῦν εἰς 9 ἢ 3 μαθητάς, χωρὶς νὰ μείνῃ τίποτε.

Ἂν εἴχομεν 3 567 δρχ. καὶ ἐργαζόμεθα ὁμοίως, θὰ εὑρίσκομεν ὅτι θὰ ἐπερίσσευον 3+5+6+7 ἢ 21 δρχ, αἱ ὁποῖαι μοιράζονται ἀκριβῶς εἰς 3 μαθητάς, ἀλλ' ὄχι εἰς 9, διότι περισσεύουν 3 δραχμαί.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συμπεραίνομεν ὅτι :

Ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς διὰ 3 ἢ 9, ἂν τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων του διαιρῆται ἀκριβῶς διὰ 3 ἢ 9.

Ἀσκήσεις

162) Ποῖοι ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 326, 219, 945, 1 302, 3 105 εἶναι διαιρετοὶ διὰ 3, ποῖοι διὰ 9 καὶ διατί ;

163) Ποῖοι ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 925, 436, 156, 324, 564, 3 024 εἶναι διαιρετοὶ διὰ 2, διὰ 3, διὰ 4, διὰ 5, διὰ 9 καὶ διατί;

164) Ποῖα ψηφία δυνάμεθα νὰ γράψωμεν δεξιὰ ἑκάστου τῶν ἀριθμῶν 74, 35, 87, 95 διὰ νὰ σχηματισθοῦν τριψήφιοι ἀριθμοὶ διαιρετοὶ διὰ 2, διὰ 3, διὰ 4, διὰ 5, διὰ 9, διὰ 25 ;

165) Ὅλα τὰ ψηφία ἑνὸς ἀριθμοῦ εἶναι 5. Εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι διαιρετὸς διὰ 2, διὰ 3, διὰ 4, διὰ 9, διὰ 25 ;

166) Ποῖος εἶναι ὁ μικρότερος ἀριθμός, τὸν ὁποῖον πρέπει νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸν ἀριθμὸν 614, διὰ νὰ προκύψῃ ἀριθμὸς διαιρετὸς διὰ 3, διὰ 4, διὰ 5, διὰ 9, διὰ 25 ;

167) Ἕνας ἀριθμὸς εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 9. Ἐὰν ἀλλάξωμεν τὴν τάξιν τῶν ψηφίων του, ὁ προκύπτων ἀριθμὸς θὰ εἶναι διαιρετὸς διὰ 9 ἢ ὄχι ;

168) Ἕνας γυμναστὴς θέλει νὰ τοποθετήσῃ 135 μαθητάς, $1^{ον}$ κατὰ δυάδας, $2^{ον}$ κατὰ τριάδας καὶ $3^{ον}$ κατὰ πεντάδας. Δύναται νὰ γίνῃ αὐτὸ χωρὶς νὰ περισσεύσῃ κανεὶς μαθητής ;

§ 131. Ποῖοι ἀριθμοὶ εἶναι διαιρετοὶ διὰ 8 ἢ 125. Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ μάθωμεν, χωρὶς νὰ κάμωμεν τὴν διαίρεσιν, ἂν ὁ ἀριθμὸς 43 120 εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 8 ἢ διὰ τοῦ 125.

Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν ὅτι, ἐπειδὴ $8 \times 125 = 1\,000$, ἕπεται ὅτι ὁ 8 καὶ ὁ 125 διαιροῦν ἀκριβῶς τὸν 1 000 ἢ τὴν μίαν χιλιάδα. Ἀλλὰ τότε καθένας ἐξ αὐτῶν θὰ διαιρῇ καὶ τὰς 43 χιλιάδας τοῦ 43 120. Ἂν λοιπὸν ὁ 8 ἢ ὁ 125 διαιρῇ ἀκριβῶς καὶ τὸν 120, δηλαδὴ τὸν ἀριθμόν, ποὺ ἀποτελοῦν τὰ τρία τελευταῖα ψηφία τοῦ 43 120, ὡς ἔχουν γραφῇ, θὰ διαιρῇ ἀκριβῶς καὶ ὅλον τὸν ἀριθμὸν 43 120.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συμπεραίνομεν ὅτι:

Ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς διὰ 8 ἢ 125, ἂν τὰ τρία τελευταῖα ψηφία του, ὡς ἔχουν γραφῇ, σχηματίζουν ἀριθμὸν διαιρετὸν διὰ 8 ἢ 125.

Ἀσκήσεις

169) Ποῖοι ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 47 012, 91 480, 5 375, 83 024, 79 250 εἶναι διαιρετοὶ διὰ 8 καὶ ποῖοι διὰ 125;

170) Ποῖοι ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 3 125, 5 250, 62 300, 105 450. 204 875, 605 500 εἶναι διαιρετοὶ διὰ 125; Νὰ εὕρητε δὲ τὸ ὑπόλοιπον τῶν ἄλλων διὰ 125.

171) Ποῖον ἀριθμὸν πρέπει νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸν 35 930, διὰ νὰ προκύψῃ ἀριθμὸς διαιρετὸς διὰ 8; Ποῖον δέ, διὰ νὰ προκύψῃ ἀριθμὸς διαιρετὸς διὰ 125;

172) Ποῖον ἀριθμὸν πρέπει νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸν 7 242, διὰ νὰ προκύψῃ ἀριθμὸς διαιρετὸς διὰ 8; Ποῖον δέ, διὰ νὰ προκύψῃ ἀριθμὸς διαιρετὸς διὰ 125;

§ 132. Ποῖοι ἀριθμοὶ εἶναι διαιρετοὶ διὰ τοῦ 11. Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ μάθωμεν, χωρὶς νὰ κάμωμεν τὴν διαίρεσιν, ἂν ὁ ἀριθμὸς 432 113 εἶναι διαιρετὸς διὰ 11.

Παρατηροῦμεν ὅτι, ἂν ἀπὸ μνήμης διαιρέσωμεν μίαν ἑκατοντάδα, δηλαδὴ τὸν 100, δι' 11, θὰ εὕρωμεν ὑπόλοιπον 1, διότι $11 \times 9 = 99$. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἀπὸ κάθε ἑκατοντάδα, ὅταν τὴν διαιρέσωμεν διὰ 11, εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον 1, ἕπεται ὅτι ἀπὸ τὰς 4 321 ἐν ὅλῳ ἑκατοντάδας τοῦ ἀριθμοῦ 432 113 θὰ εὕρωμεν ὑπόλοιπον 4 321 μονάδας. Ὁμοίως ἀπὸ τὰς 43 ἑκατοντάδας τοῦ ἀριθμοῦ 4 321 θὰ εὕρωμεν ὑπόλοιπον 43 μονάδας, αἱ ὁποῖαι μαζὺ μὲ τὰς 21 μονάδας τοῦ ἀριθμοῦ 4 321 καὶ τὰς 13 μονάδας τοῦ ἀριθμοῦ 432 113 ἀποτελοῦν ἐν ὅλῳ 43 + 21 + 13 μονάδας. Ἂν λοιπὸν καὶ τὸ ἄθροισμα τοῦτο εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ 11 καὶ ὅλος ὁ ἀριθμὸς 432 113 θὰ εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 11.

Ἐδῶ τὸ ἄθροισμα 43 + 21 + 13 εἶναι 77, ἤτοι διαιρετὸν διὰ 11, ἄρα καὶ ὅλος ὁ ἀριθμὸς 432 113 εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 11.

Παρατηροῦμεν ὅμως ὅτι τὸ 43 + 21 + 13 εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν διψηφίων τμημάτων, εἰς τὰ ὁποῖα χωρίζεται ὁ ἀριθμὸς ἐκ δεξιῶν πρὸς τὰ ἀριστερά.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι:

Ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς διὰ 11, ἂν τὸ ἄθροισμα τῶν διψηφίων τμημάτων του, εἰς τὰ ὁποῖα χωρίζεται ἐκ δεξιῶν πρὸς τὰ ἀριστερά, εἶναι διαιρετὸν διὰ 11.

Π. χ. ὁ ἀριθμὸς 1 353 εἶναι διαιρετὸς διὰ 11, διότι τὸ ἄθροισμα 13 + 53, ἤτοι ὁ 66, εἶναι διαιρετὸς διὰ 11.

Ἂν τὸ πλῆθος τῶν ψηφίων εἶναι περιττόν, τὸ τελευταῖον πρὸς τὰ ἀριστερὰ τμῆμα θὰ εἶναι μονοψήφιον.

Π. χ. ὁ ἀριθμὸς 31 504 διαιρούμενος διὰ 11 ἀφήνει ὑπόλοιπον ὅσον καὶ τὸ ἄθροισμα 3 + 15 + 04 = 22, ἤτοι 0. Εἶναι λοιπὸν ὁ 31 504 διαιρετὸς διὰ 11.

Σημείωσις. Ἂν τὸ ἄθροισμα τῶν τμημάτων τούτων ἔχῃ ψηφία περισσότερα τῶν δύο, εὑρίσκομεν τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως αὐτοῦ κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον. Π.χ. τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως 356 719 : 11 εἶναι ἴσον μὲ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως (35 + 67 + 19) : 11 ἢ 121 : 11. Αὐτὸ δὲ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως (1 + 21) : 11 ἢ 22 : 11, ἤτοι 0.

Ὁ ἀριθμὸς λοιπὸν 356 719 εἶναι διαιρετὸς διὰ 11.

Ἀσκήσεις

173) Ποῖοι ἀπὸ τοὺς διψηφίους ἀριθμοὺς εἶναι διαιρετοὶ διὰ 11;

174) Ποῖοι ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 332 211, 570 911, 633 402, 31 304, 730 412 εἶναι διαιρετοὶ διὰ 11;

175) Νὰ γράψητε ἀπὸ ἕνα ψηφίον εἰς τὴν ἀρχὴν ἑκάστου τῶν ἀριθμῶν 73, 92, 3 120, 51 437 διὰ νὰ γίνῃ ἀριθμὸς διαιρετὸς διὰ 11.

3. ΚΟΙΝΟΙ ΔΙΑΙΡΕΤΑΙ—ΜΕΓΙΣΤΟΣ ΚΟΙΝΟΣ ΔΙΑΙΡΕΤΗΣ

§ 133. **Κοινοὶ διαιρέται.** Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ 12, 18.

Οἱ διαιρέται τοῦ 12 εἶναι : **1, 2, 3,** 4, **6,** 12.

Οἱ διαιρέται τοῦ 18 εἶναι : **1, 2, 3, 6,** 9, 18.

Παρατηροῦμεν ὅτι, οἱ 1, 2, 3, 6 εἶναι διαιρέται καὶ τοῦ 12 καὶ 18.

Οἱ 1, 2, 3, 6 λέγονται **κοινοὶ διαιρέται** τῶν 12 καὶ 18. Ὥστε :

Κοινὸς διαιρέτης δοθέντων ἀριθμῶν λέγεται κάθε ἀριθμός, ὁ ὁποῖος διαιρεῖ αὐτοὺς ἀκριβῶς.

§ 134. **Μέγιστος κοινὸς διαιρέτης (μ.κ.δ.).** Ἐκ τῶν κοινῶν διαιρετῶν τοῦ 12 καὶ 18 μεγαλύτερος εἶναι ὁ 6. Οὗτος λέγεται **μέγιστος κοινὸς διαιρέτης** αὐτῶν. Ὥστε :

Μέγιστος κοινὸς διαιρέτης δοθέντων ἀριθμῶν λέγεται ὁ μεγαλύτερος ἀπὸ τοὺς κοινοὺς διαιρέτας αὐτῶν.

§ 135. **Πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοί.** Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ 25 καὶ 16.

Οἱ διαιρέται τοῦ 25 εἶναι : 1, 5, 25.

Οἱ διαιρέται τοῦ 16 εἶναι : 1, 2, 4, 8, 16.

Παρατηροῦμεν ὅτι οἱ ἀριθμοὶ 25 καὶ 16 δὲν ἔχουν παρὰ μόνον ἕνα κοινὸν διαιρέτην, **τὴν μονάδα.**

Οἱ τοιοῦτοι ἀριθμοὶ λέγονται **πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.** Ὥστε:

Δύο ἢ περισσότεροι ἀριθμοὶ λέγονται πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ἂν δὲν ἔχουν ἄλλον κοινὸν διαιρέτην ἐκτὸς τῆς μονάδος.

4. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΚΟΙΝΩΝ ΔΙΑΙΡΕΤΩΝ

§ 136. **Ἰδιότης I.** Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ 24, 36, 80 καὶ 4 ἕνας ἀπὸ τοὺς κοινοὺς διαιρέτας αὐτῶν.

Ὁ 4, ὡς διαιρῶν τοὺς 80 καὶ 24 θὰ διαιρῇ καὶ τὴν διαφορὰν 80—24, ἤτοι τὸν 56. Θὰ εἶναι λοιπὸν ὁ 4 κοινὸς διαιρέτης καὶ τῶν ἀριθμῶν 24, 36, 56.

Ἀντιστρόφως. Ἐπειδὴ ὁ 4 διαιρεῖ τοὺς 24, 36, 56, θὰ διαιρῇ καὶ τὸ ἄθροισμα $24 + 56 = 80$. Θὰ εἶναι λοιπὸν ὁ 4 κοινὸς διαιρέτης καὶ τῶν ἀριθμῶν 24, 36, 80.

Οἱ ἀριθμοὶ λοιπὸν 24, 36, 80 καὶ οἱ ἀριθμοὶ 24, 36, 56 ἔχουν τοὺς αὐτοὺς κοινοὺς διαιρέτας. Ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι :

Οἱ κοινοὶ διαιρέται δοθέντων ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλονται, ἂν ἀπὸ ἕνα ἐξ αὐτῶν ἀφαιρεθῇ ἄλλος ἀπὸ αὐτούς.

§ 137. **Ἰδιότης II.** Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ 24, 36, 80. Ἂν ἀφαιρέσωμεν τὸν 24 ἀπὸ τὸν 80 εὑρίσκομεν 56. Ἂν ἀφαιρέσωμεν τὸν 24 ἀπὸ τὸν 56, εὑρίσκομεν 32. Ἂν ἀπὸ τὸν 32 ἀφαιρέσωμεν πάλιν τὸν 24, εὑρίσκομεν $32-24=8$.

Ἐπειδὴ δὲ μετὰ κάθε ἀφαίρεσιν δὲν μεταβάλλονται οἱ κοινοὶ διαιρέται, ἐννοοῦμεν ὅτι :

οἱ ἀριθμοὶ 24, 36, 80
καὶ οἱ ἀριθμοὶ 24, 36, 8 ἔχουν τοὺς ἰδίους κοινοὺς διαιρέτας.

Ἐπειδὴ δὲ ἀφῃρέσαμεν ἀπὸ τὸν 80 τρεῖς φορὰς τὸν 24 καὶ εὕρομεν τὸν 8, ἐννοοῦμεν ὅτι ὁ 8 εἶναι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως 80 : 24. Πράγματι εἶναι $24\times 3+8=72+8=80$.

Ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι :

Οἱ κοινοὶ διαιρέται δοθέντων ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλονται, ἂν ἕνας ἀπὸ αὐτοὺς ἀντικατασταθῇ μὲ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεώς του δι' ἄλλου ἀπὸ τοὺς ἰδίους ἀριθμούς.

5. ΕΥΡΕΣΙΣ ΤΟΥ Μ.Κ.Δ. ΔΟΘΕΝΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

§ 138. *Πρόβλημα.* **Ἕνας ἀνθοπώλης ἔχει 385 γαρύφαλα καὶ 35 τριαντάφυλλα. Θέλει δὲ μὲ ὅλα αὐτὰ τὰ ἄνθη νὰ κάμῃ ὁμοιομόρφους ἀνθοδέσμας. Νὰ εὑρεθῇ πόσας τὸ πολὺ ἀνθοδέσμας θὰ κάμῃ;**

Λύσις. Διὰ νὰ εἶναι ὁμοιόμορφοι αἱ ἀνθοδέσμαι, πρέπει καὶ τὰ γαρύφαλα καὶ τὰ τριαντάφυλλα νὰ μοιρασθοῦν ἐξ ἴσου εἰς ὅλας τὰς ἀνθοδέσμας, χωρὶς νὰ περισσεύσῃ κανένα ἄνθος.

Ὁ ἀριθμὸς λοιπὸν τῶν ἀνθοδεσμῶν πρέπει νὰ εἶναι κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν 385 καὶ 35. Ἐπειδὴ δὲ θέλει νὰ κάμῃ, ὅσον τὸ δυνατὸν περισσοτέρας ἀνθοδέσμας, πρέπει ὁ ἀριθμὸς αὐτῶν νὰ εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν 385 καὶ 35.

Δὲν δύναται δὲ νὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 35, διότι οὗτος ὑπ' οὐδενὸς μεγαλυτέρου του διαιρεῖται. Θὰ εἶναι λοιπὸν ὁ 35 ἢ ἄλλος μικρότερος.

Ἐπειδὴ δὲ ὁ 35 διαιρεῖ τὸν ἑαυτόν του, θὰ εἶναι οὗτος κ. δ, ἂν διαιρῇ καὶ τὸν 385.

Ἐκτελοῦντες τὴν διαίρεσιν 385 : 35, εὑρίσκομεν πηλίκον 11 καὶ ὑπόλοιπον μηδέν.

Εἶναι λοιπὸν ὁ 35 μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν 385 καὶ 35. Ἑπομένως δύναται νὰ κάμῃ τὸ πολὺ 35 ἀνθοδέσμας. Κάθε δὲ ἀνθοδέσμη θὰ περιέχῃ :

385 : 35 = 11 γαρύφαλα καὶ 35 : 35 = 1 τριαντάφυλλον.

§ 139. Πῶς εὑρίσκεται ὁ μ.κ.δ. δύο ἀριθμῶν. 1ον. Ἀπὸ τοὺς συλλογισμούς, τοὺς ὁποίους ἐκάμαμεν, διὰ νὰ λύσωμεν τὸ προηγούμενον πρόβλημα, ἐννοοῦμεν ὅτι :

Μέγιστος κοινὸς διαιρέτης δύο ἀριθμῶν εἶναι ὁ μικρότερος ἀπὸ αὐτούς, ἂν διαιρῇ ἀκριβῶς τὸν ἄλλον.

Ἑπομένως πρέπει πρῶτον νὰ διαιρέσωμεν τὸν μεγαλύτερον ἀριθμὸν διὰ τοῦ μικροτέρου. Κι' ἂν ἴδωμεν ὅτι ἡ διαίρεσις αὐτὴ εἶναι τελεία, ὁ μικρότερος εἶναι ὁ ζητούμενος μέγιστος κοινὸς διαιρέτης.

Προηγουμένως π.χ. εὕρομεν ὅτι μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν 385 καὶ 35 εἶναι ὁ 35, διότι ἡ διαίρεσις 385 : 35 εἶναι τελεία.

2ον. Ἔστωσαν τώρα οἱ ἀριθμοὶ 204 καὶ 60. Ἐκτελοῦντες τὴν διαίρεσιν 204 : 60, εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον 24.

Τώρα ἐνθυμούμεθα τὴν ἰδιότητα II (§ 137) καὶ ἐννοοῦμεν ὅτι ὁ ζητούμενος μ. κ. δ. εἶναι καὶ μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν 60 καὶ 24. Πρέπει ἑπομένως νὰ κάμωμεν τὴν διαίρεσιν 60 : 24, διὰ νὰ ἴδωμεν μήπως ὁ 24 εἶναι μ.κ.δ. αὐτῶν.

Ἐπειδὴ δὲ εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον 12, ἐννοοῦμεν ὁμοίως ὅτι πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὸν 24 διὰ 12.

Ἐπειδὴ δὲ ἡ διαίρεσις αὐτὴ εἶναι τελεία, συμπεραίνομεν ὅτι ὁ 12 εἶναι ὁ ζητούμενος μ. κ. δ.

Διάταξις τῆς πράξεως

	3	2	2
204	60	24	12
24	12	0	

Εἰς τὴν παραπλεύρως διάταξιν τὸ πηλίκον ἑκάστης διαιρέσεως γράφεται ἐπάνω ἀπὸ τὸν διαιρέτην, διὰ νὰ μείνῃ ὑποκάτω θέσις διὰ τὸ ὑπόλοιπον τῆς ἑπομένης διαιρέσεως. Κάθε δὲ ὑπόλοιπον διάφορον τοῦ 0 γίνεται διαιρέτης τῆς ἑπομένης διαιρέσεως. Μέγιστος δὲ κοινὸς διαιρέτης εἶναι ὁ τελευταῖος διαιρέτης.*

Ἂν ἐφαρμόσωμεν τὸν τρόπον αὐτὸν εἰς τοὺς ἀριθμοὺς 12 καὶ 43, εὑρίσκομεν μ. κ. δ. τὸν ἀριθμὸν 1, ὡς κάτωθι φαίνεται :

	3	1	1	2	2
43	12	7	5	2	1
7	5	2	1	0	

Οἱ ἀριθμοὶ λοιπὸν 43 καὶ 12 εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

§ 140. Πῶς εὑρίσκεται ὁ μ. κ. δ. πολλῶν ἀριθμῶν. 1ον. Ὁ μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν 48, 144, 240 δὲν δύναται νὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 48. Θὰ εἶναι δὲ ὁ 48, ἂν αὐτὸς διαιρῇ ἀκριβῶς τοὺς ἄλλους. Διαιροῦμεν λοιπὸν αὐτοὺς διὰ τοῦ 48 καὶ βλέπομεν ὅτι πράγματι ὁ 48 διαιρεῖ ἀκριβῶς καὶ τοὺς δύο ἄλλους. Αὐτὸς λοιπὸν εἶναι ὁ ζητούμενος μ. κ. δ.

2ον. Ἂς προσπαθήσωμεν τώρα νὰ εὕρωμεν τὸν μ.κ.δ. τῶν ἀριθμῶν 48, 160, 228.

Ὅπως προηγουμένως εἴπομεν, δοκιμάζομεν πρῶτον μήπως μ. κ. δ. αὐτῶν εἶναι ὁ μικρότερος ἀπὸ αὐτούς, δηλ. ὁ 48. Πρὸς τοῦτο ἐκτελοῦμεν τὰς διαιρέσεις 160 : 48 καὶ 228 : 48. Ἐπειδὴ δὲ εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον ἀπὸ τὴν πρώτην μὲν 16, ἀπὸ δὲ τὴν δευτέραν τὸν 36, δὲν εἶναι ὁ 48 κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν.

Διάταξις τῆς πράξεως

48	160	228
48	16	36
0	16	4
0	0	4

Ἂν δὲ ἐνθυμηθῶμεν πάλιν τὴν ἰδιότητα II (§ 137), ἐννοοῦμεν ὅτι οἱ ἀριθμοὶ 48 160 228 ἔχουν τὸν ἴδιον μ. κ. δ. μὲ τοὺς ἀριθμοὺς 48 16 36.

Ὥστε πρέπει νὰ εὕρωμεν τὸν μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν 48, 16, 36. Πρὸς τοῦτο διαιροῦμεν τοὺς ἄλλους διὰ τοῦ μικροτέρου 16 καὶ εὑρίσκομεν ὑπόλοιπα 0 καὶ 4.

Διὰ τὸν ἴδιον λόγον πρέπει νὰ εὕρωμεν τὸν μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν 0 16 4

---

* Ἡ μέθοδος αὐτὴ εἶναι γνωστὴ μὲ τὸ ὄνομα «Ἀλγόριθμος τοῦ Εὐκλείδου».

Ἐπειδὴ δὲ ὁ 4 διαιρεῖ τοὺς ἄλλους, αὐτὸς εἶναι ὁ ζητούμενος μ.κ.δ.

Εἰς τὴν ἀνωτέρω διάταξιν ὑποκάτω ἀπὸ κάθε διαιρέτην γράφομεν πάλιν τὸν διαιρέτην αὐτόν. Ὑποκάτω δὲ ἀπὸ κάθε διαιρετέον γράφομεν τὸ ἀντίστοιχον ὑπόλοιπον.

Συνεχίζονται δὲ αἱ διαιρέσεις μὲ τὸν μικρότερον καὶ διάφορον τοῦ 0 ἀριθμὸν κάθε σειρᾶς, ἕως ὅτου ὅλα τὰ ὑπόλοιπα εἶναι 0. Ὁ τελευταῖος δὲ διαιρέτης εἶναι ὁ ζητούμενος μ.κ.δ.

Σημείωσις. Ἂν ὁ τελευταῖος διαιρέτης εἶναι 1, οἱ ἀριθμοὶ θὰ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Π. χ. οἱ ἀριθμοὶ 5, 7, 11 εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

5	7	11
5	2	1
0	0	1

Ἀσκήσεις

Α΄ Ὁμάς. 176) Νὰ εὑρεθῇ ἀπὸ μνήμης ὁ μ.κ.δ. τῶν κάτωθι ἀριθμῶν :

1. 12 καὶ 48	3. 8 καὶ 12	5. 28 καὶ 42
2. 9 καὶ 63	4. 10 καὶ 35	6. 18 καὶ 63

177) Νὰ εὑρεθῇ ὁ μ.κ.δ. τῶν κάτωθι ἀριθμῶν :

1. 88 καὶ 156	3. 144 καὶ 594	5. 1 986 καὶ 2 226
2. 99 καὶ 312	4. 609 καὶ 270	6. 328 καὶ 1 540

178) Νὰ εὑρεθῇ ὁ μ. κ. δ. τῶν κάτωθι ἀριθμῶν :

1.	24	72	108	3.	560	728	328
2.	42	63	72	4.	3 420	2 610	7 020

Β΄ Ὁμάς. 179) Μία οἰκογένεια ἠγόρασε 300 δράμια λευκὰ κουφέτα καὶ 125 δράμια κυανᾶ, διὰ νὰ κάμῃ μπομπονιέρες κατὰ τὴν βάπτισιν τοῦ τέκνου της. Πόσας τὸ πολὺ ὁμοιομόρφους μπομπονιέρας δύναται νὰ σχηματίσῃ ; Καὶ πόσα δράμια κουφέτα ἀπὸ κάθε εἶδος θὰ ἔχῃ κάθε μία ;

180) Μία χορῳδία ἀποτελεῖται ἀπὸ 60 ὑψιφώνους, 120 μέσους καὶ 40 βαθυφώνους. Πόσας τὸ πολὺ ὁμοίας ὁμάδας δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν ἀπὸ αὐτούς ;

181) Ἕνας ἔρανος μιᾶς ἐπαρχιακῆς πόλεως ὑπὲρ τῶν εἰς αὐτὴν προσφύγων οἰκογενειῶν ἀπέδωκεν 880 000 δραχ, 200 ζεύγη κάλτσες καὶ 80 φανέλλας. Πόσας τὸ πολὺ οἰκογενείας δύνανται νὰ βοηθήσουν ἐξ ἴσου μὲ τὰ εἴδη αὐτὰ καὶ πόσα ἀπὸ κάθε εἶδος θὰ λάβῃ κάθε οἰκογένεια ;

6. ΕΛΑΧΙΣΤΟΝ ΚΟΙΝΟΝ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΟΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

§ 141. **Πολλαπλάσια.** Εἴδομεν ὅτι πολλαπλάσιον ἑνὸς ἀριθμοῦ λέγεται τὸ γινόμενον αὐτοῦ ἐπὶ τυχόντα ἀκέραιον ἀριθμόν. Εἶναι φανερὸν λοιπὸν ὅτι ἕνας ἀριθμὸς ἔχει ἄπειρα πολλαπλάσια. Οὕτω τὰ 5 πρῶτα πολλαπλάσια τοῦ 12 εἶναι 12, 24, 36, 48, 60.

§ 142. **Κοινὰ πολλαπλάσια.** Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ 12 καὶ 18. Τὰ πολλαπλάσια τοῦ 12 εἶναι:

12, 24, **36**, 48, 60, **72**, 84 96, **108**, . . .

Τὰ πολλαπλάσια τοῦ 18 εἶναι:

18, **36**, 54, **72**, 90, **108**, 126, 144, 162, . . .

Παρατηροῦμεν ὅτι οἱ ἀριθμοὶ 36, 72, 108,... εἶναι πολλαπλάσια τῶν 12 καὶ 18.

Οἱ 36, 72, 108 λέγονται **κοινὰ πολλαπλάσια** τῶν 12 καὶ 18. Ὥστε:
Κοινὸν πολλαπλάσιον δοθέντων ἀριθμῶν καλεῖται κάθε ἀριθμός, ὁ ὁποῖος εἶναι πολλαπλάσιον ὅλων αὐτῶν.

§ 143. **Ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον (ἐ.κ.π.).** Ἐκ τῶν κοινῶν πολλαπλασίων τῶν ἀριθμῶν 12 καὶ 18 μικρότερον εἶναι ὁ 36. Οὗτος λέγεται **ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον** αὐτῶν. Ὥστε:
Ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον δοθέντων ἀριθμῶν λέγεται τὸ μικρότερον ἐκ τῶν κοινῶν πολλαπλασίων αὐτῶν.

§ 144. **Πῶς εὑρίσκομεν τὸ ἑ. κ. π. δοθέντων ἀριθμῶν.** Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι θέλομεν νὰ λύσωμεν τὸ ἑξῆς πρόβλημα:

Ἕνα ἀτμόπλοιον ἀναχωρεῖ ἀπὸ τὸν Πειραιᾶ κάθε 4ην ἡμέραν, ἄλλο κάθε 6ην ἡμέραν καὶ τρίτον κάθε 8ην ἡμέραν. Συνέπεσε δὲ νὰ ἀναχωρήσουν ὅλα τὴν ἰδίαν ἡμέραν. Μετὰ πόσας ἡμέρας ἀπὸ αὐτὴν θὰ συμπέσῃ νὰ ἀναχωρήσουν πάλιν ὅλα τὴν ἰδίαν ἡμέραν;

Λύσις. Ἀπὸ τὴν ἡμέραν τῆς κοινῆς ἀναχωρήσεως μέχρι μιᾶς ἀκολούθου ἀναχωρήσεως τοῦ πρώτου ἀτμοπλοίου περνοῦν 4 ἢ 4×2 ἢ 4×3 κ.τ.λ. ἡμέραι. Ἤτοι ὁ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν αὐτῶν εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 4. Ὁμοίως ἐννοοῦμεν ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν μέχρι νέας ἀναχωρήσεως τοῦ δευτέρου εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 6 καὶ τοῦ τρίτου πολλαπλασιον τοῦ 8. Ἑπομένως διὰ νὰ συμπίπτη ν' ἀναχωροῦν ὅλα τὴν ἰδίαν ἡμέραν, πρέπει νὰ περάση ἀριθμὸς ἡμερῶν, ὁ ὁποῖος θὰ εἶναι κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν ἀριθμῶν 4, 6, 8.

Ὁ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν, μετὰ τὰς ὁποίας, διὰ πρώτην φοράν, θὰ ἀναχωρήσουν πάλιν τὴν ἰδίαν ἡμέραν, θὰ εἶναι ἐ.κ.π. τῶν 4, 6, 8.

Αὐτὸ δὲ θὰ εἶναι ἕνας ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς $8\times 1 = 8$, $8\times 2 = 16$, $8\times 3 = 24$, $8\times 4 = 32$ κ.τ.λ. Ἀπὸ αὐτὰ δὲ τὰ πολλαπλάσια τοῦ 8, ὁ 24 διαιρεῖται καὶ διὰ τῶν 4 καὶ 6· οὐδὲν δὲ ἄλλο μικρότερον τοῦ 24 διαιρεῖται δι' αὐτῶν. Εἶναι λοιπὸν ὁ 24 ἐ.κ.π. τῶν 4, 6, 8.

Ἑπομένως μετὰ 24 ἡμέρας τὰ 3 ἀτμόπλοια θὰ ἀναχωρήσουν τὴν ἰδίαν ἡμέραν.

Συμπέρασμα. Ἀπὸ τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος αὐτοῦ βλέπομεν ὅτι:

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐ.κ.π. δοθέντων ἀριθμῶν, πολλαπλασιάζομεν τὸν μεγαλύτερον κατὰ σειρὰν ἐπὶ 1, 2, 3 κ.τ.λ. ἕως νὰ εὕρωμεν γινόμενον, τὸ ὁποῖον νὰ διαιρῆται ἀπὸ ὅλους τοὺς ἄλλους ἀκριβῶς. Αὐτὸ τὸ γινόμενον εἶναι τὸ ζητούμενον ἐ.κ.π.

§ 145. Ἄλλος τρόπος εὑρέσεως τοῦ ἐ.κ.π. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐ.κ.π. ἀριθμῶν ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς:

Ἔστω ὅτι θέλομεν τὰ εὕρωμεν τὸ ἐ.κ.π. τῶν ἀριθμῶν 12, 14, 36, 45. Γράφομεν τοὺς ἀριθμοὺς αὐτοὺς ἐπὶ μιᾶς ὁριζοντίου σειρᾶς καὶ δεξιὰ αὐτῶν χαράσσομεν μίαν κατακόρυφον γραμμήν.

$$\begin{array}{rrrr|l}
12 & 14 & 36 & 45 & 2 \\
6 & 7 & 18 & 45 & 2 \\
3 & 7 & 9 & 45 & 3 \\
1 & 7 & 3 & 15 & 3 \\
1 & 7 & 1 & 5 &
\end{array}$$

Παρατηροῦμεν κατόπιν, ἂν ὑπάρχουν **δύο τοὐλάχιστον** ἀπὸ τοὺς δοθέντας ἀριθμοὺς διαιρετοὶ διὰ 2. Βλέπομεν δὲ ὅτι οἱ ἀριθμοὶ 12, 14, 36 διαιροῦνται διὰ 2. Διαιροῦμεν αὐτοὺς διὰ δύο καὶ τὸν μὲν διαιρέτην 2 γράφομεν δεξιὰ τῆς κατακορύφου γραμμῆς, τὰ δὲ πηλίκα των 6, 7, 18 γράφομεν ὑπὸ κάτω τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν. Ἐπίσης γράφομεν εἰς τὴν αὐτὴν σειρὰν κάτω καὶ τὸν ἀριθμὸν 45, ὁ ὁποῖος δὲν εἶναι διαιρετὸς διὰ 2.

Ἔπειτα ἐργαζόμεθα κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον καὶ διὰ τοὺς ἀριθμοὺς 6, 7, 18, 45 τῆς δευτέρας σειρᾶς. Εἰς τὴν σειρὰν αὐτὴν ὑπάρχουν οἱ ἀριθμοὶ 6, 18, οἱ ὁποῖοι εἶναι διαιρετοὶ διὰ 2· καὶ ἑπομένως θὰ γράψωμεν τὸν διαιρέτην 2 δεξιὰ τῆς κατακορύφου γραμμῆς, τὰ δὲ πηλίκα 3 καὶ 9 καθὼς καὶ τοὺς μὴ διαιρουμένους διὰ 2 ἀριθμοὺς 7 καὶ 45 εἰς μία τρίτην σειράν.

Εἰς τὴν τρίτην σειρὰν δὲν ὑπάρχουν ἀριθμοὶ διαιρετοὶ διὰ 2, ἀλλ' ὑπάρχουν οἱ ἀριθμοὶ 3, 9, 45, οἱ ὁποῖοι εἶναι διαιρετοὶ διὰ 3. Γράφομεν τὸν 3 δεξιὰ τῆς κατακορύφου γραμμῆς καὶ τὰ πηλίκα 1, 3, 15, καθὼς καὶ τὸν ἀριθμὸν 7, τὸν μὴ διαιρετὸν διὰ 3, εἰς μίαν τετάρτην σειράν.

Εἰς τὴν τετάρτην σειρὰν ὑπάρχουν οἱ ἀριθμοὶ 3 καὶ 15, οἱ ὁποῖοι εἶναι διαιρετοὶ διὰ 3. Γράφομεν τὸν 3 δεξιὰ τῆς κατακορύφου γραμμῆς καὶ τὰ πηλίκα 1 καὶ 5, καθὼς καὶ τοὺς ἀριθμοὺς 1 καὶ 7, εἰς μίαν ἑπομένην σειράν.

Ἐὰν εἰς τὴν ἑπομένην σειρὰν ὑπῆρχον δύο τοὐλάχιστον ἀριθμοὶ διαιρετοὶ διὰ 5 ἢ διὰ 7 ἢ διὰ 11 κ.τ.λ. θὰ εἰργαζόμεθα ὅπως ἀνωτέρω. Ἐπειδὴ ὅμως εἰς τὴν τελευταίαν σειρὰν δὲν ὑπάρχουν δύο τοὐλάχιστον ἀριθμοὶ διαιρετοὶ δι' ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, σταματῶμεν τὴν πρᾶξιν.

Τὸ ζητούμενον ἐ. κ. π. θὰ εἶναι τὸ γινόμενον ὅλων τῶν διαιρετῶν (δηλ. τῶν ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι εὑρίσκονται δεξιὰ τῆς κατακορύφου γραμμῆς) καὶ τῶν ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι ὑπάρχουν εἰς τὴν τελευταίαν σειράν.

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω τὸ ἐ. κ. π. τῶν ἀριθμῶν 12, 14, 36, 45 εἶναι τὸ γινόμενον: $2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 = 1\,260$.

Ἀσκήσεις

Α' Ὁμάς: 182) Εὕρετε τὰ 5 πρῶτα πολλαπλάσια τοῦ 7 καὶ 8.

183) Εὕρετε 3 κοινὰ πολλαπλάσια τῶν ἀριθμῶν 4 καὶ 7.

184) Εὕρετε τὸ ἐ. κ. π. τῶν ἀριθμῶν:

1. 6 καὶ 18	2. 8 καὶ 12	3. 5 καὶ 9
4. 9, 12, 18	5. 8, 20, 30	6. 6, 9, 12, 8

185) Εὕρετε τὸ ἐ. κ. π. τῶν κάτωθι ἀριθμῶν:

1. 15, 18, 24, 42	4. 9, 12, 18, 32
2. 16, 36, 45, 18	5. 14, 21, 24, 48
3. 8, 50, 25, 32	6. 70, 14, 21, 56

Β' Ὁ μ ά ς. 186) Κατὰ τοπικὴν ἑορτὴν ὁ κώδων τῆς μιᾶς ἐκκλησίας ἐπαρχιακῆς πόλεως ἠχεῖ ἀνὰ 3 λεπτά, τῆς β' ἀνὰ 5 καὶ τῆς γ' ἀνὰ 6 λεπτά. Ἂν ἀρχίσουν νὰ ἠχοῦν συγχρόνως, μετὰ πόσον τοὐλάχιστον χρόνον θὰ ἠχήσουν πάλιν ὅλοι τὴν αὐτὴν στιγμήν ;

187) Εἰς τὴν πλατεῖαν μιᾶς πόλεως καταλήγουν 4 γραμμαὶ τῶν τράμ. Ἀπὸ αὐτὰς φθάνουν εἰς τὴν πλατεῖαν ὀχήματα ἀνὰ 4, 8, 12, 16 λεπτά. Ἂν κατά τινα στιγμὴν φθάσουν ὀχήματα ἀπὸ ὅλας τὰς γραμμάς, νὰ εὕρητε μετὰ πόσον χρόνον τοὐλάχιστον θὰ ἐπαναληφθῇ τοῦτο.

188) Τρεῖς ποδηλάται ἀναχωροῦν ταὐτοχρόνως ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον ἑνὸς κυκλικοῦ στίβου καὶ κινοῦνται κατὰ τὴν αὐτὴν φοράν. Ὁ πρῶτος διανύει τὸν στίβον εἰς 8 λεπτὰ τῆς ὥρας, ὁ δεύτερος εἰς 12 καὶ ὁ τρίτος εἰς 15 λ. Ζητεῖται μετὰ πόσον χρόνον ἀπὸ τῆς ἀναχωρήσεώς των θὰ συναντηθοῦν εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἀφετηρίας καὶ πόσους γύρους θὰ ἔχῃ κάμει ἕκαστος ἐξ αὐτῶν.

7. ΠΡΩΤΟΙ ΚΑΙ ΣΥΝΘΕΤΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

§ 146. Πρῶτοι καὶ σύνθετοι ἀριθμοί. Εἴδομεν προηγουμένως ὅτι μερικοὶ ἀριθμοὶ ἔχουν πολλοὺς διαιρέτας.

Π. χ. ὁ 12 ἔχει 6 διαιρέτας, τοὺς 1 2 3 4 6 12.
ὁ 20 ἔχει 6 διαιρέτας, τοὺς 1 2 4 5 10 20.

Ὑπάρχουν ὅμως καὶ ἄλλοι ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι δὲν ἔχουν ἄλλους διαιρέτας ἐκτὸς τοῦ ἑαυτοῦ των καὶ τῆς μονάδος. Π. χ. ὁ 7 ἔχει δύο διαιρέτας, τοὺς 1 καὶ 7. Ὁ 11 ἔχει δύο διαιρέτας, τοὺς 1 καὶ 11.

Οἱ τοιοῦτοι ἀριθμοὶ λέγονται **πρῶτοι ἀριθμοί.** Ὥστε :

Πρῶτος λέγεται κάθε ἀριθμός, ὁ ὁποῖος δὲν ἔχει ἄλλους διαιρέτας ἐκτὸς ἀπὸ τὴν 1 καὶ ἀπὸ τὸν ἑαυτόν του.

Ὁ ἀριθμὸς 4 ἔχει διαιρέτας τοὺς ἀριθμοὺς 1, 2, 4. Δὲν εἶναι λοιπὸν πρῶτος. Αὐτὸς λέγεται **σύνθετος** ἀριθμός.

Διὰ τὸν ἴδιον λόγον οἱ 6, 8, 9 κ.τ.λ. εἶναι σύνθετοι ἀριθμοί. Ὥστε :

Σύνθετος ἀριθμὸς λέγεται κάθε ἀριθμός, ὁ ὁποῖος δὲν εἶναι πρῶτος.

Σημείωσις I. Δὲν πρέπει νὰ συγχέωμεν τοὺς **πρώτους ἀριθμοὺς** πρὸς τοὺς **πρώτους πρὸς ἀλλήλους.**

Π. χ. οἱ ἀριθμοὶ 4, 9, 10 εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ἀλλὰ οὐδεὶς εἶναι πρῶτος ἀριθμός.

II. Εἰς τὴν εὕρεσιν τοῦ ἑ.κ.π. (§ 145) καλύτερα νὰ ἀναζητῶμεν ὡς διαιρέτας **πρώτους ἀριθμούς.**

§ 147. **Δεύτερος διαιρέτης.** Ὁ ἀριθμὸς 8 ἔχει διαιρέτας τοὺς ἀριθμοὺς 1, 2, 4, 8. Ὁ 15 ἔχει διαιρέτας 1, 3, 5, 15.

Βλέπομεν ὅτι πρῶτος διαιρέτης δηλ. μικρότερος ἀπὸ τοὺς διαιρέτας κάθε ἀριθμοῦ, εἶναι ὁ 1.

Δεύτερος μετ' αὐτὸν διαιρέτης τοῦ 8 εἶναι ὁ 2, τοῦ 15 ὁ 3. Ὁμοίως δεύτερος διαιρέτης τοῦ 49 εἶναι ὁ 7.

Ἀπὸ τὰ παραδείγματα αὐτὰ βλέπομεν ὅτι:

Ὁ δεύτερος διαιρέτης παντὸς ἀριθμοῦ εἶναι πρῶτος ἀριθμός.

Ἀσκήσεις

189) Ἂν εἰς ἕνα περιττὸν ἀριθμόν, μεγαλύτερον τοῦ 1, προσθέσωμεν 1, νὰ ἐξετάσητε, ἂν προκύπτῃ πρῶτος ἢ σύνθετος ἀριθμός.

190) Ποῖος εἶναι ὁ δεύτερος διαιρέτης ἑνὸς ἀρτίου ἀριθμοῦ;

191) Τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων ἑνὸς περιττοῦ ἀριθμοῦ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 3. Ποῖος εἶναι ὁ δεύτερος διαιρέτης του;

§ 148. *Πρόβλημα.* **Νὰ εὑρεθοῦν ὅλοι οἱ πρῶτοι ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι εἶναι μικρότεροι τοῦ 100.**

Λύσις. Γράφομεν κατὰ σειρὰν ὅλους τοὺς ἀριθμοὺς ἀπὸ τὸν 1 ἕως τὸν 100 (σχ. 5). Ἔπειτα διαγράφομεν τὸν 2^2, δηλ. τὸν 4 καὶ ἀρχίζοντες ἀπὸ τὸν 5 μετροῦμεν τοὺς ἀριθμοὺς ἀνὰ δύο· διαγράφομεν δὲ κάθε δεύτερον. Οὕτω δὲ διαγράφομεν τοὺς 6, 8, 10 κ.τ.λ, δηλ. ὅλα τὰ πολλαπλάσια τοῦ 2.

Ἔπειτα διαγράφομεν τὸν 3^2, δηλ. τὸν 9, καὶ ἀρχίζοντες ἀπὸ τὸν 10 μετροῦμεν τοὺς ἀριθμοὺς ἀνὰ 3 καὶ διαγράφομεν κάθε τρίτον, δηλ. τοὺς 12, 15 κ.τ.λ, ἤτοι τὰ πολλαπλάσια τοῦ 3.

Ἀφοῦ διαγράψωμεν κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον τὰ πολλαπλάσια τοῦ 5 καὶ τοῦ 7, πρέπει νὰ διαγράψωμεν τὰ πολλαπλάσια τοῦ 11, διότι τὰ πολλαπλάσια τοῦ 8, 10 διεγράφησαν ὡς πολλαπλάσια τοῦ 2, τὰ δὲ πολλαπλάσια τοῦ 9 διεγράφησαν ὡς πολλαπλάσια τοῦ 3.

Τὸ πρῶτον πολλαπλάσιον τοῦ 11, ἀπὸ τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ ἀρχίσωμεν εἶναι ὁ 11^2, ἤτοι ὁ 121. Αὐτὸς ὅμως δὲν ἔχει γραφῆ, ὡς μεγαλύτερος τοῦ 100.

Τελειώνει λοιπὸν ἡ ἐργασία καὶ ὅσοι ἀριθμοὶ μένουν εἶναι ὅλοι πρῶτοι. Αὐτοὶ ἀναγράφονται εἰς τὸν κατωτέρω πίνακα.

1	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Σχ. 5

Κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τοὺς πρώτους ἀριθμοὺς ἕως 500 ἢ 1 000 κ.τ.λ.

Ἡ μέθοδος αὕτη λέγεται **κόσκινον τοῦ Ἐρατοσθένους.***

Πρῶτοι ἀριθμοὶ ἀπὸ 1-100

1	11	29	47	71	97
2	13	31	53	73	
3	17	37	59	79	
5	19	41	61	83	
7	23	43	67	89	

* Ὁ Ἐρατοσθένης ἦτο Ἕλλην ἐκ Κυρήνης τῆς Ἀφρικῆς. Ἐγεννήθη τὸ 275 π. Χ. καὶ ἐσπούδασε πρῶτον εἰς τὴν Ἀλεξάνδρειαν καὶ ἔπειτα εἰς Ἀθήνας. Τὸ 235 π. Χ. ἀνέλαβε τὴν διεύθυνσιν τῆς ἐν Ἀλεξανδρείᾳ περιφήμου βιβλιοθήκης. Διετήρησε δὲ τὴν θέσιν αὐτὴν μέχρι τοῦ θανάτου του.

8. ΑΝΑΛΥΣΙΣ ΑΡΙΘΜΩΝ ΕΙΣ ΓΙΝΟΜΕΝΑ ΠΡΩΤΩΝ ΠΑΡΑΓΟΝΤΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΑΥΤΗΣ

§ 149. Πῶς ἀναλύομεν ἕνα ἀριθμὸν εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντων. Ἔστω ὁ σύνθετος ἀριθμὸς 720.

Ἂν διαιρέσωμεν αὐτὸν διὰ τοῦ δευτέρου διαιρέτου του 2, εὑρίσκομεν πηλίκον 360. Ἑπομένως εἶναι: $720 = 2 \times 360$.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν $360 = 2 \times 180$. Ἑπομένως $720 = 2 \times 2 \times 180$
Ἐπειδὴ δὲ $180 = 2 \times 90$, ἡ ἰσότης αὕτη γίνεται:

$$720 = 2 \times 2 \times 2 \times 90.$$

Καὶ ἐπειδὴ $90 = 2 \times 45$, αὕτη γίνεται:

$$720 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 45.$$

Ὁ 45 ἔχει δεύτερον διαιρέτην τὸν 3 καὶ εἶναι $45 : 3 = 15$. Ἑπομένως $45 = 3 \times 15$.

Ἡ προηγουμένη λοιπὸν ἰσότης γίνεται:

$$720 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 15.$$

Ἐπειδὴ δὲ $15 = 3 \times 5$, ἕπεται ὅτι:

$$720 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5.$$

Ἀνελύθη λοιπὸν ὁ 720 εἰς γινόμενον, τοῦ ὁποίου ὅλοι οἱ παράγοντες εἶναι πρῶτοι ἀριθμοί. Τὸ γινόμενον τοῦτο γράφεται συντομώτερον οὕτως:

$$720 = 2^4 \times 3^2 \times 5.$$

Διάταξις τῆς πράξεως

720	2
360	2
180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

Εἰς τὴν παρακειμένην διάταξιν οἱ διαιρέται τῶν διαδοχικῶν διαιρέσεων γράφονται δεξιὰ τῆς γραμμῆς. Τὸ γινόμενον δὲ αὐτῶν εἶναι τὸ ζητούμενον. Καὶ συντομώτερον ἀκόμη δυνάμεθα νὰ κάμωμεν αὐτὴν τὴν ἀνάλυσιν. Διότι εἶναι φανερὸν ὅτι:

$$720 = 72 \times 10 = 8 \times 9 \times 10.$$

Ἐπειδὴ δὲ $8 = 2^3$, $9 = 3^2$, καὶ $10 = 2 \times 5$.
ἕπεται ἀμέσως ὅτι: $720 = 2^4 \times 3^2 \times 5$.

Ἄσκησις

192) Νὰ ἀναλυθοῦν οἱ κάτωθι ἀριθμοὶ εἰς γινόμενα παραγόντων πρώτων:

1.	128	260	372	840
2.	3 600	9 720	3 850	7 260

§ 150. Πῶς εὑρίσκομεν τὸ γινόμενον ἀριθμῶν ἀναλελυμένων εἰς γινόμενα πρώτων παραγόντων. Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον $75 \times 144 \times 360$.

Ἀναλύοντες τοὺς ἀριθμοὺς 75, 144, 360 εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντων εὑρίσκομεν :

$$75 = 3 \cdot 5^2$$
$$144 = 2^4 \cdot 3^2$$
$$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$$

75	3	144	2	360	2
25	5	72	2	180	2
5	5	36	2	90	2
1		18	2	45	3
		9	3	15	3
		3	3	5	5
		1		1	

Θὰ εἶναι λοιπόν : $75 \times 144 \times 360$ ἢ

$$(3 \cdot 5^2) \times (2^4 \cdot 3^2) \times (2^3 \cdot 3^2 \cdot 5) = 3 \cdot 5^2 \cdot 2^4 \cdot 3^2 \cdot 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \text{ (διατί;)}$$
$$= 2^4 \cdot 2^3 \cdot 3 \cdot 3^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 5 \text{ (διατί;)}$$

Ἐπειδὴ δὲ

$$2^4 \cdot 2^3 = 2^{4+3} = 2^7, \quad 3 \cdot 3^2 \cdot 3^2 = 3^{1+2+2} = 3^5, \quad 5^2 \cdot 5 = 5^{2+1} = 5^3,$$

ἡ προηγουμένη ἰσότης γράφεται :

$$(3 \cdot 5^2) \times (2^4 \cdot 3^2) \times (2^3 \cdot 3^2 \cdot 5) = 2^7 \cdot 3^5 \cdot 5^3.$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι :

Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμοὺς ἀναλελυμένους εἰς γινόμενα πρώτων παραγόντων, σχηματίζομεν ἕνα γινόμενον, τὸ ὁποῖον νὰ περιέχῃ ὅλους τοὺς πρώτους παράγοντας τῶν ἀριθμῶν καὶ μόνον αὐτούς, ἕκαστον δὲ μὲ ἐκθέτην ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν, τοὺς ὁποίους ὁ παράγων οὗτος ἔχει εἰς τοὺς δοθέντας ἀριθμούς.

Ἄσκησις

193) Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις, ἀφοῦ προηγουμένως ἀναλυθοῦν οἱ ἀριθμοὶ εἰς γινόμενα πρώτων παραγόντων :

1. 320×460 2. $378 \times 154 \times 166$ 3. $516 \times 396 \times 978$

§ 151. Ὕψωσις ἀριθμοῦ εἰς δύναμιν. Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ ὑψώσωμεν τὸν ἀριθμὸν 360 εἰς τὴν δευτέραν δύναμιν, δηλ. νὰ εὕρωμεν τὴν δύναμιν 360^2.

Ἀναλύοντες τὸν ἀριθμὸν 360 εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντων εὑρίσκομεν $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$. Θὰ εἶναι λοιπόν :

$$360^2 = (2^3 \cdot 3^2 \cdot 5)^2 = (2^3)^2 \times (3^2)^2 \times (5^1)^2$$

$$\text{ἢ} \quad (2^3 \cdot 3^2 \cdot 5)^2 = 2^{3\times 2} \times 3^{2\times 2} \times 5^{1\times 2}$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι :

Διὰ νὰ ὑψώσωμεν εἰς δύναμιν ἀριθμὸν ἀναλελυμένον εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντων, πολλαπλασιάζομεν τοὺς ἐκθέτας τῶν πρώτων παραγόντων αὐτοῦ ἐπὶ τὸν ἐκθέτην τῆς δυνάμεως αὐτῆς.

Ἄσκησις

194) Νὰ εὑρεθῇ τὸ τετράγωνον καὶ ὁ κύβος τῶν κάτωθι ἀριθμῶν, ἀφοῦ προηγουμένως ἀναλυθοῦν οὗτοι εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντων.

1.	725	3.	2 340	5.	1 260
2.	312	4.	4 560	6.	7 290

§ 152. Πῶς διακρίνομεν, ἂν ἕνας ἀριθμὸς εἶναι διαιρετὸς δι' ἄλλου. Τὸ γινόμενον π.χ. 12×720 εἶναι προφανῶς διαιρετὸν διὰ 12 καὶ εἶναι :

$$(12 \times 720) : 12 = 720.$$

Ἐπειδὴ δὲ $12 = 2^2 \times 3$ καὶ $720 = 2^4 \times 3^2 \times 5$ εὑρίσκομεν ὅτι :

$$12 \times 720 = (2^2 \times 3) \times (2^4 \times 3^2 \times 5) = 2^6 \times 3^3 \times 5$$

720	2
360	2
180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι :

Ἕνας ἀριθμὸς διαιρετὸς δι' ἄλλου ἔχει ὅλους τοὺς παράγοντας τοῦ ἄλλου καὶ οὐδένα μὲ μικρότερον ἐκθέτην.

Ἀντιστρόφως. Ὁ ἀριθμὸς $A = 2^4 \times 3^3 \times 5^2 \times 7$ ἔχει ὅλους τοὺς παράγοντας τοῦ $B = 2^2 \times 3 \times 5^2$ καὶ οὐδένα μὲ μικρότερον ἐκθέτην.

Ἂς ἐξετάσωμεν, ἂν ὁ Α διαιρῆται ἀκριβῶς διὰ τοῦ Β. Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν ὅτι $2^4 = 2^2 \times 2^2$ καὶ $3^3 = 3^2 \times 3$ καὶ ἐννοοῦμεν ὅτι :

$$A = 2^2 \times 2^2 \times 3^2 \times 3 \times 5^2 \times 7$$

$$\text{ἢ} \quad A = (2^2 \times 3 \times 5^2) \times (2^2 \times 3^2 \times 7)$$

Ἐπειδὴ $2^2 \times 3 \times 5^2 = B$, ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται :

$$A = B \times (2^2 \times 3^2 \times 7)$$

Ἀπὸ τὴν ἰσότητα αὐτὴν βλέπομεν ὅτι ὁ Α διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ Β καὶ δίδει πηλίκον $2^2 \times 3^2 \times 7$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι:

Ἂν ἀριθμὸς ἔχῃ ὅλους τοὺς πρώτους παράγοντας ἄλλου καὶ οὐδένα μὲ μικρότερον ἐκθέτην, διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ ἄλλου.

Τὰ συμπεράσματα αὐτὰ συνοψίζομεν ὡς ἑξῆς:

Διὰ νὰ εἶναι ἕνας ἀριθμὸς διαιρετὸς δι' ἄλλου, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ἔχῃ ὅλους τοὺς πρώτους παράγοντας τοῦ ἄλλου καὶ οὐδένα μὲ μικρότερον ἐκθέτην.

§ 153. Πῶς εὑρίσκομεν τὸ ἀκριβὲς πηλίκον τῆς διαιρέσεως γινομένου πρώτων παραγόντων δι' ἄλλου τοιούτου. Εἴδομεν προηγουμένως ὅτι:

$(12 \times 720) : 12 = 720$ ἢ $(2^6 \times 3^3 \times 5) : (2^2 \times 3) = 2^4 \times 3^2 \times 5$.

Ὁμοίως $(2^4 \times 3^3 \times 5^2 \times 7) : (2^2 \times 3 \times 5^2) = 2^2 \times 3^2 \times 7$.

Ἐπειδὴ ἀπὸ τὸν διαιρέτην τοῦ πρώτου παραδείγματος λείπει ὁ παράγων 5 τοῦ διαιρετέου δυνάμεθα νὰ γράψωμεν τὸν διαιρέτην αὐτὸν καὶ ὡς ἑξῆς: $2^2 \times 3 \times 5^0$, διότι $5^0 = 1$.

Ὁμοίως τὸ πηλίκον τοῦ δευτέρου παραδείγματος δυνάμεθα νὰ τὸ γράψωμεν καὶ οὕτω: $2^2 \times 3^2 \times 7 \times 5^0$.

Ἀπὸ τὰ δύο ἀνωτέρω παραδείγματα συνάγομεν ὅτι:

Τὸ πηλίκον δύο ἀριθμῶν ἀναλελυμένων εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντων ἔχει ὅλους τοὺς πρώτους παράγοντας τοῦ διαιρετέου. Ἕκαστον δὲ μὲ ἐκθέτην τὴν διαφορὰν τοῦ ἐκθέτου, τὸν ὁποῖον ἔχει ὁ παράγων οὗτος εἰς τὸν διαιρέτην ἀπὸ ἐκεῖνον, τὸν ὁποῖον ἔχει εἰς τὸν διαιρετέον.

Ἀσκήσεις

195) Νὰ ἀναγνωρισθῇ ποῖος ἀπὸ τοὺς ἀριθμούς:

$$2^3 \times 5^2 \times 7, \quad 2^2 \times 3^4 \times 5 \times 7^2, \quad 2^5 \times 3^4 \times 5^2 \times 7^3$$

διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ $2^2 \times 3^2 \times 5$ καὶ ποῖον εἶναι τὸ ἀντίστοιχον πηλίκον.

196) 1ον. Νὰ ἀναγνωρισθῇ δι' ἀναλύσεως τῶν ἀριθμῶν εἰς γινόμενον παραγόντων πρώτων ποῖοι ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 276, 524, 780, 2 436 διαιροῦνται διὰ 12 καὶ ποῖον τὸ ἀντίστοιχον πηλίκον.

2ον. Νὰ ἀναγνωρισθῇ ὁμοίως ποῖοι ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 2 100, 2 250, 1 120, 13 230 διαιροῦνται διὰ 210 καὶ ποῖον τὸ ἀντίστοιχον πηλίκον.

§ 154. Πῶς εὑρίσκομεν τὸν μ.κ.δ. ἀριθμῶν ἀναλελυμένων εἰς γινόμενα πρώτων παραγόντων. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν μ.κ.δ. π.χ. τῶν ἀριθμῶν

$$A = 2^3 \times 3^2 \times 5^3 \times 7, \quad B = 2^3 \times 3^4 \times 5, \quad \Gamma = 2^5 \times 3^4 \times 7^3,$$

σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς :

Ὁ μ.κ.δ. αὐτῶν δὲν δύναται νὰ ἔχῃ ἕνα μὴ κοινὸν παράγοντα αὐτῶν. Διότι, ἂν εἶχε π.χ. τὸν 7, δὲν θὰ διῄρει τὸν B καὶ ἑπομένως δὲν θὰ ἦτο κοινὸς διαιρέτης τῶν A, B, Γ.

Ἕνα δὲ κοινὸν παράγοντα, π.χ. τὸν 2, δὲν δύναται νὰ τὸν ἔχῃ μὲ ἐκθέτην μεγαλύτερον τοῦ 3, διότι ἂν εἶχεν αὐτόν, π.χ. μὲ ἐκθέτην 4, δὲν θὰ διῄρει τὸν A οὔτε τὸν B.

Οὐδὲ μὲ ἐκθέτην μικρότερον τοῦ 3 πρέπει νὰ ἔχῃ τὸν 2, διότι θὰ ὑπῆρχεν ἄλλος κοινὸς διαιρέτης μεγαλύτερός του. Ἐκεῖνος δηλ, ὁ ὁποῖος θὰ εἶχε τὸν 2 μὲ ἐκθέτην 3. Θὰ ἔχῃ λοιπὸν τὸν 2 μὲ ἐκθέτην 3. Ὁμοίως ἐννοοῦμεν ὅτι θὰ ἔχῃ τὸν 3 μὲ ἐκθέτην τὸν 2.

Ὁ ζητούμενος λοιπὸν μ.κ.δ. εἶναι : $2^3 \times 3^2$ ἢ $8 \times 9 = 72$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι :

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν μ.κ.δ. ἀριθμῶν ἀναλελυμένων εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντων, σχηματίζομεν ἕνα γινόμενον, τὸ ὁποῖον ἔχει μόνον τοὺς κοινοὺς παράγοντας τῶν δοθέντων ἀριθμῶν καὶ ἕκαστον μὲ τὸν μικρότερον ἀπὸ τοὺς ἐκθέτας, τοὺς ὁποίους ἔχει οὗτος εἰς τοὺς δοθέντας ἀριθμούς.

§ 155. Πῶς εὑρίσκομεν τὸ ἐ.κ.π. ἀριθμῶν ἀναλελυμένων εἰς γινόμενα πρώτων παραγόντων. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐ.κ.π. τῶν ἀριθμῶν $A = 2^3 \times 3^2 \times 5, \quad B = 2^2 \times 3^2 \times 7, \quad \Gamma = 2^4 \times 3 \times 11,$ σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς :

Τὸ ζητούμενον ἐ.κ.π. ὡς διαιρούμενον ὑπὸ τῶν A, B, Γ, θὰ περιέχῃ ὅλους τοὺς παράγοντας 2, 3, 5, 7, 11 αὐτῶν. Διότι, ἂν π.χ. δὲν εἶχε τὸν 11, δὲν θὰ διῃρεῖτο διὰ τοῦ Γ καὶ ἑπομένως δὲν θὰ ἦτο κοινὸν πολλαπλάσιον αὐτῶν. Κάθε δὲ παράγοντα θὰ τὸν ἔχῃ μὲ τὸν μεγαλύτερον ἀπὸ τοὺς ἐκθέτας, τοὺς ὁποίους ἔχει οὗτος εἰς τοὺς δοθέντας ἀριθμούς. Π.χ. τὸν 2 θὰ τὸν ἔχῃ μὲ ἐκθέτην 4, διότι ἂν τὸν εἶχε μὲ ἐκθέτην 3, δὲν θὰ διῃρεῖτο διὰ τοῦ Γ.

Ἂν δὲ εἶχε τὸ 2 μὲ ἐκθέτην μεγαλύτερον τοῦ 4, θὰ ὑπῆρχεν ἄλλο κοινὸν πολλαπλάσιον μικρότερόν του. Ἐκεῖνο δηλ, εἰς τὸ ὁποῖον ὁ 2 θὰ εἶχεν ἐκθέτην 4.

Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον δὲν δύναται νὰ ἔχῃ καὶ παράγοντα, μὴ ὑπάρχοντα εἰς τοὺς δοθέντας ἀριθμοὺς π. χ. τὸν 13.

Τὸ ζητούμενον λοιπὸν ἐ. κ. π. εἶναι: $2^4 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 11$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι:

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐ.κ.π. ἀριθμῶν ἀναλελυμένων εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντων, σχηματίζομεν ἕνα γινόμενον, τὸ ὁποῖον ἔχει ὅλους τοὺς κοινοὺς καὶ μὴ κοινοὺς πρώτους παράγοντας τῶν δοθέντων ἀριθμῶν καὶ ἕκαστον μὲ τὸν μεγαλύτερον ἀπὸ τοὺς ἐκθέτας, τοὺς ὁποίους ἔχει οὗτος εἰς τοὺς δοθέντας ἀριθμούς.

Παρατήρησις. Οἱ ἀριθμοὶ $2^3 \times 5$, $3^2 \times 7$, $11^2 \times 13$ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀνὰ δύο. Ἑπομένως δὲν ἔχουν κανένα κοινὸν παράγοντα. Ἐλάχιστον δὲ κοινὸν πολλαπλάσιον αὐτῶν θά εἶναι:

$2^3 \times 5 \times 3^2 \times 7 \times 11^2 \times 13$, ἤτοι τὸ γινόμενον αὐτῶν.

Ἀσκήσεις

197) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐ. κ. π. καὶ ὁ μ. κ. δ. τῶν κάτωθι ἀριθμῶν

1. $A = 2^3 \times 3 \times 5$ καὶ $B = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7$
2. $A = 2 \times 3 \times 5 \times 11$ καὶ $B = 3^2 \times 7 \times 11$
3. $A = 2^4 \times 3^2 \times 5^2 \times 7$ καὶ $B = 2 \times 3 \times 5 \times 11$

198) Νὰ εὑρεθῇ ὁ μ. κ. δ. καὶ τὸ ἐ. κ. π. τῶν κάτωθι ἀριθμῶν, δι' ἀναλύσεως τούτων εἰς γινόμενα πρώτων παραγόντων:

1. 144 καὶ 504
2. 226 καὶ 198
3. 132 252 420
4. 756 504 1 260

ΒΙΒΛΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΟΙ ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄

ΕΝΝΟΙΑ ΤΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

1. ΟΡΙΣΜΟΙ

§ 156. Τί εἶναι κλασματικαὶ μονάδες. Διὰ νὰ μοιράσῃ μία μητέρα ἕνα μῆλον εἰς δύο μικρὰ τέκνα της, χωρίζει αὐτὸ εἰς δύο ἴσα μέρη καὶ δίδει ἀπὸ ἕνα εἰς κάθε παιδίον. Τὸ μερίδιον λοιπὸν κάθε παιδίου εἶναι ἥμισυ μῆλον καὶ γράφεται $\frac{1}{2}$ μήλου.

Δηλ. 1 μῆλον $:2 = \frac{1}{2}$ μήλου.

Ὁμοίως, ἂν 3 ἀδελφοὶ χωρίσουν ἕνα ἀγρὸν εἰς 3 ἴσα μέρη, ὁ καθεὶς λαμβάνει ἕνα ἀπὸ τὰ τρία ἴσα μέρη, δηλ. τὸ ἓν τρίτον ἢ $\frac{1}{3}$ τοῦ ἀγροῦ.

Ὥστε 1 ἀγρός : $3 = \frac{1}{3}$ ἀγροῦ. Ὁμοίως $1 : 4 = \frac{1}{4}$ κ.τ.λ.

Αὐτοὶ οἱ ἀριθμοὶ $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ κ.τ.λ. λέγονται **κλασματικαὶ μονάδες**. Ὥστε :

Κλασματικὴ μονὰς λέγεται κάθε ἕνα ἀπὸ τὰ ἴσα μέρη, εἰς τὰ ὁποῖα χωρίζομεν τὴν ἀκεραίαν μονάδα.

§ 157. Τί εἶναι κλασματικοὶ ἀριθμοί. Διὰ νὰ μοιράσωμεν 3 ἄρτους εἰς 4 πτωχούς, μοιράζομεν πρῶτον τὸν ἕνα ἄρτον καὶ δίδομεν εἰς κάθε ἕνα ἀπὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ ἄρτου. Ἀπὸ τὸν δεύτερον ἄρτον δίδομεν ἀπὸ ἄλλο $\frac{1}{4}$ καὶ ἀπὸ τὸν τρίτον ἀπὸ ἄλλο $\frac{1}{4}$.

Λαμβάνει λοιπὸν κάθε πτωχὸς τρεῖς φορὰς τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ ἄρτου.

Δι' αὐτὸ λέγομεν ὅτι κάθε πτωχὸς ἔλαβε τρία τέταρτα τοῦ ἄρτου. Δηλ. $3 : 4 = \frac{3}{4}$.

Γνωρίζομεν ὅτι ἕνας πῆχυς διαιρεῖται εἰς 8 ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται ρούπια. Ἕνα δηλ. ρούπιον εἶναι $\frac{1}{8}$ τοῦ πήχεως. Ἂν λοιπὸν μοιράσωμεν 6 πήχεις σειρητίου εἰς 8 δεσποινίδας, ἡ κάθε μία θὰ λάβῃ ἕνα ρούπιον ἢ $\frac{1}{8}$ τοῦ πήχεως ἀπὸ κάθε πῆχυν. Ἑπομένως τὸ μερίδιόν τους θὰ εἶναι 6 ρούπια ἢ $\frac{6}{8}$ τοῦ πήχεως.

Εἶναι λοιπὸν $6 : 8 = \frac{6}{8}$.

Αὐτοὶ οἱ ἀριθμοὶ $\frac{3}{4}$, $\frac{6}{8}$ κ.τ.λ. λέγονται **κλασματικοὶ** ἀριθμοὶ ἢ ἁπλῶς **κλάσματα.**

Καὶ αἱ κλασματικαὶ μονάδες εἶναι κλάσματα. Ὥστε:

Κλασματικὸς ἀριθμὸς ἢ κλάσμα εἶναι κάθε ἀριθμός, ὁ ὁποῖος γίνεται ἀπὸ μίαν κλασματικὴν μονάδα, ἂν ληφθῇ μίαν ἢ καὶ περισσοτέρας φοράς.

Κάθε κλάσμα γράφεται μὲ δύο ἀκεραίους ἀριθμούς, τὸν ἕνα ὑποκάτω ἀπὸ τὸν ἄλλον· οὗτοι χωρίζονται ἀπὸ μίαν εὐθεῖαν γραμμήν.

Ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος γράφεται ὑποκάτω ἀπὸ τὴν γραμμήν, λέγεται **παρονομαστής.** Οὗτος φανερώνει εἰς πόσα ἴσα μέρη διῃρέθη ἡ ἀκεραία μονάς.

Ὁ ὑπεράνω τῆς γραμμῆς λέγεται **ἀριθμητής**· αὐτός φανερώνει πόσα ἀπὸ τὰ ἴσα μέρη τῆς ἀκεραίας μονάδος ἐλήφθησαν. Ὁ ἀριθμητὴς καὶ ὁ παρονομαστὴς μαζὶ λέγονται **ὅροι** τοῦ κλάσματος.

Ὅταν ὀνομάζωμεν ἕνα κλάσμα, τὸν μὲν ἀριθμητὴν ἀπαγγέλλομεν ὡς **ἀπόλυτον** ἀριθμητικόν, τὸν δὲ παρονομαστὴν ὡς **τακτικὸν** ἀριθμητικόν.

§ 158. Ἀκριβὲς πηλίκον δύο ἀριθμῶν. Μία ἀπὸ τὰς σπουδαιοτέρας ἐφαρμογὰς τῶν κλασμάτων εἶναι ὅτι, διὰ τῆς παραδοχῆς αὐτῶν, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ **ἀκριβὲς πηλίκον** δύο ἀριθμῶν.

Πράγματι, ὅπως εἴδομεν, μὲ τὸ νὰ χωρίσωμεν κάθε ἄρτον εἰς 4 ἴσα μέρη, κατωρθώσαμεν νὰ μοιράσωμεν ἀκριβῶς τοὺς 3 ἄρτους εἰς τοὺς 4 πτωχούς, δηλ. νὰ διαιρέσωμεν τὸν 3 διὰ τοῦ 4. Εὑρήκαμεν δὲ ὅτι κάθε πτωχὸς θὰ λάβῃ $\frac{3}{4}$ τοῦ ἄρτου ἀκριβῶς, χωρὶς νὰ μείνῃ τίποτε. Τὸ κλάσμα λοιπὸν $\frac{3}{4}$ εἶναι τὸ ἀκριβὲς πηλίκον τῆς διαιρέσεως $3:4$.

Ὁμοίως, ὅταν μοιράσωμεν ἐξ ἴσου 25 χιλιόδρ. εἰς 10 ἀνθρώπους, εὑρίσκομεν ὅτι ἕκαστος θὰ λάβῃ $\frac{25}{10}$ τοῦ χιλιοδρ. ἤτοι εἶναι $25:10=\frac{25}{10}$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συμπεραίνομεν ὅτι :

1ον. Κάθε διαίρεσις εἶναι δυνατὴ καὶ τελεία.

2ον. Τὸ πηλίκον κάθε διαιρέσεως εἶναι κλάσμα, τὸ ὁποῖον ἔχει ἀριθμητὴν μὲν τὸν διαιρετέον καὶ παρονομαστὴν τὸν διαιρέτην.

3ον. Κάθε κλάσμα παριστάνει τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμητοῦ του διὰ τοῦ παρονομαστοῦ του.

Γενικῶς λοιπὸν εἶναι :

$$\boxed{\alpha:\beta=\frac{\alpha}{\beta}} \quad \text{καὶ} \quad \boxed{\frac{\alpha}{\beta}=\alpha:\beta}$$

Ἀσκήσεις

Α' Ὁμάς. *Ἀπὸ μνήμης.* 199) Πῶς ὀνομάζεται ἕκαστον μέρος τῆς μονάδος, ἂν αὐτὴ διαιρεθῇ εἰς 4, εἰς 7, εἰς 8, εἰς 15, εἰς 28, εἰς 360 ἴσα μέρη ;

200) Εἰς πόσα ἴσα μέρη πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὴν ἀκεραίαν μονάδα, διὰ νὰ ἀποτελῆται αὐτὴ ἀπὸ τρίτα, τέταρτα, εἰκοστά, ἑκατοστά ;

201) Ἀναγνώσατε τὰ κλάσματα: $\frac{5}{8}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{15}{28}$, $\frac{24}{132}$, $\frac{502}{524}$.

202) 1ον. Ποῖον κλάσμα τοῦ πήχεως εἶναι τὸ 1 ρούπιον, τὰ 2 ρούπια, τὰ 5 ρούπια ;

2ον. Ποῖον κλάσμα τῆς ὀκᾶς εἶναι τὸ 1 δράμιον, τὰ 10 δράμια, τὰ 120 δράμια ;

3ον. Ποῖον κλάσμα τοῦ ἔτους εἶναι αἱ 5 ἡμέραι, αἱ 30 ἡμέραι, αἱ 240 ἡμέραι ;

4ον. Ποῖον κλάσμα τῆς ὥρας εἶναι τὸ 1 λεπτόν, τὰ 15 λεπτά, τὰ 20 λεπτά ;

Β' Ὁμάς. 203) Ἓξ ὅμοιαι πλάκες σάπωνος ἔχουν βάρος 2 ὀκ. Νὰ εὕρητε πόσον μέρος τῆς ὀκᾶς εἶναι τὸ βάρος κάθε μιᾶς.

204) Ἕνας γεωργὸς εἰς 5 ἡμέρας ἐθέρισε 3 στρέμματα ἑνὸς ἀγροῦ. Πόσον ἐθέρισεν τὴν ἡμέραν ;

205) Ἀπὸ ἕνα βαρέλιον οἴνου 350 ὀκάδων λαμβάνομεν 12, 29, 105 ὀκάδες. Πόσον μέρος τοῦ οἴνου αὐτοῦ λαμβάνομεν κάθε φοράν ;

206) Εἰς 15 πτωχὰς οἰκογενείας ἐμοιράσθη ἐξ ἴσου ἕνα ποσὸν ἀλεύρου. Πόσον μέρος τοῦ ποσοῦ αὐτοῦ ἔλαβον αἱ 9 ἐκ τῶν οἰκογενειῶν ;

207) Πόσον μέρος τοῦ χιλιοδράχμου εἶναι αἱ 500 δραχμαί, αἱ 100 δραχμαί, αἱ 50 δραχμαί ;

208) Καθένα ἐκ τῶν κλασμάτων $\frac{5}{7}$, $\frac{6}{11}$, $\frac{23}{30}$ ποίας διαιρέσεως εἶναι πηλίκον ;

209) Ποῖον εἶναι τὸ ἀκριβὲς πηλίκον τῶν διαιρέσεων :

1.	3 : 8	5 : 12	4 : 25	48 : 250
2.	37 : 5	43 : 7	126 : 11	

210) Ποία ἡ διπλῆ σημασία καθενὸς τῶν κλασμάτων :

$$\frac{7}{8},\ \frac{11}{18},\ \frac{17}{23}.$$

Γ' Ὁμάς. 211) Γράψατε ὑπὸ μορφὴν κλάσματος : δύο ἔνατα· πέντε εἰκοστά· δέκα πέντε διακοσιοστά· τριάκοντα ὀκτὼ χιλιοστά· ἑκατὸν τρία δισχιλιοστὰ τριακοσιοστὰ ἑβδομηκοστὰ πρῶτα.

212) Χαράξατε μίαν εὐθεῖαν γραμμήν. Χωρίσατέ την εἰς 8 ἴσα μέρη. Κάτωθεν αὐτῆς γράψατε δύο ἄλλας, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μία παριστᾷ τὰ $\frac{3}{8}$ καὶ ἡ ἄλλη τὰ $\frac{5}{8}$ τῆς πρώτης εὐθείας.

§ 159. Σύγκρισις κλασμάτων πρὸς τὴν ἀκεραίαν μονάδα. Ἔστω ὅτι ἐχωρίσαμεν δύο ὁμοίας πλάκας σάπωνος εἰς 4 ἴσα μέρη κάθε μίαν. Εἶναι φανερὸν ὅτι τὰ τρία ἀπὸ αὐτὰ τὰ μέρη ἀποτελοῦν μέρος μικρότερον ἀπὸ μίαν πλάκα. Εἶναι λοιπὸν $\frac{3}{4} < 1$. Τέσσαρα δὲ ἀπὸ τὰ μέρη αὐτὰ ἀποτελοῦν μίαν πλάκα ὥστε : $\frac{4}{4} = 1$. Πέντε δὲ ἀπὸ αὐτὰ ἀποτελοῦν 1 πλάκα καὶ περισσεύει καὶ $\frac{1}{4}$. Εἶναι λοιπόν: $\frac{5}{4} > 1.$

Ὁμοίως ἐννοοῦμεν ὅτι $\frac{4}{7} < 1$, $\frac{7}{7} = 1$, $\frac{9}{7} > 1$ κ.τ.λ.

Ἀπὸ τὴν σύγκρισιν αὐτὴν βλέπομεν ὅτι:

1ον. Ἂν ὁ ἀριθμητὴς ἑνὸς κλάσματος εἶναι μικρότερος ἀπὸ τὸν παρονομαστήν, τὸ κλάσμα εἶναι μικρότερον ἀπὸ τὴν ἀκεραίαν μονάδα.

2ον. Ἂν οἱ ὅροι ἑνὸς κλάσματος εἶναι ἴσοι, τὸ κλάσμα εἶναι ἴσον πρὸς τὴν ἀκεραίαν μονάδα.

3ον. Ἂν ὁ ἀριθμητὴς ἑνὸς κλάσματος εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν παρονομαστήν του, τὸ κλάσμα εἶναι μεγαλύτερον ἀπὸ τὴν ἀκεραίαν μονάδα.

Ἀσκήσεις

213) Ὀνομάσατε:

1ον. Ὅλα τὰ μικρότερα τῆς ἀκεραίας μονάδος κλάσματα μὲ παρονομαστὴν 6.

2ον. Τρία κλάσματα μεγαλύτερα τῆς ἀκεραίας μονάδος μὲ τὸν ἴδιον παρονομαστήν.

3ον. Κλάσματα μικρότερα καὶ ἄλλα μεγαλύτερα τῆς ἀκεραίας μονάδος μὲ ἀριθμητὴν 7.

214) Χωρίσατε τὰ κάτωθι κλάσματα εἰς τρεῖς ὁμάδας, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ α΄ νὰ περιέχῃ τὰ κλάσματα τὰ μικρότερα τῆς ἀκεραίας μονάδος, ἡ β΄ τὰ κλάσματα τὰ ἴσα μὲ τὴν ἀκεραίαν μονάδα καὶ ἡ γ΄ τὰ κλάσματα τὰ μεγαλύτερα τῆς ἀκεραίας μονάδος:

$$\frac{7}{15},\quad \frac{7}{7},\quad \frac{13}{9},\quad \frac{25}{25},\quad \frac{35}{34},\quad \frac{51}{51},\quad \frac{17}{42},\quad \frac{102}{95},\quad \frac{45}{61}.$$

215) Ἂν ὁ α παριστᾷ ἕνα ἀκέραιον ἀριθμόν, νὰ συγκρίνητε τὸ κλάσμα $\frac{\alpha - 1}{\alpha}$ πρὸς τὴν ἀκεραίαν μονάδα.

§ 160. Πῶς ἕνας ἀκέραιος τρέπεται εἰς κλάσμα. *Πρόβλημα.* **Πόσα ὄγδοα ἔχουν οἱ 5 πήχεις;**

Λύσεις. Ἐπειδὴ ὁ 1 πῆχυς ἔχει 8 ὄγδοα, οἱ 5 πήχεις θὰ ἔχουν 5 φορὰς τὰ 8 ὄγδοα, ἤτοι:

$$8 \text{ ὄγδοα} \times 5 = 40 \text{ ὄγδοα}$$

Θὰ εἶναι λοιπὸν 5 πήχ. $= \frac{40}{8}$ πήχ.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι τὰ 3 μέτρα ἔχουν 30 δέκατα, ἤτοι :

$$3 = \frac{30}{10}.$$ Ὥστε :

Διὰ νὰ τρέψωμεν ἀκέραιον εἰς κλάσμα μὲ δοθέντα παρονομαστήν, πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀκέραιον ἐπὶ τὸν δοθέντα παρονομαστὴν καὶ τὸ γινόμενον θέτομεν ὡς ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος, ὡς παρονομαστὴν δὲ αὐτοῦ θέτομεν τὸν δοθέντα.

Ἰδιαιτέρα περίπτωσις. Κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα εἶναι :

$$5 = \frac{5 \times 1}{1} = \frac{5}{1} \text{ καὶ } 8 = \frac{8}{1}.$$ Ὥστε :

Κάθε ἀκέραιος δύναται νὰ παρασταθῇ καὶ ὡς κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν αὐτὸν τὸν ἀκέραιον, παρονομαστὴν δὲ τὴν μονάδα.

Ἀσκήσεις

Α' Ὁμάς. *Προφορικῶς.* 216) 1ον. Πόσα ὄγδοα ἔχουν 6 πήχεις, 10 πήχεις, 20 πήχεις ;

2ον. Πόσα ἕβδομα ἔχουν 3 ἑβδομάδες, 7 ἑβδομάδες, 12 ἑβδομάδες ;

3ον. Πόσα ἑκατοστὰ ἔχουν 16 δραχμαί, 23 δραχμαί, 34 δραχμαί ;

Β' Ὁμάς. 217) Εὕρετε ἕνα κλάσμα μὲ παρονομαστὴν 15 καὶ ἴσον πρὸς 3. Ἄλλο κλάσμα μὲ παρονομαστὴν 20 καὶ ἴσον πρὸς 5.

218) Γράψατε :

1ον. Ἕνα κλάσμα ἴσον πρὸς ἀκέραιον ἀριθμὸν α μὲ παρονομαστὴν 2, ἄλλο δὲ μὲ παρονομαστὴν 5.

2ον. Ἕνα κλάσμα ἴσον πρὸς ἀκέραιον ἀριθμὸν α μὲ παρονομαστὴν πάλιν α.

§ 161. Μεικτοὶ ἀριθμοί. Ἂν μοιράσωμεν 5 ὀκάδας φασόλια εἰς 2 πτωχούς, θὰ λάβῃ καθένας ἀπὸ 2 ὀκ. καὶ θὰ περισσεύσῃ 1 ὀκᾶ. Ἂν μοιράσωμεν καὶ αὐτήν, θὰ λάβῃ ὁ καθένας ἀπὸ $\frac{1}{2}$ τῆς ὀκᾶς.

Τὸ μερίδιον λοιπὸν ἑκάστου εἶναι 2 ὀκ. $+ \frac{1}{2}$ τῆς ὀκᾶς.

Αὐτὸ τὸ ἄθροισμα τὸ γράφομεν συντομώτερα οὕτω $2\frac{1}{2}$ καὶ τὸ ἀπαγγέλλομεν δύο καὶ ἓν δεύτερον.

Ὁ ἀριθμὸς $2\frac{1}{2}$ λέγεται **μεικτὸς** ἀριθμός.

Ὁμοίως οἱ ἀριθμοὶ $5\frac{2}{3}$, $10\frac{2}{5}$, $23\frac{3}{8}$ κ.τ.λ. εἶναι **μεικτοὶ ἀριθμοί**. Ὥστε:

Μεικτὸς ἀριθμὸς λέγεται κάθε ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἀποτελεῖται ἀπὸ ἀκέραιον καὶ ἀπὸ κλάσμα.

§ 162. **Πῶς ἕνας μεικτὸς τρέπεται εἰς κλάσμα.** Εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα εἴδομεν ὅτι καθένας ἀπὸ τοὺς 2 πτωχοὺς ἔλαβε $2\frac{1}{2}$ ὀκάδας φασόλια. Ἐπειδὴ ὅμως αἱ 2 ὀκάδες ἔχουν 2×2, ἤτοι 4 δεύτερα τῆς ὀκᾶς, τὸ μερίδιον κάθε πτωχοῦ εἶναι $4+1$ ἢ 5 δεύτερα τῆς ὀκᾶς. Εἶναι λοιπὸν $2\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$. Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι:

$$3\frac{2}{5}=\frac{3\times 5+2}{5}=\frac{17}{5}.$$

Ἐκ τῶν παραδειγμάτων αὐτῶν συνάγομεν τὸν κάτωθι κανόνα:

Διὰ νὰ τρέψωμεν μεικτὸν ἀριθμὸν εἰς κλάσμα, πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀκέραιον ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος καὶ εἰς τὸ γινόμενον προσθέτομεν τὸν ἀριθμητήν του. Τὸ ἐξαγόμενον θέτομεν ὡς ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν ἀφήνομεν τὸν ἴδιον.

Ἀσκήσεις

Ἀπὸ μνήμης. 219) Νὰ τραποῦν οἱ κάτωθι μεικτοὶ εἰς κλάσματα: $4\frac{1}{2}$, $8\frac{7}{9}$, $20\frac{1}{3}$, $15\frac{3}{4}$, $15\frac{2}{3}$, $8\frac{5}{6}$, $9\frac{2}{3}$.

220) 1ον. Πόσα πέμπτα ἔχει ἐν ὅλῳ ἕκαστος τῶν μεικτῶν:

$$4\frac{3}{5},\ 12\frac{2}{5},\ 20\frac{4}{5};$$

2ον. Πόσα ὄγδοα ἔχουν $10\frac{3}{8}$ πήχεις καὶ πόσα ἑκατοστὰ ἔχουν $20\frac{15}{100}$ δραχμαί;

3ον. Πόσα τετρακοσιοστὰ ἔχουν αἱ $3\frac{100}{400}$ ὀκάδες, αἱ $15\frac{80}{400}$ ὀκάδες;

221) 1ον. Ἂν $5\frac{3}{4}=\frac{\alpha}{4}$, νὰ εὕρητε ποῖον ἀριθμὸν παριστάνει τὸ γράμμα α.

2ον. Νὰ τρέψητε τὸν μεικτὸν $6\frac{x}{5}$ εἰς ἴσον κλάσμα.

Γραπτῶς: 222) Νὰ τραποῦν εἰς κλάσματα οἱ κάτωθι μεικτοί:
$105\frac{7}{8}$, $254\frac{25}{28}$, $146\frac{7}{11}$, $17\frac{80}{81}$, $95\frac{21}{25}$, $104\frac{52}{61}$.

§ 163. Ἐξαγωγὴ τῶν ἀκεραίων μονάδων ἑνὸς κλάσματος. Ἂν 4 οἰκογένειαι μοιράσουν 83 ὀκάδας ἀνθράκων, τὸ μερίδιον κάθε μιᾶς εἶναι $\frac{83}{4}$ τῆς ὀκᾶς.

Ἂν ὅμως ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν 83 : 4 εὑρίσκομεν ὅτι κάθε μία λαμβάνει ἀπὸ 20 ὀκάδας καὶ περισσεύουν 3 ὀκάδες. Ἀπὸ αὐτὰς δὲ κάθε μία οἰκογένεια λαμβάνει $\frac{3}{4}$ τῆς ὀκᾶς. Ὥστε τὸ μερίδιον κάθε οἰκογενείας εἶναι $20\frac{3}{4}$ ὀκ. Εἶναι δηλ. $\frac{83}{4} = 20\frac{3}{4}$.

Εὕρομεν λοιπὸν ὅτι τὸ κλάσμα $\frac{83}{4}$ ἔχει 20 ἀκεραίας μονάδας καὶ ἀκόμη $\frac{3}{4}$ τῆς ἀκεραίας μονάδος.

Αὐτὴ ἡ ἐργασία λέγεται **ἐξαγωγὴ τῶν ἀκεραίων μονάδων.** Ἀπὸ τὸ προηγούμενον δὲ παράδειγμα βλέπομεν ὅτι:

Διὰ νὰ ἐξαγάγωμεν τὰς ἀκεραίας μονάδας ἑνὸς κλάσματος, διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητὴν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ. Καὶ τὸ μὲν πηλίκον παριστάνει τὰς ζητουμένας ἀκεραίας μονάδας, τὸ δὲ ὑπόλοιπον φανερώνει τὸ πλῆθος τῶν κλασματικῶν μονάδων, αἱ ὁποῖαι περιέχονται ἀκόμη εἰς τὸ κλάσμα.

Ἀσκήσεις

Α' Ὁμάς. *Ἀπὸ μνήμης.* 223) Νὰ ἐξαγάγητε τὰς ἀκεραίας μονάδας τῶν κλασμάτων $\frac{7}{2}$, $\frac{9}{3}$, $\frac{15}{4}$, $\frac{20}{5}$, $\frac{42}{8}$, $\frac{60}{7}$, $\frac{85}{9}$.

224) Νὰ ἐξαγάγητε τὰς ἀκεραίας μονάδας τῶν κλασμάτων
$\frac{135}{10}$, $\frac{525}{100}$, $\frac{1823}{10}$, $\frac{4568}{100}$, $\frac{27965}{1000}$, $\frac{38584}{1000}$.

225) Νὰ διακρίνητε ἀμέσως τί εἶδος ἀριθμὸς θὰ προκύψῃ ἀπὸ κάθε ἕνα ἀπὸ τὰ κλάσματα:
$\frac{164}{2}$, $\frac{328}{4}$, $\frac{423}{4}$, $\frac{561}{3}$, $\frac{460}{3}$, $\frac{525}{100}$, $\frac{4374}{9}$
μετὰ τὴν ἐξαγωγὴν τῶν ἀκεραίων μονάδων αὐτῶν.

226) Νὰ διακρίνητε ἀμέσως ποῖα ἀπὸ τὰ κλάσματα :

$$\frac{650}{25},\ \frac{1432}{4},\ \frac{340}{25},\ \frac{2160}{8},\ \frac{4517}{4},\ \frac{3322}{11}$$

γίνονται ἀκέραιοι καὶ ποῖα μεικτοί, ἂν ἐξαχθοῦν αἱ ἀκέραιαι μονάδες αὐτῶν.

Β' Ὁ μ ά ς. 227) Νὰ ὁρίσητε ὅλα τὰ κλάσματα, τὰ ὁποῖα ἔχουν παρονομαστὴν 2, ἀριθμητὴν μικρότερον τοῦ 15 καὶ τὰ ὁποῖα εἶναι ἴσα μὲ ἀκεραίους ἀριθμούς.

228) Νὰ γράψητε ὅλα τὰ κλάσματα μὲ παρονομαστὴν 4 καὶ ἀριθμητὴν μικρότερον τοῦ 17, τὰ ὁποῖα εἶναι ἴσα μὲ ἀκεραίους ἀριθμούς.

229) 1ον. Ποῖα κλάσματα μὲ παρονομαστὴν 25 γίνονται ἀκέραιοι μεταξὺ 2 καὶ 5 ;

2ον. Ποῖα κλάσματα μὲ παρονομαστὴν 8 γίνονται ἀκέραιοι μεταξὺ 5 καὶ 12 ;

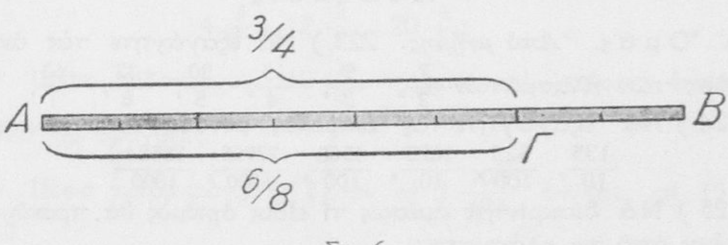
Γ' Ὁ μ ά ς. 230) Ἂν τὸ κλάσμα $\frac{\alpha}{4}$ εἶναι ἴσον μὲ τὸν ἀκέραιον 3, ποῖον ἀριθμὸν παριστάνει τὸ γράμμα α ;

231) Ἂν $\frac{40}{\chi} = 8$, ποῖον ἀριθμὸν παριστάνει τὸ γράμμα χ ;

232) Ἂν τὸ κλάσμα $\frac{\chi}{9}$ γίνεται ἀκέραιος μεταξὺ 4 καὶ 7, ποίους ἀριθμοὺς παριστάνει τὸ χ ;

§ 164. Τί παθαίνει ἕνα κλάσμα, ἂν οἱ ὅροι του πολλαπλασιασθοῦν ἢ διαιρεθοῦν διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ. Ἔστω τὸ κλάσμα $\frac{3}{4}$.

Ἂν διπλασιάσωμεν τοὺς ὅρους του, εὑρίσκομεν τὸ κλάσμα $\frac{6}{8}$.



Σχ. 6

Διὰ νὰ συγκρίνωμεν τὰ κλάσματα αὐτὰ ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς :

α') Παριστάνομεν τὴν μονάδα μὲ τὸ τμῆμα ΑΒ (σχ. 6).

Ἂν διαιρέσωμεν τοῦτο εἰς 4 ἴσα μέρη, βλέπομεν ὅτι $\frac{3}{4}$ εἶναι τὸ τμῆμα ΑΓ.

Ἂν δὲ κάθε τέταρτον μέρος τὸ διαιρέσωμεν εἰς δύο ἴσα μέρη, τὸ μὲν τμῆμα ΑΒ διαιρεῖται εἰς 8 ἴσα μέρη, τὸ δὲ τμῆμα ΑΓ εἰς 6 τοιαῦτα μέρη. Εἶναι λοιπὸν τὸ ΑΓ τὰ $\frac{6}{8}$ τοῦ τμήματος ΑΒ.

Λέγομεν λοιπὸν ὅτι: $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$.

Ὁμοίως βεβαιούμεθα ὅτι: $\frac{5}{6} = \frac{15}{18}$, $\frac{7}{10} = \frac{28}{40}$ κ.τ.λ.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι:

Ἂν οἱ ὅροι ἑνὸς κλάσματος πολλαπλασιασθοῦν ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος δὲν μεταβάλλεται.

β') Εἴδομεν προηγουμένως ὅτι: $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$.

Ἐπειδὴ δὲ τὸ κλάσμα $\frac{3}{4}$ γίνεται ἀπὸ τὰ $\frac{6}{8}$, ἂν οἱ ὅροι του διαιρεθοῦν διὰ 2, συνάγομεν ὅτι:

Ἂν οἱ ὅροι ἑνὸς κλάσματος διαιρεθοῦν διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος δὲν μεταβάλλεται.

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω εἶναι γενικῶς:

$$\boxed{\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha \times \gamma}{\beta \times \gamma}} \qquad \boxed{\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha : \gamma}{\beta : \gamma}}$$

Ἀσκήσεις

233) Εὕρετε ἀμέσως πόσα ὄγδοα ἔχει κάθε ἕνα ἀπὸ τὰ κλάσματα: $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{16}$, $\frac{6}{24}$.

234) Ποῖον ἀπὸ τὰ κλάσματα, μὲ παρονομαστὴν 4, εἶναι ἴσον μὲ τὸ $\frac{1}{2}$ καὶ ποῖον μὲ τὸ $\frac{12}{16}$;

235) Εὕρετε ἕνα κλάσμα:

1ον. Ἴσον μὲ τὸ $\frac{1}{2}$, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ παρονομαστὴν 4, 8 10, 12, 18.

2ον. Ἴσον μὲ τὰ $\frac{3}{4}$, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ παρονομαστὴν 8, 12, 24, 32, 60.

236) Ἀντικαταστήσατε τὰ γράμματα μὲ τοὺς καταλλήλους ἀριθμοὺς εἰς τὰς ἑξῆς ἰσότητας :

$\frac{9}{15}=\frac{\alpha}{45}$, $\frac{9}{15}=\frac{63}{\beta}$, $\frac{19}{35}=\frac{\alpha}{315}$, $\frac{\gamma}{108}=\frac{17}{36}$, $\frac{21}{\delta}=\frac{189}{900}$.

2. ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ

§ 165. Τί εἶναι ἁπλοποίησις ἑνὸς κλάσματος. Ἔστω π. χ. τὸ κλάσμα $\frac{8}{12}$.

Ἂν διαιρέσωμεν τοὺς ὅρους αὐτοῦ διά τινος κοινοῦ διαιρέτου των π.χ. διὰ τοῦ 2, εὑρίσκομεν τὸ κλάσμα $\frac{4}{6}$, τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν αὐτὴν ἀξίαν μὲ τὸ $\frac{8}{12}$ (§ 164 β′) καὶ ὅρους μικροτέρους.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι τὸ κλάσμα $\frac{3}{4}$ ἔχει τὴν αὐτὴν ἀξίαν μὲ τὸ $\frac{9}{12}$. Ἤτοι εἶναι $\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$ κ.τ.λ. Αὐτὴ ἡ ἐργασία λέγεται **ἁπλοποίησις** τοῦ $\frac{8}{12}$, τοῦ $\frac{9}{12}$ κ.τ.λ. Ὥστε :

Ἁπλοποίησις ἑνὸς κλάσματος λέγεται ἡ πρᾶξις, μὲ τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν κλάσμα ἴσον μὲ αὐτό, ἀλλὰ μὲ μικροτέρους ὅρους.

Ἀπὸ τὰ προηγούμενα δὲ παραδείγματα ἐννοοῦμεν ὅτι :

Διὰ νὰ ἁπλοποιήσωμεν ἕνα κλάσμα, διαιροῦμεν τοὺς ὅρους του δι' ἑνὸς κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν.

Καὶ ἑπομένως :

Ἂν οἱ ὅροι ἑνὸς κλάσματος εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, τὸ κλάσμα δὲν ἁπλοποιεῖται.

Λέγεται δὲ τοῦτο **ἀνάγωγον κλάσμα.**

Π. χ. τὰ κλάσματα $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{9}$ εἶναι ἀνάγωγα.

§ 166. Παρατηρήσεις. Εἴδομεν προηγουμένως ὅτι $\frac{8}{12}=\frac{4}{6}$. Ἀλλὰ καὶ $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$. Ὥστε : $\frac{8}{12}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$. Τὸ τελευταῖον κλάσμα $\frac{2}{3}$ εἶναι ἀνάγωγον. Εὑρίσκομεν δὲ αὐτὸ ἀμέσως ἀπὸ τὸ $\frac{8}{12}$, ἂν διαιρέσωμεν τούς ὅρους του διὰ τοῦ μ.κ.δ. αὐτῶν 4.

Ὁμοίως, ἂν διαιρέσωμεν τοὺς ὅρους τοῦ $\frac{15}{25}$ διὰ τοῦ μ. κ. δ. 5 τῶν ὅρων του, εὑρίσκομεν τὸ ἀνάγωγον κλάσμα $\frac{3}{5}$. Ὥστε :

Ἕνα ἁπλοποιήσιμον κλάσμα γίνεται ἀμέσως ἀνάγωγον, ἂν οἱ ὅροι του διαιρεθοῦν διὰ τοῦ μ.κ.δ. αὐτῶν.

Διὰ τῆς ἁπλοποιήσεως τῶν κλασμάτων ἐπιτυγχάνονται τὰ ἑξῆς :

1ον. Ἔχομεν σαφεστέραν ἰδέαν τοῦ κλάσματος· δηλ. ἐννοοῦμεν καλύτερον τὰ $\frac{3}{8}$ τοῦ πήχεως παρὰ τὰ $\frac{39}{104}$ αὐτοῦ.

2ον. Ὅσον μικρότεροι γίνονται οἱ ὅροι τῶν κλασμάτων, τόσον περισσότερον εὐκολυνόμεθα εἰς τὰς πράξεις αὐτῶν, ὡς θὰ ἴδωμεν κατωτέρω.

Ἀσκήσεις

237) Ἁπλοποιήσατε ἀπὸ μνήμης τὰ κλάσματα:

$$\frac{4}{8},\ \frac{6}{12},\ \frac{9}{15},\ \frac{6}{24},\ \frac{10}{26},$$

238) Μὲ μίαν ἁπλοποίησιν καταστήσατε ἀνάγωγον καθένα ἀπὸ τὰ κλάσματα :

$$\frac{8}{16},\ \frac{12}{36},\ \frac{16}{40},\ \frac{24}{32},\ \frac{85}{120},\ \frac{9}{24},\ \frac{18}{24},\ \frac{35}{49},\ \frac{16}{64},\ \frac{27}{81}.$$

§ 167. Ποῖα κλάσματα λέγονται ὁμώνυμα καὶ ποῖα ἑτερώνυμα. Τὰ κλάσματα $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{8}$ ἔχουν τὸν αὐτὸν παρονομαστήν. Διὰ τοῦτο δὲ ταῦτα λέγονται **ὁμώνυμα** κλάσματα.

Τὰ δὲ κλάσματα $\frac{2}{5}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{8}{9}$ ἔχουν διαφόρους παρονομαστάς. Λέγονται δὲ **ἑτερώνυμα** κλάσματα. Ὥστε:

Ὅσα κλάσματα ἔχουν τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, λέγονται ὁμώνυμα κλάσματα.

Ὅσα δὲ ἔχουν διαφόρους παρονομαστάς, λέγονται ἑτερώνυμα κλάσματα.

§ 168. Πῶς ἑτερώνυμα κλάσματα τρέπονται εἰς ὁμώνυμα.

Α' τρόπος. Ἔστωσαν τὰ ἑτερώνυμα κλάσματα $\frac{2}{5}$ καὶ $\frac{3}{4}$.

Διὰ νὰ τρέψωμεν αὐτὰ εἰς ὁμώνυμα, ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς :

Εὑρίσκομεν πρῶτον τὸ ἐ. κ. π. τῶν παρονομαστῶν, τὸ ὁποῖον εἶναι 20. Τὰ πηλίκα τοῦ 20 δι' ἑκάστου τῶν παρονομαστῶν εἶναι ἀντιστοίχως 4 καὶ 5.

Ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν τοὺς ὅρους τοῦ α' κλάσματος ἐπὶ 4, τοῦ β' ἐπὶ 5 καὶ εὑρίσκομεν τὰ κλάσματα $\frac{8}{20}$, $\frac{15}{20}$. Αὐτὰ δὲ εἶναι ὁμώνυμα καὶ ἴσα ἀντιστοίχως πρὸς τὰ δοθέντα, ἕνα πρὸς ἕνα. Ὥστε :

α') **Διὰ νὰ τρέψωμεν ἑτερώνυμα κλάσματα εἰς ὁμώνυμα, διαιροῦμεν τὸ ἐ.κ.π. τῶν παρονομαστῶν δι' ἑκάστου παρονομαστοῦ καὶ πολλαπλασιάζομεν τοὺς ὅρους ἑκάστου κλάσματος ἐπὶ τὸ ἀντίστοιχον πηλίκον.**

Ἡ ἀνωτέρω ἐργασία διατάσσεται ὡς ἀκολούθως :

$$\begin{array}{cc} 4 & 5 \\ \smile & \smile \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \quad (\text{ἐ. κ. π.} = 20) \\ \frac{8}{20} & \frac{15}{20} \end{array}$$

Ὁμοίως ἐργαζόμενοι εὑρίσκομεν ὅτι τὰ κλάσματα :

$\frac{2}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{10}$ γίνονται	$\begin{array}{ccc} 6 & 5 & 3 \\ \smile & \smile & \smile \\ \frac{2}{5} & \frac{5}{6} & \frac{7}{10} \end{array}$ (ἐ. κ. π. = 30)
$\frac{12}{30}$, $\frac{25}{30}$, $\frac{21}{30}$, ἤτοι ὁμώνυμα	$\frac{12}{30}$ $\frac{25}{30}$ $\frac{21}{30}$

Β' τρόπος. Παράδειγμα 1ον. Νὰ τραποῦν εἰς ὁμώνυμα τὰ κλάσματα $\frac{3}{5}$ καὶ $\frac{4}{7}$.

Πολλαπλασιάζοντες καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ πρώτου κλάσματος ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν 7 τοῦ δευτέρου εὑρίσκομεν

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \times 7}{5 \times 7} = \frac{21}{35}.$$

Ὁμοίως πολλαπλασιάζομεν καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ δευτέρου κλάσματος ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν 5 τοῦ πρώτου κλάσματος καὶ εὑρίσκομεν ὅτι $\frac{4}{7} = \frac{4 \times 5}{7 \times 5} = \frac{20}{35}$.

Ἀντὶ λοιπὸν τῶν δοθέντων κλασμάτων, ἔχομεν τὰ κλάσματα $\frac{21}{35}$ καὶ $\frac{20}{35}$, τὰ ὁποῖα εἶναι ὁμώνυμα καὶ ἴσα πρὸς τὰ δοθέντα.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι :

β΄) Διὰ νὰ τρέψωμεν δύο ἑτερώνυμα κλάσματα εἰς ὁμώνυμα, πολλαπλασιάζομεν καὶ τοὺς δύο ὅρους ἑκάστου κλάσματος ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦ ἄλλου.

Παράδειγμα 2ον. Νὰ τραποῦν εἰς ὁμώνυμα τὰ κλάσματα

$$\frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5}.$$

Πολλαπλασιάζοντες καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ $\frac{2}{3}$ ἐπὶ 4×5 εὑρίσκομεν ὅτι: $\frac{2}{3} = \frac{2 \times 4 \times 5}{3 \times 4 \times 5} = \frac{40}{60}$.

Ὁμοίως πολλαπλασιάζοντες τοὺς ὅρους τοῦ $\frac{3}{4}$ ἐπὶ 3×5 εὑρίσκομεν ὅτι: $\frac{3}{4} = \frac{3 \times 3 \times 5}{4 \times 3 \times 5} = \frac{45}{60}$.

Ἐπίσης πολλαπλασιάζοντες τοὺς ὅρους τοῦ $\frac{4}{5}$ ἐπὶ 3×4 εὑρίσκομεν ὅτι: $\frac{4}{5} = \frac{4 \times 3 \times 4}{5 \times 3 \times 4} = \frac{48}{60}$.

Εὕρομεν λοιπὸν τὰ κλάσματα $\frac{40}{60}$, $\frac{45}{60}$, $\frac{48}{60}$, τὰ ὁποῖα εἶναι ὁμώνυμα καὶ ἴσα (διατί ;) μὲ τὰ δοθέντα, ἕνα πρὸς ἕνα.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι :

γ΄) Διὰ νὰ τρέψωμεν ἑτερώνυμα κλάσματα εἰς ὁμώνυμα πολλαπλασιάζομεν καὶ τοὺς δύο ὅρους ἑκάστου κλάσματος ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν ὅλων τῶν ἄλλων κλασμάτων.

§ 169. Παρατηρήσεις. 1η. Ἂν οἱ παρονομασταὶ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀνὰ δύο, ἐ. κ. π. τῶν παρονομαστῶν εἶναι τὸ γινόμενον αὐτῶν. Ἑπομένως ὁ Β΄ τρόπος τῆς τροπῆς ἑτερωνύμων εἰς ὁμώνυμα συμπίπτει μὲ τὸν πρῶτον.

2α. Ἐνίοτε δι᾽ ἁπλοποιήσεως τῶν ἑτερωνύμων κλασμάτων ἢ μερικῶν μόνον ἐξ αὐτῶν προκύπτουν ὁμώνυμα κλάσματα.

Π.χ. ἂν τὸ β΄ τῶν κλασμάτων $\frac{2}{5}$ καὶ $\frac{24}{15}$ ἁπλοποιηθῇ, γίνεται $\frac{8}{5}$, ἤτοι ὁμώνυμον πρὸς τὸ $\frac{2}{5}$.

Ὁμοίως τὰ κλάσματα $\frac{2}{8}$, $\frac{9}{12}$, $\frac{35}{20}$ δι᾽ ἁπλοποιήσεως γίνονται $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{4}$, ἤτοι ὁμώνυμα.

Ἀσκήσεις

Α΄ Ὁμάς. 239) Τρέψατε εἰς ὁμώνυμα τὰ κλάσματα:

1. $\frac{5}{6}$ καὶ $\frac{2}{3}$, 3. $\frac{1}{4}$ καὶ $\frac{7}{18}$, 5. $\frac{8}{12}$ καὶ $\frac{7}{38}$,

2. $\frac{3}{4}$ καὶ $\frac{7}{5}$, 4. $\frac{5}{8}$ καὶ $\frac{9}{18}$, 6. $\frac{5}{14}$ καὶ $\frac{8}{21}$.

240) Τρέψατε εἰς ὁμώνυμα τὰ κλάσματα:

1. $\frac{2}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{12}$. 3. $\frac{4}{6}$, $\frac{6}{9}$, $\frac{12}{8}$, $\frac{24}{36}$.

2. $\frac{4}{5}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{8}{20}$. 4. $\frac{7}{10}$, $\frac{35}{100}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{45}{100}$.

Β΄ Ὁμάς. 241) Ἂν εἶναι $\frac{\alpha}{6} < 1$ καὶ τὸ κλάσμα $\frac{\alpha}{6}$ εἶναι ἀνάγωγον, ποίους ἀκεραίους ἀριθμοὺς δύναται νὰ παριστάνῃ τὸ γράμμα α;

242) Ἂν $\frac{8}{\chi} > 1$ καὶ τὸ $\frac{8}{\chi}$ εἶναι ἀνάγωγον, ποίους ἀκεραίους ἀριθμοὺς δύναται νὰ παριστάνῃ τὸ χ;

243) Ἂν α καὶ β εἶναι ἀκέραιοι ἀριθμοὶ καὶ $\beta < \alpha$, νὰ συγκρίνητε πρὸς τὴν 1 τὰ κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\beta}{\alpha}$, $\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$.

244) Ἁπλοποιήσατε τὰ κλάσματα:

$$\frac{5\times\alpha}{9\times\alpha},\quad \frac{\alpha}{2\times\alpha},\quad \frac{6\times\alpha}{8\times\alpha},\quad \frac{\alpha\times\alpha}{3\times\alpha},\quad \frac{2\times\beta^2}{5\times\beta}.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄

ΠΡΑΞΕΙΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

1. ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

§ 170. Ὁ γνωστὸς ὁρισμὸς τῆς προσθέσεως τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν διατηρεῖται καὶ ὅταν οἱ προσθετέοι εἶναι τυχόντες ἀριθμοί.

