ΣΤ. ΑΛ. ΜΠΑΚΟΓΕΩΡΓΟΥ ΧΡ. ΑΛ. ΑΛΕΞΟΠΟΥΛΟΥ

Πρακτική Ἀριθμητική

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΤΗΣ Ε' & ΣΤ' ΤΑΞΕΩΣ
ΤΩΝ ΔΗΜΟΤΙΚΩΝ ΣΧΟΛΕΙΩΝ '65

Ἐγκριθεῖσα διὰ τῆς ὑπ' ἀρ.θ. 61452)2-7-52 ἀποφ. Ὑπουργ. Παιδείας

$7+\frac{2}{5}+\frac{4}{3}$

ΕΚΔΟΣΙΣ: ΔΙΟΝ. & ΒΑΣ. ΛΟΥΚΟΠΟΥΛΟΥ
ΔΡΑΓΑΤΣΑΝΙΟΥ 6 (ΚΗΠ. ΚΛΑΥΘΜΩΝΟΣ) ΑΘΗΝΑΙ

ΣΤ. ΑΛ. ΜΠΑΚΟΓΕΩΡΓΟΥ—ΧΡ. ΑΛ. ΑΛΕΞΟΠΟΥΛΟΥ

ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΤΗΣ Ε΄ & ΣΤ΄ ΤΑΞΕΩΣ
ΤΩΝ ΔΗΜΟΤΙΚΩΝ ΣΧΟΛΕΙΩΝ

για τε
μολύβ

Ἐγκριθεῖσα διὰ τῆς ὑπ' ἀριθ. 61452/12-6-52 ἀποφάσεως Ὑπ. Παιδείας

ΕΚΔΟΣΙΣ ΔΙΟΝ. & ΒΑΣ. ΛΟΥΚΟΠΟΥΛΟΥ ΑΘΗΝΑΙ
ΣΤΑΔΙΟΥ 38 — (ΣΤΟΑ ΝΙΚΟΛΟΥΔΗ 10)

Κάθε γνήσιο ἀντίτυπο φέρει τὴν ὑπογραφὴ τῶν συγγραφέων

ΜΕΡΟΣ Α΄.

ΓΕΝΙΚΗ ΕΠΑΝΑΛΗΨΙΣ

ΑΠΟ ΤΑ ΟΣΑ ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΑΙ ΣΤΗΝ Δ΄ ΤΑΞΙΝ

---

1. ΑΠΟ ΤΟΥΣ ΑΚΕΡΑΙΟΥΣ

Α΄ Ὁ πατέρας τοῦ Κωστάκη στὴν ἀρχὴ τοῦ σχολικοῦ ἔτους πλήρωσε γιὰ ἐγγραφὴ 30.000 δραχ., γιὰ βιβλία 124.500 δραχ., γιὰ τετράδια 14.625, γιὰ μιὰ κασσετίνα 12.000 δραχ. καὶ γιὰ μολύβια, πέννες κ.λ.π. 23.825 δραχ. Πόσα χρήματα ξόδεψε;

Ἀφοῦ διαβάστε καλὰ τὸ παραπάνω πρόβλημα καὶ σκεφθῆτε, νὰ ἀπαντήσετε στὰ ἑξῆς :

1. Τί ἀριθμοὶ εἶναι αὐτοὶ ποὺ δίδονται στὸ πρόβλημα ;

2. Ἡ μία δραχμὴ ἀπὸ τὶς τόσες ποὺ πλήρωσε πῶς λέγεται ; Οἱ πολλὲς δραχμές, οἱ ἀμέτρητες, τί ὄνομα θὰ ἔχουν ;

3. Οἱ ἀριθμοὶ ποὺ μᾶς δίδονται στὸ πρόβλημα εἶναι συγκεκριμένοι καὶ ὁμοειδεῖς. Γιατί ;

4. Διαβάστε τὸ αὐτὸ πρόβλημα μὲ ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι νὰ μὴν εἶναι συγκεκριμένοι καὶ ὁμοειδεῖς.

5. Χωρίστε τὸ δεύτερο καὶ πέμπτο ἀριθμὸ τοῦ προβλήματος, σὲ μονάδες ἑκάστης ἀριθμητικῆς τάξεως.

6. Γράψετε τὸν ἀριθμὸ τῶν χιλιάδων τῶν δραχμῶν ποὺ ἔδωσε γιὰ τὴν κασσετίνα, μὲ Ἑλληνικὰ καὶ Λατινικὰ στοιχεῖα (ψηφία).

7. Πῶς λέγονται τὰ ψηφία μὲ τὰ ὁποῖα γράφονται οἱ ἀριθμοὶ τοῦ προβλήματος, πόσα εἶναι αὐτὰ καὶ πόσους ἀριθμοὺς μποροῦμε νὰ γράψωμε μὲ αὐτά ;

8. Γιὰ νὰ λύσωμε τὸ πρόβλημα, τί πρᾶξιν θὰ κάνουμε ; Γιατί καὶ πῶς θὰ τὴν κάνουμε ; Ποιό εἶναι τὸ σημεῖο τῆς πράξεως αὐτῆς, πῶς λέγονται οἱ ἀριθμοὶ ποὺ μᾶς δίδονται, πῶς λέγεται αὐτὸ τὸ ὁποῖο βρίσκομε καὶ τί πρέπει νὰ κάνουμε

γιὰ νὰ βεβαιωθοῦμε ὅτι ἡ πρᾶξις τὴν ὁποία ἐκάναμε εἶναι σωστή ;

Β΄ Ὁ πατέρας τοῦ Κωστάκη πλήρωσε τὶς 204.950 δραχ. ἀπὸ τὶς 250.000 τὶς ὁποῖες πῆρε ἀπὸ ἐνοίκιο τοῦ σπιτιοῦ του. Πόσα χρήματα τοῦ ἔμειναν ;

Ἀπαντήσατε στὰ παρακάτω :

1. Τί πρᾶξιν θὰ κάνουμε στὸ πρόβλημα αὐτὸ καὶ γιατί ;
2. Γιατί μᾶς δίδονται μόνον δύο ἀριθμοί ;
3. Πῶς λέγονται οἱ ἀριθμοὶ αὐτοί ;
4. Πῶς θὰ γίνη ἡ πρᾶξις, ποιό εἶναι τὸ σημεῖο της, πῶς λέγεται αὐτὸ ποὺ θὰ βροῦμε καὶ πῶς γίνεται ἡ δοκιμή ;
5. Πότε ἡ προηγούμενη πρᾶξις δὲν θὰ ἦταν δυνατὸ νὰ γίνη καὶ γιατί ;

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Ἡ Ἰφιγένεια πῆγε μὲ τὴ μαμά της νὰ ψωνίσουν τὰ σχολικά της εἴδη καὶ ἔδωσαν :

Γιὰ μιὰ ποδιὰ μπλὲ μὲ λευκὸ γιακὰ	δρχ.	197.000
» ἕνα ζευγάρι παπούτσια	»	105.000
» μιὰ τσάντα	»	92.500
» σχολικὰ εἴδη	»	34.635
» βιβλία τῆς Ε΄ τάξεως	»	108.250
» ἕνα ἀδιάβροχο	»	203.500
καὶ γιὰ νὰ φᾶνε δύο πάστες (γλυκὰ)	»	3.800

Ἡ μητέρα της γιὰ νὰ πληρώση ὅλα αὐτὰ εἶχε ἕνα ἑκατομμύριο. Μὲ πόσα ἐγύρισαν στὸ σπίτι τους ;

Σημείωσις : Πρὶν λύστε τὸ πρόβλημα σκεφθῆτε πόσες ἐργασίες ἔκανε ἡ μητέρα τῆς Ἰφιγένειας καὶ γράψετε πόσες ἐργασίες θὰ κάμετε καὶ σεῖς καὶ γιατί ;

2. Ὁ πατέρας τοῦ Πέτρου γιὰ ἔξοδα τῆς διατροφῆς τῆς οἰκογενείας του γιὰ ὅλον τὸν μῆνα Σεπτέμβριον ἐξώδευσε 567.342 δρχ., γιὰ τὴν ἐγγραφὴ τῶν παιδιῶν του 132.512 δραχ., γιὰ βιβλία καὶ τετράδια 196.500 δραχ., γιὰ εἴδη ρουχισμοῦ καὶ ὑποδήσεως 316.419 δραχ. καὶ γιὰ φωτισμὸ καὶ νερὸ 64.547 δραχ. Γιὰ ὅλα αὐτὰ εἶχε τὸ μισθό του, ὁ ὁποῖος ἦταν 1.412.000 δρχ. Πόσα τοῦ περίσσεψαν ;

3. Ἕνας οἰκογενειάρχης ὑπάλληλος παίρνει μισθὸ 1.215.000 δραχ., ὁ υἱός του παίρνει καὶ αὐτὸς μισθὸ ἀλλὰ 564.000

δραχ. λιγώτερα ἀπὸ τὸν πατέρα καὶ ἡ κόρη του παίρνει καὶ αὐτὴ μισθὸ ἀλλὰ 92.500 δρχ. λιγώτερα ἀπὸ τὸν ἀδελφόν της. Πόσα εἶναι τὰ ἔσοδα τοῦ οἰκογενειάρχου αὐτοῦ ;

Γ' Ὁ μανάβης τῆς γειτονιᾶς μας ἐπώλησε 420 ὀκάδ. ντομάτες πρὸς 2.650 δρχ. τὴν ὀκᾶ. Πόσες δραχμὲς εἰσέπραξε ;

1. Τί πρᾶξιν θὰ κάνουμε στὸ πρόβλημα αὐτὸ καὶ γιατί ;

2. Πόσοι ἀριθμοὶ μᾶς δίδονται στὸ πρόβλημα αὐτὸ καὶ γιατί ; Πῶς λέγονται οἱ ἀριθμοὶ αὐτοὶ στὴν πρᾶξιν τὴν ὁποία θὰ κάνουμε ;

3. Ποιὸ εἶναι τὸ σημεῖο τῆς πράξεως καὶ πῶς θὰ γίνη αὐτή ; Πῶς λέγεται αὐτὸ τὸ ὁποῖο θὰ βροῦμε καὶ πῶς γίνεται ἡ δοκιμὴ τῆς πράξεως αὐτῆς ;

4. Οἱ ἀριθμοὶ τελειώνουν σὲ μηδενικά. Τί θὰ τὰ κάμετε ;

5. Τί εἶναι ὁ Πυθαγόρειος πίνακας καὶ σὲ τί μᾶς εὐκολύνει ;

Ἕνας ἄλλος μανάβης ἐπώλησε :

10	ὀκάδες	ἀχλάδια	πρὸς	7.250	δρχ.	τὴν	ὀκᾶ
100	»	ντομάτες	»	1.850	»	»	»
1000	»	ραδίκια	»	1.385	»	»	»

Πόσες δραχμὲς εἰσέπραξε ;

Πόσες πράξεις θὰ κάμετε στὸ πρόβλημα αὐτό ; Τί εἶναι ὁ ἕνας ἀπὸ τοὺς δύο παράγοντας σὲ κάθε περίπτωσιν καὶ πῶς θὰ κάνετε εὐκολώτερα τὴν πρᾶξιν ;

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Σ' ἕνα σχολεῖο φοιτοῦν 412 μαθηταί. Ἀπὸ τοὺς μαθητὰς αὐτοὺς εἶναι γραμμένοι στὸ συσσίτιο.

ἀπὸ	τὴν	Α'	τάξι	36
»	»	Β'	»	28
»	»	Γ'	»	23
»	»	Δ'	»	39
»	»	Ε'	»	27 καὶ
»	»	ΣΤ'	»	25

Τὸ κάθε παιδὶ γιὰ τὸ συσσίτιο προσφέρει 5.200 δραχ. κατὰ μῆνα. Νὰ βρῆτε : α) Πόσα παιδιὰ εἶναι γραμμένα στὸ συσσίτιο, β) Πόσα παιδιὰ δὲν εἶναι γραμμένα, γ) Πόσα χρήματα εἰσπράττει κατὰ μῆνα τὸ σχολεῖο.

2. Τὰ παιδιὰ τῆς Ε΄ τάξεως ἑνὸς σχολείου ἔχουν κάμει ταμεῖο καὶ ἕνας ἀπὸ τοὺς μαθητὰς κρατεῖ ὁλοκάθαρο καὶ μὲ μεγάλην τάξιν τὸ βιβλίο τοῦ ταμείου τους. Μέσα σ' αὐτὸ εἶναι γραμμένα τὰ ἑξῆς :

ΕΣΟΔΑ ΕΞΟΔΑ

Αἰτία εἰσπράξεως	Ποσὸν	Αἰτία Πληρωμῆς	Ποσὸν
1. 'Απὸ εἰσφορὲς 56 μαθητῶν πρὸς 2000 δραχ.	—	Γιὰ τὰ βιβλία 3 μαθ. » τὸ συσσίτιον 5 ἀπόρων μαθ. × 5.200	54 000
2. Κέρδος ἀπὸ τὴν πώλησι 136 βιβλίων × 920 δραχ. τὸ ἕνα.	—	Γιὰ 2 εἰκόνες » τὰ εἰσιτήρια ἐκδρομῆς 28 μαθητῶν × 4.000 τὸ ἕνα	32.000 —
3. Δωρεὰ τοῦ Μ. Π.	15.000		

Νὰ βρῆτε πόσα εἶναι τὰ ἔσοδα, πόσα εἶναι τὰ ἔξοδα καὶ ποιὸ εἶναι τὸ σημερινὸ ὑπόλοιπο τοῦ ταμείου τῆς τάξεως.

Δ΄ Τὰ 24 κορίτσια τῆς Ε΄ τάξεως ἑνὸς σχολείου ἀγόρασαν 144 πήχεις μπλὲ ὑφάσματος γιὰ νὰ κάνουν ὁμοιόμορφες ποδιές. Πόσους πήχεις ὕφασμα ἀγόρασαν γιὰ κάθε ποδιά ;

Οἱ 36 ὀκάδες σταφύλια ἔχουν 86.400 δραχ. Πόσες δραχ. ἔχει μία ὀκᾶ ;

1. Τί πρᾶξιν θὰ κάνουμε σὲ κάθε ἕνα ἀπὸ τὰ προβλήματα αὐτὰ καὶ γιατί ;

2. Πόσοι ἀριθμοὶ μᾶς δίδονται στὸ κάθε πρόβλημα, πῶς λέγεται ὁ καθένας ἀπ' αὐτοὺς καὶ γιατί ;

3. Ποιό εἶναι τὸ σημεῖο τῆς πράξεως αὐτῆς, πῶς λέγεται αὐτὸ ποὺ βρίσκομε καὶ πῶς γίνεται ἡ δοκιμὴ τῆς πράξεως ;

Τὰ 25 τετράδια ἔχουν 15.000 δραχ. Πόσο ἔχει τὸ ἕνα ;

Τὸ ἕνα μολύβι ἔχει 800 δραχ. Πόσα μολύβια θὰ ἀγοράσω μὲ 7.200 δραχ. ;

Καὶ στὰ δύο προβλήματα θὰ κάνουμε τὴν ἴδια πρᾶξι.

Πῶς λέγεται ἡ πρᾶξις τοῦ πρώτου προβλήματος καὶ πῶς τοῦ δευτέρου καὶ γιατί ;

Γράψετε τρία προβλήματα ἀπὸ τὸ κάθε εἶδος.

Ὅταν οἱ ἀριθμοὶ τελειώνουν σὲ μηδενικὰ πῶς γίνεται ἡ πρᾶξις ;

Ἕνας βοσκὸς ἐπώλησε 15 ἀρνιὰ ἀντὶ 937.800 δραχ. Πόσο ἐπώλησε τὸ κάθε ἀρνί ;

Τὰ 36 σακκιὰ πατάτες χωροῦν 1.540 ὀκάδες. Πόσες ὀκάδες χωράει τὸ κάθε σακκί ;

Οἱ 3 ὀκάδες βούτυρο ἔχουν 200.000 δραχμές. Πόσο ἔχει ἡ μία ὀκᾶ ;

Κάμετε τὶς πράξεις τῶν ἀνωτέρω προβλημάτων. Προσέξετε τί θὰ παρατηρήσητε στὴν κάθε πρᾶξιν καὶ βρέστε πῶς λέγεται ἡ κάθε περίπτωσις.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

α) Ἀπὸ τὴ σχολικὴ ζωή.

1. Ἡ Ε΄ τάξις ἑνὸς σχολείου ἔχει 64 παιδιά. Ἀπ' αὐτὰ δὲν παίρνουν συσσίτιο τὰ 26 παιδιά. Ἐκεῖνα ποὺ παίρνουν μέρος στὸ συσσίτιο πληρώνουν 5.200 δρχ. τὸν μῆνα τὸ καθένα. Πόσα εἰσπράττει ἡ Ε΄ τάξις τὸν μῆνα γιὰ τὸ συσσίτιο καὶ πόσα θὰ εἰσπράξη στοὺς 7 μῆνες ποὺ θὰ διαρκέση τὸ συσσίτιο ;

2. Σὲ ἄλλο σχολεῖο οἱ 58 μαθηταὶ τῆς ΣΤ΄ τάξεως πληρώνουν 500 δρχ. τὴν ἑβδομάδα στὸ ταμεῖο ἐκδρομῶν των. Πόσα εἰσπράττει τὸ ταμεῖο τῆς τάξεως στοὺς 9 μῆνες ποὺ διαρκεῖ τὸ σχολικὸ ἔτος ;

β) Ἀπὸ τὴν κοινωνικὴ ζωή.

1. Ἕνας οἰκογενειάρχης ὑπάλληλος, μὲ οἰκογένεια 3 ἀτόμων παίρνει μισθὸ 1.250.000 δραχ. τὸν μῆνα. Ἀπ' αὐτὲς ξοδεύει γιὰ διατροφὴ τῆς οἰκογενείας του γενικῶς 1.069.542 δρχ. Πόσα ἀναλογοῦν τὴν ἡμέρα σὲ κάθε ἄτομον τῆς οἰκογενείας καὶ πόσα τοῦ περισσεύουν τὸ χρόνο ;

2. Ἕνας γεωργὸς ἀπὸ τὰ κτήματά του ἐπῆρε 12.585 ὀκάδες σιτάρι καὶ κριθάρι. Τὸ σιτάρι ἦταν 5.683 ὀκάδ. Τὸ κριθάρι ἀφοῦ ἐκράτησε 2.500 ὀκάδ. γιὰ σπορὰ τὸ ἐπώλησε πρὸς 1.600 δραχ. τὴν ὀκᾶ. Πόσα χρήματα εἰσέπραξε ;

3. Ὁ κ. Μαλαματίδης ἐπώλησε 4 δωδεκάδες μανδήλια πρὸς

6.250 δραχ. τὸ ἕνα μανδήλι. Μὲ τὰ χρήματα ποὺ εἰσέπραξε ἀγόρασε 3 τόπια χασὲ τῶν 42 πήχεων τὸ καθένα. Πόσο τοῦ στοιχίζει ὁ πῆχυς τοῦ χασέ ;

4. Κατὰ τὴν ἀπογραφὴ ταῦ 1928 ἡ Ἀθήνα εἶχε πληθυσμὸ 452.912 κατοίκους καὶ ὁ Πειραιεὺς 251.306 κατοίκους. Τώρα ὅμως ὁ πληθυσμὸς καὶ τῶν δύο πόλεων εἶναι 1.500.000 κάτοικοι περίπου. Κατὰ πόσους κατοίκους αὐξήθηκε ὁ πληθυσμὸς καὶ τῶν δύο πόλεων ;

γ) Ἀπὸ τὰ μαθήματα :

1. Πόσα χρόνια ἔχουν περάσει ἕως σήμερα ἀπὸ τὴ μάχη τοῦ Μαραθῶνα, ἡ ὁποία ἔγινε τὸ 490 π.Χ. ;

2. Ἡ κορυφὴ τοῦ ὑψηλοτέρου ὄρους τῆς γῆς Ἔβερεστ εἶναι 8.840 μέτρα. Κατὰ πόσα μέτρα εἶναι ὑψηλότερη ἀπὸ τὴν κορυφὴ τοῦ Ὀλύμπου μας καὶ τοῦ Παρνασσοῦ ;

3. Πόσα χρόνια ἔχουν περάσει ἀπὸ τότε ποὺ ἦλθε ὁ Ἀπόστολος Παῦλος στὰς Ἀθήνας ;

4. Πόσες Ὀλυμπιάδες πέρασαν ἀπὸ τὸ 564 π. Χ. μέχρι τοῦ 480 π. Χ. ;

ΑΠΟ ΤΟΥΣ ΔΕΚΑΔΙΚΟΥΣ

1. Τὸ μέτρο τὸ ὁποῖο μεταχειρίζονται οἱ κτῖσται, οἱ μαραγκοὶ κ.λ.π. χωρίζεται σὲ 10 παλάμες ἢ καὶ σὲ 100 πόντους (δακτύλους) ἢ 1000 γραμμές.

Τί μέρος τοῦ μέτρου εἶναι ἡ μία παλάμη ἢ ὁ ἕνας πόντος ἢ ἡ μία γραμμή ;

2. Ὅταν ἐζοῦσαν οἱ παππούδες μας, ἡ δραχμή μας εἶχε μεγάλη ἀξία καὶ εἶχε 10 δεκάρες καὶ ἡ κάθε δεκάρα 10 λεπτά.

Τί μέρος τῆς δραχμῆς εἶναι ἡ δεκάρα ἢ τὸ λεπτό ;

Τί μέρος τοῦ σημερινοῦ ἑκατοστάρικου εἶναι ἡ δραχμή, ἡ δεκάρα καὶ τὸ λεπτό ;

Πῶς γράφονται ἀριθμητικῶς οἱ προηγούμενες ὑποδιαιρέσεις τοῦ μέτρου καὶ τῆς δραχμῆς ;

Ἀπὸ ἕνα τόπι ὕφασμα τὸ ὁποῖο ἦτο 46,25 πήχ. κόψαμε

γιὰ 8 ποδιὲς ποὺ ἡ κάθε μία χρειάζεται 4,32 πήχ. Πόσους πήχεις ὕφασμα ἔμεινε στὸ τόπι ;

Ἀπὸ ἕνα δοχεῖο λάδι ποὺ εἶχε 156,25 ὀκάδ. ἀφαιρέσαμε τὴν α΄ φορὰ 32,5 ὀκάδ., τὴν β΄ 38,65 ὀκάδ. καὶ τὴν τρίτη φορὰ 48,75 ὀκάδ. Πόσες ὀκάδες λάδι ἔχει ἀκόμη τὸ δοχεῖο ;

Ἐρωτήσεις

1. Τί διαφορὰ ἔχουν οἱ ἀριθμοὶ τῶν ἀνωτέρω προβλημάτων μὲ τοὺς ἀριθμοὺς ποὺ εἴδαμε στὰ προηγούμενα προβλήματα ;
2. Πῶς λέγονται οἱ ἀριθμοὶ αὐτοὶ καὶ γιατί ;
3. Πῶς λέγεται τὸ κόμμα ποὺ ἔχει ὁ κάθε ἀριθμὸς καὶ σὲ τί χρησιμεύει ;
4. Ποιὰ εἶναι ἡ τάξις τῶν δεκαδικῶν ψηφίων ;
5. Πῶς γίνεται ἡ κάθε πρᾶξις τῶν ἀνωτέρω προβλημάτων καὶ τί διαφορὰ ὑπάρχει στὶς πράξεις αὐτὲς ἀπὸ τὶς πράξεις τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ;

Ἄσκησις

1. Γράψετε μὲ ἀριθμοὺς τοὺς ἑξῆς δεκαδικούς :

   α) πέντε ἀκέραιος καὶ τρία δέκατα
   β) ἓξ δραχμὲς καὶ τρεῖς δεκάρες
   γ) τρία μέτρα καὶ πέντε πόντοι
   δ) ὀκτὼ δάχτυλοι τοῦ μέτρου
   ε) τέσσαρα δέκατα
   στ) τρία χιλιοστὰ

2. Διαβάστε τοὺς ἑξῆς δεκαδικούς :

6,3	5,852	124,000
0,25	8,0004	0,3
5,382	9,67	15,3007

Στὸ δεκαδικὸ ἀριθμὸ 368,25 μετακινήσατε τὴν ὑποδιαστολὴ κατὰ δύο ψηφία πρὸς τὰ δεξιὰ ἢ δύο ψηφία πρὸς τὰ ἀριστερὰ καὶ βρῆτε τί παθαίνει ὁ δεκαδικὸς αὐτὸς ἀριθμός.

Ὁ ἕνας τοῖχος τῆς Α΄ τάξεως εἶναι 6,2 μέτρα, τῆς Β΄ τάξεως 6,20 καὶ τῆς Γ΄ τάξεως 6,200 μέτρα. Ποιός ἀπὸ τοὺς τρεῖς τοίχους εἶναι ὁ μεγαλύτερος ;

Ὁ πατέρας τοῦ Γιώργου ὅταν ἦταν μαθητὴς ἔδωσε γιὰ ἕνα τετράδιο 1,60 δρχ. καὶ γιὰ κάστανα 1,6 δρχ. Γιὰ ποιὸ ἀπὸ τὰ δύο ἔδωσε περισσότερο ;

Τί παρατηρεῖτε στὰ δύο αὐτὰ προβλήματα, στὰ ὁποῖα οἱ δεκαδικοὶ ἀριθμοὶ τελειώνουν σὲ μηδενικά ;

Ἡ Πόπη γιὰ νὰ κάμη τὴν ποδιά της θέλει 4,6 πήχ. ὕφασμα, ἡ Θεώνη 4,06 πήχ. καὶ ἡ Μαρία 4,006 πήχ. Ποιά ἀπὸ τὶς τρεῖς θέλει περισσότερο ὕφασμα ;

Ποῦ εἶναι ἐδῶ τὰ μηδενικὰ τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν καὶ ποιὰ ἀξία ἔχουν ;

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

α) Ἀπὸ τὴ σχολικὴ ζωή.

1. Ἡ αἴθουσα διδασκαλίας τῆς Ε΄ τάξεως ἔχει μῆκος 6,52 μέτρα, ἐνῶ τῆς Γ΄ τάξεως 5,18 μ. Πόσο εἶναι μεγαλύτερη ἡ αἴθουσα τῆς Ε΄ τάξεως ;

2. Τὸ κάθε ἀναγνωστικὸ ἔχει μῆκος 0,32 μ. Πόσο μῆκος θὰ πιάσουν τὰ 48 ἀναγνωστικὰ τῆς τάξεως ἐὰν τὰ βάλωμε στὴ σειρά ;

3. Ἡ ἀποθήκη τοῦ συσσιτίου τοῦ σχολείου μας πῆρε 2 βαρέλια γάλα σκόνη, ποὺ τὸ καθένα ἔχει 86,25 ὀκ. Πόσα δράμια γάλα ἀναλογεῖ στὸν καθένα ἀπὸ τοὺς 148 συσσιτουμένους μαθητὰς ἐν ὅλῳ καὶ πόσα τὴν ἡμέρα, ἀφοῦ εἶναι γνωστὸ ὅτι μὲ τὸ γάλα αὐτὸ θὰ περάσουν 2 ἑβδομάδες ;

β) Ἀπὸ τὴν κοινωνικὴ ζωή.

1. Ὁ πατέρας μου ἔπαιρνε μισθὸ 862,50 δραχ. τὸ μῆνα. Πόσα ἔπαιρνε τὴν ἡμέρα ;

2. Ἕνας ὑπάλληλος ἐπῆρε 2,86 μέτρα ὕφασμα πρὸς 126.000 δραχ. τὸ μέτρο γιὰ νὰ κάμη φορεσιά. Γιὰ τὰ ὑλικὰ τῆς φορεσιᾶς ἐπλήρωσε 103.250 δραχ. καὶ γιὰ ραπτικὰ 400.000 δραχ. Πόσα τοῦ ἐστοίχισε ἡ φορεσιά ;

3. Ἕνας κτηνοτρόφος ἐπώλησε 104,25 ὀκ. βούτυρο πρὸς 42.000 δραχ. τὴν ὀκᾶ καὶ 1108,2 ὀκ. τυρὶ πρὸς 12.845 δρχ. τὴν ὀκᾶ. Μὲ τὰ χρήματα τὰ ὁποῖα εἰσέπραξε ἀγόρασε ἕνα οἰκόπεδο 300 τετρ. πήχεων. Πόσο ἔχει ὁ ἕνας τετρ. πῆχυς ;

γ) Ἀπὸ τὰ μαθήματα.

1. Ἔχομε δύο σιδηρᾶς ράβδους ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μία ἔχει μῆκος 1,375 μέτρ. καὶ ἡ ἄλλη 0,892 μ. Τὶς θερμαίνομε ταυτόχρονα καί, σύμφωνα μὲ τὸ νόμο τῆς συστολῆς καὶ διαστολῆς τῶν σωμάτων, διαστέλλονται καὶ γίνονται ἡ μὲν 1,381 μ. καὶ ἡ ἄλλη 0,896 μ. Πόσο διεστάλησαν καὶ οἱ δύο ;

2. Ἕνα αὐτοκίνητο τρέχει κατὰ μέσον ὅρο 32 χιλιόμετρα τὴν ὥρα. Πόσες ὧρες θέλει γιὰ νὰ πάῃ στὴ Λαμία, ἀπὸ τὴ Λαμία στὴ Λάρισα καὶ ἀπὸ τὴ Λάρισα στὴ Θεσσαλονίκη ;

3. Τὸ κάθε σκαλοπάτι ἔχει ὕψος 0,16 μέτρα. Πόσα μέτρα ὕψος ἔχει ἡ σκάλα ἑνὸς σχολείου, ἡ ὁποία ἔχει 24 σκαλοπάτια καὶ πόσο ἡ σκάλα τοῦ σχολείου σας ;

3. ΑΠΟ ΤΟΥΣ ΣΥΜΜΙΓΕΙΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ

1. Ἡ Κικὴ ἀγοράζει ἕνα κομμάτι κορδέλλα ἡ ὁποία εἶναι 2 πήχεις καὶ 3 ρούπια.

2. Ἡ αὐλὴ τοῦ σχολείου μας ἔχει μῆκος 8 μέτρα 5 παλάμες καὶ 16 δακτύλους.

3. Ἡ μητέρα μου ἐργάζεται τὴν ἡμέρα 7 ὧρες καὶ 45 πρῶτα λεπτά.

4. Ἕνα τσουβάλι κάρβουνα ζυγίζει 1 στατῆρα 5 ὀκάδες καὶ 350 δράμια.

5. Μία ἀποθήκη ἔχει χωρητικότητα 35 κυβικὰ μέτρα καὶ 780 κυβικοὺς δακτύλους.

Ἐρωτήσεις

Πῶς λέγονται οἱ ἀριθμοὶ οἱ ὁποῖοι ἀναφέρονται στὰ προηγούμενα παραδείγματα ;

Τί μονάδα ἐκφράζει κάθε ἀριθμὸς τοῦ κάθε παραδείγματος;

Ἀπὸ τοὺς παρακάτω πίνακες νὰ μάθετε καλὰ τὶς ἀρχικὲς μονάδες μὲ τὶς ὑποδιαιρέσεις των.

α΄ Μονάδες χρόνου

Ὁ *αἰὼν* ἔχει 100 ἔτη.

Τὸ *ἔτος* ἔχει 12 μῆνες.

Ὁ ἕνας μήνας ἔχει 30 ἡμέρες.
Ἡ *ἡμέρα* ἔχει 24 ὧρες.
Ἡ *ὥρα* ἔχει 60′ *(πρῶτα λεπτὰ)* καὶ
τὸ 1′ ἔχει 60″ *(δευτερόλεπτα).*

β′ Μονάδες ἢ μέτρα βάρους

Στὴν Ἑλλάδα εἶναι εἰς χρῆσιν:
Ὁ *τόννος*, ὁ ὁποῖος ἰσοῦται μὲ 781 ὀκάδες καὶ 100 δράμια.
Ὁ *στατήρας*, ὁ ὁποῖος ἰσοῦται μὲ 44 ὀκάδες, καὶ
ἡ *ὀκᾶ*, ἡ ὁποία ἰσοῦται μὲ 400 δράμια.
Ἄλλες μονάδες βάρους εἶναι:
Τὸ *χιλιόγραμμο*, τὸ ὁποῖο ἰσοῦται μὲ 1000 *γραμμάρια.*
Τοῦτο λέγεται καὶ *κιλό.*
Τὸ *κιλὸ* εἶναι ἴσον μὲ 312,5 δράμια.
Μία ὀκᾶ ἰσοῦται μὲ 1.280 γραμμάρια, καὶ
ἕνα δράμι μὲ 3,2 γραμμάρια.
Ἡ *λίβρα*, ἡ ὁποία ἔχει *16 οὐγγιές.*
Μιὰ λίβρα ἰσοῦται μὲ 141,75 δράμια, καὶ
μία οὐγγιὰ ἰσοῦται μὲ 8,86 δράμια.

γ′ Μονάδες ἢ μέτρα μήκους

Τὸ *μέτρο* ἢ ὁ *βασιλικὸς πῆχυς*. Ὑποδιαιρεῖται σὲ 10 παλάμες ἢ 100 δακτύλους ἢ 1000 γραμμές.

Ὁ *ἐμπορικὸς πῆχυς* ἢ *πῆχυς τῆς Κωνσταντινουπόλεως.* Εἶναι τὰ 0,64 τοῦ μέτρου καὶ ὑποδιαιρεῖται σὲ 8 *ρούπια* καὶ κάθε ρούπι σὲ 8 δακτύλους.

Ὁ *τεκτονικὸς πῆχυς*, ὁ ὁποῖος εἶναι τὰ 0,75 τοῦ μέτρου.

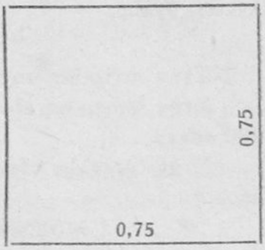
Ἡ *γιάρδα*, ἡ ὁποία εἶναι τὰ 0,914 τοῦ μέτρου καὶ ὑποδιαιρεῖται σὲ 3 *πόδια* καὶ τὸ κάθε πόδι σὲ 12 *ἴντζες*.

Τὸ *χιλιόμετρο*, ἴσον μὲ 1000 μέτρα.

Τὸ *Ἀγγλικὸ μίλιο* ἴσον μὲ 1609,32 μ. καὶ τὸ *Ναυτικὸ μίλιο* ἴσον μὲ 1852 μέτρα.

δ΄. Μονάδες ἢ μέτρα ἐπιφανείας

Τὸ *τετραγωνικὸ μέτρο*, τὸ ὁποῖο ἔχει μῆκος 1 μέτρο καὶ πλάτος 1 μέτρο.



Ὁ *τετραγωνικὸς τεκτονικὸς πῆχυς*, ὁ ὁποῖος ἔχει μῆκος 0,75 μ. καὶ πλάτος 0,75 μ.

Ὁ τετραγωνικὸς τεκτονικὸς πῆχυς εἶναι τὰ 9 τετραγωνικὰ μέρη ἀπὸ τὰ 16 ἴσα μέρη εἰς τὰ ὁποῖα χωρίζεται τὸ τετραγ. μέτρον (τ.μ. ἢ $μ^2$).

Ὥστε ὁ τετραγ. πῆχυς εἶναι τὰ $\frac{9}{16}$ *τοῦ τετραγωνικοῦ μέτρου, δηλ. τὰ 9 ἀπὸ τὰ 16 ἴσα μέρη τοῦ τετραγ. μέτρου.*

13	14	15	16
12	11	10	9
5	6	7	8
4	3	2	1

Τετραγωνικὸ μέτρο

9	8	7
4	5	6
3	2	1

Τετραγ. πῆχυς

Τὸ *στρέμμα* ἴσον μὲ 1000 τετραγωνικὰ μέτρα.

Τὸ ἑκτάριο ἴσον μὲ 10.000 τετραγωνικὰ μέτρα.

ε΄ Μονάδες ἢ μέτρα ὄγκου ἢ χωρητικότητος

Τὸ κυβικὸ μέτρο, τὸ ὁποῖο ἔχει μῆκος 1 μέτρο, πλάτος, 1 μέτρο καὶ ὕψος 1 μέτρο.

Ἔχει 1000 κυβικὲς παλάμες (10×10×10=1000) ἢ 1.000.000 κυβικοὺς δακτύλους (100×100×100=1.000.000).

Ἐὰν μὲ αὐτὸ μετρήσωμε πόσο χωρεῖ ἕνα δοχεῖο, τὸ ἐξαγόμενο ἐκ τῆς μετρήσεως αὐτῆς καλεῖται *χωρητικότης*. Καὶ 1 κ.μ. ἢ $μ^3$ χωρεῖ ἕνα τόννο νεροῦ.

Ἐὰν ὅμως μετρήσωμε ξυλεία, πέτρες καὶ ἄλλα σώματα στερεά, τὸ ἐξαγόμενο ἐκ τῆς μετρήσεως σὲ κυβικὰ μέτρα καλεῖται *ὄγκος*.

στ΄ Μονάδες νομισμάτων

Στὴν πατρίδα μας ἀρχικὴ μονὰς εἶναι ἡ *δραχμή*.

Στὴν Ἀμερικὴ εἶναι τὸ *δολλάριο*, τὸ ὁποῖο διαιρεῖται σὲ 100 *σέντς*.

Στὴν Ἀγγλία εἶναι ἡ *λίρα στερλίνα*, μὲ τὶς ἑξῆς ὑποδιαιρέσεις.

1 λίρα ἔχει 20 *σελίνια*
1 σελίνι ἔχει 12 *πέννες*, καὶ
1 πέννα ἔχει 4 *φαρδίνια*.

Στὴν Τουρκία εἶναι ἡ *Τουρκικὴ λίρα*, ἡ ὁποία διαιρεῖται σὲ 100 *γρόσια* καὶ τὸ κάθε γρόσι σὲ 40 *παράδες*.

Στὴν Αἴγυπτο ἡ *Αἰγυπτιακὴ λίρα*, ἡ ὁποία ἔχει καὶ αὐτὴ 100 γρόσια.

Στὴν Ἰταλία ἡ *λιρέττα*
» Γαλλία τὸ *φράγκο*
» Σερβία τὸ *δηνάριο*
» Ρουμανία τὸ *λέϊ*
» Ἱσπανία ἡ *πεσσέτα*
» Ἑλβετία τὸ *Ἑλβετικὸ φράγκο*
Στὸ Βέλγιο τὸ *Βελγικὸ φράγκο*

Ὅλα αὐτὰ ὑποδιαιροῦνται σὲ 100 ἑκατοστὰ ὅπως καὶ ἡ δραχμή μας

Στὴ Γερμανία τὸ *μάρκο*, τὸ ὁποῖο ὑποδιαιρεῖται σὲ 100 *πφένιχ*.

Στὴ Σουηδία τὸ *φλωρίνι* (100 αῖρ) καὶ στὴ Ρωσσία τὸ *ρούβλι* (100 καπίκια).

Ἡ ἀξία τοῦ κάθε ξένου νομίσματος σὲ δραχμὲς σήμερα δὲν εἶναι σταθερά. Εἶναι ἀνάλογη μὲ τὴν τιμὴ τῆς λίρας Ἀγγλίας, τῆς ὁποίας τὴν τιμὴ κανονίζει καθημερινῶς τὸ Χρηματιστήριο ἢ ἡ Τράπεζα τῆς Ἑλλάδος, ἀνάλογα μὲ τὴν προσφορὰ ἢ τὴν ζήτησιν ἡ ὁποία ὑπάρχει.

Τροπὴ συμμιγῶν ἀριθμῶν σὲ μονάδες κατωτέρας τάξεως

Μία βρύση γεμίζει μία δεξαμενὴ σὲ 3 ὧρες 18^{π} καὶ 20^{δ}. Σὲ πόσα δευτερόλεπτα θὰ γεμίση ἡ δεξαμενή;

Γιὰ νὰ λύσω τὸ πρόβλημα αὐτὸ ποιὲς πράξεις θὰ κάμω καὶ γιατί ;

Τροπὴ ἀκεραίου ἀριθμοῦ σὲ συμμιγῆ

Ἕνα παιδὶ εἶναι 4.512 ἡμερῶν. Πόσων ἐτῶν εἶναι ἀκριβῶς;

Ἐδῶ τὶς ἡμέρες πρέπει νὰ τὶς τρέψω σὲ μῆνες καὶ τοὺς μῆνες σὲ ἔτη.

Πῶς θὰ σκεφθῶ καὶ τί πράξεις θὰ κάμω ; Τί διαφορὰ ὑπάρχει ἀπὸ τὴν περίπτωσιν τῆς τροπῆς συμμιγοῦς σὲ ἀκέραιον (μονάδες κατωτέρας τάξεως) ;

Ἀσκήσεις

1. Νὰ τραποῦν σὲ μονάδες κατωτέρας τάξεως οἱ ἑξῆς συμμιγεῖς :

α) 3 ἔτη, 2 μῆνες, 12 ἡμέρες καὶ 20π.

β) 2 στατῆρες, 25 ὀκάδ. καὶ 150 δράμια.

γ) 28 πήχεις καὶ 4 ρούπια.

δ) 8 λίρες, 4 σελίνια, 6 πέννες καὶ 3 φαρδίνια.

2. Νὰ τραποῦν σὲ συμμιγεῖς οἱ ἑξῆς ἀκέραιοι :

α) 274 ρούπια σὲ πήχεις.

β) 17.540 δράμια σὲ ὀκάδες καὶ στατῆρες.

γ) 7.528 πέννες σὲ σελίνια καὶ λίρες.

δ) 158.420$^{\delta}$ σὲ ἡμέρες, μῆνες κ.λ.π.

ε) 36.420 παράδες σὲ γρόσια καὶ λίρες Τουρκίας.

στ) 156 ρούπια σὲ μέτρα.

Πῶς τρέπομε πρακτικὰ τὰ μέτρα σὲ πήχεις

Ἕνα τόπι ὕφασμα εἶναι 54,4 μέτρα. Πόσους πήχεις εἶναι ;

Λύσις

Γνωρίζομε ὅτι ἕνα μέτρο ἔχει 100 δακτύλους καὶ ὅτι τὰ 0,64 τοῦ μέτρου, ἤτοι 64 δάκτυλοι κάνουν ἕνα πῆχυ. Ὡς ἐκ τούτου θὰ πολλαπλασιάσωμε τὸ 54,4 μ. ἐπὶ 100 γιὰ νὰ τὸ κάμωμε δακτύλους, τὸ γινόμενο θὰ τὸ διαιρέσωμε διὰ τοῦ 64 καὶ τὸ πηλίκο θὰ εἶναι πήχεις. Καὶ ἔχομε :

α) $54{,}4 \times 100 = 5.440$ ἢ $100\ \delta \times 54{,}4 = 5.440$ δακτ.

β) $5.440 : 64 = 85$ πήχεις.

Ὥστε γιὰ νὰ τρέψωμε τὰ μέτρα σὲ πήχεις τὰ πολλαπλασιάζουμε ἐπὶ 100 καὶ τὸ γινόμενο τὸ διαιροῦμε διὰ τοῦ 64. Τὸ πηλίκο εἶναι οἱ ζητούμενοι πήχεις.

Τροπὴ πήχεων σὲ μέτρα

Ἕνα ἄλλο τόπι ὕφασμα εἶναι 70 πήχεις. Πόσα μέτρα εἶναι τὸ ὕφασμα ;

Λύσις

Ἐδῶ θὰ τρέψωμε τοὺς πήχεις σὲ πόντους ἀφοῦ πολλαπλασιάσομε τοὺς 70 πήχεις ἐπὶ τὸ 64, δηλ. τοὺς πόντους ποὺ ἔχει ὁ 1 πῆχυς. Τὸ γινόμενο θὰ τὸ διαιρέσωμε διὰ τοῦ 100 καὶ τὸ πηλίκο θὰ εἶναι μέτρα, ἤτοι :

α) 70 × 64 = 4.480 πόντους.
β) 4.480 : 100 = 44,80 μέτρα.

Ὥστε γιὰ νὰ τρέψωμε πήχεις σὲ μέτρα πολλαπλασιάζομε τοὺς πήχεις ἐπὶ 64 γιὰ νὰ τοὺς κάνωμε πόντους καὶ τὸ γινόμενο τὸ διαιροῦμε διὰ τοῦ 100 καὶ ἔχομε μέτρα.

Τροπὴ μέτρων σὲ τεκτονικοὺς πήχεις

Ἕνας τοῖχος ἔχει μῆκος 20 μέτρα. Πόσους τεκτονικοὺς πήχεις εἶναι ;

Λύσις

Θὰ πολλαπλασιάσωμε τὰ μέτρα ἐπὶ 100 γιὰ νὰ τὰ κάμωμε πόντους καὶ τὸ γινόμενο θὰ τὸ διαιρέσωμε διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 75, διότι ἕνας τεκτονικὸς πῆχυς ἔχει 75 πόντους. Καὶ ἔχομε :

α) 20 × 100 = 2.000
β) 2.000 : 75 = 26,6 τεκτ. πήχ.

Τροπὴ τεκτονικῶν πήχεων σὲ μέτρα

Ἕνας τοῖχος εἶναι μήκους 30 τεκτονικῶν πήχεων. Πόσα μέτρα εἶναι ;

Λύσις

Ἐδῶ θὰ κάμωμε τὸ ἀντίθετο. Δηλ. θὰ πολλαπλασιάσωμε ἐπὶ τὸ 75 καὶ θὰ διαιρέσωμε διὰ τοῦ 100. Γιατί ; Καὶ θὰ ἔχωμε :

α) $30 \times 75 = 2.250$

β) $2250 : 100 = 22,50$ μέτρα.

Ὥστε γιὰ νὰ τρέψωμε μέτρα σὲ τεκτονικοὺς πήχεις πολλαπλασιάζομε τὰ μέτρα ἐπὶ 100 καὶ τὸ γινόμενο τὸ διαιροῦμε διὰ τοῦ 75 καὶ γιὰ νὰ τρέψωμε τεκτονικοὺς πήχεις σὲ μέτρα, ἀντιθέτως, πολλαπλασιάζομε ἐπὶ τὸ 75 καὶ διαιροῦμε διὰ τοῦ 100.

Τροπὴ τετραγωνικῶν μέτρων σὲ τετραγωνικοὺς πήχεις

Ἕνα οἰκόπεδο εἶναι 100 τετραγ. μέτρα. Πωλεῖται ὅμως μὲ τὸν τετραγ. πῆχυν. Πόσους τετραγ. πήχεις εἶναι ;

Λύσις

Γνωρίζομε ὅτι 1 τετραγ. πῆχυς εἶναι τὰ $\frac{9}{16}$ τοῦ τετραγ. μέτρου. Ὡς ἐκ τούτου θὰ διαιρέσωμε τὰ τετραγων. μέτρα διὰ τοῦ $\frac{9}{16}$ καὶ θὰ ἔχωμε :

α) $100 : \frac{9}{16} = 100 \times \frac{16}{9}$

β) $100 \times 16 = 1.600$

γ) $1.600 : 9 = 177,7$ τετραγ. πήχεις.

Ἀπὸ τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα συμπεραίνομε, ὅτι γιὰ νὰ τρέψωμε τετραγ. μέτρα σὲ τετραγ. πήχεις διαιροῦμε τὰ τετραγ. μέτρα διὰ τοῦ $\frac{9}{16}$.

Ἐπίσης ἀντιλαμβανόμεθα ὅτι τὰ 1.000 μέτρα δηλ. τὸ 1 στρέμμα εἶναι 1.777,7 ἢ 1778 τετραγ. πήχεις.

Τροπὴ τετραγ. πήχεων σὲ τετραγ. μέτρα

Γιὰ νὰ τρέψωμε τετραγ. πήχεις σὲ τετραγ. μέτρα θὰ κάμωμε τὸ ἀντίστροφο. Δηλ. θὰ πολλαπλασιάσωμε τοὺς τετραγ. πήχεις ἐπὶ τὸ $\frac{9}{16}$. Γιατί ;

Τροπὴ ὀκάδων σὲ κιλὰ

Ἕνα κιβώτιο σταφίδα ζυγίζει 25 ὀκάδες. Πόσα κιλὰ εἶναι ;

Λύσις

Γνωρίζομε ὅτι ἡ μία ὀκᾶ ἔχει 1280 γραμμάρια καὶ ὅτι τὸ κιλὸ ἔχει 1000 γραμμάρια. Ἑπομένως ἡ μία ὀκᾶ ἔχει $\frac{1280}{1000}$ κιλά, δηλ. 1280 : 1000 = 1,280 = 1,28 κιλά. Ὡς ἐκ τούτου θὰ πολλαπλασιάσωμε τὶς ὀκάδες ἐπὶ τὸ 1,28.

Γιὰ τὸ ἴδιο ζήτημα μποροῦμε νὰ σκεφθοῦμε καὶ ὡς ἑξῆς : Ἐὰν διαιρέσωμε τὰ 1000 γραμμάρια τοῦ κιλοῦ διὰ τῶν 1280 γραμμαρίων ποὺ ἔχει ἡ μία ὀκᾶ, θὰ ἔχωμε $\frac{1000}{1280} = 0,78.$

Ἐὰν διαιρέσωμε τὶς 25 ὀκάδες διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 0,78 θὰ βροῦμε πάλι κιλά.

Τὸν ἀριθμὸ 0,78 τὸν βρίσκομε καὶ ἀπὸ ἄλλην σκέψιν, τὴν ἑξῆς : Ἕνας τόννος ἔχει 781,25 ὀκ. ἢ καὶ 1000 κιλά. Ἂν διαιρέσωμε τὰς 781,25 ὀκ. διὰ τοῦ 1000 κιλά, θὰ βροῦμε πάλι τὸν ἀριθμὸ 0,78125 τῆς ὀκᾶς.

Ὁδηγούμενοι λοιπὸν ἀπὸ τὶς ἀνωτέρω σκέψεις, λύομε τὸ πρόβλημα ὡς ἑξῆς :

25 ὀκ. × 1,28 = 32 κιλὰ ἢ
25 ὀκ. : 0,78 = 32 κιλὰ

Ὥστε γιὰ νὰ τρέψωμε τὶς ὀκάδες σὲ κιλὰ ἢ πολλαπλασιάζομε τὸν ἀριθμὸ τῶν ὀκάδων ἐπὶ τὸ 1,28 ἢ τὸν διαιροῦμε διὰ τοῦ 0,78.

Τροπὴ κιλῶν σὲ ὀκάδες

Ἕνα κιβώτιο μαρμελάδα ζυγίζει 30 κιλά. Πόσες ὀκάδες εἶναι ;

Γιὰ νὰ λύσωμε τὸ πρόβλημα αὐτὸ τί πρέπει νὰ κάμωμε καὶ γιατί ;

Ἀσκήσεις

Τρέψετε τούς :

α) 62 πήχεις σὲ μέτρα
β) τὰ 43,25 μέτρα σὲ πήχεις

γ) 136 τεκτονικοὺς πήχεις σὲ μέτρα μήκους.

δ) τὰ 185 τετραγωνικὰ μέτρα σὲ τετραγωνικοὺς τεκτονικοὺς πήχεις.

ε) τὶς 72 ὀκάδες σὲ κιλά, καὶ

στ) τὰ 142 κιλὰ σὲ ὀκάδες.

ΠΡΑΞΕΙΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΣΥΜΜΙΓΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

α΄. ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ

***Μιὰ** μητέρα γιὰ νὰ ἀγοράσῃ φόρεμα καὶ γιὰ τὰ τρία κορίτσια της, ἐπῆρε γιὰ τὸ α΄ 6 πήχ. καὶ 5 ρούπια, γιὰ τὸ β΄ 5 πήχ. καὶ 6 ρούπια καὶ γιὰ τὸ γ΄ 4 πήχ. καὶ 2 ρούπια. Πόσες πήχεις ὕφασμα ἀγόρασε ;*

β΄. ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ

Ἕνας ἔμπορος ἀγόρασε 12 στατ. 8 ὀκάδ. καὶ 200 δράμια σαπούνι. Ἀπ᾽ αὐτὸ ἐπώλησε ἀμέσως 7 στατ. 25 ὀκάδ. καὶ 300 δραμ. Πόσο τοῦ ἔμεινε ;

Τί πράξεις θὰ κάμετε γιὰ νὰ λύσετε τὰ προβλήματα αὐτὰ καὶ πῶς θὰ τὶς κάμετε ;

Τί διαφορὰ ὑπάρχει στὶς πράξεις αὐτὲς μεταξὺ τῶν ἀκεραίων καὶ τῶν συμμιγῶν ἀριθμῶν ;

Μία συμβουλή : Μὴ γράφετε ποτὲ στὰ τετράδιά σας ἀπ᾽ εὐθείας τὶς πράξεις καὶ τὸ ἀποτέλεσμά τους. Νὰ τὶς κάμετε πρῶτα στὸ πρόχειρο καὶ ἀφοῦ κάμετε καὶ τὴ δοκιμή, τότε νὰ γράψετε ὡραῖα καὶ καθαρὰ τὸ ἄθροισμα ἢ τὸ ὑπόλοιπο.

γ΄. ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΚΑΙ ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ

α΄. Συμμιγοῦς καὶ ἀκεραίου

Ἡ θερμάστρα μας καίει τὴν ἡμέρα 16 ὀκάδ. καὶ 200 δράμια κώκ. Πόσο καίει τὴν ἑβδομάδα ;

Μὲ ἕνα τόπι ὕφασμα ποὺ ἦταν 32 πήχ. καὶ 2 ρούπια ἔγιναν 6 φορέματα ὅμοια. Πόσο ὕφασμα ἐπῆγε γιὰ κάθε φόρεμα ;

Τί πράξεις θὰ κάμετε γιὰ νὰ λύσετε τὰ προβλήματα αὐτά ;

Τί εἶναι ὁ πολλαπλασιαστὴς καὶ ὁ διαιρέτης ;

Πῶς γίνονται αἱ πράξεις καὶ τί διαφορὰ ὑπάρχει ἀπὸ τὶς ἴδιες πράξεις τῶν ἀκεραίων ;

Ποτὲ μὴ κάμετε ἀπ' εὐθείας τὴν πρᾶξιν στὰ τετράδιά σας.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Ἀπὸ μνήμης

1. 8 πήχ. καὶ 6 ρούπια, πόσα ρούπια εἶναι ;

2. Μία οἰκογένεια ἀγόρασε 2 ὀκάδες καὶ 200 δράμια λάδι καὶ ἔφαγε τὰ 300 δράμια. Πόσο λάδι ἔχει ἀκόμη';

3. Ἀπὸ τὶς 10 καὶ τέταρτο τὸ πρωΐ ἕως τὶς 2 καὶ μισὴ τὸ ἀπόγευμα πόσος χρόνος ἐπέρασε ;

4. Πόσα χρήματα θὰ δώσωμε γιὰ
   α) 150 δράμια βούτυρο πρὸς 40.000 τὴν ὀκᾶ
   β) 300 » κρέας » 16.000 » »
   γ) 3 ὀκ. καὶ 200 δράμ. λάδι πρὸς 14.000 τὴν ὀκᾶ ;

5. Οἱ 56 πήχ. ὕφασμα πόσα μέτρα εἶναι ;

6. Ἡ λίρα στερλίνα πόσες πέννες ἔχει ;

Γραπτῶς

α) Ἀπὸ τὴ σχολικὴ ζωή.

1. Ἀπὸ τὶς 27 ὀκάδ. καὶ 100 δράμ. ξύλα ποὺ ἀγόρασε τὸ σχολεῖο μας γιὰ τὸ βράσιμο τοῦ νεροῦ γιὰ τὸ γάλα, τὶς δύο πρῶτες ἡμέρες ἔκαψαν 13 ὀκάδες καὶ 200 δράμια. Πόσα ξύλα ἔχουν μείνει ;

2. Ὁ Γιῶργος εἶναι 10 ἐτῶν 8 μηνῶν καὶ 27 ἡμερῶν, ἐνῶ ὁ Ἀλέκος εἶναι μεγαλύτερος κατὰ 1 ἔτος 4 μῆνες καὶ 15 ἡμέρες. Ποιά εἶναι ἡ ἡλικία τοῦ Ἀλέκου ;

3. Τὸ κοντάρι τῆς σημαίας τοῦ σχολείου μας εἶναι 4 πήχ. καὶ 2 ρούπια. Πόσο εἶναι σὲ μέτρα ;

4. Τὸ προαύλιο τοῦ σχολείου σας πόσο εἶναι σὲ τετραγ. μέτρα καὶ πόσο σὲ τετραγωνικοὺς πήχεις ;

5. Ὁ Τάκης γεννήθηκε τὴν 16ην Μαρτίου 1938. Πόση εἶναι ἡ ἡλικία του τὰ Χριστούγεννα τοῦ 1951 ;

β) Ἀπὸ τὴν κοινωνικὴ ζωή.

1. Ἕνας λαδέμπορος ἔφερε 16 βαρέλια λάδι ποὺ τὸ καθένα

ἐζύγιζε μικτὸ βάρος 4 στατ. 9 ὀκάδ. καὶ 150 δράμια. Τὸ ἀπόβαρο τοῦ κάθε βαρελιοῦ εἶναι 28 ὀκ. καὶ 100 δράμ. Πόσο λάδι καθαροῦ βάρους ἔχει γιὰ πούλημα ;

2. Ἕνας διδάσκαλος στὴν Ἀγγλία παίρνει μισθὸ 62 λίρες 8 σελ. 6 πέν. καὶ 3 φαρδ. τὸν μῆνα καὶ ἀπ' αὐτὰ ἐξοδεύει διὰ τὴν συντήρησιν τῆς οἰκογενείας του 54 λίρ. 14 σελ. καὶ 9 πέν. Πόσα ἀποταμιεύει τὸ ἔτος ;

3. Ἕνα οἰκόπεδο 164 τετραγ. μέτρων πωλεῖται 1 λίρα χρυσῆ κατὰ τετραγωνικὸν πῆχυ. Πόσο ἔχει τὸ οἰκόπεδο αὐτὸ σὲ δραχμὲς ἐὰν ἡ λίρα ἔχῃ 226.500 δραχμές ;

4. Τοὺς 14 στατ. 16 ὀκάδ. καὶ 200 δράμ. τοῦ κρασιοῦ τὸ ὁποῖο περιέχει ἕνα βαρέλι, θέλουν νὰ τὸ βάλουν σὲ μποτίλιες των 300 δραμίων. Πόσες μποτίλιες θὰ γεμίσουν ;

γ) Ἀπὸ τὰ μαθήματα.

1. Πόσος χρόνος ἔχει περάσει ἀπὸ τῆς Ἁλώσεως τῆς Κωνσταντινουπόλεως ὑπὸ τῶν Τούρκων μέχρι τῆς κηρύξεως τῆς Ἑλληνικῆς Ἐπαναστάσεως καὶ πόσος μέχρι σήμερα ;

2. Πόσος χρόνος ἐπέρασε ἀπὸ τῆς Α' Οἰκουμενικῆς Συνόδου μέχρι τοῦ Σχίσματος τοῦ Φωτίου ;

3. Ἕνα οἰκόπεδο σχήματος παραλληλογράμμου ἔχει μῆκος 42,8 καὶ πλάτος 26,4 μ. καὶ πωλεῖται πρὸς 32.000 δραχμ. κατὰ τετραγ. πῆχυν. Πόσον τιμᾶται ;

4. Ἕνα ἀεροπλάνο τρέχει σὲ 3^{π} ἕνα χιλιόμετρο. Πόσο χρόνο θέλει γιὰ νὰ φθάσῃ στὴ Θεσσαλονίκη ;

5. Πόσα μέτρα εἶναι μακριά μας ἕνα τηλεβόλο, τοῦ ὁποίου ἄκουσα τὸν κρότον τῆς βολῆς 1^{π} καὶ 14^{δ} μετὰ τὴν λάμψιν τῆς βολῆς ;

ΜΕΡΟΣ Β΄.

ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΗ ΜΟΝΑΔΑ

Στοὺς δεκαδικοὺς καὶ τοὺς συμμιγεῖς ἀριθμοὺς μάθαμε ὅτι τὸ μέτρο χωρίζεται σὲ 10 ἴσα μέρη, *τὶς παλάμες* καὶ ὅτι ἡ μία παλάμη εἶναι τὸ *ἕνα δέκατο τοῦ μέτρου* (0,1). Ἐπίσης ὅτι χωρίζεται σὲ 100 ἴσα μέρη, *τοὺς δακτύλους* ἢ *πόντους* καὶ ὅτι ὁ ἕνας πόντος εἶναι τὸ *ἕνα ἑκατοστὸ τοῦ μέτρου* (0,01) ἢ καὶ ὅτι χωρίζεται σὲ 1.000 ἴσα μέρη, τὶς *γραμμὲς* καὶ ὅτι μία γραμμὴ τοῦ μέτρου εἶναι τὸ *ἕνα χιλιοστὸ* (0,001). Ἐπίσης ὅτι οἱ δύο δάκτυλοι εἶναι τὰ δύο ἑκατοστὰ τοῦ μέτρου (0,02), οἱ 15 τὰ 0,15 κ.ο.κ.

Ἂς πάρωμε ὅμως καὶ τὸ ἄλλο μέτρο μὲ τὸ ὁποῖο μετροῦν οἱ ἔμποροι τὰ ὑφάσματα, *τὴν πήχη*. Ἡ πήχη εἶναι ξύλινη ἢ σιδερένια. Εἶναι μικρότερη ἀπὸ τὸ μέτρο καὶ ἔχει μῆκος 0,64 τοῦ μέτρου ἢ 64 πόντους.

Ἐὰν παρατηρήσωμε καλὰ μιὰ πήχη, θὰ δοῦμε ὅτι καὶ ἀπὸ τὶς δύο πλευρές της εἶναι χωρισμένο τὸ μῆκος της, μὲ 8 γραμμές, σὲ 8 ἴσα μέρη.

Ἂν κάνωμε μιὰ χάρτινη πήχη ἢ ἀπὸ κορδέλλα καὶ τὴν κόψωμε στὴ μέση θὰ παρατηρήσωμε ὅτι ἡ πήχη χωρίζεται σὲ δύο μισά. Τὸ ἕνα μισὸ λέγεται ἕνα δεύτερο, δηλαδὴ τὸ ἕνα ἀπὸ τὰ δύο ἴσα μέρη. Ἂν πάλι κόψωμε τὸ μισὸ στὴ μέση, θὰ ἔχωμε τέσσερα ἴσα μέρη καὶ ἐπειδὴ τὰ τέσσερα αὐτὰ ἴσα μέρη μᾶς κάνουν τὴν μία πήχη, λέμε ὅτι ἡ πήχη χωρίζεται σὲ τέσσερα ἴσα μέρη. Τὸ ἕνα ἀπὸ τὰ τέσσερα αὐτὰ ἴσα μέρη λέγεται τὸ *ἕνα τέταρτο* τῆς πήχης. Ἑπομένως μία πήχη ἔχει *τέσσερα τέταρτα*.

Ἂν τώρα πάλι τὸ κάθε τέταρτο τὸ κόψωμε σὲ δυὸ μέρη θὰ ἔχωμε ὀκτὼ ἴσα μέρη καὶ ἐπειδὴ καὶ τὰ ὀκτὼ μᾶς κάνουν τὴν πήχη, λέμε ὅτι ἡ πήχη χωρίζεται σὲ ὀκτὼ ἴσα μέρη. Τὸ ἕνα ἀπ' αὐτὰ τὰ 8 ἴσα μέρη λέγεται *ἕνα ὄγδοο* τῆς πήχ. Ἑπομένως ἡ 1 πήχ. ἔχει 8 ὄγδοα.

Ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω προκύπτει ὅτι :

1 πήχ. ἔχει 2 δεύτερα ἢ 4 τέταρτα ἢ 8 ὄγδοα.

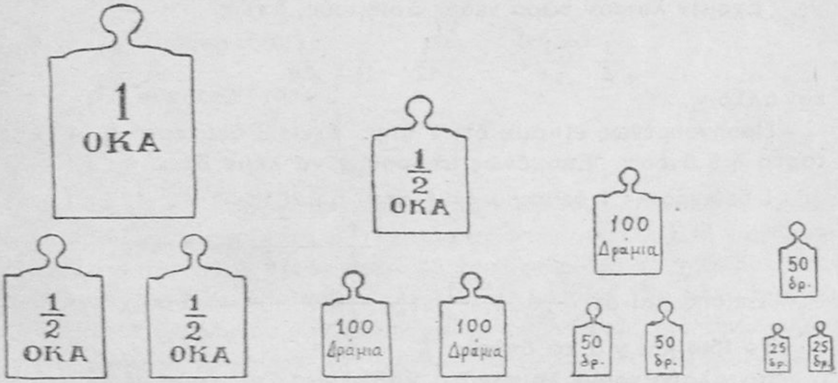
1 δεύτερο τῆς πήχ. ἔχει 2 τέταρτα ἢ 4 ὄγδοα καὶ ὅτι τὸ 1 τέταρτο τῆς πήχ. ἔχει 2 ὄγδοα. Τὸ αὐτὸ ὅμως μποροῦμε νὰ σκεφθοῦμε καὶ ἀντιστρόφως, δηλ. ὅτι :

τὰ 2 δεύτερα τῆς πήχ. κάνουν 1 πήχ. ἢ
» 4 τέταρτα » » » 1 » ἢ
» 8 ὄγδοα » » » 1 » καὶ ὅτι
» 2 τέταρτα » » » μισὸν » ἢ 1 δεύτερο
» 4 ὄγδοα » » κάνουν μισὸν » ἢ 1 » καὶ
» 2 ὄγδοα » » κάνουν ἕνα τέταρτο πήχ.

Στὰ παραπάνω παρατηροῦμε ὅτι :

Τὰ 2 δεύτερα ἢ τὰ 4 τέταρτα ἢ τὰ 8 ὄγδοα ἐκφράζουν μὲν τὸ αὐτὸ πρᾶγμα, δηλ. μία πήχ., ἔχουν ὅμως διαφορετικὸ ὄνομα. Δηλαδὴ ἐνῶ ἔχουν διαφορετικὸ ὄνομα ἔχουν τὴν ἰδίαν δύναμιν. Ὡς ἐκ τούτου καλοῦνται *ἰσοδύναμα*.

Τὸ αὐτὸ παρατηροῦμε καὶ στὴν ὀκᾶ μὲ τὴν ὁποία μετροῦν τὰ ὑγρά, δηλαδὴ τὸ λάδι, τὸ κρασὶ κ.λ.π. ἢ καὶ στὴν ὀκᾶ μὲ τὴν ὁποία ζυγίζουν τὰ φροῦτα, τὴ ζάχαρι, τὰ φασόλια κ.λ.π.



Ἡ μία ὀκᾶ χωρίζεται σὲ 2 μισὲς ὀκάδες
ἢ » 4 κατοστάρια
ἢ » 8 πενηντάρια
ἢ » 16 εἰκοσιπεντάρια
ὅπως βλέπετε στὸ σχέδιο.

Ἑπομένως ἡ μισὴ ὀκᾶ εἶναι τὸ ἕνα δεύτερο τῆς ὀκᾶς, ἀφοῦ ἡ μία ὀκᾶ ἔχει 2 μισές.

Τὸ κατοστάρι εἶναι τὸ ἕνα τέταρτο τῆς ὀκᾶς.

Τὸ πενηντάρι τὸ ἕνα ὄγδοο, καὶ

Τὸ εἰκοσιπεντάρι τὸ ἕνα δέκατο ἕκτο τῆς ὀκᾶς.

Τὸ αὐτὸ θὰ παρατηρήσωμε καὶ ἐὰν μία κόλλα τοῦ τετραδίου μας τὴν κόψωμε ἀκριβῶς σὲ 2, 4, ἢ 8 ἢ 12 ἢ 16 κ.λ.π. ἴσα μέρη, ὁπότε θὰ ἔχωμε ἕνα δεύτερο τῆς κόλλας, ἕνα τέταρτο κ.λ.π.

Τὸ αὐτὸ θὰ παρατηρήσωμε ἐὰν κατορθώσωμε νὰ κόψωμε ἀκριβῶς σὲ δεύτερα, σὲ τέταρτα, σὲ ὄγδοα, σὲ δωδέκατα κλπ. ἕνα μῆλο, ἕνα ἀχλάδι, ἕνα πορτοκάλι, ὁπότε καὶ πάλι θὰ ἔχωμε ἕνα δεύτερο τοῦ μήλου ἢ ἕνα ὄγδοο κ.λ.π.

Τὸ ἕνα δεύτερο ἢ τὸ μισὸ τῆς πήχ. ἢ τῆς ὀκᾶς ἢ οἱουδήποτε ἄλλου πράγματος τὸ γράφομε συμβολικὰ $\frac{1}{2}$. Τὸ ἕνα τέταρτο τοῦ πήχεως κλπ. τὸ γράφομε $\frac{1}{4}$, τὸ ἕνα ὄγδοο $\frac{1}{8}$ κλπ.

Ἔχομεν λοιπὸν τώρα νέους ἀριθμούς, ὅπως

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{12}, \frac{1}{16}, \frac{1}{24}$$

καὶ ἄλλους.

Προηγουμένως εἴπαμε ὅτι 1 πήχ. ἔχει 2 δεύτερα ἢ 4 τέταρτα ἢ 8 ὄγδοα. Ἑπομένως μποροῦμε νὰ λέμε ὅτι

1 δεύτερο + 1 δεύτερο = 1 πήχ. ἢ καὶ

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \text{ πήχ.}$$

Ἐπίσης καὶ ὅτι $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$ πήχ.

Τὸ ἴδιο καὶ γιὰ τὰ ὄγδοα.

Καταλαβαίνουμε λοιπὸν ὅτι καθ' ἕνας ἀπὸ τοὺς νέους αὐτοὺς ἀριθμοὺς $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, κλπ. εἶναι τὸ ἕνα ἀπὸ τὰ δύο ἢ περισσότερα ἴσα μέρη ποὺ χωρίσαμε τὴν πήχη, τὴν ὀκᾶ, ὡς καὶ κάθε ἀκέραιο πρᾶγμα, ὅπως τὴν ὀκᾶ, τὸ μῆλο, τὸ πορτοκάλι, τὸ βιβλίο κλπ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ μία πήχη ἢ τὸ ἕνα μέτρο ἢ ἡ μία ὀκᾶ κλπ. παριστάνεται μὲ τὸν ἀριθμὸ 1, δηλαδὴ τὴν ἀκεραία μονάδα, μποροῦμε νὰ λέμε γιὰ τοὺς νέους αὐτοὺς ἀριθμούς, ἂν τοὺς πάρωμε ὡς ἀφηρημένους, ὅτι ὁ καθένας εἶναι τὸ *ἕνα ἀπὸ τὰ δύο ἢ περισσότερα ἴσα μέρη ποὺ χωρίσαμε τὴν ἀκεραία μονάδα.*

Ἔτσι ὁ νέος ἀριθμὸς $\frac{1}{2}$ εἶναι τὸ ἕνα ἀπὸ τὰ δύο ἴσα μέρη ποὺ ἐχωρίσαμε τὴν ἀκεραία μονάδα. Ὁ $\frac{1}{4}$ εἶναι ἕνα ἀπὸ τὰ 4 ἴσα μέρη, ὁ $\frac{1}{8}$ ἕνα ἀπὸ τὰ 8 ἴσα μέρη ποὺ ἐχωρίσαμε τὴν ἀκεραία μονάδα κ.ο.κ. Τὸ αὐτὸ μποροῦμε νὰ ποῦμε καὶ γιὰ τοὺς ἀριθμοὺς $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{18}$.

Ὡς ἐκ τούτου μποροῦμε νὰ ἔχωμε ἀμέτρητους τοιούτους ἀριθμοὺς συγκεκριμένους ἢ καὶ ἀφηρημένους. Π.χ.

α) Συγκεκριμένους.

$\frac{1}{2}$ τῆς ὥρας (μισὴ ὥρα), $\frac{1}{4}$ τῆς ὥρας, $\frac{1}{60}$ τῆς ὥρ. (πρῶτο λεπτὸ)

$\frac{1}{12}$ δωδεκάδος ποτηριῶν $=$ 1 ποτήρι.

$\frac{1}{3}$ δωδεκάδος » $=$ 4 ποτήρια.

β) Ἀφηρημένους.

$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{68}$, $\frac{1}{234}$

Ἀπὸ τὰ προηγούμενα καταλαβαίνουμε ὅτι μία ἀκεραία μονάδα συγκεκριμένη ἢ ἀφηρημένη μποροῦμε νὰ τὴ χωρίζωμε σὲ ὅσα ἴσα μέρη θέλομε καὶ τὸ ἕνα ἀπ' αὐτὰ τὸ γράφομε συμβολικὰ μὲ δύο ἀριθμοὺς τὸν ἕνα κάτω ἀπ' τὸν ἄλλο καὶ νὰ χωρίζωνται μὲ μία ὁριζόντιο γραμμή. Ἀπάνω ἀπὸ τὴν ὁριζόντιο γραμμὴ γράφομε τὸν ἀριθμὸ τὸν ὁποῖο διαβάζομε πρῶτα (τὸ 1) καὶ κάτω τὸν ἀριθμὸ τὸν ὁποῖο διαβάζομε δεύτερα (δύο, τέσσερα, ὀκτὼ κ.λ.π.). Ὅπως ἕνα δεύτερο $= \frac{1}{2}$, ἕνα εἰκοστὸ τέταρτο $\frac{1}{24}$ κ.λ.π.

Τὸ ἕνα αὐτὸ ἴσο μέρος τῆς ἀκεραίας μονάδος ἀπὸ τὰ δύο ἢ καὶ περισσότερα ἴσα μέρη ποὺ ἐχωρίσαμε τὴν ἀκεραία μονάδ καλεῖται κλασματικὴ μονάδα.

Ἀσκήσεις

1. Γράψατε 10 κλασματικὲς μονάδες.

2. Ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 5, 8, 9, 12, 26, 28, 46 καὶ 12 κάνετε ἀπὸ μία κλασματικὴ μονάδα.

3. Τί διαφορὰ ὑπάρχει μεταξὺ τῆς κλασματικῆς μονάδος καὶ τῆς ἀκεραίας τοιαύτης ἢ καὶ τῆς δεκαδικῆς ;

4. Τί μέρος τοῦ στατῆρος εἶναι ἡ ὀκᾶ ἢ τῆς λίρας τὸ σελίνι ἢ τοῦ ἔτους ὁ μήνας ἢ ἡ ἡμέρα ;

ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Ὅπως εἴπαμε παραπάνω ἡ μισὴ πήχ. ἔχει δύο τέταρτα, δηλ. 1 τέταρτο + 1 τέταρτο = 2 τέταρτα ἢ μισὴ πήχ. ἢ καὶ

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} \text{ μισὴ πήχ.} = \frac{1}{2} \text{ πήχ.}$$

Ἐὰν τώρα εἰποῦμε ὅτι ἀγοράσαμε 5 ὄγδοα τῆς πήχ. καὶ θελήσωμε νὰ τὸ γράψωμε, πρέπει νὰ καταλάβωμε ὅτι θὰ ἔχωμε ἕνα νέο ἀριθμό, ὁ ὁποῖος γίνεται ἀπὸ τὴν κλασματικὴ μονάδα $\frac{1}{8}$ ὅταν τὴν προσθέσωμε 5 φορές, δηλαδή :

$\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} =$ πέντε ὄγδοα τὰ ὁποῖα γράφομε ὡς ἑξῆς : $\frac{5}{8}$ πήχ.

Τὸ αὐτὸ γίνεται καὶ γιὰ τὰ δώδεκα εἰκοστὰ τοῦ χιλιάρικου (12 πενηντάρια). Ἔγιναν καὶ αὐτὰ ἀπὸ τὴν κλασματικὴ μονάδα $\frac{1}{20}$ ὅταν τὴν προσθέσωμε 12 φορές. Ὅπως :

$$\frac{1}{20} + \frac{1}{20} \dots\dots\dots\dots + \frac{1}{20} = \frac{12}{20}.$$

Τὸ ἴδιο θὰ ἔχωμε καὶ γιὰ τὰ 150 τετρακοσιοστὰ τῆς ὀκᾶς ἢ καὶ γιὰ οἱονδήποτε ἄλλον ἀριθμό.

Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπο ἔχομε πολλοὺς νέους ἀριθμοὺς ἐκ τῶν ὁποίων ἕκαστος γίνεται ἀπὸ μίαν ὡρισμένη κλασματικὴ μονάδα, ὅταν τὴν προσθέσωμε (τὴν ἐπαναλάβωμε) πολλὲς φορές.

