ΠΕΤΡΟΥ Π. ΠΑΠΑΪΩΑΝΝΟΥ

Έγκρισις 1967

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

Ε' κ. ΣΤ'

ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ

ΤΙΜΗΣ ΕΝΕΚΕΝ

ΕΓΚΕΚΡΙΜΕΝΗ

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΤΗΣ "ΕΣΤΙΑΣ"
Ι. Δ. ΚΟΛΛΑΡΟΥ & ΣΙΑΣ Α. Ε.

ΠΕΤΡΟΥ Π. ΠΑΠΑΪΩΑΝΝΟΥ: ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ Ε' ΚΑΙ ΣΤ' ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ

ΠΕΤΡΟΥ Π. ΠΑΠΑΪΩΑΝΝΟΥ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

Ε΄ ΚΑΙ ΣΤ΄ ΤΑΞΕΩΣ
ΤΟΥ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ ΣΧΟΛΕΙΟΥ

ΕΓΚΕΚΡΙΜΕΝΗ
διὰ τῆς ὑπ' ἀριθ. 61452/12-6-52 ἀποφάσεως Ὑπ. Παιδείας

ΜΕΤΑΓΛΩΤΤΙΣΘΕΙΣΑ ΕΙΣ ΤΗΝ ΚΑΘΑΡΕΥΟΥΣΑΝ

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΤΗΣ "ΕΣΤΙΑΣ"
ΙΩΑΝΝΟΥ Δ. ΚΟΛΛΑΡΟΥ & ΣΙΑΣ Α.Ε.
ΟΔΟΣ ΣΤΑΔΙΟΥ 38 - ΑΘΗΝΑΙ (132)

ΒΑΣΙΛΕΙΟΝ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΝ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΚΑΙ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΙΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ

'Αθῆναι τῇ 20 'Ιουνίου 1952

'Αριθ. Πρωτ. 61330

Πρὸς
τὸν κ. Πέτρον Παπαϊωάννου

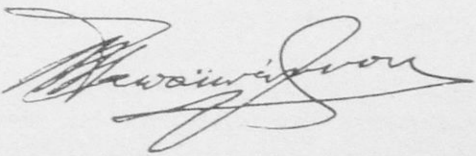
'Ανακοινοῦμεν ὑμῖν, ὅτι διὰ τῆς ὑπ' ἀριθ. 61452/12-6-52 ἀποφάσεως τοῦ 'Υπουργείου μετὰ σύμφωνον γνωμοδότησιν τοῦ Κεντρικοῦ Γνωμοδοτικοῦ καὶ Διοικητικοῦ Συμβουλίου 'Εκπαιδεύσεως, ἐνεκρίθη τὸ ὑπὸ τὸν τίτλον ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ βιβλίον σας ὡς βοηθητικὸν τοῦ μαθήματος τῆς 'Αριθμητικῆς διὰ τοὺς μαθητὰς τῆς Ε' καὶ ΣΤ' τάξεως τοῦ Δημοτικοῦ Σχολείου ἐπὶ μίαν τριετίαν, ἀρχομένην ἀπὸ 1-9-1952.

Παρακαλοῦμεν ὅθεν, ὅπως μεριμνήσητε διὰ τὴν ἔγκαιρον ἐκτύπωσιν τοῦ βιβλίου, τούτου, συμμορφούμενος πρὸς τὰς ὑποδείξεις τοῦ 'Εκπαιδευτικοῦ Συμβουλίου καὶ τὸν κανονισμὸν ἐκδόσεως βοηθητικῶν βιβλίων τοῦ Δημοτικοῦ Σχολείου.

Κοινοποίησις:
Κ.Γ.Δ.Σ.Ε.

'Εντολῇ 'Υπουργοῦ
'Ο Διευθυντὴς
Χ. ΜΟΥΣΤΡΗΣ

Τὰ γνήσια ἀντίτυπα ὑπογράφονται ὑπὸ τοῦ συγγραφέως



ΕΠΑΝΑΛΗΨΙΣ

ΟΙ ΑΚΕΡΑΙΟΙ ΚΑΙ ΔΕΚΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Προβλήματα τῶν τεσσάρων πράξεων ἀκεραίων ἀριθμῶν

1. Κατὰ τὴν ἀπογραφὴν τοῦ 1951 αἱ Ἀθῆναι μὲ τὰ προάστιά των εἶχον 1.034.012 κατοίκους, ὁ Πειραιεὺς μὲ τὰ προάστιά του 344.574 κατοίκους καὶ ἡ Θεσσαλονίκη μὲ τὰ προάστιά της 280.394 κατοίκους. Πόσους κατοίκους ἔχουν περισσοτέρους αἱ Ἀθῆναι ἀπὸ τὸν Πειραιᾶ καὶ πόσους ἀπὸ τὴν Θεσσαλονίκην ;

2. Τὸ ὄρος Ὄλυμπος ἔχει ὕψος 2.965 μέτρα, ὁ Παρνασσὸς 2.495 μέτρα καὶ ὁ Ταΰγετος 2.410 μέτρα. Πόσα μέτρα εἶναι ὑψηλότερος ὁ Ὄλυμπος ἀπὸ τὸν Παρνασσὸν καὶ πόσα ἀπὸ τὸν Ταΰγετον ;

3. Κατὰ τὴν ἀπογραφὴν τοῦ 1951 ἡ Στερεὰ Ἑλλὰς μετὰ τῆς Εὐβοίας εἶχε 2.287.019 κατοίκους, ἡ Πελοπόννησος 1.129.022, ἡ Θεσσαλία 628.941, ἡ Μακεδονία 1.700.835, ἡ Ἤπειρος 330.543, ἡ Θράκη 336.954, αἱ νῆσοι τοῦ Ἰονίου πελάγους 228.597, ἡ Κρήτη 462.124, ἡ Δωδεκάνησος 121.480 καὶ αἱ νῆσοι τοῦ Αἰγαίου πελάγους 407.286 κατοίκους. Πόσος ἦτο συνολικῶς ὁ πληθυσμὸς τῆς Ἑλλάδος τὸ 1951 ;

4. Οἱ Τοῦρκοι κατέλαβον τὴν Κωνσταντινούπολιν τὸ ἔτος 1453 μ.Χ. Πόσα χρόνια πέρασαν μέχρι σήμερον, καὶ πόσα μέχρι τῆς Ἑλληνικῆς Ἐπαναστάσεως τοῦ 1821 ;

5. Ἕνας ἠγόρασε 37 δωδεκάδας μανδήλια πρὸς 7 δραχμὰς ἕκαστον. Πόσας δραχμὰς ἐπλήρωσε ;

6. Ἕνας μύλος ἀλέθει 27 κιλὰ σίτου τὴν ὥραν. Ἂν ἀλέθῃ 24 ὥρας τὸ ἡμερονύκτιον, πόσα κιλὰ σίτου θὰ ἀλέσῃ εἰς 38 ἡμερονύκτια ;

7. Τρεῖς ἐργάται εἰργάσθησαν εἰς μίαν οἰκοδομὴν μὲ ἡμερομίσθιον 37 δραχμάς. Ὁ ἕνας εἰργάσθη 27 ἡμέρας, ὁ ἄλλος 32 καὶ ὁ τρίτος 29 ἡμέρας. Πόσας δραχμὰς ἔλαβεν ὁ καθένας καὶ πόσας καὶ οἱ τρεῖς συνολικῶς ;

8. Ἕνα ἀτμόπλοιον ἐξεφόρτωσε εἰς τὸν Πειραιᾶ ἐμπορεύματα τὰ ὁποῖα ἐφορτώθησαν εἰς 37 αὐτοκίνητα. Κάθε αὐτοκίνητο ἐφόρτωσε

5 τόννους (ὁ κάθε τόννος = 1.000 κιλά). Πόσᾳ κιλὰ ἐμπορεύματα ἔφερε τὸ ἀτμόπλοιον ;

9. Ἕνας ἔμπορος ἠγόρασε 2.584 αὐγὰ πρὸς μίαν δραχμὴν τὸ ἕνα. Κατὰ τὴν μεταφορὰν ἔσπασαν 297 αὐγά, τὰ δὲ ὑπόλοιπα ἐπώλησε πρὸς 2 δραχμὰς τὸ ἕνα. Πόσας δραχμὰς ἐκέρδισε ;

10. Ἕνας, διὰ νὰ στρώσῃ τὴν αὐλήν του μὲ τσιμέντο, ἐπλήρωσε διὰ τσιμέντον 377 δραχμάς, διὰ χαλίκι καὶ ἄμμον 86 δραχμάς. Ἐπίσης ἐπλήρωσε 3 ἐργάτας, ποὺ εἰργάσθησαν 5 ἡμέρας, πρὸς 40 δραχμὰς τὴν ἡμέραν τὸν καθένα. Πόσον τοῦ ἐστοίχισε τὸ στρώσιμον τῆς αὐλῆς ;

11. Ἕνας ἠγόρασεν ἕναν ἀγρὸν ἀντὶ 6.850 δραχμῶν, ἔδωσε δὲ διὰ νὰ τὸν ἐξοφλήσῃ 13 χρυσᾶς λίρας, ποὺ τὰς ὑπελόγισε πρὸς 295 δραχμὰς τὴν κάθε μίαν. Πόσας δραχμὰς χρεωστᾶ ἀκόμη ;

12. Εἰς μίαν θερινὴν μαθητικὴν κατασκήνωσιν εἶναι 158 μαθηταί. Ὁ κάθε μαθητὴς χρειάζεται διὰ διατροφήν του 14 δραχμὰς τὴν ἡμέραν. Πόσο στοιχίζει ἡ διατροφὴ ὅλων τῶν μαθητῶν 28 ἡμέρας ;

13. Δύο ἀτμόπλοια ξεκινοῦν τὴν ἰδίαν ὥραν ἀπὸ τὸν Πειραιᾶ διὰ τὴν Θεσσαλονίκην. Τὸ ἕνα πλέει μὲ ταχύτητα 16 μιλίων τὴν ὥραν καὶ τὸ ἄλλο μὲ ταχύτητα 12 μιλίων τὴν ὥραν. Μετὰ 13 ὥρας πόσην ἀπόστασιν θὰ ἔχουν μεταξύ των ;

14. Ἕνας χωρικὸς ἐπώλησε 1.627 κιλὰ σίτου πρὸς 3 δραχμὰς τὸ κιλὸν καὶ 850 κιλὰ οἴνου πρὸς 2 δραχμὰς τὸ κιλόν. Μὲ τὰ λεπτὰ ποὺ εἰσέπραξε ἠγόρασε 19 πρόβατα πρὸς 187 δραχμὰς τὸ καθένα. Πόσαι δραχμαὶ τοῦ ἐπερίσσεψαν ;

15. Ἕνας ἠγόρασε 588 κιλὰ ἔλαιον καὶ μὲ αὐτὸ ἐγέμισε 42 ὅμοια δοχεῖα. Πόσα κιλὰ ἐλαίου χωρεῖ κάθε δοχεῖον ;

16. Ἕνας ἠγόρασε 78 κιλὰ ἐλαίας πρὸς 6 δραχμὰς τὸ κιλόν. Πόσον πρέπει νὰ τὰς πωλήσῃ τὸ κιλόν, διὰ νὰ κερδίσῃ συνολικῶς 234 δραχμάς ;

17. Ἕνας ἠγόρασε 40 κιλὰ ρύζι πρὸς 6 δραχμὰς τὸ κιλὸν καὶ 20 κιλὰ καλυτέρας ποιότητος πρὸς 9 δραχμὰς τὸ κιλόν. Ἔπειτα ἀνέμιξε τὰς δύο ποιότητας. Πόσο κοστίζει τὸ κιλὸν τοῦ μίγματος ;

18. Ἕνας ἠγόρασε 420 κιλὰ οἶνον πρὸς 3 δραχμὰς τὸ κιλόν, προσέθεσε δὲ εἰς αὐτὸν 210 κιλὰ νερό. Πόσο κοστίζει τὸ κιλὸν τὸ μῖγμα καὶ πόσον πρέπει νὰ πωλήσῃ τὸ κιλόν, διὰ νὰ κερδίσῃ συνολικῶς 1.260 δραχμάς ;

19. Ἕνας ἠγόρασε 76 κιλὰ μέλι πρὸς 13 δραχμὰς τὸ κιλόν. Ἀπὸ αὐτὸ ἐπώλησε 38 κιλὰ πρὸς 15 δραχμὰς τὸ κιλόν, τὸ δὲ ὑπόλοιπον τὸ ἐπώλησεν ἀντὶ 608 δραχμῶν. Πόσον ἐπώλησε τὸ κιλὸν τὸ ὑπόλοιπον μέλι καὶ πόσας δραχμὰς ἐκέρδισε συνολικῶς ;

20. Ἕνας ὀπωροπώλης ἠγόρασε 185 κιλὰ κρεμμύδια ἀντὶ 370 δραχμῶν, ἀλλὰ τοῦ σάπισαν 35 κιλά. Πόσον πρέπει νὰ πωλήσῃ τὸ κιλὸν τὰ κρεμμύδια ποὺ τοῦ ἔμειναν, διὰ νὰ εἰσπράξῃ τὰ χρήματα ποὺ ἔδωσε νὰ τὰ ἀγοράσῃ καὶ νὰ κερδίσῃ 80 δραχμάς ;

21. Ἕνα ἀτμόπλοιον ἔκανε ἕνα ταξίδι 1.632 μιλίων εἰς 136 ὥρας. Τὰς πρώτας 34 ὥρας ἔπλεε μὲ ταχύτητα 15 μιλίων τὴν ὥραν. Μὲ πόσα μίλια τὴν ὥραν ἔπλεε τὰς ὑπολοίπους ὥρας τοῦ ταξιδίου ;

22. Ἕνας ἔμπορος ἠγόρασε 29.678 κιλὰ σίτου. Ἀπὸ αὐτὸν ἐπώλησε 3.578 κιλά, τὸ δὲ ὑπόλοιπον θέλει νὰ τοποθετήσῃ εἰς σάκκους, ποὺ ὁ καθένας χωρεῖ 45 κιλά. Πόσους σάκκους θὰ χρειασθῇ ;

23. Εἰς τὸν Πειραιᾶ ἔφθασεν ἕνα ἀτμόπλοιον μὲ 645 τόννους ἐμπορευμάτων. Διὰ νὰ μεταφερθοῦν εἰς τὰς ἀποθήκας θὰ φορτωθοῦν εἰς φορτηγὰ αὐτοκίνητα, ποὺ τὸ καθένα φορτώνει 5 τόννους. Πόσα αὐτοκίνητα θὰ χρειασθοῦν ;

24. Ἕνας ἔμπορος ἠγόρασεν ἐμπορεύματα ποὺ ἄξιζαν 5.900 δραχμάς. Ἐπλήρωσεν ἀμέσως 2.300 δραχμάς, τὸ δὲ ὑπόλοιπον χρέος του συνεφώνησε νὰ τὸ πληρώσῃ εἰς 12 δόσεις. Πόσας δραχμὰς θὰ εἶναι ἡ κάθε δόσις ;

25. Ἕνας καφεπώλης ἠγόρασε 35 κιλὰ καφὲ πρὸς 84 δραχμὰς τὸ κιλόν, καὶ ἐπλήρωσε διὰ τὴν μεταφορὰν 30 δραχμάς. Ἔπειτα τὸν ἐκαβούρδισε, τὸν ἄλεσε καὶ τὸν ἐπώλησεν ἀλεσμένον. Μὲ τὸ καβούρδισμα ὁ καφὲς εἶχεν φύρα 2 κιλά. Πόσο στοιχίζει τὸ κιλὸν ὁ ἀλεσμένος καφές ;

26. 182 κιλὰ πατάτες καὶ 120 κιλὰ κρεμμύδια στοιχίζουν συνολικῶς 786 δραχμάς. Οἱ πατάτες στοιχίζουν 3 δραχμὰς τὸ κιλόν. Πόσο στοιχίζει τὸ κιλὸν τὰ κρεμμύδια ;

27. Ἕνας ἔμπορος ἠγόρασεν ἀντὶ 2.048 δραχμῶν 128 μέτρα ὕφασμα καὶ ἔπειτα ἐπώλησεν ὅλο τὸ ὕφασμα πρὸς 18 δραχμὰς τὸ μέτρον. Πρὸς πόσας δραχμὰς ἠγόρασε τὸ μέτρον καὶ πόσας δραχμὰς ἐκέρδισε ;

28. Ἕνας ἠγόρασεν 100 κιλὰ ἔλαιον πρὸς 12 δραχμὰς τὸ κιλὸν καὶ 50 κιλὰ σπορέλαιον πρὸς 6 δραχμὰς τὸ κιλόν, καὶ ἀνέμιξεν αὐτά. Πόσο στοιχίζει τὸ κιλὸν τοῦ μίγματος ;

29. Ἕνας ἠγόρασεν ὕφασμα πρὸς 12 δραχμὰς τὸ μέτρον καὶ ἐπλήρωσε 1.440 δραχμάς. Πόσα μέτρα ὕφασμα ἠγόρασε καὶ πόσα ὑποκάμισα θὰ κάνῃ μὲ τὸ ὕφασμα αὐτό, ὅταν διὰ κάθε ὑποκάμισον χρειάζεται 3 μέτρα ;

Προβλήματα
τῶν τεσσάρων πράξεων ἀκεραίων καὶ δεκαδικῶν ἀριθμῶν

30. Ἕνας ἠγόρασεν 25,5 μ ὕφασμα, 47,35 μ ἀπὸ ἄλλο ὕφασμα καὶ 180,6 μ ἀπὸ ἄλλο. Πόσα μέτρα ἠγόρασε συνολικῶς ;

31. Μία κόρη ἔπλεξεν εἰς τρεῖς ἑβδομάδας 78,4 μέτρα δαντέλλα. Τὴν πρώτην ἑβδομάδα ἔπλεξε 18,36 μέτρα καὶ τὴν δευτέρα 27,85 μέτρα. Πόσα μέτρα ἔπλεξε τὴν τρίτην ἑβδομάδα ;

32. Ἡ θερμοκρασία ἑνὸς ἀσθενοῦς ἦτο τὸ πρωῒ 37,8 καὶ τὸ ἀπόγευμα 40,5. Πόσον ηὐξήθη ἡ θερμοκρασία του ;

33. Τὸ ἀνάστημα τοῦ πατέρα εἶναι 1,74 μ τοῦ δὲ παιδιοῦ του 1,38 μ. Πόσον εἶναι μικρότερον τὸ ἀνάστημα τοῦ παιδιοῦ ;

34. Μία νοικοκυρὰ ἠγόρασεν 20 μέτρα ὕφασμα. Ἀπὸ αὐτὸ ἔκοψε 5,85 μέτρα διὰ νὰ κάνῃ φόρεμα τῆς μεγάλης κόρης της, 3,78 μέτρα διὰ τὴν ἄλλην κόρην της καὶ 6,5 μέτρα διὰ ἰδικόν της φόρεμα. Πόσον ὕφασμα τῆς ἐπερίσσεψε ;

35. Ἕνας ἐργάτης πρόκειται νὰ σκάψῃ μίαν τάφρον μήκους 48,5 μέτρων. Τὴν μίαν ἡμέραν ἔσκαψε 17,38 μ καὶ τὴν ἄλλην 16,95 μ. Πόσο μῆκος μένει διὰ νὰ σκάψῃ τὴν τρίτην ἡμέραν ;

36. Ἕνας ἀθλητὴς ἐπήδησε 2,75 μ,. δεύτερος ἀθλητὴς ἐπήδησε 0,87 μ περισσότερον ἀπὸ τὸν πρῶτον καὶ τρίτος ἀθλητὴς ἐπήδησε 0,39 μ περισσότερον ἀπὸ τὸν δεύτερον. Πόσα μέτρα ἐπήδησεν ὁ δεύτερος καὶ πόσα ὁ τρίτος ἀθλητής ;

37. Μία κονσέρβα κρέατος ζυγίζει 3,382 κιλά, μίαν ἄλλη 2,015 κιλὰ καὶ τρίτη κονσέρβα ζυγίζει 0,382 τοῦ κιλοῦ. Πόσον ζυγίζουν καὶ αἱ τρεῖς καὶ πόσον βαρυτέρα εἶναι ἡ πρώτη ἀπὸ τὴν τρίτην ;

38. Ἕνας εἶχεν ἕνα οἰκόπεδον 984,5 τετραγωνικὰ μέτρα καὶ μέσα εἰς αὐτὸ ἔκτισε δύο σπίτια. Διὰ τὸ ἕνα ἐχρειάσθη 298,4 τετραγ. μέτρα καὶ διὰ τὸ ἄλλο 308,15 τετραγ. μέτρα. Πόσα τετραγωνικὰ μέτρα τοῦ οἰκοπέδου ἔμεινεν ἄκτιστον ;

39. Εἰς ἕνα ὑφαντουργεῖον μία ἐργάτρια ὑφαίνει 28,72 μέτρα ὕφασμα τὴν ἡμέραν, ἄλλη ὑφαίνει 36,75 μέτρα καὶ τρίτη 41 μέτρα. Πόσο ὑφαίνουν τὴν ἡμέραν καὶ αἱ τρεῖς μαζὶ καὶ πόσον ὑφαίνει περισσότερον ἡ τρίτη ἀπὸ τὴν πρώτην ;

40. Μία νοικοκυρὰ ἠγόρασε 9,8 μέτρα ὕφασμα καὶ ἀπὸ αὐτὸ ἔκοψε δι' ἕνα φόρεμα 7,15 μέτρα. Πόσον ὕφασμα πρέπει νὰ ἀγοράσῃ ἀκόμη, διὰ νὰ κάνῃ ἕνα ἄλλο φόρεμα ὅμοιο ;

41. Εἰς ἕνα ὀρφανοτροφεῖον πρόκειται νὰ κάνουν 350 ἐνδυμασίας διὰ τὰ ὀρφανά. Κάθε ἐνδυμασία χρειάζεται 2,50 μέτρα ὕφασμα, ποὺ στοιχίζει 14,15 δραχμὰς τὸ μέτρον. Πόσας δραχμὰς στοιχίζουν ὅλαι αἱ ἐνδυμασίαι ;

42. Μία νοικοκυρὰ ἠγόρασε 53,5 μέτρα ὕφασμα πρὸς 21,35 δραχμὰς τὸ μέτρον. Μὲ τὸ ὕφασμα αὐτὸ ἔκανε 8 φορέματα ὅμοια καὶ τῆς ἐπερίσσεψαν 5,50 μέτρα.Πόσας δραχμὰς στοιχίζει τὸ κάθε φόρεμα;

43. Ἕνας ἔμπορος χρεωστᾶ 1.200 δραχμάς. Διὰ νὰ ἐξοφλήσῃ τὸ χρέος του, δίδει 35,5 μέτρα ὕφασμα πρὸς 13,50 δραχμὰς τὸ μέτρον καὶ 25 μέτρα ἀπὸ ἄλλο ὕφασμα πρὸς 16,50 δραχμὰς τὸ μέτρον. Πόσας δραχμὰς χρεωστᾶ ἀκόμη ;

44. Ἕνας ἠγόρασε 148,5 μέτρα ὕφασμα πρὸς 12,60 δραχμὰς τὸ μέτρον καὶ μὲ αὐτὸ ἔκανε μανδήλια. Διὰ κάθε δωδεκάδα μανδήλια ἐχρειάσθη 3,30 μέτρα ὕφασμα. Πόσας δωδεκάδας μανδήλια ἔκανε καὶ πόσον τοῦ στοιχίζει τὸ καθένα ;

45. Διὰ κάθε ὑποκάμισον, χρειάζονται 3,45 μέτρα ὕφασμα. Πόσα ὑποκάμισα θὰ γίνουν μὲ 106,95 μέτρα ὕφασμα ;

46. Εἰς μίαν ὁδὸν μήκους 2.580 μέτρων πρόκειται νὰ φυτευθοῦν δένδρα εἰς τὴν μίαν πλευράν της καὶ εἰς ἀπόστασιν 2,5 μέτρων τὸ ἕνα ἀπὸ τὸ ἄλλο. Πόσα δένδρα θὰ φυτευθοῦν ;

47. Εἰς μίαν κενὴν δεξαμενὴν ἀνοίγομεν δύο κρουνοὺς ποὺ τὴν γεμίζουν. Ἀπὸ τὸν ἕνα χύνεται 528 κιλὰ νερὸ τὴν ὥραν καὶ ἀπὸ τὸν ἄλλον 396 κιλὰ τὴν ὥραν. Εἰς τὸ κάτω μέρος τῆς δεξαμενῆς ὑπάρχει κρουνὸς ποὺ ἀδειάζει 674 κιλὰ νερὸ τὴν ὥραν. Πόσα κιλὰ νερὸ θὰ ἔχῃ ἡ δεξαμενή, ἂν ἀφήσωμεν ἀνοικτοὺς καὶ τοὺς τρεῖς κρουνοὺς 17,5 ὥρας;

48. Διὰ νὰ μεταφερθῇ τὸ νερὸ ἀπὸ μίαν πηγὴν εἰς ἕνα χωριό, ἐχρησιμοποιήθησαν σωλῆνες μήκους 2,45 μέτρων ὁ καθένας, καὶ ἡ ἀπόστασις ἀπὸ τὴν πηγὴν ὣς τὸ χωριὸ εἶναι 1.837,5 μέτρα. Πόσοι σωλῆνες ἐχρειάσθησαν καὶ πόσοι σωλῆνες θὰ ἐχρειάζοντο, ἂν ὁ καθένας εἶχε μῆκος 0,85 τοῦ μέτρου ;

49. Ἕνα τόπι ὕφασμα 89,65 μ πρόκειται νὰ μοιρασθῇ εἰς δύο τεμάχια, τὸ δὲ ἕνα ἀπὸ αὐτὰ νὰ εἶναι 10,85 μ μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ ἄλλο. Πόσα μέτρα θὰ εἶναι τὸ καθένα ἀπὸ τὰ δύο ;

50. Ἕνας ἠγόρασεν πιάτα πρὸς 135 δραχμὰς τὴν δωδεκάδα. Ἔπειτα τὰ ἐπώλησεν πρὸς 14,50 δραχμὰς τὸ ἕνα, καὶ ἐκέρδισεν ἀπὸ ὅλα 559 δραχμάς. Πόσα πιάτα ἠγόρασε ;

51. Ἕνας ἔμπορος εἶχε 127 μέτρα ὕφασμα. Ἀπὸ αὐτὸ ἔκανε 15 ὑποκάμισα μὲ 3,45 μέτρα τὸ καθένα. Μὲ τὸ ὑπόλοιπον ὕφασμα ἔκανε παιδικὰ ὑποκάμισα μὲ 1,75 μέτρα τὸ καθένα. Πόσα παιδικὰ ὑποκάμισα ἔκανε ;

52. Ἕνας πεζοπόρος διέτρεξε μίαν ἀπόστασιν 27 χιλιομέτρων (1 χιλιόμετρον = 1.000 μέτρα). Νὰ εὑρεθῇ πόσα βήματα ἔκανε, ἂν κάθε βῆμα του εἶναι 0,75 τοῦ μέτρου ;

53. Ἕνας ἔμπορος ἠγόρασε 268,75 μέτρα ὕφασμα πρὸς 14,50 δραχμὰς τὸ μέτρον. Μὲ αὐτὸ ἔκανε 125 παιδικὰς ἐνδυμασίας καὶ ἐπλήρωσε ραπτικὰ 87,50 δραχμὰς διὰ κάθε ἐνδυμασίαν. Πόσα μέτρα ὕφασμα ἐχρειάσθη διὰ κάθε ἐνδυμασίαν καὶ πόσο στοιχίζει ἡ κάθε ἐνδυμασία μαζὶ μὲ τὰ ραπτικά ;

54. Ἕνας εἶχε 500 κιλὰ ἔλαιον καὶ ἀπὸ αὐτὸ ἐγέμισεν 123 δοχεῖα, ποὺ τὸ καθένα χωροῦσε 3,25 κιλά. Τὸ ὑπόλοιπον ἔλαιον πρόκειται νὰ τὸ βάλῃ εἰς φιάλας, ποὺ ἡ κάθε μία χωρεῖ 0,78 τοῦ κιλοῦ ἔλαιον. Πόσας φιάλας θὰ χρειασθῇ ;

55. Ἕνας ἠγόρασε 50,70 μ ὕφασμα ἀντὶ 6.084 δραχμῶν. Ἀπὸ τὸ ὕφασμα αὐτὸ τὰ 16,90 μ τὰ ἠγόρασε πρὸς 100 δραχμὰς τὸ μέτρον. Πόσον ἠγόρασε τὸ μέτρον τὸ ὑπόλοιπον ὕφασμα ;

56. Ἕνας κεσὲς χωρεῖ 0,25 τοῦ κιλοῦ γιαούρτι. Πόσους κεσέδες θὰ γεμίσωμεν μὲ 25,5 κιλὰ γιαούρτι ;

57. Ὁ Πειραιεὺς ἀπέχει ἀπὸ τὴν Θεσσαλονίκην 254 μίλια. Εἰς πόσας ὥρας θὰ φθάσῃ ἕνα ἀτμόπλοιον, ποὺ πλέει μὲ ταχύτητα 12,7 μιλίων τὴν ὥραν ;

58. Μὲ ἕνα κιλὸν ἀλεύρου γίνεται 1,25 τοῦ κιλοῦ ἄρτος. Πόσα κιλὰ ἄρτου θὰ γίνουν μὲ 3 σάκκους ἀλεύρου, ποὺ ὁ καθένας χωρεῖ 60 κιλά ;

ΣΥΜΜΙΓΕΙΣ ΑΡΙΘΜΟΙ

῾Ο ἀριθμός : **8 μῆνες καὶ 17 ἡμέραι** ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο ἀριθμούς· ἀπὸ αὐτοὺς ὁ πρῶτος φανερώνει μῆνες, καὶ ὁ δεύτερος ὑποδιαιρέσεις τοῦ μηνὸς (ἡμέρας).

᾿Επίσης ὁ ἀριθμός : **5 ὧραι καὶ 20 π** (πρῶτα λεπτὰ) ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο ἀριθμούς· ὁ ἕνας φανερώνει ὥρας καὶ ὁ ἄλλος λεπτά. Τὰ λεπτὰ εἶναι ὑποδιαιρέσεις τῆς ὥρας καὶ ἡ ὥρα εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ λεπτοῦ.

Οἱ ἀνωτέρω ἀριθμοὶ ὀνομάζονται **Συμμιγεῖς ἀριθμοί.**

ΜΟΝΑΔΕΣ ΜΕΤΡΗΣΕΩΣ ΠΟΣΩΝ

Μονάδες βάρους

Διὰ νὰ μετρήσωμεν τὸ βάρος ἑνὸς πράγματος, μεταχειριζόμεθα ὡς μονάδα μετρήσεως ἕνα ὡρισμένον βάρος, ποὺ ὀνομάζεται **χιλιόγραμμον** (κιλόν). Ἔπειτα συγκρίνομεν τὸ βάρος τοῦ πράγματος πρὸς τὸ βάρος τοῦ χιλιογράμμου. Ἂν π.χ. τὸ βάρος τοῦ πράγματος εἶναι 5 φορὰς μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ βάρος τοῦ χιλιογράμμου, τότε λέγομεν ὅτι τὸ πρᾶγμα ἔχει βάρος 5 χιλιόγραμμα.

Τὸ χιλιόγραμμον (κιλὸν) εἶναι ἡ ἀρχικὴ μονὰς μετρήσεως τοῦ βάρους καὶ διαιρεῖται εἰς 1.000 **γραμμάρια**. Διὰ μεγαλύτερα βάρη μεταχειριζόμεθα τὸν τόννο, ποὺ ἔχει 1.000 χιλιόγραμμα. Ὥστε :

1 τόννος = 1.000 χιλιόγραμμα = 1.000.000 γραμμάρια
1 χιλιόγραμμον = 1.000 γραμμάρια

Σημείωσις 1η: Τὸ βάρος ὕδατος ἀπεσταγμένου 4° C ποὺ χωρεῖ εἰς μίαν κυβικὴν παλάμην εἶναι ἕνα **χιλιόγραμμον**. Τὸ βάρος τοῦ ὕδατος ποὺ χωρεῖ εἰς ἕναν κυβικὸν δάκτυλον εἶναι ἕνα **γραμμάριον** καὶ τό βάρος τοῦ ὕδατος ποὺ χωρεῖ εἰς ἕνα κυβικὸν μέτρον εἶναι ἕνας **τόννος**.

Σημείωσις 2α: Ἄλλη ἀρχικὴ μονὰς μετρήσεως τοῦ βάρους εἰς τὴν ῾Ελλάδα ἦτο μέχρι τοῦ 1959 (ὁπότε κατηργήθη) ἡ **ὀκᾶ**, ποὺ διῃρεῖτο εἰς 400 δράμια. ῾Η ὀκᾶ ἔχει βάρος 1.280 γραμμάρια, τὸ δὲ χιλιόγραμμον (κιλὸ) εἶναι ἴσον μὲ 312,5 δράμια.

Μονάδες μήκους

Διὰ νὰ μετρήσωμεν τὸ μῆκος ἑνὸς πράγματος, μεταχειριζόμεθα ὡς μονάδα μετρήσεως τὸ **μέτρον**.

Τὸ μέτρον, λοιπόν, εἶναι ἡ ἀρχικὴ μονὰς μετρήσεως τοῦ μήκους. Τὸ μέτρον διαιρεῖται εἰς 10 **παλάμας** (δέκατα), κάθε παλάμη διαιρεῖται εἰς 10 **δακτύλους** (ἑκατοστὰ) καὶ κάθε δάκτυλος εἰς 10 **γραμμὰς** (χιλιοστά).

Διὰ τὴν μέτρησιν μεγάλων ἀποστάσεων μεταχειριζόμεθα τὸ **χιλιόμετρον** ποὺ εἶναι 1.000 μέτρα.

Ἄλλην μονάδα μετρήσεως, ποὺ μεταχειριζόμεθα εἰς τὰ οἰκόπεδα καὶ τὰς οἰκοδομάς, εἶναι ὁ **τεκτονικὸς πῆχυς**, ποὺ εἶναι ἴσος μὲ 0,75 τοῦ μέτρου.

Εἰς τὴν Ἀγγλίαν ὡς ἀρχικὴν μονάδα μετρήσεως μεταχειρίζονται τὴν **ὑάρδα**, ἡ ὁποία διαιρεῖται εἰς 3 **πόδας** (φούτ), ἕκαστος ποὺς εἰς 12 δακτύλους (ἴντσες). Ἡ ὑάρδα ἔχει μῆκος 0,914 τοῦ μέτρου.

Διὰ μεγάλας ἀποστάσεις οἱ ναυτικοὶ ὅλου τοῦ κόσμου μεταχειρίζονται τὸ **ναυτικὸν μίλιον**, ποὺ εἶναι 1.852 μέτρα.

Σημείωσις: Διὰ τὴν μέτρησιν τῶν ὑφασμάτων μέχρι τοῦ 1959 (ὁπότε κατηργήθη) ἐχρησιμοποιεῖτο εἰς τὴν Ἑλλάδα ὁ **ἐμπορικὸς πῆχυς**, ποὺ ἦτο ἴσος μὲ 0,64 τοῦ μέτρου καὶ διῃρεῖτο εἰς 8 **ρούπια**.

Ἀσκήσεις

59. 45,70 μέτρα, πόσας ὑάρδας μᾶς κάνουν ;
60. 175 μέτρα, πόσους τεκτ. πήχεις μᾶς κάνουν ;
61. 120 ὑάρδαι πόσα μέτρα μᾶς κάνουν ;
62. 42 τεκτ. πήχεις πόσα μέτρα μᾶς κάνουν ;

Μονάδες νομισμάτων

Κάθε κράτος ἔχει ξεχωριστὴν μονάδαν νομίσματος :

Ἡ Ἑλλὰς ἔχει τὴν δραχμὴν	ποὺ διαιρεῖται εἰς 100 λεπτά.
Ἡ Γαλλία τὸ φράγκο	ποὺ διαιρεῖται εἰς 100 σαντίμ.
Ἡ Ἰταλία τὴν λιρέτταν	ποὺ διαιρεῖται εἰς 100 τσεντέζιμα.
Ἡ Τουρκία τὴν λίραν	ποὺ διαιρεῖται εἰς 100 γρόσια.
Ἡ Γερμανία τὸ μάρκο	ποὺ διαιρεῖται εἰς 100 πφένιχ.
Ἡ Ρωσία τὸ ρούβλι	ποὺ διαιρεῖται εἰς 100 καπίκια.

Ἡ Ἀμερικὴ τὸ δολλάριο	ποὺ διαιρεῖται εἰς	100	σέντς.
Ἡ Ἀγγλία ἔχει τὴν λίραν	ποὺ διαιρεῖται εἰς	20	σελλίνια
	κάθε σελλίνιο διαιρεῖται εἰς	12	πέννας
	καὶ κάθε πέννα εἰς	4	φαρδίνια.

Μονάδες χρόνου

Διὰ τὴν μέτρησιν τοῦ χρόνου λαμβάνομεν ὡς ἀρχικὴν μονάδα μετρήσεως τὸ **ἡμερονύκτιον**, ποὺ διαιρεῖται εἰς 24 ὥρας, κάθε ὥρα εἰς 60 π (**πρῶτα λεπτὰ**) καὶ κάθε 1 π εἰς 60 δ (**δευτερόλεπτα**).

Ὁ χρόνος ἔχει 12 μῆνες, ἕκαστος μὴν ἔχει 30 ἡμέρας.

Μονάδες ἐπιφανείας

Διὰ τὴν μέτρησιν τῶν ἐπιφανειῶν, λαμβάνομεν ὡς ἀρχικὴν μονάδα μετρήσεως τὸ **τετραγωνικὸν μέτρον**.

Τετραγωνικὸν μέτρον εἶναι ἕνα τετράγωνον ποὺ ἔχει τὴν κάθε πλευράν του ἴσην μὲ ἕνα μέτρον.

Τὸ τετραγωνικὸν μέτρον διαιρεῖται εἰς 100 **τετραγωνικὰς παλάμας**, κάθε τετρ. παλάμη εἰς 100 **τετρ. δακτύλους** καὶ κάθε τετρ. δάκτυλος εἰς 100 **τετρ. γραμμάς**.

Διὰ νὰ μετρῶμεν τοὺς ἀγροὺς μεταχειριζόμεθα τὸ **στρέμμα**, τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον μὲ 1.000 τετραγωνικὰ μέτρα.

Ἄλλη μονὰς μετρήσεως, ποὺ τὴν μεταχειριζόμεθα διὰ τὴν μέτρησιν τῶν οἰκοπέδων, εἶναι ὁ **τετρ. τεκτ. πῆχυς**, ὁ ὁποῖος εἶναι ἴσος μὲ τὰ 0,56 τοῦ τετραγωνικοῦ μέτρου.

Ἀσκήσεις

63. Ἕνα οἰκόπεδον ἔχει ἐμβαδὸν 620 τετρ. τεκτονικοὺς πήχεις. Πόσα τετραγωνικὰ μέτρα εἶναι τὸ οἰκόπεδον ;

64. Νὰ τραποῦν εἰς τετρ. μέτρα 850 τετρ. τεκτ. πήχεις.

65. Νὰ τραποῦν εἰς τετρ. τεκτ. πήχεις 550 τετραγ. μέτρα.

Μονάδες ὄγκου

Διὰ νὰ μετρῶμεν τὸν ὄγκον τῶν σωμάτων, λαμβάνομεν ὡς ἀρχικὴν μονάδα μετρήσεως τὸ **κυβικὸν μέτρον**, τὸ ὁποῖον διαιρεῖται εἰς 1.000 **κυβικὰς παλάμας** καὶ κάθε κυβικὴ παλάμη εἰς 1.000 **κυβικοὺς δακτύλους**.

Τροπὴ συμμιγῶν εἰς μονάδας τῆς τελευταίας τάξεως

Πρόβλημα: Ἕνα ἀεροπλάνον διήνυσε μίαν ἀπόστασιν εἰς 2 ὥρας, 15 πρῶτα λεπτὰ καὶ 20 δευτερόλεπτα. Πόσα δευτερόλεπτα διήρκεσεν ἡ πτῆσις.

Λύσις: Πρῶτον τρέπομεν τὰς ὥρας εἰς πρῶτα λεπτά, ἀφοῦ σκεφθῶμεν ὡς ἑξῆς: Ἀφοῦ ἡ 1 ὥρα ἔχει 60 πρῶτα λεπτά, αἱ 2 ὧραι θὰ ἔχουν $2 \times 60 = 120$ πρῶτα λεπτὰ καὶ 15 πρῶτα λεπτά, ποὺ ἔχει ὁ συμμιγής, μᾶς κάνουν 135 πρῶτα λεπτά.

Ἔπειτα τρέπομεν τὰ πρῶτα λεπτὰ εἰς δευτερόλεπτα, ἀφοῦ σκεφθῶμεν ὡς ἑξῆς: Ἀφοῦ τὸ 1 πρῶτον λεπτὸν ἔχει 60 δευτερόλεπτα, τὰ 135 πρῶτα λεπτὰ θὰ ἔχουν $135 \times 60 = 8.100$ δευτερόλεπτα καὶ 20, ποὺ ἔχει ὁ συμμιγής, μᾶς κάνουν 8.120 δευτερόλεπτα.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς:

2 ὧραι 15 π 20 δ = 8120 δ (δευτερόλεπτα)
× 60
120
+ 15
135 π (πρῶτα λεπτὰ)
× 60
8100
+ 20
8120 δ (δευτερόλεπτα)

Ἀσκήσεις

66. Πόσα δευτερόλεπτα εἶναι 5 ὧραι 8 π 15 δ ;
67. Πόσοι δάκτυλοι (ἴντσες) εἶναι 4 ὑάρδαι καὶ 2 πόδες ;
68. Νὰ τραποῦν εἰς πέννας 4 λίραι, 5 σελλίνια, 6 πένναι.

ΠΡΑΞΕΙΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΣΥΜΜΙΓΩΝ

Πρόσθεσις

Παράδειγμα:

8 ὧραι 25 π 20 δ
+ 4 ὧραι 30 π 50 δ
3 ὧραι 10 π 5 δ

15 ὧραι 65 π 75 δ
ἢ 16 ὧραι 6 π 15 δ

Προσθέτομεν χωριστὰ τὰ δευτερόλεπτα, χωριστὰ τὰ πρῶτα λεπτὰ καὶ χωριστὰ τὰς ὥρας. Τὰ 75 δ μᾶς κάνουν 1 π καὶ 15 δ. Ἀφήνομεν τὰ 15 δ κάτω ἀπὸ τὰ δευτερόλεπτα καὶ τὸ 1 π τὸ προσθέτομεν εἰς τὰ 65 π (65 π + 1 π = 66 π). Τὰ 66 π μᾶς κάνουν 1 ὥρα καὶ 6 π. Ἀφήνομεν τὰ 6 π κάτω ἀπὸ τὰ πρῶτα λεπτὰ καὶ τὴν 1 ὥραν τὴν προσθέτομεν εἰς τὰς 15 ὥρας (15 ὧραι + 1 ὥρα = 16 ὧραι).

Ἀφαίρεσις

Παράδειγμα 1ον:

	20 ὧραι 35 π 50 δ
—	8 ὧραι 19 π 30 δ
	12 ὧραι 16 π 20 δ

Ἀφαιροῦμεν χωριστὰ τὰ δευτερόλεπτα, χωριστὰ τὰ πρῶτα λεπτὰ καὶ χωριστὰ τὰς ὥρας.

Παράδειγμα 2ον:

	15 ὧραι 40 π 15 δ
—	9 ὧραι 30 π 40 δ
	6 ὧραι 9 π 35 δ

Ἐπειδὴ δὲν ἀφαιροῦνται τὰ 40 δ ἀπὸ τὰ 15 δ, δανειζόμεθα ἕνα λεπτό, ποὺ εἶναι 60 δ καὶ τότε τὰ δευτερόλεπτα γίνονται 75 δ — 40 = = 35 δ. Ἔπειτα : 30 π καὶ 1 π ποὺ ἐδανείσθημεν 31 π ἀπὸ 40 π μένουν 9 π κ.οὕ.κ.

Προβλήματα

69. Ἕνας ἔμπορος εἶχεν τρία τόπια ὕφασμα. Τὸ ἕνα ἦτο 84 ὑάρδ. 2 πόδ. 5 δακτ., τὸ δεύτερον 75 ὑάρδ. 1 πόδ. 4 δακτ. καὶ τὸ τρίτο 90 ὑάρδ. 2 πόδ. 3 δακτ. Πόσο ὕφασμα ἦσαν καὶ τὰ τρία τόπια;

70. Ἕνας ἔμπορος εἶχε 84 ὑάρδ. 1 πόδ. καὶ 3 δακτύλους ὕφασμα. Ἀπὸ αὐτὸ ἐπώλησεν 25 ὑάρδ. καὶ 2 πόδ. Πόσο ὕφασμα τοῦ ἔμεινε;

71. Ἀπὸ ἕνα τόπι ὕφασμα, ποὺ ἦτο 82 ὑάρδ. 2 πόδ. καὶ 4 δάκτυλοι, ἐκόπησαν 18 ὑάρδ. 2 πόδ. καὶ 7 δάκτυλοι. Πόσο ὕφασμα ἔμεινε;

Ἀσκήσεις

72. Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κατωτέρω προσθέσεις :

α)

	3 λίρ. 15 σελ. 7 πεν.
	8 » 10 » 4 »
+	2 » 13 » 9 »

β)

	5 ὥρ. 15 π 8 δ
	1 » 50 » 45 »
+	9 » 40 » 30 »

73. Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κατωτέρω ἀφαιρέσεις :

α)	7 λίρ.	15 σελ.	5 πέν.	β)	15 ὑάρδ.	2 πόδ.	5 δάκτ.
	— 3 »	12 »	15 »		— 7 »	5 »	3 »
γ)	17 ὑάρδ.	2 πόδ.	4 δάκτ.	δ)	15 λίρ.	8 σελ.	4 πέν.
	— 4 »	1 »	5 »		— 7 »	14 »	5 »

Πολλαπλασιασμὸς συμμιγοῦς ἐπὶ ἀκέραιον

Πρόβλημα : Διὰ μίαν ἐνδυμασίαν χρειαζόμεθα 4 ὑάρδ. καὶ 2 πόδας. Πόσο ὕφασμα χρειαζόμεθα διὰ 7 ἐνδυμασίας ;

Πολλαπλασιάζομεν χωριστὰ πρῶτα τοὺς πόδας καὶ ἔπειτα τὰς ὑάρδας.

	4 ὑάρδ.	2 πόδ.
×		7 »
	28 »	14 »
ἢ	32 ὑάρδ.	2 πόδ.

Διαίρεσις συμμιγοῦς διὰ ἀκεραίου

Πρόβλημα : Ἕνας μὲ 14 λίρ. 4 σελ. καὶ 8 πέν. ἠγόρασεν 8 μέτρα ἀγγλικοῦ ὑφάσματος. Πόσο στοιχίζει τὸ μέτρον ;

14 λιρ. 4 σελ. 8 πεν.	8
6	1 λιρ. 15 σελ. 7 πεν.
× 20	
120	
+ 4	
124	
44	
4	
× 12	
48	
+ 8	
56	
56	
0	

Διαιροῦμεν πρῶτον τὰς λίρας. Ὅσαι λίραι μένουν τὰς πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 20, διὰ νὰ τὰς τρέψωμεν εἰς σελλίνια καὶ προσθέτομεν εἰς αὐτὰ τὰ σελλίνια ποὺ ἔχομε. Ἔπειτα διαιροῦμεν τὰ σελλίνια. Ὅσα σελλίνια μᾶς μένουν, τὰ πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 12 διὰ νὰ τὰ τρέψωμεν εἰς πέννας καὶ προσθέτομεν εἰς αὐτὰς τὰς πέννας ποὺ ἔχομε. Καὶ τέλος διαιροῦμεν τὰς πέννας.

Προβλήματα

74. Ἕνας ἔμπορος ἠγόρασεν 25 τόπια ὕφασμα ποὺ καθένα ἔχει μῆκος 68 ὑάρδας καὶ 2 πόδας. Πόσον ὕφασμα εἶναι ὅλα τὰ τόπια ;

75. Διὰ μίαν ἐνδυμασίαν χρειάζεται ὕφασμα 5 ὑάρδ. 2 πόδ. καὶ 7 δάκτυλοι. Πόσον ὕφασμα χρειάζεται διὰ νὰ γίνουν 14 ἐνδυμασίαι ;

76. Ἕνα κιλὸν νήματος μεταξωτοῦ στοιχίζει 1 λίρ. 5 σελ. καὶ 2 πέν. Πόσο στοιχίζουν τὰ 27 κιλά ;

77. Ἕνα ἀεροπλάνον διατρέχει 400 χιλιόμετρα εἰς 1 ὥρ. 15 π καὶ 20 δ. Εἰς πόσον χρόνον διατρέχει τὸ ἕνα χιλιόμετρον ;

Ἀσκήσεις

78. Νὰ ἐκτελεσθοῦν οἱ κατωτέρω πολλαπλασιασμοί :

α) 5 ὧραι 17 π 25 δ
× 9

β) 15 λίραι 13 σελ. 7 πέν.
× 12

79. Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κατωτέρω διαιρέσεις :

α) 23 ὧραι 18 π 25 δ | 5

β) ὑάρδ. 2 πόδ. 8 ἴντσ. | 8

Προβλήματα
τῶν τεσσάρων πράξεων συμμιγῶν ἀριθμῶν

80. Ἀπὸ ἕνα τόπι ὕφασμα, ποὺ εἶχε μῆκος 49 ὑάρδ. καὶ 2 πόδ., ἐκόπησαν 24 ὑάρδ. καὶ 7 δάκτυλοι. Πόσον ὕφασμα ἔμεινε ;

81. Ὁ Γεώργιος εἶναι σήμερον 13 χρόνων, 9 μηνῶν καὶ 10 ἡμερῶν, καὶ ὁ Παῦλος 7 χρόνων, 10 μηνῶν καὶ 25 ἡμερῶν. Πόσον εἶναι μεγαλύτερος ὁ Γεώργιος ;

82. Ἕνας ἔμπορος ἠγόρασε 387 μέτρα ἀγγλικοῦ ὑφάσματος πρὸς 1 λίραν, 5 σελλίνια καὶ 2 πέννας τὸ μέτρον. Πόσας λίρας ἐπλήρωσε ;

83. Ἕνας μύλος ἀλέθει εἰς 24 ὥρας 1 τόννον καὶ 560 κιλὰ σίτου. Πόσον ἀλέθει τὴν ὥραν ;

84. Ἕνας ἠγόρασεν 25 μέτρα ἀγγλικοῦ ὑφάσματος καὶ ἔδωσε

32 λίρας, 15 σελλίνια καὶ 10 πέννας. Πόσον τοῦ στοιχίζει τὸ μέτρον ;

85. Ἕνας βιβλιοπώλης τῶν Ἀθηνῶν ἔστειλε εἰς τὴν Ἐπαρχίαν 2.000 βιβλία. Τὸ κάθε βιβλίον ζυγίζει 125 γραμμάρια. Πόσα κιλὰ ζυγίζουν ὅλα τὰ βιβλία ;

86. Ἕνας ἀρτοποιὸς διέθεσε διὰ τὸ μαθητικὸν συσσίτιον 2.500 ψωμάκια. Τὸ κάθε ψωμάκι ζυγίζει 90 γραμμάρια. Πόσα κιλὰ ζυγίζουν ὅλα τὰ ψωμάκια ;

87. Πόσας ἑβδομάδας μᾶς κάνουν 6 χρόνια καὶ 2 ἑβδομάδες ;

88. Ἕνας ἐξεκίνησε πεζῆ ἀπὸ τὸν Πειραιᾶ διὰ τὰς Ἀθήνας τὸ πρωῒ τὴν 8 ὥραν 15 π καὶ 30 δ καὶ ἔφθασε εἰς τὰς Ἀθήνας τὴν 10 ὥραν 45 π καὶ 15 δ. Πόσον χρόνον διήρκεσεν ὁ περίπατος ;

89. Διὰ τὸ πρωϊνὸν ρόφημα 122 μαθητῶν ἑνὸς σχολείου ἐχρειάσθησαν 3.660 γραμμάρια γάλα σκόνη, 1.098 γραμμάρια ζάχαρη καὶ 366 γραμμάρια κακάο. Πόσα γραμμάρια ἀπὸ τὸ κάθε εἶδος περιέχει ἡ μερίδα κάθε μαθητοῦ ;

90. Τὸ μικτὸν βάρος ἐμπορεύματος ποὺ περιέχει ἕνα κιβώτιον εἶναι 1 τόννος, 120 κιλὰ καὶ 400 γραμμάρια. Τὸ ἀπόβαρο εἶναι 135 κιλὰ καὶ 850 γραμ. Πόσον εἶναι τὸ καθαρὸν βάρος τοῦ ἐμπορεύματος ;

91. Πόσον ἀξίζουν 2 κιλὰ καὶ 580 γραμμάρια κρέας, ὅταν τὸ γραμμάριον ἀξίζῃ 3 λεπτά ;

92. Ἕνας πατέρας εἶχε τρεῖς ἀγρούς. Ὁ ἕνας ἦτο 22 στρέμματα καὶ 450 τετρ. μέτρα, ὁ ἄλλος 15 στρέμματα καὶ 370 τετρ. μέτρα, καὶ ὁ τρίτος 28 στρέμματα καὶ 700 τετραγωνικὰ μέτρα. Ὅλα αὐτὰ τὰ ἐμοίρασεν εἰς τὰ 4 παιδιά του. Πόσον ἐπῆρε τὸ καθένα ;

93. Τὰ μαθήματα εἰς τὰ σχολεῖα ἀρχίζουν τὴν 8ην π.μ. καὶ τελειώνουν τὴν 12ην μεσημβρινήν. Γίνονται ὅμως τρία διαλείμματα. Τὸ πρῶτον διαρκεῖ 10 π, τὸ δεύτερον 10 π καὶ τὸ τρίτον 15 π. Εἰς τὸ ἄλλο χρονικὸν διάστημα γίνονται 4 μαθήματα. Πόσον χρόνον διαρκεῖ τὸ κάθε μάθημα ;

94. Ἕνας ἀνθρακέμπορος ἔφερε ἀπὸ τὴν Ἀγγλίαν 320 τόννους ἀνθρακίτου καὶ ἐπλήρωσε 1.313 λίρ., 6 σελ. καὶ 8 πέννας. Πόσον τοῦ στοιχίζει ὁ τόννος ;

95. Ἕνα ἀτμόπλοιον διατρέχει τὴν ἀπόστασιν ἀπὸ τὸν Πειραιᾶ ἕως τὴν Θεσσαλονίκην, ποὺ εἶναι 254 μίλια, εἰς 26 ὤρ. καὶ 40 π. Εἰς πόσον χρόνον κατὰ μέσον ὅρον διατρέχει ἕκαστον μίλιον.

