ΒΑΣΙΛΕΙΟΝ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΝ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΤΟΜΟΣ ΠΡΩΤΟΣ

Γ. ΜΠΟΥΣΓΟΥ - Ι. ΤΑΜΒΑΚΛΗ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΑΘΗΝΑΙ 1971

Γ. ΜΠΟΥΣΓΟΥ - Ι. ΤΑΜΒΑΚΛΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ Α' ΤΟΜΟΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΔΩΡΕΑ
ΕΘΝΙΚΗΣ ΚΥΒΕΡΝΗΣΕΩΣ

ΒΑΣΙΛΕΙΟΝ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΝ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΤΟΜΟΣ ΠΡΩΤΟΣ

Γ. ΜΠΟΥΣΓΟΥ — Ι. ΤΑΜΒΑΚΛΗ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΑΘΗΝΑΙ 1971

Ἡ συγγραφὴ κατὰ κεφάλαια ἐγένετο ὡς ἑξῆς :
ὑπὸ Γ. Μπούσγου : Κεφάλαια I, II, III, IV, VIII, καὶ IX.
ὑπὸ Ι. Ταμβακλῆ : Κεφάλαια V, VI, VII καὶ X.

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι

ΣΥΝΟΛΑ

ΕΠΑΝΑΛΗΨΕΙΣ ΚΑΙ ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΕΙΣ

1. Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΣΥΝΕΠΑΓΕΣΘΑΙ.

Α) Ὅταν λέγωμεν «ὁ 6 εἶναι ἕνα πολλαπλάσιον τοῦ 2» διατυπώνομεν μίαν ἀληθῆ πρότασιν διὰ τὸν ἀριθμὸν 6.

Ὅταν λέγωμεν «τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσόπλευρον» διατυπώνομεν μίαν πρότασιν διὰ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ.

Β) Ἂς θεωρήσωμεν τὰς ἑξῆς δύο προτάσεις, τὰς ὁποίας, χάριν συντομίας, θὰ ὀνομάσωμεν p καὶ q.

p : ἕνας ἀριθμὸς λήγει εἰς 0 ἢ 5.
q : ὁ ἀριθμὸς εἶναι διαιρετὸς διὰ 5.

Γνωρίζομεν ὅτι, ἐὰν ἡ πρότασις p εἶναι ἀληθής, τότε καὶ ἡ πρότασις q εἶναι ἀληθής. Δηλ. ἐὰν ἕνας ἀριθμὸς λήγῃ εἰς 0 ἢ 5, τότε ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς εἶναι διαιρετὸς διὰ 5. Λέγομεν εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὅτι ἡ πρότασις p ἔχει ὡς λογικὴν συνέπειαν (συνεπάγεται) τὴν πρότασιν q. Συμβολικῶς γράφομεν : $p \Rightarrow q$ καὶ διαβάζομεν : **ἡ πρότασις p συνεπάγεται τὴν q.**

Γενικῶς, **ἐάν, ὅταν ἀληθεύῃ μία πρότασις p, μία ἄλλη πρότασις q ἀληθεύῃ ἐπίσης, τότε λέγομεν ὅτι ἡ πρότασις p συνεπάγεται τὴν πρότασιν q.**

Ἰδοὺ μερικὰ ἀκόμη παραδείγματα :

1ον) Ἐὰν ἕνα τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές, τότε ἔχει τὰς παρὰ τὴν βάσιν γωνίας του ἴσας.

Ἡ πρότασις p εἶναι : ἕνα τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές. Ἡ πρότασις q εἶναι : τὸ τρίγωνον αὐτὸ ἔχει τὰς παρὰ τὴν βάσιν γωνίας του ἴσας. Ἔχομεν $p \Rightarrow q$.

2ον) Ἐὰν $\alpha = 3$, τότε $\alpha^2 = 9$. Ἡ πρότασις p εἶναι: $\alpha = 3$ καὶ ἡ πρότασις q εἶναι: $\alpha^2 = 9$. Συμβολικῶς γράφομεν : $\alpha = 3 \Rightarrow \alpha^2 = 9$.

3ον) Ἐὰν ἕνα σχῆμα εἶναι τετράγωνον, τότε εἶναι ὀρθογώνιον. Ἡ πρότασις p : ἕνα σχῆμα εἶναι τετράγωνον, ἔχει ὡς συνέπειαν τὴν πρότασιν q : τὸ σχῆμα εἶναι ὀρθογώνιον.

Ἡ ἐργασία μὲ προτάσεις τῆς μορφῆς $p \Rightarrow q$ λέγεται **παραγωγικὸς συλ-**

λογισμός. Ἡ πρότασις p λέγεται **ὑπόθεσις** καὶ ἡ πρότασις q λέγεται **συμπέρασμα.** Ἡ συνεπαγωγὴ $p \Rightarrow q$ διαβάζεται τότε :

ἐὰν p, τότε q ἢ ἁπλῶς **p συνεπάγεται q.**

2. ΛΟΓΙΚΗ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ

Ἀπὸ μίαν συνεπαγωγὴν «$p \Rightarrow q$», ἠμποροῦμεν νὰ σχηματίσωμεν τὴν «$q \Rightarrow p$», ἡ ὁποία λέγεται **ἀντίστροφος** τῆς πρώτης. Ἐὰν ἡ συνεπαγωγὴ $p \Rightarrow q$ εἶναι ἀληθής, τότε ἡ $q \Rightarrow p$ εἶναι ἐνδεχόμενον νὰ εἶναι ἐπίσης ἀληθὴς ἢ νὰ μὴ εἶναι.

Παραδείγματα :

1ον. $p \Rightarrow q$: ἂν $x - \psi = 8$, τότε $x > \psi$, ἡ ὁποία ἀληθεύει. Ἡ ἀντίστροφος συνεπαγωγὴ εἶναι : ἂν $x > \psi$, τότε $x - \psi = 8$, ἡ ὁποία γενικῶς δὲν ἀληθεύει (διότι ἠμπορεῖ, π.χ. νὰ εἶναι $x - \psi = 5$ κ.τ.λ.).

2ον. $p \Rightarrow q$: Ἂν ἕνα τρίγωνον εἶναι ἰσόπλευρον, τότε εἶναι ἰσογώνιον (ἀληθής).

$q \Rightarrow p$: Ἂν ἕνα τρίγωνον εἶναι ἰσογώνιον, τότε εἶναι ἰσόπλευρον (ἀληθὴς)

Δύο προτάσεις p καὶ q λέγομεν ὅτι εἶναι ἰσοδύναμοι μεταξύ των, ὅταν αἱ συνεπαγωγαὶ $p \Rightarrow q$ καὶ $q \Rightarrow p$ εἶναι καὶ αἱ δύο ἀληθεῖς.

Συμβολίζομεν τοῦτο γράφοντες : $p \Leftrightarrow q$, διαβάζομεν δέ : p ἰσοδυναμεῖ μὲ q (διαβάζομεν ἐπίσης : p ἐάν, καὶ μόνον ἐάν, q).

Ἰδοὺ ἕνα ἀκόμη παράδειγμα :

Ἡ εὐθεῖα ε εἶναι κάθετος πρὸς τὴν εὐθεῖαν ε'. Ἡ εὐθεῖα ε' εἶναι κάθετος πρὸς τὴν εὐθεῖαν ε. Γράφομεν : $p \Leftrightarrow q$, διότι ἰσχύει $p \Rightarrow q$ καὶ $q \Rightarrow p$.

3. ΠΟΣΟΔΕΙΚΤΑΙ.

Α) Ἂς θεωρήσωμεν τὴν γνωστήν μας ἀπὸ τὴν β' τάξιν ἰσότητα $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$, ὅπου ἡ μεταβλητὴ x λαμβάνει τιμὰς ἀπὸ τὸ σύνολον Q, τῶν ρητῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Γνωρίζομεν ὅτι ἡ ἰσότης αὐτὴ ἀληθεύει διὰ κάθε τιμὴν $x \in Q$. Αὐτὸ τὸ συμβολίζομεν γράφοντες :

$\forall x \, (x \in Q) : (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$, διαβάζομεν δέ : διὰ κάθε x, ὅπου x ἀνήκει εἰς τὸ σύνολον τῶν ρητῶν, ἀληθεύει ὅτι $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$.

Τὸ σύμβολον $\forall$, τὸ ὁποῖον διαβάζεται «διὰ κάθε», ἢ «δι' ὅλα τὰ» λέγεται **καθολικὸς** ἢ **γενικὸς ποσοδείκτης.**

Εἰς περιπτώσεις λοιπόν, ὅπως ἡ ἀνωτέρω, ἠμποροῦμεν νὰ χρησιμοποιοῦμεν τὸ σύμβολον $\forall$. Π.χ. :

$$\forall \alpha \, \forall \beta \, (\alpha \in Q) \, (\beta \in Q) : \alpha + \beta = \beta + \alpha.$$

Β) Ἂς θεωρήσωμεν τώρα τὴν ἰσότητα : $3x = 15$, ὅπου $x \in Q$.

Παρατηροῦμεν ὅτι αὕτη δὲν ἀληθεύει διὰ κάθε τιμὴν τῆς μεταβλητῆς x, τὴν ὁποίαν λαμβάνομεν ἀπὸ τὸ σύνολον Q. Π.χ. διὰ $x = 3$ ἡ ἀνωτέρω ἰσότης γίνεται ψευδὴς ἰσότης $(9 = 15)$. Ὑπάρχει ὅμως τιμὴ τῆς μεταβλητῆς ἀπὸ τὸ

Q, διὰ τὴν ὁποίαν ἡ $3x = 15$ ἀληθεύει. Εἰς τὰς περιπτώσεις, ὅπως αὐτή, γράφομεν :

$$\exists\, x\, (x \in Q) : 3x = 15$$

καὶ διαβάζομεν : ὑπάρχει ἕνα τουλάχιστον x, ὅπου x ἀνήκει εἰς τὸ σύνολον Q, διὰ τὸ ὁποῖον ἀληθεύει ὅτι $3x = 15$.

Ὁμοίως ἠμποροῦμεν νὰ γράψωμεν :

$$\exists\, x\, (x \in Q) : x + 5 > 8$$

Τὸ σύμβολον $\exists$, τὸ ὁποῖον διαβάζεται «ὑπάρχει ἕνα τουλάχιστον», λέγεται **ὑπαρξιακὸς ποσοδείκτης.**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Ἐὰν ἕνας ἀκέραιος ἀριθμὸς λήγῃ εἰς 0 ἢ 5, τότε εἶναι διαιρετὸς διὰ 5. Νὰ διατυπώσετε τὴν ἀντίστροφον συνεπαγωγὴν καὶ νὰ ἐξετάσητε ἂν ἀληθεύῃ.

2) Ἐὰν δύο γωνίαι εἶναι ὀρθαί, τότε εἶναι ἴσαι. Νὰ διατυπώσετε τὴν ἀντίστροφον συνεπαγωγὴν καὶ νὰ ἐξετάσετε ἂν ἀληθεύῃ.

3) Ἐὰν δύο εὐθύγραμμα τμήματα εἶναι ἴσα, τότε ἔχουν τὸ αὐτὸ μῆκος. Νὰ διατυπώσετε τὴν ἀντίστροφον συνεπαγωγὴν καὶ νὰ ἐξετάσετε ἂν ἀληθεύῃ. Πῶς ἠμποροῦμεν νὰ διατυπώσωμεν μαζὺ τὴν δοθεῖσαν πρότασιν καὶ τὴν ἀντίστροφόν της ;

4) Νὰ διατυπώσετε μίαν πρότασιν ἰσοδύναμον πρὸς τήν : ὁ 5 εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 3.

5) Νὰ διατυπώσετε μίαν πρότασιν ἰσοδύναμον πρὸς τήν : ἡ εὐθεῖα ε εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν ε΄.

6) Νὰ τοποθετήσετε τὸν κατάλληλον ποσοδείκτην εἰς τὰ κάτωθι :

α) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$, ὅπου $\alpha, \beta, \gamma \in Q$.

β) $2x > 15$, ὅπου $x \in Q$.

γ) $x^2 + 1 > 0$, ὅταν $x \in Q$.

δ) $x^2 + 1 \neq (x + 1)^2$, ὅπου $x \in N$ $(N = \{1,2,3,\dots\})$.

ε) $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$, ὅπου $\alpha, \beta \in Q$.

4. ΣΥΝΟΛΟΝ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΥΝΟΛΟΥ.

Ὅπως ἐμάθαμεν εἰς τὴν α΄ καὶ β΄ τάξιν χρησιμοποιοῦμεν τὴν λέξιν «**σύνολον**», ὅταν θέλωμεν ν' ἀναφερθῶμεν εἰς πράγματα ὡρισμένα καὶ διακεκριμένα, τὰ ὁποῖα θεωροῦμεν ὅλα ὁμοῦ, δηλαδή, ὅπως ἠμποροῦμεν νὰ εἴπωμεν, ὡς μίαν ὁλότητα. Ἔχομεν παραδείγματος χάριν :

Τὸ σύνολον τῶν φωνηέντων τοῦ ἀλφαβήτου μας.

Τὸ σύνολον τῶν μαθητῶν τῆς Γ΄ τάξεως Γυμνασίου τοῦ Σχολείου μας.

Τὸ σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν.

Τὸ σύνολον τῶν ἀκεραίων τῆς Ἀλγέβρας.

Τὸ σύνολον τῶν Νομῶν τῆς Ἑλλάδος.

Τὸ σύνολον τῶν λιμνῶν τῆς Ἑλλάδος κ.ο.κ.

Τὰ πράγματα, τὰ ὁποῖα συναπαρτίζουν ἕνα σύνολον, λέγονται **στοιχεῖα** αὐτοῦ τοῦ συνόλου. Ὀνομάζομεν συνήθως ἕνα σύνολον μὲ ἕνα κεφαλαῖον γράμμα τοῦ ἀλφαβήτου μας. Ἐὰν ὀνομάσωμεν Z τὸ σύνολον τῶν ἀκεραίων τῆς Ἀλγέβρας, τότε ὁ συμβολισμὸς $-3 \in Z$ σημαίνει ὅτι τὸ στοιχεῖον -3 ἀνήκει εἰς τὸ σύνολον Z. Ἐὰν ἕνα στοιχεῖον α δὲν ἀνήκει εἰς ἕνα σύνολον Σ, γράφομεν $\alpha \notin \Sigma$. Π.χ. $\frac{2}{3} \notin Z$.

5. ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ ΣΥΝΟΛΟΥ.

Α) Ἐμάθαμεν εἰς τὴν α' καὶ β' τάξιν ὅτι ἕνα σύνολον συμβολίζεται :

1ον. Μὲ ἀναγραφὴν τῶν στοιχείων του ἐντὸς ἀγκίστρου. Π.χ. $N = \{1,2,3,4,\ldots\}$, $\Omega = \{\alpha,\varepsilon,\eta,\iota,o,\upsilon,\omega\}$, $Z = \{\ldots, -3, -2, -1, 0,1,2,3,\ldots\}$.

2ον. Μὲ περιγραφὴν χαρακτηριστικῆς ἰδιότητος τῶν στοιχείων του τῇ βοηθείᾳ μεταβλητῆς καὶ ἀγκίστρου.

Τὸ σύνολον, π.χ. Ω, τῶν φωνηέντων τοῦ ἀλφαβήτου μας, συμβολίζεται καὶ ὡς ἑξῆς : $\Omega = \{x|x$ φωνῆεν τοῦ ἀλφαβήτου μας$\}$ (Ω εἶναι τὸ σύνολον τῶν x, ὅπου x εἶναι φωνῆεν τοῦ ἀλφαβήτου μας).

Διὰ τὸ σύνολον Ζ, ἠμποροῦμεν νὰ γράψωμεν :
$Z = \{x|x$ ἀκέραιος τῆς Ἀλγέβρας$\}$.

Β) Παρατηροῦμεν ὅτι, ἂν Σ εἶναι ἕνα σύνολον καὶ x ἕνα ἀντικείμενον, τότε ἢ θὰ ἰσχύῃ $x \in \Sigma$ ἢ θὰ ἰσχύῃ $x \notin \Sigma$.

6. ΖΕΥΓΟΣ, ΜΟΝΟΜΕΛΕΣ ΣΥΝΟΛΟΝ, ΤΟ ΚΕΝΟΝ ΣΥΝΟΛΟΝ.

Α) Ἕνα σύνολον μὲ δύο μόνον στοιχεῖα ὀνομάζεται **διμελὲς σύνολον ἢ ζεῦγος.**

Παράδειγμα : Τὸ σύνολον τῶν χρωμάτων τῆς σημαίας μας εἶναι ἕνα διμελὲς σύνολον.

Β) Εἰσάγομεν εἰς τὴν θεωρίαν τῶν συνόλων καὶ σύνολα, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἕνα μόνον στοιχεῖον καὶ τὰ ὀνομάζομεν **μονομελῆ** σύνολα.

Παραδείγματα : 1ον. Τὸ σύνολον τῶν ἀκεραίων τῆς Ἀλγέβρας, οἱ ὁποῖοι δὲν εἶναι οὔτε θετικοὶ οὔτε ἀρνητικοί, εἶναι τὸ $\{0\}$.

2ον. Τὸ σύνολον τῶν φωνηέντων τῆς λέξεως : **φῶς** εἶναι τὸ μονομελὲς σύνολον $\{\omega\}$.

Γ) Μαζὺ μὲ τὰ ἄλλα σύνολα θεωροῦμεν καὶ ἕνα «σύνολον χωρὶς στοιχεῖα», τὸ ὁποῖον ὀνομάζομεν : **τὸ κενὸν σύνολον.** Τὸ συμβολίζομεν μὲ $\varnothing$ ἢ $\{\ \}$.

Παραδείγματα : 1ον. Τὸ σύνολον τῶν μαθητῶν τῆς τάξεώς μας, οἱ ὁποῖοι ἔχουν ἀνάστημα 3μ., εἶναι τὸ κενὸν σύνολον.

2ον. Τὸ σύνολον $\{x \in N \mid x = x + 5\}$, εἶναι τὸ $\varnothing$.

7. ΙΣΑ ΣΥΝΟΛΑ.

Α) Δύο σύνολα Α καὶ Β λέγονται **ἴσα,** ἐὰν κάθε στοιχεῖον τοῦ Α εἶναι καὶ στοιχεῖον τοῦ Β καὶ ἀντιστρόφως κάθε στοιχεῖον τοῦ Β εἶναι καὶ στοιχεῖον τοῦ Α. Συμβολικῶς γράφομεν : $A = B$.

Παραδείγματα : 1ον. $\{\alpha, \beta, \gamma\} = \{\beta, \gamma, \alpha\}$
2ον. $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\} = \{x|x$ μονοψήφιος φυσικὸς ἀριθμός$\}$.
3ον. $\{2,3,6,10\} = \{2, 2+1, 2\cdot 3, 11-1\}$

Β) Τὰ σύνολα $A = \{1,2,3\}$ καὶ $B = \{1,2,5\}$ δὲν εἶναι ἴσα. Συμβολίζομεν : $A \neq B$ καὶ διαβάζομεν : τὸ σύνολον Α εἶναι διάφορον τοῦ Β.

Γ) Ἡ ἔννοια τῆς ἰσότητος συνόλων ἔχει τὰς ἑξῆς ἰδιότητας :

α) $A = A$ (ἀνακλαστικὴ ἰδιότης), δηλ. κάθε σύνολον εἶναι ἴσον μὲ τὸν ἑαυτόν του.

β) $A = B \Rightarrow B = A$ (συμμετρικὴ ἰδιότης).

γ) ($A = B$ καὶ $B = \Gamma$) $\Rightarrow A = \Gamma$ (μεταβατικὴ ἰδιότης).

Διὰ τὸ κενὸν σύνολον ἔχομεν : $\varnothing = \varnothing$.

8. ΥΠΟΣΥΝΟΛΟΝ ΣΥΝΟΛΟΥ.

Α) Ἕνα σύνολον Α λέγεται **ὑποσύνολον** ἑνὸς συνόλου Β, ἐάν, καὶ μόνον ἐάν, κάθε στοιχεῖον τοῦ συνόλου Α εἶναι καὶ στοιχεῖον τοῦ συνόλου Β. Συμβολίζομεν : $A \subseteq B$ (τὸ Α εἶναι ὑποσύνολον τοῦ Β ἢ τὸ Α ἐγκλείεται εἰς τὸ Β). Τὸ σύνολον Β λέγεται σύνολον **ἀναφορᾶς** ἢ **ὑπερσύνολον** τοῦ Α.

Παραδείγματα : 1ον. Τὸ σύνολον N_α, τῶν ἀρτίων φυσικῶν ἀριθμῶν, εἶναι ὑποσύνολον τοῦ συνόλου Ν, τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν.

2ον. Τὸ σύνολον τῶν μακρῶν φωνηέντων τοῦ ἀλφαβήτου μας εἶναι ὑποσύνολον τοῦ συνόλου τῶν φωνηέντων αὐτοῦ.

3ον. Τὸ σύνολον $A = \{1,2,3\}$ εἶναι ὑποσύνολον τοῦ συνόλου Α, διότι κάθε στοιχεῖον τοῦ συνόλου Α εἶναι στοιχεῖον τοῦ Α. Δηλ. συμφώνως πρὸς τὸν δοθέντα ὁρισμόν, κάθε σύνολον εἶναι ὑποσύνολον τοῦ ἑαυτοῦ του.

Β) Ἕνα σύνολον Α λέγεται **γνήσιον ὑποσύνολον** ἑνὸς συνόλου Β, ἂν $A \subseteq B$ καὶ ὑπάρχῃ ἕνα τουλάχιστον στοιχεῖον τοῦ Β, τὸ ὁποῖον δὲν εἶναι στοιχεῖον τοῦ Α. Συμβολικῶς, γράφομεν $A \subset B$ καὶ διαβάζομεν : τὸ Α εἶναι γνήσιον ὑποσύνολον τοῦ Β.

Συμφώνως πρὸς τὸν συμβολισμὸν αὐτὸν εἶναι :

$N_\alpha \subset N$, $\{\alpha,\beta,\gamma\} \subset \{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$, $\{\alpha, \iota, \upsilon,\} \subset \{\alpha,\varepsilon,\eta,\iota,o,\upsilon,\omega\}$ κ.τ.λ.

Γ) Εἶναι φανερὸν ὅτι ἰσχύουν αἱ ἑξῆς ἰδιότητες διὰ τὴν ἔννοιαν «ὑποσύνολον» :

α) $A \subseteq A$ (ἀνακλαστική), δηλαδὴ κάθε σύνολον εἶναι ὑποσύνολον τοῦ ἑαυτοῦ του.

β) ($A \subseteq B$ καὶ $B \subseteq \Gamma$) $\Rightarrow A \subseteq \Gamma$ (μεταβατική). Ἡ ἰσχὺς τῆς δευτέρας ἰδιότητος φαίνεται ἀμέσως, ἐὰν κάμωμεν διαγράμματα τοῦ Venn διὰ τὰ σύνολα Α,Β,Γ ὅπως ἐμάθαμεν εἰς τὴν α' καὶ β' τάξιν. Τὸ κενὸν σύνολον $\varnothing$ εἶναι ὑποσύνολον κάθε συνόλου Α, διότι δὲν ὑπάρχει ἀντικείμενον x, τὸ ὁποῖον νὰ ἀνήκῃ εἰς τὸ $\varnothing$ καὶ νὰ μὴ ἀνήκῃ εἰς τὸ Α. Τὸ κενὸν σύνολον ἔχει ὑποσύνολον μόνον τὸν ἑαυτόν του : $\varnothing \subseteq \varnothing$.

Δ) Εἶναι φανερόν, ἀπὸ τοὺς δοθέντας ἀνωτέρω ὁρισμούς, ὅτι ($A \subseteq B$ καὶ $B \subseteq A$) $\Leftrightarrow A = B$.

Ε) Εἶναι εὔκολον νὰ ἐννοήσωμεν ὅτι ἡ ἔννοια «γνήσιον ὑποσύνολον» ἔχει μόνον τὴν μεταβατικὴν ἰδιότητα. (Νὰ ἐπαληθεύσετε τὴν πρότασιν μὲ ἕνα παράδειγμα).

9. ΔΥΝΑΜΟΣΥΝΟΛΟΝ ΣΥΝΟΛΟΥ.

Τὸ σύνολον τῶν ὑποσυνόλων ἑνὸς συνόλου Σ λέγεται **δυναμοσύνολον** τοῦ συνόλου Σ καὶ παριστάνεται μὲ $\mathscr{P}(\Sigma)$.

Τὸ κενὸν σύνολον ἔχει **ἕνα** μόνον ὑποσύνολον, τὸν ἑαυτόν του. Δηλαδὴ ἔχει $1 = 2^0$ ὑποσύνολα.

Τὸ μονομελὲς σύνολον $\{ \alpha \}$ ἔχει **δύο** ὑποσύνολα τὸ $\varnothing$ καὶ τὸν ἑαυτόν του, δηλαδὴ ἔχει $2 = 2^1$ ὑποσύνολα.

Τὸ διμελὲς σύνολον $\{ \alpha, \beta \}$ ἔχει ὑποσύνολα τὰ $\varnothing$, $\{ \alpha, \beta\}$, $\{\alpha \}$, $\{ \beta \}$, δηλαδὴ ἔχει $4 = 2^2$ ὑποσύνολα.

Τὸ τριμελὲς σύνολον $\{ \alpha, \beta, \gamma \}$ ἔχει ὑποσύνολα τὰ $\varnothing$, $\{ \alpha, \beta, \gamma \}$, $\{ \alpha, \beta \}$, $\{\alpha, \gamma\}$, $\{\beta, \gamma \}$, $\{ \alpha\}$, $\{\beta \}$, $\{ \gamma \}$, δηλαδὴ ἔχει $8 = 2^3$ ὑποσύνολα.

Ἕνα σύνολον μὲ 4 στοιχεῖα ἔχει $2^4 = 16$ ὑποσύνολα καὶ γενικῶς ἕνα σύνολον μὲ ν στοιχεῖα ἔχει 2^ν ὑποσύνολα.

Παράδειγμα: Τὸ δυναμοσύνολον τοῦ συνόλου $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ εἶναι τὸ $\mathscr{P}(A) = \{ \varnothing, \{\alpha \}, \{ \beta\}, \{ \gamma \}, \{\alpha, \beta \}, \{ \alpha, \gamma\}, \{\beta, \gamma\}, \{\alpha, \beta, \gamma\}\}$.

10. ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑ ΣΥΝΟΛΟΥ.

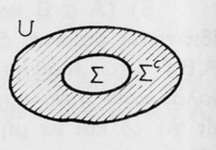
Α) Ἂν U εἶναι ἕνα σύνολον ἀναφορᾶς καὶ Α εἶναι ὑποσύνολόν του, τότε τὸ σύνολον τῶν στοιχείων τοῦ U, τὰ ὁποῖα δὲν ἀνήκουν εἰς τὸ Α, λέγεται **συμπλήρωμα** τοῦ Α ὡς πρὸς τὸ U. Τοῦτο παριστάνεται μὲ A^c ἢ $\underset{U}{C}A$. Ὁ ὁρισμὸς αὐτὸς συμβολικῶς γράφεται : $\underset{U}{C}A = \{x/x \in U$ καὶ $x \notin A \}$.

Παραδείγματα: 1ον. Ἔστω $U = \{ 1,2,3,4,5,6 \}$ καὶ $A = \{1,3,5 \}$. Τότε εἶναι $A^c = \{2,4,6 \}$.

2ον. Ἔστω σύνολον ἀναφορᾶς τὸ σύνολον Ν, τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν. Τότε συμπλήρωμα τοῦ συνόλου τῶν ἀρτίων φυσικῶν ἀριθμῶν εἶναι τὸ σύνολον τῶν περιττῶν φυσικῶν ἀριθμῶν.

3ον. Ἂν θεωρήσωμεν ὡς σύνολον ἀναφορᾶς τὸ σύνολον τῶν γραμμάτων τοῦ ἀλφαβήτου μας, τότε τὸ συμπλήρωμα τοῦ συνόλου τῶν φωνηέντων εἶναι τὸ σύνολον τῶν συμφώνων τοῦ ἀλφαβήτου μας.

Β) Γραφικῶς τὸ συμπλήρωμα Σ^c, τοῦ συνόλου Σ, παριστάνεται ἀπὸ τὸ διαγραμμισμένον μέρος τοῦ παραπλεύρως σχήματος, ὅπου U εἶναι τὸ σύνολον ἀναφορᾶς.



Γ) Εἶναι φανερὸν ἀπὸ τὸν δοθέντα ὁρισμὸν $A \cap A^c = \varnothing$ καὶ $A \cup A^c = U$. Ἐπίσης ἐννοοῦμεν εὐκόλως ὅτι $\underset{U}{C}\varnothing = U$ καὶ $\underset{U}{C}U = \varnothing$.

11. ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ (Ἢ ΙΣΟΣΘΕΝΗ ΣΥΝΟΛΑ).

Α) Δύο σύνολα Α καὶ Β, διάφορα ἀπὸ τὸ $\varnothing$, λέγομεν ὅτι εἶναι **ἰσοδύναμα** ἢ **ἰσοσθενῆ,** ἂν εἶναι δυνατὸν νὰ ἀντιστοιχίσωμεν τὸ Α μὲ τὸ Β οὕτως, ὥστε εἰς αὐτὴν τὴν ἀντιστοιχίαν κάθε στοιχεῖον τοῦ Α νὰ ἔχῃ ἕνα καὶ μόνον ἀντίστοιχον στοιχεῖον ἀπὸ τὸ Β καὶ κάθε στοιχεῖον τοῦ Β νὰ εἶναι ἀντίστοιχον ἑνὸς καὶ μόνον στοιχείου ἀπὸ τὸ Α. Ὅταν, δηλαδή, ὑπάρχῃ **ἀμφιμονοσήμαντος** ἀντιστοιχία μεταξὺ τῶν συνόλων Α καὶ Β. Γράφομεν συμβολικῶς $A \sim B$ καὶ διαβάζομεν: Τὸ σύνολον Α εἶναι ἰσοσθενὲς μὲ τὸ Β.

Παραδείγματα: 1ον. Τὰ σύνολα $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ καὶ $B = \{\alpha, \iota, \upsilon\}$ εἶναι ἰσοσθενῆ, διότι δυνάμεθα νὰ ἀντιστοιχίσωμεν τὸ Α μὲ τὸ Β, π.χ. ὅπως φαίνεται κατωτέρω:

$$\begin{array}{c} \{\alpha, \beta, \gamma\} \\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow \\ \{\alpha, \iota, \upsilon\} \end{array} \quad \text{ἢ} \quad \begin{array}{c} \{\alpha, \beta, \gamma\} \\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow \\ \{\iota, \alpha, \upsilon\} \end{array} \quad \text{κ.τ.λ.}$$

2ον. Τὸ σύνολον τῶν ὀνομάτων τῶν ἡμερῶν τῆς ἑβδομάδος καὶ τὸ σύνολον τῶν φωνηέντων τοῦ ἀλφαβήτου μας εἶναι ἰσοσθενῆ, διότι ὁρίζεται ἀμφιμονοσήμαντος ἀντιστοιχία (ἀντιστοιχία ἕνα πρὸς ἕνα) μεταξὺ τῶν στοιχείων τῶν συνόλων τούτων.

Β) Διὰ τὸ κενὸν σύνολον δεχόμεθα ὅτι: $\varnothing \sim \varnothing$.

Γ) Εἶναι φανερὸν ὅτι ἰσχύουν αἱ ἑξῆς ἰδιότητες:

α) $A \sim A$ (ἀνακλαστική), δηλαδὴ κάθε σύνολον εἶναι ἰσοσθενὲς μὲ τὸν ἑαυτόν του.

β) $A \sim B \Rightarrow B \sim A$ (συμμετρική).

γ) ($A \sim B$ καὶ $B \sim \Gamma$) $\Rightarrow A \sim \Gamma$ (μεταβατική).

Δ) Ὅπως ἐμάθαμεν εἰς τὴν α΄ καὶ β΄ τάξιν, ὅταν δύο σύνολα εἶναι ἰσοσθενῆ, λέγομεν ὅτι ἔχουν τὸν ἴδιον **πληθικὸν ἀριθμόν.** Ἐμάθαμεν ἐπίσης μὲ ποῖον τρόπον εὑρίσκομεν τὸν πληθικὸν ἀριθμὸν ἑνὸς πεπερασμένου συνόλου.

Ε) Ὑπενθυμίζομεν ὅτι ἕνα σύνολον Α λέγεται **πεπερασμένον** μὲ πληθικὸν ἀριθμὸν ν, ἐὰν εἶναι ἰσοσθενὲς μὲ τὸ ἀρχικὸν ἀπόκομμα τοῦ Ν, ποὺ τελειώνει εἰς τὸ ν.

Ἕνα σύνολον λέγεται **ἀπειροσύνολον,** ὅταν δὲν εἶναι ἰσοσθενὲς πρὸς κανένα ἀπόκομμα τοῦ Ν.

Ὅπως γνωρίζομεν ἀπὸ τὴν α΄ καὶ β΄ τάξιν ἕνα σύνολον εἶναι ἀπειροσύνολον, ἐὰν καὶ μόνον ἐάν, εἶναι ἰσοσθενὲς πρὸς γνήσιον ὑποσύνολόν του.

Παραδείγματα: 1ον. Τὸ σύνολον τῶν τετραγώνων τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἰσοσθενὲς μὲ τὸ σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν. Τοῦτο ἠμπορεῖ νὰ δειχθῇ μὲ τὴν ἑξῆς ἀντιστοιχίαν:

$$\begin{array}{ccccccc} \{1, & 2, & 3, & 4, & \ldots, & \nu, & \ldots\} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ \{1^2, & 2^2, & 3^2, & 4^2, & \ldots, & \nu^2, & \ldots\} \end{array}$$

2ον. Τὸ σύνολον $\{1, 4, 9, 16, \ldots\}$, δηλαδὴ τὸ σύνολον τῶν τετραγώνων τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, εἶναι ἀπειροσύνολον. Πράγματι, τὸ σύνολον τοῦτο εἶναι ἰσοσθενὲς μὲ τὸ γνήσιον ὑποσύνολόν του $\{1, 16, 81, 256, \ldots, \nu^4, \ldots\}$, ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὴν κατωτέρω ἀντιστοιχίαν :

$$\begin{array}{ccccccc} \{1, & 4, & 9, & 16, & \ldots, & \nu^2, & \ldots\} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ \{1, & 16, & 81, & 256, & \ldots, & \nu^4, & \ldots\} \end{array}$$

3ον. Τὸ σύνολον τῶν γραμμάτων τοῦ ἀλφαβήτου μας εἶναι πεπερασμένον καὶ ἔχει πληθικὸν ἀριθμὸν 24, διότι εἶναι ἰσοσθενὲς μὲ τὸ ἀπόκομμα τοῦ N, ποὺ τελειώνει εἰς τὸ 24.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

7) Ποῖοι ἀπὸ τοὺς κατωτέρω συμβολισμοὺς εἶναι ὀρθοὶ καὶ ποῖοι ἐσφαλμένοι ;

α) $5 \in N$, β) $\frac{3}{4} \in N$, γ) $5 \in Q$ δ) $\frac{2}{3} \in N$

8) Νὰ ἀναγράψετε τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου :

$\{x/x$ ὠκεανὸς τῆς γῆς $\}$

9) Νὰ συμβολίσετε μὲ ἄλλον τρόπον τὸ σύνολον T, ὅλων τῶν τριγώνων ,ποὺ ἔχουν δύο γωνίας των ὀρθάς.

10) Νὰ συμβολίσετε μὲ χρῆσιν μεταβλητῆς x καὶ χαρακτηριστικῆς ἰδιότητος τῶν στοιχείων του τὸ σύνολον :

$A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$

11) Νὰ συμβολίσετε ἐνδεικτικῶς ἀναγράφοντες μερικὰ στοιχεῖα του, τὸ σύνολον Z , τῶν ἀρνητικῶν ἀκεραίων.

12) Νὰ συμβολίσετε μὲ ἀναγραφὴν τῶν στοιχείων του τὸ σύνολον :

$B = \{x/x$ φυσικὸς διψήφιος διαιρετὸς διὰ $5\}$

13) Ὁμοίως τὸ σύνολον :

$A = \{x/x$ ἀκέραιος καὶ $-1 < x < 4\}$

14) Νὰ συμβολίσετε μὲ περιγραφὴν χαρακτηριστικῆς ἰδιότητος τῶν στοιχείων των τὰ σύνολα :

$\Gamma = \{17, 34, 51, 68, 85, 102, 119\}$

καὶ $\Delta = \{17, 34, 51, 68, 85, 102, 119, \ldots\}$

15) Νὰ σχηματίσετε τὰ ὑποσύνολα τοῦ $\{\phi, x, \psi, \omega\}$, τὰ ὁποῖα εἶναι διμελῆ.

16) Νὰ συμβολίσετε μὲ ἀναγραφὴν τῶν στοιχείων του τὸ σύνολον :

$E = \{\psi|\psi$ πολλαπλάσιον τοῦ 6, καὶ $10 < \psi < 51\}$.

17) Νὰ σχηματίσετε τὸ δυναμοσύνολον τοῦ συνόλου $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$.

18) Νὰ συμβολίσετε μὲ ἄλλον τρόπον τὸ σύνολον A, τῶν πρώτων ἀριθμῶν, ποὺ εἶναι διαιρετοὶ διὰ 6.

19) Νὰ ἐξετάσετε ἂν εἶναι ἴσα ἢ ὄχι τὰ σύνολα :

α) $\{3, 4, 5, 6, 7 \ldots\}$ καὶ $\{x|x$ θετικὸς ἀκέραιος $> 2\}$.

β) $\{4, 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3, -4, -5, \ldots\}$ καὶ $\{x|x$ ἀκέραιος τῆς ἀλγέβρας $\leq 4\}$

20) Νὰ ἀναγράψετε ἐνδεικτικῶς τὸ σύνολον τῶν μὴ ἀρνητικῶν ἀκεραίων.

21) Νὰ περιγράψετε λεκτικῶς τὸ σύνολον :

$\{\ldots, -10, -8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}$

22) Νὰ ἐξετάσετε ἂν εἶναι ἢ ὄχι ἀπειροσύνολα τά :

α) $\left\{1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \frac{1}{11}, \ldots\right\}$

β) $\left\{1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \frac{1}{36}, \ldots\right\}$

23) Νὰ εὕρετε ποῖος ἀπὸ τοὺς κατωτέρω συμβολισμοὺς εἶναι ὀρθὸς καὶ ποῖος ἐσφαλμένος :

α) $\varnothing \in \{ \varnothing \}$, β) $\varnothing = \{ 0 \}$ γ) $0 \in \{ \quad \}$ δ) $x = \{ x \}$.

24) Πόσα στοιχεῖα ἔχει τὸ σύνολον $A = \{ 1, \{ 1 \} \}$; Εἶναι ἢ ὄχι ὀρθοὶ οἱ συμβολισμοὶ $1 \in A$, $\{ 1 \} \in A$;

25) Νὰ ἀποφανθῆτε ἂν τὰ εὐθύγραμμα τμήματα τὰ ὁποῖα ὁρίζονται ἐπὶ μιᾶς εὐθείας εἶναι ἢ ὄχι ὑποσύνολα αὐτῆς τῆς εὐθείας.

26) Ἐὰν θεωρήσωμεν ἕνα ἐπίπεδον (Ε) ὡς σύνολον σημείων, τί εἶναι τότε μία εὐθεῖα ε τοῦ ἐπιπέδου ὡς πρὸς τὸ (Ε) ; Γράψατε τὴν ἀπάντησίν σας συμβολικῶς. Ἐὰν θεωρήσωμεν τὸ (Ε) ὡς σύνολον εὐθειῶν, τί εἶναι τότε ἡ εὐθεῖα ε ;

27) Νὰ κάμετε ἕνα διάγραμμα τοῦ Venn διὰ τὰ σύνολα :

$A = \{ 1,2,5,7,9,10,12,15 \}$, $B = \{ 1,2,3,4,9 \}$, $\Gamma = \{ 1,2,5,9,10,13 \}$, $E = \{ 4,12 \}$

28) Ποῖον εἶναι τὸ συμπλήρωμα τοῦ συνόλου Θ, τῶν μαθητριῶν ἑνὸς μεικτοῦ Γυμνασίου, ὡς πρὸς τὸ σύνολον Μ ὅλων τῶν μαθητῶν τοῦ Γυμνασίου ;

29) Ἐὰν θεωρήσωμεν ἕνα ἐπίπεδον (Ε) ὡς σύνολον σημείων καὶ ἔχωμεν χαράξῃ εἰς τὸ ἐπίπεδον ἕνα τρίγωνον, ποῖον εἶναι τὸ συμπλήρωμα τοῦ συνόλου τῶν σημείων τοῦ τριγώνου (μὲ τὸ ἐσωτερικόν του) ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον ;

30) Νὰ κάμετε ἕνα διάγραμμα τοῦ Venn διὰ τὰ σύνολα

$A = \{ 1,2,3,4,7 \}$, $B = \{ 1,2,5,6,8 \}$ καὶ $\Gamma = \{ 3,4,5,6,9 \}$.

31) Τρία σύνολα Α, Β, Γ δὲν ἔχουν κοινὸν στοιχεῖον, ἀνὰ δύο ὅμως ἔχουν κοινὰ στοιχεῖα. Νὰ κάμετε ἕνα διάγραμμα τοῦ Venn, τὸ ὁποῖον νὰ παριστάνῃ αὐτὴν τὴν περίπτωσιν.

12. ΤΟΜΗ ΣΥΝΟΛΩΝ.

Α) Τομὴ συνόλου Α μὲ σύνολον Β (*) λέγεται τὸ σύνολον, τοῦ ὁποίου κάθε στοιχεῖον ἔχει τὴν ἰδιότητα νὰ ἀνήκῃ καὶ εἰς τὸ Α καὶ εἰς τὸ Β.

Σύμβολον τῆς τομῆς εἶναι τὸ $\cap$, τὸ ὁποῖον διαβάζεται **τομή**. Ὁ ὁρισμὸς αὐτὸς συμβολικῶς γράφεται :

$$A \cap B = \{ x / x \in A \text{ καὶ } x \in B \}$$

Ὁ ὁρισμὸς αὐτὸς περιλαμβάνει καὶ τὴν περίπτωσιν, κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ ἕνα ἐκ τῶν συνόλων εἶναι τὸ $\varnothing$, Οὕτω, π.χ., $A \cap \varnothing = \varnothing$.

Παραδείγματα : 1ον. Ἂν $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon\}$ καὶ $B = \{\alpha, \varepsilon, \eta, \theta\}$, τότε $A \cap B = \{ \alpha, \varepsilon \}$.

2ον. Ἐὰν $A = \{ x / x$ ἀκέραιος μεταξὺ -2 καὶ $5 \}$ καὶ $B = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64\}$, τότε $A \cap B = \{1, 2, 4\}$.

Β) Ἡ πρᾶξις τῆς τομῆς ἔχει τὰς ἑξῆς ἰδιότητας :

α) $A \cap B = B \cap A$ (ἀντιμεταθετική).

β) $(A \cap B) \cap \Gamma = A \cap (B \cap \Gamma)$ (προσεταιριστική), αἱ ὁποῖαι ἐπαληθεύονται εὐκόλως.

Γ) Ἐμάθαμεν εἰς τὴν α' καὶ β' τάξιν ὅτι τομὴ τριῶν συνόλων Α, Β, Γ, τὴν ὁποίαν συμβολίζομεν μέ : $A \cap B \cap \Gamma$ εἶναι τὸ σύνολον $(A \cap B) \cap \Gamma$. Ὁμοίως $A \cap B \cap \Gamma \cap \Delta$ εἶναι τὸ σύνολον $(A \cap B \cap \Gamma) \cap \Delta$ κ.ο.κ. Ἐπαληθεύεται εὐκόλως ὅτι $A \cap B \cap \Gamma = A \cap \Gamma \cap B =$ κ.τ.λ.

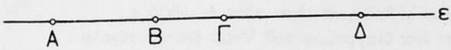
(*) Θεωροῦμεν ἕνα σύνολον U βασικόν, μὴ κενὸν καὶ τελείως ὡρισμένον, τοῦ ὁποίου τὰ Α,Β εἶναι ὑποσύνολα. Ἡ πρᾶξις **τομὴ** καὶ ἡ κατωτέρω πρᾶξις **ἕνωσις**, ὁρίζονται εἰς τὸ δυναμοσύνολον $\mathcal{P}$ (U).

Δ) Εἶναι φανερὸν ὅτι, ὅταν $A \subseteq B$, τότε $A \cap B = A$. Εἰδικώτερον εἶναι $A \cap A = A$, διὰ κάθε σύνολον Α.

Ε) Ἐὰν δύο σύνολα δὲν ἔχουν κοινὰ στοιχεῖα, τότε ἡ τομὴ των εἶναι τὸ κενὸν σύνολον. Τὰ σύνολα αὐτὰ λέγονται τότε **ξένα μεταξύ των.**

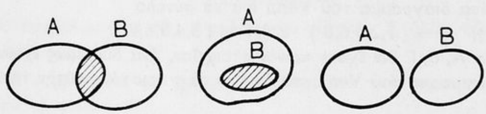
Παραδείγματα : 1ον. Ἂν $A = \{1,2\}$ καὶ $B = \{3,4\}$, τότε $A \cap B = \varnothing$.

2ον) Εἰς τὸ κατωτέρω σχῆμα τὰ εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ καὶ ΓΔ τῆς εὐθείας ε εἶναι σημειοσύνολα ξένα μεταξύ των : $AB \cap \Gamma\Delta = \varnothing$.



Σχ. 12 - 1

Κατωτέρω βλέπετε τὸ διάγραμμα τῆς τομῆς δύο συνόλων εἰς διαφόρους περιπτώσεις :



ἔχουν κοινὰ στοιχεῖα εἶναι $B \subset A$ εἶναι ξένα

Σχ. 12 - 2

13. ΕΝΩΣΙΣ ΣΥΝΟΛΩΝ.

Α) Ἕνωσις συνόλου Α μὲ σύνολον Β λέγεται τὸ σύνολον, ποὺ ἀποτελοῦν ὅλα τὰ στοιχεῖα τῶν δύο συνόλων, ὅπου βέβαια κάθε κοινὸν στοιχεῖον των λαμβάνεται μίαν μόνον φοράν. Συμβολικῶς ὁ ὁρισμὸς αὐτὸς γράφεται :

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ εἴτε } x \in B\}$$

Σημ. Τὸ «εἴτε» σημαίνει ὅτι ἕνα τυχὸν στοιχεῖον x τῆς ἑνώσεως ἀνήκει ἢ μόνον εἰς τὸ Α ἢ μόνον εἰς τὸ Β ἢ ἀνήκει καὶ εἰς τὰ δύο σύνολα Α καὶ Β.

Παραδείγματα : 1ον. Ἂν $A = \{1, 2, 3, 5\}$ καὶ $B = \{1, 2, 3, 4\}$, τότε

$$A \cup B = \{1,2,3,4,5\}$$

2ον. Ἂν $A = \{1, 2, 3\}$ καὶ $B = \{4, 5, 6\}$, τότε

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

3ον. Ἂν $\Gamma = \{x/x$ ἀκέραιος τῆς Ἀριθμητικῆς λήγων εἰς $0\}$ καὶ $\Delta = \{x|x$ ἀκέραιος τῆς Ἀριθμητικῆς λήγων εἰς $5\}$, τότε $\Gamma \cup \Delta = \{x|x$ ἀκέραιος τῆς Ἀριθμητικῆς λήγων εἰς 0 ἢ $5\} = \{x|x$ ἀκέραιος τῆς Ἀριθμ. διαιρετὸς διὰ $5\}$.

Β) Ἡ πρᾶξις τῆς ἑνώσεως δύο συνόλων ἔχει τὰς ἰδιότητας :
α) $A \cup B = B \cup A$ (ἀντιμεταθετική), β) $(A \cup B) \cup \Gamma = A \cup (B \cup \Gamma)$ (προσεταιριστική), αἱ ὁποῖαι ἐπαληθεύονται εὐκόλως.

Γ) Ἐμάθαμεν εἰς τὴν α' καὶ β' τάξιν ὅτι ἕνωσις τριῶν συνόλων Α,Β,Γ, τὴν ὁποίαν συμβολίζομεν μὲ $A \cup B \cup \Gamma$, εἶναι τὸ σύνολον $(A \cup B) \cup \Gamma$. Ὁμοίως ὁρίζομεν $A \cup B \cup \Gamma \cup \Delta = (A \cup B \cup \Gamma) \cup \Delta$ κ.ο.κ. Εὐκόλως ἐπαληθεύεται ὅτι $A \cup B \cup \Gamma = A \cup \Gamma \cup B = B \cup A \cup \Gamma$ κ.τ.λ.

Δ) Ἰσχύει $A \cup \varnothing = A$, διὰ κάθε σύνολον A. Διʼ αὐτὸ τὸ $\varnothing$ λέγεται **οὐδέτερον στοιχεῖον** διὰ τὴν πρᾶξιν τῆς ἑνώσεως συνόλων.

Ε) Εἶναι φανερὸν ἀπὸ τὸν ὁρισμὸν τῆς ἑνώσεως ὅτι ἂν $A \subseteq B$, τότε $A \cup B = B$. Ἐπίσης εἶναι $A \cup A = A$.

ΣΤ) Τέλος ἰσχύει ἡ συνεπαγωγὴ $(A \cup B = \varnothing) \Rightarrow (A = \varnothing$ καὶ $B = \varnothing)$.

14. ΔΙΑΦΟΡΑ ΔΥΟ ΣΥΝΟΛΩΝ.

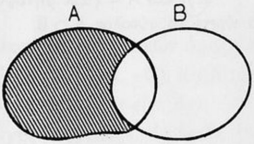
Α) Διαφορὰ συνόλου B ἀπὸ σύνολον A λέγεται τὸ σύνολον, ποὺ ἀποτελοῦν τὰ στοιχεῖα τοῦ A, τὰ ὁποῖα δὲν ἀνήκουν εἰς τὸ B. Συμβολίζεται μὲ $A - B$.

Παραδείγματα: 1ον. Ἂν $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ καὶ $B = \{1, 3, 6\}$, τότε $A - B = \{2, 4, 5\}$.

2ον. Ἂν $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ καὶ $B = \{\alpha, \delta\}$, τότε $A - B = \{\beta, \gamma\}$. Συμβολικῶς ὁ ἀνωτέρω ὁρισμὸς γράφεται : $A - B = \{x/x \in A$ καὶ $x \notin B)$.

Β) Εἶναι φανερὸν ὅτι, ἂν τὰ σύνολα A καὶ B εἶναι ξένα μεταξύ των, τότε ἡ διαφορὰ $A - B$ εἶναι τὸ σύνολον A. Ἐπίσης εἶναι $A - \varnothing = A$.

Γ) Εἰς τὸ παραπλεύρως σχῆμα τὸ διαγραμμισμένον μέρος τοῦ A παριστάνει τὴν διαφορὰν $A - B$. Προφανῶς εἶναι : $A - B = A - (A \cap B)$.



Σχ. 14–1

15. ΔΙΑΜΕΡΙΣΜΟΣ ΣΥΝΟΛΟΥ.

Ἔστω Σ τυχὸν μὴ κενὸν σύνολον. Χωρίζομεν τὸ Σ εἰς ὑποσύνολα διάφορα τοῦ $\varnothing$, ξένα μεταξύ των ἀνὰ δύο, ἔστω τὰ A, B, Γ τοιαῦτα, ὥστε $A \cup B \cup \Gamma = \Sigma$. Τότε τὸ σύνολον $\Delta = \{A, B, \Gamma\}$ λέγεται ἕνας **διαμερισμὸς** τοῦ Σ εἰς τρεῖς **κλάσεις.**

Παραδείγματα: 1ον. Ἔστω τὸ σύνολον $\Sigma = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Τὸ σύνολον $\Delta = \{\{1,2\}, \{3,4\}, \{5\}\}$ εἶναι ἕνας διαμερισμὸς τοῦ Σ εἰς τρεῖς κλάσεις. Ἕνας ἄλλος διαμερισμὸς τοῦ Σ εἰς δύο κλάσεις εἶναι ὁ $\Delta_1 = \{\{1, 3, 5\}, \{2, 4\}\}$.

2ον. Ἐὰν θεωρήσωμεν τὸ σύνολον N, τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, καὶ τὰ ὑποσύνολα αὐτοῦ $N_\alpha = \{x/x$ φυσικὸς ἄρτιος$\}$ καὶ $N_\pi = \{x/x$ φυσικὸς περιττός$\}$, τότε τὸ σύνολον $\{N_\alpha, N_\pi\}$ εἶναι ἕνας διαμερισμὸς τοῦ N εἰς δύο κλάσεις. Διότι, α) $N_\alpha \neq \varnothing$, $N_\pi \neq \varnothing$, β) $N_\alpha \cap N_\pi = \varnothing$ καὶ γ) $N_\alpha \cup N_\pi = N$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

32) Ἐὰν $A = \{x|x$ φυσικὸς διαιρετὸς διὰ $2\}$ καὶ $B = \{x|x$ φυσικὸς διαιρετὸς διὰ $3\}$, νὰ εὕρετε τὸ σύνολον $A \cap B$.

33) Ἐὰν ε εἶναι μία εὐθεῖα καὶ K ἕνας κύκλος εἰς ἕνα ἐπίπεδον τότε τί σημαίνει ὁ συμβολισμὸς $\varepsilon \cap K = \varnothing$;

34) Ἐὰν ε καὶ ε' εἶναι δύο εὐθεῖαι ἑνὸς ἐπιπέδου, τί σημαίνει ὁ συμβολισμὸς $\varepsilon \cap \varepsilon' = \varnothing$;

35) Ἐὰν $A = \{1,2,3,4,5,7,9\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ καὶ $\Gamma = \{1, 3, 5, 6\}$ νὰ εὕρετε τά :

α) $A \cap B$ β) $A \cap \Gamma$ γ) $A \cap B \cap \Gamma$

δ) $A \cup B$ ε) $A - \Gamma$ γ) $A \cup B \cup \Gamma$

36) Μὲ τὰ σύνολα $A = \{1,2,3\}$, $B = \{3,4,5\}$ καὶ $\Gamma = \{1,3,5\}$ νὰ ἐπαληθεύσετε ὅτι ἰσχύουν :

α) $A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)$, β) $A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$.

Αἱ α) καὶ β) ἰσχύουν γενικῶς. Νὰ διατυπώσετε μὲ λέξεις αὐτὰς τὰς δύο ἰδιότητας.

37) Δίδεται τὸ σύνολον $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$. Ἂν A_1 εἶναι τὸ σύνολον τῶν περιττῶν ἀριθμῶν τοῦ Α καὶ A_2 τὸ σύνολον τῶν στοιχείων τοῦ Α, τὰ ὁποῖα εἶναι μικρότερα τοῦ 6) νὰ καθορίσετε μὲ ἀναγραφὴν τῶν στοιχείων των τὰ σύνολα :

α) $A_1 \cap A_2$ β) $A_1 \cup A_2$ γ) $A - A_1$ δ) $A \cap A_1$ ε) $A_2 - A_1$ ζ) $\underset{A}{C} A_1$ η) $\underset{A}{C} A_2$

38) Ἐὰν $A \subseteq B$ καὶ ἐπίσης $B \subseteq A$, τί εἶναι ἡ $A \cap B$;

39) Ἕνα σύνολον Α ἔχει 10 στοιχεῖα. Ἕνα ἄλλο σύνολον Β ἔχει 7 στοιχεῖα καὶ ἡ τομή των $A \cap B$ ἔχει 4 στοιχεῖα. Πόσα στοιχεῖα τοῦ Α δὲν εἶναι καὶ στοιχεῖα τοῦ Β ; (Ἀπ. 6,

40) Νὰ κάμετε ἕνα διαμερισμὸν τοῦ συνόλου

$A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta, \theta, \iota, \kappa\}$

α) εἰς δύο κλάσεις β) εἰς τέσσαρας κλάσεις.

41) Ἐὰν $A = \{x | x$ ἀκέραιος καὶ $-1 < x < 5\}$ καὶ

$B = \{0,2,-2,3,5,10\}$ νὰ εὕρετε τὸ σύνολον $A \cap B$

42) Ἐὰν $A = \{x | x$ ρητὸς ἀριθμὸς καὶ $x < 3\}$ καὶ $B = \{x | x$ ρητὸς ἀριθμὸς καὶ $x > -3\}$, νὰ εὕρετε τὸ σύνολον $A \cap B$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙ

ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΟΝ ΓΙΝΟΜΕΝΟΝ ΔΥΟ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΥΝΟΛΩΝ. ΔΙΜΕΛΕΙΣ ΣΧΕΣΕΙΣ. ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ - ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΙΣ.

16. ΔΙΑΤΕΤΑΓΜΕΝΟΝ ΖΕΥΓΟΣ ΣΧΕΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Α) Εἰς τὴν β' τάξιν ἐμάθαμεν διὰ τὰ διατεταγμένα ζεύγη σχετικῶν ἀριθμῶν, δηλ. διὰ παραστάσεις ὡς καί : $(-2, 3)$, $(5, 5)$, $(-3, 6)$ $(-2, -2)$, κ.τ.λ. καὶ γενικῶς (α, β), ὅπου α, β σχετικοὶ ἀριθμοὶ διάφοροι μεταξύ των εἴτε ὄχι.

Ὑπενθυμίζομεν ὅτι εἰς τὸ διατεταγμένον ζεῦγος σχετικῶν ἀριθμῶν δὲν ἐπιτρέπεται ἐναλλαγὴ τῶν ἀριθμῶν, ποὺ τὸ ἀποτελοῦν (ὅταν εἶναι διάφοροι), διότι τότε τὸ ζεῦγος ἀλλάζει. Τὸ διατεταγμένον ζεῦγος, π.χ., $(-3,4)$ εἶναι διάφορον τοῦ διατεταγμένου ζεύγους $(4, -3)$.

Ὑπενθυμίζομεν ἐπίσης ὅτι, ἐὰν (x, ψ) εἶναι ἕνα διατεταγμένου ζεῦγος, τότε τὸ x λέγεται **πρῶτον μέλος** τοῦ διατεταγμένου ζεύγους καὶ τὸ ψ **δεύτερον μέλος** του.

Β) Ἐμάθαμεν ἀκόμη διὰ τὴν γεωμετρικὴν παράστασιν τῶν διατεταγμένων ζευγῶν σχετικῶν ἀριθμῶν μὲ σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου.

Θὰ μελετήσωμεν τώρα σύνολα διατεταγμένων ζευγῶν, τὰ ὁποῖα πολλάκις θὰ χρησιμοποιήσωμεν εἰς αὐτὴν τὴν τάξιν.

17. ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΟΝ ΓΙΝΟΜΕΝΟΝ ΣΥΝΟΛΟΥ Α ΕΠΙ ΣΥΝΟΛΟΝ Β.

Ἂν ἔχωμεν δύο ὁποιαδήποτε σύνολα Α,Β, διάφορα τοῦ κενοῦ, **τὰ ὁποῖα δὲν εἶναι ὑποχρεωτικῶς σύνολα ἀριθμῶν**, δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν παραστάσεις, ὡς αἱ (α, β), (α', β') κ.τ.λ., ὅπου τὸ πρῶτον μέλος κάθε παραστάσεως νὰ ἀνήκῃ εἰς τὸ σύνολον Α καὶ τὸ δεύτερον εἰς τὸ σύνολον Β. Ἐὰν τώρα συμφωνήσωμεν νὰ λέγωμεν ὅτι **εἶναι $(\alpha, \beta) = (\alpha', \beta')$ ἐάν, καὶ μόνον ἐάν, εἶναι $\alpha = \alpha'$ καὶ $\beta = \beta'$ (*)**, τότε κάθε τοιαύτη παράστασις λέγεται **διατεταγμένον ζεῦγος.** Τὸ σύνολον ὅλων τῶν διατεταγμένων ζευγῶν (α, β), ποὺ σχηματίζονται, ἂν

(*) Πᾶν σύνολον διάφορον τοῦ $\varnothing$ εἶναι ἐφωδιασμένον μὲ μίαν σχέσιν (§ 21 καὶ § 25) ἰσότητος, βάσει τῆς ὁποίας διακρίνονται τὰ στοιχεῖα του.

λάβωμεν τὸ α ἀπὸ τὸ A καὶ τὸ β ἀπὸ τὸ B, λέγεται **καρτεσιανὸν γινόμενον τοῦ συνόλου A ἐπὶ τὸ σύνολον B** καὶ συμβολίζεται μὲ $A \times B$.

Εἰς τὸν ἀνωτέρω ὁρισμὸν δὲν ἀποκλείεται νὰ εἶναι $A = B$· τότε τὸ $A \times B$ γίνεται $A \times A$ καὶ γράφεται συντόμως : A^2.

Ἐπίσης εἶναι $A \times \varnothing = \varnothing$ καὶ $\varnothing \times B = \varnothing$.

Συμβολικῶς ὁ ἀνωτέρω ὁρισμὸς τοῦ καρτεσιανοῦ γινομένου γράφεται :

$$A \times B = \{ (x, \psi) \mid x \in A \text{ καὶ } \psi \in B \}.$$

Τὰ σύνολα A, B λέγονται **παράγοντες** τοῦ καρτεσιανοῦ γινομένου, πρῶτος τὸ A, δεύτερος τὸ B.

Παραδείγματα: 1ον. Ἔστω $A = \{ \alpha, \beta, \gamma \}$ καὶ $B = \{ 2,3 \}$. Ἔχομεν $A \times B = \{ (\alpha, 2), (\alpha, 3), (\beta, 2), (\beta, 3), (\gamma, 2), (\gamma, 3) \}$. Παρατηροῦμεν ὅτι ἀπὸ κάθε στοιχεῖον τοῦ A προκύπτουν 2 ζεύγη (ὅσα εἶναι τὰ στοιχεῖα τοῦ B), ἑπομένως ἀπὸ τὰ 3 στοιχεῖα τοῦ A θὰ προκύψουν $3 \cdot 2 = 6$ ζεύγη. Δηλαδὴ ὁ πληθικὸς ἀριθμὸς τοῦ $A \times B$ εἶναι τὸ γινόμενον τῶν πληθικῶν ἀριθμῶν τῶν A καὶ B.

Μὲ τὸν ἴδιον τρόπον συμπεραίνομεν, γενικώτερον, ὅτι ἂν διὰ δύο πεπερασμένα σύνολα A καὶ B εἶναι πληθικὸς ἀριθμὸς τοῦ $A = \kappa$ καὶ πληθικὸς ἀριθμὸς τοῦ $B = \lambda$, τότε πληθικὸς ἀριθμὸς τοῦ $(A \times B) = \kappa \cdot \lambda$.

2ον. Ἔστω πάλιν $A = \{\alpha, \beta, \gamma \}$ καὶ $B = \{ 2, 3 \}$ καὶ ἂς σχηματίσωμεν τὸ $B \times A$. Ἔχομεν $B \times A = \{ (2, \alpha), (2, \beta), (2, \gamma), (3, \alpha), (3, \beta), (3, \gamma) \}$. Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ πλῆθος τῶν στοιχείων τοῦ $B \times A$ εἶναι $2 \cdot 3 = 6$. Τὸ $A \times B$ ὅμως εἶναι διάφορον τοῦ $B \times A$.

Γενικῶς ἰσχύει : $A \neq B \Rightarrow A \times B \neq B \times A$

3ον. Ἔστω $A = B = \{ -2, 3, 4 \}$. Τότε εἶναι $A \times A = A^2 = \{ (-2, -2), (-2, 3), (-2,4), (3, -2), (3, 3), (3, 4), (4, -2), (4, 3), (4,4) \}$.

18. ΠΑΡΑΣΤΑΣΙΣ ΤΟΥ ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΟΥ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ ΜΕ ΠΙΝΑΚΑ ΔΙΠΛΗΣ ΕΙΣΟΔΟΥ·

Εἰς τὸ Σχ. 18 – 1 βλέπετε ἕνα πίνακα, ποὺ ὀνομάζεται **πίναξ διπλῆς εἰσόδου**, μὲ τὸν ὁποῖον παριστάνομεν τὸ καρτεσιανὸν γινόμενον $A \times B$, ὅπου : $A = \{\alpha, \beta, \gamma \}$ καὶ $B = \{ 2, 3\}$, δηλ. τὸ $A \times B = \{ (\alpha, 2), (\alpha, 3), (\beta, 2), (\beta, 3), (\gamma, 2), (\gamma, 3) \}$.

3	(α,3)	(β,3)	(γ,3)
2	(α,2)	(β,2)	(γ,2)
B / A	α	β	γ

Σχ. 18 – 1

Ἡ στήλη τοῦ α δίδει τὰ ζεύγη (α, 2), (α, 3) εἰς τὴν κατάλληλον θέσιν των. Τὸ ἴδιον συμβαίνει καὶ διὰ τὰς στήλας τῶν β καὶ γ τοῦ πίνακος.

Εἰς τὸ Σχ. 18–2 βλέπετε τὸν πίνακα διπλῆς εἰσόδου διὰ τὴν παράστασιν τοῦ καρτεσιανοῦ γινομένου $A \times A$, ὅπου $A = \{ -2, 3, 4 \}$

Νὰ κατασκευάσετε πίνακα διπλῆς εἰσόδου διὰ τὸ $B \times A$, ὅπου $A=\{\alpha, \beta, \gamma\}$ καὶ $B=\{2, 3\}$. (Ποῦ θὰ τοποθετήσετε τὰ στοιχεῖα τοῦ B ;).

Σημ. Εἶναι φανερὸν ὅτι δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν πίνακα διπλῆς εἰσόδου καὶ διὰ ἕνα τυχὸν ὑποσύνολον Καρτεσιανοῦ γινομένου.

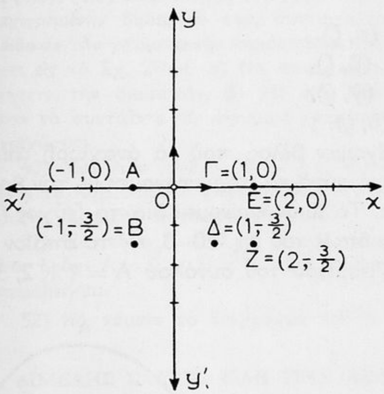
4	(-2,4)	(3,4)	(4,4)
3	(-2,3)	(3,3)	(4,3)
-2	(-2,-2)	(3,-2)	(4,-2)
A / A	-2	3	4

Σχ. 18 – 2

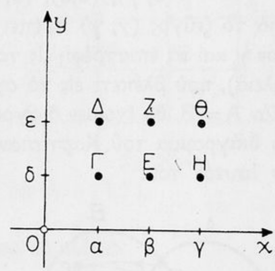
19. ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ (ΓΡΑΦΙΚΗ) ΠΑΡΑΣΤΑΣΙΣ ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΟΥ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ.

Ἐὰν θεωρήσωμεν τὰ μέλη ἑνὸς διατεταγμένου ζεύγους σχετικῶν ἀριθμῶν ὡς συντεταγμένας σημείου εἰς τὸ ἐπίπεδον xOψ, τότε κάθε διατεταγμένον ζεῦγος παριστάνει ἕνα σημεῖον εἰς τὸ ἐπίπεδον αὐτό. Ἑπομένως ἕνα Καρτεσιανὸν γινόμενον μὲ δύο παράγοντας θὰ παριστάνῃ τότε ἕνα σύνολον σημείων τοῦ ἐπιπέδου. Τὸ σύνολον τῶν σημείων τούτων τὸ ὀνομάζομεν **γεωμετρικὴν** (ἢ γραφικὴν) **παράστασιν τοῦ Καρτεσιανοῦ γινομένου.** Ἐὰν π.χ.

$M = \{-1, 1, 2)\}$ καὶ $N = \left\{0, -\frac{2}{3}\right\}$, τότε $M \times N = \Big\{(-1,0), \Big((-1,-\frac{3}{2}\Big)$, $(1, 0), \Big((1, -\frac{3}{2}\Big), (2, 0), \Big(2, -\frac{3}{2}\Big)\Big\}$ καὶ εἰς τὸ σχ. 19 – 1 βλέπετε τὴν γεωμετρικήν του παράστασιν· εἶναι τὸ σημειοσύνολον : { Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ }.



Σχ. 19 – 1



Σχ. 19 – 2

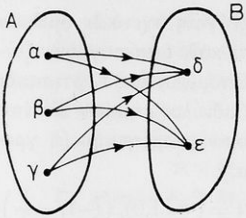
Σημ. Εἶναι φανερὸν ὅτι δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν γεωμετρικὴν παράστασιν καὶ ἑνὸς ὑποσυνόλου (μὴ κενοῦ) ἑνὸς καρτεσιανοῦ γινομένου.

Β) Γεωμετρικὴν παράστασιν ἑνὸς Καρτεσιανοῦ γινομένου κάμνομεν συνήθως, ὅταν τὰ μέλη τῶν ζευγῶν του εἶναι σχετικοὶ ἀριθμοί.

Ἀλλὰ καὶ ὅταν τὰ μέλη τῶν ζευγῶν ἑνὸς Καρτεσιανοῦ γινομένου εἶναι ἄλλης φύσεως, ἠμποροῦμεν νὰ ἔχωμεν γεωμετρικὴν παράστασιν αὐτοῦ. Ἄς θεωρήσωμεν π.χ. τὰ σύνολα $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ καὶ $B = \{\delta, \varepsilon\}$, ὅπου τὰ α, β, γ, δ, ε, εἶναι πρόσωπα (π. χ. Ἀντωνίου, Βασιλείου, Γεωργίου κ.λ.π.). Ἔχομεν $A \times B = \{(\alpha, \delta), (\alpha, \varepsilon), (\beta, \delta), (\beta, \varepsilon), (\gamma, \delta), (\gamma, \varepsilon)\}$.

Διὰ νὰ παραστήσωμεν γεωμετρικῶς τὸ Α Χ Β, λαμβάνομεν ὀρθογωνίους ἄξονας Οχ, Οψ καὶ ἐπὶ τοῦ Οχ εἰς ἴσας μεταξύ των ἀποστάσεις γράφομεν τὰ α, β, γ. Γράφομεν ἐπίσης ὁμοίως ἐπὶ τοῦ ἄξονος Οψ τὰ δ, ε (Σχ. 19 – 2). Τότε τὸ ζεῦγος, π.χ., (α, δ) παριστάνεται ἀπὸ τὸ σημεῖον Γ, τὸ ζεῦγος (β, ε) ἀπὸ σημεῖον Ζ κ τ.λ. καὶ τὸ σύνολον τῶν σημείων { Γ,Δ,Ε,Ζ,Η,Θ } εἶναι ἡ γεωμετρικὴ παράστασις τοῦ Α Χ Β.

20. ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΟΥ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ.



Σχ. 20—1.

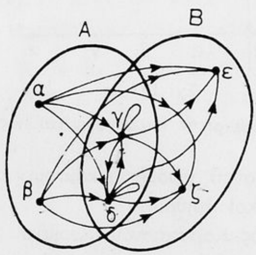
Ὀνομάζομεν διάγραμμα ἑνὸς Καρτεσιανοῦ γινομένου $A \times B$ ἕνα διάγραμμα τοῦ V E N N διὰ τὰ σύνολα A καὶ B, εἰς τὸ ὁποῖον ὑπάρχουν ἐπὶ πλέον καμπύλα βέλη, ποὺ συνδέουν τὰ μέλη κάθε ζεύγους καὶ ὁδηγοῦν ἀπὸ τὸ πρῶτον εἰς τὸ δεύτερον μέλος τοῦ ζεύγους. Οὕτω, π.χ., εἰς τὸ Σχ. 20–1 βλέπετε τὸ διάγραμμα τοῦ Καρτεσιανοῦ γινομένου $A \times B = \{\alpha, \beta, \gamma\} \times \{\delta, \varepsilon\} = \{(\alpha, \delta), (\alpha, \varepsilon), (\beta, \delta), (\beta, \varepsilon), (\gamma, \delta), (\gamma, \varepsilon).\}$

Εἰς τὸ Σχ. 20–2 βλέπετε τὸ διάγραμμα τοῦ Καρτεσιανοῦ γινομένου τοῦ συνόλου $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ ἐπὶ τὸ σύνολον $B = \{\gamma, \delta, \varepsilon, \zeta\}$, τὰ ὁποῖα ἔχουν κοινὰ στοιχεῖα. Εἶναι :

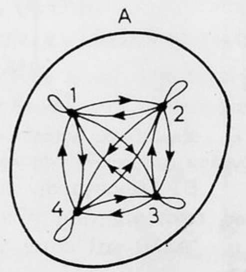
$$\begin{aligned} A \times B = \{ & (\alpha, \gamma), (\alpha, \delta), (\alpha, \varepsilon), (\alpha, \zeta). \\ & (\beta, \gamma), (\beta, \delta), (\beta, \varepsilon), (\beta, \zeta), \\ & (\gamma, \gamma), (\gamma, \delta), (\gamma, \varepsilon), (\gamma, \zeta), \\ & (\delta, \gamma), (\delta, \delta), (\delta, \varepsilon), (\delta, \zeta).\ \} \end{aligned}$$

Διὰ τὸ ζεῦγος (γ, γ) πρέπει νὰ ἔχωμεν βέλος, ποὺ νὰ ἀναχωρῇ ἀπὸ τὸ στοιχεῖον γ καὶ νὰ ἐπιστρέφῃ εἰς τὸ ἴδιον· αὐτὸ τὸ παριστάνομεν μὲ τὸν βρόχον (τὴν θηλειά), ποὺ βλέπετε εἰς τὸ σχῆμα. Τὸ ἴδιον κάμνομεν διὰ τὸ ζεῦγος (δ, δ).

Ἐὰν $A = B$, θὰ ἔχωμεν διάγραμμα ὅπως τοῦ Σχ. 20—3, εἰς τὸ ὁποῖον βλέπετε τὸ διάγραμμα τοῦ Καρτεσιανοῦ γινομένου τοῦ συνόλου $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ἐπὶ τὸν ἑαυτόν του.



Σχ. 20 - 2



Σχ. 20 - 3

Σημ. Εἶναι φανερὸν ὅτι ἠμποροῦμεν νὰ κατασκευάσωμεν διάγραμμα καὶ ἑνὸς ὑποσυνόλου ἑνὸς Καρτεσιανοῦ γινομένου.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

43) Ἂν τὰ διστεταγμένα ζεύγη $(x + 1{,}5)$ καὶ $(-4, \psi-1)$ εἶναι ἴσα, νὰ εὕρετε τὰ x καὶ ψ.

44) Νὰ λάβετε ἕνα σύστημα ἀξόνων ὀρθοκανονικὸν (*), νὰ προσδιορίσετε τὰ ση-

(*) Ὑπενθυμίζομεν ὅτι ἕνα σύστημα ἀξόνων λέγεται ὀρθοκανονικόν, ἐὰν εἶναι ὀρθογώνιον καὶ αἱ ὁρισθεῖσαι μονάδες ἐπὶ τῶν ἀξόνων εἶναι ἰσομήκεις.

μεῖα α) Α = (8,5) β) Β = (–3,6) καὶ νὰ εὕρετε τὰς συντεταγμένας τῶν συμμετρικῶν τοῦ Α πρὸς τὴν ἀρχὴν Ο καὶ πρὸς τοὺς ἄξονας x'Ox καὶ ψ'Οψ.

45) Ἂν Α = { 1,2,3, } καὶ Β = { α,β,γ }, νὰ εὕρετε τὸ Α × Β, νὰ κάμετε τὸ διάγραμμά του καὶ νὰ τὸ παραστήσετε καὶ μὲ πίνακα διπλῆς εἰσόδου.

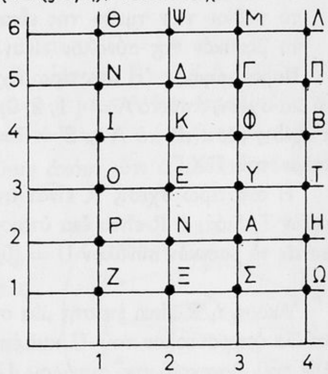
46) Ἂν Α = { 2,3,–5 } καὶ Β = { 2,–1 } νὰ εὕρετε τὰ α) Α × Α, β) Α × Β, γ) Β × Β καὶ νὰ κάμετε τὸ διάγραμμα τοῦ Α × Β καὶ τὴν γεωμετρικὸν παράστασιν τοῦ Β × Β.

47) Ποῖα εἶναι τὰ σύνολα ἀπὸ τὰ ὁποῖα ἐσχηματίσθη τὸ Καρτεσιανὸν γινόμενον {(–1, –1), (–1,0), (–1,1), (0,–1), (0,0), (0,1), (1,–1), (1,0), (1,1) } ;

Νὰ κάμετε τὸ διάγραμμα τοῦ Καρτεσιανοῦ τούτου γινομένου, πίνακα διπλῆς εἰσόδου καὶ γεωμετρικὴν παράστασιν αὐτοῦ.

48) Ἐὰν τὸ σύνολον Α × Β περιέχει 5 στοιχεῖα (ζεύγη), πόσα στοιχεῖα εἶναι δυνατὸν νὰ περιέχῃ καθένα ἀπὸ τὰ σύνολα Α καὶ Β ;

49) Ἡ ἀκολουθία τῶν διατεταγμένων ζευγῶν (2,3), (4,5), (1,4), (4,3), (2,3), (1,6), (4,2), (4,3), (2,3) εἶναι διαταγὴ λοχαγοῦ πρὸς προκεχωρημένην διμοιρίαν του, συνταχθεῖσα μὲ «κώδικα» τὴν γεωμετρικὴν παράστασιν, ποὺ βλέπετε εἰς τὸ Σχ. 20—4. α) Νὰ ἀποκρυπτογραφήσετε τὴν διαταγήν, β) Μὲ τὸν ἴδιον κώδικα» νὰ συντάξετε τὸ μήνυμα : «ἀναμένομεν ἐνισχύσεις».



Σχ. 20 – 4

40) Ἐὰν Α = { –2, –1,0,1,2 } νὰ σχηματίσετε τὸ Καρτεσιανὸν γινόμενον Α × Α καὶ νὰ κάμετε γραφικὴν παράστασιν αὐτοῦ.

51) Ἐὰν εἶναι Α ⊆ U καὶ Β ⊆ U, τότε θὰ εἶναι ἢ ὄχι Α × Β ⊆ U × U ; Νὰ δώσετε ἕνα παράδειγμα.

52) Νὰ κάμετε τὸ διάγραμμα τοῦ Α × Α, ἐὰν Α = { 1,2 },

21. ΔΙΜΕΛΗΣ ΣΧΕΣΙΣ. ΕΙΔΗ ΤΙΝΑ (ΔΙΜΕΛΩΝ) ΣΧΕΣΕΩΝ.

Α) Ἔστω ὅτι Α καὶ Β εἶναι δύο σύνολα διάφορα τοῦ κενοῦ συνόλου. Κάθε ὑποσύνολον τοῦ καρτεσιανοῦ γινομένου Α X Β λέγεται **διμελὴς σχέσις** ἀπὸ τὸ Α εἰς τὸ Β (*). Εἰδικώτερον : Κάθε σχέσις ἀπὸ ἕνα σύνολον Α εἰς τὸ αὐτὸ σύνολον Α, δηλ. κάθε ὑποσύνολον τοῦ καρτεσιανοῦ γινομένου Α X Α, θὰ λέγεται **σχέσις μέσα εἰς τὸ Α,** εἴτε ἁπλούστερον, **σχέσις εἰς τὸ Α.**

Ἀπὸ τὸν ὁρισμὸν αὐτὸν συμπεραίνομεν ὅτι **κάθε σχέσις εἶναι ἕνα σύνολον διατεταγμένων ζευγῶν.**

Παράδειγμα : Ἔστω Α = { 1, 2, 0, 8 } καὶ Β = {2, 0, 3, 5 }. Τὸ σύνολον R = { (1,2), (1, 0), (2,3), (0,3) } εἶναι ὑποσύνολον τοῦ καρτεσιανοῦ γινομένου Α X Β = { 1, 2, 0, 8 } X { 2, 0, 3, 5 }. Ἑπομένως τὸ R εἶναι μία σχέσις ἀπὸ τὸ σύνολον { 1, 2, 0, 8 } εἰς τὸ { 2, 0, 3, 5 }.

Διὰ νὰ δηλώσωμεν ὅτι ἕνα ζεῦγος (χ, ψ) ἀνήκει εἰς μίαν σχέσιν R γράφομεν συνήθως x R ψ. Ὥστε x R ψ σημαίνει (x, ψ) ∈ R. Διὰ τὴν σχέσιν τοῦ ἀνωτέρω

(*) Εἰς τὸ ἑξῆς θὰ παραλείπωμεν τὸ ἐπίθετον **διμελῆς**.

παραδείγματος ἔχομεν : $1R2$, $1R0$, $2R3$, $0R3$, δηλαδὴ $(1, 2) \in R$, $(1, 0) \in R$, $(2, 3) \in R$, $(0, 3) \in R$.

Τὸ σύνολον τῶν πρώτων μελῶν τῶν ζευγῶν, τὰ ὁποῖα ἀποτελοῦν μίαν σχέσιν R, λέγεται **πρῶτον πεδίον ἢ πεδίον ὁρισμοῦ τῆς σχέσεως R.** Θὰ τὸ συμβολίζομεν μὲ Π. Τὸ σύνολον τῶν δευτέρων μελῶν τῶν ζευγῶν, ποὺ ἀποτελοῦν τὴν R, λέγεται **δεύτερον πεδίον ἢ πεδίον τῶν τιμῶν τῆς σχέσεως.** Θὰ τὸ συμβολίζωμεν μὲ T. Τὸ σύνολον $\Pi \cup T$ λέγεται **βασικὸν σύνολον τῆς σχέσεως** R. Θὰ τὸ συμβολίζωμεν μὲ U. Οὕτω διὰ τὴν σχέσιν R τοῦ ἀνωτέρω παραδείγματος, ἔχομεν ὅτι :

τὸ πεδίον ὁρισμοῦ της εἶναι $\Pi = \{ 1, 2, 0 \} \subset A$
τὸ πεδίον τῶν τιμῶν της εἶναι τὸ $T = \{ 2, 0, 3 \} \subset B$
τὸ βασικόν της σύνολον εἶναι τὸ $U = \Pi \cup T = \{ 1, 2, 0, 3 \}$.

Παρατήρησις : Ἡ ἀνωτέρω σχέσις $R = \{ (1, 2), (1, 0), (2,3), (0,3) \}$, ποὺ εἶναι μία σχέσις ἀπὸ τὸ $A = \{ 1, 2, 0, 8 \}$ εἰς τὸ $B = \{2, 0, 3, 5 \}$, εἶναι συγχρόνως μία σχέσις μέσα εἰς τὸ $A \cup B = \Gamma = \{ 0, 1, 2, 3, 5, 8 \}$, διότι ἡ R εἶναι ἕνα ὑποσύνολον τοῦ $\Gamma \times \Gamma$.

Ἡ ἀνωτέρω σχέσις R εἶναι ἐπίσης μία σχέσις, **ἀπὸ τὸ σύνολον** Π **εἰς τὸ σύνολον** T, διότι ἡ R εἶναι ἕνα ὑποσύνολον τοῦ $\Pi \times T$ καὶ ἀκόμη εἶναι μία **σχέσις μέσα εἰς τὸ βασικὸν σύνολον** $U = \{0, 1, 2, 3 \}$, διότι αὕτη εἶναι ὑποσύνολον τοῦ $U \times U$.

Ἀκόμη ἡ R εἶναι ἐπίσης μία σχέσις μέσα εἰς τὸ $\{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 30 \}$, ποὺ εἶναι ἕνα ὑπερσύνολον τοῦ U καὶ ἐπίσης εἶναι μία σχέσις μέσα εἰς κάθε ὑπερσύνολον τοῦ βασικοῦ της συνόλου U.

Γενικῶς πᾶσα σχέσις ἀπὸ ἕνα σύνολον εἰς ἄλλο εἶναι μία σχέσις μέσα εἰς τὸ βασικόν της σύνολον. (διατί ;)

B) Μία σχέσις, ὡς σύνολον (ζευγῶν), καθορίζεται εἴτε μὲ **ἀναγραφὴν** τῶν ζευγῶν, ποὺ τὴν ἀποτελοῦν, εἴτε μὲ **συνθήκην**, δηλαδὴ **περιγραφὴν χαρακτηριστικῆς ἰδιότητος διὰ τὰ μέλη τῶν ζευγῶν της.**

Γ) Παραδείγματα σχέσεων. Εἰδικαί τινες σχέσεις (*)

Παράδειγμα 1ον. Ἂς θεωρήσωμεν δύο σύνολα διάφορα του κενοῦ, π.χ. ἕνα σύνολον μαθητῶν $A = \{ \alpha, \beta, \gamma, \delta \}$ καὶ ἕνα σύνολον πόλεων $B = \{K, \Lambda, M, N, X \}$ Ζητεῖται νὰ καθορίσωμεν μὲ ἀναγραφὴν τῶν στοιχείων του τὸ σύνολον R_1 τῶν διατεταγμένων ζευγῶν (x, y), τῶν ὁποίων τὰ μέλη ἱκανοποιοῦν τὴν συνθήκην «ὁ $x \in A$ ἔχει ἐπισκεφθῆ τὴν $y \in B$». Συμβολικῶς αὐτὸ γράφεται ὡς ἑξῆς :

$$R_1 = \{ (x, y) / \ x \in A \text{ ἔχει ἐπισκεφθῆ } y \in B \}.$$

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι :

ὁ μαθητὴς α ἔχει ἐπισκεφθῆ τὰς πόλεις K, M,
ὁ μαθητὴς β ἔχει ἐπισκεφθῆ τὴν πόλιν Λ,

(*) Ἐκ τῶν παραδειγμάτων καὶ τῶν προτεινομένων πρὸς λύσιν ἀσκήσεων τοῦ Κεφαλαίου II νὰ δοθοῦν, ὅσαι κατὰ τὴν κρίσιν τοῦ διδάσκοντος ἀρκοῦν διὰ τὴν ἐμπέδωσιν ἑκάστης ἑνότητος.

ὁ μαθητὴς γ ἔχει ἐπισκεφθῆ τὰς πόλεις Μ, Ν, Χ,

ὁ μαθητὴς δ δὲν ἔχει ἐπισκεφθῆ καμμίαν πόλιν τοῦ συνόλου Β.

Τὰ διατεταγμένα ζεύγη, ποὺ ἱκανοποιοῦν τὴν συνθήκην « $x \in A$ ἔχει ἐπισκεφθῆ $y \in B$», εἶναι λοιπὸν τὰ ἀκόλουθα : (α, Κ), (α, Μ), (β, Λ), (γ, Μ), (γ,Ν), (γ, Χ). Ὥστε : $R_1 = \{ (x, y) \,/\, x \in A$ ἔχει ἐπισκεφθῆ $y \in B \} =$
$= \{$ (α, Κ), (α, Μ), (β, Λ), (γ, Μ), (γ, Ν), (γ, Χ) $\}$.

Ἔχομεν λοιπὸν ἐδῶ μίαν σχέσιν R_1 ἀπὸ τὸ Α εἰς τὸ Β, εἶναι δὲ $R_1 \subset A \times B$.

Παρατηροῦμεν τὰ ἑξῆς :.

1) Εἰς τὴν σχέσιν R_1 ἀνήκουν καὶ **στοιχεῖα** (ζεύγη) μὲ **τὸ αὐτὸ πρῶτον μέλος**, π.χ. τὰ (α, Κ) καὶ (α, Μ).

2) τὸ πεδίον ὁρισμοῦ τῆς σχέσεως R_1 εἶναι τὸ $\Pi = \{$ α, β, γ, $\} \subset A$

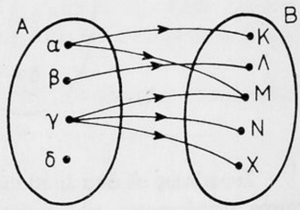
3) τὸ πεδίον τῶν τιμῶν τῆς σχέσεως R_1 εἶναι τὸ $T = \{$ Κ,Λ,Μ,Ν,Χ $\} \subseteq B$.

4) Συνθήκη, ποὺ ὁρίζει τὴν σχέσιν, εἶναι ἡ « $x \in A$ ἔχει ἐπισκεφθῆ $y \in B$».

5) τὸ βασικὸν σύνολον τῆς σχέσεως εἶναι τὸ $\Pi \cup T = \{$ α, β, γ, Κ, Λ,Μ,Ν,Χ$\}$

Εἰς τὸ παράδειγμα αὐτὸ παρατηροῦμεν ἀκόμη ὅτι ὁ μαθητὴς δ δὲν ἔχει ἐπισκεφθῆ καμμίαν ἀπὸ τὰς πόλεις τοῦ συνόλου Β καὶ ἑπομένως δὲν ὁρίζεται ζεῦγος μὲ πρῶτον μέλος τὸ δ. Λέγομεν εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὅτι **ἡ σχέσις δὲν εἶναι ὡρισμένη** διὰ $x = δ$.

Τὴν ἀνωτέρω σχέσιν R_1 ἀπὸ τὸ σύνολον Α εἰς τὸ σύνολον Β ἠμποροῦμεν νὰ τὴν παραστήσωμεν μὲ τὸ διάγραμμα, ποὺ βλέπετε εἰς τὸ Σχ. 21–1.



Σχ. 21 – 1

Εἰς τὸ Σχ. 21–2 βλέπετε τὸν πίνακα διπλῆς εἰσόδου διὰ τὴν σχέσιν R_1. Τὰ ἀντίστοιχα ζεύγη σημειώνονται μὲ σταυροὺς εἰς τὴν κατάλληλον θέσιν των.

Χ			+	
Ν			+	
Μ	+		+	
Λ		+		
Κ	+			
Β / Α	α	β	γ	δ

Σχ. 21 – 2

Παράδειγμα 2ον. Ἂς θεωρήσωμεν πάλιν ἕνα σύνολον μαθητῶν $A = \{$ α, β, γ, δ $\}$ καὶ ἕνα σύνολον πόλεων $B = \{$ Κ, Λ, Μ $\}$.

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι :

ὁ μαθητὴς α ἐγεννήθη εἰς τὴν πόλιν Κ,

ὁ μαθητὴς β ἐγεννήθη εἰς τὴν πόλιν Μ,

ὁ μαθητὴς δ ἐγεννήθη εἰς τὴν πόλιν Ν,

ὁ μαθητὴς γ δὲν ἐγεννήθη εἰς καμμίαν ἀπὸ τὰς πόλεις τοῦ συνόλου Β.

Παρατηροῦμεν τώρα ὅτι μὲ τὴν συνθήκην « $x \in A$ ἐγεννήθη εἰς $y \in B$» καθορίζεται τὸ σύνολον $R_2 = \{ (x, y) \,/\, x \in A$ ἐγεννήθη εἰς $y \in B \}$, τὸ ὁποῖον ὡς σύνολον διατεταγμένων ζευγῶν εἶναι μία σχέσις. Ἡ σχέσις αὐτὴ R_2 ἠμπορεῖ νὰ παρασταθῇ καὶ μὲ ἀναγραφὴν τῶν στοιχείων της.

Ἔχομεν τὰ ἑξῆς ζεύγη, ποὺ ἱκανοποιοῦν τὴν συνθήκην τῆς σχέσεως : (α, Κ), (β, Μ), (δ, Μ),

Ὥστε εἶναι $R_2 = \{ (α, Κ), (β, Μ), (δ, Μ)$.

Διὰ τὴν σχέσιν R_2, παρατηροῦμεν τὰ ἑξῆς :

1) Μεταξὺ τῶν ζευγῶν, ποὺ ἀποτελοῦν τὴν R_2, **δὲν ὑπάρχουν ζεύγη μὲ τὸ αὐτὸ πρῶτον μέλος.**

2) Τὸ πεδίον ὁρισμοῦ τῆς σχέσεως R_2 εἶναι τὸ $Π = \{ α, β, δ \} \subset A$.

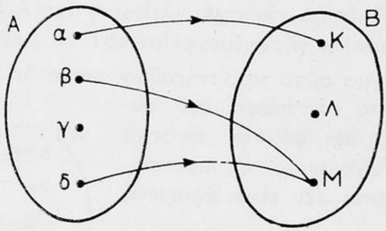
3) Τὸ πεδίον τῶν τιμῶν τῆς σχέσεως R_2 εἶναι τὸ $T = \{ K, M \} \subset B$.

4) Συνθήκη τῆς σχέσεως εἶναι «$x \in A$ ἐγεννήθη εἰς $y \in B$ ».

5) Τὸ βασικὸν σύνολον τῆς σχέσεως R_2 εἶναι τὸ $Π \cup T = \{ α, β, δ, K, M \}$.

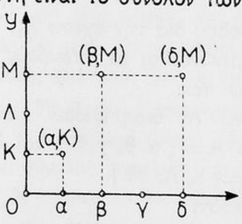
6) Ἡ σχέσις αὕτη δὲν εἶναι ὡρισμένη διὰ $x = γ$.

Εἰς τὸ Σχ. 21-3 βλέπετε τὸ διάγραμμα τῆς σχέσεως R_2.



Σχ. 21 - 3

Συμφώνως μὲ ὅσα ἐμάθαμεν εἰς τὴν § 19, Β ἠμποροῦμεν νὰ ἔχωμεν γεωμετρικὴν παράστασιν τῆς σχέσεως { (α, Κ), (β, Μ), (δ, Μ) }. Ἡ παράστασις αὐτὴ εἶναι τὸ σύνολον τῶν σημείων (α, Κ), (β, Μ), (δ, Μ), ποὺ βλέπετε εἰς τὸ Σχ. 21-4. Παρατηροῦμεν ὅτι δὲν ὑπάρχουν δύο σημεῖα μὲ τὴν αὐτὴν τετμημένην.



Σχ. 21 – 4

Σπουδαία παρατήρησις 1η. Εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα 2ον παρετηρήσαμεν ὅτι μεταξὺ τῶν ζευγῶν, ποὺ ἀποτελοῦν τὴν R_2, δὲν ὑπάρχουν δύο ἢ περισσότερα ζεύγη μὲ τὸ αὐτὸ πρῶτον μέλος. Αἱ σχέσεις μὲ αὐτὴν τὴν ἰδιότητα λέγονται **συναρτήσεις.** Ὥστε :

Κάθε σχέσις, εἰς τὴν ὁποίαν μεταξὺ τῶν ζευγῶν, ποὺ τὴν ἀποτελοῦν, δὲν ὑπάρχουν δύο ἢ περισσότερα μὲ τὸ αὐτὸ πρῶτον μέλος, λέγεται συνάρτησις.

Ἡ σχέσις ὅμως R_1 τοῦ πρώτου παραδείγματος δὲν εἶναι μία συνάρτησις, διότι ἀνήκουν εἰς αὐτὴν περισσότερα τοῦ ἑνὸς ζεύγη μὲ τὸ αὐτὸ πρῶτον μέλος, π.χ. τὰ (α, Κ) καὶ (α, Μ). Διαπιστώνομεν τοῦτο ἀμέσως καὶ ἀπὸ τὸ σχῆμα 21-1, παρατηροῦντες ὅτι ἀπὸ τὸ στοιχεῖον α τοῦ συνόλου Α ἀναχωροῦν περισσότερα τοῦ ἑνὸς βέλη καὶ ἐπίσης ἀπὸ τὸν πίνακα διπλῆς εἰσόδου, σχ. 21-2, παρατηροῦντες ὅτι ὑπάρχουν στῆλαι μὲ περισσοτέρους τοῦ ἑνὸς σταυρούς.

Παράδειγμα 3ον. (σχέσεως μέσα εἰς ἕνα σύνολον). Δίδεται τὸ σύνολον $E = \{ 2,3,4,6,8 \}$ καὶ ζητεῖται νὰ ὁρισθῇ μὲ ἀναγραφὴν τῶν στοιχείων της ἡ σχέσις:

$R_3 = \{ (x, y) \,/\, x \in E$ διαιρέτης τοῦ $y \in E \}$.

Ἡ συνθήκη «x διαιρέτης τοῦ y», συμβολικῶς $x|y$, καθορίζει τὰ ζεύγη. Πράγματι :

$2 \mid 2$, ζεῦγος (2,2)	$4 \mid 8$, ζεῦγος (4, 8)
$2 \mid 4$, ζεῦγος (2,4)	$3 \mid 3$, ζεῦγος (3,3)
$2 \mid 6$, ζεῦγος (2,6)	$3 \mid 6$, ζεῦγος (3,6)
$2 \mid 8$, ζεῦγος (2,8)	$6 \mid 6$, ζεῦγος (6,6)
$4 \mid 4$, ζεῦγος (4,4)	$8 \mid 8$, ζεῦγος (8,8)

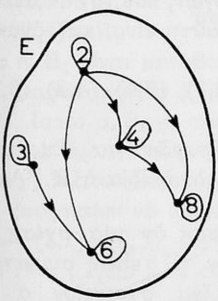
Ἡ σχέσις λοιπὸν παριστάνεται, μὲ ἀναγραφὴν τῶν στοιχείων της, ὡς ἑξῆς:

$R_3 = \{ (2,2), (2,4), (2,6), (2,8), (3,3), (3,6), (4,4), (4,8), (6,6), (8,8) \}$.

Εἶναι φανερὸν ὅτι **ἡ σχέσις R_3 δὲν εἶναι συνάρτησις.** Τὸ πεδίον ὁρισμοῦ της εἶναι τὸ σύνολον $\Pi = \{ 2,3,4,6,8 \} = E$, τὸ πεδίον τῶν τιμῶν της εἶναι τὸ $T = \{2,3,4,6,8 \} = E$, τὸ βασικὸν σύνολον τῆς σχέσεως R_3 εἶναι τὸ $\Pi \cup T = E \cup E = E$.

Εἰς τὸ Σχ. 21–5, βλέπετε τὸ διάγραμμα τῆς σχέσεως R_3. Κάθε βρόχος, ὅπως γνωρίζομεν, παριστάνει βέλος, ποὺ ἀναχωρεῖ ἀπὸ ἕνα στοιχεῖον καὶ ἐπιστρέφει (καταλήγει) εἰς τὸ αὐτὸ στοιχεῖον τοῦ E.

Εἰς τὸ σχῆμα 21–6 βλέπετε τὸν πίνακα διπλῆς εἰσόδου, μὲ τὸν ὁποῖον



Σχ. 21–5

8	+		+		+
6	+	+		+	
4	+		+		
3		+			
2	+				
T / Π	2	3	4	6	8

Σχ. 21–6

ἠμποροῦμεν νὰ παραστήσωμεν τὴν σχέσιν R_3. Τὰ ἀντίστοιχα ζεύγη σημειώνονται μὲ ἕνα σταυρόν. Εἰς τὴν στήλην τοῦ 2 ἔχομεν 4 σταυρούς, δηλ. ἔχομεν 4 ζεύγη μὲ πρῶτον μέλος τὸ 2, κ.τ.λ. Ὅταν λοιπὸν ὑπάρχῃ στήλη μὲ περισσοτέρους ἀπὸ ἕνα σταυρούς, ἐννοοῦμεν ὅτι ἡ σχέσις δὲν εἶναι συνάρτησις.

(Νὰ κάμετε γεωμετρικὴν παράστασιν τῆς σχέσεως).

Παρατήρησις 2α. Εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα 3ον παρατηροῦμεν ὅτι ἰσχύει τὸ ἑξῆς :

Διὰ κάθε $x \in E$ τὸ ζεῦγος $(x, x) \in R_3$. Κάθε σχέσις μέσα εἰς ἕνα σύνολον ἔχουσα τὴν ἰδιότητα αὐτὴν λέγεται **ἀνακλαστική**. Ὥστε ἡ R_3 εἶναι ἀνακλαστικὴ σχέσις μέσα εἰς τὸ σύνολον E.

Ἂς ἐξετάσωμεν ἀκόμη τὴν σχέσιν $R = \{ (2,2), (2,3), (3,3), (4,4), (4,3) \}$.
Πεδίον ὁρισμοῦ τῆς σχέσεως εἶναι τὸ $\Pi = \{ 2,3,4 \}$.
Πεδίον τῶν τιμῶν της εἶναι τὸ $T = \{ 2,3,4 \}$.
Βασικὸν σύνολον εἶναι τὸ $U = \Pi \cup T = (2, 3, 4 \}$.

Παρατηροῦμεν ὅτι εἰς τὴν σχέσιν ἀνήκουν τὰ ζεύγη (2,2), (3,3), (4,4). Δηλαδὴ διὰ κάθε $x \in U$ τὸ ζεῦγος (x, x) ἀνήκει εἰς τὴν R. Ἄρα ἡ ἀνωτέρω σχέσις R εἶναι ἀνακλαστική.

Τέλος εἶναι φανερὸν ὅτι εἰς τὸ διάγραμμα μιᾶς ἀνακλαστικῆς σχέσεως μέσα εἰς ἕνα σύνολον U, θὰ ὑπάρχουν βρόχοι εἰς ὅλα τὰ στοιχεῖα τοῦ U (Σχ. 21–5).

Παράδειγμα 4ον. (σχέσεως μέσα εἰς ἕνα σύνολον). Εἰς τὸ σύνολον U τῶν μαθητῶν τοῦ Γυμνασίου μας ἠμπορεῖ νὰ ὁρισθῇ ἡ σχέσις :

$R_4 = \{ (x, y)/x$ συμμαθητὴς τοῦ $y) \}$

Παρατήρησις 3η. Εἶναι φανερὸν ὅτι ἂν ὁ x_1 εἶναι συμμαθητὴς τοῦ y_1, τότε καὶ ὁ y_1 εἶναι συμμαθητὴς τοῦ x_1 καὶ τὰ ζεύγη (x_1, y_1) καὶ (y_1, x_1) ἀνήκουν εἰς τὴν σχέσιν R_4. Ὥστε ἂν ζεῦγος (x, y) ἀνήκῃ εἰς τὴν R_4 τότε καὶ τὸ (y, x), τὸ ὁποῖον ὀνομάζεται **ἀντίστροφον** (*) τοῦ προηγουμένου, θὰ ἀνήκῃ εἰς τὴν R_4. Αἱ σχέσεις μὲ αὐτὴν τὴν ἰδιότητα λέγονται **συμμετρικαί.** Ὥστε :

Μία σχέσις R εἰς ἕνα σύνολον U λέγεται συμμετρικὴ ἐάν, καὶ μόνον ἐάν, τὸ ἀντίστροφον τοῦ κάθε στοιχείου της ἀνήκῃ εἰς αὐτήν.

Μὲ ἄλλας λέξεις :

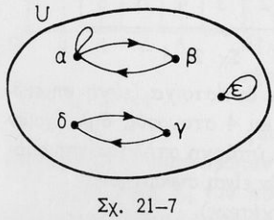
Μία σχέσις R μέσα εἰς ἕνα σύνολον U λέγεται συμμετρικὴ ἐάν, καὶ μόνον ἐάν, δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν ἐναλλάξωμεν τὰ μέλη τῶν ζευγῶν, ποὺ τὴν ἀποτελοῦν.

Ἄξιον παρατηρήσεως εἰς τὴν σχέσιν R_4 εἶναι ὅτι αὕτη εἶναι καὶ ἀνακλαστικὴ (διατί;), δὲν εἶναι ὅμως συνάρτησις, (διατί;).

Ἂς ἐξετάσωμεν ἀκόμη ἂν ἡ σχέσις $R = \{ (1,2,), (2,1), (3,4), (4,3), (3,3) \}$ εἶναι ἢ ὄχι συμμετρική.

Παρατηροῦμεν ὅτι, ἂν ἐναλλάξωμεν τὰ μέλη τῶν ζευγῶν, ποὺ ἀποτελοῦν τὴν R, προκύπτει $\{ (2,1), (1,2), (4,3), (3,4), (3,3) \}$, δηλ. ἡ ἰδία ἡ R. Ἄρα ἡ R εἶναι συμμετρική.

Τέλος ἀπὸ τὸ διάγραμμά της διακρίνομεν ἀμέσως ἂν μία σχέσις μέσα εἰς εἰς ἕνα σύνολον U εἶναι συμμετρικὴ ἀπὸ τὸ ὅτι, ἂν ἀπὸ ἕνα στοιχεῖον α τοῦ U ἀναχωρῇ ἕνα βέλος καὶ καταλήγῃ εἰς ἕνα ἄλλο στοιχεῖον β, τότε ἕνα ἄλλο βέλος ἀναχωρεῖ ἀπὸ τὸ β καὶ καταλήγει εἰς τὸ α. Ἐννοεῖται ὅτι καὶ κάθε βρόχος ὑποδεικνύει ζεῦγος, ποὺ ταυτίζεται μὲ τὸ ἀντίστροφόν του ζεῦγος. Εἰς τὸ Σχ. 21–7 βλέπετε τὸ διάγραμμα τῆς συμμετρικῆς σχέσεως $\{ (\alpha,\alpha), (\alpha, \beta), (\beta, \alpha), (\gamma, \delta), (\delta, \gamma), (\varepsilon,\varepsilon) \}$ εἰς τὸ σύνολον U.



Σχ. 21–7

(*) Ἂν R εἶναι μία σχέσις, ἡ προκύπτουσα δι' ἐναλλαγῆς τῶν μελῶν τῶν ζευγῶν τῆς R σχέσις λέγεται ἀντίστροφος τῆς R καὶ συμβολίζεται μὲ R^{-1}.

Παρατήρησις 4η. α) Εἰς τὴν σχέσιν R_4 τοῦ ὡς ἄνω παραδείγματος 4ου παρατηροῦμεν ὅτι ἰσχύει καὶ ἡ ἑξῆς ἰδιότης. Ἐὰν $(x,y) \in R_4$ καὶ $(y, z) \in R_4$, τότε καὶ $(x, z) \in R_4$.

Πράγματι, ἐὰν ὁ x εἶναι συμμαθητὴς τοῦ y καὶ ὁ y συμμαθητὴς τοῦ z, τότε καὶ x εἶναι συμμαθητὴς τοῦ z, δηλαδή :

$$(x, y) \in R_4 \text{ καὶ } (y, z) \in R_4 \Rightarrow (x, z) \in R_4.$$

Κάθε σχέσις μὲ αὐτὴν τὴν ἰδιότητα λέγεται **μεταβατική.**

β) Ἂς ἐξετάσωμεν, διὰ νὰ ἐννοήσωμεν καλύτερον τὰς μεταβατικὰς σχέσεις, τὴν σχέσιν $R_1 = \{ (1,2), (2,3), (1,3), (3,4), (2,4), (1,4) \}$.

Ἐδῶ εἶναι $\Pi = \{ 1,2,3, \}$, $T = \{2,3,4 \}$, ἐπομένως $U = \{ 1,2,3,4 \}$.

Ἔχομεν ὅτι :

$(1,2) \in R_1$
$(2, 3) \in R_1$ παρατηροῦμεν δὲ ὅτι καὶ $(1,3) \in R_1$

Ἐπίσης :

$(2,3) \in R_1$
$(3,4) \in R_1$ παρατηροῦμεν δὲ ὅτι καὶ $(2,4) \in R_1$.

Ἐπίσης :

$(1,2) \in R_1$
$(2,4) \in R_1$ παρατηροῦμεν δὲ ὅτι καὶ$(1,4) \in R_1$

Ἐπίσης :

$(1,3) \in R_1$
$(3,4) \in R_1$ παρατηροῦμεν δὲ ὅτι καὶ $(1,4) \in R_1$

Ἄρα ἡ R_1 εἶναι μεταβατική.

Παρατηροῦμεν δηλαδὴ ὅτι, ὅταν διὰ τὴν τυχοῦσαν τριάδα ἀπὸ στοιχεῖα τοῦ U, ἔστω α, β, γ, συμβαίνῃ νὰ ἔχωμεν $(\alpha, \beta) \in R_1$ καὶ $(\beta, \gamma) \in R_1$, τότε συμβαίνει νὰ ἔχωμεν καὶ $(\alpha, \gamma) \in R_1$.

γ) Ἀξιοσημείωτον εἶναι ὅτι τὰ στοιχεῖα α, β, γ ἀπὸ τὸ σύνολον U δὲν εἶναι ἀναγκαῖον νὰ εἶναι διαφορετικὰ μεταξύ των. Ἡ σχέσις, π.χ. $R_2 = \{ (1,2), (2,3), (1,3), (2,2)\ (5,6) \}$ εἶναι μεταβατική. Πράγματι εἶναι :

$\Pi = \{ 1,2,5 \}$, $T = \{2,3,6 \}$ καὶ $U = \{ 1,2,3,5,6 \}$ καὶ ἔχομεν :

$(1,2) \in R_2$
$(2,3) \in R_2$ καὶ $(1,3) \in R_2$

$(1,2) \in R_2$
$(2,2) \in R_2$ καὶ $(1,2) \in R_2$

$(2,2) \in R_2$
$(2,3) \in R_2$ καὶ $(2,3) \in R_2$

Ὁμοίως αἱ σχέσεις $\{ (\alpha,\beta), (\beta,\beta) \}$ καὶ $\{ (\alpha,\alpha), (\alpha, \beta) \}$ εἶναι μεταβατικαί.

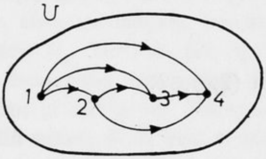
Ὁ συμβολικὸς ὁρισμὸς τῆς μεταβατικῆς σχέσεως εἶναι :

$$\left.\begin{array}{ll} & \forall\, \alpha, \beta, \gamma, \in U \\ \text{μὲ} & (\alpha, \beta) \in R \\ \text{καὶ} & (\beta, \gamma) \in R \end{array}\right\} \Rightarrow (\alpha, \gamma) \in R$$

Ὥστε : **μία σχέσις R εἰς ἕνα σύνολον U λέγεται μεταβατικὴ ἐάν, καὶ μόνον ἐάν, διὰ κάθε τριάδα μὲ στοιχεῖα ἀπὸ τὸ U, ἔστω α, β, γ (ὅπου α, β, γ ὄχι ἀναγκαίως διάφορα μεταξύ των), διὰ τὴν ὁποίαν εἶναι (α,β) $\in$ R καὶ (β, γ) $\in$ R, εἶναι καὶ(α,γ)$\in$R.**

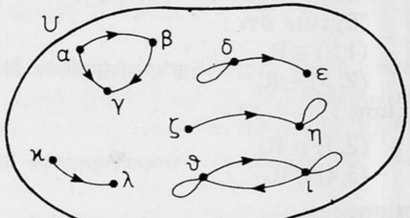
Τέλος ἀπὸ τὸ διάγραμμά της διακρίνομεν ἀμέσως ἂν μία σχέσις μέσα εἰς ἕνα σύνολον U εἶναι μεταβατικὴ ἀπὸ τὸ ὅτι, ὅταν ἕνα βέλος ἀναχωρῇ ἀπὸ τὸ στοιχεῖον α καὶ πηγαίνῃ εἰς τὸ β καὶ ἕνα δεύτερον βέλος ἀναχωρῇ ἀπὸ τὸ β καὶ πηγαίνῃ εἰς τὸ γ, τότε καὶ ἕνα τρίτον βέλος ἀναχωρεῖ ἀπὸ τὸ α καὶ καταλήγει εἰς τὸ γ.

Εἰς τὰ σχήματα 21–8 καὶ 21–9 βλέπετε διαγράμματα μεταβατικῶν σχέσεων :



Σχ. 21–8

Διάγραμμα τῆς μεταβατικῆς σχέσεως :
{ (1,2), (2,3), (1,3),
(2,4), (3,4), (1,4) }



Σχ. 21–9

Διάγραμμα τῆς μεταβατ. σχέσεως :
{ (α,β), (β,γ), (α,γ),
(δ,δ), (δ,ε), (ζ,η), (η,η),
(θ,θ), (θ,ι), (ι,θ), (ι,ι), (κ,λ) }

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

53) Νὰ εὕρετε : I) τὸ πεδίον ὁρισμοῦ, II) τὸ πεδίον τῶν τιμῶν, III) τὸ βασικὸν σύνολον καὶ IV) ποία εἶναι ἡ συνάρτησις, εἰς τὰς ἀκολούθους σχέσεις :

α) R $= \{ (3,9), (5,15), (7,21), (9,27) \}$

β) $R_1 = \{ (0,1), (1,0), (1,1), (0,0) \}$

γ) $R_2 = \{ (2,3), (3,2), (2,2), (3,4) \}$

δ) $R_4 = A^2$, ὅπου $A = \{ 0,2,-4 \}$

ε) $R_5 = \{ (3,2), (4,3), (5,4), (6,5) \}$.

Μήπως ἠμπορεῖτε νὰ εὕρετε καὶ τὴν συνθήκην εἰς τὰς σχέσεις R καὶ R_5;

54) Εἰς τὸ σύνολον Z, τῶν ἀκεραίων τῆς Ἀλγέβρας, καὶ μὲ πεδίον ὁρισμοῦ τὸ σύνολον $\Pi = \{ 1,3,9,12 \}$ νὰ καθορίσετε μὲ ἀναγραφὴν τῶν ζευγῶν, ποὺ τὰς ἀποτελοῦν, τὰς σχέσεις :

α) $R = \{ (x,\psi) \,/\, \psi = x \}$, β) $R_1 = \{ (x,\psi) \,/\, \psi = x - 5) \}$.

55) Νὰ σχεδιάσετε διαγράμματα, πίνακας διπλῆς εἰσόδου καὶ γεωμετρικὰς παραστάσεις των διὰ τὰς ἀκολούθους σχέσεις :

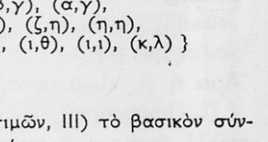
α) $R = \{ (2,3), (3,2), (4,3), (3,4), (1,2), (2,1) \}$

β) $F = \{ (x,\psi) \,/\, \psi = 4x \}$ μὲ $x,\psi \in N$, ὅταν $\Pi = \{ 1,2,3,4, \}$

γ) $R_2 = \{ (0,0), (1,1), (2,2), (3,3), (4,4) \}$

δ) $R_3 = \{ (3,2), (4,3), (4,2), (5,4), (5,3), (5,2), (6,5)$
$(6,4), (6,3), (6,2) \}$.

Ποῖαι ἀπὸ τὰς ἀνωτέρω σχέσεις εἶναι συναρτήσεις ;



Σχ. 21–10

56) Τὸ διάγραμμα μιᾶς σχέσεως εἶναι ὅπως τὸ βλέπετε εἰς τὸ Σχ. 21–10.

α) Ἡ σχέσις εἶναι συνάρτησις ἢ ὄχι καὶ πῶς διακρίνεται τοῦτο ἀπὸ τὸ διάγραμμα ;

β) Νὰ παραστήσετε τὴν σχέσιν μὲ ἀναγραφὴν τῶν ζευγῶν, ποὺ τὴν ἀποτελοῦν.

57) Δίδονται τὰ σύνολα :

$$A = \{ (1,2,3,4,5,6 \}$$

καὶ $B = \{ 1,2,3 \}$

καὶ ζητεῖται νὰ καθορισθῇ μὲ ἀναγραφὴν τῶν στοιχείων της ἡ σχέσις :
$R = \{ (x,y) \, / \, x \in A$ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ $y \in B \}$.

58) Ἕνα σύνολον προσώπων $E = \{ \alpha,\beta,\gamma,\delta \}$ εἶναι γραμμένα εἰς ἕνα κατάλογον μὲ αὐτὴν τὴν σειράν. Εἰς τὸ σύνολον αὐτὸ ζητεῖται α) νὰ καθορίσετε μὲ ἀναγραφὴν τῶν στοιχείων της τὴν σχέσιν : $R = \{ (x,y) \, / \, x$ «δείχνει» $y \}$ μὲ τὴν ἔννοιαν ὅτι τὸ κάθε πρόσωπον δείχνει αὐτούς, ποὺ ἕπονται αὐτοῦ εἰς τὸν κατάλογον.

β) Νὰ κάμετε τὸ διάγραμμα καὶ πίνακα διπλῆς εἰσόδου τῆς σχέσεως.

γ) Νὰ ἐξετάσετε ἂν ἡ σχέσις εἶναι συνάρτησις ἢ ὄχι.

59) Εἰς τὸ ὡς ἄνω σύνολον προσώπων Ε, α) νὰ ὁρισθῇ μὲ ἀναγραφὴν τῶν στοιχείων της ἡ σχέσις :

$R_1 = \{ (x,\psi) \, / \, x$ ταυτίζεται μὲ $y \}$

β) νὰ ἐξετασθῇ ἂν ἡ σχέσις εἶναι συνάρτησις

γ) νὰ ἐξετασθῇ ἂν ἡ σχέσις εἶναι ἀνακλαστικὴ

δ) νὰ κάμετε τὸ διάγραμμα τῆς R_1

60) Νὰ ἐξετασθῇ ἂν ἡ σχέσις :

$$R = \{ (x,\psi) \, / \, x \perp \psi \}$$

εἰς τὸ σύνολον Ε, τῶν εὐθειῶν ἑνὸς ἐπιπέδου, εἶναι ἢ ὄχι συμμετρική. (Ἡ R λέγεται σχέσις καθετότητος).

61) Νὰ ἐξετασθῇ ἂν ἡ σχέσις «...διαιρέτης τοῦ...» (*) (ἐννοοῦμεν τὴν σχέσιν μὲ συνθήκην τὴν x διαιρέτης τοῦ ψ») εἰς τὸ σύνολον Ν, τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, εἶναι ἢ ὄχι ἀνακλαστική.

62) Νὰ ἐξετάσετε ἂν εἶναι ἢ ὄχι ἀνακλαστικαὶ αἱ σχέσεις :

$R_1 = \{ (2,2), (3,3), (2,3), (4,4), (2,4) \}$

$R_2 = \{ (1,1), (1,2), (2,2), (3,4), (4,4) \}$

$R_3 = \{ (2,2), (2,3), (3,4), (3,3), (3,6), (4,4), (4,8), (8,8) \}$.

63) Νὰ ἐξετάσετε ἂν ἡ σχέσις «μικρότερος ἢ ἴσος τοῦ» (ἐννοοῦμεν τὴν σχέσιν μὲ συνθήκην τὴν «$x \leqslant y$») εἰς τὸ σύνολον Ν, τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, εἶναι ἢ ὄχι ἀνακλαστική. Ἐπίσης ἂν εἶναι μεταβατική.

64) Νὰ ἐξετάσετε ἂν εἶναι ἢ ὄχι συμμετρικαὶ αἱ σχέσεις :

α) $R_1 = \{ (\alpha,\alpha), (\alpha,\beta), (\beta,\alpha), (\beta,\beta) \}$

β) $R_2 = \{ (0,0), (1,-1), (-1,1), (1,2), (2,1), (2,2) \}$

γ) $R_3 = \{ (1,2), (2,1), (3,3), (4,3), (3,5) \}$

65) Νὰ ἐξετάσετε ἂν ἡ σχέσις :

$R = (x,\psi) \, / \, x$ παραπληρωματικὴ τῆς $\psi \}$

εἰς τὸ σύνολον Κ, τῶν κυρτῶν γωνιῶν, εἶναι ἢ ὄχι συμμετρική.

66) Νὰ ἐξετάσετε ἂν ἡ σχέσις $R_2 = \{ (0,0), (0,1), (1,0), (1,2), (2,1), (1,1), (2,2) \}$ εἶναι συγχρόνως ἀνακλαστικὴ καὶ συμμετρική.

67) Εἰς βασικὸν σύνολον τὸ σύνολον $\mathscr{P}$ (Α), τῶν ὑποσυνόλων ἑνὸς συνόλου Α, νὰ ἐξετάσετε ἂν ἡ σχέσις $R = \{ (x,\psi) \, / \, x \subseteq \psi \}$ εἶναι ἢ ὄχι ἀνακλαστική. Ἐπίσης ἂν εἶναι συμμετρικὴ ἢ μεταβατική.

68) Νὰ ἐξετάσετε ἂν αἱ ἀκόλουθοι σχέσεις εἶναι ἢ ὄχι μεταβατικαί ;

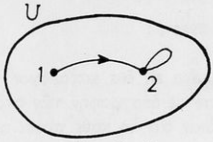
α) $R_1 = \{ (1,2), (2,3), (1,3), (3,3) \}$

β) $R_2 = \{ (\alpha,\beta), (\beta,\gamma), (\beta,\beta), (\gamma,\gamma), (\alpha,\gamma), (\alpha,\delta), (\delta,\alpha), (\delta,\delta), (\alpha,\alpha) \}$

γ) $R_3 = \{ (1,2), (2,3), (1,3), (3,4), (1,4) \}$

(*) Εἰς μίαν σχέσιν δίδομεν συνήθως τὸ ὄνομα τῆς συνθήκης της, ἐπειδὴ ἀπὸ αὐτὴν καθορίζεται τὸ σύνολον τῶν ζευγῶν, ποὺ ἀποτελοῦν τὴν σχέσιν.