Οἱ ἀριθμοὶ αὐτοὶ λέγονται ***κλασματικοὶ ἀριθμοὶ*** ἢ καὶ ***κλάσματα***.

Καὶ αὐτοὺς ὅπως καὶ τὴν κλασματικὴ μονάδα ἀπὸ τὴν ὁποία γίνονται, τοὺς γράφομε μὲ δύο ἀριθμοὺς τὸν ἕνα κάτω ἀπὸ τὸν ἄλλο καὶ τοὺς ὁποίους χωρίζομε μὲ μία ὁριζόντια γραμμή. Ἐπάνω γράφομε τὸν ἀριθμὸ τὸν ὁποῖο διαβάζομε πρῶτα καὶ κάτω τὸν ἀριθμὸ τὸν ὁποῖο διαβάζομε δεύτερα. Ὅπως:

Πέντε ἔνατα $= \frac{5}{9}$

Εἴκοσι τριακοστὰ ἕκτα $= \frac{20}{36}$

Δέκα πέντε ἑξηκοστὰ τέταρτα $= \frac{15}{64}$

Ἀσκήσεις

1. Ποιός καλεῖται κλασματικὸς ἀριθμὸς ἢ κλάσμα ;
2. Ἀπὸ τί γίνεται τὸ κλάσμα ;
3. Μὲ τὶς κλασματικὲς μονάδες $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{34}$, κάμετε κλασματικοὺς ἀριθμούς.
4. Ἀπὸ ποιὰ κλασματικὴ μονάδα γίνονται οἱ κλασματικοὶ ἀριθμοὶ $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{12}{18}$, $\frac{9}{24}$, $\frac{16}{52}$;

ΟΡΟΙ ΤΟΥ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ

Ἀριθμητὴς καὶ παρονομαστὴς

Εἴδαμε ὅτι κάθε κλάσμα γράφεται μὲ δύο ἀκεραίους ἀριθμοὺς τοὺς ὁποίους χωρίζει μία ὁριζόντια γραμμὴ καὶ ὅτι ἐπάνω ἀπὸ τὴ γραμμὴ γράφεται ὁ ἀριθμὸς τὸν ὁποῖο διαβάζομε πρῶτα καὶ κάτω ὁ ἀριθμὸς τὸν ὁποῖο διαβάζομε δευτέρα. Ὅπως $\frac{5}{8}$ πέντε ὄγδοα. Ἄνω γράφομε τὸ 5 καὶ κάτω τὸ 8.

Ὁ ἀριθμὸς ὅμως τὸν ὁποῖο διαβάζομε πρῶτα καὶ τὸν γράφομε ἐπάνω ἔχει μίαν ἰδιότητα. Μᾶς μετράει τὰ ἴσα μέρη τῆς ἀκεραίας μονάδας τὰ ὁποῖα πήραμε (τὶς κλασματικὲς μονάδες). Ἀλλὰ καὶ ὁ ἀριθμός, τὸν ὁποῖο διαβάζομε δεύτερα καὶ τὸν γράφομε κάτω, ἔχει ἐπίσης μίαν ἰδιότητα. Μᾶς ὀνομάζει σὲ πόσα ἴσα μέρη (κλασματικὲς μονάδες) χωρίσαμε τὴν ἀκεραία μονάδα. Παρατηροῦμε λοιπὸν ὅτι οἱ δύο ἀριθμοὶ τοῦ κλάσματος ἔχουν διάφορον ἰδιότητα, καὶ ὡς ἐκ τούτου ἔχουν καὶ διαφορετικὰ ὀνόματα. Ὁ πρῶτος, ὁ ὁποῖος μᾶς μετρᾷ τὰ ἴσα μέρη τῆς ἀκεραίας μονάδας ποὺ πήραμε, λέγεται *ἀριθμητής*.

Ὁ δεύτερος, ὁ ὁποῖος μᾶς ὀνομάζει σὲ πόσα ἴσα μέρη χωρίσαμε τὴν ἀκεραία μονάδα, λέγεται ***παρονομαστής***.

Ἑπομένως : *Ἀριθμητὴς τοῦ κλάσματος καλεῖται ὁ ἀριθμὸς ὁ ὁποῖος μᾶς μετρᾶ τὰ μέρη ποὺ παίρνουμε ἀπὸ τὰ ἴσα μέρη στὰ ὁποῖα χωρίσαμε τὴν ἀκεραία μονάδα γιὰ νὰ σχηματίσωμε τὸ κλάσμα, καὶ*

Παρονομαστὴς τοῦ κλάσματος καλεῖται ὁ ἀριθμὸς ὁ ὁποῖος μᾶς φανερώνει σὲ πόσα ἴσα μέρη χωρίσαμε τὴν ἀκεραία μονάδα.

Ὁ ἀριθμητὴς καὶ ὁ παρονομαστὴς τοῦ κλάσματος καλοῦνται μ' ἕνα ὄνομα καὶ ***ὅροι τοῦ κλάσματος***. Π.χ.

Τοῦ κλάσματος $\frac{5}{8}$ ἀριθμητὴς εἶναι ὁ 5 καὶ παρονομαστὴς τὸ 8 καὶ ὅροι τοῦ κλάσματος εἶναι τὸ 5 καὶ ὁ 8.

ΚΛΑΣΜΑΤΑ ΟΜΩΝΥΜΑ ΚΑΙ ΕΤΕΡΩΝΥΜΑ

Γνωρίζομε ὅτι μποροῦμε νὰ ἔχωμε ἀμέτρητους κλασματικοὺς ἀριθμοὺς συγκεκριμένους ἢ ἀφηρημένους, ὅπως $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{15}{48}$ κ.λ.π.

Ἐὰν πάρωμε μερικὰ κλάσματα τῆς πήχ. ὅπως $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ παρατηροῦμε ὅτι τὰ κλάσματα αὐτὰ ἔχουν τὸ κοινὸ γνώρισμα ὅτι ἔχουν τὸν ἴδιο παρονομαστή, δηλ. ἔγιναν ἀπὸ τὴν αὐτὴ κλασματικὴ μονάδα $\frac{1}{4}$ πήχ.

Τὰ κλάσματα αὐτὰ τὰ ὁποῖα ἔχουν τὸν ἴδιο παρονομαστὴ καλοῦνται ***ὁμώνυμα***.

Ὁμώνυμα κλάσματα εἶναι καὶ τὰ $\frac{2}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{6}{8}$ ὡς καὶ τὰ $\frac{5}{12}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{9}{12}$, $\frac{10}{12}$.

Ἀντιθέτως τὰ κλάσματα $\frac{3}{4}$ καὶ $\frac{5}{8}$ δὲν ἔχουν τὸν ἴδιο παρονομαστή. Ὡς ἐκ τούτου δὲν εἶναι ὁμώνυμα, γιατὶ δὲν γίνονται ἀπὸ τὴν αὐτὴ κλασματικὴ μονάδα.

Τὰ κλάσματα αὐτὰ τὰ ὁποῖα ἔχουν διάφορον παρονομαστὴ καὶ γίνονται ἀπὸ διαφορετικὲς κλασματικὲς μονάδες, λέγονται ***ἑτερώνυμα***.

Ἐὰν προσέξωμε τὰ ἀφηρημένα κλάσματα $\frac{3}{5}$, $\frac{3}{8}$ καὶ $\frac{3}{20}$ παρατηροῦμε ὅτι ἔχουν καὶ τὰ τρία τὸν αὐτὸν ἀριθμητή, ἀλλὰ δὲν ἔχουν τὸν αὐτὸ παρονομαστή, δηλ. δὲν ἔχουν τὸ ἴδιο ὄνομα καὶ ὡς ἐκ τούτου εἶναι ἑτερώνυμα. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἐννοοῦμε ὅτι τὰ ὁμώνυμα καὶ ἑτερώνυμα κλάσματα τὰ διακρίνομε μόνο ἀπὸ τὸν παρονομαστή τους καὶ ὄχι ἀπὸ τὸν ἀριθμητή τους.

Ἀσκήσεις

1. Πόσες φορὲς πρέπει νὰ ἐπαναλάβωμε τὴν κλασματικὴ μονάδα $\frac{1}{4}$ γιὰ νὰ ἔχωμε τὸ κλάσμα $\frac{3}{4}$ καὶ τὴν ἀκεραία μονάδα;

2. Πῶς ἔγιναν τὰ κλάσματα $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{12}$ καὶ $\frac{7}{15}$;

3. Ποιοὶ εἶναι οἱ ἀριθμηταὶ καὶ ποιοὶ οἱ παρονομασταὶ τῶν παραπάνω κλασμάτων καὶ τί φανερώνουν;

4. Ποιό κλάσματα λέγονται ὁμώνυμα καὶ ποιὰ ἑτερώνυμα;

5. Γράψετε τρία ὁμώνυμα καὶ τρία ἑτερώνυμα κλάσματα.

6. Τί εἶναι τὰ κλάσματα $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$ καὶ $\frac{7}{8}$ καὶ γιατί;

7. Τί εἶναι τὰ κλάσματα $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$ καὶ $\frac{6}{8}$ καὶ γιατί;

8. Ποιὰ ἀπὸ τὰ κλάσματα $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{6}{15}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{2}{7}$, εἶναι ὁμώνυμα καὶ ποιά ἑτερώνυμα;

ΜΙΚΤΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ

Μιὰ μητέρα ἀγόρασε 3 πήχ. ὕφασμα γιὰ τὴν κόρη της καὶ ἐπειδὴ δὲν τῆς ἔφθανε ἀγόρασε καὶ ἄλλα $\frac{5}{8}$ πήχ. Πόσο ὕφασμα ἀγόρασε συνολικά;

Λύσις

Γιὰ νὰ βροῦμε πόσο ὕφασμα ἀγόρασε συνολικὰ θὰ προσθέσωμε τοὺς 3 πήχ. μὲ τὰ $\frac{5}{8}$.

Ἔχομε λοιπόν: 3 πήχ. $+ \frac{5}{8} =$;

Ἡ πρόσθεσις αὐτὴ μᾶς δίνει ἕναν ἀριθμὸ ὁ ὁποῖος ἀποτελεῖται ἀπὸ ἀκέραιο ἀριθμὸ καὶ ἀπὸ κλάσμα. Τὸν νέο αὐτὸ ἀριθμὸ τὸν γράφομε πιὰ χωρὶς τὸ σημεῖο τῆς προσθέσεως κα μὲ τέτοιον τρόπο ὥστε ἡ γραμμὴ τοῦ κλάσματος νὰ εἶνα ἀκριβῶς στὸ μέσον τοῦ ἀκεραίου $3\frac{5}{8}$.

Ὅταν τώρα διαβάζωμε τὸν ἀριθμὸ θὰ λέμε τρεῖς πήχει καὶ πέντε ὄγδοα, δηλ. πρῶτα τὸν ἀκέραιο, δεύτερον τὸ σημεῖο τῆς προσθέσεως, τὸ ὁποῖο παραλείπομε νὰ τὸ γράφωμε καὶ τρίτον τὸ κλάσμα.

Ὁ νέος αὐτὸς ἀριθμός, ὁ ὁποῖος εἶναι τὸ ἄθροισμα ἑνὸ ἀκεραίου καὶ ἑνὸς κλάσματος, λέγεται ***μικτὸς ἀριθμός***.

Μικτοὶ συγκεκριμένοι ἀριθμοὶ εἶναι οἱ

$5\frac{3}{5}$ ὥρας, $2\frac{3}{20}$ χιλιοδ., $6\frac{150}{400}$ ὀκ.

Ἐπίσης ἀμέτρητοι εἶναι οἱ ἀφηρημένοι μικτοὶ ἀριθμοί, ὡ

$1\frac{2}{3}$, $4\frac{3}{5}$, $7\frac{8}{15}$, $485\frac{356}{754}$ καὶ ἄλλοι.

Ἀσκήσεις

1. Ποιοὶ καλοῦνται μικτοὶ ἀριθμοὶ καὶ πῶς γράφονται ;
2. Γράψετε 5 συγκεκριμένους καὶ 5 ἀφηρημένους μικτοὺ ἀριθμούς.
3. Τίνων ἀριθμῶν ἀθροίσματα εἶναι οἱ μικτοὶ ἀριθμοὶ $8\frac{3}{9}$, $12\frac{5}{8}$, $24\frac{16}{32}$ καὶ $5\frac{18}{72}$.

ΚΛΑΣΜΑΤΑ ΙΣΑ ΚΑΙ ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ

Ὅταν ἔχωμε τὰ κλάσματα $\frac{3}{4}$ τῆς πήχ. καὶ $\frac{3}{4}$ τῆς πήχ. λέμε ὅτι τὰ κλάσματα αὐτὰ εἶναι ἴσα, γιατὶ γίνονται ἀπὸ τὴν ἴδια κλασματικὴ μονάδα, τὴν ὁποία ἐπαναλαμβάνομε τρεῖς φορὲς γιὰ τὸ καθένα.

Ἂν τώρα πάρωμε τὰ κλάσματα $\frac{2}{4}$ καὶ $\frac{4}{8}$ παρατηροῦμε ὅτι δὲν γίνονται ἀπὸ τὴν ἴδια κλασματικὴ μονάδα, γιατὶ τὸ πρῶτο γίνεται ἀπὸ τὴν κλασματικὴ μονάδα $\frac{1}{4}$ καὶ τὸ ἄλλο ἀπὸ τὴν $\frac{1}{8}$. Ὅπως εἶναι τὰ κλάσματα δὲν μποροῦμε νὰ παραδεχθοῦμε ὅτι εἶναι ἴσα.

Ἂν ὅμως τὰ πάρωμε ὡς συγκεκριμένα μέρη τῆς πήχ. καὶ τὰ ἐξετάσωμε καλύτερα, θὰ παρατηρήσωμε ὅτι ἔχουν τὴν ἴδια ἀξία, τὴν ἀξία τῆς μισῆς πήχ. γιατὶ $\frac{2}{4}$ πήχ. = μισὴ πήχ. καὶ $\frac{4}{8}$ τῆς πήχ. = μισὴ πήχ. Καὶ ἐνῶ ἔχουν τὴν ἴδια ἀξία δὲν μποροῦμε νὰ τὰ λέμε ἴσα, γιατὶ δὲν γίνονται ἀπὸ τὴν ἴδια τὴν κλασματικὴ μονάδα. Τὰ κλάσματα αὐτὰ λέγονται *ἰσοδύναμα* γιατὶ ἔχουν τὴν ἴδια δύναμι ἢ τὴν ἴδια ἀξία.

Ἑπομένως δύο ἢ περισσότερα κλάσματα λέγονται ἴσα μὲν ὅταν . . . .
ἰσοδύναμα δὲ ὅταν . . . .
. . . . (Νὰ συμπληρωθῇ ὑπὸ τοῦ μαθητοῦ).

Ἰσοδύναμα κλάσματα εἶναι καὶ τὸ $\frac{5}{10}$ μὲ τὸ $\frac{50}{100}$ τοῦ μέτρου ἢ $\frac{1}{2}$ ὀκᾶς μὲ τὸ $\frac{200}{400}$ τῆς ὀκᾶς.

Γιὰ νὰ ἐκφράζωμε δὲ ὅτι τὰ κλάσματα εἶναι ἰσοδύναμα ὅταν τὰ γράφωμε, γράφομε μεταξύ των τὸ ἴσον (=) καὶ ἔχομε $\frac{2}{4} = \frac{4}{8}$ πήχ., $\frac{3}{4} = \frac{45}{60}$ τῆς ὥρας κλπ.

Ἐὰν τώρα ἐξετάσωμε δύο ἰσοδύναμα κλάσματα ὅπως τὰ $\frac{2}{4}$ καὶ $\frac{4}{8}$, θὰ παρατηρήσωμε ὅτι τὸ κλάσμα $\frac{4}{8}$ γίνεται ἀπὸ τὸ κλάσμα $\frac{2}{4}$ πήχ., ὅταν πολλαπλασιάσωμε τὸν ἀριθμητὴ καὶ τὸν παρονομαστή του ἐπὶ τὸν ἀριθμὸ 2, δηλ. $\frac{2 \times 2}{4 \times 2} = \frac{4}{8}$.

Ὁμοίως τὸ ἰσοδύναμο κλάσμα τοῦ $\frac{1}{2}$ τὸ $\frac{200}{400}$ γίνεται ἀπὸ τὸ κλάσμα $\frac{1}{2}$ ὅταν πολλαπλασιάσωμε τὸν ἀριθμητὴ καὶ τὸν παρονομαστή του ἐπὶ τὸ 200 δηλ. $\frac{1 \times 200}{2 \times 200}$ ὀκ. = $\frac{200}{400}$ ὀκ.

Κατὰ τὸν αὐτὸ τρόπο μποροῦμε νὰ σχηματίσωμε καὶ ἰσοδύναμα ἀφηρημένα κλάσματα, π.χ.

$$\frac{5}{6} = \frac{10}{12} \left(\frac{5 \times 2}{6 \times 2} = \frac{10}{12}\right) \text{ κ.λ.π.}$$

Ἑπομένως γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἰσοδύναμο κλάσμα ἑνὸς ἄλλου κλάσματος πολλαπλαπλασιάζομε τὸν ἀριθμητὴ καὶ τὸν παρονομαστὴ τοῦ κλάσματος ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμό.

'Αλλ' ὅπως ἔχομε $\frac{2}{4} = \frac{4}{8}$, μποροῦμε νὰ ἔχωμε καὶ $\frac{4}{8} = \frac{2}{4}$. 'Εδῶ παρατηροῦμε ὅτι τὸ ἰσοδύναμο κλάσμα τοῦ $\frac{4}{8}$ πήχ. εἶναι τὸ $\frac{2}{4}$ τὸ ὁποῖο βρίσκομε ἀπὸ τὸ $\frac{4}{8}$ ἐὰν διαιρέσωμε τὸν ἀριθμητὴ καὶ τὸν παρονομαστὴ διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ 2, δηλ. $\frac{4:2}{8:2} = \frac{2}{4}$.

'Ομοίως ἔχομε $\frac{45}{60} = \frac{3}{4}$. Τὸ $\frac{3}{4}$ εἶναι ἰσοδύναμο τοῦ $\frac{45}{60}$ καὶ βρίσκεται ἀπὸ τὸ $\frac{45}{60}$ ἂν διαιρέσωμε τὸν ἀριθμητὴ καὶ τὸν παρονομαστὴ τοῦ κλάσματος διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 15 δηλαδὴ

$$\frac{45:15}{60:15} = \frac{3}{4}.$$

'Επομένως γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἰσοδύναμο κλάσμα ἑνὸς ἄλλου κλάσματος διαιροῦμε τὸν ἀριθμητὴ καὶ τὸν παρονομαστή του διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.

'Εξ ὅλων τῶν ἀνωτέρω παρατηροῦμε ὅτι, εἴτε πολλαπλασιάσωμε, εἴτε διαιρέσωμε (ἐὰν διαιρεῖται ἀκριβῶς) τὸν ἀριθμητὴ καὶ τὸν παρονομαστὴ τοῦ κλάσματος διὰ τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ, ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος δὲν μεταβάλλεται.

'Ασκήσεις

1. Ποιά κλάσματα λέγονται ἴσα καὶ ποιά ἰσοδύναμα ;
2. Τί εἶναι μεταξύ των τὰ κλάσματα $\frac{3}{4}$ καὶ $\frac{6}{8}$ καὶ γιατί ;
3. Ἔχουν σχέσιν τὰ κλάσματα $\frac{10}{20}$ τῆς λίρας μὲ τὸ $\frac{120}{240}$ τῆς λίρας καὶ γιατί ;
4. Τί εἶναι τὰ κλάσματα $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$ καὶ $\frac{7}{4}$ τῆς ὀκᾶς καὶ γιατί;
5. Γράψετε τρία κλάσματα ἴσα καὶ τρία ἰσοδύναμα.
6. Γράψετε τρία κλάσματα ἰσοδύναμα πρὸς τὸ $\frac{3}{7}$.

ΑΠΛΟΠΟΙΗΣΙΣ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

Εἴδαμε προηγουμένως ὅτι ἡ ἀξία ἑνὸς κλάσματος δὲν μεταβάλλεται ἐὰν πολλαπλασιάσωμε ἢ διαιρέσωμε (ἐὰν διαιροῦνται ἀκριβῶς) τὸν ἀριθμητὴ καὶ τὸν παρονομαστὴ τοῦ κλάσματος μὲ τὸν ἴδιο ἀριθμό.

Ἂς πάρωμε τὸ κλάσμα $\frac{45}{60}$ τῆς ὥρας. Τὸ ἰσοδύναμό του $\frac{3}{4}$ βρέθηκε ὅταν διαιρέσαμε τὸν ἀριθμητὴ καὶ τὸν παρονομαστὴ τοῦ κλάσματος διὰ τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ 15, ἤτοι $\frac{45 : 15}{60 : 15} = \frac{3}{4}$

Ἑπομένως $\frac{45}{60}$ τῆς ὥρας $=$ $\frac{3}{4}$ ὥρας.

Παρατηροῦμε λοιπὸν ὅτι ἀπὸ τὸ κλάσμα $\frac{45}{60}$ βρήκαμε τὸ κλάσμα $\frac{3}{4}$ τὸ ὁποῖο ἔχει τὴν ἴδια ἀξία μὲ τὸ $\frac{45}{60}$, ἀλλὰ ἔχει μία σπουδαία ἰδιότητα. Ἔχει ἀριθμητὴ καὶ παρονομαστὴ μικροὺς ἀριθμούς, πρᾶγμα τὸ ὁποῖο μᾶς εὐκολύνει στὸ διάβασμα τοῦ κλάσματος καὶ στὶς διάφορες πράξεις των, γιὰ τὶς ὁποῖες θὰ μιλήσωμε παρακάτω.

Γι' αὐτὸ τὸ λόγο μόλις μᾶς δοθῆ ἕνα κλάσμα μὲ μεγάλους ἀριθμούς, θὰ προσπαθήσωμε νὰ βροῦμε τὸ ἰσοδύναμό του, ἀφοῦ διαιρέσωμε (ἂν διαιροῦνται ἀκριβῶς) ἀριθμητὴ καὶ παρονομαστὴ μὲ τὸν ἴδιον ἀριθμό. Ὅπως $\frac{15}{20}$ ἂν τὸ διαιρέσωμε διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 5, θὰ ἔχωμε $\frac{15 : 5}{20 : 5} = \frac{3}{4}$. Τὸ κλάσμα $\frac{3}{4}$ τὸ ὁποῖο ἔχει μικροὺς ὅρους εἶναι ἰσοδύναμο μὲ τὸ $\frac{15}{20}$.

Ἐδῶ παρατηροῦμε, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ 15 καὶ 20 διαιροῦνται ἀκριβῶς διὰ τοῦ 5, γιατὶ ὁ πρῶτος τελειώνει σὲ 5 καὶ δεύτερος σὲ μηδέν. Καὶ πρέπει νὰ ξέρουμε ὅτι «*ἕνας ἀριθμὸς διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ 5 ὅταν τελειώνη σὲ 5* ἢ *σὲ ἕνα, δύο ἢ καὶ περισσότερα μηδενικά*».

Ἐπίσης $\frac{200}{400}$ διαιροῦμε διὰ τοῦ 100 καὶ ἔχομε:

$\frac{200 : 100}{400 : 100} = \frac{2}{4}$ καὶ $\frac{2 : 2}{4 : 2} = \frac{1}{2}$ καὶ τὸ κλάσμα $\frac{1}{2}$ τὸ ὁποῖον ἔχει μικροὺς ὅρους εἶναι ἰσοδύναμο μὲ τὸ $\frac{200}{400}$.

Καὶ ἐδῶ βλέπομε ὅτι οἱ ἀριθμοὶ 100 καὶ 200 διαιροῦνται ἀκριβῶς διὰ τοῦ 10 καὶ 100 διότι τελειώνουν σὲ δυὸ μηδενικά. Καὶ πρέπει νὰ ξέρουμε ὅτι «*ἕνας ἀριθμὸς διαιρεῖται ἀκριβῶς* *διὰ τοῦ 10 ὅταν λήγη σὲ ἕνα ἢ περισσότερα μηδενικά, διὰ τοῦ 100, ὅταν λήγη σὲ δυὸ ἢ περισσότερα μηδενικά, διὰ τοῦ 1000, 10.000* . . . . (νὰ συμπληρωθῆ ὑπὸ τοῦ μαθητοῦ).

Τὸ κλάσμα $\frac{24}{38}$ ἁπλοποιεῖται διὰ τοῦ 2, γιατὶ οἱ ὅροι του διαιροῦνται ἀκριβῶς διὰ τοῦ 2, δηλαδὴ εἶναι ζυγοὶ (ἄρτιοι ἀριθμοί). Καὶ πρέπει νὰ ξέρουμε ὅτι ἕνας ἀριθμὸς διαιρεῖται διὰ τοῦ 2 ἀκριβῶς ὅταν τελειώνη σὲ 0, 2, 4, 6, 8».

Ἡ ἐργασία αὐτὴ κατὰ τὴν ὁποία ἀπὸ ἕνα κλάσμα μὲ μεγάλους ὅρους βρίσκομε ἕνα ἄλλο κλάσμα ἰσοδύναμο μὲ μικρότερους ὅρους, λέγεται ***ἁπλοποίησις τῶν κλασμάτων***.

Ἑπομένως ἁπλοποίησις κλασμάτων καλεῖται . . . . (Νὰ συμπληρωθῆ ὑπὸ τοῦ μαθητοῦ).

Ἡ ἁπλοποίησις γίνεται πάντα μὲ διαίρεσιν τοῦ ἀριθμητοῦ καὶ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ κλάσματος διὰ τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ, ἂν διαιροῦνται ἀκριβῶς.

Π. χ. α) $\frac{35}{40} = \frac{35:5}{40:5} = \frac{7}{8}$

β) $\frac{9}{15} = \frac{9:3}{15:3} = \frac{3}{5}$

γ) $\frac{45}{135} = \frac{45:5}{135:5} = \frac{9:9}{27:9} = \frac{1}{3}$

Ὥστε κατὰ τὴν ἁπλοποίησιν τῶν κλασμάτων προσπαθοῦμε νὰ βροῦμε ἕνα ἰσοδύναμο κλάσμα, τὸ ὁποῖο νὰ ἔχη ὅσον τὸ δυνατὸ μικροτέρους ὅρους. Π.χ. Ἀπὸ τὸ κλάσμα $\frac{45}{135}$ βρήκαμε ἰσοδύναμο κλάσμα τὸ $\frac{1}{3}$, τοῦ ὁποίου ὅμως καὶ οἱ δύο ὅροι δὲν διαιροῦνται πλέον μὲ κανένα ἄλλον ἀριθμό.

Ἐπίσης καὶ ἀπὸ τὴν ἁπλοποίησιν διαφόρων κλασμάτων π. χ. $\frac{28}{32}$, $\frac{27}{45}$, $\frac{30}{110}$, βρίσκομε τὰ κλάσματα $\frac{7}{8}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{3}{11}$, τῶν ὁποίων καὶ οἱ δύο ὅροι δὲν διαιροῦνται πλέον μὲ κανένα ἄλλον ἀριθμό.

Τὰ κλάσματα αὐτά, τὰ ὁποῖα βρίσκομε ἀπὸ τὴν ἁπλοποίησιν ἄλλων κλασμάτων καὶ τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν ἰδιότητα νὰ μὴν ἁπλοποιοῦνται, δηλ. νὰ μὴ διαιροῦνται πλέον οἱ ὅροι των, μὲ τὸν ἴδιον ἀριθμό, λέγονται ***κλάσματα ἀνάγωγα***.

Ἀσκήσεις

1. Τί εἶναι ἡ ἁπλοποίησις καὶ τί κέρδος ἔχομε ἀπ' αὐτήν ;
2. Πῶς γίνεται ἡ ἁπλοποίησις ἑνὸς κλάσματος ;
3. Ποιά κλάσματα καλοῦνται ἀνάγωγα ;
4. Ἁπλοποιῆστε τὰ κλάσματα $\frac{6}{9}$, $\frac{4}{12}$, $\frac{3}{18}$, $\frac{5}{20}$.
5. Ποιά κλάσματα ἁπλοποιοῦνται καὶ ποιά δὲν ἁπλοποιοῦνται, ἀπὸ τὰ ἑξῆς : $\frac{2}{6}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{14}{68}$, $\frac{6}{24}$, $\frac{8}{35}$;
6. Βρῆτε ἀνάγωγα κλάσματα ἀπὸ τὰ κλάσματα :
$\frac{3}{6}$, $\frac{5}{10}$, $\frac{4}{12}$, $\frac{8}{48}$.

ΤΡΟΠΗ ΑΚΕΡΑΙΟΥ ΣΕ ΙΣΟΔΥΝΑΜΟ ΚΛΑΣΜΑ

Ἀγοράσαμε 3 πῆχες ὕφασμα. Πόσα ὄγδοα τῆς πήχ. εἶναι (ρούπια) ;

Λύσις

Γνωρίζομε ὅτι μιὰ πήχ. ἔχει 8 ρούπια ἢ $\frac{8}{8}$ πήχ. Τρέπομε λοιπὸν τὶς 3 πήχ. σὲ ρούπια καὶ ἔχομε 8 ρούπια $\times$ 3 $=$ 24 ρούπια. Ἀλλὰ ἕνα 1 ρούπι εἶναι τὸ $\frac{1}{8}$ πήχ. καὶ τὰ 24 ρούπια θὰ εἶναι τὰ $\frac{24}{8}$ πήχ., δηλ. 3 πήχ. $= \frac{24}{8}$ πήχ.

Παρατηροῦμε λοιπὸν ὅτι τὸ κλάσμα $\frac{24}{8}$ πήχ. εἶναι ἰσοδύναμο μὲ τὸν ἀκέραιο ἀριθμὸ 3 πήχ. Γι' αὐτὸ 1) Ἐπολλαπλασιάσαμε τὸν ἀκέραιο 3 ἐπὶ τὸν ὡρισμένο ἀριθμὸ ὁ ὁποῖος μᾶς εἶχε δοθῆ (8), ἤτοι $3 \times 8 = 24$ καὶ 2) ἐσχηματίσαμε ἕνα κλάσμα μὲ ἀριθμητὴ τὸ γινόμενο ποὺ βρήκαμε καὶ παρονομαστὴ τὸν ἀριθμὸ ὁ ὁποῖος μᾶς εἶχε δοθῆ, ἤτοι $\frac{24}{8}$ πήχ.

Ἐπίσης ἐὰν θέλωμε νὰ τρέψωμε τὸν ἀριθμὸ 5 ὥρ. σὲ τέταρτα θὰ ἐργασθοῦμε σύμφωνα μὲ τὰ παραπάνω ὡς ἑξῆς :

α) $5 \times 4 = 20$ καὶ

β) $\frac{20}{4}$ ἄρα 5 ὥρ. $= \frac{20}{4}$.

Ἑπομένως γιὰ νὰ τρέψωμε ἀκέραιο ἀριθμὸ σὲ κλάσμα, πολλαπλασιάζομε τὸν ἀκέραιο ἐπὶ τὸν ἀριθμὸ ὁ ὁποῖος μᾶς δί-

νεται καὶ ἔπειτα σχηματίζομε κλάσμα μὲ ἀριθμητὴ τὸ γινόμενο ποὺ βρήκαμε καὶ παρονομαστὴ τὸν ἀριθμὸ ὁ ὁποῖος μᾶς δίνεται.

Ἀσκήσεις

α) Ἀπὸ μνήμης :

1. Πόσο δεύτερα ἢ τέταρτα ἢ ὄγδοα ἔχουν 2 πήχ. ;
2. Πόσα εἰκοστὰ ἔχουν οἱ 5 λίρες ;
3. Πόσα τριακοστὰ ἔχουν οἱ 3 ἢ οἱ 5 μῆνες ;

β) Γραπτῶς :

1. Νὰ τραπῆ ὁ ἀριθμὸς 5 εἰς ὄγδοα.
2. Νὰ τραποῦν οἱ ἀριθμοὶ 4, 8, 12, 24 εἰς τρίτα καὶ πέμπτα.
3. Νὰ γράψετε τί κάνομε γιὰ νὰ τρέψωμε ἕνα ἀκέραιο ἀριθμὸ σὲ ἰσοδύναμο κλάσμα.
4. Μὲ ποιόν ἀριθμὸ θὰ πολλαπλασιάστε τὶς 4, 6 καὶ 8 ὀκάδες γιὰ νὰ γίνουν δράμια ;

ΤΡΟΠΗ ΜΙΚΤΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ ΣΕ ΙΣΟΔΥΝΑΜΟ ΚΛΑΣΜΑ

Γιὰ τὴν ποδιὰ τῆς Ἑλενίτσας ἀγόρασε ἡ μητέρα της $1\frac{5}{8}$ πήχ. ὕφασμα. Πόσα ρούπια ἀγόρασε ;

Λύσις

Γιὰ νὰ βροῦμε πόσα ρούπια ἀγόρασε θὰ σκεφθοῦμε ὡς ἑξῆς : Ὁ μικτὸς ἀριθμὸς $1\frac{5}{8}$ ἔγινε ἀπὸ τὴν πρόσθεσιν τῆς 1 πήχ. $+ \frac{5}{8}$ πήχ. Τρέπομε τὴν μία πήχ. σὲ ρούπια καὶ ἔχομε 1 πήχ. $= 8$ ρούπια ἢ καὶ $\frac{8}{8}$. Γνωρίζομε ὅμως ὅτι καὶ τὰ $\frac{5}{8}$ πήχ. εἶναι 5 ρούπια. Ἐὰν τὰ 5 ρούπια τὰ προσθέσωμε στὰ 8 ρούπια τῆς πήχ. θὰ ἔχωμε $8 + 5 = 13$ ρούπια δηλ. τὰ $\frac{13}{8}$ πήχεως. Ἀλλὰ τὸ ἴδιο βρίσκομε καὶ ἐὰν σκεφθοῦμε ὡς ἑξῆς :

$1\frac{5}{8}$ πήχ. $= \frac{8}{8}$ πήχ. $+ \frac{5}{8}$ πήχ. $= \frac{13}{8}$ πήχ.

Ἔτσι ἀντὶ νὰ ἔχωμε τὸν μικτὸ ἀριθμὸ $1\frac{5}{8}$ ἔχομε τὸ ἰσοδύναμο αὐτοῦ κλάσμα $\frac{13}{8}$ δηλ. $1\frac{5}{8}$ πήχ. $=\frac{13}{8}$ πήχ.

Ὥστε μποροῦμε ἕνα μικτὸ ἀριθμὸ νὰ τὸν τρέψωμε σὲ ἰσοδύναμο κλάσμα, ἀφοῦ πρῶτα τρέψωμε τὸν ἀκέραιο σὲ κλάσμα μὲ παρονομαστὴ τὸν παρονομαστὴ τοῦ κλάσματος καὶ στὸ κλάσμα αὐτὸ προσθέσωμε καὶ τὸ κλάσμα τοῦ μικτοῦ.

Π. χ. α) $2\frac{3}{4}$ ὥρας, 2 ὥρ. $= \frac{2 \times 4}{4} = \frac{8}{4}$

$$\frac{8}{4} + \frac{3}{4} = \frac{11}{4}$$

Ἀλλὰ τὰ αὐτὰ ἰσοδύναμα κλάσματα τῶν μικτῶν μποροῦμε νὰ βροῦμε πρακτικὰ καὶ μὲ τὸν ἑξῆς τρόπο:

1. Πολλαπλασιάζομε τὸν παρονομαστὴ τοῦ κλάσματος ἐπὶ τὸν ἀκέραιο τοῦ μικτοῦ $1 \times 8 = 8$.

2. Στὸ γινόμενο προσθέτομε τὸν ἀριθμητὴ τοῦ κλάσματος $8 + 5 = 13$, καὶ

3. Τὸ ἄθροισμα τὸ θέτομε ὡς ἀριθμητὴ τοῦ κλάσματος καὶ παρονομαστὴ ἀφήνομε τὸν παρονομαστὴ τοῦ κλάσματος, ἤτοι $\frac{13}{4}$

Ὁμοίως ἔχομε $2\frac{3}{4}$ ὥρας νὰ τραπῇ σὲ κλάσμα.

1) $2 \times 4 = 8$.
2) $8 + 3 = 11$.
3) $\frac{11}{4}$ ἄρα $2\frac{3}{4}$ ὥρ. $= \frac{11}{4}$.

Ὁμοίως $5\frac{3}{20}$ νὰ γίνῃ κλάσμα. Θὰ ἔχωμε;

1) $5 \times 20 = 100$.
2) $100 + 3 = 103$.
3) $\frac{103}{20}$ ἄρα $5\frac{3}{20} = \frac{103}{20}$.

Ἀσκήσεις

1. Πόσα δεύτερα ἔχει καθένας ἀπὸ τοὺς μικτοὺς

$2\frac{1}{2}$, $5\frac{1}{2}$, $8\frac{1}{2}$, $12\frac{1}{2}$.

2. Νὰ τρέψετε τοὺς μικτοὺς ἀριθμοὺς

$3\frac{2}{5}$, $1\frac{4}{15}$, $9\frac{3}{8}$, $8\frac{3}{7}$, $45\frac{3}{4}$, $40\frac{1}{8}$

σὲ ἰσοδύναμα κλάσματα.

3. Νὰ γράψετε μόνοι σας τρεῖς μικτοὺς ἀριθμοὺς καὶ νὰ τοὺς τρέψετε σὲ ἰσοδύναμα κλάσματα.

4. Νὰ γράψετε τὸν κανόνα πῶς τρέπεται ἕνας μικτὸς ἀριθμὸς σὲ ἰσοδύναμο κλάσμα.

ΣΥΓΚΡΙΣΙΣ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ ΜΕ ΤΗΝ ΑΚΕΡΑΙΑ ΜΟΝΑΔΑ

Ἂν προσέξωμε τὰ κλάσματα $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{8}{20}$, $\frac{35}{75}$, θὰ παρατηρήσωμε, ὅτι ἔχουν τὸν ἀριθμητὴ μικρότερο τοῦ παρονομαστοῦ. Αὐτὰ τὰ κλάσματα εἶναι φανερὸ ὅτι εἶναι τὸ καθένα μέρος τῆς ἀκεραίας μονάδος, δηλ. μικρότερα ἀπὸ τὴν ἀκεραία μονάδα, γιατὶ ἀπὸ τὰ ἴσα μέρη ποὺ ἐχωρίσαμε τὴν ἀκεραία μονάδα ἐπήραμε ὀλίγα ἴσα μέρη. Ὅπως τὸ $\frac{3}{4}$. Ἐχωρίσαμε τὴν ἀκεραία μονάδα σὲ 4 ἴσα μέρη καὶ ἐπήραμε τὰ 3 ἢ ὅπως τὸ $\frac{8}{20}$ ἐχωρίσαμε τὴν ἀκεραία μονάδα σὲ 20 ἴσα μέρη καὶ ἀπ' αὐτὰ ἐπήραμε τὰ 8.

Συμπεραίνομε λοιπὸν ὅτι ***τὰ κλάσματα, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὸν ἀριθμητὴ μικρότερο τοῦ παρονομαστοῦ εἶναι μικρότερα ἀπὸ τὴν ἀκεραία μονάδα.***

Ἂν ὅμως προσέξουμε τὰ κλάσματα $\frac{2}{2}$, $\frac{4}{4}$, $\frac{8}{8}$, $\frac{20}{20}$, $\frac{150}{150}$, θὰ παρατηρήσωμε, ὅτι ἔχουν τὸν ἀριθμητή των ἴσον μὲ τὸν παρονομαστή των. Σ' αὐτὰ τὰ κλάσματα παρατηροῦμεν, ὅτι ἐχωρίσαμε τὴν ἀκεραία μονάδα σὲ ἴσα μέρη καὶ τὰ ἐπήραμε ὅλα. Π.χ. $\frac{2}{2}$ φανερώνει, ὅτι ἐχωρίσαμε τὴν ἀκεραία μονάδα σὲ 2 ἴσα μέρη καὶ ἐπήραμε καὶ τὰ 2, δηλ. ἐπήραμε ὁλόκληρη τὴν ἀκεραία μονάδα.

Τὸ ἴδιο ἔγινε καὶ μὲ τὰ ἄλλα κλάσματα ἀπὸ τὰ παραπάνω, καθὼς καὶ γιὰ ὅλα τὰ κλάσματα τὰ ὁποῖα ἔχουν τὸν ἀριθμητὴ ἴσον μὲ τὸν παρονομαστή. Εἶναι δὲ φανερὸ ὅτι ὅλα αὐτὰ τὰ κλάσματα εἶναι ἰσοδύναμα μὲ τὴν ἀκεραία μονάδα. Δηλαδὴ $\frac{2}{2}=1$, $\frac{4}{4}=1$.

Τὰ κλάσματα λοιπὸν αὐτὰ τὰ ὁποῖα ***ἔχουν τὸν ἀριθμητὴ ἴσον μὲ τὸν παρονομαστή, εἶναι ἰσοδύναμα μὲ τὴν ἀκεραία μονάδα.***

Ἂς παρατηρήσωμε τώρα μερικὰ ἀπὸ τὰ κλάσματα τὰ ὁποῖα βρήκαμε στὸ κεφάλαιο περὶ μικτῶν ἀριθμῶν ὅπως $\frac{13}{8}$, $\frac{11}{4}$, $\frac{103}{20}$, κ.λ.π.

Σ' αὐτὰ παρατηροῦμε ὅτι ὁ ἀριθμητὴς εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν παρονομαστή.

Στὸ κλάσμα $\frac{13}{8}$ παρατηροῦμε ὅτι ἐχωρίσαμε τὴν πήχ. ἢ τὴν ἀκεραία μονάδα σὲ 8 ἴσα μέρη, τὰ ἐπήραμε ὅλα $\left(\frac{8}{8}\right)$ καὶ ἐπειδὴ δὲν μᾶς ἔφθαναν ἐχωρίσαμε καὶ ἄλλη πήχ. ἢ ἀκεραία μονάδα σὲ 8 ἴσα μέρη καὶ ἐπήραμε ἀπ' αὐτὰ τὰ 5 $\left(\frac{5}{8}\right)$ καὶ ἔγιναν ὅλα $\frac{8}{8}+\frac{5}{8}=\frac{13}{8}$, δηλ. πήραμε 1 πήχ. ἢ μία ἀκεραία μονάδα καὶ μερικὰ ἀπὸ τὰ ἴσα μέρη μιᾶς ἄλλης ἀκεραίας μονάδας ἢ ἄλλης πήχ. Ὡς ἐκ τούτου πήραμε περισσότερο ἀπὸ μιὰ ἀκεραία μονάδα. Παρατηροῦμε λοιπὸν ὅτι τὸ κλάσμα $\frac{13}{8}$ πήχ. εἶναι μεγαλύτερο ἀπὸ τὴν ἀκεραία μονάδα. Τὸ αὐτὸ ἔγινε καὶ γιὰ τὸ κλάσμα $\frac{11}{4}$ ὡς καὶ γιὰ ὅλα τὰ κλάσματα τὰ ὁποῖα ἔχουν τὸν ἀριθμητὴ μεγαλύτερο ἀπὸ τὸν παρονομαστὴ καὶ τὰ ὁποῖα εἶναι φανερὸ ὅτι εἶναι μεγαλύτερα ἀπὸ τὴν ἀκεραία μονάδα.

Συμπεραίνομε λοιπόν, ὅτι τὰ κλάσματα τὰ ὁποῖα ἔχουν τὸν ἀριθμητὴ μεγαλύτερο τοῦ παρονομαστοῦ εἶναι ***μεγαλύτερα ἀπὸ τὴν ἀκεραία μονάδα.***

Τὰ κλάσματα αὐτὰ τὰ ὁποῖα εἶναι μεγαλύτερα τῆς ἀκεραίας μονάδας λέγονται ***καταχρηστικὰ*** ἢ ***νόθα***, ἐκεῖνα δὲ τὰ ὁποῖα εἶναι μικρότερα τῆς ἀκεραίας μονάδας λέγονται ***γνήσια.***

Ἀσκήσεις

1. Ποιά ἀπὸ τὰ κλάσματα $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{5}$, $\frac{8}{12}$, $\frac{6}{5}$, $\frac{20}{20}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{3}{15}$, $\frac{14}{7}$, εἶναι ἴσα, ἢ μικρότερα ἢ μεγαλύτερα ἀπὸ τὴν ἀκεραία μονάδα ;

2) Ὁ πατέρας μου χθὲς μοῦ ἔδωσε $\frac{4}{5}$ τοῦ χιλιάρικου καὶ σήμερα τὰ $\frac{5}{4}$ τοῦ χιλ. Πότε μοῦ ἔδωσε περισσότερα ;

3. Γράψετε πέντε κλάσματα ἴσα πρὸς τὴν ἀκεραία μονάδα καὶ πέντε μεγαλύτερα ἀπ᾽ αὐτήν.

4. Ἐπίσης γράψετε 5 γνήσια κλάσματα καὶ 5 νόθα.

5. Ποιό κλάσμα εἶναι καταχρηστικό;

6. Ἀπὸ ποῦ διακρίνομε ἐὰν τὸ κλάσμα εἶναι μικρότερο, ἴσο ἢ μεγαλύτερο πρὸς τὴν ἀκεραία μονάδα;

ΠΩΣ ΤΡΕΠΟΜΕ ΕΝΑ ΚΛΑΣΜΑ ΜΕΓΑΛΥΤΕΡΟ ΤΗΣ ΑΚΕΡΑΙΑΣ ΜΟΝΑΔΑΣ ΣΕ ΙΣΟΔΥΝΑΜΟ ΜΙΚΤΟ

Ἄς πάρωμε καὶ πάλι τὸ κλάσμα $\frac{13}{8}$ πήχ. τὸ ὁποῖο παρατηροῦμε ὅτι εἶναι καταχρηστικό, δηλ. μεγαλύτερο ἀπὸ τὴν ἀκεραία μονάδα. Ὅπως εἴδαμε εἶναι τὸ ἰσοδύναμο κλάσμα τοῦ μικτοῦ ἀριθμοῦ $1\frac{5}{8}$ πήχ. Ἔχει λοιπὸν τὸ κλάσμα $\frac{13}{8}$ πήχ. 1 πήχ. καὶ $\frac{5}{8}$ πήχ. Τοὺς ἀριθμοὺς 1 πηχ. καὶ $\frac{5}{8}$ πήχ. μποροῦμε νὰ βροῦμε ἂν ἀπὸ τὸ κλάσμα $\frac{13}{8}$ βγάλουμε πρῶτα τὰ $\frac{8}{8}$ δηλαδὴ τὴ μία πήχ.

Τὸ αὐτὸ ὅμως μποροῦμε νὰ βροῦμε καὶ πρακτικά, ἐὰν διαιρέσωμε τὸν ἀριθμητὴ τοῦ κλάσματος διὰ τοῦ παρονομαστοῦ, ἤτοι $\begin{array}{r|l} 13 & 8 \\ \hline 8 & 1 \end{array}$ ὁπότε θὰ ἔχωμε πηλίκο 1 καὶ ὑπόλοιπο 5. Σχηματίζομε τώρα ἕνα μικτὸ ἀριθμὸ μὲ ἀκέραιο μέρος τὸ πηλίκο 1 καὶ μὲ κλάσμα τὸ ὁποῖο νὰ ἔχῃ ἀριθμητὴ τὸ ὑπόλοιπο 5 καὶ παρονομαστὴ τὸν διαιρέτη 8, ἤτοι $1\frac{5}{8}$.

Ἄρα $\frac{13}{8} = 1\frac{5}{8}$.

Ἐπίσης τὸ κλάσμα $\frac{25}{6}$ γιὰ νὰ τὸ τρέψωμε σὲ μικτὸ ἀριθμὸ μποροῦμε νὰ διαιρέσωμε τὸν ἀριθμητή του 25 διὰ τοῦ παρονομαστοῦ 6 καὶ τὸ μὲν πηλίκο θὰ εἶναι τὸ ἀκέραιο μέρος τοῦ μικτοῦ, μὲ τὸ ὑπόλοιπο δὲ καὶ τὸν διαιρέτη θὰ κάμωμε κλάσμα, τοῦ ὁποίου ἀριθμητὴς θὰ εἶναι τὸ ὑπόλοιπο καὶ παρονομαστὴς ὁ διαιρέτης, ὁ ὁποῖος εἶναι καὶ ὁ παρονομαστὴς τοῦ ἀρχικοῦ κλάσματος, ἤτοι $\frac{25}{1}\Big|\frac{6}{4} = 4\,\frac{1}{25}$.

Ἄρα $\frac{25}{6} = 4\,\frac{1}{25}$.

Ἐὰν ὅμως θέλωμε νὰ τρέψωμε τὸ κλάσμα $\frac{24}{3}$ σὲ μικτό, πάλι θὰ διαιρέσωμε τὸν ἀριθμητὴ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ 24 : 3 = 8, ἀλλὰ παρατηροῦμε ὅτι δὲν μένει ὑπόλοιπο καὶ γι' αὐτό, τὸ ἀποτέλεσμα δὲν θὰ εἶναι πλέον μικτὸς ἀριθμός, ἀλλὰ ἀκέραιος.

Ὥστε γιὰ νὰ τρέψωμε ἕνα κλάσμα μεγαλύτερο τῆς ἀκεραίας μονάδας (καταχρηστικὸ) σὲ ἰσοδύναμο μικτό, διαιροῦμε τὸν ἀριθμητὴ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ καὶ σχηματίζομε μικτό, μὲ ἀκέραιο μέρος τὸ πηλίκο τῆς διαιρέσεως καὶ μὲ κλάσμα τὸ ὁποῖο ἔχει ἀριθμητὴ τὸ ὑπόλοιπο καὶ παρονομαστὴ τὸν διαιρέτη, δηλαδὴ τὸν παρονομαστὴ τοῦ ἀρχικοῦ κλάσματος.

Ἀσκήσεις

α) Ἀπὸ μνήμης :

1. Πόσες πήχ. ἔχουν τὰ κλάσματα $\frac{8}{4}$ καὶ $\frac{28}{4}$ τῆς πήχ. ; Πῶς τὸ βρίσκετε ;

2. Πόσες ὀκάδες ἔχουν τὰ $\frac{2}{2}$ τῆς ὀκᾶς, τὰ $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{8}{4}$ καὶ τὰ $\frac{10}{2}$ τῆς ὀκᾶς ;

3. Πόσες λίρες ἔχουν τὰ κλάσματα $\frac{20}{20}$, $\frac{60}{20}$;

β) Γραπτῶς :

1. Τρέψατε σὲ μικτοὺς τὰ κλάσματα.

$\frac{12}{4}$, $\frac{35}{9}$, $\frac{64}{8}$, $\frac{58}{12}$, $\frac{72}{15}$, $\frac{81}{9}$, $\frac{48}{13}$, $\frac{156}{45}$, $\frac{1274}{38}$.

2. Κάθε μαθητὴς τῆς Ε' τάξεως ἔδωσε γιὰ τὴν ἐκδρομὴ $\frac{26}{4}$ χιλιάρικα. Πόσα χιλιάρικα ἔδωσε ;

3. Γιὰ νὰ πᾶμε ἀπ' τὴν 'Αθήνα στὴν Πάτρα χρειάζονται $\frac{19}{3}$ ὥρ. Πόσες ὧρες καὶ πόσα λεπτὰ θέλομε ;

4. Πόσες ὀκάδες πατάτες εἶναι τὰ $\frac{7}{3}$ ὀκάδ. ;

ΣΥΓΚΡΙΣΙΣ ΟΜΩΝΥΜΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

'Η Μαρία ἀγόρασε $\frac{5}{8}$ *πήχ. κορδέλλα. 'Η 'Ελένη* $\frac{4}{8}$ *καὶ ἡ Γεωργία* $\frac{6}{8}$ *πήχ. Ποιά ἀπὸ τὶς τρεῖς ἀγόρασε περισσότερο καὶ ποιά λιγώτερο ;*

Λύσις

Γιὰ νὰ ἀντιληφθοῦμε ποιὰ ἀγόρασε περισσότερο καὶ ποιὰ λιγώτερο, πρέπει νὰ συγκρίνωμε τὰ κλάσματα $\frac{5}{8}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{6}{8}$, τὰ ὁποῖα εἶναι ὁμώνυμα ἀφοῦ γίνονται ἀπὸ τὴν αὐτὴ κλασματικὴ μονάδα $\frac{1}{8}$. 'Η 'Ελένη λοιπὸν πῆρε 4 κλασματικὲς μονάδες, ἡ Μαρία 5 καὶ ἡ Γεωργία 6 κλασματικὲς μονάδες. Εἶναι φανερὸ ὅτι τὶς περισσότερες κλασματικὲς μονάδες πῆρε ἡ Γεωργία καὶ τὶς λιγώτερες ἀπὸ ὅλες ἡ 'Ελένη.

'Επομένως τὸ κλάσμα $\frac{6}{8}$ εἶναι μεγαλύτερο καὶ ἀπὸ τὸ $\frac{5}{8}$ καὶ ἀπὸ τὸ $\frac{4}{8}$ καὶ τὸ κλάσμα $\frac{5}{8}$ εἶναι μεγαλύτερο ἀπὸ τὸ $\frac{4}{8}$.

Μποροῦμε λοιπὸν ἀμέσως νὰ διακρίνωμε ποιὸ ἀπὸ τὰ τρία ὁμώνυμα κλάσματα εἶναι μεγαλύτερο, ἐὰν παρατηρήσωμε τοὺς ἀριθμητάς των. Μεγαλύτερο εἶναι ἐκεῖνο τὸ ὁποῖο ἔχει τὸν μεγαλύτερο ἀριθμητὴ καὶ μικρότερο ἐκεῖνο τὸ ὁποῖο ἔχει τὸν μικρότερο ἀριθμητή.

Παραδείγματα :

1. 'Απὸ τὰ ὁμώνυμα κλάσματα $\frac{3}{15}$. $\frac{8}{15}$, $\frac{5}{15}$, $\frac{12}{15}$, μεγαλύτερο εἶναι τὸ $\frac{12}{15}$ καὶ μικρότερο τὸ $\frac{3}{15}$.

Ἐπίσης ἀπὸ τὰ ὁμώνυμα κλάσματα $\frac{28}{35}$, $\frac{12}{35}$, $\frac{33}{35}$, μεγαλύτερο εἶναι τὸ $\frac{33}{25}$ καὶ μικρότερο τὸ $\frac{12}{35}$.

Συμπεραίνομε λοιπὸν ὅτι ἀπὸ δύο ἢ περισσότερα ὁμώνυμα κλάσματα, τὸ μεγαλύτερο εἶναι ἐκεῖνο τὸ ὁποῖο ἔχει τὸν μεγαλύτερο ἀριθμητὴ καὶ μικρότερο εἶναι ἐκεῖνο τὸ ὁποῖο ἔχει τὸ μικρότερο ἀριθμητή.

Ἀσκήσεις

α) Ἀπὸ μνήμης :

1. Ποιὸ ἀπὸ τὰ κλάσματα $\frac{3}{8}$ καὶ $\frac{5}{8}$ εἶναι μεγαλύτερο καὶ γιατί ;

2. Γράψετε μόνοι σας 5 κλάσματα καὶ νὰ βρῆτε ποιὸ ἀπὸ τὸ καθένα εἶναι μεγαλύτερο καὶ ποιὸ μικρότερο.

β) Γραπτῶς.

1. Νὰ βρῆτε τὸ μεγαλύτερο καὶ τὸ μικρότερο ἀπὸ τὰ κλάσματα $\frac{11}{12}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{9}{12}$, $\frac{15}{12}$, $\frac{3}{12}$.

2. Νὰ βάλετε κατὰ σειρὰ ἀρχίζοντας ἀπὸ τὸ μικρότερο τὰ ἑξῆς κλάσματα :

$$\frac{35}{45},\ \frac{21}{45},\ \frac{7}{45},\ \frac{28}{45},\ \frac{19}{45},\ \frac{32}{45}.$$

3. Γιὰ τὸ φόρεμα τῆς Μαρίας ἀγόρασαν $\frac{7}{2}$ πήχ. καὶ γιὰ τὴν ποδιά της $\frac{5}{2}$ πήχ. Γιὰ ποιὸ φόρεμα ἀγόρασαν περισσότερο ὕφασμα ;

ΣΥΓΚΡΙΣΙΣ ΕΤΕΡΩΝΥΜΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

Περίπτωσις α΄. ***Ἡ Μαρία ἀγόρασε $\frac{3}{4}$ πήχ. κορδέλλα καὶ ἡ Ἑλένη $\frac{5}{8}$ πήχ. Ποιὰ ἀγόρασε περισσότερο ;***

Λύσις

Ἐδῶ ἔχομε νὰ συγκρίνωμε τὰ κλάσματα $\frac{3}{4}$ καὶ $\frac{5}{8}$ τῆς πήχ. τὰ ὁποῖα εἶναι ἑτερώνυμα γιατὶ δὲν γίνονται ἀπὸ τὴν ἴδια κλασματικὴ μονάδα καὶ ὡς ἐκ τούτου δὲν ἔχουν τὸν αὐτὸν παρονομαστή. Τὸ πρῶτο κλάσμα γίνεται ἀπὸ τὴν κλασματικὴ μονάδα $\frac{1}{4}$ καὶ τὸ δεύτερο ἀπὸ τὴν $\frac{1}{8}$. Ὅπως εἶναι ἑτερώνυμα δὲν μποροῦμε νὰ τὰ συγκρίνωμε. Ἐὰν ἦσαν ὅμως ὁμώνυμα θὰ ἦταν εὔκολο.

Σκεπτόμαστε λοιπὸν ὡς ἑξῆς : Τὸ κλάσμα $\frac{3}{4}$ εἶναι ἰσοδύναμο μὲ τὸ κλάσμα $\frac{6}{8}$ γιατὶ τὸ $\frac{6}{8}$ γίνεται ἀπὸ τὸ $\frac{3}{4}$ πήχεως ἐὰν πολλαπλασιάσωμε τοὺς ὅρους του ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸ 2 ἤτοι : $\frac{3\times2}{4\times2}=\frac{6}{8}$ καὶ ἔχομε $\frac{3}{4}=\frac{6}{8}$.

Καὶ τώρα ἀντὶ νὰ συγκρίνωμε τὰ κλάσματα $\frac{3}{4}$ καὶ $\frac{5}{8}$ συγκρίνομε τὰ κλάσματα $\frac{6}{8}$ πήχ. καὶ $\frac{5}{8}$ πήχ. τὰ ὁποῖα εἶναι ὁμώνυμα καὶ παρατηροῦμε ὅτι μεγαλύτερο εἶναι τὸ κλάσμα $\frac{6}{8}$ ἢ τὸ ἰσοδύναμο αὐτοῦ $\frac{3}{4}$ πήχ. καὶ μικρότερο τὸ $\frac{5}{8}$. Ἡ Μαρία λοιπὸν ἀγόρασε περισσότερη κορδέλλα.

2. ***Ὁ Κωστάκης ἐπλήρωσε γιὰ εἰσιτήριο αὐτοκινήτου τὰ*** $\frac{7}{10}$ ***τοῦ χιλιάρικου, ὁ δὲ Γιαννάκης τὰ*** $\frac{11}{20}$ ***χιλιάρικου. Ποιός ἐπλήρωσε τὰ περισσότερα ;***

Λύσις

Καὶ ἐδῶ ἔχομε νὰ συγκρίνωμε τὰ ἑτερώνυμα κλάσματα $\frac{7}{10}$ χιλ. καὶ $\frac{11}{20}$ χιλ. Ἐπειδὴ δὲν γνωρίζομε ποιὸ εἶναι μεγαλύτερο γιὰ νὰ τὰ συγκρίνωμε, πρέπει νὰ τὰ τρέψωμε σὲ ὁμώνυμα.

Τὸ κλάσμα $\frac{7}{10}$ τὸ ὁποῖο ἔχει μικρότερο παρονομαστὴ τὸ τρέπομε σὲ ἄλλο ἰσοδύναμο, τὸ ὁποῖο θὰ ἔχη παρονομαστὴ ἴσον μὲ τὸν παρονομαστὴ τοῦ ἄλλου δοθέντος κλάσματος, δηλ. 20. Πρὸς τοῦτο πολλαπλασιάζομε καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ $\frac{7}{10}$ ἐπὶ τὸ 2 (γιατὶ μόνο 2 × 10 = 20) καὶ ἔχομε $\frac{7\times2}{10\times2}=\frac{14}{20}$.

Βρίσκομε ὅτι τὸ κλάσμα $\frac{14}{20}$ εἶναι ἰσοδύναμο μὲ τὸ κλάσμα $\frac{7}{10}$ ἀλλὰ καὶ ὁμώνυμο μὲ τὸ κλάσμα $\frac{11}{20}$.

Συγκρίνοντας τώρα τὰ κλάσματα $\frac{14}{20}$ καὶ $\frac{11}{20}$ χιλ. παρατηροῦμε ὅτι μεγαλύτερο εἶναι τὸ $\frac{14}{20}$. Ἀφοῦ λοιπὸν τὸ κλάσμα $\frac{14}{20}$ χιλ. εἶναι μεγαλύτερο ἀπὸ τὸ κλάσμα $\frac{11}{20}$ χιλ. καὶ τὸ ἰσοδύναμο κλάσμα $\frac{7}{10}$ θὰ εἶναι μεγαλύτερο ἀπὸ τὸ $\frac{11}{20}$. Ἄρα ὁ Κωστάκης ἐπλήρωσε περισσότερα ἀπὸ τὸν Γιαννάκη.

3. Τὸ ἀνάστημα τριῶν μαθητῶν εἶναι τὸ ἑξῆς : τοῦ πρώτου $\frac{3}{5}$ τοῦ μέτρου, τοῦ δευτέρου $\frac{7}{10}$ τοῦ μέτρου καὶ τοῦ τρίτου $\frac{82}{100}$ τοῦ μέτρου. Ποιό παιδὶ ἔχει τὸ μεγαλύτερο ἀνάστημα ;

Λύσις

Ἔχομε νὰ συγκρίνωμε τρία ἑτερώνυμα κλάσματα τὰ $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{10}$ καὶ $\frac{82}{100}$.

Πρὸς τοῦτο πρέπει νὰ τὰ τρέψωμε σὲ ὁμώνυμα. Γι' αὐτὸ παίρνουμε τὰ κλάσματα, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὸν μικρότερο παρονομαστή, ἤτοι τὰ $\frac{3}{4}$ καὶ $\frac{7}{10}$ καὶ θὰ τὰ τρέψωμε σὲ ἄλλα ἰσοδύναμα κλάσματα μὲ παρονομαστή, τὸν παρονομαστὴ τοῦ τρίτου κλάσματος $\left(\text{τοῦ } \frac{82}{100}\right)$ δηλ. μὲ παρονομαστὴ τὸ 100.

Ἀλλὰ γιὰ νὰ κάμωμε τὸ κλάσμα $\frac{3}{4}$ σὲ ἄλλο ἰσοδύναμο μὲ παρονομαστὴ τὸ 100 πρέπει νὰ βροῦμε ἕναν ἀριθμὸ ὁ ὁποῖος ὅταν πολλαπλασιασθῆ μὲ τὸν παρονομαστὴ τοῦ $\frac{3}{4}$, τὸ 4 νὰ δίδη τὸ 100. Τὸν ἀριθμὸ αὐτὸ τὸν βρίσκομε ἀμέσως ἐὰν διαιρέσωμε τὸ 100 διὰ τοῦ 4 δηλ. $100 : 4 = 25$.

Τώρα βρίσκομε τὸ ἰσοδύναμο τοῦ $\frac{3}{4}$ ἀφοῦ πολλαπλασιάσωμε τὸ πηλίκο 25, ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴ καὶ τὸν παρονομαστὴ τοῦ κλάσματος, ἤτοι $\frac{3 \times 25}{4 \times 25} = \frac{75}{100}$. Κατὰ τὸν αὐτὸ τρόπο τρέπομε καὶ τὸ κλάσμα $\frac{7}{10}$ μέτρα σὲ ἰσοδύναμο μὲ παρονομαστὴ τὸ

100. Διαιροῦμε τὸ 100 : 10 καὶ βρίσκομε πηλίκο 10. Μὲ αὐτὸ πολλαπλασιάζομε ἀριθμητὴ καὶ παρονομαστὴ τοῦ $\frac{7}{10}$ καὶ ἔχομε τὸ ἰσοδύναμο κλάσμα $\frac{7 \times 10}{10 \times 10} = \frac{70}{100}$. Καὶ τώρα συγκρίνομε τὰ ὁμώνυμα πλέον κλάσματα $\frac{75}{100}$ μὲ τὸ $\frac{70}{100}$ καὶ $\frac{82}{100}$ καὶ βλέπομε ὅτι τὸ κλάσμα $\frac{82}{100}$ μ. εἶναι μεγαλύτερο καὶ ἀπὸ τὸ $\frac{3}{4}$ καὶ ἀπὸ τὸ $\frac{7}{10}$ μ.

Ἀπὸ τὰ δύο προηγούμενα παραδείγματα συμπεραίνουμε ὅτι γιὰ νὰ συγκρίνωμε δύο ἢ περισσότερα κλάσματα τὰ τρέπομε σὲ ὁμώνυμα.

Τοῦτο γίνεται ὡς ἑξῆς : Παρατηροῦμε ἐὰν ὁ μεγαλύτερος παρονομαστὴς τῶν δοθέντων κλασμάτων διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ ἄλλου παρονομαστοῦ ἢ καὶ τῶν ἄλλων παρονομαστῶν ὅταν τὰ δοθέντα κλάσματα εἶναι περισσότερα ἀπὸ δύο. Ἐὰν διαιρεῖται, τὸν διαιροῦμε διὰ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ πρώτου καὶ μὲ τὸ πηλίκιο πολλαπλασιάζομε καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος. Τὸ αὐτὸ κάνομε καὶ γιὰ τὰ ἄλλα κλάσματα, ἐὰν ἔχωμε. Τὸ πηλίκο ποὺ θὰ βροῦμε τὸ βάζομε ἐπάνω ἀπὸ τὸ κλάσμα τοῦ ὁποίου τοὺς ὅρους θὰ πολλαπλασιάσωμε. Π.χ. Τὰ κλάσματα $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$ καὶ $\frac{7}{12}$ νὰ τραποῦν σὲ ὁμώνυμα. Μεγαλύτερος παρονομαστὴς εἶναι τὸ 12, ὁ ὁποῖος διαιρεῖται ἀκριβῶς μὲ τὸν καθένα ἀπὸ τοὺς ἄλλους παρονομαστὰς τῶν κλασμάτων.

Ἔχομε : 12 : 4 = 3
12 : 6 = 2
12 : 12 = 1

Βάζομε τὸ κάθε πηλίκο ἐπάνω ἀπὸ κάθε κλάσμα μὲ τὸν παρονομαστὴ τοῦ ὁποίου διαιροῦμε τὸν μεγαλύτερο παρονομαστή.

$$\overset{\overset{3}{\smile}}{\frac{3}{4}} \qquad \overset{\overset{2}{\smile}}{\frac{5}{6}} \qquad \overset{\overset{1}{\smile}}{\frac{7}{12}}$$

Πολλαπλασιάζομε καὶ τοὺς δύο ὅρους ἑκάστου κλάσματος ἐπὶ τὸν ἀριθμὸ ποὺ εἶναι ἐπάνω ἀπὸ τὸ κλάσμα καὶ ὁ ὁποῖος βρέθηκε ἀπὸ τὴν διαίρεσιν τοῦ μεγαλύτερου παρονομαστοῦ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ κλάσματος καὶ ἔχομε $\frac{3 \times 3}{4 \times 3} = \frac{9}{12}$. $\frac{5 \times 2}{6 \times 2} = \frac{10}{12}$, $\frac{7 \times 1}{12 \times 1} = \frac{7}{12}$ καὶ ἔχομε τὰ ὁμώνυμα κλάσματα $\frac{9}{12}$, $\frac{10}{12}$, $\frac{7}{12}$ τὰ ὁποῖα εἶναι ἰσοδύναμα τῶν δοθέντων. Αὐτὰ μποροῦμε πλέον νὰ τὰ συγκρίνωμε καὶ παρατηροῦμε ὅτι μεγαλύτερο εἶναι τὸ κλάσμα $\frac{10}{12}$, ἢ τὸ ἰσοδυναμό του $\frac{5}{6}$ ἀπὸ τὰ $\frac{3}{4}$ καὶ $\frac{7}{12}$.

Τὰ κλάσματα αὐτὰ μποροῦμε νὰ τὰ τρέψωμε σὲ ὁμώνυμα καὶ ὡς ἑξῆς :

Πολλαπλασιάζομε καὶ τοὺς δύο ὅρους κάθε κλάσματος ἐπὶ τὸ γινόμενο τῶν δύο ἄλλων παρονομαστῶν ὅπως :

$$\frac{3 \times 6 \times 12}{4 \times 6 \times 12} = \frac{216}{288}, \quad \frac{5 \times 4 \times 12}{6 \times 4 \times 12} = \frac{240}{288}, \quad \frac{7 \times 4 \times 6}{12 \times 4 \times 6} = \frac{148}{288}$$

Τὰ κλάσματα ἔγιναν μὲν ὁμώνυμα καὶ μποροῦμε νὰ τὰ συγκρίνωμε, ὁπότε θὰ ἔχωμε τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα, ἀλλὰ οἱ ἀριθμηταὶ καὶ οἱ παρονομασταὶ εἶναι μεγάλοι ἀριθμοί.

Περίπτωσις β΄. ***Ἕνας ἄνθρωπος βαδίζει τὰ δύο χιλιόμετρα σὲ $\frac{1}{3}$ τῆς ὥρας καὶ ἕνας ἄλλος τὰ βαδίζει σὲ $\frac{2}{5}$ τῆς ὥρας. Ποιός τὰ βαδίζει σὲ ὀλιγώτερη ὥρα ;***

Λύσις

Στὸ πρόβλημα αὐτὸ ἔχομε νὰ συγκρίνωμε τὰ ἑτερώνυμα κλάσματα $\frac{1}{3}$ ὥρ. καὶ $\frac{2}{5}$ ὥρ. Παρατηροῦμε ὅτι ὁ μεγαλύτερος παρονομαστὴς 5 δὲν διαιρεῖται ἀκριβῶς μὲ τὸν μικρότερο. 3. Ἀλλ' ὅμως γιὰ νὰ τὰ συγκρίνωμε πρέπει νὰ γίνουν ὁμώνυμα. Σκεπτόμαστε λοιπόν, κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπο :

Ἂν πολλαπλασιάσωμε τοὺς παρονομαστὰς 3 καὶ 5 τῶν κλασμάτων θὰ βροῦμε τὸν ἀριθμὸν 15 ($3 \times 5 = 15$) ὁ ὁποῖος διαιρεῖται ἀκριβῶς καὶ διὰ τοῦ 3 καὶ διὰ τοῦ 5 γιατὶ ἔγινε ἀπὸ τὸν πολλαπλασιασμό τους.

Τὸν ἀριθμὸ 15 τὸν διαιροῦμε μὲ τὸν παρονομαστὴ 3 καὶ ἔχομε $15 : 3 = 5$. Δηλ. πηλίκο 5. Ἐπίσης διαιροῦμε τὸ 15 μὲ τὸν παρονομαστὴ τοῦ ἄλλου κλάσματος 5 καὶ ἔχομε $15 : 5 = 3$.

Δηλ. πηλίκο 3. Τὰ πηλίκα αὐτὰ τὰ γράφομε ὅπως προηγουμένως ἐπάνω ἀπὸ τὸ κάθε κλάσμα καὶ πολλαπλασιάζομε καὶ τοὺς δύο ὅρους κάθε κλάσματος ποὺ εἶναι κάτω ἀπὸ τὸν ἀριθμό· ἤτοι.

$$\overbrace{\frac{1}{3}}^{5} \quad \overbrace{\frac{2}{5}}^{3} = \frac{1 \times 5}{3 \times 5} = \frac{5}{15}$$

$$\frac{2 \times 3}{5 \times 3} = \frac{6}{15}$$

καὶ ἔχομε τὰ ἰσοδύναμα κλάσματα $\frac{5}{15}$ καὶ $\frac{6}{15}$ τὰ ὁποῖα εἶναι ὁμώνυμα καὶ τὰ ὁποῖα μποροῦμε εὔκολα νὰ τὰ συγκρίνωμε. Ἀπὸ τὴν σύγκρισιν δέ, ἀντιλαμβανόμεθα ὅτι τὸ $\frac{6}{15}$ εἶναι μεγαλύτερο ἀπὸ τὸ $\frac{5}{15}$, δηλ. τὸ $\frac{2}{5}$ εἶναι μεγαλύτερο ἀπὸ τὸ $\frac{1}{3}$.

Ἑπομένως ὁ δεύτερος ἄνθρωπος βαδίζει τὰ δύο χιλιόμετρα σὲ λιγώτερη ὥρα.

Παράδειγμα 2ον. Ποιὸ ἀπὸ τὰ κλάσματα $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ καὶ $\frac{4}{5}$ εἶναι μεγαλύτερο;

Παρατηροῦμε ὅτι ὁ μεγαλύτερος παρονομαστὴς 5 δὲν διαιρεῖται ἀκριβῶς μὲ τοὺς ἄλλους παρονομαστάς. Γι' αὐτὸ θὰ ἀκολουθήσωμε τὸν δεύτερο τρόπο καὶ ἔχομε τὰ ἑξῆς:

Γινόμενο παρονομαστῶν $3 \times 4 \times 5 = 60$

$$60 : 3 = 20$$
$$60 : 4 = 15$$
$$60 : 5 = 12$$

$$\overbrace{\frac{2}{3}}^{20} \quad \overbrace{\frac{3}{4}}^{15} \quad \overbrace{\frac{2}{5}}^{12} \quad \text{ἢ} \quad \frac{40}{60} \quad \frac{45}{60} \quad \frac{24}{60}$$

Τώρα μποροῦμε νὰ συγκρίνωμε τὰ κλάσματα. Ἂν ὅμως προσέξωμε, θὰ παρατηρήσωμε ὅτι ὁ κοινὸς παρονομαστὴς τῶν ὁμωνύμων αὐτῶν κλασμάτων εἶναι τὸ γινόμενο τῶν παρονομαστῶν.

Παράδειγμα 3ον. Ποιὸ ἀπὸ τὸ κλάσμα $\frac{10}{20}$, $\frac{4}{7}$ ***καὶ*** $\frac{15}{21}$ ***εἶναι τὸ μεγαλύτερο ;***

Ὁ μεγαλύτερος τῶν παρονομαστῶν 21 δὲν διαιρεῖται ἀκριβῶς μὲ τοὺς ἄλλους. Γι' αὐτὸ θὰ βροῦμε τὸ γινόμενο τῶν παρονομαστῶν. Καὶ ἔχομε :

Γινόμενο παρονομαστῶν 20 × 7 × 21 = 2940.
2940 : 20 = 147
2940 : 7 = 420
2940 : 21 = 140

$$\begin{array}{ccc} \underbrace{147} & \underbrace{420} & \underbrace{140} \\ \frac{10}{20} & \frac{4}{7} & \frac{15}{21} \end{array}$$

Μετὰ τὸν πολλαπλασιασμὸ καὶ τῶν δύο ὅρων ἑκάστου κλάσματος ἐπὶ τὸν ἐπάνω του ἀριθμὸ θὰ ἔχωμε τὰ ἰσοδύναμα κλάσματα τὰ ὁποῖα θὰ εἶναι καὶ ὁμώνυμα, ἤτοι :

$$\frac{1470}{2940} \quad \frac{1680}{2940} \quad \frac{2100}{2940}$$

Καὶ τώρα μποροῦμε νὰ τὰ συγκρίνωμε, ἀλλὰ καὶ νὰ παρατηρήσωμε ὅτι κοινὸς παρονομαστὴς τῶν ὁμωνύμων κλασμάνων εἶναι τὸ γινόμενο τῶν παρονομαστῶν.