96. Ἕνας ἔμπορος ἐπώλησεν εἰς τὸ ἐξωτερικὸν 5 τόν. ἐλαίου καὶ εἰσέπραξε 750 λίρ., 6 σελ., 5 πέννας. Πόσον ἐπώλησε τὸν τόννον ;

ΚΛΑΣΜΑΤΑ

Ἂν κόψωμεν ἕνα ὁλόκληρον (**ἀκέραιον**) ψωμὶ εἰς δύο ἴσα κομμάτια, τὸ καθένα ἀπὸ αὐτὰ εἶναι μισὸ ψωμὶ ἢ **ἕνα δεύτερον** τοῦ ψωμιοῦ ποὺ τὸ γράφομεν : $\frac{1}{2}$.

Δηλαδὴ τὸ $\frac{1}{2}$ τοῦ ψωμιοῦ = 

Ἐὰν κόψωμεν ἕνα ὁλόκληρον (**ἀκέραιον**) ψωμὶ εἰς τέσσερα ἴσα κομμάτια, τὸ κάθε ἕνα ἀπὸ αὐτὰ εἶναι τὸ **ἕνα τέταρτον** τοῦ ψωμιοῦ ποὺ τὸ γράφομεν : $\frac{1}{4}$.

Δηλαδὴ $\frac{1}{4}$ τοῦ ψωμιοῦ = 

Ἐπίσης, ἂν κόψωμεν ἕνα **ἀκέραιον** ψωμὶ εἰς ὀκτὼ ἴσα κομμάτια, τὸ καθένα ἀπὸ αὐτὰ εἶναι τὸ **ἕνα ὄγδοον** τοῦ ψωμιοῦ ποὺ τὸ γράφομεν : $\frac{1}{8}$.

Δηλαδὴ $\frac{1}{8}$ τοῦ ψωμιοῦ = 

Ὅπως ἐκόψαμεν (**διηρέσαμεν**) τὸ ψωμὶ εἰς ἴσα κομμάτια, κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν καὶ κάθε ἄλλο ἀκέραιον (**ὁλόκληρον**) πρᾶγμα εἰς ἴσα μέρη.

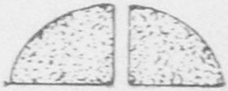
Ἂν π.χ. τὴν 1 ὥρα, ποὺ ἔχει 60 π (**πρῶτα λεπτά**), τὴν διαιρέσωμεν εἰς δύο μέρη, τὸ καθένα ἀπὸ αὐτὰ εἶναι 30 π (**πρῶτα λεπτά**). Δηλαδή : 30 π (πρῶτα λεπτὰ) = $\frac{1}{2}$ τῆς ὥρας.

Ἂν διαιρέσωμεν τὴν ὥραν εἰς 4 ἴσα μέρη ($60 : 4 = 15$), τὸ καθένα ἀπὸ αὐτὰ εἶναι 15 π (λεπτά). Δηλαδή : 15 π = $\frac{1}{4}$ τῆς ὥρας.

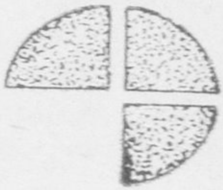
Ἂν διαιρέσωμεν τὴν ὥραν εἰς τρία ἴσα μέρη, τὸ καθένα εἶναι 20 π. Δηλαδή : 20 π = $\frac{1}{3}$ τῆς ὥρας.

Εἰς τοὺς ἀκεραίους ἀριθμοὺς τὸ 1 ὀνομάζεται **ἀκεραία μονάς**. Εἰς τοὺς κλασματικοὺς ἀριθμοὺς τά : $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{4}{8}$ κ.λ.π. ὀνομάζονται **κλασματικαὶ μονάδες**.

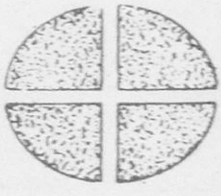
Ἂν ἀπὸ τὰ 4 ἴσα κομμάτια, ποὺ ἐκόψαμεν τὸ ψωμί, λάβωμεν τὰ δύο: $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$, δηλαδὴ δύο τέταρτα, ὁ ἀριθμὸς γράφεται : $\frac{2}{4}$.

Εἶναι δηλαδὴ $\frac{2}{4}$ τοῦ ψωμιοῦ = 

Ὁ ἀριθμὸς τρία τέταρτα γράφεται : $\frac{3}{4}$.

Δηλαδὴ $\frac{3}{4}$ τοῦ ψωμιοῦ = 

Ὁ ἀριθμὸς τέσσερα τέταρτα γράφεται : $\frac{4}{4}$.

Δηλαδὴ $\frac{4}{4}$ τοῦ ψωμιοῦ = 

Ἂν, τώρα, ἀπὸ τὰ 8 ἴσα κομμάτια, ποὺ ἐκόψαμεν τὸ ψωμί, λάβωμεν τὰ δύο : $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}$ δηλ. τὰ δύο ὄγδοα, ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς γράφεται : $\frac{2}{8}$.

Εἶναι δηλ. $\frac{2}{8}$ τοῦ ψωμιοῦ = 

῾Ο ἀριθμὸς τρία ὄγδοα γράφεται : $\frac{3}{8}$.

Εἶναι δηλ. $\frac{3}{8}$ τοῦ ψωμιοῦ =

$\frac{4}{8}$ τοῦ ψωμιοῦ =

$\frac{5}{8}$ τοῦ ψωμιοῦ =

$\frac{6}{8}$ τοῦ ψωμιοῦ =

$\frac{7}{8}$ τοῦ ψωμιοῦ =

$\frac{8}{8}$ τοῦ ψωμιοῦ =
(ὁλόκληρον)

Ἂν τώρα ἀπὸ τὰ 4 ἴσα μέρη, ποὺ ἐμοιράσαμεν τὴν ὥραν (δηλαδὴ 15 π + 15 π + 15 π + 15 π), λάβωμεν τὰ δύο τέταρτα (15 π + 15 π), τὸν ἀριθμὸν αὐτὸν τὸν γράφομεν : $\frac{2}{4}$ τῆς ὥρας.

Εἶναι δηλ. $\frac{2}{4}$ τῆς ὥρας = 30 π (δηλ. 15 π + 15 π).

Ὁμοίως εἶναι $\frac{3}{4}$ τῆς ὥρας = 45 π (δηλ. 15 π + 15 π + 15 π) κ.οὕ.κ.

Ἐπίσης, ἂν ἀπὸ τὰ 3 μέρη ποὺ ἐμοιράσαμεν τὴν ὥραν (δηλ. 20 π + 20 π + 20 π), λάβωμεν τὰ δύο τρίτα, τὸν ἀριθμὸν αὐτὸν τὸν γράφομεν: $\frac{2}{3}$.

Εἶναι δηλ. $\frac{2}{3}$ τῆς ὥρας = 40 π (δηλ. 20 π + 20 π).

Ὁμοίως εἶναι $\frac{3}{3}$ τῆς ὥρας = 60 π (δηλ. 20 π + 20 π + 20 π).

Οἱ ἀριθμοὶ 1, 2, 3, 4, 5 κ.λ.π., ὅπως γνωρίζομεν, ὀνομάζονται **ἀκέραιοι ἀριθμοί.**

Οἱ ἀριθμοὶ $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{8}$ κ.λ.π., ποὺ μᾶς φανερώνουν ἕνα μέρος τῆς ἀκεραίας μονάδος **(τοῦ ὁλοκλήρου)** καὶ οἱ ἀριθμοὶ $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{8}$ κλπ., ποὺ μᾶς φανερώνουν πολλὰ μέρη τῆς ἀκεραίας μονάδος, ὀνομάζονται **κλασματικοὶ ἀριθμοὶ** ἢ **κλάσματα.**

Ἐξ ὅσων εἴπομεν ἀνωτέρω, βλέπομεν ὅτι τὸ κλάσμα γράφεται μὲ δύο ἀκεραίους ἀριθμούς.

Ἀπὸ αὐτοὺς ἐκεῖνος ποὺ εὑρίσκεται κάτωθεν τῆς εὐθείας μᾶς φανερώνει εἰς πόσα ἴσα μέρη διῃρέσαμεν τὴν ἀκεραίαν μονάδα καὶ καλεῖται **παρονομαστής**, ὁ δὲ ἄλλος, ποὺ εὑρίσκεται ἄνωθεν τῆς εὐθείας, φανερώνει πόσα ἀπὸ τὰ μέρη αὐτὰ λαμβάνομεν καὶ καλεῖται **ἀριθμητής.**

Ὁ ἀριθμητὴς καὶ ὁ παρανομαστὴς ἑνὸς κλάσματος ὀνομάζονται **ὅροι** τοῦ κλάσματος.

Ἡ ὁριζοντία εὐθεῖα ἡ ὁποία χωρίζει τοὺς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος καλεῖται **κλασματικὴ** γραμμή.

Εἰς τὸ κλάσμα $\frac{3}{4}$ τοῦ ψωμιοῦ ὁ **3** εἶναι ἀριθμητὴς καὶ ὁ **4** παρονομαστής, καὶ τὸ μὲν **4** μᾶς φανερώνει ὅτι διηρέσαμεν εἰς 4 ἴσα μέρη τὴν ἀκεραίαν μονάδα (τὸ ψωμί), τὸ δὲ **3** μᾶς φανερώνει ὅτι ἀπὸ τὰ ἴσα αὐτὰ μέρη ἐλάβομεν τὰ 3.

Ἐπίσης τὸ κλάσμα $\frac{2}{3}$ τῆς ὥρας φανερώνει ὅτι διηρέσαμεν τὴν ὥραν εἰς τρία ἴσα μέρη, ποὺ τὸ καθένα εἶναι 20 π καὶ ἐλάβομεν τὰ δύο (20 π + 20 π). Ὥστε : $\frac{2}{3}$ τῆς ὥρας = 40 π.

Ἀσκήσεις

Α′ (Ἀπὸ μνήμης)

97. Πῶς ὀνομάζονται τὰ κλάσματα ποὺ ἔχουν ἀριθμητὴν τὴν μονάδα ;

98. Ἂν κόψωμεν ἕνα μῆλον εἰς 5 κομμάτια ἴσα, πῶς λέγεται τὸ κάθε κομμάτι ; Καὶ πῶς λέγονται τὰ 3 κομμάτια ;

99. Ἕνα ταψὶ γλυκὸ ἐμοιράσθη εἰς 12 παιδιά, κανένα δὲ παιδὶ δὲν πῆρε περισσότερον ἀπὸ τὰ ἄλλα. Τί μέρος τοῦ γλυκοῦ πῆρε τὸ κάθε παιδὶ καὶ τί μέρος τοῦ γλυκοῦ πῆραν τὰ 7 παιδιά ;

100. Τὸ μέτρον διαιρεῖται εἰς 10 παλάμας. Τί μέρος (κλάσμα) τοῦ μέτρου εἶναι ἡ μία παλάμη καὶ τί μέρος εἶναι αἱ τρεῖς παλάμαι ;

101. Διάβασε τὰ κλάσματα : $\frac{5}{5}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{7}{20}$, $\frac{6}{100}$, $\frac{7}{60}$, $\frac{8}{25}$.

102. Τί μέρος (κλάσμα) τοῦ κιλοῦ εἶναι τὸ 1 γραμμάριον καὶ τί μέρος τὰ 150 γραμμάρια ; (Ἀφοῦ τὸ κιλὸν ἔχει 1.000 γραμμάρια, τὸ 1 γραμμάριον εἶναι τὸ $\frac{1}{1000}$ τοῦ κιλοῦ καὶ τὰ 150 γραμμάρια τὰ $\frac{150}{1000}$ τοῦ κιλοῦ).

103. Τί μέρος (κλάσμα) τοῦ μέτρου εἶναι ὁ 1 πόντος καὶ τί μέρος εἶναι οἱ 7 πόντοι ; (1 μέτρον = 100 πόντοι).

104. Ἡ ὥρα διαιρεῖται εἰς 60 π. Τί μέρος τῆς ὥρας εἶναι τὸ 1 π ; Καὶ τί μέρος τὰ 5 π, 10 π, 7 π, 32 π ;

105. Ὁ χρόνος ἔχει 12 μῆνες. Τί μέρος τοῦ χρόνου εἶναι ὁ μήν ;

106. Ὁ μὴν ἔχει 30 ἡμέρας. Τί μέρος τοῦ μηνὸς εἶναι ἡ ἡμέρα ;

107. Ἡ ἑβδομὰς ἔχει 7 ἡμέρας. Τί μέρος τῆς ἑβδομάδος εἶναι ἡ ἡμέρα ;

108. Ἡ λίρα ἔχει 20 σελλίνια. Τί μέρος τῆς λίρας εἶναι τὸ 1 σελλίνι καὶ τὰ 3 σελλίνια ;

109. Ἡ ὑάρδα ἔχει 3 πόδας. Τί μέρος τῆς ὑάρδας εἶναι ὁ 1 πούς ; Οἱ 2 πόδες ;

110. Δύο μαθηταὶ ἔλυσαν ἕνα πρόβλημα, ὁ πρῶτος εἰς $\frac{1}{4}$ τῆς ὥρας καὶ ὁ ἄλλος εἰς $\frac{1}{5}$ τῆς ὥρας. Ποῖος τὸ ἔλυσεν γρηγορώτερον ;

(Β′ Γραπτῶς)

111. Γράψε μὲ ἀριθμοὺς τὰ κλάσματα :

Τρία ἕβδομα, δύο εἰκοστά, ἐννέα δέκατα, πέντε ἑνδέκατα, τρία δέκατα ἕκτα, ἐννέα εἰκοστὰ πέμπτα, ὀκτὼ δέκατα ἔνατα, εἴκοσι ἑκατοστά.

112. Γράψε εἰς τὸ τετράδιόν σου 10 διάφορα κλάσματα μὲ ἀριθμοὺς καὶ διάβασέ τα.

113. Ἀπὸ τὰς κλασματικὰς μονάδας: $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{8}$ καὶ $\frac{1}{20}$, ποία εἶναι ἡ μεγαλυτέρα καὶ διατί ;

114. Ἀπὸ τὰς κλασματικὰς μονάδας : $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{6}$ καὶ $\frac{1}{4}$, ποία εἶναι ἡ μικροτέρα καὶ διατί ;

115. Ποῖον ἀπὸ τὰ κλάσματα : $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{2}{8}$ εἶναι μεγαλύτερον καὶ ποῖον μικρότερον ;

116. Ποῖον ἀπὸ τὰ κλάσματα : $\frac{4}{5}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{4}{10}$ εἶναι μεγαλύτερον καὶ ποῖον μικρότερον ;

117. Πόσα πρῶτα λεπτὰ εἶναι τὸ $\frac{1}{5}$ τῆς ὥρας καὶ πόσα τὰ $\frac{3}{5}$ τῆς ὥρας ; (Ἀφοῦ ἡ ὥρα ἔχει 60 π, τὸ $\frac{1}{5}$ τῆς ὥρας εἶναι 60 : 5= =12 π καὶ τὰ $\frac{2}{5}$ τῆς ὥρας εἶναι $2 \times 12 = 24$ π).

118. Πόσα πρῶτα λεπτὰ εἶναι τά : $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{8}{15}$, $\frac{3}{20}$ τῆς ὥρας ;

119. Πόσα γραμμάρια εἶναι τό : $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{20}$ τοῦ κιλοῦ;

120. Πόσα γραμμάρια εἶναι τά : $\frac{3}{4}$, $\frac{9}{10}$, $\frac{3}{100}$, $\frac{7}{20}$ τοῦ κιλοῦ ;

121. Ποῖος ἀριθμὸς εἶναι τό : $\frac{1}{5}$ τοῦ 100, $\frac{1}{4}$ τοῦ 1.000 καὶ $\frac{1}{8}$ τοῦ 120 ;

Σύγκρισις τῶν κλασμάτων πρὸς τὴν ἀκεραίαν μονάδα

Ἂν κόψωμεν ἕνα μῆλον εἰς 4 ἴσα κομμάτια καὶ λάβωμεν τὸ 1 ἢ τὰ 2 ἢ τὰ 3 κομμάτια, εἶναι φανερὸν ὅτι λαμβάνομεν ὀλιγώτερον ἀπὸ ὁλόκληρον τὸ μῆλον. Δηλαδὴ καθένα ἀπὸ τὰ κλάσματα: $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$ τοῦ μήλου εἶναι μικρότερον ἀπὸ ἕνα μῆλον.

Ἐπίσης τὸ κλάσμα $\frac{3}{10}$ τοῦ μέτρου εἶναι μικρότερον ἀπὸ τὸ μέτρον, τὰ $\frac{3}{8}$ τοῦ ψωμιοῦ εἶναι ὀλιγώτερον ἀπὸ ἕνα ψωμὶ κ.λ.π.

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι :

> **Ὅταν ὁ ἀριθμητὴς ἑνὸς κλάσματος εἶναι μικρότερος ἀπὸ τὸν παρονομαστήν, τὸ κλάσμα εἶναι μικρότερον ἀπὸ τὴν ἀκεραίαν μονάδα.**

Ἂν λάβωμεν καὶ τὰ 4 κομμάτια τοῦ μήλου, καὶ τὰ 10 δέκατα τοῦ μέτρου καὶ τὰ 8 ὄγδοα τοῦ ψωμιοῦ κ.λ.π., τότε λαμβάνομεν ὁλόκληρον τὸ μῆλον, ὁλόκληρον τὸ μέτρον, ὁλόκληρον τὸ ψωμὶ κ.λ.π.

Δηλ. $\frac{4}{4}$ τοῦ μήλου εἶναι 1 μῆλον.

$\frac{10}{10}$ τοῦ μέτρου εἶναι 1 μέτρον.

$\frac{8}{8}$ τοῦ ψωμιοῦ εἶναι ἕνα ψωμὶ κ.λ.π.

Ὥστε :

Ὅταν ὁ ἀριθμητὴς ἑνὸς κλάσματος εἶναι ἴσος μὲ τὸν παρονομαστήν, τὸ κλάσμα εἶναι ἴσον μὲ μίαν ἀκεραίαν μονάδα.

Ἄν, τώρα, κόψωμεν καὶ ἕνα ἄλλο μῆλον εἰς 4 ἴσα κομμάτια καὶ λάβωμεν τὰ 4 κομμάτια τοῦ πρώτου μήλου (δηλ. ὁλόκληρον τὸ μῆλον) καὶ ἕνα κομμάτι ἀπὸ τὸ δεύτερον μῆλον, θὰ ἔχωμεν λάβει περισσότερον ἀπὸ ἕνα μῆλον, δηλαδὴ τὰ $\frac{5}{4}$ τοῦ μήλου εἶναι περισσότερον ἀπὸ ἕνα μῆλον.

Διὰ τὸν ἴδιον λόγον τὰ $\frac{3}{2}$ τοῦ ψωμιοῦ (δηλ. τρία μισὰ ψωμιὰ) εἶναι μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ ὁλόκληρον (ἀκέραιο) ψωμί.

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι :

Ὅταν ὁ ἀριθμητὴς ἑνὸς κλάσματος εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν παρονομαστήν, τὸ κλάσμα εἶναι μεγαλύτερον ἀπὸ μίαν ἀκεραίαν μονάδα.

Τὰ κλάσματα ποὺ εἶναι μεγαλύτερα ἀπὸ μίαν ἀκεραίαν μονάδα καλοῦνται **καταχρηστικὰ** κλάσματα.

Ἀσκήσεις

122. Ἀπὸ τὰ κλάσματα : $\frac{3}{5}$, $\frac{6}{8}$, $\frac{7}{7}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{9}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{4}{4}$, ποῖα εἶναι μικρότερα τῆς ἀκεραίας μονάδος, ποῖα εἶναι ἴσα καὶ ποῖα εἶναι μεγαλύτερα αὐτῆς ;

123. Ποῖον ἀπὸ τὰ κατωτέρω κλάσματα εἶναι τὸ μεγαλύτερον καὶ ποῖον τὸ μικρότερον ; $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{4}$, $\frac{7}{7}$, $\frac{2}{2}$, $\frac{5}{5}$, $\frac{10}{10}$, $\frac{15}{15}$.

124. Γράψε τρία κλάσματα μικρότερα ἀπὸ τὴν ἀκεραίαν μονάδα, τρία μεγαλύτερα καὶ τρία ἴσα μὲ τὴν ἀκεραίαν μονάδα.

125. Ἀπὸ ἕνα πορτοκάλι ὁ Γεώργιος ἔλαβε τὸ $\frac{1}{2}$ καὶ ὁ Νικόλαος τὰ $\frac{3}{8}$. Ποῖος πῆρε περισσότερον ;

126. Γράψε 10 κλάσματα καταχρηστικά.

Τροπὴ ἀκεραίου ἀριθμοῦ εἰς κλάσμα

Πρόβλημα : Ἕνας ἠγόρασε 3 μέτρα ὕφασμα. Πόσα δέκατα (παλάμας) εἶναι τὸ ὕφασμα ποὺ ἠγόρασε ;

Λύσις : Ἀφοῦ τὸ 1 μέτρον ἔχει 10 δέκατα, τὰ 2 μέτρα ἔχουν $2 \times 10 = 20$ δέκατα καὶ τὰ 3 μέτρα θὰ ἔχουν $3 \times 10 = 30$ δέκατα· ἀλλὰ αὐτὸ ὡς κλάσμα γράφεται $\frac{30}{10}$. Δηλαδή : $3 = \frac{3 \times 10}{10} = \frac{30}{10}$.

Ἂν θέλωμεν νὰ τρέψωμεν τὸν ἀκέραιον ἀριθμὸν 7 εἰς πέμπτα (δηλ. εἰς κλάσμα ποὺ νὰ ἔχῃ παρονομαστὴν τὸ 5), σκεπτόμεθα μὲ τὸν ἴδιον τρόπον καὶ εὑρίσκομεν ὅτι : $7 = \frac{7 \times 5}{5} = \frac{35}{5}$.

Ἀσκήσεις

127. Πῶς τρέπομεν ἕναν ἀκέραιον ἀριθμὸν εἰς κλάσμα μὲ ὡρισμένον παρονομαστήν; (Νὰ εὕρῃς τὸν κανόνα καὶ νὰ τὸν γράψῃς εἰς τὸ τετράδιόν σου).

128. 10 μῆλα πόσα ὄγδοα τοῦ μήλου μᾶς κάνουν ;

129. 15 ψωμιὰ πόσα τέταρτα τοῦ ψωμιοῦ μᾶς κάνουν ;

130. Τρέψε τὸν ἀκέραιον ἀριθμὸν 9 εἰς ἕβδομα, εἰς δέκατα, εἰς ἕκτα καὶ εἰς δωδέκατα.

131. Τρέψε τοὺς ἀκεραίους ἀριθμοὺς 5, 8, 7, 10, 6, 25, εἰς τέταρτα.

Σημείωσις : Ἕναν ἀκέραιον ἀριθμὸν δυνάμεθα νὰ τὸν παραστήσωμεν ὡς κλάσμα, ἂν λάβωμεν παρονομαστὴν τὴν μονάδα $3 = \frac{3 \times 1}{1} = \frac{3}{1}$, $9 = \frac{9}{1}$, $7 = \frac{7}{1}$ κ.λ.π.

Μικτοὶ ἀριθμοί

Ἂν ἕνας ἔχῃ 4 μέτρα ὕφασμα καὶ $\frac{3}{8}$ τοῦ μέτρου, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν ὅτι ἔχει $4 + \frac{3}{8}$ μέτρα. Ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς γράφεται ἁπλούστερον (ἂν παραλείψωμεν τὸ $+$): $4\frac{3}{8}$, καὶ ὀνομάζεται **μικτὸς ἀριθμός.**

Ὅπως βλέπομεν, ὁ κατωτέρω μικτὸς ἀριθμὸς ἀποτελεῖται ἀπὸ τὸν ἀκέραιον 4 καὶ τὸ κλάσμα $\frac{3}{8}$.

Ὥστε :

Μικτὸς ἀριθμὸς ὀνομάζεται ἐκεῖνος ποὺ ἀποτελεῖται ἀπὸ ἀκέραιον καὶ ἀπὸ κλάσμα.

Τροπὴ μικτοῦ εἰς κλάσμα

Πρόβλημα : Ἕνας ἠγόρασε $2\frac{3}{4}$ μέτρα ὕφασμα. Πόσα τέταρτα τοῦ μέτρου εἶναι τὸ ὕφασμα ποὺ ἠγόρασε ;

Λύσις : Ἀφοῦ τὸ ἕνα μέτρον (ἡ μία ἀκεραία μονὰς) ἔχει 4 τέταρτα, τὰ 2 μέτρα θὰ ἔχουν $2 \times 4 = 8$ τέταρτα. Εἰς αὐτὰ προσθέτομεν καὶ τὰ 3 τέταρτα τοῦ μικτοῦ, καὶ εὑρίσκομεν ὅτι τὸ ὕφασμα εἶναι : $8 + 3 = 11$ τέταρτα ἢ $\frac{11}{4}$.

Ἐπολλαπλασιάσαμεν, δηλαδή, τὸν ἀκέραιον 2 ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος 4 καὶ εἰς τὸ γινόμενον ἐπροσθέσαμεν τὸν ἀριθμητὴν 3. Αὐτὸ εἶναι ὁ ἀριθμητὴς τοῦ κλάσματος, παρονομαστὴς δὲ εἶναι ὁ ἴδιος.

Ἀσκήσεις

132. Πῶς τρέπομεν ἕναν μικτὸν εἰς κλάσμα ; (Νὰ εὕρῃς τὸν κανόνα καὶ νὰ τὸν γράψῃς εἰς τὸ τετράδιόν σου).

133. Τὰ $7\frac{5}{8}$ κιλά, ἀπὸ πόσα ὄγδοα συνολικῶς ἀποτελοῦνται ;

134. Τὰ $9\frac{3}{4}$ ψωμιὰ ἀπὸ πόσα τέταρτα ἀποτελοῦνται ;

135. Πόσα δέκατα ἔχει συνολικῶς ὁ μικτὸς ἀριθμὸς $8\frac{7}{10}$;

136. Νὰ τραποῦν οἱ κατωτέρω μικτοὶ ἀριθμοὶ εἰς κλάσματα:

α) $3\frac{1}{2}$, $5\frac{3}{8}$, $7\frac{4}{5}$, $9\frac{6}{7}$, $7\frac{3}{5}$

β) $6\frac{7}{8}$, $15\frac{1}{4}$, $25\frac{4}{11}$, $38\frac{3}{5}$, $19\frac{5}{6}$

Ἐξαγωγὴ τῶν ἀκεραίων μονάδων τοῦ κλάσματος

Ἂν ἔχωμεν ἕνα κλάσμα καταχρηστικόν, δηλαδὴ μεγαλύτερον ἀπὸ μίαν (1) ἀκεραίαν μονάδα, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν πόσας ἀκεραίας μονάδας περιέχει. Λαμβάνομεν π.χ. τὸ καταχρηστικὸν κλάσμα $\frac{23}{4}$ τοῦ κιλοῦ. Διὰ νὰ εὕρωμεν πόσας ἀκεραίας μονάδας (κιλὰ) περιέχει τὸ κλάσμα αὐτό, σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς:

Ἀφοῦ τὰ 4 τέταρτα εἶναι μία ἀκεραία μονάς, τὰ 23 τέταρτα θὰ ἔχουν τόσας ἀκεραίας μονάδας, ὅσον εἶναι τὸ ἀκέραιον πηλίκον τοῦ 23 διὰ 4.

$$\begin{array}{r|l} 23 & 4 \\ \hline 3 & 5 \end{array}$$

Ὥστε τὸ καταχρηστικὸν κλάσμα $\frac{23}{4}$ περιέχει 5 ἀκεραίας μονάδας καὶ μένει ὑπόλοιπον 3 τέταρτα, δηλ. $\frac{23}{4}$ τοῦ κιλοῦ $= 5\frac{3}{4}$ κιλά.

Ἄλλο παράδειγμα: Τὸ κλάσμα $\frac{16}{3}$ περιέχει τόσας ἀκεραίας μονάδας, ὅσας φορὰς εἰσχωρεῖ ὁ παρονομαστής του εἰς τὸν ἀριθμητήν, δηλ. 5 καὶ μᾶς μένει ὑπόλοιπον $\frac{1}{3}$. Ὥστε: $\frac{16}{3} = 5\frac{1}{3}$.

Διὰ νὰ εὕρωμεν, λοιπόν, τὰς ἀκεραίας μονάδας ποὺ περιέχει ἕνα καταχρηστικὸν κλάσμα, διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητήν του διὰ τοῦ παρονομαστοῦ.

Ἡ πρᾶξις τὴν ὁποίαν κάνομεν, διὰ νὰ εὕρωμεν πόσας ἀκεραίας μονάδας περιέχει ἕνα καταχρηστικὸν κλάσμα, ὀνομάζεται **ἐξαγωγὴ τῶν ἀκεραίων μονάδων**.

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι :

> **Διὰ νὰ ἐξαγάγωμεν τὰς ἀκεραίας μονάδας ἀπὸ ἕνα καταχρηστικὸν κλάσμα, διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητὴν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ καὶ τὸ μὲν πηλίκον μᾶς φανερώνει τὰς ἀκεραίας μονάδας, τὸ δὲ ὑπόλοιπον (ἂν ὑπάρχῃ) γράφομεν ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν ἀφήνομεν τὸν ἴδιον.**

Ἂν ὁ ἀριθμητὴς διαιρῆται ἀκριβῶς διὰ τοῦ παρονομαστοῦ, τότε τὸ κλάσμα εἶναι ἴσον μὲ ἀκέραιον ἀριθμὸν π.χ. $\frac{10}{5}=2$, $\frac{12}{3}=4$.

Ἀσκήσεις

137. 30 πέμπτα τοῦ μέτρου ὕφασμα, πόσα μέτρα ὕφασμα εἶναι ;

138. 32 τέταρτα ψωμιοῦ, πόσα ψωμιὰ ὁλόκληρα εἶναι ;

139. Νὰ ἐξαχθοῦν αἱ ἀκέραιαι μονάδες, ποὺ περιέχονται εἰς τὰ κατωτέρω καταχρηστικὰ κλάσματα :

α) $\frac{37}{5}$, $\frac{25}{3}$, $\frac{36}{8}$, $\frac{29}{5}$, $\frac{48}{6}$, β) $\frac{13}{2}$, $\frac{57}{3}$, $\frac{49}{11}$, $\frac{50}{7}$, $\frac{52}{13}$

γ) $\frac{84}{5}$, $\frac{183}{8}$, $\frac{207}{3}$, $\frac{580}{10}$, $\frac{183}{5}$.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

Α΄. Τί παθαίνει ἕνα κλάσμα, ἂν πολλαπλασιάσωμεν ἢ διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμητήν του ;

Κόβομεν ἕνα μῆλον εἰς 8 ἴσα κομμάτια (ὄγδοα) καὶ δίδομεν τὰ $\frac{2}{8}$ εἰς τὸν Γιαννάκη.

Ἂν εἰς τὸ κλάσμα αὐτὸ μεγαλώσωμεν τὸν ἀριθμητὴν δύο φοράς, θὰ ἔχωμεν τὸ κλάσμα $\frac{2 \times 2}{8}=\frac{4}{8}$ τοῦ μήλου, ποὺ εἶναι διπλάσιον ἀπὸ τὸ κλάσμα $\frac{\mathbf{2}}{8}$. Ἂν τώρα μεγαλώσωμεν τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος

$\frac{2}{8}$ τρεῖς φοράς, θὰ ἔχωμεν τὸ κλάσμα $\frac{2 \times 3}{8} = \frac{6}{8}$ τοῦ μήλου, ποὺ εἶναι τρεῖς φορὰς μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ κλάσμα $\frac{2}{8}$.

Ὅσας φοράς, δηλαδή, μεγαλώνομεν τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος $\frac{2}{8}$, τόσας φορὰς μεγαλώνει καὶ ἡ ἀξία ὅλου τοῦ κλάσματος.

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι :

Ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμητὴν ἑνὸς κλάσματος ἐπὶ ἕναν ἀριθμόν, ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν ἴδιον ἀριθμόν.

Ἂν διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος $\frac{6}{8}$ τοῦ μήλου διὰ τοῦ 3, θὰ ἔχωμεν τὸ κλάσμα $\frac{6:3}{8} = \frac{2}{8}$ τοῦ μήλου, ποὺ εἶναι 3 φορὰς μικρότερον ἀπὸ τὸ κλάσμα $\frac{6}{8}$.

Ὥστε :

Ἂν διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμητὴν ἑνὸς κλάσματος διὰ ἑνὸς ἀριθμοῦ, ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος διαιρεῖται διὰ τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ (μικραίνει δηλ. τόσας φοράς, ὅσος εἶναι ὁ ἀριθμὸς αὐτός).

Ἀσκήσεις

140. Πόσας φορὰς εἶναι μεγαλύτερον τὸ κλάσμα $\frac{15}{20}$ ἀπὸ τὸ κλάσμα $\frac{5}{20}$;

141. Πόσας φορὰς εἶναι μεγαλύτερον τὸ $\frac{12}{16}$ ἀπὸ τὸ $\frac{3}{16}$;

142. Πόσας φορὰς εἶναι μικρότερον τὸ κλάσμα $\frac{3}{10}$ ἀπὸ τὸ κλάσμα $\frac{9}{10}$;

143. Πόσας φορὰς εἶναι μικρότερον τὸ $\frac{4}{35}$ ἀπὸ τὸ $\frac{28}{35}$;

144. Κάνε τὰ κλάσματα : $\frac{4}{5}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{7}{25}$ τρεῖς φορὰς μεγαλύτερα.

145. Κάνε 4 φορὰς μικρότερα τὰ κλάσματα : $\frac{20}{25}$, $\frac{16}{20}$, $\frac{8}{10}$ (μὲ διαίρεσιν τοῦ ἀριθμητοῦ).

Β΄. Τί παθαίνει ἕνα κλάσμα, ἂν πολλαπλασιάσωμεν ἢ διαιρέσωμεν τὸν παρονομαστήν του ;

Δίδομεν εἰς τὸν Πέτρον τὰ $\frac{2}{4}$ καὶ εἰς τὸν Παῦλον τὰ $\frac{2}{8}$ τοῦ μήλου. Ἀπὸ τὰ δύο αὐτὰ κλάσματα, ποὺ ἔχουν τὸν ἴδιον ἀριθμητὴν καταλαβαίνομεν πῶς τὸ $\frac{2}{4}$ εἶναι μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ $\frac{2}{8}$.

Τὸ κάθε τέταρτο τοῦ μήλου εἶναι διπλάσιον ἀπὸ τὸ ὄγδοον καὶ ἀντιθέτως, τὸ κάθε ὄγδοον τοῦ μήλου εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ τετάρτου.

Ὥστε τὸ κλάσμα $\frac{2}{4}$ εἶναι διπλάσιον ἀπὸ τὸ κλάσμα $\frac{2}{8}$ καί, ἀντιθέτως, τὸ κλάσμα $\frac{2}{8}$ εἶναι δύο φορὰς μικρότερον ἀπὸ τὸ $\frac{2}{4}$.

Ἀλλὰ τὸ κλάσμα $\frac{2}{8}$ γίνεται ἀπὸ τὸ κλάσμα $\frac{2}{4}$, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸν παρονομαστήν του ἐπὶ 2 καὶ τὸ κλάσμα $\frac{2}{4}$ γίνεται ἀπὸ τὸ κλάσμα $\frac{2}{8}$, ἂν διαιρέσωμεν τὸν παρονομαστήν του διὰ 2.

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι :

Ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸν παρονομαστὴν ἑνὸς κλάσματος ἐπὶ ἕναν ἀριθμόν, ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος διαιρεῖται διὰ τοῦ ἀριθμοῦ αὐτοῦ καὶ ἂν διαιρέσωμεν τὸν παρονομαστὴν ἑνὸς κλάσματος δι' ἑνὸς ἀριθμοῦ, ἡ ἀξία του πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν αὐτόν.

Ἀσκήσεις

146. Τὸ κλάσμα $\frac{3}{10}$ πόσας φορὰς εἶναι μικρότερον ἀπὸ τὸ κλάσμα $\frac{3}{5}$;

147. Πόσας φορὰς μικρότερον εἶναι τὸ $\frac{3}{20}$ ἀπὸ τὸ $\frac{3}{5}$;

148. Πόσας φορὰς μεγαλύτερον εἶναι τὸ $\frac{1}{4}$ ἀπὸ τὸ $\frac{1}{20}$;

149. Πόσας φορὰς μεγαλύτερον εἶναι τὸ $\frac{2}{7}$ ἀπὸ τὸ $\frac{2}{28}$;

150. Κάνε 3 φορὰς μικρότερα τὰ κλάσματα: $\frac{2}{5}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{7}{10}$ (μὲ πολλαπλασιασμὸν τοῦ παρονομαστοῦ).

151. Κάνε 4 φορὰς μεγαλύτερα τὰ κλάσματα: $\frac{3}{20}$, $\frac{5}{40}$, $\frac{3}{16}$, $\frac{1}{24}$, $\frac{2}{8}$ (μὲ διαίρεσιν τοῦ παρονομαστοῦ).

Γ'. Τί παθαίνει ἕνα κλάσμα, ἂν πολλαπλασιάσωμεν καὶ τοὺς δύο ὅρους του ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ἢ τοὺς διαιρέσωμεν διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ;

Παίρνομεν ἕνα ψωμί, τὸ μοιράζομεν εἰς 4 ἴσα μέρη ἢ **τέταρτα** καὶ τὸ κάθε τέταρτο τὸ μοιράζομεν εἰς 2 μέρη. Τὸ ψωμί, λοιπόν, κόπηκε εἰς 8 ἴσα μέρη ἢ **ὄγδοα**. Ὥστε τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ ψωμιοῦ εἶναι τὸ ἴδιον μὲ τὰ $\frac{2}{8}$ αὐτοῦ καὶ τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ ψωμιοῦ εἶναι τὸ ἴδιον μὲ τὰ $\frac{6}{8}$ αὐτοῦ. Ἀλλὰ τὸ κλάσμα $\frac{6}{8}$ γίνεται ἀπὸ τὸ κλάσμα $\frac{3}{4}$, ἂν καὶ οἱ δύο ὅροι του πολλαπλασιασθοῦν ἐπὶ 2 $\left(\frac{3 \times 2}{4 \times 2} = \frac{6}{8}\right)$ καί, ἀντιθέτως, τὸ κλάσμα $\frac{3}{4}$ γίνεται ἀπὸ τὸ κλάσμα $\frac{6}{8}$, ἂν καὶ οἱ δύο ὅροι του διαιρεθοῦν διὰ 2 $\left(\frac{6 : 2}{8 : 2} = \frac{3}{4}\right)$.

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι :

> **Ἂν πολλαπλασιάσωμεν καὶ τοὺς δύο ὅρους ἑνὸς κλάσματος ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ἢ διαιρέσωμεν αὐτοὺς διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ** (ἂν διαιροῦνται ἀκριβῶς), **ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος δὲν μεταβάλλεται.**

Ἀσκήσεις

152. Γράψε 4 κλάσματα ἴσα πρὸς τὸ κλάσμα $\frac{1}{2}$.

153. Γράψε 2 κλάσματα ἴσα πρὸς τὸ κλάσμα $\frac{10}{30}$ ἀλλὰ μὲ μικροτέρους ὅρους.

154. Ποῖον ἀπὸ τὰ κλάσματα $\frac{1}{2}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{5}{10}$, $\frac{8}{16}$ εἶναι μεγαλύτερον;

Ἁπλοποίησις τῶν κλασμάτων

Ἕνα κλάσμα δυνάμεθα νὰ τὸ κάνωμεν ἁπλούστερον, δηλαδὴ μὲ μικροτέρους ὅρους, χωρὶς νὰ μεταβληθῇ ἡ ἀξία του. Ἂν π.χ. ἔχωμεν τὸ κλάσμα $\frac{5}{10}$ καὶ διαιρέσωμεν καὶ τοὺς δύο ὅρους του διὰ τοῦ 5 $\left(\frac{5 : 5}{10 : 5} = \frac{1}{2}\right)$, εὑρίσκομεν τὸ ἁπλούστερον κλάσμα $\frac{1}{2}$. Ἀλλὰ τὸ κλάσμα $\frac{1}{2}$ ἔχει τὴν ἰδίαν ἀξίαν μὲ τὸ κλάσμα $\frac{5}{10}$.

Ἐπίσης τὸ κλάσμα $\frac{9}{12}$ δύναται νὰ γίνῃ ἁπλούστερον, ἂν διαιρέσωμεν τοὺς ὅρους του διὰ τοῦ 3, δηλ. $\frac{9:3}{12:3}=\frac{3}{4}$.

Ἡ πρᾶξις ποὺ κάνομε, διὰ νὰ γίνῃ τὸ κλάσμα ἁπλούστερον, λέγεται **ἁπλοποίησις** τοῦ κλάσματος.

Διὰ νὰ ἁπλοποιηθῇ ἕνα κλάσμα, δηλαδὴ νὰ γίνῃ ἁπλούστερον χωρὶς νὰ μεταβληθῇ ἡ ἀξία του, πρέπει οἱ ὅροι του νὰ διαιρεθοῦν διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ (ἐὰν διαιροῦνται ἀκριβῶς), ὥστε τὸ κλάσμα ποὺ θὰ εὑρεθῇ θὰ ἔχῃ μικροτέρους ὅρους, ἀλλὰ τὴν ἰδίαν ἀξίαν. Διὰ νὰ ἁπλοποιήσωμεν π.χ. τὸ κλάσμα $\frac{24}{40}$, διαιροῦμεν καὶ τοὺς δύο ὅρους του διὰ τοῦ 4 καὶ εὑρίσκομεν τὸ κλάσμα $\frac{6}{10}$, ποὺ ἔχει τὴν ἰδίαν ἀξίαν μὲ τὸ προηγούμενον. Ἂν καὶ αὐτοῦ τοῦ κλάσματος διαιρέσωμεν τοὺς ὅρους διὰ τοῦ 2, εὑρίσκομεν τὸ κλάσμα $\frac{3}{5}$, ποὺ ἔχει τὴν ἰδίαν ἀξίαν μὲ τὰ προηγούμενα.

Τὸ κλάσμα, τώρα, $\frac{3}{5}$ δὲν ἁπλοποιεῖται, διότι δὲν εὑρίσκεται ἀριθμὸς διὰ τοῦ ὁποίου νὰ διαιροῦνται ἀκριβῶς καὶ οἱ δύο ὅροι του.

Τὸ κλάσμα αὐτό, ποὺ δὲν δύναται νὰ ἁπλοποιηθῇ, καλεῖται **ἀνάγωγον**.

Μὲ τὴν ἁπλοποίησιν τῶν κλασμάτων, ὅπως θὰ ἴδωμεν κατωτέρω, εὐκολυνόμεθα εἰς τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πράξεων, διότι ἔχομεν μικροτέρους ὅρους.

Ἀσκήσεις

155. Νὰ ἁπλοποιηθοῦν τὰ κλάσματα:

$$\frac{15}{25},\ \frac{4}{18},\ \frac{8}{24},\ \frac{10}{40},\ \frac{9}{18},\ \frac{14}{32},\ \frac{25}{35}.$$

156. Ἐπίσης νὰ ἁπλοποιηθοῦν τὰ κλάσματα:

$$\frac{10}{24},\ \frac{8}{20},\ \frac{10}{15},\ \frac{9}{15},\ \frac{12}{18},\ \frac{21}{42},\ \frac{60}{180}.$$

157. Ἐπίσης νὰ ἁπλοποιηθοῦν τὰ κλάσματα:

$$\frac{18}{300},\ \frac{48}{120},\ \frac{75}{450},\ \frac{80}{240},\ \frac{160}{200}.$$

ΟΜΩΝΥΜΑ ΚΑΙ ΕΤΕΡΩΝΥΜΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

Τὰ κλάσματα : $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{2}{8}$, ποὺ ἔχοὺν τὸν ἴδιον παρονομαστήν, λέγονται **ὁμώνυμα**.

Ἐπίσης τὰ κλάσματα : $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{4}{5}$ λέγονται ὁμώνυμα.

Τὰ κλάσματα : $\frac{3}{8}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{7}$, ποὺ ἔχουν διαφόρους παρονομαστάς, λέγονται **ἑτερώνυμα** κλάσματα. Ἐπίσης τὰ κλάσματα : $\frac{7}{10}$, $\frac{3}{9}$, $\frac{5}{12}$ εἶναι ἑτερώνυμα.

Τροπὴ ἑτερωνύμων κλασμάτων εἰς ὁμώνυμα

Πολλάκις χρειαζόμεθα δύο ἢ περισσότερα ἑτερώνυμα κλάσματα νὰ τὰ τρέψωμεν εἰς ὁμώνυμα, ὅπως θὰ ἴδωμεν κατωτέρω.

Πρόβλημα: Ἕνας ἠγόρασε $\frac{3}{5}$ τοῦ κιλοῦ καφὲ καὶ ἄλλος $\frac{5}{8}$ τοῦ κιλοῦ. Ποῖος ἀπὸ τοὺς δύο ἠγόρασεν περισσότερον καφέ ;

Ἂν πολλαπλασιάσωμεν καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ πρώτου κλάσματος $\frac{3}{5}$ ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν 8 τοῦ δευτέρου $\frac{3 \times 8}{5 \times 8}$, εὑρίσκομεν τὸ κλάσμα $\frac{24}{40}$, τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν ἰδίαν ἀξίαν μὲ τὸ κλάσμα $\frac{3}{5}$, διότι ἐπολλαπλασιάσαμεν καὶ τοὺς δύο ὅρους του ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

Ἐπίσης, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ὅρους τοῦ δευτέρου κλάσματος $\frac{5}{8}$ ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν 5 τοῦ πρώτου κλάσματος $\frac{5 \times 5}{8 \times 5}$, εὑρίσκομεν τὸ κλάσμα $\frac{25}{40}$, ποὺ ἔχει τὴν ἰδίαν ἀξίαν μὲ τὸ κλάσμα $\frac{5}{8}$.

Ἀντί, λοιπόν, τῶν ἑτερωνύμων κλασμάτων $\frac{3}{5}$ καὶ $\frac{5}{8}$, ἔχομεν τὰ ὁμώνυμα κλάσματα $\frac{24}{40}$ καὶ $\frac{25}{40}$, ποὺ ἔχουν τὴν ἰδίαν ἀξίαν μὲ τὰ προηγούμενα.

Εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ κλάσμα $\frac{25}{40}$ εἶναι μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ $\frac{24}{40}$.

Ἄρα περισσότερον καφὲ ἔχει ἐκεῖνος ποὺ ἠγόρασε τὰ $\frac{5}{8}$ τοῦ κιλοῦ.

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι :

Διὰ νὰ τρέψωμεν δύο ἑτερώνυμα κλάσματα εἰς ὁμώνυμα, πολλαπλασιάζομεν τοὺς ὅρους τοῦ πρώτου κλάσματος ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦ δευτέρου καὶ τοὺς ὅρους τοῦ δευτέρου κλάσματος ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦ πρώτου.

Ἄν, τώρα, ἔχωμεν περισσότερα ἀπὸ δύο ἑτερώνυμα κλάσματα, π.χ. $\frac{4}{5}$, $\frac{1}{2}$ καὶ $\frac{3}{4}$, διὰ νὰ τὰ τρέψωμεν εἰς ὁμώνυμα, ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς :

Πολλαπλασιάζομεν τοὺς δύο ὅρους τοῦ πρώτου κλάσματος $\frac{4}{5}$ ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν τῶν ἄλλων κλασμάτων, δηλ. ἐπὶ (2×4) ἢ 8 καὶ εὑρίσκομεν τὸ κλάσμα $\frac{4 \times 8}{5 \times 8} = \frac{32}{40}$, τὸ ὁποῖον (ὅπως γνωρίζομεν) ἔχει τὴν ἰδίαν ἀξίαν μὲ τὸ κλάσμα $\frac{4}{5}$. Ἐπίσης πολλαπλασιάζομεν τοὺς ὅρους τοῦ δευτέρου κλάσματος $\frac{1}{2}$ ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν τῶν ἄλλων κλασμάτων, δηλ. ἐπὶ (4×5) ἢ 20 καὶ εὑρίσκομεν τὸ ἴσης ἀξίας κλάσμα $\frac{1 \times 20}{2 \times 20} = \frac{20}{40}$. Τέλος πολλαπλασιάζομεν τοὺς ὅρους τοῦ τρίτου κλάσματος $\frac{3}{4}$ ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν τῶν ἄλλων κλασμάτων, δηλ. ἐπὶ (2×5) ἢ 10 καὶ εὑρίσκομεν τὸ ἴσης ἀξίας κλάσμα $\frac{3 \times 10}{4 \times 10} = \frac{30}{40}$.

Ἀντί, λοιπόν, τῶν ἑτερωνύμων κλασμάτων $\frac{4}{5}$, $\frac{1}{2}$ καὶ $\frac{3}{4}$, ἔχομεν τὰ ὁμώνυμα κλάσματα $\frac{32}{40}$, $\frac{20}{40}$, $\frac{30}{40}$, ποὺ ἔχουν τὴν ἰδίαν ἀξίαν.

Πρὸς εὐκολίαν μας γράφομεν τὰ κλάσματα ὡς ἑξῆς :

$$\overset{8}{\frac{4}{5}} \qquad \overset{20}{\frac{1}{2}} \qquad \overset{10}{\frac{3}{4}} \quad \text{(ἑτερώνυμα)}$$

$$\frac{32}{40} \qquad \frac{20}{40} \qquad \frac{30}{40} \quad \text{(ὁμώνυμα)}$$

Δηλαδή, ἐπάνω ἀπὸ κάθε κλάσμα γράφομεν τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν τῶν ἄλλων κλασμάτων· ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸ γινόμενον αὐτὸ τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος ποὺ εὑρίσκεται κάτωθεν αὐτοῦ.

Ὥστε :

> **Διὰ νὰ τρέψωμεν τρία ἢ περισσότερα ἑτερώνυμα κλάσματα εἰς ὁμώνυμα, πολλαπλασιάζομεν τοὺς ὅρους κάθε κλάσματος ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν τῶν ἄλλων κλασμάτων.**

Ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον (Ε.Κ.Π.)

Ὁ ἀριθμὸς 15 λέγεται **πολλαπλάσιον** τοῦ ἀριθμοῦ 5, διότι γίνεται ἀπὸ αὐτόν, ἂν τὸν πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 3. Ἐπίσης, διὰ τὸν ἴδιον λόγον, οἱ ἀριθμοὶ 20, 25, 30, 35 κλπ. εἶναι πολλαπλάσια τοῦ 5. Εἶναι φανερὸν ὅτι τὰ πολλαπλάσια ἑνὸς ἀριθμοῦ διαιροῦνται ἀκριβῶς δι' αὐτοῦ.