§ 171. Πρόσθεσις ὁμωνύμων κλασμάτων. *Πρόβλημα.* **Ἕνας γυρολόγος ἐπώλησε $\frac{2}{8}$ τοῦ πήχεως ἀπὸ ἕνα σειρήτιον· ἔπειτα ἐπώλησεν ἄλλα $\frac{5}{8}$ τοῦ πήχεως καὶ ἔπειτα ἄλλα $\frac{3}{8}$ πήχεως. Νὰ εὑρεθῇ πόσον σειρήτιον ἐπώλησεν.**

Λύσις. Εἶναι φανερὸν ὅτι πρέπει νὰ προσθέσωμεν τὰ πωληθέντα μέρη τοῦ πήχεως. Δηλ. νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα $\frac{2}{8}+\frac{5}{8}+\frac{3}{8}$. Ἐπειδὴ δὲ τὸ ἕνα ὄγδοον τοῦ πήχεως εἶναι ἕνα ρούπιον, ὁ γυρολόγος ἐπώλησε 2 ρούπ. + 5 ρούπ. + 3 ρούπ. = 10 ρούπ, ἤτοι:

$$\frac{10}{8} \text{ πήχ.} = 1\frac{2}{8} \text{ πήχ.} \text{ Ὥστε:}$$

$$\frac{2}{8}+\frac{5}{8}+\frac{3}{8}=\frac{10}{8}=1\frac{2}{8} \text{ πήχ.}$$

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι:

Διὰ νὰ προσθέσωμεν ὁμώνυμα κλάσματα, προσθέτομεν τοὺς ἀριθμητὰς αὐτῶν καὶ ὑποκάτω ἀπὸ τὸ ἄθροισμα, ὡς παρονομαστήν, γράφομεν τὸν παρονομαστὴν τῶν κλασμάτων.

Κατὰ ταῦτα θὰ εἶναι γενικῶς:

$$\boxed{\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\gamma}{\beta}+\frac{\delta}{\beta}=\frac{\alpha+\gamma+\delta}{\beta}}$$

§ 172. Πρόσθεσις ἑτερωνύμων κλασμάτων. *Πρόβλημα.* **Ἔμπορος ἐπώλησε κατὰ σειρὰν τὰ $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{10}$ ἑνὸς τεμαχίου ὑφάσματος. Πόσον ἐπώλησεν ἐν ὅλῳ;**

Λύσις. Εἶναι προφανὲς ὅτι ὁ ἔμπορος ἐπώλησεν ἐν ὅλῳ:

$$\frac{2}{5}+\frac{1}{8}+\frac{3}{10} \text{ τοῦ ὑφάσματος.}$$

Ἐπειδὴ δὲν δυνάμεθα νὰ προσθέσωμεν **πέμπτα** μὲ **ὄγδοα, μὲ δέκατα**, τρέπομεν τὰ κλάσματα εἰς ὁμώνυμα καὶ εὑρίσκομεν ὅτι:

$$\frac{2}{5}+\frac{1}{8}+\frac{3}{10}=\frac{16}{40}+\frac{5}{40}+\frac{12}{40}=\frac{33}{40} \quad \Bigg| \quad \overset{8}{\smile}\frac{2}{5} \;\; \overset{5}{\smile}\frac{1}{8} \;\; \overset{4}{\smile}\frac{3}{10} \quad (\text{ἐ.κ.π. } 40)$$

Ὥστε ἐπώλησε τὰ $\frac{33}{40}$ τοῦ τεμαχίου τοῦ ὑφάσματος.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι:

Διὰ νὰ προσθέσωμεν ἑτερώνυμα κλάσματα, τρέπομεν αὐτὰ εἰς ὁμώνυμα καὶ προσθέτομεν αὐτά, ὅπως γνωρίζομεν.

§ 173. Πρόσθεσις οἱωνδήποτε ἀριθμῶν. Ἐπειδὴ οἱ μεικτοὶ καὶ οἱ ἀκέραιοι τρέπονται εἰς κλάσματα, ἡ πρόσθεσις οἱωνδήποτε ἀριθμῶν ἀνάγεται εἰς πρόσθεσιν ὁμωνύμων κλασμάτων. Π.χ.

$$2\frac{1}{3}+3+6\frac{5}{9}=\frac{7}{3}+3+\frac{59}{9}=\frac{21}{9}+\frac{27}{9}+\frac{59}{9}=\frac{107}{9}=11\frac{8}{9}.$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι:

$$2+\frac{1}{4}+3\frac{5}{8}=\frac{16}{8}+\frac{2}{8}+\frac{29}{8}=\frac{47}{8}=5\frac{7}{8}.$$

§ 174. Διατήρησις τῶν ἰδιοτήτων τῆς προσθέσεως. Ἀπὸ τὰ προηγούμενα παραδείγματα βλέπομεν ὅτι ἡ πρόσθεσις οἱωνδήποτε ἀριθμῶν ἀνάγεται εἰς πρόσθεσιν τῶν ἀριθμητῶν τῶν ὁμωνύμων κλασμάτων, δηλ. εἰς πρόθεσιν ἀκεραίων ἀριθμῶν.

Ἑπομένως αἱ ἰδιότητες τῆς προσθέσεως τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἀληθεύουν καὶ διὰ τυχόντας προσθετέους. Π. χ.

$$\frac{2}{9}+\frac{3}{9}+\frac{7}{9}+\frac{1}{9}=\frac{2+3+7+1}{9}=\frac{13}{9}$$

$$\text{καὶ } \frac{7}{9}+\frac{2}{9}+\frac{1}{9}+\frac{3}{9}=\frac{7+2+1+3}{9}=\frac{13}{9}.$$

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι: $\frac{2}{9}+\frac{3}{9}+\frac{7}{9}+\frac{1}{9}=\frac{7}{9}+\frac{2}{9}+\frac{1}{9}+\frac{3}{9}$

§ 175. Διάφοροι συντομίαι τῆς προσθέσεως. Ι. Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα $5\frac{3}{8} + 2$.

Ἐπειδὴ $5\frac{3}{8} = 5 + \frac{3}{8}$, πρέπει νὰ προσθέσωμεν τὸν 2 εἰς τὸ ἄθροισμα $5 + \frac{3}{8}$. Κατὰ τὴν γνωστὴν δὲ ἰδιότητα τῆς προσθέσεως, τὸ ἄθροισμα αὐτὸ εἶναι: $(5+2) + \frac{3}{8}$, δηλ. $7\frac{3}{8}$.

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι:

Διὰ νὰ προσθέσωμεν εἰς μεικτὸν ἕνα ἀκέραιον, προσθέτομεν αὐτὸν εἰς τὸν ἀκέραιον τοῦ μεικτοῦ καὶ ἀφήνομεν τὸ κλάσμα ὅπως εἶναι.

ΙΙ. Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα: $8\frac{3}{4} + \frac{1}{6}$.

Κατὰ τὰ προηγούμενα, θὰ εἶναι:

$$8\frac{3}{4} + \frac{1}{6} = 8 + \frac{9}{12} + \frac{2}{12} = 8 + \left(\frac{9}{12} + \frac{2}{12}\right) = 8\frac{11}{12}.$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι:

Διὰ νὰ προσθέσωμεν εἰς μεικτὸν ἕνα κλάσμα, προσθέτομεν αὐτὸ εἰς τὸ κλάσμα τοῦ μεικτοῦ καὶ ἀφήνομεν τὸν ἀκέραιον ὅπως εἶναι.

§ 176. Ἄλλος τρόπος προσθέσεως οἱωνδήποτε ἀριθμῶν.

Πρόβλημα. **Τρία δέματα ζυγίζουν ἀντιστοίχως $5\frac{1}{4}$ ὀκάδας, $2\frac{3}{8}$ ὀκάδας, 7 ὀκάδας. Πόσον εἶναι τὸ ὁλικὸν βάρος των;**

Λύσις. Τὸ ζητούμενον βάρος εἶναι τὸ ἄθροισμα:

$$5\frac{1}{4} \text{ ὀκ.} + 2\frac{3}{8} \text{ ὀκ.} + 7 \text{ ὀκ. ἢ } 5 + \frac{1}{4} + 2 + \frac{3}{8} + 7 \text{ ὀκ.}$$

Κατὰ γνωστὴν ἰδιότητα τῆς προσθέσεως, τὸ ἄθροισμα αὐτὸ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα $(5+2+7) + \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{8}\right)$.

Ἐπειδὴ $5 + 2 + 7 = 14$ καὶ $\frac{1}{4} + \frac{3}{8} = \frac{2}{8} + \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$,

$$\text{θὰ εἶναι } 5\frac{1}{4} + 2\frac{3}{8} + 7 = 14 + \frac{5}{8} = 14\frac{5}{8}.$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι:

Διὰ νὰ προσθέσωμεν διαφόρους ἀριθμούς, προσθέτομεν χωριστὰ τοὺς ἀκεραίους καὶ χωριστὰ τὰ κλάσματα αὐτῶν καὶ ἑνώνομεν τὰ δύο ἀθροίσματα.

Ἀσκήσεις

Α' Ὁμάς. *Ἀπὸ μνήμης.* 245) Εὕρετε τὰ ἀκόλουθα ἀθροίσματα: $\frac{1}{7}+\frac{3}{7}+\frac{2}{7}$, $\frac{2}{9}+\frac{5}{9}+\frac{1}{9}+\frac{7}{9}$, $\frac{3}{12}+\frac{5}{12}+\frac{8}{12}$.

246) Ποῖα ἀνάγωγα κλάσματα πρέπει νὰ προσθέσωμεν, διὰ νὰ προκύψουν τὰ κάτωθι κλάσματα;

$$\frac{7+9}{13},\quad \frac{8+11+17}{23},\quad \frac{16+35+18+1}{101}.$$

Β' Ὁμάς. *Γραπτῶς.* 247) Εὕρετε τὰ ἀκόλουθα ἀθροίσματα: $\frac{3}{4}+\frac{4}{6}+\frac{1}{12}$, $\frac{2}{6}+\frac{5}{9}+\frac{7}{18}+\frac{1}{36}$, $\frac{2}{24}+\frac{3}{36}+\frac{5}{12}+\frac{6}{9}$.

248) Εὕρετε τὰ ἀκόλουθα ἀθροίσματα:

1. $5\frac{3}{4}+12$, $\quad 4\frac{2}{9}+6$, $\quad 10\frac{1}{5}+5$, $\quad 6\frac{4}{7}+10$.
2. $1\frac{1}{5}+\frac{3}{4}$, $\quad 5\frac{3}{5}+\frac{1}{6}$, $\quad 10\frac{5}{9}+\frac{2}{7}$, $\quad 16\frac{3}{10}+\frac{7}{10}$.
3. $2\frac{1}{5}+4\frac{3}{4}$, $\quad 7\frac{1}{2}+3\frac{5}{8}$, $\quad 11\frac{1}{4}+3\frac{5}{6}$.
4. $6\frac{1}{5}+3\frac{2}{3}+1\frac{1}{5}$, $\quad 5\frac{2}{3}+4\frac{1}{4}+1\frac{5}{6}$, $\quad 10\frac{1}{9}+4\frac{1}{8}+6\frac{5}{6}$

Γ' Ὁμάς. 249) Ἕνας οἰκογενειάρχης ἠγόρασε $5\frac{3}{4}$ ὀκάδας σάπωνος ἀπὸ ἕνα παντοπώλην καὶ ἀπὸ ἄλλον ἄλλας $3\frac{5}{8}$ ὀκ. Πόσον σάπωνα ἠγόρασε τὸ ὅλον;

250) Ἕνας ἔμπορος ἐπώλησε $4\frac{1}{4}$ πήχεις ἀπὸ ἕνα τεμάχιον ὑφάσματος. Ἔπειτα ἄλλους $8\frac{5}{8}$ πήχεις καὶ ἔπειτα ἄλλους $6\frac{3}{4}$ πήχ. Παρετήρησε δὲ ὅτι ἔμειναν ἀκόμη $30\frac{6}{8}$ πήχεις. Πόσους πήχεις εἶχε τὸ τεμάχιον τοῦτο;

251) Ἕνας παντοπώλης ἐπώλησε πρὸ μεσημβρίας μιᾶς ἡμέρας $12\frac{3}{4}$ ὀκάδας τυροῦ ἀπὸ ἕνα βαρέλιον. Μετὰ μεσημβρίαν ἐπώλησεν ἄλλας $8\frac{1}{4}$ ὀκάδας. Ἔμειναν δὲ εἰς τὸ βαρέλιον 4 ὀκάδες τεμάχια τυροῦ καὶ $\frac{3}{4}$ τῆς ὀκᾶς τρίμματα. Πόσον τυρὸν εἶχε κατ' ἀρχὰς τὸ βαρέλιον τοῦτο;

252) Μία πλύντρια ἐξώδευσεν εἰς ἕνα μῆνα $22\frac{1}{4}$ ὀκ. σάπωνος, τὸν ἑπόμενον μῆνα ἐξώδευσε $18\frac{5}{8}$ ὀκ. καὶ τὸν μεθεπόμενον $24\frac{3}{4}$ ὀκ. Πόσον σάπωνα ἐξώδευσεν αὐτὴν τὴν τριμηνίαν;

Δ' Ὁμάς. 253) Πεζοπόρος διήνυσε κατὰ τὴν α' ἡμέραν $28\frac{3}{4}$ χιλιόμετρα, κατὰ τὴν β' ἡμέραν $30\frac{1}{2}$ χλμ. καὶ κατὰ τὴν γ' $2\frac{1}{2}$ χλμ. περισσότερον ἀπὸ τὴν β' ἡμέραν. Πόσα χιλιόμετρα διήνυσε κατὰ τὰς τρεῖς αὐτὰς ἡμέρας;

254) Ἕνα φορτηγὸν αὐτοκίνητον μεταφέρει 3 κιβώτια. Τὸ α' ζυγίζει $145\frac{2}{5}$ ὀκ, τὸ β' ζυγίζει $10\frac{1}{8}$ ὀκ. περισσότερον ἀπὸ τὸ α' καὶ τὸ γ' $15\frac{5}{8}$ ὀκ. περισσότερον ἀπὸ τὸ β'. Πόσον εἶναι τὸ βάρος τῶν 3 κιβωτίων;

2. ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

§ 177. Ὁ γνωστὸς γενικὸς ὁρισμὸς τῆς ἀφαιρέσεως ἑνὸς ἀκεραίου ἀπὸ ἄλλον ἀκέραιον, τὸν ὁποῖον ἐμάθομεν εἰς τὴν § 43, ἰσχύει δι' οἱουσδήποτε ἀριθμούς.

§ 178. Ἀφαίρεσις κλάσματος ἀπὸ ἄλλου ὁμωνύμου. *Πρόβλημα.* **Μία φιάλη γεμάτη μὲ ἔλαιον ἔχει βάρος $\frac{350}{400}$ τῆς ὀκᾶς, κενὴ δὲ $\frac{50}{400}$ τῆς ὀκᾶς. Πόσον ἔλαιον χωρεῖ αὔτη;**

Λύσις. Εἶναι φανερὸν ὅτι ἀπὸ ὅλον τὸ βάρος τῆς φιάλης μὲ τὸ ἔλαιον πρέπει νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ βάρος μόνον τῆς φιάλης. Νὰ ἐκτελέσωμεν δηλ. τὴν ἀφαίρεσιν $\frac{350}{400}-\frac{50}{400}$.

Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν ὅτι εἶναι τὸ ἴδιον νὰ ἀφαιρέσωμεν 50 δράμια ἀπὸ 350 δράμια. Τὸ βάρος λοιπὸν τοῦ ἐλαίου εἶναι: 350 δράμ. — 50 δράμ. = 300 δράμια ἢ $\frac{300}{400}$ τῆς ὀκᾶς. Ὥστε:

$$\frac{350}{400}-\frac{50}{400}=\frac{300}{400}$$

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι:

Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἕνα κλάσμα ἀπὸ ἄλλο ὁμώνυμον, ἀφαιροῦμεν τὸν ἀριθμητὴν τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ μειωτέου καὶ τὸ ἐξαγόμενον γράφομεν ἀριθμητήν. Παρονομαστὴν δὲ θέτομεν τὸν παρονομαστὴν τῶν κλασμάτων τούτων.

Κατὰ ταῦτα θὰ εἶναι γενικῶς :

$$\boxed{\frac{\alpha}{\gamma}-\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\alpha-\beta}{\gamma}} \quad \text{ἂν } \alpha > \beta$$

§ 179. **Ἀφαίρεσις κλάσματος ἀπὸ ἄλλου ἑτερωνύμου.** Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ κλάσμα $\frac{2}{9}$ ἀπὸ τὸ κλάσμα $\frac{5}{8}$, δηλ. νὰ εὕρωμεν τὴν διαφορὰν $\frac{5}{8}-\frac{2}{9}$.

Ἂν τρέψωμεν τὰ κλάσματα αὐτὰ εἰς ὁμώνυμα, εὑρίσκομεν τὰ κλάσματα $\frac{45}{72}$ καὶ $\frac{16}{72}$ καὶ ἀναγόμεθα εἰς τὴν προηγουμένην περίπτωσιν.

Εἶναι λοιπὸν $\frac{5}{8}-\frac{2}{9}=\frac{45}{72}-\frac{16}{72}=\frac{29}{72}$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι :

Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν κλάσμα ἀπὸ ἄλλου ἑτερωνύμου, τρέπομεν αὐτὰ εἰς ὁμώνυμα καὶ ἐκτελοῦμεν τὴν ἀφαίρεσιν κατὰ τὰ γνωστά.

Ἀσκήσεις

Α΄ Ὁ μ ά ς. 255) Ἐκτελέσατε ἀπὸ μνήμης τὰς ἀκολούθους ἀφαιρέσεις καὶ τὴν δοκιμὴν αὐτῶν.

$\frac{7}{8}-\frac{3}{8}$, $\frac{8}{15}-\frac{3}{15}$, $\frac{19}{25}-\frac{11}{25}$, $\frac{37}{30}-\frac{7}{30}$, $\frac{55}{50}-\frac{15}{50}$,
$\frac{4}{5}-\frac{3}{10}$, $\frac{5}{6}-\frac{7}{12}$, $\frac{9}{10}-\frac{4}{15}$, $\frac{6}{8}-\frac{2}{6}$, $\frac{17}{20}-\frac{11}{30}$.

Β΄ Ὁ μ ά ς. 256) Ἕνας ἐργάτης ἀνέλαβε νὰ σκάψῃ τὰ $\frac{7}{8}$ μιᾶς ἀμπέλου. Μετὰ ἐργασίαν 3 ἡμερῶν ἔσκαψε τὰ $\frac{3}{4}$ αὐτῆς. Πόσον μέρος τῆς ἀμπέλου αὐτῆς ἔχει ἀκόμη νὰ σκάψῃ ;

257) Ἐργάτης δύναται νὰ ἐκτελέσῃ ἕνα ἔργον εἰς 12 ἡμέρας καὶ

ὁ υἱός του εἰς 20 ἡμέρας. Τί μέρος τοῦ ἔργου δύναται νὰ ἐκτελέσῃ ὁ πατὴρ περισσότερον ἀπὸ τὸν υἱόν του εἰς 1 ἡμέραν ;

258) Δύο γυναῖκες ἔπλεξαν, ἡ μὲν μία 15 μέτρα δαντέλλας εἰς 12 ἡμέρας, ἡ δὲ ἄλλη 18 μέτρα τοῦ αὐτοῦ πλάτους εἰς 14 ἡμέρας. Πόσον ἔπλεξε περισσότερον τὴν ἡμέραν ἡ μία ἀπὸ τὴν ἄλλην ;

§ 180. Διατήρησις τῶν ἰδιοτήτων τῆς ἀφαιρέσεως. Ἀπὸ τὰ προηγούμενα παραδείγματα βλέπομεν ὅτι κάθε ἀφαίρεσις γίνεται δι' ἀφαιρέσεως τοῦ ἀριθμητοῦ ἑνὸς ἀφαιρετέου κλάσματος ἀπὸ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ μειωτέου, δηλ. ἀκεραίου ἀπὸ ἀκέραιον.

Ἑπομένως αἱ ἰδιότητες τῆς ἀφαιρέσεως, τὰς ὁποίας ἐμάθομεν, ὅταν ὁ μειωτέος καὶ ὁ ἀφαιρετέος εἶναι ἀκέραιοι, ἀληθεύουν καὶ ὅταν οὗτοι εἶναι τυχόντες ἀριθμοί.

§ 181. Διάφοροι συντομίαι τῆς ἀφαιρέσεως. I. Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὴν διαφορὰν $6\frac{3}{5} - 4$.

Ἐπειδὴ $6\frac{3}{5} = 6 + \frac{3}{5}$, πρέπει νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸν 4 ἀπὸ τὸ ἄθροισμα $6 + \frac{3}{5}$. Κατὰ τὴν γνωστὴν δὲ ἰδιότητα τῆς ἀφαιρέσεως (§ 48), ἡ διαφορὰ αὐτὴ εἶναι $(6-4) + \frac{3}{5}$, δηλ. $2\frac{3}{5}$.

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι :

Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ μεικτὸν ἕνα ἀκέραιον, ἀφαιροῦμεν αὐτὸν ἀπὸ τὸν ἀκέραιον τοῦ μεικτοῦ καὶ εἰς τὸ ἐξαγόμενον προσθέτομεν τὸ κλάσμα τοῦ μεικτοῦ.

II. Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὴν διαφορὰν $8\frac{4}{5} - \frac{7}{10}$.

Κατὰ τὰ προηγούμενα, θὰ εἶναι :

$$8\frac{4}{5} - \frac{7}{10} = 8 + \frac{8}{10} - \frac{7}{10} = 8 + \left(\frac{8}{10} - \frac{7}{10}\right) = 8\frac{1}{10}.$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι :

Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ μεικτὸν ἕνα κλάσμα, ἀφαιροῦμεν αὐτὸ ἀπὸ τὸ κλάσμα τοῦ μεικτοῦ καὶ εἰς τὸ ἐξαγόμενον προσθέτομεν τὸν ἀκέραιον τοῦ μεικτοῦ

Σημείωσις. Ἂν τὸ κλάσμα τοῦ ἀφαιρετέου εἶναι μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ κλάσμα τοῦ μειωτέου, αὐξάνομεν τοῦτο κατὰ μίαν ἀκεραίαν μονάδα, τὴν ὁποίαν δανειζόμεθα ἀπὸ τὸν ἀκέραιον τοῦ μεικτοῦ.

Π. χ. $3\frac{1}{6}-\frac{3}{6}=2\frac{7}{6}-\frac{3}{6}=2\frac{4}{6}=2\frac{2}{3}$.

III. *Παράδειγμα 1ον*. Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὴν διαφορὰν $8\frac{4}{5}-3\frac{1}{5}$.

Ἐπειδὴ $3\frac{1}{5}=3+\frac{1}{5}$, ἡ προηγουμένη διαφορὰ γράφεται:

$$8\frac{4}{5}-\left(3+\frac{1}{5}\right).$$

Διὰ νὰ εὕρωμεν δὲ αὐτήν, ἀφαιροῦμεν τὸν ἀκέραιον 3 ἀπὸ τὸν μειωτέον $8\frac{4}{5}$ καὶ εὑρίσκομεν $5\frac{4}{5}$. Ἀπὸ τὸ ἐξαγόμενον αὐτὸ ἀφαιροῦμεν τὸ κλάσμα $\frac{1}{5}$ καὶ εὑρίσκομεν $5\frac{3}{5}$. Ὥστε:

$$8\frac{4}{5}-3\frac{1}{5}=5\frac{3}{5}.$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι:

$$10\frac{3}{4}-6\frac{5}{8}=10\frac{6}{8}-6\frac{5}{8}=4\frac{1}{8}.$$

Παράδειγμα 2ον. Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὴν διαφορὰν $9\frac{1}{2}-5\frac{3}{4}$. Ἡ διαφορὰ αὐτὴ εἶναι ἴση πρὸς $9\frac{2}{4}-5\frac{3}{4}$.

Ἐπειδὴ τὸ κλάσμα $\frac{3}{4}$ δὲν ἀφαιρεῖται ἀπὸ τὸ κλάσμα $\frac{2}{4}$, αὐξάνομεν αὐτὸ κατὰ μίαν ἀκεραίαν μονάδα, τὴν ὁποίαν λαμβάνομεν ἀπὸ τὸν ἀκέραιον τοῦ μειωτέου. Θὰ εἶναι λοιπόν:

$$9\frac{2}{4}-5\frac{3}{4}=8\frac{6}{4}-5\frac{3}{4}=3\frac{3}{4}.$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω παραδειγμάτων συνάγομεν ὅτι:

Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν μεικτὸν ἀπὸ μεικτόν, ἀφαιροῦμεν χωριστὰ τὸν ἀκέραιον ἀπὸ τὸν ἀκέραιον καὶ τὸ κλάσμα ἀπὸ τὸ κλάσμα καὶ ἑνώνομεν τὰ δύο ἐξαγόμενα.

Ἀσκήσεις

Α΄ Ὁμάς. 259) Νὰ ἐκτελεσθοῦν ἀπὸ μνήμης αἱ κάτωθι ἀφαιρέσεις:

1. $1-\frac{3}{5}$, $12-\frac{7}{8}$, $69-\frac{3}{11}$.
2. $3-2\frac{1}{4}$, $9-4\frac{3}{5}$, $18-7\frac{9}{10}$.

3. $8\frac{4}{9}-3$, $12\frac{1}{5}-8$, $35\frac{3}{4}-9$.

4. $5\frac{5}{9}-4\frac{1}{9}$, $9\frac{3}{4}-3\frac{1}{4}$, $18\frac{4}{5}-9\frac{3}{5}$.

Β΄ Ὁμάς. 260) Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι ἀφαιρέσεις καὶ ἡ δοκιμὴ ἑκάστης:

1. $6\frac{5}{12}-\frac{3}{24}$, $3\frac{4}{9}-\frac{2}{9}$, $25\frac{2}{5}-\frac{3}{4}$,

2. $10\frac{4}{5}-5\frac{3}{10}$, $15\frac{4}{7}-10\frac{2}{5}$, $40\frac{5}{6}-8\frac{5}{9}$.

3. $5\frac{1}{2}-3\frac{3}{4}$, $18\frac{2}{5}-10\frac{5}{6}$, $28\frac{4}{9}-16\frac{7}{8}$.

261) Νὰ συμπληρωθοῦν αἱ κάτωθι ἰσότητες:

$\frac{11}{23}+\ ;=\frac{45}{46}$, $;+\frac{19}{25}=\frac{73}{75}$, $5\frac{7}{13}+\ ;=29\frac{19}{26}$.

Γ΄ Ὁμάς. 262) Ἕνα δοχεῖον ἔχει βάρος $\frac{7}{8}$ τῆς ὀκᾶς. Ἂν δὲ τὸ γεμίσωμεν μὲ βούτυρον, εὑρίσκομεν ὅτι ἔχει βάρος $6\frac{3}{4}$ ὀκάδας. Πόσον βούτυρον χωρεῖ τοῦτο ;

263) Ἕνα σιδηροῦν δοχεῖον ἔχει βάρος $3\frac{5}{12}$ ὀκάδας. Γεμάτον δὲ μὲ ἔλαιον ἔχει βάρος $12\frac{7}{8}$ ὀκ. Πόσον ἔλαιον χωρεῖ ;

264) Ἕνας ὀρνιθοτρόφος ἠγόρασεν $22\frac{3}{10}$ ὀκάδας ἀραβοσίτου διὰ τὰς ὄρνιθας. Μετά τινας ἡμέρας εὗρεν ὅτι ἔμειναν $12\frac{4}{5}$ ὀκάδες. Πόσας ὀκάδας ἔφαγον αἱ ὄρνιθες αὐτὰς τὰς ἡμέρας ;

265) Ἕνας οἰκογενειάρχης ἠγόρασεν ἕνα σάκκον ἀνθράκων βάρους $40\frac{3}{4}$ ὀκάδων. Ὁ σάκκος οὗτος κενὸς εἶχε βάρος $1\frac{2}{5}$ ὀκάδας. Πόσας ὀκάδας ἀνθράκων ἠγόρασεν ;

266) Ἡ πρωϊνὴ ἁμαξοστοιχία τῶν σιδηροδρόμων Πελοποννήσου ἀναχωρεῖ ἐκ Πειραιῶς τὴν $8\frac{1}{3}$ ὥραν π. μ. καὶ φθάνει εἰς Κόρινθον τὴν $10\frac{1}{10}$ π. μ. Πόσον χρόνον χρειάζεται, διὰ νὰ φθάσῃ εἰς Κόρινθον ;

Δ΄ Ὁμάς. 267) Ἕνας ἔμπορος εἶχεν ἕνα τεμάχιον ὑφάσματος ἐκ 50 πήχεων. Ἀπὸ αὐτὸ ἐπώλησε μίαν ἡμέραν $8\frac{1}{2}$ πήχεις· τὴν ἑπομένην ἐπώλησεν ἄλλους $12\frac{3}{4}$ πήχεις καὶ τὴν μεθεπομένην $16\frac{1}{8}$ πήχεις. Πόσοι πήχεις ἔμειναν;

268) Ἕνας πεζοπόρος θέλει νὰ διανύσῃ μίαν ἀπόστασιν 100 χλμ. εἰς τρεῖς ἡμέρας. Τὴν α΄ ἡμέραν διήνυσε $35\frac{3}{4}$ χλμ, τὴν β΄ $5\frac{2}{5}$ χλμ. ὀλιγώτερον τῆς α΄. Πόσα χιλιόμετρα πρέπει νὰ διανύσῃ τὴν τρίτην ἡμέραν;

269) Τρία κιβώτια σάπωνος ζυγίζουν $127\frac{5}{8}$ ὀκ. Τὰ δύο βαρύτερα ζυγίζουν $94\frac{3}{4}$ ὀκ. Τὸ ἐλαφρότερον ζυγίζει $10\frac{1}{2}$ ὀκ. ὀλιγώτερον τοῦ μεσαίου. Πόσον ζυγίζει ἕκαστον κιβώτιον;

270) Τρία πρόσωπα ἐμοιράσθησαν ἕνα τεμάχιον ὑφάσματος. Τὸ α΄ ἔλαβε $12\frac{3}{5}$ μ, τὸ δεύτερον ἔλαβε $2\frac{2}{3}$ μ. ὀλιγώτερον τοῦ α΄ καὶ $2\frac{5}{8}$ μ. περισσότερον τοῦ γ΄. Πόσον ἦτο τὸ μῆκος τοῦ ὑφάσματος;

271) Κρουνὸς γεμίζει μίαν δεξαμενὴν εἰς 8 ὥρας· δεύτερος τὴν γεμίζει εἰς 12 ὥρας· τρίτος κρουνός, ὁ ὁποῖος ἔχει τεθῇ εἰς τὴν βάσιν, ἀδειάζει αὐτὴν εἰς 15 ὥρας. Ἐὰν ἀνοιχθοῦν καὶ οἱ τρεῖς κρουνοὶ ταυτοχρόνως, τί μέρος τῆς δεξαμενῆς θὰ γεμίσουν εἰς 1 ὥραν;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ΄

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

1. ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΑΡΙΘΜΟΥ ΕΠΙ ΑΚΕΡΑΙΟΝ ΑΡΙΘΜΟΝ

§ 182. Πρόβλημα. Ἕνα ὡρολόγιον μένει ὀπίσω $\frac{7}{60}$ τοῦ πρώτου λεπτοῦ εἰς μίαν ὥραν. Νὰ εὑρεθῇ πόσον μένει ὀπίσω εἰς ἕνα ἡμερονύκτιον.

Λύσις. Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα τοῦτο, σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς :

Ἀφοῦ εἰς 1 ὥραν μένει ὀπίσω $\frac{7}{60}$ τοῦ πρώτου λεπτοῦ, εἰς δύο ὥρας θὰ μένῃ ὀπίσω δύο φορὰς περισσότερον, ἤτοι $\frac{7}{60} \times 2$, εἰς 3 ὥρας θὰ μένῃ ὀπίσω τρεῖς φορὰς περισσότερον καὶ εἰς τὰς 24 ὥρας τοῦ ἡμερονυκτίου θὰ μένῃ ὀπίσω 24 φορὰς περισσότερον, ἤτοι $\frac{7}{60} \times 24$ πρῶτα λεπτά.

Ἐπειδὴ δὲ $\frac{7}{60}$ τοῦ πρώτου λεπτοῦ εἶναι 7 δευτερόλεπτα, εἰς 24 ὥρας θὰ μένῃ ὀπίσω 7 δευτερόλεπτα $\times$ 24 $=$ 168 δευτερόλεπτα, ἤτοι : $\frac{168}{60}$ τοῦ πρώτου λεπτοῦ. Εἶναι λοιπόν :

$$\frac{7}{60} \times 24 = \frac{7 \times 24}{60} = \frac{168}{60} = 2\,\frac{48}{60} \text{ πρῶτα λεπτά.}$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι :

Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἕνα κλάσμα ἐπὶ ἀκέραιον, πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος ἐπὶ τὸν ἀκέραιον καὶ τὸ γινόμενον θέτομεν ὡς ἀριθμητήν, παρονομαστὴν δὲ ἀφήνομεν τὸν ἴδιον.

Ἤτοι γενικῶς εἶναι : $\boxed{\frac{\alpha}{\beta} \times \gamma = \frac{\alpha \times \gamma}{\beta}}$

Παρατήρησις. Εἰς τὸ συμπέρασμα τοῦτο φθάνομεν καὶ ἂν ἐπεκτείνωμεν τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ ἀκέραιον καὶ ὅταν ὁ πολλαπλασιαστέος εἶναι κλάσμα.

Οὕτως εἶναι :

$$\frac{3}{8} \times 4 = \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{3+3+3+3}{8} = \frac{3 \times 4}{8} = \frac{12}{8}.$$

§ 183. **Ἰδιαίτεραι περιπτώσεις.** I. Τὸ αὐτὸ ὡρολόγιον εἰς 12 ὥρας μένει ὀπίσω $\frac{7}{60} \times 12 = \frac{7 \times 12}{60}$. Ἂν δὲ ἁπλοποιήσωμεν τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο, εὑρίσκομεν $\frac{7}{5}$. Εἶναι λοιπόν :

$$\frac{7}{60} \times 12 = \frac{7}{60:12} = \frac{7}{5}.$$

Βλέπομεν δηλ. ὅτι :

Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἕνα κλάσμα ἐπὶ ἀκέραιον, δυνάμεθα νὰ ἀφήσωμεν τὸν ἴδιον ἀριθμητὴν καὶ νὰ διαιρέσωμεν τὸν παρονομαστὴν διὰ τοῦ ἀκεραίου, ἂν διαιρῆται ἀκριβῶς.

II. Ἐπειδὴ $\frac{3}{5} \times 5 = \frac{3 \times 5}{5} = 3$, συνάγομεν ὅτι :

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἕνα κλάσμα ἐπὶ τὸν παρονομαστήν του, εὑρίσκομεν τὸν ἀριθμητήν του.

Ἤτοι γενικῶς εἶναι : $\boxed{\frac{\alpha}{\beta} \times \beta = \alpha}$

III. Προηγουμένως εὕρομεν ὅτι, ἂν τὸ κλάσμα $\frac{3}{5}$ ληφθῇ 5 φοράς, γίνεται 3. Εἶναι δὲ φανερὸν ὅτι, ἂν τοῦτο ληφθῇ 10 φοράς, δηλ. 5×2, θὰ γίνῃ 3×2, ἤτοι 6. Εἶναι δηλ. $\frac{3}{5} \times 10 = 3 \times 2 = 6$. Ὁμοίως ἐννοοῦμεν ὅτι $\frac{3}{5} \times 15 = 9$ κ.τ.λ. Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι :

Ἂν πολλαπλασιάσωμεν κλάσμα ἐπὶ πολλαπλάσιον τοῦ παρονομαστοῦ, εὑρίσκομεν τὸ ἰσοπολλαπλάσιον τοῦ ἀριθμητοῦ.

Ἀσκήσεις

Α' Ὁμάς. 272) Νὰ εὑρεθοῦν ἀπὸ μνήμης τὰ ἀκόλουθα γινόμενα:

1. $\frac{2}{3} \times 3$, $\frac{5}{6} \times 6$, $\frac{7}{12} \times 12$, $\frac{9}{14} \times 14$.
2. $\frac{3}{4} \times 8$, $\frac{4}{5} \times 15$, $\frac{1}{8} \times 72$, $\frac{7}{12} \times 60$.

273) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἀκόλουθα γινόμενα:

$\frac{3}{4} \times 12$, $\frac{5}{6} \times 3$, $\frac{7}{9} \times 4$, $\frac{4}{6} \times 8$, $\frac{7}{8} \times 20$.

274) Μὲ ποῖον ἀριθμὸν πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ $\frac{5}{8}$, διὰ νὰ εὕρωμεν γινόμενον 5 ; Μὲ ποῖον δέ, διὰ νὰ εὕρωμεν γινόμενον 10, 15 ;

275) 1ον. Ἂν $\frac{3}{4} \times \alpha = 3$, ποῖον ἀριθμὸν παριστάνει ὁ α ;

2ον. Ἂν $\frac{\alpha}{5} \times 5 = 4$, ποῖον ἀριθμὸν παριστάνει ὁ α ;

3ον. Ἂν $\frac{4}{7} \times \alpha = 8$, ποῖον ἀριθμὸν παριστάνει ὁ α ;

Β΄ Ὁ μ ά ς. 276) Μία λάμπα πετρελαίου καίει $\frac{3}{8}$ τῆς ὀκᾶς πετρελαίου καθ᾽ ἑσπέραν. Πόσον θὰ καύσῃ εἰς ἕνα μῆνα;

277) Διὰ νὰ θέσωμεν τὸν οἶνον ἑνὸς βαρελίου εἰς φιάλας, χρειαζόμεθα 360 φιάλας τῶν $\frac{3}{4}$ τῆς ὀκᾶς. Πόσος οἶνος ὑπάρχει εἰς τὸ βαρέλιον ;

278) Ἡ πλευρὰ ἑνὸς τετραγώνου ἔχει μῆκος $\frac{3}{10}$ τοῦ μέτρου. Πόση εἶναι ἡ περίμετρος αὐτοῦ ;

279) Τὰς παραμονὰς τῶν Χριστουγέννων διενεμήθησαν ὑπὸ μιᾶς κοινότητος εἰς 156 ἀπόρους ἀνὰ μία ὀκᾶ ἀλεύρου ἀξίας $3\frac{1}{2}$ χιλιοδρχ. καὶ ἀνὰ μία ὀκᾶ κρέατος κατεψυγμένου ἀξίας $8\frac{1}{2}$ χιλιοδρχ. Πόσα χιλιόδραχμα ἤξιζον ἐν ὅλῳ τὰ εἴδη, ποὺ διενεμήθησαν ;

§ 184. Πῶς ὁρίζομεν γενικῶς τὴν διαίρεσιν α : δ. Γνωρίζομεν ὅτι :

$12 : 6 = 2$ καὶ $6 \times 2 = 12$.

$24 : 3 = 8$ καὶ $8 \times 3 = 24$.

Ὁμοίως : $3 : 4 = \frac{3}{4}$ καὶ $\frac{3}{4} \times 4 = 3$.

$5 : 8 = \frac{5}{8}$ καὶ $\frac{5}{8} \times 8 = 5$.

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι :

Διαίρεσις ἀριθμοῦ δι' ἄλλου εἶναι μία πρᾶξις, μὲ τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν τρίτον. Οὗτος δὲ πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν δεύτερον πρέπει νὰ δίδῃ τὸν πρῶτον.

Ἂν λοιπὸν $\boxed{\alpha : \delta = \nu}$, θὰ εἶναι $\boxed{\alpha = \nu \times \delta}$

Ἀντιστρόφως: Ἂν $\boxed{\nu \times \delta = \alpha}$, θὰ εἶναι $\boxed{\alpha : \delta = \nu}$ ἢ καὶ $\boxed{\alpha : \nu = \delta}$

§ 185. Σύγκρισις κλασμάτων. Ποῖα κλάσματα εἶναι ἴσα καὶ ποῖα ἄνισα. α') Ἐμάθομεν ὅτι $\frac{2}{5} \times 10 = 4$ καὶ $\frac{4}{10} \times 10 = 4$.

Βλέπομεν δηλ. ὅτι, εἴτε τὸν $\frac{2}{5}$ εἴτε τὸν $\frac{4}{10}$ ἐπαναλάβωμεν 10 φοράς, εὑρίσκομεν τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον. Εἶναι λοιπόν: $\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$.

Ὁμοίως ἀπὸ τὰς ἰσότητας $\frac{5}{8} \times 24 = 15$, $\frac{15}{24} \times 24 = 15$ ἐννοοῦμεν ὅτι $\frac{5}{8} = \frac{15}{24}$. Ἐκ τούτων ὁδηγούμεθα καὶ δίδομεν τὸν ἑξῆς γενικὸν ὁρισμὸν τῶν ἴσων κλασμάτων:

Δύο κλάσματα εἶναι ἴσα, ἂν γίνωνται ἴσοι ἀκέραιοι διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀκέραιον ἀριθμόν.

β') Γνωρίζομεν ὅτι $\frac{3}{4} \times 8 = 6$ καὶ $\frac{7}{8} \times 8 = 7$. Ἐπειδὴ δὲ $7 > 6$, ἐννοοῦμεν ὅτι $\frac{7}{8} > \frac{3}{4}$. Ὁμοίως ἀπὸ τὰς ἰσότητας $\frac{4}{5} \times 10 = 8$, $\frac{9}{10} \times 10 = 9$ καὶ ἀπὸ τὴν ἀνισότητα $9 > 8$, ἐννοοῦμεν ὅτι $\frac{9}{10} > \frac{4}{5}$. Ὥστε:

Δύο κλάσματα εἶναι ἄνισα, ἂν γίνωνται ἄνισοι ἀκέραιοι διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀκέραιον. Μεγαλύτερον δὲ εἶναι ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον γίνεται μεγαλύτερος ἀκέραιος.

Σημείωσις. Διὰ νὰ γίνωνται τὰ διάφορα κλάσματα ἀκέραιοι ἀριθμοί, τὰ πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ ἕνα κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν παρονομαστῶν. Προτιμῶμεν δὲ ἀπὸ αὐτὰ τὸ ἐ. κ. π, διὰ νὰ γίνηται εὐκολώτερον ὁ πολλαπλασιασμός.

Διὰ νὰ συγκρίνωμεν π. χ. τὰ κλάσματα $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{17}{24}$, πολλαπλασιάζομεν αὐτὰ ἐπὶ 24 καὶ εὑρίσκομεν ὅτι:

$$\frac{5}{8}\times 24=15, \quad \frac{7}{12}\times 24=14, \quad \frac{17}{24}\times 24=17.$$

Ἐπειδὴ δὲ $14 < 15 < 17$, ἐννοοῦμεν ὅτι : $\frac{7}{12} < \frac{5}{8} < \frac{17}{24}$.

§ 186. Ἰδιαίτεραι περιπτώσεις ἀνίσων κλασμάτων. 1η. Ἔστωσαν τὰ ὁμώνυμα κλάσματα $\frac{3}{9}$ καὶ $\frac{5}{9}$. Ἂν πολλαπλασιάσωμεν αὐτὰ ἐπὶ 9, εὑρίσκομεν ὅτι: $\frac{3}{9}\times 9=3$, $\frac{5}{9}\times 9=5$. Ἐπειδὴ δὲ $3 < 5$, ἐννοοῦμεν ὅτι: $\frac{3}{9} < \frac{5}{9}$. Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι:

Δύο ὁμώνυμα κλάσματα, τὰ ὁποῖα ἔχουν διαφόρους ἀριθμητάς, εἶναι ἄνισα. Μεγαλύτερον δὲ εἶναι ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον ἔχει μεγαλύτερον ἀριθμητήν.

2α. Ἔστωσαν τὰ ἑτερώνυμα κλάσματα $\frac{3}{5}$ καὶ $\frac{3}{8}$, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὸν αὐτὸν ἀριθμητήν.

Ἂν πολλαπλασιάσωμεν αὐτὰ ἐπὶ τὸ ἐ.κ.π. 40 τῶν παρονομαστῶν των, εὑρίσκομεν $\frac{3}{5}\times 40=24$ καὶ $\frac{3}{8}\times 40=15$. Ἐπειδὴ δὲ $15 < 24$, συμπεραίνομεν ὅτι $\frac{3}{8} < \frac{3}{5}$. Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι :

Δύο ἑτερώνυμα κλάσματα, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὸν αὐτὸν ἀριθμητήν, εἶναι ἄνισα. Μεγαλύτερον δὲ εἶναι ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον ἔχει μικρότερον παρονομαστήν.

Ἀσκήσεις.

Α΄ Ὁμάς. 280) Συγκρίνατε τὰ ἀκόλουθα κλάσματα:

$$\frac{3}{5} \text{ καὶ } \frac{9}{15}, \quad \frac{7}{9} \text{ καὶ } \frac{28}{36}, \quad \frac{8}{11} \text{ καὶ } \frac{32}{44}.$$

281) Ὁρίσατε τὸν ἀριθμόν, τὸν ὁποῖον παριστάνει κάθε γράμμα, διὰ νὰ ἀληθεύσουν αἱ ἰσότητες:

$$\frac{4}{7}=\frac{\alpha}{14}, \quad \frac{5}{9}=\frac{\beta}{27}, \quad \frac{6}{11}=\frac{24}{\gamma}, \quad \frac{7}{\alpha}=\frac{35}{20}.$$

282) Γράψατε τὰ ἀκόλουθα κλάσματα κατὰ τάξιν μεγέθους μὲ τὴν κατάλληλον τοποθέτησιν σημείου ἀνισότητος μεταξύ των:

1. $\frac{4}{15}, \frac{7}{15}, \frac{12}{15}, \frac{9}{15}$. 2. $\frac{5}{7}, \frac{5}{9}, \frac{5}{6}, \frac{5}{12}$.

283) Συγκρίνατε τὰ κατωτέρω κλάσματα καὶ διατάξατε αὐτὰ κατὰ τάξιν μεγέθους μὲ κατάλληλον τοποθέτησιν μεταξύ των τοῦ σημείου ἀνισότητος :

1. $\frac{5}{8}$, $\frac{8}{12}$, $\frac{11}{24}$.   2. $\frac{4}{5}$, $\frac{9}{10}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{3}{4}$.

Β΄ Ὁ μ ά ς. 284) Ἀποθανών τις ὥρισε διὰ τῆς διαθήκης του ὁ υἱός του νὰ λάβῃ τὰ $\frac{7}{15}$ τῆς περιουσίας του καὶ τὰ $\frac{5}{12}$ τὸ ταμεῖον τοῦ Ἐθνικοῦ Στόλου. Ποῖος κληρονόμος ἔλαβε περισσότερον μέρος ;

285) Ἕνα αὐτοκίνητον διέτρεξε τὰ $\frac{5}{9}$ μιᾶς ὁδοῦ καὶ ἄλλο τὰ $\frac{23}{45}$ αὐτῆς. Ποῖον διέτρεξε περισσότερον δρόμον ;

§ 187. Ἰδιότητες τῶν κλασμάτων. I. Τί παθαίνει ἕνα κλάσμα, ἂν ὁ ἀριθμητής του πολλαπλασιασθῇ ἢ διαιρεθῇ δι᾽ ἑνὸς ἀκεραίου ἀριθμοῦ. Ἔστω τὸ κλάσμα $\frac{15}{60}$ τῆς ὥρας. Ἂν διπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμητήν, προκύπτει τὸ κλάσμα $\frac{30}{60}$. Διὰ νὰ ἴδωμεν ποίαν σχέσιν ἔχουν μεταξύ των τὰ κλάσματα αὐτά, σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς :

Τὰ $\frac{15}{60}$ τῆς ὥρας εἶναι 15 πρῶτα λεπτὰ καὶ τὰ $\frac{30}{60}$ τῆς ὥρας εἶναι 30 πρῶτα λεπτά.

Ἐπειδὴ δὲ τὰ 30 πρῶτα λεπτὰ εἶναι διπλάσια ἀπὸ τὰ 15 πρῶτα λεπτὰ καὶ τὰ $\frac{30}{60}$ θὰ εἶναι διπλάσια ἀπὸ τὰ $\frac{15}{60}$, ἤτοι $\frac{30}{60} = \frac{15}{60} \times 2$

Ὁμοίως ἐννοοῦμεν ὅτι $\frac{15 \times 3}{60} = \frac{15}{60} \times 3$. Ἀντιστρόφως :

$$\frac{30:2}{60} = \frac{15}{60} = \frac{30}{60} : 2, \qquad \frac{45:3}{60} = \frac{15}{60} = \frac{45}{60} : 3.$$

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι :

Ἂν ὁ ἀριθμητὴς ἑνὸς κλάσματος πολλαπλασιασθῇ ἢ διαιρεθῇ δι᾽ ἑνὸς ἀκεραίου ἀριθμοῦ καὶ τὸ κλάσμα ἀντιστοίχως πολλαπλασιάζεται ἢ διαιρεῖται διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.

Ἀπὸ αὐτὰ προκύπτει πάλιν ὁ γνωστὸς κανὼν (§ 182) καὶ ὁ ἀκόλουθος κανών :

Διὰ νὰ διαιρέσωμεν κλάσμα δι' ἀκεραίου, δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμητήν του διὰ τοῦ ἀκεραίου, ἂν διαιρῆται ἀκριβῶς, παρονομαστὴν δὲ ἀφήνομεν τὸν ἴδιον.

Ἀσκήσεις

Α' Ὁμάς. *Ἀπὸ μνήμης*. 286) Εὕρετε ἀμέσως.

1. Τὸ διπλάσιον τῶν κλασμάτων $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{8}{9}$.
2. Τὸ τριπλάσιον τῶν κλασμάτων $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{22}$, $\frac{5}{23}$, $\frac{8}{15}$.

287) Εὕρετε ἀμέσως:

1. Τὸ ἥμισυ τῶν κλασμάτων $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{10}{12}$, $\frac{18}{16}$.
2. Τὸ τρίτον τῶν κλασμάτων $\frac{3}{4}$, $\frac{6}{8}$, $\frac{12}{5}$, $\frac{24}{30}$.

Β' Ὁμάς. 288) Μὲ $\frac{3}{8}$ πήχ. χασὲ γίνεται ἕνα μανδήλιον. Πόσους πήχεις πρέπει νὰ ἀγοράσῃ μία δεσποινίς, διὰ νὰ κάμῃ 24 τοιαῦτα μανδήλια;

289) Ἕνα αὐτοκίνητον διέτρεξεν εἰς 3 ὥρας τὰ $\frac{6}{9}$ μιᾶς ὁδοῦ. Πόσον μέρος τῆς ὁδοῦ διέτρεξεν εἰς μίαν ὥραν;

290) Τέσσαρες ἀδελφοὶ ἐκληρονόμησαν τὰ $\frac{8}{9}$ ἀγροκτήματος. Πόσον μέρος τοῦ ἀγροκτήματος ἔλαβεν ὁ καθένας;

§ 188. II. Τί παθαίνει ἕνα κλάσμα, ἂν ὁ παρονομαστής του πολλαπλασιασθῇ ἢ διαιρεθῇ δι' ἑνὸς ἀκεραίου ἀριθμοῦ.

α') Ἔστω τὸ κλάσμα $\frac{7}{10}$ τῆς δραχ. δηλαδὴ 70 λεπτά. Ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸν παρονομαστήν του ἐπὶ 10, εὑρίσκομεν τὸ κλάσμα $\frac{7}{100}$ τῆς δραχ., δηλ. 7 λεπτά. Ἐπειδὴ δὲ τὰ 7 λεπτὰ εἶναι δέκα φορὰς ὀλιγώτερα ἀπὸ τὰ 70 λεπτά, συμπεραίνομεν ὅτι τὸ κλάσμα $\frac{7}{100}$ εἶναι δέκα φορὰς μικρότερον ἀπὸ τὸ $\frac{7}{10}$. Τοῦτο δηλ. διῃρέθη διὰ 10. Ὥστε:

$$\frac{7}{10 \times 10} = \frac{7}{100} = \frac{7}{10} : 10.$$

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι:

Ἂν ὁ παρονομαστὴς ἑνὸς κλάσματος πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ ἕνα ἀκέραιον ἀριθμόν, τὸ κλάσμα διαιρεῖται διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀκεραίου.

β′) Ἂν τὸν παρονομαστὴν τοῦ $\frac{7}{100}$ διαιρέσωμεν διὰ 10, εὑρίσκομεν τὸ κλάσμα $\frac{7}{10}$, δηλ. δέκα φορὰς μεγαλύτερον. Εἶναι λοιπόν :

$$\frac{7}{100:10}=\frac{7}{10}=\frac{7}{100}\times 10.$$ Ὥστε :

Ἂν ὁ παρονομαστὴς ἑνὸς κλάσματος διαιρεθῇ ἀκριβῶς δι' ἑνὸς ἀκεραίου, τὸ κλάσμα πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀκέραιον.

Ἀσκήσεις

291) Εὕρετε ἀπὸ μνήμης :

1. Τὸ ἥμισυ τῶν κλασμάτων $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{9}{12}$.
2. Τὸ τρίτον τῶν κλασμάτων $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{5}{6}$.

292) Χωρὶς νὰ μεταβάλητε τοὺς ἀριθμητάς, νὰ εὕρητε :

1. Τὸ διπλάσιον τῶν κλασμάτων $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{6}{10}$.
2. Τὸ τρίτον τῶν κλασμάτων $\frac{5}{7}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{8}{9}$, $\frac{9}{10}$.

293) Νὰ γίνουν τὰ κάτωθι κλάσματα 2, 3, 4 φορὰς μεγαλύτερα :

$$\frac{17}{20},\quad \frac{35}{42},\quad \frac{58}{120},\quad \frac{103}{360},\quad \frac{200}{1200}.$$

§ 189. Πολλαπλασιασμὸς μεικτοῦ ἐπὶ ἀκέραιον. *Πρόβλημα.* **Ἕνα δοχεῖον χωρεῖ $14\frac{5}{8}$ ὀκάδας βουτύρου. Ἕνας παντοπώλης ἠγόρασε 16 τοιαῦτα δοχεῖα. Πόσας ὀκάδας βουτύρου ἠγόρασεν οὗτος;**

Λύσις. Ἀφοῦ τὸ 1 δοχεῖον χωρεῖ $14\frac{5}{8}$ ὀκάδας, τὰ 2 δοχεῖα χωροῦν 2 φορὰς περισσότερον, ἤτοι $14\frac{5}{8}\times 2$, τὰ 3 δοχεῖα χωροῦν $14\frac{5}{8}\times 3$ καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς. Τὰ 16 λοιπὸν δοχεῖα χωροῦν $14\frac{5}{8}\times 16$ ὀκάδας. Τὸν πολλαπλασιασμὸν αὐτὸν δυνάμεθα νὰ ἐκτελέσωμεν κατὰ τοὺς ἑξῆς δύο τρόπους :

α΄) Ἐπειδὴ $14\frac{5}{8}=\frac{117}{8}$, θὰ εἶναι :

$$14\frac{5}{8}\times 16=\frac{117}{8}\times 16=\frac{117\times 16}{8}=234 \text{ ὀκάδες.}$$

β΄) Τὰ 16 δοχεῖα ἀπὸ 14 ὀκάδας τὸ ἕνα χωροῦν $14\times 16=224$ ὀκ. Καὶ ἀπὸ $\frac{5}{8}$ ὀκ. τὸ ἕνα χωροῦν $\frac{5}{8}\times 16=10$ ὀκ.

Ὥστε τὰ 16 δοχεῖα χωροῦν $224+10=234$ ὀκάδας.

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι :

$$14\frac{5}{8}\times 16=(14\times 16)+\left(\frac{5}{8}\times 16\right)=224+10=234.$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συμπεραίνομεν ὅτι, διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν μεικτὸν ἐπὶ ἀκέραιον :

α΄) Τρέπομεν τὸν μεικτὸν εἰς κλάσμα καὶ πολλαπλασιάζομεν τοῦτον ἐπὶ τὸν ἀκέραιον.

β΄) Πολλαπλασιάζομεν χωριστὰ τὸν ἀκέραιον καὶ χωριστὰ τὸ κλάσμα τοῦ μεικτοῦ ἐπὶ τὸν ἀκέραιον καὶ προσθέτομεν τὰ δύο γινόμενα.

Σημείωσις. Ἂν παρατηρήσωμεν ὅτι $14\frac{5}{8}=14+\frac{5}{8}$, ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται $\left(14+\frac{5}{8}\right)\times 16=(14\times 16)+\left(\frac{5}{8}\times 16\right)$. Ἀληθεύει λοιπὸν εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ ἰδιότης τῆς § 60, τὴν ὁποίαν ἐμάθομεν διὰ τοὺς ἀκεραίους ἀριθμούς.

Ἀσκήσεις

Α΄ Ὁμάς. 294) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ κάτωθι γινόμενα :

1. $13\frac{1}{2}\times 5$, 3. $16\frac{1}{5}\times 4$, 5. $24\frac{3}{5}\times 16$.

2. $27\frac{1}{4}\times 8$, 4. $29\frac{5}{8}\times 3$, 6. $150\frac{1}{3}\times 20$.

Β΄ Ὁμάς. 295) Μία οἰκογένεια δαπανᾷ $6\frac{3}{4}$ ὀκάδας ἐλαίου τὸν μῆνα. Πόσον ἔλαιον δαπανᾷ εἰς ἓν ἔτος ;

296) Ἕνα ἐπαρχιακὸν γραφεῖον καίει κάθε χειμῶνα τὸν μῆνα $265\frac{5}{8}$ ὀκάδας ξύλα διὰ τὴν θερμάστραν του. Πόσα ξύλα καίει κατὰ τοὺς τρεῖς μῆνας τοῦ χειμῶνος;

297) Πεζὸς διανύει $4\frac{3}{4}$ χλμ. τὴν ὥραν. Πόσον θὰ διανύσῃ εἰς 8 ὥρας ;

298) Μία ἁμαξοστοιχία ἀναχωρεῖ ἀπὸ τὸν Πειραιᾶ καὶ φθάνει εἰς τὰς Πάτρας μετὰ δέκα ὥρας μὲ δίωρον παραμονὴν εἰς τοὺς ἐνδιαμέσους σταθμούς. Ἂν ἡ ταχύτης αὐτῆς εἶναι $23\frac{3}{4}$ χιλιόμετρα τὴν ὥραν, πόσον μῆκος ἔχει ἡ σιδηροδρομικὴ γραμμὴ Πειραιῶς — Πατρῶν ;

2. ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΑΡΙΘΜΟΥ ΕΠΙ ΚΛΑΣΜΑ

§ 190. *Πρόβλημα.* **Ἂν ἡ ὀκᾶ τοῦ ἐλαίου τιμᾶται α δραχμάς, νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τῶν $\frac{3}{5}$ τῆς ὀκᾶς αὐτοῦ.**

Λύσις. Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα, σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς :

Ἀφοῦ ἡ μία ὀκᾶ τιμᾶται α δραχμάς, τὸ $\frac{1}{5}$ τῆς ὀκᾶς θὰ τιμᾶται 5 φορὰς ὀλιγώτερον, δηλ. τὸ πέμπτον τῶν α δραχμῶν, ἤτοι $\frac{\alpha}{5}$ δρχ. Τὰ δὲ $\frac{3}{5}$ τῆς ὀκᾶς θὰ τιμῶνται 3 φορὰς περισσότερον, ἤτοι $\frac{\alpha}{5} \times 3$.

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι :

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ζητούμενον, διαιροῦμεν τὴν τιμὴν α διὰ 5 καὶ τὸ πηλίκον $\frac{\alpha}{5}$ πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 3. Λαμβάνομεν δηλ. τὸ πέμπτον τοῦ α τρεῖς φοράς.

Τὰς δύο ταύτας πράξεις ὀνομάζομεν **πολλαπλασιασμὸν τοῦ α ἐπὶ $\frac{3}{5}$**. Ὥστε $\alpha \times \frac{3}{5} = \frac{\alpha}{5} \times 3$.

Κατὰ ταῦτα :

Νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμὸν ἐπὶ κλάσμα σημαίνει νὰ ἐπαναλάβωμεν ἕνα μέρος τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ (ὁριζόμενον ὑπὸ τοῦ παρονομαστοῦ) τόσας φοράς, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ ἀριθμητὴς τοῦ κλάσματος.

Κατὰ ταῦτα, θὰ εἶναι γενικῶς : $\boxed{\alpha \times \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha}{\gamma} \times \beta}$

Ἐπίσης ἀπὸ τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος τούτου βλέπομεν ὅτι:

α΄) Ἐὰν γνωρίζωμεν τὴν τιμὴν ἀκεραίας μονάδος καὶ θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν μέρους τῆς μονάδος αὐτῆς, πολλαπλασιάζομεν τὴν τιμὴν τῆς ἀκεραίας μονάδος ἐπὶ τὸ κλάσμα, τὸ ὁποῖον φανερώνει τὸ μέρος τοῦτο τῆς ἀκεραίας μονάδος.

β΄) Διὰ νὰ εὕρωμεν μέρος δοθέντος ἀριθμοῦ, πολλαπλασιάζομεν αὐτὸν ἐπὶ τὸ κλάσμα, τὸ ὁποῖον φανερώνει τὸ μέρος αὐτό.

§ 191. **Ἐφαρμογαί. α΄) Πῶς πολλαπλασιάζεται ἀκέραιος ἐπὶ κλάσμα.** Ἂν ἡ τιμὴ α τῆς ὀκᾶς τοῦ ἐλαίου εἶναι 8 000 δραχμαί, τὰ $\frac{3}{5}$ τῆς ὀκᾶς αὐτοῦ θὰ τιμῶνται $8\,000 \times \frac{3}{5}$ δρχ. Κατὰ τὴν ἰσότητα (1) τῆς § 190 θὰ εἶναι:

$$8\,000 \times \frac{3}{5} = \frac{8\,000}{5} \times 3 = \frac{8\,000 \times 3}{5} = \frac{24\,000}{5} = 4\,800 \text{ δραχ.}$$

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι:

Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀκέραιον ἐπὶ κλάσμα, πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀκέραιον ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος καὶ ὑπὸ τὸ γινόμενον γράφομεν, ὡς παρονομαστήν, τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος.

Παρατήρησις. Ἀπὸ τὰς ἰσότητας

$$8\,000 \times \frac{3}{5} = \frac{8\,000 \times 3}{5} \quad \text{καὶ} \quad \frac{3}{5} \times 8\,000 = \frac{3 \times 8\,000}{5}$$

συμπεραίνομεν εὐκόλως ὅτι $8\,000 \times \frac{3}{5} = \frac{3}{5} \times 8\,000$.

Ἀληθεύει δηλ. εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ θεμελιώδης ἰδιότης τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, τὴν ὁποίαν ἐμάθομεν διὰ τοὺς ἀκεραίους ἀριθμούς.

Ἀσκήσεις

Α΄ Ὁμάς. *Ἀπὸ μνήμης.* 299) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ κάτωθι γινόμενα:

$$3 \times \frac{5}{6}, \quad 8 \times \frac{3}{4}, \quad 10 \times \frac{1}{2}, \quad 25 \times \frac{2}{3}.$$

300) 1. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ 18, τοῦ 24, τοῦ 54.

2. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ 20, τοῦ 60, τοῦ 104.

Β' Ὁμάς. 301) Ἓν αὐτοκίνητον ἔχει ταχύτητα 25 χιλιομέτρων τὴν ὥραν. Πόσον διάστημα διανύει εἰς $\frac{4}{5}$ τῆς ὥρας ;

302) Ἕνας γεωργὸς ἐχρεώστει 600 000 δρχ. καὶ ἐπλήρωσε τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ χρέους του. Πόσα ὀφείλει ἀκόμη ;

303) Μία ἁμαξοστοιχία μὲ ταχύτητα 24 χιλιομέτρων τὴν ὥραν μεταβαίνει ἀπὸ τὸν Πειραιᾶ εἰς Ἐλευσῖνα εἰς $\frac{5}{6}$ τῆς ὥρας. Πόσον μῆκος ἔχει ἡ σιδηροδρομικὴ γραμμὴ Πειραιῶς — Ἐλευσῖνος ;

§ 192. β') Πῶς πολλαπλασιάζεται κλάσμα ἐπὶ κλάσμα. Διὰ νὰ εὕρωμεν π. χ. τὰ $\frac{5}{6}$ τοῦ κλάσματος $\frac{3}{4}$, πρέπει νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον $\frac{3}{4} \times \frac{5}{6}$, ὅπως εἴπομεν προηγουμένως (§ 190 β'). Πρὸς τοῦτο πρέπει νὰ εὕρωμεν τὸ ἕκτον τοῦ $\frac{3}{4}$ καὶ νὰ τὸ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 5. Ἐπειδὴ δὲ τὸ ἕκτον τοῦ $\frac{3}{4}$ εἶναι $\frac{3}{4} : 6 = \frac{3}{4 \times 6}$, ἐννοοῦμεν ὅτι : $\frac{3}{4} \times \frac{5}{6} = \frac{3}{4 \times 6} \times 5 = \frac{3 \times 5}{4 \times 6} = \frac{15}{24}$.

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι :

Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν κλάσμα ἐπὶ κλάσμα πολλαπλασιάζομεν ἀριθμητὴν ἐπὶ ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν ἐπὶ παρονομαστήν. Θέτομεν δὲ τὸ μὲν γινόμενον τῶν ἀριθμητῶν ὡς ἀριθμητήν, τὸ δὲ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν ὡς παρονομαστήν.

Κατὰ τὸν κανόνα αὐτὸν θὰ εἶναι γενικῶς:

$$\boxed{\frac{\alpha}{\beta} \times \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha \times \gamma}{\beta \times \delta}}$$

Παρατήρησις. Κατὰ τὸν κανόνα αὐτὸν $\frac{5}{6} \times \frac{3}{4} = \frac{5 \times 3}{6 \times 4} = \frac{15}{24}$. Εἶναι λοιπὸν $\frac{3}{4} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{6} \times \frac{3}{4}$. Ἀληθεύει δηλαδὴ καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἡ θεμελιώδης ἰδιότης τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

Ἀσκήσεις

Α' Ὁμάς. 304) Εὕρετε ἀπὸ μνήμης τὰ ἀκόλουθα γινόμενα :

$\frac{5}{6} \times \frac{1}{2}$, $\frac{2}{3} \times \frac{1}{3}$, $\frac{3}{5} \times \frac{5}{3}$, $\frac{6}{7} \times \frac{2}{6}$, $\frac{3}{4} \times \frac{4}{6}$.

305) Εὕρετε ἀπὸ μνήμης:

1ον τὸ $\frac{1}{2}$ τῶν κλασμάτων $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{9}{12}$.

2ον τὸ $\frac{1}{3}$ τῶν κλασμάτων $\frac{2}{5}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{12}{20}$.

3ον τὰ $\frac{2}{3}$ τῶν κλασμάτων $\frac{6}{8}$, $\frac{9}{10}$, $\frac{12}{17}$.

Β' Ὁμάς. 306) Δύο ἀδελφοὶ ἐκληρονόμησαν μίαν ἄμπελον. Ὁ ἕνας ἀπὸ αὐτοὺς ἔδωκε τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ μεριδίου του προῖκα εἰς τὴν κόρην του. Πόσον μέρος τῆς ἀμπέλου ἔδωκεν ὡς προῖκα;

307) Τρεῖς ἀδελφοὶ ἐκληρονόμησαν ἕνα ἀγρόν. Ὁ ἕνας ἀπὸ αὐτοὺς ἐπώλησε τὰ $\frac{2}{5}$ τοῦ μεριδίου του. Πόσον μέρος τοῦ ἀγροῦ ἔμεινεν εἰς αὐτόν;

308) Μία φιάλη χωρεῖ $\frac{3}{4}$ τῆς ὀκᾶς οἴνου. Νὰ εὑρεθῇ τὸ κλάσμα τῆς ὀκᾶς, τὸ ὁποῖον χωροῦν τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς φιάλης.

§ 193. γ') Πῶς πολλαπλασιάζεται μεικτὸς ἀριθμὸς ἐπὶ κλάσμα. Ἂν ἓν δοχεῖον χωρῇ $6\frac{2}{3}$ ὀκάδας, τὰ $\frac{3}{4}$ αὐτοῦ θὰ χωροῦν $6\frac{2}{3}$ ὀκ. $\times \frac{3}{4}$ ἢ $\left(6\frac{2}{3} \times \frac{3}{4}\right)$ ὀκάδας.

Τὸ γινόμενον αὐτὸ δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν κατὰ τοὺς ἑξῆς δύο τρόπους.

α') Ἐπειδὴ $6\frac{2}{3} = \frac{20}{3}$, θὰ εἶναι:

$$6\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{20}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{20 \times 3}{3 \times 4} = \frac{20}{4} = 5 \text{ ὀκάδες.}$$

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι:

1ον. Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν μεικτὸν ἐπὶ κλάσμα, τρέπομεν τὸν μεικτὸν εἰς κλάσμα καὶ πολλαπλασιάζομεν αὐτὸ ἐπὶ τὸ δοθὲν κλάσμα.

β') Ἂν τὸ δοχεῖον ἐχώρει μόνον 6 ὀκάδας, τὰ $\frac{3}{4}$ αὐτοῦ θὰ ἐχώρουν $6 \times \frac{3}{4} = \frac{18}{4}$ ὀκάδας.

Ἐπειδὴ δὲ τὸ δοχεῖον χωρεῖ ἀκόμη $\frac{2}{3}$ ὀκ, τὰ $\frac{3}{4}$ αὐτοῦ χωροῦν ἀκόμη $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{12}$ ὀκ. Ὥστε τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ δοχείου χωροῦν τὸ ὅλον $\frac{18}{4} + \frac{6}{12} = \frac{54+6}{12} = 5$ ὀκ. Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι :

$$6\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \left(6 \times \frac{3}{4}\right) + \left(\frac{2}{3} \times \frac{3}{4}\right) = \frac{18}{4} + \frac{6}{12} = \frac{54+6}{12} = 5 \text{ ὀκ.}$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι :

2ον. Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν μεικτὸν ἐπὶ κλάσμα, πολλαπλασιάζομεν χωριστὰ τὸν ἀκέραιον καὶ χωριστὰ τὸ κλάσμα τοῦ μεικτοῦ ἐπὶ τὸ κλάσμα καὶ προσθέτομεν τὰ δύο γινόμενα.

Σημείωσις. Ἐπειδὴ $6\frac{2}{3} = 6 + \frac{2}{3}$, θὰ εἶναι :

$$6\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \left(6 + \frac{2}{3}\right) \times \frac{3}{4}.$$

Ἐπειδὴ δὲ $6\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \left(6 \times \frac{3}{4}\right) + \left(\frac{2}{3} \times \frac{3}{4}\right)$, ἕπεται ὅτι :

$$\left(6 + \frac{2}{3}\right) \times \frac{3}{4} = \left(6 \times \frac{3}{4}\right) + \left(\frac{2}{3} \times \frac{3}{4}\right).$$

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην διατηρεῖται ἡ γνωστὴ (§ 60) ἰδιότης τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἀθροίσματος ἐπὶ ἀριθμόν.

Ἀσκήσεις

Α' Ὁμάς. 309) Εὕρετε ἀπὸ μνήμης :

1. Τὸ ἥμισυ τοῦ $4\frac{2}{3}$. 2. Τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ $6\frac{1}{2}$.

310) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ γινόμενα :

1. $2\frac{1}{3} \times \frac{3}{4}$, $5\frac{2}{5} \times \frac{5}{6}$, $7\frac{3}{4} \times \frac{2}{5}$.
2. $\left(2 + 3\frac{1}{5}\right) \times \frac{5}{7}$, $\left(6 + 3\frac{2}{3}\right) \times \frac{6}{8}$, $\left(\frac{8}{9} + \frac{4}{5}\right) \times \frac{3}{4}$.

Β' Ὁμάς. 311) Εἷς οἰκογενειάρχης ἠγόρασεν $8\frac{5}{8}$ ὀκάδας βουτύρου. Κατὰ τὸν καθαρισμόν του ὑπελόγισεν ὅτι τὸ $\frac{1}{8}$ αὐτοῦ ἦτο ξέναι οὐσίαι. Πόσον καθαρὸν βούτυρον ἠγόρασεν ;

312) Τὰ $\frac{15}{100}$ τῶν ἀλεύρων τοῦ ἄρτου τοῦ δελτίου ἦτο ἀπὸ ἀρα-

βόσιτον. Εἰς 50 $\frac{5}{6}$ ὀκάδας τοιούτου ἀλεύρου, πόσαι ὀκάδες σιταλεύρου ὑπῆρχον;

313) Ἕνας οἰκογενειάρχης ἠγόρασεν ἕνα δοχεῖον μὲ ἐλαίας βάρους 6 $\frac{2}{5}$ ὀκάδων. Τὸ ἀπόβαρον δὲ ἦτο $\frac{3}{20}$ τοῦ βάρους αὐτοῦ. Πόσας ὀκάδας ἐλαιῶν ἠγόρασεν;

314) Μία οἰκοκυρὰ ἠγόρασεν ἀπὸ πλανόδιον ἀνθρακοπώλην 4 $\frac{1}{2}$ ὀκάδας ἀνθράκων. Ἀλλὰ τὰ $\frac{2}{15}$ τοῦ βάρους τούτου ἦτο κόνις καὶ ὕδωρ. Πόσας ὀκάδας καθαροῦ ἄνθρακος ἠγόρασεν;

3. ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΑΡΙΘΜΟΥ ΕΠΙ ΜΕΙΚΤΟΝ

§ 194. *Πρόβλημα.* **Ἂν ἡ ὀκᾶ ἑνὸς πράγματος τιμᾶται α δραχμάς, νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ 8 $\frac{3}{4}$ ὀκάδων αὐτοῦ.**

Λύσις. Α' Τρόπος. Αἱ 8 ὀκάδες τιμῶνται $\alpha \times 8$ δραχ. Τὰ δὲ $\frac{3}{4}$ τῆς ὀκᾶς τιμῶνται $\alpha \times \frac{3}{4}$ δραχ. (§ 190). Ἑπομένως αἱ 8 $\frac{3}{4}$ ὀκάδες τιμῶνται $\left[(\alpha \times 8) + \left(\alpha \times \frac{3}{4}\right)\right]$ δραχ.

Τὰς πράξεις αὐτὰς ὀνομάζομεν **πολλαπλασιασμὸν τοῦ α ἐπὶ 8 $\frac{3}{4}$**.

Εἶναι λοιπὸν $\alpha \times 8\frac{3}{4} = (\alpha \times 8) + \left(\alpha \times \frac{3}{4}\right)$. (1)

Ὥστε:

Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμὸν ἐπὶ μεικτόν, πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀριθμὸν ἐκεῖνον χωριστὰ ἐπὶ τὸν ἀκέραιον καὶ χωριστὰ ἐπὶ τὸ κλάσμα τοῦ μεικτοῦ καὶ προσθέτομεν τὰ δύο γινόμενα.

Β' Τρόπος. Ἐπειδὴ $8\frac{3}{4} = \frac{35}{4}$, ἡ ζητουμένη τιμὴ εἶναι $\alpha \times \frac{35}{4}$.

Εἶναι λοιπὸν $\alpha \times 8\frac{3}{4} = \alpha \times \frac{35}{4}$. (2)

Ὥστε:

Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμὸν ἐπὶ μεικτόν, δυνάμεθα νὰ τρέψωμεν τὸν μεικτὸν εἰς κλάσμα καὶ ἐπὶ αὐτὸ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν ἐκεῖνον.

§ 195. **Ἐφαρμογαί. α′) Πολλαπλασιασμὸς ἀκεραίου ἐπὶ μεικτόν.** Ἂν ἡ τιμὴ α τῆς ὀκᾶς ἦτο 100 δραχμαί, ἡ τιμὴ τῶν $8\frac{3}{4}$ ὀκάδων θὰ ἦτο $100 \times 8\frac{3}{4}$.

Κατὰ τὴν ἰσότητα (1) τῆς § 194, θὰ εἶναι :

$100 \times 8\frac{3}{4} = (100 \times 8) + (100 \times \frac{3}{4}) = 800 + 75 = 875$ δρχ.

Κατὰ τὴν ἰσότητα (2) τῆς § 194, θὰ εἶναι :

$$100 \times 8\frac{3}{4} = 100 \times \frac{35}{4} = \frac{3\,500}{4} = 875 \text{ δραχ.}$$

§ 196. **β′) Πολλαπλασιασμὸς κλάσματος ἐπὶ μεικτόν.** Ἂν $\alpha = \frac{7}{8}$, αἱ ἰσότητες (1) καὶ (2) τῆς § 194 γίνονται :

$$\frac{7}{8} \times 8\frac{3}{4} = \left(\frac{7}{8} \times 8\right) + \left(\frac{7}{8} \times \frac{3}{4}\right) = 7 + \frac{21}{32} = 7\frac{21}{32}$$

$$\text{καὶ} \quad \frac{7}{8} \times 8\frac{3}{4} = \frac{7}{8} \times \frac{35}{4} = \frac{245}{32} = 7\frac{21}{32}.$$

§ 197. **γ′) Πῶς πολλαπλασιάζεται μεικτὸς ἐπὶ μεικτὸν ἀριθμόν.** Ἂν ἡ τιμὴ μιᾶς ὀκᾶς ἦτο $256\frac{2}{5}$ δραχμαί, τὴν τιμὴν τῶν $8\frac{3}{4}$ ὀκάδων εὑρίσκομεν κατὰ τοὺς ἑξῆς δύο τρόπους.

Α′ Τρόπος. Ἐπειδὴ $256\frac{2}{5} = \frac{1\,282}{5}$ καὶ $8\frac{3}{4} = \frac{35}{4}$, πρέπει νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν τῶν $\frac{35}{4}$ τῆς ὀκᾶς πρὸς $\frac{1\,282}{5}$ δραχ. τὴν ὀκᾶν. Γνωρίζομεν δὲ ὅτι ἡ τιμὴ αὐτὴ εἶναι :

$$\frac{1\,282}{5} \times \frac{35}{4} = \frac{44\,870}{20} = 2\,243\frac{1}{2} \text{ δραχμαί.}$$

Β′ Τρόπος. Αἱ 8 ὀκάδες τιμῶνται :

$$256\frac{2}{5} \times 8 = (256 \times 8) + \left(\frac{2}{5} \times 8\right) = 2\,048 + \frac{16}{5}.$$

Τὰ δὲ $\frac{3}{4}$ τῆς ὀκᾶς τιμῶνται :

$$256\frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \left(256 \times \frac{3}{4}\right) + \left(\frac{2}{5} \times \frac{3}{4}\right) = 192 + \frac{6}{20}.$$

Ἑπομένως αἱ $8\frac{3}{4}$ ὀκάδες τιμῶνται :

$$2\,048 + \frac{16}{5} + 192 + \frac{6}{20} = 2\,243\,\frac{1}{2}\text{ δραχ.}$$

Καὶ τὰς πράξεις αὐτὰς ὀνομάζομεν **πολλαπλασιασμὸν** τοῦ $256\,\frac{2}{5}$ ἐπὶ $8\,\frac{3}{4}$.

Εὕρομεν λοιπὸν ὅτι: $256\,\frac{2}{5}\times 8\,\frac{3}{4} = \frac{1282}{5}\times\frac{35}{4}$. Ὥστε:

1ον. Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν μεικτὸν ἐπὶ μεικτόν, τρέπομεν αὐτοὺς εἰς κλάσματα καὶ πολλαπλασιάζομεν αὐτά.

Ἐπίσης εὕρομεν ὅτι: $256\,\frac{2}{5}\times 8\,\frac{3}{4} =$

$$(256\times 8) + \left(\frac{2}{5}\times 8\right) + \left(256\times\frac{3}{4}\right) + \left(\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}\right).$$ Ὥστε:

2ον. Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν μεικτὸν ἐπὶ μεικτόν, δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰ δύο μέρη τοῦ πολλαπλασιαστέου χωριστὰ ἐπὶ κάθε μέρος τοῦ πολλαπλασιαστοῦ καὶ νὰ προσθέσωμεν ὅλα τὰ γινόμενα.

Ἀσκήσεις

Α΄ Ὁμάς. 315) Εὕρετε τὰ ἀκόλουθα γινόμενα:

1. $4\times 2\,\frac{1}{2}$, $6\times 2\,\frac{1}{3}$, $10\times 3\,\frac{2}{5}$.
2. $\frac{2}{3}\times 4\,\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}\times 3\,\frac{2}{3}$, $\frac{4}{7}\times 1\,\frac{1}{4}$.
3. $1\,\frac{1}{4}\times 3\,\frac{1}{4}$, $3\,\frac{1}{8}\times 2\,\frac{8}{9}$, $5\,\frac{2}{3}\times 4\,\frac{3}{5}$.

316) 1ον. Πόσα ρούπια ἔχουν οἱ $10\,\frac{3}{4}$ πήχεις; 2ον. Πόσα λεπτὰ ἔχουν αἱ $60\,\frac{2}{3}$ δραχμαί; 3ον. Πόσα δράμια ἔχουν αἱ $5\,\frac{3}{20}$ ὀκάδες; 4ον. Πόσας ὀκάδας ἔχουν οἱ $2\,\frac{1}{4}$ στατῆρες;

Β΄ Ὁμάς. 317) Μία δακτυλογράφος γράφει $8\,\frac{1}{2}$ σελίδας τὴν ὥραν. Διὰ νὰ δακτυλογραφήσῃ μίαν ἐπιστημονικὴν μελέτην εἰργάσθη ἐπὶ $5\,\frac{4}{5}$ ὥρας. Πόσας σελίδας εἶχεν ἡ μελέτη αὐτή;

318) Ἕνας πεπειραμένος στοιχειοθέτης στοιχειοθετεῖ $3\,\frac{1}{2}$ σελίδας ἱστορικοῦ βιβλίου τὴν ὥραν. Πόσας τοιαύτας σελίδας στοιχειοθετεῖ εἰς $5\,\frac{5}{12}$ ὥρας;

319) Ἕνας στοιχειοθέτης στοιχειοθετεῖ $\frac{8}{9}$ τῆς σελίδος μαθηματικοῦ βιβλίου τὴν ὥραν. Πόσας σελίδας τοῦ βιβλίου αὐτοῦ στοιχειοθετεῖ εἰς $6\frac{2}{3}$ ὥρας;

Γ' Ὁ μ ά ς. 320) Ἕνας ἠλεκτροκίνητος ἀργαλειὸς ὑφαίνει $5\frac{3}{8}$ πήχεις ὑφάσματος τὴν ὥραν. Πόσους πήχεις ὑφαίνει ἀπὸ $7\frac{1}{2}$ π.μ. μέχρι τῆς μεσημβρίας;

321) Μία πλέκτρια πλέκει μὲ πλεκτικὴν μηχανὴν 3 ζεύγη κάλτσες τὴν ὥραν. Πόσα ζεύγη πλέκει τὴν ἡμέραν, ἂν ἐργάζηται ἀπὸ $8\frac{1}{4}$ ἕως 12 π.μ. καὶ ἀπὸ 2 ἕως $4\frac{3}{4}$ μ.μ;

322) Διὰ μίαν ἀνδρικὴν ἐνδυμασίαν χρειάζονται $4\frac{2}{8}$ πήχεις. Ἂν ὁ πῆχυς ἑνὸς ὑφάσματος πωλῆται 145 000 δραχ. καὶ τὰ ραπτικὰ εἶναι 280 000 δραχμαί, πόσον κοστίζει μία τοιαύτη ἐνδυμασία;

§ 198. Γενικὸς ὁρισμὸς τοῦ πολλαπλασιασμοῦ. Ἂν ὁ πολλαπλασιαστέος εἶναι τυχὼν ἀριθμὸς α, ἐμάθομεν τὰς ἑξῆς περιπτώσεις πολλαπλασιασμοῦ αὐτοῦ:

1ον. $\alpha \times 3 = \alpha + \alpha + \alpha$, εἶναι δὲ καὶ $3 = 1 + 1 + 1$.

2ον. $\alpha \times \frac{3}{4} = \frac{\alpha}{4} + \frac{\alpha}{4} + \frac{\alpha}{4}$, εἶναι δὲ καὶ $\frac{3}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$.

3ον. $\alpha + 2\frac{3}{4} = (\alpha \times 2) + \left(\alpha \times \frac{3}{4}\right) = \alpha + \alpha + \frac{\alpha}{4} + \frac{\alpha}{4} + \frac{\alpha}{4}$, εἶναι δὲ καὶ $2\frac{3}{4} = 1 + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$.

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι:

Πολλαπλασιασμὸς ἑνὸς ἀριθμοῦ α ἐπὶ ἄλλον ἀριθμὸν εἶναι μία πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν τρίτον ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος γίνεται ἀπὸ τὸν α καὶ ἀπὸ τὰ μέρη του, ὅπως ὁ πολλαπλασιαστὴς γίνεται ἀπὸ τὴν ἀκεραίαν μονάδα καὶ ἀπὸ τὰ μέρη αὐτῆς.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω εὐκόλως ἐννοοῦμεν ὅτι:

1ον. Τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν εἶναι μεγαλύτερον ἀπὸ τὸν πολλαπλασιαστέον, ἂν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ τὴν ἀκεραίαν μονάδα.

2ον. Τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν εἶναι ἴσον μὲ τὸν πολλαπλασιαστέον, ἂν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι ἴσος μὲ τὴν ἀκεραίαν μονάδα.

3ον. Τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν εἶναι μικρότερον ἀπὸ τὸν πολλαπλασιαστέον, ἂν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι μικρότερος ἀπὸ τὴν ἀκεραίαν μονάδα.

Τὰ συμπεράσματα ταῦτα τὰ ἐκφράζομεν συντόμως ὡς ἑξῆς :

1ον. Ἂν $\mu > 1$, θὰ εἶναι $\alpha \cdot \mu > \alpha$.

2ον. Ἂν $\mu = 1$, θὰ εἶναι $\alpha \cdot \mu = \alpha$.

3ον. Ἂν $\mu < 1$, θὰ εἶναι $\alpha \cdot \mu < \alpha$.

§ 199. **Ποῖοι ἀριθμοὶ λέγονται ἀντίστροφοι.** Ἂν ἀντιστρέψωμεν τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος $\frac{3}{4}$, προκύπτει τὸ κλάσμα $\frac{4}{3}$. Καὶ ἀπὸ τούτου ὁμοίως γίνεται τὸ κλάσμα $\frac{3}{4}$.

Δι' αὐτὸ ὁ ἕνας ἀπὸ αὐτοὺς τοὺς ἀριθμοὺς λέγεται **ἀντίστροφος** τοῦ ἄλλου. Οἱ δύο δὲ μαζὶ λέγονται **ἀντίστροφοι ἀριθμοί.**

Κατὰ ταῦτα ἀντίστροφος τοῦ $\frac{1}{8}$ εἶναι ὁ $\frac{8}{1}$, ἤτοι ὁ ἀκέραιος 8 καὶ τἀνάπαλιν· τοῦ ἀκεραίου $6 = \frac{6}{1}$ ἀντίστροφος εἶναι ὁ $\frac{1}{6}$. Τοῦ δὲ μεικτοῦ $2\frac{1}{3} = \frac{7}{3}$ ἀντίστροφος εἶναι τὸ κλάσμα $\frac{3}{7}$.

Παρατηροῦμεν δὲ ὅτι :

$\frac{3}{4} \times \frac{4}{3} = 1, \quad 8 \times \frac{1}{8} = 1, \quad 2\frac{1}{3} \times \frac{3}{7} = \frac{7}{3} \times \frac{3}{7} = 1$, ἤτοι :

Δύο ἀντίστροφοι ἀριθμοὶ ἔχουν γινόμενον 1.

Ἀσκήσεις

323) Ὁρίσατε ἀπὸ μνήμης τοὺς ἀντιστρόφους τῶν ἀριθμῶν $\frac{2}{5}$, $\frac{4}{7}$, 8, 3 καὶ εὕρετε τοὺς ἀντιστρόφους τῶν ἀριθμῶν :

$$1\frac{2}{3}, \quad 3\frac{2}{5}, \quad 5\frac{1}{4}.$$

324) Εὕρετε τοὺς ἀντιστρόφους τῶν ἀκολούθων ἀριθμῶν :

$$5 + 2\frac{1}{4}, \quad 3\frac{2}{9} - 1\frac{2}{3}, \quad 5\frac{1}{6} \times 3\frac{5}{6}.$$

4. ΓΙΝΟΜΕΝΟΝ ΠΟΛΛΩΝ ΠΑΡΑΓΟΝΤΩΝ

§ 200. *Πρόβλημα.* **Ἕνας φιλόπατρις Ἕλλην, ἀπὸ τοὺς ἐργαζομένους εἰς τὴν Ἀμερικήν, ἀπέστειλεν εἰς τὴν Ἑλλάδα 50 000 δολλάρια. Παρήγγειλε δὲ τὰ $\frac{3}{5}$ τοῦ ποσοῦ τούτου νὰ διατεθοῦν εἰς τὸν ἔρανον διὰ τὴν φανέλλαν τοῦ στρατιώτου· τὰ $\frac{8}{15}$ τοῦ ποσοῦ, ποὺ διετέθη διὰ τὴν φανέλλαν, νὰ διατεθοῦν διὰ τὰς παιδουπόλεις τῆς Ἀττικῆς καὶ τὰ ὑπόλοιπα διὰ τὸ σχολικὸν ταμεῖον τῆς ἰδιαιτέρας του Πατρίδος. Πόσα δολλάρια διετέθησαν διὰ κάθε σκοπόν;**

Λύσις. Διετέθησαν:

Διὰ τὸν ἔρανον τῆς φανέλλας	$50\,000 \times \frac{3}{5} = 30\,000$ δολ.
Διὰ τὰς παιδουπόλεις Ἀττικῆς	$30\,000 \times \frac{8}{15} = 16\,000$ δολ.
Διὰ τοὺς δύο σκοπούς	$30\,000 + 16\,000 = 46\,000$ δολ.
Ἑπομένως τὸ σχ. ταμεῖον ἔλαβε	$50\,000 - 46\,000 = 4\,000$ δολ.

§ 201. Τί εἶναι γινόμενον πολλῶν καὶ οἱωνδήποτε παραγόντων. Διὰ νὰ εὕρωμεν προηγουμένως τὸ μερίδιον τῶν παιδουπόλεων εἰργάσθημεν ὡς ἑξῆς: Εὕρομεν πρῶτον τὸ μερίδιον διὰ τὴν φανέλλαν τοῦ στρατιώτου. Πρὸς τοῦτο δὲ ἐπολλαπλασιάσαμεν τὸν 50 000 ἐπὶ $\frac{3}{5}$ καὶ εὕρομεν γινόμενον 30 000. Ἔπειτα τὸ γινόμενον 30 000 ἐπολλαπλασιάσαμεν ἐπὶ $\frac{8}{15}$ καὶ εὕρομεν 16 000.

Αὐτὸ τὸ ἐξαγόμενον ὀνομάζομεν γινόμενον τῶν ἀριθμῶν 50 000, $\frac{3}{5}$, $\frac{8}{15}$ καὶ τὸ σημειώνομεν οὕτω $50\,000 \times \frac{3}{5} \times \frac{8}{15}$.

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι τὸ γινόμενον πολλῶν τυχόντων παραγόντων ὁρίζεται καὶ σημειώνεται, ὅπως καὶ ὅταν ὅλοι οἱ παράγοντες εἶναι ἀκέραιοι ἀριθμοὶ (§ 76).

§ 202. Γινόμενον πολλῶν κλασμάτων. Δυνάμεθα τοὺς ἀκεραίους καὶ μεικτοὺς παράγοντες ἑνὸς γινομένου πολλῶν παραγόντων νὰ τοὺς τρέψωμεν εἰς κλάσματα. Διὰ τοῦτο πρέπει νὰ γνωρίζωμεν πῶς εὑρίσκεται τὸ γινόμενον πολλῶν κλασματικῶν παραγόντων.

Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον $\frac{2}{5} \times \frac{3}{6} \times \frac{4}{5} \times \frac{5}{8}$.

Πρὸς τοῦτο εὑρίσκομεν κατὰ σειρὰν ὅτι: $\frac{2}{5} \times \frac{3}{6} = \frac{2 \times 3}{5 \times 6}$,

$\frac{2 \times 3}{5 \times 6} \times \frac{4}{5} = \frac{2 \times 3 \times 4}{5 \times 6 \times 5}$, $\frac{2 \times 3 \times 4}{5 \times 6 \times 5} \times \frac{5}{8} = \frac{2 \times 3 \times 4 \times 5}{5 \times 6 \times 5 \times 8}$.

Ἑπομένως: $\frac{2}{5} \times \frac{3}{6} \times \frac{4}{5} \times \frac{5}{8} = \frac{2 \times 3 \times 4 \times 5}{5 \times 6 \times 5 \times 8}$.

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι:

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον πολλῶν κλασμάτων, γράφομεν ὡς ἀριθμητὴν τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμητῶν καὶ ὡς παρονομαστὴν τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν.

Ἤτοι γενικῶς θὰ εἶναι:

$$\boxed{\frac{\alpha}{\beta} \times \frac{\gamma}{\delta} \times \frac{\epsilon}{\zeta} = \frac{\alpha \times \gamma \times \epsilon}{\beta \times \delta \times \zeta}}$$

§ 203. Γινόμενον οἱωνδήποτε παραγόντων. Ἔστω τὸ γινόμενον οἱωνδήποτε παραγόντων $\frac{3}{5} \times 4 \times 2\frac{1}{4}$.

Ἐπειδὴ $4 = \frac{4}{1}$ καὶ $2\frac{1}{4} = \frac{9}{4}$, θὰ εἶναι:

$$\frac{3}{5} \times 4 \times 2\frac{1}{4} = \frac{3}{5} \times \frac{4}{1} \times \frac{9}{4} = \frac{3 \times 4 \times 9}{5 \times 1 \times 4} = \frac{27}{5} = 5\frac{2}{5}.$$

§ 204. Διατήρησις τῶν ἰδιοτήτων τοῦ γινομένου πολλῶν παραγόντων. Ἀπὸ τὰ προηγούμενα βλέπομεν ὅτι ἕνα γινόμενον οἱωνδήποτε πολλῶν παραγόντων εὑρίσκεται κυρίως διὰ πολλαπλασιασμοῦ τῶν ἀριθμητῶν καὶ ἔπειτα τῶν παρονομαστῶν κλασματικῶν παραγόντων, δηλ. διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἀκεραίων ἀριθμῶν. Ἑπομένως ἀληθεύουν καὶ δι' αὐτὰ τὰ γινόμενα ὅλαι αἱ ἰδιότητες τῶν γινομένων πολλῶν ἀκεραίων παραγόντων.

§ 205. Συντομίαι κατὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ γινομένου πολλῶν παραγόντων. Μὲ κατάλληλον χρησιμοποίησιν τῶν ἰδιοτήτων τοῦ γινομένου πολλῶν παραγόντων δυνάμεθα πολλάκις νὰ συντομεύσωμεν τὴν εὕρεσιν αὐτοῦ, ὡς φαίνεται ἀπὸ τὰ κάτωθι παραδείγματα:

Παράδειγμα 1ον. Νὰ εὑρεθῇ τὸ γινόμενον $3 \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{3}$.

Κατὰ τὴν γνωστὴν ἰδιότητα (§ 78), εἶναι :

$$3 \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{3} = \left(3 \times \frac{1}{3}\right) \times \frac{2}{5} = 1 \times \frac{2}{5} = \frac{2}{5}.$$

Παράδειγμα 2ον. Νὰ εὑρεθῇ τὸ γινόμενον $\frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \frac{4}{3}$.

Ὁμοίως εἶναι $\frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \frac{4}{3} = \left(\frac{3}{4} \times \frac{4}{3}\right) \times \frac{5}{6} = 1 \times \frac{5}{6} = \frac{5}{6}$.

Ἀπὸ τὰ δύο αὐτὰ παραδείγματα βλέπομεν ὅτι :

Δύο ἀντίστροφοι παράγοντες ἑνὸς γινομένου πολλῶν παραγόντων δύνανται νὰ παραλειφθοῦν.

Παράδειγμα 3ον. Νὰ εὑρεθῇ τὸ γινόμενον $\frac{5}{6} \times \frac{3}{4} \times \frac{7}{10}$.

Ἐπειδὴ

$$\frac{5}{6} \times \frac{3}{4} \times \frac{7}{10} = \left(\frac{5}{6} \times \frac{7}{10}\right) \times \frac{3}{4} \text{ καὶ } \frac{5}{6} \times \frac{7}{10} = \frac{5 \times 7}{6 \times 10} = \frac{1 \times 7}{6 \times 2},$$

βλέπομεν ὅτι : $\frac{5}{6} \times \frac{3}{4} \times \frac{7}{10} = \frac{1 \times 7}{6 \times 2} \times \frac{3}{4} = \frac{1 \times 7 \times 3}{6 \times 2 \times 4} = \frac{21}{48}$.

Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ διαιροῦμεν ἕνα ἀριθμητὴν καὶ ἕνα παρονομαστὴν δι' ἑνὸς κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν. Οὕτω δὲ ἁπλοποιοῦμεν τὸ γινόμενον. Ἐννοοῦμεν δὲ εὔκολα ὅτι εἰς τὴν ἁπλοποίησιν αὐτὴν ἕνα ἀκέραιον παράγοντα θὰ τὸν θεωρῶμεν ὡς ἀριθμητήν. Π. χ.

$$3 \times \frac{3}{5} \times \frac{7}{6} = 1 \times \frac{3}{5} \times \frac{7}{2} = \frac{21}{10}, \quad \frac{2}{7} \times 6 \times \frac{3}{6} = \frac{2}{7} \times 1 \times \frac{3}{1} = \frac{6}{7}.$$

Ἀσκήσεις

Α' Ὁμάς. 325) Εὕρετε κατὰ τὸν συντομώτερον τρόπον τὰ ἀκόλουθα γινόμενα :

1. $3 \times \frac{4}{5} \times \frac{1}{4}$, $\frac{5}{8} \times \frac{3}{5} \times \frac{1}{3} \times 40$, $\frac{2}{7} \times 24 \times \frac{3}{8} \times \frac{7}{5}$.
2. $\frac{2}{5} \times \frac{5}{7} \times \frac{7}{9}$, $\frac{3}{4} \times \frac{4}{3} \times \frac{16}{8} \times \frac{5}{7}$.
3. $3\frac{1}{2} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{7} \times 5$, $8 \times 2\frac{3}{4} \times \frac{5}{8} \times \frac{1}{5}$.

Β' Ὁμάς. 326) Ἡ μεραρχία Ἀθηνῶν ἐκτελοῦσα γυμνάσια διήνυσεν 92 χιλιόμετρα ἀπ' Ἀθηνῶν μέχρι Θηβῶν. Τὴν α' ἡμέραν διέτρεξε τὸ $\frac{1}{4}$ τῆς ἀποστάσεως ταύτης, τὴν β' τὰ $\frac{3}{5}$ τῆς προηγουμένης ἀποστάσεως καὶ τὴν γ' ἡμέραν τὰ $\frac{4}{9}$ τῆς κατὰ τὴν β' ἡμέραν διανυθείσης. Πόσα χιλιόμετρα διήνυσε τὴν γ' ἡμέραν ;

327) Ἕνας ὁδοιπόρος ἠθέλησε νὰ διανύσῃ 60 χιλιόμετρα. Τὴν α′ ἡμέραν διήνυσε τὰ $\frac{2}{5}$ τῶν χιλιομέτρων τούτων. Τὴν β′ τὰ $\frac{3}{4}$ τῶν χιλιομέτρων τῆς α′ ἡμέρας καὶ τὴν γ′ ἡμέραν τὰ $\frac{4}{9}$ τῶν χιλιομέτρων τῆς β′ ἡμέρας. Πόσα χιλιόμετρα διήνυσε τὴν γ′ ἡμέραν ;

328) Ἕνας ἰδιοκτήτης ἐπιτεταγμένης οἰκίας εἰσπράττει ἐνοίκιον 50 000 δραχ. τὸν μῆνα ἀπὸ τὸν ἄνω ὄροφον. Ἀπὸ τὸν μεσαῖον τὰ $\frac{4}{5}$ τοῦ προηγουμένου καὶ ἀπὸ τὸν κάτω ὄροφον τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ μεσαίου. Πόσον ἐνοίκιον εἰσπράττει ἀπὸ τὸν κάτω ὄροφον ;

329) Ἕνας ἰδιοκτήτης, διὰ τὴν ἐπισκευὴν τοῦ ἄνω πατώματος τῆς οἰκίας του ἐδαπάνησε 560 000 δραχ. Διὰ τὸ κάτω πάτωμα ἐδαπάνησε τὰ $\frac{4}{5}$ τοῦ προηγουμένου ποσοῦ καὶ διὰ τὸ ὑπόγειον τὰ $\frac{5}{8}$ τοῦ ἀμέσως προηγουμένου. Πόσας δραχμὰς ἐξώδευσε διὰ τὸ ὑπόγειον;

330) Ὁ σῖτος δίδει τὰ $\frac{11}{12}$ τοῦ βάρους του ὡς ἄλευρον καὶ τὸ ἄλευρον δίδει τὰ $\frac{13}{10}$ τοῦ βάρους του ὡς ἄρτον. Πόσον ἄρτον θὰ λάβωμεν ἀπὸ 75 ὀκ. σίτου ;

Περίληψις τῶν κανόνων τοῦ πολλαπλασιασμοῦ

Ἂν α, β, γ, δ, ε, ζ, μ, ν παριστάνουν ἀκεραίους ἀριθμούς, ἐμάθομεν ὅτι:

$$\frac{\alpha}{\beta}\times\mu=\frac{\alpha\times\mu}{\beta} \text{ ἢ } \frac{\alpha}{\beta}\times\mu=\frac{\alpha}{\beta:\mu}. \quad \text{ἂν } \beta=\text{πολλαπλάσιον τοῦ } \mu,$$

$$\left(\alpha+\frac{\beta}{\nu}\right)\times\mu=\frac{(\alpha\times\nu)+\beta}{\nu}\times\mu \text{ ἢ } \left(\alpha+\frac{\beta}{\nu}\right)\times\mu=(\alpha\times\mu)+\left(\frac{\beta}{\nu}\times\mu\right),$$

$$\alpha\times\frac{\mu}{\nu}=\frac{\alpha}{\nu}\times\mu=\frac{\alpha\times\mu}{\nu}, \quad \frac{\alpha}{\beta}\times\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha\times\gamma}{\beta\times\delta},$$

$$\frac{\alpha}{\beta}\times\frac{\gamma}{\delta}\times\frac{\varepsilon}{\zeta}=\frac{\alpha\times\gamma\times\varepsilon}{\beta\times\delta\times\zeta},$$

$$\left(\alpha+\frac{\beta}{\gamma}\right)\times\frac{\mu}{\nu}=\frac{(\alpha\times\gamma)+\beta}{\gamma}\times\frac{\mu}{\nu}, \text{ ἢ } \left(\alpha+\frac{\beta}{\gamma}\right)\times\frac{\mu}{\nu}=\left(\alpha\times\frac{\mu}{\nu}\right)+\left(\frac{\beta}{\gamma}\times\frac{\mu}{\nu}\right),$$

$$\alpha\times\left(\beta+\frac{\mu}{\nu}\right)=\alpha\times\frac{(\beta\times\nu)+\mu}{\nu} \text{ ἢ } \alpha\times\left(\beta+\frac{\mu}{\nu}\right)=(\alpha\times\beta)+\left(\alpha\times\frac{\mu}{\nu}\right).$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ΄

ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

1. ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ ΑΡΙΘΜΟΥ ΔΙ ΑΚΕΡΑΙΟΥ

§ 206. *Πρόβλημα 1ον.* **Τρεῖς ἐργάται ἔσκαψαν εἰς δύο ἡμέρας τὰ $\frac{6}{8}$ μιᾶς ἀμπέλου. Πόσον μέρος τῆς ἀμπέλου ἔσκαψεν ὁ καθένας;**

Λύσις. Ἀφοῦ οἱ 3 ἐργάται ἔσκαψαν τὰ $\frac{6}{8}$ τῆς ἀμπέλου, ὁ ἕνας θὰ ἔσκαψε τρεῖς φορὰς ὀλιγώτερον, ἤτοι $\frac{6}{8} : 3$. Πρέπει δηλ. νὰ διαιρέσωμεν τὸ κλάσμα $\frac{6}{8}$ διὰ τοῦ 3. Πρὸς τοῦτο ἐνθυμούμεθα (§ 187 α΄) ὅτι: Ἂν ὁ ἀριθμητὴς ἑνὸς κλάσματος διαιρεθῇ δι' ἑνὸς διαιρέτου του καὶ τὸ κλάσμα διαιρεῖται διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀκεραίου. Ἐπίσης ἕνα κλάσμα διαιρεῖται δι' ἀκεραίου, ἂν ὁ παρονομαστής του πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν ἀκέραιον τοῦτον.

Εἶναι λοιπὸν $\frac{6}{8} : 3 = \frac{6:3}{8} = \frac{2}{8}$ τῆς ἀμπέλου ἢ καὶ

$$\frac{6}{8} : 3 = \frac{6}{8 \times 3} = \frac{6}{24}$$

καὶ τοῦτο μετὰ τὴν διὰ 3 ἁπλοποίησιν γίνεται $\frac{2}{8}$. Προτιμῶμεν δὲ τὸν α΄ τρόπον, ἂν ὁ ἀκέραιος εἶναι διαιρέτης τοῦ ἀριθμητοῦ.

Ἀσκήσεις

331) Ἐκτελέσατε τὰς ἀκολούθους διαιρέσεις καὶ τὴν δοκιμὴν ἑκάστης:

$$\frac{2}{5} : 2, \quad \frac{6}{7} : 3, \quad \frac{12}{17} : 4, \quad \frac{3}{4} : 2, \quad \frac{5}{6} : 3, \quad \frac{7}{9} : 5.$$

332) Εὕρετε ἀριθμόν, ὅστις ἑξαπλασιαζόμενος γίνεται $\frac{4}{5}$. Ἔπειτα ἕνα ἄλλον, ὅστις ὀκταπλασιαζόμενος γίνεται $\frac{5}{9}$.

333) Ἂν $\frac{8}{9} : \chi = \frac{2}{9}$, ποῖον ἀριθμὸν παριστάνει τὸ γράμμα χ; Ἂν δὲ $\frac{\alpha}{9} : 3 = \frac{1}{9}$, ποῖον ἀριθμὸν παριστάνει ὁ α;

§ **207**. *Πρόβλημα 2ον*. **Ἕνα αὐτοκίνητον διέτρεξεν 60 $\frac{3}{4}$ χιλιόμετρα εἰς τρεῖς ὥρας μὲ τὴν αὐτὴν ταχύτητα. Πόση ἦτο ἡ ταχύτης του τὴν ὥραν;**

Λύσις. Ἀφοῦ εἰς 3 ὥρας διέτρεξεν 60 $\frac{3}{4}$ χιλιόμετρα, εἰς 1 ὥραν διέτρεξε 3 φορὰς ὀλιγώτερον, ἤτοι 60 $\frac{3}{4}$: 3. Αὐτὴν τὴν διαίρεσιν δυνάμεθα νὰ ἐκτελέσωμεν κατὰ τοὺς ἑξῆς τρόπους:

1ον. Ἐπειδὴ $60\frac{3}{4} = \frac{243}{4}$, πρέπει νὰ κάμωμεν τὴν διαίρεσιν $\frac{243}{4} : 3$. Εἶναι δηλ. $60\frac{3}{4} : 3 = \frac{243}{4} : 3 = \frac{81}{4} = 20\frac{1}{4}$ χιλιόμετρα.

2ον. Ἂν εἰς τὰς 3 ὥρας διέτρεχε μόνον 60 χιλιόμετρα, εἰς τὴν μίαν ὥραν θὰ διέτρεχεν 60 : 3 = 20 χιλιόμετρα. Ἂν δὲ εἰς 3 ὥρας διέτρεχε μόνον $\frac{3}{4}$ τοῦ χιλιομέτρου, εἰς μίαν ὥραν θὰ διέτρεχε $\frac{3}{4} : 3 = \frac{1}{4}$ τοῦ χιλιομέτρου. Ἐπειδὴ δὲ διέτρεξε τὰ 60 χιλιόμετρα καὶ τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ χιλιομέτρου, εἰς 1 ὥραν διέτρεξεν $20 + \frac{1}{4}$ ἢ $20\frac{1}{4}$ χιλιόμετρα.

Εἶναι δηλ. $60\frac{3}{4} : 3 = (60 : 3) + \left(\frac{3}{4} : 3\right) = 20 + \frac{1}{4} = 20\frac{1}{4}$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι:

1ον. Διὰ νὰ διαιρέσωμεν μεικτὸν ἀριθμὸν δι' ἀκεραίου, τρέπομεν τὸν μεικτὸν εἰς κλάσμα καὶ διαιροῦμεν αὐτὸ διὰ τοῦ ἀκεραίου.

2ον. Διὰ νὰ διαιρέσωμεν μεικτὸν δι' ἀκεραίου, διαιροῦμεν χωριστὰ τὸν ἀκέραιον καὶ χωριστὰ τὸ κλάσμα διὰ τοῦ ἀκεραίου καὶ προσθέτομεν τὰ δύο πηλίκα.

Ὁ δεύτερος τρόπος δεικνύει ὅτι διατηρεῖται εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ ἰδιότης τῆς διαιρέσεως ἀθροίσματος δι' ἀριθμοῦ, τὴν ὁποίαν ἐμάθομεν διὰ τοὺς ἀκεραίους (§ 89).

Ἀσκήσεις

Α' Ὁμάς. 334) Ἐκτελέσατε ἀπὸ μνήμης τὰς ἑξῆς διαιρέσεις:

$$2\frac{2}{5} : 2, \quad 4\frac{6}{9} : 2, \quad 3\frac{6}{7} : 3.$$

335) Ἐκτελέσατε κατὰ δύο τρόπους κάθε μίαν ἀπὸ τὰς ἀκολούθους διαιρέσεις :

$$8\frac{4}{5} : 4, \quad 6\frac{3}{7} : 3, \quad 4\frac{2}{5} : 2.$$

Β' Ὁμάς. 336) Εἷς οἰκογενειάρχης εἶχε 5 δελτία καὶ ἔλαβε κατὰ μίαν διανομὴν $7\frac{1}{2}$ ὀκάδας φασολίων. Πόσαι ὀκάδες φασολίων ἐμοιράζοντο κατὰ δελτίον ;

337) Μία οἰκοκυρὰ ἠγόρασεν $22\frac{1}{2}$ ὀκάδας ὄσπρια, διὰ νὰ περάσῃ τοὺς 3 μῆνας τοῦ χειμῶνος. Πόσα ὄσπρια πρέπει νὰ ἐξοδεύῃ τὸν μῆνα ;

338) Εἷς γεωργὸς εἶχε σπείρει μὲ σῖτον ἕνα ἀγρὸν 8 στρεμμάτων. Ὁ ἀγρὸς αὐτὸς ἀπέδωκε $1050\frac{1}{2}$ ὀκάδας σίτου. Πόση εἶναι ἡ ἀπόδοσις τοῦ ἀγροῦ τούτου κατὰ στρέμμα ;

2. ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ ΑΡΙΘΜΟΥ ΔΙΑ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ

§ 208. *Πρόβλημα 1ον.* **Μία κυρία ἠγόρασεν $\frac{6}{8}$ τοῦ πήχεως δαντέλλα καὶ ἔδωκεν α δραχμάς. Πρὸς πόσον ἠγόρασε τὸν πῆχυν ;**

Λύσις. Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα τοῦτο, σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς : Ἂν ἐγνωρίζομεν τὴν τιμὴν τοῦ πήχεως καὶ ἐπολλαπλασιάζομεν αὐτὴν ἐπὶ $\frac{6}{8}$, ἔπρεπε νὰ εὑρίσκομεν τὰς α δραχμάς, τὰς ὁποίας ἔδωκεν αὐτὴ ἡ κυρία. Αὐτὴ λοιπὸν ἡ τιμὴ τοῦ πήχεως εἶναι $\alpha : \frac{6}{8}$ σύμφωνα μὲ τὸν γενικὸν ὁρισμὸν τῆς διαιρέσεως (§ 84).

Ἀπὸ αὐτὴν τὴν σκέψιν ἐννοοῦμεν ὅτι διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν τοῦ πήχεως, πρέπει νὰ κάμωμεν τὴν διαίρεσιν $\alpha : \frac{6}{8}$.

Ἐπειδὴ ὅμως δὲν γνωρίζομεν πῶς γίνεται αὐτὴ ἡ διαίρεσις, θὰ προσπαθήσωμεν νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν τοῦ πήχεως μὲ ἄλλον τρόπον. Σκεπτόμεθα λοιπὸν ὡς ἑξῆς :

Ἀφοῦ διὰ τὰ $\frac{6}{8}$ τοῦ πήχεως ἔδωκεν α δραχμάς, διὰ τὸ $\frac{1}{8}$ τοῦ πήχεως θὰ ἔδωκεν 6 φορὰς ὀλιγώτερον, ἤτοι $\frac{\alpha}{6}$ δραχ. καὶ διὰ τὰ

$\frac{8}{8} = 1$ πῆχυν θὰ ἔδωκεν 8 φορὰς περισσότερον, ἤτοι $\frac{\alpha}{6} \times 8$ δραχμάς.

