ΒΑΣΙΛΕΙΟΝ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΝ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ

ΑΘΗΝΑΙ 1967

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ΄ ΤΑΞΕΩΣ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΒΑΣΙΛΕΙΟΝ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΝ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ΄ ΤΑΞΕΩΣ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΑΘΗΝΑΙ 1967

ΑΝΑΤΥΠΩΣΙΣ

Ἐκ τοῦ βιβλίου τῆς Ἐπιτροπῆς τοῦ Ὑπουργείου Ἐθνικῆς Παιδείας καὶ Θρησκευμάτων «ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΕΙΣ ΤΗΝ ΠΡΩΤΗΝ ΒΑΘΜΙΔΑ ΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ» (Βιβλίον **III**), ὡς ἐτροποποιήθη ὑπὸ τῆς ἁρμοδίας ἐπιτροπῆς τοῦ Ὑπουργείου.

ΠΙΝΑΞ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄

Γεωμετρία εἰς τόν χῶρον (Στερεομετρία).

σελ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β

Ἄλγεβρα

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ΄

Τριγωνομετρία

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ΄

Στοιχεῖα περιγραφικῆς Στατιστικῆς

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΕΙΣ ΤΟΝ ΧΩΡΟΝ (ΣΤΕΡΕΟΜΕΤΡΙΑ)

§ 1. Εὐθεῖαι καὶ ἐπίπεδα. Σχετικαὶ θέσεις των.

1.1. Γενικότητες.

α) Εἰς τό Κεφάλαιον Α΄ τοῦ Βιβλίου Ι ἐμάθαμεν τί εἶναι ἕνα γεωμετρικόν στερεόν (ἤ, συντόμως, στερεόν) καί κατά τί διαφέρει ἀπό τό ἀντίστοιχον φυσικόν στερεόν σῶμα. Εἴδαμεν ὅτι ἕνα στερεόν ἔχει τάς ἀκολούθους ἰδιότητας (Βιβλ. Ι, σελ. 1-2Α):

1ον τό μέγεθός του ἤτοι τήν ἔκτασίν του εἰς τόν χῶρον κατά τρεῖς διαστάσεις, 2ον τό σχῆμα του ἤτοι τήν μορφήν του καί 3ον τήν δυνατότητα νά ἀλλάζη θέσιν εἰς τόν χῶρον χωρίς νά μεταβάλλωνται τό σχῆμα καί τό μέγεθός του.

Ἐμάθαμεν ἐπίσης νά διακρίνωμεν εἰς μερικά στερεά τάς ἐπιφανείας των, ἐπιπέδους ἤ καμπύλας, καί τάς γραμμάς, εὐθείας ἤ καμπύλας, αἱ ὁποῖαι περικλείουν μέρη τῶν ἐπιφανειῶν.

Ὅπως παρετηρήσαμεν (Βιβλ. Ι, σελ. 56-57Α), κάθε γραμμή, κάθε ἐπιφάνεια καί κάθε στερεόν εἶναι ἕνα μή πεπερασμένον σύνολον σημείων. Ἐννοεῖται ὅτι καί ὁλόκληρος ὁ ἀπέραντος χῶρος μέσα εἰς τόν ὁποῖον νοοῦμεν ὅτι κεῖνται τά σημεῖα, αἱ γραμμαί, αἱ ἐπιφάνειαι καί τά στερεά, εἶναι ἕνα μή πεπερασμένον σημειοσύνολον.

β) Λέγοντες γεωμετρικόν σχῆμα θά ἐννοοῦμεν εἰς τό ἑξῆς ἕνα σύνολον ἀπό σημεῖα, γραμμάς, ἐπιφανείας καί στερεά. Ἐπειδή τό καθένα ἀπό αὐτά τά στοιχεῖα τοῦ συνόλου ἀποτελεῖ ἕνα σημειοσύνολον, συμπεραίνομεν ὅτι καί τό γεωμετρικόν σχῆμα εἶναι ἕνα σημειοσύνολον. Ἐάν τό σημειοσύνολον αὐτό εἶναι ὑποσύνολον ἑνός ἐπιπέδου (μέ ἄλλα λόγια, ἐάν περιέχεται μέσα εἰς ἕνα ἐπίπεδον), τότε τό γεωμετρικόν σχῆμα λέγεται ἐπίπεδον. Π.χ. δύο σημεῖα, μία εὐθεῖα, δύο τεμνόμεναι ἤ παράλληλοι εὐθεῖαι, μία γωνία, ἕνα τρίγωνον, μία περιφέρεια, ἕνας κύκλος κτλ. εἶναι τό καθένα χωριστά ἕνα ἐπίπεδον γεωμετρικόν σχῆμα.

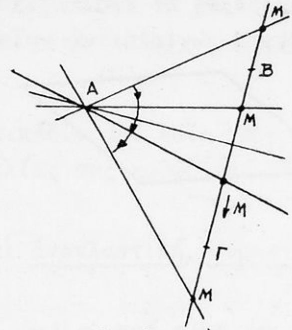
Γεωμετρικά σχήματα μή ἐπίπεδα λέγονται στερεά σχήματα. Π.χ. μία ὁριζόντιος καί μία κατακόρυφος εὐθεῖα χωρίς κοινόν σημεῖον, ἕνα ἐπίπεδον καί μία εὐθεῖα πού τό διαπερνᾶ, δύο μή συμπίπτοντα ἐπίπεδα, ἕνα ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον, μία σφαῖρα κτλ. εἶναι, τό καθένα χωριστά, ἕνα στερεόν σχῆμα.

Ἕως τώρα εἰς τά Βιβλία Ι καί ΙΙ ἐμελετήσαμεν λεπτομερέστερον ἐπίπεδα μόνον σχήματα καί ἐμάθαμεν νά τά σχεδιάζωμεν εἴτε ἐπί τοῦ πίνακος εἴτε ἐπί τοῦ χάρτου σχεδιάσεως μέ τήν βοήθειαν τῶν γνωστῶν σχεδιαστικῶν ὀργάνων. Διά τοῦτο αὐτό τό μέρος τῆς Γεωμετρίας, πού ἐσπουδάσαμεν, λέγεται Ἐπιπεδομετρία. Ἤδη θ' ἀρχίσωμεν μίαν λεπτομερεστέραν μελέτην τῆς Στερεομετρίας, δηλαδή ἐκείνου τοῦ μέρους τῆς Γεωμετρίας πού ἀναφέρεται εἰς τάς ἰδιότητας καί τάς ἀμοιβαίας σχέσεις τῶν γεωμετρικῶν σχημάτων, ἐπιπέδων καί στερεῶν, μέσα εἰς τόν χῶρον. Διά τήν μελέτην αὐτήν εἴμεθα ὑποχρεωμένοι τά διάφορα σχήματα, πού θά ἔχωμεν νά θεωρήσωμεν μέσα εἰς τόν τριδιάστατον χῶρον, νά τά παριστάνωμεν μέ τάς διδιαστάτους (ἐπιπέδους) εἰκόνας των ἐπάνω εἰς τό ἐπίπεδον τοῦ πίνακος ἤ τοῦ χάρτου. Μέ ὅμοιον τρόπον ἐργάζονται οἱ ζωγράφοι, ὅταν σχεδιάζουν εἰς τούς πίνακάς των διάφορα τριδιάστατα ἀντικείμενα.

1.2. Καθορισμός μιᾶς εὐθείας ἤ ἑνός ἐπιπέδου εἰς τόν χῶρον.

α) Ὅπως παρετηρήσαμεν ἤδη (Βιβλ. Ι, σελ.6Α), ἀπό δύο διαφορετικά σημεῖα διέρχεται μία καί μόνον μία εὐθεῖα. Διά τοῦτο λέγομεν ὅτι <u>δύο διαφορετικά σημεῖα ὁρίζουν μίαν εὐθεῖαν.</u>

β) Ἄς θεωρήσωμεν τώρα τρία σημεῖα Α, Β, Γ τοῦ χώρου τά ὁποῖα νά μή ἀνήκουν εἰς τήν ἰδίαν εὐθεῖαν (βλ. σχέδ. 1). Δύο ἀπό αὐτά, π.χ. τά Β καί Γ, ὁρίζουν μίαν εὐθεῖαν· βάζομεν ἕνα κινητόν σημεῖον Μ νά τήν διατρέξη. Ἡ εὐθεῖα ΑΜ στρέφεται τότε περί τό Α καί διαγράφει μίαν ἐπίπεδον ἐπιφάνειαν πού διέρχεται ἀπό τά σημεῖα Α, Β, Γ. Ἀπό τρία λοιπόν σημεῖα τοῦ χώρου πού δέν κεῖνται ἐπ' εὐθείας διέρχεται ἕνα ἐπίπεδον. Δεχόμεθα ὅτι ἕνα μόνον τέτοιο ἐπίπεδον ὑπάρχει, μέ ἄλλους λόγους ὅτι <u>τρία σημεῖα μή κείμενα ἐπ' εὐθείας ὁρίζουν ἕνα ἐπίπεδον.</u>



(Σχέδ. 1)

Ἀπό τήν παραδοχήν αὐτήν εὔκολα ἕπονται τά ἑξῆς:

Ἕνα ἐπίπεδον ὁρίζεται εἰς τόν χῶρον μέ ἕνα ἀπό τούς ἀκολούθους τρόπους:

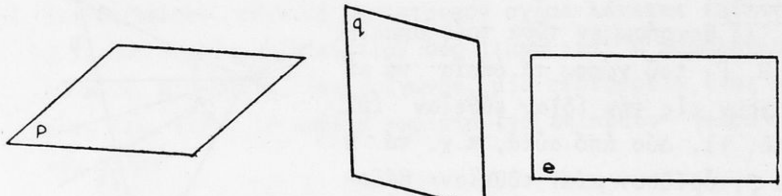
1ον μέ τρία σημεῖα του πού δέν κεῖνται ἐπ' εὐθείας·

2ον μέ μίαν εὐθεῖαν καί ἕνα σημεῖον του πού δέν κεῖται ἐπί τῆς εὐθείας·

3ον μέ δύο τεμνομένας εὐθείας του· διότι ἕνα μόνον ἐπίπεδον τάς περιέχει

4ον μέ δύο παραλλήλους εὐθείας του πού δέν συμπίπτουν. (βλ. Βιβλ. ΙΙ, σελ. 75).

Ἐπειδή τό ἐπίπεδον εἶναι, ὅπως καί ἡ εὐθεῖα, ἕνα ἀπεριόριστον σχῆμα, εἰς τάς σχεδιάσεις μας μόνον ἕνα μέρος του ἠμπορεῖ νά ἀπεικονισθῆ. Τό μέρος αὐτό ὑποθέτομεν συνήθως ὅτι ἔχει σχῆμα ὀρθογώνιον. Ἄν τό ὑλοποιήσωμεν χρησιμοποιοῦντες ἀδιαφανῆ χάρτην καί τό φωτίσωμεν μέ μίαν δέσμην παραλλήλων, φωτεινῶν ἀκτίνων (π.χ. ἡλιακῶν), ἡ σκιά του ἐπάνω εἰς μίαν ἐπίπεδον ἐπιφάνειαν, θά ἔχη ἐν γένει σχῆμα παραλληλογράμμου. Ἔτσι καί εἰς τά σχέδιά μας τό ἐπίπεδον θά παριστάνεται συνήθως μέ ἕνα παραλληλόγραμμον (σχέδ. 2), πού θά σημειώνωμεν μέ ἕνα μικρόν λατινικόν γράμμα: p , q , e κτλ.



(Σχέδ. 2)

1.3. Σχετικαί θέσεις ἐπιπέδων καί εὐθειῶν εἰς τόν χῶρον.

α) Δύο ἐπίπεδα p καί q

ἤ 1ον θά ἔχουν ὅλα των τά σημεῖα κοινά καί θά συμπίπτουν:

$$p \cap q = p = q$$

(πρός τοῦτο ἀρκεῖ νά ἔχουν κοινά τρία σημεῖα μή κείμενα ἐπ' εὐθείας),

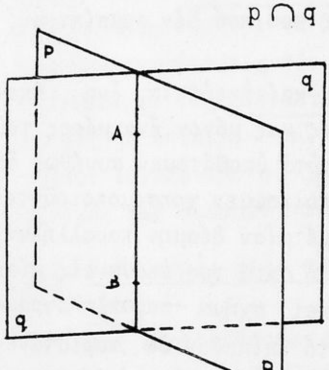
ἤ 2ον θά ἔχουν κοινά τά σημεῖα μιᾶς εὐθείας καί μόνον:

$$p \cap q = \text{εὐθεῖα}$$

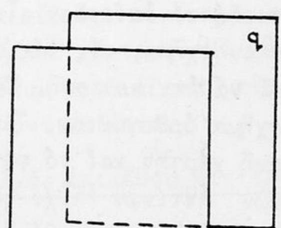
(πρός τοῦτο ἀρκεῖ νά μή συμπίπτουν καί νά ἔχουν ἕνα τουλάχιστον κοινόν σημεῖον , σχ. 3) ,

ἤ 3ον δέν θά ἔχουν κανένα κοινόν σημεῖον (σχ. 4):

$$p \cap q = \emptyset .$$



(Σχέδ. 3)



(Σχέδ. 4)

Εἰς τήν 1ην καί εἰς τήν 3ην περίπτωσιν τά ἐπίπεδα λέγονται παράλληλα , p || q , μέ εὐρεῖαν ἀντιστοίχως στενήν σημασίαν, εἰς τήν 2αν , τεμνόμενα.

Ἄσκησις. Ποῖα ζεύγη παραλλήλων ἐπιπέδων καί ποῖα τεμνομένων βλέπετε εἰς τήν αἴθουσαν διδασκαλίας σας καθώς καί εἰς τά γνωστά σας γεωμετρικά στερεά ;

Ἡ σχέσις τῆς παραλληλίας εἶναι ἀνακλαστική, συμμετρική καί μεταβατική:

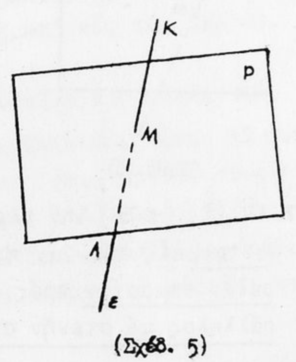
$$p \parallel p \;, \quad p \parallel q \Rightarrow q \parallel p \;, \quad p \parallel q \text{ καί } q \parallel r \Rightarrow p \parallel r.$$

Αἱ δύο πρῶται ἰδιότητες εἶναι ἀμέσως φαneραί ἀπό τόν ὁρισμόν τῆς παραλληλίας. Ἡ τρίτη δηλώνει ὅτι δύο ἐπίπεδα (τά p καί r) πού εἶναι παράλληλα πρός τρίτον (τό q) εἶναι καί μεταξύ των παράλληλα. Αὐτό προκύπτει ἀπό τάς ἑξῆς δύο προτάσεις πού εἶναι συνέπειαι τοῦ ὁρισμοῦ τῆς παραλληλίας δύο ἐπιπέδων, τοῦ ὁρισμοῦ τῆς παραλληλίας δύο εὐθειῶν καί τοῦ Εὐκλειδείου αἰτήματος διά τάς παραλλήλους εὐθείας (Βιβλ. I, σελ. 78Α):

1η πρότασις. Ἐάν ἕνα ἐπίπεδον τέμνῃ δύο παράλληλα ἐπίπεδα, αἱ τομαί θά εἶναι εὐθεῖαι παράλληλοι.

2α πρότασις. Ἀπό δοθέν σημεῖον τοῦ χώρου διέρχεται ἕνα μόνον ἐπίπεδον παράλληλον πρός δοθέν ἐπίπεδον.

β) Ἕνα ὁριζόντιον ἐπίπεδον χωρίζει τόν χῶρον εἰς δύο μέρη: ἕνα ἄνωθεν καί ἕνα ἄλλο κάτωθεν τοῦ ἐπιπέδου. Γενικῶς, ὅταν δοθῇ ἕνα ἐπίπεδον p εἰς τόν χῶρον (σχ. 5), τό σύνολον τῶν σημείων τοῦ χώρου διαμερίζεται εἰς τρία ὑποσύνολα: τό ἕνα εἶναι αὐτό τό ἴδιον τό ἐπίπεδον , τά δύο ἄλλα εὑρίσκονται ἑκατέρωθεν τοῦ ἐπιπέδου p καί λέγονται ἀνοικτοί ἡμίχωροι μέ σύνορον τό ἐπίπεδον p. Καί τά τρία αὐτά σημειοσύνολα εἶναι κυρτά, δηλαδή , ἄν Α καί Β εἶναι δύο ὁποιαδή -



(Σχέδ. 5)

ποτε σημεῖα ἑνός ἐξ αὐτῶν, τότε τό τμῆμα ΑΒ ἀνήκει ὁλόκληρον εἰς αὐτό. Ἕνας ἡμίχωρος μαζί μέ τό σύνορόν του λέγεται κλειστός ἡμίχωρος.

Ἄς εἶναι τώρα Κ καί Λ δύο σημεῖα πού νά μή ἀνήκουν εἰς τόν ἴδιον κλειστόν ἡμίχωρον μέ σύνορον τό ἐπίπεδον p (σχ.5). Τότε τό τμῆμα ΚΛ, ἄρα καί ἡ εὐθεῖα $\varepsilon = ΚΛ$, θά ἔχῃ μέ τό p ἕνα κοινόν σημεῖον καί μόνον ἕνα (διατί μόνον ἕνα ;):

$$p \cap \text{εὐθ. } ΚΛ = \{M\} .$$

Λέγομεν ὅτι ἡ εὐθεῖα ΚΛ διαπερνᾷ τό ἐπίπεδον p

γ) Μία εὐθεῖα ε καί ἕνα ἐπίπεδον p εἰς τόν χῶρον

ἤ 1ον θά ἔχουν ἕνα μόνον κοινόν σημεῖον καί ἡ εὐθεῖα θά διαπερνᾷ τό ἐπίπεδον (σχ. 6):

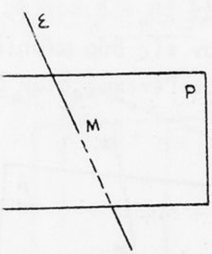
$$p \cap \varepsilon = \{ \text{ἕνα σημεῖον} \} ,$$

ἤ 2ον θά ἔχουν δύο τουλάχιστον κοινά σημεῖα, ὁπότε καί ὅλα τά σημεῖα τῆς ε θά ἀνήκουν εἰς τό p (σχέδ. 7):

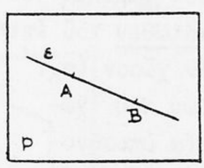
$$p \cap \varepsilon = \varepsilon \quad \text{καί} \quad \varepsilon \subseteq p ,$$

ἤ 3ον δέν θά ἔχουν κανένα κοινόν σημεῖον, π.χ. ὅταν ἡ ε εἶναι παράλληλος (μέ στενήν σημασίαν) πρός μίαν εὐθεῖαν τοῦ ἐπιπέδου p (σχ. 8):

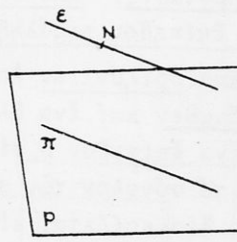
$$p \cap \varepsilon = \emptyset .$$



(Σχέδ. 6)



(Σχέδ. 7)



(Σχέδ. 8)

Εἰς τήν 1ην περίπτωσιν λέγομεν ὅτι ἡ ε καί τό p τέμνονται, εἰς τήν 2αν περίπτωσιν, ὅτι ἡ ε εἶναι παράλληλος μέ εὐρεῖαν σημασίαν πρός τό p καί εἰς τήν 3ην , ὅτι ἡ ε εἶναι παράλληλος μέ στενήν σημασίαν πρός τό p.

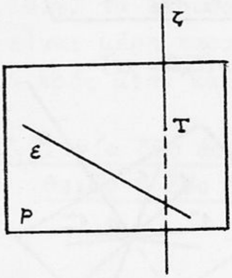
δ) Δύο εὐθεῖαι ε καί ζ εἰς τόν χῶρον

ἤ 1ον δέν θά ἠμποροῦν νά ἀνήκουν εἰς ἕνα καί τό ἴδιον ἐπίπεδον καί, ἑπομένως, δέν θά ἔχουν κανένα κοινόν σημεῖον (αὐτό συμβαίνει π.χ. ὅταν ἡ ε κεῖται μέσα εἰς ἕνα ἐπίπεδον p καί ἡ ζ τέμνη τό p εἰς ἕνα σημεῖον Τ πού δέν κεῖται ἐπάνω εἰς τήν ε (σχέδ. 9),

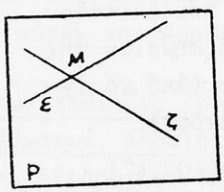
ἤ 2ον θά ἀνήκουν εἰς ἕνα καί τό ἴδιον ἐπίπεδον καί θά ἔχουν ἕνα μοναδικόν κοινόν σημεῖον (σχ. 10),

ἤ 3ον θά ἀνήκουν εἰς ἕνα καί τό ἴδιον ἐπίπεδον καί δέν θά ἔχουν κανένα κοινόν σημεῖον (σχ. 11),

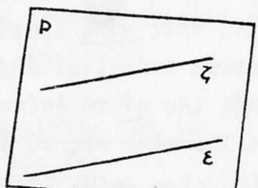
ἤ 4ον θά ἔχουν δύο τουλάχιστον κοινά σημεῖα, ὁπότε θά θά ἔχουν καί ὅλα τους τά σημεῖα κοινά, δηλ. θά συμπίπτουν.



(Σχέδ. 9)



(Σχέδ. 10)



(Σχέδ. 11)

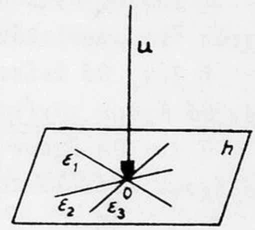
Εἰς τήν 1ην περίπτωσιν αἱ εὐθεῖαι ε καί ζ λέγονται ἀσύμβατοι (ἤ μή συνεπίπεδοι), εἰς τήν 2αν, τεμνόμεναι, εἰς τήν 3ην καί εἰς τήν 4ην, παράλληλοι.

Ἀσκησις. Ποῖα ζεύγη ἀσυμβάτων εὐθειῶν βλέπετε εἰς τάς ἀκμάς τῆς αἰθούσης διδασκαλίας σας καθῶς καί εἰς τάς ἀκμ άς, τῶν γνωστῶν σας γεωμετρικῶν στερεῶν ;

Ἀποδεικνύεται ὅτι εἰς τόν χῶρον δύο εὐθεῖαι παράλληλοι πρός τρίτην εὐθεῖαν εἶναι καί μεταξύ των παράλληλοι. Ἔτσι τό συνολον τῶν εὐθειῶν τοῦ χώρου διαμερίζεται (ὅπως καί τό σύνολον τῶν εὐθειῶν τοῦ ἐπιπέδου, Βιβλ. ΙΙ, σελ. 75-76) εἰς κλάσεις εὐθειῶν αἱ ὁποῖαι εἶναι ἀνά δύο μεταξύ των παράλληλοι. Κάθε κλάσις ὁρίζει μίαν διεύθυνσιν· ἔτσι δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι καθώς καί δύο τεμνόμεναι ἀνήκουν εἰς διαφορετικάς κλάσεις καί ἀντιπροσωπεύουν δύο διαφορετικάς διευθύνσεις.

ε) Εὐθεῖα κάθετος πρός ἐπίπεδον. Ἡ εὐθεῖα κ τοῦ νήματος τῆς στάθμης (βλ. σχ. 12) λέγεται, ὅπως εἶναι γνωστόν, κατακόρυφος εὐθεῖα, σχηματίζει δέ ὀρθάς γωνίας μέ ὅλας τάς εὐθείας ἑνός ὁριζοντίου ἐπιπέδου h αἱ ὁποῖαι διέρχονται ἀπό τό ἴχνος της O μέσα εἰς τό ἐπίπεδον.

Ἡ εὐθεῖα κ καθώς καί ἡ διεύθυνσις τήν ὁποίαν ἀντιπροσωπεύει λέγεται κάθετος πρός τό ἐπίπεδον h.



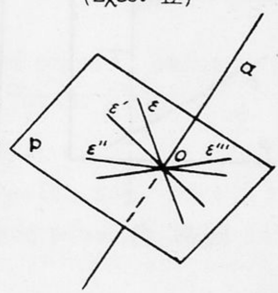
(Σχέδ. 12)

Γενικῶς μία εὐθεῖα α λέγεται κάθετος πρός ἕνα ἐπίπεδον p (βλ. σχ.13), ὅταν τέμνη τό ἐπίπεδον καί εἶναι κάθετος πρός κάθε εὐθεῖαν τοῦ ἐπιπέδου ἡ ὁποία διέρχεται ἀπό τό σημεῖον τῆς τομῆς της μέ τό ἐπίπεδον (ἀπό τό ἴχνος της μέσα εἰς τό ἐπίπεδον):

$$\sphericalangle(O\alpha,\varepsilon) = \sphericalangle(O\alpha,\varepsilon') = \sphericalangle(O\alpha,\varepsilon'')$$

$$= \ldots = 90^\circ \iff \alpha \perp p.$$

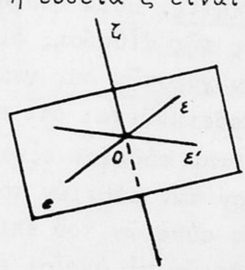
Λέγομεν τότε ὅτι καί τό ἐπίπεδον εἶναι κάθετον πρός τήν εὐθεῖαν: $p \perp \alpha$.



(Σχέδ. 13)

Εἰς τό σχ. 14 ἡ εὐθεῖα ζ εἶναι κάθετος πρός κάθε μίαν ἀπό τάς δύο τεμνομένας εὐθείας ε καί ε' εἰς τό σημεῖον O τῆς τομῆς των. Αἱ εὐθεῖαι ε καί ε' ὁρίζουν ἕνα ἐπίπεδον e. Ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ εὐθεῖα ζ εἶναι κάθετος καί πρός πᾶσαν ἄλλην εὐθεῖαν τοῦ e ἡ ὁποία διέρχεται ἀπό τό O.

Ὥστε, **ἐάν μία εὐθεῖα εἶναι κάθετος πρός δύο τεμνομένας εὐθείας, εἰς τό σημεῖον τῆς τομῆς των , θά εἶναι κάθετος καί πρός τό ἐπίπεδον τό ὁποῖον ὁρίζουν.**



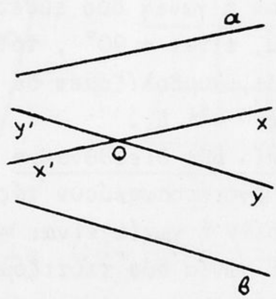
(Σχέδ. 14)

Ὅπως γνωρίζομεν, μέσα εἰς ἕνα ἐπίπεδον ἀπό ἕνα δοθέν σημεῖον διέρχεται μία μόνον εὐθεῖα κάθετος πρός δοθεῖσαν εὐθεῖαν τοῦ ἐπιπέδου. Αὐτό καί ὅσα εἴπαμεν διά τήν καθετότητα μεταξύ εὐθείας καί ἐπιπέδου ἔχουν ὡς συνέπειαν τά ἑξῆς:

I) Ἀπό ἕνα δοθέν σημεῖον τοῦ χώρου διέρχεται μία μόνον εὐθεῖα κάθετος πρός δοθέν ἐπίπεδον.

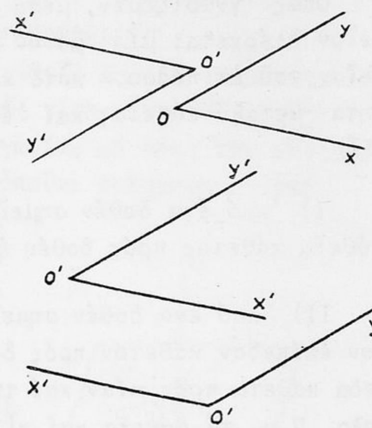
II) Ἀπό ἕνα δοθέν σημεῖον τοῦ χώρου διέρχεται ἕνα μόνον ἐπίπεδον κάθετον πρός δοθεῖσαν εὐθεῖαν. Ἄρα δύο ἐπίπεδα κάθετα πρός μίαν καί τήν αὐτήν εὐθεῖαν εἶναι παράλληλα. Π.χ. τά δάπεδα καί αἱ ὀροφαί εἰς μίαν πολυώροφον οἰκίαν εἶναι μέρη παραλλήλων ἐπιπέδων, ἐπειδή ταῦτα εἶναι κάθετα πρός μίαν καί τήν αὐτήν κατακόρυφον εὐθεῖαν.

§ 2. Γωνία δύο ἀσυμβάτων εὐθειῶν. Ὀρθογωνιότης δύο εὐθειῶν ἤ δύο διευθύνσεων. Καθετότης δύο ἐπιπέδων. Δίεδροι γωνίαι.



(Σχέδ. 15)

2.1. α) Ὅπως γνωρίζομεν, δύο εὐθεῖαι πού συναντῶνται σχηματίζουν τέσσαρας γωνίας, ἀνά δύο κατακορυφήν καί ἴσας. Εἶναι σκόπιμον νά εἰσαγάγωμεν τώρα τήν ἔννοιαν τῆς γωνίας δύο ἀσυμβάτων ἤ παραλλήλων (μέ στενήν σημασίαν) εὐθειῶν, δηλαδή δύο εὐθειῶν πού δέν συναντῶνται. Αὐτό γίνεται ὡς ἑξῆς: Ἄς εἶναι α καί β δύο εὐθεῖαι πού δέν συναντῶνται (σχ. 15). Ἀπό τό τυχόν σημεῖον O τοῦ χώρου διέρχεται μία εὐθεῖα x΄O x παράλληλος πρός α καί μία y΄Oy // β. Ἀπό τάς τέσσαρας γωνίας πού σχηματίζονται μέ κορυφήν τό O, δύο ἴσαι κατακορυφήν εἶναι $\leq 90^\circ$. Τό κοινόν μέγεθος αὐτῶν τῶν δύο ἴσων γωνιῶν ὁρίζομεν ὡς γωνίαν τῶν εὐθειῶν α καί β. Τό μέγεθος αὐτό δέν ἐξαρτᾶται ἀπό τό σημεῖον O τοῦ χώρου πού ἐχρησιμοποιήσαμεν διά νά τό καθορίσωμεν. Πράγματι, ὅπως εἰς τήν Ἐπιπεδομετρίαν, ἠμποροῦμεν νά ἀποδείξωμεν ἐδῶ τό ἑξῆς:



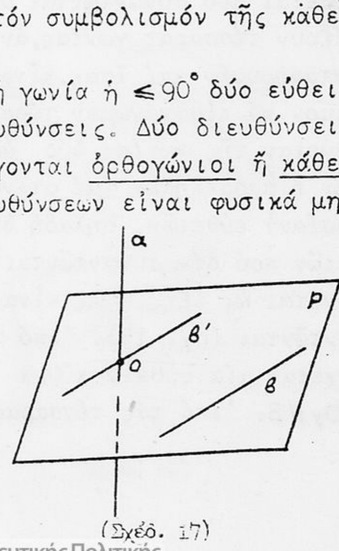
(Σχέδ. 16)

Δύο γωνίαι $\sphericalangle(Ox, Oy)$ καί $\sphericalangle(O'x', O'y')$ (βλ. σχ.16) εἰς τόν χῶρον μέ πλευράς παραλλήλους εἶναι ἤ ἴσαι ἤ παραπληρωματικαί: τό πρῶτον συμβαίνει, ὅταν αἱ παράλληλοι πλευραί εἶναι ὁμόρροποι ἤ ὅταν αἱ παράλληλοι πλευραί εἶναι ἀντίρροποι· τό δεύτερον συμβαίνει, ὅταν δύο παράλληλοι πλευραί εἶναι ὁμόρροποι, αἱ δύο ἄλλαι ὅμως ἀντίρροποι.

Ὅταν ἡ γωνία δύο εὐθειῶν ε καί ζ τοῦ χώρου, ὅπως ὡρίσθη ἀνωτέρω, εἶναι $= 90^\circ$, τότε αἱ εὐθεῖαι ε καί ζ λέγονται ὀρθογώνιοι, συμβολίζομεν δέ αὐτό μέ τόν συμβολισμόν τῆς καθετότητος: $\varepsilon \perp \zeta$.

Γωνία δύο διευθύνσεων λέγεται ἡ γωνία ἡ $\leq 90^\circ$ δύο εὐθειῶν πού ἀντιπροσωπεύουν τάς δύο διευθύνσεις. Δύο διευθύνσεις τῶν ὁποίων ἡ γωνία εἶναι $= 90^\circ$, λέγονται ὀρθογώνιοι ἤ κάθετοι. Ἡ γωνία δύο ταυτιζομένων διευθύνσεων εἶναι φυσικά μηδενική ($= 0^\circ$).

β) Ἄς εἶναι $\alpha \perp p$ καί $\beta \subset p$ δηλ. β εὐθεῖα τοῦ p (σχ. 17). Ἀπό τό ἴχνος O τῆς καθέτου α διέρχεται μέσα εἰς τό p ἡ $\beta' \parallel \beta$. Θά εἶναι $\sphericalangle(O\alpha, O\beta') = 90^\circ$ (διατί;). Ἄρα αἱ δύο εὐθεῖαι α καί β εἶναι ὀρθογώνιοι. Ὥστε:



(Σχέδ. 17)

Κάθε εὐθεῖα κάθετος πρός ἐπίπεδον εἶναι ὀρθογώνιος πρός κάθε εὐθεῖαν τοῦ ἐπιπέδου.

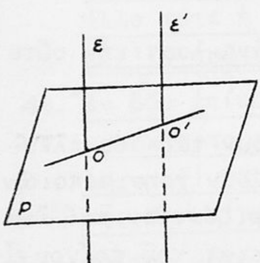
Ἀντιστρόφως, ἄν μία εὐθεῖα εἶναι ὀρθογώνιος πρός δύο τεμνομένας εὐθείας ἑνός ἐπιπέδου, τότε θά εἶναι κάθετος καί πρός τό ἐπίπεδον (διατί;)

γ) Ἀπό τά προηγούμενα ἕπονται αἱ ἀκόλουθοι χρήσιμοι προτάσεις :

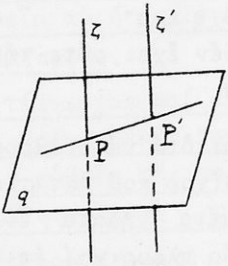
I) Δύο εὐθεῖαι κάθετοι πρός τό ἴδιον ἐπίπεδον εἶναι παράλληλοι (σχ. 18α).

II) Ἐάν μία εὐθεῖα εἶναι κάθετος πρός ἐπίπεδον, τότε καί κάθε παράλληλος πρός αὐτήν θά εἶναι κάθετος πρός τό ἐπίπεδον (σχ. 18β).

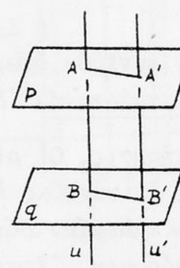
III) Δύο παράλληλα ἐπίπεδα ἀποκόπτουν ἐπί τῶν εὐθειῶν, πού εἶναι κάθετοι πρός τά ἐπίπεδα, ἴσα τμήματα. Τό κοινόν μῆκος τῶν τμημάτων τούτων λέγεται ἀπόστασις τῶν δύο παραλλήλων ἐπιπέδων (σχ. 19).



(Σχέδ. 18α)



(Σχέδ. 18β)



(Σχέδ. 19)

$(\varepsilon \perp p,\ \varepsilon' \perp p) \Rightarrow \varepsilon \parallel \varepsilon'$ $(\zeta \perp q,\ \zeta' \parallel \zeta) \Rightarrow \zeta' \perp q$ $(p \parallel q,\ \kappa \perp p,\ \kappa' \perp q) \Rightarrow AB = A'B'$

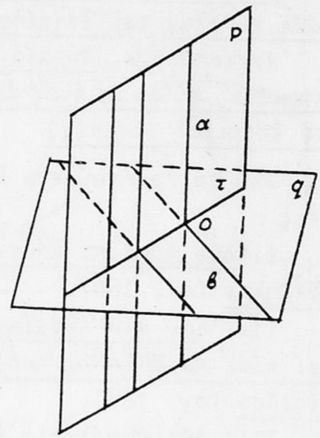
2.2. Ἐπίπεδα κάθετα.

α) Ἡ ἐπίπεδος ὄψις τοῦ τοίχου ἑνός δωματίου εἶναι κάθετος πρός τό ὁριζόντιον ἐπίπεδον τοῦ δαπέδου, ἐπειδή ὁ τοῖχος κατεσκευάσθη οὕτως ὥστε ἡ ἐπίπεδος ὄψις του νά περιέχῃ κατακορύφους εὐθείας, δηλαδή εὐθείας καθέτους πρός τό ὁριζόντιον ἐπίπεδον.