Ἂν, τώρα, λάβωμεν δύο ἢ περισσοτέρους ἀριθμούς, π.χ. τοὺς ἀριθμοὺς 2, 4, 5 καὶ ἕναν ἄλλον ἀριθμόν, π.χ. τὸν 40, ποὺ νὰ διαιρῆται ἀκριβῶς δι' ὅλων τῶν δοθέντων, βλέπομεν ὅτι ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς (ὁ 40) εἶναι πολλαπλάσιον τῶν δοθέντων, δηλ. τῶν ἀριθμῶν 2, 4, 5.

Ὁ ἀριθμὸς 40 λέγεται **κοινὸν πολλαπλάσιον** τῶν ἀριθμῶν 2, 4 καὶ 5.

Ἐπίσης οἱ ἀριθμοὶ 20, 40, 80, 100 κλπ. εἶναι κοινὰ πολλαπλάσια τῶν ἀριθμῶν 2, 4 καὶ 5.

Ὁ ἀριθμὸς 20, ποὺ εἶναι τὸ μικρότερον κοινὸν πολλαπλάσιον ἀπὸ ὅλα τὰ ἄλλα κοινὰ πολλαπλάσια, λέγεται **ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον** τῶν ἀριθμῶν 2, 4 καὶ 5.

Ἐπίσης τῶν ἀριθμῶν : 2, 3 καὶ 4 κοινὰ πολλαπλάσια (Κ.Π.) εἶναι οἱ ἀριθμοὶ 12, 24, 36, 48 κλπ. καὶ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον (Ε.Κ.Π.) ὁ ἀριθμὸς 12.

Ὥστε :

Ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον (Ε.Κ.Π.) δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν λέγεται τὸ μικρότερον ἀπὸ τὰ κοινὰ πολλαπλάσια αὐτῶν.

Πῶς εὑρίσκομεν τὸ Ε.Κ.Π. δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν

Παράδειγμα 1ον : Νὰ εὑρεθῇ τὸ Ε.Κ.Π. τῶν ἀριθμῶν 2, 5 καὶ 10.

Λαμβάνομεν τὸν μεγαλύτερον ἀριθμὸν (τὸν 10) καὶ βλέπομεν ὅτι αὐτὸς διαιρεῖται ἀκριβῶς δι' ὅλων τῶν ἄλλων. Ὁ ἀριθμὸς 10 εἶναι τὸ Ε.Κ.Π. τῶν ἀριθμῶν 2, 5 καὶ 10. Ὥστε : **Ὅταν ὁ μεγαλύτερος ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς διαιρῆται ἀκριβῶς διὰ τῶν ἄλλων, τότε αὐτὸς εἶναι τὸ Ε.Κ.Π. αὐτῶν.**

Παράδειγμα 2ον : Νὰ εὑρεθῇ τὸ Ε.Κ.Π. τῶν ἀριθμῶν 3, 8, 4.

Λαμβάνομεν τὸν μεγαλύτερον ἀπὸ αὐτοὺς (τὸν 8) καὶ βλέπομεν ὅτι δὲν διαιρεῖται διὰ τῶν ἄλλων. Ἔπειτα διπλασιάζομεν τὸν 8 καὶ εὑρίσκομεν τὸν ἀριθμὸν 16, ποὺ καὶ αὐτὸς δὲν διαιρεῖται δι' ὅλων. Ἔπειτα τριπλασιάζομεν τὸν 8 καὶ εὑρίσκομεν τὸν ἀριθμὸν 24, ποὺ διαιρεῖται ἀκριβῶς δι' ὅλων τῶν ἄλλων ἀριθμῶν.

Ὁ ἀριθμὸς 24 εἶναι τὸ Ε.Κ.Π. τῶν ἀριθμῶν 3, 8 καὶ 4.

Ὥστε :

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ Ε.Κ.Π. δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν, λαμβάνομεν τὸν μεγαλύτερον ἐξ αὐτῶν καὶ βλέπομεν ἂν διαιρῆται ἀκριβῶς διὰ τῶν ἄλλων. Ἂν διαιρῆται, τότε αὐτὸς εἶναι τὸ Ε.Κ.Π., ἂν ὄχι, τὸν διπλασιάζομεν, τριπλασιάζομεν κ.λ.π., μέχρις ὅτου εὕρωμεν ἀριθμὸν ὁ ὁποῖος νὰ διαιρῆται ἀκριβῶς δι' ὅλων. Ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς εἶναι τὸ Ε.Κ.Π.

Τὸ Ε.Κ.Π. τὸ χρειαζόμεθα, ὅπως θὰ ἴδωμεν ἀμέσως κατωτέρω, διὰ νὰ τρέπωμεν δύο ἢ περισσότερα ἑτερώνυμα κλάσματα εἰς ὁμώνυμα.

Τροπὴ ἑτερωνύμων κλασμάτων εἰς ὁμώνυμα μὲ τὸ Ε.Κ.Π. τῶν παρονομαστῶν

Παράδειγμα : Νὰ τραποῦν εἰς ὁμώνυμα τὰ ἑτερώνυμα κλάσματα : $\frac{4}{5}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$.

Εὑρίσκομεν πρῶτον τὸ Ε.Κ.Π. τῶν παρονομαστῶν. Λαμβάνομεν δηλ. τὸν μεγαλύτερον παρονομαστὴν (τὸν 5), ὁ ὁποῖος δὲν διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τῶν ἄλλων. Διπλασιάζομεν αὐτὸν κι' εὑρίσκομεν τὸν 10, ποὺ καὶ αὐτὸς δὲν διαιρεῖται διὰ τῶν ἄλλων. Ἔπειτα τριπλασιάζομεν (15) καὶ τέλος τετραπλασιάζομεν αὐτόν, καὶ εὑρίσκομεν τὸν ἀριθμὸν 20, ποὺ διαιρεῖται ἀκριβῶς δι' ὅλων τῶν ἄλλων παρονομαστῶν.

Ὁ 20 εἶναι τὸ Ε.Κ.Π. τῶν παρονομαστῶν.

Ἔπειτα διαιροῦμεν τὸν 20 διὰ τῶν παρονομαστῶν 5, 2, 4 καὶ εὑρίσκομεν κατὰ σειρὰν τὰ ἑξῆς πηλίκα : 4, 10, 5. Κάθε πηλίκον τὸ γράφομεν ἐπάνω ἀπὸ τὸ ἀντίστοιχον κλάσμα του.

Τέλος πολλαπλασιάζομεν τοὺς ὅρους κάθε κλάσματος ἐπὶ τὸ ἀντίστοιχον πηλίκον (ποὺ εὑρίσκεται ἐπάνω ἀπὸ τὸ κλάσμα).

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς :

$$\begin{array}{cccl} 4 & 10 & 5 & \qquad \text{Ε.Κ.Π.} = 20 \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \text{(ἑτερώνυμα)} \\ & & & \\ \frac{16}{20} & \frac{10}{20} & \frac{15}{20} & \text{(ὁμώνυμα)} \end{array}$$

Ὥστε :

Διὰ νὰ τρέψωμεν δύο ἢ περισσότερα ἑτερώνυμα κλάσματα εἰς ὁμώνυμα, εὑρίσκομεν τὸ Ε.Κ.Π. τῶν παρονομαστῶν καὶ διαιροῦμεν αὐτὸ διὰ κάθε παρονομαστοῦ. Ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος ἐπὶ τὸ ἀντίστοιχον πηλίκον.

Μὲ τὸν τρόπον αὐτόν, διὰ τοῦ Ε.Κ.Π., τρέπομεν εὐκολώτερον τὰ ἑτερώνυμα κλάσματα εἰς ὁμώνυμα, διότι εὑρίσκομεν μικρότερον κοινὸν παρονομαστὴν τῶν ὁμωνύμων κλασμάτων.

Σημείωσις: Εἶναι καλὸ πρὸς εὐκολίαν μας νὰ ἁπλοποιῶμεν πρῶτον ὅσα κλάσματα ἁπλοποιοῦνται, καὶ μετὰ νὰ τὰ τρέπωμεν εἰς ὁμώνυμα.

Ἀσκήσεις

158. Ποῖον ἀπὸ τὰ κλάσματα: $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{8}$ εἶναι μεγαλύτερον;

159. Νὰ τραποῦν εἰς ὁμώνυμα τὰ κλάσματα:

α) $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$ β) $\frac{7}{8}$, $\frac{4}{9}$ γ) $\frac{9}{10}$, $\frac{3}{4}$ δ) $\frac{8}{9}$, $\frac{2}{5}$

160. Ὁμοίως νὰ τραποῦν εἰς ὁμώνυμα τὰ κλάσματα:

α) $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{8}$ β) $\frac{6}{7}$, $\frac{3}{8}$ γ) $\frac{2}{11}$, $\frac{6}{7}$ δ) $\frac{7}{8}$, $\frac{4}{15}$

161. Νὰ εὑρεθῇ ποῖον ἀπὸ τὰ κλάσματα $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{8}$ εἶναι μεγαλύτερον καὶ ποῖον μικρότερον;

162. Δύο ἐργάται ἔσκαψαν ἕνα χαντάκι. Ὁ πρῶτος ἔσκαψε τὸ $\frac{1}{4}$ αὐτοῦ καὶ ὁ δεύτερος τὰ $\frac{7}{20}$. Ποῖος ἀπὸ τοὺς δύο ἔσκαψεν περισσότερον;

163. Νὰ τραποῦν εἰς ὁμώνυμα (μὲ τὸ Ε.Κ.Π.) τὰ κλάσματα:

α) $\frac{7}{60}$, $\frac{3}{20}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{10}$ β) $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{9}{20}$

164. Νὰ τραποῦν τὰ κατωτέρω ἑτερώνυμα κλάσματα εἰς ὁμώνυμα μὲ τοὺς δύο τρόπους, δηλ. καὶ μὲ τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν καὶ μὲ τὸ Ε.Κ.Π.:

α) $\frac{4}{5}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{3}{4}$ β) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ γ) $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{2}{3}$

165. Ἐπίσης νὰ τραποῦν εἰς ὁμώνυμα καὶ μὲ τοὺς δύο τρόπους τὰ κλάσματα:

α) $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ β) $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$ γ) $\frac{7}{8}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{10}$

166. Ἀπὸ τοὺς κατοίκους μιᾶς πόλεως τὰ $\frac{3}{10}$ εἶναι γυναῖκες, τὸ $\frac{1}{4}$ ἄνδρες, τὸ $\frac{1}{5}$ ἀγόρια καὶ τὰ $\frac{2}{8}$ κορίτσια. Ποῖοι εἶναι περισσότεροι καὶ ποῖοι ὀλιγώτεροι ;

167. Μία βρύση γεμίζει εἰς μίαν ὥραν τὰ $\frac{3}{8}$ μιᾶς δεξαμενῆς, δευτέρα βρύση τὰ $\frac{4}{7}$ αὐτῆς καὶ τρίτη βρύση τὸ $\frac{1}{3}$ αὐτῆς. Ἀπὸ ποία βρύση χύνεται περισσότερον νερό ;

ΠΡΑΞΕΙΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

Πρόσθεσις

Α΄ Πρόσθεσις ὁμωνύμων κλασμάτων

Πρόβλημα: Μία κόρη ἔπλεξε τὴν πρώτην ἡμέραν $\frac{3}{5}$ τοῦ μέτρου δαντέλλα, τὴν δευτέραν $\frac{2}{5}$ τοῦ μέτρου καὶ τὴν τρίτην $\frac{4}{5}$ τοῦ μέτρου. Πόσον ἔπλεξε καὶ τὰς τρεῖς ἡμέρας ;

Λύσις: Διὰ νὰ εὕρωμεν πόσον ἔπλεξε τὰς τρεῖς ἡμέρας, θὰ προσθέσωμεν :

$$\frac{3}{5}+\frac{2}{5}+\frac{4}{5}=$$

Ἀλλὰ 3 πέμπτα + 2 πέμπτα + 4 πέμπτα, μᾶς κάνουν 9 πέμπτα ἢ $\frac{9}{5}$. Ὥστε $\frac{3}{5}+\frac{2}{5}+\frac{4}{5}=\frac{9}{5}$ ἢ $1\frac{4}{5}$.

Ὥστε ἔπλεξε $\frac{9}{5}$ τοῦ μέτρου ἤ, ἂν ἐξαγάγωμεν τὰς ἀκεραίας μονάδας ἀπὸ τὸ καταχρηστικὸν κλάσμα, $1\frac{4}{5}$ τοῦ μέτρου.

Ἄλλο παράδειγμα: $\frac{3}{5}+\frac{4}{5}+\frac{2}{5}+\frac{4}{5}=\frac{13}{5}=2\frac{3}{5}$.

᾿Ασκήσεις

168. Πῶς προσθέτομεν δύο ἢ περισσότερα ὁμώνυμα κλάσματα; (νὰ γράψῃς τὸν κανόνα εἰς τὸ τετράδιόν σου).

169. Κάνε μόνος σου τρεῖς ἀσκήσεις προσθέσεως ὁμωνύμων κλασμάτων.

Β΄ Πρόσθεσις ἑτερωνύμων κλασμάτων

Πρόβλημα : Ἕνας μαθητὴς μελετᾷ κάθε πρωῒ $\frac{3}{4}$ τῆς ὥρας καὶ κάθε ἀπόγευμα $\frac{4}{5}$ τῆς ὥρας. Πόσην ὥρα μελετᾷ τὴν ἡμέραν ;

Διὰ νὰ εὕρωμεν πόσο μελετᾷ τὴν ἡμέραν, θὰ προσθέσωμεν

$$\frac{3}{4}+\frac{4}{5}.$$

᾿Αλλὰ τὰ 3 τέταρτα καὶ τὰ 4 πέμπτα δὲν δυνάμεθα νὰ τὰ προσθέσωμεν. Πρέπει, λοιπόν, νὰ τρέψωμεν τὰ ἑτερώνυμα αὐτὰ κλάσματα εἰς ὁμώνυμα καὶ κατόπιν νὰ κάνωμεν τὴν πρόσθεσιν.

Δηλ. $\frac{3}{4}+\frac{4}{5}=\frac{15}{20}+\frac{16}{20}=\frac{31}{20}=1\,\frac{11}{20}$ τῆς ὥρας.

Ἄλλο παράδειγμα :

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{5}+\frac{2}{3}=\frac{15}{30}+\frac{18}{30}+\frac{20}{30}=\frac{53}{20}=1\,\frac{23}{30}.$$

᾿Ασκήσεις

170. Πῶς προσθέτομεν δύο ἢ περισσότερα ἑτερώνυμα κλάσματα; (νὰ γράψῃς τὸν κανόνα εἰς τὸ τετράδιόν σου).

Κάνε τὰς προσθέσεις :

171. α) $\frac{4}{7}+\frac{2}{3}=$ β) $\frac{3}{8}+\frac{1}{2}=$

172. α) $\frac{3}{5}+\frac{3}{4}+\frac{1}{2}=$ β) $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{7}{8}=$

Γ΄ Πρόσθεσις μικτῶν ἀριθμῶν

Πρόβλημα: Ἕνας ἔχει τρία δοχεῖα ἔλαιον. Τὸ ἕνα ζυγίζει $14\frac{1}{2}$ κιλά, τὸ ἄλλο $12\frac{1}{4}$ κιλὰ καὶ τὸ τρίτον $8\frac{1}{5}$ κιλά. Πόσα κιλὰ ζυγίζουν καὶ τὰ τρία δοχεῖα ;

Λύσις: α΄ τρόπος: Προσθέτομεν πρῶτον τοὺς ἀκεραίους :

$$14 + 12 + 8 = 34 \text{ κιλά.}$$

Ἔπειτα προσθέτομεν τὰ κλάσματα :

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{10}{20}+\frac{5}{20}+\frac{4}{20}+\frac{19}{20} \text{ τοῦ κιλοῦ.} \quad 34+\frac{19}{20}=34\frac{19}{20}.$$

Ὥστε τὰ τρία δοχεῖα ζυγίζουν $34\frac{19}{20}$ κιλά.

Πρὸς εὐκολίαν μας ἐκτελοῦμεν τὴν πρόσθεσιν ὡς ἑξῆς :

$$14\frac{\overset{10}{\frown}1}{2}+12\frac{\overset{5}{\frown}1}{4}+8\frac{\overset{4}{\frown}1}{5}=14\frac{10}{20}+12\frac{5}{20}+8\frac{4}{20}=34\frac{19}{20}. \qquad (\text{Ε.Κ.Π.}=20)$$

β΄ τρόπος: Τρέπομεν τοὺς μικτοὺς ἀριθμοὺς εἰς κλάσματα :

$$14\frac{1}{2}+12\frac{1}{4}+8\frac{1}{5}=\frac{\overset{10}{\frown}29}{2}+\frac{\overset{5}{\frown}49}{4}+\frac{\overset{4}{\frown}41}{5}= \qquad (\text{Ε.Κ.Π.}=20)$$

$$=\frac{290}{20}+\frac{245}{20}+\frac{164}{20}=\frac{699}{20}=34\frac{19}{20} \text{ κιλά.}$$

Ἄλλο παράδειγμα: α΄ τρόπος:

$$3\frac{\overset{15}{\frown}1}{2}+5\frac{\overset{5}{\frown}5}{6}+4\frac{\overset{6}{\frown}2}{5}=3\frac{15}{30}+5\frac{25}{30}+4\frac{12}{30}=12\frac{52}{30}= \qquad (\text{Ε.Κ.Π.}=30)$$

$$12+1\frac{22}{30}=13\frac{22}{30}=13\frac{11}{15}.$$

Ὅταν, ὅπως εἰς τὸ παράδειγμά μας, μὲ τὴν πρόσθεσιν εὑρίσκωμεν μικτὸν ἀριθμὸν ποὺ τὸ κλάσμα του εἶναι καταχρηστικόν, τότε ἐξάγομεν ἀπὸ αὐτὸ τὰς ἀκεραίας μονάδας καὶ τὰς προσθέτομεν εἰς τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ μικτοῦ· δηλ. $12\frac{52}{30}=12+1\,\frac{22}{30}=13\frac{22}{30}$. Ἐπίσης ἁπλοποιοῦμεν τὸ κλάσμα τοῦ μικτοῦ, ἂν ἁπλοποιῆται, δηλ. $13\,\frac{22}{30}=13\,\frac{11}{15}$.

β' τρόπος :

(Ε.Κ.Π.= 30)

$$3\frac{1}{2}+5\frac{5}{6}+4\frac{2}{5}=\overset{15}{\frac{7}{2}}+\overset{5}{\frac{35}{6}}+\overset{6}{\frac{22}{5}}=\frac{105}{30}+\frac{175}{30}+\frac{132}{30}=$$

$$=\frac{412}{30}=13\frac{22}{30}=13\frac{11}{15}.$$

Ὥστε :

Διὰ νὰ προσθέσωμεν μικτοὺς ἀριθμούς, προσθέτομεν χωριστὰ τοὺς ἀκεραίους καὶ χωριστὰ τὰ κλάσματα· ἔπειτα ἑνώνομεν τὰ δύο μερικὰ ἐξαγόμενα. Ἢ τρέπομεν τοὺς μικτοὺς εἰς κλάσματα καὶ ἔπειτα προσθέτομεν.

Προβλήματα

173. Ἕνας ἔμπορος ἐπώλησεν ἀπὸ ἕνα τόπι ὕφασμα τὴν πρώτην ἡμέραν $12\,\frac{3}{4}$ μέτρα, τὴν δευτέραν $9\,\frac{1}{4}$ καὶ τὴν τρίτην $16\,\frac{3}{4}$. Πόσα μέτρα ἐπώλησεν συνολικῶς ;

174. Ἕνας ἐργάτης ἐργάζεται τὸ πρωῒ $5\,\frac{1}{4}$ ὥρας καὶ τὸ ἀπόγευμα $2\,\frac{5}{6}$ ὥρας. Πόσας ὥρας ἐργάζεται τὴν ἡμέραν ;

175. Ἕνας παντοπώλης εἶχεν ἕνα βαρέλι ἔλαιον. Ἀπὸ αὐτὸ ἐπώλησε τὴν πρώτην ἡμέραν $28\,\frac{3}{5}$ κιλὰ καὶ τὴν ἄλλην $56\,\frac{7}{8}$, ἔμειναν δὲ μέσα εἰς τὸ βαρέλι $36\,\frac{3}{4}$ κιλά. Πόσα κιλὰ ἔλαιον εἶχε τὸ βαρέλι ἀρχικῶς ;

176. Μία κόρη ἔπλεξε τὴν πρώτην ἡμέραν $1\,\frac{3}{5}$ μέτρα δαντέλλα, τὴν ἄλλην $\frac{3}{4}$ τοῦ μέτρου καὶ τὴν τρίτην $1\frac{1}{2}$ τοῦ μέτρου. Πόσα μέτρα ἔπλεξε καὶ τὰς τρεῖς ἡμέρας ;

177. Μία βρύση γεμίζει εἰς μίαν ὥραν τὰ $\frac{3}{16}$ μιᾶς δεξαμενῆς, ἄλλη βρύση τὸ $\frac{1}{4}$ καὶ τρίτη βρύση τὸ $\frac{1}{2}$ αὐτῆς. Ἂν ἀνοίξωμεν καὶ τὰς τρεῖς μαζί, τί μέρος τῆς δεξαμενῆς θὰ γεμίσουν εἰς μίαν ὥραν ;

Ἀσκήσεις

178. Κάνε ἀπὸ μνήμης τὰς προσθέσεις :

α) $\frac{3}{8}+\frac{2}{8}+\frac{1}{8}=$ β) $10\frac{3}{5}+8=$ γ) $4\frac{5}{8}+7\frac{3}{8}=$

179. Νὰ ἐκτελέσῃς τὰς προσθέσεις :

α) $\frac{3}{5}+\frac{7}{8}=$ β) $\frac{4}{9}+\frac{3}{8}=$ γ) $\frac{8}{11}+\frac{7}{8}=$

180. α) $\frac{1}{4}+\frac{3}{5}+\frac{2}{3}=$ β) $\frac{9}{10}+\frac{3}{5}+\frac{3}{4}=$

181. α) $\frac{1}{8}+\frac{1}{5}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=$ β) $\frac{4}{5}+\frac{3}{10}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=$

γ) $\frac{5}{12}+\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{5}{6}=$ δ) $\frac{3}{4}+\frac{7}{10}+\frac{3}{5}+\frac{1}{4}=$

182. α) $4\frac{3}{5}+2\frac{1}{2}+8\frac{2}{3}=$ β) $9\frac{1}{8}+10\frac{1}{4}+12\frac{3}{18}=$

γ) $5\frac{4}{5}+7\frac{3}{10}+6\frac{7}{15}=$ δ) $8\frac{3}{4}+5\frac{7}{8}+9\frac{1}{10}=$

183. α) $8\frac{3}{5}+\frac{7}{8}+4\frac{5}{12}=$ β) $15\frac{4}{15}+3\frac{7}{20}+\frac{4}{5}=$

γ) $3\frac{6}{7}+1\frac{3}{8}+5\frac{3}{4}+23=$ δ) $9\frac{3}{5}+\frac{5}{8}+\frac{1}{2}=$

Προβλήματα

184. Ἕνας παντοπώλης εἶχε ἕνα δοχεῖον βούτυρον. Ἀπὸ αὐτὸ ἐπώλησε τὴν μίαν ἡμέραν $3\frac{5}{8}$ κιλὰ καὶ τὴν ἄλλην ἡμέραν $2\frac{4}{5}$ κιλὰ περισσότερον ἀπὸ τὴν πρώτην ἡμέραν. Ἔμειναν ἀκόμη μέσα εἰς τὸ δοχεῖον $2\frac{1}{2}$ κιλά. Πόσα κιλὰ βούτυρον ἐπώλησε τὴν δευτέραν ἡμέραν καὶ πόσα κιλὰ εἶχεν ἀρχικῶς ;

185. Μία νοικοκυρὰ τὸ Σάββατον ἔκανε τὰ ἑξῆς ψώνια : $1\frac{2}{5}$ τοῦ κιλοῦ κρέας, $2\frac{7}{8}$ κιλὰ πατάτες, $\frac{3}{4}$ τοῦ κιλοῦ ἔλαιον, $\frac{1}{8}$ τοῦ κιλοῦ βούτυρον καὶ 3 κιλὰ διάφορα ἄλλα ψώνια. Πόσα κιλὰ τρόφιμα ἀγόρασεν ἐκείνην τὴν ἡμέραν ;

186. Ἕνα ἀτμόπλοιον ἀπέπλευσεν ἀπὸ τὸν Πειραιᾶ εἰς τὰς $2\frac{1}{4}$ μ.μ. καὶ μετὰ ἀπὸ $9\frac{2}{5}$ ὥρας ἔφθασεν εἰς τὸν Βόλον. Ποίαν ὥραν ἔφθασε ;

187. Ἕνα βαρέλι περιέχει $78\frac{3}{4}$ κιλὰ ἐλαίας καὶ $7\frac{1}{2}$ κιλὰ σαλαμούρα. Τὸ βαρέλι ζυγίζει ἄδειο $7\frac{3}{5}$ κιλά. Πόσα κιλὰ εἶναι τὸ μικτὸ βάρος του ;

188. Μία μητέρα ἠγόρασεν ὕφασμα, διὰ νὰ κάνῃ φορέματα εἰς τὰς τρεῖς θυγατέρας της. Διὰ τὴν μίαν ἠγόρασε $5\frac{3}{4}$ μέτρα, διὰ τὴν ἄλλην $4\frac{1}{2}$ καὶ διὰ τὴν τρίτην $3\frac{2}{5}$ μέτρα. Πόσα μέτρα ὕφασμα ἠγόρασε συνολικῶς ;

Ἀφαίρεσις

1ον) Ἀφαίρεσις ὁμωνύμων κλασμάτων

Πρόβλημα : Τὸ μάθημα διαρκεῖ $\frac{5}{6}$ τῆς ὥρας. Ὁ διδάσκαλος ἐξετάζει τὰ παιδιὰ ἐπὶ $\frac{2}{6}$ τῆς ὥρας καὶ τὴν ὑπόλοιπην ὥρα παραδίδει τὸ νέο μάθημα. Πόσην ὥραν διαρκεῖ ἡ παράδοσις ;

Λύσις: $\frac{5}{6}-\frac{2}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ τῆς ὥρας.

Ἄλλο παράδειγμα: $\frac{9}{16}-\frac{5}{16}=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$.

2ον) Ἀφαίρεσις ἑτερωνύμων κλασμάτων

Πρόβλημα: Μία φιάλη ἔχει μέσα $\frac{4}{5}$ τοῦ κιλοῦ ἔλαιον. Ἀπὸ αὐτὸ ἐχρησιμοποιήσαμε $\frac{1}{4}$ τοῦ κιλοῦ. Πόσον ἔλαιον ἔμεινε εἰς τὴν φιάλην;

Λύσις: $\frac{4}{5}-\frac{1}{4}=\frac{16}{20}-\frac{5}{20}=\frac{11}{20}$ τοῦ κιλοῦ.

Ἄλλο παράδειγμα: $\frac{3}{4}-\frac{2}{5}=\frac{15}{20}-\frac{8}{20}=\frac{7}{20}$.

Ἀσκήσεις

189. Πῶς ἀφαιροῦμεν ὁμώνυμα κλάσματα; (νὰ γράψῃς τὸν κανόνα εἰς τὸ τετράδιόν σου).

190. Πῶς ἀφαιροῦμεν ἑτερώνυμα κλάσματα; (νὰ γράψῃς τὸν κανόνα εἰς τὸ τετράδιόν σου).

191. Κάνε ἀπὸ μνήμης τὰς ἀφαιρέσεις:

α) $\frac{4}{5}-\frac{2}{5}=$ β) $\frac{5}{8}-\frac{3}{8}=$

δ) $\frac{6}{7}-\frac{3}{7}=$ ε) $\frac{4}{5}-\frac{1}{5}=$

192. Νὰ ἐκτελέσῃς τὰς ἀφαιρέσεις:

α) $\frac{9}{10}-\frac{7}{10}=$ β) $\frac{8}{15}-\frac{3}{15}=$ γ) $\frac{17}{20}-\frac{9}{20}=$

193.

α) $\frac{3}{4}-\frac{7}{15}=$ β) $\frac{1}{2}-\frac{3}{8}=$ γ) $\frac{1}{2}-\frac{9}{20}=$

δ) $\frac{9}{10} - \frac{3}{5} =$ ε) $\frac{3}{11} - \frac{1}{5} =$ ϛ) $\frac{7}{8} - \frac{3}{4} =$

3ον) Ἀφαίρεσις μικτῶν ἀριθμῶν

Πρόβλημα 1ον: Μία νοικοκυρὰ εἶχε $6\frac{4}{5}$ κιλὰ ζάχαρη καὶ ἀπὸ αὐτὴν ἐχρησιμοποίησε $2\frac{3}{8}$ κιλά. Πόση ζάχαρη τῆς ἔμεινε;

Λύσις:

α΄ τρόπος: $6\underbrace{\frac{4}{5}}^{8} - 2\underbrace{\frac{3}{8}}^{5} = 6\frac{32}{40} - 2\frac{15}{40} = 4\frac{17}{40}.$

β΄ τρόπος: Τρέπομεν τοὺς μικτοὺς εἰς κλάσματα:

$$6\frac{4}{5} - 2\frac{3}{8} = \overbrace{\frac{34}{5}}^{8} - \overbrace{\frac{19}{8}}^{5} = \frac{272}{40} - \frac{95}{40} = \frac{177}{40} = 4\frac{17}{40}.$$

Ἄλλο παράδειγμα:

α΄ τρόπος: $7\overbrace{\frac{5}{12}}^{1} - 2\overbrace{\frac{1}{4}}^{3} = 7\frac{5}{12} - 2\frac{3}{12} = 5\frac{2}{12} = 5\frac{1}{6}.$

β΄ τρόπος:

$$7\frac{5}{12} - 2\frac{1}{4} = \overbrace{\frac{89}{12}}^{1} - \overbrace{\frac{9}{4}}^{3} = \frac{89}{12} - \frac{27}{12} = \frac{62}{12} = 5\frac{2}{12} = 5\frac{1}{6}.$$

Ὥστε:

Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν μικτὸν ἀπὸ μικτόν, ἀφαιροῦμεν χωριστὰ τοὺς ἀκεραίους καὶ χωριστὰ τὰ κλάσματα καὶ ἑνώνομεν τὰ μερικὰ ἐξαγόμενα· ἢ τρέπομεν τοὺς μικτοὺς εἰς κλάσματα καὶ ἔπειτα ἀφαιροῦμεν.

Πρόβλημα 2ον: Μία νοικοκυρὰ εἶχε $9\frac{1}{2}$ μέτρα ὕφασμα καὶ ἀπὸ αὐτὸ ἔκοψε $5\frac{3}{4}$ μέτρα. Πόσα μέτρα τῆς ἔμειναν;

Λύσις : Τρέπομε, πρῶτον, τὰ κλάσματα τῶν μικτῶν εἰς ὁμώνυμα :

$$9\frac{1}{2} - 5\frac{3}{4} = 9\frac{2}{4} - 5\frac{3}{4} =$$

Ἐπειδὴ τὸ κλάσμα $\frac{3}{4}$ δὲν ἀφαιρεῖται ἀπὸ τὸ κλάσμα $\frac{2}{4}$, διὰ τοῦτο λαμβάνομεν ἀπὸ τὸν ἀκέραιον 9 μίαν μονάδα καὶ τὴν τρέπομεν εἰς κλάσμα ὁμώνυμον (δηλ. $\frac{4}{4}$). Ἔπειτα προσθέτομεν τὸ $\frac{4}{4}$ εἰς τὸ κλάσμα $\frac{2}{4}$ καὶ εὑρίσκομεν $\frac{6}{4}$. Ὥστε : $8\frac{6}{4} - 5\frac{3}{4} = 3\frac{3}{4}$ μέτρα.

Ἄλλο παράδειγμα :

$$10\frac{1}{5} - 3\frac{3}{4} = 10\frac{4}{20} - 3\frac{15}{20} = 9\frac{24}{20} - 3\frac{15}{20} = 6\frac{9}{20}.$$

Ὥστε :

> **Ἂν τὰ κλάσματα τῶν μικτῶν δὲν ἀφαιροῦνται, λαμβάνομεν μίαν ἀκεραίαν μονάδα ἀπὸ τὸν ἀκέραιον τοῦ μειωτέου, τὴν τρέπομεν εἰς ὁμώνυμον κλάσμα καὶ τὴν προσθέτομεν εἰς τὸ κλάσμα του. Ἔπειτα ἀφαιροῦμεν χωριστὰ τὰ κλάσματα καὶ χωριστὰ τοὺς ἀκεραίους.**

Πρόβλημα 3ον : Ἀπὸ ἕνα δοχεῖον, ποὺ ἔχει 14 κιλὰ ἔλαιον, ἀφαιροῦμεν $4\frac{5}{8}$ κιλά. Πόσα κιλὰ ἔλαιον μένουν εἰς τὸ δοχεῖον ;

Λύσις : $14 - 4\frac{5}{8} = 13\frac{8}{8} - 4\frac{5}{8} = 9\frac{3}{8}$ κιλά.

Ἄλλο παράδειγμα : (ἀφαιρέσεως κλάσματος ἀπὸ ἀκέραιον)

$$8 - \frac{3}{4} = 7\frac{4}{4} - \frac{3}{4} = 7\frac{1}{4}.$$

Ὥστε :

> **Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν μικτὸν ἢ κλάσμα ἀπὸ ἀκέραιον, λαμβάνομεν μίαν μονάδα ἀπὸ τὸν ἀκέραιον τοῦ μειωτέου, τὴν τρέπομεν εἰς κλάσμα ὁμώνυμον μὲ τὸ κλάσμα τοῦ ἀφαιρετέου καὶ ἔπειτα ἀφαιροῦμεν.**

Προβλήματα

194. $8\frac{3}{5} - 5 = 3\frac{3}{5}$.

Πῶς ἀφαιροῦμεν ἀκέραιον ἀπὸ μικτόν ; (νὰ γράψῃς τὸν κανόνα εἰς τὸ τετράδιόν σου).

195. $7\frac{4}{5} - \frac{2}{3} = 7\frac{12}{15} - \frac{10}{15} = 7\frac{2}{15}$.

Πῶς ἀφαιροῦμεν κλάσμα ἀπὸ μικτόν ; (νὰ γράψῃς τὸν κανόνα εἰς τὸ τετράδιόν σου).

196. $9\frac{1}{4} - \frac{4}{5} = 9\frac{5}{20} - \frac{16}{20} = 8\frac{25}{20} - \frac{16}{20} = 8\frac{9}{20}$.

Πῶς ἀφαιροῦμεν κλάσμα ἀπὸ μικτόν, ὅταν τὰ κλάσματα δὲν ἀφαιροῦνται ; (γράψε τὸν κανόνα εἰς τὸ τετράδιόν σου).

197. Τί μένει ἀπὸ ἕνα κιλὸν ἐλαίου, ἂν ἐξοδέψωμεν τὰ $\frac{3}{5}$ τοῦ κιλοῦ ;

198. Τί μένει ἀπὸ $\frac{1}{2}$ τοῦ κιλοῦ βούτυρον, ἂν ἐξοδέψωμεν τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ κιλοῦ ;

199. Ἕνας ἔμπορος εἶχε $68\frac{1}{2}$ μέτρα ὕφασμα καὶ ἀπὸ αὐτὸ ἐπώλησε τὰ $17\frac{3}{4}$ μέτρα. Πόσον ὕφασμα τοῦ ἔμεινε ;

200. Ἕνα καλάθι σῦκα ζυγίζει $7\frac{1}{2}$ κιλά, ἄδειο δὲ ζυγίζει $\frac{4}{5}$ τοῦ κιλοῦ. Πόσα κιλὰ σῦκα περιέχει ;

201. Μία κόρη ἔπλεξε $9\frac{3}{5}$ μέτρα δαντέλλα καὶ μία ἄλλη ἔπλεξε $14\frac{1}{2}$ μέτρα. Πόσον ἔπλεξε περισσότερον ἡ δευτέρα ;

202. Ἕνας παντοπώλης εἶχε $54\frac{2}{5}$ κιλὰ ζάχαρη καὶ ἐπώλησε $27\frac{7}{8}$ κιλά. Πόση ζάχαρη τοῦ ἔμεινε ;

Ἀσκήσεις

Νὰ ἐκτελέσῃς τὰς πράξεις :

203. α) $9\frac{3}{8}-6\frac{1}{3}=$ β) $14\frac{1}{2}-3\frac{2}{7}=$

γ) $10\frac{3}{10}-4\frac{1}{2}=$ δ) $8\frac{3}{10}-3\frac{1}{5}=$

204. α) $8\frac{1}{3}-2\frac{3}{5}=$ β) $7\frac{1}{8}-2\frac{1}{2}=$

γ) $10\frac{3}{10}-4\frac{4}{5}=$ δ) $4\frac{3}{8}-2\frac{4}{7}=$

205. α) $8\frac{3}{4}-\frac{2}{5}=$ β) $24\frac{1}{3}-12=$

206. $\left(\frac{3}{8}+\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\right)-\frac{7}{20}=$ $\frac{4}{5}-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{15}\right)=$

207. $\left(\frac{7}{8}-\frac{1}{4}\right)+\frac{3}{5}+\frac{3}{8}=$ $\left(3\frac{1}{2}+7\frac{1}{4}\right)-8\frac{1}{3}=$

208. $\left(9\frac{4}{5}-2\frac{1}{2}\right)-\frac{3}{4}=$ $6\frac{3}{4}-\left(2\frac{1}{3}+\frac{5}{8}\right)=$

Προβλήματα προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως

209. Μία κονσέρβα κρέατος ζυγίζει $\frac{4}{5}$ τοῦ κιλοῦ. Τὸ δοχεῖον ἄδειο ζυγίζει $\frac{1}{8}$ τοῦ κιλοῦ. Πόσον καθαρὸ βάρος κρέατος περιέχει ;

210. Μία κόρη εἶχε $\frac{4}{5}$ τοῦ μέτρου δαντέλλα καὶ ἀπὸ αὐτὴν ἐχρησιμοποίησε $\frac{1}{2}$ τοῦ μέτρου. Πόση δαντέλλα τῆς ἔμεινε ;

211. Μία φιάλη χωρεῖ $\frac{3}{4}$ τοῦ κιλοῦ ἔλαιον καὶ μία ἄλλη φιάλη $\frac{7}{8}$ τοῦ κιλοῦ. Ποία ἀπὸ τὰς δύο φιάλας χωρεῖ περισσότερον ἔλαιον καὶ πόσον περισσότερον ;

212. Μία βρύση γεμίζει εἰς μίαν ὥραν τὰ $\frac{7}{8}$ μιᾶς δεξαμενῆς. Μία ἄλλη βρύση ποὺ εὑρίσκεται εἰς τὸ κάτω μέρος τῆς δεξαμενῆς ἀδειάζει εἰς μίαν ὥραν τὸ $\frac{1}{5}$ αὐτῆς. Πόσο μέρος τῆς δεξαμενῆς θὰ γεμίσῃ, ἂν ἀφήσωμεν καὶ τὰς δύο ἀνοικτὰς ἐπὶ μίαν ὥραν ;

213. Ὁ Σιδηρόδρομος ξεκινᾶ ἀπὸ τὰς Ἀθήνας τὸ βράδυ εἰς τὰς $8\frac{1}{4}$ καὶ φθάνει εἰς τὴν Θεσσαλονίκην εἰς τὰς 9 τὸ πρωΐ. Πόσας ὥρας διαρκεῖ τὸ ταξίδιον ;

214. Ἕνας παντοπώλης ἠγόρασε $78\frac{3}{4}$ κιλὰ ζάχαρη. Ἀπὸ αὐτὴν ἐπώλησε τὴν μίαν ἑβδομάδα $24\frac{1}{8}$ κιλά, τὴν ἄλλην $28\frac{2}{5}$ καὶ τὰ ὑπόλοιπα κιλὰ τὰ ἐπώλησε τὴν τρίτην ἑβδομάδα. Πόσα κιλὰ ἐπώλησε τὴν τρίτην ἑβδομάδα ;

215. Τὰ μαθήματα τοῦ Σχολείου ἀρχίζουν τὸ πρωῒ εἰς τὰς $8\frac{1}{4}$ καὶ τελειώνουν τὴν 12ην ἀκριβῶς. Τὸ ἀπόγευμα ἀρχίζουν εἰς τὰς $2\frac{1}{2}$ καὶ τελειώνουν εἰς τὰς $4\frac{2}{5}$. Πόσας ὥρας διαρκοῦν ;

216. Ἕνα δοχεῖον χωρεῖ $14\frac{3}{10}$ κιλὰ ἔλαιον, ἄδειο δὲ ζυγίζει $\frac{7}{8}$ τοῦ κιλοῦ. Τώρα τὸ δοχεῖον περιέχει ἔλαιον καὶ ζυγίζει μικτὸν βάρος $8\frac{3}{5}$ κιλά. Πόσον ἔλαιον περιέχει τὸ δοχεῖον καὶ πόσον θὰ χρειασθῇ ἀκόμη διὰ νὰ γεμίσῃ ;

217. Ἕνας ἔμπορος εἶχεν ἕνα τόπι ὕφασμα $75\frac{3}{4}$ μέτρα. Ἀπὸ αὐτὸ ἐπώλησε τὴν μίαν ἡμέραν $14\frac{1}{2}$ μέτρα, τὴν δευτέραν $24\frac{1}{4}$ καὶ τὴν τρίτην $21\frac{2}{5}$ μέτρα. Πόσα μέτρα τοῦ ἔμειναν ;

218. Ἕνας ἐργάτης ἐργάζεται 8 ὥρας τὴν ἡμέραν. Τὸ πρωῒ ἀρχίζει τὴν ἐργασίαν του εἰς τὰς $7\frac{1}{4}$ καὶ τὴν τελειώνει εἰς τὰς $11\frac{3}{4}$. τὸ ἀπόγευμα ἀρχίζει τὴν ἐργασίαν του εἰς τὰς $3\frac{1}{5}$. Ποίαν ὥραν τελειώνει ἡ ἀπογευματινὴ ἐργασία του ;

219. Μία ἐργάτρια ὕφανε εἰς μίαν ἑβδομάδα $80\frac{1}{4}$ μέτρα ὕφασμα, μία ἄλλη ὕφανε $87\frac{3}{5}$ καὶ τρίτη ἐργάτρια ὕφανε $92\frac{1}{2}$ μέτρα. Πόσον ὕφασμα ὕφαναν καὶ αἱ τρεῖς μαζὶ καὶ πόσο ὕφανε περισσότερον ἡ τρίτη ἀπὸ τὴν πρώτην ἐργάτριαν ;

220. Ἕνας εἶχε $28\frac{3}{8}$ κιλὰ ἔλαιον. Ἀπὸ αὐτὸ ἐξώδευσε τὸν πρῶτον μῆνα $6\frac{3}{4}$ κιλὰ καὶ τὸν ἄλλον μῆνα $4\frac{2}{5}$ κιλὰ ἔλαιον περισσότερον ἀπὸ τὸν πρῶτον μῆνα. Πόσον ἔλαιον ἐξώδευσε τὸν δεύτερον μῆνα καὶ πόσον τοῦ ἔμεινε ;

221. Δύο ἄνθρωποι ἐμοιράσθησαν ἕνα ὕφασμα. Ὁ πρῶτος ἔλαβεν $8\frac{3}{5}$ μέτρα καὶ ὁ δεύτερος $2\frac{3}{4}$ ὀλιγώτερον ἀπὸ τὸν πρῶτον. Πόσα μέτρα ἔλαβεν ὁ δεύτερος καὶ πόσα μέτρα ἦτο ὅλο τὸ ὕφασμα ;

222. Ἕνα ἀτμόπλοιον ἀπέπλευσεν ἀπὸ τὸν Πειραιᾶ εἰς τὰς $7\frac{3}{4}$ π.μ. καὶ ἔφθασεν εἰς τὴν Θεσσαλονίκην εἰς τὰς $6\frac{2}{5}$ μ.μ. τῆς ἑπομένης ἡμέρας. Πόσας ὥρας διήρκεσεν τὸ ταξίδιον ;

223. Ἕνας ἐργάτης ἔκτισε τὴν πρώτην ἡμέραν τὰ $\frac{2}{5}$ ἑνὸς τοίχου, τὴν δευτέραν ἡμέραν τὸ $\frac{1}{2}$ τοῦ τοίχου καὶ τὴν τρίτην ἔκτισε τὸ ὑπόλοιπον τοῖχον. Τί μέρος τοῦ τοίχου ἔκτισε τὴν τρίτην ἡμέραν ;

Πολλαπλασιασμός

1ον) Πολλαπλασιασμὸς κλάσματος ἐπὶ ἀκέραιον

Πρόβλημα : Μία κόρη πλέκει εἰς μίαν ὥραν $\frac{3}{4}$ τοῦ μέτρου δαντέλλα. Πόση δαντέλλα θὰ πλέξῃ εἰς 6 ὥρας ;

Λύσις : Ἀφοῦ εἰς μίαν ὥραν πλέκει $\frac{3}{4}$ τοῦ μέτρου, εἰς 6 ὥρας θὰ πλέξῃ 6 φορὰς τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ μέτρου : $\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}=$

$$=\frac{3+3+3+3+3+3}{4}=\frac{3\times 6}{4}=\frac{18}{4}=4\,\frac{2}{4}=4\,\frac{1}{2}\text{ μέτρα.}$$

Βλέπομεν ὅτι πρέπει νὰ ἐπαναλάβωμεν 6 φορὰς τὰ $\frac{3}{4}$, θὰ κάνωμε, δηλαδή, πολλαπλασιασμόν : $\frac{3}{4}\times 6=\frac{3\times 6}{4}=\frac{18}{4}=4\,\frac{2}{4}=4\,\frac{1}{2}$.

Ἄλλο παράδειγμα : $\frac{3}{4}\times 7=\frac{3\times 7}{4}=\frac{21}{4}=5\,\frac{1}{4}$.

Ὥστε :

Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν κλάσμα ἐπὶ ἀκέραιον, πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος ἐπὶ τὸν ἀκέραιον, παρονομαστὴν δὲ ἀφήνομεν τὸν ἴδιον.

Παρατήρησις 1η : Ἂν ἐκτελέσωμεν τοὺς πολλαπλασιασμούς :

$\frac{3}{5}\times 5=\frac{15}{5}=3,\qquad \frac{3}{4}\times 4=\frac{12}{4}=3,\qquad \frac{2}{3}\times 3=2$ κλπ.

βλέπομεν ὅτι, ὅταν πολλαπλασιάζωμεν ἕνα κλάσμα ἐπὶ τὸν παρονομαστήν του, εὑρίσκομεν γινόμενον τὸν ἀριθμητήν του.

Παρατήρησις 2α : Ὅταν ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν κλασματικὴν μονάδα ἐπὶ ἀκέραιον, π.χ. $\frac{1}{4}\times 28=\frac{28}{4}=7$, τότε ὁ πολλαπλασιασμὸς καταντᾷ διαίρεσις τοῦ ἀκεραίου διὰ τοῦ παρονομαστοῦ τῆς κλασματικῆς μονάδος.

2ον) Πολλαπλασιασμὸς ἀκεραίου ἐπὶ κλάσμα

Πρόβλημα 1ον : Ἕνα κιλὸ κρέας στοιχίζει 24 δραχμάς. Πόσο στοιχίζουν τὰ $\frac{3}{8}$ τοῦ κιλοῦ ;

Λύσις : Γνωρίζομεν τὴν ἀξίαν τῆς μιᾶς μονάδος (τοῦ κιλοῦ) καὶ ζητοῦμεν τὴν ἀξίαν μέρους τῆς μονάδος (τῶν $\frac{3}{8}$ κιλοῦ). Τὸ πρόβλημα αὐτὸ δυνάμεθα νὰ τὸ λύσωμεν, ἀφοῦ σκεφθῶμεν ὡς ἑξῆς :

Τὸ 1 κιλὸν ἢ τὰ $\frac{8}{8}$ τοῦ κιλοῦ ἀξίζουν 24 δρχ.

τὸ $\frac{1}{8}$ τοῦ κιλοῦ ἀξίζει 8 φορὰς ὀλιγώτερον, δηλ. $\frac{24}{8}$ δρχ.

καὶ τὰ $\frac{3}{8}$ τοῦ κιλοῦ ἀξίζουν 3 φορὰς περισσότερον ἀπὸ ὅ,τι ἀξίζει τὸ $\frac{1}{8}$, δηλ.

$$\frac{24}{8}+\frac{24}{8}+\frac{24}{8}=\frac{24}{8}\times 3=\frac{24\times 3}{8}=9 \text{ δρχ.}$$

Πρόβλημα 2ον : Μία βενζινομηχανὴ καίει εἰς μίαν ὥραν 2 κιλὰ βενζίνη. Πόση βενζίνη θὰ κάψῃ εἰς $\frac{3}{4}$ τῆς ὥρας ;

Λύσις : Ὁμοίως σκεπτόμενοι εὑρίσκομεν ὅτι εἰς $\frac{1}{4}$ τῆς ὥρας θὰ κάψῃ $\frac{2}{4}$ τοῦ κιλοῦ βενζίνη καὶ εἰς $\frac{3}{4}$ τῆς ὥρας : $\frac{2}{4}+\frac{2}{4}+\frac{2}{4}=$
$=\frac{2}{4}\times 3=\frac{2\times 3}{4}=\frac{6}{4}=1\frac{1}{2}$ κιλ.

Ἀπὸ τὴν λύσιν τῶν ἀνωτέρω προβλημάτων βλέπομεν ὅτι :

> **Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀκέραιον ἐπὶ κλάσμα, πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀκέραιον ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος, παρονομαστὴν δὲ ἀφήνομεν τὸν ἴδιον.**

Εἰς τὰ προβλήματα αὐτὰ μᾶς δίδεται ἡ ἀξία τῆς μιᾶς μονάδος (τοῦ κιλοῦ) καὶ μᾶς ζητεῖται ἡ ἀξία μέρους τῆς μονάδος (τῶν $\frac{3}{8}$ καὶ τῶν $\frac{3}{4}$ τοῦ κιλοῦ).

Ὥστε :

> **Ὅταν γνωρίζωμεν τὴν ἀξίαν τῆς μιᾶς μονάδος καὶ ζητοῦμεν τὴν ἀξίαν μέρους τῆς μονάδος, κάνομεν πολλαπλασιασμόν.**

3ον) Πολλαπλασιασμὸς μικτοῦ ἐπὶ ἀκέραιον

Πρόβλημα : Διὰ κάθε ὑποκάμισον χρειάζονται $3\frac{1}{2}$ μέτρα ὕφασμα. Πόσα μέτρα θὰ χρειασθοῦν διὰ νὰ γίνουν 3 ὑποκάμισα ;

Λύσις : Ἀφοῦ δι' ἕνα ὑποκάμισον χρειάζονται $3\frac{1}{2}$ μέτρα, διὰ τὰ 3 ὑποκάμισα θὰ χρειασθοῦν 3 φορὰς τὰ $3\frac{1}{2}$ μέτρα :

$$3\frac{1}{2}+3\frac{1}{2}+3\frac{1}{2}=3\frac{1}{2}\times 3=9\frac{3}{2}=10\frac{1}{2} \text{ μέτρα.}$$

Βλέπομεν, λοιπόν, ὅτι πρέπει νὰ ἐπαναλάβωμεν 3 φορὰς τὰ $3\frac{1}{2}$ μέτρα, δηλαδὴ θὰ κάνωμε πολλαπλασιασμόν.

Δυνάμεθα νὰ ἐκτελέσωμεν τὸν πολλοπλασιασμὸν μὲ ἄλλον τρόπον, ὡς ἑξῆς :

$$3\frac{1}{2}\times 3=\frac{7}{2}\times 3=\frac{7\times 3}{2}=\frac{21}{2}=10\frac{1}{2},$$

τρέπομεν, δηλαδή, τὸν μικτὸν εἰς κλάσμα καὶ ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν.

Ὥστε :

Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν μικτὸν ἐπὶ ἀκέραιον, πολλαπλασιάζομεν χωριστὰ τὸν ἀκέραιον καὶ χωριστὰ τὸ κλάσμα τοῦ μικτοῦ ἐπὶ τὸν ἀκέραιον· ἔπειτα προσθέτομεν τὰ δύο γινόμενα. Ἢ τρέπομεν τὸν μικτὸν εἰς κλάσμα καὶ ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν.

Ἄλλο παράδειγμα : $5\frac{3}{4}\times 7=\ ;$

1ος τρόπος : $5\frac{3}{4}\times 7=5\times 7+\frac{3\times 7}{4}=35+\frac{21}{4}=40\frac{1}{4}\cdot$

2ος τρόπος : $5\frac{3}{4}\times 7=\frac{23}{4}\times 7=\frac{23\times 7}{4}=\frac{161}{4}=40\frac{1}{4}\cdot$

Σημείωσις : Ὅταν ὁ ἀκέραιος τοῦ μικτοῦ, ἢ ὁ ἄλλος ἀκέραιος, εἶναι ἀριθμοὶ μεγάλοι, π.χ. $158\frac{3}{5}\times 14=$, μεταχειριζόμεθα πρὸς εὐκολίαν μας τὸν πρῶτον τρόπον· δηλ. πολλαπλασιάζομεν χωριστὰ τὸν ἀκέραιον καὶ χωριστὰ τὸ κλάσμα τοῦ μικτοῦ ἐπὶ τὸν ἀκέραιον.