Αὐτὸς ὁ τρόπος τῆς λύσεως λέγεται **μέθοδος τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα.** Ἐπειδὴ δὲ

$$\frac{\alpha}{6} \times 8 = \alpha \times \frac{8}{6}$$

ἐννοοῦμεν ὅτι :

$$\alpha : \frac{6}{8} = \alpha \times \frac{8}{6} \qquad (1)$$

§ 209. *Πρόβλημα 2ον.* **Τὸ ρούπιον μιᾶς δαντέλλας τιμᾶται $\frac{2}{9}$ τοῦ ἑκατονταδράχμου. Πόσα ρούπια ἀπὸ αὐτὴν τὴν δαντέλλαν ἀγοράζομεν μὲ α ἑκατοντάδραχμα;**

Λύσις. Εἶναι φανερὸν ὅτι ἀγοράζομεν τόσα ρούπια, ὅσας φορὰς τὰ $\frac{2}{9}$ τοῦ ἑκατονταδράχμου χωροῦν εἰς τὰ α ἑκατοντάδραχμα, ἤτοι ἀγοράζομεν $\left(\alpha : \frac{2}{9}\right)$ ρούπια.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον τοῦτο, σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς:

Ἀφοῦ μὲ $\frac{2}{9}$ τοῦ ἑκατονταδράχμου ἀγοράζομεν 1 ρούπιον,

μὲ $\frac{1}{9}$ » » » $\frac{1}{2}$ »

μὲ $\frac{9}{9}$ » » ἤτοι μὲ 1 ἑκατ. ἀγοράζομεν

$$\frac{1}{2} \times 9 = \frac{9}{2}$$

καὶ μὲ α ἑκατοντ. ἀγοράζομεν $\frac{9}{2} \times \alpha$ ἢ $\alpha \times \frac{9}{2}$.

Θὰ εἶναι λοιπόν : $\alpha : \frac{2}{9} = \alpha \times \frac{9}{2}$.

§ 210. **Πῶς διαιρεῖται ἀριθμὸς διὰ κλάσματος.** Διὰ τῆς λύσεως τῶν δύο προηγουμένων προβλημάτων κατελήξαμεν εἰς τὰς ἰσότητας.

$$\alpha : \frac{6}{8} = \alpha \times \frac{8}{6} \quad \text{καὶ} \quad \alpha : \frac{2}{9} = \alpha \times \frac{9}{2} \qquad (2)$$

Ἐκ τούτων βλέπομεν ὅτι :

Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμὸν διὰ κλάσματος, πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρετέον ἐπὶ τὸν διαιρέτην ἀντεστραμμένον.

Εἶναι δὲ εὐνόητον ὅτι ὁ διαιρετέος α δύναται νὰ εἶναι ἀκέραιος ἢ κλάσμα ἢ μεικτός. Π. χ.

$$12 : \frac{6}{8} = 12 \times \frac{8}{6} = \frac{12}{6} \times 8 = 16.$$

$$\frac{3}{4} : \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \times \frac{8}{6} = \frac{3 \times 8}{4 \times 6} = 1.$$

$$3\frac{1}{2} : \frac{4}{5} = 3\frac{1}{2} \times \frac{5}{4} = \frac{7}{2} \times \frac{5}{4} = \frac{35}{8} = 4\frac{3}{8} \text{ ἢ}$$

$$3\frac{1}{2} : \frac{4}{5} = 3\frac{1}{2} \times \frac{5}{4} = \left(3 \times \frac{5}{4}\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{5}{4}\right) = \frac{15}{4} + \frac{5}{8} = \frac{35}{8} = 4\frac{3}{8}.$$

Ἀσκήσεις

Α΄ Ὁμάς. 339) Ἐκτελέσατε τὰς ἀκολούθους διαιρέσεις:

$6 : \frac{3}{4}$, $8 : \frac{2}{5}$, $10 : \frac{5}{6}$, $3 : \frac{1}{2}$, $5 : \frac{2}{3}$, $9 : \frac{4}{3}$, $2\frac{1}{3} : \frac{1}{3}$.

Β΄ Ὁμάς. 340) Ἕνα αὐτοκίνητον εἰς $\frac{3}{4}$ τῆς ὥρας διέτρεξε 18 χιλιόμετρα. Πόσα χιλιόμετρα διέτρεχε τὴν ὥραν;

341) Ἡ σιδηροδρομικὴ γραμμὴ τῶν Ἑλληνικῶν σιδηροδρόμων ἀπὸ Πειραιῶς μέχρις Ἀθηνῶν ἔχει μῆκος 10 χιλιόμετρα. Μία δὲ ἁμαξοστοιχία φθάνει ἀπὸ τὸν Πειραιᾶ εἰς Ἀθήνας εἰς $\frac{5}{12}$ τῆς ὥρας. Ποία εἶναι ἡ ταχύτης αὐτῆς εἰς μίαν ὥραν;

342) Τὰ $\frac{5}{8}$ ἑνὸς κιβωτίου χωροῦν $10\frac{3}{4}$ ὀκάδας μακαρονίων. Πόσας ὀκάδας μακαρονίων χωρεῖ ὅλον τὸ κιβώτιον;

343) Ἕνας παντοπώλης ἤνοιξε μίαν ἡμέραν ἕνα βαρέλιον τυροῦ. Ἀφοῦ ἐπώλησε τὰ $\frac{3}{10}$ αὐτοῦ ἔμειναν $19\frac{3}{5}$ ὀκάδες. Πόσας ὀκάδας εἶχεν εἰς τὴν ἀρχὴν τὸ βαρέλιον αὐτό;

3. ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ ΑΡΙΘΜΟΥ ΔΙΑ ΜΕΙΚΤΟΥ

§ 211. *Πρόβλημα 1ον.* **Ἕνας οἰκογενειάρχης ἠγόρασε $5\frac{1}{2}$ ὀκάδας σάπωνος ἀντὶ 33 000 δραχμῶν. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς ὀκᾶς τοῦ σάπωνος τούτου.**

Λύσις. Ἀφοῦ αἱ $5\frac{1}{2}$ ὀκάδες τιμῶνται 33 000 δραχμάς, ἡ 1 ὀκᾶ θὰ τιμᾶται $5\frac{1}{2}$ φορὰς ὀλιγώτερον, ἤτοι $33\,000 : 5\frac{1}{2}$. Ἐπειδὴ δὲ $5\frac{1}{2} = \frac{11}{2}$, θὰ εἶναι $33\,000 : 5\frac{1}{2} = 33\,000 : \frac{11}{2} = 33\,000 \times \frac{2}{11} = 6\,000$.

Ἡ τιμὴ λοιπὸν τῆς ὀκᾶς ἦτο 6 000 δραχμαί.

Ἂν ἡ τιμὴ τῶν $5\frac{1}{2}$ ὀκάδων ἦτο α δραχμαί, μὲ τοὺς ἰδίους συλλογισμοὺς ἐννοοῦμεν ὅτι ἡ τιμὴ τῆς ὀκᾶς θὰ ἦτο $\left(\alpha : 5\frac{1}{2}\right)$ δραχμαί. Ἐπειδὴ δὲ $5\frac{1}{2} = \frac{11}{2}$, θὰ εἶναι $\alpha : 5\frac{1}{2} = \alpha : \frac{11}{2}$.

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι :

Διὰ νὰ διαιρέσωμεν οἱονδήποτε ἀριθμὸν α διὰ μεικτοῦ, τρέπομεν τὸν μεικτὸν εἰς κλάσμα καὶ δι' αὐτοῦ διαιροῦμεν τὸν α.

Π.χ. $6 : 2\frac{1}{3} = 6 : \frac{7}{3} = 6 \times \frac{3}{7} = \frac{18}{7} = 2\frac{4}{7}$,

$$\frac{5}{8} : 1\frac{1}{4} = \frac{5}{8} : \frac{5}{4} = \frac{5}{8} \times \frac{4}{5} = \frac{1}{2},$$

$$6\frac{2}{3} : 2\frac{3}{6} = \frac{20}{3} : \frac{15}{6} = \frac{20}{3} \times \frac{6}{15} = \frac{4}{1} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$$

ἢ $6\frac{2}{3} : 2\frac{3}{6} = 6\frac{2}{3} : \frac{15}{6} = 6\frac{2}{3} \times \frac{6}{15} = \left(6 \times \frac{6}{15}\right) + \left(\frac{2}{3} \times \frac{6}{15}\right)$

$$= \frac{36}{15} + \frac{4}{15} = \frac{40}{15} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}.$$

§ 212. *Πρόβλημα 2ον.* **Ἕνα ὡρολόγιον ἔμενεν ὀπίσω $2\frac{3}{4}$ δευτερόλεπτα τὴν ὥραν. Εἰς πόσας ὥρας ἔμεινεν ὀπίσω $45\frac{3}{8}$ δευτερόλεπτα ;**

Λύσις. Μὲ μικρὰν σκέψιν ἐννοοῦμεν ὅτι τὸ ζητούμενον θὰ συμβῇ μετὰ $\left(45\frac{3}{8} : 2\frac{3}{4}\right)$ ὥρ. ἢ μετὰ $45\frac{3}{8} : \frac{11}{4} = 45\frac{3}{8} \times \frac{4}{11} = 16\frac{1}{2}$ ὥρ.

Παρατήρησις. Ἀπὸ τὰ προηγούμενα προβλήματα τῆς διαιρέσεως βλέπομεν εὐκόλως ὅτι κατὰ τὸν μερισμὸν καὶ τὴν μέτρησιν ὁ διαιρέτης δύναται νὰ εἶναι κλάσμα ἢ καὶ μεικτὸς ἀριθμός. Οἱ δὲ κανόνες τῶν § § 107 καὶ 109 ἰσχύουν καὶ εἰς τὰς περιπτώσεις αὐτάς.

Ἀσκήσεις

Α' Ὁμάς. 344) Ἐκτελέσατε τὰς ἀκολούθους διαιρέσεις καὶ τὴν δοκιμὴν αὐτῶν :

1. $1 : 1\frac{3}{4}$, $3 : 2\frac{3}{5}$, $12 : 5\frac{2}{5}$.

2. $\frac{2}{5} : 2\frac{1}{2}$, $\frac{5}{8} : 3\frac{1}{4}$, $\frac{7}{9} : 2\frac{1}{3}$.

3. $3\frac{1}{4} : 2\frac{3}{5}$, $7\frac{1}{2} : 3\frac{5}{6}$, $10\frac{3}{4} : 3\frac{1}{5}$.

Β' Ὁμάς. 345) Ἕνας παντοπώλης ἐπώλησεν ἕνα βαρέλιον τυροῦ βάρους $27\frac{3}{4}$ ὀκάδων καὶ εἰσέπραξε 277 500 δραχμάς. Πρὸς πόσας δραχμὰς ἐπώλει τὴν ὀκᾶν;

346) Ἕνας ὑπάλληλος ἠγόρασε $4\frac{1}{4}$ πήχεις ὑφάσματος, διὰ νὰ κάμῃ μίαν ἐνδυμασίαν καὶ ἔδωκε 455 000 δραχ. Πρὸς πόσον ἠγόρασε τὸν πῆχυν;

347) Ἕνα ὡρολόγιον εἰς $15\frac{1}{2}$ ὥρας μένει ὀπίσω $\frac{7}{60}$ τῆς ὥρας. Πόσον μένει ὀπίσω εἰς μίαν ὥραν;

348) Μία ἁμαξοστοιχία εἰς $14\frac{3}{4}$ ὥρας καθυστέρησεν $\frac{8}{9}$ τῆς ὥρας. Πόσην καθυστέρησιν εἶχε κάθε ὥραν;

349) Ἕνα τεμάχιον ὑφάσματος εἶναι $63\frac{6}{8}$ πήχεις. Διὰ μίαν δὲ ἀνδρικὴν ἐνδυμασίαν χρειάζονται $4\frac{2}{8}$ πήχεις ἀπὸ τὸ ὕφασμα. Πόσαι ἀνδρικαὶ ἐνδυμασίαι γίνονται ἀπὸ αὐτὸ τὸ τεμάχιον;

350) Μία κυρία ἠγόρασε $13\frac{1}{2}$ πήχεις ὑφάσματος διὰ νὰ κάμῃ παραπετάσματα διὰ τὰ παράθυρα τῆς οἰκίας της. Παρετήρησε δὲ ὅτι διὰ κάθε παράθυρον ἐχρειάσθησαν $3\frac{3}{8}$ πήχεις. Διὰ πόσα παράθυρα ἔκαμε παραπετάσματα μὲ αὐτὸ τὸ ὕφασμα;

§ 213. Συγχώνευσις τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ τῆς διαιρέσεως. Εἰς τὰ προηγούμενα ἐμάθομεν ὅτι :

Π.χ. $5 : \frac{2}{3} = 5 \times \frac{3}{2}$, $\frac{2}{5} : \frac{4}{7} = \frac{2}{5} \times \frac{7}{4}$, $3\frac{1}{5} : \frac{5}{6} = 3\frac{1}{5} \times \frac{6}{5}$.

Εἶναι καὶ $8 : 3 = 8 : \frac{3}{1} = 8 \times \frac{1}{3}$, $\frac{4}{9} : 5 = \frac{4}{9} : \frac{5}{1} = \frac{4}{9} \times \frac{1}{5}$,

$6\frac{1}{3} : 4 = 6\frac{1}{3} \times \frac{1}{4}$, $7\frac{2}{5} : \frac{4}{9} = 7\frac{2}{5} \times \frac{9}{4}$ κ.τ.λ.

Βλέπομεν λοιπὸν γενικῶς ὅτι :

1ον Ἡ διαίρεσις δι' ἑνὸς ἀριθμοῦ εἶναι πολλαπλασιασμὸς ἐπὶ τὸν ἀντίστροφόν του.

Καὶ ἀντιστρόφως :

2ον Ὁ πολλαπλασιασμὸς ἐπὶ ἕνα ἀριθμὸν εἶναι διαίρεσις διὰ τοῦ ἀντιστρόφου του.

Περίληψις τῶν κανόνων τῆς διαιρέσεως

$$\frac{\alpha}{\gamma} : \mu = \frac{\alpha : \mu}{\beta},\ \text{ἂν } \alpha \text{ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ } \mu,\ \frac{\alpha}{\beta} : \mu = \frac{\alpha}{\beta \times \mu}.$$

$$\left(\alpha + \frac{\beta}{\gamma}\right) : \mu = \frac{(\alpha \times \gamma) + \beta}{\gamma} : \mu = \frac{(\alpha \times \gamma) + \beta}{\gamma \times \mu}\ \text{ἢ}$$

$$\left(\alpha + \frac{\beta}{\gamma}\right) : \mu = (\alpha : \mu) + \left(\frac{\beta}{\gamma} : \mu\right).$$

$$\alpha : \frac{\mu}{\nu} = \alpha \times \frac{\nu}{\mu},\quad \alpha : \left(\beta + \frac{\gamma}{\nu}\right) = \alpha : \frac{(\beta \times \nu) + \gamma}{\nu} = \frac{\alpha \times \nu}{(\beta \times \nu) + \gamma}.$$

4. ΣΥΝΘΕΤΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

§ 214. Τί εἶναι σύνθετα κλάσματα. Ἐμάθομεν μέχρι τοῦδε ὅτι π.χ. $7 : 8 = \frac{7}{8}$, $4 : 3 = \frac{4}{3}$ κ.τ.λ. Δηλαδή :

Τὸ πηλίκον ἑνὸς ἀκεραίου δι' ἄλλου ἀκεραίου παριστάνεται μὲ κλάσμα, τὸ ὁποῖον ἔχει ἀριθμητὴν τὸν διαιρετέον καὶ παρονομαστὴν τὸν διαιρέτην.

Ἂν θέλωμεν νὰ παραστήσωμεν κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον καὶ τὰ πηλίκα π.χ.

$$5 : \frac{3}{4},\quad 8 : 2\frac{1}{4},\quad \frac{4}{5} : \frac{3}{7},\quad \frac{7}{8} : 4\frac{1}{3},\quad 5\frac{2}{3} : \frac{7}{8},\quad 10\frac{1}{4} : 4\frac{2}{5},$$

εὑρίσκομεν ὅτι : $5 : \frac{3}{4} = \dfrac{5}{\frac{3}{4}}$, $\quad 8 : 2\frac{1}{4} = \dfrac{8}{2\frac{1}{4}}$,

$$\frac{4}{5} : \frac{3}{7} = \dfrac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{7}},\qquad \frac{7}{8} : 4\frac{1}{3} = \dfrac{\frac{7}{8}}{4\frac{1}{3}},$$

$$5\frac{2}{3} : \frac{7}{8} = \frac{5\frac{2}{3}}{\frac{7}{8}}, \qquad 10\frac{1}{4} : 4\frac{2}{5} = \frac{10\frac{1}{4}}{4\frac{2}{5}}.$$

Οἱ ἀριθμοὶ $\frac{\frac{5}{3}}{\frac{3}{4}}$, $\frac{8}{2\frac{1}{4}}$ κ.τ.λ. λέγονται **σύνθετα κλάσματα.**

Τὰ ἄλλα κλάσματα, τὰ ὁποῖα ἐγνωρίσαμεν ἕως τώρα, λέγονται **ἁπλᾶ κλάσματα.** Ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος εἶναι ἐπάνω ἀπὸ τὴν γραμμὴν ἑνὸς συνθέτου κλάσματος, λέγεται πάλιν **ἀριθμητής,** ὁ δὲ ἄλλος, παρονομαστὴς τοῦ συνθέτου κλάσματος. Καὶ οἱ δύο μαζὶ λέγονται **ὅροι** αὐτοῦ.

Εἰς κάθε ἁπλοῦν κλάσμα καὶ οἱ δύο ὅροι εἶναι ἀκέραιοι ἀριθμοί. Εἰς δὲ τὰ σύνθετα κλάσματα ὁ ἕνας τουλάχιστον ὅρος δὲν εἶναι ἀκέραιος ἀριθμός. Τονίζομεν δὲ πάλιν ὅτι :

Κάθε κλάσμα ἁπλοῦν ἢ σύνθετον παριστάνει τὸ πηλίκον τοῦ ἀριθμητοῦ του διὰ τοῦ παρονομαστοῦ του.

§ 215. Τροπὴ συνθέτου κλάσματος εἰς ἁπλοῦν. Τὰ σύνθετα κλάσματα ἔχουν ὅλας τὰς ἰδιότητας τῶν ἁπλῶν κλασμάτων. Ἂν π.χ. ἐνθυμηθῶμεν ὅτι τὸ πηλίκον δὲν βλάπτεται, ἂν πολλαπλασιάσωμεν διαιρέτην καὶ διαιρετέον ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, ἐννοοῦμεν ὅτι :

Π.χ. $\frac{\frac{3}{4}}{4} = \frac{\frac{3}{4} \times \lambda}{4 \times \lambda}$, $\frac{\frac{5}{8}}{\frac{7}{4}} = \frac{\frac{5}{8} \times \lambda}{\frac{7}{4} \times \lambda}$, $\frac{\frac{12}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{\frac{12}{5} \times \lambda}{\frac{3}{5} \times \lambda}$ κ.τ.λ. Δηλαδή:

Ἂν οἱ ὅροι ἑνὸς συνθέτου κλάσματος πολλαπλασιασθοῦν ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, ἡ ἀξία αὐτοῦ δὲν βλάπτεται.

Αὐτὴν τὴν ἰδιότητα δυνάμεθα νὰ χρησιμοποιήσωμεν, διὰ νὰ τρέψωμεν ἕνα σύνθετον κλάσμα εἰς ἁπλοῦν.

Ἂν π. χ. εἰς τὸ γ′ ἀπὸ τὰ προηγούμενα παραδείγματα κάμωμεν τὸν λ ἴσον μὲ τὸν κοινὸν παρονομαστὴν 5 τῶν ὅρων τοῦ συνθέτου κλάσματος, εὑρίσκομεν ὅτι :

$$\frac{\frac{12}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{\frac{12}{5} \times 5}{\frac{3}{5} \times 5} = \frac{12}{3} = 4.$$

Ἂν εἰς τὸ α' παράδειγμα θέσωμεν 4 ἀντὶ λ, εὑρίσκομεν :

$$\frac{\frac{3}{4}}{4}=\frac{\frac{3}{4}\times 4}{4\times 4}=\frac{3}{16}.$$

Εἰς δὲ τὸ β' θέτομεν ἀντὶ λ τὸ ἑ.κ.π. 8 τῶν ἰδιαιτέρων παρονομαστῶν τῶν ὅρων τοῦ συνθέτου κλάσματος καὶ εὑρίσκομεν ὅτι :

$$\frac{\frac{5}{8}}{\frac{7}{4}}=\frac{\frac{5}{8}\times 8}{\frac{7}{4}\times 8}=\frac{5}{14}$$

Συνήθως ὅμως τὴν τροπὴν αὐτὴν κάμνομεν, ἂν ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ συνθέτου κλάσματος διὰ τοῦ παρονομαστοῦ αὐτοῦ. Π. χ.

$$\frac{8}{\frac{4}{5}}=8:\frac{4}{5}=8\times\frac{5}{4}=10,$$

$$\frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{6}}=\frac{4}{5}:\frac{3}{6}=\frac{4}{5}\times\frac{6}{3}=\frac{24}{15},$$

$$\frac{\frac{7}{8}}{4\frac{1}{3}}=\frac{7}{8}:4\frac{1}{3}=\frac{7}{8}:\frac{13}{3}=\frac{7}{8}\times\frac{3}{13}=\frac{21}{104}\text{ κ.τ.λ.}$$

Παρατήρησις. Αἱ πράξεις ἐπὶ τῶν συνθέτων κλασμάτων δύνανται νὰ γίνουν κατὰ τοὺς κανόνας τῶν πράξεων τῶν ἁπλῶν κλασμάτων. Εὐκολώτερον ὅμως εἶναι νὰ τρέπωνται ταῦτα εἰς ἁπλᾶ καὶ ἔπειτα νὰ ἐκτελῶνται αὐταί.

Ἀσκήσεις

351) Νὰ τραποῦν εἰς ἁπλᾶ τὰ ἀκόλουθα κλάσματα :

1. $\frac{\frac{5}{6}}{3}$, $\frac{\frac{3}{4}}{8}$, $\frac{\frac{1}{5}}{12}$, $\frac{\frac{7}{10}}{3}$.

2. $\frac{3}{\frac{4}{9}}$, $\frac{1}{\frac{5}{6}}$, $\frac{7}{\frac{1}{2}}$, $\frac{3}{\frac{5}{8}}$.

3. $\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{6}}, \quad \dfrac{\frac{4}{5}}{\frac{1}{5}}, \quad \dfrac{\frac{3}{8}}{\frac{5}{10}}, \quad \dfrac{\frac{7}{8}}{\frac{3}{4}}.$

4. $\dfrac{5}{2\frac{1}{2}}, \quad \dfrac{3\frac{1}{4}}{13}, \quad \dfrac{\frac{5}{8}}{2\frac{1}{4}}, \quad \dfrac{3\frac{1}{5}}{2\frac{4}{5}}.$

352) Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ ἀκόλουθοι πράξεις :

1. $\dfrac{\frac{1}{3}}{2} + \dfrac{\frac{1}{2}}{3}.$ 2. $\dfrac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{4}} + \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}} + \dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{3}{4}}.$

3. $\dfrac{1\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}} + \dfrac{\frac{4}{5}}{2\frac{2}{5}} + \dfrac{2\frac{1}{2}}{3\frac{1}{4}}.$ 4. $\dfrac{6}{\frac{1}{2}} - \dfrac{\frac{2}{3}}{4}.$

5. $\dfrac{\frac{8}{9}}{2} - \dfrac{\frac{7}{10}}{2\frac{1}{9}}.$ 6. $\dfrac{4\frac{1}{5}}{2\frac{3}{10}} - \dfrac{1\frac{2}{5}}{3\frac{3}{10}}.$

353) Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ ἀκόλουθοι πράξεις :

1. $\dfrac{\frac{1}{4}}{5} \times \dfrac{6}{\frac{3}{4}}, \quad \dfrac{\frac{2}{5}}{\frac{1}{5}} \times \dfrac{\frac{7}{8}}{\frac{3}{5}}, \quad \dfrac{6\frac{1}{2}}{3\frac{2}{3}} \times \dfrac{3}{4\frac{1}{6}}.$

2. $\dfrac{5}{\frac{1}{8}} : \dfrac{\frac{3}{4}}{2\frac{5}{8}}, \quad \dfrac{4\frac{1}{9}}{2\frac{1}{3}} : \dfrac{\frac{7}{9}}{3\frac{2}{3}}, \quad \dfrac{8}{3\frac{1}{4}} : \dfrac{5\frac{1}{6}}{\frac{7}{6}}.$

354) Νὰ τραποῦν εἰς ἁπλᾶ τὰ κάτωθι σύνθετα κλάσματα :

$\dfrac{\frac{3}{4} + \frac{5}{6}}{\frac{5}{9} - \frac{1}{3}}, \quad \dfrac{\frac{3}{5} - \frac{5}{9}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}, \quad \dfrac{7\frac{1}{2} : 1\frac{3}{4}}{\frac{2}{5} \times \frac{10}{11}}.$

5. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ, ΤΑ ΟΠΟΙΑ ΛΥΟΝΤΑΙ ΔΙΑ ΤΗΣ ΑΝΑΓΩΓΗΣ ΕΙΣ ΤΗΝ ΜΟΝΑΔΑ

§ 216. *Πρόβλημα 1ον.* **Νὰ εὑρεθοῦν τὰ $\frac{4}{5}$ τοῦ ἀριθμοῦ 40.**

Λύσις. Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα αὐτό, σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς:

Ἀφοῦ ὅλος ὁ ἀριθμός, δηλ. τὰ $\frac{5}{5}$ αὐτοῦ, εἶναι 40, τὸ $\frac{1}{5}$ αὐτοῦ θὰ εἶναι 5 φορὰς ὀλιγώτερον, ἤτοι $\frac{40}{5}$, τὰ δὲ $\frac{4}{5}$ αὐτοῦ θὰ εἶναι 4 φορὰς περισσότερον ἀπὸ τὸ προηγούμενον, ἤτοι $\frac{40}{5} \times 4 = 32$.

Ὥστε τὰ $\frac{4}{5}$ τοῦ 40 εἶναι 32.

Σημείωσις. Ἀπὸ μνήμης εὑρίσκομεν ἀμέσως ὅτι τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ 40 εἶναι 8 καὶ ἑπομένως τὰ $\frac{4}{5}$ αὐτοῦ θὰ εἶναι $8 \times 4 = 32$.

Πρόβλημα 2ον. **Νὰ εὑρεθοῦν τὰ $\frac{5}{8}$ τοῦ κλάσματος $\frac{4}{5}$.**

Λύσις. Ἀφοῦ ὅλος ὁ ἀριθμός, δηλ. τὰ $\frac{8}{8}$ αὐτοῦ, εἶναι $\frac{4}{5}$, τὸ $\frac{1}{8}$ αὐτοῦ θὰ εἶναι 8 φορὰς ὀλιγώτερον, ἤτοι $\frac{4}{5} : 8$, ἤτοι $\frac{4}{5 \times 8}$, καὶ τὰ $\frac{5}{8}$ αὐτοῦ θὰ εἶναι 5 φορὰς περισσότερον ἀπὸ τὸ προηγούμενον, ἤτοι $\frac{4}{5 \times 8} \times 5 = \frac{4 \times 5}{5 \times 8} = \frac{1}{2}$. Ὥστε τὰ $\frac{5}{8}$ τοῦ $\frac{4}{5}$ εἶναι $\frac{1}{2}$.

Πρόβλημα 3ον. **Νὰ εὑρεθοῦν τὰ $\frac{5}{6}$ τοῦ ἀριθμοῦ $3\frac{1}{4}$.**

Λύσις. Α' Τρόπος. Τρέπομεν τὸν μεικτὸν $3\frac{1}{4}$ εἰς κλάσμα καὶ εὑρίσκομεν ὅτι $3\frac{1}{4} = \frac{13}{4}$. Πρέπει λοιπὸν νὰ εὕρωμεν τὰ $\frac{5}{6}$ τοῦ $\frac{13}{4}$. Σκεπτόμενοι δὲ ὅπως προηγουμένως εὑρίσκομεν ὅτι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι $\frac{13}{4 \times 6} \times 5 = \frac{65}{24} = 2\frac{17}{24}$.

Β' Τρόπος. Ἂν κάμωμεν τοὺς ἰδίους συλλογισμούς, χωρὶς νὰ τρέψωμεν τὸν μεικτὸν $3\frac{1}{4}$ εἰς κλάσμα, εὑρίσκομεν ὅτι τὸ ζητούμενον εἶναι $\frac{3\frac{1}{4}}{6} \times 5 = \frac{\frac{13}{4}}{6} \times 5 = \frac{13}{24} \times 5 = \frac{65}{24} = 2\frac{17}{24}$.

Πρόβλημα 4ον. **Ἕνα αὐτοκίνητον διανύει $24\frac{1}{2}$ χιλιόμετρα τὴν ὥραν. Διὰ νὰ μεταβῇ δὲ ἀπὸ τὰς Ἀθήνας εἰς Κηφισιὰν**

κάμνει $\frac{5}{8}$ τῆς ὥρας. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις τῆς Κηφισιᾶς ἀπὸ τὰς Ἀθήνας.

Λύσις. Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα αὐτό, πρέπει νὰ εὕρωμεν πόσα χιλιόμετρα διανύει τὸ αὐτοκίνητον εἰς $\frac{5}{8}$ τῆς ὥρας. Σκεπτόμεθα λοιπὸν ὡς ἑξῆς:

Ἀφοῦ εἰς 1 ὥραν διανύει $24\frac{1}{2}$ χιλιόμετρα

εἰς $\frac{1}{8}$ ὥρας διανύει $\frac{24\frac{1}{2}}{8}$ χιλιόμετρα.

καὶ εἰς $\frac{5}{8}$ τῆς ὥρας διανύει

$$\frac{24\frac{1}{2}}{8} \times 5 = \frac{\frac{49}{2}}{8} \times 5 = \frac{49}{16} \times 5 = \frac{245}{16} = 15\frac{5}{16} \text{ χιλιόμετρα.}$$

Ὥστε ἡ ζητουμένη ἀπόστασις εἶναι $15\frac{5}{16}$ χιλιόμετρα.

Πρόβλημα 5ον. **Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὰ $\frac{3}{5}$ εἶναι $\frac{6}{9}$.**

Λύσις. Ἀφοῦ τὰ $\frac{3}{5}$ τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ εἶναι $\frac{6}{9}$, τὸ $\frac{1}{5}$ αὐτοῦ θὰ εἶναι τρεῖς φορὰς ὀλιγώτερον, ἤτοι $\frac{6}{9 \times 3}$ καὶ τὰ $\frac{5}{5}$ αὐτοῦ, ἤτοι ὅλος ὁ ζητούμενος ἀριθμός, θὰ εἶναι $\frac{6}{9 \times 3} \times 5 = \frac{10}{9} = 1\frac{1}{9}$.

Ὥστε ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι $1\frac{1}{9}$.

Πρόβλημα 6ον. **Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὰ $\frac{4}{7}$ εἶναι $5\frac{1}{4}$.**

Λύσις. Ἀφοῦ τὰ $\frac{4}{7}$ τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ εἶναι $5\frac{1}{4}$, τὸ $\frac{1}{7}$ αὐτοῦ θὰ εἶναι 4 φορὰς ὀλιγώτερον, ἤτοι $\frac{5\frac{1}{4}}{4}$ καὶ τὰ $\frac{7}{7}$ αὐτοῦ, ἤτοι ὅλος ὁ ἀριθμός, θὰ εἶναι 7 φορὰς περισσότερον, ἤτοι:

$$\frac{5\frac{1}{4}}{4} \times 7 = \frac{\frac{21}{4}}{4} \times 7 = \frac{21}{16} \times 7 = \frac{147}{16} = 9\frac{3}{16}.$$

Ὥστε ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι $9\frac{3}{16}$.

Πρόβλημα 7ον. **Ἕνα αὐτοκίνητον διέτρεξεν 84 $\frac{3}{4}$ χιλιόμετρα εἰς 2 $\frac{7}{12}$ ὥρας. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ταχύτης του τὴν ὥραν.**

Λύσις. Ἀφοῦ εἰς 2 $\frac{7}{12}$ τῆς ὥρας διέτρεξεν 84 $\frac{3}{4}$ χιλιόμετρα, εἰς 1 ὥραν διέτρεχε 2 $\frac{7}{12}$ φορὰς ὀλιγώτερον, ἤτοι :

$$\frac{84\frac{3}{4}}{2\frac{7}{12}} = \frac{\frac{339}{4}}{\frac{31}{12}} = \frac{339 \times 12}{4 \times 31} = \frac{1017}{31} = 32\frac{25}{31} \text{ χιλιόμετρα.}$$

Ὥστε ἡ ταχύτης τοῦ αὐτοκινήτου εἶναι 32 $\frac{25}{31}$ χιλιόμετρα.

Ἀσκήσεις

Α΄ Ὁμάς. 355) Νὰ εὑρεθοῦν ἀπὸ μνήμης τὰ $\frac{4}{5}$ τῶν ἀριθμῶν 20, 40, 60, 80, 100, 200. Ἔπειτα δὲ τὰ $\frac{3}{4}$ τῶν αὐτῶν ἀριθμῶν.

356) Εὕρετε διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα:

1ον. Τὰ $\frac{5}{6}$ τοῦ ἀριθμοῦ $\frac{2}{3}$ 2ον. Τὰ $\frac{4}{9}$ τοῦ ἀριθμοῦ $5\frac{2}{7}$.

Β΄ Ὁμάς. Νὰ λυθοῦν διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα τὰ ἀκόλουθα προβλήματα:

357) Ἕνα αὐτοκίνητον εἶχε νὰ διατρέξῃ μίαν ἀπόστασιν 90 χιλιομέτρων. Εἰς τὰς δύο πρώτας ὥρας διέτρεξε τὰ $\frac{3}{5}$ αὐτῆς τῆς ἀποστάσεως. Πόσα χιλιόμετρα ἔχει νὰ διατρέξῃ ἀκόμη;

358) Μία αὐτοκινητάμαξα τῶν σιδηροδρόμων Πειραιῶς - Ἀθηνῶν - Πελοποννήσου διανύει 36 χιλιόμετρα τὴν ὥραν καὶ μεταβαίνει ἐκ Πειραιῶς εἰς Κόρινθον εἰς 2 $\frac{3}{4}$ ὥρας, ἂν δὲν κάμῃ ἐνδιαμέσους στάσεις. Πόσον εἶναι τὸ μῆκος τῆς σιδηροδρομικῆς γραμμῆς Πειραιῶς - Κορίνθου;

359) Μία μηχανὴ πλέκει εἰς μίαν ὥραν 3 $\frac{1}{5}$ ὀκάδας νήματος Πόσον νῆμα θὰ πλέξῃ εἰς $\frac{5}{6}$ τῆς ὥρας;

360) Μία ὑφάντρια ὑφαίνει εἰς 1 ὥραν $2\frac{1}{4}$ πήχεις ὑφάσματος. Πόσον ὕφασμα ὑφαίνει εἰς $5\frac{2}{3}$ ὥρας;

361) Ἕνας ἔμπορος ὑφασμάτων ἠγόρασεν ἀπὸ ἕνα ὑφαντουργεῖον μίαν ποσότητα ὑφάσματος, τὸ ὁποῖον ἐπωλεῖτο πρὸς 120 χιλιόδραχμα τὸν πῆχυν. Ἔκαμε δὲ ἡ διεύθυνσιν τοῦ ὑφαντουργείου ἔκπτωσιν ἴσην πρὸς τὰ $\frac{12}{100}$ τῆς ἀξίας του. Πρὸς πόσον ἐπλήρωσε τὸν πῆχυν;

362) Ἕνας ὑπάλληλος ἠγόρασε $4\frac{2}{8}$ πήχεις ὑφάσματος, διὰ νὰ κάμῃ μίαν ἐνδυμασίαν. Τὸ ὕφασμα τοῦτο ἐπωλεῖτο πρὸς 95 χιλιόδρ. τὸν πῆχυν, ἀλλ' ἔγινεν εἰς αὐτὸν ἔκπτωσις ἴση πρὸς τὸ $\frac{1}{10}$ τῆς ἀξίας του. Πόσα χρήματα ἐπλήρωσεν;

363) Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὰ $\frac{2}{5}$ καὶ τὰ $\frac{3}{4}$ ὁμοῦ ἀποτελοῦν τὸν ἀριθμὸν 23.

364) Ἂν ἀπὸ τὸ $\frac{1}{4}$ ἑνὸς ἀριθμοῦ ἀφαιρέσωμεν τὸ $\frac{1}{6}$ αὐτοῦ, εὑρίσκομεν 2. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμὸς ἐκεῖνος;

365) Τὰ $\frac{2}{5}$ τῶν $\frac{3}{4}$ ἑνὸς ἀριθμοῦ εἶναι $46\frac{2}{3}$. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμὸς ἐκεῖνος;

366) Μία οἰκοκυρὰ ἠγόρασε $\frac{3}{5}$ τῆς ὀκᾶς ζάχαριν καὶ ἔδωκε 4 800 δραχ. Πρὸς πόσον τὴν ὀκᾶν ἐπωλεῖτο ἡ ζάχαρις;

367) Τὰ $\frac{3}{4}$ μιᾶς φιάλης χωροῦν $\frac{3}{8}$ τῆς ὀκᾶς ἐλαίου. Πόσον ἔλαιον χωρεῖ ὅλη ἡ φιάλη;

368) Ἕνας ἔμπορος ὑφασμάτων ἐπώλησε τὰ $\frac{3}{10}$ ἑνὸς τεμαχίου ὑφάσματος καὶ εἶδεν ὅτι ἔμειναν ἀκόμη $39\frac{1}{2}$ πήχεις ἀπ' αὐτό. Πόσους πήχεις εἶχε κατ' ἀρχὰς αὐτὸ τὸ τεμάχιον;

369) Γεωργὸς ἠγόρασεν ἕνα κτῆμα καὶ ἐπλήρωσε 3 645 000 δρχ. διὰ τὰ $\frac{5}{8}$ αὐτοῦ. Πόση ἦτο ἡ ἀξία τοῦ κτήματος;

370) Ἕνα ἐμπόρευμα ἐπωλήθη ἀντὶ 6 324 000 δρχ. μὲ κέρδος ἴσον πρὸς τὰ $\frac{5}{12}$ τῆς τιμῆς τῆς ἀγορᾶς. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τῆς ἀγορᾶς.

6. ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΤΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

§ 217. *Πρόβλημα 1ον.* **Ἕνα τετραγωνικὸν λειβάδιον ἔχει πλευρὰν $\frac{2}{5}$ τοῦ χιλιομέτρου. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.**

Λύσις. Γνωρίζομεν ἀπὸ τὴν Γεωμετρίαν ὅτι : Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τετραγώνου, πολλαπλασιάζομεν τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς του ἐπὶ τὸν ἑαυτόν του. Τὸ λειβάδιον λοιπὸν αὐτὸ θὰ ἔχῃ ἐμβαδὸν $\frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{2 \times 2}{5 \times 5} = \frac{4}{25}$ τοῦ τετραγωνικοῦ χιλιομέτρου.

§ 218. *Πρόβλημα 2ον.* **Ἕνας φιλόπατρις καὶ φιλάνθρωπος Ἕλλην παρήγγειλε διὰ τῆς διαθήκης αὐτοῦ τὰ ἑξῆς : Τὰ $\frac{2}{4}$ τῆς περιουσίας του, ἡ ὁποία θὰ εὑρεθῇ μετὰ τὸν θάνατόν του, νὰ δοθοῦν εἰς τὸ ταμεῖον τοῦ Ἐθνικοῦ Στόλου. Τὰ $\frac{2}{4}$ τοῦ μεριδίου τοῦ Ἐθνικοῦ Στόλου νὰ δοθοῦν εἰς τὸ Νοσοκομεῖον τῆς ἰδιαιτέρας πατρίδος του καὶ τὰ $\frac{2}{4}$ τοῦ μεριδίου τοῦ Νοσοκομείου εἰς τὸ σχολικὸν ταμεῖον τῆς πατρίδος του. Νὰ εὑρεθῇ πόσον μέρος τῆς περιουσίας του θὰ λάβῃ τὸ σχολικὸν ταμεῖον;**

Λύσις. Τὸ ταμεῖον τοῦ Ἐθνικοῦ Στόλου θὰ λάβῃ τὰ $\frac{2}{4}$ τῆς περιουσίας. Τὸ Νοσοκομεῖον θὰ λάβῃ τὰ $\frac{2}{4}$ τοῦ μεριδίου τοῦ στόλου, ἤτοι $\frac{2}{4} \times \frac{2}{4} = \frac{2 \times 2}{4 \times 4} = \frac{4}{16}$ τῆς περιουσίας. Τὸ σχολικὸν ταμεῖον θὰ λάβῃ τὰ $\frac{2}{4}$ τῶν $\frac{4}{16}$, ἤτοι $\frac{4}{16} \times \frac{2}{4} = \frac{8}{64}$ τῆς περιουσίας.

§ 219. **Τί εἶναι δυνάμεις κλασμάτων ἢ μεικτῶν.** α') Ἀπὸ τὰ προηγούμενα παραδείγματα βλέπομεν ὅτι εἶναι δυνατὸν οἱ παράγοντες ἑνὸς γινομένου νὰ εἶναι δύο ἢ περισσότερα κλάσματα ἴσα πρὸς ἕνα κλάσμα. Π. χ.

$$\frac{2}{5} \times \frac{2}{5}, \qquad \frac{2}{4} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{4}, \qquad \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{5}.$$

Αὐτὰ γράφονται συντόμως οὕτω $\left(\frac{2}{5}\right)^2$, $\left(\frac{2}{4}\right)^3$, $\left(\frac{4}{5}\right)^4$ καὶ λέγονται δυνάμεις τῶν $\frac{2}{5}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{4}{5}$. Ὥστε :

Δύναμις ἑνὸς κλάσματος λέγεται κάθε γινόμενον, τοῦ ὁποίου ὅλοι οἱ παράγοντες εἶναι ἴσοι πρὸς τὸ κλάσμα τοῦτο.

Διατηρεῖται λοιπὸν ὁ ὁρισμὸς τῶν δυνάμεων τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν. Ὁμοίως διατηρεῖται ὁ ὁρισμὸς τῆς βάσεως καὶ ἐκθέτου καὶ ὁ τρόπος τῆς ἀναγνώσεως τῶν δυνάμεων.

Εἶναι π.χ. $\left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{2 \times 2}{5 \times 2} = \frac{2^2}{5^2}$,

$$\left(\frac{4}{5}\right)^4 = \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{4 \times 4 \times 4 \times 4}{5 \times 5 \times 5 \times 5} = \frac{4^4}{5^4}.$$

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι:

Διὰ νὰ ὑψώσωμεν ἕνα κλάσμα εἰς μίαν δύναμιν, ὑψώνομεν καὶ τοὺς δύο ὅρους αὐτοῦ εἰς τὴν αὐτὴν δύναμιν.

β') Τὰ γινόμενα $2\frac{3}{4} \times 2\frac{3}{4}$, $5\frac{1}{6} \times 5\frac{1}{6} \times 5\frac{1}{6}$ κ.τ.λ. λέγονται δυνάμεις τῶν μεικτῶν ἀριθμῶν $2\frac{3}{4}$, $5\frac{1}{6}$ κ.τ.λ. Γράφονται δὲ συντόμως $\left(2\frac{3}{4}\right)^2$, $\left(5\frac{1}{6}\right)^3$ κ.τ.λ. Εἶναι δὲ φανερὸν ὅτι $\left(2\frac{3}{4}\right)^2 = \left(\frac{11}{4}\right)^2$, $\left(5\frac{1}{6}\right)^3 = \left(\frac{31}{6}\right)^3$ κ.τ.λ. Ἑπομένως:

Διὰ νὰ εὕρωμεν μίαν δύναμιν ἑνὸς μεικτοῦ, τρέπομεν αὐτὸν εἰς κλάσμα καὶ εὑρίσκομεν τὴν αὐτὴν δύναμιν τοῦ κλάσματος τούτου.

Ἀσκήσεις

371) Εὕρετε τὰς ἀκολούθους δυνάμεις:

1. $\left(\frac{1}{2}\right)^2$, $\left(\frac{1}{3}\right)^2$, $\left(\frac{2}{3}\right)^2$.
3. $\left(\frac{1}{10}\right)^4$, $\left(\frac{1}{100}\right)^3$, $\left(\frac{1}{1000}\right)^2$.
2. $\left(\frac{1}{2}\right)^3$, $\left(\frac{1}{3}\right)^3$, $\left(\frac{2}{3}\right)^3$.
4. $\left(4\frac{1}{2}\right)^2$, $\left(2\frac{2}{3}\right)^3$, $\left(2\frac{1}{2}\right)^4$.

372) Νὰ γίνῃ μία δύναμις κάθε ἕνα ἀπὸ τὰ γινόμενα:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4.$$

373) Μία ἐλαστικὴ σφαῖρα ἀφέθη νὰ πέσῃ ἀπὸ ὕψος $\frac{2}{3}$ τοῦ μέτρου καὶ ἀναπηδᾷ εἰς τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ ὕψους, ἀπὸ τὸ ὁποῖον πίπτει κάθε φοράν. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος, εἰς τὸ ὁποῖον θὰ ἀνυψωθῇ κατὰ τὴν τρίτην ἀναπήδησιν.

Διάφορα προβλήματα πρὸς ἐπανάληψιν τῶν πράξεων τῶν κλασμάτων.

Α' Ὁμάς. 374) Μία ράπτρια ἠγόρασε μίαν ραπτομηχανὴν ἀντὶ 3 200 000 δραχμῶν. Κατὰ τὴν παραλαβὴν ἐπλήρωσε τὰ $\frac{3}{8}$ τῆς ἀξίας καὶ μετὰ μίαν τριμηνίαν ἐπλήρωσε τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς α' δόσεως. Πόσα ἐχρεώστει ἀκόμη ;

375) Ἀπὸ ἕνα κρουνὸν ρέουν $\frac{3}{5}$ τῆς ὀκᾶς ὕδατος εἰς 1 λεπτὸν τῆς ὥρας. Μετὰ $2\frac{1}{4}$ ὥρας ὁ κρουνὸς οὗτος γεμίζει τὰ $\frac{4}{15}$ μιᾶς ὑδαταποθήκης. Πόσας ὀκάδας ὕδατος χωρεῖ αὐτὴ ἡ ὑδαταποθήκη ;

376) Ἕνας οἰνομάγειρος εἶχε δύο βαρέλια οἴνου. Τὸ ἕνα εἶχε 250 ὀκάδας, τὸ δὲ ἄλλο τὰ $\frac{4}{5}$ τῶν ὀκάδων τοῦ πρώτου. Ὁ οἶνος αὐτὸς ἐκόστισε 540 000 δραχ. Πρὸς πόσον πρέπει νὰ πωλῇ τὴν ὀκᾶν, διὰ νὰ κερδίσῃ τὰ $\frac{20}{100}$ τοῦ κόστους ;

377) Ἕνας παντοπώλης πωλεῖ τὸ ἔλαιον πρὸς 12 000 δραχμὰς τὴν ὀκᾶν. Ἀπὸ τὸ ἔλαιον ἑνὸς βαρελίου ἔμειναν τὰ $\frac{7}{10}$ αὐτοῦ, ἀπὸ δὲ τὸ πωληθὲν εἰσέπραξεν 1 260 000 δραχμάς. Πόσον ἔλαιον χωρεῖ αὐτὸ τὸ βαρέλιον ;

378) Παρετηρήθη ὅτι τὰ ἄλευρα μιᾶς ποιότητος ἀπορροφοῦν ὕδωρ ἴσον πρὸς $\frac{55}{100}$ τοῦ βάρους των κατὰ τὴν ζύμωσιν. Πόσην ζύμην παράγει ἕνας ἀρτοποιὸς μὲ $85\frac{3}{4}$ ὀκάδας ἀπὸ αὐτὰ τὰ ἄλευρα ;

379) Παρετηρήθη ὅτι ἡ ζύμη χάνει τὸ $\frac{1}{40}$ τοῦ βάρους αὐτῆς, ὅταν ψήνηται. Πόσαι ὀκάδες ἄρτου γίνονται ἀπὸ 100 ὀκ. ἄλευρα τῆς ποιότητος, διὰ τὴν ὁποίαν ὁμιλεῖ τὸ προηγούμενον πρόβλημα, χωρὶς νὰ ὑπολογισθῇ τὸ περιεχόμενον ἅλας ;

380) Ἕνας παντοπώλης εἶχεν ἕνα βαρέλιον τυροῦ. Ὅταν τὸ ἤνοιξεν ἐπώλησε τὰ $\frac{3}{7}$ αὐτοῦ. Τὴν ἄλλην ἡμέραν ἐπώλησε τὰ $\frac{3}{7}$ τοῦ προηγουμένως πωληθέντος. Οὕτω δὲ ἔμειναν ἀκόμη $10\frac{6}{7}$ ὀκάδες. Πόσον τυρὸν εἶχε κατ' ἀρχὰς αὐτὸ τὸ βαρέλιον ;

Β' Ὁ μ ά ς. 381) Ὁ ἰδιοκτήτης μιᾶς οἰκίας εἰσπράτει ὡς ἐνοίκιον ἀπὸ κάθε πάτωμα τὰ $\frac{5}{6}$ τοῦ ἐνοικίου τοῦ ἀμέσως ὑψηλοτέρου πατώματος. Ἡ οἰκία του ἔχει 4 ἐνοικιαζόμενα πατώματα, ἀπὸ τὰ ὁποῖα τὸ μηνιαῖον ἐνοίκιον ὑπολογίζεται μὲ ἀκρίβειαν εἰς δραχμὰς 279 583 $\frac{1}{3}$. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐνοίκιον κάθε πατώματος.

382) Ἕνας παράξενος ὀρειβάτης ἠρωτήθη πόσον ὕψος ἔχει ὁ Ὄλυμπος καὶ ἀπήντησεν : Ἀνῆλθον εἰς αὐτὸν 1750 $\frac{1}{5}$ μέτρα καὶ ὑπελόγισα ὅτι ἕως τὴν κορυφὴν εἶναι ἀκόμη τὰ $\frac{2}{3}$ τῶν $\frac{3}{4}$ τῶν $\frac{4}{5}$ τοῦ ὕψους τοῦ Ὀλύμπου. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος αὐτό.

383) Μία πόλις ἔχει σήμερον 74 025 κατοίκους. Πόσους κατοίκους εἶχε πρὸ δέκα ἐτῶν, ἂν γνωρίζωμεν ὅτι κατὰ τὸ χρονικὸν αὐτὸ διάστημα ὁ πληθυσμός της ηὐξήθη κατὰ τὰ $\frac{5}{16}$ τοῦ ἀρχικοῦ.

384) Οἰνοπώλης ἐπώλησε τὰ $\frac{3}{7}$ τοῦ οἴνου του καὶ εἰσέπραξεν 854 000 δραχ. Πόσον θὰ εἰσέπραττεν, ἐὰν ἐπώλει τὰ $\frac{9}{14}$ αὐτοῦ ;

385) Ἔμπορος ἐπώλησε τὰ $\frac{5}{8}$ ἑνὸς ὑφάσματος καὶ τοῦ ἔμειναν 27 μέτρα. Πόσα μέτρα ἦτο τὸ ὕφασμα καὶ πόσα εἰσέπραξεν ἐκ τοῦ πωληθέντος πρὸς 68 χιλιόδραχμα τὸ μέτρον ;

Γ' Ὁ μ ά ς. 386) Ἐπλήρωσέ τις ἀπέναντι ἑνὸς χρέους τρεῖς δόσεις : Ἡ α' δόσις ἦτο ἴση μὲ τὰ $\frac{3}{8}$ τοῦ χρέους, ἡ β' 16 500 δρχ. καὶ ἡ γ' 26 250 δρχ. Αἱ τρεῖς δόσεις μαζὶ ἀνέρχονται εἰς 72 750 δρχ. Πόσον ἦτο τὸ χρέος ;

387) Μία κληρονομία διενεμήθη μεταξὺ 3 κληρονόμων. Ὁ α' ἔλαβε τὰ $\frac{3}{8}$ αὐτῆς, ὁ β' τὰ $\frac{2}{5}$ αὐτῆς καὶ ὁ γ' τὸ ὑπόλοιπον. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μερίδιον ἑκάστου κληρονόμου, ἂν γνωρίζωμεν ὅτι ὁ α' ἔλαβεν 876 000 δραχμάς.

388) Ἐπλήρωσέ τις τὸ $\frac{1}{3}$ ἑνὸς χρέους του, ἔπειτα τὰ $\frac{2}{5}$ καὶ τέλος τὰ $\frac{2}{15}$ αὐτοῦ, ἤτοι ἐν ὅλῳ 78 000 δρχ. Πόσον ἦτο τὸ χρέος του καὶ πόσον ὀφείλει ἀκόμη ;

Δ' Ὁ μ ά ς. 389) Κτηνοτρόφος ἐπώλησε 2 βόας καὶ 54 πρόβατα ἀντὶ 7 912 000 δρχ. Ἡ τιμὴ τῶν βοῶν ἦτο τὰ $\frac{19}{27}$ τῆς τιμῆς ὅλων τῶν προβάτων. Πόσον ἐπώλησε κάθε βοῦν καὶ πόσον κάθε πρόβατον ;

390) Κτηνοτρόφος ἠγόρασεν 86 πρόβατα ἀντὶ 8 256 000 δρχ. Τὰ 6 πρόβατα ἀπέθανον καὶ παρὰ τὴν ἀπώλειαν αὐτὴν ὁ κτηνοτρόφος θέλει νὰ κερδίσῃ τὸ $\frac{1}{15}$ τῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς τῶν προβάτων. Πόσον πρέπει νὰ πωλήσῃ ἕκαστον τῶν ὑπολοίπων προβάτων ;

391) Ἔμπορος ἠγόρασεν 120 μ. ὑφάσματος ἀντὶ 5 520 000 δρχ. Ἐπώλησε τὸ $\frac{1}{4}$ αὐτοῦ πρὸς 45 000 δρχ. τὸ μέτρον, τὸ $\frac{1}{5}$ αὐτοῦ πρὸς 54 000 δρχ. τὸ μέτρον καὶ τὸ ὑπόλοιπον πρὸς 48 000 δρχ. τὸ μέτρον. Ἐκέρδισεν ἢ ἔχασεν ἐκ τῆς πωλήσεως αὐτοῦ καὶ πόσα ;

Ε' Ὁμάς. 392) Ἐργάτης δύναται νὰ ἐκτελέσῃ ἕνα ἔργον εἰς 8 ἡμ. Δεύτερος ἐργάτης δύναται νὰ ἐκτελέσῃ τὸ αὐτὸ ἔργον εἰς 5 ἡμ. Ἐὰν ἐργασθοῦν συγχρόνως εἰς πόσας ἡμέρας δύνανται νὰ ἐκτελέσουν τὸ ἔργον ;

393) Ἐργάτης ἐκτελεῖ τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ ἔργου εἰς 9 ἡμέρας. Ἄλλος ἐργάτης ἐκτελεῖ τὰ $\frac{5}{8}$ τοῦ αὐτοῦ ἔργου εἰς 5 ἡμ. Εἰς πόσας ἡμέρας δύνανται νὰ ἐκτελέσουν τὸ ὅλον ἔργον, ἐὰν ἐργασθοῦν καὶ οἱ δύο συγχρόνως.

394) Ἠρώτησάν τινα πόσων ἐτῶν εἶναι καὶ ἀπήντησεν ὡς ἑξῆς : Τὰ $\frac{2}{3}$ καὶ τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς ἡλικίας μου κάμνουν 68 ἔτη. Πόσων ἐτῶν ἦτο ;

395) Ἕνα βαρέλιον περιέχει οἶνον κατὰ τὰ $\frac{3}{4}$. Ἀδειάζομεν τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ περιεχομένου οἴνου καὶ μένουν ἀκόμη εἰς αὐτὸ 280 ὀκ. Πόσας ὀκάδας οἴνου χωρεῖ ὁλόκληρον τὸ βαρέλιον ;

396) Τὰ $\frac{3}{5}$ ἑνὸς ἀριθμοῦ εἶναι 362. Τὰ $\frac{3}{4}$ ἑνὸς ἄλλου εἶναι 248. Ποῖον εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἀριθμῶν ;

397) Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος αὐξανόμενος κατὰ τὸ $\frac{1}{5}$ αὐτοῦ γίνεται 720.

398) Τὸ $\frac{1}{3}$ καὶ τὰ $\frac{3}{8}$ ἑνὸς ποσοῦ εἶναι 1700 δρχ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ποσὸν τοῦτο.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ

ΔΕΚΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ, ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ ΡΙΖΑ ΑΡΙΘΜΟΥ, ΣΥΜΜΙΓΕΙΣ ΑΡΙΘΜΟΙ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄

ΔΕΚΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

1. ΟΡΙΣΜΟΙ

§ 220. Ὁρισμοί. Αἱ κλασματικαὶ μονάδες $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, αἱ ὁποῖαι ἔχουν παρονομαστὴν τὴν μονάδα ἀκολουθουμένην ἀπὸ ἕνα ἢ περισσότερα μηδενικά, λέγονται **δεκαδικαὶ κλασματικαὶ μονάδες.**

Τὰ κλάσματα $\frac{3}{10}$, $\frac{51}{100}$, $\frac{25}{1000}$ εἶναι μικρότερα τῆς ἀκεραίας μονάδος καὶ ἔχουν παρονομαστὴν τὴν μονάδα ἀκολουθουμένην ἀπὸ ἕνα ἢ περισσότερα μηδενικά. Τὰ κλάσματα αὐτὰ λέγονται **δεκαδικὰ κλάσματα.** Ὥστε :

Δεκαδικὸν κλάσμα λέγεται κάθε κλάσμα, τοῦ ὁποίου ὁ παρονομαστὴς εἶναι ἡ μονὰς ἀκολουθουμένη ἀπὸ ἕνα ἢ περισσότερα μηδενικά.

Τὰ μέχρι τοῦδε γνωστὰ κλάσματα λέγονται **κοινὰ κλάσματα.**

Π.χ. τὸ κλάσμα $\frac{827}{1000}$ εἶναι ἕνα δεκαδικὸν κλάσμα καὶ τὸ $\frac{7}{8}$ εἶναι ἕνα κοινὸν κλάσμα.

Τὸ δεκαδικὸν κλάσμα λαμβάνεται πάντοτε μικρότερον τῆς ἀκεραίας μονάδος.

§ 221. Δεκαδικὸς ἀριθμός. Ὁ ἀριθμὸς $15\frac{37}{100}$ ἀποτελεῖται ἀπὸ τὸν ἀκέραιον 15 καὶ ἀπὸ τὸ δεκαδικὸν κλάσμα $\frac{37}{100}$. Ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς λέγεται **δεκαδικὸς ἀριθμός.**

Κάθε ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἀποτελεῖται ἀπὸ ἕνα ἀκέραιον καὶ ἀπὸ ἕνα δεκαδικὸν κλάσμα λέγεται δεκαδικὸς ἀριθμός.

Ὁ ἀκέραιος ἀριθμὸς ἑνὸς δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ λέγεται **ἀκέραιον μέρος** τοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ. Τὸ δὲ δεκαδικὸν κλάσμα αὐτοῦ λέγεται **δεκαδικὸν μέρος** αὐτοῦ.

Κατ᾽ ἐπέκτασιν καὶ ἕνα δεκαδικὸν κλάσμα θεωρεῖται ὡς δεκαδικὸς ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὸ ἀκέραιον μέρος εἶναι μηδέν.

§ 222. Δεκαδικαὶ μονάδες διαφόρων τάξεων. Ἔστωσαν αἱ διαδοχικαὶ δεκαδικαὶ κλασματικαὶ μονάδες.

$$\frac{1}{10}, \quad \frac{1}{100}, \quad \frac{1}{1000}, \quad \frac{1}{10\,000} \dots$$

Τὰ δέκατα λέγονται δεκαδικαὶ μονάδες τῆς πρώτης τάξεως
Τὰ ἑκατοστὰ » » » » δευτέρας »
Τὰ χιλιοστὰ » » » » τρίτης »
κ.ο.κ.

Ἀπὸ τὰς ἰσότητας π.χ. $\frac{1}{10} = \frac{10}{100} = \frac{1}{100} \times 10$,

$\frac{1}{100} = \frac{10}{1000} = \frac{1}{1000} \times 10$ κ.τ.λ. βλέπομεν ὅτι :

Κάθε μονὰς μιᾶς τυχούσης δεκαδικῆς τάξεως εἶναι ἴση μὲ δέκα μονάδας τῆς ἑπομένης δεκαδικῆς τάξεως.

Καὶ ἀντιστρόφως :

Κάθε μονὰς μιᾶς τυχούσης δεκαδικῆς τάξεως εἶναι ἴση μὲ τὸ δέκατον τῆς προηγουμένης δεκαδικῆς μονάδος.

§ 223. Πῶς γράφομεν δεκαδικὸν ἀριθμὸν ὑπὸ δεκαδικὴν μορφήν. Ἔστω ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς $3 + \frac{456}{1000}$ ἢ $\frac{3456}{1000}$.

Ἐπειδὴ ὁ ἀριθμητὴς 3 456 εἶναι ἴσος μὲ $3\,000 + 400 + 50 + 6$, θὰ εἶναι : $\frac{3456}{1000} = \frac{3000}{1000} + \frac{400}{1000} + \frac{50}{1000} + \frac{6}{1000}$ ἢ $\frac{3456}{1000} = 3 + \frac{4}{10} + \frac{5}{100} + \frac{6}{1000}$.

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι κάθε δεκαδικὸς ἀριθμὸς δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἄθροισμα ἑνὸς ἀκεραίου ἀριθμοῦ (ὁ ὁποῖος δύναται νὰ μὴ ὑπάρχῃ, ἐὰν τὸ δεκαδικὸν κλάσμα εἶναι μικρότερον τῆς ἀκεραίας μονάδος) καὶ δεκαδικῶν κλασμάτων.

Ἐμάθομεν (§ 17) ὅτι, διὰ νὰ γράψωμεν τοὺς ἀκεραίους ἀριθμούς, ἐστηρίχθημεν εἰς τὴν ἑξῆς συνθήκην: « Κάθε ψηφίον γραφόμενον ἀμέσως πρὸς τὰ ἀριστερὰ ἄλλου παριστάνει μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως». Ἐπεκτείνοντες λοιπὸν αὐτὴν τὴν συνθήκην καὶ εἰς τοὺς δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς δυνάμεθα νὰ γράφωμεν αὐτοὺς χωρὶς παρονομαστάς.

Πρὸς τοῦτο δεξιὰ τοῦ ἀκεραίου ἀριθμοῦ γράφομεν ὑποδιαστολὴν (,) καὶ δεξιὰ ταύτης τὰ δέκατα, ἔπειτα τὰ ἑκατοστὰ κ.ο.κ.

Ἐὰν δὲν ὑπάρχουν ἀκέραιαι μονάδες ἢ ἄλλη τις δεκαδικὴ μονὰς ἀνωτέρα τῆς τελευταίας, θέτομεν εἰς τὴν θέσιν της 0.

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω θὰ εἶναι $\frac{3456}{1000} = 3,456$. Θὰ λέγωμεν δὲ ὅτι ἐγράψαμεν τὸν δεκαδ. ἀριθμὸν $3 + \frac{456}{1000}$ ἢ $\frac{3456}{1000}$ ὑπὸ **δεκαδικὴν μορφήν.**

Τὰ ψηφία, τὰ ὁποῖα εὑρίσκονται δεξιὰ τῆς ὑποδιαστολῆς, λέγονται **δεκαδικὰ** ψηφία.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὸν κάτωθι κανόνα :

Διὰ νὰ γράψωμεν ἕνα δεκαδικὸν ἀριθμὸν ἢ ἕνα δεκαδικὸν κλάσμα ὑπὸ δεκαδικὴν μορφήν, γράφομεν τὸν ἀριθμητὴν τοῦ δοθέντος κλάσματος καὶ χωρίζομεν ἀπὸ τὰ δεξιά του πρὸς τὰ ἀριστερά, διὰ μιᾶς ὑποδιαστολῆς, τόσα ψηφία, ὅσα μηδενικὰ ἔχει ὁ παρονομαστής.

Ἐὰν ὁ ἀριθμητὴς δὲν ἔχῃ ἀρκετὰ ψηφία, διὰ νὰ ἐφαρμοσθῇ ὁ κανών, γράφομεν πρὸς τὰ ἀριστερά του ὅσα μηδενικὰ χρειάζονται.

Κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα θὰ εἶναι :

$$\frac{3704}{10} = 370,4, \quad \frac{5764}{1000} = 5,764, \quad \frac{321}{10\,000} = 0,0321, \quad \frac{25}{1000} = 0,025,$$

$$24 + \frac{3}{100} = \frac{2403}{100} = 24,03 \qquad 156 + \frac{17}{100} = \frac{15\,617}{100} = 156,17.$$

§ 224. Πῶς γράφομεν ἕνα δεκαδικὸν ἀριθμὸν ὑπὸ μορφὴν δεκαδικοῦ κλάσματος. Γνωρίζομεν ὅτι $3 + \frac{75}{100} = 3,75$. Ἐὰν ἀλλάξωμεν τὰ μέλη αὐτῆς τῆς ἰσότητος θὰ εἶναι $3,75 = 3 + \frac{75}{100} = \frac{375}{100}$.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι $0,0048 = \frac{48}{10\,000}$.

Ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι :

Διὰ νὰ γράψωμεν ἕνα δεκαδικὸν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος ἔχει δεκαδικὴν μορφήν, ὑπὸ μορφὴν δεκαδικοῦ κλάσματος, παραλείπομεν τὴν ὑποδιαστολὴν καὶ τὸν οὕτω προκύπτοντα ἀριθμὸν θέτομεν ὡς ἀριθμητήν, παρονομαστὴν δὲ θέτομεν τὴν μονάδα ἀκο-

λουθουμένην ἀπὸ τόσα μηδενικά, ὅσα εἶναι τὰ δεκαδικὰ ψηφία τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ.

Κατὰ τὸν κανόνα αὐτὸν θὰ εἶναι :

$$48{,}7=\frac{487}{10},\quad 0{,}19=\frac{19}{100},\quad 3{,}009=\frac{3009}{1000},\quad 0{,}0007=\frac{7}{10\,000}.$$

§ 225. Ἀπαγγελία δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ. 1 . Ἐπειδὴ $3{,}765=\frac{3765}{1000}$, ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς 3,765 ἀπαγγέλλεται 3 765 **χιλιοστά.** Δηλαδὴ ἀπαγγέλλομεν τὸν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος προκύπτει, ἂν παραλείψωμεν τὴν ὑποδιαστολήν, καὶ δίδομεν εἰς αὐτὸν τὸ ὄνομα τῶν μονάδων τοῦ τελευταίου ψηφίου.

2ον. Ἐπειδὴ $4{,}58=4+\frac{5}{10}+\frac{8}{100}$, ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς 4,58 ἀπαγγέλλεται 4 **ἀκέραιαι μονάδες**, 5 **δέκατα** καὶ 8 **ἑκατοστά.** Δηλαδὴ ἀπαγγέλλομεν χωριστὰ κάθε ψηφίον μὲ τὸ ὄνομα τῶν μονάδων, τὰς ὁποίας τοῦτο παριστᾷ.

3ον. Ἐπειδὴ $35{,}74=35+\frac{74}{100}$, ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς 35,74 ἀπαγγέλλεται : 35 **ἀκέραιος** καὶ 74 **ἑκατοστά.** Δηλαδὴ ἀπαγγέλλομεν πρῶτον τὸ ἀκέραιον μέρος του καὶ ἔπειτα τὸ δεκαδικόν του, δίδοντες εἰς αὐτὸ τὸ ὄνομα τῶν μονάδων τοῦ τελευταίου ψηφίου.

Σημείωσις. Εἰς τὴν πρᾶξιν χρησιμοποιοῦμεν συνήθως μίαν **τελείως ἐσφαλμένην** ἀπαγγελίαν, ἀλλὰ πολὺ συντομωτέραν.

Π. χ. διὰ τοὺς δεκαδικοὺς ἀριθμούς :

2,15	λέγομεν :	2 κόμμα 15
4,075	»	4 κόμμα μηδὲν 75
48,00259	»	48 κόμμα μηδὲν μηδὲν 259

Ἀσκήσεις

399) Νὰ γραφοῦν ὑπὸ δεκαδικὴν μορφὴν τὰ δεκαδικὰ κλάσματα :

$$\frac{3}{10},\quad \frac{25}{100},\quad \frac{32}{1000},\quad \frac{248}{1000},\quad \frac{45}{10000}.$$

400) Νὰ γραφοῦν ὑπὸ μορφὴν δεκαδικῶν κλασμάτων οἱ κάτωθι δεκαδικοὶ ἀριθμοί :

0,470, 0,758, 0,4235, 0,03012, 2,43, 45,72, 8,654, 125,3.

401) Νὰ γραφοῦν ὑπὸ δεκαδικὴν μορφήν : 3 ἑκατοστά· 2002 χιλιοστά· 564 δεκάκις χιλιοστά· 4 ἀκέραιος καὶ 75 χιλιοστά· 125

ἀκέραιος καὶ 3 ἑκατοντάκις χιλιοστά, 368 ἀκέραιος καὶ 12 ἑκατομμυριοστά.

402) 1ον. Νὰ τραποῦν 2,5 εἰς δέκατα, εἰς χιλιοστά, εἰς δεκάκις χιλιοστά. 2ον. Νὰ τραποῦν 0,605 εἰς ἑκατομμυριοστά.

2. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΔΕΚΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

§ 226. Ἰδιότης Ι. Ἔστω τὸ δεκαδικὸν κλάσμα $\frac{35}{100}$. Ἐπειδὴ $\frac{35}{100}=\frac{350}{1000}=\frac{3500}{10000}$, ἕπεται ὅτι $0{,}35=0{,}350=0{,}3500$. Εἶναι δὲ φανερὸν ὅτι $04=4$. Ἐπίσης εἶναι $4{,}6=04{,}6$.

Ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω συνάγομεν τὴν κάτωθι ἰδιότητα :

Ἡ ἀξία ἑνὸς δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ δὲν μεταβάλλεται, ἂν γράψωμεν ὁσαδήποτε μηδενικὰ εἰς τὸ τέλος ἢ εἰς τὴν ἀρχὴν αὐτοῦ, ἢ παραλείψωμεν τὰ ὑπάρχοντα εἰς τὸ τέλος μηδενικά.

§ 227. Ἰδιότης ΙΙ. Πῶς πολλαπλασιάζομεν δεκαδικὸν ἀριθμὸν ἐπὶ 10, 100, 1000 κ.τ.λ. Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν δεκαδικὸν ἀριθμὸν 3,25 ἐπὶ 10. Ἐπειδὴ $3{,}25=\frac{325}{100}$, θὰ εἶναι : $3{,}25\times10=\frac{325}{100}\times10=\frac{325}{10}=32{,}5$. Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι $4{,}358\times100=435{,}8$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὴν κάτωθι ἰδιότητα :

Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν δεκαδικὸν ἀριθμὸν ἐπὶ 10, 100, 1000 κ.τ.λ, ἀρκεῖ νὰ μεταθέσωμεν τὴν ὑποδιαστολήν του πρὸς τὰ δεξιὰ τόσας θέσεις, ὅσα μηδενικὰ ἀκολουθοῦν τὴν μονάδα. Ἂν δὲ δὲν ἔχῃ ὁ ἀριθμὸς ἐπαρκῆ ψηφία, ἀναπληρώνομεν τὰ ἐλλείποντα μὲ μηδενικά.

§ 228. Ἰδιότης ΙΙΙ. Πῶς διαιρεῖται δεκαδικὸς ἀριθμὸς διὰ 10, 100, 1000 κ.τ.λ. Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸν δεκαδικὸν ἀριθμὸν 7,48 διὰ 100. Ἐπειδὴ $7{,}48=\frac{748}{100}$, θὰ εἶναι :

$$7{,}48:100=\frac{748}{100}:100=\frac{748}{100\times100}=\frac{748}{10000}=0{,}0748.$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι $549{,}35:10=54{,}935$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι :

Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἕνα δεκαδικὸν ἀριθμὸν διὰ 10, 100, 1000,... μεταθέτομεν τὴν ὑποδιαστολὴν πρὸς τὰ ἀριστερὰ τόσας θέσεις, ὅσα μηδενικὰ ἀκολουθοῦν τὴν μονάδα. Ἂν δὲ δὲν ὑπάρχουν ἀρκερὰ ψηφία, γράφομεν εἰς τὴν ἀρχήν του, ὅσα μηδενικὰ χρειάζονται.

Κατὰ τὴν ἰδιότητα αὐτὴν θὰ ἔχωμεν :

56,75 : 1000 = 0,05675,   0,7 : 10 = 0,07 κ.τ.λ.

Παρατήρησις. Αἱ προηγούμεναι ἰδιότητες δύνανται νὰ ἐφαρμοσθοῦν καὶ εἰς τοὺς ἀκεραίους ἀριθμούς, ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν ὅτι κάθε ἀκέραιος ἀριθμὸς δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς δεκαδικὸς ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὸ δεκαδικὸν μέρος ἀποτελεῖται ἀπὸ μηδενικὰ (διατί ;) Θὰ ἔχωμεν λοιπόν :

I. 48 = 48,0 = 48,00 = 48,000.

II. 48 × 10 = 480,   48 × 100 = 4800.

III. 48 : 10 = 4,8,   48 : 100 = 0,48.

Ἀσκήσεις

403) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ κάτωθι γινόμενα :

1. 6,375 × 100,   0,094 × 1000,   0,3 × 10 000.
2. 0,008 × 100,   325,07 × 1000,   4,02 × 10 000.

404) Νὰ γραφοῦν ὑπὸ δεκαδικὴν μορφὴν οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοί :

5,   49,   475,   607.

405) Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι διαιρέσεις :

1. 45,7 : 10,   125,75 : 100,   4 706,5 : 1 000.
2. 0,78 : 10,   348,09 : 100,   0,4874 : 1 000.

406) Τί παθαίνει ὁ ἀριθμὸς 35,6, ἂν παραλείψωμεν τὴν ὑποδιαστολήν ;

407) Ἐὰν τὰ 1 000 πορτοκάλια τιμῶνται 129 χιλιόδραχμα, πόσον τιμᾶται τὸ ἕνα ; πόσον τὰ 10 ; καὶ πόσον τὰ 100 ;

408) Νὰ τραποῦν 18,5 χιλιόμετρα εἰς μέτρα.

3. ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ ΚΑΙ ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ ΔΕΚΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

§ 229. Ἡ πρόσθεσις καὶ ἡ ἀφαίρεσις τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν ὁρίζεται, ὅπως ἡ πρόσθεσις καὶ ἡ ἀφαίρεσις τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν.

§ 230. Πρόσθεσις δεκαδικῶν. *Παράδειγμα 1ον.* Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα 85,7 + 124,56 + 0,749. Τὸ ἄθροισμα αὐτὸ γράφεται : $\frac{857}{10}+\frac{12456}{100}+\frac{749}{1000}$ ἢ $\frac{85700}{1000}+\frac{124560}{1000}+\frac{749}{1000}$ ἢ

$$\frac{85700+124560+749}{1000}=\frac{211009}{1000}=211{,}009.$$

Ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω ὁδηγούμεθα νὰ γράφωμεν τοὺς ἀριθμοὺς τὸν ἕνα κάτωθεν τοῦ ἄλλου εἰς τρόπον, ὥστε αἱ μονάδες τῆς αὐτῆς τάξεως νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν κατακόρυφον στήλην, νὰ προσθέσωμεν ἔπειτα αὐτούς, ὡς νὰ ἦσαν ἀκέραιοι, καὶ νὰ θέσωμεν εἰς τὸ ἐξαγόμενον μίαν ὑποδιαστολὴν εἰς τὴν στήλην τῶν ὑποδιαστολῶν τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

Διάταξις τῆς πράξεως

$$\begin{array}{lr l r}
 & 85{,}700 & & 85{,}7 \\
 & 124{,}560 & & 124{,}56 \\
 & 0{,}749 & \text{ἢ συντόμως} & 0{,}749 \\
\cline{2-2}\cline{4-4}
\text{ἄθροισμα} & 211{,}009 & & 211{,}009
\end{array}$$

Παράδειγμα 2ον. Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ προσθέσωμεν τοὺς δεκαδικοὺς ἀριθμούς 4,754, 75,635 καὶ 0,211.

Διάταξις τῆς πράξεως

$$\begin{array}{lr}
 & 4{,}754 \\
 & 75{,}635 \\
 & 0{,}211 \\
\cline{2-2}
\text{ἄθροισμα} & 80{,}600
\end{array}$$

Δυνάμεθα νὰ παραλείψωμεν τὰ μηδενικά, τὰ ὁποῖα εὑρίσκονται εἰς τὸ τέλος τοῦ ἀθροίσματος· ἑπομένως τὸ ἄθροισμα τῶν δοθέντων δεκαδικῶν ἀριθμῶν εἶναι 80,6.

Ἀσκήσεις

Α΄ Ὁμάς. 409) Νὰ ἐκτελεσθοῦν ἀπὸ μνήμης αἱ κάτωθι προσθέσεις :

47,3 + 52,9, 142,8 + 35,1, 453,6 + 18,4,
120,25 + 40,6, 36,54 + 32,7, 100,85 + 0,2,

410) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ κάτωθι ἀθροίσματα :

1. 72,804 + 0,0487 + 3,252 + 356,4 + 1 800,

2. 504,18 + 503,81 + 85,17 + 48,97 + 49,001.

Β' Ὁμάς. 411) Τὰ σύνορα τῆς Ἑλλάδος ἔχουν μῆκος πρὸς τὴν Ἀλβανίαν 250,5 χιλιόμ. Πρὸς τὴν Γιουγκοσλαυΐαν 236,8 χιλιόμ. καὶ πρὸς τὴν Βουλγαρίαν 480,5 χιλιόμ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς μεθορίου γραμμῆς μὲ αὐτὰς τὰς χώρας.

412) Ἔμπορος ἠγόρασεν 28,4 μέτρα ὑφάσματος ἀντὶ 845,75 χιλιοδράχμων, 14,75 μ. ἄλλου ὑφάσματος ἀντὶ 560 χιλιόδρ. καὶ τέλος 43,50 μ. ἀντὶ 790,50 χιλιόδρ. Πόσα μέτρα ἠγόρασε καὶ πόσα ἐπλήρωσεν ἐν ὅλῳ ;

413) Παντοπώλης διέθεσε 328,75 χιλιόδρ. διὰ νὰ ἀγοράσῃ ζάκχαριν, 2 756,50 χιλιόδρ. δι' ἔλαιον καὶ 504,8 χιλιόδρ. δι' ὄσπρια. Ἐὰν θέλῃ νὰ κερδίσῃ τὸ δέκατον τῆς ἀξίας τῶν εἰδῶν αὐτῶν, νὰ εὑρεθῇ πόσα πρέπει νὰ εἰσπράξῃ ἐν ὅλῳ ἀπὸ τὴν πώλησιν.

§ 231. Ἀφαίρεσις δεκαδικῶν ἀριθμῶν. Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν δεκαδικὸν ἀριθμὸν ἀπὸ δεκαδικόν, γράφομεν τὸν ἀφαιρετέον κάτωθεν τοῦ μειωτέου οὕτως, ὥστε αἱ ὑποδιαστολαί των νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν κατακόρυφον στήλην. Ἐκτελοῦμεν ἔπειτα τὴν ἀφαίρεσιν, ὅπως εἰς τὴν περίπτωσιν τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν καὶ θέτομεν εἰς τὸ ἐξαγόμενον μίαν ὑποδιαστολὴν κάτωθεν τῶν δύο προηγουμένων ὑποδιαστολῶν.

Παράδειγμα 1ον. Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὴν διαφορὰν 4725,758 − 840,89.

Διάταξις τῆς πράξεως

	4 725,758
	840,89
Διαφορὰ	3 884,868

Παράδειγμα 2ον. Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὴν διαφορὰν 135,4 − 72,658.

Διάταξις τῆς πράξεως

135,4		135,400
72,658	ἢ	72,658
	Διαφορὰ	62,742

Εἰς τὸ παράδειγμα αὐτὸ συνεπληρώσαμεν τὰ ἐλλείποντα δεκαδικὰ ψηφία τοῦ μειωτέου μὲ μηδενικά.

Σημείωσις. Ἡ ἐξήγησις τοῦ κανόνος τῆς ἀφαιρέσεως γίνεται ὅπως εἰς τὴν πρόσθεσιν.

Ἀσκήσεις

Α΄ Ὁμάς. 414) Νὰ εὑρεθοῦν ἀπὸ μνήμης αἱ κάτωθι διαφοραί :

1. 0,85 — 0,30, 4,25 — 2,10, 25,75 — 12,60,
2. 6,75 — 2,30, 7,35 — 2,75, 12 — 9,05.

415) Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι ἀφαιρέσεις καὶ νὰ γίνουν αἱ δοκιμαί των :

1. 375 — 148,90, 1764 — 895,45, 7 — 6,375.
2. (85,40 + 75,65) — (18,45 + 104,95).

Β΄ Ὁμάς. 416) Ἠγόρασέ τις ἀπὸ παντοπώλην ἔλαιον ἀξίας 36,40 χιλιόδρ. καὶ ζάχαριν ἀξίας 18,75 χιλιόδρ. καὶ ἔδωκε τρία χαρτονομίσματα τῶν 20 000 δρχ. Πόσα θὰ λάβῃ ὑπόλοιπον (ρέστα);

417) Ὁ Γεώργιος εἶχε 15,60 χιλιόδρ. καὶ ἐξώδευσε 4,75 χιλιόδρ. Ὁ Παῦλος εἶχε 3,45 χιλιόδρ. καὶ ἔλαβεν ἀκόμη 8,90 χιλιόδρ. Ποῖος ἔχει περισσότερα καὶ πόσα ;

4. ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΤΩΝ ΔΕΚΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

§ 232. Πῶς πολλαπλασιάζονται δεκαδικοὶ ἀριθμοί. *Παράδειγμα 1ον.* Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ ἐκτελέσωμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν $24,75 \times 5$. Ἐπειδὴ $24,75 = \frac{2475}{100}$, θὰ εἶναι :

$$24,75 \times 5 = \frac{2475}{100} \times 5 = \frac{2475 \times 5}{100} = \frac{12375}{100} = 123,75.$$

Παράδειγμα 2ον. Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον $16,75 \times 3,5$. Ἐπειδὴ $16,75 = \frac{1675}{100}$ καὶ $3,5 = \frac{35}{10}$ θὰ εἶναι :

$$16,75 \times 3,5 = \frac{1675}{100} \times \frac{35}{10} = \frac{1675 \times 35}{100 \times 10} = \frac{58625}{1000} = 58,625.$$

Ἀπὸ τὰ δύο ἀνωτέρω παραδείγματα συνάγομεν τὸν κάτωθι κανόνα :

Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν δεκαδικὸν ἀριθμὸν ἐπὶ ἀκέραιον ἢ δύο δεκαδικοὺς ἀριθμούς, πολλαπλασιάζομεν αὐτούς, ὡς νὰ ἦσαν ἀκέραιοι, καὶ χωρίζομεν ἔπειτα μὲ ὑποδιαστολὴν ἀπὸ τὰ δεξιὰ τοῦ γινομένου τόσα δεκαδικὰ ψηφία, ὅσα ἔχουν καὶ οἱ δύο παράγοντες.

Ἡ διάταξις τῶν πράξεων τῶν δύο προηγουμένων παραδειγμάτων γίνεται ὡς ἑξῆς :

$$\begin{array}{r} 24{,}75 \\ 5 \\ \hline 123{,}75 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 16{,}75 \\ 3{,}5 \\ \hline 8375 \\ 5025 \\ \hline 58{,}625 \end{array}$$

Ἀσκήσεις

Α' Ὁμάς : 418) Νὰ ἐκτελεσθοῦν οἱ κάτωθι πολλαπλασιασμοί :

354 × 8,2   4 506 × 0,75,   1 008 × 6,405,
96,007 × 18,208   1,25 × 4,009,   100,058 × 0,94.

Β' Ὁμάς. 419) Τὸ μέτρον ἑνὸς ὑφάσματος τιμᾶται 14,5 χιλιόδρ. Πόσον τιμῶνται τὰ 15,4 μέτρα τοῦ αὐτοῦ ὑφάσματος ;

420) Ἰδιοκτήτης ἐπώλησεν 25 δέματα χόρτου τῶν 48 ὀκ. ἕκαστον πρὸς 1,60 χιλιόδρ. τὴν ὀκᾶν. Πόσον θὰ λάβῃ ;

421) Ἠγόρασέ τις 3 ὀκάδ. ζυμαρικὰ πρὸς 6,4 χιλιόδρ. τὴν ὀκᾶν καὶ ἔδωσεν ἕνα χαρτονόμισμα τῶν 20 000 δραχ. Πόσον θὰ λάβῃ ὑπόλοιπον ;

422) Ἕνα αὐτοκίνητον, μὲ ταχύτητα 25,6 χιλιόμετρα τὴν ὥραν, ἔκαμε 5,6 ὥρας διὰ νὰ μεταβῇ ἀπὸ τὰς Ἀθήνας εἰς τὸ Ἄργος. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις τοῦ Ἄργους ἀπὸ τῶν Ἀθηνῶν.

423) Οἰκογενειάρχης ἠγόρασε 12,60 μέτρ. ὑφάσματος πρὸς 24,50 χιλιόδρ. τὸ μέτρον καὶ 4,25 μ. ἄλλου ὑφάσματος πρὸς 14,5 χιλιόδρ. τὸ μέτρον. Πόσα πρέπει νὰ πληρώσῃ ἐν ὅλῳ ;

424) Μία ἐργάτρια ὑφαίνει 3,25 μ. ὑφάσματος τὴν ἡμέραν καὶ λαμβάνει 8,75 χιλιόδρ. κατὰ μέτρον. Πόσον θὰ λάβῃ, ἐὰν ἐργασθῇ 25 ἡμέρας ;

425) Ἐργοστασιάρχης χρησιμοποιεῖ εἰς τὸ ἐργοστάσιόν του 18 ἄνδρας καὶ 12 γυναῖκας. Τὸ ἡμερομίσθιον κάθε ἀνδρὸς εἶναι 35,40 χιλιόδρ. καὶ κάθε γυναικὸς 18,75 χιλιόδρ. Νὰ εὑρεθῇ πόσον πληρώνει καθ' ἡμέραν δι' ἡμερομίσθια.

5. ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ ΤΩΝ ΔΕΚΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

§ 233. Πῶς διαιρεῖται δεκαδικὸς ἀριθμὸς δι' ἀκεραίου. *Πρόβλημα.* **Ἕνα ἐργοστάσιον ἐμοίρασεν ἐξ ἴσου 409,60 μέτρα κάμποτ εἰς τοὺς 16 ἐργάτας του. Πόσον θὰ λάβῃ κάθε ἐργάτης;**

Κάθε ἐργάτης θὰ λάβῃ 409,60 μέτρα : 16.

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι πρέπει νὰ διαιρέσωμεν ἕνα δεκαδικὸν ἀριθμὸν δι' ἑνὸς ἀκεραίου.

Ἐπειδὴ $409{,}600 = \frac{40960}{100}$, ἡ προηγουμένη διαίρεσις γράφεται:

$$409{,}60 : 16 = \frac{40960}{100} : 16 = \frac{40960 : 16}{100} = \frac{2560}{100} = 25{,}60.$$

Ὥστε κάθε ἐργάτης θὰ λάβῃ 25,60 μέτρα κάμποτ.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι:

Διὰ νὰ διαιρέσωμεν δεκαδικὸν ἀριθμὸν δι' ἀκεραίου, ἐκτελοῦμεν τὴν διαίρεσιν ὡς ἐὰν ὁ διαιρετέος ἦτο ἀκέραιος, ἀλλὰ προσέχομεν νὰ θέτωμεν εἰς τὸ πηλίκον ὑποδιαστολὴν πρὶν κατεβάσωμεν τὸ πρῶτον δεκαδικὸν ψηφίον τοῦ διαιρετέου.

Παράδειγμα. Νὰ ἐκτελεσθῇ ἡ διαίρεσις 35,40 : 15.

Ἐκτελοῦντες τὴν διαίρεσιν, συμφώνως πρὸς τὸν προηγούμενον κανόνα, εὑρίσκομεν πηλίκον 2,36.

$$\begin{array}{r|l} 35{,}40 & 15 \\ \cline{2-2} 5\,4 & 2{,}36 \\ 90 & \\ 0 & \end{array}$$

§ 234. Πηλίκον κατὰ προσέγγισιν. Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν 49,63 : 12.

Ἐκτελοῦμεν τὴν διαίρεσιν, ὅπως γνωρίζομεν καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 4,13 καὶ ὑπόλοιπον 7 ἑκατοστά. Ἐπειδὴ μένει ὑπόλοιπον, τὸ πηλίκον 4,13 δὲν εἶναι ἀκριβές. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἀκριβὲς πηλίκον τῆς διαιρέσεως αὐτῆς, πρέπει νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸ 4,13 καὶ τὰ $\frac{7}{12}$ τοῦ ἑκατοστοῦ. Ἂν ὅμως θεωρήσωμεν

$$\begin{array}{r|l} 49{,}63 & 12 \\ \cline{2-2} 1\,6 & 4{,}1358 \\ 43 & \\ 70 & \\ 100 & \\ 4 & \end{array}$$

ὡς πηλίκον τὸ 4,13 καὶ παραλείψωμεν τὰ $\frac{7}{12}$ τοῦ ἑκατοστοῦ, θὰ λέγωμεν τότε ὅτι 4,13 εἶναι **πηλίκον κατὰ προσέγγισιν.**

Παραλείποντες τὰ $\frac{7}{12}$ τοῦ ἑκατοστοῦ κάμνομεν λάθος μικρότερον τοῦ ἑκατοστοῦ καὶ διὰ τοῦτο λέγομεν ὅτι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως 49,63 : 12 εἶναι 4,13 **κατὰ προσέγγισιν ἑνὸς ἑκατοστοῦ.**

Ἐπειδὴ ὅμως εἶναι μικρότερον τοῦ πραγματικοῦ, θὰ λέγωμεν ὅτι τὸ πηλίκον ὑπελογίσθη μὲ προσέγγισιν ἑνὸς ἑκατοστοῦ καὶ **κατ' ἔλλειψιν.** Ἂν λάβωμεν ὅμως ἀντὶ τοῦ πηλίκου 4,13 τὸ 4,14 δηλ ἐὰν αὐξήσωμεν τὸ τελευταῖον δεκαδικὸν ψηφίον κατὰ μίαν μονάδα, πάλιν κάμνομεν λάθος, διότι αὐξάνομεν τὸ πηλίκον κατὰ $\frac{5}{12}$ τοῦ ἑκατοστοῦ. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν ὅτι τὸ πηλίκον ὑπελογίσθη μὲ προσέγγισιν ἑνὸς ἑκατοστοῦ, ἀλλὰ **καθ' ὑπεροχήν.**

Ἐὰν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον μὲ μεγαλυτέραν προσέγγισιν, θέτομεν ἕνα ἢ περισσότερα μηδενικὰ δεξιὰ τοῦ διαιρετέου καὶ ἐξακολουθοῦμεν τὴν διαίρεσιν.

Οὕτω τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως 49,63 : 12 εἶναι 4,135 κατὰ προσέγγισιν ἑνὸς χιλιοστοῦ ἢ 4,1358 κατὰ προσέγγισιν **ἑνὸς δεκάκις χιλιοστοῦ** κατ' ἔλλειψιν κ.ο.κ.

Σημείωσις. Κατωτέρω, ὅταν λέγωμεν πηλίκον κατὰ προσέγγισιν, θὰ ἐννοοῦμεν κατ' ἔλλειψιν, δηλαδὴ μικρότερον τοῦ ἀκριβοῦς.

Ἀσκήσεις

Α' Ὁμάς. 426) Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι διαιρέσεις:

520,60 : 4, 256,06 : 39, 1 046,24 : 204,
(3,4 × 10 + 25,637 × 100) : 40, (56,35 × 10 − 7,45 × 5) : 80.

427) Νὰ εὑρεθοῦν τά κάτωθι πηλίκα κατὰ προσέγγισιν 0,01

1 724,50 : 235, 749,5 : 125, 32,725 : 48.

428) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ κάτωθι πηλίκα κατὰ προσέγγισιν 0,001 :

7 653,27 : 354, 1,235 : 427, 45,03 :124.

Β' Ὁμάς. 429) Μία κρήνη εἰς 5 ὥρας γεμίζει μίαν δεξαμενήν, ἡ ὁποία χωρεῖ 1 441,40 χιλιόγραμμα ὕδατος. Πόσον ὕδωρ ρέει ἀπὸ τὴν κρήνην αὐτὴν εἰς μίαν ὥραν;

430) Ἕνας κηπουρὸς ἔχει μίαν δεξαμενήν, ἡ ὁποία χωρεῖ 3 560,40 χιλιόγραμμα. Ὅταν ἀνοίγῃ τὸν κρουνόν της, διὰ νὰ ποτίσῃ τὸν κῆπόν του, αὕτη κενοῦται εἰς 4 ὥρας. Πόσον ὕδωρ ρέει ἀπὸ αὐτὸν τὸν κρουνὸν εἰς κάθε πρῶτον λεπτὸν τῆς ὥρας;

431) Ἕνας γεωργὸς ἔχει ἀγρὸν 17 στρεμμάτων καὶ ἐλίπανεν αὐτὸν μὲ 212,5 χιλιόγραμμα λιπάσματος. Πόσον λίπασμα ἔρριψε κατὰ στρέμμα ;

432) Ἕνας ἀγροτικὸς συνεταιρισμὸς ἐπρομηθεύθη 23 644,60 χιλιόγραμμα λιπάσματος καὶ διένειμεν αὐτὸ ἐξ ἴσου εἰς τὰ 35 μέλη αὐτοῦ. Πόσον λίπασμα ἔλαβε κάθε μέλος;

§ 235. Πῶς διαιρεῖται ἀκέραιος ἢ δεκαδικὸς ἀριθμὸς διὰ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ. *Παράδειγμα 1ον.* Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν 385,125 : 3,75.

Γνωρίζομεν (§ 92) ὅτι, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν διαιρετέον καὶ διαιρέτην μιᾶς διαιρέσεως ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, τὸ μὲν πηλίκον δὲν μεταβάλλεται, τὸ δὲ ὑπόλοιπον πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν. Πολλαπλασιάζομεν λοιπὸν τὸν διαιρετέον καὶ τὸν διαιρέτην τῆς δοθείσης διαιρέσεως ἐπὶ 100 οὕτως, ὥστε νὰ καταστήσωμεν τὸν διαιρέτην ἀκέραιον καὶ ἔχομεν τότε νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν

38 512,5 : 375

Ἐκτελοῦντες τὴν διαίρεσιν αὐτὴν (§ 233), εὑρίσκομεν πηλίκον 102,7 καὶ ὑπόλοιπον μηδέν.

Διάταξις τῆς πράξεως

```
38512,5 | 375
01012   | 102,7
  262 5 |
   00 0 |
```

Παράδειγμα 2ον. Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ διαιρέσωμεν 835 : 7,42.

Πολλαπλασιάζομεν διαιρετέον καὶ διαιρέτην ἐπὶ 100 καὶ ἔχομεν νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν 83 500 : 742.

Ἐκτελοῦντες τὴν διαίρεσιν, εὑρίσκομεν πηλίκον 112 καὶ ὑπόλοιπον 396. Τὸ ἀκριβὲς ὑπόλοιπον τῆς δοθείσης διαιρέσεως εἶναι 100 φορὰς μικρότερον, δηλ. 3,96 (διατί ;)

Ἂν συνεχίσωμεν τὴν διαίρεσιν, θὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον μὲ ἕνα, δύο,.... δεκαδικὰ ψηφία, δηλ. μὲ μεγαλυτέραν προσέγγισιν.

Διάταξις τῆς πράξεως

835 : 7,42 ἢ

```
83500 | 742
  930 | 112
 1880 |
  396 |
```

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω παραδειγμάτων συνάγομεν τὸν κάτωθι κανόνα :

Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμὸν διὰ δεκαδικοῦ, παραλείπομεν τὴν ὑποδιαστολὴν τοῦ διαιρετέου καὶ μεταθέτομεν τὴν ὑποδιαστολὴν

τοῦ διαιρετέου πρὸς τὰ δεξιὰ τόσας θέσεις, ὅσα δεκαδικὰ ψηφία εἶχεν ὁ διαιρέτης καὶ ἐκτελοῦμεν ἔπειτα τὴν διαίρεσιν, ὡς γνωρίζομεν.

Σημείωσις. Ἂν ὁ διαιρετέος εἶναι ἀκέραιος ἢ δὲν ἔχῃ ἀρκετὰ ψηφία πρὸς μετάθεσιν τῆς ὑποδιαστολῆς, γράφομεν εἰς τὸ τέλος του ὅσα μηδενικὰ χρειάζονται. Π.χ. εἶναι :

$$35 : 7{,}42 = 3\,500 : 742$$
$$4{,}7 : 0{,}025 = 4\,700 : 25$$

Ἀσκήσεις

Α' Ὁμάς. 433) Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι διαιρέσεις :

675 : 0,05, 435 : 0,15, 135 : 0,045,
2,88 : 0,9, 444,64 : 0,56, 2400,4 : 3,4.

434) Νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον τῶν κάτωθι διαιρέσεων κατὰ προσέγγισιν 0,01 :

28,8 : 2,05, 644,32 : 0,64, 117,67 : 2,43,
4,742 : 3,25, 48,76 : 8,2, 2 375,49 : 15,4.

Β' Ὁμάς. 435) Ἕνας ἐμπορορράπτης ἠγόρασεν 68,75 μέτρα ὑφάσματος, διὰ νὰ κάμῃ ἀνδρικὰς ἐνδυμασίας. Ὑπελόγισε δὲ ὅτι διὰ κάθε ἐνδυμασίαν χρειάζονται 2,75 μέτρα ἀπὸ αὐτὸ τὸ ὕφασμα. Πόσας ἐνδυμασίας θὰ κάμῃ μὲ αὐτό ;

436) Ἡ Ὀλυμπία ἀπέχει ἀπὸ τὸν Πύργον 21,19 χιλιόμετρα. Πόσον χρόνον χρειάζεται μία ἁμαξοστοιχία, διὰ νὰ διανύσῃ τὴν ἀπόστασιν αὐτὴν ἀπὸ τὸν Πύργον εἰς τὴν Ὀλυμπίαν μὲ ταχύτητα 16,3 χιλιόμετρα τὴν ὥραν ;

437) Ἕνα κιβώτιον περιέχει 30,72 χιλιόγραμμα σάπωνος. Κάθε δὲ πλὰξ ἔχει βάρος 0,256 χιλιόγραμμα. Πόσας πλάκας ἔχει τὸ κιβώτιον ;

438) Μία οἰκογένεια δαπανᾷ 2,88 χιλιόγρ. ἐλαίου τὴν ἑβδομάδα. Εὕρετε πόσας ἑβδομάδας περνᾷ μὲ ἕνα δοχεῖον, τὸ ὁποῖον χωρεῖ 11,52 χιλιόγρ. ἐλαίου.

439) Οἱ τροχοὶ ἑνὸς ποδηλάτου ἔχουν περιφέρειαν 1,80 μ. Πόσας στροφὰς θὰ κάμῃ ἕκαστος τροχός, ἂν διανύσῃ τις μὲ τὸ ποδήλατον αὐτὸ διάστημα 25 740 μέτρων ;

§ 236. Πῶς πολλαπλασιάζεται ἢ διαιρεῖται δεκαδικὸς ἀριθμὸς διὰ κοινοῦ κλάσματος. Μὲ συλλογισμούς, τοὺς ὁποίους ἐκάμαμεν εἰς τὰ προηγούμενα διὰ τὴν λύσιν διαφόρων προβλημάτων, ἐμάθομεν διαφόρους κανόνας πολλαπλασιασμοῦ ἢ διαιρέσεως ἀριθμοῦ **α** ἀκεραίου ἢ κλάσματος ἢ μεικτοῦ διὰ κλάσματος. Οἱ συλλογισμοὶ ὅμως ἐκεῖνοι δύνανται νὰ ἐπαναληφθοῦν καὶ ὅταν ὁ **α** εἶναι δεκαδικὸς ἀριθμός. Καὶ ἐπομένως καὶ οἱ κανόνες ἐκεῖνοι ἀληθεύουν καὶ ὅταν **α** εἶναι δεκαδικὸς ἀριθμός. Π. χ. εἶναι :

$$5,16 \times \frac{3}{4} = \frac{5,16 \times 3}{4} = \frac{15,48}{4} = 3,87$$

$$2,4 : \frac{3}{4} = 2,4 \times \frac{4}{3} = \frac{9,6}{3} = 3,2,$$

$$6,35 \times 2\frac{1}{5} = 6,35 \times \frac{11}{5} = \frac{69,85}{5} = 13,97,$$

$$10,60 : 3\frac{2}{4} = 10,60 : \frac{14}{4} = 10,60 \times \frac{4}{14} \text{ κ.τ.λ.}$$

Ἀσκήσεις

440) Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ ἀκόλουθοι πράξεις :

$12,25 \times \frac{4}{5}$, $15,16 : \frac{2}{5}$, $5,124 \times 3\frac{1}{4}$, $20,85 : 2\frac{2}{3}$.

441) Ἕνα αὐτοκίνητον διανύει εἰς μίαν ὥραν 24,60 χιλιόμετρα. Πόσα χιλιόμετρα διανύει εἰς $\frac{3}{4}$ τῆς ὥρας ;

442) Ἕνας παντοπώλης ἐπώλησε τὰ $\frac{3}{5}$ τοῦ τυροῦ ἑνὸς βαρελίου καὶ ἔμειναν 12,85 χιλιόγραμμα. Πόσον τυρὸν εἶχε κατ' ἀρχὰς τὸ βαρέλιον τοῦτο ;

443) Ἀπὸ ἕνα κρουνὸν χύνονται 2,35 χιλιόγρ. ὕδατος εἰς 1 ὥραν. Πόσον ὕδωρ χύνεται εἰς $5\frac{1}{4}$ ὥρας ;

§ 237. Πῶς τρέπεται κοινὸν κλάσμα εἰς δεκαδικὸν ἀριθμόν.
Πρόβλημα 1ον. **Τέσσαρα κυτία σάπωνος πολυτελείας ἔχουν βάρος 3 χιλιόγραμμα. Νὰ εὑρεθῇ τὸ βάρος ἑκάστου κυτίου.**

Λύσις. Εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ βάρος ἑκάστου κυτίου εἶναι $3 : 4 = \frac{3}{4}$ τοῦ χιλιογράμμου.

Ἂν ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν 3 : 4, εὑρίσκομεν πηλίκον 0,75. Εἶναι λοιπὸν $\frac{3}{4} = 0,75$.

Αὐτὴ ἡ ἐργασία λέγεται **τροπὴ τοῦ κλάσματος $\frac{3}{4}$ εἰς δεκαδικὸν ἀριθμόν.**

Ἂν ἐκτελέσωμεν αὐτὴν τὴν ἐργασίαν διὰ τὸ κλάσμα $\frac{7}{12}$, βλέπομεν ὅτι ἡ διαίρεσις δὲν τελειώνει. Τοῦτο σημαίνει ὅτι δὲν ὑπάρχει δεκαδικὸς ἀριθμὸς ἀκριβῶς ἴσος μὲ τὸ κλάσμα $\frac{7}{12}$.

Διάταξις τῶν πράξεων

$$\begin{array}{r|l} 3,0 & 4 \\ \cline{2-2} 20 & 0,75 \\ 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 7,00 & 12 \\ \cline{2-2} 100 & 0,5833... \\ 40 & \\ 40 & \\ 4 & \end{array}$$

Δυνάμεθα ὅμως νὰ εἴπωμεν ὅτι τὸ $\frac{7}{12}$ γίνεται 0,58 κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{100}$ ἢ γίνεται 0,583 κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{1000}$ κ.τ.λ.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι :

Διὰ νὰ τρέψωμεν ἕνα κοινὸν κλάσμα εἰς δεκαδικὸν ἀριθμόν, διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητήν του διὰ τοῦ παρονομαστοῦ του, ἕως ὅτου εὕρωμεν ὑπόλοιπον 0 ἢ ἕως ὅτου εὑρεθῇ πηλίκον μὲ ὅσην θέλομεν προσέγγισιν.

Παρατήρησις. Ἂν ὁ παρονομαστὴς κοινοῦ ἀναγώγου κλάσματος διαιρῇ ἕνα ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 10, 100, 1000 κ.τ.λ, ἡ τροπὴ αὕτη γίνεται καὶ ὡς ἑξῆς :

Π. χ. διὰ τὸ κλάσμα $\frac{3}{5}$ παρατηροῦμεν ὅτι $10 : 5 = 2$ καὶ

ἑπομένως $\quad \frac{3}{5} = \frac{3 \times 2}{5 \times 2} = \frac{6}{10} = 0,6.$

Ὁμοίως $\quad \frac{17}{25} = \frac{17 \times 4}{25 \times 4} = \frac{68}{100} = 0,68.$

§ 238. Πῶς διακρίνομεν ποῖα κοινὰ κλάσματα τρέπονται ἀκριβῶς εἰς δεκαδικὸν ἀριθμόν. Εἴπομεν προηγουμένως ὅτι, ἂν ὁ παρονομαστὴς ἑνὸς κοινοῦ ἀναγώγου κλάσματος εἶναι διαιρέτης ἑνὸς τῶν ἀριθμῶν 10, 100, 1000 κ.τ.λ, τὸ κλάσμα αὐτὸ γίνεται δεκαδικὸς ἀριθμὸς ἀκριβῶς.

Ἐπειδὴ $10 = 2 \times 5$, $\;100 = 10^2 = 2^2 \times 5^2$, $\;1000 = 10^3 = 2^3 \times 5^3$ κ.τ.λ, διὰ νὰ συμβαίνῃ τὸ προηγούμενον, πρέπει ὁ παρονομαστὴς τοῦ ἀναγώγου κλάσματος νὰ μὴ ἔχῃ πρώτους παράγοντας διαφόρους ἀπὸ τὸν 2 καὶ 5.

Π. χ. ὁ παρονομαστὴς $6 = 2 \times 3$ οὐδένα ἀπὸ τούς ἀριθμοὺς 2×5, $2^2 \times 5^2$, $2^3 \times 5^3$ κ.τ.λ. διαιρεῖ ἀκριβῶς (§ 152). Ἑπομένως τὰ κλάσματα $\frac{1}{6}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{6}$, $\frac{11}{6}$ κ.τ.λ. δὲν τρέπονται ἀκριβῶς εἰς δεκαδικοὺς ἀριθμούς.

Διὰ νὰ διακρίνωμεν λοιπόν, ἂν ἕνα κλάσμα κοινὸν τρέπηται ἀκριβῶς εἰς δεκαδικὸν ἀριθμόν, ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς :

Καθιστῶμεν τὸ κλάσμα ἀνάγωγον, ἂν δὲν εἶναι τοιοῦτον. Ἔπειτα ἀναλύομεν τὸν παρονομαστὴν του εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντων. Ἂν δὲ ὁ παρονομαστὴς ἔχῃ **μόνον** τοὺς παράγοντας 2 καὶ 5 ἢ μόνον ἕνα ἐξ αὐτῶν, τὸ κλάσμα τρέπεται ἀκριβῶς εἰς δεκαδικὸν ἀριθμόν. Ἄλλως δὲν τρέπεται.

Ἀσκήσεις

444) Ποῖα ἀπὸ τὰ ἀκόλουθα κλάσματα τρέπονται ἀκριβῶς εἰς δεκαδικοὺς ἀριθμούς ;

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{5},\ \frac{3}{5},\ \frac{3}{4},\ \frac{5}{8},\ \frac{5}{9},\ \frac{7}{16},\ \frac{16}{12},\ \frac{19}{25},\ \frac{7}{12},\ \frac{27}{18}.$$

445) Νὰ τραποῦν τὰ ἀκόλουθα κλάσματα εἰς δεκαδικοὺς ἀριθμούς :

$$\frac{3}{5},\quad \frac{8}{25},\quad \frac{15}{24},\quad \frac{21}{48},\quad \frac{25}{64},\quad \frac{12}{75}.$$

446) Νὰ τραποῦν τὰ κάτωθι κλάσματα εἰς δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς (μὲ προσέγγισιν 0,01) :

$$\frac{3}{7},\quad \frac{3}{11},\quad \frac{7}{9},\quad \frac{5}{24},\quad \frac{5}{13},\quad \frac{17}{60}.$$

447) Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις :

1. $\frac{3}{4} + 0,85 + 2\frac{1}{2}$, 3. $\frac{5}{8} \times 4,5$, 5. $5\frac{4}{25} - 3,75$,

2. $\frac{4}{5} - 0,724$, 4. $3\frac{1}{8} \times 9,25$, 6. $1,04 : \frac{2}{5}$.

448) Νὰ ὑπολογισθῇ κατὰ προσέγγισιν 0,01 ἡ τιμὴ τῶν :

1. $3 \times \dfrac{1}{7 + \dfrac{1}{10}}$, 2. $\dfrac{\left(\frac{13}{7} \times \frac{4}{5}\right) - \left(\frac{2}{5} \times \frac{5}{7}\right)}{\left(6 \times \frac{5}{8}\right) - \left(\frac{2}{5} \times \frac{3}{7}\right)}$.

§ 239. Συντομίαι πολλαπλασιασμοῦ καὶ διαιρέσεως.

1. Πολλαπλασιασμὸς ἐπὶ 0,5.

Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμὸν ἐπὶ 0,5 λαμβάνομεν τὸ ἥμισυ τοῦ ἀριθμοῦ $\left(\text{διότι } 0{,}5=\frac{1}{2}\right)$.

Π.χ. $48 \times 0{,}5$. Τὸ ἥμισυ τοῦ $48=24$. Ἄρα $48 \times 0{,}5=24$.

2. Πολλαπλασιασμὸς ἐπὶ 0,05.

Λαμβάνομεν τὸ ἥμισυ τοῦ ἀριθμοῦ καὶ τὸ ἐξαγόμενον διαιροῦμεν διὰ 10 (διατί;)

Π.χ. $36 \times 0{,}05$. Τὸ ἥμισυ $36=18$· $18 : 10=1{,}8$. Ἄρα $36\times0{,}05=1{,}8$.

3. Πολλαπλασιασμὸς ἐπὶ 0,25.

Λαμβάνομεν τὸ τέταρτον τοῦ ἀριθμοῦ (διατί;)

Π.χ. $56 \times 0{,}25$. Τὸ τέταρτον τοῦ $56=14$. Ἄρα $56 \times 0{,}25=14$.

4. Πολλαπλασιασμὸς ἐπὶ 2,5.

Λαμβάνομεν τὸ τέταρτον τοῦ ἀριθμοῦ καὶ πολλαπλασιάζομεν τὸ ἐξαγόμενον ἐπὶ 10 (διατί;)

Π.χ. $32 \times 2{,}5$. Τὸ τέταρτον τοῦ $32=8$· $8 \times 10=80$.

Ἄρα $32 \times 2{,}5=80$.

5. Πολλαπλασιασμὸς ἐπὶ 0,1, 0,01, 0,001,...

Διαιροῦμεν τὸν ἀριθμὸν διὰ 10, 100, 1000,...

Π.χ. $45\times 0{,}1=45 : 10=4{,}5$

$342\times 0{,}01=342:100=3{,}42$

$128\times0{,}001=128:1000=0{,}128$

1. Διαίρεσις διὰ 0,5.

Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμὸν διὰ 0,5, διπλασιάζομεν τὸν ἀριθμὸν (διατί;)

Π.χ. $53 : 0{,}5$. Τὸ διπλάσιον τοῦ 53 εἶναι 106. Ἄρα $53 : 0{,}5=106$.

2. Διαίρεσις διὰ 0,05.

Διπλασιάζομεν τὸν ἀριθμὸν καὶ πολλαπλασιάζομεν τὸ ἐξαγόμενον ἐπὶ 10 (διατί;)

Π.χ. $38 : 0{,}05$. Τὸ διπλάσιον τοῦ 38 εἶναι 76· $76 \times 10=760$.

Ἄρα $38 : 0{,}05=760$.

3. Διαίρεσις διὰ 0,25.

Πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀριθμὸν ἐπὶ 4. Π.χ. $75 : 0{,}25$. Τὸ τετραπλάσιον τοῦ 75 εἶναι 300.

Ἄρα $75 : 0{,}25=300$.

4. Διαίρεσις διὰ 2,5.

Πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀριθμὸν ἐπὶ 4 καὶ διαιροῦμεν τὸ ἐξαγόμενον διὰ 10. Π. χ. $43 : 2{,}5$· τὸ τετραπλάσιον τοῦ 43 εἶναι 172. $172 : 10=17{,}2$.

5. Διαίρεσις διὰ 0,1, 0,01, 0,001,...

Πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀριθμὸν ἐπὶ 10, 100, 1000,...

Π.χ. $38: 0{,}1= 38\times10 = 380$

$13{,}5: 0{,}01=13{,}50\times100 =1350$

$0{,}25: 0{,}001= 0{,}25\times1000=250$.

Ἄσκησις

449) Νὰ ἐκτελεσθοῦν ἀπὸ μνήμης αἱ κάτωθι πράξεις :

1.	$56 \times 0{,}5$,	$75 : 0{,}5$,	$46 \times 0{,}05$,	$73 : 0{,}05$.
2.	$44 \times 0{,}25$,	$15 : 0{,}25$,	$24 \times 2{,}5$,	$19 : 2{,}5$.
3.	$13{,}5 \times 0{,}1$,	$3{,}7 \times 0{,}01$,	$5{,}7 : 0{,}1$,	$6{,}5 : 0{,}01$.
4.	$0{,}01 \times 0{,}1$,	$0{,}1 \times 0{,}01$,	$0{,}01 : 0{,}1$,	$0{,}01 : 0{,}001$.

§ 240. Τί εἶναι δεκαδικὰ περιοδικὰ κλάσματα. Εἴδομεν προηγουμένως (§ 237) ὅτι τὰ ψηφία τοῦ πηλίκου 7 : 12 ἀπὸ τῶν ἑκατοστῶν καὶ ἑξῆς εἶναι ὅλα 3 καὶ ἄπειρα.

30	7
20	0,42857142...
60	
40	
50	
10	
30	

Ὁμοίως βεβαιούμεθα ὅτι τὸ κλάσμα $\frac{3}{7}$ δὲν τρέπεται ἀκριβῶς εἰς δεκαδικὸν ἀριθμόν. Ἡ διαίρεσις λοιπὸν 3 : 7 οὐδέποτε τελειώνει. Παρατηροῦμεν δὲ ὅτι τὰ δυνατὰ ὑπόλοιπα εἶναι 1, 2, 3, 4, 5, 6. Ἐπομένως μετὰ 6 τὸ πολὺ διαιρέσεις εὑρίσκομεν ἕνα ἀπὸ τὰ προηγούμενα ὑπόλοιπα. Ἀπὸ τὴν στιγμὴν δὲ αὐτὴν θὰ ἐκτελῶμεν προηγουμένας διαιρέσεις καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν σειράν. Ἐπομένως θὰ εὑρίσκωμεν τὰ αὐτὰ ψηφία τοῦ πηλίκου καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν σειράν. Πράγματι δέ, ἂν ἐξακολουθήσωμεν τὴν διαίρεσιν εὑρίσκομεν πηλίκον 0,428571428571... δηλ. τὰ ψηφία 428571 ἐπαναλαμβάνονται τὰ αὐτὰ καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν σειράν.

Ὁ ἀριθμὸς 0,428571 428571 428571 . . . λέγεται **δεκαδικὸν περιοδικὸν κλάσμα.** Καὶ ὁ ἀριθμὸς 0,58333... εἶναι **δεκαδικὸν περιοδικὸν κλάσμα.** Ὥστε :

Δεκαδικὸν περιοδικὸν κλάσμα εἶναι δεκαδικὸς ἀριθμὸς μὲ ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία, τὰ ὁποῖα ἀπὸ μίαν τάξιν καὶ ἐφεξῆς ἐπαναλαμβάνονται τὰ αὐτὰ καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν σειράν.

Τὸ σύνολον τῶν ψηφίων, τὰ ὁποῖα ἐπαναλαμβάνονται τὰ αὐτὰ καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν, λέγεται **περίοδος.**

Ἡ περίοδος 428571 τοῦ ἀριθμοῦ 0,428571 428571..... ἀρχίζει ἀμέσως μετὰ τὴν ὑποδιαστολήν. Διὰ τοῦτο αὐτὸς ὁ ἀριθμὸς λέγεται **ἁπλοῦν περιοδικὸν κλάσμα.**

Ἡ περίοδος 3 τοῦ ἀριθμοῦ 0,58333..... δὲν ἀρχίζει ἀμέσως μετὰ τὴν ὑποδιαστολήν. Αὐτός δὲ ὁ ἀριθμὸς λέγεται **μεικτὸν περιοδικὸν κλάσμα.**

Ὅταν λοιπὸν ἕνα κοινὸν κλάσμα δὲν τρέπεται ἀκριβῶς εἰς δεκαδικὸν ἀριθμόν, αὐτὸ τρέπεται εἰς περιοδικὸν δεκαδικὸν κλάσμα ἁπλοῦν ἢ μεικτόν.

§ 241. Πῶς εὑρίσκεται τὸ κοινὸν κλάσμα, τὸ ὁποῖον τρέπεται εἰς δοθὲν περιοδικὸν δεκαδικὸν κλάσμα. I. Εἴδομεν προηγουμένως ὅτι τὸ ἁπλοῦν περιοδικὸν κλάσμα 0,428571 428571... γίνεται ἀπὸ τὸ κλάσμα $\frac{3}{7}$.

Ἂν τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος τούτου πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸ πηλίκον 428 571 : 3 = 142 857, εὑρίσκομεν ὅτι $\frac{3}{7} = \frac{428571}{999999}$.

Ἀπὸ τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο ὁδηγούμεθα νὰ ἐξετάσωμεν μήπως π.χ. καὶ ὁ ἀριθμὸς 0,3737.... γίνεται ἀπὸ τὸ κλάσμα $\frac{37}{99}$.

Πρὸς τοῦτο διαιροῦμεν τὸν 37 διὰ 99 μὲ τὸν σύντομον τρόπον ποὺ γνωρίζομεν (§ 103) καὶ εὑρίσκομεν 0 ἀκέραιον πηλίκον καὶ 37 ὑπόλοιπον. Τοῦτο τρέπομεν εἰς 3 700 ἑκατοστά. Ταῦτα διαιροῦμεν διὰ 100 καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 37 ἑκατοστὰ καὶ ὑπόλοιπον 37 ἑκατοστά. Τοῦτο τρέπομεν εἰς 3700 δεκάκις χιλιοστά, τὰ ὁποῖα διαιροῦμεν διὰ 100 καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 37 δεκάκις χιλιοστὰ καὶ ὑπόλοιπον 37 δεκάκις χιλιοστά. Ἐξακολουθοῦντες τὴν διαίρεσιν κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον βλέπομεν ὅτι τὸ πηλίκον εἶναι πράγματι 0,373737.....

Διάταξις
τῆς πράξεως

$$\begin{array}{r|l} 37 & 99 \\ \hline 37 & 0,3737\ldots \end{array}$$

Ἑπομένως 0,373737 . . . = $\frac{37}{99}$. Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι :

Κάθε ἁπλοῦν περιοδικὸν μὲ ἀκέραιον μέρος 0 γίνεται ἀπὸ κλάσμα, τὸ ὁποῖον ἔχει ἀριθμητὴν μίαν περίοδον, παρονομαστὴν δὲ ἀριθμόν, τοῦ ὁποίου ὅλα τὰ ψηφία εἶναι 9 καὶ τόσα, ὅσα εἶναι τὰ ψηφία τῆς περιόδου.

Κατὰ ταῦτα εἶναι $0,99999\ldots = \frac{9}{9} = 1$.

II. Ἔστω τὸ ἁπλοῦν περιοδικὸν κλάσμα 1,536 536 536.... Παρατηροῦμεν ὅτι :

$$1,536\ 536\ 536\ldots = 1 + 0,536\ 536\ldots = 1 + \frac{536}{999} = \frac{999+536}{999}.$$

Ἂν δὲ ἀντὶ 999 θέσωμεν 1 000 — 1, εὑρίσκομεν ὅτι :

$$1{,}536\,536\ldots = \frac{(1000-1)+536}{999} = \frac{1536-1}{999}.$$

Ὁμοίως :

$$3{,}2828\ldots = 3 + \frac{28}{99} = \frac{3\times 99+28}{99} = \frac{3\times(100-1)+28}{99} = \frac{328-3}{99} \text{ κ.τ.λ.}$$

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι καὶ εἰς αὐτὴν τὴν περίπτωσιν τὰ ψηφία τοῦ παρονομαστοῦ εἶναι 9 καὶ ὅσα τὰ ψηφία τῆς περιόδου. Ὁ δὲ ἀριθμητὴς γίνεται ὡς ἑξῆς :

Παραλείπομεν τὴν ὑποδιαστολὴν καὶ ὅλας τὰς περιόδους ἐκτὸς τῆς πρώτης. Ἀπὸ δὲ τὸν προκύπτοντα ἀκέραιον ἀφαιροῦμεν τὸν ἀκέραιον τοῦ δεκαδικοῦ περιοδικοῦ.

III. Ἂν τὸ περιοδικὸν κλάσμα εἶναι μεικτόν, π.χ. 2,4 13 13..... ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς. Παρατηροῦμεν ὅτι :

$$2{,}41313\ldots = 2{,}41313\ldots \times 10 \times \frac{1}{10} = 24{,}1313\ldots \times \frac{1}{10}.$$

Ἐπειδὴ δέ, κατὰ τὴν προηγουμένην περίπτωσιν, εἶναι :

$$24{,}131313\ldots = \frac{2413-24}{99} \text{ ἐννοοῦμεν ὅτι}$$

$$2{,}4131313\ldots = \frac{2413-24}{99} \times \frac{1}{10} = \frac{2413-24}{990}.$$

Ὁμοίως: $1{,}53\,267\,267\ldots = 153{,}267267\ldots \times \frac{1}{100} =$

$$\frac{153267-153}{999} \times \frac{1}{100} = \frac{153267-153}{99900}.$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι :

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ κλάσμα, ἀπὸ τὸ ὁποῖον γίνεται μεικτὸν περιοδικὸν κλάσμα, μεταθέτομεν τὴν ὑποδιαστολὴν πρὸς τὰ δεξιά, ὥστε τὸ περιοδικὸν νὰ γίνῃ ἁπλοῦν. Εὑρίσκομεν τὸ κοινὸν κλάσμα, τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἁπλοῦν αὐτό, καὶ δεξιὰ ἀπὸ τὸν παρονομαστὴν αὐτοῦ γράφομεν τόσα μηδενικά, ὅσα εἶναι τὰ δεκαδικὰ ψηφία τοῦ μὴ περιοδικοῦ μέρους.

Ἀσκήσεις

450) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ κοινὰ κλάσματα, ἀπὸ τὰ ὁποῖα παράγονται τὰ ἀκόλουθα δεκαδικὰ περιοδικὰ κλάσματα :

0,777...,	0,161616...,	0,564564564...,	5,6666...,
12,345345...,	0,528888...,	4,14555...,	15,23147147....

451) Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ ἀκόλουθοι πράξεις :

1. 0,232323..... + 0,5858... + 0,151515....

2. $\frac{15}{11}$ — 0,676767, 0,7272.... × 99, 2,136136... × 999.

452) Νὰ εὑρεθοῦν :

τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ 0,242424..., τὰ $\frac{11}{5}$ τοῦ 0,1515.... καὶ τὰ $\frac{9}{2}$ τοῦ 3,0707...

453) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὰ $\frac{4}{9}$ εἶναι 0,888...

Προβλήματα ἐπὶ τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν

Α΄ Ὁμάς. 454) Ἠγόρασέ τις 65 μέτρα ὑφάσματος ἀντὶ 942,5 χιλιοδράχμων. Μετεπώλησε δὲ αὐτὸ πρὸς 52,50 χιλιόδραχμα τὰ 5 μέτρα. Ἐκέρδισεν ἢ ἐζημιώθη καὶ πόσον κατὰ μέτρον ;

455) Οἰνοπώλης ὀφείλει 816,7 χιλιόδραχμα. Πληρώνει κατ᾽ ἀρχὰς 145 χιλιόδραχμα, ἔπειτα 217,5 χιλιόδραχμα καὶ τέλος 275 χιλιόδραχμα. Διὰ νὰ ἐξοφλήσῃ τὸ χρέος του δίδει εἰς τὸν δανειστήν του οἶνον πρὸς 3,20 χιλιόδραχμα τὴν ὀκᾶν. Πόσας ὀκάδας οἴνου ἔδωκεν ;

456) Δύο γεωργοὶ ἠγόρασαν ἕνα κτῆμα 9,5 στρεμμάτων ἀντὶ 4 632,20 χιλιοδράχμων. Ὁ πρῶτος ἔλαβε 5,60 στρέμματα, ὁ δὲ β΄ τὸ ὑπόλοιπον. Πόσα πρέπει νὰ πληρώσῃ ἕκαστος ;

457) Ἐργάτης εἰργάσθη 25 ἡμέρας καὶ ἔλαβε 1 612,50 χιλιόδραχμα. Τὸν ἄλλο μῆνα εἰργάσθη 24 ἡμέρας, τὸν δὲ τρίτον μῆνα 20 ἡμέρας μὲ τὸ αὐτὸ ἡμερομίσθιον. Πόσα χρήματα ἔλαβε κατὰ τὴν τριμηνίαν αὐτήν ;

458) Δύο ἐργάται, οἱ ὁποῖοι ἐλάμβανον τὸ αὐτὸ ἡμερομίσθιον, ἔλαβον ἐν ὅλῳ 1 042,8 χιλιόδραχμα. Ὁ πρῶτος, ὁ ὁποῖος εἰργάσθη ἐπὶ 25 ἡμέρας, ἔλαβε 592,5 χιλιόδραχμα. Πόσας ἡμέρας εἰργάσθη ὁ β΄;

459) Ἠγόρασέ τις αὐγὰ πρὸς 7,5 χιλιόδραχμα τὰ δέκα. Δίδει δύο χαρτονομίσματα τῶν 10 χιλιοδράχμων καὶ λαμβάνει ὑπόλοιπον 1,25 χιλιόδραχμα. Πόσα αὐγὰ ἠγόρασεν ;

460) Διὰ νὰ πληρώσῃ τις 12,60 μέτρα ἑνὸς ὑφάσματος πρὸς 18 χιλιόδραχμα τὸ μέτρον, διέθεσε τὰ $\frac{3}{4}$ τῶν χρημάτων, τὰ ὁποῖα εἶχε. Πόσα χρήματα εἶχεν;

461) Μία οἰκογένεια ἐξοδεύει 2 ὀκάδας ἐλαίου καθ' ἑβδομάδα, τὸ ὁποῖον ἀγοράζει πρὸς 9,8 χιλιόδραχμα κατ' ὀκᾶν. Πόσην οἰκονομίαν θὰ ἔχῃ καθ' ἑβδομάδα, ἐὰν ἀγοράσῃ χονδρικῶς ἕνα δοχεῖον ἔλαιον τῶν 12,5 ὀκάδων ἀντὶ 103,75 χιλιοδράχμων ;

Β' Ὁ μ ά ς. 462) Ἔμπορος ἠγόρασεν 82,75 μέτρα ὑφάσματος ἀντὶ 2 689,375 χιλιοδράχμων. Ἔπειτα ἕνα ἄλλο ὕφασμα ἀντὶ 479,2 χιλιοδράχμων. Τό μέτρον τοῦ β' ὑφάσματος κοστίζει 4,25 χιλιόδραχμα ὀλιγώτερον ἀπὸ τὴν ἀξίαν τοῦ μέτρου τοῦ α' ὑφάσματος. Πόσα μέτρα ἠγόρασεν ἐκ τοῦ β' ὑφάσματος ;

463) Ἠγόρασέ τις ἕνα ὕφασμα πρὸς 219 χιλιόδραχμα τὰ 6 μέτρα καὶ τὸ ἐπώλησε πρὸς 364,80 χιλιόδραχμα τὰ 8 μέτρα. Ἐκ τῆς πωλήσεως αὐτοῦ ἐκέρδισε 318,50 χιλιόδραχμα. Πόσον ὕφασμα εἶχεν ἀγοράσει ;

464) Γεωργὸς ἔσπειρεν 150 ὀκάδας σίτου, τὸν ὁποῖον εἶχεν ἀγοράσει πρὸς 2,3 χιλιόδραχμα τὴν ὀκᾶν. Ἐκ τῆς σπορᾶς αὐτῆς παρήχθη σῖτος δεκατετραπλασίας ποσότητος, τὸν ὁποῖον ἐπώλησε πρὸς 2,50 χιλιόδραχμα τὴν ὀκᾶν. Νὰ εὑρεθῇ τὸ κέρδος τοῦ γεωργοῦ, ἂν γνωρίζωμεν ὅτι τὰ ἔξοδα τῆς καλλιεργείας ἀνῆλθον εἰς τὸ $\frac{1}{5}$ τῆς τιμῆς τῆς πωλήσεως.

465) Μία οἰκοκυρὰ διὰ νὰ κάμῃ πετσέτες τοῦ προσώπου ἠγόρασεν ὕφασμα καὶ ἔδωκεν 92,8 χιλιόδραχμα. Ἂν ὅμως ἠγόραζεν 1,25 μέτρα ἀκόμη, θὰ ἔκαμνε 18 πετσέτες. Διὰ κάθε πετσέτα χρειάζεται 0,875 μέτρα. Πόσον ἀξίζει τὸ μέτρον τοῦ ὑφάσματος ;

466) Μία οἰκοκυρὰ ἠγόρασε δύο ὑφάσματα τῆς αὐτῆς ποιότητος. Διὰ τὸ ἕνα ἔδωκεν 161 χιλιόδραχμα καὶ διὰ τὸ ἄλλο, τὸ ὁποῖον ἦτο κατὰ 2,125 μέτρα περισσότερον τοῦ πρώτου, ἔδωκε 239, 2 χιλιόδραχμα. Πόσα μέτρα ἦτο τὸ καθένα;

Γ' Ὁ μ ά ς. 467) Παντοπώλης εἶχεν ἀγοράσει 75,50 ὀκάδας νωποῦ σάπωνος πρὸς 7,8 χιλιόδραχμα τὴν ὀκᾶν. Μετά τινα χρόνον ζυγίζει τὸν σάπωνα καὶ παρατηρεῖ ὅτι τὸ βάρος τοῦ σάπωνος εἶχεν ἐλαττωθῆ κατὰ 8,75 ὀκάδας. Πωλεῖ ἔπειτα τὸν σάπωνα καὶ κερδίζει 25,2 χιλιόδραχμα. Πόσον ἐπώλησε τὴν ὀκᾶν ;

468) Ἔμπορος ἠγόρασε 360 ὀκάδας γεωμήλων. Τὸ $\frac{1}{9}$ αὐτῶν ἐσάπισε καὶ τὸ ὑπόλοιπον ἐπώλησε πρὸς 1,4 χιλιόδραχμα τὴν ὀκᾶν.

Ἐὰν γνωρίζωμεν ὅτι ἐζημιώθη 34,4 χιλιόδραχμα, νὰ εὑρεθῇ πόσον ἠγόρασε τὴν ὀκᾶν.

469) Ἔμπορος ἠγόρασε 45 μέτρα ὑφάσματος πρὸς 64,50 χιλιόδραχμα τὸ μέτρον. Ἐπώλησε τὰ $\frac{3}{5}$ αὐτοῦ πρὸς 75 χιλιόδραχμα τὸ μέτρον. Πόσον πρέπει νὰ πωλήσῃ τὸ μέτρον τοῦ ὑπολοίπου ὑφάσματος διὰ νὰ κερδίσῃ ἐν ὅλῳ 369,9 χιλιόδραχμα ;

470) Ἔμπορος ἠγόρασε σῖτον πρὸς 2,40 χιλιόδραχμα τὴν ὀκᾶν καὶ ἐπλήρωσεν 820,8 χιλιόδραχμα. Ἐπώλησεν ἔπειτα τὸ $\frac{1}{4}$ αὐτοῦ εἰς τὴν τιμὴν τῆς ἀγορᾶς καὶ ἀπὸ τὸ ὑπόλοιπον ἔχασεν 0,25 χιλιόδραχμα τὴν ὀκᾶν. Πόσον εἰσέπραξεν ἐκ τῆς πωλήσεως ;

Δ' Ὁ μ ά ς. 471) Εἰς μίαν ἐκδρομὴν ἔλαβον μέρος 14 ἄτομα, ἄνδρες καὶ γυναῖκες καὶ ἐξώδευσαν ἐν ὅλῳ 620,2 χιλιόδραχμα. Καθένας ἀπὸ τοὺς ἄνδρας ἐξώδευσε 53 χιλιόδραχμα καὶ κάθε μία ἀπὸ τὰς γυναῖκας 32,7 χιλιόδραχμα. Πόσοι ἦσαν οἱ ἄνδρες καὶ πόσαι αἱ γυναῖκες ;

Λύσις. Ἐὰν ἦσαν ὅλοι ἄνδρες, θὰ ἐξώδευον $53 \times 14 = 742$ χιλιόδραχμα. Ἀλλὰ ὅλα τὰ ἔξοδα ἦσαν 620,2 χιλιόδραχμα. Ἡ διαφορά, ἡ ὁποία εἶναι $742 - 620,2 = 121,8$ προέρχεται ἀπὸ τὰς γυναῖκας, διότι καθεμία ἐξώδευσεν 20,3 χιλιόδραχμα ὀλιγώτερον καθενὸς ἀνδρός. Ὅσας λοιπὸν φορὰς ὁ 20,3 χωρεῖ εἰς τὸ 121,8 τόσαι ἦσαν αἱ γυναῖκες. Ἄρα αἱ γυναῖκες ἦσαν $121,8 : 20,3 = 6$ καὶ οἱ ἄνδρες 8.

472) Ἕνας χωρικὸς ἐπώλησεν 69 αὐγὰ καὶ ἔλαβε 55,35 χιλιόδραχμα. Ἐξ αὐτῶν ἐπώλησεν ἄλλα πρὸς 0,75 χιλιόδραχμα τὸ καθένα καὶ ἄλλα πρὸς 0,9 χιλιόδραχμα τὸ καθένα. Πόσα αὐγὰ ἐπώλησε πρὸς 0,75 χιλιόδραχμα καὶ πόσα πρὸς 0,9 χιλιόδραχμα ;

473) Ἔμπορος ἐπώλησεν 67,50 μέτρα ὑφάσματος ἀντὶ 990 χιλιοδράχμων. Ἐὰν γνωρίζωμεν ὅτι τὸ κέρδος, ποὺ προῆλθεν ἐκ τῆς πωλήσεως, ἦτο ἴσον μὲ τὰ $\frac{2}{9}$ τῆς τιμῆς τῆς ἀγορᾶς τοῦ ὑφάσματος, νὰ εὑρεθῇ πόσον εἶχεν ἀγοράσει τὸ μέτρον.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄

ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ ΡΙΖΑ ΑΡΙΘΜΟΥ

§ 242. Τετράγωνον ἀριθμοῦ. Γνωρίζομεν ὅτι **τετράγωνον ἑνὸς** ἀριθμοῦ λέγεται τὸ γινόμενον αὐτοῦ ἐπὶ τὸν ἑαυτόν του.

Οὕτω τὸ τετράγωνον τοῦ 5 εἶναι 5×5, δηλ. 25 καὶ γράφεται 5^2. Ὁμοίως, τὸ τετράγωνον τοῦ $\frac{3}{4}$ εἶναι $\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$.

Τὰ τετράγωνα τῶν ἀριθμῶν

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,

εἶναι ἀντιστοίχως τὰ ἑξῆς :

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100.

§ 243. Τετραγωνικὴ ρίζα ἀριθμοῦ. Εἴδομεν ὅτι τετράγωνον τοῦ 5 εἶναι ὁ 25. Ὁ 5 λέγεται τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 25. Ὁμοίως ἐπειδὴ $4^2 = 16$, ὁ 4 εἶναι τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 16. Ὥστε :

Τετραγωνικὴ ρίζα δοθέντος ἀριθμοῦ λέγεται ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ὑψούμενος εἰς τὸ τετράγωνον δίδει τὸν δοθέντα.

Οὕτως ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 49 εἶναι 7, διότι $7^2 = 49$. Ὁμοίως ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ $\frac{9}{16}$ εἶναι $\frac{3}{4}$, διότι $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$.

Τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν παριστῶμεν μὲ τὸ σύμβολον $\sqrt{}$, τὸ ὁποῖον λέγεται **ριζικόν**. Κάτωθεν τοῦ ριζικοῦ γράφομεν τὸν ἀριθμόν, τοῦ ὁποίου ζητοῦμεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν. Οὕτως ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 64 σημειοῦται οὕτω $\sqrt{64}$. Εἶναι δὲ $\sqrt{64} = 8$, διότι $8^2 = 64$.

§ 244. Τέλεια τετράγωνα. Τετραγωνικὴ ρίζα ἀκριβὴς ἢ κατὰ προσέγγισιν. Οἱ ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι εἶναι τετράγωνα ἄλλων ἀριθμῶν, ὅπως 49, 64, 81,... $\frac{9}{16}$, $\frac{25}{64}$, ... λέγονται **τέλεια τετράγωνα.**

Ἡ τετραγωνικὴ ρίζα ἑνὸς τελείου τετραγώνου, ἀκεραίου ἢ κλάσματος, εἶναι ἀντιστοίχως ἀκέραιος ἢ κλάσμα καὶ λέγεται ἀκριβὴς τετ. ρίζα αὐτοῦ. Οὕτω $\sqrt{36} = 6$, $\sqrt{100} = 10$, $\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$.

Ὁ ἀριθμὸς 20 δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον. Ἀμέσως μικρότερον τοῦ 20 τέλειον τετράγωνον εἶναι ὁ 16 καὶ ἀμέσως μεγαλύτερον εἶναι ὁ 25. Ἡ τετρ. ρίζα λοιπὸν τοῦ 20 εἶναι μικροτέρα ἀπὸ τὴν $\sqrt{25} = 5$ καὶ μεγαλυτέρα ἀπὸ τὴν $\sqrt{16} = 4$.

Ἂν δὲ λάβωμεν ὡς τετρ. ρίζαν τοῦ 20 τὸν 4, κάμνομεν λάθος. Ἀλλὰ τὸ λάθος τοῦτο εἶναι μικρότερον τῆς 1. Δι' αὐτὸν τὸν λόγον ὁ 4 λέγεται τετρ. ρίζα τοῦ 20 κατὰ **προσέγγισιν ἀκεραίας μονάδος.**

Ὁμοίως τετρ. ρίζα τοῦ 58 κατὰ προσέγγισιν ἀκεραίας μονάδος εἶναι ὁ 7, διότι $7^2 = 49 < 58$, ἀλλὰ $8^2 = 64 > 58$. Γενικῶς :

Τετραγωνικὴ ρίζα ἀκεραίου ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν ἀκεραίας μονάδος λέγεται ὁ μεγαλύτερος ἀκέραιος, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον χωρεῖ εἰς αὐτὸν τὸν ἀριθμόν.

Ἡ εὕρεσις τῆς τετρ. ρίζης, ἀκριβοῦς ἢ κατὰ προσέγγισιν, λέλέγεται **ἐξαγωγὴ τῆς τετραγωνικῆς ρίζης.**

Οἱ ἀριθμοὶ οἱ περιλαμβανόμενοι μεταξὺ δύο διαδοχικῶν τελείων τετραγώνων ἔχουν τὴν αὐτήν, κατὰ προσέγγισιν ἀκεραίας μονάδος, τετραγωνικὴν ρίζαν.

Οὕτως ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τῶν 65, 66, 67,...... 80, εἶναι ὁ 8 κατὰ προσέγγισιν ἀκεραίας μονάδος.

§ 245. Ἐξαγωγὴ τῆς τετραγωνικῆς ρίζης ἑνὸς ἀκεραίου ἀριθμοῦ.. Διὰ νὰ ἐξαγάγωμεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν ἑνὸς ἀριθμοῦ μικροτέρου τοῦ 100, εἶναι ἀνάγκη νὰ γνωρίζωμεν ἀπὸ μνήμης τὰ τετράγωνα τῶν 10 πρώτων ἀριθμῶν.

Οὕτως ἡ $\sqrt{81}$ εἶναι 9, διότι $9^2 = 81$. Ἡ $\sqrt{75}$ εἶναι 8 κατὰ προσέγγισιν μονάδος.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν ἀριθμοῦ μεγαλυτέρου τοῦ 100 π.χ. τοῦ 74 568, ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς :

7'45'68	273 τ. ρίζα		
4	48	47	543
34.5	8	7	3
32 9	384	329	1629
1 66.8			
1 62 9			
3 9			

Χωρίζομεν τὸν δοθέντα ἀριθμὸν εἰς διψήφια τμήματα, ἀρχόμενοι ἐκ δεξιῶν πρὸς τὰ ἀριστερά, (τὸ τελευταῖον τμῆμα δύναται νὰ εἶναι μονοψήφιον).

Εὑρίσκομεν ἔπειτα τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ 7, ἡ ὁποία εἶναι 2 (κατὰ προσέγγισιν ἀκ. μονάδος). Τὸ 2 εἶναι τὸ πρῶτον ψηφίον τῆς ρίζης τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ. Γράφωμεν τοῦτο δεξιὰ τοῦ ἀριθμοῦ, ἀπὸ τὸν ὁποῖον τὸ χωρίζομεν διὰ κατακορύφου γραμμῆς. Ἀφαιροῦμεν ἔπειτα τὸ τετράγωνον τοῦ 2, δηλ. τὸν 4, ἀπὸ τὸν 7 καὶ δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου 3 καταβιβάζομεν τὸ ἀκόλουθον διψήφιον τμῆμα, ὁπότε σχηματίζεται ὁ ἀριθμὸς 345. Χωρίζομεν διὰ στιγμῆς τὸ τελευταῖον ψηφίον τοῦ ἀριθμοῦ 345.

Διπλασιάζομεν τὸ ψηφίον 2 τῆς ρίζης καὶ τὸ διπλάσιον αὐτοῦ 4 γράφομεν κάτωθεν τοῦ 2. Παρατηροῦμεν πόσας φορὰς χωρεῖ ὁ 4 εἰς τὸν 34. Ὁ 4 εἰς τὸν 34 χωρεῖ 8. Γράφομεν τὸ 8 παραπλεύρως τοῦ 4 καὶ τὸν προκύπτοντα ἀριθμὸν 48 πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 8. Ἐπειδὴ τὸ γινόμενον $48 \times 8 = 384$ δὲν δύναται νὰ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τὸν 345, θέτομεν παραπλεύρως τοῦ 4 τὸν 7 (ἀμέσως κατώτερον τοῦ 8). Τὸ γινόμενον $47 \times 7 = 329$ ἀφαιρεῖται ἀπὸ τὸν 345 καὶ ἑπομένως τὸ 7 εἶναι τὸ δεύτερον ψηφίον τῆς τ. ρίζης. Γράφομεν τὸν 7 παραπλεύρως τοῦ 2. Ἀφαιροῦμεν ἔπειτα τὸ γινόμενον 329 ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ 345 καὶ εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον 16.

Δεξιὰ αὐτοῦ καταβιβάζομεν τὸ ἀκόλουθον διψήφιον τμῆμα 68, ὁπότε προκύπτει ὁ ἀριθμὸς 1668. Τούτου χωρίζομεν πάλιν τὸ τελευταῖον ψηφίον 8 διὰ στιγμῆς. Διπλασιάζομεν τὸ εὑρεθὲν μέρος τῆς ρίζης 27 καὶ τὸ διπλάσιον τούτου 54 γράφομεν κάτωθεν τῆς ὁριζοντίου γραμμῆς. Διαιροῦμεν τὸ 166 διὰ τοῦ 54. Τὸ πηλίκον εἶναι 3. Γράφομεν τὸ 3 δεξιὰ τοῦ 54, ὁπότε προκύπτει ὁ ἀριθμὸς 543. Πολλαπλασιάζομεν τοῦτον ἐπὶ 3 καὶ τὸ γινόμενον $543 \times 3 = 1629$ ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὸ 1668 καὶ εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον 39. Τὸ 3 εἶναι τὸ τρίτον ψηφίον τῆς ρίζης· γράφομεν τοῦτο παραπλεύρως τοῦ 27. Ἡ τετραγωνικὴ ρίζα λοιπὸν τοῦ 74 568 εἶναι 273 κατὰ προσέγγισιν ἀκεραίας μονάδος.

Ὁμοίως ἐργαζόμενοι εὑρίσκομεν ὅτι ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 5 625 εἶναι 75 ἀκριβῶς.

56'25	75
49	145
72.5	5
725	725
0	

Παρατήρησις. Ἐὰν μία ἐκ τῶν ἐκτελουμένων διαιρέσεων δώσῃ πηλίκον μηδέν, γράφομεν ἕνα 0 δεξιὰ τοῦ προηγουμένου ψηφίου τῆς ρίζης καὶ καταβιβάζομεν τὸ ἀκόλουθον διψήφιον τμῆμα. Ἂν πάλιν μία ἐκ τῶν ἐκτελουμένων διαιρέσεων δώσῃ πηλίκον μεγαλύτερον τοῦ 9, ἀρχίζομεν τὰς δοκιμὰς ἀπὸ τοῦ 9.

§ 246. Δοκιμή. Διὰ νὰ εἶναι τὸ ἐξαγόμενον τῆς πράξεως ἀκριβές, πρέπει :

1ον. Κάθε ὑπόλοιπον νὰ μὴ ὑπερβαίνῃ τὸ διπλάσιον τοῦ εὑρεθέντος μέρους τῆς ρίζης.

2ον. Τὸ τετράγωνον τῆς ρίζης αὐξανόμενον κατὰ τὸ ὑπόλοιπον νὰ δίδῃ τὸν δοθέντα ἀριθμόν.

Π.χ. Εἴδομεν ἀνωτέρω ὅτι ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ ἀριθμοῦ 74568 εἶναι 273 καὶ τὸ ὑπόλοιπον 39. Ἡ πρᾶξις εἶναι ἀκριβής, διότι $273^2 + 39 = 74\,529 + 39 = 74\,568$.

Σημείωσις 1η. Ἐὰν ἀκέραιος ἀριθμὸς λήγῃ εἰς 2 ἢ 3 ἢ 7 ἢ 8 ἢ εἰς περιττὸν ἀριθμὸν μηδενικῶν δὲν εἶναι τετράγωνον ἄλλου.

Σημείωσις 2α. Τετραγωνικὴ ρίζα ἑνὸς δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν ἀκεραίας μονάδος εἶναι ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ ἀκεραίου του.

Π.χ. ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 25,17 κατὰ προσέγγισιν ἀκεραίας μονάδος εἶναι 5. Διότι $5^2 = 25 < 25{,}17$, ἐνῷ $6^2 = 36 > 25{,}17$.

§ 247. Τετραγωνικὴ ρίζα ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$ κ.τ.λ. Ἂν σχηματίσωμεν τὸ τετράγωνον τῶν ἀριθμῶν

$$\frac{1}{10} \quad \frac{2}{10} \cdots \quad \frac{16}{10} \quad \frac{17}{10} \quad \frac{18}{10}$$

εὑρίσκομεν ἀντιστοίχως τοὺς ἀριθμοὺς

$$\frac{1}{100} \quad \frac{4}{100} \cdots \quad \frac{256}{100} \quad \frac{289}{100} \quad \frac{324}{100}.$$

Ἂν συγκρίνωμεν αὐτὰ τὰ τετράγωνα πρὸς τὸν ἀριθμὸν π.χ. 3, βλέπομεν εὐκόλως ὅτι ὁ 3 περιέχεται μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν 2,89 καὶ 3,24. Εἶναι δηλαδὴ $2{,}89 < 3 < 3{,}24$ ἢ $1{,}7^2 < 3 < 1{,}8^2$.

Ἀπὸ τὰς σχέσεις ταύτας ἐννοοῦμεν ὅτι ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 3 εἶναι μεταξὺ τοῦ 1,7 καὶ τοῦ 1,8, οἱ ὁποῖοι διαφέρουν κατὰ $\frac{1}{10}$.

Ἂν λοιπὸν λάβωμεν ὡς τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ 3 τὸν ἀριθμὸν 1,8 ἢ $\frac{17}{10}$, κάμνομεν λάθος μικρότερον ἀπὸ $\frac{1}{10}$.

Δι' αὐτὸ ὁ ἀριθμὸς 1,7 λέγεται τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 3 κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{10}$. Ὥστε :

Τετραγωνικὴ ῥίζα ἑνὸς ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{10}$ εἶναι τὸ μεγαλύτερον ἀπὸ τὰ κλάσματα μὲ παρονομαστὴν 10, τὰ ὁποῖα ἔχουν τετράγωνα μικρότερα ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν τοῦτον.

Αὐτὴ ἡ ἐργασία, τὴν ὁποίαν ἐκάμαμεν προηγουμένως, διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν 1,7 τοῦ 3, εἶναι πολὺ ἐπίπονος.

Πρακτικῶς διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν ἑνὸς ἀκεραίου ἢ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν 0,1 ἢ 0,01 ἢ 0,001... ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς:

Πολλαπλασιάζομεν τὸν δοθέντα ἀριθμὸν ἐπὶ τὸ τετράγωνον τοῦ 10 ἢ τοῦ 100 ἢ τοῦ 1000 κ.τ.λ. καὶ τοῦ προκύπτοντος ἀριθμοῦ ἐξάγομεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν κατὰ προσέγγισιν ἀκ. μονάδος. Τὴν οὕτως εὑρεθεῖσαν ῥίζαν διαιροῦμεν ἔπειτα διὰ 10 ἢ 100 ἢ 1000...

Παραδείγματα. Νὰ ἐξαχθῇ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα κατὰ προσέγγισιν 0,01 1ον. τοῦ ἀριθμοῦ 3, 2ον. τοῦ ἀριθμοῦ 45,7.

3'00'0 0	173	
1	27	343
20.0	7	3
1 8 9	189	1029
1 1 0.0		
1 0 2 9		
7 1		

45'7 0'0 0	676	
36	127	1346
9 7.0	7	6
8 8 9	889	8076
8 1 0.0		
8 0 7 6		
2 4		

Ὥστε: $\sqrt{3} = 1{,}73$ κατὰ προσέγγισιν 0,01· ὑπόλοιπον 0,0071

$\sqrt{45{,}7} = 6{,}76$ κατὰ προσέγγισιν 0,01· ὑπόλοιπον 0,0024.

§ 248. Ἐξαγωγὴ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης ἑνὸς κλάσματος. Ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα ἑνὸς κλάσματος εὑρίσκεται, ἂν διαιρέσωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ ἀριθμητοῦ διὰ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ παρονομαστοῦ.

Κατὰ τὴν ἐφαρμογὴν τοῦ κανόνος τούτου εἶναι δυνατὸν νὰ παρουσιασθοῦν αἱ κάτωθι περιπτώσεις:

Περίπτωσις 1η. Ἐὰν οἱ δύο ὅροι τοῦ κλάσματος εἶναι τέλεια τετράγωνα. Ἔστω τὸ κλάσμα $\frac{25}{36}$. Ἡ τετραγωνική ῥίζα του εἶναι:

$$\sqrt{\frac{25}{36}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{36}} = \frac{5}{6}. \quad \text{Ὁμοίως εἶναι :} \quad \sqrt{\frac{1}{49}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{49}} = \frac{1}{7}.$$

Περίπτωσις 2α. Ἐὰν μόνον ὁ παρονομαστὴς εἶναι τέλειον τετράγωνον.

Π.χ. θὰ εἶναι $\sqrt{\frac{2}{81}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{81}} = \frac{1,49}{9}.$

Ὁμοίως εἶναι $\sqrt{\frac{58}{64}} = \frac{\sqrt{58}}{\sqrt{64}} = \frac{7,6}{8} = \frac{76}{80}.$

Περίπτωσις 3η. Ἐὰν ὁ παρονομαστὴς δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν πολλαπλασιάζομεν καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος ἐπὶ τὸν παρονομαστήν του καὶ ἐργαζόμεθα ἔπειτα ὅπως εἰς τὴν 2αν περίπτωσιν.

Π.χ. $\sqrt{\frac{5}{12}} = \sqrt{\frac{5\times 12}{12\times 12}} = \frac{\sqrt{60}}{\sqrt{144}} = \frac{7,7}{12} = \frac{77}{120}.$

Σημείωσις. Δυνάμεθα νὰ τρέψωμεν τὸ κλάσμα εἰς δεκαδικὸν ἀριθμὸν καὶ νὰ εὕρωμεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν 0,1 ἢ 0,01 ἢ 0,001...

Ἀσκήσεις

474) Νὰ ἐξαχθῇ ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τῶν κάτωθι ἀριθμῶν :

441, 2 704, 7 056, 697 225.

475) Νὰ ἐξαχθῇ κατὰ προσέγγισιν ἀκ. μονάδος ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τῶν κάτωθι ἀριθμῶν :

5 179, 5 741, 57 482, 82 609,
5 039,47, 437,89, 99 225,08, 12 324,8.

476) Νὰ ὑπολογισθῇ κατὰ προσέγγισιν 0,01 ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τῶν κάτωθι ἀριθμῶν :

5, 7, 11, 13, 437, 57,98, 457,63, 69,560.

477) Νὰ ἐξαχθῇ ἀπὸ μνήμης ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τῶν κάτωθι κλασμάτων :

$$\frac{25}{36}, \quad \frac{49}{81}, \quad \frac{1}{100}, \quad \frac{64}{9}, \quad \frac{36}{100}.$$

478) Νὰ ἐξαχθῇ ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τῶν κάτωθι κλασμάτων κατὰ προσέγγισιν 0,01 :

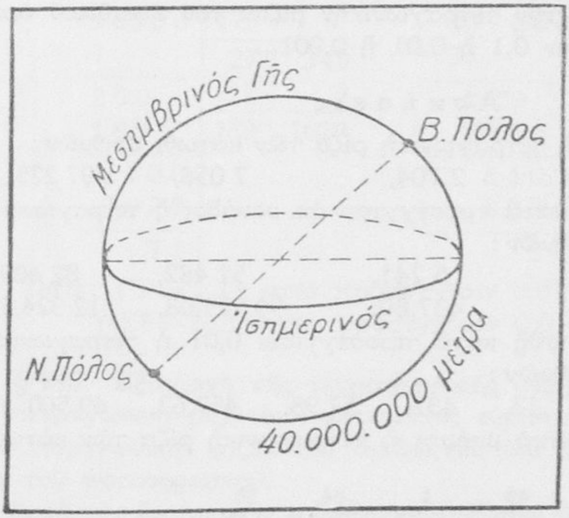
$$\frac{12}{81}, \quad \frac{24}{25}, \quad \frac{55}{49}, \quad \frac{47}{100}, \quad \frac{912}{1849}, \quad \frac{174}{1025}.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'

ΜΕΤΡΙΚΟΝ ΣΥΣΤΗΜΑ

§ 249. **Μέτρον ποσοῦ.** Γνωρίζομεν ὅτι, διὰ νὰ μετρήσωμεν ἕνα συνεχὲς ποσόν, πρέπει νὰ τὸ συγκρίνωμεν πρὸς ἕνα ἄλλο ὁμοειδὲς καὶ γνωστὸν ποσόν, τὸ ὁποῖον λαμβάνομεν ὡς μονάδα. Ἐκ τῆς συγκρίσεως αὐτῆς προκύπτει ἕνας ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ὀνομάζεται **μέτρον** τοῦ ποσοῦ καὶ ὁ ὁποῖος φανερώνει ἀπὸ πόσας μονάδας καὶ μέρη αὐτῆς ἀποτελεῖται τὸ δοθὲν ποσόν.

§ 250. **Μονάδες μήκους**. Τὸ ἐξαγόμενον τῆς μετρήσεως μιᾶς γραμμῆς λέγεται **μῆκος αὐτῆς**. Αἱ δὲ μονάδες, τὰς ὁποίας χρησιμοποιοῦμεν διὰ τὴν μέτρησιν τῶν γραμμῶν, λέγονται **μονάδες μήκους**. Συνηθέστεραι δὲ μονάδες μήκους εἶναι αἱ ἑξῆς:

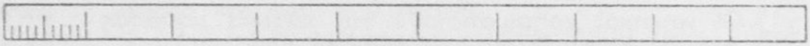


Σχ. 7.

α') 1ον. Τὸ **μέτρον** ἢ ὁ **βασιλικὸς πῆχυς**. Τὸ μέτρον ὡρίσθη ἴσον μὲ τὸ $\frac{1}{40\,000\,000}$ τοῦ γηίνου μεσημβρινοῦ (σχ. 7).

Ὑποδιαιρέσεις τοῦ μέτρου. Τὸ μέτρον διαιρεῖται εἰς δέκα ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται **παλάμαι**.

Κάθε παλάμη διαιρεῖται ἐπίσης εἰς 10 ἴσα μέρη (σχ. 8), τὰ ὁποῖα λέγονται **δάκτυλοι** (κοινῶς **πόντοι**).



Ἡ παλάμη διῃρημένη εἰς 10 δακτύλους

Σχ. 8

Κάθε δὲ δάκτυλος διαιρεῖται εἰς 10 ἴσας **γραμμάς**.

Ὥστε :	1 μέτρ.	=	10 παλ.	=	100 δακ.	=	1000 γραμ.
			1 »	=	10 »	=	100 »
					1 δάκ.	=	10 »

Ὁ δάκτυλος λοιπὸν εἶναι τὸ $\frac{1}{100}$ τοῦ μέτρου· δι' αὐτὸ λέγεται καὶ **ἑκατοστόμετρον**.

Ἡ γραμμὴ εἶναι $\frac{1}{1000}$ τοῦ μέτρου· δι' αὐτὸ λέγεται καὶ **χιλιοστόμετρον**.

Ὡς παρατηροῦμεν, κάθε μία τῶν ἀνωτέρω μονάδων εἶναι δεκαπλασία τῆς ἀμέσως κατωτέρας της. Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ γράφωμεν τὰ μήκη τῶν γραμμῶν ὡς δεκαδικοὺς ἀριθμούς.

Ἀντὶ π.χ. νὰ εἴπωμεν ὅτι μία γραμμὴ ἔχει μῆκος 5 μέτρα 6 παλάμας 7 δακτύλους 9 γραμμάς, λέγομεν ὅτι ἔχει μῆκος 5,679 μέτρα. Καὶ ἀντιστρόφως μῆκος 3,468 μ. εἶναι ἴσον πρὸς μῆκος 3 μέτρων 4 παλαμῶν 6 δακτύλων 8 γραμμῶν.

Πολλαπλάσια τοῦ μέτρου εἶναι τὰ ἑξῆς :

Τὸ **δεκάμετρον**	τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον μὲ	10 μ.
Τὸ **ἑκατόμετρον**	» » » » »	100 μ.
Τὸ **χιλιόμετρον** ἢ **στάδιον**	» » » » »	1 000 μ.

2ον. Ὁ **μικρὸς πῆχυς τῆς Κωνσταντινουπόλεως,** ὁ ὁποῖος λέγεται καὶ ἁπλῶς **πῆχυς**. Ὁ πῆχυς ἰσοῦται πρὸς τὰ 0,648 μ. περίπου καὶ διαιρεῖται εἰς 8 ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται **ρούπια.** Τὸν πῆχυν χρησιμοποιοῦμεν συνήθως διὰ τὴν μέτρησιν τῶν ὑφασμάτων.

3ον. Ὁ **τεκτονικὸς πῆχυς**, ὁ ὁποῖος ἰσοῦται μὲ τὰ 0,75 τοῦ μέτρ.

β') Εἰς τὴν Ἀγγλίαν καὶ τὰς Ἡνωμένας Πολιτείας μεταχειρίζονται τὴν **ὑάρδαν**, ἡ ὁποία εἶναι ἴση μὲ τὰ 0,914 περίπου τοῦ μέτρου. Διαιρεῖται εἰς 3 **πόδας**, ἕκαστος δὲ πούς εἰς 12 **δακτύλους** (ἴντσες).

γ') Οἱ ναυτικοὶ χρησιμοποιοῦν τὰς κάτωθι μονάδας :

1ον. Τὴν **ναυτικὴν λεύγαν** = 5555,55 μ.

2ον. Τὸ **ναυτικὸν μίλιον** = 1852 μ. Τὸ ναυτικὸν μίλιον εἶναι τὸ μῆκος ἑνὸς πρώτου λεπτοῦ τῆς μοίρας τῆς περιφερείας τοῦ μεσημβρινοῦ τῆς Γῆς.

3ον. Τὸν **κόμβον**. Ὁ κόμβος εἶναι τὸ ἑκατοστὸν εἰκοστὸν τοῦ ναυτικοῦ μιλίου, ἤτοι ἰσοῦται μὲ 15,43 μέτρα. Ὁ κόμβος εἶναι μονάς, τὴν ὁποίαν χρησιμοποιοῦν οἱ ναυτικοὶ διὰ νὰ ἐκφράσουν τὴν ταχύτητα τῶν πλοίων. Διὰ νὰ ὑπολογίσουν τὴν ταχύτητα ἑνὸς πλοίου εὑρισκομένου ἐν πλῷ, ἀριθμοῦν (*) πόσους κόμβους διανύει τὸ πλοῖον εἰς 30 δευτερόλεπτα.

Οὕτως, ἂν ἕνα πλοῖον εἰς 30 δευτερόλεπτα διανύῃ 10 κόμβους, ἔχει ταχύτητα 10 μιλίων, δηλαδὴ 1 852 × 10 = 18 520 μέτρα εἰς 1 ὥραν. Ὁμοίως, ἐὰν μία τορπίλη διανύῃ 25 κόμβους, ἔχει ταχύτητα 25 μιλίων.

Ἀσκήσεις

479) Πόσον μέρος τοῦ μέτρου εἶναι ἕνα ρούπι καὶ πόσα ρούπια ἔχει ἕνα μέτρον ;

480) Νὰ τραποῦν : 1ον 48 πήχεις εἰς μέτρα, 2ον 25,80 μέτρα εἰς πήχεις καὶ εἰς ὑάρδας καὶ 3ον 58 ὑάρδαι εἰς μέτρα καὶ εἰς πήχεις.

---

* Ἡ ἀρίθμησις τῶν κόμβων γίνεται ὡς ἑξῆς : Ἀπὸ τὸ πλοῖον πετοῦν εἰς τὴν θάλασσαν ἕνα μεταλλικὸν ὄργανον, τὸ **δρομόμετρον**. Τὸ δρομόμετρον εἶναι συνδεδεμένον μὲ ἕνα καλώδιον, τὸ ὁποῖον φέρει κόμβους εἰς ἀπόστασιν 15,43 μ. ὁ ἕνας ἀπὸ τὸν ἄλλον. Τὸ δρομόμετρον μένει σχεδὸν ἀκίνητον, ὅταν τὸ πλοῖον ἐξακολουθῇ τὴν πορείαν του. Ἀφίνουν ἔπειτα νὰ ξεδιπλωθῇ τὸ καλώδιον ἐπὶ **ἥμισυ** λεπτὸν τῆς ὥρας (30'') καὶ ἀριθμοῦν πόσοι κόμβοι διῆλθον, κατὰ τὸν χρόνον αὐτόν, ἀπὸ τὰς χεῖρας τοῦ ὑπολογίζοντος τὴν ταχύτητα. Ἐὰν π.χ. διῆλθον 15 κόμβοι, κατὰ τὸν χρόνον αὐτόν, τὸ πλοῖον διανύει κατὰ τὸ ἥμισυ λεπτὸν 15,43 μέτρα × 15 καὶ ἑπομένως καθ' ὥραν διανύει 15,43μ. × 15 × 120 ἢ (15,43 × 120)μ. × 15 ἢ 1 μίλ. × 15 = 15 μίλια. (Ἐπειδὴ ὁ κόμβος εἶναι τὸ $\frac{1}{120}$ τοῦ ναυτικοῦ μιλίου).

481) Τὸ μέτρον ἑνὸς ὑφάσματος τιμᾶται 24 000 δραχ. Πόσον τιμᾶται ὁ πῆχυς καὶ πόσον ἡ ὑάρδα;

482) Ἡ ὑάρδα ἑνὸς ὑφάσματος τιμᾶται 8 400 δραχ. Πόσον τιμᾶται τὸ μέτρον καὶ πόσον ὁ πῆχυς;

483) Ἡ πῆχυς ἑνὸς ὑφάσματος τιμᾶται 7 800 δραχ. Πόσον τιμᾶται τὸ μέτρον καὶ πόσον ἡ ὑάρδα;

§ 251. Μονάδες ἐπιφανειῶν. α') Αἱ συνήθεις μονάδες, μὲ τὰς ὁποίας μετροῦμεν τὰς ἐπιφανείας, εἶναι αἱ ἑξῆς:

1ον. Τὸ **τετραγωνικὸν μέτρον** (τ.μ.). Αὐτὸ εἶναι ἕνα τετράγωνον μὲ πλευρὰν 1 μέτρου.

Ὑποδιαιρέσεις τοῦ τετραγωνικοῦ μέτρου. Τὸ τετρ. μέτρον διαιρεῖται εἰς 100 ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται **τετραγωνικαὶ παλάμαι.** Εἶναι δὲ ἡ τετρ. παλάμη ἕνα τετράγωνον μὲ πλευρὰν 1 παλάμης.

Ἡ τετραγωνικὴ παλάμη διαιρεῖται εἰς 100 ἴσα τετράγωνα μὲ πλευρὰν 1 δακτύλου, τὰ ὁποῖα λέγονται **τετραγωνικοὶ δάκτυλοι** ἢ **τετραγωνικὰ ἑκατοστόμετρα** (σχ. 9).

Κάθε τετραγ. δάκτυλος διαιρεῖται εἰς 100 ἴσα τετράγωνα μὲ πλευρὰν 1 γραμμῆς, τὰ ὁποῖα λέγονται **τετραγωνικαὶ γραμμαὶ** ἢ **τετραγωνικὰ χιλιοστόμετρα.**

Κατὰ ταῦτα:

1 τετρ. μέτρον=	100 τ. παλ.=	10 000 τ. δακτ.=	1 000 000 τ. γρ.
	1 τ. παλ.=	100 τ. δακτ.=	10 000 τ. γρ.
		1 τ. δάκτ.=	100 τ. γρ.

Ἐπειδὴ κάθε μία τῶν ἀνωτέρω μονάδων εἶναι ἑκατονταπλασία τῆς ἀμέσως κατωτέρας της, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν τὰ ἐμβαδὰ τῶν ἐπιφανειῶν ὡς δεκαδικοὺς ἀριθμούς.

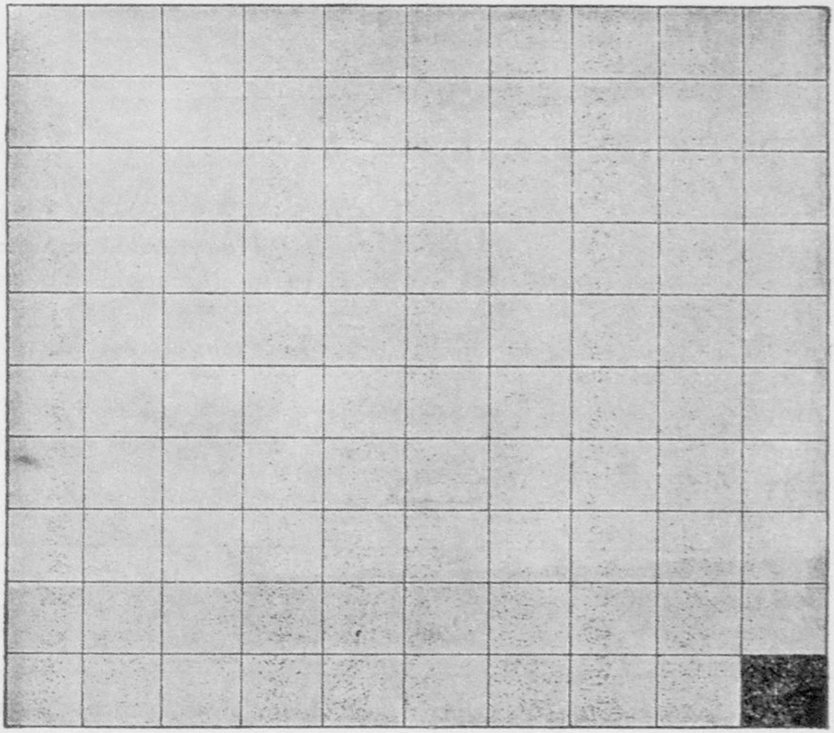
Π. χ. ἀντὶ νὰ εἴπωμεν ὅτι μία ἐπιφάνεια ἔχει ἐμβαδὸν 4 τ.μ. 12 τ. παλ, 7 τ.δ, λέγομεν ὅτι ἔχει ἐμβαδὸν 4,1207 τ. μ. Καὶ ἀντιστρόφως, ἐμβαδὸν 3,047380 τ. μέτρ. εἶναι ἴσον μὲ 3 τ.μ, 4 τ. παλ, 73 τ. δακτ. καὶ 80 τ. γρ.

Πολλαπλάσια τοῦ τετραγωνικοῦ μέτρου εἶναι:

Τὸ **βασιλικὸν στρέμμα,** τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον μὲ 1 000 τ. μ.

Τὸ **παλαιὸν στρέμμα** εἶναι ἴσον μὲ 1 270 τ.μ.

Τὸ **τετραγωνικὸν χιλιόμετρον.** Τοῦτο εἶναι ἕνα τετράγωνον μὲ πλευρὰν 1000 μέτρων. Ἔχει ἑπομένως 1000 × 1000 = 1 000 000 τετ. μέτρα. Μεταχειριζόμεθα δὲ αὐτὸ διὰ τὴν μέτρησιν τῶν ἐπιφανειῶν πολὺ μεγάλων ἐκτάσεων, π. χ. νομῶν, κρατῶν, ἠπείρων.



Ἡ τετρ. παλάμη διῃρημένη εἰς 100 τετρ. δακτύλους.

Σχ. 9

2ον. Ὁ **τεκτονικὸς τετραγωνικὸς πῆχυς.** Αὐτὸς εἶναι ἕνα τετράγωνον μὲ πλευρὰν ἕνα τεκτονικὸν πῆχυν, δηλ. 0,75 μ. ἢ $\frac{3}{4}$ τοῦ μέτρου. Αὐτὸς λοιπὸν ἰσοῦται πρὸς $\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$ τοῦ τετ. μέτρου.

Ἄλλοτε πολὺ συχνὰ μετεχειρίζοντο τὸν τ. τ. πῆχυν διὰ τὴν μέτρησιν τῶν οἰκοπέδων. Βαθμηδὸν ὅμως ἡ χρῆσις αὐτοῦ περιορίζεται.

β') Εἰς τὴν Γαλλίαν διὰ τὴν μέτρησιν τῶν ἐπιφανειῶν χρησιμοποιοῦν: 1ον τὸ **τετραγωνικὸν μέτρον**, 2ον τὸ **Ἄρ** (*are*) = 100 τ. μ. καὶ 3ον τὸ **ἑκτὰρ** (*hectare*) = 100 ἄρ = 10 000 τ. μ.

Ἀσκήσεις

484) Νὰ τραποῦν:

1ον 350 τ.τ. πήχ. εἰς τ. μέτρα καὶ 2ον 400 τ.μ. εἰς τ.τ. πήχεις.

485) Ἕνα οἰκόπεδον 420 τ.τ. πήχ. πωλεῖται πρὸς 25 000 δρχ. τὸ τ. μέτρον. Πόσον τιμᾶται;

486) Ἕνα οἰκόπεδον 560 τ. μ. πωλεῖται πρὸς 42 000 δρχ. τὸν τ. τ. πῆχυν. Πόσον τιμᾶται;

487) Ἕνα οἰκόπεδον ἐπωλήθη ἀντὶ 14 400 000 δρχ. Πόσους τ.τ. πήχεις ἦτο τὸ οἰκόπεδον, ἂν τὸ τ. μ. ἐπωλήθη πρὸς 36 000 δρχ;

§ 252. Μονάδες ὄγκου καὶ χωρητικότητος. α') Ὡς μονὰς διὰ τὴν μέτρησιν τῶν ὄγκων τῶν σωμάτων λαμβάνεται τὸ **κυβικὸν μέτρον.** Τοῦτο εἶναι ἕνας κύβος μὲ ἀκμὴν ἑνὸς μέτρου.

Ὑποδιαιρέσεις τοῦ κυβικοῦ μέτρου. Τὸ κυβικὸν μέτρον διαιρεῖται εἰς 1 000 ἴσους κύβους μὲ ἀκμὴν μιᾶς παλάμης. Κάθε ἕνας ἀπὸ αὐτοὺς λέγεται **κυβικὴ παλάμη** (σχ. 10).

Κάθε κυβικὴ παλάμη διαιρεῖται εἰς 1 000 κύβους μὲ ἀκμὴν ἑνὸς δακτύλου. Κάθε ἕνας ἀπὸ αὐτοὺς λέγεται **κυβικὸς δάκτυλος.**

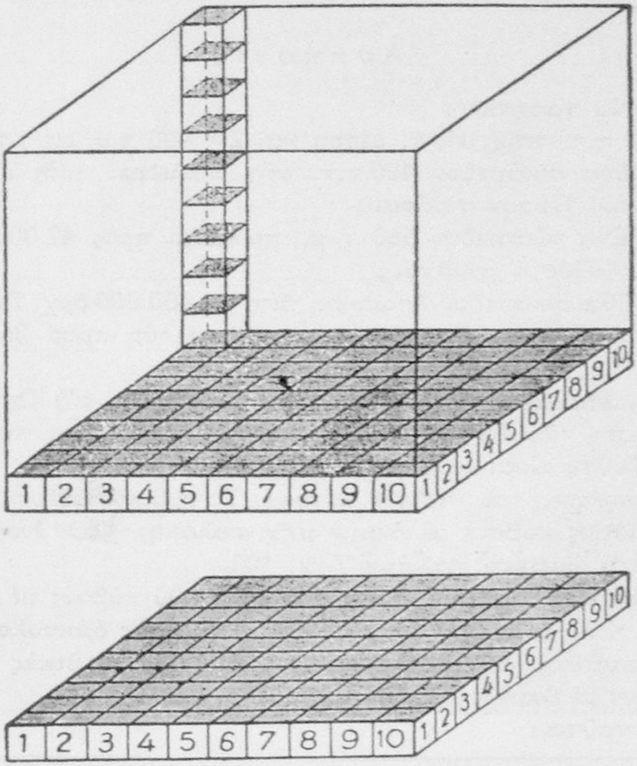
Κάθε κυβικὸς δάκτυλος διαιρεῖται εἰς 1 000 **κυβικὰς γραμμάς**, δηλ. κύβους μὲ ἀκμὴν μιᾶς γραμμῆς.

Κατὰ ταῦτα:

1 κ. μ.	=	1 000 κ. παλ.	=	1 000 000 κ.δ.	=	1 000 000 000 κ. γρ.
		1 »	=	1 000 »	=	1 000 000 »
				1 »	=	1 000 »

Ἐπειδὴ κάθε μία τῶν ἀνωτέρω μονάδων εἶναι 1 000 φορὰς μεγαλυτέρα ἀπὸ τὴν ἀμέσως κατωτέραν, διὰ τοῦτο δυνάμεθα νὰ γράφωμεν τοὺς ὄγκους τῶν σωμάτων ὡς δεκαδικοὺς ἀριθμούς. Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ γράφωμεν ὡς ἀκέραιον μέρος τὰ κυβικὰ μέτρα, ὡς χιλιοστὰ τὰς κυβ. παλάμας, ὡς ἑκατομμυριοστὰ τὰς κυβ. δακτύλους καὶ ὡς δισεκατομμυριοστὰ τὰς κυβ. γραμμάς.

Π. χ. ἀντὶ νὰ εἴπωμεν ὅτι ἕνας ὄγκος εἶναι 5 κ.μ, 254 κ. παλ, 65 κ. δακτ, 156 κ. γρ, λέγομεν ὅτι ὁ ὄγκος οὗτος εἶναι 5,254065156



Σχ. 10

κυβικὰ μέτρα. Καὶ ἀντιστρόφως, ἕνας ὄγκος 2,0548756 κ. μ. ἀποτελεῖται ἀπὸ 2 κ. μ, 54 κ. παλ, 875 κ. δ. καὶ 600 κ. γρ.

β') Αἱ συνηθέστεραι μονάδες χωρητικότητος εἶναι αἱ ἑξῆς.

1ον. Ἡ **λίτρα**. Ὁ χῶρος αὐτῆς ἔχει ὄγκον μιᾶς κυβ. παλάμης.

2ον. Ἡ **μετρικὴ ὀκᾶ**. Αὐτὴ εἶναι ἕνα δοχεῖον, τὸ ὁποῖον χωρεῖ ὕδωρ ἀπεσταγμένον 4° Κ καὶ βάρους μιᾶς ὀκᾶς. Μεταξὺ τῆς λίτρας καὶ τῆς μετρικῆς ὀκᾶς ὑπάρχει ἡ σχέσις :

1 μετρικὴ ὀκᾶ = 1,280 λίτρας.

γ΄) Διὰ τοὺς δημητριακοὺς καρποὺς μεταχειρίζονται οἱ χωρικοὶ τὸ **μετρικὸν κιλόν.** Αὐτὸ ἔχει 100 λίτρας. Ἑπομένως ὁ χῶρός του ἔχει ὄγκον 100 κυβ. παλάμας, ἤτοι $\frac{1}{10}$ τοῦ κυβικοῦ μέτρου.

Τὰ ἐκ τῆς Ἀμερικῆς εἰσαγόμενα σιτηρὰ ἐκτιμῶνται εἰς **μποῦσελ** = 36,348 λίτραι.

δ΄) Οἱ ναυτικοὶ διὰ τὴν μέτρησιν τῆς χωρητικότητος τῶν πλοίων μεταχειρίζονται τὸν **τόννον** τῶν πλοίων ἢ **κόρον.** Ὁ χῶρος αὐτοῦ ἔχει ὄγκον 2,85 κυβικὰ μέτρα.

Ἀσκήσεις

488) Μία ἀποθήκη ἔχει ἐσωτερικὸν ὄγκον 2 000 κυβ. μέτρα. Πόσα κιλὰ σίτου χωρεῖ ;

489) Τὸ ἐσωτερικὸν ἑνὸς πλοίου ἔχει ὄγκον 5 700 κυβ. μέτρα. Πόσων τόννων εἶναι ἡ χωρητικότης αὐτοῦ ;

§ 253. Μονάδες βάρους. α΄) Οἱ περισσότεροι πολιτισμένοι λαοὶ μεταχειρίζονται τὰς ἑξῆς μονάδας βάρους :

Τὸ **γραμμάριον,** δηλ. τὸ βάρος ἀπεσταγμένου ὕδατος 4° Κ, τὸ ὁποῖον ἔχει ὄγκον 1 κυβικοῦ δακτύλου.

Τὸ **χιλιόγραμμον** = 1 000 γραμμάρια. Εἶναι δὲ τοῦτο βάρος ἀπεσταγμένου ὕδατος 4° Κ, τὸ ὁποῖον ἔχει ὄγκον μίαν κυβ. παλάμην.

Τὸν **τόννον** = 1 000 χιλιόγρ. = 1 000 000 γραμμάρια. Ἑπομένως **τόννος** εἶναι τὸ βάρος ἀπεσταγμένου ὕδατος 4° Κ, τὸ ὁποῖον ἔχει ὄγκον ἕνα κυβικὸν μέτρον.

β΄) Ἡμεῖς μεταχειριζόμεθα ἀκόμη τὰς ἑξῆς μονάδας βάρους :

1ον. Τὴν **ὀκᾶν.** Αὐτὴ διαιρεῖται εἰς **400 δράμια.**

2ον. Τὸν **στατῆρα.** Αὐτὸς ἰσοδυναμεῖ μὲ 44 ὀκάδας.

Ἡ ὀκᾶ ἰσοδυναμεῖ μὲ 1 280 γραμμάρια ἢ 1,280 χιλιόγραμμα.

Τὸ χιλιόγραμμον ἰσοδυναμεῖ μὲ 312,5 δράμια.

Ὁ τόννος ἰσοδυναμεῖ μὲ 781 ὀκάδας καὶ 100 δράμια.

γ') Εἰς τὴν Πελοπόννησον διὰ τὸ βάρος τῆς σταφίδος μεταχειρίζονται τὸ **χιλιόλιτρον** = 375 ὀκάδας.

Εἰς τὴν Ἑπτάνησον μεταχειρίζονται καὶ τὴν **Ἀγγλικὴν λίτραν**, ἡ ὁποία ἔχει 453,55 γραμμάρια.

Σημείωσις. Διὰ τοὺς πολυτίμους λίθους λαμβάνεται ὡς μονὰς βάρους τὸ **καράτιον**, τὸ ὁποῖον ἰσοδυναμεῖ μὲ 0,205 γραμμάρια ἢ 0,20 γραμμάρια περίπου.

δ') Εἰς τὴν Ἀγγλίαν ἀρχικὴ μονὰς βάρους εἶναι ἡ **λίβρα** (Lb). Ἡ λίβρα ὑποδιαιρεῖται εἰς 16 **οὐγγιὰς** (oz) καὶ κάθε οὐγγιὰ εἰς 16 **δράμια** (dr). Ἡ 1 λίβρα ἰσοδυναμεῖ μὲ $141\frac{3}{4}$ δράμια ἢ μὲ 141,75 δράμια· ἡ 1 οὐγγιὰ = 8,86 δράμια.

Ἀσκήσεις

490) Νὰ τραποῦν: 1ον 3,025 κυβ. μέτρα εἰς λίτρας. 2ον 175,400 κ.μ. εἰς κιλά. 3ον 15 ὀκάδες εἰς χιλιόγραμμα. 4ον 25,4 χιλιόγραμμα εἰς ὀκάδας.

491) Ἡ ὀκᾶ τοῦ ἐλαίου τιμᾶται 14 800 δρχ. Πόσον τιμᾶται τὸ χιλιόγραμμον ;

492) Τὸ χιλιόγραμμον ἑνὸς πράγματος τιμᾶται 18 000 δρχ. Πόσον τιμᾶται ἡ ὀκᾶ ;

493) Μία δεξαμενὴ χωρεῖ 74 κ.μ. ὕδατος. Ὅταν εἶναι γεμάτη, ἀφήνομεν νὰ χυθοῦν 4 500 λίτραι. Πόσαι ὀκάδες ὕδατος ἔμειναν εἰς τὴν δεξαμενήν ;

§ 254. Μονάδες χρόνου. Ἀρχικὴ μονὰς διὰ τὴν μέτρησιν τοῦ χρόνου εἶναι ἡ **ἡμέρα** (ἡμερονύκτιον).

Εἶναι δὲ ἡμέρα ὁ χρόνος μιᾶς πλήρους περιστροφῆς τῆς Γῆς περὶ τὸν ἄξονά της.

Ἡ ἡμέρα διαιρεῖται εἰς 24 **ὥρας**· κάθε ὥρα εἰς 60 **πρῶτα λεπτὰ** ($^{\pi}$) καὶ κάθε πρῶτον λεπτὸν εἰς 60 **δεύτερα λεπτὰ** ($^{\delta}$).

Πολλαπλάσια τῆς ἡμέρας εἶναι ἡ **ἑβδομὰς** = 7 ἡμέραι, ὁ **μήν**, τὸ **πολιτικὸν ἔτος** καὶ ὁ **αἰών**.

Ἀπὸ τὰ πολιτικὰ ἔτη ἄλλα εἶναι **κοινὰ** καὶ ἄλλα **δίσεκτα** ἔτη. Κάθε κοινὸν ἔτος ἔχει 365 ἡμέρας καὶ κάθε δίσεκτον 366 ἡμέρας. Δίσεκτα εἶναι τὰ ἔτη, τῶν ὁποίων ὁ ἀριθμὸς διαιρεῖται διὰ 4. Π.χ.

τὸ ἔτος 1948 ἦτο δίσεκτον. Ἂν ὅμως ὁ ἀριθμὸς ἑνὸς ἔτους διαιρῆται διὰ 100, τοῦτο θὰ εἶναι δίσεκτον, ἂν καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν ἑκατοντάδων αὐτοῦ διαιρῆται διὰ 4. Π. χ. τὸ ἔτος 1900 δὲν ἦτο δίσεκτον· τὸ ἔτος ὅμως 2000 θὰ εἶναι δίσεκτον.

Τὸ ἔτος ἔχει 12 **μῆνας**. Ἀπὸ αὐτοὺς ἄλλοι ἔχουν 30 καὶ ἄλλοι 31 ἡμέρας ἐκτὸς τοῦ Φεβρουαρίου. Οὗτος ἔχει 28 ἡμέρας κατὰ τὰ κοινὰ ἔτη καὶ 29 κατὰ τὰ δίσεκτα. Εἰς τὰς ἐμπορικὰς ὅμως συναλλαγὰς πρὸς εὐκολίαν, ὅλοι οἱ μῆνες λογαριάζονται ἀπὸ 30 ἡμέρας. Ἑπομένως τὸ ἐμπορικὸν ἔτος θεωρεῖται ὅτι ἔχει $30 \times 12 = 360$ ἡμέρας. Ὁ αἰὼν ἔχει 100 ἔτη.

§ 255. Ποῖαι εἶναι αἱ συνηθέστεραι μονάδες τῶν τόξων. Συνηθεστέρα μονὰς διὰ τὴν μέτρησιν τῶν τόξων εἶναι ἡ **μοῖρα** ($^{\circ}$), ἤτοι τὸ $\frac{1}{360}$ τῆς περιφερείας.

Ἡ μοῖρα διαιρεῖται εἰς 60 ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται **πρῶτα λεπτὰ** τῆς μοίρας ($'$) καὶ τὸ πρῶτον λεπτὸν εἰς 60 δεύτερα λεπτὰ ($''$).

Ἀπό τινων ἐτῶν ἤρχισε νὰ γίνεται χρῆσις καὶ τοῦ βαθμοῦ ($^{\gamma}$), ἤτοι τοῦ $\frac{1}{400}$ τῆς περιφερείας. Ὁ βαθμὸς διαιρεῖται εἰς 100 πρῶτα λεπτὰ καὶ τὸ πρῶτον λεπτὸν εἰς 100 δεύτερα λεπτά.

Ἀσκήσεις

494) Πόσα δευτερόλεπτα ἔχει ἡ ὥρα καὶ πόσα ἡ ἡμέρα;

495) Πόσα δεύτερα λεπτὰ ἔχει ἡ μοῖρα καὶ πόσα μία περιφέρεια;

496) Πόσων μοιρῶν καὶ πόσων βαθμῶν εἶναι τὸ $\frac{1}{4}$ τῆς περιφερείας, τὸ $\frac{1}{2}$ αὐτῆς καὶ τὰ $\frac{3}{4}$ αὐτῆς;

§ 256. Μονάδες νομισμάτων. Κατὰ τὸ ἔτος 1865 ἡ Γαλλία, ἡ Ἰταλία ἡ Ἑλβετία καὶ τὸ Βέλγιον προῆλθον εἰς ἕνωσιν, ἡ ὁποία ὠνομάσθη **Λατινικὴ νομισματικὴ ἕνωσις**. Κατ' αὐτὴν τὰ Κράτη αὐτὰ ἀνεγνώρισαν ὡς κοινὴν μονάδα νομισμάτων τὸ **φράγκον**.

Κατὰ τὸ 1868 προσεχώρησε καὶ ἡ Ἑλλὰς εἰς τὴν ἕνωσιν αὐτὴν καὶ παρεδέχθη ὡς μονάδα τὸ φράγκον, τὸ ὁποῖον ἡμεῖς ὀνομάζομεν **δραχμήν**. Εἶναι δὲ αὐτὴ νόμισμα βάρους 5 γραμμαρίων καὶ ἀποτελεῖται κατὰ τὰ 0,835 ἀπὸ ἄργυρον κατὰ δὲ τὰ 0,165 ἀπὸ χαλκόν.

Δηλ. εἰς ἓν γραμμάριον αὐτοῦ τοῦ κράματος ὑπάρχουν 0,835 τοῦ γραμμαρίου ἄργυρος, δηλ. πολύτιμον μέταλλον καὶ 0,165 τοῦ γραμμαρίου χαλκός. Δι' αὐτὸ λέγομεν ὅτι ὁ **βαθμὸς τῆς καθαρότητος** ἢ ὁ **τίτλος** αὐτοῦ τοῦ κράματος εἶναι 0,835.

Ἐκτὸς τῆς δραχμῆς τὰ Κράτη τῆς Λατινικῆς ἑνώσεως ἔκοψαν καὶ τὰ ἑξῆς νομίσματα :

Χρυσᾶ. Πεντάδραχμον, δεκάδραχμον, εἰκοσάδραχμον, πεντηκοντάδραχμον, ἑκατοντάδραχμον. Κάθε ἕνα ἀπὸ αὐτὰ ἔγινεν ἀπὸ κρᾶμα χρυσοῦ καὶ ἀργύρου βαθμοῦ καθαρότητος 0,900.

Ἀργυρᾶ. Πεντάδραχμον, δίδραχμον, πεντηκοντάλεπτον, εἰκοσάλεπτον. Αὐτὰ ἔγιναν ἀπὸ κρᾶμα ἀργύρου καὶ χαλκοῦ βαθμοῦ καθαρότητος 0,900 τὸ πεντάδραχμον καὶ 0,835 τὰ ἄλλα.

Χαλκᾶ. Διώβολον (δεκάρα), ὀβολὸς (πεντάρα), δίλεπτον καὶ μονόλεπτον. Αὐτὰ ἔγιναν ἀπὸ κρᾶμα 95 μερῶν χαλκοῦ, 4 μερῶν κασσιτέρου καὶ 1 μέρους ἀντιμονίου.

Ἀπὸ πολλοῦ ὅμως τὸ Κράτος ἀπέσυρεν ἀπὸ τὴν κυκλοφορίαν ὅλα αὐτὰ τὰ νομίσματα καὶ οὐδὲν ἀπὸ αὐτὰ κυκλοφορεῖ.

Ἀντὶ αὐτῶν κυκλοφοροῦν χαρτονομίσματα τῶν 10, 20, 50, 100 καὶ 500 δραχμῶν. Ἐκτὸς αὐτῶν κυκλοφοροῦν καὶ μεταλλικὰ κέρματα τῶν 5, 2, 1 δραχ. καὶ τῶν 50, 20, 10 λεπτῶν.

Εἰς τὴν **Ἀγγλίαν** ἀρχικὴ μονὰς εἶναι ἡ **Ἀγγλικὴ λίρα** (£) στερλίνα. Αὐτὴ ἔχει 25,22 χρυσᾶ φράγκα.

Διαιρεῖται δὲ εἰς 20 **σελίνια** (s), τὸ σελίνιον εἰς 12 **πέννας** (d) καὶ ἡ πέννα εἰς 4 **φαρδίνια** (f).

Συμβολικῶς αἱ 5 λίρ, 18 σελ, 9 π, 3 φ. γράφονται 5-18-9-3.

Ἡ χρυσῆ Ἀγγλικὴ λίρα ἔχει βάρος 7,988 γραμμάρια καὶ βαθμὸν καθαρότητος 0,916.

Κυκλοφορεῖ δὲ κυρίως καὶ χαρτίνη Ἀγγλικὴ λίρα. Αὐτὴ διὰ νόμου ἔχει 80 ἰδικάς μας δραχμάς. Ἐνῷ ἡ τιμὴ τῆς χρυσῆς λίρας κυμαίνεται σήμερον περὶ τὰς 300 δραχμάς.

Εἰς τὴν **Ἀμερικὴν** ἀρχικὴ μονὰς εἶναι τὸ δολλάριον ($). Τοῦτο ἔχει 5,1825 χρυσᾶ φράγκα καὶ διαιρεῖται εἰς 100 σέντς. Παρ' ἡμῖν ἡ νόμιμος τιμὴ τοῦ χαρτίνου δολλαρίου εἶναι 30 δραχμαί.

Εἰς τὴν **Τουρκίαν** ἀρχικὴ μονὰς εἶναι ἡ **Τουρκικὴ λίρα** (χρυσῆ). Αὐτὴ ἔχει 22,80 χρυσᾶ φράγκα. Διαιρεῖται δὲ εἰς 100 **γρόσια**, τὸ γρόσιον δὲ εἰς 40 **παράδες**.

Εἰς τὴν **Αἴγυπτον** ἀρχικὴ μονὰς εἶναι ἡ **Αἰγυπτιακὴ λίρα** (χρυσῆ). Αὐτὴ ἔχει 25,74 χρυσᾶ φράγκα. Διαιρεῖται δὲ εἰς 100 **γρόσια.** Τὸ γρόσιον εἰς 40 **παράδες** καὶ ὁ παρᾶς εἰς 120 **τρεχούμενα ἄσπρα** ἢ 100 **καλὰ ἄσπρα.**

Σημείωσις. Ὅπως βλέπομεν, τὰ Τουρκικὰ καὶ Αἰγυπτιακὰ νομίσματα ἔχουν κοινὰ ὀνόματα. Ἡ ἀξία ὅμως τῶν ὁμωνύμων νομισμάτων τῶν χωρῶν αὐτῶν δὲν εἶναι ἡ αὐτή.

Εἰς τὴν **Γερμανίαν** ἀρχικὴ μονὰς ἦτο τὸ **μάρκον** (R. M.), τὸ ὁποῖον εἶχεν 13 χρυσᾶ φράγκα.

Εἰς τὴν **Ρωσίαν** ἀρχικὴ μονὰς εἶναι τὸ **ρούβλιον.** Τὸ 1 ρούβλιον = 100 καπίκια.

Αἱ ἐμπορικαὶ συναλλαγαὶ γίνονται συνήθως μὲ χάρτινα νομίσματα τῶν διαφόρων χωρῶν. Δι' αὐτὸ εἰς τὰς διαφόρους ἀσκήσεις, ὅταν λέγωμεν λίρας, δολλάρια κ.τ.λ, θὰ ἐννοοῦμεν χάρτινα τοιαῦτα.

Ἀσκήσεις

497) Πόσας δραχμὰς ἔχει τὸ σελίνιον καὶ πόσας ἡ πέννα μὲ τὴν νόμιμον τιμὴν τῆς χαρτίνης Ἀγγλικῆς λίρας ;

498) Πόσας δραχμὰς ἔχει τὸ σέντς μὲ τὴν νόμιμον τιμὴν τοῦ δολλαρίου;

499) Πόσας δραχμὰς πρέπει νὰ δώσῃ τις, διὰ νὰ ἀγοράσῃ 25 λίρας Ἀγγλίας, διὰ νὰ τὰς στείλῃ εἰς τὸν ἐν Λονδίνῳ σπουδάζοντα υἱόν του ;

500) Ἄλλοτε, ὅταν οἱ εἰσαγωγεῖς ἐμπορευμάτων ἐξ Ἀμερικῆς ἠγόραζον δολλάρια, διὰ νὰ πληρώσουν τὰ ἐμπορεύματα αὐτά, ἐκτὸς ἀπὸ τὴν νόμιμον τιμὴν τοῦ δολλαρίου εἰς δραχμὰς ἐπλήρωναν καὶ ἕνα πρόσθετον ποσὸν κατὰ δολλάριον. Αὐτὸ τὸ πρόσθετον ποσὸν ἐλέγετο μπόν. Ἂν λοιπὸν ἕνας ἔμπορος ἠγόραζε 1 400 δολλάρια πόσας δραχμὰς ἔδιδεν, ὅταν τὸ μπὸν ἦτο 4,99 δραχμαί ;

501) Ἕνας ἔμπορος ἤθελε νὰ εἰσαγάγῃ ἀπὸ τὴν Ἀγγλίαν ἐμπορεύματα ἀξίας 500 ἀγγλικῶν λιρῶν. Πόσας δραχμὰς θὰ ἔδιδε, διὰ νὰ ἀγοράσῃ ἀπὸ τὴν Τράπεζαν τὰς λίρας, ὅταν τὸ μπὸν ἤξιζε 12 100 δραχ. κατὰ λίραν ;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ΄

ΣΥΜΜΙΓΕΙΣ ΑΡΙΘΜΟΙ

1. ΟΡΙΣΜΟΙ

§ 257. **Τί εἶναι συμμιγεῖς ἀριθμοί.** Ὅταν ἕνας ἔμπορος θέλῃ νὰ μάθῃ τὸ μῆκος ἑνὸς τεμαχίου ὑφάσματος, τὸ ὁποῖον ἔμεινεν, μετρεῖ αὐτὸ μὲ τὸν πῆχυν.

Ἂς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι ὁ πῆχυς χωρεῖ εἰς αὐτὸ 3 φοράς, περισσεύει δὲ καὶ ἕνα μέρος ὀλιγώτερον ἀπὸ ἕνα πῆχυν. Αὐτὸ τὸ μετρεῖ μὲ τὸ ρούπι. Ἂν δὲ ἴδῃ ὅτι τὸ ρούπι χωρεῖ εἰς αὐτὸ π. χ. 5 φοράς, λέγει ὅτι τὸ ὕφασμα ἔχει μῆκος 3 πήχεις καὶ 5 ρούπια.

Ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο μέρη. Τὸ ἕνα ἀπὸ αὐτὰ γίνεται ἀπὸ τὸν πῆχυν καὶ τὸ ἄλλο ἀπὸ τὸ ρούπι, τὸ ὁποῖον εἶναι ὑποπολλαπλάσιον τοῦ πήχεως. Λέγεται δὲ ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς **συμμιγής**.

Ὁμοίως οἱ ἀριθμοί: 2 στατῆρες 15 ὀκάδες καὶ 100 δράμια καὶ $5^{ωρ}$ $20^{π}$ $8^{δ}$ εἶναι συμμιγεῖς ἀριθμοί. Ὥστε:

Συμμιγὴς ἀριθμὸς λέγεται κάθε συγκεκριμένος ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἀποτελεῖται ἀπὸ ἄλλους ἀριθμούς, τῶν ὁποίων αἱ μονάδες φέρουν ἰδιαίτερα ὀνόματα καὶ εἶναι πολλαπλάσια ἢ ὑποπολλαπλάσια μιᾶς ἀρχικῆς μονάδος.

Πρὸς διάκρισιν οἱ ἄλλοι συγκεκριμένοι ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι γίνονται ἀπὸ μίαν ὡρισμένην μονάδα ἢ μέρη αὐτῆς, λέγονται **ἁπλοῖ ἀριθμοί.**

Οὕτως οἱ ἀριθμοὶ $3\frac{5}{8}$ ὀκάδες, $15\frac{3}{4}$ ἡμέραι, 12 μέτρα κ.τ.λ. εἶναι ἁπλοῖ ἀριθμοί.

2. ΤΡΟΠΗ ΣΥΜΜΙΓΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥ ΕΙΣ ΑΠΛΟΥΝ ΚΑΙ Τ' ΑΝΑΠΑΛΙΝ

§ 258. *Πρόβλημα.* **Ἀπὸ μίαν κρήνην ρέουν 5 δράμια ὕδατος κατὰ δευτερόλεπτον. Νὰ εὑρεθῇ πόσον ὕδωρ χωρεῖ μία ὑδατα-**

ποθήκη, τὴν ὁποίαν ἡ κρήνη αὐτὴ γεμίζει εἰς 2^{ὥρ} 20^{π} 30^{δ}.

Λύσις. Ἂν γνωρίζωμεν εἰς πόσα δευτερόλεπτα γεμίζει αὐτὴ ἡ ἀποθήκη, εὑρίσκομεν ἀμέσως πόσον ὕδωρ χωρεῖ, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὰ 5 δράμια ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν δευτερολέπτων.

Πρέπει λοιπὸν νὰ τρέψωμεν τὸν συμμιγῆ ἀριθμὸν 2 ὥρ. 20^{π} 30^{δ} εἰς δευτερόλεπτα.

Πρὸς τοῦτο εὑρίσκομεν πρῶτον ὅτι αἱ 2 ὧραι ἔχουν $60 \times 2 = 120^{π}$.

Εἰς αὐτὰ προσθέτομεν καὶ τὰ 20^{π} τοῦ συμμιγοῦς καὶ εὑρίσκομεν 140^{π}.

Ἔπειτα εὑρίσκομεν ὅτι 140^{π} ἔχουν $60 \times 140 = 8\,400^{δ}$. Εἰς αὐτὰ δὲ προσθέτομεν καὶ τὰ 30^{δ} τοῦ συμμιγοῦς καὶ εὑρίσκομεν 8 430 δευτερόλεπτα.

Ἡ ὑδαταποθήκη λοιπὸν χωρεῖ $5 \times 8\,430 = 42\,150$ δράμια ὕδατος.

Διάταξις τῆς πράξεως

$$\begin{array}{r}
2 \text{ ὥρ. } 20^{π}\ 30^{δ} \\
\times\ 60 \\
\hline
120^{π} \\
+\ 20 \\
\hline
140^{π} \\
\times\ 60 \\
\hline
8\,400^{δ} \\
+\ 30 \\
\hline
8\,430^{δ}
\end{array}$$

Ἀπὸ τὸ παράδειγμα τοῦτο βλέπομεν ὅτι ὑπάρχουν προβλήματα, διὰ τὴν λύσιν τῶν ὁποίων χρειάζεται νὰ γνωρίζωμεν νὰ τρέπωμεν ἕνα συμμιγῆ ἀριθμὸν εἰς ἁπλοῦν ἀκέραιον ἀριθμόν.

Ἀπὸ τὸν τρόπον δέ, κατὰ τὸν ὁποῖον ἔγινεν ἡ προηγουμένη τροπή, ἐννοοῦμεν ὅτι διὰ νὰ γίνῃ ἀκέραιος ὁ συμμιγής, πρέπει νὰ τραπῇ εἰς μονάδας τῆς τελευταίας τάξεως αὐτοῦ.

Ἀπὸ τὸ προηγούμενον ἐπίσης παράδειγμα ἐννοοῦμεν εὔκολα, πῶς γίνεται ἡ τροπὴ αὐτὴ καὶ διατυπώνομεν τὸν σχετικὸν κανόνα.

Ἄσκησις

502) Νὰ τραποῦν:

1. 10 πήχεις καὶ 3 ρούπια εἰς ρούπια.
2. 5 στατῆρες 35 ὀκάδες καὶ 240 δράμια εἰς δράμια.
3. 5 ὧραι 12^{π} καὶ 25^{δ} εἰς δευτερόλεπτα.
4. $20^{\circ}\ 40'\ 35''$ εἰς δεύτερα λεπτά.
5. 4 λίραι, 8 σελίνια, 6 πένναι καὶ 2 φαρδίνια εἰς φαρδίνια.

§ 259. Πῶς τρέπεται ἕνας συμμιγὴς ἀριθμὸς εἰς ἁπλοῦν ἀριθμὸν μονάδων τάξεως διαφόρου τῆς τελευταίας. I. Ἂν εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα τὰ 5 δράμια ἔρρεον εἰς ἕνα πρῶτον λεπτόν, ἔπρεπε νὰ τρέψωμεν τὸν συμμιγῆ ἀριθμὸν 2 ὧραι 20^{π} 30^{δ} εἰς πρῶτα λεπτά.

Ἡ τροπὴ αὕτη γίνεται κατὰ τοὺς ἑξῆς δύο τρόπους :

Α′ τρόπος. Εὑρίσκομεν ὅπως προηγουμένως ὅτι

$$2 \text{ ὧραι } 20^{\pi}\ 30^{\delta} = 8\,430^{\delta}.$$

Ἐπειδὴ δὲ $1^{\delta} = \frac{1}{60}$ τοῦ πρώτου λεπτοῦ, τὰ $8\,430^{\delta}$ θὰ εἶναι $\frac{8430}{60}$ τοῦ πρώτου λεπτοῦ. Εἶναι λοιπὸν 2 ὧραι 20^{π} $30^{\delta} = \frac{8430^{\pi}}{60}$.

Β′ τρόπος. Εὑρίσκομεν πρῶτον ὅτι 2 ὧραι $20^{\pi} = 140^{\pi}$.

Ἐπειδὴ δὲ τὰ $30^{\delta} = \frac{30^{\pi}}{60}$, θὰ εἶναι 2 ὧρ. 20^{π} $30^{\delta} = 140\ \frac{30}{60}$ πρῶτα λεπτά.

II. Ἂν εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα τὰ 5 δράμια ἔρρεον εἰς 1 ὧραν, ἔπρεπε τὸν συμμιγῆ ἀριθμὸν 2 ὧραι 20^{π} 30^{δ} νὰ τρέψωμεν εἰς ὥρας.

Καὶ αὐτὴ ἡ τροπὴ γίνεται κατὰ τοὺς ἑξῆς τρόπους :

Α′ τρόπος. Τρέπομεν αὐτὸν εἰς 8 430 δεύτερα λεπτά. Ἐπειδὴ δὲ 1 ὥρα $= 60 \times 60 = 3\,600^{\delta}$, τὸ 1^{δ} εἶναι $\frac{1}{3600}$ τῆς ὥρας. Ἑπομένως $8\,430^{\delta} = \frac{8430}{3600}$ τῆς ὥρας. Εἶναι λοιπὸν 2 ὧρ. 20^{π} $30^{\delta} = \frac{8430}{3600}$ ὧρ.

Β′ τρόπος. Εὑρίσκομεν ὅτι 20^{π} $30^{\delta} = 20 \times 60 + 30 = 1\,230^{\delta} = \frac{1230}{3600}$ τῆς ὥρας. Ἑπομένως 2 ὧρ. 20^{π} $30^{\delta} = 2\ \frac{1200}{3600}$ τῆς ὥρας.

Ἀπὸ αὐτὰ βλέπομεν ὅτι :

Ἂν ἕνας συμμιγὴς ἀριθμὸς τραπῇ εἰς ἁπλοῦν ἀριθμὸν μονάδων διαφόρων ἀπὸ τὴν τελευταίαν τάξιν, γίνεται κλάσμα κατὰ τὸν ἕνα τρόπον καὶ μεικτὸς κατὰ τὸν ἄλλον.

Ἁπλούστερον ὅμως εἶναι νὰ τρέπωμεν αὐτὸν εἰς κλάσμα καὶ ἔπειτα, ἂν θέλωμεν, ἐξάγομεν τὰς ἀκεραίας μονάδας, ὁπότε γίνεται μεικτός. Ἐργαζόμεθα λοιπὸν συνήθως κατὰ τὸν ἑξῆς κανόνα :

Διὰ νὰ τρέψωμεν συμμιγῆ ἀριθμὸν εἰς μονάδας μιᾶς ὡρισμένης τάξεώς του (ἐκτὸς τῆς τελευταίας), τρέπομεν αὐτὸν πρῶτον εἰς μονάδας τῆς τελευταίας τάξεώς του. Τὸ ἐξαγόμενον θέτομεν ἀριθμητήν, παρονομαστὴν δὲ θέτομεν τὸν ἀριθμόν, ὁ

ὁποῖος φανερώνει πόσαι μονάδες τῆς τελευταίας τάξεώς του ἀποτελοῦν μίαν μονάδα τῆς ὁρισθείσης τάξεως.

Ἀσκήσεις

503) Νὰ τραποῦν:
1. 2 στατῆρες 25 ὀκάδες 200 δράμια εἰς δράμια.
2. 925 πήχεις 4 ρούπια εἰς ρούπια.
3. 2 λίρες 15 σελίνια 10 πένναι 3 φαρδίνια εἰς φαρδίνια.
4. 2 ὧραι 15^{π} 50^{δ} εἰς δευτερόλεπτα.

504) Νὰ τραποῦν οἱ συμμιγεῖς:
1. 8 πήχεις 6 ρούπια εἰς πήχεις.
2. 3 στατῆρες 40 ὀκάδες 250 δράμια εἰς στατῆρας καὶ εἰς ὀκάδας.
3. 3 λίραι 15 σελίνια 8 πένναι 3 φαρδίνια εἰς σελίνια καὶ εἰς λίρας.
4. 25° 30′ 40″ εἰς μοίρας.
5. 2 ἡμέραι 12 ὧραι 20^{π} 40^{δ} εἰς ὥρας καὶ εἰς πρῶτα λεπτά.

505) Διὰ νὰ διανύσῃ μίαν ἀπόστασιν μεταξὺ δύο πόλεων μία ἀτμομηχανὴ θὰ ἐχρειάζετο 6 ὥρ. 12^{π}. Ἕνα ἀεροπλάνον θὰ ἐχρειάζετο 1 ὥρ. 25^{π} καὶ ἕνα αὐτοκίνητον θὰ ἐχρειάζετο 8 ὥρ. 16^{π} 30^{δ}. Νὰ ἐκφρασθοῦν οἱ χρόνοι αὐτοὶ εἰς δευτερόλεπτα.

506) Ὁ χρόνος μεταξὺ δύο πανσελήνων εἶναι 29 ἡμ. 12 ὥρ. 43^{π}. Νὰ τραπῇ ὁ χρόνος αὐτὸς εἰς λεπτὰ τῆς ὥρας.

507) Ἡ σελήνη κάμνει ἕνα ὁλόκληρον γῦρον περὶ τὴν Γῆν εἰς 27 ἡμ. 7 ὥρ. 43^{π}. Νὰ τραπῇ ὁ χρόνος οὗτος εἰς δευτερόλεπτα.

§ 260. Πῶς τρέπεται εἰς συμμιγῆ ἀριθμὸν ἕνας συγκεκριμένος ἀκέραιος ἀριθμός. Ἂν ἀκούσωμεν ἕνα νὰ λέγῃ: «Ἠγόρασα 110 635 δράμια ἀνθράκων», δὲν ἀντιλαμβανόμεθα σαφῶς πόσον εἶναι αὐτὸ τὸ βάρος. Δι᾽ αὐτὸ εὑρίσκομεν πόσαι ὀκάδες γίνονται ἀπὸ αὐτὰ τὰ δράμια. Πρὸς τοῦτο ἐκτελοῦμεν τὴν διαίρεσιν 110 635 : 400 καὶ εὑρίσκομεν ὅτι αὐτὸ τὸ βάρος εἶναι 276 ὀκ. καὶ 235 δράμια.

Διάταξις τῆς πράξεως

110635	400	
3063	276 ὀκ.	44
2635	12 ὀκ.	6 στ.
235 δρμ.		

Ἂν δὲ κάμωμεν καὶ τὴν διαίρεσιν 276 : 44 εὑρίσκομεν ὅτι ἀπὸ αὐτὰς τὰς ὀκάδας γίνονται 6 στατῆρες, περισσεύουν δὲ καὶ 12 ὀκάδες. Ὥστε: 110 635 δράμια = 6 στατῆρες 12 ὀκάδες 235 δράμια.

Ἀπὸ τὸ παράδειγμα αὐτὸ ἐννοοῦμεν εὔκολα, πῶς τρέπομεν ἕνα συγκεκριμένον ἀκέραιον εἰς συμμιγῆ ἀριθμόν.

§ 261. Πῶς τρέπεται συγκεκριμένον κλάσμα εἰς συμμιγῆ ἀριθμόν. *Πρόβλημα.* **Κατὰ ἕνα βαρὺν χειμῶνα μία κοινότης ἐμοίρασεν εἰς 8 πτωχὰς οἰκογενείας τῆς κοινότητος ταύτης 27 στατῆρας ἀνθράκων. Νὰ εὑρεθῇ τὸ βάρος τῶν ἀνθράκων, τὰ ὁποῖα ἔλαβε κάθε πτωχὴ οἰκογένεια.**

Λύσις. Ἀφοῦ αἱ 8 οἰκογένειαι ἔλαβον 27 στατῆρας, ἡ 1 οἰκογένεια ἔλαβεν 8 φορὰς ὀλιγώτερον, ἤτοι $\frac{27}{8}$ τοῦ στατῆρος.

Ἡ κοινότης ὅμως ἐμοίρασε τοὺς 27 στατῆρας καὶ ἔδωκεν εἰς καθένα ἀπὸ 3 στατῆρας καὶ ἐπερίσσευσαν καὶ 3 στατῆρες, ἤτοι 44×3=132 ὀκάδες. Ἔπειτα ἡ κοινότης ἐμοίρασε καὶ αὐτὰς τὰς ὀκάδας καὶ ἔδωκεν εἰς καθένα ἀπὸ 16 ὀκάδας, ἐπερίσσευσαν δὲ καὶ 4 ὀκάδες, ἤτοι 400 × 4 = 1 600 δράμια. Ἀπὸ αὐτὰ δὲ ἔδωκεν εἰς κάθε οἰκογένειαν 1 600 : 8 = 200 δράμια.

Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον βλέπομεν ὅτι κάθε οἰκογένεια ἔλαβε 3 στατῆρας 16 ὀκάδας 200 δράμια.

Διάταξις τῆς πράξεως

27 στατ.	8
3 στατ.	3 στ. 16 ὀκ. 200 δρμ.
× 44	
132 ὀκ.	
52	
4 ὀκ.	
×400	
1 600 δρμ.	
000	

Εἶναι λοιπὸν $\frac{27}{8}$ στατῆρος = 3 στατῆρες 16 ὀκάδες 200 δράμια.

Ἀπὸ τὴν ἐργασίαν αὐτὴν ἐννοοῦμεν εὐκόλως πῶς τρέπομεν συγκεκριμένον κλάσμα εἰς συμμιγῆ ἀριθμόν.

§ 262. Πῶς τρέπομεν συγκεκριμένον μεικτὸν εἰς συμμιγῆ ἀριθμόν. Ἔστω π.χ. ὅτι θέλομεν νὰ τρέψωμεν εἰς συμμιγῆ ἀριθμὸν τὸν ἀριθμὸν $2\frac{3}{5}$ ἡμέραι.

Τὴν τροπὴν ταύτην δυνάμεθα νὰ ἐκτελέσωμεν κατὰ τοὺς ἑξῆς δύο τρόπους:

Α′ τρόπος. Ἐπειδὴ $2\frac{3}{5}$ ἡμ. $= \frac{13}{5}$ τῆς ἡμέρας, τὸ ζήτημα ἀνάγεται εἰς τὸ προηγούμενον. Εὑρίσκομεν λοιπὸν ὅτι:

$$2\frac{3}{5} \text{ ἡμέρας} = 2 \text{ ἡμέραι } 14 \text{ ὧραι } 24^{\pi}.$$

Β′ τρόπος. Ἐπειδὴ $2\frac{3}{5}$ ἡμέρας $= 2$ ἡμέραι $+ \frac{3}{5}$ ἡμέρας, ἐννοοῦμεν ὅτι πρέπει νὰ τρέψωμεν τὰ $\frac{3}{5}$ τῆς ἡμέρας εἰς συμμιγῆ ἀριθμὸν καὶ νὰ αὐξήσωμεν κατὰ 2 τὸν ἀριθμὸν τῶν ἡμερῶν αὐτοῦ. Εὑρίσκομεν λοιπὸν ὅτι $\frac{3}{5}$ ἡμέρας $= 0$ ἡμέραι 14 ὧραι 24^{π} καὶ ἑπομένως $2\frac{3}{5}$ ἡμέρας $= 2$ ἡμέραι 14 ὧραι 24^{π}.

Διάταξις τῶν πράξεων

13 ἡμ.	5
3 ἡμ.	2 ἡμ. 14 ὧρ. 24^{π}
×24	
72 ὧρ.	
22	
2 ὧρ.	
×60	
120^{π}	
20	
0	

3 ἡμ.	5
×24	0 ἡμ. 14 ὧρ. 24^{π}
72 ὧρ.	2
22	2 ἡμ. 14 ὧρ. 24^{π}
2 ὧρ.	
×60	
120^{π}	
20	
0	

Σημείωσις. Ἂν ἀπὸ τὸν ἀκέραιον τοῦ μεικτοῦ γίνωνται μονάδες ἀνωτέρας τάξεως, δυνάμεθα νὰ ξεχωρίσωμεν αὐτάς. Π.χ. $45\frac{3}{4}$ τοῦ σελινίου $= 45$ σελίνια 9 πένναι. Ἐπειδὴ δὲ 45 σελίνια $= 2$ λίραι 5 σελίνια, συμπεραίνομεν ὅτι $45\frac{3}{4}$ σελινίου $= 2$ λίραι 5 σελίνια 9 πένναι.

Ἀσκήσεις

508) Νὰ τραποῦν εἰς συμμιγεῖς ἀριθμοὺς οἱ κάτωθι ἀριθμοί:

1.	194 ρούπια,	6 705 ρούπια,	10 480 ρούπια.
2.	5 760 δράμια,	43 680 δράμια,	678 000 δράμια.

3. 3 754 δευτερόλ, 18 645 δευτερόλ, 887 590 δευτερόλ.
4. 15 740'', 74 560'', 900 300''.
5. 5 670 σελίνια, 37 480 φαρδίνια, 748 564 πένναι.

509) Νὰ τραποῦν εἰς συμμιγεῖς ἀριθμοὺς οἱ κάτωθι ἀριθμοί :

1. $12\frac{5}{8}$ στατ, $5\frac{4}{11}$ στατ, $108\frac{7}{25}$ στατ.
2. $68\frac{3}{4}$ ὑάρδ, $508\frac{7}{8}$ ὑάρδ, $270\frac{15}{26}$ ὑάρδ.

510) Οἱ ἀστρονόμοι ἔχουν εὕρει ὅτι ἡ διάρκεια τοῦ ἔτους εἶναι 365,2422 ἡμ. Νὰ τραπῇ ὁ χρόνος οὗτος εἰς συμμιγῆ ἀριθμόν.

3. ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ ΣΥΜΜΙΓΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

§ 263. *Πρόβλημα.* **Ἕνα γραφεῖον μιᾶς πόλεως τῆς Βορείου Ἑλλάδος τὸν πρῶτον μῆνα τοῦ χειμῶνος ἔκαυσε 5 στατῆρας 25 ὀκάδας 300 δράμια ἀνθράκων, τὸν δεύτερον μῆνα 6 στατῆρας 35 ὀκάδας καὶ τὸν τρίτον 4 στατῆρας 40 ὀκάδας 250 δράμια. Πόσους ἄνθρακας ἔκαυσεν αὐτοὺς τοὺς τρεῖς μῆνας;**

Λύσις. Εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ ζητούμενον βάρος εἶναι :
(5 στατ. 25 ὀκ.300 δρμ.) +(6 στατ. 35 ὀκ.)+(4 στατ.40 ὀκ. 250 δρμ.)

Ἀποτελεῖται δὲ τὸ βάρος τοῦτο ἀπὸ
(5 + 6 + 4) στατ.+(25 + 35 + 40) ὀκάδας + (300 + 250) δράμια.
ἢ 15 στ. + 100 ὀκάδ. + 550 δράμια.

Ἐπειδὴ δὲ 550 δράμ.=1 ὀκ. 150 δρ, τὸ προηγούμενον ἄθροισμα γίνεται :
15 στατ. + 101 ὀκ. + 150 δράμ.

Ὁμοίως, ἐπειδὴ 101 ὀκ.=2 στ. 13 ὀκ, τὸ τελευταῖον ἄθροισμα γίνεται :
17 στατ. 13 ὀκ. 150 δραμια.

Αὐτὴ ἡ ἐργασία συνοψίζεται εἰς τὴν παραπλεύρως διάταξιν.

Διάταξις τῆς πράξεως

5 στατ.	25 ὀκ.	300 δρμ.
6 στατ.	35 ὀκ.	
4 στατ.	40 ὀκ.	250 δρμ.
15 στατ.	100 ὀκ.	550 δρμ.
15 στατ.	101 ὀκ.	150 δρμ.
17 στατ.	13 ὀκ.	150 δρμ.

Ἀσκήσεις

Α' Ὁμάς. 511) Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι ἀθροίσματα:

1ον. 8 στατ. 14 ὀκ. 300 δράμ. + 5 στατ. 38 ὀκ. 275 δράμ. + 39 ὀκ. 325 δρμ.

2^{ov}. 25 πήχ. 8 ρούπ. + 18 πήχ. 4 ρούπ. + 49 πήχ. 7 ρούπ.

3^{ov}. 7 ὥρ. 40^{π} 50^{δ} + 3 ἡμ. 25^{π} 40^{δ} + 8 ὥρ. 45^{π}.

4^{ov}. 15 λίρ. 12 σελ. 9 πέν. + 27 λίρ. 15 σελ. 8 πέν. + 18 σελ. 3 φαρδ.

512) Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι ἀθροίσματα:

1^{ov}. 3 στρατ. 18 ὀκ. 340 δρ. + $15\frac{5}{8}$ στατ. + $12\frac{2}{5}$ στατ.

2^{ov}. 15 λίραι 10 σελ. 8 πέν. + $24\frac{5}{8}$ λίραι + $16\frac{3}{4}$ σελ.

Β' Ὁμάς. 513) Μία οἰκογένεια ἐξώδευσε πρὸς θέρμανσίν της κατὰ τοὺς τρεῖς μῆνας τοῦ χειμῶνος τὰ ἑξῆς ποσὰ ξυλανθράκων: Τὸν α' μῆνα 1 στ. 10 ὀκ. 20 δράμια, τὸν β' μῆνα 1 στ. 25 ὀκ. 300 δράμ. καὶ τὸν γ' μῆνα 1 στ. 30 ὀκ. 100 δράμ. Πόσους ξυλάνθρακας ἐξώδευσεν ἐν ὅλῳ;

514) Ἕνας μαθητὴς εἶναι 12 ἐτῶν 3 μηνῶν 20 ἡμερῶν. Ἕνας συμμαθητής του εἶναι μεγαλύτερος αὐτοῦ κατὰ 1 ἔτος 8 μῆνας 15 ἡμέρας. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἡλικία τοῦ δευτέρου μαθητοῦ.

515) Μία κυρία εἶναι 28 ἐτῶν 5 μηνῶν 15 ἡμερῶν. Ὁ δὲ σύζυγός της εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ αὐτὴν κατὰ 6 ἔτη 4 μῆνας 10 ἡμέρας. Νά εὑρεθῇ ἡ ἡλικία τοῦ συζύγου.

Γ' Ὁμάς. 516) Ἕνα τόξον ὡρισμένης περιφερείας ἔχει μέτρον 35° 20' 12'', ἄλλο τόξον τῆς ἰδίας περιφερείας εἶναι 42° 48' 50'' καὶ τρίτον τόξον εἶναι 56° 28' 35''. Πόσον εἶναι τὸ μέτρον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τόξων αὐτῶν;

517) Ἕνα τόξον εἶναι $\frac{7}{25}$ τῆς περιφερείας του· ἄλλο τόξον τῆς αὐτῆς περιφερείας εἶναι $\frac{7}{8}$ τῆς μοίρας καὶ τρίτον τόξον ἔχει μέτρον 25° 40' 10''. Πόσον εἶναι τὸ μέτρον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τόξων τούτων;

4. ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ ΣΥΜΜΙΓΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

§ 264. *Πρόβλημα.* **Ἕνα βαρέλιον μὲ τυρὸν ἔχει βάρος 28 ὀκ. 350 δράμια. Τὸ ἀπόβαρον εἶναι 3 ὀκ. 120 δρμ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ βάρος τοῦ τυροῦ, τὸ ὁποῖον περιέχει.**

Λύσις. Εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ ζητούμενον βάρος εἶναι

(28 ὀκ. 350 δράμ.) — (3 ὀκ. 120 δράμ.)

Ἂν ἀφαιρέσωμεν μόνον τὰ 120 δράμια, θὰ μείνουν 28 ὀκ. 230 δράμ. Ἂν δὲ ἀπὸ αὐτὸ τὸ βάρος ἀφαιρέσωμεν καὶ τὰς ὀκάδας, μένουν 25 ὀκάδες 230 δράμια.

Ἀφαιροῦμεν δηλ. ἕκαστον μέρος τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τὸ ὁμοειδὲς μέρος τοῦ μειωτέου, ὅπως φαίνεται εἰς τὴν παραπλεύρως διάταξιν.

Διάταξις τῆς πράξεως

28	ὀκάδες	350	δράμια
3	ὀκάδες	120	δράμια
25	ὀκάδες	230	δράμια

Παρατήρησις. Ἂν ὁ μειωτέος εἶναι 28 ὀκάδες 100 δράμια, τὰ 120 δράμια δὲν ἀφαιροῦνται ἀπὸ τὰ 100. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην προσθέτομεν εἰς τὰ δράμια τοῦ μειωτέου 400 δράμια καὶ εἰς τὰς ὀκάδας τοῦ ἀφαιρετέου 1 ὀκᾶν. Ἔπειτα ἐκτελοῦμεν τὴν ἀφαίρεσιν (28 ὀκ. 500 δράμ.) — (4 ὀκ. 120 δράμ.), ὅπως προηγουμένως.