Στὸ παράδειγμα ὅμως αὐτὸ παρατηροῦμε, ὅτι τὸ γινόμενο τῶν παρονομαστῶν εἶναι μεγάλος ἀριθμὸς (2940) καὶ ὡς ἐκ τούτου δυσκολευόμαστε καὶ στὴν διαίρεσιν καὶ στὸν πολλαπλασιασμό, γιὰ νὰ τὰ τρέψωμε σὲ ἰσοδύναμα καὶ ὁμώνυμα. Γιὰ νὰ τὸ ἀποφύγωμε θὰ προσέξωμε μήπως κανένα ἀπὸ τὰ κλάσματα αὐτὰ ἁπλοποιεῖται καὶ ἔτσι γίνεται ἰσοδύναμο ἀνάγωγο. Καὶ παρατηροῦμε ὅτι τὰ κλάσματα $\frac{10}{20}$ καὶ $\frac{15}{21}$ ἁπλοποιοῦνται, τὸ μὲν πρῶτο διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 10 καὶ γίνεται $\frac{10 : 10}{20 : 10} = \frac{1}{2}$, τὸ δὲ δεύτερο $\frac{15}{21}$ διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 3 καὶ γίνεται $\frac{15 : 3}{21 : 3} = \frac{5}{7}$, ὁπότε πλέον ἔχομε νὰ τρέψωμε σὲ ὁμώνυμα τὰ ἰσοδύναμα κλάσματα $\frac{1}{2}$, $\frac{4}{7}$ καὶ $\frac{5}{7}$ τὰ ὁποῖα ἐὰν τὰ τρέψωμε σὲ ὁμώνυμα κατὰ τὸν γνωστὸ τρόπο, θὰ ἔχωμε τὰ ἰσοδύναμα ὁμώνυμα κλάσματα $\frac{7}{14}$ $\frac{8}{14}$ $\frac{10}{14}$.

Ἀπὸ τὸν τρόπο αὐτὸν προκύπτει ἡ ὠφέλεια ὅτι ἔχομε κλάσματα μὲ μικροὺς ἀριθμούς.

Ἀπὸ ὅλα τὰ προηγούμενα παραδείγματα συμπεραίνομε, ὅτι *γιὰ νὰ τρέψωμε δύο ἢ περισσότερα ἑτερώνυμα κλάσματα σὲ ὁμώνυμα, πολλαπλασιάζομε τοὺς ὅρους ἑκάστου κλάσματος ἐπὶ τὸ γινόμενο τῶν παρονομαστῶν τῶν ἄλλων κλασμάτων.*

Ὑπέρχει ὅμως καὶ ἄλλος τρόπος εὐκολώτερος, μὲ τὸν ὁποῖο τρέπομε τὰ ἑτερώνυμα κλάσματα σὲ ὁμώνυμα καὶ μάλιστα μὲ μικροὺς ὅρους.

Ὁ τρόπος αὐτὸς εἶναι μὲ τὸ *ἐλάχιστο κοινὸ πολλαπλάσιο τῶν παρονομαστῶν.*

ΤΙ ΕΙΝΑΙ ΤΟ ΕΛΑΧΙΣΤΟ ΚΟΙΝΟ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΟ

Ἐλάχιστο κοινὸ πολλαπλάσιο (ἐ.κ.π.) δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν λέγεται ὁ μικρότερος ἀπὸ ὅλους τοὺς ἀριθμοὺς ὁ ὁποῖος διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

Π.χ. τῶν ἀριθμῶν 2 καὶ 4 ἐ. κ. π. εἶναι ὁ ἀριθμὸς 4 διότι αὐτὸς διαιρεῖται ἀκριβῶς καὶ μὲ τὸν 2 καὶ μὲ τὸν 4 καὶ εἶναι ὁ μικρότερος ἀπὸ ὅλους τοὺς ἀριθμοὺς τοὺς ὁποίους διαιροῦν οἱ δύο αὐτοὶ ἀριθμοὶ καὶ οἱ ὁποῖοι εἶναι οἱ 8, 16, 20, 24 . . . . . .

Ὁμοίως ἐ.κ.π. τῶν ἀριθμῶν 2, 3 καὶ 4 εἶναι ὁ ἀριθμὸς 12, διότι αὐτὸς διαιρεῖται ἀκριβῶς μὲ τοὺς δοθέντας ἀριθμοὺς 2, 3 καὶ 4 καὶ εἶναι ὁ μικρότερος ἀπὸ ὅλους τοὺς ἄλλους, ποὺ διαιροῦν οἱ ἀριθμοὶ 2, 3, 4 καὶ οἱ ὁποῖοι εἶναι οἱ 24, 36, 48 κλπ.

ΕΥΡΕΣΙΣ ΤΟΥ Ε. Κ. Π.

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐ. κ. π. πρακτικά, ἔχομε τὶς ἑξῆς περιπτώσεις :

1. Παρατηροῦμε ἂν ὁ μεγαλύτερος ἀπὸ τοὺς δοθέντας ἀριθμοὺς διαιρεῖται ἀκριβῶς μὲ ὅλους τοὺς ἄλλους. Ἂν διαιρεῖται, αὐτὸς εἶναι τὸ ἐ. κ. π. αὐτῶν. Π.χ. τῶν ἀριθμῶν 3, 9, 18 ἐ.κ.π. εἶναι ὁ 18, διότι διαιρεῖται ἀκριβῶς μὲ τοὺς ἄλλους δοθέντας ἀριθμούς.

2. Ἂν οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ δὲν διαιροῦνται ὅλοι μὲ κανένα ἀριθμό, τότε ἐ. κ. π. τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν εἶναι τὸ γινόμενό των. Π.χ. τῶν ἀριθμῶν 3, 4 καὶ 5 ἐ.κ.π. εἶναι τὸ $3 \times 4 \times 5 = 60$, ἤτοι

ἐ. κ. π. εἶναι τὸ 60. Ὁμοίως τῶν ἀριθμῶν 7, 11 καὶ 2 οἱ ὁποῖοι δὲν διαιροῦνται μὲ κανένα ἀριθμὸν καὶ οἱ τρεῖς, ἐ. κ. π. εἶναι τὸ 154 τὸ ὁποῖο εὑρίσκεται ἀπὸ τὸν πολλαπλασιασμὸ τῶν δοθέντων ἀριθμῶν, ἤτοι 7 × 11 × 2 = 154.

3. Ἂν δὲν δίδεται μία τῶν προηγουμένων περιπτώσεων, βρίσκομε τὸ ἐ. κ. π. πρακτικὰ ὡς ἑξῆς: Γράφομε τοὺς ἀριθμοὺς ὁριζόντια τὸν ἕνα κατόπιν τοῦ ἄλλου καὶ σὲ ἀπόστασιν. Σύρομε μιὰ κατακόρυφη γραμμὴ δεξιά τους καὶ παρατηροῦμε ποιοὶ ἀπὸ αὐτοὺς διαιροῦνται διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 2 καὶ τοὺς διαιροῦμε ἔστω καὶ ἂν εἶναι ἕνας. Κάτω ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς γράφομε τὰ πηλίκα καὶ ὅλους τοὺς ἄλλους ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι δὲν διαιροῦνται, τοὺς γράφομε ὅπως εἶναι. Κάνομε πάλι τὴ διαίρεσιν διὰ τοῦ 2, ἕως ὅτου νὰ μὴ ἔχωμεν ἄλλην διαίρεσιν διὰ τοῦ 2. Τὸ αὐτὸ κάνομε μὲ τὸν ἀριθμὸ 3, ἔπειτα μὲ τὸν ἀριθμὸ 5, 7 καὶ τέλος, μὲ τὸν ἑαυτό του ἐκεῖνον τὸν ἀριθμὸ ὁ ὁποῖος δὲν διαιρεῖται μὲ κανένα ἄλλον. (Ὅπως π. χ. τὸν 23 θὰ τὸν διαιρέσωμε διὰ τοῦ 23, γιατὶ δὲν διαιρεῖται ἀκριβῶς μὲ κανένα ἄλλον ἀριθμό). Στὸ τέλος πρέπει νὰ ἔχωμε πηλίκα μονάδες. Μετὰ ταῦτα πολλαπλασιάζομε τοὺς ἀριθμοὺς μὲ τοὺς ὁποίους διαιρέσαμε τοὺς δοθέντας ἀριθμοὺς καὶ τὸ γινόμενο ὅλων εἶναι τὸ ἐ. κ. π. Π. χ.

α) Νὰ βρεθῆ τὸ ἐ. κ. π. τῶν ἀριθμῶν 12, 15, 20.

12	15	20	2	
6	15	10	2	
3	15	5	3	ἐ. κ. π. = 2 × 2 × 3 × 5 = 60
1	5	5	5	
1	1	1		

β) Νὰ βρεθῆ τὸ ἐ. κ. π. τῶν ἀριθμῶν 20, 30, 17.

20	30	17	2	
10	15	17	2	
5	15	17	3	ἐ. κ. π = 2 × 2 × 3 × 5 × 17 = 1020
5	5	17	5	
1	1	17	17	
1	1	1		

ΤΡΟΠΗ ΕΤΕΡΩΝΥΜΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ ΣΕ ΟΜΩΝΥΜΑ ΜΕ ΤΟ Ε. Κ. Π.

Νὰ τραποῦν σὲ ὁμώνυμα τὰ ἑτερώνυμα κλάσματα

$$\frac{7}{10}, \frac{8}{35}, \text{ καὶ } \frac{9}{14}.$$

Παρατηροῦμε ὅτι ὁ μεγαλύτερος τῶν παρονομαστῶν 35 δὲν διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τῶν ἄλλων παρονομαστῶν. Ἐπίσης παρατηροῦμε ὅτι τὰ κλάσματα εἶναι ἀνάγωγα καὶ ὡς ἐκ τούτου δὲν ἁπλοποιοῦνται. Ἑπομένως θὰ τὰ τρέψωμε σὲ ὁμώνυμα ἢ μὲ τὸ γινόμενο τῶν παρονομαστῶν ἢ μὲ τὸ ἐ. κ. π. Μὲ τὸ γινόμενο τῶν παρονομαστῶν θὰ βροῦμε μεγάλον ἀριθμὸ τὸν 4900. Γιὰ τοῦτο θὰ τὰ τρέψωμε μὲ τὸ ἐ. κ. π. Καὶ ἔχομε:

$$\begin{array}{rrr|l}
10 & 35 & 14 & 2 \\
5 & 35 & 7 & 5 \quad \text{ἐ. κ. π.} = 2 \times 5 \times 7 = 70 \\
1 & 7 & 7 & 7 \\
1 & 1 & 1 &
\end{array}$$

Διαιροῦμε τὸ ἐ. κ. π. διὰ τῶν παρονομαστῶν καὶ ἔχομε:

$$70 : 10 = 7$$
$$70 : 35 = 2$$
$$70 : 14 = 5$$

$$\overbrace{\frac{7}{10}}^{7} \qquad \overbrace{\frac{8}{35}}^{2} \qquad \overbrace{\frac{9}{14}}^{5}$$

Πολλαπλασιάζομε καὶ τοὺς δύο ὅρους κάθε κλάσματος ἐπὶ τὸν ἀπὸ πάνω του ἀριθμό, τὸν ὁποῖο βρήκαμε διὰ τῆς διαιρέσεως τοῦ ἐ.κ.π. διὰ τοῦ παρονομαστοῦ καὶ ἔχομε τὰ κλάσματα $\frac{49}{70}$ $\frac{16}{70}$ $\frac{45}{70}$ τὰ ὁποῖα εἶναι ὁμώνυμα καὶ ἰσοδύναμα μὲ τὰ κλάσματα $\frac{7}{10}$, $\frac{8}{35}$, $\frac{10}{14}$.

Ἀπὸ ὅλα τὰ προηγούμενα συμπεραίνομε, ὅτι γιὰ νὰ τρέψωμε δύο ἢ περισσότερα κλάσματα ἑτερώνυμα σὲ ὁμώνυμα μὲ τὸ ἐ. κ. π. τῶν παρονομαστῶν, ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς: Παρατηροῦμε τὸ μεγαλύτερο παρονομαστὴ ἂν διαιρεῖται, ἀκριβῶς μὲ ἄλλους παρονομαστὰς καὶ ἂν διαιρεῖται, αὐτὸς εἶναι τὸ ἐ. κ. π. αὐτῶν. Ἂν δὲν διαιρεῖται, ἀφοῦ ἁπλοποιήσουμε τὰ κλάσματα καὶ τὰ κάνωμε ἀνάγωγα, βρίσκουμε τὸ ἐ. κ. π. τῶν παρονομαστῶν κατὰ τὸν γνωστὸ πρακτικὸ τρόπο. Τὸ ἐ.κ.π. ποὺ βρίσκομε τὸ διαιροῦμε διὰ τοῦ παρονομαστοῦ κάθε κλάσματος καὶ μὲ τὸ πηλίκο, τὸ ὁποῖο βρίσκομε ἀπὸ κάθε διαίρεσιν, πολλαπλασιάζομε καὶ τοὺς δυὸ ὅρους τοῦ κλάσματος, ὅπως γνωρίζομε. Τὸ ἐ.κ.π. θὰ εἶναι ὁ παρονομαστὴς ὅλων τῶν κλασμάτων.

Ἀσκήσεις

1. Ἀπὸ τὰ κλάσματα $\frac{4}{5}$ καὶ $\frac{5}{7}$ ποιό εἶναι τὸ μεγαλύτερο ;

2. Κάμετε ὁμώνυμα τὰ κλάσματα, α) $\frac{3}{7}$ καὶ $\frac{5}{8}$, β) $\frac{5}{12}$ καὶ $\frac{7}{20}$, γ) $\frac{12}{25}$ καὶ $\frac{33}{40}$.

3. Κατὰ πόσους καὶ ποίους τρόπους μποροῦμε νὰ τρέψωμε τὰ ἑτερώνυμα κλάσματα σὲ ὁμώνυμα ;

4. Τρέψατε μὲ ὁποιοδήποτε τρόπο θέλετε σὲ ὁμώνυμα, τὰ ἑξῆς ἑτερώνυμα κλάσματα :

α) $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{8}$,
β) $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{4}{15}$.
γ) $\frac{12}{14}$, $\frac{15}{28}$, $\frac{31}{42}$.

5. Τρέψατε μὲ τὸ ἐ. κ. π. σὲ ὁμώνυμα τὰ ἑξῆς κλάσματα :

α) $\frac{5}{7}$, $\frac{8}{21}$, $\frac{28}{63}$.
β) $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{27}{64}$, $\frac{51}{72}$.

6. Σὲ μιὰ σχολικὴ γιορτὴ ἔλαβαν μέρος τὰ $\frac{3}{4}$ τῶν μαθητῶν τῆς ΣΤ΄ τάξεως, τὰ $\frac{5}{8}$ τῶν μαθητῶν τῆς Ε΄ καὶ τὰ $\frac{7}{12}$ τῶν μαθητῶν τῆς Δ΄ τάξεως. Ἂν αἱ τάξεις εἶχαν τὸν αὐτὸ ἀριθμὸ μαθητῶν, ἀπὸ ποιάν τάξιν ἔλαβαν μέρος περισσότεροι μαθηταί ;

ΠΡΑΞΕΙΣ ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΩΝ

Ὅπως μὲ τοὺς ἀκεραίους, δεκαδικοὺς καὶ συμμιγεῖς ἀριθμοὺς ἐκάμαμε πρόσθεσιν, ἀφαίρεσιν, πολλαπλασιασμὸν καὶ διαίρεσιν, κατὰ τὸν ἴδιο τρόπο καὶ μὲ τοὺς κλασματικοὺς ἀριθμοὺς θὰ κάμωμε τὶς αὐτὲς πράξεις, γιατὶ στὴ ζωή μας παρουσιάζονται πολλὰ προβλήματα μὲ κλασματικοὺς ἀριθμούς.

Α΄. ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

Ὅταν λέμε πρόσθεσιν κλασμάτων ἐννοοῦμε τὴν πρᾶξιν στὴν ὁποία μᾶς δίδονται δύο ἢ περισσότεροι κλασματικοὶ ἀριθμοὶ ἢ κλασματῖκοὶ καὶ ἀκέραιοι ἢ μικτοὶ ἢ κλάσματα καὶ μικτοὶ καὶ ἀφοῦ ἑνώσουμε ὅλες τὶς μονάδες των, βρίσκομε ἕνα ἄλλον ἀριθμό, ὁ ὁποῖος ἔχει ὅλες τὶς μονάδες τῶν ἀριθμῶν οἱ ὁποῖοι μᾶς ἐδόθησαν καὶ μόνον αὐτές. Στὴν πρόσθεσιν ἔχομε :

1. Τοὺς ***προσθετέους***. Δηλ. τοὺς ἀριθμοὺς τοὺς ὁποίους θὰ προσθέσωμε.

2. Τὸ σημεῖο τῆς προσθέσεως. Δηλ. τὸ ***σὺν*** (+) ἢ ***καί***, καὶ

3. Τὸ ***ἄθροισμα***. Δηλ. τὸν ἀριθμὸ τὸν ὁποῖο θὰ βροῦμε ἀπὸ τὴν πρόσθεσιν.

Στὴν πρόσθεσιν τῶν κλασμάτων ἔχομε τὰς ἑξῆς περιπτώσεις.

1. Πρόσθεσις ὁμωνύμων κλασμάτων

1. *Ἡ Ἑλένη ἀγόρασε $\frac{3}{8}$ πήχ. ὕφασμα, ἀλλ' ἐπειδὴ δὲν τὴν ἔφθασε ἀγόρασε καὶ ἄλλα $\frac{2}{8}$ πήχ. Πόσο ὕφασμα ἀγόρασε ;*

Λύσις

Γιὰ νὰ λύσωμε τὸ πρόβλημα θὰ κάμωμε πρόσθεσιν. Θὰ προσθέσωμε τὰ κλάσματα $\frac{3}{8}$ καὶ $\frac{2}{8}$ τὰ ὁποῖα εἶναι ὁμώνυμα. Γιὰ νὰ τὰ προσθέσωμε θὰ σκεφθοῦμε ὡς ἑξῆς :

Τὸ κλάσμα $\frac{3}{8}$ εἶναι ἴσο μὲ τὶς κλασματικὲς μονάδες $\frac{3}{8} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$ καὶ τὸ κλάσμα $\frac{2}{8} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$ πήχ. Ἑπομένως θὰ προσθέσωμε τὶς τρεῖς κλασματικὲς μονάδες τοῦ πρώτου κλάσματος μὲ τὶς δύο κλασματικὲς μονάδες τοῦ δευτέρου καὶ θὰ ἔχωμε :

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8}.$$

Τὸ αὐτὸ ὅμως ἄθροισμα μποροῦμε νὰ ἔχωμε ἀμέσως ἐὰν προσθέσωμε μόνον τοὺς ἀριθμητὰς τῶν κλασμάτων καὶ ἀφήσωμε τὸν ἴδιο παρονομαστή τους. Δηλαδὴ $\frac{3}{8} + \frac{2}{8} = \frac{3+2}{8}$ $= \frac{5}{8}$.

Ἡ πρόσθεσις ἐδῶ ἔγινε ἀκριβῶς ὅπως ἔγινε καὶ στοὺς ἀκέραιους ἀριθμούς.

Στοὺς ἀκέραιους ἀριθμοὺς λέγαμε 3 μῆλα + 2 μῆλα = 5 μῆλα. Ἐδῶ εἴπαμε 3 ὄγδοα + 2 ὄγδοα = 5 ὄγδοα = $\frac{5}{8}$.

2. Ἡ Μαρία ἀγόρασε $\frac{5}{8}$ πήχ. κορδέλλα, ἡ Ἑλένη $\frac{6}{8}$ καὶ ἡ Καίτη $\frac{7}{8}$ πήχ. Πόσες πήχ. κορδέλλα ἀγόρασαν καὶ οἱ τρεῖς μαζί ;

Λύσις

Ἔχομε νὰ προσθέσωμε τὰ ὁμώνυμα κλάσματα $\frac{5}{8} + \frac{6}{8}$ $+ \frac{7}{8} = ;$

Θὰ προσθέσωμε τοὺς ἀριθμητὰς καὶ τὸ ἄθροισμα θὰ τὸ βάλωμε ὡς ἀριθμητὴ καὶ παρονομαστὴ θὰ ἀφήσωμε τὸν ἴδιο, ἤτοι : $\frac{5}{8} + \frac{6}{8} + \frac{7}{8} = \frac{18}{8}$ πήχ.

Ἐδῶ παρατηροῦμε ὅτι τὸ ἄθροισμα $\frac{18}{8}$ πήχ. εἶναι κλάσμα καταχρηστικό, δηλ. μεγαλύτερο ἀπὸ τὴν ἀκεραία μονάδα, γιατὶ ὁ ἀριθμητής του εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν παρονομαστή. Γι' αὐτὸ θὰ βγάλωμε τὶς ἀκέραιες μονάδες, τὶς ὁποῖες ἔχει ἀφοῦ διαιρέσωμε τὸν ἀριθμητὴ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ, ἤτοι 18 : 8. Τὸ πηλίκο τῆς διαιρέσεως εἶναι τὸ 2 καὶ τὸ ὑπόλοιπο τὸ 2. Ἄρα τὸ κλάσμα $\frac{18}{8}$ ἔχει 2 ἀκέραιες μονάδες καὶ τὸ κλάσμα $\frac{2}{8}$. Μὲ αὐτὸν τὸν τρόπο βρίσκομε μικτὸν ἀριθμὸ καὶ ἔχομε $\frac{18}{8} = 2\frac{2}{8}$ καὶ μετὰ τὴν ἁπλοποίησιν τοῦ κλάσματος $2\frac{1}{4}$.

Ἄρα καὶ τὰ τρία κορίτσια ἀγόρασαν $2\frac{1}{4}$ πήχ.

Ἀπὸ τ' ἀνωτέρω συμπεραίνομε ὅτι: *1) γιὰ νὰ προσθέσωμε δύο ἢ περισσότερα ὁμώνυμα κλάσματα προσθέτομε μόνον τοὺς ἀριθμητὰς καὶ τὸ ἄθροισμα θέτομε ὡς ἀριθμητὴ καὶ παρονομαστὴ ἀφήνομε τὸν παρονομαστὴ τοῦ κλάσματος.*

2) Ἂν τὸ ἄθροισμα εἶναι κλάσμα καταχρηστικό, ἤτοι μεγαλύτερο ἀπὸ τὴν ἀκεραία μονάδα, ἐξάγομε τὶς ἀκέραιες μονάδες καὶ ἔχομε μικτὸν ἀριθμό.

Ἀσκήσεις

α) Ἀπὸ μνήμης.

Προσθέστε τὰ ὁμώνυμα κλάσματα :

$$\frac{3}{7} + \frac{4}{7} = \qquad \frac{5}{8} + \frac{3}{8} =$$

$$\frac{3}{5} + \frac{2}{5} = \qquad \frac{7}{9} + \frac{2}{9} -$$

β) Γραπτῶς.

Προσθέστε τὰ κάτωθι κλάσματα :

$$\frac{4}{20} + \frac{15}{20} = \qquad \frac{5}{8} + \frac{1}{8} + \frac{2}{8} =$$

$$\frac{12}{35} + \frac{18}{35} = \qquad \frac{4}{5} + \frac{3}{5} + \frac{1}{5} =$$

$$\frac{5}{7} + \frac{8}{7} = \qquad \frac{4}{9} + \frac{6}{9} + \frac{7}{9} =$$

$$\frac{5}{29} + \frac{17}{29} + \frac{16}{29} + \frac{1}{29} =$$

$$\frac{17}{125} + \frac{23}{125} + \frac{2}{125} + \frac{49}{125} =$$

γ) Κάμετε καὶ σεῖς δύο προβλήματα ὅμοια μὲ τοῦ βιβλίου σας ἀλλὰ μὲ ὀκάδες.

2. Πρόσθεσις ἑτερωνύμων κλασμάτων

Γιὰ ἕνα τετράδιο ἐδώσαμε $\frac{4}{10}$ *τοῦ χιλ. καὶ γιὰ μία πέννα* $\frac{11}{20}$ *τοῦ χιλ. Πόσα ἐδώσαμε ἐν ὅλῳ;*

Λύσις

Γιὰ νὰ λύσωμε τὸ πρόβλημα θὰ κάμωμε πρόσθεσιν. Θὰ προσθέσωμε τὰ κλάσματα $\frac{4}{10}$ χιλ. $+$ $\frac{11}{20}$ χιλ. $=$;

Τὰ κλάσματα ὅμως εἶναι ἑτερώνυμα ἐπειδὴ δὲν γίνονται ἀπὸ τὴν αὐτὴ κλασματικὴ μονάδα. Ὡς ἐκ τούτου δὲν μποροῦμε νὰ τὰ προσθέσωμε. Γιὰ νὰ τὰ προσθέσωμε πρέπει νὰ τὰ τρέψωμε σὲ ὁμώνυμα καὶ μετὰ νὰ τὰ προσθέσωμε.

Ὁ μεγαλύτερος τῶν παρονομαστῶν εἶναι ὁ 20, ὁ ὁποῖος διαιρεῖται ἀκριβῶς καὶ μὲ τὸν ἄλλον παρονομαστὴ τὸ 10. Ἑπομένως ἐ. κ. π. εἶναι τὸ 20.

Καὶ ἔχομεν :

20 : 10 = 2
20 : 20 = 1

$$\frac{4}{10}+\frac{11}{20}$$

$$\overbrace{\frac{4}{10}}^{2}+\overbrace{\frac{11}{20}}^{1}=\frac{8}{20}+\frac{11}{20}=\frac{19}{20} \text{ χιλ.}$$

2. Οἱ μαθηταὶ ἑνὸς σχολείου ἀνέλαβαν νὰ καθαρίσουν τὸν κεντρικὸ δρόμο τοῦ χωρίου των. Τὴν πρώτη ἡμέρα ἐκαθάρισαν τὰ $\frac{3}{10}$ τοῦ δρόμου, τὴ δεύτερη τὰ $\frac{7}{20}$ καὶ τὴν τρίτη ἡμέρα τὰ $\frac{17}{50}$ τοῦ δρόμου. Πόσον μέρος τοῦ δρόμου ἐκαθάρισαν καὶ τὶς τρεῖς ἡμέρες;

Λύσις

Ἔχομε νὰ προσθέσωμε κλάσματα ἑτερώνυμα καὶ γιὰ νὰ τὰ προσθέσωμε θὰ τὰ τρέψωμε σὲ ὁμώνυμα μὲ τὸ ἐ. κ. π. Ἐπειδὴ παρατηροῦμε ὅτι ὁ ἀριθμὸς 50, δηλ. ὁ μεγαλύτερος τῶν παρονομαστῶν δὲν διαιρεῖται ἀκριβῶς μὲ τοὺς ἄλλους, τὸ ἐ. κ. π. θὰ τὸ βροῦμε κατὰ τὸν ἑξῆς πρακτικὸ τρόπο.

$$\begin{array}{rrr|l}
10 & 20 & 50 & 2 \\
5 & 10 & 25 & 2 \\
5 & 5 & 25 & 5 \\
1 & 1 & 5 & 5 \\
1 & 1 & 1 &
\end{array}$$

ἐ. κ. π. 2×2×5×5=100

Καὶ ἔχομε :

100 : 10 = 10
100 : 20 = 5
100 : 50 = 2

$$\overbrace{\frac{3}{10}}^{10} \quad \overbrace{\frac{7}{20}}^{5} \quad \overbrace{\frac{17}{50}}^{2}$$

$$\frac{30}{100} \quad \frac{35}{100} \quad \frac{34}{100}=\frac{30+35+34}{100}=\frac{99}{100}$$

Ὥστε καὶ κατὰ τὶς τρεῖς ἡμέρες οἱ μαθηταὶ ἐκαθάρισαν τὰ $\frac{99}{100}$ τοῦ δρόμου.

3. Μὲ ἀφῃρημένους ἀριθμούς.

Νὰ προστεθοῦν τὰ κλάσματα $\frac{3}{5}+\frac{5}{8}+\frac{7}{10}$.

Λύσις

Ὁ 10 δὲν διαιρεῖται ἀκριβῶς μὲ τοὺς ἄλλους. Βρίσκομε τὸ ἐ. κ. π.

$$\begin{array}{ccc|c} 5 & 8 & 10 & 2 \\ 5 & 4 & 5 & 2 \\ 5 & 2 & 5 & 2 \\ 5 & 1 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & \end{array}$$

ἐ. κ. π. $2 \times 2 \times 2 \times 5 = 40$

$40 : 5 = 8$

$40 : 8 = 5$

$40 : 10 = 4$

$$\overbrace{\frac{3}{5}}^{8}+\overbrace{\frac{5}{8}}^{5}+\overbrace{\frac{7}{10}}^{4}=\frac{24}{40}+\frac{25}{40}+\frac{28}{40}=$$

$$=\frac{24+25+28}{40}=\frac{77}{40}=1\,\frac{37}{40}$$

Ἀπὸ τὰ προηγούμενα προβλήματα συμπεραίνομε, ὅτι *γιὰ νὰ προσθέσωμε δύο ἢ περισσότερα ἑτερώνυμα κλάσματα, τρέπομε πρῶτα αὐτὰ σὲ ὁμώνυμα κατὰ τοὺς γνωστοὺς τρόπους καὶ ἔπειτα τὰ προσθέτομε. Ἐὰν τὸ ἄθροισμα εἶναι μεγαλύτερο τῆς ἀκεραίας μονάδας, δηλ. κλάσμα καταχρηστικό, τρέπομε αὐτὸ σὲ μικτὸν ἀριθμό.*

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα

1. Νὰ προστεθοῦν τὰ κλάσματα :

α) $\frac{3}{5}+\frac{3}{8}=$

β) $\frac{5}{8}+\frac{7}{10}=$

γ) $\frac{9}{14}+\frac{7}{20}=$

δ) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=$

ε) $\frac{2}{3}+\frac{2}{5}+\frac{5}{6}=$

στ) $\frac{5}{27}+\frac{7}{9}+\frac{43}{54}=$

2. Γιὰ νὰ ἀγοράσουν μολύβι καὶ τετράδια μιᾶς πτωχῆς συμμαθήτριάς των ἔδωσαν ὁ Κωστάκης τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ χιλιάρικου, ἡ Μαίρη τὰ $\frac{3}{5}$ καὶ ὁ Μίμης τὰ $\frac{9}{10}$ τοῦ χιλιάρικου. Πόσα ἔδωσαν καὶ τὰ τρία παιδιά ;

3. Ἡ Ἑλένη μιὰ ἡμέρα ἔπλεξε τὰ $\frac{2}{5}$ μιᾶς δαντέλας, τὴν δεύ-

τερη ἡμέρα ἔπλεξε τὰ $\frac{4}{15}$ καὶ τὴν τρίτη ἡμέρα τὸ $\frac{1}{8}$ τῆς δαντέλας. Πόσο ἔπλεξε καὶ τὶς τρεῖς ἡμέρες ;

4. Ἡ Ἑλένη ἀγόρασε $\frac{5}{8}$ πήχ. κορδέλλα, ἡ δὲ Μαίρη $\frac{1}{4}$ πήχ. περισσότερο ἀπὸ τὴν Ἑλένη. Πόσο ἀγόρασε ἡ Μαίρη καὶ πόσο οἱ δύο μαζί ;

3. Πρόσθεσις ἀκεραίου καὶ μικτοῦ

Γιὰ νὰ κάμη ἕνα σακκάκι ὁ Κώστας ἀγόρασε 2 πήχ. ὕφασμα καὶ γιὰ ἕνα πανταλόνι $1\frac{1}{4}$ πήχ. Πόσες πήχ. ὕφασμα ἀγόρασε γιὰ ὅλη τὴ φορεσιά του.

Λύσις

Ἐδῶ ἔχομε νὰ προσθέσωμε τὸν ἀκέραιο 2 μὲ τὸν μικτὸ $1\frac{1}{4}$, ἤτοι 2 πήχ. + $1\frac{1}{4}$ πήχ. = ;

Τὴν πρόσθεσιν αὐτὴν ἐπειδὴ γνωρίζομε ὅτι $1\frac{1}{4}$ = 1 πήχ. + $\frac{1}{4}$ μποροῦμε νὰ τὴν γράψωμε καὶ ὡς ἑξῆς : 2 πήχ. + 1 πήχ. + $\frac{1}{4}$ πήχ. = ; Προσθέτομε τὶς πήχ. καὶ ἔχομε 2 + 1 = 3. Στὸ ἄθροισμα αὐτὸ προσθέτομε καὶ τὸ κλάσμα $\frac{1}{4}$ πήχ., δηλ. $3 + \frac{1}{4} = 3\frac{1}{4}$ γιατὶ ἀκέραιος καὶ κλάσμα εἶναι μικτὸς ἀριθμός. Ἑπομένως 2 πήχ. + $1\frac{1}{4}$ πήχ. = $3\frac{1}{4}$ πήχ.

Παρατηροῦμε λοιπὸν ὅτι, *γιὰ νὰ προσθέσωμε ἀκέραιο καὶ μικτὸ προσθέτομε τὸν ἀκέραιο μὲ τὸν ἀκέραιο τοῦ μικτοῦ καὶ ἔπειτα σχηματίζομε ἕνα μικτὸ ποὺ ἔχει ἀκέραιο μέρος τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκεραίων καὶ κλάσμα τὸ κλάσμα τοῦ μικτοῦ.*

4. Πρόσθεσις κλάσματος καὶ μικτοῦ

α) Ὅταν τὰ κλάσματα εἶναι ὁμώνυμα

Γιὰ τὸ κοστούμι τοῦ Πέτρου ἡ μητέρα του εἶχε ἀγοράσει $1\frac{2}{10}$ μέτρ. ὕφασμα, ἀλλὰ ἐπειδὴ δὲν ἔφθανε ἀγόρασε καὶ ἄλλα

$\frac{7}{10}$ μέτρ. Πόσο ὕφασμα χρειάσθηκε γιὰ τὸ κοστούμι τοῦ Πέτρου ;

Λύσις

Ἐδῶ ἔχομε νὰ προσθέσωμε κλάσμα καὶ μικτὸ ἀριθμό. Παρατηροῦμε ὅτι τὸ κλάσμα εἶναι ὁμώνυμο μὲ τὸ κλάσμα τοῦ μικτοῦ. Καὶ ἐπειδὴ ὁ μικτὸς ἀριθμὸς $1 \frac{2}{10}$ μ. $= 1.$ μ. $+ \frac{2}{10}$ μ. ἔχομε νὰ προσθέσωμε 1 μ. $+ \frac{2}{10} + \frac{7}{10}$ μ. Προσθέτομε τὰ κλάσματα $\frac{2}{10} + \frac{7}{10} = \frac{9}{10}$ καὶ τὸ ἄθροισμά τους τὸ προσθέτουμε μὲ τὸν ἀκέραιο καὶ ἔχομε 1 μ. $+ \frac{9}{10} = 1 \frac{9}{10}$. Ἄρα γιὰ τὸ κοστούμι τοῦ Πέτρου χρειάσθηκε $1 \frac{9}{10}$ μ. ὕφασμα.

Παράδειγμα : Νὰ γίνη πρόσθεσις τῶν $5 \frac{5}{12} + \frac{3}{12} =$

$$5 + \frac{5}{12} + \frac{3}{12} = 5 \frac{8}{12}$$

β) Ὅταν τὰ κλάσματα εἶναι ἑτερώνυμα

Γιὰ νὰ πάη ἕνας ἄνθρωπος ἀπὸ τὸ χωριό του στὴν πόλιν ἔχει βαδίσει $2 \frac{3}{4}$ ὧρες καὶ θέλει ἀκόμη $\frac{7}{12}$ ὥρ. γιὰ νὰ φθάση. Πόσες ὧρες εἶναι ἀπὸ τὸ χωριό του ἕως τὴν πόλιν ;

Λύσις

Γιὰ νὰ λύσωμε τὸ πρόβλημα αὐτὸ πρέπει νὰ προσθέσωμε τοὺς ἀριθμοὺς $2 \frac{3}{4}$ ὥρ. $+ \frac{7}{12}$ ὥρ.

Καὶ ἔχομε $2 + \frac{3}{4} + \frac{7}{12} =$;

Παρατηροῦμε ὅμως ὅτι τὰ κλάσματα εἶναι ἑτερώνυμα καὶ γιὰ νὰ τὰ προσθέσωμε πρέπει νὰ τὰ τρέψωμε σὲ ὁμώνυμα.

Ὁ 12, ὁ μεγαλύτερος τῶν παρονομαστῶν, διαιρεῖται ἀκριβῶς καὶ μὲ τοὺς δύο παρονομαστάς.

$12 : 4 = 3$
$12 : 12 = 1$

$$\overset{\overset{3}{\smile}}{\frac{3}{4}} + \overset{\overset{1}{\smile}}{\frac{7}{12}} =$$

$$\frac{9}{12} + \frac{7}{12} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3} = 1\,\frac{1}{3}$$

2 ὡρ. + $1\,\frac{1}{3} = 3\,\frac{1}{3}$ ὧρες. Ἄρα τὸ χωριὸ ἀπέχει ἀπὸ τὴν πόλιν $3\,\frac{1}{3}$ ὧρες.

Ἀσκήσεις

1. Κάμετε τὶς ἑξῆς προσθέσεις:

α) 15 ὡρ. + $8\,\frac{5}{6} =$

β) $12\frac{1}{2}$ ἔτη + 7 ἔτη =

γ) $3\,\frac{3}{5} + \frac{4}{5} =$

δ) $12\frac{3}{8} + \frac{5}{8} =$

ε) $\frac{7}{12} + 2\,\frac{9}{12} + \frac{3}{12} =$

στ) $12\frac{3}{8} + \frac{5}{6} =$

ζ) $1\,\frac{35}{42} + \frac{9}{18} =$

2. Γράψετε τὸν τρόπο μὲ τὸν ὁποῖο προσθέτομε μικτὸ καὶ κλάσμα.

3. Γράψατε δύο προβλήματα ὅμοια, ἀλλὰ ἀπὸ τὴ σχολική σας ζωή.

5. Πρόσθεσις μικτῶν ἀριθμῶν

Μία γυναίκα ἀγόρασε ἀπὸ ἕνα μανάβη $2\,\frac{3}{5}$ ὀκάδες χόρτα καὶ ἀπὸ ἄλλον $1\,\frac{1}{4}$ ὀκ. χόρτα. Πόσες ὀκάδες χόρτα ἀγόρασε;

Λύσις

Παρατηροῦμε, ὅτι ἔχομε νὰ προσθέσωμε μικτοὺς ἀριθμούς. Τὰ προβλήματα αὐτὰ λύονται κατὰ δύο τρόπους.

Α΄ τρόπος : Ὅπως γνωρίζομε, γράφομε τοὺς μικτοὺς ὡς ἄθροισμα ἀκεραίου καὶ κλάσματος καὶ ἔχομε :

$$2 + \frac{3}{4} + 1 + \frac{1}{4} = ;$$

Τώρα προσθέτομε χωριστὰ τοὺς ἀκεραίους καὶ χωριστὰ τὰ κλάσματα καὶ ἔχομε :

$2 + 1 = 3$

$\frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1$ $\qquad\qquad$ $3 + 1 = 4$ ὀκ.

Β΄ τρόπος : Τρέπομε τοὺς μικτοὺς σὲ κλάσματα καὶ ἔπειτα τὰ προσθέτομε κατὰ τὸν γνωστὸ τρόπο, ἤτοι $2\frac{3}{4} + 1\frac{1}{4} = \frac{11}{4} + \frac{5}{4} = \frac{16}{4} = 4$ ὀκ. Ἄρα $2\frac{3}{4}$ ὀκ. $+ 1\frac{1}{4}$ ὀκ. $= 4$ ὀκάδ.

Ἕνα αὐτοκίνητο τὸ ὁποῖο τρέχει μὲ τὴν ἴδια ταχύτητα ἀπὸ τὰς Ἀθήνας ἕως τὰς Θήβας κάνει $2\frac{1}{4}$ *ὥρ., ἀπὸ Θήβας μέχρι Λεβαδείας* $1\frac{3}{10}$ *ὥρ. καὶ ἀπὸ Λεβαδείας μέχρι Λαμίας* $4\frac{5}{6}$ *ὥρ. Πόσες ὥρες κάνει γιὰ νὰ φθάση στὴ Λαμία ;*

Λύσις

Γιὰ νὰ λύσωμε τὸ πρόβλημα πρέπει νὰ κάμωμε πρόσθεσιν. Ἔχομε νὰ προσθέσωμε μικτοὺς ἀριθμούς. Καὶ κατὰ μὲν τὸν πρῶτο τρόπο προσθέτομε χωριστὰ τοὺς ἀκεραίους καὶ χωριστὰ τὰ κλάσματα, κατὰ δὲ τὸν δεύτερο τρόπο τρέπομε τοὺς μικτοὺς σὲ κλάσματα καὶ προσθέτομε.

Ἀλλὰ παρατηροῦμε ὅτι τὰ κλάσματα εἶναι ἑτερώνυμα. Καὶ ἔχομε :

Α΄ τρόπος :

$2\frac{1}{4} + 1\frac{3}{10} + 4\frac{5}{6} = ;$

α) $2 + 1 + 4 = 7$

β) $\frac{1}{4} + \frac{3}{10} + \frac{5}{6}$

Εὕρεσις ἐ. κ. π.

$$\begin{array}{ccc|c} 4 & 10 & 6 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & 5 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & — \end{array}$$

ἐ. κ. π. εἶναι $2 \times 2 \times 3 \times 5 = 60$

$$\overbrace{\frac{1}{4}}^{15} + \overbrace{\frac{3}{10}}^{6} + \overbrace{\frac{5}{6}}^{10}$$

$60 : 4 = 15$
$60 : 10 = 6$
$60 : 6 = 10$

$\frac{15}{60} + \frac{18}{60} + \frac{50}{60} = \frac{83}{60} = 1\frac{23}{60}$ $\qquad$ $7 + 1\frac{23}{60} = 8\frac{23}{60}$ ὥρ.

Β΄ τρόπος :

$$2\frac{1}{4} + 1\frac{3}{10} + 4\frac{5}{6} = \frac{9}{4} + \frac{13}{10} + \frac{29}{6}$$

$$\overbrace{\frac{9}{4}}^{15} + \overbrace{\frac{13}{10}}^{6} + \overbrace{\frac{29}{6}}^{10} =$$

$$\frac{135}{60} + \frac{78}{60} + \frac{290}{60} = \frac{503}{60} = 8\frac{23}{60} \text{ ὥρ.}$$

ἐ. κ. π. 60
60 : 4 = 15
60 : 10 = 6
60 : 6 = 10

Στὸν δεύτερο τρόπο παρατηροῦμε ὅτι ἔχομε πολλὲς πράξεις καὶ δυσκολίες. Γιὰ τοῦτο προτιμοῦμε πάντα τὸν πρῶτο τρόπο ἀλλὰ πρέπει νὰ γνωρίζωμε καὶ τὸν δεύτερο.

Ὥστε γιὰ νὰ προσθέσωμε μικτοὺς ἀριθμοὺς . . . . , . (Νὰ συμπληρωθῆ ἀπὸ τοὺς μαθητὰς καὶ κατὰ τοὺς δυὸ τρόπους).

Ἀσκήσεις

Προσθέσετε τοὺς μικτούς :

$4\frac{2}{5} + 8\frac{1}{6} =$, $12\frac{3}{5} + 16\frac{7}{10} =$,

$2\frac{2}{3} + \frac{5}{6} + 4\frac{7}{12} =$, $3 + 7\frac{1}{2} + 8\frac{3}{4} =$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

α) Ἀπὸ τὴ σχολικὴ ζωή.

1. Γιὰ τὸ συσσίτιο τοῦ μηνὸς Νοεμβρίου ὁ Ἀνδρέας ἐπλήρωσε $6\frac{1}{2}$ χιλιαρ., ἡ ἀδελφή του $5\frac{3}{4}$ χιλιαρ. καὶ ὁ μικρότερος ἀδελφός των $4\frac{7}{10}$ χιλ. Πόσο ἐπλήρωσαν καὶ οἱ τρεῖς μαζί ;

2. Τὰ πρῶτα ἔξοδα τῆς Καίτης γιὰ τὸ σχολεῖο ἦσαν, γιὰ βιβλίο $5\frac{1}{2}$ χιλ., γιὰ τετράδια $4\frac{5}{8}$ χιλ. καὶ γιὰ μολύβι καὶ ἄλλα σχολικὰ εἴδη $7\frac{9}{10}$ χιλ. Πόσα ἦταν τὰ ἔξοδα τῆς Καίτης ;

3. Γιὰ τὴ σχολικὴ ποδιὰ τῆς Ἑλένης χρειάσθηκαν $3\frac{3}{4}$ πήχ. ὕφασμα καὶ γιὰ τοῦ Κωστάκη $2\frac{5}{8}$ πήχ. Πόσο ὕφασμα χρει-

άσθηκαν καὶ γιὰ τὶς δυὸ ποδιὲς τῶν παιδιῶν ἂν πῆραν ἀκόμη $\frac{3}{8}$ τῆς πήχ. ;

β) Ἀπὸ τὴν κοινωνική μας ζωή.

1. Ἕνας ἐργάτης ἐργάζεται τὸ πρωὶ 4 $\frac{3}{4}$ ὥρ., τὸ ἀπόγευμα 2 $\frac{1}{3}$ ὥρ. καὶ τὸ βράδυ 1 $\frac{15}{60}$ ὥρ. Πόσες ὧρες ἐργάζεται τὴν ἡμέρα ;

2. Τρεῖς ὁμάδες ἐργατῶν παίρνουν μὲ τὸ δελτίο τὶς ἑξῆς ὀκάδες ψωμιοῦ. Ἡ α΄ ὁμὰς 12 $\frac{5}{8}$ ὀκ., ἡ δεύτερη 15 $\frac{3}{5}$ ὀκ. καὶ ἡ τρίτη 13 $\frac{3}{20}$ ὀκ. Πόσες ὀκάδες παίρνουν καὶ οἱ τρεῖς ὁμάδες ;

3. Ἀγόρασε κάποιος ἕνα παλαιὸ ἀντικείμενο καὶ ἔδωσε γιὰ τὴν ἀγορά του 258 χιλ., γιὰ τὴν ἐπιδιόρθωσί του 156 $\frac{1}{2}$ χιλ. καὶ γιὰ τὴ μεταφορά του 20 $\frac{3}{5}$ χιλ. Πόσο τοῦ ἐστοίχισε ;

Β΄. ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

Ὅταν λέμε ἀφαίρεσι τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν, ἐννοοῦμε τὴν πρᾶξιν στὴν ὁποία μᾶς δίδονται δύο κλασματικοὶ ἀριθμοὶ καὶ ἐλαττώνομε τὸν ἕνα τόσες κλασματικὲς μονάδες ὅσες ἔχει ὁ ἄλλος ἀριθμός. Ὥστε στὴν ἀφαίρεσι μᾶς δίδονται δύο ἀριθμοί. Ὁ μεγαλύτερος, τὸν ὁποῖον ἐλαττώνομε (μικραίνομε) καὶ λέγεται *μειωτέος*, καὶ ὁ ἄλλος, ὁ ὁποῖος μᾶς λέγει πόσο θὰ ἐλαττώσωμε τὸν μειωτέο καὶ ὁ ὁποῖος λέγεται ***ἀφαιρετέος***. Τὸ ἐξαγόμενον τῆς ἀφαιρέσεως λέγεται ***ὑπόλοιπο*** ἢ ***διαφορά***, τὸ δὲ σημεῖο τῆς πράξεως εἶναι τὸ *πλὴν* ἢ *ἀπὸ* (—). Λέγεται *πλὴν* ὅταν πρῶτα ἀναφέρωμε τὸν μειωτέο καὶ *ἀπὸ* ὅταν ἀναφέρωμε πρῶτα τὸν ἀφαιρετέο. Γιὰ νὰ γίνη ἀφαίρεσις πρέπει ὁ μειωτέος νὰ εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν ἀφαιρετέο.

1. Ἀφαίρεσις ὁμωνύμων κλασμάτων

Ἀπὸ ἕνα χαρτὶ τὸ ὁποῖο ἔχει μῆκος $\frac{8}{10}$ *τοῦ μέτρου ἐκόψαμε τὰ* $\frac{3}{10}$. *Πόσο χαρτὶ ἔμεινε ;*

Λύσις

Γιὰ νὰ λύσωμε τὸ πρόβλημα θὰ κάμωμε ἀφαίρεσιν. Θὰ ἀφαιρέσωμε ἀπὸ τὰ $\frac{8}{10}$ τοῦ μ. τὰ $\frac{3}{10}$μ. Τὰ κλάσματα εἶναι ὁμώνυμα καὶ εἶναι φανερὸ ὅτι τὸ ὑπόλοιπο θὰ εἶναι 8 δέκατα —3 δέκατα = 5 δέκατα = $\frac{5}{10}$ μ.

Ἄρα $\frac{8}{10} - \frac{3}{10} = \frac{5}{10}$.

Ὥστε ὅταν τὰ κλάσματα εἶναι ὁμώνυμα ἡ ἀφαίρεσίς των γίνεται ὅπως καὶ . . . . δηλ. . . . .

(Νὰ συμπληρωθῆ ὑπὸ τοῦ μαθητοῦ)

2. Ἀφαίρεσις ἑτερωνύμων κλασμάτων

Γιὰ νὰ πάη ὁ Κωστάκης ἀπὸ τὸ σπίτι του στὸ σχολεῖο θέλει $\frac{23}{60}$ *τῆς ὥρας. Ἂν ἔχη βαδίσει* $\frac{1}{4}$ *τῆς ὥρας, πόσο θέλει ἀκόμη γιὰ νὰ φθάση στὸ σχολεῖο του;*

Λύσις

Ἔχομε νὰ ἀφαιρέσωμε τὰ κλάσματα $\frac{23}{60} - \frac{1}{4}$ ὥρ. Τὰ κλάσματα εἶναι ἑτερώνυμα καὶ δὲν μποροῦμε νὰ τὰ ἀφαιρέσωμε ὅπως καὶ νὰ τὰ προσθέσωμε. Πρέπει λοιπὸν νὰ τὰ τρέψωμε σὲ ὁμώνυμα. Καὶ ἔχομε:

$\frac{23}{60} - \frac{1}{4}$ ἐ. κ. π. 60

60 : 60 = 1
60 : 4 = 15

$$\overbrace{\frac{23}{60}}^{1} - \overbrace{\frac{1}{4}}^{15}$$

$\frac{23}{60} - \frac{15}{60} = \frac{8}{60}$. Ἄρα ὁ Κωστάκης θέλει $\frac{8}{60}$ ἤτοι 8π λεπτὰ τῆς ὥρας.

Ἀπὸ τ' ἀνωτέρω συμπεραίνομε, ὅτι γιὰ νὰ ἀφαιρέσωμε ἑτερώνυμα κλάσματα . . . .

(Νὰ συμπληρωθῆ ὑπὸ τοῦ μαθητοῦ)

Ἀσκήσεις

Κάμετε τὶς ἑξῆς ἀφαιρέσεις :

α) Ἀπὸ μνήμης

$\frac{8}{10} - \frac{5}{10} =$

$\frac{3}{4} - \frac{1}{4} =$

$\frac{5}{6} - \frac{3}{6} =$

$\frac{38}{45} - \frac{27}{45} =$

$\frac{23}{67} - \frac{16}{67} =$

$\frac{62}{234} - \frac{38}{234} =$

$\frac{156}{186} - \frac{139}{186} =$

$\frac{197}{405} - \frac{106}{405} =$

$\frac{3}{4} - \frac{5}{7} =$

$\frac{2}{3} - \frac{4}{9} =$

β) Γραπτῶς

$\frac{8}{15} - \frac{5}{12} =$

$\frac{7}{12} - \frac{1}{4} =$

2. Νὰ κάνετε δύο προβλήματα ἀφαιρέσεως ἑτερωνύμων κλασμάτων καὶ νὰ τὰ λύσετε.

3. Νὰ γράψετε τὸν γενικὸ κανόνα τῆς ἀφαιρέσεως τῶν κλασμάτων.

3. Ἀφαίρεσις κλάσματος ἀπὸ μικτὸν

Περίπτωσις α΄. Ἀπὸ ἕνα ὕφασμα ποὺ ἦταν $5 \frac{6}{8}$ *πήχεις ἐκόψαμε τὰ* $\frac{5}{8}$ *πήχ. Πόσες πήχ. ὕφασμα ἔμειναν ;*

Λύσις

Ἔχομε νὰ ἀφαιρέσωμε κλάσμα ἀπὸ μικτό. Παρατηροῦμε ὅτι τὸ κλάσμα τοῦ μικτοῦ εἶναι ὁμώνυμο μὲ τὸ κλάσμα ποὺ θὰ ἀφαιρέσωμε καὶ ὅτι τὸ κλάσμα ἀφαιρεῖται ἀπὸ τὸ κλάσμα τοῦ μικτοῦ. Εὔκολη εἶναι λοιπὸν ἡ λύσις τοῦ προβλήματος. Ἀφήνομε τὸν ἀκέραιο τοῦ μικτοῦ, ἀφαιροῦμε τὸ κλάσμα ἀπὸ τὸ κλάσμα τοῦ μικτοῦ, προσθέτομε τὸ ὑπόλοιπο στὸν ἀκέραιο καὶ τὸ πρόβλημα ἐλύθη. Ἤτοι :

$$5 \frac{6}{8} - \frac{5}{8} = 5 + \frac{6}{8} - \frac{5}{8} = 5 + \frac{1}{8} = 5 \frac{1}{8}$$

Ὥστε στὴν ἀφαίρεσιν κλάσματος ἀπὸ μικτὸ ὅταν τὰ κλάσματα εἶναι ὁμώνυμα καὶ τὸ πρὸς ἀφαίρεσιν κλάσμα εἶναι μικρότερο ἀπὸ τὸ κλάσμα τοῦ μικτοῦ . . . .
. . . .

(Τί κάνωμε ; Νὰ συμπληρωθῆ ὑπὸ τοῦ μαθητοῦ)

Περίπτωσις β΄. Ἀπὸ ἕνα ὕφασμα ποὺ εἶναι $8\frac{3}{8}$ *πήχ. ἐκόψαμε τὰ* $\frac{6}{8}$ *πήχ. Πόσο ἔμεινε ;*

Λύσις

Καὶ ἐδῶ ἔχομε ἀφαίρεσιν καὶ τὰ κλάσματα εἶναι ὁμώνυμα. Παρατηροῦμε ὅμως ὅτι τὸ κλάσμα τὸ ὁποῖο θὰ ἀφαιρέσωμε εἶναι μὲν ὁμώνυμο μὲ τὸ κλάσμα τοῦ μικτοῦ, ἀλλ' ὅμως εἶναι μεγαλύτερο καὶ ὡς ἐκ τούτου δὲν μποροῦμε νὰ τὸ ἀφαιρέσωμε ὅπως προηγουμένως. Ἐδῶ τὴν ἀφαίρεσιν θὰ τὴν κάμωμε κατὰ τοὺς ἑξῆς τρόπους :

Α΄ τρόπος : Ἔχομε $8\frac{3}{8}$ πήχ. — $\frac{6}{8}$ πήχ. Ἂν ἀπὸ τὶς 8 πήχ. πάρωμε μία θὰ ἔχωμε $8 - 1 = 7$ πήχ. Τὴν πήχ. αὐτὴ ποὺ ἐπήραμε ἀπὸ τὶς 8 τὴν κάνομε ὄγδοα γιατὶ 1 πήχ. ἔχει $\frac{8}{8}$. Στὰ $\frac{8}{8}$ πήχ. προσθέτομε καὶ τὰ $\frac{3}{8}$ ποὺ εἴχαμε καὶ ἔχομε $\frac{8}{8} + \frac{3}{8} = \frac{11}{8}$ πήχ. Ἔχομε λοιπὸν τώρα νὰ ἀφαιρέσωμε ἀπὸ τὸν μικτὸ $7\frac{11}{8}$ τὸ κλάσμα $\frac{6}{8}$ πήχ. Ἀφαιροῦμε τὸ κλάσμα ἀπὸ τὸ κλάσμα κατὰ τὸν γνωστὸ τρόπο καὶ ἔχομε $\frac{11}{8} - \frac{6}{8} = \frac{5}{8}$, 7 πήχ. $+ \frac{5}{8}$ πήχ. $= 7\frac{5}{8}$ πήχ.

Ἡ πρᾶξις θὰ γίνεται ὡς ἑξῆς :

α) $8 - 1 = 7$

β) $1 = \frac{8}{8}$

γ) $\frac{8}{8} + \frac{3}{8} = \frac{11}{8}$

δ) $\frac{11}{8} - \frac{6}{8} = \frac{5}{8}$

ε) $7 + \frac{5}{8} = 7\frac{5}{8}$

Β΄ τρόπος : Τρέπομε τὸν μικτὸ σὲ κλάσμα καὶ ἀφαιροῦμε κλάσματα, ἤτοι :

$$8\frac{3}{8} - \frac{6}{8} = \frac{67}{8} - \frac{6}{8} = \frac{61}{8} = 7\frac{5}{8} \text{ πήχ.}$$

Ὥστε ὅταν τὸ κλάσμα ποὺ θὰ ἀφαιρέσωμε εἶναι ὁμώνυμο *μὲ τὸ κλάσμα τοῦ μικτοῦ ἀλλὰ μεγαλύτερο, ἢ 1) τρέπομε τὸν μικτὸ σὲ κλάσμα ὁπότε ἔχομε νὰ ἀφαιρέσωμε κλάσματα, ἢ 2) ἀφαιροῦμε μιὰ μονάδα ἀπὸ τὸν ἀκέραιο καὶ τὴν κάνομε κλάσμα μὲ παρονομαστὴ τὸν παρονομαστὴ ποὺ ἔχει τὸ κλάσμα καὶ τὸ προσθέτομε στὸ κλάσμα τοῦ μειωτέου. Ἔπειτα ἀφαιροῦμε τὰ ὁμώνυμα κλάσματα καὶ βρίσκομε ὑπόλοιπο μικτό.*

Σημείωσις: Ὅταν ἀφαιρέσωμε τὴν μονάδα καὶ τὴν κάμωμε κλάσμα, τὸ νέο κλάσμα βρίσκεται ἀμέσως ἂν προσθέσωμε τὸν ἀριθμητὴ καὶ τὸν παρονομαστὴ τοῦ κλάσματος τοῦ μικτοῦ καὶ τὸ ἄθροισμα τὸ θέσωμε ὡς ἀριθμητή, ὅπως

$$8\frac{3}{8} = 7\frac{11}{8} \text{ (γιατὶ } 8 + 3 = 11).$$

Περίπτωσις γ΄. Ἀπὸ 5 $\frac{1}{2}$ πήχ. ὕφασμα ἐκόψαμε τὰ $\frac{5}{8}$ πήχ. Πόσο μᾶς ἔμεινε;

Λύσις

Ἔχομε νὰ ἀφαιρέσωμε κλάσμα ἀπὸ μικτό. Παρατηροῦμε ὅμως ὅτι τὸ κλάσμα τοῦ μικτοῦ καὶ τὸ κλάσμα τὸ ὁποῖο θὰ ἀφαιρέσωμε εἶναι ἑτερώνυμα. Θὰ τρέψωμε τὰ ἑτερώνυμα κλάσματα σὲ ὁμώνυμα καὶ θὰ τὰ ἀφαιρέσωμε. Καὶ ἔχομε:

Α΄ τρόπος: $5\frac{1}{2} - \frac{5}{8} = 5\frac{4}{8} - \frac{5}{8}$. Ἐπειδὴ τὸ κλάσμα τοῦ ἀφαιρετέου εἶναι μεγαλύτερο ἀπὸ τὸ $\frac{4}{8}$, τὸ κλάσμα τοῦ μειωτέου, ἀφαιροῦμε κατὰ τὸν γνωστὸ τρόπο, μιὰ ἀκεραία μονάδα ἀπὸ τὸν ἀκέραιο 5, τὴν τρέπομε σὲ κλάσμα μὲ παρονομαστὴ τὸ 8 καὶ ἔχομε:

$$5\frac{4}{8} - \frac{5}{8} = 4\frac{12}{8} - \frac{5}{8} = 4\frac{7}{8} \text{ πήχ.}$$

Β΄ τρόπος: Τρέπομε τὸν μικτὸ σὲ κλάσμα καὶ ἀφαιροῦμε, ἤτοι:

$$5\frac{1}{2} - \frac{5}{8} = \frac{11}{2} - \frac{5}{8} = \frac{44}{8} - \frac{5}{8} = \frac{39}{8} = 4\frac{7}{8} \text{ πήχ.}$$

Ὁ πρῶτος τρόπος εἶναι πάντοτε προτιμότερος, γιατὶ ἂν ἔχωμε μικτὸ μὲ μεγάλο ἀκέραιο θὰ χάσωμε χρόνο στὶς πράξεις καὶ θὰ βροῦμε δυσκολίες. Ἐπιβάλλεται ὅμως νὰ γνωρίζωμε καὶ τοὺς δύο τρόπους καὶ νὰ τοὺς ἐφαρμόζωμε ὅταν πρέπει.

Ἀσκήσεις

1. Ἐκτελέσετε τὶς ἑξῆς ἀφαιρέσεις καὶ κατὰ τοὺς δύο τρόπους.

α΄) Ἀπὸ μνήμης :	*β΄) Γραπτῶς :*
$1\frac{4}{5}$ ὤρ. $-\frac{3}{5}=$	$12\frac{7}{8}-\frac{5}{8}=$
$4\frac{7}{8}$ πήχ. $-\frac{5}{8}=$	$38\frac{7}{15}-\frac{12}{15}=$
$23\frac{5}{21}-\frac{15}{21}=$	$9\frac{5}{17}-\frac{4}{5}=$
$3\frac{3}{5}$ ἔτ. $-\frac{4}{5}=$	$41\frac{5}{12}-\frac{5}{16}=$

2. Κάνετε τρία προβλήματα ὅμοια μὲ τοῦ βιβλίου σας.

3. Γράψετε τὸν κανόνα χωριστὰ κάθε μιᾶς περιπτώσεως.

4. Ἀφαίρεσις ἀκεραίου ἀπὸ μικτὸν ἢ μικτοῦ ἀπὸ ἀκέραιον

Ἀπὸ $8\frac{3}{20}$ *χιλ. ξοδέψαμε 5 χιλιάρικα. Πόσα μᾶς ἔμειναν ;*

Λύσις

Ἔχομε νὰ ἀφαιρέσωμε ἀκέραιο ἀπὸ μικτό. Ἀφοῦ λοιπὸν ξοδέψαμε τὰ 5 χιλιάρικα ἀπὸ τὰ 8 μᾶς ἔμειναν 3 χιλιάρικα καὶ ἀκόμη τὰ $\frac{3}{20}$ χιλ. Καὶ ἔχομε : $8\frac{3}{20}-5=3\frac{3}{20}$ χιλ.

Ὥστε ὅταν ἔχωμε νὰ ἀφαιρέσωμε ἀκέραιο ἀπὸ μικτὸ . . .
. . . .

(Νὰ συμπληρωθῇ ὑπὸ τοῦ μαθητοῦ)

Ἕνα τόπι ὕφασμα εἶναι 60 πῆχες. Ἀπ᾿ αὐτὸ ἐπωλήθηκαν $48\frac{3}{8}$ *πήχ. Πόσες πήχ. ἔμειναν ;*

Λύσις

Στὸ πρόβλημα αὐτὸ ἔχομε νὰ ἀφαιρέσωμε μικτὸ ἀπὸ ἀκέραιο. Καὶ τοὺς μὲν ἀκεραίους, εὔκολο νὰ τοὺς ἀφαιρέσωμε, τὸ κλάσμα ὅμως ἀπὸ ποῦ θὰ τὸ ἀφαιρέσωμε; Γιὰ τὸ σκοπὸ αὐτὸ ἐργαζόμαστε ἔτσι : Τρέπομε μιὰ μονάδα τοῦ ἀκεραίου σὲ κλάσμα μὲ παρονομαστὴ τὸ 8 ποὺ ἔχει καὶ ὁ παρονομαστὴς τοῦ κλάσματος, τὸ ὁποῖο θὰ ἀφαιρέσωμε.

Καὶ ἔχομε : $60=59+1=59+\frac{8}{8}=59\frac{8}{8}$.

Τώρα πλέον ἔχομε νὰ ἀφαιρέσωμε τοὺς μικτοὺς ἀριθμοὺς

$59\frac{8}{8} - 48\frac{3}{8}$. Ἀφαιροῦμε κατὰ τοὺς γνωστοὺς τρόπους καὶ ἔχομε:

Α' τρόπος: $59 - 48 = 11$

$$\frac{8}{8} - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$$

$$11 + \frac{5}{8} = 11\frac{5}{8} \text{ πήχ.}$$

Β' τρόπος: $59\frac{8}{8} - 48\frac{3}{8} = \frac{480}{8} - \frac{387}{8} = \frac{93}{8} = 11\frac{5}{8}$ πήχ.

Ἄρα εἰς τὸ τόπι ἔμειναν $11\frac{5}{8}$ πήχ. ὕφασμα.

Ὥστε γιὰ νὰ ἀφαιρέσωμε μικτὸ ἀπὸ ἀκέραιο . . . .
. . . .

(Νὰ συμπληρωθῇ ὑπὸ τοῦ μαθητοῦ)

Ἀσκήσεις

1. Κάμετε τὶς ἑξῆς ἀφαιρέσεις:

$1 - \frac{3}{5} =$

$3 - \frac{6}{9} =$

$8 - \frac{4}{5} - 3 =$

$18 - \frac{7}{12} - 17 =$

$15 - \frac{9}{21} =$

$38 - \frac{4}{35} =$

$157 - \frac{25}{47} =$

$2 - 1\frac{1}{3} =$

2. Γράψετε δύο προβλήματα ἀφαιρέσεως μικτοῦ ἀπὸ ἀκέραιο.

3. Γράψετε χωριστὰ τοὺς κανόνες ἀφαιρέσεως ἀκεραίου ἀπὸ μικτὸ καὶ μικτοῦ ἀπὸ ἀκέραιο.

5. Ἀφαίρεσις μικτῶν ἀριθμῶν

Ἕνα δοχεῖο λάδι ζυγίζει $13\frac{3}{4}$ ***ὀκάδες. Τὸ βάρος τοῦ δοχείου*** (τὸ ἀπόβαρο ἢ ντάρα) ***εἶναι*** $1\frac{1}{4}$ ***ὀκ. Πόσο εἶναι τὸ καθαρὸ βάρος τοῦ λαδιοῦ;***

Λύσις

Ἔχομε νὰ ἀφαιρέσωμε μικτοὺς ἀριθμούς. Τὸ πρόβλημc αὐτὸ θὰ τὸ λύσωμε κατὰ δύο τρόπους.

Α΄ τρόπος: Ἐπειδὴ τὰ κλάσματα τῶν μικτῶν ἀριθμῶν εἶναι ὁμώνυμα καὶ ἀφαιροῦνται, ἀφαιροῦμε ὅπως καὶ προηγούμενα χωριστὰ τοὺς ἀκέραιους καὶ χωριστὰ τὰ κλάσματα καὶ ἔχομε:

$$13\frac{3}{4} - 1\frac{1}{4} = \qquad 13 - 1 = 12$$

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4}$$

$$12 + \frac{2}{4} = 12\frac{2}{4} = 12\frac{1}{2} \text{ ὀκ.}$$

Β΄ τρόπος: $13\frac{3}{4} - 1\frac{1}{4} = \frac{55}{4} - \frac{5}{4} = \frac{50}{4} = 12\frac{2}{4}$ ὀκ.

Ἄρα τὸ καθαρὸ βάρος τοῦ λαδιοῦ εἶναι $12\frac{2}{4} = 12\frac{1}{2}$

Ἕνα αὐτοκίνητο ἀπὸ μιὰ πόλιν σὲ ἄλλη πρέπει νὰ διανύσῃ $52\frac{7}{10}$ χιλιόμ. Ἐὰν ἔχῃ διανύσει $40\frac{1}{4}$ χιλιόμ., πόσα χιλιόμ. θέλει ἀκόμη γιὰ νὰ φθάσῃ;

Λύσις

Καὶ ἐδῶ ἔχομε νὰ ἀφαιρέσωμε μικτοὺς ἀριθμοὺς ἀλλὰ τὰ κλάσματά τους εἶναι ἑτερώνυμα.

Γιὰ νὰ τοὺς ἀφαιρέσωμε πρέπει νὰ τρέψωμε τὰ κλάσματα σὲ ὁμώνυμα καὶ ἔχομε: ἐ. κ. π. 20

20 : 10 = 2

20 : 4 = 5

$$52\overset{2}{\overbrace{\frac{7}{10}}} - 40\overset{5}{\overbrace{\frac{1}{4}}} = 52\frac{14}{20} - 40\frac{5}{20} = 12\frac{9}{20} \text{ χιλιόμ.}$$

Μποροῦμε ὅμως νὰ τὸ λύσωμε καὶ κατὰ τὸν δεύτερο τρόπο, δηλ. νὰ τρέψωμε τοὺς μικτοὺς σὲ κλάσματα, νὰ τρέψωμε τὰ κλάσματα σὲ ὁμώνυμα καὶ νὰ ἀφαιρέσωμε.

Ἀπὸ τὰ παραπάνω συμπεραίνομε ὅτι, γιὰ νὰ ἀφαιρέσωμε μικτοὺς ἀριθμοὺς ἢ τρέπομε αὐτοὺς σὲ κλασματικοὺς καὶ ἀφαιροῦμε ἢ ἀφαιροῦμε χωριστὰ τοὺς ἀκέραιους καὶ χωριστὰ τὰ κλάσματα.

Ἀσκήσεις

1. Κάμετε τὶς ἑξῆς ἀφαιρέσεις:

$$5\frac{5}{8} - 3\frac{3}{8} = ; \qquad 12\frac{25}{44} - 7\frac{18}{44} =$$

$6\frac{8}{12} - 3\frac{11}{12} =$, $3\frac{1}{2} - 1\frac{3}{4} =$

2. Κάμετε τὶς ἑξῆς ἀφαιρέσεις καὶ κατὰ τοὺς δυὸ τρόπους

$8\frac{5}{6} - 6\frac{2}{3} =$, $6\frac{1}{2} - 4\frac{6}{9} =$

$64\frac{12}{13} - 56\frac{11}{15} =$, $104\frac{15}{24} - 44\frac{2}{3} =$

3. Γράψετε δύο προβλήματα ἀφαιρέσεως μικτῶν καὶ λύ
στε τα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΦΑΙΡΕΣΕΩΣ

α) Ἀπὸ τὴ σχολικὴ μας ζωή:

1. Δύο μαθηταὶ θέλουν νὰ ἀγοράσουν τὸ βιβλίο ἑνὸς πτω
χοῦ συμμαθητοῦ των τὸ ὁποῖο στοιχίζει 13 $\frac{4}{5}$ χιλ. Ὁ πρῶτο
μαθητὴς ἔδωσε 6 $\frac{1}{5}$ χιλ. Τί θὰ δώσῃ ὁ δεύτερος;

2. Τὸ ταμεῖο τῆς Ε΄ τάξεως τὸν πρῶτο μῆνα εἶχε 62 $\frac{7}{10}$ χιλ. Ἀπ᾽ αὐτὰ ἔδωσαν γιὰ νὰ ἀγοράσουν τετράδια καὶ ἄλλα σχολικὰ εἴδη γιὰ τοὺς πτωχοὺς συμμαθητάς των 48 $\frac{3}{5}$ χιλ. Πόσα χρήματα ἔμειναν στὸ ταμεῖο τῆς τάξεως;

3. Οἱ μαθηταὶ τῆς Ε΄ τάξεως ἑνὸς σχολείου ἀπὸ ἔρανο μεταξύ των εἰσέπραξαν 85 $\frac{9}{10}$ χιλ. Γιὰ νὰ ἀγοράσουν ὅμως διάφορα σχολικὰ εἴδη τὰ ὁποῖα θὰ στείλουν τοὺς συμμοριοπλήκτους συμμαθητάς των ἑνὸς χωρίου χρειάζονται 120 $\frac{3}{15}$ χιλ. Πόσο θέλουν ἀκόμη νὰ εἰσπράξουν;

β) Ἀπὸ τὴν κοινωνικὴ μας ζωή :

1. Ἡ μητέρα τῆς Μαρίας τῆς ἀγόρασε 2 πήχ. κορδέλλα ἀπὸ τὴν ὁποία ἡ Μαρία ἔδωσε σὲ μιὰ φίλη της τὰ $\frac{7}{8}$ πήχεις. Πόση κορδέλλα ἐκράτησε ἡ Μαρία;

2. Ἕνας οἰκογενειάρχης ἀγόρασε 4 $\frac{1}{4}$ ὀκ. λάδι γιὰ νὰ περάσῃ ἕνα μῆνα. Ἡ κυρία του ὅμως μὲ οἰκονομία ξόδεψε μόνο 3 $\frac{2}{5}$ ὀκ. Πόσο λάδι τοὺς ἐπερίσσεψε;

3. Ὁ δρόμος Ἀθῆναι—Πάτραι εἶναι $156 \frac{1}{4}$ χιλ. Ἐὰν ἕνα αὐτοκίνητο ἔχη τρέξει τὰ $108 \frac{4}{5}$ χιλ., πόσα θέλει ἀκόμη γιὰ νὰ φθάση στὰς Πάτρας ;

4. Ἕνα δοχεῖο λάδι ζυγίζει $13 \frac{3}{10}$ ὀκ. Τὸ ἀπόβαρο εἶναι $\frac{35}{40}$ τῆς ὀκᾶς. Πόσο εἶναι τὸ καθαρὸ βάρος ;

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΥΝΘΕΤΑ

α) Ἀπὸ τὴ σχολική μας ζωή :

1. Τὸ ταμεῖο τῆς Ε΄ τάξεως ἔχει $87 \frac{1}{2}$ χιλ. Γιὰ τὴν ἐκδρομὴ ὅμως ποὺ θὰ κάμουν θέλουν 315 χιλιάρικα. Πόσα χρήματα θέλουν ἀκόμη ;

2. Γιὰ νὰ ἀγοράση τὰ βιβλία του καὶ τὰ σχολικά του εἴδη ὁ Κωστάκης ἐπῆρε ἀπὸ τὸν πατέρα του $12 \frac{15}{20}$ χιλ., ἀπὸ τὴ μητέρα του $16 \frac{3}{5}$ χιλ. καὶ ἀπὸ τὴν ἀδελφή του $8 \frac{1}{4}$ χιλ. Ἂν ὅλα τὰ εἴδη στοιχίζουν 45 χιλιάρικα, πόσα θέλει ἀκόμη γιὰ νὰ τὰ ἀγοράση ;

3. Δυὸ πτωχοὶ μαθηταὶ θέλουν νὰ ἀγοράσουν μαζὶ τὸ ἀναγνωστικό τους τὸ ὁποῖο στοιχίζει $7 \frac{7}{10}$ χιλ. Τὸ ἕνα παιδὶ ἔχει $4 \frac{3}{4}$ χ. Πόσα πρέπει νὰ βάλη τὸ δεύτερο ;

β) Ἀπὸ τὴν κοινωνικὴ ζωή :

1. Μιὰ πλέκτρα θέλει νὰ πλέξη $8 \frac{5}{8}$ πήχ. δαντέλλα σὲ τρεῖς ἡμέρες. Τὴν πρώτη ἡμέρα ἔπλεξε $2 \frac{3}{4}$ πήχ., τὴ δεύτερη ἡμέρα $3 \frac{1}{2}$ πήχ. Πόσο θὰ πλέξη τὴν τρίτη ἡμέρα ;

2. Ἕνας γεωργὸς ἀπὸ ἕνα χωράφι του ἐπῆρε 120 ὀκ. σιτάρι, ἀπὸ τὸ ἄλλο $140 \frac{3}{4}$ ὀκ. καὶ ἀπὸ τὸ ἄλλο $230 \frac{1}{2}$ ὀκ. Ἀπὸ αὐτὸ ἐκράτησε γιὰ τὴ διατροφὴ τῆς οἰκογενείας του 410 ὀκάδες καὶ τὸ ὑπόλοιπο τὸ ἐπώλησε. Πόσες ὀκάδες ἐπώλησε ;

3. Ἕνας ὑπάλληλος ἐργάζεται ἀπὸ τὰς $7 \frac{1}{2}$ ὧρες τὸ πρωΐ ἕως τὸ μεσημέρι καὶ ἀπὸ τὰς $2 \frac{3}{4}$ ὥρ. τὸ ἀπόγευμα ἕως τὰς $6 \frac{5}{6}$ ὥρ. τὸ βράδυ. Πόσες ὧρες ἐργάζεται ;

4. Ἕνας πατέρας ἔδωσε στὴ μιὰ κόρη του τὰ $\frac{2}{5}$ ἑνὸς οἰκοπέδου, στὸ γυιό του τὸ $\frac{1}{4}$ καὶ στὴν ἄλλη κόρη τὸ ὑπόλοιπο. Πόσο μέρος τοῦ οἰκοπέδου ἐπῆρε ἡ ἄλλη κόρη ;

5. Τὸ ἀεροπλάνο τῆς συγκοινωνίας Ἀθῆναι - Ἀγρίνιο - Ἰωάννινα κάνει μὲ τὸν καλὸ καιρὸ $2 \frac{1}{5}$ ὥρ. Ἐπειδὴ ἦτο κακοκαιρία ἔκαμε Ἀθῆναι - Ἀγρίνιο $1 \frac{1}{4}$ ὥρ. καὶ Ἀγρίνιο - Ἰωάννινα $1 \frac{17}{60}$ ὥρ. Πόσο καθυστέρησε τὸ ἀεροπλάνο γιὰ νὰ φθάση στὰ Ἰωάννινα ;

Γ΄. ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

Ὅταν λέμε πολλαπλασιασμὸ ἐννοοῦμε τὴν πρᾶξιν στὴν ὁποία μᾶς δίδονται δύο ἀκέραιοι ἀριθμοὶ καὶ ἐπαναλαμβάνομε τὸν ἕνα, τόσες φορὲς ὅσες μονάδες ἔχει ὁ ἄλλος ἀριθμός.