69) Εἰς τὸ σύνολον $U = \{2,14,70,210\}$ νὰ ἐξετάσετε. ἂν ἡ σχέσις $R = \{(x,\psi) \,/\, x$ διαιρέτης τοῦ $\psi\}$ εἶναι ἢ ὄχι μεταβατική. Νὰ ἐξετάσετε ἐπίσης ἂν ἡ R εἶναι ἢ ὄχι ἀνακλαστικὴ καὶ συμμετρική.



Σχ. 21–11

70) Εἰς τὸ σύνολον U τῶν ἀνδρῶν ἑνὸς χωρίου νὰ ἐξετάσετε ἂν ἡ σχέσις $R = \{(x,\psi) \,/\, x$ ἀδελφὸς τοῦ $\psi\}$ εἶναι ἢ ὄχι μεταβατική. Μήπως ἡ σχέσις εἶναι καὶ ἀνακλαστικὴ ἢ συμμετρική;

71) Εἰς τὸ Σχ. 21–11 βλέπετε τὸ διάγραμμα μιᾶς σχέσεως R. Νὰ συμβολίσετε μὲ ἀναγραφὴν τῶν στοιχείων της τὴν σχέσιν καὶ νὰ ἐξετάσετε ἂν εἶναι μεταβατική.

22. ΣΧΕΣΙΣ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑΣ ΕΙΣ ΣΥΝΟΛΟΝ U.

Εἴδαμεν εἰς τὰ προηγούμενα σχέσεις, ἀπὸ τὰς ὁποίας ἄλλαι εἶναι ἀνακλαστικαί, ἄλλαι συμμετρικαί, ἄλλαι μεταβατικαί, ἄλλαι ἀνακλαστικαὶ καὶ συμμετρικαὶ (*)κ.τ.λ.

Ὑπάρχουν ὅμως σχέσεις, αἱ ὁποῖαι εἶναι συγχρόνως ἀνακλαστικαί, συμμετρικαὶ καὶ μεταβατικαί. Αἱ σχέσεις αὐταὶ λέγονται **σχέσεις ἰσοδυναμίας.**

Παράδειγμα 1ον. Δίδεται ἕνα σύνολον μαθητῶν $M = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta\}$ καὶ ζητεῖται νὰ ἐξετασθῇ ἂν ἡ σχέσις $R = \{(x, \psi) \,/ x$ ἔχει αὐτὸ τὸ ἀνάστημα μὲ τὸν $\psi\}$ εἶναι ἢ ὄχι **σχέσις ἰσοδυναμίας.**

Ἀπάντησις. Πρῶτον ἡ σχέσις εἶναι ἀνακλαστική, διότι κάθε μαθητὴς ἔχει τὸ ἴδιον ἀνάστημα μὲ τὸν ἑαυτόν του καὶ ἑπομένως τὰ ζεύγη (α,α), (β,β), (γ,γ), (δ,δ), $(\varepsilon,\varepsilon)$, (ζ,ζ), ἀνήκουν εἰς τὴν σχέσιν R.

Δεύτερον, ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι ἕνας μαθητὴς α ἔχει τὸ αὐτὸ ἀνάστημα μὲ τὸν β, τότε καὶ ὁ β ἔχει τὸ αὐτὸ ἀνάστημα μὲ τὸν α καὶ ἑπομένως ἂν $(\alpha, \beta,) \in R$, τότε $(\beta, \alpha) \in R$. Ἡ σχέσις ἑπομένως εἶναι συμμετρική.

Τρίτον, ἐὰν ἕνας μαθητὴς α ἔχῃ τὸ αὐτὸ ἀνάστημα μὲ τὸν β καὶ ὁ β τὸ αὐτὸ ἀνάστημα μὲ τὸν ε, τότε καὶ ὁ α ἔχει τὸ αὐτὸ ἀνάστημα μὲ τὸν ε, δηλαδὴ $(\alpha, \beta) \in R$ καὶ $(\beta, \varepsilon) \in R \Rightarrow (\alpha, \varepsilon) \in R$. Ἄρα ἡ σχέσις εἶναι μεταβατική. Ἡ σχέσις λοιπὸν R εἶναι σχέσις ἰσοδυναμίας.

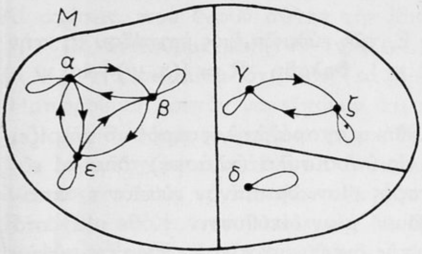
Ἀξιοπαρατήρητον εἶναι ὅτι ἡ συνθήκη «ἔχει τὸ αὐτὸ ἀνάστημα μέ» διαμερίζει τὸ σύνολον (**) M εἰς ὑποσύνολα (κλάσεις), καθένα ἀπὸ τὰ ὁποῖα περιλαμβάνει τοὺς μαθητάς, ποὺ ἔχουν τὸ αὐτὸ ἀνάστημα μεταξύ των.

Ἐὰν π.χ. ὑποθέσωμεν ὅτι οἱ μαθηταὶ α, β, ε ἔχουν ἀνάστημα 1,80 m, οἱ γ, ζ ἔχουν ἀνάστημα 1,75 m καὶ ὁ δ 1,65 m, τότε θὰ ἔχωμεν διαμερισμὸν τοῦ M εἰς τρεῖς κλάσεις, τὰς $\{\alpha, \beta, \varepsilon\}$, $\{\gamma, \zeta\}$, $\{\delta\}$.

(*) Δὲν εἶναι ἀπαραίτητον μία σχέσις νὰ εἶναι ἀνακλαστικὴ εἴτε συμμετρικὴ εἴτε μεταβατική. Ἡ σχέσις π.χ. $R = \{(1,2),\ (5,7),\ (2,16)\}$ δὲν εἶναι οὔτε ἀνακλαστική, οὔτε συμμετρική, οὔτε μεταβατική.

(**) Ἡ συνθήκη κάθε σχέσεως ἰσοδυναμίας διαμερίζει τὸ βασικὸν σύνολον.

Εἰς τὸ Σχ. 22–1 βλέπετε τὸ διάγραμμα τῆς σχέσεως R καὶ τὰς κλάσεις,



Σχ. 22 — 1

εἰς τὰς ὁποίας διαμερίζεται τὸ M, αἱ ὁποῖαι ὀνομάζονται **κλάσεις ἰσοδυναμίας.** Ὅπως διακρίνεται εἰς τὸ διάγραμμα (σχ. 22–1) εἶναι δυνατὸν νὰ ἔχωμεν κλάσεις ἰσοδυναμίας μὲ δύο στοιχεῖα ἢ καὶ μὲ ἕνα μόνον στοιχεῖον.

Παράδειγμα 2ον. Νὰ ἐξετασθῇ ἂν ἡ σχέσις $R = \{(1,2), (1,1), (2,1), (2,2), (3,3), (2,3), (3,2), (1,3), (3,1)\}$ εἶναι σχέσις ἰσοδυναμίας.

Ἀπάντησις. Ἔχομεν : $\Pi = \{1,2,3\}$, $T = \{1,2,3\}$, $U = \{1,2,3\}$,

α) Εἰς τὴν σχέσιν ἀνήκουν τὰ ζεύγη (1,1), (2,2), (3,3), ἄρα εἶναι ἀνακλαστική.

β) Ἐὰν ἐναλλάξωμεν τὰ μέλη τῶν ζευγῶν, ποὺ ἀποτελοῦν τὴν R, ἡ σχέσις δὲν μεταβάλλεται· πράγματι ἔχομεν τότε :

$$\{(2,1), (1,1), (1,2), (2,2), (3,3), (3,2), (2,3), (3,1), (1,3)\} = R$$

Ἑπομένως ἡ σχέσις εἶναι συμμετρική.

γ) Ἔχομεν ἀκόμη :

$$\left.\begin{array}{l}(1,2)\in R\\(2,1)\in R\end{array}\right\}\Rightarrow(1,1)\in R \qquad \left.\begin{array}{l}(1,2)\in R\\(2,2)\in R\end{array}\right\}\Rightarrow(1,2)\in R$$

$$\left.\begin{array}{l}(1,2)\in R\\(2,3)\in R\end{array}\right\}\Rightarrow(1,3)\in R \qquad \left.\begin{array}{l}(1,1)\in R\\(1,3)\in R\end{array}\right\}\Rightarrow(1,3)\in R$$

$$\left.\begin{array}{l}(2,1)\in R\\(1,1)\in R\end{array}\right\}\Rightarrow(2,1)\in R \qquad \left.\begin{array}{l}(2,2)\in R\\(2,3)\in R\end{array}\right\}\Rightarrow(2,3)\in R$$

$$\left.\begin{array}{l}(3,3)\in R\\(3,2)\in R\end{array}\right\}\Rightarrow(3,2)\in R \qquad \left.\begin{array}{l}(1,3)\in R\\(3,3)\in R\end{array}\right\}\Rightarrow(1,3)\in R$$

$$\left.\begin{array}{l}(3,2)\in R\\(2,3)\in R\end{array}\right\}\Rightarrow(3,3)\in R \qquad \left.\begin{array}{l}(3,2)\in R\\(2,1)\in R\end{array}\right\}\Rightarrow(3,1)\in R$$

$$\left.\begin{array}{l}(3,1)\in R\\(1,3)\in R\end{array}\right\}\Rightarrow(3,3)\in R \text{ κ.τ.λ.}$$

δηλαδὴ ἡ σχέσις εἶναι καὶ μεταβατική. Ἄρα εἶναι σχέσις ἰσοδύναμίας.

Παράδειγμα 3ον. Γνωρίζομεν ἀπὸ τὴν πρώτην τάξιν ὅτι δύο εὐθεῖαι ε_1 καὶ ε_2 ἑνὸς ἐπιπέδου P λέγονται παράλληλοι, ἐάν, καὶ μόνον ἐάν, ἡ τομὴ των εἶναι τὸ κενὸν σύνολον, δηλαδὴ $\varepsilon_1 // \varepsilon_2 \Leftrightarrow \varepsilon_1 \cap \varepsilon_2 = \varnothing$. Διευρύνοντες τὸν ὁρισμὸν αὐτὸν θὰ λέγωμεν ὅτι δύο εὐθεῖαι ἑνὸς ἐπιπέδου λέγονται παράλληλοι ἐάν, καὶ μόνον ἐάν, ἡ τομὴ των εἶναι τὸ κενὸν σύνολον ἢ συμπίπτουν, δηλαδὴ

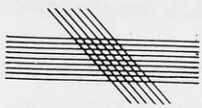
$$\varepsilon_1 \,||\, \varepsilon_2 \Leftrightarrow \varepsilon_1 \cap \varepsilon_2 = \varnothing \text{ ἢ } \varepsilon_1 \equiv \varepsilon_2.$$

Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν λέγομεν ὅτι ἔχομεν εὐθείας **παραλλήλους μὲ στενὴν σημασίαν** εἰς τὴν δευτέραν λέγομεν ὅτι ἔχομεν εὐθείας παραλλήλους μὲ

εὐρεῖαν σημασίαν. Εἰς τὸ ἑξῆς μὲ τὸ σύμβολον $||$ θὰ ἐννοοῦμεν παραλληλίαν μὲ εὐρεῖαν σημασίαν.

Ἂς ἐξετάσωμεν τώρα, εἰς τὸ σύνολον Ε, τῶν εὐθειῶν ἑνὸς **ἐπιπέδου** Ρ, τὴν σχέσιν $R = \{ (x, \psi) / x$ παράλληλος πρὸς $\psi \}$, δηλαδὴ $\mathbf{R = \{(x, \psi) \mid x \parallel \psi \}}$, μὲ $x \subset P$, $\psi \subset P$.

Ἐν πρώτοις παρατηροῦμεν ὅτι ἡ συνθήκη «παράλληλος πρὸς» διαμερίζει τὸ σύνολον Ε, τῶν εὐθειῶν τοῦ ἐπιπέδου, εἰς ὑποσύνολα (κλάσεις)· ὅλαι αἱ εὐθεῖαι τοῦ Ε, αἱ ὁποῖαι εἶναι παράλληλοι πρὸς μίαν ὡρισμένην εὐθεῖαν ε, ἀποτελοῦν **μίαν κλάσιν** ἤ, ὅπως συνήθως λέγομεν, **μίαν διεύθυνσιν.** Κάθε μία ἀπὸ τὰς εὐθείας αὐτὰς εἶναι ἕνας ἀντιπρόσωπος τῆς διευθύνσεως καὶ καθορίζει αὐτὴν (σχ. 22–2).



Σχ. 22 – 2

Τὸ σύνολον $R = \{ (x, \psi), \mid x \parallel \psi)$ εἰς τὸ σύνολον Ε, τῶν εὐθειῶν τοῦ Ρ, εἶναι, βεβαίως, ἕνα ἀπειροσύνολον καὶ ἑπομένως τὴν σχέσιν R δὲν ἠμποροῦμεν νὰ τὴν παραστήσωμεν μὲ ἀναγραφὴν τῶν στοιχείων της. Ἐπειδὴ ὅμως κάθε εὐθεῖα x εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν ἑαυτόν της, τὰ ζεύγη (x_1, x_1), (x_2, x_2), (x_3, x_3), κ.τ.λ. θὰ ἀνήκουν εἰς τὴν σχέσιν R. Ἑπομένως ἡ R εἶναι ἀνακλαστική. Ἐπίσης, ἐπειδή, ἐὰν $x_1 \parallel \psi_1$ τότε καὶ $\psi_1 \parallel x_1$, δηλαδὴ ἐὰν τὸ ζεῦγος (x_1, ψ_1) ἀνήκῃ εἰς τὴν R, τότε καὶ τὸ (ψ_1, x_1) θὰ ἀνήκῃ εἰς τὴν σχέσιν R, δι' αὐτὸ ἡ σχέσις εἶναι συμμετρική.

Τέλος $x \parallel \psi$ καὶ $\psi \parallel z \Rightarrow x \parallel z$ καὶ ἑπομένως διὰ κάθε τριάδα εὐθειῶν x, ψ, z, διὰ τὴν ὁποίαν $(x, \psi) \in R$ καὶ $(\psi, z) \in R$, ἔχομεν καὶ $(x, z) \in R$, δηλαδὴ ἡ R εἶναι καὶ μεταβατική. Εἶναι λοιπὸν ἡ R ἀνακλαστική, συμμετρικὴ καὶ μεταβατική, δηλαδὴ εἶναι σχέσις ἰσοδυναμίας.

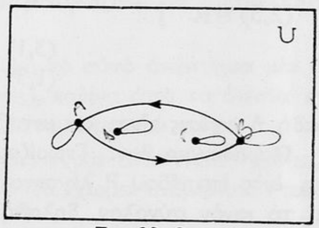
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

72) Νὰ ἐξετάσετε ἂν ἡ σχέσις $R = \{ (x,\psi) / x = \psi \}$ εἰς τὸ σύνολον Ε, τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων, εἶναι ἢ ὄχι σχέσις ἰσοδυναμίας.

73) Νὰ ἐξετάσετε ἂν ἡ σχέσις $R_1 = \{ (x,\psi) / x \sim \psi \}$ εἰς ἕνα σύνολον Ε ἀπὸ σύνολα, εἶναι ἢ ὄχι σχέσις ἰσοδυναμίας.

74) Νὰ ἐξετάσετε ἂν ἡ σχέσις :
$R = \{ (\alpha,\beta), (\beta,\alpha), (\alpha,\alpha), (\beta,\beta), (\beta,\gamma), (\gamma,\beta), (\gamma,\gamma), (\gamma,\alpha), (\alpha,\gamma) \}$ εἶναι ἢ ὄχι σχέσις ἰσοδυναμίας.

75) Νὰ ἐξετάσετε ἂν ἡ σχέσις τῆς ὁποίας τὸ διάγραμμα βλέπετε εἰς τὸ Σχ. 22—3 εἶναι σχέσις ἰσοδυναμίας.



Σχ. 22—3

23. ΑΝΤΙΣΥΜΜΕΤΡΙΚΗ ΣΧΕΣΙΣ ΜΕΣΑ ΕΙΣ ΕΝΑ ΣΥΝΟΛΟΝ U.

Ἔστω ἡ σχέσις $R = \{ (1,1), (1,2), (3,4), (5,2) \}$. Ἔχομεν $\Pi = \{1,3,5 \}$, $T = \{ 1,2,4 \}$, $U = \{1,2,3,4,5\}$. Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ R δὲν περιέχει τὸ ἀντίστροφον ζεῦγος κανενὸς ζεύγους της μὲ μέλη ἀπὸ διαφορετικὰ στοιχεῖα τοῦ U. Αἱ σχέσεις, ποὺ ἔχουν αὐτὴν τὴν ἰδιότητα, λέγονται **ἀντισυμμετρικαί.** Ὥστε :

(R ἀντισυμμετρική) $\Leftrightarrow$ **($x, \psi \in U$, $\chi \neq \psi$ καὶ $(\chi, \psi) \in R \Rightarrow (\psi, x) \notin R$).**

Αὐτὸ σημαίνει ὅτι, ἐὰν $(x, \psi) \in R$ καὶ $(\psi, x) \in R$, τότε θὰ εἶναι $x = \psi$. Ἠμποροῦμεν λοιπὸν νὰ εἴπωμεν ὅτι :

(R ἀντισυμμετρική) $\Leftrightarrow$ **($x, \psi \in U$, $(x, \psi) \in R$ καὶ $(\psi, x) \in R \Rightarrow x = \psi$)**

Κλασσικὸν παράδειγμα ἀντισυμμετρικῆς σχέσεως εἶναι ἡ σχέσις «μεγαλύτερος τοῦ» εἰς τὸ σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, δηλαδὴ ἡ σχέσις : $R = \{ (x, \psi) \mid x > \psi \}$ μὲ $x, \psi \in N$. Πράγματι, ἂν ἕνα ζεῦγος μὲ στοιχεῖα ἀπὸ τὸ N (διάφορα μεταξύ των) ἀνήκει εἰς τὴν R, ὅπως π.χ. τὸ ζεῦγος (5,4), διότι εἶναι $5 > 4$, τὸ ἀντίστροφον ζεῦγος (4,5) δὲν ἀνήκει εἰς τὴν R, διότι δὲν ἰσχύει $4 > 5$.

24. ΣΧΕΣΙΣ ΔΙΑΤΑΞΕΩΣ ΕΙΣ ΣΥΝΟΛΟΝ U.

Μία σχέσις, εἰς ἕνα σύνολον U, λέγεται **σχέσις διατάξεως,** ἐάν, καὶ μόνον ἐάν, εἶναι ἀνακλαστική, ἀντισυμμετρικὴ καὶ μεταβατική.

Παράδειγμα 1ον. Ἡ σχέσις $R = \{ (x, \psi) \mid x$ διαιρέτης τοῦ $\psi \}$ εἰς τὸ σύνολον N, τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, εἶναι μία **σχέσις διατάξεως.**

Πράγματι : 1) πᾶς ἀριθμὸς τοῦ N εἶναι διαιρέτης τοῦ ἑαυτοῦ του· ὁ 1, π.χ. εἶναι διαιρέτης τοῦ 1, ὁ 2 τοῦ 2 κ.ο.κ. καὶ ἑπομένως τὰ ζεύγη (1,1), (2,2), (3,3) κ.τ.λ. ἀνήκουν εἰς τὴν R. Ἄρα ἡ R εἶναι ἀνακλαστική. 2) Ἡ R εἶναι ἀντισυμμετρική, διότι τὸ ζεῦγος π.χ. (4,8) ἀνήκει εἰς τὴν R, ἀλλὰ τὸ (8,4) δὲν ἀνήκει εἰς αὐτήν, διότι ὁ 8 δὲν εἶναι διαιρέτης τοῦ 4. Καὶ γενικῶς, ἂν ἕνα διατεταγμένον ζεῦγος μὲ μέλη ἀπὸ διαφορετικὰ στοιχεῖα τοῦ N ἀνήκῃ εἰς τὴν R, τότε τὸ ἀντίστροφον τοῦ ζεύγους αὐτοῦ δὲν ἀνήκει εἰς τὴν R. 3) Ἡ R εἶναι μεταβατική. Πράγματι, ἐὰν ἕνας φυσικὸς ἀριθμὸς x εἶναι διαιρέτης ἑνὸς ἄλλου ψ καὶ ὁ ψ ἑνὸς τρίτου z, τότε καὶ ὁ x θὰ εἶναι διαιρέτης τοῦ z καὶ ἑπομένως θὰ ἔχωμεν : $(x, \psi) \in R$, $(\psi, z) = R$ καὶ $(x, z) \in R$. Ἡ R λοιπὸν εἶναι ἀνακλαστική, ἀντισυμμετρικὴ καὶ μεταβατική, ἄρα εἶναι σχέσις διατάξεως.

Παράδειγμα 2ον. Ἡ σχέσις $R_1 = \{ (x,\psi) \mid x \leqslant \psi \}$ εἰς τὸ σύνολον N, φυσικῶν ἀριθμῶν, εἶναι σχέσις διατάξεως.

Πράγματι : 1) Διὰ κάθε $x \in N$ εἶναι $x = x$ καὶ ἑπομένως $(x, x) \in R_1$, ἄρα ἡ R_1 εἶναι ἀνακλαστική.

2) Ἐὰν $x, \psi \in N$ καὶ ἰσχύῃ $x < \psi$, τότε δὲν ἰσχύει $\psi < x$, τὸ ὁποῖον σημαίνει ὅτι : ἂν $(x, \psi) \in R_1$, μὲ $x \neq \psi$, τότε $(\psi, x) \notin R_1$. Οὕτω π.χ. $2 < 3$ καὶ ἑπομένως $(2,3) \in R_1$, ἀλλὰ $3 \not< 2$ καὶ ἑπομένως $(3,2) \notin R_1$. Ἄρα ἡ R_1 εἶναι ἀντισυμμετρική.

3) Ἡ R_1 εἶναι μεταβατική : διότι, ἐὰν $x, \psi, z \in N$ καὶ εἶναι $x \leqslant \psi$ καὶ $\psi \leqslant z$, τότε θὰ εἶναι καὶ $x \leqslant z$ καὶ ἑπομένως $(x, \psi) \in R_1$, $(\psi, z) \in R_1$ καὶ $(x, z) \in R_1$. Ἄρα ἡ R_1 εἶναι ἀνακλαστική, ἀντισυμμετρικὴ καὶ μεταβατική, δηλαδὴ εἶναι σχέσις διατάξεως.

25. ΔΙΑΤΕΤΑΓΜΕΝΟΝ ΣΥΝΟΛΟΝ.

Πᾶν σύνολον, εἰς τὸ ὁποῖον ἔχει ὁρισθῆ μία σχέσις διατάξεως R, ὀνομάζεται **διατεταγμένον σύνολον** (μὲ τὴν ἀνωτέρω σχέσιν). Ὥστε τὸ σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, ἐφωδιασμένον μὲ τὴν σχέσιν $R = \{ (x, \psi) \mid x$ διαιρέτης τοῦ $\psi \}$ εἶναι διατεταγμένον σύνολον (§ 24, παράδειγμα 1ον).

Τὸ αὐτὸ σύνολον N ἐφωδιασμένον μὲ τὴν σχέσιν R_1 τοῦ ἀνωτέρω παραδείγματος τῆς § 24, δηλαδὴ μὲ τὴν σχέσιν « $\leqslant$ », εἶναι **ἐπίσης** διατεταγμένον.

Τὸ αὐτὸ σύνολον N δύναται νὰ «διαταχθῆ» καὶ μὲ τὴν σχέσιν $R_3 = \{ (x, \psi) \mid x$ πολλαπλάσιον τοῦ $\psi \}$, διότι καὶ αὐτὴ ἡ σχέσις εἶναι μία σχέσις διατάξεως μέσα εἰς τὸ N (εἶναι δηλαδὴ ἀνακλαστική, ἀντισυμμετρικὴ καὶ μεταβατική).

Ἀπὸ τὰ προηγούμενα συνάγεται ὅτι ἕνα σύνολον εἶναι δυνατὸν νὰ διαταχθῆ κατὰ περισσοτέρους τοῦ ἑνὸς τρόπους.

Παρατηροῦμεν τώρα ὅτι· διὰ τὸ σύνολον N ὡς πρὸς τὴν σχέσιν R_1, δηλαδὴ τὴν σχέσιν « $\leqslant$ », ἰσχύει ἡ ἑξῆς ἰδιότης :

Διὰ πᾶν $x \in N$ καὶ πᾶν $\psi \in N$ ἰσχύει ἢ $x \leqslant \psi$ ἢ $\psi \leqslant x$, δηλαδὴ ἢ μόνον $(x, \psi) \in R$ ἢ μόνον $(\psi, x) \in R$.

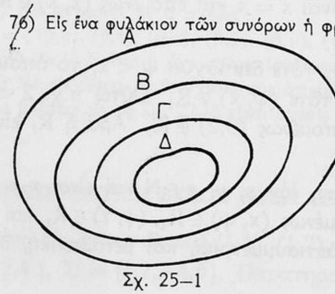
Ἡ αὐτὴ ἰδιότης ὅμως δὲν ἰσχύει διὰ τὸ σύνολον N ὡς πρὸς τὴν R, δηλαδὴ τὴν σχέσιν «x διαιρέτης τοῦ ψ», διότι, ἂν x, ψ εἶναι δύο τυχόντα στοιχεῖα τοῦ N, δὲν ἰσχύει ὁπωσδήποτε ἢ $(x,\psi) \in R$, δηλαδὴ ὁ x εἶναι διαιρέτης τοῦ ψ, ἢ $(\psi,x) \in R$, δηλαδὴ ὁ ψ εἶναι διαιρέτης τοῦ x.

Γενικῶς πᾶν σύνολον U διατεταγμένον ὡς πρὸς μίαν σχέσιν R, μὲ τὴν ἰδιότητα διὰ πᾶν $x \in U$ καὶ πᾶν $\psi \in U$ ἰσχύει ὅτι ἢ $(x, \psi) \in R$ ἢ $(\psi, x) \in R$, λέγεται **ὁλικῶς διατεταγμένον** καὶ ἡ R λέγεται τότε **ὁλικὴ διάταξις**, ἄλλως λέγεται **μερικῶς διατεταγμένον** καὶ ἡ R λέγεται **μερικὴ διάταξις.**

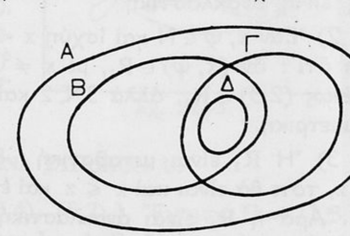
Οὕτω π.χ. ἡ σχέσις R, τοῦ ἀνωτέρω 1ου παραδείγματος τῆς § 24, εἶναι μία μερικὴ διάταξις, διότι ὑπάρχει π.χ. τὸ ζεῦγος (3,5) ποὺ αὐτὸ καὶ τὸ ἀντίστροφόν του (5,3) δὲν ἀνήκουν εἰς τὴν R, διότι οὔτε ὁ 3 εἶναι διαιρέτης τοῦ 5, οὔτε ὁ 5 τοῦ 3 καὶ $3 \in N$, $5 \in N$. Ἡ σχέσις ὅμως R_1 τοῦ 2ου παραδείγματος τῆς § 24, εἶναι μία ὁλικὴ διάταξις, διότι διὰ δύο τυχόντα στοιχεῖα ἀπὸ τὸ N, ἔστω α, β, ἢ θὰ εἶναι $\alpha \leqslant \beta$ καὶ ἑπομένως $(\alpha, \beta) \in R_1$ ἢ θὰ εἶναι $\beta \leqslant \alpha$ καὶ ἑπομένως $(\beta, \alpha) \in R_1$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

76) Εἰς ἕνα φυλάκιον τῶν συνόρων ἡ φρουρὰ ἀποτελεῖται ἀπὸ ἕνα λοχίαν λ, δύο δεκα-



Σχ. 25—1



Σχ. 25—2

νεῖς $δ_1$, $δ_2$ καὶ τρεῖς στρατιώτας $σ_1$, $σ_2$, $σ_3$. Εἰς τὸ σύνολον $U = \{ λ, δ_1, δ_2, σ_1, σ_2\ σ_3 \}$ ἡ συνθήκη «ὁ x ὑπακούει εἰς τὸν ψ» καθορίζει ἕνα σύνολον ζευγῶν, δηλ. μίαν σχέσιν.

α) Νὰ καθορίσετε ἂν ἡ σχέσις αὕτη εἶναι ὁλικὴ ἢ μερικὴ διάταξις καὶ νὰ δικαιολογήσετε τὴν ἀπάντησίν σας.

β) Νὰ κάμετε τὸ διάγραμμα τῆς σχέσεως. Πῶς ἀπὸ τὸ διάγραμμα ἠμποροῦμεν νὰ διακρίνομεν ἂν εἶναι ὁλικὴ ἢ μερικὴ διάταξις;

77) Εἰς τὸ σύνολον $U = \{ A, B, Γ, Δ \}$, ὅπου τὰ A, B, Γ, Δ εἶναι τὰ σύνολα, ποὺ βλέπετε εἰς τὸ διάγραμμα τοῦ Σχ. 25–1, νὰ καθορίσετε μὲ ἀναγραφὴν τῶν στοιχείων της τὴν σχέσιν $R_1 = \{ (x,ψ) / x \subseteq ψ \}$. Νὰ ἐξετάσετε ἂν ἡ σχέσις εἶναι σχέσις διατάξεως καὶ ἂν εἶναι, νὰ ἐξηγήσετε τί διάταξις εἶναι : μερικὴ ἢ ὁλική.

78) Εἰς τὸ σύνολον $U = \{ A, B, Γ, Δ \}$ ὅπου τὰ A,B,Γ,Δ, εἶναι τὰ σύνολα, τῶν ὁποίων τὸ διάγραμμα βλέπετε εἰς τὸ διάγραμμα τοῦ Σχ. 25–2, νὰ καθορίσετε μὲ ἀναγραφὴν τῶν ζευγῶν, ποὺ τὴν ἀποτελοῦν, τὴν σχέσιν

$$R_2 = \{ (x,ψ) / x \subseteq ψ \}.$$

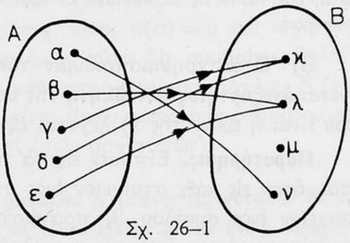
Ἔπειτα νὰ ἐξετάσετε ἂν ἡ σχέσις εἶναι διατάξεως, καί, ἂν εἶναι, τί εἶδους εἶναι καὶ διατί;

ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΙΣ — ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Ἡ ἔννοια τῆς συναρτήσεως, τὴν ὁποίαν ἤδη γνωρίζομεν, παίζει σπουδαῖον ρόλον τόσον εἰς τὰ Μαθηματικά, ὅσον καὶ εἰς τὰς Ἐπιστήμας, ποὺ τὰ χρησιμοποιοῦν. Δι' αὐτὸν τὸν λόγον δίδομεν ἐδῶ μίαν εὐρυτέραν ἀνάπτυξιν διὰ τὴν ἔννοιαν τῆς συναρτήσεως.

26. ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΙΣ ΣΥΝΟΛΟΥ ΕΙΣ ΣΥΝΟΛΟΝ.

Α) Ἔστω ὅτι A καὶ B εἶναι δύο σύνολα διάφορα τοῦ κενοῦ, ὄχι ἀναγκαίως διάφορα μεταξύ των, ἔστω δὲ ὅτι μὲ ἕνα κάποιον τρόπον ἀντιστοιχίζομεν εἰς πᾶν στοιχεῖον $x \in A$ ἕνα (καὶ μόνον ἕνα) στοιχεῖον $ψ \in B$. Ἕνα τρόπον ἀντιστοίχως βλέπετε παραπλεύρως μὲ τὰ βέλη τοῦ διαγράμματος (Σχ. 26–1).



Σχ. 26–1

Εἰς τὴν ἐν λόγῳ **ἀντιστοιχίαν**, ὅπως βλέπομεν, πᾶν στοιχεῖον ἀπὸ τὸ A ἔχει ἕνα (καὶ μόνον) ἀντίστοιχον στοιχεῖον ἀπὸ τὸ B, δηλαδὴ εἰς τὴν ἀντιστοιχίαν αὐτὴν χρησιμοποιοῦντα ὅλα τὰ στοιχεῖα A.

Ἀπὸ τὴν προηγουμένην ἀντιστοιχίαν ὁρίζεται τὸ σύνολον διατεταγμένων ζευγῶν $F = \{ (α,ν), (β,λ), (γ,κ), (δ,κ), (ε,λ). \}$

Τὸ σύνολον F εἶναι μία σχέσις ἀπὸ τὸ A εἰς τὸ B καὶ παρατηροῦμεν εἰς αὐτὴν ὅτι : 1) πᾶν στοιχεῖον τοῦ A παρουσιάζεται ὡς πρῶτον μέλος κάποιου ἀπὸ τὰ διατεταγμένα ζεύγη, ποὺ ἀποτελοῦν τὴν F, 2) πᾶν στοιχεῖον τῆς F εἶναι διατεταγμένον ζεῦγος μὲ πρῶτον μέλος του ἀπὸ τὸ A καὶ μὲ δεύτερον μέλος του τὸ **ἀντίστοιχον** τοῦ πρώτου μέλους του εἰς τὸ B καὶ 3) δὲν ὑπάρχουν δύο ἢ περισσότερα στοιχεῖα τῆς σχέσεως F μὲ τὸ αὐτὸ πρῶτον μέλος. Ὥστε :

Ἡ σχέσις F εἶναι μία συνάρτησις μὲ πεδίον ὁρισμοῦ της τὸ A καὶ μὲ πεδίον τῶν τιμῶν της ἕνα ὑποσύνολον τοῦ B.

Ἡ συνάρτησις αὐτὴ ἠμπορεῖ νὰ συμβολισθῇ ὡς ἑξῆς :

$$F = \{ (x,\psi) \mid x \in A \text{ καὶ } \psi \text{ τὸ εἰς τὸ B ἀντίστοιχον τοῦ } x \}.$$

Πᾶσα συνάρτησις μὲ πεδίον ὁρισμοῦ, ἔστω A, καὶ πεδίον τῶν τιμῶν της ἕνα ὑποσύνολον συνόλου B συνηθίζεται νὰ ὀνομάζεται καὶ **μονοσήμαντος ἀπεικόνισις τοῦ A εἰς τὸ B** ἢ ἁπλῶς **ἀπεικόνισις τοῦ A εἰς τὸ B.**

Πᾶσα μονοσήμαντος ἀπεικόνισις, ἔστω F, ἑνὸς συνόλου A εἰς ἕνα σύνολον B, δηλαδὴ πᾶσα συνάρτησις F μὲ πεδίον ὁρισμοῦ της A καὶ πεδίον τῶν τιμῶν της ἕνα ὑποσύνολον τοῦ B, συνηθίζεται νὰ συμβολίζεται καὶ ὡς ἑξῆς : $F : A \to B$ καὶ διαβάζεται : ἡ F ἀπεικονίζει τὸ σύνολον A εἰς τὸ B.

Ἀντὶ τοῦ γράμματος F ἠμποροῦμεν νὰ χρησιμοποιήσωμεν καὶ ὁποιοδήποτε ἄλλο, συνήθως δὲ φ, σ, g, R κ.τ.λ.

Ἔστω μία τυχοῦσα μονοσήμαντος ἀπεικόνισις $f : A \to B$ καὶ ἔστω ὅτι εἰς τὸ στοιχεῖον, π.χ., $x \in A$ ἀντιστοιχεῖ τὸ $\psi \in B$· τότε τὸ x ὀνομάζεται **ἀρχέτυπον** τοῦ ψ, τὸ δὲ ψ ὀνομάζεται **εἰκὼν** τοῦ x κατὰ τὴν μονοσήμαντον ἀπεικόνισιν f καὶ συμβολίζεται μὲ f (x) (διαβάζεται : ἔφ τοῦ χὶ). Τὸ f (x) λέγεται καὶ **τιμὴ τῆς συναρτήσεως** εἰς τὸ x. Ἠμποροῦμεν τώρα νὰ γράψωμεν πληρέστερον:

$$f : A \to B : x \in A \xrightarrow{f} f(x) \in B$$

ποὺ διαβάζεται ὡς ἑξῆς : ἡ συνάρτησις f ἀπεικονίζει τὸ σύνολον A εἰς τὸ B, ὥστε πᾶν $x \in A$ νὰ ἀπεικονίζεται διὰ τῆς f εἰς τὸ $f(x) \in B$.

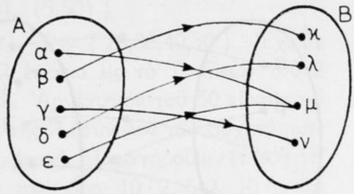
Σημείωσις. Ἐπειδή, ὅπως εἴδαμεν, ἡ ἔννοια ἀπεικόνισις τοῦ A εἰς τὸ B, συμπίπτει μὲ τὴν ἔννοιαν συνάρτησις μὲ πεδίον ὁρισμοῦ τὸ A καὶ πεδίον τῶν τιμῶν της ἕνα ὑποσύνολον τοῦ B, διὰ τοῦτο εἰς τὰ ἑπόμενα οἱ ὅροι **συνάρτησις** καὶ **ἀπεικόνισις** θὰ χρησιμοποιοῦνται ἀδιαφόρως.

B) Ὅταν χρησιμοποιοῦμεν τὸν ὅρον «συνάρτησις» ἡ μεταβλητὴ $x \in A$ λέγεται **ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ** τῆς συναρτήσεως καὶ ἡ μεταβλητὴ $\psi = f(x) \in B$ (ποὺ εἶναι ἡ εἰκὼν τῆς x) λέγεται **ἐξηρτημένη μεταβλητὴ τῆς συναρτήσεως.**

Παρατήρησις. Εἴπαμεν εἰς τὰ προηγούμενα ὅτι ἡ ἀντιστοιχία, ποὺ ὁρίζεται, ὅταν εἰς κάθε στοιχεῖον ἑνὸς συνόλου A ἀντιστοιχίζομεν ἕνα (καὶ μόνον) στοιχεῖον ἑνὸς συνόλου B, πραγματοποιεῖται «κατὰ κάποιον τρόπον». Τρόποι ἀντιστοιχίσεως ὑπάρχουν πολλοί· ἕνας τρόπος εἶναι π.χ. μὲ πίνακα, εἰς τὸν ὁποῖον καταγράφονται αἱ τιμαὶ τῆς μεταβλητῆς x καὶ αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ τῆς μεταβλητῆς ψ. Συνήθως δίδεται συνθήκη (τύπος ἢ πρότασις), μὲ τὴν ὁποίαν προσδιορίζεται τὸ δεύτερον μέλος τοῦ κάθε ζεύγους, ὅταν ὁρισθῇ τὸ πρῶτον, ὅπως θὰ ἴδωμεν κατωτέρω εἰς διάφορα παραδείγματα.

27. ΜΟΝΟΣΗΜΑΝΤΟΣ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΙΣ ΕΝΟΣ ΣΥΝΟΛΟΥ A ΕΠΑΝΩ ΕΙΣ ΣΥΝΟΛΟΝ B.

Εἰς τὰ προηγούμενα (§ 26, A) εἴδαμεν τὴν μονοσήμαντον ἀπεικόνισιν $f : A \to B$. Εἰς αὐτὴν παρατηροῦμεν ὅτι ὑπάρχει στοιχεῖον τοῦ B(τὸ μ), χωρὶς ἀρχέτυπόν του εἰς τὸ Α, δηλαδὴ εἰς αὐτὴν δὲν ἐμφανίζεται κάθε στοιχεῖον τοῦ Β ὡς εἰκὼν κάποιου στοιχείου τοῦ Α. Δι' αὐτὸ λέγομεν ὅτι ἔχομεν ἀπεικόνισιν τοῦ Α **μέσα** εἰς τὸ Β. Ἠμπορεῖ ὅμως νὰ σκεφθῇ κανεὶς καὶ μονοσημάντους ἀπεικονίσεις ἑνὸς συνόλου Α εἰς σύνολον Β, κατὰ τὰς ὁποίας κάθε στοιχεῖον τοῦ Β εἶναι εἰκὼν κάποιου στοιχείου τοῦ Α. Οὕτω εἰς τὸ Σχ. 27–1 βλέπετε μίαν τοιαύτην ἀπεικόνισιν σ μὲ «σύνολον ἀρχετύπων» τὸ Α τοῦ Σχ. 26–1 καὶ «σύνολον εἰκόνων» τὸ Β τοῦ Σχ. 26–1.



$\sigma : A \rightarrow B$

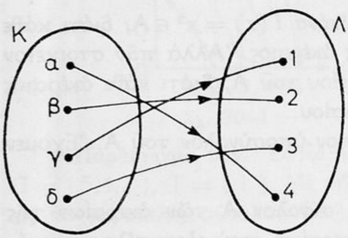
Σχ. 27 – 1.

Κάθε μονοσήμαντος ἀπεικόνισις, ἔστω $f : A \rightarrow B$, εἰς τὴν ὁποίαν πᾶν στοιχεῖον τοῦ Β εἶναι εἰκὼν κάποιου στοιχείου τοῦ Α, λέγεται **μονοσήμαντος ἀπεικόνισις τοῦ Α ἐπάνω εἰς τὸ Β.**

Οὕτως ἡ ἀπεικόνισις, ποὺ παριστάνεται εἰς τὸ Σχ. 27–1, εἶναι μία μονοσήμαντος ἀπεικόνισις τοῦ Α ἐπάνω εἰς τὸ Β.

28. ΑΜΦΙΜΟΝΟΣΗΜΑΝΤΟΣ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΙΣ ΣΥΝΟΛΟΥ Α ΕΠΑΝΩ ΕΙΣ ΣΥΝΟΛΟΝ Β.

Παρατηρήσατε τὴν ἀπεικόνισιν σ εἰς τὸ Σχ. 27–1 καὶ τὴν ἀπεικόνισιν φ εἰς τὸ κατωτέρω Σχ. 28–1. Βλέπετε ὅτι καὶ ἡ σ καὶ ἡ φ εἶναι μονοσήμαντοι ἀπεικονίσεις ἑνὸς συνόλου ἐπάνω εἰς ἄλλο σύνολον. Διαφέρουν ὅμως κατὰ τοῦτο : εἰς τὴν σ ὑπάρχουν στοιχεῖα τοῦ συνόλου τῶν εἰκόνων Β, ποὺ ἔχουν περισσότερα ἀρχέτυπα ἀπὸ ἕνα, π.χ. εἶναι $\sigma(\alpha) = \mu$ καὶ $\sigma(\varepsilon) = \mu$. Εἰς τὴν φ ὅμως αὐτὸ δὲν συμβαίνει, δηλαδὴ εἰς τὴν φ κάθε στοιχεῖον τοῦ συνόλου Λ (τῶν εἰκόνων), εἶναι εἰκὼν μόνον ἑνὸς στοιχείου τοῦ συνόλου Κ (τῶν ἀρχετύπων).



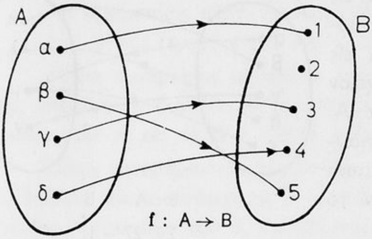
$\varphi : K \rightarrow \Lambda$

Σχ. 28 – 1

Κάθε μονοσήμαντος ἀπεικόνισις ἑνὸς συνόλου Α ἐπάνω εἰς σύνολον Β, εἰς τὴν ὁποίαν συμβαίνει πᾶν στοιχεῖον τοῦ Β νὰ εἶναι εἰκὼν μόνον ἑνὸς στοιχείου τοῦ Α λέγεται ἀμφιμονοσήμαντος ἀπεικόνισις τοῦ Α ἐπάνω εἰς τὸ Β, εἴτε ἀπεικόνισις ἕνα πρὸς ἕνα τοῦ Α ἐπάνω εἰς τὸ Β.

29. ΑΜΦΙΜΟΝΟΣΗΜΑΝΤΟΣ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΙΣ ΣΥΝΟΛΟΥ Α ΜΕΣΑ ΕΙΣ ΣΥΝΟΛΟΝ Β.

Παρατηρήσατε τὴν ἀπεικόνισιν $f: A \to B$ εἰς τὸ Σχ. 29–1. Βλέπετε ὅτι ὅπως καὶ εἰς τὴν ἀπεικόνισιν $\varphi: K \to \Lambda$ (Σχ. 28–1), διάφορα μεταξύ των ἀρχέτυπα ἔχουν διαφόρους μεταξύ των εἰκόνας, ἀλλὰ κάθε στοιχεῖον τοῦ Β δὲν εἶναι εἰκὼν στοιχείου τοῦ Α. Τὸ στοιχεῖον $2 \in B$ π.χ. δὲν εἶναι εἰκὼν κανενὸς στοιχείου τοῦ Α.



Σχ. 29 – 1

Ἔχομεν λοιπὸν τώρα ἀμφιμονοσήμαντον ἀπεικόνισιν τοῦ Α **μέσα** εἰς τὸ Β, καὶ **ὄχι ἐπάνω** εἰς τὸ Β.

30. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΩΝ (ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ).

Παράδειγμα 1ον. Ἄς λάβωμεν ὡς σύνολον Α τὸ σύνολον τῶν ἀκεραίων τῆς Ἀλγέβρας καὶ ὡς σύνολον Β τὸ ἴδιον τὸ Α. Ἄς ἀντιστοιχίσωμεν τώρα εἰς κάθε στοιχεῖον $x \in A$ τὸ x^2, ποὺ εἶναι ἐπίσης στοιχεῖον τοῦ Α. Ὁρίζομεν οὕτω μίαν ἀπεικόνισιν τοῦ Α εἰς τὸ Α :

$$f: A \to A : x \xrightarrow{f} x^2$$

Παρατηροῦμεν ὅτι κάθε $x \in A$ ἔχει μίαν εἰκόνα $f(x) = x^2 \in A$, διότι κάθε ἀκέραιος ἔχει ἕνα τετράγωνον, ποὺ εἶναι ἐπίσης ἀκέραιος. Ἀλλὰ πᾶν στοιχεῖον τοῦ Α δὲν εἶναι εἰκὼν (μὲ τὴν f) κάποιου στοιχείου τοῦ Α, διότι κάθε ἀκέραιος δὲν εἶναι κατ' ἀνάγκην τετράγωνον ἄλλου ἀκεραίου.

Ὥστε τὸ σύνολον τῶν εἰκόνων εἶναι γνήσιον ὑποσύνολον τοῦ Α. Ἔχομεν λοιπὸν ἁπλῶς ἀπεικόνισιν τοῦ Α μέσα εἰς τὸ Α.

Παράδειγμα 2ον Ἄς λάβωμεν πάλιν τὸ σύνολον Α τῶν ἀκεραίων τῆς Ἀλγέβρας καὶ ὡς σύνολον Β τὸ σύνολον τῶν ἀκεραίων, ποὺ εἶναι τέλεια τετράγωνα, δηλαδὴ $A = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$, $B = \{0, 1, 4, 9, 16, 25, \ldots\}$. Τότε μὲ τὴν ἀπεικόνισιν $f: A \longrightarrow B : x \xrightarrow{f} x^2$, κάθε ἀκέραιος τοῦ Β εἶναι εἰκὼν δύο στοιχείων τοῦ Α (π.χ. ὁ $25 \in B$ εἶναι εἰκὼν τοῦ $5 \in A$ καὶ τοῦ $-5 \in A$). Ἔχομεν λοιπὸν τώρα ἀπεικόνισιν τοῦ συνόλου Α ἐπάνω εἰς τὸ Β.

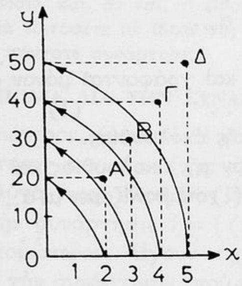
Παράδειγμα 3ον. Ἄς λάβωμεν ὡς σύνολον Α τὸ σύνολον τῶν ἀκεραίων τῆς Ἀριθμητικῆς καὶ ὡς σύνολον Β τὸ σύνολον τῶν ἀκεραίων, οἱ ὁποῖοι εἶναι τέλεια τετράγωνα. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, μὲ τὴν ἀπεικόνισιν $f: A \xrightarrow{f} B : x \to x^2$, κάθε ἀκέραιος τῆς Ἀριθμητικῆς ἀπεικονίζεται εἰς τὸ τετράγωνόν του, δηλαδὴ κάθε ἀκέραιος τοῦ Α ἔχει εἰκόνα τὸ τετράγωνόν του εἰς τὸ Β καὶ κάθε στοιχεῖον τοῦ Β, εἶναι τετράγωνον ἑνὸς μόνον ἀκεραίου ἀπὸ τὸ Α. Ἔχομεν λοιπὸν τώρα ἀμφιμονοσήμαντον ἀπεικόνισιν τοῦ Α ἐπάνω εἰς τὸ Β.

Παράδειγμα 4ον Ἂς λάβωμεν τὴν συνάρτησιν :

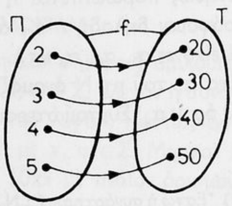
$$f = \{ (2,20),\ (3,30),\ (4,40),\ (5,50) \}$$

Παρατηροῦμεν ὅτι εἶναι : $\Pi = \{ 2,3,4,5 \}$, $T = \{ 20,30,40,50 \}$. Ἔχομεν ἐδῶ μίαν ἀμφιμονοσήμαντον ἀπεικόνισιν τοῦ Π ἐπάνω εἰς τὸ Τ. Εἰκὼν τοῦ 2 εἶναι τὸ 20, δηλαδὴ $f(2) = 20$, $f(3) = 30$ κ.τ.λ. Ἀρχέτυπον τοῦ 50 εἶναι τὸ 5 κ.τ.λ. Μὲ τὴν f ἀπεικονίζεται τὸ πεδίον ὁρισμοῦ της Π (σύνολον τῶν ἀρχετύπων) εἰς τὸ πεδίον τῶν τιμῶν της Τ (σύνολον τῶν εἰκόνων). Παρατηροῦμεν ἐπίσης ὅτι εἰς τὴν τιμὴν $x = 2$ ἀντιστοιχεῖ ἡ τιμὴ $\psi = 20$, ποὺ εἶναι $10 \cdot 2$, δηλ. $10 \cdot x$ καὶ γενικῶς κάθε $x \in \Pi$ ἀπεικονίζεται εἰς τὸ $10 \cdot x \in T$. Ἠμποροῦμεν λοιπὸν νὰ γράψωμεν $f : \Pi \rightarrow T : x \xrightarrow{f} 10x$, ὅπου $x \in \{ 2,3,4,5 \}$.

Εἰς τὸ Σχ. 30–1 βλέπετε διάγραμμα καὶ γεωμετρικὴν παράστασιν τῆς συναρτήσεως f. Ἡ γεωμετρική της παράστασις εἶναι τὸ σημειοσύνολον $\{$ Α,Β, Γ,Δ $\}$. Εἰς τὸ Σχ. 30–2 βλέπετε ἕνα ἄλλο διάγραμμα τῆς f.



Σχ. 30–1



Σχ. 30–2

Παράδειγμα 5ον. Ἔστω ἡ συνάρτησις $\varphi = \{ (5,1),\ (4,1),\ (2,1) \}$. Ἔχομεν $\Pi = \{ 5,4,2 \}$, $T = \{ 1 \}$. Μὲ τὴν φ τὸ πεδίον ὁρισμοῦ της ἀπεικονίζεται ἐπάνω εἰς τὸ μονομελὲς σύνολον $\{ 1 \}$.

Πᾶσα συνάρτησις, ποὺ τὸ πεδίον τῶν τιμῶν της εἶναι μονομελὲς σύνολον λέγεται **σταθερὰ συνάρτησις.** Ἡ $\varphi = \{ (5,1),\ (4,1),\ (2,1) \}$ εἶναι λοιπὸν σταθερὰ συνάρτησις.

Σημείωσις : Εἰς τὰς συναρτήσεις τῶν ἀνωτέρω παραδειγμάτων παρατηροῦμεν ὅτι τὰ πεδία ὁρισμοῦ των καὶ τὰ πεδία τῶν τιμῶν των ἀποτελοῦνται ἀπὸ ἀριθμούς, διὰ τοῦτο συναρτήσεις ὡς αἱ ἀνωτέρω ὀνομάζονται **ἀριθμητικαὶ συναρτήσεις.**

Παράδειγμα 6ον. Ἐὰν ἀντιστοιχίσωμεν εἰς κάθε Κράτος τὴν πρωτεύουσάν του ἔχομεν μίαν ἀπεικόνισιν f τοῦ συνόλου τῶν Κρατῶν εἰς τὸ σύνολον τῶν πρωτευουσῶν των καὶ μάλιστα μίαν ἀμφιμονοσήμαντον ἀπεικόνισιν ἐπάνω. Εἶναι f (Ἑλλὰς) = Ἀθῆναι, f (Γαλλία) = Παρίσι κ.τ.λ. Ἡ Ρώμη εἶναι μὲ τὴν f ἡ εἰκὼν τῆς Ἰταλίας κ.τ.λ.

Παράδειγμα 7ον. Παρατηρήσατε τὰς κατωτέρω ἀντιστοιχίας :

$$1)\quad \begin{array}{cccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & \ldots & \nu, \ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ 1, & 4, & 9, & 16, & \ldots, & \nu^2, \ldots \end{array}$$

$$\text{2)}\quad \begin{array}{ccccc} 1, & 2, & 3, & \ldots, & \nu,\ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ 1, & \frac{1}{2}, & \frac{1}{3}, & \ldots, & \frac{1}{\nu},\ldots \end{array}$$

$$\text{3)}\quad \begin{array}{ccccc} 1, & 2, & 3, & \ldots, & \nu,\ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ 0{,}5, & 0{,}55, & 0{,}555, & \ldots, & 0{,}555\ldots5,\ldots \end{array}$$

Προφανῶς, αἱ ἀνωτέρω ἀντιστοιχίαι ὁρίζουν συναρτήσεις. Εἰς τὰς ἀνωτέρω συναρτήσεις (ἀπεικονίσεις) τὸ πεδίον ὁρισμοῦ εἶναι τὸ σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν. Μία τοιαύτη συνάρτησις λέγεται **ἀκολουθία.**

Γενικῶς ἡ συνάρτησις $\nu \in N \longrightarrow \alpha_\nu \in E$ (1), ὅπου Ε τυχὸν σύνολον ἀντικειμένων μὴ κενόν, δηλαδὴ ἡ ἀπεικόνισις, ποὺ ὁρίζεται ἀπὸ τὴν ἀντιστοιχίαν :

$$\begin{array}{ccccc} 1, & 2, & 3, & \ldots, & \nu,\ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3, & \ldots, & \alpha_\nu,\ldots \end{array}$$

λέγεται **ἀκολουθία στοιχείων τοῦ συνόλου Ε.**

Συνήθως παραλείπεται ἡ πρώτη γραμμὴ καὶ γράφονται μόνον αἱ εἰκόνες.

Γράφομεν δηλαδή : $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_\nu, \ldots$ (1)

Αἱ εἰκόνες α_1, α_2, α_3 κτλ. λέγονται **ὅροι** τῆς ἀκολουθίας. Τὴν εἰκόνα α_ν τοῦ $\nu \in N$ ὀνομάζομεν νυοστὸν ὅρον τῆς ἀκολουθίας καὶ τὸν ν δείκτην τοῦ ὅρου α_ν. Συντομώτερον τὴν ἀκολουθίαν (1) συμβολίζομεν μὲ α_ν, $\nu=1,2,3,..$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

79) Ἔστω ἡ συνάρτησις $f : N_0 \rightarrow N_0 : x \xrightarrow{f} x + 5$.
Νὰ εὕρετε τὴν τιμὴν τῆς συναρτήσεως εἰς τὸ 2, δηλ. νὰ εὕρετε τὸ f (2).
Ἐπίσης τὸ f (0). Τί εἴδους ἀπεικόνισιν ἔχομεν ἐδῶ ;

80) Ἔστω Α τὸ σύνολον τῶν πόλεων τοῦ κόσμου καὶ Β τὸ σύνολον τῶν Κρατῶν τοῦ κόσμου. Ἡ σχέσις g, ποὺ ὁρίζεται ἀπὸ τὴν συνθήκην « $x \in A$ εὑρίσκεται εἰς $\psi \in B$», εἶναι ἢ ὄχι ἀπεικόνισις καὶ διατί ; Τί εἴδους ἀπεικόνισιν ἔχομεν ἐδῶ ; Νὰ εὕρετε τὰ g (Πάτραι) g (Λευκωσία), g (Μιλάνον).

81) Ἔστω Μ τὸ σύνολον τῶν μαθητῶν τῆς τάξεώς μας καὶ Ε τὸ σύνολον τῶν ἐπωνύμων των. Ἐὰν ἀντιστοιχίσωμεν κάθε μαθητὴν εἰς τὸ ἐπώνυμόν του ὁρίζομεν μίαν ἀπεικόνισιν τοῦ Μ εἰς τὸ Ε. Τί εἴδους ἀπεικόνισιν ἔχομεν, ὅταν δὲν ὑπάρχουν συνωνυμίαι ;

82) Νὰ ἐξετάσετε ἄν, ἡ συνθήκη «ὁ x δὲν ἐκτιμᾷ τὸν ψ» εἰς τὸ σύνολον Α, τῶν κατοίκων μιᾶς πόλεως, ὁρίζῃ συνάρτησιν ἢ ἁπλῶς σχέσιν.

83) Νὰ καταρτίσετε πίνακα μερικῶν τιμῶν τῆς συναρτήσεως :

$$\varphi : Q \rightarrow Q : x \xrightarrow{\varphi} 2x + 1 = \psi$$

Νὰ εὕρετε, π.χ., τὰς ἐλλειπούσας τιμὰς εἰς τὸν κάτωθι πίνακα :

τιμαὶ τῆς x	–3,	–2,	–1,	0,	$\frac{1}{2}$,	1,	2,	3,	4,	5,	6,
τιμαὶ τῆς ψ	–5,		–1,		2,		5,				

Νὰ κάμετε ἔπειτα γεωμετρικὴν παράστασιν τῆς φ δι' ὅλα τὰ ἀντίστοιχα ζεύγη. Θὰ παρατηρήσετε ὅτι τὰ ἀντίστοιχα σημεῖα τοῦ κάθε διατεταγμένου ζεύγους εὑρίσκονται ὅλα ἐπάνω εἰς μίαν εὐθεῖαν. Νὰ χαράξετε αὐτὴν τὴν εὐθεῖαν.

Γενικῶς, ὅπως θὰ μάθωμεν εἰς ἀνωτέραν τάξιν, ἡ συνάρτησις $\sigma : x \rightarrow \alpha x + \beta = \psi$ $(\alpha, \beta, \chi \in R)$ ἔχει ὡς γεωμετρικὴν παράστασιν μίαν εὐθεῖαν.

84) Ἐὰν N εἶναι τὸ σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν καὶ N_α τὸ σύνολον τῶν ἀρτίων φυσικῶν ἀριθμῶν, νὰ ἐξετάσετε ἂν ἡ σχέσις $R = \{ (x,\psi) / x \in N$ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ $\psi \in N_\alpha \}$ εἶναι ἀπεικόνισις ἢ ὄχι. Ἐὰν ναί, τί ἀπεικόνισις εἶναι ; Ἐὰν ἀντὶ τοῦ N_α λάβωμεν πάλιν τὸ N τί ἀπεικόνισιν ἔχομεν ;

85) Ἂν A εἶναι τὸ σύνολον τῶν νυμφευμένων χριστιανῶν ἀνδρῶν εἰς τὸν κόσμον καὶ Γ τὸ σύνολον τῶν συζύγων των, ἡ σχέσις :

$R = \{ (x,\psi) / x \in A$ ἔχει ὡς σύζυγον $\psi \in \Gamma \}$ εἶναι ἀπεικόνισις. Διατί ;

Ἂν παραλείψωμεν τὴν λέξιν «χριστιανῶν» τότε ἡ R ἐξακολουθεῖ νὰ εἶναι ἀπεικόνισις ; Διατί ;

Τί εἴδους ἀπεικόνισιν ἔχομεν ὅταν A εἶναι τὸ σύνολον τῶν νυμφευμένων χριστιανῶν ἀνδρῶν εἰς τὸν κόσμον καὶ Γ τὸ σύνολον ὅλων τῶν ὑπανδρευμένων γυναικῶν ;

86) Μὲ τὴν γνωστήν μας, ἀπὸ τὴν Α' τάξιν, κατασκευὴν εἰς κάθε σημεῖον M ἑνὸς ἐπιπέδου p ἀντιστοιχίζομεν τὸ συμμετρικόν του πρὸς κέντρον O σημεῖον M' τοῦ ἰδίου ἐπιπέδου. Ὁρίζομεν λοιπὸν οὕτω ἀπεικόνισιν, ἔστω f, τοῦ p εἰς τὸ p. Δηλ. $f : p \to p : M \xrightarrow{f} M'$. Νὰ ἐξετάσετε ἂν ἡ ἀπεικόνισις εἶναι ἀμφιμονοσήμαντος.

87) Νὰ ἐξετάσετε ἂν ἡ παράλληλος μεταφορὰ εἰς τὸ ἐπίπεδον, κατὰ διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$, ὁρίζῃ ἀπεικόνισιν, καί, ἂν ναί, τί εἴδους ἀπεικόνισις εἶναι.

88) Νὰ ἐξετάσετε μὲ ἰδικά σας παραδείγματα ἂν ἡ ἀντίστροφος f^{-1} μιᾶς συναρτήσεως f εἶναι πάντοτε συνάρτησις.

31. ΣΗΜΕΙΩΜΑ ΔΙΑ ΤΗΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΗΝ ΟΡΟΛΟΓΙΑΝ.

Παλαιότερον, (μερικοὶ δὲ μαθηματικοὶ ἀκόμη καὶ σήμερον) ὁμιλοῦντες διὰ τὴν συνάρτησιν π.χ. $f = \{ (\chi, \psi) | \psi = 10x \}$, μὲ $x, \psi \in \Sigma$, ἔλεγον ἡ συνάρτησις $\psi = 10x$. Αὐτὸ ἴσως εἶναι ἕνας σύντομος τρόπος τοῦ λέγειν. Πάντως ἐννοοῦμεν καὶ τότε τὴν συνάρτησιν $f = \{ (x, \psi) \mid \psi = 10x \}$. μὲ $x, \psi \in \Sigma$. Μερικοὶ ἐκφράζονται συντομώτερον. Λέγουν π.χ. «ἡ συνάρτησις 10x» μὲ πεδίον ὁρισμοῦ τὸ Σ καὶ ἐννοοῦν τὴν συνάρτησιν, ποὺ ὁρίζεται ἀπὸ τὴν συνθήκην $\psi = 10x$, μὲ $x \in \Sigma$.

Αὐτὸ συνηθίζεται πολὺ συχνὰ εἰς τὴν Φυσικήν, ὅπου διαβάζομεν π.χ. ἐκφράσεις ὅπως «ἡ ἀπόστασις, ποὺ διατρέχει τὸ κινητόν, εἶναι συνάρτησις τοῦ χρόνου». Αὐτὸ σημαίνει ὅτι ὑπάρχει συνάρτησις φ τοιαύτη, ὥστε ὁ τύπος $\psi = \varphi(x)$, δίδει τὴν ἀπόστασιν ψ, ποὺ ἀντιστοιχεῖ εἰς χρόνον x.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΕΩΣ

89) Ἐὰν $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \in Q$ καὶ εἶναι $(\alpha, \beta) = (\gamma, \delta)$, τί συμπεραίνετε διὰ τοὺς ἀριθμοὺς $\alpha, \beta, \gamma, \delta$;

90) Πότε εἶναι $(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$;

91) Νὰ καθορίσετε μὲ ἀναγραφὴν τῶν στοιχείων των τὰς σχέσεις :

α) $R = \left\{(x, \psi)/\psi = \dfrac{x}{2}\right\}$ μὲ $\Pi = \{10, 8, 6, 4, 2\}$

β) $R_1 = \{ x, \psi)/\psi = x + 2 \}$ εἰς τὸ σύνολον $U = \{0, 1, 2, 4, 5, 6, 7\}$

γ) $R_2 = \{ x, \psi)/x \geqslant \psi \}$ εἰς τὸ $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

I) Ποῖαι ἀπὸ τὰς σχέσεις αὐτὰς εἶναι συναρτήσεις ;

II) Μήπως ἡ R_2 εἶναι σχέσις διατάξεως ; μερικῆς ; ὁλικῆς ;

III) Νὰ κάμετε τὸ διάγραμμα τῆς R_1.

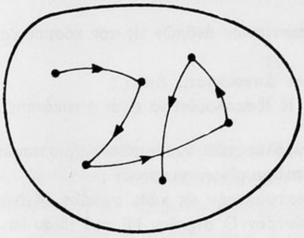
92) Ἔστω $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ ἕνα σύνολον μαθητῶν τῆς Α' τάξεως τοῦ Δημοτικοῦ Σχολείου καὶ $B = \{\delta, \varepsilon\}$ ἕνα σύνολον μαθητῶν τῆς Ε' τάξεως τοῦ Γυμνασίου. Ζητεῖται νὰ ὁρισθοῦν μὲ ἀναγραφὴν τῶν στοιχείων των αἱ σχέσεις :

$R_1 = \{ (x, \psi)/x \in A$ εἶναι μεγαλυτέρας ἡλικίας τοῦ $\psi \in B \}$ καὶ

$R_2 = \{ (x, \psi) / x \in A$ εἶναι μικροτέρας ἡλικίας τοῦ $\psi \in B \}$.

Τί παρατηρεῖτε ;

93) Νὰ κάμετε τρία διαγράμματα : 1) μιᾶς ἀπεικονίσεως ἑνὸς συνόλου Α ἐπάνω εἰς ἄλλο σύνολον Β. 2) Μιᾶς ἀμφιμονοσημάντου ἀπεικονίσεως ἑνὸς συνόλου Γ ἐπάνω εἰς ἄλλο Δ, καὶ 3) μιᾶς ἀμφιμονοσημάντου ἀπεικονίσεως συνόλου Ε μέσα εἰς σύνολον Θ.



Σχ. 31–1

94) Ἕνας μαθητὴς ἄφησεν ἀσυμπλήρωτον τὸ διάγραμμα τῆς σχέσεως« $\leq$ » ὅπως τὸ βλέπετε εἰς τὸ παραπλεύρως σχῆμα. Ἠμπορεῖτε, χωρὶς νὰ γνωρίζετε τοὺς ἀριθμούς, ποὺ εἶναι στοιχεῖα τοῦ συνόλου Α, νὰ ἀποτελειώσετε τὸ διάγραμμα ;

95) Νὰ ἐξετάσετε ἂν ἡ σχέσις $R = \{ (1,1), (2,2), (2,3), (3,4), (3,3), (4,4), (1,4), (2,4), (1,3) \}$ εἶναι σχέσις διατάξεως καί, ἂν εὕρετε ὅτι εἶναι, νὰ ἐξετάσετε τί διάταξις εἶναι, ὁλικὴ ἢ μερική. Νὰ δικαιολογήσετε τὴν ἀπάντησίν σας.

96) Ἂς παραστήσωμεν μὲ F τὴν ἀπεικόνισιν :

$$Z \xrightarrow{F} Z : x \rightarrow x - 7$$

Ζητεῖται : α) Νὰ εὕρετε τὰ $F(2)$, $F(-1)$, $F(10)$.

β) Τὸ ἀρχέτυπον τῆς εἰκόνος $F(x) = 0$

γ) Ἐὰν $F(\alpha) = -9$ ποῖος εἶναι ὁ α.

$(Z = \{ 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \})$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

ΔΕΚΑΔΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΙΣ ΡΗΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

32. ΠΕΡΙΟΔΙΚΟΙ ΔΕΚΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΜΕ ΠΕΡΙΟΔΟΝ ΤΟ 0

Α) Ἔστω ὁ ρητὸς ἀριθμὸς μὲ ἀντιπρόσωπόν του τὸ ἀνάγωγον κλάσμα $\frac{3}{4}$. Γνωρίζομεν ὅτι ὁ ρητὸς αὐτὸς τρέπεται εἰς δεκαδικὸν ἀριθμὸν καὶ εἶναι $\frac{3}{4} = 0{,}75$. Ἐπίσης οἱ ρητοὶ $\frac{3}{2}$, $\frac{17}{8}$(*), $\frac{7}{5}$, $\frac{3}{50}$ τρέπονται εἰς δεκαδικοὺς καὶ εἶναι $\frac{3}{2} = 1{,}5$, $\frac{17}{8} = 2{,}125$, $\frac{7}{5} = 1{,}4$, $\frac{3}{50} = 0{,}06$.

Γενικῶς ὑπάρχουν ρητοὶ ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι τρέπονται εἰς τερματιζομένους δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς εἴτε, ὅπως λέγεται, οἱ ὁποῖοι παριστάνονται μὲ τερματιζομένους δεκαδικοὺς ἀριθμούς.

Εἶναι φανερὸν ὅτι ἕνας ρητός, ἔστω $\frac{\mu}{\nu}$(**), παριστάνεται μὲ ἕνα τερματιζόμενον δεκαδικὸν ἐάν, καὶ μόνον ἐάν, ὑπάρχῃ πολλαπλάσιον τοῦ ν, ποὺ νὰ εἶναι κάποια δύναμις τοῦ 10. Οὕτως ὁ ρητὸς π.χ. $\frac{5}{11}$ δὲν παριστάνεται μὲ τερματιζόμενον δεκαδικὸν ἀριθμόν, διότι δὲν ὑπάρχει πολλαπλάσιον τοῦ 11, ποὺ νὰ εἶναι κάποια δύναμις τοῦ 10.

Β) Ἔστω ὁ ρητὸς $\frac{3}{4}$. Γνωρίζομεν ὅτι εἶναι $\frac{3}{4} = 0{,}75 = 0{,}750 = 0{,}7500 = 0{,}75000\ldots$

Θεωροῦμεν τώρα τὴν ἀκολουθίαν (α_1) : 0,75, 0,750, 0,7500, 0,75000,...

(*) Εἰς αὐτὸ τὸ Κεφάλαιον, ὁσάκις ἀναφέρεται κάποιος ρητὸς ἀριθμός, θὰ λαμβάνωμεν ἀντ' αὐτοῦ τὸ ἀνάγωγον κλάσμα, ποὺ εἶναι ἕνας ἀντιπρόσωπός του.

(**) Ἡ φράσις ὁ ρητὸς $\frac{\mu}{\nu}$ σημαίνει, ὅπου συναντᾶται, ὁ **ρητὸς** μὲ ἀντιπρόσωπόν του τὸ ἀνάγωγον κλάσμα $\frac{\mu}{\nu}$.

Ἡ ($α_1$) ἔχει τὸ ἑξῆς γνώρισμα : **πᾶς ὅρος της εἶναι ἴσος μὲ τὸν πρῶτον της ὅρον (σταθερὰ ἀκολουθία).** Μὲ ἄλλας λέξεις **ἡ διαφορὰ παντὸς ὅρου της ἀπὸ τὸν $\frac{3}{4}$ εἶναι 0.**

Συμφωνοῦμεν τὴν ἀκολουθίαν ($α_1$) νὰ τὴν παριστάνωμεν συντόμως ὡς ἑξῆς : 0,75000... εἴτε, συντομώτερον : $0{,}75\dot{0}$, **συμφωνοῦμεν** δ' ἐπὶ πλέον ἡ παράστασις $0{,}75\dot{0}$ νὰ θεωρῆται ὡς μία ἄλλη παράστασις τοῦ $\frac{3}{4}$ καὶ νὰ ὀνομάζεται **δεκαδικὸς περιοδικὸς ἀριθμὸς μὲ περίοδον τὸ ἐπαναλαμβανόμενον ψηφίον 0**, γράφομεν δὲ $\frac{3}{4} = 0{,}75\dot{0}$.

Ὥστε ὁ ρητὸς $\frac{3}{4}$ ἔχει τὰς ἑξῆς «δεκαδικὰς παραστάσεις» :

1) 0,75 («κοινὸς» δεκαδικὸς ἀριθμός).

2) $0{,}75\dot{0}$ (περιοδικὸς δεκαδικὸς ἀριθμὸς μὲ περίοδον τὸ 0).

Ὅπως εἰργάσθημεν μὲ τὸν $\frac{3}{4}$ ἠμποροῦμεν νὰ ἐργασθῶμεν καὶ μὲ κάθε ρητόν, ὁ ὁποῖος παριστάνεται ὡς «κοινὸς» δεκαδικός. Π.χ.

α) Ἀπὸ τὸν $\frac{3}{2}$ εὑρίσκομεν τὴν παράστασιν : 1,5000..., συντόμως $1{,}5\dot{0}$.

β) Ἀπὸ τὸν $\frac{17}{8}$ τὴν 2,125000..., συντόμως $2{,}125\dot{0}$

γ) Ἀπὸ τὸν $\frac{9}{20}$ τὴν 0,45000..., συντόμως $0{,}45\dot{0}$.

Αἱ παραστάσεις : $1{,}5\dot{0}$, $2{,}125\dot{0}$ κτλ. ὀνομάζονται (ἐπίσης) **δεκαδικοὶ περιοδικοὶ ἀριθμοὶ μὲ περίοδον** τὸ 0.

Ὁ τρόπος, μὲ τὸν ὁποῖον ἕνας ρητός, ποὺ τρέπεται εἰς κοινὸν δεκαδικόν, παριστάνεται ὡς περιοδικὸς δεκαδικὸς ἔγινε φανερὸς ἀπὸ τὰ προηγηθέντα παραδείγματα.

Παρατήρησις. Πᾶς δεκαδικὸς περιοδικὸς μὲ περίοδον τὸ 0 εἶναι παράστασις ἀκριβῶς ἑνὸς ρητοῦ, π.χ. ὁ 4,6000... εἶναι παράστασις τοῦ ρητοῦ, ποὺ παριστάνεται μὲ τὸν κοινὸν δεκαδικὸν 4,6 δηλαδὴ τοῦ $\frac{46}{10} = \frac{23}{5}$. **Ἄλλος ρητὸς μὲ παράστασιν τὸν 4,6000... δὲν ὑπάρχει.**

Ὥστε **πᾶς ρητός, ὁ ὁποῖος τρέπεται εἰς τερματιζόμενον δεκαδικόν, παριστάνεται ἀπὸ ἕνα δεκαδικὸν περιοδικὸν μὲ περίοδον 0 καὶ ἀντιστρόφως κάθε περιοδικὸς μὲ περίοδον τὸ 0 εἶναι παράστασις ἑνὸς μόνον ρητοῦ.**

33. ΠΕΡΙΟΔΙΚΟΙ ΔΕΚΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΜΕ ΠΕΡΙΟΔΟΝ ΔΙΑΦΟΡΟΝ ΤΟΥ 0

Εἴδαμεν ὅτι ὑπάρχουν ρητοί, ποὺ δὲν παριστάνονται ὡς κοινοὶ δεκαδικοὶ ἀριθμοί, ὅπως π.χ. ὁ $\frac{5}{11}$. **Ἐπομένως κάθε τοιοῦτος ρητὸς δὲν παριστάνεται οὔτε** ὡς περιοδικὸς δεκαδικὸς μὲ περίοδον τὸ 0.

Ἂς λάβωμεν τώρα τὸν ρητὸν $\frac{5}{11}$ καὶ ἂς ἐκτελέσωμεν τὴν «**διαίρεσιν**» 5 διὰ 11. Ἔχομεν :

$$\begin{array}{l|l} 50 & 11 \\ \hline \;\;60 & 0,454545\ldots \\ \;\;\;50 & \\ \;\;\;\;60 & \\ \;\;\;\;\;60 & \\ \;\;\;\;\;\;50 & \\ \;\;\;\;\;\;\;60 & \\ \;\;\;\;\;\;\;\;5 & \end{array}$$

Μὲ αὐτὴν τὴν «**τεχνικὴν**» σχηματίζεται εἰς τὴν θέσιν τοῦ πηλίκου ἡ ἀριθμητικὴ παράστασις : 0,45454545..., ποὺ ἔχει ἀπειράριθμα ψηφία. Ἂς σχηματίσωμεν τώρα τὴν ἑξῆς ἀκολουθίαν :

$$(\delta_1) : 0{,}45,\ 0{,}4545,\ 0{,}454545,\ 0{,}45454545, \ldots$$

Παρατηροῦμεν ὅτι εἶναι :

$$\frac{5}{11} - 0{,}45 = \frac{5}{1100} = 0{,}01 \cdot \frac{5}{11}$$
$$\frac{5}{11} - 0{,}4545 = \frac{5}{110.000} = 0{,}0001 \cdot \frac{5}{11}$$
$$\frac{5}{11} - 0{,}454545 = \frac{1}{11000000} = 0{,}000001 \cdot \frac{5}{11}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Δηλαδὴ ὁ α′ ὅρος τῆς (δ_1) διαφέρει ἀπὸ τὸν $\frac{5}{11}$ κατὰ τὸ ἕνα ἑκατοστὸν τοῦ $\frac{5}{11}$, ὁ β′ διαφέρει ἀπὸ τὸν $\frac{5}{11}$ κατὰ τὸ ἕνα δεκάκις χιλιοστὸν τοῦ $\frac{5}{11}$, ὁ γ′ κατὰ τὸ ἕνα ἑκατομμυριοστὸν τοῦ $\frac{5}{11}$ κ.τ.λ., ὁ πεντακοσιοστὸς διαφέρει ἀπὸ τὸν $\frac{5}{11}$ κατὰ 0,00 . . . 01 $\cdot \frac{5}{11}$, ὅπου ὁ 0,00 . . . 01 ἔχει 1000 (!) δεκαδικὰ ψηφία κ.λ.π.

Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ εἴπωμεν ὅτι, **πᾶς ὅρος τῆς (δ_1) εἶναι μία «προσέγγισις» τοῦ $\frac{5}{11}$ καὶ ἡ διαφορὰ αὐτοῦ τοῦ ὅρου ἀπὸ τὸν $\frac{5}{11}$ εἶναι τόσον μικροτέρα (δηλαδὴ ἡ προσέγγισις εἶναι τόσον «καλυτέρα») ὅσον ὁ ὅρος αὐτὸς εἶναι πλέον ἀπομεμακρυσμένος ἀπὸ τὸν πρῶτον ὅρον.**

Ὥστε : **ἂν ἔχωμεν τὴν ἀκολουθίαν (δ_1) εἶναι ὡς νὰ ἔχωμεν τὸν ἴδιον τὸν $\frac{5}{11}$ καὶ δι' αὐτὸν τὸν λόγον θεωροῦμεν τὴν (δ_1) ὡς μίαν ἄλλην παράστασιν τοῦ ρητοῦ $\frac{5}{11}$.**

Συμφωνοῦμεν τὴν ἀκολουθίαν (δ_1) νὰ τὴν παριστάνωμεν συντόμως ὡς ἑξῆς : 0,454545..., συντομώτερον δὲ : $0{,}\dot{4}\dot{5}$.

Συμφωνοῦμεν δ' ἐπὶ πλέον ἡ παράστασις $0{,}\dot{4}\dot{5}$ νὰ θεωρῆται ὡς μία ἄλλη παράστασις τοῦ ρητοῦ $\frac{5}{11}$ καὶ νὰ ὀνομάζεται : δεκαδικὸς περιοδικὸς ἀριθμὸς μὲ περίο-

δον τὸ ἐπαναλαμβανόμενον «τμῆμα ψηφίων» 45, γράφομεν δὲ $\frac{5}{11} = 0,\dot{4}\dot{5}$.

Ἂν ἐργασθῶμεν καθ' ὅμοιον τρόπον μὲ τὸν ρητὸν $\frac{2}{3}$ θὰ φθάσωμεν εἰς τὴν ἀκολουθίαν (δ_2) : 0,6 0,66 0,666 . . .

Θὰ γράψωμεν λοιπὸν καὶ ἐδῶ $\frac{2}{3} = 0,\dot{6}$

Ἀπὸ τὰ προηγούμενα παραδείγματα ὁδηγούμεθα εἰς τὸ ἑξῆς συμπέρασμα:

Ἂν $\frac{\mu}{\nu}$ εἶναι τυχὼν ρητός, ὁ ὁποῖος δὲν παριστάνεται ὡς κοινὸς δεκαδικός, τότε ἡ «διαίρεσις» μ διὰ ν δὲν τερματίζεται καὶ τὰ ψηφία, ποὺ ἐμφανίζονται εἰς τὴν θέσιν τοῦ «πηλίκου», ἀπὸ κάποιαν θέσιν καὶ πέραν ἐπαναλαμβάνονται μὲ τὴν ἰδίαν τάξιν. Ὁρίζεται οὕτω δεξιὰ τῆς ὑποδιαστολῆς ἕνα «τμῆμα ἀπὸ ψηφία» ἐπαναλαμβανόμενον, ὅσας φορὰς θέλομεν, καὶ οὐδέποτε συμβαίνει κάθε ψηφίον αὐτοῦ τοῦ «τμήματος» νὰ εἶναι τὸ 0 ἢ τὸ 9. Ὁ ἀριστερὰ τῆς ὑποδιαστολῆς ἀκέραιος ἰσοῦται μὲ τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀκεραίων μονάδων τοῦ $\frac{\mu}{\nu}$.

Ἡ παράστασις, ἔστω δ, ποὺ ἐμφανίζεται μὲ τὴν «τεχνικὴν» τῆς διαιρέσεως μ διὰ ν εἰς τὴν θέσιν τοῦ «πηλίκου», ὀνομάζεται δεκαδικὸς περιοδικὸς ἀριθμὸς μὲ περίοδον τὸ ἐπαναλαμβανόμενον «τμῆμα ψηφίων», εἶναι δὲ μία ἄλλη παράστασις τοῦ ρητοῦ $\frac{\mu}{\nu}$. Ὁ ἀριστερὰ τῆς ὑποδιαστολῆς ἀκέραιος ὀνομάζεται ἀκέραιον μέρος τοῦ δεκαδικοῦ περιοδικοῦ δ.

Παραδείγματα : Νὰ παρασταθοῦν οἱ ρητοὶ $\frac{6}{7}$, $\frac{328}{2475}$ ὡς περιοδικοὶ δεκαδικοὶ ἀριθμοί.

1ον. Ὁ $\frac{6}{7}$ δὲν παριστάνεται ὡς κοινὸς δεκαδικός. Πράγματι ἔχομεν :

$$\begin{array}{l|l}
60 & 7 \\ \cline{2-2}
\;\,40 & 0,8571428 \\
\;\;\;50 & \\
\;\;\;\;\,10 & \\
\;\;\;\;\;\;30 & \\
\;\;\;\;\;\;\;\;20 & \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;60 & \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;4 & \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\vdots &
\end{array}$$

Ὥστε ὁ $\frac{6}{7}$ παριστάνεται ἀπὸ ἕνα περιοδικὸν δεκαδικὸν καὶ εἶναι $\frac{6}{7} = 0,\dot{8}5714\dot{2}$.

Ἀκέραιον μέρος : 0 $\left(= \text{ἀριθμὸς ἀκεραίων μονάδων τοῦ } \frac{6}{7}\right)$ **περίοδος :** 857142.

2ον. Ὁ $\frac{328}{2475}$ δὲν παριστάνεται ὡς κοινὸς δεκαδικός. Πράγματι ἔχομεν :

$$\begin{array}{r|l} 3280 & 2475 \\ \cline{2-2} 8050 & 0,132525\ldots \\ 6250 & \\ 13000 & \\ 6250 & \\ 1300 & \\ \vdots & \end{array}$$

Ὥστε ὁ $\frac{328}{2475}$ παριστάνεται ἀπὸ ἕνα δεκαδικὸν περιοδικὸν καὶ εἶναι :

$\frac{328}{2475} = 0,13\dot{2}\dot{5}$. Ἀκέραιον μέρος 0, περίοδος 25.

Παρατήρησις. Εἴδαμεν ὅτι :

$$\frac{5}{11} = 0,\dot{4}\dot{5}, \quad \frac{2}{3} = 0,\dot{6}, \quad \frac{6}{7} = 0,\dot{8}\dot{5}\dot{7}\dot{1}\dot{4}\dot{2}, \quad \frac{2475}{328} = 0,13\dot{2}\dot{5}.$$

Εἰς τὰ τρία πρῶτα παραδείγματα **ἡ περίοδος ἀρχίζει ἀμέσως μετὰ τὴν ὑποδιαστολήν,** εἰς τὸ τέταρτον ὅμως ἐμφανίζεται τὸ τμῆμα 13 καὶ ἀμέσως ἔπειτα ἀρχίζει ἡ περίοδος. Ὥστε : **ἡ περίοδος δὲν ἐμφανίζεται πάντοτε ἀμέσως, μετὰ τὴν ὑποδιαστολήν.**

34. ΓΕΝΙΚΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΔΕΚΑΔΙΚΟΥ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ.

Α) Ἔστω α ἕνας (ἀπόλυτος) ἀκέραιος καὶ τυχοῦσα ἀκολουθία ψηφίων : (ψ) : $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \ldots, \psi_\nu, \ldots$

Σχηματίζομεν τὴν ἀκολουθίαν κοινῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν :

(α) : $\alpha, \psi_1 \quad \alpha,\psi_1\psi_2 \quad \alpha,\psi_1\psi_2\psi_3 \quad \ldots \quad \alpha,\psi_1\psi_2\ldots\psi_\nu \quad \ldots$

συμφωνοῦμεν δὲ νὰ τὴν παριστάνομεν συντόμως ὡς ἑξῆς :

(β) : $\alpha, \psi_1\psi_2\ldots\psi_\nu\ldots$

Ὁρισμὸς 1. Πᾶσα παράστασις, ὅπως ἡ (β), διὰ τὴν ὁποίαν ἰσχύει ἡ ἰδιότης ὅτι : ἀμέσως μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴν εἴτε ἔπειτα ἀπὸ κάποιο ψηφίον μετὰ ἀπὸ αὐτὴν καὶ πέραν, ἐμφανίζεται ἕνα «τμῆμα ψηφίων» ἐπαναλαμβανόμενον διαρκῶς, χωρὶς νὰ ἐμφανίζωνται ἄλλα ψηφία ἐκτὸς ἀπὸ τὰ ψηφία αὐτοῦ τοῦ τμήματος, ὀνομάζεται : δεκαδικὸς περιοδικὸς ἀριθμός. Τὸ ἐπαναλαμβανόμενον τμῆμα ψηφίων ὀνομάζεται : περίοδος τοῦ δεκαδικοῦ περιοδικοῦ.

Ὁ ἀριστερὰ τῆς ὑποδιαστολῆς ἀκέραιος ὀνομάζεται : **ἀκέραιον μέρος τοῦ δεκαδικοῦ περιοδικοῦ ἀριθμοῦ.**

Ὁρισμὸς 2. Ἕνας δεκαδικὸς περιοδικὸς ἀριθμὸς ὀνομάζεται : **ἁπλοῦς,** ἐάν, καὶ μόνον ἐάν, **ἡ περίοδός του ἀρχίζῃ ἀμέσως μετὰ τὴν ὑποδιαστολήν, μεικτός,** ἐάν, καὶ μόνον ἐάν, **ἡ περίοδός του δὲν ἀρχίζῃ ἀμέσως μετὰ τὴν ὑποδιαστολήν.** Τὸ μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴν καὶ πρὸ τοῦ πρώτου τμήματος περιόδου τμῆμα ψηφίων ὀνομάζεται : **μὴ περιοδικὸν μέρος τοῦ δεκαδικοῦ περιοδικοῦ ἀριθμοῦ.**

Παραδείγματα :

1ον) 2,777...7..., συντόμως : $2,\dot{7}$, εἶναι ἁπλοῦς δεκαδικὸς περιοδικός.

2ον) 10,3838...38..., συντόμως : $10,\dot{3}\dot{8}$ εἶναι ἁπλοῦς δεκαδικὸς περιοδικός.

3ον) 7,1344...4,..., συντόμως : $7,13\dot{4}$ εἶναι μεικτὸς δεκαδικὸς περιοδικός.

4ον) 0,750...0... : συντόμως : $0,75\dot{0}$ εἶναι μεικτὸς δεκαδικὸς περιοδικός.

Ἀπὸ ὅσα εἴδαμεν εἰς τὰ προηγούμενα προκύπτουν τὰ ἑξῆς :

1) Πᾶς δεκαδικὸς περιοδικὸς εἶναι παράστασις ἑνὸς μόνον ρητοῦ.

2) Πᾶς ρητὸς ρ παριστάνεται κατὰ ἕνα τουλάχιστον τρόπον(*) ὡς δεκαδικὸς περιοδικός.

Β) Παρατηροῦμεν ἐπὶ πλέον τὰ ἑξῆς :

1) Ἔστω ἕνας ἁπλοῦς δεκαδικὸς περιοδικὸς δ μὲ περίοδον διάφορον ἀπὸ τὸ 0. Τότε ὁρίζεται ρητός, ἔστω ρ, ἀπὸ τὸν ὁποῖον, μὲ τὴν γνωστήν μας τεχνικήν, εὑρίσκεται ὁ δ, δηλαδὴ αὐτὸς ὁ δ εἶναι τότε μία παράστασις τοῦ ρ.

Πράγματι ἔστω $\delta = 1,\dot{4}\dot{5}$. Λαμβάνομεν τὸν ρητόν : $\rho = 1 + \frac{45}{99} = \frac{16}{11}$ καὶ παρατηροῦμεν ὅτι, μὲ τὴν γνωστήν μας μέθοδον, εὑρίσκεται ὅτι ὁ $\frac{16}{11}$ ἔχει ὡς μίαν ἄλλην παράστασίν του, τὸν $1,\dot{4}\dot{5}$. Ἀπὸ τὸ παράδειγμα αὐτὸ καὶ ἄλλα ὅμοιά του, συνάγεται ὁ ἑπόμενος κανών :

Κανὼν 1. Πᾶς ἁπλοῦς δεκαδικὸς περιοδικὸς δ, μὲ περίοδον διάφορον ἀπὸ τὸ 0, δύναται νὰ προκύψῃ ὡς μία παράστασις τοῦ ρητοῦ, ὁ ὁποῖος εἶναι τὸ ἄθροισμα : ἀκέραιον μέρος τοῦ δ σὺν τὸ κλάσμα μὲ ἀριθμητὴν τὴν περίοδον τοῦ δ καὶ παρονομαστὴν τὸν ἀκέραιον, ποὺ προκύπτει ἀπὸ τὴν περίοδον, ἂν κάθε ψηφίον της τραπῇ εἰς 9.

2) Ἔστω τώρα ἕνας μεικτὸς δεκαδικὸς περιοδικὸς δ μὲ περίοδον διάφορον ἀπὸ τὸ 0. Τότε ὁρίζεται ρητός, ἔστω ρ ἀπὸ τὸν ὁποῖον, μὲ τὴν γνωστήν μας τεχνικήν, εὑρίσκεται ὁ δ, δηλαδὴ αὐτὸς ὁ δ εἶναι τότε μία ἄλλη παράστασις τοῦ ρ.

Πράγματι ἔστω $\delta = 2,3\dot{2}\dot{7}$. Μεταθέτομεν τὴν ὑποδιαστολὴν πρὸ τοῦ πρώτου ψηφίου τῆς περιόδου, δηλαδὴ ἐδῶ κατὰ μίαν θέσιν, καὶ ἔχομεν τὸν ἁπλοῦν περιοδικὸν $23,\dot{2}\dot{7}$ ὁ ὁποῖος κατὰ τὸν κανόνα 1 εἶναι μία παράστασις τοῦ ρητοῦ: $23 + \frac{27}{99} = 23 + \frac{3}{11} = \frac{256}{11}$, τοῦτον δὲ διαιροῦμεν διὰ τοῦ $10^1 = 10$. Ὁ ρητὸς $\rho = \frac{256}{110} = \frac{128}{55}$, παρατηροῦμεν ὅτι, μὲ τὴν γνωστήν μας τεχνικήν, μᾶς δίδει τὸν $\delta = 2,3\dot{2}\dot{7}$.

(*) Ἐὰν θεωρήσωμεν καὶ περιοδικοὺς δεκαδικοὺς μὲ περίοδον τὸν 9, τότε :

$$\frac{3}{4} = 0,75\dot{0}, \text{ ἀλλὰ καὶ } \frac{3}{4} = 0,74\dot{9}.$$

Ἀπὸ τὸ παράδειγμα αὐτὸ καὶ ἄλλα ὅμοιά του συνάγεται ὁ ἑπόμενος κανών:

Κανὼν 2. Πᾶς μεικτὸς δεκαδικὸς περιοδικὸς δ, περιόδου διαφόρου τοῦ 0, προκύπτει ὡς μία παράστασις τοῦ ρητοῦ, ὁ ὁποῖος ὁρίζεται ὡς ἑξῆς: μεταθέτομεν τὴν ὑποδιαστολὴν τοῦ δ κατὰ τόσας θέσεις, ὥστε αὕτη νὰ εὑρεθῇ ἀκριβῶς πρὸ τοῦ πρώτου ψηφίου τῆς πρώτης περιόδου· προκύπτει τότε ἕνας ἁπλοῦς δεκαδικὸς περιοδικός, ἔστω ὁ δ΄. Μὲ τὸν κανόνα 1 ὁρίζομεν ἀπὸ τὸν δ΄ ἕνα ρητόν, ἔστω ρ΄. Τέλος διαιροῦμεν τὸν ρ΄ μὲ τὸ 10 ἢ 100 ἢ 1000 κ.τ.λ. ἂν ἡ ὑποδιαστολὴ τοῦ δ μετετέθη κατὰ μίαν, δύο, τρεῖς θέσεις κ.τ.λ.

3) **Ὥστε: διὰ πάντα (ἁπλοῦν ἢ μεικτὸν) δεκαδικὸν περιοδικόν, ἔστω δ, ὑπάρχει ρητός, τοῦ ὁποίου ὁ δ εἶναι μία ἄλλη παράστασις.**

4) Γενικῶς εἶναι δυνατὸν νὰ δικαιολογήσωμεν ὅτι: **διὰ πάντα δεκαδικὸν περιοδικὸν δ ὑπάρχει ἕνας καὶ μόνον ρητὸς ρ τοῦ ὁποίου ὁ δ εἶναι μία ἄλλη παράστασις.**

Πράγματι (*) ἔστω δ ἕνας δεκαδικὸς περιοδικός. Εὑρίσκομεν πρῶτον τὸν ρητόν, ποὺ ὁρίζεται ἀπὸ τὸν δ μὲ τὸν κανόνα 1 καὶ μὲ τὸν κανόνα 2, ἔστω δὲ ὅτι αὐτὸς εἶναι ὁ ρ. Γνωρίζομεν ὅμως ὅτι: ὁ δ εἶναι σύντομος παράστασις μιᾶς ἀκολουθίας ἔστω τῆς (δ): $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots, \delta_\nu, \ldots$ καὶ ὅτι μὲ τοὺς ὅρους τῆς (δ) δυνάμεθα νὰ προσεγγίσωμεν, ὅσον θέλομεν, τὸν ρ. Δὲν εἶναι λοιπὸν δυνατὸν νὰ ὑπάρχῃ καὶ ἄλλος ρητὸς $\rho' \neq \rho$, τὸν ὁποῖον νὰ δυνάμεθα νὰ προσεγγίσωμεν ὅσον θέλομεν, μὲ τοὺς ὅρους τῆς ἰδίας ἀκολουθίας (δ).

5) Τίθεται τώρα τὸ ἑξῆς πρόβλημα:

Ἔστω ἕνας ρητὸς ρ· ἀπὸ αὐτὸν ὁρίζεται μὲ τὴν γνωστὴν τεχνικὴν κάποιος περιοδικὸς δεκαδικὸς δ ὡς μία ἄλλη παράστασίς του. Αὐτὸς ὁ δ εἶναι ὁ μόνος;

Ἡ ἀπάντησις εἶναι: ναί, ἀλλὰ μία ἐξήγησις εἶναι ἀνωτέρα τῶν δυνατοτήτων αὐτῆς τῆς τάξεως.

6) Ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω συνάγεται ὅτι: **μεταξὺ τοῦ συνόλου τῶν ρητῶν καὶ τοῦ συνόλου τῶν περιοδικῶν δεκαδικῶν ὁρίζεται μία ἀπεικόνισις ἕνα πρὸς ἕνα.**

Ἄσκησις 1η. Ἔστω ὁ δεκαδικὸς περιοδικὸς $4{,}\dot{0}\dot{1}\dot{8}$. Ποίου ρητοῦ εἶναι οὗτος ἡ δεκαδικὴ παράστασις;

Λύσις: Κατὰ τὸν κανόνα **1** ὁ ζητούμενος ρητὸς εἶναι ὁ:

$$\rho = 4 + \frac{18}{999} = 4 + \frac{2}{111} = \frac{444+2}{111} = \frac{446}{111}$$

Ἄσκησις 2α. Ἔστω ὁ δεκαδικὸς περιοδικὸς $\delta = 1{,}62\dot{1}\dot{1}\dot{7}$. Ποίου ρητοῦ εἶναι οὗτος ἡ δεκαδικὴ παράστασις;

Λύσις: Ἐφαρμόζομεν τὸν κανόνα 2, δηλαδὴ μεταθέτομεν τὴν ὑποδιαστολὴν δύο θέσεις δεξιά, ὁπότε λαμβάνομεν τὸν δεκαδικὸν περιοδικόν: $162{,}\dot{1}\dot{1}\dot{7}$ καὶ εὑρίσκομεν τὸν ρητόν, ἔστω ρ΄, τοῦ ὁποίου ἡ δεκαδικὴ παράστασις εἶναι ὁ $162{,}\dot{1}\dot{1}\dot{7}$, δηλαδή:

$$\rho' = 162 + \frac{117}{999} = 162 + \frac{13}{111} = \frac{17982+13}{111} = \frac{17995}{111}$$

(*) Ἡ δικαιολόγησις ἠμπορεῖ νὰ διδαχθῇ ἢ παραλειφθῇ κατὰ τὴν κρίσιν τοῦ διδάσκοντος.

Τέλος διαιροῦμεν τὸν ρ′ διὰ τοῦ 100· ὁ ζητούμενος ρητὸς εἶναι ὁ $\rho = \left(\frac{17995}{11100}\right) = \frac{3599}{2220}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

97) Νὰ δώσετε τρεῖς δεκαδικὰς παραστάσεις διὰ καθένα ἀπὸ τοὺς ρητούς :

α) $\frac{2}{5}$ β) $\frac{3}{8}$ γ) $\frac{7}{40}$ δ) $-\frac{27}{20}$

98) Νὰ εὕρετε ποίου ρητοῦ εἶναι παράστασις καθένας ἀπὸ τοὺς κάτωθι περιοδικούς :

α) $0{,}\dot{9}$ β) $-1{,}\dot{2}$ γ) $0{,}96$

δ) $17{,}\dot{1}\dot{3}$ δ) $1{,}10\dot{3}$ ζ) $2{,}3\dot{9}$

99) Νὰ συγκρίνετε καὶ νὰ εὕρετε ἂν εἶναι ἴσοι ἢ ποῖος εἶναι ὁ μεγαλύτερος ἀπὸ τούς :

α) $0{,}5\dot{0}$ καὶ $0{,}4\dot{9}$ β) $0{,}9786\dot{0}$ καὶ $0{,}9784\dot{9}$

γ) $0{,}\dot{9}$ καὶ 1 δ) $0{,}\dot{1}\dot{1}\dot{0}$ καὶ $0{,}\dot{1}\dot{1}\dot{1}$

100) Νὰ εὕρετε τὰ ἐξαγόμενα τῶν πράξεων :

α) $(0{,}\dot{8}) + (1{,}\dot{3})$ β) $(0{,}\dot{3}\dot{8}) - (0{,}\dot{2}\dot{7})$

γ) $(0{,}\dot{4}\dot{7}) \cdot (0{,}\dot{2})$ δ) $(0{,}\dot{6}\dot{8}\dot{3}) : (0{,}4\dot{9})$

ΑΡΡΗΤΟΙ (ΑΣΥΜΜΕΤΡΟΙ) ΑΡΙΘΜΟΙ. ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

35. ΡΗΤΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΤΕΤΡΑΓΩΝΟΙ ΚΑΙ ΡΗΤΟΙ ΜΗ ΤΕΤΡΑΓΩΝΟΙ.

Α) Τετράγωνοι ρητοὶ ἀριθμοί. Ἔστω ὁ ρητὸς $\frac{4}{9}$. Παρατηροῦμεν ὅτι $\frac{4}{9} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$, δηλαδὴ ὑπάρχει ὁ θετικὸς ρητὸς $\frac{2}{3}$, ὥστε ὁ $\frac{4}{9}$ νὰ εἶναι ἴσος μὲ τὸ τετράγωνον αὐτοῦ τοῦ ρητοῦ. Μάλιστα εἶναι φανερὸν ὅτι, ἐκτὸς ἀπὸ τὸν $\frac{2}{3}$, δὲν ὑπάρχει ἄλλος θετικὸς ρητὸς μὲ τὴν ἰδιότητα «τὸ τετράγωνόν του νὰ εἶναι ὁ $\frac{4}{9}$».

Κάθε ρητὸς ἀριθμός, ὁ ὁποῖος εἶναι τετράγωνον ἄλλου ρητοῦ, λέγεται **τετράγωνος ρητὸς ἀριθμός.** Οὕτω, π.χ. οἱ 100, 49, 0, 16, 0,25 εἶναι τετράγωνοι ρητοὶ ἀριθμοί.

Ἔστω θ ἕνας τετράγωνος ρητὸς ἀριθμός. **Ὑπάρχει λοιπὸν ἀκριβῶς ἕνας θετικὸς ρητός, ἔστω ὁ ρ, τοιοῦτος, ὥστε νὰ εἶναι $\rho^2 = \theta$.** Αὐτὸς ὁ θετικὸς ρητὸς ρ λέγεται, ὅπως ἐμάθαμεν καὶ εἰς τὴν β′ τάξιν, τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ θ. Οὕτως ὁ $\frac{2}{3}$ εἶναι ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ $\frac{4}{9}$, ὁ 10 εἶναι ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 100 κ.τ.λ.

Ἡ τετραγωνικὴ ρίζα ἑνὸς τετραγώνου ρητοῦ ἀριθμοῦ, ἔστω τοῦ θ, συμβολίζεται μέ : $\sqrt{\theta}$. Ὥστε εἶναι $\sqrt{100} = 10$, $\sqrt{49} = 7$, $\sqrt{0} = 0$, $\sqrt{1{,}21} = 1{,}1$ $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ κ.τ.λ.

Ἀπὸ ὅσα εἴπαμεν προηγουμένως συνάγεται ὅτι : **ἂν θ εἶναι τετράγωνος ρητὸς καὶ x ἡ τετραγωνική του ρίζα** (ὅπως τὴν ὡρίσαμεν), τότε οἱ συμβολισμοὶ

$x^2 = \theta$ **καὶ** $x = \sqrt{\theta}$ **εἶναι ἰσοδύναμοι,** δηλ. ἠμποροῦμεν νὰ γράφωμεν :

$$x^2 = \theta \Leftrightarrow x = \sqrt{\theta}.$$

Οὕτω, π.χ. εἶναι : $10^2 = 100 \Leftrightarrow 10 = \sqrt{100}$, $1{,}1^2 = 1{,}21 \Leftrightarrow 1{,}1 = \sqrt{1{,}21}$ κ.τ.λ.

Ἠμποροῦμεν ἀκόμη νὰ λέγωμεν ὅτι : **ἂν θ εἶναι τετράγωνος ρητός, τότε ἡ ἐξίσωσις** $x^2 = \theta$ **ἔχει ἀκριβῶς μίαν λύσιν εἰς τὸ σύνολον τῶν ἀπολύτων ρητῶν, τὴν** $x = \sqrt{\theta}$.

Σημείωσις : Διὰ τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν $x^2 = \theta$, ὅπου θ τετράγωνος ρητός, παρατηροῦμεν ὅτι ἐκτὸς τῆς λύσεως $\sqrt{\theta}$ ἔχει καὶ τὴν ἀντίθετον αὐτῆς, δηλαδὴ τὴν $-\sqrt{\theta}$, διότι $(-\sqrt{\theta})^2 = (\sqrt{\theta})^2 = \theta$

Ὥστε: ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις ἔχει εἰς τὸ σύνολον τῶν σχετικῶν ρητῶν δύο λύσεις, τάς: $x_1 = \sqrt{\theta}$ **καὶ** $x_2 = -\sqrt{\theta}$.

Β) Μὴ τετράγωνοι ρητοὶ ἀριθμοί. Ἔστω ὁ ρητὸς ἀριθμὸς 3. Εἶναι φανερὸν ὅτι δὲν ὑπάρχει κάποιος φυσικὸς ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον νὰ εἶναι ἴσον μὲ τὸν 3, διότι $1^2 = 1 < 3$ καὶ $2^2 = 4 > 3$. Ὥστε δὲν ὑπάρχει φυσικὸς ἀριθμὸς ρ, μὲ $\rho^2 = 3$. Ἂς ἐξετάσωμεν μήπως ὑπάρχει κάποιο ἀνάγωγον κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ μὲ $\beta > 1$, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον νὰ εἶναι ἴσον μὲ 3. Ἀλλὰ καὶ αὐτὸ εἶναι ἀδύνατον, διότι τὸ $\frac{\alpha^2}{\beta^2}$ θὰ εἶναι καὶ αὐτὸ κλάσμα ἀνάγωγον μὲ παρανομαστὴν $\beta^2 > 1$, ἄρα ὄχι ὁ ἀκέραιος 3. **Ὥστε δὲν ὑπάρχει θετικὸς ρητός, ποὺ τὸ τετράγωνόν του νὰ εἶναι ἴσον μὲ 3.** Συνεπῶς ὁ 3 δὲν εἶναι τετράγωνος ρητός. Οἱ ρητοὶ αὐτοῦ τοῦ εἴδους λέγονται : **μὴ τετράγωνοι ρητοί.** Οὕτω π.χ., οἱ 2, $\frac{3}{7}$, 5, $\frac{21}{4}$ κ.τ.λ. εἶναι μὴ τετράγωνοι ρητοί.

Κατὰ τὰ προηγούμενα, ἐὰν θ εἶναι ἕνας μὴ τετράγωνος ρητός, ἠμποροῦμεν νὰ λέγωμεν ὅτι : ἡ ἐξίσωσις $x^2 = \theta$ δὲν ἔχει κάποιαν λύσιν εἰς τὸ σύνολον τῶν θετικῶν ρητῶν ἀριθμῶν.

Ἂς λάβωμεν πάλιν τὸν 3, ποὺ ὅπως εἴδαμεν, εἶναι ἕνας μὴ τετράγωνος ρητός. Ὅπως παρετηρήσαμεν ἀνωτέρω εἶναι :

$$1^2 = 1 < 3, \quad \text{ἐνῶ} \quad 2^2 = 4 > 3$$

Ἂς λάβωμεν τώρα τοὺς ἀριθμούς :

1, 1,1 1,2 1,3 1,4 1,5 1,6 1,7 1,8 1,9 2

καὶ ἂς ὑπολογίσωμεν τὰ τετράγωνά των· θὰ εὕρωμεν :

$$1{,}7^2 = 2{,}89 < 3, \quad \text{ἐνῶ} \quad 1{,}8^2 = 3{,}24 > 3$$

Γράφομεν τώρα 1,70 ἀντὶ 1,7 καὶ 1,80 ἀντὶ 1,8 καὶ λαμβάνομεν τοὺς ἀριθμούς :

1,70 1,71 1,72 1,73 1,74 1,75 1,76 1,77 1,78 1,79 1,80,

ἂς ὑπολογίσωμεν δὲ τὰ τετράγωνά των· εὑρίσκομεν τότε : $1{,}73^2 = 2{,}9929 < 3$, ἐνῷ $1{,}74^2 = 3{,}0276 > 3$. Τοὺς 1,73 καὶ 1,74 γράφομεν ὡς 1,730 καὶ 1,740 καὶ λαμβάνομεν τούς :

1,730 1,731 1,732 1,733 1,734 1,735 1,736 1,737 1,738 1,739 1,740

ὑπολογίζομεν δὲ τὰ τετράγωνά των· εὑρίσκομεν τότε :

$1{,}732^2 = 2{,}999824 < 3$ ἐνῶ $1{,}733^2 = 3{,}0032289 > 3$. Ἡ ἐργασία αὐτὴ ἠμπορεῖ νὰ συνεχισθῇ, **ὅσον θέλομεν.**

Συνοψίζομεν τώρα τὰ προηγούμενα συμπεράσματα παρατηροῦντες ὅτι :

Μὲ τὴν ἀνωτέρω ἐργασίαν ὑπολογίζομεν : α) θετικοὺς ρητοὺς καθενὸς ἐκ τῶν ὁποίων τὸ τετράγωνον εἶναι μικρότερον τοῦ 3 καὶ β) θετικοὺς ρητοὺς καθενὸς ἐκ τῶν ὁποιων τὸ τετράγωνον εἶναι μεγαλύτερον τοῦ 3.

Οὕτως ὑπελογίσαμεν :

$1^2 = 1 < 3 \mid 1{,}7^2 = 2{,}84 < 3 \mid 1{,}73^2 = 2{,}9929 < 3 \mid 1{,}732^2 = 2{,}999824 < 3$ κτλ.

$2^2 = 4 > 3 \mid 1{,}8^2 = 3{,}24 > 3 \mid 1{,}74^2 = 3{,}0276 > 3 \mid 1{,}733^2 = 3{,}003289 > 3$ κτλ.

Σχηματίζονται λοιπόν, μὲ τὰ διαδοχικὰ βήματα τῆς ἀνωτέρω ἐργασίας, δύο ἀκολουθίαι θετικῶν ρητῶν, αἱ ἑξῆς :

(Κ) : 1 1,7 1,73 1,732 . . .

(Α) : 2 1,8 1,74 1,733 . . .

Παρατηροῦμεν τώρα ὅτι ἰσχύουν τὰ ἑξῆς :

α) Τὸ τετράγωνον παντὸς ὅρου τῆς (Κ) εἶναι < 3

β) Τὸ τετράγωνον παντὸς ὅρου τῆς (Α) εἶναι > 3

γ) Αἱ διαφοραί :

1ος ὅρος τῆς (Α) — 1ος ὅρος τῆς (Κ), 2ος ὅρος τῆς (Α) — 2ος ὅρος τῆς (Κ), 3ος ὅρος τῆς (Α) — 3ος ὅρος τῆς (Κ) κ.τ.λ. εἶναι ἀντιστοίχως :

1 0,1 0,01 0,001 0,0001 κ.τ.λ.

δ) Οὔτε ἡ ἀκολουθία (Κ) οὔτε ἡ ἀκολουθία (Α) ἠμπορεῖ νὰ εἶναι ἕνας περιοδικὸς δεκαδικὸς ἀριθμός.

Πράγματι ἂς συμβολίσωμεν τὴν (Κ) μέ :

(Κ) : $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots, \delta_\nu, \ldots$

καὶ ἔστω ὅτι αὐτὴ εἶναι ὁ δεκαδικὸς περιοδικὸς δ. Ἔστω ὅτι ὁ δ εἶναι ἡ δεκαδικὴ παράστασις τοῦ ρητοῦ ρ· τότε λοιπὸν μὲ τοὺς ὅρους τῆς (Κ) προσεγγίζομεν, ὅσον θέλομεν, τὸν ρ, ἑπομένως μὲ τοὺς ὅρους τῆς ἀκολουθίας :

(Κ′) : $\delta_1^2, \delta_2^2, \delta_3^2, \ldots \delta_\nu^2, \ldots$

προσεγγίζομεν, ὅσον θέλομεν, τὸν ρ^2. Πράγματι :

$\delta_1^2 = 1^2 = 1$· ἡ ἀπόστασίς του ἀπὸ τὸν 3 εἶναι $3 - 1 = 2$

$\delta_1^2 = 1{,}7^2 = 2{,}84$· ἡ ἀπόστασίς του ἀπὸ τὸν 3 εἶναι $3 - 2{,}84 = 0{,}16 < \frac{20}{100} = \frac{2}{10}$

$\delta_2^2 = 1{,}73^3 = 2{,}9929$· ἡ ἀπόστασίς του ἀπὸ τὸν 3 εἶναι $3 - 2{,}9929 = 0{,}0071 < \frac{80}{10000} = \frac{8}{1000}$

$\delta_4^2 = 1{,}732^2 = 2{,}999824$· ἡ ἀπόστασίς του ἀπὸ τὸν 3 εἶναι $3 - 2{,}999824 = 0{,}000176 < \frac{200}{1000000} = \frac{2}{10000}$ κτλ. Ὥστε μὲ τοὺς ὅρους τῆς (Κ′) προσεγγίζομεν, ὅσον θέλομεν καὶ τὸν 3, ἑπομένως ὁ ρ^2 δὲν ἠμπορεῖ νὰ εἶναι ἄλλος ἀπὸ τὸν 3, δηλαδὴ εἶναι $\rho^2 = 3$. Αὐτὸ ὅμως εἶναι ἀδύνατον, ὅπως ἤδη γνωρίζομεν.

Ἐὰν συνεχίσωμεν τὴν ἐργασίαν τῆς κατασκευῆς τῶν ἀκολουθιῶν (Α) καὶ (Κ), δυνάμεθα νὰ φθάσωμεν εἰς δεκαδικοὺς μὲ 1000, 100000, 1000000 κ.τ.λ. δεκαδικὰ ψηφία (!). Εὑρίσκεται λοιπὸν κάποιος ὅρος τῆς ἀκολουθίας (Κ) καὶ κάποιος τῆς ἀκολουθίας (Α) μὲ 1000000 ψηφία δεκαδικὰ ὁ καθένας· ἡ διαφορὰ τοῦ 1ου ἀπὸ τὸν 2ον θὰ εἶναι :

$$0,000\ldots01,$$

ὅπου τὸ πλῆθος τῶν δεκαδικῶν ψηφίων εἶναι ἕνα ἑκατομμύριον (! !). Σκεφθῆτε πόσον μικρὰ εἶναι αὐτὴ ἡ διαφορὰ καὶ ὅτι ἠμποροῦμεν ἀκόμη νὰ φθάσωμεν εἰς ἀναλόγους διαφορὰς «ἀφαντάστως μικροτέρας».

Ἠμποροῦμεν τώρα νὰ συνοψίσωμεν τὰς παρατηρήσεις μας διὰ τὸν μὴ τετράγωνον θετικὸν ρητὸν 3, ὡς ἑξῆς :

1ον. Δὲν ὑπάρχει θετικὸς ρητός, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον νὰ εἶναι ὁ 3. Μὲ ἄλλας λέξεις : **ἡ ἐξίσωσις $x^2 = 3$ δὲν ἔχει κάποιαν λύσιν μέσα εἰς τὸ σύνολον τῶν θετικῶν ρητῶν.**

2ον. Ὑπάρχουν θετικοὶ ρητοί, ποὺ τὸ τετράγωνον τοῦ καθενὸς εἶναι < 3 καὶ μάλιστα εἶναι δυνατὸν νὰ σχημστισθῇ μία ἀκολουθία ἀπὸ θετικοὺς ρητούς, ποὺ «βαίνουν αὐξανόμενοι»* καὶ ποὺ τὸ τετράγωνον τοῦ καθενὸς εἶναι < 3 :

(Κ) : 1   1,7   1,73   1,732   . . .
(Τ) : 1^2 $1{,}7^2$ $1{,}73^2$ $1{,}732^2$ . . .

2α. Ὑπάρχουν θετικοὶ ρητοί, ποὺ τὸ τετράγωνον τοῦ καθενὸς εἶναι > 3 καὶ μάλιστα εἶναι δυνατὸν νὰ σχηματισθῇ μία ἀκολουθία ἀπὸ θετικοὺς ρητοὺς ποὺ «βαίνουν ἐλαττούμενοι»(**) καὶ ποὺ τὸ τετράγωνον τοῦ καθενὸς εἶναι > 3 :

(Α) : 2   1,8   1,74   1,733   . . .
(Τ΄) : 2^2 $1{,}8^2$ $1{,}74^2$ $1{,}733^2$ . . .

3ον. Ἂν δοθῇ ἕνας δεκαδικός, ὅπως ὁ $\delta = 0{,}000\ldots01$ (μὲ ὁσαδήποτε δεκαδικὰ ψηφία), τότε ὑπάρχει ὅρος τῆς (Κ) καὶ ὅρος τῆς (Α) **μὲ διαφορὰν** $< \delta$. Αὐτὸ τὸ διατυπώνομεν καὶ ὡς ἑξῆς : **αἱ δύο σχηματισθεῖσαι ἀκολουθίαι «προσεγγίζουν» ἡ μία τὴν ἄλλην, ὅσον θέλομεν.** Τὸ αὐτὸ δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν καὶ διὰ τὰς ἀκολουθίας (Τ) καὶ (Τ΄).

4ον. Οἱ ὅροι τῆς ἀνωτέρω ἀκολουθίας τετραγώνων (Τ) «βαίνουν αὐξανόμενοι» καὶ «προσεγγίζουν ὁλονὲν καὶ περισσότερον τὸν 3». Καθὼς τώρα παρατηροῦμεν τὰς ἀκολουθίας (Κ) καὶ (Τ) μᾶς γεννᾶται ἡ σκέψις ὅτι **καὶ τῆς (Κ) οἱ ὅροι προσεγγίζουν» ὁλονὲν καὶ περισσότερον καθὼς «βαίνουν αὐξανόμενοι» κάποιον «ἀριθμόν», τοῦ ὁποίου τὸ «τετράγωνον» φαίνεται νὰ εἶναι ὁ 3.**

4α. Οἱ ὅροι τῆς ἀνωτέρω ἀκολουθίας τετραγώνων (Τ΄) «βαίνουν ἐλαττούμενοι» καὶ «προσεγγίζουν ὁλονὲν καὶ περισσότερον τὸν 3». Καθὼς τώρα παρατηροῦμεν τὰς ἀκολουθίας (Α) καὶ (Τ΄) μᾶς γεννᾶται ἡ σκέψις ὅτι **καὶ** τῆς Α **οἱ ὅροι «προσεγγίζουν» ὁλονὲν καὶ περισσότερον, καθὼς «βαίνουν ἐλαττούμενοι», κάποιον «ἀριθμόν», τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον φαίνεται νὰ εἶναι ὁ 3.**

Διὰ τοὺς ἀνωτέρω λόγους συμφωνοῦμεν νὰ παριστάνωμεν τὴν ἀκολουθίαν (Κ) συντόμως μὲ : 1,732. . . (ὅπου τὴν θέσιν τῶν τελειῶν ἐννοοῦμεν ὅτι τὴν καταλαμβάνουν τὰ ψηφία, ποὺ προκύπτουν μὲ τὴν ἰδίαν τεχνικήν, ποὺ προέκυψαν καὶ τὰ ψηφία 7, 3, 2) **καὶ νὰ λέγωμεν ὅτι : ἡ παράστασις αὐτὴ εἶναι «ἕνας ἄρρητος ἀριθμός».** Ἡ λέξις **«ἄρρητος»** ἐχρησιμοποιήθη, διότι (ὅπως εἴδαμεν προηγουμένως) ἡ παράστασις 1,732. . . δὲν εἶναι κάποιος δεκαδικὸς πε-

(*) «αὔξουσα ἀκολουθία» (**) «φθίνουσα ἀκολουθία».

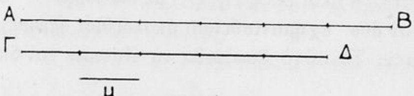
ριοδικός, δηλαδὴ δὲν εἶναι παράστασις κάποιου ρητοῦ. Εἶναι φυσικὸν νὰ δεχθῶμεν ὅτι ὁ «νέος» αὐτὸς ἀριθμὸς 1,732... ἔχει τὴν ἰδιότητα ὅτι : τὸ **«τετράγωνόν»** του εἶναι ὁ 3, δηλαδὴ ὅτι εἶναι ἡ **«τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 3»** Κάθε ὅρος τῆς ἀκολουθίας (Κ) εἶναι **«μία προσέγγισις** τοῦ ἀρρήτου ἀριθμοῦ 1,732... **καὶ ἡ προσέγγισις, εἶναι τόσον μεγαλυτέρα (καλυτέρα), ὅσον ὁ λαμβανόμενος ὅρος τῆς (Κ) εἶναι πλέον ἀπομεμακρυσμένος ἀπὸ τὸν πρῶτον της ὅρον.** Δι' αὐτὸν τὸν λόγον δυνάμεθα νὰ λέγωμεν ὅτι : κάθε ὅρος τῆς (Κ) εἶναι **«ἕνας ρητὸς προσεγγιστικὸς ἀντιπρόσωπος»** τοῦ ἀρρήτου ἀριθμοῦ :1,732...