Διάταξις τῆς πράξεως

		$\overbrace{}^{500}$	
28	ὀκ.	100	δράμ.
4	ὀκ.	120	δράμ.
24	ὀκ.	380	δράμ.

Αὐτὴν τὴν ἀφαίρεσιν ἐκτελοῦμεν καὶ ὡς ἑξῆς:

Ἀπὸ τὰς 28 ὀκ. λαμβάνομεν μίαν ὀκᾶν ἢ 400 δράμια, τὰ ὁποῖα προσθέτομεν μὲ τὰ 100 δράμ. Ἔπειτα ἐκτελοῦμεν τὴν ἀφαίρεσιν.

(27 ὀκ. 500 δρ.) — (3 ὀκ. 120 δράμ.).

27	ὀκ.	500	δράμ.
3	ὀκ.	120	δράμ.
24	ὀκ.	380	δράμ.

Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον εἶναι π. χ.

(5 ὧρ. $0^{π}$ $15^{δ}$) — (2 ὧρ. $20^{π}$ $8^{δ}$) =
(4 ὧρ. $60^{π}$ $15^{δ}$) — (2 ὧρ. $20^{π}$ $8^{δ}$) =
2 ὧρ. $40^{π}$ $7^{δ}$.

$180^{\circ} - (63^{\circ}\ 42'\ 25'') =$
$(179^{\circ}\ 59'\ 60'') - (63^{\circ}\ 42'\ 25'') =$
$116^{\circ}\ 17'\ 35''$.

Διάταξις τῆς πράξεως

$$\begin{array}{r} 180^{\circ} = 179^{\circ}\ 59'\ 60'' \\ 63^{\circ}\ 42'\ 25'' \\ \hline 116^{\circ}\ 17'\ 35'' \end{array}$$

Ἀσκήσεις

Α' Ὁμάς. 518) Νὰ γίνουν αἱ κάτωθι ἀφαιρέσεις:

1. (5 ὧρ. $25^{π}$ $40^{δ}$) — (3 ὧρ. $40^{π}$ $50^{δ}$).
2. 13 ὧρ. — (8 ὧρ. $25^{π}$ $48^{δ}$).
3. $180^{\circ} - (149^{\circ}\ 30'\ 58'')$.
4. (3 στατ. 25 ὀκ.) — (2 στατ. 38 ὀκ. 250 δράμ.).

519) Νὰ γίνουν αἱ κάτωθι ἀφαιρέσεις:

1. $8\frac{3}{5}$ στατῆρες — (3 στατ. 40 ὀκ. 200 δράμ.)

2. (15 λίρ. 18 σελ.) — ($8\frac{7}{8}$ λίρ.).

Β' Ὁμάς. 520) Πόσος χρόνος παρῆλθε μέχρι σήμερον ἀπὸ τῆς 28ης Ὀκτωβρίου 1940;

521) Ἕνας παντοπώλης ἠγόρασεν ἀπὸ χωρικὸν 15 στατῆρ. 1 ὀκ. 250 δράμ. ἐλαίας. Μέχρι τῆς εἰσαγωγῆς εἰς τὸ παντοπωλεῖον ὑπέστησαν φύραν 20 ὀκ. 300 δράμ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐναπομεῖναν βάρος τῶν ἐλαιῶν.

522) Ἕνα παιδίον ἐγεννήθη τὴν 16ην Μαρτίου 1937. Πόσην ἡλικίαν ἔχει σήμερον;

523) Ἕνα τόξον ἔχει μέτρον 35° 24′ 40″. Πόσον εἶναι τὸ μέτρον τοῦ συμπληρωματικοῦ του τόξου;

524) Ἕνα τόξον ἔχει μέτρον 75° 15′ 48″. Πόσον εἶναι τὸ μέτρον τοῦ παραπληρωτικοῦ του τόξου;

525) Ἕνας κτηματίας εἶχε δανεισθῇ ἀπὸ τὴν Κτηματικὴν Τράπεζαν 850 λίρας· ἐπλήρωσε δὲ 355 λίρ. 15 σελ. 8 πέν. 2 φαρδ. Πόσα χρεωστεῖ ἀκόμη;

Γ' Ὁμάς. 526) Ἕνας οἰκοδεσπότης ἐχρεώστει εἰς τὴν Κτηματικὴν Τράπεζαν 25 λίρ. 14 σελ. 6 πέν. Ἐπλήρωσε δὲ 252 000 δρχ. μὲ τιμὴν τῆς λίρας πρὸς 80 000 παλαιὰς δραχ. Πόσα χρεωστεῖ ἀκόμη;

527) Ἠγόρασέ τις 20 στατ. 35 ὀκ. ξυλανθράκων διὰ τὸν χειμῶνα Κατὰ τὸν πρῶτον μῆνα ἐξώδευσε 3 στατ. 20 ὀκ. καὶ κατὰ τὸν δεύτερον $4\frac{3}{5}$ στατ. Πόσοι ξυλάνθρακες ἔμειναν;

528) Γνωρίζομεν ἐκ τῆς Γεωμετρίας ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν Α,Β,Γ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ εἶναι ἴσον μὲ 180°. Ἐὰν εἶναι Α = 48° 35′ 40″, Β = 69° 56′ 30″, πόσον εἶναι ἡ Γ;

529) Τὰ μέτρα δύο τόξων εἶναι 60° 35′ καὶ 58° 45″. Κατὰ πόσον τὸ ἄθροισμά των ὑπερβαίνει τὸ $\frac{1}{8}$ τῆς περιφερείας;

530) Ἀπὸ τὸν κρουνὸν ἑνὸς βαρελίου οἴνου χύνονται 3 σταγόνες κατὰ δευτερόλεπτον. Πόσαι λίτραι οἴνου θὰ χυθοῦν μεταξὺ 8 ὥρ. 24π τῆς πρωίας καὶ 6 ὥρ. 45π τῆς ἑσπέρας, ἂν γνωρίζωμεν ὅτι 25 σταγόνες ἔχουν ὄγκον ἕνα κυβ. ἑκατοστόμετρον;

531) Ἡ ἄνοιξις διαρκεῖ 92 ἡμ. 21 ὥρ, τὸ θέρος 93 ἡμ. 14 ὥρ, τὸ φθινόπωρον 89 ἡμ. 19 ὥρας καὶ ὁ χειμὼν 89 ἡμ. Κατὰ πόσον εἶναι μεγαλύτερον: 1ον τὸ θέρος τῆς ἀνοίξεως; 2ον τὸ φθινόπωρον τοῦ χειμῶνος; 3ον ἡ ἄνοιξις καὶ τὸ θέρος ἀπὸ τὸ φθινόπωρον καὶ τὸν χειμῶνα;

5. ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΚΑΙ ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ ΣΥΜΜΙΓΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

§ 265. Πῶς πολλαπλασιάζεται συμμιγὴς ἐπὶ ἀκέραιον.

Πρόβλημα. **Μία ἀτμομηχανὴ καίει 3 στατῆρας 10 ὀκάδας 250 δράμια ἀνθράκων τὴν ὥραν. Νὰ εὑρεθῇ τὸ βάρος τῶν ἀνθράκων, τοὺς ὁποίους καίει εἰς τρεῖς ὥρας.**

Λύσις. Ἀφοῦ εἰς 1 ὥρ. καίει 3 στατ. 10 ὀκ. 250 δράμ. εἰς 3 ὥρας θὰ κάψῃ τριπλάσιον ποσόν, ἤτοι:

(3 στατ. 10 ὀκ. 250 δράμ.) × 3 = (3 στατ. 10 ὀκ. 250 δράμ.) + + (3 στ. 10 ὀκ. 250 δράμ.) + (3 στατ. 10 ὀκ. 250 δράμ.).

Κατὰ δὲ τὸν τρόπον τῆς προσθέσεως συμμιγῶν ἀριθμῶν εἶναι:

(3 στατ. 10 ὀκ. 250 δράμ.) × 3 = (3 στ. × 3) + (10 ὀκ. × 3) + (250 ὀκ. × 3) = 9 στατ. 30 ὀκ. 750 δράμ.

Ἐπειδὴ δὲ 750 δράμ. = 1 ὀκ. 350 δράμ, αἱ 30 ὀκαδ. γίνονται 31 ὀκάδ, τὸ ὅλον δὲ βάρος γίνεται 9 στατ. 31 ὀκ. 350 δράμια.

Ἀπὸ τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος αὐτοῦ συνάγομεν ὅτι:

Διάταξις τῆς πράξεως

3 στ. 10 ὀκ. 250 δράμ.	
	3
9 στ. 30 ὀκ. 750 δράμ.	
9 στ. 31 ὀκ. 350 δράμ.	

Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν συμμιγῆ ἐπὶ ἀκέραιον, πολλαπλασιάζομεν ἕκαστον μέρος τοῦ συμμιγοῦς ἐπὶ τὸν ἀκέραιον ἀρχόμενοι ἀπὸ τὴν κατωτέραν τάξιν.

Ἐὰν δὲ ἕνα ἀπὸ τὰ μερικὰ γινόμενα περιέχῃ μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως, ἐξάγομεν αὐτὰς καὶ τὰς προσθέτομεν εἰς τὸ ἑπόμενον μερικὸν γινόμενον.

Ἀσκήσεις

532) Διὰ μίαν παιδικὴν ἐνδυμασίαν χρειάζονται 2 πήχ. 5 ρούπια ἀπὸ ἕνα ὕφασμα. Πόσον ὕφασμα ἀπὸ αὐτὸ πρέπει νὰ προμηθευθῇ ἕνας ράπτης, διὰ νὰ κάμῃ 10 τοιαύτας ἐνδυμασίας;

533) Ἕνα κινητὸν σημεῖον διατρέχει ἐπὶ μιᾶς περιφερείας τόξον 3° 25′ 30″ εἰς 1 πρῶτον λεπτόν. Πόσον τόξον διατρέχει εἰς 5 πρῶτα λεπτά ;

534) Μία οἰκογένεια ἔκαιε τὸν παρελθόντα Ἰανουάριον 5 ὀκ. 250 δράμ. ἀνθράκων τὴν ἡμέραν. Πόσους ἄνθρακας ἔκαυσε τὸν μῆνα ἐκεῖνον ;

535) Ἕνας οἰκογενειάρχης ἠγόρασε 5 σάκκους ἀνθράκων. Κάθε σάκκος εἶχε βάρος 38 ὀκ. 250 δράμια, κενὸς δὲ 350 δράμια. Πόσους ἄνθρακας ἠγόρασε ;

§ 266. Πῶς διαιρεῖται συμμιγὴς δι᾿ ἀκεραίου. *Πρόβλημα.* **Εἰς 8 πτωχὰς οἰκογενείας διενεμήθησαν ἐξ ἴσου 13 στατῆρες 5 ὀκάδες 320 δράμια ἀλεύρου. Νὰ εὑρεθῇ πόσον ἄλευρον ἔλαβε κάθε οἰκογένεια.**

Λύσις. Εἶναι φανερὸν ὅτι κάθε οἰκογένεια ἔλαβε :

(13 στ. 5 ὀκ. 320 δράμ.) : 8.

Ἀπὸ τοὺς 13 στατῆρας ἔλαβε κάθε οἰκογένεια 1 στ. καὶ ἐπερίσσευσαν 5 στατ. ἢ 44 × 5 = 220 ὀκ. Αὐταὶ μὲ τὰς 5 ὀκ. τοῦ συμμιγοῦς ἀποτελοῦν 225 ὀκάδ.

Ἀπὸ αὐτὰς ἔλαβε κάθε οἰκογένεια 225 : 8, ἤτοι 28 ὀκ. καὶ ἐπερίσσευσε 1 ὀκᾶ, ἤτοι 400 δράμια.

Ἐμοίρασαν λοιπὸν ἀκόμη 400 + 320 = 720 δράμια καὶ ἔλαβε κάθε οἰκογένεια 720 : 8 = 90 δράμ. Ὥστε :

(13 στ. 5 ὀκ. 320 δράμ.) : 8 = 1 στ. 28 ὀκ. 90 δράμ.

Ἀπὸ τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος αὐτοῦ συνάγομεν ὅτι :

Διάταξις τῆς πράξεως

```
  13 στ.5 ὀκ.320 δρ. | 8
   5 στ.             |------------------
×  44                | 1 στ.28 ὀκ.90δρμ.
  -------
  220 ὀκ.
+   5
  -------
  225 ὀκ.
   65
    1 ὀκ.
× 400
  -------
  400 δράμ.
+ 320
  -------
  720 δράμ.
   00
```

Διὰ νὰ διαιρέσωμεν συμμιγῆ δι᾿ ἀκεραίου διαιροῦμεν ἕκαστον μέρος τοῦ συμμιγοῦς διὰ τοῦ ἀκεραίου ἀρχόμενοι ἀπὸ τὰς μονάδας τῆς ἀνωτέρας τάξεως. Ἐὰν ἀπὸ μίαν μερικὴν διαίρεσιν μείνῃ ὑπόλοιπον, τρέπομεν αὐτὸ εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως

κατωτέρας τάξεως καὶ εἰς τὸ γινόμενον προσθέτομεν καὶ τὰς ὁμοειδεῖς μονάδας τοῦ συμμιγοῦς (ἂν ἔχῃ), τὸ δὲ ἄθροισμα διαιροῦμεν διὰ τοῦ ἀκεραίου. Οὕτω δὲ ἐξακολουθοῦμεν, μέχρις ὅτου διαιρέσωμεν ὅλα τὰ μέρη τοῦ συμμιγοῦς.

Ἀσκήσεις

536) Ἕνα ὡρολόγιον μένει ὀπίσω 8^{π} 30^{δ} εἰς 6 ὥρας. Πόσον μένει ὀπίσω εἰς μίαν ὥραν ;

537) Ἕνα ὡρολόγιον ἐκανονίσθη τὴν μεσημβρίαν μιᾶς ἡμέρας νὰ δεικνύῃ ἀκριβῶς 12 ὥρ. Τὴν ἑπομένην μεσημβρίαν ἐδείκνυεν 11 ὥρ. 50^{π} 30^{δ}. Πόσον ἔμεινεν ὀπίσω τὴν ὥραν ;

538) Ἕνας ταξιδιώτης ἠγόρασεν ἀπὸ τὸ Λονδῖνον 5 ὑάρδας ὑφάσματος καὶ ἔδωκε 13 λίρ. 18 σελ. 6 πέν. 2 φαρδ. Πρὸς πόσον ἠγόρασε τὴν ὑάρδαν ;

539) Ἕνας Ἕλλην ἐργαζόμενος εἰς τὴν Νότιον Ἀφρικὴν ἀπέστειλεν εἰς 3 ἀδελφούς του 17 λίρας 9 σελίνια. Πόσα χρήματα ἔλαβε κάθε ἀδελφός ;

§ 267. Πῶς πολλαπλασιάζεται συμμιγὴς ἐπὶ κλάσμα.

Πρόβλημα. **Μία οἰκογένεια ἐξοδεύει 4 ὀκ. 300 δράμ. ζάκχαριν τὸν μῆνα. Νὰ εὑρεθῇ τὸ βάρος τῆς ζακχάρεως, τὴν ὁποίαν ἐξοδεύει εἰς τὰ $\frac{2}{5}$ τοῦ μηνός.**

Λύσις. Εἶναι φανερὸν ὅτι εἰς τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ μηνὸς ἐξοδεύει τὸ $\frac{1}{5}$ τῶν 4 ὀκ. 300 δράμ, ἤτοι $\frac{4 \text{ ὀκ. } 300 \text{ δρμ.}}{5}$.

Ἑπομένως εἰς τὰ $\frac{2}{5}$ τοῦ μηνὸς ἐξοδεύει 2 φορὰς περισσότερον, ἤτοι : $\frac{4 \text{ ὀκ. } 300 \text{ δρμ.}}{5} \times 2 = 380$ δράμια $\times\ 2 = 1$ ὀκᾶ 360 δράμια.

Ὅπως δὲ τὸ γινόμενον $\frac{\alpha}{\gamma} \times \beta$ ὠνομάσαμεν (§ 190) γινόμενον τοῦ α ἐπὶ $\frac{\beta}{\gamma}$, οὕτω καὶ τὸ προηγούμενον γινόμενον ὀνομάζομεν γινόμενον τοῦ συμμιγοῦς 4 ὀκ. 300 δράμ. ἐπὶ $\frac{2}{5}$.

Εἶναι λοιπὸν (4 ὀκ. 300 δράμ.) $\times \frac{2}{5} = \frac{4 \text{ ὀκ. } 300 \text{ δρμ.}}{5} \times 2$. (1)

'Επειδὴ δὲ $\frac{4 \text{ ὀκ. } 300 \text{ δράμ.}}{5} \times 2 = \frac{4 \text{ ὀκ. } 300 \text{ δράμ.}}{5} + \frac{4 \text{ ὀκ. } 300 \text{ δράμ.}}{5}$

εὐκόλως ἐννοοῦμεν ὅτι: $\frac{4 \text{ ὀκ. } 300 \text{ δράμ.}}{5} \times 2 = \frac{(4 \text{ ὀκ. } 300 \text{ δράμ.}) \times 2}{5}$.

'Από αὐτὴν τὴν ἰσότητα καὶ ἀπὸ τὴν (1) συμπεραίνομεν ὅτι:

$$(4 \text{ ὀκ. } 300 \text{ δρμ.}) \times \frac{2}{5} = \frac{(4 \text{ ὀκ. } 300 \text{ δράμ.}) \times 2}{5}.$$

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι πολλαπλασιάζομεν ἕνα συμμιγῆ ἀπὶ κλάσμα, ὅπως πολλαπλασιάζομεν καὶ κάθε ἄλλον ἀριθμὸν ἐπὶ κλάσμα. Ὥστε:

Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἕνα συμμιγῆ ἐπὶ κλάσμα, πολλαπλασιάζομεν τὸν συμμιγῆ ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ του.

Εὑρίσκομεν δὲ κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ὅτι:

4 ὀκ. 300 δράμ. $\times \frac{2}{5} = \frac{(4 \text{ ὀκ. } 300 \text{ δράμ.}) \times 2}{5} = \frac{8 \text{ ὀκ. } 600 \text{ δράμ.}}{5} = 1$ ὀκ. 360 δράμ.

Ἀσκήσεις

Α' Ὁμάς. 540) Μία σιταποθήκη χωρεῖ 20 στ. 25 ὀκ. καὶ ἔχει σῖτον μέχρι τῶν $\frac{3}{4}$ αὐτῆς. Πόσον σῖτον ἔχει;

541) Ἕνας οἰκογενειάρχης ἠγόρασε 5 στατ. 18 ὀκ. ἀνθράκων. Τὸ $\frac{1}{9}$ ὅμως τοῦ βάρους του ἦτο κόνις. Πόσον καθαρὸν βάρος ἀνθράκων ἠγόρασεν;

542) Διὰ μίαν ἀνδρικὴν ἐνδυμασίαν χρειάζονται 4 πήχ. 2 ρούπ. Διὰ μίαν δὲ παιδικὴν χρειάζονται τὰ $\frac{5}{8}$ τοῦ ὑφάσματος τῆς ἀνδρικῆς. Πόσον ὕφασμα χρειάζεται διὰ μίαν παιδικὴν ἐνδυμασίαν;

543) Ἕνας ἔμπορος ὑφασμάτων εἶχεν ἕνα τεμάχιον ὑφάσματος, τὸ ὁποῖον ἦτο 48 πήχεις καὶ 6 ρούπια. 'Επώλησε δὲ τὰ $\frac{5}{8}$ αὐτοῦ. Πόσον ὕφασμα τοῦ ἔμεινεν;

§ 268. Πῶς πολλαπλασιάζεται συμμιγὴς ἐπὶ μεικτόν. *Πρόβλημα.* **Μία οἰκογένεια ἐξοδεύει 14 ὀκάδας 250 δράμια ἐλαίου τὸν μῆνα. Πόσον ἔλαιον δαπανᾷ εἰς $2\frac{3}{4}$ μῆνας;**

Λύσις. Α' τρόπος. Ἀφοῦ τὸν 1 μῆνα ἐξοδεύει 14 ὀκ. 250 δράμια, τοὺς $2\frac{3}{4}$ μῆνας θὰ δαπανᾷ (14 ὀκ. 250 δράμ.) $\times\ 2\frac{3}{4}$.

Ἐπειδὴ δὲ $2\frac{3}{4}=\frac{11}{4}$, θὰ εἶναι : (14 ὀκ. 250 δράμ.) $\times\ 2\frac{3}{4}=$ (14 ὀκ 250 δράμ.) $\times\ \frac{11}{4}=\frac{(\text{14 ὀκ. 250 δράμ.})\times 11}{4}=\frac{\text{160 ὀκ. 350 δράμ.}}{4}=$ 40 ὀκ. 87,5 δράμ.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι :

Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν συμμιγῆ ἐπὶ μεικτόν, τρέπομεν τὸν μεικτὸν εἰς κλάσμα καὶ ἐπὶ αὐτὸ πολλαπλασιάζομεν τὸν συμμιγῆ.

Β' τρόπος. Εἰς 2 μῆνας δαπανᾷ :

(14 ὀκ. 250 δράμ.) $\times$ 2 = 29 ὀκ. 100 δράμ.

Εἰς τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ μηνὸς δαπανᾷ :

(14 ὀκ. 250 δράμ) $\times\ \frac{3}{4}$ = 10 ὀκ. 387,5 δράμ.

Ἑπομένως εἰς $2\frac{3}{4}$ μῆνας ἐξοδεύει :

(29 ὀκ. 100 δράμ.) + (10 ὀκ. 387,5 δράμ.) = 40 ὀκ. 87,5 δράμ.

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι : (14 ὀκ. 250 δράμ.) $\times\ 2\frac{3}{4}=$ (14 ὀκ. 250 δράμ.) $\times$ 2 + (14 ὀκ. 250 δράμ.) $\times\ \frac{3}{4}$. Ὥστε :

Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν συμμιγῆ ἐπὶ μεικτόν, δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν συμμιγῆ χωριστὰ ἐπὶ τὸν ἀκέραιον καὶ χωριστὰ ἐπὶ τὸ κλάσμα καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ γινόμενα.

Ἀσκήσεις

544) Μία μικρὰ ὁμὰς ἐργατῶν χρειάζεται 2 ἡμ. καὶ 5 ὥρας διὰ νὰ καλλιεργήσῃ 1 στρέμμα ἀμπέλου. Εἰς πόσον χρόνον καλλιεργεῖ $6\frac{3}{5}$ στρέμματα τοιαύτης ἀμπέλου ;

545) Ἕνα αὐτοκίνητον διατρέχει 1 χιλιόμετρον εἰς $2^{π}$ καὶ $30^{δ}$. Εἰς πόσον χρόνον διανύει $20\frac{5}{8}$ χιλιόμετρα ;

546) Μία κρήνη γεμίζει μίαν ἐδαφικὴν κοιλότητα εἰς $3\frac{4}{5}$ ὥρας. Πόσον ὕδωρ χωρεῖ αὐτὴ ἡ κοιλότης, ἂν εἰς 1 ὥραν τρέχῃ ἀπὸ τὴν κρήνην ὕδωρ 2 στατ. 24 ὀκ. 150 δράμ ;

547) Ἀπὸ τὸν κρουνὸν μιᾶς οἰκιακῆς ὑδαταποθήκης χύνονται 12 ὀκ. 340 δράμ. τὴν ὥραν. Ἂν αὔτη εἶναι γεμάτη καὶ ἀνοιχθῇ ὁ κρουνός, ἀδειάζει εἰς $6\frac{2}{5}$ ὥρας. Πόσον ὕδωρ χωρεῖ ἡ ὑδαταποθήκη;

§ 269. Πῶς διαιρεῖται συμμιγὴς διὰ κλάσματος ἢ μεικτοῦ (μερισμός). *Πρόβλημα 1ον.* **Μία ὁμὰς ἐργατῶν ἐκαλλιέργησε τὰ $\frac{3}{5}$ ἑνὸς κτήματος εἰς 5 ἡμ. 6 ὥρ. 30π. Νὰ εὑρεθῇ ὁ χρόνος, τὸν ὁποῖον χρειάζεται αὔτη, διὰ νὰ καλλιεργήσῃ ὅλον τὸ κτῆμα** (1 ἐργάσιμος ἡμέρα = 8 ὧραι).

Λύσις. Ἀφοῦ διὰ τὰ $\frac{3}{5}$ τοῦ κτήματος ἐχρειάσθησαν 5 ἡμ. 6 ὥρ. 30π, δι' ὅλον τὸ κτῆμα θὰ ἐχρειάσθησαν (5 ἡμ. 6 ὥρ. 30π) : $\frac{3}{5}$.

Διάταξις τῆς πράξεως

```
 5 ἡμ.  6 ὥρ.  30π
                 5
------------------
25 ἡμ. 30 ὥρ. 150π | 3
29 ἡμ.  0 ὥρ.  30π | 9 ἡμ. 5 ὥρ. 30π
 2 ἡμ.
× 8
16 ὥρ.
 1 ὥρ.
×60
 60π
+30
 90π
  0
```

Τὸ ἐξαγόμενον αὐτῆς τῆς πράξεως δυνάμεθα νὰ τὸ εὕρωμεν, ἂν λύσωμεν τὸ πρόβλημα διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα.

Σκεπτόμεθα λοιπὸν ὡς ἑξῆς:

Ἀφοῦ διὰ τὰ $\frac{3}{5}$ ἐχρειάσθησαν 5 ἡμ. 6 ὥρ. 30π, διὰ τὸ $\frac{1}{5}$ ἐχρειάσθησαν 3 φορὰς ὀλιγώτερον, ἤτοι $\frac{5 \text{ ἡμ. } 6 \text{ ὥρ. } 30^{\pi}}{3}$ καὶ δι' ὅλον τὸ κτῆμα, δηλ. διὰ τὰ $\frac{5}{5}$ αὐτοῦ, ἐχρειάσθησαν 5 φορὰς περισσότερον ἀπὸ τὸν προηγούμενον χρόνον, ἤτοι :

$$\frac{5 \text{ ἡμ. } 6 \text{ ὥρ. } 30^{\pi}}{3} \times 5 = (5 \text{ ἡμ. } 6 \text{ ὥρ. } 30^{\pi}) \times \frac{5}{3} =$$

$$(29 \text{ ἡμ. } 0 \text{ ὧρ. } 30^{\pi}) : 3 = 9 \text{ ἡμ. } 5 \text{ ὧρ. } 30^{\pi}$$

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι :

$$(5 \text{ ἡμ. } 6 \text{ ὧρ. } 30^{\pi}) : \frac{3}{5} = (5 \text{ ἡμ. } 6 \text{ ὧρ. } 30^{\pi}) \times \frac{5}{3}$$ Ὥστε :

Διὰ νὰ διαιρέσωμεν συμμιγῆ ἀριθμὸν διὰ κλάσματος, πολλαπλασιάζομεν τὸν συμμιγῆ ἐπὶ τὸ κλάσμα ἀντεστραμμένον.

Ἡ ἰσότης λοιπὸν $\alpha : \frac{\mu}{\nu} = \alpha \times \frac{\nu}{\mu}$ εἶναι ἀληθὴς καὶ ὅταν ὁ α εἶναι συμμιγὴς ἀριθμός.

§ 270. *Πρόβλημα 2ον.* **Ἕνας ταξιδιώτης ἠγόρασεν ἀπὸ τὸ Λονδῖνον $5\frac{1}{2}$ ὑάρδας ὑφάσματος καὶ ἔδωκεν 8 λίρ. 18 σελ. 9 πέν. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τῆς ὑάρδας.**

Λύσις. Ἀφοῦ διὰ $5\frac{1}{2}$ ὑάρδας ἔδωκεν 8 λίρας 18 σελ. 9 πέν, διὰ τὴν 1 ὑάρδα ἔδωκε $5\frac{1}{2}$ φορὰς ὀλιγώτερον, ἤτοι :

$$(8 \text{ λίρ. } 18 \text{ σελ. } 9 \text{ πέν.}) : 5\frac{1}{2}.$$

Ἐπειδὴ δὲ $5\frac{1}{2} = \frac{11}{2}$, συμπεραίνομεν ὅτι :

$$(8 \text{ λίρ. } 18 \text{ σελ. } 9 \text{ πέν.}) : 5\frac{1}{2}$$
$$= (8 \text{ λίρ. } 18 \text{ σελ. } 9 \text{ πέν.}) : \frac{11}{2}$$
$$= (8 \text{ λίρ. } 18 \text{ σελ. } 9 \text{ πέν.}) \times \frac{2}{11}$$
$$= 1 \text{ λίρ. } 12 \text{ σελ. } 6 \text{ πέν.}$$

Διάταξις τῆς πράξεως

```
   8 λίρ. 18 σελ.  9 πέν.
                   2
 ------------------------
  16  »   36  »   18  »
ἢ 17  »   17  »    6  » | 11
   6 λίρ.               |-------------------------
                        | 1 λίρ. 12 σελ. 6 πέν.
 ×20
 -------
 120 σελ.
 +17
 -------
 137 σελ.
  27
   5 σελ.
 ×12
 -------
  60 πέν.
 + 6
 -------
  66 πέν.
   0
```

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι :

Διὰ νὰ διαιρέσωμεν συμμιγῆ ἀριθμὸν διὰ μεικτοῦ, τρέπομεν τὸν μεικτὸν εἰς κλάσμα καὶ διαιροῦμεν τὸν συμμιγῆ δι' αὐτοῦ τοῦ κλάσματος.

Ὥστε ὁ γνωστὸς κανὼν τῆς διαιρέσεως ἀριθμοῦ α διὰ μεικτοῦ ἀληθεύει καὶ ὅταν ὁ α εἶναι συμμιγὴς ἀριθμός.

Γενικὸν συμπέρασμα. Ἀπὸ τὰ προηγούμενα ἐμάθομεν ὅτι ἕνας συμμιγὴς ἀριθμὸς πολλαπλασιάζεται ἢ διαιρεῖται διὰ κλάσματος ἢ μεικτοῦ ἀκριβῶς ὅπως καὶ ἕνας ἁπλοῦς ἀριθμός.

Ἀσκήσεις

548) Τὰ $\frac{5}{8}$ ἑνὸς τεμαχίου ὑφάσματος ἔχουν 45 πήχ. 5 ρούπ. Πόσον εἶναι ὅλον τὸ τεμάχιον;

549) $3\frac{2}{5}$ ὅμοια τεμάχια ὑφάσματος ἔχουν 145 πήχ. 4 ρούπ. Πόσον ὕφασμα ἔχει ἕνα ἀκέραιον τεμάχιον ἀπὸ αὐτά;

550) Ἕνας παντοπώλης ἠγόρασεν ἀπὸ ἕνα σαπωνοποιεῖον 4 στατ. 15 ὀκ. σάπωνος. Ἐγέμισε δὲ μὲ αὐτὸν $5\frac{3}{4}$ ὅμοια κιβώτια. Πόσον σάπωνα ἐχώρει κάθε κιβώτιον;

551) Τὰ $\frac{5}{8}$ ἑνὸς τόξου ἔχουν μέτρον $50^\circ\ 12'\ 55''$. Πόσον εἶναι τὸ μέτρον τοῦ τόξου τούτου;

552) Ἕνας ποδηλάτης εἰς $5\frac{2}{3}$ πρῶτα λεπτὰ διέτρεξεν $72^\circ\ 40'\ 20''$ ἐπὶ τῆς περιφερείας ἑνὸς κυκλικοῦ ποδηλατοδρομίου. Πόσον εἶναι τὸ μέτρον τοῦ τόξου, τὸ ὁποῖον διέτρεξεν εἰς 1 πρῶτον λεπτόν;

§ 271. Μέθοδος τῶν ἁπλῶν μερῶν. *Πρόβλημα 1ον.* **Ἕνα μικρὸν πετρελαιοκίνητον ἀτμόπλοιον καίει 4 στατ. 33 ὀκ. 300 δράμια πετρελαίου τὴν ἡμέραν. Πόσον πετρέλαιον θὰ καύσῃ εἰς 24 ἡμέρας;**

Λύσις. Εἶναι φανερὸν ὅτι εἰς 24 ἡμέρας καίει

(4 στατ. 33 ὀκ. 300 δράμ.) $\times$ 24.

Εἰς τὰ προηγούμενα ἐμάθομεν πῶς εὑρίσκομεν τὸ γινόμενον αὐτό. Τώρα θὰ μάθωμεν καὶ τὸν ἑξῆς ἀκόμη τρόπον:

Ἂν ἔκαιε 4 στατ. τὴν ἡμέραν, εἰς 24 ἡμ. θὰ ἔκαιε $4\times24=96$ στατ.

Ἔπειτα χωρίζομεν τὰς 33 ὀκ. εἰς 22 ὀκ. $=\frac{1}{2}$ στατ. καὶ εἰς 11 ὀκ. $=\frac{1}{2}$ τῶν 22 ὀκ. Σκεπτόμεθα δὲ ὡς ἑξῆς:

Ἂν ἔκαιεν 1 στατῆρα τὴν ἡμέραν, εἰς τὰς 24 ἡμέρας θὰ ἔκαιεν 1 στατ. $\times$ $24=24$ στατ. Ἑπομένως πρὸς 22 ὀκ. $=\frac{1}{2}$ στατ. τὴν ἡμέραν καίει 24 στ. : $2=12$ στατ. καὶ πρὸς 11 ὀκ. θὰ καίῃ $12:2=6$ στατ.

Τέλος χωρίζομεν καὶ τὰ 300 δράμ. εἰς 200 δράμ. $= \frac{1}{2}$ ὀκ. καὶ εἰς 100 δράμ. $= \frac{1}{2}$ τῶν 200 δράμ. καὶ σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς:

Ἀπὸ 1 ὀκᾶν τὴν ἡμέραν, εἰς 24 ἡμέρας καίει 1 ὀκ $\times$ 24 = 24 ὀκ. Ἑπομένως ἀπὸ 200 δράμια τὴν ἡμέραν καίει 24 ὀκ. : 2 = 12 ὀκ. καὶ ἀπὸ 100 δράμια τὴν ἡμέραν καίει 12 ὀκ. : 2 = 6 ὀκ.

Προσθέτομεν δὲ ὅλα τὰ εὑρεθέντα ποσὰ καὶ εὑρίσκομεν ὅτι εἰς 24 ἡμέρας καίει 114 στατ. 18 ὀκ.

Ὅπως βλέπομεν, τὰ μέρη τοῦ πολλαπλασιαστέου χωρίζονται εἰς ἁπλᾶ μέρη $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right.$ κ.τ.λ.$\left.\right)$ προηγουμένων μερῶν.

Δι᾽ αὐτὸ δὲ ἡ μέθοδος αὕτη λέγεται **μέθοδος τῶν ἁπλῶν μερῶν**.

Εἶναι δὲ προτιμοτέρα ἡ μέθοδος αὐτή, ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι μεγάλος ἀριθμός.

Διατάσσεται δὲ ἡ πρᾶξις ὡς ἀκολούθως:

		4 στ. 33 ὀκ. 300 δρμ.
		24
Ἀπὸ 4 στατῆρας ἡμερησίως		96 στατ.
ἀπὸ 33 ὀκάδας ἡμερησίως	22 ὀκάδ. $= \frac{1}{2}$ στ.	12 στατ.
	11 ὀκάδ. $= \frac{1}{2}$ τῶν 22 ὀκ.	6 στατ.
ἀπὸ 300 δράμ. ἡμερησίως	200 δράμ. $= \frac{1}{2}$ ὀκ.	0 στατ. 12 ὀκ.
	100 δράμ. $= \frac{1}{2}$ τῶν 200 δρ.	0 στατ. 6 ὀκ.
		114 στατ. 18 ὀκ.

§ 272. *Πρόβλημα. 2ον.* **Ἕνα αὐτοκίνητον εἰς μίαν ὥραν διανύει 24 χιλιόμ. καὶ 750 μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ διάστημα, τὸ ὁποῖον διανύει εἰς 5 ὥρ. 40π.**

Λύσις. Α' τρόπος. Ἐπειδὴ 5 ὥρ. $40^{\pi} = 5\frac{40}{60} = 5\frac{2}{3}$ ὧραι, τὸ ζητούμενον εἶναι (24 χλμ. 750 μέτρ.) $\times\, 5\frac{2}{3} =$ 140 χλμ. 250 μέτρα. Δηλαδὴ ἐτρέψαμεν τὸν συμμιγῆ 5 ὥρ. 40^{π} εἰς ἁπλοῦν ἀριθμὸν ὡρῶν καὶ ἐννοήσαμεν ὅτι πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν 24 χλμ. 750 μέτρα ἐπὶ τὸν εὑρεθέντα ἁπλοῦν ἀριθμὸν τῶν ὡρῶν.

Σημείωσις. Ἂν τὰ 24 χλμ. 750 μέτ. διανύωνται εἰς 1 πρῶτον λεπτόν, τρέπομεν τὰς 5 ὥρ. 40$^{\pi}$ εἰς ἁπλοῦν ἀριθμὸν πρώτων λεπτῶν.

Β' τρόπος. Εὑρίσκομεν πρῶτον κατὰ τὸν προηγούμενον τρόπον, πόσον διάστημα διανύει εἰς 5 ὥρας. Ἔπειτα χωρίζομεν τὰ 40$^{\pi}$ εἰς 30$^{\pi}$ $= \frac{1}{2}$ ὥρας καὶ εἰς 10$^{\pi}$ $= \frac{1}{3}$ τῶν 30$^{\pi}$.

Σκεπτόμεθα δὲ ὡς ἑξῆς:

Ἀφοῦ εἰς μίαν ὥραν διανύει 24 χιλ. 750 μέτρα, εἰς $\frac{1}{2}$ ὥρας διανύει (24 χιλ. 750 μέτ.) : 2 = 12 χιλ. 375 μέτρα καὶ εἰς 10$^{\pi}$ διανύει τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ προηγουμένου, ἤτοι: (12 χλμ 375 μέτ.) : 3 = 4 χλμ. 125 μέτρα.

Προσθέτομεν ἔπειτα ὅλα τὰ ἐξαγόμενα καὶ εὑρίσκομεν 140 χλμ. 250 μέτρα.

Διάταξις τῆς πράξεως

			24 χλμ. 750 μέτρ.
			5 ὥρ. 40$^{\pi}$
Εἰς 5 ὥρας	Ἀπὸ 24 χλμ. τὴν ὥραν	....	120 χλμ.
	Ἀπὸ 750 μέτ. τὴν ὥραν	500 μέτ. $= \frac{1}{2}$ χλμ. ...	2 χλμ. 500 μέτρ.
		250 $= \frac{1}{2}$ τῶν 500 μέτ.	1 χλμ. 250 μέτρ.
Εἰς 40$^{\pi}$	30$^{\pi}$ $= \frac{1}{2}$ ὥρ.	....	12 χλμ. 375 μέτρ.
	10$^{\pi}$ $= \frac{1}{3}$ τῶν 30$^{\pi}$	....	4 χλμ. 125 μέτρ.
			140 χλμ. 250 μέτρ.

Καὶ ἡ μέθοδος αὕτη λέγεται **μέθοδος τῶν ἁπλῶν μερῶν.**

Ἀσκήσεις

Α' Ὁμάς. Τὰ προβλήματα τῆς ὁμάδος αὐτῆς νὰ λυθοῦν πρῶτον ἀπὸ μνήμης καὶ ἔπειτα νὰ γίνῃ καὶ ἡ διάταξις τῶν πράξεων.

553) Μία οἰκοκυρὰ ἠγόρασεν 150 δράμια βούτυρον πρὸς 40 000 παλαιὰς δραχμὰς τὴν ὀκᾶν. Πόσα χρήματα ἔδωκεν;

554) Ἕνας οἰκογενειάρχης ἠγόρασε 300 δράμια κρέατος πρὸς 16 000 παλαιὰς δραχμὰς τὴν ὀκᾶν. Πόσα χρήματα ἔδωκεν;

555) Ἕνας οἰκογενειάρχης ἠγόρασε 2 ὀκ. 150 δράμ. ἔλαιον πρὸς 8 000 δραχ. τὴν ὀκᾶν. Πόσα χρήματα ἔδωκεν ;

Β' Ὁ μ ά ς. 556) Ἕνας γεωργικὸς συνεταιρισμὸς εἶχεν 120 μέλη καὶ ἐμοίρασε 5 στατ. 24 ὀκ. 250 δράμ. λίπασμα εἰς κάθε μέλος. Πόσον ἦτο τὸ λίπασμα, τὸ ὁποῖον ἐμοίρασεν;

557) Ἕνας γεωργὸς ἐφύτευσε $12\frac{3}{4}$ στρέμματα μὲ καπνόν. Ἀπέδωκε δὲ κάθε στρέμμα 2 στατ. 30 ὀκ. 200 δράμ. καπνοῦ. Πόσον καπνὸν συνεκόμισεν ὁ γεωργὸς αὐτός ;

§ 273. Διαίρεσις διὰ συμμιγοῦς. α') Μερισμός. *Πρόβλημα.* **Μία κυρία εὑρισκομένη εἰς Ἀγγλίαν, ἠγόρασεν 6 πήχ. 5 ρούπ. ὑφάσματος καὶ ἔδωκε 18 λίρ. 7 σελ. 8 πέν. 1 φαρδ. Νὰ εὑρεθῇ 1ον ἡ τιμὴ τοῦ πήχεως καὶ 2ον ἡ τιμὴ τοῦ ἑνὸς ρουπίου.**

Λύσις. 1ον. Οἱ 6 πήχεις 5 ρούπια $= 6\frac{5}{8}$ πήχ. Αὐτὴ ἡ κυρία διὰ $6\frac{5}{8}$ πήχεις ἔδωκε 18 λίρ. 7 σελ. 8 πέν. 1 φαρδ. Ἑπομένως διὰ 1 πῆχυν ἔδωκε (18 λίρ. 7 σελ. 8 πέν. 1 φαρδ.) : $6\frac{5}{8}$.

Ἂν ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν αὐτὴν κατὰ τὸν γνωστὸν τρόπον (§ 270), εὑρίσκομεν ὅτι ἡ τιμὴ τοῦ πήχεως ἦτο 2 λίρ. 15 σελ. 6 πέν.

2ον. Ἂν θέλωμεν νὰ μάθωμεν πόσον ἠγόρασε τὸ 1 ρούπι, εὑρίσκομεν ὅτι 6 πήχ. 5 ρούπ. = 53 ρούπια. Ἐπειδὴ δὲ διὰ 53 ρούπ. ἔδωκε 18 λίρ. 7 σελ. 8 πέν. 1 φαρδ, συμπεραίνομεν ὅτι διὰ τὸ 1 ρούπι ἔδωκε :

(18 λίρ. 7 σελ. 8 πέν. 1 φαρδ.) : 53 = 6 σελ. 11 πέν. 1 φαρδ.

Εἰς τὰ δύο αὐτὰ προβλήματα δίδεται ἡ τιμὴ ἑνὸς ποσοῦ, τοῦ ὁποίου τὸ μέτρον εἶναι συμμιγὴς ἀριθμὸς καὶ ζητεῖται ἡ τιμὴ μιᾶς ἀπὸ τὰς μονάδας τῶν μερῶν τοῦ συμμιγοῦς αὐτοῦ.

Διὰ νὰ τὴν εὕρωμεν δὲ τρέπομεν τὸν συμμιγῆ αὐτὸν εἰς ἁπλοῦν ἀριθμὸν καὶ ὁμοειδῆ πρὸς τὴν μονάδα, τῆς ὁποίας ζητοῦμεν τὴν τιμήν. Ἔπειτα διὰ τοῦ ἁπλοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ διαιροῦμεν τὴν δοθεῖσαν τιμὴν τοῦ ποσοῦ.

Εἰς τὰ παραδείγματα αὐτὰ ἡ δοθεῖσα τιμὴ 18 λιρ. 7 σελ. 8 πέν. 1 φαρδ. εἶναι συμμιγὴς ἀριθμός.

Κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον ἐργαζόμεθα καὶ ἂν ἡ τιμὴ αὐτὴ εἶναι οἱοσδήποτε ἀριθμός· π.χ. 18 λίραι ἢ $10\frac{3}{4}$ λίραι κ.τ.λ.

Ἀσκήσεις

558) Μία κυρία ἠγόρασεν ἑπτὰ πήχεις καὶ 2 ρούπια ὑφάσματος καὶ ἔδωκε 362 500 παλ. δραχ. Πρὸς πόσον ἠγόρασεν τὸν πῆχυν ;

559) Μία δεσποινὶς ἠγόρασε 2 πήχ. 3 ρούπια μεταξωτῆς κορδέλλας καὶ ἔδωκεν 11 400 παλ. δραχ. Πρὸς πόσον ἠγόρασε τὸ ρούπι ;

560) Μία ἁμαξοστοιχία εἰς 4 ὥρ. 40^{π} 30^{δ} διανύει 94 χιλ. καὶ 175 μέτρα. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ταχύτης αὐτῆς καθ' ὥραν.

§ 274. β') Μέτρησις. *Πρόβλημα.* **Μία πλύντρια ἐξοδεύει 2 ὀκ. 120 δράμια σάπωνος τὴν ἡμέραν. Ἂν κάμῃ μίαν προμήθειαν ἀπὸ 27 ὀκ. 240 δράμια, πόσας ἡμέρας θὰ περάσῃ ;**

Λύσις. Μὲ τὸν γνωστὸν συλλογισμὸν ἐννοοῦμεν ὅτι θὰ περάσῃ τόσας ἡμέρας, ὅσα φορὰς χωροῦν αἱ 2 ὀκ. 120 δράμ. εἰς τὰς 27 ὀκ. 240 δράμ, ἤτοι : (27 ὀκ. 240 δράμ.) : (2 ὀκ. 120 δράμ.).

Αὐτὴν τὴν μέτρησιν δυνάμεθα νὰ ἐκτελέσωμεν κατὰ τοὺς ἑξῆς δύο τρόπους :

Α' τρόπος. Ἐπειδὴ

27 ὀκ. 240 δράμ. $= 27\frac{240}{400}$ ὀκ. $= 27\frac{6}{10}$ ὀκ. καὶ 2 ὀκ. 120 δράμ. $= 2\frac{3}{10}$ ὀκ, συμπεραίνομεν ὅτι θὰ περάσῃ $27\frac{6}{10} : 2\frac{3}{10} = 12$ ἡμέρας.

Β' τρόπος. Ἐπειδὴ

27 ὀκ. 240 δράμ. = 11 040 δράμ. καὶ 2 ὀκ. 120 δράμ. = 920 δράμ. ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι 11 040 : 920 = 12 ἡμέραι.

Σημείωσις. Κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον ἐργαζόμεθα καὶ ὅταν ὁ διαιρετέος εἶναι ἁπλοῦς ἀριθμός. Π.χ. εἰς τὸ πρόβλημα αὐτὸ ἠδύνατο ἡ προμήθεια νὰ εἶναι : 4 στατ. ἢ 150 ὀκ. ἢ 600 δράμια.

Εἰς ὅλας τὰς περιπτώσεις ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης τρέπονται εἰς ὁμοειδεῖς ἁπλοῦς ἀριθμοὺς καὶ ἡ διαίρεσις γίνεται κατὰ τὸν γνωστὸν τρόπον.

Ἀσκήσεις

561) Ἕνας νέος σπουδάζων εἰς τὴν Ἀγγλίαν ἠγόρασεν ὕφασμα ἀντὶ 5 λιρ. 15 σελ. Ὑπελόγισε δὲ ὅτι τοῦ ἤρχετο πρὸς 2 λίρ. 6 σελ. τὸν πῆχυν. Πόσον ὕφασμα ἠγόρασεν ;

562) Μία κυρία ἠγόρασεν 9 πήχ. 6 ρούπ. ὑφάσματος διὰ νὰ κάμῃ παραπετάσματα. Ὑπελόγισε δὲ ὅτι διὰ κάθε παράθυρον ἐχρειάζοντο 3 πήχ. καὶ 2 ρούπ. Διὰ πόσα παράθυρα ἔφθασε τὸ ἀγορασθὲν ὕφασμα ;

563) Κατὰ μίαν διανομὴν μὲ τὸ δελτίον ἐδίδοντο 350 δράμια ὀσπρίων κατὰ δελτίον. Ἕνας δὲ οἰκογενειάρχης ἔλαβε 4 ὀκ. 150 δράμ. Πόσα δελτία εἶχε ;

564) Ἕνας παντοπώλης ἔκαμε προμήθειαν ἀπὸ 281 ὀκ. 350 δράμ. ζάκχαριν. Ὅταν τὴν ἐπώλησεν ὅλην ὑπελόγισεν ὅτι ἡ ἡμερησία κατανάλωσις ἀνήρχετο εἰς 25 ὀκ. 250 δράμ. Εἰς πόσας ἡμέρας ἐπώλησεν αὐτήν ;

Διάφορα προβλήματα ἐπὶ ἁπλῶν καὶ συμμιγῶν ἀριθμῶν

565) Ἔχει τις μίαν φιάλην, ἡ ὁποία κενὴ ἔχει βάρος 320 δράμ, γεμάτη δὲ μὲ ἔλαιον ἔχει βάρος 2 ὀκ. 370 δράμ. Μίαν ἡμέραν τὴν ἐγέμισε μὲ ἔλαιον, διὰ τὸ ὁποῖον ἐπλήρωσε 17 000 παλ. δραχ. Πρὸς πόσον ἠγόρασε τὴν ὀκᾶν τὸ ἔλαιον ;

566) Δύο βαρέλια ἔχουν οἶνον ὁμοῦ 22 στατ. 12 ὀκ. 280 δράμ. Τὸ δεύτερον ἔχει τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ α'. Πόσον οἶνον ἔχει τὸ καθέν;

567) Ἕνας ἔμπορος εἶχεν ἕνα τεμάχιον ὑφάσματος. Ἀφοῦ ἐπώλησε τὰ $\frac{2}{5}$ καὶ τὸ $\frac{1}{4}$ αὐτοῦ ἔμειναν 39 πήχ. 6 ρούπ. Πόσους πήχεις εἶχε κατ' ἀρχὰς αὐτὸ τὸ τεμάχιον ;

568) Μία κυρία ἠγόρασε δύο εἰδῶν ὑφάσματα, διὰ τὰ ὁποῖα ἐπλήρωσεν 770 000 παλ. δραχ. Ἀπὸ τὸ α' ἠγόρασεν 6 πήχ. 4 ρούπ. πρὸς 60 000 παλ. δραχ. τὸν πῆχυν, τὸ δὲ β' ἤξιζεν 20 000 παλ. δραχ. τὸν πῆχυν ἀκριβώτερον. Πόσον ὕφασμα ἠγόρασεν ἀπὸ τὸ β' εἶδος ;

569) Τὸ μῆκος τῆς σιδηροδρομικῆς γραμμῆς Κορίνθου—Πατρῶν εἶναι 131 χιλιόμ. Μία αὐτοκινητάμαξα ἀναχωρεῖ ἐκ Κορίνθου εἰς τὰς

3 ὥρ. $19^{π}$ μ.μ. καὶ φθάνει εἰς τὰς Πάτρας εἰς τὰς 6 ὥρ. $10^{π}$ μὲ παραμονὴν $8^{π}$ εἰς τοὺς ἐδιαμέσους σταθμούς. Πόση εἶναι ἡ ταχύτης αὐτῆς ;

570) Ἕνα ὕφασμα πωλεῖται εἰς τὸ Λονδῖνον 2 λίρ. 8 σελ. τὴν ὑάρδα. Πόσον πωλεῖται τὸ μέτρον ;

571) Ἀεροπόρος ἀναχωρεῖ τὴν 6 ὥρ. $15^{π}$ ἐκ τοῦ ἀεροδρομίου του πρὸς ἀναγνώρισιν τῶν θέσεων τοῦ ἐχθροῦ. Ἐπειδὴ ὁ ἄνεμος εἶναι ἀντίθετος κινεῖται μὲ 90 χλμ. τὴν ὥραν καὶ φθάνει ἄνω τῶν ἐχθρικῶν θέσεων μετὰ $45^{π}$. Παραμένει δὲ ὑπεράνω τῶν θέσεων τοῦ ἐχθροῦ ἐπὶ $12^{π}$. Κατὰ τὴν ἐπιστροφήν του διανύει 120 χλμ. τὴν ὥραν. Πόσον διήρκεσεν ἡ πτῆσις του καὶ πότε ἐπέστρεψεν εἰς τὸ ἀεροδρόμιον ;

572) Διανύει τις τὰ $\frac{2}{3}$ μιᾶς ἀποστάσεως 150 χλμ. σιδηροδρομικῶς μὲ ταχύτητα 40 χλμ. τὴν ὥραν καὶ τὸ ὑπόλοιπον μὲ ἅμαξαν μὲ ταχύτητα 10 χλμ. τὴν ὥραν. Αὐτοκίνητον ἀναχωρεῖ ταυτοχρόνως μὲ ταχύτητα 30 χλμ. τὴν ὥραν καὶ διευθύνεται πρὸς τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν. Ποῖος θὰ φθάσῃ πρῶτος καὶ πρὸ πόσου χρόνου ;

573) Δύο ἀδελφοὶ ἔχουν νὰ διανύσουν ἀπόστασιν 54 χλμ. διὰ νὰ μεταβοῦν πλησίον ἑνὸς θείου των. Ὁ ἕνας ἐξ αὐτῶν χρησιμοποιεῖ ποδήλατον καὶ τρέχει μὲ ταχύτητα 16 χλμ. τὴν ὥραν, ὁ δὲ ἄλλος μοτοσυκλέτταν μὲ ταχύτητα 36 χλμ. τὴν ὥραν. Ἐὰν ὁ πρῶτος ἀναχωρήσῃ τὴν 8ην πρωινὴν ὥραν, ποίαν ὥραν πρέπει νὰ ἐκκινήσῃ ὁ δεύτερος, διὰ νὰ φθάσουν καὶ οἱ δύο ταυτοχρόνως εἰς τὸν προορισμόν των ;

ΒΙΒΛΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ

ΑΝΑΛΟΓΙΑΙ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΙ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄

ΛΟΓΟΙ ΚΑΙ ΑΝΑΛΟΓΙΑΙ — ΜΕΤΑΒΛΗΤΑ ΠΟΣΑ

1. ΛΟΓΟΙ ΚΑΙ ΑΝΑΛΟΓΙΑΙ

§ 275. Λόγος ἑνὸς ἀριθμοῦ πρὸς ἄλλον. Τὸ πηλίκον 8 : 2, δηλ. ὁ 4 λέγεται καὶ λόγος τοῦ 8 πρὸς τὸν 2. Ὁμοίως, ἐπειδὴ 15 : 5 = 3, ὁ 3 λέγεται λόγος τοῦ 15 πρὸς τὸν 3. Γενικῶς :

Λόγος ἑνὸς ἀριθμοῦ πρὸς ἄλλον λέγεται τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ πρώτου διὰ τοῦ δευτέρου.

Οἱ ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι παρουσιάζονται εἰς ἕνα λόγον, λέγονται **ὅροι** αὐτοῦ. Ὁ πρῶτος λέγεται ἰδιαιτέρως **προηγούμενος**, ὁ δὲ δεύτερος **ἑπόμενος**.

Οἱ ὅροι ἑνὸς λόγου δύνανται νὰ εἶναι ἀφῃρημένοι ἀριθμοὶ ἢ συγκεκριμένοι ἀριθμοί. Εἰς τὴν β΄ περίπτωσιν πρέπει νὰ εἶναι **ὁμοειδεῖς**. Ὁ δὲ λόγος εἶναι πάντοτε ἀφῃρημένος ἀριθμός.

Π.χ. 20 πήχ. : 4 πήχ. = 5.

Οἱ λόγοι 2 : 3 ἢ $\frac{2}{3}$ καὶ 3 : 2 ἢ $\frac{3}{2}$ ἔχουν τοὺς αὐτοὺς ὅρους κατ' ἀντίστροφον τάξιν. Διὰ τοῦτο δὲ οὗτοι λέγονται **ἀντίστροφοι λόγοι**. Εἶναι δὲ φανερὸν ὅτι οἱ λόγοι αὐτοὶ εἶναι **ἀντίστροφοι** ἀριθμοί. Ὥστε :

Δύο λόγοι λέγονται ἀντίστροφοι, ἂν εἶναι ἀντίστροφοι ἀριθμοί.

§ 276. Ἀναλογία. Ἐπειδὴ $\frac{15}{3} = 5$ καὶ $\frac{20}{4} = 5$, ἕπεται ὅτι $\frac{15}{3} = \frac{20}{4}$. Ἡ ἰσότης αὐτὴ τῶν δύο λόγων λέγεται **ἀναλογία**. Ὥστε :

Ἀναλογία λέγεται ἡ ἰσότης δύο λόγων.

Ἡ ἀναλογία $\frac{3}{4}=\frac{6}{8}$ γράφεται καὶ οὕτω $3:4=6:8$ καὶ ἀπαγγέλλεται: 3 πρὸς 4 καθὼς 6 πρὸς 8.

Γενικῶς, ἂν οἱ λόγοι $\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ $\frac{\gamma}{\delta}$ εἶναι ἴσοι, ἀποτελοῦν τὴν ἀναλογίαν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ ἢ $\alpha:\beta=\gamma:\delta$

Οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ, δ, λέγονται ὅροι τῆς ἀναλογίας· καὶ οἱ μὲν α καὶ δ λέγονται **ἄκροι** ὅροι τῆς ἀναλογίας, οἱ δὲ β καὶ γ **μέσοι** ὅροι τῆς ἀναλογίας. Οἱ α καὶ γ λέγονται **προηγούμενοι ὅροι**, οἱ δὲ β καὶ δ **ἑπόμενοι ὅροι**.

Ὁ τέταρτος ὅρος μιᾶς ἀναλογίας λέγεται **τέταρτος ἀνάλογος** τῶν τριῶν ἄλλων.

Εἰς τὴν ἀναλογίαν $\frac{8}{4}=\frac{4}{2}$ οἱ μέσοι ὅροι εἶναι ἴσοι. Αὐτὴ ἡ ἀναλογία λέγεται **συνεχὴς** ἀναλογία. Καὶ ἡ ἀναλογία $\frac{4}{6}=\frac{6}{9}$ εἶναι συνεχής. Γενικῶς:

Μία ἀναλογία λέγεται συνεχής, ἂν οἱ μέσοι ὅροι αὐτῆς εἶναι ἴσοι.

Ὁ μέσος ὅρος μιᾶς συνεχοῦς ἀναλογίας λέγεται **μέσος ἀνάλογος τῶν ἄκρων.**

Π.χ. εἰς τὰς ἀνωτέρω ἀναλογίας $\frac{8}{4}=\frac{4}{2}$ καὶ $\frac{4}{6}=\frac{6}{9}$ ὁ 4 εἶναι μέσος ἀνάλογος τῶν 8 καὶ 2, ὁ 6 μέσος ἀνάλογος τῶν 4 καὶ 9.

§ 277. Ἰδιότης ἀναλογιῶν. Ἔστω ἡ ἀναλογία

$$3:5=6:10 \qquad \text{ἢ} \qquad \frac{3}{5}=\frac{6}{10}.$$

Τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων ὅρων της εἶναι $3\times 10=30$.

Ἐπίσης τὸ γινόμενον τῶν μέσων ὅρων της εἶναι $5\times 6=30$.

Παρατηροῦμεν λοιπὸν ὅτι τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων ὅρων της εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν μέσων ὅρων της.

Ἔστω τώρα καὶ ἡ ἀναλογία $2:7=6:21$.

Παρατηροῦμεν ἐπίσης ὅτι καὶ εἰς τὴν ἀναλογίαν αὐτὴν τὸ γινόμενον 2×21 τῶν ἄκρων ὅρων της εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον 7×6 τῶν μέσων ὅρων της.

Ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω παραδείγματα συνάγομεν τὴν ἑξῆς ἰδιότητα τῶν ἀναλογιῶν:

Εἰς κάθε ἀναλογίαν τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων ὅρων της εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν μέσων ὅρων της.

Κατὰ τὴν ἰδιότητα αὐτὴν γενικῶς :

Ἐὰν εἶναι $\boxed{\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\gamma}{\delta}}$, θὰ εἶναι καὶ $\boxed{\alpha\times\delta=\beta\times\gamma}$

§ 278. **Ἐφαρμογαί.** Στηριζόμενοι εἰς τὴν ἰδιότητα αὐτὴν δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν ἕνα ὅρον μιᾶς ἀναλογίας, ὅταν μᾶς δοθοῦν οἱ ἄλλοι τρεῖς ὅροι της.

Παράδειγμα 1ον. Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸν ἄγνωστον ὅρον χ τῆς ἀναλογίας $6 : 5 = 12 : \chi$.

Κατὰ τὴν προηγουμένην ἰδιότητα, τὸ γινόμενον $6\cdot\chi$ τῶν ἄκρων ὅρων της θὰ εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον $5\cdot 12$ τῶν μέσων, δηλαδὴ 60. Ὁ ἄγνωστος ὅρος χ πρέπει νὰ εἶναι ἕνας ἀριθμός, ὁ ὁποῖος πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν 6 νὰ δίδῃ τὸν 60. Αὐτὸς ὁ ἀριθμὸς εἶναι ὁ 10.

Ὁ 10 δύναται νὰ εὑρεθῇ, ἂν διαιρεθῇ τὸ γινόμενον 5×12 τῶν μέσων ὅρων διὰ τοῦ γνωστοῦ ἄκρου 6.

Ἀπὸ τὸ παράδειγμα αὐτὸ συνάγομεν τὸν κάτωθι κανόνα :

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ἄγνωστον ἄκρον ὅρον μιᾶς ἀναλογίας, πολλαπλασιάζομεν τοὺς δύο μέσους ὅρους της καὶ τὸ προκῦπτον γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ γνωστοῦ ἄκρου.

Παράδειγμα 2ον. Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸν ἄγνωστον ὅρον χ τῆς ἀναλογίας $4 : 7 = \chi : 56$.

Σκεπτόμενοι ὅπως εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα, εὑρίσκομεν ὅτι ὁ ζητούμενος ἄγνωστος εἶναι $\dfrac{4\times 56}{7}$ ἢ 32.

Ἀπὸ τὸ παράδειγμα αὐτὸ συνάγομεν τὸν κάτωθι κανόνα :

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ἄγνωστον μέσον ὅρον μιᾶς ἀναλογίας, πολλαπλασιάζομεν τοὺς δύο ἄκρους ὅρους της καὶ τὸ προκῦπτον γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ γνωστοῦ μέσου.

Παράδειγμα 3ον. Ἀπὸ τὴν συνεχῆ ἀναλογίαν $\dfrac{4{,}5}{3}=\dfrac{3}{2}$ προκύπτει ἡ ἰσότης $3^2=2\times 4{,}5$ καὶ γενικῶς ἀπὸ τὴν $\dfrac{\alpha}{\chi}=\dfrac{\chi}{\beta}$ ἕπεται ὅτι $\chi^2=\alpha\cdot\beta$.

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι :

Τὸ τετράγωνον τοῦ μέσου ἀναλόγου δύο ἀριθμῶν εἶναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν τούτων.

Ἐφαρμογή. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν μέσον ἀνάλογον δύο ἀριθμῶν, ἀρκεῖ νὰ ἐξαγάγωμεν τὴν τετρ. ρίζαν τοῦ γινομένου αὐτῶν.

Π. χ. μέσος ἀνάλογος τῶν ἀριθμῶν 16 καὶ 9 εἶναι :

$$\sqrt{16 \times 9} = \sqrt{144} = 12.$$

Ἀσκήσεις

574) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἄγνωστος ὅρος ἑκάστης τῶν ἀκολούθων ἀναλογιῶν :

1. $\frac{28}{7} = \frac{12}{x}$, $\frac{16}{4} = \frac{x}{2}$, $\frac{x}{12} = \frac{16}{8}$.

2. $\frac{8}{x} = \frac{x}{2}$, $\frac{x}{15} = \frac{5}{25}$, $\frac{x}{27} = \frac{9}{8{,}1}$.

2. ΠΟΣΑ ΑΝΑΛΟΓΑ ΚΑΙ ΠΟΣΑ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΑ

§ 279. Ἀνάλογα ποσά. *Πρόβλημα.* **Ἐργάτης λαμβάνει 8 χιλιόδραχμα καθ' ὥραν ἐργασίας. Πόσον λαμβάνει εἰς 2 ὥρας, εἰς 3 ὥρας, εἰς 4 ὥρας..., εἰς ἡμίσειαν ὥραν, εἰς ἓν τέταρτον ὥρας;**

Ὁ κάτωθι πίναξ δεικνύει τὴν ἀντιστοιχίαν μεταξὺ τοῦ χρόνου ἐργασίας καὶ τῆς ἀμοιβῆς του :

Ὧραι ἐργασίας	1	2	3	4	...	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	...
Ἀμοιβὴ εἰς χιλιόδραχμα	8	16	24	32	...	4	2	...

Οἱ ἀριθμοὶ τῆς πρώτης σειρᾶς 1,2,3,......παριστάνουν διαφόρους τιμὰς τοῦ χρόνου ἐργασίας εἰς ὥρας.

Οἱ ἀριθμοὶ τῆς δευτέρας σειρᾶς 8, 16, 24,....παριστάνουν τὰς **ἀντιστοίχους τιμὰς** τῆς ἀμοιβῆς εἰς χιλιόδραχμα.

Ἀπὸ τὸν ἀνωτέρω πίνακα βλέπομεν ὅτι τὰ ποσὰ «ὧραι ἐργασίας» καὶ «ἀμοιβὴ εἰς χιλιόδραχμα» ἔχουν τοιαύτην σχέσιν μεταξύ των ὥστε, ὅταν ἡ τιμὴ 1 τοῦ ποσοῦ τῶν ὡρῶν διπλασιασθῇ, τριπλασιασθῇ κ.τ.λ. καὶ ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ 8 χιλιόδραχμα τῆς ἀμοιβῆς διπλασιάζεται, τριπλασιάζεται κ.τ.λ.

Ὁμοίως βλέπομεν ὅτι, ὅταν ἡ τιμὴ 1 ὥρα τοῦ ποσοῦ τῶν ὡρῶν γίνῃ τὸ ἥμισυ, τὸ τέταρτον κ.τ.λ. καὶ ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ 8 χιλιόδρ.

τῆς ἀμοιβῆς γίνεται τὸ ἥμισυ, τὸ τέταρτον κ.τ.λ. Τὰ τοιαῦτα ποσὰ λέγονται **ἀνάλογα ποσά**.

Ὥστε ἡ ἀμοιβὴ καὶ αἱ ὧραι ἐργασίας εἶναι ἀνάλογα ποσά.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι :

Δύο ποσὰ λέγονται ἀνάλογα, ὅταν πολλαπλασιαζομένης μιᾶς τιμῆς τοῦ ἑνὸς ποσοῦ ἐπὶ τυχόντα ἀριθμὸν, πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν καὶ ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ ἄλλου ποσοῦ· ἢ διαιρουμένης μιᾶς τιμῆς τοῦ ἑνὸς ποσοῦ διὰ τυχόντος ἀριθμοῦ, διαιρεῖται διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ καὶ ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ ἄλλου ποσοῦ.

Ποσὰ ἀνάλογα εἶναι :

Ἡ **τιμὴ** ἑνὸς ἐμπορεύματος καὶ τὸ **βάρος** του.

Τὸ **διάστημα**, τὸ ὁποῖον διανύει ἕνα κινητόν, ἂν κινῆται ἰσοταχῶς καὶ ὁ **χρόνος**, κατὰ τὸν ὁποῖον κινεῖται τοῦτο.

Τὸ **ἔργον**, ποὺ ἐκτελοῦν ἐργάται καὶ ὁ **ἀριθμὸς τῶν ἐργατῶν**.

Ἡ **περίμετρος** ἑνὸς τετραγώνου καὶ ἡ **πλευρά του**.

Τὸ **μῆκος** τῆς περιφερείας ἑνὸς κύκλου καὶ ἡ **ἀκτίς** του κ.τ.λ.

Σημείωσις. Ὅταν δύο ποσὰ συναυξάνωνται, δὲν ἔχουν ὅμως μεταξύ των τὴν ἀνωτέρω σχέσιν, **δὲν λέγονται ἀνάλογα**. Π.χ. ὅταν αὐξάνηται ἡ ἡλικία ἑνὸς παιδίου, αὐξάνεται καὶ τὸ ἀνάστημα, ἀλλὰ τὰ ποσὰ **ἡλικία** καὶ **ἀνάστημα** δὲν εἶναι ἀνάλογα· διότι, ὅταν διπλασιάζηται, τριπλασιάζηται κ.τ.λ. ἡ ἡλικία τοῦ παιδίου, δὲν διπλασιάζεται, τριπλασιάζεται κ.λ.π. καὶ τὸ ἀνάστημα αὐτοῦ.

Παρατήρησις. Ἀπὸ τὸν πίνακα τῆς § 279 βλέπομεν ὅτι δύο τυχοῦσαι τιμαὶ τοῦ ποσοῦ τῶν ὡρῶν, π.χ. 2 ὥρ. καὶ 4 ὥρ. ἔχουν λόγον $\frac{2}{4}$ ἢ $\frac{1}{2}$. Αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ 16 καὶ 32 τοῦ ἄλλου ποσοῦ ἔχουν λόγον $\frac{16}{32}$ ἢ $\frac{1}{2}$. Παρατηροῦμεν ὅτι δύο οἱαιδήποτε τιμαὶ τοῦ ποσοῦ τῶν ὡρῶν ἐργασίας ἔχουν τὸν αὐτὸν λόγον, τὸν ὁποῖον ἔχουν καὶ αἱ ἀντίστοιχοι πρὸς αὐτὰς τιμαὶ τοῦ ἄλλου ποσοῦ.

Γενικῶς :

Ἐὰν δύο ποσὰ εἶναι ἀνάλογα, ὁ λόγος δύο τιμῶν τοῦ ἑνὸς ποσοῦ εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν τοῦ ἄλλου ποσοῦ.

§ 280. Ποσὰ ἀντίστροφα. *Πρόβλημα.* **Ἕνας ἐργάτης ἐκτελεῖ ἕνα ἔργον εἰς 12 ἡμέρας. Εἰς πόσας ἡμέρας θὰ ἐκτελέσουν τὸ ἔργον 2 ἐργάται, 3 ἐργάται, 4 ἐργάται κ.τ.λ.**

Ὁ κάτωθι πίναξ δεικνύει τὴν ἀντιστοιχίαν μεταξὺ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἐργατῶν καὶ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἡμερῶν:

Ἀριθμὸς ἐργατῶν	1	2	3	4	. . . . . .
Χρόνος εἰς ἡμέρας	12	6	4	3	. . . . . .

Παρατηροῦμεν ὅτι, ὅταν ἡ τιμὴ 1 τοῦ ποσοῦ τῶν ἐργατῶν πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 2, 3, 4, . . . ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ 12 τοῦ ποσοῦ τῶν ἡμερῶν διαιρεῖται διὰ 2, 3, 4, . . . Καὶ τἀνάπαλιν, ὅταν ἡ τιμὴ τοῦ ποσοῦ τῶν ἐργατῶν διαιρεθῇ διὰ 2, 3, 4, ... ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ ποσοῦ τῶν ἡμερῶν πολλαπλασιάζεται ἐπὶ 2, 3, 4, . . . Τὰ τοιαῦτα ποσὰ λέγονται **ἀντιστρόφως ἀνάλογα** ἢ **ἀντίστροφα ποσά.**

Ὥστε τὰ ποσὰ ἐργάται καὶ ἡμέραι ἐργασίας εἶναι ποσὰ ἀντίστροφα. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι:

Δύο ποσὰ λέγονται ἀντιστρόφως ἀνάλογα ἢ ἀντίστροφα, ὅταν πολλαπλασιαζομένης μιᾶς τιμῆς τοῦ ἑνὸς ποσοῦ ἐπὶ ἕνα τυχόντα ἀριθμὸν διαιρεῖται ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ ἄλλου ποσοῦ διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ· ἢ διαιρουμένης μιᾶς τιμῆς τοῦ ἑνὸς ποσοῦ διὰ τυχόντος ἀριθμοῦ πολλαπλασιάζεται ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ ἄλλου ποσοῦ ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

Ποσὰ ἀντίστροφα εἶναι ἡ **ταχύτης** ἑνὸς κινητοῦ, τὸ ὁποῖον κινεῖται ἰσοταχῶς καὶ ὁ **χρόνος,** ποὺ χρειάζεται τὸ κινητὸν διὰ νὰ διανύσῃ ὡρισμένην ἀπόστασιν. Τὸ **βάρος** ἑνὸς ἐμπορεύματος, τὸ ὁποῖον δυνάμεθα νὰ ἀγοράσωμεν μὲ ὡρισμένον ποσὸν χρημάτων, εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογον πρὸς τὴν **τιμὴν** τῆς ὀκᾶς.

§ 281. Παρατηρήσεις. 1η. Ἐὰν λάβωμεν δύο τυχούσας τιμὰς τοῦ ποσοῦ τῶν ἐργατῶν, ποὺ περιέχονται εἰς τὸν πίνακα τῆς § 280, π.χ. τὰς 2 καὶ 4, βλέπομεν ὅτι ὁ λόγος των εἶναι $\frac{2}{4}$ ἢ $\frac{1}{2}$. Αἱ πρὸς αὐτὰς ἀντίστοιχοι τιμαὶ 6 καὶ 3 τοῦ ἄλλου ποσοῦ τῶν ἡμερῶν ἔχουν λόγον $\frac{6}{3}$ ἢ $\frac{2}{1}$. Παρατηροῦμεν ὅτι δύο οἱαιδήποτε τιμαὶ τοῦ ποσοῦ τῶν ἐργατῶν ἔχουν λόγον ἀντίστροφον τοῦ λόγου, τὸν ὁποῖον ἔχουν αἱ πρὸς αὐτὰς ἀντίστοιχοι τιμαὶ τοῦ ἄλλου ποσοῦ.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι :

Ἐὰν δύο ποσὰ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα, ὁ λόγος δύο τιμῶν τοῦ ἑνὸς ποσοῦ εἶναι ἴσος μὲ τὸν ἀντίστροφον λόγον τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν τοῦ ἄλλου ποσοῦ.

2α. Ὅταν δύο ποσὰ εἶναι ἀντίστροφα, τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι μετροῦν τὰς δύο ἀντιστοίχους τιμάς των εἶναι σταθερόν, δηλαδὴ εἶναι πάντοτε τὸ αὐτό.

Πράγματι εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα εἶναι

$$1 \times 12 = 2 \times 6 = 3 \times 4 = 4 \times 3 = 12.$$

3η. Πολλάκις συμβαίνει εἰς ἕνα πρόβλημα νὰ εἶναι ἕνα ποσὸν ἀνάλογον μὲν πρὸς ἕνα ἢ περισσότερα ποσά, ἀντιστρόφως δὲ ἀνάλογον πρὸς ἄλλα ποσά.

Οὕτως ὁ χρόνος, τὸν ὁποῖον δαπανῶμεν διὰ νὰ ἐκτελέσωμεν ἕνα ἔργον, εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὸ ἔργον αὐτὸ καὶ ἀντιστρόφως ἀνάλογος πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν ἐργατῶν, τοὺς ὁποίους θὰ χρησιμοποιήσωμεν.

4η. Εἶναι δυνατὸν δύο ποσὰ νὰ μεταβάλλωνται μαζί, χωρὶς νὰ εἶναι ἀντίστροφα.

Π.χ. Ἔστω ὅτι μία μόνιππος ἅμαξα διανύει τὴν ἀπόστασιν μεταξὺ δύο πόλεων εἰς 1 ὥραν· εἶναι προφανὲς ὅτι ἡ αὐτὴ ἅμαξα, συρομένη ἀπὸ 4 ἵππους, δὲν θὰ διανύσῃ τὴν ἀπόστασιν εἰς ἕνα τέταρτον τῆς ὥρας.

3. ΜΕΤΑΒΛΗΤΑ ΠΟΣΑ. ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΙΣ ΤΗΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ ΑΥΤΩΝ

§ 282. Μεταβλητὰ ποσά. *Πρόβλημα.* **Τὸ 1 μέτρον ἑνὸς ὑφάσματος τιμᾶται 20 χιλιόδραχμα. Πόσον τιμῶνται τὰ 2 μέτρα, τὰ 3 μέτρα, τὰ 4 μέτρα..., τὸ $\frac{1}{2}$ μέτρου, τὸ $\frac{1}{4}$ μέτρου;**

Ὁ κάτωθι πίναξ δεικνύει τὴν ἀντιστοιχίαν, ἡ ὁποία ὑπάρχει μεταξὺ τοῦ μήκους τοῦ ὑφάσματος καὶ τῆς ἀξίας του :

Μῆκος ὑφάσματος	1	2	3	4	. . . .	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	. . . .
Ἀξία εἰς χιλιόδραχμα	20	40	60	80	. .	10	5	. . . .

Παρατηροῦμεν ὅτι, ἐὰν τὸ μῆκος τοῦ ὑφάσματος μεταβληθῇ, μεταβάλλεται καὶ ἡ ἀξία αὐτοῦ. Τὰ δύο ποσά, δηλ. τὸ **μῆκος** τοῦ ὑφάσματος καὶ ἡ ἀξία αὐτοῦ, λέγονται **μεταβλητὰ ποσὰ** (ἢ **συμμεταβλητὰ ποσά**).

Ἐπίσης παρατηροῦμεν ὅτι ἡ **ἀξία** τοῦ ὑφάσματος ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ **μήκους** αὐτοῦ. Διὰ τοῦτο λέγομεν ὅτι ἡ ἀξία τοῦ ὑφάσματος εἶναι **συνάρτησις** τοῦ μήκους αὐτοῦ.

Τὸ μῆκος ἢ οἱονδήποτε ἄλλο ποσόν, εἰς τὸ ὁποῖον δίδομεν αὐθαιρέτους τιμάς, λέγεται **ἀνεξάρτητος** μεταβλητή.

Εἰς τὸ πρόβλημα τῆς § 279 εἴδομεν ὅτι ἡ ἀμοιβὴ τοῦ ἐργάτου ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν τῶν ὡρῶν τῆς ἐργασίας του· διότι ὅσας περισσοτέρας ὥρας θὰ ἐργασθῇ, τόσας περισσοτέρας δραχμὰς θὰ λάβῃ. Ἡ ἀμοιβὴ λοιπὸν τοῦ ἐργάτου καὶ αἱ ὧραι ἐργασίας του εἶναι **ποσὰ μεταβλητά**. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ἀμοιβὴ τοῦ ἐργάτου ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν τῶν ὡρῶν ἐργασίας του, διὰ τοῦτο λέγομεν ὅτι ἡ ἀμοιβὴ τοῦ ἐργάτου εἶναι **συνάρτησις** τοῦ χρόνου ἐργασίας του.

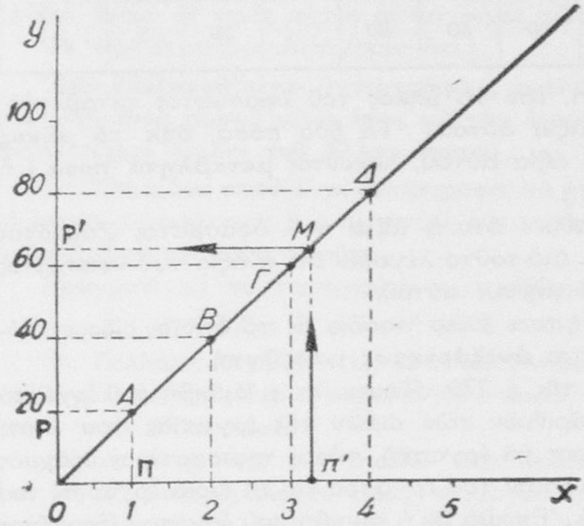
Μεταβλητὰ ποσὰ εἶναι ἡ πλευρὰ ἑνὸς τετραγώνου καὶ ἡ περίμετρός του. Ἡ περίμετρος τοῦ τετραγώνου, ἐξαρτωμένη ἐκ τῆς πλευρᾶς αὐτοῦ, εἶναι **συνάρτησις** τῆς πλευρᾶς του.

Ἡ περιφέρεια ἑνὸς κύκλου εἶναι **συνάρτησις** τῆς ἀκτῖνός του. Ἐπίσης τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου εἶναι συνάρτησις τῆς ἀκτῖνός του. Τὸ διάστημα, τὸ ὁποῖον διανύει ἕνα αὐτοκίνητον, εἶναι συνάρτησις τῆς ταχύτητος αὐτοῦ καὶ τοῦ χρόνου, κατὰ τὸν ὁποῖον κινεῖται.

§ 283. Γραφικὴ παράστασις. Τὴν ἀντιστοιχίαν, ἡ ὁποία ὑπάρχει μεταξὺ τοῦ μήκους τοῦ ὑφάσματος καὶ τῆς ἀξίας του (πρόβλημα § 282) δυνάμεθα νὰ παραστήσωμεν ὡς ἑξῆς :

Γράφομεν μίαν ὀρθὴν γωνίαν χΟψ (σχ. 11). Ἐπὶ τῆς Οχ λαμβάνομεν τμήματα ἴσα. Εἰς τὰ ἄκρα τῶν τμημάτων τούτων ἀναγράφομεν τοὺς ἀριθμοὺς 1, 2, 3, 4....., ἕκαστος τῶν ὁποίων παριστάνει μῆκος εἰς μέτρα.

Ἐπὶ τῆς Οψ λαμβάνομεν ἐπίσης τμήματα ἴσα. Εἰς τὰ ἄκρα τῶν τμημάτων τούτων ἀναγράφομεν τοὺς ἀριθμοὺς 20, 40, 60, 80, 100 ..., ἕκαστος τῶν ὁποίων παριστάνει χιλιόδραχμα.



Σχ. 11

Τὸ 1 μ. (σημεῖον Π) τιμᾶται 20 χιλιόδρχ. (σημ. Ρ). Ἐκ τοῦ Π ὑψοῦμεν κάθετον ἐπὶ τὴν Οχ καὶ ἐκ τοῦ Ρ κάθετον ἐπὶ τὴν Οψ. Αἱ κάθετοι αὐταὶ τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Α, τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς μῆκος ὑφάσματος 1 μέτρου καὶ εἰς ἀξίαν 20 χιλιοδράχμων. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον προσδιορίζομεν καὶ τὰ σημεῖα Β, Γ, Δ... Τὰ σημεῖα Ο, Α, Β, Γ.... κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

§ 284. Χρησιμοποίησις τῆς γραφικῆς παραστάσεως. Ἐὰν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν πόσον ἀξίζουν τὰ $3\frac{1}{4}$ μέτρα τοῦ αὐτοῦ ὑφάσματος ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς:

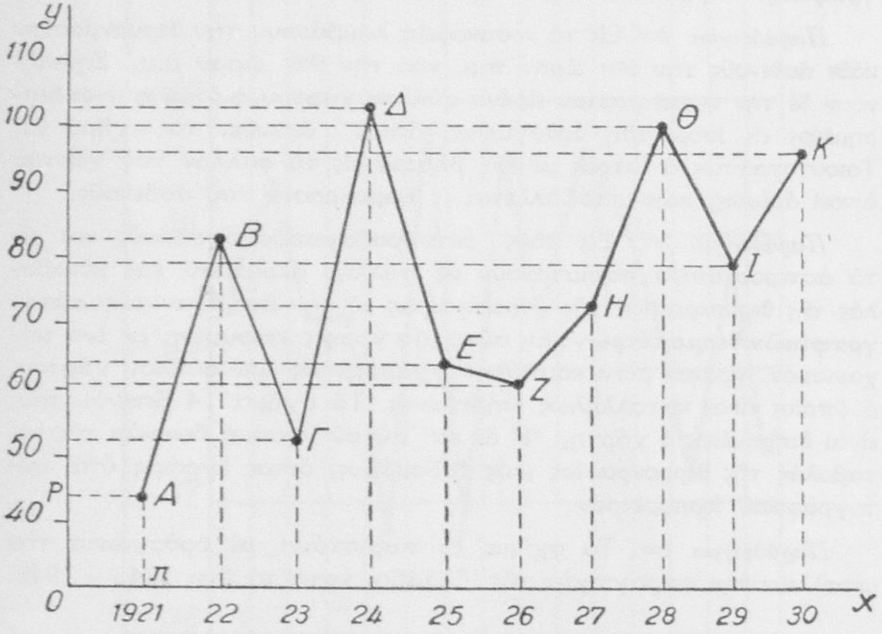
Ἐπὶ τῆς Οχ (σχ. 11) εὑρίσκομεν τὸ σημεῖον Π′ τοιοῦτον, ὥστε ΟΠ′ νὰ παριστάνῃ $3\frac{1}{4}$ μ. Ἐκ τοῦ Π′ ὑψοῦμεν κάθετον ἐπὶ τὴν Οχ, ἡ ὁποία συναντᾷ τὴν ΟΑ εἰς ἕνα σημεῖον Μ. Ἐκ τοῦ Μ φέρομεν παράλληλον τῆς Οχ, ἡ ὁποία συναντᾷ τὴν Οψ εἰς τὸ σημεῖον Ρ′. Ἐπὶ τῆς Οψ παρατηροῦμεν ὅτι ΟΡ′ = 65 χιλιόδραχ. Ὥστε $3\frac{1}{4}$ ἀξίζουν 65 χιλιόδραχμα.

§ 285. Διὰ τῶν κάτωθι παραδειγμάτων θὰ λάβωμεν γενικωτέραν ἰδέαν τῆς γραφικῆς παραστάσεως τῶν μεταβολῶν ἑνὸς ποσοῦ καὶ τῆς χρησιμότητος αὐτῆς εἰς τὰς διαφόρους ἐκδηλώσεις τῆς ζωῆς.

Παράδειγμα 1ον. Ἡ παραγωγὴ τοῦ ἐλαίου εἰς τὴν Ἑλλάδα κατ' ἔτος ἀπὸ τοῦ 1921 μέχρι τοῦ 1930 ἦτο εἰς χιλιάδας τόννους ὡς ἑξῆς :

1921	44	χιλ.	τόν.	1926	61	χιλ.	τόν.
1922	82	»	»	1927	72	»	»
1923	53	»	»	1928	100	»	»
1924	102,5	»	»	1929	79	»	»
1925	64	»	»	1930	96	»	»

Ὁ ἀνωτέρω πίναξ μᾶς δίδει μίαν ἰδέαν τῆς μεταβολῆς τῆς παραγωγῆς τοῦ ἐλαίου κατὰ τὴν δεκαετίαν 1921 - 1930, ἀλλὰ δὲν μᾶς εὐκολύνει εἰς τὴν ἄμεσον ἀντίληψιν τῆς μεταβολῆς αὐτῆς. Ἡ μεταβολὴ αὐτὴ δύναται νὰ αἰσθητοποιηθῆ ὡς ἑξῆς :



Σχ. 12

Γράφομεν μίαν ὀρθὴν γωνίαν χΟψ (σχ. 12). Ἐπὶ τῆς Οχ λαμβάνομεν τμήματα ἴσα. Εἰς τὰ ἄκρα τῶν τμημάτων τούτων ἀναγράφομεν τὰ ἔτη 1921, 1922,... 1930.

'Επὶ τῆς Οψ λαμβάνομεν ἐπίσης τμήματα ἴσα. Εἰς τὰ ἄκρα τῶν τμημάτων τούτων ἀναγράφομεν τοὺς ἀριθμοὺς 40, 50, 60, ... 110, ἕκαστος τῶν ὁποίων παριστάνει χιλιάδας τόννων. Κατὰ τὸ ἔτος 1921 (σημεῖον Π) ἡ παραγωγὴ ἀνῆλθεν εἰς 44 τόννους (σημεῖον Ρ). 'Εκ τοῦ σημείου Π ὑψοῦμεν κάθετον ἐπὶ τὴν Οχ καὶ ἐκ τοῦ Ρ κάθετον ἐπὶ τὴν Οψ. Αἱ κάθετοι αὐταὶ τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Α, τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ ἔτος 1921 καὶ εἰς παραγωγὴν 44 χιλιάδων τόννων.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον εὑρίσκομεν καὶ τὰ σημεῖα Β, Γ, Δ,.. Κ.

'Εὰν χαράξωμεν τὰ εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΒΓ,.. ΙΚ, σχηματίζομεν τὴν τεθλασμένην γραμμὴν ΑΒΓ ... ΙΚ, ἡ ὁποία παριστάνει τὴν μεταβολὴν τῆς παραγωγῆς τοῦ ἐλαίου. Ἔχομεν οὕτω τὴν **γραφικὴν παράστασιν** τῆς μεταβολῆς τῆς παραγωγῆς τοῦ ἐλαίου.

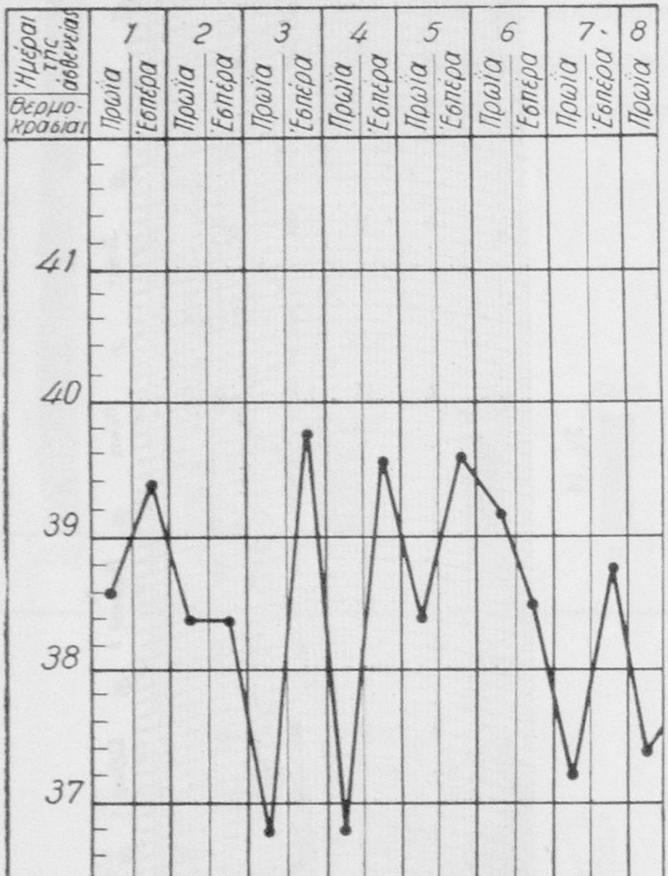
Παράδειγμα 2ον. Εἰς τὰ νοσοκομεῖα λαμβάνουν τὴν θερμοκρασίαν κάθε ἀσθενοῦς τὴν 9ην ὥραν π.μ. καὶ τὴν 9ην ὥραν μ.μ. Σημειώνουν δὲ τὴν θερμοκρασίαν εἰς ἕνα φύλλον χάρτου, ὁ ὁποῖος εἶναι διῃρημένος εἰς ἰσομεγέθη ὀρθογώνια, ὅπως δεικνύει τὸ σχῆμα 13. Τοιουτοτρόπως ὁ ἰατρὸς μὲ ἕνα βλέμμα εἰς τὸ φύλλον τοῦ χάρτου ἐννοεῖ ἀμέσως, πῶς μεταβάλλεται ἡ θερμοκρασία τοῦ ἀσθενοῦς.

Παράδειγμα 3ον. Εἰς τοὺς μετεωρολογικοὺς σταθμοὺς καὶ εἰς τὰ ἀστεροσκοπεῖα παριστάνουν μὲ πολλὴν ἀκρίβειαν τὰς μεταβολὰς τῆς θερμοκρασίας τῆς ἀτμοσφαίρας μὲ τὴν βοήθειαν τῶν **αὐτογραφικῶν θερμομέτρων**. Εἰς αὐτὰ μία γραφὶς κινουμένη μὲ ἕνα μηχανισμόν, γράφει μίαν καμπύλην γραμμὴν εἰς ἕνα φύλλον χάρτου, ὁ ὁποῖος εἶναι καταλλήλως διῃρημένος. Τὸ σχῆμα 14 δεικνύει πῶς εἶναι διῃρημένος ὁ χάρτης. Ἡ δὲ ἐπ' αὐτοῦ γραμμὴ δεικνύει τὰς μεταβολὰς τῆς θερμοκρασίας μιᾶς ἑβδομάδος, ὅπως ἐγράφη ὑπὸ αὐτογραφικοῦ θερμομέτρου.

Παράδειγμα 4ον. Τὸ σχῆμα 15 παριστάνει μὲ ὀρθογώνια τὴν μεταλλευτικὴν παραγωγὴν τῆς Ἑλλάδος κατὰ τὰ ἔτη 1945 — 1948.

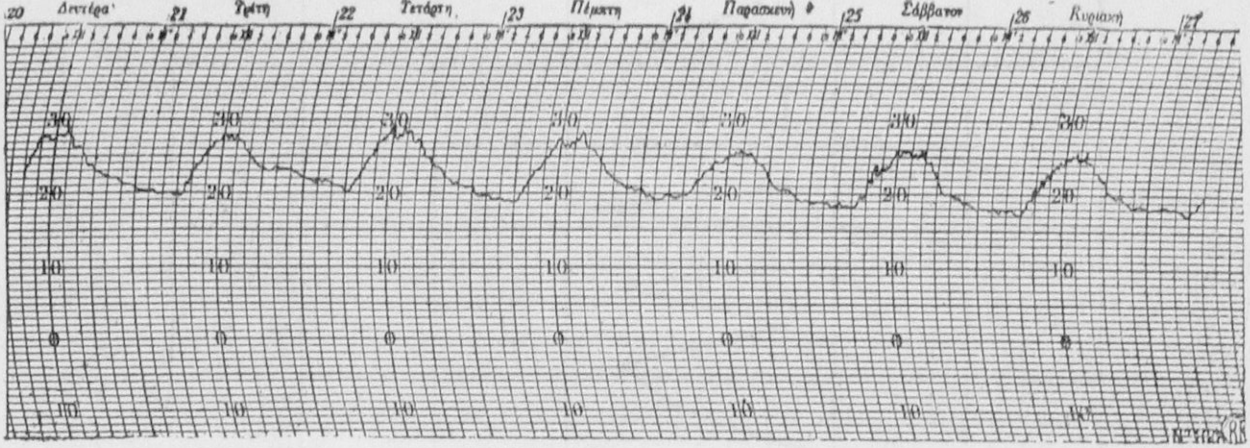
§ 285. Ἄλλοι τρόποι παραστάσεως. Πολλάκις διὰ νὰ κάμουν περισσότερον νοητὰ τὰ πορίσματα τῆς στατιστικῆς παριστάνουν αὐτὰ μὲ εἰκόνας ἀναλόγου μεγέθους.

Ἡ ἀνωτάτη Σχολὴ Οἰκονομικῶν καὶ 'Εμπορικῶν 'Επιστημῶν ὑπὸ τὸν τίτλον « ΕΛΛΑΣ » ἐδημοσίευσε σειρὰν γραφικῶν παραστάσεων τῆς Κοινωνικῆς καὶ Οἰκονομικῆς ἐξελίξεως τῆς Ἑλλάδος, μεταξὺ τῶν ὁποίων καὶ τὰς κάτωθι :

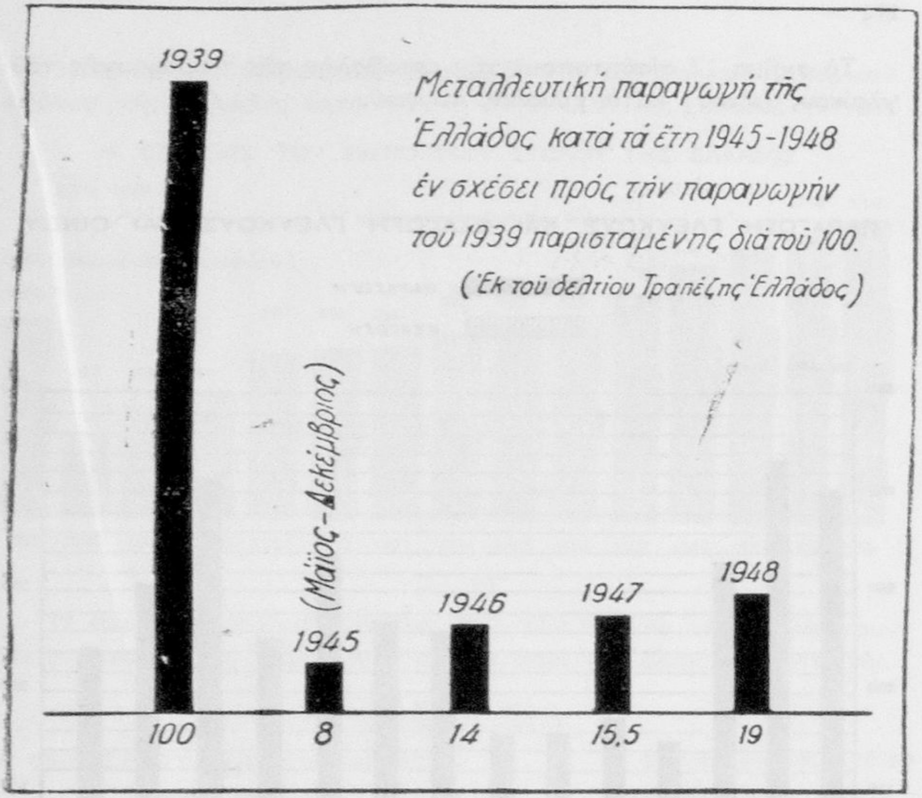


Σχ. 13

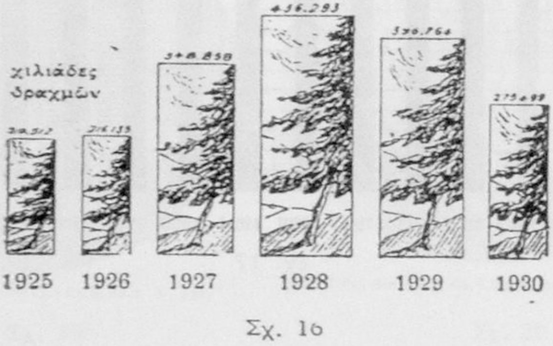
Τὸ σχῆμα 16 παριστάνει μὲ εἰκόνας τὰς μεταβολὰς τῶν δασικῶν προϊόντων τῆς Ἑλλάδος κατὰ τὰ ἔτη 1925—1930.


20
Δευτέρα
21
Τρίτη
22
Τετάρτη
23
Πέμπτη
24
Παρασκευή
25
Σάββατον
26
Κυριακή
27
30
20
10
0
10

Σχ. 14

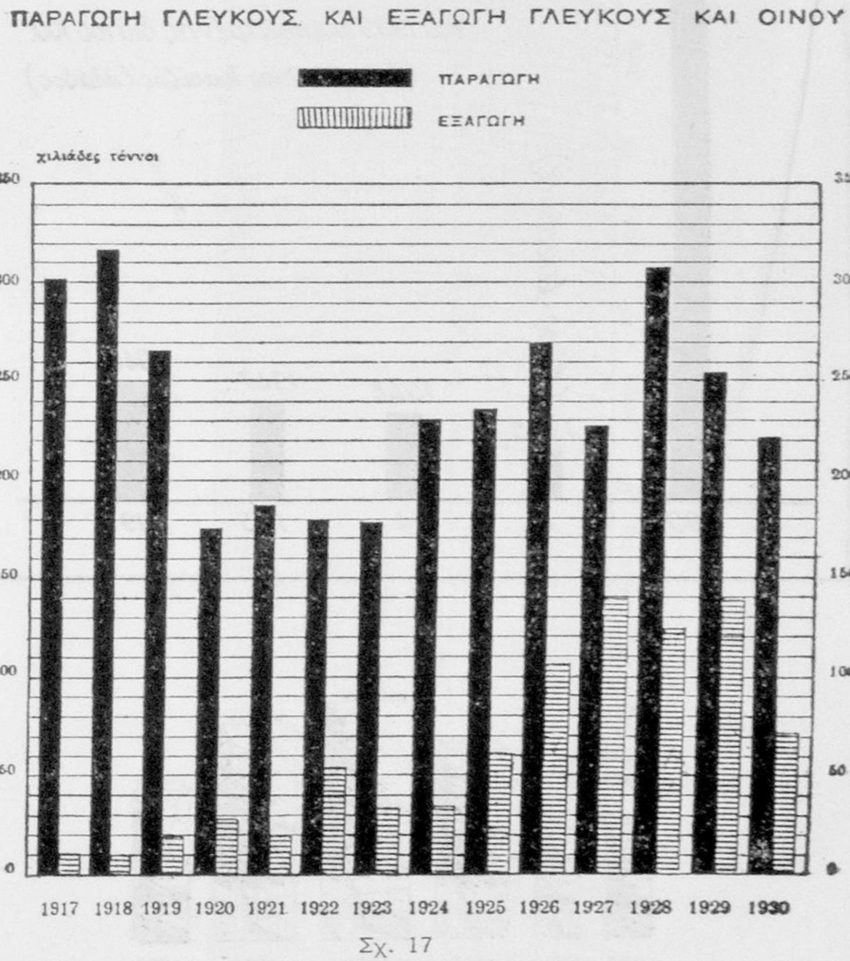

1939
Μεταλλευτική παραγωγή τῆς
Ἑλλάδος κατά τά ἔτη 1945-1948
ἐν σχέσει πρός τήν παραγωγήν
τοῦ 1939 παρισταμένης διά τοῦ 100.
(Ἐκ τοῦ δελτίου Τραπέζης Ἑλλάδος)
(Μάϊος-Δεκέμβριος)
1945
1946
1947
1948
100
8
14
15,5
19

Σχ. 15


χιλιάδες
δραχμῶν
436.293
1925
1926
1927
1928
1929
1930

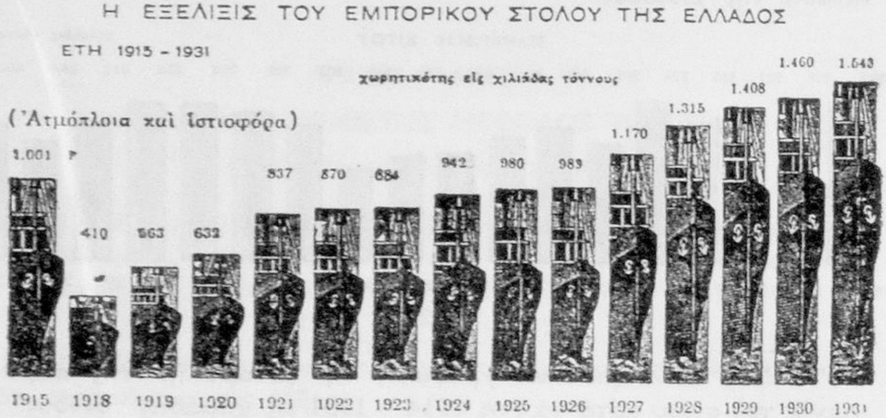
Σχ. 16

Τὸ σχῆμα 17 αἰσθητοποιεῖ τὴν μεταβολὴν τῆς παραγωγῆς τοῦ γλεύκους (οἴνου) κατὰ χιλιάδας τόννων.



Σχ. 17

Ἡ εἰκὼν 18 παριστάνει γραφικῶς τὴν ἐξέλιξιν τοῦ ἐμπορικοῦ στόλου τῆς Ἑλλάδος κατὰ τὰ ἔτη 1915—1931 εἰς χιλιάδας τόννους



Σχ. 18

Ἡ εἰκὼν 19 παριστάνει διὰ κυκλικῶν τομέων τὴν καλλιεργουμένην ἔκτασιν τῆς Ἑλλάδος ἐν σχέσει πρὸς τὴν ὅλην ἔκτασιν αὐτῆς.

ΓΕΩΡΓΙΑ

ΑΙ ΚΑΛΛΙΕΡΓΟΥΜΕΝΑΙ ΕΚΤΑΣΕΙΣ (Μέσος ὅρος 1922 - 1928)

Σχ. 19

Σχ. 20

Ἡ εἰκὼν 20 παριστάνει ἐπίσης διὰ κυκλικῶν τομέων τὴν ἀναλογίαν τῶν καλλιεργουμένων εἰδῶν, ὡς πρὸς τὴν καλλιεργουμένην ἔκτασιν τῆς Ἑλλάδος.

Σχ. 21

Ἡ εἰκὼν 21 παριστάνει γραφικῶς τὴν μεταβολὴν τῆς παραγωγῆς τοῦ σίτου κατὰ τὰ ἔτη 1914 – 1931 εἰς χιλιάδας τόννους.

Ἀσκήσεις

575) Μελετήσατε τὰς εἰκόνας 15–21 καὶ συναγάγετε τὰ ἀνάλογα συμπεράσματα.

Διὰ τὰς κάτωθι ἀσκήσεις χρησιμοποιήσατε τετραγωνισμένον χάρτην.

576) Παραστήσατε γραφικῶς τὴν θερμοκρασίαν τοῦ τόπου σας κατὰ μίαν ἑβδομάδα. (Παρατηρεῖτε τὸ θερμόμετρον καθ' ἑκάστην καὶ τὴν αὐτὴν ὥραν. Σημειώσατε τὰς ἡμέρας ἐπὶ τῆς Οχ καὶ τὰς θερμοκρασίας ἐπὶ τῆς Οψ).

577) Παραστήσατε γραφικῶς τὴν ἀτμοσφαιρικὴν πίεσιν τοῦ τόπου σας κατὰ ἕνα δεκαήμερον. (Παρατηρεῖτε τὸ βαρόμετρον καθ' ἑκάστην καὶ τὴν αὐτὴν ὥραν).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄

ΑΠΛΗ ΚΑΙ ΣΥΝΘΕΤΟΣ ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΤΡΙΩΝ

1. ΑΠΛΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΤΡΙΩΝ.

§ 286. *Πρόβλημα 1ον.* **Τὰ 15 μέτρα ἑνὸς ὑφάσματς τιμῶνται 36 000 δραχ. Πόσον τιμῶνται τὰ 8 μέτρα τοῦ αὐτοῦ ὑφάσματος;**

Κατάταξις: Τὰ 15 μ. τιμῶνται 36 000 δρχ.
» 8 μ. » χ »

Α΄ λύσις. Θὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα μὲ ἀναγωγὴν εἰς τὴν μονάδα σκεπτόμενοι ὡς ἑξῆς:

Ἀφοῦ τὰ 15 μέτρ. τιμῶνται 36 000 δρχ.

τὸ 1 » τιμᾶται $\frac{36\,000}{15}$ »

καὶ τὰ 8 » τιμῶνται $\frac{36\,000}{15} \times 8 = 19\,200$ δραχμ.

Ὥστε τὰ 8 » τιμῶνται

$$\frac{36\,000}{15} \times 8 \text{ δραχ. ἢ } 36\,000 \times \frac{8}{15} = 19\,200 \text{ δραχ.}$$

Εἰς τὸ πρόβλημα αὐτὸ παρατηροῦμεν ὅτι τὸ **μῆκος** τοῦ ὑφάσματος καὶ ἡ **τιμή** του εἶναι ποσὰ **ἀνάλογα** καὶ ὅτι, διὰ νὰ εὕρωμεν πόσον τιμῶνται τὰ 8 μέτρα, ἐπολλαπλασιάσαμεν τὸν ὑπεράνω τοῦ χ ἀριθμὸν 36 000 ἐπὶ τὸν λόγον $\frac{15}{8}$, τὸν ὁποῖον σχηματίζουν αἱ δύο τιμαὶ 15 καὶ 8 τοῦ ἄλλου ποσοῦ, ἀντεστραμμένον.

Β΄ λύσις. Τὰ ποσὰ μέτρα καὶ δραχμαὶ εἶναι ἀνάλογα, διότι διπλασιαζομένου τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μέτρων, διπλασιάζεται καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν δραχμῶν.

Ἐπειδὴ τὰ ποσὰ αὐτὰ εἶναι ἀνάλογα, ὁ λόγος $\frac{15}{8}$ τῶν δύο τιμῶν 15 καὶ 8 τοῦ ποσοῦ τῶν μέτρων εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν ἀντιστοίχων πρὸς αὐτὰς τιμῶν 36 000 καὶ χ τοῦ ἄλλου ποσοῦ (§ 279). Δηλαδὴ θὰ εἶναι: $\frac{15}{8} = \frac{36\,000}{\chi}$.

Εἰς τὴν ἀναλογίαν αὐτὴν εἶναι ἄγνωστος ἕνας ἄκρος ὅρος της χ. Ἀλλὰ γνωρίζομεν (§ 278, 1ον) ὅτι διὰ νὰ εὕρωμεν ἕνα ἄκρον ὅρον μιᾶς ἀναλογίας, πολλαπλασιάζομεν τοὺς δύο μέσους ὅρους της καὶ τὸ γινόμενόν των διαιροῦμεν διὰ τοῦ γνωστοῦ ἄκρου ὅρου.

Θὰ εἶναι λοιπὸν $\chi = \frac{36\,000 \times 8}{15} = 19\,200.$

Παρατηροῦμεν ὅτι εὑρήκαμεν τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον 19 200 δρχ, τὸ ὁποῖον εὑρήκαμεν ἀνωτέρω μὲ τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα.

§ 287. *Πρόβλημα 2ον.* **20 ἐργάται χρειάζονται 36 ἡμέρας διὰ νὰ τελειώσουν ἕνα ἔργον. Πόσας ἡμέρας θὰ χρειασθοῦν 12 ἐργάται τῆς αὐτῆς δυνάμεως, διὰ νὰ τελειώσουν τὸ αὐτὸ ἔργον;**

Κατάταξις : Οἱ 20 ἐργάται τελειώνουν ἕνα ἔργον εἰς 36 ἡμέρας
οἱ 12 » » » » » χ »

Α' λύσις. Διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα. Ἀφοῦ οἱ 20 ἐργάται χρειάζονται 36 ἡμ, διὰ νὰ τελειώσουν τὸ ἔργον, ὁ 1 ἐργάτης θὰ χρειασθῇ 20 φορὰς περισσότερον χρόνον, δηλ. 36 ἡμ. × 20, διὰ νὰ τελειώσῃ τὸ ἔργον καὶ οἱ 12 ἐργ. θὰ χρειασθοῦν 12 φορὰς ὀλιγώτερον χρόνον, δηλ. $\frac{36 \times 20}{12} = 60$ ἡμέρας, διὰ νὰ τελειώσουν τὸ ἔργον. Ὥστε οἱ 12 ἐργάται θὰ χρειασθοῦν :

$$\frac{36 \times 20}{12} \text{ ἡμ. ἢ } 36 \times \frac{20}{12} = 60 \text{ ἡμ.}$$

Εἰς τὸ πρόβλημα αὐτὸ παρατηροῦμεν ὅτι οἱ **ἐργάται** καὶ ὁ **χρόνος**, κατὰ τὸν ὁποῖον ἐκτελοῦν ἕνα ἔργον, εἶναι ποσὰ **ἀντίστροφα** καὶ ὅτι, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ζητούμενον, ἐπολλαπλασιάσαμεν τὸν ὑπεράνω τοῦ ἀγνώστου χ ἀριθμὸν 36 ἐπὶ τὸν λόγον $\frac{20}{12}$, τὸν ὁποῖον σχηματίζουν αἱ δύο τιμαὶ 20 καὶ 12 τοῦ ἄλλου ποσοῦ, ὅπως ἔχει.

Β' λύσις. Τὰ ποσὰ ἐργάται καὶ χρόνος εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα, διότι διπλασιαζομένου τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἐργατῶν, ὁ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν διαιρεῖται διὰ 2.

Ἐπειδὴ τὰ ποσὰ αὐτὰ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα, ὁ λόγος $\frac{20}{12}$ τῶν δύο τιμῶν 20 καὶ 12 τοῦ ποσοῦ τῶν ἐργατῶν εἶναι ἴσος μὲ τὸν ἀντίστροφον λόγον τῶν ἀντιστοίχων πρὸς αὐτὰς τιμῶν 36 καὶ χ τοῦ ποσοῦ τῶν ἡμερῶν (§ 281, 1η). Δηλ. θὰ εἶναι $\frac{20}{12} = \frac{\chi}{36}$.

Εἰς τὴν ἀναλογίαν αὐτὴν εἶναι ἄγνωστος ἕνας μέσος ὅρος της χ. Ἀλλὰ γνωρίζομεν (§ 278, 2α) ὅτι, διὰ νὰ εὕρωμεν ἕνα ἄγνωστον μέσον ὅρον μιᾶς ἀναλογίας, πολλαπλασιάζομεν τοὺς δύο ἄκρους ὅρους της καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ γνωστοῦ μέσου ὅρου της.

Θὰ εἶναι λοιπὸν $\chi = \frac{36 \times 20}{12} = 60$ ἡμέραι.