Ὅπως $5 \times 3 = 5 + 5 + 5$ ἢ $5 \times 3 = 15$.

Στὸν πολλαπλασιασμὸ διακρίνομε :

1. Τὸν ***πολλαπλασιαστέο***, δηλ. τὸν ἀριθμὸ τὸν ὁποῖο ἐπαναλαμβάνομε.
2. Τὸν ***πολλαπλασιαστή***, δηλ. τὸν ἀριθμὸ ὁ ὁποῖος μᾶς λέγει πόσες φορὲς θὰ ἐπαναλάβωμε τὸν πολλαπλασιαστέο.
3. Τὸ ***γινόμενο***, δηλ. τὸν ἀριθμὸ τὸν ὁποῖο βρίσκομε ἀφοῦ κάμωμε τὴν πρᾶξιν, καὶ
4. Τὸ σημεῖο τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τὸ ***ἐπὶ*** (×).

Ὁ πολλαπλασιαστέος καὶ ὁ πολλαπλασιαστὴς ὀνομάζονται καὶ ***παράγοντες τοῦ γινομένου***.

Ὁ πολλαπλασιασμὸς τῶν κλασματικῶν ἔχει πολλὲς περιπτώσεις.

1. Πολλαπλασιασμὸς κλάσματος ἐπὶ ἀκέραιον

Ἕνα δράμι μάλλινη βαφὴ ἀξίζει $\frac{7}{10}$ ***χιλ. Πόσο ἀξίζουν τὰ 5 δράμια ;***

Λύσις

Γνωρίζομε τὴν τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδας καὶ ζητοῦμε τὴν τιμὴ τῶν πολλῶν μονάδων.

Γι' αὐτὸ θὰ κάμωμε πολλαπλασιασμό. Θὰ πολλαπλασιάσωμε τὰ $\frac{7}{10}$ ἐπὶ τὰ 5 δράμια. Ἔχομε λοιπὸν νὰ πολλαπλασιάσωμε κλάσμα ἐπὶ ἀκέραιο, ἤτοι $\frac{7}{10}$ χιλ. $\times 5 =$;

Ἐπειδὴ ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι ἀκέραιος μᾶς φανερώνει ὅτι πρέπει νὰ ἐπαναλάβωμε τὸν πολλαπλασιαστέο $\frac{7}{10}$ πέντε φορές, δηλ. ὅσες μονάδες ἔχει αὐτός.

Καὶ ἔχομε $\frac{7}{10} \times 5 = \frac{7}{10} + \frac{7}{10} + \frac{7}{10} + \frac{7}{10} + \frac{7}{10} =$ $= \frac{35}{10}$. Καὶ $\frac{35}{10} = 3\,\frac{5}{10}$ χιλ.

Ἄρα τὰ 5 δράμια τῆς βαφῆς ἔχουν $3\,\frac{5}{10}$ χιλ.

Τὸ αὐτὸ ὅμως ἐξαγόμενο βρίσκομε ἀμέσως ἐὰν πολλαπλασιάσωμε τὸν ἀκέραιο 5 ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴ τοῦ κλάσματος: 7 ($5 \times 7 = 35$). Τὸ γινόμενο 35 τὸ βάζομε ὡς ἀριθμητὴ καὶ παρονομαστὴ ἀφήνομε τὸν ἴδιο παρονομαστὴ τοῦ κλάσματος.

Ὥστε $\frac{7}{10} \times 5 = \frac{7 \times 5}{10} = \frac{35}{10} = 3\,\frac{5}{10}$.

Παραδείγματα : $\frac{4}{5} \times 9 = \frac{4 \times 9}{5} = \frac{36}{5} = 7\,\frac{1}{5}$.

$$\frac{3}{5} \times 20 = \frac{3 \times 20}{15} = \frac{60}{15} = 4$$

Συμπεραίνομε λοιπὸν ὅτι γιὰ νὰ πολλαπλασιάσωμε κλάσμα ἐπὶ ἀκέραιο πολλαπλασιάζομε τὸν ἀκέραιο . . . .
. . . .

(Νὰ συμπληρωθῆ ὑπὸ τοῦ μαθητοῦ).

Στὰ ἀνωτέρω ὅμως παρατηροῦμε καὶ τὰ ἑξῆς: Τὸ κλάσμα $\frac{35}{10}$, δηλ. τὸ γινόμενο, εἶναι μεγαλύτερο ἀπὸ τὸ $\frac{7}{10}$ πέντε φορὲς καὶ ἔγινε ἀπὸ τὸ $\frac{7}{10}$ ὅταν τὸ ἐπολλαπλασιάσαμε ἐπὶ τὸν ἀριθμὸ 5. Ἑπομένως ἕνα κλάσμα μποροῦμε νὰ τὸ κάμωμε ὅσες φορὲς θέλομε μεγαλύτερο ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμε τὸν ἀριθμητή του μὲ ἕνα ἀριθμὸ ὁποῖος νὰ ἔχη τόσες ἀκέραιες μονάδες ὅσες φορὲς θέλομε νὰ κάμωμε μεγαλύτερο τὸ κλάσμα.

Π.χ. τὸ κλάσμα $\frac{3}{5}$ νὰ γίνη 8 φορὲς μεγαλύτερο.

Ἔχομε $\frac{3\times8}{5}=\frac{24}{5}$. Τὸ $\frac{24}{5}$ λοιπὸν εἶναι 8 φορὲς μεγαλύτερο τοῦ $\frac{3}{5}$.

2. Πολλαπλασιασμὸς μικτοῦ ἐπὶ ἀκέραιο

Μία γυναίκα σὲ μιὰ ἡμέρα ὑφαίνει $3\frac{1}{2}$ πήχ. ὕφασμα. Πόσες πῆχες θὰ ὑφάνη σὲ 3 ἡμέρες ;

Λύσις

Στὸ πρόβλημα τοῦτο ἔχομε νὰ πολλαπλασιάσωμε μικτὸ ἐπὶ ἀκέραιο, $3\frac{1}{2}$ πήχ. $\times\ 3 =$;

Α΄ τρόπος : Τρέπομε τὸν μικτὸ σὲ κλάσμα καὶ ἔχομε νὰ πολλαπλασιάσωμε κλάσμα ἐπὶ ἀκέραιο, ἤτοι :

$$3\frac{1}{2}\times3=\frac{7}{2}\times3=\frac{7\times3}{2}=\frac{21}{2}=10\frac{1}{2}$$

Β΄ τρόπος : Τὸ ἴδιο ἐξαγόμενο ὅμως μποροῦμε νὰ βροῦμε ἐὰν πολλαπλασιάσωμε τὸν ἀκέραιο πρῶτα ἐπὶ τὸν ἀκέραιο τοῦ μικτοῦ καὶ ἔπειτα ἐπὶ τὸ κλάσμα τοῦ μικτοῦ καὶ κατόπιν προσθέσωμε τὰ δύο γινόμενα, ἤτοι :

α) $3\times3=9$

β) $\frac{1}{2}\times3=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}$

γ) $9+1\frac{1}{2}=10\frac{1}{2}$

Ἄρα ἡ γυναίκα στὶς 3 ἡμέρες θὰ ὑφάνη $10\frac{1}{2}$ πήχ.

Ὥστε γιὰ νὰ πολλαπλασιάσωμε μικτὸ ἐπὶ ἀκέραιο, τί κάνομε ; Νὰ γράψετε μόνοι σας τὸν κανόνα.

Ἀσκήσεις

1. Κάμετε τοὺς ἑξῆς πολλαπλασιασμούς :

α΄) Ἀπὸ μνήμης

$\frac{1}{4}\times4=$

$\frac{3}{4}\times4=$

$\frac{2}{8}\times8-$

$\frac{4}{9}\times3=$

$\frac{7}{12}\times5=$

$2\frac{1}{2}\times2=$

β΄) Γραπτῶς

$\frac{3}{15}\times4=$

$\frac{4}{21}\times7=$

$\frac{3}{7}\times7=$

$\frac{5}{9}\times4=$

$\frac{7}{60}\times30=$

$2\frac{3}{4}\times5=$

$5\frac{3}{5} \times 2 =$ $26\frac{3}{9} \times 22 =$

$3\frac{1}{3} \times 6 =$ $38\frac{7}{20} \times 30 =$

2. Γράψατε καὶ σεῖς δύο προβλήματα τῶν ἀνωτέρω περιπτώσεων καὶ λύστε τα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

α) Ἀπὸ τὴ σχολική μας ζωή :

1. Ἀπὸ τοὺς 30 μαθητὰς τῆς Ε΄ τάξεως ἔδωσε ὁ καθένας γιὰ τὴν καθαρίστρια $\frac{3}{5}$ χιλιάρ. Πόσα εἰσέπραξε ἡ καθαρίστρια ἀπὸ τὴν Ε΄ τάξιν ;

2. Οἱ 38 μαθηταὶ τῆς Ε΄ τάξεως ἐπῆραν τὸ γάλα τοῦ συσσιτίου σὲ σκόνιν γιὰ ἕνα μῆνα καὶ ἐπῆρε ὁ καθένας $\frac{3}{4}$ τῆς ὀκ. Πόσο γάλα μοιράσθηκε σὲ ὅλη τὴν τάξιν ;

3. Γιὰ τὴ σχολικὴ ἐκδρομὴ τῆς Ε΄ τάξεως ἔδωσε ὁ κάθε μαθητὴς ἀπὸ 7 $\frac{1}{2}$ χιλ. Ἐὰν οἱ μαθηταὶ ποὺ θὰ πᾶνε στὴν ἐκδρομὴ εἶναι 37, πόσα χρήματα μαζεύθηκαν ;

β) Ἀπὸ τὴν κοινωνική μας ζωή :

1. Ἕνας πατέρας δίνει κάθε ἡμέρα στὸ καθένα ἀπὸ τὰ τέσσερα παιδιά του $\frac{3}{5}$ τοῦ χιλιάρικου. Πόσα δίνει τὴν ἡμέρα καὶ στὰ 4 παιδιά του ;

2. Ἕνας ἐργάτης γιὰ κάθε ὥρα ποὺ ἐργάζεται παίρνει 5 $\frac{1}{2}$ χιλιάρικα. Ἐὰν ἐργασθῇ 6 ἡμέρες καὶ μὲ 8 $\frac{1}{2}$ ὥρας τὴν ἡμέρα, πόσα χρήματα θὰ πάρῃ ;

3. Τὸ Μέγα Σάββατο ἡ ἐπιτροπὴ τῶν πτωχῶν τῆς Ἐνορίας μας, ἐμοίρασε σὲ 56 πτωχὲς οἰκογένειες χρήματα γιὰ μιὰ ὀκᾶ κρέας τὸ ὁποῖο εἶχε 25 $\frac{1}{2}$ χιλιάρικα καὶ γιὰ μιὰ ὀκᾶ ψωμὶ τὸ ὁποῖο εἶχε 2 $\frac{2}{5}$ χιλ. Πόσα χρήματα ἐμοίρασε σὲ ὅλους τοὺς πτωχούς ;

4. Ἕνα ἀτμόπλοιο τρέχει 13 $\frac{1}{2}$ μίλια τὴν ὥρα καὶ κάνει ἀπὸ Πειραιᾶ εἰς Πρέβεζα 19 ὧρες. Πόσα μίλια ἀπέχει ἡ Πρέβεζα ἀπὸ τὸν Πειραιᾶ ;

Δ' ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΩΝ

Πάρα πάνω εἴδαμε πῶς πολλαπλασιάζεται κλάσμα καὶ μικτὸς ἐπὶ ἀκέραιο ἀριθμὸ καὶ καταλάβαμε ὅτι ἦταν πολὺ εὔκολο. Τὴν ἴδια εὐκολία παρουσιάζει καὶ ἡ διαίρεσις ἑνὸς κλάσματος ἢ καὶ ἑνὸς μικτοῦ δι' ἀκεραίου ἀριθμοῦ. Γι' αὐτὸ πρὶν προχωρήσωμε στὶς ἄλλες περιπτώσεις τοῦ πολλαπλασιασμοῦ θὰ μάθωμε τὴν διαίρεσιν κλάσματος ἢ μικτοῦ δι' ἀκεραίου. Τοῦτο ἐξ ἄλλου θὰ μᾶς βοηθήση στὶς ἄλλες περιπτώσεις τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

Ὅταν λέμε διαίρεσιν ἐννοοῦμε τὴν πρᾶξιν στὴν ὁποία μᾶς δίδονται δύο ἀριθμοὶ καὶ μοιράζομε τὸν ἕνα εἰς τόσα ἴσα μέρη ὅσες μονάδες ἔχει ὁ ἄλλος ἀριθμὸς (διαίρεσις μερισμοῦ), ἢ τὴν πρᾶξιν στὴν ὁποία μᾶς δίδονται δύο ἀριθμοὶ καὶ βρίσκομε πόσες φορὲς χωρεῖ ὁ ἕνας στὸν ἄλλο (διαίρεσις μετρήσεως).

Π.χ. 1) 20 μῆλα νὰ μοιρασθοῦν σὲ 4 παιδιά.

Ἔχομε 20 : 4 = 5 μῆλα (μερισμός).

2) Ἕνα τετράδιο ἔχει 200 δραχμ. Πόσα τετράδια ἀγοράζομε μὲ 1000 δραχ.

Ἔχομε 1000 δραχ. : 200 δραχ. = 5 τετράδια (μέτρησις).

Ὡς γνωστόν, διαίρεσιν ἔχομε δύο εἰδῶν. Τὴν *τελείαν*, στὴν ὁποία ὁ διαιρέτης μοιράζει ἢ χωρεῖ ἀκριβῶς στὸν διαιρετέο καὶ τὴν *ἀτελῆ*, κατὰ τὴν ὁποία ὁ διαιρέτης δὲν μοιράζει ἢ δὲν χωρεῖ ἀκριβῶς στὸν διαιρετέο καὶ ὡς ἐκ τούτου μένει ὑπόλοιπο.

Στὴν πρᾶξιν τῆς διαιρέσεως διακρίνομε :

1. Τὸν ***διαιρετέο***. Εἶναι ὁ ἀριθμὸς ὁ ὁποῖος μοιράζεται.
2. Τὸν ***διαιρέτη***. Εἶναι ὁ ἀριθμὸς ὁ ὁποῖος μᾶς λέγει σὲ πόσα ἴσα μέρη θὰ μοιράσωμε τὸν διαιρετέο ἢ πόσες φορὲς χωρεῖ.
3. Τὸ ***πηλίκο***, δηλ. ὁ ἀριθμὸς τὸν ὁποῖο βρίσκομε καὶ μᾶς φανερώνει τὰ ἴσα μέρη στὰ ὁποῖα μοιράστηκε ὁ διαιρετέος.
4. Τὸ ***ὑπόλοιπο***, δηλ. ὁ ἀριθμὸς ὁ ὁποῖος μένει στὴν ἀτελῆ διαίρεσιν. Π.χ. ἡ διαίρεσις 20 : 5 = 4 εἶναι τελεία γιατὶ δὲν ἀφήνει ὑπόλοιπο, ἐνῶ 20 : 8 = πηλ. 2 καὶ ὑπόλοιπο 4. Ἡ διαίρεσις αὐτὴ εἶναι ἀτελής. Ἡ τελεία διαίρεσις ἔχει τὴν ἑξῆς ἰδιότητα : ***Ὁ διαιρετέος ἰσοῦται μὲ τὸν διαιρέτη ἐπὶ τὸ πηλίκο.*** Π.χ. 25 : 5 = 4, ἄρα 4 × 5 = 20.

Ἡ ἀτελὴς διαίρεσις ἔχει τὴν ἑξῆς ἰδιότητα : ***Ὁ διαιρετέος***

30
150

ἰσοῦται μὲ τὸν διαιρέτη ἐπὶ τὸ πηλίκο σὺν τὸ ὑπόλοιπο. Π. χ. 20 : 8 = πηλ. 2 καὶ ὑπ. 4, ἢ 20 = 8 × 2 + 4.

Στοὺς κλασματικοὺς ἀριθμοὺς ὅμως κάθε διαίρεσις εἶναι τελεία καὶ τὸ πηλίκο της εἶναι κλάσμα, τὸ ὁποῖο ἔχει ἀριθμητὴ τὸν διαιρετέο καὶ παρονομαστὴ τὸν διαιρέτη. Π. χ. $20 : 5 = \frac{20}{5}$.

Τὸ σημεῖο τῆς διαιρέσεως, ὅπως εἶναι γνωστόν, εἶναι τὸ *διὰ (:)*. Καὶ στὴν διαίρεσιν τῶν κλασματικῶν ἔχομε πολλὲς περιπτώσεις.

1. Διαίρεσις κλάσματος δι' ἀκεραίου

1. Ἕνα αὐτοκίνητο σὲ $\frac{33}{60}$ τῆς ὥρας ἔτρεξε 11 χιλιόμετρα. Σὲ πόση ὥρα ἔτρεξε τὸ ἕνα χιλιόμετρο ;

Λύσις

Ἀπὸ τὸ πρόβλημα γνωρίζομε ὅτι τὸ αὐτοκίνητο τὰ 11 χιλ. (τὰ πολλὰ) τὰ ἔτρεξε σὲ $\frac{33}{60}$ ὥρας καὶ θέλομε νὰ μάθωμε σὲ πόση ὥρα ἔτρεξε τὸ ἕνα χιλιόμετρο. Ἑπομένως γνωρίζομε τὴν τιμὴ τῶν πολλῶν μονάδων καὶ δὲν γνωρίζομε τὴν τιμὴ τῆς μιᾶς. Θὰ κάμωμε, ὅπως καὶ στοὺς ἀκεραίους, διαίρεσιν μερισμοῦ. Διαιρετέο θὰ ἔχωμε τὴν τιμὴ τῶν πολλῶν $\left(\text{τὸ } \frac{33}{60}\right)$ καὶ διαιρέτη τὶς πολλὲς μονάδες (τὸ 11 χιλ.).

Ὥστε θὰ ἔχωμε $\frac{33}{60} : 11 =$

Ἔχομε λοιπὸν νὰ διαιρέσωμε κλάσμα δι' ἀκεραίου. Πρέπει νὰ μοιράσωμε τὸ κλάσμα $\frac{33}{60}$ σὲ 11 ἴσα μέρη. Καὶ ἔχομε 33 ἑξηκοστὰ διὰ 11 = 3 ἑξηκοστά, δηλ. $\frac{33}{60} : 11 = \frac{3}{60}$. Καὶ εἶναι σωστὸ τὸ πηλίκο $\frac{3}{60}$ γιατὶ ἂν τὸ πολλαπλασιάσωμε ἐπὶ τὸν διαιρέτη 11 θὰ βροῦμε τὸν διαιρετέο $\frac{33}{60}$.

Πράγματι $\frac{3}{60} \times 11 = \frac{33}{60}$.

Καταλαβαίνουμε λοιπὸν ὅτι τὸ $\frac{3}{60}$ βρίσκεται ἂν διαιρέσωμε τὸν ἀριθμητὴ τοῦ κλάσματος διὰ τοῦ ἀκεραίου, ἤτοι 33 : 11 = 3 καὶ αὐτὸ τὸ ὁποῖο βρήκαμε τὸ ἐβάλαμε ὡς ἀριθμητὴ καὶ παρονομαστὴ ἀφήνομε τὸν ἴδιο παρονομαστὴ τοῦ κλάσματος, ἤτοι : $\frac{33}{60} : 11 = \frac{33 : 11}{60} = \frac{3}{60}$.

2. Γιὰ 2 δράμια βαφῆς δώσαμε $\frac{7}{10}$ τοῦ χιλ. Πόσο ἀξίζει τὸ ἕνα δράμι ;

Λύσις

Καὶ ἐδῶ θὰ κάμωμε διαίρεσιν μερισμοῦ. Ἔχομε νὰ διαιρέσωμε κλάσμα δι' ἀκεραίου. Πρέπει ὅπως καὶ προηγουμένως νὰ διαιρέσωμε τὸν ἀριθμητὴ τοῦ κλάσματος διὰ τοῦ ἀκεραίου. Ἀλλ' ὁ ἀριθμητὴς δὲν διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ 2. Σκεπτόμεθα λοιπὸν ὡς ἑξῆς : Γνωρίζομε ὅτι τὰ $\frac{7}{10}$ τοῦ χιλιάρικου εἶναι 7 ἑκατοστάρικα. Τὰ 7 ἑκατοστάρικα ἐὰν τὰ κάμωμε πενηντάρια γίνονται 14 πενηντάρια ἢ $\frac{14}{20}$ χιλ. γιατὶ ἕνα ἑκατοστάρικο ἔχει δύο πενηντάρια καὶ ἕνα χιλιάρικο 20 πενηντάρια.

Καὶ ἀντὶ νὰ διαιρέσωμε τὸ κλάσμα $\frac{7}{10} : 2$, διαιροῦμε διὰ 2 τὸ ἰσοδύναμο κλάσμα $\frac{14}{20}$ καὶ ἔχομε : $\frac{14}{20} : 2 = \frac{14 : 2}{20} = \frac{7}{20}$ χιλ.

Τὸ αὐτὸ ὅμως ἐξαγόμενο, δηλ. τὸ $\frac{7}{20}$ χιλ. μποροῦμε νὰ τὸ βροῦμε πρακτικὰ καὶ ἀπὸ τὴν διαίρεσιν ποὺ ἔχομε $\frac{7}{10} : 2$ ἂν ἀφήσωμε τὸν ἴδιο ἀριθμητή, τὸ 7, καὶ πολλαπλασιάσωμε τὸν παρονομαστὴ 10 ἐπὶ τὸν διαιρέτη ἀκέραιο 2. Ὁπότε ἔχομε $\frac{7}{10} : 2 = \frac{7}{10 \times 2} = \frac{7}{20}$ χιλ.

Βλέπομε λοιπὸν ὅτι, ἐφ' ὅσον ὁ ἀριθμητὴς τοῦ κλάσματος 7 δὲν διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ διαιρέτου 2, ἀφήσαμε τὸν ἴδιο ἀριθμητὴ καὶ πολλαπλασιάσουμε τὸν παρονομαστὴ ἐπὶ τὸν διαιρέτη ἀκέραιο.

Ὥστε γιὰ νὰ διαιρέσωμε κλάσμα δι' ἀκεραίου . . . . .
. . . .

(Νὰ συμπληρωθῇ ὑπὸ τοῦ μαθητοῦ).

Π.χ. $\frac{15}{17} : 5 = \frac{15 : 5}{17} = \frac{3}{17}$

$\frac{13}{20} : 5 = \frac{13}{20 \times 5} = \frac{13}{100}$

Σημείωσις: Στὸ δεύτερο πρόβλημα, τὸ κλάσμα $\frac{7}{20}$ εἶναι δύο φορὲς μικρότερο ἀπὸ τὸ $\frac{7}{10}$ καὶ ἔγινε μικρότερο ἀπὸ τὸν πολλαπλασιασμὸ τοῦ παρονομαστοῦ ἐπὶ τὸν ἀριθμὸ 2. Ἑπομένως μποροῦμε ἕνα κλάσμα νὰ τὸ κάμωμε μικρότερο ὅσες φορὲς θέλομε, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμε τὸν παρονομαστή του ἐπὶ τὸν ἀριθμὸ ὁ ὁποῖος ἔχει τόσες ἀκέραιες μονάδες ὅσες θέλομε νὰ τὸ κάμωμε μικρότερο. Π.χ. τὸ κλάσμα $\frac{3}{5}$ νὰ γίνη 4 φορὲς μικρότερο $= \frac{3}{4 \times 5} = \frac{3}{20}$.

Ἀσκήσεις

1. Νὰ γίνουν οἱ ἑξῆς διαιρέσεις :

α) Ἀπὸ μνήμης :

$\frac{2}{5} : 2 =$

$\frac{4}{7} : 2 =$

$\frac{1}{5} : 3 =$

$\frac{7}{10} : 12 =$

$\frac{56}{70} : 8 =$

β) Γραπτῶς :

$\frac{12}{13} : 3 =$

$\frac{36}{37} : 12 =$

$\frac{3}{17} : 5 =$

$\frac{56}{65} : 4 =$

$\frac{38}{79} : 20 =$

2. Νὰ γράψετε καὶ σεῖς τρία προβλήματα ὅπως τὰ προηγούμενα.

3. Γράψετε τὸν κανόνα τῆς διαιρέσεως κλάσματος δι' ἀκεραίου.

2. Διαίρεσις μικτοῦ δι' ἀκεραίου

Οἱ 3 πήχ. ἑνὸς ὑφάσματος ἀξίζουν 10 $\frac{2}{5}$ χιλιάρ. Πόσο ἀξίζει μιὰ πήχ.;

Ἔχομε νὰ διαιρέσωμε μικτὸ δι' ἀκεραίου $10\frac{2}{5} : 3 =$;

Ἀφοῦ γνωρίζομε πῶς διαιρεῖται κλάσμα δι' ἀκεραίου, τρέπομε τὸν μικτὸ σὲ κλάσμα καὶ κάνομε τὴν διαίρεσιν, ἤτοι :

$$10\frac{2}{5} : 4 = \frac{52}{5} : 4 = \frac{52:4}{5} = \frac{13}{5} = 2\frac{3}{5}$$

ἢ καὶ $10\frac{2}{5} : 4 = \frac{52}{5} : 4 = \frac{52}{5 \times 4} = \frac{52}{20} = 2\frac{12}{20} = 2\frac{3}{5}$

Τὸ αὐτὸ πηλίκο ὅμως μποροῦμε νὰ βροῦμε ὅπως καὶ στὸν πολλαπλασιασμό, ἂν διαιρέσωμε χωριστὰ τὸν ἀκέραιο καὶ χωριστὰ τὸ κλάσμα, ἤτοι :

$10 \frac{2}{5} : 4 = (2 \frac{3}{5})$ α) $10 : 4 = \frac{10}{4}$

β) $\frac{2}{5} : 4 = \frac{2}{20}$

γ) $\frac{10}{4} + \frac{2}{20} = \frac{50}{20} + \frac{2}{20} = \frac{52}{20} = 2 \frac{12}{20} = 2 \frac{3}{5}$

Ἑπομένως, πῶς διαιροῦμε μικτὸ δι᾽ ἀκεραίου ;

(Νὰ συμπληρωθῇ ὑπὸ τοῦ μαθητοῦ).

Ἀσκήσεις

1. Γράψετε τὸν κανόνα τῆς διαιρέσεως μικτοῦ δι᾽ ἀκεραίου μὲ ὅλες τὶς περιπτώσεις του.

2. Γράψετε δύο προβλήματα μερισμοῦ καὶ δύο προβλήματα μετρήσεως μικτοῦ δι᾽ ἀκεραίου.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

α) Ἀπὸ τὴ σχολικὴ μας ζωή :

1. Γιὰ τρία δωδεκάφυλλα τετράδια ἐδώσαμε τὰ $\frac{3}{5}$ τοῦ χιλιάρικου. Πόσο ἔχει τὸ ἕνα τετράδιο ;

2. Τέσσερες μαθηταὶ γιὰ νὰ ἀγοράσουν τὰ τετράδια ἑνὸς πτωχοῦ συμμαθητοῦ των ἐμάζεψαν 8 $\frac{4}{5}$ χιλιάρ. Πόσα ἔδωσε ὁ κάθε μαθητής ;

3. Ἡ Ε΄ τάξις ἔχει 28 μαθητὰς καὶ ἔχει μαζέψει γιὰ τὴν ἐκδρομὴ τὴν ὁποία θὰ κάνουν 176 $\frac{2}{5}$ χιλιάρ. Πόσα ἔδωσε ὁ κάθε μαθητὴς γιὰ τὴν ἐκδρομή ;

4. Κάθε μαθητὴς ἐπῆρε γιὰ 25 ἡμέρες τοῦ μῆνα $\frac{5}{8}$ ὀκάδ. γάλα σκόνη. Πόσο γάλα ἔκανε νὰ πάρῃ κάθε ἡμέρα ;

β) Ἀπὸ τὴν κοινωνικὴ μας ζωή :

1. Γιὰ νὰ ράψωμε 7 ὑποκάμισα ἐχρειάσθηκαν 26 $\frac{1}{4}$ πήχ. ὕφασμα. Πόσες πῆχες ἐχρειάσθηκαν γιὰ κάθε ὑποκάμισο ;

2. Ἕνας γεωργὸς ἐπώλησε 36 ὀκ. σιτάρι καὶ πῆρε 86 $\frac{2}{5}$ χιλ. Πόσο ἐπώλησε τὴν μιὰ ὀκᾶ ;

3. Ἕνας παντοπώλης ἐπώλησε 12 ὀκάδ. βούτυρο πρὸς 45 $\frac{2}{5}$

χιλιάρ. τὴν ὀκᾶ καὶ μὲ τὰ χρήματα ποὺ πῆρε ἀγόρασε λάδι πρὸς 9 χιλ. δρχ. τὴν ὀκᾶ. Πόσες ὀκ. λάδι ἀγόρασε ;

4. Ἕνας ἐργάτης ἐφύτεψε 32 δένδρα σὲ μιὰ σειρὰ ποὺ εἶχε μῆκος $74\frac{2}{5}$ μέτρα. Πόσο ἀπέχει τὸ ἕνα δένδρο ἀπὸ τὸ ἄλλο καὶ πόσα χρήματα πῆρε ἂν γιὰ κάθε δένδρο πῆρε $3\frac{1}{4}$ χιλ.

3. Πολλαπλασιασμὸς ἀκεραίου ἐπὶ κλάσμα

Ἡ μία ὀκᾶ φασόλια ἔχει 5 χιλιάρικα. Πόσο ἔχουν τὰ $\frac{3}{4}$ *τῆς ὀκᾶς ;*

Λύσις

Ἐδῶ γνωρίζομε πόσο ἔχει ἡ μία ὀκᾶ τὰ φασόλια καὶ θέλομε νὰ μάθωμε πόσο ἔχουν τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς ὀκᾶς, δηλ. ἕνα μέρος τῆς ὀκᾶς. Ὡς ἐκ τούτου γνωρίζομε τὴν τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδας καὶ ζητοῦμε τὴν τιμὴ μέρους τῆς μονάδας. Πρὸς τοῦτο θὰ σκεφθοῦμε ὡς ἑξῆς : Ἀφοῦ γνωρίζωμε πόσο ἔχει ἡ μιὰ ὀκᾶ εὔκολα εἶναι νὰ βροῦμε πόσο ἔχει τὸ $\frac{1}{4}$ τῆς ὀκᾶς, γιατὶ τὸ $\frac{1}{4}$ ὀκ. εἶναι 4 φορὲς μικρότερο ἀπὸ τὴν μιὰ ὀκᾶ ἢ τὰ $\frac{4}{4}$ τῆς ὀκᾶς. Καὶ ἀφοῦ ἡ μιὰ ὀκᾶ ἢ τὰ $\frac{4}{4}$ ὀκ. ἔχουν 5 χιλιάρικα, τὸ $\frac{1}{4}$ τὸ ὁποῖο εἶναι τέσσερες φορὲς μικρότερο ἀπὸ τὰ $\frac{4}{4}$ θὰ ἔχῃ τιμὴ 4 φορὲς μικρότερη ἀπὸ τὴν τιμὴ τῶν $\frac{4}{4}$ ὀκ. Καὶ τὸ βρίσκομε αὐτὸ ἂν κάμωμε διαίρεσιν. Ἑπομένως τὸ $\frac{1}{4}$ θὰ ἀξίζῃ 5 χιλ.: $\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$ χιλ. Τώρα ἀφοῦ βρήκαμε τὴν τιμὴ τοῦ $\frac{1}{4}$, εὔκολα βρίσκομε τὴν τιμὴ τῶν $\frac{3}{4}$ ὀκ. γιατὶ τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς ὀκᾶς εἶναι μεγαλύτερα ἀπὸ τὸ $\frac{1}{4}$ κατὰ τρεῖς φορές. Ἑπομένως καὶ ἡ ἀξία τους θὰ εἶναι τρεῖς φορὲς μεγαλύτερη ἀπὸ τὴν τιμὴ τοῦ $\frac{1}{4}$.

Καὶ τὴν βρίσκομε ἐὰν πολλαπλασιάσωμε τὴν τιμή του ἡ ὁποία εἶναι $\frac{5}{4}$ χιλ. ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 3. Ἑπομένως τὰ $\frac{3}{4}$ ὀκ.

θὰ ἔχουν τιμὴ $\frac{5}{4} \times 3 = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$ χιλ. Ἡ πρᾶξις γίνεται ὡ
ἑξῆς :

Ἡ 1 ὀκᾶ = $\frac{4}{4}$ ἀξίζουν 5 χιλιάρικα
τὸ $\frac{1}{4}$ » $5 : 4 = \frac{5}{4}$
καὶ τὰ $\frac{3}{4}$ » $\frac{5}{4} \times 3 = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$ χιλ.

Τὸ αὐτὸ ὅμως ἀποτέλεσμα βρίσκομε καὶ ἐὰν κάμωμε τὸν πολλαπλασιασμὸ ἀπ' εὐθείας, δηλαδὴ πολλαπλασιάσωμε τὸν ἀκέραιο ἐπὶ τὸ κλάσμα. Πρὸς τοῦτο πολλαπλασιάζομε τὸν ἀκέραιο ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴ καὶ τὸ γινόμενο θέτομεν ὡς ἀριθμητή, καὶ παρονομαστὴ ἀφήνομε τὸν ἴδιο, ἤτοι :

$$5 \text{ χιλ.} \times \frac{3}{4} = \frac{5 \times 3}{4} = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4} \text{ χιλ.}$$

Ἀπὸ τὴν ἐξέτασιν τῶν ἀνωτέρω συμπεραίνομε τὰ ἑξῆς 1) Ὅταν γνωρίζωμε τὴν τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδας καὶ θέλωμε νὰ βροῦμε τὴν τιμὴ μέρους τῆς μονάδας, κάνομε πολλαπλασιασμό. Πολλαπλασιαστέος εἶναι ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδας καὶ πολλαπλασιαστὴς τὸ μέρος τῆς μονάδας, καὶ 2) Γιὰ νὰ πολλαπλασιάσωμε ἀκέραιο ἐπὶ κλάσμα . . . .
. . . .

(Τί κάνομε ; Νὰ συμπληρωθῇ ὑπὸ τοῦ μαθητοῦ).

Παράδειγμα : $8 \times \frac{5}{6} = \frac{8 \times 5}{6} = \frac{40}{6} = 6\frac{4}{6}$

Ὁ τρόπος μὲ τὸν ὁποῖον σκεφθήκαμε νὰ λύσωμε τὸ προηγούμενο πρόβλημα καὶ ἀπὸ τὸ ὁποῖο βγάλαμε τὸ συμπέρασμα ὅτι, ὅταν γνωρίζωμε τὴν τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδας καὶ ζητοῦμε τὴν τιμὴ μέρους τῆς μονάδας θὰ κάνωμε πολλαπλασιασμό, λέγεται *μέθοδος τῆς ἀναγωγῆς στὴν μονάδα*. Καὶ τοῦτο γιατὶ βρίσκομε πρῶτα τὴν τιμὴ τῆς μιᾶς κλασματικῆς μονάδας καὶ ἔπειτα τὴν τιμὴ τῶν πολλῶν κλασματικῶν μονάδων (τοῦ κλάσματος). Ἐπομένως ὅλα τὰ προβλήματα τὰ ὁποῖα εἶναι ὅπως τὸ προηγούμενο λύονται μὲ δύο τρόπους : 1) Μὲ τὴν ἀναγωγὴ στὴν μονάδα καὶ 2) Μὲ πολλαπλασιασμό.

Ἡ πήχ. ἑνὸς ὑφάσματος ἔχει 12 χιλ. Πόσο ἔχουν τὰ $\frac{5}{8}$ πήχ. ;

Λύσις

α) Μὲ πολλαπλασιασμό :

$$12 \times \frac{5}{8} = \frac{12 \times 5}{8} = \frac{60}{8} = 7\frac{4}{8} = 7\frac{1}{2} \text{ χιλ.}$$

β) Μὲ τὴν ἀναγωγὴ στὴ μονάδα :

Ἡ 1 πήχ. = τὰ $\frac{8}{8}$ ἀξίζουν 12 χιλ.

τὸ $\frac{1}{8}$ ἀξίζει $12 : 8 = \frac{12}{8}$

καὶ τὰ $\frac{5}{8}$ ἀξίζουν $\frac{12}{8} \times 5 = \frac{12 \times 5}{8} = \frac{60}{8} = 7\frac{4}{8} = 7\frac{1}{2}$ χ.

Ἐδῶ ἐκάμαμε τὴν πήχη ὄγδοα γιατὶ αὐτὸ μᾶς λέγει ὁ παρονομαστὴς τοῦ μέρους τῆς μονάδας.

Κατὰ τὸν αὐτὸ τρόπο λύονται καὶ τὰ προβλήματα στὰ ὁποῖα μᾶς ζητεῖται νὰ βροῦμε τὴν τιμή, ὄχι τοῦ μέρους μόνον, ἀλλὰ τὴν τιμὴ ἀκεραίου καὶ μέρους τῆς μονάδας, δηλ. μικτοῦ ἀριθμοῦ, γιατὶ τὸν μικτὸ τὸν τρέπομε σὲ κλάσμα καὶ ἔχομε ἕνα πρόβλημα ὅπως τὰ προηγούμενα. Π.χ.

Ἡ 1 πήχ. ὕφασμα ἀξίζει 24 χιλιάρικα. Πόσο ἀξίζουν οἱ $2\frac{5}{8}$ πήχ. ;

Λύσις

α΄) Μὲ πολλαπλασιασμό :

$$24 \times 2\frac{5}{8} = 24 \times \frac{21}{8} = \frac{24 \times 21}{8} = \frac{504}{8} = 63 \text{ χιλ.}$$

β΄) Μὲ τὴν ἀναγωγὴ στὴ μονάδα :

Ἡ 1 πήχ. = τὰ $\frac{8}{8}$ ἀξίζουν 24 χιλ.

τὸ $\frac{1}{8}$ » $24 : 8 = \frac{24}{8}$

καὶ τὰ $2\frac{5}{8} = \frac{21}{8}$ » $\frac{24}{8} \times 21 = \frac{504}{8} = 63$ χιλ.

Ἀσκήσεις

1. Γράψετε τρία προβλήματα ὅμοια μὲ τοῦ βιβλίου σας.
2. Γράψετε τὸν κανόνα καὶ κατὰ τοὺς δύο τρόπους.
3. Ἐκτελέστε καὶ κατὰ τοὺς δύο τρόπους τοὺς ἑξῆς πολλαπλασιασμούς :

$3 \times \frac{2}{3} =$, $15 \times \frac{8}{25} =$, $45 \times \frac{19}{75} =$

$3 \times 2\frac{3}{5} =$, $12 \times 1\frac{3}{4} =$, $85 \times 20\frac{5}{5} =$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Ἀπὸ τοὺς [illegible]8 μαθητὰς τῆς Ε΄ τάξεως τὰ $\frac{3}{4}$ τῶν μαθητῶν πληρώνουν στὸ συσσίτιο, οἱ δὲ ἄλλοι δὲν πληρώνουν. Πόσοι μαθηταὶ πληρώνουν καὶ πόσοι δὲν πληρώνουν ;

2. Κατὰ τὸ προηγούμενο ἔτος ἀπὸ τοὺς 32 μαθητὰς τῆς Ε΄ τάξεως τὰ $\frac{3}{8}$ τῶν μαθητῶν προήχθησαν μὲ ἄριστα, οἱ δὲ ἄλλοι μὲ λίαν καλῶς καὶ καλῶς. Πόσοι προήχθησαν μὲ ἄριστα ;

3. Ἡ ὀκᾶ τὸ κρέας ἔχει 24 χιλιάρικα. Πόσο θὰ πληρώσουμε γιὰ $1\frac{3}{4}$ ὀκ. κρέας ;

4. Ἡ μία ὀκᾶ τοῦ καφὲ ἀξίζει 76 χιλιάρικα. Πόσο ἀξίζουν τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς ὀκᾶς ;

5. Ἡ μιὰ πήχ. ὕφασμα ἔχει 58 χιλιάρικα. Πόσο θὰ πληρώσουμε γιὰ $3\frac{3}{8}$ πῆχ. ;

(Τὰ τρία τελευταῖα προβλήματα νὰ τὰ λύστε καὶ κατὰ τοὺς δύο τρόπους).

4. Πολλαπλασιασμὸς κλάσματος ἐπὶ κλάσμα

Ἡ μιὰ ὀκᾶ χόρτα ἀξίζουν $\frac{9}{10}$ τοῦ χιλιάρικου. Πόσο ἀξίζουν τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς ὀκᾶς ;

Καὶ ἐδῶ γνωρίζομε τὴν τιμὴ τῆς μιᾶς ὀκᾶς καὶ ζητοῦμε τὴν τιμὴ μέρους τῆς ὀκᾶς. Θὰ κάμωμε πολλαπλασιασμό, ἤτοι $\frac{9}{10} \times \frac{3}{4}$. Ἔχομε νὰ πολλαπλασιάσωμε κλάσμα ἐπὶ κλάσμα. Ἐπειδὴ ὅμως δὲν γνωρίζομε πῶς θὰ κάμωμε τὸν πολλαπλασιασμό, θὰ λύσωμε τὸ πρόβλημα πάλι μὲ τὴν μέθοδο τῆς ἀναγωγῆς στὴν μονάδα. Σκεπτόμεθα λοιπὸν ὡς ἑξῆς :

Ἀφοῦ ἡ μιὰ ὀκᾶ ἀξίζει $\frac{9}{10}$ χιλ. τὸ $\frac{1}{4}$ τὸ ὁποῖο εἶναι μικρότερο ἀπὸ τὴν 1 ὀκᾶ κατὰ 4 φορὲς θὰ ἔχῃ ἀξία κατὰ 4 φορὲς μικρότερη ἀπὸ τὴν ἀξία τῆς 1 ὀκᾶς. Γι' αὐτὸ θὰ διαιρέσωμε τὸ $\frac{9}{10} : 4 = \frac{9}{10} : 4 = \frac{9}{10 \times 4}$. Εὔκολα τώρα βρίσκομε τὴν ἀξία τῶν $\frac{3}{4}$ τὰ ὁποῖα εἶναι 3 φορὲς μεγαλύτερα ἀπὸ τὸ $\frac{1}{4}$ καὶ ὡς ἐκ τούτου ἡ ἀξία τῶν $\frac{3}{4}$ ὀκ. θὰ εἶναι μεγαλύτερη ἀπὸ τὴν ἀξία τοῦ $\frac{1}{4}$ ὀκ. κατὰ 3 φορές. Γι' αὐτὸ τὴν ἀξία τοῦ $\frac{1}{4}$, ἤτοι τὴν $\frac{9}{10 \times 4}$ χιλ. τὴν κάνουμε 3 φορὲς μεγαλύτερη μὲ πολλαπλασιασμό, ἤτοι $\frac{9}{10 \times 4} \times 3 = \frac{9 \times 3}{10 \times 4}$. Ἡ πρᾶξις αὐτὴ γίνεται ὡς ἑξῆς:

Ἡ 1 ὀκᾶ $= \frac{4}{4}$ ἀξίζουν $\frac{9}{10}$ χιλ.

τὸ $\frac{1}{4}$ » $\frac{9}{10} : 4 = \frac{9}{10 \times 4}$

καὶ τὰ $\frac{3}{4}$ ὀκ. » $\frac{9}{10 \times 4} \times 3 = \frac{9 \times 3}{10 \times 4} = \frac{27}{40}$ χιλ.

Τὸ αὐτὸ ὅμως ἐξαγόμενο $\frac{9 \times 3}{10 \times 4}$ βρίσκομε ἀπὸ τὸν πολλαπλασιασμὸ τῶν κλασμάτων $\frac{9}{10} \times \frac{3}{4}$ ἐὰν πολλαπλασιάσωμε ἀριθμητὴ ἐπὶ ἀριθμητὴ καὶ τὸ γινόμενο θέσωμε ὡς ἀριθμητὴ καὶ ἔπειτα πολλαπλασιάσωμε παρονομαστὴ ἐπὶ παρονομαστὴ καὶ τὸ γινόμενο θέσωμε ὡς παρονομαστή,

ἤτοι: $\frac{9}{10} \times \frac{3}{4} = \frac{9 \times 3}{10 \times 4} = \frac{27}{40}$

Ὥστε γιὰ νὰ πολλαπλασιάσωμε κλάσμα ἐπὶ κλάσμα . . .

. . . .

(Μόνος σου νὰ γράψης τὸν κανόνα καὶ κατὰ τοὺς δύο τρόπους).

Παρατήρησις: Κατὰ τὸν πολλαπλασιασμὸ τῶν κλασμάτων τὰ κλάσματα δὲν τὰ τρέπομε σὲ ὁμώνυμα ὅπως στὴν πρόσθεσιν καὶ τὴν ἀφαίρεσιν καὶ τοῦτο γιὰ εὐκολία μας, γιατὶ ἂν τὰ τρέψωμε σὲ ὁμώνυμα θὰ βροῦμε τὸ αὐτὸ γινόμενο ἀλλὰ θὰ ἔχωμε ζημία τὸν κόπο καὶ τὸν χρόνο, ποὺ ἐχάσαμε γιὰ νὰ τὰ τρέψωμε.

Ἀσκήσεις

1. Γράψετε δυὸ ὅμοια προβλήματα καὶ νὰ τὰ λύστε καὶ κατὰ τοὺς δυὸ τρόπους.
2. Συμπληρῶστε τὸν ἀνωτέρω κανόνα.
3. Κάμετε τοὺς ἑξῆς πολλαπλασιασμούς:

λύσις

λύσις

$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ $\frac{11}{12} \times \frac{9}{12} = \frac{99}{144}$

$\frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{12}$ $\frac{15}{23} \times \frac{13}{27} = \frac{195}{621}$

$\frac{5}{8} \times \frac{3}{5} = \frac{15}{40}$ $\frac{5}{8} \times \frac{7}{15} = \frac{35}{120}$

$\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{12}$ $\frac{3}{25} \times \frac{15}{22} = \frac{45}{550}$

$\frac{5}{6} \times \frac{7}{9} = \frac{35}{54}$ $\frac{42}{43} \times \frac{7}{10} = \frac{294}{430}$

5. Πολλαπλασιασμὸς μικτοῦ ἐπὶ κλάσμα.

Ἡ μιὰ ὀκᾶ τὰ φασόλια ἔχουν $6\frac{3}{5}$ *χιλ. Πόσον ἔχουν τὰ* $\frac{7}{8}$ *τῆς ὀκᾶς ;*

Λύσις

Καὶ ἐδῶ γνωρίζομε τὴν τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδας καὶ ζητοῦμε τὴν τιμὴ τοῦ μέρους τῆς μονάδας. Ὡς ἐκ τούτου θὰ πολλαπλασιάσωμε $6\frac{3}{5} \times \frac{7}{8}$. Ἔχομε δηλ. νὰ πολλαπλασιάσωμε μικτὸ ἐπὶ κλάσμα. Τρέπομε τὸν μικτὸ σὲ κλάσμα καὶ ἔχομε νὰ πολλαπλασιάσωμε κλάσματα, ἤτοι :

Α′ τρόπος : $6\frac{3}{5} \times \frac{7}{8} = \frac{33}{5} \times \frac{7}{8} = \frac{231}{40} = 5\frac{31}{40}$

Β′ τρόπος : μὲ τὴν ἀναγωγὴ στὴν μονάδα.

ἡ 1 ὀκᾶ $= \frac{8}{8}$ ἔχει $6\frac{3}{5}$ χιλ. ἢ $\frac{33}{5}$

τὸ $\frac{1}{8}$ » $\frac{33}{5} : 8 = \frac{33}{5 \times 8} = \frac{33}{40}$

Καὶ τὰ $\frac{7}{8}$ ἔχουν $\frac{33}{40} \times 7 = \frac{231}{40} = 5\frac{31}{40}$

Γ′ τρόπος : Τὸ αὐτὸ γινόμενο βρίσκομε καὶ ἐὰν πολλαπλασιάσωμε χωριστὰ τὸν ἀκέραιο ἐπὶ τὸ κλάσμα καὶ χωριστὰ τὸ κλάσμα τοῦ μικτοῦ ἐπὶ τὸ κλάσμα καὶ ἔπειτα προσθέσωμε τὰ δύο γινόμενα, ἤτοι :

α) $6 \times \frac{7}{8} = \frac{42}{8}$

β) $\frac{3}{5} \times \frac{7}{8} = \frac{21}{40}$

γ) $\frac{42}{8} + \frac{21}{40} = \frac{210}{40} + \frac{21}{40} = \frac{231}{40} = 5\frac{31}{40}$

6. Πολλαπλασιασμὸς μικτοῦ ἐπὶ μικτὸν

Ἡ μιὰ πήχ. ὕφασμα ἔχει $3\frac{1}{2}$ χιλιάδες. Πόσον ἔχουν οἱ $4\frac{1}{5}$ πῆχ. ;

Λύσις

Στὸ πρόβλημα αὐτὸ ἔχομε νὰ πολλαπλασιάσωμε μικτὸ ἐπὶ μικτὸ $3\frac{1}{2}$ χιλ. $\times\ 4\frac{1}{5} =$;

Πῶς θὰ γίνῃ ὁ πολλαπλασιασμός ; Ἀπὸ τὰ προηγούμενα, συμπεραίνομε ὅτι εἶναι εὔκολο νὰ τὸν κάμωμε, ἀρκεῖ νὰ τρέψωμε τοὺς μικτοὺς σὲ κλάσματα, ὁπότε θὰ ἔχωμε νὰ πολλαπλασιάσωμε κλάσματα. Καὶ ἔχομε :

Α΄ τρόπος : $3\frac{1}{2} \times 4\frac{1}{5} = \frac{7}{2} \times \frac{21}{5} = \frac{147}{10} = 14\frac{7}{10}$ χιλ.

Β΄ τρόπος : μὲ τὴν ἀναγωγὴ στὴν μονάδα.

1 πήχ. $= \frac{5}{5}$ ἀξίζουν $3\frac{1}{2} = \frac{7}{2}$,

τὸ $\frac{1}{3}$ ἀξίζει $\frac{7}{2} : 5 = \frac{7}{2\times5}$

καὶ τὰ $4\frac{1}{5}$ ἢ $\frac{21}{5}$ ἀξίζ. $\frac{7}{2\times5} \times 21 = \frac{7\times21}{2\times5} = \frac{147}{10} =$ $14\frac{7}{10}$ χιλ.

Τὸν τρίτο τρόπο τὸν παραλείπομε γιατὶ ἔχει δυσκολίες.

Ὥστε γιὰ νὰ πολλαπλασιάσωμε μικτὸ ἐπὶ κλάσμα ἢ μικτὸ ἐπὶ μικτὸ . . . . (Τί κάνομε ; Νὰ τὸ συμπληρώσῃς).

Ἕνα συμπέρασμα : Ὅλα τὰ προβλήματα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν κλασμάτων στὰ ὁποῖα ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι κλάσμα ἢ μικτὸς ἀριθμὸς λύονται μὲ τὴν μέθοδο τῆς ἀναγωγῆς στὴν μονάδα.

Ἀσκήσεις

1. Γράψετε τὸν κανόνα καὶ τῶν τριῶν τρόπων μὲ τοὺς ὁποίους λύονται τὰ προβλήματα στὰ ὁποῖα ἔχομε νὰ πολλαπλασιάσωμε κλάσμα ἐπὶ κλάσμα, καὶ μικτὸ ἐπὶ μικτό.
2. Γράψετε τρία προβλήματα καὶ λύστε τα καὶ μὲ τοὺς δυὸ τρόπους.
3. Κάνετε τοὺς πολλαπλασιασμοὺς καὶ μὲ τοὺς δύο τρόπους τῶν παρακάτω ἀφηρημένων ἀριθμῶν.

√ $2\frac{3}{5} \times \frac{1}{3} =$, $8\frac{2}{3} \times \frac{5}{7} =$

$5\frac{3}{8} \times 2\frac{1}{3} =$, $26\frac{3}{5} \times 1\frac{6}{8} =$ √

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

√ 1. Τὸ ἕνα μέτρο τὸ χαρτὶ μὲ τὸ ὁποῖο θὰ ντύσωμε τὰ τετράδιά μας ἔχει $\frac{4}{5}$ τοῦ χιλιάρικου. Πόσο θὰ δώσωμε γιὰ τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ μέτρου;

√ 2. Ἡ μιὰ ὀκᾶ τὸ κρέας ἀξίζει 28 $\frac{3}{5}$ χιλ. Πόσο ἀξίζουν τὰ $\frac{6}{9}$ τῆς ὀκᾶς;

√ 3. Τὸ κρέας ὅταν ψηθῆ χάνει τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ βάρους του. Ἕνα ἀρνὶ τὸ ὁποῖο ζυγίζει 6 $\frac{5}{8}$ ὀκ. πόσο θὰ ζυγίζη ὅταν ψηθῆ;

√ 4. Γιὰ τὸ φόρεμα τῆς Μαρίας ἀγόρασαν 3 $\frac{3}{8}$ πήχ. πρὸς 28 $\frac{3}{5}$ χιλ. τὴν πήχ. Πόσο ἐστοίχισε τὸ φόρεμα τῆς Μαρίας καὶ πόσα ρέστα πῆραν ἀπὸ 100 χιλιάρικα ποὺ ἔδωσαν στὸν ἔμπορο; √

7. Διαίρεσις ἀκεραίου διὰ κλάσματος.

Γιὰ $\frac{3}{4}$ τῆς ὀκᾶς ζάχαρη ἐπληρώσαμε 8 χιλιάρικα. Πόσο θὰ ἐπληρώναμε ἂν ἀγοράζαμε μιὰ ὀκᾶ;

Λύσις

Ἐδῶ γνωρίζομε πόσο ἔχουν τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς ὀκᾶς, δηλ. τὸ μέρος τῆς μιᾶς ὀκᾶς καὶ ζητοῦμε νὰ βροῦμε πόσο ἔχει ἡ μία ὀκᾶ. Γνωρίζομε δηλ. τὴν τιμὴ τοῦ μέρους τῆς μονάδας καὶ ζητοῦμε τὴν τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδας. Ὡς ἐκ τούτου θὰ κάμωμε διαίρεσιν, διότι ζητοῦμε τὴν τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδας. Διαιρετέος εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ μέρους τῆς μονάδας καὶ διαιρέτης τὸ μέρος τῆς μιᾶς μονάδας, ἤτοι θὰ διαιρέσωμε $8 : \frac{3}{4}$. Ἔχομε νὰ διαιρέσωμε ἀκέραιο διὰ κλάσματος. Θὰ σκεφθοῦμε ὡς ἑξῆς:

Ἂν ἐγνωρίζαμε τὴν ἀξία τοῦ $\frac{1}{4}$ τῆς ὀκᾶς θὰ βρίσκαμε καὶ τὴν ἀξία τῆς μιᾶς ὀκᾶς ἡ ὁποία ἔχει $\frac{4}{4}$, δηλ. εἶναι μεγαλύτερη ἀπὸ τὸ $\frac{1}{4}$ κατὰ 4 φορές. Ὡς ἐκ τούτου καὶ τὸ πρόβλημα θὰ τὸ λύσωμε μὲ τὴ μέθοδο τῆς ἀναγωγῆς στὴν μονάδα.

Καὶ ἔχομε : Γνωρίζομε ὅτι τὰ $\frac{3}{4}$ ἔχουν 8 χιλ. Τὸ $\frac{1}{4}$ ποὺ εἶναι 3 φορὲς μικρότερο ἀπὸ τὰ $\frac{3}{4}$ θὰ ἔχη :

$8 : \frac{3}{4}$. $8 : 3 = \frac{8}{3}$ καὶ τὰ $\frac{4}{4}$ ἢ ἡ μία ὀκᾶ θὰ ἔχη $\frac{8}{3} \times 4 = \frac{8 \times 4}{3}$

Ὅπως βλέπομε, πρῶτα διαιρέσαμε τὸν 8 διὰ τοῦ 3 καὶ ἔπειτα πολλαπλασιάσαμε τὸ πηλίκο $\frac{8}{3}$ ἐπὶ τὸν παρονομαστὴ 4.

Τὸ αὐτὸ ὅμως γινόμενο ἢ ἀποτέλεσμα βρίσκομε ἂν πολλαπλασιάσωμε τὸν ἀκέραιο ἐπὶ τὸ κλάσμα ἀντεστραμμένο, δηλ. μὲ ἀριθμητὴ τὸν παρονομαστὴ καὶ παρονομαστὴ τὸν ἀριθμητή.

ἤτοι : $8 : \frac{3}{4} = 8 \times \frac{4}{3}$

Τὰ κλάσματα $\frac{3}{4}$ καὶ $\frac{4}{3}$ λέγονται *ἀντίστροφα*. Τέτοια ἀντίστροφα κλάσματα εἶναι τὰ $\frac{5}{6}$ καὶ $\frac{6}{5}$ ἢ $\frac{7}{12}$ καὶ $\frac{12}{7}$.

Ὥστε ***γιὰ νὰ διαιρέσωμε ἀκέραιο διὰ κλάσματος πολλαπλασιάζομε τὸν ἀκέραιο ἐπὶ τὸ ἀντίστροφο κλάσμα ἢ ἀντιστρέφομε τοὺς ὅρους τοῦ κλασματικοῦ διαιρέτου καὶ ἀντὶ διαιρέσεως κάνομε πολλαπλασιασμό.***

8. Διαίρεσις ἀκεραίου διὰ μικτοῦ.

Οἱ $2\frac{1}{5}$ ὀκ. μῆλα τιμῶνται 14 χιλιάρικα. Πόσο ἀξίζει ἡ μία ὀκᾶ ;

Λύσις

Θὰ κάμωμε διαίρεσιν μερισμοῦ, ἤτοι : $14 : 2\frac{1}{5}$

Ἔχομε νὰ διαιρέσωμε ἀκέραιο διὰ μικτοῦ. Ἀφοῦ ἐμάθαμε νὰ διαιροῦμε ἀκέραιο διὰ κλάσματος, τρέπομε τὸν μικτὸ σὲ κλάσμα καὶ ἔχομε πλέον νὰ διαιρέσωμε ἀκέραιο διὰ κλάσματος ἢ μὲ τὴ μέθοδο τῆς ἀναγωγῆς στὴ μονάδα ἢ ἐφαρμόζοντες τὸν κανόνα. Καὶ ἔχομε :

$$14 : 2\frac{1}{5} = 14 : \frac{11}{5} = 14 \times \frac{5}{11} = \frac{70}{11} = 6\frac{4}{11} \text{ χιλ.}$$

Εἶναι εὔκολη ἡ διαίρεσις στὴν περίπτωσιν αὐτὴ καὶ γιατί ;

Ἀσκήσεις

1. Γράψετε μόνοι σας δυὸ προβλήματα καὶ νὰ τὰ λύσετε καὶ κατὰ τοὺς δυὸ τρόπους.

2. Γράψετε τὸν κανόνα τῆς διαιρέσεως ἀκεραίου διὰ κλάσματος καὶ διὰ μικτοῦ.

3. Κάμετε τὶς ἑξῆς διαιρέσεις τῶν παρακάτω ἀφηρημένων ἀριθμῶν.

$8 : \frac{4}{5} =,$ $\quad 1 : \frac{7}{8} =,$ $\quad 16 : \frac{8}{15} =$

$12 : 2\frac{3}{7} =,$ $\quad 4 : 1\frac{16}{42} =,$ $\quad 32 : 8\frac{9}{45} =$

4. Λύστε τὰ ἑξῆς προβλήματα :

α) Τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς τάξεώς μας εἶναι 24 μαθηταί. Πόσους μαθητὰς ἔχει ἡ τάξις μας ;

β) Τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς Ε΄ τάξεως πῆραν συσσίτιο γιὰ ἕνα μῆνα 15 ὀκ. γάλα. Πόσο γάλα παίρνει ἡ τάξις τὸ μῆνα ;

γ) Τὰ $\frac{25}{44}$ τοῦ στατήρα κάρβουνα στοιχίζουν 40 χιλιάρικα. Πόσο στοιχίζει ὁ στατήρας ;

9. Διαίρεσις κλάσματος διὰ κλάσματος

Ἕνας πεζοπόρος βαδίζει τὰ $\frac{7}{10}$ τοῦ χιλιομέτρου σὲ $\frac{7}{60}$ τῆς ὥρας. Σὲ πόση ὥρα βαδίζει τὸ ἕνα χιλιόμετρο ;

Λύσις

Ἐδῶ γνωρίζομε τὴν τιμὴ τοῦ μέρους τῆς μονάδας καὶ ζητοῦμε τὴν τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδας. Θὰ κάμωμε ὡς ἐκ τούτου διαίρεσιν. Διαιρετέο θὰ ἔχωμε τὴν τιμὴ τοῦ μέρους τῆς μονάδας καὶ διαιρέτη τὸ μέρος, ἤτοι $\frac{7}{60} : \frac{7}{10}$.

Ἔχομε νὰ διαιρέσωμε κλάσμα διὰ κλάσματος. Θὰ λύσωμε τὸ πρόβλημα μὲ τὴν μέθοδο τῆς ἀναγωγῆς στὴν μονάδα. Καὶ ἔχομε :

Γνωρίζομε ὅτι τὰ $\frac{7}{10}$ τοῦ χιλιομέτρου τὰ βαδίζει σὲ $\frac{7}{60}$ τῆς ὥρας, τὸ $\frac{1}{10}$ τὸ βαδίζει σὲ $\frac{7}{60}$: 7 ἢ $\frac{7}{60 \times 7}$ καὶ τὰ $\frac{10}{10}$ χιλιομέτρου ἢ τὸ ἕνα χιλιόμετρο τὸ βαδίζει σὲ

$$\frac{7}{60 \times 7} \times 10 = \frac{7 \times 10}{60 \times 7}.$$

Βρίσκομε λοιπὸν ὅτι τὸ 1 χιλιόμετρο τὸ βαδίζει σὲ $\frac{7 \times 10}{60 \times 7}$ ὥρας.

Τὸ ἴδιο ὅμως πηλίκο βρίσκομε καὶ ἐὰν ἀντιστρέψωμε τοὺς ὅρους τοῦ διαιρέτου καὶ ἀντὶ διαιρέσεως κάμωμε πολλαπλασιασμό, ἤτοι :

$$\frac{7}{60} : \frac{7}{10} = \frac{7}{60} \times \frac{10}{7} = \frac{7 \times 10}{60 \times 7}.$$

Παρατηροῦμε λοιπὸν ὅτι ***γιὰ νὰ διαιρέσωμε κλάσμα διὰ κλάσματος πολλαπλασιάζομε τὸν διαιρετέο ἐπὶ τὸ ἀντίστροφο κλάσμα τοῦ διαιρέτου ἢ ἀντιστρέφομε τοὺς ὅρους τοῦ κλασματικοῦ διαιρέτου καὶ ἀντὶ διαιρέσεως κάνομε πολλαπλασιασμό.***

Παραδείγματα :

α) $\frac{5}{20} : \frac{3}{5} = \frac{5}{20} \times \frac{5}{3} = \frac{25}{60} = \frac{5}{12}$

β) $\frac{3}{4} : \frac{5}{18} = \frac{3}{4} \times \frac{18}{5} = \frac{54}{20} = 2\,\frac{7}{10}$

Ἀσκήσεις

1. Γράψετε μόνοι σας τρία προβλήματα διαιρέσεως κλασματικῶν.

2. Κάμετε τὶς ἑξῆς διαιρέσεις :

α΄) Ἀπὸ μνήμης :

$\frac{1}{3} : \frac{2}{3} =$

$\frac{3}{4} : \frac{1}{4} =$

$\frac{5}{12} : \frac{1}{6} =$

β΄) Γραπτῶς :

$\frac{5}{8} : \frac{2}{3} =$

$\frac{7}{12} : \frac{5}{9} =$

$\frac{15}{28} : \frac{7}{12} =$

3. Λύστε τὰ ἑξῆς προβλήματα :

1) Τὸ ἕνα δεύτερο $\left(\frac{1}{2}\right)$ τοῦ μέτρου τὸ χαρτὶ ἔχει $\frac{7}{10}$ τοῦ χιλιάρικου. Πόσο ἔχει τὸ ἕνα μέτρο;

2) Τὰ $\frac{3}{8}$ πήχ. τῆς κορδέλλας ἔχουν $\frac{9}{10}$ χιλ. Πόσο ἔχει ἡ μία πήχ.;

3) Δυὸ πεζοπόροι τὸ 1 χιλιόμετρο τὸ βαδίζουν σὲ $\frac{1}{5}$ τῆς ὥρας. Πόσα χιλιόμ. θὰ βαδίσουν σὲ $\frac{7}{10}$ τῆς ὥρας;

(Νὰ λυθοῦν καὶ μὲ τοὺς δύο τρόπους).

10. Διαίρεσις μικτοῦ διὰ κλάσματος

Τὰ $\frac{5}{8}$ πήχ. ἑνὸς ὑφάσματος ἀξίζουν $13\frac{1}{2}$ χιλ. Πόσο ἀξίζει ἡ 1 πήχ.;

Λύσις

Ἐδῶ ἔχομε νὰ διαιρέσωμε μικτὸ διὰ κλάσματος. Ἐφ' ὅσον γνωρίζομε πῶς διαιρεῖται κλάσμα διὰ κλάσματος τρέπομε τὸν μικτὸ σὲ κλάσμα καὶ ἔχομε νὰ διαιρέσωμε κλάσματα κατὰ τὸν γνωστὸ τρόπο, ἤτοι

$$13\frac{1}{2} : \frac{5}{8} = \frac{27}{2} : \frac{5}{8} = \frac{27}{2} \times \frac{8}{5} = \frac{27 \times 8}{2 \times 5}$$

$$= \frac{216}{10} = 21\frac{3}{5} \text{ χιλ.}$$

Ἑπομένως, γιὰ νὰ διαιρέσωμε μικτὸ διὰ κλάσματος . . . . (Νὰ συμπληρωθῇ ὑπὸ τοῦ μαθητοῦ).

11. Διαίρεσις κλάσματος ἢ μικτοῦ διὰ μικτοῦ

Νὰ βρῆτε μόνοι σας τί θὰ κάμωμε γιὰ νὰ διαιρέσωμε κλάσμα ἢ μικτὸ διὰ μικτοῦ καὶ νὰ γράψετε καὶ δύο προβλήματα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Οἱ 25 μαθηταὶ τῆς Ε' τάξεως ἔδωσαν ἀπὸ 1 $\frac{1}{2}$ χιλιάρικα γιὰ νὰ ἀγοράσουν τετράδια στοὺς ἀπόρους συμμαθητάς των. Ἂν τὸ ἕνα τετράδιο ἔχῃ $\frac{2}{5}$ τοῦ χιλιάρικου, πόσα τετράδια θ' ἀγοράσουν;

2. Μία ἐργάτρια ράβει ἕνα σακκὶ σὲ $\frac{7}{10}$ τῆς ὥρας. Πόσα σακκιὰ θὰ ράψη σὲ 7 ὧρες καὶ πόσες ὧρες θὰ κάμη γιὰ νὰ ράψη 18 σακκιά ;

3. Ἕνα αὐτοκίνητο καίει σὲ μιὰ ὥρα 1 $\frac{3}{20}$ ὀκ. βενζίνη. Πόση βενζίνη θὰ κάψη σὲ 6 $\frac{3}{10}$ ὧρες καὶ πόσες ὧρες θὰ τρέξη ἂν ἔχη στὸ ντεπόζιτό του 12 $\frac{4}{5}$ ὀκ. βενζίνη ;

12. Προβλήματα κλασματικῶν τὰ ὁποῖα λύονται μὲ δύο ἀναγωγές.

Οἱ 5 ὀκάδες τὰ φασόλια στοιχίζουν 20 χιλιάρικα. Πόσο ἀξίζουν τὰ $\frac{3}{4}$ *τῆς ὀκᾶς ;*

Λύσις

Ἐδῶ γνωρίζομε τὴν τιμὴ τῶν πολλῶν μονάδων καὶ ζητοῦμε τὴν τιμὴ μέρους τῆς μονάδας. Γιὰ νὰ λύσωμε τὸ πρόβλημα αὐτὸ θὰ σκεφθοῦμε ὡς ἑξῆς :

1. Θὰ βροῦμε πόσο ἀξίζει ἡ μία ὀκᾶ τὰ φασόλια, δηλ. θὰ διαιρέσωμε τὸ $20 : 5 = 4$.

2. Ἀφοῦ μάθαμε πόσο ἔχει μία ὀκᾶ, εὔκολα τώρα βρίσκομε μὲ τὴν μέθοδο τῆς ἀναγωγῆς στὴ μονάδα ἢ μὲ πολλαπλασιασμὸ πόσο ἀξίζουν τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς ὀκᾶς. Καὶ ἔχομε :

α) μὲ πολ)σμό : $4 \times \frac{3}{4} = \frac{12}{4} = 3$ χιλ.

β) μὲ τὴν ἀναγωγὴ στὴ μονάδα.

Ἡ 1 ὀκᾶ $= \frac{4}{4}$ ἀξίζουν 4 χιλ.
τὸ $\frac{1}{4}$ » $4 : 4 = \frac{4}{4}$
καὶ τὰ $\frac{3}{4}$ » $\frac{4}{4} \times 3 = \frac{12}{4} = 3$

Μὲ 12 $\frac{3}{10}$ *μέτρα ὕφασμα κάνομε 3 ὑποκάμισα. Πόσα ὑποκάμισα θὰ κάμωμε μὲ 24* $\frac{3}{5}$ *μέτρα ὕφασμα ;*

Λύσις

Καὶ ἐδῶ θὰ βροῦμε πρῶτα πόσα μέτρα ὕφασμα θέλομε γιὰ ἕνα ὑποκάμισο καὶ ἔπειτα πόσα ὑποκάμισα θὰ κάμωμε μὲ τοὺς $24\frac{3}{5}$ πήχ.

Καὶ αὐτὸ θὰ τὸ λύσωμε μὲ δυὸ ἀναγωγές.

(Νὰ λυθῆ ὑπὸ τοῦ μαθητοῦ).

Τὰ $\frac{3}{5}$ τοῦ χιλιάρικου εἶναι 600 δραχμές. Πόσες δραχμὲς εἶναι τὰ $\frac{7}{20}$ τοῦ χιλιάρικου;

Καὶ αὐτὸ θὰ λυθῆ μὲ δυὸ ἀναγωγές.

α) τὰ $\frac{3}{5}$ χιλ. εἶναι 600 δρχ.
τὸ $\frac{1}{5}$ » $600 : 3 = \frac{600}{3}$
καὶ τὰ $\frac{5}{5}$ » $\frac{600}{3} \times 5 = \frac{3000}{3} = 1000.$

β) Τὸ 1 χιλ. ἢ $\frac{5}{5}$ ἢ $\frac{20}{20}$ εἶναι 1000 δραχ.
τὸ $\frac{1}{20}$ » $\frac{1000}{20}$
καὶ τὰ $\frac{7}{20}$ » $\frac{1000 \times 7}{20} = 350$ δρχ.

Ἀλλὰ τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα θὰ βροῦμε ἐὰν λύσωμε τὸ πρόβλημα μὲ τὶς πράξεις.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Τὰ $\frac{3}{4}$ ὀκ. φασόλια ἀξίζουν $3\frac{3}{4}$ χιλ. Πόσο ἀξίζουν τὰ $\frac{5}{8}$ τῆς ὀκᾶς;

2. Τὸ $\frac{1}{4}$ δράμι τοῦ χρυσοῦ ἀξίζει 3 σελίνια. Πόσο ἀξίζουν τὰ $2\frac{3}{8}$ δράμ. τοῦ χρυσοῦ;

3. Σὲ $\frac{3}{3}$ τῆς ὥρας ἕνα αὐτοκίνητο τρέχει 21 χιλιόμετρα. Πόσα χιλιόμετρα θὰ τρέξη μὲ τὴν αὐτὴ ταχύτητα σὲ $\frac{7}{10}$ τῆς ὥρας;

4. Ἐρώτησαν ἕνα βοσκὸ πόσων χρονῶν εἶναι καὶ εἶπε:

Ἔχω τόσα χρόνια ὅσα εἶναι τὰ μισά μου πρόβατα καὶ τὰ μισὰ τῶν μισῶν μου ποὺ γίνονται ὅλα 60. Πόσων χρονῶν εἶναι ὁ βοσκὸς καὶ πόσων ὁ γυιός του ποὺ ἦταν $\frac{3}{5}$ τῶν χρόνων τοῦ πατέρα του ;

13. Πολλαπλασιασμὸς πολλῶν κλασμάτων

Ἔχομε νὰ πολλαπλασιάσωμε τὰ κλάσματα :

$$\frac{2}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{6} \times \frac{6}{8} =$$

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμε τὰ δύο πρῶτα κατὰ τὸν γνωστὸ τρόπο, ἔχομε $\frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{2 \times 3}{5 \times 4} = \frac{6}{20}$.

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμε τώρα τὸ γινόμενο $\frac{6}{20}$ ἐπὶ τὸ τρίτο κλάσμα, ἀφοῦ στὸν πολλαπλασιασμὸ μᾶς δίδονται δυὸ ἀριθμοί, θὰ ἔχωμε : $\frac{6}{20} \times \frac{4}{6} - \frac{6 \times 4}{20 \times 6} = \frac{24}{120}$. Καὶ ἐὰν τώρα τὸ γινόμενο αὐτὸ τὸ πολλαπλασιάσωμε ἐπὶ τὸ τελευταῖο κλάσμα θὰ ἔχωμε $\frac{24}{120} \times \frac{6}{8} = \frac{24 \times 6}{120 \times 8} = \frac{144}{960}$.