Γενικῶς ἕνα ἐπίπεδον p (σχ. 20) λέγεται κάθετον πρός ἕνα ἐπίπεδον q ($p \perp q$), ἄν περιέχῃ μίαν τουλάχιστον εὐθεῖαν $\alpha \perp q$. Ἐπειδή ἡ α θά τέμνῃ τό q, συμπεραίνομεν ὅτι καί τό p τέμνει τό q. Ἔστω τ ἡ εὐθεῖα τομῆς καί β ἡ εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου q ἡ κάθετος πρός τήν τ εἰς τό σημεῖον O, ὅπου ἡ α συναντᾷ τήν τ. Ἔχομεν

$$\beta \perp \tau \quad \text{καί} \quad \beta \perp \alpha ,$$

ἄρα $\qquad \beta \perp p.$



(Σχέδ. 20)

Κατά συνέπειαν καί τό ἐπίπεδον q περιέχει μίαν τουλάχιστον εὐθεῖαν κάθετον πρός τό p καί ἑπομένως εἶναι $q \perp p$. Μέ ἄλλους λόγους ἡ καθετότης μεταξύ ἐπιπέδων ἔχει τήν <u>συμμετρικήν</u> ἰδιότητα:

$$p \perp q \Longrightarrow q \perp p\cdot$$

εἶναι φανερόν ὅμως ὅτι δέν ἔχει οὔτε τήν <u>ἀνακλαστικήν</u> οὔτε τήν <u>μεταβατικήν</u> ἰδιότητα.

<u>Παρατήρησις</u>. Οἱ οἰκοδόμοι διά νά διαμορφώσουν τάς δύο πλευρικάς ἐπιφανείας ἑνός τοίχου πού κατασκευάζουν χρησιμοποιοῦν διά τήν καθεμίαν δύο τεταμένα νήματα: ἕνα ὁριζόντιον καί ἕνα κατακόρυφον. Ἔτσι αἱ δύο πλευρικαί ἐπιφάνειαι τοῦ τοίχου εἶναι μέρη ἐπιπέδων <u>κατακορύφων</u>, δηλαδή ἐπιπέδων καθέτων πρός ὁριζόντιον ἐπίπεδον. Ὁ σοβᾶς ἁπλώνεται κατόπιν ἐπί τῆς πλευρικῆς ἐπιφανείας μέ τήν βοήθειαν ἑνός κανόνος πού κινεῖται ἐπί ἰσοπαχῶν κατακορύφων "ὁδηγῶν" ἀπό σοβᾶ, τῶν ὁποίων ἡ κατασκευή ἔχει προηγηθῆ. (Ὑπενθυμίζομεν ὅτι μία εὐθεῖα πού κινεῖται στηριζομένη ἐπί δύο παραλλήλων εὐθειῶν γεννᾷ ἐπίπεδον). Μέ ἀνάλογον τρόπον κατασκευάζεται καί ἕνα δάπεδον ἀπό τσιμέντον. Ἐδῶ ὅμως ὡς "ὁδηγοί" χρησιμοποιοῦνται ξύλινοι κανόνες (πῆχες) ὁριζοντιωμένοι μέ τήν βοήθειαν ἑνός ἀλφαδιοῦ (μιᾶς ἀεροστάθμης).

β) Ἀπό ὅσα εἴπομεν ἕως τώρα ἕπονται αἱ ἀκόλουθοι χρήσιμοι προτάσεις.

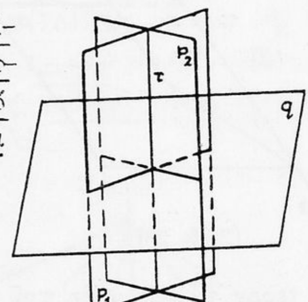
1η. Ἂν μία εὐθεῖα α εἶναι $\perp$ πρός ἕνα ἐπίπεδον p, τότε κάθε ἐπίπεδον πού περιέχει τήν α εἶναι $\perp$p.

Ἔτσι αἱ διάφοροι θέσεις πού ἠμπορεῖ νά πάρῃ μία θύρα, ὅταν στρέφεται γύρω εἰς τόν κατακόρυφον ἄξονά της, ὁρίζουν ἐπίπεδα κάθετα πρός τό ὁριζόντιον ἐπίπεδον τοῦ δαπέδου. Ἐπίπεδα ὅπως αὐτά λέγονται κατακόρυφα ἐπίπεδα.

2η. Ἂν δύο ἐπίπεδα p καί q εἶναι μεταξύ των κάθετα, τότε τά ἐπίπεδα τέμνονται καί κάθε εὐθεῖα τοῦ ἑνός κάθετος πρός τήν τομήν των τ εἶναι κάθετος πρός τό ἄλλο ἐπίπεδον (σχ. 20):

$$(p \perp q\ ,\ \alpha \subset p \ \text{ καί }\ \alpha \perp \tau) \implies \alpha \perp q.$$

3η. Ἂν δύο ἐπίπεδα εἶναι μεταξύ των κάθετα καί ἀπό ἕνα σημεῖον τοῦ ἑνός νοήσωμεν μίαν εὐθεῖαν κάθετον πρός τό ἄλλο τότε ἡ εὐθεῖα αὐτή περιέχεται εἰς τό πρῶτον ἐπίπεδον.

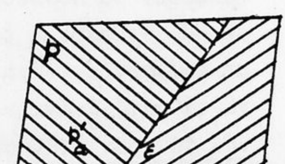


(Σχέδ. 21)

4η. Ἂν δύο ἐπίπεδα τέμνωνται καί εἶναι κάθετα πρός τρίτον ἐπίπεδον (σχ. 21), τότε ἡ εὐθεῖα τῆς τομῆς των εἶναι κάθετος πρός τό τρίτον αὐτό ἐπίπεδον (διατί;):

$$(p_1 \cap p_2 = \text{εὐθεῖα } \tau\ ,\ p_1 \perp q\ ,\ p_2 \perp q) \implies \tau \perp q.$$

2.3. Δίεδροι γωνίαι.



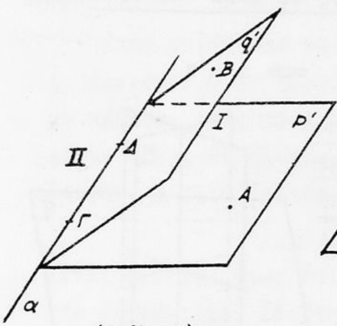
(Σχέδ. 22)

α) Ὅπως εἴδαμεν εἰς τό Βιβλίον Ι σελ. 80 Α, ὅταν δοθῇ μία εὐθεῖα ε μέσα εἰς ἕνα ἐπίπεδον p, τό σύνολον τῶν σημείων τοῦ p διαμερίζεται εἰς τρία ὑποσύνολα (σχ. 22): τό ἕνα εἶναι αὐτή ἡ ἰδία ἡ εὐθεῖα ε, τά δύο ἄλλα p'_α καί p''_α εὑρίσκονται ἑκατέρωθεν τῆς ε καί λέγονται ἀνοικτά ἡμιεπίπεδα μέ σύνορον ἤ ἀκμήν τήν ε.

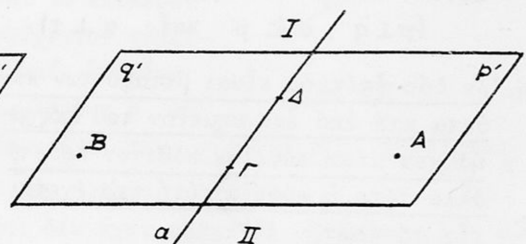
Ἕνα ἀνοικτόν ἡμιεπίπεδον μαζί μέ τήν ἀκμήν του ἀποτελοῦν αὐτό πού καλοῦμεν κλειστόν ἡμιεπίπεδον καί, χάριν συντομίας, ἡμιεπίπεδον. Π.χ. εἰς τό σχ. 22 ἔχομεν

$$p'_{\alpha} \cup \varepsilon = \text{κλειστόν ἡμιεπίπεδον } p' .$$

β) Ἄς θεωρήσωμεν τώρα τό σχῆμα $S = p' \cup q'$ πού ἀποτελεῖται ἀπό δύο μή συμπίπτοντα ἡμιεπίπεδα p′ καί q′ μέ κοινήν ἀκμήν, ἔστω τήν εὐθεῖαν α (σχ. 23 καί 24). (Ἠμποροῦμεν νά πραγματοποιήσωμεν ὑλικῶς ἕνα μέρος τοῦ σχήματος S, ἄν, ἀφοῦ διπλώσωμεν ἕνα λεπτόν καρτόνι , ἀνοίξωμεν ὀλιγώτερον ἤ περισσό-



(Σχέδ. 23)



(Σχέδ. 24)

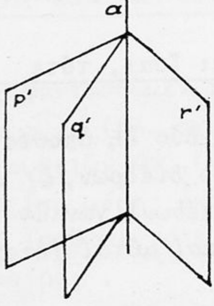
τερον τά δύο μέρη τοῦ καρτονιοῦ τά ἑκατέρωθεν τῆς εὐθείας τοῦ τσακίσματος). Τά σημεῖα τοῦ χώρου πού δέν ἀνήκουν εἰς τό σχῆμα S, κατανέμονται εἰς δύο ξένα μεταξύ τους σημειοσύνολα I καί II μέ τήν ἀκόλουθον ἰδιότητα:

Δύο ὁποιαδήποτε σημεῖα τοῦ I ἤ δύο ὁποιαδήποτε τοῦ II ἠμποροῦν νά συνδεθοῦν μέ μίαν συνεχῆ (δηλαδή ὄχι διακεκομμένην) γραμμήν ἡ ὁποία νά μή συναντᾷ τό S , ἐνῷ κάθε γραμμή πού συνδέει ἕνα σημεῖον τοῦ I μέ ἕνα σημεῖον τοῦ II συναντᾷ κατ' ἀνάγκην τό S . Κατά ταῦτα τό σχῆμα S εἶναι κοινόν σύνορον τῶν σημειοσυνόλων I καί II. Τό καθένα τώρα ἀπό τά δύο αὐτά σημειοσύνολα μαζί μέ τό σύνορόν του S λέγεται δίεδρος γωνία μέ ἕδρας τά ἡμιεπίπεδα p′ καί q′ καί μέ ἀκμήν τήν εὐθεῖαν α. Ὅταν αἱ δύο ἕδραι δέν περιέχωνται εἰς τό ἴδιον ἐπίπεδον (σχ. 23), ἡ μία ἀπό τάς δύο διέδρους γωνίας εἶναι <u>κυρτόν</u> σημειοσύνολον καί λέγεται <u>κυρτή</u> δίεδρος, ἡ ἄλλη εἶναι ἕνα <u>μή κυρτόν</u> σημειοσύνολον καί λέγεται <u>μή κυρτή</u> δίεδρος. Ὅταν αἱ δύο ἕδραι περιέχωνται εἰς τό ἴδιον ἐπίπεδον (σχ. 24), τότε αἱ δύο δίεδροι γωνίαι εἶναι ἀμφότεραι κυρτά σημειοσύνολα καί συμπίπτουν ἀντιστοίχως μέ τούς δύο ἡμιχώρους (βλ. § 1.3,β) οἱ ὁποῖοι ὁρίζονται ἀπό τό ἐπίπεδον, λέγονται δέ <u>ἀποπλατυσμέναι</u> δίεδροι.

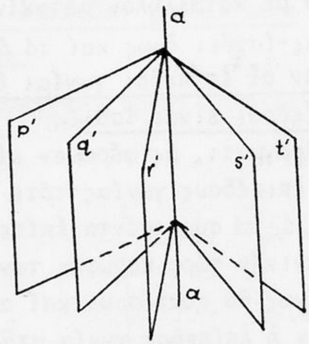
Μία δίεδρος (σχ. 23, 24) μέ ἀκμήν τήν εὐθεῖαν α, πού ὁρίζεται ἀπό τά σημεῖα Γ, Δ, καί μέ ἕδρας τά ἡμιεπίπεδα p΄ καί q΄, πού περιέχουν ἀντιστοίχως τά μή κείμενα ἐπί τῆς α σημεῖα Α καί Β, θά συμβολίζεται μέ ἕναν ἀπό τούς ἀκολούθους τρόπους:

$\widehat{p'\alpha q'}$, $\widehat{p'(\Gamma\Delta)q'}$, $\widehat{A(\Gamma\Delta)B}$, $\widehat{A\alpha B}$.

Εἰς τό σχέδ. 25 εἰκονίζονται δύο <u>ἐφεξῆς</u> δίεδροι γωνίαι $\widehat{p'\alpha q'}$ καί $\widehat{q'\alpha r'}$, εἰς δέ τό σχέδ. 26 <u>τέσσαρες διαδοχικαί</u> δίεδροι $\widehat{p'\alpha q'}$, $\widehat{q'\alpha r'}$, $\widehat{r'\alpha s'}$, $\widehat{s'\alpha t'}$.

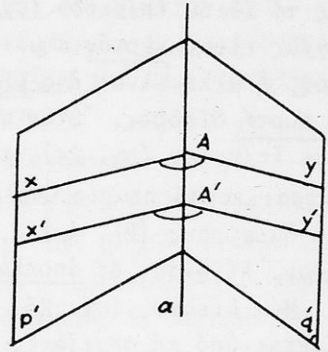


(Σχέδ. 25)



(Σχέδ. 26)

γ) <u>Ἐπίπεδος γωνία διέδρου</u>. Εἰς τήν δίεδρον $\widehat{p'\alpha q'}$ τοῦ (σχ. 27) αἱ ἡμιευθεῖαι Αx καί Α΄x΄ κεῖνται μέσα εἰς τό ἡμιεπίπεδον p΄ καί εἶναι κάθετοι πρός τήν ἀκμήν α, αἱ δέ ἡμιευθεῖαι Αy καί Α΄y΄ κεῖνται μέσα εἰς τό ἡμιεπίπεδον q΄ καί



(Σχέδ. 27)

εἶναι κάθετοι πρός τήν ἀκμήν α.
Ἐπομένως ἔχομεν

$Ax \parallel Ax'$, $Ay \parallel Ay'$, $\widehat{xAy} = \widehat{x'A'y'}$,

ἐπίπεδον $xAy \perp \alpha$ καί ἐπίπεδον $x'A'y' \perp \alpha$

Κατά ταῦτα αἱ γωνίαι $\widehat{xAy}$ καί $\widehat{x'A'y'}$ εἶναι τομαί τῆς διέδρου $\widehat{p'\alpha q'}$ μέ δύο ἐπίπεδα $\perp$ πρός τήν ἀκμήν εἰς τά σημεῖα της A καί A′ καί, ὅπως παρετηρήσαμεν, εἶναι ἴσαι. Ἔτσι αἱ ἀπειράριθμοι τομαί μιᾶς διέδρου μέ τά διάφορα ἐπίπεδα τά κάθετα πρός τήν ἀκμήν εἶναι (ἐπίπεδοι) γωνίαι ἴσαι μεταξύ των. Μία ὁποιαδήποτε ἀπό αὐτάς λέγεται ἐπίπεδος γωνία τῆς θεωρουμένης διέδρου.

Δύο ἴσαι δίεδροι γωνίαι (πού ἠμποροῦν δηλαδή νά ταυτισθοῦν μέ κατάλληλον μετακίνησιν) ἔχουν φυσικά ἴσας ἐπιπέδους γωνίας· ἰσχύει ὅμως καί τό ἀντίστροφον:

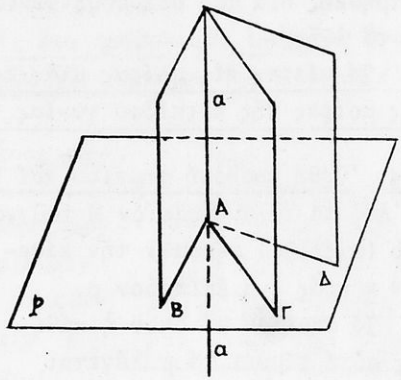
Ἄν αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι δύο διέδρων εἶναι ἴσαι, τότε καί αἱ δίεδροι εἶναι ἴσαι.

Πράγματι, ἄς φέρωμεν εἰς ἐφαρμογήν τάς δύο ἐξ ὑποθέσεως ἴσας ἐπιπέδους γωνίας· τότε αἱ ἀκμαί τῶν δύο διέδρων, ὡς κάθετοι πρός τά συμπεσόντα ἐπίπεδα τῶν δύο (ἐπιπέδων) γωνιῶν εἰς τήν κοινήν τώρα κορυφήν των, θά συμπέσουν καί αὐταί (διατί;), ἑπομένως θά συμπέσουν καί αἱ δύο δίεδροι.

Ἄν ἡ ἐπίπεδος γωνία μιᾶς διέδρου εἶναι ὀρθή, τότε τά δύο ἡμιεπίπεδα πού ἀποτελοῦν τάς ἕδρας της εἶναι μέρη δύο καθέτων ἐπιπέδων, σύμφωνα μέ τόν ὁρισμόν τῆς § 2.2.

Ἀντιστρόφως, ἄν αἱ ἕδραι μιᾶς διέδρου εἶναι μέρη δύο καθέτων ἐπιπέδων, τότε ἡ ἐπίπεδος γωνία της θά εἶναι ὀρθή. Μία δίεδρος γωνία πού ἔχει ἐπίπεδον γωνίαν ὀρθήν λέγεται καί αὐτή ὀρθή. Ἠμποροῦμεν λοιπόν τώρα νά εἴπωμεν τό ἑξῆς: Δύο ἐπίπεδα εἶναι κάθετα, ὅταν καί μόνον ὅταν τέμνωνται καί σχηματίζουν **τέσσαρας διέδρους** ὀρθάς γωνίας. (Πρός τοῦτο ἀρκεῖ ἡ μία ἀπό τάς σχηματιζομένας διέδρους νά εἶναι ὀρθή).

δ) Μέτρησις διέδρου. Θεωροῦμεν μέσα εἰς τό ἐπίπεδον p (σχ. 28) τάς δύο ἐφεξῆς γωνίας $\widehat{BA\Gamma}$ καί $\widehat{\Gamma A\Delta}$· ἄθροισμά των εἶναι ἡ ἐπίπεδος γωνία $\widehat{BA\Delta}$. Εἰς τό σημεῖον **A** φέρομεν κάθετον α πρός τό **ἐπίπεδον** p. Σχηματίζονται αἱ ἐφεξῆς δίεδροι $\widehat{B\alpha\Gamma}$ καί $\widehat{\Gamma\alpha\Delta}$· ἡ ἕνωσίς των ἀποτελεῖ τήν **δίεδρον** γωνίαν $\widehat{B\alpha\Delta}$:



(Σχέδ. 28)

$$\widehat{B\alpha\Gamma} \cup \widehat{\Gamma\alpha\Delta} = \widehat{B\alpha\Delta},$$

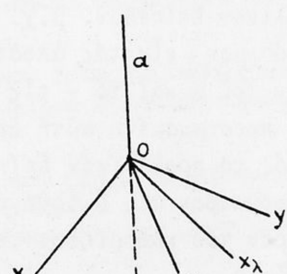
καί λέγεται ἄθροισμα τῶν διέδρων $\widehat{B\alpha\Gamma}$ **καί** $\widehat{\Gamma\alpha\Delta}$. Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ἐπίπεδος γωνία $\widehat{BA\Delta}$ τοῦ ἀθροίσματος $\widehat{B\alpha\Delta}$ τῶν δύο διέδρων $\widehat{B\alpha\Gamma}$ **καί** $\widehat{\Gamma\alpha\Delta}$ εἶναι ἄθροισμα τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν των:

$$\widehat{BA\Delta} = \widehat{BA\Gamma} + \widehat{\Gamma A\Delta}.$$

Ἄς φαντασθῶμεν τώρα ὅτι διηρέσαμεν τήν ὀρθήν ἐπίπεδον γωνίαν $\widehat{xOy}$ (βλ. σχ. 29) διά 89 ἡμιευθειῶν $Ox_1, Ox_2, \dots, Ox_{89}$ εἰς 90 ἴσα μέρη· ἕκαστον μέρος θά ἰσοῦται τότε μέ γωνίαν μιᾶς μοίρας.

Φέρομεν πάλιν τήν κάθετον α πρός τό ἐπίπεδον xOy εἰς τό σημεῖον O.

Σχηματίζονται τότε 90 ἴσαι διαδοχικαί δίεδροι $\widehat{x\alpha x_1}, \dots, \widehat{x_{89}\alpha y}$ μέ ἀντιστοίχους ἐπιπέδους γωνίας τά 90 ἴσα μέρη εἰς



$1 \leq \kappa < \lambda \leq 89$

(Σχέδ. 29)

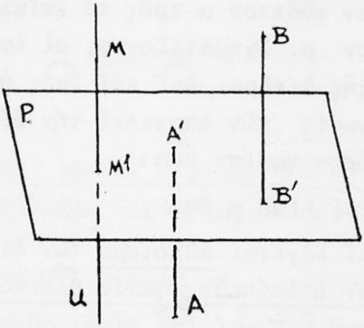
κά όποΐα διηρέσαμεν τήν όρθήν γωνίαν $\widehat{xOy}$.

'Η καθεμιά άπό αύτάς λέγεται δίεδρος μιᾶς μοίρας, εἶναι ἴση μέ 1/90 μιᾶς όρθῆς διέδρου καί ἠμπορεῖ νά ληφθῆ ὡς μονάς μετρήσεως διά τάς διέδρους γωνίας. 'Από ὅσα εἴπαμεν ἕπεται τώρα τό ἑξῆς:

Τό μέτρον είς μοίρας μιᾶς διέδρου εἶναι ἴσον μέ τό μέτρον είς μοίρας τῆς ἐπιπέδου γωνίας της.

2.4. 'Ορθή προβολή σημείου καί εὐθείας εἰς ἐπίπεδον .

α) 'Από τό τυχόν σημεῖον Μ τοῦ χώρου (σχέδ.30) φέρομεν τήν κάθετον κ πρός ἕνα ἐπίπεδον p.

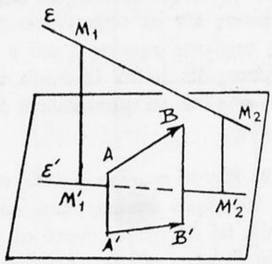


(Σχέδ. 30)

Τό σημεῖον Μ' ὅπου ἡ κάθετος αὐτή τέμνει τό p λέγεται όρθή προβολή τοῦ Μ είς τό ἐπίπεδον p (ἤ ἐπάνω είς τό ἐπίπεδον p). Τό p λέγεται προβολικόν ἐπίπεδον καί τό μῆκος τοῦ τμήτος ΜΜ' ἀπόστασις τοῦ Μ ἀπό τό ἐπίπεδον p. Εἶναι σκόπιμον νά δώσωμεν είς τήν ἀπόστασιν αὐτήν τό πρόσημον + ἤ τό πρόσημον - , καθόσον τό σημεῖον Μ κεῖται είς τόν ἕνα ἤ είς τόν ἄλλον ἡμίχωρον πού ὁρίζονται ἀπό τό προβολικόν ἐπίπεδον. Π.χ. ἄν τό p εἶναι ὁριζόντιον, δίδομεν τό πρόσημον + είς τάς ἀποστάσεις τῶν σημείων πού εὑρίσκονται ἄνωθεν τοῦ p καί τό - είς τά σημεῖα πού κεῖνται κάτωθεν τοῦ p. 'Η προσημασμένη αὐτή ἀπόστασις λέγεται ὑψόμετρον τοῦ Μ ὡς πρός τό προβολικόν ἐπίπεδον p. Τά σημεῖα τοῦ p ἔχουν φυσικά ὑψόμετρον 0. 'Η ὀρθή προβολή ἑνός σημείου μαζί μέ τό ὑψόμετρόν του καθορίζουν τελείως τήν θέσιν τοῦ σημείου είς τόν χῶρον.

Μέ τήν ὀρθήν προβολήν τῶν σημείων τοῦ χώρου είς ἕνα ἐπίπεδον p ἔχομεν δημιουργήσει μίαν ἀπεικόνισιν τοῦ χώρου ἐπί τοῦ ἐπιπέδου p (βλ. Βιβλ. ΙΙ, §8, σελ. 79-82). 'Η ἀπεικόνισις δέν εἶναι ἀμφιμονοσήμαντος, διότι, ὅπως εἶναι φανερόν, ἕνα σημεῖον Μ΄ τοῦ p, εἶναι εἰκών ἀπειραρίθμων σημείων τοῦ χώρου: τῶν διαφόρων σημείων τῆς εὐθείας κ πού εἶναι ⊥ p εἰς τό σημεῖον Μ΄

β) Ὀρθήν προβολήν εὐθείας εἰς ἕνα προβολικόν ἐπίπεδον ὀνομάζομεν τό σύνολον τῶν προβολῶν τῶν σημείων τῆς εὐθείας εἰς τό ἐπίπεδον (βλ. σχ. 31).



(Σχέδ. 31)

Ἡ ὀρθή προβολή εὐθείας εἶναι εὐθεῖα (διατί;).

Διά νά λάβωμεν τήν προβολήν μιᾶς εὐθείας ἀρκεῖ νά προσδιορίσωμεν τάς προβολάς M'_1 καί M'_2 δύο σημείων της M_1 καί M_2 καί νά φέρωμεν τήν εὐθεῖαν $M'_1 M'_2$ (διατί;).

Ἡ ὀρθή προβολή διανύσματος εἶναι διάνυσμα μέ ἀρχήν τήν προβολήν τῆς ἀρχῆς καί πέρας τήν προβολήν τοῦ πέρατος τοῦ διανύσματος.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

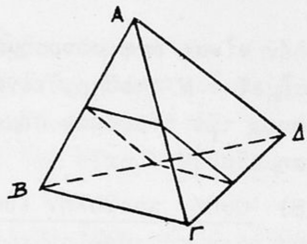
1) Νά σχεδιάσετε δύο εὐθείας ε καί ζ πού νά τέμνωνται εἰς ἕνα σημεῖον, ἔστω τό Ο. Κατόπιν νά θεωρήσετε μίαν τρίτην εὐθεῖαν α ἡ ὁποία νά τέμνη τό ἐπίπεδον p τῶν δύο πρώτων εὐθειῶν εἰς ἕνα σημεῖον Α. Νά ἐξετάσετε τώρα, διά τάς διαφόρους θέσεις τοῦ Α μέσα εἰς τό p , ποῖαι εὐθεῖαι τοῦ χώρου συναντοῦν καί τάς τρεῖς εὐθείας ε, ζ καί α.

2) Νά σχεδιάσετε ἕνα τετράεδρον ΑΒΓΔ (Βιβλ. Ι, σελ. 17Α) καί τάς τρεῖς διαμέσους ΒΒ΄, ΓΓ΄, ΔΔ΄ τοῦ τριγώνου ΒΓΔ. Νά δείξετε ἔπειτα ὅτι τά ἐπίπεδα ΑΒΒ΄, ΑΓΓ΄ καί ΑΔΔ΄ ἔχουν μίαν κοινήν εὐθεῖαν.

3) Νά σχεδιάσετε μέ τόν ὑποδειχθέντα τρόπον (§ 1.1) δύο ἐπίπεδα p καί q πού νά τέμνωνται κατά μίαν εὐθεῖαν ΑΒ. Εἰς τό ἕνα ἀπό τά ἐπίπεδα νά σχεδιάσητε εὐθεῖαν ε ∥ ΑΒ (μέ στενήν σημασίαν) καί νά ἐξετάσετε ἄν ἡ εὐθεῖα αὐτή ἠμπορεῖ νά τέμνη τό ἄλλο ἐπίπεδον.

4) Νά σχεδιάσετε ἕνα ἐπίπεδον q πού νά περιέχη τάς δύο τεμνομένας εὐθείας ε καί ε΄ καί νά θεωρήσετε ἕνα σημεῖον $A \notin q$. Νά ἐξηγήσετε διατί τά δύο ἐπίπεδα πού ὁρίζονται τό ἕνα ἀπό τήν εὐθεῖαν ε καί τό σημεῖον Α, τό ἄλλο ἀπό τήν ε΄ καί τό Α΄ τέμνονται καί νά προσδιορίσετε τήν εὐθεῖαν τῆς τομῆς των.

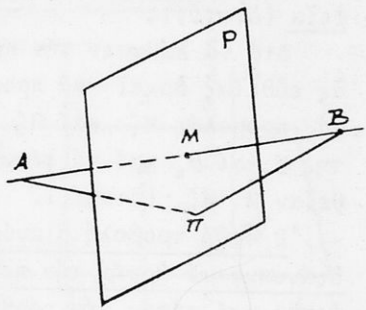
5) Τά σημεῖα Α , Β , Γ , Δ τοῦ χώρου (σχ.32) δέν ἀνήκουν εἰς τό ἴδιον ἐπίπεδον. Ἄν τά συνδέσωμεν μέ εὐθύγραμμα τμήματα ἀνά δύο σχηματίζεται ἕνα τετράεδρον. Νά δείξετε (βάσει τῶν ὅσων ἐμάθατε εἰς τό Βιβλ. II, σελ. 19Γ Ἀσκ. 5 ὅτι τά μέσα τῶν ἀκμῶν του ΑΒ, ΑΓ, ΔΒ, ΔΓ εἶναι κορυφαί παραλληλογράμμου.



(Σχέδ. 32)

6) Εἰς τό σχέδ. 33 τό ἐπίπεδον p εἶναι κάθετον πρός τήν εὐθεῖαν ΑΒ εἰς τό μέσον Μ τοῦ τμήματος ΑΒ. Νά συγκρίνετε τάς ἀποστάσεις ἑνός τυχόντος σημείου Π τοῦ p ἀπό τά ἄκρα τοῦ τμήματος ΑΒ. Ποίαν ἰδιότητα τοῦ σημειοσυνόλου p ἠμπορεῖτε νά συμπεράνετε ἀπ' αὐτήν τήν σύγκρισιν ;

7) Εἰς τό σημεῖον Α μιᾶς εὐθείας α ὑπάρχουν εἰς τόν χῶρον ἀπειράριθμοι εὐθεῖαι κάθετοι πρός αὐτήν. Νά ἐξηγήσητε διατί αἱ κάθετοι αὐταί εὐθεῖαι ἀνήκουν εἰς ἕνα ἐπίπεδον ⊥ α εἰς τό σημεῖον Α.



8) Ἀπό ἕνα σημεῖον Α τοῦ χώρου διέρχονται ἀπειράριθμοι εὐθεῖαι παράλληλοι πρός δοθέν ἐπίπεδον q. Νά δείξετε ὅτι αἱ εὐθεῖαι ἀνήκουν εἰς ἕνα ἐπίπεδον p ∥ q .

(Σχέδ. 33)

Ὑπόδειξις . Νά θεωρήσετε τήν ΑΚ ⊥ q καί νά προσέξετε ὅτι αἱ παράλληλοι πρός τό q εὐθεῖαι πού διέρχονται ἀπό τό Κ εἶναι ⊥ ΑΚ.

9) Νά σχεδιάσετε ἕνα ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον (Βιβλ. I, σελ. 3Α) καί νά ἀναφέρετε τά ζεύγη τῶν ἀκμῶν του αἱ ὁποῖαι ἀνήκουν εἰς δύο ἀσυμβάτους εὐθείας.

10) Μία μονόφυλλος θύρα εἶναι ἀνοικτή. Νά διακρίνετε τήν κυρτήν καί τήν μή κυρτήν δίεδρον γωνίαν πού τό ἡμιεπίπεδον τῆς μιᾶς ὄψεώς της σχηματίζει μέ τό ἡμιεπίπεδον τοῦ τοίχου τό ὁποῖον εἶναι προέκτασις τοῦ ἡμιεπιπέδου τῆς θεωρουμένης ὄψεως, ὅταν ἡ θύρα εἶναι κλειστή.

11) Νά πραγματοποιήσετε ἕνα κανονικόν τετράεδρον, ἀφοῦ ἀποκόψετε ἀπό ἕνα λεπτόν χαρτόνι τό ἀνάπτυγμά του (Βιβλ. I, σελ. 18Α), σχεδιάζοντες τά τέσσαρα ἴσα ἰσόπλευρα τρίγωνα τῶν ἑδρῶν του. Πῶς εἶναι δυνατόν νά αἰσθητοποιήσετε ἐπάνω εἰς τήν ἐπιφάνειαν τοῦ στερεοῦ τό ὁποῖον κατεσκευάσατε τάς ἐπιπέδους γωνίας τῶν ἕξ διέδρων γωνιῶν του ; Μήπως ἠμπορεῖτε νά δείξετε ὕστερα ἀπό αὐτήν τήν αἰσθητοποίησιν ὅτι αἱ ἕξ αὐταί ἐπίπεδοι γωνίαι εἶναι ἴσαι μεταξύ των ; Τί ἕπεται ἀπ' αὐτό διά τάς ἕξ διέδρους τοῦ κανονικοῦ τετραέδρου ;

12) Εἰς ἕνα ὀρθόν τριγωνικόν πρῖσμα (Βιβλ. I, σελ. 16Α) μέ βάσιν ἰσόπλευρον τρίγωνον πόσων μοιρῶν εἶναι καθεμία ἀπό τάς ἐννέα διέδρους του; Καί διατί;

13) Ἕνα ὀρθόν πρῖσμα ἔχει βάσιν ἕνα παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ εἰς τό ὁποῖον ἡ γωνία $\hat{A}$ εἶναι $70,1^\circ$. Πόσων μοιρῶν εἶναι καθεμία ἀπό τάς τέσσαρας παραπλεύρους διέδρους του ; Καί διατί ;

14) Νά ἐξετάσετε πότε δύο ἐπίπεδα p καί q, πού εἶναι κάθετα πρός ἕνα καί τό ἴδιον ἐπίπεδον e, εἶναι καί μεταξύ των κάθετα, πότε εἶναι παράλληλα καί πότε τεμνόμενα.

15) Εἰς τό σχ. 34 τό ἡμιεπίπεδον d διχοτομεῖ τήν κυρτήν δίεδρον γωνίαν $\widehat{paq}$. Ἀπό τό τυχόν σημεῖον M τοῦ ἡμιεπιπέδου d φέρομεν τάς ἀποστάσεις MK_1 καί MK_2 τοῦ M ἀπό τά ἡμιεπίπεδα p καί q. Ἔστω O τό σημεῖον ὅπου τό ἐπίπεδον K_1MK_2 τέμνει τήν ἀκμήν α τῆς διέδρου. Νά δείξετε ὅτι

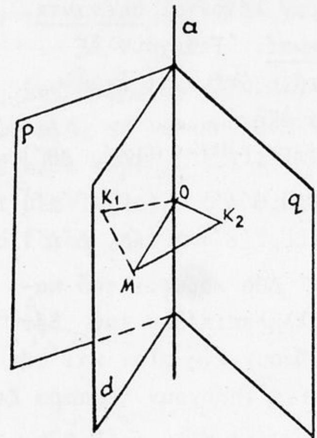
1ον τό ἐπίπεδον K_1MK_2 εἶναι $\perp \alpha$,

2ον $\sphericalangle(OM,OK_1) = \sphericalangle(OM,OK_2)$,

$\sphericalangle(K_2M,K_2O) = \sphericalangle(K_1M,K_1O) = 90^\circ$ καί

3ον ὅτι $MK_1 = MK_2$.

Ποίαν ἰδιότητα τοῦ διχοτομοῦντος ἡμιεπιπέδου d συμπεραίνετε ἀπό τά ἀνωτέρω ;



(Σχέδ. 34)

16) Νά σχεδιάσετε τάς ὀρθάς προβολάς ε΄ καί ζ΄ δύο παραλλήλων εὐθειῶν τοῦ χώρου ε καί ζ ἐπί ἑνός προβολικοῦ ἐπιπέδου p. Τί ἠμποροῦμεν νά εἴπωμεν διά τήν σχετικήν θέσιν τῶν προβολῶν ε΄ καί ζ΄ ;

17) Νά προβάλετε ὀρθῶς ἕνα διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ ἐπάνω εἰς ἕνα προβολικόν ἐπίπεδον p καί νά συγκρίνετε τό μῆκος τῆς προβολῆς μέ τό μῆκος τοῦ διανύσματος εἰς τάς ἑξῆς τρεῖς περιπτώσεις: 1η ἡ εὐθεῖα AB εἶναι $\parallel p$, 2α ἡ εὐθεῖα AB εἶναι $\perp p$, 3η ἡ AB δέν εἶναι οὔτε $\parallel$ οὔτε $\perp p$.

18) Ἔστω p ἕνα ἐπίπεδον, M΄ ἡ προβολή ἑνός σημείου $M \notin p$ εἰς τό ἐπίπεδον p καί P τυχόν σημεῖον τοῦ p διάφορον ἀπό τό M΄. Νά δείξετε ὅτι

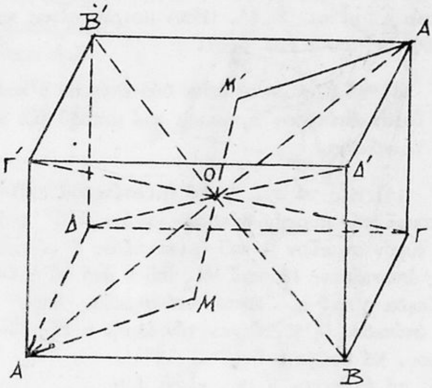
$$MM' < MP.$$

§3. Συμμετρία ὡς πρός σημεῖον, ὡς πρός εὐθεῖαν, ὡς πρός ἐπίπεδον.