Παρατηροῦμεν ὅτι εὑρήκαμεν τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον (60 ἡμέραι), τὸ ὁποῖον εὑρήκαμεν καὶ μὲ τὴν προηγουμένην λύσιν.

§ 288. Συμπέρασμα. Εἰς ἕκαστον ἐκ τῶν δύο προηγουμένων προβλημάτων παρατηροῦμεν ὅτι δίδονται δύο ἀντίστοιχοι τιμαὶ δύο ποσῶν ἀναλόγων ἢ ἀντιστρόφων (15 μέτρ. ὑφ. καὶ 36 000 δρχ. εἰς τὸ 1ον πρόβλημα καὶ 20 ἐργ. καὶ 36 ἡμ. εἰς τὸ 2ον πρόβλημα) καὶ μία ἄλλη τιμὴ τοῦ ἑνὸς ἐξ αὐτῶν τῶν ποσῶν (8 μ. εἰς τὸ 1ον πρόβλημα καὶ 12 ἐργ. εἰς τὸ 2ον πρόβλημα) καὶ ζητεῖται ἡ πρὸς αὐτὴν ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ ἄλλου ποσοῦ. Ἐπειδὴ εἰς τὰ ἀνωτέρω προβλήματα καὶ εἰς τὰ ὅμοια πρὸς αὐτὰ δίδονται **τρεῖς ἀριθμοὶ** καὶ ζητεῖται **τέταρτος,** διὰ τοῦτο ἡ μέθοδος, δηλ. ὁ τρόπος μὲ τὸν ὁποῖον λύομεν τὰ προβλήματα αὐτά, λέγεται **ἁπλῆ μέθοδος τῶν τριῶν.**

Τὰ προβλήματα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν λύονται ἢ διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα ἢ καὶ διὰ τοῦ κάτωθι κανόνος, ὁ ὁποῖος προκύπτει ἐξ ὅσων εἴδομεν κατὰ τὴν λύσιν τῶν δύο ἀνωτέρω προβλημάτων :

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ἄγνωστον τιμὴν εἰς ἕνα πρόβλημα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν, πολλαπλασιάζομεν τὸν ὑπεράνω τοῦ ἀγνώστου χ ἀριθμὸν ἐπὶ τὸ κλάσμα, τὸ ὁποῖον σχηματίζουν αἱ δοθεῖσαι δύο τιμαὶ τοῦ ἄλλου ποσοῦ, ἀντεστραμμένον μέν, ἂν τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα, ὅπως ἔχει δέ, ἂν τὰ ποσὰ εἶναι ἀντίστροφα.

§ 289. Ἐφαρμογαὶ τοῦ κανόνος. *Πρόβλημα.* **Οἱ 2 πήχεις 6 ρούπια ἑνὸς ὑφάσματος ἀξίζουν 22 000 δραχμάς. Πόσον ἀξίζουν οἱ 15 πήχ. 4 ρούπια ;**

Κατάταξις : Οἱ 2 π. 6 ρ. ἢ 22 ρ. ἀξίζουν 22 000 δρχ.
οἱ 15 π. 4 ρ. ἢ 124 ρ. » χ »

Λύσις. Ἀφοῦ τὰ 22 ρούπια ὑφάσματος ἀξίζουν 22 000 δραχ, τὰ διπλάσια ρούπια θὰ ἀξίζουν καὶ διπλασίας δραχμάς. Ἄρα τὰ ποσὰ ρούπια καὶ δραχμαὶ εἶναι ἀνάλογα. Ἑπομένως θὰ εἶναι :

$$\chi = 22\,000 \times \frac{124}{22} = 124\,000 \text{ δρχ.}$$

Ἄρα οἱ 15 πήχ. **4** ρούπια ἀξίζουν 124 000 δρχ.

Ἀσκήσεις

Α' Ὁ μ ά ς. 578) Μὲ 100 ὀκ. ἐλαιῶν κάμνομεν 25 ὀκ. ἐλαίου. Πόσας ὀκάδας ἐλαίου θὰ κάμωμεν μὲ 1300 ὀκ. ἐλαιῶν ;

579) Αἱ 100 ὀκάδες ἀλεύρου δίδουν 140 ὀκ. ἄρτου. Πόσας ὀκάδας ἄρτου θὰ δώσουν 35 ὀκάδες ἀλεύρου ;

580) Γνωρίζομεν ὅτι 100° Κελσίου ἰσοδυναμοῦν μὲ 80° Ρεωμύρου. 35° Ρεωμύρου μὲ πόσους βαθμοὺς Κελσίου ἰσοδυναμοῦν ;

581) Μία ράβδος μήκους 1,20 μέτρων, ἂν στηθῇ κατακορύφως ρίπτει κατά τινα στιγμὴν σκιὰν μήκους 1,80 μέτρ. Πόσον εἶναι τὸ ὕψος δένδρου, τὸ ὁποῖον κατὰ τὴν αὐτὴν στιγμὴν ρίπτει σκιὰν μήκους 15 μέτρων ;

582) Μία κυρία ἠγόρασεν 8,25 μέτρα ἀπὸ ἕνα ὕφασμα καὶ ἔδωσεν 99 000 δρχ. Ὁ ἔμπορος ὅμως κατὰ λάθος τῆς ἔδωσε 0,25 μέτρα ὀλιγώτερον. Πόσα χρήματα πρέπει νὰ τῆς ἐπιστρέψῃ ;

583) Γεωγραφικὸς χάρτης ἔχει κατασκευασθῇ μὲ κλίμακα 1 : 100 000 (δηλ. μῆκος 1 μέτρου εἰς τὸν χάρτην, ἀντιπροσωπεύει μῆκος 100 000 μέτρ. εἰς τὸ ἔδαφος). Δύο πόλεις ἀπέχουν εἰς τὸν χάρτην 25 χιλιοστὰ τοῦ μέτρου. Πόσον ἀπέχουν εἰς τὴν πραγματικότητα ;

Β' Ὁ μ ά ς. 584) Μία κρήνη, ἡ ὁποία παρέχει 45 ὀκάδας ὕδατος εἰς ἕνα λεπτὸν τῆς ὥρας, χρειάζεται 12 ὥρας διὰ νὰ γεμίσῃ μίαν δεξαμενήν. Πόσας ὥρας θὰ χρειασθῇ μία ἄλλη κρήνη διὰ νὰ γεμίσῃ τὴν αὐτὴν δεξαμενήν, ἂν παρέχῃ 54 ὀκ. ὕδατος εἰς ἕνα λεπτὸν τῆς ὥρας ;

585) Μία φρουρὰ ἀπὸ 400 στρατιώτας ἔχει τροφὰς δι' 6 μῆνας. Πόσους στρατιώτας ἔπρεπε νὰ ἔχῃ ἡ φρουρά, διὰ νὰ περάσουν 8 μῆνας μὲ τὰς αὐτὰς τροφάς ;

586) Πεζοπόρος, ὁ ὁποῖος διανύει 4,6 χιλιόμετρα τὴν ὥραν, χρειάζεται $5\frac{3}{4}$ ὥρας διὰ νὰ διανύσῃ μίαν ἀπόστασιν. Πόσον χρόνον θὰ χρειασθῇ, διὰ νὰ διανύσῃ τὴν αὐτὴν ἀπόστασιν ἕνας ποδηλάτης, ὁ ὁποῖος εἰς 1 ὥραν διανύει 8,2 χλμ. ἐπὶ πλέον τοῦ ὁδοιπόρου ;

587) Εἰς 20 ἡμέρας 15 ἐργάται ἐξετέλεσαν τὸ ἥμισυ ἑνὸς ἔργου. Τὴν στιγμὴν αὐτὴν ἀποχωροῦν τῆς ἐργασίας 3 ἐργάται λόγῳ ἀσθενείας. Εἰς πόσας ἡμέρας οἱ ὑπόλοιποι ἐργάται θὰ ἐκτελέσουν τὸ ἄλλο ἥμισυ τοῦ ἔργου ;

588) Ἐργολάβος ἔπρεπε νὰ στρώσῃ μίαν ὁδὸν εἰς 14 ἡμ. Πρὸς τοῦτο χρησιμοποιεῖ 44 ἐργάτας. Ἐὰν θέλῃ νὰ τὴν στρώσῃ εἰς 11 ἡμέρας, πόσους ἐργάτας πρέπει νὰ προσλάβῃ ἀκόμη ;

Γ' Ὁ μ ά ς. 589) Οἱ 8 πήχεις ἑνὸς ὑφάσματος κοστίζουν 173 600 δραχμάς. Πόσον κοστίζουν οἱ 15 πήχ. καὶ 3 ρούπια τοῦ αὐτοῦ ὑφάσματος ;

590) Μὲ 1 λίραν καὶ 6 σελίνια ἀγοράζομεν 3,50 μέτρα ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος. Πόσα μέτρα τοῦ αὐτοῦ ὑφάσματος θὰ ἀγοράσωμεν μὲ 15 λίρας 10 σελ. 8 πέννας ;

591) Αἱ 7 ὀκ. 200 δράμ. ἑνὸς πράγματος κοστίζουν 12 900 δρχ. Πόσον κοστίζουν οἱ 3 στατῆρες 33 ὀκ. καὶ 300 δράμια τοῦ αὐτοῦ πράγματος ;

592) Μία μαθήτρια, διὰ νὰ κατασκευάσῃ ἕνα φόρεμα, χρειάζεται 6 πήχεις ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος, ἐὰν τὸ πλάτος του εἶναι 1 πῆχ. 2 ρούπια. Πόσους πήχεις θὰ χρειασθῇ ἐξ ἄλλου ὑφάσματος, τοῦ ὁποίου τὸ πλάτος εἶναι 1 πῆχ. 4 ρούπια ;

593) Διὰ νὰ στρώσουν τὸ πάτωμα μιᾶς σάλας, χρειάζονται 24 μέτρα τάπητος, ὅταν ὁ τάπης ἔχῃ πλάτος 1,50 μέτρα. Πόσα μέτρα τάπητος θὰ χρειασθοῦν, ἂν τὸ πλάτος του εἶναι 1,20 μέτρα ;

2. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΟΣΟΣΤΩΝ

§ 290. Ὁρισμοί. Ὅταν λέγωμεν ὅτι τὸ Κράτος ηὔξησε τὰ ἡμερομίσθια τῶν ἐργατῶν κατὰ 25 τοῖς 100 (25 °/₀), ἐννοοῦμεν ὅτι : Εἰς κάθε 100 δραχ. γίνεται αὔξησις 25 δραχ. καὶ ἑπομένως ὁ ἐργάτης θὰ λαμβάνῃ 125 δραχ. ἀντὶ τῶν 100 δραχ. Εἶναι φανερὸν ὅτι εἰς τὰς 200 δραχμὰς γίνεται αὔξησις 50 δραχμῶν.

Ὅταν 100 ὀκάδες σίτου δίδουν 85 ὀκάδας ἄλευρον, λέγομεν ὅτι ὁ σῖτος δίδει 85 τοῖς ἑκατὸν ἄλευρον καὶ παριστῶμεν τοῦτο: 85 °/₀.

Ὅταν λέγωμεν ὅτι ἕνας ἔμπορος πωλεῖ τὰ ἐμπορεύματά του μὲ κέρδος 25 τοῖς ἑκατὸν (25 °/₀), ἐννοοῦμεν ὅτι δι' ἐμπορεύματα ἀξίας 100 δραχμῶν ἔχει κέρδος 25 δρχ. καὶ ἑπομένως εἰσπράττει 125 δραχμάς.

Ὅταν λέγωμεν ὅτι τὸ ἀπόβαρον ἑνὸς ἐμπορεύματος εἶναι 5 °/₀, ἐννοοῦμεν ὅτι ἐπὶ μεικτοῦ βάρους 100 ὀκ. αἱ 5 ὀκ. εἶναι ἀπόβαρον καὶ αἱ λοιπαὶ 95 ὀκ. εἶναι τὸ καθαρὸν βάρος τοῦ ἐμπορεύματος.

Ἡ ἔκφρασις τοῦ τόσον τοῖς ἑκατὸν (°/₀) χρησιμοποιεῖται εἰς πολλὰς περιπτώσεις. Π. χ.

Εἰς τὰς **ἐκπτώσεις** τῶν τιμῶν τῶν ἐμπορευμάτων.

Εἰς τὰς **προμηθείας**, τὰς ὁποίας δικαιοῦνται οἱ εἰσπράκτορες, οἱ παραγγελιοδόχοι, οἱ μεσῖται, οἱ ἐργολάβοι, αἱ Τράπεζαι κ.τ.λ.

Εἰς τὰ **ἀσφάλιστρα** τῶν οἰκιῶν, καταστημάτων, πλοίων, ἐμπορευμάτων, τὰ ὁποῖα πληρώνονται εἰς τὰς ἀσφαλιστικὰς ἑταιρείας. Συνήθως τὰ ἀσφάλιστρα ὑπολογίζονται ἐπὶ τῶν 1000 δραχ. Οὕτω λέγομεν ὅτι πληρώνομεν ἀσφάλιστρα 2 τοῖς χιλίοις καὶ τὸ σημειοῦμεν: 2 °/₀₀.

Τὸ ποσόν, ἐπὶ τοῦ ὁποίου ὑπολογίζεται τὸ κέρδος ἢ ἡ ἔκπτωσις, λέγεται **ἀρχικὸν ποσόν**.

Τὸ κέρδος ἢ ἡ ἔκπτωσις, ἡ ὁποία ἀναλογεῖ εἰς τὸ ἀρχικὸν ποσόν, λέγεται **ποσοστόν**.

Τὰ προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται νὰ προσδιορισθῇ τὸ ποσοστὸν ἢ ἄλλο ποσόν, ὅταν δίδεται τὸ ποσοστὸν καὶ ἄλλα ἐπαρκῆ στοιχεῖα, λέγονται **προβλήματα ποσοστῶν**.

Τὰ προβλήματα τῶν ποσοστῶν λύονται ὅπως καὶ τὰ προβλήματα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν, ὡς δεικνύεται εἰς τὰ κάτωθι παραδείγματα. Πρέπει ὅμως νὰ προσέχωμεν κατὰ τὴν κατάταξιν τοῦ προβλήματος νὰ θέτωμεν τὰ ὁμοειδῆ ποσὰ εἰς τὴν αὐτὴν κατακόρυφον στήλην.

§ 291. Εὕρεσις τοῦ ποσοστοῦ. *Πρόβλημα 1ον.* **Ἔμπορος πωλεῖ τὰ ἐμπορεύματά του μὲ κέρδος 25 °/₀. Πόσον θὰ κερδίσῃ, ἐὰν πωλήσῃ ἐμπορεύματα ἀξίας 375 000 δραχμῶν;**

Κατάταξις :

Δι' ἐμπορεύματα ἀξίας	100 δραχ.	κερδίζει	25 δραχ.		
» » »	375 000	» »	χ	»	

Λύσις. Ἐπειδὴ τὰ ποσὰ ἀξία καὶ κέρδος εἶναι ἀνάλογα ἔχομεν :

ἀξία =100
κέρδ. = 25
πωλ. =125

$$\chi = 25 \text{ δραχ.} \times \frac{375\,000}{100} = 93\,750 \text{ δραχ. κέρδος.}$$

Θὰ κερδίσῃ λοιπὸν 93 750 δραχ.

Πρόβλημα 2ον. **Ἔμπορος πωλεῖ τὰ ἐμπορεύματά του μὲ ἔκπτωσιν 30 %. Πόσον θὰ πληρώσωμεν, ἂν ἀγοράσωμεν ἐμπορεύματα ἀξίας 28 750 δραχ. καὶ πόση εἶναι ἡ ἔκπτωσις;**

Κατάταξις :

Δι' ἐμπορεύματα ἀξίας	100 δραχ.	πληρώνομεν	70 δραχ.	
» » »	28 750	» »	χ	»

Λύσις. Ἐπειδὴ τὰ ποσοστὰ εἶναι ἀνάλογα, ἔχομεν :

$$\chi = 70 \text{ δραχ.} \times \frac{28\,750}{100} = 20\,125 \text{ δραχ.}$$ Ὥστε θὰ πληρώσωμεν 20 125 δραχ, καὶ ἡ γενομένη ἔκπτωσις εἶναι :

28 750 δραχ. — 20 125 δραχ. = 8 625 δραχ.

ἀξία =100
ἔκπτ. = 30
πωλ. = 70

Ἀσκήσεις

594) Ὁ φόρος οἰκοδομῶν εἶναι 32,5 %. Πόσον φόρον θὰ πληρώσῃ ἰδιοκτήτης διὰ μίαν οἰκίαν, ἀπὸ τὴν ὁποίαν λαμβάνει ἐτήσιον ἐνοίκιον 350 000 δραχμάς ;

595) Ἠσφάλισέ τις τὴν οἰκίαν του ἀντὶ 50 000 000 δραχ. Πόσα ἀσφάλιστρα θὰ πληρώσῃ πρὸς 2 ‰ ;

596) Ὁ ἀτμοσφαιρικὸς ἀὴρ περιέχει 21 % ὀξυγόνον κατ' ὄγκον. Πόσον ὀξυγόνον περιέχει ὁ ἀὴρ δωματίου, τὸ ὁποῖον ἔχει ὄγκον 90 κυβ. μέτρα;

597) Ὁ πράσινος σάπων περιέχει 8 % ποτάσσαν, 42 % λιπαρὰς οὐσίας καὶ 50 % ὕδωρ. Πόσαι ὀκάδες ἐξ ἑκάστου εἴδους περιέχονται εἰς 200 ὀκ. σάπωνος ;

598) Ἐὰν ἀλέσωμεν σῖτον, λαμβάνομεν 75 % ἄλευρον καὶ 25 % πίτυρον. Πόσας ὀκάδας ἀλεύρου θὰ λάβωμεν, ἂν ἀλέσωμεν 380 ὀκ. σίτου ;

599) Ἔμπορος πωλεῖ τὰ ἐμπορεύματά του μὲ ἔκπτωσιν 18 %. Πόσην ἔκπτωσιν θὰ κάμῃ καὶ πόσα θὰ εἰσπράξῃ, ἐὰν πωλήσῃ ἐμπορεύματα ἀξίας 125 000 δραχ ;

600) Τὸ μεικτὸν βάρος ἑνὸς ἐμπορεύματος εἶναι 240 ὀκ. Ἐὰν τὸ ἀπόβαρον εἶναι 3 %, πόσον εἶναι τὸ καθαρὸν βάρος του ;

601) Ἡ ἔκτασις τῆς Ἑλλάδος εἶναι 130 199 τετραγωνικὰ χιλιόμετρα. Τὰ 20 % τῆς ἐκτάσεως αὐτῆς καλλιεργοῦνται ὑπὸ τῶν κατοίκων, τὰ 18 % εἶναι δάση καὶ λόχμαι, τὰ 35 % εἶναι λειμῶνες καὶ βοσκαί, τὰ δὲ 27 % εἶναι ἀκαλλιέργητα ἢ λίμναι ἢ ἕλη. Νὰ ἐκφρασθοῦν οἱ ἐκτάσεις αὐταὶ εἰς τετραγωνικὰ χιλιόμετρα.

§ 292. Εὕρεσις τοῦ ἀρχικοῦ ποσοῦ. *Πρόβλημα 1ον.* **Ἔμπορος πωλῶν τὰ ἐμπορεύματά του μὲ κέρδος 20 % εἰσέπραξεν ἐκ τῆς πωλήσεως μέρους αὐτῶν 296 400. Πόση ἦτο ἡ ἀξία τῶν πωληθέντων ἐμπορευμάτων ;**

Κατάταξις :

Ὅταν εἰσπράττῃ	120 δραχ,	τὸ ἐμπόρευμα	ἀξίζει	100 δραχ.	
» »	296 400 »	»	»	χ	»

Λύσις. Ἐπειδὴ τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα, ἔχομεν :

$$χ = 100 \text{ δραχ.} \times \frac{296\,400}{120} = 247\,000 \text{ δραχ.}$$

Ὥστε ἡ ἀξία τῶν πωληθέντων ἐμπορευμάτων ἦτο 247 000 δραχ.

ἀξία	= 100
κέρδ.	= 20
πωλ.	= 120

Πρόβλημα 2ον. **Ἕνα ἐμπόρευμα ἐπωλήθη μὲ ζημίαν 12 % ἀντὶ 44 000 δραχ. Ποία ἦτο ἡ ἀξία τοῦ ἐμπορεύματος ;**

Κατάταξις :

Ὅταν πωλῆται	88 δραχ.	τὸ ἐμπόρευμα	ἀξίζει	100 δραχ.	
» »	44 000 »	»	»	» χ	»

Λύσις. Ἐπειδὴ τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα, ἔχομεν :

$$χ = 100 \text{ δρχ.} \times \frac{44\,000}{88} = 50\,000 \text{ δρχμ.}$$

Ὥστε ἡ ἀξία τοῦ ἐμπορεύματος ἦτο 50 000 δραχ.

ἀξία	= 100
ζημία	= 12
πωλ.	= 88

Ἀσκήσεις

Α' Ὁμάς. 602) Ἔμπορος πτωχεύσας δίδει τὰ 34 % τῶν ὅσων ὀφείλει εἰς τοὺς πιστωτάς του. Πόσον ὤφειλεν εἰς ἕνα ἐξ αὐτῶν, ὁ ὁποῖος ἔλαβε 578 000 δραχ;

603) Μεσίτης λαμβάνει μεσιτείαν 2 ‰. Διὰ τὴν πώλησιν μιᾶς οἰκίας ἔλαβεν 75 000 δραχ. ὡς μεσιτείαν. Πόσον ἐπωλήθη ἡ οἰκία;

604) Ἔμπορος πωλήσας ἐμπόρευμά τι μὲ ζημίαν 15 % ἐζημιώθη ἐκ τῆς πωλήσεως αὐτοῦ 105 000 δραχ. Πόσον εἶχεν ἀγοράσει τὸ ἐμπόρευμα καὶ πόσον τὸ ἐπώλησεν;

605) Ἀρχιτέκτων ἔλαβε 423 000 δραχ. ὡς ἀμοιβὴν διὰ τὴν ἐκπόνησιν σχεδίου μιᾶς οἰκίας. Ἐὰν ἡ ἀμοιβή του ὑπελογίσθη πρὸς 1,5 % ἐπὶ τῆς συνολικῆς δαπάνης τῆς οἰκίας, νὰ εὑρεθῇ πόσον θὰ στοιχίσῃ ἡ οἰκία.

606) Τὸ θαλάσσιον ὕδωρ περιέχει 2,5 % τοῦ βάρους του ἅλας. Πόσαι ὀκάδες θαλασσίου ὕδατος περιέχουν 1 ὀκ. ἅλατος;

Β΄ Ὁμάς. 607) Ἔμπορος πωλῶν τὰ ἐμπορεύματά του μὲ κέρδος 30 % εἰσπράττει ἐκ τῆς πωλήσεως αὐτῶν 910 000 δραχ. Πόση ἦτο ἡ τιμὴ τῆς ἀγορᾶς των;

608) Ὁ καφές, ὅταν καβουρδίζηται, χάνει 22 % τοῦ βάρους του. Πόσας ὀκάδας καφὲ πρέπει νὰ ἀγοράσωμεν, διὰ νὰ ἔχωμεν 39 ὀκ. καβουρδισμένου;

§ 293. Εὕρεσις τοῦ %. *Πρόβλημα.* **Δι' ἐμπόρευμα ἀξίας 180 000 δραχ. ἐπληρώσαμεν 172 800 δραχ. Πρὸς πόσον τοῖς ἑκατὸν ὑπελογίσθη ἡ ἔκπτωσις;**

Λύσις. Ἡ ὁλικὴ ἔκπτωσις εἶναι:

180 000 δραχ. — 172 800 δραχ. = 7 200 δραχ.

Κατάταξις: Δι' ἐμπόρ. ἀξίας 180 000 δραχ. ἔχομεν ἔκπτ. 7 200 δραχ.
» » » 100 » » » χ »

Ἐπειδὴ τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα, ἔχομεν:

$$\chi = 7\,200 \text{ δραχ.} \times \frac{100}{180000} = 4\,\%.$$

Ὥστε ἡ ἔκπτωσις ὑπελογίσθη πρὸς 4 %.

Ἀσκήσεις

Α΄ Ὁμάς. *Προφορικῶς.* 609) Πόσον % εἶναι ἡ ἔκπτωσις ἑνὸς ἐμπορεύματος, τὸ ὁποῖον πληρώνεται 90 δραχ. ἀντὶ 100; 180 δραχ. ἀντὶ 200 δραχ; 210 δραχ. ἀντὶ 300 δραχ;

610) Πόσον °/₀ εἶναι τὸ ἀπόβαρον ἐπὶ τῶν κάτωθι ἐμπορευμάτων :

α) καφές : μεικτὸν βάρος 200 ὀκ. βάρος συσκευασίας 18 ὀκ.
β) τέϊον : » » 150 » » » 12 »

Β' Ὁ μ ά ς. *Γραπτῶς.* 611) Ἔμπορος ἠγόρασεν ἐμπορεύματα ἀξίας 17 280 000 δραχ. καὶ τὰ ἐπώλησεν ἀντὶ 20 736 000. Πόσον °/₀ ἐκέρδισεν ;

612) Ἕνα ἔργον ὑπελογίσθη ὅτι θὰ στοιχίσῃ 36 215 000 δραχ. Ἐργολάβος ἀναλαμβάνει νὰ ἐκτελέσῃ τὸ ἔργον αὐτὸ ἀντὶ 32 412 425 δραχ. Εἰς πόσον °/₀ ἀνῆλθεν ἡ ἔκπτωσις ;

613) Ἔμπορός τις ἠγόρασε χονδρικῶς 84 ὀκ. ζακχάρεως πρὸς 6 400 δραχ. τὴν ὀκᾶν καὶ 45 ὀκ. σάπωνος πρὸς 7 200 δραχ. τὴν ὀκᾶν καὶ ἐπλήρωσε μόνον 730 654 δραχ. Πόσον °/₀ ἦτο ἡ ἔκπτωσις ;

614) Μία φτυαριὰ χώματος, τὸ ὁποῖον ἐλήφθη ἀπὸ ἕνα κῆπον ζυγίζει 450 γραμ. Κατὰ τὴν ἀνάλυσιν εὑρέθησαν 270 γραμμ. ἄμμου, 150 γραμμ. ἀργίλου, τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ ὑπολοίπου ἀσβεστόλιθος καὶ τὰ $\frac{2}{3}$ αὐτοῦ γόνιμον. Ἀπὸ πόσον τοῖς ἑκατὸν ἐξ ἑκάστης ὕλης ἀπετελεῖτο τὸ ἔδαφος τοῦτο ;

Γ' Ὁ μ ά ς. 615) Ἔμπορος ἠγόρασε 325μ. ὑφάσματος πρὸς 4 560 δραχ. τὸ μέτρον. Πωλεῖ τὸ $\frac{1}{3}$ αὐτοῦ πρὸς 5000 δραχ. τὸ μέτρον. Πόσον πρέπει νὰ πωλήσῃ ἕκαστον μέτρον τοῦ ὑπολοίπου ὑφάσματος διὰ νὰ κερδίσῃ συνολικῶς 20 °/₀ ;

616) Ἔμπορος ἠγόρασεν 120 μέτρα ὑφάσματος πρὸς 3 250 δραχ. τὸ μέτρον. Πωλεῖ τὸ $\frac{1}{3}$ αὐτοῦ πρὸς 3 500 δραχ. τὸ μέτρον, τὸ $\frac{1}{4}$ αὐτοῦ πρὸς 3 750 δραχ. τὸ μέτρον καὶ τὸ ὑπόλοιπον πρὸς 3 450 δραχ. τὸ μέτρον. Πόσον τοῖς ἑκατὸν ἐκέρδισεν ;

617) Ἔμπορος ἠγόρασε 1 260 ποτήρια πρὸς 1 500 000 δρχ. τὴν χιλιάδα. Κατὰ τὴν μεταφορὰν ἔσπασαν 63. Τὰ ὑπόλοιπα ἐπώλησε μὲ κέρδος 20°/₀ ἐπὶ τῆς τιμῆς τῆς ἀγορᾶς. Πόσον ἐπώλησεν ἕκαστον ποτήριον ;

618) Παραγγελιοδόχος λαμβάνει 12 000 δραχ. ἡμερησίως δι' ἔξοδα κινήσεως καὶ 2,5 °/₀ ὡς προμήθειαν ἐπὶ τῆς ἀξίας τῶν ὑπ' αὐτοῦ πωλουμένων εἰδῶν. Μετὰ ταξίδιον 18 ἡμερῶν λαμβάνει συνο-

λικῶς διὰ ἔξοδα κινήσεως καὶ προμήθειαν 1 620 000 δραχ. Πόσης ἀξίας εἴδη ἐπώλησεν ;

3. ΣΥΝΘΕΤΟΣ ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΤΡΙΩΝ

§ 294. *Πρόβλημα 1ον.* **Δι' ἐργασίαν 4 ἡμερῶν, 5 ἐργάται ἔλαβον 260 000 δραχ. Πόσον θὰ λάβουν 8 ἐργάται, ἐὰν ἐργασθοῦν 10 ἡμέρας;**

Κατάταξις : 5 ἐργάται εἰς 4 ἡμ. λαμβάνουν 260 000 δραχ.
8 » » 10 » » χ »

Ἐν πρώτοις εὑρίσκομεν πόσας δραχμὰς θὰ λάβουν οἱ 8 ἐργάται, ἂν ἐργασθοῦν 4 ἡμέρας. Πρὸς τοῦτο λύομεν τὸ ἑξῆς πρόβλημα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν :

Οἱ 5 ἐργάται, ἂν ἐργασθοῦν 4 ἡμέρας λαμβάνουν 260 000 δραχ. Οἱ 8 ἐργάται πόσα θὰ λάβουν;

Κατάταξις : 5 ἐργάται λαμβ. 260 000 δραχ.
8 » » χ »

Ἐπειδὴ τὰ ποσὰ ἐργάται καὶ δραχμαὶ εἶναι ἀνάλογα, θὰ εἶναι

$$χ = 260\,000 \times \frac{8}{5} \text{ δραχ.}$$

Ὥστε οἱ 8 ἐργάται θὰ λάβουν $260\,000 \times \frac{8}{5}$ δραχ, ἐὰν ἐργασθοῦν ἐπὶ 4 ἡμέρας.

Ἀλλ' ἐπειδὴ θέλομεν νὰ μάθωμεν πόσον θὰ λάβουν οἱ 8 ἐργάται, ἂν ἐργασθοῦν 10 ἡμέρας (καὶ ὄχι 4 ἡμέρας), πρέπει νὰ λύσωμεν τώρα τὸ ἑξῆς πρόβλημα :

Ἂν ἐργασθοῦν ἐπὶ 4 ἡμέρας (οἱ 8 ἐργάται) θὰ λάβουν $260\,000 \times \frac{8}{5}$ δραχ. Πόσον θὰ λάβουν, ἐὰν ἐργασθοῦν ἐπὶ 10 ἡμέρας;

Κατάταξις: Ἂν ἐργαθοῦν 4 ἡμ. λαμβ. $260\,000 \times \frac{8}{5}$ δραχ.
» » 10 » » χ »

Ἐπειδὴ τὰ ποσὰ ἡμέραι καὶ δραχμαὶ εἶναι ἀνάλογα, θὰ εἶναι:

$$χ = 260\,000 \times \frac{8}{5} \times \frac{10}{4} = 1\,040\,000 \text{ δραχ.}$$

Ὥστε οἱ 8 ἐργάται θὰ λάβουν 1 040 000 δραχ, ἂν ἐργασθοῦν 10 ἡμέρας.

§ 295. *Πρόβλημα 2ον.* **8 ἐργάται εἰς 6 ἡμέρας σκάπτουν ἀγρὸν 12 στρεμμάτων. Εἰς πόσας ἡμέρας 10 ἐργάται θὰ σκάψουν ἀγρὸν 5 στρεμμάτων;**

Κατάταξις: 8 ἐργ. 6 ἡμ. 12 στρ.
10 » χ » 5 »

Λύσις. Εὑρίσκομεν πρῶτον εἰς πόσας ἡμέρας οἱ 10 ἐργάται σκάπτουν ἀγρὸν 12 στρεμμάτων. Πρὸς τοῦτο λύομεν τὸ ἑξῆς πρόβλημα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν:

Οἱ 8 ἐργάται σκάπτουν ἕνα ἀγρὸν (12 στρεμ.) εἰς 6 ἡμέρας. Οἱ 10 ἐργάται εἰς πόσας ἡμέρας θὰ σκάψουν τὸν ἀγρὸν αὐτόν;

Κατάταξις: 8 ἐργάται σκάπτουν ἀγρὸν εἰς 6 ἡμέρας
10 » » » » χ »

Ἐπειδὴ τὰ ποσὰ ἐργάται καὶ ἡμέραι εἶναι ἀντίστροφα, θὰ εἶναι:

$$\chi = 6 \times \frac{8}{10} \text{ ἡμ.}$$

Ὥστε οἱ 10 ἐργάται θὰ χρειασθοῦν $6 \times \frac{8}{10}$ ἡμ, διὰ νὰ σκάψουν ἀγρὸν 12 στρεμμάτων.

Ἀλλ' ἡμεῖς δὲν θέλομεν νὰ μάθωμεν εἰς πόσας ἡμέρας οἱ 10 ἐργάται θὰ σκάψουν ἀγρὸν 12 στρεμμάτων, ἀλλὰ 5 στρεμμάτων. Διὰ τοῦτο πρέπει νὰ λύσωμεν τὸ ἑξῆς πρόβλημα:

Διὰ νὰ σκάψουν ἀγρὸν 12 στρεμ. (οἱ 10 ἐργάται) χρειάζονται $6 \times \frac{8}{10}$ ἡμ. Πόσας ἡμέρας θὰ χρειασθοῦν διὰ νὰ σκάψουν ἀγρὸν 5 στρεμμάτων;

Κατάταξις: Διὰ 12 στρέμ. χρειάζ. $6 \times \frac{8}{10}$ ἡμ.
» 5 » » χ »

Ἐπειδὴ δὲ τὰ ποσὰ στρέμματα καὶ ἡμέραι εἶναι ἀνάλογα, θὰ εἶναι

$$\chi = 6 \text{ ἡμ.} \times \frac{8}{10} \times \frac{5}{12} = 2 \text{ ἡμ.}$$

Ὥστε οἱ 10 ἐργάται θὰ χρειασθοῦν 2 ἡμ, διὰ νὰ σκάψουν ἀγρὸν 5 στρεμμάτων.

Συμπέρασμα. Διὰ νὰ λύσωμεν τὰ 2 ἀνωτέρω προβλήματα, ἀνελύσαμεν αὐτὰ εἰς δύο προβλήματα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν (δηλ. εἰς τόσα προβλήματα, ὅσα εἶναι τὰ δοθέντα ποσά, πλὴν ἑνός).

Διὰ τὸν λόγον αὐτὸν τὰ προβλήματα τῆς μορφῆς αὐτῆς λέγονται **προβλήματα τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν.**

Ἐκ τῆς προσεκτικῆς παρατηρήσεως τοῦ τελικοῦ ἐξαγομένου συνάγομεν τὸν κάτωθι κανόνα:

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν τοῦ ἀγνώστου χ εἰς ἕνα πρόβλημα τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν, πολλαπλασιάζομεν τὸν ὑπεράνω τοῦ χ ἀριθμὸν ἐπὶ ἕκαστον τῶν κλασμάτων, ποὺ σχηματίζονται ἀπὸ τὰς δύο τιμὰς ἑκάστου ποσοῦ ὅπως ἔχει μέν, ἂν τὸ ποσὸν τοῦτο εἶναι ἀντίστροφον πρὸς τὸ ποσὸν τοῦ ἀγνώστου· ἀντεστραμμένον δέ, ἂν εἶναι ἀνάλογον πρὸς αὐτό.

§ 296. Ἐφαρμογὴ τοῦ κανόνος. Μὲ 15 ὀκ. νῆμα κατασκευάζομεν ὕφασμα 25 μέτρ. μήκους καὶ 0,64 μέτρ. πλάτους. Μὲ 21 ὀκ. νῆμα πόσον ὕφασμα θὰ κατασκευάσωμεν, ἐὰν τὸ πλάτος του εἶναι 0,80 μέτρα;

Κατάταξις :	15 ὀκ. νῆμ.	25 μ. μήκ.	0,64 μ. πλ.
	21 » »	χ » »	0,80 » »

Λύσις. Συγκρίνομεν κάθε ποσὸν μὲ τὸ ποσόν, τοῦ ὁποίου ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμή:

1ον. *Ὀκάδες καὶ μῆκος.* Ἀφοῦ μὲ 15 ὀκ. νῆμα κατασκευάζομεν ὕφασμα 25 μ. μήκους, μὲ διπλασίας ὀκάδας νήματος θὰ κατασκευάσωμεν καὶ διπλάσιον μῆκος ὑφάσματος· ἄρα τὰ ποσὰ ὀκάδες καὶ μῆκος εἶναι ἀνάλογα.

2ον. *Πλάτος καὶ μῆκος ὑφάσματος.* Ὅταν τὸ πλάτος τοῦ ὑφάσματος εἶναι 0,64 μ. κατασκευάζομεν ὕφασμα 5 μ. μήκους, μὲ ὡρισμένον νῆμα. Ὅταν τὸ πλάτος τοῦ ὑφάσματος εἶναι διπλάσιον, μὲ τὸ ἴδιον νῆμα θὰ κατασκευάσωμεν ὕφασμα, τοῦ ὁποίου τὸ μῆκος θὰ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ προηγουμένου. Ἄρα τὰ ποσὰ πλάτος καὶ μῆκος ὑφάσματος εἶναι ἀντίστροφα

Κατὰ τὸν κανόνα λοιπὸν θὰ εἶναι:

$$\chi = 25 \times \frac{21}{15} \times \frac{0,64}{0,80} = \frac{25 \times 21 \times 64}{15 \times 80} = 28 \text{ μ.}$$

Ὥστε μὲ 21 ὀκ. νῆμα θὰ κατασκευάσωμεν ὕφασμα 28 μ. μήκους.

Σημείωσις. Κατὰ τὴν σύγκρισιν κάθε ποσοῦ πρὸς τὸ ποσόν, τοῦ ὁποίου ζητεῖται ἡ τιμή, πρέπει νὰ θεωρῶμεν τὰ ἄλλα ποσὰ ὡς μὴ ὑπάρχοντα.

Ἀσκήσεις

Α΄. Ὁμάς. 619) Διὰ νὰ μεταφέρῃ ἕνας ἰδιοκτήτης φορτηγοῦ αὐτοκινήτου 300 ὀκ. σίτου εἰς ἀπόστασιν 15 χλμ. ζητεῖ 67 500 δραχ. Πόσον θὰ ζητήσῃ, ἐὰν μεταφέρῃ 1 500 ὀκ. σίτου εἰς ἀπόστασιν 25 χιλιομέτρων ;

620) Διὰ νὰ λιθοστρώσουν μίαν ὁδὸν 360 μέτρων μήκους καὶ 12 μ. πλάτους ἐχρησιμοποίησαν 450 κυβικὰ μέτρα χαλικίων. Πόσα κ.μ. χαλικίων θὰ χρειασθῶμεν, διὰ νὰ λιθοστρώσωμεν ὁδὸν μήκους 560 μέτρ. καὶ πλάτους 10 μέτρων ;

621) Ὑπελόγισέ τις ὅτι μία κρήνη ρέουσα ἐπὶ 7 ἡμ. καὶ ἐπὶ 12 ὥρας τὴν ἡμέραν ἔδωσεν 7 560 ὀκ. ὕδατος. Πόσον ὕδωρ θὰ ρέῃ, ἐὰν τρέχῃ ἐπὶ 9 ἡμ. καὶ ἐπὶ 8 ὥρας τὴν ἡμέραν ;

622) Μία βρύσις εἰς 6 ὥρας γεμίζει μίαν δεξαμενήν, ἡ ὁποία ἔχει 4 μέτρα μῆκος, 3 μέτρα πλάτος καὶ 3,50 βάθος. Πόσον χρόνον θὰ ἐχρειάζετο ἡ βρύσις, διὰ νὰ γεμίσῃ μίαν ἄλλην δεξαμενήν, ἡ ὁποία ἔχει μῆκος 5,6 μέτρα, πλάτος 2,50 μέτρα καὶ βάθος 2 μέτρα ;

Β΄ Ὁμάς. 623) Διὰ νὰ κτίσωμεν ἕνα τοῖχον, ποὺ ἔχει 15 μέτρα μῆκος, 0,80 μέτρα πάχος καὶ 2 μέτρα ὕψος ἐπληρώσαμεν 1 200 000 δρχ. Πόσον ἔπρεπε νὰ πληρώσωμεν, ἂν ὁ τοῖχος εἶχε 10 μέτρ. μῆκος, 1,20 μέτρ. πάχος καὶ 3 μ. ὕψος ;

624) Ἕνας ράπτης ἑτοίμων ἐνδυμάτων ἔκαμε 10 ἐνδυμασίας μὲ 42 πήχ. 4 ρούπ. ἀπὸ ὕφασμα πλάτους 1,2 μέτρ. Πόσας ὁμοίας ἐνδυμασίας δύναται νὰ κάμῃ μὲ 51 πήχεις ἀπὸ ὕφασμα πλάτους 1,5μ.

625) Μία σιδηρᾶ πλὰξ ἔχει μῆκος 0,20 μέτρα, πλάτος 0,04 μέτρα, πάχος 0,02 μέτρα καὶ βάρος 1 248 γραμμάρια. Μία σιδηρᾶ θύρα ἔχει μῆκος 1,5 μέτρα, πλάτος 0,80 μέτρα καὶ πάχος 0,01 μέτρα. Νὰ εὑρεθῇ τὸ βάρος τῆς θύρας.

626) Δύο ἐργάται ἐργαζόμενοι 5 ὥρας τὴν ἡμέραν θερίζουν ἀγρὸν 7,5 στρεμ. εἰς 3 ἡμέρας. Πόσοι ἐργάται τῆς αὐτῆς δυνάμεως, ἐργαζόμενοι 8 ὥρας τὴν ἡμέραν, θὰ θερίσουν ἀγρὸν 12 στρεμ. εἰς 2 ἡμέρας ;

Γ΄ Ὁμάς. 627) Πεζοπόρος βαδίζων 8 ὥρας τὴν ἡμέραν χρειάζεται 3 ἡμέρας, διὰ νὰ διανύσῃ ἀπόστασιν 120 χιλιομέτρων. Εἰς πόσας ἡμέρας θὰ διανύσῃ ἀπόστασιν 180 χιλιομέτρων, ἐὰν βαδίζῃ 6 ὥρας τὴν ἡμέραν ;

628) Τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς ἀποστάσεως δύο πόλεων διήνυσέ τις δι' αὐτοκινήτου μὲ ταχύτητα 30 χλμ. τὴν ὥραν καὶ τὸ ὑπόλοιπον πεζῇ διανύων 5 χλμ. τὴν ὥραν. Ἐὰν διὰ τὸ πρῶτον διάστημα ἐχρειάσθη $25^{π}$, πόσον θὰ χρειασθῇ διὰ τὸ δεύτερον μέρος τοῦ διαστήματος ;

629) Μία ἁμαξοστοιχία, ἡ ὁποία κινεῖται μὲ ταχύτητα 42 χλμ. τὴν ὥραν, πρέπει νὰ διανύσῃ μίαν ἀπόστασιν εἰς 9 ὥρας. Μετὰ πορείαν 126 χιλιομ. ὑποχρεοῦται νὰ σταματήσῃ ἐπὶ $\frac{3}{4}$ τῆς ὥρας. Μὲ ποίαν ταχύτητα πρέπει νὰ συνεχίσῃ τὴν πορείαν της, διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὸν προορισμόν της κατὰ τὴν ὡρισμένην ὥραν ;

4. ΣΥΝΕΖΕΥΓΜΕΝΗ ΜΕΘΟΔΟΣ

§ 297. *Πρόβλημα.* **Ἕνας ταξιδιώτης ἠγόρασεν εἰς τὸ Λονδῖνον ὕφασμα πρὸς 9,5 σελίνια τὴν ὑάρδαν. Πρὸς πόσας δραχμὰς ἠγόρασε τὸν πῆχυν, ἂν ἡ χρυσῆ λίρα Ἀγγλίας ἐτιμᾶτο εἰς τὴν ἐλευθέραν ἀγορὰν πρὸς 230 000 παλαιὰς δραχμάς ;**

Λύσις. Γνωρίζομεν (§ 250) ὅτι :

1 ὑάρδα = 0,914 μέτρα καὶ 1 πῆχυς = 0,648 μέτρα.

Σκεπτόμεθα λοιπὸν ὡς ἑξῆς :

Ἀφοῦ 0,914 μέτ. τιμῶνται 9,5 σελίνια
τὰ 0,648 μέτ. » ψ »

Ἐπειδὴ τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα, θὰ εἶναι :

$$ψ = 9{,}5 \times \frac{0{,}648}{0{,}914} \text{ σελίνια.}$$

Διὰ νὰ τρέψωμεν τὰ σελίνια αὐτὰ εἰς δραχμάς, σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς :

Ἡ μία χρυσῆ λίρα Ἀγγλίας, ἤτοι 20 σελίνια, ἔχουν 230 000 δραχ.
τὰ $9{,}5 \times \frac{0{,}648}{0{,}914}$ » χ »

Ἐπειδὴ τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα, θὰ εἶναι :

$$χ = \frac{230\,000 \times 9{,}5 \times 0{,}648}{20 \times 0{,}914} = 81\,758{,}2 \text{ δραχ.}$$

Ὥστε ἠγόρασε τὸν πῆχυν 81 758,2 παλαιὰς δραχ.

Συμπέρασμα. Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα αὐτό, τὸ ἐχωρίσαμεν εἰς προβλήματα ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν, εἰς τὰ ὁποῖα εἰσέρχονται ποσὰ ἀνάλογα.

Πρὸς τοῦτο εἴχομεν ὑπ' ὄψιν ὅτι 1 ὑάρδα = 0,914 μέτρα, 1 πῆχυς=0,648 μέτρα καὶ ὅτι συμφώνως πρὸς τὸ πρόβλημα 1 χρυσῆ λίρα Ἀγγλίας=230 000 δραχ.

Δὲν εἶναι ὅμως τοῦτο πρόβλημα συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν, διότι ἡ νέα τιμὴ (ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μία ἄγνωστος) ἑκάστου ποσοῦ δὲν εἶναι ὁμοειδὴς πρὸς τὴν πρώτην τιμὴν αὐτοῦ.

Π.χ. μία τιμὴ τοῦ πήχεως εἶναι χ δραχ. καὶ ἄλλη τιμὴ τοῦ πήχεως εἶναι 0,648 μέτρ.

Καὶ ἡ διάταξις λοιπὸν τῆς πράξεως ταύτης ἔχει διάφορον μορφὴν ἀπὸ τὴν διάταξιν τῶν προβλημάτων τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν, ὡς παραπλεύρως φαίνεται.

Κατὰ τὴν διάταξιν αὐτὴν τὰ ζεύγη τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν δύο ποσῶν γράφονται τὸ ἕνα κάτω ἀπὸ τὸ ἄλλο. Τὸ πρῶτον ζεῦγος ἀρχίζει ἀπὸ τὴν ζητουμένην τιμήν. Τὸ δὲ α' μέλος ἑκάστης τῶν ἄλλων ἰσοτήτων εἶναι ὁμοειδὲς πρὸς τὸ β' μέλος τῆς προηγουμένης ἰσότητος. Οὕτω δέ, ἂν τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος καὶ ἄλλαι γνωσταὶ σχέσεις εἶναι ἐπαρκεῖς, πρέπει τὸ β' μέλος τῆς τελευταίας ἰσότητος νὰ εἶναι ὁμοειδὲς πρὸς τὴν ἄγνωστον τιμήν.

Διάταξις τῆς πράξεως

χ δραχ.	=	1	πῆχ.
1 πῆχ.	=	0,648	μέτ.
0,914 μ.	=	1	ὑάρ.
1 ὑάρδ.	=	9,5	σελ.
20 σελ.	=	230 000	δραχ.

$$χ = \frac{0,648 \times 9,5 \times 230\,000}{0,914 \times 20} =$$
$$= 81\,758,2 \text{ δραχ.}$$

Εὐκόλως δὲ βλέπομεν ὅτι ἡ εὑρεθεῖσα τιμὴ τοῦ χ, μετὰ τὴν διάταξιν αὐτήν, εὑρίσκεται ὡς ἑξῆς :

Διαιροῦμεν τὸ γινόμενον τῶν δευτέρων μελῶν διὰ τοῦ γινομένου τῶν ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι εἶναι κάτω ἀπὸ τὸν χ.

Ἕνεκα τῆς τοιαύτης συζεύξεως τῶν τιμῶν τῶν ποσῶν, τὰ ὁποῖα εἰσέρχονται εἰς τὰ τοιαῦτα προβλήματα, ταῦτα λέγονται προβλήματα τῆς **συνεζευγμένης μεθόδου.**

Παρατήρησις. Εἶναι ἀξιοπαρατήρητον ὅτι εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπάρχουν καὶ δύο μόνον ζεύγη τιμῶν, ὅπως συμβαίνει εἰς τὰ προβλήματα τῆς ἁπλῆς μεθόδου. Ἑπομένως, ἂν εἰς ἕνα τοιοῦτον πρόβλημα εἰσέρχωνται ἀνάλογα ποσά, ἡ διάταξις τούτου δύναται νὰ λάβῃ τὴν προηγουμένην μορφήν.

Ἔστω π.χ. τὸ ἀκόλουθον πρόβλημα :

Διὰ 5 ὀκάδας ζακχάρεως δίδομεν 52 500 παλ. δραχ. Πόσας ὀκάδας ἀγοράζομεν μὲ 84 000 δραχμάς;

Ἡ γνωστὴ διάταξις	Νέα διάταξις
Μὲ 52 500 δραχ. ἀγοράζ. 5 ὀκ.	χ ὀκ. $=$ 84 000 δραχ.
» 84 000 » » χ »	52 500 δρ. $=$ 5 ὀκ.
$\chi = 5 \times \frac{84000}{52500} = 8$ ὀκ.	$\chi = \frac{84\,000 \times 5}{52\,500} = 8$ ὀκ.

Ἀσκήσεις

630) Τὸ χιλιόγραμμον τοῦ καφὲ τιμᾶται ἐν Λονδίνῳ 3 σελίνια. Πόσας δραχμὰς ἀξίζει ὁ στατὴρ τοῦ καφὲ μὲ τιμὴν τῆς χρυσῆς λίρας Ἀγγλίας 230 000 δραχμάς;

631) Ὁ τόννος τῆς ζακχάρεως τιμᾶται ἐν Ἀγγλίᾳ 35 χαρτίνας λίρας καὶ ἐπιβαρύνεται μέχρι Πειραιῶς μὲ ἔξοδα κατὰ 12 %. Πόσας δραχμὰς κοστίζει ἡ ὀκᾶ ἐν Πειραιεῖ;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ΄

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΟΚΟΥ

§ 298. **Ὁρισμοί.** Ὅταν δανείζῃ τις εἰς ἄλλον χρήματα, εἶναι δίκαιον νὰ λαμβάνῃ μετά τινα χρόνον πλὴν τῶν χρημάτων του καὶ ἕνα κέρδος. Τὸ κέρδος αὐτό, ποὺ προέρχεται ἀπὸ τὰ δανειζόμενα χρήματα, λέγεται **τόκος**. Ὥστε:

Τόκος λέγεται τὸ κέρδος, τὸ ὁποῖον λαμβάνει ὁ δανείζων χρήματα.

Τὸ δανειζόμενον ποσὸν λέγεται **Κεφάλαιον (Κ).**

Ἡ χρονικὴ διάρκεια τοῦ δανείου λέγεται **Χρόνος (Χ).**

Ὁ δὲ τόκος τῶν 100 δραχ. εἰς 1 ἔτος λέγεται **Ἐπιτόκιον (Ε).** Τὸ ἐπιτόκιον ὁρίζεται δι᾽ ἰδιαιτέρας συμφωνίας μεταξὺ τοῦ δανείζοντος καὶ δανειζομένου. Σημειοῦται δὲ διὰ τοῦ συμβόλου %.

Εἰς τὰ προβλήματα τοῦ τόκου παρουσιάζονται **τέσσαρα ποσά,** ἤτοι ὁ τόκος, τὸ κεφάλαιον, ὁ χρόνος καὶ τὸ ἐπιτόκιον. Ἐπειδὴ δὲ συνήθως δίδονται τὰ τρία ποσὰ καὶ ζητεῖται τὸ τέταρτον, διὰ τοῦτο τὰ προβλήματα τοῦ τόκου διακρίνονται εἰς 4 εἴδη.

Σημείωσις. Ὁ τόκος εἶναι **ἁπλοῦς** ἢ **σύνθετος.** Ἁπλοῦς μὲν λέγεται, ὅταν τὸ κεφάλαιον μένῃ τὸ αὐτὸ καθ᾽ ὅλην τὴν διάρκειαν τοῦ δανείου. Σύνθετος δέ, ὅταν εἰς τὸ τέλος ἑκάστου ἔτους (συνήθως) προστίθεται εἰς τὸ κεφάλαιον καὶ ὁ τόκος αὐτοῦ καὶ ἀποτελεῖται οὕτω νέον κεφάλαιον διὰ τὸ ἑπόμενον ἔτος. Εἰς τὴν τελευταίαν περίπτωσιν λέγομεν ὅτι τὸ κεφάλαιον **ἀνατοκίζεται.**

Κατωτέρω θὰ κάμωμεν λόγον μόνον περὶ ἁπλοῦ τόκου.

1. ΕΥΡΕΣΙΣ ΤΟΥ ΤΟΚΟΥ

§ 299. *Πρόβλημα 1ον.* **Πόσον τόκον φέρουν 365 000 δραχ. εἰς 3 ἔτη πρὸς 6 %;**

Κατάταξις:

Αἱ 100 δρχ. κεφ. εἰς 1 ἔτος φέρουν 6 δρχ. τόκον Αἱ 365 000 » » » 3 ἔτη » χ » »	K=365 000 δρ. E= 6 °/₀ X= 3 ἔτη T= ;

Λύσις. Ἐπειδὴ ὁ τόκος εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὸ κεφάλαιον καὶ πρὸς τὸν χρόνον, ἔχομεν:

$$\chi = 6 \text{ δραχ.} \times \frac{365\,000}{100} \times \frac{3}{1} = \frac{6 \times 365\,000 \times 3}{100} = 65\,700 \text{ δραχ.}$$

Ὥστε αἱ 365 000 δραχ. φέρουν 65 700 δραχ. τόκον εἰς 3 ἔτη.

Πρόβλημα 2ον. **Πόσον τόκον φέρουν 650 000 δραχμαὶ εἰς 8 μῆνας πρὸς 4,5 °/₀ ;**

Κατάταξις:

Αἱ 100 δρχ. κεφ. εἰς 12 μῆν. φέρουν 4,5 δρ. τόκ. » 650 000 » » » 8 » » χ » »	K=650 000 δρ. E= 4,5 °/₀ X= 8 μῆν. T= ;

Λύσις. Ἐπειδὴ ὁ τόκος εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὸ κεφάλαιον καὶ τὸν χρόνον, ἔχομεν:

$$\chi = 4{,}5 \text{ δραχ.} \times \frac{650\,000}{100} \times \frac{8}{12} = \frac{4{,}5 \times 650\,000 \times 8}{1200} = 19\,500 \text{ δραχ. τόκον.}$$

Ὥστε αἱ 650 000 δραχ. φέρουν 19 500 δραχ. τόκον εἰς 8 μῆνας.

Πρόβλημα 3ον. **Πόσον τόκον φέρουν 450 000 δραχ. εἰς 3 μῆνας καὶ 15 ἡμέρας πρὸς 9 °/₀ ;**

Κατάταξις:

Αἱ 100 δρ. κεφ. εἰς 360 ἡμ. φέρουν 9 δρ. τόκον Αἱ 450 000 » » » 105 » » χ » »	K=450 000 δρ. E= 9 °/₀ X=3μῆν.15ἡμ. T= ;

Λύσις. Ἐπειδὴ ὁ τόκος εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὸ κεφάλαιον καὶ πρὸς τὸν χρόνον, ἔχομεν:

$$\chi = 9 \text{ δραχ.} \times \frac{450\,000}{100} \times \frac{105}{360} = \frac{9 \times 450\,000 \times 105}{36\,000} = 11\,812{,}5 \text{ δραχ. τόκον.}$$

Ὥστε αἱ 450 000 δραχ. φέρουν 11 812,5 δραχ. τόκον εἰς 3 μῆν. καὶ 15 ἡμέρας.

Συμπέρασμα. Ἐκ τῆς λύσεως τῶν ἀνωτέρω τριῶν προβλημάτων συνάγομεν ὅτι:

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν τόκον, πολλαπλασιάζομεν τὰς τιμὰς τῶν τριῶν δεδομένων ποσῶν, δηλ. τοῦ Κεφαλαίου, Ἐπιτοκίου, Χρόνου καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ 100 ἢ 1 200 ἢ 36 000, καθ' ὅσον ὁ χρόνος ἐκφράζεται εἰς ἔτη ἢ εἰς μῆνας ἢ εἰς ἡμέρας.

§ 300. **Τύπος τοῦ τόκου.** Ἂν παραστήσωμεν μὲ Κ τὸ κεφάλαιον, μὲ Χ τὸν χρόνον, μὲ Ε τὸ ἐπιτόκιον καὶ μὲ Τ τὸν τόκον, ὁ προηγούμενος κανὼν ἐκφράζεται διὰ τῶν ἰσοτήτων:

$$\boxed{T = \frac{K \cdot E \cdot X}{100}}\ , \text{ ἂν ὁ χρόνος Χ εἶναι ἔτη}$$

$$T = \frac{K \cdot E \cdot X}{1\,200}\ , \text{ ἂν ὁ χρόνος Χ εἶναι μῆνες}$$

καὶ
$$T = \frac{K \cdot E \cdot X}{36\,000}\ , \text{ ἂν ὁ χρόνος Χ εἶναι ἡμέραι.}$$

Καθεμία ἀπὸ τὰς ἰσότητας αὐτὰς λέγεται τύπος τοῦ τόκου. Μὲ τὸν τύπον τοῦ τόκου λύομεν κάθε πρόβλημα, εἰς τὸ ὁποῖον ζητεῖται ὁ τόκος, ἀρκεῖ νὰ ἀντικαταστήσωμεν τὰ γράμματα Κ,Ε,Χ μὲ τὰς τιμάς των.

Ἐφαρμογὴ 1η. **Πόσον τόκον φέρουν 560 000 δραχμαὶ εἰς 4 μῆνας πρὸς 6 %;**

Κ=560 000 δρ.
Ε=6 %
Χ=4 μῆνες
Τ= ;

Εἰς τὸν τύπον $T = \frac{K \cdot E \cdot X}{1200}$ θέτομεν $K = 560\,000$, $E = 6$, $X = 4$ καὶ ἔχομεν:

$$T = \frac{560\,000 \times 6 \times 4}{1200} = 11\,200 \text{ δραχ.}$$

Ὥστε αἱ 560 000 δραχ. εἰς 4 μῆν. φέρουν τόκον 11 200 δραχ.

Ἐφαρμογὴ 2α. **Πόσον τόκον φέρουν 240 000 δραχμαὶ εἰς 1 ἔτος 1 μῆνα 10 ἡμέρας πρὸς 9 %;**

Εἰς τὸν τύπον $T = \frac{K \cdot E \cdot X}{36\,000}$ θέτομεν $K = 240\,000$, $E = 9$, $X = 1$ ἔτ. 1 μῆν. 10 ἡμερ. $= 400$ ἡμ. καὶ ἔχομεν:

$$T = \frac{240\,000 \times 9 \times 400}{36\,000} = 24\,000 \text{ δραχμάς.}$$

§ 301. **Εὕρεσις τοῦ τόκου διὰ τῶν τοκαρίθμων.** *Πρόβλημα.* **Πόσον τόκον φέρουν 560 000 δραχ. εἰς 75 ἡμ. πρὸς 9 %;**

Λύσις. Γνωρίζομεν ὅτι:

$$T = \frac{K \cdot E \cdot X}{360\,000} = \frac{560\,000 \times 9 \times 75}{36\,000} = \frac{560\,000 \times 75}{4\,000}.$$

Τὸ γινόμενον 560 000 × 75 τοῦ κεφαλαίου ἐπὶ τὰς ἡμέρας ὀνομάζομεν **τοκάριθμον,** τὸν δὲ διαιρέτην 4 000, ὁ ὁποῖος εἶναι πηλίκον τοῦ 36 000 διὰ τοῦ ἐπιτοκίου 9, ὀνομάζομεν **σταθερὸν διαιρέτην.**

Ἐκ τῆς λύσεως τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος συνάγομεν ὅτι :

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν τόκον ἑνὸς κεφαλαίου εἰς χρόνον ἐκφραζόμενον εἰς ἡμέρας, διαιροῦμεν τὸν τοκάριθμον διὰ τοῦ σταθεροῦ διαιρέτου.

Κατὰ τὸν κανόνα αὐτὸν θὰ εἶναι :

$$\boxed{\text{Τόκος} = \frac{\text{Τοκάριθμος}}{\text{σταθεροῦ διαιρέτου}}}$$

Ἐφαρμογή. **Πόσον τόκον φέρουν 420 000 δραχ. εἰς 75 ἡμέρας πρὸς 6 %;**

Λύσις. $\text{T} = \frac{\text{Τοκάριθμος}}{\text{σταθ. διαιρέτου}} = \frac{42\,000 \times 75}{6\,000} = 5\,250$ δραχ.

Ὥστε αἱ 420 000 δραχμαὶ φέρουν τόκον 5 250 δραχμάς.

§ 302. Εὕρεσις τοῦ τόκου ἀπὸ μνήμης. Δυνάμεθα πολλάκις νὰ εὕρωμεν τὸν τόκον ἀπὸ μνήμης. Πρὸς τοῦτο εὑρίσκομεν πρῶτον τὸν ἐτήσιον τόκον τοῦ κεφαλαίου καὶ πολλαπλασιάζομεν αὐτὸν ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν ἐτῶν. Ὁ ἐτήσιος τόκος ἑνὸς κεφαλαίου εὑρίσκεται, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸ ἑκατοστὸν τοῦ κεφαλαίου ἐπὶ τὸ ἐπιτόκιον.

Οὕτως, ἐὰν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν πόσον τόκον φέρουν 800 δραχ. εἰς 4 ἔτη πρὸς 5 %, ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς :

Ὁ ἐτήσιος τόκος εἶναι $8 \times 6 = 40$ δραχμαί. Ἑπομένως εἰς 4 ἔτη θὰ φέρουν τόκον $40 \times 4 = 160$ δραχμάς.

Ἀσκήσεις

Α΄ Ὁμάς. *Προφορικῶς.* 632) Πόσος εἶναι ὁ ἐτήσιος τόκος:

1.	Πρὸς 1 %	τῶν 8 000 δραχ,	τῶν 90 000 δραχ.	τῶν 1 600 000 δραχ
2.	» 4 %	» 5 000 »	» 60 000 »	» 1 200 000 »
3.	» 5 %	» 4 000 »	» 120 000 »	» 3 000 000 »

Γραπτῶς. 633) Πόσον τόκον φέρουν :

1. 1 575 000 δραχ. εἰς 5 ἔτη πρὸς 4,5 % ;
2. 180 000 δραχ. εἰς 3 ἔτη καὶ 4 μῆν. πρὸς 5 % ;
3. 1 863 000 δραχ. εἰς 3 ἔτη 2 μῆν. 20 ἡμ. πρὸς 8 % ;

Β΄ Ὁμάς. 634) Ἔχει τις 2 434 500 δραχ. Καταθέτει τὰ $\frac{9}{15}$

αὐτῶν πρὸς 5 °/₀ καὶ τὸ ὑπόλοιπον πρὸς 4,5 °/₀. Πόσον τόκον θὰ λαμβάνῃ κατ' ἔτος ;

635) Ἐπώλησέ τις μίαν οἰκίαν ἀντὶ 35 000 000 δραχ. Ἀπὸ αὐτὴν ἐλάμβανε κατ' ἔτος ἐνοίκιον 1 200 000 δραχ. Τὸ ποσὸν ποὺ ἔλαβεν ἐκ τῆς πωλήσεως τῆς οἰκίας, κατέθεσεν εἰς Τράπεζαν πρὸς 6 °/₀. Κατὰ πόσον ηὐξήθησαν αἱ πρόσοδοί του ;

636) Ἕνας γεωργὸς ἐδανείσθη 650 000 δραχμὰς ἀπὸ τὴν Ἀγροτικὴν Τράπεζαν πρὸς 9 °/₀ ἐτησίως. Τὸ δάνειον ἔγινε τὴν 12ην Δεκεμβρίου 1948 καὶ ἐξωφλήθη τὴν 20ὴν Ἰανουαρίου 1949. Πόσα χρήματα ἐπλήρωσεν ;

637) Τὸ ἥμισυ ἑνὸς κεφαλαίου 380 000 δραχ. κατετέθη πρὸς 4,5 °/₀ καὶ τὸ ὑπόλοιπον πρὸς 4,75 °/₀. Πόσον τόκον θὰ λάβῃ μετὰ 5 ἔτη ;

2. ΕΥΡΕΣΙΣ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

§ 303. *Πρόβλημα.* **Ἕνας γεωργὸς ἐδανείσθη ἕνα κεφάλαιον πρὸς 8 °/₀. Μετὰ 4 δὲ ἔτη ἐπλήρωσε τόκον 60 000 δραχμάς. Πόσα χρήματα ἐδανείσθη ;**

Κατάταξις:

Αἱ 100 δραχ. εἰς 1 ἔτος φέρουν τόκον 8 δραχ.
» χ » » 4 ἔτη » » 60 000 δραχ.

K = ;
E = 8 °/₀
X = 4 ἔτη
T = 60 000 δρ.

Λύσις. Εὐκόλως ἐννοοῦμεν ὅτι διπλάσιον, τριπλάσιον κ.τ.λ. κεφάλαιον φέρει τὸν αὐτὸν τόκον εἰς τὸ ἥμισυ, τρίτον κ.τ.λ. τοῦ χρόνου. Εἶναι δηλαδὴ **τὸ κεφάλαιον καὶ ὁ χρόνος ποσὰ ἀντίστροφα.**

Ἐπειδὴ τὸ κεφάλαιον εἶναι ἀνάλογον πρὸς τὸν τόκον καὶ ἀντιστρόφως ἀνάλογον πρὸς τὸν χρόνον, θὰ εἶναι :

$$\chi = 100 \text{ δραχ.} \times \frac{1}{4} \times \frac{60\,000}{8} = \frac{60\,000 \times 100}{4 \times 8} = 187\,500 \text{ δραχμαί.}$$

Ὥστε ἐδανείσθη 187 500 δραχμάς.

Συμπέρασμα. Ἀπὸ τὴν λύσιν τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος συνάγομεν ὅτι :

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ κεφάλαιον, πολλαπλασιάζομεν τὸν τόκον ἐπὶ 100 καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ γινομένου τῶν τιμῶν τῶν δύο ἄλλων γνωστῶν ποσῶν.

§ 304. Τύπος τοῦ Κεφαλαίου. Ἀπὸ τὸν ἀνωτέρω κανόνα συνάγομεν ὅτι ὁ **τύπος τοῦ κεφαλαίου** εἶναι :

$$\boxed{K = \frac{T \cdot 100}{E \cdot X}}$$

Εἶναι προφανὲς ὅτι εἰς τὸν ἀνωτέρω τύπον πρέπει νὰ θέτωμεν ἀντὶ 100 τὸν 1200, ὅταν ὁ χρόνος δίδηται εἰς μῆνας καὶ τὸν 36 000, ὅταν ὁ χρόνος δίδηται εἰς ἡμέρας.

Ἐφαρμογή. **Πόσον κεφάλαιον πρέπει νὰ τοκίσωμεν πρὸς 5 °/ₒ διὰ νὰ λάβωμεν 50 000 δραχ. εἰς 4 ἔτη;**

K = ;
E = 5 °/ₒ
X = 4 ἔτη
T = 50 000

Ἐὰν εἰς τὸν τύπον $K = \frac{T \cdot 100}{E \cdot X}$ θέσωμεν $T = 50\,000$, $E = 5$, $X = 4$, εὑρίσκομεν ὅτι :

$K = \frac{50\,000 \times 100}{5 \times 4} = 250\,000$ δραχμαί.

Ὥστε πρέπει νὰ τοκίσωμεν 250 000 δραχμάς.

Ἀσκήσεις

Α' Ὁμάς. *Προφορικῶς.* 638) Ποῖον κεφάλαιον τοκιζόμενον :

1. πρὸς 4 °/ₒ φέρει ἐτήσιον τόκον 1200 δραχ ;
2. » 5 °/ₒ » » » 6000 δραχ ;
3. » 3 °/ₒ » εἰς 4 μῆνας » 5000 δραχ ;

Β' Ὁμάς. *Γραπτῶς.* 639) Ποῖον κεφάλαιον τοκιζόμενον πρὸς 8 °/ₒ φέρει εἰς 3 ἔτη 6 μῆν. τόκον 30 240 δραχμάς ;

640) Ποῖον κεφάλαιον τοκιζόμενον πρὸς 9 °/ₒ φέρει εἰς 4 ἔτη 9 μῆν. 10 ἡμ. τόκον 489 000 δραχμάς ;

641) Ἕνας γεωργὸς ἐδανείσθη διὰ τὰς ἀνάγκας του ἕνα ποσὸν χρημάτων πρὸς 12 °/ₒ ἐτησίως. Μετὰ 1 ἔτος καὶ 3 μῆνας ἐπλήρωσε 3000 δραχ. διὰ τόκον. Πόσα χρήματα ἐδανείσθη ;

642) Ἕνας ὑπάλληλος ἔκαμε μίαν ἐνδυμασίαν μὲ πίστωσιν 3 μηνῶν καὶ μὲ τόκον πρὸς 5 °/ₒ Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ἡ τιμὴ τῆς ἐνδυμασίας ηὐξήθη κατὰ 9 375 δραχμάς. Πόσον ἐκόστισεν αὐτὴ ἡ ἐνδυμασία ;

Γ' Ὁμάς. 643) Ἔχει τις καταθέσει δύο κεφάλαια πρὸς 4 °/ₒ. Ἀπὸ τὸ πρῶτον λαμβάνει ἡμερησίως 950 δραχ. Ἀπὸ δὲ τὸ δεύτερον 9 900 δραχ. κατὰ τριμηνίαν. Ποῖα τὰ κατατεθέντα κεφάλαια ;

644) Ἐπώλησέ τις μίαν οἰκίαν καὶ κατέθεσε τὰ $\frac{3}{4}$ τῶν χρημάτων, ποὺ ἔλαβεν, εἰς μίαν Τράπεζαν πρὸς 5 %. Μετὰ 3 ἔτη ἔλαβε τόκον 4 050 000 δραχ. Πόσον ἐπώλησε τὴν οἰκίαν ;

645) Ἔχασέ τις τὰ $\frac{4}{5}$ τῶν χρημάτων του. Τὸ ὑπόλοιπον καταθέτει πρὸς 4,5 % καὶ λαμβάνει ἐτήσιον τόκον 382 200 δραχ. Πόσα χρήματα εἶχεν ;

646) Ἔχει τις καταθέσει εἰς μίαν Τράπεζαν δύο κεφάλαια, ἀπὸ τὰ ὁποῖα λαμβάνει ἐτήσιον τόκον 266 500 δραχ. Τὸ α' κεφάλαιον εἶναι 2 500 000 δραχ. καὶ ἔχει κατατεθῆ πρὸς 4 %, τὸ δὲ ἄλλο ἔχει κατατεθῆ πρὸς 4,5 %. Πόσον ἦτο τὸ β' κεφάλαιον;

3. ΕΥΡΕΣΙΣ ΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ

§ 305. *Πρόβλημα.* **Ἐπὶ πόσον χρόνον πρέπει νὰ τοκίσωμεν 150 000 δραχ. πρὸς 4 % διὰ νὰ λάβωμεν τόκον 18 000 δραχ;**

Κατάταξις:

Αἱ 100 δραχ. εἰς 1 ἔτος φέρουν τόκον 4 δραχ.	Κ = 150 000
» 150 000 » » χ » » » 18 000 »	Ε = 4 %
	Χ = ;
	Τ = 18 000

Λύσις. Ἐπειδὴ ὁ χρόνος εἶναι ἀντίστροφος πρὸς τὸ κεφάλαιον καὶ ἀνάλογος πρὸς τὸν τόκον, θὰ εἶναι :

$$Χ = 1 \text{ ἔτ.} \times \frac{100}{150\,000} \times \frac{18\,000}{4} = \frac{100 \times 18\,000}{150\,000 \times 4} = 3 \text{ ἔτη.}$$

Ὥστε πρέπει νὰ τοκίσωμεν τὰς 150 000 δραχ. ἐπὶ 3 ἔτη.

Συμπέρασμα. Ἀπὸ τὴν λύσιν τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος συνάγομεν ὅτι :

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν χρόνον, πολλαπλασιάζομεν τὸν τόκον ἐπὶ 100 καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ γινομένου τῶν τιμῶν τῶν δύο ἄλλων ποσῶν.

§ 306. **Τύπος τοῦ χρόνου.** Ἀπὸ τὸν ἀνωτέρω κανόνα συνάγομεν ὅτι ὁ τύπος τοῦ χρόνου εἶναι :

$$\boxed{Χ = \frac{Τ \cdot 100}{Κ \cdot Ε}}$$

Ἐφαρμογή. **Ἐπὶ πόσον χρόνον 240 000 δραχμαὶ τοκιζόμεναι πρὸς 6 % φέρουν τόκον 21 600 δραχμάς ;**

K = 240 000
E = 6 °/₀
X = ;
T = 21 600

Ἐὰν εἰς τὸν τύπον $X = \frac{T \cdot 100}{K \cdot E}$ θέσωμεν $T = 21\,600$, $K = 240\,000$, $E = 6$, εὑρίσκομεν:

$$X = \frac{21\,600 \times 100}{240\,000 \times 6} = 1 \text{ ἔτος } 6 \text{ μῆνες.}$$

Ὥστε αἱ 240 000 δραχ. πρέπει νὰ τοκισθοῦν ἐπὶ 1 ἔτος 6 μῆνας.

Ἀσκήσεις

Α' Ὁμάς. *Προφορικῶς.* 647) Ἐπὶ πόσον χρόνον πρέπει νὰ τοκίσωμεν:

1. 40 000 δραχ. πρὸς 4 °/₀, διὰ νὰ λάβωμεν τόκον 3 200 δραχ.
2. 60 000 » » 5 °/₀ » » » 6 000 »

Β' Ὁμάς. *Γραπτῶς.* 648) Ἐπὶ πόσον χρόνον πρέπει νὰ τοκίσωμεν:

1. 190 000 δραχ. πρὸς 5 °/₀, διὰ νὰ λάβωμεν τόκον 28 500 δραχ;
2. 250 400 » » 5 °/₀ » » » » 75 120 δραχ;
3. 900 000 » » 4,5 °/₀ » » » » 128 250 δραχ;

649) Εἰς πόσον χρόνον 360 000 δραχ. τοκιζόμεναι πρὸς 4 °/₀ γίνονται 400 000 δραχ. μὲ τοὺς τόκους των;

650) Ἐπὶ πόσον χρόνον πρέπει νὰ τοκίσωμεν ἕνα κεφάλαιον πρὸς 8 °/₀, διὰ νὰ διπλασιασθῇ;

651) Ἐπὶ πόσον χρόνον πρέπει νὰ τοκισθῇ ἕνα κεφάλαιον πρὸς 12 °/₀, διὰ νὰ φέρῃ τόκον ἴσον μὲ τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ κεφαλαίου;

652) Ἕνας γεωργὸς ἐδανείσθη ἀπὸ τὴν Ἀγροτικὴν Τράπεζαν 850 000 δραχ, διὰ νὰ καλλιεργήσῃ τὰ κτήματά του. Τὸ δάνειον ἔγινε πρὸς 6 °/₀ καὶ ἐξωφλήθη μὲ 884 000 δραχ. Πόσον χρόνον διήρκεσε τὸ δάνειον τοῦτο;

4. ΕΥΡΕΣΙΣ ΤΟΥ ΕΠΙΤΟΚΙΟΥ

§ 307. *Πρόβλημα.* **Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον πρέπει νὰ τοκίσωμεν 480 000 δραχ, διὰ νὰ λάβωμεν 96 000 δραχμὰς τόκον εἰς 4 ἔτη;**

Κατάταξις:

Αἱ 480 000 δραχ. κεφ. εἰς 4 ἔτη φέρουν 96 000 δραχ. τόκον
Αἱ 100 » » » 1 ἔτος » X » »

Λύσις. Ἐπειδὴ ὁ τόκος εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὸ κεφάλαιον καὶ πρὸς τὸν χρόνον, ἔχομεν:

$K = 480\,000$
$E = ;$
$X = 4$ ἔτη
$T = 96\,000$

$$x = 96\,000 \text{ δραχ.} \times \frac{100}{480\,000} \times \frac{1}{4} = \frac{96\,000 \times 100}{480\,000 \times 4} = 5 \text{ δραχ.}$$

Ὥστε τὸ ἐπιτόκιον εἶναι 5 %.

Συμπέρασμα. Ἀπὸ τὴν λύσιν τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος συνάγομεν ὅτι:

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐπιτόκιον, πολλαπλασιάζομεν τὸν τόκον ἐπὶ 100 καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ γινομένου τῶν τιμῶν τῶν δύο ἄλλων ποσῶν.

§ 308. Τύπος τοῦ ἐπιτοκίου. Ἀπὸ τὸν ἀνωτέρω κανόνα συνάγομεν ὅτι ὁ τύπος τοῦ ἐπιτοκίου εἶναι $\boxed{E = \frac{T \cdot 100}{K \cdot X}}$

Εἶναι προφανὲς ὅτι εἰς τὸν ἀνωτέρω τύπον πρέπει νὰ θέτωμεν ἀντὶ τοῦ 100 τὸν 1200, ὅταν ὁ χρόνος ἐκφράζηται εἰς μῆνας καὶ τὸν 36 000, ὅταν ὁ χρόνος ἐκφράζηται εἰς ἡμέρας.

Ἐφαρμογή. **Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον πρέπει νὰ τοκίσωμεν 360 000 δραχ, διὰ νὰ λάβωμεν τόκον 48 000 δραχ. εἰς 1 ἔτος 8 μῆνας ;**

$K = 360\,000$ δρχ.
$E = ;$
$X = 1$ἔτ.8μ.$=20$μ.
$T = 48\,000$

Ἐὰν εἰς τὸν τύπον $E = \frac{T \cdot 1200}{K \cdot X}$ θέσωμεν $T = 48\,000$, $K = 360\,000$, $X = 1$ ἔτ. 8 μῆν.$=20$ μῆν, εὑρίσκομεν $E = \frac{48\,000 \times 1200}{360\,000 \times 20} = 8$ δραχ.

Ὥστε τὸ ἐπιτόκιον εἶναι 8 %.

Ἀσκήσεις

Α΄) Ὁμάς. 653) Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον πρέπει νὰ τοκίσωμεν:

1. 396 000 δρ, διὰ νὰ λάβωμεν εἰς 2 ἔτη 4 μ. 20 ἡμ. τόκ. 42 570 δρ;
2. 537 000 » » » » » 2 » » 42 960 δρ;

654) Ἕνας ἐργάτης ἐδανείσθη 256 000 δραχ. διὰ τὰς ἀνάγκας του. Μετὰ 4 μῆνας ἐπέστρεψε τὰ χρήματα καὶ τὸν τόκον 7 680 δραχ. Πρὸς πόσον % ἔγινε τὸ δάνειον ;

Β΄) Ὁμάς. 655) Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον πρέπει νὰ τοκίσωμεν

184 000 δραχ, διὰ νὰ λάβωμεν μετὰ 4 ἔτη καὶ 6 μῆνας 208 840 δραχ. τόκον καὶ κεφάλαιον ;

656) Ἕνα κεφάλαιον κατατεθειμένον εἰς τὸ Ταμιευτήριον ηὐξήθη μετὰ 15 μῆνας κατὰ τὸ $\frac{1}{16}$ τῆς ἀξίας του. Μὲ ποῖον ἐπιτόκιον εἶχε κατατεθῆ ;

657) Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον πρέπει νὰ τοκισθῆ ἕνα κεφάλαιον διὰ νὰ διπλασιασθῆ μετὰ 20 ἔτη ;

Διάφορα προβλήματα τόκου

658) Κτηματίας ἐπώλησε 3 500 ὀκ. σίτου πρὸς 2 400 δραχ. τὴν ὀκᾶν. Τὰ χρήματα, τὰ ὁποῖα ἔλαβεν ἀπὸ τὴν πώλησιν, ἐδάνεισε πρὸς 8 %. Νὰ εὑρεθῆ πόσον τόκον θὰ λαμβάνῃ κάθε χρόνον ἀπὸ τὰ χρήματα αὐτά.

659) Ποῖον κεφάλαιον πρέπει νὰ καταθέσωμεν εἰς μίαν Τράπεζαν πρὸς 4 %, διὰ νὰ λάβωμεν μετὰ 3 ἔτη τόσον τόκον, ὅσον φέρουν 360 000 δραχ. εἰς 5 ἔτη καὶ 10 μῆνας πρὸς 3 % ;

660) Εἰς πόσον χρόνον κεφάλαιον 750 000 δραχ. τοκιζόμενον πρὸς 4 % φέρει τὸν αὐτὸν τόκον, ποὺ φέρουν 250 000 δραχ. εἰς 1 ἔτος καὶ 8 μῆνας πρὸς 6 %;

661) Ἐτόκισέ τις 250 000 δραχ. πρὸς 5% καὶ 150 000 δραχ. πρὸς 4,5%. Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον ἔπρεπε νὰ τοκίσῃ τὰς 400 000 δραχ, διὰ νὰ λάβῃ ἐτήσιον τόκον ἴσον μὲ τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ τόκου, τὸν ὁποῖον θὰ λάβῃ κατὰ τὴν πρώτην περίπτωσιν ;

662) Ἔμπορος λαμβάνει 157 500 δραχ. ἐτήσιον τόκον ἀπὸ ἕνα κεφάλαιον, τὸ ὁποῖον ἔχει δανείσει πρὸς 6%. Μὲ τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ κεφαλαίου αὐτοῦ ἀγοράζει 131,25 μέτρα ὑφάσματος. Νὰ εὑρεθῆ πόσον ἠγόρασε τὸ μέτρον τοῦ ὑφάσματος.

663) Κτηματίας ἀγοράζει ἕνα κῆπον 1,760 στρεμμάτων πρὸς 135 000 δραχμὰς τὸ στρέμμα. Πληρώνει τὸ ἥμισυ τῆς ἀξίας του τοῖς μετρητοῖς καὶ τὸ ὑπόλοιπον μετὰ 6 μῆνας μὲ τοὺς τόκους πρὸς 4,5 %. Πόσον ἐπλήρωσεν ἐν ὅλῳ ;

664) Γεωργὸς ἐπώλησε 560 ὀκ. σίτου πρὸς 1300 δραχ. τὴν ὀκᾶν. Τὰ χρήματα, ποὺ εἰσέπραξεν, ἐδάνεισε πρὸς 9 % καὶ μετὰ ἕνα ὡρι-

σμένον χρόνον ἔλαβε τόκους καὶ κεφάλαιον 946 400 δραχ. Νὰ εὑρεθῇ πόσον χρόνον ἔμειναν δανεισμένα τὰ χρήματα.

665) Πόσας ὀκάδας σίτου πρέπει νὰ πωλήσῃ γεωργός τις πρὸς 1860 δραχ. τὴν ὀκᾶν, διὰ νὰ λάβῃ ἕνα χρηματικὸν ποσόν, τὸ ὁποῖον κατατιθέμενον εἰς μίαν Τράπεζαν πρὸς 4 °/ₒ νὰ φέρῃ ἐτήσιον τόκον 89 280 δραχμάς ;

666) Ἔχει τις μίαν οἰκίαν ἀξίας 25 000 000 δραχ. Νὰ εὑρεθῇ τί εἶναι προτιμότερον νὰ κάμῃ ὁ ἰδιοκτήτης του : Νὰ τὴν ἐνοικιάσῃ πρὸς 180 000 δραχμὰς τὸν μῆνα ἢ νὰ τὴν πωλήσῃ καὶ νὰ καταθέσῃ τὰ χρήματα εἰς μίαν Τράπεζαν πρὸς 8 °/ₒ ;

667) Ἠγόρασέ τις ἕνα οἰκόπεδον 350 τ.τ. πήχ. πρὸς 17 500 δραχ. τὸν τ.τ.πῆχ. Ἐπὶ τοῦ οἰκοπέδου αὐτοῦ ἔκτισε μίαν οἰκίαν ἀξίας 32 500 000 δραχ. Πόσον πρέπει νὰ ἐνοικιάσῃ τὴν οἰκίαν μηνιαίως, διὰ νὰ εἰσπράττῃ 5 °/ₒ ἐπὶ τοῦ δαπανηθέντος ποσοῦ ;

5. ΧΡΗΣΙΣ ΒΟΗΘΗΤΙΚΟΥ ΠΟΣΟΥ

§ 309. *Πρόβλημα 1ον.* **Ποῖον κεφάλαιον πρέπει νὰ καταθέσωμεν πρὸς 4,5 °/ₒ, διὰ νὰ λάβωμεν μετὰ 3 ἔτη καὶ 4 μῆνας τόκον καὶ κεφάλαιον 1 380 000 δραχ ;**

Κ = ;
Ε = 4,5 °/ₒ
Χ = 40 μῆν.
Τ = ;
Κ+Τ = 1380000

Λύσις. Διὰ νὰ λύσωμεν τὰ προβλήματα τοῦ εἴδους αὐτοῦ πρέπει : 1ον νὰ εὕρωμεν εἰς τί ποσὸν θὰ ἀνέλθῃ κεφάλαιον 100 δραχ. τοκιζόμενον ὑπὸ τοὺς αὐτοὺς ὅρους· καὶ 2ον τῇ βοηθείᾳ τοῦ ἐξαγομένου αὐτοῦ νὰ εὕρωμεν τὸ ζητούμενον ἀρχικὸν κεφάλαιον.

Αἱ 100 δραχ. τοκιζόμεναι πρὸς 4,5 °/ₒ φέρουν εἰς 3 ἔτη καὶ 4 μῆνας ἢ εἰς 40 μῆν. τόκον $\frac{100 \times 4,5 \times 40}{1200} = 15$ δραχ. καὶ ἑπομένως γίνονται μὲ τοὺς τόκους των $100 + 15 = 115$ δραχ.

Ἔπειτα λύομεν τὸ κάτωθι πρόβλημα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν :

Αἱ	115 δραχ.	Τ + Κ	προέρχονται ἀπὸ	100 δραχ.	Κ
Αἱ	1 380 000 »	»	»	» Χ	» »

Ἐπειδὴ τὰ ποσὰ Κεφάλαιον + Τόκος καὶ Κεφάλαιον εἶναι ἀνάλογα, ἔχομεν :

$$χ = 100 \text{ δραχ.} \times \frac{1\,380\,000}{115} = 1\,200\,000 \text{ δραχ.}$$

Ὥστε πρέπει νὰ καταθέσωμεν 1 200 000 δραχμάς.

Σημείωσις. Τὰ κεφάλαια τὰ ἡνωμένα μὲ τοὺς τόκους των δὲν εἶναι ἀνάλογα πρὸς ἕκαστον ἐξ αὐτῶν, παρὰ μόνον, ὅταν οἱ προστιθέμενοι τόκοι ἔχουν ὑπολογισθῆ μὲ τὸ αὐτὸ ἐπιτόκιον καὶ κατὰ τὸν αὐτὸν χρόνον.

Ἀσκήσεις

668) Κατέθεσέ τις ἕνα κεφάλαιον εἰς μίαν Τράπεζαν πρὸς 4 % καὶ μετὰ 8 ἔτη ἔλαβε τόκον καὶ κεφάλαιον 1 056 000 δραχ. Ποῖον κεφάλαιον κατέθεσε καὶ πόσον τόκον ἔλαβε ;

669) Πατὴρ ἀποκτήσας κόρην θέλει νὰ καταθέσῃ εἰς μίαν Τράπεζαν ἕνα ποσόν, τὸ ὁποῖον τοκιζόμενον πρὸς 4 % νὰ ἀνέλθῃ μετὰ τῶν τόκων του εἰς 4 500 000 δραχμάς, ὅταν γίνῃ ἡ κόρη του 20 ἐτῶν. Πόσα πρέπει νὰ καταθέσῃ ;

670) Ἐπώλησέ τις ἕνα οἰκόπεδον 950 τ.μ. καὶ τὰ χρήματα, ποὺ ἔλαβε ἐκ τῆς πλήσεως αὐτοῦ, ἐτόκισε πρὸς 6 %. Μετὰ 2 ἔτη 6 μῆνας ἔλαβε τόκον καὶ κεφάλαιον 10 925 000 δραχ. Πόσον ἐπώλησε τὸ τετρ. μέτρον τοῦ οἰκοπέδου αὐτοῦ ;

§ 310. *Πρόβλημα 2ον.* **Ἐτόκισέ τις τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ κεφαλαίου του πρὸς 5 % καὶ τὸ ὑπόλοιπον πρὸς 4 % καὶ ἔλαβεν ἐτήσιον τόκον 95 000 δραχμάς. Πόσον ἦτο τὸ κεφάλαιόν του ;**

Λύσις. Ἐὰν ἐτόκιζε μὲ τοὺς αὐτοὺς ὅρους 400 δραχμάς, τότε ἀπὸ μὲν τὰ $\frac{3}{4}$ τῶν 400 δραχμῶν, δηλ. ἀπὸ τὰς 300 δραχμάς, θὰ ἐλάμβανε τόκον $\frac{300 \times 5 \times 1}{100} = 15$ δραχμάς, ἀπὸ δὲ τὰς 100 δραχμὰς τόκον 4 δραχμῶν· ἤτοι θὰ ἐλάμβανεν τὸ ὅλον 15 δραχ. + 4 δρχ. = 19 δραχ. τόκον.

Ἔπειτα σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς :

Διὰ νὰ λάβῃ τόκον	19 δραχ.	πρέπει νὰ τοκίσῃ 400 δραχ.
» » » »	95 000	» » » » χ »

Ἐπειδὴ τὰ ποσὰ τόκος καὶ κεφάλαιον εἶναι ἀνάλογα, ἔχομεν :

$$χ = 400 \text{ δραχ.} \times \frac{95\,000}{19} = 2\,000\,000 \text{ δραχ.}$$

Πρὸς 5 °/ₒ ἐτόκισε $2\,000\,000 \times \frac{3}{4} = 1\,500\,000$ δραχμὰς καὶ πρὸς 4 °/ₒ ἐτόκισε 500 000 δραχ.

§ 311. *Πρόβλημα 3ον*. **Ἐτόκισέ τις τὰ $\frac{4}{9}$ τοῦ κεφαλαίου του πρὸς 5 °/ₒ καὶ τὸ ὑπόλοιπον πρὸς 3 °/ₒ. Ἀπὸ τὸ α΄ κεφάλαιον ἔλαβε μετὰ ἕνα ἔτος 54 000 δραχμὰς περισσότερον τόκον παρὰ ἀπὸ τὸ β΄ κεφάλαιον. Ποῖον ἦτο τὸ κεφάλαιον ;**

Λύσις. Ἐὰν τὸ κεφάλαιον ἦτο 900 δραχμαί, τότε ἀπὸ μὲν τὰς 400 δραχμὰς θὰ ἐλάμβανε τόκον $\frac{400 \times 5}{100} = 20$ δραχμάς, ἀπὸ δὲ τὰς 500 δραχμὰς θὰ ἐλάμβανε τόκον $\frac{500 \times 3}{100} = 15$ δραχμάς.

Ἡ διαφορὰ τῶν τόκων τῶν δύο αὐτῶν κεφαλαίων εἶναι

20 δραχ. — 15 δραχ. = 5 δραχ.

Ἔπειτα σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς :

Ὅταν οἱ τόκοι διαφέρουν κατὰ 5 δραχ. τὸ κεφ. εἶναι 900 δραχ.

» » » » » 54 000 » » » » χ »

Ἐπειδὴ τὰ ποσὰ τόκος καὶ κεφάλαιον εἶναι ἀνάλογα, ἔχομεν :

$$\chi = 900 \text{ δραχ.} \times \frac{54\,000}{5} = 9\,720\,000 \text{ δραχ.}$$

Τὸ τοκισθὲν κεφάλαιον ἦτο 9 720 000 δραχμαί.

Ἀσκήσεις

671) Ἐτόκισέ τις τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ κεφαλαίου του πρὸς 5 °/ₒ, τὰ $\frac{2}{5}$ αὐτοῦ πρὸς 4,5 °/ₒ καὶ τὸ ὑπόλοιπον πρὸς 4°/ₒ. Μετὰ 2 ἔτη ἔλαβε τόκους ἐκ τῶν τριῶν μερῶν 408 000 δραχ. Νὰ εὑρεθῇ πόσον ἦτο τὸ κεφάλαιον καὶ πόσον κατέθεσε πρὸς ἕκαστον ἐπιτόκιον.

672) Ἐτόκισέ τις τὰ $\frac{3}{4}$ ἑνὸς κεφαλαίου πρὸς 5 °/ₒ τὸ δὲ ὑπόλοιπον πρὸς 4,5°/ₒ. Ἐὰν ἐτόκιζεν ὅλον τὸ κεφάλαιον πρὸς 5°/ₒ, θὰ ἐλάμβανεν ἐτήσιον τόκον 52 000 δραχμὰς περισσότερον. Πόσον ἦτο τὸ τοκισθὲν κεφάλαιον ;

673) Τὰ $\frac{5}{7}$ ἑνὸς κεφαλαίου τοκιζόμενα πρὸς 3 °/ₒ δίδουν ἐτησίως 42 000 δραχμὰς τόκον περισσότερον ἀπὸ ὅσον δίδει τὸ ὑπόλοιπον τοκιζόμενον πρὸς 4 °/ₒ. Ποῖον ἦτο τὸ κεφάλαιον ;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ΄

ΥΦΑΙΡΕΣΙΣ

1. ΟΡΙΣΜΟΙ

§ 312. Γραμμάτιον. Εἰς τὸ ἐμπόριον χονδρικῆς πωλήσεως τὰ ἐμπορεύματα δὲν πληρώνονται συνήθως τοῖς μετρητοῖς. Ὁ πωλητὴς δίδει γενικῶς εἰς τὸν ἀγοραστὴν μίαν μικρὰν ἀναβολὴν ἀπὸ 1 μέχρις 6 μηνῶν περίπου πρὸς ἐξόφλησιν τοῦ χρέους του. Τὸ ἀκόλουθον παράδειγμα θὰ μᾶς δείξῃ πῶς ἐνεργοῦνται συνήθως αἱ πράξεις αὐταί.

Παράδειγμα. Ὁ κ. Α. Δημητρίου ἔμπορος χονδρικῆς πωλήσεως πωλεῖ τὴν 15 Σεπτεμβρίου εἰς τὸν Β. Γεωργίου ἔμπορον Τριπόλεως ἐμπορεύματα ἀξίας 3 500 000 δραχ. μὲ τὴν συμφωνίαν νὰ πληρώσῃ τὴν ἀξίαν των (χωρὶς ἄλλην ἐπιβάρυνσιν) μετὰ 3 μῆνας. Ὁ κ. Δημητρίου ζητεῖ καὶ λαμβάνει ἀπὸ τὸν κ. Γεωργίου μίαν **ἔγγραφον ὑπόσχεσιν** ὅτι ὑποχρεοῦται νὰ πληρώσῃ τὴν 15ην Δεκεμβρίου τὰς 3 500 000 δραχ. Ἡ ἔγγραφος αὐτὴ ὑπόσχεσις ὀνομάζεται **γραμμάτιον εἰς διαταγὴν** ἢ ἁπλῶς **γραμμάτιον.**

Ὁ συνήθης τύπος τοῦ γραμματίου εἶναι ὁ κάτωθι:

> Ἐν Ἀθήναις τῇ 15 Ἰουνίου 1956. Διὰ δραχ. 3 500 000
> Τὴν 15ην Δεκεμβρίου ἐ.ἔ. ὑπόσχομαι νὰ πληρώσω εἰς τὸν κ. Α. Δημητρίου ἢ εἰς διαταγὴν αὐτοῦ τὸ ἄνω ποσὸν τῶν τριῶν ἑκατομμυρίων πεντακοσίων χιλιάδων δραχμῶν, ἀξίαν ληφθεῖσαν εἰς ἐμπορεύματα.
> Χαρτόσημον — Β. Γεωργίου ὁδὸς..........

Ὁ κ. Α. Δημητρίου δύναται νὰ ζητήσῃ ἀπὸ τὸν ὀφειλέτην του Β. Γεωργίου νὰ ὑπογράψῃ ἀντὶ γραμματίου μίαν **συναλλαγματικήν.**

Ἡ συναλλαγματικὴ εἶναι ἕνα ἔγγραφον, διὰ τοῦ ὁποίου ὁ δανείζων χρήματα ἢ δίδων ἐμπορεύματα ἐπὶ πιστώσει διατάσσει τὸν ὀφειλέτην του νὰ πληρώσῃ εἰς τρίτον πρόσωπον τὸ εἰς τὸ ἔγγραφον αὐτὸ ἀναφερόμενον χρηματικὸν ποσὸν καὶ εἰς ὡρισμένον χρόνον.

Ἡ συναλλαγματικὴ συντάσσεται ὑπὸ τοῦ δανειστοῦ τῇ συγκαταθέσει τοῦ ὀφειλέτου καὶ ὑπογράφεται ὑπὸ τοῦ ὀφειλέτου.

Ὁ τύπος τῆς συναλλαγματικῆς εἶναι :

Ἐν Ἀθήναις τῇ 15 Ἰουνίου 1955. Διὰ δρχ. 3 500 000 Τὴν 15ην Δεκεμβρίου ἐ.ἔ. πληρώσατε διὰ τῆς παρούσης συναλλαγματικῆς τῇ διαταγῇ ἐμοῦ τοῦ ἰδίου εἰς .... τὸ ποσὸν τῶν τριῶν ἑκατομμυρίων πεντακοσίων χιλιάδων δραχμῶν, ἀξίαν ληφθεῖσαν εἰς ἐμπορεύματα. Α. Δημητρίου Πρὸς τὸν κ. Β. Γεωργίου ὁδὸς................ Δεκτὴ Εἰς Τρίπολιν Β. Γεωργίου ὁδὸς............

Ὁ κ. Δημητρίου δύναται τότε τὸ γραμμάτιον εἰς διαταγὴν ἢ τὴν συναλλαγματικὴν νὰ χρησιμοποιήσῃ ὡς χαρτονόμισμα, διὰ νὰ πληρώσῃ τὰς ἰδικάς του ὑποχρεώσεις. Τὴν 1ην Δεκεμβρίου ἐκεῖνος, ὁ ὁποῖος κατέχει αὐτὸ τὸ ἔγγραφον, θὰ τὸ παρουσιάσῃ εἰς τὸν κ. Γεωργίου, ἀπὸ τὸν ὁποῖον θὰ λάβῃ τὰς 3 500 000 δραχμάς.

Σημείωσις. Κατὰ τὴν ὁριζομένην προθεσμίαν ὁ ὀφειλέτης ὑποχρεοῦται ὄχι μόνον νὰ ἐπιστρέψῃ τὸ ληφθὲν ποσόν, ἀλλὰ καὶ νὰ πληρώσῃ καὶ τὸν τόκον τῶν χρημάτων, τὰ ὁποῖα ἔλαβεν ὡς δάνειον. Διὰ τοῦτο εἰς τὸ γραμμάτιον ἀναφέρεται ὄχι τὸ ποσόν, τὸ ὁποῖον ἔλαβεν ὡς δάνειον, ἀλλὰ ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ πληρώσῃ (δηλ. δάνειον καὶ τόκον).

§ 313. Ὑφαίρεσις. Ὁ κ. Δημητρίου ἀντὶ νὰ παραχωρήσῃ τὸ γραμμάτιον ἢ τὴν συναλλαγματικὴν εἰς ἕνα τῶν δανειστῶν του, δύναται νὰ πωλήσῃ αὐτὸ εἰς μίαν Τράπεζαν πρὸ τῆς 15ης Δεκεμβρίου. Πρὸς τοῦτο ὑπογράφει ὄπισθεν τοῦ ἐγγράφου αὐτοῦ (ὀπισθογράφησις) καὶ οὕτω μεταβιβάζει τὰ δικαιώματά του εἰς τὴν Τράπεζαν. Ἡ πρᾶξις αὐτὴ λέγεται **προεξόφλησις** τοῦ γραμματίου.

Ἡ Τράπεζα, ἡ ὁποία θὰ ἀναλάβῃ νὰ προεξοφλήσῃ τὸ γραμμάτιον, δὲν θὰ δώσῃ εἰς τὸν κ. Δημητρίου τὸ ποσὸν τῶν 3 500 000 δραχ, ποὺ ἀναγράφει τὸ γραμμάτιον, ἀλλὰ θὰ κρατήσῃ ἐξ αὐτοῦ ἕνα ποσὸν ἴσον πρὸς τὸν τόκον τῶν 3 500 000 δραχ. εἰς 3 μῆνας π.χ. πρὸς συμπεφωνημένον ἐπιτόκιον, ἔστω 12 %. Ὑπολογίζοντες τὸν τόκον τῶν 3 500 000 δραχ. εἰς 3 μῆνας πρὸς 12%, εὑρίσκομεν ὅτι ἡ Τράπεζα θὰ κρατήσῃ 10 500 δραχ. καὶ θὰ δώσῃ:

3 500 000 δραχ. − 10 500 δραχ. = 3 489 500 δραχ.

Τὸ ποσόν, τὸ ὁποῖον ἀναγράφεται εἰς τὸ γραμμάτιον (3 500 000 δραχ.), εἶναι ἡ **ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου** (Ο. Α.).

Τὸ ποσόν, τὸ ὁποῖον δίδει ἡ Τράπεζα (3 489 500 δραχ.), εἶναι **παροῦσα ἢ πραγματικὴ ἀξία** (Π) τοῦ γραμματίου, τὸ δὲ ποσόν, τὸ ὁποῖον κρατεῖ ἡ Τράπεζα (10 500 δραχ.), εἶναι ἡ **ὑφαίρεσις** (Υ). Ἡ ἡμέρα, κατὰ τὴν ὁποίαν εἶναι πληρωτέον τὸ γραμμάτιον, εἶναι ἡ **λῆξις** τοῦ γραμματίου.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι:

Ὑφαίρεσις εἶναι ἡ ἔκπτωσις, τὴν ὁποίαν ὑφίσταται ἕνα χρέος, ὅταν τοῦτο πληρώνηται πρὸ τῆς λήξεώς του.

§ 314. Εἴδη ὑφαιρέσεων. Ἐπειδὴ δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν ὑφαίρεσιν ἑνὸς γραμματίου ἐπὶ τῆς ὀνομαστικῆς ἀξίας του ἢ ἐπὶ τῆς πραγματικῆς ἀξίας του, διὰ τοῦτο διακρίνομεν δύο εἴδη ὑφαιρέσεως: τὴν **ἐξωτερικὴν** καὶ τὴν **ἐσωτερικήν**.

2. ΕΞΩΤΕΡΙΚΗ ΥΦΑΙΡΕΣΙΣ

§ 315. Ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις. Ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις ἢ ἐμπορικὴ ὑφαίρεσις εἶναι ὁ τόκος τῆς ὀνομαστικῆς ἀξίας ἑνὸς γραμματίου εἰς χρόνον λογιζόμενον ἀπὸ τῆς ἡμέρας τῆς προεξοφλήσεως μέχρι τῆς ἡμέρας τῆς λήξεως τοῦ γραμματίου.

Τὸ ἐπιτόκιον, βάσει τοῦ ὁποίου γίνεται ἡ προεξόφλησις, ὁρίζεται δι' ἰδιαιτέρας συμφωνίας μεταξὺ τοῦ παραδίδοντος καὶ προεξοφλοῦντος τὸ γραμμάτιον.

Αἱ μεγάλαι Τράπεζαι κάμνουν τὰς προεξοφλήσεις μὲ τὸ νόμιμον προεξοφλητικὸν ἐπιτόκιον. Τοῦτο εἶναι 12 °/₀ διὰ τὴν Τράπεζαν τῆς Ἑλλάδος καὶ διὰ τὰς ἄλλας Τραπέζας.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι τὰ προβλήματα τῆς ἐξωτερικῆς ὑφαιρέσεως ἀνάγονται εἰς τὰ προβλήματα τοῦ τόκου.

§ 316. Εὕρεσις ἐξωτερικῆς ὑφαιρέσεως. *Πρόβλημα.* **Γραμμάτιον 360 000 δραχ. προεξοφλεῖται 5 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 9 °/₀. Πόση εἶναι ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις καὶ πόση ἡ πραγματικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου ;**

Ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις	
Κ=Ὀν.ἀξ.	=360 000
Ε	=9 °/₀
Χ	=5 μῆν.
Τ=ἐξ. ὑφ.= ;	
Κ—Τ=Π.Α= ;	

Λύσις. Ἡ ζητουμένη ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις εἶναι ὁ τόκος τῶν 360 000 δραχ. εἰς 5 μῆνας πρὸς 9 °/₀, ἤτοι :

$$\text{Ἐξωτ. ὑφ.} = \text{Τ} = \frac{360\,000 \times 5 \times 9}{1200} = 13\,500 \text{ δραχ.}$$

Ἡ πραγματικὴ ἀξία = ὀνομαστ. ἀξία — ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις = 360 000 — 13 500 = 346 500 δραχμαί.

§ 317. Εὕρεσις τῆς ὀνομαστικῆς ἀξίας. *Πρόβλημα 1ον.* **Ποία ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου, τὸ ὁποῖον προεξοφληθὲν τρεῖς μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 6 °/₀, εἶχεν ἐξωτερικὴν ὑφαίρεσιν 36 000 δραχμάς,**

Ἐπειδὴ $\text{Ὀν. ἀξ.} = \text{Κ} = \dfrac{\text{Τ} \cdot 1200}{\text{Ε} . \text{Χ}}$ ἔχομεν :

$$\text{Ὀνομ. ἀξ.} = \frac{36\,000 \times 1\,200}{6 \times 3} = 2\,400\,000 \text{ δραχμαί.}$$

Ὥστε ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου εἶναι 2 400 000 δραχ.

Πρόβλημα 2ον. **Ἕνα γραμματιον προεξωφλήθη 75 ἡμέρας πρὸ τῆς λήξεως πρὸς 12 °/₀ ἀντὶ 1 755 000 δραχ. Ποία ἦτο ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου ;**

Ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις	
Κ=ὀν. ἀξ.= ;	
Ε	=12 °/₀
Χ	=75 ἡμ.
Τ= ἐξ. ὑφ.=	
Κ–Τ=Π.Α=1755000	

Λύσις. Εὑρίσκομεν πρῶτον τὴν ἐξωτ. ὑφαίρεσιν γραμματίου ὀνομ. ἀξίας 100 δραχ. εἰς 75ἡμ. πρὸς 12 °/₀.

Ἐπειδὴ $\text{ἐξ. ὑφ.} = \text{Τ} = \dfrac{\text{Κ} \cdot \text{Ε} \cdot \text{Χ}}{36\,000}$, ἔχομεν :

$$\text{ἐξωτερ. ὑφαίρ.} = \frac{100 \times 12 \times 75}{36\,000} = 2{,}5 \text{ δραχ.}$$

Οὕτω γραμμάτιον 100 δραχ. ὀνομ. ἀξίας προεξοφλούμενον 75 ἡμέρας πρὸ τῆς λήξεώς του ἔχει ὑφαίρεσιν 2,5 δραχμῶν καὶ ἐπομένως πραγματικὴν ἀξίαν 100 δρσχ. $-2{,}5$ δραχ. $=$ 97,5 δραχ. Ἔπειτα ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς :

Αἱ	97,5 δραχ. πραγμ. ἀξ. προέρχ. ἀπὸ γραμμ.	100 δραχ. ὀν. ἀξ.
»	1 755 000 » » » » » »	x » » »

Ἐπειδὴ τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα, θὰ εἶναι :

$$x = 100 \text{ δραχ.} \times \frac{1\,755\,000}{97{,}5} = 1\,800\,000 \text{ δραχ.}$$

Ὥστε ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου ἦτο 1 800 000 δραχ.

§ 318. Εὕρεσις τοῦ ἐπιτοκίου. *Πρόβλημα.* **Ἐπὶ ἑνὸς γραμματίου 1 200 000 δραχμῶν, πληρωτέου μετὰ 5 μῆνας, μία Τράπεζα ἐκράτησε 45 000 δραχμὰς ὡς ἐξωτερικὴν ὑφαίρεσιν. Νὰ εὑρεθῇ πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον ἔγινεν ἡ προεξόφλησις.**

Ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις	
Κ=ὀν.ἀξ	=1 200 000
Ε	= ;
Χ	= 5 μῆν.
Τ=ἐξ. ὑφ.	=45 000

Λύσις. Τὸ πρόβλημα αὐτὸ ἀνάγεται εἰς τὴν περίπτωσιν ἐκείνην, κατὰ τὴν ὁποίαν ζητοῦμεν πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον πρέπει νὰ τοκίσωμεν 1 200 000 δραχ. διὰ νὰ λάβωμεν μετὰ 5 μῆνας 45 000 δραχ, τόκον.

Ἐπειδὴ $E = \frac{T \cdot 1200}{K \cdot X}$, ἕπεται ὅτι $E = \frac{45\,000 \times 1\,200}{1\,200\,000 \times 5} = 9\,\%$.

Ὥστε ἡ προεξόφλησις ἔγινε πρὸς 9 %.

§ 319. Εὕρεσις τοῦ χρόνου τῆς λήξεως. *Πρόβλημα.* **Γραμμάτιον 16 000 δραχ. προεξοφληθὲν πρὸς 9 % εἶχεν ἐξωτερικὴν ὑφαίρεσιν 480 δραχ. Πρὸ πόσου χρόνου ἔγινεν ἡ προεξόφλησις;**

Λύσις. Τὸ πρόβλημα αὐτὸ ἀνάγεται εἰς τὴν περίπτωσιν ἐκείνην, κατὰ τὴν ὁποίαν ζητοῦμεν τὸν χρόνον, κατὰ τὸν ὁποῖον ἕνα κεφάλαιον 16 000 δραχ. τοκιζόμενον πρὸς 9 % δίδει τόκον 480 δραχ.

Ἐπειδὴ $X = \frac{T \cdot 100}{K.E}$, θὰ εἶναι $X = \frac{480 \times 100}{16\,000 \times 9} = \frac{1}{3}$ ἔτ. $= 4$ μῆνας.

Ὥστε ἡ προεξόφλησις ἔγινε πρὸ 4 μηνῶν.

Ἀσκήσεις

674) Γραμμάτιον 240 000 δραχμῶν προεξοφλεῖται 3 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 9 %. Πόση εἶναι ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις καὶ πόση ἡ παροῦσα ἀξία τοῦ γραμματίου ;

675) Ἕνα γραμμάτιον ἦτο πληρωτέον τὴν 10ην Αὐγούστου καὶ προεξωφλήθη τὴν 20ὴν Ἰουνίου πρὸς 6°/₀. Ποία ἦτο ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου, ἐὰν ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις ἦτο 15 000 δραχ ;

676) Γραμμάτιον προεξωφλήθη 3 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του ἀντὶ 175 950 δραχ. πρὸς 9°/₀. Ποία ἦτο ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου ;

677) Γραμμάτιον 1 720 000 δραχ. προεξωφλήθη 36 ἡμέρας πρὸ τῆς λήξεώς του μὲ ἐξωτερικὴν ὑφαίρεσιν 13 760 δραχ. Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον ἔγινεν ἡ προεξόφλησις ;

678) Γραμμάτιον 240 000 δραχ. προεξωφλήθη 5 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του ἀντὶ 230 000 δραχ. Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον ἔγινεν ἡ προεξόφλησις ;

679) Γραμμάτιον 180 000 δραχ. προεξοφληθὲν πρὸς 6°/₀ εἶχεν ἐξωτερικὴν ὑφαίρεσιν 27 000 δραχ. Πρὸ πόσου χρόνου ἔγινεν ἡ προεξόφλησις ;

680) Γραμμάτιον 120 000 δραχ. προεξωφλήθη πρὸς 5°/₀ ἀντὶ 118 650 δραχ. Ἐὰν ἡ προεξόφλησις ἔγινε τὴν 1ην Αὐγούστου, πότε ἔληγε τὸ γραμμάτιον ;

681) Ἕνας ἔμπορος εἶχεν εἰς διαταγήν του ἕνα γραμμάτιον, τὸ ὁποῖον ἔληγε τὴν 20ὴν Μαρτίου 1949. Τὴν 20ὴν Ἰανουαρίου 1949 τὸ μετεβίβασεν εἰς τὴν Τράπεζαν τῆς Ἑλλάδος ἀντὶ 735 000 δραχμῶν. Ὑπελογίσθη δὲ ἡ ὑφαίρεσις αὐτοῦ πρὸς 12°/₀. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία αὐτοῦ τοῦ γραμματίου.