Ἀλλὰ τὸ αὐτὸ γινόμενο βρίσκομε ἐὰν πολλαπλασιάσωμε τοὺς ἀριθμητὰς καὶ τὸ γινόμενο θέσωμε ὡς ἀριθμητὴ καὶ ἔπειτα πολλαπλασιάσωμε τοὺς παρονομαστὰς καὶ τὸ γινόμενο αὐτῶν θέσωμε ὡς παρονομαστή, ἤτοι :

$$\frac{2}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{6} \times \frac{6}{8} = \frac{2 \times 3 \times 4 \times 6}{5 \times 4 \times 6 \times 8} = \frac{144}{960}$$

14. Γενικὰ προβλήματα κλασματικῶν ἀριθμῶν

α΄) *Ἀπὸ τὴ σχολική μας ζωή.*

1. Ἀπὸ τοὺς 120 μαθητὰς τοῦ σχολείου μας τὸ $\frac{1}{4}$ αὐτοῦ εἶναι ἄποροι καὶ δὲν πληρώνουν σχολικὸ ταμεῖο. Ἐὰν κάθε εὔπορος μαθητὴς πληρώνῃ 8 $\frac{3}{5}$ χιλ., πόσα χρήματα εἰσπράττει τὸ σχολικὸ ταμεῖο ;

2. Γιὰ μιὰ ἐκδρομὴ ποὺ θὰ κάμουν οἱ 65 μαθηταὶ τῆς Ε΄ τάξεως ἔδωσαν τὰ $\frac{2}{10}$ τῶν μαθητῶν ποὺ εἶναι πτωχότεροι ἀπὸ 3$\frac{1}{2}$ χιλ. ὁ ἕνας καὶ οἱ ὑπόλοιποι ἀπὸ 9 $\frac{3}{10}$ χιλ. Πόσα χρή-

ματα ἔχουν γιὰ τὴν ἐκδρομὴ καὶ πόσο στοιχίζει γιὰ τὸ καθένα ἀπὸ τὰ 64 παιδιὰ τὸ εἰσιτήριο μὲ αὐτοκίνητο ;

3. Στὴν ἐκδρομὴ οἱ δάσκαλοι ἀγόρασαν γιὰ τοὺς μαθητὰς ἀχλάδια, ὥστε ὁ κάθε μαθητὴς νὰ πάρη $\frac{3}{20}$ τῆς ὀκᾶς. Πόσα ἀχλάδια ἀγόρασαν καὶ πόσα θὰ πληρώσουν ἂν ἡ μιὰ ὀκᾶ τὰ ἀχλάδια εἶχαν 5 χιλιάρικα ;

β') Ἀπὸ τὴν κοινωνική μας ζωή.

1. Μιὰ μητέρα ἀγόρασε $3\frac{1}{4}$ πήχ. ὕφασμα πρὸς 28 χιλιάρικα τὴν πήχ. γιὰ τὸ φόρεμα τῆς κόρης της καὶ $2\frac{5}{8}$ πήχ. ἄλλου ὑφάσματος γιὰ κοστούμι τοῦ γυιοῦ της πρὸς $48\frac{1}{2}$ χιλ. τὴν πήχ Πόσα χρήματα κάνουν τὰ ὑφάσματα καὶ πόσα ρέστα πῆρε ἀπὸ τὸν ἔμπορο, στὸν ὁποῖο ἔδωσε 220 χιλιάρικα ;

2. Ἀπὸ ἕνα τόπι ὕφασμα 60 πήχ. τὴν πρώτη ἡμέρα ἐπωλήθησαν τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ ὑφάσματος καὶ τὴν ἄλλη ἡμέρα τὰ $\frac{2}{5}$ τοῦ ὑφάσματος. Πόσο ὕφασμα ἔμεινε ;

3. Ἕνας ὑπάλληλος ἀγόρασε $4\frac{3}{8}$ πήχ. ὕφασμα πρὸς 88 χιλιάρικα τὴν πήχ. καὶ συμφώνησε μὲ τὸν ἔμπορο νὰ τὰ πληρώση σὲ πέντε ἑβδομαδιαῖες ἴσες δόσεις. Πόσο θὰ πληρώνη τὴν ἑβδομάδα ;

4. Ἕνας ποδηλάτης τρέχει 135 χιλιόμετρα σὲ $3\frac{1}{3}$ ὧρες. Πόσα χιλιόμετρα θὰ τρέξη μὲ τὴν αὐτὴ ταχύτητα σὲ $2\frac{1}{2}$ ὧρ. ;

5. Ἕνας γεωργὸς καὶ ἕνας κτηνοτρόφος ἄλλαξαν τὰ εἴδη τους ὡς ἑξῆς: Ὁ γεωργὸς ἔδωσε στὸν κτηνοτρόφο 160 ὀκ. καλαμπόκι τὸ ὁποῖο εἶχε $1\frac{9}{10}$ χιλ. ἡ ὀκᾶ, ὁ δὲ κτηνοτρόφος ἔδωσε στὸ γεωργὸ τυρί, τὸ ὁποῖο εἶχε $8\frac{2}{5}$ χιλ. ἡ ὀκᾶ. Πόσο τυρὶ ἔδωσε ὁ κτηνοτρόφος ;

6. Ἕνας ἀφῆκε στὴ διαθήκη του νὰ πάρη ἡ γυναῖκα του τὰ $\frac{3}{8}$ τῆς περιουσίας του, τὸ $\frac{1}{5}$ τῆς περιουσίας νὰ δοθῆ στὸ ὀρφανοτροφεῖο καὶ τὸ ὑπόλοιπο νὰ τὸ πάρη ἡ κόρη του, ἡ ὁποία

καὶ ἐπῆρε 6.800.000 δραχ. Πόση ἦταν ἡ περιουσία του, πόσα πῆρε ἡ γυναῖκα του καὶ πόσα τὸ ὀρφανοτροφεῖο ;

7. Ἕνας ποδηλάτης σὲ $3 \frac{1}{2}$ ὧρες τρέχει 105 χιλιόμετρα. Πόσα χιλιόμετρα μὲ τὴν ἴδια ταχύτητα θὰ τρέξῃ σὲ 20^{π} λεπτὰ τῆς ὥρας ;

8. Ἕνας ἐργάτης σὲ μιὰ ἡμέρα τελειώνει τὰ $\frac{2}{9}$ ἑνὸς ἔργου. Σὲ πόσες ἡμέρες θὰ τελειώσῃ τὸ ὑπόλοιπο τοῦ ἔργου καὶ σὲ πόσες τὸ μισὸ αὐτοῦ ;

9. Τὰ $\frac{7}{12}$ ἑνὸς βαρελιοῦ χωρᾶνε 350 ὀκ. κρασί. Πόσες ὀκάδες κρασὶ χωράει τὸ βαρέλι καὶ πόσες ὀκάδες ἔχει μέσα ὅταν εἶναι γεμᾶτα τὰ $\frac{17}{20}$ τοῦ βαρελιοῦ ;

10. Τὰ $\frac{3}{4}$ κάποιου ἀριθμοῦ καὶ τὰ $\frac{2}{5}$ αὐτοῦ μᾶς δίνουν τὸν ἀριθμὸ 92. Ποιός εἶναι ὁ ἀριθμὸς ποὺ ζητᾶμε καὶ πόσα εἶναι τὰ $\frac{7}{12}$ αὐτοῦ ;

ΒΙΒΛΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΔΙΑ ΤΗΝ ΣΤ΄ ΤΑΞΙΝ

ΜΕΡΟΣ Α΄

ΠΕΡΙ ΜΕΘΟΔΩΝ

ΠΕΡΙ ΠΟΣΩΝ

Ὅταν λέμε ποσόν, ἐννοοῦμε τὸ κάθε τι τὸ ὁποῖο μπορεῖ καὶ νὰ αὐξηθῆ (νὰ γίνη περισσότερο) καὶ νὰ ἐλαττωθῆ (νὰ γίνη λιγώτερο).

Παραδείγματα :

1. Ἡ τάξις τῶν μαθητῶν εἶναι ποσόν, γιατὶ οἱ μαθηταὶ γίνονται περισσότεροὶ ἢ καὶ γίνονται λιγώτεροι.

2. Ἕνα καλάθι μῆλα εἶναι ποσόν, γιατὶ ἐὰν βάλωμε καὶ ἄλλα μῆλα θὰ γίνουν περισσότερα ἢ ἐὰν βγάλωμε μῆλα θὰ γίνουν λιγώτερα.

Γενικὰ οἱ λέξεις ὀκάδες, δραχμές, ἐργάται, ὧρες κ.λ.π. εἶναι ποσά, γιατὶ καὶ αὐξάνονται καὶ ἐλαττώνονται.

Ἀσκήσεις

1. Γιατί οἱ λέξεις ἐργάται, ἡμέρες, λίρες εἶναι ποσά ;

2. Βρῆτε λέξεις οἱ ὁποῖες νὰ ἐκφράζουν ποσὸν καὶ νὰ δικαιολογήσετε τοῦτο.

ΣΧΕΣΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΔΥΟ ΠΟΣΩΝ

Στὰ προβλήματα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ τῆς διαιρέσεως τῶν ἀκεραίων, δεκαδικῶν, κλασματικῶν κ.λ.π. ἀριθμῶν εἴχαμε πάντοτε δυὸ ποσὰ καὶ μὲ τοὺς ἀριθμοὺς τῶν ποσῶν (τὶς τιμὲς τῶν ποσῶν) ἐκάναμε τὴν πρᾶξιν. Ποτὲ ὅμως δὲν ἐξετάσαμε ἂν δυὸ ποσὰ ἔχουν καμμία σχέσιν ἀναμεταξύ τους. Ἂς ἐξετάσωμε λοιπόν : 1) ἂν δυὸ ποσὰ ἔχουν σχέσιν ἀναμεταξύ τους, 2) ποιὰ σχέσιν ἔχουν, καὶ 3) ἂν ὅλα τὰ ποσὰ ἀνὰ δυὸ ἔχουν τὴν αὐτὴ σχέσιν.

α΄. Ποσὰ ἀνάλογα

1. Ἡ μιὰ ὀκᾶ τὰ φασόλια ἔχει 6.000 δρχ. Πόσο ἔχουν οἱ 5 ὀκ. ;

Ἐπειδὴ γνωρίζομε τὴν τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδας (ὀκᾶς) καὶ ζητοῦμε τὴν τιμὴ τῶν πολλῶν μονάδων (ὀκάδων) θὰ κάμωμε πολλαπλασιασμὸ καὶ ἔχομε : 6.000 × 5 = 30.000 δραχ.

Ὥστε οἱ 5 ὀκ. ἔχουν 30.000 δραχ.

Στὸ πρόβλημα αὐτὸ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἔχομε δυὸ ποσά : ὀκάδες καὶ δραχμές. Ἀκόμη ἔχομε καὶ τὶς τιμὲς τῶν ποσῶν.

Καὶ πρῶτα εἴχαμε τὶς τιμὲς 1 ὀκ. καὶ 6.000 δραχ., τὶς ὁποῖες λέμε *ἀντίστοιχες* τιμὲς τῶν δυὸ ποσῶν. Ἀκόμη εἴχαμε μιὰ ἄλλη τιμὴ τοῦ ποσοῦ ὀκάδες, τὴν τιμὴ 5 καὶ μετὰ τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος βρήκαμε μιὰ ἄλλη τιμή, τοῦ ποσοῦ δραχμὲς τὴν 30.000 ἡ ὁποία εἶναι ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τῶν 5 ὀκ., γιατὶ 5 ὀκ. ἔχουν 30.000 δραχ.

Ἐὰν γράψωμε τὶς ἀντίστοιχες τιμὲς τῶν ποσῶν ἔχομε :

1 ὀκ. ἔχει 6.000
5 » ἔχουν 30.000

Παρατηροῦμε ὅτι ἡ τιμὴ 5 τοῦ ποσοῦ τῶν ὀκάδων καὶ ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ 30.000 βρίσκονται ἀπὸ τὶς πρῶτες ἀντίστοιχες τιμὲς 1 καὶ 6.000 ὅταν καὶ ἡ μιὰ τιμὴ καὶ ἡ ἄλλη πολλαπλασιασθοῦν ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸ 5, δηλ.

1 × 5 = 5
καὶ 6.000 × 5 = 30.000

Ἑπομένως βλέπουμε ὅτι, ὅταν ἡ τιμὴ 1 τοῦ ποσοῦ τῶν ὀκάδων ἐπολλαπλασιάσθη ἐπὶ τὸν ἀριθμὸ 5 καὶ ἔγινε 5 ὀκ. καὶ ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ 6.000 τοῦ ποσοῦ τῶν δραχμῶν ἐπολλαπλασιάσθη ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸ 5 καὶ ἔγινε 30.000. Συμπεραίνομε λοιπὸν ὅτι τὰ ποσὰ ὀκάδες καὶ δραχμὲς ἔχουν σχέσιν μεταξύ των καὶ μάλιστα, ὅταν ἡ τιμὴ τοῦ ἑνὸς ποσοῦ (τῶν ὀκάδων) πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ ἕναν ἀριθμὸ (ὅποιον θέλομε), καὶ ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ ἄλλου ποσοῦ (τῶν δραχμῶν) θὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμό.

2. ***Οἱ 3 ὀκάδες τὰ φασόλια ἔχουν 15.000 δραχ. Πόσο ἀξίζει ἡ μιὰ ὀκᾶ ;***

Ἐδῶ γνωρίζομε τὴν τιμὴ τῶν πολλῶν μονάδων καὶ ζητοῦμε τὴν τιμὴ τῆς μιᾶς. Θὰ κάμωμε ὡς ἐκ τούτου διαίρεσιν, ἤτοι 15.000 : 3 = 5.000.

Καὶ ἔχομε : οἱ 3 ὀκ. ἀξίζουν 15.000
ἡ 1 » ἀξίζει 5.000

Καὶ στὸ πρόβλημα αὐτὸ ἔχομε δύο ποσά, ὀκάδες καὶ δραχ. καὶ ἀκόμη τὶς ἀντίστοιχες τιμὲς τῶν ποσῶν αὐτῶν 3 καὶ 15.000, μετὰ δὲ τὴν λύσιν βρήκαμε ἄλλες ἀντίστοιχες τιμὲς τὶς 1 τοῦ ποσοῦ τῶν ὀκάδων καὶ τὶς 5.000 τοῦ ποσοῦ τῶν δραχ. Δηλ. ἔχομε : 3 ὀκ. ἀξίζουν 15.000 δραχ.

ἢ 1 » » 5.000 »

Παρατηροῦμε ὅτι ἡ τιμὴ 1 τῶν ὀκάδων καὶ ἡ τιμὴ 5.000 τῶν δραχμῶν βρίσκονται ἀπὸ τὶς ἀντίστοιχες τιμὲς ποὺ εἶναι 3 ὀκ. καὶ 15.000 δρχ. ὅταν ἡ μία καὶ ἡ ἄλλη διαιρεθοῦν μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸ 3, δηλ. 3 : 3 = 1

15.000 : 3 = 5.000

Συνεπῶς τὰ ποσὰ ὀκάδες καὶ δραχμὲς ἔχουν τὴν ἑξῆς σχέσιν μεταξύ των : Ὅταν ἡ τιμὴ τοῦ ἑνὸς ποσοῦ (τῶν ὀκάδων) διαιρεθῆ μὲ ἕναν ἀριθμό, καὶ ἡ ἀντίστοιχός της τιμὴ τοῦ ἄλλου ποσοῦ (τῶν δραχμῶν) θὰ διαιρεθῆ μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμό.

Τὴν αὐτὴ σχέσιν ἔχουν καὶ ἄλλα ποσὰ ἀναμεταξύ τους ὅπως πῆχες καὶ δραχμές, ἡμέρες ἐργασίας καὶ δρχ. καὶ ἄλλα.

Τὴν σχέσιν αὐτὴ ποὺ βρήκαμε μεταξὺ δύο ποσῶν, ὅπως τὰ προηγούμενα, τὴν ἐκφράζομε ὡς ἑξῆς : Ὅταν ἡ τιμὴ τοῦ ἑνὸς ποσοῦ πολλαπλασιασθῆ ἢ διαιρεθῆ μὲ τὸν ἴδιο ἀριθμό, καὶ ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ ἄλλου ποσοῦ θὰ πολλαπλασιασθῆ ἢ θὰ διαιρεθῆ μὲ τὸν ἴδιο ἀριθμό.

Τὰ ποσὰ τὰ ὁποῖα ἔχουν ἀνὰ δύο τὴν προηγουμένη σχέσιν ἀναμεταξύ τους λέγονται *ἀνάλογα*.

Ἑπομένως, ***δύο ποσὰ λέγονται ἀνάλογα ὅταν ἡ τιμὴ τοῦ ἑνὸς ποσοῦ πολλαπλασιασθῆ ἢ διαιρεθῆ μὲ ἕναν ἀριθμὸ καὶ ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ ἄλλου ποσοῦ θὰ πολλαπλασιασθῆ ἢ θὰ διαιρεθῆ μὲ τὸν ἴδιο ἀριθμό.***

β΄. Ποσὰ ἀντίστροφα ἢ ἀντιστρόφως ἀνάλογα

1. ***Ἕνας ἐργάτης κάνει μιὰ ἐργασία σὲ 4 ἡμέρες. Ἂν πάρῃ καὶ ἕναν ἄλλον ἐργάτη, σὲ πόσες ἡμέρες θὰ τελειώσουν τὴν ἐργασία ;***

Ἐδῶ γνωρίζομε τὴν τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδας καὶ ζητοῦμε τὴν τιμὴ τῶν πολλῶν μονάδων. Ἑπομένως πρέπει νὰ κάμωμε πολλαπλασιασμὸ γιὰ νὰ βροῦμε, ὅτι οἱ 2 ἐργάται θὰ τελειώσουν τὸ ἔργο τους σὲ 4 × 2 ἡμ. = 8 ἡμ.

Ἂν ὅμως σκεφθοῦμε καλύτερα θὰ παρατηρήσωμε, ὅτι αὐτὸ δὲν εἶναι σωστό, γιατὶ ἀφοῦ μόνος του ὁ ἕνας ἐργάτης τελειώνει τὴν ἐργασία σὲ 4 ἡμέρες, εἶναι φανερὸ ὅτι στὶς 2 ἡμέρες τελειώνει τὸ μισὸ τοῦ ἔργου. Ἀφοῦ ὅμως πῆρε καὶ ἄλλον ἐργάτη καὶ ἔγιναν 2, ὁ καθένας θὰ κάμη τὸ μισὸ τῆς ἐργασίας σὲ 2 ἡμέρες καὶ ἐπομένως ὁλόκληρη τὴν ἐργασία θὰ τὴν τελειώσουν σὲ 2 ἡμέρες. Βρίσκομε λοιπὸν ὅτι :

ὁ 1 ἐργάτης κάνει	τὴν ἐργασία		σὲ 4 ἡμ.
οἱ 2 ἐργάται κάνουν	»	»	σὲ 2 ἡμ.

Στὸ πρόβλημα αὐτὸ τὰ ποσὰ εἶναι ἐργάται καὶ ἡμέρες, παρατηροῦμε δὲ ὅτι, ὅταν ἡ τιμὴ 1 τοῦ ποσοῦ τῶν ἐργατῶν ἐπολλαπλασιάσθη ἐπὶ τὸν ἀριθμὸ 2 καὶ ἔγινε 1 × 2 = 2, ἡ ἀντίστοιχός της τιμὴ 4 τοῦ ποσοῦ τῶν ἡμερῶν διαιρέθη διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 2 καὶ ἔγινε 4 : 2 = 2 ἡμέρες. Δηλ. ὅταν ἡ τιμὴ τοῦ ἑνὸς ποσοῦ πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἕναν ἀριθμό, ἡ τιμὴ τοῦ ἄλλου διαιρεῖται μὲ τὸν ἴδιο ἀριθμό.

2. ***Τρεῖς ἐργάται τελειώνουν μιὰ ἐργασία σὲ 10 ἡμέρες. Ὁ ἕνας ἐργάτης σὲ πόσες ἡμέρες θὰ τελειώση τὴν ἐργασία ;***

Τὸ πρόβλημα μᾶς λέγει :

οἱ 3	ἐργ.	τελ.	τὴν	ἐργ.	σὲ 10 ἡμ.
ὁ 1	»	»	»	»	» X »

Ἀπὸ τὴν κατάστρωσιν αὐτὴ τοῦ προβλήματος παρατηροῦμε ὅτι γνωρίζομε τὴν τιμὴ τῶν πολλῶν μονάδων καὶ ζητοῦμε τὴν τιμὴ τῆς μιᾶς.

Συνεπῶς πρέπει νὰ κάμωμε διαίρεσιν μερισμοῦ καὶ ἐὰν τὴν κάμωμε θὰ βροῦμε, ὅτι ὁ ἕνας ἐργάτης θὰ τελειώση τὴν ἐργασία σὲ $3\frac{1}{3}$ ἡμέρες. Ἀλλὰ τοῦτο δὲν εἶναι ὀρθόν.

Γιατὶ ἂν ὑποθέσωμε ὅτι οἱ 3 ἐργάται τελειώνουν μιὰ ἐργασία σὲ μιὰ ἡμέρα ὁ ἕνας ἐργάτης θὰ τελειώση τὴν ἴδια ἐργασία σὲ 3 ἡμέρες.

Ἔτσι καὶ στὸ πρόβλημά μας ὁ ἕνας ἐργάτης, γιὰ νὰ τελειώση τὴν ἐργασία τὴν ὁποία κάνουν οἱ 3 ἐργάται σὲ 10 ἡμέρες δὲν θὰ χρειασθῆ ὅπως βρήκαμε, $3\frac{1}{3}$ ἡμέρες, ἀλλὰ τριπλάσιες ἡμέρες. Δηλ.

10 ἡμ. × 3 = 30 ἡμέρες

Καὶ ἔχομε :

3 ἐργ. τελ. τὴν ἐργ. σὲ 10 ἡμ.
1 » » » » » 30 ἡμ.

Καὶ στὸ πρόβλημα αὐτὸ παρατηροῦμε ὅτι, ὅταν ἡ τιμὴ τῶν 3 ἐργατῶν διαιρέθη μὲ τὸν ἀριθμὸ 3 καὶ ἔγινε 3 : 3 = 1, ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ ποσοῦ τῶν ἡμερῶν ἐπολλαπλασιάσθη ἐπὶ τὸν ἴδιο ἀριθμὸ 3 καὶ ἔγινε 3 × 10 = 30. Δηλ. ὅταν ἡ τιμὴ τοῦ ἑνὸς ποσοῦ διαιρεῖται μὲ ἕναν ἀριθμὸ ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ ἄλλου ποσοῦ πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν ἴδιο ἀριθμό.

Καὶ στὰ δύο αὐτὰ προβλήματα, παρατηροῦμε ὅτι, ὅταν ἡ τιμὴ τοῦ ἑνὸς ποσοῦ πολλαπλασιασθῆ ἢ διαιρεθῆ μὲ τὸν ἴδιο ἀριθμό, ἡ τιμὴ τοῦ ἄλλου ποσοῦ θὰ διαιρεθῆ ἢ θὰ πολλαπλασιασθῆ μὲ τὸν ἴδιο ἀριθμό.

Τὰ ποσὰ τὰ ὁποῖα ἔχουν ἀνὰ δυὸ τὴν σχέσιν αὐτὴ λέγονται *ἀντίστροφα ἢ ἀντιστρόφως ἀνάλογα.*

Ὥστε, ἀντίστροφα ἢ ἀντιστρόφως ἀνάλογα ποσὰ λέγονται τὰ ποσὰ τὰ ὁποῖα, ὅταν ἡ τιμὴ τοῦ ἑνὸς πολλαπλασιασθῆ ἐπὶ ἕναν ἀριθμὸ καὶ ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ ἄλλου ποσοῦ θὰ διαιρεθῆ διὰ τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ, ἢ ὅταν ἡ τιμὴ τοῦ ἑνὸς διαιρεθῆ δι' ἑνὸς ἀριθμοῦ, ἡ τιμὴ τοῦ ἄλλου θὰ πολλαπλασιασθῆ ἐπὶ τὸν ἴδιο ἀριθμό.

γ'. Ποσὰ τῶν ὁποίων ἡ σχέσις ἐξαρτᾶται ἀπὸ τρίτο ποσὸ

1. Ἕνα αὐτοκίνητο σὲ μιὰ ὥρα τρέχει 40 χιλιόμετρα. Πόσα χιλιόμετρα τρέχει σὲ 2 ὧρες;

Εὔκολα βρίσκομε ὅτι σὲ δυὸ ὧρες θὰ τρέξη 80 χιλιόμετρα. Ἀλλὰ γιὰ νὰ γίνη αὐτὸ πρέπει τὸ αὐτὸ αὐτοκίνητο νὰ τρέχη μὲ τὴν ἰδία ταχύτητα, γιατὶ ἂν αὐξήση τὴν ταχύτητα θὰ τρέξη περισσότερα χιλιόμετρα στὶς 2 ὧρες ἢ ἐὰν τὴν ἐλαττώση θὰ τρέξη λιγώτερα. Ἑπομένως τὰ ποσὰ *χρόνος* καὶ *διάστημα* (ἀπόστασις) ἐξαρτῶνται ἀπὸ τὸ τρίτο ποσὸ τὴν *ταχύτητα*, ἡ ὁποία πρέπει νὰ εἶναι πάντοτε σταθερὰ γιὰ νὰ ἔχουν σχέσιν τὰ ποσὰ καὶ νὰ εἶναι ἀνάλογα.

2. Τὰ ποσὰ *ἐργάται* καὶ *ἡμέρες* εἴπαμε ὅτι εἶναι ἀντίστροφα. Γιὰ νὰ ἔχουν ὅμως αὐτὴ τὴν σχέσιν, πρέπει οἱ ἐργάται νὰ ἐργάζωνται τὶς αὐτὲς ὧρες τὴν ἡμέρα, γιατὶ ἂν ἐργασθοῦν περισσότερο θὰ τελειώσουν τὴν ἐργασία τους σὲ λιγώτερες ἡμέρες ἢ ὧρες καὶ ἀντιθέτως. Ἑπομένως τὰ ποσὰ ἐργάται καὶ

ἡμέρες ἐξαρτῶνται ἀπὸ τὸ τρίτο ποσὸ *ὧρες*, τὸ ὁποῖο πρέπει πάντοτε νὰ εἶναι τὸ ἴδιο γιὰ νὰ εἶναι τὰ ποσὰ ἀντίστροφα.

δ΄. Ποσὰ τὰ ὁποῖα δὲν ἔχουν σχέσιν μεταξύ τους

Ἄς πάρωμε τὰ ποσὰ *ἀνάστημα* καὶ *ἡλικία* τοῦ ἀνθρώπου. Αὐτά, ἂν τὰ ἐξετάσωμε, δὲν ἔχουν καμμιὰ σχέσιν μεταξύ τους. Γιατὶ ἂν παραδεχθοῦμε ὅτι εἶναι ἀνάλογα, τότε τὸ ἀνάστημα τοῦ ἀνθρώπου πρέπει νὰ αὐξάνῃ σὲ ὅλη του τὴν ζωή, ἐνῶ εἶναι φυσικό, ὅτι ὕστερα ἀπὸ ὡρισμένη ἡλικία τὸ ἀνάστημα δὲν αὐξάνει πλέον. Ἀλλὰ καὶ τότε ποὺ τὸ ἀνάστημα τοῦ ἀνθρώπου αὐξάνει (0 ἔτη—25 ἔτη) δὲν εἶναι δυνατὸ νὰ παραδεχθοῦμε ὅτι αὐξάνει ἀνάλογα μὲ τὴν ἡλικία. Γιατί, ἐνῶ στὸν ἕνα χρόνο δυνατὸν νὰ αὐξηθῇ 10 ἑκατοστά, τὸν ἄλλο χρόνο νὰ ἀναπτυχθῇ 8 ἑκατοστὰ ἢ 12 κ.λ.π. Ἑπομένως τὰ ποσὰ αὐτὰ δὲν ἔχουν καμμία σχέσιν ἀναμεταξύ τους.

Ἀσκήσεις

1. Γράψετε δυὸ προβλήματα μὲ ποσὰ ἀνάλογα καὶ δυὸ μὲ ποσὰ ἀντίστροφα.

2. Βρῆτε ποσὰ ἀντίστροφα καὶ δικαιολογῆστε τὸ γιατί.

3. Βρῆτε ποσὰ ἀνάλογα καὶ ἀντίστροφα, τὰ ὁποῖα νὰ ἐξαρτῶνται ἀπὸ τρίτα ποσά.

4. Ἀπὸ ποιό ποσὸ ἐξαρτῶνται τὰ ποσά : Στρατιῶται καὶ ἡμερησία τροφή, ἐργασία καὶ ἡμερομίσθιο ;

ΣΥΓΚΡΙΣΙΣ ΤΩΝ ΠΟΣΩΝ

Γιὰ νὰ βροῦμε τὴν σχέσιν μεταξὺ δύο ποσῶν κάνομε μίαν σκέψιν ἢ μίαν ἐργασία.

Ἡ ἐργασία αὐτὴ λέγεται *σύγκρισις τῶν ποσῶν*.

Ἡ ἐργασία ἢ ἡ σκέψις αὐτὴ πρέπει, γιὰ εὐκολία μας, νὰ γίνεται μὲ μικροὺς ἀριθμοὺς καὶ ὡς ἑξῆς :

1. Σύγκρισις ὀκάδων καὶ δραχμῶν

1 ὀκ. 5.000
2 » X $5.000 \times 2 = 10.000$

ἄρα τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα.

2. Ἡμερῶν καὶ δραχμῶν

1 ἐργ. σὲ 1 ἡμ. παίρνει 12.000
» » » 3 » » X 12.000 × 3 = 36.000
ἄρα τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα.

3. Ἐργατῶν καὶ στρεμμάτων

1 ἐργ. (σὲ 1 ἡμ.) σκάβει 2 στρέμ.
2 » » » σκάβουν X » 2 × 2 = 4
ἄρα τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα.

4. Ἐργατῶν καὶ ἡμερῶν

1 ἐργ. σὲ 2 ἡμ. κάνει 1 ἔργον
2 » » X » » » » 2 : 2 = 1 ἡμ.
ἄρα τὰ ποσὰ εἶναι ἀντίστροφα.

Ἀσκήσεις

Νὰ κάνετε συγκρίσεις ποσῶν καὶ νὰ βρῆτε ἂν εἶναι ἀνάλογα ἢ ἀντίστροφα.

ΠΕΡΙ ΜΕΘΟΔΩΝ

Γενικὰ ***μέθοδος*** εἶναι ἕνας τρόπος μὲ τὸν ὁποῖο ἐπιτυγχάνομε τὸ σκοπό μας.

Καὶ ἐδῶ μέθοδο ἐννοοῦμε ἕνα γενικὸ τρόπο μὲ τὸν ὁποῖο λύομε τὰ διάφορα προβλήματα, τὰ ὁποῖα ὁμοιάζουν. Μεθόδους ἔχομε πολλές.

ΑΠΛΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΤΡΙΩΝ

1. Γιὰ 5 ὀκ. ζάχαρη ἐδώσαμε 45.000 δραχμές. Πόσες δρχ. θὰ δώσωμε γιὰ 8 ὀκάδ.;

Λύσις

Γιὰ νὰ λύσωμε τὸ πρόβλημα πρέπει νὰ σκεφθοῦμε ὡς ἑξῆς: Ἀφοῦ γιὰ 5 ὀκ. ζάχαρη ἐδώσαμε 45.000, γιὰ μιὰ ὀκᾶ θὰ δώσωμε 45.000 : 5 = 9.000 καὶ ἀφοῦ βροῦμε ὅτι ἡ μιὰ ὀκᾶ ἀξίζει 9.000 δρχ., οἱ 8 ὀκάδες θὰ ἀξίζουν 9.000 × 8 = 72.000.

Παρατηροῦμε λοιπόν, ὅτι μὲ τὴν μέθοδο τῆς ἀναγωγῆς στὴ μονάδα καὶ μὲ μιὰ διαίρεσιν καὶ ἕνα πολλαπλασιασμὸ ἐλύσαμε τὸ πρόβλημα, ἀφοῦ πρῶτα βρήκαμε τὴν τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδας καὶ ἔπειτα τὴν τιμὴ τῶν πολλῶν μονάδων.

Ἀλλὰ γιὰ τὸ πρόβλημα αὐτὸ σκεπτόμεθα καὶ ὡς ἑξῆς:

Μᾶς δόθηκαν δύο ποσά, ὀκάδες καὶ δραχμές. Μᾶς δόθηκαν ἀκόμη, μία τιμὴ τοῦ ποσοῦ τῶν ὀκάδων (5) καὶ μία ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ ποσοῦ τῶν δραχμῶν (45.000). Μᾶς δόθηκε ἀκόμη μία ἄλλη τιμὴ τοῦ ποσοῦ τῶν ὀκάδων (8) καὶ ζητοῦμε νὰ βροῦμε τὴν ἀντίστοιχό της τιμὴ ἀπὸ τὸ ἄλλο ποσὸ τῶν δραχμῶν, ἡ ὁποία εἶναι *ἄγνωστος* καὶ τὴν παραστάνομε (τὴν γράφομε) μὲ τὸ γράμμα X, μὲ τὸ ὁποῖο παριστάνομε κάθε ἄγνωστο ἀριθμό, δηλ. κάθε ἀριθμὸ τὸν ὁποῖο ἐπιδιώκομε νὰ βροῦμε με τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος.

Γιὰ τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς:

Κάνομε τὴν κατάστρωσιν τοῦ προβλήματος, ἡ ὁποία, ἐὰν προσέξωμε, θὰ παρατηρήσωμε ὅτι εἶναι ἡ ἐπανάληψις τοῦ προβλήματος. Καὶ ἔχομε:

α) Κατάστρωσις:

$$\begin{array}{lllll} \text{Οἱ} & \dfrac{5}{8} & \text{ὀκ. ἔχουν} & \dfrac{45.000}{X} & \text{δραχ.} \\ » & & » & & \end{array}$$

Στὴν κατάστρωσιν χωρίζομε μὲ ὁριζόντια γραμμὴ τὶς τιμὲς κάθε ποσοῦ, ὥστε νὰ σχηματίζωνται δύο κλάσματα, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ ἕνα θὰ ἔχῃ παρονομαστὴ τὸν ἄγνωστο X.

Ἔπειτα συγκρίνομε τὰ ποσὰ γιὰ νὰ βροῦμε ἂν εἶναι ἀνάλογα ἢ ἀντίστροφα. Ἡ σύγκρισις θὰ γίνεται πάντοτε μὲ μικροὺς ἀριθμοὺς γιὰ εὐκολία.

	ὀκάδες	δραχμὲς	
β) Σύγκρισις:	1	6	
	2	X	6 × 2 = 12 δραχ.

Ἀπὸ τὴν σύγκρισιν βρίσκομε ὅτι τὰ ποσὰ ὀκάδες καὶ δραχμὲς εἶναι ἀνάλογα, γιατὶ ὅταν ἡ τιμὴ τῶν ὀκάδων ἐπολλαπλασιάσθη μὲ τὸν ἀριθμὸ 2 καὶ ἔγινε 1 × 2 = 2, καὶ ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τῶν 6 δρχ. ἐπολλαπλασιάσθη ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸ 2 καὶ ἔγινε 6 × 2 = 12.

Μετὰ τὴν σύγκρισιν προχωροῦμε στὴν λύσιν τοῦ προβλήματος. Ἀπὸ τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος διὰ τῆς ἀναγωγῆς στὴ μονάδα βρήκαμε ὅτι οἱ 8 ὀκάδες ἀξίζουν 9.000 × 8 = 72.000. Ἀλλὰ τὸ 9.000 τὸ βρήκαμε ἀπὸ τὴν διαίρεσιν τοῦ 45.000 : 5 = 9.000.

Ἑπομένως εἴχαμε $\frac{45.000 \times 8}{5} = 72.000$ ἢ $45.000 \times \frac{8}{5} = 72.000$.

Τὸ αὐτὸ ὅμως ἀποτέλεσμα θὰ ἔχωμε ἀπὸ τὴν κατάστρωσιν τοῦ προβλήματος μὲ πρακτικὸ τρόπο ἐὰν πολλαπλασιάσωμε τὸν ὑπεράνω τοῦ ἀγνώστου X ἀριθμὸ (45.000) ἐπὶ τὸ ἀπέναντι κλάσμα $\frac{5}{8}$ ἀντεστραμμένο $\left(\frac{8}{5}\right)$.

Καὶ ἔχομε: $X = 45.000 \times \frac{8}{5} = \frac{45.000 \times 8}{5} = 72.000$.

Ὅλα τὰ ὅμοια προβλήματα τὰ ὁποῖα ἔχουν τὰ ποσά τους ἀνάλογα λύονται κατὰ τὸν ἴδιο τρόπο, ἤτοι μετὰ τὴν κατάστρωσιν τοῦ προβλήματος καὶ τὴν σύγκρισιν τῶν ποσῶν, ***γιὰ νὰ βροῦμε τὸν ἄγνωστο (X) πολλαπλασιάζομε τὸν ὑπεράνω τοῦ X ἀριθμὸ ἐπὶ τὸ ἀπέναντι κλάσμα ἀντεστραμμένο γιατὶ τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα.***

2. Οἱ 5 ἐργάται τελειώνουν ἕνα ἔργο σὲ 12 ἡμέρες. Οἱ 6 ἐργάται σὲ πόσες ἡμέρες θὰ τελειώσουν τὸ ἔργο;

Λύσις: Κατ' ἀρχὰς ἂς λύσωμε τὸ πρόβλημα μὲ τὴν μέθοδο τῆς ἀναγωγῆς στὴ μονάδα. Πρὸς τοῦτο θὰ σκεφθοῦμε ὡς ἑξῆς: Ἀφοῦ οἱ 5 ἐργάται τελειώνουν τὸ ἔργο σὲ 12 ἡμέρες, ὁ 1 ἐργάτης μόνος του θὰ τὸ τελειώσῃ σὲ περισσότερες ἡμέρες καὶ μάλιστα 5 φορὲς περισσότερες, δηλ. 12 × 5 = 60 ἡμέρες. Τώρα ἀφοῦ ὁ 1 ἐργάτης τελειώνει τὸ ἔργο σὲ 60 ἡμέρες, οἱ 6 ἐργάται θὰ τὸ τελειώσουν σὲ λιγώτερες ἡμέρες καὶ μάλιστα 60 : 6 = 10 ἡμέρες.

Δηλαδή, οἱ 5 ἐργάται τελειώνουν τὸ ἔργον σὲ 12 ἡμέρες.
ὁ 1 » » » 12 × 5 = 60 ἡμ.
καὶ οἱ 6 » » » 60 : 6 = 10 »
ἢ εἰς $\frac{12 \times 5}{6} = \frac{60}{6} = 10$ »

Παρατηροῦμε ὅτι στὸ πρόβλημα αὐτὸ μᾶς δόθηκαν δύο ποσά, ἐργάται καὶ ἡμέρες. Μᾶς δόθηκαν ἀκόμη μία τιμὴ τοῦ ποσοῦ τῶν ἐργατῶν (5) καὶ μία ἀντίστοιχος τιμὴ ἀπὸ τὸ ποσὸ τῶν ἡμερῶν (12) καὶ ἀκόμη μία ἄλλη τιμὴ τοῦ ποσοῦ τῶν ἐργατῶν (6) καὶ ζητοῦμε νὰ βροῦμε τὴν ἀντίστοιχο τιμὴ ἀπὸ τὸ ποσὸ τῶν ἡμερῶν (τὸν ἄγνωστο) τὴν ὁποία γράφομε μὲ τὸ γράμμα X.

Ἐὰν ὅμως λύσωμε τὸ πρόβλημα μὲ τὸν ἄλλο τρόπο τὸν πρακτικό :

α) θὰ κάμωμε τὴν κατάστρωσιν τοῦ προβλήματος, ἡ ὁποία εἶναι ἐπανάληψις τοῦ προβλήματος, ἤτοι

Κατάστρωσις : Οἱ 5 ἐργ. τελειώνουν σὲ 12 ἡμ.
» 6 » » » X » ;

Χωρίζομε μὲ μίαν ὁριζόντια γραμμὴ τὶς τιμὲς κάθε ποσοῦ ὥστε νὰ σχηματισθοῦν δύο κλάσματα ἐκ τῶν ὁποίων τὸ ἕνα νὰ ἔχη παρονομαστὴ τὸν ἄγνωστο (τὸ γράμμα X).

β) Ἔπειτα θὰ κάμωμε τὴν σύγκρισιν τῶν ποσῶν τὴν ὁποία γιὰ εὐκολία μας θὰ κάμωμε μὲ μικροὺς ἀριθμούς.

Σύγκρισις : Ὁ 1 ἐργάτης τελειώνει τὸ ἔργο σὲ 2 ἡμέρες
οἱ 2 » » » » 2 : 2 = 1

Τὰ ποσὰ ἐδῶ εἶναι ἀντίστροφα γιατὶ πολλαπλασιαζομένου τοῦ ἑνὸς ποσοῦ, τὸ ἄλλο διαιρεῖται καὶ τοῦτο γιατὶ ὅταν ἡ τιμὴ 1 τοῦ ποσοῦ τῶν ἐργατῶν ἐπολλαπλασιάσθη ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 2 καὶ ἔγινε 1 × 2 = 2, ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ 2, τοῦ ποσοῦ τῶν ἡμερῶν, διαιρέθη διὰ τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ 2 καὶ ἔγινε 2 : 2 = 1.

Ἀπὸ τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος μὲ τὴν ἀναγωγὴ στὴ μονάδα βρήκαμε ὅτι οἱ 6 ἐργάται τελειώνουν τὸ ἔργον σὲ 10 ἡμέρες γιατὶ $\frac{12 \times 5}{6} = \frac{60}{6} = 10$ ἢ $12 \times \frac{5}{6} = 10$ ἡμ.

Τὸ αὐτὸ ὅμως ἀποτέλεσμα βρίσκομε καὶ ἀπὸ τὴν κατάστρωσιν τοῦ προβλήματος καὶ τὴν σύγκρισιν τῶν ποσῶν ἐὰν πολλαπλασιάσωμε τὸν ὑπεράνω τοῦ ἀγνώστου (X) ἀριθμὸ ἐπὶ τὸ ἀπέναντι κλάσμα $\left(\frac{5}{6}\right)$ ὅπως ἔχη, δηλ. $12 \times \frac{5}{6}$.

Ὅλα τὰ προβλήματα, τὰ ὁποῖα εἶναι ὅμοια μὲ τὸ προηγούμενο καὶ τὰ ὁποῖα ἔχουν τὰ ποσά των ἀντίστροφα, λύονται μὲ τὸν ἴδιο τρόπο, δηλ. μετὰ τὴν κατάστρωσιν τοῦ προβλήματος καὶ τὴν σύγκρισιν τῶν ποσῶν, ***γιὰ νὰ βροῦμε τὸν ἄγνωστο X πολλαπλασιάζομε τὸν ὑπεράνω τοῦ X ἀριθμὸ ἐπὶ τὸ ἀπέναντι κλάσμα ὅπως ἔχει, γιατὶ τὰ ποσὰ εἶναι ἀντίστροφα.***

Ὅλα τὰ τοιούτου εἴδους προβλήματα στὰ ὁποῖα μᾶς δίδονται δύο ποσὰ ἀνάλογα ἢ ἀντίστροφα, ἡ τιμὴ τοῦ ἑνὸς ποσοῦ καὶ ἡ ἀντίστοιχός της τιμὴ τοῦ ἄλλου ποσοῦ καὶ μία νέα τιμὴ ἀπὸ τὸ ἕνα ποσὸ καὶ ζητεῖται νὰ βρεθῇ ἡ ἀντίστοιχός της νέα τιμὴ ἀπὸ τὸ ἄλλο ποσό, λέγονται *προβλήματα ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν*.

Ἑπομένως προβλήματα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν εἶναι ἐκεῖνα . . . .

(Νὰ συμπληρωθῇ ὑπὸ τοῦ μαθητοῦ)

Ἡ μέθοδος αὐτὴ λέγεται *τῶν τριῶν* γιατὶ ἀπὸ τρεῖς γνωστοὺς ἀριθμοὺς ζητοῦμε νὰ βροῦμε τὸν τέταρτο ἄγνωστο ἀριθμό.

Γιὰ τὴν λύσιν τῶν προβλημάτων τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν κάνομε κατὰ σειρὰν τὶς ἑξῆς ἐργασίες :

1) Τὴν *κατάστρωσιν*, ἡ ὁποία εἶναι ἡ ἐπανάληψις τοῦ προβλήματος.

2) Τὴν *σύγκρισιν* τῶν ποσῶν, γιὰ νὰ βροῦμε ἐὰν τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα ἢ ἀντίστροφα, καὶ

3. Προχωρώντας στὴν λύσιν, πολλαπλασιάζομε τὸν ὑπεράνω τοῦ Χ ἀριθμὸν ἐπὶ τὸ ἀπέναντι κλάσμα ἀντεστραμμένο μέν, ὅταν τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα, ὅπως ἔχει δέ, ὅταν τὰ ποσὰ εἶναι ἀντίστροφα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

α) Ἀπὸ τὴ σχολική μας ζωή.

✓ 1. Ἀπὸ τοὺς μαθητὰς τῆς Ε΄ τάξεως τοῦ σχολείου μας τὸν πρῶτο μῆνα τοῦ συσσιτίου ἐγράφησαν 28 μαθηταὶ καὶ ἐπῆραν γιὰ ὅλο τὸ μῆνα 21 ὀκ. ζάχαρη. Τὸν ἑπόμενο μῆνα ἐγράφησαν καὶ ἄλλοι 12 μαθηταί. Πόση ζάχαρη θὰ πάρουν τὸν δεύτερο μῆνα ;

2. Κατὰ τὸ πρῶτο εἰκοσαήμερο σὲ μιὰ μαθητικὴ κατασκήνωσιν ἐπῆγαν 120 μαθηταὶ καὶ εἶχαν ἔξοδα 24.000.000. Τὸ δεύτερο ὅμως εἰκοσαήμερο ἐπῆγαν στὴν κατασκήνωσιν 90 μαθηταί. Πόσα θὰ εἶναι τὰ ἔξοδα τοῦ δευτέρου εἰκοσαημέρου ;

3. Γιὰ νὰ στρώσουν τὴν ἕδρα τῆς τάξεώς των οἱ μαθηταὶ τῆς Δ΄ τάξεως θέλουν νὰ ἀγοράσουν 2 πήχ. μουσαμᾶ, ὁ ὁποῖος ἔχει πλάτος 1 πήχ. Βρῆκαν ὅμως μουσαμᾶ μὲ πλάτος 0,80 πήχ. Πόσες πήχ. πρέπει νὰ ἀγοράσουν ;

✓ 4. Οἱ 40 μαθηταὶ τῆς ΣΤ΄ τάξεως ποὺ παίρνουν συσσίτιο ἔπρεπε νὰ πληρώνουν τὸν μῆνα ὅλοι μαζὶ 250.000 δραχ. ἀλλὰ 10 ἀπ' αὐτοὺς εἶναι ἄποροι καὶ δὲν πληρώνουν. Πόσα εἰσπράττει τὸ ταμεῖο τοῦ συσσιτίου ἀπὸ τὴν ΣΤ΄ τάξιν τὸν μῆνα ;

β) Ἀπὸ τὴν κοινωνική μας ζωή.

1. Μιὰ ὑφάντρια σὲ 8 ἡμέρες ὑφαίνει 42 πήχ. λινὸ ὕφασμα. Πόσες πήχ. θὰ ὑφάνη σὲ μιὰ ἡμέρα καὶ πόσους σὲ 20 ἡμέρες ;

2. Οἱ 12 ἐργάτες θερίζουν ἕνα χωράφι σὲ 20 ἡμέρες. Πόσοι ἐργάται θὰ θερίσουν ἄλλο χωράφι σὲ 30 ἡμέρες ;

3. Οἱ 100 ὀκ. σταφύλια δίνουν 64 ὀκ. μοῦστο. Πόσα σταφύλια θὰ χρειασθοῦν γιὰ νὰ γεμίσωμε μὲ μοῦστο ἕνα βαρέλι τῶν 600 ὀκ. ;

4. Ἕνα αὐτοκίνητο γιὰ νὰ φθάση ἀπὸ τὴν Ἀθήνα στὴν Κόρινθο ἔκανε 3 ὧρες καὶ ἔτρεχε μὲ ταχύτητα 35 χιλιομέτρων. Σὲ ἄλλο ὅμως ταξίδι του ἔτρεχε μὲ ταχύτητα 40 χιλιομέτρων. Πόσες ὧρες ἔκανε γιὰ νὰ φθάση στὴν Κόρινθο ;

5. Ἀπὸ 64 ὀκάδες ἐληὲς βγάζομε 12 ὀκάδες λάδι. Πόσο λάδι θὰ βγάλωμε ἀπὸ 50 ἐλαιόδενδρα τὰ ὁποῖα ὑπολογίζομε νὰ ἔχουν ἀπὸ 35 ὀκάδες ἐληὲς τὸ καθένα ;

γ) Ἀπὸ τὰ μαθήματά μας.

1. Οἱ 100 βαθμοὶ τοῦ θερμομέτρου τοῦ Κελσίου ἀντιστοιχοῦν πρὸς 80 βαθμοὺς τοῦ Ρεωμύρου. Μὲ πόσους βαθμοὺς τοῦ Ρεωμύρου ἀντιστοιχοῦν 50 βαθμοὶ τοῦ Κελσίου ;

2. Ἐὰν στὴν Ἀθήνα ἔχωμε θερμοκρασία 18 βαθμῶν μὲ θερμόμετρο Κελσίου, ποιά θερμοκρασία θὰ ἔχωμε μὲ θερμόμετρο Ρεωμύρου ;

3. Μία ράβδος σιδηρᾶ μήκους 0,786 μ. ὅταν θερμαίνεται διαστέλλεται σὲ μῆκος 0,796 μ. Πόσο θὰ διασταλῆ ἄλλη σιδηρᾶ ράβδος μήκος 1,5 μ. μὲ τὸ αὐτὸ πάχος καὶ ἐὰν θερμανθῆ μὲ τὴν αὐτὴ θερμοκρασία ;

4. Ἕνα σῶμα βάρους $3\frac{2}{6}$ ὀκ. βυθιζόμενο στὸ νερὸ λόγῳ τῆς ἀνώσεως χάνει τὸ $\frac{1}{5}$ τῆς ὀκᾶς ἀπὸ τὸ βάρος του. Ἕνα ἄλλο σῶμα τῆς ἰδίας ὅμως ὕλης, βάρους 32 ὀκάδων, πόσο βάρος θὰ χάση ἐὰν τὸ βυθίσωμε καὶ αὐτὸ στὸ νερό ;

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΟΣΟΣΤΩΝ

1. Θὰ ἔχωμε ἀκούσει τοὺς ἐμπόρους νὰ λέγουν : «Πωλῶ μὲ κέρδος 5 ἢ 8 ἢ 12 τοῖς ἑκατό».

Ἐπίσης στὰ μεγάλα καταστήματα τῶν μεγάλων πόλεων, ὡρισμένες ἐποχὲς βλέπομε μεγάλες πινακίδες οἱ ὁποῖες γράφουν : «Πωλοῦμεν μὲ ἔκπτωσιν 12 ἢ 15 τοῖς ἑκατό».

Ἴσως νὰ ἔχωμε ἀκούσει τοὺς ἐμπορευομένους νὰ λέγουν : «Ἡ φορολογία μου φθάνει στὰ 3 ἢ 5 τοῖς ἑκατό».

2. Στὰ μεσιτικὰ γραφεῖα ἐνοικιάσεων βλέπομε μιὰ πινακίδα νὰ γράφη : «Προμήθεια γιὰ ἐνοίκια 10 τοῖς ἑκατὸ καὶ γιὰ πωλήσεις 5 τοῖς ἑκατό».

3. Στὰ χωριὰ οἱ ἔμποροι ἀναθέτουν σὲ καλοὺς καὶ τιμίους χωρικοὺς νὰ τοὺς ἀγοράσουν καπνά, τυριά, βούτυρο, ἀμύγδαλα καὶ ἄλλα εἴδη σὲ μεγάλες ποσότητες. Ὁ χωρικὸς ὁ ὁποῖος θὰ ἀγοράση τὰ εἴδη αὐτὰ γιὰ λογαριασμὸ τοῦ ἐμπόρου λέγεται «μεσίτης» καὶ παίρνει ἀπὸ τὸν ἔμπορο γιὰ τὸν κόπο του ἕνα κέρδος, τὸ ὁποῖο λέγεται *μεσιτεία* ἢ καὶ *προμήθεια* καὶ τὸ ὑπολογίζουν ἐπάνω στὶς 100 δραχμὲς καὶ λέγουν : «Μεσιτεία 3 ἢ 6 ἢ 8 τοῖς ἑκατό».

4. Τὰ σπίτια, τὰ ἐργοστάσια, τὰ καταστήματα, τὰ αὐτοκίνητα, τὰ πλοῖα, τὰ σιτηρά μας καὶ αὐτὴ τὴν ζωή των ἀκόμη οἱ ἄνθρωποι μποροῦν νὰ τὰ ἀσφαλίσουν ἀπὸ κάθε κίνδυνο πυρός, θαλάσσης, θανάτου κλπ. σὲ διάφορες Ἀσφαλιστικὲς Ἑταιρεῖες, οἱ ὁποῖες κάνουν τὴν ἀσφάλισιν αὐτὴν ἀντὶ τῶν λεγομένων «ἀσφαλίστρων», τὰ ὁποῖα ὑπολογίζουν συνήθως ἐπάνω στὶς 1000 δραχμές, δηλ. 2 ἢ 3 ἢ $3\frac{1}{2}$ ἢ $4\frac{1}{2}$ τοῖς χιλίοις, γιατὶ ἐδῶ τὰ ποσὰ γιὰ τὴν ἀσφάλεια εἶναι πολὺ μεγάλα (ἕνα πλοῖο ἢ αὐτοκίνητο ἢ ἀκίνητο στοιχίζει πολλά).

Γενικὰ παρατηροῦμε, ὅτι οἱ ἄνθρωποι στὶς συναλλαγές τους κανονίζουν τὸ κέρδος, τὴν ζημία, τὴν ἔκπτωσιν, τὴν προμήθεια, τὴν μεσιτεία, τὸν φόρο, τὸ ἀπόβαρο, τὰ ἀσφάλιστρα καὶ ἄλλα, ἐπάνω στὶς 100 ἢ στὶς 1000 δραχ. καὶ τοῦτο γιὰ νὰ μποροῦν εὔκολα καὶ σύντομα νὰ κάνουν τὶς πράξεις τῶν ἀριθμῶν.

Τὸ «τόσο τοῖς ἑκατὸ» ποὺ ἀναφέρεται, τὸ γράφομε ὡς ἑξῆς: $5^{\circ}/_{\circ}$, $3^{\circ}/_{\circ}$, $12^{\circ}/_{\circ}$, $8\frac{1}{2}{}^{\circ}/_{\circ}$, $2\frac{3}{4}{}^{\circ}/_{\circ}$.

Καὶ τὸ «τόσο τοῖς χιλίοις» τὸ γράφομε : $2^{\circ}/_{\circ\circ}$, $3^{\circ}/_{\circ\circ}$ $4\frac{2}{3}{}^{\circ}/_{\circ\circ}$, $\frac{3}{4}{}^{\circ}/_{\circ\circ}$.

1. Πόση μεσιτεία πρὸς $5^{\circ}/_{\circ}$ θὰ πάρη ἕνας μεσίτης ὁ ὁποῖος ἐνοικίασε ἕνα δωμάτιο ἀντὶ 2 ἑκατ. δρχ. ;

Λύσις

Στὸ πρόβλημα αὐτὸ ἔχομε δυὸ ποσά. Τὴν ἀξία τοῦ ἐνοικίου καὶ τὴν μεσιτεία 5°/₀. Γιὰ νὰ λύσωμε τὸ πρόβλημα σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς :

Ἂν ὁ μεσίτης ἐνοικίαζε τὸ δωμάτιο ,ἀντὶ 100 δρχ. θὰ ἔπαιρνε μεσιτεία 5 δρχ. Τώρα ποὺ τὸ ἐνοικίασε ἀντὶ 2.000.000 πόση μεσιτεία θὰ πάρη ;

Παρατηροῦμε, ὅτι τὸ πρόβλημα εἶναι τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν καὶ θὰ τὸ λύσωμε ὅπως τὰ προβλήματα τῆς ἁπλῆς μεθόδου, ἤτοι

α) Κατάστρωσις $\dfrac{100 \text{ δρχ. έν.}}{2\,000.000}$ $\dfrac{\text{μεσ. 5 δρχ.}}{X}$

β) Σύγκρισις : Στὶς 100 θὰ πάρη 5
» 200 » » 5×2=10

Εὔκολα ἀντιλαμβανόμεθα ὅτι τὰ ποσὰ ἐδῶ εἶναι ἀνάλογα. ***Γενικὰ ὅμως στὰ προβλήματα αὐτὰ τὰ ποσὰ εἶναι πάντοτε ἀνάλογα.***

γ) Ἐὰν ἐφαρμόσωμε τὸν πρακτικὸ κανόνα μὲ τὸν ὁποῖο λύονται τὰ προβλήματα τῆς ἁπλῆς μεθόδου, θὰ πολλαπλασιάσωμε τὸν ὑπεράνω τοῦ Χ ἀριθμὸν ἐπὶ τὸ ἀπέναντι κλάσμα ἀντεστραμμένο, γιατὶ τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα. Ἑπομένως θὰ ἔχωμε : $X = 5 \times \frac{2.000.000}{100} = 100.000.$

Ἄρα ὁ μεσίτης θὰ πάρη μεσιτεία 100.000 δραχ. ἀπὸ τὸν ἄνθρωπο, ὁ ὁποῖος ἐνοικίασε τὸ δωμάτιο ἀντὶ 2.000.000 δρχ.

Ὅπως βλέπομε ἡ μεσιτεία ὑπελογίσθη ἐπάνω στὶς 100 δρχ., δηλ. ἀπὸ κάθε ἑκατοστάρικο τοῦ ποσοῦ τῶν δύο ἑκατομρίων, ἐπῆρε ὁ μεσίτης 5 δραχ. καὶ συνολικὰ ἐπῆρε γιὰ μεσιτεία 100.000 δρχ. Τὸ ποσὸ αὐτὸ τῆς μεσιτείας 100.000 καὶ γενικὰ ὁ φόρος, ἡ ζημία, τὰ ἀσφάλιστρα, τὸ ἀπόβαρο τὰ ὁποῖα βρίσκομε ὅταν ὑπολογίζωμε αὐτὰ στὶς 100 ἢ 1000 καὶ ἀπὸ τὸ ποσὸ τὸ ὁποῖο μᾶς ἐδόθη, λέγεται ***ποσοστόν***. Ἑπομένως ***ποσοστὸν καλεῖται τὸ κέρδος ἢ ἡ ζημία ἢ ὁ φόρος ἢ ἡ προμήθεια ἢ ἡ μεσιτεία κ.τ.λ., τὰ ὁποῖα ὑπολογίζομε ἀπὸ ὅλο τὸ ποσὸν τὸ ὁποῖον μᾶς δίδεται καὶ ἐπάνω στὶς 100 ἢ 1000.***

Ὅλα τὰ προβλήματα τὰ ὁποῖα ἀναφέρονται σὲ ποσοστὰ λέγονται ***προβλήματα ποσοστῶν.***

2. Μία γυναίκα ἀγόρασε ἕνα ὕφασμα ἀξίας 240.000 δρχ. μὲ ἔκπτωσιν 6 °/₀; Πόσες δραχ. τὸ ἀγόρασε;

Λύσις

Ἐπειδὴ ἀναφέρει ἔκπτωσιν, εἶναι πρόβλημα ποσοστῶν καὶ λύεται ὅπως τὰ προβλήματα τῆς ἁπλῆς μεθόδου. Καὶ ἔχομε:

α) Κατάστρωσις: ἀξία ἀγορᾶς ἔκπτωσις

$$\frac{100}{240.000} \qquad \frac{6}{X}$$

β) Σύγκρισις: Τὰ ποσὰ πάντοτε ἀνάλογα

γ) Λύσις: $X = 6 \times \frac{240.000}{100} = 14.400$ δρχ.

Ἑπομένως ποσοστὸν ἐκπτώσεως = 14.400 δρχ.

Γιὰ νὰ βροῦμε ὅμως τώρα ἀντὶ πόσων δρχ. ἀγόρασε τὸ ὕφασμα, ὅπως ἐρωτᾶ τὸ πρόβλημα, ἀφαιροῦμε τὴν ἔκπτωσιν ἀπὸ τὴν ἀξία τοῦ ὑφάσματος καὶ βρίσκομε 240.000—14.400= 225.600.

Τὸ ποσὸν ὅμως τῶν 225.600 δρχ. μὲ τὸ ὁποῖον ἐπλήρωσε ἡ γυναίκα τὸ ὕφασμα τὸ βρίσκομε καὶ κατ' ἄλλο τρόπο. Πρὸς τοῦτο σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς: Ἂν ἡ ἀξία τῆς ἀγορᾶς ἦτο 100 δρχ. ἐπειδὴ ἔχει ἔκπωσιν 6 °/₀ θὰ τὸ ἀγόρασε 100 — 6 = 94 δρχ.

Καὶ μετ' αὐτὸ ἔχομε:

α) Κατάστρωσις: ἀξία πραγματικὴ ἀξία πωλήσεως

$$\frac{100}{240.000} \qquad \frac{94}{X}$$

β) Σύγκρισις: Ποσὰ ἀνάλογα

γ) Λύσις: $X = 94 \times \frac{240.000}{100} = 225.600$ δρχ.

3. Πόσα ἀσφάλιστρα θὰ πληρώση κάποιος ποὺ ἔχει ἀσφαλίσει τὸ σπίτι του ἀξίας 150.000.000 πρὸς 3 °/₀₀;

Λύσις

Εἶναι πρόβλημα ποσοστῶν γιατὶ ἀναφέρει ἀσφάλιστρα.

α) Κατάστρωσις:

$$\frac{1000}{150.000.000} \qquad \frac{3}{X}$$

β) Σύγκρισις: Ποσὰ ἀνάλογα

γ) *Λύσις* : $$X = 3 \times \frac{150.000.000}{100} = 450.000$$

Ἑπομένως θὰ πληρώση τὸ χρόνο γι' ἀσφάλιστρα 450.000 δραχμές.

4. Ἕνα τραπέζι τὸ ὁποῖον ἐστοίχιζε 800.000 ἐπωλήθη ἀντὶ 640.000. Μὲ πόσην ἔπτωσιν ἐπὶ τοῖς ἑκατὸ ἐπωλήθη ;

Λύσις

Καὶ αὐτὸ εἶναι πρόβλημα ποσοστῶν, ἀφοῦ ἀναφέρεται σὲ ἔκπτωσιν ἐπὶ τοῖς ἑκατό. Ἀλλ' ἐδῶ μᾶς δίδεται ἡ ἀξία καὶ ἡ τιμὴ τῆς πωλήσεως, ἑπομένως καὶ ἡ ἔκπτωσις καὶ ζητοῦμε νὰ βροῦμε πόσο ἐπὶ τοῖς ἑκατὸ εἶναι ἡ ἔκπτωσις. Καὶ αὐτὸ θὰ λυθῆ ὅπως τὰ προβλήματα τῆς ἁπλῆς μεθόδου, μὲ τὴ διαφορὰ ὅτι στὴν κατάστρωσι θὰ ἀρχίσωμε ἀπὸ τὰ γνωστά, ἤτοι :

Ἀφοῦ τὸ τραπέζι ἐστοίχιζε 800.000 δραχ. καὶ πωλήθηκε ἀντὶ 640.000 ἡ ἔκπτωσις σ' ὁλόκληρο τὸ ποσὸ εἶναι :

$$800.000 - 640.000 = 160.000$$

Καὶ προχωροῦντες στὴ λύσιν τοῦ προβλήματος, ἔχομε :

α) ***Κατάστρωσις*** : πραγ. ἀξία ἔκπτωσις

$$\frac{800.000}{100} \qquad \frac{160.000}{X} = 20\,{}^{0}/_{0}$$

Ἄρα ἔκπτωσις εἶναι 20 °/o.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

α) Ἀπὸ τὴ σχολική μας ζωή.

1. Ἡ ΣΤ' τάξις τοῦ σχολείου μας ἔχει 60 μαθητὰς καὶ ἀπ' αὐτοὺς τὰ 40 °/o εἶναι κορίτσια. Πόσα εἶναι τὰ ἀγόρια καὶ πόσα τὰ κορίτσια τῆς ΣΤ' τάξεως ;

2. Ἀπὸ τοὺς 80 μαθητὰς ποὺ εἶχε ἡ ΣΤ' τάξις ἑνὸς σχολείου ἀπερρίφθησαν 5 °/o. Πόσοι ἀπελύθησαν καὶ πόσοι ἀπερρίφθησαν ;

3. Ἕνας μαθητὴς ἀγόρασε τὰ βιβλία του καὶ ὅλα τὰ σχολικά του εἴδη μὲ ἔκπτωσιν 8 °/o ἐπὶ τῆς ἀξίας των, ἡ ὁποία ἦτο 85.000 δρχ. Πόσο ἐπλήρωσε ὁ μαθητής ;

4. Κατὰ τὸ σχολικὸν ἔτος 1951—1952 ἐγράφησαν στὸ σχολεῖο μας 350 μαθηταί, ἀπὸ τοὺς ὁποίους τὰ 30 °/o εἶναι μαθήτριες. Ἐξ ὅλων αὐτῶν ἐγράφησαν γιὰ συσσίτιο τὰ 60 °/o τοῦ

ὅλου ἀριθμοῦ τῶν μαθητῶν. Νὰ εὑρεθῇ πόσους μαθητὰς καὶ πόσες μαθήτριες ἔχει τὸ σχολεῖον καὶ πόσοι ἀπ' αὐτοὺς ἔχουν γραφῆ στὸ συσσίτιο.

β) Ἀπὸ τὴν κοινωνική μας ζωή.

1. Μία μητέρα ἀγόρασε 8 πήχ. ὕφασμα πρὸς 24.000 δρχ. τὴν πήχ. μὲ ἔκπτωσιν 15°/o ἐπὶ τῆς ἀξίας του. Πόσο ἀγόρασε τὴν πήχ. καὶ πόσο ὅλο τὸ ὕφασμα ;

2. Ἕνας ἔμπορος ἔφερε ὕφασμα τὸ ὁποῖο τοῦ ἐστοίχισε 104.000 δρχ. ἡ πήχ. Πόσο πρέπει νὰ πωλήση τὴν πήχ. γιὰ νὰ κερδίση 20°/o ἐπὶ τῆς ἀξίας του.

3. Μία ἐνδυμασία ἐστοίχιζε 1.200.000 δρχ. καὶ ἐπωλήθη μὲ ἔκπτωσιν ἀντὶ 900.000 δρχ. Μὲ πόσο τοῖς ἑκατὸ ἔκπτωσιν ἐπωλήθη ἡ ἐνδυμασία ;

4. Ἀγόρασε κάποιος τυρὶ πρὸς 12.000 τὴν ὀκᾶ, ἐπλήρωσε δὲ γιὰ δημοτικὸ φόρο 3°/o καὶ γιὰ μεταφορικὰ καὶ ψυγεῖο 5°/o ἐπὶ τῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς. Πόσο πρέπει νὰ πωλήση τὴν ὀκᾶ ἂν θέλη νὰ κερδίζη 12°/o ἐπὶ τοῦ κόστους ;

5. Ἕνας ὑπάλληλος παιρνει τὸν μῆνα 840.000 δρχ. καὶ ἐπίδομα ἐπὶ τοῦ μισθοῦ του 15°/o. Τοῦ κρατοῦν ὅμως ἀπὸ τὸν βασικὸ μισθὸ 3°/o κρατήσεις, 2°/o ἀσφάλιστρα καὶ 8°/o γιὰ δάνειο. Πόσα παίρνει καθαρὰ τὸν μῆνα ;

6. Ἡ Ἀθήνα, ὁ Πειραιεὺς καὶ τὰ περίχωρα κατὰ τὴν ἀπογραφὴ τοῦ 1938 εἶχαν πληθυσμὸ 872.500 κατοίκους. Σήμερα ὅμως ἔχουν περίπου 1.506.000 κατοίκους. Πόσο τοῖς ἑκατὸ αὐξήθη ὁ πληθυσμός των ;

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΥΝΘΕΤΟΥ ΜΕΘΟΔΟΥ

Στὰ προβλήματα τῆς ἁπλῆς μεθόδου καὶ τῶν ποσοστῶν εἴδαμε ὅτι τὰ ποσὰ τὰ ὁποῖα μᾶς δίδονται στὸ κάθε πρόβλημα εἶναι δυό. Ὑπάρχουν ὅμως καὶ προβλήματα στὰ ὁποῖα μᾶς δίδονται τρία ἢ καὶ περισσότερα ποσά. Π.χ.

1. Γιὰ 18 μαθητὰς τῆς Στ' τάξεως τὶς 26 ἡμέρες τοῦ Νοεμβρίου ἐχρειάσθηκαν 12 ὀκ. γάλα. Πόσες ὀκάδες γάλα θὰ χρειασθοῦν γιὰ τὶς 20 ἡμέρες τοῦ Δεκεμβρίου οἱ 24 μαθηταὶ τῆς αὐτῆς τάξεως ;

Λύσις

Στὸ πρόβλημα αὐτὸ τὰ ποσὰ τὰ ὁποῖα μᾶς δίδονται εἶναι τρία. Μαθηταί, ἡμέρες καὶ ὀκάδες γάλα. Μᾶς δίδεται δηλ. ἡ μία τιμὴ (18) τῶν μαθητῶν καὶ οἱ ἀντίστοιχες τιμὲς (26) τῶν ἡμερῶν καὶ (12) τῶν ὀκάδων. Καὶ ζητεῖται νὰ βρεθῇ μιὰ νέα τιμὴ ἀπὸ ἕνα ποσὸν (τῶν ὀκάδων) ἡ ὁποία νὰ εἶναι ἀντίστοιχος στὶς νέες τιμὲς (20) τῶν ἡμερῶν καὶ (24) τῶν μαθητῶν. Γιὰ νὰ λύσωμε τὸ πρόβλημα τοῦτο θὰ ἐργασθοῦμε ὡς ἑξῆς :

Πρῶτα θὰ βροῦμε πόσες ὀκάδες γάλα θὰ χρειασθοῦν οἱ 24 μαθηταὶ τὸν μῆνα Δεκέμβριον, ἂν ἔπαιρναν γάλα τόσες ἡμέρες ὅσες πῆραν οἱ 18 μαθηταὶ τὸν μῆνα Νοέμβριον, δηλ. 26 ἡμέρες. Πρὸς τοῦτο ἔχομε :

*α) **Κατάστρωσις*** : Οἱ 18 μαθ. (σὲ 26 ἡμ.) χρειάζ. 12 ὀκ. γάλ.
» 24 » (» 26 ») » X » »

Ἐπειδὴ οἱ τιμὲς τοῦ ποσοῦ τῶν ἡμερῶν εἶναι ἴσες, δὲν τὶς ὑπολογίζομε καὶ ἔτσι τὸ πρόβλημα γίνεται πρόβλημα ἁπλῆς μεθόδου.

Συγκρίνομε τὰ ποσὰ μαθηταὶ καὶ ὀκάδες καὶ ἔχομε :

*β) **Σύγκρισις*** : 10 μαθ. (σὲ 1 ἡμ.) θέλουν 4 ὀκ. γάλα
20 » » » » » 8 » »

Τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα.

*γ) **Λύσις*** : $X = 12 \times \frac{24}{18}$ ὀκ. γάλα.

Ἀφοῦ τώρα βρήκαμε ὅτι οἱ 24 μαθηταὶ στὶς 26 ἡμέρες τοῦ Νοεμβρίου θὰ χρειασθοῦν $12 \times \frac{24}{18}$ ὀκ. γάλα, εὔκολα βρίσκομε πόσο γάλα θὰ χρειασθοῦν οἱ ἴδιοι 24 μαθηταὶ γιὰ τὶς 20 ἡμέρες τοῦ Δεκεμβρίου. Πρὸς τοῦτο ἐργαζόμεθα κατὰ τὸν ἴδιο τρόπο καὶ ἔχομε :

*α) **Κατάστρωσις*** : (οἱ 24 μαθ.) σὲ 26 ἡμ. θέλ. $12 \times \frac{24}{18}$ ὀκ.
(» 24 μαθ.) » 20 » » X

Καὶ ἐδῶ, ἐπειδὴ οἱ τιμὲς τοῦ ποσοῦ τῶν μαθητῶν εἶναι ἴσες δὲν τὶς ὑπολογίζομε καὶ ἔχομε πάλι πρόβλημα ἁπλῆς μεθόδου.

*β) **Σύγκρισις*** : (1 μαθ.) σὲ 10 ἡμ. θέλει 1 ὀκ. γάλα
» » » 20 » » 2 » »

Καὶ ἐδῶ τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα.

γ) Λύσις : $X = 12 \times \frac{24}{18} \times \frac{20}{26} = \frac{12 \times 24 \times 20}{18 \times 26} = 12\frac{4}{13}$ ὀκ.

Ἄρα οἱ 24 μαθηταὶ γιὰ τὶς 20 ἡμέρες τοῦ Δεκεμβρίου θὰ χρειασθοῦν $12\frac{4}{13}$ ὀκ. γάλα.

Σ' ὅλα αὐτὰ παρατηροῦμε, ὅτι τὸ πρόβλημα ἐλύθη μὲ δύο ἁπλὲς μεθόδους καὶ ἐπειδὴ ἡ νέα αὐτὴ μέθοδος ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο ἢ καὶ περισσότερες ἁπλὲς μεθόδους λέγεται ***σύνθετος μέθοδος τῶν τριῶν***. Τὰ προβλήματα τὰ ὁποῖα λύονται μὲ αὐτὴ τὴ μέθοδο λέγονται ***προβλήματα συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν***.

Ἀπὸ τὸ πρόβλημα βλέπομε ὅτι : ***στὰ προβλήματα τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν δίδονται τρία ἢ καὶ περισσότερα ποσὰ (ἀνὰ δύο ἀνάλογα ἢ ἀντίστροφα), ἡ τιμὴ ἑνὸς ποσοῦ καὶ οἱ ἀντίστοιχες τιμὲς τῶν ἄλλων καὶ ζητεῖται νὰ βρεθῇ μία νέα τιμὴ ἀπὸ ἕνα ποσὸ ἡ ὁποία νὰ ἀντιστοιχῇ σὲ γνωστὲς τιμὲς οἱ ὁποῖες μᾶς ἐδόθησαν ἀπὸ τὰ ἄλλα ποσά.***

Τὰ προβλήματα αὐτὰ λύονται, ἀφοῦ τὰ ἀναλύσωμε σὲ δύο ἢ περισσότερες ἁπλὲς μεθόδους.

Ἐπειδὴ ὅμως ὁ τρόπος αὐτὸς μὲ τὶς ἁπλὲς μεθόδους ἀπαιτεῖ χρόνο πολύ, θ' ἀκολουθήσωμε τὸν ἑξῆς τρόπο, ὁ ὁποῖος μᾶς δίδει τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα, ἤτοι :

1. ***Θὰ καταστρώσωμε τὸ πρόβλημα***, ὥστε οἱ ἀντίστοιχες τιμὲς τῶν ποσῶν νὰ εἶναι στὴν αὐτὴν ὁριζοντία γραμμὴ καὶ οἱ τιμὲς τοῦ ἰδίου ποσοῦ ἡ μία κάτω ἀπὸ τὴν ἄλλη καὶ νὰ χωρίζωνται μὲ ὁριζόντιες γραμμές, ὥστε νὰ γίνουν κλάσματα, τὸ ἕνα δὲ ἀπ' αὐτὰ νὰ ἔχῃ παρονομαστὴ τὸν ἄγνωστο Χ. Ἡ ἐπανάληψις τοῦ προβλήματος μᾶς δίδει τὴν κατάστρωσιν, ἤτοι :

α) Κατάστρωσις : οἱ 18 μαθ. σὲ 26 ἡμ. θέλ. 12 ὀκ. γάλα
» 24 » » 20 » » Χ » »

2. Μετὰ τὴν κατάστρωσιν θὰ κάμωμε τὴν ***σύγκρισιν*** τῶν ποσῶν. Θὰ συγκρίνωμε τὸ ποσὸν τοῦ ἀγνώστου μὲ κάθε ἕνα ἀπὸ τὰ ἄλλα ποσά. Σ' αὐτὸ πρέπει νὰ προσέξωμε ὥστε νὰ εἶναι πάντα ἡ αὐτὴ τιμὴ στὸ ποσό, τὸ ὁποῖο δὲν συγκρίνομε. Τὸν ἄγνωστο μὲ τὸν ὁποῖο κάθε φορὰ θὰ συγκρίνωμε κάθε ποσό, γιὰ νὰ τὸν διακρίνωμε, θὰ τὸν περικλείωμε μέσα σὲ τετράγωνο, ἤτοι :

β) Σύγκρισις : μαθητ. | ὀκάδ. | ἡμερῶν | ὀκάδων

10 μαθ. (σὲ 1 ἡμ.) 1 ὀκ. (10 μ.) σὲ 1 ἡμ. 1 ὀκ.
20 » (» 1 ») 2 » (10 μ.) » 2 » 2 ὀκ.
ποσὰ ἀνάλογα ποσὰ ἀνάλογα

3) Γιὰ νὰ λύσωμε τώρα τὸ πρόβλημα ἀκολουθοῦμε τὸν κανόνα τῆς ἁπλῆς μεθόδου, ἤτοι ὅτι ὁ ἄγνωστος X ἰσοῦται μὲ τὸν ὑπεράνω αὐτοῦ ἀριθμὸν (12) ἐπὶ τὰ ἀπέναντι κλάσματα ἀντεστραμμένα, διότι τὰ ποσὰ ***μαθηταὶ καὶ ἡμέρες*** μὲ τὸ ποσὸν τοῦ ἀγνώστου ***ὀκάδες*** εἶναι ἀνάλογα.