3.1. Συμμετρία ὡς πρός ἐπίπεδον.

α) Ἄς θεωρήσωμεν πρῶτα ἕνα ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον (σχ. 35). Δύο παράλληλοι ἕδραι του λέγονται ἀπέναντι ἕδραι. Ὑπάρχουν τρία ζεύγη ἀπέναντι ἑδρῶν, τά

(ΑΒΓΔ, Α΄Β΄Γ΄Δ΄) , (ΒΓΑ΄Δ΄, Β΄Γ΄ΑΔ) καί (ΑΒΔ΄Γ΄ , Α΄Β΄ΔΓ).



(Σχέδ. 35)

Δύο παράλληλοι ἀκμαί τοῦ παραλληλεπιπέδου πού δέν ἀνήκουν εἰς μίαν καί τήν αὐτήν ἕδραν λέγονται ἀπέναντι ἀκμαί. Ὑπάρχουν ἕξ ζεύγη ἀπέναντι ἀκμῶν, τά ἑξῆς:

(ΑΓ΄,ΓΑ΄) , (ΒΔ΄, ΔΒ΄)

(ΑΒ,Β΄Α΄) , (ΔΓ, Γ΄Δ΄)

(ΒΓ,Γ΄Β΄) καί (ΑΔ, Δ΄Α΄).

Δύο κορυφαί τοῦ παραλληλεπιπέδου πού δέν ἀνήκουν εἰς μίαν καί τήν αὐτήν ἕδραν λέγονται ἀπέναντι κορυφαί. Ὑπάρχουν τέσσαρα ζεύγη ἀπέναντι κορυφῶν, τά ἑξῆς:

(Α,Α΄) , (Β,Β΄) , (Γ,Γ΄) καί (Δ,Δ΄).

Τά εὐθύγραμμα τμήματα

ΑΑ΄ , ΒΒ΄ , ΓΓ΄ καί ΔΔ΄

πού ἔχουν ἀντιστοίχως ἄκρα δύο ἀπέναντι κορυφάς λέγονται διαγώνιοι τοῦ παραλληλεπιπέδου. Αἱ διαγώνιοι ἔχουν ἕνα κοινόν σημεῖον, τό Ο, πού εἶναι καί τό μέσον τῆς καθεμιᾶς των· μέ ἄλλους λόγους, αἱ 4 διαγώνιοι διχοτομοῦν ἡ μία τήν ἄλλην.
Δέν εἶναι δύσκολον νά εὕρετε τό διατί, ἄν θεωρήσετε τά τετράπλευρα ΒΓΒ΄Γ΄, ΑΒΑ΄Β΄ καί ΑΔΑ΄Δ΄ πού εἶναι παραλληλόγραμμα καί μάλιστα ὀρθογώνια).

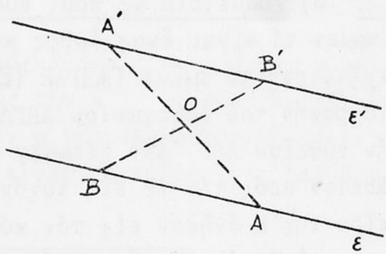
Παρατηροῦμεν τώρα ὅτι πλήν τῶν διαγωνίων καί κάθε ἄλλο εὐθύγραμμον τμῆμα π.χ. τό ΜΜ΄, πού περνᾶ ἀπό τό Ο καί περατώνεται εἰς δύο σημεῖα τῆς ἐπιφανείας τοῦ παραλληλεπιπέδου, ἔχει τό μέσον του εἰς τό σημεῖον Ο. Πράγματι τά δύο τρίγωνα ΑΜΟ καί Α΄Μ΄Ο ἔχουν τάς πλευράς των ΟΑ καί ΟΑ΄ ἴσας, τάς πλευράς των ΑΜ καί Α΄Μ΄ παραλλήλους καί ἑπομένως τάς γωνίας των ἀντιστοίχως ἴσας· τά δύο τρίγωνα εἶναι λοιπόν ἴσα καί, συνεπῶς, ΟΜ = ΟΜ΄

Λόγω αὐτῆς τῆς ἰδιότητός του τό σημεῖον Ο λέγεται κέντρον συμμετρίας τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου.

β) Ὁρισμοί. Δύο σημεῖα τοῦ χώρου λέγονται συμμετρικά ὡς πρός ἕνα σημεῖον (ὡς πρός ἕνα κέντρον), ἐάν τό τμῆμα πού τά ἑνώνει ἔχη τό μέσον του εἰς τό σημεῖον αὐτό.

Ἔτσι π.χ. τά σημεῖα τῆς ἐπιφανείας ἑνός ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι ἀνά δύο συμμετρικά ὡς πρός τό κοινόν σημεῖον τῶν τεσσάρων διαγωνίων του. Φυσικά καί κάθε σημεῖον τοῦ ἐσωτερικοῦ τοῦ ὀρθογ. παραλληλεπιπέδου ἔχει μέσα εἰς τό ἐσωτερικόν τοῦ στερεοῦ ἕνα συμμετρικόν ὡς πρός τό ἴδιον κέντρον.

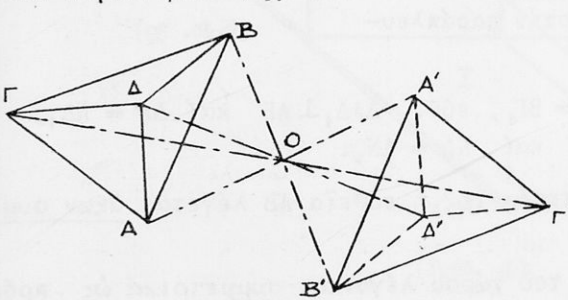
Δύο σχήματα S καί S΄ τοῦ χώρου λέγονται συμμετρικά ὡς πρός ἕνα σημεῖον Ο, ἐάν τό συμμετρικόν ὡς πρός Ο παντός σημείου τοῦ S ἀνήκη εἰς τό S΄ καί, ἀντιστρόφως, τό συμμετρικόν ὡς πρός Ο παντός σημείου τοῦ S΄ ἀνήκη εἰς τό S.



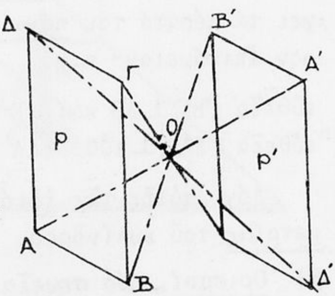
(Σχέδ. 36)

Ὅπως εἰς τήν Ἐπιπεδομετρίαν (Βιβλ. Ι, σελ. 98Β) ἔτσι καί εἰς τήν Στερεομετρίαν ἰσχύει τό ἑξῆς:

Δύο εὐθεῖαι συμμετρικαί ἡ μία τῆς ἄλλης ὡς πρός σημεῖον εἶναι παράλληλοι (σχ. 36).



(Σχέδ. 38)



(Σχέδ. 37)

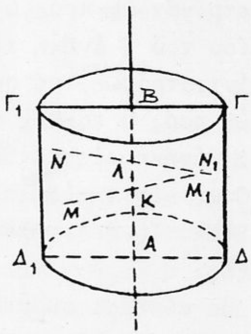
Ἐπίσης, δύο ἐπίπεδα συμμετρικά τό ἕνα τοῦ ἄλλου ὡς πρός σημεῖον εἶναι παράλληλα (σχ. 37).

Τό συμμετρικόν ἑνός εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ ὡς πρός ἕνα σημεῖον Ο (βλ. σχέδ. 37, 38) εἶναι ἕνα τμῆμα Α΄Β΄ συνεπίπεδον μέ τά τρία σημεῖα Α, Β, Ο, παράλληλον καί ἴσον μέ τό ΑΒ.

Εἰς τό σχέδιον 38 ἔχει σχεδιασθῆ τό συμμετρικόν Α΄Β΄Γ΄Δ΄ ἑνός τετραέδρου ΑΒΓΔ ὡς πρός ἕνα κέντρον συμμετρίας Ο. Αἱ ἀκμαί καί αἱ τριγωνικαί ἕδραι τοῦ ἑνός τετραέδρου εἶναι ἴσαι πρός τάς ἀντιστοίχους ἀκμάς καί ἕδρας τοῦ ἄλλου:

ΑΒ = Α΄Β΄, ΒΓ = Β΄Γ΄,... καί τριγ. ΑΒΓ = τριγ Α΄Β΄Γ΄, τριγ. ΑΒΔ = τριγ. Α΄Β΄Δ΄,...

3.2. α) Συμμετρία ὡς πρός εὐθεῖαν. Εἰς τό Βιβλίον Ι, σελ. 19Α εἴπαμεν τί εἶναι ἕνας ὀρθός κυκλικός κύλινδρος μέ ἄξονα ΑΒ καί γενέτειραν τό τμῆμα ΓΔ ∥ ΑΒ (βλ. σχ. 39) καί ὅτι γεννᾶται μέ περιστροφήν τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ περί τήν εὐθεῖαν ΑΒ. Ἐάν φέρωμεν μίαν κάθετον πρός τήν ΑΒ εἰς τυχόν σημεῖον της Κ ἀνῆκον εἰς τόν κύλινδρον, αὐτή τέμνει τήν παράπλευρον ἐπιφάνειάν του εἰς δύο σημεῖα Μ καί $Μ_1$ τέτοια ὥστε ἡ εὐθεῖα ΑΒ νά εἶναι μεσοκάθετος τοῦ τμήματος $ΜΜ_1$. Ἔτσι ἡ ΑΒ εἶναι μεσοκάθετος παντός τμήματος πού τήν συναντᾶ καθέτως καί ἔχει τά πέρατά του πάνω στήν παράπλευρον ἐπιφάνειαν· π.χ.



(Σχέδ. 39)

εὐθεῖα $ΓΒΓ_1 \perp ΑΒ$ καί $ΓΒ = ΒΓ_1$, εὐθ. $ΔΑΔ_1 \perp ΑΒ$ καί $ΔΑ = ΑΔ_1$, εὐθεῖα $ΝΛΝ_1 \perp$ εὐθ. ΒΛΑ καί $ΝΛ = ΛΝ_1$.

Λόγω αὐτῆς τῆς ἰδιότητός της ἡ εὐθεῖα ΑΒ λέγεται ἄξων συμμετρίας τοῦ κυλίνδρου.

β) Ὁρισμοί. Δύο σημεῖα τοῦ χώρου λέγονται συμμετρικά ὡς πρός μίαν εὐθεῖαν (ὡς πρός ἕνα ἄξονα), ἐάν τό τμῆμα πού τά συνδέει διχοτομῆται καθέτως ἀπό τήν εὐθεῖαν.

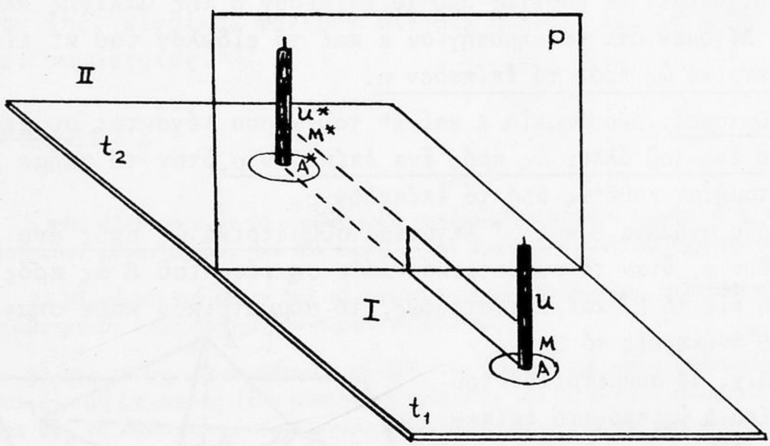
Ἔτσι π.χ. τά σημεῖα πού ἀνήκουν εἰς ἕνα κύλινδρον εἶναι ἀνά δύο συμμετρικά ὡς πρός τόν ἄξονα τοῦ κυλίνδρου.

Δύο σχήματα εἰς τόν χῶρον λέγονται συμμετρικά ὡς πρός μίαν εὐθεῖαν (ἕναν ἄξονα) α , ὅταν τό συμμετρικόν ὡς πρός α παντός σημείου τοῦ ἑνός ἀνήκῃ εἰς τό ἄλλο καί, ἀντιστρόφως, τό συμμετρικόν παντός σημείου τούτου τοῦ ἄλλου ἀνήκῃ εἰς τό πρῶτον.

Ἀπό τόν ὁρισμόν αὐτόν συμπεραίνομεν ὅτι δύο σχήματα συμμετρικά ὡς πρός ἄξονα εἶναι σχήματα ἐφαρμόσιμα (ἴσα), διότι ἄν στρέψωμεν τό ἕνα περί τόν ἄξονα κατά 180 μοίρας (ἄν τό ὑποβάλωμεν εἰς ἡμίσειαν περιστροφήν), θά τό φέρωμεν εἰς σύμπτωσιν μέ τό ἄλλο.

Ἔτσι τό συμμετρικόν ὡς πρός ἄξονα μιᾶς εὐθείας ε εἶναι μία εὐθεῖα $ε_1$ (παράλληλος πρός τήν ε) · τό συμμετρικόν ἑνός ἐπιπέδου p εἶναι ἕνα ἐπίπεδον p_1 (παράλληλον πρός τό p) · τό συμμετρικόν ἑνός τμήματος ΓΔ εἶναι τό τμῆμα $Γ_1Δ_1$ πού ἔχει ἄ-

ἐάν ἡ ε // πρός τόν ἄξονα, ἐάν τέμνει τόν ἄξονα [illegible] συμμετρική της θά [illegible] τόν ἄξονα



(Σχέδ. 40)

κρα τά συμμετρικά Γ_1 καί Δ_1 τῶν ἄκρων Γ καί Δ τοῦ τμήματος , εἶναι δέ $\Gamma_1\Delta_1 = \Gamma\Delta$ · τό συμμετρικόν ἑνός τετραέδρου ΑΒΓΔ εἶναι ἕνα ἴσον τετράεδρον $A_1B_1\Gamma_1\Delta_1$ κ.ο.κ.

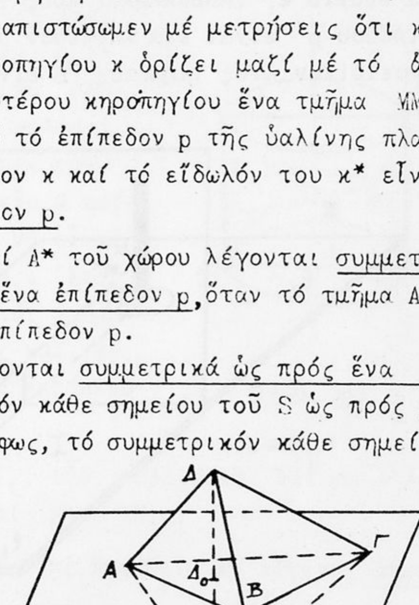
3.3. Συμμετρία ὡς πρός ἐπίπεδον.

α) Πείραμα. 'Επάνω εἰς τήν ὁριζόντιον ἐπιφάνειαν μιᾶς τραπέζης τοποθετοῦμεν καθέτως μίαν ὑαλίνην πλάκα (σχ. 40). Τό ἐπίπεδον p τῆς ἐμπροσθίας ὄψεως τῆς ὑαλίνης πλακός χωρίζει τόν χῶρον εἰς δύο ἡμιχώρους I καί II καί τό ἐπίπεδον τῆς τραπέζης εἰς δύο ἀντίστοιχα ἡμιεπίπεδα t_1 καί t_2. 'Επάνω εἰς τό ἡμιεπίπεδον t_1 τοποθετοῦμεν ἕν ἀναμμένον κηροπήγιον κ καί βλέπομεν τό εἴδωλόν του κ* μέσα εἰς τόν ἡμίχωρον II. Λαμβάνομεν ἔπειτα ἕνα δεύτερον κηροπήγιον, ἀκριβῶς ὅμοιον μέ τό πρῶτον, τό τοποθετοῦμεν ἐπάνω εἰς τό ἡμιεπίπεδον t_2 καί τό μετακινοῦμεν οὕτως ὥστε νά πάρῃ τήν θέσιν τοῦ εἰδώλου κ* τοῦ κ . Εἶναι τώρα εὔκολον νά διαπιστώσωμεν μέ μετρήσεις ὅτι κάθε σημεῖον Μ τοῦ πρώτου κηροπηγίου κ ὁρίζει μαζί μέ τό ἀντίστοιχον σημεῖον Μ* τοῦ δευτέρου κηροπηγίου ἕνα τμῆμα ΜΜ* πού διχοτομεῖται καθέτως ἀπό τό ἐπίπεδον p τῆς ὑαλίνης πλακός. Λέγομεν ὅτι τό κηροπήγιον κ καί τό εἴδωλόν του κ* εἶναι συμμετρικά ὡς πρός τό ἐπίπεδον p.

β) 'Ορισμοί. Δύο σημεῖα Α καί Α* τοῦ χώρου λέγονται συμμετρικά τό ἕνα τοῦ ἄλλου ὡς πρός ἕνα ἐπίπεδον p, ὅταν τό τμῆμα ΑΑ* διχοτομῆται καθέτως ἀπό τό ἐπίπεδον p.

Δύο σχήματα S καί S* λέγονται συμμετρικά ὡς πρός ἕνα ἐπίπεδον p, ὅταν τό συμμετρικόν κάθε σημείου τοῦ S ὡς πρός p ἀνήκῃ εἰς τό S* καί, ἀντιστρόφως, τό συμμετρικόν κάθε σημείου τοῦ S* ἀνήκῃ εἰς τό S.

Π.χ. τό συμμετρικόν τοῦ σημείου Δ ὡς πρός τό ἐπίπεδον p (βλ. σχ. 41) εἶναι τό σημεῖον Δ* πού συνδέεται μέ τό Δ μέ ἕνα τμῆμα ΔΔ* κάθετον πρός τό p καί ἔχον τό



(Σχέδ. 41)

μέσον του Δ μέσα εἰς τό ἐπίπεδον p. Τά συμμετρικά τῶν σημείων Β, Γ, Δ, πού ὑποθέτομεν ἀνήκοντα εἰς τό ἐπίπεδον p, συμπίπτουν μέ τόν ἑαυτόν των. Τά συμμετρικά τῶν τμημάτων ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ εἶναι ἀντιστοίχως τά τμήματα $Δ^*Α$, $Δ^*Β$, $Δ^*Γ$ καί τό συμμετρικόν τοῦ τετραέδρου ΔΑΒΓ εἶναι τό τετράεδρον $Δ^*ΑΒΓ$. Παρατηροῦμεν ὅτι αἱ ἀκμαί ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι πρός τάς $Δ^*Α$, $Δ^*Β$, $Δ^*Γ$ (διατί;)· ἐπομένως τά τρίγωνα ΔΑΒ, ΔΒΓ, ΔΓΑ εἶναι ἀντιστοίχως ἴσα πρός τά $Δ^*ΑΒ$, $Δ^*ΒΓ$, $Δ^*ΓΑ$.

3.4. Καί τά τρία εἴδη συμμετρίας πού ἐγνωρίσαμεν εἶναι ἀμφιμονοσήμαντοι ἀπεικονίσεις τοῦ χώρου ἐπί τοῦ ἑαυτοῦ του. Ἄν S εἶναι ἕνα σχῆμα καί $S_σ$ ἡ εἰκών του βάσει μιᾶς συμμετρίας σ, τότε λέγομεν ὅτι ἡ συμμετρία σ ἀπεικονίζει (ἤ μετασχηματίζει) τό σχῆμα S εἰς τό σχῆμα $S_σ$.

Ἕνα σχῆμα F λέγομεν ὅτι ἔχει κέντρον ἤ ἄξονα ἤ ἐπίπεδον συμμετρίας, ὅταν ὑπάρχη ἀντίστοιχος συμμετρία πού νά τό ἀπεικονίζη εἰς τόν ἑαυτόν του. Π.χ. τό συμμετρικόν μιᾶς σφαίρας μέ κέντρον τό σημεῖον Κ ὡς πρός τό σημεῖον Κ εἶναι αὐτή ἡ ἰδία σφαῖρα. Ἄρα ἡ σφαῖρα ἔχει κέντρον συμμετρίας, τό κέντρον της, εἶναι δέ φανερόν ὅτι δέν ἠμπορεῖ νά ἔχη ἄλλο κέντρον συμμετρίας.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Νά ἐξετάσετε ἄν τό συμμετρικόν σφαίρας ὡς πρός ἕνα σημεῖον ἤ ὡς πρός ἕνα ἐπίπεδον εἶναι σφαῖρα καί ἐάν εἶναι σχῆμα ἐφαρμόσιμον μέ τήν ἀρχικήν σφαῖραν.

2) Νά κάμετε τό ἴδιον διά τό συμμετρικόν ἑνός κύβου καί, γενικώτερα, διά τό συμμετρικόν ἑνός ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου.

3) Εἰς τό σχ. 38 ὑποθέτομεν τά ἑξῆς: 1ον ἡ βάσις ΑΒΓ τοῦ τετραέδρου ΑΒΓΔ εἶναι ἕνα μή ἰσοσκελές (ἕνα σκαληνόν) τρίγωνον. 2ον τό κέντρον συμμετρίας Ο ἀνήκει εἰς τό ἐπίπεδον q τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Νά δείξετε τότε τά ἑξῆς: 1ον τό τρίγωνον Α΄Β΄Γ΄ κεῖται εἰς τό ἐπίπεδον τοῦ τριγ. ΑΒΓ καί εἶναι ἐφαρμόσιμον μέ τό τριγ. ΑΒΓ δι' ὀλισθήσεως ἐπάνω εἰς τό ἐπίπεδον ΑΒΓ. 2ον τό τετράεδρον Α΄Β΄Γ΄Δ΄ δέν εἶναι ἐφαρμόσιμον μέ τό ΑΒΓΔ, μολονότι αἱ ἀκμαί καί αἱ ἕδραι του εἶναι ἴσαι πρός τάς ἀντιστοίχους ἀκμάς καί ἕδρας τοῦ τετραέδρου τούτου, συμμετρικοῦ του ὡς πρός Ο. (Ὑπόδειξις διά τό 2ον: Νά φαντασθῆτε ὅτι τό ἐπίπεδον ΑΒΓΟ εἶναι

ὁριζόντιον καί ὅτι τό Ο κεῖται ἄνωθέν του).

4) Εἰς τό σχ. 41 νά ὑποθέσετε ὅτι ἡ βάσις ΑΒΓ τοῦ τετραέδρου ΑΒΓΔ εἶναι ἕνα σκαληνόν τρίγωνον καί νά δείξετε ὅτι τότε τό τετράεδρον ΑΒΓΔ δέν εἶναι ἐφαρμόσιμον μέ τό ΑΒΓΔ*, μολονότι αἱ ἀκμαί καί αἱ ἕδραι του εἶναι ἴσαι πρός τάς ἀντιστοίχους ἀκμάς καί ἕδρας τούτου τοῦ ΑΒΓΔ*.

5) Νά ἐξηγήσετε διατί τό ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ἔχει ἄξονας συμμετρίας τάς τρεῖς εὐθείας πού ὁρίζονται ἀντιστοίχως ἀπό τά τρία ζεύγη τῶν κέντρων δύο ἀπέναντι ἑδρῶν. Ἐπίσης, διατί ἔχει ἐπίπεδα συμμετρίας τά τρία ἐπίπεδα πού διχοτομοῦν καθέτως παραλλήλους ἀκμάς.

6) Νά δείξετε ὅτι αἱ ἕξ εὐθεῖαι πού ὁρίζονται ἀπό τά ἕξ ζεύγη τῶν μέσων δύο ἀπέναντι ἀκμῶν ἑνός ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου διέρχονται ἀπό τό κέντρον συμμετρίας τοῦ παραλληλεπιπέδου καί εἶναι ἄξονες συμμετρίας του.

7) Νά εὕρετε τό κέντρον συμμετρίας ἑνός ὀρθοῦ κυκλικοῦ κυλίνδρου. Ἐπίσης νά προσδιορίσετε τά ἀπειράριθμα ἐπίπεδα συμμετρίας του.

8) Ποῖοι εἶναι οἱ ἄξονες συμμετρίας καί ποῖα τά ἐπίπεδα συμμετρίας μιᾶς σφαίρας;

§ 4. Διανύσματα εἰς τόν χῶρον.
Πρόσθεσις καί ἀφαίρεσις διανυσμάτων. Πολλαπλασιασμός διανύσματος μέ σχετικόν ἀριθμόν.

4.1. α) Διανύσματα εἰς τόν χωρον. Ὅσα εἴπαμεν εἰς τό Βιβλ. ΙΙ, σελ. 173-179 διά τά διανύσματα εἰς τό ἐπίπεδον ἐπεκτείνονται εἰς τά διάνυσματα τοῦ χώρου ὡς ἑξῆς:

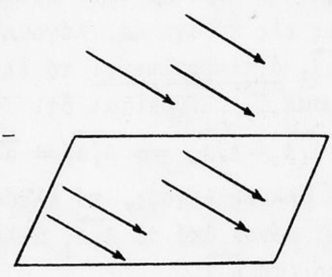
Ἕνα διατεταγμένον ζεῦγος (A_1, A_2) σημείων A_1 καί A_2 τοῦ χώρου ὁρίζει ἕνα ἐφαρμοστόν διάνυσμα, τό $\overrightarrow{A_1A_2}$, μέ ἀρχήν τό A_1 καί πέρας τό A_2. Δύο ἐφαρμοστά διανύσματα $\overrightarrow{A_1A_2}$ καί $\overrightarrow{B_1B_2}$ λέγονται παράλληλα ἤ συγγραμμικά, $\overrightarrow{A_1A_2} \parallel \overrightarrow{B_1B_2}$, ὅταν αἱ εὐθεῖαι A_1A_2 καί B_1B_2, πού εἶναι οἱ φορεῖς των, εἶναι παράλληλοι μέ εὐρεῖαν σημασίαν. Δύο παράλληλα διανύσματα $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{B_1B_2}$ εἶναι ὁμόρροπα ($\overrightarrow{A_1A_2} \upuparrows \overrightarrow{B_1B_2}$), ὅταν ἔχουν τήν ἰδίαν φοράν, καί ἀντίρροπα ($\overrightarrow{A_1A_2} \uparrow\downarrow \overrightarrow{B_1B_2}$), ὅταν ἔχουν ἀντιθέτους φοράς. Δύο ἐφαρμοστά διανύσματα λέγονται ἀντίθετα, ὅταν εἶναι παράλληλα καί ἰσομήκη, ἔχουν ὅμως ἀντιθέτους φοράς. Π.χ. ἀντίθετον τοῦ $\overrightarrow{A_1A_2}$ εἶναι τό $\overrightarrow{A_2A_1}$. Εἰδικῶς, ἀντίθετον τοῦ μηδενικοῦ $\overrightarrow{AA}$ εἶναι κάθε μηδενικόν διάνυσμα $\overrightarrow{MM}$.

Δύο ἤ περισσότερα ἐφαρμοστά διανύσματα λέγονται διαδοχικά, ὅταν 1ον εἶναι διατεταγμένα εἰς μίαν σειράν καί 2ον τό πέρας τοῦ καθενός των συμπίπτη μέ τήν ἀρχήν τοῦ ἑπομένου διανύσματος τῆς σειρᾶς. Π.χ. τά διανύσματα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$, $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, $\overrightarrow{\Delta E}$, μέ τήν σειράν τῆς ἀναγραφῆς των, εἶναι διαδοχικά.

Δύο ἐφαρμοστά διανύσματα τοῦ χώρου λέγονται ἴσα, ὅταν ἔχουν 1ον τήν ἰδίαν διεύθυνσιν (εἶναι δηλαδή παράλληλα), 2ον τήν ἰδίαν φοράν (εἶναι ὁμόρροπα) καί 3ον τό ἴδιον μῆκος (εἶναι ἰσομήκη). Αὐτή ἡ διμελής σχέσις ἰσότητος μεταξύ διανυσμάτων εἶναι σχέσις ἰσοδυναμίας (Βιβλ. ΙΙ, σελ. 73), διότι:

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{\Gamma\Delta} \Longrightarrow \overrightarrow{\Gamma\Delta}=\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ καί $\overrightarrow{\Gamma\Delta}=\overrightarrow{EZ} \Longrightarrow \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{EZ}$.

Ἄρα ἡ σχέσις αὐτή διαμερίζει τό σύνολον τῶν ἐφαρμοστῶν διανυσμάτων τοῦ χώρου εἰς κλάσεις ἰσοδυναμίας: μία κλάσις ἔχει ὡς στοιχεῖα ὅλα τά ἴσα μεταξύ των ἐφαρμοστά διανύσματα τοῦ χώρου καί δύο διαφορετικαί κλάσεις δέν ἔχουν κανένα κοινόν στοιχεῖον. Ἔτσι, τά διανύσματα μιᾶς κλάσεως ἰσοδυναμίας ἔχουν τό ἴδιον μῆκος καί, ἄν αὐτό τό μῆκος εἶναι $\neq 0$, τήν ἰδίαν διεύθυνσιν καί τήν ἰδίαν φοράν ἐπάνω εἰς αὐτήν τήν διεύθυνσιν (σχ.42).



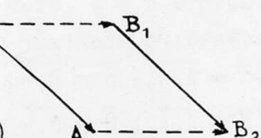
(Σχέδ. 42)

Ἡ ἰσότης δύο ἐφαρμοστῶν διανυσμάτων ἔχει καί τήν ἀκόλουθον σπουδαίαν ἰδιότητα:

$\overrightarrow{A_1A_2}=\overrightarrow{B_1B_2} \Longleftrightarrow \overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{A_2B_2}$

(βλ. σχ. 43).

β) Προχωροῦμεν τώρα εἰς τήν δημιουργίαν τῆς ἐννοίας τοῦ ἐλευθέρου διανύσματος τοῦ ἀντιστοίχου εἰς μίαν κλάσιν ἰσοδυναμίας ὡς ἑξῆς:

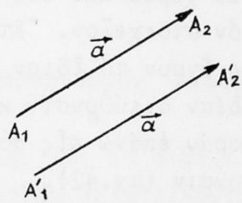


(Σχέδ. 43)

Ἀδιαφοροῦμεν διά τάς θέσεις πού κατέχουν εἰς τόν χῶρον τά ἄκρα τῶν διανυσμάτων τῆς κλάσεως καί λαμβάνομεν ὑπ' ὄψιν μόνον τό κοινόν μῆκος των καί, ἐφόσον τοῦτο εἶναι $\neq 0$, τήν κοινήν διεύθυνσιν καί τήν κοινήν φοράν των. Μέ τά τρία αὐτά κοινά γνωρίσματα τῶν διανυσμάτων τῆς κλάσεως συνθέτομεν αὐτό πού καλοῦμεν ἐλεύθερον διάνυσμα ἀντίστοιχον εἰς τήν κλάσιν. Ἔτσι κάθε κλάσις ἰσοδυναμίας ὁρίζει ἕνα ἐλεύθερον διάνυσμα καί δύο διαφορετικαί κλάσεις ὁρίζουν δύο διαφορετικά ἐλεύθερα διανύσματα. Τά ἐλεύθερα διανύσματα θά τά σημειώνωμεν μέ μικρά ἑλληνικά γράμματα ἐπιγραμμισμένα μέ ἕνα βέλος: $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$, κ.ο.κ. Μέ $\vec{O}$ σημειώνομεν εἰδικῶς τό μηδενικόν ἐλεύθερον διάνυσμα, δηλαδή ἐκεῖνο πού ὁρίζεται ἀπό τήν κλάσιν ἰσοδυναμίας τῶν μηδενικῶν ἐφαρμοστῶν διανυσμάτων.

Ἕνα ἐφαρμοστόν διάνυσμα $\overrightarrow{A_1A_2}$ ἀνήκει εἰς μίαν ἐντελῶς ὡρισμένην κλάσιν ἰσοδυναμίας καί εἰς αὐτήν ἀντιστοιχεῖ ἕνα ἐντελῶς ὡρισμένον ἐλεύθερον διάνυσμα $\vec{\alpha}$. Αὐτήν τήν ἀντιστοιχίαν τοῦ $\vec{\alpha}$ εἰς τό $\overrightarrow{A_1A_2}$ τήν συμβολίζομεν μέ τήν γραφήν

$$\overrightarrow{A_1A_2}=\vec{\alpha} \quad \text{εἴτε} \quad \vec{\alpha}=\overrightarrow{A_1A_2}$$



(Σχέδ. 44)

καί τήν παριστάνομεν σχεδιαστικῶς ὅπως εἰς τό σχ. 44, λέγομεν δέ ὅτι τό $\overrightarrow{A_1A_2}$ ἀντιπροσωπεύει τό ἐλεύθερον διάνυσμα $\vec{\alpha}$. Ἐννοεῖται ὅτι

$$\overrightarrow{A_1A_2}=\overrightarrow{A'_1A_2} \Longrightarrow \overrightarrow{A'_1A'_2}=\vec{\alpha}\cdot$$

μέ ἄλλους λόγους, τό ἐλεύθερον διάνυσμα $\vec{\alpha}$ ἀντιπροσωπεύεται ὄχι μόνον ἀπό τό $\overrightarrow{A_1A_2}$ ἀλλά καί ἀπό κάθε ἐφαρμοστόν ἴσον πρός τό $\overrightarrow{A_1A_2}$.

Μεταξύ δύο ἐλευθέρων διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ καί $\vec{\beta}$ γράφομεν τήν ἰσότητα $\vec{\alpha}=\vec{\beta}$, ὅταν καί μόνον ὅταν εἶναι τά ἴδια· αὐτό διατυπώνεται συμβολικῶς μέ τόν ἀκόλουθον τρόπον:

$$(\vec{\alpha}=\overrightarrow{A_1A_2},\ \vec{\beta}=\overrightarrow{B_1B_2} \text{ καί } \overrightarrow{A_1A_2}=\overrightarrow{B_1B_2}) \Longrightarrow \vec{\alpha}=\vec{\beta}$$

$$(\vec{\alpha}=\overrightarrow{A_1A_2},\ \vec{\beta}=\overrightarrow{B_1B_2} \text{ καί } \vec{\alpha}=\vec{\beta}) \Longrightarrow \overrightarrow{A_1A_2}=\overrightarrow{B_1B_2}.$$

Ἐάν $\vec{\alpha}\neq\vec{O}$ καί $\vec{\alpha}=\overrightarrow{A_1A_2}$, τότε ἐξ ὁρισμοῦ εἶναι:
$|\vec{\alpha}|$ = μῆκος τοῦ $\vec{\alpha}=|\overrightarrow{A_1A_2}|$ = μῆκος τοῦ τμήματος A_1A_2, διεύθυνσις τοῦ $\vec{\alpha}$ ἡ διεύθυνσις τοῦ $\overrightarrow{A_1A_2}$, φορά τοῦ $\vec{\alpha}$ ἡ φορά τοῦ $\overrightarrow{A_1A_2}$.

Τό μηδενικόν διάνυσμα $\vec{0}$ ἔχει φυσικά μῆκος μηδέν, δέν ἔχει ὅμως ὡρισμένην διεύθυνσιν καί φοράν.

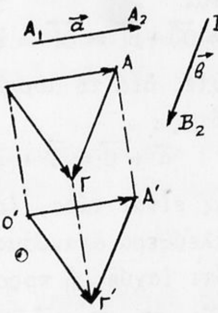
Δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$ καί $\vec{\beta}$ λέγονται ἀντίθετα, ὅταν ἀντιπροσωπεύωνται ἀπό δύο ἀντίθετα ἐφαρμοστά διανύσματα. Τό ἀντίθετον ἑνός $\vec{\alpha}$ συμβολίζεται μέ $-\vec{\alpha}$. Δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$ καί $\vec{\beta}$ λέγονται συγγραμμικά, $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$, ὅταν ἀντιπροσωπεύωνται ἀπό δύο συγγραμμικά (δηλ. παράλληλα) ἐφαρμοστά διανύσματα.

4.2. Πρόσθεσις διανυσμάτων.

I) Ἄς εἶναι

$$\vec{\alpha} = \overrightarrow{A_1A_2} \quad , \qquad \vec{\beta} = \overrightarrow{B_1B_2}$$

δύο ἐλεύθερα διανύσματα ἀντιπροσωπευόμενα ἀπό τά ἐφαρμοστά $\overrightarrow{A_1A_2}$ καί $\overrightarrow{B_1B_2}$ ἀντιστοίχως. Καλοῦμεν ἄθροισμα $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ τό ἐλεύθερον διάνυσμα πού προσδιορίζεται ὡς ἑξῆς: Ἀπό τό τυχόν σημεῖον O τοῦ χώρου (σχ. 45) ἀναχωρεῖ ἕνα ἐντελῶς ὡρισμένον διάνυσμα $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{A_1A_2}$ καί ἀπό τό πέρας A τοῦ $\overrightarrow{OA}$ ἕνα ἐντελῶς ὡρισμένον $\overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{B_1B_2}$. Τά διανύσματα $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{A\Gamma}$ εἶναι διαδοχικά καί τό διάνυσμα $\overrightarrow{O\Gamma}$ πού ἔχει ὡς ἀρχήν τήν ἀρχήν O τοῦ πρώτου καί ὡς πέρας τό πέρας Γ τοῦ τελευταίου εἶναι ἐξ ὁρισμοῦ τό ἀντιπροσωπευτικόν τοῦ ἀθροίσματος $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$.