4ον) Πολλαπλασιασμὸς ἀκεραίου ἐπὶ μικτὸν

Πρόβλημα: Ἕνα κιλὸ καφὲς ἀξίζει 64 δραχμάς. Πόσον ἀξίζουν $2\frac{3}{4}$ κιλά ;

Λύσις: Ἀφοῦ τὸ κιλὸν στοιχίζει 64 δραχμάς, τὰ $2\frac{3}{4}$ κιλὰ θὰ στοιχίζουν $2\frac{3}{4}$ φορὰς περισσοτέρας δραχμάς. Θὰ κάνωμε δηλ. πολλαπλασιασμόν.

1ος τρόπος: $64 \times 2\frac{3}{4} = 64 \times 2 + 64 \times \frac{3}{4} = 128 + \frac{64 \times 3}{4} =$

$$= 128 + \frac{192}{4} = 128 + 48 = 176 \text{ δραχμάς.}$$

2ος τρόπος: $64 \times 2\frac{3}{4} = 64 \times \frac{11}{4} = \frac{704}{4} = 176$ δραχμάς.

Προβλήματα

224. Πῶς πολλαπλασιάζομεν ἀκέραιον ἐπὶ μικτόν ;
(Γράψε εἰς τὸ τετράδιόν σου τὸν κανόνα καὶ μὲ τοὺς δύο τρόπους).

225. Πῶς πολλαπλασιάζομεν μικτὸν ἐπὶ ἀκέραιον.
(Γράψε εἰς τὸ τετράδιόν σου τὸν κανόνα καὶ μὲ τοὺς δύο τρόπους).

226. Ἕνας εἶχεν 7 δοχεῖα ἔλαιον. Κάθε δοχεῖον χωρεῖ $14\frac{5}{8}$ κιλά. Πόσον ἔλαιον περιέχουν ὅλα τὰ δοχεῖα ;

227. Μία οἰκογένεια ἐξοδεύει $\frac{3}{4}$ τοῦ κιλοῦ γάλα τὴν ἡμέραν. Πόσο γάλα ἐξοδεύει εἰς ἕνα μῆνα (30 ἡμέρας) ;

228. Διὰ κάθε ὑποκάμισον χρειάζονται $4\frac{3}{5}$ μέτρα ὕφασμα. Πόσα μέτρα χρειάζονται, διὰ νὰ γίνουν 12 ὑποκάμισα ;

229. Ἀπὸ μία βρύση χύνεται κάθε ὥραν 640 κιλὰ νερό. Πόσο νερὸ θὰ χυθῇ εἰς $\frac{3}{5}$ τῆς ὥρας καὶ πόσον εἰς $7\frac{1}{2}$ ὥρας ;

230. Μία οἰκογένεια ἐξοδεύει $2\frac{3}{16}$ κιλὰ ἔλαιον τὴν ἑβδομάδα. Πόσον ἐξοδεύει εἰς ἕνα ἔτος (52 ἑβδομάδας) ;

231. Μία πετρελαιομηχανὴ καίει τὴν ὥραν $1\frac{3}{5}$ κιλὰ πετρέλαιον. Πόσο πετρέλαιον χρειάζεται εἰς 7 ὥρας ;

Ἀσκήσεις

Κάνε ἀπὸ μνήμης τοὺς πολλαπλασιασμούς :

232. α) $16 \times \frac{1}{2} =$ β) $30 \times \frac{1}{3} =$ γ) $45 \times \frac{1}{9} =$

233. α) $\frac{1}{5} \times \frac{1}{2} =$ β) $\frac{2}{5} \times 5 =$ γ) $6 \times \frac{5}{6} =$

234. Νὰ ἐκτελέσῃς τοὺς πολλαπλασιασμούς :

α) $\frac{4}{5} \times 8 =$ β) $\frac{7}{8} \times 32 =$ γ) $15 \times \frac{4}{5} =$

δ) $\frac{2}{5} \times 14 =$ ε) $\frac{9}{10} \times 30 =$ στ) $22 \times \frac{5}{6} =$

235. α) $3\frac{1}{2} \times 8 =$ β) $9 \times 4\frac{3}{8} =$ γ) $5\frac{4}{11} \times 10 =$

δ) $7\frac{5}{5} \times 4 =$ ε) $12 \times 2\frac{1}{7} =$ στ) $12 \times 6\frac{1}{3} =$

236. α) $15\frac{3}{8} \times 7 =$ β) $100\frac{1}{4} \times 2 =$ γ) $10 \times 80\frac{3}{4} =$

δ) $25\frac{1}{3} \times 4 =$ ε) $250\frac{2}{5} \times 3 =$ στ) $15 \times 7\frac{3}{16} =$

Προβλήματα

237. Δι' ἕνα μαξιλάρι χρειάζονται $1\frac{3}{4}$ μέτρα χασέ. Πόσα μέτρα θὰ χρειασθοῦν διὰ 5 μαξιλάρια καὶ πόσα διὰ 2 δωδεκάδας ;

238. Ἕνας παντοπώλης ἠγόρασε $13\frac{3}{5}$ κιλὰ βούτυρο πρὸς 47 δραχμὰς τὸ κιλόν. Πόσας δραχμὰς ἐπλήρωσε ;

239. Ὁ τεκτονικὸς πῆχυς εἶναι ἴσος μὲ τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ μέτρου. Πόσα μέτρα εἶναι 28. τεκτονικοὶ πήχεις ;

240. Μία οἰκογένεια ἐξοδεύει $\frac{3}{8}$ τοῦ κιλοῦ ἔλαιον κάθε ἡμέραν. Πόσον ἔλαιον θὰ ἐξοδεύσῃ εἰς 185 ἡμέρας ;

241. Ἡ ἰδία οἰκογένεια χρειάζεται $1\frac{1}{4}$ τοῦ κιλοῦ ψωμὶ κάθε ἡμέραν. Πόσα κιλὰ θὰ χρειασθῇ εἰς 185 ἡμέρας ;

5ον) Πολλαπλασιασμὸς κλάσματος ἐπὶ κλάσμα

Πρόβλημα : Μία ὑφάντρια ὑφαίνει εἰς μίαν ὥραν $\frac{3}{5}$ τοῦ μέτρου ὕφασμα. Πόσο θὰ ὑφάνῃ εἰς $\frac{3}{4}$ τῆς ὥρας ;

Λύσις : Εἰς τὸ πρόβλημα αὐτὸ γνωρίζομεν τὴν τιμὴν τῆς μιᾶς μονάδος $\left(\frac{3}{5}\right.$ τοῦ μέτρου εἰς μίαν ὥραν) καὶ ζητοῦμεν τὴν τιμὴν μέρους τῆς μονάδος (τῶν $\frac{3}{4}$ τῆς ὥρας). Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν τοῦ μέρους τῆς μονάδος, ὅπως ἐμάθαμε, θὰ κάνωμε πολλαπλασιασμόν, δηλ. :
$\frac{3}{5}\times\frac{3}{4}=$

Μένει τώρα νὰ μάθωμεν, πῶς θὰ κάνωμε τὸν πολλαπλασιασμὸν κλάσματος ἐπὶ κλάσμα, διὰ νὰ εὕρωμεν πόσον ὕφασμα θὰ ὑφάνῃ εἰς $\frac{3}{4}$ τῆς ὥρας (δηλ. τὴν ἀξίαν τῶν $\frac{3}{4}$ τῆς μονάδος). Ἀλλὰ τοῦτο τὸ εὑρίσκομεν, ὅπως ἐμάθαμε εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν ἀκεραίου ἐπὶ κλάσματος, ὡς ἑξῆς :

Ἀφοῦ εἰς 1 ὥραν ἢ $\frac{4}{4}$ τῆς ὥρας ὑφαίνει $\frac{3}{5}$ τοῦ μέτρου, εἰς $\frac{1}{4}$ τῆς ὥρας, ποὺ εἶναι 4 φορὰς μικρότερον ἀπὸ τὴν μίαν ὥραν, θὰ ὑφάνῃ 4 φορὰς ὀλιγώτερον ὕφασμα.

Ἀλλὰ διὰ νὰ κάνωμεν τὸ κλάσμα $\frac{3}{5}$ τέσσαρας φορὰς μικρότερον, πρέπει, ὅπως ἔχομεν μάθει, νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν παρονομαστήν του ἐπὶ 4, δηλ. εἰς $\frac{1}{4}$ τῆς ὥρας θὰ ὑφάνῃ : $\frac{3}{5\times4}$ καὶ εἰς $\frac{3}{4}$ τῆς ὥρας θὰ ὑφάνῃ :

$$\frac{3}{5\times4}+\frac{3}{5\times4}+\frac{3}{5\times4}=\frac{3\times3}{5\times4}=\frac{9}{20}\text{ τοῦ μέτρου.}$$

Ἀπὸ τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος αὐτοῦ βλέπομεν ὅτι :

Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν κλάσμα ἐπὶ κλάσμα, πολλαπλασιάζομεν ἀριθμητὴν ἐπὶ ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν ἐπὶ παρονομαστήν· καὶ τὸ μὲν γινόμενον τῶν ἀριθμητῶν γράφομεν ἀριθμητήν, τὸ δὲ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν παρονομαστήν.

Ἄλλο παράδειγμα: $\frac{3}{5} \times \frac{5}{6} = \frac{3 \times 5}{5 \times 6} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$.

6ον) Πολλαπλασιασμὸς μικτοῦ ἐπὶ κλάσμα

Πρόβλημα 1ον: Μία λάμπα καίει $\frac{2}{5}$ τοῦ κιλοῦ πετρέλαιον τὴν ὥραν. Πόσο πετρέλαιον θὰ κάψῃ εἰς $7\frac{5}{6}$ ὥρας;

Λύσις: Ἀφοῦ εἰς μίαν ὥραν καίει $\frac{2}{5}$ τοῦ κιλοῦ, εἰς $7\frac{5}{6}$ ὥρας θὰ κάψῃ $\frac{2}{5} \times 7\frac{5}{6}$. Τρέπομε τὸν μικτὸν εἰς κλάσμα καὶ ἔχομε νὰ πολλαπλασιάσωμεν κλάσμα ἐπὶ κλάσμα:

$$\frac{2}{5} \times 7\frac{5}{6} = \frac{2}{5} \times \frac{47}{6} = \frac{2 \times 47}{5 \times 6} = \frac{94}{30} = 3\frac{4}{30} = 3\frac{2}{15} \text{ κιλά.}$$

7ον) Πολλαπλασιασμὸς μικτοῦ ἐπὶ μικτὸν

Πρόβλημα 2ον: Μία οἰκογένεια ἐξοδεύει τὸν μῆνα ἕνα δοχεῖον ἔλαιον, ποὺ χωρεῖ $4\frac{7}{8}$ κιλά. Πόσα κιλὰ θὰ ἐξοδεύσῃ εἰς $5\frac{1}{2}$ μῆνας;

Λύσις: $4\frac{7}{8} \times 5\frac{1}{2} = \frac{39}{8} \times \frac{11}{2} = \frac{39 \times 11}{8 \times 2} = \frac{429}{16} = 26\frac{13}{16}$ κιλά.

Ὅπως βλέπωμεν, ἐτρέψαμεν τοὺς μικτοὺς εἰς κλάσματα καὶ ἔπειτα ἐπολλαπλασιάσαμεν κλάσμα ἐπὶ κλάσμα.

Προβλήματα

242. Πῶς πολλαπλασιάζομεν μικτὸν ἐπὶ κλάσμα;
(Γράψε τὸν κανόνα εἰς τὸ τετράδιόν σου).

243. Πῶς πολλαπλασιάζομεν μικτὸν ἐπὶ μικτόν;
(Γράψε τὸν κανόνα εἰς τὸ τετράδιόν σου).

244. Μία λάμπα καίει τὴν ὥραν $\frac{3}{25}$ τοῦ κιλοῦ πετρέλαιον. Πόσον πετρέλαιον θὰ κάψῃ εἰς $\frac{3}{4}$ τῆς ὥρας καὶ πόσον εἰς $5\frac{1}{2}$ ὥρας ;

245. Μία κόρη πλέκει τὴν ὥραν $\frac{4}{5}$ τοῦ μέτρου δαντέλλα. Πόση δαντέλλα θὰ πλέξῃ εἰς $7\frac{3}{4}$ ὥρας καὶ πόση εἰς $\frac{2}{3}$ τῆς ὥρας ;

246. Ἕνα ἀτμόπλοιον πλέει μὲ ταχύτητα $12\frac{1}{4}$ μιλίων τὴν ὥραν. Πόσα μίλια θὰ διατρέξῃ εἰς $17\frac{5}{12}$ ὥρας ;

247. Μία ὑφάντρια ὑφαίνει τὴν ὥραν $5\frac{3}{5}$ μέτρα ὕφασμα. Πόσα μέτρα θὰ ὑφάνῃ εἰς 6 ἡμέρας, ὅταν ἐργάζεται $7\frac{2}{5}$ ὥρας κάθε ἡμέραν ;

Ἀσκήσεις

248. Νὰ ἐκτελέσῃς τὰς πράξεις :

α) $\frac{3}{5}\times\frac{3}{8}=$ β) $\frac{4}{7}\times\frac{8}{9}=$ γ) $\frac{7}{8}\times\frac{3}{7}=$

δ) $\frac{9}{10}\times\frac{5}{8}=$ ε) $\frac{5}{6}\times\frac{1}{4}=$ στ) $\frac{9}{10}\times\frac{1}{5}=$

249. α) $5\frac{1}{3}\times\frac{4}{7}=$ β) $8\frac{3}{8}\times\frac{3}{7}=$ γ) $7\frac{3}{5}\times\frac{1}{20}=$

δ) $\frac{3}{5}\times6\frac{1}{2}=$ ε) $\frac{4}{11}\times1\frac{1}{2}=$ στ) $\frac{10}{11}\times3\frac{1}{4}=$

250. α) $3\frac{1}{2}\times7\frac{4}{5}=$ β) $9\frac{3}{4}\times10\frac{3}{5}=$ γ) $11\frac{1}{2}\times4\frac{7}{8}=$

δ) $8\frac{5}{6}\times3\frac{1}{2}=$ ε) $4\frac{3}{5}\times2\frac{1}{8}=$ στ) $15\frac{1}{3}\times4\frac{1}{2}=$

Προβλήματα

251. Ἕνα ἀτμόπλοιον ἀπέπλευσεν ἀπὸ τὸν Πειραιᾶ διὰ τὴν Θεσσαλονίκην εἰς τὰς $6\frac{3}{4}$ τὸ πρωῒ καὶ πλέει μὲ ταχύτητα 12 μιλίων τὴν ὥραν. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τὸν λιμένα τοῦ Πειραιῶς θὰ εὑρίσκεται εἰς τὰς $4\frac{1}{2}$ τὸ ἀπόγευμα τῆς ἰδίας ἡμέρας ;

252. Εἰς μίαν μαθητικὴν κατασκήνωσιν, ποὺ εἶχεν 156 μαθητάς, ἔγιναν εἰς ἕνα μῆνα 8 συσσίτια κρέατος. Ὁ κάθε μαθητὴς διὰ κάθε συσσίτιον δικαιοῦται $\frac{1}{5}$ τοῦ κιλοῦ κρέας. Πόσα κιλὰ κρέας ἐξωδεύθησαν εἰς τὴν κατασκήνωσιν ὁλόκληρον τὸν μῆνα.

253. Μία λάμπα καίει 25 γραμμάρια πετρέλαιον τὴν ὥραν. Πόσα γραμμάρια πετρέλαιον θὰ κάψῃ εἰς μίαν ἑβδομάδα (7 ἡμέρας), ὅταν κάθε βράδυ μένῃ ἀναμμένη $3\frac{7}{10}$ ὥρας ;

254. Μία κόρη πλέκει $\frac{3}{4}$ τοῦ μέτρου δαντέλλα εἰς μίαν ὥραν. Πόση δαντέλλα θὰ πλέξῃ εἰς $2\frac{1}{2}$ ὥρας ;

255. Μία βενζινομηχανὴ καίει κάθε ὥρα $2\frac{3}{5}$ κιλὰ βενζίνη. Πόση βενζίνη θὰ κάψῃ εἰς $6\frac{1}{2}$ ὥρας ;

256. Ἕνα ἀεροπλάνο πετᾷ μὲ 415 χιλιόμετρα τὴν ὥρα. Πόσα χιλιόμετρα θὰ διατρέξῃ εἰς $4\frac{3}{5}$ ὥρας ;

257. Ἕνα σῶμα ποὺ ζυγίζει 280 γραμμάρια, ὅταν βυθισθῇ εἰς τὸ νερό, χάνει τὰ $\frac{3}{10}$ ἀπὸ τὸ βάρος του. Πόσα γραμμάρια ζυγίζει ὅταν εἶναι βυθισμένον μέσα εἰς τὸ νερὸ καὶ πόσο βάρος χάνει ;

258. Ὁ τετραγωνικὸς τεκτονικὸς πῆχυς εἶναι ἴσος μὲ τὰ $\frac{9}{16}$ τοῦ τετραγωνικοῦ μέτρου. Ἕνα οἰκόπεδον εἶναι 656 τετρ. τεκτ. πήχεις. Πόσα τετραγωνικὰ μέτρα εἶναι τὸ οἰκόπεδον ;

259. Διὰ κάθε μπλούζα χρειάζεται $\frac{3}{16}$ τοῦ κιλοῦ νῆμα. Πόσα κιλὰ νῆμα χρειαζόμεθα διὰ νὰ κάνωμε 17 ὁμοίας μπλούζας ;

260. Ένα αὐτοκίνητον καίει $\frac{2}{5}$ τοῦ γαλονίου βενζίνη τὴν ὥρα. Τί μέρος τοῦ γαλονίου καίει εἰς $\frac{5}{6}$ τῆς ὥρας ;

261. Ἕνας μύλος ἀλέθει $23 \frac{3}{5}$ κιλὰ σίτου τὴν ὥραν. Πόσα κιλὰ ἀλέθει εἰς $\frac{3}{4}$ τῆς ὥρας ;

262. Μία πλάκα σαπούνι ζυγίζει $\frac{3}{20}$ τοῦ κιλοῦ. Πόσα κιλὰ σαπούνι εἶναι 14 κιβώτια, ποὺ τὸ καθένα περιέχει 192 πλάκες ;

263. Ἕνας ἔμπορος ἔκανε 15 δωδεκάδας πετσέτας τοῦ φαγητοῦ μὲ $\frac{3}{5}$ τοῦ μέτρου ὕφασμα τὴν κάθε μίαν. Τὸ ὕφασμα τοῦ στοιχίζει 5 δραχμὰς τὸ μέτρον. Πόσα μέτρα ὕφασμα ἐχρειάσθη καὶ πόσας δραχμὰς στοιχίζει ἡ κάθε πετσέτα ;

264. Ἕνας ἔμπορος χρεωστᾶ 1048 δραχμάς. Διὰ νὰ ἐξοφλήσῃ τὸ χρέος του, δίδει $15 \frac{1}{2}$ μέτρα ἀπὸ ἕνα ὕφασμα πρὸς 12 δραχμὰς τὸ μέτρον καὶ $24 \frac{3}{4}$ μέτρα ἀπὸ ἄλλο ὕφασμα πρὸς 16 δραχμὰς τὸ μέτρον. Πόσας δραχμὰς χρεωστᾶ ἀκόμη ;

265. Εἰς ἕνα ὀρφανοτροφεῖον πρόκειται νὰ κάνουν 96 ἐνδυμασίας διὰ τὰ ὀρφανά. Κάθε ἐνδυμασία χρειάζεται $2 \frac{3}{4}$ μέτρα ὕφασμα, ποὺ ἀξίζει 18 δραχμὰς τὸ μέτρον. Πόσας δραχμὰς στοιχίζει τὸ ὕφασμα δι' ὅλας τὰς ἐνδυμασίας ;

Διαίρεσις

1ον) Διαίρεσις κλάσματος ἢ μικτοῦ διὰ ἀκεραίου

Πρόβλημα 1ον : Μία οἰκογένεια ποὺ ἀποτελεῖται ἀπὸ 5 ἄτομα, ἐξοδεύει κάθε πρωῒ $\frac{3}{4}$ τοῦ κιλοῦ γάλα. Πόσο γάλα πίνει κάθε ἄτομο ;

Λύσις : Ἀφοῦ τὰ 5 ἄτομα πίνουν $\frac{3}{4}$ τοῦ κιλοῦ γάλα, τὸ ἕνα θὰ πίνῃ 5' φορὰς ὀλιγώτερον τῶν $\frac{3}{4}$. Ἀλλὰ διὰ νὰ κάνωμεν τὸ κλάσμα $\frac{3}{4}$ πέντε φορὰς μικρότερον πρέπει νὰ διαιρέσωμεν αὐτὸ διὰ τοῦ 5.

Γνωρίζομεν ἀπὸ τὰς ἰδιότητας τῶν κλασμάτων ὅτι : **Ὅταν πολλαπλασιάσωμεν τὸν παρονομαστὴν ἑνὸς κλάσματος ἐπὶ ἕναν ἀριθμόν, ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος διαιρεῖται διὰ τοῦ ἀριθμοῦ αὐτοῦ.**

Ὥστε : Διὰ νὰ διαιρέσωμεν τὸ κλάσμα $\frac{3}{4}$ διὰ τοῦ 5, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν παρονομαστήν του ἐπὶ 5.

Δηλ. $\frac{3}{4} : 5 = \frac{3}{4 \times 5} = \frac{3}{20}$ τοῦ κιλοῦ.

Τὸ κλάσμα $\frac{3}{20}$ εἶναι πραγματικῶς τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως $\frac{3}{4} : 5$, διότι, ἂν πολλαπλασιάσωμεν αὐτὸ ἐπὶ τὸν διαιρέτην 5, εὑρίσκομεν τὸν διαιρετέον $\frac{3}{4}$, δηλ. $\frac{3}{20} \times 5 = \frac{3 \times 5}{20} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$.

Πρόβλημα 2ον : Μία κόρη ἔπλεξεν εἰς 3 ἡμέρας $\frac{9}{10}$ τοῦ μέτρου δαντέλλα. Πόση δαντέλλα πλέκει εἰς μίαν ἡμέραν ;

Λύσις : $\frac{9}{10} : 3 = \frac{9}{10 \times 3} = \frac{9}{30} = \frac{3}{10}$.

Τὴν διαίρεσιν αὐτὴν δυνάμεθα νὰ τὴν ἐκτελέσωμεν καὶ μὲ ἄλλον τρόπον :

$$\frac{9}{10} : 3 = \frac{9 : 3}{10} = \frac{3}{10} \text{ τοῦ μέτρου.}$$

Διαιροῦμεν, δηλαδή, τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος (ἂν διαιρῆται ἀκριβῶς) διὰ τοῦ ἀκεραίου.

Ὥστε :

Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἕνα κλάσμα δι' ἀκεραίου, πολλαπλασιάζομεν τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος ἐπὶ τὸν ἀκέραιον ἢ διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητὴν αὐτοῦ (ἂν διαιρῆται) διὰ τοῦ ἀκεραίου.

Πρόβλημα 3ον : Ἕνας οἰκογενειάρχης ἠγόρασε $2\frac{4}{5}$ κιλὰ ἔλαιον. Πόσον ἔλαιον πρέπει νὰ ἐξοδεύῃ τὴν ἡμέραν, διὰ νὰ περάσῃ μὲ αὐτὸ μίαν ἑβδομάδα ;

Λύσις : Ἀφοῦ εἰς 7 ἡμέρας θὰ ἐξοδεύσῃ $2\frac{4}{5}$ κιλά, εἰς μίαν ἡμέραν πρέπει νὰ ἐξοδεύῃ 7 φορὰς ὀλιγώτερον, δηλ. $2\frac{4}{5} : 7$.

Τρέπομεν τὸν μικτὸν εἰς κλάσμα καὶ ἔπειτα ἐκτελοῦμεν τὴν διαίρεσιν, ὅπως ἐμάθαμε :

$$2\frac{4}{5} : 7 = \frac{14}{5} : 7 = \frac{14:7}{5} = \frac{2}{5}$$

$$\text{ἢ } 2\frac{4}{5} : 7 = \frac{14}{5} : 7 = \frac{14}{5 \times 7} = \frac{14}{35} = \frac{2}{5}.$$

Προβλήματα

266. Πῶς διαιροῦμεν μικτὸν δι' ἀκεραίου ;
(Γράψε τὸν κανόνα εἰς τὸ τετράδιόν σου).

267. Ἕνα παιδὶ πίνει εἰς 15 ἡμέρας $\frac{3}{8}$ τοῦ κιλοῦ μουρουνέλαιον. Πόσο μουρουνέλαιον πίνει τὴν ἡμέραν ;

268. Ἕνα πεπόνι, ποὺ ζύγιζε $\frac{7}{8}$ τοῦ κιλοῦ, ἐμοιράσθη εἰς 5 παιδιὰ ἐξ ἴσου. Πόσον ἐπῆρε τὸ καθένα ;

269. 5 δοχεῖα ἔλαιον ζυγίζουν $72\frac{1}{2}$ κιλά. Πόσο ζυγίζει τὸ καθένα ;

270. Μία κόρη εἰς 4 ἡμέρας ἔπλεξε $7\frac{1}{2}$ μέτρα δαντέλλα. Πόση δαντέλλα πλέκει τὴν ἡμέραν ;

271. 9 δοχεῖα βούτυρο ζυγίζουν $51\frac{3}{4}$ κιλά. Πόσο ζυγίζει τὸ καθένα ;

272. α) $\frac{3}{5} : 2 =$ β) $\frac{9}{10} : 3 =$ γ) $\frac{4}{5} : 6 =$

δ) $\frac{5}{8} : 5 =$ ε) $\frac{8}{9} : 4 =$ στ) $\frac{7}{10} : 3 =$

273. α) $3\frac{1}{2} : 5 =$ β) $4\frac{3}{8} : 3 =$ γ) $12\frac{4}{5} : 8 =$

δ) $\frac{3}{4} : 6 =$ ε) $17\frac{1}{2} : 5 =$ στ) $16\frac{1}{4} : 3 =$

274. α) $17\frac{3}{5} : 8 =$ β) $2\frac{3}{7} : 10 =$ γ) $15\frac{1}{3} : 100 =$

δ) $\frac{9}{16} : 5 =$ ε) $7\frac{1}{3} : 8 =$ στ) $27\frac{1}{2} : 15 =$

Προβλήματα

275. 50 κονσέρβες ζυγίζουν $43\frac{3}{4}$ κιλά. Πόσο ζυγίζει ἡ καθεμία ;

276. Μία οἰκογένεια ἐξώδεῦσε εἰς ἕνα ἔτος (365 ἡμέρας) $91\frac{1}{4}$ κιλὰ ἔλαιον. Πόσον ἐξώδευσε τὴν ἡμέραν ;

277. Μὲ 6 κιλὰ ἀλεύρου γίνονται $7\frac{1}{2}$ κιλὰ ἄρτου. Πόσος ἄρτος θὰ γίνῃ μὲ 1 κιλὸ ἀλεύρου ;

278. Μία λάμπα πετρελαίου ποὺ καίει 3 ὥρας κάθε βράδυ, εἰς μίαν ἑβδομάδα (7 ἡμέρας) ἔκαψε $4\frac{1}{5}$ κιλὰ πετρέλαιον. Πόσον πετρέλαιον καίει τὴν ὥραν ;

279. Μὲ $43\frac{1}{5}$ μέτρα ὕφασμα γίνονται 12 ὑποκάμισα. Πόσα μέτρα χρειάζονται διὰ κάθε ὑποκάμισον ;

2ον) Διαίρεσις ἀκεραίου διὰ κλάσματος

Πρόβλημα : Μὲ 48 δραχμὰς ἀγοράζομεν 4 κιλὰ ζάχαρη. Πόσον ἀξίζει τὸ κιλόν ;

Λύσις : Γνωρίζομεν τὴν ἀξίαν τῶν πολλῶν μονάδων καὶ ζητοῦμεν τὴν ἀξίαν τῆς μιᾶς μονάδος. Ἄρα θὰ κάνωμε διαίρεσιν. Θὰ διαιρέσωμεν τὰς 48 δραχμὰς (δηλ. τὴν ἀξίαν τῶν πολλῶν μονάδων) διὰ τοῦ 4, πού μᾶς φανερώνει τὰς μονάδας, δηλ. $48 : 4 = 12$ δραχμάς.

Ἂν τὸ πρόβλημα ἦτο ὡς ἑξῆς :

Πρόβλημα: Μὲ 9 δραχμὰς ἀγοράζομεν $\frac{3}{4}$ τοῦ κιλοῦ ζάχαρη. Πόσον ἀξίζει τὸ κιλόν ;

Καὶ εἰς αὐτὸ τὸ πρόβλημα θὰ διαιρέσωμεν τὴν ἀξίαν τῶν πολλῶν κλασματικῶν μονάδων (δηλ. τὰς 9 δραχμὰς) διὰ τοῦ $\frac{3}{4}$, πού μᾶς φανερώνει τὰς κλασματικὰς μονάδας, δηλ. $9 : \frac{3}{4}$.

Ὥστε :

Ὅταν γνωρίζωμεν τὴν ἀξίαν τῶν μερῶν τῆς ἀκεραίας μονάδος καὶ ζητοῦμεν τὴν ἀξίαν τῆς μιᾶς ἀκεραίας μονάδος, κάνομε διαίρεσιν. Διαιρετέον βάζομε πάντοτε τὴν ἀξίαν τῶν μερῶν τῆς ἀκεραίας μονάδος.

Δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν μὲ ἄλλον τρόπον (διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα) τὴν ἀξίαν τοῦ κιλοῦ, ἂν σκεφθῶμεν ὡς ἑξῆς :

τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ κιλοῦ ἀξίζουν 9 δραχ.

τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ κιλοῦ ἀξίζει 3 φορὰς ὀλιγώτερον, δηλ. $\frac{9}{3}$ »

καὶ τὰ $\frac{4}{4}$ τοῦ κιλοῦ (δηλ. ἕνα κιλὸν) ἀξίζουν 4 φορὰς περισσότερον, δηλ. $\frac{9}{3} \times 4$ ἢ $9 \times \frac{4}{3} = \frac{36}{3} = 12$ δραχμάς.

Ὁ τρόπος αὐτὸς τῆς λύσεως λέγεται **μέθοδος διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα.** Βλέπομεν, λοιπόν, ὅτι ἀντὶ νὰ κάνωμε τὴν διαίρεσιν $9 : \frac{3}{4}$, κάνομε τὸν πολλαπλασιασμὸν $9 \times \frac{4}{3} = \frac{36}{3} = 12$.

Ὁ ἀριθμὸς 12 εἶναι πραγματικὰ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως $9 : \frac{3}{4}$, διότι ἂν τὸν πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸν διαιρέτην $\frac{3}{4}$, θὰ εὕρωμεν τὸν διαιρετέον 9, δηλ. $12 \times \frac{3}{4} = \frac{12 \times 3}{4} = \frac{36}{4} = 9$.

Ἄλλο παράδειγμα: $8 : \frac{2}{5} = 8 \times \frac{5}{2} = \frac{8 \times 5}{2} = \frac{40}{2} = 20.$

Ὥστε :

Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἕναν ἀκέραιον διὰ κλάσματος, πολλαπλασιάζομεν αὐτὸν ἐπὶ τὸ κλάσμα ἀντεστραμμένον.

3ον) Διαίρεσις κλάσματος διὰ κλάσματος

Πρόβλημα: Μία βενζινομηχανὴ εἰς $\frac{2}{5}$ τῆς ὥρας καίει $\frac{3}{4}$ τοῦ κιλοῦ βενζίνη. Πόσο καίει τὴν ὥραν ;

Λύσις: Εἰς τὸ πρόβλημα αὐτὸ εἶναι γνωστὴ ἡ ἀξία τῶν μερῶν, δηλ. τῶν $\frac{2}{5}$ τῆς ἀκεραίας μονάδος (ἡ ἀξία εἶναι $\frac{3}{4}$ τοῦ κιλοῦ) καὶ ζητεῖται ἡ ἀξία τῆς μιᾶς ἀκεραίας μονάδος (δηλ. τῆς 1 ὥρας).

Ὅπως ἐμάθαμε, εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν θὰ κάνωμε διαίρεσιν· θὰ διαιρέσωμεν τὸ $\frac{3}{4}$, ποὺ μᾶς φανερώνει τὴν ἀξίαν τῶν μερῶν τῆς ἀκεραίας μονάδος, διὰ τοῦ $\frac{2}{5}$, ποὺ μᾶς φανερώνει τὰ μέρη τῆς ἀκεραίας μονάδος.

Δηλ. $\frac{3}{4} : \frac{2}{5}$

Δυνάμεθα καὶ μὲ τὴν μέθοδον διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα νὰ εὕρωμεν πόσην βενζίνην καίει ἡ μηχανὴ εἰς μίαν ὥραν, ἂν σκεφθῶμεν ὡς ἑξῆς :

Ἀφοῦ εἰς $\frac{2}{5}$ τῆς ὥρας καίει $\frac{3}{4}$ τοῦ κιλοῦ,

εἰς $\frac{1}{5}$ τῆς ὥρας θὰ καίῃ $\frac{3}{4} : 2 = \frac{3}{4 \times 2}$ κιλ.

καὶ εἰς $\frac{5}{5}$ τῆς ὥρας (ἢ 1 ὥραν) θὰ καίῃ $\frac{3}{4 \times 2} \times 5 = \frac{3 \times 5}{4 \times 2}$ ἢ $\frac{3}{4} \times \frac{5}{2}$.

Ὥστε πρέπει νὰ εἶναι $\frac{3}{4} : \frac{2}{5} = \frac{3}{4} \times \frac{5}{2} = \frac{15}{8} = 1\frac{7}{8}$ κιλ.

Ὁ ἀριθμὸς $1\frac{7}{8}$ εἶναι πραγματικῶς τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως $\frac{3}{4} : \frac{2}{5}$, διότι, ἂν πολλαπλασιάσωμεν αὐτὸν ἐπὶ τὸν διαιρέτην $\frac{2}{5}$, θὰ εὕρωμεν τὸν διαιρετέον $\frac{3}{4}$, δηλ. $1\frac{7}{8} \times \frac{2}{5} = \frac{15}{8} \times \frac{2}{5} = \frac{30}{40} = \frac{3}{4}$.

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι :

Ἀντὶ νὰ διαιρέσωμεν $\frac{3}{4} : \frac{2}{5}$, πολλαπλασιάζομεν τὸ κλάσμα τοῦ διαιρετέου ἐπὶ τὸ κλάσμα τοῦ διαιρέτου ἀντεστραμμένον.

Δηλ. $\frac{3}{4} : \frac{2}{5} = \frac{3}{4} \times \frac{5}{2} = \frac{3 \times 5}{4 \times 2} = \frac{15}{8} = 1\frac{7}{8}$ κιλά.

Ὥστε :

Διὰ νὰ διαιρέσωμεν κλάσμα διὰ κλάσματος, πολλαπλασιάζομεν αὐτὸ ἐπὶ τὸ κλάσμα τοῦ διαιρέτου ἀντεστραμμένον.

Ἄλλο παράδειγμα : $\frac{4}{5} : \frac{3}{10} = \frac{4}{5} \times \frac{10}{3} = \frac{40}{15} = 2\frac{10}{15} = 2\frac{2}{3}$.

4ον) Διαίρεσις μικτοῦ διὰ μικτοῦ

Πρόβλημα : Μία ὑφάντρια εἰς $6\frac{1}{4}$ ὥρας ὑφαίνει $9\frac{1}{2}$ μέτρα ὕφασμα. Πόσον ὑφαίνει τὴν ὥραν ;

Λύσις : Ἀφοῦ εἰς $6\frac{1}{4}$ ὥρας ὑφαίνει $9\frac{1}{2}$ μέτρα, εἰς μίαν ὥραν θὰ ὑφαίνῃ $6\frac{1}{4}$ φορὰς ὀλιγώτερον, δηλ. $9\frac{1}{2} : 6\frac{1}{4}$. Τρέπομεν τοὺς μικτοὺς εἰς κλάσματα καὶ ἔπειτα ἐκτελοῦμεν τὴν διαίρεσιν :

$$9\frac{1}{2} : 6\frac{1}{4} = \frac{19}{2} : \frac{25}{4} = \frac{19}{2} \times \frac{4}{25} = \frac{76}{50} = 1\frac{26}{50} = 1\frac{13}{25} \text{ μέτρα.}$$

5ον) Διαίρεσις ἀκεραίου διὰ μικτοῦ

Πρόβλημα : Ἕνας οἰκογενειάρχης ἠγόρασε $2\frac{3}{5}$ κιλὰ κρέας καὶ ἔδωσε 65 δραχμάς. Πόσον ἀξίζει τὸ κιλόν ;

Λύσις: Ἀφοῦ τὰ $2\frac{3}{5}$ κιλὰ ἀξίζουν 65 δραχμάς, τὸ ἕνα κιλὸν θὰ ἀξίζῃ $2\frac{3}{5}$ φορὰς ὀλιγώτερον, δηλ. $65 : 2\frac{3}{5}$

Τρέπομεν τὸν μικτὸν εἰς κλάσμα καὶ κατόπιν ἐκτελοῦμεν τὴν διαίρεσιν.

$$65 : 2\frac{3}{5} = 65 : \frac{13}{5} = 65 \times \frac{5}{13} = \frac{325}{13} = 25 \text{ δραχμάς.}$$

Προβλήματα

280. α) Πῶς διαιροῦμεν ἀκέραιον διὰ μικτοῦ ; β) Πῶς διαιροῦμεν μικτὸν διὰ μικτοῦ ; (Γράψε τοὺς κανόνας εἰς τὸ τετράδιόν σου).

281. Μία βρύση, ἂν μείνῃ ἀνοικτὴ 8 ὥρας, γεμίζει τὰ $\frac{2}{3}$ μιᾶς δεξαμενῆς. Τί μέρος τῆς δεξαμενῆς γεμίζει εἰς μίαν ὥραν ;

282. Ἕνας οἰκογενειάρχης ἠγόρασε $\frac{7}{8}$ τοῦ κιλοῦ κρέας καὶ ἐπλήρωσε 21 δραχμάς. Πόσο στοιχίζει τὸ κιλόν ;

283. Μία βρύση εἰς $\frac{3}{4}$ τῆς ὥρας τρέχει 273 κιλὰ νερό. Πόσα κιλὰ τρέχει εἰς μίαν ὥραν ;

284. Μία λάμπα καίει εἰς $\frac{2}{5}$ τῆς ὥρας 74 γραμμάρια πετρέλαιον. Πόσα γραμμάρια καίει εἰς μίαν ὥραν ;

285. Ἕνας ἠγόρασε $3\frac{3}{4}$ μέτρα ὕφασμα καὶ ἐπλήρωσε 360 δραχμάς. Πόσας δραχμὰς ἀξίζει τὸ μέτρον ;

Ἀσκήσεις

Νὰ ἐκτελέσῃς τὰς διαιρέσεις :

286. α) $75 : \frac{3}{5} =$ β) $1500 : \frac{7}{8} =$ γ) $4200 : \frac{6}{7} =$

287. α) $\frac{5}{6} : \frac{3}{5} =$ β) $\frac{3}{8} : \frac{1}{2} =$ γ) $\frac{1}{2} : \frac{3}{4} =$

288. α) $15 : 2\frac{1}{3} =$ β) $23 : 4\frac{3}{5} =$ γ) $9 : 6\frac{2}{3} =$

289. α) $8\frac{1}{2} : 3\frac{2}{5} =$ β) $6\frac{1}{4} : \frac{3}{5} =$ γ) $8\frac{3}{4} : 1\frac{1}{2} =$

Προβλήματα

290. Ἕνας ἠγόρασε δύο δοχεῖα, ποὺ τὸ καθένα περιεῖχε $14\frac{1}{2}$ κιλὰ ἔλαιον καὶ ἐπλήρωσε δι' ὅλα 413,25 δραχμάς. Πόσας δραχμὰς ἠγόρασε τὸ κιλὸν τὸ ἔλαιον;

291. Δι' ἕνα ὑποκάμισον χρειάζονται $3\frac{3}{4}$ μέτρα ἀπὸ ἕνα ὕφασμα. Πόσα ὑποκάμισα θὰ γίνουν μὲ 60 μέτρα ὕφασμα;

292. Ἕνα ἀτμόπλοιον διέτρεξε 185 μίλια εἰς $12\frac{1}{3}$ ὥρας. Ἕνα ἄλλο διέτρεξε $237\frac{3}{5}$ μίλια εἰς $17\frac{3}{5}$ ὥρας. Πόσα μίλια κατὰ μέσον ὅρον πλέει τὴν ὥραν τὸ καθένα;

293. Ἀπὸ $23\frac{5}{8}$ κιλὰ ἐλαίας ἐξάγονται $4\frac{1}{2}$ κιλὰ ἔλαιον. Ἀπὸ πόσα κιλὰ ἐλαίας ἐξάγεται ἕνα κιλὸν ἐλαίου;

294. Μία λάμπα καίει εἰς $\frac{3}{5}$ τῆς ὥρας $\frac{3}{10}$ τοῦ κιλοῦ πετρέλαιον. Πόσον καίει τὴν ὥραν;

295. Ὁ τεκτονικὸς πῆχυς εἶναι ἴσος πρὸς τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ μέτρου. Πόσοι τεκτονικοὶ πήχεις εἶναι 48 μέτρα;

296. Ὁ τετραγωνικὸς τεκτονικὸς πῆχυς εἶναι τὰ $\frac{9}{16}$ τοῦ τετραγωνικοῦ μέτρου. Πόσοι τεκτονικοὶ τετραγωνικοὶ πήχεις εἶναι ἕνα οἰκόπεδον ποὺ ἔχει ἐμβαδὸν 540 τετραγωνικὰ μέτρα;

297. Διὰ κάθε ζεῦγος κάλτσες χρειάζονται $75\frac{3}{4}$ γραμμάρ. μαλλί. Πόσα ζεύγη κάλτσες θὰ γίνουν μὲ 1.212 γραμμάρια μαλλί;

Προβλήματα τὰ ὁποῖα λύονται διὰ τῆς μεθόδου τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα

Πρόβλημα 1ον: Ἕνα κιλὸ καφὲς ἀξίζει 72 δραχμάς. Πόσον ἀξίζουν τὰ $\frac{3}{8}$ τοῦ κιλοῦ;

Λύσις : Ἀφοῦ τὰ $\frac{8}{8}$ τοῦ κιλοῦ (ἢ 1 κιλὸ) ἀξίζουν 72 δρχ.

τὸ $\frac{1}{8}$ τοῦ κιλοῦ ἀξίζει 8 φορὰς ὀλιγώτερον, δηλ. $\frac{72}{8}$ δρχ. καὶ

τὰ $\frac{3}{8}$ τοῦ κιλοῦ ἀξίζουν 3 φορὰς περισσότερον, δηλ. $\frac{72}{8} \times 3 =$

$= \frac{216}{8} = 27$ δραχμάς.

Τὸ πρόβλημα αὐτὸ δυνάμεθα νὰ τὸ λύσωμεν μὲ ἕναν πολλαπλασιασμόν, **διότι γνωρίζομεν τὴν ἀξίαν τῆς μιᾶς μονάδος καὶ ζητοῦμεν τὴν ἀξίαν τῶν μερῶν αὐτῆς.**

Δηλ. $2 \times \frac{3}{8} = \frac{216}{8} = 27$ δραχμάς.

Πρόβλημα 2ον : Μία λάμπα καίει εἰς μίαν ὥραν $\frac{2}{5}$ τοῦ κιλοῦ πετρέλαιον. Πόσον πετρέλαιον θὰ κάψῃ εἰς $\frac{3}{4}$ τῆς ὥρας ;

Λύσις : Ἀφοῦ εἰς $\frac{4}{4}$ τῆς ὥρας (1 ὥραν) καίει $\frac{2}{5}$ τοῦ κιλοῦ

εἰς $\frac{1}{4}$ τῆς ὥρας θὰ κάψῃ 4 φορὰς ὀλιγώτερον,

δηλ. $\frac{2}{5} : 4 = \frac{2}{5 \times 4}$ τοῦ κιλοῦ

καὶ εἰς $\frac{3}{4}$ τῆς ὥρας θὰ κάψῃ 3 φορὰς περισσότερον,

δηλ. $\frac{2}{5 \times 4} \times 3 = \frac{2 \times 3}{5 \times 4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$ τοῦ κιλοῦ.

Τὸ πρόβλημα αὐτὸ δυνάμεθα νὰ τὸ λύσωμεν μὲ ἕναν πολλαπλασιασμόν, διότι καὶ εἰς αὐτό, ὅπως καὶ εἰς τὸ προηγούμενον : **Γνωρίζομεν τὴν ἀξίαν τῆς μιᾶς μονάδος** (δηλ. τῆς μιᾶς ὥρας, ἡ ὁποία εἶναι $\frac{2}{5}$ τοῦ κιλοῦ) **καὶ ζητοῦμεν τὴν ἀξίαν τῶν μερῶν τῆς μονάδος** (τῶν $\frac{3}{4}$ τῆς ὥρας), δηλαδὴ $\frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$ τοῦ κιλοῦ.

Πρόβλημα 3ον : Μία νοικοκυρὰ ἠγόρασε $\frac{3}{4}$ τοῦ μέτρου ἀπὸ ἕνα ὕφασμα καὶ ἔδωσε 12 δραχμάς. Πόσας δραχμὰς ἀξίζει τὸ μέτρον ;

Λύσις : Ἀφοῦ τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ μέτρου ἀξίζουν 12 δρχ.

τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ μέτρου ἀξίζει 3 φορὰς ὀλιγώτερον, δηλ. $\frac{12}{3}$ »

καὶ τὰ $\frac{4}{4}$ τοῦ μέτρου (1 μέτρον) ἀξίζουν 4 φορὰς περισσότερον,

δηλ. $\frac{12}{3} \times 4 = \frac{48}{3} = 16$ δραχμάς.

Τὸ πρόβλημα αὐτὸ δυνάμεθα νὰ τὸ λύσωμεν μὲ μίαν διαίρεσιν, διότι **γνωρίζομεν τὴν ἀξίαν μερῶν τῆς ἀκεραίας μονάδος καὶ ζητοῦμεν τὴν ἀξίαν ὅλης τῆς ἀκεραίας μονάδος.**

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν βάζομε πάντοτε διαιρετέον τὴν ἀξίαν τῶν μερῶν τῆς μονάδος (12) καὶ διαιρέτην τὰ μέρη τῆς ἀκεραίας μονάδος (τὰ $\frac{3}{4}$), δηλ. $12 : \frac{3}{4} = 12 \times \frac{4}{3} = \frac{48}{3} = 16$ δραχμάς.

Πρόβλημα 4ον : Μία βρύση εἰς $\frac{3}{4}$ τῆς ὥρας γεμίζει τὰ $\frac{5}{8}$ μιᾶς δεξαμενῆς. Τί μέρος τῆς δεξαμενῆς θὰ γεμίσῃ εἰς μίαν ὥραν ;

Λύσις : Ἀφοῦ εἰς $\frac{3}{4}$ τῆς ὥρας γεμίζει τὰ $\frac{5}{8}$ τῆς δεξαμενῆς, εἰς $\frac{1}{4}$ τῆς ὥρας θὰ γεμίσῃ 3 φορὰς ὀλιγώτερον μέρος τῆς δεξαμενῆς, δηλ. $\frac{5}{8} : 3 = \frac{5}{8 \times 3}$ τῆς δεξαμενῆς καὶ εἰς $\frac{4}{4}$ ὥρ. (1 ὥραν) θὰ γεμίσῃ 4 φορὰς περισσότερον μέρος τῆς δεξαμενῆς, δηλ. $\frac{5}{8 \times 3} \times 4 = \frac{5 \times 4}{8 \times 3}$ ἢ $\frac{5}{8} \times \frac{4}{3} = \frac{20}{24} = \frac{5}{6}$ τῆς δεξαμενῆς.

Ὅπως καὶ τὸ προηγούμενον πρόβλημα, ὁμοίως καὶ τοῦτο δυνάμεθα νὰ τὸ λύσωμεν μὲ μίαν διαίρεσιν :

$$\frac{5}{8} : \frac{3}{4} = \frac{5}{8} \times \frac{4}{3} = \frac{20}{24} = \frac{5}{6} \text{ τῆς δεξαμενῆς.}$$

Διότι γνωρίζομεν τὴν ἀξίαν τῶν μερῶν τῆς ἀκεραίας μονάδος καὶ ζητοῦμεν τὴν ἀξίαν τῆς μιᾶς μονάδος (τὰ μέρη τῆς ἀκεραίας μονάδος εἶναι τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς ὥρας καὶ ἡ ἀξία των εἶναι τὰ $\frac{5}{8}$ τῆς δεξαμενῆς).

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν διαιρετέον βάζομε τὴν ἀξίαν τῶν μερῶν τῆς μονάδος (δηλ. τὰ $\frac{5}{8}$ τῆς δεξαμενῆς) καὶ διαιρέτην τὰ μέρη τῆς μονάδος (δηλ. τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς ὥρας).

Προβλήματα

Α΄. Νὰ εὕρῃς ἀπὸ μνήμης :

298. Πόσα γραμμάρια εἶναι τά : $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{8}$ καὶ $\frac{3}{8}$ τοῦ κιλοῦ ;

299. Πόσα πρῶτα λεπτὰ εἶναι τά : $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{10}$ καὶ $\frac{3}{10}$ τῆς ὥρας ;

300. Πόσαι δραχμαὶ εἶναι τά : $\frac{3}{10}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{4}$ τοῦ χιλιοδράχμου ;

301. Ποῖος ἀριθμὸς εἶναι τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ ἀριθμοῦ 800 ;

302. Ποίου ἀριθμοῦ τὰ $\frac{2}{3}$ εἶναι ὁ ἀριθμὸς 40 ;

303. Ποίου ἀριθμοῦ τὰ $\frac{3}{4}$ εἶναι ὁ ἀριθμὸς 75 ;

304. Ποίου ἀριθμοῦ τὰ $\frac{4}{5}$ εἶναι ὁ ἀριθμὸς 80 ;

Β΄. Νὰ λύσῃς διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα τὰ ἀκόλουθα προβλήματα :

305. Εἰς ἕνα σχολεῖον ποὺ εἶχε 232 μαθητάς, εἰς τὸ τέλος τοῦ ἔτους προήχθησαν τὰ $\frac{7}{8}$ τῶν μαθητῶν. Πόσοι μαθηταὶ προήχθησαν καὶ πόσοι ἔμειναν στάσιμοι ;

306. Ἕνα αὐτοκίνητον διέτρεξε τὰ $\frac{4}{13}$ τῆς ἀποστάσεως ἀπὸ Ἀθηνῶν μέχρι Θεσσαλονίκης. Πόσα χιλιόμετρα διέτρεξε καὶ πόσα πρέπει νὰ διατρέξῃ ἀκόμη ; (ἡ ἀπόστασις ἀπὸ Ἀθηνῶν μέχρι Θεσσαλονίκης εἶναι 520 χιλιόμ.)