Ἑπομένως θὰ ἔχωμε :

$$X = 12 \times \frac{24}{18} \times \frac{20}{26} =$$

4) Προχωροῦμε στὶς πράξεις καὶ ἔχομε :

$$= \frac{12 \times 24 \times 20}{18 \times 26} = 12 \frac{4}{13} \text{ ὀκ.}$$

Βρίσκομε δηλ. τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα τὸ ὁποῖο βρήκαμε καὶ ὅταν ἐλύσαμε τὸ πρόβλημα μὲ τὶς ἁπλὲς μεθόδους.

*2. **Οἱ 8 ἐργάται σὲ 20 ἡμέρες σκάπτουν ἕνα χωράφι 12 στρεμμάτων. Οἱ 10 ἐργάται σὲ πόσες ἡμέρες θὰ σκάψουν ἄλλο χωράφι 18 στρεμμάτων (ὅταν ἐργάζωνται τὶς ἴδιες ὧρες κάθε ἡμέρα) ;***

Λύσις

Εἶναι πρόβλημα συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν γιατὶ μᾶς δίδονται τρία ποσὰ κλπ.

Θὰ τὸ λύσωμε ὡς ἑξῆς :

α) Κατάστρωσις : $\frac{8}{10}$ ἐργ. σὲ $\frac{20}{X}$ ἡμ. σκ. $\frac{12}{18}$ στρ. »

β) Σύγκρισις τῶν ποσῶν μὲ τὸ ποσὸν τοῦ ἀγνώστου.

ἐργάτ. | ἡμερ. | σύγκρ. | ἡμερ.

1 2 (1 στρ.) (1 ἐργ.) 2 1
2 X=1 (1 ») (1 ») 4 X=2
ποσὰ ἀντίστροφα ποσὰ ἀνάλογα

γ) Λύσις : Ὁ ἄγνωστος X στὸ πρόβλημα αὐτὸ ἰσοῦται μὲ τὸν ὑπεράνω αὐτοῦ ἀριθμὸ 20 ἐπὶ τὰ ἀπέναντι κλάσματα τὸ μὲν πρῶτο $\frac{8}{10}$ ὅπως ἔχει, γιατὶ τὸ ποσὸ ἐργάται εἶναι ἀντίστροφο μὲ τὸ ποσὸ τοῦ ἀγνώστου ἡμέρες, τὸ δὲ ἄλλο $\frac{12}{18}$ ἀντεστραμμένο γιατί τὸ ποσὸ στρέμματα μὲ τὸ ποσὸ τοῦ ἀγνώστου ἡμέρες εἶναι ἀνάλογα.

Ἐπομένως ἔχομε: $X = 20 \times \frac{8}{10} \times \frac{18}{12} =$

δ) Προχωρῶντας στὶς πράξεις θὰ ἔχομε:

$$= \frac{20 \times 8 \times 18}{10 \times 12} = 24 \text{ ἡμ.}$$

Ἄρα οἱ 10 ἐργάται, γιὰ νὰ σκάψουν χωράφι 18 στρεμμάτων, θέλουν 24 ἡμέρες.

Ἀπὸ ὅλα τὰ ἀνωτέρω παρατηροῦμε, ὅτι ***γιὰ νὰ λύσωμε τὰ προβλήματα τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν ἀκολουθοῦμε τὴν αὐτὴ πορεία καὶ τὸν αὐτὸ κανόνα μὲ τὸν ὁποῖο λύονται καὶ τὰ προβλήματα τῆς ἁπλῆς μεθόδου, ἤτοι*** . . . . (Νὰ συμπληρωθῇ ὑπὸ τοῦ μαθητοῦ).

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

α) Ἀπὸ τὴ σχολική μας ζωή.

1. Μιὰ ὁμάδα ἀπὸ 8 μαθητὰς τῆς ΣΤ΄ τάξεως ἀνέλαβε νὰ σκάψη 200 τετραγωνικὰ μέτρα τοῦ σχολικοῦ των κήπου καὶ ὑπολογίζει νὰ τὰ σκάψουν σὲ 20 ἡμέρες. Ἀλλὰ στὴν ὁμάδα προσετέθησαν καὶ ἄλλοι 4 μαθηταὶ καὶ θέλουν νὰ μάθουν πόσα τετραγ. μέτρα θὰ σκάψουν σὲ 30 ἡμέρες (μὲ τὴν αὐτὴ ἐργασία καθημερινῶς).

2. Γιὰ 40 μαθητὰς μιᾶς κατασκηνώσεως ὑπολογίζουν ὅτι θέλουν γιὰ 20 ἡμέρες 100 ὀκ. γάλα. Ἐὰν ὅμως στὴν κατασκήνωσιν πᾶνε καὶ ἄλλοι 50 μαθηταὶ καὶ καθήσουν ὅλοι 24 ἡμέρες, πόσες ὀκάδες γάλα θέλουν;

3. Τὸν περυσινὸ χρόνο στὸ συσσίτιο τοῦ σχολείου μας ἦσαν γραμμένοι 120 μαθηταὶ καὶ γιὰ 160 ἡμέρες ἐχρειάσθησαν 144 ὀκ. γάλα σκόνη. Ἐφέτος ὅμως ἐγράφησαν 160 μαθηταὶ καὶ τὸ συσσίτιο θὰ διαρκέση 180 ἡμέρες. Πόσες ὀκάδες γάλα θὰ χρειασθῇ τὸ συσσίτιο;

4. Τέσσερες μαθήτριες ἀνέλαβαν νὰ κεντήσουν ἕνα καρρὲ γιὰ τὸ τραπέζι τοῦ γραφείου τοῦ σχολείου των. Κεντοῦν 2 ὧρες τὴν ἡμέρα καὶ ὑπολογίζουν νὰ τὸ τελειώσουν σὲ 6 ἡμέρες. Στὴν ὁμάδα τους ὅμως προσετέθησαν καὶ ἄλλες δυὸ μαθήτριες

καὶ κεντοῦν 1,5 ὥρα τὴν ἡμέρα. Σὲ πόσες ἡμέρες τώρα θὰ τελειώσουν τὸ καρρέ;

β) Ἀπὸ τὴν κοινωνική μας ζωή.

1. Μιὰ ὑφάντρια ὕφανε ἕναν τάπητα 2 μ. μήκους καὶ 1 μ. πλάτους καὶ ἔλαβε 560~~000~~ δρχ. Πόσες δρχ. θὰ λάβη ἂν ὑφάνη ἄλλον τάπητα μήκους 3 μ. καὶ πλάτους 1,5 μ.;

2. Δώδεκα ἐργάται ἐργάζονται 8 ἡμέρες καὶ κερδίζουν 2.880.~~000~~ δρχ. Πόσες δρχ. θὰ κερδίσουν οἱ 16 ἐργάται ἐὰν ἐργασθοῦν 10 ἡμέρες;

3. Ἕνας ράπτης ἀνέλαβε νὰ ράψη 80 στρατιωτικὲς στολὲς ἀπὸ ἕνα ὕφασμα 318 πήχ., τοῦ ὁποίου τὸ πλάτος ἦτο 0,8 πήχ. Ἀργότερα τοῦ ἀνέθεσαν νὰ ράψη ἄλλες 100 στολὲς ἀπὸ ὕφασμα τὸ ὁποῖο εἶχε πλάτος 1,2 πήχ. Πόσες πῆχες ὕφασμα πρέπει νὰ ζητήση;

4. Ἕνας ποδηλάτης σὲ τρεῖς ἡμέρες μὲ 6 ὧρες τὴν ἡμέρα τρέχει 360 χιλιόμετρα. Σὲ πόσες ἡμέρες θὰ τρέξη μὲ τὴν ἴδια ταχύτητα τὰ 800 χιλιόμετρα, ἂν τρέχη 8 ὧρες τὴν ἡμέρα;

5. Ὁ Δῆμος Ἀθηναίων γιὰ τὴν κατασκευὴ μιᾶς τάφρου μήκους 120 μέτρων, πλάτους 1,5 μ. καὶ βάθους 2 μ. προσέλαβε 40 ἐργάτας. Γιὰ τὴν κατασκευὴ ὅμως ἄλλης τάφρου μήκους 200 μέτ., πλάτους 3 μ. καὶ βάθους 3 μ. πόσους ἐργάτας θὰ χρειασθῆ;

6. Μιὰ φρουρὰ στρατιωτῶν ἀπὸ 150 ἄνδρες ἔχει τροφὲς γιὰ νὰ περάση 24 ἡμέρες ἐὰν σὲ κάθε ἄνδρα ἀναλογοῦν 300 δράμια. Πόσες ἡμέρες θὰ περάση ἡ φρουρὰ αὐτὴ ἀπὸ τὴν ὁποία ἔφυγαν 50 ἄνδρες ἂν αὐξηθῆ τὸ σιτηρέσιο σὲ 1 ὀκᾶ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΟΚΟΥ

Ὑπάρχουν περιστάσεις ποὺ ὁ ἄνθρωπος στὴ ζωή του ἀναγκάζεται νὰ δανεισθῆ ἢ καὶ νὰ δανείση χρήματα.

Ὅταν δανείζωμε τὰ χρήματα, ὁ δανειζόμενος ὁ ὁποῖος συνήθως εἶναι γνωστὸς ἢ φίλος, μᾶς λέγει, ὅτι θὰ μᾶς τὰ ἐπιστρέψη τὴν ἄλλη ἡμέρα ἢ ἔπειτα ἀπὸ λίγες ἡμέρες. Ἐὰν ὅμως δὲν γίνη τοῦτο, τότε συμφωνοῦμε πότε θὰ μᾶς ἐπιστρέψη τὰ χρήματα, τὰ ὁποῖα τοῦ ἐδανείσαμε.

Ὑπάρχουν ὅμως περιστάσεις ποὺ ὁ ἄνθρωπος ἐξ ἀνάγκης δανείζεται χρήματα πολλὰ καὶ γι᾿ ἀρκετὸ χρονικὸ διάστημα.

Στὴν περίπτωσιν ὅμως αὐτὴν ἐκεῖνος, ὁ ὁποῖος δανείζει χρήματα, ζητεῖ ἀπὸ τὸν δανειζόμενο νὰ τοῦ πληρώση κάτι γιὰ τὰ χρήματά του, τὰ ὁποῖα θὰ τὰ κρατήση ἀρκετὸ χρονικὸ διάστημα. Γιατὶ σ᾽ αὐτὸ τὸ χρονικὸ διάστημα δυνατὸν μὲ τὰ χρήματα αὐτὰ νὰ ἐμπορευθῆ καὶ νὰ κερδίση. Ζητεῖ δηλ. ἀπὸ τὸν δανειζόμενο ἕνα κέρδος γιὰ τὰ χρήματα τὰ ὁποῖα θὰ τοῦ δανείση.

Ἑπομένως στὴ ζωὴ τοῦ ἀνθρώπου ὑπάρχουν προβλήματα στὰ ὁποῖα ζητεῖται νὰ βροῦμε τὸ κέρδος τὸ ὁποῖο φέρουν τὰ χρήματα, τὰ ὁποῖα δανείζομε ἢ δανειζόμεθα γιὰ ἕνα χρονικὸ διάστημα.

Τὸ κέρδος αὐτό, ὅπως καὶ στὰ προβλήματα τῶν ποσοστῶν, ἡ μεσιτεία, τὰ ἀσφάλιστρα κλπ., ὑπολογίζεται ἐπὶ τῶν 100 δραχμῶν καὶ λέγομε «τόσο ἐπὶ τοῖς ἑκατὸ» καὶ τὸ γράφουμε 5°/o ἢ 9°/o. Ὑπολογίζεται δὲ πάντοτε ἐπὶ τῶν 100 δραχμῶν γιὰ ἕνα ἔτος. Ἐπειδὴ δὲ 1 ἔτος = 12 μῆνες καὶ 1 ἔτος = 360 ἡμέρες (ὅσες ὑπολογίζεται τὸ ἔτος στὸ ἐμπόριο πρὸς εὐκολία) μποροῦμε νὰ λέμε 6°/o γιὰ ἕνα ἔτος ἢ 6°/o γιὰ 12 μῆνες ἢ 6°/o γιὰ 360 ἡμέρες, πρᾶγμα τὸ ὁποῖο εἶναι ἕνα καὶ τὸ αὐτό.

1. Πόσο κέρδος θὰ πάρωμε ἐὰν δανείσωμε 50.000 δρχ. γιὰ ἕνα ἔτος πρὸς 6°/o ;

Στὸ πρόβλημα αὐτὸ παρατηροῦμε ὅτι ἔχομε 4 ποσά : 1) τὸ ποσὸ τὸ ὁποῖο ἐδανείσαμε (50.000), 2) τὸ χρονικὸ διάστημα γιὰ τὸ ὁποῖο ἐδανείσαμε τὸ ποσὸ (1 ἔτος), 3) τὸ τόσο ἐπὶ τοῖς ἑκατὸ ποὺ ἐδανείσαμε τὰ χρήματα (6°/o), καὶ 4) τὸ ζητούμενο κέρδος.

Γιὰ εὐκολία μας τὰ 4 αὐτὰ ποσὰ ἔχουν ὀνομασθῆ μὲ ἕνα ξεχωριστὸ ὄνομα τὸ καθένα καὶ τὰ παριστάνουμε μὲ τὸ ἀρχικὸ κεφαλαῖο γράμμα τοῦ ὀνόματός τους. Δηλαδή :

1) Τὸ ποσὸ τῶν χρημάτων ποὺ ἐδανείσαμε ἢ καὶ δανειζόμεθα λέγεται ***Κεφάλαιο*** = Κ.

2) Τὸ χρονικὸ διάστημα γιὰ τὸ ὁποῖο ἐδανείσαμε τὰ χρήματα, δηλ. τὸ κεφάλαιο, λέγεται ***Χρόνος*** = Χ.

3) Τὸ ζητούμενο κέρδος λέγεται ***Τόκος*** = Τ, καὶ

4) Τὸ τόσο ἐπὶ τοῖς ἑκατὸ (6°/o), δηλ. τὸ κέρδος τῶν 100 δραχμῶν σὲ 1 ἔτος ἢ 12 μῆνες ἢ 360 ἡμέρες, λέγεται ***Ἐπιτόκιο*** = Ε.

Καὶ τώρα τὸ πρόβλημα μποροῦμε νὰ τὸ διατυπώσωμε ὡς ἑξῆς :

Πόσο τόκο θὰ φέρη κεφάλαιο 50.000 δρχ. τοκιζόμενο σ' ἕνα ἔτος πρὸς 6°/ₒ.

Λύσις

Στὸ πρόβλημα αὐτὸ μᾶς δίδονται τρία ποσὰ τὸ Κ, ὁ Χ καὶ τὸ Ε, δηλ. τὸ κεφάλαιο, ὁ χρόνος καὶ τὸ ἐπιτόκιο, τὸ ὁποῖο εἶναι ὁ τόκος τῶν 100 δραχμῶν σὲ ἕνα ἔτος ἢ 12 μῆνες ἢ 360 ἡμέρες, καὶ ζητοῦμε τὸν τόκο, δηλ. τὸ κέρδος τῶν χρημάτων τὰ ὁποῖα ἐδανείσαμε.

Γιὰ νὰ λύσωμε τὸ πρόβλημα θὰ σκεφθοῦμε ὡς ἑξῆς:

Ἐὰν ἐδανείζαμε 100 δρχ. κεφάλαιο σὲ 1 ἔτος, θὰ παίρναμε τόκο 6 δρχ. Τώρα ποὺ ἐδανείσαμε κεφάλαιο 50.000 πάλι γιὰ ἕνα χρόνο, πόσο θὰ πάρωμε; Καὶ ἔχομε τὴν κατάστρωσι:

$$\begin{array}{ccc} K & X & E \\ \frac{100}{50.000} & \frac{1}{1} & \frac{6}{X} \end{array}$$

Παρατηροῦμε ὅτι μᾶς δίδεται ἡ τιμὴ τοῦ ἑνὸς ποσοῦ (τοῦ Κ=100) καὶ οἱ ἀντίστοιχες τιμὲς τῶν ἄλλων ποσῶν (Χ=1 καὶ=6) καὶ ζητεῖται μιὰ νέα τιμὴ ἀπὸ τὸ ἕνα ποσὸ (τὸν τόκο) ἡ ὁποία εἶναι ἀντίστοιχος πρὸς νέες γνωστὲς τιμὲς τῶν ἄλλων ποσῶν (Κ=50.000 καὶ Χ=1). Ἑπομένως τὸ πρόβλημα αὐτὸ εἶναι ὅπως τὰ προβλήματα τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν. Καὶ λύεται μὲ τὸν πρακτικὸ κανόνα μὲ τὸν ὁποῖο λύονται τὰ προβλήματα τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν, ἀφοῦ πρῶτα κάμωμε τὴν σύγκρισιν τῶν ποσῶν.

Σημείωσις: Γιὰ εὐκολία μας στὴν ἀρχὴ τῆς λύσεως κάθε προβλήματος τοῦ εἴδους αὐτοῦ θὰ σχηματίζωμε ἕναν πίνακα μὲ τὰ γνωστὰ καὶ τὰ ἄγνωστα ποσά, ὁ ὁποῖος θὰ μᾶς βοηθῇ πολὺ στὴν κατάστρωσιν τοῦ προβλήματος. Ἐπίσης νὰ γνωρίζωμε ὅτι ἅμα μᾶς δίδεται τὸ ἐπιτόκιο, ἔχομε ἀμέσως τὴν πρώτη ὁριζοντία στήλη τῆς καταστρώσεως. Καὶ ἔχομε:

Πίνακας

Κ=50.000
Χ=1 ἔτος
Ε=6°/ₒ
Τ= ;
Κ+Τ= ;

α) Κατάστρωσις

$$\begin{array}{ccc} K & X & E \\ \frac{100}{50.000} & \frac{1}{1} & \frac{6}{X} \end{array}$$

β) Σύγκρισις τῶν ποσῶν : Θὰ συγκρίνωμε τὸ ποσὸν τοῦ ἀγνώστου μὲ κάθε ἕνα ποσὸν χωριστά. Καὶ λέμε 100 δρχ. κεφάλαιο σὲ 1 ἔτος φέρουν τόκο 6 δρχ., 200 δρχ. κεφάλαιο (ἤτοι διπλάσιο) στὸν αὐτὸ χρόνο θὰ φέρη τόκο 12. Ὁμοίως σκεπτόμεθα καὶ γιὰ τὰ ποσὰ χρόνον καὶ τόκον (ἄγνωστον). Πάντως ἡ σύγκρισις νὰ γίνεται πάντοτε ὡς ἑξῆς :

Σύγκρ.	Κ	καὶ Τ (Χ)	σύγκρ.	Χ καὶ Τ (Κ)
	100	(1) 6		1 (100) 6
	200	(1) Χ=12		2 (100) Χ=12
	ποσὰ ἀνάλογα			ποσὰ ἀνάλογα

Ἑπομένως ὁ τόκος μὲ τὸ κεφάλαιο καὶ τὸν χρόνο εἶναι ποσὰ ἀνάλογα.

γ) Λύσις : Προχωρῶντας στὴν λύσιν, παρατηροῦμεν ὅτι ὁ ἄγνωστος Χ ἰσοῦται μὲ τὸν ὑπεράνω αὐτοῦ ἀριθμὸ ἐπὶ τὰ κλάσματα ἀνεστραμμένα, γιατὶ τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα, ἤτοι :

$$X = 6 \times \frac{1}{1} \times \frac{50000}{100} = \frac{6 \times 1 \times 50000}{100} = 3.000$$

Ἄρα ὁ ζητούμενος τόκος εἶναι 3.000 δρχ. ἢ καὶ Τ=3.000.

Ἂν τώρα θελήσωμε νὰ μάθωμε πόσα χρήματα θὰ πάρωμε μαζὶ μὲ τὸν τόκο, δηλ. κεφάλαιο καὶ τόκο, θὰ προσθέσωμε τὸ κεφάλαιο καὶ τὸν τόκο καὶ θὰ ἔχωμε :

$$\begin{array}{r} K = 50.000 \\ T = 3.000 \\ \hline K + T = 53.000 \end{array}$$

Στὸν πίνακα τὸν ὁποῖο ἔχομε στὴν ἀρχὴ τοῦ προβλήματος καὶ ὁ τόκος καὶ τὸ Κ + Τ εἶναι γραμμένα μὲ ἐρωτηματικό, γιατὶ εἶναι τὰ ζητούμενα. Ὅταν τὰ βροῦμε, τότε συμπληρώνομε τὸν πίνακα.

Ἀπὸ τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος βρήκαμε ὅτι :

$$X = \frac{6 \times 1 \times 50.000}{100} \text{ δηλ. } T = \frac{6 \times 1 \times 50.000}{100}$$

Ἀπὸ τὸν πίνακα ὅμως γνωρίζομε ὅτι 6 = Ε, 1 = Χ καὶ 50.000 = Κ. Ἂν λοιπὸν στὴν θέσιν τῶν ἀριθμῶν βάλωμε τὰ γράμματα καὶ ἀντὶ τοῦ ἐπὶ (Χ) τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, τὴν *τελείαν* θὰ ἔχωμε, $T = \frac{E.X\,K.}{100}$

Σ' αὐτὸ βρίσκομε μιὰ σχέσιν μεταξὺ τοῦ ζητουμένου τόκου καὶ τῶν τριῶν γνωστῶν ποσῶν Κ.Ε καὶ Χ. Ἡ σχέσις αὐτὴ λέγεται *τύπος*. Σύμφωνα λοιπὸν μὲ τὸν τύπον ποὺ βρήκαμε, ἀντιλαμβανόμεθα, ὅτι ὁ τόκος ἰσοῦται μὲ τὸ ἐπιτόκιο ἐπὶ τὸν χρόνο καὶ ἐπὶ τὸ κεφάλαιο διὰ ἑκατό, ἐφ' ὅσον ὁ χρόνος εἶναι ἔτη.

Τὸ πρόβλημα τώρα λύεται καὶ μὲ τὸν τύπο ἐὰν βάλωμε στὴν θέσιν τῶν γραμμάτων τοὺς ἀριθμοὺς ἀπὸ τὸν πίνακα· Καὶ ἔχομε : $T = \frac{E.X.K.}{100} = \frac{6 \times 1 \times 50.000}{100} = 3.000$ καὶ βρίσκομε τὸν αὐτὸν τόκο.

Μὲ τὸν τύπο λύομε ἀμέσως τὸ πρόβλημα καὶ τὸ κάνομε, ὅταν θέλωμε νὰ ὑπολογίσωμε τὸ ποσὸν τοῦ τόκου. Ἡ κανονικὴ λύσις τοῦ προβλήματος εἶναι μὲ τὴν κατάστρωσιν, σύγκρισιν κ.λ.π.

ΕΙΔΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΤΟΥ ΤΟΚΟΥ

Ἀπὸ τὸ προηγούμενο πρόβλημα καταλάβαμε, ὅτι προβλήματα τόκου εἶναι ἐκεῖνα τὰ προβλήματα στὰ ὁποῖα ζητεῖται νὰ βροῦμε τὸν τόκο, ὅταν γνωρίζωμε τὰ τρία ἀπὸ τὰ ποσὰ Κ,Χ,Ε. Ἀλλὰ στὰ προβλήματα τοῦ τόκου ἔχομε τέσσερα ποσά, ἤτοι Κεφάλαιο, Χρόνο, Ἐπιτόκιο καὶ Τόκο καὶ ἑπομένως, ὅταν γνωρίζωμε τρία ἀπὸ τὰ ποσὰ αὐτά, εὔκολα βρίσκομε τὸ τέταρτο.

Ὡς ἐκ τούτου ἔχομε τεσσάρων εἰδῶν προβλήματα τόκου, τὰ ἑξῆς :

1. Ἐκεῖνα στὰ ὁποῖα ζητεῖται ὁ τόκος
2. » » » » τὸ κεφάλαιο
3. » » » » ὁ χρόνος, καὶ
4. » » » » τὸ ἐπιτόκιο.

1. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΤΑ ΟΠΟΙΑ ΖΗΤΕΙΤΑΙ Ο ΤΟΚΟΣ

Πόσο τόκο φέρει κεφάλαιο 120.000 δρχ. σὲ 3 ἔτη, τοκιζόμενο πρὸς 4%;

Λύσις

Στὸ πρόβλημα αὐτὸ δίδονται τρία ποσὰ Κ, Χ καὶ Ε καὶ ζητεῖται ὁ τόκος. Ὁ χρόνος στὸ πρόβλημα αὐτὸ εἶναι ἔτη. Σύμφωνα μὲ τὰ ὅσα γνωρίζομε, ἔχομε :

Πίνακας

Κ=120 000
Χ=3 ἔτη
Ε=4°/₀
Τ= ;
Κ+Τ= ;

α) Κατάστρωσις:

Κ	Χ	Ε
100	1	4
120.000	3	Χ

β) Σύγκρισις : Τ καὶ Κ = ἀνάλογα
Τ » Χ = »

γ) Λύσις : $X=4\times\frac{3}{1}\times\frac{120.000}{100}=\frac{4\times3\times120.000}{100}=14.400$

καὶ ἔχομε : Τ=14.400 καὶ Κ + Τ = 134.400.

Τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενο βρίσκομε ἐὰν λύσωμε τὸ πρόβλημα ἀμέσως μὲ τὸν τύπο, ἤτοι :

$$T=\frac{E.X.K.}{100}=\frac{4\times3\times120.000}{100}=14.400$$

Ἀπὸ τ' ἀνωτέρω καταλαβαίνομε ὅτι, στὰ προβλήματα τοῦ τόκου στὰ ὁποῖα ζητεῖται ὁ τόκος, γιὰ νὰ βροῦμε τὸν τόκο, πολλαπλασιάζομε τὸ Κ ἐπὶ τὸν Χ καὶ ἐπὶ τὸ Ε καὶ τὸ γινόμενο διαιροῦμε διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 100, ἐπειδὴ ὁ χρόνος εἶναι ἔτη.

Πόσο τόκο θὰ πάρωμε ἐὰν δανείσωμε κεφάλαιο 63.000 δρχ. γιὰ 8 μῆνες πρὸς 5 °/₀ ;

Λύσις

Στὸ πρόβλημα αὐτὸ γνωρίζομε τὸ Κ, τὸν Χ καὶ τὸ Ε καὶ ζητοῦμε τὸν τόκο. Ὁ χρόνος ἐδῶ εἶναι μῆνες καὶ γι' αὐτὸ στὴν κατάστρωσιν θὰ βάλωμε, ἀντὶ γιὰ ἕνα χρόνο, τὸ 12 μῆνες. Καὶ ἔχομε :

Πίνακας

Κ=63.000
Χ=8 μῆνες
Ε=5°/₀
Τ= ;
Κ+Τ= :

α) Κατάστρωσις:

Κ	Χ	Ε
100	12 μῆν.	5
63.000	8	Χ

β) *Σύγκρισις :* Τ καὶ Κ = ἀνάλογα
Τ » Χ = »

γ) Λύσις : $T=5\times\frac{8}{12}\times\frac{63.000}{100}\times\frac{5\times8\times63\,000}{1200}=2.100$

καὶ ἔχομε Τ = 2.100 καὶ Κ + Τ = 65.100 δρχ.

Ἀπὸ τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος ἔχομε

$$T = \frac{5 \times 8 \times 63.000}{1200}$$

Ἐὰν στὴν θέσιν τῶν ἀριθμῶν βάλωμε τὰ γράμματα μὲ τὰ ὁποῖα ὀνομάζομε τὰ ποσά, θὰ ἔχωμε τὸν τύπο

$$T = \frac{E.X.K.}{1200}$$

Παρατηροῦμε ὅμως ὅτι ἔχομε ἕνα νέο τύπο τοῦ τόκου, γιατὶ ὁ χρόνος εἶναι μῆνες. Ἀπ' αὐτὸ συμπεραίνομε ὅτι, γιὰ νὰ βροῦμε τὸν τόκο πολλαπλασιάζομε τὸ Ε ἐπὶ τὸν Χ καὶ τὸ Κ καὶ τὸ γινόμενο τὸ διαιροῦμε διὰ τοῦ 1200, γιατὶ ὁ χρόνος μᾶς δίδεται σὲ μῆνες.

Πόσο τόκο θὰ πάρωμε ἂν δανείσωμε κεφάλαιο 81.000 δρχ. σὲ 40 ἡμέρες πρὸς 8°/ₒ;

Λύσις

Καὶ αὐτὸ εἶναι πρόβλημα τόκου στὸ ὁποῖο ζητεῖται ὁ τόκος. Ὁ χρόνος ἐδῶ μᾶς δίδεται σὲ ἡμέρες καὶ γι' αὐτὸ στὴν κατάστρωσιν τοῦ προβλήματος, ἀντὶ ἕνα χρόνο, θὰ ἔχωμε 360 ἡμέρες, ὅπως ὑπολογίζεται ὁ χρόνος ἐμπορικά. Καὶ ἔχομε:

Πίνακας

Κ=81.000
Χ=40 ἡμ.
Ε=8°/ₒ
Τ= ;
Κ+Τ= ;

α) Κατάστρωσις:

Κ	Χ	Ε
100	360 ἡμ.	8
81.000	40	Χ

β) Σύγκρισις:

Τ καὶ Κ = ἀνάλογα
Τ καὶ Χ = »

γ) Λύσις: $X = 8 \times \frac{40}{360} \times \frac{81.000}{100} = \frac{8 \times 40 \times 81.000}{36.000} = 720.$

Ἄρα Τ = 720 δρχ. καὶ Κ + Τ = 81.720 δρχ.

Ἀπὸ τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος ἔχομε:

$$T = \frac{8 \times 40 \times 81.000}{36.000}$$

Ἂν τώρα στὴν θέσιν τῶν ἀριθμῶν βάλωμε τὰ γράμματα μὲ τὰ ὁποῖα ὀνομάζομε κάθε ποσὸν ὅπως εἶναι στὸν πίνακα, θὰ ἔχωμε τὸν τύπον:

$$T = \frac{E.X.K}{36.000}$$

Καὶ κατ' αὐτὸν τὸν τρόπο ἔχομε νέο τύπο μὲ τὸν ὁποῖο βρίσκομε τὸν τόκο ὅταν ὁ χρόνος εἶναι σὲ ἡμέρες καὶ ὁ ὁποῖος λέγει ὅτι: ***γιὰ νὰ βροῦμε τὸν τόκο ὅταν ὁ χρόνος εἶναι σὲ ἡμέρες*** *πολλαπλασιάζομε τὸ ἐπιτόκιο ἐπὶ τὸν χρόνο καὶ ἐπὶ τὸ κεφάλαιο καὶ τὸ γινόμενο τὸ διαιροῦμε διὰ τοῦ 36.000 (διότι 100×360=36.000).*

Ἂν ἐξετάσωμε πάλι τὰ τρία προηγούμενα προβλήματα θὰ παρατηρήσωμε ὅτι :

α) Στὸ πρῶτο, στὸ ὁποῖο ὁ χρόνος ἐδόθη σὲ ἔτη εἴχαμε τὸν τύπο $Τ = \frac{\text{Ε.Χ.Κ.}}{100}$

β) Στό δεύτερο, στὸ ὁποῖο ὁ χρόνος ἐδόθη σὲ μῆνες, εἴχαμε τὸν τύπο $Τ = \frac{\text{Ε.Χ.Κ.}}{1200}$

καὶ γ) στὸ τρίτο, στὸ ὁποῖο ὁ χρόνος ἐδόθη σὲ ἡμέρες, εἴχαμε τὸν τύπο $Τ = \frac{\text{Ε.Χ.Κ.}}{36.000}$

Ἐὰν συγκεντρώσωμε καὶ τὶς τρεῖς αὐτὲς περιπτώσεις τῶν προβλημάτων τοῦ τόκου στὰ ὁποῖα ζητεῖται ὁ τόκος θὰ ἔχωμε τὸν ἑξῆς κανόνα :

Γιὰ νὰ λύσωμε τὰ προβλήματα τοῦ τόκου στὰ ὁποῖα ζητεῖται ὁ τόκος, πολλαπλασιάζομε τὸ ἐπιτόκιο ἐπὶ τὸν χρόνο καὶ ἐπὶ τὸ κεφάλαιο καὶ τὸ γινόμενο τὸ διαιροῦμε διὰ τοῦ 100 ὅταν ὁ χρόνος εἶναι ἔτη, διὰ τοῦ 1.200 ὅταν ὁ χρόνος εἶναι μῆνες καὶ διὰ τοῦ 36.000 ὅταν ὁ χρόνος εἶναι ἡμέρες.

Πόσο τόκο θὰ φέρη κεφάλαιο 60.000 δρχ. ὅταν τὸ τοκίσωμε στὸ Ταχυδρομικὸ Ταμιευτήριο ἢ στὴν Τράπεζα ἐπὶ δυὸ ἔτη καὶ 1 μῆνα πρὸς 5 °/₀ ;

Λύσις

Εἶναι πρόβλημα τόκου στὸ ὁποῖο ζητεῖται ὁ τόκος. Στὸ πρόβλημα ὅμως τοῦτο πρέπει νὰ προσέξωμε δυὸ σημεῖα.

α) Ὅτι ὁ χρόνος εἶναι συμμιγὴς ἀριθμὸς (2 ἔτη καὶ 1 μήνας), καὶ

β) ὅτι τὸ κεφάλαιο τῶν 60.000 δρχ. θὰ τοκισθῇ στὸ Ταχυδρομικὸ Ταμιευτήριο ἢ σὲ Τράπεζα.

Καὶ ἐπειδὴ στὸ πρόβλημα ὁ χρόνος εἶναι συμμιγὴς ἀριθμὸς δὲν ἔχομε τίποτε ἄλλο νὰ κάμωμε παρὰ νὰ τρέψωμε τὸν συμμιγῆ σὲ μονάδα τῆς κατωτέρας τάξεως, δηλ. μῆνες, καὶ νὰ λύσωμε τὸ πρόβλημα εἴτε κατὰ τὸν ἕνα τρόπον εἴτε κατὰ τὸν ἄλλον (μὲ τὸν τύπον). Καὶ ἔχομε :

Χρόνος 2 ἔτη καὶ 1 μήνας=2×12=24+1 μήν.=25 μῆνες.

Πίνακας

Κ=60.000
Χ=2 ἔτη 1 μήν.=25 μῆν.
Ε=5°/₀
Τ= ;
Κ+Τ= ;

α) Κατάστρωσις :

$$\begin{array}{ccc} K & X & T \\ \frac{100}{60.000} & \frac{12}{25} & \frac{5}{X} \end{array}$$

β) Σύγκρισις :

Τ καὶ Κ ποσὰ ἀνάλογα
Τ καὶ Χ » »

γ) Λύσις : $T = 5 \times \frac{60.000}{100} \times \frac{25}{12} = \frac{5 \times 60.000 \times 25}{1.200} =$ $=6250$, Τ=6250, Τ + Κ=66.250 δρχ.

Μὲ τὸν τύπο ἔχομε $T = \frac{E.X.K}{1.200} = \frac{5 \times 25 \times 60.000}{1.200} = 6250$ δρ.

Τρόποι τοκισμοῦ τοῦ κεφαλαίου

Ἀπὸ τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα εἰς τὸ ὁποῖον φαίνεται ὅτι ἐτοκίσαμε τὰ χρήματα εἰς τὸ Ταχ. Ταμιευτήριον, καταλαβαίνομε ὅτι γιὰ νὰ μᾶς δώσουν τὰ χρήματα, τὰ ὁποῖα τοκίζομε, κάποιον τόκο, ὑπάρχουν καὶ ἄλλες περιπτώσεις τὶς ὁποῖες πρέπει νὰ ἐξετάσωμε, γιατὶ εἶναι χρήσιμοι στὴ ζωή μας.

α΄ Καταθέσεις σὲ Τράπεζες

Τὰ χρήματα τὰ ὁποῖα ἔχει εἴτε ἀπὸ κληρονομία εἴτε ἀπὸ ἐπιχείρησιν καὶ τὸ ἐμπόριον, εἴτε ἀπὸ οἰκονομίες κ.λ.π. ὁ κάθε ἄνθρωπος, μπορεῖ νὰ τὰ καταθέση σὲ μιὰ ἀπὸ τὰς Τραπέζας μας, ὅπως στὴν Ἐθνικὴ Τράπεζα, τὴν Ἀγροτική, τῶν Ἀθηνῶν, τὴν Λαϊκή, τὴν Ἰονικὴ κ.λ.π.

Τὴν κατάθεσιν αὐτὴν τὴν κάνει : α) γιὰ ὡρισμένη χρονικὴ περίοδο δηλ. γιὰ 3 ἢ 5 κ.λ.π. ἔτη. Κατὰ τὸ διάστημα αὐτὸ δὲν ἔχει τὸ δικαίωμα νὰ πάρη πάλιν τὰ χρήματά του, τὰ ὁποῖα αὐξάνονται μὲ τὸν τόκον, ὁποῖος ἀνατοκίζεται. Αὐτὲς λέγονται ***Καταθέσεις ἐπὶ προθεσμίᾳ***. Καὶ β) μπορεῖ τὴν κατάθεσίν του νὰ τὴν κάμη μὲ τὴν συμφωνία νὰ παίρνη τὰ χρήματά του ὅποτε θέλει. Οἱ καταθέσεις αὐτὲς λέγονται ***Καταθέσεις ὄψεως***.

β΄ Ταμιευτήρια—Ἀποταμίευσις

Τὰ Ταχυδρομικὰ Ταμιευτήρια εἶναι μιὰ Κρατικὴ ὑπηρεσία. Ἐκεῖ ὁ καθένας μας μπορεῖ νὰ καταθέση τὶς οἰκονομίες του καὶ νὰ παίρνη τόκο, τὸν ὁποῖο ὁρίζει τὸ Κράτος καὶ κατ' αὐτὸ τὸν τρόπον ὁ καθένας νὰ αὐξάνη τὶς οἰκονομίες του.

Προπολεμικὰ τὰ Ταχ. Ταμιευτήρια εἶχαν τοὺς ***κουμπαρά-***

δες στοὺς ὁποίους ἔβαζε κανεὶς τὶς οἰκονομίες καὶ κατόπιν τὶς κατέθετε στὸ Ταμιευτήριο γιὰ νὰ παίρνη ἀπὸ αὐτὲς τὸν τόκο ὁ ὁποῖος ἦτο 4 °/₀. Μποροῦσε δὲ κανεὶς νὰ καταθέση ὅποιο ποσὸν ἤθελε, ὄχι ὅμως ἐπάνω ἀπὸ 100 χιλιάδες.

Στὰ σχολεῖα γιορταζόταν ἡ γιορτὴ τῆς ἀποταμιεύσεως κάθε 31 Ὀκτωβρίου καὶ οἱ μαθηταὶ ἔγραφαν μιὰ ἔκθεσιν περὶ ἀποταμιεύσεως. Ἡ καλύτερη ἔκθεσις ἀπὸ κάθε σχολεῖο ἐβραβεύετο ἀπὸ τὰ Ταμιευτήρια καὶ ὁ μαθητὴς ἔπαιρνε δῶρο ἕνα κουμπαρᾶ. Καὶ τοῦτο γιὰ νὰ συνηθίση ὁ κόσμος στὴν ἀποταμίευσιν ἡ ὁποία εἶναι πολὺ ὠφέλιμος καὶ στὸν ἄνθρωπο καὶ στὴν κοινωνία καὶ στὸ Κράτος.

γ΄ Ταμιευτήρια Τραπεζῶν

Ὅπως εἶναι τὰ Ταχυδρομικὰ Ταμιευτήρια εἶναι καὶ τὰ Ταμιευτήρια τῶν διαφόρων Τραπεζῶν.

δ΄ Ὁμολογίες

Ἡ Πατρίδα μας πολλὲς φορὲς βρέθηκε στὴν ἀνάγκη νὰ δανεισθῆ χρήματα ἀπὸ τοὺς ἴδιους τοὺς Ἕλληνες. Γιὰ νὰ καλύψη τὰ δάνεια αὐτὰ ἐξέδωκε τίτλους οἱ ὁποῖοι καλοῦνται ***ὁμολογίες***.

Μὲ τοὺς ἀνώνυμους αὐτοὺς τίτλους ὁμολογεῖ τὸ Κράτος τὸ χρέος του καὶ ἀναλαμβάνει νὰ πληρώση σ' ἐκεῖνον ὁ ὁποῖος ἔχει τὶς ὁμολογίες ἕνα τόκο 8 °/₀. Κάθε ὁμολογία ἔχει τὰ ***τοκομερίδια*** μὲ τὰ ὁποῖα στὸ τέλος τοῦ ἔτους γίνεται ἡ πληρωμὴ τοῦ τόκου.

ε΄ Μετοχὲς

Καὶ οἱ μετοχὲς εἶναι ἕνα εἶδος ὁμολογίας, ἀλλὰ τὰ χρήματα δὲν τὰ ἔχει πάρει τὸ Κράτος παρὰ μιὰ Ἑταιρεία, μιὰ ἐπιχείρησις, ὅπως εἶναι οἱ μετοχὲς τῆς Ἐθνικῆς Τραπέζης, τῆς Ἑταιρείας Λιπασμάτων. Ἑταιρεία καὶ γενικῶς κάθε ἐπιχείρησις, ἡ ὁποία ἔχει ἐκδώσει μετοχές, στὸ τέλος κάθε ἔτους, ἀνάλογα μὲ τὰ κέρδη της, δίνει στοὺς κατόχους τῶν μετοχῶν ἕνα ποσὸ κατὰ μετοχή, τὸ ὁποῖο καλεῖται ***μέρισμα***.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

α) Ἀπὸ μνήμης :

1. Νὰ βρεθῆ ὁ τόκος τῶν 100 δρχ. σ' ἕνα ἔτος καὶ ἔπειτα σὲ δυὸ ἔτη μὲ ἐπιτόκιο 4°/₀, 5°/₀ καὶ 8°/₀.

2. Νὰ βρεθῇ ὁ τόκος τῶν 5.000 δραχ. καὶ τῶν 10.000 σ' ἕνα ἔτος πρὸς 3°/₀, 12°/₀ καὶ 10°/₀.

β') Γραπτῶς :

1. Πόσο τόκο μᾶς δίνουν 150.000 ἐὰν τὶς τοκίσωμε πρὸς 4°/₀ σὲ δυὸ ἔτη ;

2. Πόσο τόκο θὰ μᾶς δώσουν 680.000 δρχ. τοκιζόμενες πρὸς 6°/₀ σὲ 10 μῆνες ;

3. Πόσο τόκο θὰ μᾶς φέρουν 2.500.000 δραχ. τοκιζόμενες πρὸς 4,5°/₀ σὲ 2 ἔτη καὶ 6 μῆνες ;

4. Τὸ σχολικό μας ταμεῖο ἔχει καταθέσει στὴν Τράπεζα ἀπὸ εἰσφορὲς καὶ ἄλλα ἔσοδα δρχ. 18.000.000 μὲ ἐπιτόκιο 4°/₀. Πόσα χρήματα θὰ ἀποσύρη μετὰ 1 ἔτος καὶ 2 μῆνες ;

5. Ὁ Συνεταιρισμὸς ἑνὸς χωριοῦ πῆρε ἀπὸ τὴν Ἀγροτικὴ Τράπεζα δάνειον 24.000.000 γιὰ 6 μῆνες πρὸς 8°/₀. Πόσο τόκο θὰ πληρώση καὶ πόσα χρήματα θὰ ἐπιστρέψῃ στὴν Τράπεζα ;

6. Ἕνας γεωργὸς ἐδανείσθη τὴν 12 Μαΐου 1950 ἀπὸ τὴν Ἀγροτικὴ Τράπεζα 1.620.000 δρχ. μὲ ἐπιτόκιο 8°/₀ καὶ πρέπει νὰ τὰ ἐξοφλήση τὴν 22αν Σεπτεμβρίου 1950. Πόσα θὰ πληρώση στὴν Τράπεζα γιὰ κεφάλαιο καὶ τόκους ;

7. Ἕνας ἔμπορος ἐπώλησε τὴν οἰκίαν του ἀντὶ 360 λιρῶν χρυσῶν μὲ τιμὴ λίρας 225.000 δρχ. Ἀπὸ τὰ χρήματα τὰ ὁποῖα εἰσέπραξε, τὸ $\frac{1}{3}$ ἄρχισε νὰ τὰ ἐμπορεύεται μὲ κέρδος 15°/₀ καὶ τὰ ὑπόλοιπα τὰ κατάθεσε στὴν Τράπεζα μὲ ἐπιτόκιο 9°/₀. Ποιό θὰ εἶναι τὸ κέρδος του μετὰ δύο ἔτη ;

8. Ἕνας πατέρας τὴν 1ην Ἰουλίου 1946 ποὺ γεννήθηκε ἡ κόρη του κατέθεσε στὰ Ταμιευτήρια 4.800.000 δρχ. μὲ ἐπιτόκιο 8°/₀. Πόσα χρήματα θὰ εἰσπράξη σήμερα ;

2. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΟΚΟΥ ΣΤΑ ΟΠΟΙΑ ΖΗΤΕΙΤΑΙ ΤΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ

1. Ποιό κεφάλαιο ἐτοκίσθη πρὸς 6°/₀ καὶ σὲ 3 ἔτη ἔδωσε τόκο 9.000 δραχ. ;

Λύσις

Στὸ πρόβλημα αὐτὸ μᾶς δίδονται τὰ ποσὰ Χ, Ε καὶ Τ καὶ ζητεῖται τὸ Κ. Θὰ τὸ λύσωμε ὅπως καὶ τὰ προηγούμενα μὲ τὴν σύνθετο μέθοδο τῶν τριῶν. Καὶ ἔχομε :

Πίνακας

Κ= ;
Χ=3 ἔτη
Ε=6°/ₒ
Τ=9000

α) Κατάστρωσις

Κ	Χ	Τ
100	1	6
Χ	3	9000

Καὶ ἐδῶ, ἐπειδὴ μᾶς δίδεται τὸ ἐπιτόκιο κάνομε τὴν κατάστρωσιν ὅπως καὶ στὰ προβλήματα τοῦ τόκου στὰ ὁποῖα ἐζητεῖτο ὁ τόκος.

β) Σύγκρισις : Εἰς τὸ πρόβλημα αὐτὸ τὸ ποσὸν τοῦ ἀγνώστου εἶναι τὸ κεφάλαιο, τὸ ὁποῖο γνωρίζομε ὅτι μὲ τὸ ποσὸν τοῦ τόκου εἶναι ποσὰ ἀνάλογα, δὲν γνωρίζομε ὅμως τί εἶναι μὲ τὸ ποσὸ τοῦ χρόνου. Γι' αὐτὸ θὰ συγκρίνωμε μόνον τὸ κεφάλαιο μὲ τὸν χρόνο. Καὶ ἔχομε :

Κεφ. 100 σὲ 2 ἔτη φέρει τόκο 12 δρχ.
» 200 » 1 ἔτος θὰ φέρει τόκο πάλιν 12 δραχ.

Ἑπομένως τὰ ποσὰ Κ καὶ Χ εἶναι ποσὰ ἀντίστροφα γιατὶ ὅταν τὸ κεφάλαιο 100 ἐπολλαπλασιάσθη καὶ ἔγινε 200, ὁ χρόνος διαιρέθη διὰ 2 καὶ ἔγινε 1. Καὶ τώρα ἔχομε :

Κ καὶ Τ = ἀνάλογα
Κ » Χ = ἀντίστροφα

γ) Λύσις : Καὶ γιὰ τὴν λύσιν ἐφαρμόζομε τὰ μέχρι τοῦδε γνωστὰ καὶ ἔχομε :

$$K = 100 \times \frac{1}{3} \times \frac{9000}{6} = \frac{100 \times 9000}{3 \times 6} = 50.000$$

Ἄρα $K = 50.000$ $K + T = 50.000 + 9.000 = 59.000$

Ἀπὸ τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος ἔχομε :

$$K = \frac{9000 \times 100}{3 \times 6}$$

Ἐὰν τώρα ἀντικαταστήσωμε τοὺς ἀριθμοὺς μὲ τὰ ἀρχικὰ γράμματα μὲ τὰ ὁποῖα ὀνομάζομε κάθε ποσὸν θὰ ἔχωμε τὸν τύπο : $K = \frac{T.100}{E.X}$

Ὡς ἐκ τούτου συμπεραίνομε ὅτι, *γιὰ νὰ βροῦμε τὸ Κεφάλαιο πολλαπλασιάζομε τὸν τόκο ἐπὶ τὸ 100, ὅταν ὁ χρόνος εἶναι ἔτη, καὶ τὸ γινόμενο τὸ διαιροῦμε διὰ τοῦ γινομένου τοῦ ἐπιτοκίου ἐπὶ τὸν χρόνον.*

2. Ποιό κεφάλαιο ἐτοκίσθη σὲ 9 μῆνες πρὸς 4°/ₒ καὶ ἔδωσε τόκο 27.000 δραχ. ;

Λύσις

Τὸ πρόβλημα αὐτὸ εἶναι πρόβλημα τόκου στὸ ὁποῖο ζητεῖται τὸ κεφάλαιο. Παρατηροῦμε ὅτι ὁ χρόνος εἶναι μῆνες.

Πίνακας

Κ= ;
Χ=9 μῆνες
Ε=4°/₀
Τ=27.000
Κ+Τ= ;

α) Κατάστρωσις

Κ	Χ	Τ
100	12	4
Χ	9	27000

β) Σύγκρισις :

Κ καὶ Τ = ἀνάλογα
Κ καὶ Χ = ἀντίστροφα

γ) Λύσις : $K = 100 \times \frac{12}{9} \times \frac{27000}{4} = \frac{100 \times 12 \times 27000}{9 \times 4} =$

$$= \frac{1200 \times 27.000}{9 \times 4} = 900.000$$

Ἄρα Κ = 900 000 $\qquad$ Κ + Τ = 927.000

Καὶ ἐὰν ἀντικαταστήσωμε τοὺς ἀριθμοὺς μὲ τὰ ἀρχικὰ γράμματα τῶν ποσῶν θὰ ἔχωμε τὸν τύπο $K = \frac{T.1200}{X.E}$ ἀπὸ τὸν ὁποῖον συμπεραίνομε ὅτι, ***ὅταν ὁ χρόνος εἶναι μῆνες πολλαπλασιάζομε τὸν τόκο ἐπὶ τὸ 1200 (100×12) καὶ τὸ γινόμενο τὸ διαιροῦμε διὰ τοῦ γινομένου τοῦ χρόνου ἐπὶ τὸ ἐπιτόκιο.***

3. Ποιό κεφάλαιο ἐτοκίσθη πρὸς 9°/₀ καὶ σὲ 1 μῆνα καὶ 10 ἡμέρες ἔδωσε τόκο 7.200 δραχ.

Λύσις

Μᾶς δίδονται τὰ ποσὰ Τ, Χ καὶ Ε ζητοῦμε τὸ Κ. Ὁ χρόνος εἶναι συμμιγὴς ἀριθμός, μῆνες καὶ ἡμέρες. Τὸν τρέπομε σὲ μονάδες τῆς κατωτέρας τάξεως, δηλ. ἡμέρες καὶ ἔχομε :

Πίνακας

Κ= ;
Ε=9°/₀
Χ=1 μήν.+10 ἡμ.=40 ἡμ.
Τ=7.200
Κ+Τ= ;

α) Κατάστρωσις :

Κ	Χ	Τ
100	360	9
Χ	40	7.200

β) *Σύγκρισις* :

Κ καὶ Τ=ποσὰ ἀνάλογα
Κ καὶ Χ=ἀντίστροφα

γ) Λύσις : $K = 100 \times \frac{360}{40} \times \frac{7.200}{9} = \frac{100\times 360\times 7200}{40\times 9} =$
$= \frac{36.000\times 7.200}{40\times 9} = 720.000$

Ἄρα Κ = 720.000 δρχ. $K + T = 727.200$.

Ἐὰν ἀντικαταστήσωμε τοὺς ἀριθμοὺς μὲ τὰ γράμματα τῶν ποσῶν, ὅπως ἔχομε μάθει, θὰ ἔχωμε τὸν τύπο :

$$K = \frac{T.36.000}{X.E.}$$

ἀπὸ τὸν ὁποῖον καὶ συμπεραίνομε ὅτι, ***ὅταν ὁ χρόνος εἶναι ἡμέρες πολλαπλασιάζομε τὸν τόκο ἐπὶ τὸ 36.000 (ἤτοι 100× 360) καὶ*** . . . .

Ἀπὸ τὰ τρία παραπάνω προβλήματα παρατηροῦμε ὅτι γιὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ κεφαλαίου ἔχομε τρεῖς τύπους, τοὺς ἑξῆς :

$$K = \frac{T.100}{X.E.},\quad K = \frac{T.1200}{X.E.},\quad K = \frac{T.36.000}{X.E.}$$

καὶ τοῦτο γιατὶ ὁ χρόνος δυνατὸν νὰ δίδεται σὲ ἔτη, σὲ μῆνες ἢ σὲ ἡμέρες.

Ἀπὸ τοὺς τρεῖς αὐτοὺς τύπους ἔχομε τὸν κανόνα :

Γιὰ νὰ λύσωμε τὰ προβλήματα τοῦ τόκου στὰ ὁποῖα ζητεῖται τὸ κεφάλαιο, πολλαπλασιάζομε τὸν τόκο ἐπὶ 100 ὅταν ὁ χρόνος εἶναι (δίδεται) σὲ ἔτη, ἐπὶ 1.200 ὅταν ὁ χρόνος εἶναι σὲ μῆνες καὶ ἐπὶ 36.000 ὅταν ὁ χρόνος εἶναι σὲ ἡμέρες καὶ τὸ γινόμενο τὸ διαιροῦμε διὰ τοῦ γινομένου τοῦ χρόνου ἐπὶ τὸ ἐπιτόκιο.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

α) Ἀπὸ μνήμης :

1. Ποιό κεφάλαιο ἐδανείσαμε σ' ἕνα ἔτος πρὸς 4°/o καὶ πήραμε τόκο 400 δρχ. ;

2. Ποιό κεφάλαιο τοκιζόμενο πρὸς 6°/o σ' ἕνα ἔτος φέρει τόκο 1.200 δρχ. ;

3. Ποιό κεφάλαιο ἐτοκίσθη πρὸς 10°/o ὥστε σ' ἕνα ἔτος νὰ δώση τόκο 36.000 δρχ. ;

β) Γραπτῶς :

Ἀπὸ τὴ σχολικὴ καὶ κοινωνικὴ ζωή.

1. Τὸ σχολικό μας ταμεῖο πῆρε ἀπὸ τὴν Τράπεζα στὴν ὁποία εἶχε καταθέσει τὰ χρήματά του πρὸς 4°/o γιὰ 2 ἔτη, τό-

$\frac{100}{3.375}$ $\frac{19}{5}$ $\frac{145}{X}$ (19575)

κο 560.000 δρχ. Πόσα χρήματα εἶχε καταθέσει στὴν Τράπεζα ;

2. Μιὰ κοινότης γιὰ νὰ φέρη νερὸ εἶχε καταθέσει στὴν Τράπεζα χρήματα τὰ ὁποῖα πρὸς 4,5% σὲ 5 ἔτη ἔδωσαν τόκο 3.375.000 δρχ. Πόσα χρήματα εἶχε καταθέσει ἡ Κοινότης στὴν Τράπεζα ;

3. Κάποιος ἐδάνεισε χρήματα πρὸς 8% καὶ γιὰ 6 μῆνες πῆρε τόκο 24.000 δρχ. Πόσα χρήματα εἶχε δανείσει ;

4. Εἶχε κάποιος ἀγοράσει σιτάρι καὶ τὸ ἐπώλησε ὕστερα ἀπὸ 1 ἔτος καὶ 3 μῆνες μὲ κέρδος 20% καὶ ἐκέρδισε 250.000. Πόση ἦτο ἡ ἀξία τοῦ σιταριοῦ ;

5. Ἕνας ἔμπορος εἶχε καταθέσει στὴν Τράπεζα χρήματα πρὸς 6% καὶ ὕστερα ἀπὸ 1 ἔτος, 4 μῆνες καὶ 20 ἡμέρες πῆρε τόκο 720.000. Πόσα χρήματα εἶχε καταθέσει ;

6. Ποιό κεφάλαιο πρέπει νὰ τοκίσωμε σὲ 3 ἔτη πρὸς 8% γιὰ νὰ πάρωμε τόκο ὅσον θὰ πάρωμε ἐὰν τοκίσωμε κεφάλαιο 180.000 δρχ. σὲ 5 ἔτη πρὸς 6% ;

7. Ἐξοδεύει κάποιος κάθε ἡμέρα 32.000 δραχ. οἱ ὁποῖες εἶναι ὁ τόκος τῶν χρημάτων του τὰ ὁποῖα ἔχει καταθέσει πρὸς 6%. Πόσο κεφάλαιο ἔχει καταθέσει ;

8. Μιὰ ὑπάλληλος ἀγόρασε μὲ δόσεις διάφορα εἴδη γιὰ 8 μῆνες. Ἡ ἀξία τῶν εἰδῶν ἐπιβαρύνεται μὲ 4% καὶ θὰ πληρώση ἐπὶ πλέον τῆς ἀξίας τῶν εἰδῶν 42.000 δρχ. Πόση εἶναι ἡ ἀξία τῶν διαφόρων εἰδῶν τὰ ὁποῖα ἀγόρασε ;

3. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΟΚΟΥ ΣΤΑ ΟΠΟΙΑ ΖΗΤΕΙΤΑΙ Ο ΧΡΟΝΟΣ

1. Σὲ πόσο χρόνο ἐτοκίσαμε κεφάλαιο 72.000 δρχ. πρὸς 6% καὶ πήραμε τόκο 4.800 δραχ. ;

Λύσις

Στὸ πρόβλημα αὐτὸ μᾶς δίδονται ὁ Τ, τὸ Κ καὶ τὸ Ε καὶ ζητοῦμε τὸν χρόνο. Εἶναι δηλ. καὶ αὐτὸ πρόβλημα τόκου στὸ ὁποῖο ζητεῖται ὁ χρόνος. Θὰ τὸ λύσωμε ὅπως καὶ τὰ προηγούμενα δηλ. μὲ τὴν σύνθετο μέθοδο. Καὶ ἔχομε.

Πίνακας

Κ=72.000

Χ= ;

Τ=4800

Ε=6%

α) Κατάστρωσις

$$\begin{array}{ccc} K & X & T \\ \frac{100}{72.000} & \frac{1}{X} & \frac{6}{4.800} \end{array}$$

β) Σύγκρισις: Τὸ ποσὸν τοῦ ἀγνώστου ἐδῶ εἶναι τὸ ποσὸν τοῦ Χ. Ὁ χρόνος, ὅπως εἴδαμε στὰ προβλήματα στὰ ὁποῖα ἐζητεῖτο ὁ τόκος, μὲ τὸν τόκο εἶναι ποσὰ ἀνάλογα ἐνῶ μὲ τὸ κεφάλαιο εἶναι ποσὰ ἀντίστροφα.

Δηλ. Χ καὶ Τ = ποσὰ ἀνάλογα
Χ » Κ = » ἀντίστροφα

γ) Λύσις: $X = 1 \times \frac{100}{72000} \times \frac{4800}{6} = \frac{1 \times 100 \times 4800}{72.000 \times 6} =$

$= \frac{100 \times 4800}{72000 \times 6} = \frac{80}{72} = \frac{10}{9}$ ἔτη.

Τὸ κλάσμα $\frac{10}{9}$ ἔτη τὸ τρέπομε σὲ συμμιγῆ ἀριθμὸ ἀφοῦ διαιρέσωμε τὸν ἀριθμητὴ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ, ἤτοι:

10	9
1	1 ἔτος, 1 μήν. 10 ἡμέρ.
× 12	
12 μῆν.	
3	
× 30	
90	

Ἄρα τὸ κεφάλαιο ἐτοκίσθη σὲ 1 ἔτος, 1 μῆνα καὶ 10 ἡμέρες.

Ἀπὸ τὴν λύσιν βρήκαμε ὅτι ὁ $X = \frac{4800 \times 100}{72.000 \times 6}$

Ἂν ἀντικαταστήσωμε τοὺς ἀριθμοὺς μὲ τὰ γνωστὰ γράμματα θὰ ἔχωμε καὶ μόνο αὐτὸν τὸν τύπο τοῦ χρόνου.

$$X = \frac{T.100}{K.E.}$$

γιατὶ μᾶς ζητεῖται ὁ χρόνος καὶ δὲν μᾶς δίδεται τώρα σὲ ἔτη, σὲ μῆνες ἢ σὲ ἡμέρες.

2. Σὲ πόσο χρόνο ἐτοκίσθη κεφάλαιο 120.000 δρχ. πρὸς $5\,^{0}/_{0}$ καὶ ἔγινε μαζὶ μὲ τὸν τόκο 138.000 δραχ.;

Λύσις

Στὸ πρόβλημα αὐτὸ μᾶς δίδονται μόνον τὸ Κ καὶ τὸ Ε, μᾶς δίδεται ὅμως καὶ τὸ Κ + Τ ἀπὸ τὸ ὁποῖο ἂν ἀφαιρέσωμε τὸ Κ θὰ βροῦμε τὸν τόκο ὁ ὁποῖος εἶναι:

$$T = 138.000 - 120.000 = 18.000$$

Καὶ ἐνῶ στὴν ἀρχὴ εἴχαμε μόνον δυὸ γνωστὰ ποσά, τώρα ἔχομε ἄγνωστο μόνο τὸν χρόνο. Ὡς ἐκ τούτου τὸ πρόβλημα εἶναι τόκου στὸ ὁποῖο ζητεῖται ὁ χρόνος καὶ θὰ τὸ λύσωμε κατὰ τὸν γνωστὸ τρόπο, ὡς ἑξῆς :

Πίνακας

K=120.000

X= ;

E=5

T=18.000

α) Κατάστρωσις :

$$\begin{array}{ccc} K & X & T \\ \frac{100}{120000} & \frac{1}{X} & \frac{5}{18000} \end{array}$$

β) Σύγκρισις :

X καὶ T = ποσὰ ἀνάλογα

X καὶ K = ποσὰ ἀντίστροφα

*γ) **Λύσις*** : $X = 1 \times \frac{100}{120.000} \times \frac{18000}{5} = \frac{1 \times 100 \times 18000}{120000 \times 5} =$

$= \frac{100 \times 18000}{120000 \times 5} = \frac{18}{6} = 3$ ἔτη.

Καὶ μὲ τὸν τύπον ἐὰν λύσωμε τὸ πρόβλημα θὰ ἔχωμε :

$X = \frac{T.100}{K.E.} = \frac{18000 \times 100}{120000 \times 5} = 3$ ἔτη.

Ὥστε γιὰ νὰ λύσωμε καὶ τὰ προβλήματα τοῦ τόκου στὰ ὁποῖα ζητεῖται ὁ χρόνος . . . . (Νὰ συμπληρωθῇ ὑπὸ τοῦ μαθητοῦ).

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

*α) **Ἀπὸ μνήμης*** :

1. Σὲ πόσο χρόνο θὰ πάρωμε τόκο 1000 δρχ. ἀπὸ κεφάλαιο 5000 δρχ. τοκιζόμενο πρὸς 8°/o ;

2. Σὲ πόσο χρόνο κεφάλαιο 16000 δραχ. τοκιζόμενο πρὸς 10°/o θὰ φέρη τόκο 3000 ;

β) Γραπτῶς :

1. Σὲ πόσο χρόνο κεφάλαιο 50.000 δρχ. τοκιζόμενο πρὸς 5°/o θὰ μᾶς δώση τόκο 7500 δρχ. ;

2. Τὸ σχολικό μας ταμεῖο εἶχε καταθέσει στὴν Τράπεζα 2.500.000 δρχ. πρὸς 4°/o καὶ μετὰ ἕνα χρονικὸ διάστημα πῆρε τόκο 300.000 δρχ.· πόσο χρόνο εἶχε τὰ χρήματα στὴν Τράπεζα ;

3. Σὲ πόσο χρόνο ἐτοκίσθη κεφάλαιο δρχ. 24.000 πρὸς 8°/o καὶ ἐπήραμε τόκο καὶ κεφάλαιο 27.840 δρχ. ;

4. Ἕνας ἐργολάβος ἀνέλαβε νὰ κατασκευάση τὴν ἐπιδιόρθωσιν τοῦ σχολείου καὶ ἔλαβε προκαταβολικὰ 4.000.000 μὲ τὴν συμφωνία ἂν δὲν παραδώση σὲ ἕνα μῆνα ἕτοιμο τὸ σχολεῖο νὰ πληρώνη τόκο μετὰ τὸν μῆνα 25°/₀ γιὰ τὰ χρήματα τὰ ὁποῖα εἶχε πάρει. Ἀλλὰ τὸ σχολεῖο τὸ παρέδωσε ἕτοιμο ἀργότερα καὶ ἐπλήρωσε τόκο 250.000. Μετὰ πόσο χρόνο παρέδωσε τὸ σχολεῖο ;

5. Σὲ πόσο χρόνο ἐτοκίσθη κεφάλαιο 450.000 πρὸς 9°/₀ καὶ ἔδωσε τόσο τόκο ὅσο ἔδωσε κεφάλαιο 600.000 δραχ., τὸ ὁποῖο ἐτοκίσθη σὲ 1 ἔτος καὶ 6 μῆνες πρὸς 6°/₀ ;

6. Σὲ πόσο χρόνο ἐτοκίσθη κεφάλαιο 400.000 πρὸς 12°/₀ καὶ ἐδιπλασιάσθη ;

4. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΟΚΟΥ ΣΤΑ ΟΠΟΙΑ ΖΗΤΕΙΤΑΙ ΤΟ ΕΠΙΤΟΚΙΟ

1. Πρὸς ποῖο ἐπιτόκιο ἐτοκίσθη κεφάλαιο 12.000 δρχ. καὶ ἔδωσε σὲ 3 ἔτη τόκο 18.000 δραχ. ;

Λύσις

Στὸ πρόβλημα αὐτὸ τοῦ τόκου, μᾶς δίδονται τὰ ποσὰ Κ, Χ καὶ Τ καὶ ζητεῖται τὸ ἐπιτόκιο, δηλ. ὁ τόκος τῶν 100 δρχ. σὲ 1 ἔτος ἢ 12 μῆνες ἢ 360 ἡμέρες. Γι' αὐτὸ ἡ κατάστρωσις τοῦ προβλήματος δὲν γίνεται ὅπως στὰ προηγούμενα προβλήματα ἀρχίζοντας ἀπὸ τὸ 100 δρχ. κεφάλαιο κλπ. γιατὶ ὁ τόκος τῶν 100 δρ. εἶναι ἄγνωστος. Καὶ ἐπειδὴ πάντοτε στὴν κατάστρωσιν τοῦ προβλήματος ἀρχίζομε ἀπὸ τὰ γνωστά, θὰ ἔχωμε :

Πίνακας

Κ=120.000
Χ=3 ἔτη
Ε= ;
Τ= 18.000

α) Κατάστρωσις

$$\begin{array}{ccc} K & X & T \\ \frac{120.000}{100} & \frac{3}{1} & \frac{18\,000}{X} \end{array}$$

β) Σύγκρισις : Ἀπὸ τὶς προηγούμενες περιπτώσεις τῶν ἄλλων προβλημάτων εἶναι εὔκολο νὰ βροῦμε ὅτι :

Ε καὶ Κ εἶναι ποσὰ ἀνάλογα
καὶ Ε » Χ » » »

γ) Λύσις : $E = 18.000 \times \frac{100}{120000} \times \frac{1}{3} =$

$$= \frac{18.000 \times 100}{120.000 \times 3} = 5 \text{ δρχ.}$$

Ἑπομένως ἐτοκίσθη πρὸς $5^{\circ}/_{0}$.

Ἀπὸ τὴν λύσιν βρήκαμε ὅτι $E = \frac{18.000 \times 100}{120.000 \times 3}$ καὶ ἐὰν ἀντικαταστήσωμε τοὺς ἀριθμοὺς μὲ τὰ γνωστὰ γράμματα θὰ ἔχωμε τὸν τύπο : $E = \frac{T.100}{K.X.}$

Ἐὰν δὲ λάβωμε ὑπ' ὄψιν καὶ τὶς ἄλλες περιπτώσεις τὶς ὁποῖες ἐξετάσαμε εἰς τὰ ἄλλα προβλήματα τοῦ τόκου, κατὰ τὶς ὁποῖες ὁ χρόνος ἄλλοτε δίδεται σ' ἔτη, ἄλλοτε σὲ μῆνες καὶ ἄλλοτε σὲ ἡμέρες, θὰ ἔχωμε τοὺς ἑξῆς τύπους :

$$\underset{(\text{ἔτη})}{E = \frac{T.100}{K.X}} \quad \underset{(\text{μῆνες})}{E = \frac{T.1200}{K.X}} \quad \underset{(\text{ἡμέρες})}{E = \frac{T.36.000}{K.X}}$$

Ἀπὸ τοὺς ἀνωτέρω τύπους εὔκολα μποροῦμε νὰ βγάλωμε τὸν κανόνα ὅτι, γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐπιτόκιο . . . . (Νὰ συμπληρωθῇ ὑπὸ τοῦ μαθητοῦ).

2. Πρὸς ποῖο ἐπιτόκιο ἐτοκίσθη κεφάλαιο 25.000 δρχ. καὶ σὲ 5 ἔτη ἔγινε μαζὶ μὲ τὸν τόκο 31.250 δρχ. ;

Λύσις

Στὸ πρόβλημα αὐτὸ γνωρίζομε τὸ Κ καὶ τὸν Χ καὶ ζητοῦμε τὸ Ε καὶ τὸν Τ. Ἀλλ' ἐπειδὴ γνωρίζομε τὸ $K + T = 31.250$ δρχ. ἂν ἀφαιρέσωμε τὸ κεφάλαιο 25.000 δρχ. θὰ βροῦμε τὸν τόκο καὶ ἔχομε :

$31.250 - 25.000 = 6.250$ δραχ. τόκος

Τώρα ἔχομε γνωστὰ τὸ Κ, τὸν Χ καὶ τὸν Τ καὶ ζητοῦμε τὸ ἐπιτόκιο.

Μποροῦμε νὰ λύσωμε τὸ πρόβλημα ὅπως γνωρίζομε καὶ ἔχομε :

Πίνακας

Κ = 25.000
Χ = 5 ἔτη
Ε = ;
Τ = 6 250

α) ***Κατάστρωσις***

Κ	Χ	Τ
25.000	5	6.250
100	1	Χ

β) ***Σύγκρισις*** :

Τ καὶ Κ = ἀνάλογα
Τ καὶ Χ = »

γ) ***Λύσις*** : $E = 6.250 \times \frac{100}{25.000} \times \frac{1}{5} = \frac{6.250 \times 100}{25.000 \times 5} = 6$

Καὶ μὲ τὸν τύπο ἐὰν λύσωμε τὸ πρόβλημα πάλι θὰ ἔχωμε τὸ αὐτό, ἤτοι :

$$Ε = \frac{Τ.100}{Κ.Χ} = \frac{6.250 \times 100}{25\,000 \times 5} = 6 \text{ δρχ.}$$

Ἄρα ἐτοκίσθη πρὸς 6°/₀.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

α) Ἀπὸ μνήμης :

1. Πρὸς ποῖο ἐπιτόκιο ἐτοκίσθη κεφάλαιο 100 δραχ. καὶ ἔδωσε σὲ 1 ἔτος τόκο 500 δρχ. ;

2. Μὲ ποῖο ἐπιτόκιο ἐτοκίσθη κεφάλαιο 1000 δρχ. καὶ ἔδωσε τόκο 50 δρχ. σὲ ἕνα ἔτος ἢ κεφάλαιο 5.000 δρχ., καὶ ἔδωσε τόκο 400 ἢ 1000 δρχ. σ' ἕνα ἔτος ;

3. Πρὸς ποῖο ἐπιτόκιο ἐτοκίσθη κεφάλαιο 10 000 δρχ. καὶ σὲ δυὸ ἔτη ἔδωσε τόκο 800 δρχ. ;

β) Γραπτῶς :

1. Πρὸς ποῖο ἐπιτόκιο ἐτοκίσθη κεφάλαιο δρχ. 25.000 καὶ σὲ 3 ἔτη ἔδωσε τόκο 3.000 δρχ. ;

2. Πρὸς ποῖο ἐπιτόκιο ἐτοκίσθη κεφάλαιο 75.000 δρχ. καὶ σὲ 8 μῆνες ἔδωσε τόκο 4.000 δρχ. ;

3. Πρὸς ποῖο ἐπιτόκιο ἐδανείσαμε κεφάλαιο 2.700.000 δρχ. καὶ σὲ 1 ἔτος 2 μῆνες καὶ 20 ἡμέρες μᾶς ἔδωσε τόκο 214.500 δρχ. ;

4. Ἐδανείσαμε γιὰ ἕνα ἔτος καὶ ἓξ μῆνες κεφάλαιο 560.000 δρχ. καὶ ἐπήραμε τόκο καὶ κεφάλαιο μαζὶ 635.000 δρχ. Πρὸς πόσο τοῖς ἑκατὸ τὰ εἴχαμε δανείσει ;

5. Κάποιος εἶχε ἀποθηκεύσει ἐμπορεύματα ἀξίας 8.700.000 δρχ. καὶ ὕστερα ἀπὸ 10 μῆνες τὰ ἐπώλησε ἀντὶ 10.150.000 δρχ. Πόσο τοῖς ἑκατὸ ἐκέρδισε ;

6. Πρὸς ποῖο ἐπιτόκιο ἐτοκίσαμε 180.000 δρχ. καὶ σὲ 1 ἔτος, 5 μῆνες καὶ 25 ἡμέρες μᾶς ἔδωσε τόσον τόκο, ὅσον μᾶς δίνει κεφάλαιο 220.000 τὸ ὁποῖο ἐτοκίσθη ἐπὶ 3 ἔτη πρὸς 6°/₀ ;

7. Πρὸς ποῖο ἐπιτόκιο πρέπει νὰ τοκίσωμε κεφάλαιο 4.000 δρχ. ὥστε μετὰ 8 ἔτη νὰ διπλασιασθῇ ;

8. Ἕνας παντοπώλης τοῦ ὁποίου ἡ ἐπιχείρησις κινεῖται μὲ κεφάλαιον 234.000.000 δρχ. κερδίζει κάθε ἡμέρα 156.000 δρχ. Πρὸς πόσο τοῖς ἑκατὸ ἐμπορεύεται τὰ χρήματά του ;

5. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΟΚΟΥ ΔΙΑΦΟΡΑ

α) Ἀπὸ τὴ σχολική μας ζωή.