Σημ. Εἰς τὴν β' τάξιν ἐμάθαμεν νὰ εὑρίσκωμεν τὴν τετραγ. ρίζαν ἑνὸς μὴ τετραγώνου ρητοῦ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ κ.τ.λ.

Ἂν ἀντὶ τοῦ 3 ἐλαμβάναμεν τὸν 2 εἴτε τὸν 5 καί, γενικῶς, ἕνα ὁποιονδήποτε μὴ τετράγωνον θετικὸν ρητόν, θὰ ἐφθάναμεν εἰς ἀνάλογα συμπεράσματα. Ἂν δηλαδὴ ἐλαμβάναμεν ἕνα μὴ τετράγωνον θετικὸν ρητόν, ἔστω θ, θὰ ἐσχηματίζαμεν πάλιν δύο ἀκολουθίας, ἔστω (Κ') καὶ (Α'), ὅπως ἔγινε καὶ μὲ τὸν 3 οὕτως ὥστε τὸ τετράγωνον καθενὸς ὅρου τῆς (Κ') θὰ ἦτο μικρότερον τοῦ θ, τὸ τετράγωνον καθενὸς ὅρου τῆς (Α') θὰ ἦτο μεγαλύτερον τοῦ θ καὶ αἱ δύο ἀκολουθίαι θὰ «προσήγγιζαν» ἡ μία τὴν ἄλλην ὅσον ἠθέλαμεν.

Μὲ τὸν ἀνωτέρω τρόπον κατασκευάζονται καὶ ἄλλοι «ἄρρητοι ἀριθμοί».

36. ΖΕΥΓΗ ΕΥΘ. ΤΜΗΜΑΤΩΝ ΧΩΡΙΣ ΚΟΙΝΗΝ ΜΟΝΑΔΑ ΜΕΤΡΗΣΕΩΣ ΤΩΝ.



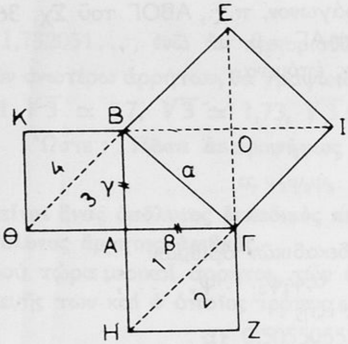
Σχ. 36—1

Παρατηρήσατε τὰ εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΓΔ καὶ μ εἰς τὸ Σχ. 36–1. Εἶναι φανερὸν ἐδῶ ὅτι, ἂν τὰ ΑΒ, ΓΔ μετρηθοῦν μὲ μονάδα τὸ τμῆμα μ, τότε εὑρίσκομεν : μῆκος τοῦ ΑΒ = 6 μονάδες μ καὶ μῆκος τοῦ ΓΔ = 5 μονάδες μ. Γράφομεν τότε, ὅπως εἶναι γνωστόν, $AB = 6 \cdot \mu$, $\Gamma\Delta = 5 \cdot \mu$. Δι' αὐτὸ λέγομεν ὅτι : **τὸ τμῆμα μ εἶναι μία κοινὴ μονὰς μετρήσεως (κοινὸν ὑποπολλαπλάσιον) τῶν τμημάτων ΑΒ, ΓΔ** εἴτε ὅτι : **τὰ ΑΒ, ΓΔ ἔχουν ὡς κοινὴν μονάδα μετρήσεώς των τὸ μ** εἴτε ἀκόμη ὅτι : **τὰ ΑΒ, ΓΔ εἶναι σύμμετρα (μεταξύ των) εὐθύγραμμα τμήματα** (ἀφοῦ ἔχουν κοινὴν μονάδα μετρήσεώς των).

Ὑπάρχουν ὅμως καὶ ζεύγη εὐθυγράμμων τμημάτων χωρὶς νὰ εὑρίσκεται δι' αὐτὰ κάποια κοινὴ μονὰς μετρήσεώς των.

Ἰδοὺ ἕνα παράδειγμα :

Ἂς λάβωμεν ἕνα ὀρθογώνιον καὶ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ἂς κατασκευάσωμεν τετράγωνα ἐπὶ τῶν καθέτων πλευρῶν καὶ τῆς ὑποτεινούσης, ὅπως βλέπετε εἰς τὸ Σχ. 36–2. Ἂς ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι τὰ εὐθύγραμμα τμήματα ΑΓ καὶ ΒΓ ἔχουν κάποιαν κοινὴν μονάδα μετρήσεώς των, ἔστω μ. Τότε θὰ εἶναι μῆκος τοῦ ΒΓ ἴσον μέ, π.χ., α μονάδες μ καὶ μῆκος τοῦ ΑΓ (= μῆκος τοῦ ΑΒ) ἴσον μέ, π.χ., β μονάδες μ. Τὰ α καὶ β συμβολίζουν λοιπὸν **ρητοὺς ἀριθμούς.**



Σχ. 36 – 2

Ἐὰν φέρωμεν τὰς διαγωνίους τῶν τετραγώνων, ὅπως βλέπετε εἰς τὸ Σχ. 36–2. εἶναι φανερὸν (*) ὅτι ὅλα τὰ σχηματιζόμενα τρίγωνα εἶναι ἴσα μεταξύ των ἀνὰ δύο. Ἑπομένως τὰ τρίγωνα 1,2,3,4 ἀποτελοῦν τὸ τετράγωνον ΒΓΙΕ (ἐὰν τεθοῦν καταλλήλως ἐπάνω εἰς τὸ τετράγωνον ΒΓΙΕ, θὰ τὸ καλύψουν ἀκριβῶς). Ἀπὸ αὐτὸ ἐννοοῦμεν ὅτι : ἐμβαδὸν τετρ. ΑΓΖΗ + + ἐμβ. τετρ. ΑΒΚΘ = ἐμβ. τετρ. ΒΓΙΕ, δηλαδὴ : ἐμβ. τετρ. πλευρᾶς ΑΓ + ἐμβ. τετρ. πλευρᾶς ΑΒ = ἐμβ. τετρ. πλευρᾶς ΒΓ (**).

Θὰ ἴσχυε λοιπὸν τότε ἡ ἰσότης : $\beta^2 + \gamma^2 = \alpha^2$.

καί, ἐπειδὴ ὑπετέθη $\beta = \gamma$, θὰ ἦτο : $\beta^2 + \beta^2 = \alpha^2$.

Ἀλλὰ $\beta^2 + \beta^2 = \alpha^2 \Leftrightarrow 2\,\beta^2 = \alpha^2 \Leftrightarrow \dfrac{\alpha^2}{\beta^2} = 2 \Leftrightarrow \left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^2 = 2.$

Ἀλλ' ἐπειδὴ α, β εἶναι ρητοὶ ἀριθμοί, θὰ εἶναι καὶ $\frac{\alpha}{\beta}$ ρητὸς ἀριθμὸς (ὡς πηλίκον δύο ρητῶν). Δὲν ὑπάρχει ὅμως ρητὸς ἀριθμός, ποὺ τὸ τετράγωνόν του νὰ εἶναι ἴσον μὲ 2. Εἴμεθα λοιπὸν ὑποχρεωμένοι νὰ συμπεράνωμεν ὅτι **κακῶς ὑπεθέσαμεν** ὅτι ὑπάρχει κοινὴ μονὰς μετρήσεως τῶν ΑΓ καὶ ΒΓ.

Ἐπειδὴ ἡ ὑποτείνουσα ΒΓ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ εἶναι διαγώνιος τοῦ τετραγώνου ΑΒΟΓ, ἠμποροῦμεν νὰ διατυπώσωμεν τὸ συμπέρασμά μας ὡς ἑξῆς :

Διὰ πᾶν τετράγωνον ἰσχύει ὅτι : ἡ διαγώνιος καὶ ἡ πλευρά του δὲν ἔχουν κοινὴν μονάδα μετρήσεώς των, δηλαδή, ὅπως ἄλλως λέγεται : ἡ διαγώνιος καὶ ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου δὲν εἶναι σύμμετρα εὐθύγραμμα τμήματα, ἀλλὰ (ὅπως ἐπίσης λέγεται) **ἀσύμμετρα.**

37. ΓΕΝΙΚΟΝ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ.

Ἀπὸ τὰ προηγούμενα ἐννοοῦμεν ὅτι εἶναι ἀνάγκη νὰ **«ἐπεκτείνωμεν»** τὸ σύνολον τῶν ρητῶν **μὲ τὴν δημιουργίαν νέων ἀριθμῶν,** οἱ ὁποῖοι θὰ πρέπει νὰ ὀνομασθοῦν **ἄρρητοι** (μὴ ρητοὶ) **ἢ ἀσύμμετροι,** καὶ οἱ ὁποῖοι θὰ εἶναι οὕτω κατεσκευασμένοι, ὥστε νὰ θεραπευθοῦν αἱ «ἀδυναμίαι τοῦ συστήματος τῶν ρητῶν ἀριθμῶν». Δηλαδή : καὶ ἐξισώσεις ὅπως αἱ $x^2 = 3$, $x^2 = 2$, $x^2 = \theta$ (ὅπου θ θετικὸς ρητὸς μὴ τετράγωνος) νὰ ἔχουν λύσιν καὶ νὰ ὑπάρχῃ εὐθύγρ. τμῆμα μ

(*) Π.χ. λόγῳ τῶν συμμετριῶν, ποὺ ὑπάρχουν.

(**) Ἡ πρότασις αὐτὴ ἀποτελεῖ τὸ λεγόμενον Πυθαγόρειον θεώρημα, τὸ ὁποῖον ἰσχύει γενικῶς διὰ πᾶν ὀρθογώνιον τρίγωνον.

καὶ ἄρρητοι ἀριθμοὶ α, β ὥστε διὰ τὸ τετράγωνον, π.χ., ΑΒΟΓ τοῦ Σχ. 36–2 νὰ ἠμποροῦμεν νὰ γράψωμεν $ΒΓ = α \cdot μ$ καὶ $ΑΓ = β \cdot μ$.

Αὐτὸ ἀκριβῶς κάμνομεν εἰς τὰ ἀμέσως ἑπόμενα.

38. ΑΡΡΗΤΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Ἔστω μία ἀκολουθία ἀπὸ ψηφία :

$$ψ_1, ψ_2, ψ_3, \ldots, ψ_ν, \ldots$$

καὶ α ἕνας φυσικὸς ἀριθμὸς ἢ ὁ 0.

Σχηματίζομεν τὴν ἀκολουθίαν κοινῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν

(α) : $α, ψ_1 \quad α, ψ_1ψ_2 \quad α, ψ_1ψ_2ψ_3 \quad \ldots \quad α, ψ_1ψ_2 \ldots ψ_ν \quad \ldots,$

ἂς τὴν παραστήσωμεν δὲ πρὸς συντομίαν ὡς ἑξῆς :

(α) : $α, ψ_1\, ψ_2\, ψ_3 \cdots ψ_ν \cdots$

Ἡ παράστασις (α) ἠμπορεῖ νὰ ὀνομασθῇ : **ἀπειροψήφιος δεκαδικὴ παράστασις.**

Παραδείγματα : 1ον. Ἔστω ἡ ἀκολουθία :

$ψ_1 = 6,\ ψ_2 = 6, \ldots ψ_ν = 6, \ldots$ καὶ $α = 0$

τότε ἡ ἀπειροψήφιος δεκαδικὴ παράστασις : 0,666. . ., εἶναι ἕνας δεκαδικὸς περιοδικὸς ἀριθμὸς $\left(\text{ποὺ εἶναι ἴσος, ὅπως γνωρίζομεν, μὲ τὸν } \frac{2}{3}\right)$.

2ον. Ἂς θεωρήσωμεν τὰς τετραγωνικὰς ρίζας κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{10^1}$, $\frac{1}{10^2}$, $\frac{1}{10^3}$, ... τοῦ ἀριθμοῦ 3 (κατ' ἔλλειψιν). Σχηματίζεται ἐξ αὐτῶν ἡ ἀκολουθία (βλ. καὶ σελ. 52).

(Κ) : 1,7 1,73 1,732. . .

Ἂς λάβωμεν τώρα ὡς ἀκέραιον α τὸν 1 καὶ ὡς ἀκολουθίαν $ψ_1, ψ_2, ψ_3, \ldots$ τὴν ἀκολουθίαν ψηφίων : 7, 3, 2,. . .

δηλαδὴ τὴν ἀκολουθίαν, ποὺ ὁρίζεται ἀπὸ τὰ τελευταῖα ψηφία τῶν ὅρων τῆς ἀκολουθίας (Κ). Ἂς σχηματίσωμεν τώρα τὴν ἀπειροψήφιον δεκαδικὴν παράστασιν (Π) : 1,732. . .

Ἡ παράστασις αὐτή, ὅπως εἴδαμεν εἰς τὰ προηγούμενα, δὲν εἶναι ἡ παράστασις κάποιου δεκαδικοῦ περιοδικοῦ ἀριθμοῦ, δηλαδὴ δὲν εἶναι παράστασις κάποιου ρητοῦ, ὠνομάσθη δὲ αὐτὴ **«ἕνας ἄρρητος ἀριθμός».**

Συμφωνοῦμεν τώρα κάθε παράστασιν, ὅπως ἡ (Π), δηλαδὴ κάθε παράστασιν τῆς μορφῆς $α, ψ_1\, ψ_2\, ψ_3 \ldots ψ_ν \ldots$, ὅπου α εἶναι φυσικὸς ἀριθμὸς ἢ ὁ 0 καὶ $ψ_1, ψ_2, \ldots, ψ_ν, \ldots$ εἶναι ψηφία, **ἐφ' ὅσον δὲν παριστάνει ἕνα δεκαδικὸν περιοδικὸν ἀριθμὸν** (δηλαδὴ ἕνα ρητὸν ἀριθμόν), νὰ τὴν ὀνομάζωμεν **«ἕνα ἄρρητον»** εἴτε **«ἕνα ἀσύμμετρον» ἀριθμὸν τῆς Ἀριθμητικῆς** εἴτε ἕνα **ἀπόλυτον ἄρρητον** (εἴτε **ἀπόλυτον ἀσύμμετρον)** ἀριθμόν. Οὕτω, π.χ., ἡ ἀπειροψήφιος δεκαδικὴ παράστασις 1,414214. . ., ἡ ὁποία προκύπτει ἀπὸ τὸ 2 μὲ τὴν γνωστὴν ἀπὸ τὴν Β' τάξιν τεχνικὴν τῆς «εὑρέσεως» τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τοῦ 2, εἶναι ἕνας ἄρρητος ἀριθμός, ὅπως καὶ ἡ 1,732051. . ., ἡ ὁποία προκύπτει, μὲ τὴν ἰδίαν τεχνικήν, ἀπὸ τὸν 3. Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ γράψωμεν : $\sqrt{2} = 1,414214\ldots$, $\sqrt{3} =$

$=1,732051\ldots$, ἐνῶ ἂν περιορισθῶμεν εἰς «προσεγγιστικοὺς ἀντιπροσώπους» τῶν ἀνωτέρω ἀρρήτων, θὰ γράψωμεν: $\sqrt{2} \simeq 1,4$, $\sqrt{2} \simeq 1,41$, $\sqrt{2} \simeq 1,414$ κτλ. καὶ $\sqrt{3} \simeq 1,7$, $\sqrt{3} \simeq 1,73$, $\sqrt{3} \simeq 1,732$ κτλ.

Ὥστε : **Πᾶσα ἀπειροψήφιος δεκαδικὴ παράστασις**

$$\alpha, \psi_1\psi_2\psi_3 \ldots \psi_\nu \ldots$$

ἢ εἶναι ἕνας ἀπόλυτος δεκαδικὸς περιοδικος ἀριθμός, δηλαδὴ ρητός, ἢ εἶναι ἕνας ἀπόλυτος ἄρρητος ἀριθμός.

Ἰδοὺ τώρα μερικοὶ ἄρρητοι, τῶν ὁποίων εἶναι προφανὴς ὁ τρόπος τῆς κατασκευῆς των καὶ ὁ ὁποῖος τρόπος εἶναι διάφορος τοῦ ἀνωτέρω ἐκτεθέντος § 35:

α) 0,50550555055550…

β) 0,12122122212222…

γ) 0,534534345343434…

39. ΣΧΕΤΙΚΟΙ ΑΡΡΗΤΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Ὅπως ἀπὸ τοὺς ἀπολύτους ρητοὺς ὡρίσθησαν οἱ σχετικοὶ ρητοί, οὕτως ἀκριβῶς καὶ ἀπὸ τοὺς ἀπολύτους ἀρρήτους ὁρίζονται οἱ λεγόμενοι : **σχετικοὶ ἄρρητοι,** διὰ προτάξεως ἑνὸς + (θετικοὶ ἄρρητοι) ἢ ἑνὸς − (ἄρρητοι ἀρνητικοί) ἐμπρὸς ἀπὸ κάθε ἀπόλυτον ἄρρητον. Π.χ. $+1,4142\ldots$, $-1,732\ldots$, κ.τ.λ.

40. ΟΙ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ.

Ἔστω A_ρ τὸ σύνολον τῶν σχετικῶν ἀρρήτων ἀριθμῶν καὶ Q τὸ σύνολον τῶν σχετικῶν ρητῶν. Τότε πᾶν στοιχεῖον τοῦ συνόλου $A_\rho \cup Q$ ὀνομάζεται : **ἕνας πραγματικὸς ἀριθμός.** Τὸ σύνολον $A_\rho \cup Q$, τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, συνηθίζεται νὰ συμβολίζεται μὲ **R** (Διεθνῶς μὲ **R** ἢ $\mathbf{R}_e$). Οὕτω τὸ σύνολον τῶν γνωστῶν μας ρητῶν ἀριθμῶν εἶναι γνήσιον ὑποσύνολον τοῦ R, δηλ. $Q \subset R$.

Πᾶν στοιχεῖον λοιπὸν τοῦ **R**, δηλ. κάθε πραγματικὸς ἀριθμός, ἢ εἶναι ἕνας σχετικὸς ρητὸς (δεκαδικὸς περιοδικὸς) ἢ εἶναι ἕνας σχετικὸς ἄρρητος. Δι' αὐτὸ ἕνας ἄρρητος ἀριθμὸς ἠμπορεῖ νὰ λέγεται καί : **ἀπειροψήφιος δεκαδικὸς μὴ περιοδικός.** Οὕτω, π,χ., ἡ $\sqrt{3}$ εἶναι ἕνας ἀπειροψήφιος δεκαδικὸς μὴ περιοδικὸς ἀριθμός.

Ἔστω ἕνας **τυχὼν πραγματικὸς ἀριθμὸς** $A = \alpha, \psi_1\psi_2\psi_3 \ldots \psi_\nu \ldots$ Πᾶς ὅρος τῆς ἀκολουθίας :

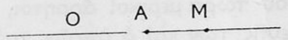
(α) : $\alpha \quad \alpha,\psi_1 \quad \alpha, \psi_1\psi_2 \quad \alpha, \psi_1\psi_2\psi_3$

εἶναι «μία προσέγγισις» τοῦ A εἴτε, ὅπως δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν, «ἕνας προσεγγιστικὸς ἀντιπρόσωπος» τοῦ A. Ἡ προσέγγισις εἶναι τόσον μεγαλυτέρα (καλυτέρα), ὅσον ὁ λαμβανόμενος προσεγγιστικὸς ἀντιπρόσωπος εἶναι πλέον ἀπομεμακρυσμένος ἀπὸ τὸν πρῶτον ὅρον τῆς ἀκολουθίας (α).

41. Η ΓΕΝΙΚΗ ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΛΟΓΟΥ ΕΥΘΥΓΡ. ΤΜΗΜΑΤΟΣ ΠΡΟΣ ΑΛΛΟ.

Α) Ἄς λάβωμεν μίαν εὐθεῖαν ε καὶ δύο σημεῖα της, τὸ Ο καὶ δεξιὰ αὐτοῦ τὸ Α. Ὁρίζεται τότε τὸ τμῆμα ΟΑ (Σχ. 41 – 1). Ἔστω καὶ ἕνα ἄλλο τμῆμα, τὸ ΟΜ. Εἶναι εὔκολον νὰ ἴδωμεν ὅτι, π.χ. εἰς τὸ Σχ. 41–1, εἶναι : $1 \cdot ΟΑ < ΟΜ < 2 \cdot ΟΑ$.

Ἂν χωρίσωμεν τὸ ΟΑ εἰς 10 ἴσα μέρη καὶ λάβωμεν τὰ τμήματα (τ) : $1 \cdot ΟΑ \quad 1{,}1 \cdot ΟΑ \quad 1{,}2 \cdot ΟΑ \quad 1{,}3 \cdot ΟΑ \quad 1{,}4 \cdot ΟΑ \quad 1{,}5 \cdot ΟΑ \quad 1{,}6 \cdot ΟΑ \quad 1{,}7 \cdot ΟΑ \quad 1{,}8 \cdot ΟΑ \quad 1{,}9 \cdot ΟΑ \quad 2 \cdot ΟΑ$, τότε τὸ ΟΜ ἢ θὰ συμπέσῃ μὲ ἕνα ἀπὸ αὐτὰ ἢ θὰ εὑρεθῇ μεταξὺ δύο διαδοχικῶν ἐκ τῶν τμημάτων αὐτῶν. Ἂν συμπέσῃ μὲ ἕνα ἀπὸ αὐτά, π.χ. ἂν εἶναι $ΟΜ = 1{,}6 \cdot ΟΑ$, τότε ὁ 1,6 ὀνομάζεται : **λόγος τοῦ ΟΜ πρὸς τὸ ΟΑ** καὶ συμβολίζεται μὲ $\frac{ΟΜ}{ΟΑ}$.



Σχ. 41 – 1

Εἶναι λοιπὸν τότε ἐξ ὁρισμοῦ $\frac{ΟΜ}{ΟΑ} = 1{,}6$.

Ἂν τὸ ΟΜ δὲν εἶναι ἴσον μὲ ἕνα ἀπὸ τὰ τμήματα (τ), τότε θὰ εἶναι, π.χ. $1{,}6 \cdot ΟΑ < ΟΜ < 1{,}7 \cdot ΟΑ$.

Λαμβάνομεν τώρα τὰ τμήματα :

$(τ_1) : 1{,}6 \cdot ΟΑ = 1{,}60 \cdot ΟΑ \quad 1{,}61 \cdot ΟΑ \quad 1{,}62 \cdot ΟΑ \quad \ldots \quad 1{,}69 \cdot ΟΑ \quad 1{,}70 \cdot ΟΑ = 1{,}7 \cdot ΟΑ$.

Πάλιν τώρα ἢ θὰ συμβῇ τὸ ΟΜ νὰ εἶναι ἴσον μὲ ἕνα ἀπὸ τὰ τμήματα $(τ_1)$ ἢ θὰ εὑρίσκεται μεταξὺ δύο διαδοχικῶν ἐκ τῶν $(τ_1)$. Ἂν εἶναι, π.χ., $ΟΜ = 1{,}65 \cdot ΟΑ$, τότε ὁ 1,65 ὀνομάζεται **λόγος τοῦ ΟΜ πρὸς τὸ ΟΑ** καὶ συμβολίζεται μὲ $\frac{ΟΜ}{ΟΑ}$. Εἶναι λοιπὸν τότε ἐξ ὁρισμοῦ : $\frac{ΟΜ}{ΟΑ} = 1{,}65$. Ἂν τὸ ΟΜ δὲν εἶναι ἴσον μὲ ἕνα ἀπὸ τὰ τμήματα $(τ_1)$ τότε θὰ εἶναι ἔστω :

$$1{,}65 \cdot ΟΑ < ΟΜ < 1{,}66 \cdot ΟΑ.$$

Ἠμποροῦμεν νὰ συνεχίσωμεν μὲ τὸν ἴδιον τρόπον· τότε δύο εἶναι τὰ ἐνδεχόμενα : **α) ἐνδέχεται νὰ φθάσωμεν ἔπειτα ἀπὸ μερικὰ «βήματα» εἰς ἕνα συνήθη δεκαδικόν**, π.χ. τὸν 1,65432 καὶ νὰ εἶναι: $ΟΜ = 1{,}65432 \cdot ΟΑ$· τότε ὁ δεκαδικὸς 1,6542 θὰ ὀνομασθῇ : ὁ λόγος τοῦ ΟΜ πρὸς τὸ ΟΑ καὶ θὰ συμβολισθῇ μὲ $\frac{ΟΜ}{ΟΑ}$, θὰ γράψωμεν δέ : $\frac{ΟΜ}{ΟΑ} = 1{,}65432$.

β) ἐνδέχεται ἡ ἀνωτέρω ἐργασία νὰ μὴ τερματίζεται· τότε θὰ ὁρισθῇ ἕνας ἀπειροψήφιος δεκαδικός, ἔστω: 1,6543216. . ., **ὁ ὁποῖος ἢ θὰ εἶναι ἕνας ρητὸς** (δηλαδὴ δεκαδικὸς περιοδικὸς) **ἢ θὰ εἶναι ἕνας μὴ ρητός.** Εἰς ἀμφοτέρας τὰς περιπτώσεις ὁ ἀπειροψήφιος δεκαδικὸς 1,6543216. . . θὰ ὀνομασθῇ **λόγος τοῦ ΟΜ πρὸς τὸ ΟΑ, συμβολικῶς $\frac{ΟΜ}{ΟΑ}$, καὶ θὰ γράψωμεν : $\frac{ΟΜ}{ΟΑ} = 1{,}6543216\ldots$ εἴτε ταὐτοσήμως : $ΟΜ = (1{,}6543216\ldots) \cdot ΟΑ$.**

Γενικῶς : ἂν ΑΒ, ΓΔ εἶναι δύο τυχόντα εὐθύγραμμα τμήματα, ὅπου ΓΔ διάφορον τοῦ μηδενικοῦ τμήματος, ὁρίζεται μὲ τὸν ἀνωτέρω τρόπον ἡ ἔννοια: λόγος τοῦ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ καὶ εἶναι ἕνας ἀπόλυτος πραγματικὸς ἀριθμός, δηλαδὴ ἕνας ρητὸς ἢ ἕνας ἄρρητος ἀριθμός. Ὁ πραγματικὸς αὐτὸς ἀριθμὸς ὀνομάζεται καὶ μῆκος τοῦ ΑΒ ὡς πρὸς μονάδα τὸ ΓΔ.

Ὥστε: **Ὅταν δοθῇ ἕνα εὐθύγραμμον μὴ μηδενικὸν τμῆμα, ἔστω μ, ὡς μονὰς**

μετρήσεως εὐθυγράμμων τμημάτων καὶ ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα, ἔστω AB, τότε ὁρίζεται ἕνας καὶ μόνον πραγματικὸς ἀριθμός, ὁ λόγος $\frac{AB}{\mu}$, ὡς τὸ μῆκος τοῦ AB ἢ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ AB, συμβολικῶς : (AB).

Ἂν $\frac{AB}{\mu} = x$, τότε συμβολίζομεν: $AB = x \cdot \mu$ εἴτε $(AB) = x$ μονάδες μ, π.χ. $(AB) = 5$ cm.

Σημ. Ὅταν λοιπὸν γράφωμεν $(AB) = 5$ cm ἐννοοῦμεν $\frac{AB}{1 \text{ cm}} = 5$. Ἠμποροῦμεν, βεβαίως νὰ γράψωμεν : $AB = 5 \cdot (1 \text{ cm})$ ἀλλ' αὐτὸ δὲν συνηθίζεται. Δηλ. εἰς τὸν συμβολισμὸν $(AB) = 5$ cm δὲν σημειώνεται πολ/σμός, ἀλλὰ τὸ cm εἶναι δηλωτικὸν τῆς χρησιμοποιηθείσης μονάδος εἰς τὴν μέτρησιν.

B) Ἂν AB καὶ ΓΔ εἶναι δύο εὐθύγραμμα τμήματα, ὁ λόγος $\frac{AB}{\Gamma\Delta}$ εἶναι, ὅπως ἐμάθαμεν εἰς τὰ προηγούμενα, ἕνας πραγματικὸς ἀριθμός, ἔστω ν. Ἔχομεν τότε $\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \nu \Leftrightarrow AB = \nu \cdot \Gamma\Delta$ (1)

Ἂν λάβωμεν τώρα ἕνα ἄλλο εὐθύγραμμον τμῆμα μ, οἱ λόγοι $\frac{AB}{\mu} =$ (ἔστω) x καὶ $\frac{\Gamma\Delta}{\mu} =$ (ἔστω) ψ, δηλ. τὰ μήκη τῶν AB καὶ ΓΔ ὡς πρὸς μονάδα τὸ μ, εἶναι οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ x καὶ ψ.

Ἔχομεν λοιπὸν τότε :

$AB = x \cdot \mu$ καὶ $\Gamma\Delta = \psi \cdot \mu$

καὶ ἐπομένως ἡ δευτέρα ἰσότης εἰς τὴν ἀνωτέρω ἰσοδυναμίαν (1) γίνεται :

$$x \cdot \mu = \nu \cdot \psi \cdot \mu$$

δηλαδή : x μονάδες $\mu = (\nu \cdot \psi)$ μονάδες μ

ὥστε :

$x = \nu\psi$

καὶ ἐπομένως $\frac{x}{\psi} = \nu$.

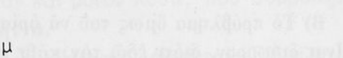
Ἡ πρώτη λοιπὸν ἰσότης τῆς ἰσοδυναμίας (1) γίνεται :

$$\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{x}{\psi}$$

Δηλαδή: **ὁ λόγος ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος AB πρὸς ἄλλο ΓΔ, ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τῶν ἀντιστοίχων μηκῶν των, ὅταν μετρηθοῦν μὲ τὴν αὐτὴν μονάδα.**

42. ΠΑΡΑΣΤΑΣΙΣ ΤΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΜΕ ΤΑ ΣΗΜΕΙΑ ΕΥΘΕΙΑΣ

Ἔστω μία εὐθεῖα καὶ δύο σημεῖα της τὸ Ο καί, δεξιὰ αὐτοῦ, τὸ Α (Σχ. 42–1). Ἂς ἀντιστοιχίσωμεν εἰς τὸ Ο τὸν ἀριθμὸν 0 καὶ εἰς τὸ Α τὸν ἀριθμὸν 1.



Σχ. 42 – 1

Τότε : εἰς κάθε σημεῖον Μ τῆς ε ἠμποροῦμεν ν' ἀντιστοιχίσωμεν ἕνα πραγματικὸν ἀριθμὸν ὡς ἑξῆς : α) ἂν τὸ Μ κεῖται πρὸς τὸ μέρος τοῦ Ο, πού κεῖται καὶ τὸ Α, ἀντιστοιχίζομεν τὸν λόγον $\frac{OM}{OA}$, πού ἔχει ὁρισθῆ ἀνωτέρω· β) ἂν τὸ Μ δὲν κεῖται πρὸς τὸ μέρος τοῦ Ο, πού κεῖται τὸ Α, ἀντιστοιχίζομεν τὸν «ἀντίθετον» τοῦ λόγου $\frac{OM}{OA}$.

Ὁρίζεται λοιπὸν μία μονοσήμαντος ἀπεικόνισις τοῦ σημειοσυνόλου ε εἰς τὸ R.

Δεχόμεθα ὅτι ἡ ἀπεικόνισις αὐτή, ἔστω F, εἶναι ἀμφιμονοσήμαντος δηλ. δεχόμεθα ὅτι διὰ πᾶν $\alpha \in R$ ὑπάρχει ἕνα καὶ μόνον σημεῖον Μ ἐπὶ τῆς ε ὥστε ἡ εἰκὼν τοῦ Μ μὲ τὴν ἀπεικόνισιν F νὰ εἶναι ὁ α. Ἡ εὐθεῖα ε ὀνομάζεται τότε : εὐθεῖα τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

43. ΠΡΑΞΕΙΣ ΚΑΙ ΔΙΑΤΑΞΙΣ ΕΙΣ ΤΟ ΣΥΝΟΛΟΝ R.

Α) Εἰς τὸ σύνολον τῶν δεκαδικῶν περιοδικῶν δὲν ὡρίσαμεν ἰδιαιτέρως πράξεις, διάταξιν κτλ., διότι κάθε δεκαδικὸς περιοδικὸς ἔχει ἀκριβῶς ἕνα «ἀντιπρόσωπον» εἰς τὸ σύνολον τῶν ρητῶν ἀριθμῶν καὶ διὰ τοὺς ρητοὺς ἀριθμοὺς ἔχουν ἤδη ὁρισθῆ ἡ διάταξις καὶ αἱ τέσσαρες πράξεις. Δι' αὐτὸν τὸν λόγον, ἂν ἠθέλαμεν νὰ ὁρίσωμεν τὴν ἔννοιαν : ἄθροισμα $\delta_1 + \delta_2$, ὅπου δ_1, δ_2 δεκαδικοὶ περιοδικοί, θὰ τὴν ὡρίζαμεν ὡς ἑξῆς : **ἂν ρ_1, ρ_2 εἶναι οἱ ρητοὶ μὲ ἀντιπροσώπους των εἰς τὸ σύνολον τῶν περιοδικῶν δεκαδικῶν τοὺς δ_1,, δ_2 τότε ἄθροισμα $\delta_1 + \delta_2$ εἶναι ὁ δεκαδικὸς ἀντιπρόσωπος τοῦ ἀθροίσματος $\rho_1 + \rho_2$.**

Ἀναλόγως θὰ ἐκάμναμεν διὰ τὰς ἄλλας πράξεις καθὼς καὶ διὰ τὴν διάταξιν.

Β) Τὸ πρόβλημα ὅμως τοῦ νὰ ὁρίσωμεν πράξεις καὶ διάταξιν εἰς τὸ σύνολον R εἶναι διάφορον, διότι ἐδῶ τὸν κάθε πραγματικὸν ἀριθμόν, ὅπως τὸν θεωροῦμεν ὡς ἀπειροψήφιον δεκαδικόν, δὲν τὸν ἔχομεν «ὁλόκληρον» (ἐκτὸς μόνον, ἐὰν ὁ θεωρούμενος πραγματικὸς εἶναι, εἰδικώτερον, δεκαδικὸς περιοδικὸς ἀριθμός), **ἀλλὰ ἔχομεν μόνον: ρητοὺς προσεγγιστικοὺς ἀντιπροσώπους** (ὅσους θέλομεν διὰ τὸν κάθε πραγματικὸν ἀριθμόν). Ὁ ὁρισμὸς λοιπὸν τῶν πράξεων καὶ τῆς διατάξεως εἰς τὸ σύνολον R θὰ πρέπει νὰ ὁρισθῆ μὲ τὴν βοήθειαν τῶν προσεγγιστικῶν ἀντιπροσώπων των. **Μία ἀνάπτυξις τοῦ θέματος αὐτοῦ ὑπερβαίνει τὰς δυνατότητας αὐτῆς τῆς τάξεως εἰς τὴν πρᾶξιν δὲ δὲν ἔχει σκοπιμότητα.** Διὰ τοῦτο περιοριζόμεθα μόνον νὰ δώσωμεν ἕνα «τρόπον» διὰ τὰς πράξεις καὶ τὴν διάταξιν, ὁ ὁποῖος **ἐξυπηρετεῖ εἰς τὰς πρακτικὰς ἐφαρμογάς.** Διὰ νὰ κατανοηθῆ αὐτὸς ὁ τρόπος λαμβάνομεν ἕνα παράδειγμα : Ἔστωσαν οἱ ἄρρητοι, $\alpha_1 = \sqrt{3}$, $\alpha_2 = \sqrt{2}$. Διὰ νὰ ὁρίσωμεν τὴν ἔννοιαν **ἄθροισμα $\sqrt{3} + \sqrt{2}$,** λαμβάνομεν προσεγγιστικοὺς ἀντιπροσώπους των **μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν δεκαδικῶν ψηφίων,** π.χ. τοὺς 1,73 καὶ 1,41, εὑρίσκομεν τὸ ἄθροισμα : $1{,}73 + 1{,}41 = 3{,}14$ καὶ λέγομεν ὅτι : **«ὁ 3,14 εἶναι ἕνας προσεγγιστικὸς ἀντιπρόσωπος τοῦ ἀθροίσματος $\alpha_1 + \alpha_2$».** Εἰς τὴν πρᾶξιν λέγομεν : **τὸ ἄθροισμα $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ εἶναι περίπου 3,14** καὶ γράφομεν : $\sqrt{3} + \sqrt{2} \simeq 3{,}14$.

Ἠμποροῦμεν νὰ ἔχωμεν προσέγγισιν, ὅσον μεγαλυτέραν θέλομεν, ἀρκεῖ νὰ λαμβάνωμεν προσεγγιστικοὺς ἀντιπροσώπους μὲ περισσότερα, κάθε φοράν, δεκαδικὰ ψηφία.

Διὰ τὴν διάταξιν, παρατηροῦμεν ἐδῶ ὅτι εἶναι :

$$\left.\begin{array}{l} 1{,}7 \quad > 1{,}41 \\ 1{,}73 \quad > 1{,}41 \\ 1{,}732 > 1{,}414 \end{array}\right|$$ διὰ τοῦτο θὰ εἴπωμεν ὅτι : ὁ $\sqrt{3}$ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ $\sqrt{2}$ καὶ θὰ συμβολίσωμεν : $\sqrt{3} > \sqrt{2}$.

Γ) Παρὰ τὰ ἀνωτέρω ὀφείλομεν νὰ γνωρίζωμεν τὰ κάτωθι :

Εἰς τὸ σύνολον R ὁρίζονται μὲ αὐστηρότητα πράξεις : πρόσθεσις, πολλαπλασιασμός, ἀφαίρεσις, διαίρεσις· ὁρίζονται ἐπίσης αἱ ἔννοιαι «μεγαλύτερος τοῦ» καὶ «μικρότερος τοῦ» **Αἱ πράξεις αὐταὶ καὶ αἱ ἀνισότητες ἔχουν τὰς αὐτὰς ἰδιότητας, ποὺ ἔχουν αἱ ὁμώνυμοί των πράξεις καὶ αἱ ἀνισότητες εἰς τὸ σύνολον Q, τῶν ρητῶν ἀριθμῶν, καὶ εἰδικώτερον, ὅταν ἀναφέρωνται εἰς τοὺς ρητοὺς ἀριθμούς, «συμπίπτουν» μὲ τὰς ὁμωνύμους των πράξεις καὶ ἀνισότητας τοῦ συνόλου Q.** Ἀναφέρομεν ἐδῶ αὐτὰς τὰς πράξεις καὶ ἀνισότητας μὲ τὰς ἰδιότητάς των.

1ον. Πρόσθεσις καὶ ἀφαίρεσις.

1α) Διὰ κάθε $\alpha \in R$ καὶ κάθε $\beta \in R$ ὁρίζεται μονοσημάντως ἕνας $\gamma \in R$, ποὺ ὀνομάζεται : **τὸ ἄθροισμα α σὺν β,** συμβολικῶς $\alpha + \beta$.

1β) Ἡ πρόσθεσις εἶναι **ἀντιμεταθετική:** $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.

1γ) Ἡ πρόσθεσις εἶναι **προσεταιριστική**: $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$.

1δ) Ἡ ἐξίσωσις $x + \alpha = \beta$ ἔχει μίαν καὶ μόνον λύσιν, ποὺ συμβολίζεται μὲ $\beta - \alpha$ καὶ ὀνομάζεται : **διαφορὰ β πλὴν α.**

Ἡ πρᾶξις εὑρέσεως τῆς διαφορᾶς ὀνομάζεται : **ἀφαίρεσις.** Εἰδικῶς : α) **ἡ πρόσθεσις ἔχει ἕνα καὶ μόνον οὐδέτερον στοιχεῖον,** τὸν 0, $\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$ διὰ κάθε $\alpha \in R$ καὶ β) διὰ κάθε $\alpha \in R$ ὑπάρχει ἕνας καὶ μόνον $\alpha' \in R$ μὲ $\alpha + \alpha' = 0$. Ὁ α' λέγεται : **ὁ ἀντίθετος τοῦ α** καὶ συμβολίζεται μὲ $-\alpha$.

2ον Πολλαπλασιασμὸς καὶ διαίρεσις :

2α) Διὰ κάθε $\alpha \in R$ καὶ κάθε $\beta \in R$ ὁρίζεται μονοσημάντως ἕνας $\gamma \in R$, ποὺ ὀνομάζεται: **τὸ γινόμνον** α ἐπὶ β, συμβολικῶς $\alpha \cdot \beta$. Ἡ πρᾶξις εὑρέσεως τοῦ γινομένου λέγεται **πολλαπλασιασμός.**

2β) Ὁ πολλαπλασιασμὸς εἶναι **ἀντιμεταθετικὸς** :$\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$.

2γ) Ὁ πολλαπλασιασμὸς εἶναι **προσεταιριστικός :**

$$\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \gamma) \cdot \gamma$$

2δ) Ἡ ἐξίσωσις $\alpha \cdot x = \beta, \alpha \neq 0$ ἔχει μίαν καὶ μόνον λύσιν, ποὺ συμβολίζεται μὲ $\beta : \alpha$ εἴτε $\frac{\beta}{\alpha}$ καὶ ὀνομάζεται **πηλίκον β διὰ α** εἴτε **κλάσμα β διὰ α** εἴτε **λόγος τοῦ β πρὸς τὸν α.**

Ἡ πρᾶξις εὑρέσεως τοῦ πηλίκου ὀνομάζεται **διαίρεσις.**

Εἰδικῶς : α) ὁ πολλαπλασιασμὸς ἔχει ἕνα καὶ μόνον **οὐδέτερον στοιχεῖον,** τὸν 1, $\alpha \cdot 1 = \alpha$ διὰ κάθε $\alpha \in R$ καὶ β) διὰ κάθε $\alpha \in R$, $\alpha \neq 0$, ὑπάρχει ἕνας καὶ μόνον $\alpha' \in R$ μὲ $\alpha \cdot \alpha' = 1$. Ὁ α' λέγεται : **ὁ ἀντίστροφος τοῦ α** καὶ συμβολίζεται μὲ $\frac{1}{\alpha}$.

2ε) Ὁ πολλαπλασιασμὸς εἶναι ἐπιμεριστικὸς ὡς πρὸς τὴν πρόσθεσιν:

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$$

3ον) Ὁρίζονται ἐπίσης αἱ ἀνισότητες : **«μεγαλύτερος τοῦ»**, $\alpha > \beta$, καὶ **«μικρότερος τοῦ»**, $\alpha < \beta$, καὶ ἔχουν τὰς ἰδιότητας τῶν ὁμωνύμων των ἀνισοτήτων εἰς τὸ σύνολον Q τῶν σχετικῶν ρητῶν. Διὰ κάθε $\alpha \in R$ καὶ $\beta \in R$ ἰσχύει μία καὶ μόνον ἀπὸ τὰς προτάσεις :

ι) $\alpha = \beta$ ιι) $\alpha > \beta$ ιιι) $\alpha < \beta$

4ον) Τέλος εἰς τὸ R ὁρίζεται καὶ ἡ ἔννοια τῆς δυνάμεως.

Αἱ δυνάμεις ἔχουν καὶ ἐδῶ τὰς αὐτὰς ἰδιότητας, ποὺ ἔχουν εἰς τὸ σύνολον Q, τῶν ρητῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

Οὕτως, ἂν x εἶναι κάποιος πραγματικὸς ἀριθμός, ὁρίζεται τὸ τετράγωνον αὐτοῦ $x^2 = x \cdot x$ (ἐξ ὁρισμοῦ) καὶ εἶναι ἕνας πραγματικὸς ἀριθμός.

Δ) Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω ἠμποροῦμεν νὰ ἀποδείξωμεν διαφόρους προτάσεις, ὅπως π.χ. :

1) $\alpha \cdot 0 = 0$, διὰ πάντα πραγματικὸν ἀριθμὸν α.

Πράγματι :

$\alpha \cdot 0 = \alpha \cdot 0 + 0$ (διότι τὸ 0 εἶναι οὐδέτερον εἰς τὴν πρόσθεσιν)
$= \alpha \cdot 0 + \alpha + (-\alpha)$ (διότι $\alpha + (-\alpha) = 0$)
$= \alpha \cdot 0 + 1 \cdot \alpha + (-\alpha)$ (διότι $1 \cdot \alpha = \alpha$)
$= \alpha \cdot (0 + 1) + (-\alpha)$ (ἐπιμεριστικότης πολ/σμοῦ)
$= \alpha \cdot 1 + (-\alpha)$ (τὸ 0 οὐδέτερον εἰς τὴν πρόσθεσιν)
$= \alpha + (-\alpha)$ (τὸ 1 οὐδέτερον εἰς τὸν πολ/σμὸν)
$= 0$ (παραδοχὴ ὑπάρξεως ἀντιθέτου διὰ κάθε πραγματικὸν α).

Ὥστε $\alpha \cdot 0 = 0$

2) $(-1) \cdot \alpha = -\alpha$

Πράγματι ἔχομεν :

$$\begin{aligned}(-1) \cdot \alpha &= (-1) \cdot \alpha + 0 \\ &= (-1) \cdot \alpha + \alpha + (-\alpha) \\ &= (-1) \cdot \alpha + 1 \cdot \alpha + (-\alpha) \\ &= [(-1) + 1] \cdot \alpha + (-\alpha) \\ &= 0 \cdot \alpha + (-\alpha) \\ &= 0 + (-\alpha) \\ &= -\alpha\end{aligned}$$

Ὥστε : $(-1) \cdot \alpha = -\alpha$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

101) Παρατηρήσατε τὸν ἀπειροψήφιον δεκαδικόν :

$\alpha = 0{,}202002000200002000002\ldots$,

εἰς τὸν ὁποῖον εἶναι φανερὸς ὁ τρόπος, μὲ τὸν ὁποῖον προχωροῦμεν εἰς τὴν ἀναγραφὴν τῶν δεκαδικῶν ψηφίων του. Τί ἀριθμὸς εἶναι ὁ α ; Δικαιολογήσατε τὴν ἀπάντησίν σας.

102) Ὁ ἀριθμὸς $x = 0,101001000100001\ldots$ εἶναι ἀσύμμετρος. Ἠμπορεῖτε νὰ ὁρίσετε ἕνα ἀριθμὸν ψ τοιοῦτον, ὥστε $x + \psi$ νὰ εἶναι ρητός ;

103) Νὰ ἐργασθῆτε ὅπως εἰς τὴν 43, Δ διὰ νὰ ἀποδείξετε ὅτι $(-1)\cdot(-1) = 1$.

104) Νὰ ἀποδείξετε, στηριζόμενοι εἰς τὰ προηγούμενα, ὅτι ἐὰν $\alpha, \beta, \in R$, τότε :

α) $-(-\alpha) = \alpha$

β) $(-\alpha)\cdot\beta = -(\alpha\beta)$

γ) $\alpha\cdot(-\beta) = -(\alpha\beta)$

δ) $(-\alpha)\cdot(-\beta) = \alpha\beta$

ε) $-(\alpha+\beta) = (-\alpha)+(-\beta)$

105) Εἴδαμεν εἰς τὴν 43, Γ ὅτι, ὡς ἀποδεικνύεται, ἡ ἐξίσωσις $\alpha x = \beta$, ὅπου $\alpha \in R$ $\beta \in R$ καὶ $\beta \neq 0$, ἔχει μίαν μοναδικὴν λύσιν, ἡ ὁποία συμβολίζεται μὲ $\beta : \alpha$ ἢ $\frac{\beta}{\alpha}$ καὶ ὀνομάζεται : τὸ πηλίκον $\frac{\beta}{\alpha}$. Θὰ εἶναι ἑπομένως $\alpha\cdot\frac{\beta}{\alpha} = \beta$. Ἀλλὰ καὶ τὸ γινόμενον $\beta\cdot\frac{1}{\alpha}$ πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ α δίδει : $\left(\beta\cdot\frac{1}{\alpha}\right)\cdot\alpha = \beta\cdot\left(\frac{1}{\alpha}\cdot\alpha\right) = \beta\cdot 1 = \beta$. Ἄρα ἰσχύει

$\frac{\beta}{\alpha} = \beta\cdot\frac{1}{\alpha}$.

Χρησιμοποιήσατε τὴν τελευταίαν αὐτὴν ἰσότητα καὶ τὰς γνωστὰς ἰδιότητας τῶν πράξεων διὰ νὰ ἀποδείξετε ὅτι :

$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\gamma}{\beta} = \frac{\alpha+\gamma}{\beta}$, ὅπου $\alpha \in R$, $\beta \in R$, $\gamma \in R$, $\beta \neq 0$.

Παρατήρησις : Στηριζόμενοι εἰς τὰς παραδοχὰς τὰς ὁποίας ἐκάμαμεν διὰ τοὺς πραγματικοὺς ἀριθμοὺς (ἀξιώματα), δυνάμεθα νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι :

ἐὰν $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in R$, τότε :

1) $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha+\gamma = \beta+\gamma$.

2) $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha\cdot\gamma = \beta\cdot\gamma$.

3) $\alpha\cdot\beta = 0 \Leftrightarrow (\alpha = 0$ εἴτε $\beta = 0)$.

4) $(\alpha\gamma = \beta\gamma$ καὶ $\gamma \neq 0) \Rightarrow \alpha = \beta$.

5) $(\alpha = \beta$ καὶ $\gamma \neq 0) \Rightarrow \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\gamma}$

6) $(\alpha = \beta$ καὶ $\gamma = \delta) \Rightarrow \alpha+\gamma = \beta+\delta$.

7) $(\alpha = \beta$ καὶ $\gamma = \delta) \Rightarrow \alpha\cdot\gamma = \beta\cdot\delta$.

8) $\frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{\delta} = \frac{1}{\beta\delta}$ $(\beta \neq 0,\ \delta \neq 0)$.

9) $\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha\gamma}{\beta\cdot\delta}$ $(\beta \neq 0,\ \delta \neq 0)$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV

ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΚΑΙ ΡΙΖΑΙ ΤΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

44. ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΜΕ ΒΑΣΙΝ ΡΗΤΟΝ ΚΑΙ ΕΚΘΕΤΗΝ ΑΚΕΡΑΙΟΝ.

Α) Εἰς τὴν β' τάξιν ἐμάθαμεν διὰ τὰς δυνάμεις τῶν ρητῶν ἀριθμῶν μὲ ἐκθέτας ακεραίους θετικοὺς ἢ ἀρνητικοὺς καὶ τὰς ἰδιότητας τῶν δυνάμεων τούτων. Ὑπενθυμίζομεν ἐδῶ συντόμως τὰς ἰδιότητας αὐτάς :

1) $\alpha^{\mu} \cdot \alpha^{\nu} \quad = \alpha^{\mu+\nu}$

2) $(\alpha^{\mu})^{\nu} \quad = \alpha^{\mu\nu}$

3) $(\alpha \cdot \beta)^{\mu} \quad = \alpha^{\mu} \cdot \beta^{\mu}$

4) $\dfrac{\alpha^{\mu}}{\alpha^{\nu}} = \alpha^{\mu-\nu}$, ὅπου $\alpha \neq 0$

5) $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{\mu} = \dfrac{\alpha^{\mu}}{\beta^{\mu}}$, ὅπου $\beta \neq 0$

Ὡρίσαμεν ὅτι $\alpha^0 = 1$, διὰ κάθε ρητὸν $\alpha \neq 0$.

Ὡρίσαμεν ἐπίσης ὅτι $\alpha^{-\mu} = \dfrac{1}{\alpha^{\mu}}$ διὰ πάντα θετικὸν ἀκέραιον μ καὶ κάθε ρητὸν $\alpha \neq 0$.

Παραδείγματα : 1ον) Νὰ ἁπλοποιηθῇ ἡ παράστασις $(\alpha^{-3} \cdot \beta^2)^{-2}$

Ἔχομεν :

$$\begin{aligned}
(\alpha^{-3} \cdot \beta^2)^{-2} &= (\alpha^{-3})^{-2} \cdot (\beta^2)^{-2} && \text{(λόγῳ τῆς ἰδιότητος 3)}\\
&= \alpha^6 \cdot \beta^{-4} && \text{(λόγῳ τῆς ἰδιότητος 2)}\\
&= \alpha^6 \cdot \frac{1}{\beta^4} && \left(\text{λόγῳ τοῦ ὁρισμοῦ } \alpha^{-\mu} = \frac{1}{\alpha^{\mu}}\right)\\
&= \frac{\alpha^6}{\beta^4}
\end{aligned}$$

2ον) Νὰ ἁπλοποιηθῇ ἡ παράστασις : $\left(\dfrac{5x^3\psi^4}{2x^{-2}}\right)^{-2}$

Ἔχομεν :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{5x^3\psi^4}{2x^{-2}}\right)^{-2} &= \frac{1}{\left(\frac{5x^3\psi^4}{2x^{-2}}\right)^2} && \left(\text{ὁρισμὸς τοῦ } \alpha^{-\mu} = \frac{1}{\alpha^{\mu}}\right)\\
&= \frac{1}{\frac{(5x^3\psi^4)^2}{(2x^{-2})^2}} && \text{(λόγῳ τῆς ἰδιότητος 5)}
\end{aligned}$$

$$= \frac{(2x^{-2})^2}{(5x^3\psi^4)^2} \quad \text{(τροπὴ τοῦ συνθέτου κλάσματος εἰς ἁπλοῦν)}$$

$$= \frac{2^2(x^{-2})^2}{5^2(x^3)^2(\psi^4)^2} \quad \text{(λόγῳ τῆς ἰδιότητος 3)}$$

$$= \frac{4x^{-4}}{25x^6\psi^8} \quad \text{(λόγῳ τῆς ἰδιότητος 2)}$$

$$= \frac{4}{25x^6\psi^8} \cdot \frac{1}{x^4} \quad \left(\text{ἐπειδὴ } x^{-\rho} = \frac{1}{x^\rho}\right)$$

$$= \frac{4}{25x^{10}\psi^8} \quad \text{(λόγῳ τῆς ἰδιότητος 1)}$$

Β) Εἰς τὰ προηγούμενα (παράγρ. 43, Γ) εἴδαμεν ὅτι ἡ ἔννοια τῆς δυνάμεως μὲ ἐκθέτην ἀκέραιον θετικόν, ἀρνητικὸν ἢ μηδὲν καὶ μὲ βάσιν τυχόντα πραγματικὸν ἀριθμὸν (ἑπομένως καὶ ἄρρητον) ὁρίζεται ὅπως ἀκριβῶς ὅταν ἡ βάσις εἶναι ρητὸς ἀριθμὸς καὶ αἱ ἀνωτέρω ἰδιότητες 1—5 ἰσχύουν ἐπίσης καὶ δι' αὐτὰς τὰς δυνάμεις.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

106) Νὰ ἁπλοποιήσετε τὰς κατωτέρω ἐκφράσεις, εἰς τὰς ὁποίας ὑποτίθεται ὅτι, ὅπου ὑπάρχει μεταβλητὴ εἰς τὴν παρονομαστήν, λαμβάνει πραγματικὰς τιμὰς διαφόρους τοῦ μηδενός. Νὰ δώσετε τελικῶς ἐκφράσεις χωρὶς ἀρνητικοὺς ἐκθέτας :

α) $\alpha^3 \cdot 5^3 \cdot 5$ β) $(-5x^2y)^2$ γ) $\frac{x^{-2}}{x^{-5}}$

δ) $\frac{(x^{-3})^2 \cdot x^5}{x^{-1}}$ ε) $(-2x^{-4})^2$ ζ) $\frac{2x^{-3}}{3\psi^{-2}}$

ζ) $(\alpha^{-2}\beta)^4$ η) $(\alpha^4 \cdot \alpha^{-4})^4$ θ) $\frac{x^0}{\psi^{-2}}$

ι) $\frac{3^4}{2^3 + 2^0}$ ια) $0^1 \cdot 1^0$ ιβ) $\frac{2^{-2} + 3^{-3}}{4^{-2} - 9^{-1}}$

107) Νὰ ἐκφράσετε κάθε ἀριθμὸν ὡς δύναμιν τοῦ 2 καὶ ἔπειτα νὰ ἁπλοποιήσετε :

α) $\left[\left(\frac{1}{4}\right)^6 \cdot 64\right]^{-3} \cdot 32^{-2}$ β) $\frac{32^4 - 16^3}{8^5 + 4^6}$

45. ΡΙΖΑΙ ΤΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ.

Α) Εἴδαμεν εἰς τὰ προηγούμενα ὅτι μὲ τὴν εἰσαγωγὴν τῶν ἀρρήτων ἀριθμῶν κάθε θετικὸς ρητὸς εἶναι τετράγωνον ἄλλου πραγματικοῦ ἀριθμοῦ. Εἴδαμεν ἐπίσης ὅτι κάθε εὐθύγραμμον τμῆμα εἶναι δυνατὸν νὰ μετρηθῇ καὶ νὰ παρασταθῇ ἀπὸ πραγματικὸν ἀριθμόν.

Ἀποδεικνύεται ὅτι : διὰ κάθε πραγματικὸν **θετικὸν** ἀριθμὸν β καὶ διὰ κάθε φυσικὸν ν ὑπάρχει ἕνας καὶ μόνος ἕνας, πραγματικὸς θετικός, ἔστω α, μὲ τὴν ἰδιότητα : ἡ νυοστὴ δύναμις τοῦ α νὰ εἶναι ὁ β, δηλαδὴ μὲ τὴν ἰδιότητα :

$$\alpha^\nu = \beta \qquad (1)$$

Ὁ μοναδικὸς αὐτὸς πραγματικὸς θετικὸς ἀριθμὸς λέγεται : νυοστὴ ρίζα τοῦ β καὶ συμβολίζεται $\sqrt[\nu]{\beta}$, δηλαδὴ εἶναι ἐξ ὁρισμοῦ :

$$\alpha = \sqrt[\nu]{\beta} \qquad (2)$$

Οἱ συμβολισμοὶ λοιπὸν (1) καὶ (2) εἶναι ἰσοδύναμοι. Ἤτοι ἰσχύει :

$\alpha = \sqrt[\nu]{\beta} \Leftrightarrow \alpha^\nu = \beta$ (διὰ κάθε θετικὸν β καὶ ν φυσικόν). Ὁρίζομεν ἐπίσης:

$\sqrt[\nu]{0} = 0$ διὰ κάθε $\nu = 1, 2, 3, \ldots$

Εἰς τὸν συμβολισμὸν $\sqrt[\nu]{\beta}$, τὸ $\sqrt{}$ λέγεται **ριζικόν**, ὁ ν λέγεται **δείκτης** τῆς **ρίζης** καὶ ὁ β **ὑπόρριζον.** Ὁ δείκτης 2 δὲν γράφεται, ἀλλὰ ὑπονοεῖται.

Συμβατικῶς ὁρίζομεν : $\sqrt[1]{\beta} = \beta$

Ἡ τετραγωνικὴ ρίζα λέγεται καὶ **ρίζα δευτέρας τάξεως** ἢ τρίτη λέγεται καὶ **κυβικὴ ρίζα** ἢ **ρίζα τρίτης τάξεως,** ἡ τετάρτη ρίζα λέγεται ρίζα τετάρτης τάξεως κλπ.

Παραδείγματα :

1ον. $\sqrt[3]{8} = 2$, διότι $2^3 = 8$

2ον. $\sqrt[4]{81} = 3$, διότι $3^4 = 81$

3ον. $\sqrt[5]{243} = 3$, διότι $3^5 = 243$ κ.ο.κ.

Β) Ἀποδεικνύεται ἐπίσης ὅτι : διὰ πάντα πραγματικὸν ἀρνητικὸν ἀριθμὸν β καὶ διὰ κάθε **περιττὸν** φυσικὸν ν ὑπάρχει ἕνας καὶ μόνον ἕνας, πραγματικὸς **ἀρνητικὸς** ἀριθμὸς α, ὥστε νὰ ἰσχύῃ :

$$\alpha^\nu = \beta \qquad (1')$$

Ὁ μοναδικὸς αὐτὸς πραγματικὸς ἀρνητικὸς α λέγεται ἐπίσης : νυοστὴ ρίζα τοῦ β καὶ συμβολίζεται ὁμοίως : $\sqrt[\nu]{\beta}$. Ἤτοι

$$\alpha = \sqrt[\nu]{\beta} \qquad (2'')$$

Ὥστε πάλιν εἶναι :

$\alpha = \sqrt[\nu]{\beta} \Leftrightarrow \alpha^\nu = \beta$ (διὰ κάθε $\beta < 0$ καὶ ν φυσικὸν περιττόν)

Παραδείγματα :

1ον) $\sqrt[3]{-8} = -2$, διότι $(-2)^3 = -8$

2ον) $\sqrt[5]{-243} = -3$, διότι $(-3)^5 = -243$

3ον) $\sqrt[7]{-128} = -2$, διότι $(-2)^7 = -128$ κ.ο.κ.

Γ) Εἶναι φανερὸν ὅτι $\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^\nu = \alpha$, ὅταν ἡ $\sqrt[\nu]{\alpha}$ ὁρίζεται συμφώνως πρὸς ὅσα εἴπαμεν ἀνωτέρω.

Εἶναι π.χ. $\left(\sqrt[3]{-8}\right)^3 = -8$, $\left(\sqrt[4]{81}\right)^4 = 81$ κ.τ.λ.

Παρατήρησις 1η. Ὡρίσαμεν προηγουμένως τὴν σημασίαν τοῦ συμβόλου $\sqrt[\nu]{\alpha}$ 1) ὅταν $\alpha > 0$ καὶ ν τυχὼν φυσικὸς καὶ

2) ὅταν $\alpha < 0$ καὶ ν τυχὼν περιττὸς φυσικός.

Ἑπομένως σύμβολα ὅπως τὰ $\sqrt[4]{-10}$, $\sqrt{-16}$, $\sqrt[8]{-10}$ κτλ. δὲν ὡρίσθησαν.

Ὁ λόγος εἶναι ὁ ἑξῆς :

Ἡ ἐξίσωσις $x^\nu = \alpha$, ἂν εἶναι $\alpha < 0$ καὶ ν ἄρτιος φυσικός, δὲν ἔχει κάποιαν λύσιν εἰς τὸ σύνολον R.

Ἡ ἐξίσωσις. π.χ. $x^2 = -6$, δι' οὐδένα $x \in R$ ἐπαληθεύεται. Ὥστε ἡ παράστασις $\sqrt[\nu]{\alpha}$ δὲν ἔχει ἔννοιαν πραγματικοῦ ἀριθμοῦ μόνον ἐὰν εἶναι $\alpha < 0$ καὶ ν ἄρτιος φυσικός. Εἰς κάθε ἄλλην περίπτωσιν ἔχει ἔννοιαν.

Παρατήρησις 2α. Κατὰ τὰ προηγούμενα, ἐὰν ἡ παράστασις $\sqrt[\nu]{\alpha}$ ἔχῃ ἔννοιαν, ἰσχύει :

$$(\sqrt[\nu]{\alpha})^\nu = \alpha$$

Αὐτὸ δὲν ἰσχύει μόνον ἐὰν εἶναι $\alpha < 0$ καὶ ν ἄρτιος φυσικός.

Ἡ παράστασις ὅμως $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu}$ ἔχει ἔννοιαν πάντοτε (ἀκόμη καὶ ὅταν $\alpha < 0$ καὶ ν ἄρτιος), δυνάμεθα δὲ νὰ συμπεράνωμεν ὅτι εἰδικῶς διὰ $\alpha < 0$ καὶ ν ἄρτιον εἶναι :

$$\sqrt[\nu]{\alpha^\nu} = -\alpha = |\alpha|$$

Π.χ. $\sqrt[4]{(-2)^4} = \sqrt[4]{2^4} = 2 = -(-2) = |-2|$, $\sqrt{(-4)^2} = \sqrt{4^2} = 4 = |-4|$.

Ὥστε : ὅταν ν εἶναι ἄρτιος φυσικὸς καὶ α τυχὼν πραγματικός, τότε :

$$\sqrt[\nu]{\alpha^\nu} = |\alpha|$$

Ἀσκήσεις ἀπὸ τὸ τετρά- διον.

Εἰς τὴν τετάρτην τάξιν θὰ μάθωμεν γενικῶς περὶ τῶν ριζῶν τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν καὶ τῶν ἰδιοτήτων αὐτῶν.

Τώρα θὰ περιορισθῶμεν εἰς τὰ ριζικὰ δευτέρας τάξεως.

46. ΡΙΖΙΚΑ ΔΕΥΤΕΡΑΣ ΤΑΞΕΩΣ.

Α) Εἴπαμεν ἀνωτέρω ὅτι $\sqrt{x^2} = |x|$

Ἀναλυτικώτερον ἠμποροῦμεν νὰ γράψωμεν :

$$\left.\begin{array}{l} x \geqslant 0 \Rightarrow \sqrt{x^2} = x \\ x < 0 \Rightarrow \sqrt{x^2} = -x \end{array}\right\}$$

π.χ. $\sqrt{(-5)^2} = 5$, $\sqrt{5^2} = 5$

Ἐπίσης $\sqrt{(3-x)^2} = |3-x|$. Ἑπομένως :

ἐὰν $3 - x \geqslant 0$, δηλ. ἐὰν $x \leqslant 3$, τότε $\sqrt{(3-x)^2} = 3 - x$,

ἐαν $3 - x < 0$, δηλ. ἐὰν $\chi > 3$, τότε $\sqrt{(3-x)^2} = -(3-x) = x - 3$.

Β) Γινόμενον δύο ριζῶν. Ἔστω ὅτι ζητοῦμεν τὸ γινόμενον $\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}$, ὅπου α, β θετικοὶ πραγματικοὶ ἀριθμοί. Ἐν πρώτοις γνωρίζομεν ὅτι τὸ γινόμενον τοῦτο ὑπάρχει (§ 43, Γ καὶ § 45).

Ἔστω λοιπὸν ὅτι $\sqrt{\alpha}=x$ καὶ $\sqrt{\beta}=\psi$. Σχηματίζομεν τὸ γινόμενον $x\psi=\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}$. Γνωρίζομεν ὅμως ὅτι :

$$\left.\begin{array}{l} x=\sqrt{\alpha}\Leftrightarrow x^2=\alpha \\ \psi=\sqrt{\beta}\Leftrightarrow \psi^2=\beta \end{array}\right\} \Rightarrow x^2\psi^2=\alpha\beta, \quad \text{δηλ.} \quad (x\psi)^2=\alpha\beta$$

Ἐκ τῆς $(x\psi)^2=\alpha\beta$ ἔχομεν $x\psi=\sqrt{\alpha\beta}$, δηλαδή

$$\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}=\sqrt{\alpha\beta} \qquad (1)$$

Ἡ ἰσότης (1) λέγει ὅτι: **διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν δύο ρίζας δευτέρας τάξεως ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰ ὑπόρριζα καὶ τοῦ γινομένου νὰ ἐξαγάγωμεν τὴν ρίζαν δευτέρας τάξεως.**

Π χ $\sqrt{3}\cdot\sqrt{4}=\sqrt{12}$, $\sqrt{3}\cdot\sqrt{12}=\sqrt{36}=6$

Ἡ ἰσότης (1) γράφεται καὶ

$\sqrt{\alpha\beta}=\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}$ (2)

Δηλαδή: **διὰ νὰ ἐξαγάγωμεν τετραγωνικὴν ρίζαν ἑνὸς γινομένου ἀρκεῖ νὰ ἐξαγάγωμεν τὴν ρίζαν κάθε παράγοντος καὶ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰ ἐξαγόμενα.**

Π.χ. $\sqrt{12}=\sqrt{4\cdot 3}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{3}=2\sqrt{3}$.

καὶ γενικώτερον $\sqrt{\alpha^2\beta}=|\alpha|\sqrt{\beta}$.

Π.χ. $3\sqrt{5}=\sqrt{3^2}\cdot\sqrt{5}=\sqrt{45}$.

$\sqrt{5}\cdot\sqrt{15}=\sqrt{75}=\sqrt{25\cdot 3}=5\sqrt{3}$.

Εἶναι φανερὸν ὅτι δυνάμεθα νὰ ἐπεκτείνωμεν τὸν προηγούμενον κανόνα καὶ διὰ περισσότερα ριζικά.

Π χ. $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}=\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}=\sqrt{36}=6$.

Γ) Πηλίκον δύο ριζῶν. Ἔστω ὅτι ζητοῦμεν τὸ $\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}$, ὅπου α, β θετικοὶ πραγματικοὶ ἀριθμοί. Γνωρίζομεν ὅτι τὸ πηλίκον τοῦτο ὑπάρχει καὶ εἶναι ἕνας πραγματικὸς ἀριθμός.

Ἔστω λοιπὸν ὅτι $\sqrt{\alpha}=x$ καὶ $\sqrt{\beta}=\psi$. Σχηματίζομεν τὸ πηλίκον $\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}=\frac{x}{\psi}$. Γνωρίζομεν ὅμως ὅτι :

$$\left.\begin{array}{l} x=\sqrt{\alpha}\Leftrightarrow x^2=\alpha \\ \psi=\sqrt{\beta}\Leftrightarrow \psi^2=\beta \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x^2}{\psi^2}=\frac{\alpha}{\beta}, \quad \text{δηλαδὴ} \left(\frac{x}{y}\right)^2=\frac{\alpha}{\beta}.$$

Ἐκ τῆς $\left(\frac{x}{\psi}\right)^2=\frac{\alpha}{\beta}$ ἕπεται ὅτι $\frac{x}{\psi}=\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$, δηλαδή,

$$\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}=\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \qquad (3)$$

Ἡ ἰσότης (3) λέγει ὅτι :

Διὰ νὰ διαιρέσωμεν δύο ρίζας δευτέρας τάξεως ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὸ ὑπόρριζον τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ ὑπορρίζου τοῦ διαιρέτου καὶ τοῦ πηλίκου νὰ ἐξαγάγωμεν τὴν ρίζαν δευτέρας τάξεως.

Π.χ. $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{8}{2}} = \sqrt{4} = 2$, $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{3}} = \sqrt{6}$, $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{48}} = \sqrt{\frac{3}{48}} = \sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{1}{4}$

Ἡ ἰσότης (3) γράφεται καὶ :

καὶ λέγει ὅτι : $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}$ (4)

Διὰ νὰ ἐξαγάγωμεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν πηλίκου δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν, ἀρκεῖ νὰ ἐξαγάγωμεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ διαιρετέου καὶ νὰ τὴν διαιρέσωμεν διὰ τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τοῦ διαιρέτου.

Π.χ. $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$, $\sqrt{\frac{5}{16}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{16}} = \frac{\sqrt{5}}{4}$

Δ) Ἂν ἔχωμεν ἀλγεβρικὸν κλάσμα μὲ ὄχι ρητὸν παρονομαστήν, ἠμποροῦμεν νὰ εὕρωμεν ἰσοδύναμον κλάσμα μὲ ρητὸν παρονομαστήν, ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὰ κάτωθι παραδείγματα :

1ον. $\frac{8}{\sqrt{6}} = \frac{8\sqrt{6}}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}} = \frac{8\sqrt{6}}{(\sqrt{6})^2} = \frac{8\sqrt{6}}{6} = \frac{4\sqrt{6}}{3}$

2ον. $\frac{5}{2\sqrt{3}} = \frac{5\cdot\sqrt{3}}{2\cdot\sqrt{3}\,\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{2(\sqrt{3})^2} = \frac{5\sqrt{3}}{2\cdot 3} = \frac{5\sqrt{3}}{6}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

108) Νὰ συμπτύξετε τὰ κάτωθι ἀθροίσματα (ὅπου εἶναι δυνατόν) :

α) $3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} + \sqrt{2}$ β) $2\sqrt{3} + \sqrt{12}$ γ) $\sqrt{3} + \sqrt{27}$

δ) $\sqrt{7} + \sqrt{28} - \sqrt{63}$ ε) $\sqrt{6} + \sqrt{24} + \sqrt{54} - 2\sqrt{6}$

σ) $\sqrt{8} + \sqrt{50} - \sqrt{98}$ ζ) $\sqrt{12} - 2\sqrt{27} + 3\sqrt{75} + \sqrt{48} - \sqrt{80} + \sqrt{20}$

Λύσις τῆς α) $3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} + \sqrt{2} = (3+5+1)\sqrt{2} = 9\sqrt{2}$

109) Νὰ εὕρετε τὰ γινόμενα :

α) $\sqrt{375}\cdot\sqrt{48}\cdot\sqrt{405}$ β) $\sqrt{275}\cdot\sqrt{135}\cdot\sqrt{165}$ γ) $\sqrt{3\alpha}\cdot\sqrt{12\alpha}$

δ) $(5-\sqrt{2})\cdot(5+\sqrt{2})$ ε) $(\sqrt{2}-1)\cdot(2-\sqrt{2})$ ζ) $(\sqrt{5}-1)^2$

110) Νὰ ὑπολογίσετε κατὰ προσέγγισιν 1/100 τὰ κάτωθι :

α) $\sqrt{\frac{2}{9}}$ β) $\frac{\sqrt{28}}{\sqrt{14}}$ γ) $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{5}}$ δ) $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{3}}$

111) Νὰ τρέψετε καθένα ἀπὸ τὰ κάτωθι κλάσματα εἰς ἰσοδύναμόν του μὲ ρητὸν παρονομαστήν :

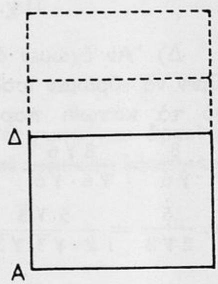
α) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ β) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ γ) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ δ) $\frac{2}{\sqrt{6}}$ ε) $\frac{5}{2\sqrt{2}}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V

ΑΛΓΕΒΡΙΚΑΙ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

47. Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ.

Α) Θεωροῦμεν τὸ σύνολον τῶν ὀρθογωνίων, τὰ ὁποῖα ἔχουν ὡς βάσιν τὸ ὡρισμένον εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ (σχ. 47 – 1). Ἐὰν μὲ μίαν ὡρισμένην μονάδα τὸ τμῆμα ΑΒ ἔχῃ μῆκος 4 καὶ ἕνα ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τούτων, ὅπως τὸ ΑΒΓΔ, ἔχει ὕψος ΒΓ μὲ μῆκος (ὡς πρὸς τὴν αὐτὴν μονάδα) (ΒΓ) $=$ υ, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ΑΒΓΔ καθὼς γνωρίζομεν, εἶναι (ΑΒΓΔ) $= 4 \cdot$ υ (τετραγ. μονάδες). Εἰς τὴν ἔκφρασιν τοῦ ἐμβαδοῦ αὐτὴν 4υ τὸ γράμμα υ δύναται νὰ εἶναι ἕνας ὁποιοσδήποτε θετικὸς ἀριθμός. Λέγομεν ὅτι τὸ υ εἶναι μία **μεταβλητή.** Τὸ υ λαμβάνει τιμὰς εἰς τὸ σύνολον τῶν θετικῶν ἀριθμῶν.



Σχ. 47 – 1

Οἱ θετικοὶ αὐτοὶ ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι ἀντικαθιστοῦν τὸ υ εἰς τὴν ἔκφρασιν 4υ, ὀνομάζονται **τιμαὶ τῆς μεταβλητῆς υ.**

Ἐὰν τὸ μῆκος τοῦ ΑΒ εἶναι α, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ΑΒΓΔ θὰ εἶναι (ΑΒΓΔ) $=$ α $\cdot$ υ

Ἡ ἔκφρασις α $\cdot$ υ περιέχει δύο γράμματα. Ἀπὸ αὐτά, εἰς τὴν περίπτωσίν μας, τὸ α παριστάνει τὸ μῆκος τοῦ ὡρισμένου τμήματος ΑΒ καὶ εἶναι ἑπομένως ἕνας ὡρισμένος ἀριθμός, ὁ ἴδιος δι᾽ ὅλα τὰ ὀρθογώνια μὲ βάσιν ΑΒ. Τὸ ἄλλο γράμμα υ εἶναι μεταβλητὴ καὶ εἰς κάθε τιμήν της ἀπὸ τὸ σύνολον τῶν θετικῶν ἀριθμῶν ἀντιστοιχίζεται ἕνα ὀρθογώνιον καὶ τὸ ἐμβαδόν του. Μὲ τὰς συμφωνίας αὐτὰς εἰς τὴν ἔκφρασιν αυ τὸ μὲν α εἶναι **μία σταθερὰ** τὸ δὲ υ **μία μεταβλητή.**

Β) Ὑποθέτομεν ὅτι εἰς τὴν ἔκφρασιν $-3\omega^2 + 2\varphi - 5$ τὰ γράμματα ω καὶ φ λαμβάνουν τιμὰς εἰς τὸ σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Εἰς κάθε διατεταγμένον ζεῦγος (ω_0, φ_0) τιμῶν τῶν ω καὶ φ ἀντιστοιχίζεται μία καὶ μόνον τιμὴ τῆς ἐκφράσεως αὐτῆς. Π.χ. ἂν $\omega = -2$ καὶ $\varphi = 10$ ἔχομεν τιμὴν τῆς ἐκφράσεως $-3 \cdot (-2)^2 + 2 \cdot 10 - 5 = -3 \cdot 4 + 2 \cdot 10 - 5 = -12 + 20 - 5 = 3$. Τὰ ω καὶ φ εἶναι αἱ μεταβληταὶ τῆς ἐκφράσεως $-3\omega^2 + 2\varphi - 5$.

48. Η ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΙΣ.

Εἰς τὰς ἐκφράσεις $4υ$, $αυ$, $2πρ$, $πρ^2$, $πx^2y$, $2πα(α+y)$, $-3ω^2+2φ-5$ περιέχονται ὡρισμένοι ἀριθμοὶ καὶ γράμματα, τὰ ὁποῖα συμφωνοῦμεν νὰ λαμβάνουν διαφόρους ἀριθμητικὰς τιμὰς ἢ καὶ νὰ μένουν σταθερά. Μεταξύ των οἱ ἀριθμοὶ καὶ τὰ γράμματα εἰς κάθε μίαν ἀπὸ τὰς ἐκφράσεις αὐτὰς **συνδέονται μὲ τὰ γνωστὰ σύμβολα τῶν πράξεων.**

Αἱ τοιαῦται ἐκφράσεις λέγονται **ἀλγεβρικαὶ παραστάσεις.**

Ὅταν εἰς μίαν ἀλγεβρικὴν παράστασιν τὰ γράμματα ἀντικατασταθοῦν μὲ ἀριθμητικὰς τιμὰς καὶ ἐκτελεσθοῦν αἱ πράξεις, ποὺ σημειώνονται εἰς τὴν παράστασιν, προκύπτει ἐν γένει τελικῶς ὡς ἀποτέλεσμα ἕνας ἀριθμός. Τὸ ἀποτέλεσμα τοῦτο λέγεται **ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς παραστάσεως** διὰ τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τῶν μεταβλητῶν της.

Ἡ Ἄλγεβρα θὰ μᾶς διδάξῃ τὰ εἴδη τῶν ἀλγεβρ. παραστάσεων, μὲ ποῖον τρόπον θὰ εὑρίσκωμεν τὰς ἀριθμητικὰς τιμάς των καὶ πῶς γενικώτερον θὰ ἐκτελῶμεν πράξεις μὲ ἀλγεβρικὰς παραστάσεις.

49. ΑΚΕΡΑΙΟΝ ΜΟΝΩΝΥΜΟΝ.

Α) Ὁρισμός. Ἀκέραιον μονώνυμον ὡς πρὸς τὰ γράμματα, τὰ ὁποῖα περιέχει, λέγεται ἡ παράστασις, εἰς τὴν ὁποίαν ἔχει σημειωθῆ μόνον πολλαπλασιασμὸς ἐπὶ τῶν γραμμάτων της, οἱ δὲ ἐκθέται αὐτῶν εἶναι φυσικοὶ ἀριθμοί.

Π.χ. αἱ ἀλγεβρικαὶ παραστάσεις $4υ$, $αυ$, $2πρ$, $πx^2y$, $-3ω^2φ$, $7αβ^2γ$, $-\frac{2}{3}xψω^3$ εἶναι ἀκέραια μονώνυμα.

Ἡ παράστασις $\frac{2}{α}\cdot x^3\, y$ εἶναι ἀκέραιον μονώνυμον, ὅταν τὸ α εἶναι σταθερά. Ἐὰν τὸ α εἶναι μεταβλητή, τότε ἡ παράστασις αὐτὴ δὲν εἶναι ἀκέραιον μονώνυμον.

Ἐπίσης ἡ παράστασις $(λ-3)α^2β$, ὅταν τὸ λ εἶναι σταθερά, εἶναι ἀκέραιον μονώνυμον, ἐνῷ ὅταν τὸ λ εἶναι μεταβλητή, δὲν εἶναι ἡ παράστασις αὐτὴ ἀκέραιον μονώνυμον.

Εἰς πᾶν μονώνυμον ἐφαρμόζονται αἱ γνωσταὶ ἰδιότητες τοῦ γινομένου καὶ τῶν δυνάμεων.

Π.χ. τὸ μονώνυμον $A = 5x^3(-2)y^2(-3)\,xω$ γράφεται

$A = 5(-2)\cdot(-3)\;x^3\cdot x\cdot ψ^2\cdot ω$ (διατί ;) ἢ καὶ $A = 30x^4ψ^2ω$ (διατί ;)

Ἡ μορφὴ $A = 30x^4ψ^2ω$ λέγεται **τελικὴ μορφὴ** τοῦ μονωνύμου Α.

Πᾶν μονώνυμον θὰ λαμβάνεται ὑπὸ τὴν τελικήν του μορφήν.

Πᾶν μονώνυμον μιᾶς μεταβλητῆς x ἔχει τελικὴν μορφὴν $αx^μ$, ὅπου τὸ α εἶναι σταθερὰ καὶ $μ \in N$ ($N =$ τὸ σύνολον τῶν φυσικῶν)

Πᾶν μονώνυμον δύο μεταβλητῶν x καὶ y ἔχει τελικὴν μορφὴν $αx^μy^ν$, ὅπου τὸ α εἶναι σταθερὰ καὶ $μ \in N$ καὶ $ν \in N$.

Εὐκόλως ἐπεκτείνομεν διὰ τὴν τελικὴν μορφὴν μονωνύμου τριῶν κλπ μεταβλητῶν.

Β) Συντελεστὴς καὶ κύριον ποσὸν μονωνύμου. Ὁ ἀριθμητικὸς παράγων ἑνὸς μονωνύμου λέγεται συντελεστὴς τοῦ μονωνύμου. Τὸ ἐγγράμματον μέρος ἑνὸς μονωνύμου (δηλ. αἱ μεταβληταὶ μὲ τοὺς ἐκθέτας των) λέγεται κύριον ποσὸν τοῦ μονωνύμου.

Π.χ. τοῦ μονωνύμου $-\frac{4}{3}x^3y$ συντελεστὴς εἶναι ὁ $-\frac{4}{3}$ καὶ κύριον ποσὸν τὸ x^3y. Τοῦ $\omega\varphi^2$ συντελεστὴς εἶναι ὁ $+1$ (οὐδέτερον στοιχεῖον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ) καὶ κύριον ποσὸν τὸ $\omega\varphi^2$, τοῦ $-x^4$ εἶναι συντελεστὴς ὁ -1, διότι $-x^4 = (-1)\cdot x^4$. Ἐὰν εἶναι λ σταθερά, τότε τῶν μονωνύμων $\frac{2}{\lambda}\alpha^3\beta$, $(\lambda-1)x^2y\omega^3$ συντελεστὴς ἀντιστοίχως εἶναι $\frac{2}{\lambda}$ καὶ $(\lambda-1)$, κύριον δὲ ποσὸν τὸ $\alpha^3\beta$ καὶ $x^2y\omega^3$.

Γ) Βαθμὸς μονωνύμου. Βαθμὸς μονωνύμου ὡς πρὸς μίαν του μεταβλητὴν λέγεται ὁ ἐκθέτης, τὸν ὁποῖον ἔχει ἡ μεταβλητὴ εἰς τὸ μονώνυμον, ὡς πρὸς περισσοτέρας δὲ μεταβλητάς του λέγεται τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν, τοὺς ὁποίους ἔχουν αὐταὶ εἰς τὸ μονώνυμον.

Π.χ. τὸ $-7x^4y^2\omega$ εἶναι τετάρτου βαθμοῦ ὡς πρὸς x, δευτέρου ὡς πρὸς y, πρώτου ὡς πρὸς ω, ἕκτου ὡς πρὸς x καὶ y, ἑβδόμου ὡς πρὸς x, y, ω κλπ. Ἐπειδὴ εἶναι $x^0 = 1$, ὅταν $x \neq 0$, κάθε σταθερὰ γράφεται ὑπὸ μορφὴν μονωνύμου μηδενικοῦ βαθμοῦ ὡς πρὸς μίαν ἢ περισσοτέρας μεταβλητὰς π.χ. $7 = 7x^0$, $-3 = -3x^0y^0$.

Κάθε μονώνυμον εἶναι μηδενικοῦ βαθμοῦ ὡς πρὸς μίαν μεταβλητήν, τὴν ὁποίαν δὲν περιέχει. Π.χ. τὸ $-2\alpha^3x^2$ εἶναι μηδενικοῦ βαθμοῦ ὡς πρὸς y, διότι γράφεται $-2\alpha^3x^2y^0$.

Τὸ μονώνυμον, αx^μ, ὅταν εἶναι $\alpha = 0$, λέγεται **μηδενικὸν μονώνυμον.** Τὸ μηδενικὸν μονώνυμον δύναται νὰ ἔχῃ ὁσασδήποτε μεταβλητὰς καὶ μὲ κάθε βαθμόν.

Τὸ μονώνυμον x εἶναι πρώτου βαθμοῦ ὡς πρὸς τὴν μεταβλητὴν x καὶ ἔχει συντελεστὴν τὸν $+1$, ἐνῷ τὸ $-x$ εἶναι ἐπίσης πρώτου βαθμοῦ ὡς πρὸς x μὲ συντελεστὴν -1.

Δ) Κλασματικὸν μονώνυμον. Κλασματικὸν μονώνυμον λέγετα κάθε ἀλγεβρικὴ παράστασις εἰς τὴν ὁποίαν ἔχει σημειωθῆ μόνον πολλαπλασιασμὸς ἐπὶ τῶν μεταβλητῶν της, **ἀλλὰ μερικοὶ (ἢ καὶ ὅλοι) ἐκ τῶν ἐκθετῶν των εἶναι ἀρνητικοὶ ἀκέραιοι.**

Π.χ. ἡ παράστασις $2\alpha^3\beta^{-2}$ εἶναι ἕνα κλασματικὸν μονώνυμον. Ἐπειδὴ (Κεφ. IV § 44) εἶναι $\beta^{-2} = \frac{1}{\beta^2}$, τοῦτο γράφεται : $2\alpha^3\frac{1}{\beta^2}$ ἢ καὶ $\frac{2\alpha^3}{\beta^2}$, ὅπου $\beta \neq 0$. Ἐπίσης τὸ κλασματικὸν μονώνυμον $-\frac{3}{7}x^{-2}y^3\omega^{-5}$ γράφεται $\frac{-3y^3}{7x^2\omega^5}$, ὅπου εἶναι $x\omega \neq 0$. Ὥστε :

τὰ κλασματικὰ μονώνυμα εἶναι ἀλγεβρικαὶ παραστάσεις, εἰς τὰς ὁποίας ἔχει σημειωθῆ καὶ διαίρεσις διὰ μεταβλητῆς. Εἶναι ταῦτα πηλίκα ἀκεραίων μονωνύμων καὶ θὰ τὰ ἐξετάσωμεν ἀργότερον. Εἰς τὰ ἀμέσως ἑπόμενα θὰ ἀσχοληθῶμεν μόνον μὲ ἀκέραια μονώνυμα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

112) Θεωροῦμεν τὰ τρίγωνα, τὰ ὁποῖα ἔχουν ὡς βάσιν δοθὲν εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ. Ἂν ἑνὸς ἐξ αὐτῶν τὸ ὕψος εἶναι υ, ποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδόν του ; Εἰς τὴν παράστασιν αὐτὴν τοῦ ἐμβαδοῦ ὁρίσατε τὰς σταθερὰς καὶ τὰς μεταβλητάς. Ἐὰν εἶναι μονώνυμον, ποῖος εἶναι ὁ συντελεστής, ποῖον τὸ κύριον ποσὸν καὶ ποῖος ὁ βαθμός του ;

113) Ἡ ἀκτὶς ἑνὸς κύκλου εἶναι στοιχεῖον τοῦ συνόλου $\Sigma = \{1,3,5\}$. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου. Ποία εἶναι ἡ γενικὴ ἔκφρασις τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ κύκλου ; Ἐὰν εἶναι μονώνυμον ποῖος εἶναι ὁ συντελεστής, ποῖον τὸ κύριον ποσὸν καὶ ποῖος ὁ βαθμός του ;

114) Θεωροῦμεν τὸ σύνολον τῶν τραπεζίων. Ἂν αἱ βάσεις ἑνὸς ἐξ αὐτῶν εἶναι Β καὶ β, τὸ δὲ ὕψος υ, ποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδόν του ; Εἰς τὴν ἔκφρασιν αὐτὴν τοῦ ἐμβαδοῦ ποῖαι εἶναι αἱ μεταβληταὶ καὶ εἰς ποῖον σύνολον ἀριθμῶν πρέπει νὰ ἀνήκῃ κάθε μία ;

115) Θεωροῦμεν τὸ σύνολον τῶν ὀρθῶν κυκλικῶν κώνων. Ἑνὸς ἐξ αὐτῶν ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως εἶναι R καὶ τὸ ὕψος υ. Ποία εἶναι ἡ ἔκφρασις τοῦ ὄγκου V ; Ἐὰν εἶναι μονώνυμον ἡ ἔκφρασις αὐτή, ποῖος εἶναι ὁ συντελεστής, τὸ κύριον ποσὸν καὶ ὁ βαθμός του ;

116) Νὰ εὑρεθῇ ὁ συντελεστής, τὸ κύριον ποσὸν καὶ ὁ βαθμὸς ὡς πρὸς μίαν ἢ περισσοτέρας μεταβλητὰς τῶν μονωνύμων : $\frac{3}{4}x$, $\frac{1}{5}x^3$, $x\psi^3\omega$, $-2\alpha\beta^2 x$, $356\omega^4\psi^3x^{12}\alpha$, $\lambda x^3\psi\beta$ ($\lambda =$ σταθερά), $-\frac{4}{3}x^2\psi$, $\sqrt{7}\,x\psi\omega^2$, $-\alpha^3\psi^5\omega^4 z$, $\frac{\sqrt{3}}{3}\alpha\beta\gamma$.

117) Νὰ τεθοῦν ὑπὸ τὴν τελικήν των μορφὴν τὰ μονώνυμα :

$A = \left(-\frac{2}{5}x^3\psi\right)\left(-\frac{1}{3}\right)\alpha^2x^2\psi$, $B = \left(\frac{3}{4}x^4\psi^2z^3\right)\left(\frac{-1}{9}x^2z\right)(4x\psi z^2)$.

$\Gamma = \left(-\frac{1}{3}\right)^2\alpha^3\beta \cdot \frac{12}{5}x^3\alpha\beta^2\left(-\frac{1}{4}x\psi^0\right)$ καὶ νὰ εὑρεθῇ ὁ συντελεστής, τὸ κύριον ποσόν, ὁ βαθμὸς ὡς πρὸς μίαν ἢ περισσοτέρας μεταβλητὰς αὐτῶν.

50. Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΣ ΜΟΝΩΝΥΜΟΝ.

Α) Ἀριθμητικὴ τιμὴ μονωνύμου μιᾶς μεταβλητῆς. Ἔστω τὸ μονώνυμον $2x$ τῆς μεταβλητῆς x. Συμβολίζομεν τοῦτο μὲ τὸ $\varphi(x)$ δηλ. θέτομεν : $\varphi(x) = 2x$.

Διὰ τὴν τιμὴν $x = -3$ ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ (§ 48) τοῦ μονωνύμου τούτου εἶναι -6. Δυνάμεθα νὰ γράψωμεν : $\varphi(-3) = 2(-3) = -6$. Ἐὰν λάβωμεν τὸ σύνολον $\Sigma = \left\{0,1,5,-\frac{7}{3}\right\}$ καὶ εἶναι $x \in \Sigma$, τότε αἱ ἀριθμητικαὶ τιμαὶ τοῦ μονωνύμου $2x$ εἶναι τὸ σύνολον : $E = \left\{0, 2, 10, -\frac{14}{3}\right\}$. Εἰς κάθε $x \in \Sigma$ ἀντιστοιχίζεται διὰ τοῦ μονωνύμου $\varphi(x)$ ἕνα καὶ μόνον ἕνα στοιχεῖον τοῦ Ε. Οὕτω εἶναι : $0 \to 0$, $1 \to 2$, $5 \to 10$, $-\frac{7}{3} \to -\frac{14}{3}$.

Ἀπεικονίζεται λοιπὸν τὸ Σ μονοσημάντως εἰς τὸ Ε.

Ἑπομένως ἔχομεν **μίαν συνάρτησιν,** τὴν

$$\varphi : \forall x \in \Sigma \longrightarrow \varphi(x) \in E$$

Ἡ συνάρτησις αὐτὴ φ εἶναι **μία συνάρτησις - μονώνυμον τοῦ x** μὲ πεδίον **ὁρισμοῦ** τὸ Σ καὶ **πεδίον τιμῶν** τὸ σύνολον Ε. Ἡ μεταβλητὴ x, ἡ ὁποία εἶναι τυχὸν στοιχεῖον **ἀρχέτυπον** ἀπὸ κάποιο ἀριθμοσύνολον Σ λέγεται **ἀνεξάρτητος μεταβλητή,** ἡ δὲ **εἰκὼν** αὐτοῦ φ (x) λέγεται **ἐξηρτημένη μεταβλητή.**

Ἐπειδὴ εἰς κάθε ἀρχέτυπον $x \in \Sigma$ διὰ τῆς συναρτήσεως φ ἀντιστοιχίζεται μία καὶ μόνον εἰκών, ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ μονωνύμου $\varphi(x) \in E$, δημιουργοῦνται διατεταγμένα ζεύγη ὅπως τὰ (0, 0), (1,2), (5,10) καὶ γενικῶς τὸ $(x, \varphi(x))$. Συμφωνοῦμεν νὰ συμβολίζωμεν τὴν εἰκόνα $\varphi(x)$ τοῦ ἀρχετύπου x μὲ τὸ γράμμα y, δηλ. θέτομεν $y = \varphi(x)$ ἢ καὶ $y = 2x$. Τότε κάθε διατεταγμένον ζεῦγος τιμῶν τῶν μεταβλητῶν ἔχει τὴν μορφὴν (x_0, y_0). Τὸ σύνολον αὐτῶν τῶν διατεταγμένων ζευγῶν, ἀποτελεῖ τὴν συνάρτησιν - μονώνυμον $\varphi(x)$ καὶ εἶναι **ἕνα ὑποσύνολον τοῦ Καρτεσιανοῦ γινομένου $\Sigma \times E$.**

Β) Μονώνυμον περισσοτέρων μεταβλητῶν. Ἔστω τὸ μονώνυμον $2x^3z$, τὸ ὁποῖον συμβολίζομεν : $\varphi(x, z) = 2x^3z$. Ἐὰν τὸ μὲν x εἶναι στοιχεῖον τοῦ συνόλου $\Sigma_1 = \{-1, 0, 2\}$, τὸ δὲ z τοῦ $\Sigma_2 = \{3, 5\}$, τότε σχηματίζονται διατεταγμένα ζεύγη $(x, z) \in \Sigma_1 \times \Sigma_2$ καὶ εἰς καθένα ἀπὸ αὐτὰ ἀντιστοιχίζεται ὡς εἰκὼν ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ $\varphi(x, z)$ τοῦ δοθέντος μονωνύμου. Π.χ. διὰ $x = -1$ καὶ $z = 3$ δηλ. διὰ τὸ $(-1,3)$ ἀντιστοιχίζεται ἡ τιμὴ $2 \cdot (-1)^3 \cdot 3 = 2 \cdot (-1) \cdot 3 = -6$ τοῦ μονωνύμου. Γράφομεν συνήθως : $\varphi(-1, 3) = 2(-1)^3 \cdot 3 = -6$. Διὰ τὸ (2,5) ἀντίστοιχος εἰκὼν εἶναι ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ μονωνύμου : $\varphi(2,5) = 2 \cdot 2^3 \cdot 5 = 2 \cdot 8 \cdot 5 = 80$. Γενικῶς εἰς τὸ (x, z) ἀντιστοιχίζεται ὡς εἰκὼν τὸ $\varphi(x, z)$.

Ἐπειδὴ $\Sigma_1 \times \Sigma_2 = \{(-1,3), (-1,5), (0,3), (0,5), (2,3), (2,5)\}$, ἀντιστοίχως τὸ σύνολον τῶν εἰκόνων εἶναι $E = \{-6, -10, 0, 48, 80\}$. Τὰ ζεύγη (0, 3) καὶ (0, 5) ἔχουν ὡς εἰκόνα τὸ 0. Πάλιν λοιπὸν δημιουργεῖται μία συνάρτησις - μονώνυμον **μὲ δύο ἀνεξαρτήτους μεταβλητάς**, τὰς $x \in \Sigma_1$ καὶ $z \in \Sigma_2$, ἐξηρτημένην μεταβλητὴν τὸ μονώνυμον $\varphi(x, z) = 2x^3z$, πεδίον ὁρισμοῦ τὸ $\Sigma_1 \times \Sigma_2$ καὶ πεδίον τιμῶν τὸ E. Ὁμοίως ἐξετάζονται συναρτήσεις - μονώνυμα περισσοτέρων μεταβλητῶν. Ἀπὸ τοὺς ἀνωτέρω ὑπολογισμοὺς ἀριθμητικῶν τιμῶν μονωνύμου, ἔχομεν ὅτι :

Διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν ἑνὸς μονωνύμου διὰ δοθείσας τιμὰς τῶν μεταβλητῶν του εὑρίσκομεν πρῶτον τὰς δυνάμεις τῶν μεταβλητῶν καὶ κατόπιν τὸ γινόμενον τῶν ἐξαγομένων.

Γ) Ὅμοια μονώνυμα. Ὅμοια λέγονται τὰ μονώνυμα, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὸ αὐτὸ κύριον ποσόν.

Π.χ. τά: $0{,}2x^5, -7x^5, \frac{2}{3}x^5$ εἶναι ὅμοια μονώνυμα, καθὼς καὶ τὰ $3x^4y^2, -2x^4y^2$. Τὰ ὅμοια μονώνυμα διαφέρουν, ἂν διαφέρουν, μόνον κατὰ τὸν συντελεστήν.

Τὰ ὅμοια μονώνυμα μὲ συντελεστὰς ἀντιθέτους, λέγονται ἀντίθετα. Π.χ. τὰ $2xy^5z, -2xy^5z$ εἶναι ἀντίθετα μονώνυμα.

Δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ὡς ὅμοια μονώνυμα ὡς πρὸς μίαν ἢ περισσοτέρας μεταβλητάς των, χωρὶς νὰ εἶναι ὅμοια ὡς πρὸς ὅλας τὰς μεταβλητάς των. Π.χ. τὰ $18x^3y\omega, -4\alpha x^3\omega$ εἶναι ὅμοια ὡς πρὸς τὰς μεταβλητάς των x καὶ ω.

51. ΠΡΑΞΕΙΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΜΟΝΩΝΥΜΩΝ.

Αἱ πράξεις ἐπὶ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν γίνονται καὶ ἐπὶ τῶν μονωνύμων, διότι κάθε μονώνυμον εἶναι ἕνας πραγματικὸς ἀριθμός, ὅταν αἱ μεταβληταί του ἀνήκουν εἰς τὸ R. Ἰσχύουν λοιπὸν ὅλαι αἱ γνωσταί μας ἰδιότητες τῶν πράξεων (ἀντιμεταθετική, προσεταιριστική, κλπ).

Α) Πρόσθεσις μονωνύμων. (Δὲν θὰ ἐξετάσωμεν τὴν ἀφαίρεσιν, διότι ἡ ἀφαίρεσις σχετικοῦ ἀριθμοῦ ἀπὸ ἄλλον ἀνάγεται εἰς τὴν πρόσθεσιν τοῦ ἀντιθέτου του).

Διὰ νὰ προσθέσωμεν μονώνυμα γράφομεν τὸ ἕνα κατόπιν τοῦ ἄλλου μὲ τὸ πρὸ αὐτῶν πρόσημον. Ἡ παράστασις, ποὺ προκύπτει, λέγεται ἄθροισμα τῶν δοθέντων μονωνύμων ἢ ὅρων.

Π.χ. τὸ ἄθροισμα τῶν μονωνύμων : $-3x^4, 2x^5, 8x^2, -\frac{3}{5}x$ εἶναι ἡ παράστασις : $-3x^4 + 2x^5 + 8x^2 - \frac{3}{5}x$. Αὕτη λέγεται καὶ **πολυώνυμον.** Ἀντιστρόφως τὸ πολυώνυμον $2z^3y - 3zy^2 - \alpha zy + 10$ εἶναι ἄθροισμα τῶν μονωνύμων ἢ ὅρων : $2z^3y, -3zy^2, -\alpha zy, 10$.

Β) Ἀναγωγὴ ὁμοίων ὅρων. Εἶναι γνωστὸν ὅτι ἰσχύει εἰς τὸ R ἡ ἰσότης : **(1) : $(\alpha + \beta + \gamma)\mu = \alpha\mu + \beta\mu + \gamma\mu$** καὶ ἐξ αὐτῆς ἡ :
$\alpha\mu + \beta\mu + \gamma\mu = (\alpha + \beta + \gamma)\mu$ (2) (διατί ;)

Κατὰ τὴν (2) λέγομεν ὅτι **εἰς τὸ ἄθροισμα $\alpha\mu + \beta\mu + \gamma\mu$ τὸ μ εἶναι κοινὸς παράγων τῶν ὅρων καὶ ὅτι ἐξάγεται ἐκτὸς παρενθέσεως, τὸ δὲ ἄθροισμα τρέπεται εἰς γινόμενον παραγόντων $(\alpha + \beta + \gamma)\mu$.**

Τὸ ἄθροισμα λοιπὸν τῶν ὁμοίων μονωνύμων : $-5x^3, 7x^3, 12x^3, -2x^3$ εἶναι : $-5x^3 + 7x^3 + 12x^3 - 2x^3 = (-5 + 7 + 12 - 2)x^3 = 12x^3$.

Ἐπίσης εἶναι : $7{,}5\alpha^2y^5 - 2{,}5\alpha^2y^5 + 6\alpha^2y^5 - 12\alpha^2y^5 = -\alpha^2y^5$

Ὥστε : **Τὸ ἄθροισμα ὁμοίων μονωνύμων εἶναι μονώνυμον ὅμοιον πρὸς αὐτά, τὸ ὁποῖον ἔχει συντελεστὴν τὸ ἄθροισμα τῶν συντελεστῶν των.**

Τὸ ἄθροισμα δύο **ἀντιθέτων** μονωνύμων **εἶναι 0.** Π.χ. τὰ ἀντίθετα μονώνυμα : $7\alpha^2\beta x^3, -7\alpha^2\beta x^3$ ἔχουν ἄθροισμα: $7\alpha^2\beta x^3 - 7\alpha^2\beta x^3 = (7-7)\alpha^2\beta x^3 = 0$.

Ἡ πρόσθεσις ὁμοίων μονωνύμων λέγεται καὶ **ἀναγωγὴ ὁμοίων ὅρων.**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

118) Εἰς τὸ σύνολον $\Sigma = \left\{\frac{1}{3}, -1, 0, \frac{1}{2}, 2\right\}$ ὁρίζεται ἡ συνάρτησις $\varphi(x) = 6x^2$. Νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον τῶν εἰκόνων Ε.

119) Εἰς τὸ σύνολον $\Sigma = \left\{-1, 0, 1, 2, \frac{1}{2}\right\}$ ὁρίζεται ἡ συνάρτησις $\varphi(x) = 4x^4$. Νὰ εὑρεθοῦν ἀρχέτυπα $x \in \Sigma$, τὰ ὁποῖα νὰ ἔχουν τὴν αὐτὴν εἰκόνα.

120) Δίδονται τὰ σύνολα $\Sigma_1 = \left\{-2, -1, 0, \frac{1}{2}\right\}$ καὶ $\Sigma_2 = \left\{1,2,3\right\}$. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀριθμητικαὶ τιμαὶ τοῦ $\varphi(x, \psi) = -3x^2\psi$, ἐὰν $x \in \Sigma_1$ καὶ $\psi \in \Sigma_2$.

121) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀριθμητικαὶ τιμαὶ τῶν μονωνύμων $4\alpha^3\beta x$, $-2\alpha\beta^2x^3\psi$, $-\frac{2}{5}\alpha\beta x\psi^2$, $-7\alpha^2\beta^2x\omega$, $-\alpha^3x^2\omega^3$, ὅταν $\alpha = -2$, $\beta = \frac{1}{2}$, $x = -3$, $\psi = \frac{2}{3}$, $\omega = -1$.

122) Τὸ σύνολον $\Sigma = \left\{-3, -2, -1, \frac{1}{2}, 1, 0\right\}$ ἀπεικονίζεται πρῶτον μὲ τὴν $\varphi(x) = 3x^5$ καὶ κατόπιν μὲ τὴν $f(x) = 3x^3$.

Νὰ εὑρεθοῦν τὰ σύνολα τῶν εἰκόνων $E = \varphi(\Sigma)$ καὶ $E_1 = f(\Sigma)$ καὶ τὰ σύνολα $E \cup E_1$ καὶ $E \cap E_1$. Ποῖα στοιχεῖα τοῦ Σ ἔχουν τὴν αὐτὴν εἰκόνα εἰς τὰς δύο ἀπεικονίσεις ;

123) Τὸ σύνολον μονωνύμων:

$\Sigma = \left\{ -2x, \frac{3}{5}x^2, 7x, -8x^3, -\frac{1}{2}x^4, 2x, -x^2, 0, 1x^3, 5x^4 \right\}$ νὰ χωρισθῆ εἰς κλάσεις ὁμοίων μονωνύμων.

124) Νὰ γίνουν αἱ πράξεις :

α) $-3x^2 + 5x - (-2x^2) - 5x$ β) $\frac{2}{5} - \frac{1}{3}\psi^4 - (-2\psi^3) - 5\psi^3$

γ) $3\alpha^2\beta x - 2\alpha\beta^2\psi - 4\alpha^2\beta x + 5\alpha\beta^2\psi - 8\alpha\beta x\psi$

Γ) Πολλαπλασιασμὸς μονωνύμων. Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν μονώνυμα, σχηματίζομεν ἕνα γινόμενον - μονώνυμον -, τὸ ὁποῖον περιέχει ὅλους τοὺς παράγοντας τῶν μονωνύμων καὶ μόνον αὐτούς. Τὸ μονώνυμον τοῦτο πρέπει νὰ λάβη τὴν τελικήν του μορφὴν (§ 43 Α).

Π.χ. τὸ γινόμενον τῶν μονωνύμων : $A = -\frac{3}{5}x^4y$, $B = 8x\psi^3\omega$ εἶναι :

$A \cdot B = \left(-\frac{3}{5}x^4y \right) \cdot (8xy^3\omega) = -\frac{3}{5}x^4y\, 8xy^3\omega = -\frac{3}{5}\, 8\, x^4 x\, y\, y^3\omega = -\frac{24}{5}x^5y^4\omega.$

Ὥστε : **Τὸ γινόμενον μονωνύμων εἶναι ἕνα μονώνυμον, τὸ ὁποῖον ἔχει ὡς συντελεστὴν τὸ γινόμενον τῶν συντελεστῶν τῶν δοθέντων μονωνύμων καὶ κύριον ποσὸν τὸ γινόμενον τῶν κυρίων ποσῶν αὐτῶν.**

Εἰς μίαν δύναμιν μονωνύμου ἐφαρμόζεται ἡ ἰδιότης **«πῶς ὑψώνεται γινόμενον εἰς δύναμιν καὶ δύναμις εἰς δύναμιν».**

Π.χ. $(2x^3)^2 = 2^2 \cdot (x^3)^2 = 4x^6$, $(-3x^4y^2)^3 = (-3)^3(x^4)^3(y^2)^3 = -27x^{12}y^6$.

Ἐὰν τὰ Α, Β, Γ, εἶναι ὁποιαδήποτε μονώνυμα τὸ γινόμενόν των δύναται νὰ γραφῆ ΑΒΓ ἢ ΒΑΓ ἢ ΓΑΒ κλπ. Ἐπίσης εἶναι (ΑΒ)Γ = (ΑΓ)Β = Α (ΒΓ).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

125) Νὰ γίνουν αἱ πράξεις :

α) $(-4x^3) \cdot (-\frac{1}{2}x^2) \cdot (-\frac{1}{5}x)$ β) $(-\frac{2}{5}x^4) \cdot (-\frac{3}{2}x^5) \cdot (10x^2)$

γ) $(3x^\mu)(-2x^\mu)$ δ) $(-2x^3)^2 \cdot (-x^2)^3$ ε) $(-\frac{1}{3}x^4)(-\frac{1}{2}x^2)^5$

126) Νὰ γίνουν αἱ πράξεις :

α) $(-\frac{1}{3}\omega^3) \cdot (-\frac{2}{5}\omega^4) \cdot (-3\omega^3)^2$ β) $5\psi^{\mu+1} \cdot (-2\psi^{\mu+2})(-3\psi^\mu)$ $(\mu \in N)$.

γ) $[(\alpha x^2)^3]^4(\alpha x^3)^5 \cdot \left(\frac{1}{\alpha}\omega^2\right)^7$ δ) $(\frac{7}{3}x^3\psi^2)(-\frac{1}{3}x\psi^3\omega)$ ε) $(-\frac{2}{3}\alpha^2\beta x^3)(-\frac{1}{2}\alpha\beta^2 x\psi)(9\alpha^3\psi^3\beta)$.

127) Νὰ ὁρισθῆ ὁ συντελεστὴς καὶ ὁ βαθμὸς ὡς πρὸς τὰς μεταβλητὰς x, ψ, z τοῦ γινομένου $(\frac{3}{4}x^4\psi^2z^3) \cdot (-\frac{1}{9}x^2z) \cdot (4x\psi z^2)$.

Δ) Διαίρεσις μονωνύμων. Δίδονται τὰ μονώνυμα $A = 16x^5y^4$ καὶ $B = -4x^2y^2$ καὶ ἔστω ὅτι ὑπάρχει ἕνα τρίτον ἀκέραιον μονώνυμον Γ, τὸ ὁποῖον πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸ Β νὰ δίδη γινόμενον τὸ Α. Θὰ εἶναι : Α = Β · Γ. Τὸ Γ λέγεται **τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως Α διὰ Β,** τὸ Α λέγεται **ὁ διαιρετέος** καὶ τὸ Β **ὁ διαιρέτης** αὐτῆς. Θὰ λαμβάνεται πάντοτε $B \neq 0$. Ἡ διαίρεσις Α διὰ Β δίδει πηλίκον : $A : B = 16x^5y^4 : (-4x^2y^2) = \frac{16x^5\psi^4}{-4x^2\psi^2} = -4x^3y^2$, ὥστε εἶναι $\Gamma = -4x^3y^2$.

Εἰς τὴν διαίρεσιν αὐτὴν ἐφαρμόζεται ἡ ἰδιότης τῶν δυνάμεων $\alpha^\mu : \alpha^\nu = \alpha^{\mu-\nu}$ ὅπου οἱ μ καὶ ν εἶναι ἀκέραιοι μὴ ἀρνητικοὶ καὶ $\mu \geqslant \nu$.

Ὑπάρχει τὸ πηλίκον Γ ὡς ἀκέραιον μονώνυμον ὅταν, καὶ μόνον ὅταν, ὁ διαιρετέος Α περιέχῃ τοὺς παράγοντας τοῦ διαιρετέου Β καὶ καθένα μὲ ἐκθέτην ἴσον ἢ μεγαλύτερον.

Παραδείγματα 1ον) $\left(-\frac{1}{3}\alpha^4\beta^2\gamma\right) : (3\alpha^4\gamma) = -\frac{1}{9}\beta^2$, ἐὰν $\alpha \neq 0$ καὶ $\gamma \neq 0$.

2ον) $\left(-\frac{7}{3}x^3y^2\right) : \left(\frac{3}{5}x^3y^2\right) = -\frac{35}{9}$,ἐὰν $xy \neq 0$.

3ον) $\left(-\frac{1}{2}x^3\alpha\omega^4\right) : (-3x\omega^6) = \frac{1}{6}x^2\alpha\frac{\omega^4}{\omega^6} = \frac{1}{6}\frac{x^2\alpha}{\omega^2}$, ἐὰν $x\omega \neq 0$.

Τὸ πηλίκον δὲν εἶναι ἀκέραιον μονώνυμον. Εἶναι **κλασματικὸν** (§ 49, Δ).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

128) Νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον τῶν διαιρέσεων

α) $(-20x^5) : (5x^3)$ β) $(-15x^6) : (-\frac{3}{5}x^4)$

γ) $(-3x^2)^3 : (-2x^3)$ δ) $(-4x^5)^3 : (2x^2)^6$

129) Νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον τῶν διαιρέσεων

α) $(3\alpha\omega^{2\mu}) : (-2\alpha\omega^\mu)$ β) $(-6x^4\psi^3) : (-2x\psi^2)$

γ) $(\frac{3}{5}x^3\psi^4z) : (-x^2\psi^4)$ δ) $(7x^3\psi^2\omega)(-2x^2\psi^3) : (-14x^4\psi^5\omega)$

130) Νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον τῶν διαιρέσεων

α) $(2\alpha^3\beta)^2 \cdot (-3\alpha\beta^2\gamma^3)^3 \cdot (-4\alpha^4\beta^2\gamma^2) : (-3\alpha^2\beta^3\gamma^2)^3$

β) $(\frac{2}{3}\alpha^4\beta\gamma^3)^2 \cdot (-\alpha\beta^2\gamma) : (-\frac{4}{9}\alpha^9\beta^3\gamma^7)$

52. ΑΚΕΡΑΙΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ.

Α) Ὁρισμός. Ἀκέραιον πολυώνυμον καλεῖται τὸ (ἀλγεβρικὸν) ἄθροισμα ἀκεραίων μονωνύμων, ἐκ τῶν ὁποίων δύο τουλάχιστον εἶναι ἀνόμοια.

Τὰ μονώνυμα, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα (§ 51, Α) ἀποτελεῖ ἕνα πολυώνυμον λέγονται καὶ **ὅροι τοῦ πολυωνύμου**, αἱ δὲ μεταβληταὶ αὐτῶν εἶναι **αἱ μεταβληταὶ τοῦ πολυωνύμου.** Εἶναι φανερὸν ὅτι ἔχομεν πολυώνυμα μὲ μίαν ἢ καὶ περισσοτέρας μεταβλητάς. Π.χ. τὸ $2\omega^2 - 5\omega + 7$ εἶναι μιᾶς μεταβλητῆς, τῆς ω, ἐνῷ τὸ $3x^2y - 2xz^2 + 8z$ εἶναι πολυώνυμον τριῶν μεταβλητῶν, τῶν x, y, z ἐφ' ὅσον δὲν ὡρίσθη ὡς σταθερὰ κανένα ἀπὸ τὰ γράμματα αὐτά.

Εἰς κάθε πολυώνυμον **τὰ ὅμοια μονώνυμα** ἀντικαθίστανται μὲ τὸ ἄθροισμά των, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται διὰ τῆς **ἀναγωγῆς** αὐτῶν. Π.χ. :

$-3x^4 + \frac{7}{2}x^2 - \frac{1}{3}x + 8x^4 - \frac{1}{2}x^2 + x^4 + 15 = 6x^4 + 3x^2 - \frac{1}{3}x + 15$ καὶ

$2x^2y^3 - 5x^2y + 3x^2y^3 - 2x^3y + 7x^2y - 6x^3y = 5x^2y^3 + 2x^2y - 8x^3y.$

Συμβολικῶς γράφομεν : $\Phi(x) = 6x^4 + 3x^2 - \frac{1}{3}x + 15$

$$\Phi(x, y) = 5x^2y^3 + 2x^2y - 8x^3y$$

Εἰς τὰ $\Phi(x)$ καὶ $\Phi(x, y)$ δὲν ὑπάρχουν ὅμοιοι ὅροι. Τὰ πολυώνυμα αὐτὰ λέγονται **συνεπτυγμένα** ἢ **ἀνηγμένα** πολυώνυμα. **Πᾶν ἀνηγμένον πολυώνυμον μὲ δύο ὅρους λέγεται διώνυμον, μὲ τρεῖς ὅρους λέγεται τριώνυμον.**

Οὕτω τὰ $3x^4 - 5x$, $\alpha x^\mu - \beta$, $-4x^3y\omega + 2\alpha\beta$ εἶναι διώνυμα, τὰ δὲ $3x^4 + 6x^2 - 12$, $x^2y + \alpha\omega + y$, $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ εἶναι τριώνυμα. Πᾶν μονώνυμον θεωρεῖται ὡς συνεπτυγμένον πολυώνυμον Π.χ. $2x^5 = 2x^5 + 0x^4 + 0x^3 + 7x^2 - 7x^2$.

Εἰς κάθε πολυώνυμον εἶναι δυνατὸν οἱ ὅροι νὰ τοποθετηθοῦν κατὰ τρόπον, ὥστε οἱ ἐκθέται μιᾶς μεταβλητῆς νὰ βαίνουν αὐξανόμενοι **(ἀνιοῦσαι δυνάμεις)** ἢ ἐλαττούμενοι **(κατιοῦσαι δυνάμεις).** (Ἰδιότης τῆς ἀντιμεταθέσεως ἢ τῆς ἀδιαφορίας ὡς πρὸς τὴν θέσιν εἰς τὸ ἄθροισμα).

Π.χ. οἱ ἐκθέται τοῦ x εἰς τὸ $\Phi(x) = 5x^4 - 2x^3 + 7x^2 + 15x - 6$ βαίνουν ἐλαττούμενοι. Εἶναι τὸ $\Phi(x)$ **διατεταγμένον κατὰ τὰς κατιούσας τοῦ** x. Τὸ $\Phi(\omega) = 2 - \frac{5}{4}\omega + 13\omega^2 - 8\omega^3$ εἶναι **διατεταγμένον κατὰ τὰς ἀνιούσας τοῦ ω,** τὸ δὲ $\Phi(x, y) = 3x^3 + 2x^2y - 5xy^2 - y^4$ εἶναι διατεταγμένον κατὰ τὰς κατιούσας τοῦ x καὶ κατὰ τὰς ἀνιούσας τοῦ y.

Μηδενικὸν λέγεται τὸ πολυώνυμον, τοῦ ὁποίου ὅλοι οἱ ὅροι εἶναι μηδενικὰ μονώνυμα.

Ἀντίθετα εἶναι δύο πολυώνυμα, ὅταν ἔχουν τοὺς ὅρους ἀνὰ δύο ἀντιθέτους Π.χ. τὰ $3x^4y - 5x^3y^2 + 4y - 7$ καὶ $-3x^4y + 5x^3y^2 - 4y + 7$ εἶναι ἀντίθετα.

Β) Βαθμὸς πολυωνύμου. Βαθμὸς πολυωνύμου ὡς πρὸς μίαν του μεταβλητὴν λέγεται ὁ μέγιστος ἀπὸ τοὺς ἐκθέτας, τοὺς ὁποίους ἔχει ἡ μεταβλητὴ εἰς τοὺς ὅρους τοῦ πολυωνύμου.

Π.χ. τὸ πολυώνυμον $-2x^3\psi + 4x\psi^2 - 7x^4\psi^2 + 6x + \psi^5 - 12 = \Pi(x, \psi)$ εἶναι **τετάρτου** βαθμοῦ ὡς πρὸς x καὶ **πέμπτου** ὡς πρὸς ψ.

Βαθμὸς πολυωνύμου ὡς πρὸς περισσοτέρας μεταβλητὰς λέγεται ὁ μέγιστος ἀπὸ τοὺς βαθμοὺς τῶν μονωνύμων του ὡς πρὸς τὰς μεταβλητὰς αὐτάς.

Οὕτω τὸ προηγούμενον πολυώνυμον $\Pi(x, \psi)$ εἶναι ὡς πρὸς τὰς μεταβλητάς του x, ψ ἕκτου βαθμοῦ, διότι μεγιστοβάθμιος ὅρος του εἶναι τὸ μονώνυμον $-7x^4\psi^2$, τὸ ὁποῖον εἶναι **ἕκτου** βαθμοῦ ὡς πρὸς x, ψ.

Τὸ πολυώνυμον $\Phi(\alpha, \beta, \gamma) = 5\alpha^2\beta^3 - 2\alpha^3\beta\gamma^4 + \frac{2}{3}\alpha\beta^2\gamma^2 - 7\gamma$ εἶναι τρίτου βαθμοῦ ὡς πρὸς α, τρίτου ὡς πρὸς β, τετάρτου ὡς πρὸς γ, πέμπτου ὡς πρὸς α καὶ β, ἑβδόμου ὡς πρὸς α καὶ γ, πέμπτου ὡς πρὸς β καὶ γ καὶ ὀγδόου ὡς πρὸς α, β, γ.