3. ΕΣΩΤΕΡΙΚΗ ΥΦΑΙΡΕΣΙΣ

§ 320. Ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις. Οἱ προεξοφλοῦντες γραμμάτια μὲ ἐξωτερικὴν ὑφαίρεσιν ὑπολογίζουν τὴν ὑφαίρεσιν (τόκον), τὴν ὁποίαν θὰ κρατήσουν ἐπὶ τῆς ὀνομαστικῆς ἀξίας τοῦ γραμματίου καὶ οὐχὶ ἐπὶ τοῦ ποσοῦ, τὸ ὁποῖον διαθέτουν πρὸς ἐξόφλησιν τοῦ γραμματίου, δηλ. ἐπὶ τῆς πραγματικῆς ἀξίας αὐτοῦ. Διὰ τοῦτο ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἄδικος.

Διὰ νὰ μὴ συμβαίνῃ αὐτὴ ἡ ἀδικία, πρέπει ἡ Τράπεζα νὰ κερδίζῃ τὸν τόκον μόνον τῶν χρημάτων, τὰ ὁποῖα δίδει διὰ νὰ ἀγοράσῃ τὸ γραμμάτιον. Αὐτὸς ὁ τόκος λέγεται **ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις.** Ὥστε :

Ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις εἶναι ὁ τόκος τῆς πραγματικῆς

ἀξίας τοῦ γραμματίου εἰς ὡρισμένον χρόνον λογιζόμενον ἀπὸ τῆς ἡμέρας τῆς προεξοφλήσεως μέχρι τῆς ἡμέρας τῆς λήξεως τοῦ γραμματίου πρὸς ὡρισμένον ἐπιτόκιον.

Κατὰ ταῦτα ἡ πραγματικὴ ἀξία ἑνὸς γραμματίου προεξοφληθέντος μὲ ἐσωτερικὴν ὑφαίρεσιν εἶναι ἡ ἀξία, ἡ ὁποία αὐξανομένη κατὰ τὸν τόκον, τὸν ὁποῖον αὕτη θὰ ἔδιδε μέχρι τῆς ἡμέρας τῆς λήξεως τοῦ γραμματίου πρὸς ὡρισμένον ἐπιτόκιον, θὰ ἰσοῦτο μὲ τὴν ὀνομαστικὴν ἀξίαν. Ἤτοι εἶναι:

Ὀνομαστικὴ ἀξία = πραγματικὴ ἀξία + ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις

§ 321. Εὕρεσις τῆς ἐσωτερικῆς ὑφαιρέσεως. *Πρόβλημα 1ον.* **Γραμμάτιον προεξοφλεῖται 5 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 12°/₀ ἀντὶ 170 000 δραχμῶν. Ποία εἶναι ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις καὶ ποία ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία του;**

Λύσις. Ἡ ζητουμένη ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις εἶναι ὁ τόκος τῆς πραγματικῆς ἀξίας 170 000 δραχ. εἰς 5 μῆνας πρὸς 12°/₀.

Ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις	
Κ = πρ.ἀξ. =	170 000
Ε =	12 °/₀
Χ =	5 μῆν.
Τ = ἐσ.ὑφ. =	;
Κ+Τ = ὀν.ἀξ. =	;

Ἐπειδὴ ἐσ. ὑφ. $= \mathrm{T} = \dfrac{\mathrm{K \cdot E \cdot X}}{1200}$, ἔχομεν:

$$\text{ἐσωτ. ὑφ.} = \frac{170\,000 \times 12 \times 5}{1200} = 8\,500 \text{ δραχ.}$$

Ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου εἶναι 170 000 + 8 500 = 178 500 δραχμαί.

Πρόβλημα 2ον. **Γραμμάτιον 247 200 δραχμῶν προεξοφλεῖται 4 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 9 °/₀. Ποία εἶναι ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσίς του καὶ ποία ἡ πραγματικὴ ἀξία του;**

Λύσις. Εὑρίσκομεν πρῶτον τὴν ἐσωτερικὴν ὑφαίρεσιν γραμματίου πραγματικῆς ἀξίας 100 δραχμῶν πρὸς 9 °/₀ εἰς 4 μῆνας.

Ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις	
Κ = πρ.ἀξ. =	;
Ε =	9 °/₀
Χ =	4 μῆν.
Τ = ἐσ.ὑφ. =	;
Κ+Τ = ὀν.ἀξ. =	247 200

Ἐπειδὴ ἐσ. ὑφ. $= \mathrm{T} = \dfrac{\mathrm{K \cdot E \cdot X}}{1200}$, θὰ εἶναι:

$$\text{ἐσ. ὑφ.} = \frac{100 \times 9 \times 4}{1200} = 3 \text{ δραχ.}$$

Οὕτω γραμμάτιον πραγματικῆς ἀξίας 100 δραχ. ἔχει ἐσωτερικὴν ὑφαίρεσιν 3 δραχ. καὶ ἑπομένως ὀνομαστικὴν ἀξίαν

100 δραχ. + 3 δρχ. = 103 δραχ.

Ἔπειτα σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς:

Ἂν τὸ γρ. εἶχεν ὀν. ἀξ.	103 δρ.	θὰ εἶχεν ἐσωτερ. ὑφ.	3 δραχ.
» » » » » »	247 200	» » » » »	χ »

Ἐπειδὴ τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα, θὰ εἶναι :

$$\chi = 3 \text{ δραχ.} \times \frac{247\,200}{103} = 7\,200 \text{ δραχμαί.}$$

Ὥστε ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις τοῦ γραμματίου εἶναι 7200 δραχ. Ἑπομένως ἡ πραγματικὴ ἀξία του θὰ εἶναι :

$$247\,200 \text{ δραχ.} - 7\,200 \text{ δραχ.} = 240\,000 \text{ δραχ.}$$

Συμπέρασμα : Ἀπὸ αὐτὸ τὸ πρόβλημα βλέπομεν ὅτι διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ἐσωτερικὴν ὑφαίρεσιν ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς :

Εὑρίσκομεν πρῶτον τὸν τόκον τῶν 100 δραχ. ἀπὸ τὴν ἡμέραν τῆς προεξοφλήσεως, ἕως τὴν ἡμέραν τῆς λήξεως. Μὲ τὸν τόκον τοῦτον πολλαπλασιάζομεν τὴν ὀνομαστικὴν ἀξίαν, τὸ δὲ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ ἀθροίσματος τοῦ 100 καὶ τοῦ τόκου τῶν 100 δραχμῶν, τὸν ὁποῖον εὕρομεν.

§ 322. Εὕρεσις τοῦ χρόνου τῆς λήξεως. *Πρόβλημα.* **Γραμμάτιον 498 000 δραχ. προεξοφλεῖται μὲ ἐσωτερικὴν ὑφαίρεσιν πρὸς 9 % ἀντὶ 480 000 δραχ. Πρὸ πόσου χρόνου πρὸ τῆς λήξεώς του ἔγινεν ἡ προεξόφλησις ;**

Λύσις. Τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὴν περίπτωσιν ἐκείνην, κατὰ τὴν ὁποίαν ζητοῦμεν εἰς πόσον χρόνον κεφάλαιον 480 000 δραχ. (πραγματικὴ ἀξία) τοκιζόμενον πρὸς 9 % φέρει τόκον 498 000 δραχ.—480 000 δραχ.=18 000 δραχ. (ἐσωτερικὴν ὑφαίρεσιν).

Ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις	
Κ=	πρ.ἀξ.=480 000
Ε=	=9 %
Χ=	;
Τ=	;
Κ+Τ=ὀν.ἀξ.	=498 000

Ἐπειδὴ $X = \frac{T \cdot 100}{K \cdot E}$, θὰ εἶναι :

$$X = \frac{18\,000 \times 100}{480\,000 \times 9} = \frac{5}{12} \text{ ἔτους} = 5 \text{ μῆνες.}$$

Ὥστε ἡ προεξόφλησις ἔγινε πρὸ 5 μηνῶν.

§ 323. Εὕρεσις τοῦ ἐπιτοκίου. *Πρόβλημα.* **Γραμμάτιον 364 000 δραχμῶν, τὸ ὁποῖον ἔληγε τὴν 15ην Μαΐου ἐ.ἔ, προεξωφλήθη μὲ ἐσωτερικὴν ὑφαίρεσιν τὴν 15ην Ἰανουαρίου τοῦ ἰδίου ἔτους ἀντὶ 350 000 δραχμῶν. Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον ἔγινεν ἡ προεξόφλησις ;**

Λύσις. Τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὴν περίπτωσιν ἐκείνην, κατὰ τὴν ὁποίαν ζητεῖται, πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον πρέπει νὰ τοκίσωμεν 350 000 δραχ. (πραγματικὴ ἀξία), διὰ νὰ λάβωμεν τόκον (ἐσωτερικὴν ὑφαίρεσιν) 364 000 δρχ. — 350 000 δρχ. = 14 000 δρχ. εἰς 4 μῆν. (ἀπὸ 15 Ἰανουαρ. μέχρι 15 Μαΐου).

Ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις	
K = πρ.ἀξ.	= 350 000
E =	= ;
X	= 4 μῆν.
T = ἐσ. ὑφ.	= ;
K+T = ὀν.ἀξ.	= 364 000

Ἐπειδὴ $E = \frac{T \cdot 1\,200}{K \cdot X}$, θὰ εἶναι:

$$E = \frac{14\,000 \times 1200}{350\,000 \times 4} = 12\,^0/_0.$$

Ὥστε ἡ προεξόφλησις ἔγινε πρὸς $12\,^0/_0$.

Ἀσκήσεις

682) Γραμμάτιον προεξοφλεῖται 3 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς $9\,^0/_0$ ἀντὶ 1 240 000 δραχμῶν. Πόση εἶναι ἡ ἐσωτερ. ὑφαίρεσις καὶ πόση ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία του;

683) Γραμμάτιον πληρωτέον τὴν 15ην Ἰουλίου προεξωφλήθη τὴν 20ὴν Ἀπριλίου τοῦ αὐτοῦ ἔτους πρὸς $12\,^0/_0$ ἀντὶ 480 000 δραχμῶν. Πόση ἦτο ἡ ἐσωτερ. ὑφαίρεσις καὶ πόση ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία του;

684) Γραμμάτιον 494 400 δραχμῶν προεξοφλεῖται ἐσωτερικῶς πρὸς $9\,^0/_0$ ἀντὶ 480 000 δραχμῶν. Πρὸ πόσου χρόνου πρὸ τῆς λήξεώς του ἔγινεν ἡ προεξόφλησις;

685) Γραμμάτιον 1 218 000 δραχμῶν πληρωτέον τὴν 20ὴν Αὐγούστου προεξωφλήθη ἐσωτερικῶς ἀντὶ 1 200 000 δραχμῶν πρὸς $6\,^0/_0$. Πότε ἔγινεν ἡ προεξόφλησις;

686) Γραμμάτιον 373 500 δραχμῶν προεξωφλήθη ἐσωτερικῶς 3 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του ἀντὶ 360 000 δραχμῶν. Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον ἔγινεν ἡ προεξόφλησις;

§ 324. Κοινὴ λῆξις γραμματίων. Ἐνίοτε ὀφείλει τις εἰς τὸ αὐτὸ πρόσωπον δύο ἢ περισσότερα γραμμάτια, τὰ ὁποῖα λήγουν εἰς διαφόρους χρόνους καὶ θέλει πρὸς εὐκολίαν του νὰ ἀντικαταστήσῃ αὐτὰ μὲ ἕνα μόνον γραμμάτιον καὶ τοιοῦτον, ὥστε ἡ παροῦσα ἀξία τοῦ νέου γραμματίου νὰ εἶναι ἴση μὲ τὴν παροῦσαν ἀξίαν τῶν γραμματίων, ποὺ θέλει νὰ ἀντικαταστήσῃ. Ἡ τοιαύτη ἀντικατάστασις λέγεται **κοινὴ λῆξις** τῶν γραμματίων.

Εἰς τὴν κοινὴν λῆξιν τῶν γραμματίων διακρίνομεν δύο εἴδη προβλημάτων :

1ον. Τὰ προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα δίδεται ὁ χρόνος τῆς λήξεως τοῦ νέου γραμματίου καὶ ζητεῖται ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία αὐτοῦ.

2ον. Τὰ προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα δίδεται ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ νέου γραμματίου καὶ ζητεῖται ὁ χρόνος τῆς λήξεως αὐτοῦ.

§ 325. *Πρόβλημα 1ον*. **Ἕνας ἔμπορος ὀφείλει εἰς τὸ αὐτὸ πρόσωπον δύο γραμμάτια, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ ἕνα ἐκ δραχμῶν 360 000 λήγει μετὰ 45 ἡμέρας, τὸ δὲ ἄλλο ἐκ δραχμῶν 475 000 λήγει μετὰ 4 μῆνας. Θέλει δὲ νὰ ἀντικαταστήσῃ αὐτὰ μὲ ἕνα μόνον νέον γραμμάτιον, τὸ ὁποῖον νὰ λήγῃ μετὰ 50 ἡμέρας. Πόση θὰ εἶναι ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ νέου αὐτοῦ γραμματίου, ἐὰν τὸ ἐπιτόκιον εἶναι 6 %;**

Λύσις. Ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις τοῦ πρώτου γραμματίου εἶναι:

$$\frac{360\,000 \times 45 \times 6}{36\,000} = 2\,700 \text{ δραχ.}$$

Ἄρα ἡ παροῦσα ἀξία του εἶναι 360 000 − 2 700 = 357 300 δραχ.

Ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις τοῦ δευτέρου γραμματίου εἶναι :

$$\frac{475\,000 \times 4 \times 6}{1\,200} = 9\,500 \text{ δραχ.}$$

Ἄρα ἡ παροῦσα ἀξία του εἶναι 475 000 − 9 500 = 465 500 δραχ.

Ἡ παροῦσα ἀξία καὶ τῶν δύο μαζὶ γραμματίων εἶναι :

$$357\,300 + 465\,500 = 822\,800 \text{ δραχ.}$$

Ἡ παροῦσα λοιπὸν ἀξία τοῦ νέου γραμματίου πρέπει νὰ εἶναι 822 800 δραχ. Τώρα ἔχομεν νὰ λύσωμεν τὸ κάτωθι πρόβλημα :

Ποία εἶναι ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία γραμματίου, τὸ ὁποῖον προεξοφλεῖται 50 ἡμέρας πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 6 % ἀντὶ 822 800 δραχ.

Λύοντες τὸ πρόβλημα αὐτό, ὅπως ἐλύσαμεν τὸ πρόβλημα 2ον τῆς § 317, εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ νέου γραμματίου εἶναι 848 248,45 δραχμαί.

Πρόβλημα 2ον. **Ἕνας ἔμπορος ὀφείλει εἰς τὸ αὐτὸ πρόσωπον δύο γραμμάτια, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ ἕνα ἐκ δραχμῶν 300 000 λήγει μετὰ 4 μῆνας, τὸ δὲ ἄλλο ἐκ δραχ. 500 000 λήγει μετὰ 6 μῆνας. Θέλει δὲ νὰ ἀντικαταστήσῃ αὐτὰ μὲ ἕνα μό-**

νον νέον γραμμάτιον ὀνομαστικῆς ἀξίας 800 000 δραχ. πρὸς 6 %. Μετὰ πόσον χρόνον θὰ λήγῃ τὸ νέον αὐτὸ γραμμάτιον;

Λύσις. Κατὰ τὰ γνωστά, εὑρίσκομεν ὅτι ἡ παροῦσα ἀξία τοῦ πρώτου γραμματίου εἶναι 294 000 δραχ., τοῦ δὲ δευτέρου εἶναι 485 000 δραχ. καὶ τῶν δύο μαζὶ εἶναι 779 000 δραχ.

Τώρα ἔχομεν νὰ λύσωμεν τὸ κάτωθι πρόβλημα:

Μετὰ πόσον χρόνον λήγει γραμμάτιον ὀνομαστικῆς ἀξίας 800 000 δραχμῶν, τὸ ὁποῖον προεξοφλεῖται σήμερον πρὸς 6 % ἀντὶ 779 000 δραχμῶν;

Λύοντες τὸ πρόβλημα αὐτὸ κατὰ τὰ γνωστὰ εὑρίσκομεν ὅτι τὸ νέον γραμμάτιον θὰ λήγῃ μετὰ 5 μῆνας καὶ 7 ἡμέρας.

Ἀσκήσεις

687) Ὀφείλει τις τρία γραμμάτια: Τὸ πρῶτον ἐκ δραχ. 6 000 000 πληρωτέον μετὰ 30 ἡμέρ, τὸ δεύτερον ἐκ δραχμῶν 900 000 πληρωτέον μετὰ 60 ἡμέρ. καὶ τὸ τρίτον ἐκ δραχμῶν 1 000 000 πληρωτέον μετὰ 90 ἡμέρ. Ποία θὰ εἶναι ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία ἑνὸς νέου γραμματίου, τὸ ὁποῖον θὰ ἀντικαταστήσῃ τὰ τρία ἀνωτέρω γραμμάτια πληρωτέου μετὰ 60 ἡμέρας πρὸς 6 %;

688) Ἔχομεν τέσσαρα γραμμάτια: Τὸ πρῶτον 200 000 δραχ. πληρωτέον μετὰ 10 ἡμ, τὸ δεύτερον 150 000 δραχ. πληρωτέον μετὰ 20 ἡμ, τὸ τρίτον 180 000 δραχ. πληρωτέον μετὰ 35 ἡμ. καὶ τὸ τέταρτον 240 000 δραχ. πληρωτέον μετὰ 60 ἡμ. Θέλομεν νὰ ἀντικαταστήσωμεν τὰ τέσσαρα αὐτὰ γραμμάτια δι' ἑνὸς γραμματίου 770 000 δραχ. Νὰ προσδιορισθῇ ὁ χρόνος τῆς λήξεως τοῦ γραμματίου αὐτοῦ, ἐὰν τὸ ἐπιτόκιον εἶναι 6%.

Διάφορα προβλήματα ὑφαιρέσεως

689) Ἔμπορος ἠγόρασε ζάκχαριν ἀντὶ 860 000 δραχμῶν, τὰς ὁποίας ἔπρεπε νὰ πληρώσῃ μετὰ 1 ἔτος. Ἂν πληρώσῃ σήμερον, τοῦ γίνεται ἔκπτωσις 4%. Ποία εἶναι ἡ ἔκπτωσις (ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις) καὶ πόσα θὰ πληρώσῃ;

690) Ἐργοστασιάρχης ἀποστέλλει εἰς ἕνα ἔμπορον 165 μέτρα ὑφάσματος πρὸς 2 460 δραχ. τὸ μέτρον μὲ πίστωσιν 15 μηνῶν. Ὁ

ἔμπορος ὅμως πληρώνει ἀμέσως καὶ δι' αὐτὸ τοῦ γίνεται ἔκπτωσις (ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις) 5°/₀. Πόση εἶναι ἡ ἔκπτωσις καὶ πόσα θὰ πληρώσῃ ;

691) Ἕνα γραμμάτιόν μας 160 000 δραχμῶν εἶναι πληρωτέον μετὰ 15 μῆνας. Ἀντ' αὐτοῦ λαμβάνομεν ἕνα ἄλλο γραμμάτιον 152 000 δραχμῶν, τὸ ὁποῖον εἶναι πληρωτέον μετὰ 6 μῆνας. Νὰ εὑρεθῇ ἂν ἐκερδίσαμεν ἢ ἐχάσαμεν ἀπὸ τὴν ἀνταλλαγὴν αὐτήν, ἂν ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις γίνηται πρὸς 6°/₀.

692) Ἐπλήρωσέ τις 570 000 δραχμὰς ἀντὶ ἑνὸς ποσοῦ, τὸ ὁποῖον ὤφειλε νὰ πληρώσῃ μετὰ 15 μῆνας. Νὰ εὑρεθῇ ποῖον χρηματικὸν ποσὸν ἐχρεώστει, ἂν γνωρίζωμεν ὅτι ἡ ἔκπτωσις ὑπελογίσθη πρὸς 4 °/₀.

693) Γεωργὸς ἠγόρασεν ἀπὸ ἔμπορον ἐμπορεύματα ἀξίας 247 200 δραχμῶν, τὰ ὁποῖα ὀφείλει νὰ πληρώσῃ μετὰ 8 μῆνας. Ἀλλὰ 5 μῆνας μετὰ τὴν ἀγορὰν θέλει νὰ πληρώσῃ τὸ ὀφειλόμενον ποσὸν μὲ ἔκπτωσιν 6 °/₀. Πόσα θὰ πληρώσῃ ;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε΄

ΜΕΡΙΣΜΟΣ ΕΙΣ ΜΕΡΗ ΑΝΑΛΟΓΑ. ΑΝΑΜΕΙΞΕΙΣ

1. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΕΡΙΣΜΟΥ

§ 326. Ἀριθμοὶ ἀνάλογοι ἄλλων. Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοί:

$$3, \quad 4, \quad 7$$

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν αὐτοὺς ἐπὶ τυχόντα ἀριθμόν, π.χ. τὸν 5, προκύπτουν ἀντιστοίχως οἱ ἀριθμοί:

$$15, \quad 20, \quad 35.$$

Οἱ ἀριθμοὶ 15, 20, 35 λέγονται **ἀνάλογοι** πρὸς τοὺς 3, 4, 7.

Ἀντιστρόφως: οἱ ἀριθμοὶ 3, 4, 7 λέγονται ἀνάλογοι πρὸς τοὺς 15, 20, 35, διότι γίνονται ἀπὸ αὐτοὺς διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ αὐτῶν ἐπὶ τὸν ἴδιον ἀριθμὸν $\frac{1}{5}$. Πράγματι ἔχομεν:

$$15 \times \frac{1}{5} = 3, \quad 20 \times \frac{1}{5} = 4, \quad 35 \times \frac{1}{5} = 7.$$

Ὥστε:

Δύο ἢ περισσότεροι ἀριθμοὶ λέγονται ἀνάλογοι πρὸς ἄλλους ἰσοπληθεῖς, ἐὰν γίνωνται ἀπὸ αὐτοὺς διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμον.

Εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα παρατηροῦμεν τὰ ἑξῆς:

Ὁ 15 γίνεται ἀπὸ τὸν 3 διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ 5, ἀλλὰ καὶ ὁ 3 γίνεται ἀπὸ τὸν 15 διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ $\frac{1}{5}$. Οἱ δύο οὗτοι ἀριθμοὶ λέγονται **ὁμόλογοι** ἀριθμοί. Ὁμοίως οἱ 4 καὶ 20 εἶναι ὁμόλογοι, ἐπίσης ὁ 7 καὶ 35.

Ἐπίσης παρατηροῦμεν ὅτι: $\frac{3}{15} = \frac{1}{5}, \quad \frac{4}{20} = \frac{1}{5}, \quad \frac{7}{35} = \frac{1}{5}.$

Ἀπὸ αὐτὰς δὲ προκύπτουν αἱ ἰσότητες:

$$15 = 3 \times 5 \quad 20 = 4 \times 5 \quad 35 = 7 \times 5.$$

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι:

α΄) Ἂν μερικοὶ ἀριθμοὶ εἶναι ἀνάλογοι πρὸς ἄλλους, ὁ λόγος τῶν ὁμολόγων ἀριθμῶν εἶναι δι' ὅλους ὁ αὐτός.

β΄) Ἂν μερικοὶ ἀριθμοὶ ἔχουν πρὸς ἄλλους τὸν αὐτὸν λόγον (ἕνας πρὸς ἕνα), οἱ πρῶτοι ἀριθμοὶ εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τοὺς ἄλλους. Ἐπίσης καὶ οἱ ἄλλοι αὐτοὶ εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τοὺς πρώτους.

Διὰ νὰ ἐκφράσωμεν λοιπὸν ὅτι οἱ ἀριθμοὶ Α,Β,Γ εἶναι ἀνάλογοι πρὸς ἄλλους α,β,γ, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ γράψωμεν ὅτι :

$$\boxed{\frac{A}{\alpha}=\frac{B}{\beta}=\frac{\Gamma}{\gamma}} \quad ἤ \quad \boxed{\frac{\alpha}{A}=\frac{\beta}{B}=\frac{\gamma}{\Gamma}} \quad ἤ \quad \boxed{A=\alpha\cdot\lambda,\ B=\beta\cdot\lambda,\ \Gamma=\gamma\cdot\lambda}$$

§ 327. Μερισμὸς ἀριθμοῦ εἰς μέρη ἀνάλογα. Ὅταν λέγωμεν ὅτι θὰ μερίσωμεν ἕνα ἀριθμὸν Α εἰς μέρη ἀνάλογα δοθέντων ἀριθμῶν, σημαίνει ὅτι θὰ εὕρωμεν τόσους ἀριθμούς, ὅσοι εἶναι οἱ δοθέντες ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι θὰ ἔχουν ἄθροισμα τὸν δοθέντα ἀριθμὸν Α καὶ θὰ εἶναι ἀνάλογοι πρὸς αὐτούς.

§ 328. *Πρόβλημα 1ον*. **Νὰ μερισθοῦν 180 000 δραχ. εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 3, 5, 7.**

Λύσις. Ἐὰν ὁ μεριστέος ἀριθμὸς ἦτο $3+5+7$ ἢ 15, τὰ μέρη θὰ ἦσαν προφανῶς 3, 5, 7. Ὥστε :

Ἂν ἐπρόκειτο νὰ μερίσ. 15 δραχ. τὸ α΄ μέρ. θὰ ἦτο 3 δραχ.

» » » » 1 » » » » » » $\frac{3}{15}$ »

» » » » 180 000 » » » » » » $\frac{3\times 180\,000}{15}=36000$ δρχ.

Σκεπτόμενοι ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι :

τὸ β΄ μέρος θὰ ἦτο $\frac{5\times 180\,000}{15}=60\,000$ δραχ,

τὸ δὲ γ΄ » » » $\frac{7\times 180\,000}{15}=84\,000$ δραχ.

Ὥστε οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ εἶναι 36 000, 60 000, 84 000.

Οἱ ἀριθμοὶ αὐτοὶ ἔχουν ἄθροισμα

$$36\,000+60\,000+84\,000=180\,000$$

καὶ εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τοὺς 3, 5, 7, διότι γίνονται ἀπὸ αὐτοὺς διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν $\frac{180\,000}{15}$.

Κατάταξις:

$$\text{Μεριστέος } 180\,000 \left\{\begin{array}{ll} \alpha) & 3 \\ \beta) & 5 \\ \gamma) & 7 \\ \hline \end{array}\right.$$
$$\text{ἄθροισμα} = 15$$

Κανών: Ἀπὸ τὴν λύσιν τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος συνάγομεν τὸν κάτωθι κανόνα:

Διὰ νὰ μερίσωμεν ἀριθμὸν εἰς μέρη ἀνάλογα ἄλλων δοθέντων ἀριθμῶν, πολλαπλασιάζομεν τὸν μεριστέον ἀριθμὸν ἐπὶ ἕκαστον τῶν δοθέντων ἀριθμῶν καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν.

§ 329. *Παρατήρησις.* Ἂν θέλωμεν νὰ μερίσωμεν τὸν ἀριθμὸν 180 000 εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 3×4, 5×4, 7×4, δηλ. πρὸς τοὺς 12, 20, 28 καὶ ἐφαρμόσωμεν τὸν προηγούμενον κανόνα, θὰ εὕρωμεν τὰ αὐτὰ ἐξαγόμενα. Πράγματι εὑρίσκομεν ὅτι:

τὸ α′ μέρος εἶναι $\frac{180\,000 \times 12}{60} = \frac{180\,000 \times 3}{15} = 36\,000$ δραχ.

τὸ β′ μέρος εἶναι $\frac{180\,000 \times 20}{60} = 60\,000$ δραχ.

καὶ τὸ γ′ μέρος εἶναι $\frac{180\,000 \times 28}{60} = 84\,000$ δραχ.

Ὥστε, εἴτε μερίσωμεν τὸν ἀριθμὸν 180 000 εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς τοὺς 3, 5, 7, εἴτε πρὸς τοὺς 12, 16, 28, εὑρίσκομεν τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω παρατηροῦμεν ὅτι:

Τὰ μέρη τοῦ μεριστέου ἀριθμοῦ δὲν βλάπτονται, ἐὰν οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ πολλαπλασιασθοῦν ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ἢ διαιρεθοῦν διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.

§ 330. *Πρόβλημα 2ον.* **Νὰ μερισθοῦν 130 000 δραχμαὶ εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς** $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{12}$.

Λύσις. Τρέποντες τὰ κλάσματα $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{12}$ εἰς ὁμώνυμα εὑρίσκομεν τὰ ἴσα κλάσματα $\frac{9}{12}$, $\frac{10}{12}$, $\frac{7}{12}$.

Ἐπειδὴ τὰ ζητούμενα μέρη πρέπει νὰ εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰ κλάσματα αὐτά, θὰ εἶναι ἀνάλογα καὶ πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 9, 10, 7, δηλ. πρὸς τοὺς ἀριθμητὰς τῶν κλασμάτων.

Πρέπει λοιπὸν νὰ μερίσωμεν τὸν ἀριθμὸν 130 000 εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 9, 10, 7. Ἐφαρμόζοντες τὸν ἀνωτέρω κανόνα (§ 328) εὑρίσκομεν ὅτι :

τὸ α′ μέρος εἶναι $\frac{130\,000 \times 9}{26} = 45\,000$ δραχ.

τὸ β′ μέρος εἶναι $\frac{130\,000 \times 10}{26} = 50\,000$ δραχ.

καὶ τὸ γ′ μέρος εἶναι $\frac{130\,000 \times 7}{26} = 35\,000$ δραχ.

Κατάταξις : 130 000 δραχ. $\begin{cases} \alpha) & \frac{3}{4} \text{ ἢ } \frac{3}{4} \times 12 = 9 \\ \beta) & \frac{5}{6} \text{ ἢ } \frac{5}{6} \times 12 = 10 \\ \gamma) & \frac{7}{12} \text{ ἢ } \frac{7}{12} \times 12 = 7 \end{cases}$

ἄθροισμα = 26

§ 331. *Πρόβλημα 3ον.* **Τρεῖς ἐργάται ἔλαβον 156 600 δραχ. διὰ τὴν ἐκτέλεσιν ἐργασίας τινός. Ὁ α′ εἰργάσθη ἐπὶ 5 ἡμέρας, ἀλλὰ ἐπὶ 8 ὥρας τὴν ἡμέραν, ὁ β′ ἐπὶ 9 ἡμέρας τῶν 6 ὡρῶν καὶ ὁ γ′ ἐπὶ 10 ἡμέρας τῶν 8 ὡρῶν. Πόσον θὰ λάβῃ ἕκαστος;**

Λύσις. Ὁ α′ ἐργάτης εἰργάσθη ἐπὶ 8 ὥρ. × 5 = 40 ὥρας, ὁ β′ ἐπὶ 9 ὥρ. × 6 = 54 ὥρας καὶ ὁ γ′ ἐπὶ 8 ὥρ. × 10 = 80 ὥρας.

Πρέπει λοιπὸν νὰ μερίσωμεν τὰς 156 600 δραχ. εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ὡρῶν, κατὰ τὰς ὁποίας εἰργάσθη ἕκαστος, δηλ. εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 40, 54, 80.

Ἐφαρμόζοντες τὸν σχετικὸν κανόνα εὑρίσκομεν ὅτι :

ὁ α′ ἐργάτης θὰ λάβῃ $\frac{156\,600 \times 40}{174} = 36\,000$ δραχ,

ὁ β′ ἐργάτης θὰ λάβῃ $\frac{156\,600 \times 54}{174} = 48\,000$ δραχ,

καὶ ὁ γ′ ἐργάτης θὰ λάβῃ $\frac{156\,600 \times 80}{174} = 72\,000$ δραχ.

Κατάταξις: 156 600 δραχ. $\begin{cases} \alpha) & 5 \text{ ἡμ. } 8 \text{ ὥρ. ἢ } 40 \text{ ὥρ.} \\ \beta) & 6 \text{ » } 6 \text{ » ἢ } 54 \text{ ὥρ.} \\ \gamma) & 10 \text{ » } 8 \text{ » ἢ } 80 \text{ ὥρ.} \end{cases}$

ἄθροισμα = 174

§ 332. **Ἀριθμοὶ ἀντιστρόφως ἀνάλογοι ἄλλων.** Δύο ἢ περισσότεροι ἀριθμοὶ λέγονται **ἀντιστρόφως ἀνάλογοι** πρὸς ἄλλους ἰσοπληθεῖς, ὅταν εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τοὺς ἀντιστρόφους αὐτῶν ἀριθμούς. Π.χ. ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ 3, 4, 5.

Οἱ ἀριθμοὶ 6, 8, 10 εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τοὺς 3, 4, 5, ἀλλὰ ἀντιστρόφως ἀνάλογοι πρὸς τοὺς $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$.

§ 333. *Πρόβλημα 4ον.* **Νὰ μερισθοῦν 360 000 δραχμαὶ εἰς μέρη ἀντιστρόφως ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 12, 15, 20,** (δηλ. νὰ μερισθοῦν αἱ 360 000 δραχ. εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀντιστρόφους τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν).

Λύσις. Οἱ ἀντίστροφοι τῶν ἀριθμῶν 12, 15, 20 εἶναι ἀντιστοίχως οἱ $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{15}$, $\frac{1}{20}$. Τὸ πρόβλημα λοιπὸν ἀνάγεται εἰς τὴν περίπτωσιν ἐκείνην, κατὰ τὴν ὁποίαν ζητεῖται νὰ μερισθοῦν αἱ 360 000 δραχ. εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς τὰ κλάσματα $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{15}$, $\frac{1}{20}$ ἢ πρὸς τὰ ὁμώνυμά των $\frac{5}{60}$, $\frac{4}{60}$, $\frac{3}{60}$ ἢ πρὸς τοὺς ἀριθμητάς των 5, 4, 3.

Ἐφαρμόζοντες τὸν σχετικὸν κανόνα εὑρίσκομεν ὅτι:

τὸ α′ μέρος εἶναι $\frac{360\,000 \times 5}{12} = 150\,000$ δραχ.

τὸ β′ μέρος εἶναι $\frac{360\,000 \times 4}{12} = 120\,000$ δραχ.

καὶ τὸ γ′ μέρος εἶναι $\frac{360\,000 \times 3}{12} = 90\,000$ δραχ.

		Ἀντιστρ. ἀνάλογα	ἢ ἀναλόγως		
Κατάταξις: 360 000 δραχ.	α)	12	τοῦ $\frac{1}{12}$	ἢ $\frac{5}{60}$	ἢ 5
	β)	15	τοῦ $\frac{1}{15}$	ἢ $\frac{4}{60}$	ἢ 4
	γ)	20	τοῦ $\frac{1}{20}$	ἢ $\frac{3}{63}$	ἢ 3
					ἄθροισμα = 12

Ἀσκήσεις

Α′ Ὁμάς. 694) Τρεῖς ἐργάται ἔλαβον 280 000 δραχ. δι' ἐργασίαν των. Ὁ α' εἰργάσθη ἐπὶ 8 ἡμέρας, ὁ β' ἐπὶ 12 ἡμέρας καὶ ὁ γ' ἐπὶ 15 ἡμέρας. Πόσας δραχμὰς ἔλαβεν ἕκαστος ;

695) Τρεῖς κτηνοτρόφοι ἐνοικίασαν ἀπὸ κοινοῦ ἕνα λιβάδιον ἀντὶ 360 000 δραχ. διὰ τὴν βοσκὴν τῶν προβάτων των. Ὁ α' ἔχει 120 πρόβατα, ὁ β' 110 καὶ ὁ γ' 220. Πόσον θὰ πληρώσῃ ἕκαστος ;

696) Τρία χωρία, ποὺ τὰ ἐχώριζεν ἕνας ποταμός, ἀπεφάσισαν νὰ κάμουν μίαν γέφυραν μὲ κοινὰ ἔξοδα, ἀλλὰ ἀναλόγως τῶν κατοίκων ποὺ ἔχει κάθε χωρίον. Ἐπλήρωσαν δὲ διὰ τὴν γέφυραν αὐτὴν 32 450 000 δραχ. Πόσα πρέπει νὰ πληρώσῃ κάθε χωρίον, ἂν τὸ πρῶτον εἶχε 565 κατοίκους, τὸ δεύτερον 735 καὶ τὸ τρίτον 1650 ;

697) Ἕνας θεῖος ἀφήνει τὴν περιουσίαν του εἰς τοὺς τρεῖς ἀνεψιούς του. Εἰς τὸν πρῶτον δίδει 1 250 000 δραχμάς, εἰς τὸν δεύτερον 1 850 000 δραχμὰς καὶ εἰς τὸν τρίτον 1 150 000 δραχ. Παραγγέλλει ὅμως νὰ δώσουν εἰς ἕνα παλαιὸν ὑπηρέτην του 255 000 δραχ. Νὰ εὑρεθῇ πόσα πρέπει νὰ δώσῃ κάθε ἀνεψιὸς εἰς τὸν ὑπηρέτην.

698) Τρεῖς ἀδελφοὶ ἠγόρασαν μαζὶ ἕνα ἀγρόν. Ὁ πρῶτος ἔδωσε διὰ τὴν ἀγορὰν 840 000 δραχμάς, ὁ δεύτερος 960 000 δραχμὰς καὶ ὁ τρίτος 1 050 000 δραχμάς. Ἀπὸ τὴν καλλιέργειαν τοῦ ἀγροῦ αὐτοῦ ἔλαβον 1 425 ὀκάδας σίτου. Πόσας ὀκάδας σίτου πρέπει νὰ λάβῃ ἕκαστος ;

699) Τρεῖς γεωργοὶ ἠγόρασαν μίαν θεριστικὴν μηχανὴν ἀντὶ 15 000 000 δραχμῶν. Ὁ πρῶτος ἐπλήρωσεν 6 200 000 δραχμάς, ὁ δεύτερος 3 500 000 δραχμὰς καὶ ὁ τρίτος τὸ ὑπόλοιπον. Μὲ τὴν μηχανὴν αὐτὴν ἐθέρισαν τοὺς ἀγροὺς τῶν συγχωριανῶν των καὶ εἰσέπραξαν ἀπὸ τὴν ἐργασίαν αὐτῶν 4 500 000 δραχμάς. Πόσα πρέπει νὰ λάβῃ κάθε γεωργὸς ἀπὸ τὰ εἰσπραχθέντα ;

700) Ἐργάτης ἐκτελεῖ ἕνα ἔργον εἰς 25 ἡμ. Ἄλλος ἐργάτης ἐκτελεῖ αὐτὸ εἰς 30 ἡμ. καὶ τρίτος εἰς 35 ἡμ. Εἰργάσθησαν καὶ οἱ τρεῖς μαζὶ καὶ ἔλαβον διὰ τὴν ἐκτέλεσιν τοῦ ἔργου 1 710 000 δραχμάς. Πόσον πρέπει νὰ λάβῃ ἕκαστος ;

Β' Ὁ μ ά ς. 701) Ἕνα κτῆμα 5 628 στρεμμάτων ἐμοιράσθη μεταξὺ τριῶν κληρονόμων ἀναλόγως πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$. Πόσον ἔλαβεν ἕκαστος ;

702) Φιλάνθρωπος μοιράζει 12 200 000 δραχ. εἰς τὰ δύο σχολεῖα (Δημοτικὸν καὶ Γυμνάσιον) καὶ εἰς τὸν φιλανθρωπικὸν σύλλογον

τῆς πατρίδος του ἀναλόγως τῶν ἀριθμῶν $\frac{3}{4}$, 2 καὶ 2 $\frac{1}{3}$. Πόσα θὰ λάβῃ κάθε σχολεῖον καὶ πόσα ὁ φιλανθρωπικὸς σύλλογος ;

703) Θεῖος ἀφήνει εἰς τοὺς τρεῖς ἀνεψιούς του 5 400 000 δραχ, διὰ νὰ τὰς μοιρασθοῦν εἰς μέρη ἀντιστρόφως ἀνάλογα πρὸς τὰς ἡλικίας των. Ὁ α′ ἦτο 18 ἐτῶν, ὁ β′ 12 ἐτῶν καὶ ὁ γ′ 9 ἐτῶν. Πόσας δραχμὰς θὰ λάβῃ ἕκαστος ;

704) Φιλάνθρωπος κατέθεσεν εἰς τὴν Ἐθνικὴν Τράπεζαν 7 500 000 δραχμὰς πρὸς 3,5 %, καὶ διέταξεν οἱ ἐτήσιοι τόκοι νὰ μοιράζωνται εἰς τὸ Δημοτικὸν Σχολεῖον καὶ εἰς τὸ Γυμνάσιον τῆς πατρίδος του ἀναλόγως τῶν ἀριθμῶν 3 καὶ 5. Πόσοι τόκοι ἀναλογοῦν εἰς κάθε σχολεῖον ;

705) Ποσόν τι χρημάτων διενεμήθη μεταξὺ τριῶν προσώπων ἀναλόγως πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 2 $\frac{1}{4}$, 7 $\frac{2}{5}$ καὶ 8 $\frac{1}{2}$. Τὸ γ′ πρόσωπον μὲ τὰ χρήματα ποὺ ἔλαβεν ἐπλήρωσε τὸ ἐτήσιον ἐνοίκιον τῆς οἰκίας του πρὸς 34 000 δραχ. τὸν μῆνα. Πόσον ἔλαβεν ἕκαστον πρόσωπον καὶ πόσον ἦτο τὸ διανεμηθὲν ποσόν ;

Γ′ Ὁ μ ά ς. 706) Δύο ποιμένες ἐνοικίασαν ἕνα λιβάδιον ἀντὶ 1 425 000 δραχ. Ὁ α′ ἐβόσκησεν εἰς αὐτὸ 200 πρόβατα ἐπὶ 25 ἡμέρας, ὁ δὲ β′ 150 πρόβατα ἐπὶ 1 μῆνα. Πόσον ἐνοίκιον πρέπει νὰ πληρώσῃ ἕκαστος ;

707) Δύο κτηνοτρόφοι ἐνοικίασαν ἀπὸ κοινοῦ ἕνα λιβάδιον ἀντὶ 975 000 δραχ. Ὁ α′ ἐβόσκησε 5 ἀγελάδας καὶ ὁ β′ 120 πρόβατα. Γνωρίζομεν ὅτι μία ἀγελὰς τρώγει ὅσον 15 πρόβατα. Πόσον πρέπει νὰ πληρώσῃ κάθε κτηνοτρόφος ;

708) Δύο οἰκογένειαι ἐνοικίασαν ἐξοχικὴν παραθαλασσίαν οἰκίαν ἀντὶ 510 000 δραχ. Ἡ α′ οἰκογένεια ἀπετελεῖτο ἀπὸ 3 ἄτομα καὶ παρέμεινεν εἰς τὴν ἐξοχὴν ἐπὶ 3 μῆνας· ἡ β′ ἀπετελεῖτο ἀπὸ 4 ἄτομα καὶ παρέμεινεν ἐπὶ 2 μῆνας. Τὸ ἐνοίκιον θὰ πληρωθῇ ἀναλόγως τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἀτόμων καὶ τῆς διαρκείας τῆς παραμονῆς. Πόσα πρέπει νὰ πληρώσῃ ἑκάστη οἰκογένεια ;

709) Τρεῖς ἐργάται ἀνέλαβον νὰ κάνουν συνεταιρικῶς μίαν ἐργασίαν, διὰ τὴν ὁποίαν ἐπληρώθησαν 492 000 δραχμάς. Ὁ πρῶτος ἐργάτης εἰργάσθη 5 ἡμέρας, ἀλλὰ ἀπὸ 8 ὥρας τὴν ἡμέραν, ὁ δεύτερος 9 ἡμέρας, ἀλλὰ ἀπὸ 6 ὥρας τὴν ἡμέραν καὶ ὁ τρίτος 10 ἡμέρας ἀπὸ 7 ὥρας τὴν ἡμέραν. Πόσον ἔλαβεν ἕκαστος ;

710) Λογιστὴς λαμβάνει 6 200 000 δραχ. διὰ νὰ πληρώσῃ τοὺς ἐργάτας ἑνὸς ἐργοστασίου. Ἡ α' ὁμὰς ἐξ 25 ἐργατῶν εἰργάσθη ἐπὶ 10 ἡμέρας, ἡ δὲ β' ὁμὰς ἐκ 35 ἐργατῶν εἰργάσθη ἐπὶ 15 ἡμέρας. Πόσον πρέπει νὰ πληρώσῃ εἰς ἑκάστην ὁμάδα καὶ πόσον ἦτο τὸ ἡμερομίσθιον ;

711) Τρεῖς γεωργοὶ ἐνοικίασαν ἕνα αὐτοκίνητον ἄροτρον διὰ νὰ καλλιεργήσουν τὰ κτήματά των ἀντὶ 695 000 δραχ. Ὁ α' ἐχρησιμοποίησεν αὐτὸ ἐπὶ 6 ἡμ. καὶ ἐπὶ 10 ὥρ. τὴν ἡμέραν. Ὁ β' ἐπὶ 5 ἡμ. καὶ ἐπὶ 5 ὥρ. τὴν ἡμ. καὶ ὁ γ' ἐπὶ 6 ἡμ. καὶ ἐπὶ 9 ὥρ. τὴν ἡμέραν. Πόσα πρέπει νὰ πληρώσῃ ἕκαστος γεωργός ;

Δ' Ὁμάς. 712) Νὰ μοιρασθῶσιν 2 754 ὀκ. σίτου εἰς 4 οἰκογενείας κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον : Ἡ δευτέρα οἰκογένεια νὰ λάβῃ τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ μεριδίου τῆς πρώτης, ἡ τρίτη τὸ $\frac{1}{4}$ τῶν ὅσων θὰ λάβωσιν αἱ δύο πρῶται καὶ ἡ τετάρτη τὰ $\frac{2}{5}$ τοῦ μεριδίου τῆς τρίτης.

713) Ἕνας φιλάνθρωπος μοιράζει 3 500 000 δραχ. εἰς τὸ Δημοτικὸν Σχολεῖον, εἰς τὸ Νοσοκομεῖον καὶ εἰς τὸ Ὀρφανοτροφεῖον τῆς πατρίδος του κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον : Τὸ Νοσοκομεῖον θὰ λάβῃ διπλάσια τοῦ Σχολείου καὶ τὸ Ὀρφανοτροφεῖον τὰ $\frac{3}{4}$ τῶν ὅσων θὰ λάβῃ τὸ Νοσοκομεῖον καὶ τὸ Σχολεῖον. Νὰ εὑρεθῇ πόσα θὰ λάβῃ κάθε ἵδρυμα.

714) Νὰ μερισθῶσιν 9 500 000 δραχ. μεταξὺ 3 προσώπων οὕτως, ὥστε τὰ μερίδια τοῦ β' καὶ τοῦ γ' νὰ εἶναι ἴσα, τοῦ δὲ α' νὰ εἶναι ἴσον μὲ τὰ $\frac{5}{7}$ ἑκάστου τῶν ἄλλων.

715) Τρεῖς ἀδελφοὶ ἐμοιράσθησαν ἕνα ἀγρὸν 12 600 στρεμ. κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον : Ὁ α' ἔλαβεν ὅσον καὶ οἱ δύο ἄλλοι, τῶν ὁποίων τὰ μερίδια ἦσαν ὡς οἱ ἀριθμοὶ 3 πρὸς 4. Πόσον ἔλαβεν ἕκαστος ;

716) Ἕνας θεῖος ἠθέλησε νὰ μοιράσῃ τὴν περιουσίαν του εἰς τοὺς τρεῖς ἀνεψιούς του ἀναλόγως τῶν ἀριθμῶν 7, 6, 5. Μετέβαλεν ὅμως γνώμην καὶ ἐμοίρασε ταύτην ἀναλόγως τῶν ἀριθμῶν 6, 5, 4. Ποῖος ἐκ τῶν ἀνεψιῶν ὠφελήθη ἐκ τῆς ἀλλαγῆς αὐτῆς ; Ὁ ἕνας τῶν ἀνεψιῶν ἔλαβεν 1 200 000 δραχ. ἐπὶ πλέον ἢ πρότερον. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ περιουσία τοῦ θείου καὶ τὸ μερίδιον ἑκάστου.

2. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ

§ 334. Τὰ προβλήματα ἑταιρείας εἶναι προβλήματα μερισμοῦ. Εἰς αὐτὰ ζητεῖται νὰ μερισθῇ τὸ κέρδος ἢ ἡ ζημία μιᾶς ἐπιχειρήσεως μεταξὺ ἐκείνων, οἱ ὁποῖοι ἀνέλαβον νὰ κάμουν τὴν ἐπιχείρησιν αὐτήν.

§ 335. *Πρόβλημα 1ον.* **Τρεῖς συνεταῖροι κατέθεσαν εἰς μίαν ἐπιχείρησιν τὰ ἑξῆς ποσά : Ὁ α′ 8 500 000 δραχμάς, ὁ β′ 10 500 000 δραχμὰς καὶ ὁ γ′ 6 500 000 δραχμάς. Ἐκ τῆς ἐπιχειρήσεως αὐτῆς ἐκέρδισαν 5 100 000 δραχμάς. Πόσον κέρδος θὰ λάβῃ ἕκαστος ;**

Λύσις. Εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ κέρδος πρέπει νὰ μερισθῇ εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν καταθέσεων ἑκάστου. Μερίζοντες λοιπὸν τὸ κέρδος τῶν 5 100 000 δραχ. εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 8 500 000, 10 500 000, 6 500 000 ἢ πρὸς τοὺς 85, 105, 65, εὑρίσκομεν ὅτι :

ὁ α′ θὰ λάβῃ $\frac{5\,100\,000 \times 85}{255} = 1\,700\,000$ δραχ.

ὁ β′ θὰ λάβῃ $\frac{5\,100\,000 \times 105}{255} = 2\,100\,000$ δραχ.

καὶ ὁ γ′ θὰ λάβῃ $\frac{5\,100\,000 \times 65}{255} = 1\,300\,000$ δραχ.

Κατάταξις : 5 000 000 δραχ. $\left\{ \begin{array}{lrcr} α) & 8\,500\,000 & ἢ & 85 \\ β) & 10\,500\,000 & ἢ & 105 \\ γ) & 6\,500\,000 & ἢ & 65 \\ \hline & & ἄθροισμα = & 255 \end{array} \right.$

§ 336. *Πρόβλημα 2ον.* **Ἔμπορος ἤρχισεν ἐμπορικὴν ἐπιχείρησιν μὲ 7 500 000 δραχ. Μετὰ 6 μῆνας προσέλαβε καὶ συνεταῖρον, ὁ ὁποῖος κατέθεσε τὸ αὐτὸ ποσόν. Μετὰ 4 μῆνας προσέλαβεν καὶ τρίτον συνεταῖρον, ὁ ὁποῖος κατέθεσε τὸ αὐτὸ ποσόν. Ἓν ἔτος μετὰ τὴν πρόσληψιν τοῦ τρίτου εὗρον ὅτι ἐκέρδισαν 6 400 000 δραχ. Πόσον κέρδος πρέπει νὰ λάβῃ ἕκαστος ;**

Λύσις. Τὸ κεφάλαιον τοῦ τρίτου ἔμεινεν εἰς τὴν ἐπιχείρησιν ἐπὶ 1 ἔτος ἢ ἐπὶ 12 μῆνας· τοῦ β′ ἐπὶ 12 μῆν. + 4 μῆν. = 16 μῆν. καὶ τοῦ α′ ἐπὶ 16 μῆν. + 6 μῆν. = 22 μῆνας.

Ἐπειδὴ καὶ οἱ τρεῖς συνεταῖροι κατέθεσαν τὸ αὐτὸ ποσόν, εἶναι προφανὲς ὅτι τὸ κέρδος τῶν 6 400 000 δραχ. πρέπει νὰ μερισθῇ εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς τοὺς χρόνους, κατὰ τοὺς ὁποίους ἔμειναν αἱ καταθέσεις εἰς τὴν ἐπιχείρησιν.

Μερίζοντες λοιπὸν τὸ κέρδος τῶν 6 400 000 δραχμῶν εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 22, 16, 12, εὑρίσκομεν ὅτι :

ὁ α' θὰ λάβῃ $\frac{6\,400\,000 \times 22}{50} = 2\,816\,000$ δραχ.

ὁ β' θὰ λάβῃ $\frac{6\,400\,000 \times 16}{50} = 2\,048\,000$ δραχ.

καὶ ὁ γ' θὰ λάβῃ $\frac{6\,400\,000 \times 12}{50} = 1\,536\,000$ δραχ.

Κατάταξις :

			Κεφάλαια	Διάρκεια καταθέσεων
Μεριστέον κέρδος		α)	7 500 000	22 μῆν.
6 400 000 δραχ.	6 μῆν.	β)	»	16 »
	4 μῆν.	γ)	»	12 »
	1 ἔτος μετὰ τὸν γ'			50

§ 337. *Πρόβλημα 3ον.* **Δύο ἔμποροι ἔκαμαν μίαν ἐμπορικὴν ἐπιχείρησιν. Ὁ α' κατέθεσε 5 000 000 δραχμὰς καὶ ὁ β' 6 500 000 δραχμάς. Ἀλλὰ τὰ χρήματα τοῦ α' ἔμειναν εἰς τὴν ἐπιχείρησιν ἐπὶ 12 μῆνας, τοῦ δὲ β' ἐπὶ 8 μῆνας. Κατόπιν ἐλογαριάσθησαν καὶ εὗρον ὅτι ἐκέρδισαν 4 480 000 δραχμάς. Πόσον κέρδος πρέπει νὰ λάβῃ ἕκαστος ;**

Λύσις. Εἰς τὸ πρόβλημα αὐτὸ εἶναι διάφοροι καὶ αἱ καταθέσεις τῶν ἐμπόρων καὶ οἱ χρόνοι. Διὰ τοῦτο, διὰ νὰ λύσωμεν αὐτό, σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς :

Ὁ α' ἔμπορος θὰ λάβῃ μέρος τοῦ κέρδους, διότι κατέθεσε 5 000 000 δραχμὰς ἐπὶ 12 μῆνας. Ἂν θέλῃ νὰ λάβῃ τὸ αὐτὸ κέρδος εἰς **1 μῆνα**, πρέπει νὰ καταθέσῃ 12 φορὰς περισσότερον, ἤτοι :

$$5\,000\,000 \times 12 = 60\,000\,000 \text{ δραχ.}$$

Ὁ β' θὰ λάβῃ μέρος τοῦ κέρδους, διότι κατέθεσεν 6 500 000 δραχμὰς ἐπὶ 8 μῆνας. Ἂν θέλῃ νὰ λάβῃ τὸ αὐτὸ κέρδος εἰς 1 μῆνα, πρέπει νὰ καταθέσῃ 8 φορὰς περισσότερον, ἤτοι :

$$6\,500\,000 \times 8 = 52\,000\,000 \text{ δραχ.}$$

Πρέπει λοιπὸν νὰ μερίσωμεν τὸ κέρδος τῶν 4 480 000 δραχ. εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 60 000 000 καὶ 52 000 000, δηλ. εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς τὰ γινόμενα τῶν καταθέσεων ἐπὶ τοὺς χρόνους ἢ εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 60 καὶ 52. Μερίζοντες τὸ κέρδος εὑρίσκομεν ὅτι :

ὁ α' θὰ λάβῃ $\frac{4\,480\,000 \times 60}{112} = 2\,400\,000$ δραχ.

ὁ β' θὰ λάβῃ $\frac{4\,480\,000 \times 52}{112} = 2\,080\,000$ δραχ.

Κατάταξις :

Μεριστέον κέρδος	α) $5\,000\,000 \times 12 = 60\,000\,000$ ἢ	60
4 480 000 δραχμὰς	β) $6\,500\,000 \times 8 = 52\,000\,000$ ἢ	52
	ἄθροισμα	112

Συμπέρασμα. Ἐκ τῆς λύσεως τῶν ἀνωτέρω τριῶν προβλημάτων συνάγομεν ὅτι τὸ κέρδος ἢ ἡ ζημία μιᾶς ἐπιχειρήσεως μερίζεται :

1ον. Εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν καταθέσεων, ἐὰν οἱ χρόνοι εἶναι ἴσοι·

2ον. Εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν χρόνων, ἐαν αἱ καταθέσεις εἶναι αἱ αὐταί.

3ον. Εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς τὰ γινόμενα τῶν καταθέσεων ἐπὶ τοὺς χρόνους, ἐὰν αἱ καταθέσεις καὶ οἱ χρόνοι εἶναι διάφοροι.

Σημείωσις. Οἱ χρόνοι πρέπει νὰ μετρῶνται μὲ τὴν αὐτὴν μονάδα.

Ἀσκήσεις

Α' Ὁ μ ά ς. 717) Δύο συνεταῖροι κατέβαλον δι' ἐπιχείρησιν 1 230 000 δραχ. Ὁ α' κατέθεσεν 120 000 δραχ. περισσότερον τοῦ β'. Ἐκ δὲ τῆς ἐπιχειρήσεως ἐκέρδισαν 4 305 000 δραχ. Πόσον κέρδος θὰ λάβῃ ἕκαστος ;

718) Δύο συνεταῖροι κατέβαλον δι' ἐπιχείρησιν ἕνα ποσὸν καὶ ἐκέρδισαν 7 340 000 δραχμάς. Πόσον κέρδος πρέπει νὰ λάβῃ ἕκαστος ἐὰν ἡ κατάθεσις τοῦ α' εἶναι ἴση μὲ τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς καταθέσεως τοῦ β' ;

719) Δύο συνεταῖροι ἐκέρδισαν ἐκ μιᾶς ἐπιχειρήσεως ὁ μὲν α' 520 000 δραχ, ὁ δὲ β' 640 000 δραχ. Ἐὰν ὁ α' κατέθεσεν εἰς τὴν ἐπιχείρησιν 4 160 000 δραχ, πόσας κατέθεσεν ὁ β' ;

720) Δύο συνεταῖροι κατέθεσαν εἰς μίαν ἐπιχείρησιν 10 500 000 δραχ. Ἐκ τῆς ἐπιχειρήσεως αὐτῆς ἐκέρδισεν ὁ α' 1 125 000 δραχμάς, ὁ δὲ β' 1 875 000 δραχ. Πόσον κατέθεσεν ἕκαστος ;

721) Τρεῖς κτηματίαι, τῶν ὁποίων τὰ κτήματα ἐγειτόνευον, ἤνοι-

ξαν συνεταιρικῶς ἕνα φρέαρ διὰ νὰ ποτίζουν τὰ κτήματά των. Τὸ φρέαρ ἐκόστισε 2 400 000 δραχ. Πόσον πρέπει νὰ πληρώσῃ ἕκαστος, ἂν τὰ κτήματα τοῦ α' ἦσαν 5,6 στρέμ. τοῦ β' 7,4 στρέμ. καὶ τοῦ γ' 7 στρέμ;

722) Τρεῖς γεωργοὶ συνεταιρισθέντες ἠγόρασαν ἕνα κτῆμα ἀντὶ 45 000 000 δραχ. Ὁ α' διέθεσεν 8 500 000 δραχ, ὁ β' 12 500 000 δραχ. καὶ ὁ γ' τὸ ὑπόλοιπον. Ἐκαλλιέργησαν τὸ κτῆμα, τὸ ὁποῖον ἀπέφερεν 8 600 ὀκ. γεωμήλων, τὰς ὁποίας ἐπώλησαν πρὸς 1 800 δραχ. τὴν ὀκᾶν. Πόσον πρέπει νὰ λάβῃ ἕκαστος ἐκ τοῦ εἰσπραχθέντος ποσοῦ ;

Β' Ὁ μ ά ς. 723) Τρεῖς συνεταῖροι ἐκέρδισαν ἐκ μιᾶς ἐπιχειρήσεως 7 200 000 δραχ. Καὶ οἱ τρεῖς κατέθεσαν τὸ αὐτὸ ποσόν, ἀλλὰ τὰ χρήματα τοῦ α' ἔμειναν εἰς τὴν ἐπιχείρησιν 11 μῆνας, τοῦ β' 9 μῆνας καὶ τοῦ τρίτου 5 μῆνας. Πόσον κέρδος θὰ λάβῃ ἕκαστος ;

724) Ἔμπορος ἤρχισεν ἐπιχείρησιν. Μετὰ 8 μῆνας προσέλαβε καὶ συνεταῖρον, ὁ ὁποῖος κατέθεσεν τὸ αὐτὸ ποσόν. 5 μῆνας βραδύτερον προσέλαβον καὶ γ', ὁ ὁποῖος κατέθεσε τὸ αὐτὸ ποσόν. Δύο ἔτη ἀπὸ τῆς ἐνάρξεως τῆς ἐπιχειρήσεως εὗρον ὅτι ἐζημιώθησαν 2 550 000 δραχ. Πόση ζημία ἀναλογεῖ εἰς ἕκαστον ;

725) Ἔμπορος ἤρχισεν ἐπιχείρησιν. Μετὰ 6 μῆνας προσέλαβε καὶ συνεταῖρον, ὁ ὁποῖος κατέθεσε τὸ αὐτὸ ποσόν. Ἓν ἔτος μετὰ τὴν πρόσληψιν τοῦ συνεταίρου εὗρον ὅτι ἐκέρδισαν 1 560 000 δραχμάς. Πόσον κέρδος θὰ λάβῃ ἕκαστος ;

726) Ἔμπορος ἤρχισεν ἐπιχείρησιν μὲ 6 500 000 δραχ. Μετὰ 4 μῆνας προσέλαβε καὶ συνεταῖρον, ὁ ὁποῖος κατέθεσεν 7 500 000 δραχ. Μετὰ 5 μῆνας βραδύτερον προσέλαβον καὶ γ' συνεταῖρον, ὁ ὁποῖος κατέθεσε 10 000 000 δραχ. Μετὰ 10 μῆνας ἀπὸ τῆς προσλήψεως τοῦ γ' εὗρον ὅτι ἐκέρδισαν 13 440 000 δραχ. Πόσον κέρδος θὰ λάβῃ ἕκαστος;

Γ' Ὁ μ ά ς. 727) Δύο ἐπιχειρηματίαι συνεταιρισθέντες ἐκέρδισαν ἐκ μιᾶς ἐπιχειρήσεως ἕνα ποσὸν ἴσον πρὸς τὰ 40 °/ₒ τῶν συνολικῶν καταθέσεών των. Ὁ α' ἔλαβεν ἐκ τοῦ κέρδους 3 000 000 δραχ, ὁ δὲ δεύτερον 9 200 000 δραχ. Πόσον κατέθεσεν ἕκαστος ;

728) Ἔμπορος ὀφείλει εἰς τρεῖς πιστωτάς του τὰ ἑξῆς ποσά : Εἰς τὸν α' 1 200 000 δραχ, εἰς τὸν β' 1 300 000 δραχ. καὶ εἰς τὸν γ' 1 500 000 δραχ. Πτωχεύσας ὅμως διαθέτει δι' αὐτοὺς μόνον 2 400 000 δραχ. Πόσον θὰ λάβῃ ἕκαστος πιστωτὴς καὶ πόσον °/ₒ ζημιοῦται ἕκαστος ;

729) Δύο βιομήχανοι ἔκαμον μίαν ἐπιχείρησιν. Ὁ α′ κατέθεσε 4 000 000 δραχ. δι' 6 μῆνας εἰς τὴν ἐπιχείρησιν καὶ ἐκέρδισεν ἐξ αὐτῆς 600 000 δραχ. Ὁ β′ ἐκέρδισεν ἐκ τῆς ἐπιχειρήσεως 1 687 500 δραχ. Πόσον κατέθεσεν ὁ β′, ἐὰν τὰ χρήματά του ἔμειναν εἰς τὴν ἐπιχείρησιν ἐπὶ 9 μῆνας ;

730) Ἡ ἐκκαθάρισις ἑνὸς πτωχεύσαντος ἐμπόρου εὗρεν ὅτι οὗτος δύναται νὰ διαθέσῃ 40 °/₀ εἰς τοὺς τρεῖς δανειστάς του. Ὁ α′ εἶχε δανείσει αὐτὸν 7 500 000 δραχ, ὁ β′ 5 000 000 δραχ. καὶ ὁ γ′ 12 500 000 δραχ. Πόσα θὰ λάβῃ ἕκαστος, ἐὰν ἀφαιρεθοῦν προηγουμένως τὰ ἔξοδα τῆς ἐκκαθαρίσεως, τὰ ὁποῖα ἀνέρχονται εἰς 5°/₀ ;

3. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΕΣΟΥ ΟΡΟΥ

§ 338. *Πρόβλημα.* **Ἕνας ἡμερομίσθιος ἐργάτης ἔλαβε μίαν ἡμέραν 24 000 δραχμάς, τὴν ἄλλην 27 000 δραχ. καὶ τὴν τρίτην 33 000 δραχ. Μὲ πόσον σταθερὸν ἡμερομίσθιον θὰ ἐλάμβανε τὸ αὐτὸ ποσὸν κατὰ τὰς τρεῖς αὐτὰς ἡμέρας;**

Λύσις. Τὰς τρεῖς ἡμέρας ἔλαβε τὸ ὅλον :

$$24\,000 + 27\,000 + 33\,000 = 84\,000 \text{ δραχ.}$$

Ἔπρεπε λοιπὸν νὰ λαμβάνῃ τὴν ἡμέραν :

$$84\,000 \text{ δραχ} : 3 = 28\,000 \text{ δραχ.}$$

Αὐτὸ τὸ ἡμερομίσθιον λέγεται **ἀριθμητικὸν μέσον** ἢ **μέσος ὅρος** τῶν 24 000, 27 000 καὶ 33 000 δραχ. Δηλαδή :

Μέσος ὅρος δύο ἢ περισσοτέρων ἀφῃρημένων ἀριθμῶν ἢ συγκεκριμένων ἀλλὰ ὁμοειδῶν ἀριθμῶν λέγεται τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν διὰ τοῦ ἀριθμοῦ, ὁ ὁποῖος ἐκφράζει τὸ πλῆθος αὐτῶν.

Ἡ χρῆσις τοῦ μέσου ὅρου εἶναι συνηθεστάτη εἰς τὴν στατιστικὴν καὶ εἰς τὰς Φυσικὰς Ἐπιστήμας.

Ἀσκήσεις

731) Ποδηλάτης διήνυσε τὴν α′ ἡμέραν 85,400 χλμ, τὴν β′ 96,500 χλμ, τὴν γ′ 84,700 χλμ. καὶ τὴν δ′ 88 χλμ. Πόσον διήνυσε τὴν ἡμέραν κατὰ μέσον ὅρον ;

732) Ἡ κατωτέρα θερμοκρασία μιᾶς ἡμέρας ἦτο 6°,4 καὶ ἡ ἀνωτέρα 12°,8. Πόση ἦτο ἡ μέση θερμοκρασία τῆς ἡμέρας ;

733) Μαθητής τις ἔλαβεν εἰς τὰ διάφορα μαθήματά του τοὺς ἑξῆς βαθμοὺς 15, 18, 17, 19, 15. Ποῖος εἶναι ὁ μέσος γενικὸς βαθμός του ;

734) Ἡ μεγαλυτέρα ἀπόστασις τοῦ Ἡλίου ἀπὸ τῆς γῆς εἶναι 157 000 000 χλμ, ἡ δὲ μικροτέρα 152 000 000 χλμ. Πόση εἶναι ἡ μέση ἀπόστασις ;

735) Εἰς μίαν πόλιν κατὰ τὸ α' ἑξάμηνον ἑνὸς ἔτους ἀπέθανον κατὰ τὸν μῆνα Ἰανουάριον 75 ἄτομα, κατὰ τὸν Φεβρουάριον 63, κατὰ τὸν Μάρτιον 105, κατὰ τὸν Ἀπρίλιον 84, κατὰ τὸν Μάϊον 60 καὶ κατὰ τὸν Ἰούνιον 45. Πόσος εἶναι ὁ μέσος ὅρος τῶν θανάτων κατὰ μῆνα εἰς τὴν πόλιν αὐτήν ;

736) Ἕνας γεωργὸς ἔσπειρε τὸ παρελθὸν ἔτος δύο ἀγρούς. Ὁ α' ἦτο 12 στρεμμάτων καὶ παρήγαγε 2 300 ὀκάδας σίτου. Ὁ β' ἦτο 8 στρεμμάτων καὶ παρήγαγε 1 500 ὀκ. Πόση ἦτο κατὰ μέσον ὅρον ἡ παραγωγὴ ἑνὸς στρέμματος ἀπὸ τοὺς ἀγροὺς αὐτούς ;

737) Διὰ νὰ εὕρῃ ἕνας Φυσικὸς τὴν ταχύτητα τοῦ ἤχου εἰς τὸν ἀέρα ἔκαμε 4 πειράματα. Κατὰ τὸ α' πείραμα εὗρε ταχύτητα 344 μέτρα κατὰ δευτερόλεπτον, κατὰ τὸ β' 338,5 μ. κατὰ τὸ γ' 342, 10 μ. καὶ κατὰ τὸ δ' 338,4 μ. Πόση ἦτο κατὰ μέσον ὅρον ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου εἰς τὸν ἀέρα ;

4. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΝΑΜΕΙΞΕΩΣ

§ 339. Οἱ ἔμποροι εἰδῶν διατροφῆς, ὅταν ἔχουν διαφόρους ποιότητας ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ πράγματος, π.χ. ἐλαίου, βουτύρου, λίπους, καφὲ κ.λ.π. καὶ δὲν δύνανται νὰ πωλήσουν χωριστὰ τὰ εἴδη αὐτά, εἴτε λόγῳ τῆς ὑπερβολικῆς τιμῆς των εἴτε λόγῳ τῆς κατωτέρας ποιότητός των, ἀναγκάζονται συνήθως νὰ ἀναμειγνύουν τὰς ποιότητας ἑκάστου εἴδους. Σχηματίζουν οὕτως ἕνα μεῖγμα μετρίας ποιότητος καὶ μετρίας ἀξίας, τὸ ὁποῖον δύνανται νὰ πωλήσουν εὐκολώτερον.

§ 340. Πρῶτον εἶδος. *Πρόβλημα.* **Ἕνας λαδέμπορος ἀνέμειξε 50 ὀκ. ὀλαίου τῶν 12 000 δραχ. κατ' ὀκᾶν μὲ 80 ὀκ. τῶν 14 000 δραχ. κατ' ὀκᾶν καὶ μὲ 70 ὀκ τῶν 16 000 δραχ. κατ' ὀκᾶν. Πόσον τιμᾶται ἡ ὀκᾶ τοῦ μείγματος ;**

Λύσις.

Αἱ 50 ὀκ. πρὸς	12 000 δρ.	τὴν	ὀκ.	τιμῶντ.	$12\,000 \times 50 =$	600 000δρ.
» 80 »	»	14 000 »	»	»	»	$14\,000 \times 80 = 1\,120\,000$ »
» 70 »	»	16 000 »	»	»	»	$16\,000 \times 70 = 1\,120\,000$ »

» 200 ὀκ. τοῦ μείγματος τιμῶνται 2 840 000 δρχ.

Ἄρα ἡ 1 ὀκᾶ τοῦ μείγματος τιμᾶται 2 840 000δρ. : 200 = 14 200 δρχ.

Παρατήρησις. Εἰς τὰ προβλήματα αὐτοῦ τοῦ εἴδους δίδονται :

1ον. Τὸ πλῆθος τῶν ὁμοειδῶν μονάδων, αἱ ὁποῖαι ἀναμειγνύονται ἀπὸ κάθε εἶδος.

2ον. Ἡ τιμὴ μιᾶς μονάδος ἀπὸ κάθε εἶδος.

Ζητεῖται δὲ ἡ τιμὴ μιᾶς ὁμοειδοῦς μονάδος τοῦ μείγματος.

Διὰ νὰ εὕρωμεν δὲ αὐτὴν τὴν τιμήν, διαιροῦμεν τὴν τιμὴν τοῦ μείγματος διὰ τοῦ πλήθους τῶν μονάδων αὐτοῦ.

Ἀσκήσεις

738) Ἀλευροπώλης ἀνέμειξεν 150 ὀκ. ἀλεύρου τῶν 2 880 δραχ, κατ' ὀκᾶν μὲ 180 ὀκ. τῶν 2 550 δραχ. κατ' ὀκᾶν. Πόσον πρέπει νὰ πωλῇ τὴν ὀκᾶν τοῦ μείγματος ;

739) Ἕνα βαρέλιον εἶναι πλῆρες οἴνου τῶν 2 250 δραχ. κατ' ὀκᾶν. Ἐξάγομεν τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ περιεχομένου καὶ τὸ ἀντικαθιστῶμεν μὲ οἶνον τῶν 1 950 δραχ. κατ' ὀκᾶν. Πόσον ἀξίζει ἡ ὀκᾶ τοῦ μείγματος ;

740) Παντοπώλης ἀνέμειξεν 80 ὀκ. λίπους τῶν 16 000 δραχ. τὴν ὀκᾶν μὲ 20 ὀκ. βουτύρου τῶν 40 000 δραχ. τὴν ὀκᾶν. Πόσον πρέπει νὰ πωλῇ τὴν ὀκᾶν τοῦ μείγματος, διὰ νὰ κερδίζῃ 25% ἐπὶ τῆς ἀξίας τοῦ μείγματος ;

741) Ἀνέμειξέ τις 50 ὀκ. ἐλαίου τῶν 16 000 δραχ. κατ' ὀκᾶν μὲ 25 ὀκ. τῶν 12 000 δραχ. κατ' ὀκᾶν. Ἐὰν πωλῇ 16 280 δραχ. τὴν ὀκᾶν, πόσον τοῖς ἑκατὸν κερδίζει ;

742) Ἀνέμειξέ τις 5 ὀκ. καφὲ τῶν 24 000 δραχ. τὴν ὀκᾶν μὲ 3 ὀκ. καφὲ τῶν 20 000 δραχ. τὴν ὀκᾶν καὶ 2 ὀκ. καφὲ τῶν 30 000 δραχ. κατ' ὀκᾶν. Τὸ μεῖγμα αὐτὸ καβουρδισθὲν ἔχασε τὸ $\frac{1}{10}$ τοῦ βάρους του. Πόσον πρέπει νὰ πωλήσῃ τὴν ὀκᾶν τοῦ καβουρδισμένου καφέ : 1ον χωρὶς κέρδος καὶ 2ον μὲ κέρδος 20 % ;

§ 341. **Δεύτερον εἶδος.** *Πρόβλημα.* **Ἔμπορος ἔχει βούτυρον τῶν 40 χιλιοδράχμων τὴν ὀκᾶν καὶ λῖπος τῶν 16 χιλιοδρ. τὴν ὀκᾶν. Πόσας ὀκάδας πρέπει νὰ λάβῃ ἀπὸ κάθε εἶδος, διὰ νὰ σχηματίσῃ μεῖγμα 120 ὀκάδων, τὸ ὁποῖον νὰ πωλῇ πρὸς 25 χιλιόδραχμα τὴν ὀκᾶν ;**

Λύσις. Ἡ ἀνάμειξις πρέπει νὰ γίνῃ κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε τὸ κέρδος, τὸ ὁποῖον θὰ προκύψῃ ἐκ τῆς κατωτέρας ποιότητος (λῖπος) νὰ εἶναι ἴσον μὲ τὴν ζημίαν, ἡ ὁποία θὰ προκύψῃ ἐκ τῆς καλυτέρας ποιότητος (βούτυρον).

Ἡ μία ὀκᾶ βουτύρου πωλεῖται χωριστὰ 40 χιλιόδραχμα· ὅταν τεθῇ εἰς τὸ μεῖγμα, θὰ πωλῆται 25 χιλιόδραχμα. Ἄρα θὰ χάνῃ 15 χιλιόδραχμα ἀπὸ κάθε ὀκᾶν βουτύρου.

Ἡ μία ὀκᾶ λίπους πωλεῖται χωριστὰ 16 χιλιόδραχμα· ὅταν ὅμως τεθῇ εἰς τὸ μεῖγμα, θὰ πωλῆται 25 χιλιόδρ. Ἄρα θὰ κερδίζῃ 9 χιλιόδραχμα ἀπὸ κάθε ὀκᾶν λίπους.

Ἐὰν λοιπὸν λάβῃ ἀπὸ τὸ βούτυρον 9 ὀκάδας (δηλ. ὅσα χιλιόδραχμα κερδίζει ἀπὸ τὴν μίαν ὀκᾶν τοῦ λίπους), θὰ χάσῃ εἰς τὸ μεῖγμα 15×9 χιλιόδραχμα, δηλαδὴ 135 χιλιόδραχμα. Ἐὰν λάβῃ ἀπὸ τὸ λῖπος 15 ὀκάδας (δηλ. ὅσα χιλιόδραχμα χάνει ἀπὸ τὴν μίαν ὀκᾶν τοῦ βουτύρου), θὰ κερδίσῃ 9×15 χιλιόδρ, δηλ. 135 χιλιόδραχμα.

Παρατηροῦμεν ὅτι οὔτε θὰ χάνῃ οὔτε θὰ κερδίζῃ ὁ ἔμπορος, ἐὰν λαμβάνῃ ἀπὸ τὸ βούτυρον 9 ὀκ. καὶ ἀπὸ τὸ λῖπος 15 ὀκάδας. Ὥστε κατ᾽ αὐτὴν τὴν ἀναλογίαν πρέπει νὰ γίνῃ ἡ ἀνάμειξις : δηλ. ὅσας φορὰς θὰ λαμβάνῃ 9 ὀκ. ἀπὸ τὸ βούτυρον, τόσας φορὰς πρέπει νὰ λαμβάνῃ ἀπὸ τὸ λῖπος 15 ὀκάδας.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τώρα πόσας ὀκάδας πρέπει νὰ λάβῃ ἀπὸ τὸ βούτυρον καὶ πόσας ἀπὸ τὸ λῖπος, διὰ νὰ σχηματίσῃ μεῖγμα 120 ὀκ, πρέπει νὰ μερίσωμεν τὰς 120 ὀκ. εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 9 καὶ 15. Ἐκτελοῦντες τὸν μερισμὸν εὑρίσκομεν ὅτι πρέπει νὰ λάβῃ :

ἀπὸ τὸ βούτυπον $\frac{120 \times 9}{22} = 45$ ὀκάδας.

καὶ ἀπὸ τὸ λῖπος $\frac{120 \times 15}{24} = 75$ ὀκάδας.

Κατάταξις:

	Ἀξία				Ἀναλογία ἀναμείξεως
120 ὀκ. μεῖγμα	βούτ. 40		9	→ 9	ὀκ. α'
		25			μὲ
	λῖπος 16		15	→ 15	ὀκ. β'
			24		

Σημείωσις. Εἰς τὴν πρᾶξιν σχηματίζομεν τὸν ἀνωτέρω πίνακα, εἰς τὸν ὁποῖον γράφομεν τὴν μίαν κάτωθεν τῆς ἄλλης τὰς τιμὰς τῶν μονάδων δύο ἀναμειγνυομένων εἰδῶν καὶ μεταξὺ αὐτῶν καὶ ὀλίγον δεξιὰ τὴν τιμὴν τῆς μονάδος τοῦ μείγματος. Ἔπειτα εὑρίσκομεν τὰς διαφορὰς 40—25 = 15 καὶ 25—16 = 9 καὶ μερίζομεν τὸν ἀριθμὸν 120 εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς τὰς διαφορὰς αὐτάς. Τὸ μερίδιον, τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν α' διαφοράν, δηλοῖ ὀκάδας λίπους, τὸ δὲ ἄλλο μερίδιον δηλοῖ ὀκάδας βουτύρου.

Παρατήρησις. Εἰς τὰ προβλήματα τοῦ εἴδους αὐτοῦ δίδεται:

1ον. Ἡ τιμὴ μιᾶς μονάδος ἀπὸ ἕνα εἶδος καὶ ἡ τιμὴ μιᾶς μονάδος ἀπὸ ἕνα ἄλλο εἶδος.

2ον. Ἡ τιμὴ μιᾶς μονάδος τοῦ μείγματος.

3ον. Τὸ πλῆθος τῶν μονάδων τοῦ μείγματος.

Ζητεῖται δὲ νὰ εὕρωμεν πόσας μονάδας πρέπει νὰ λάβωμεν ἀπὸ κάθε εἶδος, διὰ νὰ κάμωμεν αὐτὸ τὸ μεῖγμα.

Εἶναι φανερὸν ὅτι ὅλαι αἱ μονάδες αὗται πρέπει νὰ εἶναι ὁμοειδεῖς καὶ ὅτι ἡ τιμὴ τῆς μονάδος τοῦ μείγματος πρέπει νὰ εἶναι μεταξὺ τῶν τιμῶν τῶν μονάδων τῶν εἰδῶν ποὺ ἀναμειγνύονται.

Ἀσκήσεις

Α' Ὁμάς. 743) Ἔχει τις οἶνον τῶν 2 240 δραχ. τὴν ὀκᾶν καὶ τῶν 3 680 δραχ. τὴν ὀκᾶν καὶ θέλει νὰ σχηματίσῃ μεῖγμα 400 ὀκάδων, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ νὰ τιμᾶται 3 200 δραχ. Πόσας ὀκάδας πρέπει νὰ λάβῃ ἐξ ἑκάστου εἴδους;

744) Γεωργὸς ἔχει σῖτον τῶν 2 500 δραχ. κατ' ὀκᾶν καὶ κριθὴν τῶν 1 800 δραχ. κατ' ὀκᾶν καὶ θέλει νὰ σχηματίσῃ μεῖγμα 240 ὀκ. καὶ συνολικῆς ἀξίας 480 000 δρ. Πόσας ὀκάδας πρέπει νὰ λάβῃ ἐξ ἑκάστου εἴδους;

745) Κατὰ ποίαν ἀναλογίαν πρέπει νὰ ἀναμείξωμεν λῖπος τῶν

20 000 δραχ. τὴν ὀκᾶν καὶ βούτυρον τῶν 36 000 δραχ. τὴν ὀκᾶν, διὰ νὰ σχηματίσωμεν μεῖγμα τῶν 24 000 δραχ. τὴν ὀκᾶν ;

Β΄ Ὁ μ ά ς. 746) Ἀνέμειξέ τις 25 ὀκ. ἐλαίου τῶν 14 400 δραχ. τὴν ὀκᾶν μὲ 35 ὀκ. ἄλλου καὶ ἐσχημάτισε μεῖγμα, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ κοστίζει 12 300 δραχ. Πόσον κοστίζει ἡ ὀκᾶ τοῦ δευτέρου εἴδους ;

747) Ἀνέμειξέ τις 130 ὀκ. οἴνου τῶν 3 000 δραχ. κατ' ὀκᾶν μὲ 120 ὀκ. ἄλλου οἴνου καὶ μὲ 50 ὀκ. ὕδατος καὶ ἐσχημάτισε μεῖγμα, τὸ ὁποῖον ἐπώλει πρὸς 3 060 δραχ. τὴν ὀκᾶν. Πόσον ἐκόστιζεν ἡ ὀκᾶ τοῦ οἴνου τοῦ δευτέρου εἴδους ;

748) Ἕνας παντοπώλης ἀνέμειξεν 100 ὀκ. βουτύρου ἀξίας 36 000 δραχ. τὴν ὀκᾶν μὲ λῖπος 24 000 δραχ. τὴν ὀκᾶν. Ἐπώλησε δὲ τὸ μεῖγμα πρὸς 30 000 δραχ. τὴν ὀκᾶν καὶ ἐκέρδισε 300 000 δραχ. Πόσας ὀκάδας λίπους εἶχεν ἀναμείξει ;

749) Πῶς πρέπει νὰ ἀναμείξωμεν λῖπος τῶν 12 000 δραχ. τὴν ὀκᾶν μὲ βούτυρον τῶν 33 000 δραχ. τὴν ὀκᾶν, διὰ νὰ σχηματίσωμεν μεῖγμα, τὸ ὁποῖον νὰ πωλῶμεν πρὸς 21 600 δραχ. τὴν ὀκᾶν, διὰ νὰ κερδίζωμεν 20 °/₀ ἐπὶ τῆς ἀξίας του ;

Λύσις. Εὑρίσκομεν πόσον κοστίζει ἡ ὀκᾶ τοῦ μείγματος, σκεπτόμενοι ὡς ἑξῆς :

Ὅταν πωλῇ τὴν ὀκᾶν	120 δραχ.	τοῦ κοστίζει	100 δραχ.
» » » »	21 600 »	» »	χ »

Ἐπειδὴ τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα, θὰ εἶναι :

$$\chi = 100 \text{ δραχ.} \times \frac{21\ 600}{120} = 18\ 000 \text{ δραχ.}$$

Ἔπειτα λύομεν τὸ πρόβλημα κατὰ τὰ γνωστά.

750) Ἔχει τις δύο εἴδη ἀλεύρου· τοῦ α΄ εἴδους ἡ ὀκᾶ τιμᾶται 4 800 δραχ, τοῦ δὲ β΄ 3 840 δραχ. Πόσας ὀκάδας πρέπει νὰ λάβῃ ἐξ ἑκάστου εἴδους, διὰ νὰ σχηματίσῃ μεῖγμα 1 200 ὀκάδων, τὸ ὁποῖον νὰ πωλῇ πρὸς 5 000 δραχ. τὴν ὀκᾶν, διὰ νὰ κερδίζῃ οὕτως 25 °/₀;

5. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΚΡΑΜΑΤΩΝ

§ 342. Ἐὰν συγχωνεύσωμεν διὰ τήξεως δύο ἢ περισσότερα μέταλλα, λαμβάνομεν ἕνα σῶμα, τὸ ὁποῖον λέγεται **κρᾶμα**. Τὸ ποσὸν τοῦ πολυτίμου μετάλλου (ὅπως εἶναι ὁ χρυσὸς καὶ ὁ ἄργυρος), τὸ ὁποῖον περιέχεται εἰς μίαν μονάδα τοῦ κράματος, λέγεται **τίτλος** ἢ **βαθμὸς καθαρότητος** αὐτοῦ.

Ὁ τίτλος ἐκφράζεται συνήθως εἰς **χιλιοστά**. Π.χ. ὅταν λέγωμεν ὅτι ἕνα χρυσοῦν κόσμημα ἢ ἕνα νόμισμα ἔχει τίτλον 0,900, σημαίνει ὅτι ἐπὶ τῶν 1000 γραμμαρίων τοῦ νομίσματος μόνον τὰ 900 γραμμάρια εἶναι καθαρὸς χρυσὸς καὶ τὰ ἄλλα 100 γραμμάρια εἶναι ἄλλο μέταλλον μὴ πολύτιμον, π.χ. χαλκός.

Ὁ τίτλος τῶν χρυσῶν κοσμημάτων ἐκφράζεται καὶ εἰς **καράτια**. Ὅταν ἕνα κόσμημα εἶναι ἐκ καθαροῦ χρυσοῦ, λέγομεν ὅτι εἶναι 24 καρατίων. Ἂν δὲ ἕνα χρυσοῦν κόσμημα εἶναι 14 καρατίων, ἐννοοῦμεν ὅτι τὰ 14 μέρη του εἶναι καθαρὸς χρυσὸς καὶ τὰ ὑπόλοιπα 10 μέρη του ἄλλα μέταλλα.

Τὰ προβλήματα τῶν κραμάτων λύονται ὅπως καὶ τὰ προβλήματα τῆς μείξεως.

§ 343. *Πρόβλημα 1ον.* **Συγχωνεύομεν 25 γραμ. χρυσοῦ βαθμοῦ καθαρότητος 0,900 μὲ 35 γραμ. ἄλλου χρυσοῦ βαθμοῦ καθαρότητος 0,600. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τίτλος (βαθμὸς καθαρότητος) τοῦ κράματος.**

Λύσις. Τὰ 25 γρ. τοῦ α' εἴδ. περιέχ. 0,900×25=22,5 γρ. καθ. χρυσοῦ
» 35 » » β' » » 0,600×35=21 » » »
» 60 » » κράμ. περιέχουν 43,5 γρ. καθ. χρυσοῦ
» 1 » » » » 43,5 : 60 = 0,725 » »

Ὥστε ὁ τίτλος τοῦ κράματος εἶναι 0,725.

§ 344. *Πρόβλημα 2ον.* **Χρυσοχόος ἔχει δύο εἴδη χρυσοῦ. Τοῦ α' εἴδους ὁ τίτλος εἶναι 0,900, τοῦ δὲ β' 0,750. Θέλει δὲ νὰ σχηματίσῃ κρᾶμα 45 γραμμαρίων καὶ τίτλου 0,800. Πόσον πρέπει νὰ λάβῃ ἐξ ἑκάστου εἴδους;**

Λύσις. Τὸ 1 γραμμάριον τοῦ πρώτου εἴδους ἔχει 0,900 γραμ. καθαροῦ χρυσοῦ. Ἐπειδὴ δὲ τὸ κρᾶμα θὰ ἔχῃ τίτλον 0,800, ἀπὸ 1 γραμ. τοῦ πρώτου εἴδους θὰ περισσεύσῃ εἰς τὸ κρᾶμα 0,900—0,800= 0,100 τοῦ γραμ. καθαροῦ χρυσοῦ.

Τὸ 1 γραμμάριον δευτέρου εἴδους ἔχει 0,750 γραμ. καθαροῦ χρυσοῦ. Ἐπειδὴ τὸ κρᾶμα θὰ ἔχῃ τίτλον 0,800, ἀπὸ 1 γραμ. τοῦ δευτέρου εἴδους θὰ λείπῃ εἰς τὸ κρᾶμα 0,800—0,750=0,050 τοῦ γραμ. καθαροῦ χρυσοῦ.

Ἐὰν λοιπὸν ἀπὸ τὸ πρῶτον εἶδος λάβῃ 0,050 τοῦ γραμ, θὰ ἔχῃ εἰς τὸ κρᾶμα περίσσευμα 0,050×0,100 τοῦ γραμ. καθαροῦ χρυσοῦ

Ἐὰν λάβῃ ἀπὸ τὸ δεύτερον εἶδος 0,100 τοῦ γραμ, θὰ ἔχῃ εἰς τὸ κρᾶμα ἕνα ἔλλειμμα 0,100 × 0,050 τοῦ γραμμ. καθαροῦ χρυσοῦ.

Παρατηροῦμεν ὅτι οὔτε περίσσευμα οὔτε ἔλλειμμα καθαροῦ χρυσοῦ θὰ ὑπάρχῃ εἰς τὸ κρᾶμα, ὅταν λαμβάνωμεν 0,050 γραμ. ἀπὸ τὸ α′ εἶδος καὶ 0,100 γραμ. ἀπὸ τὸ β′ εἶδος· ὥστε κατ' αὐτὴν τὴν ἀναλογίαν πρέπει νὰ γίνῃ ἡ συγχώνευσίς των.

Ἐπειδὴ θέλομεν νὰ σχηματίσωμεν κρᾶμα 45 γραμ, πρέπει νὰ μερίσωμεν τὸν ἀριθμὸν 45 εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 0,050 καὶ 0,100 ἢ τῶν ἀριθμῶν 5 καὶ 10. Ἐκτελοῦντες τὸν μερισμόν, εὑρίσκομεν ὅτι πρέπει νὰ λάβωμεν :

ἀπὸ τὸ α′ εἶδος $\frac{45 \times 5}{15} = 15$ γραμ. καὶ ἀπὸ τὸ β′ εἶδος $\frac{45 \times 10}{15} = 30$ γραμ.

Κατάταξις :

					Ἀναλογία συντήξεως
45 γρ.	α) 0,900	0,800	→ 0,050 ἢ	⟶	5 ἀπὸ τὸ α′
	β) 0,750		→ 0,100 ἢ	⟶	$\frac{10}{15}$ » » β′

Ἀσκήσεις

751) Ἕνας χρυσοχόος ἔτηξε μαζὶ 30 γραμμάρια ἀργυροῦ κράματος τίτλου 0,850 μὲ 12 γραμμάρια ἄλλου ἀργυροῦ κράματος τίτλου 0,880. Πόσος εἶναι ὁ τίτλος τοῦ κράματος, τὸ ὁποῖον ἐσχηματίσθη ἀπὸ αὐτά ;

752) Ἕνας χρυσοχόος ἔτηξε μίαν χρυσῆν λίραν Ἀγγλίας μαζὶ μὲ μίαν ἀργυρᾶν δραχμὴν τῆς Λ.Ν.Ε. Μὲ τὸ κρᾶμα δὲ αὐτῶν ἔκαμεν ἕνα χρυσοῦν κόσμημα. Πόσος εἶναι ὁ τίτλος αὐτοῦ ;

753) Ἕνας χρυσοχόος ἔχει δύο κράματα ἀργύρου. Τὸ α′ ἔχει τίτλον 0,900 καὶ τὸ β′ 0,870. Θέλει δὲ νὰ κάμῃ νέον κρᾶμα βάρους 50 γραμμαρίων μὲ τίτλον 0,890. Πόσον πρέπει νὰ λάβῃ ἀπὸ κάθε εἶδος ;

754) Ἕνας χρυσοχόος ἔτηξε 50 γραμμάρια χρυσοῦ κράματος τίτλου 0,920 μὲ ἄλλο κρᾶμα τίτλου 0,900. Τὸ κρᾶμα τούτων ἔχει τίτλον 0,9125. Πόσα γραμμάρια ἔθεσεν ἀπὸ τὸ β′ κρᾶμα ;

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΠΡΑΞΕΩΝ

§ 345. Εἰς τὸ Α΄ βιβλίον ἐμάθομεν ὅτι ἡ ἐκτέλεσις τῶν 4 πράξεων στηρίζεται ἐπὶ διαφόρων ἰδιοτήτων, τὰς ὁποίας συνηγάγομεν ἐκ τῆς διπλῆς λύσεως προβλημάτων τινῶν μὲ συγκεκριμένους ἀριθμούς. Ἐνταῦθα θὰ δικαιολογήσωμεν τὰς ἰδιότητας ἐκείνας, καθὼς καὶ ἄλλας, μὲ γενικωτέραν μέθοδον.

1. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΙΣΟΤΗΤΟΣ ΤΩΝ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

§ 346. Ἰδιότης Ι. Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι $\alpha=5$ καὶ $\beta=5$. Καθένας λοιπὸν ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς α καὶ β ἔχει 5 μονάδας, δηλ. τὸ αὐτὸ πλῆθος μονάδων. Εἶναι λοιπὸν $\alpha=\beta$. Ὁμοίως ἐννοοῦμεν ὅτι:

Ἂν $\alpha = \beta$ καὶ $\gamma = \beta$, θὰ εἶναι καὶ $\alpha = \gamma$. Ὥστε:

Ἂν δύο ἀριθμοὶ εἶναι ἴσοι πρὸς τρίτον, θὰ εἶναι καὶ μεταξύ των ἴσοι.

Ἡ ἰδιότης αὐτὴ ἐκφράζεται καὶ ὡς ἑξῆς:

Ἐὰν δύο ἰσότητες ἔχουν τὰ δεύτερα μέλη των ἴσα, θὰ ἔχουν ἴσα καὶ τὰ πρῶτα μέλη των.

§ 347. Ἰδιότης ΙΙ. Ἔστω ὅτι $\alpha = 5$. Ἂν προσθέσωμεν ἀπὸ μίαν μονάδα εἰς τὸν α καὶ εἰς τὸν 5, τὰ δύο ἀθροίσματα θὰ ἔχουν ἴσον πλῆθος μονάδων. Θὰ εἶναι λοιπὸν $\alpha + 1 = 5 + 1$.

Ἂν δὲ εἰς αὐτοὺς τοὺς ἴσους ἀριθμοὺς $\alpha + 1$ καὶ $5 + 1$ προσθέσωμεν ἀπὸ μίαν μονάδα, εὑρίσκομεν $\alpha + 2 = 5 + 2$· ὁμοίως ἔπειτα $\alpha + 3 = 5 + 3$, $\alpha + 4 = 5 + 4$ κ.τ.λ. Καὶ γενικῶς $\alpha + \mu = 5 + \mu$, ὁσασδήποτε μονάδας καὶ ἂν ἔχῃ ὁ ἀριθμὸς μ. Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι:

Ἂν εἰς ἴσους ἀριθμοὺς προσθέσωμεν τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, εὑρίσκομεν ἴσα ἀθροίσματα.

Ἡ ἰδιότης αὕτη ἐκφράζεται καὶ ὡς ἑξῆς:

Ἐὰν προσθέσωμεν καὶ εἰς τὰ δύο μέλη μιᾶς ἰσότητος τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, προκύπτει πάλιν ἰσότης.

§ 348. Ἰδιότης III. Ἔστωσαν δύο ἴσοι ἀριθμοὶ α καὶ β. Εἶναι φανερὸν ὅτι ὅσας μονάδας ἔχει ὁ α, ἄλλας τόσας μονάδας ἔχει καὶ ὁ β. Ἐὰν προσθέσωμεν εἰς αὐτοὺς ἀντιστοίχως δύο ἴσους ἀριθμοὺς α′ καὶ β′, θὰ εὕρωμεν προφανῶς δύο νέους ἴσους ἀριθμούς. Εἰς τοὺς νέους αὐτοὺς ἀριθμοὺς δυνάμεθα ἐπίσης νὰ προσθέσωμεν ἀντιστοίχως δύο ἴσους ἀριθμοὺς α″ καὶ β″ καὶ οὕτω καθεξῆς.

Οὕτως, ἐὰν εἶναι $\alpha = \beta, \quad \alpha' = \beta', \quad \alpha'' = \beta'', \ldots$

θὰ εἶναι καὶ $\alpha + \alpha' + \alpha'' + \ldots = \beta + \beta' + \beta'' + \ldots$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι:

Ἐὰν προσθέσωμεν δύο ἢ περισσοτέρας ἰσότητας κατὰ μέλη, προκύπτει πάλιν ἰσότης.

§ 349. Ἰδιότης IV. Ἔστω ὅτι $\alpha=5$. Ἂν ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ μίαν μονάδα καὶ ἀπὸ τοὺς δύο ἴσους ἀριθμοὺς α καὶ 5, τὰ ὑπόλοιπα θὰ ἔχουν ἴσον πλῆθος μονάδων. Θὰ εἶναι δηλ. $\alpha - 1 = 5 - 1$.

Ἂν δὲ πάλιν ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ μίαν μονάδα ἀπὸ αὐτὰ τὰ ἴσα ὑπόλοιπα, τὰ νέα ὑπόλοιπα θὰ ἔχουν ἴσον πλῆθος μονάδων. Θὰ εἶναι δηλ. $\alpha - 2 = 5 - 2$.

Κατ᾿ αὐτὸν τὸν τρόπον ἐννοοῦμεν ὅτι:

Ἂν $\alpha = \beta$, θὰ εἶναι καὶ $\alpha - \mu = \beta - \mu$, ἂν $\alpha > \mu$. Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι:

Ἂν ἀπὸ ἴσους ἀριθμοὺς ἀφαιρέσωμεν τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, εὑρίσκομεν ἴσα ὑπόλοιπα.

Ἡ ἰδιότης αὐτὴ ἐκφράζεται καὶ ὡς ἑξῆς:

Ἐὰν ἀφαιρέσωμεν καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέλη μιᾶς ἰσότητος τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, προκύπτει πάλιν ἰσότης.

§ 350. Ἰδιότης V. Μὲ ἀναλόγους συλλογισμοὺς πρὸς ἐκείνους, ποὺ ἐκάμαμεν εἰς τὴν § 348 εὑρίσκομεν ὅτι, ἐὰν εἶναι $\alpha = \beta$ καὶ $\alpha' = \beta'$, θὰ εἶναι $\alpha - \alpha' = \beta - \beta'$, ἀρκεῖ νὰ εἶναι $\alpha > \alpha'$. Δηλαδή:

Ἐὰν ἀφαιρέσωμεν δύο ἰσότητας κατὰ μέλη, προκύπτει πάλιν ἰσότης.

§ 351. Ἰδιότης VI. Ἂν $\alpha = \beta$, κατὰ τὴν ἰδιότητα II (§ 347), θὰ εἶναι καὶ $\alpha + \alpha = \beta + \beta$ ἢ $\alpha \cdot 2 = \beta \cdot 2$.

Ἀπὸ αὐτὴν δὲ εὑρίσκομεν ὅτι:

$$\alpha + \alpha + \alpha = \beta + \beta + \beta \text{ κ.τ.λ. ἢ } \alpha \cdot 3 = \beta \cdot 3.$$

Γενικῶς $\quad \alpha \cdot \mu = \beta \cdot \mu.$

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι:

Ἂν πολλαπλασιάσωμεν δύο ἴσους ἀριθμοὺς ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀκέραιον, εὑρίσκομεν ἴσα γινόμενα.

Ἡ ἰδιότης αὐτὴ ἐκφράζεται καὶ ὡς ἑξῆς:

α΄) Τὰ ἰσοπολλαπλάσια ἴσων ἀριθμῶν εἶναι ἴσοι ἀριθμοί.

β΄) Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη μιᾶς ἰσότητος ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀκέραιον, προκύπτει πάλιν ἰσότης.

§ 352. Ἰδιότης VII. Ἔστω $\alpha = \beta$. Ἂν διαιρέσωμεν τὸν α διὰ 3, εὑρίσκομεν ἕνα πηλίκον, ἔστω Π. Ἐπίσης, ἂν διαιρέσωμεν τὸν β διὰ 3, εὑρίσκομεν ἕνα πηλίκον Π΄. Δηλαδὴ εἶναι:

$\alpha : 3 = \Pi$ καὶ $\beta : 3 = \Pi'$ (Π καὶ Π΄ ὑποτίθενται ἀκέραιοι).

Ἀπὸ αὐτὰς εὑρίσκομεν: $\quad \alpha = 3 \cdot \Pi$ καὶ $\beta = 3 \cdot \Pi'$.

Ἀπὸ τὰς τελευταίας ἰσότητας βλέπομεν ὅτι, ἂν ὁ 3 ἐπαναληφθῇ Π φοράς, γίνεται α. Ἂν δὲ ὁ 3 ἐπαναληφθῇ Π΄ φοράς, γίνεται β, ἤτοι πάλιν α. Ἑπομένως θὰ εἶναι $\Pi = \Pi'$. Ἤτοι $\alpha : 3 = \beta : 3$.

Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν ὅτι $\alpha : \mu = \beta : \mu$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι:

Ἐὰν διαιρέσωμεν δύο ἴσους ἀκεραίους διά τινος διαιρέτου των, εὑρίσκομεν ἴσα πηλίκα.

Ἡ ἰδιότης αὐτὴ ἐκφράζεται καὶ ὡς ἑξῆς:

Ἐὰν διαιρέσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη μιᾶς ἰσότητος διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀκεραίου (διαιρέτου), προκύπτει πάλιν ἰσότης.

Ἀσκήσεις

1) Ἂν $\chi = \psi$ καὶ $\alpha \neq 0$, συγκρίνατε τοὺς ἀριθμοὺς $\alpha\chi + \beta$ καὶ $\alpha\psi + \beta$.

2) Ἂν $\chi - 3 = 7$, νὰ εὑρεθῇ ὁ χ.

3) Ἂν $\chi + 2 = 8$, νὰ εὑρεθῇ ὁ χ.

4) Ἂν $\chi = \psi$, $\mu \neq 0$ καὶ $\alpha = \beta$, συγκρίνατε τοὺς ἀριθμοὺς $\mu\chi - \alpha$ καὶ $\mu\psi - \beta$.

2. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΑΝΙΣΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

§ **353. Ἰδιότης I.** Ἔστω ὅτι $α > 6$. Τοῦτο σημαίνει ὅτι μερικαὶ μονάδες τοῦ α δὲν ἔχουν ἀντιστοίχους μονάδας εἰς τὸν 6.

Ἂν εἰς τοὺς αὐτοὺς ἀριθμοὺς α καὶ 6 προσθέσωμεν ἀπὸ μίαν μονάδα, εὑρίσκομεν τοὺς ἀριθμοὺς $α + 1$ καὶ $6 + 1 = 7$.

Ἐπειδὴ δὲ αὐταὶ αἱ προστεθεῖσαι μονάδες ἀντιστοιχοῦν πρὸς ἀλλήλας, ὅσαι μονάδες τοῦ α δὲν εἶχον ἀντιστοίχους εἰς τὸν 6, αὐταὶ αἱ μονάδες τοῦ $α + 1$ δὲν θὰ ἔχουν ἀντιστοίχους εἰς τὸν $6 + 1$.

Θὰ εἶναι λοιπον $\quad α + 1 > 6 + 1.$

Διὰ τὸν ἴδιον λόγον ἀπὸ τὴν ἀνισότητα $α + 1 > 6 + 1$ προκύπτει ἡ ἀνισότης $\quad α + 2 > 6 + 2$
ἀπὸ αὐτὴν ἡ $\quad α + 3 > 6 + 3$ καὶ
οὕτω καθ' ἑξῆς $α + μ > β + μ$, ὁσασδήποτε μονάδας καὶ ἂν ἔχῃ ὁ μ.

Γενικῶς λοιπόν: Ἂν $α > β$, θὰ εἶναι καὶ $α + μ > β + μ$. Ὥστε:

Ἂν εἰς ἀνίσους ἀριθμοὺς προσθέσωμεν τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, εὑρίσκομεν ὁμοίως ἄνισα ἀθροίσματα.

Δηλαδὴ εὑρίσκομεν μεγαλύτερον ἄθροισμα ἀπὸ τὸν μεγαλύτερον ἀριθμὸν καὶ μικρότερον ἄθροισμα ἀπὸ τὸν μικρότερον ἀριθμόν.

§ **354. Ἰδιότης II.** Ἔστω ὅτι $α > 8$ καὶ $β > 10$. Κατὰ τὴν προηγουμένην ἰδιότητα θὰ εἶναι:

$$α + β > 8 + β \quad \text{καὶ} \quad 8 + β > 8 + 10.$$

Ἀπὸ αὐτὰς λοιπὸν τὰς ἀνισότητας βλέπομεν ὅτι ὁ $α + β$ εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν μεγαλύτερον τῶν δύο ἄλλων ἀριθμῶν $8 + β$ καὶ $8 + 10$. Κατὰ μείζονα λοιπὸν λόγον θὰ εἶναι $α + β > 8 + 10$.
Ὁμοίως ἐννοοῦμεν ὅτι:

Ἂν $α > β$ καὶ $γ > δ$, θὰ εἶναι καὶ $α + γ > β + δ$. Ὥστε:

Ἂν εἰς ἀνίσους ἀριθμοὺς προσθέσωμεν ἀνίσους, ἀλλὰ τὸν μεγαλύτερον εἰς τὸν μεγαλύτερον καὶ τὸν μικρότερον εἰς τὸν μικρότερον, προκύπτουν ἀριθμοὶ ὁμοίως ἄνισοι.

§ **355. Ἰδιότης III.** Ἀπὸ τὰς ἀνισότητας $α > β$ καὶ $α > β$ κατὰ τὴν προηγουμένην ἰδιότητα εὑρίσκομεν ὅτι:

$$α + α > β + β \quad ἢ \quad α \cdot 2 > β \cdot 2.$$

Ἀπὸ δὲ τὰς ἀνισότητας $\alpha+\alpha > \beta+\beta$ καὶ $\alpha > \beta$ προκύπτει ἡ ἀνισότης $\alpha+\alpha+\alpha > \beta+\beta+\beta$ ἢ $\alpha \cdot 3 > \beta \cdot 3$.

Ἂν δὲ ἐξακολουθήσωμεν κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον, ἐννοοῦμεν ὅτι καὶ $\alpha \cdot \mu > \beta \cdot \mu$, οἱοσδήποτε $\neq 0$ καὶ ἂν εἶναι ὁ μ. Ὥστε:

Ἂν πολλαπλασιάσωμεν δύο ἀνίσους ἀριθμοὺς ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀκέραιον $\neq 0$, εὑρίσκομεν ὁμοίως ἄνισα γινόμενα.

Ἡ ἰδιότης αὐτὴ ἐκφράζεται καὶ ὡς ἑξῆς:

Τὰ ἰσοπολλαπλάσια ἀνίσων ἀριθμῶν εἶναι ὁμοίως ἄνισοι ἀριθμοί.

§ 356. Ἰδιότης IV. Ἔστω ὅτι $\alpha > \beta$ καὶ $\alpha : 3 = \pi$, $\beta : 3 = \pi'$.

Ἀπὸ τὰς ἰσότητας αὐτὰς εὑρίσκομεν ὅτι:

$\alpha = 3 \cdot \pi$ καὶ $\beta = 3 \cdot \pi'$ (π καὶ π' ὑποτίθενται ἀκέραιοι).

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι, ἂν ὁ 3 ἐπαναληφθῇ π' φοράς, γίνεται β.

Ἐπειδὴ δὲ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι $\alpha > \beta$, πρέπει ὁ 3 νὰ ἐπαναληφθῇ περισσοτέρας ἀπὸ π' φοράς, διὰ νὰ δώσῃ τὸν α. Ἄρα πρέπει νὰ εἶναι:

$$\pi > \pi' \quad \text{ἢ} \quad \alpha : 3 > \beta : 3$$

Ὥστε:

Ἂν διαιρέσωμεν δύο ἀνίσους ἀριθμοὺς διά τινος διαιρέτου των, εὑρίσκομεν ὁμοίως ἄνισα πηλίκα.

Ἀσκήσεις

5) Ἂν εἶναι $\chi > \psi$ καὶ $\alpha \neq 0$, συγκρίνατε τοὺς ἀριθμοὺς $\alpha\chi+\beta$ καὶ $\alpha\psi+\beta$.

6) Ἂν εἶναι $\chi > \psi$, $\alpha \neq 0$ καὶ $\gamma = \delta$, συγκρίνατε τοὺς ἀριθμοὺς $\alpha\chi+\gamma$ καὶ $\alpha\psi+\delta$.

7) Ἂν εἶναι $\chi > \psi$, $\alpha > \beta$ καὶ $\gamma > \delta$, συγκρίνατε τοὺς ἀριθμοὺς $\alpha\chi$ καὶ $\beta\psi$. Ἔπειτα δὲ τοὺς ἀριθμοὺς $\alpha\chi+\gamma$ καὶ $\beta\psi+\delta$.

3. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΠΡΟΣΘΕΣΕΩΣ

§ 357. *Θεώρημα I.* **Τὸ ἄθροισμα πολλῶν ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται καθ' οἱανδήποτε τάξιν καὶ ἂν προστεθοῦν αὐτοί.**

Ἔστω τὸ ἄθροισμα $3+5+7+4$· λέγω (= θὰ ἀποδείξω) ὅτι τοῦτο εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα $4+5+7+3$, ὅπου τὸ β' ἄθροισμα προέκυψεν ἐκ τοῦ α' δι' ἀλλαγῆς τῆς τάξεως τῶν προσθετέων. Δηλαδὴ λέγω ὅτι: $3+5+7+4 = 4+5+7+3$.

Ἀπόδειξις. Διότι ἕκαστον ἐκ τῶν ἀθροισμάτων τούτων ἀποτελεῖται ἐκ τῶν μονάδων τῶν προσθετέων 3, 5, 7, 4, καὶ μόνον ἐξ αὐτῶν. Συνεπῶς εἰς ἑκάστην μονάδα τοῦ α΄ ἀθροίσματος ἀντιστοιχεῖ μία μονὰς τοῦ β΄ καὶ ἀντιστρόφως εἰς ἑκάστην μονάδα τοῦ β΄ ἀθροίσματος ἀντιστοιχεῖ μία τοῦ α΄. Θὰ εἶναι λοιπὸν

$$3+5+7+4=4+5+7+3.$$

Γενικῶς θὰ εἶναι: $\boxed{\alpha+\beta+\gamma+\delta=\beta+\gamma+\delta+\alpha}$

Σημείωσις. Ἡ ἰδιότης αὐτὴ εἶναι **θεμελιώδης**, διότι ἐπ' αὐτῆς στηρίζεται ἡ ἀπόδειξις τῶν ἄλλων ἰδιοτήτων τῆς προσθέσεως.