1. Οἱ 58 μαθηταὶ τῆς ΣΤ΄ τάξεως ἑνὸς σχολείου ἐπλήρωσαν στὴν ἀρχὴ τοῦ σχολικοῦ ἔτους γιὰ τὴν μαθητική τους κοινότητα 7.500 δρχ. καθένας καὶ τὶς κατέθεσαν στὸ Ταχ. Ταμιευτήριο μὲ ἐπιτόκιο 6 °/o. Μετὰ 9 μῆνες, δηλ. στὴν λῆξιν τῶν μαθημάτων, ἀποφασίζουν νὰ ἀποσύρουν τὰ χρήματά τους. Πόσα χρήματα θὰ εἰσπράξουν ;

2. Ὁ Συνεταιρισμὸς τῶν μαθητῶν τοῦ σχολείου Ἀμμουδιᾶς ἀγόρασε τὰ βιβλία, τετράδια καὶ λοιπὰ σχολικὰ εἴδη ἀξίας 2.800.000 δρχ. γιὰ τὶς ἀνάγκες τῶν μαθητῶν. Τὰ εἴδη αὐτὰ τὰ ἐπώλησε ἐντὸς 3 μηνῶν καὶ εἰσέπραξε 2.940.000 δραχ. Πόσο τοῖς ἑκατὸ ἐκέρδισε ὁ Συνεταιρισμὸς τῶν μαθητῶν ;

3. Οἱ 280 γονεῖς ἑνὸς σχολείου ἀπεφάσισαν νὰ καταθέσουν 20.000 δραχ. κάθε μῆνα ἕκαστος γιὰ τὴν κατασκευὴ διδακτηρίου. Μετὰ 9 μῆνες τὰ χρήματα τὰ ὁποῖα εἰσεπράχθησαν τὰ κατέθεσαν στὴν Ἐθνικὴ Τράπεζα μὲ ἐπιτόκιο 4,5 °/o. Πόσα χρήματα θὰ εἰσπράξουν μετὰ 5 ἔτη μὲ ἁπλοῦν τόκο ;

β) Ἀπὸ τὴν κοινωνική μας ζωή.

1. Ἐδάνεισε κάποιος οἰκογενειάρχης μὲ ἁπλοῦν τόκο. Τὸν πρῶτο 500.000 δρχ. πρὸς 12 °/o γιὰ 3 ἔτη καὶ τὸν δεύτερο γιὰ τὸν αὐτὸ χρόνο πρὸς 9 °/o 1.200.000 δρχ. Ποιό εἶναι τὸ κέρδος του ;

2. Ἕνας γεωργὸς ἐδανείσθη ἀπὸ τὴν Ἀγροτικὴ Τράπεζα 6.000.000 δρχ. πρὸς 8 °/o γιὰ 8 μῆνες. Μετὰ τοὺς 8 μῆνες ἔδωσε στὴν Τράπεζα 2.800 ὀκ. σιτάρι πρὸς 2.300 δρχ. τὴν ὀκᾶ καὶ τὸ ὑπόλοιπο σὲ χρήματα. Πόσα χρήματα ἔδωσε ;

3. Σὲ πόσο χρόνο πρέπει νὰ τοκίσωμε κεφάλαιο 3.250.000 δρχ. μὲ ἐπιτόκιο 6 °/o ὥστε νὰ μᾶς δώση τόσον τόκο ὅσον δίνει κεφάλαιο 5 ἑκατομ. τοκιζόμενο σὲ 2 ἔτη πρὸς 3,25 °/o ;

4. Σὲ πόσο χρόνο πρέπει νὰ τοκίσωμε κεφάλαιο πρὸς 8 °/o γιὰ νὰ τριπλασιασθῆ ;

5. Πρὸς ποῖο ἐπιτόκιο πρέπει νὰ τοκίσωμε κεφάλαιο 300.000 δρχ. ὥστε μετὰ 12 ἔτη νὰ τριπλασιασθῆ ;

6. Ἕνας κτηνοτρόφος ἐπώλησε : α) 36 ἀρνιὰ πρὸς 168.000 δρχ. τὸ ἕνα, β) 126 ὀκάδ. βούτυρο πρὸς 36.000 δρχ. τὴν ὀκᾶ καὶ γ) 164 ὀκάδ. μαλλὶ πρὸς 12.000 δρχ. τὴν ὀκᾶ. Τὰ χρήματα τὰ

ὁποῖα εἰσέπραξε τὰ κατέθεσε στὸ Ταχυδρομ. Ταμιευτήριο πρὸς 4,5°/₀. Πόσα χρήματα θὰ εἰσπράξη μετὰ ἕνα ἔτος;

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΥΦΑΙΡΕΣΕΩΣ

Στὰ προβλήματα τοῦ τόκου εἴδαμε ὅτι οἱ ἄνθρωποι ἐξ ἀνάγκης δανείζονται χρήματα, τὰ ὁποῖα ἐπιστρέφουν μετὰ ἕνα ὡρισμένο χρονικὸ διάστημα, ἀφοῦ πληρώσουν καὶ τὸν ἀνάλογο τόκο. Ἐπίσης γνωρίζομε ὅτι πολλοὶ ἄνθρωποι δανείζουν γιὰ ὡρισμένο χρόνο καὶ μὲ ἀνάλογο ἐπιτόκιο χρήματα. Προσπαθοῦν ὅμως νὰ ἐξασφαλίσουν τὰ χρήματά τους γιὰ νὰ μὴ τὰ χάσουν.

Ἂς ἐξετάσωμε μερικὲς περιπτώσεις γιὰ νὰ ἀντιληφθοῦμε πῶς τὰ ἐξασφαλίζουν.

Περίπτωσις 1η. Ὁ κ. Ἀναγνώστου μᾶς παρακαλεῖ νὰ τὸν δανείσωμε 500.000 δρχ. γιὰ ἕνα ἔτος. Ἐμεῖς τὸν δανείζομε καὶ μάλιστα μὲ τὸ ἐπιτόκιο τὸ ὁποῖο ἔχει ὁρίσει τὸ Κράτος γιὰ τὰ δάνεια, ἤτοι 9°/₀.

Ἀφοῦ πέρασε τὸ ἔτος ὁ κ. Ἀναγνώστου δὲν μᾶς φέρει τὰ χρήματα ὅπως εἶχε ὑποχρέωσιν. Ἐξαναγκαζόμεθα νὰ τοῦ τὰ ζητήσωμε, ἀλλ' αὐτός, ἐπειδὴ δὲν εἶναι τίμιος ἄνθρωπος, ἀρνεῖται τὸ γεγονός, ὅτι τὸν ἐδανείσαμε χρήματα. Καταφεύγουμε στὸ δικαστήριο. Ἐπειδὴ ὅμως δὲν ἔχομε οὔτε μάρτυρα οὔτε καὶ καμμία ἀπόδειξιν γιὰ νὰ ἀποδείξωμε ὅτι ἐδανείσαμε τὸν κ. Ἀναγνώστου τὶς 500.000 δρχ., τὸ δικαστήριο ἀπαλλάσσει τὸν κ. Ἀναγνώστου κ' ἐμεῖς χάνομε τὰ χρήματα ἀπὸ καλωσύνη δική μας καὶ ἀπὸ ἀγνωμοσύνη τοῦ κ. Ἀναγνώστου.

Περίπτωσις 2α. Ὁ κ. Δημητρίου ἔχει καὶ αὐτὸς ἀπόλυτο ἀνάγκη χρημάτων γιὰ λόγους ἀσθενείας καὶ ζητεῖ ἀπὸ τὸν κ. Παναγῆ νὰ τοῦ δανείση 2.000.000 δρχ. Ὁ κ. Παναγῆς δέχεται νὰ τὸν δανείση μὲ τὸν ἀνάλογο τόκο, ἀλλὰ ἀπὸ τὸν ὅρο ὅπως ὁ κ. Δημητρίου τοῦ βάλη τὸ κτῆμα του ***ὑποθήκη*** μὲ συμβολαιογραφικὴ πρᾶξιν. Ἐννοεῖται ὅτι τὸ κτῆμα τοῦ κ. Παναγῆ εἶναι πολὺ μεγαλύτερης ἀξίας τοῦ ποσοῦ τὸ ὁποῖον δανείζεται. Ἡ διὰ συμβολαιογραφικῆς πράξεως ὑποθήκη τοῦ κτήματος γίνεται ὑπὸ τὸν ὅρο ὅτι, ἂν ὁ κ. Δημητρίου δὲν ἐπιστρέψη στὸν κ. Παναγῆ τὸ κεφάλαιο τῶν 2 ἑκατομμυρίων μαζὶ μὲ τὸν ἀνάλογο τόκο μέσα στὸ ἔτος, τὸ ὁποῖο ἔχουν ὁρίσει στὴν συμβολαιογραφικὴν πρᾶξιν, τότε ὁ κ. Παναγῆς σύμφωνα μὲ τὸν Νόμον ἔχει δικαίωμα νὰ πωλήση τὸ κτῆμα τοῦ κ. Δημητρίου γιὰ νὰ εἰσπράξη τὰ χρήματά του.

1. Γραμμάτιον

Περίπτωσις 3η. Ὁ κ. Χριστάκης, ἐξ ἀνάγκης ζητεῖ ἀπὸ τὸν ἔμπορον κ. Κωστῆ νὰ τοῦ δανείση 600.000 δρχ. ἢ νὰ τοῦ δώση ἐμπορεύματα ἐπὶ πιστώσει ἀξίας 600.000 δρχ. Ὁ κ. Κωστῆς δέχεται νὰ δανείση τὸν κ. Χριστάκη, ἀλλ' ἐπειδὴ εἶναι ἔμπορος καὶ γνωρίζει ἀπὸ δάνεια . . . .

(Ἂς παρακολουθήσωμε ὅμως τὴν συζήτησιν τοῦ κ. Χριστάκη καὶ τοῦ κ. Κωστῆ).

Κωστῆς : Καὶ πότε θὰ μοῦ ἐπιστρέψετε τὰ λεπτά ;

Χριστ. : Ὑπολογίζω μετὰ 10 μῆνες.

Κωστῆς : Σύμφωνοι. Ἀλλὰ γνωρίζεις, ὅτι ἐμπορεύομαι τὰ χρήματά μου καὶ στοὺς 10 μῆνες ποὺ θὰ τὰ ἔχετε ἐσεῖς, ἐγὼ θὰ ἐκέρδιζα ἀρκετά. Καταλαβαίνετε λοιπὸν ὅτι πρέπει νὰ μοῦ πληρώσετε ἕνα ἀνάλογο τόκο.

Χριστάκης : Εὐχαρίστως κ. Κωστῆ. Καὶ πόσα θέλετε ;

Κωστῆς : Τὸ ὀλιγώτερο 25%.

Χριστάκης : Εἶναι πολλά. Εἶναι τὸ διπλάσιον τοῦ νομίμου τόκου...

Κωστῆς : Ναί... ἀλλά... Πάντως γιὰ σᾶς λόγῳ τῆς γνωριμίας θὰ κάμω ἔκπτωσιν στὰ 20%. Ἂν συμφωνεῖτε, θὰ μοῦ ὑπογράψετε ἕνα χαρτὶ τὸ ὁποῖο θὰ γράφη τὸ ποσὸ τὸ ὁποῖο θὰ σᾶς δανείσω μαζὶ μὲ τὸν τόκο. Καὶ ἀκόμα θὰ φέρετε καὶ δυὸ γνωστούς σας νὰ ὑπογράψουν τὸ χαρτὶ ὡς μάρτυρες, γιὰ νὰ μὴν πάθω ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον ἔπαθε ὁ φίλος μου ἀπὸ τὸν κ. Ἀναγνώστου. Πηγαίνετε νὰ φέρετε τοὺς μάρτυρες καὶ ἐγὼ θὰ ἑτοιμάσω τὸ χαρτὶ καὶ θὰ βάλω καὶ τὸ ἀνάλογο χαρτόσημο, ὅπως ὁρίζει ὁ νόμος.

Ἀφοῦ ἔφυγε ὁ κ. Χριστάκης, ὁ κ. Κωστῆς ἔγραψε σὲ φύλλο χαρτοσήμου τὸ ποσὸ τῶν χρημάτων μετὰ τοῦ τόκου, τὴν ἡμέρα ποὺ δίδει τὰ χρήματα, τὴν ἡμέρα ποὺ θὰ τὰ ἐπιστρέψη ὁ κ. Χριστάκης κλπ. Καὶ ὅταν ἦλθε ὁ κ. Χριστάκης μὲ τοὺς μάρτυρες καὶ ὑπέγραψαν ὅλοι τὸ χαρτί, ἔδωσε ὁ κ. Κωστῆς τὶς 600.000 δρχ. εἰς τὸν κ. Χριστάκην καὶ αὐτὸς ἐκράτησε τὸ χαρτὶ ποὺ ἔγραφε 700.000 δρχ. Τὸ χαρτὶ αὐτὸ τὸ ὁποῖον εἶναι σὰν ἕνα γράμμα, λέγεται ***γραμμάτιον*** καὶ γράφεται ὡς ἑξῆς :

Λῆξις 15 Μαΐου 1952

Γραμμάτιον 700.000 δρχ.

Τὴν 15-5-52, ὑπόσχομαι νὰ πληρώσω εἰς τὸν κ. Κωστῆν ἢ εἰς διαταγὴν αὐτοῦ τὰς ὡς ἄνω δραχμὰς ἑπτακοσίας χιλιάδας, ἀξίαν ληφθεῖσαν εἰς μετρητὰ (ἐμπορεύματα).

Χαρτόσημον

Ἐν Ἀθήναις τῇ 15 Ἰουλίου 1951

Οἱ μάρτυρες
Ι. Δώλης
Α. Τσώμης

Ὑπογραφὴ
Ι. Χριστάκης

Ἂν μετὰ προσοχῆς διαβάσωμε τὸ ἀνωτέρω γραμμάτιο θὰ ποῦμε «Γραμμάτιον 700 χιλ. δρχ.». Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον τοῦ δίδομε ἀμέσως τὸ ὄνομά του ἀπὸ τὰ χρήματα ποὺ εἶναι γραμμένα στὸ γραμμάτιο. Τὸ ποσὸν αὐτὸ λέγεται ***Ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου***, γιατὶ μᾶς ὀνομάζει τὸ γραμμάτιο. Ἐπίσης διαβάζομε τὰ ὀνόματα τοῦ δανειστοῦ, τοῦ δανειζομένου, τῶν μαρτύρων, τὴν ἡμερομηνία ποὺ ἔγινε καὶ τὴν ἡμερομηνία κατὰ τὴν ὁποία θὰ πληρωθῇ, δηλαδὴ ποὺ λήγει τὸ γραμμάτιο. Ἡ ἡμερομηνία κατὰ τὴν ὁποία θὰ πληρωθῇ τὸ γραμμάτιο λέγεται ***χρόνος λήξεως*** ἢ ***λῆξις τοῦ γραμματίου.*** Ἐὰν ἀπὸ τὴν ἡμερομηνία λήξεως ἀφαιρέσωμε τὴν ἡμερομηνία κατὰ τὴν ὁποία ἔγινε τὸ γραμμάτιο, βρίσκομε τὸν χρόνο λήξεως σὲ ἔτη ἢ μῆνες ἢ ἡμέρες. Στὸ ἀνωτέρω γραμμάτιο ὁ χρόνος λήξεως ἢ ἡ λῆξις αὐτοῦ εἶναι μετὰ 10 μῆνες, ἡ 15 Μαΐου 1952.

Ἑπομένως σ' ἕνα γραμμάτιο ἔχομε δύο ποσά : 1) τὴν ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου καὶ 2) τὸν χρόνο λήξεως ἢ τὴν λῆξιν τοῦ γραμματίου.

2. Συναλλαγματικὴ

Ἀντὶ τῶν ἀνωτέρω γραμματίων, μεταξὺ τῶν ἐμπορευομένων ἐκδίδονται ***συναλλαγματικές***. Ἡ συναλλαγματικὴ εἶναι καὶ αὐτὴ ἕνα ἔγγραφο μὲ τὸ ὁποῖο ὅμως ἐκεῖνος ὁ ὁποῖος δανείζει τὰ χρήματα (δηλ. ὁ κ. Κωστῆς) διατάσσει τὸν δανειζόμενο (τὸν κ. Χριστάκην) νὰ πληρώσῃ στὴν Ἐθνικὴ ἢ στὴν Τράπεζα Ἑλλάδος τὸ ποσὸν τῶν χρημάτων τὰ ὁποῖα ἔλαβε σὲ μετρητὰ ἢ ἐμπορεύματα.

Ὁ δανειζόμενος ὑπογράφει στὸ τέλος ὅτι ἀποδέχεται τὴν συναλλαγματική, δηλ. ὅτι ἀναγνωρίζει τὸ χρέος του καὶ ὅτι ἀναλαμβάνει μετὰ 10 μῆνες νὰ πληρώσῃ τὸ χρέος του.

Ὁ τύπος τῆς συναλλαγματικῆς εἶναι ὁ ἑξῆς :

ΛΗΞΙΣ ΤΗ.................... ΣΥΝΑΛΛΑΓΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑ ΔΡΧ.

Τὴν .... πληρώσατε δυνάμει τῆς παρούσης μόνης συναλλαγματικῆς εἰς διαταγὴν ἡμῶν τῶν ἰδίων .... καὶ εἰς τὸ ἐν .... Κατάστημα τῆς .... τὸ ποσὸν τῶν ἄνω δραχμῶν ἃς ἐλάβατε παρ' ἡμῶν εἰς μετρητὰ (ἢ ἐμπορεύματα τῆς τελείας ἀρεσκείας σας), ἐντόκως δὲ πρὸς ....°/₀ ἐτησίως ἀπὸ τῆς λήξεως ἄχρις ἐξοφλήσεως.

Πρὸς τὸν κ. .... *Ἐν* .... *τῇ* *1951*

Ο ΕΚΔΟΤΗΣ

....

Χαρτόσημον

Εἰς....................

ΔΕΚΤΗ

Μεταξὺ ἐμπορευομένων ὁ συνήθης τύπος ἐγγράφου διὰ τοῦ ὁποίου ἀναγνωρίζεται τὸ χρέος εἶναι ἡ συναλλαγματική. γιατὶ μὲ μεγαλύτερη εὐχέρεια τὴν κυκλοφοροῦν στὸ ἐμπόριο, ὡς θὰ ἐξετάσωμε κατωτέρω.

3. Προεξόφλησις γραμματίου ἢ συναλλαγματικῆς

Εἴδαμε ὅτι ὁ κ. Κωστῆς ποὺ ἐδάνεισε τὰ χρήματα στὸν κ. Χριστάκη ἔχει τώρα τὸ γραμμάτιο καὶ περιμένει νὰ περάσουν οἱ 10 μῆνες γιὰ νὰ πάρῃ τὶς 700.000 δραχ. δηλ., τὴν ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου.

Ἀλλὰ καὶ ὁ κ. Κωστῆς ὡς ἐμπορευόμενος ἔχει ἀνάγκη, χρημάτων γιὰ νὰ ἀγοράση ἄλλα ἐμπορεύματα. Καὶ μάλιστα σήμερα τὴν 15ην Μαρτίου 1952 τοῦ παρουσιάζεται μιὰ εὐκαιρία ἀλλὰ δὲν ἔχει χρήματα. Ζητεῖ ἀπὸ γνωστούς, ἀλλὰ δὲν τοῦ δίνουν. Ἐνθυμεῖται ὅτι ἔχει τὸ γραμμάτιο τοῦ κ. Χριστάκη, πηγαίνει σ' αὐτόν, ἀλλ' ὁ κ. Χριστάκης τοῦ λέγει ὅτι πρέπει νὰ περάσουν δυὸ μῆνες ἀκόμη γιὰ νὰ τοῦ ἐξοφλήση τὸ γραμμάτιο, γιατὶ λήγει τὴν 15ην Μαΐου 1952.

Τότε ὁ κ. Κωστῆς πηγαίνει στὸν κ. Μῆτσον, ὁ ὁποῖος εἶναι γνωστὸς στοὺς ἐμπόρους ὅτι ἀγοράζει γραμμάτια, τὰ ὁποῖα δὲν ἔληξαν. Ἂς παρακολουθήσωμε τὴ συνομιλία μεταξύ των:

Κωστῆς: Μήπως μπορεῖτε, κ. Μῆτσο, θὰ ἀγοράσετε αὐτὸ τὸ γραμμάτιο;

Μῆτσος: Εὐχαρίστως κ. Κωστῆ, ἀλλὰ ἐπειδὴ θὰ πάρω τὰ χρήματά μου ὕστερα ἀπὸ 2 μῆνες ἀπὸ τὸν ὀφειλέτην σας, θὰ μοῦ πληρώσετε τὸν σχετικὸ τόκο γιὰ τοὺς δυὸ αὐτοὺς μῆνες.

Κωστῆς: Καὶ τί θέλετε νὰ σᾶς πληρώσω;

Μῆτσος: Τὸ ὀλιγώτερο 35°/₀.

Κωστῆς: (ὁ ὁποῖος ἐζήτησε ἀπὸ τὸν κ. Χριστάκην 25°/₀ καὶ πῆρε 20°/₀). Τί λέτε κ. Μῆτσο; Ἐγὼ μόνο 9°/₀ πῆρα ἀπὸ τὸν κ. Χριστάκη καὶ σεῖς μοῦ ζητᾶτε 35°/₀;

Μῆτσος: Ἂς εἶναι ἐσᾶς θὰ σᾶς τὸ πάρω μὲ 30°/₀.

Κωστῆς: (ὁ ὁποῖος ἔχει ἀνάγκην). Ἂς εἶναι...

Μῆτσος: Ἂς λογαριάσωμε μὲ τὸν τύπον τὸν τόκον τῶν δυὸ μηνῶν. (Λογαριάζουν).

$$T = \frac{K.X.E.}{1.200} = \frac{700.000 \times 2 \times 30}{1200} = 35.000$$

Ὥστε γιὰ τοὺς δυὸ μῆνες θὰ πληρώσετε τόκο 35.000 δρχ. καὶ θὰ σᾶς δώσω

$$700.000 - 35.000 = 665.000$$

Μῆτσος: Ὅπως δὲ γνωρίζετε, θὰ μοῦ κάμετε τὴν σχετικὴ ὀπισθογράφησιν τοῦ γραμματίου. Ὑπογράψετε ἐδῶ πίσω στὸ γραμμάτιο ὅτι τὸ μεταβιβάζετε σ' ἐμέ, σήμερα τὴν 15ην Μαρτίου 1952.

Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπο ὁ κ. Κωστῆς, ὁ ὁποῖος εἶχε δανείσει τὸν κ. Χριστάκην, ἀναγκάσθηκε νὰ πωλήση τὸ γραμμάτιο πρὶν νὰ λήξη καὶ μάλιστα νὰ πληρώση τόκο περισσότερο ἀπὸ ἐκεῖνον ποὺ πῆρε, δηλ. νὰ ἀφαιρέση ἀπὸ τὴν ὀνομαστικὴ ἀξία ἕνα ποσόν. Αὐτὸ τὸ ποσὸν λέγεται ***ὑφαίρεσις***.

Ἐπειδὴ αὐτὸ γίνεται συχνά, δηλ. πωλοῦνται τὰ γραμμάτια πρὶν λήξουν, ἡ πρᾶξις αὐτή, δηλ. ἡ πώλησις ἑνὸς γραμματίου πρὶν λήξῃ, λέγεται ***προεξόφλησις τοῦ γραμματίου*** καὶ ὁ χρόνος κατὰ τὸν ὁποῖον προεξοφλεῖται τὸ γραμμάτιον λέγεται ***χρόνος προεξοφλήσεως*** τοῦ γραμματίου. Ἡ προεξόφλησις τῶν γραμματίων καὶ τῶν συναλλαγματικῶν γίνεται ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον στοὺς ἐμπορευομένους ὑπὸ τῶν Τραπεζῶν ἢ μᾶλλον ὑπὸ μιᾶς Τραπέζης μὲ τὴν ὁποίαν ἐκεῖνος, ὁ ὁποῖος ἔχει τὸ γραμμάτιο ἢ τὴν συναλλαγματική, συναλλάσσεται ἐμπορικά. Γιὰ τὸν λόγο αὐτὸ μεταξὺ τῶν ἐμπορευομένων δὲν ὑπογράφονται γραμμάτια ἀλλὰ συναλλαγματικές.

4. Ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις

Εἴδαμε ὅτι κατὰ τὴν προεξόφλησιν ἑνὸς γραμματίου πληρώνομε τόκο ἐπὶ τῆς ὀνομαστικῆς του ἀξίας μὲ ὡρισμένο ἐπιτόκιο καὶ γιὰ τὸν χρόνο ποὺ θέλει ἀκόμη νὰ ἐξοφληθῆ (νὰ πληρωθῆ) τὸ γραμμάτιο.

Ὁ τόκος τῆς ὀνομαστικῆς ἀξίας τοῦ γραμματίου τὸν ὁποῖο πληρώνομε γιὰ τὸν χρόνο τῆς προεξοφλήσεως μὲ ὡρισμένο ἐπιτόκιο, λέγεται ***ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις*** τοῦ γραμματίου. Ὑφαίρεσις λέγεται, γιατὶ ἀφαιροῦμε αὐτὴν ἀπὸ τὸ ὡρισμένο ποσὸ ποὺ γράφεται στὸ γραμμάτιο καὶ ***ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις*** γιατὶ ὑπολογίζεται ἐπὶ τοῦ ἐξωτερικοῦ ποσοῦ τοῦ γραμματίου, δηλ. ἐπὶ ἐκείνου τὸ ὁποῖο βλέπομε νὰ γράφῃ τὸ γραμμάτιο.

5. Παροῦσα ἢ πραγματικὴ ἀξία

Τὸ ποσὸν τὸ ὁποῖο πῆρε ὁ κ. Κωστῆς ἀφοῦ ἐπώλησε τὸ γραμμάτιό του καὶ τὸ ὁποῖο, ὅπως εἴδαμε, εἶναι 665.000 δραχ. λέγεται ***παροῦσα ἀξία*** τοῦ γραμματίου καὶ βρέθηκε ἀφοῦ ἀπὸ τὴν ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου ἀφαιρέσαμε τὴν ὑφαίρεσιν. Λέγεται δὲ παροῦσα ἢ πραγματικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου, γιατὶ τὴν στιγμὴ αὐτὴ ἡ ἀξία τοῦ γραμματίου γιὰ τὸν κ. Κωστῆ εἶναι 665.000 δρχ., δηλ. ὅσα καὶ πῆρε.

6. Ποσὰ κατὰ τὴν προεξόφλησιν γραμματίου

Κατὰ τὴν προεξόφλησιν λοιπὸν ἑνὸς γραμματίου ἔχομε τὰ ἑξῆς ποσά :

1. Τὴν *ὀνομαστικὴ ἀξία* τοῦ γραμματίου.
2. Τὸν *χρόνο προεξοφλήσεως*.
3. Τὸ *ἐπιτόκιο*.
4. Τὴν *ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσιν*, καὶ
5. Τὴν *παροῦσα* ἢ *πραγματικὴ* ἀξία τοῦ γραμματίου, ἡ ὁποία ἰσοῦται μὲ τὴν ὀνομαστικὴ ἀξία πλὴν τῆς ἐξωτ. ὑφαιρέσεως.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΞΩΤΕΡΙΚΗΣ ΥΦΑΙΡΕΣΕΩΣ

Τὰ προβλήματα, τὰ ὁποῖα μᾶς ἀναφέρουν προεξόφλησιν γραμματίου καὶ ἐξωτερικὴν ὑφαίρεσιν, λέγονται ***προβλήματα ἐξωτερικῆς ὑφαιρέσεως.***

Καὶ ἐπειδὴ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις εἶναι ὁ τόκος τῆς ὀνομαστικῆς ἀξίας τοῦ γραμματίου γιὰ τὸν χρόνο τῆς προεξοφλήσεως μὲ ὡρισμένο ἐπιτόκιο, τὰ προβλήματα τῆς ἐξωτερικῆς ὑφαιρέσεως λύονται ὅπως καὶ τὰ προβλήματα τοῦ τόκου, ἀρκεῖ νὰ ἔχωμε ὑπ' ὄψιν ὅτι : Ὀνομ. ἀξία = Κ., Χρόνος προεξοφλήσεως = Χ, Ἐπιτόκιο = Ε καὶ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις = Τ. Ἑπομένως καὶ στὰ προβλήματα τῆς ἐξωτερικῆς ὑφαιρέσεως ἔχομε τόσες περιπτώσεις, ὅσες εἴχαμε καὶ στὰ προβλήματα τοῦ τόκου, ἤτοι :

1. Προβλήματα ἐξ. ὑφαιρέσεως στὰ ὁποῖα ζητεῖται ἡ ὑφαίρεσις (Τ).
2. Προβλήματα ἐξ. ὑφαιρέσεως στὰ ὁποῖα ζητεῖται ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία (Κ).
3. Προβλήματα ἐξ. ὑφαιρέσεως στὰ ὁποῖα ζητεῖται ὁ χρόνος προεξοφλήσεως (Χ), καὶ
4. Προβλήματα ἐξ. ὑφαιρέσως στὰ ὁποῖα ζητεῖται τὸ ἐπιτόκιο (Ε).

1. Προβλήματα ἐξωτ. ὑφαιρέσεως στὰ ὁποῖα ζητεῖται ἡ ὑφαίρεσις

1. ***Ποιά*** *εἶναι ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις γραμματίου 400.000 δρχ. τὸ ὁποῖον προεξωφλήθη 2 μῆνες πρὸ τῆς λήξεώς του μὲ ἐπιτόκιο 15°/₀;*

Εἶναι πρόβλημα ἐξωτερικῆς ὑφαιρέσεως στὸ ὁποῖο ζητοῦμε τὴν ὑφαίρεσιν, δηλ. τὸν τόκο. Θὰ λυθῇ ὅπως τὰ προβλήματα τοῦ τόκου στὰ ὁποῖα ἐζητεῖτο ὁ τόκος. Καὶ ἔχομε:

Πίνακας

'Ον. ἀξ. = 400.000
Χ = 2 μῆνες
Ε = 15
'Εξ. ὑφ. = ;

α) Κατάστρωσις:

'Ον. ἀξ.	Χ	ἐξ. ὑφ.
100	12	15
400.000	2	Χ

β) Σύγκρισις: Ὅπως καὶ εἰς τὸν τόκο

'Ον. ἄξ. καὶ 'Υφ. = ἀνάλογα
Χ » » = »

$$\text{'Επομένως ἐξ. ὑφ.} = 15 \times \frac{400.000}{100} \times \frac{2}{12} =$$

$$= \frac{15 \times 400.000 \times 2}{1200} = 10.000 \text{ δρ.}$$

'Αφοῦ βρήκαμε τὴν ὑφαίρεσιν, δηλ. τὸν τόκο τῆς ὀνομαστικῆς ἀξίας τοῦ γραμματίου (400.000), εὔκολα εἶναι νὰ βροῦμε τὴν παροῦσα ἀξία τοῦ γραμματίου, ἐὰν ἀφαιρέσωμε τὴν ἐξωτ. ὑφαίρεσιν ἀπὸ τὴν ὀνομαστικὴν ἀξία, ἤτοι:

'Ονομ. ἀξία	400.000
ἐξ. ὑφαίρ.	10.000
ἄρα παροῦσα ἀξία =	390.000

2. Γραμμάτιο ὀνομ. ἀξίας 600.000 δραχ. λήγει τὴν 15ην Μαΐου 1952 καὶ προεξωφλήθη τὴν 15ην Μαρτίου 1952 πρὸς 20°/₀. Πόση εἶναι ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις καὶ ποιά ἡ παροῦσα ἀξία τοῦ γραμματίου τούτου;

Λύσις

Στὸ πρόβλημα αὐτὸ ζητοῦμε τὴν ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσιν, δηλ. τὸν τόκο τῆς ὀνομαστικῆς ἀξίας τοῦ γραμματίου μὲ ἐπιτόκιο 20°/₀ καὶ χρόνον προεξοφλήσεως ἀπὸ 15-3-51 ἕως 15-5-51. Τὸν χρόνο προεξοφλήσεως τὸν βρίσκομε ἂν ἀφαιρέσωμε τὴν ἡμερομηνία προεξοφλήσεως ἀπὸ τὴν ἡμερομηνία λήξεως, ἤτοι:

ἡμέρ. λήξεως	1951	5	15
» προεξ.	1951	3	15
χρόνος προεξ. =		2 μ.	

Τώρα εὔκολα λύομε τὸ πρόβλημα

Πίνακας

’Ον. ἀξ. = 600.000
Χ = 2 μῆνες
Ε = 20 %
ἐξ. ὑφαίρ. = ;

Τύπος

$$\text{ἐξ. ὑφαίρ.} = \frac{\text{’Ον. ἀξ. Ε.Χ.}}{1200}$$

Καὶ ἔχομε: $\text{’Εξ. ὑφαίρ.} = \frac{600.000 \times 2 \times 20}{1200} = 20.000$ δραχ.

$$\begin{array}{r} \text{’Ον. ἀξία} = 600.000 \\ \text{ἐξ. ὑφαίρ.} = \ \ 20.000 \\ \hline \text{K} - \text{T} = 580.000 \end{array}$$

῎Αρα παροῦσα ἀξία K — T = 580.000

3. Ποιά ἡ ὀνομ. ἀξία γραμματίου τὸ ὁποῖο προεξωφλήθη 2 μῆνες πρὸ τῆς λήξεώς του μὲ ἐπιτόκιο 20 % καὶ ἔδωσε ἐξ. ὑφαίρεσιν 20.000 δρχ. ;

Λύσις

’Εὰν προσέξωμε τὸ πρόβλημα τοῦτο, θὰ ἀντιληφθοῦμε, ὅτι εἶναι τὸ προηγούμενο, μὲ τὴν διαφορὰ ὅτι ζητοῦμε τὴν ὀνομαστικὴ ἀξία, δηλ. τὸ Κ καὶ ὅτι μᾶς δίδονται τὰ ποσά : ἐξ. ὑφαίρεσις (δηλ. Τ), ὁ χρόνος καὶ τὸ ἐπιτόκιο.

’Εὰν θὰ λάβετε ὑπ’ ὄψιν σας ὅτι ὀνομ. ἀξία (Κ) καὶ χρόνος ὅπως καὶ τὸ Κ καὶ Χ εἶναι ποσὰ ἀντίστροφα, εὔκολα θὰ λύσετε μόνοι σας τὸ πρόβλημα.

4. Σὲ πόσον χρόνο προεξωφλήθη γραμμάτιο ὀνομαστικῆς ἀξίας 600.000 δρχ. πρὸς 20 % καὶ ἔφερε ἐξωτ. ὑφαίρεσιν 20.000 δραχ. :

5. Μὲ ποιό ἐπιτόκιο προεξωφλήθη γραμμάτιο 600.000 δρχ. ὥστε 2 μῆνες πρὸ τῆς λήξεώς του νὰ μᾶς δώσῃ ἐξ. ὑφαίρεσιν 20.000 δρχ. ;

῞Οπως βλέπετε στὸ 4 πρόβλημα ζητεῖται ὁ χρόνος προεξοφλήσεως καὶ στὸ 5ο τὸ ἐπιτόκιο. ’Απ’ ὅσα γνωρίζετε ἀπὸ τὰ προβλήματα τοῦ τόκου πῶς θὰ τὰ λύσετε μόνοι σας ;

’Ασκήσεις

1. Γράψετε μόνοι σας ἕνα πρόβλημα ὑφαιρέσεως ἀπὸ κάθε περίπτωσιν.
2. Κάμετε ἕνα γραμμάτιο ἢ μιὰ συναλλαγματική.
3. Ποιός εἶναι ὁ προτιμότερος τρόπος γιὰ νὰ δανείζωμε χρήματα καὶ ποιός γιὰ νὰ δανειζώμεθα ;

4. Γράψετε τὸν κανόνα πῶς λύονται τὰ προβλήματα τῆς ἐξωτερικῆς ὑφαιρέσεως.

5. Κάμετε μιὰ συναλλαγματικὴ μὲ τὴν σχετικὴ ὀπισθογράφησιν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Ποιὰ εἶναι ἡ ἐξωτ. ὑφαίρεσις καὶ ποιὰ ἡ παροῦσα ἀξία ἑνὸς γραμματίου 800.000 δραχ. τὸ ὁποῖον προεξωφλήθη 4 μῆνες πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 9%;

2. Ποιὰ εἶναι ἡ ἐξωτ. ὑφαίρεσις καὶ ποιὰ ἡ παροῦσα ἀξία ἑνὸς γραμματίου 150.000 δρχ. τὸ ὁποῖο προεξωφλήθη 3 μῆνες πρὸ τῆς λήξεώς του μὲ ἐπιτόκιο 12%;

3. Ποιὰ εἶναι ἡ ἐξωτ. ὑφαίρεσις καὶ ποιὰ ἡ παροῦσα ἀξία ἑνὸς γραμματίου 360.000 δρχ. τὸ ὁποῖον ἔληγε τὴν 15ην Μαΐου 1952 καὶ προεξωφλήθη τὴν 15ην Ἰανουαρίου 1952 πρὸς 15%;

4. Ποιὰ εἶναι ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία ἑνὸς γραμματίου καὶ ποιὰ ἡ παροῦσα ἀξία αὐτοῦ ἀφοῦ προεξωφλήθη 6 μῆνες πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 10% καὶ ἔδωσε ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσιν 25.000 δρχ.;

5. Ποιὰ εἶναι ἡ ὀνομαστικὴ καὶ ποιὰ ἡ παροῦσα ἀξία ἑνὸς γραμματίου τὸ ὁποῖον ἔληγε τὴν 22αν Μαΐου 1952 καὶ προεξωφλήθη τὴν 10ην Μαρτίου 1952 πρὸς 12% καὶ ἔδωσε ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσιν 30.000 δρχ.;

6. Σὲ πόσο χρόνο προεξωφλήθη γραμμάτιο ὀνομαστικῆς ἀξίας 720.000 δραχ. πρὸς 8% καὶ ἔδωσε ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσιν 13.000 δραχ.;

7. Πρὸς ποῖο ἐπιτόκιο προεξωφλήθη γραμμάτιο ὀνομαστικῆς ἀξίας 270.000 σὲ 2 μῆνες καὶ 20 ἡμέρες πρὸ τῆς λήξεώς του μὲ παροῦσα ἀξία 262.800 δρχ.;

8. Πρὸς ποῖο ἐπιτόκιο προεξωφλήθη γραμμάτιο ὀν. ἀξίας 620.000 δρχ. τὸ ὁποῖον ἔληγε τὴν 21ην Ἰουνίου 1951 καὶ προεξωφλήθη τὴν 9ην Ἀπριλίου 1951, ἔδωσε δὲ παροῦσα ἀξία 601.400 δρχ.;

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΕΡΙΣΜΟΥ

1. Σὲ μέρη ἀνάλογα ἀκεραίων ἀριθμῶν

1. Ἡ ἐπιτροπὴ τῆς Ἐκκλησίας μας μοίρασε 72 ὀκ. ἀλεύρι σὲ τρεῖς πτωχὲς οἰκογένειες, οἱ ὁποῖες εἶχαν, ἡ πρώτη 4 ἄτομα, *ἡ δευτέρα 6 ἄτομα καὶ ἡ τρίτη 8 ἄτομα. Πόσες ὀκάδες θὰ πάρη κάθε ἄτομο καὶ πόσες κάθε οἰκογένεια;*

Λύσις

Στὸ πρόβλημα αὐτὸ θὰ μοιράσωμε τὶς 72 ὀκ. ἀλεύρι στὶς τρεῖς οἰκογένειες. Ἐπειδὴ ὅμως κάθε οἰκογένεια δὲν ἔχει τὰ ἴδια ἄτομα, δὲν θὰ πάρη καὶ τὸ ἴδιο ποσὸ ὀκάδων μὲ τὴν ἄλλη. Γι' αὐτὸ θὰ μοιράσωμε τὶς 72 ὀκ. ἀλεύρι ἀνάλογα μὲ τὰ ἄτομα τὰ ὁποῖα ἔχουν οἱ οἰκογένειες. Θὰ βροῦμε στὴν ἀρχὴ πόσες ὀκ. θὰ πάρη κάθε ἄτομο καὶ ἔπειτα πόσες κάθε οἰκογένεια. Πρὸς τοῦτο σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς:

Ὅλα τὰ ἄτομα τῶν οἰκογενειῶν εἶναι 4+6+8=18.

Καὶ ἐπειδὴ τὰ 18 ἄτομα θὰ πάρουν τὶς 72 ὀκ.

τὸ 1 ἄτομο θὰ πάρη 72 : 18 = 4 ὀκ.

Καὶ ἀφοῦ τὸ 1 » » » 4 ὀκ., ἡ κάθε οἰκογένεια θὰ πάρη:

Ἡ πρώτη 4 ὀκ. × 4 ἄτομα = 16 ὀκ.
Ἡ δεύτερη 4 » × 6 » = 24 »
καὶ ἡ τρίτη 4 » × 8 » = 32 »

Βλέπομε ὅτι τὸ πρόβλημα ἐλύθη μὲ τὴν μέθοδο τῆς ἀναγωγῆς στὴν μονάδα.

Μπορεῖ ὅμως νὰ λυθῆ καὶ μὲ τὴν ἁπλῆ μέθοδο τῶν τριῶν. Πρὸς τοῦτο, ἀφοῦ ἀθροίσωμε τὰ ἄτομα καὶ τῶν τριῶν οἰκογενειῶν, σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς γιὰ κάθε οἰκογένεια.

α) γιὰ τὴν πρώτη οἰκογένεια:

ἂν εἶχε 18 ἄτομα θὰ ἔπαιρνε 72 ὀκ.
τώρα ποὺ ἔχει 4 » » πάρη X

$$X = \frac{72\times4}{18} = 16 \text{ ὀκ.}$$

β) γιὰ τὴ δεύτερη:

τὰ 18 ἄτ. 72 ὀκ.
» 6 » X

$$X = \frac{72\times6}{18} = 24 \text{ ὀκ.}$$

γ) γιὰ τὴν τρίτη:

18 ἄτ. 72 ὀκ.
8 » X

$$X = \frac{72\times8}{18} = 32 \text{ ὀκ.}$$

καὶ βρίσκομε τὰ αὐτὰ ἐξαγόμενα.

Ἐὰν τώρα συγκρίνωμε τοὺς ἀριθμοὺς τῶν ὀκάδων ποὺ πῆρε κάθε οἰκογένεια μὲ τὰ ἄτομα κάθε οἰκογενείας, θὰ ἔχωμε :

ἄτομα	4	6	8
ὀκάδες	16	24	32

Ἀπὸ τ' ἀνωτέρω παρατηροῦμε, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ 16, 24 καὶ 32 γίνονται ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 4, 6 καὶ 8 ὅταν πολλαπλασιασθοῦν ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸ 4.

Δηλ. $4 \times 4 = 16$, $4 \times 6 = 24$ καὶ $4 \times 8 = 32$.

Οἱ ἀριθμοὶ 16, 24 καὶ 32 λέγονται ***ἀνάλογοι*** πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 4, 6 καὶ 8 γιατὶ γίνονται ἀπὸ τοὺς 4, 6 καὶ 8 ὅταν τοὺς ἐπολλαπλασιάσαμε ἐπὶ τὸν ἀριθμὸ 4. Τὸ αὐτὸ δυνάμεθα νὰ εἴπωμε καὶ ἀντιστρόφως, δηλ. ὅτι καὶ οἱ ἀριθμοὶ 4, 6 καὶ 8 εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 16, 24 καὶ 32 ὅταν πολλαπλασιασθοῦν ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸ $\frac{1}{4}$ ἤτοι :

$$16 \times \frac{1}{4} = 4, \quad 24 \times \frac{1}{4} = 6 \text{ καὶ } 32 \times \frac{1}{4} = 8.$$

Ἑπομένως : ***δύο, τρεῖς ἢ καὶ περισσότεροι ἀριθμοὶ λέγονται ἀνάλογοι πρὸς δύο, τρεῖς καὶ περισσοτέρους ἰσοπληθεῖς ἀριθμοὺς ὅταν οἱ δεύτεροι γίνονται ἀπὸ τοὺς πρώτους ἢ οἱ πρῶτοι ἀπὸ τοὺς δευτέρους διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ των ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμό.***

Ἀπὸ τὸ προηγούμενο πρόβλημα βλέπομε ὅτι ἐμοιράσαμε τὶς 72 ὀκ. ἀλεύρι ἀνάλογα μὲ τὰ ἄτομα κάθε οἰκογενείας. Δηλαδὴ ἐμοιράσαμε τὸν ἀριθμὸ 72 σὲ μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 4, 6 καὶ 8 καὶ τὰ ὁποῖα βλέπομε ὅτι εἶναι τὰ 16, 24 καὶ 32.

Τὸ προηγούμενο πρόβλημα καὶ γενικὰ τὰ προβλήματα, στὰ ὁποῖα μοιράζομε ἕνα ἀριθμὸ σὲ μέρη ἀνάλογα ἄλλων γνωστῶν ἀριθμῶν λέγονται ***προβλήματα μερισμοῦ***. Ἑπομένως προβλήματα μερισμοῦ εἶναι ἐκεῖνα . . . .
. . . . (Νὰ συμπληρωθῇ ὑπὸ τοῦ μαθητοῦ)

Ὁ ἀριθμὸς ὁ ὁποῖος μοιράζεται λέγεται ***μεριστέος***, οἱ δὲ γνωστοὶ ἀριθμοὶ λέγονται ***μερίζοντες*** καὶ οἱ ἀριθμοὶ τοὺς ὁποίους βρίσκομε ἀπὸ τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος λέγονται ***μερίδια***.

Στὸ προηγούμενο πρόβλημα μεριστέος εἶναι ὁ 72, μερίζοντες οἱ 4, 6 καὶ 8, καὶ μερίδια οἱ 16, 24 καὶ 32.

Ἡ κατάταξις καὶ ἡ λύσις τῶν προβλημάτων τοῦ μερισμοῦ σὲ μέρη ἀνάλογα ἀκεραίων γνωστῶν ἀριθμῶν θὰ γίνεται σύμφωνα μὲ τὴν ἁπλῆ μέθοδο τῶν τριῶν, ὡς ἑξῆς:

***Μεριστέος** 72.*

Λύσις

	Μερίζοντες		*Μερίδια*	
α)	4	α)	$\frac{72\times4}{18}$	= 16
β)	6	β)	$\frac{72\times6}{18}$	= 24
γ)	8	γ)	$\frac{72\times8}{18}$	= 32
Ἀθρ.	18			72

Παρατηροῦμε λοιπὸν ὅτι βρίσκομε τὸ κάθε μερίδιο ἀφοῦ πρῶτα προσθέσωμε τοὺς μερίζοντας καὶ ἔπειτα πολλαπλασιάσωμε τὸν μεριστέο 72 ἐπὶ κάθε μερίζοντα καὶ τὸ γινόμενο τὸ διαιρέσωμε διὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν μεριζόντων.

Ὥστε γιὰ νὰ μοιράσωμε ἕνα ἀριθμὸ σὲ μέρη ἀνάλογα δύο ἢ περισσοτέρων γνωστῶν ἀριθμῶν . . . .

(Νὰ συμπληρωθῆ ὑπὸ τοῦ μαθητοῦ).

2. Νὰ μοιρασθοῦν οἱ 72 ὀκ. ἀλεύρι σὲ μέρη ἀνάλογα τῶν γνωστῶν ἀριθμῶν 2, 3 καὶ 4.

Σύμφωνα μὲ τὸν τρόπο ποὺ ἐλύσαμε τὸ προηγούμενο πρόβλημα, ἂν λύσωμε καὶ τοῦτο θὰ ἔχωμε:

***Μεριστέος** 72.*

	Μερίζοντες		*Μερίδια*	
α)	2	α)	$\frac{72\times2}{9}$	= 16
β)	3	β)	$\frac{72\times3}{9}$	= 24
γ)	4	γ)	$\frac{72\times4}{9}$	= 32
Ἀθρ.	9			72

Ἄν προσέξωμε τὰ δύο προβλήματα τὰ ὁποῖα ἐλύσαμε θὰ παρατηρήσωμε τὰ ἑξῆς : Καὶ στὰ δύο ὁ μεριστέος εἶναι ὁ ἀριθμὸς 72 καὶ τὰ μερίδια εἶναι οἱ αὐτοὶ ἀριθμοὶ 16, 24 καὶ 32. Διαφέρουν μόνον οἱ μερίζοντες.

Στὸ 1ο πρόβλημα μερίζοντες ἦσαν οἱ ἀριθμοὶ 4, 6 καὶ 8 καὶ στὸ δεύτερο οἱ ἀριθμοὶ 2, 3 καὶ 4.

Παρατηροῦμε ὅτι οἱ μερίζοντες 2, 3 καὶ 4, τοῦ δευτέρου προβλήματος βρίσκονται ἀπὸ τοὺς μερίζοντες 4, 6 καὶ 8 τοῦ πρώτου προβλήματος ὅταν τοὺς διαιρέσωμε διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 2, δηλ. 4 : 2 = 2, 6 : 2 = 3 καὶ 8 : 2 = 4.

Καὶ οἱ δεύτεροι αὐτοὶ μερίζοντες μᾶς ἔδωσαν πάλιν τὰ αὐτὰ μερίδια. Ἑπομένως στὰ προβλήματα τοῦ μερισμοῦ *μποροῦμε νὰ διαιρέσωμε τοὺς μερίζοντας, ἂν διαιροῦνται ὅλοι ἀκριβῶς διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, καὶ νὰ βροῦμε τὰ αὐτὰ μερίδια.*

Ἀλλὰ καὶ ἂν τοὺς μερίζοντας 2, 3 καὶ 4 τοῦ δευτέρου προβλήματος τοὺς πολλαπλασιάσωμε ἐπὶ τὸν ἀριθμὸ 2, θὰ βροῦμε τοὺς μερίζοντας 4, 6 καὶ 8 τοῦ πρώτου προβλήματος καὶ τὰ αὐτὰ μερίδια.

Ὥστε τοὺς *μερίζοντας μποροῦμε νὰ τοὺς πολλαπλασιάσωμε ἢ διαιρέσωμε ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸ καὶ νὰ ἔχωμε τὰ αὐτὰ μερίδια.*

Τὰ συμπεράσματα αὐτὰ μᾶς βοηθοῦν πολὺ στὴν λύσιν τῶν προβλημάτων τοῦ μερισμοῦ, ὅταν οἱ μερίζοντες εἶναι μεγάλοι ἀριθμοὶ ἢ κλάσματα.

3. Νὰ μοιρασθῇ ὁ ἀριθμὸς 72 σὲ μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 40, 60 καὶ 80.
Μεριστέος 72.

Λύσις

Μερίζοντες			*Μερίδια*
α)	40	: 20 = 2	α) $\frac{72\times2}{9} = 16$
β)	60	: 20 = 3	β) $\frac{72\times3}{9} = 24$
γ)	80	: 20 = 4	γ) $\frac{72\times4}{9} = 32$
Ἄθροισμα		9	72

Στὸ πρόβλημα αὐτό, ἐπειδὴ οἱ μερίζοντες διαιροῦνται ἀκριβῶς διὰ τοῦ 20, ἐκάμαμε τὴν διαίρεσιν καὶ βρήκαμε νέους μεςρίζοντας τοὺς 2, 3 καὶ 4. Ἐκάμαμε τὶς πράξεις καὶ βρήκαμε τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα τὸ ὁποῖο θὰ βρίσκαμε μὲ τοὺς μερίζοντας 40, 60 καὶ 80. Τὸ κέρδος μας μὲ αὐτὸ εἶναι ὅτι εἴχαμε μεγάλη εὐκολία στὶς πράξεις.

Ἀσκήσεις

1. Νὰ μοιρασθῆ ὁ ἀριθμὸς 1000 σὲ μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 3 καὶ 7.

2. Νὰ μοιρασθῆ ὁ ἀριθμὸς 5000 σὲ μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 3 καὶ 5.

3. Ἐπίσης ὁ ἀριθμὸς 1600 σὲ μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 2, 3 καὶ 15.

2. Προβλήματα μερισμοῦ σὲ μέρη ἀνάλογα κλασματικῶν ἀριθμῶν

1. Ἀπὸ τὰ 100 ψωμάκια ποὺ μοιράσθηκαν στὴν Ε′ καὶ ΣΤ′ τάξιν τοῦ σχολείου μας ἡ Ε′ πῆρε τὰ $\frac{3}{5}$ *καὶ ἡ ΣΤ′ τὰ* $\frac{2}{5}$ *αὐτῶν. Πόσα ψωμάκια πῆρε ἡ κάθε τάξις;*

Λύσις

Τὸ πρόβλημα αὐτό, ὅπως ἔχομε μάθει, λύεται ἢ μὲ τὴν ἀναγωγὴ στὴν μονάδα ἢ μὲ πολλαπλασιασμό, γιατὶ ζητοῦμε τὰ $\frac{3}{5}$ καὶ τὰ $\frac{2}{5}$ τοῦ ἀριθμοῦ 100. Ἂν τὸ λύσωμε μὲ πολλαπλασιασμὸ θὰ βρεθῆ ὅτι ἡ Ε′ τάξις θὰ πάρη:

$100 \times \frac{3}{5} = \frac{300}{5} = 60$ ψωμάκια, καὶ ἡ ΣΤ′ τάξις θὰ πάρη:

$100 \times \frac{2}{5} = \frac{200}{5} = 40$ ψωμάκια.

Τὸ αὐτὸ θὰ βροῦμε ἐὰν λύσωμε τὸ πρόβλημα μὲ τὴν ἀναγωγὴ στὴν μονάδα.

Ἀλλὰ καὶ τὰ ἴδια μερίδια θὰ βροῦμε ἂν μοιράσωμε τὸν ἀριθμὸ 100 σὲ μέρη ἀνάλογα τῶν γνωστῶν ἀριθμῶν $\frac{3}{5}$ καὶ $\frac{2}{5}$. Ἐδῶ τώρα οἱ μερίζοντες εἶναι κλάσματα καὶ μάλιστα ὁμώνυμα.

Γιὰ νὰ μὴν ἔχωμε ὅμως μερίζοντας κλάσματα καὶ δυσκολευόμεθα στὶς πράξεις, πολλαπλασιάζομε τοὺς μερίζοντας ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸ ὥστε νὰ γίνουν ἀκέραιοι. Ὁ ἀριθμὸς ἐδῶ ἐπὶ τὸν ὁποῖον θὰ πολλαπλασιασθοῦν γιὰ νὰ γίνουν ἀκέραιοι εἶναι ὁ παρονομαστής των 5. Καὶ ἔχομε :

$$\frac{3}{5} \times 5 = \frac{15}{5} = 3 \text{ καὶ } \frac{2}{5} \times 5 = \frac{10}{5} = 2$$

Καὶ τώρα τὰ μερίδια θὰ εἶναι τὰ αὐτὰ ἂν μοιράσωμε τὸν ἀριθμὸ 100 σὲ μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 3 καὶ 2. Καὶ ἔχομε :

Μερίζοντες		***Μερίδια***
α)	3	α) $\frac{100 \times 3}{5} = 60$
β)	2	β) $\frac{100 \times 2}{5} = 40$
Ἀρθ.	5	100

2. *Ἕνας πατέρας ἀφῆκε περιουσία 180 λιρῶν γιὰ νὰ μοιρασθῇ στὰ τρία του παιδιά. Τὸ πρῶτο νὰ πάρῃ τὸ* $\frac{1}{3}$ *αὐτῶν, τὸ δεύτερο τὰ* $\frac{2}{5}$ *καὶ τὸ τρίτο παιδὶ τὰ* $\frac{4}{15}$ *αὐτῶν. Πόσο θὰ πάρῃ τὸ κάθε παιδί ;*

Λύσις

Εἶναι πρόβλημα μερισμοῦ σὲ μέρη ἀνάλογα. Θὰ μοιράσωμε τὸν ἀριθμὸ 180 τῶν λιρῶν σὲ μέρη ἀνάλογα τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$ καὶ $\frac{4}{15}$. Τὰ κλάσματα εἶναι ἑτερώνυμα καὶ τὰ τρέπομε σὲ ὁμώνυμα.

Ε.Κ.Π. τὸ 15, διότι διαιρεῖται ἀκριβῶς μὲ ὅλους τοὺς ἄλλους παρονομαστάς.

$$\text{Καὶ ἔχομε : } \overbrace{\frac{1}{3}}^{5} \quad \overbrace{\frac{2}{5}}^{3} \quad \overbrace{\frac{4}{15}}^{1} \text{ ἢ } \frac{5}{15}, \frac{6}{15}, \frac{4}{15}.$$

Τώρα, ὅπως καὶ στὸ προηγούμενο πρόβλημα, πολλαπλασιάζομε τοὺς μερίζοντας ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸ γιὰ νὰ γίνουν ἀκέραιοι, ἀφοῦ γνωρίζομε ὅτι τὰ μερίδια θὰ εἶναι τὰ ἴδια. Ὁ ἀριθμὸς ἐπὶ τὸν ὁποῖο θὰ τὰ πολλαπλασιάσωμε γιὰ νὰ γίνουν ἀκέραιοι εἶναι ὁ παρονομαστής των 15. Καὶ ἔχομε :

$$\frac{5}{15} \times 15 = \frac{75}{15} = 5, \frac{6}{15} \times 15 = \frac{90}{15} = 6, \frac{4}{15} \times 15 = \frac{60}{15} = 4$$

καὶ οἱ μερίζοντες εἶναι 5, 6 καὶ 4, ὁπότε ἔχομε :

Μεριστέος 180.

	Μερίζοντες		*Μερίδια*
α)	5	α)	$\frac{180\times5}{15} = 60$
β)	6	β)	$\frac{180\times6}{15} = 72$
γ)	4	γ)	$\frac{180\times4}{15} = 48$
Ἄθρ.	15		180

’Από τὴν λύσιν τῶν δύο αὐτῶν προβλημάτων συμπεραίνομε ὅτι, *γιὰ νὰ μοιράσωμε ἕνα ἀριθμὸ σὲ μέρη ἀνάλογα δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν ὅταν οἱ μερίζοντες εἶναι κλάσματα : α) τρέπομε τὰ κλάσματα σὲ ὁμώνυμα, β) πολλαπλασιάζομε τὰ ὁμώνυμα κλάσματα ἐπὶ τὸν παρονομαστή των καὶ λαμβάνομε μερίζοντας ἀκεραίους ἀριθμοὺς οἱ ὁποῖοι εἶναι οἱ ἀριθμηταὶ τῶν ὁμωνύμων κλασμάτων καὶ γ) μοιράζομε τὸν ἀριθμὸ σὲ μέρη ἀνάλογα τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν.*

’Εὰν οἱ μερίζοντες εἶναι μικτοὶ ἀριθμοί, τοὺς τρέπομε σὲ κλασματικοὺς καὶ ἔχομε τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος σύμφωνα μὲ τὸν προηγούμενο κανόνα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Τρεῖς ἐργάται γιὰ κάποια ἐργασία ἔλαβαν 630.000 δρχ. Ὁ πρῶτος ἐργάσθηκε 5 ἡμέρες, ὁ δεύτερος 7 ἡμέρες, καὶ ὁ τρίτος 9 ἡμέρες. Πόσα χρήματα θὰ λάβη ὁ καθένας ;

2. Δύο βοσκοὶ ἐνοικίασαν ἕνα λειβάδι γιὰ νὰ βοσκήσουν τὰ πρόβατά τους καὶ ἔδωσαν 1.600.000 δρχ. Ὁ πρῶτος ἐβόσκησε τὰ πρόβατά του 3 μῆνες καὶ ὁ δεύτερος 70 ἡμέρες. Πόσα θὰ πληρώση ὁ καθένας τους ;

3. Ἕνας πατέρας ἀφῆκε ἕνα κτῆμα 60 στρεμμάτων νὰ τὸ μοιράσουν τὰ τρία του παιδιά, ἀνάλογα μὲ τὰ χρήματα τὰ ὁποῖα τοὺς ἀφῆκε. Στὸ πρῶτο ἄφησε 320.000 δρχ., στὸν δεύτερο 380.000 δρχ. καὶ στὸν τρίτο 520.000 δρχ. Πόσα στρέμματα θὰ πάρη τὸ κάθε παιδί ;

4. Τρεῖς μικροπωληταὶ ἐκέρδισαν σὲ μιὰ ἡμέρα 240.000 δρχ. ’Από αὐτοὺς ὁ πρῶτος ἐργάσθηκε 12 ὧρες, ὁ δεύτερος 10 ὧρες καὶ ὁ τρίτος 8 ὧρες. Πόσα χρήματα θὰ πάρη ὁ καθένας ;

5. ’Από τρεῖς κορμοὺς δένδρων καρυδιᾶς ἔβγαλαν 390 σα-

νίδες. Ὁ πρῶτος κορμὸς ἦτο 2,4 κ. μ., ὁ δεύτερος 2 κ. μ. καὶ ὁ τρίτος 1,6 κ. μ. Πόσες σανίδες ἔβγαλε ὁ κάθε κορμός;

6. Τρία βαρέλια λάδι τὰ ὁποῖα χωρούν ~~περιέχουν~~ ἴση ποσότητα λαδιοῦ τὸ καθένα, περιέχουν καὶ τὰ τρία 440 ὀκ. λάδι. Τὸ πρῶτο εἶναι γεμάτο κατὰ τὸ $\frac{1}{3}$, τὸ δεύτερο κατὰ τὸ $\frac{1}{2}$ καὶ τὸ τρίτο ὁλόκληρο. Πόσες ὀκάδες λάδι περιέχει κάθε βαρέλι;

7. Ἕνας ὁμογενὴς τῆς Αἰγύπτου, πεθαίνοντας, ἀφῆκε περιουσία 7.500 λιρῶν. Μὲ τὴν διαθήκη του ὥρισε νὰ μοιρασθῇ ἡ περιουσία του αὐτὴ ὡς ἑξῆς: Τὰ $\frac{2}{5}$ αὐτῆς νὰ τὰ πάρουν οἱ συγγενεῖς του, τὰ $\frac{3}{7}$ νὰ γίνουν στὸ χωριό του σχολεῖο καὶ ἐκκλησία καὶ μὲ τὰ ὑπόλοιπα νὰ γίνῃ ἕνα μουσεῖο. Πόσες λίρες ἀναλογοῦν σὲ κάθε περίπτωσιν;

8. Τέσσερα βαρέλια κρασὶ χωροῦν ἴσες ὀκάδες καὶ περιέχουν καὶ τὰ τρία 975 ὀκ. Τὸ πρῶτο εἶναι γεμᾶτο ὁλόκληρο, τὸ δεύτερο κατὰ τὸ $\frac{1}{2}$, τὸ τρίτο κατὰ τὸ $\frac{1}{5}$ καὶ τὸ τέταρτο κατὰ τὸ $\frac{1}{4}$. Πόσες ὀκάδες κρασὶ περιέχει κάθε βαρέλι;

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ

Πολλοὶ ἄνθρωποι ὅταν ἔχουν μιὰ ἐπιχείρησιν ἢ θέλουν νὰ κάμουν μιὰ ἐπιχείρησιν καὶ δὲν ἔχουν ἀρκετὰ χρήματα (κεφάλαια) παίρνουν *συνεταίρους*, δηλ. ἄλλους, οἱ ὁποῖοι καταθέτουν καὶ αὐτοὶ κεφάλαια καὶ συμμετέχουν στὴν ἐπιχείρησιν. Λέμε τότε ὅτι οἱ ἄνθρωποι αὐτοὶ ἔκαμαν *Ἑταιρεία*.

Ἐπειδὴ τότε ἡ ἐπιχείρησις ἀνήκει σ' ὅλους, συμμετέχουν ὅλοι οἱ συνεταῖροι καὶ στὰ κέρδη τὰ ὁποῖα θὰ ἔχουν ἀπὸ τὴν ἐπιχείρησιν ἢ καὶ στὴν πιθανὴ ζημία, ἡ ὁποία δυνατὸν νὰ προκύψῃ ἀπὸ τὴν ἐπιχείρησιν.

Ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω προκύπτουν διάφορα προβλήματα τὰ ὁποῖα λέγονται *προβλήματα ἑταιρείας*.

1. Τρεῖς ἄνθρωποι ἔκαμαν ἐμπόριο καὶ ἔβαλαν ἀπὸ 500.000 δρχ. ὁ καθένας τους. Μετὰ ἕνα χρόνο ἀπὸ τὴν ἡμέρα ποὺ ἄρχισαν τὸ ἐμπόριο διέλυσαν τὴν ἑταιρεία τους καὶ βρῆκαν ὅτι εἶχαν κέρδος 1.200.000 δρχ. Πόσο κέρδος θὰ πάρῃ ὁ καθένας τους;

Λύσις

Στὸ πρόβλημα αὐτὸ βλέπομε ὅτι ὁ καθένας ἔβαλε στὴν ἐπιχείρησιν ἀπὸ 500 χιλ. δρχ. Ἔβαλαν λοιπὸν καὶ οἱ τρεῖς ἀπὸ ἴσα χρήματα καὶ τὰ χρήματά τους τὰ εἶχαν στὴν ἐπιχείρησιν ἐπὶ 1 ἔτος, δηλ. σὲ ἴσο χρόνο. Εἶναι εὔκολο λοιπὸν νὰ καταλάβουμε ὅτι ὁ καθένας τους πρέπει νὰ πάρῃ τὸ ἴδιο μερίδιο ἀπὸ τὸ κέρδος καὶ γι' αὐτὸ θὰ διαιρέσωμε τὸ κέρδος 1.200.000 διὰ τοῦ 3, ὁπότε θὰ ἔχωμε :

1.200.000 : 3 = 400.000

Ἑπομένως ὁ καθένας τους θὰ πάρῃ ἀπὸ 400.000 δρχ.

2. Τρεῖς ἄνθρωποι ἔκαμαν μίαν ἐπιχείρησιν. Ὁ πρῶτος ἔβαλε 500.000 δρχ. ὁ δεύτερος 300.000 δρχ. καὶ ὁ τρίτος 700.000. Μετὰ ἕνα ἔτος διέλυσαν τὴν ἑταιρεία τους καὶ εἶχαν κέρδος 1.800.000 δρχ. Πόσο κέρδος θὰ πάρῃ ὁ καθένα τους ;

Λύσις

Στὸ πρόβλημα αὐτὸ βλέπομε ὅτι ὁ α' ἔβαλε στὴν ἐπιχείρησιν 500.000 δρχ., ὁ β' 300.000 καὶ ὁ γ' 700.000 δρχ., δηλ. εἶχαν καταθέσει ὁ καθένας τους διάφορο ποσὸ στὴν ἐπιχείρησιν καὶ ὅτι καὶ οἱ τρεῖς τὰ εἶχαν καταθέσει γιὰ τὸν αὐτὸ χρόνο. Ἑπομένως ὁ καθένας θὰ πάρῃ κέρδος ἀνάλογα μὲ τὸ ποσὸ τὸ ὁποῖο ἔχει καταθέσει στὴν ἐπιχείρησιν. Θὰ πάρουν λοιπὸν διάφορο κέρδος. Ἤτοι, ὁ τελευταῖος θὰ πάρῃ περισσότερα, γιατὶ εἶχε καταθέσει τὰ περισσότερα χρήματα, ὁ πρῶτος λιγώτερα ἀπὸ αὐτὸν καὶ ὁ δεύτερος τὰ λιγώτερα, γιατὶ εἶχε καταθέσει καὶ τὰ λιγώτερα χρήματα. Καὶ ἐπειδὴ θὰ μοιρασθῇ τὸ ποσὸ τοῦ κέρδους ἀνάλογα μὲ τὰ χρήματα τὰ ὁποῖα εἶχε καταθέσει ὁ καθένας ἀπὸ τοὺς συνεταίρους, τὸ πρόβλημα θὰ λυθῇ ὅπως λύονται τὰ προβλήματα τοῦ μερισμοῦ, μὲ μερίζοντας τὰ ποσὰ τὰ ὁποῖα εἶχαν καταθέσει καὶ μεριστέον τὸ ποσὸ τοῦ κέρδους.

Οἱ μερίζοντες εἶναι ἀριθμοὶ μεγάλοι. Ἂν διαιρεθοῦν ὅμως διὰ τοῦ 100.000 μᾶς δίδουν τοὺς μερίζοντας 5, 3 καὶ 7. Καὶ ἐπειδὴ τὰ μερίδια θὰ εἶναι τὰ αὐτά, θὰ μοιράσωμε τὸ ποσὸ τοῦ κέρδους τῶν 1.800.000 σὲ μέρη ἀνάλογα τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν 5, 3 καὶ 7. Καὶ ἔχομε :

Μεριστέος 1800.000.

Μερίζοντες		*Μερίδια*		
α)	5	α)	$\frac{1.800.000 \times 5}{15}$	= 600.000
β)	3	β)	$\frac{1.800.000 \times 3}{15}$	= 360.000
γ)	7	γ)	$\frac{1.800\ 000 \times 7}{15}$	= 840.000
Ἄθρ.	15			1.800.000

3. Κάποιος ἄρχισε μίαν ἐπιχείρησιν μὲ 150.000 δρχ. Μετὰ 3 μῆνες πῆρε καὶ ἄλλον συνεταῖρον ὁ ὁποῖος ἔβαλε καὶ αὐτὸς τὸ αὐτὸ κεφάλαιο. Ὕστερα ἀπὸ ἕνα χρόνο, ἀπὸ τὴν ἡμέρα ποὺ ἄρχισε ἡ ἐπιχείρησις, τὴν διέλυσαν καὶ εἶχαν ζημία 63.000 δρχ. Πόσο ἐζημιώθη ὁ καθένας ;

Λύσις

Στὸ πρόβλημα αὐτὸ βλέπομε, ὅτι τὰ χρήματα τὰ ὁποῖα ἔβαλε ὁ κάθε συνεταῖρος στὴν ἐπιχείρησιν εἶναι ἴσα, ἀλλὰ ὁ χρόνος ποὺ τὰ εἶχε ὁ καθένας στὴν ἐπιχείρησιν δὲν εἶναι ὁ αὐτός. Γιατὶ τὰ χρήματα τοῦ πρώτου ἔμειναν στὴν ἐπιχείρησιν 12 μῆνες, ἐνῶ τοῦ δευτέρου ἔμειναν τρεῖς μῆνες λιγώτερο, δηλ. 12 — 3 = 9 μῆνες. Ἑπομένως θὰ μοιράσουν τὴν ζημία των ἀνάλογα μὲ τὸν χρόνο ποὺ εἶχε ὁ καθένας τὰ χρήματά του στὴν ἐπιχείρησιν, γιατὶ τὰ χρήματα εἶναι ἴσα. Θὰ λυθῆ λοιπὸν καὶ τὸ πρόβλημα αὐτὸ ὅπως τὰ προβλήματα τοῦ μερισμοῦ, μὲ μεριστέο τὴν ζημία 63.000 δρχ. καὶ μὲ μερίζοντας τὸν χρόνο, ἤτοι 12 μῆνες γιὰ τὸν πρῶτο καὶ 9 μῆνες γιὰ τὸν δεύτερο. Ἐὰν διαιρέσωμε τοὺς μερίζοντας διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 3 μὲ τὸν ὁποῖο διαιροῦνται καὶ οἱ δύο ἀκριβῶς, τότε τὸν μεριστέον 63.000 θὰ τὸ μοιράσωμε σὲ μέρη ἀνάλογα τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν 4 καὶ 3. Καὶ θὰ ἔχωμε :

Μεριστέος 63.000.

Μερίζοντες		*Μερίδια*		
α)	12 : 3 = 4	α)	$\frac{63.000 \times 4}{7}$	= 36.000
β)	9 : 3 = 3	β)	$\frac{63.000 \times 3}{7}$	= 27.000
Ἄθρ.	7			63.000

Ἀπὸ τ' ἀνωτέρω λοιπὸν συμπεραίνομε ὅτι :

Προβλήματα ἑταιρείας εἶναι ἐκεῖνα στὰ ὁποῖα μοιράζομε τὸ κέρδος ἢ τὴν ζημία σὲ μέρη ἀνάλογα τῶν κεφαλαίων ὅταν οἱ χρόνοι εἶναι ἴσοι καὶ σὲ μέρη ἀνάλογα τῶν χρόνων ὅταν τὰ κεφάλαια εἶναι ἴσα. Καὶ ἀκόμη :

Τὰ προβλήματα αὐτὰ λύονται ὅπως τὰ προβλήματα τοῦ μερισμοῦ.

4. Τρεῖς ὁμάδες ἐργατῶν ἀνέλαβαν νὰ σκάψουν ἕνα χανδάκι σὲ 12 ἡμέρες ἀντὶ 1.750.000 δρχ. Ἡ πρώτη ὁμάδα εἶχε 2 ἐργάτας καὶ ἐργάσθηκε 4 ἡμέρες, ἡ δευτέρα εἶχε 3 ἐργάτας καὶ ἐργάσθηκε 5 ἡμέρες καὶ ἡ τρίτη εἶχε 4 ἐργάτας καὶ ἐργάσθηκε 3 ἡμέρες. Πόσα χρήματα θὰ πάρη ὁ κάθε ἐργάτης καὶ πόσα κάθε ὁμάδα ;

Λύσις

Στὸ πρόβλημα αὐτὸ θὰ μοιράσωμε τὸ κέρδος ἀνάλογα μὲ τοὺς ἐργάτας καὶ τὶς ἡμέρες ποὺ ἐργάσθηκε κάθε ὁμάδα. Παρατηροῦμε ὅμως, ὅτι καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐργατῶν σὲ κάθε ὁμάδα εἶναι διάφορος καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν δὲν εἶναι ἴσος σὲ ὅλες τὶς ὁμάδες.

Γι' αὐτό, δὲν μποροῦμε νὰ λύσωμε τὸ πρόβλημα ὅπως τὰ προηγούμενα, στὰ ὁποῖα τὸ κεφάλαιο ἢ ὁ χρόνος ἦσαν ἴσα. Γιὰ νὰ λυθῇ τὸ πρόβλημα αὐτὸ ἀντιλαμβανόμεθα ὅτι πρέπει, ἢ οἱ ἐργάται ἢ οἱ ἡμέρες θὰ εἶναι ἴσες καὶ εἰς τὶς τρεῖς ὁμάδες. Γι' αὐτὸ θὰ κάμωμε νὰ ἔχῃ κάθε ὁμάδα τοὺς ἰδίους ἐργάτας ὁπότε οἱ ἡμέρες θὰ εἶναι ἴσες ἢ διάφορες, ἀλλὰ τὸ κέρδος θὰ εἶναι πάλιν τὸ αὐτό. Πρὸς τοῦτο σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς :

1) Ἡ 1η ὁμ. εἶχε 2 ἐργ. καὶ ἐργ. 4 ἡμ. γιὰ νὰ πάρη τὸ μεριδιό της
ἂν » 1η » » 1 » θὰ » 4×2=8 ἡμ. γιὰ νὰ πάρη τὸ μερ. της
2) Ἡ 2α » » 3 » καὶ » 5 ἡμ. γιὰ νὰ πάρη τὸ μεριδιό της
ἂν » 2α » » 1 » θὰ » 5×3=15ἡμ. γιὰ νὰπάρ. τὸ μερ. της
3) Ἡ 3η » » 4 » ἐργάσθ. 3 ἡμέρες γιὰ » » » »
ἂν » 3η » » 1 » θὰ ἐργ. 3×4=12 ἡμ. γιὰ νὰ » » »

Μὲ τὴν σκέψιν αὐτὴ κάθε ὁμάδα ἔχει ἀπὸ 1 ἐργάτην δηλ. ἴσο ἀριθμὸ ἐργατῶν καὶ πρέπει νὰ ἐργασθοῦν στὴν α' ὁμάδα 8 ἡμέρες, στὴν β' 15 ἡμ. καὶ στὴν γ' 12 ἡμέρες. Τώρα τὸ πρόβλημα λύεται ὅπως τὰ προηγούμενα. Θὰ μοιράσωμε τὸν μεριστέον 1.750.000 δρ. σὲ μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 8, 15 καὶ 12 γιατὶ οἱ ἐργάται εἶναι ἴσοι καὶ στὶς τρεῖς ὁμάδες.