307. Τὸ ναυτικὸν μίλιον εἶναι ἴσον μὲ 1852 μέτρα. Πόσα μέτρα εἶναι τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ μιλίου ;

308. Ἕνας βοσκὸς εἶχε 80 αἰγοπρόβατα. Ἀπὸ αὐτὰ τὰ $\frac{7}{10}$ εἶναι πρόβατα. Πόσαι εἶναι αἱ αἶγες ;

309. Ἕνας πατέρας ἐμοίρασε τὴν περιουσίαν του, ποὺ ἦτο 800.000 δραχμαί, ὡς ἑξῆς : εἰς τὴν κόρη του ἔδωσε τὰ $\frac{2}{5}$ τῆς περιουσίας, εἰς τὸν μεγαλύτερον υἱόν του τὰ $\frac{3}{8}$ αὐτῆς καὶ εἰς τὸν μικρότερον τὰ ὑπόλοιπα. Πόσας δραχμὰς ἐπῆρε ὁ καθένας ;

310. Μία ἀντλία εἰς μίαν ὥραν ἀδειάζει τὰ $\frac{5}{8}$ μιᾶς δεξαμενῆς. Τί μέρος τῆς δεξαμενῆς ἀδειάζει εἰς $\frac{5}{6}$ τῆς ὥρας ;

311. Ἕνας ἠγόρασε $\frac{3}{8}$ τοῦ κιλοῦ καφὲ καὶ ἔδωσε 24,75 δραχμάς. Πόσον ἀξίζει τὸ κιλόν ;

312. Μία ἀντλία ἀδειάζει ἀπὸ ἕνα πηγάδι 860 κιλὰ νερὸ εἰς $\frac{4}{5}$ τῆς ὥρας. Πόσα κιλὰ νερὸ ἀδειάζει τὴν ὥραν ;

313. Ἕνα ἀεροπλάνον εἰς $\frac{3}{4}$ τῆς ὥρας διατρέχει μίαν ἀπόστασιν 270 χιλιομέτρων καὶ ἕνα ἄλλο ἀεροπλάνον τὴν ἰδίαν ἀπόστασιν τὴν διατρέχει εἰς $\frac{9}{10}$ τῆς ὥρας. Πόσα χιλιόμετρα τρέχει τὴν ὥραν τὸ καθένα ;

314. Εἰς ἕνα σχολεῖον ἔμειναν στάσιμοι ἀπὸ ὅλας τὰς τάξεις τὰ $\frac{2}{15}$ τῶν μαθητῶν. Οἱ μαθηταὶ ποὺ ἔμειναν στάσιμοι εἶναι 34. Πόσους μαθητὰς εἶχεν ὅλο τὸ σχολεῖον καὶ πόσοι ἀπ' αὐτοὺς προήχθησαν ;

ΣΧΕΣΙΣ ΔΕΚΑΔΙΚΩΝ ΚΑΙ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

Α΄ Τροπὴ κλάσματος εἰς δεκαδικὸν

Οἱ ἄνθρωποι προτιμοῦν νὰ κάνουν τοὺς λογαριασμούς των μὲ δεκαδικοὺς ἀριθμούς, διότι αἱ πράξεις μὲ δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς ἐκτελοῦνται εὐκόλως. Διὰ τοῦτο, ὅταν εἰς τοὺς λογαριασμούς των παρουσιάζωνται κλάσματα, τὰ τρέπουν εἰς δεκαδικούς.

Παράδειγμα 1ον: Νὰ τραπῇ τὸ κλάσμα $\frac{3}{4}$ εἰς δεκαδικὸν ἀριθμόν.

Γνωρίζομεν ὅτι κάθε κλάσμα εἶναι πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμητοῦ του διὰ τοῦ παρονομαστοῦ του. Διαιροῦμεν, λοιπόν, τὸν ἀριθμητὴν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ καὶ ἔχομεν :

$$\begin{array}{r|l} 30 & 4 \\ \hline 20 & 0{,}75 \\ 0 & \end{array}$$

Ὥστε $\frac{3}{4} = 0{,}75$.

Παράδειγμα 2ον: Νὰ τραπῇ τὸ κλάσμα $\frac{3}{2}$ εἰς δεκαδικὸν ἀριθμόν.

Διαιροῦμεν :

$$\begin{array}{r|l} 20 & 3 \\ \hline 20 & 0{,}666\ldots \\ 20 & \end{array}$$

Ὅσο καὶ ἂν ἐξακολουθήσωμεν τὴν διαίρεσιν, ποτὲ δὲν θὰ εὕρωμεν ὑπόλοιπον 0.

Βλέπομεν, λοιπόν, ὅτι τὸ κλάσμα $\frac{2}{3}$ δὲν τρέπεται ἀκριβῶς εἰς δεκαδικὸν ἀριθμόν.

Ὥστε : $\frac{2}{3} = 0{,}666\ldots$ (κατὰ προσέγγισιν ἑνὸς χιλιοστοῦ).

Β΄ Τροπὴ δεκαδικοῦ εἰς κλάσμα

Κάθε δεκαδικὸν ἀριθμὸν δυνάμεθα νὰ τὸν γράψωμεν ὡς κλάσμα, ὅπως ἀκριβῶς τὸν ἀπαγγέλομεν :

Π.χ. τὸν δεκαδικὸν ἀριθμὸν 0,25 τὸν γράφομεν $\frac{25}{100}$, τὸν ἀριθμὸν 0,356 τὸν γράφομεν $\frac{356}{1000}$ κλπ.

Ἂν ὁ δεκαδικὸς ἔχῃ καὶ ἀκέραιον μέρος, τότε τὸν γράφομεν ὡς μικτὸν ἀριθμόν. Π.χ. τὸν δεκαδικὸν ἀριθμὸν 15,8 τὸν γράφομεν $15\frac{8}{10}$ τὸν 20,56 τὸν γράφομεν $20\frac{56}{100}$ κλπ.

Ἀσκήσεις

315. Τρέψε εἰς δεκαδικοὺς τὰ κλάσματα :

$\frac{3}{5}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{2}{15}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{10}$

316. Τρέψε εἰς δεκαδικοὺς κατὰ προσέγγισιν (νὰ φθάσῃς εἰς τὴν διαίρεσιν μέχρι τὰ χιλιοστὰ) τὰ κλάσματα : $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{2}{13}$, $\frac{8}{11}$

317. Γράψε ὡς κλάσματα τοὺς δεκαδικοὺς ἀριθμούς :
α) 0,15 0,06 β) 3,08 15,36 γ) 4,008 19,014

Πράξεις δεκαδικῶν καὶ κλασμάτων

Ἡ πρόσθεσις, ἀφαίρεσις, πολλαπλασιασμὸς ἢ διαίρεσις δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ καὶ κλάσματος γίνεται ὡς ἑξῆς : ἢ τρέπομεν τὸ κλάσμα εἰς δεκαδικὸν ἀριθμόν, καὶ ἐκτελοῦμεν τὴν πρᾶξιν μὲ δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς ἢ τρέπομεν τὸν δεκαδικὸν ἀριθμὸν εἰς κλάσμα καὶ ἐκτελοῦμεν τὴν πρᾶξιν μὲ κλάσματα, ὅπως φαίνεται εἰς τὰ ἀκόλουθα παραδείγματα :

Πρόσθεσις : $0{,}5 + \frac{3}{4} = 0{,}5 + 0{,}75 = 1{,}25$

ἢ $0{,}5 + \frac{3}{4} = \frac{5}{10} + \frac{3}{4} = \frac{10}{20} + \frac{15}{20} = \frac{25}{20} = 1\,\frac{5}{20} = 1\,\frac{1}{4}$

Ἀφαίρεσις : $2{,}6 - \frac{1}{2} = 2{,}6 - 0{,}5 = 2{,}1$

ἢ $2{,}6 - \frac{1}{2} = 2\,\frac{6}{10} - \frac{1}{2} = 2\,\frac{6}{10} - \frac{5}{10} = 2\,\frac{1}{10}$

Πολλαπλασιασμός : $0{,}8 \times \frac{1}{4} = 0{,}8 \times 0{,}25 = 0{,}2$

ἢ $0{,}8 \times \frac{1}{4} = \frac{8}{10} \times \frac{1}{4} = \frac{8}{40} = \frac{1}{5}$

Διαίρεσις : $\frac{2}{5} : 0{,}4 = 0{,}4 : 0{,}4 = 1$

ἢ $\frac{2}{5} : 0{,}4 = \frac{2}{5} : \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \times \frac{10}{4} = \frac{20}{20} = 1$

Ἀσκήσεις

318. $8\,\frac{3}{5} + 6{,}04 =$ $\quad 78 + \frac{3}{8} =$ $\quad \frac{5}{6} + 0{,}25 =$

319. $3{,}5 - \frac{3}{4} =$ $\quad 2{,}5 - 1\,\frac{3}{8} =$ $\quad 2\,\frac{4}{5} - 1{,}5 =$

320. $0{,}6 \times \frac{3}{5} =$ $\quad 1{,}5 \times 1\,\frac{1}{2} =$ $\quad 4\,\frac{5}{8} \times 0{,}7 =$

321. $15{,}5 : \frac{2}{5} =$ $\quad 2\,\frac{5}{12} : 0{,}4 =$ $\quad \frac{7}{15} : 0{,}5 =$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

ΤΩΝ ΤΕΣΣΑΡΩΝ ΠΡΑΞΕΩΝ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΔΕΚΑΔΙΚΩΝ ΚΑΙ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

322. Ἕνας ἐργάτης ἀρχίζει τὴν ἐργασία του εἰς τὰς $7\,^1/_4$ τὸ πρωῒ καὶ τελειώνει εἰς τὰς $12\,^1/_2$. Ἔπειτα ἀρχίζει εἰς τὰς $2\,^3/_5$ μ.μ. καὶ τελειώνει εἰς τὰς $6\,^1/_3$ μ.μ. Πόσας ὥρας ἐργάζεται τὴν ἡμέραν ;

323. Μία νοικοκυρὰ ἠγόρασε $6\,^3/_4$ μέτρα ὕφασμα καὶ ἀπὸ αὐτὸ ἔκοψε διὰ ἕνα φόρεμα $4\,^2/_5$ μέτρα. Πόσα μέτρα πρέπει νὰ ἀγοράσῃ ἀκόμη, διὰ νὰ κάνῃ ἄλλο ἕνα φόρεμα ἴδιο ;

324. Ἀπὸ δύο ὑφάσματα, ποὺ ἔχουν τὸ ἴδιον πλάτος, τὸ ἕνα ἔχει μῆκος $^7/_8$ τοῦ μέτρου καὶ τὸ ἄλλο 0,85 τοῦ μέτρου. Ποῖο ἀπὸ τὰ δύο ὑφάσματα εἶναι μεγαλύτερον ;

325. Ἕνα αὐτοκίνητο φόρτωσε 84 καφάσια σταφύλια, ποὺ τὸ καθένα ζυγίζει $13\,^3/_5$ κιλὰ καὶ 32 καφάσια ἀχλάδια, ποὺ καθένα ζυγίζει 16,5 κιλά. Πόσα κιλὰ εἶναι τὸ φορτίο τοῦ αὐτοκινήτου ;

326. Ἕνα στερεὸ σῶμα, ἂν βυθισθῇ εἰς τὸ νερό, χάνει τὰ $^3/_5$ τοῦ βάρους του. Ὅταν εἶναι ἔξω ἀπὸ τὸ νερὸ ζυγίζει 385 γραμμάρια. Πόσα γραμμάρια θὰ χάσῃ ἀπὸ τὸ βάρος του, ὅταν τὸ βυθίσωμεν εἰς τὸ νερό ;

327. Ἕνα σῶμα ποὺ ζυγίζει 640 γραμμάρια, ὅταν βυθισθῇ εἰς τὸ νερό, χάνει τὰ $^3/_{16}$ τοῦ βάρους του. Πόσα γραμμάρια ζυγίζει ὅταν εἶναι βυθισμένο στὸ νερό ;

328. Ἕνας ἔμπορος ἠγόρασε 8 δοχεῖα ἔλαιον πρὸς 11,20 δραχμὰς τὸ κιλόν. Κάθε δοχεῖον περιεῖχε $14\,^3/_8$ κιλὰ ἔλαιον. Πόσας δραχμὰς ἐπλήρωσε;

329. Ἕνας ἐργάτης παίρνει 14 δραχμὰς τὴν ὥραν καὶ ἐργάζεται $7\,^3/_4$ ὥρας κάθε ἡμέραν. Πόσας δραχμὰς θὰ πάρῃ, ἂν ἐργασθῇ 13 ἡμέρας;

330. Ἕνας καφεπώλης ἠγόρασε $7\,^3/_4$ κιλὰ καφὲ πρὸς 68 δραχμὰς τὸ κιλὸ καὶ τριπλάσια κιλὰ ζάχαρη πρὸς 14 δραχμὰς τὸ κιλόν. Πόσας δραχμὰς ἐπλήρωσε διὰ ὅλα ;

331. Δύο ἀτμόπλοια ξεκινοῦν τὴν ἰδίαν ὥραν ἀπὸ τὸν Πειραιᾶ διὰ τὴν Ἀλεξάνδρειαν. Τὸ ἕνα πλέει μὲ $12\,^3/_4$ μίλια τὴν ὥραν καὶ τὸ ἄλλο μὲ $15\,^1/_2$ μίλια τὴν ὥραν. Μετὰ $18\,^4/_5$ ὥρας πόσα μίλια θὰ ἀπέχουν μεταξύ των ;

332. Ἕνας ἔμπορος εἶχε $76\,^3/_4$ κιλὰ νῆμα. Ἀπὸ αὐτὸ ἔκανε 168 πουλόβερ, ποὺ τὸ καθένα ἐχρειάσθη $^3/_{16}$ τοῦ κιλοῦ νῆμα. Πόσο νῆμα τοῦ ἐπερίσσεψε ;

333. Εἰς ἕνα ὑφαντουργεῖο ἐργάζονται 16 ὑφάντριαι καὶ ὑφαίνουν $3\,^1/_2$ μέτρα ὕφασμα τὴν ὥραν ἡ κάθε μία. Πόσα μέτρα θὰ ὑφάνουν ὅλαι αἱ ὑφάντριαι εἰς $7\,^3/_4$ ὥρας ;

334. Ἕνας κτίστης ἔκτισε εἰς 12 ἡμέρας τὰ $^3/_5$ ἑνὸς τοίχου. Πόσας ἡμέρας πρέπει νὰ ἐργασθῇ ἀκόμη, διὰ νὰ κτίσῃ τὸν ὑπόλοιπον τοῖχον ;

335. Οἱ μαθηταὶ τῆς Ε΄ τάξεως ἑνὸς σχολείου ἐκαλλιέργησαν τὰ $^3/_8$ τοῦ σχολικοῦ κήπου, καὶ οἱ μαθηταὶ τῆς ΣΤ΄ τάξεως ἐκαλλιέργησαν τὸν ὑπόλοιπον κῆπον. Ὁ κῆπος εἶχε σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου, τοῦ ὁποίου τὸ μῆκος ἦτο 24,5 μέτρα καὶ τὸ πλάτος 16 μέτρα. Πόσα τετραγωνικὰ μέτρα κήπου ἐκαλλιέργησε κάθε τάξις ;

336. Τέσσαρες ἀδελφοὶ ἐκληρονόμησαν τὰ $^3/_5$ ἑνὸς οἰκοπέδου. Ὁλόκληρο τὸ οἰκόπεδο ἐπωλήθη 8.500 δραχμάς. Πόσας δραχμὰς θὰ πάρῃ καθένας ;

337. Ἕνας ὑπάλληλος παίρνει 5000 δραχμὰς τὸν μῆνα. Ἀπὸ τὰ λεπτὰ αὐτὰ ἐξοδεύει τὰ $^2/_5$ διὰ τροφήν, τὸ $^1/_8$ διὰ ἐνοίκιον καὶ τὰ 0,3 διὰ διάφορα ἄλλα ἔξοδα. Πόσαι δραχμαὶ τοῦ περισσεύουν κάθε μῆνα ;

338. Ἕνα ἀτμόπλοιο ξεκινᾶ ἀπὸ τὸν Πειραιᾶ διὰ τὴν Θεσσαλονίκην εἰς τὰς $7\,^1/_4$ τὸ πρωῒ καὶ πλέει μὲ $14\,^2/_5$ μίλια τὴν ὥραν. Πόσα μίλια θὰ ἀπέχῃ ἀπὸ τὴν Θεσσαλονίκην εἰς τὰς 12 τὴν μεσημβρίαν ; (ἡ ἀπόστασις ἀπὸ τὸν Πειραιᾶ εἰς τὴν Θεσσαλονίκην εἶναι 254 μίλια) .

339. Ἕνας κτηνοτρόφος ἐπώλησε $24\,^3/_4$ κιλὰ βούτυρον πρὸς 48 δραχμὰς τὸ κιλὸν καὶ 3 βαρέλια, ποὺ τὸ καθένα περιεῖχε $15\,^1/_2$ κιλὰ τυρί, πρὸς 14,50 τὸ κιλόν. Ἀπὸ τὰ λεπτὰ ποὺ ἐπῆρε ἠγόρασε $10\,^1/_4$ μέτρα βαμβακερὸ ὕφασμα πρὸς 7,50 δραχμὰς τὸ μέτρο καὶ $15\,^1/_2$

μέτρα μάλλινο ὕφασμα πρὸς 30 δραχμὰς τὸ μέτρο. α) Πόσας δραχμὰς εἰσέπραξε ; β) πόσας δραχμὰς ἐπλήρωσε ; καὶ γ) πόσαι δραχμαὶ τοῦ ἔμειναν ;

340. Ἕνας παντοπώλης ἠγόρασε 3 δοχεῖα, ποὺ τὸ καθένα περιεῖχε $13\,^3/_8$ κιλὰ βούτυρον, καὶ ἔδωσε διὰ ὅλα 2.107,50 δραχμάς. Πόσο πρέπει νὰ πωλήσῃ τὸ κιλὸν τὸ βούτυρον, διὰ νὰ εἰσπράξῃ τὰ λεπτὰ ποὺ ἔδωσε καὶ νὰ κερδίσῃ ἀπὸ ὅλο 300 δραχμάς ;

341. Ἕνας ἔμπορος εἶχε ἕνα τόπι ὕφασμα $84\,^1/_2$ μέτρα. Ἀπὸ τὸ ὕφασμα αὐτὸ ἔκανε 12 ὑποκάμισα μὲ $3\,^3/_4$ μέτρα τὸ καθένα. Πόσα μέτρα τοῦ ἐπερίσσεψαν ;

342. Ἕνα ἀτμόπλοιο εἰς 8,5 ὥρας διατρέχει 84 μίλια, ἄλλο ἀτμόπλοιο διατρέχει 156 μίλια εἰς $15\,^3/_4$ ὥρας. Ποῖον ἐκ τῶν δύο ἀτμοπλοίων εἶναι ταχύτερον ;

343. Ἕνας χωρικὸς ἠγόρασε μίαν ἀγελάδα καὶ ἐπλήρωσε ἀμέσως τὸ $^1/_2$ τῆς ἀξίας της. Ἔπειτα ἐπλήρωσε τὸ $^1/_3$ τῆς ἀξίας της καὶ χρωστάει ἀκόμη 250 δραχμάς. Πόσας δραχμὰς ἠγόρασε τὴν ἀγελάδα ;

344. Ἕνας ἀρτοποιὸς ἐζύμωσε 45 κιλὰ ἄλευρον καὶ ἔγινε $56\,^1/_4$ κιλὰ ψωμί. Πόσο ψωμὶ γίνεται μὲ κάθε κιλὸν ἀλεύρου ;

345. Μία γυναῖκα ἠγόρασε $15\,^5/_8$ μέτρα ὕφασμα πρὸς 16 δραχμὰς τὸ μέτρον καὶ συμφώνησε διὰ νὰ τὸ ἐξοφλήσῃ νὰ πληρώνῃ 25 δραχμὰς τὴν ἑβδομάδα. Εἰς πόσας ἑβδομάδας θὰ ἐξοφλήσῃ τὸ χρέος της ;

346. Μία νοικοκυρὰ ἠγόρασε $25\,^1/_2$ μέτρα ὕφασμα πρὸς 22,5 δραχμὰς τὸ μέτρο. Μὲ τὸ ὕφασμα αὐτὸ ἔκανε 5 φορέματα ὅμοια καὶ τῆς ἐπερίσσεψαν $3\,^1/_2$ μέτρα. Πόσα μέτρα ἐχρειάσθησαν διὰ τὸ κάθε φόρεμα καὶ πόσας δραχμὰς στοιχίζει τὸ καθένα ;

347. Ἕνας ἠγόρασε 180,4 κιλὰ ἔλαιον καὶ ἀπὸ αὐτὸ ἐγέμισε 9 δοχεῖα, ποὺ τὸ καθένα χωροῦσε $14\,^3/_5$ κιλά. Τὸ ὑπόλοιπον ἔλαιον πρόκειται νὰ τὸ βάλῃ μέσα εἰς δοχεῖα, ποὺ τὸ καθένα χωρεῖ $3\,^1/_2$ κιλά. Πόσα ὅμοια δοχεῖα θὰ χρειασθῇ ;

348. Ἕνας ἔμπορος εἶχε 212,80 μέτρα ὕφασμα καὶ ἀπὸ αὐτὸ ἔκαμε 72 δωδεκάδας μαντήλια. Διὰ κάθε δωδεκάδα ἐχρειάσθη 2,40 μέτρα ὕφασμα. Πόσα μέτρα τοῦ ἐπερίσσεψαν καὶ πόσο τοῦ στοιχίζει ἡ δωδεκάδα, ἂν τὸ μέτρον στοιχίζῃ 21,50 δραχμάς ;

349. Εἰς ἕνα 'Ορφανοτροφεῖον πρόκειται νὰ κάνουν 185 ἐνδυμασίας διὰ τὰ ὀρφανά. Διὰ κάθε ἐνδυμασίαν χρειάζονται $2\,^4/_5$ μέτρα ὕφασμα, ποὺ ἀξίζει 39,50 δραχμὰς τὸ μέτρον. Πόσα μέτρα ὕφασμα θὰ χρειασθοῦν καὶ πόσο θὰ στοιχίσῃ ἡ κάθε ἐνδυμασία ;

350. Ἕνας ἠγόρασε 15 κιλὰ βούτυρο πρὸς 41 δραχμὰς τὸ κιλόν. Ἀπὸ αὐτὸ κράτησε διὰ τὸ σπίτι του $4\,^3/_4$ κιλά. Πόσο πρέπει νὰ πωλήσῃ τὸ κιλὸν τὸν ὑπόλοιπον βούτυρον, διὰ νὰ εἰσπράξῃ τὰ χρήματα ποὺ ἔδωσε διὰ νὰ τὸν ἀγοράσῃ ;

351. Ἕνας ἠγόρασε 625 γραμμάρια ἔλαιον καὶ ἔδωσε 10,50 δραχμάς. Πόσας δραχμὰς ἀξίζει τὸ κιλόν ;

352. Ἕνας ἠγόρασε 1 κιλὸν καὶ 650 γραμμάρια κρέας καὶ πλήρωσε 28,80 δραχμάς. Πόσο ἠγόρασε τὸ κιλὸν τὸ κρέας ;

353. Ἕνας ἠγόρασε ἕνα οἰκόπεδον 420 τετραγ. μέτρα πρὸς 12 δραχμὰς τὸ τετραγ. μέτρον. Ἐπλήρωσε ἀμέσως τὰ $^2/_5$ τῆς ἀξίας, τὸ δὲ ὑπόλοιπον συμφώνησε νὰ τὸ ἐξοφλήσῃ εἰς 24 μηνιαῖες δόσεις. Πόσας δραχμὰς θὰ πληρώνῃ κάθε μῆνα ;

354. Ἕνας καφεπώλης ἠγόρασε 15 κιλὰ καφὲ πρὸς 54 δραχμὰς τὸ κιλόν· τὸν ἐκαβούρδισε, τὸν ἄλεσε καὶ τὸν ἐπώλησε ἀλεσμένον πρὸς 76 δραχμὰς τὸ κιλόν. Μὲ τὸ καβούρδισμα, ὅμως, ὁ καφὲς ἔχασε τὰ $^4/_{25}$ τοῦ βάρους του. Πόσας δραχμὰς ἐκέρδισε ;

355. Ἕνας ἠγόρασε $3\,^1/_4$ κιλὰ καφὲ καὶ 10,5 κιλὰ ζάχαρη καὶ ἔδωσε διὰ τὰ δύο εἴδη 360,25 δραχμάς. Τὴν ζάχαρην τὴν ἠγόρασε πρὸς 14,50 δραχμὰς τὸ κιλόν. Πόσον ἠγόρασε τὸ κιλὸν τὸν καφέ ;

356. Ἕνας χωρικὸς ἔφερε εἰς τὴν πόλιν 238 αὐγὰ καὶ τὰ ἐπώλησε πρὸς 1,15 δραχμ. τὸ ζευγάρι. Ἀπὸ τὰ λεπτὰ ποὺ ἐπῆρε ἠγόρασε $2\,^1/_2$ κιλὰ ρύζι πρὸς 6,80 δραχ. τὸ κιλόν, $3\,^1/_4$ κιλὰ σάπωνος πρὸς 9,20 δραχμὰς τὸ κιλὸν καὶ 250 γραμμάρια καφὲ πρὸς 72 δραχμὰς τὸ κιλόν. Πόσαι δραχμαὶ τοῦ ἐπερίσσεψαν ;

ΠΕΡΙ ΜΕΘΟΔΩΝ

Ποσὸν

Ἔχω εἰς τὸ χέρι μου μερικοὺς βόλους. Ἂν εἰς αὐτοὺς προσθέσω ἀκόμη μερικούς, θὰ ἔχω περισσοτέρους βόλους, δηλαδὴ οἱ βόλοι μου θὰ αὐξηθοῦν. Ἂν ὅμως ἀφαιρέσω ὀλίγους, οἱ βόλοι μου θὰ ἐλαττωθοῦν.

Μὲ τὸν ἴδιον τρόπον δυνάμεθα νὰ αὐξήσωμεν ἢ νὰ ἐλαττώσωμεν κάθε πρᾶγμα, ὅπως π.χ. δυνάμεθα νὰ αὐξήσωμεν ἢ νὰ ἐλαττώσωμεν τὰ μῆλα ποὺ ἔχομεν μέσα εἰς ἕνα καλάθι, τὰ θρανία μιᾶς τάξεως, τὰ τετράδια ἑνὸς μαθητοῦ, τὰς ὥρας ἐργασίας ἑνὸς ἐργάτου κ.λ.π.

Ὅλα αὐτὰ τὰ πράγματα ποὺ δύνανται νὰ αὐξηθοῦν ἢ νὰ ἐλαττωθοῦν (βόλοι, μῆλα, τετράδια, ὧραι κ.λ.π.) λέγονται **ποσά**. Ὥστε :

> **Κάθε πρᾶγμα ποὺ δύναται νὰ αὐξηθῇ ἢ νὰ ἐλαττωθῇ λέγεται ποσόν.**

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἕνας μαθητὴς ἔχει 10 καραμέλλας, δεύτερος μαθητὴς 10 καραμέλλας καὶ τρίτος μαθητὴς 12 καραμέλλας. Κάθε μαθητὴς ἔχει ἕνα ποσὸν ἀπὸ καραμέλλας. Τὰ ποσὰ αὐτὰ διαφέρουν εἰς τὸν ἀριθμόν, ἀλλὰ εἶναι ὅλα ἀπὸ τὸ ἴδιον εἶδος, δι' αὐτὸ λέγονται **Ὁμοειδῆ**.

Ἐπίσης τὰ ποσὰ 3 κιλὰ φασόλια καὶ 7 κιλὰ φασόλια διαφέρουν εἰς τὸ βάρος, ἀλλὰ εἶναι ποσὰ **Ὁμοειδῆ**. Ὥστε :

> **Τὰ ποσὰ ποὺ εἶναι ἀπὸ τὸ αὐτὸ εἶδος λέγονται ὁμοειδῆ.**

Ἂν, τώρα πάρωμεν 3 κιλὰ ζάχαρη, 15 μῆλα καὶ 6 μολύβια, βλέπομεν ὅτι τὰ ποσὰ αὐτὰ δὲν εἶναι ἀπὸ τὸ ἴδιον εἶδος, δι' αὐτὸ τὰ λέγομεν **ἑτεροειδῆ** ποσά. Ὥστε :

> **Τὰ ποσὰ ποὺ δὲν εἶναι ἀπὸ τὸ αὐτὸ εἶδος λέγονται ἑτεροειδῆ.**

Ποσὰ ἀνάλογα

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι τὰ 10 αὐγὰ τὰ ἀγοράζομεν μὲ 6 δραχμάς. Ἂν ἀγοράσωμεν διπλάσια αὐγά, θὰ πληρώσωμεν 12 δραχμάς, δηλ.

διπλάσιον ποσὸν δραχμῶν. Ἂν, ὅμως, ἀγοράσωμεν τὰ μισὰ αὐγά, θὰ πληρώσωμεν τὸ ἥμισυ τῶν δραχμῶν.

Βλέπομεν ὅτι τὰ δύο ἑτεροειδῆ ποσά :

τὰ **αὐγὰ** καὶ αἱ **δραχμαὶ** ποὺ ἀξίζουν, ἔχουν μίαν σχέσιν μεταξύ των.

Ὅταν διπλασιάζεται, τριπλασιάζεται κ.λ.π. τὸ ἕνα, ἀμέσως διπλασιάζεται, τριπλασιάζεται κλπ. καὶ τὸ ἄλλο. Καὶ ὅσας φορὰς λιγοστεύει τὸ ἕνα, ἄλλας τόσας φορὰς λιγοστεύει καὶ τὸ ἄλλο.

Τὰ ποσὰ ποὺ ἔχουν τέτοια σχέσιν μεταξύ των λέγονται **ἀνάλογα.**

Ἄλλο παράδειγμα: Διὰ νὰ γίνουν 4 ὑποκάμισα χρειαζόμεθα 20 μέτρα ὕφασμα, διὰ 8 ὑποκάμισα χρειαζόμεθα 40 μέτρα καὶ διὰ 2 ὑποκάμισα 10 μέτρα.

Τὰ δύο ποσὰ **ὑποκάμισα** καὶ **μέτρα** εἶναι ἀνάλογα. Ὥστε :

Δύο ποσὰ λέγονται ἀνάλογα, ὅταν ὅσας φορὰς αὐξάνεται τὸ ἕνα ποσόν, τόσας φορὰς αὐξάνεται καὶ τὸ ἄλλο. Καὶ ὅσας φορὰς λιγοστεύει τὸ ἕνα ποσόν, τόσας φορὰς λιγοστεύει καὶ τὸ ἄλλο.

Ποσὰ ἀντίστροφα

Πέρυσι ἔσκαψαν τὸ ἀμπέλι μας 4 ἐργάται, ποὺ ἠργάσθησαν 10 ἡμέρας. Ἐφέτος, ἂν βάλωμε διπλασίους ἐργάτας (δηλ. 8), θὰ σκάψουν τὸ ἀμπέλι εἰς 5 ἡμέρας. Ἂν ὅμως ἐφέτος βάλωμεν τοὺς μισοὺς ἐργάτας (δηλ. 2), θὰ σκάψουν τὸ ἀμπέλι εἰς διπλασίας ἡμέρας.

Βλέπομεν ὅτι τὰ ποσά : **ἐργάται** καὶ **ἡμέραι** ποὺ ἠργάσθησαν, ἔχουν μεταξύ των μίαν σχέσιν.

Ὅσας φορὰς αὐξάνεται τὸ ἕνα ποσόν, τόσας φορὰς λιγοστεύει τὸ ἄλλο καὶ ὅσας φορὰς λιγοστεύει τὸ ἕνα, ἄλλας τόσας φορὰς αὐξάνεται τὸ ἄλλο. Τὰ ποσὰ αὐτὰ λέγονται **ἀντίστροφα.** Ὥστε :

Δύο ποσὰ λέγονται ἀντίστροφα, ὅταν ὅσας φορὰς αὐξάνεται τὸ ἕνα ποσόν, τόσας φορὰς λιγοστεύει τὸ ἄλλο. Καί, ἀντιθέτως, ὅσας φορὰς λιγοστεύει τὸ ἕνα ποσόν, τόσας φορὰς αὐξάνεται τὸ ἄλλο.

ΑΠΛΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΤΡΙΩΝ

Πρόβλημα 1ον: 25 κιλὰ ζάχαρη στοιχίζουν 375 δραχμάς. Πόσας δραχμὰς στοιχίζουν τὰ 9 κιλά;

Δυνάμεθα νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα, ἂν σκεφθῶμεν ὡς ἑξῆς:

Ἀφοῦ τὰ 25 κιλὰ ἀξίζουν 375 δραχμὰς

τὸ ἕνα κιλὸ ἀξίζει 25 φορὰς ὀλιγώτερον, δηλ. $\frac{375}{25}$ »

καὶ τὰ 9 κιλὰ ἀξίζουν 9 φορὰς περισσότερον, δηλ. $\frac{375}{25} \times 9 = 135$ δρχ.

Τώρα θὰ μάθωμεν ἕναν νέον τρόπον (μέθοδον), διὰ νὰ λύωμεν τὰ προβλήματα τοῦ εἴδους αὐτοῦ γρηγορώτερον.

Πρῶτον κατατάσσομεν τοὺς δοθέντας ἀριθμοὺς τοῦ προβλήματος εἰς δύο σειρὰς ὡς ἑξῆς:

Κατάταξις:

25	κιλὰ	ἀξίζουν	375	δραχμὰς
9	»	»	X	»

Κατόπιν κάνομε τὴν σύγκρισιν τῶν δύο ἑτεροειδῶν ποσῶν (κιλῶν καὶ δραχμῶν), διὰ νὰ ἴδωμεν ἂν εἶναι ἀνάλογα ἢ ἀντίστροφα.

Τὴν σύγκρισιν τὴν κάνομε ὡς ἑξῆς: Τὰ 25 κιλὰ στοιχίζουν 375 δραχμάς. Διπλάσια κιλὰ θὰ στοιχίζουν διπλασίας δραχμάς. Ἄρα τὰ ποσὰ εἶναι **ἀνάλογα**.

Διὰ νὰ λύσωμεν τώρα τὸ πρόβλημα, πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀριθμὸν 375, ποὺ εἶναι ἐπάνω ἀπὸ τὸν ἄγνωστον X, ἐπὶ τὸ κλάσμα ποὺ σχηματίζουν οἱ ἄλλοι δύο ἀριθμοὶ ἀντεστραμμένον (ἐπειδὴ τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα).

Θὰ ἔχωμε λοιπὸν $X = 375 \times \frac{9}{25} = 135$ δραχμάς.

Πρόβλημα 2ον: Πέρυσι 5 ἐργάται ἔσκαψαν ἕνα ἀμπέλι εἰς 18 ἡμέρας. Ἂν ἐφέτος ἐργασθοῦν 9 ἐργάται, εἰς πόσας ἡμέρας θὰ σκάψουν τὸ ἴδιον ἀμπέλι;

Δυνάμεθα νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα, ἂν σκεφθῶμεν ὡς ἑξῆς:

Ἀφοῦ οἱ 5 ἐργάται θὰ σκάψουν τὸ ἀμπέλι εἰς 18 ἡμέρας, ὁ ἕνας ἐργάτης θὰ τὸ σκάψῃ εἰς (18 × 5) ἡμέρας. Καὶ οἱ 9 ἐργάται θὰ σκάψουν τὸ ἀμπέλι εἰς $\frac{18 \times 5}{9} = 10$ ἡμέρας.

Τώρα μὲ τὴν νέαν μέθοδον λύομεν τὸ πρόβλημα ὡς ἑξῆς :

Κατάταξις

5 ἐργάται σκάβουν τὸ ἀμπέλι εἰς 18 ἡμέρας
9 » » » » X »

Σύγκρισις : Οἱ 5 ἐργάται σκάβουν τὸ ἀμπέλι εἰς 18 ἡμέρας. Διπλάσιοι ἐργάται θὰ σκάψουν τὸ ἀμπέλι εἰς τὸ ἥμισυ τῶν ἡμερῶν. Ἄρα τὰ ποσὰ εἶναι **ἀντίστροφα.**

Διὰ νὰ λύσωμεν τώρα τὸ πρόβλημα, πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀριθμὸν ποὺ εὑρίσκεται ἐπάνω ἀπὸ τὸν X ἐπὶ τὸ κλάσμα ὅπως ἔχει (ἐπειδὴ τὰ ποσὰ εἶναι ἀντίστροφα).

Θὰ ἔχωμε, λοιπόν, $X = 18 \times \frac{5}{9} = \frac{90}{9} = 10$ ἡμέρας.

Ἐπειδὴ εἰς τὰ προβλήματα αὐτὰ μᾶς δίδονται τρεῖς ἀριθμοὶ καὶ ἀπὸ αὐτοὺς εὑρίσκομεν ἐκεῖνον ποὺ ζητοῦμεν, διὰ τοῦτο ὁ τρόπος μὲ τὸν ὁποῖον λύομεν τὰ προβλήματα αὐτὰ καλεῖται **ἁπλῆ μέθοδος τῶν τριῶν.**

Ὥστε :

Διὰ νὰ λύσωμεν ἕνα πρόβλημα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν, πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀριθμὸν ποὺ εἶναι ἐπάνω ἀπὸ τὸν ἄγνωστον X ἐπὶ τὸ κλάσμα ποὺ σχηματίζουν οἱ δύο ἄλλοι ἀριθμοὶ ἀνεστραμμένον, ἂν τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα ἢ ὅπως εἶναι, ἂν τὰ ποσὰ εἶναι ἀντίστροφα.

Πρόβλημα 3ον : Ἕνας ἠγόρασε 2 κιλὰ καὶ 150 γραμμάρια κρέας καὶ ἐπλήρωσε 43 δραχμάς. Ἂν ἠγόραζε ἕνα ὁλόκληρον ἀρνί, ποὺ ζυγίζει 8 κιλὰ καὶ 250 γραμμάρια, πόσας δραχμὰς θὰ ἐπλήρωνε ;

Κατάταξις

2 κιλ. 150 γραμ. 43 δρχ.
8 κιλ. 250 γραμ. X »

Τρέπομεν τὰ κιλὰ εἰς γραμμάρια, διότι πρέπει καὶ οἱ δύο ὅροι τοῦ κλάσματος νὰ εἶναι ὁμοειδεῖς.

$$\frac{2150 \text{ γραμμάρια}}{8250 \text{ γραμμάρια}} \qquad \frac{43 \text{ δρχ.}}{\text{X} \text{ »}}$$

Σύγκρισις: Τὰ 2150 γραμμάρια ἀξίζουν 43 δραχμάς. Διπλάσια γραμμάρια ἀξίζουν διπλασίας δραχμάς. Ἄρα τὰ ποσὰ εἶναι **ἀνάλογα.**

Θὰ ἔχωμε, λοιπόν, $\text{X} = 43 \times \frac{8250}{2150} = 165$ δραχμάς.

Πρόβλημα 4ον: Τὰ $\frac{3}{8}$ τοῦ κιλοῦ βούτυρο στοιχίζουν 21 δραχμάς. Πόσο ἀξίζουν τὰ 2 κιλά ;

Κατάταξις

$$\frac{\frac{3}{8} \text{ κιλοῦ}}{2 \text{ κιλὰ}} \qquad \frac{21 \text{ δρχ}}{\text{X} \text{ »}}$$

Σύγκρισις: Τὰ $\frac{3}{8}$ τοῦ κιλοῦ στοιχίζουν 21 δραχμάς, τὰ διπλάσια ἀξίζουν διπλασίας δραχμάς. Ἄρα τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα. Θὰ ἔχωμε λοιπόν, $\text{X} = 21 \times \frac{2}{\frac{3}{8}} = 21 \times \frac{2 \times 8}{3} = 21 \times \frac{16}{3} = \frac{336}{3} = 112$ δρχ.

Διὰ νὰ ἀποφύγωμεν τὰ σύνθετα κλάσματα, δυνάμεθα νὰ τρέψωμεν τὸ κλάσμα $\frac{3}{8}$ εἰς δεκαδικὸν ἀριθμὸν $\left(\frac{3}{8} = 0{,}375\right)$. Θὰ ἔχωμε λοιπόν :

$$\text{X} = 21 \times \frac{2}{0{,}375} = \frac{42}{0{,}375} = \frac{42.000}{375} = 112 \text{ δραχμάς.}$$

Σημείωσις: Ἂν οἱ ἀριθμοὶ εἶναι μικτοί, τοὺς τρέπομεν εἰς κλάσματα ἢ εἰς δεκαδικοὺς ἀριθμούς.

Προβλήματα

357. 8 κιλὰ σαπούνι ἀξίζουν 58,30 δραχμάς. Πόσα κιλὰ σαπούνι θὰ ἀγοράσωμε μὲ 292 δραχμάς ;

358. Ἀπὸ 100 κιλὰ σταφύλια ἐξάγονται 70 κιλὰ μοῦστος. Πόσα κιλὰ μοῦστος θὰ ἐξαχθῇ ἀπὸ 980 κιλὰ σταφύλια ;

359. Μία οἰκογένεια λογαριάζει ὅτι, ἂν ἐξοδεύῃ 250 γραμ. ἐλαίου τὴν ἡμέραν, θὰ περάσῃ μὲ τὸ ἔλαιον ποὺ ἔχει 27 ἡμέρας. Πόσον πρέπει νὰ ἐξοδεύῃ τὴν ἡμέραν διὰ νὰ περάσῃ μὲ τὸ ἴδιον ἔλαιον 45 ἡμέρας ;

360. Ἕνας ἐργάτης εἰργάσθη $3 \frac{1}{2}$ ἡμέρας καὶ ἔλαβε 610 δραχμάς. Πόσας δραχμὰς θὰ εἰσπράξῃ ἂν ἐργασθῇ 13 ἡμέρας ;

361. Ἕνα ἀτμόπλοιον χρειάζεται 6,5 τόννους κάρβουνο διὰ ἕνα ταξίδι 5 ὡρῶν. Πόσους τόννους κάρβουνο θὰ χρειασθῇ διὰ ἕνα ταξίδι 12 ὡρῶν, ἂν πλέῃ μὲ τὴν ἰδίαν ταχύτητα ;

362. 8 ἐργάται σκάβουν ἕνα ἀμπέλι εἰς $7 \frac{1}{2}$ ἡμέρας. Εἰς πόσας ἡμέρας θὰ σκάψουν τὸ ἴδιον ἀμπέλι 6 ἐργάται ;

363. Ἕνα αὐτοκίνητον διατρέχει 174 χιλιόμετρα εἰς 4 ὥρας. Πόσα χιλιόμετρα θὰ διατρέξῃ εἰς 13 ὥρας ;

364. Ἕνας κτηνοτρόφος ἔχει 6 ἀγελάδας καὶ χρειάζεται διὰ τὴν διατροφήν των 51 κιλὰ χόρτο τὴν ἡμέραν. Πόσα κιλὰ χόρτο χρειάζεται τὴν ἡμέραν ἕνας ἄλλος κτηνοτρόφος ποὺ ἔχει 14 ἀγελάδας ;

365. Μία κόρη, ὅταν ἐργάζεται 6 ὥρας τὴν ἡμέραν, τελειώνει τὸ ἐργόχειρό της εἰς 4 ἡμέρας. Ἂν εἰργάζετο 8 ὥρας τὴν ἡμέραν, εἰς πόσας ἡμέρας θὰ ἐτελείωνε τὸ ἐργόχειρον ;

366. Ἀπὸ ἕνα ὕφασμα, ποὺ ἔχει πλάτος 0,6 τοῦ μέτρου, γίνονται 12 ἐνδυμασίαι. Πόσαι ἐνδυμασίαι θὰ γίνουν ἀπὸ ἕνα ἄλλον ὕφασμα τοῦ ἰδίου μήκους, ποὺ ἔχει πλάτος 0,9 τοῦ μέτρου ;

367. Ἀπὸ 50 κιλὰ ἐλαίας ἐξάγονται 12 κιλὰ ἐλαίου. Πόσα κιλὰ ἐλαῖαι θὰ χρειασθοῦν, διὰ νὰ ἐξαχθοῦν 300 κιλὰ ἐλαίου ;

368. Ἕνα αὐτοκίνητον, ὅταν τρέχῃ 30,5 χιλιόμετρα τὴν ὥραν, φθάνει ἀπὸ τὰς Ἀθήνας εἰς τὴν Ἄμφισσαν εἰς $6 \frac{1}{2}$ ὥρας. Εἶναι ὅμως ἀνάγκη νὰ διανύσῃ τὸ διάστημα αὐτὸ εἰς 5 ὥρας. Πόσα χιλιόμετρα κατὰ μέσον ὅρον πρέπει νὰ τρέχῃ τὴν ὥραν ;

369. Μὲ 100 κιλὰ ἀλεύρου γίνονται 132 κιλὰ ἄρτου. Πόσα κιλὰ ἀλεύρου χρειάζεται ἕνας ἀρτοποιός, διὰ νὰ ζυμώσῃ 957 κιλὰ ἄρτου ;

370. Ἕνα ἀτμόπλοιον, ποὺ πλέει μὲ ταχύτητα 12,5 μιλίων τὴν ὥραν, ἐκτελεῖ τὴν διαδρομὴν ἀπὸ τὸν Πειραιᾶ εἰς τὴν Τῆνον εἰς 6 ὥρας. Εἰς πόσας ὥρας θὰ κάνῃ τὴν διαδρομὴν αὐτήν, ἂν πλέῃ μὲ ταχύτητα 15 μιλίων τὴν ὥραν ;

371. Ἕνας ἔμπορος ἐκέρδισεν ἀπὸ τὴν πώλησιν 5 μέτρων ὑφάσματος 125 δραχμάς. Πόσον θὰ κερδίσῃ, ἂν πωλήσῃ $38 \frac{1}{2}$ μέτρα ἀπὸ τὸ ἴδιον ὕφασμα ;

372. Διὰ νὰ γίνῃ ἕνα χαλί, χρειάζονται 10 μέτρα ὕφασμα

πλάτους 1,20 τοῦ μέτρου. Πόσα μέτρα ἀπὸ τὸ ἴδιον ὕφασμα χρειάζονται διὰ νὰ γίνῃ ἕνα ἄλλο χαλὶ ὅμοιον, ἂν τὸ πλάτος τοῦ ὑφάσματος εἶναι 1,50 τοῦ μέτρου ;

373. Οἱ μαθηταὶ τῆς ΣΤ' τάξεως ἑνὸς σχολείου διὰ νὰ σκάψουν εἰς τὸν σχολικὸν κῆπον 15 μέτρα αὐλάκι εἰργάσθησαν 2 ὥρας. Πόσας ὥρας ἔπρεπε νὰ ἐργασθοῦν τὰ ἴδια παιδιά, διὰ νὰ σκάψουν ἕνα ὅμοιον αὐλάκι ὁλόγυρα ἀπὸ τὸν σχολικὸν κῆπον μήκους 52,5 μέτρων ;

374. 100° βαθμοὶ Κελσίου ἰσοδυναμοῦν μὲ 80° Ρεωμύρου. Μὲ πόσους βαθμοὺς Ρεωμύρου ἰσοδυναμοῦν 20° Κελσίου ;

375. 28° Ρεωμύρου μὲ πόσους βαθμοὺς Κελσίου ἰσοδυναμοῦν ;

376. Ὁ χάρτης τῆς Ἑλλάδος ἔχει κλίμακα 1 : 1.000.000. Ἡ σιδηροδρομικὴ γραμμὴ Ἀθηνῶν - Θεσσαλονίκης εἶναι 520 χιλιόμετρα. Πόσα ἑκατοστὰ τοῦ μέτρου μῆκος εἶναι ἡ σιδηροδρομικὴ γραμμὴ εἰς τὸν χάρτην ;

377. Ἐπάνω εἰς τὸν ἴδιον χάρτην ἡ κατ' εὐθεῖαν ἀπόστασις τῆς Θεσσαλονίκης ἀπὸ τὰς Ἀθήνας εἶναι 0,31 τοῦ μέτρου. Πόσα χιλιόμετρα εἶναι ἡ κατ' εὐθεῖαν πραγματικὴ ἀπόστασις ;

378. Μία ὁμὰς κτιστῶν κτίζει 20 κυβικὰ μέτρα τοίχου εἰς 3 ἡμέρας. Οἱ ἴδιοι κτίσται εἰς πόσας ἡμέρας θὰ κτίσουν τοὺς τοίχους ἑνὸς σπιτιοῦ, ποὺ εἶναι 130 κυβικά ;

379. Διὰ νὰ γίνῃ ἕνα φόρεμα χρειάζονται $7\,^1/_2$ μέτρα ὕφασμα, ἂν τὸ ὕφασμα ἔχῃ πλάτος 0,6 τοῦ μέτρου. Πόσα μέτρα θὰ χρειασθοῦν, ἂν τὸ ὕφασμα εἶχε πλάτος 0,8 τοῦ μέτρου ;

380. Ἕνα ἀτμόπλοιον τῆς γραμμῆς Κορινθιακοῦ πλέει μὲ ταχύτητα 10 μιλίων τὴν ὥραν καὶ κάνει τὴν διαδρομὴν ἀπὸ τὸν Πειραιᾶ εἰς τὰς Πάτρας εἰς $10\,^1/_2$ ὥρας. Εἰς πόσας ὥρας θὰ κάνῃ τὴν διαδρομὴν αὐτὴν ἕνα ἄλλο ἀτμόπλοιον ποὺ πλέει μὲ ταχύτητα 15 μιλίων τὴν ὥραν ;

381. $8\,^1/_2$ μέτρα ἑνὸς ὑφάσματος στοιχίζουν 85 δραχμάς. Πόσο στοιχίζουν $25\,^1/_2$ μέτρα τοῦ ἰδίου ὑφάσματος ;

382. Μία ὑφάντρια ὑφαίνει 9,40 μέτρα ὕφασμα εἰς 4 ὥρας. Πόσα μέτρα θὰ ὑφάνῃ εἰς 5 ἡμέρας, ὅταν ἐργάζεται 10 ὥρας τὴν ἡμέραν ;

383. Τὸ πλήρωμα ἑνὸς ὑποβρυχίου, ποὺ ἀποτελεῖται ἀπὸ 8

ἄνδρας, ἔχει τρόφιμα διὰ 2 μῆνας καὶ 15 ἡμέρας. Ἂν τὸ πλήρωμα ἦτο 10 ἄνδρες, διὰ πόσον χρόνον θὰ εἶχε τρόφιμα ;

384. Ἕνα τόπι ὕφασμα 60 ὑάρδαι καὶ 2 πόδ. στοιχίζει 9100 δραχμάς. Πόσο θὰ πληρώσωμεν διὰ μίαν ἐνδυμασίαν, ποὺ χρειάζεται 5 ὑάρδας καὶ 2 πόδας ; (1 ὑάρδα = 3 πόδ.).

385. Ἕνας στῦλος ὕψους 3,80 μέτρων ρίπτει σκιὰν 2 μέτρα. Τὴν ἰδίαν στιγμὴν ἕνα δένδρον ρίπτει σκιὰν 3,5 μέτρα. Πόσον εἶναι τὸ ὕψος τοῦ δένδρου ;

386. Ἕνας ἀγροτικὸς διανομεὺς βαδίζει 8 ὥρας τὴν ἡμέραν καὶ τελειώνει τὴν περιοδείαν του εἰς 5 ἡμέρας. Εἰς πόσας ἡμέρας θὰ ἐτελείωνε τὴν περιοδείαν του, ἂν ἐβάδιζεν 10 ὥρας τὴν ἡμέραν ;

387. Ἕνα πάτωμα σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου μήκους 6 μέτρων καὶ πλάτους 4,5 μέτρων, πρόκειται νὰ στρωθῇ μὲ μουσαμᾶ, τοῦ ὁποίου τὸ πλάτος εἶναι 1,20 τοῦ μέτρου. Πόσα μέτρα μουσαμᾶ θὰ χρειασθοῦν ;

388. Ὁ Μεσημβρινὸς τῆς γῆς ἔχει μῆκος 40.000 χιλιόμετρα καὶ διαιρεῖται εἰς 360 μοίρας. Ἂν δύο πόλεις βρίσκωνται εἰς τὸν ἴδιον μεσημβρινὸν καὶ ἀπέχουν μεταξύ των 18 μοίρας, πόσα χιλιόμετρα εἶναι ἡ μεταξύ των ἀπόστασις ;

389. 80 στρατιῶται εἶναι κλεισμένοι εἰς ἕνα φρούριον καὶ ἔχουν τροφὰς διὰ 20 ἡμέρας. Μὲ μίαν διαταγὴν ἔφυγαν διὰ μίαν ἀποστολὴν 30 στρατιῶται. Διὰ πόσας ἡμέρας θὰ ἔχουν τροφὰς οἱ στρατιῶται ποὺ ἔμειναν εἰς τὸ φρούριον ;

390. Εἰς $3^{δ}$ (δευτερόλεπτα) ὁ ἦχος διατρέχει 1020 μέτρα. Βλέπομεν ἀπὸ μακρὰν τὴν λάμψιν ἑνὸς κανονιοῦ καὶ μετὰ $20^{δ}$ ἀκοῦμε τὸν κρότον. Πόσα μέτρα μακράν μας εἶναι τὸ κανόνι ;

391. 4 ἐργάται ἀνοίγουν ἕνα πηγάδι εἰς 15 ἡμέρας. Ἂν ἦσαν 5 ἐργάται, εἰς πόσας ἡμέρας θὰ ἄνοιγαν τὸ ἴδιον πηγάδι ;

392. Ἕνας οἰκογενειάρχης ἠγόρασεν ἕνα ὁλόκληρον ἀρνί, ποὺ ζύγιζε 5 κιλὰ καὶ 375 γραμμάρια καὶ ἐπλήρωσεν 150,50 δραχμάς. Πόσας δραχμὰς θὰ ἐπλήρωνε, ἂν ἠγόραζεν ἕνα ἄλλο ἀρνὶ ποὺ ζύγιζε $6\,^{1}/_{4}$ κιλά ;

393. Ἕνα ἀεροπλάνον εἰς 1 ὥραν καὶ $20^{π}$ διατρέχει μίαν ἀπόστασιν 420 χιλιομέτρων. Εἰς πόσον χρόνον θὰ διατρέξῃ μίαν ἀπόστασιν 1050 χιλιομέτρων, ἂν πετᾶ μὲ τὴν ἰδίαν ταχύτητα ;

ΣΥΝΘΕΤΟΣ ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΤΡΙΩΝ

Πρόβλημα 1ον : 5 ἐργάτριαι ὑφαίνουν εἰς 6 ἡμέρας 750 μέτρα ὕφασμα. 12 ἐργάτριαι εἰς 8 ἡμέρας πόσα μέτρα ὕφασμα θὰ ὑφάνουν ;

Κατάταξις

$$\frac{5}{12}\ \text{ἐργ.}\ \text{»} \qquad \frac{6}{8}\ \text{ἡμ.}\ \text{»} \qquad \frac{750}{X}\ \text{μέτρα}\ \text{»}$$

Σημείωσις : Κατὰ τὴν κατάταξιν προσέχομεν νὰ γράφωμεν τὰ ὁμοειδῆ ποσὰ τὸ ἕνα κάτω ἀπὸ τὸ ἄλλο καὶ τὸ X εἰς τὴν σωστήν του θέσιν.