Γ) Γενικὴ μορφὴ ἀκεραίου πολυωνύμου μυοστοῦ βαθμοῦ ὡς πρὸς μίαν μεταβλητὴν x.

Πᾶν συνεπτυγμένον ἀκέραιον πολυώνυμον εἶναι δυνατὸν νὰ διατάσσεται κατὰ τὰς ἀνιούσας ἢ κατιούσας δυνάμεις μιᾶς μεταβλητῆς του. Οὕτω π.χ. τὸ

$\Phi(x) = 3x^5 - 2x^4 + 7x^3 - \frac{5}{4}x^2 + 8x + 47$ καθὼς καὶ τὸ

$F(x, \psi) = -2x^3\psi - 4x^2\psi^3 + 13x\psi - \psi^4$ εἶναι διατεταγμένα κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τῆς μεταβλητῆς x, ἐνῷ τὸ

$\Sigma(\omega, x) = \frac{3}{4}\omega^3 - 5\omega x + 2\omega^2x^2 - 7x^3$ εἶναι διατεταγμένον κατὰ τὰς ἀνιούσας τοῦ x.

Ἕνα πολυώνυμον ὡς πρὸς μίαν μεταβλητὴν του x διατεταγμένον κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις αὐτῆς θὰ ἔχῃ τὴν γενικὴν μορφήν :

$$A_0x^\mu + A_1x^{\mu-1} + A_2x^{\mu-2} + A_3x^{\mu-3} + \ldots + A_{\mu-1}x + A_\mu \qquad (1)$$

ὅπου ὁ μ εἶναι φυσικὸς ἀριθμὸς καὶ οἱ συντελεσταὶ $A_0, A_1, A_2, \ldots A_{\mu-1}, A_\mu$ εἶναι ὡρισμένοι ἀριθμοὶ ἢ παραστάσεις ἀνεξάρτητοι τῆς μεταβλητῆς x. Τὸ πολυώνυμον (1) εἶναι μυοστοῦ βαθμοῦ, ἐὰν εἶναι $A_0 \neq 0$.

Ἐὰν διαταχθῇ τοῦτο κατὰ τὰς ἀνιούσας τοῦ x λαμβάνει τὴν μορφήν :

$$A_\mu + A_{\mu-1}x + A_{\mu-1}x^2 + \ldots + A_1x^{\mu-1} + A_0x^\mu \qquad (2)$$

Ἐὰν ὅλοι οἱ συντελεσταὶ τοῦ (1)εἶναι διάφοροι τοῦ μηδενὸς τὸ πολυώνυμον λέγεται **πλῆρες.** Τὰ ἀνωτέρω πολυώνυμα $\Phi(x)$, $F(x, \psi)$, $\Sigma(\omega, x)$ εἶναι πλήρη ὡς πρὸς τὴν μεταβλητὴν x.

Ἕνα μὴ πλῆρες πολυώνυμον ὡς πρὸς μίαν μεταβλητήν του λέγεται καὶ **ἐλλιπές.** Π.χ. τὸ $2\alpha x^4 - 5\alpha^2x^2 + 8x$ εἶναι ἐλλιπὲς ὡς πρὸς τὸ x.

Ἕνα ἐλλιπὲς πολυώνυμον δύναται νὰ συμπληρωθῇ διὰ μηδενικῶν μονωνύμων καὶ νὰ λάβῃ τὴν μορφὴν πλήρους πολυωνύμου. Π.χ. τὸ $5x^4 + 7x$ γράφεται $5x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 7x + 0$.

Δ) Ὁμογενὲς πολυώνυμον. Ἕνα ἀκέραιον πολυώνυμον λέγεται ὁμογενὲς ὅταν ὅλοι του οἱ ὅροι εἶναι τοῦ αὐτοῦ βαθμοῦ ὡς πρὸς τὰς μεταβλητάς του.

Π.χ. Τὸ πολυώνυμον $3x - 2\psi + \omega$ εἶναι ὁμογενὲς πρώτου βαθμοῦ, τὸ $x^2 - 7x\psi + 4\psi^2$ ὁμογενὲς δευτέρου βαθμοῦ, τὸ $x^3 + 2x^2\psi - \frac{2}{3}x\psi^2 + 5\psi^3$ ὁμογενὲς τρίτου βαθμοῦ, ὡς πρὸς τὰς μεταβλητάς των. Τὸ πολυώνυμον $-4\alpha^3 + 2\alpha\beta\gamma - \beta\gamma^2 + \gamma\alpha^2$ εἶναι ὁμογενὲς τρίτου βαθμοῦ ὡς πρὸς α, β, γ.

Ἐὰν οἱ ὅροι ἑνὸς πολυωνύμου γραφοῦν καθ' ὁμάδας, ὥστε κάθε μία ἐξ αὐτῶν νὰ εἶναι ὁμογενὲς πολυώνυμον καὶ ὁ βαθμὸς ὁμογενείας της διάφορος τοῦ βαθμοῦ τῶν ὑπολοίπων, θὰ λέγωμεν ὅτι τὸ πολυώνυμον εἶναι **διατεταγμένον καθ' ὁμογενεῖς ὁμάδας** π.χ. τὸ $(5\alpha^3 - 2\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2) + (\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta) - (2\alpha + \beta) + 13$ εἶναι διατεταγμένον εἰς τέσσαρας ὁμογενεῖς ὁμάδας.

Ε) Ἴσα πολυώνυμα. Δύο πολυώνυμα λέγονται **ἴσα,** ὅταν ἔχουν τὴν αὐτὴν συνεπτυγμένην μορφήν, δηλαδὴ οἱ ὅροι των εἶναι ἀνὰ δύο τοῦ αὐτοῦ βαθμοῦ ὡς πρὸς τὰς μεταβλητάς των καὶ μὲ τοὺς αὐτοὺς συντελεστάς.

Π.χ. Τὸ $\Phi(x, \psi) = -3x^4 + 2x\psi^2 - 5x\psi + 7x\psi^2 + x\psi - \psi^3 + 5x^2\psi$ καὶ τὸ $\Pi(x, \psi) = -3x^4 + 9x\psi^2 - 4x\psi - \psi^3 + 5x^2\psi$ εἶναι ἴσα, διότι τὸ $\Pi(x, \psi)$ εἶναι ἡ συνεπτυγμένη μορφὴ τοῦ $\Phi(x, \psi)$. Τὰ δύο πολυώνυμα $\Phi(x, \psi)$

καὶ Π (x, ψ) λέγομεν ὅτι ταυτίζονται καὶ ἡ ἰσότης $\Phi(x, \psi) = \Pi(x, \psi)$ λέγεται **ταυτότης**.

ΣΤ) Κυκλικὴ μετατροπὴ γραμμάτων - Συμμετρικὰ πολυώνυμα.

Δίδεται τὸ πολυώνυμον $\Pi(\alpha, \beta, \gamma) = 3\alpha^2 - 2\beta^3 + 5\gamma^2 - 7\alpha\beta\gamma$. Ἐὰν εἰς τοῦτο ὅπου α τεθῇ τὸ β, ὅπου β τὸ γ καὶ ὅπου γ τὸ α, προκύπτει τὸ πολυώνυμον $\Pi'(\alpha, \beta, \gamma) = 3\beta^2 - 2\gamma^3 + 5\alpha^2 - 7\beta\gamma\alpha$. Λέγομεν ὅτι τὸ $\Pi'(\alpha, \beta, \gamma)$ προκέκυψε ἀπὸ τὸ $\Pi(\alpha, \beta, \gamma)$ διὰ **κυκλικῆς μετατροπῆς** τῶν γραμμάτων α, β, γ. Ὁμοίως ἀπὸ τὸ $\Pi'(\alpha, \beta, \gamma)$ διὰ κυκλικῆς μετατροπῆς τῶν α, β, γ προκύπτει τὸ πολυώνυμον $\Pi''(\alpha, \beta, \gamma) = 3\gamma^2 - 2\alpha^3 + 5\beta^2 - 7\gamma\alpha\beta$.

Ἡ κυκλικὴ μετατροπὴ μεταξὺ δύο μόνον γραμμάτων λ.χ. τῶν α καὶ β εἰς ἕνα πολυώνυμον γίνεται διὰ τῆς ἀντικαταστάσεως τοῦ α διὰ τοῦ β καὶ τοῦ β διὰ τοῦ α. Ἡ μετατροπὴ αὕτη λέγεται καὶ **ἐναλλαγὴ τῶν α καὶ β.** Ἀπὸ τὸ πολυώνυμον $\Phi(\alpha, \beta, \gamma) = -5\alpha^3 + 2\beta^2 - 4\alpha\beta + \alpha^2\gamma - \gamma^4$ δι' ἐναλλαγῆς τῶν α καὶ β προκύπτει τὸ $\Phi'(\alpha, \beta, \gamma) = -5\beta^3 + 2\alpha^2 - 4\beta\alpha + \beta^2\gamma - \gamma^4$.

Ἂν ἕνα πολυώνυμον δὲν μεταβάλλεται διὰ τῆς ἐναλλαγῆς δύο γραμμάτων του θὰ λέγεται **συμμετρικὸν** ὡς πρὸς τὰ γράμματα αὐτά.

Π.χ. τὸ πολυώνυμον $\Phi(x, \psi) = x^2 + \psi^2 - 7x\psi + 6$ εἶναι συμμετρικὸν ὡς πρὸς τὰς μεταβλητάς του x, ψ διότι ἡ ἐναλλαγὴ τῶν x, ψ δίδει τὸ πολυώνυμον $\Phi(\psi, x) = \psi^2 + x^2 - 7\psi x + 6$ τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον μὲ τὸ $\Phi(x, \psi)$. Τὸ πολυώνυμον $5(x^2 + \omega^2) - 3x\omega + 2\psi^2 x + 2\psi^2\omega - 12$ εἶναι συμμετρικὸν ὡς πρὸς τὰ γράμματα x, ω.

Κυκλικὸν ἢ κυκλικῶς συμμετρικὸν λέγεται ἕνα πολυώνυμον ὅταν ἡ κυκλικὴ μετατροπὴ τῶν γραμμάτων του δὲν τὸ μεταβάλλει.

Π.χ. τὰ πολυώνυμα $2(x + \psi + \omega) - 15$, $3(x^2 + \psi^2 + \omega^2) - x - \psi - \omega + 4$, $x + \psi + \omega - 8x\psi\omega + 2$, $x^3 + \psi^3 + \omega^3 - 2x\psi\omega + 15$ εἶναι κυκλικὰ ἢ συμμετρικὰ πολυώνυμα ὡς πρὸς τὰς μεταβλητὰς των x, ψ, ω.

Ἐὰν τὸ πολυώνυμον $\Phi(x, \psi, \omega)$ εἶναι συμμετρικὸν ὡς πρὸς τὰς μεταβλητάς του, διὰ κυκλικῆς μετατροπῆς αὐτῶν προκύπτει τὸ πολυώνυμον $\Phi(\psi, \omega, x)$ καὶ ἡ ἰσότης $\Phi(x, \psi, \omega) = \Phi(\psi, \omega, x)$ εἶναι μία ταυτότης.

Τὸ πολυώνυμον $K(x + y + z)$, ὅπου k ἀνεξάρτητον τῶν x, y, z εἶναι πολυώνυμον συμμετρικὸν καὶ ὁμογενὲς πρώτου βαθμοῦ ὡς πρὸς x, y, z, ἐνῷ τὸ $k(x^2 + y^2 + z^2) + \lambda(xy + yz + zx)$ εἶναι συμμετρικὸν καὶ ὁμογενὲς δευτέρου βαθμοῦ, ἐὰν τὰ k, λ εἶναι ἀνεξάρτητα τῶν x, y, z.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

131) Εἰς τὰ ἑπόμενα πολυώνυμα νὰ γίνουν αἱ ἀναγωγαὶ τῶν ὁμοίων ὅρων, νὰ ὁρισθῇ ὁ βαθμὸς καθενὸς ὡς πρὸς τὰ μεταβλητάς του, νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἴσα καὶ τὰ ἀντίθετα πολυώνυμα:

$2x^3 - 5x^2 + 3x - x^2 + 7x - 8$, $\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$, $x\omega^2 - 3x^2\omega + 12\omega - 5$, $\beta^2 + \alpha^2 - 2\alpha\beta$, $4x\psi^3\omega - 7x\psi + 5\psi^2 + 12x\psi - 6x\psi^3\omega - 4$, $-8 + 10x - 6x^2 + 2x^3$, $5 - 12\omega - x\omega^2 + 3x^2\omega$.

132) Τὰ ἑπόμενα πολυώνυμα νὰ γραφοῦν εἰς τὴν ἀνηγμένην των μορφήν, νὰ εὑρεθῇ ὁ βαθμὸς καθενὸς ὡς πρὸς τὰς μεταβλητάς του καὶ νὰ διαταχθῇ κατὰ τὰς ἀνιούσας δυνάμεις μιᾶς ἐξ αὐτῶν.

$7x^3 - 5x + 2x^2 - 6x^4 - x^3 + 8x - 13x^2 + 45$

$-5x^2\psi^3 + 6x\psi^4 + 3\psi^5 - 8x\psi^4 + 12x^3\psi^3 - 4\psi^5 + 2x\psi^4 - 3x\psi$

$-\frac{1}{3}\omega^3 + \frac{1}{2}\omega^2 x - \frac{5}{3}\omega x^2 + \frac{1}{2}\omega^3 - x^3 + \omega^2 x - \frac{1}{3}\omega x^2 - 100$

$2x\psi - x^2 + \psi^2 - 4x + 3\psi - 5x\psi - 2x^2 + x - \psi + 41$

Ἀπὸ τὰ πολυώνυμα αὐτὰ ποῖον εἶναι ὁμογενές ; ποῖον διασάσσεται καθ' ὁμάδας ὁμογενείας ;

133) Νὰ σχηματισθῇ τὸ πολυώνυμον μὲ ὅρους τὰ μονώνυμα $-\frac{3}{5}x^4, 2x^3, -x, 7x^2, -\frac{1}{2}x, -4x^2, \frac{2}{5}x^4, x^3$, καὶ νὰ γραφῇ ὑπὸ τὴν συνεπτυγμένην του μορφήν. Νὰ εὑρεθῇ ὁ βαθμός του καὶ νὰ διαταχθῇ κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ x. Νὰ ἐξετασθῇ ἐὰν εἶναι πλῆρες ἢ ἐλλιπὲς πολυώνυμον.

134) Εἰς τὸ σύνολον τῶν μονωνύμων

$\Sigma = \left\{-x^2\psi, 5x\psi, -2x\psi^2, \frac{1}{2}x\psi, 4x^3\psi, -4x\psi^3, \frac{2}{5}x^2\psi, 2x\psi^3, -x^3\psi\right\}$ νὰ εὑρεθοῦν αἱ κλάσεις τῶν ὁμοίων μονωνύμων. Νὰ σχηματισθῇ τὸ πολυώνυμον μὲ ὅρους τὰ στοιχεῖα τοῦ Σ· ποῖος εἶναι ὁ βαθμὸς τοῦ πολυωνύμου τούτου ὡς πρὸς x, ὡς πρὸς ψ, ὡς πρὸς x καὶ ψ ; Νὰ διαταχθῇ τὸ πολυώνυμον κατὰ τὰς ἀνιούσας τοῦ ψ. Νὰ ἐξετασθῇ ἐὰν εἶναι συμμετρικὸν ὡς πρὸς τὰς μεταβλητάς του.

53. Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΝ.

Α) Ἀριθμητικὴ τιμὴ πολυωνύμου μιᾶς μεταβλητῆς. Δίδεται τὸ πολυώνυμον $\Phi(x) = 7x^3 - 3x^2 + 5x - 6$ τῆς μεταβλητῆς x. Ἐὰν ἡ x εἶναι στοιχεῖον ἑνὸς συνόλου ἀριθμῶν λ.χ. τοῦ $\Sigma = \{-1,0,1,2,\}$, τότε διὰ κάθε $x \in \Sigma$ διὰ τοῦ πολυωνύμου Φ (x) θὰ ὁρίζεται μία ἀντίστοιχος εἰκών. Διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν εἰκόνα ἑνὸς ἀρχετύπου π.χ. τοῦ $x = 2$, ὑπολογίζομεν κάθε ὅρου τοῦ Φ (x) τὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν (§ 50, Α) διὰ $x = 2$ καὶ προσθέτομεν τὰς τιμάς. Θὰ ἔχωμεν διὰ $x = 2$:

$\Phi(2) = 7 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2 - 6 = 7 \cdot 8 - 3 \cdot 4 + 5 \cdot 2 - 6 = 56 - 12 + 10 - 6 = 48.$

Μὲ ὅμοιον τρόπον εὑρίσκομεν : $\Phi(-1) = -21$, $\Phi(0) = -6$ καὶ $\Phi(1) = 3$. Τὸ σύνολον τῶν εἰκόνων εἶναι $E = \{-21, -6, 3, 48\}$.

Ἡ εὕρεσις τῆς εἰκόνος Φ (α) ἑνὸς ἀρχετύπου $x = \alpha$ λέγεται καὶ **ὑπολογισμὸς τῆς ἀριθμητικῆς τιμῆς** τοῦ πολυωνύμου Φ (x) διὰ $x = \alpha$.

Διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν ἑνὸς πολυωνύμου διὰ δοθεῖσαν τιμὴν τῆς μεταβλητῆς του ὑπολογίζομεν τὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν κάθε ὅρου του καὶ προσθέτομεν τὰς εὑρεθείσας τιμὰς τῶν ὅρων του.

Μὲ τὰ ἀνωτέρω ἔχομεν τὴν ἀπεικόνισιν :

$\Phi : \forall x : x \in \Sigma \longrightarrow \Phi(x) = (7x^3 - 3x^2 + 5x - 6) \in E.$

Ἡ ἀπεικόνισις τοῦ Σ εἰς τὸ Ε εἶναι μονοσήμαντος, ἑπομένως ἔχομεν μίαν συνάρτησιν, ἡ ὁποία θὰ λέγεται καὶ

συνάρτησις — πολυώνυμον $\Phi(x) = 7x^3 - 3x^2 + 5x - 6$.

Τὸ Σ εἶναι ἕνα σύνολον σχετικῶν ἀριθμῶν ἢ καὶ αὐτὸ τὸ R, ὁπότε τὸ Ε θὰ εἶναι ἕνα ἀριθμητικὸν σύνολον.

Β) Πολυώνυμα περισσοτέρων μεταβλητῶν. Δίδεται τὸ πολυώνυμον $\Phi(x, \psi) = 3x^2\psi - 5x\psi + 7\psi^2 - 4$ τῶν μεταβλητῶν x, ψ.

Ἐὰν $x = 2, \psi = -4$, θὰ ἔχωμεν: $\Phi(2, -4) = 3 \cdot 2^2 \cdot (-4) - 5 \cdot 2 \cdot (-4) + 7(-4)^2 - 4 = 3 \cdot 4 \cdot (-4) - 5 \cdot 2 \cdot (-4) + 7 \cdot 16 - 4 = -48 + 40 + 112 - 4 = 100$. Ὁ ἀριθμὸς 100 λέγεται ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ $\Phi(x, \psi)$ διὰ $x = 2$ καὶ $\psi = -4$.

Διὰ κάθε διατεταγμένον ζεῦγος (x, ψ), ὅταν $x \in R$ καὶ $\psi \in R$, θὰ ὑπολογίζεται μία ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ πολυωνύμου $\Phi(x, \psi)$. Δημιουργεῖται τοιουτοτρόπως μία ἀπεικόνισις τοῦ συνόλου $R \times R$ εἰς ἕνα ἀριθμητικὸν σύνολον, τὸ σύνολον τῶν τιμῶν τοῦ $\Phi(x, \psi)$. Ἡ ἀπεικόνισις αὐτὴ εἶναι μονοσήμαντος, εἶναι δηλ. μία συνάρτησις.

Αἱ μεταβληταὶ τοῦ πολυωνύμου λέγονται καὶ **ἀνεξάρτητοι μεταβληταί,** ἐνῷ τὸ πολυώνυμον εἶναι **ἐξηρτημένη μεταβλητή.** Συνήθως λέγομεν «ἡ συνάρτησις $\Phi(x, \psi) = 3x^2\psi - 5x\psi + 7x^2 - 4$» καὶ ἐννοοῦμεν, ὅσα εἴπομεν προηγουμένως.

Ἐπεκτείνονται τὰ ἀνωτέρω εἰς πολυώνυμα μὲ περισσοτέρας τῶν δύο μεταβλητάς.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

135) Τὸ σύνολον $\Sigma = \left\{ 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2 \right\}$ ἀπεικονίζεται μὲ τὸ $\Phi(x) = 4x^2 - 5x + 3$. Νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον τιμῶν τῆς συναρτήσεως.

136) Τοῦ πολυωνύμου $\Pi(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀριθμητικαὶ τιμαὶ $\Pi(-1), \Pi(1), \Pi(0), \Pi\left(\frac{1}{2}\right), \Pi\left(-\frac{1}{2}\right)$.

137) Τοῦ πολυωνύμου $\Phi(x, \psi) = 2x^3 - 4x\psi^2 + 5x - 6\psi + 12$ νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀριθμητικαὶ τιμαὶ ὅταν α) $x = 2, \psi = -1$ β) $x = -3, \psi = 2$ γ) $x = 0, \psi = \frac{1}{2}$ δ) $x = -\frac{1}{2}, \psi = 0$

138) Δίδονται τὰ σύνολα $\Sigma_1 = \{-1, 0, 1, 2\}, \Sigma_2 = \{-2, 1, 3\}$ καὶ τὸ πολυώνυμον $\Phi(\alpha, \beta) = 2\alpha^2 - 5\alpha\beta + \beta^2$. Ἐὰν $\alpha \in \Sigma_1$ καὶ $\beta \in \Sigma_2$, νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον τῶν εἰκόνων διὰ τοῦ $\Phi(\alpha, \beta)$.

139) Νὰ ἀπεικονισθῇ τὸ σύνολον $\Sigma = \{-2, -1, 1, 2\}$ μὲ τὸ πολυώνυμον $\Phi(x) = x^4 - 5x^2$, ὅταν $x \in \Sigma$.

140) Εἰς τὸ σύνολον $\Sigma = \{-3, -1, 0, 1, 2, 3\}$ ὁρίζομεν τὰς συναρτήσεις $\Phi(x) = x^6 - 2x^5 - 18x$ καὶ $\Pi(x) = 10x^4 - 20x^3 - 9x^2$. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ πεδία τιμῶν τῶν δύο συναρτήσεων.

141) Δίδονται τὰ σύνολα $\Sigma = \{0, 1, 2, 3\}$ καὶ $T = \{-1, 4, 5\}$ καὶ ἡ συνάρτησις $\varphi(x, \psi) = 2x - 3\psi + 5$, ὅπου $x \in \Sigma$ καὶ $\psi \in T$. Νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον τῶν εἰκόνων $\varphi(x, \psi)$.

142) Δίδεται ἡ συνάρτησις

$$\varphi : \forall (x, \psi) : (x, \psi) \in R \times R \longrightarrow \Big[\varphi(x, \psi) = 3x - \psi + 7 \Big] \in R$$

Νὰ δειχθῇ ὅτι κάθε ἀριθμὸς $\rho \in R$ εἶναι ὁπωσδήποτε εἰκὼν ζεύγους $(x', \psi') \in R \times R$. Ἕνα π.χ. ζεῦγος εἶναι τὸ $x' = 5, \psi' = 22 - \rho$. Τὸ $(5, 22 - \rho)$ ἔχει ὡς εἰκόνα εἰς τὴν συνάρτησιν αὐτὴν τὸν ρ.

143) Εἰς τὴν συνάρτησιν τῆς ἀσκ. 142 δείξατε ὅτι ὅλα τὰ ζεύγη τῆς μορφῆς $(x', 3x'+7)$, ὅπου $x' \in R$, ἔχουν ὡς εἰκόνα τὸ μηδέν. Ὁρίσατε τὰ ζεύγη αὐτὰ ἂν $x' \in \Sigma$, ὅπου

$$\Sigma = \left\{-3, -2, -\frac{1}{2}, 0, 1, 2, \frac{5}{2}\right\}$$

144)* Δίδεται ἡ συνάρτησις

$$\varphi : \forall (x, \psi) : (x, \psi) \in R \times R \longrightarrow \Big[\varphi(x, \psi) = \alpha x + \beta\psi + \gamma\Big] \in R$$

Δείξατε ὅτι κάθε ἀριθμὸς $\rho \in R$ εἶναι εἰς τὴν συνάρτησιν αὐτὴν εἰκὼν τῶν ἀπειραρίθμων διατεταγμένων ζευγῶν (x', ψ') ὅπου $x' \in R$ καὶ $\psi' = -\dfrac{\alpha}{\beta}x' - \dfrac{\gamma}{\beta} + \dfrac{\rho}{\beta}$, ἂν $\beta \neq 0$.

145)* Εἰς τὴν συνάρτησιν τῆς ἀσκήσεως 144 δείξατε ὅτι τὰ ζεύγη $(x', \psi') \in R \times R$, ποὺ ἔχουν εἰκόνα τὸ μηδὲν εἶναι τῆς μορφῆς $\left(x', -\dfrac{\alpha}{\beta}x' - \dfrac{\gamma}{\beta}\right)$, δηλ. x'= αὐθαίρετος πραγματικὸς ἀριθμὸς καὶ $\psi' = -\dfrac{\alpha}{\beta}x' - \dfrac{\gamma}{\beta}$.

146)* Δίδεται τὸ σύνολον $\Sigma = \{2,5,7\}$ καὶ ὁ διψήφιος ἀριθμὸς $\varphi(x, \psi)$ μὲ x δεκάδας καὶ $\psi - 5$ μονάδας, ὅπου $x \in \Sigma$ καὶ $\psi \in \Sigma$. Νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον τῶν διψηφίων $\varphi(x, \psi)$.

147)* Εἰς τὴν συνάρτησιν $\varphi : \forall (x, \psi) : (x, \psi) \in R \times R \to \Big[\varphi(x, \psi) = 5x - \psi + 3\Big] \in R$ νὰ εὑρεθοῦν τὰ ζεύγη (x', ψ'), τὰ ὁποῖα ἔχουν ὡς εἰκόνα τὸν 7 ἢ τὸν -12 ἢ τὸν $\alpha \in R$. Ποῖα ζεύγη ἔχουν ὡς εἰκόνα τὸ 0 ;

148)* Δίδεται ἡ συνάρτησις $\varphi(x, \psi) = 4x + 7\psi - 13$. Δείξατε ὅτι ὅλα τὰ ζεύγη $(x, \psi) \in R \times R$, ὅπου $x = -2 + 7\lambda$, $\psi = 3 - 4\lambda$, $\lambda \in R$ ἔχουν ὡς εἰκόνα εἰς τὴν συνάρτησιν αὐτὴν τὸ 0.

54. ΠΡΑΞΕΙΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ.

Α) Πρόσθεσις πολυωνύμων. Ἐπειδὴ κάθε πολυώνυμον εἶναι ἄθροισμα τῶν ὅρων του, ἡ πρόσθεσις πολυωνύμων εἶναι πρόσθεσις ἀθροισμάτων, ἑπομένως ἔχομεν :

Διὰ νὰ προσθέσωμεν πολυώνυμα σχηματίζομεν τὸ πολυώνυμον, τὸ ὁποῖον περιέχει ὅλους τοὺς ὅρους τῶν δοθέντων πολυωνύμων καὶ μόνον αὐτούς.

Εἶναι φυσικὸν εἰς τὸ ἄθροισμα τῶν πολυωνύμων νὰ γίνουν αἱ ἀναγωγαὶ τῶν ὁμοίων ὅρων καὶ νὰ τεθῇ τοῦτο ὑπὸ τὴν συνεπτυγμένην του μορφήν.

Παραδείγματα : 1. Νὰ προστεθοῦν τὰ πολυώνυμα.
$\mathbf{\Phi(x) = 5x^3 - 4x^2 + 6x - 1}$, $\mathbf{\Pi(x) = 2x^4 - x^3 + 8x + 13}$, $\mathbf{\Sigma(x) = -2x^4 + 3x^2 - 7x + 5}$

Εἶναι : $\Phi(x) + \Pi(x) + \Sigma(x) = (5x^3 - 4x^2 + 6x - 1) + (2x^4 - x^3 + 8x + 13) + (-2x^4 + 3x^2 - 7x + 5) = 5x^3 - 4x^2 + 6x - 1 + 2x^4 - x^3 + 8x + 13 - 2x^4 + 3x^2 - 7x + 5 = 4x^3 - x^2 + 7x + 17$

Ἡ πρόσθεσις αὐτὴ διατάσσεται ὅπως ἀπέναντι. Οἱ ὅμοιοι ὅροι εὑρίσκονται εἰς τὴν αὐτὴν στήλην καὶ γίνεται ἡ πρόσθεσις κατὰ στήλας:

$$\begin{array}{lrrrrr}
\Phi(x) = & & 5x^3 & -4x^2 & +6x & -1 \\
\Pi(x) = & 2x^4 & -x^3 & & +8x & +13 \\
\Sigma(x) = & -2x^4 & & +3x^2 & -7x & +5 \\
\hline
\Phi(x)+\Pi(x)+\Sigma(x) = & 0x^4 & +4x^3 & -x^2 & +7x & +17
\end{array}$$

ἢ καὶ $\Phi(x) + \Pi(x) + \Sigma(x) = 4x^3 - x^2 + 7x + 17$

2. Νὰ προστεθοῦν τὰ πολυώνυμα.

$\Phi(x,\psi) = 2x^3\psi - 3x\psi + 4\psi^2$, $\Pi(x,\psi) = -3x^3\psi - 7x\psi + \psi^2 - 3x^2$, $\Sigma(x,\psi) =$ $= -x\psi^3 + 5x\psi - 2x^2$.

Εἶναι $\Phi(x,\psi) + \Pi(x,\psi) + \Sigma(x,\psi) = 2x^3\psi - 3x\psi + 4\psi^2) + (-3x^3\psi - 7x\psi + \psi^2 - 3x^2) + (-x\psi^3 + 5x\psi - 2x^2) = 2x^3\psi - 3x\psi + 4\psi^2 - 3x^3\psi - 7x\psi + \psi^2 - 3x^2 - x\psi^3 + 5x\psi - 2x^2 = -x^3\psi - 5x\psi + 5\psi^2 - x\psi^3 - 5x^2$.

Ἰδιότητες. Ἐὰν δοθοῦν τὰ πολυώνυμα Φ, Π, Σ μιᾶς ἢ περισσοτέρων μεταβλητῶν εἶναι εὔκολον νὰ δείξωμεν ὅτι εἶναι :

1) $\Phi + \Pi = \Pi + \Phi$ (ἀντιμεταθετικότης)

2) $(\Phi + \Pi) + \Sigma = \Phi + (\Pi + \Sigma)$ (προσεταιριστικότης)

3) Τὸ μηδενικὸν πολυώνυμον εἶναι οὐδέτερον στοιχεῖον δηλαδὴ $\Phi + 0 = \Phi$ καὶ (4) Κάθε πολυώνυμον ἔχει τὸ ἀντίθετόν του, δηλαδὴ διὰ τὸ Φ εὑρίσκεται τὸ Φ΄, ὥστε νὰ εἶναι $\Phi + \Phi' = 0$.

Β) Ἀφαίρεσις πολυωνύμων. Ἀφαίρεσις τοῦ πολυωνύμου Β ἀπὸ τοῦ πολυωνύμου Α καλεῖται ἡ πρόσθεσις εἰς τὸ Α τοῦ ἀντιθέτου τοῦ Β.

Π.χ. ἐὰν $\Phi(x) = 2x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 14$ καὶ $\Pi(x) = -3x^3 + 5x^2 + 3x - 8$, εἶναι $\Phi(x) - \Pi(x) = (2x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 14) - (-3x^3 + 5x^2 + 3x - 8) =$
$= (2x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 14) + (+3x^3 - 5x^2 - 3x + 8) =$
$= 2x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 14 + 3x^3 - 5x^2 - 3x + 8 = 2x^4 - 2x^3 + x^2 - 3x - 6$

Ἀπὸ τὰ προηγούμενα παραδείγματα συμπεραίνομεν ὅτι εἰς κάθε ἄθροισμα πολυωνύμων, διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν τελικήν του μορφήν, ἐξαλείφομεν παρενθέσεις καὶ ἐκτελοῦμεν ἀναγωγὰς ὁμοίων ὅρων.

Κατὰ τὴν ἐξάλειψιν τῶν παρενθέσεων διαπιστώνομεν ὅτι 1ον) Ἐὰν πρὸ τῆς παρενθέσεως ὑπάρχῃ τὸ πρόσημον + (ἢ κανένα πρόσημον) οἱ ὅροι της μένουν ὅπως εἶναι καὶ 2ον). Ἐὰν πρὸ αὐτῆς ὑπάρχῃ τὸ —, οἱ ὅροι της μεταβάλλονται εἰς τοὺς ἀντιθέτους των.

Γ) Πολλαπλασιασμὸς ἀκεραίου πολυωνύμου ἐπὶ μονώνυμον. Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν πολυώνυμον ἐπὶ μονώνυμον, ἐφαρμόζομεν τὴν ἐπιμεριστικὴν ἰδιότητα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ὡς πρὸς τὴν πρόσθεσιν, δηλ. **πολλαπλασιάζομεν κάθε ὅρον τοῦ πολυωνύμου ἐπὶ τὸ μονώνυμον καὶ προσθέτομεν τὰ μονώνυμα, ποὺ προκύπτουν.**

Παραδείγματα : 1ον $-3x^2 \cdot (2x^3 - 5x^2 + 6x - 4) = -6x^5 + 15x^4 - 18x^3 + 12x^2$

2ον $\left(-\frac{2}{3}x^4 + \frac{x^3}{2} - \frac{x}{6} + \frac{3}{2}\right) \cdot 6x = -4x^5 + 3x^4 - x^2 + 9x$

3ον $(x^2\psi - 2x\psi + \psi^3) \cdot (-2x\psi^2) = -2x^3\psi^3 + 4x^2\psi^3 - 2x\psi^5$

4ον Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐξαγόμενον τῶν πράξεων :

$A = (x^2 - 2\psi) \cdot 3\psi + (x\psi + \psi^2) \cdot (-x) + (x + \psi)(-2x\psi) - (x + 3) \cdot 2\psi^2$

Ἔχομεν : $A = (3x^2\psi - 6\psi^2) + (-x^2\psi - \psi^2 x) + (-2x^2\psi - 2x\psi^2) -$
$(2x\psi^2 + 6\psi^2) = 3x^2\psi - 6\psi^2 - x^2\psi - \psi^2 x - 2x^2\psi - 2x\psi^2 - 2x\psi^2 - 6\psi^2 = -5x\psi^2 - 12\psi^2$.

Δ) Πολλαπλασιασμὸς ἀκεραίων πολυωνύμων. Τὸ γινόμενον δύο πολυωνύμων εὑρίσκεται ὅπως τὸ γινόμενον δύο ἀθροισμάτων, δηλαδὴ **πολλαπλασιάζομεν κά-**

θε ὅρον τοῦ ἑνὸς πολυωνύμου ἐπὶ ὅλους τοὺς ὅρους τοῦ ἄλλου καὶ προσθέτομεν τὰ μονώνυμα, ποὺ προκύπτουν.

Παραδείγματα: 1ον Νὰ εὑρεθῇ τὸ γινόμενον τῶν πολυωνύμων $\Phi(x) = 3x^2 - 5x + 6$ καὶ $\Pi(x) = 2x + 3$.

Ἔχομεν: $\Phi(x) \cdot \Pi(x) = (3x^2 - 5x + 6) \cdot (2x + 3) = 3x^2 \cdot (2x + 3) - 5x \cdot (2x + 3) + 6 \cdot (2x + 3) = 6x^3 + 9x^2 - 10x^2 - 15x + 12x + 18 = 6x^3 - x^2 - 3x + 18$.

Τὸ πολυώνυμον $\Phi(x)$ εἶναι 2ου βαθμοῦ, τὸ $\Pi(x)$ εἶναι 1ου ὡς πρὸς τὴν μεταβλητήν των x. Τὸ γινόμενον των εἶναι 3ου βαθμοῦ δηλ. ὅσον εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν βαθμῶν τῶν δοθέντων πολυωνύμων.

Τὰ δύο πολυώνυμα $\Phi(x)$ καὶ $\Pi(x)$ εἶναι διατεταγμένα κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ x. Τὸ γινόμενόν των ἐπίσης εἶναι διατεταγμένον κατὰ τὰς κατιούσας τοῦ x. Εἰς τὸ γινόμενον $\Phi(x) \cdot \Pi(x)$ ὁ μεγιστοβάθμιος ὅρος $6x^3$ εἶναι τὸ γινόμενον τῶν δύο μεγιστοβαθμίων ὅρων τῶν πολυωνύμων $\Phi(x)$ καὶ $\Pi(x)$, $3x^2 \cdot 2x = 6x^3$, ὁ δὲ ἐλαχιστοβάθμιος ὅρος εἶναι τὸ γινόμενον τῶν δύο ἐλαχιστοβαθμίων ὅρων τῶν $\Phi(x)$ καὶ $\Pi(x)$, $6 \cdot 3 = 18$.

Εἶναι φανερὸν ὅτι αὐτοὶ οἱ δύο ὅροι εἰς τὸ γινόμενον θὰ ὑπάρχουν πάντοτε καὶ ἂν ἀκόμη ὅλοι οἱ ὅροι ἐνδιαμέσου βαθμοῦ μὲ τὰς ἀναγωγὰς γίνουν μηδενικὰ μονώνυμα. Ὥστε **τὸ γινόμενον δύο μὴ μηδενικῶν πολυωνύμων οὐδέποτε γίνεται μηδενικὸν πολυώνυμον ἢ καὶ μονώνυμον.**

2ον Νὰ εὑρεθῇ τὸ γινόμενον τῶν πολυωνύμων:

$$\Phi(x) = 3x^4 - 5x^3 + 6x^2 - x + 2, \quad \Pi(x) = x^2 + 5x - 2$$

Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰ πολυώνυμα $\Phi(x)$ καὶ $\Pi(x)$ θέτομεν, ὅπως εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν ἀκεραίων, ὡς πολλαπλασιαστέον τὸ $\Phi(x)$ καὶ πολλαπλασιαστὴν τὸ $\Pi(x)$, ὑπολογίζομεν δὲ τὰ μερικὰ γινόμενα $\Phi(x) \cdot x^2$, $\Phi(x) \cdot 5x$ καὶ $\Phi(x) \cdot (-2)$ καὶ διατάσσομεν, ὥστε τὰ ὅμοια μονώνυμα νὰ εὑρίσκωνται κατὰ στήλας.

$$\begin{array}{lrrrrrrr}
\Phi(x) = & & & 3x^4 & -5x^3 & +6x^2 & -x & +2 \\
\Pi(x) = & & & & & x^2 & +5x & -2 \\
\hline
\Phi(x)\cdot x^2 = & 3x^6 & -5x^5 & +6x^4 & -x^3 & +2x^2 & & \\
\Phi(x)\cdot 5x = & & +15x^5 & -25x^4 & +30x^3 & -5x^2 & +10x & \\
\Phi(x)\cdot(-2) = & & & -6x^4 & +10x^3 & -12x^2 & +2x & -4 \\
\hline
\Phi(x)\cdot\Pi(x) = & 3x^6 & +10x^5 & -25x^4 & +39x^3 & -15x^2 & +12x & -4
\end{array}$$

Ἡ πρόσθεσις κατὰ στήλας δίδει τὸ ζητούμενον γινόμενον $\Phi(x) \cdot \Pi(x)$.

3ον. $(x^2 + x\psi + x^2) \cdot (x - \psi) = (x^2 + x\psi + \psi^2) \cdot x + (x^2 + x\psi + \psi^2) \cdot (-\psi) = x^3 + x^2\psi + \psi^2 x - x^2\psi - x\psi^2 - \psi^3 = x^3 - \psi^3$.

4ον. $(2\alpha^2\beta - 3\alpha\beta^2 + 5\alpha\beta - 6) \cdot (\alpha\beta - 2) = 2\alpha^3\beta^2 - 3\alpha^2\beta^3 + 5\alpha^2\beta^2 - 6\alpha\beta - 4\alpha^2\beta + 6\alpha\beta^2 - 10\alpha\beta + 12 = 2\alpha^3\beta^2 - 3\alpha^2\beta^3 + 5\alpha^2\beta^3 - 4\alpha^2\beta + 6\alpha\beta^2 - 16\alpha\beta + 12$.

Ε) Ἰδιότητες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ πολυωνύμων. Ἐὰν δοθοῦν τὰ πολυώνυμα Φ, Π, Σ, μιᾶς ἢ περισσοτέρων μεταβλητῶν εἶναι εὔκολον νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι εἶναι:

1) $\Phi \cdot \Pi = \Pi \cdot \Phi$ (ἀντιμεταθετικότης).

2) $(\Phi \cdot \Pi) \cdot \Sigma = \Phi \cdot (\Pi \cdot \Sigma)$ (προσεταιριστικότης).

3) $\Phi \cdot 1 = \Phi$.

4) Διὰ τὸ ἀκέραιον πολυώνυμον Φ δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ προσδιορίσωμεν τὸ ἀντίστροφόν του, δηλ. ἕνα ἀκέραιον πολυώνυμον Φ' τοιοῦτον, ὥστε νὰ εἶναι $\Phi \cdot \Phi' = 1$.

Π.χ. ἐὰν $\Phi(x) = x^3 - 7x^2 + 6x - 2$ τὸ Φ', ἐὰν ὑπάρχῃ, θὰ δίδῃ γινόμενον ἐπὶ τὸ $\Phi(x)$ ἴσον μὲ τὸ 1. Ἀλλὰ ἡ ἰσότης $(x^3 - 7x^2 + 6x - 2) \cdot \Phi'(x) = 1$ δὲν εἶναι ἀληθής, διότι τὸ πρῶτον μέλος της εἶναι ἕνα πολυώνυμον μεγαλύτερον τοῦ τρίτου βαθμοῦ καὶ δὲν ταυτίζεται μὲ τὸ δεύτερον μέλος, τὸ ὁποῖον εἶναι ἡ σταθερὰ 1.

5) Εἶναι $(\Phi + \Pi) \cdot \Sigma = \Phi \cdot \Sigma + \Pi \cdot \Sigma$ (ἐπιμεριστικότης τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ὡς πρὸς τὴν πρόσθεσιν).

ΣΤ) Ἀξιοσημείωτοι πολλαπλασιασμοί. Εἰς τὴν Ἄλγεβραν θὰ συναντήσωμεν συχνὰ παραστάσεις τῆς μορφῆς :

$(\alpha + \beta)^2$, $(\alpha - \beta)^2$, $(\alpha + \beta) \cdot (\alpha - \beta)$, $(\alpha + \beta + \gamma)^2$, $(\alpha + \beta)^3, \ldots$ καὶ εἶναι ἀνάγκη, διὰ νὰ ἐκτελῶμεν εὐχερῶς τὰς πράξεις, νὰ ἀπομνημονεύσωμεν τὰ ἐξαγόμενά των :

1) $(\alpha + \beta)^2 = (\alpha + \beta) \cdot (\alpha + \beta) = \alpha^2 + \alpha\beta + \alpha\beta + \beta^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$

2) $(\alpha - \beta)^2 = (\alpha - \beta) \cdot (\alpha - \beta) = \alpha^2 - \alpha\beta - \alpha\beta + \beta^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$

Δηλαδή: **Τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος (ἢ τῆς διαφορᾶς) δύο ὅρων ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τοῦ πρώτου ὅρου σὺν (ἢ πλὴν) τὸ διπλάσιον γινόμενον τῶν ὅρων σὺν τὸ τετράγωνον τοῦ δευτέρου ὅρου.**

3) $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 + \alpha\beta - \alpha\beta - \beta^2 = \alpha^2 - \beta^2$

Δηλαδή : τὸ γινόμενον τοῦ ἀθροίσματος δύο ὅρων ἐπὶ τὴν διαφορὰν τῶν ἰδίων ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τοῦ μειωτέου πλὴν τὸ τετράγωνον τοῦ ἀφαιρετέου τῆς διαφορᾶς.

4) $(\alpha + \beta)^3 = (\alpha + \beta)^2 \cdot (\alpha + \beta) = (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2)(\alpha + \beta) =$
$= \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$.

Ἀκόμη γράφεται : $(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + \beta^3 + 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$

5) $(\alpha - \beta)^3 = (\alpha - \beta)^2 \cdot (\alpha - \beta) = (\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2) \cdot (\alpha - \beta) =$
$= \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$.

Ἀκόμη γράφεται : $(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - \beta^3 - 3\alpha\beta(\alpha - \beta)$

6) $(x + \alpha) \cdot (x + \beta) = x^2 + \alpha x + \beta x + \alpha\beta = x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$

7) $(\alpha + \beta + \gamma)^2 = (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha + \beta + \gamma) =$
$= \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma$

8) $(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)(\alpha + \beta) = \alpha^3 + \beta^3$

9) $(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)(\alpha - \beta) = \alpha^3 - \beta^3$

10) $(\alpha^2 + \beta^2)(x^2 + \psi^2) - (\alpha x + \beta\psi)^2 = (\alpha\psi - \beta x)^2$

Ὅλαι αἱ ἀνωτέρω ἰσότητες εἶναι ταυτότητες μεγάλης χρησιμότητος εἰς τὴν Ἄλγεβραν. Λόγῳ τῆς συμμετρικότητος εἰς τὴν ἰσότητα ἔχομεν καὶ τὰς ἀξιοσημειώτους ταυτότητας :

$\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2$, $\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha - \beta)^2$,
$\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta)$ κ.λ.π

Παραδείγματα : 1ον Νὰ γίνουν αἱ πράξεις $(\alpha x + \beta)^2 + (\alpha x - \beta)^2$

Ἐπειδὴ $(\alpha x + \beta)^2 = (\alpha x)^2 + 2(\alpha x)\beta + \beta^2 = \alpha^2x^2 + 2\alpha\beta x + \beta^2$ (συνήθως λέγομεν **τὸ ἀνάπτυγμα τοῦ $(\alpha x + \beta)^2$ εἶναι $\alpha^2x^2 + 2\alpha\beta x + \beta^2$**).
καὶ $(\alpha x - \beta)^2 = \alpha^2x^2 - 2\alpha\beta x + \beta^2$, θὰ ἔχωμεν :
$(\alpha x + \beta)^2 + (\alpha x - \beta)^2 = \alpha^2x^2 + 2\alpha\beta x + \beta^2 + \alpha^2x^2 - 2\alpha\beta x + \beta^2 = 2\alpha^2x^2 + 2\beta^2$

2ον $(3x^2\psi + 2x^4)^2 = (3x^2\psi)^2 + 2\cdot(3x^2\psi)\cdot(2x^4) + (2x^4)^2 =$
$= 9x^4\psi^2 + 12x^6\psi + 4x^8$

3ον $\left(\frac{2}{3}x^3 - 1\right)^2 = \left(\frac{2}{3}x^3\right)^2 - 2\cdot\left(\frac{2}{3}x^3\right)\cdot 1 + 1^2 = \frac{4}{9}x^6 - \frac{4}{3}x^3 + 1$

4ον $(7x^3\psi + 5\alpha^4)(7x^3\psi - 5\alpha^4) = (7x^3\psi)^2 - (5\alpha^4)^2 = 49x^6\psi^2 - 25\alpha^8$

5ον $(x^2 + 3x + 2)(x^2 - 3x + 2) = [(x^2 + 2) + 3x]\cdot[(x^2 + 2) - 3x] =$
$(x^2+2)^2 - (3x)^2 = x^4 + 4x^2 + 4 - 9x^2 = x^4 - 5x^2 + 4$

6ον $(x + \psi - \omega)^2 = [x + \psi + (-\omega)]^2 = x^2 + \psi^2 + (-\omega)^2 + 2x\psi + 2x(-\omega) +$
$+ 2\psi(-\omega) = x^2 + \psi^2 + \omega^2 + 2x\psi - 2x\omega - 2\psi\omega$.

Ὁμοίως εἶναι $(x - \psi - \omega)^2 = x^2 + \psi^2 + \omega^2 - 2x\psi - 2x\omega + 2\psi\omega$.

7ον Εὐκόλως εὑρίσκομεν δι' ἐκτελέσεως πολλαπλασιασμῶν τὸ ἀναπτύγματα τῶν: $(\alpha + \beta)^4$, $(\alpha - \beta)^4$, $(\alpha + \beta)^5$ κ.λ.π. π.χ. $(\alpha + \beta)^4 = (\alpha + \beta)^3(\alpha + \beta)$
$= (\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3)(\alpha + \beta) = \alpha^4 + 4\alpha^3\beta + 6\alpha^2\beta^2 + 4\alpha\beta^3 + \beta^4$, καί :
$(\alpha - \beta)^4 = \alpha^4 - 4\alpha^3\beta + 6\alpha^2\beta^2 - 4\alpha\beta^3 + \beta^4$.

Ζ) Διαίρεσις πολυωνύμου διὰ μονωνύμου

Δίδονται τὸ ἀκέραιον πολυώνυμον Φ καὶ τὸ ἀκέρ. μονώνυμον Μ. Ἐὰν ὑπάρχῃ τὸ ἀκέρ. πολυώνυμον Π τοιοῦτον, ὥστε νὰ ἰσχύῃ :
$\Phi = M\cdot\Pi$, λέγομεν τότε ὅτι τὸ Φ **εἶναι διαιρετὸν διὰ** τοῦ Μ καὶ ὅτι τὸ Π εἶναι **τὸ πηλίκον τοῦ Φ διὰ Μ.** Συμβολίζομεν : $\Phi : M = \Pi$.

Ἡ πρᾶξις τῆς εὑρέσεως τοῦ πηλίκου Π καλεῖται διαίρεσις τοῦ Φ διὰ Μ.

Ἔστω $\Phi(x, \psi) = 8x^4\psi^3 - 12x^3\psi^5 + 20x^2\psi^3 - 4x^3\psi^3$ καὶ $M(x, \psi) = 4x^2\psi$. Ἐὰν διαιρέσωμεν κάθε ὅρον τοῦ $\Phi(x, \psi)$ διὰ τοῦ $M(x, \psi)$ καὶ προσθέσωμεν τὰ πηλίκα εὑρίσκομεν τὸ πολυώνυμον $2x^2\psi^2 - 3x\psi^4 + 5\psi^2 - x\psi^2$, διαπιστώνομεν δὲ εὐκόλως ὅτι εἶναι : $\Phi(x, \psi) = (2x^2\psi^2 - 3x\psi^4 + 5\psi^2 - x\psi^2)\cdot M(x,\psi)$ (1)

Ἀπὸ τὴν (1) συμπεραίνομεν ὅτι ὑπάρχει τὸ πηλίκον $\Phi(x, \psi) : M(x,\psi)$ καὶ εἶναι τοῦτο τὸ πολυώνυμον $\Pi(x, \psi) = 2x^2\psi^2 - 3x\psi^4 + 5\psi^2 - x\psi^2$, ἄρα ἔχομεν : $(8x^4\psi^3 - 12x^3\psi^5 + 20x^2\psi^3 - 4x^3\psi^3) : 4x^2\psi = 2x^2\psi^2 - 3x\psi^4 + 5\psi^2 - x\psi^2$ (2)

Διατυπώσατε τὸν σχετικὸν κανόνα.

Παραδείγματα : 1ον $(\alpha^3\beta^2 - \alpha^2\beta^3 + 3\alpha\beta^4) : \left(-\frac{2}{3}\alpha\beta^2\right) = -\frac{3}{2}\alpha^2 + \frac{3}{2}\alpha\beta - \frac{9}{2}\beta^2$.

2ον $(3\psi^5 - 6\psi^4 + 8\psi^3) : 3\psi^3 = \psi^2 - 2\psi + \frac{8}{3}$

3ον $(\alpha\omega^6 - \beta\omega^5 - \gamma\omega^4 + 2\omega^3) : \omega^3 = \alpha\omega^3 - \beta\omega^2 - \gamma\omega + 2$

4ον Ἡ διαίρεσις $3x^5 - x^4 + 2x^3 + x^2 - 5x$ διὰ x^2 δὲν εἶναι δυνατὴ εἰς τὸ σύνολον τῶν ἀκεραίων πολυωνύμων, διότι ὁ ὅρος $-5x$ τοῦ διαιρετέου δὲν εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ x^2.

Η) Διαίρεσις πολυωνύμου διὰ πολυωνύμου.

α) Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸ πολυώνυμον $\delta(x) = 2x^3 - 5x^2 + 6x - 3$ ἐπὶ τὸ πολυώνυμον $\Pi(x) = 3x + 2$, εὑρίσκομεν ὡς γινόμενον τὸ πολυώνυμον $\Delta(x) = 6x^4 - 11x^3 + 8x^2 + 3x - 6$ καὶ ἰσχύει ἡ ταυτότης :

$$\mathbf{\Delta(x) = \delta(x) \cdot \Pi(x) \quad (1)}$$

β) Ἐὰν λάβωμεν τὰ $\delta(\omega) = 3\omega^2 - 5\omega + 6$, $\Pi(\omega) = 2\omega - 3$ καὶ $\upsilon(\omega) = -7\omega + 8$ καὶ σχηματίσωμεν τὴν παράστασιν $\delta(\omega) \cdot \Pi(\omega) + \upsilon(\omega)$, εὑρίσκομεν τὸ πολυώνυμον $\Delta(\omega) = 6\omega^3 - 19\omega^2 + 20\omega - 10$ καὶ ἰσχύει ἡ ταυτότης : $\mathbf{\Delta(\omega) = \delta(\omega) \cdot \Pi(\omega) + \upsilon(\omega) \quad (2)}$

Παρατηροῦμεν ὅτι καὶ ἡ (1) γράφεται : $\mathbf{\Delta(x) = \delta(x)\,\Pi(x) + \upsilon(x) \; (1')}$ ἐὰν ὡς $\upsilon(x)$ θεωρηθῇ τὸ μηδενικὸν πολυώνυμον.

Ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω δυνάμεθα νὰ θέσωμεν **τὸ πρόβλημα :**

«Δοθέντων τῶν πολυωνύμων $\Delta(x)$ καὶ $\delta(x)$, μὲ βαθμὸν τοῦ $\delta(x) \leqslant$ τοῦ βαθμοῦ τοῦ $\Delta(x)$, ὑπάρχουν δύο ἄλλα πολυώνυμα, ἔστω τὰ $\Pi(x)$ καὶ $\upsilon(x)$, μὲ βαθμὸν τοῦ $\upsilon(x) <$ τοῦ βαθμοῦ τοῦ $\delta(x)$, ὥστε νὰ ἰσχύῃ ἡ ταυτότης: $\Delta(x) = \delta(x) \cdot \Pi(x) + \upsilon(x)$; Καὶ ἐὰν ὑπάρχουν, εἶναι τὰ $\Pi(x)$ καὶ $\upsilon(x)$ μονοσημάντως ὡρισμένα; Καί, ἐὰν ναί, τότε μὲ ποῖον τρόπον θὰ τὰ εὕρωμεν ; ».

Π.χ. ἐὰν $\Delta(x) = 6x^4 - 11x^3 + 8x^2 + 3x - 6$ καὶ $\delta(x) = 2x^3 - 5x^2 + 6x - 3$ τότε ἀπὸ τὸ α΄ παράδειγμα ἀνωτέρω ἰσχύει ἡ (1΄) καὶ δυνάμεθα νὰ λάβωμεν $\Pi(x) = 3x + 2$ καὶ $\upsilon(x) = 0$. Ἀλλὰ εἶναι τὰ $\Pi(x)$ καὶ $\upsilon(x)$ μονοσημάντως ὡρισμένα καί, ἐὰν ναί, ποῖος ὁ τρόπος εὑρέσεώς των, ὅταν δοθοῦν τὰ $\Delta(x)$ καὶ $\delta(x)$;

Ἐπίσης ἀπὸ τὸ β΄ παράδειγμα, ἐὰν δοθοῦν τὰ $\Delta(\omega)$ καὶ $\delta(\omega)$, ἐπειδὴ ἰσχύει ἡ (2), θὰ ἔχωμεν $\Pi(\omega) = 2\omega - 3$ καὶ $\upsilon(\omega) = -7\omega + 8$ χωρὶς καὶ πάλιν νὰ γνωρίζωμεν, ἐὰν εἶναι τὰ $\Pi(\omega)$ καὶ $\upsilon(\omega)$ μονοσημάντως ὡρισμένα καί, ἐὰν ναί, μὲ ποῖον τρόπον θὰ τὰ εὕρωμεν.

γ) Εἰς ἀνωτέραν τάξιν τοῦ Γυμνασίου θὰ ἀποδειχθῇ **τὸ θεώρημα :**

Δοθέντων δύο πολυωνύμων $\Delta(x)$ καὶ $\delta(x)$ μὲ βαθμὸν τοῦ $\delta(x) \leqslant$ τοῦ βαθμοῦ τοῦ $\Delta(x)$ ὑπάρχει ἕνα καὶ μόνον πολυώνυμον $\Pi(x)$ καὶ ἕνα καὶ μόνον πολυώνυμον $\upsilon(x)$ μὲ βαθμὸν τοῦ $\upsilon(x) <$ τοῦ βαθμοῦ τοῦ $\delta(x)$, ὥστε νὰ ἰσχύῃ ἡ ταυτότης : $\forall x \in \mathbf{R}: \Delta(x) = \delta(x) \cdot \Pi(x) + \upsilon(x) \quad (\alpha)$

Ἡ (α) λέγεται **ταυτότης τῆς διαιρέσεως** τοῦ $\Delta(x)$ διὰ $\delta(x)$.

Διαίρεσις τοῦ $\Delta(x)$ διὰ $\delta(x)$ λέγεται ἡ πρᾶξις τῆς εὑρέσεως τῶν $\Pi(x)$ καὶ $\upsilon(x)$. Τὸ $\Delta(x)$ ὀνομάζεται **ὁ διαιρετέος,** τὸ $\delta(x)$ **ὁ διαιρέτης,** τὸ $\Pi(x)$ **τὸ πηλίκον** καὶ τὸ $\upsilon(x)$ **τὸ ὑπόλοιπον** της διαιρέσεως τοῦ $\Delta(x)$ διὰ $\delta(x)$.

Κάθε διαίρεσις μὲ ὑπόλοιπον τὸ μηδενικὸν πολυώνυμον λέγεται **τελεία διαίρεσις** ἄλλως λέγεται **ἀτελὴς διαίρεσις.**

Εἰς τὸ α΄ ἀνωτέρω παράδειγμα ἡ διαίρεσις $\Delta(x)$ διὰ $\delta(x)$ εἶναι τελεία, μὲ πηλίκον τὸ $\Pi(x) = 3x + 2$ καὶ ὑπόλοιπον $\upsilon(x) = 0$ καὶ δυνάμεθα νὰ γράψωμεν : $(6x^4 - 11x^3 + 8x^2 + 3x - 6) : (2x^3 - 5x^2 + 6x - 3) = 3x + 2$.

Εἰς τὸ β΄παράδειγμα ἡ διαίρεσις $\Delta(\omega)$ διὰ $\delta(\omega)$ εἶναι ἀτελὴς μὲ πηλίκον $\Pi(\omega) = 2\omega - 3$ καὶ ὑπόλοιπον $\upsilon(\omega) = -7\omega + 8$.

Τὸ ἀκριβὲς πηλίκον τῆς διαιρέσεως δύο πολυωνύμων $\Delta(x)$ διὰ $\delta(x)$ τίθεται ὅπως θὰ ἴδωμεν ἀργότερον (§ 59), ὑπὸ τὴν μορφὴν $\frac{\Delta(x)}{\delta(x)}$ καὶ λέγεται ῥητὸν ἀλγεβρικὸν κλάσμα ἢ ἁπλῶς ῥητὸν κλάσμα. Ὑποτίθεται ὅτι εἶναι πάντοτε $\delta(x) \neq 0$.

δ) Τρόπος ἐκτελέσεως τῆς διαιρέσεως πολυωνύμου διὰ πολυωνύμου

Ἂς λάβωμεν τὰ πολυώνυμα τοῦ β′ παραδείγματος

$\Delta(\omega) = 6\omega^3 - 19\omega^2 + 20\omega - 10$ καὶ $\delta(\omega) = 3\omega^2 - 5\omega + 6$

Θὰ ἐκθέσωμεν ἕνα τρόπον εὑρέσεως τοῦ πηλίκου $\Pi(\omega)$ καὶ τοῦ ὑπολοίπου $\upsilon(\omega)$ τῆς διαιρέσεως τοῦ $\Delta(\omega)$ διὰ $\delta(\omega)$. Ὁ τρόπος αὐτὸς ἀπαιτεῖ νὰ εἶναι τὰ $\Delta(\omega)$ καὶ $\delta(\omega)$ διατεταγμένα κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τῆς κοινῆς των μεταβλητῆς καὶ ὅπως θὰ ἴδωμεν ὁμοιάζει μὲ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς διαιρέσεως πολυψηφίου φυσικοῦ δι᾽ ἑνὸς ἄλλου φυσικοῦ. Τοποθετοῦμεν τὸν διαιρετέον $\Delta(\omega)$

$$
\begin{array}{r|l}
\Delta(\omega) = 6\omega^3 - 19\omega^2 + 20\omega - 10 & 3\omega^2 - 5\omega + 6 = \delta(\omega) \\
\cline{2-2}
-\delta(\omega)\cdot 2\omega = \underline{-6\omega^3 + 10\omega^2 - 12\omega \quad} & 2\omega - 3 = \Pi(\omega) \\
\alpha'\ \text{μέρ. ὑπόλ. } \upsilon_1(\omega) = -9\omega^2 + 8\omega - 10 & \\
-\delta(\omega)(-3) = \underline{+9\omega^2 - 15\omega + 18} & \\
\text{ὑπόλοιπον } \upsilon(\omega) = \qquad -7\omega + 8 &
\end{array}
$$

ἀριστερὰ καὶ τὸν διαιρέτην $\delta(\omega)$ δεξιὰ εἰς τὸ ἀνωτέρω «σχῆμα» τῆς διαιρέσεως. Διαιροῦμεν τὸν α′ ὅρον τοῦ $\Delta(\omega)$ διὰ τοῦ α′ ὅρου τοῦ $\delta(\omega)$ καὶ τὸ πηλίκον $6\omega^3 : 3\omega^2 = 2\omega$ γράφομεν δεξιὰ καὶ κάτω τοῦ διαιρέτου. Τὸ 2ω ἀποτελεῖ τὸν α′ ὅρον τοῦ πηλίκου $\Pi(\omega)$. Πολλαπλασιάζομεν κατόπιν τὸ $\delta(\omega)$ ἐπὶ 2ω καὶ τὸ γινόμενον γράφομεν κάτω ἀπὸ τὸ $\Delta(\omega)$ **καὶ ἀφαιροῦμεν**, εὑρίσκομεν δὲ (ἀριστερὰ εἰς τὸ σχῆμα), ὡς διαφορὰν $\Delta(\omega) - \delta(\omega)\cdot 2\omega$ τὸ πολυώνυμον $\upsilon_1(\omega) = -9\omega^2 + 8\omega - 10$. Τὸ $\upsilon_1(\omega)$ ὀνομάζεται **τὸ πρῶτον μερικὸν ὑπόλοιπον** τῆς διαιρέσεως $\Delta(\omega)$ διὰ $\delta(\omega)$.

Συνεχίζομεν τώρα ὡς ἐὰν τὸ $\upsilon_1(\omega)$ ἦτο διαιρετέος τῆς διαιρέσεως $\upsilon_1(\omega)$ διὰ $\delta(\omega)$, ὅπως καὶ προηγουμένως. Δηλ. διαιροῦμεν τὸν α′ ὅρον τοῦ $\upsilon_1(\omega)$ διὰ τοῦ α′ ὅρου τοῦ $\delta(\omega)$ καὶ τὸ πηλίκον $-9\omega^2 : 3\omega^2 = -3$ γράφομεν δεξιὰ εἰς τὸ «σχῆμα» καὶ κάτω τοῦ $\delta(\omega)$ ἐν συνεχείᾳ μὲ τὸν α′ ὅρον 2ω τοῦ πηλίκου Πολλαπλασιάζομεν τὸ $\delta(\omega)$ ἐπὶ τὸ (-3) καὶ τὸ γινόμενον **ἀφαιροῦμεν** ἀπὸ τὸ $\upsilon_1(\omega)$. Ἡ διαφορὰ $\upsilon(\omega) = \upsilon_1(\omega) - \delta(\omega)\cdot(-3) = -7\omega + 8$ γράφεται ἀριστερὰ εἰς τὸ «σχῆμα» καὶ εἶναι **τὸ δεύτερον μερικὸν ὑπόλοιπον** τῆς διαιρέσεως τοῦ $\Delta(\omega)$ διὰ $\delta(\omega)$. Ἐπειδὴ ὁ βαθμὸς τοῦ $\upsilon(\omega)$ εἶναι < τοῦ βαθμοῦ τοῦ $\delta(\omega)$, ἐννοοῦμεν ὅτι ἡ ἐργασία τῆς διαιρέσεως τοῦ $\Delta(\omega)$ διὰ $\delta(\omega)$ ἐπερατώθη καὶ εἶναι τὸ $2\omega - 3 = \Pi(\omega)$ τὸ πηλίκον, τὸ δὲ $\upsilon(\omega) = -7\omega + 8$ τὸ ὑπόλοιπον αὐτῆς. Ἔχομεν ἐκ τῶν ἀνωτέρω τὴν ταυτότητα :

$$6\omega^3 - 19\omega^2 + 20\omega - 10 = (3\omega^2 - 5\omega + 6)\cdot(2\omega - 3) + (-7\omega + 8).$$

Δίδομεν ἀκόμη τὴν ἐκτέλεσιν τῆς διαιρέσεως τοῦ α′ παραδείγματος.

$$
\begin{array}{ll|l}
\Delta(x) = & 6x^4 - 11x^3 + 8x^2 + 3x - 6 & 2x^3 - 5x^2 + 6x - 3 = \delta(x) \\
-\delta(x)\,3x = & -6x^4 + 15x^3 - 18x^2 + 9x & \overline{3x + 2 \quad = \Pi(x)} \\
\text{α' μερ. ὑπόλ.} = & \quad\quad 4x^3 - 10x^2 + 12x - 6 & \\
-\delta(x)\,2 = & - \quad 4x^3 + 10x^2 - 12x + 6 & \\
\text{ὑπόλοιπον } \upsilon(x) = 0 & &
\end{array}
$$

Παρατηρήσεις 1η) Ἐὰν $\upsilon(x) \neq 0$ ἡ ταυτότης $\Delta(x) = \delta(x)\,\Pi(x) + \upsilon(x)$ γράφεται καὶ ὑπὸ τὴν μορφήν : $\dfrac{\Delta(x)}{\delta(x)} = \Pi(x) + \dfrac{\upsilon(x)}{\delta(x)}$ (β)

Ὑποτίθεται ὅτι ἡ μεταβλητὴ x λαμβάνει τιμὰς ὥστε νὰ εἶναι $\delta(x) \neq 0$.

Τὸ $\Pi(x)$ λέγεται τὸ **ἀκέραιον μέρος** τοῦ πηλίκου $\Delta(x)$ διὰ $\delta(x)$.

Ὁ βαθμὸς τοῦ $\Pi(x)$ ἰσοῦται μὲ τὴν διαφορὰν τοῦ βαθμοῦ τοῦ $\delta(x)$ ἀπὸ τοῦ βαθμοῦ τοῦ $\Delta(x)$.

2α) Ἐὰν εἶναι τὸ $\Delta(x)$ τὸ μηδενικὸν πολυώνυμον καὶ $\delta(x) \neq 0$, τότε τὰ $\Pi(x)$ καὶ $\upsilon(x)$ εἶναι ἐπίσης τὸ μηδενικὸν πολυώνυμον.

3η) Ἐὰν ὁ βαθμὸς τοῦ $\Delta(x)$ εἶναι μικρότερος ἀπὸ τὸν βαθμὸν τοῦ $\delta(x)$, ὡς $\Pi(x)$ ὁρίζομεν πάλιν τὸ μηδενικὸν πολυώνυμον καὶ τὸ $\upsilon(x)$ συμπίπτει μὲ τὸ $\Delta(x)$, δηλ. εἶναι :

$$\frac{\Delta(x)}{\delta(x)} = 0 + \frac{\upsilon(x)}{\delta(x)} \quad \text{καὶ} \quad \Delta(x) = \upsilon(x) \quad (\text{ταυτότης})$$

4η) Ὅταν ὁ διαιρετέος $\Delta(x)$ εἶναι πολυώνυμον **μὴ πλῆρες** ὡς πρὸς τὴν μεταβλητήν του, τὸν συμπληρώνομεν μὲ μηδενικὰ μονώνυμα ἢ τὸν γράφομεν, ὥστε νὰ μένουν κενὰ μεταξὺ τῶν ὅρων του εἰς τὰς θέσεις τῶν ἐλλειπόντων ὅρων.

$$
\begin{array}{r|l}
x^3 + 0x^2 + 0x + 1 & x + 1 \\
-x^3 - x^2 \quad\quad\quad\quad & \overline{x^2 - x + 1} \\
\hline
-x^2 + 0x + 1 & \\
+x^2 + \ \ x \quad & \\
\hline
x + 1 & \\
-x - 1 & \\
\hline
0 &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r|l}
8\psi^4 \quad\quad\quad\quad\quad\quad - 12\psi + 7 & 2\psi^2 - 3\psi + 1 \\
-8\psi^4 + 12\psi^3 - 4\psi^2 \quad\quad\quad\quad & \overline{4\psi^2 + 6\psi + 7} \\
\hline
12\psi^3 - 4\psi^2 - 12\psi + 7 & \\
-12\psi^3 + 18\psi^2 - 6\psi \quad & \\
\hline
14\psi^2 - 18\psi + 7 & \\
-14\psi^2 + 21\psi - 7 & \\
\hline
3\psi &
\end{array}
$$

5η) Ἐὰν ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης διαταχθοῦν κατὰ τὰς ἀνιούσας δυνάμεις τῆς μεταβλητῆς των, καὶ ἐφαρμοσθῇ ἡ προηγουμένη «τεχνική» τῆς εὑρέσεως τοῦ πηλίκου, ἂν μὲν ἡ διαίρεσις εἶναι τελεία τὸ πηλίκον εὑρίσκεται καὶ περατοῦται ἡ πρᾶξις, ἂν δὲ εἶναι ἀτελής, τότε ἡ πρᾶξις συνεχίζεται ἐπ' ἄπειρον καὶ εἰς τὴν θέσιν τοῦ πηλίκου ἠμποροῦμεν νὰ εὕρωμεν ὁσουσδήποτε ὅρους θέλομεν. Ἡ «διαίρεσις» αὐτὴ λέγεται **ἀτέρμων διαίρεσις** Π.χ.

$$
\begin{array}{r|l}
12 - 7x + x^2 & 3 - x \\
-12 + 4x \quad\ & \overline{4 - x} \\
\hline
-3x + x^2 & \\
+3x - x^2 & \\
\hline
0 &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r|l}
3 - 2x + x^2 & 1 - x \\
-3 + 3x \quad\quad & \overline{3 + x + 2x^2} \\
\hline
x + x^2 & \\
-x + x^2 & \\
\hline
2x^2 & \\
-2x^2 + 2x^3 & \\
\hline
2x^3 &
\end{array}
$$

Εἰς τὴν διαίρεσιν $(3 - 2x + x^2)$ διὰ $(1 - x)$ κάθε φορὰν προκύπτει ὑπόλοιπον ἀνωτέρω βαθμοῦ ἀπὸ τὸ προηγούμενόν του καὶ διὰ τοῦτο ἡ διαίρεσις αὐτὴ δὲν ἔχει τέλος.

6η) Διὰ νὰ διαιρέσωμεν πολυώνυμα περισσοτέρων μεταβλητῶν, καθορίζομεν μίαν ὡς μεταβλητὴν διὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς διαιρέσεως, διατάσσομεν τὰ πολυώνυμα κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τῆς μεταβλητῆς αὐτῆς καὶ ἐργαζόμεθα ὅπως εἰς τὰ προηγούμενα παραδείγματα.

Π.χ. $(9x^2 - 12x\psi + 4\psi^2 - 7\psi)$ διὰ $(3x - \psi)$

Ὁρίζομεν γράμμα διὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς διαιρέσεως τὸ x, ἐπειδὴ εἶναι διατεταγμένα κατὰ τὰς κατιούσας τοῦ γράμματος τούτου, καὶ ἐκτελοῦμεν τὴν διαίρεσιν, ὁπότε εὑρίσκομεν πηλίκον $3x - 3\psi$ καὶ ὑπόλοιπον $\psi^2 - 7\psi$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

149) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν πολυωνύμων :
$\Phi(x) = 2x^5 - 3x^4 + 7x - 6$, $\Pi(x) = -x^5 + 3x^3 - 2x^2 - 6x + 12$ καὶ
$\Sigma(x) = 5x^4 + 6x^3 - 2x^2 + 3x - 1$

150) Ἐὰν $A = 3x^2 - 7x + 8$, $B = -3x^3 + 2x^2 - 6x - 5$,
$\Gamma = x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 12x - 3$, $\Delta = x^3 - 5x^2 + x + 2$
νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἀθροίσματα $A + B + \Gamma + \Delta$, $A - B + \Gamma - \Delta$, $A - B - \Gamma + \Delta$, $-A - (B - \Gamma) - \Delta$, $A + B - (\Gamma - \Delta)$

151) Ἐὰν εἶναι $A = 3x - 5 + 6x^2 - 3x^3 + x^4$, $B = -x^2 + 2x - x^3 - 6x^4 + 7$
$\Gamma = x^3 + 2x - 2 - x^4 + 3x^2$, νὰ εὑρεθοῦν τὰ πολυώνυμα :
$\Phi(x) = A + B - \Gamma$, $\Pi(x) = A - B + \Gamma$, $\Sigma(x) = A - B - \Gamma$, $P(x) = A + B + \Gamma$
ποῖον εἶναι τὸ ἄθροισμα $\Phi(x) + \Pi(x) + \Sigma(x) + P(x)$; Τί παρατηρεῖτε; ποῖον τὸ σύνολον τῶν εἰκόνων τοῦ συνόλου :

$\Sigma = \left\{-\frac{1}{2}, -1, 0, 1, \frac{1}{2}\right\}$ διὰ τῆς συναρτήσεως $P(x) = A + B + \Gamma$;

152) Δίδονται τὰ πολυώνυμα $A = x^4 - 3x^2\psi^2 + \psi^4$, $B = -2x^2 + \psi^4$, $\Gamma = 3x\psi + 2x^2\psi^2 + x^3\psi^3$. Ποίου βαθμοῦ ὡς πρὸς x, ὡς πρὸς ψ, καὶ ὡς πρὸς xψ εἶναι τὸ πολυώνυμον $A + B - \Gamma$;

153) Ἐὰν εἶναι $\varphi(x, \psi) = 3x + \psi - 5$, $\sigma(x, \psi) = -2x - 3\psi + 8$, $f(x, \psi) = x - 2\psi + 3$ νὰ εὑρεθοῦν τὰ πολυώνυμα εἰς τὴν συνεπτυγμένην των μορφὴν α) $\varphi(x, \psi) + \sigma(x, \psi) + f(x, \psi)$ β) $\varphi(x, \psi) - [\sigma(x, \psi) - f(x, \psi)]$ γ) $-[\varphi(x, \psi) - \sigma(x, \psi)] - f(x, \psi)$

154) Ἐὰν εἶναι $\varphi(x, \psi) = x - 2\psi + 3$, $\sigma(x, \psi) = 3x + \psi - 5$, $f(x, \psi) = -5x + 3\psi - 1$ νὰ εὑρεθοῦν τὰ πολυώνυμα $A = 2\varphi(x, \psi) + 2\sigma(x, \psi) - f(x, \psi)$, $B = 2\sigma(x, \psi) + 2f(x, \psi) - \varphi(x, \psi)$, καὶ $\Gamma = 2\varphi(x, \psi) + 2f(x, \psi) - \sigma(x, \psi)$. Ἔπειτα νὰ εὑρεθῇ τὸ $\Pi = A + B + \Gamma$ καὶ τὸ $P = \varphi(x, \psi) + \sigma(x, \psi) + f(x, \psi)$. Ποία σχέσις ὑπάρχει μεταξὺ τῶν πολυωνύμων Π καὶ P ;

155) Νὰ γίνουν αἱ πράξεις :

α) $\left(\frac{2}{5}x^3 - 4x^2 + 7x - 6\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}x^3\right)$ β) $(-3x^2 + x - 5)\left(-\frac{2}{3}x^4\right)$

γ) $(5\omega^3 - 3\omega^2 + 2)\left(-\frac{4}{5}\omega^3\right)$ δ) $(\alpha^{2x} + \alpha^x + 1)\,\alpha^x$

ε) $(2x^{\mu-3} - 4x^{\mu-2} + x^{\mu-1}) \cdot (-3x^4)$.

156) Νὰ γίνουν αἱ πράξεις :
α) $(x^2 - 2\psi) \cdot 3\psi + (x\psi + \psi^2) \cdot (-x) + (x + \psi)(-2x\psi) - (x + 3)\,2\psi^2$
β) $4[2(x - \psi) - 3(2x + \psi)] + 2[3(x^2 - x\psi + \psi^2) - 4x - (x^2 - \psi)]$
γ) $4[2(x - \psi) + 3(2x - \psi)] - 2[3(x^2 + x\psi - \psi^2) + 4x - (x^2 + \psi)]$

Νὰ προσδιορισθοῦν αἱ ἀριθμητικαὶ τιμαὶ τῶν ἐξαγομένων διὰ $(x, \psi) \in \{ (2,-1), (0, 3), (-1,1) \}$

157) Νὰ γίνουν αἱ πράξεις :

α) $(x^3 - 7x^2 + 6x - 2) \cdot (x + 3)$ β) $(-2x^3 + 5x^4 - 7x - 8 + x^2)(-3 + x^2 - 5x)$

γ) $(x + 1)(x + 2)(x + 3)$ δ) $(x - 1)(x - 2)(x - 3)$

158) Νὰ γίνουν αἱ πράξεις :

α) $(x^3 + x\psi^2 + x^2\psi + \psi^3)(x - \psi)$

β) $(x^2 + 2x\psi + \psi^2)(x + \psi) + (x^2 - 2x\psi + \psi^2)(x - \psi)$

γ) $(64\alpha^3 - 48\alpha^2\beta + 36\alpha\beta^2 - 27\beta^3) \cdot (4\alpha + 3\beta)$

159) Νὰ γίνουν αἱ πράξεις :

α) $(x + 5)(x - 1)(x - 3) - (x + 3)(x - 2)^2$ Τοῦ ἐξαγομένου νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀριθμητικὴ τιμή, ὅταν $x = \frac{1}{3}$.

β) $(x^3 + 2x^2 + 5x - 1) \cdot (2 - 2x^2) - (x^3 - 3x^2 + x - 2)(x^3 - 2x^2 + 1)$
Τοῦ ἐξαγομένου νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀριθμητικὴ τιμή, ὅταν $x = -1$.

160) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἀναπτύγματα τῶν :

α) $(2\alpha - 3\beta)^2$ β) $(5\alpha^2 + 1)^2$ γ) $\left(\frac{3}{2} x^2 + 4x\psi\right)^2$

δ) $(7\alpha - \frac{3}{2} \beta^2)^2$ ε) $(x + 1)^3$ στ) $(5\alpha + 3\beta)(5\alpha - 3\beta)$ ζ) $(\psi - 2)^3$

161) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἀναπτύγματα τῶν :

α) $(x - \psi + z)^2$ β) $(3x + 2\psi - 1)^2$ γ) $(\alpha + \beta - \gamma - \delta)^2$

δ) $(\alpha + \beta + \gamma + \delta)(\alpha + \beta - \gamma - \delta)$ ε) $(x^\mu + \psi^\nu)^2$

162) Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ πράξεις :

α) $(x^3 + 2\psi^2)^2 - (\psi^2 + 2x^3)^2 + (x^3 - 2\psi^2)(x^3 + 2\psi^2)$

β) $(2x + 3)^2 + (2x - 3)^2 + (2x + 3)(2x - 3) - 3(x - 5)^2$

γ) $-(2x + 1)^2 + (2x + 1)(-2x - 1) - (x + 3)(x - 3) - (x - 3)(-x - 3)$

δ) $(x + 3)^2 + (x - 3)^2 + (x - 2)^2 + (x + 2)^2 - (x + 3)(x - 3) - (x + 2)(x - 2)$

ε) $(2x + 5)^2 - (x - 5)^2 + (3x - 1)^2 - (2x + 1)^2 - (2x + 3)(2x - 3)$

στ) $(x^2 + 1)^2 + (2x^2 - 3)^2 - (3x^2 + 4)^2 + (x^2 - 2)^2 + (x^2 + 3)(x^2 - 3)$

163) Νὰ γίνουν αἱ πράξεις :

α) $(2\alpha^3 - 2\alpha^2)^2 + (5\alpha + 2)^2 - (3\alpha^2 - \alpha)^2 - (\alpha^2 + 2)^2$

β) $(3x^4 - 5x^2)^2 - (x^3 + 3x)^2 + (x + 1)^2 - (x^4 + 3x^2)(x^4 - 3x^2)$

γ) $\left(\frac{2}{3} x^2 + 2\right)^2 + \left(\frac{1}{3} x^2 - x\right)^2 - \left(\frac{3}{2} x^2 - 5x\right) \left(\frac{3}{2} x^2 + 5x\right)$

δ) $(\alpha^x + 3)^2 - (\alpha^x - 2)^2 + (\alpha^x + 5) \cdot (\alpha^x - 5)$

164) Νὰ γίνουν αἱ πράξεις :

α) $(\alpha + \beta + \gamma)^2 - (\alpha - \beta + \gamma)^2 + (\alpha + \beta - \gamma)^2 - (\beta + \gamma - \alpha)^2$

β) $(\alpha + \beta + \gamma + \delta)^2 + (\alpha - \beta - \gamma + \delta)^2 + (\alpha - \beta + \gamma - \delta)^2 + (\alpha + \beta - \gamma - \delta)^2$

γ) $x^2(\psi - z)^3 + \psi^2(z - x)^3 + z^2(x - \psi)^3$

δ) $(x + \psi + z)[(x - \psi)^2 + (\psi - z)^2 + (z - x)^2]$

165) Νὰ ἀποδειχθοῦν αἱ ταυτότητες :

α) $(\alpha^2 + \beta^2)^2 + 4\alpha\beta(\alpha^2 - \beta^2) = (\alpha^2 - \beta^2 + 2\alpha\beta)^2$

β) $(\alpha + \beta + \gamma)^2 + (\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2 = 3(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$

γ) $\alpha(\alpha + \beta)(\alpha + 2\beta)(\alpha + 3\beta) + \beta^4 = (\alpha^2 + 3\alpha\beta + \beta^2)^2$

166) Διὰ κάθε φυσικὸν x δείξατε ὅτι ἡ παράστασις $(2x + 1)^2 - 1$ εἶναι ἀκέραιος διαιρετὸς διὰ τοῦ 8.

167) Ἐὰν εἶναι $x = \alpha^2 - \beta^2$, $\psi = 2\alpha\beta$, $z = \alpha^2 + \beta^2$, δείξατε ὅτι θὰ εἶναι καὶ $x^2 + \psi^2 = z^2$. Ἐὰν οἱ α, β εἶναι φυσικοὶ $(\alpha > \beta)$, οἱ x, ψ, z, θὰ εἶναι μήκη πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου.

168) Ἐὰν εἶναι : $x = 3\alpha + 2\beta + 2\gamma,\ \psi = 2\alpha + \beta + 2\gamma,\ z = 2\alpha + 2\beta + \gamma$ καὶ $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$, τότε δείξατε ὅτι θὰ εἶναι καὶ $\psi^2 + z^2 = x^2$ δηλ. ἐὰν τὰ α, β, γ εἶναι πλευραὶ ὀρθογ. τριγώνου, ἐπίσης θὰ εἶναι καὶ τὰ x, ψ, z πλευραὶ ὀρθογ. τριγώνου.

169) Ἐὰν εἶναι $\alpha = 8x,\ \beta = 3x^2 + 4,\ \gamma = 3x^2 + 4x - 4$, δείξατε ὅτι θὰ εἶναι : $\beta^2 + 3\alpha\gamma = (\alpha + \gamma)^2$.

170) Ἐὰν εἶναι $\alpha = (x - 3)^2,\ \beta = -(x + 3)^2,\ \gamma = 12x$, δείξατε ὅτι εἶναι $\alpha^2 - \beta\gamma = \beta^2 - \alpha\gamma = \gamma^2 - \alpha\beta$

171) Δίδονται οἱ θετικοὶ μονοψήφιοι x, ψ, ω. Σχηματίσατε ὅλους τοὺς διψηφίους, λαμβάνοντες δύο ἀπὸ τὰ τρία ψηφία καθ' ὅλους τοὺς δυνατοὺς τρόπους. Προσδιορίσατε τὸ ἄθροισμα τῶν διψηφίων τούτων Τί παρατηρεῖτε ;

172) Μὲ τοὺς x, ψ, ω τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως σχηματίσατε ὅλους τοὺς δυνατοὺς τριψηφίους. Ποῖος ὁ πληθάριθμος τοῦ συνόλου των ; Δείξατε ὅτι τὸ ἄθροισμά των διαιρεῖται διὰ τοῦ 222. Ποῖον τὸ πηλίκον ;

173) Ἐὰν $\alpha + \beta + \gamma = 0$ δείξατε ὅτι

1) $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 2(\gamma^2 - \alpha\beta)$ 2) $\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 = 2(\gamma^2 - \alpha\beta)^2$

3) $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$

174) Νὰ γίνουν αἱ πράξεις :

α) $(8x^5 - 3x^4 + 6x^3) : (-3x^3)$ β) $(-12\alpha x^5 + 18\alpha x^3 - 6\alpha x^2) : (-6\alpha x^2)$

γ) $(\omega^{2x} + \omega^{3x}) : \omega^{2x}$ δ) $(\alpha^{3\mu} + 2\alpha^{2\mu} + 6\alpha^{\mu}) \cdot (-3\alpha^{\mu})$

ε) $(6\alpha x^5 - 3\alpha x^4 + 9\alpha^2x^3 - 12\alpha^3x^2) : (-2\alpha x^2)$

στ) $\left(\frac{12}{5}\ \alpha^3\beta^2 - \frac{4}{5}\ \alpha^2\beta^3 + \frac{8}{15}\ \alpha^2\beta^2\right) : (-\frac{4}{5}\ \alpha^2\beta^2)$

175) Νὰ γίνουν αἱ διαιρέσεις :

α) $(x^3 - x^2 - 21x + 45) : (x + 5)$ β) $(18x^3 + 9x^2 - 50x - 25) : (3x - 5)$

γ) $(2x^3 - 3x^2 - 17x - 12) : (2x + 3)$ δ) $(\omega^3 + 4\omega^2 - 11\omega - 30) : (\omega^2 - \omega - 6)$

ε) $(9x^6 - 4x^4 + 21x^3 + 14x^2) : (3x - 2)$

στ) $(x^3 + 4x^2 - 18x + 2) : (x^2 + 1)$

ζ) $(\psi^4 + 2\psi^3 - 19\psi^2 - 8\psi + 60) : (\psi^2 - 5\psi + 6)$

η) $(\omega^4 - \omega^2 + 1) : (\omega^2 + \omega + 1)$

176) Νὰ γίνουν αἱ διαιρέσεις :

α) $[(3x + 5)^2 + (2x + 3)^2 - 3x(2x + 4) - (x + 1)^2] : (3x - 2)$

β) $(3\alpha^{4x} + 14\alpha^{3x} + 9\alpha^{x} + 2) : (\alpha^{2x} + 5\alpha^{x} + 1)$

1) γ) $[(x^2 - 9)^2 - (x + 5)(x - 3)^2] : (x^2 + x - 12)$

2) δ) $[(x + 3\psi)^2 + 4(x + 2\psi)^2 - (x + \psi)^2] : 4(x + 3\psi)$

3) ε) $(3\alpha^5 + 25\alpha^4\beta + 33\alpha^3\beta^2 + 14\alpha^2\beta^3) : (\alpha^2 + 7\alpha\beta)$

4) στ) $(x^4 - 3x^3\psi + 6x^2\psi^2 - 3x\psi^3 + \psi^4) : (x^2 - x\psi + \psi^2)$

5) 177) Ἐὰν εἶναι $\varphi(x) = 2x^2 - 5x + 3$, νὰ γίνῃ ἡ διαίρεσις

$[\varphi(x) + \varphi(x - 2) - \varphi(x - 1)] : (x - 3)$

178) Ἐὰν εἶναι $\varphi(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 1$, νὰ γίνῃ ἡ διαίρεσις

$[\varphi(x + 1) + \varphi(x - 1) - \varphi(x)] : (x - 2)$

6) 179) Ἐὰν εἶναι $\varphi(x) = x^2 + 5x - 6$, νὰ γίνῃ ἡ διαίρεσις

$[\varphi(x - 2) \cdot \varphi(x + 2) - \varphi(x) - 10] : (x^2 - x - 2)$

180) Νὰ δειχθῇ ἡ ταυτότης :

$x(x + 1)(x + 2)(x + 3) + 1 = (x^2 + 3x + 1)^2$

Ἐὰν $x \in N$, τί συμπεραίνετε ἀπὸ τὴν ταυτότητα αὐτήν ;

181) Νὰ συμπτυχθῇ τὸ πολυώνυμον $\Delta(x) = x + 5\lambda - \lambda x^2 + 3x^3 + 4x^2 - 4\lambda x$, ὅταν $\lambda = 6$ καὶ ἔπειτα νὰ γίνῃ ἡ διαίρεσις $\Delta(x) : (x + 3)(x - 2)$. Νὰ τεθῇ τὸ $\Delta(x)$ ὑπὸ τὴν μορφὴν ἑνὸς γινομένου πρωτοβαθμίων παραγόντων.

182) Νε εὑρεθῇ πολυώνυμον, τὸ ὁποῖον πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸ $x^2 - x + 1$ δίδει γινόμενον τὸ $x^4 - x^2 + 2x - 1$

183) Νὰ εὑρεθῇ πολυώνυμον τὸ ὁποῖον πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸ $x + 3$ γίνεται $x^3 - 5x^2 + 7x + 95$.

184) Νὰ προσδιορισθοῦν οἱ ὅροι Α,Β,Γ,Δ,Ε, ὥστε αἱ κάτωθι παραστάσεις νὰ εἶναι τέλεια τετράγωνα :

$25k^2 + 9\lambda^2 + A$, $B + 16\alpha^2 - 40\alpha\beta$, $\lambda^6 - 20\lambda^3\mu^3 + \Gamma$, $x^2 + \frac{\beta}{\alpha}x + \Delta$, $(x + \psi)^2 + \omega^2 + E$

185) Δείξατε ὅτι εἶναι :

$(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)(x^2 + \psi^2 + z^2) - (\alpha x + \beta\psi + \gamma z)^2 = (\alpha\psi - \beta x)^2 + (\beta z - \gamma\psi)^2 + (\gamma x - \alpha z)^2$.

55. ΥΠΟΛΟΙΠΟΝ ΤΗΣ ΔΙΑΙΡΕΣΕΩΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΥ φ(x) ΔΙΑ ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΟΥ ΔΙΩΝΥΜΟΥ ΤΗΣ ΑΥΤΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ.

Α) Ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως φ (x) διὰ x — α. Ἐὰν διαιρέσωμεν τὸ πολυώνυμον $\varphi(x) = \lambda x + 5$ (λ ἀνεξάρτητον τοῦ x) διὰ τοῦ διωνύμου

$$\begin{array}{r|l} \lambda x + 5 & x - 3 \\ \hline -\lambda x + 3\lambda & \lambda \\ \hline 3\lambda + 5 & \end{array}$$

$\delta(x) = x - 3$, εὑρίσκομεν πηλίκον τὸ λ καὶ ὑπόλοιπον $\upsilon = 3\lambda + 5$. Παρατηροῦμεν ὅτι εἶναι $\upsilon = \varphi(3)$, δηλ. συμπίπτει τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ φ (x) διὰ $x - 3$ μὲ τὴν τιμήν, τὴν ὁποίαν λαμβάνει ὁ διαιρετέος $\lambda x + 5$ διὰ τὴν τιμὴν $x = 3$, ἡ ὁποία μηδενίζει τὸν διαιρέτην.

Ἐκτελοῦντες τὴν διαίρεσιν τοῦ $\Delta(x) = x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 20$ διὰ τοῦ διωνύμου $\delta(x) = x + 2$, εὑρίσκομεν ὡς πηλίκον $x^3 - 4x^2 + x + 6$ καὶ ὡς ὑπόλοιπον τὸ 8. Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ τιμὴ τοῦ x, ποὺ μηδενίζει τὸν διαιρέτην εἶναι ἡ $x = -2$ καὶ διὰ τὴν τιμὴν αὐτὴν εἶναι $\Delta(-2) = (-2)^4 - 2(-2)^3 - 7\cdot(-2)^2 + 8(-2) + 20 = 16 + 16 - 28 - 16 + 20 = 8$, δηλ. ἴση μὲ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως Δ (x) διὰ δ (x).

Γενικῶς. Ἔστω ὅτι τῆς διαιρέσεως φ (x) διὰ $x - \alpha$ τὸ πηλίκον εἶναι τὸ Π (x) καὶ τὸ ὑπόλοιπον υ. Τὸ υ εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ x δηλ. σταθερὰ (διατί ;). Κατὰ τὴν ταυτότητα τῆς διαιρέσεως ἔχομεν : $\varphi(x) = (x - \alpha)\,\Pi(x) + \upsilon$ (1)

Ἐπειδὴ ἡ (1), **ὡς ταυτότης,** ἀληθεύει διὰ κάθε τιμὴν τῆς $x \in R$, θὰ ἀληθεύῃ καὶ διὰ $x = \alpha$, δηλ. διὰ τὴν τιμήν, ἡ ὁποία μηδενίζει τὸν διαιρέτην $x - \alpha$. Διὰ $x = \alpha$ ἀπὸ τὴν (1) λαμβάνομεν :

$\varphi(\alpha) = 0\cdot\Pi(\alpha) + \upsilon \Rightarrow \varphi(\alpha) = \upsilon$ (2)

Ὥστε ἀπεδείχθη **τὸ θεώρημα :**

Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ πολυωνύμου φ (x) διὰ τοῦ διωνύμου x — α εἶναι ἡ τιμὴ φ (α), ἤτοι ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ διαιρετέου φ (x) διὰ τὴν τιμὴν x=α.

Ἐφαρμογαί. 1η. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ $\varphi(x) = x^3 - 5x^2 + 9x - 10$ διὰ τοῦ $x - 2$, χωρὶς νὰ ἐκτελεσθῇ ἡ πρᾶξις. Τὸ αὐτὸ διὰ τοῦ $x + 2$.

Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ φ (x) διὰ $x - 2$ εἶναι :
$\upsilon = \varphi(2) = 2^3 - 5\cdot2^2 + 9\cdot2 - 10 = 8 - 20 + 18 - 10 = -4$.

Ἡ τιμή, ποὺ μηδενίζει τὸν διαιρέτην $x + 2$ εἶναι ἡ $x = -2$, ἑπομένως τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως φ (x) διὰ $x + 2$ εἶναι:

$υ = φ(-2) = (-2)^3 - 5 \cdot (-2)^2 + 9(-2) - 10 = -8 - 20 - 18 - 10 = -56.$

2α. Ποῖον τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως $φ(x) = 4x^3 - 24x^2 + 41x - 5$ διὰ $2x - 5$;

Ὁ διαιρέτης $2x - 5$ μηδενίζεται διὰ $x = \frac{5}{2}$. Ἐὰν $Π(x)$ καὶ $υ$ εἶναι τὸ πηλίκον καὶ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως $φ(x)$ διὰ τοῦ $2x - 5$, θὰ ἔχωμεν τὴν ταυτότητα:

$$4x^3 - 24x^2 + 41x - 5 = (2x - 5)\,Π(x) + υ$$

Θέτομεν εἰς αὐτὴν ὅπου x τὴν τιμὴν $\left(\frac{5}{2}\right)$ καὶ εὑρίσκομεν:

$$\frac{125}{2} - \frac{300}{2} + \frac{205}{2} - 5 = 0 \cdot Π\left(\frac{5}{2}\right) + υ \Rightarrow 10 = υ$$

Ὥστε τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως $φ(x)$ διὰ $2x - 5$ εἶναι $υ = 10 = φ\left(\frac{5}{2}\right)$

Γενικῶς. Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως $φ(x)$ διὰ $(αx + β)$, ὅπου $α$ καὶ $β$ εἶναι σταθεραί, $(α \neq 0)$, εἶναι ὁ ἀριθμὸς $υ = φ\left(-\frac{β}{α}\right)$

Πράγματι. Ἐὰν $Π(x)$ εἶναι τὸ πηλίκον καὶ ἡ σταθερὰ $υ$ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως $φ(x)$ διὰ $(αx + β)$, ἔχομεν τὴν ταυτότητα:

$φ(x) = (αx + β)\,Π(x) + υ$ καὶ ἐξ αὐτῆς διὰ $x = -\frac{β}{α}$ εὑρίσκομεν

$$φ\left(-\frac{β}{α}\right) = 0 \cdot Π\left(-\frac{β}{α}\right) + υ \Rightarrow φ\left(-\frac{β}{α}\right) = υ$$

Β) Θεώρημα: Ἕνα πολυώνυμον $φ(x)$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $x - α$, ὅταν καὶ μόνον μηδενίζεται διὰ $x = α$.

1) Ἐὰν εἶναι $φ(α) = 0$ τότε θὰ εἶναι καὶ $φ(x) = (x - α)\,Π(x)$, ὅπου $Π(x)$ εἶναι ἕνα ἀκέραιον πολυώνυμον τοῦ x καὶ ἀντιστρόφως

2) Ἐὰν εἶναι $φ(x) = (x - α) \cdot Π(x)$, τότε θὰ εἶναι καὶ $φ(α) = 0$.

Αἱ δύο αὐταὶ προτάσεις εἶναι ἀμέσως φαneραὶ ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω περὶ τοῦ ὑπολοίπου τῆς διαιρέσεως τοῦ $φ(x)$ διὰ $x - α$.

Ὥστε ἔχομεν τὴν ἰσοδυναμίαν: $\boxed{φ(α) = 0 \Leftrightarrow φ(x) = (x - α).\ Π(x).}$

Παραδείγματα: Ποία ἀπὸ τὰς διαιρέσεις 1) $(α^3 - β^3)$ διὰ $(α - β)$. 2) $(α^3 + β^3)$ διὰ $(α + β)$ καὶ 3) $(α^5 - β^5)$ διὰ $(α + β)$ εἶναι τελεία (α μεταβλητή, β σταθερὰ $\neq 0$)

1) Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως $(α^3 - β^3)$ διὰ $(α - β)$ εἶναι $υ = β^3 - β^3 = 0$, ἄρα ἡ διαίρεσις αὐτὴ εἶναι τελεία.

2) τῆς $(α^3 + β^3)$ διὰ $(α + β)$ τὸ ὑπόλοιπον εἶναι $υ = (-β)^3 + β^3 = 0$, εἶναι δηλ. τελεία διαίρεσις καὶ

3) τῆς $(α^5 - β^5)$ διὰ $(α + β)$ τὸ ὑπόλοιπον εἶναι $υ = (-β)^5 - β^5 = -2β^5$ ἑπομένως εἶναι ἡ διαίρεσις αὐτὴ ἀτελής.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

186) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὑπόλοιπον, χωρὶς νὰ ἐκτελεσθῇ ἡ πρᾶξις, τῶν ἀκολούθων διαιρέσεων.

α) $(x^2 - 7x + 12) : (x - 3)$ β) $(3x^2 - 5x + 2) : (x - 1)$

γ) $(3x^2 - 10x - 8) : (3x + 2)$ δ) $(7x^2 + 6x - 1) : (x + 1)$

ε) $(3x^5 - 7x^3 + 9x^2 - 10x + 20) : (x + 2)$ στ) $(8\psi^3 + 125) : (2\psi + 5)$

ζ) $(\omega^6 - \alpha^6) : (\omega^2 - \alpha^2)$ η) $(\psi^{12} + \omega^{12}) : (\psi^4 + \omega^4)$

187) Νὰ προσδιορισθῇ ὁ λ, ὥστε τὸ πολυώνυμον $\varphi(x) = x^3 - 2x + \lambda$ νὰ εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ $x - 1$. Νὰ ἐκτελεσθῇ κατόπιν ἡ διαίρεσις $\varphi(x) : (x - 1)$.

188) Τὸ πολυώνυμον $\Phi(x)$ διαιρούμενον διὰ τοῦ $x^2 - 1$ δίδει ὑπόλοιπον $3x - 5$. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως $\Phi(x) : (x - 1)$ καθὼς καὶ τῆς $\Phi(x) : (x + 1)$.

189) Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἑνὸς πολυωνύμου $\Phi(x)$ διὰ τοῦ $x^2 + x - 6$ εἶναι $5x + 1$. Ποῖον εἶναι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως $\Phi(x) : (x - 2)$ καὶ ποῖον τῆς $\Phi(x) : (x + 3)$:

190) Δείξατε ὅτι τὸ πολυώνυμον $(x + \psi + z)^7 - x^7 - \psi^7 - z^7$ εἶναι διαιρετὸν διὰ τῶν $x + \psi$, $\psi + z$, $z + x$.

56. ΑΞΙΟΣΗΜΕΙΩΤΑ ΠΗΛΙΚΑ.

Ἐκτελοῦντες τὴν διαίρεσιν $(\alpha^5 - \beta^5)$ διὰ $(\alpha - \beta)$ εὑρίσκομεν (§ 54, Ηδ, παρατήρησις 4η) ὡς πηλίκον τὸ $\Pi(\alpha, \beta) = \alpha^4 + \alpha^3\beta + \alpha^2\beta^2 + \alpha\beta^3 + \beta^4$ καὶ ὡς ὑπόλοιπον τὸ 0. Τὸ πηλίκον $\Pi(\alpha, \beta)$ εἶναι πολυώνυμον ὁμογενὲς τετάρτου βαθμοῦ καὶ συμμετρικόν, ἔχει 5 ὅρους καὶ τὸν καθένα μὲ συντελεστὴν $+1$. Εἶναι διατεταγμένον κατὰ τὰς κατιούσας τοῦ γράμματος διαιρέσεως α καὶ κατὰ τὰς ἀνιούσας τοῦ ἄλλου β. Εἶναι φανερὸν ὅτι σχηματίζεται εὐκόλως, χωρὶς νὰ ἐκτελεσθῇ ἡ πρᾶξις τῆς διαιρέσεως $(\alpha^5 - \beta^5)$ διὰ $(\alpha - \beta)$. Ἐπίσης τὸ ὑπόλοιπον αὐτῆς εὑρίσκεται ἀμέσως (§ 55) καὶ εἶναι $\upsilon = \beta^5 - \beta^5 = 0$.

Ἐκτελοῦντες τὴν διαίρεσιν $(\alpha^5 - \beta^5)$ διὰ $(\alpha + \beta)$ εὑρίσκομεν ὡς πηλίκον τὸ $\Pi'(\alpha, \beta) = \alpha^4 - \alpha^3\beta + \alpha^2\beta^2 - \alpha\beta^3 + \beta^4$ καὶ ὡς ὑπόλοιπον τὸ $-2\beta^5$. Τὸ $\Pi'(\alpha, \beta)$ εἶναι ὁμογενὲς τετάρτου βαθμοῦ καὶ συμμετρικόν, ἔχει 5 ὅρους, μὲ συντελεστὰς ἐναλλὰξ $+1$ καὶ -1 καὶ εἶναι διατεταγμένον κατὰ τὰς κατιούσας τοῦ α καὶ τὰς ἀνιούσας τοῦ β. Ὥστε καὶ τὸ $\Pi'(\alpha, \beta)$ σχηματίζεται εὐκόλως ἀπὸ μνήμης. Τὸ ὑπόλοιπον εἶναι $\upsilon = (-\beta)^5 - \beta^5 = -2\beta^5$.

Ἀναλόγους παρατηρήσεις ἔχομεν εἰς πᾶσαν διαίρεσιν διωνύμου τῆς μορφῆς $\alpha^\mu - \beta^\mu$ ἢ $\alpha^\mu + \beta^\mu$ διὰ $\alpha - \beta$ ἢ $\alpha + \beta$, ὅπου $\mu \in N$.

Διακρίνομεν γενικῶς τὰς κάτωθι περιπτώσεις **(πάντοτε $\mu \in N$)**.

1η) Ἡ διαίρεσις $(x^\mu - \alpha^\mu)$ διὰ $(x - \alpha)$ ἔχει ὑπόλοιπον $\upsilon = \alpha^\mu - \alpha^\mu = 0$ καὶ πηλίκον $x^{\mu-1} + \alpha x^{\mu-2} + \alpha^2 x^{\mu-3} + \ldots + \alpha^{\mu-2}x + \alpha^{\mu-1}$

Ὥστε : $$\boxed{x^\mu - \alpha^\mu = (x - \alpha)(x^{\mu-1} + \alpha x^{\mu-2} + \alpha^2 x^{\mu-3} + \ldots + \alpha^{\mu-1})} \qquad (1)$$

Π.χ. $x^5 - y^5 = (x - y)(x^4 + yx^3 + y^2x^2 + y^3x + y^4)$

$\alpha^4 - \beta^4 = (\alpha - \beta)(\alpha^3 + \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \beta^3)$

2α) Ἡ διαίρεσις $(x^\mu + \alpha^\mu)$ διὰ $(x - \alpha)$ εἶναι ἀτελής, μὲ ὑπόλοιπον $\upsilon = 2\alpha^\mu$ καὶ πηλίκον τὸ αὐτὸ μὲ τὸ τῆς περιπτώσεως 1η.

Εἶναι : $x^\mu + \alpha^\mu = (x - \alpha)(x^{\mu-1} + \alpha x^{\mu-2} + \alpha^2 x^{\mu-3} + \ldots + \alpha^{\mu-1}) + 2\alpha^\mu$ (2)

3η) Ἡ διαίρεσις $(x^\mu - \alpha^\mu)$ διὰ $(x + \alpha)$ ἔχει ὑπόλοιπον $\upsilon = (-\alpha)^\mu - \alpha^\mu$.

α) Ἔστω $\mu = 2\rho$, $\rho \in N$. Τότε $\upsilon = 0$ καὶ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως εἶναι :

$$x^{\mu-1} - \alpha x^{\mu-2} + \alpha^2 x^{\mu-3} - \ldots + \alpha^{\mu-2}x - \alpha^{\mu-1} = \Pi$$

Ὥστε $$\boxed{\mu = 2\rho \Rightarrow x^\mu - \alpha^\mu = (x + \alpha)(x^{\mu-1} - \alpha x^{\mu-2} + \alpha^2 x^{\mu-3} - \ldots - \alpha^{\mu-1})} \qquad (3)$$

β) Ἔστω περιττὸς ὁ μ. Ἐὰν $\mu = 2\rho + 1$, τότε $\upsilon = -\alpha^\mu - \alpha^\mu = -2\alpha^\mu$.

Ἡ διαίρεσις $(x^{\mu}+\alpha^{\mu})$ διὰ $(x+\alpha)$ εἶναι ἀτελής, μὲ πηλίκον τὸ πολυώνυμον $\Pi'=x^{\mu-1}-\alpha x^{\mu-2}+\alpha^2x^{\mu-3}-\ldots-\alpha^{\mu-2}x+\alpha^{\mu-1}$

Ὥστε :

$\mu=2\rho+1 \Rightarrow x^{\mu}-\alpha^{\mu}=(x+\alpha)(x^{\mu-1}-\alpha x^{\mu-2}+\alpha^2x^{\mu-3}-\ldots+\alpha^{\mu-1})-2\alpha^{\mu}$ (4)

Π.χ. $x^4-y^4=(x+y)(x^3-x^2y+xy^2-y^3)$

$x^5-y^5=(x+y)(x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4)-2y^5$

4η) Ἡ διαίρεσις $(x^{\mu}+\alpha^{\mu})$ διὰ $(x+\alpha)$ ἔχει ὑπόλοιπον $\upsilon=(-\alpha)^{\mu}+\alpha^{\mu}$

α) Ἐὰν $\mu=2\rho$ εἶναι ἀτελὴς μὲ ὑπόλοιπον $\upsilon=2\alpha^{\mu}$ καὶ πηλίκον τὸ Π. Ὥστε:

$\mu=2\rho \Rightarrow x^{\mu}+\alpha^{\mu}=(x+\alpha)(x^{\mu-1}-\alpha x^{\mu-2}+\alpha^2x^{\mu-3}-\ldots-\alpha^{\mu-1})+2\alpha^{\mu}$ (5)

β) Ἐὰν $\mu=2\rho+1$ εἶναι $\upsilon=0$ καὶ τὸ πηλίκον εἶναι τὸ Π'. Ὥστε :

$\boxed{\mu=2\rho+1 \Rightarrow x^{\mu}+\alpha^{\mu}=(x+\alpha)(x^{\mu-1}-\alpha x^{\mu-2}+\alpha^2x^{\mu-3}-\ldots+\alpha^{\mu-1})}$ (6)

Π.χ. $x^6+y^6=(x+y)(x^5-x^4y+x^3y^2-x^2y^3+xy^4-y^5)+2y^6$

$x^5+y^5=(x+y)(x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4)$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

191) Νὰ προσδιορισθῇ τὸ πηλίκον καὶ τὸ ὑπόλοιπον τῶν κάτωθι διαιρέσεων, χωρὶς νὰ ἐκτελεσθῇ ἡ πρᾶξις.

α) $(\alpha^5-\beta^5)$ διὰ $(\alpha-\beta)$ β) $(\alpha^5+\beta^5)$ διὰ $(\alpha-\beta)$

γ) $(\alpha^6-\beta^6)$ διὰ $(\alpha-\beta)$ δ) $(\alpha^6+\beta^6)$ διὰ $(\alpha-\beta)$

192) Ὁμοίως τῶν διαιρέσεων :

α) $(\alpha^5-\beta^5)$ διὰ $(\alpha+\beta)$ β) $(\alpha^5+\beta^5)$ διὰ $(\alpha+\beta)$

γ) $(\alpha^6-\beta^6)$ διὰ $(\alpha+\beta)$ δ) $(\alpha^6+\beta^6)$ διὰ $(\alpha+\beta)$

193) Ὁμοίως τῶν διαιρέσεων :

α) $\dfrac{x^5+1}{x+1}$, β) $\dfrac{x^6-1}{x-1}$, γ) $\dfrac{x^4-1}{x+1}$, δ) $\dfrac{x^4+1}{x-1}$

ε) $\dfrac{x^3-8}{x-2}$, στ) $\dfrac{\psi^6-\alpha^6}{\psi^2-\alpha^2}$, ζ) $\dfrac{27x^3+1}{3x+1}$, η) $\dfrac{8\alpha^3+\beta^3}{2\alpha+\beta}$

194) Νὰ εὑρεθῇ ποίας τελείας διαιρέσεως τῆς μορφῆς $(x^{\mu}\pm\alpha^{\mu}):(x\pm\alpha)$ εἶναι πηλίκον καθένα ἀπὸ τὰ πολυώνυμα

α) $x^3+x^2\alpha+x\alpha^2+\alpha^3$ β) $x^4+x^3+x^2+x+1$

γ) x^3-x^2+x-1 δ) $\psi^2-\psi+1$ ε) $\omega^4-\omega^3\alpha+\omega^2\alpha^2-\omega\alpha^3+\alpha^4$

στ) $\psi^2+2\psi+4$

195) Δείξατε ὅτι οἱ ἀριθμοὶ $3^{16}-1$, $3^{10}-1$, $3^{2\nu}-1$ $(\nu\in N)$ εἶναι διαιρετοὶ διὰ τοῦ 8.

57. ΑΝΑΛΥΣΙΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΥ ΕΙΣ ΓΙΝΟΜΕΝΟΝ (ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΙΣ).

Α) Σημασία τοῦ προβλήματος τῆς παραγοντοποιήσεως. Εἰς τὰ Μαθηματικὰ τῶν προηγουμένων τάξεων πολλὰς φορὰς ἐτρέψαμεν ἀριθμοὺς εἰς γινόμενα παραγόντων, ὅπως διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ Μ.Κ.Δ. καὶ τοῦ Ε.Κ.Π. δοθέντων ἀριθμῶν, διὰ τὴν τροπὴν ἑτερωνύμων κλασμάτων εἰς ὁμώνυμα, διὰ νὰ ἐξετάσωμεν ἐὰν δοθεὶς ἀριθμὸς διαιρῆται ὑπὸ ἄλλου δοθέντος κ.λ.π. Εἰς τὴν Ἄλγεβραν ὁ μετασχηματισμὸς ἑνὸς πολυωνύμου εἰς γινόμενον ἄλλων ἀκεραίων ἐπίσης πολυωνύμων εἶναι ἀπὸ τὰ σπουδαιότερα προβλήματα. Διὰ τῆς τροπῆς εἰς γινόμενα γίνονται ἁπλούστεραι πολύπλοκοι παραστάσεις, μάλιστα δὲ ἐπιτυγχάνεται ἡ λύσις ἐξισώσεων καὶ ἀνισώσεων ἀνωτέρου τοῦ πρώτου βαθμοῦ.

Ἡ τροπὴ εἰς γινόμενον ἑνὸς πολυωνύμου θὰ λέγεται καὶ ἀνάλυσις εἰς γινόμενον παραγόντων ἢ παραγοντοποίησις τοῦ πολυωνύμου.

Δὲν εἶναι πάντοτε δυνατὴ ἡ τροπὴ εἰς γινόμενον ἑνὸς πολυωνύμου. Κατωτέρω θὰ ἴδωμεν μερικὰς συνήθεις περιπτώσεις κατὰ τὰς ὁποίας μὲ στοιχειώδη τρόπον ἐπιτυγχάνεται ἡ παραγοντοποίησις μιᾶς ἀκεραίας παραστάσεως.

Β) Περιπτώσεις ἀναλύσεως.

1) Κοινοὶ παράγοντες. Ὅταν οἱ ὅροι τῆς δοθείσης πρὸς ἀνάλυσιν παραστάσεως περιέχουν κοινὸν παράγοντα, τότε θέτομεν τοῦτον ἐκτὸς παρενθέσεως, συμφώνως πρὸς τὸν ἐπιμεριστικὸν νόμον, ὁ ὁποῖος συνδέει τὸν πολλαπλασιασμὸν μὲ τὴν πρόσθεσιν, δηλ. $\alpha\mu + \beta\mu + \gamma\mu = \mu(\alpha + \beta + \gamma)$ καὶ τότε τρέπεται τὸ πολυώνυμον εἰς γινόμενον.

Παραδείγματα : 1) $4\alpha^3\beta - 2\alpha^2\beta^2 + 6\alpha^2\beta^3 = 2\alpha^2\beta(2\alpha - \beta + 3\beta^2)$

2) $x(\alpha - \beta) + \psi(\alpha - \beta) - \omega(\alpha - \beta) = (\alpha - \beta)(x + \psi - \omega)$

3) $3\alpha(x - \psi) - 2\omega(x - \psi) - (x - \psi) = (x - \psi)(3\alpha - 2\omega - 1)$

4) $7(x + 2)(\psi - 3) - \psi + 3 = 7(x + 2)(\psi - 3) - (\psi - 3) =$
$= (\psi - 3)[7(x + 2) - 1] = (\psi - 3)(7x + 14 - 1) = (\psi - 3)(7x + 13).$

5ον) $\alpha^3 - \alpha = \alpha(\alpha^2 - 1).$

2) Καθ' ὁμάδας. Ἐὰν οἱ ὅροι τοῦ πολυωνύμου χωρίζωνται εἰς ὁμάδας (τοῦ αὐτοῦ πλήθους ὅρων) καὶ εἰς κάθε μίαν ὁμάδα ἐξάγεται κοινὸς παράγων ἐκτὸς παρενθέσεως καὶ παρουσιάζεται τὸ αὐτὸ πολυώνυμον ἐντὸς τῆς παρενθέσεως δι' ὅλας τὰς ὁμάδας, τότε ἐπιτυγχάνεται ἡ ἀνάλυσις τοῦ δοθέντος πολυωνύμου εἰς γινόμενον παραγόντων.

Παραδείγματα : 1ον $\alpha x + \beta\psi + \alpha\psi + \beta x = \alpha x + \alpha\psi + \beta x + \beta\psi =$
$= \alpha(x + \psi) + \beta(x + \psi) = (x + \psi)(\alpha + \beta).$

Ἀκόμη : $\alpha x + \beta\psi + \alpha\psi + \beta x = (\alpha x + \beta x) + (\alpha\psi + \beta\psi) =$
$= x(\alpha + \beta) + \psi(\alpha + \beta) = (\alpha + \beta)(x + \psi).$

2ον. $x^3 - x\psi + x^2\psi^2 - \psi^3 = x(x^2 - \psi) + \psi^2(x^2 - \psi) = (x^2 - \psi)(x + \psi^2)$

3ον. $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = x^3(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1) =$
$= (x^3 + 1)(x^2 + x + 1).$

4) $5\alpha^3\beta + 10\alpha\beta^3 + 5\alpha^2\beta^2 - 2\alpha^2 - 4\beta^2 - 2\alpha\beta =$
$= 5\alpha\beta(\alpha^2 + 2\beta^2 + \alpha\beta) - 2(\alpha^2 + 2\beta^2 + \alpha\beta) =$
$= (\alpha^2 + 2\beta^2 + \alpha\beta)(5\alpha\beta - 2).$

3) Διαφορὰ δύο τετραγώνων. Ἐὰν ἕνα πολυώνυμον τίθεται ὑπὸ τὴν μορφὴν τῆς διαφορᾶς δύο τετραγώνων, τότε ἐπειδή :

$(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2 \Leftrightarrow \alpha^2 - \beta^2 = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta)$, θὰ τρέπεται εἰς γινόμενον παραγόντων, τοῦ ἀθροίσματος ἐπὶ τὴν διαφορὰν τῶν βάσεων τῶν δύο αὐτῶν τετραγώνων.

Παραδείγματα : 1ον $4x^6 - 25\psi^4 = (2x^3)^2 - (5\psi^2)^2 =$
$= (2x^3 + 5\psi^2)(2x^3 - 5\psi^2).$

2ον. $\alpha^3\beta - \alpha\beta^3 = \alpha\beta(\alpha^2 - \beta^2) = \alpha\beta(\alpha + \beta)(\alpha - \beta)$

3ον. $\omega^2 - x^2 + 2x\psi - \psi^2 = \omega^2 - (x^2 - 2x\psi + \psi^2) = \omega^2 - (x - \psi)^2 =$

$= [\omega + (x - \psi)] [\omega - (x - \psi)] = (\omega + x - \psi)(\omega - x + \psi)$

4ον. $\omega^5 - \omega = \omega(\omega^4 - 1) = \omega(\omega^2 + 1)(\omega^2 - 1) =$
$= \omega(\omega^2 + 1)(\omega - 1)(\omega + 1)$.

4) Διαφορὰ ἢ ἄθροισμα δύο κύβων. Κατὰ τὰς ταυτότητας :

$$\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) \quad (1)$$
$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) \quad (2)$$

ἐὰν ἕνα πολυώνυμον δύναται νὰ λάβῃ τὴν μορφὴν τῆς διαφορᾶς ἢ τοῦ ἀθροίσματος δύο κύβων, τότε τρέπεται εἰς γινόμενον παραγόντων.

Παραδείγματα : 1ον. $x^3 - 27 = x^3 - 3^3 = (x - 3)(x^2 + 3x + 9)$

2ον. $\psi^3 + 1 = (\psi + 1)(\psi^2 - \psi + 1)$

3ον. $8\omega^3 + 125 = (2\omega)^3 + 5^3 = (2\omega + 5)[(2\omega)^2 + (2\omega)\cdot 5 + 5^2] =$
$= (2\omega + 5)(4\omega^2 + 10\omega + 25)$

4ον. $(x + 2\psi)^3 - (2x + \psi)^3 = [(x + 2\psi) - (2x + \psi)][(x + 2\psi)^2 + (x +$
$+ 2\psi)(2x + \psi) + (2x + \psi)^2] = (x + 2\psi - 2x - \psi)(x^2 + 4x\psi + 4\psi^2 + 2x^2 +$
$+ 4x\psi + x\psi + 2\psi^2 + 4x^2 + 4x\psi + \psi^2) = (\psi - x)(7x^2 + 13x\psi + 7\psi^2)$

5) Διαφορὰ ἢ ἄθροισμα ὁμοίων δυνάμεων. Εἰς τὰ ἀξιοσημείωτα πηλίκα εὕρομεν τὴν ταυτότητα (§ 56) :

$x^\mu - \alpha^\mu = (x - \alpha)(x^{\mu-1} + \alpha x^{\mu-2} + \alpha^2 x^{\mu-3} + \ldots + \alpha^{\mu-1})$, $\mu \in N$ καὶ τὴν (§ 56, 4η) ἐὰν $\mu =$ περιττός.