Ἡ λύσις τοῦ προβλήματος πρακτικὰ γίνεται ὡς ἑξῆς :

1η ὁμάδα	2 ἐργ.	4 ἡμ.	1 ἐργ. 4 × 2 = 8 ἡμ.
2α »	3 »	5 »	1 » 3 × 5 = 15 »
3η »	4 »	3 »	1 » 4 × 3 = 12 »

Μεριστέος 1.750.000

Μερίζοντες			*Μερίδια*
α)	8	α) $\frac{1.750.000 \times 8}{35}$	= 400.000
β)	15	β) $\frac{1.750.000 \times 15}{35}$	= 750.000
γ)	12	γ) $\frac{1.750.000 \times 12}{35}$	= 600.000
Ἀθρ.	35		1.750.000

βρήκαμε ὅτι θὰ πάρουν :

ἡ α′ ὁμάδα 400.000 ἑπομένως ὁ 1 ἐργ. 200.000
(διότι 400.000 : 2 = 200.000
ἡ β′ » 750.000 ἑπομένως ὁ 1 ἐργ. 250.000 καὶ
ἡ γ′ » 600.000 » » 1 » 150.000

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Τρεῖς μαθηταὶ νυκτερινοῦ Γυμνασίου πωλοῦν τὴν ἡμέρα φροῦτα καὶ κερδίζουν 36.000 δρχ. Ὁ πρῶτος γιὰ τὴν ἀγορὰ τῶν φρούτων ἔβαλε 100.000 δρχ., ὁ δεύτερος 80.000 καὶ ὁ τρίτος 60.000. Πόσο κέρδος θὰ πάρη ὁ καθένας τους ;

2. Οἱ αὐτοὶ μαθηταὶ τὶς ἄλλες ὧρες ἐργάζονται ἐκ περιτροπῆς σὲ ἕνα περίπτερο καὶ παίρνουν 24.000 δρχ. Ὁ α′ ἐργάζεται 3 ὧρες, ὁ β′ 5 ὧρ. καὶ ὁ γ′ 4 ὧρ. Πόσα χρήματα ἀναλογοῦν στὸν καθένα τους ;

3 Τρεῖς μικρέμποροι ἄνοιξαν μίαν ἐπιχείρησιν στὴν ὁποία ἐργάσθηκαν ὁ α′ 9 μῆνες, ὁ β′ 7 μῆνες καὶ ὁ γ′ 12 μῆνες. Ὅταν διέλυσαν τὴν ἑταιρεία βρῆκαν κέρδος 1.200.000 δρχ. Πόσο κέρδος θὰ πάρη ὁ καθένας τους ;

4. Ἕνας πατέρας ὁ ὁποῖος ἐργάζονταν στὸ ἐξωτερικό, ἀφῆκε περιουσία 6.000 λιρῶν γιὰ νὰ τὴν μοιράσουν τὰ τρία παιδιά του, ὡς ἑξῆς : Ὁ μεγάλος γυιὸς νὰ πάρη τὸ $\frac{1}{6}$ τῆς περιου-

σίας, ὁ μικρότερος τὸ $\frac{1}{3}$ καὶ ἡ κόρη του τὸ $\frac{1}{2}$ τῆς περιουσίας. Πόσα θὰ πάρῃ ὁ καθένας τους ;

5. Κάποιος ἄρχισε μίαν ἐπιχείρησιν μὲ 1.500.000 δρχ. Μετὰ 4 μῆνες πῆρε συνεταῖρο ὁ ὁποῖος ἔβαλε κεφάλαιο 2.000.000 δρχ. Μετὰ 1 ἔτος ἀπὸ τότε ποὺ ἄρχισε ἡ ἐπιχείρησις τὴν διέλυσαν μὲ κέρδος 1.700.000 δρχ. Πόσα θὰ πάρῃ ὁ κάθε συνεταῖρος ;

6. Ἕνας φιλάνθρωπος ἄφησε περιουσία 20.000.000 γιὰ νὰ μοιρασθῇ ὡς ἑξῆς : Τὸ ὀρφανοτροφεῖο νὰ πάρῃ τὸ $\frac{1}{20}$ τῆς περιουσίας του, ὁ ἕνας ἀπὸ τοὺς γυιούς του τὸ $\frac{1}{5}$, ὁ ἄλλος τὸ $\frac{1}{4}$ καὶ τὰ ἀγαθοεργὰ σωματεῖα τὸ $\frac{1}{2}$ τῆς περιουσίας. Πόσα θὰ πάρῃ ὁ κάθε ἕνας τῶν δικαιουμένων ;

7. Τρεῖς βοσκοὶ ἐνοίκιασαν μίαν βοσκήσιμη περιοχὴ ἀντὶ 6.000.000 δρχ. Ὁ πρῶτος εἶχε 200 πρόβατα καὶ τὰ ἐβόσκησε ἐπὶ 6 μῆνες. Ὁ δεύτερος εἶχε 180 πρόβατα καὶ τὰ ἐβόσκησε 4 μῆνες καὶ ὁ τρίτος εἶχε 120 πρόβατα καὶ τὰ ἐβόσκησε 100 ἡμέρες. Πόσο θὰ πληρώσῃ ὁ καθένας τους ;

8. Τρεῖς ὁμάδες ἐργατῶν ἀνέλαβαν νὰ τελειώσουν ἕνα ἔργο ἀπὸ τὸ ὁποῖο θὰ εἰσπράξουν 7.200.000 δρχ. Ἡ πρώτη ὁμάδα ἀποτελεῖται ἀπὸ 3 ἐργάτας καὶ ἐργάσθηκε 6 ἡμέρες, ἡ δευτέρα ὁμάδα ἀποτελεῖται ἀπὸ 5 ἐργάτας καὶ ἐργάσθηκε 3 ἡμέρες καὶ ἡ τρίτη ὁμάδα ἀποτελεῖται ἀπὸ 3 ἐργάτας καὶ ἐργάσθηκε 9 ἡμέρες. Πόσα χρήματα θὰ πάρῃ ἡ κάθε ὁμάδα ;

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΕΣΟΥ ΟΡΟΥ

Ἀπὸ μία οἰκογένεια ἐργάζονται τρία ἄτομα. Τὸ πρῶτο παίρνει 60.000 δρχ. τὴν ἡμέρα, τὸ δεύτερο 50.000 δρχ. καὶ τὸ τρίτο 40.000 δρχ. τὴν ἡμέρα. Πόσες δρχ. παίρνει τὸ κάθε ἄτομο κατὰ μέσον ὅρο ;

Λύσις

Γιὰ νὰ λύσωμε τὸ πρόβλημα θὰ προσθέσωμε τὰ ἡμερομίσθια τῶν τριῶν ἀτόμων καὶ τὸ ἄθροισμα θὰ τὸ διαιρέσωμε μὲ τὸ πλῆθος τῶν ἀτόμων. Ἤτοι 60.000 + 50.000 + 40.000 = 150.000.

Ἄτομα 3. Κατὰ μέσον ὅρο τὸ κάθε ἄτομο θὰ πάρῃ 150.000 : 3 = 50.000 δρχ. τὴν ἡμέρα.

2. Ἕνας δρόμος μετρήθηκε τρεῖς φορὲς καὶ ἦταν τὴν α΄ φορὰ 158,6 μ., τὴν β΄ 159 μ. καὶ τὴν γ΄ φορὰ 157,4 μ. Πόσα μέτρα εἶναι ὁ δρόμος κατὰ μέσον ὅρο ;

Λύσις

Προσθέτομε τὰ μέτρα τὰ ὁποῖα βρέθηκαν ἀπὸ τὶς τρεῖς μετρήσεις καὶ τὸ ἄθροισμα τὸ διαιροῦμε διὰ τοῦ ἀριθμοῦ (τὸ πλῆθος) ὁ ὁποῖος μᾶς φανερώνει πόσες φορὲς μετρήθηκε ὁ δρόμος. Καὶ ἔχομε :

158,6	475	3
159	17	158,33
+ 157,4	25	
475.-	10	
	10	

Κατὰ μέσον ὅρο ὁ δρόμος εἶναι 158,33 μ.

Τὰ προηγούμενα προβλήματα καὶ γενικὰ τὰ προβλήματα στὰ ὁποῖα βρίσκομε τὸν μέσον ὅρο δύο ἢ περισσοτέρων γνωστῶν ἀριθμῶν, λέγονται ***προβλήματα μέσου ὅρου.***

Λέγοντες δὲ μέσον ὅρο δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν, ἐννοοῦμε τὸν ἀριθμὸ τὸν ὁποῖο βρίσκομε, ὅταν διαιρέσωμε τὸ ἄθροισμα τῶν δοθέντων ἀριθμῶν διὰ τοῦ πλήθους τῶν ἀριθμῶν, δηλ. ἐὰν ἔχωμε 4 ἀριθμούς, τὸ ἄθροισμα τῶν 4 αὐτῶν ἀριθμῶν θὰ τὸ διαιρέσωμε διὰ τοῦ 4, ἐὰν ἔχωμε 6, τὸ ἄθροισμά των θὰ τὸ διαιρέσωμε διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 6 κ.ο.κ.

Τὰ προβλήματα τοῦ μέσου ὅρου λύονται μὲ τὸν ἑξῆς πρακτικὸ κανόνα.

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸν μέσο ὅρο δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν
. . . .
. . . . (Νὰ συμπληρωθῇ ὑπὸ τοῦ μαθητοῦ)

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

α) Ἀπὸ τὴ σχολική μας ζωή :

1. Ὁ μαθητὴς Γ.Π. τῆς ΣΤ΄ τάξεως ἔχει στὰ μαθήματα τὴν ἑξῆς βαθμολογία : Θρησκευτικὰ 8, Ἑλληνικὰ 6, Μαθηματικὰ 9, Γεωγραφία 7, Ἑλληνικὴ Ἱστορία 8, Φυσικὰ καὶ Χημεία 7, Γυμναστικὴ 6, Ὠδικὴ 5 καὶ Τεχνικὰ 8. Ποῖος εἶναι ὁ μέσος ὅρος τῆς βαθμολογίας του ;

2. Τὸ σχολεῖο μας ἐδαπάνησε γιὰ ἔξοδα συντηρήσεως, καθαριότητος κ.λ.π. τὰ ἑξῆς ποσά. Τὸν Ὀκτώβριον 1.800.000 δρχ. τὸν Νοέμβριον 1.600.000 δρχ., τὸν Δεκέμβριον 1.200.000 δρχ., τὸν Ἰανουάριον, Φεβρουάριον καὶ Μάρτιον 300.000 δρχ., τὸν Ἀπρίλιον 60.000 δρχ. καὶ τὸν Μάϊον 120.000. Πόσα ἐδαπάνησε κατὰ μέσον ὅρο τὸν μῆνα;

3. Σὲ μίαν μαθηματικὴ κατασκήνωσιν, στὴν πρώτη κατασκηνωτικὴ περίοδο ἔλαβαν μέρος 196 κατασκηνωταὶ καὶ ἐδαπάνησαν 72.563.784 δρχ. Στὴν δευτέρα κατασκηνωτικὴ περίοδο ἔλαβαν μέρος 216 κατασκηνωταὶ καὶ ἐδαπάνησαν 96.564.312 δρχ. Καὶ στὴν τρίτη κατασκηνωτικὴ περίοδο ἔλαβαν μέρος 164 κατασκηνωταὶ καὶ ἐδαπάνησαν 58.453.258 δρχ. Πόσοι κατασκηνωταὶ ἔλαβαν μέρος κατὰ μέσον ὅρο καὶ στὶς τρεῖς κατασκηνωτικὲς περιόδους, πόσα ἐδαπανήθησαν κατὰ μέσον ὅρο καὶ πόσον ἀναλογεῖ κατὰ μέσον ὅρο σὲ κάθε κατασκηνωτή;

β) Ἀπὸ τὴν κοινωνική μας ζωή:

1. Μία οἰκογένεια ἐξώδευσε τὴν Δευτέρα 13.528 δρχ., τὴν Τρίτη 27.496, τὴν Τετάρτη 19.500, τὴν Πέμπτη 36.584 δρχ., τὴν Παρασκευὴ 24.512 δρχ. καὶ τὸ Σάββατο 128.700 δρχ. Ποῖα εἶναι τὰ κατὰ μέσον ὅρο ἔξοδα τῆς οἰκογενείας τὴν ἡμέρα;

2. Ἕνας ὑπάλληλος πῆρε μισθό, τὸν Ἰανουάριον 832.000 δρχ., τὸν Φεβρουάριον 886.000, τὸν Μάρτιον 1.250.000 δρχ. καὶ τὸν Ἀπρίλιο 1.627.000 δρχ. Πόσες δρχ. εἰσέπραξε κατὰ μέσον ὅρο τὸ μῆνα;

3. Μία ὑπηρέτρια παίρνει κατὰ μῆνα μισθὸ 180.000 δρχ. Ἐπίσης παίρνει ὁλόκληρο μισθὸ ὡς δῶρο τῶν Χριστουγέννων καὶ τὸ μισὸ τοῦ μισθοῦ της ὡς δῶρο τοῦ Πάσχα. Ἐπίσης τῆς ἀγοράζουν 2 ζεύγη ὑποδημάτων ἀξίας 95 χιλ. τὸ καθένα καὶ 1 φόρεμα ἀξίας 420.000 δρχ. Πόση εἶναι ἡ κατὰ μέσον ὅρο μηνιαία μισθοδοσία της τὸ ἔτος;

4. Ἕνα αὐτοκίνητο τὴν α΄ ἡμέρα ἔτρεξε 84 χιλιόμετρα, τὴν β΄ ἡμέρα 63 χιλιόμετρα καὶ 700 μέτρα, τὴν γ΄ ἡμέρα 32 χιλιόμετρα καὶ 500 μέτρα καὶ τὴν δ΄ ἡμέρα 52 χιλιόμετρα. Πόσα χιλιόμετρα ἔτρεξε κατὰ μέσον ὅρο τὶς 4 ἡμέρες;

γ) Ἀπὸ τὰ μαθήματα:

1. Ἡ θερμοκρασία τῶν Ἀθηνῶν τὴν 16η Ἰουλίου 1952 ἦτο

τὸ πρωῒ 16,8°, τὸ μεσημέρι 29,4° καὶ τὸ βράδυ 23,4°. Πόση ἦτο ἡ θερμοκρασία τῶν Ἀθηνῶν κατὰ μέσον ὅρο τὴν ἡμέρα αὐτή;

2. Γιὰ νὰ βροῦν οἱ Φυσικοὶ τὴν ταχύτητα τοῦ ἦχου στὸν ἀέρα, ἐπειραματίσθηκαν 3 φορές. Τὴν α΄ βρῆκαν 343 μ., τὴν β΄ 337,5 καὶ τὴν γ΄ 341,1 μ. Πόση εἶναι ἡ ταχύτητα τοῦ ἤχου στὸν ἀέρα κατὰ μέσον ὅρο;

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΙΞΕΩΣ

Ὁ ἄνθρωπος, γιὰ νὰ ζήσῃ, ἀκολουθεῖ διάφορα ἐπαγγέλματα. Ἄλλος γίνεται ἐπιστήμων, ἄλλος ἐργάτης, ἄλλος παντοπώλης, ἄλλος φαρμακοποιός, ἄλλος χρυσοχόος κ.λ.π. Σὲ μερικὰ ἀπὸ αὐτὰ τὰ ἐπαγγέλματα, ὅπως τοῦ φαρμακοποιοῦ, τοῦ παντοπώλου, τοῦ χρυσοχόου κλπ. οἱ ἄνθρωποι ποὺ τὰ ἀκολουθοῦν, ἀναγκάζονται νὰ κάμουν κάτι, τὸ ὁποῖο εἶναι συμφέρο γιὰ τὸ ἐπάγγελμα τους καὶ τὴν κοινωνία (τὸν κόσμο). Π.χ.

Ὁ παντοπώλης ἀναμιγνύει (ἀνακατεύει) δύο εἰδῶν λάδι μιᾶς καλῆς καὶ μιᾶς κατώτερης ποιότητος ἢ βούτυρο μὲ λίπος καὶ γενικὰ διάφορα εἴδη ποὺ εἶναι δυνατὸν νὰ ἀναμιχθοῦν.

Ὁ χρυσοχόος ἀναμιγνύει χρυσὸ μὲ ἄργυρο ἢ μὲ ψευδάργυρο ἢ μὲ χαλκὸ γιὰ νὰ κατασκευάσῃ τὰ κοσμήματα.

Ὁ φαρμακοποιὸς ἀναμιγνύει καθαρὸ οἰνόπνευμα μὲ νερὸ καὶ μὲ ἀρώματα γιὰ νὰ κάμῃ τὴν κολώνια ἢ νὰ κάμῃ οἰνόπνευμα μὲ λιγώτερους βαθμούς.

Ὅλες ὅμως οἱ ἀναμίξεις αὐτὲς πρέπει νὰ ἔχουν μιὰ βάσιν ἠθική. Νὰ κερδίζουν δηλ. οἱ ἐπαγγελματίαι ἀπὸ τὴν ἀνάμιξιν τόσα, ὅσα θὰ ἐκέρδιζαν, ἐὰν ἐπωλοῦσαν χωριστὰ τὰ εἴδη τὰ ὁποῖα θὰ ἀναμίξουν. Καὶ τοῦτο γιατὶ μερικοὶ ἀπ' αὐτοὺς γιὰ νὰ κερδίσουν περισσότερα κάνουν πολλὰ εἰς βάρος τῆς κοινωνίας. Δηλ. νοθεύουν τὰ εἴδη τους, παρ' ὅλον ὅτι τοῦτο τιμωρεῖται αὐστηρὰ ἀπὸ τὸν Νόμο.

Ὑπάρχουν λοιπὸν στὴν ζωὴν τοῦ ἀνθρώπου προβλήματα τὰ ὁποῖα ἀναφέρονται στὶς ἀναμίξεις καὶ τὰ ὁποῖα πρέπει ἀπαραίτητα νὰ γνωρίζωμε.

Α΄ ΜΙΓΜΑΤΑ

Ὅταν ἔχωμε δυὸ ποιότητες λαδιοῦ καὶ τὶς ἀναμίξωμε θὰ ἔχωμε μιὰ ἄλλη ποιότητα λαδιοῦ ἡ ὁποία λέγεται *μῖγμα.*

Ὁμοίως ἂν ἀναμίξωμε 3 ποιότητες σίτου θὰ ἔχωμε μιὰ νέα ποιότητα, δηλ. *ἕνα μῖγμα.*

Ὁμοίως ἂν ἀναμίξωμε βούτυρο μὲ λίπος ἢ κερὶ μὲ παραφίνη ἢ οἰνόπνευμα μὲ νερὸ κ.τ.λ.

Ἑπομένως, ***μῖγμα καλεῖται ἡ νέα ποιότητα τὴν ὁποία λαμβάνομε, ὅταν ἀναμίξωμε δυὸ ἢ περισσότερες ποιότητες εἰδῶν τὰ ὁποῖα εἶναι δυνατὸν νὰ ἀναμιχθοῦν.***

Τὰ προβλήματα τὰ ὁποῖα ἀναφέρονται (μιλοῦν) σὲ μίγματα, καλοῦνται ***προβλήματα μίξεως*** ἢ ***ἀναμίξεως***.

Τὰ προβλήματα τῆς μίξεως διαιροῦνται σὲ δυὸ εἴδη ἢ κατηγορίας.

I. Προβλήματα α΄ εἴδους μιγμάτων

1. Ἕνας παντοπώλης εἶχε 300 ὀκ. σιτάρι τὸ ὁποῖον πωλοῦσε πρὸς 2.500 δρχ. τὴν ὀκᾶ καὶ 500 ὀκ. τὸ ὁποῖον πωλοῦσε πρὸς 3.000 δρχ. τὴν ὀκᾶ. Ἐὰν τὸ ἀναμίξη, πόσο θὰ πωλήση τὴν ὀκᾶ τοῦ μίγματος ; (ὥστε οὔτε νὰ χάση οὔτε νὰ κερδίση).

Λύσις

Γιὰ νὰ λύσωμε τὸ πρόβλημα σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς : Ἐφ' ὅσον μᾶς μιλεῖ περὶ μίγματος εἶναι πρόβλημα μίξεως.

Καὶ λέμε :

Ἐὰν πωλοῦσε τὶς 300 ὀκάδες πρὸς 2.500 δρχ. τὴν ὀκᾶ θὰ εἰσέπραττε 2.500 δρχ. × 300 = 750.000. δρχ.

Ὁμοίως ἐὰν πωλοῦσε τὶς 500 ὀκ. πρὸς 3.000 δρχ. τὴν ὀκ. θὰ εἰσέπραττε 3.000 × 500 = 1.500.000 δρχ.

Ἑπομένως ἀπὸ ὅλες τὶς ὀκάδες τὶς ὁποῖες εἶχε, 300 ὀκ. + 500 ὀκ.=800 ὀκ., θὰ εἰσέπραττε τὸ ποσὸ τῶν 750.000 δρχ. + 1.500.000 δρχ. = 2.250.000 δρχ.

Καὶ ἐφ' ὅσον εἴπαμε, ὅτι οὔτε θὰ χάση οὔτε θὰ κερδίση ἀπὸ τὴν ἀνάμιξιν, σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς :

Ἀπὸ μῖγμα 800 ὀκ. θὰ εἰσπράξη 2.250.000 δρχ. Ἀπὸ τὴν μία ὀκᾶ τοῦ μίγματος πόσα θὰ εἰσπράξη ; Καὶ γιὰ νὰ βροῦμε πόσο θὰ πωλήση τὴν μία ὀκᾶ τοῦ μίγματος θὰ κάμωμε διαίρεσιν μερισμοῦ, δηλ.

$$\begin{array}{r|l} 2.250.000 & 800 \\ \cline{2-2} 6.500 & 2.812{,}5 \\ 1.000 & \\ 2.000 & \\ 4.000 & \end{array}$$

Ἐπομένως θὰ πωλήση τὴν μιὰ ὀκᾶ τοῦ μίγματος 2.812,5 δραχμάς.

Ἡ λύσις τοῦ προβλήματος θὰ γίνεται ὡς ἑξῆς :

Ἀπὸ 300 ὀκ. πρὸς 2.500 δρχ. ὀκ. θὰ πάρη

2.500 × 300 = 750.000

Ἀπὸ 500 ὀκ. πρὸς 3.000 δρχ. τὴν ὀκ. θὰ πάρη

3.000 × 500 = 1.500.000

Ἀπὸ 800 ὀκ. μίγματος θὰ πάρη 2.500.000

» 1 » » » » X

$$X = \frac{2.500.000}{800} = 2.812,5$$

Ἄρα ἡ ὀκᾶ τοῦ μίγματος θὰ ἔχη 2.812,5 δρχ.

*2. **Ἕνας παντοπώλης εἶχε 100 ὀκ. βούτυρο τὸ ὁποῖο πωλοῦσε 42.000 δρχ. τὴν ὀκᾶ καὶ 150 ὀκ. λίπος τὸ ὁποῖο πωλοῦσε 22.000 δρχ. τὴν ὀκᾶ. Ἐὰν τὶς ἀναμίξη πόσο πρέπει νὰ πωλήση τὴν ὀκᾶ τοῦ μίγματος ;***

Λύσις

Εἶναι πρόβλημα μίξεως γιατὶ ἀναφέρεται σὲ μίγματα. Θὰ τὸ λύσωμεν ὅπως ἐλύσαμε τὸ προηγούμενο. Δηλαδή :

Ἀπὸ 100 ὀκ. βούτ. πρὸς 42.000 δρχ. τὴν ὀκᾶ θὰ πάρη 42.000 δρχ. × 100 = 4.200.000 δρχ.

Ἀπὸ 150 ὀκ. λίπος πρὸς 22.000 δρχ. τὴν ὀκᾶ θὰ πάρη 22.000 δρχ. × 150 = 3.300.000 »

Ἀπὸ 250 ὀκ. μίγματος θὰ πάρη 7.500.000 »

» 1 » » » » X

$$X = \frac{7.500.000}{250} = 30.000$$

Ἄρα ἡ μιὰ ὀκᾶ τοῦ μίγματος θὰ πωληθῆ 30.000 δρχ.

Παρατηροῦμε λοιπὸν ὅτι : Στὰ προηγούμενα προβλήματα μᾶς δίδονται οἱ ποσότητες τῶν διαφόρων εἰδῶν τὰ ὁποῖα θὰ ἀναμίξωμε καὶ ἡ τιμὴ τῆς μονάδας κάθε εἴδους καὶ ζητοῦμε νὰ βροῦμε τὴν τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδας τοῦ μίγματος.

Τὰ προβλήματα αὐτὰ καὶ γενικῶς ὅλα ὅσα μοιάζουν μὲ αὐτὰ λέγονται ***προβλήματα μίξεως α΄ εἴδους ἢ πρώτης κατηγορίας.***

Ἐπομένως προβλήματα μίξεως α΄ εἴδους ἢ α΄ κατηγορίας εἶναι ἐκεῖνα στὰ ὁποῖα . . . .

. . . .
καὶ τὰ ὁποῖα λύονται ὡς ἑξῆς . . . .
. . . . (Νὰ συμπληρωθῇ ὑπὸ τοῦ μαθητοῦ).

2. Προβλήματα μίξεως οἰνοπνευμάτων

3. Ἕνας φαρμακοποιὸς ἀνέμιξε 50 ὀκ. καθαρὸ οἰνόπνευμα μὲ 50 ὀκ. νεροῦ. Ποιὸς εἶναι ὁ βαθμὸς τῆς μονάδας τοῦ μίγματος;

Λύσις

Εἶναι πρόβλημα μίξεως γιατὶ ἀναφέρεται σὲ μῖγμα.

Γιὰ νὰ λύσωμε τὸ πρόβλημα αὐτὸ πρέπει νὰ γνωρίζωμε ὡρισμένα πράγματα περὶ οἰνοπνεύματος, γιατὶ τὸ πρόβλημα ἐρωτᾷ ποῖος εἶναι ὁ βαθμὸς τῆς μονάδος τοῦ μίγματος.

Τὸ οἰνόπνευμα τὸ ἐκφράζομε σὲ βαθμούς. Τὸ καθαρὸ οἰνόπνευμα εἶναι 100 βαθμῶν καὶ γράφεται 100°. Οἱ 100° ἀντιστοιχοῦν σὲ μιὰ μονάδα οἰνοπνεύματος. Π.χ. σὲ μιὰ ὀκᾶ ἢ 1 δράμι ἢ 1 κιλόν, δηλ. ὅ,τι καὶ ἂν ἔχωμε, ὅταν εἶναι καθαρὸ οἰνόπνευμα θὰ ἔχῃ σὲ μιὰ μονάδα 100°. Ἐὰν τώρα ἀναμίξωμε μὲ τὸ καθαρὸ οἰνόπνευμα νερό, ἀντιλαμβανόμεθα ὅτι τὸ οἰνόπνευμα θὰ ἀραιώσῃ, ὅπως τὸ γάλα ἢ καὶ τὸ κρασί. Κατ' αὐτὸ τὸν τρόπο τὸ οἰνόπνευμα δὲν ἔχει πλέον τοὺς 100° ἀλλὰ λιγώτερους καὶ τόσον λιγώτερους ὅσο περισσότερο νερὸ ἀναμίξωμε, γιατὶ τὸ νερὸ δὲν ἔχει βαθμούς. Π.χ. ἂν σὲ 1 ὀκᾶ καθαρὸ οἰνόπνευμα τῶν 100° ρίψωμε 1 ὀκᾶ νερό, τὸ ὁποῖο δὲν ἔχει βαθμούς, οἱ βαθμοὶ τοῦ οἰνοπνεύματος θὰ γίνουν 50, γιατὶ ἡ 1 ὀκᾶ οἰνόπνευμα ἔχει 100°.

Οἱ 1 + 1 = 2 ὀκ. μίγματος θὰ ἔχουν 50° καὶ τοῦτο γιατὶ 50° × 2 = 100°.

Ἀφοῦ γνωρίζομε τὰ πάνω, σύμφωνα μὲ τὰ προηγούμενα λύομε τὸ πρόβλημα ὡς ἑξῆς:

Οἱ 50 ὀκ. καθ. οἰν. ἔχουν 100° × 50 = 5000°
» 50 » νεροῦ » 0° × 50 = 0°
» 100 » μίγματος » 5000°
ἢ 1 » » θὰ ἔχῃ X

$$X = \frac{5000^\circ}{100} = 50^\circ$$

Ἄρα ἡ μιὰ ὀκᾶ τοῦ μίγματος θὰ εἶναι 50°.

4. Ἕνας ἄλλος φαρμακοποιὸς ἀνέμιξε 12 ὀκ. καθαρὸ οἰνόπνευμα μὲ 18 ὀκ. τῶν 50° καὶ μὲ 10 ὀκ. νερό. Πόσων βαθμῶν θὰ εἶναι τὸ μῖγμα;

Λύσις

Εἶναι πρόβλημα μίξεως. Θὰ λυθῇ ὅπως καὶ τὸ προηγούμενο, ἤτοι:

Οἱ 12 ὀκ. καθ. οἰν. ἔχουν		$100^\circ \times 12 = 1200^\circ$
» 18 » » » τῶν 50°	ἔχουν	$50^\circ \times 18 = 900^\circ$
» 10 » νεροῦ	»	$0^\circ \times 10 = 0^\circ$
Αἱ 40 » μίγματος	»	2100°
ἢ 1 » μίγματος	θὰ ἔχῃ	X

$$X = \frac{2100}{40} = 52{,}5^\circ$$

Ἄρα ἡ μιὰ ὀκᾶ τοῦ μίγματος θὰ εἶναι 52,5°.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

α) *Ἀπὸ τὴ σχολική μας ζωή:*

1. Σὲ μίαν μαθητικὴ κατασκήνωσιν ἀγόρασαν 20 ὀκ. γάλα πρόβειο πρὸς 6000 δρχ. τὴν ὀκᾶ, καὶ 25 ὀκ. γάλα γίδινο πρὸς 3.800 δρχ. τὴν ὀκᾶ. Πόσο στοιχίζει ἡ μία ὀκᾶ τοῦ μίγματος;

2. Στὴν αὐτὴ κατασκήνωσιν ἀγόρασαν 60 ὀκ. λάδι πρὸς 10.000 δρχ. τὴν ὀκᾶ, 80 ὀκ. τῶν 12.000 δρχ. τὴν ὀκᾶ καὶ ἄλλες 60 ὀκ. λάδι τῶν 9.000 δρχ. τὴν ὀκᾶ. Πόσον ἐστοίχισε ἡ μία ὀκᾶ τοῦ μίγματος;

β) *Ἀπὸ τὴν κοινωνική μας ζωή:*

1. Ἕνας παντοπώλης ἀνέμιξε 400 ὀκ. σιτάρι τὸ ὁποῖο πωλοῦσε πρὸς 2800 δρχ. τὴν ὀκᾶ μὲ 700 ὀκ. ἄλλο σιτάρι τὸ ὁποῖο πωλοῦσε πρὸς 2400 δρχ. τὴν ὀκᾶ καὶ μὲ 800 ὀκ. τῶν 2500 δρχ. τὴν ὀκᾶ. Πόσο θὰ πωλῇ τώρα τὴν ὀκᾶ τοῦ μίγματος;

2. Ἕνας παντοπώλης εἶχε 240 ὀκ. ξύδι τὸ ὁποῖο πωλοῦσε πρὸς 1200 δρχ. τὴν ὀκᾶ. Τοῦτο τὸ ἀνέμιξε μὲ 120 ὀκ. ξύδι τῶν 800 δρχ. τὴν ὀκᾶ καὶ μὲ 40 ὀκ. νερό. Πόσο πρέπει νὰ πωλῇ τὴν ὀκᾶ τοῦ μίγματος;

3. Στὶς 60 ὀκάδες καθαροῦ οἰνοπνεύματος ἀνέμιξε ἕνας ἀρωματοπώλης 90 ὀκ. νεροῦ γιὰ νὰ παρασκευάσῃ κολώνια. Πόσων βαθμῶν θὰ εἶναι τὸ μῖγμα τῆς κολώνιας;

4. Ἕνας ταβερνιάρης ἔχει δύο βαρέλια κρασὶ τῶν 400 ὀκ. τὸ καθένα καὶ τὸ πωλεῖ πρὸς 3.400 δρχ. τὴν ὀκᾶ. Θέλει αὐτὸ τὸ κρασὶ νὰ τὸ ἀναμίξῃ μὲ 200 ὀκ. τῶν 3.000 δρχ. τὴν ὀκᾶ καὶ

με 600 ὀκ. ἄλλο κρασὶ τῶν 2.800 δρχ. τὴν ὀκᾶ. Πόσο πρέπει νὰ πωλήση τὴν ὀκᾶ τοῦ μίγματος ;

5. Κάμετε καὶ σεῖς ἀπὸ τὴ ζωή σας τρία προβλήματα μίξεως α΄ εἴδους.

2. Προβλήματα μίξεως β΄ εἴδους ἢ β΄ κατηγορίας

1. Ἕνας παντοπώλης ἔχει 500 ὀκ. κρασὶ τὸ ὁποῖο πωλεῖ 3.000 δρχ. τὴν ὀκᾶ καὶ ἄλλο κρασὶ τὸ ὁποῖο πωλεῖ 2.400 δρχ. τὴν ὀκᾶ. Θέλει νὰ μάθη πόσες ὀκάδες κρασὶ θὰ ἀναμίξη μὲ τὶς 500 ὀκ. τοῦ πρώτου, ὥστε νὰ πωλῆ τὴν μία ὀκᾶ τοῦ μίγματος ἀντὶ 2.800 δρχ. τὴν ὀκᾶ.

Εἶναι καὶ αὐτὸ πρόβλημα μίξεως γιατὶ ἀναφέρεται σὲ μῖγμα.

Στὸ πρόβλημα αὐτὸ γνωρίζομε: 1) Πόσες ὀκάδες κρασὶ ἔχει ἀπὸ τὸ α΄ (500). 2) Πόσο πωλεῖ τὴν μία ὀκᾶ (3.000). 3) Πόσο πωλεῖ τὴν μία ὀκᾶ ἀπὸ τὸ δεύτερο κρασὶ (2.400) καὶ 4) Πόσο πρέπει νὰ πωλῆ τὴν μία ὀκᾶ τοῦ μίγματος (2.800) Ζητοῦμε δὲ νὰ βροῦμε πόσες ὀκάδες πρέπει νὰ πάρη ἀπὸ τὸ δεύτερο κρασὶ γιὰ νὰ τὶς ἀναμίξη μὲ τὸ πρῶτο ὥστε, οὔτε νὰ χάνη οὔτε νὰ κερδίζη.

Γιὰ τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος αὐτοῦ, τὸ ὁποῖον δὲν εἶναι ὅπως τὰ προηγούμενα, σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς :

1. Ἂν βάλη μία ὀκᾶ ἀπὸ τὸ πρῶτο κρασί, τὸ ὁποῖο πωλεῖ 3.000 δρχ. τὴν ὀκᾶ, ἐπειδὴ τὸ μῖγμα θὰ τὸ πωλῆ 2.800 δρχ. τὴν ὀκᾶ, θὰ χάνη 3.000—2.800=200 δρχ.

2. Ἂν βάλη μία ὀκᾶ ἀπὸ τὸ δεύτερο κρασί, τὸ ὁποῖο πωλεῖ 2.400 δρχ. τὴν ὀκᾶ, ἐπειδὴ τὸ μῖγμα θὰ τὸ πωλῆ 2.800 δρχ. τὴν μία ὀκᾶ, θὰ κερδίζη 2.800 δρχ.—2.400 δρχ.=400 δρχ.

Ἀφοῦ βρήκαμε τὰ ἀνωτέρω σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς :

3. Ἀφοῦ ἀπὸ μιὰ ὀκᾶ τοῦ πρώτου εἴδους χάνει 200 δρχ., ἂν βάλη ἀπὸ τὸ πρῶτο τόσες ὀκάδες ὅσες κερδίζει ἀπὸ τὸ δεύτερο δηλ. 400 ὀκ., θὰ χάνη 200 δρχ. × 400 = 80.000 δρχ.

4. Ἀφοῦ ἀπὸ 1 ὀκᾶ τοῦ δευτέρου κερδίζει 400 δρχ., ἂν βάλη ἀπὸ τὸ δεύτερο τόσες ὀκάδες ὅσες δρχ. χάνει ἀπὸ τὴν 1 ὀκᾶ τοῦ πρώτου, δηλ. 200 ὀκ., θὰ κερδίζη 400×200=80.000 δρχ.

Παρατηροῦμε λοιπὸν ὅτι χάνει 80.000 ἂν βάλη 400 ὀκ. ἀπὸ τὸ πρῶτο καὶ κερδίζει 80.000 ἂν βάλη 200 ὀκ. ἀπὸ τὸ δεύτερο.

Καὶ κατ' αὐτὸ τὸν τρόπο οὔτε κερδίζει οὔτε χάνει ἂν βάλη τὴν ἀναλογία 400 ὀκ. ἀπὸ τὸ πρῶτο καὶ 200 ὀκ. ἀπὸ τὸ δεύτερο.

'Αλλὰ ἐδῶ ἔχει 500 ὀκ. ἀπὸ τὸ πρῶτο τὶς ὁποῖες θέλει νὰ ἀναμίξη. Γι' αὐτὸ κάνομε τὴν ἑξῆς κατάστρωσιν:

"Οταν βάλη 400 ὀκ. ἀπὸ τὸ α', θὰ βάλη ἀπὸ τὸ β' 200
» » 500 » » » » » » » » » X

$$X = \frac{200 \times 500}{400} = 250 \text{ ὀκ.}$$

'Επομένως θὰ βάλη τὶς 500 ὀκ. ἀπὸ τὸ πρῶτο καὶ 250 ἀπὸ τὸ δεύτερο.

'Η σκέψις καὶ ἡ λύσις τοῦ προβλήματος θὰ γίνωνται πρακτικά, ὡς ἑξῆς:

γ) 400 ὀκ. ἐκ τοῦ α' 200 ἐκ τοῦ β'
500 » » » » X » » »

$$X = \frac{200 \times 500}{400} = 250$$

'Επομένως τὸ μῖγμα θὰ εἶναι 500 ὀκ. + 250 ὀκ. = 750 ὀκ.

Δοκιμή :

$$\begin{array}{r} 3.000 \times 500 = 1.500.000 \\ 2.400 \times 250 = 600\,000 \\ \hline 2\,800 \times 750 = 2.100.000 \end{array}$$

Σημείωσις. Τὰ βέλη μᾶς δείχνουν πόσον κέρδος ἢ ζημία ἔχομε ἀπὸ τὴν μιὰ ὀκᾶ κάθε εἴδους. Τὴν ζημία ἢ τὸ κέρδος ἀπὸ τὴν μιὰ ὀκᾶ τοῦ πρώτου εἴδους τὴν παίρνομε ὡς ὀκάδες τοῦ β' εἴδους καὶ τὸ κέρδος ἢ τὴν ζημία ἀπὸ τὴν μιὰ ὀκᾶ τοῦ δευτέρου εἴδους τὴν παίρνομε ὡς ὀκάδες τοῦ α' εἴδους.

Στὸ πρόβλημα αὐτό, ὅπως εἴπαμε καὶ στὴν ἀρχὴ τῆς λύσεώς του, γνωρίζομε τὴν τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδας (ὀκᾶς) ἀπὸ κάθε εἶδος τὸ ὁποῖο θὰ ἀναμίξωμε (3.000 καὶ 2.400), τὴν τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδας (ὀκᾶς) τοῦ μίγματος ἡ ὁποία εἶναι 2.800 δρχ. καὶ ἡ ὁποία, ὡς βλέπομε, βρίσκεται μεταξὺ τῶν δυὸ ἄλλων τιμῶν καὶ ζητοῦμε νὰ βροῦμε πόσες μονάδες (ὀκάδες) θὰ πάρωμε ἀπὸ κάθε εἶδος γιὰ νὰ σχηματίσωμε τὸ μῖγμα, ἀπὸ τὸ ὁποῖο, μὲ 2.800 δρχ. τὴν ὀκᾶ, οὔτε θὰ χάνη οὔτε θὰ κερδίζη.

Τὸ πρόβλημα αὐτὸ καὶ γενικὰ τὰ προβλήματα τὰ ὅμοια μὲ αὐτό, λέγονται ***προβλήματα μίξεως β΄ εἴδους*** ἢ ***δευτέρας κατηγορίας***. Ἑπομένως προβλήματα μίξεως β΄ εἴδους εἶναι ἐκεῖνα στὰ ὁποῖα μᾶς δίδονται : 1) Οἱ τιμὲς τῶν μονάδων δύο εἰδῶν τὰ ὁποῖα πρέπει νὰ ἀναμίξωμε, 2) ἡ τιμὴ τῆς μονάδας τοῦ μίγματος, ἡ ὁποία πρέπει ἀπαραιτήτως νὰ περιέχεται (νὰ εἶναι) μεταξὺ τῶν ἄλλων τιμῶν, καὶ 3) ζητοῦμε νὰ βροῦμε πόσες μονάδες θὰ πάρουμε ἀπὸ κάθε εἶδος γιὰ νὰ σχηματίσωμε τὸ μῖγμα ἀπὸ τὸ ὁποῖο οὔτε νὰ χάνωμε οὔτε νὰ κερδίζωμε.

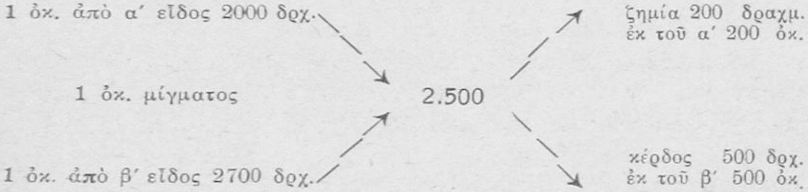
2. ***Ἕνας παντοπώλης εἶχε σιτάρι τὸ ὁποῖο πωλοῦσε πρὸς 2.000 δρχ. τὴν ὀκᾶ καὶ ἄλλη ποιότητα σιταριοῦ τὴν ὁποία πωλοῦσε 2.700 δρχ. τὴν ὀκᾶ. Ἐὰν θέλη νὰ κάμη μῖγμα 2.800 ὀκ. ἀπὸ τὰ δυὸ εἴδη, τὸ ὁποῖο νὰ πωλῆ πρὸς 2.500 δρχ. τὴν ὀκᾶ, πόσες ὀκάδες θὰ βάλη ἀπὸ κάθε εἶδος, ὥστε οὔτε νὰ χάνη οὔτε νὰ κερδίζη ;***

Λύσις

Εἶναι πρόβλημα μίξεως, γιατὶ ἀναφέρεται σὲ μῖγμα καὶ μάλιστα β΄ εἴδους, διότι . . . . (Νὰ συμπληρωθῆ ὑπὸ τοῦ μαθητοῦ).

Ἐὰν σκεφθοῦμε ὅπως καὶ στὸ προηγούμενο πρόβλημα θὰ ἔχωμε τὴν ἑξῆς λύσιν :

Μῖγμα 2.800 ὀκ.



Ὥστε ἀπὸ τὸ α΄ εἶδος θὰ πάρη 200 ὀκ. καὶ ἀπὸ τὸ β΄ 500 ὀκ., ἤτοι σύνολον 200 + 500 = 700.

Κατάστρωσις :

Σὲ 700 ὀκ. μῖγμα, ἐκ τοῦ α΄ 200, ἐκ τοῦ β΄ 500
» 2.800 » » » » » X » » » X

Ἐν Ἀθήναις τῇ 18/5/[illegible]

$$\alpha' \text{ εἶδος } X = \frac{200 \times 2800}{700} = \qquad 800 \text{ ὀκ.}$$

$$\beta' \quad » \quad X = \frac{500 \times 2800}{700} = \qquad 2.000 \text{ ὀκ.}$$

$$2.800$$

Ἄρα ἀπὸ τὸ α΄ εἶδος θὰ πάρῃ 800 ὀκ. καὶ ἀπὸ τὸ β΄ 2.000 ὀκ.

Δοκιμή :

α΄ 2.000 δρχ. × 800 ὀκ. = 1.600.000 δρχ.

β΄ 2.700 » × 2.000 » = 5.400.000 »

Μῖγμα 2.500 ὀκ. × 2.800 δρχ. = 7.000.000

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Ἕνας παντοπώλης ἔχει λάδι τὸ ὁποῖο πωλεῖ πρὸς 12.000 δρχ. τὴν ὀκᾶ καὶ ἕνα ἄλλο λάδι κατωτέρας ποιότητος τὸ ὁποῖο πωλεῖ πρὸς 9.000 δρχ. τὴν ὀκᾶ. Κατὰ ποία ἀναλογία πρέπει νὰ ἀναμίξῃ τὶς δύο ποιότητες ὥστε νὰ πωλῇ τὴν ὀκᾶ πρὸς 10.000 δρχ. ;

2. Ἕνας ταβερνιάρης θέλει νὰ κάμῃ μῖγμα 1.500 ὀκάδων κρασιοῦ ἀπὸ δύο εἴδη. Τὸ α΄ εἶδος τὸ πωλεῖ πρὸς 3.000 δρχ. τὴν ὀκᾶ, τὸ δὲ μῖγμα θέλει νὰ τὸ πωλῇ πρὸς 2.800 τὴν ὀκᾶ. Κατὰ ποία ἀναλογία θὰ ἀναμίξῃ τὰ δύο εἴδη καὶ πόσες ὀκάδες κρασὶ θὰ λάβῃ ἀπὸ τὸ κάθε εἶδος ;

3. Ἕνας παντοπώλης ἀνέμιξε 100 ὀκ. βούτυρο τῶν 48.000 δρχ. τὴν ὀκᾶ μὲ λίπος τῶν 22.000 δρχ. τὴν ὀκᾶ. Πόσες ὀκάδες λίπος θὰ ἀναμίξῃ μὲ τὸ βούτυρο γιὰ νὰ πωλῇ τὴν ὀκᾶ τοῦ μίγματος 40.000 δρχ. ;

4. Ἕνας καφεπώλης ἀνέμιξε καφὲ τῶν 76.000 δρχ. τὴν ὀκᾶ μὲ 100 ὀκ. ἄλλου καφὲ τῶν 62.000 δρχ. τὴν ὀκᾶ. Πόσο καφὲ θὰ ἀναμίξῃ ἀπὸ τὸ α΄ εἶδος γιὰ νὰ πωλῇ τὴν ὀκᾶ τοῦ μίγματος 70.000 δρχ. ;

5. Ἕνας φαρμακοποιὸς ἔχει δύο εἰδῶν οἰνόπνευμα τῶν 60 βαθμῶν καὶ τῶν 20°. Θέλει νὰ κάμῃ ἕνα μῖγμα 120 ὀκάδων τῶν 40 βαθμῶν. Πόσες ὀκάδες θὰ βάλῃ ἀπὸ κάθε εἶδος ;

Β΄ ΚΡΑΜΑΤΑ

Γνωρίζομε ὅτι στὴν φύσιν ὑπάρχουν διάφορα μέταλλα, ἀπὸ τὰ ὁποῖα ἄλλα ἔχουν μεγάλη ἀξία, ὅπως ὁ χρυσός, ὁ ἄργυρος κλπ. καὶ λέγονται ***πολύτιμα*** ἢ ***εὐγενῆ μέταλλα*** καὶ ἄλλα τὰ ὁποῖα ἔχουν μικρὴ ἀξία, ὅπως ὁ σίδηρος, ὁ χαλκός, ὁ κασσίτερος κ. λ. π. καὶ λέγονται ***ἁπλᾶ μέταλλα***. Ἀπὸ τὰ πολύτιμα μέταλλα κατασκευάζουν οἱ ἄνθρωποι διάφορα κοσμήματα, ὡρολόγια, δόντια, νομίσματα (λίρες, ναπολεόνια) καὶ ἄλλα χρήσιμα ἀντικείμενα. Ὅλα ὅμως αὐτὰ ποτὲ δὲν γίνονται ἀπὸ καθαρὸ πολύτιμο μέταλλο, γιατὶ ὅταν τὸ κόσμημα κ. λ. π. εἶναι ἐντελῶς καθαρὸ πολύτιμο μέταλλο, λυγίζει εὔκολα, ὅπως καὶ ὁ μόλυβδος. Γιὰ νὰ κατασκευάσουν λοιπὸν οἱ τεχνῖται ἕνα κόσμημα ἢ ἕνα ἀντικείμενο ἀπὸ πολύτιμο μέταλλο κάνουν τὸ ἑξῆς:

Βάζουν σὲ μεγάλη θερμοκρασία τὸ πολύτιμο μέταλλο μὲ ἕνα ἄλλο ἁπλὸ καὶ σκληρό, ὅπως χρυσὸ καὶ χαλκό, καὶ ἀφοῦ λυώσουν, παίρνουν ἕνα μῖγμα χρυσοῦ καὶ χαλκοῦ τὸ ὁποῖο ἅμα κρυώσει εἶναι πολὺ σκληρὸ καὶ μπορεῖ ὁ κάθε τεχνίτης νὰ τὸ ἐργασθῆ καὶ νὰ τὸ κάμη ὅ,τι θέλει. Τὸ μῖγμα αὐτὸ τὸ ὁποῖο ἔγινε ἀπὸ τὴν ἀνάμιξιν τοῦ χρυσοῦ καὶ τοῦ χαλκοῦ, δηλ. ἑνὸς πολυτίμου καὶ ἑνὸς ἁπλοῦ μετάλλου, λέγεται ***κρᾶμα***. Ἑπομένως ***κρᾶμα εἶναι τὸ μῖγμα τὸ ὁποῖο παίρνουμε ἀπὸ τὴν ἀνάμιξιν μετάλλων τὰ ὁποῖα θὰ τὰ λυώσουμε.***

Ὥστε τὸ κρᾶμα ἀποτελεῖται ἀπὸ πολύτιμο καὶ ἁπλὸ μέταλλο.

Στὴ ζωή μας παρουσιάζονται περιπτώσεις ποὺ πρέπει νὰ γνωρίζωμε πόσο πολύτιμο μέταλλο ἔχει ἕνα ἀντικείμενο καὶ πόσο ἁπλό. Οἱ ἄνθρωποι, γιὰ νὰ διακρίνουν αὐτό, συνεφώνησαν νὰ ἐκφράζουν σὲ χιλιοστὰ τὸ ποσὸ τοῦ πολυτίμου μετάλλου, τὸ ὁποῖο περιέχεται σὲ μία μονάδα τοῦ κράματος π.χ. σὲ ἕνα δράμι, σὲ 1 γραμμάριο κ.λ.π. ὅπως ἔκαμαν καὶ στὸ οἰνόπνευμα.

Τὸ ποσὸ τοῦ πολυτίμου μετάλλου τὸ ὁποῖο περιέχεται σὲ μία μονάδα τοῦ κράματος λέγεται ***βαθμὸς ἢ τίτλος καθαρότητος τοῦ κράματος***. Ἡ λίρα π.χ. ἔχει βαθμὸ καθαρότητος 0,900 (ἐννεακόσια χιλιοστά). Αὐτὸ φανερώνει ὅτι σὲ μία μονάδα τοῦ κράματος (1 δράμι ἢ 1 γραμμάριο) ποὺ εἶναι $\frac{1000}{1000}$ (χίλια χιλιοστὰ = 1), τὰ $\frac{900}{1000}$ = 0,900 εἶναι καθαρὸς χρυσὸς καὶ τὰ 0,100 εἶναι ἁπλὸ μέταλλο.

Ἀκοῦμε ὅτι ἕνα δακτυλίδι ἔχει βαθμὸ καθαρότητος ἢ τίτλο καθαρότητας 0, 750 δηλ. στὴν μονάδα τοῦ κράματος $\frac{1000}{1000} = 1$, τὰ $\frac{750}{1000}$ εἶναι καθαρὸ πολύτιμο μέταλλο, ἤτοι χρυσός, καὶ τὰ $\frac{250}{1000}$ εἶναι ἁπλὸ μέταλλο (χαλκὸς ἢ ἄλλο μέταλλο).

Ἐὰν τώρα ἕνα χρυσὸ δακτυλίδι ζυγίζῃ 2 δράμια καὶ ἔχῃ τίτλο καθαρότητος 0,900, πόσο καθαρὸ χρυσὸ περιέχει;

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸν καθαρὸ χρυσὸ ὁ ὁποῖος περιέχεται στὸ δακτυλίδι θὰ σκεφθοῦμε ὡς ἑξῆς:

Στὸ 1 δράμι ἔχομε καθ. χρυσ. 0,900,
στὰ 2 δράμια » » » X

$$X = \frac{0{,}900 \times 2}{1} = 1{,}800$$

Ἑπομένως τὸ δακτυλίδι ἔχει καθαρὸ χρυσὸ 1,800 καὶ 2 — 1,800 = 0,200 τοῦ δραμίου ἁπλὸ μέταλλο.

2. Πόσο καθαρὸ ἄργυρο (ἀσήμι) ἔχει ἕνα κόσμημα 5 δραμίων μὲ τίτλο καθαριότητος τοῦ ἀργύρου 0,800;

Λύσις

Στὸ 1 δράμι ἔχομε καθ. ἄργυρο 0,800
στὰ 5 δράμια » » » »

$$X = \frac{0{,}800 \times 5}{1} = 4 \text{ δράμ.}$$

Ἑπομένως εἰς τὸ κόσμημα ὑπάρχουν 4 δράμια καθαρὸς ἄργυρος καὶ 5 — 4 = 1 δράμι ἁπλὸ μέταλλο.

Σημείωσις: Τὰ ἁπλὰ μέταλλα δὲν ἔχουν βαθμὸ καθαρότητος. Ὁ βαθμὸς καθαρότητος αὐτῶν εἶναι μηδὲν (0), ὅπως εἴπαμε καὶ γιὰ τὸ νερὸ στὰ προβλήματα μὲ τὸ οἰνόπνευμα.

Καὶ γιὰ τὰ κράμματα ὅπως καὶ γιὰ τὰ μίγματα ἔχομε προβλήματα α΄ εἴδους καὶ β΄ εἴδους.

1. Προβλήματα κραμάτων α΄ εἴδους

1. Ἕνας χρυσοχόος ἀνάμιξε 5 δράμια χρυσοῦ, βαθμοῦ καθαρότητος 0,900 μὲ ἄλλα 3 δράμια χρυσοῦ, βαθμοῦ καθαρότητος 0,500. Ποῖος εἶναι ὁ βαθμὸς καθαρότητος τοῦ κράματος;

Λύσις

Στὸ πρόβλημα αὐτὸ γνωρίζομε τὶς ποσότητες οἱ ὁποῖες ἀνεμίχθησαν καὶ τὸ βαθμὸ καθαρότητος τῆς μονάδας κάθε εἴδους καὶ ζητοῦμε νὰ βροῦμε τὴν τιμὴ μονάδας τοῦ κράματος. Εἶναι καὶ αὐτὸ πρόβλημα μίξεως τοῦ α΄ εἴδους. Θὰ τὸ λύσωμε ὡς ἑξῆς :

1. Θὰ βροῦμε τὸν καθαρὸ χρυσὸ τὸν ὁποῖον ἔχουν τὰ 5 δράμια τοῦ πρώτου εἴδους, ὁ ὁποῖος εἶναι 0,900 × 5 = 4,500 δράμια.

2. Θὰ βροῦμε τὸν καθαρὸ χρυσὸ τὸν ὁποῖον ἔχουν τὰ 3 δράμια τοῦ δευτέρου εἴδους, ὁ ὁποῖος εἶναι 0,500 × 3 = 1,500 δράμια.

3. Θὰ σκεφθοῦμε ὅτι τὰ 5 + 3 = 8 δράμ. τοῦ κράματος ἔχουν καθαρὸ χρυσὸ 4,500 + 1,500 = 6 δράμ. καί, ἀφοῦ

τὰ 8 δράμια ἔχουν καθ. χρυσὸ 6 δράμ.
τὸ 1 » » » » X

$$X = \frac{6 \times 1}{8} = \frac{6}{8} = 0,750$$

Ἑπομένως ὁ βαθμὸς καθαρότητος τοῦ κράματος εἶναι 0,750.

Ἀπὸ τὴν ἀνωτέρω σκέψιν προκύπτει ὅτι ἡ λύσις τοῦ προβλήματος θὰ γίνεται ὡς ἑξῆς :

Τὰ 5 δράμ. β. κ. 0,900 ἔχουν καθ. χρυσὸ 0,900×5=4,500 δράμ.
τὰ 3 » » » 0,500 » » » 0,500×3=1,500 »
τὰ 8 » κρᾶμα ἔχουν καθαρὸ χρυσὸ 6 δράμ.
τὸ 1 » » ἔχει » » X

$$X = \frac{6 \times 1}{8} = \frac{6}{8} = 0,750 \text{ βαθμ. καθαρότητος.}$$

2. Ἕνας χρυσοχόος ἀνέμιξε 12 δράμ. χρυσοῦ, βαθμοῦ καθαρότητος 0,800 μὲ 8 δράμια χρυσοῦ, βαθμοῦ καθαρότητος 0,750 καὶ μὲ 5 δράμια χαλκό. Ποῖος εἶναι ὁ βαθμὸς καθαρότητος τοῦ κράματος ;

Εἶναι πρόβλημα μίξεως α΄ εἴδους γιατὶ . . . .
. . . . (Νὰ συμπληρωθῇ ὑπὸ τοῦ μαθητοῦ).

Λύσις

Τὰ 12 δράμ. β. κ. 0,800 ἔχουν καθ. χρυσὸ 0,800×12=9,600 δρ.
» 8 » » » 0,750 » » 0,750× 8=6,000 »
» 5 » » » » » 0× 5=0,000 »
» 25 » κρᾶμα ἔχουν » » 15,600 »
Τὸ 1 » » ἔχει » » X

$$X = \frac{15,600 \times 1}{25} = 0,624$$

Ἄρα ὁ βαθμὸς καθαρότητος τοῦ κράματος εἶναι 0,624°.

Παρατηροῦμε λοιπὸν ὅτι καὶ μερικὰ προβλήματα τῶν κραμάτων λύονται ὅπως καὶ τὰ προβλήματα τῆς μίξεως α΄ εἴδους.

2. Προβλήματα κραμάτων β΄ εἴδους

1. Ἕνας ὀδοντοτεχνίτης ἔχει χρυσό, βαθμοῦ καθαρότητος 0,840 καὶ ἄλλον χρυσὸ β.κ. 0,680 καὶ θέλει νὰ κάμῃ κρᾶμα τοῦ ὁποίου ὁ β. κ. νὰ εἶναι 0,720°. Μὲ ποιά ἀναλογία θὰ ἀναμίξῃ τὰ δυὸ αὐτὰ εἴδη τοῦ χρυσοῦ ;

Λύσις

Εἶναι καὶ αὐτὸ πρόβλημα μίξεως, ἐφ' ὅσον ἀναφέρεται εἰς κράματα, καὶ μάλιστα β΄ εἴδους. (Γιατί ;)

Θὰ τὰ λύσωμε καὶ αὐτὸ ὅπως τὰ προβλήματα μίξεως τοῦ β΄ εἴδους τὸ ἀναφερόμενα στὰ μίγματα. Καὶ θὰ ἔχωμε :

$$\begin{tikzcd}
\text{1 δρ. ἀπὸ τὸ α΄ β. κ. 0,840} \arrow[dr] & & \text{κέρδ. 0,040 δράμ. ἀπὸ τὸ α΄ 0,040 δράμ.} \\
\text{1 δρ. κράματος β. κ.} & 0{,}720 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
\text{1 δρ. ἀπὸ τὸ β΄ β. κ. 0,680} \arrow[ur] & & \text{ζημ. 0,120 δράμ. ἀπὸ τὸ β΄ 0,120 δράμ.}
\end{tikzcd}$$

Ἀπὸ τὸ α΄ εἶδος θὰ πάρῃ 0,040 ἢ 4 ἢ 1 δράμ. καὶ
» » β΄ » » » 0,120 » 12 » 3 »

Ἑπομένως ἡ ἀναλογία γιὰ τὸ κρᾶμα θὰ εἶναι 1 δράμι ἀπὸ τὸ πρῶτο καὶ 3 δράμια ἀπὸ τὸ δεύτερο.

Δοκιμή : α) 1 × 0,840 = 0,840
β) 3 × 0,680 = 2,040

Ἄρα κρᾶμα 4 × 0,720 = 2,880 δράμ.

2. Ἕνας χρυσοχόος θέλει νὰ κάμῃ ἕνα ἀργυροῦν (ἀσημένιο) κόσμημα βάρους 15 δραμίων καὶ μὲ βαθμὸ καθαρότητος 0,750. Πόσα δράμια θὰ βάλῃ ἀπὸ ἀσήμι β. κ. 0,900 καὶ ἀπὸ ἄλλο ἀσήμι β.κ. 0,650 ;

Λύσις

Ἐφ' ὅσον αὐτὸ τὸ πρόβλημα ἀναφέρεται σὲ κράσματα εἶναι πρόβλημα μίξεως καὶ μάλιστα β΄ εἴδους, γιατὶ μᾶς δίδονται οἱ τιμὲς τῶν δυὸ μονάδων τῶν δυὸ εἰδῶν τοῦ ἀργύρου (0,900 καὶ 0,650) καὶ ἡ τιμὴ τῆς μονάδας τοῦ μίγματος (0,750). Θὰ τὸ λύσωμε καὶ αὐτὸ ὡς ἑξῆς :

Κρᾶμα 15 δράμια.

1 δράμ. τοῦ α΄ β. κ. 0,900 κέρδ. 0,1000

ἢ 0,10

ἢ 2 δράμ.

1 δράμ. κράματος β. κ. 0,750

ζημ. 0,150

ἢ 0,15

1 δράμ. β΄ β. κ. 0,650 ἢ 3 δράμ.

Ἑπομένως θὰ κάμη τὸ κρᾶμα μὲ τὴν ἀναλογία 2 δράμια ἀπὸ τὸ α΄ καὶ 3 ἀπὸ τὸ β΄ καὶ τὸ κρᾶμα θὰ εἶναι 2 + 3 = 5 δράμ.

Τώρα ἔχομε :

Σὲ κρᾶμα 5 δραμ. ἔχει ἀπὸ τὸ α΄ 2 δράμ., ἀπὸ τὸ β΄ 3 δράμ.
» » 15 » X X

Ἐκ τοῦ α΄ $X = \frac{2 \times 15}{5} = 6$ δραμ., ἐκ τοῦ β΄ $X = \frac{3 \times 15}{5} = 9$ δραμ.

Ἑπομένως θὰ ἀναμίξη 6 δράμια ἀπὸ τὸν πρῶτο ἄργυρο καὶ 9 ἀπὸ τὸν δεύτερο γιὰ νὰ ἔχη κρᾶμα 15 δραμίων ἀργύρου β. κ. 0,750.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Ἕνας ἀργυραμοιβὸς εἶχε δυὸ χρυσᾶ νομίσματα. Τὸ ἕνα ἐζύγιζε 2 δράμια καὶ εἶχε β. κ. 0,900 καὶ τὸ ἄλλο ἐζύγιζε 3 δράμια καὶ εἶχε β.κ. 0,800. Τὰ ἀνέμιξε καὶ ἔκαμε ἕνα κρᾶμα. Ποῖος εἶναι ὁ βαθμὸς καθαρότητος τοῦ κράματος ;

2. Ἕνας χρυσοχόος ἀνέμιξε 15 δράμια ἄργυρο βαθμοῦ καθαρότητος 0,700 μὲ 5 δράμια ἄλλον ἄργυρο, β. κ. 0,500. Ποιός εἶναι ὁ βαθμὸς τοῦ κράματος ;

3. Ἕνας ὀδοντοτεχνίτης ἀνέμιξε 5 δράμ. χρυσὸ β.κ. 0,840 μὲ 3 δράμια χαλκό. Ποιός εἶναι ὁ βαθμὸς τοῦ κράματος ;

4. Ἕνας χρυσοχόος ἔχει ἕνα κόσμημα χρυσὸ βάρους 6 δραμίων καὶ βαθμοῦ καθαρότητος 0,800 καὶ τὸ ἀνέμιξε μὲ ἄλλον χρυσὸ β.κ. 0,450. Πόσα δράμια χρυσὸ θὰ βάλη ἀπὸ τὸ δεύτερο εἶδος γιὰ νὰ ἔχη τὸ κρᾶμα του β.κ. 0,750.

5. Ἕνας ἀργυραμοιβὸς ἔχει ἄργυρο βαθμοῦ καθαρότητος 0,800 καὶ μιὰ ἄλλη ποσότητα ἀργύρου β.κ. 0,500, θέλει δὲ νὰ τὰ ἀναμίξη. Μὲ ποιὰ ἀναλογία θὰ τὰ ἀναμίξη γιὰ νὰ ἔχη κρᾶμα β. κ. 0,700 ;

6 Κάποιος παντοπώλης ἀνέμιξε 28 ὀκ. καθαρὸ οἰνόπνευμα μὲ 42 ὀκ. οἰνόπνευμα τῶν 25 βαθμῶν καὶ 30 ὀκ. νερό. Ποιός εἶναι ὁ βαθμὸς τοῦ μίγματος ;

7. Ὁ αὐτὸς παντοπώλης εἶχε 250 ὀκ. οἰνοπνεύματος τῶν 80 βαθμῶν καὶ ἄλλο οἰνόπνευμα τῶν 20 βαθμῶν. Πόσες ὀκά-

δες ἀπὸ τὸ δεύτερο οἰνόπνευμα θὰ ἀναμίξη μὲ τὸ πρῶτο, ὥστε ὁ βαθμὸς τοῦ μίγματος νὰ εἶναι 30 βαθμῶν ;

8. Ἕνας χρυσοχόος ἀνέμιξε 6 δράμια καθαροῦ χρυσοῦ μὲ ἄλλο χρυσὸ ὁ ὁποῖος εἶχε β.κ. 0,600. Πόσα δράμια θὰ βάλη ἀπὸ τὸν δεύτερο χρυσὸ γιὰ νὰ ἔχη τὸ κρᾶμα του βαθμὸ καθαρότητος 0,750 ;

ΓΕΝΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

α) Ἀπὸ τὴ σχολική μας ζωή.

1. Νὰ βρῆτε πόσο τοῖς ἑκατὸ ἀγόρια καὶ κορίτσια ἔχει ἡ τάξις σας καὶ πόσα τὸ σχολεῖο σας ;

2. Κατὰ τὶς θερινὲς διακοπὲς ἐπῆγαν στὶς κατασκηνώσεις 18.000 μαθηταὶ τῶν Δημοτικῶν σχολείων. Ἀπὸ αὐτοὺς 65 °/₀ ἦταν ἀγόρια. Πόσα ἀγόρια καὶ πόσα κορίτσια πῆγαν στὶς κατασκηνώσεις ;

3. Τὸ Σχολικό μας Ταμεῖο εἶχε καταθέσει στὴν Ἐθνικὴ Τράπεζα 24.000.000 δρχ., εἰς δὲ τὴν Ἀγροτικὴ τὰ $\frac{2}{3}$ τῶν προηγουμένων. Μετὰ πόσο χρόνο πῆρε ἀπὸ τὴν Ἐθνικὴ Τράπεζα 26.520.000 δρχ. καὶ πόσα θὰ πάρη ἀπὸ τὴν Ἀγροτικὴ Τράπεζα στὸν ἴδιο χρόνο, ἂν τὸ ἐπιτόκιο καὶ στὶς δύο Τράπεζες εἶναι 4,5 °/₀ ;

4. Ἡ σχολικὴ Ἐφορία τοῦ σχολείου μας διέθεσε 1.425.000 δραχ. γιὰ νὰ μοιρασθοῦν στοὺς τρεῖς πρώτους μαθητὰς τῆς ΣΤ' τάξεως ἀναλόγως τοῦ βαθμοῦ τους. Ὁ πρῶτος εἶχε βαθμὸ 10, ὁ δεύτερος 9,5 καὶ ὁ τρίτος 9. Πόσα θὰ πάρη ὁ καθένας ;

5. Ἕνα βιβλίο ἔχει 192 σελίδες, κάθε δὲ σελίδα ἔχει 28 στίχους καὶ κάθε στίχος ἔχει 40 γράμματα. Πόσες σελίδες θὰ εἶχε τὸ βιβλίο ἐὰν κάθε σελίδα εἶχε 32 στίχους καὶ κάθε στίχος εἶχε 42 γράμματα ;

β) Ἀπὸ τὴν κοινωνική μας ζωή.

1. Γιὰ νὰ γίνη ἕνα φόρεμα χρειάζονται 3 $\frac{1}{2}$ πήχ. ὕφασμα τὸ ὁποῖον ἔχει πλάτος 1 $\frac{3}{8}$ πήχ. Πόσες πῆχες χρειάζονται γιὰ τὸ ἴδιο φόρεμα, ἀπὸ ὕφασμα τὸ ὁποῖον ἔχει πλάτος $\frac{7}{8}$ πήχ. ;

2. Γιὰ τὴν διατροφὴ 160 στρατιωτῶν γιὰ 15 ἡμέρες χρειάζονται 28.810.000 δρχ. Ἐὰν ἀπολυθοῦν 36 στρατιῶται, πόσα χρήματα θέλουν οἱ ὑπόλοιποι γιὰ ἕνα μῆνα ;

3. Τὸ κιλὸ ἑνὸς ἐμπορεύματος στοιχίζει 5.600 δρχ. Πόσο στοιχίζει ἡ μία ὀκᾶ καὶ πόσες δραχμὲς θὰ πωληθῆ ἡ ὀκᾶ μὲ κέρδος 12 °/₀ ;

4. Μία ὁμάδα ἐργατῶν ἐργαζομένη 8 ὧρες τὴν ἡμέρα ἔσκαψε σὲ 25 ἡμέρες μία τάφρο μήκους 200 μ., πλάτους 4 μ. καὶ βάθους 2 μ. Οἱ ἴδιοι ἐργάται ἐργαζόμενοι 9 ὧρες τὴν ἡμέρα, σὲ

πόσες ἡμέρες θὰ σκάψουν ἄλλη τάφρο μήκους 120 μ., πλάτους 6 μ. καὶ βάθους 3 μ. ;

5. Ἕνας ὁμογενὴς ἐξ Ἀμερικῆς ἔφερε 24.000 δολλάρια τὰ ὁποῖα ἐξαργύρωσε στὴν Τράπεζα πρὸς 15.000 δρχ. τὸ ἕνα. Μὲ τὰ χρήματα αὐτὰ οἰκοδόμησε μιὰ τριώροφη οἰκία ἀπὸ τὴν ὁποία εἰσπράττει κατὰ μῆνα 2.400.000 δρχ. Πρὸς πόσο τοῖς ἑκατὸ τοκίζει τὰ χρήματά του ;

6. Ἕνα καΐκι ἔχει τροφὲς γιὰ 15 ἡμέρες, ἂν ὁ καθένας ἀπὸ τοὺς 12 ναύτες του τρώη 600 δράμια τὴν ἡμέρα. Ἀλλὰ στὸ καΐκι τους πῆραν καὶ 3 ναυαγούς. Πόσα δράμια θὰ τρῶνε τὴν ἡμέρα γιὰ νὰ περάσουν τὶς ἴδιες ἡμέρες ;

7. Ἕνα ἔπιπλο ἀγοράστηκε 520.000 δρχ. καὶ πωλήθηκε ἀμέσως 624.000 δραχ. Μὲ πόσο τοῖς ἑκατὸ κέρδος πωλήθηκε ;

8. Πόσες ὀκάδες σιτάρι πρέπει νὰ πωλήση ἕνας γεωργὸς πρὸς 2.500 δρχ. τὴν ὀκᾶ γιὰ νὰ πάρη ἕνα ποσὸ χρημάτων τὸ ὁποῖο νὰ καταθέση σὲ μιὰ Τράπεζα πρὸς 4°/o καὶ νὰ λαμβάνη τόκο τὸ ἔτος 105.000 δρχ. ;

9. Μὲ ποιὸ ἐπιτόκιο προεξωφλήθη τὴν 20 Φεβρουαρίου 1952 γραμμάτιο ὀνομ. ἀξίας 75.000 δρχ. τὸ ὁποῖο ἔληγε τὴν 20 Ἰουνίου 1952 καὶ ἔφερε ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσιν 2.250 δρχ. ;

10. Τρεῖς ἀλωνιστικὲς μηχανὲς ἐκέρδισαν ἀπὸ ἀλωνισμὸ 144.000 ὀκ. σιτάρι. Ἡ πρώτη ἐργάσθηκε 48 μέρες, ἡ δεύτερη 32 καὶ ἡ τρίτη 40 ἡμέρες. Πόσες ὀκάδες σιτάρι πρέπει νὰ πάρη ὁ ἰδιοκτήτης κάθε μηχανῆς ;

11. Ἕνας ἔμπορος ἄρχισε ἐπιχείρησιν στὸ ἐξωτερικὸ μὲ 800 λίρες. Μετὰ 5 μῆνες πῆρε καὶ ἄλλο συνεταῖρο μὲ 1.000 λίρες. Μετὰ 3 μῆνες ἀπὸ τὴν ἡμέρα ποὺ πῆρε τὸν δεύτερο πῆρε καὶ ἄλλον μὲ 1000 λίρες. Τὴν ἑταιρεία διέλυσαν ἕνα ἔτος ἀπὸ τὴν ἡμέρα ποὺ πῆραν τὸν τρίτο συνεταῖρο καὶ εἶχαν κέρδος 1.376 λίρες. Πόσο κέρδος θὰ λάβη ὁ καθένας ;

12. Ἕνας κρεοπώλης ἀγόρασε 148 ὀκ. κρέας ἀρνιοῦ καὶ μόσχου καὶ ἔδωκε 3.552.000 δρχ. Ἂν τὴν ὀκᾶ τοῦ ἀρνιοῦ ἀγόρασε πρὸς 26.000 δρχ. καὶ τοῦ μόσχου πρὸς 18.000 δρχ., πόσες ὀκάδες ἀρνιοῦ καὶ πόσες ὀκάδες μόσχου ἀγόρασε ;

13. Ἕνας χρυσοχόος ἔχει 8,4 γραμμάρια ἀργύρου τίτλου 0,940 καὶ ἄλλον ἄργυρο τίτλου 0,890. Πόσα γραμμάρια θὰ ἀναμίξη μὲ τὸ πρῶτο γιὰ νὰ ἔχη κρᾶμα τίτλου 0,920 ;

γ΄) Ἀπὸ τὰ μαθήματα.

1. Μιὰ ράβδος μήκους 0,9 μ. ὀρθή, ρίχνει σκιὰ 1,56 μ. Πόσο εἶναι τὸ ὕψος ἑνὸς δένδρου τὸ ὁποῖο τὴν ἴδια στιγμὴ ἔχει σκιὰ 14,3 μ. ;

2. Ἀπὸ τὴν Φυσικὴ γνωρίζομε ὅτι, γιὰ τὴν κατασκευὴ τῆς πυρίτιδος λαμβάνονται 16 μέρη νίτρου, 3 μέρη ἄνθρακος καὶ 2 μέρη θείου. Πόσες ὀκάδες θὰ λάβωμε ἀπὸ κάθε εἶδος γιὰ νὰ κατασκευάσωμε 1,260 ὀκ. πυρίτιδος ;

[illegible]
[illegible]

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

$\frac{3}{6} \times \frac{5}{6} = 30$

ΒΑΣΙΛΕΙΟΝ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΝ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
Δ)ΝΣΙΣ Διδ Βιβλίων

Ἐν Ἀθήναις τῇ 3 Ἰουλίου 1952

Ἀριθ Πρωτ 61320

ΠΡΟΣ

Τοὺς κ.κ. ΣΤ. ΑΛ. ΜΠΑΚΟΓΕΩΡΓΟΝ ΧΡ. ΑΛ. ΑΛΕΞΟΠΟΥΛΟΝ

ΕΝΤΑΥΘΑ

Ἀνακοινοῦμεν ὑμῖν ὅτι διὰ τῆς ὑπ' ἀριθ. 61452)2-7-52 ἀποφάσεως τοῦ Ὑπουργείου μετὰ σύμφωνον γνωμοδότησιν τοῦ Κεντρικοῦ Γνωμοδοτικοῦ καὶ Διοικητικοῦ Συμβουλίου Ἐκπαιδεύσεως ἐνεκρίθη τὸ ὑπὸ τὸν τίτλον «ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ» βιβλίον σας ὡς βοηθητικὸν τοῦ μαθήματος τῆς Ἀριθμητικῆς διὰ τοὺς μαθητὰς τῆς Ε′ & ΣΤ′ τάξεως τοῦ Δημοτικοῦ Σχολείου ἐπὶ μίαν τριετίαν ἀρχομένην ἀπὸ 1-9-52.

Παρακαλοῦμεν ὅθεν, ὅπως μεριμνήσητε διὰ τὴν ἔγκαιρον ἐκτύπωσιν τοῦ βιβλίου τούτου συμμορφούμενος πρὸς τὰς ὑποδείξεις τοῦ Ἐκπαιδευτικοῦ Συμβουλίου καὶ τὸν κανονισμὸν ἐκδόσεως βοηθητικῶν βιβλίων τοῦ Δημοτικοῦ Σχολείου.

Ἐ. Ὑ.
Ὁ Διευθυντὴς
Χ. ΜΟΥΣΤΡΗΣ

Κοινοποίησις

Κ.Γ.Δ.Σ.Ε.