(Σχέδ. 45)

Γράφομεν:

$$\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \overrightarrow{O\Gamma} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{B_1B_2} .$$

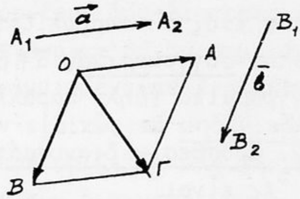
Ἔχομεν δικαίωμα νά δώσωμεν αὐτόν τόν ὁρισμό διά τόν ἑξῆς λόγον: Ἄν ἀναχωρήσωμεν ἀπό ἕνα ἄλλο σημεῖον O′ τοῦ χώρου (σχ. 45) καί εἶναι

$$\overrightarrow{O'A'} = \overrightarrow{A_1A_2} = \vec{\alpha} \quad , \qquad \overrightarrow{A'\Gamma'} = \overrightarrow{B_1B_2} = \vec{\beta} ,$$

τότε (βλ. § 4.1 α) θά ἔχωμεν $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{O'A'}$, $\overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{A'\Gamma'}$, ἄρα $\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{\Gamma\Gamma'}$ καί συνεπῶς:

$$\overrightarrow{O'\Gamma'} = \overrightarrow{O\Gamma}$$

'Επομένως τό $\overrightarrow{O\Gamma'}$ θά ἀντιπροσωπεύη τό ἴδιον ἐλεύθερον διάνυσμα μέ τό $\overrightarrow{O\Gamma}$. Παρατηροῦμεν ὅτι τό διάνυσμα $\overrightarrow{O\Gamma}$ ἠμποροῦμεν νά τό λάβωμεν καί ὡς ἑξῆς: χαράσσομεν τήν διαγώνιον $\overrightarrow{O\Gamma}$ τοῦ παραλληλογράμμου ΟΑΓΒ (σχ. 46) τό ὁποῖον ὁρίζεται ἀπό τά διανύσματα $\overrightarrow{OA}$ καί $\overrightarrow{OB}$ (ὅπου $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{A_1A_2} = \vec{\alpha}$ καί $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{B_1B_2} = \vec{\beta}$), ὅταν τά πάρωμεν ὡς πλευράς ἀναχωρούσας ἀπό τήν κορυφήν Ο (κανών τοῦ παραλληλογράμμου).



(Σχέδ. 46)

'Επειδή $\vec{\beta} = \overrightarrow{OB}$ καί $\vec{\alpha} = \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{B\Gamma}$, θά εἶναι

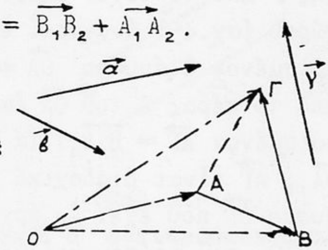
$$\vec{\beta} + \vec{\alpha} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{O\Gamma} = \vec{\alpha} + \vec{\beta} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{A\Gamma}.$$

Ὥστε, διά τό ἄθροισμα δύο διανυσμάτων ἰσχύει ἡ ἀντιμεταθετικότης:

$$\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{\beta} + \vec{\alpha}\ ,\quad \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{B_1B_2} = \overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{A_1A_2}\ .$$

ΙΙ) Ἄς εἶναι τώρα, (σχ.47), $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ τρία ἐλεύθερα διανύσματα τοῦ χώρου. Λέγω ὅτι ἰσχύει ἡ προσεταιριστικότης:

$$(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) + \vec{\gamma} = \vec{\alpha} + (\vec{\beta} + \vec{\gamma}).$$



Πράγματι, σύμφωνα μέ τόν ὁρισμόν, ἔχομεν:

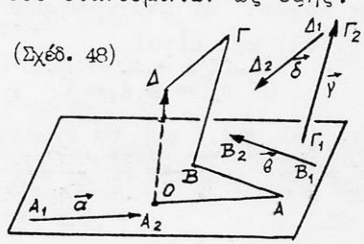
(Σχέδ. 47)

$$(\vec{\alpha}+\vec{\beta})+\vec{\gamma} = (\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB})+\overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{OB}+\overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{O\Gamma} = \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{OA}+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}) = \vec{\alpha}+(\vec{\beta}+\vec{\gamma}).$$

ΙΙΙ) Ἄς θεωρήσωμεν τώρα τρία ἤ περισσότερα ἐλεύθερα διανύσματα, π.χ. τά τέσσαρα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$, $\vec{\delta}$. Τό ἄθροισμά των $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} + \vec{\delta}$ ὁρίζεται μέ διαδοχικάς προσθέσεις δύο διανυσμάτων ὡς ἑξῆς:

$$\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}+\vec{\delta} = \left[(\vec{\alpha}+\vec{\beta})+\vec{\gamma}\right]+\vec{\delta}.$$

(Σχέδ. 48)



Ἕνα ἐφαρμοστόν διάνυσμα ἀντιπροσωπευτικόν τοῦ ἀθροίσματος τούτου εὑρίσκομεν μέ τήν ἀκόλουθον κατασκευήν εἰς τόν χῶρον: Ἔστω (σχ. 48)

$\vec{\alpha} = \overrightarrow{A_1A_2}$, $\vec{\beta} = \overrightarrow{B_1B_2}$, $\vec{\gamma} = \overrightarrow{\Gamma_1\Gamma_2}$, $\vec{\delta} = \overrightarrow{\Delta_1\Delta_2}$.

'Από τό τυχόν σημεῖον Ο τοῦ χώρου ἀναχωρεῖ τό ἐφαρμοστόν $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{A_1A_2}$, ἀπό τό πέρας Α, τό ἐφαρμοστόν $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B_1B_2}$, ἀπό τό Β, τό $\overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{\Gamma_1\Gamma_2}$ καί ἀπό τό Γ τό $\overrightarrow{\Gamma\Delta} = \overrightarrow{\Delta_1\Delta_2}$. Τά διανύσματα $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$, $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ εἶναι διαδοχικά καί τό διάνυσμα $\overrightarrow{O\Delta}$, πού ἔχει ὡς ἀρχήν τήν ἀρχήν Ο τοῦ πρώτου ἀπό αὐτά καί ὡς πέρας τό πέρας Δ τοῦ τελευταίου, εἶναι τό ζητούμενον ἀντιπροσωπευτικόν τοῦ ἀθροίσματος $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} + \vec{\delta}$. Πράγματι ἔχομεν :

$$\vec{\alpha}+\vec{\beta} = \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB},\ (\vec{\alpha}+\vec{\beta})+\vec{\gamma} = \overrightarrow{OB}+\overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{O\Gamma},\ [(\vec{\alpha}+\vec{\beta})+\vec{\gamma}]+\vec{\delta} = \overrightarrow{O\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma\Delta} = \overrightarrow{O\Delta}.$$

Γράφομεν λοιπόν.

$$\overrightarrow{O\Delta} = \vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}+\vec{\delta} = \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma\Delta} = \overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{B_1B_2}+\overrightarrow{\Gamma_1\Gamma_2}+\overrightarrow{\Delta_1\Delta_2}.$$

IV) 'Από τήν ἀντιμεταθετικότητα καί τήν προσεταιριστικότητα πού διεπιστώσαμεν εἰς τό I) καί II) καί ἀπό τούς ὁρισμούς πού ἐδώσαμεν ἕπονται τώρα τά ἑξῆς:

1) Τό ἄθροισμα δύο ἤ περισσοτέρων διανυσμάτων δέν ἀλλοιώνεται, ἄν μεταβάλωμεν τήν σειράν (τήν διάταξιν) τῶν προσθετέων διανυσμάτων. Π.χ.

$$\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}+\vec{\delta} = \vec{\delta}+\vec{\alpha}+\vec{\gamma}+\vec{\beta}$$

2) Εἰς ἕνα ἄθροισμα διανυσμάτων δύο ἤ περισσότερα προσθετέα διανύσματα ἠμποροῦν ν' ἀντικατασταθοῦν μέ τό ἄθροισμά των, χωρίς ν' ἀλλοιωθῆ τό ὁλικόν ἄθροισμα. 'Αντιστρόφως, ἕνα προσθετέον διάνυσμα ἠμπορεῖ ν' ἀντικατασταθῆ μέ δύο ἤ περισσότερα διανύσματα πού τό ἔχουν ὡς ἄθροισμα. Π.χ.

$$\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}+\vec{\delta} = (\vec{\alpha}+\vec{\delta})+\vec{\beta}+\vec{\gamma} \quad \text{καί} \quad \vec{\alpha}+\vec{\beta} = \vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2+\vec{\beta} \quad \text{ὅπου} \quad \vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2 = \vec{\alpha}.$$

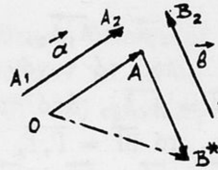
3) Τό μηδενικόν διάνυσμα $\vec{0}$ εἶναι οὐδέτερον στοιχεῖον εἰς τήν πρόσθεσιν ἐλευθέρων διανυσμάτων:

$$\vec{\alpha} + \vec{0} = \vec{\alpha}\ .$$

4) 'Ιδιότης διαγραφῆς:

$$\vec{\alpha}+\vec{\gamma} = \vec{\beta}+\vec{\gamma} \implies \vec{\alpha} = \vec{\beta}\ .$$

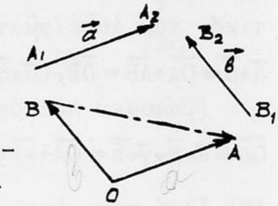
<u>4.3</u>. <u>'Αφαίρεσις διανυσμάτων</u>. Διαφορά $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ καί $\vec{\beta}$ εἶναι ἐξ ὁρισμοῦ τό ἄθροισμα τοῦ $\vec{\alpha}$ μέ τό ἀντίθετον $-\vec{\beta}$ τοῦ $\vec{\beta}$: $\vec{\alpha} - \vec{\beta} = \vec{\alpha} + (-\vec{\beta}) = (-\vec{\beta}) + \vec{\alpha}\ .$



(Σχέδ. 49)

Π.χ. ἄν $\vec{\alpha} = \overrightarrow{A_1A_2}$ καί $\vec{\beta} = \overrightarrow{B_1B_2}$ (σχ.49), τότε $\vec{\alpha}-\vec{\beta} = \vec{\alpha}+(-\vec{\beta}) = \overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{B_2B_1} = \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB^*} = \overrightarrow{OB^*}$.

Ἕνα ἐφαρμοστόν διάνυσμα ἀντιπροσωπευτικόν τῆς διαφορᾶς $\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ ἠμποροῦμεν νά προσδιορίσωμεν καί μέ τόν ἀκόλουθον τρόπον (σχ. 50): Μέ ἀρχήν ἕνα σημεῖον O τοῦ χώρου προσδιορίζομεν τό $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{A_1A_2} = \vec{\alpha}$ καί τό $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{B_1B_2} = \vec{\beta}$.



(Σχέδ. 50)

Τό διάνυσμα $\overrightarrow{BA}$ μέ ἀρχήν τό πέρας B τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{OB}$, πού ἀντιπροσωπεύει τό ἀφαιρετέον διάνυσμα $\vec{\beta}$, καί μέ πέρας τό πέρας A τοῦ $\overrightarrow{OA}$, πού ἀντιπροσωπεύει τό μειωτέον διάνυσμα, εἶναι τό ζητούμενον ἀντιπροσωπευτικόν τῆς διαφορᾶς $\vec{\alpha}-\vec{\beta}$. Πράγματι $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OA}$, ὅπου $\overrightarrow{BO} = -\vec{\beta}$ καί $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$. Διά τό ἐφαρμοστόν διάνυσμα $\overrightarrow{BA}$ γράφομεν:

$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}.$$

<u>Χαρακτηριστική ἰδιότης τῆς διαφορᾶς $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$.</u> Ἡ διαφορά $\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ εἶναι τό ἐλεύθερον διάνυσμα $\vec{\delta}$ πού πρέπει καί ἀρκεῖ νά προσθέσωμεν εἰς τό ἀφαιρετέον $\vec{\beta}$ διά νά λάβωμεν τό μειωτέον $\vec{\alpha}$.

Πράγματι

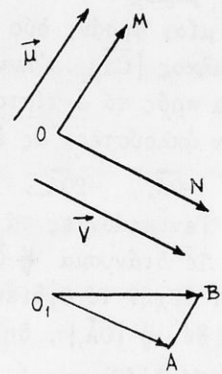
$$\vec{\beta}+\vec{\delta} = \vec{\alpha} \Longrightarrow \vec{\beta}+(-\vec{\beta})+\vec{\delta} = \vec{\alpha}+(-\vec{\beta}) \Longrightarrow \vec{0}+\vec{\delta} = \vec{\delta} = \vec{\alpha}-\vec{\beta}$$

καί $\vec{\beta}+(\vec{\alpha}-\vec{\beta}) = \vec{\beta}+[\vec{\alpha}+(-\vec{\beta})] = [\vec{\beta}+(-\vec{\beta})]+\vec{\alpha} = \vec{0}+\vec{\alpha} = \vec{\alpha}$.

<u>4.4. Διανυσματική ἀκτίς.</u> Ὅσα εἴπαμεν εἰς τό Βιβλ. II, σελ. 189-190 περί διανυσματικῆς ἀκτῖνος ἐπεκτείνονται ἀμέσως εἰς τόν χῶρον.

Λαμβάνομεν εἰς τόν χῶρον ἕνα ὡρισμένον σημεῖον O (σχ.51). Εἰς κάθε σημεῖον M τοῦ χώρου ἀντιστοιχεῖ ἕνα ὡρισμένον ἐφαρμοστόν διάνυσμα $\overrightarrow{OM}$ μέ ἀρχήν τό O καί πέρας τό M. Τό διάνυσμα αὐτό ὀνομάζεται <u>διανυσματική ἀκτίς τοῦ σημείου M ὡς πρός ἀρχήν τό σημεῖον O.</u>

Ἡ διανυσματική ἀκτίς $\overrightarrow{OM}$ ἀντιπροσωπεύει ἕνα ὡρισμένον ἐλεύθερον διάνυσμα $\vec{\mu}$. Ἀντιστρόφως, κάθε ἐλεύθερον διάνυσμα $\vec{\nu}$ τοῦ χώρου ἀντιπροσωπεύεται ἀπό μίαν ὡρισμένην διανυσματικήν ἀκτῖνα $\overrightarrow{ON}$ καί εἰς αὐτήν ἀντιστοιχεῖ ἕνα ὡρισμένον σημεῖον N τοῦ χώρου. Παρατηροῦμεν λοιπόν ὅτι, μέσω τῶν διανυσματικῶν ἀκτίνων ὡς πρός ἀρχήν ἕνα δεδομένον σημεῖον O τοῦ χώρου, τό σύνολον τῶν ἐλευθέρων διανυσμάτων τοῦ χώρου ἀπεικονίζεται ἐπί τοῦ συνόλου τῶν σημείων τοῦ χώρου. Ἡ ἀπεικόνισις εἶναι ἀμφιμονοσήμαντος.



Ἔστω τώρα $\overrightarrow{AB}$ τυχόν ἐφαρμοστόν διάνυσμα τοῦ χώρου (σχ. 51).

Σύμφωνα μέ ὅσα εἴπαμεν, ἔχομεν:

(Σχέδ. 51)

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO_1} + \overrightarrow{O_1B} = \overrightarrow{O_1B} - \overrightarrow{O_1A}.$$

Ὥστε κάθε ἐφαρμοστόν διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ τοῦ χώρου εἶναι διαφορά τῆς διανυσματικῆς ἀκτῖνος τοῦ πέρατός του καί τῆς διανυσματικῆς ἀκτῖνος τῆς ἀρχῆς του ὡς πρός ἀρχήν δοθέν σημεῖον O_1.

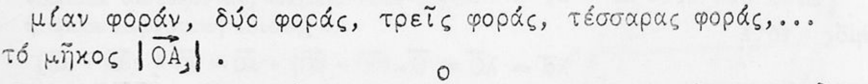
4.5. Πολλαπλασιασμός διανύσματος μέ ἀριθμόν. Ἔστω $\overrightarrow{OA_1}$ ἕνα μή μηδενικόν ἐφαρμοστόν διάνυσμα τοῦ χώρου (σχ. 52). Ὅπως εἶναι ναι φυσικόν, καλοῦμεν

$$1\cdot\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{OA_1}, \quad 2\cdot\overrightarrow{OA_1} = 2\,\overrightarrow{OA_1}, \quad 3\,\overrightarrow{OA_1}, 4\,\overrightarrow{OA_1}, \ldots$$

τά ἐφαρμοστά διανύσματα

$$(*) \qquad \overrightarrow{OA_1}, \quad \overrightarrow{OA_2}, \quad \overrightarrow{OA_3}, \quad \overrightarrow{OA_4}, \ldots$$

πού ἔχουν ἀρχήν τό O, διεύθυνσιν καί φοράν τήν ἰδίαν μέ τό $\overrightarrow{OA_1}$, μῆκος δέ μίαν φοράν, δύο φοράς, τρεῖς φοράς, τέσσαρας φοράς,... τό μῆκος $|\overrightarrow{OA_1}|$.



(Σχέδ. 52)

Ὁμοίως εἶναι φυσικόν νά καλέσωμεν

$$(-1)\overrightarrow{OA_1}, \quad (-2)\overrightarrow{OA_1}, \quad (-3)\overrightarrow{OA_1}, \quad (-4)\overrightarrow{OA_1}, \ldots$$

τά ἐφαρμοστά διανύσματα (βλ. σχ. 52)

$$\overrightarrow{OA_{-1}}, \quad \overrightarrow{OA_{-2}}, \quad \overrightarrow{OA_{-3}}, \quad \overrightarrow{OA_{-4}}, \ldots$$

πού ἔχουν διεύθυνσιν τήν ἰδίαν μέ τό $\overrightarrow{OA_1}$, φοράν ἀντίθετον καί μῆκος

μίαν φοράν, δύο φοράς, τρεῖς φοράς, τέσσαρας φοράς,...

τό μῆκος $|\overrightarrow{OA_1}|$. Ἐννοεῖται ὅτι τά διανύσματα αὐτά εἶναι ἀντίθετα πρός τά ἀντίστοιχα τῆς σειρᾶς (*) καί ἠμποροῦν νά γραφοῦν ἁπλούστερα ὡς ἑξῆς

$-\overrightarrow{OA_1}$, $-2\overrightarrow{OA_1}$, $-3\overrightarrow{OA_1}$, $-4\overrightarrow{OA_1}$,...

Γενικεύοντες τά ἀνωτέρω φθάνομεν εἰς τούς ἑξῆς ὁρισμούς:

Τό διάνυσμα $\frac{\mu}{\nu}\cdot\overrightarrow{OA_1} = \frac{\mu}{\nu}\overrightarrow{OA_1}$, ὅπου μ καί ν φυσικοί ἀριθμοί ἔχει ἀρχήν τό O, διεύθυνσιν καί φοράν τήν ἰδίαν μέ τό $\overrightarrow{OA_1}$, μῆκος δέ $\frac{\mu}{\nu}|\overrightarrow{OA_1}|$, δηλαδή μ φοράς τό νυοστόν τοῦ μήκους $|\overrightarrow{OA_1}|$.

Τό διάνυσμα $\left(-\frac{\mu}{\nu}\right)\overrightarrow{OA_1} = -\frac{\mu}{\nu}\cdot\overrightarrow{OA_1}$ ἔχει ἀρχήν τό O καί εἶναι ἀντίθετον πρός τό $\frac{\mu}{\nu}\overrightarrow{OA_1}$.

Τέλος τό $0\cdot\overrightarrow{OA_1}$ καί τό $\left(\pm\frac{\mu}{\nu}\right)\cdot\overrightarrow{OO}$ εἶναι τό μηδενικόν $\vec{0}$.

Π.χ. (βλ.σχ.52) $-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA_1}=\overrightarrow{OA_{-1/2}}$, $-\frac{3}{2}\overrightarrow{OA_1}=\overrightarrow{OA_{-3/2}}$, $\frac{5}{2}\overrightarrow{OA_1}=\overrightarrow{OA_{5/2}}$

Προχωροῦμεν τώρα εἰς τόν ἀκόλουθον ὁρισμόν τοῦ γινομένου $\lambda\vec{\alpha}$ ἑνός ἐλευθέρου διανύσματος $\vec{\alpha}$ τοῦ χώρου μέ ἕνα ρητόν σχετικόν ἀριθμόν λ.

Ἔστω πρῶτον $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$, $\vec{\alpha} = \overrightarrow{OA}$ καί $\lambda \neq 0$· τότε $\lambda\vec{\alpha}$ εἶναι τό ἐλεύθερον διάνυσμα πού ἀντιπροσωπεύεται ἀπό τό ἐφαρμοστόν $\lambda\overrightarrow{OA}$. Μέ ἄλλους λόγους τά τρία γνωρίσματα τοῦ $\lambda\vec{\alpha}$ εἶναι: διεύθυνσις τοῦ $\lambda\vec{\alpha}$ ἡ διεύθυνσις τοῦ $\vec{\alpha}$, δηλ. τοῦ $\overrightarrow{OA}$ ἀντιπροσωπευτικοῦ τοῦ $\vec{\alpha}$, φορά τοῦ $\lambda\vec{\alpha}$ ἡ φορά τοῦ $\vec{\alpha}$, δηλ. τοῦ $\overrightarrow{OA}$, ὅταν $\lambda > 0$, ἡ ἀντίθετος, ὅταν $\lambda < 0$, μῆκος τοῦ $\lambda\vec{\alpha} = |\lambda|\,|\vec{\alpha}| = |\lambda|\,|\overrightarrow{OA}|$.

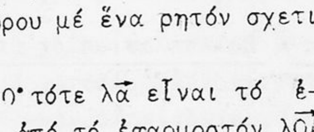
Ἔστω δεύτερον $\vec{\alpha} = \vec{0}$, λ = ὁποιοσδήποτε ρητός σχετικός ἀριθμός· τότε

$$\lambda\vec{\alpha} = \lambda\vec{0} = \vec{0}.$$

Ἔστω τρίτον $\vec{\alpha}$ = ὁποιοδήποτε ἐλεύθερον διάνυσμα τοῦ χώρου, $\lambda = 0$· τότε

$$\lambda\vec{\alpha} = 0\cdot\vec{\alpha} = \vec{0}.$$

Π.χ., (βλ. σχ. 53), ἐάν $\vec{\alpha} = \overrightarrow{A_1A_2}$ καί $\lambda = -2$, τότε τό $-2\vec{\alpha}$ ἀντιπροσωπεύεται ἀπό τό $\overrightarrow{A_1'A_2'}$ πού εἶναι $\parallel A_1A_2$, ἔχει φοράν ἀντίθετον καί μῆκος διπλάσιον



(Σχέδ. 53)

ἀπό τό $\overrightarrow{A_1A_2}$.

Τό γινόμενον $\lambda\vec{\alpha}$ ἔχει τάς ἰδιότητας:

I) $\lambda_1\cdot(\lambda_2\vec{\alpha})=(\lambda_1\lambda_2)\vec{\alpha}$, (προσεταιριστικότης ὡς πρός τόν ἀριθμ. παράγοντα).

Π.χ. $5\cdot\left(\frac{1}{2}\vec{\alpha}\right)=\frac{5}{2}\vec{\alpha}$, $\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}\vec{\alpha}\right)=-\frac{3}{8}\vec{\alpha}$.

II) $(\lambda_1+\lambda_2)\vec{\alpha}=\lambda_1\vec{\alpha}+\lambda_2\vec{\alpha}$, (ἐπιμεριστικότης ὡς πρός τόν ἀριθμ. παράγοντα).

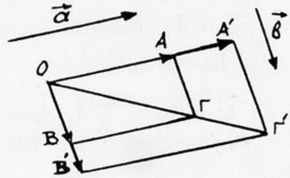
Π.χ. $\frac{5}{2}\vec{\alpha}=\left(4-\frac{3}{2}\right)\vec{\alpha}=4\vec{\alpha}-\frac{3}{2}\vec{\alpha}$, $\frac{7}{9}\vec{\alpha}=\left(\frac{4}{9}+\frac{3}{9}\right)\vec{\alpha}=\frac{4}{9}\vec{\alpha}+\frac{3}{9}\vec{\alpha}$.

III). $\lambda(\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2)=\lambda\vec{\alpha}_1+\lambda\vec{\alpha}_2$, (ἐπιμεριστικότης ὡς πρός τόν διανυσμ. παράγοντα).

Π.χ. εἰς τό σχ. 54 εἶναι

$$\frac{3}{2}\cdot(\vec{\alpha}+\vec{\beta})=\frac{3}{2}\overrightarrow{O\Gamma}=\overrightarrow{O\Gamma'}=\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}$$

$$=\frac{3}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{2}\overrightarrow{OB}.$$



(Σχέδ. 54)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Δίδονται δύο παράλληλα ἐπίπεδα $p \parallel p'$ καί δύο παράλληλοι εὐθεῖαι $\alpha \parallel \beta$. Ἡ α τέμνει τά p καί p' εἰς τά σημεῖα A καί A' ἀντιστοίχως, ἡ β εἰς τά σημεῖα B καί B' ἀντιστοίχως.
Νά δείξετε ὅτι 1ον $AB \parallel A'B'$, 2ον $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{BB'}$ καί 3ον $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A'B'}$.

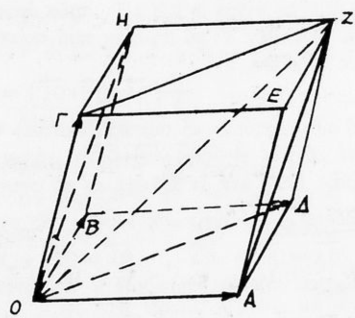
2) Νά σχεδιάσετε εἰς τό ἐπίπεδον τοῦ χάρτου σας τρία ἐφαρμοστά διανύσματα $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{O\Gamma}$ πού νά μή εἶναι συγγραμμικά ἀνά δύο. Κατόπιν μέ τόν κανόνα τοῦ παραλληλογράμμου νά προσδιορίσετε τά δύο ἐφαρμοστά διανύσματα μέ ἀρχήν τό O τά ὁποῖα ὁρίζονται ἀπό τάς διανυσματικάς παραστάσεις:

$$(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})+\overrightarrow{O\Gamma} \text{ καί } \overrightarrow{OA}+(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{O\Gamma}) .$$

Θά ἐπαληθεύσετε τότε ὅτι τά δύο αὐτά διανύσματα ταυτίζονται, ἐπομένως ὅτι ἰσχύει ἡ προσεταιριστική ἰδιότης :

$$(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})+\overrightarrow{O\Gamma}=\overrightarrow{OA}+(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{O\Gamma}).$$

3) Τό σχ. 55 παριστάνει ἕνα παραλληλεπίπεδον ΟΑΔΒΓΕΖΗ, δηλ. ἕνα πολύεδρον (βλ. Βιβλ. I, σελ. 17A) μέ 6 παραλληλογράμμους ἕδρας (μερική περίπτωσις παραλληλεπιπέδου εἶναι τό γνωστόν ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον πού παριστάνεται εἰς τό σχ. 35). Ὑποθέσατε τώρα ὅτι τά ἐφαρμο-



(Σχέδ. 55)

στά διανύσματα $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{O\Gamma}$ ἀντιπροσωπεύουν ἀντιστοίχως τά ἐλεύθερα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$. Νά δείξετε τότε ὅτι τό ἄθροισμα $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}$ ἀντιπροσωπεύεται ἀπό τό ἐφαρμοστόν διάνυσμα $\overrightarrow{OZ}$ πού ταυτίζεται μέ τήν διαγώνιον OZ τοῦ παραλληλεπιπέδου, ὅταν ὡς ἀρχή της ληφθῆ ἡ κορυφή O καί ὡς πέρας ἡ ἀπέναντι κορυφή Z.
Πόσοι τεθλασμένοι δρόμοι ἐκ τριῶν διαδοχικῶν ἀκμῶν τοῦ παραλληλεπιπέδου ὁδηγοῦν ἀπό τήν κορυφήν O εἰς τήν Z ;

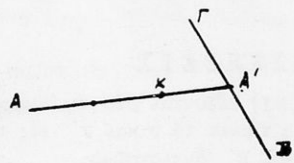
4) Ἄς εἶναι A , B δύο ὡρισμένα σημεῖα καί O ἕνα τυχόν σημεῖον τοῦ χώρου. Νά δείξετε ὅτι, ἄν καλέσωμεν M τό μέσον τοῦ τμήματος AB, θά ἔχωμεν

$$\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{OM} .$$

Ἀπό αὐτό νά συμπεράνετε ὅτι τό διάνυσμα, πού ἔχει ἀρχήν τό O καί εἶναι ἴσον μέ τό $\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$, περατώνεται πάντοτε εἰς τό ἴδιον σημεῖον τοῦ χώρου, ὅπως καί ἄν ἐκλέξωμεν τό σημεῖον O.

5) Ἄς εἶναι A, B, Γ τρία σημεῖα τοῦ χώρου, A΄ τό μέσον τοῦ τμήματος BΓ καί K τό σημεῖον τοῦ τμήματος AA΄ διά τό ὁποῖον ἰσχύει ἡ σχέσις· $\overrightarrow{AK} = 2\overrightarrow{KA'}$ (σχ. 56). Νά δείξετε ὅτι
$\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{K\Gamma} = \vec{0}$ = μηδενικόν διάνυσμα.
Ὑπόδειξις. Νά χρησιμοποιήσετε τήν προηγουμένην ἄσκησιν διά τό ἄθροισμα

$$\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{K\Gamma} = 2 \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{K\Gamma}).$$



(Σχέδ. 56)

6) Ἐάν, μέ τά δεδομένα τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως, καλέσωμεν B΄ τό μέσον τοῦ τμήματος ΓA καί Γ΄ τό μέσον τοῦ AB, τότε νά δείξετε ὅτι

$$\overrightarrow{BK} = 2\overrightarrow{KB'} \qquad \text{καί} \qquad \overrightarrow{\Gamma K} = 2\overrightarrow{K\Gamma'} .$$

Ἀπό αὐτά τί ἠμπορεῖτε νά συμπεράνετε διά τό σημεῖον K εἰς τήν περίπτωσιν πού τά A , B, Γ εἶναι κορυφαί τριγώνου ;

7) Ἄς εἶναι A , B , Γ τρία ὡρισμένα σημεῖα καί O ἕνα τυχόν σημεῖον τοῦ χώρου. Καλοῦμεν K τό σημεῖον πού προσδιορίζεται ὅπως εἰς τήν ἄσκησιν 5). Νά δείξετε τότε ὅτι

$$\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{O\Gamma}) = \overrightarrow{OK} .$$

Ἀπό αὐτό κατόπιν νά συμπεράνετε ὅτι τό διάνυσμα, πού ἔχει ἀρχήν τό O καί εἶναι ἴσον μέ τό $\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{O\Gamma})$, περατώνεται πάντοτε εἰς τό ἴδιον σημεῖον τοῦ χώρου, ὅπως καί ἄν ἐκλέξωμεν τό σημεῖον O.
Ὑπόδειξις. Νά χρησιμοποιήσετε τάς σχέσεις

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{KA} , \quad \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{KB} , \quad \overrightarrow{O\Gamma} = \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{K\Gamma}$$

καθώς καί τήν ἰδιότητα τοῦ K τήν ὁποίαν ἐδείξατε εἰς τήν ἄσκησιν 5).

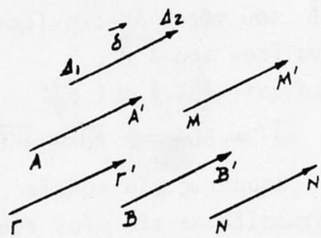
§ 5. Παράλληλος μετατόπισις. Στροφή περί ἄξονα.

5.1. α) Εἰς τό Βιβλίον Ι, σελ. 64Γ κ.έ., ἐμάθαμεν τί εἶναι παράλληλος μετατόπισις τοῦ ἐπιπέδου ἐπί τοῦ ἑαυτοῦ του καί πῶς ἐκτελεῖται.

Ἡ ἐπέκτασις εἰς τόν χῶρον εἶναι εὔκολος καί γίνεται ὡς ἑξῆς:

Ἔστω $\vec{\delta}$ ἕνα ἐλεύθερον διάνυσμά τοῦ χώρου (σχ. 56α). Λέγομεν ὅτι τό τυχόν σημεῖον Μ τοῦ χώρου ὑποβάλλεται εἰς παράλληλον μετατόπισιν κατά τό διάνυσμα $\vec{\delta}$, ὅταν ἀπό τήν θέσιν, ὅπου εὑρίσκεται, μετατοπισθῇ εἰς τήν θέσιν τοῦ σημείου Μ΄ διά τό ὁποῖον ἔχομεν

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{\Delta_1\Delta_2} = \vec{\delta}.$$



(Σχέδ. 56α)

Ἐάν $\vec{\delta} = \vec{O}$, τότε τό Μ΄ συμπίπτει μέ τό Μ καί ἡ μετατόπισις εἶναι μηδενική.

Ἐάν $\vec{\delta} \neq \vec{O}$, τότε τό σημεῖον Μ΄ εἶναι διάφορον ἀπό τό Μ καί ἔχομεν πράγματι μίαν ἀλλαγήν τῆς θέσεως τοῦ σημείου Μ.

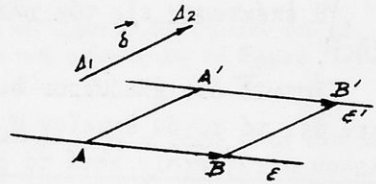
Ἡ παράλληλος μετατόπισις κατά ἕνα ἐλεύθερον διάνυσμα $\vec{\delta}$ εἶναι μία ἀμφιμονοσήμαντος ἀπεικόνισις τοῦ συνόλου τῶν σημείων τοῦ χώρου ἐπί τοῦ ἑαυτοῦ του. Πράγματι εἰς τά διάφορα σημεῖα Α, Β, Γ,... τοῦ χώρου ἀντιστοιχοῦν σημεῖα Α΄, Β΄, Γ΄,... τοιαῦτα ὥστε

$$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{\Gamma\Gamma'} = \ldots = \overrightarrow{\Delta_1\Delta_2} = \vec{\delta}.$$

Ἀντιστρόφως, ἐάν Ν΄ εἶναι τυχόν σημεῖον τοῦ χώρου, τότε ὑπάρχει ἕνα σημεῖον Ν διά τό ὁποῖον ἔχομεν $\overrightarrow{NN'} = \overrightarrow{\Delta_1\Delta_2} = \vec{\delta}$ καί ἐπομένως τό Ν΄ εἶναι ἀντίστοιχον τοῦ Ν εἰς τήν ἀνωτέρω παράλληλον μετατόπισιν. Τά σημεῖα Μ΄, Α΄, Β΄, Γ΄, Ν΄ λέγονται εἰκόνες τῶν σημείων Μ, Α, Β, Γ, Ν. Ἡ παράλληλος μετατόπισις κατά τό διάνυσμα $\vec{\delta}$ ἀπεικονίζει τά Μ, Α, Β, Γ, Ν εἰς τά

Μ΄, Α΄, Β΄, Γ΄, Ν΄.

Ἡ παράλληλος μετατόπισις κατά τό ἀντίθετον διάνυσμα $-\vec{\delta}$ ἀπεικονίζει φυσικά τά Μ΄, Α΄, Β΄, Γ΄, Ν΄ εἰς τά Μ,Α,Β,Γ,Ν καί διά τοῦτο λέγεται ἀπεικόνισις <u>ἀντίστροφος</u> πρός τήν παράλληλον μετατόπισιν κατά τό διάνυσμα $\vec{\delta}$.



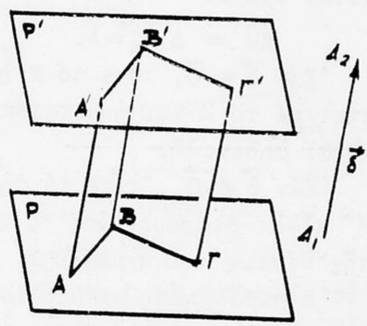
(Σχέδ. 57)

β) Εἰς μίαν παράλληλον μετατόπισιν κατά ἕνα διάνυσμα $\vec{\delta}$ (βλ.σχ. 57) τυχόν ἐφαρμοστόν διάνυσμα $\vec{AB}$ τοῦ χώρου ἀπεικονίζεται εἰς ἕνα ἴσον του $\vec{A'B'}$.

Πράγματι (βλ.§ 4.1 α):

$$\vec{AA'} = \vec{BB'} \Longrightarrow \vec{AB} = \vec{A'B'}.$$

Ἑπομένως μία εὐθεῖα μετασχηματίζεται εἰς μίαν εὐθεῖαν ε΄ παράλληλον πρός τήν ε.