Λύσις : Εἰς τὸ πρόβλημα αὐτὸ μᾶς δίδονται 5 ἀριθμοὶ καὶ ζητεῖται ὁ ἄγνωστος ἕκτος. Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα κάνομε πρῶτον τὴν σύγκρισιν κάθε ποσοῦ μὲ τὸ ποσὸν κάτωθεν τοῦ ὁποίου εἶναι ὁ ἄγνωστος X.

Σύγκρισις : 1) **ἐργατριῶν** καὶ **μέτρων**

Οἱ 5 ἐργάτριαι ὑφαίνουν 50 μέτρα. Διπλάσιαι ἐργάτριαι θὰ ὑφάνουν διπλάσια μέτρα. Ἄρα τὰ ποσὰ εἶναι **ἀνάλογα.**

2) **ἡμερῶν** καὶ **μέτρων**

Εἰς 6 ἡμέρας οἱ 5 ἐργάτριαι ὑφαίνουν 750 μέτρα ὕφασμα. Εἰς διπλασίας ἡμέρας, αἱ ἴδιαι ἐργάτριαι, θὰ ὑφάνουν διπλάσια μέτρα. Ἄρα καὶ αὐτὰ τὰ ποσὰ εἶναι **ἀνάλογα.**

Ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀριθμὸν 750, ποὺ εὑρίσκεται ἐπάνω ἀπὸ τὸν ἄγνωστον X, ἐπὶ τὰ δύο κλάσματα ἀντεστραμμένα (ἐπειδὴ τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα), δηλ. θὰ ἔχωμε :

$$X = 750 \times \frac{12}{5} \times \frac{8}{6} = \frac{750 \times 12 \times 8}{5 \times 6} = \frac{72.000}{30} = \frac{7.200}{3} = 2.400\ \mu.$$

Πρόβλημα 2ον : 3 ἐργάται, ὅταν ἐργάζωνται 9 ὥρας τὴν ἡμέραν, σκάβουν ἕνα χαντάκι μήκους 36 μέτρων. Πόσοι ἐργάται, ὅταν ἐργάζωνται 8 ὥρας τὴν ἡμέραν, θὰ σκάψουν ἕνα χαντάκι μήκους 224 μέτρων ;

$$\frac{3}{X}\ \text{ἐργ.}\ \text{»} \qquad \frac{9}{8}\ \text{ὥρας}\ \text{»} \qquad \frac{36}{224}\ \text{μέτρα}\ \text{»}$$

Σύγκρισις: 1) **μέτρων καὶ ἐργατῶν**

Τὰ 36 μέτρα τὰ σκάβουν 3 ἐργάται. Τὰ διπλάσια μέτρα θὰ τὰ σκάψουν διπλάσιοι ἐργάται (ποσὰ ἀνάλογα).

2) **ὡρῶν καὶ ἐργατῶν**

Ὅταν οἱ ἐργάται ἐργάζωνται 9 ὥρας τὴν ἡμέραν, χρειάζονται 3 ἐργάται. Ὅταν ἐργάζωνται διπλασίας ὥρας τὴν ἡμέραν, θὰ χρειασθοῦν οἱ μισοὶ ἐργάται (ποσὰ ἀντίστροφα).

Ἄρα θὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν 3 ἐπὶ τὸ κλάσμα τῶν ἀναλόγων ποσῶν ἀντεστραμμένον καὶ ἐπὶ τὸ κλάσμα τῶν ἀντιστρόφων ποσῶν ὅπως ἔχει, δηλ. $X = 3 \times \frac{224}{36} \times \frac{9}{8} = \frac{3 \times 224 \times 9}{36 \times 8} = 21$ ἐργ.

Ὥστε :

Διὰ νὰ λύσωμεν ἕνα πρόβλημα τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν, πολλαπλασιάζομεν τὸν ἄνω τοῦ ἀγνώστου X ἀριθμὸν ἐπὶ κάθε κλάσμα (ποὺ σχηματίζουν αἱ δύο τιμαὶ κάθε ποσοῦ), **ἀντεστραμμένον μέν, ἂν τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὸ ποσὸν τοῦ ἀγνώστου, ὅπως ἔχει δέ, ἂν τὰ ποσὰ εἶναι ἀντίστροφα.**

Προβλήματα

394. 4 ἐργάτριαι ἔρραψαν εἰς 8 ἡμέρας 40 ὑποκάμισα. Πόσα ὅμοια ὑποκάμισα θὰ ράψουν 5 ἐργάτριαι εἰς 20 ἡμέρας ;

395. Μία ὑφάντρια διὰ νὰ ὑφάνῃ 60 μέτρα ὕφασμα, τοῦ ὁποίου τὸ πλάτος εἶναι 0,60 τοῦ μέτρου, χρειάζεται 5 κιλὰ νῆμα. Πόσο νῆμα θὰ χρειασθῇ, διὰ νὰ ὑφάνῃ 180 μέτρα ἀπὸ τὸ ἴδιον ὕφασμα, ἂν τὸ πλάτος του ἦτο 1 μέτρον ;

396. 3 ἐργάται ἐργάζονται 8 ὥρας τὴν ἡμέραν καὶ σκάβουν ἕνα ἀμπέλι εἰς 12 ἡμέρας. Εἰς πόσας ἡμέρας θὰ ἔσκαβαν τὸ ἀμπέλι 8 ἐργάται, ἂν εἰργάζοντο 10 ὥρας τὴν ἡμέραν ;

397. Μία λάμπα, ποὺ μένει ἀναμμένη 2 ὥρας κάθε βράδυ, ἔκαψε εἰς 5 βράδυα 320 γραμμάρια πετρέλαιον. Ἂν μένῃ ἀναμμένη 3 ὥρας κάθε βράδυ, πόσο πετρέλαιον θὰ κάψῃ εἰς ἕνα μῆνα ; (30 ἡμέρας) ;

398. Ἕνας πεζὸς ταχυδρόμος βαδίζει 5 ὥρας καὶ 30^{π} τὴν ἡμέραν καὶ εἰς 5 ἡμέρας διατρέχει ἀπόστασιν 80 χιλιομέτρων. Εἰς πόσας ἡμέρας θὰ διατρέξῃ μίαν ἄλλην ἀπόστασιν 132 χιλιομέτρων, ἂν βαδίζῃ 4 ὥρας τὴν ἡμέραν ;

399. Ἕνας ἐργάτης, ὅταν ἐργάζεται 8 ὥρας τὴν ἡμέραν, λαμβάνει εἰς 12 ἡμέρας 3840 δραχμάς. Ὁ ἴδιος ἐργάτης πόσας δραχμὰς θὰ λάβῃ εἰς 14 ἡμέρας, ἐὰν ἐργάζεται 9 ὥρας τὴν ἡμέραν ;

400. Μὲ 96 μέτρα ἑνὸς ὑφάσματος, τοῦ ὁποίου τὸ πλάτος εἶναι 0,78 τοῦ μέτρου, γίνονται 12 σεντόνια. Πόσα μέτρα θὰ χρειασθοῦν ἀπὸ ἕνα ἄλλο ὕφασμα πλάτους 0,90 τοῦ μέτρου, διὰ νὰ γίνουν 30 ὅμοια σεντόνια ;

401. 20 θερισταὶ θερίζουν 120 στρέμματα εἰς 6 ἡμέρας. Πόσα στρέμματα θὰ θερίσουν 35 θερισταὶ εἰς 4 ἡμέρας ;

402. Διὰ νὰ γίνουν 10 παιδικαὶ ἐνδυμασίαι ἐχρειάσθησαν 28 μέτρα ὕφασμα πλάτους $1\,^1/_4$ τοῦ μέτρου. Πόσα μέτρα ὕφασμα πλάτους 1 μέτρου θὰ χρειασθοῦν, διὰ νὰ γίνουν 45 ὅμοιες ἐνδυμασίες ;

403. Ἕνας ὁδηγός, διὰ νὰ μεταφέρῃ μὲ τὸ φορτηγὸν αὐτοκίνητόν του 1500 κιλὰ ἐμπορεύματα εἰς ἀπόστασιν 84 χιλιομέτρων, ἔλαβε 525 δραχμάς. Πόσον ἀγώγι θὰ λάβῃ, διὰ νὰ μεταφέρῃ 2.400 κιλὰ εἰς ἀπόστασιν 120 χιλιομέτρων ;

404. Ἐὰν ἑνὸς βιβλίου καθεμία σελὶς ἔχει 34 στίχους καὶ κάθε στίχος 45 γράμματα, τὸ βιβλίον ἀποτελεῖται ἀπὸ 140 σελίδας. Πόσας σελίδας θὰ εἶχε τὸ βιβλίον, ἂν καθεμία σελὶς εἶχε 30 στίχους καὶ κάθε στίχος 35 γράμματα ;

405. Μία γυναῖκα μὲ $3\,^3/_4$ κιλὰ νῆμα ὑφαίνει 31,5 μέτρα ὕφασμα πλάτους 0,5 τοῦ μέτρου. Πόσα μέτρα πλάτους 0,75 τοῦ μέτρου θὰ ὑφάνῃ μὲ $11\,^1/_4$ κιλὰ νήματος ;

Σημείωσις : Πρὸς εὐκολίαν μας τρέπομεν τὰ κλάσματα εἰς δεκαδικοὺς ἀριθμούς, διὰ νὰ ἀποφύγωμεν τὰ σύνθετα κλάσματα.

406. 5 ἐργάται, ὅταν ἐργάζωνται 8 ὥρας τὴν ἡμέραν, σκάβουν 150 μέτρα χαντάκι εἰς 5 ἡμέρας. 10 ἐργάται, ἂν ἐργάζωνται 9 ὥρας τὴν ἡμέραν, πόσα μέτρα ὅμοιον χαντάκι θὰ σκάψουν εἰς 12 ἡμέρας ;

407. Ἕνας ἐργάτης, ποὺ ἐργάζεται 6 ὥρας τὴν ἡμέραν, εἰς 5 ἡμέρας ἐτελείωσεν τὸ $^1/_4$ ἑνὸς ἔργου. Πόσας ὥρας πρέπει νὰ ἐργάζεται τὴν ἡμέραν διὰ νὰ τελειώσῃ τὸ ὑπόλοιπον ἔργον εἰς 12 ἡμέρας ;

408. Ἕνα χαλὶ μήκους 4,2 μέτρων καὶ πλάτους 3,25 μέτρων στοιχίζει 2.820 δραχμάς. Πόσας δραχμὰς ἀξίζει ἕνα ἄλλο χαλὶ τῆς αὐτῆς ποιότητος μήκους 5,5 μέτρων καὶ πλάτους 3,6 μέτρων ;

409. Διὰ ἔξοδα διατροφῆς 160 μαθητῶν ἐπὶ 26 ἡμέρας εἰς μίαν θερινὴν κατασκήνωσιν ἐξωδεύθησαν 37.440 δραχμαί. Πόσαι δραχμαὶ θὰ χρειασθοῦν διὰ διατροφὴν 200 μαθητῶν ἐπὶ 30 ἡμέρας ;

410. Μία γυναῖκα, ὅταν ἐργάζεται 5 ὥρας τὴν ἡμέραν, πλέκει εἰς 6 ἡμέρας 4 πουλόβερ. Πόσας ὥρας πρέπει νὰ ἐργάζεται τὴν ἡμέραν, διὰ νὰ πλέξῃ εἰς 15 ἡμέρας 12 ὅμοια πουλόβερ ;

411. Μία γυναῖκα, ποὺ εἰργάζετο 6 ὥρας τὴν ἡμέραν, ὕφανε ἕνα χαλὶ μήκους 4,5 μέτρων καὶ πλάτους 3 μέτρων εἰς 5 ἡμέρας. Ἡ ἰδία γυναῖκα, πόσας ὥρας πρέπει νὰ ἐργάζεται τὴν ἡμέραν, διὰ νὰ ὑφάνῃ ἕνα χαλὶ μήκους 5,4 μέτρων καὶ πλάτους 4,2 μέτρων εἰς 6 ἡμέρας ;

412. Μία βρύση γεμίζει εἰς 4 ὥρας μίαν δεξαμενὴν μήκους 1,5 μ, πλάτους 0,80 μ καὶ βάθους 2 μέτρων. Εἰς πόσας ὥρας ἡ ἰδία βρύση θὰ γεμίσῃ μίαν ἄλλην δεξαμενὴν μήκους 2 μ, πλάτους 1,20 καὶ βάθους 3 μέτρων ;

413. Ἕνας ἐργολάβος ἀνέλαβε νὰ ἐκτελέσῃ ἕνα ἔργον εἰς 30 ἡμέρας καὶ ἔβαλε εἰς τὴν ἐργασίαν αὐτὴν 8 ἐργάτας, οἱ ὁποῖοι εἰς 25 ἡμέρας ἐτελείωσαν τὰ $^2/_3$ τοῦ ἔργου. Πόσους ἐργάτας πρέπει νὰ προσλάβῃ ἀκόμη εἰς τὴν ἐργασίαν, ὥστε νὰ τελειώσῃ τὸ ἔργον εἰς τὴν ὡρισμένην προθεσμίαν ;

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΟΣΟΣΤΩΝ

Ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι ἕνας εἶχε ἀγοράσει μὲ 100 χιλιόδραχμα ἕνα οἰκόπεδον καὶ ἔπειτα ἐπώλησε τὸ οἰκόπεδον εἰς ἄλλον μὲ 108 χιλιόδραχμα, εἶναι φανερὸν ὅτι ἀπὸ τὴν μεταπώλησιν ἐκέρδισεν 8 χιλιόδραχμα.

Ὥστε εἰς τὰ 100 χιλιόδραχμα ποὺ διέθεσε ὁ ἄνθρωπος αὐτὸς ἐκέρδισε 8· λέγομεν τότε ὅτι ἐκέρδισε **8 τοῖς ἑκατὸν** ἐπὶ τῆς ἀγορᾶς καὶ γράφομεν τοῦτο ὡς ἑξῆς : 8%.

Ἄλλο παράδειγμα: Ὁ ὡρολογοποιὸς ἀγοράζει τὰ ὡρολόγια πρὸς 500 δραχμὰς τὸ ἕνα καὶ τὰ πωλεῖ 600 δραχμάς. Εἰς τὰς 500, λοιπόν, δραχμάς, ποὺ διαθέτει διὰ τὴν ἀγορὰν κάθε ὡρολογίου, κερδίζει 100 δραχμάς. Ἄς ἴδωμεν, τώρα, πόσον κερδίζει εἰς τὰς 100 δραχμάς. Ἀφοῦ εἰς τὰς 500 δραχμάς, δηλ. εἰς τὰ 5 ἑκατοντάδραχμα, κερδίζει 100 δραχμάς, εἰς τὸ ἕνα ἑκατοντάδραχμον κερδίζει 100 : 5 = 20 δραχμάς.

Ὥστε ὁ ὡρολογοποιὸς κερδίζει **20 τοῖς ἑκατὸν** ἐπὶ τῆς ἀγορᾶς τῶν ὡρολογίων, ποὺ γράφεται : 20%.

Τὸ κέρδος, λοιπόν, τῶν ἐμπόρων ὑπολογίζεται μὲ **τόσον τοῖς ἑκατόν**, ἀλλὰ καὶ ἡ ζημία ἐπίσης ὑπολογίζεται μὲ τόσον τοῖς ἑκατόν :

Παράδειγμα: Ἕνας αὐγοπώλης ἠγόρασε 400 αὐγὰ καὶ κατὰ τὴν μεταφορὰν ἔσπασαν 20. Πόσον τοῖς ἑκατὸν ἐζημιώθη ;

Ἀφοῦ εἰς τὰ 400 αὐγὰ εἶχε ζημίαν 20, εἰς τὰ 100, ποὺ εἶναι 4 φορὰς ὀλιγώτερον, θὰ ἔχῃ ζημίαν 20 : 4 = 5 αὐγά.

Ὥστε ὁ αὐγοπώλης ζημιώνεται 5% **(5 τοῖς ἑκατόν)**.

Ἄλλοτε τὸ κέρδος ἢ ἡ ζημία ὑπολογίζονται εἰς τὰς 1000 μονάδας. Π.χ. ἂν ὁ ἔμπορος εἰς τὰς 1000 δραχμὰς ἔχῃ κέρδος 9 δραχμάς, λέγομεν ὅτι κερδίζει **9 τοῖς χιλίοις**, ποὺ γράφεται : 9‰.

Τὸ ποσὸν ἐπὶ τοῦ ὁποίου ὑπολογίζεται τὸ κέρδος ἢ ἡ ζημία λέγεται **ἀρχικὸν ποσόν**.

Εἰς τὸ πρῶτον παράδειγμα **ἀρχικὸν ποσὸν** ἐπὶ τοῦ ὁποίου ὑπολογίζεται τὸ κέρδος εἶναι αἱ 500 δραχμαί, εἰς τὸ δεύτερον παράδειγμα **ἀρχικὸν ποσὸν** ἐπὶ τοῦ ὁποίου ὑπολογίζεται ἡ ζημία εἶναι τὰ 400 αὐγά.

Τὸ κέρδος ἢ ἡ ζημία ποὺ ἀναλογεῖ εἰς τὸ **ἀρχικὸν ποσὸν** λέγεται **ποσοστόν**.

Εἰς τὸ πρῶτον παράδειγμα **τὸ ποσοστὸν** ἐπὶ τοῦ ἀρχικοῦ ποσοῦ τῶν 500 δραχμῶν εἶναι αἱ 100 δραχμαί. Εἰς τὸ δεύτερον παράδειγμα τὸ **ποσοστὸν** ἐπὶ τοῦ ἀρχικοῦ ποσοῦ τῶν 400 αὐγῶν εἶναι τὰ 20 αὐγά.

Τὸ % (τόσον τοῖς ἑκατὸν) ἢ τὸ ‰ (τόσον τοῖς χιλίοις), δὲν χρησιμοποιεῖται μόνον διὰ νὰ ὑπολογίζεται τὸ κέρδος ἢ ἡ ζημία, ἀλλὰ καὶ εἰς πολλὰς ἄλλας περιπτώσεις. Π.χ. οἱ φόροι ποὺ ἐπιβάλλει τὸ κράτος εἶναι **τόσον τοῖς ἑκατὸν** (π.χ. 4%) ἐπὶ τοῦ εἰσοδήματος. Ἡ **ἔκπτωσις** (σκόντο) ἐπὶ τῆς ἀξίας τῶν ἐμπορευμάτων, ποὺ κάνουν οἱ ἔμποροι ὅταν διαλύουν τὸ κατάστημά των, ὑπολογίζεται μὲ **τόσο τοῖς ἑκατόν**, (π.χ. 10%). **Αἱ Ἀσφάλειαι** πυρός, θαλάσσης κλπ. ὑπολογίζονται εἰς **τόσον ἐπὶ τοῖς χιλίοις** (π.χ. 2‰). **Ἡ μεσιτεία**, δηλ. ἡ ἀμοιβὴ ποὺ λαμβάνει ὁ μεσίτης, ὅταν διαπραγματεύεται τὴν ἀγορὰν ἢ τὴν πώλησιν ἑνὸς ἐμπορεύματος, ὑπολογίζεται **εἰς τόσον τοῖς ἑκατὸν** (π.χ. 2%) κλπ.

Εἰς τὰ προβλήματα ποὺ ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ τὸ ποσοστόν, ἢ εἰς ἐκεῖνα ποὺ δίδεται τὸ ποσοστὸν καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἄλλο ποσόν, λέγονται **προβλήματα ποσοστῶν.**

Τὰ προβλήματα τῶν ποσοστῶν λύονται ὅπως καὶ τὰ προβλήματα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν :·

Πρόβλημα 1ον : Ἕνας βιβλιοπώλης ἠγόρασε σχολικὰ βιβλία ἀξίας 150 δραχμῶν. Ἔπειτα τὰ ἐπώλησε μὲ κέρδος 20% ἐπὶ τῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς. Πόσας δραχμὰς ἐκέρδισε ;

Κατάταξις

εἰς τὰς 100 δρχ. κερδίζει 20 δρχ.
εἰς τὰς 150 » » X

Ἐπειδὴ τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα, εὑρίσκομεν : $X = 20 \times \frac{150}{100} = 30$ δραχμαί.

Πρόβλημα 2ον : Ἕνας ἔμπορος ἠσφάλισε τὸ ἐμπόρευμά του ἐναντίον τοῦ κινδύνου πυρὸς πρὸς 2‰ καὶ ἐπλήρωσε διὰ ἀσφάλιστρα 35 δραχμάς. Ποία ἦτο ἡ ἀξία τοῦ ἐμπορεύματος ;

Κατάταξις

δι' ἀξίαν 1000 δραχμῶν ἐπλήρωσε 2 δρχ.
» » X » » 35 »

$$X = 1000 \times \frac{35}{2} = 17.500 \text{ δραχμαί.}$$

Πρόβλημα 3ον : Ὁ πληθυσμὸς μιᾶς πόλεως ἦτο πρὶν τοῦ πολέμου 12.000 κάτοικοι. Τώρα εἶναι 15.000. Πόσον τοῖς ἑκατὸν ηὐξήθη ὁ πληθυσμός της ;

Κατάταξις :

Οἱ 12.000 κάτοικοι ηὐξήθησαν κατὰ 3.000 κάτ.
Οἱ 100 » » » X »

$$X = 3.000 \times \frac{100}{12.000} = 25\%.$$

Σημείωσις : Εἰς τὴν κατάταξιν τῶν προβλημάτων αὐτῶν πρέπει νὰ προσέχωμε νὰ γράφωμεν τὰ ὁμοειδῆ ποσὰ εἰς τὴν ἰδίαν στήλην.

Προβλήματα

414. Μία οἰκία ἀξίας 300 χρυσῶν λιρῶν ἐπωλήθη 10% ὀλιγώτερον ἀπὸ τὴν ἀξίαν της. Πόσας λίρας ἐπωλήθη ;

415. Τὸ βιβλίον τῆς γεωγραφίας ἀξίζει 8 δραχμὰς καὶ ὁ βιβλιοπώλης τὸ πωλεῖ 10 δραχμάς. Πόσον τοῖς ἑκατὸν ἐπὶ τῆς ἀξίας του κερδίζει ;

416. Εἰς ἕνα σχολεῖον, ποὺ ἔχει 420 μαθητάς, παίρνουν συσσίτιον τὰ 30% τῶν μαθητῶν. Πόσοι μαθηταὶ παίρνουν συσσίτιον ;

417. Τὸ ἀγελαδινὸν γάλα ἀποδίδει 7% βούτυρο. Ἀπὸ πόσα κιλὰ γάλα θὰ ἐξαχθοῦν 17,5 κιλὰ βούτυρο ;

418. Ἕνας βοσκὸς εἶχε 350 πρόβατα. Ἔπειτα ἠγόρασεν ἄλλα 70. Πόσον τοῖς ἑκατὸν ηὐξήθη τὸ κοπάδι του ;

419. Ἕνας ἠσφάλισε τὴν οἰκίαν του, ποὺ ἀξίζει 116.500 δραχμάς, πρὸς 2 ‰ τὸ ἔτος. Πόσας δραχμὰς πληρώνει δι᾽ ἀσφάλιστρα τὸ ἔτος ;

420. Αἱ ἐλαῖαι ἀποδίδουν 15% ἔλαιον. Πόσον ἔλαιον θὰ ἐξαχθῇ ἀπὸ 820 κιλὰ ἐλαίας ;

421. Τὸ θαλασσινὸ νερὸ περιέχει 2,5% τοῦ βάρους του ἅλας. Πόσα κιλὰ ἅλας περιέχουν 4 τόννοι θαλασσινοῦ νεροῦ ; (ὁ τόννος = 1000 κιλά).

422. Ἡ ἔκτασις τῆς Ἑλλάδος εἶναι 132.000 τετρ. χιλιόμετρα. Ἀπὸ αὐτὰ τὰ 20,8% εἶναι ἀγροὶ καὶ τὰ 8,5% δάση. Πόσα τετραγωνικὰ χιλιόμετρα εἶναι ἀγροὶ καὶ πόσα δάση ;

423. Ἕνας ὑπάλληλος ἐμπορικοῦ καταστήματος, ἐκτὸς ἀπὸ τὸν μισθόν του, παίρνει ποσοστὰ 3% ἀπὸ τὰ κέρδη. Τὸ κατάστημα εἰς ἕνα μῆνα εἶχε κέρδη 45000 δραχμάς. Πόσας δραχμάς, ἐκτὸς τοῦ μισθοῦ του, θὰ λάβῃ ὁ ὑπάλληλος αὐτὸν τὸν μῆνα ;

424. Ἕνας ἐργάτης παίρνει ἡμερομίσθιον 70 δραχμάς, ἀλλὰ τοῦ γίνεται κράτησις 4% διὰ τὰς κοινωνικὰς ἀσφαλίσεις. Τί καθαρὸ ποσὸν θὰ λάβῃ, ἂν ἐργασθῇ 73 ἡμέρας ;

425. Ἕνας ἔμπορος πωλεῖ τὸ μέτρον ἑνὸς ὑφάσματος 18,60 δραχμὰς καὶ κερδίζει 3,60 δραχμάς. Πόσον τοῖς ἑκατὸν ἐπὶ τῆς ἀγορᾶς κερδίζει ;

426. Ἕνας ἔμπορος πωλεῖ τὰ ὑφάσματα μὲ ἔκπτωσιν 15% ἐπὶ τῆς τιμῆς ποὺ εἶναι γραμμένη ἐπάνω εἰς αὐτά. Πόσο πρέπει νὰ πληρώσωμεν τὸ μέτρον ἑνὸς ὑφάσματος, ἐπάνω εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι γραμμένη ἡ τιμή : 14 δραχμαί ;

427. Ἕνας ἔμπορος ἠγόρασεν 185 κιλὰ ἔλαιον πρὸς 12,30 δραχμὰς τὸ κιλόν. Ἡ τιμὴ ὅμως τοῦ ἐλαίου ἔπεσε καὶ ὁ ἔμπορος ἠναγκάσθη νὰ τὸ πωλήσῃ μὲ ζημίαν 15% ἐπὶ τῆς ἀγορᾶς. Πόσας δραχμὰς ἐζημιώθη ;

428. Ἕνας λαδέμπορος πωλεῖ τὸ ἔλαιον πρὸς 13,20 δραχμὰς τὸ κιλὸν καὶ κερδίζει 10% ἐπὶ τῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς του. Πόσας δραχμὰς ἠγόρασε τὸ κιλόν ;

429. Ὁ καφὲς κοστίζει εἰς τὸν παντοπώλην 63 δραχμὰς τὸ κιλόν. Πόσο πρέπει νὰ πωλῇ τὸ κιλόν, διὰ νὰ κερδίζῃ 12% ἐπὶ τῆς ἀξίας ;

430. Ἕνας ἠγόρασεν ἕναν ἀγρὸν 2.650 τετραγ. μέτρα πρὸς 2,60 δραχμὰς τὸ τετραγ. μέτρον. Ἔπειτα τὸν ἐπώλησεν ἀντὶ 7.579 δραχμῶν. Πόσον τοῖς ἑκατὸν ἐκέρδισεν ;

431. Ἕνας ὑπάλληλος, ποὺ λαμβάνει μισθὸν 5.600 δραχμάς, πληρώνει δι' ἐνοίκιον 840 δραχμάς. Πόσον τοῖς ἑκατὸν ἐπὶ τοῦ μισθοῦ του πληρώνει διὰ ἐνοίκιον ;

432. Ἡ Ἑλλὰς τὸ 1940 εἶχε πληθυσμὸν περίπου 6.500.000 κατοίκους. Κατὰ τὴν περίοδον τῆς Κατοχῆς (1941 - 1944) ἐφονεύθησαν ἢ ἀπέθανον ἀπὸ τὴν πεῖνα, τὰς στερήσεις καὶ τὰς καταπιέσεις τοῦ ἐχθροῦ 500.000 Ἕλληνες. Πόσον τοῖς ἑκατὸν ἐπὶ τοῦ πληθυσμοῦ ἀπέθανον ἢ ἐφονεύθησαν ;

433. Ὁ πληθυσμὸς ὁλοκλήρου τῆς γῆς εἶναι 2.100.000.000 κάτοικοι. Ἀπὸ αὐτοὺς 810.000.000 εἶναι χριστιανοί. Πόσον τοῖς ἑκατὸν ἐπὶ τοῦ πληθυσμοῦ τῆς γῆς εἶναι χριστιανοί ;

434. Ὁ πληθυσμὸς τῆς Στερεᾶς Ἑλλάδος καὶ τῆς Εὐβοίας κατὰ τὴν Ἀπογραφὴν τοῦ 1928 ἦτο 1.592.842 κάτοικοι. Ἀπ' αὐτοὺς 795.300 ἦσαν ἄρρενες. Πόσον τοῖς ἑκατὸν ἦσαν οἱ ἄρρενες κάτοικοι ;

435. Ἡ πυρῖτις ἀποτελεῖται ἀπὸ 75% νίτρον, 10% θεῖον καὶ 15% ἄνθρακα. Πόση πυρῖτις δύναται νὰ γίνῃ μὲ 825 κιλὰ νίτρον, ὅταν ὑπάρχῃ ἄφθονος ποσότης ἀπὸ θεῖον καὶ ἄνθρακα ;

436. Ἕνας μεσίτης ἔλαβε διὰ μεσιτείαν πρὸς 2% ἀπὸ τὴν πώλησιν ἑνὸς διαμερίσματος 580 δραχμάς. Πόσας δραχμὰς ἐπωλήθη τὸ διαμέρισμα ;

437. Εἰς τοὺς μισθοὺς τῶν δημοσίων ὑπαλλήλων κάμουν κρατήσεις. Ἕνας ὑπάλληλος μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν τῶν κρατήσεων 9,2% ἐπὶ τοῦ μισθοῦ του παίρνει καθαρὸν μισθὸν 6.356 δραχμάς. Πόσος εἶναι ὁ μισθός του μαζὶ μὲ τὶς κρατήσεις ;

438. Ἕνας εἶχε 5 ξύλινα κιβώτια γεμᾶτα σαπούνι, ποὺ τὸ καθένα ἐζύγιζε μικτὸν βάρος 24 κιλά. Τὸ βάρος τοῦ κάθε κιβωτίου ἦτο τὰ 8% τοῦ μικτοῦ βάρους. Ἔπειτα ἀπὸ ὀλίγον χρόνον, ἕνεκα τῆς ξηρασίας, τὸ σαπούνι ἐφύρανε κατὰ 5% τοῦ ἀρχικοῦ βάρους του. Πόσα κιλὰ ζυγίζουν τὰ 5 κενὰ κιβώτια καὶ πόσα κιλὰ σαπούνι περιέχουν ;

439. Εἰς μίαν πόλιν, ποὺ εἶχε πληθυσμὸν 27.000 κατοίκους, αἱ γεννήσεις εἰς ἓν ἔτος ἔφθασαν 25‰ καὶ οἱ θάνατοι 12‰ ἐπὶ τοῦ πληθυσμοῦ. Κατὰ πόσους κατοίκους ηὐξήθη ὁ πληθυσμὸς τῆς πόλεως ;

440. Ὁ μισθὸς ἑνὸς ὑπαλλήλου, ποὺ ἦτο 2.800 δραχμάς, ηὐξήθη κατὰ τὰ $^2/_5$ αὐτοῦ. Πόσον τοῖς ἑκατὸν ἐπὶ τοῦ ἀρχικοῦ μισθοῦ ἔγινεν αὔξησις ;

441. Ἕνας παντοπώλης ἠγόρασε 80 κιλὰ ζάχαρη μὲ 1.000 δραχμάς. Πόσον πρέπει νὰ πωλῇ τὸ κιλόν, διὰ νὰ κερδίσῃ 15% ἐπὶ τῆς ἀξίας της ;

442. Τὰ 21% τοῦ ἀτμοσφαιρικοῦ ἀέρος εἶναι ὀξυγόνον. Πόσα κυβικὰ μέτρα ὀξυγόνον περιέχει μία αἴθουσα διδασκαλίας, ποὺ ἔχει μῆκος 7 μέτρα, πλάτος 5 μέτρα καὶ ὕψος 4,2 μέτρα ;

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΟΚΟΥ

Πολλάκις οἱ ἄνθρωποι δανείζονται χρήματα, εἴτε ἀπὸ τὰς τραπέζας εἴτε ἀπὸ ἄλλους ἀνθρώπους.

Ἐκεῖνος ποὺ δανείζει χρήματα λέγεται **δανειστὴς** καὶ ἐκεῖνος ποὺ δανείζεται **ὀφειλέτης**.

Καθὼς γνωρίζομεν, ὅταν ἕνας ἐνοικιάσῃ μίαν οἰκίαν διὰ νὰ κατοικήσῃ ἢ ἕναν ἀγρὸν διὰ νὰ τὸν καλλιεργήσῃ, πληρώνει εἰς τὸν ἰδιοκτήτην ἐνοίκιον. Ὁμοίως, καὶ ὅταν ἕνας δανεισθῇ χρήματα, πληρώνει εἰς τὸν δανειστήν του ἕνα ποσὸν χρημάτων δι' ἐνοίκιον τῶν χρημάτων ποὺ ἐδανείσθη.

Παράδειγμα: Ὁ Γεώργιος Παπαδόπουλος ἐδανείσθη ἀπὸ τὸν Νικόλαον Γεωργιάδην 8.000 δραχμὰς καὶ ὑπεσχέθη νὰ τοῦ ἐπιστρέψῃ μετὰ 6 μῆνας 9.500. Δηλ. ὁ δανειστὴς Νικ. Γεωργιάδης θὰ πάρῃ ἀπὸ τὸν ὀφειλέτην του μετὰ 6 μῆνας 1.500 δραχμὰς περισσοτέρας ἀπὸ τὰ χρήματα ποὺ τοῦ ἐδάνεισε, διὰ ἐνοίκιον τῶν χρημάτων του. Αἱ 1.500 δραχμαὶ ποὺ πῆρε ὁ δανειστὴς λέγονται **τόκος**.

Ὥστε :

Τόκος λέγεται τὸ κέρδος ποὺ λαμβάνει ὁ δανειστὴς ἀπὸ τὸν ὀφειλέτην διὰ τὰ χρήματα ποὺ τοῦ ἐδάνεισε δι' ὡρισμένον χρόνον.

Τὸ ποσὸν ποὺ ἐδανείσθη ὁ ὀφειλέτης, δηλαδὴ αἱ 8000 δραχμαί, λέγεται **κεφάλαιον**.

Ὥστε :

Κεφάλαιον λέγεται τὸ ποσὸν τῶν χρημάτων ποὺ δανείζεται ἢ δανείζει ἕνας.

Ἐπίσης εἰς τὸ παράδειγμα βλέπομεν ὅτι τὸ κεφάλαιον ἔμεινεν εἰς τὸν ὀφειλέτην 6 μῆνας.

Οἱ 6 μῆνες, ποὺ πέρασαν ἀπὸ τὴν ἡμέραν ποὺ ἐδανείσθη τὸ κεφάλαιον μέχρι τὴν ἡμέραν ποὺ ἐπεστράφη εἰς τὸν δανειστὴν λέγεται **χρόνος**.

Ὥστε :

Χρόνος λέγεται τὸ χρονικὸν διάστημα ποὺ τὸ κεφάλαιον μένει δανεισμένον εἰς τὸν ὀφειλέτην.

Ὁ τόκος ὑπολογίζεται μὲ βάσιν τὸν συμφωνούμενον τόκον τῶν 100 δραχμῶν εἰς ἕνα ἔτος. Δηλ. ἂν δανεισθῇ ἕνας χρήματα, θὰ συμφωνήσῃ πόσον τόκον θὰ δίδῃ εἰς κάθε 100 δραχμὰς διὰ ἕνα ἔτος. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι συνεφώνησαν νὰ δίδῃ 12 δραχμὰς τόκον διὰ κάθε 100 δραχμὰς εἰς ἕνα ἔτος· ὁ τόκος αὐτὸς λέγεται **ἐπιτόκιον** καὶ γράφεται : 12%.

Ὥστε :

Ἐπιτόκιον λέγεται ὁ τόκος τῶν 100 δραχμῶν εἰς ἕνα ἔτος.

Εἰς τὰ προβλήματα, λοιπόν, τοῦ τόκου διακρίνομεν τέσσερα ποσά : 1) τὸ **κεφάλαιον**, 2) τὸν **τόκον**, 3) τὸν **χρόνον** καὶ 4) τὸ **ἐπιτόκιον**.

Ἀπὸ τὰ τέσσερα αὐτὰ ποσὰ τὰ τρία μᾶς εἶναι γνωστά, καὶ ζητοῦμεν τὸ τέταρτον.

Τὰ προβλήματα τοῦ τόκου λύονται μὲ τὴν σύνθετον μέθοδον τῶν τριῶν.

Προβλήματα εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται ὁ τόκος

α' Ὁ χρόνος εἰς ἔτη

Πρόβλημα 1ον: Πόσον τόκον φέρει κεφάλαιον 500 δραχμῶν εἰς 3 ἔτη πρὸς 10% ;

Κατάταξις

Κεφάλαιον 100 δραχ. εἰς 1 ἔτος φέρει τόκον 10 δραχ
500 3 ἔτη » » X »

Σύγκρισις: 1) κεφαλαίου καὶ τόκου

Κεφάλαιον 100 δραχμῶν φέρει τόκον 10 δραχμάς. Διπλάσιον κεφάλαιον θὰ φέρῃ τόκον διπλάσιον (ποσὰ ἀνάλογα).

2) χρόνου καὶ τόκου

Εἰς ἕνα ἔτος ὁ τόκος τῶν 100 δραχμῶν εἶναι 10 δραχμαί. Εἰς 2 ἔτη ὁ τόκος τῶν ἰδίων δραχμῶν θα εἶναι διπλάσιος (ποσὰ ἀνάλογα).

$$\text{Ἄρα } X = 10 \times \frac{500}{100} \times \frac{3}{1} = \frac{10 \times 500 \times 3}{100} = 150 \text{ δραχ.}$$

β' Ὁ χρόνος εἰς μῆνας

Πρόβλημα 2ον : Πόσον τόκον φέρουν 800 δραχμαὶ εἰς 3 μῆνας πρὸς 15% ;

Κατάταξις

100 δρχ. εἰς 12 μῆνας φέρουν τόκον 15 δρχ
800 » » 3 » » » X »

Ἐπειδὴ τὰ ποσὰ κεφάλαιον καὶ χρόνος συγκρινόμενα πρὸς τὸν τόκον εἶναι ἀνάλογα, θὰ ἔχωμε :

$$X = 15 \times \frac{800}{100} \times \frac{3}{12} = \frac{15 \times 800 \times 3}{1200} = 30 \text{ δραχ.}$$

γ' Ὁ χρόνος εἰς ἡμέρας

Πρόβλημα 3ον : Πόσον τόκον φέρουν 600 δραχμαὶ εἰς 20 ἡμέρας πρὸς 12% ;

Κατάταξις

100 δραχ. εἰς 360 ἡμέρας φέρουν τόκον 12 δρχ
600 » » 20 » » » X »

Ἐπειδὴ τὰ ποσὰ κεφάλαιον καὶ χρόνος συγκρινόμενα πρὸς τὸν τόκον εἶναι ἀνάλογα, θὰ ἔχωμε :

$$X = 12 \times \frac{600}{100} \times \frac{20}{360} = \frac{12 \times 600 \times 20}{36.000} = 4 \text{ δρχ.}$$

Ἀπὸ τὴν λύσιν τῶν ἀνωτέρω τριῶν προβλημάτων βλέπομεν ὅτι **Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν τόκον πολλαπλασιάζομεν τὰ τρία ἄλλα** ποσὰ

(κεφάλαιον, χρόνον καὶ ἐπιτόκιον). **Ἔπειτα τὸ γινόμενον τὸ διαιροῦμεν διὰ τοῦ 100, ἂν ὁ χρόνος εἶναι ἔτη, διὰ 1200, ἂν ὁ χρόνος εἶναι μῆνες ἢ διὰ 36.000, ἂν ὁ χρόνος εἶναι ἡμέραι.**

Ἐὰν παραστήσωμεν τὸν τόκον μὲ τὸ γράμμα Τ, τὸ κεφάλαιον μὲ τὸ γράμμα Κ, τὸ ἐπιτόκιον μὲ τὸ γράμμα Ε, τὸν χρόνον εἰς ἔτη μὲ τὸ γράμμα Χ, τὸν χρόνον εἰς μῆνας μὲ τὸ γράμμα Μ καὶ τὸν χρόνον εἰς ἡμέρας μὲ τὸ γράμμα Η, θὰ ἔχωμε τὴν ἰσότητα :

$$\text{Τ} = \frac{\text{Ε}\cdot\text{Κ}\cdot\text{Χ}}{100} \quad \text{ὅταν ὁ χρόνος εἶναι ἔτη}$$

$$\text{Τ} = \frac{\text{Ε}\cdot\text{Κ}\cdot\text{Μ}}{1.200} \quad \text{ὅταν ὁ χρόνος εἶναι μῆνες}$$

$$\text{Τ} = \frac{\text{Ε}\cdot\text{Κ}\cdot\text{Η}}{36.000} \quad \text{ὅταν ὁ χρόνος εἶναι ἡμέραι.}$$

(Ἀντὶ τοῦ σημείου $\times$ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ βάζομε μίαν τελείαν).

Ἡ ἰσότης αὐτὴ λέγεται **τύπος τοῦ τόκου.** Μὲ τὸν τύπον αὐτὸν λύομεν εὐκόλως κάθε πρόβλημα εἰς τὸ ὁποῖον ζητεῖται ὁ τόκος, ἂν ἀντὶ τῶν γραμμάτων Ε, Κ, Χ (Μ ἢ Η), θέσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς τοῦ προβλήματος καὶ ἔπειτα ἐκτελέσωμεν τὰς πράξεις.

Παράδειγμα: — Πόσον τόκον φέρουν 800 δραχμαὶ πρὸς 10%.

α) εἰς 3 ἔτη ; $\quad \text{Τ} = \frac{\text{Ε}\cdot\text{Κ}\cdot\text{Χ}}{100} = \frac{10 \times 800 \times 3}{100} = 240$ δραχ.

β) εἰς 9 μῆνας ; $\quad \text{Τ} = \frac{\text{Ε}\cdot\text{Κ}\cdot\text{Μ}}{1.200} = \frac{10 \times 800 \times 9}{1.200} = 60$ δραχ.

γ) εἰς 27 ἡμέρας; $\quad \text{Τ} = \frac{\text{Ε}\cdot\text{Κ}\cdot\text{Η}}{36.000} = \frac{10 \times 800 \times 27}{36.000} = 6$ δραχ.

Προβλήματα

443. Πόσον τόκον φέρουν 348 δραχμαὶ εἰς 4 ἔτη πρὸς 12% ;

444. Πόσον τόκον φέρουν 7.200 δραχμαὶ εἰς 8 μῆνας πρὸς 9% ;

445. Πόσον τόκον φέρουν 240 δραχμαὶ εἰς 3 ἔτη καὶ 8 μῆνας πρὸς 6% ; (τρέπομεν τὸν συμμιγῆ εἰς μῆνας).

446. Πόσον τόκον φέρουν 630 δραχμαὶ εἰς 20 ἡμέρας πρὸς 15% ;

447. Πόσον τόκον φέρουν 250 δραχμαὶ εἰς 1 ἔτος 5 μῆνας καὶ 12 ἡμέρας πρὸς 9% ; (τρέπομεν τὸν συμμιγῆ εἰς ἡμέρας).

448. Κάνε μόνος σου 3 προβλήματα· εἰς τὸ ἕνα ὁ χρόνος νὰ εἶναι ἔτη, εἰς τὸ ἄλλο μῆνες καὶ εἰς τὸ τρίτον ἡμέραι.

Προβλήματα εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται τὸ κεφάλαιον

Πρόβλημα 1ον: Ποῖον κεφάλαιον τοκιζόμενον εἰς 3 ἔτη πρὸς 10 % φέρει τόκον 450 δραχμάς ;

Κατάταξις

Κεφάλαιον 100 δρχ. εἰς 1 ἔτος φέρει τόκον 10 δραχμὰς
» X » » 3 » » » 450 »

Σύγκρισις: 1) **τόκου** καὶ **κεφαλαίου**

Τόκον 10 δραχμῶν φέρει κεφάλαιον 100 δραχμῶν. Διπλάσιον τόκον θὰ φέρῃ διπλάσιον κεφάλαιον (ποσὰ ἀνάλογα).

2) **χρόνου** καὶ **κεφαλαίου**

Εἰς 1 ἔτος φέρει 10 δραχμὰς τόκον κεφάλαιον 100 δραχμῶν. Εἰς 2 ἔτη τὸν ἴδιον τόκον θὰ φέρῃ τὸ ἥμισυ κεφάλαιον (ποσὰ ἀντίστροφα). Ἄρα θὰ ἔχωμε :

$$X = 100 \times \frac{1}{3} \times \frac{450}{10} = \frac{100 \times 450}{3 \times 10} = 1.500 \text{ δραχ.}$$

Πρόβλημα 2ον: Πόσον κεφάλαιον πρέπει νὰ καταθέσωμεν εἰς τὸ Ταμιευτήριον πρὸς 6 %, διὰ νὰ λάβωμεν εἰς 5 μῆνας τόκον 200 δραχμῶν ;

Κατάταξις

100 δρχ. εἰς 12 μῆνας φέρουν τόκον 6 δρχ
X » » 5 » » » 200 »

Τὰ ποσά : **τόκος** καὶ **κεφάλαιον** εἶναι ἀνάλογα. Τὰ ποσά : **χρόνος** καὶ **κεφάλαιον** εἶναι ἀντίστροφα. Ἄρα θὰ ἔχωμε :

$$X = 100 \times \frac{12}{5} \times \frac{200}{6} = \frac{100 \times 12 \times 200}{5 \times 6} = 8.000 \text{ δραχ.}$$

Πρόβλημα 3ον: Ποῖον κεφάλαιον τοκιζόμενον πρὸς 20 % θὰ φέρῃ εἰς 25 ἡμέρας τόκον 5.000 δραχμάς ;

Κατάταξις

100 δρχ. εἰς 360 ἡμέρας φέρουν τόκον 20 δρχ
X » » 25 » » » 5.000 »

Τὰ ποσά : **τόκος** καὶ **κεφάλαιον** εἶναι ἀνάλογα. Τὰ ποσά : **χρόνος** καὶ **κεφάλαιον** εἶναι ἀντίστροφα. Ἄρα θὰ ἔχωμε :

$$X = 100 \times \frac{350}{25} \times \frac{5.000}{20} = \frac{100 \times 360 \times 5.000}{25 \times 20} = 360.000 \text{ δρχ.}$$

Ἀπὸ τὴν λύσιν τῶν ἀνωτέρω τριῶν προβλημάτων βλέπομεν ὅτι :

Α΄) Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ κεφάλαιον, ὅταν ὁ χρόνος εἶναι ἔτη, πολλαπλασιάζομεν τὸν τόκον ἐπὶ 100 καὶ ἔπειτα διαιροῦμεν διὰ τοῦ γινομένου τῶν δύο ἄλλων ποσῶν.

Β΄) Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ κεφάλαιον, ὅταν ὁ χρόνος εἶναι μῆνες, πολλαπλασιάζομεν τὸν τόκον ἐπὶ 1.200 καὶ ἔπειτα διαιροῦμεν διὰ τοῦ γινομένου τῶν δύο ἄλλων ποσῶν.

Γ΄) Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ κεφάλαιον, ὅταν ὁ χρόνος εἶναι ἡμέραι, πολλαπλασιάζομεν τὸν τόκον ἐπὶ 36.000 καὶ ἔπειτα διαιροῦμεν διὰ τοῦ γινομένου τῶν δύο ἄλλων ποσῶν.

Ὁ **τύπος**, λοιπόν, **τοῦ κεφαλαίου** εἶναι :

$$K = \frac{100 \cdot T}{X \cdot E} \quad \text{ὅταν ὁ χρόνος εἶναι ἔτη}$$

$$K = \frac{1200 \cdot T}{M \cdot E} \quad \text{ὅταν ὁ χρόνος εἶναι μῆνες}$$

$$K = \frac{36.000 \cdot T}{H \cdot E} \quad \text{ὅταν ὁ χρόνος εἶναι ἡμέραι.}$$

Μὲ τὸν τύπον αὐτὸν λύομεν εὐκόλως κάθε πρόβλημα, εἰς τὸ ὁποῖον ζητεῖται τὸ κεφάλαιον, ἂν ἀντὶ τῶν γραμμάτων θέσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς τοῦ προβλήματος καὶ ὕστερα ἐκτελέσωμεν τὰς πράξεις.

Παράδειγμα : Πόσον κεφάλαιον πρέπει νὰ καταθέσωμεν εἰς τὴν τράπεζαν πρὸς 5%, διὰ νὰ λάβωμεν τόκον 40 δραχμάς :

α) εἰς 2 ἔτη ; $K = \frac{100 \cdot T}{X \cdot E} = \frac{100 \times 40}{2 \times 5} = 400$ δραχ.

β) εἰς 8 μῆνας ; $K = \frac{1.200 \cdot T}{M \cdot E} = \frac{1.200 \times 40}{8 \times 5} = 1.200$ δραχ.

γ) εἰς 50 ἡμέρας ; $K = \frac{36.000 \cdot T}{H \cdot E} = \frac{36.000 \times 40}{50 \times 5} = 5.760$ δραχ.

Προβλήματα

449. Ποῖον κεφάλαιον, ἂν τοκισθῇ 3 ἔτη πρὸς 7,5%, θὰ φέρῃ τόκον 81 δραχμάς ;

450. Ἕνας κατέθεσεν εἰς τὴν Τράπεζαν ἕνα ποσὸν χρημάτων πρὸς 6%. Ἔπειτα ἀπὸ 8 μῆνας καὶ 20 ἡμέρας εἰσέπραξε 104 δραχμὰς τόκον. Πόσας δραχμὰς εἶχε καταθέσει εἰς τὴν Τράπεζαν ;

451. Πόσας δραχμὰς πρέπει νὰ τοκίσῃ ἕνας πρὸς 15%, διὰ νὰ λάβῃ τόκον ὕστερα ἀπὸ 9 μῆνας 180 δραχμάς ;

452. Ποῖον κεφάλαιον εἰς 1 ἔτος 5 μῆνας καὶ 20 ἡμέρας, ἂν τοκισθῇ πρὸς 12%, θὰ φέρῃ τόκον 318 δραχμάς ;

453. Κάνε μόνος σου τρία ὅμοια προβλήματα ποὺ νὰ ζητῆται τὸ κεφάλαιον· εἰς τὸ ἕνα ὁ χρόνος νὰ εἶναι ἔτη, εἰς τὸ ἄλλο μῆνες καὶ εἰς τὸ τρίτον ἡμέραι.

Προβλήματα εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται τὸ ἐπιτόκιον

Πρόβλημα 1ον : Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον ἐτοκίσθη κεφάλαιον 6.000 δραχμῶν, τὸ ὁποῖον εἰς 4 ἔτη ἔφερε τόκον 2.400 δραχμάς ;

Κεφάλαιον 6.000 δραχ. εἰς 4 ἔτη φέρει τόκον 2.400 δραχ.
» 100 » » 1 » » » X

Σύγκρισις : 1) **κεφαλαίου** καὶ **τόκου**

Κεφάλαιον 6.000 δραχμῶν φέρει τόκον 2.400 δραχμάς. Διπλάσιον κεφάλαιον θὰ φέρῃ διπλάσιον τόκον (ποσὰ ἀνάλογα).