$x^\mu + \alpha^\mu = (x + \alpha)(x^{\mu-1} - \alpha x^{\mu-2} + \alpha^2 x^{\mu-3} - \ldots + \alpha^{\mu+1})$

αἱ ὁποῖαι μᾶς παρέχουν τρόπον ἀναλύσεως ὡρισμένων διωνύμων π.χ.

$x^5 - 1 = (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$

$\omega^5 + 1 = (\omega + 1)(\omega^4 - \omega^3 + \omega^2 - \omega + 1)$

6) Ἀνάπτυγμα τελείου τετραγώνου. Γνωρίζομεν τὰς ταυτότητας

$$\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2$$
$$\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha - \beta)^2$$
$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma = (\alpha + \beta + \gamma)^2$$

Συμφώνως πρὸς αὐτάς, ἐὰν δοθὲν πολυώνυμον εἶναι ἀνάπτυγμα ἑνὸς τελείου τετραγώνου, θὰ τρέπεται ἀμέσως εἰς γινόμενον δύο παραγόντων.

Παραδείγματα: 1ον $\alpha^2x^2 + 2\alpha\beta x + \beta^2 = (\alpha x + \beta)^2$

2ον $\alpha^2x^2 - 2\alpha\beta x + \beta^2 = (\alpha x - \beta)^2$

3ον $\omega^2 - 2\omega + 1 = (\omega - 1)^2$, $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$

4ον $(x - \psi)^2 + 2(\alpha + \beta)(x - \psi) + (\alpha + \beta)^2 = (x - \psi + \alpha + \beta)^2$

5ον $x^2 + \psi^2 + \omega^2 + 2x\psi - 2x\omega - 2\psi\omega = (x + \psi - \omega)^2$

7) Τριώνυμον δευτέρου βαθμοῦ μὲ μίαν μεταβλητήν.

I. Κάθε τριώνυμον δευτέρου βαθμοῦ μὲ μίαν μεταβλητὴν ἔχει, συνεπτυγμένον, τὴν μορφὴν $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, ὅπου α, β, γ εἶναι ἀνεξάρτητοι τοῦ x καὶ $\alpha \neq 0$. Ἐὰν εἶναι $\beta = 0$ ἢ $\gamma = 0$ τὸ τριώνυμον εἶναι ἐλλιπὲς (μὴ πλῆρες) καὶ τότε εἶναι διώνυμον τῆς μορφῆς $\alpha x^2 + \gamma$ ἢ $\alpha x^2 + \beta x$ ἀντιστοίχως.

Παρατηροῦμεν ὅτι εἶναι $\alpha x^2 + \gamma = \alpha\left(x^2 + \frac{\gamma}{\alpha}\right)$. Ἐὰν $x^2 + \frac{\gamma}{\alpha}$ εἶναι διαφορὰ δύο τετραγώνων, τότε κατὰ τὰ γνωστὰ τρέπεται εἰς γινόμενον δύο παραγόντων, ἄλλως δὲν ἀναλύεται Π.χ.:

$$2x^2 - 8 = 2(x^2 - 4) = 2(x+2).(x-2), \quad 3x^2 - 5 = 3\left(x^2 - \frac{5}{3}\right) =$$

$$= 3\left(x + \sqrt{\frac{5}{3}}\right)\left(x - \sqrt{\frac{5}{3}}\right), \quad 5x^2 + 9 = 5\left(x^2 + \frac{9}{5}\right)$$ δὲν ἀναλύεται εἰς γινόμενον εἰς τὸ R.

Ἐπίσης ἔχομεν $\alpha x^2 + \beta x = x(\alpha x + \beta)$.

Π.χ. $3x^2 - 7x = x(3x - 7)$, $\quad 5x^2 + 12x = x(5x + 12)$

II. Ὑποθέτομεν ὅτι τὸ τριώνυμον εἶναι πλῆρες μὲ $\alpha = 1$ δηλ. ἔχομεν τὸ $\varphi(x) = x^2 + \beta x + \gamma$.

Ἐπειδὴ $x^2 + \beta x = (x + \frac{\beta}{2})^2 - \frac{\beta^2}{4}$, τὸ τριώνυμον γράφεται:

$$\varphi(x) = x^2 + \beta x + \gamma = (x + \frac{\beta}{2})^2 - \frac{\beta^2}{4} + \gamma = (x + \frac{\beta}{2})^2 - \frac{\beta^2 - 4\gamma}{4} \quad (1)$$

Ἐὰν λοιπὸν εἶναι $\beta^2 - 4\gamma = 0$, τότε τὸ $\varphi(x)$ εἶναι ἀνάπτυγμα τελείου τετραγώνου, καθόσον ἔχομεν ὅτι $\varphi(x) = x^2 + \beta x + \gamma = \left(x + \frac{\beta}{2}\right)^2$. Ἐὰν $\beta^2 - 4\gamma$ εἶναι θετικὸς ἀριθμός, τότε τὸ $\varphi(x)$ παρουσιάζεται εἰς τὴν μορφὴν (1) ὡς διαφορὰ δύο τετραγώνων, ἑπομένως ἀναλύεται εἰς γινόμενον πρωτοβαθμίων παραγόντων.

Ἐὰν ὅμως εἶναι $\beta^2 - 4\gamma$ ἀρνητικὸς ἀριθμός, τότε τὸ $\varphi(x)$ εἶναι ἄθροισμα εἰς τὴν μορφὴν (1) δύο θετικῶν ποσοτήτων καὶ δὲν τρέπεται εἰς γινόμενον εἰς τὸ σύνολον R.

Π.χ. 1) $x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2 - 9 + 9 = (x+3)^2$

2) $$x^2 - 7x + 12 = (x - \frac{7}{2})^2 - \frac{49}{4} + 12 = (x - \frac{7}{2})^2 - \frac{1}{4} = (x - \frac{7}{2})^2 -$$

$$- \left(\frac{1}{2}\right)^2 = (x - \frac{7}{2} + \frac{1}{2})(x - \frac{7}{2} - \frac{1}{2}) = (x-3)(x-4)$$

3) $x^2 + 4x + 5 = (x+2)^2 - 4 + 5 = (x+2)^2 + 1$, δὲν ἀναλύεται εἰς τὸ σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

III. Κανονικὴ μορφὴ τοῦ τριωνύμου.

Εἰς τὸ τριώνυμον $\varphi(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, ἐπειδὴ εἶναι $\alpha \neq 0$ ἔχομεν:

$$\varphi(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x^2 + \frac{\beta}{\alpha}x + \frac{\gamma}{\alpha}) = \alpha(x^2 + 2\cdot\frac{\beta}{2\alpha}\cdot x + \frac{\beta^2}{4\alpha^2} -$$

$$- \frac{\beta^2}{4\alpha^2} + \frac{\gamma}{\alpha}) = \alpha\left[(x + \frac{\beta}{2\alpha})^2 - \frac{\beta^2}{4\alpha^2} + \frac{\gamma}{\alpha}\right] = \alpha\left[(x + \frac{\beta}{2\alpha})^2 - \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha^2}\right] \quad (2)$$

Ἡ μορφὴ (2) λέγεται **κανονικὴ μορφὴ** τοῦ τριωνύμου $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$.

Ἐὰν εἶναι $\beta^2 - 4\alpha\gamma = 0$, τὸ $\varphi(x)$ εἶναι τέλειον τετράγωνον ὡς πρὸς x.

Ἐὰν εἶναι $\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$, τὸ $\varphi(x)$ τρέπεται εἰς γινόμενον δύο πρωτοβαθμίων παραγόντων ὡς πρὸς x.

Ἐὰν εἶναι $\beta^2 - 4\alpha\gamma < 0$, τὸ $\varphi(x)$ δὲν ἀναλύεται εἰς γινόμενον. Ἡ ποσότης $\beta^2 - 4\alpha\gamma$ λέγεται **διακρίνουσα** τοῦ τριωνύμου $\varphi(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ καὶ συμβολίζεται μὲ τὸ Δ.

Παραδείγματα : 1ον. $\varphi(x) = 4x^2 + 12x + 9 = 4\left(x^2 + 3x + \frac{9}{4}\right) =$

$= 4\left[\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + \frac{9}{4}\right] = 4\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = 4\,\frac{(2x+3)^2}{4} = (2x+3)^2.$

Εἶναι $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 12^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 144 - 144 = 0.$

2ον. $\varphi(x) = 2x^2 - x - 15 = 2\left(x^2 - \frac{x}{2} - \frac{15}{2}\right) = 2\left[\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} - \frac{15}{2}\right] =$

$= 2\left[\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{121}{16}\right] = 2\left[\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{11}{4}\right)^2\right] = 2\left(x - \frac{1}{4} + \frac{11}{4}\right)\left(x - \frac{1}{4} - \frac{11}{4}\right) =$

$= 2\left(x + \frac{10}{4}\right)\left(x - \frac{12}{4}\right) = 2\left(x + \frac{5}{2}\right)(x-3) = (2x+5)(x-3).$

Εἶναι $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 1^2 + 4 \cdot 2 \cdot 15 = 121 > 0.$

3ον. $\varphi(x) = 3x^2 + 5x + 4 = 3\left(x^2 + \frac{5}{3}x + \frac{4}{3}\right) = 3\left[\left(x + \frac{5}{6}\right)^2 - \right.$

$\left. - \frac{25}{36} + \frac{4}{3}\right] = 3\left[\left(x + \frac{5}{6}\right)^2 + \frac{23}{36}\right]$, δὲν ἀναλύεται εἰς γινόμενον εἰς τὸ σύνολον τῶν σχετικῶν. Εἶναι $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 5^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4 = 26 - 48 = -23 < 0$

Γ) Συνδυασμὸς τῶν προηγουμένων περιπτώσεων ἀναλύσεως πολυωνύμου.

Κατὰ τὴν τροπὴν εἰς γινόμενον ἑνὸς πολυωνύμου, ἐφ' ὅσον εἶναι δυνατὴ ἡ ἀνάλυσις αὐτή, εἶναι πολλάκις ἀνάγκη νὰ γίνῃ ἐφαρμογὴ καὶ συνδυασμὸς δύο ἢ περισσοτέρων τῶν ἤδη ἐξετασθεισῶν περιπτώσεων.

Παραδείγματα : 1ον $\alpha^4 + \alpha^2\beta^2 + \beta^4 = \alpha^4 + 2\alpha^2\beta^2 + \beta^4 - \alpha^2\beta^2 =$
$= (\alpha^2 + \beta^2)^2 - (\alpha\beta)^2 = (\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta)(\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta).$

2ον. $(x + \psi)^2 - \omega^2 - x\psi(x + \psi + \omega) = (x + \psi + \omega)(x + \psi - \omega) -$
$- x\psi(x + \psi + \omega) = (x + \psi + \omega)(x + \psi - \omega - x\psi).$

3ον. $(x^2 - 9)^2 - (x + 5)(x - 3)^2 = (x + 3)^2(x - 3)^2 - (x + 5)(x - 3)^2 =$
$= (x - 3)^2[(x + 3)^2 - (x + 5)] = (x - 3)^2(x^2 + 6x + 9 - x - 5) =$
$= (x - 3)^2(x^2 + 5x + 4).$

Ἀλλά: $x^2 + 5x + 4 = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 4 = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} =$

$= \left(x + \frac{5}{2} + \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{5}{2} - \frac{3}{2}\right) = (x + 4)(x + 1)$, ἑπομένως εἶναι :
$(x^2 - 9)^2 - (x + 5)(x - 3)^2 = (x - 3)^2(x + 4)(x + 1).$

4ον. Νὰ ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον ἡ παράστασις.

$$\Pi(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 - 2\alpha^2\beta^2 - 2\alpha^2\gamma^2 - 2\beta^2\gamma^2$$

Εἶναι $\Pi(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 + 2\alpha^2\beta^2 - 2\alpha^2\gamma^2 - 2\beta^2\gamma^2 - 4\alpha^2\beta^2 =$
$= (\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2)^2 - 4\alpha^2\beta^2 = (\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 + 2\alpha\beta)(\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 - 2\alpha\beta) =$
$= [(\alpha + \beta)^2 - \gamma^2][(\alpha - \beta)^2 - \gamma^2] =$
$= (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha + \beta - \gamma)(\alpha - \beta + \gamma) \cdot (\alpha - \beta - \gamma).$

5ον. Νὰ ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον ἡ παράστασις :

$$\Pi(\alpha,\beta,\gamma) = \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \alpha^2\gamma + \alpha\gamma^2 + \beta^2\gamma + \beta\gamma^2 + 2\alpha\beta\gamma$$

Ἔχομεν $\Pi(\alpha,\beta,\gamma) = (\alpha^2\beta + \alpha\beta^2) + (\alpha^2\gamma + \beta^2\gamma + 2\alpha\beta\gamma) + (\gamma^2\alpha + \gamma^2\beta) =$
$= \alpha\beta(\alpha + \beta) + \gamma(\alpha + \beta)^2 + \gamma^2(\alpha + \beta) = (\alpha + \beta)[\alpha\beta + \gamma(\alpha + \beta) + \gamma^2] =$

$= (\alpha + \beta)[\alpha\beta + \gamma\alpha + \gamma\beta + \gamma^2] = (\alpha + \beta)[\alpha(\beta + \gamma) + \gamma(\beta + \gamma)] =$
$= (\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha).$

Σημείωσις. Κάθε ἀκεραία παράστασις, ἡ ὁποία δὲν θὰ ἀναλύεται εἰς γινόμενον ἐγγραμμάτων ἀκεραίων παραγόντων, θὰ λέγεται **πρώτη**. Λ.χ. αἱ παραστάσεις $x + 5$, $7x^2 + \psi^2$, $12(\alpha^2 + \beta^2)$, $x^2 + x\psi + \psi^2$ εἶναι πρῶται.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

196) Τρέψατε εἰς γινόμενα παραγόντων τὰ πολυώνυμα
α) $3x^2\psi - 2x\psi^2 + 5x^2\psi^2$ β) $2\alpha^3\beta^2\gamma + 7\alpha^2\beta\gamma x - \sqrt{3}\alpha^2\beta\gamma^2\psi$
γ) $\alpha(x - \psi) - \lambda(x - \psi)$ δ) $x^2(\alpha - \beta) - \alpha + \beta$
ε) $4(\alpha - 3\beta)(3x - \psi) + 5(3\beta - \alpha)(x - 3\psi)$

197) Τρέψατε εἰς γινόμενα παραγόντων τὰ πολυώνυμα
α) $\psi^2 + \alpha\psi + \beta\psi + \alpha\beta$ β) $3\omega^3 - 7\omega^2 + 3\omega - 7$
γ) $6x^2 + 3\lambda^2 x + 8\lambda x + 4\lambda^3$ δ) $44\alpha^4\beta + 77\alpha^3\beta^3 - 20\alpha^2\beta^2 - 35\alpha\beta^4$
ε) $\alpha\beta(x^2 + \psi^2) + x\psi(\alpha^2 + \beta^2)$ στ) $(\alpha + \beta)^3 - (\alpha^3 + \beta^3)$
ζ) $(\alpha + \beta - \gamma)^2 - (\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2)$ η) $\omega^5 + \omega^4 + \omega^3 + \omega^2 + \omega + 1$

198) Τρέψατε εἰς γινόμενα παραγόντων τὰς παραστάσεις
α) $\omega^2 - 1$ β) $7x^3 - 7x$ γ) $4\psi^2 - 7$ δ) $4\alpha^2 - 49\beta^2$
ε) $49\alpha^6 - \psi^4$ στ) $20\alpha^3 x^3 - 5\alpha x$ ζ) $(3x - 2\alpha + \beta)^2 - (\alpha + 3x - \beta)^2$
η) $(5\alpha^2 + 2\alpha - 3)^2 - (\alpha^2 - 2\alpha - 3)^2$ θ) $\psi^7 - \psi^5 - \psi^3 + \psi$

199) Τρέψατε εἰς γινόμενα παραγόντων τὰς παραστάσεις :
α) $\lambda x^4 - \lambda$, β) $\omega^6 - \alpha^6$, γ) $\alpha\beta^4 - \alpha^4\beta$, δ) $\omega^6 + 125\alpha^6$
ε) $\alpha^5 - \alpha^3 - \alpha^2 + 1$, στ) $x^3\psi^3 - x^3 - \psi^3 + 1$, ζ) $(\beta^2 + 4)(x^2 + 1) - (\beta + 2x)^2$
η) $\lambda x^2 + 2\lambda x\psi + \lambda\psi^2 - (x + \psi)^3$ θ) $\alpha^6 - 9\alpha^4\beta^2 - \alpha^2\beta^4 + 9\beta^6$

200) Ποῖον εἶναι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ πολυωνύμου $\Phi(x) = x^3 - x^2 - 21x + 45$ διὰ τοῦ $x + 5$; Τρέψατε τὸ $\Phi(x)$ εἰς γινόμενον πρωτοβαθμίων παραγόντων.

201) Νὰ ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενα τὰ πολυώνυμα :
α) $\alpha^4 - 18\alpha^2 + 81$, β) $\psi^3 + \psi - 2\psi^2$, γ) $2\omega^2 + 2\omega\psi + \frac{1}{2}\psi^2$
δ) $(x + \psi)^2 + 1 - 2(x + \psi)$, ε) $(\alpha^2 + 9)(x^2 + 4) - (\alpha x + 6)^2$
στ) $(\alpha^2 + \beta^2)(x^2 + \psi^2) - (\alpha x + \beta\psi)^2$, ζ) $(3x^2 - 2)^2 + 32(3x^2 - 2) + 256$

202) Ὁμοίως τὰ πολυώνυμα :
α) $25x^2 - 110x + 121$, β) $25x^2 - 20\alpha x + 4\alpha^2$
γ) $x^2 + 7x + 10$, δ) $x^2 - x - 6$, ε) $x^2 + 4x + 3$
στ) $x^2 - 2x - 8$, ζ) $x^2 - 3\alpha x + 2\alpha^2$, η) $\psi^2 - (K + \lambda)\psi + K\lambda$
θ) $x^2 + 8x + 12$, ι) $x^2 + 3x + 5$ ια) $x^2 - 7x + 13$

203) Ὁμοίως τὰ τριώνυμα :
α) $9x^2 - 30x + 25$ β) $3\psi^2 + 5\psi - 2$, γ) $7\omega^2 + 25\omega - 50$
δ) $5z^2 + 7z + 3$ ε) $2\psi^2 - 5\psi + 4$ στ) $-3\omega^2 + 4\omega - 3$

204) Ὁμοίως αἱ παραστάσεις :
α) $(x + 3)(x - 1)^2 - 4(x + 3)$, β) $(\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2)^2 - 4\alpha^2\beta^2$
γ) $\lambda^4 + \lambda^2 + 1$, δ) $16\lambda^4 + 9\mu^4$, ε) $\omega^4 - \alpha^4 - \alpha^2\beta^2 + 2\alpha^3\beta$
στ) $\alpha^2 + 4\alpha\beta + 3\beta^2$, ζ) $\alpha^2 - 4\alpha\beta + 3\beta^2$, η) $16\omega^4 - 17\omega^2 + 1$

205) Τρέψατε εἰς γινόμενον τὴν παράστασιν :
$A = (x - \alpha)^3 + (x + \alpha)^2(x - \alpha) - 2\beta(x^2 + \alpha^2)$. Ποία ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς A διὰ $x = \alpha + \beta$;

206) Νὰ τραποῦν εἰς γινόμενα παραγόντων αἱ παραστάσεις :
α) $16\alpha^2\beta^2 - 4\beta^4 - 4\alpha^4 + \alpha^2\beta^2$
β) $\psi^5 + 2\psi^4 + \psi^3 - \psi^2 - 2\psi - 1$

γ) $x^3 + 2x^2 - 3$ δ) $\psi^3 + \psi^2 - 2$

ε) $(\omega^2 - 4)^2 - (3\omega - 2)(\omega + 2)^2$

στ) $(\alpha - \beta)^3 + (\beta - \gamma)^3 + 3(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)$

207) Νὰ μετασχηματισθῇ τὸ πολυώνυμον:

$\varphi(x) = (3x - 1)(x - 2)^2 - 9(3x - 1)$ εἰς γινόμενον πρωτοβαθμίων παραγόντων καθὼς καὶ τὸ $f(x) = x^2 - 4x - 5$.

Ποία ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ πηλίκου $\varphi(x) : f(x)$ ὅταν $x = 0$ ἢ $x = -3$;

208) Νὰ τραπῇ εἰς γινόμενον τὸ $\Phi(x) = (x^2 - 9)^2 - (x + 5)(x - 3)^2$ καθὼς καὶ τὸ $F(x) = x(x - 6)(x + 4) + 9x + 36$ καὶ νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ πηλίκου $\Phi(x) : F(x)$ ὅταν $x = -3$, $x = -\frac{1}{2}$, $x = 0$.

58. Μ.Κ.Δ. ΚΑΙ Ε.Κ.Π. ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ.

α) Μ.Κ.Δ. δύο ἢ περισσοτέρων πολυωνύμων. Εἰς τὴν διαίρεσιν πολυωνύμου διὰ πολυωνύμου (§ 54, Η) εἴδομεν ὅτι ἕνα ἀκέραιον πολυώνυμον Φ εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ ἀκεραίου πολυωνύμου Δ, ἐὰν ὑπάρχῃ ἕνα τρίτον ἀκέραιον πολυώνυμον Π, ὥστε νὰ εἶναι **Φ = Δ. Π.** (1). Τὸ Φ λέγεται καὶ **πολλαπλάσιον τοῦ Δ**, τὸ δὲ **Δ διαιρέτης τοῦ Φ.** Ἀπὸ τὴν (1) συνάγομεν ὅτι τὸ Φ εἶναι καὶ πολλαπλάσιον τοῦ Π, τὸ δὲ Π διαιρέτης τοῦ Φ.

Παράδειγμα. Τὸ $(x + 1)^3$ εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ $x + 1$.

Τὸ $x^3 - \psi^3$ εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ $x - \psi$.

Τὸ $x^3 + \psi^3$ δὲν εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ $x - \psi$.

Παρατήρησις. Ἐὰν τὸ πολυώνυμον Δ εἶναι διαιρέτης τοῦ Φ, τότε καὶ κάθε πολυώνυμον λΔ, ὅπου λ εἶναι σταθερὰ διάφορος τοῦ μηδενός, εἶναι διαιρέτης τοῦ Φ.

Π.χ. τοῦ $x^4 - \psi^4$ εἶναι διαιρέτης τὸ $x^2 - \psi^2$ καθὼς καὶ τὸ $5(x^2 - \psi^2)$, τὸ $-4(x^2 - \psi^2)$, τὸ $\lambda(x^2 - \psi^2)$, ὅπου λ σταθερὰ $\neq 0$.

Ὁρισμός. Δοθέντων δύο ἀκεραίων πολυωνύμων Φ καὶ Σ καλεῖται κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν κάθε ἀκέραιον πολυώνυμον Δ, τὸ ὁποῖον διαιρεῖ ἀκριβῶς καὶ τὸ Φ καὶ τὸ Σ.

Π.χ. τῶν πολυωνύμων $x^3 - 1$ καὶ $x^2 - 1$ εἶναι κοινὸς διαιρέτης τὸ πολυώνυμον $x - 1$, καθὼς καὶ τὸ $\lambda(x - 1)$, ὅπου $\lambda =$ σταθερὰ $\neq 0$.

Καλεῖται μέγιστος κοινὸς διαιρέτης δύο ἢ περισσοτέρων πολυωνύμων τὸ πολυώνυμον μεγίστου βαθμοῦ, τὸ ὁποῖον διαιρεῖ ἀκριβῶς καθὲν ἀπὸ τὰ δοθέντα.

Ἐὰν τῶν πολυωνύμων Α,Β,Γ εἶναι τὸ Δ ὁ Μ.Κ.Δ., θὰ εἶναι καὶ κάθε πολυώνυμον λΔ, ὅπου λ σταθερά, μέγιστος κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν. Ἀπὸ τοὺς ἀπείρους αὐτοὺς μεγίστους κοινοὺς διαιρέτας, οἱ ὁποῖοι μεταξύ των διαφέρουν κατὰ σταθερὸν παράγοντα, **θὰ θεωροῦμεν κατά συνθήκην ἐκεῖνον, ὁ ὁποῖος ἔχει τοὺς ἁπλουστέρους συντελεστάς.**

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν Μ.Κ.Δ. πολυωνύμων ἀναλελυμένων εἰς γινόμενα πρώτων παραγόντων, σχηματίζομεν τὸ γινόμενον τῶν κοινῶν μόνον παραγόντων αὐτῶν, λαμβανομένου ἑκάστου μὲ τὸν μικρότερον ἀπὸ τοὺς ἐκθέτας του. Συντελεστὴς τοῦ Μ.Κ.Δ. εἶναι ὁ τυχὼν ἀριθμὸς (ἀόριστος).

Παραδεγματα. 1ον. Νὰ εὑρεθῇ ὁ Μ.Κ.Δ. τῶν μονωνύμων

$18\alpha^3\beta^2\gamma x,\ -48\alpha^2\beta^3\gamma^3\omega,\ 30\alpha^4\beta^2\gamma\psi^2,\ -24\alpha^3\beta^3\gamma^2\varphi$

Εἶναι : Μ.Κ.Δ. $=\lambda\alpha^2\beta^2\gamma$ ὅπου $\lambda=$ σταθερά. Δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν τὸν λ διὰ τοῦ Μ.Κ.Δ. τῶν ἀριθμητικῶν συντελεστῶν $\lambda=6$.

2ον. Νὰ εὑρεθῇ ὁ Μ.Κ.Δ. τῶν πολυωνύμων.

$A=(x-1)^2(x+2)^2,\ B=5x(x-1)^3(x+2)^2,\ \Gamma=(x^2+3x+2)^2\cdot(x-1)$

Τὰ Α καὶ Β ἔχουν ἀναλυθῆ εἰς γινόμενα πρώτων παραγόντων.

Διὰ τὸ Γ εἶναι : $x^2+3x+2=(x+\frac{3}{2})^2-\frac{9}{4}+2=(x+\frac{3}{2})^2-\frac{1}{4}=$

$=(x+\frac{3}{2}+\frac{1}{2})(x+\frac{3}{2}-\frac{1}{2})=(x+2)(x+1)$, ἑπομένως

$\Gamma=(x+2)^2(x+1)^2(x-1)$ καὶ τότε ἔχομεν ὅτι Μ.Κ.Δ. $=(x-1)(x+2)^2$.

β) Ε.Κ.Π. δύο ἢ περισσοτέρων πολυωνύμων. Καλεῖται ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον δύο ἢ περισσοτέρων πολυωνύμων τὸ πολυώνυμον τοῦ ἐλαχίστου βαθμοῦ, τὸ ὁποῖον διαιρεῖται ἀκριβῶς δι᾿ ἑνὸς ἑκάστου ἐκ τῶν δοθέντων.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ Ε.Κ.Π. δοθέντων πολυωνύμων τὰ ὁποῖα ἔχουσιν ἀναλυθῆ εἰς γινόμενα πρώτων παραγόντων, σχηματίζομεν τὸ γινόμενον τῶν κοινῶν καὶ μὴ κοινῶν παραγόντων αὐτῶν, λαμβανομένου ἑκάστου μὲ τὸν μεγαλύτερον ἐκθέτην του.

Παραδείγματα. 1ον. Τὸ Ε.Κ.Π. τῶν μονωνύμων $6\alpha^3\beta,\ -15\alpha^4\beta^2\gamma,\ 45\alpha\beta^3\gamma x,\ -30\alpha^2\beta\gamma^3\omega$ εἶναι τὸ μονώνυμον $90\alpha^4\beta^3\gamma^3 x\omega$ ἢ γενικώτερον τὸ $\lambda\alpha^4\beta^3\gamma^3 x\,\omega$, ὅπου $\lambda=$ σταθερά $\neq 0$,

2ον. Νὰ εὑρεθῇ τὸ Ε.Κ.Π. τῶν πολυωνύμων :

$A=(x-1)^2(x+2)^2,\ B=5x(x-1)^3(x+2)^2,\ \Gamma=(x+2)^2(x+1)^2(x-1)$.

Εἶναι Ε.Κ.Π. $=5x(x-1)^3(x+2)^2(x+1)^2$ ἢ γενικώτερον

$\lambda x(x-1)^3(x+2)^2(x+1)^2$.

1ο ΕΚΠ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

209) Νὰ εὑρεθῇ ὁ Μ.Κ.Δ. τῶν παραστάσεων :

α) $12\alpha\beta x,\ 6\alpha x\psi,\ 3\alpha\beta x\psi$

β) $45\alpha^3\beta x\psi^3,\ -15\alpha^2\beta^3 xz,\ 5\alpha^3\beta x^2\psi$

γ) $x^4\psi^2-x^2\psi^4,\ x^4\psi^3+x^3\psi^4,\ x^4\psi^2+2x^3\psi^3+x^2\psi^4$

δ) $\alpha^2-\beta^2,\ \alpha^3-\beta^3,\ \alpha^4-\beta^4$

ε) $x^2-1,\ x^2-3x+2,\ x^2-x$ 2ο ΜΚΔ

201) Νὰ εὑρεθῇ τὸ Ε.Κ.Π. τῶν παραστάσεων : 3 ΕΚΠ

α) $15\alpha^3\beta^2 x\psi,\ -12\alpha^2\beta^3 x^2\omega,\ 36\alpha\beta x\omega^3,\ -5\alpha^2\beta x^3\omega^2\psi^2$

β) $6(x+\psi)^2,\ 8(x^2-\psi^2),\ 3(x-\psi)^2$

γ) $x^2-1,\ x^2+1,\ x^4-1,\ x^8-1$

δ) $A=(x^2-1)^2(x+3),\ B=(x^2+3x)(x+1)^2,\ \Gamma=(x^2+6x+9)(x-1)^2$

211) Νὰ εὑρεθῇ ὁ Μ.Κ.Δ. καὶ τὸ Ε.Κ.Π. τῶν παραστάσεων :

α) $A=35x^4(x^3-\psi^3)\ B=-42x\psi^3(x-\psi)^2(x^2+\psi^2)$,

$\Gamma=7x^2\psi(x^2-\psi^2)(x+\psi)^2$

β) $A=x^2-4x+4,\ B=x^2+x-6,\ \Gamma=x^2-4,\ \Delta=(x^2+6x+9)(x-2)^2$

γ) $A=\alpha^6-\beta^6,\ B=3\alpha^4\beta-3\alpha\beta^4,\ \Gamma=(\alpha^2-\beta^2)^2(\alpha-\beta)$

δ) $A=5\omega^5-5\omega,\ B=(\omega^2-1)(\omega^2+1)^2,\ \Gamma=(\omega^3-1)(\omega+1)(\omega^2+1)$.

95. ΡΗΤΑ ΑΛΓΕΒΡΙΚΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ.

α) Ἀλγεβρικὸν κλάσμα. Τὸ ἀκριβὲς πηλίκον δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν α καὶ β, συμβολίζεται μὲ τὸ $\frac{\alpha}{\beta}$, καὶ λέγεται ἀλγεβρικὸν κλάσμα. Ὑποτίθεται $\beta \neq 0$.

Π.χ. $\frac{-3}{5}$, $\frac{3}{-5}$, $\frac{-3}{-5}$, $\frac{3}{5}$ εἶναι ἀλγεβρικὰ κλάσματα.

Τὰ ἀλγεβρικὰ κλάσματα εἶναι σχετικοὶ ἀριθμοὶ καὶ ἰσχύουν ἐπ' αὐτῶν ὅλαι αἱ ἰδιότητες τῶν ἀριθμητικῶν κλασμάτων.

Κάθε πραγματικὸς ἀριθμὸς α τίθεται ὑπὸ τὴν μορφὴν $\frac{\alpha}{1}$ δηλ. κλάσματος μὲ παρονομαστὴν 1.

Κάθε κλάσμα μὲ ἴσους ὅρους, ἰσοῦται μὲ 1, δηλ. $\frac{\alpha}{\alpha} = 1$, $(\alpha \neq 0)$ ἐνῶ κάθε κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον $\alpha \cdot \frac{1}{\beta}$, δηλ. τοῦ ἀριθμητοῦ ἐπὶ τὸν ἀντίστροφον τοῦ παρονομαστοῦ.

Ἐὰν πολλαπλασιασωμεν ἢ διαιρέσωμεν τοὺς ὅρους κλάσματος μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ($\neq 0$) προκύπτει κλάσμα ἰσοδύναμον πρὸς τὸ δοθέν.

Ἐὰν $\left.\begin{array}{l}\beta \neq 0\\ \lambda \neq 0\end{array}\right\}$ τότε εἶναι $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\lambda\alpha}{\lambda\beta}$

Μὲ τὴν ἐφαρμογὴν τῆς ἰδιότητος αὐτῆς **ἁπλοποιοῦμεν** ἕνα κλάσμα, ἐὰν οἱ ὅροι του ἔχουν κοινὸν διαιρέτην, καὶ **τρέπομεν ἑτερώνυμα κλάσματα εἰς ὁμώνυμα.**

Αἱ πράξεις τῆς προσθέσεως, τῆς ἀφαιρέσεως, τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ τῆς διαιρέσεως γίνονται ὅπως καὶ εἰς τὰ ἀριθμητικὰ κλάσματα.

β) Ρητὸν ἀλγεβρικὸν κλάσμα. Τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως δύο πολυωνύμων Α καὶ Β τίθεται ὑπὸ τὴν μορφὴν $\frac{A}{B}$ καὶ λέγεται ρητὸν ἀλγεβρικὸν κλάσμα ἢ ἁπλῶς ρητὸν κλάσμα.

Το κλάσμα $\frac{A}{B}$ διὰ κάθε τιμὴν τῆς μεταβλητῆς ἢ τῶν μεταβλητῶν τῶν Α καὶ Β λαμβάνει ὡς ἀριθμητικὴν τιμὴν τὸ πηλίκον τῶν ἀριθμητικῶν τιμῶν τῶν Α καὶ Β διὰ τὰς θεωρουμένας τιμὰς τῶν μεταβλητῶν, ἐξαιρουμένων τῶν ὅσων μηδενίζουν τὸν παρονομαστὴν Β. Ἑπομένως τὸ κλάσμα $\frac{A}{B}$ ὡς συνάρτησις ἔχει πεδίον ὁρισμοῦ ἕνα σύνολον εἰς τὸ ὁποῖον δὲν περιέχονται αἱ τιμαὶ αἱ μηδενίζουσαι τὸν παρονομαστὴν Β. Ὥστε θὰ ὑποτίθεται πάντοτε $B \neq 0$. Π.χ. τὸ κλάσμα $\varphi(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 2}$ ὅπου $x \in R$, ἔχει πεδίον ὁρισμοῦ τὸ σύνολον $R - \{2\}$, διότι πρέπει νὰ εἶναι $x \neq 2$.

Τὸ κλάσμα $F(x) = \frac{5x - 1}{(x - 3)(x + 1)}$, $x \in R$, εἶναι ὡρισμένον διὰ κάθε x διὰ τὸ ὁποῖον εἶναι $(x - 3)(x + 1) \neq 0$, δηλ. $x \neq 3$, $x \neq -1$. Ἄρα ἡ συνάρτησις $F(x)$ ἔχει πεδίον ὁρισμοῦ τὸ σύνολον $R - \{3, -1\}$.

Τὸ κλάσμα $\sigma(x) = \dfrac{(x+2)^2}{x^2+5}$ ἔχει πεδίον ὁρισμοῦ τὸ R, διότι εἶναι $x^2 + 5 \neq 0$ διὰ κάθε $x \in R$.

Τὸ κλάσμα $\sigma(x, \psi) = \dfrac{x^2 + 5x\psi + \psi^2}{3x - \psi + 7}$ ὅπου $x \in R$ καὶ $\psi \in R$ ὁρίζεται εἰς τὸ σύνολον τῶν διατεταγμένων ζευγῶν (x, ψ) τοῦ $R \times R$ διὰ τὰ ὁποῖα εἶναι $3x - \psi + 7 \neq 0$.

γ) Ἁπλοποίησις. Κάθε κλάσμα $\frac{A}{B}$ ἁπλοποιεῖται, ἐὰν οἱ ὅροι του ἔχουν κοινὸν παράγοντα.

Παραδείγματα: 1ον Νὰ ἁπλοποιηθῇ τὸ $\varphi(x) = \dfrac{3x^2\psi z^3}{6x^3\omega z}$

Διαιροῦμεν καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος διὰ τοῦ $3x^2z$ καὶ ἔχομεν $\varphi(x) = \dfrac{\psi z^2}{2x\omega}$. Ἐπειδὴ ὑποτίθεται ὁ παρονομαστὴς τοῦ δοθέντος κλάσματος $6x^3\omega z \neq 0$, θὰ εἶναι καὶ $3x^2z \neq 0$ καὶ ἡ διαίρεσις τῶν ὅρων τοῦ $\varphi(x)$ διὰ τοῦ κοινοῦ παράγοντος $3x^2z$ εἶναι δυνατή.

2ον Νὰ ἁπλοποιηθῇ τὸ κλάσμα $\varphi(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2+5x+6}$.

Εἶναι $x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$ καὶ $x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3)$, ἐπομένως $\varphi(x) = \dfrac{(x+2)(x-2)}{(x+2)(x+3)}$. Τὸ πεδίον ὁρισμοῦ εἶναι τὸ $R - \{-2, -3\}$, διότι πρέπει νὰ εἶναι $(x+2)(x+3) \neq 0$ δηλ. $x \neq -2$, $x \neq -3$. Ἐπειδὴ ὑπάρχει κοινὸς παράγων ὁ $x + 2$ εἰς τοὺς ὅρους τοῦ $\varphi(x)$, ἁπλοποιοῦμεν καὶ ἔχομεν $\varphi(x) = \dfrac{x-2}{x+3}$. Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ νέον κλάσμα $\dfrac{x-2}{x+3}$ εἶναι ὡρισμένον διὰ $x = -2$, διότι γίνεται $\dfrac{-4}{1} = -4$ διὰ τὴν τιμὴν $x = -2$, διὰ νὰ εἶναι ὅμως ἴσον πρὸς τὸ δοθὲν $\dfrac{x^2-4}{x^2+5x+6}$ θὰ ἔχῃ καὶ αὐτὸ πεδίον ὁρισμοῦ τὸ $R - \{-2, -3\}$, δηλαδὴ καὶ διὰ τὸ κλάσμα $\dfrac{x-2}{x+3}$ θὰ θεωρεῖται ὅτι εἶναι $x \neq -2$, $x \neq -3$.

δ) Τροπὴ εἰς ὁμώνυμα. Διὰ νὰ τρέψωμεν ρητὰ κλάσματα εἰς ὁμώνυμα, ἐργαζόμεθα ὅπως καὶ εἰς τὰ ἀριθμητικά, δηλαδὴ εὑρίσκομεν ἕνα κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν παρονομαστῶν ἢ τὸ Ε.Κ.Π. καὶ πολλαπλασιάζομεν τοὺς ὅρους κάθε κλάσματος ἐπὶ τὸ ἀντίστοιχον πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ Κ.Π. ἢ τοῦ Ε.Κ.Π. διὰ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ θεωρουμένου κλάσματος.

Παραδείγματα: 1ον. Νὰ τραποῦν εἰς ὁμώνυμα τὰ κλάσματα:

$$\frac{3\alpha}{2\beta\gamma}, \quad \frac{-5\beta}{3\alpha\gamma}, \quad \frac{\gamma}{6\alpha\beta}$$

Τὸ Ε.Κ.Π. τῶν παρονομαστῶν εἶναι $6\alpha\beta\gamma$ καὶ τὰ ἀντίστοιχα πρὸς τὰ κλάσματα πηλίκα τῆς διαιρέσεως τοῦ $6\alpha\beta\gamma$ διὰ κάθε παρονομαστοῦ εἶναι 3α, 2β, γ, ἐπομένως τὰ ὁμώνυμα εἶναι:

$$\frac{9\alpha^2}{6\alpha\beta\gamma}, \quad \frac{-10\beta^2}{6\alpha\beta\gamma}, \quad \frac{\gamma^2}{6\alpha\beta\gamma}$$

2ον. Νὰ τραποῦν εἰς ὁμώνυμα τὰ κλάσματα :

$$A = \frac{3\alpha - 2}{\alpha + 3}, \quad B = \frac{\alpha + 1}{\alpha^2 - 9}, \quad \Gamma = \frac{\alpha^2 + 2}{(\alpha - 3)^2}$$

Οἱ παρονομασταὶ εἶναι : $\alpha + 3$, $\alpha^2 - 9 = (\alpha + 3)(\alpha - 3)$, $(\alpha - 3)^2$ ἑπομένως ἔχουν Ε.Κ.Π. $= (\alpha + 3)(\alpha - 3)^2$ καὶ τὰ ἀντίστοιχα πηλίκα εἶναι : $(\alpha - 3)^2$, $\alpha - 3$, $\alpha + 3$.

Πολλαπλασιάζομεν τοὺς ὅρους τοῦ A μὲ τὸ $(\alpha - 3)^2$, τοὺς ὅρους τοῦ B ἐπὶ τὸ $\alpha - 3$ καὶ τοὺς ὅρους τοῦ Γ ἐπὶ $\alpha + 3$.

εἶναι : $A = \frac{(3\alpha - 2)(\alpha - 3)^2}{(\alpha + 3)(\alpha - 3)^2}$, $B = \frac{(\alpha + 1)(\alpha - 3)}{(\alpha + 3)(\alpha - 3)^2}$, $\Gamma = \frac{(\alpha^2 + 2)(\alpha + 3)}{(\alpha + 3)(\alpha - 3)^2}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

212) Νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον ὁρισμοῦ τῶν κάτωθι κλασμάτων :

α) $\varphi(x) = \frac{5}{2x - 6}$ β) $\sigma(x) = \frac{7x + 1}{2x^2 - 3}$ γ) $\pi(x) = \frac{2x^2 + 3}{x^2 - 4x + 4}$

δ) $f(x) = \frac{3x - 1}{x^2 - 7x + 10}$ ε) $\tau(x) = \frac{-3}{x^3 - 4x}$

213) Νὰ ἁπλοποιηθοῦν τὰ κλάσματα :

α) $\frac{12x^3\alpha\psi^2}{14\alpha^2\psi^2}$ β) $\frac{27\alpha^3\beta^2\omega\psi}{18\alpha^4\beta\omega^2\psi^3}$ γ) $\frac{3x^2 + 3x}{2x^3 - 2x}$

δ) $\frac{\omega^4 - 81}{\omega^2 - 9}$ ε) $\frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 4x + 3}$ στ) $\frac{(\alpha\beta - 1)^2 - (\alpha + 1)^2}{\alpha\beta + \alpha + \beta + 1}$

ζ) $\frac{(x^2 - 4)^2 - (x + 2)^2}{x^2 - 4x + 3}$ η) $\frac{x^2 + x}{x^3 - x}$ θ) $\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 - \alpha - \beta - \beta^2}$

214) Τρέψατε εἰς ὁμώνυμα τὰ κλάσματα :

α) $A = \frac{3}{x + 2}$, $B = \frac{-x}{x - 1}$, $\Gamma = \frac{5x}{x^2 - 1}$, $\Delta = \frac{x + 2}{x + 1}$

β) $A = \frac{3\alpha\beta}{5x^3\psi^2\omega}$, $B = \frac{2x\psi}{3\alpha^2\beta\omega^2}$, $\Gamma = \frac{2\alpha x}{15\beta^2\psi^2\omega}$

γ) $A = \frac{1}{(x - \psi)(\psi - \omega)}$, $B = \frac{1}{(\psi - x)(x - \omega)}$, $\Gamma = \frac{-3}{(\omega - x)(\omega - \psi)}$

215) Νὰ ἁπλοποιηθῇ τὸ κλάσμα $\Phi(x) = \frac{x^3 - x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6}$.

Ποῖον εἶναι τὸ πεδίον τοῦ ὁρισμοῦ τούτου ;

69. ΠΡΑΞΕΙΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΡΗΤΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ.

Α) Πρόσθεσις καὶ ἀφαίρεσις. Τρέπομεν τὰ κλάσματα εἰς ὁμώνυμα, καὶ ἡ παράστασις ἰσοῦται μὲ κλάσμα ἔχον ὡς ἀριθμητὴν τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμητῶν τῶν κλασμάτων καὶ ὡς παρονομαστὴν τὸν κοινὸν παρονομαστὴν αὐτῶν, εἶναι δηλαδὴ ἕνα ρητὸν κλάσμα.

Παραδείγματα : 1ον. Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ πράξεις :

$$A = \frac{5}{3\alpha^2\beta} - \frac{2}{\alpha\beta\gamma} + \frac{3}{4\beta\gamma^2} - 2$$

Ἐπειδὴ τῶν παρονομαστῶν τὸ Ε.Κ.Π. $= 12\alpha^2\beta\gamma^2$, ἔχομεν :

$$A = \frac{20\gamma^2}{12\alpha^2\beta\gamma^2} - \frac{24\alpha\gamma}{12\alpha^2\beta\gamma^2} + \frac{9\alpha^2}{12\alpha^2\beta\gamma^2} - \frac{24\alpha^2\beta\gamma^2}{12\alpha^2\beta\gamma^2} = \frac{20\gamma^2 - 24\alpha\gamma + 9\alpha^2 - 24\alpha^2\beta\gamma^2}{12\alpha^2\beta\gamma^2}$$

2ον. Νὰ γίνῃ ἕνα ρητὸν κλάσμα ἡ παράστασις :

$$A = \frac{1}{x^2+x} + \frac{1}{x^2+3x+2} + \frac{1}{x^2+5x+6} - \frac{2}{x(x+3)}$$

Ἐπειδή : $x^2 + x = x(x+1)$, $x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$,

$x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3)$, τὸ Ε.Κ.Π. τῶν παρονομαστῶν εἶναι : $x(x+1)(x+2)(x+3)$ καὶ ἔχομεν :

$$A = \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} - \frac{2}{x(x+3)}$$

$$= \frac{(x+2)(x+3) + x(x+3) + x(x+1) - 2(x+1)(x+2)}{x(x+1)(x+2)(x+3)} =$$

$$= \frac{x^2+5x+6+x^2+3x+x^2+x-2x^2-6x-4}{x(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{x^2+3x+2}{x(x+1)(x+2)(x+3)} =$$

$$= \frac{(x+1)(x+2)}{x(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{1}{x(x+3)}.$$

Ἡ Α εἶναι ὡρισμένη εἰς τὸ σύνολον $R - \{0, -1, -2, -3\}$.

Β) Πολλαπλασιασμὸς καὶ διαίρεσις. Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ρητὰ κλάσματα σχηματίζομεν ἕνα κλάσμα μὲ ἀριθμητὴν τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμητῶν τῶν δοθέντων καὶ παρονομαστὴν τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν. Τὸ γινόμενον ρητῶν κλασμάτων εἶναι λοιπὸν ἕνα ρητὸν κλάσμα.

Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ρητὸν κλάσμα δι' ἄλλου πολλαπλασιάζομεν τὸ πρῶτον ἐπὶ τὸ ἀντίστροφον τοῦ διαιρέτου. Καὶ τὸ πηλίκον ρητῶν κλασμάτων εἶναι ρητὸν κλάσμα.

Ὥστε : $\frac{A}{B} \times \frac{\Gamma}{\Delta} = \frac{A X \Gamma}{B X \Delta}$, ἐὰν $B \neq 0$, $\Delta \neq 0$

καὶ : $\frac{A}{B} : \frac{\Gamma}{\Delta} = \frac{A}{B} \times \frac{\Delta}{\Gamma}$ ἐὰν $B \neq 0$, $\Delta \neq 0$ καὶ $\Gamma \neq 0$.

Παραδείγματα : 1ον. Νὰ γίνουν αἱ πράξεις

$$\frac{12x^3\psi}{5\alpha\beta} \cdot \frac{10\alpha^2\gamma}{x^4\psi^3} \cdot \frac{2\alpha x}{3\beta\psi} \cdot \left(\frac{-\beta\gamma}{x\psi}\right)$$

Τὸ γινόμενον εἶναι: $\frac{-240x^4\psi\alpha^3\gamma^2\beta}{15\alpha\beta^2x^5\psi^5} = \frac{-16\alpha^2\gamma^2}{\beta x\psi^4}$

(Ἐπειδὴ οἱ ὅροι κλασμάτων εἶναι γινόμενα,δυνάμεθα νὰ ἁπλοποιήσωμεν, ἀμέσως καὶ ἔπειτα νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ γινόμενον τῶν κλασμάτων).

2ον Νὰ γίνουν αἱ πράξεις : $\left[\frac{x+\psi}{x-\psi} + \frac{x-\psi}{x+\psi}\right] \times \left[\frac{x+\psi}{x-\psi} - \frac{x-\psi}{x+\psi}\right]$

Ἔχομεν : $\frac{(x+\psi)^2 + (x-\psi)^2}{(x-\psi)(x+\psi)} \times \frac{(x+\psi)^2 - (x-\psi)^2}{(x-\psi)(x+\psi)} =$

$$= \frac{(2x^2+2\psi^2)\cdot(4x\psi)}{(x-\psi)^2(x+\psi)^2} = \frac{8x\psi(x^2+\psi^2)}{(x-\psi)^2(x+\psi)^2}$$

3ον. Νὰ γίνουν αἱ πράξεις : $\frac{\alpha^2\beta^2 - \beta^4}{\alpha^3 - \beta^3} : \frac{\alpha\beta^2 + \beta^3}{\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2}$

Ἔχομεν : $\frac{\beta^2(\alpha^2-\beta^2)}{\alpha^3-\beta^3} \cdot \frac{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}{\beta^2(\alpha+\beta)} = \frac{\beta^2(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)}{(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)\beta^2(\alpha+\beta)} = 1$

(ἀνεξάρτητον τῶν α, β).

4ον. Νὰ γίνῃ ἕνα ρητὸν κλάσμα ἡ παράστασις :

$$A=\left(\frac{x-3}{3x+1}-\frac{x-4}{4x+1}\right):\left(1+\frac{x-3}{3x+1}\cdot\frac{x-4}{4x+1}\right)$$

Ἔχομεν : $\Delta=\dfrac{(4x+1)(x-3)-(3x+1)(x-4)}{(3x+1)\ (4x+1)}$, ὁ διαιρετέος ἢ καὶ

$$\Delta=\frac{4x^2+x-12x-3-3x^2-x+12x+4}{(3x+1)\ (4x+1)}=\frac{x^2+1}{(3x+1)\ (4x+1)}.$$

Ὁ διαιρέτης γίνεται : $\delta=\dfrac{(3x+1)\ (4x+1)+(x-3)\ (x-4)}{(3x+1)\ (4x+1)}=$

$$=\frac{12x^2+4x+3x+1+x^2-3x-4x+12}{(3x+1)\ (4x+1)}=\frac{13x^2+13}{(3x+1)\ (4x+1)}$$

ἄρα $A=\dfrac{x^2+1}{(3x+1)\ (4x+1)}:\dfrac{13\ (x^2+1)}{(3x+1)\ (4x+1)}$

Τὸ πεδίον ὁρισμοῦ θὰ εἶναι $R-\left\{-\frac{1}{3},-\frac{1}{4}\right\}$

καὶ ἔχομεν : $A=\dfrac{x^2+1}{(3x+1)\ (4x+1)}\cdot\dfrac{(3x+1)\ (4x+1)}{13(x^2+1)}=\dfrac{1}{13}$ διότι εἶναι καὶ $x^2+1\neq 0$ διὰ κάθε $x\in R$.

Ὥστε ἡ A εἶναι σταθερά, ἀνεξάρτητος τοῦ x.

Γ) Σύνθετα κλάσματα. Κάθε κλάσμα τοῦ ὁποίου ὁ ἕνας τουλάχιστον ὅρος περιέχει κλάσμα λέγεται σύνθετον. Τὸ ρητὸν κλάσμα μὲ ὅρους ἀκεραίας παραστάσεις λέγεται ἁπλοῦν κλάσμα.

Ἕνα σύνθετον κλάσμα τρέπεται εἰς ἁπλοῦν, ἐὰν διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμητήν του διὰ τοῦ παρονομαστοῦ του. Ἐπίσης ἕνα σύνθετον κλάσμα τρέπεται εἰς ἁπλοῦν ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν καὶ τοὺς δύο ὅρους του ἐπὶ ἕνα κοινὸν πολλαπλάσιον καὶ συνήθως ἐπὶ τὸ Ε.Κ.Π. τῶν παρονομαστῶν, τοὺς ὁποίους θέλομεν νὰ ἐξαλείψωμεν.

Παραδείγματα : 1ον. Νὰ γίνῃ ἁπλοῦν τὸ $K=\dfrac{\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x-1}{x}}{\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{x-1}{x}}$.

Ὁ ἀριθμητὴς γίνεται : $A=\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x-1}{x}=\dfrac{x^2+x^2-1}{x\ (x+1)}=\dfrac{2x^2-1}{x\ (x+1)}$

καὶ ἔχει ἔννοιαν πραγματικοῦ ἀριθμοῦ ὅταν $x\neq 0$ καὶ $x\neq -1$, δηλ. ὁρίζεται εἰς τὸ σύνολον $R-\{0,-1\}$.

Ὁ παρονομαστὴς γίνεται : $\Pi=\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{x-1}{x}=\dfrac{x^2-x^2+1}{x\ (x+1)}=\dfrac{1}{x\ (x+1)}$

καὶ ὁρίζεται εἰς τὸ αὐτὸ μὲ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ K σύνολον.

Ἔχομεν λοιπὸν $K=\dfrac{A}{\Pi}=\dfrac{2x^2-1}{x(x+1)}:\dfrac{1}{x(x+1)}=\dfrac{(2x^2-1)x\ (x+1)}{x\ (x+1)}=2x^2-1.$

2ον. Νὰ γίνῃ ἁπλοῦν τὸ σύνθετον $K=\dfrac{\dfrac{x+\psi}{x-\psi}+\dfrac{x-\psi}{x+\psi}}{\dfrac{1}{(x+\psi)^2}+\dfrac{1}{(x-\psi)^2}}$

Πολλαπλασιάζομεν καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ K ἐπὶ τὸ γινόμενον $(x+\psi)^2\ (x-\psi)^2$ Ὑποτίθεται $x\neq\psi$ καὶ $x\neq-\psi$.

Έχομεν $K = \dfrac{\left[\dfrac{x+\psi}{x-\psi}+\dfrac{x-\psi}{x+\psi}\right](x+\psi)^2(x-\psi)^2}{\left[\dfrac{1}{(x+\psi)^2}+\dfrac{1}{x-\psi^2}\right](x+\psi)^2(x-\psi)^2} =$

$$= \frac{(x+\psi)^3(x-\psi)+(x-\psi)^3(x+\psi)}{(x-\psi)^2+(x+\psi)^2} = \frac{(x+\psi)(x-\psi)[(x+\psi)^2+(x-\psi)^2]}{(x-\psi)^2+(x+\psi)^2} =$$

$= (x+\psi)(x-\psi) = x^2-\psi^2.$

3ον. Νὰ γίνῃ ἁπλοῦν τὸ σύνθετον $K = \dfrac{\dfrac{1-\dfrac{2}{x}}{\dfrac{1}{x}+2} - \dfrac{x-3}{1+3x}}{1+\dfrac{\left(1-\dfrac{2}{x}\right)\left(1-\dfrac{3}{x}\right)}{\left(2+\dfrac{1}{x}\right)\left(3+\dfrac{1}{x}\right)}}$

Ὁ ἀριθμητής, ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι εἶναι $x \neq 0$, $x \neq -\dfrac{1}{3}$,

γίνεται : $A = \dfrac{\dfrac{x-2}{x}}{\dfrac{1+2x}{x}} - \dfrac{x-3}{1+3x} = \dfrac{x-2}{2x+1} - \dfrac{x-3}{3x+1}$. Ἐὰν καὶ $x \neq -\dfrac{1}{2}$

εἶναι : $A = \dfrac{(x-2)(3x+1)-(x-3)(2x+1)}{(2x+1)(3x+1)} = \dfrac{x^2+1}{(2x+1)(3x+1)}$.

Ὁ παρονομαστής, μὲ τὰς αὐτὰς ὡς καὶ εἰς τὸν ἀριθμητὴν ὑποθέσεις διὰ τὸν x, γίνεται :

$\Pi = 1 + \dfrac{(x-2)(x-3)}{(2x+1)(3x+1)} = \dfrac{(2x+1)(3x+1)+(x-2)(x-3)}{(2x+1)(3x+1)} = \dfrac{7x^2+7}{(2x+1)(3x+1)} =$

$= \dfrac{7(x^2+1)}{(2x+1)(3x+1)}$.

Ἑπομένως εἶναι $K = A : \Pi = \dfrac{x^2+1}{(2x+1)(3x+1)} : \dfrac{7(x^2+1)}{(2x+1)(3x+1)} =$

$= \dfrac{(x^2+1)(2x+1)(3x+1)}{(2x+1)(3x+1)\,7(x^2+1)} = \dfrac{1}{7}$ ἀνεξάρτητον τοῦ x, διὰ κάθε

$x \in R - \left\{0, -\dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{2}\right\}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

216) Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ πράξεις :

α) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\psi}+\dfrac{1}{\omega}-\dfrac{1}{x\psi\omega}$ β) $\dfrac{x}{3\alpha\beta}+\dfrac{2\psi}{5\beta\gamma}-\dfrac{\omega}{6\alpha\gamma}$ γ) $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{3}{x^2-1}$

δ) $\dfrac{x^2}{x-\psi}+\dfrac{\psi^2}{\psi-x}$ ε) $\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2}{x+2}+\dfrac{1}{x-3}$ στ) $\dfrac{\alpha}{\alpha-\beta}+\dfrac{\alpha\beta}{\beta^2-\alpha^2}$

217) Νὰ γίνουν ἕνα ρητὸν κλάσμα αἱ παραστάσεις :

α) $\dfrac{2x-1}{5}+\dfrac{x+3}{4}-\dfrac{9x-1}{10}$ β) $\dfrac{1}{\alpha+3}+\dfrac{1}{\alpha-3}-\dfrac{6}{\alpha^2-9}$

γ) $\dfrac{x-1}{x+3}-\dfrac{x-3}{x+1}$ δ) $\dfrac{x-\alpha}{x-\beta}+\dfrac{x-\beta}{x-\alpha}-\dfrac{(\alpha-\beta)^2}{(x-\alpha)(x-\beta)}$

218) Ὁμοίως αἱ παραστάσεις :

α) $2x - 1 + \dfrac{3 - 5x^2}{x + 3}$ β) $7 + \dfrac{2\alpha}{\alpha + \beta} - \dfrac{3\beta}{\alpha - \beta}$

γ) $\dfrac{2x\psi}{x + \psi} - x$ δ) $\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta - 2\alpha}$ ε) $\dfrac{7}{3\alpha + 5} - \dfrac{2}{\alpha - 1}$

219) Νὰ εὑρεθῇ, ἂν $\omega \in R$, τὸ πεδίον ὁρισμοῦ τῆς

$$A = \frac{\omega - 3}{4(\omega^2 - 3\omega + 2)} + \frac{\omega - 2}{\omega^2 - 4\omega + 3} - \frac{\omega - 1}{4(\omega^2 - 5\omega + 6)}$$

νὰ τεθῇ ἡ Α ὑπὸ τὴν μορφὴν ἑνὸς ρητοῦ κλάσματος καὶ νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ ἐξαγομένου, ὅταν εἶναι $\omega = 1$ ἢ $\omega = -2$.

220) Νὰ γίνῃ ἕνα ρητὸν κλάσμα ἡ παράστασις :

$$A = \frac{\alpha + 2\beta}{\alpha^2 + 4\alpha\beta + 3\beta^2} + \frac{\alpha + 3\beta}{4(\alpha^2 + 3\alpha\beta + 2\beta^2)} - \frac{\alpha + \beta}{4(\alpha + 2\beta)(\alpha + 3\beta)}$$

221) Ἐὰν $\psi \in R$ νὰ εὑρεθῇ τὸ πεδίον ὁρισμοῦ τῆς παραστάσεως

$A = \dfrac{1}{\psi + \psi^2} + \dfrac{1}{\psi^2 + 3\psi + 2} + \dfrac{1}{\psi^2 + 5\psi + 6} - \dfrac{2}{\psi(\psi + 3)}$, νὰ τεθῇ ἡ Α ὑπὸ τὴν μορφὴν ρητοῦ κλάσματος καὶ νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τούτου διὰ $\psi = -2$.

222) Νὰ ἁπλοποιηθῇ κάθε μία ἀπὸ τὰς παραστάσεις :

$$A = \frac{(x^2 - 9)^2 - (x + 5)(x - 3)^2}{(x^2 + x - 12)^2}, \quad B = \frac{(x^2 - 1)^2 + 9(x + 1)^2}{(x^2 + 6x + 5)^2}$$

καὶ νὰ προσδιορισθῇ τὸ ἄθροισμα Α + Β.

223) Νὰ γίνουν αἱ πράξεις :

α) $\dfrac{7x\psi}{\omega^2} \cdot \dfrac{3\alpha\omega}{\psi^2}$ β) $\left(-\dfrac{3x^3\psi}{2\alpha\beta^2}\right) \cdot \left(-\dfrac{4\alpha\beta^3}{5x\psi^2}\right) \cdot \dfrac{10\alpha\psi}{\beta x^2}$

γ) $\dfrac{3x + 2}{5x^2} \cdot \dfrac{2x}{9x^2 - 4} \cdot \dfrac{3x - 2}{4}$ δ) $\dfrac{x^2 - 1}{\alpha + \beta} : \dfrac{x + 1}{\alpha^2 - \beta^2}$ ε) $\left[\dfrac{6x^3\omega}{5\alpha\beta} \cdot \dfrac{\beta^2 x\omega}{\alpha\gamma}\right] : \dfrac{2x^2\omega}{5\alpha\beta\gamma}$

στ) $\left[\dfrac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} + \dfrac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}\right] : \left[\dfrac{1}{(\alpha + \beta)^2} + \dfrac{1}{(\alpha - \beta)^2}\right]$

224) Νὰ γίνουν αἱ πράξεις :

α) $\left[\dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x + 1} \cdot \dfrac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 3x + 2}\right] : \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 4}$ β) $\left[\dfrac{\alpha}{\alpha + 1} + \dfrac{\alpha - 1}{\alpha}\right] : \left[\dfrac{\alpha}{\alpha + 1} - \dfrac{\alpha - 1}{\alpha}\right]$

γ) $\left[\alpha - \dfrac{4\psi^2}{\alpha}\right] \cdot \left[\beta - \dfrac{4x^2}{\beta}\right] : \left[1 + \dfrac{2x}{\beta} + \dfrac{2\psi}{\alpha} + \dfrac{4x\psi}{\alpha\beta}\right]$

δ) $\left[\dfrac{1 + x}{1 - x} - \dfrac{1 - x}{1 + x}\right] : \dfrac{2x^2}{1 - x}$ ε) $\left[\dfrac{2\alpha}{\alpha^2 - x^2} + \dfrac{3}{\alpha + x} - \dfrac{1}{\alpha - x}\right] : \left[\dfrac{\alpha^2 + x^2}{\alpha x^2} + \dfrac{2}{x}\right]$

στ) $\left[\dfrac{\alpha^4 + \alpha^2\beta^2 + \beta^4}{\alpha^2 - 4\alpha\beta - 21\beta^2} \cdot \dfrac{\alpha^2 + 2\alpha\beta - 3\beta^2}{\alpha^3 - \beta^3}\right] : \dfrac{1}{\alpha - 7\beta}$

225) Νὰ γίνῃ ἕνα ρητὸν κλάσμα ἡ παράστασις :

α) $A = \dfrac{x^4 + x^2\psi^2 + \psi^4}{x^3 + \psi^3} \cdot \dfrac{x^2 + 3x\psi + 2\psi^2}{x^2 - 3x\psi - 10y^2} : \dfrac{1}{x - 5\psi}$

β) $B = \dfrac{\dfrac{2\alpha\beta}{\alpha + \beta} - \beta}{\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta - 2\alpha}} + \dfrac{\dfrac{2\alpha\beta}{\alpha + \beta} - \alpha}{\dfrac{1}{\beta} + \dfrac{1}{\alpha - 2\beta}} - \dfrac{1 - \dfrac{x - \alpha}{\alpha}}{\dfrac{x + 1}{\beta x} - \dfrac{1}{\beta}}$

γ) $\Gamma = \dfrac{3}{1 + \dfrac{\alpha}{\beta + \gamma}} + \dfrac{3}{1 + \dfrac{\beta}{\alpha + \gamma}} + \dfrac{3}{1 + \dfrac{\gamma}{\alpha + \beta}}$

δ) $\Delta = \dfrac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha - \dfrac{\beta}{1+\dfrac{\beta}{\alpha-\beta}}} + \dfrac{\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha}}{\dfrac{1}{\alpha\beta}} - \dfrac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha+\dfrac{\beta}{1-\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}}}$

226) Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ πράξεις :

α) $\dfrac{1}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + \dfrac{1}{(\beta-\gamma(\beta-\alpha)} + \dfrac{1}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$

β) $\dfrac{\alpha}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + \dfrac{\beta}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)} + \dfrac{\gamma}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$

γ) $\dfrac{\beta+\gamma}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + \dfrac{\gamma+\alpha}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)} + \dfrac{\alpha+\beta}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$

δ) $\dfrac{\beta\gamma}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + \dfrac{\gamma\alpha}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)} + \dfrac{\alpha\beta}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$

227) Ἐὰν εἶναι $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}=0$ δείξατε ὅτι ἀληθεύει :

α) $(\alpha+\beta+\gamma)^2 = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ β) $\dfrac{\alpha(\beta^3-\gamma^3)}{\beta-\gamma} + \dfrac{\beta(\gamma^3-\alpha^3)}{\gamma-\alpha} + \dfrac{\gamma(\alpha^3-\beta^3)}{\alpha-\beta} = 0$

228) Δείξατε ὅτι αἱ παραστάσεις :

$K = \dfrac{x^5+2x^4+4x^3+2x^2+4x+8}{x^2+2x+4}$, $\Lambda = \dfrac{x^5-2x^4+4x^3-2x^2+4x-8}{x^2-2x+4}$

εἶναι πάντοτε ὡρισμέναι εἰς τὸ $\mathbb{R}$, ὅτι ἰσοδυναμοῦν μὲ ἀκεραίας παραστάσεις καὶ προσδιορίσατε κατόπιν τὴν παράστασιν $K^2+\Lambda^2$ καὶ τὴν $K\cdot\Lambda$.

229) Ἐὰν εἶναι $\alpha = \dfrac{1}{1+x}, \beta = \dfrac{1}{1-x}$ προσδιορίσατε τὴν τιμὴν τῆς $T = \dfrac{\alpha+\beta x}{\beta-\alpha x}$

230) Ἐὰν $\dfrac{x}{\psi} = \dfrac{2}{5}$ νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τῆς $A = \dfrac{2x+\psi}{4(x-\psi)}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VI

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΤΟΥ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

61. Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΣ. Η ΕΞΙΣΩΣΙΣ ΤΟΥ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ.

Α) Ἂς λάβωμεν τὰς συναρτήσεις - πολυώνυμα τοῦ πρώτου βαθμοῦ :
(1) $\forall x \in R : x \to 3x - 7 = \varphi(x)$, (2) $\forall x \in R : x \to x + 5 = \sigma(x)$
Αἱ (1) καὶ (2) ἔχουν κοινὸν πεδίον ὁρισμοῦ, τὸ R. Παρατηροῦμεν ὅτι εἶναι : $\varphi(6) = 3 \cdot 6 - 7 = 11$ καὶ $\sigma(6) = 6 + 5 = 11$, δηλαδὴ **τὸ ἀρχέτυπον $6 \in R$ ἔχει καὶ μὲ τὴν συνάρτησιν φ καὶ μὲ τὴν συνάρτησιν σ τὴν αὐτὴν εἰκόνα, τὸν $11 \in R$.**

Ἐπειδὴ εἶναι $\varphi(6) = \sigma(6)$ λέγομεν ὅτι **ἡ ἰσότης $3x - 7 = x + 5$ ἀληθεύει διὰ $x = 6$.**

Εἰς τὰ ἑπόμενα μαθήματα θὰ ἴδωμεν ὅτι **ἡ ἰσότης $3x - 7 = x + 5$ ἀληθεύει μόνον διὰ $x = 6$.** Διὰ κάθε $x \neq 6$ εἶναι $3x - 7 \neq x + 5$.

Β) Θεωροῦμεν τὰς συναρτήσεις - πολυώνυμα
(1) $\forall x \in R : x \to x + 4 = \varphi_1(x)$, (2) $\forall x \in R : x \to x + 5 = \sigma_1(x)$

Εὐκόλως ἀντιλαμβανόμεθα ὅτι ἡ ἰσότης $x + 4 = x + 5$ δὲν ἀληθεύει διὰ καμμίαν τιμὴν τοῦ $x \in R$. **Τὸ σύνολον τῶν τιμῶν της $x \in R$ διὰ τὰς ὁποίας εἶναι $\varphi_1(x) = \sigma_1(x)$ εἶναι τὸ $\varnothing$.**

Γ) Ἐὰν λάβωμεν τὰς συναρτήσεις - πολυώνυμα
(1) $\forall x \in R : x \to 2(x + 3) = \varphi_2(x)$, (2) $\forall x \in R : x \to 2x + 6 = \sigma_2(x)$
ἀντιλαμβανόμεθα ἀμέσως ὅτι ἡ πρότασις : $\varphi_2(x) = \sigma_2(x)$ ἀληθεύει διὰ κάθε $x \in R$, **δηλ. τὸ σύνολον τῶν $x \in R$, διὰ τὰ ὁποῖα ἀληθεύει ἡ ἰσότης $2(x + 3) = 2x + 6$ εἶναι τὸ ἴδιον τοῦ R.**

Δ) **Γενικῶς.** Ἐὰν $x \to \varphi(x)$ καὶ $x \to \sigma(x)$ εἶναι δύο τυχοῦσαι συναρτήσεις μὲ κοινὸν πεδίον ὁρισμοῦ ἕνα ὑποσύνολον Μ τοῦ R ἡ πρότασις :

$\boxed{\varphi(x) = \sigma(x)}$ (ε) καλεῖται **ἐξίσωσις μὲ ἄγνωστον τὸν x.**

Ἡ παράστασις $\varphi(x)$ εἶναι τὸ **α΄ μέλος,** ἡ δὲ $\sigma(x)$ τὸ **β΄ μέλος τῆς ἐξισώσεως (ε).**

Ὥστε αἱ ἰσότητες $3x - 7 = x + 5$, $x + 4 = x + 5$, $2(x + 3) = 2x + 6$ εἶναι ἐξισώσεις μὲ ἄγνωστον τὸν x.

'Εὰν τὰ $\varphi(x)$ καὶ $\sigma(x)$ εἶναι πολυώνυμα πρώτου βαθμοῦ, ὅπως εἰς τὰς ἀνωτέρω ἐξισώσεις, ἡ ἐξίσωσις (ε) λέγεται **πρωτοβάθμιος**. Κάθε $\alpha \in M$ μὲ τὴν ἰδιότητα : $\varphi(\alpha) = \sigma(\alpha)$ λέγεται **ρίζα ἢ καὶ λύσις τῆς ἐξισώσεως (ε).**

Οὕτω 1) ἡ $x = 6$ εἶναι ρίζα (καὶ ἡ μόνη) τῆς ἐξισώσεως $3x - 7 = x + 5$

2) ἡ ἐξίσωσις $x + 4 = x + 5$ οὐδεμίαν ρίζαν ἔχει.

3) Κάθε $x \in R$ εἶναι ρίζα τῆς ἐξισώσεως $2(x + 3) = 2x + 6$

Κάθε ἐξίσωσις, ὅπως ἡ $\varphi(x) = \sigma(x)$ μὲ $x \in R$, ὀνομάζεται :

α) ἀδύνατος ἐὰν καὶ μόνον ἐὰν τὸ σύνολον τῶν ριζῶν της εἶναι τὸ $\varnothing$. Π.χ. ἡ $x + 4 = x + 5$ εἶναι ἀδύνατος ἐξίσωσις :

Β) ἀόριστος εἴτε ταυτότης, ἐὰν καὶ μόνον ἐὰν τὸ σύνολον τῶν ριζῶν της εἶναι τὸ R.

Π.χ. ἡ $2(x + 3) = 2x + 6$ εἶναι ταυτότης.

Κάθε ἐξίσωσις, ὅπως ἡ (ε), τῆς ὁποίας τὰ μέλη εἶναι ἀκέραια πολυώνυμα, λέγεται **ἀκεραία**, ἐνῷ, ἂν τὰ μέλη της εἶναι ρητὰ κλάσματα (τῆς αὐτῆς μεταβλητῆς) λέγεται **ρητή**. Ἡ μεταβλητὴ x λέγεται **ἄγνωστος** τῆς ἐξισώσεως (ε).

Ἡ εὕρεσις τοῦ συνόλου τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως (ε) ἀποτελεῖ τὴν ἐπίλυσιν αὐτῆς.

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω αἱ ἐξισώσεις $3x - 7 = x + 5$, $x^2 - 3x = x + 1$ εἶναι ἀκέραιαι μὲ ἄγνωστον τὸν x, ἐνῷ ἡ $\frac{\omega-5}{\omega-4} = \frac{\omega-4}{\omega+2}$ εἶναι ρητὴ μὲ ἄγνωστον τὸν ω.

Ὅλαι αἱ ἐξισώσεις τῆς μορφῆς, $\varphi(x) = \sigma(x)$, ὅπου φ καὶ σ εἶναι συναρτήσεις μιᾶς μεταβλητῆς, λέγονται **ἐξισώσεις μὲ ἕνα ἄγνωστον.**

Ε) 'Εὰν $\varphi(x, \psi)$ καὶ $\sigma(x, \psi)$ εἶναι δύο συναρτήσεις τῶν δύο μεταβλητῶν x καὶ y, ἡ ἰσότης : $\boxed{\varphi(x, \psi) = \sigma(x, \psi)}$ (Ε) λέγεται ἐξίσωσις μὲ δύο ἀγνώστους.

Π.χ. αἱ ἐξισώσεις $2x + 3\psi = x^2 + \psi - 1$, $x + \psi = 5$, εἶναι **ἐξισώσεις μὲ δύο ἀγνώστους**

Κάθε ζεῦγος (ξ, η) μὲ τὴν ἰδιότητα : $\varphi(\xi, \eta) = \sigma(\xi, \eta)$ ὀνομάζεται **μία λύσις τῆς ἐξισώσεως (Ε).**

Π.χ. Μία λύσις τῆς ἐξισώσεως $x + \psi = 5$ εἶναι τὸ ζεῦγος (1,4). Μία ἄλλη λύσις αὐτῆς εἶναι τὸ ζεῦγος (– 2, 7).

'Αναλόγως ὁρίζομεν ἐξισώσεις μὲ 3,4 κλπ. ἀγνώστους.

Π.χ. $x + \psi + \omega = 8$ (τρεῖς ἄγνωστοι), $2x - \psi = \omega^2 - \varphi + 5$ (τέσσαρες).

Παρατήρησις. Ὅταν λέγωμεν, ὅτι ἡ ἐξίσωσις $3x - 7 = x + 5$ **ἀληθεύει διὰ x = 6**, ἐννοοῦμεν ὅτι, ὅταν τεθῇ εἰς αὐτὴν ὅπου x ὁ 6, προκύπτει **μία ἀληθὴς ἀριθμητικὴ ἰσότης**, δηλ. $3 \cdot 6 - 7 = 6 + 5$ ἢ $11 = 11$.

ΣΤ) Ἰσοδύναμοι ἐξισώσεις. Δύο ἐξισώσεις λέγονται ἰσοδύναμοι, ὅταν, καὶ μόνον ὅταν, ἔχουν τὰς αὐτὰς λύσεις. (δηλ. κάθε ρίζα τῆς πρώτης εἶναι καὶ ρίζα τῆς δευτέρας καὶ κάθε ρίζα τῆς δευτέρας εἶναι καὶ τῆς πρώτης).

α) Κάθε ἐξίσωσις δύναται νὰ ἀντικατασταθῇ μὲ μίαν ἰσοδύναμόν της.

β) Δύο ἐξισώσεις ἰσοδύναμοι πρὸς τρίτην, εἶναι καὶ μεταξύ των ἰσοδύναμοι.

1η Ἰδιότης. 'Εὰν φ(x), σ(x), π(x), εἶναι πολυώνυμα, τότε αἱ ἐξισώσεις

$\boxed{\varphi(x) = \sigma(x)}$ **καὶ** $\boxed{\varphi(x) + \pi(x) = \sigma(x) + \pi(x)}$ **εἶναι ἰσοδύναμοι.**

Ἔστω $x = \alpha$ μία ρίζα τῆς πρώτης. Θὰ ἔχωμεν : $\varphi(\alpha) = \sigma(\alpha) \Rightarrow$ $\Rightarrow \varphi(\alpha) + \pi(\alpha) = \sigma(\alpha) + \pi(\alpha)$, δηλ. τὸ α εἶναι ρίζα καὶ τῆς δευτέρας.

Ἔστω $x = \beta$ μία ρίζα τῆς δευτέρας ἐξισώσεως. Ἔχομεν : $\varphi(\beta) + \pi(\beta) = \sigma(\beta) + \pi(\beta) \Rightarrow \varphi(\beta) = \sigma(\beta)$ δηλ. τὸ β εἶναι ρίζα καὶ τῆς πρώτης.

Ὥστε : **Ἐὰν προσθέσωμεν (ἢ καὶ ἀφαιρέσωμεν) τὸ αὐτὸ πολυώνυμον $\Pi(x)$ καὶ εἰς τὰ δύο μέλη μιᾶς ἐξισώσεως $\varphi(x) = \sigma(x)$ λαμβάνομεν μίαν ἐξίσωσιν ἰσοδύναμον πρὸς αὐτήν.**

Παράδειγμα : Ἡ $\psi^2 - 4\psi = 3\psi - 10$ καὶ ἡ $\psi^2 - 4\psi + (-3\psi + 10) = 3\psi - 10 + (-3\psi + 10)$ εἶναι ἰσοδύναμοι ἐξισώσεις. Ἡ δευτέρα γίνεται : $\psi^2 - 4\psi - 3\psi + 10 = 0$. Παρατηροῦμεν ὅτι οἱ ὅροι 3ψ καὶ -10 ἀπὸ τὸ β′ μέλος τῆς πρώτης **μετεφέρθησαν** εἰς τὸ α′, **ἀλλὰ μὲ τὸ ἀντίθετον πρόσημον.** Προφανῶς ἔχομεν τὴν ἰσοδυναμίαν : $\psi^2 - 4\psi = 3\psi - 10 \Leftrightarrow \psi^2 - 7\psi + 10 = 0$

Γενικῶς ἡ ἐξίσωσις $\varphi(x) = \sigma(x) + \rho(x)$ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν ἐξίσωσιν $\varphi(x) - \rho(x) = \sigma(x)$ (διατί ;)

Ὥστε δυνάμεθα εἰς κάθε ἐξίσωσιν νὰ μεταφέρωμεν ἀπὸ τὸ ἕνα μέλος εἰς τὸ ἄλλο ὁσουσδήποτε ὅρους, ἀλλὰ μὲ τὸ ἀντίθετον καθενὸς πρόσημον.

Π.χ. εἶναι $x^3 - 2x^2 + 7 = 3x - 5 \Leftrightarrow x^3 + 7 = 2x^2 + 3x - 5 \Leftrightarrow x^3 + 5 - 3x = 2x^2 - 7$ κλπ.

2α Ἰδιότης. Ἐὰν καὶ τὰ δύο μέλη μιᾶς ἐξισώσεως $\varphi(x) = \sigma(x)$ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸν αὐτὸν πραγματικὸν ἀριθμὸν $\mu \neq 0$, τότε ἡ προκύπτουσα ἐξίσωσις $\mu \cdot \varphi(x) = \mu \cdot \sigma(x)$ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν πρώτην. Τὸ αὐτὸ ἰσχύει ἐὰν διαιρέσωμεν διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ· δηλ. ἔχομεν: $\boxed{\varphi(x) = \sigma(x) \Leftrightarrow \mu \cdot \varphi(x) = \mu \cdot \sigma(x)}$

καὶ $\boxed{\varphi(x) = \sigma(x) \Leftrightarrow \frac{1}{\mu} \cdot \varphi(x) = \frac{1}{\mu} . \sigma(x)}$

Ἐὰν $x = \alpha$ εἶναι μία ρίζα τῆς $\varphi(x) = \sigma(x)$, ἀπὸ τὰς ἰσοδυναμίας

(1) $\varphi(\alpha) = \sigma(\alpha) \Leftrightarrow \mu \cdot \varphi(\alpha) = \mu \cdot \sigma(\alpha)$ καὶ (2) $\varphi(\alpha) = \sigma(\alpha) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \frac{1}{\mu} \varphi(\alpha) = \frac{1}{\mu} \sigma(\alpha)$ γίνεται φανερὸν ὅτι ἡ ἀνωτέρω πρότασις ἰσχύει.

Π.χ. Εἶναι $3x - 7 = x + 5 \Leftrightarrow -5(3x - 7) = -5(x + 5) \Leftrightarrow -15x + 35 = -5x - 25$.

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $\frac{2x^2}{5} - \frac{3x}{2} + 5 = \frac{x^2}{2} - x$ (α). Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (α) ἐπὶ ἕνα Κ.Π. τῶν παρονομαστῶν τῶν ὅρων τῶν μελῶν της, λ.χ. μὲ τὸ Ε.Κ.Π. αὐτῶν 10, εὑρίσκομεν τὴν ἰσοδύναμον ἐξίσωσιν $10\left(\frac{2x^2}{5} - \frac{3x}{2} + 5\right) = 10\left(\frac{x^2}{2} - x\right)$, δηλ. τὴν ἔχουσαν ἀκεραίους συντελεστὰς $4x^2 - 15x + 50 = 5x^2 - 10x$ (β).

Ὥστε μὲ τὴν βοήθειαν τῆς ἰδιότητος αὐτῆς **δυνάμεθα νὰ ἐξαλείψωμεν τοὺς ἀριθμητικοὺς παρονομαστὰς μιᾶς ἐξισώσεως.**

Παρατήρησις. Ἐὰν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως $\varphi(x) = \sigma(x)$ πολλ σωμεν ἐπὶ παράστασιν περιέχουσαν τὸν ἄγνωστον x, λ.χ. τὴν $\pi(x)$, τότε ἡ προκύπτουσα ἐξίσωσις $\varphi(x)\cdot\pi(x) = \sigma(x)\cdot\pi(x)$ θὰ ἔχῃ (ἐκτὸς τῶν ριζῶν τῆς πρώτης) ὡς ρίζας καὶ τὰς τιμὰς τοῦ x, αἱ ὁποῖαι ἐνδεχομένως μηδενίζουν τὴν παράστασιν $\pi(x)$, χωρὶς νὰ εἶναι κατ' ἀνάγκην καὶ λύσεις τῆς $\varphi(x) = \sigma(x)$. Αἱ δύο λοιπὸν ἐξισώσεις δὲν εἶναι ἐν γένει ἰσοδύναμοι. Π.χ. ἡ ἐξίσωσις $2x = 7$ καὶ ἡ ἐξ αὐτῆς προκύπτουσα $2x(x-5) = 7(x-5)$ δὲν εἶναι ἰσοδύναμοι καθόσον ἡ δευτέρα ἔχει ὡς ρίζαν τὴν $x = 5$, τὴν ὁποίαν ὅμως δὲν ἔχει ἡ ἀρχική. Ἐὰν διαιρέσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη μιᾶς ἐξισώσεως $\varphi(x) = \sigma(x)$ διὰ τῆς παραστάσεως $\pi(x)$, ἡ προκύπτουσα ἐξίσωσις $\frac{\varphi(x)}{\pi(x)} = \frac{\sigma(x)}{\pi(x)}$ δὲν εἶναι κατ' ἀνάγκην ἰσοδύναμος πρὸς τὴν πρώτην.

Π.χ. ἡ ἐξίσωσις $(x-3)(x+5) = (7x-1)(x-3)$ ἔχει ὡς ρίζας τὰς $x = 3$ καὶ $x = 1$. Διαιροῦμεν καὶ τὰ δύο μέλη της διὰ τοῦ διωνύμου $x - 3$ καὶ προκύπτει ἡ ἐξίσωσις $x + 5 = 7x - 1$, ἡ ὁποία δὲν ἔχει ὡς ρίζαν τὴν $x = 3$, ἐπομένως δὲν εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν ἀρχικήν.

Ζ) Τελικὴ μορφὴ καὶ βαθμὸς ἀκεραίας ἐξισώσεως. Ἐὰν εἰς μίαν ἀκεραίαν ἐξίσωσιν μὲ ἕνα ἄγνωστον ἐκτελέσωμεν τὰς πράξεις εἰς τὰ δύο μέλη της, ἐξαλείψωμεν τοὺς ἀριθμητικοὺς παρονομαστὰς (ἐὰν ὑπάρχουν) καὶ μεταφέρωμεν τοὺς ὅρους τοῦ δευτέρου μέλους εἰς τὸ πρῶτον (μὲ τὸ ἀντίθετον βεβαίως πρόσημον) ἐκτελοῦντες τὰς ἀναγωγὰς τῶν ὁμοίων ὅρων καταλήγομεν εἰς μίαν ἐξίσωσιν ἰσοδύναμον τῆς ἀρχικῆς καὶ τῆς μορφῆς :

$$\Pi(x) = 0$$

ὅπου τὸ $\Pi(x)$ εἶναι ἕνα ἀκέραιον πολυώνυμον τοῦ x.

Ὁ βαθμὸς τοῦ πολυωνύμου $\Pi(x)$ λέγεται βαθμὸς τῆς δοθείσης ἐξισώσεως.

Π.χ. ἡ ἐξίσωσις $2x(x+3) - 5x = (x+1)^2 - 2x + 12 \Leftrightarrow 2x^2 + 6x - 5x = x^2 + 2x + 1 - 2x + 12 \Leftrightarrow 2x^2 + 6x - 5x - x^2 - 2x - 1 + 2x - 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 13 = 0$, ἡ ὁποία εἶναι δευτέρου βαθμοῦ ἐξίσωσις.

Ἐπίσης $\frac{3(2x-1)}{5} - \frac{x}{2} + 1 = x - \frac{x-1}{5} \Leftrightarrow$

$10\left[\frac{3(2x-1)}{5} - \frac{x}{2} + 1\right] = 10\left(x - \frac{x-1}{5}\right) \Leftrightarrow 6(2x-1) - 5x + 10 = 10x - 2(x-1) \Leftrightarrow 12x - 6 - 5x + 10 = 10x - 2x + 2 \Leftrightarrow 12x - 6 - 5x + 10 - 10x + 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow -x + 2 = 0$, ἡ ὁποία εἶναι πρώτου βαθμοῦ ἐξίσωσις.

Σημείωσις. Μὲ τὸν ἴδιον τρόπον ἐργασίας καὶ κάθε ἀκεραία ἐξίσωσις μὲ περισσοτέρους ἀγνώστους θὰ λαμβάνῃ τὴν μορφὴν $A = 0$, ὅπου, τὸ A θὰ εἶναι ἕνα ἀκέραιον πολυώνυμον ὡς πρὸς τοὺς ἀγνώστους, ἀνηγμένον καὶ μὲ ἀκεραίους ἀκόμη ἀριθμητικοὺς συντελεστάς. Ὁ βαθμὸς τοῦ A ὡς πρὸς τοὺς ἀγνώστους εἶναι καὶ βαθμὸς τῆς δοθείσης ἐξισώσεως ὡς πρὸς αὐτούς

Π.χ. ἡ $3x - 2\psi + 7 = 0$ εἶναι πρώτου βαθμοῦ ὡς πρὸς x καὶ ψ, ἐνῷ ἡ $2x^2\psi - 3x + 5\psi^2 - 7 = 0$ εἶναι δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς x, δευτέρου ὡς πρὸς ψ καὶ τρίτου ὡς πρὸς x καὶ ψ.

Η) Ἀνηγμένη μορφὴ τῆς ἐξισώσεως τοῦ πρώτου βαθμοῦ. Λύσις καὶ διερεύνησις.

1. Κάθε ἐξίσωσις ἡ ὁποία τελικῶς λαμβάνει τὴν μορφὴν $\alpha x + \beta = 0$ ὅπου x

εἶναι ὁ ἄγνωστος καὶ οἱ α, β σταθεραὶ ἢ παραστάσεις ἀνεξάρτητοι τοῦ x, λέγεται πρωτοβάθμιος ἐξίσωσις μὲ ἕνα ἄγνωστον.

Ἐὰν οἱ α καὶ β εἶναι ἀριθμοί, ὅπως εἰς τὴν $3x - 1 = 0$, ἡ ἐξίσωσις λέγεται **ἀριθμητική**. Ἐὰν εἶναι γενικοὶ ἀριθμοί, ὅπως εἰς τὴν $2\lambda x + \mu = 0$, λέγεται **ἐγγράμματος**.

ΙΙ. Ἐπίλυσις ἀριθμητικῶν πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων.

Παραδείγματα 1ον. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $(x+3)^2 = x(x-5)$.

Ἐκτελοῦμεν τὰς πράξεις καὶ εἰς τὰ δύο μέλη, καὶ ἔχομεν :

$$x^2 + 6x + 9 = x^2 - 5x$$

Μεταφέρομεν εἰς τὸ α΄ μέλος τὰ μονώνυμα τοῦ x, εἰς τὸ β΄ τοὺς σταθεροὺς (τοὺς ἀνεξαρτήτους τοῦ x) καὶ εὑρίσκομεν τὴν ἰσοδύναμον ἐξίσωσιν πρὸς τὴν ἀρχικήν: $x^2 + 6x - x^2 + 5x = -9$.

Ἐκτελοῦμεν τὰς ἀναγωγὰς τῶν ὁμοίων ὅρων καὶ λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$11x = -9$$

Διαιροῦμεν καὶ τὰ δύο μέλη διὰ τοῦ συντελεστοῦ τοῦ ἀγνώστου 11, δηλαδὴ πολλαπλασιάζομεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως $11x = -9$ ἐπὶ τὸν $\frac{1}{11}$ ἀντίστροφον τοῦ 11) καὶ ἔχομεν $x = -\frac{9}{11}$. Ἡ τελευταία ἐξίσωσις εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν ἀρχικὴν καὶ ἔχει τὴν μοναδικὴν ρίζαν $x = -\frac{9}{11}$. Ἄρα καὶ ἡ δοθεῖσα ἔχει μίαν καὶ μόνην λύσιν εἰς τὸ σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

2ον. Εἰς τὸ σύνολον τῶν φυσικῶν νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις :

$$\frac{2x-1}{7} + \frac{x}{3} = x - 7$$

Τὸ Ε.Κ.Π. τῶν παρονομαστῶν εἶναι 21. Θὰ ἔχωμεν :

$$\frac{2x-1}{7} + \frac{x}{3} = x - 7 \Leftrightarrow 21\left(\frac{2x-1}{7} + \frac{x}{3}\right) = 21(x-7) \Leftrightarrow 3(2x-1) + 7x =$$
$$= 21(x-7) \Leftrightarrow 6x - 3 + 7x = 21x - 147 \Leftrightarrow 6x + 7x - 21x = 3 - 147 \Rightarrow$$
$$\Leftrightarrow -8x = -144 \Leftrightarrow 8x = 144 \Leftrightarrow x = 18.$$

Ἐπειδὴ ἡ εὑρεθεῖσα ρίζα εἶναι φυσικὸς ἀριθμός, ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις εἶναι δυνατὴ εἰς τὸ σύνολον N. Λέγομεν ἀκόμη ὅτι ἡ ρίζα $x = 18$ εἶναι **παραδεκτή.**

3ον. Εἰς τὸ σύνολον R νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις :

$$(3x-1)(x+5) - 7x = 3(x+2)^2 + 5(2-x)$$

Ἐκτελοῦμεν τὰς πράξεις καὶ εἰς τὰ δύο μέλη :

$$3x^2 - x + 15x - 5 - 7x = 3x^2 + 12x + 12 + 10 - 5x.$$

Χωρίζομεν γνωστοὺς ἀπὸ ἀγνώστους, δηλαδὴ μεταφέρομεν εἰς τὸ α΄ μέλος τοὺς ὅρους τοῦ x καὶ εἰς τὸ β΄ τοὺς γνωστοὺς ἀριθμοὺς καὶ ἔχομεν :

$$3x^2 - x + 15x - 7x - 3x^2 - 12x + 5x = 5 + 12 + 10.$$

Ἐκτελοῦμεν τὰς ἀναγωγὰς καὶ εὑρίσκομεν :

$$0x = 27$$

Ὁποιαδήποτε τιμὴ τοῦ x, ὅταν πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ μηδέν, γίνεται μηδέν, δηλαδὴ τὸ α΄ μέλος τῆς εὑρεθείσης ἐξισώσεως εἶναι διάφορον ἀπὸ τὸ β΄. Ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις **εἶναι ἀδύνατος**.

4ον. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις : $\frac{x+1}{3}-\frac{x-1}{2}+x=\frac{5x-1}{6}+1$

Πολλαπλασιάζομεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς δοθείσης ἐπὶ 6 :

$6\cdot\left(\frac{x+1}{3}-\frac{x-1}{2}+x\right)=6\left(\frac{5x-1}{6}+1\right)$ καὶ εὑρίσκομεν :

$2(x+1)-3(x-1)+6x=5x-1+6$ καὶ ἐξ αὐτῆς τὴν

$2x+2-3x+3+6x=5x-1+6$. Χωρίζομεν γνωστοὺς ἀπὸ ἀγνώστους :

$2x-3x+6x-5x=-2-3-1+6$: ἐκτελοῦμεν τὰς ἀναγωγὰς καὶ ἔχομεν τὴν

$$0x=0$$

Διὰ κάθε τιμὴν τοῦ x τὸ α' μέλος εἶναι 0 δηλαδὴ ἰσοῦται τὸ α' μέλος μὲ τὸ β'. Κάθε ἀριθμὸς εἶναι λοιπὸν λύσις τῆς ἐξισώσεως. **Ἡ ἐξίσωσις εἶναι ἀόριστος ἢ ταυτότης.**

ΙΙΙ Ἐπίλυσις τῆς γενικῆς πρωτοβαθμίου ἐξισώσεως.

Ἡ γενικὴ ἐξίσωσις τοῦ α' βαθμοῦ εἴδομεν ἀνωτέρω ὅτι ἔχει τὴν μορφὴν

$$\alpha x+\beta=0.$$

Ἐξ αὐτῆς ἔχομεν τὴν ἰσοδύναμον $\alpha x=-\beta$ καὶ διακρίνομεν τὰς ἑξῆς δυνατὰς περιπτώσεις :

1ον) **Ἐὰν εἶναι $\alpha\neq 0$,** τότε πολλαπλασιάζομεν καὶ τὰ δύο μέλη ἐπὶ $\frac{1}{\alpha}$ καὶ εὑρίσκομεν $x=-\frac{\beta}{\alpha}$. **Ἡ τιμὴ $-\frac{\beta}{\alpha}$ εἶναι ἡ μοναδικὴ ρίζα (*) τῆς δοθείσης ἐξισώσεως $\alpha x+\beta=0$.**

2ον) **Ἐὰν εἶναι $\alpha=0$ καὶ $\beta\neq 0$,** ἡ ἐξίσωσις γίνεται $0\cdot x=-\beta$. Ἐπειδὴ τὸ α' μέλος διὰ κάθε x εἶναι 0 καὶ τὸ β' εἶναι διάφορον τοῦ μηδενός, ἡ ἐξίσωσις αὐτή, ἑπομένως καὶ **ἡ δοθεῖσα $\alpha x+\beta=0$ εἶναι ἀδύνατος, δὲν ἔχει λύσιν.**

3ον) **Ἐὰν εἶναι $\alpha=0$, καὶ $\beta=0$,** ἡ ἐξίσωσις γίνεται $0x=0$ καὶ κάθε ἀριθμὸς $x\in R$ εἶναι λύσις αὐτῆς, δηλ. **ἡ ἐξίσωσις $\alpha x+\beta=0$ εἶναι ταυτότης.**

Τὰ ὅσα εὕρομεν ἐπὶ τῆς λύσεως τῆς $\alpha x+\beta=0$, τοποθετοῦμεν εἰς τὸν ἀκόλουθον πίνακα :

(*) Ἄλλη λύσις δὲν ὑπάρχει. Πράγματι ἂν ὑπῆρχε μία ἄλλη λύσις, ἔστω ἡ $x=\gamma\neq-\frac{\beta}{\alpha}$, τότε θὰ ἴσχυον :

$$\alpha\cdot\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)=-\beta \text{ καὶ } \alpha\cdot\gamma=-\beta$$

καὶ ἑπομένως θὰ εἴχομεν :

$$\alpha\cdot\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)=\alpha\cdot\gamma$$

Ἄρα : $-\frac{\beta}{\alpha}=\gamma$

Ὑποθέσαμεν ὅμως ὅτι $-\frac{\beta}{\alpha}\neq\gamma$ καὶ δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι $-\frac{\beta}{\alpha}\neq\gamma$ καὶ (συγχρόνως) $-\frac{\beta}{\alpha}=\gamma$. Ἄρα εἴμεθα ὑποχρεωμένοι νὰ συμπεράνωμεν ὅτι κακῶς ὑπεθέσαμεν ὅτι ὑπάρχει καὶ ἄλλη λύσις πλὴν τῆς $x=-\frac{\beta}{\alpha}$.

Γενικὴ ἐξίσωσις τοῦ πρώτου βαθμοῦ $\alpha x + \beta = 0$	
$\alpha \neq 0$	Μοναδικὴ λύσις ἡ $x = -\frac{\beta}{\alpha}$
$\alpha = 0,\ \beta \neq 0$	ἀδύνατος ἐξίσωσις
$\alpha = 0,\ \beta = 0$	ἀόριστος ἐξίσωσις (ταυτότης)

Ἐφαρμογή : Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ λ ἡ ἐξίσωσις $\lambda(\lambda x - 2) = x - 2$ εἶναι δυνατή, ἀδύνατος ἢ ἀόριστος.

Τὸ γράμμα λ εἶναι εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν μία μεταβλητὴ ἀνεξάρτητος ἀπὸ τὸν ἄγνωστον x. Διὰ κάθε τιμὴν τοῦ λ προκύπτει καὶ μία νέα ἐξίσωσις ἀπὸ τὴν δοθεῖσαν. Ἐὰν π.χ. εἶναι $\lambda = 7$ ἔχομεν τὴν $7\,(7x - 2) = x - 2$, ἐὰν $\lambda = \frac{1}{3}$ ἔχομεν τὴν $\frac{1}{3}\left(\frac{x}{3} - 2\right) = x - 2$ κ.ο.κ. Κάθε μίαν ἀπὸ αὐτάς, λύομεν ὅπως ἐμάθαμεν διὰ τὰς ἐξισώσεις μὲ ἀριθμητικοὺς συντελεστάς. Τὴν μεταβλητὴν λ καλοῦμεν καὶ **παράμετρον** τῆς ἐξισώσεως.

Θὰ λύσωμεν τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν καὶ θὰ ἐφαρμόσωμεν τὰ συμπεράσματα τοῦ προηγουμένου πίνακος.

Ἔχομεν : $\lambda^2 x - 2\lambda = x - 2 \Leftrightarrow \lambda^2 x - x = 2\lambda - 2 \Leftrightarrow (\lambda^2 - 1)x = 2\,(\lambda - 1)$.

Ὁ συντελεστὴς τοῦ x εἶναι $\lambda^2 - 1$ ἢ $(\lambda + 1)\,(\lambda - 1)$. Λαμβάνει οὗτος τὴν τιμὴν 0, ὅταν $\lambda = -1$ ἢ $\lambda = 1$.

Διὰ νὰ εἶναι ἡ ἐξίσωσις δυνατὴ πρέπει νὰ εἶναι $\lambda^2 - 1 \neq 0$, δηλαδὴ $\lambda \neq -1$ καὶ $\lambda \neq 1$. Ἡ ἐξίσωσις τότε ἔχει μίαν λύσιν, τήν :

$$x = \frac{2\,(\lambda - 1)}{\lambda^2 - 1} \Leftrightarrow x = \frac{2\,(\lambda - 1)}{(\lambda + 1)\,(\lambda - 1)} \Leftrightarrow x = \frac{2}{\lambda + 1}$$

Ἐὰν εἶναι $\lambda = -1$, τότε ἡ ἐξίσωσις γίνεται $0x = -4$ ἑπομένως εἶναι ἀδύνατος.

Ἐὰν εἶναι $\lambda = 1$, τότε ἡ ἐξίσωσις γίνεται $0x = 0$, ἑπομένως εἶναι ταυτότης.

Ἡ ὅλη ἐργασία διὰ τὴν ἐξέτασιν ὅλων τῶν δυνατῶν περιπτώσεων ὀνομάζεται καὶ **διερεύνησις τῆς ἐξισώσεως.**

62. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΑΝΑΓΟΜΕΝΑΙ ΕΙΣ ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΟΥΣ.

Ἐξισώσεις τῆς μορφῆς $A \cdot B = 0$. Κάθε ἐξίσωσις τῆς μορφῆς $A \cdot B = 0$ (1) ὅπου τὰ A, B εἶναι συναρτήσεις τῆς μεταβλητῆς x μὲ τὸ αὐτὸ πεδίον ὁρισμοῦ, εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὸ σύνολον τῶν ἐξισώσεων : $A = 0,\ B = 0$. (2)

Διότι, διὰ νὰ εἶναι τὸ γινόμενον $A \cdot B$ ἴσον μὲ 0, πρέπει καὶ ἀρκεῖ ἕνας τουλάχιστον ἀπὸ τοὺς παράγοντάς του νὰ εἶναι μηδέν. Ἑπομένως αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως (1) εἶναι αἱ ρίζαι τῶν ἐξισώσεων (2) καὶ ἀντιστρόφως.

Ἐὰν μία ἐξίσωσις $\Phi\,(x) = 0$ εἶναι βαθμοῦ μεγαλυτέρου τοῦ πρώτου, εἶναι δυνατὸν νὰ ἐπιλυθῇ, ἐὰν ἐπιτύχωμεν ἀνάλυσιν τοῦ πολυωνύμου $\Phi(x)$ εἰς γινόμενον πρωτοβαθμίων παραγόντων.

Παραδείγματα: 1ον. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $(x-3)\cdot(2x+5)=0$.

Ἡ ἐξίσωσις αὐτὴ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὸ σύνολον τῶν ἐξισώσεων: $x-3=0,\ 2x+5=0$, τῶν ὁποίων αἱ ρίζαι εἶναι $x=3,\ x=-\frac{5}{2}$.

Ὥστε ἡ δοθεῖσα ἔχει ὡς ρίζας τὰς $x=3,\ x=-\frac{5}{2}$ καὶ μόνον αὐτάς.

2ον. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $5x^2-7x=0$.

Ἔχομεν: $5x^2-7x=0 \Leftrightarrow x(5x-7)=0 \Leftrightarrow \{x=0,\ 5x-7=0\} \Leftrightarrow \left\{x=0,\ x=\frac{7}{5}\right\}$.

Ἡ ἐξίσωσις αὐτὴ εἶναι τοῦ δευτέρου βαθμοῦ μὴ πλήρης (ἐλλιποῦς μορφῆς). Λείπει ὁ σταθερὸς ὅρος.

3ον. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $9x^2-16=0$.

Ἡ ἐξίσωσις αὐτὴ εἶναι τοῦ δευτέρου βαθμοῦ ἐλλιποῦς μορφῆς, διότι δὲν ἔχει πρωτοβάθμιον ὅρον Τρέπομεν τὸ α' μέλος της εἰς γινόμενον παραγόντων, ὡς διαφορὰν δύο τετραγώνων. Ἔχομεν: $(3x+4)(3x-4)=0$ καὶ αὐτὴ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὸ σύνολον $\{3x+4=0,\ 3x-4=0\}$

Ὥστε ἔχει τὰς λύσεις $x=-\frac{4}{3}$ καὶ $x=\frac{4}{3}$.

4ον. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $2x^2+5=0$

Καὶ ἡ ἐξίσωσις αὐτὴ εἶναι τοῦ δευτέρου βαθμοῦ ἐλλιπής. Εὑρίσκομεν τὴν ἰσοδύναμον $x^2=-\frac{5}{2}$, ἡ ὁποία εἶναι ἀδύνατος εἰς τὸ σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, καθόσον τὸ τετράγωνον πραγματικοῦ ἀριθμοῦ οὐδέποτε εἶναι ἀρνητικὸς ἀριθμός.

5ον. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $x^2-6x+8=0$

Πρόκειται περὶ πλήρους ἐξισώσεως τοῦ δευτέρου βαθμοῦ. Ἀναλύομεν εἰς γινόμενον τὸ α' μέλος της. Ἔχομεν:

$$x^2-6x+8=(x-3)^2-9+8=(x-3)^2-1=(x-3+1)(x-3-1)=$$
$$=(x-2)(x-4)\cdot\ \text{ὥστε}\ x^2-6x+8=0 \Leftrightarrow (x-2)(x-4)=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \{x-2=0,\ x-4=0\} \Leftrightarrow \{x=2,\ x=4\}.$$

63. ΡΗΤΑΙ ΑΛΓΕΒΡΙΚΑΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ.

Α) Κάθε ρητὴ ἐξίσωσις, δηλαδὴ κάθε ἐξίσωσις τῆς ὁποίας τουλάχιστον τὸ ἓν μέλος εἶναι ρητὴ κλασματικὴ παράστασις, λαμβάνει τελικῶς τὴν μορφὴν $\frac{\Phi}{\Pi}=0$ (1), ὅπου τὰ Φ καὶ Π εἶναι ἀκέραια πολυώνυμα μὲ μίαν ἢ περισσοτέρας μεταβλητάς. Τὸ κλάσμα $\frac{\Phi}{\Pi}$ ὑποτίθεται ἀνάγωγον, δηλαδὴ μὴ ἐπιδεχόμενον ἁπλοποίησιν.

Ρίζαι τῆς (1) εἶναι ὅλαι αἱ τιμαὶ τοῦ ἀγνώστου, αἱ ὁποῖαι μηδενίζουν τὸν ἀριθμητήν, ἀλλ' ὄχι καὶ τὸν παρονομαστήν. Ἑπομένως διὰ τὰς λύσεις τῆς (1) θὰ ἔχωμεν $\Phi=0$ καὶ $\Pi\neq 0$.

Β) Ἐὰν καὶ τὰ δύο μέλη μιᾶς ρητῆς ἐξισώσεως πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ ἕνα κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν παρονομαστῶν (ὑποτιθέμενον διάφορον τοῦ μηδενός), γίνεται ἐξάλειψις τῶν παρονομαστῶν καὶ ἡ ρητὴ ἐξίσωσις μετασχηματίζεται εἰς μίαν ἰσοδύναμόν της ἀκεραίαν ἐξίσωσιν, τὴν ὁποίαν καὶ λύομεν κατὰ τὰ γνωστά.

Παραδείγματα : 1ον. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις: $\frac{\omega-5}{\omega-1}=\frac{\omega-4}{\omega+2}$. (1)

Τὸ Ε.Κ.Π. τῶν παρονομαστῶν εἶναι $(\omega-1)(\omega+2)$. Διὰ νὰ εἶναι τοῦτο διάφορον τοῦ μηδενὸς πρέπει νὰ εἶναι $\omega \neq 1$, $\omega \neq -2$ (2). Πολλαπλασιάζομεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (1) ἐπὶ τὸ Ε.Κ.Π. καὶ εὑρίσκομεν :

$(\omega+2)(\omega-5)=(\omega-4)(\omega-1)$, ἐξ αὐτῆς δὲ

$\omega^2+2\omega\,5\omega-10=\omega^2-4\omega-\omega+4 \Leftrightarrow 2\omega=14 \Leftrightarrow \omega=7$.

Ἡ τιμὴ $\omega=7$ πληροῖ τὰς σχέσεις (2) καὶ εἶναι ἑπομένως ρίζα τῆς (1).

2ον. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\frac{2x-3}{x-3}-\frac{2(x+1)}{x+2}=\frac{15}{x^2-x-6}$. (1)

Ἐπειδὴ $x^2-x-6=(x+2)\cdot(x-3)$, ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται :

$\frac{2x-3}{x-3}-\frac{2(x+1)}{x+2}=\frac{15}{(x+2)(x-3)}$. Πρέπει νὰ εἶναι $x \neq 3$, $x \neq -2$ (2)

Ἐξαλείφοντες τοὺς παρονομαστὰς ἔχομεν :

$(2x-3)(x+2)-2(x+1)(x-3)=15 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^2-3x+4x-6-2x^2-2x+6x+6=15 \Leftrightarrow 5x=15$, ἄρα $x=3$. Ἡ τιμὴ αὐτὴ δὲν εἶναι ρίζα τῆς (1), λόγῳ τῶν σχέσεων (2). Ὥστε ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις εἶναι ἀδύνατος.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

231) Νὰ λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις εἰς τὸ σύνολον τῶν ρητῶν.

α) $7x-4=-2x+5$ β) $45x+18=-132-5x$

γ) $(2x-1)-(3x+7)=5-[(x-3)-4x]$

δ) $(3x+5)-(x+2)=2(x-1)+3$

ε) $2(2x+3)-7-2x=9+2(x-5)$

στ) $3(x-2)-2(x+1)-5(x-3)=7(2x-1)-4(x+5)$

ζ) $3(x-2)-(5-12x)+x(x-4)=(x+2)^2+7x-15$

232) Νὰ λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις εἰς τὸ σύνολον τῶν ρητῶν

α) $(x-2)(x-3)+(x-4)(x-5)=2(x-3)(x-4)$

β) $x(\sqrt{3}+1)+3=x+3\sqrt{3}$

γ) $(2x-\frac{3}{5})(5x+\frac{2}{3})=10(x-1)(x+1)-\frac{2}{5}$

δ) $3(\psi-1)^2-2(\psi-1)(\psi+1)=(\psi+1)^2$

ε) $(3\omega+4)(4\omega-1)-(7\omega-2)(\omega+1)=(5\omega-3)(\omega-2)+1$

στ) $(5z-2)^2-2(4z-3)^2=(7z+2)(1-z)+14$.

233) Εἰς τὸ σύνολον R νὰ λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις :

α) $x(2\sqrt{3}-2)-4=2(\sqrt{3}-x)+4$

β) $(3x+1)^2-(x\sqrt{2}-1)^2=7(x-3)(x-\sqrt{2})$

γ) $\frac{x-3}{5}=\frac{x+1}{2}$ δ) $\frac{3x+7}{12}=\frac{2x-5}{8}$

ε) $x + \frac{2x-7}{3} - \frac{x-5}{2} = 1$ στ) $\frac{5(3\psi - 1)}{4} = \frac{\psi - 2}{8} + 1$

ζ) $\frac{(x-5)(x+1)}{3} + \frac{(x+2)(x-3)}{5} = \frac{8(x-2)^2}{15}$

234) Εἰς τὸ σύνολον R νὰ λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις :

α) $3x - \frac{x-2}{3} + \frac{2x-1}{2} - 1 = \frac{3(x-1)}{2} + \frac{x-1}{6}$

β) $\frac{4x}{7} - \frac{2(3x-2)}{21} - \frac{x-5}{3} = \frac{5(3-4x)}{7} + \frac{1}{3}$

γ) $\frac{1}{3}\left[\frac{x-2}{2} - \frac{2(x+1)}{5} - 1\right] = \frac{3(x+2)}{10} - 1$

δ) $\frac{3x-1}{2} - \frac{3(x-1)}{4} - \frac{2x-3}{5} - \frac{3(x+3)}{4} + \frac{5(x-3)}{6} = 0$

ε) $\frac{x+\frac{1}{3}}{\frac{2}{5}} - \frac{2x-\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{6} - \frac{3x}{4}$

στ) $\frac{\frac{6\omega-3}{5} - 1}{3 - \frac{3-4\omega}{10}} = 3$

235) Διὰ ποίας τιμὰς τῆς παραμέτρου λ αἱ κάτωθι ἐξισώσεις εἶναι δυναταί, ἀδύνατοι ἢ ἀόριστοι, (διερεύνησις τῶν ἐξισώσεων) $\lambda \in R$ καὶ $x \in R$, $\psi \in R$, $\omega \in R$.

α) $\frac{x+2}{3\lambda} - \frac{1}{6\lambda} = \frac{\lambda}{6} - \frac{x}{2\lambda}$

β) $\frac{x-2}{\lambda-2} + \frac{x+2}{\lambda+2} = 1$ γ) $\lambda(\psi - \lambda) - 5(2\lambda - \psi) = -10 - 7\lambda$

δ) $(\lambda^2 - 1)\omega + 5(3-\lambda) = 8\omega$ ε) $\frac{\omega+\lambda}{\lambda+1} + \frac{\omega-\lambda}{\lambda-1} = \frac{2\omega}{\lambda^2-1}$

236) Νὰ λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις (α, β σταθεραί) :

α) $4(2x - \alpha - \beta) = \beta - \alpha$ β) $\psi(\alpha + 2\beta) = (\alpha + 6)(\psi + 3) - 10$

γ) $(3\alpha + 2)x - (5\beta - 2)(x+1) = 2x - 1$

δ) $3(\beta - \omega) + 2\omega(1 - 2\beta) = \beta(\omega - 2) + \omega$

ε) $(x-\alpha)^2 + 5(2x - \beta) = (x+\alpha)^2 + 2$

237) Διὰ ποίας τιμὰς τῶν λ,μ πραγματικάς, ἡ ἐξίσωσις $\frac{5\lambda\psi - 5\mu}{4} + 4 = \frac{3\lambda - 3\mu\psi}{4} + 8\psi$ εἶναι ταυτότης;

238) Νὰ ὁρισθῇ εἰς τὴν ἐξίσωσιν $\frac{\omega(5\lambda+3)}{15} + \frac{1}{3} = \frac{2(\omega+1)}{3} + \frac{1}{5}$ ὁ λ διὰ νὰ εἶναι αὕτη ἀδύνατος.

239) Δείξατε ὅτι κάθε ἐξίσωσις τῆς μορφῆς $A(x) \cdot \Gamma(x) = B(x) \cdot \Gamma(x)$ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὸ σύνολον τῶν ἐξισώσεων $A(x) = B(x)$, $\Gamma(x) = 0$.

240) Δείξατε ὅτι κάθε ἐξίσωσις τῆς μορφῆς $[A(x)]^2 = [B(x)]^2$ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὸ σύνολον τῶν ἐξισώσεων $A(x) = B(x)$, $A(x) = -B(x)$.

241) Νὰ λυθοῦν εἰς τὸ R αἱ ἐξισώσεις :

α) $(3x-5)(x+3)(2x+1) = 0$ β) $(3x-5)(x+3)(x^2-81) = 0$

γ) $(x^2-9)(2x+7)(x^2+1) = 0$ δ) $(2x+3)(x^2-1) = (x+1)(x^2-1)$

δ) $(\psi-2)^2 = (1-2\psi)^2$ στ) $4\psi^2 - 4\psi + 1 = 9$

ζ) $5(\psi^2 - 2\psi + 1) = 4(\psi^2 - 1)$ η) $3\omega^2 + 13\omega = 0$

θ) $7\omega^2 - 35\omega = 0$ ι) $5\omega^2 - 125 = 0$

ια) $2\omega^2 + 8 = 0$ ιβ) $\omega^3 - 4\omega = 0$

242) Νὰ λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις :

α) $x^2 - 6x + 9 = 0$ β) $3x^2 + 4x - 4 = 0$

γ) $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$ δ) $(x-3)(2x+1)^2 - (x^2-9)(x+3) = 0$

ε) $(x^2-4)^2 - (x+2)^2(5x-4) = 0$ στ) $(3\omega^2 + 2\omega - 9)^2 = (\omega^2 + 2\omega + 9)^2$

243) Νὰ λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις :

α) $\dfrac{3x-2}{x+1} = \dfrac{6x-1}{2x+3}$ β) $\dfrac{2}{x+5} - \dfrac{1}{x+2} = \dfrac{x-3}{(x+5)(x+2)}$

γ) $\dfrac{13}{x+1} - \dfrac{1}{1-x} = \dfrac{5x-3}{x^2-1}$ δ) $\dfrac{4}{\psi+2} + \dfrac{1}{\psi-2} = \dfrac{\psi}{\psi^2-4}$

ȝ) $\dfrac{2}{\omega(\omega+2)} = \dfrac{-1}{\omega^2+5\omega+6}$ στ) $\dfrac{1}{x^2+4x+4} = \dfrac{2}{x+2}$

244) Νὰ λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις

α) $\dfrac{\psi+\alpha}{\psi+\beta} = \dfrac{\psi-2\alpha}{\psi+3\beta}$ β) $\dfrac{\alpha+2\beta}{\omega+3} = \dfrac{\alpha+6}{\omega} - \dfrac{10}{\omega^2+3\omega}$

γ) $\dfrac{1}{\psi-\alpha} - \dfrac{1}{\psi-\beta} = \dfrac{\alpha-\beta}{\psi^2-\alpha\beta}$

245) Νὰ λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις :

α) $\dfrac{5x}{x^2-16} + \dfrac{2}{x-4} + \dfrac{3}{x+4} = 0$ γ) $\dfrac{5}{x+3} - \dfrac{2x+1}{x^2+5x+6} = \dfrac{1}{x+2}$

β) $\dfrac{\psi-3}{\psi-5} + \dfrac{\psi-9}{\psi-11} = \dfrac{\psi-7}{\psi-9} + \dfrac{\psi-5}{\psi-7}$ δ) $\dfrac{1}{x+2} + \dfrac{1}{x} - \dfrac{3}{x^2+2x} = \dfrac{2x-1}{x(x+2)}$

246) Νὰ προσδιορισθῇ ὁ λ διὰ νὰ εἶναι τελεία ἡ διαίρεσις τοῦ $\varphi(x) = x^4 + (\lambda-1)x^3 - (3\lambda-5)x - \lambda + 1$ διὰ τοῦ $x+1$. Νὰ λυθῇ κατόπιν ἡ ἐξίσωσις $\varphi(x) = 0$.

64. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΠΙΛΥΟΜΕΝΑ ΔΙ' ΕΞΙΣΩΣΕΩΣ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ ΜΕ ΕΝΑ ΑΓΝΩΣΤΟΝ.

α) Ἡ Ἄλγεβρα διὰ τῶν ἐξισώσεων μᾶς παρέχει ἕνα γενικὸν τρόπον λύσεως προβλημάτων. Ἐὰν εἰς ἕνα πρόβλημα ἡ σχέσις, ἡ ὁποία συνδέει τὰ δεδομένα μὲ τὸ ζητούμενον (τὸν ἄγνωστον ἢ τοὺς ἀγνώστους καὶ ἡ ὁποία καθορίζεται ἀπὸ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος), λάβῃ τὴν μορφὴν ἐξισώσεως, ἡ λύσις αὐτῆς δίδει καὶ τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος. Ἂς παρακολουθήσωμεν τὴν λύσιν μερικῶν προβλημάτων.

Πρόβλημα 1ον. Ὅταν οἱ μαθηταὶ μιᾶς τάξεως Γυμνασίου τοποθετηθοῦν ἀνὰ 3 εἰς κάθε θρανίον, παραμένουν ὄρθιοι 5 μαθηταί. Ἐὰν ὅμως τοποθετηθοῦν ἀνὰ 4, τότε χρειάζονται ἀκόμη 19 μαθηταὶ διὰ νὰ συμπληρώσουν ὅλα τὰ θρανία. Πόσα εἶναι τὰ θρανία καὶ πόσοι οἱ μαθηταί ;

Ἡ λύσις τοῦ προβλήματος ἀλγεβρικῶς γίνεται εἰς 4 φάσεις.