(Σχέδ. 58)

γ) Ἄς εἶναι τώρα Α,Β,Γ τρία σημεῖα τοῦ χώρου μή κείμενα ἐπ' εὐθείας. Προσδιορίζουν τότε ἕνα ἐπίπεδον ρ (σχ.58). Ἡ παράλληλος μετατόπισις κατά $\vec{\delta}$ τά ἀπεικονίζει εἰς τά Α΄, Β΄, Γ΄ οὕτως ὥστε

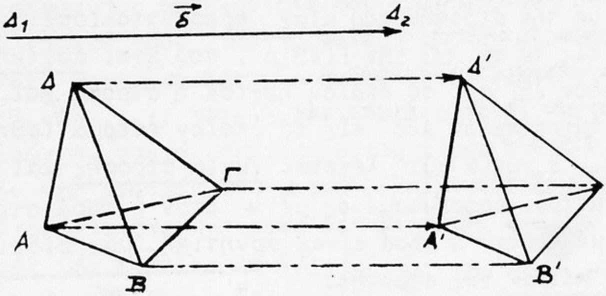
Α΄Β΄ ∥ ΑΒ καί Β΄Γ΄ ∥ ΒΓ,

Ἑπομένως τό ἐπίπεδον ρ΄, εἰς τό ὁποῖον ἡ παράλληλος μετατόπισις ἀπεικονίζει τό ρ, εἶναι παράλληλον πρός τό ρ.

Ἕνα ἐπίπεδον σχῆμα πού ἀνήκει εἰς τό ἐπίπεδον ρ ἀπεικονίζεται εἰς ἕνα ἴσον του σχῆμα κείμενον μέσα εἰς τό παράλληλον ἐπίπεδον ρ΄. Π.χ. ἡ γωνία $\widehat{ΑΒΓ}$ ἀπεικονίζεται εἰς τήν ἴσην της $\widehat{Α΄Β΄Γ΄}$.

δ) Μία δίεδρος γωνία ἀπεικονίζεται μέσω μιᾶς παραλλήλου μετατοπίσεως εἰς μίαν ἴσην δίεδρον μέ ἕδρας ἀντιστοίχως παραλλήλους πρός τάς ἕδρας τῆς πρώτης. Π.χ. ἡ δίεδρος $Α\widehat{(ΒΒ΄)}Γ$

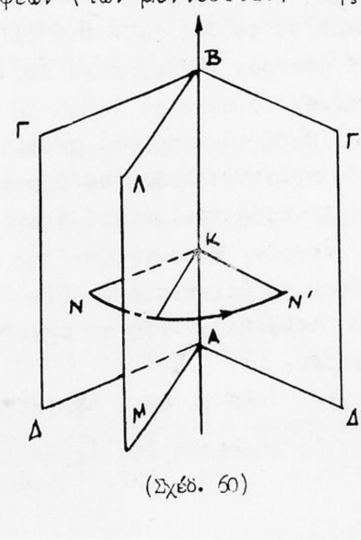
τοῦ σχεδ. 58 ἀπεικονίζεται εἰς τόν ἑαυτόν της μέσω τῆς παραλλήλου μετατοπίσεως κατά τό διάνυσμα $\vec{\delta}$. Γενικῶς ἡ εἰκών ἑνός στερεοῦ σχήματος, εἰς μίαν παράλληλον μετατόπισιν, εἶναι ἕνα ἴσον (δηλ. ἐφαρμόσιμον μέ τό πρῶτον) στερεόν σχῆμα. Π.χ. (σχ. 59) τό τετράεδρον ΑΒΓΔ ἀπεικονίζεται εἰς τό ἴσον του Α΄ Β΄ Γ΄ Δ΄ μέσω τῆς παραλλήλου μετατοπίσεως κατά τό διάνυσμα $\vec{\delta}$.



(Σχέδ. 59)

5.2. Στροφή περί ἄξονα.

Ὅταν ἀνοιγοκλείνωμεν μίαν θύραν ἤ ἕνα παράθυρον, τά σημεῖα των ἐκτελοῦν στροφήν περί μίαν ἀκίνητον εὐθεῖαν ἡ ὁποία διέρχεται ἀπό τά κέντρα τῶν στροφέων (τῶν μεντεσέδων) τῆς θύρας ἤ τοῦ παραθύρου. Ἰδού ἡ γεωμετρική μελέτη αὐτῆς τῆς κινήσεως. Ἔστω ΑΒ (σχ. 60) μία σταθερά εὐθεῖα τοῦ χώρου προσανατολισμένη θετικῶς (βλ. Βιβλ. Ι, σελ. 60Γ) κατά τήν φοράν τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{AB}$. Θεωροῦμεν ἕνα ἡμιεπίπεδον ΑΒΛΜ μέ σύνορον τήν εὐθεῖαν ΑΒ. Τό ἡμιεπίπεδον τοῦτο ἠμπορεῖ νά στραφῆ περί τήν εὐθεῖαν ΑΒ ἤ ἐκ δεξιῶν πρός τά ἀριστερά ἤ ἐξ ἀριστερῶν πρός



(Σχέδ. 60)

τά δεξιά ὡς πρός ἕνα παρατηρητήν ὁ ὁποῖος θά παρηκολούθει τήν κίνησιν τοποθετούμενος κατά μῆκος τῆς ΑΒ, μέ τούς πόδας εἰς τό Α καί τήν κεφαλήν πρός τό Β. Εἰς τήν γλῶσσαν τῆς Γεωμετρίας αὐτά διατυπώνονται ὡς ἑξῆς: τό ἡμιεπίπεδον ΑΒΛΜ ἠμπορεῖ νά στραφῆ περί τήν εὐθεῖαν ΑΒ ὡς ἄξονα ἤ κατά τήν θετικήν ἤ κατά τήν ἀρνητικήν φοράν στροφῆς ὡς πρός τήν θετικήν κατεύθυνσιν $\overrightarrow{AB}$ τοῦ ἄξονος. Τό ἡμιεπίπεδον ΑΒΛΜ γεννᾶ (διαγράφει) μέ τήν στροφήν του μίαν προσανατολισμένην δίεδρον γωνίαν, εἰς τό σχ. 60 τήν $\widehat{\Gamma(AB)\Delta'}$, πού ἔχει ἀρχικήν ἕδραν τό ἡμιεπίπεδον ΑΒΓ ἀπό τό ὁποῖον ἤρχισε ἡ στροφή καί τελικήν ἕδραν τό ἡμιεπίπεδον ΑΒΔ΄ εἰς τό ὁποῖον ἐτερματίσθη ἡ κίνησις τοῦ ΑΒΛΜ. Ἡ γωνία αὐτή λέγεται γωνία στροφῆς καί ὁ ἀριθμός πού τήν μετρᾶ, προσημασμένος μέ + ὅταν ἡ φορά στροφῆς εἶναι θετική, μέ - ὅταν ἡ φορά εἶναι ἀρνητική, μᾶς δίδει τό προσημασμένον μέτρον τῆς στροφῆς.

Θά ἐξετάσωμεν τώρα πῶς μετατοπίζονται τά διάφορα σημεῖα τοῦ χώρου, ὅταν τόν ὑποβάλλωμεν εἰς μίαν στροφήν σ περί τόν προσανατολισμένον ἄξονα ΑΒ κατά μίαν γωνίαν μέ προσημασμένον μέτρον α μοιρῶν (βλ. σχ. 60). Τά σημεῖα τοῦ χώρου, πού κεῖνται ἐπάνω εἰς τόν ἄξονα, παραμένουν φυσικά εἰς τήν θέσιν των π.χ. $A \xrightarrow{\sigma} A$, $B \xrightarrow{\sigma} B$, $K \xrightarrow{\sigma} K$. Ἔστω ὅμως Ν τυχόν ἄλλο σημεῖον τοῦ χώρου· αὐτό ὁρίζει ἕνα ἡμιεπίπεδον, ἔστω τό ΑΒΓ, μέ σύνορον τήν εὐθεῖαν ΑΒ. Μέσα εἰς αὐτό τό ἡμιεπίπεδον θεωροῦμεν τό κάθετον τμῆμα ΝΚ ἀπό τό Ν πρός τήν ΑΒ.

Κατά τήν στροφήν μέ μέτρον α° τοῦ ἡμιεπιπέδου ΑΒΓ περί τόν προσανατολισμένον ἄξονα ΑΒ, ἡ ἡμιευθεῖα ΚΝ παραμένει κάθετος πρός τήν ΑΒ καί διαγράφει ἐπομένως μίαν ἐπίπεδον γωνίαν α μοιρῶν, ἀντίστοιχον τῆς διέδρου $\widehat{\Gamma(AB)\Delta'}$ τήν ὁποίαν διαγράφει τό ἡμιεπίπεδον ΑΒΓ. Ἔτσι τό σημεῖον Ν μετατοπίζεται μέ τήν στροφήν σ εἰς τό σημεῖον Ν΄ ($N \xrightarrow{\sigma} N'$) διά τό ὁποῖον ἔχομεν:

$$KN' \perp AB \ , \ \measuredangle(KN, KN') = \alpha^\circ \quad \text{καί} \quad KN = KN' .$$

Ἄς σημειωθῆ ὅτι ὡς θετική φορά στροφῆς μέσα εἰς ἕνα ἐπίπεδον κάθετον πρός τόν προσανατολισμένον ἄξονα AB ἐκλέγεται συνήθως ἡ ἐκ δεξιῶν πρός τά ἀριστερά δι' ἕνα παρατηρητήν τοῦ ὁποίου ἡ κατεύθυνσις ἀπό τούς πόδας πρός τήν κεφαλήν συμπίπτει μέ τήν θετικήν φοράν $\overrightarrow{AB}$ τοῦ ἄξονος καί ὁ ὁποῖος ἔχει ἔμπρός του τήν στροφήν.

Συμπεράσματα. Ἡ στροφή τοῦ χώρου περί ἕνα ἄξονα AB εἶναι μία ἀμφιμονοσήμαντος ἀπεικόνισις τοῦ σημειοσυνόλου τοῦ χώρου ἐπί τοῦ ἑαυτοῦ του. Ἐάν τό μέτρον α° τῆς στροφῆς εἶναι $= \pm 360^\circ$ (καί, γενικῶς, ἐάν $\alpha^\circ = k\cdot 360^\circ$, ὅπου k ἀκέραιος, δηλ. $k=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$), τότε ἡ ἀπεικόνισις εἶναι ταυτοτική, ἐπειδή ἡ εἰκών N΄ παντός σημείου N τοῦ χώρου ταυτίζεται μέ τό ἀρχέτυπόν της N. Ἐάν $\alpha^\circ = \pm 180^\circ$ (καί, γενικῶς, ἐάν $\alpha^\circ = (2k+1)\cdot 360^\circ$) τότε ἡ στροφή δέν διαφέρει ἀπό τήν συμμετρίαν ὡς πρός τήν εὐθεῖαν AB (βλ. § 3.2).

Μία στροφή περί ἄξονα ἀπεικονίζει τυχόν σχῆμα S ἐπί ἑνός ἴσου σχήματος S΄. Ἔτσι ἡ εἰκών μιᾶς εὐθείας ε εἶναι μία εὐθεῖα ε΄, ἑνός εὐθυγράμμου τμήματος T_1T_2 ἕνα ἴσον εὐθύγραμμον τμῆμα $T_1' T_2'$, ἑνός ἐπιπέδου p ἕνα ἐπίπεδον p΄, ἑνός τριγώνου $T_1T_2T_3$ ἕνα ἴσον τρίγωνον $T_1'T_2'T_3'$, ἑνός τετραέδρου $T_1T_2T_3T_4$ ἕνα ἴσον τετράεδρον $T_1'T_2'T_3'T_4'$ κ.τ.λ.

Ἄσκησις. Περιγράψατε μερικά ὑλικά στερεά σώματα πού ἐκτελοῦν στροφάς περί ἄξονα (πού εἶναι στρεπτά περί ἄξονα).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Ἕνα τραῖνον ἐκινήθη εὐθυγράμμως ἀπό μίαν θέσιν A εἰς ἄλλην B. Πῶς ἠμποροῦμεν νά περιγράψωμεν εἰς τήν γλῶσσαν τῆς Γεωμετρίας τήν μετατόπισίν του ;

2) Πῶς περιγράφεται εἰς τήν γλῶσσαν τῆς Γεωμετρίας ἡ φαινομενική κίνησις ἑνός ἄστρου ;

3) Ὑποβάλλομεν ἕνα τετράγωνον ΑΒΓΔ, μέ πλευράν AB, εἰς μίαν παράλληλον μετατόπισιν κατά τό διάνυσμα $\overrightarrow{AA'}$ πού εἶναι κάθετον πρός τό ἐπίπεδον ΑΒΓ καί ἔχει μῆκος $|\overrightarrow{AA'}|$ ἴσον μέ AB. Τί στερεόν θά διαγράψη τό μετακινούμενον τετράγωνον ;

4) Ὑποβάλλομεν ἕνα παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ εἰς μίαν παράλληλον μετατόπισιν κατά τό διάνυσμα $\overrightarrow{AA'}$ πού δέν εἶναι παράλληλον πρός τό ἐπίπεδον ΑΒΓ. Τί στερεόν διαγράφει τό μετακινούμενον παραλληλόγραμμον ;

5) Σχεδιάσατε τήν εικόνα ενός κύβου καί προσδιορίσατε επάνω εις αυτήν τάς εικόνας τών κέντρων δύο απέναντι (παραλλήλων) εδρών. Έστω α ή ευθεία πού ορίζεται από τά δύο αυτά κέντρα. Κατά ποίας γωνίας περί τήν ευθείαν α, προσανατολισμένην, πρέπει καί αρκεί νά στρέψωμεν τόν κύβον διά νά έλθη εις σύμπτωσιν μέ τόν εαυτόν του;

6) Έστω ΑΒΓ ένα ισόπλευρον τρίγωνον, Ο τό κοινόν σημείον τών διαμέσων του καί ΟΚ ένα ευθύγραμμον τμήμα ⊥πρός τό επίπεδον ΑΒΓ. Κατά ποίας γωνίας περί τήν ευθείαν ΟΚ, προσανατολισμένην εκ τού Ο πρός τό Κ, πρέπει καί αρκεί νά στρέψωμεν τήν (κανονικήν τριγωνικήν) πυραμίδα ΚΑΒΓ διά νά έλθη εις σύμπτωσιν μέ τόν εαυτόν της;

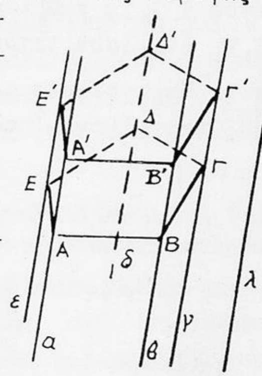
Υπόδειξις. Είναι σκόπιμον νά κατασκευάσετε διά τάς ασκήσεις 5) καί 6) μοντέλα μέ χαρτόνι καί ένα λεπτόν μεταλλικόν στέλεχος.

7) Έστω ΑΒΓΔΕΖ ένα κανονικόν εξάγωνον, Ο τό κέντρον του καί ΟΚ ένα ευθύγραμμον τμήμα κάθετον πρός τό επίπεδον τού εξαγώνου. Θεωρούμεν τό ορθόν εξαγωνικόν πρίσμα (βλ. Βιβλ. Ι, σελ. 14-17Α) πού έχει βάσιν τό εξάγωνον καί ύψος τό τμήμα ΟΚ. Κατά ποίας γωνίας περί τήν ευθείαν ΟΚ, προσανατολισμένην, πρέπει καί αρκεί νά στρέψωμεν τό πρίσμα διά νά έλθη εις σύμπτωσιν μέ τόν εαυτόν του;

§ 6. Έμβαδόν επιφανείας πρίσματος, κανονικής πυραμίδος, ορθού κυκλικού κυλίνδρου καί κώνου, σφαίρας. Όγκοι

6.1. Πρίσματα.

α) Εις τό σχ. 67 έχομεν εικονίσει ένα πεντάγωνον ΑΒΓΔΕ καί τάς ευθείας α, β, γ, δ, ε αι οποίαι περνούν από τάς κορυφάς του πενταγώνου καί έχουν τήν διεύθυνσιν μιάς ευθείας λ μή παραλλήλου πρός τό επίπεδον τού πενταγώνου. Τό καθένα από τά 5 ζεύγη (α,β), (β,γ), (γ,δ), (δ,ε), (ε,α) παραλλήλων ευθειών ορίζει ένα απεριόριστον μέρος επιπέδου, μίαν ταινίαν (Βιβλ. Ι, σελ. 80Α). Εις τήν ταινίαν συμπεριλαμβάνομεν καί τά σημεία τών δύο παραλλήλων ευθειών αι οποίαι τήν ορίζουν. Η ένωσις τών σημειοσυνόλων τά οποία αποτελούν τάς ταινίας αυτάς είναι μία επιφάνεια πού λέγεται πρισματική καί έχει ακμάς τάς 5 ευθείας α,β,γ,δ,ε. Γενικώς, άν αντί τού πενταγώνου λάβωμεν ένα πολύγωνον μέ 3,4,5,6,... πλευράς, θά προκύψη μέ όμοιον τρό-



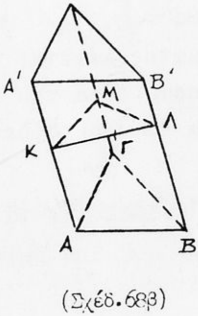
(Σχέδ. 67)

πον μία πρισματική ἐπιφάνεια μέ 3,4,5,6,... ἀκμάς.

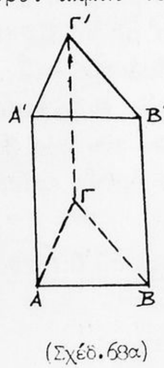
Εἰς τό σχέδ. 67 ἔχομεν ἀκόμη εἰκονίσει ὅτι ἐκόψαμεν τήν πενταγωνικήν πρισματικήν ἐπιφάνειαν μέ ἕνα ἐπίπεδον παράλληλον πρός τό ἐπίπεδον ΑΒΓΔΕ καί ὅτι ἔτσι προέκυψεν τό πεντάγωνον Α΄Β΄Γ΄Δ΄Ε΄. Τό πεντάγωνον αὐτό θά συμπέση μέ τό ΑΒΓΔΕ, ἄν τό μετατοπίσωμεν παραλλήλως κατά τό διάνυσμα $\overrightarrow{A'A}$, ἐπειδή $\overrightarrow{A'A} = \overrightarrow{B'B} = \ldots = \overrightarrow{E'E}$. Τά δύο πεντάγωνα ΑΒΓΔΕ καί Α΄Β΄Γ΄Δ΄Ε΄ εἶναι λοιπόν ἴσα καί ἔχουν τάς ἀντιστοίχους πλευράς των παραλλήλους καί ἴσας. Γενικῶς, ἄν κόψωμεν μίαν πρισματικήν ἐπιφάνειαν μέ δύο παράλληλα ἐπίπεδα τέμνοντα τάς ἀκμάς της, θά προκύψουν δύο ἴσα πολύγωνα μέ ἀντιστοίχους πλευράς ἴσας καί παραλλήλους.

β) Τό μέρος (τό σημειοσύνολον) τοῦ χώρου πού περικλείεται ἀπό μίαν πρισματικήν ἐπιφάνειαν καί ἀπό τά δύο ἴσα πολύγωνα τά ὁποῖα προκύπτουν, ὅταν τήν κόψωμεν μέ δύο παράλληλα ἐπίπεδα, λέγεται πρῖσμα. (Πρβ. καί Βιβλ. Ι, σελ. 14-17Α).Π.χ. εἰς τό σχ. 67 ἡ πρισματική ἐπιφάνεια καί τά δύο πολύγωνα ΑΒΓΔΕ καί Α΄Β΄Γ΄Δ΄Ε΄ ὁρίζουν ἕνα πενταγωνικόν πρῖσμα. Βάσεις του εἶναι τά δύο ἴσα πολύγωνα·αἱ 5 ἀκμαί του ΑΑ΄, ΒΒ΄, ΓΓ΄, ΔΔ΄,ΕΕ΄, πού εἶναι παράλληλοι καί ἴσαι μεταξύ των, λέγονται παράπλευροι ἀκμαί τά 5 παραλληλόγραμμα ΑΒΒ΄Α΄, ΒΓΓ΄Β΄, ...,ΕΑΑ΄Ε΄ εἶναι αἱ παράπλευροι ἕδραι του καί ἀποτελοῦν τήν παράπλευρον ἐπιφάνειάν του.

Ἕνα πρῖσμα λέγεται ὀρθόν, ὅταν αἱ παράπλευροι ἀκμαί του εἶναι κάθετοι πρός τά ἐπίπεδα τῶν βάσεων, ἄλλως λέγεται πλάγιον. Εἰς τό σχ. 68α εἰκονίζεται ἕνα ὀρθόν τριγωνικόν πρῖσμα καί εἰς τό σχ. 68β ἕνα πλάγιον. Κάθετος τομή ἑνός πρίσματος εἶναι τό πολύγωνον πού προκύπτει, ὅταν κόψωμεν τήν πρισματικήν ἐπιφάνειάν του μέ



(Σχέδ.68β)



(Σχέδ.68α)

ἕνα ἐπίπεδον κάθετον πρός τάς ἀκμάς της. Εἰς τό ὀρθόν πρῖσμα αἱ δύο βάσεις εἶναι συγχρόνως κάθετοι τομαί, εἰς τό πλάγιον ὄχι. Ἔτσι εἰς τό πλάγιον πρῖσμα 68β μία κάθετος τομή εἰκονίζεται ἀπό τό τρίγωνον ΚΛΜ τοῦ ὁποίου τό ἐπίπεδον εἰς τόν χῶρον εἶναι κάθετον πρός τάς ἀκμάς ΑΑ΄, ΒΒ΄, ΓΓ΄ τοῦ πρίσματος· ἑπομένως τά εὐθύγραμμα τμήματα ΚΛ,ΛΜ,ΜΚ παριστάνουν τά ὕψη ἀντιστοίχως τῶν παραλληλογράμμων ΑΒΒ΄Α΄,ΒΓΓ΄Β΄, ΓΑΑ΄Γ΄, ὅταν ὡς βάσεις των ληφθοῦν αἱ πλευραί των ΑΑ΄, ΒΒ΄, ΓΓ΄. Γενικῶς, αἱ πλευραί μιᾶς καθέτου τομῆς ἑνός πρίσματος εἶναι ἀντιστοίχως ὕψη τῶν παραλληλογράμμων πού ἀποτελοῦν τάς παραπλεύρους ἕδρας τοῦ πρίσματος, ὅταν ὡς βάσεις ληφθοῦν αἱ παράπλευροι ἀκμαί. Κατά συνέπειαν, τό ἐμβαδόν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας ἑνός πρίσματος τό λαμβάνομεν, ἐάν πολλαπλασιάσωμεν τό κοινόν μῆκος τῶν παραπλεύρων ἀκμῶν του ἐπί τά μήκη τῶν πλευρῶν μιᾶς καθέτου τομῆς καί προσθέσωμεν τά προκύπτοντα γινόμενα. Π.χ. εἰς τά πρίσματα 68α καί 68β ἔχομεν:

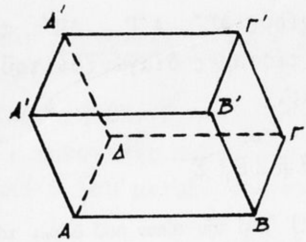
ἐμβ. παραπλεύρου ἐπιφ. τοῦ 68α = (ΑΑ΄) × [(ΑΒ)+(ΒΓ)+(ΓΑ)], ς(α+β+γ)
» » » » 68β = (ΑΑ΄) × [(ΚΛ)+(ΛΜ)+(ΜΚ)].

Τά ἀνωτέρω διατυπώνονται γενικῶς ὡς ἑξῆς:
Ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια ἑνός πρίσματος εἶναι ἴση πρός τό γινόμενον τῆς περιμέτρου μιᾶς καθέτου τομῆς μέ τό μῆκος μιᾶς παραπλεύρου ἀκμῆς.

Τό ἐμβαδόν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας ἑνός πρίσματος ἰσοῦται φυσικά μέ τό ἐμβαδόν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας σύν τό διπλάσιον ἐμβαδόν μιᾶς βάσεως.

<u>Ὕψος</u> ἑνός πρίσματος λέγεται ἡ ἀπόστασις τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν δύο βάσεων (διά τήν ἀπόστασιν βλ. §2.1,γ),III)). Εἰς τό ὀρθόν πρῖσμα τό ὕψος δίδεται καί ἀπό μίαν παράπλευρον ἀκμήν.

δ) <u>Παραλληλεπίπεδα</u> ὀνομάζομεν τά πρίσματα πού ἔχουν βάσεις παραλληλόγραμμα (σχ. 69). Κατά συνέπειαν καί αἱ 6 ἕδραι ἑνός παραλληλεπιπέδου εἶναι παραλληλόγραμμα, ἀνήκουν δέ ἀνά δύο εἰς παράλληλα ἐπίπεδα. Δύο ἕδραι πού ἀνήκουν εἰς παράλληλα ἐπίπεδα λέγονται ἀπέναντι ἕδραι καί εἶναι ἴσα παραλληλόγραμμα, διότι προκύπτουν τό ἕνα ἀπό τό ἄλλο μέ παράλληλον μετατόπισιν. Π.χ. ἡ ἕδρα ΒΓ Γ΄ Β΄ προκύπτει ἀπό τήν ΑΔΔ΄Α΄ μέ παράλληλον μετατόπισιν κατά τό διάνυσμα $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Delta\Gamma} = \overrightarrow{\Delta'\Gamma'} = \overrightarrow{A'B'}$.



(Σχέδ. 69)

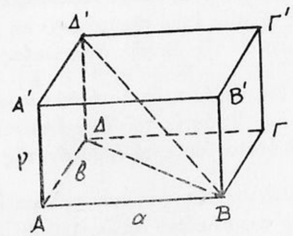
Εἰς τό ὀρθόν παραλληλεπίπεδον αἱ παράπλευροι ἕδραι εἶναι ὀρθογώνια παραλληλόγραμμα. Ἐάν εἰς ἕνα ὀρθόν παραλληλεπίπεδον εἶναι καί αἱ βάσεις ὀρθογώνια παραλληλόγραμμα, τότε τό παραλληλεπίπεδον γίνεται ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον (σχ. 70). Τέλος, τό ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον καταντᾶ κύβος, ὅταν αἱ ἕδραι του εἶναι τετράγωνα.

Ἐάν παραστήσωμεν μέ α, β, γ τάς διαστάσεις (δηλ. τά μήκη τριῶν ἀκμῶν μή παραλλήλων ἀνά δύο) τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ΑΒΓΔΑ΄Β΄Γ΄Δ΄ (βλ. σχ.70), τότε εἰς τό ὀρθογώνιον τρίγωνον ΔΑΒ ἔχομεν:

$(\Delta B)^2 = (AB)^2 + (A\Delta)^2 = \alpha^2 + \beta^2$

καί εἰς τό ἐπίσης ὀρθογώνιον τρίγωνον Δ΄ΔΒ:

$(\Delta' B)^2 = (\Delta'\Delta)^2 + (\Delta B)^2 = \gamma^2 + (\Delta B)^2$.



(Σχέδ. 70)

Κατά συνέπειαν διά τήν διαγώνιον Δ΄Β τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εὑρίσκομεν:

$$(\Delta' B)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \quad \text{καί} \quad (\Delta' B) = \sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}.$$

Ἡ ἰδία σχέσις ἰσχύει φυσικά καί διά τάς τρεῖς ἄλλας διαγωνίους ΑΓ΄, Α΄Γ , ΔΒ΄ τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου· ἔτσι αἱ τέσσαρες διαγώνιοι τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι ἴσαι.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Ἀπό τόν τύπον πού δίδει τό μῆκος τῆς διαγωνίου ἑνός ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου συναρτήσει τῶν διαστάσεών του, νά συμπεράνετε τόν ἀντίστοιχον τύπον διά τήν διαγώνιον ἑνός κύβου. Νά ὑπολογίσετε κατά προσέγγισιν χιλιοστομέτρου (1 mm) τό μῆκος τῆς διαγωνίου εἰς ἕνα κύβον μέ πλευράν 25 cm.

2) Ποῖον εἶναι τό ἐμβαδόν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας ἑνός ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου μέ διαστάσεις α, β, γ ; (Ὑποτίθεται φυσικά ὅτι αἱ διαστάσεις δίδονται εἰς τήν αὐτήν μονάδα μήκους). Νά ἐφαρμόσετε τόν τύπον, πού θά εὕρετε, ὅταν $\alpha = 3,25$ m , $\beta = 4,50$ m , $\gamma = 3,10$ m.

3) Ποῖον εἶναι τό ἐμβαδόν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας ἑνός κύβου μέ πλευράν α ; Νά ἐφαρμόσετε τόν τύπον, πού θά εὕρετε, ὅταν $\alpha = 3,5$ cm. Πόσον εἶναι τό ἴδιον ἐμβαδόν εἰς mm^2;

4) Ἐάν αἱ διαστάσεις ἑνός ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου διπλασιασθοῦν, τριπλασιασθοῦν, τετραπλασιασθοῦν, ..., τί παθαίνει τό ἐμβαδόν τῆς ὁλικῆς του ἐπιφανείας ; Δώσατε ἕνα ἀριθμητικόν παράδειγμα.

5) Ἡ ὁλική ἐπιφάνεια ἑνός κύβου εἶναι 37,50 m^2. Ζητεῖται νά εὑρεθῇ κατά προσέγγισιν ἑνός ἑκατοστομέτρου (1 cm) 1ον ἡ ἀκμή του, 2ον ἡ διαγώνιός του.

6) Τό ὕψος ἑνός ὀρθοῦ παραλληλεπιπέδου εἶναι 40 cm, τό δέ παραλληλόγραμμον τῆς μιᾶς βάσεως ἔχει πλευράν 30 cm καί ἀντίστοιχον ὕψος 15 cm. Νά ὑπολογίσετε τό ἐμβαδόν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τοῦ παραλληλεπιπέδου.

7) Ἕνα ὀρθόν πρῖσμα μέ βάσιν κανονικόν ἑξάγωνον ἔχει παράπλευρον ἀκμήν μήκους 18 cm. Ἡ ἀκτίς τοῦ ἑξαγώνου τῆς βάσεως εἶναι 5 cm (βλ. Βιβλ. ΙΙ, σελ. 232, 235). Νά ὑπολογίσετε τό ἐμβαδόν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τοῦ πρίσματος.

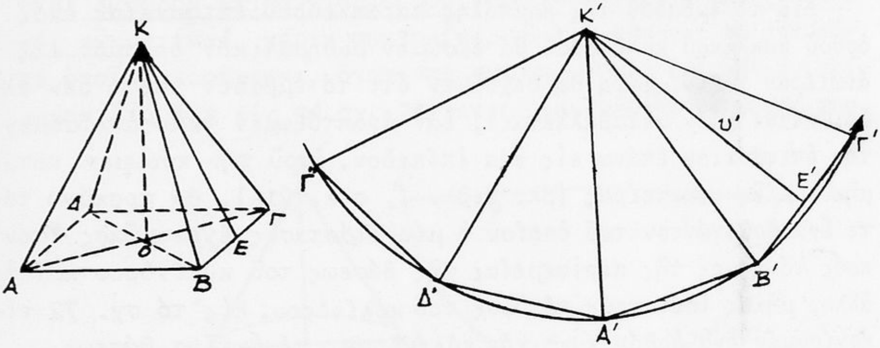
8) Πλάγιον τετραγωνικόν πρῖσμα ἔχει κάθετον τομήν τετράγωνον πλευρᾶς 35cm καί μῆκος παραπλεύρων ἀκμῶν 1,5 dm (δεκατόμετρα). Ποῖον εἶναι τό ἐμβαδόν εἰς cm^2 τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας του;

9) Πλάγιον τριγωνικόν πρῖσμα ἔχει κάθετον τομήν ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ μέ ὑποτείνουσαν ΒΓ = 1,25 m καί κάθετον πλευράν ΑΒ = 1 m. Νά ὑπολογίσετε τήν παράπλευρον ἐπιφάνειάν του, ἐάν αἱ παράπλευροι ἀκμαί του ἔχουν μῆκος 3 m.

6.2. Ἐμβαδόν ἐπιφανείας κανονικῆς πυραμίδος.

Γνωρίζομεν ὅτι μία πυραμίς λέγεται <u>κανονική</u>, ἐάν ἡ βάσις της εἶναι κανονικόν πολύγωνον καί αἱ παράπλευροι ἀκμαί της εἶναι ἴσαι (Βιβλ. Ι, σελ. 19Α). Ἐπομένως ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια μιᾶς κανονικῆς πυραμίδος πού ἔχει βάσιν ἕνα ν-γωνον ἀπαρτίζεται ἀπό ν ἴσα μεταξύ των ἰσοσκελῆ τρίγωνα.

Εἰς τό σχ. 71 εἰκονίσαμεν μίαν τετραγωνικήν κανονικήν πυραμίδα καί ἐχαράξαμεν ἐπάνω εἰς τό ἐπίπεδον τοῦ χάρτου τό ἀνάπτυγμα τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας της κομμένης κατά μῆκος τῆς ἀκμῆς ΚΓ. Διά τό ἐμβαδόν S_π τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς ἔχομεν:



(Σχέδ. 71)

$$S_\pi = \frac{1}{2}(\Gamma''\Delta')\cdot\upsilon' + \frac{1}{2}(\Delta'A')\cdot\upsilon' + \frac{1}{2}(A'B')\cdot\upsilon' + \frac{1}{2}(B'\Gamma')\cdot\upsilon'$$

$$= \frac{1}{2}\left[(\Gamma''\Delta') + (\Delta'A') + (A'B') + (B'\Gamma')\right]\cdot\upsilon'$$

$$= \frac{1}{2}\,2\tau\cdot\upsilon' = \tau\cdot\upsilon',$$

ὅπου $\tau = \frac{1}{2}\left[(\Gamma''\Delta')+(\Delta'A')+(A'B')+(B'\Gamma')\right] =$ ἡμιπερίμετρος βάσεως

καί $\upsilon' =$ ὕψος ἰσοσκελῶν τριγώνων τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας.

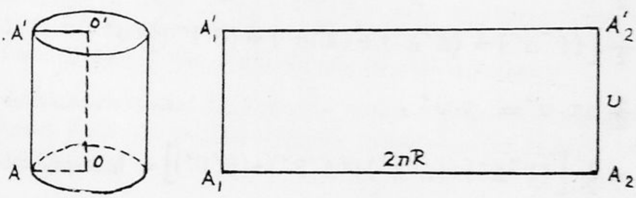
Ὥστε, καί αὐτό ἰσχύει γενικῶς, ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια μιᾶς κανονικῆς πυραμίδος ἔχει ἐμβαδόν ἴσον μέ τό γινόμενον τῆς ἡμιπεριμέτρου τῆς βάσεως ἐπί τό ὕψος μιᾶς (ἰσοσκελοῦς) παραπλεύρου ἕδρας.

'Εννοεῖται ὅτι, διά νά ἔχωμεν τό ἐμβαδόν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τῆς πυραμίδος, θά πρέπει νά προσθέσωμεν εἰς τό ἐμβαδόν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τό ἐμβαδόν τῆς βάσεως. Ἔτσι διά τό ἐμβαδόν $S_{ὁλ}$ τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τῆς ἀνωτέρω τετραγωνικῆς πυραμίδος, ἄν ἡ πλευρά τῆς βάσεως εἶναι $α = 25$ cm καί τό ὕψος $υ' = 45$ cm, θά ἔχωμεν:

$$S_{ὁλ} = S_{\pi} + \text{ἐμβ. βάσεως} = \tau \cdot \upsilon' + \alpha^2 = 2 \cdot 25 \cdot 45 + 25^2 = 2875 \text{ cm}^2.$$

6.3. 'Εμβαδόν ἐπιφανείας ὀρθοῦ κυκλικοῦ κυλίνδρου.

Διά τό ἐμβαδόν τῆς καμπύλης παραπλεύρου ἐπιφανείας ἑνός ὀρθοῦ κυκλικοῦ κυλίνδρου θά δώσωμεν μαθηματικόν ὁρισμόν εἰς ἀνωτέραν τάξιν. Τώρα θά δεχθῶμεν ὅτι τό ἐμβαδόν τοῦτο δέν ἀλλοιώνεται (δέν μεταβάλλεται), ἐάν ἀναπτύξωμεν (ἐάν ἁπλώσωμεν) τήν ἐπιφάνειαν ἐπάνω εἰς ἕνα ἐπίπεδον, ἀφοῦ τήν κόψωμεν κατά μῆκος μιᾶς γενετείρας (βλ. Βιβλ. Ι, σελ. 21Α). Θά προκύψη τότε ἕνα ὀρθογώνιον τοῦ ὁποίου ἡ μία διάστασις ἔχει μῆκος ἴσον πρός τό μῆκος τῆς περιφερείας τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου καί ἡ ἄλλη, μῆκος ἴσον πρός τό ὕψος τοῦ κυλίνδρου. Εἰς τό σχ. 72 εἰκονίσαμεν ἕνα ὀρθόν κυκλικόν κύλινδρον, μέ ἀκτῖνα βάσεως $R = 9$ mm καί ὕψος $υ = 21$ mm, καί σχεδιάσαμεν τό ἀνάπτυγμα τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας της.