2) **χρόνου** καὶ **τόκου**

Εἰς 4 ἔτη ὁ τόκος εἶναι 2.400 δραχμάς. Εἰς 8 ἔτη ὁ τόκος εἶναι διπλάσιος (ποσὰ ἀνάλογα). Ἄρα θὰ ἔχωμε :

$$X = 2.400 \times \frac{100}{6.000} \times \frac{1}{4} = \frac{100 \times 2.400}{4 \times 6.000} = 10\%.$$

Πρόβλημα 2ον : Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον ἐτοκίσθη κεφάλαιον 500 δραχμῶν, τὸ ὁποῖον εἰς 9 μῆνας ἔφερεν τόκον 60 δραχμάς ;

Κατάταξις

Κεφάλαιον	500	δραχ.	εἰς	9 μῆνας	φέρει	τόκον	60	δραχ
»	100	»		12 »	»	»	X	»

Ἐπειδὴ τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα, θὰ ἔχωμε :

$$X = 60 \times \frac{100}{500} \times \frac{12}{9} = \frac{1.200 \times 60}{9 \times 500} = 16\%.$$

Πρόβλημα 3ον : Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον ἐτοκίσθη κεφάλαιον 1.000.000 δραχμῶν, τὸ ὁποῖον εἰς 40 ἡμέρας ἔφερε τόκον 15.000 δραχμάς ;

Κατάταξις

Κεφάλαιον	1.000.000	δραχ.	εἰς	40 ἡμέρας	φέρει	τόκον	1.500	δραχ
»	100	»	»	360 »	»	»	X	»

Ἐπειδὴ τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα, θὰ ἔχωμε :

$$X = 15.000 \times \frac{100}{1.000.000} \times \frac{360}{40} = \frac{36.000 \times 15.000}{40 \times 1.000.000} = 13,5\%$$

Ἀπὸ τὴν λύσιν τῶν ἀνωτέρω τριῶν προβλημάτων βλέπομεν ὅτι :

Α΄) Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐπιτόκιον, ὅταν ὁ χρόνος εἶναι ἔτη, πολλαπλασιάζομεν τὸν τόκον ἐπὶ 100 καὶ ἔπειτα διαιροῦμεν διὰ τοῦ γινομένου τῶν δύο ἄλλων ποσῶν.

Β΄) Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐπιτόκιον, ὅταν ὁ χρόνος εἶναι μῆνες, πολλαπλασιάζομεν τὸν τόκον ἐπὶ 1.200 καὶ ἔπειτα διαιροῦμεν διὰ τοῦ γινομένου τῶν δύο ἄλλων ποσῶν.

Γ΄) Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐπιτόκιον, ὅταν ὁ χρόνος εἶναι ἡμέραι, πολλαπλασιάζομεν τὸν τόκον ἐπὶ 36.000 καὶ ἔπειτα διαιροῦμεν διὰ τοῦ γινομένου τῶν δύο ἄλλων ποσῶν.

Ὁ **τύπος**, λοιπόν, τοῦ **ἐπιτοκίου** εἶναι :

$$E = \frac{100 \cdot T}{X \cdot K} \quad \text{ἢ} \quad E = \frac{1.200 \cdot T}{M \cdot K} \quad \text{ἢ} \quad E = \frac{36.000 \cdot T}{H \cdot K}$$

Μὲ τὸν τύπον αὐτὸν λύομεν εὐκόλως κάθε πρόβλημα εἰς τὸ ὁποῖον ζητεῖται τὸ ἐπιτόκιον, ἄν, ἀντὶ τῶν γραμμάτων, θέσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς τοῦ προβλήματος καὶ ἔπειτα ἐκτελέσωμεν τὰς πράξεις.

Προβλήματα

454. Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον ἐτοκίσθη κεφάλαιον 450 δραχμῶν, τὸ ὁποῖον εἰς 6 ἔτη ἔφερεν τόκον 270 δραχμάς ;

455. Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον ἐτοκίσθη κεφάλαιον 1.200 δραχμῶν, τὸ ὁποῖον εἰς 9 μῆνας καὶ 10 ἡμέρας ἔφερε τόκον 112 δραχμάς ;

456. Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον ἐτοκίσθη κεφάλαιον 3.000 δραχμῶν, τὸ ὁποῖον εἰς 1 ἔτος 2 μῆνας καὶ 20 ἡμέρας ἔφερε τόκον 330 δραχμάς ;

457. Ἕνας ἐδανείσθη 800 δραχμὰς καὶ ὑπεσχέθη μετὰ 5 μῆνας νὰ ἐπιστρέψῃ εἰς τὸν δανειστήν του 900 δραχμὰς (δηλ. 100 δραχ. τόκον). Μὲ πόσον τοῖς ἑκατὸν ἐδανείσθη ;

458. Τὸ Σχολικὸν Ταμεῖον κατέθεσεν εἰς τὸ Ταμιευτήριον 2.700 δραχμάς. Μετὰ 6 μῆνας καὶ 20 ἡμέρας ἀπέσυρε τὰ χρήματα, καὶ πῆρε διὰ κεφάλαιον καὶ τόκον μαζὶ 2.760 δραχμάς. Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον δέχεται καταθέσεις τὸ Ταμιευτήριον ;

459. Κάνε μόνος σου τρία ὅμοια προβλήματα, ποὺ νὰ ζητῆται τὸ ἐπιτόκιον εἰς τὸ ἕνα ὁ χρόνος νὰ εἶναι ἔτη, εἰς τὸ ἄλλο ὁ χρόνος νὰ εἶναι μῆνες καὶ εἰς τὸ τρίτον ἡμέραι.

Προβλήματα εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται ὁ χρόνος

Πρόβλημα 1ον : Εἰς πόσον χρόνον κεφάλαιον 1.500 δραχμῶν, ἂν τοκισθῇ πρὸς 8 % φέρει τόκον 300 δραχμάς ;

Κατάταξις

Κεφάλαιον	100	δραχ.	εἰς	360	ἡμέρας	φέρει	τόκον	8 δραχ
»	1.500	»	»	X	»	»	»	300 »

Σύγκρισις : 1) **κεφαλαίου** καὶ **χρόνου**

Κεφάλαιον 100 δραχμῶν φέρει 8 δραχ τόκον εἰς 360 ἡμέρας. Διπλάσιον κεφάλαιον φέρει τὸν ἴδιον τόκον εἰς τὸ ἥμισυ τῶν ἡμερῶν (ποσὰ ἀντίστροφα).

2) **τόκου** καὶ **χρόνου**

Τόκον 8 δραχμὰς φέρει ἕνα κεφάλαιον εἰς 360 ἡμέρας. Διπλάσιον τόκον, τὸ ἴδιον κεφάλαιον, θὰ φέρῃ εἰς διπλασίας ἡμέρας (ποσὰ ἀνάλογα).

Ἄρα θὰ ἔχωμε :

$$X = 360 \times \frac{100}{1.500} \times \frac{300}{8} = \frac{36.000 \times 300}{1.500 \times 8} = 900 \text{ ἡμέρας ἢ}$$

$$900 : 30 = 30 \text{ μῆνας} = 2 \text{ ἔτη καὶ } 6 \text{ μῆνας.}$$

Ἀπὸ τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος αὐτοῦ βλέπομεν ὅτι :

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν χρόνον, πολλαπλασιάζομεν τὸν τόκον ἐπὶ 36.000 καὶ ἔπειτα τὸν διαιροῦμεν διὰ τοῦ γινομένου τῶν δύο ἄλλων ποσῶν (κεφαλαίου καὶ ἐπιτοκίου).

Ὅπως βλέπομεν, τὸν χρόνον τὸν εὑρίσκομεν πρῶτον εἰς ἡμέρας, ἔπειτα διαιροῦμεν τὰς ἡμέρας διὰ τοῦ 30 καὶ εὑρίσκομεν μῆνας καὶ τέλος διαιροῦμεν τοὺς μῆνας διὰ 12 καὶ εὑρίσκομεν ἔτη.

Ὁ **τύπος**, λοιπόν, **τοῦ χρόνου** εἶναι :

$$H = \frac{36.000 \cdot T}{K \cdot E} \quad (\text{ ὁ χρόνος εἰς ἡμέρας })$$

Παράδειγμα : Εἰς πόσον χρόνον κεφάλαιον 560 δραχμῶν, ἂν τοκισθῇ πρὸς 10%, θὰ φέρῃ τόκον 21 δραχμάς ;

Λύσις : $H = \frac{36.000 \cdot T}{K \cdot E} = \frac{36.000 \times 21}{560 \times 10} = 135 \text{ ἡμέραι ἢ}$

(135 : 30) 4 μῆνες καὶ 15 ἡμέραι.

Προβλήματα

460. Διὰ πόσον χρόνον πρέπει νὰ τοκίσωμεν κεφάλαιον 6500 δραχμῶν πρὸς 15%, διὰ νὰ εἰσπράξωμεν τόκον 1300 δραχμάς ;

461. Εἰς πόσον χρόνον 4800 δραχμαί, ἂν τοκισθοῦν πρὸς 8%, γίνονται μὲ τοὺς τόκους των 6000 δραχμαί ;

462. Ἕνας ἐδανείσθη 2.500 δραχμὰς πρὸς 16% καὶ ἐξώφλησε τὸ χρέος του μὲ 2.800 δραχμάς. Πόσον χρόνον διήρκεσε τὸ δάνειον ;

463. Εἰς πόσον χρόνον ἕνα κεφάλαιον 4500 δραχμῶν, ἂν τοκισθῇ πρὸς 12,5%, θὰ γίνῃ μαζὶ μὲ τοὺς τόκους 5000 δραχμαί ;

464. Κάνε μόνος σου ἕνα πρόβλημα, ποὺ νὰ ζητῆται ὁ χρόνος.

Ἀνακεφαλαίωσις

Τύποι τῶν προβλημάτων τοῦ τόκου

1) $T = \dfrac{K \cdot E \cdot X}{100}$ ἢ $\dfrac{K \cdot E \cdot M}{1.200}$ $\dfrac{K \cdot E \cdot H}{36.000}$

2) $K = \dfrac{100 \cdot T}{X \cdot E}$ ἢ $\dfrac{1.200 \cdot T}{M \cdot E}$ ἢ $\dfrac{36.000 \cdot T}{H \cdot E}$

3) $E = \dfrac{100 \cdot T}{K \cdot X}$ ἢ $\dfrac{1.200 \cdot T}{K \cdot M}$ ἢ $\dfrac{36.000 \cdot T}{K \cdot H}$

4) $H = \dfrac{36.000 \cdot T}{K \cdot E}$

Ὥστε :

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν τόκον, πολλαπλασιάζομεν τὰ τρία ἄλλα ποσὰ καὶ ἔπειτα διαιροῦμεν διὰ 100 ἢ 1.200 ἢ 36.000.

Διὰ νὰ εὕρωμεν ὁποιοδήποτε ἄλλο ποσόν, πολλαπλασιάζομεν τὸν τόκον ἐπὶ 100 ἢ 1.200 ἢ 36.000 καὶ ἔπειτα διαιροῦμεν διὰ τοῦ γινομένου τῶν δύο ἄλλων ποσῶν.

Προβλήματα

465. Ἕνας γεωργὸς ἐδανείσθη 3.500 δραχμὰς διὰ 2 ἔτη πρὸς 8%. Ὅταν ἔληξεν ἡ προθεσμία, ὁ γεωργὸς ἔδωσεν εἰς τὸν δανειστήν του 725 κιλὰ σίτου πρὸς 2,80 δραχμὰς τὸ κιλόν. Πόσας δραχμὰς πρέπει νὰ τοῦ δώσῃ ἀκόμη, διὰ νὰ ἐξοφλήσῃ τὸ χρέος του ;

466. Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον πρέπει νὰ τοκισθοῦν 2.500 δραχμαὶ διὰ νὰ γίνουν μετὰ 1 ἔτος καὶ ἓξ μῆνας, μαζὶ μὲ τὸν τόκον 2.800 δραχμαί ;

467. Ἕνας λαμβάνει κάθε 6 μῆνας ἀπὸ τὴν Τράπεζαν 375 δραχμὰς τόκον ἀπὸ ἕνα ποσὸν ποὺ εἶχε καταθέσει πρὸς 5%. Πόσον κεφάλαιον εἶχεν καταθέσει ;

468. Ἕνας ἔμπορος ἐδανείσθη τὴν 1 Φεβρουαρίου 3.600 δραχμὰς πρὸς 10%. Τὴν 1ην Δεκεμβρίου τοῦ ἰδίου ἔτους ἐξώφλησε τὸ χρέος του. Πόσα ἐπλήρωσε μαζὶ μὲ τὸν τόκον ;

469. Ἕνας ἐπώλησε 2.600 κιλὰ οἴνου πρὸς 4 δραχμὰς τὸ κιλόν. Τὰ χρήματα ποὺ ἐπῆρε τὰ ἐδάνεισε πρὸς 13%. Πόσον τόκον θὰ εἰσπράξῃ μετὰ 4 μῆνας καὶ 24 ἡμέρας ;

470. Ἕνας γεωργὸς ἐπῆρε ἀπὸ τὴν Ἀγροτικὴν Τράπεζαν τὴν 5ην Μαρτίου δάνειον 2.500 δραχμῶν πρὸς 9%, διὰ νὰ καλλιεργήσῃ τὰ κτήματά του. Τὴν 5ην Ἰουνίου τοῦ ἑπομένου ἔτους ἐπέστρεψε τὰ χρήματα. Πόσα χρήματα ἐπέστρεψε μαζὶ μὲ τὸν τόκον ;

471. Ἕνας ἐδανείσθη 5.000 δραχμὰς πρὸς 15% διὰ ἕνα ἔτος, ἀλλὰ μετὰ 4 μῆνας ἔδωσεν ἀπέναντι τοῦ χρέους του 2.000 δραχμάς. Πόσας δραχμὰς πρέπει νὰ δώσῃ εἰς τὸ τέλος τοῦ ἔτους, διὰ νὰ ἐξοφλήσῃ τὸ χρέος του ;

472. Ἕνας ἔμπορος ἠγόρασε δύο τόπια ὕφασμα. Τὸ ἕνα, ποὺ ἦτο 85,5 μέτρα, τὸ ἠγόρασε πρὸς 60 δραχμάς τὸ μέτρον καὶ τὸ ἄλλο, ποὺ ἦτο 60,5 μέτρα, πρὸς 45 δραχμάς τὸ μέτρον. Τὴν ἀξίαν τῶν δύο ὑφασμάτων συνεφώνησαν νὰ τὴν πληρώσῃ ἔπειτα ἀπὸ 9 μῆνας πρὸς 8%. Πόσας δραχμὰς θὰ πληρώσῃ εἰς τὸ τέλος τῶν 9 μηνῶν μαζὶ μὲ τοὺς τόκους, διὰ νὰ ἐξοφλήσῃ τὸ χρέος του ;

473. Ἕνας ἔμπορος ἐδανείσθη τὴν 10ην Αὐγούστου 1958 ἀπὸ τὴν Τράπεζαν 4.500 δραχμὰς καὶ τὴν 20ὴν Νοεμβρίου 1959 ἐπλήρωσε, διὰ νὰ ἐξοφλήσῃ τὸ χρέος του, διὰ τόκον καὶ κεφάλαιον μαζὶ 5.100 δραχμάς. Πρὸς πόσον τοῖς ἑκατὸν εἶχε κάνει τὸ δάνειον ;

474. Ἕνας χωρικὸς ἐδανείσθη 1.500 δραχμὰς πρὸς 15%, διὰ νὰ ἀγοράσῃ μίαν ἀγελάδα. Μετὰ 8 μῆνας ἔδωσε εἰς τὸν δανειστήν του 450 κιλὰ σίτου πρὸς 2,30 δραχμὰς τὸ κιλόν. Πόσας δραχμὰς πρέπει νὰ τοῦ δώσῃ ἀκόμη, διὰ νὰ ἐξοφλήσῃ τὸ χρέος του μαζὶ μὲ τοὺς τόκους ;

475. Ἕνας εἰσπράττει ἀπὸ ἐνοίκιον μιᾶς οἰκίας 1450 δραχμὰς τὸ μῆνα. Ποῖον κεφάλαιον θὰ τοῦ ἔδινε τὸ ἴδιον εἰσόδημα, ἐὰν ἐτοκίζετο πρὸς 12% ;

476. Ἕνας ἠγόρασεν ἕνα οἰκόπεδον 450 τετρ. μέτρων πρὸς 105 δραχμὰς τὸ τετραγωνικὸν μέτρον. Ἐπλήρωσε τὸ $\frac{1}{3}$ τῆς ἀξίας ἀμέσως, τὸ δὲ ὑπόλοιπον τὸ ἐπλήρωσε μετὰ 9 μῆνας μαζὶ μὲ τὸν τόκον πρὸς 12,5%. Πόσας δραχμὰς ἐπλήρωσεν ἀμέσως καὶ πόσας μετὰ 9 μῆνας ;

477. Ἕνας ἐτόκισεν 2.400 δραχμὰς πρὸς 6% διὰ 1 ἔτος καὶ 6 μῆνας. Πόσον κεφάλαιον ἔπρεπε νὰ τοκίσῃ πρὸς 10%, διὰ νὰ εἰσπράξῃ τὸν ἴδιον τόκον εἰς τὸ αὐτὸ χρονικὸν διάστημα ;

478. Ἕνας ἐξώδευσε 300.000 δραχμάς, διὰ νὰ κτίσῃ ἕνα σπίτι.

Πόσο πρέπει νὰ τὸ ἐνοικιάσῃ τὸν μῆνα, διὰ νὰ ἔχῃ εἰσόδημα 8% ἐπὶ τῶν χρημάτων ποὺ ἐξώδευσε ;

479. Ἕνας ἐδανείσθη χρήματα πρὸς 15% καὶ μετὰ 2 ἔτη 3 μῆνας καὶ 10 ἡμέρας ἐπλήρωσε τόκον 1025 δραχμάς. Πόσας δραχμὰς ἦτο τὸ κεφάλαιον ποὺ ἐδανείσθη ;

480. Ἕνας εἶχε 8.400 δραχμάς. Ἀπὸ αὐτὰς ἐδάνεισε τὰ $^2/_5$ πρὸς 10% καὶ τὰ ὑπόλοιπα πρὸς 15%. Πόσας δραχμὰς θὰ εἰσπράξῃ μαζὶ μὲ τοὺς τόκους ἔπειτα ἀπὸ 2 ἔτη :

481. Ἕνας ἐδάνεισε 7.200 δραχμὰς πρὸς 7,5%. Μετὰ πόσον χρόνον θὰ εἰσπράξῃ τόκον ἴσον πρὸς τὰ $^5/_8$ τοῦ κεφαλαίου ποὺ ἐδάνεισε ;

482. Ἕνας ἀμπελουργὸς ἐδανείσθη 2.700 δραχμὰς πρὸς 10%. Διὰ νὰ ἐξοφλήσῃ τὸ χρέος του, ἔδωσε μετὰ ἀπὸ 8 μῆνας 720 κιλὰ οἴνου. Πόσας δραχμὰς ὑπελόγισαν τὸ κιλὸ τὸν οἶνον ;

483. Ἕνας ἔμπορος ἐδανείσθη 4.500 δραχμὰς πρὸς 10% διὰ ἕνα ἔτος, ἀλλὰ μετὰ 4 μῆνας ἐπλήρωσεν ἔναντι τοῦ χρέους του 2.130 δραχμάς. Πόσας δραχμὰς πρέπει νὰ δώσῃ εἰς τὸ τέλος τοῦ ἔτους, διὰ νὰ ἐξοφλήσῃ τὸ χρέος του ;

484. Ἕνας κτηνοτρόφος ἐπώλησε 280 κιλὰ τυρὶ πρὸς 8,50 δραχμὰς τὸ κιλὸν καὶ $20\frac{2}{5}$ κιλὰ βούτυρον πρὸς 40 δραχμὰς τὸ κιλόν. Τὰ χρήματα ποὺ ἔλαβε τὰ κατέθεσε εἰς τὴν Τράπεζαν πρὸς 4%. Πόσας δραχμὰς θὰ πάρῃ μαζὶ μὲ τοὺς τόκους ὕστερα ἀπὸ 1 ἔτος καὶ 3 μῆνας ;

ΠΕΡΙ ΥΦΑΙΡΕΣΕΩΣ

Γραμμάτιον

Ὅπως εἴδομεν εἰς τὰ προβλήματα τοῦ τόκου, ὅταν ἕνας δανείζῃ χρήματα εἰς ἄλλον, τὰ δανείζει δι' ὡρισμένον χρόνον καὶ μὲ ὡρισμένον ἐπιτόκιον. Ὁ δανειστής, διὰ νὰ εἶναι βέβαιος ὅτι τὴν ὡρισμένην προθεσμίαν θὰ τοῦ ἐπιστραφοῦν τὰ χρήματά του, παίρνει ἀπὸ τὸν ὀφειλέτην του μίαν ἀπόδειξιν. Εἰς τὴν ἀπόδειξιν αὐτὴν ὁ ὀφειλέτης ὑπόσχεται νὰ πληρώσῃ εἰς τὸν δανειστὴν εἰς ὡρισμένην ἡμερομηνίαν τὸ ποσὸν τῶν χρημάτων ποὺ ἐδανείσθη καὶ τὸν τόκον τῶν χρημάτων.

Ἡ ἀπόδειξις αὐτὴ λέγεται **γραμμάτιον**.

Ἕνα παράδειγμα: Ὁ κ. Γ. Δημητρίου εἰς τὰς 10 Μαΐου 1959 ἐδάνεισεν εἰς τὸν κ. Π. Γεωργίου 800 δραχμὰς πρὸς 12%, μὲ τὴν συμφωνίαν ὅτι τὸ χρέος θὰ ἐξοφληθῇ μετὰ 7 μῆνας (δηλ. τὴν 10ην Δεκεμβρίου 1959).

Πρὶν γραφῇ τὸ γραμμάτιον, εὑρίσκεται ὁ τόκος τῶν 800 δραχμῶν εἰς 7 μῆνας πρὸς 12%. Ὁ τόκος αὐτὸς εἶναι :

$$T = \frac{K \cdot E \cdot M}{1.200} = \frac{800 \times 12 \times 7}{1.200} = 56 \text{ δραχ.}$$

Ὁ τόκος αὐτὸς προστίθεται εἰς τὸ κεφάλαιον τῶν 800 δραχμῶν καὶ γίνεται κεφάλαιον καὶ τόκος μαζὶ 856 δραχμαί.

Ἔπειτα γράφεται τὸ γραμμάτιον, ὡς ἑξῆς :

Ἐν Ἀθήναις τῇ 10ῃ Μαΐου 1959. Διὰ δραχμὰς 856

Μετὰ ἑπτὰ μῆνας ἀπὸ σήμερον ὑπόσχομαι καὶ ὑποχρεοῦμαι νὰ πληρώσω εἰς τὸν κ. Γεωργ. Δημητρίου ἢ εἰς διαταγὴν αὐτοῦ ὀκτακοσίας πεντήκοντα ἓξ δραχμὰς (856), τὰς ὁποίας ἔλαβον παρ' αὐτοῦ εἰς μετρητὰ (ἢ εἰς ἐμπορεύματα). (ὑπογραφὴ) Παν. Γεωργίου

Καὶ ὁ μὲν ὀφειλέτης λαμβάνει 800 δραχμὰς καὶ ὑπογράφει τὸ γραμμάτιον διὰ 856 δραχμάς, ὁ δὲ δανειστὴς λαμβάνει τὸ γραμμάτιον.

Εἰς τὸ ἀνωτέρω γραμμάτιον, ὅπως καὶ εἰς κάθε γραμμάτιον, γράφεται : 1) τὸ χρηματικὸν ποσὸν ποὺ ὑπόσχεται νὰ πληρώσῃ ὁ ὀφειλέτης. Τὸ ποσὸν αὐτὸ (δηλ. αἱ 856 δραχμαὶ) λέγεται **ὀνομαστικὴ ἀξία** τοῦ γραμματίου. 2) ὁ χρόνος ποὺ πρέπει τὸ γραμμάτιον νὰ ἐξοφληθῇ. Ἡ ἡμερομηνία, κατὰ τὴν ὁποίαν ὁ ὀφειλέτης εἶναι ὑποχρεωμένος νὰ πληρώσῃ τὸ χρέος του, λέγεται **ἡμέρα λήξεως** τοῦ γραμματίου. Εἰς τὸ ἀνωτέρω γραμμάτιον ἡμέρα λήξεως εἶναι ἡ **10η Δεκεμβρίου 1959**.

Ἐπίσης εἰς τὸ ἀνωτέρω γραμμάτιον ὑπάρχουν αἱ λέξεις **εἰς διαταγήν**, διὰ τοῦτο τὸ γραμμάτιον λέγεται : **γραμμάτιον εἰς διαταγήν**.

Ἀσκήσεις

485. Ὁ κ. Ν. Ἀντωνίου ἐδανείσθη σήμερον ἀπὸ τὸν κ. Γ. Παπαγεωργίου 1.500 δραχμὰς διὰ 8 μῆνας πρὸς 10%.

Νὰ ὑπολογίσῃς πόση θὰ εἶναι ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου καὶ νὰ γράψῃς τὸ γραμμάτιον εἰς ἕνα φύλλο χαρτί.

486. Ὁ ἔμπορος Γ. Πετρίδης τὴν 1ην Δεκεμβρίου 1958 ἐδανείσθη ἀπὸ τὴν Ἐθνικὴν Τράπεζαν 4.500 δραχμὰς διὰ 6 μῆνας πρὸς 10%.
Γράψε τὸ γραμμάτιον εἰς ἕνα φύλλον χαρτί.

487. Ὁ ἔμπορος Κ. Ἰωάννου ἠγόρασεν ἀπὸ τὸν ἔμπορον Π. Ἀντωνιάδην ἐμπορεύματα ἀξίας 2.000 δραχμῶν, μὲ τὴν συμφωνίαν νὰ τὸ πληρώσῃ ἔπειτα ἀπὸ 3 μῆνας πρὸς 8%.
Γράψε τὸ γραμμάτιον ποὺ θὰ πάρῃ ὁ δανειστής.

Προεξόφλησις γραμματίου

Ὁ κάτοχος τοῦ γραμματίου θὰ εἰσπράξῃ τὰ χρήματά του τὴν ἡμέραν τῆς λήξεως τοῦ γραμματίου. Ἄν, τώρα, ἔχῃ ἀνάγκη ἀπὸ χρήματα, προεξοφλεῖ τὸ γραμμάτιον, δηλαδὴ τὸ πωλεῖ εἰς ἄλλον πρὸ τῆς λήξεώς του. Ἐκεῖνος ποὺ θὰ τὸ ἀγοράσῃ, δὲν θὰ δώσῃ εἰς τὸν κάτοχον τοῦ γραμματίου ὁλόκληρον τὸ ποσὸν τῆς ὀνομαστικῆς ἀξίας τοῦ γραμματίου, ἀλλὰ θὰ κρατήσῃ τὸν τόκον τῆς ὀνομαστικῆς ἀξίας τοῦ γραμματίου διὰ τὸ χρονικὸν διάστημα ἀπὸ τὴν ἡμέραν τῆς προεξοφλήσεως ἕως τὴν ἡμέραν τῆς λήξεως τοῦ γραμματίου μὲ ὡρισμένον ἐπιτόκιον.

Παράδειγμα : Ὅπως εἴδομεν εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα, ὁ κ. Γ. Δημητρίου εἶναι κάτοχος ἑνὸς γραμματίου 856 δραχμῶν ποὺ λήγει τὴν 10ην Δεκεμβρίου 1959. Ἐπειδὴ αὐτὸς ἔχει ἀνάγκην ἀπὸ χρήματα, προεξοφλεῖ τὸ γραμμάτιον δύο μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του (δηλ. τὴν 10ην Ὀκτωβρίου 1959) πρὸς 15%. Πόσας δραχμὰς θὰ εἰσπράξῃ ;

Λύσις : Θὰ εὕρωμεν τὸν τόκον τῶν 856 δραχμῶν πρὸς 15% εἰς 2 μῆνας : $T = \dfrac{K \cdot E \cdot M}{1.200} = \dfrac{856 \times 15 \times 2}{1.200} = 21{,}40$ δραχ.

Τὸ ποσὸν τῶν 21,40 δραχμῶν, ποὺ θὰ κρατήσῃ ὁ ἀγοραστὴς τοῦ γραμματίου, λέγεται **ὑφαίρεσις** (σκόντο). Ἂν τώρα ἀφαιρέσωμεν τὴν ὑφαίρεσιν ἀπὸ τὴν ὀνομαστικὴν ἀξίαν, εὑρίσκομεν ὅτι : Ὁ κ. Δημητρίου θὰ εἰσπράξῃ (856 — 21,40) 834,60 δραχμάς. Τὸ ποσὸν αὐτὸ λέγεται **πραγματικὴ** ἢ **παροῦσα ἀξία** τοῦ γραμματίου.

Ὥστε κάθε γραμμάτιον ἔχει δύο ἀξίας : τὴν **ὀνομαστικήν**, δηλαδὴ ἐκείνην ποὺ γράφεται ἐπάνω εἰς τὸ γραμμάτιον καὶ τὴν **πραγματικήν**, δηλ. ἐκείνην ποὺ εὑρίσκεται ὅταν ἀφαιρέσωμεν τὴν ὑφαίρεσιν.

Τὰ προβλήματα τῆς ὑφαιρέσεως λύονται, ὅπως καὶ τὰ προβλήματα τοῦ τόκου. Πρέπει ὅμως νὰ γνωρίζωμεν ὅτι : ἡ **ὑφαίρεσις** εἶναι **τόκος** καὶ ἡ **ὀνομαστικὴ ἀξία** εἶναι **κεφάλαιον**.

Προβλήματα

488. Ἕνας προεξώφλησε γραμμάτιον ὀνομαστικῆς ἀξίας 7.500 δραχμῶν, 6 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του, πρὸς 10%. Τί ὑφαίρεσιν ἐπλήρωσε καὶ πόσας δραχμὰς εἰσέπραξε ;

489. Ἕνας προεξώφλησεν ἕνα γραμμάτιον ὀνομαστικῆς ἀξίας 3.800 δραχμῶν 4 μῆνας καὶ 20 ἡμέρας πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 12,5%. Πόσας δραχμὰς εἰσέπραξε ;

490. Ἕνα γραμμάτιον ὀνομαστικῆς ἀξίας 2.400 δραχμῶν, ποὺ ἔληγε τὴν 30ὴν Σεπτεμβρίου, προεξωφλήθη τὴν 15ην Μαρτίου τοῦ ἰδίου ἔτους πρὸς 12%. Ποία ἦτο ἡ ὑφαίρεσις καὶ ποία ἡ πραγματικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου ;

491. Ἕνας προεξώφλησε γραμμάτιον 6 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 15% καὶ ἐπλήρωσε ὑφαίρεσιν 45 δραχμάς. Ποία ἦτο ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου ;

492. Ἕνας προεξώφλησε γραμμάτιον 3 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 20% καὶ ἐπλήρωσεν ὑφαίρεσιν 180 δραχμάς. Πόσαι δραχμαὶ ἦτο ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου ;

493. Ἕνας προεξώφλησε γραμμάτιον 1.080 δραχμῶν πρὸς 15% καὶ ἐπλήρωσεν ὑφαίρεσιν 117 δραχμάς. Πόσας ἡμέρας πρὸ τῆς λήξεώς του ἔγινε ἡ προεξόφλησις ;

494. Ἕνας προεξώφλησε γραμμάτιον ὀνομαστικῆς ἀξίας 1.500 δραχμῶν πρὸς 9% καὶ εἰσέπραξεν 1.462,50 δραχμὰς (πραγματικὴ ἀξία). Πόσας ἡμέρας πρὸ τῆς λήξεώς του προεξωφλήθη ;

495. Ἕνα γραμμάτιον ὀνομαστικῆς ἀξίας 2.000 δραχμῶν προεξωφλήθη τὴν 30ὴν Νοεμβρίου 1959 πρὸς 9% μὲ ὑφαίρεσιν 50 δραχμάς. Πότε ἔληγε τὸ γραμμάτιον ;

496. Ἕνα γραμμάτιον ὀνομαστικῆς ἀξίας 3.000 δραχμῶν ἔληγε μετὰ 5 μῆνας καὶ προεξωφλήθη σήμερον ἀντὶ 2.825 δραχμῶν (πραγματικὴ ἀξία). Πρὸς πόσον τοῖς % ἔγινε ἡ προεξόφλησις ;

497. Ἕνας προεξώφλησε γραμμάτιον ὀνομαστικῆς ἀξίας 12.000 δραχμῶν 4 μῆνας καὶ 10 ἡμέρας πρὸ τῆς λήξεώς του μὲ ὑφαίρεσιν 910 δραχμάς. Πρὸς πόσον τοῖς ἑκατὸν προεξωφλήθη ;

498. Ἕνα γραμμάτιον ἔληγε τὴν 30ὴν Ἀπριλίου τοῦ 1960 καὶ προεξωφλήθη πρὸς 16% τὴν 20ὴν Δεκεμβρίου 1959 μὲ ὑφαίρεσιν 91 δραχμάς. Ποία ἦτο ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου ;

499. Κάνε μόνος σου ἕνα πρόβλημα εἰς τὸ ὁποῖον νὰ ζητῆται ἡ ὑφαίρεσις.

500. Ἐπίσης κάνε ἕνα πρόβλημα εἰς τὸ ὁποῖον νὰ ζητῆται ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου.

501. Κάνε ἕνα πρόβλημα εἰς τὸ ὁποῖον νὰ ζητῆται ὁ χρόνος.

502. Κάνε ἕνα πρόβλημα εἰς τὸ ὁποῖον νὰ ζητῆται τὸ ἐπιτόκιον.

ΜΕΡΙΣΜΟΣ ΕΙΣ ΜΕΡΗ ΑΝΑΛΟΓΑ

Πρόβλημα 1ον: Τρεῖς ἐργάται ἔσκαψαν ἕνα χαντάκι καὶ πῆραν διὰ τὴν ἐργασίαν αὐτὴν 150 δραχμάς. Ἀπὸ αὐτοὺς ὁ πρῶτος εἰργάσθη 7 ὥρας, ὁ δεύτερος 8 ὥρας καὶ ὁ τρίτος 10 ὥρας. Πόσας δραχμὰς πρέπει νὰ πάρῃ ὁ καθένας ;

Λύσις: Ἐπειδὴ οἱ τρεῖς ἐργάται δὲν εἰργάσθησαν τὰς ἰδίας ὥρας ἐργασίας, δὲν εἶναι σωστὸ νὰ μοιρασθοῦν τὰς 150 δραχμὰς καὶ νὰ πάρουν ἀπὸ ἴσον μερίδιον χρημάτων ὁ καθένας. Ἐκεῖνος ποὺ εἰργάσθη περισσοτέρας ὥρας, θὰ πρέπει νὰ πάρῃ περισσοτέρας δραχμὰς κ.ο.κ. Πρέπει, λοιπόν, νὰ μοιράσωμεν τὰς 150 δραχμὰς εἰς τρία μερίδια, ἀναλόγως μὲ τὰς ὥρας ἐργασίας τοῦ κάθε ἐργάτου.

Αἱ ὧραι ἐργασίας καὶ τῶν τριῶν ἐργατῶν εἶναι : $7 + 8 + 10 = 25$. Ἄρα πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὸ 150 διὰ τοῦ 25, διὰ νὰ εὕρωμεν μὲ πόσας δραχμὰς πρέπει νὰ πληρωθῇ ἡ κάθε ὥρα ἐργασίας.

Θὰ ἔχωμε : $150 : 25 = 6$ δραχμάς. Ἀφοῦ, λοιπόν, ὁ πρῶτος ἐργάτης εἰργάσθη 7 ὥρας θὰ πάρῃ $7 \times 6 = 42$ δραχ.
ὁ δεύτερος θὰ πάρῃ $8 \times 6 = 48$ δραχ.
ὁ τρίτος θὰ πάρῃ $10 \times 6 = 60$ δραχ.
Καὶ οἱ τρεῖς μαζί : 150 δραχ.

Βλέπομεν ὅτι οἱ ἀριθμοὶ 42, 48 καὶ 60 (δηλ. τὰ μερίδια τῶν τριῶν ἐργατῶν) ἔγιναν ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 7, 8 καὶ 10, ἀφοῦ οἱ ἀριθμοὶ αὐτοὶ ἐπολλαπλασιάσθησαν ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν 6.

Οἱ ἀριθμοὶ 42, 48 καὶ 60 λέγονται **ἀνάλογοι** τῶν ἀριθμῶν 7, 8 καὶ 10. Ὥστε :

Δύο ἢ περισσότεροι ἀριθμοὶ λέγονται ἀνάλογοι πρὸς ἄλλους, ἂν καθένας ἀπ' αὐτοὺς γίνεται ἀπὸ τὸν ἀντίστοιχόν του, ὅταν τὸν πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ ἕναν καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

Ὁ ἀριθμὸς 42 ἀντιστοιχεῖ μὲ τὸν 7, ὁ ἀριθμὸς 48 ἀντιστοιχεῖ μὲ τὸν 8, καὶ ὁ ἀριθμὸς 60 ἀντιστοιχεῖ μὲ τὸν 10.

Τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα, εἰς τὸ ὁποῖον ὁ ἀριθμὸς 150 ἐμερίσθη (ἐμοιράσθη) εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 7, 8 καὶ 10, λέγεται **πρόβλημα μερισμοῦ εἰς μέρη ἀνάλογα.**

Ὅπως εἴδομεν, ἐλύσαμεν τὸ πρόβλημα ὡς ἑξῆς :

1) Ἐπροσθέσαμεν τοὺς τρεῖς δοθέντας ἀριθμοὺς ($7+8+10=25$).

2) Ἐδιαιρέσαμεν τὸν ἀριθμὸν ποὺ πρόκειται νὰ μερίσωμεν διὰ τοῦ εὑρεθέντος ἀθροίσματος ($150:25=6$) καὶ

3) Ἐπολλαπλασιάσαμεν καθέναν ἀπὸ τοὺς δοθέντας ἀριθμοὺς ἐπὶ τὸ εὑρεθὲν πηλίκον, δηλ. ($7\times 6=42$), ($8\times 6=48$), ($10\times 6=60$).

Τὸ πρόβλημα δύναται νὰ λυθῇ καὶ μὲ ἄλλον τρόπον, ὡς ἑξῆς :

α) $\frac{150\times 7}{25}=42$ β) $\frac{150\times 8}{25}=48$ γ) $\frac{150\times 10}{25}=60$

Δηλαδή, πρῶτον πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀριθμὸν ποὺ πρόκειται νὰ μερίσωμεν ἐπὶ κάθε ἕναν δοθέντα ἀριθμόν, καὶ ἔπειτα διαιροῦμεν τὸ εὑρεθὲν γινόμενον διὰ τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν.

Ὥστε :

Διὰ νὰ μερίσωμεν ἕναν ἀριθμὸν εἰς μέρη ἀνάλογα δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν, πολλαπλασιάζομεν αὐτὸν ἐπὶ κάθε ἕναν ἀριθμόν, καὶ τὸ ἐξαγόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν.

Πρόβλημα 2ον: Νὰ μερισθῇ ὁ ἀριθμὸς 280 εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 6, 10, 12.

α) $\frac{280\times 6}{28}=60$ β) $\frac{280\times 10}{28}=100$ γ) $\frac{280\times 12}{28}=120$

Παρατήρησις: Ἂν οἱ ἀριθμοὶ 6, 10, 12 πολλαπλασιασθοῦν ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, π.χ. τὸν 3, καὶ μερίσωμεν τὸν ἀριθμὸν 280 εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν γινομένων : 18, 30, 36, θὰ εὕρωμεν τὰ ἴδια μέρη, δηλαδή :

α) $\frac{280\times 18}{84}=60$ β) $\frac{280\times 30}{84}=100$ γ) $\frac{280\times 36}{84}=120$

Ἐπίσης, ἂν διαιρέσωμεν τοὺς ἀριθμούς : 6, 10, 12 διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ (ὅταν διαιροῦνται ἀκριβῶς), π.χ. διὰ τοῦ 2, καὶ μερίσωμεν τὸν ἀριθμὸν 280 εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν εὑρεθέντων πηλίκων : 3, 5, 6, πάλι τὰ ἴδια μέρη θὰ εὕρωμεν, δηλ. :

α) $\frac{280 \times 3}{14} = 60$ β) $\frac{280 \times 5}{14} = 100$ γ) $\frac{280 \times 6}{14} = 120$

Πρόβλημα 3ον : Δύο κτίσται ἔκτισαν ἕναν τοῖχο καὶ εἰσέπραξαν 3.780 δραχμάς. Ὁ πρῶτος εἰργάσθη 5 ἡμέρας ἐπὶ 6 ὥρας κάθε ἡμέραν καὶ ὁ ἄλλος 3 ἡμέρας ἐπὶ 8 ὥρας κάθε ἡμέραν. Πόσας δραχμὰς πρέπει νὰ πάρῃ ὁ καθένας ;

Λύσις : Ὁ πρῶτος εἰργάσθη 5 ἡμ. × 6 ὥρ. = 30 ὥρ.
Ὁ δεύτερος » 3 » × 8 » = 24 »
Καὶ οἱ δυὸ μαζὶ = 54 ὥρ.

Θὰ μερίσωμεν, λοιπόν, τὰς 3780 δραχμὰς εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 30 καὶ 24 :

Ὁ α′ $\frac{3780 \times 30}{54} = 2100$ δραχμὰς καὶ ὁ β′ $\frac{3780 \times 24}{54} = 1680$ δραχμάς.

Πρόβλημα 4ον : Νὰ μερισθῇ ὁ ἀριθμὸς 100 εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν : 3, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$.

Λύσις : Τρέπομεν καὶ τοὺς τρεῖς ἀριθμοὺς εἰς ὁμώνυμα κλάσματα :

$$\frac{\overset{6}{\smile}3}{1} \qquad \frac{\overset{3}{\smile}1}{2} \qquad \frac{\overset{2}{\smile}2}{3} \quad \text{ἑτερώνυμα}$$

$$\frac{18}{6} \qquad \frac{3}{6} \qquad \frac{4}{6} \quad \text{ὁμώνυμα}$$

Ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὰ ὁμώνυμα κλάσματα ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 6 (δηλ. τὸν κοινὸν παρονομαστήν), εὑρίσκομεν γινόμενα τοὺς ἀριθμητὰς 18, 3, 4. Καί, ἂν μερίσωμεν τὸν ἀριθμὸν 100 εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 18, 3, 4, θὰ εὕρωμεν τὰ ἴδια μέρη. Παραλείπομεν, λοιπόν, τοὺς παρονομαστὰς καὶ μερίζομεν τὸν ἀριθμὸν 100 εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν : 18, 3, 4, δηλαδή :

α) $\frac{100 \times 18}{25} = 76$ β) $\frac{100 \times 3}{25} = 12$ γ) $\frac{100 \times 4}{25} = 16$

Προβλήματα

503. Νὰ μερισθῇ ὁ 300 εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν : 3, 5, 7.

504. Ὁ ἀριθμὸς 2.000 εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν : 4, 5, 2, 9.

505. Ὁ ἀριθμὸς 600 εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν : $\frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$.

506. Δύο γεωργοὶ ἠγόρασαν ἕνα περιβόλι ἐκτάσεως 600 τετρ. μέτρων. Ὁ πρῶτος ἔδωσε 7.000 δραχ. καὶ ὁ δεύτερος 5.000 δραχμάς. Πόσα τετραγ. μέτρα ἀναλογοῦν εἰς τὸν καθέναν ;

507. Δύο ἐργάται διά τὸν ὑδροχρωματισμὸν ἑνὸς σχολείου εἰσέπραξαν 3.500 δραχμάς. Ὁ ἕνας εἰργάσθη 4 ἡμέρας καὶ ὁ ἄλλος 3 ἡμέρας. Πόσας δραχμὰς θὰ πάρῃ ὁ καθένας ;

508. Τρεῖς κτηνοτρόφοι ἐνοικίασαν ἕνα λιβάδι διὰ βοσκὴν καὶ ἐπλήρωσαν 4.000 δραχμάς. Ὁ πρῶτος εἶχεν 180 πρόβατα, ὁ δεύτερος 150 καὶ ὁ τρίτος 170. Πόσον πρέπει νὰ πληρώσῃ ὁ καθένας, ἀναλόγως μὲ τὰ πρόβατά ποὺ ἔχει ;

509. Διὰ νὰ γίνουν 700 γραμμάρια μπισκότα, χρειάζονται τὰ ἑξῆς ὑλικά : 400 γραμμάρια ἄλευρον, 100 γραμμάρια βούτυρο καὶ 200 γραμμάρια ζάχαρη. Πόσο βάρος ἀπὸ τὸ κάθε εἶδος θὰ χρειασθῇ διὰ νὰ γίνουν 3,5 κιλὰ μπισκότα ;

510. Μία ἐνοριακὴ ἐπιτροπὴ ἐμοίρασε 1.350 δραχμὰς εἰς 5 ἀπόρους οἰκογενείας, ἀναλόγως μὲ τὸν ἀριθμὸν τῶν μελῶν κάθε οἰκογενείας. Ἡ α' οἰκογένεια εἶχε 5 μέλη, ἡ β' 4, ἡ γ' 7, ἡ δ' 6 καὶ ἡ ε' 8. Πόσας δραχμὰς πῆρε ἡ κάθε οἰκογένεια ;

511. Τρεῖς ἐργάται ἔσκαψαν ἕνα ἀμπέλι καὶ εἰσέπραξαν 2.500 δραχμάς. Ὁ πρῶτος εἰργάσθη 4 ἡμέρας ἐπὶ 8 ὥρας τὴν ἡμέραν, ὁ δεύτερος 3 ἡμέρας ἐπὶ 11 ὥρας τὴν ἡμέραν καὶ ὁ τρίτος 5 ἡμέρας ἐπὶ 7 ὥρας τὴν ἡμέραν. Πόσας δραχμὰς θὰ πάρῃ ὁ καθένας ;

512. Δύο αὐτοκινητισταὶ μετέφεραν ἐμπορεύματα καὶ εἰσέπραξαν 3.100 δραχμάς. Ὁ πρῶτος μετέφερεν 8 τόννους εἰς ἀπόστασιν 20 χιλιομέτρων καὶ ὁ δεύτερος 5 τόννους εἰς ἀπόστασιν 30 χιλιομέτρων. Πόσας δραχμὰς πρέπει νὰ πάρῃ ὁ καθένας ;

513. Δύο κτηνοτρόφοι ἐνοικίασαν ἕνα λιβάδι καὶ ἐπλήρωσαν 1.270 δραχμάς. Ὁ πρῶτος ἐβόσκησε 370 πρόβατα 30 ἡμέρας καὶ ὁ δεύτερος ἐβόσκησε 230 πρόβατα 20 ἡμέρας. Πόσας δραχμὰς πρέπει νὰ πληρώσῃ ὁ καθένας ;

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ

Πρόβλημα 1ον: Τρεῖς ἄνθρωποι ἐσυμφώνησαν νὰ κάνουν μίαν ἐμπορικὴν ἐπιχείρησιν. Ὁ α' κατέθεσε 40.000 δραχμάς, ὁ β' 50.000 καὶ ὁ γ' 60.000. Ἀπὸ τὴν ἐπιχείρησιν αὐτὴν ἐκέρδισαν 36.000 δραχμάς. Πόσον κέρδος πρέπει νὰ πάρῃ ὁ καθένας ;

Λύσις: Θὰ μοιράσωμεν τὸ κέρδος εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν δραχμῶν ποὺ κατέθεσε κάθε ἔμπορος.

Πρόβλημα 2ον: Ἕνας ἔμπορος ἤρχισε μίαν ἐπιχείρησιν μὲ 40.000 δραχμάς. Μετὰ 5 μῆνας πῆρε ἕνα συνεταῖρο ποὺ κατέθεσε 40.000 δραχμάς. Εἰς τὸ τέλος τοῦ ἔτους, ἀφ' ὅτου ἤρχισεν ἡ ἐπιχείρησις, εἶδον ὅτι ἐκέρδισαν 28.500 δραχμάς. Πόσας δραχμὰς πρέπει νὰ πάρῃ ὁ καθένας ;

Λύσις: Ἀφοῦ οἱ ἔμποροι κατέθεσαν τὸ ἴδιον ποσὸν χρημάτων ὁ καθένας, θὰ μερίσωμεν τὸ κέρδος τῶν 28.500 δραχμῶν εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν χρόνων ποὺ ἔμειναν εἰς τὴν ἐπιχείρησιν. Τὸ πρῶτον κεφάλαιον ἔμεινε εἰς τὴν ἐπιχείρησιν 12 μῆνας καὶ τὸ δεύτερον 7 μῆνας, δηλαδή :

α) $\frac{28.500 \times 12}{19} = 18.000$ δρχ. β) $\frac{28.500 \times 7}{19} = 10.500$ δραχ.

Πρόβλημα 3ον. Ἕνας ἔμπορος ἤρχισε μίαν ἐπιχείρησιν μὲ 150 χρυσᾶς λίρας. Μετὰ ἀπὸ 6 μῆνας πῆρε ἕναν συνεταῖρον, ὁ ὁποῖος κατέθεσεν εἰς τὴν ἐπιχείρησιν 130 λίρας. Ἔπειτα ἀπὸ 2 ἔτη, ἀφ' ὅτου ἤρχισεν ἡ ἐπιχείρησις, ὑπελόγισαν ὅτι τὸ κέρδος ἦτο 17.820 δραχμαί. Πόσας δραχμὰς πρέπει νὰ πάρῃ ὁ καθένας ;

Τὸ α' κεφάλαιον ἔμεινεν εἰς τὴν ἐπιχείρησιν 24 μῆνας καὶ τὸ β' 18 μῆνας.

Λύσις: Βλέπομεν ὅτι καὶ τὰ κεφάλαια εἶναι διάφορα καὶ οἱ χρόνοι ποὺ ἔμειναν εἰς τὴν ἐπιχείρησιν διάφοροι. Πρέπει, λοιπόν, τὸ κέρδος νὰ μοιρασθῇ εἰς μέρη ἀνάλογα ὄχι μόνον τῶν κεφαλαίων, ἀλλὰ καὶ τῶν χρόνων. Διὰ νὰ τὸ ἐπιτύχωμεν αὐτό, χωρίζομεν τὸ κέρδος εἰς ἴσα μερίδια. Κάθε μερίδιον νὰ εἶναι τὸ κέρδος τῆς μιᾶς λίρας εἰς ἕνα μῆνα. Ἄν, λοιπόν, ὁ πρῶτος κατέθετεν 150 λίρας δι' ἕνα μῆνα, θὰ ἔπαιρνε 150 μερίδια. Ἀφοῦ ὅμως κατέθεσεν 150 λίρας διὰ 24 μῆνας, θὰ λάβῃ $150 \times 24 = 3600$ μερίδια. Τὸ ἴδιον σκεπτόμενοι, εὑρίσκομεν ὅτι ὁ δεύτερος θὰ λάβῃ $130 \times 18 = 2340$ μερίδια. Ὥστε ὁλόκληρον τὸ κέρδος τῶν 17.820 δραχμῶν θὰ χωρισθῇ εἰς $3600 + 2340 = 5940$ μερίδια.

Ἀφοῦ, λοιπόν, τὰ 5940 μερίδια εἶναι 17.820 δραχμαί, τὸ ἕνα μερίδιον θὰ εἶναι $\frac{17.820}{5.940}$ δραχμαί.

"Αρα ὁ πρῶτος θὰ πάρῃ $\frac{17.820 \times 3600}{5940} = 10.800$ δραχμάς.

καὶ ὁ δεύτερος $\frac{17.820 \times 2340}{5940} = 7.020$ δραχμάς.

Ἡ λύσις αὐτὴ φανερώνει ὅτι πρέπει νὰ μερίσωμεν τὸ κέρδος τῶν 17.820 δραχμῶν εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν ποὺ εὑρίσκομεν, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὰ κεφάλαια ἐπὶ τοὺς ἀντιστοίχους χρόνους.

Τὸ α′ κεφάλαιον ἔμεινεν εἰς τὴν ἐπιχείρησιν 24 μῆνας καὶ τὸ β′ 18 μῆνας. Θὰ μερίσωμεν, λοιπόν, τὸν ἀριθμὸν 17.820 εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν γινομένων :

α) $150 \times 24 = 3.600$
β) $130 \times 18 = 2.340$
Σύνολον 5.940

"Αρα ὁ α′ θὰ πάρῃ $\frac{17.820 \times 3.600}{5.950} = 10.800$ δραχμὰς

καὶ ὁ β′ θὰ πάρῃ $\frac{17.820 \times 3.600}{5.940} = 7.020$ δραχμάς.

Ἀπὸ τὴν λύσιν τῶν ἀνωτέρω τριῶν προβλημάτων βλέπομεν ὅτι ἔχομε τριῶν εἰδῶν προβλήματα ἑταιρείας : α) **κεφάλαια διάφορα — χρόνοι ἴσοι**, β) **κεφάλαια ἴσα — χρόνοι διάφοροι**, γ) **κεφάλαια διάφορα — χρόνοι διάφοροι**.

Διὰ νὰ λύσωμεν τὰ προβλήματα αὐτά, μερίζομεν τὸ κέρδος :

Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν κεφαλαίων,

Εἰς τὴν δευτέραν » » » » » » » χρόνων

καὶ εἰς τὴν τρίτην » » » » » τῶν ἀριθμῶν ποὺ εὑρίσκομεν, ὅταν πολλαπλασιάσωμεν κάθε κεφάλαιον ἐπὶ τὸν χρόνον ποὺ ἔμεινεν εἰς τὴν ἐπιχείρησιν.