1ον **Ἐκλογὴ τοῦ ἀγνώστου.** Εἰς τὸ πρόβλημά μας εἶναι ἄγνωστος ὁ ἀριθμὸς τῶν μαθητῶν καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν θρανίων. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι x εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν μαθητῶν. Ἐπειδὴ 5 μένουν ὄρθιοι, ὅταν καθήσουν ἀνὰ τρεῖς εἰς κάθε θρανίον, ἕπεται ὅτι εἰς τὰ θρανία τοποθετοῦνται $x - 5$ μαθηταὶ καὶ τὰ θρανία θὰ εἶναι $\dfrac{x-5}{3}$. Ἐπειδή, ὅταν καθήσουν ἀνὰ 4 εἰς κάθε θρανίον, μένουν κεναὶ 19 θέσεις, ὅλαι αἱ θέσεις τῶν θρανίων δύναται νὰ συμπληρωθοῦν ἀπὸ $x+19$ μαθητὰς καὶ τὰ θρανία θὰ εἶναι $\frac{x+19}{4}$

2. Κατάστρωσις τῆς ἐξισώσεως. Ὁ ἀριθμὸς τῶν θρανίων παραμένει ὁ ἴδιος, εἴτε καθήσουν οἱ μαθηταὶ ἀνὰ 3 εἴτε καθήσουν ἀνὰ 4, ἑπομένως θὰ ἔχωμεν

$$\frac{x-5}{3}=\frac{x+19}{4} \qquad (1)$$

Ἡ (1) ἀποτελεῖ τὴν ἐξίσωσιν τοῦ προβλήματος. Ἐπειδὴ ὁ ἄγνωστος x εἶναι ἀριθμὸς μαθητῶν, πρέπει νὰ εἶναι θετικὸς καὶ ἀκέραιος (ἕνας φυσικός). Ὥστε ὁ ἄγνωστος τῆς ἐξισώσεως (1) **ὑπόκειται εἰς τὸν περιορισμὸν $x \in N$ (2).**

3. Λύσις τῆς ἐξισώσεως. Ἀπὸ τὴν (1) κατὰ τὰ γνωστὰ ἔχομεν :

$(1) \Leftrightarrow 4(x-5)=3(x+19) \Leftrightarrow 4x-20=3x+57 \Leftrightarrow x=77$ μαθηταί.

4. Διερεύνησις τῆς λύσεως. Ἡ λύσις $x=77$ μαθηταὶ πληροῖ τὸν περιορισμὸν (2). Τὰ θρανία εἶναι $(77-5):3=24$. Ἐὰν τοποθετηθοῦν ἀνὰ 4 εἰς κάθε θρανίον, τότε χρειάζονται διὰ νὰ συμπληρωθοῦν ὅλα τὰ θρανία $24 \times 4 = 96$ μαθηταὶ δηλ. $96-77=19$ ἀκόμη μαθηταί.

Ἄλλη λύσις τοῦ ἴδιου προβλήματος. 1. Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ψ εἶναι τὰ θρανία. Ὅταν τοποθετηθοῦν εἰς αὐτὰ ἀνὰ 3 οἱ μαθηταὶ θὰ καθήσουν 3ψ μαθηταὶ καὶ μένουν ὄρθιοι 5 δηλ. οἱ μαθηταὶ εἶναι $3\psi+5$. Ὅταν καθήσουν ἀνὰ 4, λείπουν 19 διὰ νὰ συμπληρωθοῦν ὅλα τὰ θρανία, δηλ. οἱ μαθηταὶ εἶναι $4\psi-19$.

2. Ἡ ἐξίσωσις εἶναι $3\psi+5=4\psi-19$ μὲ $\psi \in N$.

3. Ἔχομεν $3\psi+5=4\psi-19 \Leftrightarrow 3\psi-4\psi=-19-5 \Leftrightarrow \psi=24$ θρανία.

4. Ἐφ' ὅσον τὰ θρανία εἶναι 24, οἱ μαθηταὶ θὰ εἶναι $24 \times 3+5=77$. Ἡ λύσις, ὡς καὶ προηγουμένως ἐξητάσθη, εἶναι δεκτή.

Πρόβλημα 2ον). Εἰσπράκτωρ λεωφορείου κατὰ μίαν διαδρομὴν διέθεσε 33 εἰσιτήρια τῶν 2, τῶν 3 καὶ τῶν 5 δραχμῶν, εἰσέπραξε δὲ ἐν ὅλῳ 117 δραχμάς. Τὰ δίδραχμα εἰσιτήρια ἦσαν διπλάσια τῶν τριδράχμων. Νὰ εὑρεθῇ πόσα εἰσιτήρια διέθεσεν ἀπὸ κάθε εἶδος.

1. Ἐκλέγομεν ὡς ἄγνωστον x τὸν ἀριθμὸν τῶν τριδράχμων εἰσιτηρίων, ὁπότε $2x$ εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν διδράχμων. Ἐπειδὴ ὅλα τὰ εἰσιτήρια εἶναι 33, ἕπεται ὅτι τὰ πεντάδραχμα θὰ εἶναι $33-(x+2x)$ δηλαδὴ $33-3x$.

2. Διὰ τὴν κατάστρωσιν τῆς ἐξισώσεως σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς. Ἀπὸ τὰ x τρίδραχμα εἰσέπραξεν ὁ εἰσπράκτωρ $3 \cdot x$ δραχμάς, ἀπὸ τὰ δίδραχμα $2 \cdot (2x)$ καὶ ἀπὸ τὰ πεντάδραχμα $5 \cdot (33-3x)$. Ἀλλά, κατὰ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος, εἰσεπράχθησαν ἐν ὅλῳ 117 δραχμαί. Θὰ ἔχωμεν λοιπὸν τὴν ἐξίσωσιν:

$$3x+2(2x)+5(33-3x)=117.$$

3. Ἐπιλύομεν τὴν ἐξίσωσιν αὐτήν, παρατηροῦντες ὅτι ὁ x πρέπει νὰ εἶναι ἀκέραιος θετικός. Εὑρίσκομεν $x=6$ τρίδραχμα, ὅτε $6 \cdot 2=12$ εἶναι τὰ δίδραχμα καὶ $33-(6+12)=15$ τὰ πεντάδραχμα.

4. Ἡ εὑρεθεῖσα λύσις εἶναι παραδεκτή, διότι εἶναι ὁ $x=6$ φυσικὸς καὶ εἰς δραχμὰς τὰ διατεθέντα εἰσιτήρια δίδουν :

$3 \cdot 6+12 \cdot 2+15 \cdot 5=18+24+75=117.$

Πρόβλημα 3ον. Πατὴρ 61 ἐτῶν ἔχει τρία τέκνα ἡλικίας 24 ἐτῶν, 21 καὶ 18. Πότε ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς θὰ εἶναι ἢ ἦτο τριπλασία τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἡλικιῶν τῶν τέκνων του;

1. Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ ζητούμενον θὰ συμβῇ μετὰ x ἔτη ἀπὸ σήμερον. Αἱ ἡλικίαι τῶν 4 ἀτόμων θὰ εἶναι τότε: $61 + x$, $24 + x$, $21 + x$, $18 + x$.

2. Τὸ ἄθροισμα τῶν ἡλικιῶν τῶν τέκνων εἶναι:

$(24 + x) + (21 + x) + (18 + x) = 63 + 3x$. Τὸ τριπλάσιον τούτου, ἤτοι τὸ $3(63 + 3x)$ θὰ ἰσοῦται μὲ τὴν ἡλικίαν τοῦ πατρὸς δηλαδὴ τὸ $61 + x$. Ἑπομένως προκύπτει ἡ ἐξίσωσις: $3(63 + 3x) = 61 + x \quad (1)$

Εἰς τὴν (1) ὁ x πρέπει νὰ εὑρίσκεται μέσα εἰς τὰ λογικὰ ὅρια τῆς ζωῆς τοῦ ἀνθρώπου. Ἐὰν ὁ x εἶναι θετικός, τὸ ζητούμενον θὰ συμβῇ εἰς τὸ μέλλον. Ἐὰν ὁ x εἶναι μηδέν, τὸ ζητούμενον θὰ συμβῇ τώρα. Ἐὰν τέλος ὁ x εἶναι ἀρνητικός, τὸ ζητούμενον συνέβη ἤδη κατὰ τὸ παρελθόν. Εἰς τὴν τελευταίαν αὐτὴν περίπτωσιν πρέπει νὰ εἶναι $18 + x \geqslant 0$, διότι ἄλλως δὲν θὰ ὑπῆρχε τὸ γ' τέκνον.

3. Ἐπιλύοντες τὴν (1) εὑρίσκομεν $x = -16$. Ὥστε πρὸ 16 ἐτῶν συνέβη τὸ ζητούμενον. Αἱ ἡλικίαι τότε ἦσαν: πατὴρ 45, τέκνα 8, 5 καὶ 2 ἐτῶν.

4. Ἡ λύσις εἶναι παραδεκτή, διότι ὁ $x = -16$ εἶναι εἰς λογικὰ ὅρια, πληροῖ τὸν περιορισμὸν $18 + x \geqslant 0$ καὶ εἶναι $45 = 3 \cdot (8 + 5 + 2)$.

Πρόβλημα 4ον. Ἐὰν ἀπὸ τὸ πενταπλάσιον ἑνὸς ἀριθμοῦ ἀφαιρέσωμεν τὸν 145, εὑρίσκομεν τὰ δύο τρία αὐτοῦ ηὐξημένα κατὰ 14. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμός.

1. Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι ὁ x.

2. Σύμφωνα μὲ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$5x - 145 = \frac{2x}{3} + 14 \quad (1)$$

Ὁ x εἶναι ἕνας ἀριθμός, ἑπομένως δὲν ὑπάρχει περιορισμὸς δι' αὐτόν.

3. Ἀπὸ τὴν (1) ἔχομεν: $15x - 435 = 2x + 42 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 13x = 477 \Leftrightarrow 36\frac{9}{13}$.

4. Ἡ λύσις $x = 36\frac{9}{13}$ εἶναι δεκτή, διαπιστοῦται δὲ εὐκόλως ὅτι ἐπαληθεύει τὸ πρόβλημα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

247) Ὁ ἀριθμητὴς ἑνὸς κλάσματος εἶναι κατὰ 7 μικρότερος τοῦ παρονομαστοῦ. Ἐὰν καὶ εἰς τοὺς δύο ὅρους αὐτοῦ τοῦ κλάσματος προσθέσωμεν τὸν 13, προκύπτει κλάσμα ἴσον μὲ $\frac{2}{3}$. Νὰ εὑρεθῇ τὸ κλάσμα τοῦτο.

248) Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμὸς ὥστε τὸ ἑπταπλάσιόν του ἐλαττούμενον κατὰ τὸ ἥμισυ αὐτοῦ νὰ δίδῃ τὸν ἀριθμὸν ηὐξημένον κατὰ 22.

249) Τίνος ἀριθμοῦ τὰ $\frac{2}{3}$ καὶ τὰ $\frac{3}{4}$ ἐλαττούμενα κατὰ 8 δίδουν τὸν ἀριθμὸν ηὐξημένον κατὰ 20;

250) Τὸ ἄθροισμα τριῶν ἀνίσων ἀκεραίων εἶναι 308. Ὁ μεσαῖος εἶναι κατὰ 17 μεγαλύτερος τοῦ μικροτέρου καὶ κατὰ 10 μικρότερος τοῦ μεγαλυτέρου. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ ἀριθμοὶ αὐτοί.

251) Τὸ ἄθροισμα τριῶν διαδοχικῶν περιττῶν εἶναι 27. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ ἀριθμοὶ αὐτοί.

252) Τὸ ἄθροισμα τριῶν διαδοχικῶν ἀρτίων εἶναι 28. Νὰ εὑρεθοῦν, οἱ ἀριθμοὶ αὐτοί.

253) Ἐρωτηθεὶς κάποιος περὶ τῆς ἡλικίας του, ἀπήντησε «Ἐὰν ἀπὸ τὸ $\frac{1}{5}$ τῆς ἡλικίας μου ἀφαιρεθῇ τὸ $\frac{1}{7}$ αὐτῆς προκύπτει ὁ ἀριθμὸς 18». Πόσων ἐτῶν ἦτο ;

254) Ἕνας μαθητὴς ἐπρόκειτο νὰ πολλαπλασιάσῃ ἕναν ἀριθμὸν ἐπὶ 145, ἀλλ' ἀντὶ τούτου ἐπολλαπλασίασε ἐπὶ τὸν 154 καὶ εὗρε μεγαλύτερον γινόμενον κατὰ 2043. Ποῖος ἦτο ὁ ἀριθμός !

255) Ἕνας φυσικὸς ἀριθμὸς εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ τὸ τριπλάσιον ἑνὸς ἄλλου κατὰ 10. Ἐὰν τὸν μικρότερον αὐξήσωμεν κατὰ 125 καὶ τὸν ἄλλον ἐλαττώσωμεν κατὰ 35, τὰ ἐξαγόμενα εἶναι ἴσα. Ποῖοι εἶναι οἱ ἀριθμοὶ αὐτοί ;

256) Ἕνας πατέρας εἶναι 52 ἐτῶν καὶ ἔχει δύο παιδιὰ ἡλικίας 15 καὶ 21 ἐτῶν. Μετὰ πόσα ἔτη ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς θὰ εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἡλικιῶν τῶν δύο παιδιῶν ; Πότε ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς θὰ εἶναι τὰ $\frac{3}{2}$ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἡλικιῶν τῶν δύο παιδιῶν;

257) Ἕνας ἀριθμὸς σχηματίζεται ἀπὸ δύο διαδοχικὰ ψηφία καὶ εἶναι μικρότερος κατὰ 2 μονάδας ἀπὸ τὸ 6/πλάσιον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ψηφίων του. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμός.

258) Ἐργοστάσιον ἀπασχολεῖ 18 ἐργάτας καὶ 13 ἐργατρίας καὶ πληρώνει δι ὅλους εἰς μίαν ἡμέραν 2161 δραχμάς, Ἐὰν ὁ ἐργάτης λαμβάνῃ ἡμερησίως 30,5 δραχμὰς περισσοτέρας τῆς ἐργατρίας, νὰ εὑρεθῇ τὸ ἡμερομίσθιόν των.

259) Κάποιος ἠγόρασε αὐγὰ πρὸς 8 δρχ. τὰ δέκα. Ἐπειδὴ τοῦ ἔσπασαν 5, ἐπώλησε τὰ ὑπόλοιπα πρὸς 9 δραχμὰς τὰ 6 αὐγὰ καὶ ἐκέρδισε 70,9 δρχ. Πόσα αὐγὰ εἶχεν ἀγοράσει ;

260) Ἐὰν οἱ μαθηταὶ μιᾶς τάξεως καθήσουν εἰς τὰ θρανία μιᾶς αἰθούσης ἀνὰ 5, μένουν ὄρθιοι 4 μαθηταί. Ἐὰν ὅμως καθήσουν ἀνὰ 3, μένουν ὄρθιοι 24 μαθηταί. Πόσοι εἶναι οἱ μαθηταὶ καὶ πόσα τὰ θρανία ;

261) Ἕνας ἐργάτης ἀνέλαβε νὰ ἐκτελέσῃ ἕνα ἔργον εἰς 63 ἡμέρας. Συνεφωνήθη νὰ λαμβάνῃ 80 δρχ. διὰ κάθε ἡμέραν ἐργασίας, ἀλλὰ νὰ πληρώνῃ 100 διὰ κάθε ἡμέραν κατὰ τὴν ὁποίαν δὲν θὰ ἐργάζεται. Ἐπὶ πόσας ἡμέρας εἰργάσθη, ἐὰν 1) ἔλαβε 3060 δρχ. 2) δὲν ἔλαβε τίποτε καὶ 3) ἐπλήρωσε καὶ 180 δρχ ;

262) Τριώροφος πύραυλος ἔχει ὁλικὸν βάρος 360 τόννων. Ὁ α' ὄροφος ἔχει τριπλάσιον βάρος τοῦ μεσαίου, ὁ ὁποῖος εἶναι διπλάσιος κατὰ τὸ βάρος τοῦ τρίτου. Νὰ εὑρεθῇ τὸ βάρος κάθε ὀρόφου.

263) Ποσὸν 335 δραχμῶν ἀποτελεῖται ἀπὸ 82 κέρματα μεταλλικὰ τῶν 2, τῶν 5 καὶ τῶν 10 δρχ. Τὰ πεντάδραχμα ἦσαν κατὰ 2 περισσότερα τῶν δεκαδράχμων. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμὸς κάθε εἴδους τῶν κερμάτων αὐτῶν.

263) Κουρεὺς εἶπεν εἰς πελάτην του, ὅταν ἐζήτησε νὰ πληρώσῃ: «τριπλασίασε τὰ χρήματά μου καὶ σοῦ δίδω 81 δραχμάς». Τοῦτο ἐγένετο, καθὼς καὶ μὲ δεύτερον καὶ τρίτον πελάτην, ὁπότε τίποτε δὲν ἔμεινεν εἰς τὸν κουρέα. Πόσα εἶχεν ἀρχικῶς ;

265) Δύο πόλεις εὑρίσκονται ἐπὶ τῆς ὄχθης πλωτοῦ ποταμο ῦταχύτητος 3 μιλ/ώρ. Ποταμόπλοιον, τὸ ὁποῖον ἐκτελεῖ τὴν συγκοινωνίαν μεταξὺ αὐτῶν, ἀναπλέει τὸν ποταμὸν εἰς 34 ὥρας καὶ χωρὶς νὰ ἀλλάξῃ ταχύτητα κατέρχεται αὐτὸν εἰς 22 ὥρας. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις τῶν δύο πόλεων καὶ ἡ ταχύτης τοῦ πλοίου.

266) Δύο πόλεις Α καὶ Β ἀπέχουν 190,8 χιλμ. Ἀπὸ τὴν Α ἐκκινεῖ πρὸς τὴν Β ἁμαξοστοιχία μὲ ταχύτητα 42,5 χλμ/ὥρ. συγχρόνως δὲν ἐκκινεῖ ἀπὸ τὴν Β ἀντιθέτως ἄλλη μὲ ταχύτητα 37 χλμ./ώρ. Νὰ εὑρεθῇ μετὰ πόσην ὥραν καὶ εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τὴν Α θὰ συναντηθοῦν.

267) Κεφάλαιον τοκιζόμενον ἐπὶ 3 ἔτη πρὸς 5% γίνεται μαζὶ μὲ τοὺς τόκους του 27600 δρχ. Ποῖον εἶναι τὸ Κεφάλαιον.

268) Ἀπὸ τὸ ἐτήσιον εἰσόδημά του ἀπεταμίευσε κάποιος καὶ κατέθεσεν εἰς τὸ Ταμιευτήριον 36.000 δρχ. Τὸ ἑπόμενον ἔτος τὰς μὲν δαπάνας του ἠλάττωσε κατὰ 10%, τὸ δὲ εἰσόδημά του ηὔξησε κατὰ 5% καὶ ἠδυνήθη κατὰ τὸ ἔτος τοῦτο νὰ ἀποταμιεύσῃ 60.000. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἀρχικὸν εἰσόδημά του.

269) Ἐὰν τὰ $\frac{3}{7}$ ἑνὸς κεφαλαίου τοκίσωμεν πρὸς 5% τὸ δὲ ὑπόλοιπον πρὸς 4,5% λαμβάνομεν ἐτησίως ἐκ τοῦ β' μέρους 510 δραχμὰς τόκον περισσότερον τοῦ ἄλλου. Νὰ εὑρεθῇ τὸ κεφάλαιον.

270) Εἰς 117 χλγρ. ἁλμυροῦ ὕδατος περιέχοντα 3,5 χλγρ ἅλατος. Πόσον καθαρὸν ὕδωρ πρέπει νὰ προσθέσωμεν, ὥστε ἡ περιεκτικότης εἰς ἅλας νὰ γίνῃ 2,5%;

271) Ὁ πατὴρ τῆς Ἀλγέβρας Διόφαντος ἔζησε τὸ ἕκτον τῆς ζωῆς του ὡς παιδί, τὸ δωδέκατον αὐτῆς ὡς νεανίας, τὸ ἕβδομον αὐτῆς μετὰ τὸν γάμον του καὶ 5 ἔτη ἀκόμη, ὅτε ἀπέκτησεν υἱὸν ὁ ὁποῖος ἔζησε τὸ ἥμισυ ἢ ὅσον ὁ πατήρ του, ἔζησε δὲ ἀκόμη 4 ἔτη μετὰ τὸν θάνατον τοῦ υἱοῦ του. Πόσα ἔτη ἔζησεν ὁ Διόφαντος ;

65. ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ.

Α) Ἂς λάβωμεν τὴν παράστασιν $3x-5$, ὅπου x εἶναι κάποιος πραγματικὸς ἀριθμός. Ἂν ἀντὶ τοῦ x θέσωμεν $\frac{5}{2}$, τότε ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς παραστάσεως $3x-5$ εἶναι ὁ 0. Ἀπὸ τὰ προηγούμενα γνωρίζομεν ὅτι μόνον διὰ $x = \frac{5}{2}$ ἰσχύει $3x-5=0$. Ἑπομένως, ἂν εἶναι $x \neq \frac{5}{2}$, θὰ εἶναι $3x-5 \neq 0$.

Ἂς θέσωμεν τώρα εἰς τὴν ἰδίαν παράστασιν ἀντὶ x πρῶτον τὸν 4 καὶ δεύτερον τὸν $\frac{1}{2}$. Εὑρίσκομεν : 1ον) $3 \cdot 4 - 5 = 12 - 5 = 7$, δηλαδὴ ἀριθμὸν θετικὸν(>0) καὶ 2ον) $3 \cdot \frac{1}{2} - 5 = \frac{3}{2} - 5 = \frac{3}{2} - \frac{10}{2} = -\frac{7}{2}$ δηλαδὴ ἀριθμὸν ἀρνητικὸν (<0). Ὥστε ἄλλαι τιμαὶ τοῦ x ($\neq \frac{5}{2}$) δίδουν τιμὴν θετικὴν (>0) εἰς τὴν παράστασιν $3x-5$ καὶ ἄλλαι ἀρνητικὴν (<0).

Τίθεται λοιπὸν τὸ πρόβλημα :

Νὰ ὁρισθῇ ὁ πραγματικὸς ἀριθμὸς x, ὥστε νὰ εἶναι :

1ον) $3x-5>0$ καὶ 2ον) $3x-5<0$.

Καθεμία ἀπὸ τὰς παραστάσεις $3x-5>0$ καὶ $3x-5<0$ λέγεται : **μία ἀνίσωσις πρώτου βαθμοῦ.** Μὲ τὸν ὅρον αὐτὸν ἐννοοῦμεν γενικῶς κάθε παράστασιν τῆς μορφῆς $\alpha x+\beta>0$ εἴτε $\alpha x+\beta<0$, ὅπου α, β, γνωστοὶ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ καὶ x ἄγνωστος πραγματικὸς ἀριθμὸς (ποὺ πρέπει νὰ ὁρισθῇ).

Ἡ φράσις **«νὰ λυθῇ (ἢ νὰ ἐπιλυθῇ) ἡ ἀνίσωσις...»** σημαίνει «νὰ εὑρεθοῦν αἱ τιμαὶ τοῦ ἀγνώστου, διὰ τὰς ὁποίας ἡ ἀνίσωσις γίνεται ἀληθὴς (ἀριθμητικὴ) ἀνισότης».

Β) Μία ἀνίσωσις πρώτου βαθμοῦ ἐπιλύεται, ὅπως φαίνεται εἰς τὰ ἀκόλουθα παραδείγματα.

Παράδειγμα 1ον. Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἀνίσωσις $3x-5>0$.

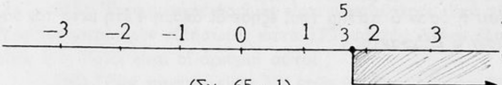
Σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς : Ἂν ὑπῆρχε κάποιος πραγματικὸς ἀριθμὸς x' μὲ τὴν ἰδιότητα $3x'-5>0$ (ἄν, ὅπως λέγομεν, ὁ x' ἐπηλήθευε τὴν ἀνίσωσιν), τότε αὐτὸς ὁ x' θὰ εἶχε καὶ τὴν ἰδιότητα : $3x'>5$ (ἐπροσθέσαμεν εἰς τὰ μέλη τὸν 5) καὶ ἀντιστρόφως. Δηλαδὴ αἱ ἀνισότητες $3x'-5>0$ καὶ $3x'>5$, θὰ ἦσαν, ὅπως λέγομεν, **ἰσοδύναμοι.** Παρατηροῦμεν τώρα ὅτι ἡ ἀνισότης $3x'>5$ εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν $x'>\frac{5}{3}$ (ἐδιαιρέσαμεν τὰ μέλη τῆς $3x'>5$ μὲ τὸν θετικὸν 3).

Ὥστε ἡ ἀρχικὴ ἀνίσωσις ἐπαληθεύεται ἀπὸ κάθε πραγματικὸν ἀριθμὸν x μὲ $x > \frac{5}{3}$ καὶ μόνον.

Μὲ τοὺς συμβολισμοὺς τῶν συνόλων γράφομεν :

$$\{ x \mid 3x - 5 > 0 \} = \{ x \mid x > \frac{5}{3} \}.$$

Αὐτὸ τὸ συμβολίζομεν σχηματικῶς ὡς ἑξῆς :



(Σχ. 65 – 1)

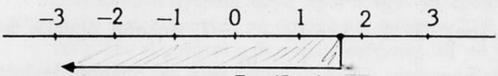
Λαμβάνομεν τὴν εὐθεῖαν τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, σημειώνομεν ζωηρῶς τὸ σημεῖον $\frac{5}{3}$ καὶ θέτομεν ὑποκάτω τῶν τιμῶν διὰ τὰς ὁποίας ἐπαληθεύεται ἡ ἀνίσωσις ἕνα βέλος, ὅπως βλέπετε εἰς τὸ Σχ. 65–1.

Παράδειγμα 2ον. Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἀνίσωσις : $3x - 5 < 0$.

Μὲ ὁμοίους, ὅπως προηγουμένως, συλλογισμοὺς εὑρίσκομεν :

$$3x - 5 < 0 \Leftrightarrow 3x < 5 \Leftrightarrow x < \frac{5}{3}$$

Δηλαδὴ ἡ δοθεῖσα ἀνίσωσις ἐπαληθεύεται ἀπὸ κάθε πραγματικὸν ἀριθμὸν



Σχ. 65 – 2

x μὲ $x < \frac{5}{3}$ καὶ μόνον. Σχηματικῶς τὸ συμπέρασμα παριστάνεται εἰς τὸ Σχ. 65–2.

Παρατήρησις : Ἐπειδὴ μᾶς ἦτο γνωστὸν ἤδη ὅτι :

1ον) εἶναι $3x - 5 = 0$ μόνον διὰ $x = \frac{5}{3}$

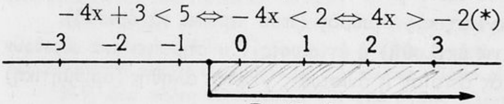
2ον) εἶναι $3x - 5 > 0$ μόνον διὰ $x > \frac{5}{3}$

ἠμπορούσαμεν ἀμέσως νὰ συμπεράνωμεν ὅτι ἡ ἀνίσωσις $3x - 5 < 0$ ἐπαληθεύεται μόνον διὰ $x < \frac{5}{3}$.

Παράδειγμα 3ον. Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἀνίσωσις : $-4x + 3 < 5$.

Μὲ ὁμοίους, ὡς ἀνωτέρω, συλλογισμοὺς εὑρίσκοεν :

$$-4x + 3 < 5 \Leftrightarrow -4x < 2 \Leftrightarrow 4x > -2(*) \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}$$

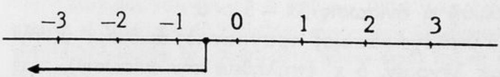


Σχ. 65—3

Σχηματικῶς τὸ συμπέρασμα παριστάνεται εἰς τὸ Σχ. 65 – 3.

Παράδειγμα 4ον. Νὰ λυθῇ ἡ ἀνίσωσις $-4x + 3 > 5$

Μὲ ὁμοίαν ἐργασίαν καταλήγομεν εἰς τὸ συμπέρασμα, ποὺ ἐκφράζεται εἰς τὸ Σχ. 65–4.



Σχ. 65—4

Γ) Γενικαὶ παρατηρήσεις :

1η) Μία ἀνίσωσις εἶναι ἐνδεχόμενον νὰ ἐπαληθεύεται ἀπὸ κάθε πραγμα-

(*) Γνωρίζομεν ὅτι ὁ πολλαπλασιασμὸς τῶν μελῶν ἀνισότητος ἐπὶ ἀριθμὸν ἀρνητικὸν ἀλλάζει τὴν φοράν της.

τικὸν ἀριθμὸν εἴτε νὰ μὴ ὑπάρχῃ κάποιος πραγματικὸς ἀριθμός, ποὺ νὰ τὴν ἐπαληθεύῃ.

Παραδείγματα. 1ον. Ἡ ἀνίσωσις $0 \cdot x + 10 > 0$ ἐπαληθεύεται ἀπὸ κάθε $x \in R$ (διατί ;).

2ον. Τὴν ἀνίσωσιν $0x - 8 > 0$ οὐδεὶς $x \in R$ τὴν ἐπαληθεύει (διατί ;)

2α. Διὰ τὰς ἀνισώσεις ἰσχύει ἰδιότης ἀνάλογος μὲ τὴν ἰδιότητα ποὺ συνηντήσαμεν εἰς τὰς ἐξισώσεις. Οὕτω, π.χ. ἡ ἀνίσωσις $-\frac{1}{3}x + \frac{1}{2} < \frac{5}{7}$ εἶναι ἰσοδύναμος μὲ ἐκείνην ποὺ προκύπτει ἀπὸ αὐτήν, ἂν τὰ μέλη της πολλαπλασιασθοῦν ἐπὶ τὸ Ε.Κ.Π. τῶν παρονομαστῶν 3,2,7, δηλ. ἐπὶ τὸν 42. Ἔχομεν λοιπόν τότε, ἀντὶ τῆς $-\frac{1}{3}x + \frac{1}{2} < \frac{5}{7}$ τὴν ἰσοδύναμόν της $42 \cdot (-\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}) < 42 \cdot \frac{5}{7}$, δηλαδὴ τὴν $-14x + 21 < 30$, τὴν ὁποίαν ἐπιλύομεν εὐκόλως.

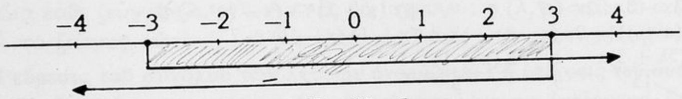
Ἐπίσης ἡ ἀνίσωσις $-\frac{1}{3}x + \frac{1}{2} < \frac{5}{7}$ εἶναι ἰσοδύναμος μὲ ἐκείνην, ποὺ προκύπτει ἀπὸ αὐτήν, ἂν τὰ μέλη της πολλαπλασιασθοῦν ἐπὶ τὸν ἀντίθετον τοῦ Ε.Κ.Π. τῶν παρονομαστῶν, δηλ ἐπὶ τὸν -42. Ἔχομεν λοιπὸν τότε, ἀντὶ τῆς $-\frac{1}{3}x + \frac{1}{2} < \frac{5}{7}$, τὴν ἰσοδύναμόν της :

$$-42 \cdot (-\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}) > -42 \cdot \frac{5}{7}, \text{δηλαδὴ τήν : } 14x - 21 > -30$$

Εἶναι φανερὸν ὅτι ἡ προηγουμένη ἰδιότης ἔχει ἀξιόλογον πρακτικὴν σημασίαν διὰ τὴν ἐπίλυσιν τῶν ἀνισώσεων.

Ἐφαρμογὴ 1η. Νὰ εὕρετε τὸ σύνολον $A \cap B$, ἐὰν εἶναι :
$A = \{x/x$ ἀκέραιος καὶ $x < 3\}$ καὶ $B = \{x/x$ ἀκέραιος καὶ $x > -3\}$.

Λύσις. Ἐπὶ τῆς εὐθείας τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν σημειώνομεν ζωηρῶς τὰ σημεῖα, δηλαδὴ τοὺς ἀριθμούς, ποὺ εἶναι στοιχεῖα τοῦ συνόλου A καὶ ὑπογραμμίζομεν μὲ βέλος (σχ. 65 – 5).



Σχ· 65 – 5

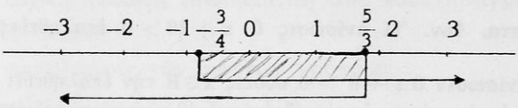
Ὁμοίως μὲ ἕνα ἄλλο βέλος ὑπογραμμίζομεν τὰ σημεῖα, δηλαδὴ τοὺς ἀριθμούς, ποὺ εἶναι στοιχεῖα τοῦ συνόλου B.

Ὅπως βλέπομεν εἰς τὸ Σχ. 65—5 εἶναι : $A = \{2, 1, 0, -1, -2, -3, -4, \ldots\}$
$B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$, $A \cap B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

Εἶναι φανερὸν ὅτι $A \cap B$ εἶναι τὸ σύνολον τῶν τιμῶν τοῦ x διὰ τὰς ὁποίας συναληθεύουν αἱ ἀνισώσεις : $x < 3$ καὶ $x > -3$ καὶ x ἀκέραιος πραγματικὸς ἀριθμός.

Ὥστε $A \cap B = \{x | x \in Z$ καὶ $-3 < x < 3\}$, ὅπου Z = τὸ σύνολον τῶν σχετικῶν ἀκεραίων.

Ἐφαρμογὴ 2α. Θεωροῦμεν τὰ σύνολα : $A = \{x \mid 3x - 5 < 0\}$, $B = \{x \mid 4x + 3 > 0\}$. Νὰ ὁρισθῇ τὸ σύνολον $A \cap B$, δηλαδὴ νὰ εὑρεθοῦν αἱ τιμαὶ τοῦ x, διὰ τὰς ὁποίας συναληθεύουν αἱ ἀνισώσεις $4x + 3 > 0$ καὶ $3x - 5 < 0$.



Σχ. 65 – 6

Λύσις. Ἔχομεν $A = \{ x|3x - 5 < 0 \} = \{x|3x < 5\} = \{x|x < \frac{5}{3}\}$.

Ἐπίσης $B = \{ x|\ 4x + 3 > 0 \} = \{x|\ 4x > -3 \} = \{x|x > -\frac{3}{4}\}$.

Ὅπως εἶναι φανερὸν ἐκ τοῦ σχήματος 65 – 6 εἶναι :

$$A \cap B = \{ x|x \in R \text{ καὶ } -\frac{3}{4} < x < \frac{5}{3}\}.$$

Μὲ ἄλλας λέξεις αἱ ἀνισώσεις $3x - 5 < 0$ καὶ $4x + 3 > 0$ συναληθεύουν διὰ τὰς τιμὰς τοῦ x, ποὺ περιέχονται μεταξὺ $-\frac{3}{4}$ καὶ $+\frac{5}{3}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

272) Νὰ λυθοῦν αἱ ἀνισώσεις :

α) $7x - 12 < x - 18$ β) $4 - 2x > -9 - 5x$

γ) $2(x - 1) + 3(2x + 4) - 7 < 5(2x - 1) - (x - 3)$

δ) $(x + 5)^2 - 2(3x - 6) > (x - 3)^2 - 3(2x + 5)$

ε) $\frac{x-3}{4} - \frac{x-2}{3} > x - \frac{x-1}{2}$ στ) $(x + \frac{1}{5})^2 < (x - \frac{1}{3})(x + \frac{1}{15})$

ζ) $27x - 5(2x - 5) < 6(3x - 5) - 5(1 - 2x) - 2$

η) $\frac{2(3x-5)}{3} - \frac{5(5x+10)}{12} < 3(3x + 2) - 71$

θ) $(\psi + 2)^2 - 3(\psi - 5) < \psi(\psi + 1) + 20$

ι) $(2\omega - 3)(\omega + 2) - 4(1 + \omega) > \omega(2\omega + 1) - 2(2\omega + 5)$

ια) $(z - 1)^2 + (z - 3)^2 + (z - 5)^2 < 3(z + 15)(z - 7)$

273) Νὰ λυθοῦν αἱ ἀνισώσεις (παράμετρος λ) :

α) $\lambda x - 3 < 2x + 7$ β) $(x + \lambda)^2 - (x - \lambda)^2 > 4\lambda$.

γ) $(x + 1)^3 - 2x(x - 4) - \lambda x > (x + 1)(x^2 - 1) + 7$

δ) $\frac{(5\lambda + 3)x}{15} - \frac{1}{5} < \frac{2(x+1) - 1}{3}$

274) Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ x συναληθεύουν αἱ ἀνισώσεις :

α) $3x - 1 < x + 5$, β) $2(x - 5) > x - 15$, γ) $(x + 1)^2 > x(x + 1) + 1$

275) Διὰ ποίας ἀκεραίας τιμὰς τοῦ x συναληθεύουν αἱ ἀνισώσεις.

α) $\frac{x-5}{2} < \frac{2x-7}{4} - \frac{x+1}{9}$ καὶ β) $\frac{3x-14}{12} + \frac{3x-2}{4} > \frac{2(x-1)}{3}$

276 Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ ψ συναληθεύουν αἱ ἀνισώσεις :

α) $\frac{(\psi+3)(\psi-2)}{10} - \frac{(\psi+2)(\psi-1)}{14} < \frac{(\psi-3)(\psi+2)+4}{35}$ καὶ

β) $\frac{\psi-1}{5} + \frac{2\psi+3}{10} > \frac{3}{4}\cdot(\psi - \frac{\psi+4}{2}) + \frac{3\psi-4}{8}$

277) Λύσατε τὰς ἀνισώσεις :

α) $\frac{x-3}{x-7} > 0$ β) $\frac{2\psi-3}{\psi-4} > 0$ γ) $\frac{2\psi+5}{\psi-1} < 0$

δ) $\frac{\psi-2}{\psi-3} - 1 < 0$ ε) $\frac{2x+3}{x+2} > 1$ στ) $\frac{x+1}{2x-3} < \frac{1}{2}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VII

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

66. ΣΥΣΤΗΜΑ ΔΥΟ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ ΜΕ ΔΥΟ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ.

Α) Σύστημα ἐξισώσεων. Δίδονται δύο ἐξισώσεις μὲ δύο ἀγνώστους: $\varphi(x, \psi) = 0$ καὶ $\sigma(x, \psi) = 0$ καὶ ἔστω A τὸ σύνολον λύσεων τῆς πρώτης καὶ B τὸ σύνολον τῶν λύσεων τῆς δευτέρας. Προκύπτει τὸ ἐρώτημα : Ὑπάρχουν ζεύγη (x, ψ) τὰ ὁποῖα νὰ ἐπαληθεύουν καὶ τὰς δύο ἐξισώσεις συγχρόνως ; Τὸ σύνολον αὐτῶν τῶν ζευγῶν εἶναι προφανῶς τὸ σύνολον $A \cap B$.

Τὸ ζεῦγος ἐξισώσεων :

(Σ) : $(\varphi(x,\psi) = 0,\ \sigma(x, \psi) = 0)$

τῶν ὁποίων ζητοῦμεν κοινὴν λύσιν, ὀνομάζεται **ἕνα σύστημα δύο ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους.**

Τὸ πρόβλημα τὸ ὁποῖον τίθεται τώρα, εἶναι : **νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον τῶν λύσεων τοῦ συστήματος (Σ).**

Διὰ κάθε ζεῦγος $(\lambda, \rho) \in A \cap B$, θὰ ἰσχύουν : $\varphi(\lambda, \rho) = 0$ καὶ $\sigma(\lambda, \rho) = 0$ συνεπῶς τὸ ζεῦγος αὐτὸ (λ, ρ) θὰ εἶναι μία λύσις τοῦ συστήματος.

Ἡ εὕρεσις τοῦ συνόλου τῶν λύσεων ὀνομάζεται : ἡ ἐπίλυσις τοῦ συστήματος.

Β) Ἰσοδυναμία συστημάτων. Δύο συστήματα λέγονται ἰσοδύναμα, ὅταν ἔχουν τὰς αὐτὰς λύσεις, δηλαδὴ κάθε λύσις τοῦ πρώτου εἶναι λύσις καὶ τοῦ δευτέρου καὶ ἀντιστρόφως.

Ἔστω τὸ σύστημα (Σ) μὲ ἐξισώσεις $\varphi(x, \psi) = 0$ (1) καὶ $\sigma(x, \psi) = 0$ (2)

Ἂν k, λ εἶναι δύο σταθεραί, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μία τουλάχιστον, π.χ. ἡ k εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός, τότε **ἡ ἐξίσωσις $k\,\varphi(x, \psi) + \lambda\,\sigma(x, \psi) = 0$ (3) λέγεται ἕνας γραμμικὸς συνδυασμὸς τῶν (1) καὶ (2).**

Ἰσχύει ἡ ἑξῆς χρήσιμος ἰδιότης :

Ἂν εἰς ἕνα σύστημα (Σ) ἀντικατασταθῇ μία του ἐξίσωσις μὲ ἕνα γραμμικὸν συνδυασμὸν τῶν ἐξισώσεών του, προκύπτει ἰσοδύναμον σύστημα.

Πράγματι : ἔστω τὸ σύστημα

$$(\Sigma) : \left.\begin{array}{l} \varphi = 0 \\ \sigma = 0 \end{array}\right\}$$

καὶ τὸ σύστημα :

$$(\Sigma') : \left.\begin{array}{r} k \cdot \varphi + \lambda \cdot \sigma = 0 \\ \sigma = 0 \end{array}\right\}$$

Κάθε λύσις (x_0, ψ_0) τοῦ (Σ) εἶναι προφανῶς καὶ λύσις τοῦ (Σ').

Ἀντιστρόφως, κάθε λύσις (x'_0, ψ_0') τοῦ (Σ'), θὰ ἐπαληθεύῃ τὴν $k \cdot \varphi + \lambda \cdot \sigma = 0$ καὶ – λόγῳ τοῦ ὅτι $\sigma = 0$ – τὴν $k \cdot \varphi = 0$· ἀλλὰ εἶναι $k \neq 0$ καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι $\varphi = 0$. Ἤτοι τὸ ζεῦγος $(x'_0\ \psi'_0)$ ἐπαληθεύει τὰς ἐξισώσεις $\sigma = 0$, $\varphi = 0$, δηλαδὴ εἶναι λύσις τοῦ συστήματος (Σ).

Γ) Ἐπίλυσις πρωτοβαθμίων συστημάτων δύο ἀγνώστων.

Ἐὰν εἶναι $\varphi(x, \psi) = \alpha x + \beta\psi + \gamma$ καὶ $\sigma(x, \psi) = \alpha' x + \beta'\psi + \gamma'$,

τὸ σύστημα : $\left.\begin{array}{r} \alpha x + \beta\psi + \gamma = 0 \\ \alpha' x + \beta'\psi + \gamma' = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array}$ (A) εἶναι ἡ γενικὴ μορφὴ τοῦ συστήματος δύο ἐξισώσεων α' βαθμοῦ μὲ δύο ἀγνώστους.

Τὸ σύνολον τῶν λύσεων τῆς ἐξισώσεως (1) εἶναι τό :

$\Sigma = \{ (x, \psi) \mid (x, \psi) \in R \times R$ καὶ $\alpha x + \beta\psi + \gamma = 0 \}$

Τὸ σύνολον τῶν λύσεων τῆς ἐξισώσεως (2) εἶναι τό :

$T = \{ (x, \psi) \mid (x, \psi) \in R \times R$ καὶ $\alpha' x + \beta'\psi + \gamma' = 0 \}$

Ἐπίλυσις τοῦ (A) εἶναι ὁ προσδιορισμὸς τοῦ συνόλου $\Sigma \cap T$. Ὁ προσδιορισμὸς αὐτὸς δύναται νὰ γίνῃ γραφικῶς, ἐπειδὴ κάθε ἐξίσωσις τοῦ (A) παριστάνεται, ὅπως γνωρίζομεν, μὲ μίαν εὐθεῖαν γραμμὴν εἰς ἕνα σύστημα ἀξόνων $x O \psi$. Θὰ ἴδωμεν ὅμως κατὰ πρῶτον ὑπολογιστικοὺς τρόπους ἐπιλύσεως ἑνὸς συστήματος τῆς μορφῆς (A).

1. Μέθοδος τῆς ἀντικαταστάσεως.

Παράδειγμα. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα : $\left.\begin{array}{r} x - 2\psi + 17 = 0 \\ 3x + \psi + 16 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array}$ (A)

Ἐπειδὴ $x - 2\psi + 17 = 0 \Leftrightarrow x = 2\psi - 17$, ἀντὶ τοῦ (A) λαμβάνομεν τὸ σύστημα : $\left.\begin{array}{r} x = 2\psi - 17 \\ 3x + \psi + 16 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1') \\ (2) \end{array}$ (B).

Κάθε λύσις τοῦ συστήματος (A) εἶναι καὶ τοῦ (B), ἐπειδὴ ἡ (1) τοῦ (A) ἔχει ἀντικατασταθῆ μὲ τὴν ἰσοδύναμον της (1') εἰς τὸ (B). Ἐπίσης κάθε λύσις τοῦ (B) ἀποδεικνύεται ἀμέσως ὅτι εἶναι καὶ τοῦ (A), διότι ἡ (2) εἶναι ἡ αὐτὴ εἰς τὰ δύο συστήματα καὶ ἡ (1) εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν (1'). Εἰς τὸ (B) εἶναι δυνατὸν τὴν ἔκφρασιν τοῦ x ἀπὸ τὴν (1') νὰ θέσωμεν ἀντὶ τοῦ x εἰς τὴν (2), δηλ. νὰ ἔχωμεν τὸ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ (B) σύστημα :

$\left.\begin{array}{r} x = 2\psi - 17 \\ 3(2\psi - 17) + \psi + 16 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1') \\ (2') \end{array}$ (Γ). Εἰς τὸ σύστημα ὅμως (Γ) ἡ ἐξίσωσις (2') εἶναι ἐξίσωσις μὲ ἕνα μόνον ἄγνωστον καὶ ἑπομένως ἐπιλύεται κατὰ τὰ γνωστά. Ἔχομεν :

$(2') \Leftrightarrow 6\psi - 51 + \psi + 16 = 0 \Leftrightarrow 7\psi = 35 \Leftrightarrow \psi = 5$ καὶ τὸ (Γ) εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τό : $\left.\begin{aligned} x &= 2\psi - 17 \\ \psi &= 5 \end{aligned}\right\} \begin{matrix}(1') \\ (2'')\end{matrix} \quad (\Delta)$

Ἀλλὰ τὸ (Δ) εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τό : $\left.\begin{aligned} x &= 2\cdot 5 - 17 \\ \psi &= 5 \end{aligned}\right\} \begin{matrix}(1'') \\ (2'')\end{matrix} \quad (E)$

δηλαδὴ πρὸς τὸ $\left.\begin{aligned} x &= -7 \\ \psi &= 5 \end{aligned}\right\}$ (Ζ). Εἶναι λοιπὸν τὸ (Α) ἰσοδύναμον πρὸς τὸ (Ζ), ἄρα ἔχει λύσιν τὴν μοναδικήν : $x = -7$, $\psi = 6$, δηλαδὴ τὸ ζεῦγος $(-7, 5)$.

Ὥστε : Διὰ νὰ λύσωμεν ἕνα σύστημα δύο ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους διὰ τῆς μεθόδου τῆς ἀντικαταστάσεως :

1. Λύομεν τὴν μίαν τῶν ἐξισώσεων ὡς πρὸς ἕνα ἄγνωστον λ.χ. ὡς πρὸς x (ἐκφράζομεν δηλαδὴ τὸν x συναρτήσει τοῦ ψ).

2. Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἄλλην ἐξίσωσιν τοῦ συστήματος τὸν x μὲ τὴν εὑρεθεῖσαν ἔκφρασίν του καὶ λύομεν τὴν προκύπτουσαν μὲ ἕνα ἄγνωστον ἐξίσωσιν, ὁπότε εὑρίσκομεν τὸν ἄγνωστον ψ.

3. Τὴν τιμὴν αὐτὴν τοῦ ψ ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἔκφρασιν τοῦ x, ποὺ εὑρέθη εἰς τὸν 1ον βῆμα αὐτῆς τῆς ἐργασίας καὶ ὑπολογίζομεν τὴν τιμὴν αὐτοῦ.

Τὸν τρόπον αὐτὸν ἐργασίας διὰ τὴν λύσιν ἑνὸς συστήματος καλοῦμεν καὶ **μέθοδον ἀπαλοιφῆς διὰ τῆς ἀντικαταστάσεως.**

ΙΙ. Μέθοδος τῆς συγκρίσεως.

Παράδειγμα. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα : $\left.\begin{aligned} x - 2\psi + 17 &= 0 \\ 3x + \psi + 16 &= 0 \end{aligned}\right\} \begin{matrix}(1) \\ (2)\end{matrix} \quad (A)$

Ἐπειδὴ εἶναι : $x - 2\psi + 17 = 0 \Leftrightarrow x = 2\psi - 17$ καὶ

$3x + \psi + 16 = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\psi + 16}{3}$ ἀντὶ τοῦ (Α) ἔχομεν τὸ ἰσοδύναμόν του :

$$(B) : \left.\begin{aligned} x &= 2\psi - 17 \\ x &= -\frac{\psi + 16}{3} \end{aligned}\right\} \begin{matrix}(1') \\ (2')\end{matrix}$$

Εἰς τὸ σύστημα (Β) ἐκφράζεται ὁ ἄγνωστος x καὶ εἰς τὰς δύο ἐξισώσεις ὡς συνάρτησις τοῦ ἄλλου ἀγνώστου ψ.

Ἀντὶ τοῦ (Β) δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν τὸ σύστημα

$$(\Gamma) : \left.\begin{aligned} x &= 2\psi - 17 \\ 2\psi - 17 &= -\frac{\psi + 16}{3} \end{aligned}\right\} \begin{matrix}(1) \\ (2'')\end{matrix}$$ (διότι ἡ (2'') εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν ἐξίσωσιν (2'), ἐπειδὴ αἱ ἐκφράσεις $2\psi - 17$ καὶ x εἶναι ἰσοδύναμοι, λόγῳ τῆς (1').

Ἀλλὰ εἶναι : $(2'') \Leftrightarrow 6\psi - 51 = -\psi - 16 \Leftrightarrow 7\psi = 35 \Leftrightarrow \psi = 5$, ἑπομένως τὸ (Γ) εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ σύστημα :

$(\Delta) : \left.\begin{aligned} x &= 2\psi - 17 \\ \psi &= 5 \end{aligned}\right\} \begin{matrix}(1') \\ (2''')\end{matrix}$ Θέτομεν εἰς τὴν (1') τοῦ (Δ) ὅπου ψ τὴν τιμήν του ἀπὸ τὴν (2''') καὶ ἔχομεν τὸ σύστημα :

$(E) : \left.\begin{aligned} x &= 2\cdot 5 - 17 \\ \psi &= 5 \end{aligned}\right\}$ δηλαδὴ τὸ (Ζ) : $\left.\begin{aligned} x &= -7 \\ x &= 5 \end{aligned}\right\}$, ὥστε ἡ λύσις τοῦ (Α) εἶναι $(-7\ ,5)$.

Εἰς τὴν γλῶσσαν τῶν συνόλων ἠμποροῦμεν νὰ γράψωμεν :

$$\{(x, \psi) \mid (x, \psi) \in R \times R \text{ καὶ } \left.\begin{array}{r} x - 2\psi + 17 = 0 \\ 3x + \psi + 16 = 0 \end{array}\right\} = \{(-7,5)\}$$

Ὥστε διὰ νὰ λύσωμεν ἕνα σύστημα δύο ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους διὰ τῆς μεθόδου τῆς συγκρίσεως :

1ον) Λύομεν τὰς δύο ἐξισώσεις ὡς πρὸς τὸν αὐτὸν ἄγνωστον λ.χ. τὸν ψ. 2ον) Ἐξισώνομεν τὰς δύο ἐκφράσεις τοῦ ψ, ὅτε προκύπτει μία ἐξίσωσις μὲ ἕνα μόνον ἄγνωστον, τὸν x καὶ 3ον) Λύομεν τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν καὶ εὑρίσκομεν τὸν x Ἔπειτα δὲ προσδιορίζομεν τὸν ψ ἀπὸ τὴν μίαν ἀπὸ τὰς ἐκφράσεις του.

III. Μέθοδος τοῦ γραμμικοῦ συνδυασμοῦ.

Παραδείγματα. 1ον Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\left.\begin{array}{r} x - 2\psi + 17 = 0 \quad (1) \\ 3x + \psi + 16 = 0 \quad (2) \end{array}\right\} \text{(A)}$

Τὸ σύστημα (A) θὰ ἀντικαταστήσωμεν μὲ ἕνα ἰσοδύναμόν του (B) εἰς τὸ ὁποῖον ἡ μία ἐξίσωσις νὰ εἶναι ἡ (1) ἢ ἡ (2) καὶ ἡ ἄλλη ἕνας γραμμικὸς συνδυασμὸς τῶν (1) καὶ (2), συμφώνως πρὸς τὴν ἰδιότητα (§ 66, B), δηλ. ἡ ἐξίσωσις

$$k(x - 2\psi + 17) + \lambda(3x + \psi + 16) = 0 \quad (3)$$

Εἰς τὴν (3) ἐκλέγομεν τοὺς ἀριθμοὺς k καὶ λ καταλλήλως, ὥστε νὰ γίνῃ μηδὲν ὁ συντελεστὴς εἴτε τοῦ ἀγνώστου x εἴτε τοῦ ἀγνώστου ψ. Π.χ. ἂν εἰς τὴν (3) τεθῇ $k = -3$ (δηλ. ὁ ἀντίθετος τοῦ συντελεστοῦ τοῦ x εἰς τὴν 2αν ἐξίσωσιν) καὶ $\lambda = 1$ (δηλ. ὁ συντελεστὴς τοῦ x εἰς τὴν 1ην ἐξίσωσιν), τότε ἡ (3) γίνεται

$$-3(x - 2\psi + 17) + 1(3x + \psi + 16) = 0 \Leftrightarrow$$
$$-3x + 6\psi - 51 + 3x + \psi + 16 = 0 \Leftrightarrow 7\psi - 35 = 0 \Leftrightarrow \psi = 5.$$

Ἐὰν $\lambda = 2$ (δηλ. ὁ ἀντίθετος τοῦ συντελεστοῦ τοῦ ψ εἰς τὴν πρώτην) καὶ $k = 1$ (δηλ. ὁ συντελεστὴς τοῦ ψ εἰς τὴν δευτέραν), ἡ B γίνεται :

$(x - 2\psi + 17) + 2(3x + \psi + 16) = 0 \Leftrightarrow 7x + 49 = 0 \Leftrightarrow$ καὶ $x = -7$

Πρακτικῶς ἐργαζόμεθα κατὰ τὴν ἐφαρμογὴν τῆς μεθόδου αὐτῆς ὡς ἑξῆς: Διὰ νὰ ἀπαλείψωμεν τὸν x, εἰς τὸ (A) πολΪζομεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (1) ἐπὶ -3 ἐνῷ πολ/ζομεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (2) ἐπὶ 1, οὕτω δὲ ἔχομεν :

$$\text{(A)} \quad \left.\begin{array}{r|r} x - 2\psi + 17 = 0 & -3 \\ 3x + \psi + 16 = 0 & 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \text{(A')} \quad \left.\begin{array}{r} -3x + 6\psi - 51 = 0 \\ 3x + \psi + 16 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1') \\ (2') \end{array}$$

Διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη τῶν (1′) καὶ (2′), ὥστε νὰ σχηματίσωμεν τὸν γραμμικὸν συνδυασμὸν (3) τῶν (1) καὶ (2), λαμβάνομεν : $7\psi - 35 = 0$, δηλαδὴ ἐγένετο ἀπαλοιφὴ τοῦ x, καὶ προέκυψε τὸ σύστημα : (B) $\left.\begin{array}{r} 7\psi - 35 = 0 \\ 3x + \psi + 16 = 0 \end{array}\right\}$, τὸ ὁποῖον λύεται εὐκόλως καὶ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ (A).

2ον Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\left.\begin{array}{r} 3x + 8\psi - 20 = 0 \quad (1) \\ -2x + 3\psi + 55 = 0 \quad (2) \end{array}\right\} \text{(A).}$

Ἂς ἀπαλείψωμεν τὸν ψ. Ὁ ψ ἔχει ὁμοσήμους συντελεστὰς εἰς τὰς (1) καὶ (2). Πολλαπλασιάζομεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (1) ἐπὶ 3 καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (2) ἐπὶ -8. Ἔχομεν :

$$(\mathrm{A}) \quad \left.\begin{array}{r|r} 3x + 8\psi - 20 = 0 & 3 \\ -2x + 3\psi + 55 = 0 & -8 \end{array}\right\} \Leftrightarrow (\mathrm{A}') \quad \left.\begin{array}{r} 9x + 24\psi - 60 = 0 \\ 16x - 24\psi - 440 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1') \\ (2') \end{array}$$

Διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη τῶν (1') καὶ (2') εὑρίσκομεν τὸν γραμμικὸν συνδυασμὸν αὐτῶν $25x - 500 = 0$, ἄρα $x = 20$. Ἀντικαθιστῶμεν τὸν x διὰ τῆς τιμῆς του 20 εἰς μίαν ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις τοῦ (A) λ.χ. εἰς τὴν (1) καὶ ἔχομεν :

$$3 \cdot 20 + 8\psi - 20 = 0 \Leftrightarrow 8\psi = -40 \Leftrightarrow \psi = -5$$

Ἐὰν θέλωμεν νὰ ἀπαλείψωμεν τὸν x, ὁ ὁποῖος ἔχει ἑτεροσήμους συντελεστὰς εἰς τὰς (1) καὶ (2), πολλαπλασιάζομεν τὰ δύο μέλη τῆς (1) ἐπὶ 2 καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (2) ἐπὶ 3. Ἔχομεν :

$$(\mathrm{A}) \quad \left.\begin{array}{r|r} 3x + 8\psi - 20 = 0 & 2 \\ -2x + 3\psi + 55 = 0 & 3 \end{array}\right\} \Leftrightarrow (\mathrm{A}'') \quad \left.\begin{array}{r} 6x + 16\psi - 40 = 0 \\ -6x + 9\psi + 165 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1'') \\ (2'') \end{array}$$

Διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη τῶν (1'') καὶ (2'') προκύπτει ὁ γραμμικὸς συνδυασμὸς αὐτῶν : $25\psi + 125 = 0$, δηλαδὴ $\psi = -5$.

Ἔχοντες ὑπολογίσει τὸν ψ εὑρίσκομεν ἀμέσως δι' ἀντικαταστάσεως εἰς μίαν ἐκ τῶν (1) καὶ (2) καὶ τὸν ἄλλον ἄγνωστον x.

Ὥστε διὰ νὰ λύσωμεν ἕνα σύστημα δύο ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους (α' βαθμοῦ) διὰ τῆς μεθόδου τοῦ γραμμικοῦ συνδυασμοῦ:

1ον) πολλαπλασιάζομεν τὰ μέλη τῆς πρώτης ἐπὶ ἕνα ἀριθμὸν $k \neq 0$ καὶ τὰ μέλη τῆς δευτέρας ἐπὶ ἕνα ἀριθμὸν $\lambda \neq 0$, ἐκλέγοντες τοὺς **k** καὶ λ εἰς τρόπον ὥστε εἰς τὰς προκυπτούσας ἐξισώσεις οἱ συντελεσταὶ ἑνὸς τῶν ἀγνώστων νὰ εἶναι ἀντίθετοι 2ον) Διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη τῶν δύο νέων ἐξισώσεων ἐξαλείφεται ὁ ἄγνωστος μὲ τοὺς ἀντιθέτους συντελεστὰς καὶ προσδιορίζεται ὁ ἄλλος ἄγνωστος καὶ 3ον) γνωστοῦ πλέον ὄντος τοῦ ἑνὸς ἀγνώστου εὐκόλως εὑρίσκομεν καὶ τὸν ἄλλον δι' ἀντικαταστάσεως εἰς μίαν τῶν ἐξισώσεων τοῦ δοθέντος συστήματος.

Ἡ μέθοδος τοῦ γραμμικοῦ συνδυασμοῦ λέγεται καὶ **μέθοδος τῶν ἀντιθέτων συντελεστῶν.**

67. ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΙΣ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΔΥΟ ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΜΕ ΔΥΟ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ.

α) Ἔστω τὸ σύστημα :

$$(\mathrm{A}) : \quad \left.\begin{array}{l} (1) : \alpha x + \beta\psi = \gamma \\ (2) : \alpha' x + \beta'\psi = \gamma' \end{array}\right\}$$

Τὴν ἀνωτέρω μορφὴν δύναται νὰ λάβῃ κάθε σύστημα πρώτου βαθμοῦ μὲ δύο ἀγνώστους. Τὰ α, β, γ, α', β', γ' συμβολίζουν δεδομένους πραγματικοὺς ἀριθμούς, τὰ δὲ x, ψ τοὺς ἀγνώστους.

1 Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ὅλοι οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ, α', β', γ' εἶναι διάφοροι τοῦ μηδενός. Ἀπὸ τὴν (1) εὑρίσκομεν :

$x = \dfrac{\gamma - \beta\psi}{\alpha}$ καὶ ἀντικαθιστῶντες τὸ x μὲ τὸ ἴσον του εἰς τὴν (2) τοῦ (A) ἔχομεν τὴν $(\alpha\beta' - \alpha'\beta)\psi = \alpha\gamma' - \alpha'\gamma$.

Ὥστε εἶναι :

$$(A)\ \left\{\begin{array}{l} \alpha x+\beta\psi=\gamma \\ \alpha' x+\beta'\psi=\gamma' \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x=\dfrac{\gamma-\beta\psi}{\alpha} \\ (\alpha\beta'-\alpha'\beta)\psi=\alpha\gamma'-\alpha'\gamma \end{array}\right\} \begin{array}{l}(3)\\(4)\end{array}\ (B)$$

Εἰς τὸ (B) ἡ ἐξίσωσις (4) εἶναι μὲ ἕνα μόνον ἄγνωστον. Ἐὰν λοιπὸν ἡ (4) εἶναι δυνατή, ἀδύνατος ἢ ἀόριστος, θὰ εἶναι καὶ τὸ σύστημα (B), ἄρα καὶ τὸ ἰσοδύναμόν του (A), δυνατόν, ἀδύνατον ἢ ἀόριστον ἀντισστοίχως.

1ον. Δυνατὴ εἶναι ἡ (4) ὅταν καὶ μόνον ὅταν εἶναι $\alpha\beta'-\alpha'\beta\neq 0$. **Ἑπομένως τὸ σύστημα (A) εἶναι δυνατὸν ὅταν καὶ μόνον ὅταν εἶναι $\alpha\beta'-\alpha'\beta\neq 0$.** Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἀπὸ τὴν (4) ἔχομεν : $\psi=\dfrac{\alpha\gamma'-\alpha'\gamma}{\alpha\beta'-\alpha'\beta}$. Ἐὰν θέσωμεν τὴν τιμὴν αὐτὴν τοῦ ψ εἰς τὴν (3), εὑρίσκομεν $x=\dfrac{\gamma\beta'-\gamma'\beta}{\alpha\beta'-\alpha'\beta}$.

Παρατηροῦμεν ὅτι εἶναι: $\alpha\beta'-\alpha'\beta\neq 0 \Leftrightarrow \dfrac{\alpha}{\alpha'}\neq\dfrac{\beta}{\beta'}$ (i)

2ον. Ἐὰν εἶναι $\alpha\beta'-\alpha'\beta=0$ καὶ $\alpha\gamma'-\alpha'\gamma\neq 0$ ἡ ἐξίσωσις (4) εἶναι ἀδύνατος. Δὲν ὑπάρχει τιμὴ τοῦ ψ λύσις τῆς (4). Ὥστε καὶ ἀπὸ τὴν (3) δὲν θὰ ὑπάρχῃ λύσις της ὡς πρὸς x καὶ τὸ σύστημα (A) **εἶναι ἀδύνατον.**

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἔχομεν: $\alpha\beta'-\alpha'\beta=0 \Leftrightarrow \alpha\beta'=\alpha'\beta \Leftrightarrow \dfrac{\alpha}{\alpha'}=\dfrac{\beta}{\beta'}$ καὶ $\alpha\gamma'-\alpha'\gamma\neq 0 \Leftrightarrow \alpha\gamma'\neq\alpha'\gamma \Leftrightarrow \dfrac{\alpha}{\alpha'}\neq\dfrac{\gamma}{\gamma'}$, ἐπομένως εἶναι καί :

$$\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\beta}{\beta'}\neq\frac{\gamma}{\gamma'} \quad \text{(ii)}.$$

Ἐὰν θέσωμεν $\dfrac{\alpha}{\alpha'}=\rho$ θὰ ἔχωμεν $\alpha=\alpha'\rho$, $\beta=\beta'\rho$ καὶ $\gamma\neq\gamma'\rho$, ὡς ἐξάγεται ἀπὸ τὰς (ii). Ἡ ἐξίσωσις (1) τοῦ (A) γίνεται: $\rho(\alpha'x+\beta'\psi)=\gamma$ καὶ τὸ σύστημα (A) γράφεται : $\left.\begin{array}{l}\rho(\alpha'x+\beta'\psi)=\gamma\\ \alpha'x+\beta'\psi=\gamma'\end{array}\right\}$. Αἱ ἐξισώσεις αὐταὶ εἶναι ἀδύνατον νὰ ἀληθεύουν συγχρόνως, διότι εἶναι $\rho\gamma'\neq\gamma$. Δυνάμεθα νὰ λέγωμεν εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὅτι αἱ ἐξισώσεις **εἶναι ἀσυμβίβαστοι.**

3ον. Ἐὰν εἶναι $\alpha\beta'-\alpha'\beta=0$ καὶ $\alpha\gamma'-\alpha'\gamma=0$ ἡ ἐξίσωσις (4) γίνεται ἀόριστος. Τὸ ψ δύναται νὰ λάβῃ κάθε τιμὴν εἰς τὸ R. Εἰς ἑκάστην τιμὴν τοῦ ψ ἀντιστοιχίζεται διὰ τῆς (3) τοῦ συστήματος (B) μία μόνον τιμὴ τοῦ x. Τὸ σύστημα λοιπὸν (B), ἄρα καὶ τὸ (A) **ἔχει μίαν ἀπειρίαν λύσεων.** Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἔχομεν :

$$\alpha\beta'-\alpha'\beta=0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\beta}{\beta'} \text{ καὶ } \alpha\gamma'-\alpha'\gamma=0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\gamma}{\gamma'},$$

δηλαδὴ $$\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\beta}{\beta'}=\frac{\gamma}{\gamma'} \quad \text{(iii)}.$$

Ἐὰν μεταξὺ τῶν συντελεστῶν τοῦ (A) ἰσχύῃ ἡ (iii), τότε τὸ σύστημα τοῦτο εἶναι ἀόριστον. Διότι ἐὰν θέσωμεν $\dfrac{\alpha}{\alpha'}=\rho$, ἀπὸ τὰς (iii) ἔχομεν $\alpha=\alpha'\rho$, $\beta=\beta'\rho$ καὶ $\gamma=\gamma'\rho$ καὶ αἱ ἐξισώσεις τοῦ (A) γίνονται :

$$\left.\begin{array}{r}\rho(\alpha'x+\beta'\psi)=\rho\gamma'\\ \alpha'x+\beta'\psi\;=\;\gamma'\end{array}\right\}$$ αἱ ὁποῖαι συμπίπτουν εἰς μίαν μόνον ἐξίσωσιν, ἐπειδὴ εἶναι $\rho \neq 0$. Ἀλλὰ μία ἐξίσωσις πρώτου βαθμοῦ ὡς πρὸς x, ψ ἔχει ἀπείρους λύσεις (x, ψ) εἰς τὸ σύνολον $R \times R$.

II. Ἐὰν εἶναι οἱ $\alpha, \beta, \alpha', \beta' \neq 0$ καὶ $\gamma = \gamma' = 0$. Ἐπειδὴ αἱ (3) καὶ (4) ἰσχύουν, εὑρίσκομεν ἀπὸ τὴν (4) ὅτι εἶναι $\psi = 0$ καὶ ἀπὸ τὴν (3) $x = 0$, ἐὰν εἶναι $\alpha\beta' \neq \alpha'\beta$, δηλαδὴ τὸ σύστημα (A) εἶναι δυνατὸν καὶ ἔχει μίαν λύσιν τὴν $x = 0,\ \psi = 0$.

Ἐὰν εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν εἶναι $\alpha\beta' - \alpha'\beta = 0$, δηλ. $\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'}$, τὸ (A) εἶναι ἀόριστον σύστημα.

III. Ἐὰν εἶναι $\alpha = \beta = 0$, τότε τὸ σύστημα (A) γίνεται :

$$\left.\begin{array}{r}0=\gamma\\ \alpha'x+\beta'\psi=\gamma'\end{array}\right\}$$ Ἐὰν εἶναι γ=0, τὸ (A) περιορίζεται εἰς μίαν μόνον ἐξίσωσιν, τὴν $\alpha'x + \beta'\psi = \gamma'$ καὶ ἔχει ἀπείρους λύσεις. Ἐὰν ὅμως εἶναι $\gamma \neq 0$, τὸ σύστημα (A) εἶναι ἀδύνατον.

Τὰ αὐτὰ συμπεράσματα ἔχομεν καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν εἶναι $\alpha' = \beta' = 0$.

IV). Ἐὰν εἶναι $\alpha = \alpha' = 0$, ἐξαφανίζεται ὁ ἕνας ἄγνωστος καὶ τὸ σύστημα γίνεται :

$$\left.\begin{array}{r}\beta\psi=\gamma\\ \beta'\psi=\gamma'\end{array}\right\}\ (\Gamma)$$

Ἐὰν εἶναι $\frac{\gamma}{\beta} = \frac{\gamma'}{\beta'}$, τὸ (Γ) ἔχει τὴν λύσιν :

$x \in R$ (δηλαδὴ x = ὁποιοσδήποτε ἀριθμὸς πραγματικὸς)

$\psi = \frac{\gamma}{\beta} = \frac{\gamma'}{\beta'}$, ἑπομένως εἶναι ἀόριστον.

Ἐὰν εἶναι $\frac{\gamma}{\beta} \neq \frac{\gamma'}{\beta'}$, τὸ (Γ) εἶναι ἀδύνατον.

V. Ἐὰν εἶναι $\alpha = \alpha' = \beta = \beta' = 0$, τὸ σύστημα (A) γίνεται :

$$\left.\begin{array}{r}0x+0\psi=\gamma\\ 0x+0\psi=\gamma'\end{array}\right\}.$$ Ἐὰν εἶναι $\gamma = 0$ καὶ $\gamma' = 0$ ἔχομεν δύο ταυτότητας.

Τὰ x, ψ λαμβάνουν καὶ τὰ δύο αὐθαιρέτους τιμὰς καὶ λέγομεν τώρα ὅτι τὸ (A) ἔχει **διπλῆν ἀοριστίαν** λύσεων.

Ἐὰν ἕνα ἀπὸ τὰ γ καὶ γ′ δὲν εἶναι μηδέν, τὸ σύστημα **εἶναι ἀδύνατον.**.

Ἡ περίπτωσις $\alpha = \alpha' = \beta = \beta' = 0$ δύναται νὰ παρουσιασθῇ κατὰ τὴ μελέτην **παραμετρικῶν** συστημάτων. Π.χ. εἰς τὸ σύστημα :

$$\left.\begin{array}{r}(\lambda+1)x+(\lambda^2-1)\psi=24\\ (\lambda^3+1)x-(\lambda+1)\psi=17\end{array}\right\}\ \text{διὰ}\ \lambda=-1.$$

Συμπέρασμα. Τὸ σύστημα $$\left.\begin{array}{r}\alpha x+\beta\psi=\gamma\\ \alpha'x+\beta'\psi=\gamma'\end{array}\right\}$$ ἔχει μίαν λύσιν καὶ μόνον μίαν, τὴν $x=\frac{\gamma\beta'-\gamma'\beta}{\alpha\beta'-\alpha'\beta}, \psi=\frac{\alpha\gamma'-\alpha'\gamma}{\alpha\beta'-\alpha'\beta}$, ὅταν, καὶ μόνον ὅταν, εἶναι $\alpha\beta'-\alpha'\beta\neq 0$.

Ἐὰν εἶναι $\alpha\beta'-\alpha'\beta=0$ καὶ $\alpha\gamma'-\alpha'\gamma\neq 0$ τὸ σύστημα εἶναι ἀδύνατον.

Ἐὰν εἶναι $\alpha\beta'-\alpha'\beta=0$ καὶ $\alpha\gamma'-\alpha'\gamma=0$ τὸ σύστημα εἶναι ἀόριστον.

Παραδείγματα: 1ον. Διὰ τὸ σύστημα :

$$(A_1): \begin{matrix} x+\psi=2 \\ 2x-\psi=1 \end{matrix}$$

Ἔχομεν: $\alpha=1,\ \beta=1,\ \gamma=2,\ \alpha'=2,\ \beta'=-1,\ \beta'=-1,\ \gamma'=1$ ἄρα : $\alpha\beta'-\alpha'\beta=-1-2=-3\neq 0$.

ἄρα τὸ (A_1) ἔχει μίαν μόνον λύσιν, τήν :

$$x=\frac{-2-1}{-1-2}=1, \quad \psi=\frac{1-4}{-1-2}=1$$

2ον. Διὰ τὸ σύστημα :

$$(A_2) \quad \begin{matrix} x+\psi=2 \\ 3x+3\psi=4 \end{matrix}$$

ἔχομεν :

$\alpha=1,\ \beta=1,\ \gamma=2,\ \alpha'=3,\ \beta'=3,\ \gamma'=4$, ἄρα : $\alpha\beta'-\alpha'\beta=3-3=0$ καὶ $\alpha\gamma'-\alpha'\gamma=4-6=-2\neq 0$, ἄρα τὸ (A_2) εἶναι ἀδύνατον.

3ον. Διὰ τὸ σύστημα :

$$(A_3) \quad \begin{matrix} x+\ \psi=2 \\ 4x+4\psi=8 \end{matrix}$$

Ἔχομεν :

$\alpha=1,\ \beta=1,\ \gamma=2,\ \alpha'=4,\ \beta'=4,\ \gamma'=8$, ἄρα : $\alpha\beta'-\alpha'\beta=4-4=0$ $\alpha\gamma'-\alpha'\gamma=8-8=0$, ἄρα τὸ (A_3) εἶναι ἀόριστον.

Παρατηροῦμεν ὅτι αἱ δύο ἐξισώσεις τοῦ (A_3) εἶναι ἰσοδύναμοι (ἡ β' προκύπτει ἀπὸ τὴν α' διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ 4). Τὸ σύνολον τῶν λύσεων τοῦ (A_3) εἶναι τὸ ἑξῆς :

$$\{(x,\psi)\mid x+\psi=2\} \text{ μὲ } x\in R,\ \psi\in R,$$

δηλαδὴ τὸ σύνολον : $\{(x,\psi)\mid \psi=2-x,\ x\in R\}$

4ον. Διὰ τὸ σύστημα :

$$(A_4) \quad \begin{matrix} 0\cdot x+0\cdot\psi=0 \\ 0\cdot x+0\cdot\psi=0 \end{matrix}$$

ἔχομεν : $\alpha\beta'-\alpha'\beta=0$ καὶ $\alpha\gamma'-\alpha'\gamma=0$, συνεπῶς τὸ (A_3) εἶναι ἀόριστον. Τὸ σύνολον τῶν λύσεων τοῦ (A_3) εἶναι τώρα τὸ σύνολον ὅλων τῶν ζευγῶν (x,ψ) μὲ $x\in R,\ \psi\in R$.

β) Παρατήρησις. Ἡ εὕρεσις τῆς λύσεως ἑνὸς συστήματος πρωτοβαθμίου μὲ δύο ἐξισώσεις καὶ δύο ἀγνώστους ὡς καὶ ἡ διερεύνησίς του συντομεύεται ὡς ἑξῆς : συμφωνοῦμεν τὴν παράστασιν : $\alpha\beta'-\alpha'\beta$ νὰ τὴν γράφωμεν ὡς ἑξῆς :

$$(\pi): \quad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}$$

Ἡ παράστασις (π) ὀνομάζεται : **μία ὁρίζουσα 2ας τάξεως**
Ἑπομένως αἱ παραστάσεις :
$\alpha\beta' - \alpha'\beta$, $\alpha\gamma' - \alpha'\gamma$, $\gamma\beta' - \gamma'\beta$ γράφονται :

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \alpha' & \gamma' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \gamma & \beta \\ \gamma' & \beta' \end{vmatrix}.$$

Συνεπῶς, ἐὰν εἶναι $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix} \neq 0$, τότε ἡ ὑπάρχουσα μοναδικὴ λύσις

τοῦ συστήματος (Α) : $\begin{matrix} \alpha x + \beta\psi = \gamma \\ \alpha' x + \beta'\psi = \gamma' \end{matrix}$ γράφεται :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \gamma & \beta \\ \gamma' & \beta' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}}, \quad \psi = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \alpha' & \gamma' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}}$$

καὶ μὲ τὴν μορφὴν αὐτὴν εἶναι εὐμνημόνευτος. (Διατυπώσατε σχετικὸν κανόνα).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

278) Νὰ ἐπιλυθοῦν τὰ συστήματα :

α) $\begin{matrix} x + \psi = 3 \\ 2x + 2\psi - 6 = 0 \end{matrix}$ β) $\begin{matrix} 2x - \psi + 4 = 0 \\ x - \frac{\psi}{2} + 2 = 0 \end{matrix}$ γ) $\begin{matrix} x - \psi = 4 \\ 3x - 3\psi + 6 = 0 \end{matrix}$

279) Νὰ ἐπιλυθοῦν τὰ συστήματα :

α) $\begin{matrix} 3x + \psi - 6 = 0 \\ 6x + 2\psi + 9 = 0 \end{matrix}$ β) $\begin{matrix} x - 3\psi = 6 \\ x + \psi = 10 \end{matrix}$ γ) $\begin{matrix} 2x + \psi = 5 \\ x - \psi = 1 \end{matrix}$

280) Νὰ ἐπιλυθοῦν τὰ συστήματα :

α) $\begin{matrix} 2x - 5\psi = 10 \\ -x + \frac{5}{2}\psi = -5 \end{matrix}$ β) $\begin{matrix} 5x + \psi = 3 \\ -10x - 2\psi + 6 = 0 \end{matrix}$ γ) $\begin{matrix} 7x - 3\psi = 14 \\ 5x + \psi = 10 \end{matrix}$

281) Ὁμοίως τὰ συστήματα :

α) $\begin{matrix} x + 3\psi = 2 \\ 3x - 5 = -9\psi \end{matrix}$ β) $\begin{matrix} -2x + 3\psi = -6 \\ 2x - 3\psi + 12 = 0 \end{matrix}$ γ) $\begin{matrix} 4x + \psi = 8 \\ 4x + 3\psi = 24 \end{matrix}$

282) Νὰ ἐπιλυθοῦν τὰ συστήματα :

α) $\begin{matrix} 3x + 2\psi + 1 = 0 \\ 5x - \psi + 32 = 0 \end{matrix}$ β) $\begin{matrix} 2x + \psi = \alpha \\ 7x - 2\psi = 31\alpha \end{matrix}$ γ) $\begin{matrix} \frac{x}{3} - \frac{\psi}{2} = 1 \\ 2x - 5\psi = -2 \end{matrix}$

293) Νὰ ἐπιλυθοῦν τὰ συστήματα :

α) $\begin{matrix} 2x - 3\psi = 5\beta - \alpha \\ 3x - 2\psi = \alpha + 5\beta \end{matrix}$ β) $\begin{matrix} \frac{3x - \psi + 2}{2} = \frac{x + 2\psi}{5} \\ \frac{x - 2\psi - 3}{3} = \frac{2x - \psi}{2} \end{matrix}$

284) Νὰ ἐπιλυθοῦν τὰ συστήματα :

α) $2(3x - \psi) + 3(x + \psi) - (x - \psi) = 70$, $3(x + 2\psi) - 2(x - \psi) + 5(2x - \psi) = 98$

β) $\frac{x-2\psi+8}{3}+\frac{x+\psi-6}{2}=\frac{x+4}{3}$

$x-3\psi=\frac{3x}{4}-5$

285) Νὰ ἐπιλυθοῦν τὰ συστήματα :

α) $\frac{x+3\psi}{5}-\frac{2x-\psi}{4}=2\psi+\frac{1}{4}$ β) $\frac{z-3\omega}{7}=\frac{z+\omega}{2}+z-4$

$\frac{2x+5\psi}{4}+\frac{x-\psi}{3}=x-3$ $2(2z-3\omega)+5(z+2\omega)=6z-\omega$

286) Νὰ διερευνηθῇ τὸ σύστημα (μ = παράμετρος)

$\mu x+\psi=3$

$2x+(\mu+1)\psi=6$

287) Νὰ διερευνηθοῦν τὰ συστήματα :

α) $\mu x-\psi=2$ β) $\mu(2x+\psi)=4$

$x+(\mu+2)\psi=-2$ $\mu x+(\mu-1)\psi=2$

288) Προσδιορίσατε τοὺς λ καὶ μ ὥστε τὸ σύστημα :

$(2\lambda-1)x+(4\mu+1)\psi=3$

$(\lambda+1)x+(\mu-2)\psi=3$ νὰ ἔχῃ ἀπείρους τὸ πλῆθος λύσεις.

289) Νὰ λυθοῦν τὰ συστήματα :

α) $\frac{2}{4x+\psi-5}=\frac{1}{x+2\psi+10}$ β) $\frac{11}{2x-3\psi}+\frac{18}{3x-2\psi}=13$

$\frac{3}{4x+\psi-5}+\frac{5}{x+2\psi+10}=-\frac{13}{8}$ $\frac{27}{3x-2\psi}-\frac{2}{2x-3\psi}=1$

68. ΓΡΑΦΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΙΣ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΔΥΟ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ ΜΕ ΔΥΟ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ.

Α) Ἔστω τὸ σύστημα : Α : $\left.\begin{matrix}(1)\ \alpha x+\beta\psi=\gamma \\ (2)\ \alpha' x+\beta'\psi=\gamma'\end{matrix}\right\}$

καὶ ἔστω ὅτι ἕνας τουλάχιστον ἐκ τῶν α, β εἶναι διάφορος τοῦ 0 καθὼς ἐπίσης καὶ ἕνας τουλάχιστον ἐκ τῶν α', β'.

Τὸ σύνολον τῶν σημείων (x, ψ) τοῦ ἐπιπέδου, τὰ ὁποῖα ἱκανοποιοῦν τὴν (1) ἀποτελοῦν μίαν εὐθεῖαν καθὼς ἐπίσης καὶ τὸ σύνολον τῶν σημείων (x, ψ) τὰ ὁποῖα ἱκανοποιοῦν τὴν (2).

Ἂν παραστήσωμεν εἰς τὸ ἐπίπεδον τὰς εὐθείας αὐτάς, καὶ πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ ὁρίσωμεν δύο σημεῖα τῆς καθεμιᾶς ἐξ αὐτῶν διὰ νὰ τὴν χαράξωμεν, τότε :

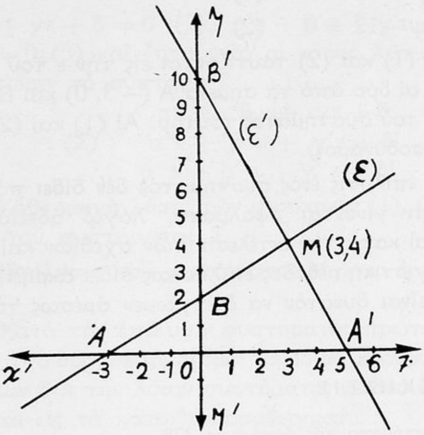
α) Ἂν τέμνωνται αὗται καὶ ἂν εἶναι (ξ, η) τὸ σημεῖον τῆς τομῆς των, τότε (καὶ μόνον) τὸ σύστημα (Α) ἔχει τὴν μοναδικὴν λύσιν $(x=\xi,\ \psi=\eta)$.

β) Ἂν αἱ ὡς ἄνω εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι, μὴ συμπίπτουσαι, τότε (καὶ μόνον) τὸ (Α) εἶναι ἀδύνατον.

γ) Ἂν τέλος αἱ ὡς ἄνω εὐθεῖαι συμπίπτουν, τότε (καὶ μόνον) τὸ σύστημα (Α) εἶναι ἀόριστον.

Παραδείγματα : 1ον. Νὰ ἐπιλυθῇ γραφικῶς τὸ σύστημα :

$$2x-3\psi+6=0 \quad (1)$$
$$2x+\psi-10=0 \quad (2)$$



Σχ. 68—1

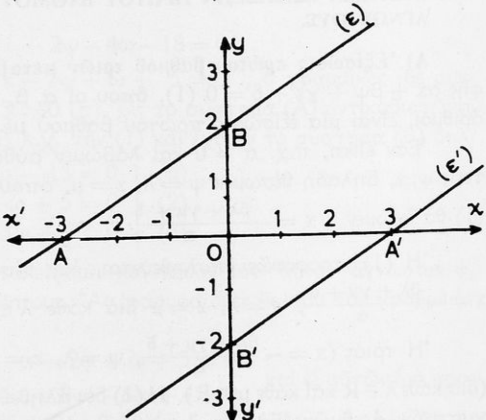
Ἡ παραστατικὴ εὐθεῖα ε τῆς ἐξισώσεως (1) ὁρίζεται ἀπὸ τὰ σημεῖα A ($x = -3, \psi = 0$) καὶ B ($x = 0, \ \psi = 2$) εἰς ὀρθογωνίους ἄξονας $x O \psi$ (σχ. 68 – 1).

Ἡ παραστατικὴ εὐθεῖα ε′ τῆς ἐξισώσεως (2) ὁρίζεται ἀπὸ τὰ σημεῖα A′ ($x = 5, \psi = 0$) καὶ B′ ($x = 0, \ \psi = 10$) εἰς τοὺς αὐτοὺς ἄξονας. Αἱ εὐθεῖαι ε καὶ ε′ τέμνονται εἰς ἕνα σημεῖον M, τοῦ ὁποίου αἱ συντεταγμέναι, ὅπως βλέπομεν εἰς τὸ τετραγωνισμένον φύλλον χάρτου τῶν ἀξόνων $\chi O \psi$, εἶναι $x = 3$ καὶ $\psi = 4$. Τὸ ζεῦγος ($x = 3$, $\psi = 4$) εἶναι κοινὴ λύσις τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2), (καὶ ἡ μόνη). Πράγματι εἶναι ἀπὸ τὴν (1) : $2 \cdot 3 - 3 \cdot 4 + 6 = 0$ καὶ ἀπὸ τὴν (2) : $2 \cdot 3 + 4 - 10 = 0$ καὶ $\alpha\beta' - \alpha'\beta = 2 + 6 = 8 \neq 0$.

2ον. Νὰ ἐπιλυθῇ γραφικῶς τὸ σύστημα :

$$2x - 3\psi + 6 = 0 \qquad (1)$$
$$-4x + 6\psi + 12 = 0 \qquad (2)$$

Ἡ παραστατικὴ εὐθεῖα ε τῆς ἐξισώσεως (1) ὁρίζεται ἀπὸ τὰ σημεῖα A ($x = -3, \ \psi = 0$) καὶ B ($x = 0, \ \psi = 2$) εἰς τὸ σχ. 68–2.



Σχ. 68—2

Ἡ παραστατικὴ εὐθεῖα ε′ τῆς (2) ὁρίζεται ἀπὸ τὰ σημεῖα A′ ($x = 3, \ \psi = 0$) καὶ B′ ($x = 0, \ \psi = -2$) εἰς τὸ ἴδιον σύστημα ἀξόνων μὲ τὴν ε. Ἀπὸ τὸ σχ. 68–2 παρατηροῦμεν ὅτι αἱ δύο εὐθεῖαι ε καὶ ε′ εἶναι παράλληλοι, μὴ συμπίπτουσαι, δὲν ἔχουν λοιπὸν σημεῖον τομῆς. Τὸ σύστημα τῶν (1) καὶ (2) εἶναι ἀδύνατον. Ἀκόμη λέγομεν ὅτι : αἱ ἐξισώσεις (1) καὶ (2) δὲν εἶναι συμβιβασταί.

Ἀπ' εὐθείας φαίνεται ὅτι τὸ δοθὲν σύστημα εἶναι ἀδύνατον ἀπὸ τὸ ὅτι εἶναι ἐδῶ : $\alpha\beta' - \alpha'\beta = 12 - 12 = 0$ καὶ $\alpha\gamma' - \alpha'\gamma = -24 - 24 = -48 \neq 0$.

3ον. Νὰ ἐπιλυθῇ γραφικῶς τὸ σύστημα

$$2x - 3\psi + \ \ 6 = 0 \qquad (1)$$
$$-4x + 6\psi - 12 = 0 \qquad (2)$$

Αἱ παραστατικαὶ εὐθεῖαι τῶν (1) καὶ (2) ταυτίζονται εἰς τὴν ε τοῦ προηγουμένου σχήματος. Ὁρίζονται καὶ αἱ δύο ἀπὸ τὰ σημεῖα Α (– 3, 0) καὶ Β (0,2). Ὅλα τὰ σημεῖα τῆς (ε) εἶναι λύσεις τοῦ συστήματος τούτου. Αἱ (1) καὶ (2) συμπίπτουν εἰς μίαν ἐξίσωσιν (εἶναι ἰσοδύναμοι).

Β) Παρατήρησις. Ἡ γραφικὴ ἐπίλυσις ἑνὸς συστήματος δὲν δίδει πάντοτε ἱκανοποιητικὰ ἀποτελέσματα, διότι γίνονται σφάλματα, λόγῳ ἀδεξιότητος ἡμῶν καὶ ἀτελείας τῶν ὀργάνων, καὶ κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν σχεδίων καὶ κατὰ τὰς μετρήσεις ἐπ᾽ αὐτῶν. Ἡ ὑπολογιστικὴ μέθοδος ἐπιλύσεως δίδει ἀκριβῆ ἀποτελέσματα, τὸ σπουδαιότερον δέ, εἶναι δυνατὸν νὰ ἐλέγχωμεν ἀμέσως τὰ ἐξαγόμενά της.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

290) Ἐπιλύσατε γραφικῶς τὰ συστήματα τῆς ἀσκήσεως 278.

291) Ἐπιλύσατε ἐπίσης γραφικῶς τὰ συστήματα τῆς ἀσκήσεως 279.

292) Δίδονται αἱ ἐξισώσεις $5x - 13\psi = 2$ (1), $2x + \psi = 7$ (2) καὶ $x - 2\psi = 1$ (3). Νὰ παραστήσετε γραφικῶς τὰς ἐξισώσεις αὐτὰς εἰς τὸ αὐτὸ σύστημα ἀξόνων. Τί παρατηρεῖτε;

69. ΣΥΣΤΗΜΑ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ ΜΕ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΟΥΣ ΤΩΝ ΔΥΟ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ.

Α) Ἐξίσωσις πρώτου βαθμοῦ τριῶν μεταβλητῶν. Κάθε ἐξίσωσις τῆς μορφῆς $\alpha x + \beta\psi + \gamma z + \delta = 0$ (1), ὅπου οἱ α, β, γ, δ εἶναι δεδομένοι πραγματικοὶ ἀριθμοί, εἶναι μία ἐξίσωσις πρώτου βαθμοῦ μὲ τρεῖς ἀγνώστους x, ψ, z.

Ἐὰν εἶναι, π.χ. $\alpha \neq 0$ καὶ λάβωμεν αὐθαιρέτους πραγματικὰς τιμὰς διὰ τοὺς ψ, z, δηλαδὴ θέσωμεν $\psi = \lambda$, $z = \mu$, ὅπου $\lambda \in R$ καὶ $\mu \in R$, τότε ἀπὸ τὴν (1) θὰ ἔχωμεν : $x = -\dfrac{\beta\lambda + \gamma\mu + \delta}{\alpha}$.

Ἡ (1) προφανῶς ἐπαληθεύεται, ἐὰν θέσωμεν :
$x = -\dfrac{\beta\lambda + \gamma\mu + \delta}{\alpha}$, $\psi = \lambda$, $z = \mu$ διὰ κάθε $\lambda \in R$ καὶ $\mu \in R$.

Ἡ τριὰς $\left(x = -\dfrac{\beta\lambda + \gamma\mu + \delta}{\alpha},\ \psi = \lambda,\ z = \mu\right)$ ὀνομάζεται **μία λύσις τῆς (1).** (διὰ κάθε $\lambda \in R$ καὶ κάθε $\mu \in R$). Ἡ (1) δὲν ἀληθεύει, βεβαίως, διὰ κάθε τριάδα πραγματικῶν ἀριθμῶν. Ἐὰν (ρ, λ, μ) εἶναι μία τριὰς πραγματικῶν ἀριθμῶν, ποὺ ἐπαληθεύει τὴν (1), τότε κάθε τριὰς (ρ′, λ, μ) ὅπου $\rho' \neq \rho$, δὲν ἐπαληθεύει τὴν (1). Ἔστω, π.χ. ἡ ἐξίσωσις $x + \psi + z - 6 = 0$, (α). Ἐὰν θέσωμεν $\psi = 2$, $z = 1$, τότε ἔχομεν $x + \psi + z - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 6 - \psi - z$, ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $x = 3$ καὶ ἡ τριὰς (3, 2, 1) εἶναι μία λύσις τῆς (α), ἐνῷ ἡ τριάς, π.χ. (4, 2, 1) δὲν εἶναι λύσις αὐτῆς.

Β) Σύστημα πρώτου βαθμοῦ μὲ τρεῖς ἀγνώστους x, ψ, z.

Ἐὰν δίδωνται τρεῖς ἐξισώσεις πρώτου βαθμοῦ μὲ τρεῖς μεταβλητάς : αx +

$+ \beta\psi + \gamma z + \delta = 0$ (1), $\alpha' x + \beta'\psi + \gamma' z + \delta' = 0$ (2) $\alpha'' x + \beta''\psi + \gamma'' z +$ $+ \delta'' = 0$ (3) καὶ ζητοῦνται αἱ κοιναὶ λύσεις των, τότε λέγομεν ὅτι ἔχομεν νὰ ἐπιλύσωμεν τὸ σύστημα :

$$(\Sigma) : \left.\begin{array}{r} \alpha x + \beta\psi + \gamma z + \delta = 0 \\ \alpha' x + \beta'\psi + \gamma' z + \delta' = 0 \\ \alpha'' x + \beta''\psi + \gamma'' z + \delta'' = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}$$

Κάθε **κοινὴ λύσις** τῶν ἐξισώσεων (1), (2), (3), ἂν ὑπάρχῃ, ὀνομάζεται **μία λύσις** τοῦ συστήματος Σ.

Ἐπίλυσις τοῦ συστήματος λέγεται ἡ εὕρεσις τῶν λύσεών του (ἐὰν ὑπάρχουν).

Κατὰ τὴν ἐπίλυσιν συστήματος πρώτου βαθμοῦ μὲ περισσοτέρους ἀγνώστους ἀπὸ δύο, ἐφαρμόζομεν τὰς ἰδίας μεθόδους ἀπαλοιφῆς ἀγνώστου, τὰς ὁποίας ἐμάθαμεν διὰ τὴν λύσιν συστήματος μὲ δύο ἐξισώσεις καὶ δύο ἀγνώστους, ὅπως φαίνεται εἰς τὰ κάτωθι παραδείγματα :

Παραδείγματα. 1ον. Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ σύστημα:

$$\left.\begin{array}{r} 3x + \psi - 2\omega - 9 = 0 \\ x - 2\psi + \omega + 5 = 0 \\ 2x + \psi + 3\omega + 2 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1) \\ (2) \ (A) \\ (3) \end{array}$$

Μεταξὺ τῶν (1) καὶ (2) διὰ τῶν ἀντιθέτων συντελεστῶν ἀπαλείφομεν τὸν ἕνα ἄγνωστον λ.χ. τὸν ψ. Θὰ εἶναι :

$$\begin{array}{r|l} 3x + \psi - 2\omega - 9 = 0 & 2 \\ x - 2\psi + \omega + 5 = 0 & 1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{r} 6x + 2\psi - 4\omega - 18 = 0 \\ x - 2\psi + \omega + 5 = 0 \end{array}$$

, ὁ γραμμικὸς δὲ συνδυασμὸς αὐτῶν δίδει $7x - 3\omega - 13 = 0$ (α). Εἰς τὸ σύστημα (Α) ἀντικαθιστῶμεν μίαν ἐκ τῶν (1) καὶ (2) διὰ τῆς (α) λ.χ. τὴν (1) καὶ ἔχομεν τὸ σύστημα (Β) δηλ.

$$(A) \Leftrightarrow (B) : \left.\begin{array}{r} 7x - 3\omega - 13 = 0 \\ x - 2\psi + \omega + 5 = 0 \\ 2x + \psi + 3\omega + 2 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (\alpha) \\ (2) \\ (3) \end{array}$$

Μεταξὺ τῶν (2) καὶ (3) ἀπαλείφομεν καὶ πάλιν **τὸν αὐτὸν ἄγνωστον ψ,** μὲ ἕνα ἀπὸ τοὺς γνωστούς μας τρόπους. Ἂς ἐφαρμόσωμεν ἐκ νέου τὸν γραμμικὸν συνδυασμόν. Ἔχομεν :

$$\begin{array}{r|l} x - 2\psi + \omega + 5 = 0 & 1 \\ 2x + \psi + 3\omega + 2 = 0 & 2 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{r} x - 2\psi + \omega + 5 = 0 \\ 4x + 2\psi + 6\omega + 4 = 0 \end{array}$$

καὶ ἐξ αὐτῶν διὰ προσθέσεως λαμβάνομεν τὴν $5x + 7\omega + 9 = 0$ (β), μὲ τὴν ὁποίαν εἰς τὸ (Β) ἂς ἀντικαταστήσωμεν τὴν ἐξίσωσιν (2).

$$(B) \Leftrightarrow (\Gamma) : \left.\begin{array}{r} 7x - 3\omega - 13 = 0 \\ 5x + 7\omega + 9 = 0 \\ 2x + \psi + 3\omega + 2 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (\alpha) \\ (\beta) \\ (3) \end{array}$$

Τὸ σύστημα (Γ), ἰσοδύναμον πρὸς τὸ (Α), ἔχει λύσιν ὅταν καὶ μόνον ὅταν ἔχῃ λύσιν τὸ σύστημα τῶν (α) καὶ (β), τὸ ὁποῖον εἶναι πρώτου βαθμοῦ μὲ δύο ἐξισώσεις καὶ δύο ἀγνώστους. Λύοντες τὸ σύστημα τοῦτο εὑρίσκομεν $x = 1$, $\omega = -2$, ἄρα εἶναι :

$$(\Gamma)\quad \left.\begin{array}{r} x=1 \\ \omega=-2 \\ 2x+\psi+3\omega+2=0 \end{array}\right|$$ Θέτομεν εἰς τὴν τρίτην ἐξίσωσιν τοῦ (Γ) τὰς τιμὰς $x=1$, $\omega=-2$, καὶ προσδιορίζομεν τὸν τρίτον ἄγνωστον ψ. Εἶναι

$$2\cdot 1+\psi+3\cdot(-2)+2=0 \Leftrightarrow \psi=2.$$

Ὥστε τὸ σύστημα (Α) ἔχει τὴν μοναδικὴν λύσιν ($x=1$, $\psi=2$, $\omega=-2$).

2ον. Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ σύστημα $\left.\begin{array}{r} x+4\psi-2\omega=-2 \\ x-3\psi-7\omega=19 \\ 3x+5\psi+\omega=15 \end{array}\right\} \begin{array}{l}(1)\\(2)\\(3)\end{array} \quad (A)$

Διὰ τὴν ἐπίλυσιν τοῦ συστήματος τούτου ἂς ἐφαρμόσωμεν τὴν μέθοδον τῆς ἀντικαταστάσεως. Λύομεν μίαν ἐκ τῶν τριῶν ἐξισώσεων ὡς πρὸς ἕνα ἄγνωστον καὶ ἀντικαθιστῶμεν τὴν τιμήν του (συναρτήσει τῶν δύο ἄλλων ἀγνώστων) εἰς τὰς λοιπὰς δύο ἐξισώσεις τοῦ συστήματος. Λ.χ. :

(1) $\Leftrightarrow x=-2-4\psi+2\omega$, ἑπομένως εἶναι :

$$(A)\Leftrightarrow(B)\qquad \left.\begin{array}{r} x=-2-4\psi+2\omega \\ (-2-4\psi+2\omega)-3\psi-7\omega=19 \\ 3(-2-4\psi+2\omega)+5\psi+\omega=15 \end{array}\right\} \begin{array}{l}(1')\\(2')\\(3')\end{array}$$

Ἀλλὰ $(2')\Leftrightarrow -7\psi-5\omega=21$ καὶ $(3')\Leftrightarrow -7\psi+7\omega=21$

$$\text{Δηλαδὴ } (B) \Leftrightarrow \quad \left.\begin{array}{r} x=-2-4\psi+2\omega \\ -7\psi-5\omega=21 \\ -7\psi+7\omega=21 \end{array}\right\} \begin{array}{l}(1')\\(2'')\\(3'')\end{array}$$

Λύοντες τὸ σύστημα τῶν (2'') καὶ (3'') εὑρίσκομεν $\psi=-3$ καὶ $\omega=0$, ὅτε ἀπὸ τὴν (1') ἔχομεν $x=10$.

Ὥστε τὸ Α ἔχει τὴν μοναδικὴν λύσιν (10, −3, 0).

Γ) Παρατήρησις. Ἐὰν ἔχωμεν σύστημα τεσσάρων ἐξισώσεων μὲ ἰσαρίθμους ἀγνώστους, δι᾽ ἀπαλοιφῆς τοῦ ἑνὸς ἀγνώστου μεταξὺ τῆς πρώτης καὶ ἑκάστης τῶν ὑπολοίπων ἐξισώσεων, προκύπτει σύστημα τριῶν ἐξισώσεων μὲ τρεῖς ἀγνώστους, τὸ ὁποῖον καὶ ἐπιλύομεν. Τὰ ἀνωτέρω ἐπεκτείνονται ὁμοίως, καὶ διὰ συστήματα μὲ πέντε ἢ περισσοτέρας ἐξισώσεις καὶ ἰσαρίθμους ἀγνώστους.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

293) Νὰ ἐπιλυθοῦν τὰ συστήματα :

α) $\begin{array}{r} x-2\psi+\omega=4 \\ 2x+\psi-5\omega=9 \\ x-3\psi-\omega=-3 \end{array}$ β) $\begin{array}{r} 2x+\psi+3\omega=-1 \\ -x+\psi-2\omega=2 \\ -x+2\psi-3\omega=1 \end{array}$ γ) $\begin{array}{r} 2x-3\psi+7\omega=4 \\ -x+2\psi+12\omega=4 \\ 5x-8\psi+\omega=4 \end{array}$

294) Νὰ ἐπιλυθοῦν τὰ συστήματα :

α) $\begin{array}{r} 3\alpha-2\beta+5\gamma=-5 \\ \alpha+3\beta-6\gamma=35 \\ -4\alpha+\beta+13\gamma=-10 \end{array}$ β) $\begin{array}{r} \lambda+3\mu+4\nu=3 \\ -2\lambda-7\mu+12\nu=1 \\ 5\lambda+8\mu=-16 \end{array}$ γ) $\begin{array}{r} 3x+2\psi=2 \\ 4\psi-5\omega=1 \\ \omega+4z=1{,}2 \\ 3x+5\omega=2 \end{array}$

295) Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ τριὰς ($x=3$, $\psi=1$, $\omega=0$) εἶναι μία κοινὴ λύσις τῶν ἐξισώσεων :

$2x+\psi-4\omega=7$ (1) $\qquad x+3\psi+\omega=6$ (2)

Νὰ ἐξετασθῇ ἂν εἶναι κοιναὶ λύσεις αὐτῶν καὶ αἱ τριάδες:

$\left(\frac{41}{5}, \frac{-7}{5}, 2)\right), \left(7, 0, \frac{7}{4}\right), \left(\frac{13k+15}{5}, \frac{5-6k}{5}, k\right)$

296) Τὸ σύστημα $3x - \psi + 2\omega = 0$ (1), $x + 2\psi - \omega = 0$ (2) ποίας ἀπὸ τὰς τριάδας $(-3,5,7)$, $(6,-10,-14)$, $(4,0-6)$ ἔχει ὡς λύσεις ;

Νὰ δειχθῇ ὅτι κάθε λύσις αὐτοῦ τοῦ συστήματος δίδεται ἀπὸ τὰς $x = -3k$, $\psi = 5k$, $\omega = 7k$ διὰ κάθε $k \in R$.

297) Νὰ ἐπιλυθοῦν τὰ συστήματα :

α) $\left.\begin{array}{l} \frac{x}{5} = \frac{\psi}{3} = \frac{z}{7} \\ 2x - 3\psi + z + 16 = 0 \end{array}\right\}$ β) $\left.\begin{array}{l} x + 2(\psi + z) = 1 \\ 3\psi - 5(x + z) = -10 \\ -2z + 3(x + \psi) = 11 \end{array}\right\}$

298) Νὰ ἐπιλυθοῦν τὰ συστήματα :

α) $\frac{x-1}{3} = \frac{\psi+1}{4} = \frac{z-2}{5}$, $2x + 3\psi - 4z = 7$ β) $\frac{x}{\alpha} = \frac{\psi}{\beta} = \frac{z}{\gamma}$, $\beta x\gamma + \gamma\alpha\psi + \alpha\beta z = \delta$

299) Νὰ ἐπιλυθοῦν τὰ συστήματα :

α) $\begin{array}{l} x + \psi + z = 14 \\ \psi + z + \varphi = 15 \\ z + \varphi + x = 20 \\ \varphi + x + \psi = 35 \end{array}$ β) $\begin{array}{l} x + \psi + z + \omega = 10 \\ 2x - \psi + z = 3 \\ 4\psi + 3z = 17 \\ 7\psi - 3z = 5 \end{array}$

70. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ.

Α) Ἐὰν εἰς ἕνα πρόβλημα ὑπάρχουν περισσότεροι τοῦ ἑνὸς ἄγνωστοι ἡ λύσις του δύναται νὰ ἀναχθῇ εἰς τὴν λύσιν ἑνὸς συστήματος, τοῦ ὁποίου αἱ ἐξισώσεις ἐνδέχεται νὰ εἶναι πρωτοβάθμιοι. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν ἑνὸς πρωτοβαθμίου συστήματος, ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὰ κάτωθι παραδείγματα :

Παραδείγματα. 1ον. Σήμερον ὁ Πέτρος εἶναι κατὰ 8 ἔτη μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν ἀδελφόν του Ἰωάννην. Ὕστερα ἀπὸ 6 ἔτη αἱ ἡλικίαι των θὰ ἔχουν λόγον 11:9 Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἡλικία ἑκάστου.

Λύσις. Ὑποθέτομεν ὅτι εἶναι x ἡ ἡλικία τοῦ Πέτρου σήμερον καὶ ψ τοῦ Ἰωάννου. Κατὰ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος θὰ εἶναι : $x = \psi + 8$ (1). Ὕστερα ἀπὸ 6 ἔτη ἡ ἡλικία τοῦ μὲν Πέτρου θὰ εἶναι $x + 6$, τοῦ δὲ ἀδελφοῦ του $\psi + 6$. Ἐπειδὴ αἱ ἡλικίαι αὐταὶ θὰ ἔχουν λόγον $\frac{11}{9} > 1$, θὰ εἶναι :

$$\frac{x+6}{\psi+6} = \frac{11}{9} \quad (2)$$

Ὥστε κατεστρώθη τὸ σύστημα : $\left.\begin{array}{l} x = \psi + 8 \quad (1) \\ \frac{x+6}{\psi+6} = \frac{11}{9} \quad (2) \end{array}\right\}$ (Α)

Ἐπειδὴ πρόκειται περὶ ἡλικίας ἀνθρώπων, οἱ ἄγνωστοι x καὶ ψ πρέπει νὰ εἶναι ἀριθμοὶ θετικοὶ καὶ ἐντὸς παραδεκτῶν ὁρίων. Ἐπιλύομεν τὸ σύστημα :

$$(\text{Α}) \Leftrightarrow (\text{Β}) \quad \left.\begin{array}{l} x = \psi + 8 \\ 9x - 11\psi = 12 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x = \psi + 8 \\ 9(\psi + 8) - 11\psi = 12 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x = 38 \\ \psi = 30 \end{array}\right\}$$

Ἡ λύσις $x = 38$, $\psi = 30$ ἱκανοποιεῖ τοὺς περιορισμοὺς καὶ ἐπαληθεύει τὸ πρόβλημα. Πράγματι εἶναι ὁ Πέτρος μεγαλύτερος κατὰ 8 ἔτη ἀπὸ τὸν ἀδελφόν του καὶ ἔπειτα ἀπὸ 6 ἔτη αἱ ἡλικίαι των εἶναι :$38+6=44$ καὶ $30+6=36$ μὲ λόγον $\frac{44}{36}=\frac{11}{9}$. Ὥστε ἡ εὑρεθεῖσα λύσις εἶναι παραδεκτή.

2ον. Εἰς μίαν ἐκδρομὴν ἔλαβον μέρος 91 ἄτομα, ἄνδρες, γυναῖκες καὶ παιδιά. Αἱ γυναῖκες ἦσαν 5 περισσότεραι ἀπὸ τὰ παιδιά. Ὅλα τὰ ἔξοδα ἦσαν 5.940 δρχ. καὶ τὰ ἐπλήρωσαν οἱ μεγάλοι, κάθε ἄνδρας ἀπὸ 100 δραχμὰς καὶ κάθε γυναῖκα ἀπὸ 80 δρχ. Πόσοι ἦσαν οἱ ἄνδρες, αἱ γυναῖκες καὶ τὰ παιδιά ;

Λύσις. Ἐὰν x εἶναι οἱ ἄνδρες, ψ αἱ γυναῖκες καὶ ω τὰ παιδιὰ ἀπὸ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος ἔχομεν τὸ σύστημα :

$$(\mathrm{A})\quad \left.\begin{aligned} x+\psi+\omega &= 91\\ \psi &= \omega+5\\ 100x+80\psi &= 5940\end{aligned}\right|\begin{matrix}(1)\\(2)\\(3)\end{matrix} \Leftrightarrow (\mathrm{B})\quad \left.\begin{aligned} x+\psi+\omega &= 91\\ \psi-\omega &= 5\\ 5x+4\psi &= 297\end{aligned}\right|\begin{matrix}(1')\\(2')\\(3')\end{matrix}$$

Ἀπὸ τὰς (1′) καὶ (2′) διὰ προσθέσεως προκύπτει ἡ $x+2\psi=96$

$$\text{ἄρα } (\mathrm{B}) \Leftrightarrow (\Gamma):\quad \left.\begin{aligned} x+2\psi &= 96\\ \psi-\omega &= 5\\ 5x+4\psi &= 297\end{aligned}\right|\begin{matrix}(1'')\\(2'')\\(3'')\end{matrix}$$

Λύοντες τὸ σύστημα τῶν (1″) καὶ (3″) εὑρίσκομεν $x=35$, $\psi=30{,}5$. Προφανῶς ἡ λύσις αὐτὴ δὲν εἶναι παραδεκτὴ καὶ ἑπομένως δὲν χρειάζεται νὰ προχωρήσωμεν εἰς τὴν εὕρεσιν τῆς τιμῆς τοῦ ω. Τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον ὡς ἐκ τῆς φύσεως τῶν ζητουμένων του.

3ον. Ἂν τὴν βάσιν ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου ἐλαττώσωμεν κατὰ 5μ. καὶ αὐξήσωμεν τὸ ὕψος του κατὰ 2μ. ἡ ἐπιφάνειά του ἐλαττοῦται κατὰ 20τ.μ. Ἂν ὅμως αὐξήσωμεν τὴν βάσιν του κατὰ 8 μ. καὶ ἐλαττώσωμεν τὸ ὕψος του κατὰ 3μ. ἡ ἐπιφάνειά του μένει ἡ ἰδία. Ποῖαι αἱ διαστάσεις τοῦ ὀρθογωνίου αὐτοῦ ;

Λύσις. Ἂν x εἶναι τὸ μῆκος τῆς βάσεως καὶ ψ τὸ ὕψος εἰς μέτρα, ἐπειδὴ τὸ ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου μὲ διαστάσεις x καὶ ψ εἶναι τὸ γινόμενον αὐτῶν xψ, κατὰ τὸ πρῶτον μέρος τῆς ἐκφωνήσεως θὰ ἔχωμεν : $(x-5)\cdot(\psi+2)=x\psi-20$ (1) καὶ κατὰ τὸ δεύτερον : $(x+8)\cdot(\psi-3)=x\psi$ (2).

Οἱ ἄγνωστοι x,ψ πρέπει νὰ εἶναι θετικοὶ ἀριθμοί.

Αἱ ἐξισώσεις (1) καὶ (2) ἔπειτα ἀπὸ τὰς πράξεις καὶ τὰς ἀναγωγὰς ἀποτελοῦν τὸ σύστημα :

$$(\mathrm{A}):\quad \left.\begin{aligned} 2x-5\psi &= -10\\ -3x+8\psi &= 24\end{aligned}\right\}$$ Λύομεν καὶ εὑρίσκομεν $x=40$ καὶ $\psi=18$, αἱ ὁποῖαι ἐπαληθεύουν τὸ πρόβλημα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

300) Εἰς ἕνα Γυμνάσιον ἡ Α μὲ τὴν Β τάξιν ἔχουν 118 μαθητάς, ἡ Β μὲ τὴν Γ 100 καὶ ἡ Γ μὲ τὴν Α 94. Πόσους μαθητὰς ἔχει ἡ κάθε μία ἀπὸ τὰς τάξεις αὐτάς ;

301) Ἕνας πατέρας θέλει νὰ μοιράσῃ 204.000 δρχ. εἰς τὰ τρία παιδιά του, ποὺ εἶναι

7, 12 καὶ 15 ἐτῶν, ὥστε τὰ μερίδια νὰ εἶναι ἀνάλογα τῶν ἡλικιῶν των. Πόσα θὰ λάβῃ κάθε παιδί;

302) Ἐὰν τὸ μῆκος ἑνὸς ὀρθογωνίου αὐξήσωμεν κατὰ 5μ. καὶ ἐλαττώσωμεν τὸ πλάτος του κατὰ 2μ. ἢ ἐλαττώσωμεν τὸ μῆκος κατὰ 3μ. καὶ αὐξήσωμεν τὸ πλάτος κατὰ 2μ. ἡ ἐπιφανειά του δὲν μεταβάλλεται. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ διαστάσεις του.

303) Νὰ εὑρεθοῦν τρεῖς ἀριθμοί α, β, γ, ἐὰν ὁ β διαιρούμενος διὰ τοῦ α δίδῃ πηλίκον 3 καὶ ὑπόλοιπον 5, ὁ γ διαιρούμενος διὰ τοῦ β δίδῃ πηλίκον 2 καὶ ὑπόλοιπον 1, ὁ αὐτὸς δὲ γ διὰ τοῦ α δίδῃ πηλίκον 7 καὶ ὑπόλοιπον 3.

304) Ἕνας πατέρας ἔχει σήμερον ἡλικίαν κατὰ 7 ἔτη μικροτέραν τοῦ τετραπλασίου τῆς ἡλικίας τῆς κόρης του. Ὕστερα ἀπὸ 15 ἔτη αἱ ἡλικίαι των θὰ ἔχουν λόγον ὡς ὁ 7 πρὸς τὸν 15. Νὰ εὑρεθῇ ποία ἡ ἡλικία ἑκάστου.

305). Ἡ ἀπόστασις μεταξὺ δύο πόλεων Α καὶ Β εἶναι 41860 μ. Ἀπὸ αὐτὰς ἀναχωροῦν συγχρόνως διὰ νὰ συναντηθοῦν δύο πεζοπόροι. Ὁ ἕνας διανύει τὴν ὥραν 550 μ. περισσότερον τοῦ ἄλλου, διὰ τοῦτο κατὰ τὴν συνάντησίν των εἶχε διανύσει 1540μ. περισσότερον τοῦ ἄλλου. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ὡριαία ταχύτης καθενὸς καὶ εἰς πόσον χρόνον συνηντήθησαν ἀπὸ τῆς ἀναχωρήσεώς των.

306) Τρεῖς γυναῖκες ἔχουν 105 αὐγά. Εὰν εἰς τὴν β' δώσουν ἡ μὲν α' τὸ $\frac{1}{6}$ τῶν αὐγῶν της ἡ δὲ γ' 8, τότε καὶ αἱ τρεῖς ἔχουν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν αὐγῶν. Πόσα ἔχει κάθε μία ;

307) Εἰς ἕνα λόχον ἀνήκουν ἄνδρες καὶ ἄλογα καὶ εἶναι 140 κεφαλαὶ καὶ 340 πόδια. Πόσοι εἶναι οἱ ἄνδρες καὶ πόσα τὰ ἄλογα ;

308) Ἡ συνάρτησις - πολυώνυμον $\Phi(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ διὰ τὰ ἀρχέτυπα 0, 1, 2, 3 δίδει ὡς εἰκόνας ἀντιστοίχως 0, 1, 4, 27. Νὰ ἐκτελεσθῇ ἡ διαίρεσις $\Phi(x) : (x-2)$.

309) Ἕνας τριψήφιος ἀριθμὸς ἔχει ψηφίον μονάδων τὸ 0 καὶ ἄθροισμα ψηφίων 11. Ὅταν ἐλαττωθῇ κατὰ 396 δίδει τὸν δι ἐναλλαγῆς τῶν ψηφίων του προκύπτοντα τριψήφιον. Νὰ εὑρεθῇ οὗτος.

310) Τὰ ψηφία ἑνὸς διψηφίου ἀριθμοῦ ἔχουν ἄθροισμα 11. Ἂν μεταξὺ τῶν ψηφίων του παρεμβληθῇ ὁ 5 εὑρίσκεται τριψήφιος, ὁ ὁποῖος μὲ τὸν ζητούμενον διψήφιον ἔχει ἄθροισμα ἴσον μὲ 396. Ποῖος εἶναι ὁ διψήφιος αὐτός ;

311) Ὁ Α εἶπεν εἰς τὸν Β. «Ἂν μοῦ δώσῃς ὅσας δραχμὰς ἔχεις θὰ ἔχω 1.350 δρχ.». Ὁ Β ἀπήντησε : «Ὅταν ἐξοδεύσω 75 δρχ. καὶ σὺ διπλασιάσῃς ὅσα θὰ ἔχω, τότε θὰ μείνῃς μὲ 625 δρχ.». Πόσα ἔχει ὁ καθένας ;

312) Ἔμπορος, ὅταν ἐπρόκειτο νὰ πληρώσῃ τὴν μίαν δόσιν ἀπὸ τὰς δέκα τοῦ φόρου εἰς τὴν Οἰκονομικὴν Ἐφορίαν, ἐσκέφθη ὅτι ἂν πωλήσῃ τεμάχιον ὑφάσματος πρὸς 32 δρχ. τὸ μέτρον θὰ τοῦ ἔλειπον ἀκόμη 320 δρχ., ἂν ὅμως τὸ πωλήσῃ πρὸς 40 δρχ. θὰ τοῦ μείνουν καὶ 200 δρχ. Πόσα μέτρα εἶχε τὸ τεμάχιον τοῦ ὑφάσματος καὶ πόσος ἦτο ὁλόκληρος ὁ φόρος ;

313) Τρεῖς φίλοι Α, Β, Γ παίζουν ἀνὰ δύο «κορῶνα - γράμματα» καὶ συμφωνοῦν ὅποιος χάνει νὰ διπλασιάζῃ τὰ χρήματα τοῦ ἄλλου, ποὺ κερδίζει. Παίζουν πρῶτοι οἱ Α, Β καὶ χάνει ὁ Α, ἔπειτα οἱ Β, Γ καὶ χάνει ὁ Β καὶ τέλος οἱ Α, Γ καὶ χάνει ὁ Γ. Τοιουτοτρόπως ὁ Α ἔχασε 60 δρχ. ὁ Β ἐκέρδισε 55 δρχ. καὶ ὁ Γ ἔμεινε μὲ 40 δρχ. Πόσας εἶχε ὁ καθένας ἐξ ἀρχῆς;

314) Τὸ δοχεῖον Α περιέχει 300 κιλὰ ἐλαίου καὶ τὸ Β 340 κιλὰ διαφορετικῆς ποιότητος. Ἡ συνολικὴ ἀξία τοῦ ἐλαίου εἶναι 13.320 δρχ. Ἂν μεταγγίσωμεν ἀπὸ 90 κιλὰ ἀπὸ τὸ καθένα εἰς τὸ ἄλλο δοχεῖον ἔχομεν μείγματα τῆς αὐτῆς ἀξίας. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τοῦ κιλοῦ κάθε μιᾶς ποιότητος ἐλαίου.