(Σχέδ. 72)

Διά τό ἐμβαδόν S_{π} τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς ἔχομεν λοιπόν τόν τύπον:

$$\boxed{S_\pi = 2\pi R\cdot \upsilon}$$

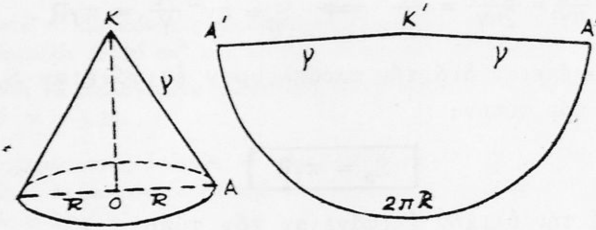
καί διά τό ἐμβαδόν $S_{\text{ολ}}$ τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου τόν τύπον:

$$\boxed{S_{\text{ολ}} = 2\pi R\cdot\upsilon + 2\pi R^2 = 2\pi R(\upsilon + R)}$$

Μέ τά ἀριθμητικά δεδομένα τοῦ σχ. 72 καί μέ $\pi = 3,14$ εὑρίσκομεν:

$$S_\pi \simeq 1186,92 \text{ mm}^2 \quad \text{καί} \quad S_{\text{ολ}} \simeq 1186,92 + 508,68 = 1695,60 \text{ m}^2.$$

6.4. Ἐμβαδόν ἐπιφανείας ὀρθοῦ κυκλικοῦ κώνου. Ὀρθός κυκλικός κῶνος (καί, χάριν συντομίας, κῶνος) λέγεται τό στερεόν τό ὁποῖον παράγεται, ὅταν περιστρέψωμεν ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον (τό ΚΟΑ εἰς τό σχ. 73) περι μιαν καθετον πλευράν του.



(Σχέδ. 73)

Ἡ ἀκίνητος αὐτή πλευρά λέγεται ἄξων τοῦ ὀρθοῦ κυκλικοῦ κώνου. Ἡ ἄλλη κάθετος πλευρά διαγράφει κατά τήν περιστροφὴν ἕνα κύκλον πού λέγεται βάσις τοῦ κώνου. Τέλος ἡ ὑποτείνουσα τοῦ τριγώνου διαγράφει μίαν καμπύλην ἐπιφάνειαν πού λέγεται παράπλευρος ἐπιφάνεια τοῦ κώνου. Κορυφή τοῦ κώνου εἶναι τό ἄκρον τῆς ὑποτεινούσης πού μένει ἀκίνητον κατά τήν περιστροφὴν, ἐνῶ τό ἄλλο ἄκρον διαγράφει τήν περιφέρειαν τῆς βάσεως τοῦ κώνου. Τά ἴσα εὐθύγραμμα τμήματα πού ἑνώνουν τήν κορυφήν μέ τά διάφορα σημεῖα τῆς περιφερείας τῆς βάσεως τοῦ κώνου λέγονται γενέτειραι, διότι παράγουν τήν παράπλευρον ἐπιφάνειάν του. Ἐάν τήν ἐπιφάνειαν αὐτήν τήν σχίσωμεν κατά μῆκος μιᾶς γενετείρας, τότε εἶναι δυνατόν νά τήν ἀναπτύξωμεν (ἁπλώσωμεν) ἐπάνω εἰς ἕνα ἐπίπεδον χωρίς νά μεταβάλωμεν τό ἐμβαδόν της πού τόν μαθηματικόν ὁρισμόν του θά δώσωμεν εἰς ἀνωτέραν τάξιν. Θά προκύψη ἕνας κυκλικός τομεύς, ὅπως αὐτός πού ἐσχεδιάσαμεν εἰς τό σχ.73, μέ ἀκτῖνα ἴσην πρός μίαν γενέτειραν γ τοῦ κώνου καί μέ ἀντίστοιχον τόξον κύκλου ἕνα τόξον μήκους $2\pi R$ ἴσου πρός τό μῆκος τῆς περιφερείας τῆς βάσεως τοῦ κώνου. Διά τό ἐμβαδόν S_π αὐτοῦ τοῦ τομέως ἰσχύει, ὅπως εὔκολα εὑρίσκει κανείς, ἡ ἀναλογία

$$\frac{\text{ἐμβ. τομέως}}{\text{ἐμβ.ὁλοκλ. τοῦ κύκλου}} = \frac{\text{μῆκος ἀντιστοίχου τόξου}}{\text{μῆκος ὁλοκλ. τῆς περιφερείας}},$$

ἄρα

$$\frac{S_\pi}{\pi\gamma^2} = \frac{2\pi R}{2\pi\gamma} = \frac{R}{\gamma} \Longrightarrow S_\pi = \pi\gamma^2\frac{R}{\gamma} = \pi\gamma R.$$

Κατά συνέπειαν διά τήν παράπλευρον ἐπιφάνειαν S_π τοῦ κώνου ἔχομεν τόν τύπον:

$$\boxed{S_\pi = \pi\gamma R}$$

καί διά τήν ὁλικήν ἐπιφάνειαν τόν τύπον:

$$\boxed{S_{\text{ὁλ}} = \pi\gamma R + \pi R^2 = \pi R(\gamma + R).}$$

6.5. Ἐμβαδόν ἐπιφανείας σφαίρας. Εἰς ἀνωτέραν τάξιν θά μάθωμεν ποῖος εἶναι ὁ μαθηματικός ὁρισμός τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ἐπιφανείας μιᾶς σφαίρας καί διατί τό ἐμβαδόν αὐτό εἶναι τετραπλάσιον ἀπό τό ἐμβαδόν ἑνός κύκλου πού ἔχει ἀκτῖνα ἴσην μέ τήν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας. Κατά ταῦτα τό ἐμβαδόν S τῆς ἐπιφανείας μιᾶς σφαίρας μέ ἀκτῖνα R δίδεται ἀπό τόν τύπον:

$$\boxed{S = 4\pi R^2}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Ἕνα κανονικόν τετράεδρον (δηλαδή μία πυραμίς μέ τέσσαρα ἰσόπλευρα τρίγωνα ὡς ἕδρας) ἔχει ἀκμάς μήκους 12 cm. Ζητεῖται
α) τό ἐμβαδόν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας του,
β) τό ἐμβαδόν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τοῦ τετραέδρου πού λαμβάνομεν, ὅταν κόψωμεν τό ἀρχικόν τετράεδρον μέ ἕνα ἐπίπεδον παράλληλον πρός τήν βάσιν καί εἰς ἀπόστασιν ἀπό αὐτήν ἴσην μέ τό $\frac{1}{2}$ τοῦ ὕψους τοῦ ἀρχικοῦ τετραέδρου.
Νά ἐξηγήσετε διατί τό ἀποκομμένον τετράεδρον εἶναι ὁμόθετον (ἄρα καί ὅμοιον) πρός τό ἀρχικόν καί νά ἐπαληθεύσετε τήν ἰδιότητα πού ἀνεπτύχθη εἰς τήν ἀνωτέρω §6.6.

2) Κανονική τετραγωνική πυραμίς ἔχει διαγώνιον βάσεως $10\sqrt{2}$ cm καί παράπλευρον ἀκμήν 13 cm. Ζητεῖται
α) νά εὕρετε τήν πλευράν τῆς τετραγωνικῆς βάσεως,
β) νά ὑπολογίστε τό ὕψος μιᾶς παραπλεύρου ἕδρας,
γ) νά ὑπολογίσετε τήν παράπλευρον ἐπιφάνειαν τῆς πυραμίδος καθώς καί τήν ὁλικήν ἐπιφάνειάν της,
δ) νά κατασκευάσετε τήν πυραμίδα ἀπό χαρτόνι.

3) Νά ὑπολογίσετε τό ἐμβαδόν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας κυλίνδρου τοῦ ὁποίου ἡ βάσις ἔχει ἐμβαδόν 28,26 dm^2 καί τό ὕψος εἶναι ἴσον μέ 1,10 m.

Ὑπόδειξις. Θά χρειασθῆ νά ὑπολογίσετε πρῶτα κατά προσέγγισιν τήν ἀκτῖνα R τῆς βάσεως παίρνοντες τό $\pi = 3,14$.

4) Ἕνας ἐλαιοχρωματιστής ἀνέλαβε νά χρωματίση 85 σιδηρᾶ κυλινδρικά βαρέλια· τό καθένα των ἔχει διάμετρον 64 cm καί ὕψος 90 cm. Πόσον θά πληρωθῆ διά τήν ἐργασίαν του πρός 8 δρχ/ m^2;

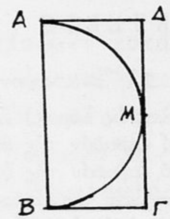
5) Ἕνα κυλινδρικόν δοχεῖον θέλομεν νά ἔχη ὁλικήν ἐπιφάνειαν 16014 cm^2 καί διάμετρον 60 cm. Πόσον θά πρέπει νά εἶναι τό ὕψος του ;

6) Θέλομεν νά κατασκευάσωμεν μίαν κωνικήν σκηνήν ἡ ὁποία νά ἔχη διάμετρον βάσεως 6 m καί ὕψος, δηλαδή ἀπόστασιν ἀπό τήν κορυφήν ἕως τό κέντρον τῆς βάσεως, 4 m. Πόσα m^2 ὕφασμα θά χρειασθοῦν, ἄν τά ἄχρηστα ἀποκόμματα καί αἱ διπλώσεις εἰς τάς ραφάς ὑπολογισθοῦν εἰς 1,5 m^2;

Ὑπόδειξις. Θά χρειασθῆ νά ὑπολογίσετε πρῶτα τήν γενέτειραν βάσει τοῦ Πυθαγορείου θεωρήματος.

7) Ἕνας κῶνος ἔχει διάμετρον βάσεως 10 cm καί ὕψος 12 cm. Ζητεῖται
α) ἡ ὁλική ἐπιφάνειά του,
β) ἡ ὁλική ἐπιφάνεια τοῦ κώνου πού θά προκύψη μέ μίαν τομήν πού εἶναι παράλληλος πρός τήν βάσιν καί ἀπέχει ἀπό αὐτήν τόσον ὅσον καί ἀπό τήν κορυφήν,
γ) νά ἐξηγήσετε διατί ὁ ἀποκομμένος κῶνος καί ὁ ἀρχικός εἶναι ὁμόθετα (ἄρα καί ὅμοια) στερεά καί νά ἐπαληθεύσετε τήν ἰδιότητα πού διετυπώθη εἰς τήν §6.6.

8) Εἰς τό σχ. 74 τό ἡμικύκλιον ΑΒΜ εἶναι "ἐγγεγραμμένον" εἰς τό ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ τοῦ ὁποίου ἡ πλευρά ΒΓ εἶναι ἴση μέ $\frac{1}{2}$ ΑΒ.
Ἐάν περιστρέψωμεν ὀρθογώνιον καί ἡμικύκλιον περί τήν ΑΒ, τότε τό μέν ὀρθογώνιον θά παραγάγῃ ἕνα κύλινδρον, τό δέ ἡμικύκλιον μίαν σφαῖραν "ἐγγεγραμμένην" εἰς τόν κύλινδρον.
Νά δείξετε μέ ὑπολογισμούς ὅτι
α) ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας ἔχει ἐμβαδόν ἴσον μέ τό ἐμβαδόν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδου καί
β) ὁ λόγος τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας πρός τήν ὁλικήν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου ἰσοῦται μέ 2/3.

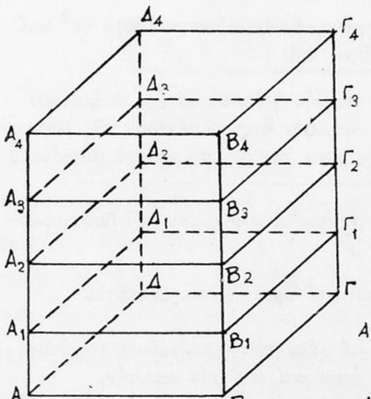


(Σχέδ. 74)

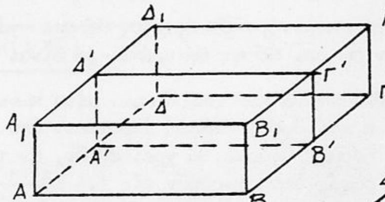
6.6. Ὄγκος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου. Διά νά μετρήσωμεν τούς ὄγκους τῶν στερεῶν χρησιμοποιοῦμεν συνήθως ὡς μονάδα εἴτε τό κυβικόν μέτρον (m^3) εἴτε τάς ὑποδιαιρέσεις του. Αἱ κυριώτεραι ἀπό τάς ὑποδιαιρέσεις αὐτάς εἶναι αἱ ἑξῆς (βλ. καί Βιβλ. Ι, σελ. 32Α):

$$1\ m^3 = 10^3\ dm^3 = 10^6\ cm^3 = 10^9\ mm^3$$
$$1\ dm^3 = 10^3\ cm^3 = 10^6\ mm^3$$
$$1\ cm^3 = 10^3\ mm^3.$$

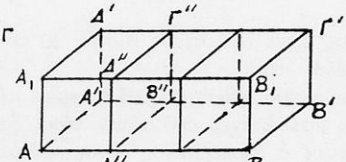
Ἔστω τώρα πρός μέτρησιν ὁ ὄγκος τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου $ΑΒΓΔΑ_4Β_4Γ_4Δ_4$ (σχ. 75α) τό ὁποῖον ἔχει διαστάσεις $ΑΒ = 3$ cm, $ΑΔ = 2$ cm, $ΑΑ_4 = 4$ cm. Μέ 3 ἐπίπεδα, πού εἶναι πα-



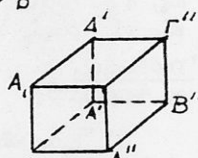
(Σχέδ. 75α)



(Σχέδ. 75β)



(Σχέδ. 75γ)



(Σχέδ. 75δ)

ράλληλα πρός τήν βάσιν ΑΒΓΔ καί διαιροῦν τάς παραπλεύρους ἀκμάς εἰς 4 ἴσα τμήματα μήκους 1 cm, χωρίζομεν τό παραλληλεπίπεδον εἰς 4 <u>ἴσα</u> ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα. Ἕνα ἀπό αὐτά, πού εἰκονίζεται χωριστά εἰς τό σχ. 75β, τό χωρίζομεν εἰς δύο <u>ἴσα</u> ὀρθογ. παραλληλεπίπεδα μέ μίαν ἐπίπεδον τομήν παράλληλον πρός τήν ἕδραν ABB_1A_1. Τέλος χωρίζομεν τό ἕνα ἀπό αὐτά τά δύο (αὐτό πού εἰκονίζομεν χωριστά εἰς τό σχ. 75γ) εἰς τρία ἴσα ὀρθογ. παραλληλεπίπεδα μέ δύο ἐπιπέδους τομάς παραλλήλους πρός τήν ἕδραν $AA'\Delta'A_1$. Τό καθένα ἀπό αὐτά τά τρία ἔχει διαστάσεις ἴσας μέ 1 cm καί ἐπομένως ὄγκον 1 cm^3 (σχ. 74δ). Ἐπομένως, τό παραλληλεπίπεδον σχ. 75γ ἔχει ὄγκον $3\cdot 1\ cm^3 = 3\ cm^3$, τό παραλληλεπίπεδον τοῦ σχ. 75β ἔχει ὄγκον $2\cdot 3\ cm^3 = 6\ cm^3$ καί τό ἀρχικόν παραλληλεπίπεδον ἔχει ὄγκον $4\cdot 2\cdot 3\ cm^3 = 24\ cm^3$.

Γενικῶς ἀποδεικνύεται τό ἑξῆς:

Ὁ ὄγκος V ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι ἴσος μέ τό γινόμενον τῶν τριῶν διαστάσεών του α, β, γ, ἄρα καί μέ τό γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεως μέ τό ὕψος:

$$V = \alpha\beta\gamma = (\alpha\beta)\cdot\gamma = \text{ἐμβ. βάσεως ἐπί ὕψος.}$$

Προϋποτίθεται φυσικά ὅτι αἱ διαστάσεις ἔχουν μετρηθῆ μέ τήν ἰδίαν μονάδα μήκους, ὅτι μονάς ὄγκου εἶναι ὁ κύβος μέ ἀκμάς ἴσας πρός τήν χρησιμοποιουμένην μονάδα μήκους καί μονάς ἐπιφανείας τό τετράγωνον μέ πλευράς ἴσας πρός τήν μονάδα μήκους.

<u>Παράδειγμα.</u> Νά ὑπολογισθῆ ὁ ὄγκος ὀρθογ. παραλληλεπιπέδου πού ἔχει διαστάσεις $\alpha = 1,20$ m, $\beta = 13$ dm, $\gamma = 85,5$ cm.

Ἐκφράζομεν καί τάς τρεῖς διαστάσεις εἰς τήν ἰδίαν μονάδα μήκους, π.χ. εἰς mm, ἄν θέλωμεν νά ἐργασθῶμεν μέ ἀκεραίους ἀριθμούς:

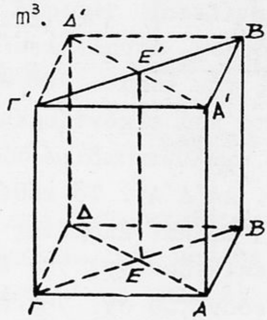
$$\alpha = 1200\ mm, \quad \beta = 1300\ mm, \quad \gamma = 855\ mm.$$

Συνεπῶς

$$\begin{aligned} V = 1200\cdot 1300\cdot 855\ mm^3 &= 1\ 333\ 800\ 000\ mm^3 \\ &= 1\ 333\ 800\ cm^3 \\ &= 1\ 333,8\ dm^3 \\ &= 1,3338\ m^3 \end{aligned}$$

'Εννοεῖται ὅτι τό ἴδιον ἀποτέλεσμα θά προκύψη, ἄν μετρήσωμεν τάς διαστάσεις εἰς m καί ἐργασθῶμεν μέ δεκαδικούς ἀριθμούς:

$$V = (1,2 \times 1,3 \times 0,855)\ m^3 = 1,3338\ m^3.$$



(Σχέδ. 76)

6.7. "Ογκος ὀρθοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος.

I) Παίρνομεν πρῶτα ἕνα πρῖσμα μέ βάσιν ὀρθογώνιον τρίγωνον: εἰς τό σχ. 76 τό τρίγωνον ΑΒΓ εἰκονίζει ἕνα τρίγωνον μέ κορυφήν ὀρθῆς γωνίας αὐτήν πού παριστάνεται ἀπό τό σημεῖον Α. Εἶναι εὔκολον νά συμπληρώσωμεν αὐτό τό ὀρθόν τριγωνικόν πρῖσμα εἰς ἕνα ὀρθογ. παραλληλεπίπεδον ΑΒΓΔΑ΄Β΄Γ΄Δ΄ (βλέπετε πῶς ;). Τό ἐπίπεδον ΓΒΒ΄Γ΄ χωρίζει τό παραλληλεπίπεδον εἰς δύο ἴσα μέρη: τό ὀρθόν τριγωνικόν πρῖσμα πού ἐπήραμεν καί τό συμμετρικόν του ΓΒΔΓ΄Β΄Δ΄ ὡς πρός τήν εὐθεῖαν ΕΕ΄ πού ὁρίζεται ἀπό τά κέντρα Ε καί Ε΄ τῶν ὀρθογωνίων ΑΒΔΓ καί Α΄Β΄Δ΄Γ΄. Κατά συνέπειαν ὁ ὄγκος V τοῦ ὀρθοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος εἶναι ἴσος μέ τό ἥμισυ τοῦ ὄγκου τοῦ ὀρθογ. παραλληλεπιπέδου, ἑπομένως:

$$V = \frac{1}{2}\ \text{ἐμβ. βάσεως ΑΒΔΓ} \times \text{ὕψος ΑΑ΄} \quad ,$$

καί

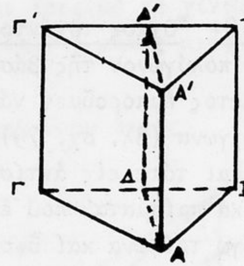
$$V = \text{ἐμβ. τριγ. βάσεως ΑΒΓ} \times \text{ὕψος ΑΑ΄}.$$

'Εάν λοιπόν καλέσωμεν β τό ἐμβαδόν τῆς βάσεως τοῦ ὀρθοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος καί υ τό ὕψος του, θά ἔχωμεν τόν τύπον:

$$\boxed{V = \beta\upsilon}$$

II) "Ας εἶναι, δεύτερον, ΑΒΓΑ΄Β΄Γ΄ (σχ. 77) ἕνα ὀρθόν τριγωνικόν πρῖσμα μέ βάσιν τυχόν τρίγωνον ΑΒΓ. "Εστω ἡ γωνία $\widehat{A} \geq$

τῆς $\widehat{B}$ καί τῆς $\widehat{\Gamma}$. Αἱ γωνίαι $\widehat{B}$ καί $\widehat{\Gamma}$ θά εἶναι τότε ὀξεῖαι καί τό ἴχνος Δ τοῦ ὕψους ΑΔ τοῦ τριγ. ΑΒΓ θά κεῖται μεταξύ Β καί Γ. Τό ἐπίπεδον ΔΑΑ΄ θά χωρίζη λοιπόν τό ἀρχικόν τριγωνικόν πρῖσμα εἰς δύο ὀρθά τριγωνικά πρίσματα μέ βάσιν <u>ὀρθογώνια</u> τρίγωνα. Ἑπομένως ὁ ὄγκος V τοῦ ἀρχικοῦ τριγ. πρίσματος θά εἶναι ἴσος μέ



(Σχέδ. 77)

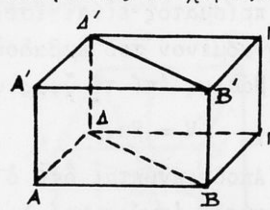
V = ἐμβ. τριγ. ΑΒΔ × ὕψος ΑΑ΄ + ἐμβ. τριγ. ΑΔΓ × ὕψος ΑΑ΄
 = (ἐμβ. τριγ. ΑΒΔ + ἐμβ. τριγ. ΑΔΓ) × ὕψος ΑΑ΄
 = ἐμβ. τριγ. ΑΒΓ × ὕψος ΑΑ΄.

Ὥστε, ἐάν καλέσωμεν β τό ἐμβαδόν τῆς βάσεως τοῦ ἀρχικοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος καί υ τό ὕψος του, θά ἔχωμεν τόν τύπον

$$V = \beta\upsilon .$$

<u>6.8. Ὄγκος ὀρθοῦ παραλληλεπιπέδου.</u> Ὑποθέτομεν ὅτι τό ὀρθόν παραλληλεπίπεδον ΑΒΓΔΑ΄Β΄Γ΄Δ΄ (σχ. 78) ἔχει βάσιν ἕνα μή ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ. Ἡ διαγώνιος ΒΔ χωρίζει τό παραλληλόγραμμον εἰς δύο τρίγωνα καί τό "διαγώνιον" ἐπίπεδον ΒΒ΄Δ΄Δ χωρίζει τό ὀρθόν παραλληλεπίπεδον εἰς δύο ὀρθά τριγωνικά πρίσματα: τά ΑΒΔΑ΄Β΄Δ΄ καί ΔΒΓΔ΄Β΄Γ΄.

Ἑπομένως ὁ ὄγκος V τοῦ ὀρθοῦ παραλληλεπιπέδου ἰσοῦται μέ



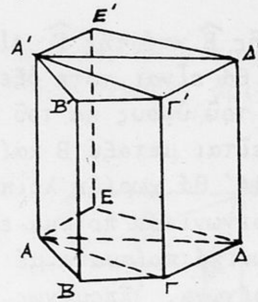
(Σχέδ. 78)

V = ἐμβ.τριγ.ΑΒΔ × ὕψος ΑΑ΄ + ἐμβ.τριγ. ΔΒΓ × ὕψος ΑΑ΄
 = (ἐμβ. τριγ.ΑΒΔ + ἐμβ.τριγ ΔΒΓ) × ὕψος ΑΑ΄.

Ἄρα πάλιν

$$V = \beta\upsilon ,$$

ὅπου β τό ἐμβαδόν τῆς βάσεως τοῦ ὀρθοῦ παραλληλεπιπέδου καί υ τό ὕψος του.



(Σχέδ. 79)

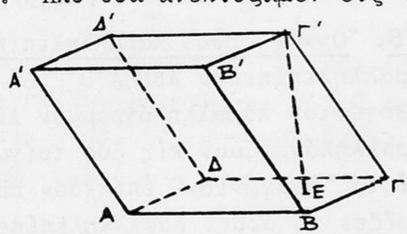
6.9. Ὄγκος τυχόντος ὀρθοῦ πρίσματος. Τό πολύγωνον τῆς βάσεως τοῦ ὀρθοῦ πρίσματος ἠμποροῦμεν νά τό χωρίσωμεν εἰς τρίγωνα (βλ. σχ. 79). Τό πρῖσμα χωρίζεται τότε εἰς ἀντίστοιχα ὀρθά τριγωνικά πρίσματα, πού ἔχουν βάσεις τά ἐν λόγῳ τρίγωνα καί ὕψος ἴσον μέ τό ὕψος τοῦ ἀρχικοῦ πρίσματος. Ἐάν λοιπόν καλέσωμεν $S_1, S_2, \ldots, S_\mu$ τά ἐμβαδά τῶν τριγώνων εἰς τά ὁποῖα ἐχωρίσθη ἡ βάσις τοῦ ἀρχικοῦ πρίσματος καί υ τό ὕψος του, θά ἔχωμεν διά τόν ὄγκον V τοῦ πρίσματος τήν σχέσιν:

$$V = (S_1 \times υ + S_2 \times υ + \ldots + S_\mu \times υ)$$
$$= (S_1 + S_2 + \ldots + S_\mu) \times υ = \text{ἐμβ. βάσεως} \times \text{ὕψος πρίσματ.}$$

6.10. Ὄγκος πλαγίου πρίσματος. Ἀπό ὅσα ἀνεπτύξαμεν εἰς τάς §§6.7 ἕως 6.10 προκύπτει τό συμπέρασμα:

Ὁ ὄγκος V τυχόντος ὀρθοῦ πρίσματος εἶναι ἴσος μέ τό γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ β τῆς βάσεως ἐπί τό ὕψος υ:

$$V = βυ.$$



(Σχέδ. 80)

Ἀποδεικνύεται ὅτι ὁ κανών αὐτός ἰσχύει καί διά τά πλάγια πρίσματα. Π.χ. εἰς τό πλάγιον παραλληλεπίπεδον τοῦ σχ. 80, ὅπου τό τμῆμα Γ′Ε εἰκονίζει τήν ἀπό τό Γ′ κάθετον πρός τό ἐπίπεδον τῆς βάσεως ΑΒΓΔ, ὅπου ἑπομένως τό Γ′Ε παριστάνει τό ὕψος τοῦ παραλληλεπιπέδου, θά ἔχωμεν:

Ὄγκος τοῦ ΑΒΓΔΑ′Β′Γ′Δ′ = ἐμβ. βάσεως ΑΒΓΔ × ὕψος Γ′Ε.

Ὁ παραπάνω κανών διά τόν ὄγκον ἑνός ὀρθοῦ πρίσματος ἠμπορεῖ νά ἀντικατασταθῇ μέ τόν ἑξῆς:

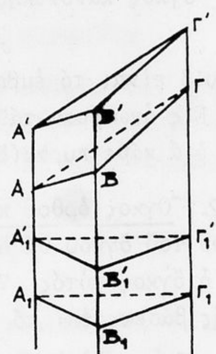
῾Ο ὄγκος V ἑνός ὀρθοῦ πρίσματος εἶναι ἴσος μέ τό γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ μιᾶς καθέτου τομῆς του ἐπί τό μῆκος μιᾶς παραπλεύρου ἀκμῆς:

V = ἐμβ. καθέτου τομῆς × μῆκος παραπλεύρου ἀκμῆς.

᾿Αποδεικνύεται ὅτι αὐτό ἰσχύει καί διά τό πλάγιον πρῖσμα. Π.χ. εἰς τό πλάγιον πρῖσμα ΑΒΓΑ΄Β΄Γ΄ τοῦ σχ. 81, μέ κάθετον τομήν τό τρίγωνον A_1' B_1' Γ_1', ἔχομεν

῎Ογκος ΑΒΓΑ΄Β΄Γ΄ = ἐμβ.$A_1'B_1'\Gamma_1'$ × ΑΑ΄.

῞Ωστε, διά τόν ὑπολογισμόν τοῦ ὄγκου ἑνός ὁποιουδήποτε πρίσματος ἠμποροῦμεν νά ἐργασθῶμεν εἴτε μέ τόν ἕνα εἴτε μέ τόν ἄλλον ἀπό τούς δύο ἀκολούθους τρόπους:

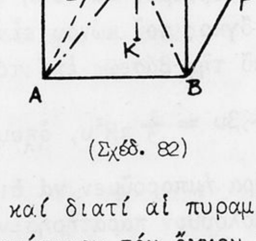


(Σχέδ. 81)

I) ῾Υπολογίζομεν τό ἐμβαδόν τῆς βάσεως καί τό πολλαπλασιάζομεν μέ τό ὕψος τοῦ πρίσματος.

II) ῾Υπολογίζομεν τό ἐμβαδόν μιᾶς καθέτου τομῆς καί τό πολλαπλασιάζομεν μέ τό μῆκος μιᾶς παραπλεύρου ἀκμῆς.

6.11. ῎Ογκος πυραμίδος. Εἰς τό σχ. 82 ἔχομεν εἰκονίσει ἕνα κύβον μέ ἀκμάς μήκους α καί τάς 4 διαγωνίους του. ῾Η τομή των Ο (βλ. §3.1) εἶναι κοινή κορυφή τῶν 6 ἴσων κανονικῶν τετραγωνικῶν πυραμίδων εἰς τάς ὁποίας χωρίζεται ὁ κύβος μέσω τῶν 6 διαγωνίων ἐπιπέδων ΑΒΔ΄Γ΄, Α΄Β΄ΓΔ, ΒΒ΄ΔΔ΄, ΑΑ΄ΓΓ΄, Α΄Δ΄ΒΓ, ΑΔΒ΄Γ΄.



(Σχέδ. 82)

(Ποῖαι εἶναι αἱ βάσεις τῶν πυραμίδων καί διατί αἱ πυραμίδες εἶναι κανονικαί καί ἴσαι;). ῎Ας ὑπολογίσωμεν τόν ὄγκον V μιᾶς ἐξ αὐτῶν π.χ. τῆς ΟΑΒΓΔ. ῎Εχομεν:

$$V = \frac{1}{6} \text{ ὄγκος κύβου} = \frac{1}{6}\alpha^3 = \frac{1}{3}\alpha^2 \cdot \frac{\alpha}{2}.$$

Παρατηροῦμεν ὅμως ὅτι α^2 εἶναι τό ἐμβαδόν τῆς βάσεως τῆς πυραμίδος καί $\frac{\alpha}{2} = OK$ τό ὕψος της. Ἄρα

Ὄγκος κανονικῆς τετραγ. πυραμίδος $= \frac{1}{3}$ ἐμβ. βάσεως ἐπί ὕψος
$= \frac{1}{3} S\beta \upsilon$,

ὅπου $S\beta$ εἶναι τό ἐμβαδόν τῆς βάσεως καί υ τό ὕψος τῆς πυραμίδος.

Εἰς ἀνωτέραν τάξιν θά δείξωμεν ὅτι ὁ τύπος αὐτός ἰσχύει καί διά κάθε πυραμίδα, ὄχι μόνον τήν κανονικήν τετραγωνικήν.

<u>6.12.</u> <u>Ὄγκος ὀρθοῦ κυκλικοῦ κυλίνδρου.</u> Ὁ μαθηματικός ὁρισμός αὐτοῦ τοῦ ὄγκου θά δοθῆ εἰς ἀνωτέραν τάξιν· τώρα θά δεχθῶμεν ὅτι ὁ ὄγκος αὐτός V εἶναι ἴσος μέ τό γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ β τῆς βάσεως ἐπί τό ὕψος υ τοῦ κυλίνδρου:

$V = S\beta\upsilon = \pi R^2 \upsilon$, ὅπου R ἡ ἀκτίς τῆς βάσεως.

Ἡ παραδοχή αὐτή δικαιολογεῖται ὡς ἑξῆς: ἐάν ἐγγράψωμεν εἰς τήν κυκλικήν βάσιν του κυλίνδρου ἕνα <u>κανονικόν</u> πολύγωνον, τό ὀρθόν πρῖσμα, πού ἔχει βάσιν αὐτό τό πολύγωνον καί ὕψος τό ἴδιον μέ τόν κύλινδρον, θά διαφέρη ἀπό τόν κύλινδρον πολύ ὀλίγον, ἀρκεῖ ὁ ἀριθμός τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου νά εἶναι ἀρκετά μεγάλος.

Εἶναι λοιπόν εὔλογον νά δεχθῶμεν ὅτι ὁ τύπος πού ἰσχύει διά τόν ὄγκον πρίσματος ἰσχύει καί διά τόν κύλινδρον.

<u>6.13.</u> <u>Ὄγκος ὀρθοῦ κυκλικοῦ κώνου.</u> Καί αὐτοῦ τοῦ ὄγκου ὁ μαθηματικός ὁρισμός θά δοθῆ εἰς ἀνωτέραν τάξιν. Θά προκύψη τότε ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ κώνου εἶναι ἴσος μέ τό $\frac{1}{3}$ τοῦ γινομένου τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεως ἐπί τό ὕψος:

$V = \frac{1}{3} S\beta\upsilon = \frac{1}{3}\pi R^2 \upsilon$, ὅπου R ἡ ἀκτίς τῆς βάσεως.

Τώρα ἠμποροῦμεν νά δικαιολογήσωμεν αὐτό τό ἀποτέλεσμα μέ τήν ἀκόλουθον παρατήρησιν: ἐάν ἐγγράψωμεν εἰς τήν κυκλικήν βάσιν τοῦ κώνου ἕνα κανονικόν πολύγωνον, ἡ πυραμίς πού ἔχει βάσιν αὐτό τό πολύγωνον καί κορυφήν τήν κορυφήν τοῦ κώνου, θά διαφέρη ἀπό τοῦτον πολύ ὀλίγον, ἀρκεῖ ὁ ἀριθμός τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου νά εἶναι ἀρκετά μεγάλος.

Εἶναι λοιπόν εὔλογον ὁ τύπος διά τόν ὄγκον τοῦ κώνου νά μή διαφέρη ἀπό τόν τύπον διά τόν ὄγκον τῆς πυραμίδος.

6.14. Ὄγκος σφαίρας. Εἰς ἀνωτέραν τάξιν θά μάθωμεν πῶς ορίζεται μαθηματικά ὁ ὄγκος σφαίρας καί πῶς ἀπό τόν ορισμόν αὐτόν ἕπεται ὁ ἀκόλουθος τύπος διά τόν ὄγκον V μιᾶς σφαίρας πού ἔχει ἀκτῖνα R καί διάμετρον $D = 2R$:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{D}{2}\right)^3 = \frac{1}{6}\pi D^3.$$

Τώρα ἠμποροῦμεν νά δώσωμεν τήν ἀκόλουθον δικαιολογίαν δι'αὐτόν τόν τύπον: Ἠμποροῦμεν νά φαντασθῶμεν εὔκολα ὅτι ἕνα κυρτόν πολύεδρον περικλείει τήν σφαῖραν οὕτως ὥστε κάθε ἕδρα του νά ἔχη ἕνα κοινόν σημεῖον μέ τήν ἐπιφάνειάν της. Ἄν ἑνώσωμεν τάς κορυφάς τοῦ πολυέδρου μέ τό κέντρον τῆς σφαίρας, θά προκύψουν τόσαι πυραμίδες ὅσαι εἶναι αἱ ἕδραι τοῦ πολυέδρου, μέ βάσεις τάς ἕδρας αὐτάς, μέ κοινήν κορυφήν τό κέντρον τῆς σφαίρας καί μέ ὕψη ἴσα πρός τήν ἀκτῖνα R τῆς σφαίρας. Ἄς παραστήσωμεν μέ $S_1, S_2, \ldots, S_\nu$ τά ἐμβαδά τῶν ἑδρῶν τοῦ πολυέδρου· ὁ ὄγκος τοῦ πολυέδρου θά ἰσοῦται τότε μέ τό ἄθροισμα τῶν ὄγκων τῶν πυραμίδων τούτων, δηλαδή μέ

$$\frac{1}{3}S_1R + \frac{1}{3}S_2R + \ldots + \frac{1}{3}S_\nu R = \frac{1}{3}(S_1 + S_2 + \ldots + S_\nu)R$$

$$= \frac{1}{3}\ \text{ἐμβ. ἐπιφαν. πολυέδρου} \times R\,.$$

Ἐάν ὅμως αἱ διαστάσεις κάθε ἕδρας τοῦ πολυέδρου εἶναι ἀρκετά μικραί ὅταν συγκριθοῦν μέ τήν ἀκτῖνα R τῆς σφαίρας, τότε τό πολύεδρον θά διαφέρη πολύ ὀλίγον ἀπό τήν σφαῖραν. Εἶναι λοιπόν εὔλογον νά δεχθῶμεν ὅτι ὁ ὄγκος V τῆς σφαίρας προκύπτει ἀπό τό ἐμβαδόν τῆς ἐπιφανείας της καί ἀπό τό R ὅπως ὁ ὄγκος τοῦ πολυέδρου προκύπτει ἀνωτέρω ἀπό τό ἐμβαδόν τῆς ἐπιφανείας του καί ἀπό τό R , ἄρα ὅτι

$$V = \frac{1}{3}(4\pi R^2)\cdot R = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Νά ὑπολογίσετε εἰς dm^3 τόν ὄγκον ἑνός κύβου μέ ὁλικήν ἐπιφάνειαν 37,50 dm^2.