Λέγεται δὲ καὶ **ἰδιότης τῆς ἀντιμεταθέσεως**, ὡς καὶ ἄλλοτε εἴπομεν (§ 30).

§ 358. Ὁρισμοί. Διὰ σειρᾶς συλλογισμῶν ἐπείσθημεν ὅτι ἡ πρότασις τῆς § 357 εἶναι ἀληθής.

Σειρὰ συλλογισμῶν ἢ καὶ ἕνας συλλογισμός, διὰ τῶν ὁποίων πειθόμεθα ὅτι μία πρότασις εἶναι ἀληθής, λέγεται **ἀπόδειξις**.

Κάθε δὲ πρότασις, τῆς ὁποίας ἡ ἀλήθεια γίνεται φανερὰ διὰ τῆς ἀποδείξεως, λέγεται **θεώρημα**.

Ὥστε ἡ πρότασις τῆς § 357 εἶναι ἕνα θεώρημα.

§ 359. *Θεώρημα ΙΙ.* **Τὸ ἄθροισμα δοθέντων ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται, ἂν μερικοὶ προσθετέοι ἀντικατασταθοῦν μὲ τὸ ἄθροισμά των.**

Ἔστω τὸ ἄθροισμα $5+8+7+4$. Λέγω ὅτι τοῦτο εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα $5+12+7$, τὸ ὁποῖον προέκυψεν ἐκ τοῦ δοθέντος ἀθροίσματος, ἀφοῦ ἀντικατεστήσαμεν τοὺς προσθετέους 8 καὶ 4 διὰ τοῦ ἀθροίσματός των 12.

Δηλαδὴ λέγω ὅτι: $5+8+7+4=5+12+7$.

Ἀπόδειξις. Διότι, κατὰ τὴν θεμελιώδη ἰδιότητα τῆς προσθέσεως, τὸ ἄθροισμα $5+8+7+4$ εἶναι ἴσον μὲ τὸ $8+4+5+7$. Ἵνα εὕρωμεν ὅμως τὸ ἄθροισμα $8+4+5+7$, πρέπει εἰς τὸν 8 νὰ προσθέσωμεν τὸν 4, εἰς τὸ ἄθροισμα 12 νὰ προσθέσωμεν τὸν 5

Περίληψις ἀποδείξεως

$$\begin{aligned}5+8+7+4&=8+4+5+7\\&=12+5+7\\&=5+12+7\end{aligned}$$

κ.ο.κ. Ἐὰν ὅμως σταματήσωμεν τὴν πρόσθεσιν μέχρι τοῦ 5, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον δὲν βλάπτει, τὸ ἐξαγόμενον τότε θὰ εἶναι :

$$8+4+5+7=12+5+7 \quad (1)$$

Ἀλλὰ καὶ

$$12+5+7=5+12+7 \quad (2)$$

Ἀπὸ τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) βλέπομεν ὅτι οἱ ἀριθμοὶ $8+4+5+7$ καὶ $5+12+7$ εἶναι ἴσοι πρὸς τὸν ἀριθμὸν $12+5+7$· ἄρα, κατὰ τὴν ἰδιότητα τῆς § 346, θὰ εἶναι :
$8+4+5+7=5+12+7$ καὶ ἐπειδὴ ἔχομεν $5+8+7+4=$ $=8+4+5+7$, ἕπεται ὅτι : $5+8+7+4=5+12+7$.

Γενικῶς θὰ εἶναι :

$$\boxed{\alpha+\beta+\gamma+\delta+\epsilon=\alpha+(\beta+\delta)+\gamma+\epsilon=\alpha+(\beta+\delta+\epsilon)+\gamma}$$

Ἡ ἰδιότης αὐτὴ λέγεται **συνθετική**.

§ 360. *Θεώρημα III.* **Ἐὰν εἰς ἄθροισμα ἀντικαταστήσωμεν προσθετέον τινὰ μὲ ἄλλους, οἱ ὁποῖοι ἔχουν αὐτὸν ὡς ἄθροισμα, τὸ ἀρχικὸν ἄθροισμα δὲν μεταβάλλεται.**

Ἡ ἀπόδειξις τοῦ θεωρήματος εἶναι ἄμεσος συνέπεια τῆς προηγουμένης ἰδιότητος.

Πράγματι, ἐὰν ἐναλλάξωμεν τὰ μέλη τῆς εὑρεθείσης ἰσότητος $5+8+7+4=5+12+7$, θὰ εἶναι $5+12+7=5+8+7+4$.

Γενικῶς θὰ εἶναι : $\boxed{\alpha+(\beta+\gamma)+\delta=\alpha+\beta+\gamma+\delta}$

Ἡ ἰδιότης αὐτὴ λέγεται **ἀναλυτική**.

§ 361. *Θεώρημα IV.* **Διὰ νὰ προσθέσωμεν ἀριθμὸν εἰς ἄθροισμα, ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν αὐτὸν εἰς ἕνα ἀπὸ τοὺς προσθετέους τοῦ ἀθροίσματος, τοὺς δὲ ἄλλους νὰ ἀφήσωμεν ὅπως ἔχουσιν.**

Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ προσθέσωμεν τὸν ἀριθμὸν 8 εἰς τὸ ἄθροισμα $7+5+6$, ἤτοι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα $(7+5+6)+8$. Λέγω ὅτι εἶναι $(7+5+6)+8=7+13+6$, ὅπου ὁ 13 προέκυψεν ἐκ τῆς προσθέσεως τοῦ 8 καὶ τοῦ 5.

Ἀπόδειξις. Διότι, ἐὰν εἰς τὸ ἄθροισμα $(7+5+6)+8$ ἀντικαταστήσωμεν τὸν προσθετέον $(7+5+6)$ διὰ τῶν προσθετέων 7, 5, 6, οἱ ὁποῖοι ἔχουν τὸ αὐτὸ ἄθροισμα, θὰ ἔχωμεν :

	Περίληψις ἀποδείξεως
$(7+5+6)+8=7+5+6+8$	$(7+5+7)+8=7+5+6+8$
ἀλλὰ $7+5+6+8=7+13+6$ (διατί;)	$=7+13+6$

Ἄρα θὰ εἶναι καὶ $(7+5+6)+8=7+13+6$.

Γενικῶς θὰ εἶναι : $\boxed{(\alpha+\beta+\gamma)+\delta=\alpha+(\beta+\delta)+\gamma}$

§ 362. *Θεώρημα V*. **Διὰ νὰ προσθέσωμεν ἀθροίσματα, σχηματίζομεν ἕνα ἄθροισμα, τὸ ὁποῖον νὰ περιέχῃ ὅλους τοὺς προσθετέους τῶν δοθέντων ἀθροισμάτων καὶ μόνον αὐτούς.**

Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ προσθέσωμεν τὰ ἀθροίσματα :

$$\alpha+\beta+\gamma \quad \text{καὶ} \quad \delta+\varepsilon+\zeta,$$

ἤτοι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα : $(\alpha+\beta+\gamma)+(\delta+\varepsilon+\zeta)$.

Λέγω ὅτι :

$$(\alpha+\beta+\gamma)+(\delta+\varepsilon+\zeta)=\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta.$$

Ἀπόδειξις. Διότι, ἐὰν εἰς τὸ ἄθροισμα $(\alpha+\beta+\gamma)+(\delta+\varepsilon+\zeta)$ ἀντικαταστήσωμεν τὸν προσθετέον $(\alpha+\beta+\gamma)$ διὰ τῶν προσθετέων α, β, γ, οἱ ὁποῖοι ἔχουν τὸ αὐτὸ ἄθροισμα καὶ τὸν προσθετέον $(\delta+\varepsilon+\zeta)$ διὰ τῶν προσθετέων δ, ε, ζ, οἱ ὁποῖοι ἔχουν τὸ αὐτὸ ἄθροισμα, θὰ ἔχωμεν :

$$\boxed{(\alpha+\beta+\gamma+)+(\delta+\epsilon+\zeta)=\alpha+\beta+\gamma+\delta+\epsilon+\zeta}$$

Ἀσκήσεις

8) Διατί ἀρχίζομεν τὴν πρόσθεσιν ἐκ δεξιῶν ; εἰς ποίαν περίπτωσιν δυνάμεθα νὰ τὴν ἀρχίσωμεν ἐξ οἱασδήποτε στήλης ;

9) Ποίαν μεταβολὴν ὑφίσταται τὸ ἄθροισμα $18+27+32$, ἐὰν αὐξήσωμεν τὸν 18 κατὰ 12 καὶ τὸν 32 κατὰ 8 ;

10) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $(14+19+32)+7=70+2$.

11) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $45+12+21+19+23=40+80$.

12) Νὰ μετασχηματισθῇ τὸ ἄθροισμα $32+14+3+11$ εἰς ἄθροισμα ἰσοδύναμον δύο προσθετέων, οἱ ὁποῖοι νὰ λήγουν εἰς 5.

13) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $(13+28)+(35+22+9)+(7+3)=55+62$.

14) Τί γίνεται τὸ ἄθροισμα πέντε ἀριθμῶν, ὅταν τοὺς αὐξήσωμεν ἀντιστοίχως κατὰ 11, 12, 25, 47, 65 ;

Περίληψις τῶν ἰδιοτήτων τῆς προσθέσεως

1.	$\alpha+\beta+\gamma+\delta$	$=\beta+\delta+\gamma+\alpha$
2.	$\alpha+\beta+\gamma+\delta$	$=\alpha+(\beta+\gamma)+\delta$
3.	$\alpha+(\beta+\gamma)+\delta$	$=\alpha+\beta+\gamma+\delta$
4.	$(\alpha+\beta+\gamma)+\delta$	$=\alpha+(\beta+\delta)+\gamma$
5.	$(\alpha+\beta+\gamma)+(\delta+\varepsilon)$	$=\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon$

4. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΑΦΑΙΡΕΣΕΩΣ

§ 363. *Θεώρημα I.* **Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀριθμὸν ἀπὸ ἄθροισμα, δυνάμεθα νὰ ἀφαιρέσωμεν αὐτὸν ἀπὸ ἕνα μόνον προσθετέον τοῦ ἀθροίσματος, τοὺς δὲ ἄλλους νὰ ἀφήσωμεν ὅπως ἔχουν.**

Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν 6 ἀπὸ τὸ ἄθροισμα $(8+4+9)$, ἤτοι νὰ εὕρωμεν τὴν διαφορὰν $(8+4+9)-6$.

Λέγω ὅτι $(8+4+9)-6=8+4+3$ (ἀφῄρεσα τὸν 6 ἀπὸ τὸν 9).

Ἀπόδειξις. Διότι, ἐὰν προσθέσωμεν εἰς τὴν κατ᾽ αὐτὸν τὸν τρόπον εὑρεθεῖσαν διαφοραν $8+4+3$ τὸν ἀφαιρετέον 6, θὰ εὕρωμεν τὸν μειωτέον. Πράγματι ἔχομεν $(8+4+3)+6=8+4+9$ (διατί ;)

Γενικῶς θὰ εἶναι : $\boxed{(\alpha+\beta+\gamma)-\delta=\alpha+(\beta-\delta)+\gamma}$, ἐὰν $\beta > \delta$

§ 364. *Πόρισμα.* **Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ ἕνα ἄθροισμα ἕνα ἐκ τῶν προσθετέων του, ἀρκεῖ νὰ ἐξαλείψωμεν ἕνα προσθετέον ἴσον πρὸς αὐτόν.**

Ἔστω ὅτι ἔχομεν νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸ ἄθροισμα $(10+8+7)$ ἕνα ἐκ τῶν προσθετέων του, π.χ. τὸν 7, ἤτοι νὰ εὕρωμεν τὴν διαφορὰν $(10+8+7)-7$.

Λέγω ὅτι $(10+8+7)-7=10+8$ (ἐξήλειψα τὸν 7).

Ἀπόδειξις. Κατὰ τὴν προηγουμένην ἰδιότητα θὰ εἶναι : $(10+8+7)-7=10+8+(7-7)$. Ἀλλὰ $7-7=0$. Ὅθεν

$$(10+8+7)-7=10+8.$$

Γενικῶς θὰ εἶναι : $\boxed{(\alpha+\beta+\gamma)-\beta=\alpha+\gamma.}$

Πόρισμα καλεῖται κάθε πρότασις, τῆς ὁποίας ἡ ἀλήθεια συνάγεται ἀμέσως ἐκ μιᾶς ἢ περισσοτέρων ἀληθῶν προτάσεων.

§ 365. *Θεώρημα II.* **Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἄθροισμα ἀπὸ ἀριθμόν, δυνάμεθα νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν τὸν πρῶτον προσθετέον τοῦ ἀθροίσματος, ἀπὸ τὸ ὑπόλοιπον τὸν δεύτερον, ἀπὸ τὸν νέον ὑπόλοιπον τὸν τρίτον κ.ο.κ, μέχρις ὅτου ἀφαιρεθοῦν ὅλοι οἱ προσθετέοι.**

Ἔστω ὅτι θέλομεν ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν 100 νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ ἄθροισμα $8 + 12$, ἤτοι νὰ εὕρωμεν τὴν διαφορὰν $100 - (8 + 12)$. Λέγω ὅτι ἀρκεῖ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸν 100 τὸν 8 καὶ ἀπὸ τὸ ὑπόλοιπον $(100 - 8)$ νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸν 12, ἤτοι λέγω ὅτι :

$$100 - (8 + 12) = (100 - 8) - 12.$$

Ἀπόδειξις. Ἐὰν ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν 100 ἀφαιρέσωμεν τὸ ἄθροισμα $8 + 12$ ἢ τὸ ἴσον του 20, εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον 80.

Θὰ εἶναι λοιπὸν $100 - (8 + 12) = 80$ (1)

ἤ, κατὰ τὸν γενικὸν ὁρισμὸν τῆς ἀφαιρέσεως (§ 43),

$$100 = (8 + 12) + 80 \quad \text{ἢ} \quad 100 = 8 + 12 + 80, \qquad (2)$$

ἐπειδὴ $(8 + 12) + 80 = 8 + 12 + 80.$

Ἂν ἀφαιρέσωμεν καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέλη τῆς ἰσότητος (2) τὸν 8, θὰ εἶναι :

$$100 - 8 = (8 + 12 + 80) - 8 \quad \text{ἢ} \quad 100 - 8 = 12 + 80 \quad (\text{διατί };).$$

Ἂν ἀφαιρέσωμεν πάλιν καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέλη τῆς τελευταίας ἰσότητος τὸν 12, θὰ εἶναι :

$$(100 - 8) - 12 = (12 + 80) - 12 \text{ ἢ } (100 - 8) - 12 = 80 \qquad (3)$$

Συγκρίνοντες τὰς ἰσότητας (1) καὶ (3) παρατηροῦμεν ὅτι τὰ δεύτερα μέλη των εἶναι ἴσα, ἄρα θὰ εἶναι ἴσα καὶ τὰ πρῶτα μέλη, ἤτοι:

$$100 - (8 + 12) = (100 - 8) - 12.$$

Γενικῶς θὰ εἶναι : $\boxed{\mathbf{A - (\alpha + \beta + \gamma) = [\,(A - \alpha) - \beta\,] - \gamma}}$

§ 366. *Θεώρημα III.* **Διὰ νὰ προσθέσωμεν διαφοράς, δυνάμεθα νὰ προσθέσωμεν χωριστὰ τοὺς μειωτέους καὶ χωριστὰ τοὺς ἀφαιρετέους καὶ ἀπὸ τὸ πρῶτον ἄθροισμα νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ δεύτερον.**

Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ προσθέσωμεν τὰς διαφορὰς 38–17 καὶ 29–14, ἤτοι νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα (38–17) + (29–14), χωρὶς ἐννοεῖται νὰ ἐκτελέσωμεν τὰς ἀφαιρέσεις. Λέγω ὅτι δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα τοῦτο, ἂν ἀπὸ τοῦ ἀθροίσματος τῶν μειωτέων ἀφαιρέσωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν ἀφαιρετέων. Ἤτοι λέγω ὅτι :

$$(38-17)+(29-14)=(38+29)-(17+14).$$

Ἀπόδειξις. Ἔχομεν $38-17=21$ (1), ἄρα $38=17+21$ (1′),
$29-14=15$ (2), » $29=14+15$ (2′).

Προσθέτοντες τὰς (1) καὶ (2) κατὰ μέλη ἔχομεν :

$$(38-17)+(29-14)=21+15 \qquad (3)$$

Προσθέτοντες καὶ τὰς ἰσότητας (1′) καὶ (2′) κατὰ μέλη ἔχομεν :

$$38+29=(17+14)+(21+15).$$

Ἀφαιροῦντες καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέλη αὐτῆς τὸ (17+14) ἔχομεν :

$$(38+29)-(17+14)=21+15 \qquad (4)$$

Συγκρίνοντες τὰς ἰσότητας (3) καὶ (4) παρατηροῦμεν ὅτι τὰ δεύτερα μέλη εἶναι ἴσα, ἄρα θὰ εἶναι καὶ τὰ πρῶτα· ἤτοι θὰ εἶναι

$$(38-17)+(29-14)=(38+29)-(17+14)$$

Σημείωσις. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα (12–7)+(18–2)+(10–6), εὑρίσκομεν πρῶτον ὅτι $(12-7)+(18-2)=(12+18)-(7+2)$ καὶ ἔπειτα $[(12+18)-(7+2)]+(10-6)=(12+18+10)-(7+2+6)$.
Ὥστε : $(12-7)+(18-2)+(10-6)=(12+18+10)-(7+2+6)$.

Γενικῶς θὰ εἶναι: $\boxed{(\alpha-\beta)+(\gamma-\delta)+(\epsilon-\zeta)=(\alpha+\gamma+\epsilon)-(\beta+\delta+\zeta)}$

§ 367. *Θεώρημα IV.* **Ἡ διαφορὰ δύο ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν προσθέσωμεν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν καὶ εἰς τὸν μειωτέον καὶ εἰς τὸν ἀφαιρετέον τῆς διαφορᾶς.**

Ἔστω ἡ διαφορὰ 25 – 12· λέγω ὅτι, ἂν προσθέσωμεν τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, π.χ. τὸν 8, καὶ εἰς τὸν μειωτέον 25 καὶ εἰς τὸν ἀφαιρετέον 12, ἡ διαφορὰ 25 – 12 δὲν μεταβάλλεται. Ἤτοι λέγω ὅτι :

$$25-12=(25+8)-(12+8).$$

Ἀπόδειξις. Εἶναι προφανὲς ὅτι, ἂν εἰς τὴν διαφορὰν 25 – 12 προσθέσωμεν τὴν διαφορὰν 8 – 8, ἡ ὁποία εἶναι μηδέν, ἡ διαφορὰ 25 – 12 δὲν μεταβάλλεται· ἤτοι ἔχομεν :

$$25-12=(25-12)+(8-8). \qquad (1)$$

Εἰς τὸ β' μέλος ὅμως τῆς ἰσότητος (1) ἔχομεν νὰ προσθέσωμεν διαφορὰς καὶ κατὰ τὴν προηγουμένην ἰδιότητα θὰ εἶναι :

$$(25-12)+(8-8)=(25+8)-(12+8).$$

Ἀπὸ τὴν ἰσότητα αὐτὴν καὶ τὴν (1) συνάγομεν ὅτι :

$$25-12=(25+8)-(12+8).$$

Γενικῶς θὰ εἶναι : $\boxed{\alpha-\beta=(\alpha+\gamma)-(\beta+\gamma)}$

§ 368 *Θεώρημα V*. **Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ ἀριθμὸν τὴν διαφορὰν δύο ἄλλων, ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸν ἀριθμὸν τοῦτον τὸν ἀφαιρετέον τῆς διαφορᾶς καὶ ἀπὸ τὸ ἄθροισμα νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸν μειωτέον αὐτῆς.**

Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν 50 τὴν διαφορὰν 25 − 12, ἤτοι νὰ εὕρωμεν τὸ ἐξαγόμενον 50 − (25 − 12) χωρὶς νὰ εὕρωμεν τὴν διαφορὰν 25 − 12. Λέγω ὅτι ἀρκεῖ εἰς τὸν 50 νὰ προσθέσωμεν τὸν 12 καὶ ἀπὸ τὸ ἄθροισμα 50 + 12 νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸν 25. Ἤτοι λέγω ὅτι : $50-(25-12)=(50+12)-25$.

Ἀπόδειξις. Διότι, κατὰ τὴν προηγουμένην ἰδιότητα, ἐὰν προσθέσωμεν καὶ εἰς τὸν μειωτέον 50 καὶ εἰς τὸν ἀφαιρετέον 25 − 12 τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν 12, ἡ διαφορὰ δὲν μεταβάλλεται. Θὰ εἶναι λοιπὸν

$$50-(25-12)=(50+12)-[(25-12)]+12. \qquad (1)$$

Ἀλλὰ κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς ἀφαιρέσεως εἶναι $(25-12)+12=25$.

Ὥστε ἡ ἰσότης (1) γίνεται :

$$50-(25-12)=(50+12)-25.$$

Γενικῶς θὰ εἶναι : $\boxed{\alpha-(\beta-\gamma)=(\alpha+\gamma)-\beta.}$

Περίληψις τῶν ἰδιοτήτων τῆς ἀφαιρέσεως

$$\boxed{\begin{array}{ll}
1.\ \alpha-(\beta+\gamma) & =(\alpha-\beta)-\gamma \\
2.\ (\alpha+\beta)-\gamma & =\alpha+(\beta-\gamma) \\
3.\ (\alpha-\beta)+(\gamma-\delta) & =(\alpha+\gamma)-(\beta+\delta) \\
4.\ \alpha-\beta & =(\alpha+\gamma)-(\beta+\gamma) \\
5.\ \alpha-(\beta-\gamma) & =(\alpha+\gamma)-\beta
\end{array}}$$

Ἀσκήσεις

Α' Ὁ μ ά ς. 15) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $(\alpha-\beta)-\gamma=\alpha-(\beta+\gamma)$ καὶ νὰ διατυπωθῇ ἡ σχετικὴ ἰδιότης τῆς ἀφαιρέσεως.

16) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐξαγόμενον τῶν κάτωθι πράξεων κατὰ δύο τρόπους:

1. $75-(40+20)$ $\qquad 80-(35+15)$
2. $100-(40-25)$ $\qquad 74-(35-29)$
3. $(12+45)-(18-10)$ $\qquad (378+263)-(137+65)$
4. $(58-35)+(75-64)$ $\qquad (127-83)+(184-76)$
5. $(87-66)-(35-18)$ $\qquad (379-294)-(325-318)$

17) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐξαγόμενον τῶν κάτωθι πράξεων:

1. $(12+18)-9$ $\qquad (25+40)-18$ $\qquad (65+48)-37$
2. $(37+23)-25$ $\qquad (74+35+63)-57$ $\qquad (148+356)-245$

18) Διὰ νὰ εὕρωμεν ἀπὸ μνήμης τὴν διαφορὰν $478-345$, λέγομεν 478, 178, 138, 133. Ποῦ στηριζόμεθα;

19) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

1. $789-43=800-54$
2. $2886-997=2889-1000$
3. $3765-1001=3764-1000$

Β' Ὁ μ ά ς. 20) Τί γίνεται τὸ ὑπόλοιπον μιᾶς ἀφαιρέσεως:

1. Ὅταν αὐξήσωμεν τὸν μειωτέον κατὰ μ μονάδας;
2. Ὅταν αὐξήσωμεν τὸν ἀφαιρετέον κατὰ μ μονάδας;
3. Ὅταν ἐλαττώσωμεν τὸν μειωτέον κατὰ μ μονάδας;
4. Ὅταν ἐλαττώσωμεν τὸν ἀφαιρετέον κατὰ μ μονάδας;
5. Ὅταν ἐλαττώσωμεν καὶ τὸν μειωτέον καὶ τὸν ἀφαιρετέον κατὰ μ μονάδας;

21) Τί θὰ λάβωμεν, ὅταν εἰς τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν προσθέσωμεν τὴν διαφοράν των;

22) Τί θὰ λάβωμεν, ὅταν ἀπὸ τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν ἀφαιρέσωμεν τὴν διαφοράν των;

5. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ

§ 369. *Θεώρημα Ι.* **Τὸ γινόμενον δύο παραγόντων δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν ἐναλλάξωμεν τὴν θέσιν των.**

Ἔστω τὸ γινόμενον 3×4. Θὰ δείξωμεν ὅτι $3 \times 4 = 4 \times 3$. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ εἶναι :

$$3 \times 4 = 3 + 3 + 3 + 3.$$

Ἐπειδὴ δὲ $3 = 1 + 1 + 1$, ἂν ἐφαρμόσωμεν τὴν ἀναλυτικὴν ἰδιότητα τῆς προσθέσεως, εὑρίσκομεν ὅτι :

$$3 \times 4 = \left\{ \begin{array}{r} 1 + 1 + 1 \\ + 1 + 1 + 1 \\ + 1 + 1 + 1 \\ + 1 + 1 + 1 \\ \hline = 4 + 4 + 4 \text{ ἢ } 4 \times 3 \end{array} \right.$$

Ὥστε ἀπεδείχθη ὅτι $3 \times 4 = 4 \times 3$.

Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν ὅτι : $\boxed{\alpha \times \beta = \beta \times \alpha}$

Ἡ ἰδιότης αὐτὴ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ εἶναι **θεμελιώδης**, διότι ἐπ' αὐτῆς στηρίζονται αἱ ἄλλαι ἰδιότητες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ. Λέγεται δὲ καὶ **ἰδιότης τῆς ἀντιμεταθέσεως.**

§ 370. *Θεώρημα II.* **Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἄθροισμα ἐπὶ ἀριθμόν, δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἕκαστον προσθετέον τοῦ ἀθροίσματος ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ προκύπτοντα γινόμενα.**

Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ ἄθροισμα $\alpha + \beta + \gamma$ ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 3, ἤτοι νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον $(\alpha + \beta + \gamma) \times 3$.

Λέγω ὅτι $(\alpha + \beta + \gamma) \times 3 = (\alpha \times 3) + (\beta \times 3) + (\gamma \times 3)$.

Ἀπόδειξις. Διότι κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ εἶναι :

$$(\alpha + \beta + \gamma) \times 3 = (\alpha + \beta + \gamma) + (\alpha + \beta + \gamma) + (\alpha + \beta + \gamma).$$

Ἀλλὰ εἰς τὸ β' μέλος τῆς ἰσότητος αὐτῆς ἔχομεν νὰ προσθέσωμεν ἀθροίσματα καὶ κατὰ τὴν γνωστὴν ἰδιότητα (§ 362) τοῦτο θὰ ἰσοῦται μὲ $\alpha + \beta + \gamma + \alpha + \beta + \gamma + \alpha + \beta + \gamma$.

Ἀλλὰ καὶ τοῦτο κατὰ γνωστὴν ἰδιότητα τῆς προσθέσεως ἰσοῦται μὲ $(\alpha + \alpha + \alpha) + (\beta + \beta + \beta) + (\gamma + \gamma + \gamma)$

ἢ μὲ $(\alpha \times 3) + (\beta \times 3) + (\gamma \times 3)$.

Ὅθεν συνάγομεν ὅτι :

$$(\alpha + \beta + \gamma) \times 3 = (\alpha \times 3) + (\beta \times 3) + (\gamma \times 3).$$

Περίληψις ἀποδείξεως

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta+\gamma)\times 3 &= (\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha+\beta+\gamma)\\ &= \alpha+\beta+\gamma+\alpha+\beta+\gamma+\alpha+\beta+\gamma\\ &= (\alpha+\alpha+\alpha)+(\beta+\beta+\beta)+(\gamma+\gamma+\gamma)\\ &= (\alpha\times 3)+(\beta\times 3)+(\gamma\times 3)\end{aligned}$$

$$(\alpha+\beta+\gamma)\times 3=(\alpha\times 3)+(\beta\times 3)+(\gamma\times 3)$$

Γενικῶς θὰ εἶναι : $\boxed{(\alpha+\beta+\gamma)\cdot\delta=(\alpha\cdot\delta)+(\beta\cdot\delta)+(\gamma\cdot\delta)}$

Ἡ ἰδιότης αὐτὴ λέγεται **ἐπιμεριστικὴ ἰδιότης.**

§ 371 Ἐξαγωγὴ κοινοῦ παράγοντος. Ἐὰν ἐναλλάξωμεν τὰ μέλη τῆς εὑρεθείσης ἰσότητος $(\alpha+\beta+\gamma)\times 3=(\alpha\times 3)+(\beta\times 3)+(\gamma\times 3)$, θὰ ἔχωμεν $(\alpha\times 3)+(\beta\times 3)+(\gamma\times 3)=(\alpha+\beta+\gamma)\times 3$.

Ἐκ τῆς ἰσότητος ταύτης συνάγομεν ὅτι :

Ἐὰν ἔχωμεν ἄθροισμα γινομένων, τὰ ὁποῖα ἔχουν κοινὸν παράγοντα, δυνάμεθα νὰ θέτωμεν τὸν κοινὸν παράγοντα ἐκτὸς παρενθέσεως, ἐντὸς δὲ ταύτης θέτομεν τὸ ἄθροισμα τῶν μὴ κοινῶν παραγόντων.

Κατὰ ταῦτα τὸ

$$(\alpha\cdot\rho)+(\beta\cdot\rho)+(\gamma\cdot\rho)+(\delta\cdot\rho)=(\alpha+\beta+\gamma+\delta)\cdot\rho.$$

Τὴν ἐργασίαν αὐτὴν καλοῦμεν **ἐξαγωγὴν τοῦ κοινοῦ παράγοντος ἐκτὸς παρενθέσεως.**

§ 372. *Θεώρημα ΙΙΙ.* **Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμὸν ἐπὶ ἄθροισμα, δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν ἐπὶ ἕκαστον τῶν προσθετέων τοῦ ἀθροίσματος καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ προκύπτοντα γινόμενα.**

Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν 5 ἐπὶ τὸ ἄθροισμα $\alpha+\beta+\gamma$, ἤτοι νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον $5\times(\alpha+\beta+\gamma)$. Λέγω ὅτι $5\times(\alpha+\beta+\gamma)=(5\times\alpha)+(5\times\beta)+(5\times\gamma)$.

Ἀπόδειξις. Κατὰ τὴν θεμελιώδη ἰδιότητα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἔχομεν : $5\times(\alpha+\beta+\gamma)=(\alpha+\beta+\gamma)\times 5$.

Ἀλλὰ εἰς τὸ β' μέλος τῆς ἰσότητος ταύτης ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἄθροισμα ἐπὶ ἀριθμὸν καὶ κατὰ τὴν προηγουμένην ἰδιότητα τοῦτο θὰ εἶναι ἴσον μὲ $(\alpha\times 5)+(\beta\times 5)+(\gamma\times 5)$ ἢ μὲ τὸ $(5\times\alpha)+(5\times\beta)+(5\times\gamma)$ (διατί ;)

Ὅθεν συνάγομεν ὅτι : $5\times(\alpha+\beta+\gamma)=(5\times\alpha)+(5\times\beta)+(5\times\gamma)$.

Γενικῶς θὰ εἶναι : $\boxed{\alpha\cdot(\beta+\gamma+\delta)=(\alpha\cdot\beta)+(\alpha\cdot\gamma)+(\alpha\cdot\delta)}$

§ 373. *Θεώρημα IV.* **Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἄθροισμα ἐπὶ ἄθροισμα, δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἕκαστον προσθετέον τοῦ πρώτου ἀθροίσματος ἐφ' ἕκαστον προσθετέον τοῦ δευτέρου ἀθροίσματος καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ προκύπτονται γινόμενα.**

Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ ἄθροισμα $(\alpha+\beta)$ ἐπὶ τὸ $(\gamma+\delta)$, ἤτοι νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον $(\alpha+\beta)\times(\gamma+\delta)$.

Λέγω ὅτι δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν α ἐπὶ τὸν γ καὶ ἐπὶ τὸν δ, κατόπιν τὸν β ἐπὶ τὸν γ καὶ δ καὶ τέλος νὰ προσθέσωμεν τὰ μερικὰ γινόμενα. Δηλαδὴ λέγω ὅτι :

$$(\alpha+\beta)\times(\gamma+\delta)=(\alpha\cdot\gamma)+(\beta\cdot\gamma)+(\alpha\cdot\delta)+(\beta\cdot\delta).$$

Ἀπόδειξις. Διότι, ἐὰν θεωρήσωμεν ὅτι τὸ ἄθροισμα $\alpha+\beta$ εὑρέθη καὶ παριστᾷ ἕνα μόνον ἀριθμόν, τότε θὰ ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμὸν ἐπὶ ἄθροισμα καὶ ἑπομένως κατὰ τὴν γνωστὴν ἰδιότητα (§ 372) θὰ ἔχωμεν :

$$(\alpha+\beta)\times(\gamma+\delta)=(\alpha+\beta)\times\gamma+(\alpha+\beta)\times\delta \qquad (1)$$

Ἀλλὰ ἐπειδὴ $(\alpha+\beta)\times\gamma=(\alpha\cdot\gamma)+(\beta\cdot\gamma)$ καὶ $(\alpha+\beta)\times\delta=(\alpha\cdot\delta)+(\beta\cdot\delta)$ (διατί;), ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται :

$$\boxed{(\alpha+\beta)\times(\gamma+\delta)=(\alpha\cdot\gamma)+(\beta\cdot\gamma)+(\alpha\cdot\delta)+(\beta\cdot\delta)}$$

Περίληψις ἀποδείξεως

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)\times(\gamma+\delta)&=(\alpha+\beta)\times\gamma+(\alpha+\beta)\times\delta\\&=(\alpha\cdot\gamma)+(\beta\cdot\gamma)+(\alpha\cdot\delta)+(\beta\cdot\delta).\end{aligned}$$

§ 374. *Θεώρημα V.* **Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν διαφορὰν ἐπὶ ἀριθμόν, δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν καὶ τὸν μειωτέον καὶ τὸν ἀφαιρετέον ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν αὐτὸν καὶ ἀπὸ τὸ πρῶτον γινόμενον νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ δεύτερον.**

Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὴν διαφορὰν 35—20 ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 3. Λέγω ὅτι δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν μειωτέον 35 ἐπὶ 3 καὶ τὸν ἀφαιρετέον 20 ἐπὶ 3 καὶ ἀπὸ τὸ γινόμενον 35×3 νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ γινόμενον 20×3. Δηλαδὴ λέγω ὅτι :

$$(35 - 20) \times 3 = (35 \times 3) - (20 \times 3).$$

Ἀπόδειξις. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἔχομεν :

$$(35 - 20) \times 3 = (35 - 20) + (35 - 20) + (35 - 20).$$

Ἀλλ' εἰς τὸ β' μέλος τῆς ἰσότητος αὐτῆς ἔχομεν νὰ προσθέσωμεν διαφορὰς καὶ κατὰ γνωστὴν ἰδιότητα τῆς ἀφαιρέσεως (§ 366) τοῦτο θὰ εἶναι ἴσον μὲ $(35 + 35 + 35)-(20 + 20 + 20)$ ἢ $(35 \times 3)-(20 \times 3)$. Ἄρα $(35-20) \times 3 = (35 \times 3)-(20 \times 3)$

Περίληψις ἀποδείξεως

$$(35-20) \cdot 3 =$$
$$(35-20)+(35-20)+(35-20)$$
$$=(35+35+35)-(20+20+20)$$
$$=(35 \times 3)-(20 \times 3)$$

Γενικῶς θὰ εἶναι : $\boxed{(\alpha - \beta) \cdot \gamma = (\alpha \cdot \gamma) - (\beta \cdot \gamma)}$

§ 375. Ἐξαγωγὴ κοινοῦ παράγοντος. Ἐὰν ἐναλλάξωμεν τὰ μέλη τῆς εὑρεθείσης $(35-20) \times 3 = (35 \times 3)-(20 \times 3)$, θὰ ἔχωμεν :

$$(35 \times 3) - (20 \times 3) = (35 - 20) \times 3.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι, ἐὰν ὁ μειωτέος καὶ ὁ ἀφαιρετέος τῆς διαφορᾶς δύο γινομένων ἔχουν κοινὸν παράγοντα (ἐδῶ ἔχουν τὸν 3), δυνάμεθα νὰ θέσωμεν τοῦτον ἐκτὸς παρενθέσεως.

Γενικῶς θὰ εἶναι : $(\alpha \cdot \gamma) - (\beta \cdot \gamma) = (\alpha - \beta) \cdot \gamma$.

Ἀσκήσεις

Α' Ὁμάς. 23) Ἐξηγήσατε διατί : $8 \times 1 = 8$.

24) Χωρὶς νὰ ἐκτελεσθῇ ὁ πολλαπλασιασμός, εὕρετε :

1ον. Κατὰ πόσον τὸ γινόμενον 25×9 ὑπερβαίνει τὸ 25×8.

2ον. Κατὰ τόσον τὸ 50×15 ὑπερβαίνει τὸ 50×13.

25) Νὰ μετατραποῦν τὰ κάτωθι ἀθροίσματα εἰς γινόμενα ἀθροίσματος ἐπὶ ἀριθμόν :

1. $21 + 15 + 39$, $14 + 35 + 42$, $9 + 18 + 45$.
2. $\alpha \cdot \lambda + \beta \cdot \lambda + \gamma \cdot \lambda$, $\kappa \cdot \mu + \beta \cdot \mu + \rho \cdot \mu$, $3 \cdot \alpha + 4 \cdot \alpha + \beta \cdot \alpha$

26) Νὰ μετατραποῦν αἱ κάτωθι διαφοραὶ εἰς γινόμενα διαφορᾶς ἐπὶ ἀριθμόν :

1. $17 \cdot 3 - 9 \cdot 3$, $45 \cdot 2 - 27 \cdot 2$, $125 \cdot 8 - 67 \cdot 8$.
2. $\alpha \cdot \mu - \beta \cdot \mu$, $\pi \cdot \lambda - \beta \cdot \lambda$, $\alpha \cdot \beta - \gamma \cdot \beta$.

27) Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις :

1. $(\alpha + \beta) \cdot \mu$, $(\chi + \psi + \omega) \cdot \alpha$, $(\alpha + \delta + \beta) \cdot 3$.
2. $(\alpha - \beta) \cdot \nu$, $(\mu - \nu) \cdot \chi$, $(8 - \alpha) \cdot 3$.
3. $\chi \cdot (\alpha + \beta + \gamma)$, $5 \cdot (\chi + \psi + \omega)$, $\alpha \cdot (3 + \beta + \delta)$.
4. $(\chi + \psi) \cdot (\varphi + \omega)$, $(\delta + \alpha) \cdot (\beta + 2)$, $(\alpha + \beta) \cdot (3 + 5)$.

28) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

1. $345 \times 699 = 34\,500 \times 7 - 345$
2. $6\,039 - 639 = 9 \times 600$
3. $15 \times (27 + 35 + 36) = 1\,500 - 30$

29) Νὰ ἐξαχθῇ ἐκτὸς παρενθέσεως ὁ κοινὸς παράγων ἀπὸ τὰ κάτωθι ἀθροίσματα :

1. $3 \cdot \chi + 3 \cdot \psi + 3 \cdot \omega$, $\alpha \cdot \chi - \beta \cdot \chi$, $2 \cdot \alpha \cdot \chi + 3 \cdot \beta \cdot \chi$
2. $5 \cdot \chi + 6 \cdot \chi + 7 \cdot \chi$, $15 \cdot \alpha - 12 \cdot \alpha$, $5 \cdot \chi \cdot \psi - 5 \cdot \chi \cdot \omega$

Β' Ὁ μ ά ς. 30) Ἕνας μαθητὴς θέλων νὰ εὕρῃ τὸ γινόμενον ἑνὸς ἀριθμοῦ ἐπὶ 80, πολλαπλασιάζει τὸν ἀριθμὸν ἐπὶ 8, ἀλλὰ λησμονεῖ νὰ γράψῃ ἕνα μηδὲν δεξιὰ τοῦ εὑρεθέντος γινομένου. Εὑρίσκει οὕτως ἕνα γινόμενον μικρότερον κατὰ 7 992 τοῦ πραγματικοῦ γινομένου. Ποῖος εἶναι ὁ πολλαπλασιαστέος ;

31) Τὸ ἄθροισμα 4 700 + 470 + 47 εἶναι τὸ γινόμενον τοῦ 47 ἐπὶ ἕνα ἀκέραιον ἀριθμόν. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμὸς αὐτός ;

32) Ποίαν μεταβολὴν ὑφίσταται τὸ γινόμενον $\alpha \cdot \beta$, ἐὰν ὁ παράγων α αὐξηθῇ κατὰ μονάδα ἢ ἂν ὁ παράγων β αὐξηθῇ κατὰ μονάδα ;

33) Ποίαν μεταβολὴν ὑφίσταται τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν, ἐὰν ὁ ἕνας ἐκ τῶν παραγόντων του ἐλαττωθῇ κατὰ μονάδα ;

6. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ ΠΟΛΛΩΝ ΠΑΡΑΓΟΝΤΩΝ

Ἵνα ἴδωμεν, ἂν ὁ νόμος τῆς ἀντιμεταθέσεως διὰ δύο παράγοντας ἰσχύῃ καὶ ὅταν οἱ παράγοντες εἶναι ὁσοιδήποτε, πρέπει νὰ ἀποδείξωμεν προηγουμένως τὴν ἀλήθειαν τῶν κάτωθι θεωρημάτων :

§ 376. *Θ ε ώ ρ η μ α Ι.* **Γινόμενον τριῶν παραγόντων δὲν βλάπτεται, ἂν οἱ δύο τελευταῖοι παράγοντες ἀντικατασταθοῦν διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν.**

Ἔστω τὸ γινόμενον $7 \times 4 \times 3$. Λέγω ὅτι τὸ γινόμενον αὐτὸ δὲν μεταβάλλεται, ἂν ἀντικαταστήσωμεν τοὺς παράγοντας 4 καὶ 3 διὰ τοῦ γινομένου των. Δηλ. θὰ δείξωμεν ὅτι $7 \times 4 \times 3 = 7 \times 12$.

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ γινομένου πολλῶν παραγόντων πρέπει νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον 7×4 καὶ νὰ ἐπαναλάβωμεν αὐτὸ 3 φοράς. Ἐπειδὴ δὲ $7 \times 4 = 7 + 7 + 7 + 7$, ἕπεται ὅτι:

$$7 \times 4 \times 3 = \left\{ \begin{array}{l} 7+7+7+7 \\ +7+7+7+7 \\ +7+7+7+7 \end{array} \right. \qquad (1)$$

Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ β′ μέλος τῆς ἰσότητος ταύτης ἔχει τρεῖς σειρὰς καὶ κάθε σειρὰ ἔχει 4 προσθετέους.

Ἔχει λοιπὸν τὸ ἄθροισμα τοῦτο $4 \times 3 = 12$ προσθετέους.

Καὶ ἐπειδὴ κάθε προσθετέος εἶναι 7, οὗτος ἐπαναλαμβάνεται 12 φοράς. Τὸ ἄθροισμα λοιπὸν τοῦτο εἶναι 7×12, ἡ δὲ ἰσότης (1) γίνεται

$$7 \times 4 \times 3 = 7 \times 12.$$

Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν ὅτι: $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$

§ 377. *Θεώρημα ΙΙ.* **Γινόμενον τριῶν παραγόντων δὲν μεταβάλλεται, ἂν ἀντιμετατεθοῦν οἱ δύο τελευταῖοι παράγοντες αὐτοῦ.**

Ἔστω τὸ γινόμενον $3 \times 6 \times 4$. Ἂν ἀντιμεταθέσωμεν τοὺς παράγοντας 6 καὶ 4, προκύπτει τὸ γινόμενον $3 \times 4 \times 6$.

Θὰ δείξωμεν ὅτι $3 \times 6 \times 4 = 3 \times 4 \times 6$.

Πράγματι, ἐὰν ἐφαρμόσωμεν τὴν προηγουμένην ἰδιότητα καὶ εἰς τὰ δύο ταῦτα γινόμενα, εὑρίσκομεν ὅτι:

$$3 \times 6 \times 4 = 3 \times 24 \quad \text{καὶ} \quad 3 \times 4 \times 6 = 3 \times 24.$$

Ἐπειδὴ δὲ τὰ δεύτερα μέλη τῶν ἰσοτήτων τούτων εἶναι ἴσα, θὰ εἶναι ἴσα καὶ τὰ πρῶτα μέλη των, δηλαδὴ θὰ εἶναι:

$$3 \times 6 \times 4 = 3 \times 4 \times 6.$$

Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν ὅτι: $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma = \alpha \cdot \gamma \cdot \beta$

§ 378. *Θεώρημα ΙΙΙ.* **Γινόμενον πολλῶν παραγόντων δὲν μεταβάλλεται, ἂν δύο ἐφεξῆς παράγοντες αὐτοῦ ἀντιμετατεθοῦν.**

Ἔστω τὸ γινόμενον $3 \times 5 \times 2 \times 7 \times 6$. Λέγω ὅτι τὸ γινόμενον αὐτὸ δὲν μεταβάλλεται, ἂν ἀντιμεταθέσωμεν δύο ἐφεξῆς παράγοντας, π.χ. τοὺς 2 καὶ 7. Θὰ δείξωμεν δηλαδὴ ὅτι:

$$3 \times 5 \times 2 \times 7 \times 6 = 3 \times 5 \times 7 \times 2 \times 6$$

Ἐκτελοῦμεν καὶ εἰς τὰ δύο γινόμενα ἕνα μέρος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, σταματῶμεν δὲ τὴν πρᾶξιν εἰς τοὺς ἀντιμετατιθεμένους παράγοντας.

Εὑρίσκομεν λοιπὸν ὅτι :

$$\left.\begin{array}{ll} & 3 \times 5 \times 2 \times 7 \times 6 = 15 \times 2 \times 7 \times 6 \\ \text{καὶ} & 3 \times 5 \times 7 \times 2 \times 6 = 15 \times 7 \times 2 \times 6 \end{array}\right\} \quad (1)$$

Ἐπειδὴ δὲ κατὰ τὴν προηγουμένην ἰδιότητα εἶναι :

$15 \times 2 \times 7 = 15 \times 7 \times 2$ ἕπεται ὅτι καὶ

$$15 \times 2 \times 7 \times 6 = 15 \times 7 \times 2 \times 6.$$

Τὰ δεύτερα λοιπὸν μέλη τῶν ἰσοτήτων (1) εἶναι ἴσα. Ἑπομένως καὶ τὰ πρῶτα μέλη αὐτῶν θὰ εἶναι ἴσα, ἤτοι :

$$3 \times 5 \times 2 \times 7 \times 6 = 3 \times 5 \times 7 \times 2 \times 6$$

Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν ὅτι καὶ

$$\alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \delta \cdot \varepsilon \cdot \zeta = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \varepsilon \cdot \delta \cdot \zeta.$$

§ 379. *Θεώρημα VI.* **Γινόμενον πολλῶν παραγόντων δὲν μεταβάλλεται, ἂν ἀλλάξῃ ὁπωσδήποτε ἡ τάξις αὐτῶν.**

Ἔστω τὸ γινόμενον $6 \times 4 \times 8 \times 9 \times 12$. Ἂν ἐφαρμόσωμεν εἰς αὐτὸ τὴν προηγουμένην ἰδιότητα διὰ δύο ἐφεξῆς παράγοντας, π.χ. τοὺς 8 καὶ 9, εὑρίσκομεν ὅτι :

$$6 \times 4 \times 8 \times 9 \times 12 = 6 \times 4 \times 9 \times 8 \times 12.$$

Ἂν δὲ εἰς τὸ δεύτερον γινόμενον κάμωμεν τὸ ἴδιον διὰ τοὺς παράγοντας 9 καὶ 4, εὑρίσκομεν ὅτι :

$$6 \times 4 \times 9 \times 8 \times 12 = 6 \times 9 \times 4 \times 8 \times 12$$

Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον εἶναι :

$$6 \times 9 \times 4 \times 8 \times 12 = 9 \times 6 \times 4 \times 8 \times 12,$$
$$9 \times 6 \times 4 \times 8 \times 12 = 9 \times 4 \times 6 \times 8 \times 12,$$
$$9 \times 4 \times 6 \times 8 \times 12 = 9 \times 4 \times 6 \times 12 \times 8.$$

Εἶναι λοιπόν :

$$\begin{aligned} 6 \times 4 \times 8 \times 9 \times 12 &= 6 \times 4 \times 9 \times 8 \times 12 = 6 \times 9 \times 4 \times 8 \times 12 \\ &= 9 \times 6 \times 4 \times 8 \times 12 = 9 \times 4 \times 6 \times 8 \times 12 \\ &= 9 \times 4 \times 6 \times 12 \times 8 \text{ κ.τ.λ.} \end{aligned}$$

Βλέπομεν δηλ. ὅτι, ἂν κάθε φορὰν ἀντιμεταθέσωμεν δύο ἐφεξῆς παράγοντας, δυνάμεθα νὰ δώσωμεν εἰς τοὺς παράγοντας τοῦ γινομένου οἱανδήποτε τάξιν θέλομεν, χωρὶς νὰ βλάψωμεν τὸ γινόμενον.

Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ἀποδεικνύομεν ὅτι :

$$\boxed{\alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \delta \cdot \epsilon = \alpha \cdot \gamma \cdot \beta \cdot \delta \cdot \epsilon = \alpha \cdot \gamma \cdot \delta \cdot \beta \cdot \epsilon = \gamma \cdot \alpha \cdot \delta \cdot \beta \cdot \epsilon \text{ κ.τ.λ.}}$$

Ἡ ἰδιότης αὐτὴ λέγεται **ἰδιότης τῆς ἀντιμεταθέσεως.**

§ 380. *Θεώρημα V.* **Τὸ γινόμενον πολλῶν παραγόντων δὲν μεταβάλλεται, ἂν ἀντικαταστήσωμεν παράγοντάς τινας αὐτοῦ μὲ τὸ γινόμενόν των.**

Ἔστω τὸ γινόμενον $7 \times 6 \times 9 \times 4$. Λέγω ὅτι τοῦτο εἶναι ἴσον μὲ τὸ $7 \times 24 \times 9$, εἰς τὸ ὁποῖον ὁ παράγων 24 προέκυψεν ἐκ τῆς ἀντικαταστάσεως τῶν παραγόντων 6 καὶ 4 διὰ τοῦ γινομένου των.

Δηλαδὴ λέγω ὅτι $7 \times 6 \times 9 \times 4 = 7 \times 24 \times 9$.

Ἀπόδειξις. Κατὰ τὴν ἰδιότητα τῆς ἀντιμεταθέσεως θὰ εἶναι :

$$7 \times 6 \times 9 \times 4 = 6 \times 4 \times 7 \times 9 \qquad (1)$$

Διὰ νὰ εὕρωμεν δὲ τὸ γινόμενον $6 \times 4 \times 7 \times 9$, πρέπει νὰ εὕρωμεν πρῶτον ὅτι $6 \times 4 = 24$. Ἔπειτα νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ γινόμενον 24 ἐπὶ 7 καὶ τὸ νέον γινόμενον ἐπὶ 9. Αὐτὰς ὅμως τὰς πράξεις κάμνομεν καὶ διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον $24 \times 7 \times 9$ καὶ ἑπομένως εἶναι :

$$6 \times 4 \times 7 \times 9 = 24 \times 7 \times 9.$$

Ἀπὸ τὴν αὐτὴν ἰσότητα καὶ ἀπὸ τὴν (1) ἐννοοῦμεν ὅτι :

$$7 \times 6 \times 9 \times 4 = 24 \times 7 \times 9 = 7 \times 24 \times 9$$

Περίληψις ἀποδείξεως

$$\begin{aligned} 7 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 4 &= 6 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 9 \\ &= 24 \cdot 7 \cdot 9 \\ &= 7 \cdot 24 \cdot 9 \end{aligned}$$

Γενικῶς θὰ εἶναι:

$$\boxed{\begin{aligned} \alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \delta \cdot \epsilon &= \alpha \cdot (\beta \cdot \delta) \cdot \gamma \cdot \epsilon \\ &= \alpha \cdot (\beta \cdot \delta \cdot \epsilon) \cdot \gamma \end{aligned}}$$

Αὐτὴ ἡ ἰδιότης λέγεται **συνθετικὴ** ἰδιότης.

§ 381. *Θεώρημα VI.* **Τὸ γινόμενον πολλῶν παραγόντων δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν παράγοντά τινα δι' ἄλλων, οἱ ὁποῖοι ἔχουν αὐτὸν ὡς γινόμενον.**

Πράγματι, ἐὰν ἐναλλάξωμεν τὰ δύο μέλη τῆς εὑρεθείσης ἰσότητος

$$7 \times 6 \times 9 \times 4 = 7 \times 24 \times 9,$$

βλέπομεν ὅτι : $7 \times 24 \times 9 = 7 \times 6 \times 9 \times 4.$

Καὶ γενικῶς : $\boxed{\alpha\cdot(\beta\cdot\delta)\cdot\gamma=\alpha\cdot\beta\cdot\gamma\cdot\delta}$

Αὐτὴ ἡ ἰδιότης λέγεται **ἀναλυτικὴ** ἰδιότης.

§ 382. *Θεώρημα VII.* **Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν γινόμενον πολλῶν παραγόντων ἐπὶ ἀριθμόν, δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἕνα μόνον παράγοντα τοῦ γινομένου ἐπὶ τὸν ἀριθμόν, τοὺς δὲ ἄλλους νὰ ἀφήσωμεν ὅπως ἔχουσιν.**

Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ γινόμενον $\alpha\cdot\beta\cdot\gamma$ ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν δ, ἤτοι νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον $(\alpha\cdot\beta\cdot\gamma)\cdot\delta$. Λέγω ὅτι δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἕνα μόνον παράγοντα τοῦ γινομένου, π.χ. τὸν παράγοντα β ἐπὶ τὸν δ. Δηλαδὴ λέγω ὅτι :

$$(\alpha\cdot\beta\cdot\gamma)\cdot\delta=\alpha\cdot(\beta\cdot\delta)\cdot\gamma$$

Ἀπόδειξις. Κατὰ τὴν ἀναλυτικὴν ἰδιότητα θὰ εἶναι :

$$(\alpha\cdot\beta\cdot\gamma)\cdot\delta=\alpha\cdot\beta\cdot\gamma\cdot\delta \qquad (1)$$

Ἀλλὰ κατὰ τὴν συνθετικὴν ἰδιότητα θὰ εἶναι :

$$\alpha\cdot\beta\cdot\gamma\cdot\delta=\alpha\cdot(\beta\cdot\delta)\cdot\gamma \qquad (2)$$

Ἀπὸ τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) συμπεραίνομεν ὅτι :

$$\boxed{(\alpha\cdot\beta\cdot\gamma)\cdot\delta=\alpha\cdot(\beta\cdot\delta)\cdot\gamma}$$

§ 383. *Θεώρημα VIII.* **Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν γινόμενα, σχηματίζομεν ἕνα γινόμενον, τὸ ὁποῖον νὰ περιέχῃ ὅλους τοὺς παράγοντας τῶν δοθέντων γινομένων καὶ μόνον αὐτούς.**

Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰ γινόμενα $\alpha\cdot\beta\cdot\gamma$ καὶ $\delta\cdot\varepsilon\cdot\zeta$, ἤτοι νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον $(\alpha\cdot\beta\cdot\gamma)\times(\delta\cdot\varepsilon\cdot\zeta)$. Λέγω ὅτι :

$$(\alpha\cdot\beta\cdot\gamma)\times(\delta\cdot\varepsilon\cdot\zeta)=\alpha\cdot\beta\cdot\gamma\cdot\delta\cdot\varepsilon\cdot\zeta.$$

Ἀπόδειξις. Ἐὰν εἰς τὸ γινόμενον $(\alpha\cdot\beta\cdot\gamma)\times(\delta\cdot\varepsilon\cdot\zeta)$ ἀντικαταστήσωμεν τὸν παράγοντα $(\alpha\cdot\beta\cdot\gamma)$ διὰ τῶν παραγόντων α,β,γ, οἱ ὁποῖοι ἔχουσι τὸ αὐτὸ γινόμενον καὶ τὸν παράγοντα $(\delta\cdot\varepsilon\cdot\zeta)$ διὰ τῶν δ,ε,ζ, οἱ ὁποῖοι ἔχουσι τὸ αὐτὸ γινόμενον, τὸ γινόμενον δὲν μεταβάλλεται (§ 380).

Θὰ εἶναι λοιπόν : $\boxed{(\alpha\cdot\beta\cdot\gamma)\times(\delta\cdot\varepsilon\cdot\zeta)=\alpha\cdot\beta\cdot\gamma\cdot\delta\cdot\varepsilon\cdot\zeta}$

Περίληψις ἰδιοτήτων

α΄) Γινομένου δύο παραγόντων.

1.	$\alpha \cdot \beta$	$=\beta \cdot \alpha$
2.	$(\alpha+\beta)\cdot\rho$	$=(\alpha\cdot\rho)+(\beta\cdot\rho)$
3.	$\nu\cdot(\alpha+\beta)$	$=(\nu\cdot\alpha)+(\nu\cdot\beta)$
4.	$(\alpha+\beta)\cdot(\gamma+\delta)$	$=(\alpha\cdot\gamma)+(\beta\cdot\gamma)+(\alpha\cdot\delta)+(\beta\cdot\delta)$
5.	$(\alpha-\beta)\cdot\mu$	$=(\alpha\cdot\mu)-(\beta\cdot\mu)$

β΄) Γινομένου πολλῶν παραγόντων

1.	$\alpha\cdot\beta\cdot\gamma\cdot\delta$	$=\delta\cdot\alpha\cdot\gamma\cdot\beta$
2.	$\alpha\cdot\beta\cdot\gamma\cdot\delta$	$=\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)\cdot\delta$
3.	$\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)\cdot\delta$	$=\alpha\cdot\beta\cdot\gamma\cdot\delta$
4.	$(\alpha\cdot\beta\cdot\gamma)\cdot\delta$	$=\alpha\cdot(\beta\cdot\delta)\cdot\gamma$
5.	$(\alpha\cdot\beta\cdot\gamma)\cdot(\delta\cdot\varepsilon)$	$=\alpha\cdot\beta\cdot\gamma\cdot\delta\cdot\varepsilon$

Ἀσκήσεις

34) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $8 \times 9 \times 2 = 160-16$.

35) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $7 \times 2 \times 99 = 1400-14$.

36) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $9 \times 3 \times 8 \times 111 = 24\,000-24$.

37) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $2 \times 9 \times 5 \times 111 = 10\,000-10$.

38) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $3 \times 5 \times 11 = (50\times3) + (5\times3)$.

39) Ἐξετάσατε ποίαν μεταβολὴν πάσχει τὸ γινόμενον $3\times5\times8$, ἂν εἰς ἕνα παράγοντα αὐτοῦ προστεθῇ μία μονάς. Γενικεύσατε τὸ ζήτημα τοῦτο διὰ τὸ γινόμενον $\alpha\times\beta\times\gamma$.

40) Ἐξετάσατε ποίαν μεταβολὴν πάσχει τὸ γινόμενον $7\times5\times6$, ἂν ἀπὸ ἕνα παράγοντα αὐτοῦ ἀφαιρεθῇ ἡ μονάς. Γενικεύσατε τὸ ζήτημα τοῦτο διὰ τὸ γινόμενον $\alpha\times\beta\times\gamma$.

41) Σχηματίσατε ἕνα γινόμενον μὲ 4 παράγοντας καὶ ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον $(3\times\alpha)\times(2\times\beta)\times(4\times\gamma)$.

42) Σχηματίσατε ἕνα γινόμενον μὲ 5 παράγοντας, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ ἕνας νὰ λήγῃ εἰς 0 καὶ ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον:

$$(2\times\alpha)\times(7\times\beta)\times(5\times\gamma).$$

7. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΔΙΑΙΡΕΣΕΩΣ

§ 384. *Θεώρημα Ι.* **Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἄθροισμα δι' ἀριθμοῦ, δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν ἕκαστον προσθετέον τοῦ ἀθροίσματος διὰ τοῦ ἀριθμοῦ καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ προκύπτοντα πηλίκα.** (Ὑποτίθεται ὅτι ὅλοι οἱ προσθετέοι διαιροῦνται ἀκριβῶς διὰ τοῦ ἀριθμοῦ).

Ἔστω ὅτι θέλομεν νὲ διαιρέσωμεν τὸ ἄθροισμα $12+20+8$ διὰ τοῦ 4. Λέγω ὅτι δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν τὸν $12:4$, τὸν $20:4$, τὸν $8:4$ καὶ τὰ προκύπτοντα πηλίκα 3, 5, 2 νὰ τὰ προσθέσωμεν. Ἤτοι λέγω ὅτι :

$$(12+20+8):4=3+5+2.$$

Ἀπόδειξις. Ἐὰν τὸ $3+5+2$ εἶναι πράγματι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως $(12+20+8):4$, πρέπει πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸν διαιρέτην νὰ μᾶς δίδῃ τὸν διαιρετέον.

Ἐπειδὴ δὲ $(3+5+2)\times4=12+20+8$ (διατί;), ἤτοι ὁ διαιρετέος, συμπεραίνομεν ὅτι τὸ πηλίκον εἶναι ὄντως $3+5+2$.

Γενικῶς θὰ εἶναι : $\boxed{(\alpha+\beta+\gamma):\delta=(\alpha:\delta)+(\beta:\delta)+(\gamma:\delta)}$

§ 385. *Θεώρημα ΙΙ.* **Διὰ νὰ διαιρέσωμεν διαφορὰν δι' ἀριθμοῦ, δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν τὸν μειωτέον καὶ τὸν ἀφαιρετέον τῆς διαφορᾶς διὰ τοῦ ἀριθμοῦ καὶ ἀπὸ τὸ πρῶτον πηλίκον νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ δεύτερον.** (Ὑποτίθεται ὅτι ὁ μειωτέος καὶ ὁ ἀφαιρετέος τῆς διαφορᾶς διαιροῦνται ἀκριβῶς διὰ τοῦ ἀριθμοῦ).

Ἔστω ἡ διαφορὰ 45—30, τὴν ὁποίαν θέλομεν νὰ διαιρέσωμεν διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 5. Λέγω ὅτι δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν τὸν μειωτέον 45 διὰ 5 καὶ τὸν ἀφαιρετέον 30 διὰ 5 καὶ ἀπὸ τὸ πρῶτον πηλίκον 9 νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ δεύτερον 6.

Ἤτοι λέγω ὅτι εἶναι $(45-30):5=9-6$.

Ἀπόδειξις. Διότι, ἂν πράγματι ἡ διαφορὰ 9—6 εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως $(45-30):5$, πρέπει πολλαπλασιαζομένη ἐπὶ τὸν διαιρέτην 5 νὰ δίδῃ τὸν διαιρετέον $45-30$.

Ἐπειδὴ δὲ (§ 374) εἶναι $(9-6)\times5=45-30$, συμπεραίνομεν ὅτι τὸ πηλίκον εἶναι ὄντως $9-6$.

Γενικῶς θὰ εἶναι : $\boxed{(\alpha-\beta):\gamma=(\alpha:\gamma)-(\beta:\gamma)}$

§ 386. *Θεώρημα III.* **Διὰ νὰ διαιρέσωμεν γινόμενον δι' ἀριθμοῦ, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν ἕνα μόνον ἐκ τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου διὰ τοῦ ἀριθμοῦ** (ὑποτίθεται ὅτι διαιρεῖται ἀκριβῶς), **τοὺς δὲ ἄλλους παράγοντας νὰ ἀφήσωμεν ὅπως ἔχουν.**

Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸ γινόμενον $5 \times 12 \times 8$ διὰ τοῦ 4, ἤτοι νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον $(5 \times 12 \times 8) : 4$. Λέγω ὅτι δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν ἕνα μόνον τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου τούτου, ἔστω τὸν 12, διὰ τοῦ 4, τοὺς δὲ ἄλλους ἀφήσωμεν ὅπως ἔχουν. Λέγω δηλαδὴ ὅτι $(5 \times 12 \times 8) : 4 = 5 \times 3 \times 8$.

Ἀπόδειξις. Διότι, ἂν τὸ $5 \times 3 \times 8$ εἶναι πράγματι τὸ πηλίκον διαιρέσεως $(5 \times 12 \times 8) : 4$, πρέπει πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸν διαιρέτην 5 νὰ μᾶς δίδῃ τὸν διαιρετέον $5 \times 12 \times 8$.

Ἐπειδὴ δὲ (§ 382) εἶναι $(5 \cdot 3 \cdot 8) \cdot 4 = 5 \cdot 12 \cdot 8$, ἤτοι προέκυψεν ὁ διαιρετέος, συμπεραίνομεν ὅτι τὸ πηλίκον εἶναι ὄντως $5 \times 12 \times 8$.

Γενικῶς θὰ εἶναι : $\boxed{(\alpha \cdot \beta \cdot \gamma) : \delta = (\alpha : \delta) \cdot \beta \cdot \gamma}$

ὅπου ἡ διαίρεσις $\alpha : \delta$ ὑποτίθεται τελεία.

§ 387. *Πόρισμα.* **Διὰ νὰ διαιρέσωμεν γινόμενον διά τινος τῶν παραγόντων του, ἀρκεῖ νὰ ἐξαλείψωμεν αὐτόν.**

Ἤτοι : $(\alpha \cdot \beta \cdot \gamma) : \beta = \alpha \cdot \gamma$.

Σημείωσις. Ἂν περισσότεροι παράγοντες τοῦ γινομένου εἶναι ἴσοι μὲ τὸν διαιρέτην, ἐξαλείφομεν τὸν ἕνα μόνον ἀπ' αὐτούς.

§ 388. *Θεώρημα IV.* **Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμὸν διὰ γινομένου πολλῶν παραγόντων, δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν διὰ τοῦ πρώτου παράγοντος, τὸ εὑρεθὲν πηλίκον διὰ τοῦ δευτέρου παράγοντος καὶ οὕτω καθεξῆς, μέχρις ὅτου λάβωμεν ὅλους τοὺς παράγοντας τοῦ γινομένου.**

Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν 120 διὰ τοῦ γινομένου $3 \cdot 5 \cdot 4$, ἤτοι νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον $120 : (3 \cdot 5 \cdot 4)$. Λέγω ὅτι δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν 120 διὰ 3 καὶ τὸ εὑρεθὲν πηλίκον $(120 : 3)$ διὰ τοῦ 5, τὸ νέον πηλίκον $(120 : 3) : 5$ διὰ τοῦ 4. Δηλαδὴ λέγω ὅτι $120 : (3 \cdot 5 \cdot 4) = [(120 : 3) : 5] : 4$.

Ἀπόδειξις. Διότι, ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν τοῦ 120 διὰ τοῦ γινομένου $3 \cdot 5 \cdot 4$ ἢ τοῦ 60, εὑρίσκομεν πηλίκον 2, ἤτοι εἶναι :

$$120 : (3 \cdot 5 \cdot 4) = 2 \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ εἰς κάθε τελείαν διαίρεσιν ὁ διαιρετέος ἰσοῦται μὲ τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸ πηλίκον, θὰ ἔχωμεν τὸν ἰσότητα:

$$120 = (3 \cdot 5 \cdot 4) \cdot 2 \text{ ἢ } 120 = 3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 2 \text{ (διατί ;)} \qquad (2)$$

Διαιροῦντες καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἰσότητος (2) διὰ 3 εὑρίσκομεν:

$$120 : 3 = (3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 2) : 3 \text{ ἢ } 120 : 3 = 5 \cdot 4 \cdot 2 \text{ (διατί ;)} \qquad (3)$$

Διαιροῦντες πάλιν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἰσότητος (3) διὰ 5 εὑρίσκομεν: $(120 : 3) : 5 = (5 \cdot 4 \cdot 2) : 5$ ἢ $(120 : 3) : 5 = 4 \cdot 2$ (4)

Διαιροῦντες διὰ 4 καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (4) εὑρίσκομεν:

$$[(120 : 3) : 5] : 4 = (4 \cdot 2) : 4 \text{ ἢ } [(120 : 3) : 5] : 4 = 2 \qquad (5)$$

Συγκρίνοντες τὰς ἰσότητας (1) καὶ (5) συνάγομεν ὅτι:

$$120 : (3 \cdot 5 \cdot 4) = [(120 : 3) : 5] : 4.$$

Γενικῶς θὰ εἶναι: $\boxed{\mathbf{A : (\beta \cdot \gamma \cdot \delta) = [(A : \beta) : \gamma] : \delta}}$

§ 389. *Θεώρημα V.* **Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν διαιρετέον καὶ διαιρέτην ἀτελοῦς διαιρέσεως ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, τὸ μὲν πηλίκον δὲν μεταβάλλεται, τὸ δὲ ὑπόλοιπον πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.**

Ἔστω Δ ὁ διαιρετέος, δ ὁ διαιρέτης, π τὸ πηλίκον καὶ υ τὸ ὑπόλοιπον μιᾶς ἀτελοῦς διαιρέσεως. Λέγω ὅτι, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸν διαιρετέον Δ ἐπὶ ἕνα ἀριθμόν, π.χ. τὸν 5 (ἤτοι, ἂν γίνῃ $\Delta \times 5$) καὶ τὸν διαιρέτην ἐπὶ 5 (δηλ. ἂν γίνῃ $\delta \times 5$), τὸ πηλίκον π θὰ μείνῃ τὸ αὐτό, ἐνῷ τὸ ὑπόλοιπον υ θὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 5, ἤτοι θὰ γίνῃ $\upsilon \times 5$.

$$\begin{array}{c|c} \Delta & \delta \\ \hline \upsilon & \pi \end{array}$$

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ εἰς κάθε διαίρεσιν ὁ διαιρετέος Δ ἰσοῦται μὲ τὸν διαιρέτην δ ἐπὶ τὸ πηλίκον π σὺν τῷ ὑπολοίπῳ υ, θὰ εἶναι:

$$\Delta = (\delta \times \pi) + \upsilon. \qquad (1)$$

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἰσότητος (1) ἐπὶ 5, θὰ ἔχωμεν:

$$\Delta \times 5 = [(\delta \times \pi) + \upsilon] \times 5 \text{ ἢ } \Delta \times 5 = (\delta \times \pi) \times 5 + (\upsilon \times 5),$$

ἢ $$\Delta \times 5 = (\delta \times 5) \times \pi + (\upsilon \times 5) \text{ (διατί ;)} \qquad (2)$$

Ἐπειδὴ δὲ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι $\upsilon < \delta$, θὰ εἶναι καὶ $\upsilon \times 5 < \delta \times 5$

Ἐκ τῆς ἰσότητος (2) συνάγομεν ὅτι τὸ π εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ $\Delta \times 5$ διὰ τοῦ $\delta \times 5$ καὶ τὸ $\upsilon \times 5$ τὸ ὑπόλοιπον αὐτῆς.

$$\begin{array}{c|c} \Delta \times 5 & \delta \times 5 \\ \hline \upsilon \times 5 & \pi \end{array}$$

Περίληψις τῶν ἰδιοτήτων τῆς διαιρέσεως

1.	$(\alpha+\beta+\gamma)):\delta=(\alpha:\delta)+(\beta:\delta)+(\gamma:\delta)$
2.	$(\alpha-\beta):\gamma=(\alpha:\gamma)-(\beta:\gamma)$
3.	$(\alpha\cdot\beta\cdot\gamma):\delta=\alpha\cdot(\beta:\delta)\cdot\gamma$
4.	$A:(\beta\cdot\gamma\cdot\delta)=[(A:\beta):\gamma]:\delta$
5.	Ἄν εἶναι $\Delta=\delta\cdot\pi+\upsilon$ θὰ εἶναι $\Delta\cdot\lambda=(\delta\cdot\lambda)\cdot\pi+\upsilon\cdot\lambda$

Ἀσκήσεις

43) Παρατηροῦντες ὅτι $18:6=3$, εὕρετε ἀμέσως τὸ πηλίκον $(18+6):6$. Ἔπειτα δὲ ἐξετάσατε γενικῶς τί γίνεται τὸ πηλίκον τελείας διαιρέσεως, ἂν ὁ διαιρετέος αὐξηθῇ κατὰ τὸν διαιρέτην.

44) Παρατηροῦντες ὅτι $28:4=7$, εὕρετε ἀμέσως τὸ πηλίκον $(28-4):4$. Ἔπειτα δὲ ἐξετάσατε γενικῶς τί γίνεται τὸ πηλίκον τελείας διαιρέσεως, ἂν ὁ διαιρετέος αὐτῆς ἐλαττωθῇ κατὰ τὸν διαιρέτην.

45) Ἀπὸ τὴν ἰσότητα $48=(5\times 9)+3$ εὕρετε ἀμέσως τὸ πηλίκον $(48-3):5$ καὶ τὸ πηλίκον $(48-3):9$.

46) Ἐξετάσατε τί γίνεται τὸ πηλίκον μιᾶς ἀτελοῦς διαιρέσεως, ἂν ἀπὸ τὸν διαιρετέον ἀφαιρεθῇ τὸ ὑπόλοιπον αὐτῆς. Ἐπίσης ἐξετάσατε, ἂν ἡ διαίρεσις θὰ μείνῃ πάλιν ἀτελὴς ἢ ὄχι.

47) Ὁ διαιρέτης μιᾶς ἀτελοῦς διαιρέσεως εἶναι 8, τὸ πηλίκον 6 καὶ τὸ ὑπόλοιπον μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ πηλίκον. Εὕρετε τὸν διαιρετέον.

48) Βασιζόμενοι εἰς τὴν ἰσότητα $15:3=5$, εὕρετε ἀμέσως τὸ πηλίκον $(15\times 6):3$. Ἔπειτα δὲ ἐξετάσατε τί γίνεται τὸ πηλίκον μιᾶς τελείας διαιρέσεως, ἂν μόνον ὁ διαιρετέος πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ ἕνα ἀριθμόν.

49) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $(13\times 9\times 7):7=130-13$.

50) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $(5\times 9\times 8\times 11\times 4):(4\times 10)=4\,000-4$.

51) Ἂν $5\times\psi=20\times 3$, εὕρετε τὸν ψ.

52) Ἂν $6\times\alpha=5\times 6\times 3$, εὕρετε τὸν α.

53) Ἂν $3\times\beta\times 5\times 4=6\times 8\times 2$, εὕρετε τὸν β.

8. ΠΕΡΙ ΔΥΝΑΜΕΩΝ ΤΩΝ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

§ 390. Ἐμάθομεν (§ 113) ὅτι **δύναμις** ἀριθμοῦ τινος α καλεῖται τὸ γινόμενον δύο ἢ πολλῶν παραγόντων ἴσων μὲ τὸν α. Ἀκόμη ὅτι, ἂν οἱ ἴσοι παράγοντες εἶναι δύο, δηλαδὴ $\alpha \cdot \alpha$, ἡ δύναμις αὐτὴ καλεῖται δευτέρα δύναμις τοῦ α. Γράφεται συντόμως α^2 καὶ ἀπαγγέλλεται : ἄλφα εἰς τὴν δευτέραν ἢ ἄλφα εἰς τὸ τετράγωνον. Ἂν οἱ ἴσοι παράγοντες εἶναι τρεῖς π.χ. $\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha$, ἡ δύναμις αὐτὴ καλεῖται τρίτη δύναμις ἢ κύβος τοῦ α. Αὕτη γράφεται συντόμως α^3 καὶ ἀπαγγέλλεται : ἄλφα εἰς τὴν τρίτην ἢ εἰς τὸν κύβον.

Γενικῶς, ἂν ἔχωμεν τὸ γινόμενον $\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \ldots\ldots \alpha$, ὅπου οἱ ἴσοι παράγοντες εἶναι μ τὸ πλῆθος, θὰ λέγωμεν τὸ γινόμενον τοῦτο μυοστὴν δύναμιν τοῦ α καὶ θὰ τὸ γράφωμεν συντόμως α^μ . Ὁ α εἶναι ἡ **βάσις**, ὁ δὲ μ ὁ **ἐκθέτης** τῆς δυνάμεως.

9. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

§ 391. *Θεώρημα Ι.* **Τὸ γινόμενον δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ εἶναι δύναμις τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ἡ ὁποία ἔχει ἐκθέτην τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν αὐτῶν.**

Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον $\alpha^3 \cdot \alpha^4 \cdot \alpha^2$. Λέγω ὅτι τὸ γινόμενον αὐτὸ εἶναι δύναμις πάλιν τοῦ α μὲ ἐκθέτην τὸ ἄθροισμα $3+4+2$ τῶν ἐκθετῶν. Ἤτοι λέγω ὅτι $\alpha^3 \cdot \alpha^4 \cdot \alpha^2 . = \alpha^9$.

Ἀπόδειξις. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν δυνάμεων θὰ εἶναι :

$$\alpha^2 = \alpha \cdot \alpha, \qquad \alpha^3 = \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha, \qquad \alpha^4 = \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha.$$

Πολλαπλασιάζοντες τὰς ἰσότητας αὐτὰς κατὰ μέλη ἔχομεν :

$$\begin{aligned} \alpha^3 \cdot \alpha^4 \cdot \alpha^2 &= (\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha) \cdot (\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha) \cdot (\alpha \cdot \alpha) \\ &= \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \quad (\text{διατί ;}) \\ &= \alpha^9 \end{aligned}$$

Γενικῶς θὰ εἶναι : $\boxed{\alpha^\mu \cdot \alpha^\nu \cdot \alpha^\rho = \alpha^{\mu+\nu+\rho}}$

§ 392. *Θεώρημα ΙΙ.* **Δύναμις ἀριθμοῦ ὑψοῦται εἰς ἄλλην δύναμιν, ἂν θέσωμεν βάσιν μὲν τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, ἐκθέτην δὲ τὸ γινόμενον τῶν ἐκθετῶν τῶν δυνάμεων τούτων.**

Ἔστω ὅτι ἔχομεν τὴν δύναμιν α^3 καὶ θέλομεν νὰ τὴν ὑψώσωμεν εἰς τὴν τετάρτην δύναμιν, ἤτοι νὰ εὕρωμεν μὲ τί ἰσοῦται ἡ $(\alpha^3)^4$. Λέγω ὅτι δυνάμεθα νὰ θέσωμεν ὡς βάσιν μὲν τὸν α, ὡς ἐκθέτην δὲ τὸ γινόμενον τῶν ἐκθετῶν 3 καὶ 4 τῶν δυνάμεων τούτων.

Ἤτοι λέγω ὅτι $(\alpha^3)^4 = \alpha^{12}$.

Ἀπόδειξις. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν δυνάμεων θὰ εἶναι :

$$(\alpha^3)^4 = \alpha^3 \cdot \alpha^3 \cdot \alpha^3 \cdot \alpha^3 = \alpha^{3+3+3+3} = \alpha^{12}. \qquad (\text{διατί;})$$

Γενικῶς θὰ εἶναι : $\boxed{(\alpha^{\mu})^{\nu} = \alpha^{\mu \cdot \nu}}$

§ 393. *Θεώρημα III.* **Γινόμενον ὑψοῦται εἰς δύναμιν, ἂν πάντες οἱ παράγοντες αὐτοῦ ὑψωθοῦν εἰς τὴν δύναμιν αὐτήν.**

Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ ὑψώσωμεν τὸ γινόμενον $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma$ εἰς τὴν τρίτην δύναμιν, ἤτοι νὰ εὕρωμεν μὲ τί ἰσοῦται ἡ δύναμις $(\alpha \cdot \beta \cdot \gamma)^3$. Λέγω ὅτι δυνάμεθα νὰ ὑψώσωμεν ὅλους τοὺς παράγοντας α, β, γ εἰς τὴν τρίτην δύναμιν. Ἤτοι λέγω ὅτι $(\alpha \cdot \beta \cdot \gamma)^3 = \alpha^3 \cdot \beta^3 \cdot \gamma^3$.

Ἀπόδειξις. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν δυνάμεων θὰ εἶναι :

$$\begin{aligned}(\alpha \cdot \beta \cdot \gamma)^3 &= (\alpha \cdot \beta \cdot \gamma) \cdot (\alpha \cdot \beta \cdot \gamma) \cdot (\alpha \cdot \beta \cdot \gamma) \\ &= \alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \alpha \cdot \beta \cdot \gamma && (\text{διατί ;}) \\ &= (\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot) . (\beta \cdot \beta \cdot \beta) \cdot (\gamma \cdot \gamma \cdot \gamma) && (\text{διατί ;}) \\ &= \alpha^3 \cdot \beta^3 \cdot \gamma^3 && (\text{διατί ;})\end{aligned}$$

Γενικῶς θὰ εἶναι : $\boxed{(\alpha . \beta . \gamma)^{\nu} = \alpha^{\nu} . \beta^{\nu} . \gamma^{\nu}}$

§ 394. *Θεώρημα IV.* **Τὸ πηλίκον δύο δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ εἶναι δύναμις τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ἡ ὁποία ἔχει ὡς ἐκθέτην τὴν διαφορὰν τοῦ ἐκθέτου τοῦ διαιρέτου ἀπὸ τοῦ ἐκθέτου τοῦ διαιρετέου.**

Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ διαιρέσωμεν τὴν δύναμιν α^5 διὰ τῆς α^3 (ὑποτίθεται $\alpha \neq 0$, διότι ἡ διὰ τοῦ 0 διαίρεσις εἶναι ἀδύνατος), ἤτοι νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον $\alpha^5 : \alpha^3$. Λέγω ὅτι τοῦτο εἶναι δύναμις τοῦ α μὲ ἐκθέτην τὴν διαφορὰν τῶν ἐκθετῶν $5 - 3 = 2$. Ἤτοι λέγω ὅτι $\alpha^5 : \alpha^3 = \alpha^2$.

Ἀπόδειξις. Διότι, ἐὰν ἡ δύναμις α^2 εἶναι τὸ πηλίκον $\alpha^5 : \alpha^3$, πρέπει πολλαπλασιαζομένη ἐπὶ τὸν διαιρέτην α^3 νὰ δίδῃ τὸν διαιρετέον α^5. Πράγματι ἔχομεν $\alpha^2 \cdot \alpha^3 = \alpha^5$.

Γενικῶς θὰ εἶναι : $\boxed{\alpha^{\mu} : \alpha^{\nu} = \alpha^{\mu-\nu}}$, ἂν $\mu > \nu$.

§ 395. **Ἐκθέτης μηδέν.** Ἂν παραδεχθῶμεν ὅτι ἡ προηγουμένη ἰδιότης ὑφίσταται καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν οἱ ἐκθέται τοῦ διαιρετέου καὶ διαιρέτου εἶναι ἴσοι, θὰ ἔχωμεν :

$$5^3 : 5^3 = 5^{3-3} = 5^0.$$

Δηλαδὴ προκύπτει τὸ σύμβολον 5^0, τὸ ὁποῖον αὐτὸ καθ' ἑαυτὸ δὲν ἔχει καμμίαν ἔννοιαν ὡς δύναμις· (τὸ 5^0 δὲν δύναται νὰ παριστάνῃ δύναμιν τοῦ 5, διότι διὰ νὰ εἶναι δύναμις ἀριθμοῦ πρέπει οἱ ἴσοι παράγοντες νὰ εἶναι τοὐλάχιστον δύο). Ἐπειδὴ ὅμως εἶναι καὶ $5^3 : 5^3 = 1$ (διατί ;) ὁδηγούμεθα εἰς τὸ νὰ παραδεχθῶμεν ὅτι τὸ 5^0 παριστάνει τὴν 1. Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι $7^0 = 1$ καὶ γενικῶς :

$$\boxed{\alpha^0 = 1}$$

Ὥστε :

Ἡ μηδενικὴ δύναμις ἀριθμοῦ (διαφόρου τοῦ μηδενὸς) **παριστάνει τὴν μονάδα.**

Περίληψις τῶν ἰδιοτήτων τῶν δυνάμεων

$$\boxed{\begin{array}{ll} \mathbf{1.}\ \alpha^{\mu}\cdot\alpha^{\nu}\cdot\alpha^{\rho} & = \alpha^{\mu+\nu+\rho} \\ \mathbf{2.}\ (\alpha^{\mu})^{\nu} & = \alpha^{\mu\cdot\nu} \\ \mathbf{3.}\ (\alpha\cdot\beta\cdot\gamma)^{\mu} & = \alpha^{\mu}\cdot\beta^{\mu}\cdot\gamma^{\mu} \\ \mathbf{4.}\ \alpha^{\mu}:\alpha^{\nu} & = \alpha^{\mu-\nu} \end{array}}$$

Ἀσκήσεις

Α' Ὁμάς. 54) Νὰ γραφοῦν ὑπὸ μορφὴν μιᾶς δυνάμεως τὰ κάτωθι γινόμενα :

1. $2^3 \times 2^5 \times 2^4$, $12 \times 12^4 \times 12^2$, $7 \times 7^3 \times 7^5$.
2. $3^1 \times 3 \times 3^5$, $5^8 \times 5^6 \times 5^2$, $4^3 \times 4 \times 4^6$.

55) Νὰ ὑψωθοῦν εἰς τὸ τετράγωνον τὰ κάτωθι γινόμενα :

1. 3×5, $7 \times 8 \times 6$.
2. $8 \times 7 \times 3$, $5 \times 2 \times 4 \times 5 \times 8$.

56) Νὰ ὑψωθοῦν εἰς τὸν κύβον τὰ κάτωθι γινόμενα :

1. $5 \times 6 \times 4$, $2 \times 3 \times 4 \times 5$, $\chi \cdot \psi \cdot \omega$.
2. $2 \times 3 \times 1$, $10 \times 5 \times 2$, $3 \cdot \alpha \cdot \gamma$.

57) Τὰ κάτωθι γινόμενα νὰ τραποῦν εἰς δύναμιν ἑνὸς ἀριθμοῦ :

1. $4 \cdot 8 \cdot 64$, $25 \cdot 125 \cdot 5^2$.
2. $3 \cdot 27 \cdot 81$, $16 \cdot 2^3 \cdot 4^2$.

58) Τὰ κάτωθι γινόμενα νὰ τραποῦν εἰς γινόμενον δυνάμεων δύο ἀριθμῶν :

1. $18 \cdot 27 \cdot 32 \cdot 81$, $27 \cdot 64 \cdot 81 \cdot 2$.
2. $25 \cdot 8 \cdot 125 \cdot 32$, $9 \cdot 25 \cdot 27 \cdot 625$.

59) Τὰ κάτωθι γινόμενα νὰ τραποῦν εἰς δύναμιν ἑνὸς ἀριθμοῦ :

1. $2 \cdot 27 \cdot 16 \cdot 9$, $81 \cdot 16 \cdot 625$.
2. $8 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 125$, $27 \cdot 8 \cdot 32 \cdot 243$.

Β' Ὁ μ ά ς. 60) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ τετράγωνον ἑνὸς ἀριθμοῦ, ὁ ὁποῖος λήγει εἰς 0, λήγει τοὐλάχιστον εἰς δύο μηδενικά.

61) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ τετράγωνον ἑνὸς ἀκεραίου ἀριθμοῦ δὲν δύναται ποτὲ νὰ λήγῃ εἰς 2, 3, 7 ἢ 8.

62) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ τετραπλάσιον ἑνὸς τετραγώνου εἶναι τετράγωνον. Καὶ ὅτι τὸ ὀκταπλάσιον ἑνὸς κύβου εἶναι κύβος.

63) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : $2^{\nu+2}=4 \cdot 2^{\nu}$ καὶ ὅτι $3^{\nu+3}=27 \cdot 3^{\nu}$.

64) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$5^{\nu-2}=5^{\nu} : 25$, $2^{3\nu}=8^{\nu}$ καὶ $(5^3)^{\nu}=(5^{\nu})^3$.

65) Εὕρετε τὰ γινόμενα :

$(2\alpha^2) \cdot (3\alpha^3) \cdot (4\alpha)$, $(5\chi^2) \cdot (2\chi^3) \cdot (3\chi^4)$.

66) Εὕρετε τὰ πηλίκα :

$8\alpha^2 : 4$. $9\alpha\beta^2 : (3\alpha)$. $12\alpha^2\beta^2 : (4\alpha\beta)$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄

ΛΟΓΟΙ ΚΑΙ ΑΝΑΛΟΓΙΑΙ

§ 396. **Ὁρισμοί. Λόγος δύο ἀριθμῶν** (ἀφῃρημένων ἢ συγκεκριμένων, ἀλλὰ ὁμοειδῶν) καλεῖται τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ πρώτου διὰ τοῦ δευτέρου. Οὕτω λόγος τοῦ 12 πρὸς τὸν 4 εἶναι ὁ $\frac{12}{4}$ ἢ 3. Ὁ λόγος τοῦ 3 πρὸς 15 εἶναι $\frac{3}{15}$ ἢ $\frac{1}{5}$.

Γενικῶς :

Λόγος τοῦ α πρὸς τὸν β εἶναι τὸ πηλίκον $\frac{\alpha}{\beta}$ ἢ $\alpha : \beta$.

Οἱ ἀριθμοὶ ἑνὸς λόγου λέγονται **ὅροι** αὐτοῦ. Ἐπίσης εἴδομεν ὅτι ἡ ἰσότης δύο λόγων καλεῖται **ἀναλογία.** Π.χ. ἐὰν οἱ λόγοι $\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ $\frac{\gamma}{\delta}$ εἶναι ἴσοι, τότε ἡ ἰσότης $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ εἶναι ἀναλογία.

Μία ἀναλογία λέγεται **συνεχής,** ἂν οἱ μέσοι ὅροι της εἶναι ἴσοι.

Ὁ μέσος ὅρος λέγεται **μέσος ἀνάλογος** τῶν δύο ἄκρων.

Οὕτως ἡ ἀναλογία $4 : 8 = 8 : 16$ εἶναι συνεχής, ὁ δὲ 8 λέγεται μέσος ἀνάλογος τῶν 4 καὶ 16.

Ὁμοίως ἡ ἀναλογία $\alpha : \beta = \beta : \gamma$ εἶναι συνεχὴς καὶ ὁ β εἶναι μέσος ἀνάλογος τῶν α καὶ γ.

Ὁ πρῶτος ἢ ὁ τέταρτος ὅρος μιᾶς συνεχοῦς ἀναλογίας λέγεται **τρίτος ἀνάλογος.** Οὕτως εἰς τὴν ἀναλογίαν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\beta}{\gamma}$ τρίτος ἀνάλογος εἶναι ὁ α ἢ ὁ γ.

§ 397. **Λόγοι δύο ὁμοειδῶν ποσῶν.** Λόγος ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ πρὸς ἕνα ἄλλο εὐθύγραμμον τμῆμα ΓΔ λέγεται ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος μετρεῖ τὸ ΑΒ, ὅταν τὸ ΓΔ ληφθῇ ὡς μονάς.

Α Β   Γ Δ

Ὁ λόγος τοῦ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ παρίσταται οὕτως : $\frac{ΑΒ}{ΓΔ}$ ἢ ΑΒ : ΓΔ.

Γενικῶς :

Λόγος ἑνὸς ποσοῦ Α πρὸς ἕνα ἄλλο ὁμοειδὲς ποσὸν

Β εἶναι ὁ ἀριθμός $\frac{Α}{Β}$, ὁ ὁποῖος μετρεῖ τὸ μέγεθος Α, ὅταν τὸ Β ληφθῇ ὡς μονάς.

Ἔστω ὅτι ἐμετρήσαμεν τὰς διαστάσεις μιᾶς θύρας μὲ μονάδα μήκους τὸ 1 μέτρον καὶ εὑρήκαμεν ὅτι τὸ ὕψος της υ εἶναι 3 μέτρα καὶ ἡ βάσις της β εἶναι 1,20 μέτρα. Ὁ λόγος τῶν διαστάσεων αὐτῶν εἶναι $\frac{υ}{β} = \frac{3}{1{,}20} = 2{,}5.$

Ἂν τώρα μετρηθοῦν αἱ διαστάσεις τῆς θύρας μὲ μονάδα μήκους τὸ δεκατόμετρον, θὰ εὕρωμεν υ=30 δεκατόμετρα καὶ β=12 δεκατόμετρα καὶ ὁ λόγος $\frac{υ}{β}$ θὰ εἶναι $\frac{30}{12} = 2{,}5.$

Ἂν τώρα μετρηθοῦν αἱ διαστάσεις τῆς θύρας μὲ μονάδα μήκους τὸ ἑκατοστόμετρον, θὰ εὕρωμεν πάλιν ὅτι $\frac{υ}{β} = \frac{300}{120} = 2{,}5.$

Ὥστε, οἱανδήποτε μονάδα μήκους καὶ ἂν χρησιμοποιήσωμεν διὰ τὴν μέτρησιν τῶν διαστάσεων τῆς θύρας, ὁ λόγος τῶν διαστάσεων αὐτῶν θὰ εἶναι σταθερὸς καὶ ἴσος μὲ 2,5.

Ἀπὸ τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα καὶ ἀπὸ ἄλλα ὅμοια πρὸς αὐτὸ συνάγομεν ὅτι :

Ὁ λόγος $\frac{Α}{Β}$ ἑνὸς ποσοῦ Α πρὸς ἕνα ἄλλο ὁμοειδὲς ποσὸν Β εἶναι σταθερὸς καὶ ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι μετροῦν τὰ ποσὰ αὐτά, ὅταν μετρηθοῦν μὲ τὴν αὐτὴν μονάδα.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΑΝΑΛΟΓΙΩΝ

Εἰς τὴν § 277 ἐμάθομεν πρακτικῶς τὴν κατωτέρω ἰδιότητα καὶ δύο ἐφαρμογάς της. Ἐδῶ θὰ ἐξετάσωμεν θεωρητικῶς τὴν ἰδιότητα ἐκείνην καὶ ἄλλας ἀκόμη.

§ 398. *Θεώρημα Ι.* **Εἰς κάθε ἀναλογίαν τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων ὅρων της ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῶν μέσων ὅρων.**

Ἔστω ἡ ἀναλογία $α : β = γ : δ$ ἢ $\frac{α}{β} = \frac{γ}{δ}$.

Λέγω ὅτι εἶναι $α \cdot δ = β \cdot γ$.

Ἀπόδειξις. Διότι, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν καὶ τοὺς δύο ἴσους ἀριθμοὺς $\frac{α}{β}$ καὶ $\frac{γ}{δ}$ ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν $β \cdot δ$ (δηλ. ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν τῶν λόγων), θὰ προκύψουν ἐξαγόμενα ἴσα, ἤτοι θὰ εἶναι:

$$\frac{\alpha}{\beta}\cdot\beta\cdot\delta=\frac{\gamma}{\delta}\cdot\beta\cdot\delta \text{ ἢ μετὰ τὴν ἁπλοποίησιν } \alpha\cdot\delta=\gamma\cdot\beta.$$

§ 399. **Ἐφαρμογαί.** Στηριζόμενοι εἰς τὴν ἰδιότητα αὐτὴν δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν ἕνα ὅρον μιᾶς ἀναλογίας, ὅταν μᾶς δοθοῦν οἱ ἄλλοι τρεῖς ὅροι.

Πρόβλημα 1ον. **Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἄγνωστος ὅρος χ τῆς ἀναλογίας $6:5=12:\chi$.**

Κατὰ τὴν προηγουμένην ἰδιότητα θὰ εἶναι: $6\cdot\chi=5\cdot 12$.

Ἂν διαιρέσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἰσότητος αὐτῆς διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ 6, ἡ ἰσότης δὲν μεταβάλλεται (§ 352).

Θὰ εἶναι λοιπόν: $\frac{6\cdot\chi}{6}=\frac{5\cdot 12}{6}$ ἢ $\chi=\frac{5\cdot 12}{6}$.

Ἐκ τῆς τελευταίας ἰσότητος συνάγομεν ὅτι:

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν ἑνὸς ἄκρου ὅρου μιᾶς ἀναλογίας, πολλαπλασιάζομεν τοὺς δύο μέσους ὅρους της καὶ τὸ προκῦπτον γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ γνωστοῦ ἄκρου ὅρου της.

Πρόβλημα 2ον. **Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ἄγνωστος ὅρος χ τῆς ἀναλογίας $4:7=\chi:56$.**

Ἐργαζόμενοι, ὅπως εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα, εὑρίσκομεν κατὰ σειράν:

$$7\cdot\chi=4\cdot 56 \text{ (διατί;)} \quad \text{ἢ} \quad \chi=\frac{4\cdot 56}{7}=32 \text{ (διατί;)}$$

Διατυπώσατε τὸν κανόνα, κατὰ τὸν ὁποῖον εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν ἑνὸς ἀγνώστου μέσου ὅρου μιᾶς ἀναλογίας.

Πρόβλημα 3ον. **Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ μέσος ὅρος τῆς ἀναλογίας $6:\chi=\chi:24$.**

Κατὰ τὴν προηγουμένην ἰδιότητα ἔχομεν:

$$\chi^2=6\cdot 24 \quad \text{ἢ} \quad \chi^2=144.$$

Ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς χ εἶναι ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 144.

Ἐπειδὴ δὲ $\sqrt{144}=12$, ἕπεται ὅτι $\chi=12$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι:

Ὁ μέσος ἀνάλογος δύο ἀριθμῶν εἶναι ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ γινομένου αὐτῶν.

§ 400. *Θεώρημα II.* **Ἐὰν τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον δύο ἄλλων ἀριθμῶν, οἱ τέσσαρες αὐτοὶ ἀριθμοὶ δύνανται νὰ σχηματίζουν ἀναλογίαν, ἀρκεῖ νὰ θέσωμεν τοὺς παράγοντας τοῦ ἑνὸς γινομένου ὡς ἄκρους ὅρους καὶ τοὺς παράγοντας τοῦ ἄλλου γινομένου ὡς μέσους ὅρους.**

Ἔστω ὅτι τὰ γινόμενα $\alpha\cdot\delta$ καὶ $\beta\cdot\gamma$ εἶναι ἴσα, ἤτοι εἶναι $\alpha\cdot\delta=\beta\cdot\gamma$. Λέγω ὅτι οἱ ἀριθμοὶ $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ σχηματίζουν ἀναλογίαν.

Ἀπόδειξις. Διότι διαιροῦντες τὰ δύο ἴσα γινόμενα $\alpha\cdot\delta$ καὶ $\beta\cdot\gamma$ διὰ τοῦ γινομένου $\beta\cdot\delta$ (τὸ ὁποῖον εὑρίσκομεν, ἂν λάβωμεν ἕνα παράγοντα ἐκ τοῦ πρώτου γινομένου καὶ τὸν ἄλλον ἐκ τοῦ δευτέρου γινομένου) θὰ προκύψουν ἐξαγόμενα ἴσα· ἤτοι θὰ εἶναι:

$$\frac{\alpha\,.\,\delta}{\beta\,.\,\delta}=\frac{\beta\,.\,\gamma}{\beta\,.\,\delta} \quad \text{ἢ (μετὰ τὴν ἁπλοποίησιν)} \quad \frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$$

Παρατήρησις. Ἂν διαιρέσωμεν τὰ δοθέντα ἴσα γινόμενα $\alpha\cdot\delta$ καὶ $\beta\cdot\gamma$ διὰ $\beta\cdot\delta$ ἢ διὰ $\gamma\cdot\delta$ ἢ διὰ $\alpha\cdot\gamma$ ἢ διὰ $\alpha\cdot\beta$, προκύπτουν ἀντιστοίχως αἱ ἀναλογίαι:

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}\ (1),\qquad \frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\beta}{\delta}\ (2),\qquad \frac{\delta}{\gamma}=\frac{\beta}{\alpha}\ (3),\qquad \frac{\delta}{\beta}=\frac{\gamma}{\alpha}\ (4)$$

§ 401. *Πόρισμα I.* Ἀπὸ τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) καθὼς καὶ τὰς (1) καὶ (4) τῆς προηγουμένης παραγράφου συνάγομεν ὅτι:

Εἰς κάθε ἀναλογίαν δυνάμεθα νὰ ἀλλάξωμεν τὴν θέσιν τῶν μέσων ὅρων της ἢ τῶν ἄκρων ὅρων της, ὁπότε θὰ προκύψουν νέαι ἀναλογίαι.

Πόρισμα II. Παρατηροῦντες τὰς (1) καὶ (3) συνάγομεν ὅτι:

Ἐὰν δύο λόγοι εἶναι ἴσοι, θὰ εἶναι καὶ οἱ ἀντίστροφοι αὐτῶν ἴσοι.

§ 402. *Θεώρημα III.* **Ἐὰν εἰς μίαν ἀναλογίαν ἀντικατασωμεν τὸν πρῶτον ὅρον της διὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο πρώτων ὅρων καὶ τὸν τρίτον ὅρον της διὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο τελευταίων ὅρων της, σχηματίζομεν μίαν νέαν ἀναλογίαν.**

Ἔστω ἡ ἀναλογία $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$. Λέγω ὅτι, ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν τὸν πρῶτον ὅρον α διὰ τοῦ ἀθροίσματος $\alpha+\beta$ καὶ τὸν τρίτον ὅρον γ διὰ τοῦ ἀθροίσματος $\gamma+\delta$, θὰ προκύψῃ νέα ἀναλογία. Δηλαδὴ λέγω ὅτι εἶναι:

$$\frac{\alpha+\beta}{\beta}=\frac{\gamma+\delta}{\delta}$$

Ἀπόδειξις. Διότι, ἐὰν προσθέσωμεν καὶ εἰς τοὺς δύο ἴσους ἀριθμοὺς $\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ $\frac{\gamma}{\delta}$ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν 1, θὰ προκύψουν ἐξαγόμεναν ἴσα. Ἤτοι θὰ εἶναι:

$$\frac{\alpha}{\beta}+1=\frac{\gamma}{\delta}+1 \quad \text{ἢ} \quad \frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}+\frac{\delta}{\delta} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\alpha+\beta}{\beta}=\frac{\gamma+\delta}{\delta}$$

§ 403. *Θεώρημα IV.* **Ἐὰν εἰς μίαν ἀναλογίαν ἀντικαταστήσωμεν τὸν πρῶτον ὅρον της διὰ τῆς διαφορᾶς τῶν δύο πρώτων καὶ τὸν τρίτον ὅρον της διὰ τῆς διαφορᾶς τῶν δύο τελευταίων, σχηματίζομεν μίαν νέαν ἀναλογίαν.**

Ἔστω ἡ ἀναλογία $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$. Λέγω ὅτι θὰ εἶναι καὶ $\frac{\alpha-\beta}{\beta}=\frac{\gamma-\delta}{\delta}$.

Ἀπόδειξις. Διότι, ἐὰν ἀφαιρέσωμεν καὶ ἀπὸ τοὺς δύο ἴσους ἀριθμοὺς $\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ $\frac{\gamma}{\delta}$ τὸν ἀριθμὸν 1 (ὑποτίθεται ὅτι ἡ ἀφαίρεσις εἶναι δυνατή), θὰ προκύψουν ἐξαγόμενα ἴσα, ἤτοι θὰ εἶναι:

$$\frac{\alpha}{\beta}-1=\frac{\gamma}{\delta}-1 \quad \text{ἢ} \quad \frac{\alpha}{\beta}-\frac{\beta}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}-\frac{\delta}{\delta} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\alpha-\beta}{\beta}=\frac{\gamma-\delta}{\delta}.$$

§ 404. *Θεώρημα V.* **Ἐὰν ἔχωμεν τὴν ἀναλογίαν** $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$, θὰ **ἔχωμεν ἐπίσης καὶ τὴν ἀναλογίαν** $\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}=\frac{\gamma+\delta}{\gamma-\delta}$.

Ἀπόδειξις. Ἐκ τῆς ἀναλογίας $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ θὰ ἔχωμεν, κατὰ γνωστὴν ἰδιότητα (§ 402), καὶ $\frac{\alpha+\beta}{\beta}=\frac{\gamma+\delta}{\delta}$ ἤ, ἂν ἀλλάξωμεν τὴν θέσιν τῶν μέσων ὅρων αὐτῆς, $\frac{\alpha+\beta}{\gamma+\delta}=\frac{\beta}{\delta}$ (1)

Ὁμοίως ἐκ τῆς ἀναλογίας $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ ἔχομεν, κατὰ γνωστὴν ἰδιότητα τῶν ἀναλογιῶν (§ 403), καὶ

$$\frac{\alpha-\beta}{\beta}=\frac{\gamma-\delta}{\delta} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\alpha-\beta}{\gamma-\delta}=\frac{\beta}{\delta} \quad (\text{διατί};) \qquad (2)$$

Ἐπειδὴ τὰ δεύτερα μέλη τῶν ἰσοτήτων (1) καὶ (2) εἶναι ἴσα, θὰ εἶναι καὶ τὰ πρῶτα, ἤτοι θὰ εἶναι $\frac{\alpha+\beta}{\gamma+\delta}=\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\delta}$.

Ἂν ἀλλάξωμεν τὴν θέσιν τῶν μέσων ὅρων αὐτῆς, θὰ ἔχωμεν

$$\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}=\frac{\gamma+\delta}{\gamma-\delta}.$$

§ 405. *Θεώρημα VI.* **Ἐὰν πολλοὶ λόγοι εἶναι ἴσοι, τὸ ἄθροισμα τῶν προηγουμένων ὅρων διαιρούμενον διὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἑπομένων ὅρων δίδει ἕνα νέον λόγον ἴσον πρὸς αὐτούς.**

Ἔστω ὅτι οἱ λόγοι $\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\gamma}{\delta}$, $\frac{\varepsilon}{\zeta}$ εἶναι ἴσοι, ἤτοι ἔστω ὅτι $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\varepsilon}{\zeta}$.

Θὰ δείξω ὅτι $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\varepsilon}{\zeta}=\frac{\alpha+\gamma+\varepsilon}{\beta+\delta+\zeta}$.

Ἀπόδειξις. Ἂν παραστήσωμεν τοὺς ἴσους λόγους μὲ λ, θὰ ἔχωμεν:

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\varepsilon}{\zeta}=\lambda \qquad (1)$$

Ἀπὸ τὴν σχέσιν αὐτὴν λαμβάνομεν :

$$\frac{\alpha}{\beta}=\lambda, \quad \text{ἄρα} \quad \alpha=\beta\cdot\lambda \quad (\text{διατί ;}) \qquad (2)$$

$$\frac{\gamma}{\delta}=\lambda, \quad \text{ἄρα} \quad \gamma=\delta\cdot\lambda \quad (\text{διατί ;}) \qquad (3)$$

$$\frac{\varepsilon}{\zeta}=\lambda. \quad \text{ἄρα} \quad \varepsilon=\zeta\cdot\lambda \quad (\text{διατί ;}) \qquad (4)$$

Προσθέτοντες τὰς ἰσότητας (2), (3), (4) κατὰ μέλη ἔχομεν : $\alpha+\gamma+\varepsilon=\beta\cdot\lambda+\delta\cdot\lambda+\zeta\cdot\lambda$ ἢ $\alpha+\gamma+\varepsilon=(\beta+\delta+\zeta)\cdot\lambda$ (§ 371).

Διαιροῦντες καὶ τὰ δύο μέλη τῆς τελευταίας ἰσότητος διὰ $(\beta+\delta+\zeta)$ ἔχομεν :

$$\frac{\alpha+\gamma+\varepsilon}{\beta+\delta+\zeta}=\lambda \qquad (5)$$

Παραβάλλοντες τὰς ἰσότητας (1) καὶ (5) συνάγομεν ὅτι :

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\varepsilon}{\zeta}=\frac{\alpha+\gamma+\varepsilon}{\beta+\delta+\zeta}, \qquad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

Σημείωσις. Ἡ ἀνωτέρω ἰδιότης λέγεται καὶ **ἰδιότης τῶν ἴσων κλασμάτων.**

Ἀσκήσεις

Α' Ὁμάς. 67) Νὰ γραφῇ ὑπὸ μορφὴν ἀναλογίας καθ' ὅλους τοὺς δυνατοὺς τρόπους ἡ ἰσότης $3\times12=4\times9$.

68) Οἱ τρεῖς ὅροι μιᾶς ἀναλογίας εἶναι 2, 5, 8. Ποῖος εἶναι ὁ τέταρτος ;

69) Νὰ γραφῇ ὑπὸ μορφὴν ἀναλογίας ἡ ἰσότης $\gamma^2=\alpha\beta$.

70) Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ἄγνωστος ὅρος εἰς τὰς ἀναλογίας :

1. $\frac{x}{8}=\frac{9}{36}$, $\quad \frac{3}{x}=\frac{6}{4}$, $\quad \frac{5,4}{8}=\frac{x}{3}$.

2. $\frac{5}{x}=\frac{x}{125}$, $\quad \frac{2,5}{4}=\frac{6,3}{x}$, $\quad \frac{45}{x}=\frac{x}{125}$.

71) Νὰ εὑρεθῇ ὁ τρίτος ἀνάλογος τῶν κάτωθι ἀριθμῶν :

24 καὶ 12, 27 καὶ 3, 36 καὶ 12.

Β'. Ὁ μ ά ς. 72) Ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν δύο οἰκοπέδων εἶναι $\frac{5}{8}$. Τὸ πρῶτον οἰκόπεδον εἶναι 240 τ.μ. καὶ 56 τ. παλ. Πόσον εἶναι τὸ ὁλικὸν ἐμβαδὸν τῶν δύο οἰκοπέδων ;

73) Δύο τόξα τῆς αὐτῆς περιφερείας εἶναι $17^{o}\ 21'\ 45''$ τὸ ἕνα καὶ $11^{o}\ 27'\ 3''$ τὸ ἄλλο. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τοῦ πρώτου πρὸς τὸ δεύτερον.

74) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι, ἐὰν ἔχωμεν τὴν ἀναλογίαν $\alpha : \beta = \gamma : \delta$, θὰ ἔχωμεν καί :

1. $\alpha : \delta = \beta\gamma : \delta^2$
2. $1 : \beta = \gamma : \alpha\delta$
3. $\mu\alpha : \nu\beta = \mu\gamma : \nu\delta$
4. $(\alpha-1) : \beta = (\beta\gamma-\delta) : \beta\delta$

75) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι, ἐὰν ἔχωμεν τὴν ἀναλογίαν $\alpha : \beta = \beta : \gamma$, θὰ ἔχωμεν καί :

1. $\gamma : \beta = \beta : \alpha$,
2. $\alpha : \gamma = \beta^2 : \gamma^2$,
3. $(\alpha\gamma-1) : (\beta-1) = (\beta+1) : 1$.

76) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι, ἐὰν ἔχωμεν τὴν ἀναλογίαν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, θὰ ἔχωμεν καί :

1. $\frac{\alpha+\beta}{\gamma+\delta} = \frac{\beta}{\delta}$,
2. $\frac{\alpha+\beta}{\gamma+\delta} = \frac{\beta}{\delta}$,
3. $\frac{\alpha+\gamma}{\alpha-\gamma} = \frac{\beta+\delta}{\beta-\delta}$,
4. $\frac{3\alpha+4\gamma}{3\alpha-4\gamma} = \frac{3\beta+4\delta}{3\beta-4\delta}$.

ΠΙΝΑΞ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΒΙΒΛΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ

ΟΙ ΑΚΕΡΑΙΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Σελίς

ΒΙΒΛΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΟΙ ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

ΒΙΒΛΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ

ΔΕΚΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ. ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ ΡΙΖΑ ΑΡΙΘΜΟΥ. ΣΥΜΜΙΓΕΙΣ ΑΡΙΘΜΟΙ

ΒΙΒΛΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ

ΑΝΑΛΟΓΙΑΙ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΙ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ

Ἐπιμελητὴς ἐκδόσεως ὁ Καθηγητὴς Δ. ΚΑΡΤΣΩΝΑΣ (ἀπ. Δ.Σ. ΟΕΣΒ 7868/13.2.56)

Τὰ ἀντίτυπα τοῦ βιβλίου φέρουν τὸ κάτωθι βιβλιόσημον, εἰς ἀπόδειξιν τῆς γνησιότητος αὐτῶν.

Ἀντίτυπον στερούμενον τοῦ βιβλιοσήμου τούτου θεωρεῖται κλεψίτυπον. Ὁ διαθέτων, πωλῶν ἢ χρησιμοποιῶν αὐτὸ διώκεται κατὰ τὰς διατάξεις τοῦ ἄρθρου 7 τοῦ νόμου 1129 τῆς 15/21 Μαρτίου 1946 (Ἐφ. Κυβ. 1946 Α 108).

024000028507

ΕΚΔΟΣΙΣ Δ', 1956 (VI) — ΑΝΤΙΤΥΠΑ 55.000

Ἐκτύπωσις - Βιβλιοδεσία ΑΔΕΛΦΩΝ Γ. ΡΟΔΗ, Κεραμεικοῦ 40 — Ἀθῆναι