315) Ἕνα βαρέλι περιέχει 240 κιλὰ κρασὶ μὲ 60 κιλὰ νερό, ἕνα ἄλλο περιέχει 150 κιλὰ κρασὶ μὲ 90 κιλὰ νερό. Πόσα κιλὰ πρέπει νὰ ἀναμείξωμεν ἀπὸ κάθε βαρέλι, ὥστε νὰ σχηματίσωμεν μεῖγμα ἀπὸ 105 κιλὰ κρασὶ καὶ 45 κιλὰ νερό :

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VIII

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΕΙΣ ΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟΝ

71. ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΕΝΟΝ ΤΜΗΜΑ (ΕΦΑΡΜΟΣΤΟΝ ΔΙΑΝΥΣΜΑ) ΕΙΣ ΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟΝ

Α) Ἄς θεωρήσωμεν ἕνα ἐπίπεδον Ε, π.χ. τὸ ἐπίπεδον τοῦ πίνακος, καὶ ἐπάνω εἰς αὐτὸ δύο διάφορα μεταξύ των σημεῖα του Α,Β (σχ. 71–1).

Τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα μὲ ἄκρα του τὰ Α,Β ἠμπορεῖ νὰ διαγραφῇ ἀπὸ ἕνα κινητὸν σημεῖον εἴτε κατὰ τὴν φορὰν ἀπὸ τὸ Α πρὸς τὸ Β εἴτε κατὰ τὴν ἀντίθετον αὐτῆς φοράν, δηλ. ἀπὸ τὸ Β πρὸς τὸ Α.

Σχ. 71–1

Τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα μὲ ἄκρα του τὰ Α,Β μαζὶ μὲ τὴν φορὰν ἀπὸ τὸ Α πρὸς τὸ Β ὀνομάζεται : **τὸ** (μὴ μηδενικὸν) **προσανατολισμένον τμῆμα** ἄλφα βῆτα εἴτε : **τὸ** (μὴ μηδενικὸν) **ἐφαρμοστὸν διάνυσμα** ἄλφα βῆτα καὶ συμβολίζετε μὲ $\overrightarrow{AB}$. Τὸ Α ὀνομάζεται : **ἀρχὴ** τοῦ ἐφαρμοστοῦ διανύσματος $\overrightarrow{AB}$, τὸ δὲ Β : **πέρας** τοῦ $\overrightarrow{AB}$.

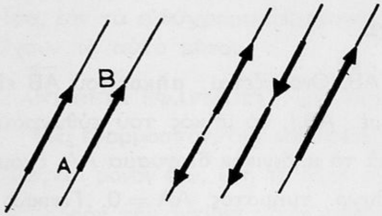
Ἐπίσης, τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα μὲ ἄκρα τὰ Α,Β μαζὶ μὲ τὴν φορὰν ἀπὸ τὸ Β πρὸς τὸ Α ὀνομάζεται : τὸ (μὴ μηδενικὸν) προσανατολισμένον τμῆμα βῆτα ἄλφα εἴτε : **τὸ** (μὴ μηδενικὸν) **ἐφαρμοστὸν διάνυσμα** βῆτα ἄλφα καὶ συμβολίζεται μὲ $\overrightarrow{BA}$. Τὸ Β ὀνομάζεται **ἀρχή,** τὸ δὲ Α **πέρας** τοῦ ἐφαρμοστοῦ διανύσματος $\overrightarrow{BA}$. Ὥστε : ἀπὸ κάθε ὄχι μηδενικόν, εὐθύγραμμον τμῆμα τοῦ ἐπιπέδου Ε γεννῶνται δύο ἐφαρμοστὰ διανύσματα μὲ τὰς φοράς των ἀντιθέτους.

Πᾶν ἐφαρμοστὸν διάνυσμα, π.χ. $\overrightarrow{AB}$, τοῦ ἐπιπέδου Ε παριστάνεται γραφικῶς εἰς αὐτὸ μὲ τὸ εὐθ. τμῆμα, ἀπὸ τὸν ὁποῖον γεννᾶται, μαζὺ μὲ μίαν **αἰχμὴν** εἰς τὸ πέρας του (Σχ.71–1 καὶ 71–2).

Ἡ εὐθεῖα, ἐπάνω εἰς τὴν ὁποίαν κεῖται ἕνα ἐφαρμοστὸν διάνυσμα, ὀνομάζεται : **φορεὺς** (εἴτε στήριγμα) τοῦ ἐφαρμοστοῦ διανύσματος. Εἰς τὸ σχ. 71–3 βλέπετε τὰ ἐφαρμοστὰ διανύσματα : 1) $\overrightarrow{AB}$ μὲ φορέα του τὴν εὐθεῖαν ε, 2) $\overrightarrow{A'B'}$ μὲ φορέα του τὴν εὐθεῖαν ε′ καὶ 3) $\overrightarrow{B''A''}$ μὲ φορέα του τὴν εὐθεῖαν ε′′.

Β) Τὸ σύνολον ὅλων τῶν ἐφαρμοστῶν διανυσμάτων ἑνὸς ἐπιπέδου Ε θὰ τὸ συμβολίζωμεν μὲ $\mathscr{D}$.

Ἔστω τυχὸν ἐφαρμοστὸν διάνυσμα $\overrightarrow{AB} \in \mathscr{D}$. Ὑπάρχουν ἀπειράριθμα ἐφαρμοστὰ διανύσματα εἰς τὸ $\mathscr{D}$, τῶν ὁποίων οἱ φορεῖς εἶναι εὐθεῖαι παράλληλοι πρὸς τὸν φορέα τοῦ $\overrightarrow{AB}$ (Σχ. 71–2).

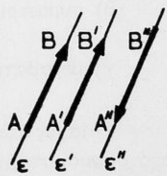


Σχ. 71–2

Ὅλα αὐτὰ τὰ ἐφαρμοστὰ διανύσματα ἀποτελοῦν ἕνα γνήσιον ὑποσύνολον τοῦ $\mathscr{D}$.

Ὅπως ἀπὸ τὸ $\overrightarrow{AB}$ ὡρίσαμεν τὸ ἀνωτέρω ὑποσύνολον τοῦ $\mathscr{D}$, οὕτως ἠμποροῦμεν νὰ κάμωμεν καὶ διὰ κάθε ἐφαρμοστὸν διάνυσμα ἀπὸ τὸ $\mathscr{D}$. Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον τὸ $\mathscr{D}$ διαμερίζεται εἰς ὑποσύνολά του, καθὲν ἐκ τῶν ὁποίων εἶναι διάφορον τοῦ κενοῦ, εἶναι ξένα μεταξύ των ἀνὰ δύο καὶ ἡ ἕνωσίς των εἶναι τὸ $\mathscr{D}$. Δηλαδὴ μὲ τὸν προηγούμενον τρόπον διαμερίζεται τὸ $\mathscr{D}$ εἰς **κλάσεις ἰσοδυναμίας.** Κάθε μία ἀπὸ αὐτὰς τὰς κλάσεις ἰσοδυναμίας ὀνομάζεται **διεύθυνσις.** Οὕτω π.χ. ἡ κλάσις ἰσοδυναμίας, ποὺ ὡρίσαμεν προηγουμένως ἀπὸ τὸ $\overrightarrow{AB}$ εἶναι μία διεύθυνσις καὶ ὀνομάζεται **διεύθυνσις τοῦ $\overrightarrow{AB}$.** Τὸ $\overrightarrow{AB}$ ἀνήκει εἰς αὐτὴν τὴν διεύθυνσιν, ἤ, ὅπως ἄλλως λέγομεν, τὸ $\overrightarrow{AB}$ **ἔχει** αὐτὴν τὴν διεύθυνσιν. Ἡ διεύθυνσις ἑνὸς ἐφαρμοστοῦ διανύσματος τοῦ ἐπιπέδου Ε παριστάνεται καὶ καθορίζεται ἀπὸ τὸν φορέα του εἴτε ἀπὸ ὁποιανδήποτε εὐθεῖαν τοῦ ἐπιπέδου Ε παράλληλον πρὸς τὸν φορέα του. Π.χ. ἡ διεύθυνσις τοῦ $\overrightarrow{AB}$ (Σχ. 71–3) παριστάνεται ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν (ε) τοῦ ἐπιπέδου Ε εἴτε ἀπὸ ὁποιανδήποτε παράλληλόν της εὐθεῖαν τοῦ Ε.

Ἐφαρμοστὰ διανύσματα μὲ τὴν ἰδίαν διεύθυνσιν 1) ἠμπορεῖ νὰ ἔχουν τὴν ἰδίαν φοράν, ὁπότε λέγομεν ὅτι : τὸ καθένα ἀπὸ αὐτὰ εἶναι **ὁμόρροπον** πρὸς τὸ ἄλλο, ὅπως τὰ $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{A'B'}$ (Σχ. 71–3). 2) ἠμπορεῖ νὰ ἔχουν ἀντιθέτους φοράς, ὁπότε λέγομεν ὅτι : τὸ καθένα ἀπὸ αὐτὰ εἶναι **ἀντίρροπον** πρὸς τὸ ἄλλο. Εἰς τὸ Σχ. 71.3 εἶναι: $\overrightarrow{AB}$ ἀντίρροπον τοῦ $\overrightarrow{B''A''}$ (καὶ $\overrightarrow{B''A''}$ ἀντίρροπον τοῦ $\overrightarrow{AB}$). Ἐπίσης εἶναι $\overrightarrow{A'B'}$ ἀντίρροπον τοῦ $\overrightarrow{B''A''}$ (καὶ $\overrightarrow{B''A''}$ ἀντίρροπον τοῦ $\overrightarrow{A'B'}$).



Σχ. 71–3

72. ΜΗΔΕΝΙΚΟΝ ΕΦΑΡΜΟΣΤΟΝ ΔΙΑΝΥΣΜΑ.

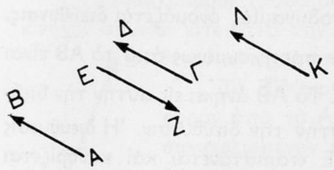
Εἴδαμεν ὅτι ἀπὸ κάθε μὴ μηδενικὸν εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ ὁρίζονται δύο ἐφαρμοστὰ διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{BA}$. **Δεχόμεθα** τώρα ὅτι καὶ ἀπὸ κάθε μηδενικὸν εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΑ γεννᾶται ἕνα (συμβατικὸν) ἐφαρμοστὸν διάνυσμα, ποὺ τὸ ὀνομάζομεν : **μηδενικὸν ἐφαρμοστὸν διάνυσμα** ἀντίστοιχον εἰς τὸ σημεῖον Α, καὶ τὸ συμβολίζομεν μὲ $\overrightarrow{AA}$ εἴτε μὲ $\overrightarrow{O_A}$. Τὸ Α ὀνομάζεται : **ἀρχὴ** τοῦ $\overrightarrow{AA}$ καὶ (συγχρόνως) **πέρας** τοῦ $\overrightarrow{AA}$. Διὰ τὸ μηδενικὸν ἐφαρμοστὸν διάνυσμα δὲν ὁρίζομεν οὔτε διεύθυνσιν οὔτε φοράν.

73. ΜΗΚΟΣ ΕΦΑΡΜΟΣΤΟΥ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ.

Ἔστω ἕνα τυχὸν ἐφαρμ. διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$. Ὀνομάζεται : **μῆκος** τοῦ $\overrightarrow{AB}$ εἴτε : **ἀπόλυτος τιμὴ** τοῦ $\overrightarrow{AB}$, καὶ συμβολίζεται μὲ $|\overrightarrow{AB}|$, τὸ μῆκος τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος μὲ ἄκρα τὰ Α,Β. Οὕτω, π.χ. διὰ τὸ μηδενικὸν διάνυσμα $\overrightarrow{AA}$, ἔχομεν : μῆκος τοῦ $\overrightarrow{AA} = |\overrightarrow{AA}| =$ μῆκος τοῦ εὐθυγρ. τμήματος $AA = 0$. Γενικῶς τὸ μῆκος κάθε μηδενικοῦ ἐφαρμοστοῦ διανύσματος εἶναι ἐξ ὁρισμοῦ ὁ ἀριθμὸς 0.

74. Η ΙΣΟΤΗΣ ΕΙΣ ΤΟ ΣΥΝΟΛΟΝ $\mathcal{D}$ ΤΩΝ ΕΦΑΡΜΟΣΤΩΝ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ.

Α) Ἕνα ἐφαρμοστὸν μὴ μηδενικὸν διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ λέγεται **ἴσον** ἢ **ἰσοδύναμον** πρὸς ἄλλο ἐφαρμοστὸν $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, ἐάν, καὶ μόνον ἐάν, ἔχῃ τὸ αὐτὸ μῆκος μὲ τὸ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν καὶ τὴν αὐτὴν φοράν. Π.χ. εἰς τὸ Σχ. 74–1. τὸ $\overrightarrow{AB}$ εἶναι ἴσον μὲ τὸ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$. Ἐπίσης εἶναι τὸ $\overrightarrow{AB}$ ἴσον μὲ τὸ $\overrightarrow{K\Lambda}$. Συμβολικῶς γράφομεν : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta}$.



Σχ. 74 – 1

Κάθε μηδενικὸν ἐφαρμοστὸν διάνυσμα ὁρίζεται ὡς ἴσον πρὸς κάθε ἄλλο ἐπίσης μηδενικὸν ἐφαρμοστὸν διάνυσμα.

Β) Ἡ ὁρισθεῖσα ἐδῶ ἔννοια ἰσότητος ἔχει τὰς γνωστὰς ἰδιότητας :

α) ἀνακλαστικήν : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$

β) συμμετρικήν : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta} \Rightarrow \overrightarrow{\Gamma\Delta} = \overrightarrow{AB}$

γ) μεταβατικήν : $\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta}\\ \overrightarrow{\Gamma\Delta} = \overrightarrow{K\Lambda}\end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{K\Lambda}$

Ἡ ἰσχὺς τῶν ἰδιοτήτων τούτων, προκειμένου διὰ τὰ μὴ μηδενικὰ ἐφαρμοστὰ διανύσματα, ἐπαληθεύεται εὐκόλως μὲ διαστημόμετρον καὶ μὲ παράλληλον μετάθεσιν τοῦ γνώμονος. Διὰ τὰ ἐφαρμοστὰ μηδενικὰ διανύσματα αἱ ἀνωτέρω ἰδιότητες εἶναι τελείως φανεραί.

Παρατηρήσεις : 1) Εἶναι φανερὸν ὅτι, ἂν ἔχωμεν ἕνα ἐφαρμοστὸν διάνυσμα, π.χ. τὸ $\overrightarrow{AB}$, ὑπάρχουν ἀπειράριθμα ἐφαρμοστὰ διανύσματα, καθὲν ἀπὸ τὰ ὁποῖα εἶναι ἴσον πρὸς τὸ $\overrightarrow{AB}$. (Παρατηρήσατε καὶ τὸ Σχ. 75–1 κατωτέρω).

2) Λόγῳ τῆς ἀνωτέρω 2ας ἰδιότητος τῆς ἐννοίας τῆς ἰσότητος, ἀντὶ νὰ

λέγωμεν ὅτι : τὸ $\overrightarrow{AB}$ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, ἠμποροῦμεν νὰ λέγωμεν ὅτι : $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ εἶναι ἴσα μεταξύ των.

3) Ὁ ἀνωτέρω δοθεὶς ὁρισμὸς τῆς ἰσότητος δύο ἐφαρμοστῶν διανυσμάτων εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὸν ἑξῆς ὁρισμόν: Δύο διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ λέγονται ἴσα, ἐὰν τὰ εὐθύγραμμα τμήματα ΑΔ (ἀρχὴ τοῦ ἑνὸς πέρας τοῦ ἄλλου) καὶ ΓΒ ἔχουν τὸ αὐτὸ μέσον.

75. ΑΝΤΙΘΕΤΑ ΕΦΑΡΜΟΣΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ.

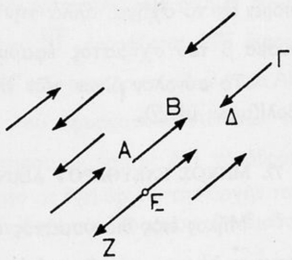
Ἕνα ἐφαρμοστόν, ὄχι μηδενικόν, διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ λέγεται : **«ἀντίθετον»** ἄλλου $\overrightarrow{EZ}$, ἐάν, καὶ μόνον ἐάν, ἔχῃ τὸ αὐτὸ μῆκος μὲ τὸ $\overrightarrow{EZ}$, τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν μὲ τὸ $\overrightarrow{EZ}$ καὶ φορὰν τὴν ἀντίθετον τῆς φορᾶς τοῦ $\overrightarrow{EZ}$. Π.χ. εἰς τὸ Σχ. 74–1 τὸ $\overrightarrow{AB}$ εἶναι ἕνα ἀντίθετον διάνυσμα τοῦ $\overrightarrow{EZ}$.. Ἕνα ἄλλο διάνυσμα ἀντίθετον τοῦ $\overrightarrow{EZ}$ εἶναι τὸ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

Διὰ νὰ συμβολίσωμεν ὅτι, π.χ., τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ εἶναι ἕνα διάνυσμα ἀντίθετον τοῦ $\overrightarrow{EZ}$ γράφομεν : $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{EZ}$.

Πᾶν μηδενικὸν ἐφαρμοστὸν διάνυσμα **ὁρίζεται** ὡς ἕνα ἀντίθετον πρὸς πᾶν ἄλλο μηδενικὸν ἐφαρμοστὸν διάνυσμα.

Ἐὰν τὸ $\overrightarrow{AB}$ εἶναι ἕνα ἀντίθετον τοῦ $\overrightarrow{EZ}$, τότε εἶναι φανερὸν ὅτι κάθε διάνυσμα ἴσον μὲ τὸ $\overrightarrow{AB}$ εἶναι ἀντίθετον πρὸς τὸ $\overrightarrow{EZ}$ καὶ πρὸς κάθε ἴσον του. (Βλέπετε καὶ Σχ. 75–1). Προφανῶς ἕνα ἀντίθετον ἑνὸς διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ εἶναι καὶ τὸ $\overrightarrow{BA}$, δηλ. $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

Παρατήρησις : Ἂν $\overrightarrow{AB}$ εἶναι ἀντίθετον τοῦ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, τότε θὰ εἶναι καὶ τὸ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ ἀντίθετον τοῦ $\overrightarrow{AB}$ (διατί ;) Διὰ τοῦτο ἐπιτρέπεται τότε νὰ λέγωμεν : τὰ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ εἶναι ἀντίθετα μεταξύ των.

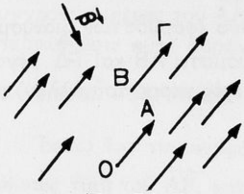


Σχ. 75 – 1

76. ΤΟ ΕΛΕΥΘΕΡΟΝ ΔΙΑΝΥΣΜΑ ΕΙΣ ΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟΝ.

Ἔστω ἕνα ἐπίπεδον (E), $\mathscr{D}$ τὸ σύνολον τῶν ἐφαρμοστῶν διανυσμάτων τοῦ (E) καὶ $\overrightarrow{AB}$ ἕνα διάνυσμα τοῦ $\mathscr{D}$, (τὸ $\overrightarrow{AB}$ δὲν ἀποκλείεται νὰ εἶναι ἕνα μηδενικὸν ἐφαρμοστὸν διάνυσμα). Γνωρίζομεν ὅτι ὑπάρχουν ἀπειράριθμα ἐφαρμοστὰ διανύσματα ἴσα πρὸς τὸ $\overrightarrow{AB}$. **Τὸ σύνολον (ἡ κλάσις) ὅλων τῶν ἴσων πρὸς τὸ $\overrightarrow{AB}$ ἐφαρμοστῶν διανυσμάτων τοῦ ἐπιπέδου ὀνομάζεται : ἕνα ἐλεύθερον διάνυσμα τοῦ ἐπιπέδου** καὶ τὸ $\overrightarrow{AB}$ (καθὼς καὶ κάθε ἴσον τοῦ $\overrightarrow{AB}$ ἐφαρμοστὸν διάνυσμα ἀπὸ τὸ $\mathscr{D}$) ὀνομάζεται : **ἕνας ἀντιπρόσωπος** τοῦ ἐλευθέρου διανύσματος.

Ὅπως ἀπὸ τὸ ἐφαρμοστὸν διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ ὡρίσαμεν ἕνα ἐλεύθερον διάνυσμα, μὲ τὸν ἴδιον τρόπον ἠμποροῦμεν νὰ ὁρίσωμεν ἀπὸ κάθε ἐφαρμοστὸν διάνυσμα τοῦ $\mathscr{D}$ ἕνα ἐλεύθερον διάνυσμα τοῦ ἐπιπέδου. Ἂν γίνῃ τοῦτο, τότε τὸ $\mathscr{D}$ θὰ ἔχῃ διαμερισθῇ εἰς κλάσεις (ὑποσύνολα) ξένας μεταξύ των ἀνὰ δύο, καθεμία ἀπὸ τὰς ὁποίας εἶναι (ἐξ ὁρισμοῦ) **ἕνα ἐλεύθερον διάνυσμα.**



(Σχ. 76–1)

Ἕνα ὁποιονδήποτε ἐφαρμοστὸν διάνυσμα ἀπὸ τὸ $\mathscr{D}$ εἶναι ἕνας ἀντιπρόσωπος κάποιου ἐλευθέρου διανύσματος τοῦ ἐπιπέδου.

Ἕνα ἐλεύθερον διάνυσμα τοῦ ἐπιπέδου εἶναι καὶ τὸ **μηδενικὸν ἐλεύθερον διάνυσμα**, δηλ. τὸ σύνολον ὅλων τῶν μηδενικῶν ἐφαρμοστῶν διανυσμάτων τοῦ ἐπιπέδου. Τοῦτο θὰ τὸ συμβολίζωμεν μὲ $\overrightarrow{0}$.

Πᾶν ἐλεύθερον διάνυσμα θὰ συμβολίζεται εἴτε δι' ἑνὸς ἀντιπροσώπου του, π.χ. $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$ κτλ. (Σχ. 76–1) εἴτε μὲ ἕνα μικρὸν γράμμα τοῦ ἀλφαβήτου μαζὶ μὲ ἕνα μικρὸν βέλος ὑπεράνω αὐτοῦ. Οὕτως, **ὅταν π.χ. λέγωμεν τὸ ἐλεύθερον διάνυσμα $\overrightarrow{OA}$ (Σχ. 76 – 1), δὲν θὰ ἐννοοῦμεν τὸ ἐφαρμοστὸν διάνυσμα $\overrightarrow{OA}$, ποὺ βλέπομεν εἰς τὸ σχῆμα, ἀλλὰ τὴν κλάσιν τῶν ἴσων πρὸς τὸ ἐφαρμοστὸν διάνυσμα $\overrightarrow{OA}$ ἐφαρμοστῶν διανυσμάτων τοῦ ἐπιπέδου.** Ἐπίσης ὅταν λέγωμεν : τὸ ἐλεύθερον διάνυσμα $\overrightarrow{\beta}$ (Σχ. 76–1), δὲν ἐννοοῦμεν τὸ ἐφαρμοστὸν διάνυσμα, ποὺ βλέπομεν εἰς τὸ σχῆμα, ἀλλὰ τὴν κλάσιν ὅλων τῶν ἴσων πρὸς τὸ ἐφαρμοστὸν διάνυσμα $\overrightarrow{\beta}$ τοῦ σχήματος ἐφαρμοστῶν διανυσμάτων τοῦ ἐπιπέδου.

Τὸ σύνολον ὅλων τῶν ἐλευθέρων διανυσμάτων τοῦ ἐπιπέδου θὰ τὸ συμβολίζωμεν μὲ $\mathscr{D}_0$.

77. ΜΗΚΟΣ ΕΛΕΥΘΕΡΟΥ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ.

Μῆκος ἑνὸς διανύσματος ἀπὸ τὸ $\mathscr{D}_0$, δηλαδὴ ἑνὸς ἐλευθέρου διανύσματος ἔστω $\overrightarrow{\alpha}$, λέγεται τὸ μῆκος ἑνὸς ἀντιπροσώπου του καὶ συμβολίζεται μὲ $\left|\overrightarrow{\alpha}\right|$.

Οὕτω, διὰ τὸ μηδενικὸν ἐλεύθερον διάνυσμα $\overrightarrow{0}$, ἔχομεν :

$$\left|\overrightarrow{0}\right| = \left|\overrightarrow{OO}\right| = 0$$

Σημείωσις. Εἰς τὰ ἑπόμενα, ὅταν θὰ λέγωμεν τὸ διάνυσμα, π.χ., $\overrightarrow{MN}$ τοῦ ἐπιπέδου, θὰ ἐννοοῦμεν καὶ τὸ ἐλεύθερον διάνυσμα μὲ ἕνα ἀντιπρόσωπόν του τὸ ἐφαρμοστὸν διάνυσμα $\overrightarrow{MN}$ καὶ αὐτὸ τὸ ἴδιον τὸ ἐφαρμοστὸν διάνυσμα $\overrightarrow{MN}$. Ὅταν θέλωμεν νὰ κάνωμεν διάκρισιν θὰ δηλώνωμεν ἂν ἐννοοῦμεν τὸ ἐλεύθερον ἢ τὸ ἐφαρμοστόν.

78. Η ΙΣΟΤΗΣ ΕΙΣ ΤΟ ΣΥΝΟΛΟΝ $\mathscr{D}_0$, ΤΩΝ ΕΛΕΥΘΕΡΩΝ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ.

Ἔστωσαν $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ δύο τυχόντα ἐλεύθερα διανύσματα τοῦ ἐπιπέδου (Ε).

Θὰ λέγωμεν ὅτι **τὸ ἐλεύθερον διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἐλεύθερον διάνυσμα $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ ἐάν, καὶ μόνον ἐάν, τὸ ἐφαρμοστὸν $\overrightarrow{AB}$ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἐφαρμοστὸν $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$.**

Συμβολικῶς γράφομεν : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

Εἶναι φανερὸν ὅτι διὰ τὴν ὁρισθεῖσαν ἐδῶ ἔννοιαν ἰσότητος ἰσχύουν αἱ τρεῖς γνωσταὶ ἰδιότητες, δηλ. ἡ ἀνακλαστική, ἡ συμμετρικὴ καὶ ἡ μεταβατική.

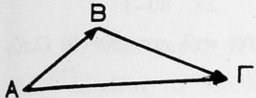
79. ΑΝΤΙΘΕΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΕΙΣ ΤΟ $\mathscr{D}_0$.

Θὰ λέγωμεν ὅτι τὸ ἐλεύθερον διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ εἶναι ἀντίθετον τοῦ ἐλευθέρου διανύσματος $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, καὶ θὰ συμβολίζωμεν $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, ἐάν, καὶ μόνον ἐάν, τὸ ἐφαρμοστὸν διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ εἶναι ἀντίθετον τοῦ ἐφαρμοστοῦ διανύσματος $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

Εἶναι φανερὸν ἀπὸ τὸν προηγούμενον ὁρισμὸν ὅτι 1) διὰ κάθε $\vec{\alpha} \in \mathscr{D}_0$ ὑπάρχει ἕνα μόνον ἀντίθετόν του διάνυσμα τοῦ $\mathscr{D}_0$ καὶ 2) ἐὰν $\vec{\alpha}'$ εἶναι τὸ ἀντίθετον τοῦ $\vec{\alpha}$, τότε καὶ τὸ $\vec{\alpha}$ εἶναι τὸ ἀντίθετον τοῦ $\vec{\alpha}'$. Συμβολικῶς γράφομεν $\vec{\alpha} = -\vec{\alpha}'$ καὶ $\vec{\alpha}' = -\vec{\alpha}$.

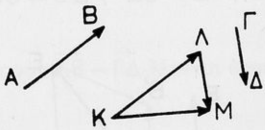
80. ΠΡΑΞΕΙΣ ΕΙΣ ΤΟ ΣΥΝΟΛΟΝ $\mathscr{D}_0$, ΤΩΝ ΕΛΕΥΘΕΡΩΝ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ.

Α) Πρόσθεσις. Παρατηρήσατε τὰ ἐφαρμοστὰ διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{B\Gamma}$, τὰ ὁποῖα βλέπετε εἰς τὸ παραπλεύρως σχῆμα 80–1. Τὸ ἐφαρμοστὸν διάνυσμα $\overrightarrow{B\Gamma}$ ὀνομάζεται **ἕνα διαδοχικὸν διάνυσμα** τοῦ $\overrightarrow{AB}$. Τὸ δὲ ἐφαρμοστὸν διάνυσμα $\overrightarrow{A\Gamma}$ λέγεται : **τὸ ἄθροισμα** τοῦ ἐφαρμοστοῦ $\overrightarrow{AB}$ σὺν τὸ ἐφαρμοστὸν $\overrightarrow{B\Gamma}$. Παρατηροῦμεν ἐπίσης ὅτι τὸ ἄθροισμα αὐτὸ $\overrightarrow{A\Gamma}$, εἶναι τὸ ἐφαρμοστὸν διάνυσμα, τὸ ὁποῖον ἔχει ἀρχὴν τὴν ἀρχὴν τοῦ πρώτου καὶ πέρας τὸ πέρας τοῦ δευτέρου ἐκ τῶν δοθέντων ἐφαρμοστῶν διαδοχικῶν διανυσμάτων.



Σχ. 80—1

Ἄς λάβωμεν τώρα δύο ἐλεύθερα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ τοῦ ἐπιπέδου (Σχ. 80–2). Ὁρίζομεν ὁπουδήποτε εἰς τὸ ἐπίπεδον ἕνα ἐφαρμοστὸν διάνυσμα $\overrightarrow{K\Lambda}$ ἴσον πρὸς τὸ ἐφαρμοστὸν $\overrightarrow{AB}$. Κατόπιν ὁρίζομεν ἕνα ἐφαρμοστὸν διάνυσμα $\overrightarrow{\Lambda M}$, διαδοχικὸν τοῦ $\overrightarrow{K\Lambda}$ καὶ ἴσον πρὸς τὸ ἐφορμοστὸν διάνυσμα $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$. Ὁρίζεται τότε, ὡς ἄθροισμα τοῦ $\overrightarrow{K\Lambda}$ σὺν τὸ $\overrightarrow{\Lambda M}$, τὸ ἐφαρμοστὸν διάνυσμα $\overrightarrow{KM}$. Τὸ ἐλεύθερον διάνυσμα $\overrightarrow{KM}$ λέγεται : **ἄθροισμα** τοῦ ἐλευθέρου διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ σὺν τὸ ἐλεύθερον διάνυσμα $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$. Συμβολικῶς γράφομεν :



Σχ. 80 – 2

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Gamma\Delta} = \overrightarrow{KM}$$

Ἡ πρᾶξις, μὲ τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν τὸ ἄθροισμα δύο διανυσμάτων τοῦ συνόλου $\mathscr{D}_0$, **λέγεται πρόσθεσις μέσα εἰς τὸ** $\mathscr{D}_0$.

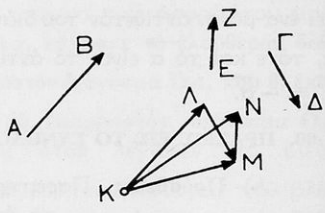
Ὡρίσαμεν ἀνωτέρω πρόσθεσιν μὲ δύο προσθετέα ἐλεύθερα διανύσματα. Ἔστω τώρα ἕνα ἐλεύθερον διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ (μὴ μηδενικὸν) καὶ ἕνα μηδενικὸν ἐλεύθερον διάνυσμα $\overrightarrow{\Gamma\Gamma}$. Ὁρίζομεν ὡς ἄθροισμα $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Gamma\Gamma}$ τὸ ἐλεύθερον διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$.

Γράφομεν δέ : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Gamma\Gamma} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{AB}$.

Δηλαδὴ τὸ μηδενικὸν ἐλεύθερον διάνυσμα εἶναι ἐξ ὁρισμοῦ **οὐδέτερον στοιχεῖον** διὰ τὴν πρόσθεσιν μέσα εἰς τὸ $\mathscr{D}_0$.

Β) Ἄθροισμα μὲ περισσότερα ἀπὸ δύο προσθετέα ἐλεύθερα διανύσματα.

Ἂν $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, $\overrightarrow{EZ}$ (Σχ. 80–3) εἶναι τρία ἐλεύθερα διανύσματα τοῦ ἐπιπέδου, ὁρίζομεν ὡς ἄθροισμα : $\overrightarrow{AB}$ σὺν $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ σὺν $\overrightarrow{EZ}$, καὶ τὸ συμβολίζομεν μὲ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Gamma\Delta} + \overrightarrow{EZ}$, τὸ ἐλεύθερον διάνυσμα, ποὺ προκύπτει ὡς ἑξῆς : Ὁρίζομεν πρῶτον τὸ ἄθροιμα $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Gamma\Delta}$, ἔστω τὸ $\overrightarrow{KM}$. Ἔπειτα ὁρίζομεν τὸ ἄθροισμα $\overrightarrow{KM} + \overrightarrow{EZ}$ (κατὰ τὰ γνωστά). Προκύπτει τότε τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{KN}$. Τὸ ἐλεύθερον διάνυσμα $\overrightarrow{KN}$ εἶναι ἐξ ὁρισμοῦ τὸ «ἄθροισμα $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Gamma\Delta} + \overrightarrow{EZ}$».



Σχ. 80–3

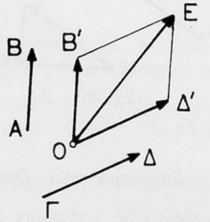
Ἀναλόγως ἐργαζόμεθα διὰ τὸ ἄθροισμα μὲ τέσσαρα, πέντε κτλ προσθετέα ἐλεύθερα διανύσματα.

Ἰδιότητες : Ἰσχύουν αἱ ἑξῆς ἰδιότητες :

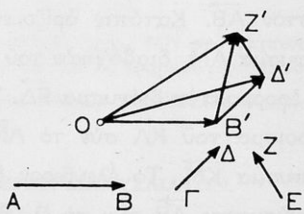
1) Ἀντιμεταθετική : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Gamma\Delta} = \overrightarrow{\Gamma\Delta} + \overrightarrow{AB}$ (Σχ. 80 – 4).

2) Προσεταιριστική : $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Gamma\Delta}) + \overrightarrow{EZ} = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{\Gamma\Delta} + \overrightarrow{EZ})$, (σχ. 80–5).

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Gamma\Delta} = \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{B'E} = \overrightarrow{OE}$	$(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Gamma\Delta}) + \overrightarrow{EZ} = \underbrace{(\overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{B'\Delta'})}_{\overrightarrow{O\Delta'}} + \overrightarrow{\Delta'Z'} = \overrightarrow{OZ'}$
$\overrightarrow{\Gamma\Delta} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{O\Delta'} + \overrightarrow{\Delta'E} = \overrightarrow{OE}$	$\overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{\Gamma\Delta} + \overrightarrow{EZ}) = \overrightarrow{OB'} + \underbrace{(\overrightarrow{B'\Delta'} + \overrightarrow{\Delta'Z'})}_{\overrightarrow{B'Z'}} = \overrightarrow{OZ'}$



Σχ. 80–4



Σχ. 80–5

3) Ἰδιότης τῆς διαγραφῆς :

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{ΓΔ} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EZ} = \overrightarrow{ΓΔ} + \overrightarrow{EZ}$

Ἡ ἐπαλήθευσις τῆς ἰσχύος τῆς ἰδιότητος 3) εἶναι εὐκολωτάτη.

4) $\overrightarrow{AB} + \vec{x} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$

Παρατήρησις. Κατὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ ἀθροίσματος $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{ΓΔ}$ εἴτε, ποὺ εἶναι τὸ ἴδιον, τοῦ $\overrightarrow{ΓΔ} + \overrightarrow{AB}$, παρατηροῦμεν ὅτι, ἐὰν οἱ φορεῖς τῶν διανυσμάτων δὲν εἶναι παράλληλοι, σχηματίζεται (Σχ.80—4) ἕνα παραλληλόγραμον ΟΔ'ΕΒ' καὶ ὅτι τὸ ἐλεύθερον διάνυσμα $\overrightarrow{OE}$, ποὺ ἔχει διεύθυνσιν τὴν διεύθυνσιν τῆς διαγωνίου ΟΕ, εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ἐλευθέρων διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{ΓΔ}$. Ἠμποροῦμεν λοιπόν, προκειμένου νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα δύο ἐλευθέρων διανυσμάτων, νὰ λάβωμεν, μὲ τυχὸν σημεῖον Ο ὡς ἀρχήν, ἐφαρμοστὰ διανύσμανα $\overrightarrow{OB'}$, $\overrightarrow{OΔ'}$, ἀντιστοίχως ἴσα πρὸς τὰ ἐφαρμοστὰ $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{ΓΔ}$, κατόπιν νὰ σχηματίσωμεν τὸ παραλληλόγρομμον ΟΔ'ΕΒ' μὲ δύο προσκειμένας πλευράς του τὰ τμήματα ΟΒ', ΟΔ', ὁπότε τὸ ἔχον τὴν διεύθυνσιν τῆς διαγωνίου ἐλεύθερον διάνυσμα $\overrightarrow{OE}$ εἶναι τὸ ἄθροισμα $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{ΓΔ}$. **(Κανὼν τοῦ παραλληλογράμμου).**

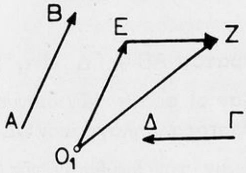
Γ) Ἀφαίρεσις. Ἂν $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{ΓΔ}$, εἶναι δύο ἐλεύθερα διανύσματα ἐπὶ ἐπιπέδου καὶ $\overrightarrow{Γ'Δ'}$ εἶναι τὸ ἐλεύθερον διάνυσμα τὸ ἀντίθετον τοῦ ἐλευθέρου $\overrightarrow{ΓΔ}$, δηλαδή: $\overrightarrow{Γ'Δ'} = -\overrightarrow{ΓΔ}$, τότε ὀνομάζεται : **διαφορὰ $\overrightarrow{AB}$ πλὴν $\overrightarrow{ΓΔ}$,** καὶ συμβολίζεται μὲ $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{ΓΔ}$, τὸ ἄθροισμα $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{Γ'Δ'}$. Δηλαδή: $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{ΓΔ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{Γ'Δ'} = \overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{ΓΔ})$.

Διὰ νὰ εὕρωμεν λοιπὸν τὴν διαφορὰν ἑνὸς ἐλευθέρου διανύσματος $\overrightarrow{ΓΔ}$ ἀπὸ ἄλλο $\overrightarrow{AB}$, ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸ **μειωτέον** διάνυσμα τὸ ἀντίθετον τοῦ **ἀφαιρετέου** διανύσματος.

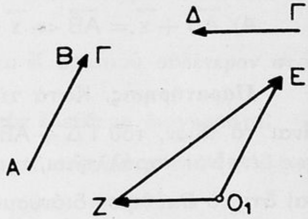
Ἡ πρᾶξις, μὲ τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν τὴν διαφορὰν $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{ΓΔ}$ λέγεται **ἀφαίρεσις** τοῦ $\overrightarrow{ΓΔ}$ ἀπὸ τὸ $\overrightarrow{AB}$, μέσα εἰς τὸ σύνολον $\mathscr{D}_0$.

Εἰς τὸ (Σχ. 80–6) βλέπετε ἕνα τρόπον κατασκευῆς τῆς διαφορᾶς $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{ΓΔ}$: Μὲ ἀρχὴν τὸ τυχὸν σημεῖον O_1 τοῦ ἐπιπέδου λαμβάνομεν τὸ ἐφαρμοστὸν διάνυσμα $\overrightarrow{O_1E}$ ἴσον πρὸς τὸ ἐφαρμοστὸν $\overrightarrow{AB}$. Ἔπειτα μὲ ἀρχὴν τὸ πέρας Ε τοῦ O_1E λαμβάνομεν τὸ ἐφαρμοστὸν διάνυσμα $\overrightarrow{EZ}$, ἀντίθετον τοῦ ἐφαρμοστοῦ $\overrightarrow{ΓΔ}$. Τὸ ἐλεύθερον διάνυσμα $\overrightarrow{O_1Z}$ εἶναι τὸ διάνυσμα τὸ ἴσον μὲ $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{ΓΔ}$.

Ένας δεύτερος τρόπος εἶναι ὁ ἑξῆς (Σχ. 80–7) : Λαμβάνομεν δύο ἐφαρμοστὰ διανύσματα μὲ κοινὴν ἀρχὴν ἕνα σημεῖον O_1 τοῦ ἐπιπέδου, $\overrightarrow{O_1E}$ ἴσον μὲ τὸ ἐφαρ-



Σχ. 80 – 6



Σχ. 80 – 7

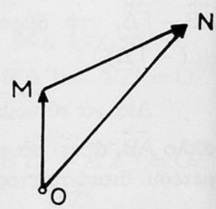
μοστὸν $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{O_1Z}$ ἴσον μὲ τὸ ἐφαρμοστὸν $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$. Ἔπειτα λαμβάνομεν τὸ ἐλεύθερον διάνυσμα $\overrightarrow{ZE}$, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ διάνυσμα τὸ ἴσον μὲ $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{\Gamma\Delta}$, δηλ. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{\Gamma\Delta} = \overrightarrow{ZE}$.

Πράγματι : $\overrightarrow{O_1Z} + \overrightarrow{ZE} = \overrightarrow{O_1E} \Rightarrow \overrightarrow{ZE} = \overrightarrow{O_1E} - \overrightarrow{O_1Z} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

Σημείωσις: Τὸ ἐφαρμοστὸν διάνυσμα $\overrightarrow{OM}$, τὸ ὁποῖον ἔχει ἀρχὴν τυχὸν σημεῖον O τοῦ ἐπιπέδου καὶ πέρας ἕνα σημεῖον M τοῦ ἐπιπέδου, λέγεται **διανυσματικὴ ἀκτὶς** τοῦ σημείου M ὡς πρὸς ἀρχὴν τὸ O.

Δ) Ἂν $\overrightarrow{MN}$ εἶναι ἕνα ἐφαρμοστὸν διάνυσμα τοῦ ἐπιπέδου καὶ O τυχὸν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου, τότε εἶναι φανερὸν ὅτι θὰ ἔχωμεν (Σχ. 80–8) : $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON}$, ἄρα $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} + (-\overrightarrow{OM})$, δηλ. $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}$

Ὥστε: πᾶν ἐφαρμοστὸν διάνυσμα τοῦ ἐπιπέδου εἶναι διαφορὰ τῆς διανυσματκῆς ἀκτῖνος τοῦ πέρατός του μεῖον τὴν διανυσματικὴν ἀκτῖνα τῆς ἀρχῆς του ὡς πρὸς ἀρχὴν των τυχὸν σημεῖον O τοῦ ἐπιπέδου.



Σχ. 80 – 8

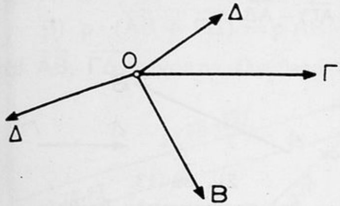
Ε) Ἐὰν $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$ εἶναι δύο ἴσα ἐφαρμοστὰ διανύσματα τότε :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Delta\Gamma} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Delta} = \overrightarrow{B\Delta} + \overrightarrow{\Delta\Gamma} \Leftrightarrow \overrightarrow{A\Delta} = \overrightarrow{B\Gamma}$$

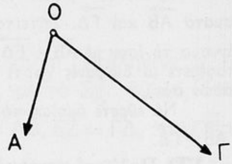
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

316) Νὰ εὕρετε μὲ τὸν κανόνα τοῦ παραλληλογράμμου τὸ ἄθροισμα τῶν διανυσμάτων τοῦ Σχ. 80–9, ἀφοῦ μεταφέρετε τὸ σχῆμα εἰς τὸ τετράδιόν σας μὲ διαφανὲς) πρῶτον μὲ τὴν σειρὰν $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{O\Gamma} + \overrightarrow{O\Delta}$ καὶ ἔπειτα $\overrightarrow{O\Gamma} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{O\Delta} + \overrightarrow{OB}$. Τὶ παρατηρεῖτε συγκρίνοντες τὰ διανύσματα τὰ ὁποῖα εὑρίσκετε ;

317) Εἰς τὸ Σχ. 80–10 τὸ $\overrightarrow{\text{ΟΓ}}$ εἶναι τὸ ἄθροισμα τοῦ διανύσματος ΟΑ καὶ ἑνὸς ἄλλου



Σχ. 80 - 9



Σχ. 80 – 10

διανύσματος μὲ ἀρχὴν τὸ Ο. Νὰ κατασκευάσετε αὐτὸ τὸ ἄλλο διάνυσμα.

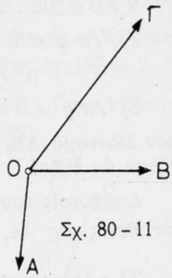
318) Δύο διανύσματα $\overrightarrow{\text{ΟΑ}}$ καὶ $\overrightarrow{\text{ΟΒ}}$ εἶναι ἰσομήκη. Νὰ δείξετε ὅτι τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{\text{ΟΔ}} = \overrightarrow{\text{ΟΑ}} + \overrightarrow{\text{ΟΒ}}$ ἔχει φορέα τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας (ΟΑ, ΟΒ).

319) Ἀφοῦ ἀποτυπώσετε ἐπάνω εἰς διαφανὲς χαρτὶ τὰ διανύσματα τοῦ Σχ. (80 – 11) νὰ τὰ μεταφέρετε εἰς τὸ τετράδιόν σας καί, εἰς τρία χωριστὰ σχεδιάσματα, νὰ ἐκτελέσετε τὰς ἀκολούθους πράξεις :

α) $(\overrightarrow{\text{ΟΑ}} + \overrightarrow{\text{ΟΒ}}) - \overrightarrow{\text{ΟΓ}}$

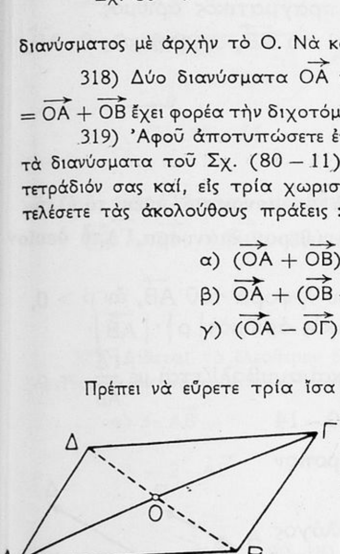
β) $\overrightarrow{\text{ΟΑ}} + (\overrightarrow{\text{ΟΒ}} - \overrightarrow{\text{ΟΓ}})$

γ) $(\overrightarrow{\text{ΟΑ}} - \overrightarrow{\text{ΟΓ}}) + \overrightarrow{\text{ΟΒ}}$



Σχ. 80 – 11

Πρέπει νὰ εὕρετε τρία ἴσα διανύσματα. Ἐνθυμεῖσθε ἀντιστοίχους ἰσότητας ἀπὸ τὸν ἀλγεβρικὸν λογισμόν ;



Σχ. 80 – 12

320) Νὰ δείξετε μὲ τὴν βοήθειαν τῶν διανυσμάτων ὅτι αἱ διαγώνιοι τοῦ παραλληλογράμμου διχοτομοῦν ἡ μία τὴν ἄλλην.

Λύσις. Ἔστω ΑΒΓΔ ἕνα παραλληλόγραμμον (Σχ. 80–12) καὶ Ο τὸ μέσον τῆς διαγωνίου ΑΓ. Παρατηροῦμεν ὅτι εἶναι : $\overrightarrow{\text{ΑΟ}} + \overrightarrow{\text{ΟΒ}} = \overrightarrow{\text{ΑΒ}}$ καὶ $\overrightarrow{\text{ΔΟ}} + \overrightarrow{\text{ΟΓ}} = \overrightarrow{\text{ΔΓ}}$.

Ἀλλὰ ἐξ ὑποθέσεως τὰ δεύτερα μέλη τῶν ἰσοτήτων αὐτῶν εἶναι ἴσα ($\overrightarrow{\text{ΑΒ}} = \overrightarrow{\text{ΔΓ}}$), ἄρα θὰ εἶναι : $\overrightarrow{\text{ΑΟ}} + \overrightarrow{\text{ΟΒ}} = \overrightarrow{\text{ΔΟ}} + \overrightarrow{\text{ΟΓ}}$.

καὶ μὲ ἐφαρμογὴν τῆς ἰδιότητος τῆς διαγραφῆς (ἐπειδὴ $\overrightarrow{\text{ΑΟ}} = \overrightarrow{\text{ΟΓ}}$) θὰ ἔχωμεν :

$$\overrightarrow{\text{ΑΟ}} + \overrightarrow{\text{ΟΒ}} = \overrightarrow{\text{ΔΟ}} + \overrightarrow{\text{ΟΓ}} \Rightarrow \overrightarrow{\text{ΟΒ}} = \overrightarrow{\text{ΔΟ}}$$

Ἀλλά, ἀφοῦ τὰ διανύσματα $\overrightarrow{\text{ΟΒ}}$ καὶ $\overrightarrow{\text{ΔΟ}}$ εἶναι ἴσα, κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ φορέως ἢ ἐπὶ παραλλήλων φορέων. Ἔχουν ὅμως ἕνα κοινὸν σημεῖον, τὸ Ο, ἄρα κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ φορέως καὶ ἐπειδὴ εἶναι $\overrightarrow{\text{ΟΒ}} = \overrightarrow{\text{ΔΟ}}$, τὸ Ο εἶναι μέσον τῆς διαγωνίου $\overrightarrow{\text{ΔΒ}}$.

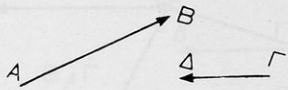
321) Νὰ εὕρετε τὰ ἀκόλουθα διανύσματα (χωρὶς σχῆμα) :

α) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma} =$; β) $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} =$;

γ) $\overrightarrow{AB} - (\overrightarrow{\Gamma\Delta} + \overrightarrow{A\Gamma}) =$; δ) $(\overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{A\Gamma}) - \overrightarrow{A\Delta}$;

322) Εἰς τὸ σχ. 80–13 ἔχετε δύο ἐλεύθερα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$. Ζητεῖται νὰ εὕρετε τὸ ἐλεύθερον διάνυσμα τὸ ἴσον μὲ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Gamma\Delta}$ κατὰ δύο τρόπους (ἀφοῦ μεταφέρετε μὲ διαφανὲς χαρτὶ τὰ διανύσματα εἰς τὸ τετράδιόν σας).

Νὰ εὕρετε ὁμοίως τὸ ἐλεύθερον διάνυσμα τὸ ἴσον μὲ $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{\Gamma\Delta}$.



Σχ. 80–13.

ΣΤ) Πολλαπλασιασμὸς ἐλευθέρου διανύσματος ἐπὶ πραγματικὸν ἀριθμόν.

Ἔστω τυχὸν ἐλεύθερον διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ καὶ ρ πραγματικὸς ἀριθμός.

1) Ἂν $\rho = 0$, ὁρίζομεν ὡς γινόμενον τοῦ 0 ἐπὶ τὸ $\overrightarrow{AB}$, συμβολικῶς $0 \cdot \overrightarrow{AB}$, τὸ μηδενικὸν ἐλεύθερον διάνυσμα. Ἤτοι.

$\forall\ \overrightarrow{AB} \in \mathscr{D}o : 0 \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{0}$ (ἐξ ὁρισμοῦ)

2) Ἂν $\rho \neq 0$ καὶ $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$, τότε ὁρίζομεν :

$$\rho \cdot \overrightarrow{AB} = \rho \cdot \vec{0} = \vec{0}$$

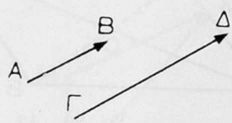
3) Ἂν $\rho \neq 0$ καὶ $\overrightarrow{AB} \neq 0$, τότε ὁρίζομεν ὡς **τὸ γινόμενον τοῦ ρ ἐπὶ τὸ ἐλεύθερον διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$,** καὶ συμβολίζομεν $\rho . \overrightarrow{AB}$, **τὸ ἐλεύθερον διάνυσμα, $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ὡς ἑξῆς :**

Διεύθυνσίς του ἡ διεύθυνσις τοῦ $\overrightarrow{AB}$, φορά του ἡ φορὰ τοῦ $\overrightarrow{AB}$, ἂν $\rho > 0$, ἡ ἀντίθετός της δέ, ἂν $\rho < 0$ καὶ μῆκος του ὁ θετικὸς ἀριθμὸς $|\rho| \cdot |\overrightarrow{AB}|$·

Ὁ ρ λέγεται τότε : **λόγος τοῦ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ πρὸς τὸ $\overrightarrow{AB}$** καὶ συμβολίζεται μὲ $\dfrac{\overrightarrow{\Gamma\Delta}}{\overrightarrow{AB}} = \rho$.

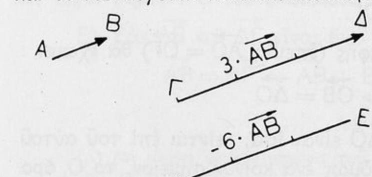
Οὕτω π.χ. εἰς τὸ παραπλεύρως σχῆμα 80 – 14 εἶναι $\overrightarrow{\Gamma\Delta} = 2 \cdot \overrightarrow{AB}$, δηλ. τὸ $2 \cdot \overrightarrow{AB}$ εἶναι τὸ ὁμόρροπον τοῦ $\overrightarrow{AB}$ ἐλεύθερον διάνυσμα μὲ μῆκος $2 \cdot |\overrightarrow{AB}|$.

Λέγομεν εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὅτι ὁ λόγος τοῦ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ πρὸς τὸ $\overrightarrow{AB}$ εἶναι 2 καὶ γράφομεν $\dfrac{\overrightarrow{\Gamma\Delta}}{\overrightarrow{AB}} = 2$.



Σχ. 80—14

Ἡ πρᾶξις μὲ τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν τὸ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ ἀπὸ τὸν 2 καὶ τὸ $\overrightarrow{AB}$ λέγεται πολλαπλασιασμὸς τοῦ $\overrightarrow{AB}$ ἐπὶ τὸν 2.



Σχ. 80 – 15

Εἰς τὸ Σχ. 80–15 βλέπετε τὸ ἐλεύθερον διάνυσμο $\overrightarrow{\Gamma\Delta} = 3 \cdot \overrightarrow{AB}$ καὶ τὸ ἐλεύθερον διάνυσμα $\overrightarrow{EZ} = -6 \cdot \overrightarrow{AB}$

Γράφομεν δὲ ἐδῶ ὅτι :

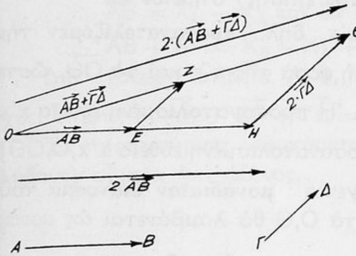
$$\frac{\overrightarrow{\Gamma\Delta}}{\overrightarrow{AB}} = 3 \text{ καὶ } \frac{\overrightarrow{EZ}}{\overrightarrow{AB}} = -6$$

Ἰσχύουν αἱ ἑξῆς ἰδιότητες :

α) $(-\ 2) \cdot (3\overrightarrow{AB}) = -6\overrightarrow{AB} =$

$(-2\cdot 3)\ \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EZ}$ (Σχ. 80 – 15) καὶ γενικῶς : $\lambda\cdot(\rho\overrightarrow{AB}) = (\lambda\cdot\rho)\cdot\overrightarrow{AB}$, ὅπου λ,ρ, πραγματικοὶ ἀριθμοί, καὶ $\overrightarrow{AB}$ τυχὸν ἐλεύθερον διάνυσμα.

β) $\rho\cdot(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Gamma\Delta}) = \rho\,\overrightarrow{AB} + \rho\cdot\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, ὅπου ρ τυχὼν πραγματικὸς ἀριθμὸς καὶ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ τυχόντα ἐλεύθερα διανύσματα.



Σχ. 80 – 16

Ἡ ἰδιότης αὐτὴ ἐπαληθεύεται εὐκόλως διὰ ρ = 2, μὲ τὸ Σχ. 80–16, ὅπου λαμβάνομεν $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{EZ} = \overrightarrow{\Gamma\Delta}$, ἄρα $\overrightarrow{OZ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Gamma\Delta}$. Ἐπὶ τῆς ἡμιευθείας ΟΕ λαμβάνομεν $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AB}$, ὁπότε $\overrightarrow{OH} = 2\cdot\overrightarrow{AB}$. Ἐπὶ τῆς ἡμιευθείας $\overrightarrow{OZ}$ λαμβάνομεν $\overrightarrow{ZO} = \overrightarrow{\Theta Z}$, ὁπότε $\overrightarrow{O\Theta} = 2\cdot(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Gamma\Delta})$. Ἐὰν τώρα χαράξωμεν τὸ $\overrightarrow{H\Theta}$, ἠμποροῦμεν νὰ διαπιστώσωμεν μὲ τὸν διαβήτην ὅτι $H\Theta = 2\cdot\Gamma\Delta$ καὶ μὲ παράλληλον μετάθεσιν τοῦ γνώμονος ὅτι $\overrightarrow{EZ} \parallel \overrightarrow{H\Theta}$. Ὥστε εἶναι :

$$\overrightarrow{O\Theta} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{H\Theta},\ \text{δηλαδὴ}\ 2\cdot(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Gamma\Delta}) = 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{\Gamma\Delta}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

323) Δίδεται τὸ ἐλεύθερον διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ (Σχ. 80–17) καὶ ζητεῖται νὰ κατασκευασθοῦν διανύσματα ἴσα πρὸς τό :

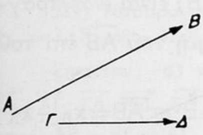
α) $3\cdot\overrightarrow{AB}$ β) $\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AB}$

γ) $-2\cdot\overrightarrow{AB}$ δ) $\frac{5}{4}\cdot\overrightarrow{AB}$

Σχ. 80—17

324) Δίδονται τὰ ἐλεύθερα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ (Σχ. 80–18) εἰς ἕνα ἐπίπεδον καὶ ζητεῖτοι νὰ κατασκευασθοῦν τά :

α) $2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, β) $\frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ γ) $\overrightarrow{AB} - 2\,\overrightarrow{\Gamma\Delta}$.



Σχ. 80 – 18

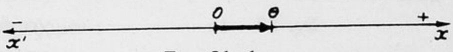
81. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΕΠΙ ΑΞΟΝΟΣ (ΟΛΙΣΘΑΙΝΟΝΤΑ).

Α) Ἔστω (Ε) ἕνα ἐπίπεδον καὶ ε μία εὐθεῖα του. Ὑπάρχουν ἀπειράριθμα ἐφαρμοστὰ διανύσματα τοῦ (Ε) μὲ κοινὸν φορέα των τὴν εὐθεῖαν ε. Ὅπως ὡρίσαμεν τὴν ἔννοιαν ἐλεύθερον διάνυσμα τοῦ ἐπιπέδου ἀπὸ τὴν ἔννοιαν : ἐφαρμοστὸν διάνυσμα τοῦ ἐπιπέδου, κατὰ τὸν ἴδιον ἀκριβῶς τρόπον ἀπὸ τὴν ἔννοιαν : ἐφαρμοστὸν διάνυσμα τῆς εὐθείας ὁρίζεται ἡ ἔννοια : ἐλεύθερον διάνυσμα τῆς εὐθείας.

Ὁ ὁρισμὸς τῆς ἰσότητος, τοῦ ἀθροίσματος κ.τ.λ., ποὺ ἐδώσαμεν διὰ τὰ ἐλεύθερα διανύσματα τοῦ ἐπιπέδου, δίδονται ἐντελῶς ὁμοίως καὶ διὰ τὰ ἐλεύθερα διανύσματα, τὰ ὁποῖα φέρονται ἐπὶ εὐθείας. Συνήθως τὸ ἐλεύθερον διάνυσμα ἐπὶ εὐθείας ὀνομάζεται **ὀλισθαῖνον διάνυσμα.**

Β) Ἔστω (Σχ. 81–1) μία εὐθεῖα $x'x$ Λαμβάνομεν ἐπ' αὐτῆς ἕνα (αὐθαίρετον σημεῖον Ο καὶ δεξιὰ αὐτοῦ ἕνα ἄλλο (αὐθαίρετον ἐπίσης) σημεῖον Θ.

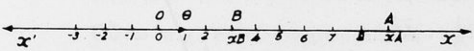
Ὁρίζομεν τώρα τὴν θετικὴν φορὰν τῆς $x'x$, δηλ. **προσανατολίζομεν** τὴν $x'x$. Συμφωνοῦμεν νὰ λαμβάνεται οὕτως ἡ θετικὴ φορὰ τῆς $x'x$ καὶ τὸ $\overrightarrow{O\Theta}$, ὥστε ἡ $x'x$ νὰ ἔχῃ θετικὴν φορὰν τὴν φορὰν τοῦ $\overrightarrow{O\Theta}$. Ἡ προσανατολισμένη εὐθεῖα $x'x$ μαζὺ μὲ τὸ Ο καὶ τὸ $\overrightarrow{O\Theta}$ δηλαδὴ τὸ σύνολον {προσανατολισμένη εὐθεῖα $x'x, O, \overrightarrow{O\Theta}$} ὀνομάζεται : **ἄξων** $x'Ox$. Τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{O\Theta}$ λέγεται : **μοναδιαῖον διάνυσμα** τοῦ ἄξονος $x'Ox$. Τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα μὲ ἄκρα τὰ Ο,Θ θὰ λαμβάνεται ὡς μονὰς μετρήσεως τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων τοῦ ἄξονος $x'Ox$. Τὸ σημεῖον Ο χωρίζει τὸν ἄξονα $x'Ox$ εἰς δύο ἡμιάξονας. Τὸν Ox, ποὺ λέγεται καὶ **θετικὸς ἡμιάξων** τοῦ $x'Ox$ καὶ τὸν Ox', ποὺ λέγεται καὶ **ἀρνητικὸς ἡμιάξων** τοῦ $x'Ox$.



Σχ. 81–1

Γ) Ἀλγεβρικὴ τιμὴ ἐφαρμοστοῦ διανύσματος ἐπὶ ἄξονος.

Ἔστω ἕνα ἐπίπεδον (Ε), τυχοῦσα εὐθεῖα $x'x$ τοῦ (Ε) καὶ $\overrightarrow{AB}$ τυχὸν ἐφαρμοστὸν διάνυσμα ἐπὶ τῆς $x'x$ (Σχ. 82 – 2).



Σχ. 81–2

Ἐὰν προσανατολίσωμεν τὴν εὐθεῖαν $x'x$ καὶ τὴν καταστήσωμεν ἄξονα, τότε τὸ σημεῖον Α θὰ ἔχῃ μίαν τετμημένην, ἔστω x_A ἐπὶ τοῦ ἄξονος $x'Ox$ καὶ τὸ σημεῖον Β μίαν τετμημένην, ἔστω x_B. Ἡ διαφορὰ $x_B - x_A$ (τετμημένη τοῦ πέρατος Β μεῖον τετμημένη τῆς ἀρχῆς Α τοῦ $\overrightarrow{AB}$) εἶναι ἕνας πραγματικὸς ἀριθμός. Ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς ὀνομάζεται : **ἀλγεβρικὴ τιμὴ** τοῦ $\overrightarrow{AB}$ ἐπὶ τοῦ ἄξονος $x'Ox$ καὶ συμβολίζεται μὲ $\overline{AB}$.

Οὕτω π.χ. εἰς τὸ Σχ. 81–2 ἔχομεν: α) ἀλγ. τιμὴ τοῦ $\overrightarrow{AB} \equiv \overline{AB} = x_B - x_A = 3 - 9 = -6$, ἀλγ. τιμὴ τοῦ $\overrightarrow{AA} \equiv \overline{AA} = 9 - 9 = 0$, ἀλγ. τιμὴ τοῦ $\overrightarrow{BB} \equiv \overline{BB} = 3 - 3 = 0$, ἀλγ. τιμὴ τοῦ $\overrightarrow{O\Theta} \equiv \overline{O\Theta} = 1 - 0 = 1$, ἀλγ. τιμὴ τοῦ $\overrightarrow{\Theta O} \equiv \overrightarrow{\Theta O} = 0 - 1 = -1$ κτ.λ.

82. ΙΔΙΟΤΗΣ ΤΟΥ CHASLES (ΣΑΛ).

Ἔστω $x'x$ τυχὼν ἄξων τοῦ ἐπιπέδου (Ε) καὶ Α,Β,Γ, τρία τυχόντα σημεῖα τοῦ ἄξονος. Διὰ τὰ διανύσματα $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{B\Gamma}, \overrightarrow{A\Gamma}$, ἰσχύει, ὡς γνωστόν, ὅτι :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{A\Gamma}$$

Ἐὰν $\overline{AB}$, $\overline{B\Gamma}$, $\overline{A\Gamma}$ εἶναι αἱ ἀλγεβρικαὶ τιμαὶ τῶν ἀνωτέρω διανυσμάτων, τότε ἰσχύει ἐπίσης :

$$\overline{AB}+\overline{B\Gamma}=\overline{A\Gamma}$$

Πράγματι, ἂν X_A, X_B, X_Γ εἶναι αἱ τετμημέναι τῶν Α,Β,Γ, ἐπὶ τοῦ ἄξονος, θὰ εἶναι :

$$\overline{AB}=X_B-X_A \text{ καὶ } \overline{B\Gamma}=X_\Gamma-X_B, \text{ ἑπομένως :}$$

$$\overline{AB}+\overline{B\Gamma}=X_B-X_A+X_\Gamma-X_B=X_\Gamma-X_A=\overline{A\Gamma}.$$

Διά τέσσερα σημεῖα Α, Β, Γ, Δ, ὁπωσδήποτε τοποθετημένα ἐπὶ ἄξονος ἰσχύει ἐπίσης : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}=\overrightarrow{A\Delta}$ καὶ $\overline{AB}+\overline{B\Gamma}+\overline{\Gamma\Delta}=\overline{A\Delta}$.

Τὰ προηγούμενα γενικεύονται εὐκόλως καὶ δι' ὁσαδήποτε (πεπερασμένου πλήθους) σημεῖα ἐπὶ ἄξονος.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

325) Πέντε σημεῖα Α, Β, Γ, Δ, Ε εἶναι τοποθετημένα ἐπὶ ἄξονος μὲ τρόπον αὐθαίρετον. Νὰ εὕρετε τὰ ἀθροίσματα :

α) $\overrightarrow{B\Delta}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{\Delta\Gamma}$, β) $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{B\Delta}+\overrightarrow{\Delta A}$, γ) $\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{\Delta E}+\overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{EB}$,

δ) $\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{\Delta B}+\overrightarrow{AB}$, ε) $\overrightarrow{\Delta A}-\overrightarrow{\Delta B}-\overrightarrow{B\Gamma}$, ϛ) $\overrightarrow{E\Gamma}+\overrightarrow{\Delta E}+\overrightarrow{\Gamma B}-\overrightarrow{\Delta B}$.

326) Τρία σημεῖα Α, Β, Γ εἶναι ὡρισμένα μὲ σειρὰν αὐθαίρετον ἐπὶ ἄξονος. Νὰ εὕρετε τὰς διαφοράς :

α) $\overline{AB}-\overline{\Gamma B}$, β) $\overline{BA}-\overline{\Gamma A}$, γ) $\overline{AB}-\overline{A\Gamma}$, δ) $\overline{BA}-\overline{B\Gamma}$, ε) $\overline{\Gamma A}-\overline{\Gamma B}$.

327) Ἔστω ὅτι ἐπὶ ἑνὸς ἄξονος εἶναι ὡρισμένα τέσσερα σημεῖα Α, Β, Γ, Δ οὕτως, ὥστε $\overline{AB}=-6$, $\overline{B\Gamma}=+4$, $\overline{\Gamma\Delta}=+8$. Χωρὶς νὰ κάμετε σχῆμα α) Νὰ εὕρετε τά :

$\overline{BA}$, $\overline{A\Gamma}$, $\overline{\Delta B}$, $\overline{\Delta A}+\overline{A\Gamma}$, $\overline{\Gamma A}-\overline{\Gamma B}$, $\overline{B\Delta}-\overline{B\Gamma}-\overline{\Gamma\Delta}$.

β) Νὰ ὑπολογίσετε τὸ $\overline{EZ}$, ἂν εἶναι $\overline{\Delta E}=-3$ καὶ $\overline{BZ}=-9$.

328) Δίδονται ἐπὶ ἄξονος δύο διανύσματα $\overrightarrow{OA}$ καὶ $\overrightarrow{OB}$. Νὰ κατασκευάσετε ἕνα τρίτον διάνυσμα, ὥστε νὰ εἶναι :

α) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{O\Gamma}=\overrightarrow{0}$ β) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{O\Gamma}=\overrightarrow{OB}$

329) Τέσσαρα σημεῖα Α, Β, Γ, Δ ἐπὶ ἄξονος x'Ox δίδονται μὲ τὰς τετμημένας των $X_A=2$, $X_B=-4$, $X_\Gamma=5$, $X_\Delta=-7$.

Ζητεῖται : α) νὰ εὕρετε τὰς ἀλγεβρικὰς τιμὰς καθενὸς ἀπὸ τὰ διανύσματα : $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{A\Gamma}$, $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, $\overrightarrow{A\Delta}$, $\overrightarrow{B\Delta}$. β) νὰ ἐπαληθεύσετε τὰς ἰσότητας :

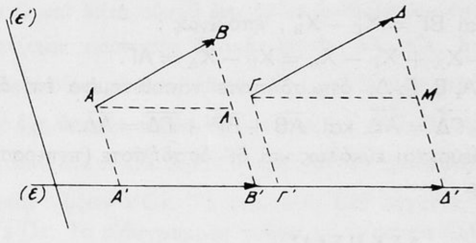
$\overline{AB}+\overline{B\Gamma}=\overline{A\Gamma}$, $\overline{A\Gamma}+\overline{\Gamma\Delta}+\overline{\Delta A}=0$, $\overline{B\Delta}-\overline{B\Gamma}=\overline{\Gamma\Delta}$

330) Ἐπὶ ἄξονος x'Ox δίδονται τὰ σημεῖα Α καὶ Β διὰ τῶν τετμημένων των $X_A=3$, $X_B=-5$. Ζητεῖται : α) νὰ εὕρετε τὰς τετμημένας τῶν σημείων Ε, Ζ, Η, Θ ἐὰν γνωρίζετε ὅτι $\overline{AE}=4$, $\overline{BZ}=8$, $\overline{HA}=-2$, $\overline{\Theta B}=12$. Τί παρατηρεῖτε σχετικῶς μὲ τὰ σημεῖα Α καὶ Ζ ; β) Νὰ εὕρετε τὴν τετμημένην x τοῦ σημείου Μ, ποὺ καθορίζετε ἀπὸ κάθε μίαν τῶν ἰσοτήτων :

$\overline{AM}=\overline{BA}$, $\overline{AM}=\overline{MB}$, $\overline{MA}=2\cdot\overline{AB}$, $3\cdot AM-\overline{MN}=0$

83. ΠΛΑΓΙΑ ΚΑΙ ΟΡΘΗ ΠΡΟΒΟΛΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ ΕΠΙ ΕΥΘΕΙΑΝ ΤΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΤΟΥ.

Ἔστω διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ ἑνὸς ἐπιπέδου (Ε) καὶ μία εὐθεῖα (ε) τοῦ ἐπιπέδου τούτου, Σχ. 83–1. Ἔστω ἀκόμη καὶ μία ἄλλη εὐθεῖα (ε′) τοῦ (Ε), ἡ ὁποία νὰ εἶναι τέμνουσα τῆς (ε). Ἀπὸ τὰ σημεῖα Α,Β φέρομεν τὰς παραλλήλους τῆς (ε′)· αὗται ὁρίζουν ἐπὶ τῆς (ε) τὰ σημεῖα Α′, Β′, συνεπῶς καὶ τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{A'B'}$· τοῦτο ὀνομάζεται : **προβολὴ τοῦ $\overrightarrow{AB}$ ἐπὶ τὴν (ε) παραλλήλως πρὸς τὴν (ε′).**



Σχ. 83–1

Εἰδικῶς, ἂν ε′ ⊥ ε, τότε ἡ προβολὴ $\overrightarrow{A'B'}$ τοῦ $\overrightarrow{AB}$ ἐπὶ τὴν (ε) παραλλήλως πρὸς τὴν (ε′) ὀνομάζεται : **ὀρθὴ προβολὴ** τοῦ $\overrightarrow{AB}$ ἐπὶ τὴν (ε).

Θεώρημα τῶν προβολῶν. Ἔστωσαν τὰ διανύσματα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ τοῦ ἐπιπέδου (Ε) ἀμφότερα μὴ μηδενικὰ καὶ τῆς αὐτῆς διευθύνσεως (συγγραμμικά), καὶ $\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{\Gamma'\Delta'}$ αἱ προβολαὶ των ἐπὶ εὐθεῖαν (ε) τοῦ (Ε) παραλλήλως πρὸς τὴν εὐθεῖαν (ε′) τοῦ (Ε). Αἱ προβολαὶ αὗται δὲν εἶναι ἀναγκαίως ὀρθαί.

Ἰσχύει τότε τὸ ἑξῆς **Θεώρημα :**

Οἱ λόγοι $\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{\Gamma\Delta}}$ καὶ $\dfrac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{\Gamma'\Delta'}}$ εἶναι ἴσοι, ἤτοι :

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{\Gamma\Delta}} = \frac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{\Gamma'\Delta'}}$$

Τοῦτο ἐξηγεῖται ὡς ἑξῆς : Σχηματίζομεν τὰ τρίγωνα ΑΛΒ, ΓΜΔ διὰ τῶν παραλλήλων ΑΛ καὶ ΓΜ πρὸς τὴν (ε). Τὰ τρίγωνα αὐτὰ εἶναι ὅμοια, διότι αἱ γωνίαι των εἶναι ἴσαι (σχηματίζονται ὑπὸ πλευρῶν παραλλήλων καὶ ὁμορρόπων). Ἄρα ἔχουν τὰ μήκη τῶν πλευρῶν των (ὡς πρὸς τὴν αὐτὴν μονάδα). ἀνάλογα. Συνεπῶς :

$$\frac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{\Gamma\Delta}|} = \frac{|\overrightarrow{A\Lambda}|}{|\overrightarrow{\Gamma M}|}$$

ἀλλὰ $|\overrightarrow{A\Lambda}| = |\overrightarrow{A'B'}|$, $\quad |\overrightarrow{\Gamma M}| = |\overrightarrow{\Gamma'M'}|$,

Ὥστε, $$\frac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{\Gamma\Delta}|} = \frac{|\overrightarrow{A'B'}|}{|\overrightarrow{\Gamma'\Delta'}|} \qquad (1)$$

'Αλλὰ 1ον) ἂν εἶναι $\overrightarrow{AB}$ ὁμόρροπον τοῦ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, τότε εἶναι :

α) $\overrightarrow{A'B'}$ ὁμόρροπον τοῦ $\overrightarrow{\Gamma'\Delta'}$ καὶ

β) $\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{\Gamma\Delta}} = \dfrac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{\Gamma\Delta}|}$ καὶ $\dfrac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{\Gamma'\Delta'}} = \dfrac{|\overrightarrow{A'B'}|}{|\overrightarrow{\Gamma'\Delta'}|}$

καὶ λόγῳ τῆς (1) θὰ ἔχωμεν :

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{\Gamma\Delta}} = \frac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{\Gamma'\Delta'}}$$

2ον) ἂν εἶναι $\overrightarrow{AB}$ ἀντίρροπον τοῦ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, τότε εἶναι :

α) $\overrightarrow{A'B'}$ ἀντίρροπον τοῦ $\overrightarrow{\Gamma'\Delta'}$ καὶ

β) $\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{\Gamma\Delta}} = -\dfrac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{\Gamma\Delta}|}$ καὶ $\dfrac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{\Gamma'\Delta'}} = -\dfrac{|\overrightarrow{A'B'}|}{|\overrightarrow{\Gamma'\Delta'}|}$

ὅθεν λόγῳ τῆς (1) πάλιν θὰ ἔχωμεν :

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{\Gamma\Delta}} = \frac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{\Gamma'\Delta'}}$$

Ἤτοι ὁ λόγος δύο διανυσμάτων τῆς αὐτῆς διευθύνσεως, ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν προβολῶν των ἐπὶ μίαν εὐθεῖαν τοῦ ἐπιπέδου των.

Σπουδαία παρατήρησις : Εἴδομεν ἀνωτέρω ὅτι :

$\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{\Gamma\Delta}} = \dfrac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{\Gamma'\Delta'}} = \dfrac{|\overrightarrow{A'B'}|}{|\overrightarrow{\Gamma'\Delta'}|}$, ἐὰν τὰ διανύσματα $\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{\Gamma'\Delta'}$ εἶναι ὁμόρροπα

καὶ $\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{\Gamma\Delta}} = \dfrac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{\Gamma'\Delta'}} = -\dfrac{|\overrightarrow{A'B'}|}{|\overrightarrow{\Gamma'\Delta'}|}$, ἐὰν τὰ $\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{\Gamma'\Delta'}$ εἶναι ἀντίρροπα.

'Αλλὰ καὶ $\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{\Gamma'\Delta'}} = \dfrac{|\overrightarrow{A'B'}|}{|\overrightarrow{\Gamma'\Delta'}|}$, ἐὰν τὰ $\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{\Gamma'\Delta'}$ εἶναι ὁμόρροπα

καὶ $\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{\Gamma'\Delta'}} = -\dfrac{|\overrightarrow{A'B'}|}{|\overrightarrow{\Gamma'\Delta'}|}$, ἐὰν τὰ $\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{\Gamma'\Delta'}$ εἶναι ἀντίρροπα.

'Ισχύει ἑπομένως : $\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{\Gamma\Delta}} = \dfrac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{\Gamma'\Delta'}} = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{\Gamma'\Delta'}}$.

Νὰ διατυπωθῇ λεκτικῶς τὸ συμπέρασμα.

Κατόπιν τούτου, ἐὰν $\overrightarrow{O\Theta} \equiv \vec{i}$ εἶναι τὸ μοναδιαῖον διάνυσμα ἑνὸς ἄξονος καὶ $\overrightarrow{AB}$ ἕνα διάνυσμα ἐπὶ τοῦ ἄξονος τούτου, θὰ εἶναι : $\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\vec{i}} = \dfrac{\overline{AB}}{1} = \overline{AB}$

Ὅθεν $\overrightarrow{AB} = \overline{AB} \cdot \vec{i}$.

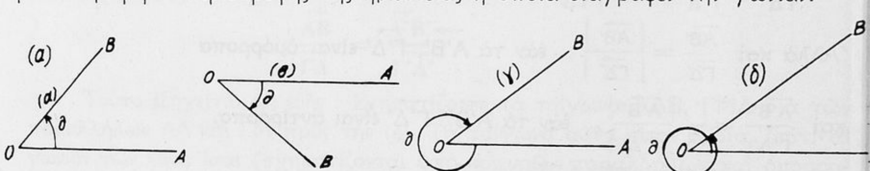
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΧ

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ(*)

84. ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΕΝΗ ΓΩΝΙΑ.

Ἀπὸ τὴν Γεωμετρίαν μᾶς εἶναι γνωστὴ ἡ ἔννοια τῆς προσανατολισμένης γωνίας. Ὑπενθυμίζομεν κατωτέρω ὅσα μᾶς χρειάζονται διὰ τὴν σπουδὴν τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τῆς ὀξείας γωνίας. Διὰ τὴν ἐποπτικὴν ἑρμηνείαν τῆς ἐννοίας τῆς προσανατολισμένης γωνίας, ὑποθέτομεν ὅτι μιὰ ἡμιευθεῖα ἀρχῆς Ο, στρέφεται περὶ τὸ Ο κατὰ τὴν φορὰν τῆς κινήσεως τῶν δεικτῶν τοῦ ὡρολογίου ἢ τὴν ἀντίθετον αὐτῆς, ἀπὸ μίαν ἀρχικὴν θέσιν ΟΑ εἰς μίαν τελικὴν θέσιν ΟΒ, ὅπως φαίνεται διὰ διαφόρους περιπτώσεις εἰς τὸ σχ. 84–1.

Ἡ στροφὴ αὕτη γεννᾶ μίαν γωνίαν, τὴν ὁποίαν συμβολίζομεν μὲ ∡ (ΟΑ, ΟΒ) εἰς τὴν α΄ περίπτωσιν καὶ τὴν ὀνομάζομεν **ἀρνητικὴν γωνίαν**, καὶ διὰ τοῦ συμβόλου ∡ (ΟΑ, ΟΒ) εἰς τὴν δευτέραν καὶ τὴν ὀνομάζομεν **θετικὴν γωνίαν.** Καθεμία ἀπὸ τὰς οὕτω σχηματιζομένας γωνίας λέγεται **προσανατολισμένη γωνία.** Συνήθως, εἰς τὸ σχῆμα, ἕνα καμπύλον βέλος εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς γωνίας φανερώνει τὴν φορὰν περιστροφῆς τῆς ἡμιευθείας ἡ ὁποία διαγράφει τὴν γωνίαν.



Σχ. 84 — 1

Ἡ ΟΑ λέγεται **ἀρχκὴ πλευρὰ** τῆς γωνίας καὶ ἡ ΟΒ **τελικὴ πλευρὰ** αὐτῆς. Τὸ Ο λέγεται **κορυφὴ** τῆς γωνίας.

Ἡ ἀρχικὴ πλευρὰ ΟΑ δύναται στρεφομένη νὰ διαγράψῃ ὁσασδήποτε πλήρεις γωνίας προτοῦ νὰ λάβῃ τὴν τελικὴν θέσιν αὐτῆς ΟΒ. Ὑπάρχουν λοι-

(*) Ἱδρυτὴς τῆς Τριγωνομετρίας θεωρεῖται ὁ Ἵππαρχος (150 π.Χ.), Ἕλλην ἀστρονόμος καὶ μαθηματικὸς ἀπὸ τὴν Νίκαιαν τῆς Βιθυνίας.

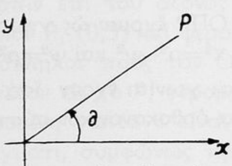
πὸν ἀπειράριθμοι γωνίαι μὲ τὴν αὐτὴν ἀρχικὴν καὶ τὴν αὐτὴν τελικὴν πλευράν, θετικαὶ ἢ ἀρνητικαί.

Ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ μιᾶς γωνίας εἶναι ἀριθμὸς θετικός, ἐὰν ἡ γωνία εἶναι θετικὴ καὶ ἀρνητικός, ἐὰν εἶναι ἀρνητική. Οὕτω π.χ., εἰς τὸ ἀνωτέρω σχ. 84–1 (α) ἡ ∢ (ΟΑ, ΟΒ) ἔχει ἀλγεβρικὴν τιμὴν 45^0, ἡ ∢ (ΟΑ, ΟΒ) τοῦ σχ. 84–1 (β) ἔχει ἄλγ. τιμὴν -45^0, ἡ ∢ (ΟΑ, ΟΒ) εἰς τὸ σχ. 84–1 (γ) ἔχει ἀλγ. τιμὴν -315^0 καὶ ἡ ∢ (ΟΑ, ΟΒ) τοῦ σχ. 84–1 (δ) ἔχει ἀλγ. τιμὴν $360^0 + 45^0 = 405^0$. Μία θετικὴ γωνία, μικροτέρα τῆς ὀρθῆς καὶ μεγαλυτέρα τῆς μηδενικῆς λέγεται **ὀξεῖα γωνία.**

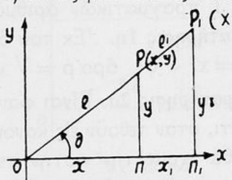
Ἐπομένως ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ μιᾶς θετικῆς ὀξείας γωνίας εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ 0^0 καὶ μικροτέρα τῶν 90^0.

85. ΓΩΝΙΑ ΕΙΣ ΚΑΝΟΝΙΚΗΝ ΘΕΣΙΝ.

Θὰ λέγωμεν ὅτι μία γωνία θ εὑρίσκεται εἰς **κανονικὴν θέσιν** ὡς πρὸς ἕνα ὀρθοκανονικὸν σύστημα ἀξόνων ΧΟΨ, ἐὰν ἡ γωνία θ ἔχῃ τοποθετηθῆ ἐπάνω εἰς τὸ ἐπίπεδον ΧΟΨ οὕτως, ὥστε ἡ κορυφή της νὰ εὑρίσκεται εἰς τὸ Ο καὶ ἡ ἀρχικὴ πλευρά της νὰ ἔχῃ ταυτισθῆ μὲ τὸν ἡμιάξονα ΟΧ. Ἐὰν ἡ γωνία θ εἶναι μία ὀξεῖα γωνία, ὅταν τεθῃ εἰς κανονικὴν θέσιν, ἡ τελικὴ πλευρά της θὰ εὑρεθῆ εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς πρώτης γωνίας τῶν ἀξόνων, ὅπως βλέπετε εἰς τὸ σχ. 85–1.



Σχ. 85 — 1



Σχ.86 — 1

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΟΞΕΙΑΣ (*) ΓΩΝΙΑΣ

86. ΗΜΙΤΟΝΟΝ ΟΞΕΙΑΣ ΓΩΝΙΑΣ.

Α) Ἔστω Γ τὸ σύνολον τῶν ὀξειῶν γωνιῶν καὶ θ μία μεταβλητή, ἡ ὁποία λαμβάνει τιμὰς ἀπὸ τὸ σύνολον Γ. Κάθε τιμὴ λοιπὸν τῆς θ ἀπὸ τὸ Γ εἶναι μία ὀξεῖα γωνία.

Ἔστω μία γωνία θ εἰς κανονικὴν θέσιν (Σχ. 86 – 1) καὶ Ρ (x, ψ) τυχὸν σημεῖον ἐπὶ τῆς τελικῆς πλευρᾶς τῆς θ, διάφορον τῆς ἀρχῆς Ο.

Ὀνομάζομεν **ἡμίτονον** τῆς γωνίας θ, συμβολικῶς ημθ, τὸν λόγον $\frac{\psi}{\rho}$, ὅπου ρ τὸ μῆκος τῆς διανυσματικῆς ἀκτῖνος $\overrightarrow{OP}$ καὶ ψ ἡ τεταγμένη τοῦ σημείου Ρ. Δηλαδὴ εἶναι ημθ $= \frac{\psi}{\rho}$ ἐξ ὁρισμοῦ.

Ἂς λάβωμεν ἄλλο, ἐπίσης τυχόν, σημεῖον ἐπὶ τῆς τελικῆς πλευρᾶς τῆς γωνίας θ, ἔστω τὸ P_1 (x_1, ψ_1) διάφορον τῆς ἀρχῆς Ο. Συμφώνως πρὸς τὸν ἀνω-

(*) Εἰς τὸ Κεφάλαιον αὐτό : ὀξεῖα γωνία = θετικὴ ὀξεῖα γωνία.

τέρω ὁρισμὸν εἶναι ημθ $= \frac{\psi_1}{\rho_1}$, ὅπου ρ_1 τὸ μῆκος τῆς διανυσματικῆς ἀκτῖνος τοῦ P_1. Παρατηροῦμεν ὅμως ὅτι $\frac{\psi}{\rho} = \frac{\psi_1}{\rho_1}$ (ἐκ τοῦ θεωρήματος τῶν προβολῶν, § 83).

Ὥστε ἡ τιμὴ τοῦ λόγου $\frac{\psi}{\rho}$ δὲν ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς θέσεως τοῦ σημείου P ἐπὶ τῆς τελικῆς πλευρᾶς τῆς γωνίας, ἀλλὰ μόνον ἐκ τῆς θέσεως αὐτῆς ταύτης τῆς τελικῆς πλευρᾶς, δηλαδὴ ἐκ τοῦ μεγέθους τῆς γωνίας θ.

Ἤτοι εἰς κάθε ὀξεῖαν γωνίαν θ ἀντιστοιχεῖ ἕνας καὶ μόνον ἕνας πραγματικὸς ἀριθμός, ἡ τιμὴ τοῦ λόγου $\frac{\psi_1}{\rho_1}$.

Ἔχομεν λοιπὸν ἐδῶ μίαν συνάρτησιν μὲ πεδίον ὁρισμοῦ τὸ σύνολον τῶν ὀξειῶν γωνιῶν καὶ πεδίον τιμῶν ἕνα σύνολον ἀπὸ πραγματικοὺς ἀριθμούς, τὴν συνάρτησιν $\theta \rightarrow$ ημ θ.

Β) Ἐπειδὴ διὰ κάθε ὀξεῖαν γωνίαν θ εἰς κανονικὴν θέσιν καὶ διὰ τὸν τυχὸν σημεῖον P (x, ψ) ἐπὶ τῆς τελικῆς πλευρᾶς της εἶναι $\psi > 0$, $\rho > 0$, (διατί ;) καὶ $\psi < \rho$ (διατί ;) διὰ τοῦτο ὁ λόγος $\frac{\psi}{\rho}$ εἶναι πάντοτε θετικὸς καὶ μικρότερος τοῦ 1.

Ὥστε διὰ κάθε ὀξεῖαν γωνίαν θ ἔχομεν ὅτι $0 <$ ημθ < 1.

Ἤτοι τὸ πεδίον τῶν τιμῶν τῆς ἀνωτέρω συναρτήσεως $\theta \rightarrow$ ημθ, ὅπου θ μεταβάλλεται εἰς τὸ σύνολον Γ, τῶν ὀξειῶν γωνιῶν, εἶναι τὸ σύνολον τῶν μεταξὺ 0 καὶ 1 πραγματικῶν ἀριθμῶν.

Παατήρησις 1η. Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΠΡ ἔχομεν ὡς γνωστόν, ὅτι : $\rho^2 = x^2 + \psi^2$, ἄρα $\rho = \sqrt{x^2 + \psi^2}$. Ἐπίσης εἶναι $x^2 = \rho^2 - \psi^2$ καὶ $\psi^2 = \rho^2 - x^2$.

Παρατήρησις 2α. Εἶναι φανερὸν ὅτι δύο ἴσαι ὀξεῖαι γωνίαι ἔχουν ἴσα ἡμίτονα, διότι, ὅταν τεθοῦν εἰς κανονικὴν θέσιν, ὡς πρὸς ἕνα ὀρθοκανονικὸν σύστημα ἀξόνων, θὰ ἔχουν τὴν αὐτὴν τελικὴν πλευράν.

Ἀντιστρόφως, ἂν δύο ὀξεῖαι γωνίαι ἔχουν τὸ αὐτὸ ἡμίτονον εἶναι ἴσαι. Πράγματι ἔστωσαν θ καὶ θ_1 δύο ὀξεῖαι γωνίαι (σχ. 86 — 1), διὰ τὰς ὁποίας εἶναι ημθ $=$ ημθ_1 Τότε θὰ εἶναι $\frac{\psi}{\rho} = \frac{\psi_1}{\rho_1}$ (1). Ἐκ τῆς (1) ἔχομεν $\frac{\psi^2}{\rho^2} = \frac{\psi_1^2}{\rho_1^2} \Rightarrow \frac{\psi^2}{\rho^2 - \psi^2} =$

$$= \frac{\psi_1^2}{\rho_1^2 - \psi_1^2} \Rightarrow \frac{\psi^2}{x^2} = \frac{\psi_1^2}{x_1^2} \Rightarrow \frac{\psi}{x} = \frac{\psi_1}{x_1} \quad (2)$$

Ἐκ τῶν ἀναλογιῶν (1) καὶ (2) προκύπτει ὅτι : $\frac{x}{x_1} = \frac{\psi}{\psi_1} = \frac{\rho}{\rho_1}$

Ἑπομένως τὰ τρίγωνα ΟΠΡ καὶ $\text{ΟΠ}_1\text{P}_1$ ἔχουν τὰς πλευράς των ἀναλόγους, Ἄρα εἶναι ὅμοια, συνεπῶς ἔχουν καὶ τὰς γωνίας των ἴσας.

Θὰ εἶναι λοιπὸν $\theta_1 = \theta$. Ἐπειδὴ λοιπὸν δύο ἴσαι ὀξεῖαι γωνίαι ἔχουν ἴσα ἡμίτονα καὶ ἀντιστρόφως δύο ὀξεῖαι γωνίαι ἔχουσαι ἴσα ἡμίτονα εἶναι ἴσαι, διὰ τοῦτο τὸ ἡμίτονον μιᾶς ὀξείας γωνίας θ, τὸ γράφομεν καὶ ὡς ἡμίτονον τῆς ἀλγεβρικῆς τιμῆς της. (Αἱ ἴσαι γωνίαι ἔχουν ἴσας ἀπολύτους τιμάς). Γράφομεν, π.χ. ημ 30^0, ημ28^0 $30'$ κτλ. Ἑπομένως καὶ εἰς τὸν συμβολισμὸν ημθ ἠμποροῦμεν νὰ θεωροῦμεν ὅτι θ εἶναι ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ τῆς ὀξείας γωνίας. Ἡ συνάρτησις $\theta \rightarrow$ ημθ εἶναι τότε μία ἀριθμητικὴ συνάρτησις μὲ πεδίον ὁρισμοῦ, τὸ $\{ \theta^0 \mid \theta^0 \in R$ καὶ $0^0 < \theta^0 < 90^0\}$ καὶ πεδίον τιμῶν τὸ σύνολον : $\{ \psi | \psi \in R$ καὶ $0 < \psi < 1 \}$.

Σημείωσις. Ἐὰν ἡ γωνία θ εἶναι ἡ μηδενικὴ γωνία, τότε ἡ ἀρχικὴ καὶ ἡ τελικὴ πλευρά της ταυτίζονται (πρὸ πάσης περιστροφῆς) ἐπὶ τοῦ ΟΧ καὶ τὸ τυχὸν σημεῖον Ρ ἐπὶ τῆς τελικῆς πλευρᾶς της ἔχει τεταγμένην 0 καὶ τετμημένην ρ.

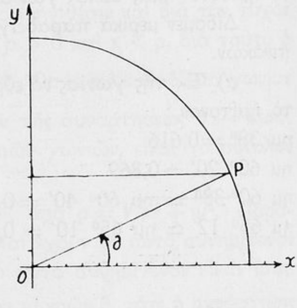
Εἶναι τότε $\frac{\psi}{\rho} = \frac{0}{\rho} = 0$. Διὰ τοῦτο ὁρίζομεν ὡς ἡμθ, διὰ θ = μηδενικὴ γωνία, τὸν ἀριθμὸν 0, γράφομεν δὲ ημ $0^0 = 0$. Ἐὰν $\theta = 90^0$, τότε ἡ μὲν τετμημένη εἶναι 0, ἡ δὲ τεταγμένη ρ καὶ εἶναι $\frac{\psi}{\rho} = \frac{\rho}{\rho} = 1$. Διὰ τοῦτο, ὁρίζομεν ὡς ἡμίτονον τῆς ὀρθῆς γωνίας τὸν ἀριθμὸν 1, γράφομεν δὲ ημ $90^0 = 1$.

Παραδείγματα : 1ον. Νὰ εὕρετε τὸ ἡμίτονον μιᾶς ὀξείας γωνίας θ, ἐὰν ἐπὶ τῆς τελικῆς πλευρᾶς τῆς γωνίας, εἰς κανονικὴν θέσιν, κεῖται τὸ σημεῖον P (4,3).

Λύσις. Ἔχομεν $\rho = \sqrt{x^2 + \psi^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$. Ἑπομένως ημθ $= \frac{\psi}{\rho} = \frac{3}{5}$

2ον. Νὰ κατασκευάσετε μίαν ὀξεαν γωναν θ, ἐὰν γνωρίζετε ὅτι ημθ $= \frac{5}{13}$.

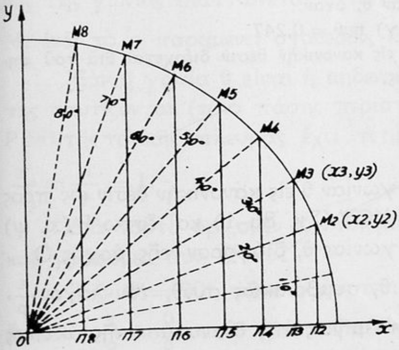
Λύσις. Λαμβάνομεν ὀρθοκανονικὸν σύστημα ἀξόνων ΧΟΨ καὶ ὁρίζομεν μοναδιαῖον διάνυσμα (Σχ. 86–2). Ἐπειδὴ ἠμποροῦμεν νὰ λάβωμεν ψ = 5 καὶ ρ = 13, γράφομεν τόξον περιφερείας ἐντὸς τῆς πρώτης γωνίας τῶν ἀξόνων μὲ κέντρον Ο καὶ ἀκτῖνα 13 μονάδας Κατόπιν ἐπὶ τοῦ ἄξονος ΟΨ εὑρίσκομεν τὸ σημεῖον P_1 (0,5) καὶ φέρομεν ἐκ τοῦ P_1 εὐθεῖαν παράλληλον ποὸς τὸν ΟΧ. Ἐὰν αὕτη τέμνῃ τὸ τόξον εἰς τὸ Ρ, φέρομεν τὴν ΟΡ, ὁπότε ἡ ζητουμένη γωνία θ εἶναι ἡ ∡ (ΟΧ, ΟΡ). Πράγματι, συμφώνως πρὸς τὸν δοθέντα ὁρισμὸν τοῦ ἡμιτόνου, ἔχομεν ημθ $= \frac{\psi}{\rho} = \frac{5}{13}$



Σχ. 86—2

Παρατήρησις 3η. Ἡ συνάρτησις $\theta^0 \rightarrow$ ημθ^0 εἶναι αὔξουσα δηλ. ὅταν τὸ θ^0 αὐξάνῃ, αὐξάνει καὶ ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ ημθ^0. Τοῦτο φαίνεται εἰς τὸ σχ. 86 – 3, ὅπου μὲ κέντρον τὴν ἀρχὴν τῶν ἀξόνων καὶ ἀκτῖνα 50 mm ἐγράψαμεν τέταρτον περιφερείας καὶ μίαν σειρὰν ὀξειῶν γωνιῶν εἰς κανονικὴν θέσιν: ∡ (ΟΧ, OM_2) $= 20^0$, ∡ (ΟΧ, OM_3) $= 30^0, \ldots$ ∡ (ΟΧ, OM_8) $= 80^0$.

Ἐὰν μετρήσωμεν τὰ τμήματα Π_2M_2, $\Pi_3M_3, \ldots, \Pi_8M_8$, καὶ εὕρωμεν τὰς τεταγμένας τῶν σημείων $M_2, M_3, \ldots M_8$, εἶναι εὔκολον νὰ ὑπολογίσωμεν τὰ $\frac{\psi_2}{\rho}, \frac{\psi_3}{\rho}, \ldots, \frac{\psi_8}{\rho}$, δηλ. τὰ ημ 20^0, ημ $30^0, \ldots$, ημ. 80^0.



Σχ. 86—3

Εὑρίσκομεν κατὰ προσέγγισιν ἑκατοστοῦ τὰ ἑξῆς :

θ^0	20^0	30^0	40^0	50^0	60^0	70^0	80^0
ημ θ^0	0,34	0,50	0,64	0,76	0,80	0,94	0,98

Ἀλλ' ἡ προσέγγισις, τὴν ὁποίαν ἐπιτυγχάνομεν μὲ τοιαύτας γραφικὰς μεθόδους, δὲν εἶναι ἐπαρκής.

Μὲ μεθόδους, τὰς ὁποίας χρησιμοποιοῦν εἰς τὰ ἀνώτερα Μαθηματικά, ἔχουν καταρτισθῆ πίνακες τῶν τιμῶν τοῦ ἡμιτόνου μὲ πολὺ καλυτέραν προσέγγισιν. Εἰς τὰς τελευταίας σελίδας τοῦ παρόντος βιβλίου ὑπάρχει ἕνας τοιοῦτος πίναξ.

Εἰς τὸν πίνακα αὐτὸν ἀναγράφονται αἱ γωνίαι ἀπὸ 0^0 ἕως 90^0 αὐξανόμεναι ἀνὰ 10' καὶ αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ τῶν ἡμιτόνων.

Μὲ τὸν πίνακα αὐτὸν ἠμποροῦμεν α) ὅταν γνωρίζωμεν τὴν τιμὴν (εἰς μοίρας) μιᾶς ὀξείας γωνίας, νὰ εὕρωμεν τὸ ἡμίτονόν της καὶ β) ὅταν γνωρίζωμεν τὸ ἡμίτονον μιᾶς ὀξείας γωνίας νὰ εὕρωμεν τὴν τιμήν της.

Δίδομεν μερικὰ παραδείγματα πρὸς κατανόησιν τοῦ τρόπου χρήσεως τῶν πινάκων.

α) Ἐκ τῆς γωνίας νὰ εὑρεθῇ τὸ ἡμίτονον :

ημ $38^0 = 0{,}616$

ημ $60^0\ 20' = 0{,}869$

ημ $60^0\ 38^0 \simeq$ ημ $60^0\ 40' = 0{,}872$

ημ $65^0\ 12' \simeq$ ημ $65^0\ 10' = 0{,}908$

β) Ἐκ τοῦ ἡμιτόνου νὰ εὑρεθῇ ἡ γωνία

ημθ $= 0{,}755 \Rightarrow \theta = 49^0$

ημθ $= 0{,}264 \Rightarrow \theta = 15^0 20'$

ημθ $= 0{,}580 \simeq 0{,}581 \Rightarrow \theta = 35^0\ 30'$

ημθ $= 0{,}440 \simeq 0{,}441 \Rightarrow \theta = 26^0\ 10'$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

331) Νὰ κατασκευάσετε μίαν ὀξεῖαν γωνίαν θ, ἂν γνωρίζετε ὅτι

α) ημθ $= \frac{7}{10}$, β) ημθ $= \frac{3}{5}$, γ) ημθ $= \frac{1}{4}$

332) Νὰ εὕρετε μὲ χρῆσιν τῶν πινάκων τά :

α) ημ $35^0\ 30'$ β) ημ $76^0\ 42'$ γ) ημ $18^0\ 29'$

333) Νὰ εὕρετε ἐκ τῶν πινάκων τὴν γωνίαν θ, ὅταν :

α) ημθ $= 0{,}520$ β) ημθ $= 0{,}522$ γ) ημθ $= 0{,}247$

334) Ἡ τελικὴ πλευρὰ μιᾶς ὀξείας γωνίας εἰς κανονικὴν θέσιν διέρχεται διὰ τοῦ σημείου Ρ (15,8). Νὰ εὕρετε τὸ ἡμίτονον τῆς γωνίας.

87. ΣΥΝΗΜΙΤΟΝΟΝ ΟΞΕΙΑΣ ΓΩΝΙΑΣ.

Α) Ἄς θεωρήσωμεν πάλιν μίαν ὀξεῖαν γωνίαν θ εἰς κανονικὴν θέσιν ὡς πρὸς ἕνα ὀρθοκανονικὸν σύστημα συντεταγμένων ΧΟΨ (Σχ. 86–1) καὶ ἔστω Ρ (x, ψ) τυχὸν σημεῖον ἐπὶ τῆς τελικῆς πλευρᾶς τῆς γωνίας θ, διάφορον τῆς ἀρχῆς Ο.

Ὀνομάζομεν **συνημίτονον** τῆς γωνίας θ, συμβολικῶς συνθ, τὸν λόγον $\frac{x}{\rho}$, ὅπου x ἡ τετμημένη τοῦ σημείου Ρ καὶ ρ τὸ μῆκος τῆς διανυσματικῆς ἀκτῖνος $\overrightarrow{OP}$. Δηλαδὴ εἶναι ἐξ ὁρισμοῦ συνθ $= \frac{x}{\rho}$.

Ἂν λάβωμεν ἄλλο, ἐπίσης τυχὸν σημεῖον ἐπὶ τῆς τελικῆς πλευρᾶς τῆς γωνίας θ, ἔστω τὸ $P_1(x_1, \psi_1)$, διάφορον τῆς ἀρχῆς O, θὰ εἶναι, συμφώνως πρὸς τὸν δοθέντα ὁρισμόν, συνθ $= \frac{x_1}{\rho_1}$, ὅπου ρ_1 τὸ μῆκος τῆς διανυσματικῆς ἀκτῖνος $\overrightarrow{OP_1}$. Ἀλλὰ εἶναι $\frac{x}{\rho} = \frac{x_1}{\rho_1}$, (ἐκ τοῦ θεωρήματος τῶν προβολῶν), δηλαδὴ τὸ συνημίτονον μιᾶς ὀξείας γωνίας δὲν ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν θέσιν τοῦ P ἐπὶ τῆς τελικῆς πλευρᾶς, ἀλλὰ ἀπὸ τὴν θέσιν αὐτῆς ταύτης τῆς πλευρᾶς, δηλ. ἀπὸ τὸ μέγεθος τῆς γωνίας θ.

Ἤτοι εἰς κάθε ὀξεῖαν γωνίαν θ ἀντιστοιχεῖ ἕνας καὶ μόνον ἕνας πραγματικὸς ἀριθμός, ἡ τιμὴ τοῦ λόγου $\frac{x}{\rho}$, καὶ ἔχομεν πάλιν μίαν συνάρτησιν μὲ πεδίον ὁρισμοῦ τὸ σύνολον τῶν ὀξειῶν γωνιῶν καὶ πεδίον τιμῶν ἕνα σύνολον πραγματικῶν ἀριθμῶν, τὴν συνάρτησιν θ $\longrightarrow$ συνθ.

B) Ἐπειδὴ διὰ κάθε ὀξεῖαν γωνίαν θ εἰς κανονικὴν θέσιν καὶ διὰ τὸν τυχὸν $P(x, \psi)$ ἐπὶ τῆς τελικῆς πλευρᾶς της εἶναι $x > 0$, $\rho > 0$ καὶ $x < \rho$, διὰ τοῦτο ὁ λόγος $\frac{x}{\rho}$ εἶναι πάντοτε θετικὸς καὶ μικρότερος τοῦ 1. Ὥστε διὰ κάθε ὀξεῖαν γωνίαν θ ἔχομεν $0 <$ συνθ < 1. Δηλαδὴ τὸ πεδίον τιμῶν τῆς συναρτήσεως θ $\longrightarrow$ συνθ, ὅπου τὸ θ μεταβάλλεται εἰς τὸ σύνολον τῶν ὀξειῶν γωνιῶν, εἶναι τὸ σύνολον τῶν μεταξὺ 0 καὶ 1 πραγματικῶν ἀριθμῶν.

Παρατηροῦμεν πάλιν ὅτι εἶναι $\rho^2 = x^2 + \psi^2$, ἄρα $\rho = \sqrt{x^2 + \psi^2}$. Παρατηροῦμεν ἐπίσης εὐκόλως ὅτι δύο ἴσαι ὀξεῖαι γωνίαι ἔχουν τὸ αὐτὸ συνημίτονον καὶ ἀντιστρόφως, ἂν δύο ὀξεῖαι γωνίαι ἔχουν τὸ αὐτὸ συνημίτονον εἶναι ἴσαι.

Ἐὰν λάβωμεν τὰς τιμὰς εἰς μοίρας τῶν ὀξειῶν γωνιῶν θ, τότε ἡ συνάρτησις θ $\rightarrow$ συνθ γίνεται ἀριθμητικὴ συνάρτησις μὲ πεδίον ὁρισμοῦ τὸ σύνολον $\{ \theta^0 \mid \theta^0 \in R$ καὶ $0 < \theta^0 < 90^0 \}$ καὶ πεδίον τιμῶν τὸ σύνολον $\{ \psi \mid \psi \in R$ καὶ $0 < \psi < 1 \}$.

Γ) Ἡ συνάρτησις $\theta^0 \longrightarrow$ συνθ^0 εἶναι **φθίνουσα** δηλ. ὅταν τὸ θ^0 αὐξάνη, τὸ συνθ^0 ἐλαττώνεται. Αὐτὸ φαίνεται εἰς τὸ σχ. 86–3, ὅπου βλέπομεν ὅτι αὐξανομένης τῆς γωνίας ἐλαττώνεται ἡ τετμημένη τοῦ ἐπὶ τῆς τελικῆς πλευρᾶς σημείου M, ἐνῶ τὸ ρ παραμένει σταθερόν, ἄρα ὁ λόγος $\frac{x}{\rho}$ ἐλαττώνεται.

Ἐὰν ἡ γωνία θ εἶναι ἡ μηδενικὴ γωνία, τότε ἡ ἀρχικὴ καὶ τελικὴ πλευρά της ταυτίζονται (πρὸ πάσης περιστροφῆς) ἐπὶ τοῦ OX καὶ τὸ τυχὸν σημεῖον P ἐπὶ τῆς τελικῆς πλευρᾶς ἔχει τετμημένην ρ καὶ τεταγμένην 0. Εἶναι λοιπὸν $\frac{x}{\rho} = \frac{\rho}{\rho} = 1$.

Διὰ τοῦτο ὁρίζομεν ὡς συνημίτονον τῆς μηδενικῆς γωνίας τὸν ἀριθμὸν 1 καὶ γράφομεν συν $0^0 = 1$.

Ἐὰν $\theta^0 = 90^0$, τότε ἡ μὲν τετμημένη τοῦ P εἶναι 0, ἡ δὲ τεταγμένη ρ καὶ ἔχομεν : $\frac{x}{\rho} = \frac{0}{\rho} = 0$. Διὰ τοῦτο ὁρίζομεν ὡς συνημίτονον τῆς ὀρθῆς γωνίας τὸν ἀριθμὸν 0, γράφομεν δὲ συν $90^0 = 0$.

Ὅπως διὰ τὰ ἡμίτονα τῶν ὀξειῶν γωνιῶν, οὕτω καὶ διὰ τὰ συνημίτονα ἔχουν κατασκευασθῆ πίνακες, οἱ ὁποῖοι παρέχουν τὰ συνημίτονα τῶν γωνιῶν ἀπὸ 0^0 ἕως 90^0 ἀνὰ $10'$. Ὁ τρόπος χρήσεως τῶν πινάκων τούτων φαίνεται ἀπὸ τὰ κατωτέρω παραδείγματα :

α) Ἀπὸ τὴν γωνίαν νὰ εὑρεθῇ τὸ συνημίτονον :

$συν\, 56^0 = 0{,}559$

$συν\, 35^0\, 20' = 0{,}816$

$συν\, 39^0\, 32' \simeq συν\, 39^0\, 30^0 = 0{,}772$

$συν\, 65^0\, 38' \simeq συν\, 65^0\, 40' = 0{,}412$

β) Ἀπὸ τὸ συνημίτονον νὰ εὑρεθῇ ἡ γωνία :

$συνθ = 0{,}946 \Rightarrow θ = 19^0$

$συνθ = 0{,}832 \Rightarrow θ = 33^0\, 40'$

$συνθ = 0{,}238 \simeq 0{,}239 \Rightarrow θ = 76^0\, 10'$

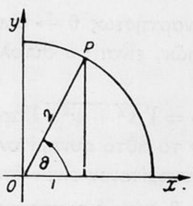
$συνθ = 0{,}186 \simeq 0{,}185 \Rightarrow θ = 79^0\, 20'$

Παραδείγματα: 1ον. Νὰ εὕρετε τὸ συνημίτονον μιᾶς ὀξείας γωνίας, τῆς ὁποίας, εὑρσκομένης εἰς κανονικὴν θέσιν, ἡ τελικὴ πλευρὰ διέρχεται διὰ τοῦ σημείου P(3,4).

Λύσις. Ἔχομεν ὅτι $ρ = \sqrt{x^2 + ψ^2} = \sqrt{3^3 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$

Ἑπομένως $συνθ = \frac{x}{ρ} = \frac{3}{5}$.

2ον. Νὰ κατασκευάσετε μίαν ὀξεῖαν γωνίαν θ, ἐὰν γνωρίζετε ὅτι $συνθ = \frac{1}{2}$.


Σχ. 87 - 1

Λύσις. Λσμβάνομεν ὀρθοκανονικὸν σύστημα ἀξόνων καὶ ὁρίζομεν μοναδιαῖον διάνυσμα (Σχ. 87–1). Ἐπειδὴ ἠμποροῦμεν νὰ λάβωμεν $x = 1$ καὶ $ρ = 2$, γράφομεν ἐντὸς τῆς πρώτης γωνίας τῶν ἀξόνων τόξον περιφερείας μὲ κέντρον Ο καὶ ἀκτῖνα 2 μονάδας. Ἔπειτα ἐπὶ τοῦ ἄξονος ΟΧ εὑρίσκομεν τὸ σημεῖον (1,0) ἐκ τοῦ ὁποίου φέρομεν παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα ΟΨ. Ἐὰν αὕτη τέμνῃ τὸ τόξον εἰς τὸ σημεῖον P, φέρομεν τὴν ΟP, ὁπότε ἡ ζητουμένη γωνία εἶναι ἡ $\measuredangle$ (ΟΧ, ΟP). Πράγματι συμφώνως πρὸς τὸν δοθέντα ὁρισμὸν τοῦ συνημιτόνου, εἶναι $συν \measuredangle (ΟΧ, ΟP) = \frac{x}{ρ} = \frac{1}{2}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

335) Ἡ τελικὴ πλευρὰ μιᾶς ὀξείας γωνίας θ εἰς κανονικὴν θέσιν διέρχεται διὰ τοῦ σημείου P (1,3). Νὰ εὕρετε τὸ συνημίτονον καὶ τὸ ἡμίτονον τῆς γωνίας θ.

336) Νὰ κατασκευάσετε μίαν ὀξεῖαν γωνίαν θ, ἂν γνωρίζετε ὅτι α) $συνθ = \frac{3}{10}$, β) $συνθ = \frac{2}{5}$, γ) $συνθ = \frac{1}{3}$.

336) Νὰ εὕρετε μὲ χρῆσιν τῶν πινάκων τά :

α) $συν\, 32^0\, 40'$ β) $συν\, 75^0\, 41'$ γ) $συν\, 18^0\, 28'$

338) Νὰ εὕρετε ἐκ τῶν πινάκων τὴν ὀξεῖαν γωνίαν θ, ὅταν :

α) $συνθ = 0{,}949$ β) $συνθ = 0{,}736$ γ) $συνθ = 0{,}370$

88. ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΟΞΕΙΑΣ ΓΩΝΙΑΣ.

Α) Ἄς θεωρήσωμεν πάλιν μίαν γωνίαν θ εἰς κανονικὴν θέσιν, ὅπου θ εἶναι στοιχεῖον τοῦ συνόλου Γ, τῶν ὀξειῶν γωνιῶν (Σχ. 86–1) καὶ ἔστω Ρ (x, ψ) τυχὸν σημεῖον ἐπὶ τῆς τελικῆς πλευρᾶς τῆς γωνίας, διάφορον τῆς ἀρχῆς Ο.

Ὀνομάζομεν **ἐφαπτομένην** τῆς ὀξείας γωνίας θ, συμβολικῶς εφθ, τὸν λόγον $\frac{\psi}{x}$. Ἤτοι εἶναι ἐξ ὁρισμοῦ $εφθ = \frac{\psi}{x}$.

Ἐὰν λάβωμεν ἄλλο σημεῖον ἐπὶ τῆς τελικῆς πλευρᾶς τῆς γωνίας θ, π.χ. τὸ P_1 $(x_1\ \psi_1)$, διάφορον τῆς ἀρχῆς Ο, θὰ εἶναι συμφώνως πρὸς τὸν δοθέντα ὁρισμὸν $εφθ = \frac{\psi_1}{x_1}$.

Παρατηροῦμεν ὅμως ὅτι $\frac{\psi}{x} = \frac{\psi_1}{x_1}$ (ἐκ τοῦ θεωρήματος τῶν προβολῶν) Ὥστε ὁ λόγος $\frac{\psi}{x}$ δὲν ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς θέσεως τοῦ Ρ ἐπὶ τῆς τελικῆς πλευρᾶς τῆς γωνίας, ἀλλ᾽ ἐκ τῆς θέσεως αὐτῆς ταύτης τῆς τελικῆς πλευρᾶς, δηλαδὴ ἐκ τοῦ μεγέθους τῆς γωνίας θ.

Εἰς πᾶσαν ὀξεῖαν γωνίαν θ ἀντιστοιχεῖ ἑπομένως ἕνας καὶ μόνον ἕνας πραγματικὸς ἀριθμός, ἡ τιμὴ τοῦ λόγου $\frac{\psi}{x}$. Ἔχομεν δηλαδὴ καὶ ἐδῶ μίαν συνάρτησιν μὲ πεδίον ὁρισμοῦ τὸ σύνολον Γ, τῶν ὀξειῶν γωνιῶν, καὶ πεδίον τιμῶν ἕνα σύνολον ἀπὸ πραγματικοὺς ἀριθμούς, τὴν συνάρτησιν $\theta \rightarrow εφθ$.

Β) Ἐπειδὴ διὰ πᾶσαν ὀξεῖαν γωνίαν θ εἶναι $\psi > 0$ καὶ $x > 0$, ὁ λόγος $\frac{\psi}{x}$, δηλ. ἡ εφθ, θὰ εἶναι πάντοτε ἕνας θετικὸς πραγματικὸς ἀριθμός.

Εἶναι προφανὲς ὅτι δύο ἴσαι ὀξεῖαι γωνίαι ἔχουν τὴν αὐτὴν ἐφαπτομένην. Καὶ ἀντιστρόφως, ἐὰν αἱ ἐφαπτομεναι δύο ὀξειῶν γωνιῶν εἶναι ἴσαι, αἱ γωνίαι θὰ εἶναι ἴσαι. Διὰ τοῦτο τὴν ἐφαπτομένην μιᾶς ὀξείας γωνίας τὴν γράφομεν καὶ ὡς ἐφαπτομένην τῆς ἀλγεβρικῆς τιμῆς της. Γράφομεν, π.χ. εφ 30^0, εφ $25^0\ 30'$ κ.ο.κ.

Ἐὰν μετρήσωμεν τὰς γωνίας εἰς μοίρας καὶ τὰς ἀντικαταστήσωμεν μὲ τὰς ἀλγεβρικὰς τιμάς των, τότε ἡ συνάρτησις $\theta \rightarrow εφθ$ γίνεται μία ἀριθμητικὴ συνάρτησις $\theta^0 \rightarrow εφθ^0$, μὲ πεδίον ὁρισμοῦ τὸ σύνολον $\{\, \theta^0 \mid \theta^0 \in R$ καὶ $0^0 < \theta^0 < 90^0 \,\}$ καὶ πεδίον τιμῶν τὸ σύνολον $\{\, \psi \mid \psi \in R$ καὶ $\psi > 0 \,\}$.

Παρατηροῦντες τὸ Σχ. 86–3 ἐννοοῦμεν εὐκόλως ὅτι ἡ συνάρτησις $\theta^0 \rightarrow εφθ^0$ εἶναι αὔξουσα. Πράγματι εἰς τὸ Σχ. 86–3 βλέπομεν ὅτι ὅταν ἡ ὀξεῖα γωνία αὐξάνῃ, τότε ὁ ἀριθμητὴς τοῦ λόγου $\frac{\psi}{x}$ γίνεται ἀριθμὸς μεγαλύτερος, ἐνῶ ὁ παρανομαστὴς γίνεται μικρότερος καὶ ἑπομένως ἡ τιμὴ τοῦ λόγου $\frac{\psi}{x}$ γίνεται μεγαλύτερος ἀριθμός. Μάλιστα δέ, ὅσον περισσότερον ἡ γωνία θ πλησιάζει πρὸς τὴν ὀρθήν, τόσον μεγαλυτέρα γίνεται ἡ ἐφαπτομένη της ὑπερβαίνουσα κάθε ἐκ τῶν προτέρων διδόμενον ἀριθμόν.

Ἐὰν ἡ γωνία θ εἶναι ἡ μηδενικὴ γωνία, τότε ἡ τελικὴ πλευρά της ταυτίζεται (πρὸ πάσης περιστροφῆς) μὲ τὴν ἀρχικὴν ἐπὶ τοῦ ΟΧ καὶ τὸ τυχὸν σημεῖον Ρ ἐπὶ τῆς τελικῆς πλευρᾶς ἔχει τεταγμένην 0 καὶ τετμημένην ρ.

Εἶναι λοιπὸν τότε $\frac{\psi}{x} = \frac{0}{\rho} = 0$. Διὰ τοῦτο ὁρίζομεν ὡς ἐφαπτομένην τῆς μηδενικῆς γωνίας τὸν ἀριθμόν 0, γράφομεν δὲ εφ $0^0 = 0$.

Ἐὰν $\theta^0 = 90^0$, τότε ἡ μὲν τεταγμένη τοῦ P εἶναι ρ, ἡ δὲ τετμημένη 0 καὶ ἡ παράστασις $\frac{\psi}{x}$ δὲν ἔχει ἔννοιαν πραγματικοῦ ἀριθμοῦ. Δὲν ὁρίζεται λοιπὸν ἐφαπτομένη διὰ γωνίαν 90^0.