Προβλήματα

514. Τρεῖς ἔμποροι συνεταιρίσθησαν καὶ ἤνοιξαν ἕνα κατάστημα ὑφασμάτων. Ὁ πρῶτος κατέθεσεν 5 ἑκατομμύρια, ὁ δεύτερος 3 ἑκατομμύρια καὶ ὁ τρίτος 2 ἑκατομμύρια. Ὕστερα ἀπὸ ἕνα χρονικὸν διάστημα διέλυσαν τὸ κατάστημα καὶ ὑπελόγισαν ὅτι εἶχαν ζημίαν 100.000 δραχμάς. Πόση ζημία ἀναλογεῖ εἰς τὸν κάθε συνεταῖρον ;

515. Τρεῖς ἔμποροι ἔκαναν μίαν ἑταιρείαν καὶ κατέθεσεν ὁ α′

3 ἑκατομμύρια, ὁ β' 5 καὶ ὁ γ' 2. Ἀπὸ τὴν ἐπιχείρησιν αὐτὴν ἐκέρδισαν 500.000 δραχμάς. Πόσον κέρδος θὰ πάρῃ ὁ καθένας ;

516. Τρεῖς ἔμποροι κατέθεσαν ἀπὸ ἴσον κεφάλαιον ὁ καθένας καὶ ἔκαναν μίαν ἐπιχείρησιν. Ὁ πρῶτος ἔμεινεν εἰς τὴν ἑταιρείαν 9 μῆνας, ὁ β' 15 μῆνας καὶ ὁ γ' ἔμεινεν 6 μῆνας ἀκόμη μετὰ τὴν ἀποχώρησιν τοῦ δευτέρου. Κατόπιν ἔγινε λογαριασμὸς καὶ εἶδον ὅτι τὸ κέρδος των ἦτο 600.000 δραχμάς. Πόσον κέρδος πρέπει νὰ πάρῃ ὁ καθένας ;

517. Δύο ἔμποροι ἤνοιξαν ἕνα κατάστημα μὲ κεφάλαιον 6 ἑκατομμυρίων. Ὁ πρῶτος κατέθεσε τὰ $\frac{2}{5}$ τοῦ κεφαλαίου καὶ ὁ δεύτερος τὰ ὑπόλοιπα. Εἰς τὸ τέλος τοῦ ἔτους τὸ κέρδος ἦτο 800.000 δραχμάς. Πόσον κέρδος πρέπει νὰ πάρῃ ὁ καθένας ;

518. Ἕνας ἄνθρωπος ἤρχισε μίαν ἐπιχείρησιν μὲ 4 ἑκατομμύρια δραχμάς. Μετὰ 10 μῆνας πῆρε ἕνα συνεταῖρον ποὺ κατέθεσε 2 ἑκατομμύρια. Δύο ἔτη ἀπὸ τὴν ἡμέραν ποὺ ἤρχισεν ἡ ἐπιχείρησις ἐλογαριάσθησαν καὶ εἶδον ὅτι τὸ κέρδος ἦτο 750.000 δραχμάς. Πόσον κέρδος πρέπει νὰ πάρῃ ὁ καθένας.

519. Ἱδρύθη μία ἑταιρεία ἀπὸ 3 κεφαλαιούχους. Ὁ α' κατέθεσε 2 ἑκατομμύρια, ὁ β' 4 ἑκατομμύρια καὶ ὁ γ' μετὰ 9 μῆνας ἀπὸ τὴν ἡμέραν τῆς ἱδρύσεως τῆς ἑταιρείας κατέθεσε 3 ἑκατομμύρια. Μετὰ 3 ἔτη ἀπὸ τὴν ἡμέραν ποὺ ἱδρύθη ἡ ἑταιρεία ἔκαναν λογαριασμὸν καὶ εἶδον ὅτι ἐκέρδισαν 350.000 δραχμάς. Πόσον κέρδος θὰ πάρῃ ὁ καθένας ;

520. Κάνε μόνος σου ἕνα πρόβλημα μὲ διάφορα κεφάλαια εἰς ἴσο χρόνον.

521. Ἐπίσης ἕνα πρόβλημα μὲ ἴσα κεφάλαια εἰς διαφόρους χρόνους.

522. Ἐπίσης ἕνα πρόβλημα μὲ διάφορα κεφάλαια εἰς διαφόρους χρόνους.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΕΣΟΥ ΟΡΟΥ

Πρόβλημα 1ον: Ἕνας μαθητὴς τῆς ΣΤ' τάξεως τοῦ Δημοτικοῦ Σχολείου πῆρε εἰς τὸ τέλος τοῦ ἔτους τοὺς ἑξῆς βαθμούς : Θρησκευτικὰ 10, Ἑλληνικὰ 7, Ἀριθμητικὴ 8, Ἱστορία 7, Φ. Πειραματικὴ 5, Φυσικὴ Ἱστορία 7, Γεωγραφία 5, Ἰχνογραφία 6, Καλλιγραφία 7, Χειροτεχία 7, Ὠδικὴ 6 καὶ Γυμναστικὴ 9. Ποῖος εἶναι ὁ μέσος ὅρος τῆς βαθμολογίας τοῦ μαθητοῦ ;

Λύσις: Προσθέτομεν τοὺς βαθμοὺς τῶν μαθημάτων : $10+7+8+$

$+7+5+7+5+6+7+7+6+9=84$. Ἔπειτα διαιροῦμεν τὸ ἄθροισμα ποὺ εὑρίσκομεν διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μαθημάτων. Ἐπειδὴ τὰ μαθήματα εἶναι 12, θὰ ἔχωμε $84 : 12 = 7$. Ἄρα ὁ μέσος ὅρος τῶν βαθμῶν τοῦ μαθητοῦ εἶναι 7.

Πρόβλημα 2ον: Ἕνας οἰκογενειάρχης κρατεῖ λογαριασμὸν τί ἐξοδεύει κάθε ἡμέραν διὰ τὴν συντήρησιν τῆς οἰκογενείας του. Εἰς μίαν ἑβδομάδα ἐξώδευσε τὰ ἑξῆς ποσά: Τὴν Δευτέρα, Τρίτην καὶ Τετάρτην ἀπὸ 36 δραχμὰς τὴν ἡμέραν, τὴν Πέμπτην καὶ τὴν Παρασκευὴν ἀπὸ 28 δραχμὰς τὴν ἡμέραν, τὸ Σάββατον 73 δραχμὰς καὶ τὴν Κυριακὴν 50 δραχμάς. Πόσας δραχμὰς ἐξώδευσε κατὰ μέσον ὅρον τὴν ἡμέραν;

Λύσις:

$$\begin{array}{rr} 36 \times 3 = & 108 \\ 28 \times 2 = & 56 \\ 73 \times 1 = & 73 \\ 50 \times 1 = & 50 \\ \hline 7 \text{ ἡμ.} & 287 \text{ δραχ.} \end{array}$$

Ἐξώδευσε $287 : 7 =$ 41 δραχμὰς κατὰ μέσον ὅρον.

Προβλήματα

523. Μίαν ἡμέραν ἡ θερμοκρασία ἦτο τὸ πρωῒ $11{,}2^0$, τὴν μεσημβρίαν $15{,}1^0$ καὶ τὸ ἀπόγευμα $12{,}4^0$. Ποία εἶναι ἡ μέση θερμοκρασία τῆς ἡμέρας αὐτῆς;

524· Ἕνα κατάστημα εἶχε τὰς κατωτέρω εἰσπράξεις εἰς 6 ἡμέρας: τὴν α΄ 3.348 δραχμάς, τὴν β΄ 3.598 δραχμάς, τὴν γ΄ 3620,5 δραχμάς, τὴν δ΄ 3234,5 δραχμάς, τὴν ε΄ 3427 δραχμὰς καὶ τὴν στ΄ 3708 δραχμάς. Πόσας δραχμὰς εἶναι ὁ μέσος ὅρος τῶν εἰσπράξεων ἑκάστης ἡμέρας;

525. Ἕνας ὑπάλληλος, ποὺ ἔχει μηνιαῖον μισθὸν 4.280 δραχμάς, ἐξώδευσε διὰ διατροφὴν τῆς οἰκογενείας του τὰ κατωτέρω ποσά: Τὴν α΄ ἑβδομάδα 924 δραχμάς, τὴν β΄ 887,50 δραχμάς, τὴν γ΄ 923 δραχμὰς καὶ τὴν δ΄ 903,50 Πόσας δραχμὰς κατὰ μέσον ὅρον ἐξώδευσε τὴν ἑβδομάδα καὶ πόσας δραχμὰς τοῦ ἔμειναν διὰ τὰς ἄλλας ἀνάγκας του;

526. Εἰς μίαν πόλιν ἔγιναν εἰς ἕνα ἑξάμηνον αἱ κατωτέρω γεννήσεις: Τὸν α΄ μῆνα 37, τὸν β΄ 45, τὸν γ΄ 84, τὸν δ΄ 67, τὸν ε΄ 72 καὶ τὸν στ΄ 85. Πόσαι γεννήσεις κατὰ μέσον ὅρον γίνονται τὸν μῆνα;

527. Ἕνα ἐργοστάσιον ὑφαντουργίας εἶχε τὴν κατωτέρω παραγωγὴν ὑφασμάτων τὸ ἔτος 1958: Τὸν Ἰανουάριον 5.840 μέτρα ὕφασμα, τὸν Φεβρουάριον 4.700 μέτρα, τοὺς 3 μῆνας τῆς ἀνοίξεως ἀπὸ

6.000 μέτρα κάθε μῆνα καὶ τοὺς ὑπολοίπους 7 μῆνας τοῦ ἔτους ἀπὸ 3.800 μέτρα κάθε μῆνα. Πόσα μέτρα εἶχε παραγωγὴ κατὰ μέσον ὅρον κάθε μῆνα τὸ ἔτος 1958 ;

528. Γράψε μόνος σου τὸν βαθμὸν προόδου ποὺ νομίζεις ὅτι ἔχεις εἰς καθένα ἀπὸ τὰ μαθήματα. Ἔπειτα νὰ εὕρῃς τὸν μέσον ὅρον τῶν βαθμῶν, ποὺ θὰ εἶναι ὁ γενικὸς βαθμὸς τοῦ ἀπολυτηρίου σου.

529. Νὰ μάθῃς πόσους μαθητὰς ἔχει ἡ Α΄, ἡ Β΄, ἡ Γ΄, ἡ Δ΄, ἡ Ε΄ καὶ ἡ ΣΤ΄ τάξις τοῦ σχολείου σου. Ἔπειτα νὰ εὕρῃς πόσους μαθητὰς ἔχει κατὰ μέσον ὅρον κάθε τάξις.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΝΑΜΙΞΕΩΣ
Α΄ Εἶδος

Πρόβλημα : Ἕνας παντοπώλης ἀνέμιξε 35 κιλὰ ἐλαίου Α΄ ποιότητος, ποὺ τὸ πωλεῖ πρὸς 14 δραχμὰς τὸ κιλόν, 40 κιλὰ ἐλαίου Β΄ ποιότητος, ποὺ τὸ πωλεῖ πρὸς 12 δραχμὰς τὸ κιλὸν καὶ 25 κιλὰ σπορέλαιου, ποὺ τὸ πωλεῖ πρὸς 8 δραχμὰς τὸ κιλόν. Πόσον πρέπει νὰ πωλῇ τὸ κιλὸν τοῦ μίγματος, διὰ νὰ εἰσπράξῃ τὰ ἴδια χρήματα, ποὺ θὰ εἰσέπραττε ἂν ἐπωλοῦσε κάθε εἶδος χωριστά ;

Λύσις :	ἀπὸ τὰ	35	κιλ. θὰ εἰσέπραττε	35×14	$=$	490	δρχ.
	» »	40	» » »	40×12	$=$	480	»
	» »	25	» » »	25×8	$=$	200	»
				100 κιλ. μῖγμα	$=$	1.170	»

Βλέπομεν ὅτι ὁ παντοπώλης, ἂν ἐπωλοῦσε χωριστὰ κάθε εἶδος, θὰ εἰσέπραττε καὶ ἀπὸ τὰ τρία εἴδη 1.170 δραχμάς. Τόσας δραχμὰς πρέπει νὰ εἰσπράξῃ καὶ ἀπὸ τὰ 100 κιλὰ τοῦ μίγματος. Ἀφοῦ τὰ 100 κιλὰ τοῦ μίγματος ἀξίζουν 1.170 δραχμάς, τὸ ἕνα κιλὸν ἀξίζει $1.170 : 100 = 11,70$ δραχμάς.

Ὅπως βλέπομεν, εἰς τὰ προβλήματα ἀναμίξεως α΄ εἴδους μᾶς δίδονται πρὸς ἀνάμιξιν ὡρισμέναι ποσότητες δύο ἢ περισσοτέρων πραγμάτων, τὰ ὁποῖα δύνανται ν' ἀναμιχθοῦν, καὶ ἡ ἀξία τοῦ κιλοῦ καθενὸς πράγματος· μᾶς ζητεῖται δὲ ἡ ἀξία τοῦ κιλοῦ τοῦ μίγματος.

Προβλήματα

530. Ἕνας παντοπώλης ἀνέμιξε 48 κιλὰ ρύζι, τοῦ ὁποίου τὸ κιλὸν στοιχίζει 4 δραχμάς, μὲ 72 κιλὰ ρύζι, τοῦ ὁποίου τὸ κιλὸν στοιχίζει 7 δραχμάς. Πόσον στοιχίζει τὸ κιλὸν τοῦ μίγματος ;

531. Ἕνας ἠγόρασεν 80 κιλὰ βούτυρον καὶ 120 κιλὰ λίπος. Τὸ βούτυρον τὸ ἠγόρασε 42 δραχμὰς τὸ κιλὸν καὶ τὸ λίπος 12,50 δραχμάς. Ἔπειτα ἀνέμιξεν τὰ δύο αὐτὰ εἴδη. Πόσον τοῦ στοιχίζει τὸ κιλὸν τοῦ μίγματος ;

532. Ἕνας λαδέμπορος ἀνέμιξε τρία εἴδη ἐλαίου. Ἀπὸ τὸ α' εἶδος, τοῦ ὁποίου τὸ κιλὸν στοιχίζει 14 δραχμάς, ἐπῆρε 45 κιλά, ἀπὸ τὸ β' εἶδος, τοῦ ὁποίου τὸ κιλὸν στοιχίζει 12 δραχμάς, ἐπῆρε 60 κιλὰ καὶ ἀπὸ τὸ γ' εἶδος τοῦ ὁποίου τὸ κιλὸν στοιχίζει 8 δραχμάς, ἐπῆρε 95 κιλά. Πόσον τοῦ στοιχίζει τὸ κιλὸν τοῦ μίγματος ;

533. Κάνε μόνος σου δύο προβλήματα μίξεως α' εἴδους καὶ λύσε τα εἰς τὸ τετράδιόν σου.

Β'. Εἶδος

Πρόβλημα: Ἕνας βουτυρέμπορος ἔχει δύο ποιότητας βουτύρου. Τὸ κιλὸν τῆς α' ποιότητος τὸ πωλεῖ 70 δραχμὰς καὶ τῆς β' ποιότητος 54 δραχ. Πόσα κιλὰ θὰ πάρῃ ἀπὸ κάθε ποιότητα, διὰ νὰ κάνῃ μῖγμα 320 κιλῶν, τὸ ὁποῖον νὰ πωλῇ πρὸς 60 δραχμὰς τὸ κιλόν ;

Λύσις: Τὸ ἕνα κιλὸν τῆς πρώτης ποιότητος θὰ ἐπωλεῖτο χωριστὰ 70 δραχμάς. Τώρα εἰς τὸ μῖγμα θὰ πωλῆται 60 δραχμάς. Ἄρα ὁ ἔμπορος ἀπὸ κάθε κιλὸν τῆς πρώτης ποιότητος, ποὺ θὰ βάλῃ μέσα εἰς τὸ μῖγμα, θὰ χάνῃ $(70 - 60) = 10$ δραχμάς.

Τὸ ἕνα κιλὸν τῆς δευτέρας ποιότητος θὰ ἐπωλεῖτο χωριστὰ 54 δραχμάς. Τώρα εἰς τὸ μῖγμα θὰ πωλῆται 60 δραχμάς. Ἄρα ὁ ἔμπορος ἀπὸ κάθε κιλὸν τῆς δευτέρας ποιότητος, ποὺ θὰ βάλῃ μέσα εἰς τὸ μῖγμα, θὰ κερδίζῃ $(60 - 54)$ 6 δραχμάς.

Ἄν, λοιπόν, βάλῃ ἀπὸ τὴν α' ποιότητα τοῦ βουτύρου 6 κιλὰ (δηλ. ὅσας δραχμὰς κερδίζει ἀπὸ κάθε κιλὸν τῆς β' ποιότητος), θὰ χάσῃ $10 \times 6 = 60$ δραχμάς. Κι' ἂν βάλῃ ἀπὸ τὴν β' ποιότητα τοῦ βουτύρου 10 κιλὰ (δηλ. ὅσας δραχμὰς χάνει ἀπὸ κάθε κιλὸν τῆς α' ποιότητος), θὰ κερδίσῃ $6 \times 10 = 60$ δραχμάς.

Ἄρα οὔτε κέρδος οὔτε ζημίαν θὰ ἔχῃ, ἂν ἀναμίξῃ 6 κιλὰ ἀπὸ τὸ βούτυρον α' ποιότητος καὶ 10 κιλὰ ἀπὸ τὸ βούτυρον β' ποιότητος. Ὥστε :

Διὰ νὰ κάμῃ μῖγμα 16 κιλ. παίρνει ἀπὸ τὴν α' ποιότητα 6 κιλ.
» » » » 320 » » » » » » X »

Ἀπὸ τὴν α' ποιότητα θὰ πάρῃ $X = 6 \times \frac{320}{16} = \frac{6 \times 320}{16} = 120$ κιλά.

Διὰ νὰ κάνῃ μῖγμα $\frac{16}{320}$ κιλ. παίρνει ἀπὸ τὴν β′ ποιότητα $\frac{10}{X}$ κιλ.
» » » » » » » » » »

'Απὸ τὴν β′ ποιότητα θὰ πάρῃ $X = 10 \times \frac{320}{16} = \frac{10 \times 320}{16} = 200$ κιλά.

Δυνάμεθα ἐπίσης νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα αὐτό, ἂν μερίσωμεν τὸν ἀριθμὸν 320 εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 6 καὶ 10.

'Η πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς :

α′ 70 δρχ. 6

Μῖγμα 320 κιλὰ 60 δραχ.

β′ 54 δρχ. $\frac{10+}{16}$

'Απὸ τὴν α′ ποιότητα θὰ πάρῃ $= \frac{320 \times 6}{16} = 120$ κιλὰ

καὶ ἀπὸ τὴν β′ ποιότητα θὰ πάρῃ $= \frac{320 \times 10}{16} = 200$ κιλά.

Σημείωσις : Διὰ νὰ μὴν κάνωμε λάθος, πρέπει νὰ ἔχωμε ὑπ' ὄψιν ὅτι εἰς τὸ μῖγμα τὰ περισσότερα κιλὰ θὰ βάζωμε ἀπὸ τὴν ποιότητα ἐκείνην τῆς ὁποίας ἡ τιμὴ πλησιάζει περισσότερον πρὸς τὴν τιμὴν τοῦ μίγματος. Π.χ. εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα τὰ περισσότερα κιλὰ (τὰ 200) βάζομε ἀπὸ τὴν β′ ποιότητα βουτύρου, ποὺ πλησιάζει περισσότερον τὴν τιμὴν τοῦ μίγματος (60 δραχ.) ἀπὸ τὴν τιμὴν τοῦ βουτύρου τῆς α′ ποιότητος.

Ὅπως βλέπομεν, εἰς τὰ προβλήματα ἀναμίξεως **β′ εἴδους** μᾶς δίδονται :

1) **Αἱ τιμαὶ τοῦ κιλοῦ δύο διαφόρων εἰδῶν ποὺ πρόκειται νὰ ἀναμιχθοῦν.** 2) **Τὰ κιλὰ ἀπὸ τὰ ὁποῖα θὰ ἀποτελῆται τὸ μῖγμα** καὶ 3) **Ἡ τιμὴ τοῦ κιλοῦ τοῦ μίγματος.**

Ζητεῖται δέ : **Πόσα κιλὰ θὰ πάρωμεν ἀπὸ κάθε εἶδος, διὰ νὰ κάνωμε αὐτὸ τὸ μῖγμα.**

Προβλήματα

534. Ἕνας οἰνοπώλης ἀνέμιξε 350 κιλὰ οἴνου τῶν 2,30 δραχμῶν τὸ κιλὸν καὶ 200 κιλὰ ἄλλου οἴνου τῶν 2,75 δραχμῶν τὸ κιλόν. Πόσο ἀξίζει τὸ κιλὸν τοῦ μίγματος ;

535. Ἕνας βουτυρέμπορος ἀνέμιξε 50 κιλὰ βούτυρον γάλακτος τῶν 52 δραχμῶν μὲ 10 κιλὰ λίπος τῶν 19 δραχμῶν. Πόσον ἀξίζει τὸ κιλὸν τοῦ μίγματος ;

536. Ἕνας λαδέμπορος ἀνέμιξε τρία εἴδη ἐλαίου. Ἀπὸ τὸ α' εἶδος, ποὺ ἀξίζει 12 δραχμὰς τὸ κιλόν, πῆρε 48 κιλά, ἀπὸ τὸ β' εἶδος, ποὺ ἀξίζει 11,50 δραχ. πῆρε 30 κιλὰ καὶ ἀπὸ τὸ γ' εἶδος, ποὺ ἀξίζει 14 δραχμάς, πῆρε 22 κιλά. Πόσον ἀξίζει τὸ κιλὸν τοῦ μίγματος ;

537. Ἕνας παντοπώλης ἀνέμιξε 36 κιλὰ ρύζι τῶν 8,40 δραχμῶν τὸ κιλὸν μὲ 24 κιλὰ ρύζι τῶν 10 δραχμῶν. Πόσον ἀξίζει τὸ κιλὸν τοῦ μίγματος ;

538. Ἕνας βουτυρέμπορος ἀνέμιξε 37,5 κιλὰ βούτυρον τῶν 44 δραχμῶν τὸ κιλὸν μὲ τριπλασίαν ποσότητα λίπους τῶν 16 δραχμῶν τὸ κιλόν. Πόσας δραχμὰς ἀξίζει τὸ κιλὸν τοῦ μίγματος ;

539. Ἕνας ἀλευρέμπορος ἠγόρασε 350 κιλὰ ἄλευρα πρὸς 2,80 δραχμὰς τὸ κιλὸν καὶ 250 κιλὰ ἄλευρα καλυτέρας ποιότητος πρὸς 3,40 δραχμὰς τὸ κιλόν. Ἐὰν ἀναμίξῃ τὰ δύο αὐτὰ εἴδη, πόσον τοῦ στοιχίζει τὸ κιλὸν τοῦ μίγματος καὶ πόσον πρέπει νὰ πωλῇ τὸ κιλὸν τοῦ μίγματος, διὰ νὰ κερδίσῃ ἀπὸ ὅλον τὸ μῖγμα 450 δραχμάς ;

540. Ἕνας οἰνοπώλης εἶχε ἕνα βαρέλι, ποὺ χωροῦσε 400 κιλά. Μέσα εἰς τὸ βαρέλι αὐτὸ ἔβαλε 320 κιλὰ κρασί, ποὺ ἠγόρασε πρὸς 2,40 δραχμὰς τὸ κιλὸν καὶ ἔπειτα ἀπογέμισε τὸ βαρέλι μὲ νερό. Πόσον τοῦ στοιχίζει τὸ κιλὸν τὸ νερωμένο κρασὶ καὶ πόσον πρέπει νὰ τὸ πωλῇ τὸ κιλόν, διὰ νὰ κερδίσῃ συνολικῶς 500 δραχμάς ;

541. Ἕνας ἀνέμιξε 15 κιλὰ βουτύρου τῶν 42 δραχμῶν τὸ κιλὸν μὲ τριπλασίαν ποσότητα λίπους τῶν 16 δραχμῶν τὸ κιλόν. Πόσον ἀξίζει τὸ κιλὸν τοῦ μίγματος ;

542. Ἕνας θέλει νὰ ἀναμίξῃ βούτυρον τῶν 48 δραχμῶν τὸ κιλὸν μὲ λίπος τῶν 18 δραχμῶν. Πόσα κιλὰ ἀπὸ κάθε εἶδος πρέπει νὰ πάρῃ, διὰ νὰ κάμῃ μῖγμα 45 κιλῶν, ποὺ νὰ ἀξίζῃ 30 δραχμὰς τὸ κιλόν ;

543. Ἕνας παντοπώλης ἔχει δύο ποιότητας ρυζιοῦ. Τὴν πρώτην ποιότητα τὴν πωλεῖ πρὸς 11 δραχμὰς τὸ κιλὸν καὶ τὴν δευτέραν πρὸς 8 δραχμάς. Πόσα κιλὰ ἀπὸ κάθε εἶδος πρέπει νὰ πάρῃ, διὰ νὰ κάνῃ μῖγμα 78 κιλῶν, ποὺ νὰ τὸ πωλῇ πρὸς 10 δραχμὰς τὸ κιλόν ;

544. Ἕνας λαδέμπορος ἔχει δύο εἴδη ἐλαίου. Τοῦ πρώτου τὸ κιλὸν ἀξίζει 16 δραχμὰς καὶ τοῦ δευτέρου 12,50 δραχμάς. Πόσα κιλὰ ἀπὸ κάθε εἶδος πρέπει νὰ πάρῃ, διὰ νὰ κάνῃ μῖγμα 210 κιλῶν, ποὺ νὰ ἀξίζῃ 13 δραχμὰς τὸ κιλόν ;

545. Ἕνας ἀλευρέμπορος θέλει νὰ ἀναμίξῃ ἄλευρα δύο ποιοτήτων. Τὰ ἄλευρα τῆς πρώτης ποιότητος ἀξίζουν 3,70 δραχμὰς τὸ κιλὸν καὶ τῆς δευτέρας ποιότητος 3 δραχμὰς τὸ κιλόν. Πόσα κιλὰ ἄλευρα ἀπὸ κάθε ποιότητα θὰ πάρῃ, διὰ νὰ κάμῃ μῖγμα 350 κιλῶν, τοῦ ὁποίου τὸ κιλὸν νὰ ἀξίζῃ 3,20 δραχμάς ;

546. Ἕνας οἰνοπώλης εἶχε 520 κιλὰ οἶνον τὸν ὁποῖον ἐπώλει πρὸς 3,60 δραχμὰς τὸ κιλόν. Ἐὰν μέσα εἰς τὸν οἶνον αὐτὸ βάλῃ 80 κιλὰ νερό, πόσας δραχμὰς πρέπει νὰ πωλῇ τὸ κιλὸν τοῦ νερωμένου οἴνου, διὰ νὰ εἰσπράξῃ τὰ ἴδια χρήματα ;

547. Ἕνας λαδέμπορος ἀνέμιξεν ἔλαιον τῶν 15,50 δραχμῶν τὸ κιλὸν μὲ σπορέλαιον τῶν 9,50 δραχμῶν καὶ ἔκανε ἕνα μῖγμα 280 κιλῶν ποὺ τὸ ἐπωλοῦσε 13 δρχ. τὸ κιλόν. Ἀπὸ τὴν πώλησιν τοῦ μίγματος αὐτοῦ θὰ εἰσπράξῃ τὰ ἴδια χρήματα ποὺ θὰ εἰσέπραττε, ἂν ἐπωλοῦσε χωριστὰ κάθε εἶδος. Πόσα κιλὰ ἔβαλε ἀπὸ κάθε εἶδος ;

Προβλήματα κραμάτων

Ὁ καθαρὸς χρυσὸς καὶ ὁ ἄργυρος εἶναι μέταλλα μαλακά. Διὰ τοῦτο, ὅταν πρόκειται μὲ αὐτὰ νὰ κατασκευάσουν κοσμήματα ἢ νομίσματα, συγχωνεύουν διὰ τήξεως μαζὶ μὲ αὐτὰ καὶ χαλκὸν ἢ ἄλλον σκληρὸν μέταλλον. Τοῦτο γίνεται, διὰ νὰ ἀποκτήσουν τὰ μέταλλα αὐτὰ μεγαλυτέραν σκληρότητα, νὰ μὴν καταστρέφωνται διὰ τῆς τριβῆς, νὰ μὴν μεταβάλλεται τὸ σχῆμα των κλπ.

Τὸ σῶμα - μῖγμα, τὸ ὁποῖον γίνεται ἀπὸ τὴν συγχώνευσιν διὰ τήξεως δύο ἢ περισσοτέρων μετάλλων, λέγεται **κρᾶμα**.

Τὸ ποσὸν τοῦ πολυτίμου μετάλλου (δηλ. τοῦ χρυσοῦ ἢ τοῦ ἀργύρου) ποὺ περιέχεται μέσα εἰς μίαν μονάδα τοῦ κράματος (π.χ. εἰς 1 γραμμάριον) λέγεται **βαθμὸς καθαρότητος** ἢ **τίτλος** τοῦ κράματος.

Ὁ τίτλος ἑνὸς κράματος ὁρίζεται εἰς χιλιοστά. Π.χ. ὅταν λέγωμεν ὅτι ἕνα νόμισμα ἔχει τίτλον 0,900, ἐννοοῦμεν ὅτι εἰς τὰ 1000 γραμμάρια τοῦ κράματος μόνον 900 γραμμάρια εἶναι καθαρὸς χρυσός· τὰ ἄλλα 100 γραμμάρια εἶναι χαλκὸς ἢ ἄλλο μέταλλον μὴ πολύτιμον.

Ἐπίσης ὁ τίτλος τῶν χρυσῶν κοσμημάτων ἐκφράζεται καὶ εἰς εἰκοστὰ τέταρτα, τὰ ὁποῖα λέγονται **καράτια**.

Ὅταν π.χ. λέγωμεν ὅτι ἕνα δακτυλίδι εἶναι 18 καρατίων, ἐννοοῦμεν ὅτι τὰ 18 μέρη αὐτοῦ εἶναι καθαρὸς χρυσὸς καὶ τὰ ὑπόλοιπα 6 εἶναι μέταλλον μὴ πολύτιμον. Ὁ καθαρὸς χρυσὸς λέγομεν ὅτι εἶναι 24 καρατίων.

Τὰ προβλήματα τῶν κραμάτων λύονται ὅπως καὶ τὰ προβλήματα τῆς ἀναμίξεως.

Πρόβλημα 1ον. Ἕνας χρυσοχόος ἔλιωσε 10 γραμμάρια χρυσοῦ τίτλου 0,900 μὲ 5 γραμμάρια χρυσοῦ τίτλου 0,720 καὶ ἔκανε ἕνα βραχιόλι. Ποῖος εἶναι ὁ τίτλος τοῦ κράματος ;

Λύσις : Τὰ 10 γραμ. περιέχουν καθ. χρυσ. $0{,}900 \times 10 = 9$ γραμ.
» 5 » » » » $0{,}720 \times 5 = 3{,}6$ »
15 12,6

Ἄρα ὁ τίτλος τοῦ κράματος θὰ εἶναι $12{,}6 : 15 = 0{,}840$.

Πρόβλημα 2ον. Ἕνας χρυσοχόος ἔχει χρυσὸν τίτλου 0,900 καὶ ἄλλον τίτλου 0,600, θέλει δὲ νὰ κάνῃ ἕνα δακτυλίδι 15 γραμμαρίων τίτλου 0,700. Πόσα γραμμάρια θὰ πάρῃ ἀπὸ κάθε εἶδος χρυσοῦ ;

Λύσις :

	α) 0,900		0,100 ἢ 100
15 γρ.		0,700	
	β) 0,600		0,200 ἢ 200

Θὰ μερίσωμεν, λοιπόν, τὸν ἀριθμὸν 15 εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν 0,100 καὶ 0,200 ἢ τῶν 100 καὶ 200.

Ἄρα ἀπὸ τὸ α′ εἶδος θὰ πάρῃ $\frac{15 \times 100}{300} = 5$ γραμ. καὶ ἀπὸ τὸ β′ εἶδος θὰ πάρῃ $\frac{15 \times 200}{300} = 10$ γραμμάρια.

Π ρ ο β λ ή μ α τ α

548. Ἕνας χρυσοχόος ἔλιωσε μαζὶ 18 γραμμάρια χρυσοῦ τίτλου 0,600 καὶ 32 γραμμάρια χρυσοῦ τίτλου 0,950. Ποῖος εἶναι ὁ τίτλος τοῦ κράματος ;

549. Μία ἀλυσίδα χρυσῆ τίτλου 14 καρατίων ἔχει βάρος 35 γραμμάρια. Πόσον καθαρὸν χρυσὸν περιέχει ;

550. Ἕνας χρυσοχόος ἔχει χρυσὸν τίτλου 0,900 καὶ ἄλλον χρυσὸν τίτλου 0,500. Ἀπὸ αὐτὰ τὰ δύο εἴδη θέλει νὰ κάνῃ ἕνα βραχιόλι βάρους 20 γραμμαρίων τίτλου 0,600. Πόσα γραμμάρια θὰ πάρῃ ἀπὸ κάθε εἶδος ;

551. Ἕνας χρυσοχόος ἔλιωσε 12 γραμμάρια χρυσοῦ τίτλου 0,900 μαζὶ μὲ 3 γραμμάρια χαλκοῦ. Πόσος εἶναι ὁ τίτλος τοῦ κράματος εἰς χιλιοστά ;

ΑΠΟΚΡΙΣΕΙΣ

α/ά	'Απόκρισις	α/ά	'Απόκρισις	α/ά	'Απόκρισις	α/ά	'Απόκρισις
1	689.438-753.618	51	43 πουκάμισα	187	$93^{17}/_{20}$ κιλὰ	263	108 μ - 3 δρχ
2	470 μέτρ.-555 μ	52	36.000 βήματα	188	$13^{13}/_{20}$ μέτρα	264	466 δρχ
3	7.632.801 κάτ.	53	2,15-118,67 δρχ	197	$^{2}/_{5}$ τοῦ κιλοῦ	265	4.752 δρχ
4	; 368 χρ.	54	128 μπουκ.	198	$^{1}/_{4}$ τοῦ κιλοῦ	267	$^{1}/_{40}$ τοῦ κιλοῦ
5	3108 δραχμὲς	55	130 δραχμὲς	199	$50^{3}/_{4}$ κιλὰ	268	$^{7}/_{40}$ τοῦ κιλοῦ
6	24.624 κιλὰ	56	102 κεσ.	200	$6^{7}/_{10}$ κιλὰ	269	$14^{1}/_{2}$ κιλὰ
7	999-1184-1.073	57	20 ὥρες	201	$4^{9}/_{10}$ μέτρα	270	$1^{7}/_{8}$ κιλὰ
8	185.000 κιλὰ	58	225 κιλὰ	202	$26^{21}/_{40}$ κιλὰ	271	$5^{3}/_{4}$ κιλά
9	1.990 δραχμὲς	59	50 ὑάρδες	209	$^{27}/_{40}$ τοῦ κιλοῦ	275	$^{7}/_{8}$ τοῦ κιλοῦ
10	1.063 δραχμὲς	60	233 τεκτ. πήχεις	210	$^{3}/_{10}$ τοῦ μέτρου	276	$^{1}/_{4}$ τοῦ κιλοῦ
11	3.015 δραχμὲς	61	109,68 μέτρα	211	2ον-$^{1}/_{5}$ τοῦ κιλ.	277	$1^{1}/_{5}$ τοῦ κιλοῦ
12	61.936 δραχμὲς	62	31,5 μέτρα	212	$^{27}/_{40}$ τῆς δεξαμ.	278	$^{1}/_{5}$ τοῦ κιλοῦ
13	52 μίλια	63	347,2 τετρ. μέτ.	213	$12^{3}/_{4}$ ὥρες	279	$3^{3}/_{5}$ μέτρα
14	3.028 δραχμὲς	64	476 τετρ. μέτρα	214	$16^{9}/_{40}$ κιλὰ	281	$^{1}/_{12}$ τῆς δεξαμεν.
15	14 δοχεῖα	65	982 τετρ. πήχεις	215	$5^{13}/_{20}$ ὥρες	282	24 δραχμὲς
16	9 δραχμὲς	66	18.945 δευτερόλ.	216	$7^{29}/_{40}$-$6^{23}/_{40}$ κιλὰ	283	364 κιλὰ
17	7 δραχμὲς	67	168 δάκτυλοι	217	$15^{3}/_{5}$ μέτρα	284	185 γραμ.
18	2 δρχ - 4 δρχ	68	1.026 πέννες	218	$6^{7}/_{10}$ μ.μ.	285	96 δραχμὲς
19	16 δρχ - 190 δρχ	69	251 ὑάρδες	219	$260^{7}/_{20}$-$12^{1}/_{4}$ μ	290	14,25 δραχμὲς
20	3 δραχμὲς	70	58 ὑάρ 2 π 3 δ	220	$11^{3}/_{20}$-$10^{19}/_{40}$ κ.	291	16 πουκάμισα
21	11 μίλια	71	63 ὑάρ 2 π 9 δακ	221	$5^{17}/_{20}$-$14^{9}/_{20}$ μέτ.	292	15 - $13^{1}/_{2}$ μίλια
22	580 σάκκοι	74	1716 ὑάρ 2 πόδ.	222	$34^{13}/_{20}$ ὥρες	293	$5^{1}/_{4}$ κιλὰ
23	129 αὐτοκίνητα	75	82 ὑάρδ 2 δάκτ.	223	$^{1}/_{10}$ τοῦ τοίχου	294	$^{1}/_{2}$ τοῦ κιλοῦ
24	300 δραχμὲς	76	33 λίρ. 19 σ 6 π	226	$102^{3}/_{8}$ κιλὰ	295	64 τεκτ. πήχ.
25	90 δραχμὲς	77	11,3 δευτερόλεπ.	227	$22^{1}/_{2}$ κιλὰ	296	960 τετ. τεκτ. π.
26	2 δραχμὲς	80	25 ὑάρ. 1 π 5 δ	228	$55^{1}/_{5}$ μέτρα	297	16 ζευγάρια
27	16 δρχ - 256 δρχ	81	5 ἔτη 10 μ 10 ἡμ.	229	384 - 4.800 κιλὰ	305	203 - 29 μαθηταὶ
28	10 δραχμὲς	82	486 λιρ. 19 σ 6 π	230	$113^{3}/_{4}$ κιλὰ	306	160 - 360 χιλιόμ.
29	120μ-40 πουκ.	83	65 κιλὰ	231	$11^{1}/_{5}$ κιλὰ	307	1.389 μέτρα
30	253,45 μέτρ.	84	1 λ 6 σ 2 π 3,2	237	$8^{3}/_{4}$ - 42 μέτρα	308	24 γίδια
31	32,19 μέτρα	85	250 κιλὰ	238	63.920 δρχ	309	α' 320.000 δρχ
32	2,7 βαθμοὶ	86	225 κιλὰ	239	21 μέτρα		β' 300.000 δρχ
33	0,36 τοῦ μέτρου	87	314 ἑβδομάδες	240	$69^{3}/_{8}$ κιλὰ		γ' 180.000 δρχ
34	3,87 μέτρα	88	2 ὥρ. 29 π. 45 δ.	241	$231^{1}/_{4}$ κιλὰ	310	$^{25}/_{48}$ τῆς δεξαμεν.
35	14,17 μέτρ.	89	30 - 9 - 3 γραμ.	244	$^{9}/_{100}$ - $^{33}/_{50}$ κιλὰ	311	66 δραχμὲς
36	3,62-4,01 μέτρ.	90	984 κιλ - 550 γρ	245	$6^{1}/_{5}$ - $^{8}/_{15}$ μέτρα	312	1.075 κιλὰ
37	5,779 - 3 χιλιόγ.	91	107,40 δρχ	246	$213^{17}/_{48}$ μίλια	313	360 - 300 χιλιόμ.
38	377,95 τετρ. μέτ.	92	16 στρ. 630 τ.μ.	247	$248^{16}/_{25}$ μέτρα	314	255 - 221 μαθητ.
39	106,47 μ-12,28 μ	93	51 πρῶτα λεπτὰ	251	117 μίλια	322	$8^{59}/_{60}$ ὥρες
40	4,5 μέτρα	94	4 λίρ. 2 σ. 1 πέν.	252	$249^{3}/_{5}$ κιλὰ	323	$2^{1}/_{20}$ μέτρα
41	12.381,25 δρχ	95	6 πρῶτ. λ. 17 δευτ	253	$647^{1}/_{2}$ γραμμάρ.	324	τὸ πρῶτο
42	128,10 δρχ	96	150 λ 1 σ 3 π 1,6	254	$1^{7}/_{8}$ μέτρα	325	1.670,4 κιλὰ
43	308,25 δρχ	173	$38^{3}/_{4}$ μέτρα	255	$16^{9}/_{10}$ κιλὰ	326	231 γραμ.
44	45 δωδ.-3,46 δρχ	174	$8^{1}/_{12}$ ὥρες	256	1909 χιλιόμ.	327	520 γραμ.
45	31 πουκάμισα	175	$122^{9}/_{40}$ κιλὰ	257	196 - 84 γραμ.	328	1.288 δρχ
46	1.032 δένδρα	176	$3^{7}/_{20}$ μέτρα	258	369 τετρ. μέτρα	329	1.410,50 δρχ
47	4.375 κιλὰ	177	$^{15}/_{16}$ τῆς δεξαμ.	259	$3^{3}/_{16}$ κιλὰ	330	852,50 δρχ
48	750 - 2.161 σωλ.	184	$6^{17}/_{40}$-$12^{11}/_{20}$ κιλ.	260	$^{1}/_{3}$ τοῦ γαλονίου	331	$51^{7}/_{10}$ μίλ.
49	50,25 μ - 39,4 μ	185	$8^{3}/_{20}$ κιλὰ	261	$17^{7}/_{10}$ κιλὰ	332	$45^{1}/_{4}$ κιλὰ
50	172 πιάτα	186	$11^{13}/_{20}$ ὥρες	262	$403^{1}/_{5}$ κιλὰ	333	434 μέτρα

α/ἀ	Ἀπόκρισις	α/ἀ	Ἀπόκρισις	α/ἀ	Ἀπόκρισις	α/ἀ	Ἀπόκρισις
334	8 ἡμ.	387	22,5 μ	442	30,87 κ.μ.		β′ 1.200 δρχ
335	147 - 245 τετ. μ.	388	2.000 χιλ.	443	167 δρχ		γ′ 1.360 »
336	1.275 δραχμὲς	389	32 ἡμ.	444	432 δρχ	509	2 κιλ - $^1/_2$ - 1 κιλ.
337	875 δρχ	390	6.800 μ	445	52,80 δρχ	510	α′ 225 δραχμὲς
338	$185^3/_5$ μίλ.	391	12 ἡμ.	446	5,25 δρχ		β′ 180 »
339	α′ 1.862,25 δρχ	392	175 δρχ	447	32,62 δρχ		γ′ 315 »
	β′ 541,87 δρχ	393	3 ὥρ. 20 π.	449	360 δρχ		δ′ 270 »
	γ′ 1.320,37 δρχ	394	125 πουκ.	450	2.400 δρχ		ε′ 360 »
340	60 δρχ	395	25 κιλὰ	451	1.600 δρχ	511	α′ 800 »
341	39,5 μέτρα	396	3.6 ἡμ.	452	1.800 δρχ		β′ 825 »
342	τὸ δεύτερο	397	2 κιλὰ-880 γραμ.	454	10%		γ′ 875 »
343	1.500 δρχ.	398	$11^{11}/_{32}$ ἡμ.	455	12%	512	1600 - 1500 »
344	$1^1/_4$ τοῦ κιλοῦ	399	5.940 δρχ	456	9%	513	897,90-372,10
345	10 ἑβδ.	400	208 μέτρα	457	30%	514	α′ 50.000 δρχ
346	$4^2/_5$ μ - 99 δρχ	401	140 στρεμ.	458	4%		β′ 30.000 »
347	14 δρχ	402	$157^1/_2$ μέτρα	460	1 ἔτ. 4 μῆνες		γ′ 20.000 »
348	40 μέτ.-51,6 δρχ	403	1.200 δρχ	461	3 ἔτ. 1. μ. 12 ἡμ.	515	α′ 150.000 »
349	518 μ-110,6 δρχ	404	204 σελ.	462	9 μῆνες		β′ 250.000 »
350	60 δρχ	405	63 μέτρα	463	10 μῆν. 20 ἡμ.		γ′ 100.000 »
351	16,80 δρχ	406	810 μ	465	2.030 δρχ	516	α′ 120.000 »
352	18 δρχ	407	7,5 ὥρ.	466	8%		β′ 200.600 »
353	126 δρχ	408	4.090 δρχ	467	15.000 δρχ		γ′ 280.000 »
354	147,60 δρχ	409	54.000 δρχ	468	3.900 δρχ	517	α′ 320.000 »
355	64 δρχ	410	6 ὧρες	469	540,80 δρχ		β′ 480.000 »
356	71,95 δρχ	411	8,4 ὧρες	470	2.781,25 δρχ	518	α′ 580.645 »
357	40 κιλὰ	412	12 ὧρες	471	3.575 δρχ		β′ 169.355 »
358	686 κιλὰ	413	12 ἐργάτες	472	8.323,65 δρχ	519	α′ 84.848,5 »
359	150 γραμ.	414	270 λίρες	473	10,4%		β′ 169.697 »
360	2.265,70 δρχ	415	25%	474	615 δρχ		γ′ 95.454,5 »
361	15,6 τόν.	416	126 μαθηταὶ	475	145.000 δρχ	523	12.9° βαθμοὶ
362	10 ἡμ.	417	250 κιλὰ	476	α′ 15.750 δρχ	524	3.656 δρχ.
363	565,5 χιλ.	418	20%		β′ 34.453 δρχ	525	909,5 - 642 δρχ
364	119 κιλὰ	419	233 δρχ	477	1.440 δρχ	526	65 γεννήσεις
365	3 ἡμ.	420	123 κιλὰ	478	200 δρχ	527	4.595 μ
366	18 κουστ.	421	100 κιλὰ	479	3.000 - 900 δρχ	530	5,80 δρχ
367	1.250 κιλὰ	422	27.456-11.220	480	10.584 δρχ	531	24,30 δρχ
368	39,65 κιλὰ	423	1350 δρχ	481	8 ἔτ. 4 μῆνες	532	10,55 δρχ
369	725 κιλὰ	424	873,60 δρχ	482	4 δρχ	534	2,46 δρχ
370	5 ὧρες	425	24%	483	2.688 δρχ	535	46,50 δρχ
371	962,50 δρχ	426	11,90 δρχ	484	3.355,80 δρχ	536	12,29 δρχ
372	8 μ	427	341,32 δρχ	488	α′ 375 δρχ	537	9,04 δρχ
373	7 ὧρες	428	12 δρχ		β′ 7.125 δρχ	538	22,98 δρχ
374	16° Ρεωμ.	429	70,56 δρχ	489	3.615,28 δρχ	539	3,05 - 3,80 δρχ
375	35° Κελσ.	430	10%	490	α′ 156 δρχ	540	1,92 - 3,17 δρχ
376	52 ἑκατοστὰ	431	15%		β′ 2.224 δρχ	541	22,50 δρχ
377	310 χιλιόμετρα	432	7,69%	491	600 δρχ	542	18 - 27 κιλὰ
378	$19^1/_2$ ἡμ.	433	38,5%	493	8 μῆν. 20 ἡμ.	543	52 - 26 κιλὰ
379	$5^5/_8$ μέτρα	434	49%	494	3 μῆν. 10 ἡμ.	544	30 - 180 κιλὰ
380	7 ὧρες	435	1.100 κιλὰ	495	Τὴν 10ην-3-60	545	100 - 250 κιλὰ
381	252,50 δρχ	436	29.000 δρχ	496	14%	546	3,12 δρχ
382	117,5 μέτρα	437	7.000 δρχ	497	21%	547	163,3-116,7 κιλὰ
383	2 μῆνες	438	9,6 κιλ.-104,88 κ	498	1.575 δρχ	548	0,824
384	850 δρχ	439	351 κάτ.	506	350 - 250 τ.μ.	549	20,4 γραμ.
385	6,65 μ	440	40%	507	2000 - 1500 δρχ	550	5 γραμ.-15 γρ.
386	4 ἡμ.	441	14,37 δρχ	508	α′ 1.440 »	551	0,720

ΠΕΤΡΟΥ Π. ΠΑΠΑΪΩΑΝΝΟΥ:

ΤΕΤΡΑΔΙΑ ΓΡΑΜΜΑΤΙΚΗΣ .. Β΄, Γ΄, Δ΄, Ε΄, ΣΤ΄ τάξεων

Κάθε τετράδιο περιέχει τὴν ὕλη **γραμματικῆς** τῆς τάξεως, ὀρθογραφικοὺς κανόνες καὶ ἀσκήσεις, καθὼς καὶ τὸν ἀπαραίτητο χῶρο γιὰ τὴ γραφὴ τῶν ἀσκήσεων, τὴν κλίσι ὀνομάτων κλπ.

ΤΕΤΡΑΔΙΑ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ Α΄, Β΄, Γ΄, Δ΄, Ε΄, ΣΤ΄ τάξεων

Κάθε τετράδιο περιέχει 200 ὡς 300 προβλήματα, καθὼς καὶ τὸν ἀπαραίτητο χῶρο γιὰ τὴ λύσι τους· μπορεῖ νὰ χρησιμοποιηθῆ στὶς ὧρες τῶν σιωπηρῶν ἐργασιῶν στὸ σχολεῖο ἢ γιὰ ἐργασίες στὸ σπίτι

ΤΕΤΡΑΔΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ .... Ε΄, ΣΤ΄ τάξεων

Κάθε τετράδιο περιέχει 150 προβλήματα Γεωμετρίας, καθὼς καὶ τὸν ἀπαραίτητο χῶρο γιὰ τὴ λύσι τους. Ἀντικαθιστᾶ πλήρως τὸ βιβλίο Γεωμετρίας, γιατὶ περιέχει συνεπτυγμένη τὴν ὕλη τῆς τάξεως.

Τιμὴ κάθε τετραδίου δρχ. 7

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ Γ΄ τάξεως (περιέχει 417 ἐκλεκτὰ προβλήματα)

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ Δ΄ τάξεως (περιέχει 482 ἐκλεκτὰ προβλήματα)

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ Ε΄ καὶ ΣΤ΄ τάξεως (ἀριθ. ἐγκρ. 61452/52)

«**Ἡ ἔκθεσις τῆς ὕλης εἰς τὸ βιβλίον τοῦτο γίνεται μετὰ σαφηνείας καὶ ἀκριβείας**» (ἀπόσπασμα πράξεως Ἐκπαιδευτικοῦ Συμβουλίου).

ΓΡΑΜΜΑΤΙΚΗ ΤΗΣ ΝΕΑΣ ΕΛΛ. ΓΛΩΣΣΗΣ (β΄ βραβεῖον)

«**Τὸ βιβλίον τοῦτο εἶναι λαμπρὸν καὶ ἐξαίρετον**» (ἀπόσπασμα πράξεως Ἀνωτ. Ἐκπαιδευτικοῦ Συμβουλίου).

ΧΑΡΤΟΓΕΩΓΡΑΦΙΑ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ Δ΄ τάξεως

Τὸ βιβλίο αὐτὸ (μεγάλο σχῆμα 0,26Χ0,37) εἶναι συγχρόνως **βιβλίο γεωγραφίας, τετράδιο χαρτογραφίας καὶ χάρτης Ἑλλάδος.**

ΦΥΣΙΚΗ & ΧΗΜΕΙΑ Ε΄ τάξεως (ἀριθ. ἐγκρ. 71659/55)

«**Ἡ ἔκθεσις τῆς ὕλης εἰς τὸ βιβλίον τοῦτο γίνεται μετὰ σαφηνείας καὶ ἀκριβείας**» (ἀπόσπασμα πράξεως Ἐκπαιδευτικοῦ Συμβουλίου).

ΦΥΣΙΚΗ & ΧΗΜΕΙΑ ΣΤ΄ τάξεως (ἀριθ. ἐγκρ. 71660/55)

«**Ἡ διάταξις τῆς ὕλης εἰς τὸ βιβλίον τοῦτο γίνεται μετὰ μεθοδικότητος, ἡ δὲ ἔκθεσις τῆς ὕλης μετὰ σαφηνείας καὶ πληρότητος**»

ΦΥΣΙΚΗ & ΧΗΜΕΙΑ 1ον ἔτος συνδ/λίας (ἀριθ. ἐγκρ. 71659/55)
ΦΥΣΙΚΗ & ΧΗΜΕΙΑ 2ον ἔτος συνδ/λίας (ἀριθ. ἐγκρ. 71660/55)