2) Νά εὕρετε εἰς m^3 τόν ὄγκον ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, ἐάν αἱ διαστάσεις του α, β, γ ἔχουν ἄθροισμα 13 m καί εἶναι ἀνάλογοι πρός τούς ἀριθμούς 10, 9, 7.

3) Νά εὕρετε τήν ἀξίαν μιᾶς πλακός ἀπό τσιμέντο ἡ ὁποία ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου μέ διαστάσεις ἐπιφανείας 12,5 m × 9,60 m καί πάχος 15 cm πρός 1270 δρχ τό κυβικόν μέτρον (1270 δρχ/m^3).

4) Διά τήν ξυλείαν μιᾶς οἰκοδομῆς ἐχρησιμοποιήθησαν τά παρακάτω τεμάχια μέ σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου:
α) 36 καδρόνια διαστάσεων 5 m × 0,12 m × 0,06 m.
β) 80 σανίδες διαστάσεων 5,5 m × 0,08 m × 0,025 m.
Πόσον ἐστοίχισεν ἡ ξυλεία αὐτή ἄν ἡ τιμή της εἶναι 2500 δρχ/m^3;

5) Ἕνα φύλλον ἀπό ψευδάργυρον ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου μέ διαστάσεις: μῆκος 1,50 m, πλάτος 1,20 m καί πάχος 1,5 mm. Πόσον εἶναι τό βάρος του εἰς κιλά (kgr); (Εἰδικόν βάρος τοῦ ψευδαργύρου 7,2).

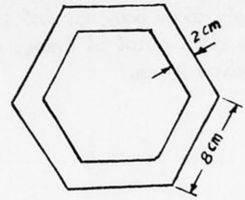
6) Διά τήν κατασκευήν ἑνός μεσοτοίχου ἐχρησιμοποιήθησαν τοῦβλα μέ διαστάσεις 19 cm × 9 cm × 6 cm. Τό κτίσιμον ἦτο δρομικόν (δηλαδή τέτοιο ὥστε αἱ 2 ἕδραι 19 cm × 6 cm τῶν τούβλων νά σχηματίζουν τάς δύο ὄψεις τοῦ τοίχου). Πόσα τοῦβλα θά χρειασθοῦν, ἐάν τό πάχος τοῦ ἀσβεστοκονιάματος μεταξύ δύο τούβλων εἶναι 1 cm καί ὁ τοῖχος ἔχει μῆκος 4,60 m καί ὕψος 3,50 m;
Πόσα τοῦβλα μέ τάς ἰδίας διαστάσεις θά χρειασθοῦν διά τόν ἴδιον μεσότοιχον, ἐάν τό κτίσιμον εἶναι μπατικόν (δηλαδή τέτοιο ὥστε αἱ 2 ἕδραι 9 cm × 6 cm τῶν τούβλων νά σχηματίζουν τάς δύο ὄψεις τοῦ τοίχου);

7) Νά εὕρετε τήν χωρητικότητα εἰς dm^3 κλειστοῦ ξυλίνου κιβωτίου πού ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου καί ἐξωτερικάς διαστάσεις 72 cm × 67 cm × 44 cm. Τό πάχος τῶν τοιχωμάτων εἶναι 1 cm.

8) Πόσα πακέτα σιγαρέτα, μέ διαστάσεις 10 cm × 7 cm × 5 cm τό καθένα, χωροῦν εἰς τό κιβώτιον τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως;

9) Πλάγιον τριγωνικόν πρίσμα ἀπό ξύλον ἔχει κάθετον τομήν ὀρθογώνιον τρίγωνον μέ ὑποτείνουσαν 12,5 cm καί μίαν κάθετον πλευράν 7,5 cm. Ἡ παράπλευρος ἀκμή τοῦ πρίσματος εἶναι 20 cm. Νά εὑρεθῆ τό βάρος του εἰς kgr, ἐάν τό εἰδικόν βάρος τοῦ ξύλου εἶναι 0,65.

10) Ἕνας στῦλος ἀπό χυτοσίδηρον, κοῖλος ἐσωτερικά, ἔχει ὕψος $υ = 3,5$ m καί διατομήν (δηλ. κάθετον τομήν) ἑξαγωνικήν πού εἰκονίζεται ὑπό κλίμακα εἰς τό σχ. 83.
Νά εὑρεθῆ τό βάρος του κατά προσέγγισιν ἑνός κιλοῦ. (Εἰδικόν βάρος χυτοσιδήρου 7,6).



(Σχέδ. 83)

11) Ἕνα μεταλλικόν κυλινδρικόν βαρέλι ἔχει διάμετρον βάσεως 60 cm καί ὕψος 85 cm. Πόσα κιλά ἐλαιόλαδον ἠμπορεῖ νά χωρέσῃ, ἄν τό εἰδικόν βάρος τοῦ ἐλαιολάδου εἶναι 0,92. (Τό πάχος τῶν μεταλλικῶν τοιχωμάτων τοῦ βαρελιοῦ δέν λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν).

12) Εἰς μίαν γραμμήν μεταφορᾶς ἠλεκτρικοῦ ρεύματος ἐχρησιμοποιήθησαν 125 m χάλκινον σύρμα μέ διατομήν κύκλον διαμέτρου 4 mm. Πόσον ἦτο τό βάρος του εἰς κιλά κατά προσέγγισιν $\frac{1}{100}$ τοῦ κιλοῦ; (Εἰδικόν βάρος τοῦ χαλκοῦ 8,85).

13) Πόσον μῆκος εἰς μέτρα (m) ἔχει μία ποσότης 192 kgr σιδήρου εἰς ράβδους κυλινδρικοῦ σχήματος μέ διάμετρον 1 cm, αἱ ὁποῖαι θά χρησιμοποιηθοῦν διά τόν ὁπλισμόν τοῦ μπετόν μιᾶς οἰκοδομῆς ; (Εἰδικόν βάρος σιδήρου 7,8).

14) Εἰς πόσον ὕψος φθάνει μία ποσότης 85 kgr ἔλαιον ἐντός κυλινδρικοῦ δοχείου μέ διάμετρον βάσεως 60 cm; (Εἰδ. βάρος ἐλαίου 0,92).

15) Ὀρθός κυκλικός κῶνος ἔχει ὕψος 36 cm καί γενέτειραν 39 cm. Νά εὑρεθῆ ὁ ὄγκος του. (Ὑπόδειξις. Θά χρειασθῆ νά ὑπολογίσετε πρῶτα τήν ἀκτῖνα τῆς βάσεως τοῦ κώνου).

16) Μία σφαῖρα ἔχει ἐπιφάνειαν 78,5 dm^2. Νά εὑρεθῆ ὁ ὄγκος της.

17) Μία κοίλη ἰσοπαχής ὑαλίνη σφαῖρα ἔχει ἐξωτερικήν διάμετρον 3 cm καί ἐσωτερικήν διάμετρον 2 cm. Νά εὕρετε ἐάν βυθίζεται ὁλόκληρος εἰς τό καθαρόν νερόν (Εἰδ. βάρος ὑάλου 2,1).
Ὑπόδειξις. Θά ὑπολογίσετε τό βάρος τῆς σφαίρας καί θά τό συγκρίνετε μέ τό βάρος ἴσου ὄγκου καθαροῦ νεροῦ, σύμφωνα μέ τήν ὑδροστατικήν ἀρχήν του Ἀρχιμήδους.

18) Ἕνα δωμάτιον ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου καί χωρητικότητα 60 m^3. Πόση θά εἶναι ἡ χωρητικότης δωματίου μέ σχῆμα ὅμοιον, ἐάν ὁ λόγος ὁμοιότητος τοῦ 2ου δωματίου πρός τό 1ον εἶναι $\frac{5}{3}$;

19) Τί θά πάθῃ ὁ ὄγκος ἑνός κυλίνδρου, ἄν διπλασιάσωμεν τήν ἀκτῖνα καί τό ὕψος του; Καί διατί ;

20) Πυραμίς ἔχει ἐμβαδόν βάσεως 9 cm^2 καί ὕψος 6 cm. Νά εὕρετε τούς ὄγκους τῶν δύο μερῶν εἰς τά ὁποῖα τήν χωρίζει ἕνα ἐπίπεδον παράλληλον πρός τήν βάσιν καί τό ὁποῖον ἀπέχει ἀπό τήν κορυφήν δύο φοράς ὅσον ἀπέχει ἀπό τήν βάσιν.

21) Νά εὕρετε τόν λόγον τῶν ὄγκων τῶν δύο μερῶν εἰς τά ὁποῖα ἐπίπεδον χωρίζει ἕνα κῶνον, ὅταν τό ἐπίπεδον αὐτό εἶναι ∥ πρός τήν βάσιν καί ἀπέχη ἀπό τήν κορυφήν τόσον ὅσον καί ἀπό τήν βάσιν.
Ποῖοι εἶναι αὐτοί οἱ ὄγκοι, ἐάν ἡ διάμετρος τῆς βάσεως εἶναι 10 cm καί τό ὕψος τοῦ κώνου 20 cm.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄

ΑΛΓΕΒΡΑ

§1. Ἀκέραια πολυώνυμα μέ μίαν μεταβλητήν.

1.1. Μονώνυμα μέ μίαν μεταβλητήν. Εἶναι γνωστόν ὅτι, διά νά εὕρωμεν τό μῆκος γ τῆς περιφερείας καί τό ἐμβαδόν S ἑνός κύκλου, ἀρκεῖ νά γνωρίζωμεν τό μῆκος R τῆς ἀκτῖνος του:

$$\gamma = 2\pi R \quad \text{καί} \quad S = \pi R^2.$$

Εἰς τάς σχέσεις αὐτάς τό 2 καί τό π εἶναι σταθεραί, δηλαδή ὡρισμένοι σχετικοί ἀριθμοί ($\pi = 3,14159\ldots$), ἐνῶ τά γράμματα γ, R καί S εἶναι θετικαί μεταβληταί, δηλαδή σύμβολα πού τό καθένα των, ὅταν τό πάρωμεν χωριστά, ἠμπορεῖ νά ἀντικατασταθῆ μέ ἕνα ὁποιονδήποτε θετικόν ἀριθμόν (αὐτό τό ἐκφράζομεν καί ὡς ἑξῆς: τό καθένα ἀπό τά γράμματα γ, R καί S χωριστά ἠμπορεῖ νά λάβη ὁποιανδήποτε θετικήν ἀριθμητικήν τιμήν). Καί ἡ μέν σχέσις $\gamma = 2\pi R$ ἀπεικονίζει τό σύνολον τῶν τιμῶν τῆς R ἐπί τοῦ συνόλου τῶν τιμῶν τῆς γ, ἡ δέ $S = \pi R^2$, τό σύνολον τῶν τιμῶν τῆς R ἐπί τοῦ συνόλου τῶν τιμῶν τῆς S. Μέ τά ἀνωτέρω ἔχουν λοιπόν ὁρισθῆ δύο ἀριθμητικαί συναρτήσεις σ_1 καί σ_2 (βλ. Βιβλ. ΙΙ, σελ. 81-83) τάς ὁποίας ἠμποροῦμεν νά γράψωμεν μέ τόν ἀκόλουθον τρόπον, ἐάν ἀντικαταστήσωμεν τό R μέ τό x, τό γ ἤ τό S μέ τό y καί καλέσωμεν Π^+ τό σύνολον τῶν θετικῶν ἀριθμῶν:

$$\sigma_1 \;:\; x \xrightarrow{\sigma_1} 2\pi x = y \quad , \quad (x \in \Pi^+)$$

$$\sigma_2 \;:\; x \xrightarrow{\sigma_2} \pi x^2 = y \quad , \quad (x \in \Pi^+).$$

Αἱ συναρτήσεις αὐταί λέγονται συναρτήσεις μιᾶς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς, τῆς x, καί συντόμως, συναρτήσεις μιᾶς μεταβλητῆς.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Νά γράψετε ὑπό μορφήν συναρτήσεων μιᾶς μεταβλητῆς τήν ἐπιφάνειαν καί τόν ὄγκον μιᾶς σφαίρας, ὅταν ἡ ἀκτίς της x ληφθῆ ὡς ἀνεξάρτητος μεταβλητή.

2) Νά γράψετε ὑπό μορφήν συναρτήσεως μιᾶς μεταβλητῆς τήν ὁλικήν ἐπιφάνειαν ἑνός ὀρθοῦ κυκλικοῦ κυλίνδρου, ὅταν ἡ ἀκτίς x τῆς βάσεως ληφθῆ ὡς ἀνεξάρτητος μεταβλητή καί τό ὕψος εἶναι μία σταθερά $υ_0$.

Αἱ συναρτήσεις $2\pi x$ καί πx^2 εἶναι τῆς μορφῆς

$$\alpha x^\nu,$$

ὅπου α μία σταθερά, ν μία σταθερά ἴση μέ ἕνα ὡρισμένον φυσικόν ἀριθμόν καί x μία μεταβλητή μέ πεδίον μεταβολῆς ἕνα σύνολον σχετικῶν ἀριθμῶν· εἰς τό παράδειγμα $2\pi x$ ἔχομεν $\alpha = 2\pi$ καί $\nu = 1$, εἰς τό πx^2, $\alpha = \pi$ καί $\nu = 2$, εἰς ἀμφότερα δέ $x \in \Pi^+$. Συναρτήσεις τῆς μορφῆς αx^ν λέγονται εἰς τήν ἄλγεβραν ἀκέραια μονώνυμα καί, συντόμως, μονώνυμα μέ μίαν μεταβλητήν (ἤ μιᾶς μεταβλητῆς). Ὁ χαρακτηρισμός "ἀκέραια" ἀναφέρεται εἰς τόν ἐκθέτην ν πού εἶναι ἕνας ἀκέραιος ἀριθμός > 0. Ἡ σταθερά α λέγεται συντελεστής τοῦ μονωνύμου καί, ἐάν $\alpha \neq 0$, ἡ σταθερά ν λέγεται βαθμός τοῦ μονωνύμου. Ἔτσι τό μονώνυμον $2\pi x$ ἔχει συντελεστήν 2π καί βαθμόν 1, τό πx^2 ἔχει συντελεστήν π καί βαθμόν 2. Συνήθως οἱ συντελεσταί τῶν μονωνύμων, ἐάν εἶναι γενικοί ἀριθμοί, σημειώνονται μέ τά πρῶτα γράμματα τοῦ ἑλληνικοῦ ἤ λατινικοῦ ἀλφαβήτου, ἐνῶ αἱ μεταβληταί των γράφονται μέ τά τελευταῖα γράμματα x, y, z κτλ.

Ἰδού τώρα μερικά ἄλλα παραδείγματα μονωνύμων μιᾶς μεταβλητῆς:

$-2x^3$	,3ου βαθμ.,	συντελεστής -2	βx^2	,2ου βαθμ.,	συντελ. β
$\frac{x}{3}$	,1ου »	» $\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}\beta y^3$	,3ου »	» $-\frac{1}{2}\beta$
$-x^4$	,4ου »	» -1	$4\alpha\beta z^4$	,4ου »	» $4\alpha\beta$
x^5	,5ου »	» 1	$\frac{\sqrt{3}x}{5}$	,1ου »	» $\frac{\sqrt{3}}{5}$.

Παρατήρησις. 'Επειδή μίαν σταθεράν α ἠμποροῦμεν νά τήν γράψωμεν καί μέ τήν μορφήν αx^0 (διά πᾶσαν τιμήν $\neq 0$ τῆς x), διά τοῦτο συμφωνοῦμεν νά θεωροῦμεν καί κάθε σταθεράν α ὡς μονώνυμον, μηδενικοῦ βαθμοῦ ὅταν $\alpha \neq 0$, ἄνευ βαθμοῦ ὅταν $\alpha = 0$.

Δύο μονώνυμα αx^ν καί βx^ν τῆς ἰδίας μεταβλητῆς καί τοῦ ἰδίου βαθμοῦ λέγονται ὅμοια. Π.χ. τά μονώνυμα πx^2, $\frac{2}{3}x^2$, $-x^2$ εἶναι ὅμοια. Τό "μηδενικόν" μονώνυμον 0 εἶναι ὅμοιον μέ κάθε μονώνυμον.

Τά ὅμοια μονώνυμα αx^ν καί $-\alpha x^\nu$ λέγονται ἀντίθετα.

1.2. Πράξεις μέ μονώνυμα τῆς ἰδίας μεταβλητῆς. Κατά τάς τέσσαρας πράξεις μέ μονώνυμα τῆς ἰδίας μεταβλητῆς, τάς ὁποίας θά μελετήσωμεν, ἡ μεταβλητή ἔχει τάς ἰδιότητας ἑνός γενικοῦ ἀριθμοῦ, ἀφοῦ ἀντιπροσωπεύει σχετικούς ἀριθμούς πού ἀπαρτίζουν ἕνα σύνολον. 'Εξ ἄλλου ἕνα μονώνυμον αx^ν δέν εἶναι τίποτε ἄλλο παρά ἕνα γινόμενον: τοῦ ὡρισμένου ἀριθμοῦ α μέ τήν δύναμιν x^ν τῆς μεταβλητῆς, δύναμιν πού ἰσοῦται μέ 1 ὅταν $\nu = 0$, μέ x ὅταν $\nu = 1$ καί μέ ἕνα γινόμενον ν παραγόντων ἴσων μέ x ὅταν $\nu \geqslant 2$.

Διά τοῦτο αἱ γνωσταί μας ἰδιότητες τῶν τεσσάρων πράξεων προσθέσεως, ἀφαιρέσεως κτλ. θά ἔχουν ἐφαρμογήν καί εἰς τάς τέσσαρας πράξεις μέ μονώνυμα.

α) Πρόσθεσις μονωνύμων. Διά νά προσθέσωμεν δύο ἤ περισσότερα μονώνυμα τῆς ἰδίας μεταβλητῆς, τά γράφομεν τό ἕνα παραπλεύρως τοῦ ἄλλου, ὅπως ἔχουν δοθῆ καί χωρίς νά χρησιμοποιοῦμεν παρενθέσεις. Προκύπτει μία συνάρτησις τῆς ἰδίας μεταβλητῆς πού λέγεται πολυώνυμον· τά μονώνυμα πού ἀποτελοῦν τό πολυώνυμον λέγονται ὅροι του. Διακρίνομεν τάς ἑξῆς δύο περιπτώσεις:

I) Πρόσθεσις ὁμοίων μονωνύμων. Σύμφωνα μέ τήν ἐπιμεριστικήν ἰδιότητα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ὡς πρός τήν πρόσθεσιν ἔχομεν:

$$\alpha x + \beta x + \gamma x = (\alpha+\beta+\gamma)x,$$

$$-3x^2 + \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{2}x^2 = \left(-3 + \frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right)x^2 = -\frac{11}{6}x^2,$$

$$2\pi x^3 - \frac{5\pi}{2}x^3 + \frac{\pi}{2}x^3 = \left(2\pi - \frac{5\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)x^3 = 0x^3 = 0.$$

Ἐπομένως, τό ἄθροισμα ὁμοίων μονωνύμων εἶναι μονώνυμον ὅμοιον πρός αὐτά, μέ συντελεστήν τό ἄθροισμα τῶν συντελεστῶν τῶν προσθετέων μονωνύμων.

II) Πρόσθεσις καί μή ὁμοίων μονωνύμων τῆς ἰδίας μεταβλητῆς. Ἐάν τό πολυώνυμον, πού εἶναι τό ἄθροισμα, περιέχη καί ὁμοίους ὅρους, τότε τούς ἀντικαθιστῶμεν μέ τό "συνεπτυγμένον" ἄθροισμά των, σύμφωνα μέ τόν προηγούμενον κανόνα. Συνεπτυγμένη μορφή ἑνός πολυωνύμου, τό ὁποῖον ἠμπορεῖ νά περιέχη καί ὁμοίους ὅρους, εἶναι ἐκείνη πού προκύπτει, ὅταν ἀντικαταστήσωμεν κάθε ὁμάδα ὁμοίων ὅρων μέ τό συνεπτυγμένον ἄθροισμά των καί παραλείψωμεν τούς ὅρους μέ συντελεστάς τό 0. Π.χ. συνεπτυγμένη μορφή τοῦ πολυωνύμου

$$0x^4 + 3x - \frac{5}{2}x + 2x^2 - 7x^3 - 6x^2 \quad \text{εἶναι ἡ} \quad \frac{1}{2}x - 4x^2 - 7x^3.$$

Οἱ ὅροι τῆς συνεπτυγμένης μορφῆς εἶναι φυσικά ἀνόμοιοι ἀνά δύο. Ἕνα πολυώνυμον μιᾶς μεταβλητῆς μέ ὅρους ἀνομοίους ἀνά δύο ἠμπορεῖ νά γραφῆ ἔτσι ὥστε ἡ σειρά τῶν ὅρων του ἀπό ἀριστερά πρός τά δεξιά νά παρουσιάζη τούς ἐκθέτας τῶν δυνάμεων τῆς μεταβλητῆς ἤ ἐλαττουμένους (κατερχομένους) ἤ αὐξανομένους (ἀνερχομένους). Π.χ. τό πολυώνυμον

$$-2x^5 + 3x + 4x^2 - 8x^3 - 9$$

ἠμπορεῖ νά γραφῆ κανονικώτερα ἤ μέ τήν μορφήν

$$-2x^5 - 8x^3 + 4x^2 + 3x - 9$$

ἤ μέ τήν $\quad -9 + 3x + 4x^2 - 8x^3 - 2x^5.$

Εἰς τήν πρώτην μορφήν λέγεται διατεταγμένον κατά τάς κατερχομένας (ἤ κατιούσας) δυνάμεις τῆς μεταβλητῆς, εἰς τήν δευτέραν, διατεταγμένον κατά τάς ἀνερχομένας (ἤ ἀνιούσας) δυνάμεις τῆς μεταβλητῆς.

Βαθμός πολυωνύμου μιᾶς μεταβλητῆς λέγεται ὁ ἐκθέτης τῆς μεγίστης δυνάμεως τῆς μεταβλητῆς μέσα εἰς τήν συνεπτυγμένην μορφήν τοῦ πολυωνύμου· μέ ἄλλους λόγους, βαθμός τοῦ πολυωνύμου εἶναι ὁ βαθμός τοῦ μεγιστοβαθμίου ὅρου πού περιέχεται εἰς τήν συνεπτυγμένην μορφήν τοῦ πολυωνύμου. Π.χ. βαθμός τοῦ πολυωνύμου

$$-\frac{1}{2}x^6+5x^3+4,2x^2+\frac{1}{2}x^6-8x^4+\frac{2}{3}$$

πού ἔχει συνεπτυγμένην μορφήν:

$$5x^3+4,2x^2-8x^4+\frac{2}{3},$$

εἶναι ὁ βαθμός 4 τοῦ μεγιστοβαθμίου ὅρου $-8x^4$ εἰς τήν συνεπτυγμένην μορφήν τοῦ πολυωνύμου. Ὅταν τό πολυώνυμον εἶναι διατεταγμένον κατά τάς κατερχομένας δυνάμεις τῆς μεταβλητῆς, τότε βαθμός του εἶναι ὁ ἐκθέτης τῆς δυνάμεως εἰς τόν πρῶτον ἀπό ἀριστερά ὅρον μέ συντελεστήν $\neq 0$. Π.χ. τό πολυώνυμον $5x^2+\frac{1}{2}x-3$ εἶναι 2ου βαθμοῦ, τό $-\frac{1}{4}x^3+2x-8$ 3ου βαθμοῦ.

β) Δύο πολυώνυμα $\sigma(x)$ καί $\varphi(x)$ λέγονται <u>ἴσα</u>:

$$\sigma(x)=\varphi(x),$$

ὅταν ἔχουν τήν ἰδίαν συνεπτυγμένην μορφήν, μέ ἄλλους λόγους, ὅταν ἴσαι δυνάμεις τοῦ x εἰς τάς συνεπτυγμένας μορφάς τῶν δύο πολυωνύμων ἔχουν ἴσους συντελεστάς. Π.χ. τά πολυώνυμα

$\sigma(x)=4x^3-2x^2-3x^2+5-4$ καί $\varphi(x)=5x^3-x^3-6x^2+x^2+1$

εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν καί τά δύο ὡς συνεπτυγμενην μορφήν τήν

$$4x^3-5x^2+1.$$

Δύο ἴσα πολυώνυμα $\sigma(x)$ καί $\varphi(x)$ λαμβάνουν ἴσας ἀριθμητικάς τιμάς, ὅταν καί εἰς τά δύο ἀντικαταστήσωμεν τό x μέ τόν ἴδιον σχετικόν ἀριθμόν x_0, ὅποιος καί ἄν εἶναι αὐτός:

$$\sigma(x)=\varphi(x)\Longrightarrow\sigma(x_0)=\varphi(x_0).$$

Π.χ. εἰς τό ἀνωτέρω παράδειγμα διά $x=-1$ ἔχομεν:

$\sigma(-1)=4(-1)^3-2(-1)^2-3(-1)^2+5-4=-4-2-3+5-4=-8$

$\varphi(-1)=5(-1)^3-(-1)^3-6(-1)^2+(-1)^2+1=-5+1-6+1+1=-8.$

Κατά συνέπειαν ἡ ἰσότης $\sigma(x)=\varphi(x)$ μεταξύ δύο ἴσων πολυωνύμων εἶναι μία <u>ταυτότης</u> (βλ. Βιβλ. I, σελ. 6Β), δηλαδή ἀληθεύει διά πᾶσαν ἀριθμητικήν τιμήν τῆς μεταβλητῆς x.

γ) **Ἀφαίρεσις μονωνύμου.** Ἡ ἀφαίρεσις ἑνός μονωνύμου ax^ν ὁρίζεται ὡς πρόσθεσις τοῦ ἀντιθέτου μονωνύμου $-ax^\nu$. Τό ἀφαιρούμενον μονώνυμον ἐγκλείεται μέσα εἰς παρένθεσιν. Π.χ.

$$2x^2-\left(\frac{5}{3}x^2\right)=2x^2+\left(-\frac{5}{3}x^2\right)=\left(2-\frac{5}{3}\right)x^2=\frac{1}{3}x^2$$

$$2x^3-\left(-\frac{3}{4}x^3\right)=2x^3+\left(\frac{3}{4}x^3\right)=\left(2+\frac{3}{4}\right)x^3=\frac{11}{4}x^3$$

$$-x^4-(-\sqrt{2}x^4)=-x^4+(\sqrt{2}x^4)=(-1+\sqrt{2})x^4$$

$$3x^2-(2x)=3x^2+(-2x)=3x^2-2x$$

$$2{,}5x-(-3{,}2x^4)=2{,}5x+3{,}2x^4.$$

δ) Πολλαπλασιασμός μονωνύμων μιᾶς μεταβλητῆς. Ὁ πολλαπλασιασμός αὐτός στηρίζεται εἰς τάς γνωστάς ἰδιότητας τῆς ἀντιμεταθετικότητος καί τῆς προσεταιριστικότητος καί εἰς τόν κανόνα διά τόν πολλαπλασιασμόν δυνάμεων μέ τήν ἰδίαν βάσιν. Π.χ.

$$-3x^2\cdot(-2x^3)=-3\cdot(-2)x^2\cdot x^3=6x^5$$

$$\frac{2}{3}x^2\cdot\left(-\frac{3}{2}x\right)(-x^3)=\frac{2}{3}\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot(-1)x^2\cdot x\cdot x^3=1x^6=x^6.$$

ε) Δύναμις μονωνύμου. Ἐφαρμόζομεν γνωστάς ἰδιότητας τῶν δυνάμεων σχετικῶν ἀριθμῶν (Βιβλ. ΙΙ, σελ. 102). Π.χ.

$$(-2x)^3=(-2)^3\cdot x^3=-8x^3,\quad \left(\frac{3x^2}{4}\right)^2=\frac{(3x^2)^2}{4^2}=\frac{9x^4}{16},\ (\sqrt{2}x^3)^2=(\sqrt{2})^2\cdot(x^3)^2=2x^6.$$

ζ) Διαίρεσις μονωνύμου μέ ὅμοιον μονώνυμον. Ἄς εἶναι διαιρετέος τό μονώνυμον βx^ν καί διαιρέτης τό ax^μ, ὅπου $a\neq 0$. Τό πηλίκον $\beta x^\nu : ax^\mu$ εἶναι ἀκέραιον μονώνυμον μόνον εἰς τήν περίπτωσιν $\nu\geq\mu$ (ὅταν $\beta\neq 0$). Ἔχομεν τότε, σύμφωνα μέ τάς ἰδιότητας τῶν 4 πράξεων καθώς καί τῶν δυνάμεων μέ τήν αὐτήν βάσιν:

$$\beta x^\nu : ax^\mu=\frac{\beta x^\nu}{ax^\mu}=\frac{\beta}{a}\cdot\frac{x^\nu}{x^\mu}=\frac{\beta}{a}x^{\nu-\mu},\quad \text{ὅπου } \nu-\mu\geq 0.$$

Π.χ.

$6x^5 : (-3x^2) = \frac{6}{-3}x^{5-2} = -2x^3$, $\quad -3x^4 : (-6x^3) = \frac{-3}{-6}x^{4-3} = \frac{1}{2}x$,

$-2x : (-3x) = \frac{2}{3}x^{1-1} = \frac{2}{3}x^0 = \frac{2}{3}$,

$\frac{2}{5}x^4 : \frac{1}{3}x^2 = \frac{2\cdot 3}{5}x^{4-2} = \frac{6}{5}x^2$.

Εἰς τήν περίπτωσιν $\beta \neq 0$ καί $\nu < \mu$ τό πηλίκον $\beta x^\nu : \alpha x^\mu$ μηδέν εἶναι ἀκέραιον μονώνυμον καί ὀνομάζεται κλασματικόν μονώνυμον. Πράγματι

$\beta x^\nu : \alpha x^\mu = \frac{\beta x^\nu}{\alpha x^\mu} = \frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{x^\nu}{x^\mu} = \frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{1}{x^{\mu-\nu}} = \frac{\beta}{\alpha}x^{\nu-\mu}$, ὅπου $\nu - \mu < 0$.

Π.χ.

$4x^2 : 8x^5 = \frac{4}{8}\cdot\frac{x^2}{x^5} = \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{x^3} = \frac{1}{2}x^{-3}$, ὅπου ὁ ἐκθέτης -3 εἶναι <0.

1.3. Πράξεις μέ πολυώνυμα μιᾶς μεταβλητῆς.

Εἰς τό ἑξῆς πολυώνυμον θά σημαίνη καί τό μονώνυμον, διότι ἕνα μονώνυμον αx^ν ἠμπορεῖ πάντοτε νά θεωρηθῆ ὡς συνεπτυγμένη μορφή ἑνός πολυωνύμου, π.χ. τοῦ $\alpha x^\nu + 0\cdot x^2$ ἤ τοῦ $\alpha x^\nu + \beta x^\mu - \beta x^\mu$ κτλ. Ἔτσι τό 0 θά καλῆται καί μηδενικόν πολυώνυμον. Γενικῶς θά συμβολίζωμεν τά πολυώνυμα μιᾶς μεταβλητῆς x μέ $\sigma(x)$ ἤ $\varphi(x)$ ἤ $f(x)$ κ.ο.κ. Ἕνα ὡρισμένον πολυώνυμον, π.χ. τό $3x^2 - 5x + 1$, θά εἰσάγεται μέ μίαν γραφήν ὅπως ἡ ἀκόλουθος:

$$\sigma(x) = 3x^2 - 5x + 1$$

τήν ὁποίαν θά διαβάζωμεν ὡς ἑξῆς: σίγμα τοῦ x ἴσον τρία x εἰς τήν δευτέραν μεῖον πέντε x σύν ἕνα.

α) Πρόσθεσις πολυωνύμων.

Ἐπειδή εἰς τήν πρόσθεσιν ἀθροισμάτων ἀπό σχετικούς ἀριθμούς ἰσχύει ἡ ἀντιμεταθετικότης καί ἡ προσεταιριστικότης, φυσικόν εἶναι αἱ ἰδιότητες αὐταί νά ἰσχύουν καί εἰς τήν πρόσθεσιν πολυωνύμων, ἀφοῦ αὐτά εἶναι ἀθροίσματα μονωνύμων. Ἰδού ἕνα παράδειγμα:

$$\begin{array}{rl}
\sigma(x) & = 3x^3-5x^2-6x-1 \\
\varphi(x) & = -2x^3+6x+5 \\
\hline
\sigma(x)+\varphi(x) & = (3x^3-5x^2-6x-1)+(-2x^3+6x+5) \\
& = 3x^3-5x^2-6x-1-2x^3+6x+5 \\
& = 3x^3-2x^3-5x^2-6x+6x-1+5 \\
& = x^3-5x^2+0x+4 \\
& = x^3-5x^2+4\,,
\end{array}$$

ὕστερα ἀπό σύμπτυξιν (ἤ <u>ἀναγωγήν</u>, ὅπως ἐπίσης λέγομεν) τῶν ὁμοίων ὅρων: $3x^3-2x^3=x^3$, $-6x+6x=0x$, $-1+5=4$ καί παράλειψιν τοῦ ὅρου $0x$.

<u>2ον παράδειγμα:</u>

$$\begin{array}{rl}
f(x) & = \alpha x^2+\beta x-\gamma \\
g(x) & = x^3-2\alpha x^2+4\beta x-3\gamma \\
\hline
f(x)+g(x) & = x^3+\alpha x^2-2\alpha x^2+\beta x+4\beta x-\gamma-3\gamma \\
& = x^3-\alpha x^2+5\beta x-4\gamma\,.
\end{array}$$

Διευκολύνεται ἡ ἐκτέλεσις τῆς προσθέσεως, ὅταν γράψωμεν τά πρόσθετα πολυώνυμα ἔτσι ὥστε οἱ ὅμοιοι ὅροι των νά εὑρίσκωνται εἰς τήν ἰδίαν στήλην (ὁ ἕνας κάτω ἀπό τόν ἄλλον). Π.χ. εἰς τά δύο ἀνωτέρω παραδείγματα εἶναι σκόπιμον ἡ πρόσθεσις νά γίνῃ ὡς ἑξῆς :

1ον παράδειγμα:

$$\begin{array}{rl}
\sigma(x) & = 3x^3-5x^2-6x-1 \\
\varphi(x) & = -2x^3+0x^2+6x+5 \\
\hline
\sigma(x)+\varphi(x) & = x^3-5x^2+0x+4 \;=\; x^3-5x^2+4
\end{array}$$

2ον παράδειγμα:

$$\begin{array}{rl}
f(x) & = 0x^3+\alpha x^2+\beta x-\gamma \\
g(x) & = x^3-2\alpha x^2+4\beta x-3\gamma \\
\hline
f(x)+g(x) & = x^3-\alpha x^2+5\beta x-4\gamma\,.
\end{array}$$

β) <u>Ἀφαίρεσις.</u>

Ὑπενθυμίζομεν ὅτι δύο πολυώνυμα λέγονται <u>ἀντίθετα</u>, ὅταν οἱ ὅροι τοῦ καθενός εἶναι ἀντιστοίχως ἀντίθετοι πρός τούς ὅρους τοῦ ἄλλου. Δύο ἀντίθετα πολυώνυμα ἔχουν ἄθροισμα μηδέν· π.χ. ἐάν

$$\sigma(x) = -2x^3 + 3x^2 - 5x + 1 ,$$

τότε τό ἀντίθετόν του $-\sigma(x)$ εἶναι

$$-\sigma(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x - 1$$

καί τό ἄθροισμά των:

$$\begin{array}{rcl} \sigma(x) & = & -2x^3 + 3x^2 - 5x + 1 \\ -\sigma(x) & = & 2x^3 - 3x^2 + 5x - 1 \\ \hline \sigma(x) + [-\sigma(x)] & = & 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0 = 0 \end{array}$$

<u>Κανών</u> . Διά νά ἀφαιρέσωμεν ἕνα πολυώνυμον, προσθέτομεν τό ἀντίθετόν του. Π.χ.

$$\begin{array}{rcl} \sigma(x) & = & -2x^3 + 3x^2 - 5x + 1 \\ \varphi(x) & = & 2x^2 - 5x + 6 \\ \hline \sigma(x) - \varphi(x) & = & (-2x^3 + 3x^2 - 5x + 1) - (2x^2 - 5x + 6) \\ & = & -2x^3 + 3x^2 - 5x + 1 - 2x^2 + 5x - 6 \\ & = & -2x^3 + 3x^2 - 2x^2 - 5x + 5x + 1 - 6 \\ & = & -2x^3 + x^2 + 0x - 5 \\ & = & -2x^3 + x^2 - 5 \end{array}$$

Καί ἐδῶ εἶναι σκόπιμον νά ἐκτελέσωμεν τήν πρᾶξιν ὡς ἑξῆς:

$$\begin{array}{rcl} \sigma(x) & = & -2x^3 + 3x^2 - 5x + 1 \\ -\varphi(x) & = & 0x^3 - 2x^2 + 5x - 6 \\ \hline \sigma(x) - \varphi(x) & = & -2x^3 + x^2 + 0x - 5 = -2x^3 + x^2 - 5 \end{array}$$

Ἐάν εἰς τό ὑπόλοιπον μιᾶς ἀφαιρέσεως προσθέσωμεν τό ἀφαιρετέον πολυώνυμον, θά λάβωμεν τό μειωτέον πολυώνυμον· πράγματι

$$\begin{aligned} [\sigma(x) - \varphi(x)] + \varphi(x) = \sigma(x) - \varphi(x) + \varphi(x) &= \sigma(x) + [-\varphi(x) + \varphi(x)] = \\ &= \sigma(x) + 0 = \sigma(x). \end{aligned}$$

Ἡ ἰδιότης αὐτή ἠμπορεῖ νά χρησιμοποιηθῇ διά νά ἐπαληθεύσωμεν μίαν πρᾶξιν ἀφαιρέσεως.