Γ) Ἐὰν εἰς τὸ Σχ. 86–3 μετρήσωμεν τὰ τμήματα $\Pi_2M_2, \Pi_3M_3, \ldots, \Pi_8M_8$ καὶ ἔπειτα τὰ τμήματα $O\Pi_2$, $O\Pi_3, \ldots, O\Pi_8$ καὶ ὑπολογίσωμεν τὰς τιμὰς τῶν λόγων $\frac{\Pi_2M_2}{O\Pi_2}, \frac{\Pi_3M_3}{O\Pi_3}, \ldots, \frac{M_8\Pi_8}{O\Pi_8}$, θὰ ἔχωμεν τὸν κατωτέρω πίνακα διὰ τὰς τιμὰς τῶν εφ 20^0, εφ $30^0, \ldots$, εφ 80^0.

θ^0	10^0	20^0	30^0	40^0	50	60^0	70^0	80^0
εφθ^0	0,18	0,36	0,58	0,84	1,19	1,73	2,74	5,67

Βλέπομεν καὶ ἀπὸ τὸν πίνακα ὅτι ἡ συνάρτησις $\theta^0 \rightarrow$ εφθ^0 εἶναι αὔξουσα καὶ ἐννοοῦμεν ὅτι ἠμπορεῖ νὰ λάβῃ ὅλας τὰς θετικὰς πραγματικὰς τιμὰς τὰς μεγαλυτέρας τοῦ 0.

Ὅπως διὰ τὰ ἡμίτονα καὶ τὰ συνημίτονα οὕτω καὶ διὰ τὰς ἐφαπτομένας ἔχουν κατασκευασθῆ πίνακες, οἱ ὁποῖοι δίδουν τὰς τιμὰς τῆς ἐφαπτομένης μὲ προσέγγισιν ἡμίσεως χιλιοστοῦ διὰ τὰς γωνίας ἀπὸ 0^0 ἕως $89^0\ 50'$ αὐξανομένας κατὰ 10′. Δίδομεν μερικὰ παραδείγματα χρησιμοποιήσεως τοῦ πίνακος, τὸν ὁποῖον παραθέτομεν εἰς τὸ τέλος τοῦ βιβλίου:

α) Ἐκ τῆς γωνίας νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐφαπτομένη

εφ $28^0 = 0,352$

εφ $46^0\ 20' = 1,084$

εφ $65^0\ 22' \simeq$ εφ $65^0\ 20' = 2,177$

εφ $65^0\ 28' \simeq$ εφ $65^0\ 30' = 2,194$

β) ἐκ τῆς ἐφαπτομένης νὰ εὑρεθῇ ἡ γωνία.

εφ$\theta = 0,249 \Rightarrow \theta = 14^0$

εφ$\theta = 0,791 \Rightarrow \theta = 38^0\ 20'$

εφ$\theta = 0,518 \simeq 0,517 \Rightarrow \theta = 27^0\ 20'$

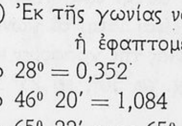
εφ$\theta = 2,770 \simeq 2,773 \Rightarrow \theta = 70^0\ 10'$

Παραδείγματα: 1ον. Ἡ τελικὴ πλευρὰ μιᾶς ὀξείας γωνίας θ εἰς κανονικὴν θέσιν διέρχεται διὰ τοῦ σημείου P (3,4). Νὰ εὕρετε τὴν εφθ, τὸ ημθ καὶ τὸ συνθ.

Λύσσις. Συμφώνως πρὸς τὸν ὁρισμὸν ἔχομεν εφ$\theta = \frac{4}{3}$ Γνωρίζομεν ἐξ ἄλλου ὅτι $\rho = \sqrt{x^2 + \psi^2} = \sqrt{25} = 5$ καὶ ἑπομένως εἶναι ημ$\theta = \frac{4}{5}$ καὶ συν$\theta = \frac{3}{5}$.

2ον. Νὰ κατασκευάσετε ὀξεῖαν γωνίαν θ. ἐὰν γνωρίζετε ὅτι εφθ = $\frac{3}{4}$.

Λύσις. Ἠμποροῦμεν νὰ λάβωμεν $\psi = 3$, $x = 4$, ὁπότε εἰς ὀρθοκανονικὸν σύστημα ἀξόνων ΧΟΨ καθορίζομεν τὴν θέσιν τοῦ σημείου P (4,3) καὶ ἔπειτα φέρομεν τὴν OP, (Σχ. 88–1). Ἡ $\sphericalangle$(OX, OP) εἶναι ἡ ζητουμένη γωνία, διότι εφ$\sphericalangle$(OX, OP) $= \frac{\psi}{x} = \frac{3}{4}$.



Σχ. 88–1

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

339) Ἡ τελικὴ πλευρὰ μιᾶς ὀξείας γωνίας εἰς κανονικὴν θέσιν διέρχεται διὰ τοῦ σημείου P (1, 3). Νὰ εὕρετε τὴν ἐφαπτομένην τῆς γωνίας ταύτης καὶ τὸ ἡμίτονόν της.

340) Νὰ κατασκευάσετε ὀξείας γωνίας μὲ τὰς ἑξῆς ἐφαπτομένας : α) $εφθ_1 = \frac{3}{4}$ β) $εφθ_2 = \frac{1}{2}$, γ) $εφθ_3 = 3$.

341) Νὰ εὕρετε μὲ χρῆσιν τῶν πινάκων τὰ ἑξῆς :
α) εφ $35^0\ 35'$ β) εφ $48^0\ 48'$ γ) εφ $26^0\ 23'$

342) Νὰ εὕρετε ἐκ τῶν πινάκων τὴν ὀξεῖαν γωνίαν θ, ὅταν :
α) $εφθ = 1{,}235$ β) $εφθ = 0{,}376$ γ) $εφθ = 2{,}085$

89. ΠΩΣ ΣΧΕΤΙΖΟΝΤΑΙ ΜΕΤΑΞΥ ΤΩΝ ΤΑ ΗΜΘ, ΣΥΝΘ, ΕΦΘ, ΤΗΣ ΟΞΕΙΑΣ ΓΩΝΙΑΣ Θ.

Ἐμάθαμεν εἰς τὰ προηγούμενα ὅτι διὰ μίαν ὀξεῖαν γωνίαν θ : $ημθ = \frac{ψ}{ρ}$, $συνθ = \frac{x}{ρ}$ $εφθ = \frac{ψ}{x}$, ὅπου x, ψ εἶναι αἱ συντεταγμέναι τοῦ τυχόντος σημείου P τῆς τελικῆς πλευρᾶς τῆς γωνίας θ, εὑρισκομένης εἰς κανονικὴν θέσιν.

Ἐμάθαμεν ἀκόμη ὅτι ἰσχύει : $x^2 + ψ^2 = ρ^2$.

Διαιροῦντες ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς τελευταίας ταύτης ἰσότητος διὰ $ρ^2$ εὑρίσκομεν: $\frac{x^2}{ρ^2} + \frac{ψ^2}{ρ^2} = \frac{ρ^2}{ρ^2}$ δηλ. $\frac{x^2}{ρ^2} + \frac{ψ^2}{ρ^2} = 1$ καί, ἐπειδὴ $\frac{x}{ρ} = συνθ$ καὶ $\frac{ψ}{ρ} = ημθ$, ἡ ἰσότης γίνεται : $\boxed{συν^2θ + ημ^2θ = 1}$ (1)

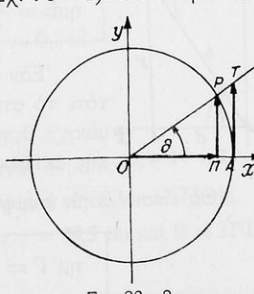
Ἐξ ἄλλου ἔχομεν $εφθ = \frac{ψ}{x} = \frac{\frac{ψ}{ρ}}{\frac{x}{ρ}} = \frac{ημθ}{συνθ}$

δηλαδὴ $\boxed{εφθ = \frac{ημθ}{συνθ}}$ (2)

Σημείωσις. Τὰ ημθ, συνθ, εφθ μιᾶς ὀξείας γωνίας θ, λέγονται τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τῆς γωνίας θ.

90. ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΣΗΜΑΣΙΑ ΤΩΝ ημθ, συνθ, εφθ ΜΙΑΣ ΟΞΕΙΑΣ ΓΩΝΙΑΣ θ ΕΙΣ ΤΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΝ ΚΥΚΛΟΝ.

Ἔστω θ μία ὀξεῖα γωνία εἰς κανονικὴν θέσιν (Σχ. 90 – 1). Μὲ κέντρον τὸ O καὶ ἀκτῖνα τὴν μονάδα τοῦ μήκους (ποὺ ἔχει ὁρισθῆ) γράφομεν περιφέρειαν τέμνουσαν τὴν μὲν ἀρχικὴν πλευρὰν τῆς θ εἰς τὸ A τὴν δὲ τελικὴν εἰς τὸ P (x, ψ). Φέρομεν ἀκόμη τὴν ἐφαπτομένην τοῦ κύκλου (O, OA) εἰς τὸ A, ἡ ὁποία τέμνει τὴν τελικὴν πλευρὰν τῆς θ εἰς τὸ T. Ὡς γνωστὸν εἶναι :



Σχ. 88– 2

1ον) $ημθ = \frac{ψ}{ρ} = ψ$ (διότι $ρ = 1$) = ἀλγεβρικὴ τιμὴ τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{ΠP}$. Ἠμποροῦμεν λοιπὸν νὰ εἴπωμεν ὅτι τὸ ημθ παριστάνεται γεωμετρικῶς ὑπὸ τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{ΠP}$.

2ον) $\text{συν}\theta = \dfrac{x}{\rho} = x$ (διότι $\rho = 1$). Παριστάνεται γεωμετρικῶς ὑπὸ τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{O\Pi}$.

3ον) $\text{εφ}\theta = \dfrac{\psi}{\chi} = \dfrac{(\Pi P)}{(O\Pi)} = \dfrac{(AT)}{(OA)} = (AT)$. Παριστάνεται γεωμετρικῶς ὑπὸ τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{AT}$.

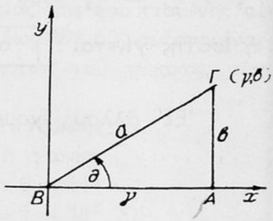
Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι, ἂν ὡς σημεῖον ἐπὶ τῆς τελικῆς πλευρᾶς μιᾶς ὀξείας γωνίας εἰς κανονικὴν θέσιν λάβωμεν ἐκεῖνο, εἰς τὸ ὁποῖον ὁ κύκλος μὲ κέντρον Ο καὶ ἀκτῖνα τὴν μονάδα, ὁ λεγόμενος **τριγωνομετρικὸς κύκλος**, τέμνει τὴν τελικὴν πλευράν της, τότε οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τῆς γωνίας θ λαμβάνουν τὰς ἀνωτέρω γεωμετρικὰς σημασίας.

91. ΠΩΣ ΣΧΕΤΙΖΟΝΤΑΙ ΜΕΤΑΞΥ ΤΩΝ ΤΑ ΚΥΡΙΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΝΟΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΥ.

Κύρια στοιχεῖα ἑνὸς τριγώνου λέγονται αἱ πλευραί του καὶ αἱ γωνίαι του.

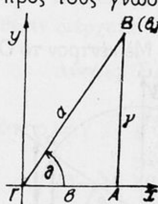
Ἔστω ΑΒΓ ἕνα τρίγωνον ὀρθογώνιον εἰς τὸ Α. Διὰ νὰ ἁπλουστεύσωμεν τοὺς συμβολισμούς, συμφωνοῦμεν νὰ παριστάνωμεν τὰς ἀλγεβρικὰς τιμὰς τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ μὲ τὰ γράμματα Α,Β,Γ τῶν κορυφῶν των καὶ τὰ μήκη τῶν ἀπέναντι πλευρῶν μὲ τὰ ἀντίστοιχα μικρὰ γράμματα α, β, γ, δηλαδὴ $(B\Gamma) = \alpha$, $(A\Gamma) = \beta$, $(AB) = \gamma$.

Ἐὰν τώρα τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ τεθῇ ἀπάνω εἰς τὸ ἐπίπεδον ΧΟΨ οὕτως, ὥστε ἡ ὀξεῖα γωνία του, π.χ. Β, νὰ εὑρεθῇ εἰς κανονικὴν θέσιν (Σχ. 91 – 1), τότε τὸ σημεῖον Γ ἐπὶ τῆς τελικῆς πλευρᾶς τῆς γωνίσς Β θὰ ἔχῃ συντεταγμένας : τετμημένην γ, τεταγμένην β καὶ μῆκος τῆς διανυσματικῆς ἀκτῖνος $\overrightarrow{B\Gamma}$ ἴσον μὲ α. Συμφώνως λοιπὸν πρὸς τοὺς γνωστούς μας ὁρισμοὺς θὰ εἶναι :



Σχ. 91–1

$$\boxed{\text{ημ}B = \frac{\beta}{\alpha}, \ \text{συν}\,B = \frac{\gamma}{\alpha}, \ \text{εφ}\,B = \frac{\beta}{\gamma}} \quad (1)$$



Σχ. 91–2

Ἐὰν τεθῇ ἡ ὀξεῖα γωνία Γ εἰς κανονικὴν θέσιν (Σχ. 91–2), τότε τὸ σημεῖον Β ἐπὶ τῆς τελικῆς πλευρᾶς θὰ ἔχῃ συντεταγμένας : β τετμημένη, γ τεταγμένην καὶ μῆκος τῆς διανυσματικῆς ἀκτῖνος τοῦ Β ἴσον μὲ α.

Θὰ εἶναι λοιπὸν συμφώνως πρὸς τοὺς γνωστοὺς ὁρισμούς :

$$\boxed{\text{ημ}\ \Gamma = \frac{\gamma}{\alpha}, \ \text{συν}\ \Gamma = \frac{\beta}{\alpha}, \ \text{εφ}\ \Gamma = \frac{\gamma}{\beta}} \quad (2)$$

Λεκτικῶς οἱ τύποι (1) καὶ (2) διατυπώνονται ὡς ἑξῆς :

1) Τὸ ἡμίτονον ὀξείας γωνίας ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι ἴσον μὲ τὸν λόγον(*) τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς πρὸς τὴν ὑποτείνουσαν.

2) Τὸ συνημίτονον ὀξείας γωνίας ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι ἴσον μὲ τὸν λόγον τῆς προσκειμένης πλευρᾶς πρὸς τὴν ὑποτείνουσαν.

3) Ἡ ἐφαπτομένη ὀξείας γωνίας ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι ἴση μὲ τὸν λόγον τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς πρὸς τὴν προσκειμένην κάθετον πλευράν.

Παρατήρησις. Ἀπὸ τοὺς τύπους (1) καὶ (2) προκύπτουν τὰ ἑξῆς διὰ τὰς ὀξείας γωνίας Β, Γ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, αἱ ὁποῖαι, ὡς γνωστόν, εἶναι συμπληρωματικαὶ ($B + \Gamma = 90^0$).

$$\eta\mu\, B = \sigma\upsilon\nu\, \Gamma, \quad \sigma\upsilon\nu\, B = \eta\mu\, \Gamma.$$

Δηλαδή : **τὸ ἡμίτονον μιᾶς ὀξείας γωνίας εἶναι ἴσον μὲ τὸ συνημίτονον τῆς συμπληρωματικῆς της καὶ τὸ συνημίτονον ὀξείας γωνίας εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἡμίτονον τῆς συμπληρωματικῆς της γωνίας.**

92. ΕΠΙΛΥΣΙΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΥ.

Ἀπὸ τοὺς τύπους (1) καὶ (2) τῆς § 91 συνάγομεν ὅτι :

1ον) Ὅταν γνωρίζωμεν τὰ μήκη δύο πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου ἠμποροῦμεν, μὲ χρῆσιν τῶν πινάκων, νὰ εὕρωμεν μὲ ὑπολογισμοὺς τὸ μῆκος τῆς τρίτης πλευρᾶς καὶ τὰς ἀλγεβρικὰς τιμὰς τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου.

2ον) Ὅταν γνωρίζωμεν τὸ μῆκος μιᾶς πλευρᾶς καὶ τὴν ἀλγεβρικὴν τιμὴν μιᾶς ὀξείας γωνίας ὀρθογωνίου τριγώνου, ἠμποροῦμεν μὲ ὑπολογισμοὺς νὰ εὕρωμεν τὰ μήκη τῶν ἄλλων πλευρῶν καὶ τὴν ἀλγεβρικὴν τιμὴν τῆς ἄλλης ὀξείας γωνίας τοῦ τριγώνου.

Ἡ ἀνωτέρω ἐργασία λέγεται **ἐπίλυσις τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου.** Ἐπειδὴ δὲ εἰς αὐτὴν γίνεται χρῆσις τοῦ ἡμιτόνου, τοῦ συνημιτόνου καὶ τῆς ἐφαπτομένης, ποὺ εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ἔχουν ὁρισθῆ ὡς λόγοι εὐθυγράμμων τμημάτων, διὰ τοῦτο ἀκριβῶς οἱ ἀριθμοί : ἡμίτονον, συνημίτονον, ἐφαπτομένη, ὀνομάσθησαν **τριγωνομετρικοὶ λόγοι ἢ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ** γωνίας.

Δίδομεν κατωτέρω παραδείγματα ἐπιλύσεως ὀρθογωνίων τριγώνων :

1ον. Νὰ ἐπιλυθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ, ἐὰν γνωρίζωμεν ὅτι $\beta = 250$ cm καὶ $\alpha = 718$ cm.

Ἐπίλυσις. Γνωρίζομεν ὅτι $\eta\mu\, B = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{250}{718} = 0{,}348.$

Ἐκ τῶν πινάκων εὑρίσκομεν :

$B \simeq 20^0\ 20'$.

$\Gamma = 90^0 - (20^0\ 20') = 80^0\ 60' - (20^0\ 20') = 69^0\ 40'$.

Μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ πυθαγορείου θεωρήματος εὑρίσκομεν :

$\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 = 718^2 - 250^2 = 453024$, ἄρα $\gamma = \sqrt{453024} = 673$ cm.

2ον. Νὰ ἐπιλυθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ, ἐὰν $\gamma = 30{,}5$ cm καὶ $B = 32^0 10'$.

(*) Ὅπως ἐμάθαμεν εἰς τὴν § 41, Β ὁ λόγος δύο εὐθυγράμμων τμημάτων ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τῶν μηκῶν των, ὅταν μετρηθοῦν μὲ τὴν αὐτὴν μονάδα.

Ἐπίλυσις. $\Gamma = 90^0 - B = 57^0\ 40'$.

$\varepsilon\varphi B = \dfrac{\beta}{\gamma} \Rightarrow \beta = \gamma\ \varepsilon\varphi\ B$. Ἑπομένως εἶναι $\beta = 30{,}5\ \varepsilon\varphi\ 32^0 10' = 30{,}5 \cdot 0{,}629 =$ $= 19{,}18$, δηλαδὴ $\beta = 19{,}18$ cm, $\alpha = \sqrt{\beta^2 + \gamma^2}$, ἐκ τοῦ πυθαγορείου θεωρήματος, ἤτοι : $\alpha = \sqrt{19,18^2 + 30{,}5^2} = \sqrt{1298,\ 1224} \simeq 36{,}03$ cm.

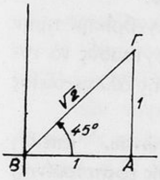
Διὰ τὸ ἐμβαδὸν Ε ἔχομεν : $E = \dfrac{1}{2}\beta \cdot \gamma = \dfrac{1}{2} \cdot 19{,}18 \cdot 30{,}5$ cm².

3ον. Νὰ ἐπιλυθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ, ἐαν $\beta = 2\sqrt{10}$m, $\gamma = 3$m.

Ἐπίλυσις. Ἔχομεν $\varepsilon\varphi\ B = \dfrac{\beta}{\gamma} = \dfrac{2\sqrt{10}}{3} = \dfrac{\sqrt{40}}{3} = \dfrac{6{,}324}{3} = 2{,}108$ καὶ ἐκ τῶν πινάκων εὑρίσκομεν $B \simeq 64^0\ 40'$, $\Gamma = 90^0 - B = 25^0\ 20'$

Τὴν α εὑρίσκομεν μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ πυθαγορείου θεωρήματος ἢ μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ τύπου $\dfrac{\beta}{\alpha} = \eta\mu\ B$, διότι $\beta = \alpha\ \eta\mu\ B \Rightarrow \alpha = \dfrac{\beta}{\eta\mu B}$

4ον. Νὰ εὕρετε χωρὶς χρῆσιν πινάκων τοὺς τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς τῆς γωνίας τῶν 45⁰. Εἰς κάθε ὀρθογώνιον καὶ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι $B = \Gamma = 45^0$ καὶ $\beta = \gamma$. Ἠμποροῦμεν λοιπὸν νὰ λάβωμεν $\beta = \gamma = 1$ (Σχ. 92 – 1) ὁπότε : $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 = 1^2 + 1^2 = 2 \Rightarrow \alpha = \sqrt{2}$ καὶ ἐπομένως ἐὰ εἶναι :



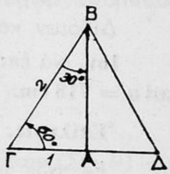
Σχ. 92–1

$$\eta\mu\ 45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu\ 45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\varepsilon\varphi\ 45^0 = \frac{1}{1} = 1$$

5ον. Νὰ εὕρετε χωρὶς χρῆσιν πινάκων τοὺς τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς τῶν γωνιῶν 60⁰ καὶ 30⁰. Εἰς κάθε ἰσόπλευρον τρίγωνον ΒΓΔ κάθε γωνία ἔχει ἀπόλυτον τιμὴν 60⁰. Ἡ διχοτόμος κάθε γωνίας, π.χ. τῆς Β, εἶναι κάθετος πρὸς τὴν ἀπέναντι αὐτῆς πλευρὰν καὶ διάμεσος τοῦ τριγώνου. Ἂν λοιπὸν λάβωμεν ἕνα ἰσόπλευρον τρίγωνον ΒΓΔ, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ ἔχει μῆκος 2 μονάδας (Σχ. 92–2), τότε εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ θὰ ἔχωμεν (ΒΓ) = 2, $(AB)^2 = (B\Gamma)^2 - (A\Gamma)^2 = 4 - 1 = 3 \Rightarrow (AB) = \sqrt{3}$ καὶ θὰ εἶναι :



Σχ. 92–2

$$\eta\mu\ 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sigma\upsilon\nu\ 30^0$$

$$\sigma\upsilon\nu\ 60^0 = \frac{1}{2} = \eta\mu\ 30^0$$

$$\varepsilon\varphi\ 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

$$\varepsilon\varphi\ 30^0 = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

343) Νὰ ἐπιλυθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ, ἐὰν $\alpha = 12$, $B = 13^0\ 20'$.

344) Νὰ ἐπιλυθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου $\gamma = 400$ mm, $\beta = 446$ mm

345) Νὰ ἐπιλυθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου $\alpha = 1{,}16$ cm, $\gamma = 0{,}518$ cm.

346) Νὰ ἐπιλυθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου $\beta = 75$ m, $\Gamma = 68^0\ 42'$.

347) Νὰ ἐπιλυθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον τοῦ ὁποίου $\alpha = 15$ m, $\Gamma = 56^0\ 30'$.

348) Νὰ ἐπιλυθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον τοῦ ὁποίου $\beta = 135$ m, $B = 79^0\ 28'$.

349) Νὰ ἐπιλυθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον τοῦ ὁποίου $\gamma = 38$ m, $\Gamma = 16^0\ 13'$.

350) Νὰ εὕρετε τὸ μῆκος τῆς σκιᾶς, τὴν ὁποίαν ρίπτει στύλος ὕψους 15 m, ὅταν τὸ ὕψος (*) τοῦ ἡλίου ὑπὲρ τὸν ὁρίζοντα εἶναι 20^0.

351) Δένδρον ὕψους 10 m ρίπτει εἰς κάποιαν στιγμὴν σκιὰν 12 m. Νὰ εὕρετε τὸ ὕψος τοῦ ἡλίου ὑπὲρ τὸν ὁρίζοντα κατ' ἐκείνην τὴν στιγμήν.

352) Εἰς ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ γνωρίζομεν τὴν κάθετον πλευρὰν ΑΒ μήκους 8 cm καὶ τὸ ὕψος ΑΗ, τὸ ὁποῖον ἔχει τιμὴν 4,8 cm. Νὰ ὑπολογίσετε χωριστὰ κάθε μίαν ἀπὸ τὰς ὀξείας γωνίας του ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω δεδομένα στοιχεῖα καὶ ἔπειτα νὰ ἐλέγξετε ἂν τὸ ἄθροισμά των εἶναι 90^0.

353) Εἰς ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ δίδονται $(AB) = 7$ m, $(A\Gamma) = 13$ m, $A = 40^0$. Ἐὰν ΓΗ εἶναι τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου ἀπὸ τὴν κορυφὴν Γ, νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ (ΑΗ), (ΓΗ), (ΒΗ), ἡ γωνία Β, τὸ (ΒΓ) καὶ τὸ ἐμβαδὸν Ε τοῦ τριγώνου.

354) Ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ εἶναι $(AB) = (A\Gamma) = 46$ cm καὶ ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τῆς γωνίας Α εἶναι $58^0\ 17'$. Νὰ εὕρετε τὴν τιμὴν τοῦ ὕψους ΑΔ καὶ τῆς βάσεως ΒΓ τοῦ τριγώνου.

355) Νὰ εὕρετε τὴν ἀπόλυτον τιμὴν τόξου (εἰς μοίρας), τὸ ὁποῖον ἔχει χορδὴν 10 cm εἰς κύκλον ἀκτῖνος 12 cm.

356) Νὰ εὕρετε τὴν ἀπόλυτον τιμὴν (εἰς μοίρας) τόξου, τὸ ὁποῖον ἔχει χορδὴν 280 mm καὶ ἀπέχει αὕτη ἀπὸ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου 750 mm.

357) Εἰς ἕνα κύκλον ἀκτῖνος $R = 23$ cm νὰ ὑπολογίσετε τὸ μῆκος χορδῆς τόξου $52^0\ 22'$.

358) Νὰ κατασκευάσετε εἰς χιλιοστομετρικὸν χαρτὶ τὰ ὀρθογώνια ,εἰς τὸ Α, τρίγωνα ΑΒΓ, ὅταν

α) $\text{συν}\ \Gamma = \dfrac{1}{2}$ καὶ $(A\Gamma) = 50$ mm

β) $\text{ημ}\ B = \dfrac{2}{5}$ καὶ $(AB) = 35$ mm

γ) $\text{εφ}\ \Gamma = \dfrac{4}{3}$ καὶ $(A\Gamma) = 25$ mm

(*) Ὕψος τοῦ ἡλίου κατά τινα στιγμὴν εἰς ἕνα τόπον ὀνομάζομεν τὴν γωνίαν, ποὺ σχηματίζει μὲ τὴν προβολήν της ἐπάνω εἰς ὁριζόντιον ἐπίπεδον ἡ ὀπτικὴ ἀκτὶς ἀπὸ τὸ σημεῖον τῆς παρατηρήσεως πρὸς τὸ κέντρον τοῦ ἡλίου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ X

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΠΕΡΙΓΡΑΦΙΚΗΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

93. ΒΑΣΙΚΑΙ ΕΝΝΟΙΑΙ ΚΑΙ ΟΡΙΣΜΟΙ.

Α) Περιεχόμενον καὶ σκοπὸς τῆς Στατιστικῆς. Κατ' ἔτος εἰς τὰς ἐφημερίδας δημοσιεύονται οἱ ἀπολογισμοί, ἰσολογισμοὶ τῶν διαφόρων Ἑταιρειῶν, Τραπεζῶν κλπ. συνοδευόμενοι ἀπὸ σχεδιαγράμματα καὶ «Στατιστικοὺς πίνακας» διὰ τὴν καλυτέραν καὶ εὐκολωτέραν κατανόησίν των. Τὸ αὐτὸ γίνεται μὲ τοὺς προγραμματισμοὺς διαφόρων ἔργων τῆς Βιομηχανίας ἢ τοῦ Κράτους. Ἐπίσης γνωσταὶ εἶναι αἱ «ἀπογραφαὶ τοῦ πληθυσμοῦ», ποὺ διενεργεῖ ἡ Ἐθνικὴ Σταστιστικὴ Ὑπηρεσία. Ἀπογραφαὶ πληθυσμοῦ ἢ γεωργικῶν ἐκτάσεων ἐγίνοντο ἀπὸ τὴν πολὺ ἀρχαίαν ἐποχήν.

Ἡ Στατιστικὴ εἰς τὴν ἐποχήν μας ἀπέκτησεν ὅλως ἰδιαιτέραν σπουδαιότητα διὰ τὸν πολιτισμόν μας καὶ ἀνεπτύχθη εἰς μίαν ἐκτεταμένην ἐπιστήμην μὲ πολλοὺς κλάδους. Εἰς ὅλα τὰ Κράτη αἱ στατιστικαὶ ἔρευναι ἐνεργοῦνται συστηματικῶς ἀπὸ καλῶς ὠργανωμένας στατιστικὰς ὑπηρεσίας.

Ἡ Στατιστικὴ εἶναι κλάδος τῶν «Ἐφηρμοσμένων Μαθηματικῶν» καὶ ὡς ἔργον της ἔχει τὴν συγκέντρωσιν στοιχείων, τὴν ταξινόμησίν των καὶ τὴν ἐμφάνισιν αὐτῶν εἰς κατάλληλον μορφὴν ὥστε νὰ δύνανται νὰ ἀναλυθοῦν καὶ νὰ ἑρμηνευθοῦν διὰ τὴν ἐξυπηρέτησιν διαφόρων σκοπῶν.

Ἐξέλιξις Κτηνοτροφικοῦ πληθυσμοῦ
(Εἰς χιλιάδας κεφαλῶν)

Εἶδος ζώου	1959	1961	1963	1964
Βόες	1045,7	1108,9	1160	1140,4
Βούβαλοι	72,6	67,2	63,5	60,8
Πρόβατα	9333,9	9593,5	9720	9450
Αἶγες	5066,1	4979,0	4700	4570
Χοῖροι	638,1	621,6	632	646,8
Πτηνὰ	15146,3	16341,9	18000	18426,3

Πηγή : Ὑπουργεῖον Γεωργίας. Πίναξ 1.

Β) Πληθυσμός, Στατιστικὰ δεδομένα, Ἰδιότητες. Ἡ Στατιστικὴ ὡς στοιχεῖα διὰ τὸ ἔργον της συγκεντρώνει ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι ἀναφέρονται εἰς ἕνα σύνολον ἀντικειμένων (ἐμψύχων ἢ ἀψύχων). Τὸ σύνολον αὐτὸ καλεῖται **στατιστικὸς πληθυσμὸς** ἢ μόνον **πληθυσμός.** Π.χ. Εἰς τὸν ἔναντι πίνακα 1 ἔχομεν στοιχεῖα διὰ τὴν ἀνάπτυξιν τοῦ «Κτηνοτροφικοῦ πληθυσμοῦ» τῆς χώρας μας, κατὰ τὰ ἔτη 1959 – 1964.

Εἰς τὸν κατωτέρω πίνακα 2 περιέχονται στοιχεῖα τῆς ἐξελίξεως τοῦ «πληθυσμοῦ τῶν μονίμων μεταναστῶν» κατὰ τὴν πενταετίαν 1960 – 64 δηλ. αὐτῶν ποὺ ἀνεχώρησαν ἀπὸ τὴν Ἑλλάδα διὰ μόνιμον ἐγκατάστασιν εἰς τὸ ἐξωτερικόν.

Ἐξέλιξις τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μονίμων μεταναστῶν

	1960	1961	1962	1963	1964
Ἄρρενες	33278	36209	51868	61966	66265
Θήλεις	14490	22628	32186	38106	39403
Ἄθροισμα	47768	58837	84054	100072	105668

Πηγή : Ε.Σ.Υ.Ε Πίναξ 2

Κάθε στατιστικὸς πληθυσμὸς ἐρευνᾶται ὡς πρὸς ὡρισμένα χαρακτηριστικὰ τῶν στοιχείων του. Ἕνα σύνολον ἀνθρώπων εἶναι «πληθυσμὸς» ὡς πρὸς τὴν ἡλικίαν ἢ τὸ ἀνάστημα ἢ τὸν φόρον εἰσοδήματος ἢ τὴν μόρφωσιν κλπ. Τὸ σύνολον τῶν μαθητῶν ἑνὸς σχολείου εἶναι «πληθυσμός» ὡς πρὸς τὴν βαθμολογίαν ἢ τὰς ἀπουσίας ἢ τὸ βάρος κλπ.

Αἱ χαρακτηριστικαὶ ἰδιότητες, ἑνὸς πληθυσμοῦ, διὰ τὰς ὁποίας, ἐνδιαφέρεται ἡ Στατιστική, διακρίνονται **εἰς ποιοτικὰς** καὶ **εἰς ποσοτικὰς** ἰδιότητας.

1) Ποιοτικαὶ ἰδιότητες. Ποιοτικὴ εἶναι κάθε ἰδιότης, ἡ ὁποία δὲν ἐπιδέχεται μέτρησιν, δηλ. δὲν ἐκφράζεται εἰς ὡρισμένας μονάδας μετρήσεως. Εἰς κάθε πληθυσμὸν ἀνθρώπων π.χ. αἱ ἰδιότητες φῦλον, ἔγγαμος, ὀρθόδοξος, ἀλλοδαπός, ἀναλφάβητος, κλπ. εἶναι ποιοτικαί. Κατὰ τὰς ἰδιότητας αὐτάς διαμερίζεται τὸ σύνολον εἰς κλάσεις καὶ μὲ ἀπαρίθμησιν εὑρίσκεται ὁ πληθάρισμος κάθε μιᾶς κλάσεως.

2) Ποσοτικαὶ ἰδιότητες. Ποσοτικὴ εἶναι κάθε ἰδιότης, ἡ ὁποία δύναται νὰ μετρηθῇ, δηλ. νὰ ἐκφρασθῇ μὲ ὡρισμένας μονάδας (λ.χ. βάρους, ὄγκου, μήκους κλπ). Αἱ ποσοτικαὶ ἰδιότητες, λαμβάνουν ἀριθμητικὰς τιμάς, ἑπομένως εἶναι **μεταβληταί.** Τὸ ἀνάστημα, τὸ βάρος, ἡ ἡλικία, τὸ εἰσόδημα τῶν ἀνθρώπων εἶναι ποσότητες μεταβληταὶ καὶ ἀποτελοῦν ποσοτικὰς ἰδιότητας τῶν πληθυσμῶν. Ἐπὶ ἀπαριθμήσεως τῶν στοιχείων ἑνὸς πληθυσμοῦ καὶ προσδιορισμοῦ σχετικῶν ποσοστῶν, λ.χ. γεννήσεων, γάμων, παραγωγῆς προϊόντων κλπ, τὰ ποσοστὰ αὐτὰ λαμβάνονται ὡς ποσότητες μεταβληταί.

Μία μεταβλητὴ εἶναι **συνεχής,** ὅταν δύναται νὰ λάβῃ (τουλάχιστον θεωρητικῶς) κάθε τιμὴν εἰς ἕνα διάστημα. Π.χ. ἡ «χωρητικότης» εἰς ἕνα πληθυσμὸν πλοίων, ἢ τὸ εἰσόδημα ἀνθρώπων, ἢ ὁ φόρος εἰσοδήματος, εἶναι συνεχεῖς μεταβληταί.

Μία μεταβλητὴ εἶναι **ἀσυνεχής,** ὅταν λαμβάνῃ ὡς τιμὰς μόνον φυσικοὺς ἀριθμούς. Π.χ. ὁ ἀριθμὸς τῶν φοιτώντων μαθητῶν εἰς τὰ Ἑλληνικὰ Γυμνάσια, ὁ ἀριθμὸς τῶν σελίδων ἑνὸς πληθυσμοῦ βιβλίων εἶναι ἀσυνεχεῖς μεταβληταί.

Οἱ ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι ἀναφέρονται εἰς τὰ στοιχεῖα ἑνὸς πληθυσμοῦ λέγονται στατιστικὰ δεδομένα. Ἡ συγκέντρωσις τῶν στατιστικῶν δεδομένων ἀποτελεῖ τὴν σπουδαιοτέραν φάσιν εἰς τὰς ἐργασίας μιᾶς στατιστικῆς μελέτης.

94. ΤΡΟΠΟΙ ΣΥΓΚΕΝΤΡΩΣΕΩΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΩΝ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ.

Ἡ συλλογὴ τῶν στατιστικῶν στοιχείων γίνεται μὲ τοὺς ἑξῆς τρόπους :

α) Δι᾽ ἀπογραφῆς. Μὲ τὴν ἀπογραφὴν συγκεντροῦνται αἱ ἀπαραίτητοι πληροφορίαι **ἀπὸ ὅλον τὸν στατιστικὸν πληθυσμόν.** Καταρτίζεται ἐκ τῶν προτέρων ἐν εἰδικὸν ἐρωτηματολόγιον **(δελτίον ἀπογραφῆς)** καὶ μίαν ὡρισμένην ἡμέραν εἰδικοὶ ὑπάλληλοι, οἱ **ἀπογραφεῖς,** διενεργοῦν τὴν συμπλήρωσίν του διὰ κάθε ἀπογραφόμενον. Αἱ ἀπαντήσεις εἰς τὰ ἐρωτήματα τοῦ δελτίου εἶναι συνήθως ἕνα «ναὶ» ἢ ἕνα «ὄχι» ἢ ἕνας ἀριθμός.

β) Διὰ δειγματοληψίας. Εἰς πολλὰς περιπτώσεις δὲν εἶναι ἀπαραίτητος ἡ γενικὴ ἀπογραφὴ ἑνὸς πληθυσμοῦ. Τότε διενεργεῖται «δειγματοληψία» δηλ. ἀπογραφὴ ἑνὸς ὑποσυνόλου τοῦ πληθυσμοῦ, ἑνὸς δείγματος ὅπως λέγεται, καὶ τὸ ὁποῖον λαμβάνεται κατὰ τρόπον ὥστε νὰ ἀντιπροσωπεύῃ ὅσον τὸ δυνατὸν περισσότερον τὸν ἀρχικὸν πληθυσμόν. Οὕτω π.χ. ἡ Ε.Σ.Υ.Ε πρὸ ὀλίγων ἐτῶν, διὰ νὰ μελετήσῃ τὰ ἔξοδα της ἑλληνικῆς οἰκογενείας, τοῦ «νοικοκυριοῦ» ὅπως εἶπον, ἔκαμε ἀπογραφὴν εἰς ἕνα δεῖγμα ἀπὸ 2500 μόνον νοικοκυριά.

γ) Διὰ συνεχοῦς ἐγγραφῆς. Εἰς εἰδικὰ δελτία καταγράφονται στοιχεῖα καὶ πληροφορίαι δι᾽ ἕνα πληθυσμόν, συγκεντροῦνται δὲ τὰ δελτία αὐτὰ ἀπὸ εἰδικὰς ὑπηρεσίας πρὸς μελέτην. Συνεχὴς ἐγγραφὴ γίνεται λ.χ. εἰς τὰ Ληξιαρχεῖα μὲ τὰς δηλώσεις γεννήσεων, γάμων, θανάτων κλπ., εἰς τὰ Νοσοκομεῖα διὰ τὴν κίνησιν τῶν ἀσθενῶν, εἰς τὰ Τελωνεῖα κλπ.

Εἰς ὡρισμένας περιπτώσεις, ὅταν πρόκειται περὶ τῆς μελέτης ἑνὸς εἰδικοῦ θέματος, διενεργεῖται ἡ λεγομένη **στατιστικὴ ἔρευνα.** Π.χ. διὰ τὴν ἐξακρίβωσιν τῆς παιδικῆς ἐγκληματικότητος ἢ τῆς ἐξαπλώσεως μιᾶς ἀσθενείας ἢ διὰ τὸν προσδιορισμὸν τοῦ ποσοστοῦ τῶν ἀναλφαβήτων μιᾶς χώρας κλπ. γίνεται στατιστικὴ ἔρευνα. Αὐτὴ γίνεται ἢ διὰ γενικῆς ἀπογραφῆς τοῦ πληθυσμοῦ ἢ διὰ καταλλήλου δειγματοληψίας.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

359) Ἀπὸ ἓν σύνολον μαθητῶν νὰ ὁρισθῇ «στατιστικὸς πληθυσμὸς» μὲ χαρακτηριστικὸν α) ποιοτικὸν β) ποσοτικόν.

360) Ἀπὸ τὰς ἀκολούθους ἰδιότητας ποῖαι εἶναι ποιοτικαὶ καὶ ποῖαι ποσοτικαί ; Ἀπὸ τὰς μεταβλητὰς ποῖαι εἶναι συνεχεῖς καὶ ποῖαι ἀσυνεχεῖς ;

1) Ἀνάστημα, 2) εἰσόδημα, 3) βάρος, 4) ἀριθμὸς ἀγάμων, 5) γεωργικὸς κλῆρος, 6) Παραγωγὴ ἑσπεριδοειδῶν εἰς τόννους, 7) ἐξαγωγὴ σταφίδος εἰς τόννους, 8) ἀριθμὸς διαζυγίων, 9) ἀπουσίαι μαθητῶν ἑνὸς σχολείου, 10) Βαθμοὶ ἐτησίας προόδου προαγομένων μαθητῶν τῶν Γυμνασίων, 11) Θύματα τροχαίων δυστυχημάτων εἰς ἕνα μῆνα, 12) ταχύτης τῶν πλοίων,

13) Διάρκεια ζωῆς εἰς ὥρας ἠλεκτρικῶν λαμπτήρων, 14) ἡ παραγωγὴ ἀμνῶν εἰς τὴν Ἑλλάδα καὶ 15) ἡ εἰσαγωγὴ κατεψυγμένου κρέατος εἰς τόννους εἰς τὴν χώραν μας.

361) Ἀπὸ τὰς ἀκολούθους μεταβλητὰς ποῖαι εἶναι συνεχεῖς καὶ ποῖαι ἀσυνεχεῖς ;

1) Ὁ ἀριθμὸς τῶν κτισμάτων εἰς ἕνα Νομὸν τῆς Ἑλλάδος, 2) Τὸ πλῆθος τῶν ἀνδρῶν τῶν λόχων τοῦ πεζικοῦ μας, 3) Ἡ θερμοκρασία εἰς ἕνα τόπον, 4) Τὰ ἡμερομίσθια τῶν Ἑλλήνων ἐργατῶν. 5) Τὸ ὠφέλιμον φορτίον τῶν φορτηγῶν αὐτοκινήτων. 6) Ὁ ἀριθμὸς τῶν αὐτοκινήτων, τὰ ὁποῖα κυκλοφοροῦν εἰς τὴν Ἀθήνα τὴν τελευταίαν δεκαετίαν, 7) Ἡ κατανάλωσις ἠλεκτρικοῦ ρεύματος εἰς κιλοβατώρας τῶν οἰκογενειῶν μιᾶς συνοικίας. 8) Τὰ τυπογραφικὰ λάθη εἰς τὰς σελίδας ἑνὸς βιβλίου.

95. ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΚΑΙ ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΙΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΩΝ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ.

α) Ἐπεξεργασία στατιστικῶν στοιχείων. Ὅταν συγκεντρωθοῦν τὰ στοιχεῖα, δηλ. αἱ σχετικαὶ πρὸς ὡρισμένα χαρακτηριστικὰ ἑνὸς πληθυσμοῦ πληροφορίαι, ἡ Ὑπηρεσία, ἡ ὁποία διενεργεῖ τὴν στατιστικὴν μελέτην, ἐλέγχει τὰ στοιχεῖα αὐτά. Ἐξετάζονται ἓν πρὸς ἓν τὰ δελτία τῆς ἀπογραφῆς, ἂν εἶναι ὁλόκληρα καὶ ὀρθῶς συμπληρωμένα καὶ ἀρχίζει ἡ διαλογὴ τῶν στοιχείων, ὥστε ὑπὸ μορφὴν ἀριθμῶν νὰ ἐμφανισθοῦν εἰς τοὺς πίνακας. Ἐὰν τὰ δελτία εἶναι ὀλίγα (ἕως 1000), ἡ διαλογὴ γίνεται «μὲ τὸ χέρι», ἄλλως μὲ ἡμιαυτομάτους μηχανὰς (ἕως 50000 δελτία) καὶ μὲ αὐτομάτους τελείως (ἄνω τῶν 50000 δελτίων). Κατὰ τὴν μηχανικὴν διαλογὴν κάθε δελτίον πρέπει νὰ μεταγραφῇ εἰς ἄλλο, εἰς τὸ ὁποῖον κάθε πληροφορία ἀντιστοιχίζεται ἐπὶ τῇ βάσει «κώδικος» μὲ ἕνα ἀριθμὸν καὶ ὁ ἀριθμὸς μὲ μίαν ὀπὴν τοῦ δελτίου μεταγραφῆς. Ἐὰν αἱ ὀπαὶ εἶναι ἐκ τῶν προτέρων ἕτοιμοι εἰς τὸ περιθώριον τοῦ δελτίου κατὰ τὴν περίμετρόν του, τοῦτο λέγεται **διάτρητον.** Ἐὰν τὰς ὀπὰς διανοίξῃ εἰς τὸ δελτίον μεταγραφῆς εἰδικὴ μηχανὴ μετὰ τὴν συμπλήρωσίν του, τοῦτο λέγεται **διατρητόν.** Μετὰ τὴν ἐργασίαν διατρήσεως, μία μηχανή, **ἡ ἐπαληθεύτρια,** ἐλέγχει μήπως ὑπάρχουν σφάλματα εἰς τὰ δελτία μεταγραφῆς. Τέλος τὰ δελτία μεταγραφῆς τοποθετοῦνται εἰς ἄλλην μηχανήν, **τὸν διαλογέα,** ὁ ὁποῖος τὰ χωρίζει εἰς ὁμάδας συμφώνως πρὸς τὰ ζητούμενα στοιχεῖα καὶ τὰ ἀποτελέσματα τῆς διαλογῆς καταγράφονται εἰς πίνακας.

β) Παρουσίασις στατιστικῶν δεδομένων – Πίνακες. Ὁ πλέον κατάλληλος τρόπος διὰ νὰ ἐμφανισθοῦν τὰ στατιστικὰ δεδομένα πρὸς μελέτην εἶναι **ὁ πίναξ.** Συνήθως εἰς τὴν Στατιστικὴν οἱ πίνακες εἶναι **συγκεντρωτικοί.** Εἰς αὐτοὺς εἰς μικρὰν ἔκτασιν καὶ ἁπλοῦν τρόπον περιέχονται τὰ στοιχεῖα μιᾶς ἐρεύνης. Κατατάσσονται ταῦτα εἰς στήλας καὶ γραμμὰς καὶ εἶναι εὔκολος ἡ μεταξὺ των σύγκρισις.

Παραδείγματα. Εἰς ἕνα Γυμνάσιον κατωτέρου κύκλου ἐνεγράφησαν κατὰ τὴν ἔναρξιν τοῦ σχολ. ἔτους 1969–70 ἐν ὅλῳ 464 μαθηταί. Εἰς ἕνα ἰδιαίτερον βιβλίον, **τὸ Μαθητολόγιον,** ἐγράφησαν μὲ τὴν σειράν, ποὺ ἐνεφανίσθησαν πρὸς ἐγγραφήν, δηλ. ἐγράφη τὸ ὀνοματεπώνυμον κάθε μαθητοῦ, τὸ ὄνομα πατρός, τὸ ἔτος καὶ ὁ τόπος γεννήσεως, ἡ τάξις κλπ. Ὥστε τὸ Μαθητολόγιον εἶναι ἕνας **γενικὸς πίναξ,** μία ἀποθήκη μὲ στοιχεῖα τοῦ πληθυσμοῦ τῶν μαθητῶν τοῦ Γυμνασίου τούτου.

Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ μάθωμεν πόσοι εἶναι οἱ μαθηταὶ κάθε τάξεως. Μὲ ἀπαρίθμησιν εὑρίσκομεν τὸν ἀριθμὸν τῶν μαθητῶν καὶ τὰ ἀποτελέσματα ἐμφανίζομεν εἰς τὸν παραπλεύρως συνοπτικὸν πίνακα 3. Ἔχομεν ἐδῶ ποιοτικὴν ταξινόμησιν μὲ βάσιν τὴν ἰδιότητα «τάξις ἐγγραφῆς» καὶ μὲ τὰ τρία χαρακτηριστικὰ εἰς αὐτήν, τὰ Α,Β,Γ.

Τάξις	Ἐγγραφέντες
Α΄	235
Β΄	134
Γ΄	95
Ἄθροισμα	464

Πίναξ 3

Εἰς τὸ σύνολον τῶν μαθητῶν ἐγένετο ἕνας διαμερισμὸς εἰς τρεῖς ὁμάδας, εἰς τὰς τρεῖς ἰδιαιτέρας τάξεις. Ἡ ἐργασία αὐτὴ τῆς ὁμαδοποιήσεως λέγεται **κατανομὴ τοῦ πληθυσμοῦ κατὰ συχνότητας** ἢ καὶ **κατανομὴ συχνοτήτων.** Ὁ πληθάριθμος κάθε τάξεως λέγεται **ἀπόλυτος συχνότης** καὶ συμβολίζεται μὲ τὸ γράμμα **f**. Ὁ πληθάριθμος τοῦ πληθυσμοῦ λέγεται **ὁλικὴ συχνότης** καὶ συμβολίζεταιμὲ τὸ N ἢ μὲ τὸ Σf. Διὰ τὴν Α΄ τάξιν λ.χ. εἶναι $f = 235$, ἐνῷ εἶναι $\Sigma f = 464$.

Σχετικὴ συχνότης λέγεται ὁ λόγος τῆς ἀπολύτου συχνότητος πρὸς τὴν ὁλικήν. Π.χ. διὰ τὴν Α΄ τάξιν ἡ σχετικὴ συχνότης εἶναι : $\frac{f}{\Sigma f} = \frac{235}{464} = 0{,}506$.

Τὸ ἄθροισμα τῶν σχετικῶν συχνοτήτων εἶναι ἴσον μὲ τὴν μονάδα.

Πράγματι, εἶναι :

$$\frac{f_1}{\Sigma f} + \frac{f_2}{\Sigma f} + \frac{f_3}{\Sigma f} = \frac{f_1 + f_2 + f_3}{\Sigma f} = \frac{\Sigma f}{\Sigma f} = 1.$$

Τὸ γινόμενον τῆς σχετικῆς συχνότητος ἐπὶ 100 δίδει τὴν σχετικὴν συχνότητα εἰς ἑκατοστιαῖα ποσοστὰ (τόσον τοῖς ἑκατόν). π.χ. διὰ τὴν Α΄ τάξιν εἶναι 50,6%

Σημείωσις. Εἰς τὰ Μαθηματικὰ τὸ ἄθροισμα $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_\nu$ συμβολίζεται μὲ τὸ $\sum_{\kappa=1}^{\nu} x_\kappa$ δηλ. «ἄθροισμα τῶν ὅρων x μὲ δείκτην κ, ὅταν τὸ κ λαμβάνῃ φυσικὰς τιμὰς ἀπὸ 1 ἕως ν». Εἰς τὴν Στατιστικὴν ὅμως τὸ $\sum_{\kappa=1}^{\nu} f_\kappa$ γράφεται συμβατικῶς Σf.

Τάξις	Ἐγγραφέντες		Ἄθροισμα
	Μαθηταὶ	Μαθήτριαι	
Α΄	130	105	235
Β΄	65	69	134
Γ΄	50	45	95
Ἄθροισμα	245	219	464

Πίναξ 4

Ἔστω ὅτι τὸ ἀνωτέρω Γυμνάσιον εἶναι μικτὸν σχολεῖον. Εἰς κάθε τάξιν θὰ ἀπαριθμήσωμεν μαθητὰς καὶ μαθητρίας χωριστά. Σχηματίζεται λοιπὸν ὁ πίναξ 4. Εἰς αὐτὸν ἐξητάσθη ὁ πληθυσμὸς ὡς πρὸς δύο ποιοτικὰς ἰδιότητας. Πρῶτον ὡς πρὸς τὴν τάξιν (μὲ τρία χαρακτηριστικὰ Α,Β,Γ) καὶ δεύτερον ὡς πρὸς τὸ φῦλον (μὲ δύο χαρακτηριστικά, ἄρρεν - θῆλυ). Ὁ πίναξ 4 λέγομεν ὅτι **εἶναι μὲ 3 × 2 θυρίδας**, ἢ ἁπλῶς **«πίναξ 3 × 2»**.

Εἰς τὸν πίνακα 5 ἔχομεν τὰ στοιχεῖα τοῦ 4, ἀλλὰ μὲ σχετικὰς συχνότητας εἰς ἑκατοστιαῖα ποσοστά. Αὐτὰ ὑπολογίζονται ὡς πρὸς τὰ ἀθροίσματα τῶν στηλῶν. Π.χ. βλέπομεν ὅτι εἰς τὴν Β′ τάξιν ἀνήκουν τὰ 26,5% τῶν μαθητῶν, τὰ 31,5 % τῶν μαθητριῶν καὶ τὰ 28,9 % ὅλων τῶν τροφίμων τοῦ Γυμνασίου.

Τάξις	Ἐγγραφέντες		Ἄθροισμα
	Μαθηταὶ	Μαθήτριαι	
Α′	53	47,9	50,6
Β′	26,5	31,5	28,9
Γ′	20,5	20,6	20,5
Ἄθροισμα	100	100	100

Πίναξ 5

Εἰς τὸν πίνακα 1 (§ 93, Β) ὁ κτηνοτροφικὸς πληθυσμὸς ταξινομεῖται ποιοτικῶς μὲ κατανομὴν συχνοτήτων κατὰ τὸ εἶδος τοῦ ζώου. Ἡ κατανομὴ γίνεται εἰς μίαν σειρὰν ἐτῶν. Εἰς τὴν σειρὰν αὐτὴν παρουσιάζεται μία ποσοτικὴ μεταβολὴ τοῦ ἀριθμοῦ κάθε εἴδους. Ὁ ἀριθμὸς τῶν κεφαλῶν κάθε εἴδους εἶναι μία ἀσυνεχὴς μεταβλητή. Ἐπειδὴ ἡ χρονολογικὴ κατάταξις δίδει τὴν εἰκόνα τῆς ἐξελίξεως τοῦ πληθυσμοῦ μὲ τὴν πάροδον τοῦ χρόνου, νομίζομεν, ὅτι ἡ μεταβολὴ αὐτὴ τοῦ πληθυσμοῦ ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸν χρόνον, ἐνῷ γνωρίζομεν, ὅτι δὲν εἶναι ἡ παρέλευσις τοῦ χρόνου ἡ αἰτία τῆς μεταβολῆς τοῦ πληθυσμοῦ τῶν ζώων. **Συμφωνοῦμεν νὰ θεωρῶμεν τὰς δύο μεταβλητάς,** τὸν χρόνον καὶ τὴν ποσοτικὴν ἐξέλιξιν τοῦ πληθυσμοῦ, **ὡς ποσὰ συμμεταβλητά.**

Εἰς τὸν πίνακα 2 (§ 93, Β) ἔχομεν ποιοτικὴν κατὰ φῦλον ταξινόμησιν τοῦ πληθυσμοῦ του, εἰς μίαν συγχρόνως χρονολογικὴν κατάταξιν, ἡ ὁποία δεικνύει τὴν ποσοτικὴν ἐξέλιξιν αὐτοῦ κατὰ τὴν 5ετίαν 1960 – 64.

Σημείωσις. Κάθε πίναξ στατιστικῶν στοιχείων θὰ ἔχῃ εἰς τὸ ἄνω μέρος του ἕνα τίτλον, Αὐτὸς θὰ πληροφορῇ συντόμως καὶ σαφῶς περὶ τὸ τί περιέχει ὁ πίναξ, μὲ ποίαν κατάταξιν, εἰς ποίαν χρονικὴν περίοδον καὶ εἰς ποῖον τόπον. Εἰς τὸ κάτω μέρος θὰ ἀναγράφεται ἡ πηγὴ ἀπὸ τὴν ὁποίαν προέρχονται τὰ στοιχεῖα τοῦ πίνακος. Τὸ «τόσον τοῖς ἑκατὸν» ἢ συμβολικῶς % ὑπολογίζεται πάντοτε μὲ προσέγγισιν ἑνὸς δεκάτου.

Εἰς τὸν κατωτέρω πίνακα 6, τὸ % ὑπολογίζεται ἐπὶ τοῦ συνόλου τοῦ πληθυσμοῦ διὰ κάθε ἔτος. Παρατηροῦμεν εἰς αὐτόν, ὅτι εἰς τὰς Ἀθήνας καὶ τὴν Θεσσαλονίκην συγκεντροῦται τὸ 60% περίπου τῆς οἰκοδομικῆς δραστηριότητος τῆς χώρας μας.

γ) Κατάρτισις ἑνὸς πίνακος. Ὑποθέτομεν ὅτι εἰς τὸ Γυμνάσιον μὲ τοὺς 464 μαθητάς, τῶν ὁποίων μία κατανομὴ ἐμφανίζεται εἰς τὸν πίνακα 3 (§ 95, β), ἐγένετο ἔρανος ὑπὲρ τοῦ Ε.Ε.Σ. Αἱ εἰσφοραὶ καταχωρίζονται εἰς ὀνομαστικὰς καταστάσεις τῶν μαθητῶν, αἱ ὁποῖαι ἀποτελοῦν πίνακας, ἀλλ᾽ ὄχι συνοπτικοὺς καὶ εὐχρήστους.

Ἔστω ὅτι ἡ μικροτέρα εἰσφορὰ εἶναι 4,5 δρχ. καὶ ἡ μεγαλυτέρα 28,5 δρχ. Ἡ διαφορὰ 28,5 – 4,5=24 τῶν δύο ἄκρων τιμῶν λέγεται **εὖρος (πλάτος) τῆς μεταβλητῆς.** Ἡ μεταβλητὴ (ἐρανικὴ εἰσφορὰ) εἶναι συνεχής, διότι δύναται νὰ λάβῃ πᾶσαν τιμὴν μεταξὺ τῶν ἄκρων τιμῶν. Τὸ σύνολον τιμῶν της χωρίζεται εἰς τά-

Γεωγραφικὴ κατανομὴ τῆς Ἰδιωτικῆς οἰκοδομικῆς δραστηριότητος
(εἰς χιλιάδας κυβ. μέτρων)

	1962	%	1963	%	1964	%
1 Περιοχὴ Ἀθηνῶν	10095	50,8	11032	48,7	12948	46,9
2 Στερεὰ Ἑλλὰς—Εὔβοια	1524	7,7	2032	9,0	2421	8,7
3 Πελοπόννησος	1212	6,1	1576	7,0	1745	6,3
4 Ἰόνιοι Νῆσοι	147	0,8	274	1,2	243	0,9
5. Ἤπειρος	321	1,6	330	1,4	423	1,5
6 Θεσσαλία	524	2,6	736	3,3	1119	4,1
7 Μακεδονία	2377	12,0	2809	12,4	3417	12,4
8 Θεσσαλονίκη	2344	11,8	2334	10,3	3589	13,0
9 Θράκη	498	2,5	617	2,7	584	2,1
10 Νῆσοι Αἰγαίου	496	2,5	595	2,6	607	2,2
11 Κρήτη	317	1,6	325	1,4	516	1,9
	19855	100	22660	100	27612	100

Πηγή : Τράπεζα τῆς Ἑλλάδος Πίναξ 6

ξεις (ἀπὸ 10 τὸ ὀλιγώτερον, ἕως 25 τὸ περισσότερον). Ἐδῶ ἂς ληφθοῦν 12 τάξεις. Τὸ πλάτος κάθε μιᾶς εἶναι $\frac{24}{12} = 2$. Εἰς τὸν πίνακα 7 ἡ α′ στήλη «τάξεως εἰσφορᾶς» συμπληροῦται ἀμέσως.

Εἰς κάθε τάξιν ὑπάρχουν ἄκραι τιμαί. Συμφωνοῦμεν ὅπως ἡ ἀνωτέρα τιμὴ νὰ μὴ ἀνήκῃ εἰς τὴν τάξιν, ἀλλὰ νὰ εἶναι ἡ κατωτέρα τιμὴ εἰς τὴν ἑπομένην τάξιν. Π.χ. εἰς τὴν 4ην τάξιν δὲν ἀνήκει ἡ τιμὴ 12,5 δρχ. Ἄρα ὅσοι ἀπὸ τοὺς 464 μαθητὰς ἐπλήρωσαν 12,5 δρχ. θὰ συμπεριληφθοῦν εἰς τὴν 5ην τάξιν.

Τὸ ἡμιάθροισμα τῶν ἄκρων τιμῶν εἰς κάθε τάξιν λέγεται **μέση τιμή.** Μὲ τὰς μέσας τιμὰς σχηματίζεται ἡ β′ στήλη. Κατόπιν δι' ἀπαριθμήσεως τῶν μαθητῶν, τῶν ὁποίων ἡ εἰσφορὰ ἀνήκει εἰς κάθε τάξιν, γίνεται ἡ κατανομὴ κατὰ συχνότητας καὶ συμπληροῦται ἡ γ′ στήλη. Εἰς τὴν γ′ στήλην φαίνεται ὅτι δὲν ὑπάρχουν εἰσφοραὶ μαθητῶν, ὥστε νὰ σχηματισθῇ ἡ 4η, ἡ 6η καὶ ἡ 10η τάξις. Ἐγένετο λοιπὸν ἡ ὁμαδοποίησις τοῦ πληθυσμοῦ, ἡ κατανομὴ αὐτοῦ κατὰ συχνότητας (95,β).

Ἡ δ′ στήλη ἔχει τίτλον «ἀθροιστικὴ συχνότης». Εἰς αὐτὴν ἀντιστοιχίζεται διὰ κάθε τάξιν τὸ ἄθροισμα τῆς ἀπολύτου συχνότητος τῆς τάξεως καὶ ὅλων

Ἔρανος μαθητῶν διὰ τὸν Ἑλλ. Ἐρυθρὸν Σταυρὸν Α' Γυμνασίου

Τάξεις εἰσφορᾶς	Μέση τιμὴ	ἀριθμὸς μαθητῶν (ἀπόλ. συχν. f	ἀθροιστικὴ συχνότης	Σχετικὴ συχνότης %	ἀθροιστ. σχετ. συχνότης
1η. 4,5 - 6,5	5,5	58	58	12,5	12,5
2α. 6,5 - 8,5	7,5	30	88	6,5	19,0
3η. 8,5 - 10,5	9,5	54	142	11,6	30,6
4η. 10,5 - 12,5	11,5	—	142	—	30,6
5η. 12,5 - 14,5	13,5	85	227	18,3	48,9
6η. 14,5 - 16,5	15,5	—	227	—	48,9
7η. 16,5 - 18,2	17,5	69	296	14,9	63,8
8η. 18,5 - 20,5	19,5	80	376	17,2	81,0
9η. 20,5 - 22,5	21,5	63	439	13,6	94,6
10η. 22,5 - 24,5	23,5	—	439	—	94,6
11η. 24,5 - 26.5	25,5	15	454	3,2	97,8
11η. 26,5 - 28,5	27,5	10	464	2,2	100
		$\Sigma f = 464$		100	

Στοιχεῖα ὑποθετικὰ Πίναξ 7

τῶν προηγουμένων της. Π.χ. διὰ τὴν 3ην τάξιν ἔχομεν $58+30+54=142$, δηλ. οἱ 142 μαθηταὶ ἐπλήρωσαν ὁ καθένας ὀλιγώτερα ἀπὸ 9,5 δρχ. ὁ καθένας.

Ἡ σχετικὴ συχνότης εἰς ποσοστὰ ἐπὶ τοῖς ἑκατὸν % ἀναγράφεται εἰς τὴν ε' στήλην. Διὰ τὴν 5ην τάξιν ἡ σχετικὴ συχνότης εἶναι $\frac{85}{464} = 18{,}3\%$ δηλ. τὸ 18,3% τῶν μαθητῶν ἐπλήρωσεν ἀπὸ 12,5 ἕως 14,5 δρχ. ἢ καὶ μέσην τιμὴν 13,5 δρχ. Ἡ 6η στήλη τῆς ἀθροιστικῆς σχετικῆς συχνότητος σχηματίζεται ἀπὸ τὰ δεδομένα τῆς 5ης, ὅπως ἀκριβῶς ἡ 4η στήλη σχηματίζεται ἀπὸ τὰ στοιχεῖα τῆς 3ης. Εἰς τὴν 8ην τάξιν ἡ ἀθροιστικὴ σχετικὴ συχνότης εἶναι 81%. Τοῦτο σημαίνει ὅτι τὸ 81% τῶν μαθητῶν ἐπλήρωσεν κάτω ἀπὸ 20,5 δρχ. ὁ καθένας.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

362) Κατὰ τὸ 1968 εἰς τὴν Ἑλλάδα δι' ἄτομα δέκα ἐτῶν καὶ ἄνω μὲ ἀπογραφὴν συνεκεντρώθησαν τὰ ἀκόλουθα στοιχεῖα. Εἰς 121000 πρόσωπα, τὰ ὁποῖα ἦσαν διπλωματοῦχοι ἀνωτάτων Σχολῶν 26000 ἦσαν γυναῖκες. Εἰς 544000 ἀποφοίτους Γυμνασίων οἱ 311000 ἦσαν ἄνδρες. Εἰς 2836000 ἀποφοίτους τοῦ Δημοτικοῦ Σχολείου ἦσαν ἄνδρες 1628000. Εἰς 1995000 ποὺ δὲν ἐτελείωσαν τὸ Δημοτικὸν Σχολεῖον ἦσαν 1021000 γυναῖκες. Εἰς 1245000 ἀγραμμάτους ἦσαν 246000 ἄνδρες. Νὰ γίνῃ πίναξ 2×5 θυρίδων (Στοιχεῖα ὑποθετικά).

363) Εἰς μίαν ἀπογραφὴν 3500 οἰκογενειῶν εὑρέθησαν 275 οἰκογένειαι χωρὶς κανὲν

τέκνον, 845 μὲ ἕνα, 1056 μὲ δύο, 712 μὲ τρία, 542 μὲ τέσσερα καὶ ὑπόλοιποι μὲ πέντε καὶ ἄνω. Νὰ γίνῃ πίναξ μὲ σχετικὰς συχνότητας. (Δεδομένα ὑποθετικά). Νὰ συμπληρωθῇ στήλη ἀθροιστικῆς συχνότητος.

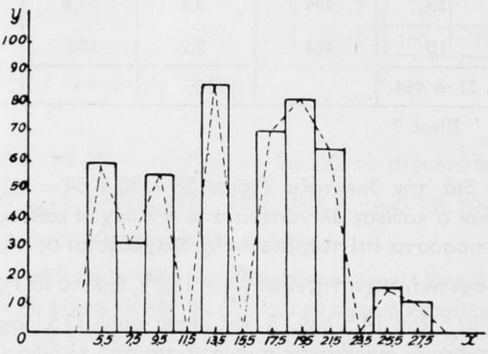
364) Ὁ Γυμναστὴς ἑνὸς Γυμνασίου κατωτέρου κύκλου, εἰς μέτρησιν τοῦ ἀναστήματος τῶν 464 μαθητῶν του εὗρε μικροτέραν τιμὴν ὕψους 1,40 μ. καὶ ἀνωτέραν 1,88 μ. Νὰ καταρτίσετε ἕνα πίνακα, ὅπως ὁ ὑπ' ἀριθ. 7, μὲ κατανομὴν εἰς 12 τάξεις καὶ μὲ ἀπολύτους συχνότητας, 38, 55, 120, 84, 42, 31, 12, 4, 48, 0, 18, 12.

96. ΓΡΑΦΙΚΑΙ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΩΝ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ.

Τὰ στατιστικὰ δεδομένα παρουσιάζονται ὄχι μόνον διὰ πινάκων, ἀλλὰ καὶ διὰ γραφικῶν παραστάσεων, διὰ διαγραμμάτων. Δι' αὐτῶν τῶν γραφικῶν παραστάσεων ἡ στατιστικὴ ἔρευνα καθίσταται ἀμέσως φανερά, τὰ δὲ συμπεράσματα ἐξ αὐτῆς κατανοητὰ μὲ τὸν ἁπλούστερον καὶ συντομώτερον τρόπον, μὲ «μιὰ ματιά». Οἱ κυριώτεροι τρόποι κατασκευῆς διαγραμμάτων εἶναι οἱ ἀκόλουθοι.

α) Τὸ ἱστόγραμμον συχνότητος. Ὅταν τὰ στατιστικὰ στοιχεῖα ἐμφανίζωνται μὲ κατανομὴν συχνοτήτων, τότε εἰς ἕνα σύστημα ὀρθογωνίων ἀξόνων ΧΟΨ (σχ. 96 – 1) τοποθετοῦνται αἱ τιμαὶ τῆς μεταβλητῆς εἰς τὸν ἄξονα ΟΧ καὶ αἱ τιμαὶ τῆς συχνότητος εἰς τὸν ἄξονα ΟΨ. Ἡ μονὰς μήκους εἶναι ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα αὐθαίρετον διὰ κάθε ἄξονα, ἀλλὰ τοιοῦτον, ὥστε νὰ ἐπιτρέπῃ εἰς τὸ σχέδιον νὰ ληφθοῦν ἐπὶ τοῦ ἄξονος ΟΧ ὅλαι αἱ τιμαὶ τῆς μεταβλητῆς καὶ ἐπὶ τοῦ ΟΨ ὅλαι αἱ ἀντίστοιχοι συχνότητες. Εἰς τὸν ὁριζόντιον ἄξονα ΟΧ σημειοῦνται διαδοχικῶς τμήματα ἀντίστοιχα πρὸς τὸ εὖρος τῶν διαδοχικῶν τάξεων τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς.

Ἱστόγραμμα ἐρανικῆς εἰσφορᾶς μαθητῶν Α' Γυμνασίου



Σχ. 96–1

Εἰς τὸ σχ. 96 – 1 τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖ τὸ διάγραμμα τοῦ πίνακος 7, βλέπομεν ἐπὶ τοῦ ἄξονος ΟΧ ὅλα αὐτὰ τὰ τμήματα νὰ εἶναι ἴσα, διότι αἱ 12 τάξεις τῆς κατανομῆς ἔχουν τὸ αὐτὸ πλάτος καὶ εἰς κάθε τμῆμα γράφεται ἡ μέση τιμὴ τῆς ἀντιστοίχου τάξεως. Μὲ βάσεις τὰ εὐθύγραμμα αὐτὰ τμήματα κατασκευάζονται ὀρθογώνια τὰ ὁποῖα ἔχουν ὕψη ἀνάλογα πρὸς τὴν ἀντίστοιχον συχνότητα, τὴν ὁποίαν ὑπολογίζομεν ἐπὶ τοῦ ἄξονος ΟΨ. Τὸ ἐμβαδὸν κάθε ὀρθογωνίου ἀπεικονίζει τὴν ἀντίστοιχον πρὸς τὴν βάσιν του συχνότητα. Ἐὰν αἱ βάσεις εἶναι ἴσαι, τότε τὰ ἐμβαδὰ (ἑπομένως καὶ αἱ συχνότητες) εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰ ὕψη τῶν ὀρθογωνίων. Τὸ διάγραμμα αὐτῆς τῆς μορφῆς λέγεται **ἱστόγραμμον συχνότητος.**

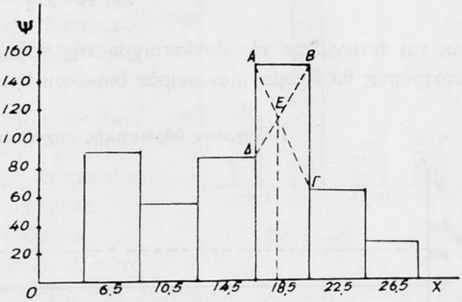
β) Τὸ πολύγωνον συχνότητος. Εἰς τὸ σχ. 96 – 1 τοῦ πίνακος 7 ὑπάρχει μία πολυγωνικὴ (μὴ συνεχὴς) γραμμή, ἡ ὁποία ἀποτελεῖται ἀπὸ διαδοχικὰ εὐθύγραμμα τμήματα, τὰ ὁποῖα συνδέουν τὰ μέσα τῶν ἄνω βάσεων τῶν ὀρθογωνίων τοῦ διαγράμματος.

Ἔρανος μαθητῶν Α΄ Γυμνασίου διὰ τὸν Ε.Ε.Σ.

Τάξεις εἰσφορᾶς	Μ. Τ.	f	ἀθροιστ. συχν.	%	ἀθρ. %
1η. 4,5 — 8,5	6,5	88	88	18,9	18,9
2α. 8,5 — 12,5	10,5	54	142	11,7	30,6
3η. 12,5 — 16,5	14,5	85	227	18,3	48,9
4η. 16,5 — 20,5	18,5	149	376	32,1	81
5η. 20,5 — 24,5	22,5	63	439	13,6	94,6
6η. 24,5 — 28,5	26,5	25	464	5,4	100
		464		100	

Πίναξ 8

Ἡ πολυγωνικὴ αὐτὴ γραμμὴ λέγεται **πολύγωνον συχνότητος** καὶ εἶναι δυνατὸν νὰ σχηματισθῇ ἀντὶ τοῦ ἱστογράμμου συχνότητος, μόνον ὅταν ἡ μεταβλητὴ εἶναι (ἢ θεωρῆται) συνεχής. Τὰ ἄκρα τοῦ πολυγώνου συχνότητος ὁρίζομεν ἐπὶ τοῦ ἄξονος ΟΧ, λαμβάνοντες τὰ μέσα δύο ἴσων πρὸς τὸ εὖρος τῶν τάξεων τμημάτων εἰς τὴν ἀρχὴν (πρὸς τὰ ἀριστερὰ) καὶ εἰς τὸ τέλος (πρὸς τὰ δεξιὰ) τῆς σειρᾶς τῶν βάσεων τῶν ὀρθογωνίων τοῦ ἱστογράμμου. Εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ πολύγωνον συχνότητος σχηματίζεται, ἂν ἀπὸ τὰ σημεῖα, ποὺ ἀπεικονίζουν τὰς μέσας τιμὰς εἰς τὸν ἄξονα ΟΧ, ὑψωθοῦν κάθετα πρὸς τοῦτον τμήματα ἀνάλογα πρὸς τὰς ἀντιστοίχους συχνότητας καὶ ἑνωθοῦν διὰ πολυγωνικῆς γραμμῆς τὰ ἄκρα τῶν τμημάτων αὐτῶν. Μὲ τὸν αὐτὸν τρόπον σχηματίζεται καὶ τὸ ἱστόγραμμον καὶ τὸ πολύγωνον τῆς σχετικῆς συχνότητος.

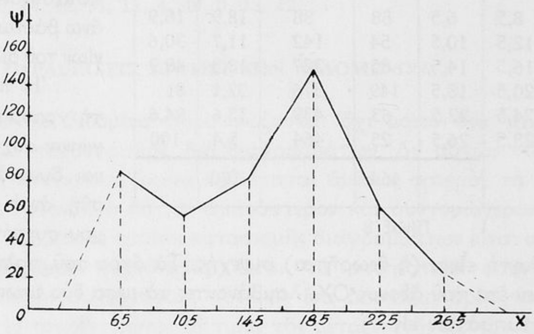


Σχ. 96—2

Τὰ στατιστικὰ δεδομένα τοῦ πίνακος 7 τὰ παρουσιάζομεν καὶ εἰς τὸν πίνακα 8. Τὸ πλάτος εἰς κάθε τάξιν εἶναι διπλάσιον τοῦ ἀντιστοίχου τοῦ πίνακος 7, διὰ τοῦτο εἰς τὸν 8 ὑπάρχουν μόνον 6 τάξεις. Εἰς τὰς τάξεις αὐτὰς δὲν ἔχομεν καμμίαν μὲ πληθάριθμον τὸ μηδέν. Εἰς τὸ σχ. 96 – 2 παρουσιάζεται τὸ ἱστόγραμμον τῆς συχνότητος διὰ τὸν πίνακα 8. Εἰς τὸ ἑπόμενον σχῆμα 96 – 3 ἔχομεν τὸ πολύγωνον τῆς συχνότητος τῶν στοιχείων τοῦ πίνακος 8.

γ) Τὸ πολύγωνον ἀθροιστικῆς συχνότητος. Εἰς ὡρισμένας περιπτώσεις κατὰ τὴν στατιστικὴν μελέτην ἑνὸς θέματος εἶναι χρήσιμος ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς ἀθροιστικῆς συχνότητος. Διὰ τὴν κατασκευὴν τοῦ πολυγώνου τῆς ἀθροιστικῆς συχνότητος εἰς ἕνα σύστημα ὀρθογωνίων ἀξόνων ΧΟΨ προσδιορίζομεν τὰ σημεῖα ποὺ ἔχουν ὡς τετμημένην τὴν **ἀνωτέρω ἄκραν τιμὴν** κάθε τά-

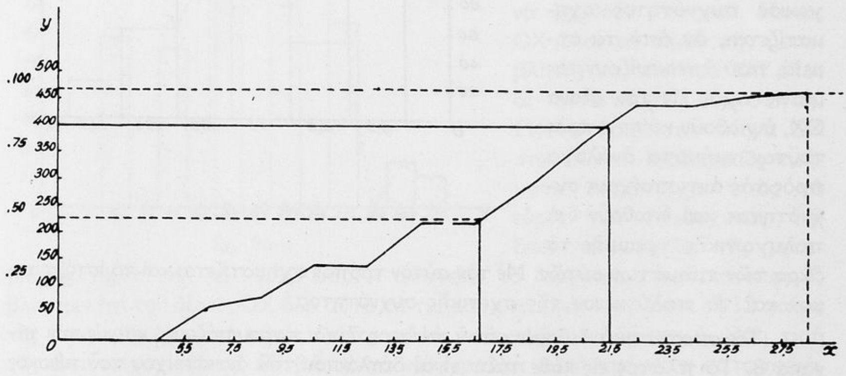
Πολύγωνον συχνότητος. Πίναξ 8



Σχ. 96—3

ξεως καὶ τεταγμένην τὴν ἀντίστοιχον τῆς τάξεως ἀθροιστικὴν συχνότητα. Τοιουτοτρόπως θὰ ἔχωμεν μίαν σειρὰν διακεκριμένων σημείων, τὰ ὁποῖα ὅταν ἑνώ-

Πολύγωνον ἀθροιστικῆς συχνότητος πίνακος 7

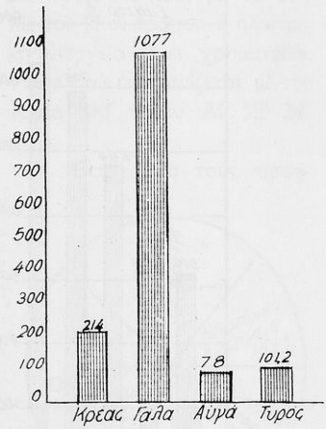


Σχ. 96—4

σωμεν μὲ εὐθύγραμμα τμήματα διαδοχικῶς θὰ σχηματίσουν τὸ πολύγωνον τῆς ἀθροιστικῆς συχνότητος. Εἰς τὸ σχ. 96–4 δίδομεν τὸ πολύγωνον τῆς ἀθροιστικῆς συχνότητος τοῦ πίνακος 7. Ἐὰν γράψωμεν μίαν κάθετον πρὸς τὸν ἄξονα ΟΨ εἰς ὁποιοδήποτε σημεῖον του λ.χ. εἰς ἐκεῖνο, ποὺ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸν ἀριθμὸν 400, θὰ τμήσῃ τὸ πολύγωνον ἀθροιστικῆς συχνότητος εἰς ἕνα σημεῖον Α. Τοῦ σημείου Α ἡ τετμημένη εἶναι κατὰ προσέγγισιν 21,30 ἑπομένως συμπεραίνομεν ὅτι 400 μαθηταὶ τοῦ Γυμνασίου ἔδωσαν ὀλιγώτερον ἀπὸ 21,30 δρχ. εἰς τὸν ἔρανον ὁ καθένας.

δ) Τὸ ραβδόγραμμα. Τὸ ραβδόγραμμα ἀποτελεῖται ἀπὸ μίαν σειρὰν ὀρθογωνίων, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἴσας βάσεις καὶ στηρίζονται εἰς τὸν αὐτὸν ἄξονα. Τὰ μήκη των εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰς ἀντιστοίχους συχνότητας ἢ τὰς τιμὰς γενικώτερον ποὺ παριστάνουν. Εἰς τὸ σχ. 96 – 5 ἔχομεν ἕνα ραβδόγραμμα, ποὺ παριστάνει τὴν παραγωγὴν εἰς τὴν Ἑλλάδα κατὰ τὸ ἔτος 1964 τῶν κυριωτέρων κτηνοτροφικῶν προϊόντων εἰς χιλιάδας τόννων.

Παραγωγὴ κτηνοτροφικῶν προϊόντων κατὰ τὸ 1964 εἰς χιλιάδας τόννους



Σχ. 96—5

Εἰς τὸ σχ. 96–6 ἔχομεν ἕνα τριπλοῦν ραβδόγραμμα. Τὸ α' δίδει τὴν εἰκόνα τῆς ἐξελίξεως τῆς ἀξίας τῶν εἰσαγωγῶν εἰς τὴν Ἑλλάδα βιομηχανικῶν προϊόντων εἰς ἑκατομμύρια δολλαρίων κατὰ τὴν σειρὰν τῶν ἐτῶν 1963 – 1967.

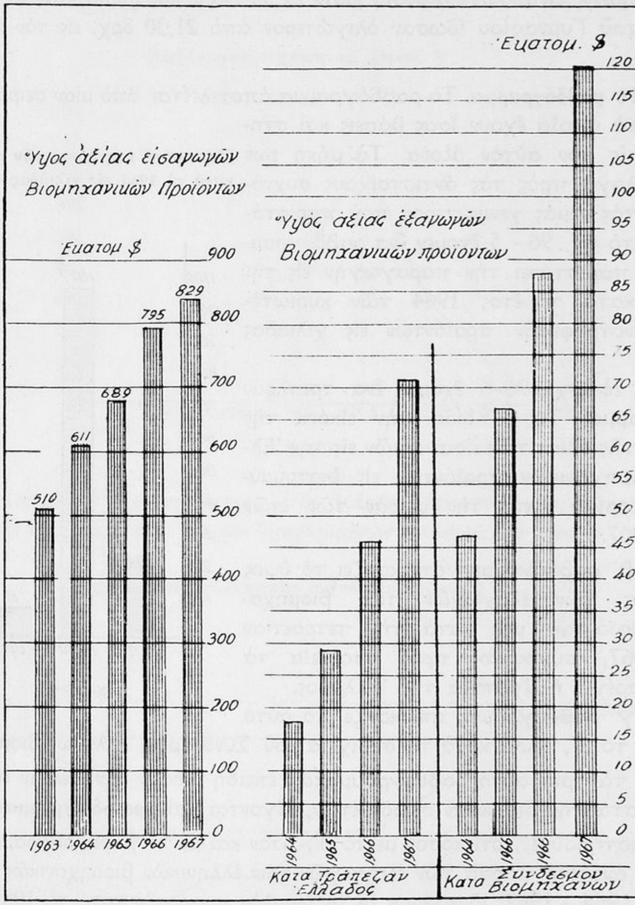
Τὸ β' ραβδόγραμμα ἀπεικονίζει τὸ ὕψος τῆς ἀξίας τῶν ἐξαγωγῶν τῶν βιομηχανικῶν προϊόντων μας κατὰ τὴν τετραετίαν 1964 – 1967, συμφώνως πρὸς στοιχεῖα τὰ ὁποῖα παρέχει ἡ Τράπεζα τῆς Ἑλλάδος.

Τὸ γ' ραβδόγραμμα ἀπεικονίζει τὰ αὐτὰ ὅπως καὶ τὸ β', ἀλλὰ κατὰ τὰ στοιχεῖα τοῦ Συνδέσμου Ἑλλήνων Βιομηχάνων.

Καὶ τὰ τρία αὐτὰ ραβδογράμματα, ἐπειδὴ δίδουν τὴν ἐξέλιξιν ἑνὸς πληθυσμοῦ κατὰ τὴν διάρκειαν σειρᾶς ἐτῶν, λέγονται καὶ **χρονοδιαγράμματα.**

Παρατηροῦμεν, ὅτι τόσον μὲ τὸ β', ὅσον καὶ μὲ τὸ γ' ραβδόγραμμα, εἶναι φανερὰ ἡ ἀνοδικὴ πορεία τῶν ἐξαγωγῶν τῶν ἑλληνικῶν βιομηχανικῶν προϊόντων ἀπὸ 1964 – 1967, ἰδιαιτέρως δὲ εἰς ὑψηλὸν ποσοστὸν κατὰ τὸ 1967. Ὑπολογίζεται ὅτι κατὰ τὸ 1967 αἱ ἐξαγωγαὶ τῶν βιομηχανικῶν προϊόντων ἐσημείωσαν αὔξησιν κατὰ 36,2% ἐν σχέσει πρὸς τὸ 1966, ἔναντι αὐξήσεως κατὰ 13,9% τὸ 1966 ὡς πρὸς τὸ 1965. Ἀντιστοίχως ὡς πρὸς τὰς εἰσαγωγὰς βιομηχανικῶν προϊόντων ἡ σημειωθεῖσα αὔξησις θεωρεῖται ἡ μικροτέρα τῶν τελευταίων ἐτῶν, ἀνερχομένη εἰς 2,3% κατὰ τὸ 1967 ἐν σχέσει πρὸς τὸ 1966, ἐνῷ ἦτο 13,9% τὸ 1966 ὡς πρὸς τὸ 1965.

ε) Τὸ κυκλικὸν διάγραμμα. Διὰ τὴν γραφικὴν ἀπεικόνισιν στατιστικῶν δεδομένων εἰς μίαν ὡρισμένην χρονικὴν στιγμὴν χρήσιμον εἶναι καὶ τὸ κυκλικὸν διάγραμμα. Ἕνας κύκλος μὲ αὐθαίρετον ἀκτῖνα χωρίζεται εἰς κυκλικοὺς τομεῖς, οἱ ὁποῖοι ἔχουν ἐμβαδὰ ἀνάλογα πρὸς τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τῆς μεταβλητῆς.



Σχ. 96—6

Ἐπειδὴ εἰς κάθε κύκλον τὰ ἐμβαδὰ τῶν κυκλικῶν τομέων εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰ μήκη τῶν τόξων των, αὐτὰ δὲ εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰς ἀπολύτους τιμὰς αὐτῶν εἰς μονάδας γωνιῶν ἢ τόξων, λ.χ. εἰς μοίρας, διαιρεῖται ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου εἰς τόξα ἀνάλογα τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς καὶ γράφονται αἱ ἀκτῖνες εἰς τὰ σημεῖα διαιρέσεως. Εἰς τὸ σχ. 96—7 ἔχομεν ἕνα κυκλικὸν διάγραμμα, ποὺ ἀπεικονίζει τὴν χρηματοδότησιν διαφόρων κλάδων τῆς οἰκονομικῆς ζωῆς τῆς Ἑλλάδος κατὰ τὸν Αὔγουστον τοῦ 1968, ὅπως ἐμφανίζεται εἰς τὸν πίνακα 9. Ἡ συνολικὴ χρηματοδότησις ἀνέρχεται εἰς τὸ ποσὸν τῶν 20.000 ἑκατομμυρίων δραχμῶν καὶ ἀντιστοιχίζεται μὲ ὁλόκληρον τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου (Σχ. 96–7) Τὸ 1 % ἀντιστοιχίζεται εἰς τόξον $\frac{360^0}{100} =$ $= 3{,}6\ ^0$ ἑπομένως τὰ 19,5 % εἰς τόξον $3{,}6 \times 19{,}5 = 70^0\ 10'$, ἄρα ἡ χρηματοδότησις διὰ τὸν Τουρισμὸν καὶ τὰς ξενοδοχειακὰς ἐπιχειρήσεις ἀντιστοιχίζεται μὲ τὸν τομέα ΑΚΒ, ποὺ ἔχει ὡς βάσιν τόξον ΑΒ ἴσον μὲ $70^0\ 10'$. Μὲ τὸν ἴδιον τρόπον ἡ ἠλεκτρικὴ ἐνέργεια ἔχει χρηματοδότησιν ποὺ ἀπεικονίζεται μὲ τὸν τομέα ΒΚΓ τόξου ΑΓ $59^0\ 24'$ κ.ο.κ.

Χρηματοδότησις 5 κλάδων εἰς ἑκτομμύρια δραχμῶν (Αὔγουστος 1968)

Κλάδοι	Ποσὸν	%	Μοῖραι
1. Τουρισμὸς Ξενοδοχεῖα	3.900	19,5	$70^0\ 10'$
2. Ἠλεκτρικὴ ἐνέργεια	3.300	16,5	$59^0\ 24'$
3. Μεταφοραὶ ἐπικοινωνίαι	5.000	25	90^0
4. Ἔργα κοινῆς ὠφελείας	6.600	33	$118^0\ 50'$
5. Ἕτεροι σκοποὶ	1.200	6	$21^0\ 36'$
Ἄθροισμα	20.000	100	360^0

Στοιχεῖα ὑποθετικά. Πίναξ 9

Ἐκτὸς ἀπὸ τοὺς προηγουμένους τρόπους γραφικῆς παραστάσεως τῶν στατιστικῶν δεδομένων ὑπάρχουν ἀκόμη τὰ **χαρτογράμματα,** τὰ ὁποῖα εἶναι γεωγραφικοὶ χάρται, εἰς τοὺς ὁποίους μὲ διάφορα χρώματα ἀπεικονίζονται στατιστικὰ στοιχεῖα. Ἀκόμη ὑπάρχουν τὰ **εἰδογραφήματα** ἢ **εἰδογράμματα** δηλαδὴ πίνακες μὲ σχέδια καὶ εἰκόνας προσώπων ἢ πραγμάτων. Αὐτὰ πολὺ χρησιμοποιοῦνται εἰς τὰς διαφημίσεις, ἔχουν μεγάλην παραστατικότητα, ἀλλ᾽ ὄχι καὶ ἀκρίβειαν.

Σχ. 96—7

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

365) Νὰ κατασκευασθῇ τὸ πολύγωνον ἀθροιστικῆς συχνότητος τῶν στοιχείων τοῦ πίνακος 8.

366) Νὰ σχηματίσετε ραβδόγραμμα μὲ τὰ στοιχεῖα τῆς ἀσκήσεως 363.

367) Νὰ σχηματίσετε ραβδόγραμμα μὲ τὰ στοιχεῖα τῆς ἀσκήσεως 364.

368) Κατὰ τὸ 1967 ὑπῆρχον τὰ ἀκόλουθα στοιχεῖα διὰ τὴν κατανομὴν τῆς ἐκτάσεως τῆς Ἑλλάδος : Βοσκότοποι 34,5%, Γεωργικὴ Γῆ 31%, Δάση 20,3%, οἰκοδομημένη ἔκτασις 4,5%, ἀμμώδης ἔκτασις 5,8%, ἔκτασις καλυπτομένη μὲ ὕδατα 3,9%. Νὰ γίνῃ κυκλικὸν διάγραμμα αὐτῆς τῆς κατανομῆς.

97. ΚΕΝΤΡΙΚΑΙ ΤΙΜΑΙ.

α) Γενικά. Εἰς τὴν Στατιστικὴν πολλάκις γίνεται ἀντικατάστασις πολλῶν ἀριθμῶν μὲ μίαν χαρακτηριστικὴν τιμήν. Ἡ τιμὴ αὐτὴ φανερώνει τὴν τάσιν, ἡ ὁποία ὑπάρχει εἰς τὰ στατιστικὰ δεδομένα νὰ συγκεντρώνωνται εἰς τὴν περιοχὴν τῆς τιμῆς αὐτῆς καὶ περιγράφει κατὰ τρόπον ἁπλοῦν καὶ σαφῆ ὁλόκληρον τὸ σύνολον τῶν δεδομένων.

Αἱ χαρακτηριστικαὶ τιμαί, αἱ ὁποῖαι ἀντικαθιστοῦν ἕνα σύνολον ἀριθμῶν λέγονται κεντρικαὶ ἢ τυπικαὶ τιμαὶ ἢ καὶ παράμετροι. Διακρίνονται εἰς **μέσους κεντρικῆς τάσεως** καὶ εἰς **μέσους θέσεως.** Οἱ πρῶτοι εἶναι **ὁ ἀριθμητικός, ὁ γεωμετρικὸς** καὶ **ὁ ἁρμονικὸς** καὶ οἱ δεύτεροι **ἡ διάμεσος** καὶ **ἡ ἐπικρατοῦσα τιμή.** Ἀπὸ τοὺς πρώτους θὰ ἐξετάσωμεν μόνον τὸν ἀριθμητικόν.

β) Ἀριθμητικὸς μέσος. Μέσος ἀριθμητικὸς ἀταξινομήτων στατιστικῶν στοιχείων εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν διὰ τοῦ πληθαρίθμου τοῦ συνόλου των. Ὁ ἀριθμητικὸς μέσος λέγεται καὶ **μέσος ὅρος.** Οὗτος ἐξάγεται ἐπὶ τιμῶν μόνον μεταβλητῶν. Ἐὰν τὰ δεδομένα εἶναι $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$, ὁ ἀριθμητικὸς μέσος $\bar{x}$ εἶναι :

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_\nu}{\nu} \quad \text{ἢ} \quad \bar{x} = \frac{\Sigma x}{\nu} \qquad (1)$$

Θὰ ἴδωμεν μὲ παραδείγματα πῶς προσδιορίζεται ὁ μέσος ὅρος ὅταν τὰ στοιχεῖα εἶναι ταξινομημένα ἢ ἔχει γίνῃ ἡ ὁμαδοποίησίς των.

1ον) Εἰς ἕνα ἐργοστάσιον 15 βοηθοὶ ἔχουν ἡμερομίσθιον ἀπὸ 42 δρχ., 20 ἐργάται ἀπὸ 75 δρχ., 6 τεχνῖται ἀπὸ 120 δρχ. καὶ 2 ἐπιστάται ἀπὸ 150 δρχ. Πόσα κατὰ μέσον ὅρον λαμβάνει ὁ ἐργαζόμενος εἰς αὐτό ;

Ὅλοι οἱ ἐργαζόμενοι εἶναι 43 καὶ λαμβάνουν $15 \times 42 + 20 \times 75 + 6 \times 120 + 2 \times 150$ δηλ. 3150 δρχ., ἑπομένως ἡ μέση τιμὴ εἶναι : $\bar{x} = \frac{3150}{43} = 73{,}25$ δρχ.

Ἂν ὁ καθένας λαμβάνῃ τὴν ἡμέρα 73,25 δρχ., τὸ ἐργοστάσιον θὰ πληρώσῃ εἰς ὅλους εἰς μίαν ἡμέραν τὸ αὐτὸ ποσὸν τῶν 3150 δρχ.

Ὅταν λοιπὸν οἱ ἀριθμοὶ $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$, ἔχουν ἀντιστοίχως συχνότητας $f_1, f_2, \ldots, f_\nu$ ἡ μέση τιμή των εἶναι $\bar{x} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots + f_\nu x_\nu}{f_1 + f_2 + \ldots f_\nu}$ ἢ $\bar{x} = \frac{\Sigma f x}{\Sigma f}$ (2)

2ον. Εἰς ὁμαδοποιημένα στοιχεῖα κατὰ τάξεις, λαμβάνομεν διὰ κάθε τάξιν τὴν μέσην τιμὴν καὶ ἐργαζόμεθα ὅπως εἰς τὸ 1ον παράδειγμα. Π.χ. μὲ τὰ δεδομένα τοῦ πίνακος 8 ἡ μέση τιμὴ τῆς ἐρανικῆς εἰσφορᾶς εἶναι :

$$\bar{x} = \frac{88 \cdot 6{,}5 + 54 \cdot 10{,}5 + 85 \cdot 14{,}5 + 149 \cdot 18{,}5 + 63 \cdot 22{,}5 + 25 \cdot 26{,}5}{88 + 54 + 85 + 149 + 63 + 25} = \frac{7208}{464} \simeq 15{,}5\cdot$$

ἰσχύει λοιπὸν ὁ τύπος (2).

γ) Ἡ διάμεσος. Διάμεσος λέγεται ἡ τιμή, ἡ ὁποία χωρίζει τὰ δεδομένα εἰς δύο τάξεις μὲ τὸν αὐτὸν πληθάριθμον. Ὁ μέσος αὐτός, ὅπως καὶ ὁ ἀριθμητικός, ἐφαρμόζεται ἐπὶ τιμῶν μεταβλητῶν. Τὰ δεδομένα κατατάσσονται κατ᾽ αὐξανόμενον μέγεθος διὰ τὴν εὕρεσιν τῆς διαμέσου. Π.χ. ἂν αἱ τιμαὶ τῆς μεταβλητῆς εἶναι 6, 9, 11, 15, 16, 19, 20 ἡ διάμεσος εἶναι ὁ 15, ἐνῷ ἂν εἶναι αἱ τιμαὶ 6, 9, 11, 15, 16, 19, 20, 30 ἡ διάμεσος εἶναι $\delta = \frac{15 + 16}{2} = 15{,}5$ δηλ. ὁ μέσος ὅρος τῶν δύο μεσαίων τιμῶν.

Ἐὰν τὰ στοιχεῖα εὑρίσκωνται εἰς πίνακα κατανομῆς κατὰ συχνότητας ἡ διάμεσος ὑπολογίζεται διὰ μιᾶς σχέσεως, τὴν ὁποίαν θὰ μάθωμεν εἰς ἄλλην τάξιν. Γραφικῶς ὅμως προσδιορίζεται εὐκόλως ἡ διάμεσος, ἂν σχηματισθῇ τὸ πολύγωνον τῆς ἀθροιστικῆς συχνότητος. Π.χ. εἰς τὸ σχῆμα 96–4 ἡ κάθετος πρὸς τὸν ἄξονα ΟΨ εἰς τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχίζεται μὲ τὸν 232 (ἢ 50%) τῆς ἀθροιστικῆς συχνότητος, τέμνει τὴν πολυγωνικὴν γραμμὴν εἰς ἕνα σημεῖον Δ μὲ τετμημένην περίπου 16,80 ποὺ σημαίνει ὅτι τὸ 50 % τῶν μαθητῶν ἐπλήρωσε κάτω ἀπὸ 16,80 δρχ., τὸ δὲ ἄλλο 50% περισσότερον ἀπὸ 16,80 δρχ.

δ) Ἡ ἐπικρατοῦσα τιμή. Ὁ μέσος αὐτὸς εἶναι ἐκείνη ἡ τιμὴ τῆς μεταβλητῆς, ποὺ ἀντιστοιχίζεται εἰς τὴν μεγίστην συχνότητα. Ἐφαρμόζεται ὅταν τὰ δεδομένα ἐμφανίζωνται εἰς κατανομὴν συχνοτήτων. Καὶ ὁ μέσος αὐτὸς προσδιορίζεται μὲ μίαν σχέσιν, τὴν ὁποίαν θὰ μάθωμεν εἰς ἄλλην τάξιν.

Γραφικῶς εἰς τὸ σχ. 96–2 τὸ μεγαλύτερον ὀρθογώνιον τοῦ ἱστογράμματος εἶναι τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν 4ην τάξιν μέσης τιμῆς 18,5 δρχ. Εἰς τὴν τάξιν αὐτὴν ἡ ἀπόλυτος συχνότης εἶναι 149, ἡ μεγίστη εἰς τὴν κατανομὴν αὐτήν. Τὰ εὐθύγραμμα τμήματα, τὰ ὁποῖα συνδέουν τὰς δύο ἄνω κορυφὰς Α καὶ Β τοῦ ὀρθογωνίου τούτου μὲ τὰς γειτονικὰς κορυφὰς Γ καὶ Δ τῶν δύο συνεχομένων ὀρθογωνίων τέμνονται εἰς ἕνα σημεῖον Ε. Ἡ κάθετος ἀπὸ τὸ Ε πρὸς τὸν ἄξονα ΟΧ ὁρίζει τὴν ἐπικρατοῦσαν τιμήν. Αὕτη εἶναι περίπου 18,10 διὰ τὸν πίνακα 8.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

369) Τὰ ἡμερομίσθια 6 ἐργατῶν εἶναι 75 δρχ., 82 δρχ., 100 δρχ., 107 δρχ., 112 δρχ., 120 δρχ. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμητικὸς μέσος αὐτῶν καὶ ποία ἡ διάμεσος ;

370) Ἕνας μαθητὴς Γυμνασίου εἰς τὸ Α΄ τετράμηνον ἐβαθμολογήθη εἰς τὰ Θρησκευτικὰ μὲ 16, εἰς τὰ Ἀρχαῖα μὲ 13, εἰς τὰ Νέα μὲ 14, εἰς τὰ Μαθηματικὰ μὲ 12, εἰς τὰ Φυσικὰ μὲ 14, εἰς τὰ Τεχνικὰ μὲ 17, εἰς τὰ Ἀγγλικὰ μὲ 13, εἰς τὴν Ἱστορίαν μὲ 16, εἰς τὴν Γεωγραφίαν μὲ 15, εἰς τὴν Γυμναστικὴν μὲ 18 καὶ εἰς τὴν Μουσικὴν μὲ 12. Ποία εἶναι ἡ μέση ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς βαθμολογίας του κατὰ τὸ τετράμηνον τοῦτο ;

371) Ὅταν ἀναμείξωμεν 45 κιλὰ ἐλαίου τῶν 28 δρχ. μὲ 20 κιλὰ τῶν 24 δρχ. καὶ 35 κιλὰ τῶν 18 δρχ. πόσον θὰ στοιχίζῃ τὸ κιλὸν τοῦ μείγματος ;

372) Οἱ ἀριθμοὶ 3, 7, 12, x ἔχουν μέσον ἀριθμητικὸν τὸν 10. Ποῖος εἶναι ὁ x ;

373) Νὰ προσδιορισθῇ ἡ διάμεσος εἰς τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως 365, γραφικῶς.

374) Οἱ ἀριθμοὶ x_1, x_2, x_3 ἔχουν μέσον ἀριθμητικὸν τὸν $\overline{x}$. Νὰ εὑρεθῇ ὁ μέσος ἀριθμητικὸς τῶν $x_1+\alpha$, $x_2+\alpha$, $x_3+\alpha$ καθὼς καὶ τῶν $x_1-\alpha$, $x_2-\alpha$, $x_3-\alpha$ ἢ τῶν $x_1\alpha$, $x_2\alpha$, $x_3\alpha$. Νὰ γίνῃ ἀριθμητικὴ ἐφαρμογὴ τῆς ἀσκήσεως αὐτῆς.

375) Οἱ ἀριθμοὶ x_1, x_2, x_3 ἔχουν μέσον ἀριθμητικὸν τὸν $\overline{x}$ καὶ οἱ $\alpha x_1+\beta$, $\alpha x_2+\beta$ $\alpha x_3+\beta$ τὸν $\overline{\psi}$. Δείξατε ὅτι εἶναι $\overline{\psi}=\alpha\overline{x}+\beta$.

Ἐπιμελητὴς Ἐκδόσεως : ΠΑΝ. ΗΛΙΑΔΗΣ (Ἀποφ. Δ. Σ. 3882/25-6-69).

ΠΙΝΑΚΕΣ ΤΩΝ ΦΥΣΙΚΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Ἡμίτονα ὀξειῶν γωνιῶν.

Μοῖραι	0′	10′	20′	30′	40′	50′	Μοῖραι	0′	10′	20′	30′	40′	50′
0	0,000	0,003	0,006	0,009	0,012	0,015	45	0,707	0,709	0,711	0,713	0,715	0,717
1	0,017	0,020	0,023	0,026	0,029	0,032	46	0,719	0,721	0,723	0,725	0,727	0,729
2	0,035	0,038	0,041	0,044	0,047	0,049	47	0,731	0,733	0,735	0,737	0,739	0,741
3	0,052	0,055	0,058	0,061	0,064	0,067	48	0,743	0,745	0,747	0,749	0,751	0,753
4	0,070	0,073	0,076	0,078	0,081	0,084	49	0,755	0,757	0,759	0,760	0,762	0,764
5	0,087	0,090	0,093	0,096	0,099	0,102	50	0,766	0,768	0,770	0,772	0,773	0,775
6	0,105	0,107	0,110	0,113	0,116	0,119	51	0,777	0,779	0,781	0,783	0,784	0,786
7	0,122	0,125	0,128	0,131	0,133	0,136	52	0,788	0,790	0,792	0,793	0,795	0,797
8	0,139	0,142	0,145	0,148	0,151	0,154	53	0,799	0,800	0,802	0,804	0,806	0,807
9	0,156	0,159	0,162	0,165	0,168	0,171	54	0,809	0,811	0,812	0,814	0,816	0,817
10	0,174	0,177	0,179	0,182	0,185	0,188	55	0,819	0,821	0,822	0,824	0,826	0,827
11	0,191	0,194	0,197	0,199	0,202	0,205	56	0,829	0,831	0,832	0,834	0,835	0,837
12	0,208	0,211	0,214	0,216	0,219	0,222	57	0,839	0,840	0,842	0,843	0,845	0,847
13	0,225	0,228	0,231	0,233	0,236	0,239	58	0,848	0,850	0,851	0,853	0,854	0,856
14	0,242	0,245	0,248	0,250	0,253	0,256	59	0,857	0,859	0,860	0,862	0,863	0,865
15	0,259	0,262	0,264	0,267	0,270	0,273	60	0,866	0,867	0,869	0,870	0,872	0,873
16	0,276	0,278	0,281	0,284	0,287	0,290	61	0,875	0,876	0,877	0,879	0,880	0,882
17	0,292	0,295	0,298	0,301	0,303	0,306	62	0,883	0,884	0,886	0,887	0,888	0,890
18	0,309	0,312	0,315	0,317	0,320	0,323	63	0,891	0,892	0,894	0,895	0,896	0,898
19	0,326	0,328	0,331	0,334	0,337	0,339	64	0,899	0,900	0,901	0,903	0,904	0,905
20	0,342	0,345	0,347	0,350	0,353	0,356	65	0,906	0,908	0,909	0,910	0,911	0,912
21	0,358	0,361	0,364	0,367	0,369	0,372	66	0,914	0,915	0,916	0,917	0,918	0,919
22	0,375	0,377	0,380	0,383	0,385	0,388	67	0,921	0,922	0,923	0,924	0,925	0,926
23	0,391	0,393	0,396	0,399	0,401	0,404	68	0,927	0,928	0,929	0,930	0,931	0,933
24	0,407	0,409	0,412	0,415	0,417	0,420	69	0,934	0 935	0,936	0,937	0,938	0,939
25	0,423	0,425	0,428	0,431	0,433	0,436	70	0,940	0,941	0,942	0,943	0,944	0,945
26	0,438	0,441	0,444	0,446	0,449	0,451	71	0,946	0,946	0,947	0,948	0,949	0,950
27	0,454	0,457	0,459	0,462	0,464	0,467	72	0,951	0,952	0,953	0,954	0,955	0,955
28	0,469	0,472	0,475	0,477	0,480	0,482	73	0,956	0,957	0,958	0,959	0,960	0,960
29	0,485	0,487	0,490	0,492	0,495	0,497	74	0,961	0,962	0,963	0,964	0,964	0,965
30	0,500	0,503	0,505	0,508	0,510	0,513	75	0,966	0,967	0,967	0,968	0,969	0,970
31	0,515	0,518	0,520	0,523	0,525	0,527	76	0,970	0,971	0,972	0,972	0,973	0,974
32	0,530	0,532	0,535	0,537	0,540	0,542	77	0,974	0,975	0,976	0,976	0,977	0,978
33	0,545	0,547	0,550	0,552	0,554	0,557	78	0,978	0,979	0,979	0,980	0,981	0,981
34	0,559	0,562	0,564	0,566	0,569	0,571	79	0,982	0,982	0,988	0,983	0,984	0,984
35	0,574	0,576	0,578	0,581	0,583	0,585	80	0,985	0,985	0,986	0,986	0,987	0,987
36	0,588	0,590	0,592	0,595	0,597	0,599	81	0,988	0,988	0,989	0,989	0,989	0,990
37	0,602	0,604	0,606	0,609	0,611	0,613	82	0,990	0,991	0,991	0,991	0,992	0,992
38	0,616	0,618	0,620	0,623	0,625	0,627	83	0,993	0,993	0,993	0,994	0,994	0,994
39	0,629	0,632	0,634	0,636	0,638	0,641	84	0,995	0,995	0,995	0,995	0,996	0,996
40	0,643	0,645	0,647	0,649	0,652	0,654	85	0,996	0,996	0,997	0,997	0,997	0,997
41	0,656	0,658	0,660	0,663	0,665	0,667	86	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998
42	0,669	0,671	0,673	0,676	0,678	0,680	87	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999
43	0,682	0,684	0,686	0,688	0,690	0,693	88	0,999	0,999	1,000	1,000	1,000	1,000
44	0,695	0,697	0,699	0,701	0,703	0,705	89	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000

Συνημίτονα ὀξειῶν γωνιῶν.

Μοῖραι	0′	10′	20′	30′	40′	50′	Μοῖραι	0′	10′	20′	30′	40′	50′
0	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	45	0,707	0,705	0,703	0,701	0,699	0,697
1	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	46	0,695	0,693	0,690	0,688	0,686	0,684
2	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	47	0,682	0,680	0,678	0,676	0,673	0,671
3	0,999	0,998	0,998	0,998	0.998	0,998	48	0,669	0,667	0,665	0,663	0,660	0,658
4	0,998	0,997	0,997	0,997	0,997	0,996	49	0,656	0,654	0,652	0,649	0,647	0,645
5	0,996	0,996	0,996	0,995	0,995	0,995	50	0,643	0,641	0,638	0,636	0,634	0,632
6	0,995	0,994	0,994	0,994	0,993	0,993	51	0,629	0,627	0,625	0,623	0,620	0,618
7	0,993	0,992	0,992	0,991	0,991	0,991	52	0,616	0,613	0,611	0,609	0,606	0,604
8	0,990	0,990	0,989	0,989	0,989	0,988	53	0,602	0,599	0,597	0,595	0,592	0,590
9	0,988	0,987	0,987	0,986	0,986	0,985	54	0,588	0,585	0,583	0,581	0,578	0,576
10	0,985	0,984	0,984	0,983	0,983	0,982	55	0,574	0,571	0,569	0,566	0,564	0,562
11	0,982	0,981	0,981	0,980	0,979	0,979	56	0,559	0,557	0,554	0,552	0,550	0,547
12	0,978	0,978	0,977	0,976	0,976	0,975	57	0,545	0,542	0,540	0,537	0,535	0,532
13	0,974	0,974	0,973	0,972	0,972	0,971	58	0,530	0,527	0,525	0,523	0,520	0,518
14	0,970	0,970	0,969	0,968	0,967	0,967	59	0,515	0,513	0,510	0,508	0,505	0,503
15	0,966	0,965	0,964	0,964	0,963	0,962	60	0,500	0,497	0,495	0,492	0,490	0,487
16	0,961	0,960	0,960	0,959	0,958	0.951	61	0,485	0,482	0,480	0,477	0,475	0,472
17	0,956	0,955	0,955	0,954	0,953	0,952	62	0,469	0,467	0,464	0,462	0,459	0,457
18	0,951	0,950	0,949	0,948	0,947	0,946	63	0,454	0,451	0,449	0,446	0,444	0,441
19	0,946	0,945	0,944	0,943	0,942	0,941	64	0,438	0,436	0,433	0,431	0,428	0,425
20	0,940	0,939	0,938	0,937	0,936	0,935	65	0,423	0,420	0,417	0,415	0,412	0,409
21	0,934	0,933	0,931	0,930	0,929	0,928	66	0,407	0,404	0,401	0,399	0,396	0,393
22	0,927	0,926	0,925	0,924	0,923	0,922	67	0,391	0,388	0,385	0,383	0,380	0,377
23	0,921	0,919	0,918	0,917	0,916	0,915	68	0,375	0,372	0,369	0,367	0,364	0,361
24	0,914	0,912	0,911	0,910	0,909	0,908	69	0,358	0,356	0,353	0,350	0,347	0,345
25	0,906	0,905	0,904	0,903	0,901	0,900	70	0,342	0,339	0,337	0,334	0,331	0,329
26	0,899	0,898	0,896	0,895	0,894	0,892	71	0,326	0,323	0,320	0,317	0,315	0,312
27	0,891	0,890	0,888	0,887	0,886	0,884	72	0,309	0,306	0,303	0,301	0,298	0,295
28	0,883	0,882	0,880	0,879	0,877	0,876	73	0,292	0,290	0,287	0,284	0,281	0,278
29	0,875	0,873	0,872	0,870	0.869	0,867	74	0,276	0,273	0,270	0,267	0,264	0,262
30	0,866	0,865	0,863	0,862	0,860	0,859	75	0,259	0,256	0,253	0,250	0,248	0,245
31	0,857	0,856	0,854	0,853	0,851	0,850	76	0,242	0,239	0,236	0,233	0,231	0,228
32	0,848	0,847	0,845	0,843	0,842	0,840	77	0,225	0,222	0,219	0,216	0,214	0,211
33	0,839	0,837	0,835	0,834	0,832	0,831	78	0,208	0,205	0,202	0,199	0,197	0,194
34	0,829	0,827	0,826	0,824	0,822	0,821	79	0,191	0,188	0,185	0,182	0,179	0,177
35	0,819	0,817	0,816	0,814	0,812	0,811	80	0,174	0,171	0,168	0,165	0,162	0,159
36	0,809	0,807	0,806	0,804	0,802	0,800	81	0,156	0,154	0,151	0,148	0,145	0,142
37	0,799	0,797	0,795	0,793	0,792	0,790	82	0,139	0,136	0,133	0,131	0,128	0,125
38	0,788	0,786	0,784	0,783	0,781	0,779	83	0,122	0,119	0,116	0,113	0,110	0,107
39	0,777	0,775	0,773	0,772	0,770	0,768	84	0,105	0,102	0,099	0,096	0,093	0,090
40	0,766	0,764	0,762	0,760	0.759	0,757	85	0,087	0,084	0,081	0,078	0,076	0,073
41	0,755	0,753	0,751	0,749	0,747	0,745	86	0,070	0,067	0,064	0,061	0,058	0,055
42	0,743	0,741	0,739	0,737	0,735	0,733	87	0,052	0,049	0,047	0,044	0,041	0,038
43	0,731	0,729	0,727	0,725	0,723	0,721	88	0,035	0,032	0,029	0,026	0,023	0,020
44	0,719	0,717	0,715	0,713	0,711	0,709	89	0,017	0,015	0.012	0,009	0,006	0,003

Ἐφαπτόμεναι ὀξειῶν γωνιῶν.

Μοῖραι	0′	10′	20′	30′	40′	50′	Μοῖραι	0′	10′	20′	30′	40	50′
0	0,000	0,003	0,006	0,009	0,012	0,015	45	1,000	1,006	1,012	1,018	1,024	1,030
1	0,017	0,020	0,023	0,026	0,029	0,032	46	1,036	1,042	1,048	1,054	1,060	1,066
2	0,035	0,038	0,041	0,044	0,047	0,049	47	1,072	1,079	1,085	1,091	1,098	1,104
3	0,052	0,055	0,058	0,061	0,064	0,067	48	1,111	1,117	1,124	1,130	1,137	1,144
4	0,070	0,073	0,076	0,079	0,082	0,085	49	1,150	1,157	1,164	1,171	1,178	1,185
5	0,087	0,090	0,093	0,096	0,099	0,102	50	1,192	1,199	1,206	1,213	1,220	1,228
6	0,105	0,108	0,111	0,114	0,117	0,120	51	1,235	1,242	1,250	1,257	1,265	1,272
7	0,123	0,126	0,129	0,132	0,135	0,138	52	1,280	1,288	1,295	1,303	1,311	1,319
8	0,141	0,144	0,146	0,149	0,152	0,155	53	1,327	1,335	1,343	1,351	1,360	1,368
9	0,158	0,161	0,164	0,167	0,170	0,173	54	1,376	1,385	1,393	1,402	1,411	1,419
10	0,176	0,179	0,182	0,185	0,188	0,191	55	1,428	1,437	1,446	1,455	1,464	1,473
11	0,194	0,197	0,200	0,203	0,206	0,210	56	1,483	1,492	1,501	1,511	1,520	1,530
12	0,213	0,216	0,219	0,222	0,225	0,228	57	1,540	1,550	1,560	1,570	1,580	1,590
13	0,231	0,234	0,237	0,240	0,243	0,246	58	1,600	1,611	1,621	1,632	1,643	1,653
14	0,249	0,252	0,256	0,259	0,262	0,265	59	1,664	1,675	1,686	1,698	1,709	1,720
15	0,268	0,271	0,274	0,277	0,280	0,284	60	1,732	1,744	1,756	1,767	1,780	1,792
16	0,287	0,290	0,293	0,296	0,299	0,303	61	1,804	1,816	1,829	1,842	1,855	1,868
17	0,306	0,309	0,312	0,315	0,318	0,322	62	1,881	1,894	1,907	1,921	1,935	1,949
18	0,325	0,328	0,331	0,335	0,338	0,341	63	1,963	1,977	1,991	2,006	2,020	2,035
19	0,344	0,348	0,351	0,354	0,357	0,361	64	2,050	2,066	2,081	2,097	2,112	2,128
20	0,364	0,367	0,371	0,374	0,377	0,381	65	2,145	2,161	2,177	2,194	2,211	2,229
21	0,384	0,387	0,391	0,394	0,397	0,401	66	2,246	2,264	2,282	2,300	2,318	2,337
22	0,404	0,407	0,411	0,414	0,418	0,421	67	2,356	2,375	2,394	2,414	2,434	2,455
23	0,424	0,428	0,431	0,435	0,438	0,442	68	2,475	2,496	2,517	2,539	2,560	2,583
24	0,445	0,449	0,452	0,456	0,459	0,463	69	2,605	2,628	2,651	2,675	2,699	2,723
25	0,466	0,470	0,473	0,477	0,481	0,484	70	2,747	2,773	2,798	2,824	2,850	2,877
26	0,488	0,491	0,495	0,499	0,502	0,506	71	2,904	2,932	2,960	2,989	3,018	3,047
27	0,510	0,513	0,517	0,521	0,524	0,528	72	3,078	3,108	3,140	3,172	3,204	3,237
28	0,532	0,535	0,539	0,543	0,547	0,551	73	3,271	3,305	3,340	3,376	3,412	3,450
29	0,554	0,558	0,562	0,566	0,570	0,573	74	3,487	3,526	3,566	3,606	3,647	3,689
30	0,577	0,581	0,585	0,589	0,593	0,597	75	3,732	3,776	3,821	3,867	3,914	3,962
31	0,601	0,605	0,609	0,613	0,617	0,621	76	4,011	4,061	4,113	4,165	4,219	4,275
32	0,625	0,629	0,633	0,637	0,641	0,645	77	4,331	4,390	4,449	4,511	4,574	4,638
33	0,649	0,654	0,658	0,662	0,666	0,670	78	4,705	4,773	4,843	4,915	4,989	5,066
34	0,675	0,679	0,683	0,687	0,692	0,696	79	5,145	5,226	5,309	5,396	5,485	5,576
35	0,700	0,705	0,709	0,713	0,718	0,722	80	5,671	5,769	5,871	5,976	6,084	6,197
36	0,727	0,731	0,735	0,740	0,744	0,749	81	6,314	6,435	6,561	6,691	6,827	6,968
37	0,754	0,758	0,763	0,767	0,772	0,777	82	7,115	7,269	7,429	7,596	7,770	7,953
38	0,781	0,786	0,791	0,795	0,800	0,805	83	8,144	8,345	8,556	8,777	9,010	9,255
39	0,810	0,815	0,819	0,824	0,829	0,834	84	9,514	9,788	10,08	10,39	10,71	11,06
40	0,839	0,844	0,849	0,854	0,859	0,864	85	11,43	11,83	12,25	12,71	13,20	13,73
41	0,869	0,874	0,880	0,885	0,890	0,895	86	14,30	14,92	15,60	16,35	17,17	18,07
42	0,900	0,906	0,911	0,916	0,922	0,927	87	19,08	20,21	21,47	22,90	24,54	26,43
43	0,933	0,938	0,943	0,949	0,955	0,960	88	28,64	31,24	34,37	38,19	42,96	49,10
44	0,966	0,971	0,977	0,983	0,988	0,994	89	57,29	68,75	85,94	114,6	171.9	343,8

ΕΛΛΑΣ

21 ΑΠΡΙΛΙΟΥ

ΕΚΔΟΣΙΣ Δ', 1971 (VI) — ΑΝΤ. 74.000 — ΣΥΜΒ. 2131/15-4-1971
ΕΚΤΥΠΩΣΙΣ - ΒΙΒΛΙΟΔΕΣΙΑ «Κ. ΚΟΝΤΟΓΟΝΗ - Α. ΜΑΛΙΚΟΥΤΗ Ο.Ε.»