Τό ὑπόλοιπον $\sigma(x) - \varphi(x)$ λέγεται καί <u>διαφορά</u>.

<u>Παρατήρησις</u>. Εἰς τό ἀνωτέρω παράδειγμα ἐκλείσαμεν ἀρχικῶς μέσα εἰς παρένθεσιν ἀφ' ἑνός τό μειωτέον καί ἀφ' ἑτέρου τό ἀφαιρετέον πολυώνυμον, κατόπιν ἐξηλείψαμεν τάς παρενθέσεις σύμφωνα μέ τούς κανόνας πού διετυπώσαμεν εἰς τό Βιβλίον ΙΙ, § 1.7, σελ. 93 διά τήν χρῆσιν παρενθέσεων. Ἡ παρένθεσις διά τό μειωτέον πολυώνυμον ἠμποροῦσε νά εἶχε παραλειφθῆ· ἡ παρένθεσις ὅμως διά τό πολυώνυμον πού ἀφαιρεῖται εἶναι ἀπαραίτητος, διότι ἡ παράλειψίς της θά ἠμποροῦσε νά ὁδηγήση εἰς τό λάθος, ν' ἀλλάξωμεν τό πρόσημον μόνον τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ ἀφαιρετέου καί ν' ἀφήσωμεν τούς λοιπούς ὅρους του ὅπως ἔχουν.

γ) <u>Χρῆσις παρενθέσεων</u>.

Θά ἐπαναλάβωμεν τώρα τούς κανόνας διά τήν ἐξάλειψιν τῶν παρενθέσεων.

Ι) Ὅταν μία παρένθεσις περιέχη ἕνα πολυώνυμον καί ἔχη ἐμπρός της τό σημεῖον + τῆς προσθέσεως, τότε ἐξαλείφομεν τήν παρένθεσιν καί προσθέτομεν τούς ὅρους πού περιέχει ὅπως ἔχουν.

ΙΙ) Ὅταν μία παρένθεσις περιέχη ἕνα πολυώνυμον καί ἔχη ἐμπρός της τό σημεῖον − τῆς ἀφαιρέσεως, τότε ἐξαλείφομεν τήν παρένθεσιν καί ἀντί νά ἀφαιροῦμεν, προσθέτομεν τούς ἀντιθέτους τῶν ὅρων τούς ὁποίους περιέχει.

Ἀντιστρόφως ἠμποροῦμεν νά κλείσωμεν μερικούς ὅρους ἑνός πολυωνύμου μέσα εἰς παρένθεσιν α) μέ τά πρόσημα πού ἔχουν, ἄν γράψωμεν ἐμπρός ἀπό τήν παρένθεσιν τό σημεῖον +, β) μέ τά ἀντίθετα ἀντιστοίχως πρόσημα, ἄν γράψωμεν ἐμπρός ἀπό τήν παρένθεσιν τό σημεῖον −. Ἰδού μερικά παραδείγματα:

$$3x^2-5x+1-(-2x^2+6x-3) = 3x^2-5x+1+2x^2-6x+3 = 5x^2-11x+4$$

$$2x-1-(3x^2+7x-2) = 2x-1-3x^2-7x+2 = -3x^2-5x+1$$

$$8x^3+4x+(-9x^2-4x+7) = 8x^3+4x-9x^2-4x+7 = 8x^3-9x^2+7$$

$$7x^3+8x^2-\frac{1}{2}+13 = 7x^3+\left(8x^2-\frac{1}{2}\right)+13 = 7x^3-\left(-8x^2+\frac{1}{2}\right)+13.$$

δ) Πολλαπλασιασμός καί διαίρεσις πολυωνύμου μέ μονώνυμον. Γνωρίζομεν (Βιβλ. ΙΙ, σελ. 96) ὅτι ὁ πολλαπλασιασμός καί ἡ διαίρεσις μέ σχετικόν ἀριθμόν εἶναι πράξεις ἐπιμεριστικαί ὡς πρός τήν πρόσθεσιν ἤ τήν ἀφαίρεσιν:

$$(\alpha\pm\beta)\gamma = \alpha\gamma\pm\beta\gamma = \gamma(\alpha\pm\beta), \quad (\alpha\pm\beta):\gamma = \frac{\alpha}{\gamma}\pm\frac{\beta}{\gamma} \quad (\gamma\neq 0).$$

Τό ἴδιον ἰσχύει κατά τόν πολλαπλασιασμόν καί τήν διαίρεσιν ἑνός πολυωνύμου μέ ἕνα μονώνυμον, πρᾶγμα πού ἔχει τόν λόγον του εἰς τήν φύσιν τοῦ πολυωνύμου, νά εἶναι ἄθροισμα μονωνύμων. Ἰδού μερικά παραδείγματα:

$$3x^2\cdot(5x^3-2x^2+4x-1) = 15x^5-6x^4+12x^3-3x^2$$

$$(12x^4-6x^3+3x^2):3x^2 = \frac{12x^4-6x^3+3x^2}{3x^2} = 4x^2-2x+1$$

Τήν διαίρεσιν τήν ἐπαληθεύομεν βάσει τῆς σχέσεως:

διαιρετέος = διαιρέτης × πηλίκον.

Π.χ. διά τήν ἀνωτέρω διαίρεσιν ἔχομεν:

$$3x^2\cdot(4x^2-2x+1) = 12x^4-6x^3+3x^2.$$

$$(15x^6-8x^4+3x^3-x^2):5x^2 = 3x^4-\frac{8}{5}x^2+\frac{3}{5}x-\frac{1}{5}.$$

Ἐπαλήθευσις: $5x^2\left(3x^4-\frac{8}{5}x^2+\frac{3}{5}x-\frac{1}{5}\right) = 15x^6-8x^4+3x^3-x^2.$

Εἰς τάς δύο ἀνωτέρω διαιρέσεις τό πηλίκον εἶναι ἀκέραιον πολυώνυμον, διότι ὁ βαθμός τοῦ μονωνύμου διαιρέτου εἶναι μικρότερος ἀπό τόν βαθμόν κάθε ὅρου τοῦ διαιρετέου πολυωνύμου. Γενικῶς ἰσχύει τό ἑξῆς: Διά νά προκύψη ἀκέραιον πολυώνυμον ὡς πηλίκον κατά τήν διαίρεσιν πολυωνύμου μιᾶς μεταβλητῆς μέ ἕνα μονώνυμον τῆς ἰδίας μεταβλητῆς πρέπει καί ἀρκεῖ ὁ βαθμός τοῦ διαιρέτου νά εἶναι μικρότερος ἤ ἴσος τοῦ βαθμοῦ κάθε ὅρου τοῦ διαιρετέου. Εἰς ἐναντίαν περίπτωσιν τό πηλίκον περιέχει <u>κλασματικά</u> μονώνυμα ώς ὅρους (§1.4,ζ)).

ε) <u>Κοινοί παράγοντες τῶν ὅρων πολυωνύμου.</u> Ἐπειδή

$$(\alpha+\beta)x^2 = \alpha x^2 + \beta x^2,$$

θά εἶναι καί

$$\alpha x^2 + \beta x^2 = (\alpha+\beta)x^2 \qquad (1)$$

λόγω τῆς συμμετρικῆς ἰδιότητος τήν ὁποίαν ἔχει ἡ ἰσότης. Ὁμοίως εἶναι :

$$15x^5 - 6x^4 + 12x^3 - 3x^2 = 3x^2(5x^3 - 2x^2 + 4x - 1) \qquad (2)$$

καί

$$7x^6 - 3x^5 + 2x^3 - x = 7x\left(x^5 - \frac{3}{7}x^4 + \frac{2}{7}x^2 - \frac{1}{7}\right) \qquad (3)$$

Ἡ πρᾶξις μέ τήν ὁποίαν μετασχηματίζομεν τό πολυώνυμον τοῦ πρώτου μέλους τῶν ἰσοτήτων (1), (2) καί (3) εἰς γινόμενον ἑνός μονωνύμου μέ ἕνα πολυώνυμον λέγεται <u>ἐξαγωγή</u> ἐκτός παρενθέσεως τῶν κοινῶν παραγόντων τοῦ πολυωνύμου τοῦ πρώτου μέλους. Τό ἐντός τῆς παρενθέσεως πολυώνυμον εἶναι φυσικά, πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ πολυωνύμου τοῦ πρώτου μέλους μέ τό μονώνυμον τό ἐκτός παρενθέσεως. Ἰδού δύο ἄλλα παραδείγματα ἐξαγωγῆς κοινοῦ παράγοντος :

$$3x^4 - 9x^3 + 6x^2 - 18x = 3x(x^3 - 3x^2 + 2x - 6)$$

$$15\alpha^2x^3 - 10\alpha\beta x + 5\alpha\gamma x = 15\alpha x\left(\alpha x^2 - \frac{2}{3}\beta + \frac{1}{3}\gamma\right).$$

ζ) <u>Πολλαπλασιασμός πολυωνύμων τῆς ἰδίας μεταβλητῆς.</u> Σύμφωνα μέ τήν ἐπιμεριστικήν ἰδιότητα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ὡς πρός τήν πρόσθεσιν, διά νά πολλαπλασιάσωμεν δύο πολυώνυμα τῆς ἰδίας μεταβλητῆς, πολλαπλασιάζομεν κάθε ὅρον τοῦ ἑνός μέ κάθε ὅρον τοῦ ἄλλου καί προσθέτομεν τά προκύπτοντα μονώνυμα. Π.χ.

$$\begin{aligned}(2x^2+3x)\cdot(5x-4) &= 2x^2\cdot 5x + 3x\cdot 5x + 2x^2\cdot(-4) + 3x\cdot(-4)\\ &= 10x^3 + 15x^2 - 8x^2 - 12x\\ &= 10x^3 + 7x^2 - 12x.\end{aligned}$$

Ὅπως βλέπομεν, τό γινόμενον ἔχει βαθμόν 3, ἴσον μέ τό ἄθροισμα τῶν βαθμῶν 2 καί 1 τῶν παραγόντων $2x^2+3$ καί $5x-4$ ἀντιστοίχως. Αὐτό συμβαίνει εἰς κάθε πολλαπλασιασμόν δύο πολυωνύμων, διότι ὁ μεγιστοβάθμιος ὅρος τοῦ γινομένου προκύπτει ἀπό τόν πολλαπλασιασμόν τῶν μεγιστοβαθμίων ὅρων τῶν πολλαπλασιαζομένων πολυωνύμων.

Ἡ ἐκτέλεσις τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καί ἡ εὕρεσις τοῦ γινομένου μέ συνεπτυγμένην μορφήν διευκολύνονται, ἄν ἐνεργήσωμεν ὅπως καί κατά τόν πολλαπλασιασμόν δύο πολυψηφίων ἀκεραίων ἀριθμῶν. Π.χ. διά τό ἀνωτέρω παράδειγμα ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς :

$$\begin{array}{rrrl}
 & 2x^2 & +3x & \\
 & & 5x-4 & \\
\hline
10x^3 & +15x^2 & & \text{(γινόμενον τοῦ } 2x^2+3x \text{ μέ } 5x)\\
 & -8x^2 & -12x & \text{(γινόμενον τοῦ } 2x^2+3x \text{ μέ } -4)\\
\hline
10x^3 & +7x^2 & -12x & \text{(ἄθροισμα τῶν δύο μερικῶν γινομένων)}
\end{array}$$

<u>2ον παράδειγμα.</u> Ἔστω πρός ἐκτέλεσιν ὁ πολλαπλασιασμός

$$(3x^3-5x^2+7x-1)\cdot(2x^2+4x+2) .$$

Ἐνεργοῦμεν ὡς ἑξῆς:

$$\begin{array}{rrrrrrl}
 & & 3x^3 & -5x^2 & +7x & -1 & \\
 & & & 2x^2 & +4x & +2 & \\
\hline
6x^5 & -10x^4 & +14x^3 & -2x^2 & & & \text{(μερικόν γινόμενον μέ } 2x^2)\\
 & +12x^4 & -20x^3 & +28x^2 & -4x & & (\quad \text{"} \quad \text{"} \quad 4x)\\
 & & +6x^3 & -10x^2 & +14x & -2 & (\quad \text{"} \quad \text{"} \quad 2)\\
\hline
6x^5 & +2x^4 & -0x^3 & +16x^2 & +10x & -2 & \text{(ὁλικόν γινόμενον)}
\end{array}$$

Τό ζητούμενον γινόμενον μέ συνεπτυγμένην μορφήν εἶναι:

$$6x^5+2x^4+16x^2+10x-2 .$$

<u>3ον παράδειγμα.</u> Ἄς ἔχωμεν νά πολλαπλασιάσωμεν τό πολυώνυμον $6x^3-\frac{3}{2}x$ μέ τό $\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{3}x^2+1$. Θά γράψωμεν εἰς τήν πρώτην σειράν ,ὡς πολλαπλασιαστέον, τό πολυώνυμον $\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{3}x^2+1$. με τούς περισσ<u>οτέρους</u> ὅρους.

Εἰς αὐτό ἡ κατερχομένη σειρά τῶν δυνάμεων τῆς μεταβλητῆς x παρουσιάζει ἕνα κενόν : λείπει ἡ πρώτη δύναμις τοῦ x. Εἶναι σκόπιμον νά συμπληρώσωμεν τό κενόν μέ τόν μηδενικόν ὅρον 0x, ἀνάλογα ,μέ ὅ,τι πράττομεν π.χ. εἰς τήν γραφήν 5401 τοῦ ἀκεραίου $5\cdot10^3+4\cdot10^2+1$, ὅταν συμπληρώνωμεν μέ ἕνα 0 τό κενόν πού προκύπτει ἀπό τήν ἀπουσίαν τῶν δεκάδων. Ἔτσι εὑρίσκομεν:

$$\begin{array}{rl}
\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{3}x^2+0x+1 & \\
6x^3-\frac{3}{2}x & \\
\hline
4x^6-2x^5+0x^4+6x^3 & (\text{μερικόν γινόμενον μέ } 6x^3) \\
-x^4+\frac{1}{2}x^3+0x^2-\frac{3}{2}x & (\quad » \quad » \quad » -\frac{3}{2}x) \\
\hline
4x^6-2x^5-x^4+\frac{13}{2}x^3+0x^2-\frac{3}{2}x & (\text{ὁλικόν γινόμενον})
\end{array}$$

καί μέ συνεπτυγμένην μορφήν :

$$\left(6x^3-\frac{3}{2}x\right)\left(\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{3}x^2+1\right)=4x^6-2x^5-x^4+\frac{13}{2}x^3-\frac{3}{2}x\,.$$

η) <u>Διαίρεσις πολυωνύμου μέ πολυώνυμον</u>. Ὑπολογίζοντες κατά τά ἀνωτέρω τό γινόμενον $(3x^2-5x+1)\cdot(2x+3)$ εὑρίσκομεν:

$$(3x^2-5x+1)\cdot(2x+3)=6x^3-x^2-13x+3.$$

Ἐπειδή ὁ πολλαπλασιασμός ἔχει ὡς ἀντίστροφον πρᾶξιν τήν διαίρεσιν, ἀπό τήν τελευταίαν σχέσιν συμπεραίνομεν ὅτι πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ $6x^3-x^2-13x+3$ διά $2x+3$ εἶναι τό $3x^2-5x+1$; ἤτοι

$$(6x^3-x^2-13x+3):(2x+3)=3x^2-5x+1.$$

Ἰδού τώρα πῶς ἠμποροῦμεν νά εὕρωμεν τό πηλίκον τοῦτο,ὅταν δοθοῦν ὁ διαιρετέος $6x^3-x^2-13x+3$ καί ὁ διαιρέτης $2x+3$.

Παρατηροῦμεν πρῶτα ὅτι τό πηλίκον πρέπει νά εἶναι ἕνα δευτεροβάθμιον πολυώνυμον τοῦ x, διότι πρέπει νά ἱκανοποιῆ τήν σχέσιν

$$(2x+3)\times \text{πηλίκον}=6x^3-x^2-13x+3.$$

Ἄρα τό πηλίκον θά ἔχη τρεῖς ὅρους: αx^2, βx, γ τούς ὁποίους πρέπει νά προσδιορίσωμεν ἔτσι ὥστε νά ἰσχύη ἡ σχέσις

$$(2x+3)\cdot(\alpha x^2+\beta x+\gamma) = 6x^3 - x^2 - 13x + 3 . \qquad (1)$$

Σύμφωνα μέ ὅ,τι εἴπαμεν εἰς τό προηγούμενον ἐδάφιον ζ), ὁ μεγιστοβάθμιος ὅρος $6x^3$ τοῦ δεξιοῦ μέλους τῆς σχέσεως εἶναι ἴσος μέ τό γινόμενον τοῦ μεγιστοβαθμίου ὅρου $2x$ τοῦ $(2x+3)$ μέ τόν μεγιστοβάθμιον ὅρον αx^2 τοῦ $(\alpha x^2+\beta x+\gamma)\cdot$ ἄρα

$$6x^3 = 2x\cdot\alpha x^2 \Longleftrightarrow \alpha x^2 = 6x^3 : 2x = 3x^2 .$$

Ἔτσι προσδιωρίσαμεν τόν πρῶτον ὅρον αx^2 τοῦ πηλίκου καί ἡ σχέσις (1) παίρνει τήν μορφήν

$$(2x+3)\cdot(3x^2+\beta x+\gamma) = 6x^3 - x^2 - 13x + 3$$

πού εἶναι ἰσοδύναμος μέ τήν

$$(2x+3)3x^2 + (2x+3)\cdot(\beta x+\gamma) = 6x^3 - x^2 - 13x + 3 . \qquad (2)$$

Ἀφαιροῦμεν τώρα καί ἀπό τά δύο μέλη αὐτῆς τῆς ἰσότητος τό γινόμενον $(2x+3)\cdot 3x^2 = 6x^3 + 9x^2$:

$$\begin{array}{rcl} (2x+3)3x^2 + (2x+3)\cdot(\beta x+\gamma) & = & 6x^3 - x^2 - 13x + 3 \\ -\ (2x+3)\cdot 3x^2 & = & -6x^3 - 9x^2 \\ \hline (2x+3)\cdot(\beta x+\gamma) & = & -10x^2 - 13x + 3 \end{array} \qquad (3)$$

Ἀπό τήν ἰσότητα (3), πού προέκυψε καί πού εἶναι ἰσοδύναμος μέ τήν (2), συμπεραίνομεν πάλιν τό ἑξῆς: ὁ μεγιστοβάθμιος ὅρος $-10x^2$ τοῦ δεξιοῦ μέλους εἶναι ἴσος μέ τό γινόμενον τοῦ μεγιστοβαθμίου ὅρου $2x$ τοῦ $(2x+3)$ μέ τόν μεγιστοβάθμιον ὅρον βx τοῦ $(\beta x+\gamma)\cdot$ ἄρα

$$-10x^2 = 2x\cdot\beta x \Longleftrightarrow \beta x = -10x^2 : 2x = -5x .$$

Προσδιωρίσαμεν ἔτσι τόν δεύτερον ὅρον βx τοῦ ζητουμένου πηλίκου καί ἡ σχέσις (3) παίρνει τήν μορφήν

$$(2x+3)\cdot(-5x+\gamma) = -10x^2 - 13x + 3 ,$$

πού εἶναι ἰσοδύναμος μέ τήν

$$(2x+3)\cdot(-5x) + (2x+3)\gamma = -10x^2 - 13x + 3 .$$

Ἀφαιροῦμεν τώρα καί ἀπό τά δύο μέλη αὐτῆς τῆς ἰσότητος τό γινόμενον $(2x+3)\cdot(-5x) = -10x^2 - 15x$ καί ἔτσι λαμβάνομεν τήν ἰσοδύναμον ἰσότητα

$$(2x+3)\gamma = 2x + 3.$$

'Από αὐτήν συμπεραίνομεν πάλιν ὅτι

$$2x = 2x\cdot\gamma \iff \gamma = 2x : 2x = 1.$$

Προσδιωρίσαμεν ἔτσι καί τόν τρίτον ὅρον γ τοῦ πηλίκου.

'Η διάταξις τῶν πράξεων γίνεται μέ τόν ἀκόλουθον τρόπον πού ὁμοιάζει μέ τήν διάταξιν τῶν πράξεων κατά τήν διαίρεσιν ἑνός πολυψηφίου ἀκεραίου μέ ἕνα ἄλλον ἐπίσης πολυψήφιον:

$$\begin{array}{l|l}
6x^3 - x^2 - 13x + 3 & 2x + 3 \\ \cline{2-2}
-(6x^3 + 9x^2) & 3x^2 - 5x + 1 \\ \cline{1-1}
\quad -10x^2 - 13x + 3 & \\
\quad -(-10x^2 - 15x) & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad 2x + 3 & \\
\qquad\qquad -(2x+3) & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad\quad 0 &
\end{array}$$

'Αντί νά ἀφαιροῦμεν κάθε φοράν τό γινόμενον τοῦ διαιρέτου μέ τόν ὅρον τοῦ πηλίκου τόν ὁποῖον προσδιωρίσαμεν, προσθέτομεν τό ἀντίθετον γινόμενον καί ἔτσι ἡ ἐκτέλεσις τῆς διαιρέσεως παίρνει τήν ἑξῆς τελικήν μορφήν :

$$\begin{array}{l|l}
6x^3 - x^2 - 13x + 3 & 2x + 3 \\ \cline{2-2}
-6x^3 - 9x^2 & 3x^2 - 5x + 1 \\ \cline{1-1}
\quad -10x^2 - 13x + 3 & \\
\quad\ \ 10x^2 + 15x & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad 2x + 3 & \\
\qquad\qquad -2x - 3 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad\quad 0 &
\end{array}$$

"Αλλο παράδειγμα: Νά ἐκτελεσθῆ ἡ διαίρεσις

$$(6x^5 - 11x^4 + 3x^3 + x^2 - 2x) : (3x^3 - 7x^2 + 5x - 2).$$

$$\begin{array}{l|l}
6x^5 - 11x^4 + 3x^3 + x^2 - 2x & 3x^3 - 7x^2 + 5x - 2 \\
\underline{-6x^5 + 14x^4 - 10x^3 + 4x^2} & 2x^2 + x \\
\quad 3x^4 - 7x^3 + 5x^2 - 2x & \\
\quad \underline{-3x^4 + 7x^3 - 5x^2 + 2x} & \\
\qquad 0 &
\end{array}$$

Τό ζητούμενον πηλίκον εἶναι λοιπόν $2x^2 + x$. Διά νά ἐπαληθεύσωμεν αὐτό τό ἐξαγόμενον, τό πολλαπλασιάζομεν μέ τόν διαιρέτην· ὡς γινόμενον πρέπει νά εὕρωμεν τόν διαιρετέον:

$$\begin{array}{rl}
3x^3 - 7x^2 + 5x - 2 & \quad (\text{διαιρέτης}) \\
\underline{2x^2 + x} & \quad (\text{πηλίκον}) \\
6x^5 - 14x^4 + 10x^3 - 4x^2 & \\
\underline{3x^4 - 7x^3 + 5x^2 - 2x} & \\
6x^5 - 11x^4 + 3x^3 + x^2 - 2x & \quad (\text{διαιρετέος})
\end{array}$$

<u>Παρατηρήσεις</u>. Καί εἰς τά δύο ἀνωτέρω παραδείγματα ἡ διαίρεσις εἶναι <u>τελεία</u>, δηλαδή ὑπάρχει ἀκέραιον πολυώνυμον πού τό γινόμενόν του μέ τόν διαιρέτην νά εἶναι ἴσον πρός τόν διαιρετέον. Αὐτό ὅμως δέν συμβαίνει εἰς πλείστας περιπτώσεις. Π.χ. ἡ διαίρεσις $(x^2+1) : x^5$ μέ βαθμόν διαιρετέου < τοῦ βαθμοῦ τοῦ διαιρέτου δέν ἠμπορεῖ νά εἶναι τελεία, διότι τό γινόμενον

$x^5 \times$ ὁποιοδήποτε ὄχι μηδενικόν πολυώνυμον

ἔχει βαθμόν ≥ 5 καί δέν ἠμπορεῖ νά εἶναι ἴσον μέ τόν δευτεροβάθμιον διαιρετέον $x^2 + 1$. Ἐπίσης ἡ διαίρεσις

$$(x^6+1) : (x^3+x^2)$$

δέν ἠμπορεῖ νά εἶναι τελεία, μολονότι ὁ διαιρετέος ἔχει βαθμόν μεγαλύτερον ἀπό τόν βαθμόν τοῦ διαιρέτου. Πράγματι κάθε ὅρος τοῦ γινομένου

$(x^3+x^2) \times$ ὁποιοδήποτε ὄχι μηδενικόν πολυώνυμον

ἔχει βαθμόν ≥ 2 καί, ἐπομένως, τό γινόμενον δέν ἠμπορεῖ νά εἶναι ἴσον μέ τόν διαιρετέον $x^6 + 1$ πού ἔχει τόν ὅρον 1 βαθμοῦ μηδενικοῦ .

θ) Διά νά ἐξακριβώσωμεν ἄν εἶναι τελεία ἤ ὄχι ἡ διαίρεσις $\sigma(x) : \varphi(x)$ ἑνός πολυωνύμου $\sigma(x)$ μέ ἕνα πολυώνυμον $\varphi(x) \neq 0$ τοῦ ὁποίου ὁ βαθμός εἶναι $\leqslant$ τοῦ βαθμοῦ τοῦ $\sigma(x)$, ἀρκεῖ νά διατάξωμεν τά δύο πολυώνυμα κατά τάς κατερχομένας δυνάμεις τοῦ x καί νά ἐργασθῶμεν ὅπως καί εἰς τά ἀνωτέρω δύο παραδείγματα. Ἄν ἡ διαίρεσις εἶναι τελεία, ἡ σειρά τῶν ἀφαιρέσεων πού θά ἐκτελέσωμεν θά καταλήξη εἰς ὑπόλοιπον μηδέν, ἄν ὄχι, αὐτή ἡ σειρά θά φθάση εἰς ἕνα ὄχι μηδενικόν ὑπόλοιπον μέ βαθμόν μικρότερον ἀπό τόν βαθμόν τοῦ διαιρέτου $\varphi(x)$. Θά σταματήσωμεν τότε τάς πράξεις, διότι ἡ συνέχισίς των θά ἔδιδε κλασματικά μονώνυμα εἰς τό πηλίκον.

<u>Παραδείγματα:</u> I)

$$
\begin{array}{l|l}
x^6 + 1 & x^3 + x^2 \\
\cline{2-2}
\underline{-x^6 - x^5} & x^3 - x^2 + x - 1 \\
\quad - x^5 + 1 & \\
\quad \underline{x^5 + x^4} & \\
\qquad x^4 + 1 & \\
\qquad \underline{-x^4 - x^3} & \\
\qquad\quad - x^3 + 1 & \\
\qquad\quad \underline{x^3 + x^2} & \\
\qquad\quad x^2 + 1 &
\end{array}
$$

ὑπόλοιπον μέ βαθμ. $<$ τοῦ βαθμ. τοῦ διαιρέτου.

Τό πολυώνυμον $x^3 - x^2 + x - 1$ λέγεται <u>ἀκέραιον μέρος τοῦ πηλίκου</u>

$$(x^6+1) : (x^3+x^2) = \frac{x^6+1}{x^3+x^2},$$

καί τό τελικόν ὑπόλοιπον $x^2 + 1$, <u>ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως</u>.

Ἰσχύει ἡ ἰσότης :

$$x^6 + 1 = (x^3+x^2)\cdot(x^3-x^2+x-1) + (x^2+1) ,$$

δηλαδή ἡ :

διαιρετέος = διαιρέτης $\times$ ἀκέραιον μέρος πηλίκου + ὑπόλοιπον.

Ἡ ἰσότης αὐτή, πού εἶναι μία ταυτότης, ἠμπορεῖ νά χρησιμεύση διά τόν ἔλεγχον τῶν ἐξαγομένων μιᾶς διαιρέσεως, δηλαδή τοῦ ἀκεραίου μέρους καί τοῦ ὑπολοίπου τῆς διαιρέσεως.

Ὁ ἔλεγχος γίνεται μέ ἕνα ἀπό τούς ἀκολούθους τρόπους:

<u>1ος τρόπος</u> : Ἐκτελοῦμεν τόν πολλαπλασιασμόν καί τήν πρόσθεσιν πού σημειώνονται εἰς τό δεξιόν μέλος. Τό ἀποτέλεσμα πρέπει νά ταυτίζεται μέ τόν διαιρετέον (τό ἀριστερόν μέλος).

<u>2ος τρόπος:</u> Δίδομεν εἰς τό x μίαν ἀριθμητικήν τιμήν καί ὑπολογίζομεν τάς ἀντιστοίχους ἀριθμητικάς τιμάς τῶν δύο μελῶν τῆς ταυτότητος· τά δύο ἐξαγόμενα πρέπει νά εἶναι ἴσα. Π.χ. εἰς τό ἀνωτέρω παράδειγμα ἔχομεν διά $x = 2$:

$$2^6 + 1 = 65 = (2^3+2^2)\cdot(2^3-2^2+2-1) + (2^2+1) = 12\cdot5 + 5 = 65.$$

ΙΙ)
$$\begin{array}{l|l}
3x^4+2x^3+5x+1 & 3x^3-5x^2+1 \\
\hline
-3x^4+5x^3-x & x+\frac{7}{3} \text{ (ἀκέραιον μέρος τοῦ πηλίκου)} \\
\quad 7x^3+4x+1 & \\
\quad -7x^3+\frac{35}{3}x^2-\frac{7}{3} & \\
\hline
\frac{35}{3}x^2+4x-\frac{4}{3} \text{ (ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως)} &
\end{array}$$

Ἰσχύει ἡ σχέσις

$$3x^4+2x^3+5x+1 = (3x^3-5x^2+1)\cdot\left(x+\frac{7}{3}\right) + \left(\frac{35}{3}x^2+4x-\frac{4}{3}\right)$$

ι) Ἄς συνοψίσωμεν τώρα ὅσα ηὕραμεν εἰς τά ἐδάφια η) καί θ). Ἄς εἶναι $\sigma(x)$ καί $\varphi(x) \neq 0$ δύο πολυώνυμα διατεταγμένα κατά τάς κατερχομένας δυνάμεις τοῦ x. Ἡ διαίρεσις τοῦ $\sigma(x)$ διά $\varphi(x)$, ὅταν ἐκτελεσθῇ μέ τόν τρόπον πού ὑπεδείξαμεν, καταλήγει εἰς ἕνα ὑπόλοιπον $\upsilon(x)$, τό ὁποῖον ἤ θά εἶναι τό 0 ἤ θά εἶναι ἕνα ὄχι μηδενικόν πολυώνυμον βαθμοῦ < ἀπό τόν βαθμόν τοῦ διαιρέτου $\varphi(x)$. Εἰς τό πηλίκον θά λάβωμεν ἕνα ἀκέραιον πολυώνυμον $\pi(x)$ καί θά εἶναι

$\pi(x) = 0$, ἄν $\sigma(x) = 0$ ἤ ἄν βαθμός τοῦ $\sigma(x)$ < βαθμοῦ τοῦ $\varphi(x)$,

$\pi(x) \neq 0$, ἄν βαθμός τοῦ $\sigma(x) \geqslant$ βαθμοῦ τοῦ $\varphi(x)$.

Εἰς τήν τελευταίαν αὐτήν περίπτωσιν θά ἔχωμεν:

βαθμός τοῦ $\pi(x)$ = βαθμός τοῦ $\sigma(x)$ − βαθμός τοῦ $\varphi(x)$.

Μεταξύ τῶν πολυωνύμων $\sigma(x)$, $\varphi(x)$, $\pi(x)$ καί $\upsilon(x)$ ἰσχύει εἰς πᾶσαν περίπτωσιν ἡ σχέσις

$$σ(x) = φ(x)\cdot π(x) + υ(x)$$

τήν ὁποίαν γράφομεν καί ὡς ἑξῆς :

$$\frac{σ(x)}{φ(x)} = π(x) + \frac{υ(x)}{φ(x)}$$

Παρατηροῦμεν ὅτι ὅμοια ἀποτελέσματα προκύπτουν, ὅταν διαιροῦμεν ἕναν ἀκέραιον ἀριθμόν $\geqslant 0$ μέ ἕνα ἀκέραιον >0 (βλ. καί Βιβλ.Ι, σελ. 45κ.ἑ.).Π.χ.εἰς τήν περίπτωσιν τῆς διαιρέσεως τοῦ 30 διά 7, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς τήν ἀνωτέρω τελευταίαν περίπτωσιν, ἔχομεν :

ἀκέραιον μέρος τοῦ πηλίκου = 4, ὑπόλοιπον = 2 ,

$$30 = 7\times 4 + 2 \qquad \text{καί} \qquad \frac{30}{7} = 4 + \frac{2}{7}.$$

1.4. Μετασχηματισμός μερικῶν τριωνύμων 2ου βαθμοῦ εἰς γινόμενα πρωτοβαθμίων παραγόντων. Εἰς τήν παράγραφον αὐτήν θά μάθωμεν πῶς εἶναι δυνατόν νά μετασχηματίσωμεν, δηλαδή νά μετατρέψωμεν, μερικά τριώνυμα 2ου βαθμοῦ εἰς γινόμενα πρωτοβαθμίων παραγόντων. Ὁ μετασχηματισμός αὐτός θά μᾶς χρησιμεύσῃ παρακάτω εἰς τήν ἐπίλυσιν ἐξισώσεων 2ου βαθμοῦ.

α) Τριώνυμα 2ου βαθμοῦ ἴσα μέ τετράγωνα διωνύμων. Ἄν ἐκτελέσωμεν τούς πολλαπλασιασμούς $(αx+β)\cdot(αx+β)$ καί $(αx-β)\cdot(αx-β)$ εὑρίσκομεν :

$$(αx+β)^2 = α^2x^2 + 2αβx + β^2 \quad \text{καί} \quad (αx-β)^2 = α^2x^2 - 2αβx + β^2.$$

Ἄς σημειωθῇ ὅτι ἀπό τάς δύο αὐτάς ἰσότητας ἡ δευτέρα εἶναι συνέπεια τῆς πρώτης καί ἀντιστρόφως : ἡ μία προκύπτει ἀπό τήν ἄλλην, ἄν ἀντικαταστήσωμεν τό β μέ $-β$, πρᾶγμα πού ἔχομεν δικαίωμα νά κάμωμεν, ἐπειδή τό γράμμα β παριστάνει ἕνα ὁποιονδήποτε ὡρισμένον σχετικόν ἀριθμόν.

Ὅπως βλέπομεν , τό τετράγωνον ἑνός πρωτοβαθμίου διωνύμου $αx + β$ ἤ $αx - β$ εἶναι ἴσον μέ ἕνα τριώνυμον 2ου βαθμοῦ, τοῦ ὁποίου δύο ὅροι εἶναι ἀντιστοίχως τετράγωνα δύο μονωνύμων καί ὁ τρίτος ὅρος εἶναι ἴσος μέ σύν ἤ πλήν τό διπλάσιον γινόμενον τῶν δύο τούτων μονωνύμων. Ἀντιστρόφως, ἕνα τριώνυμον 2ου βαθμοῦ αὐτῆς τῆς μορφῆς ἠμποροῦμεν νά τό μετασχηματίσωμεν εἰς τετράγωνον πρωτοβαθμίου διωνύμου. Π.χ.

$$9x^2 + 25 + 30x = (3x)^2 + 5^2 + 2\cdot 3x\cdot 5 = (3x+5)^2$$

$$x^2 - 2x + 1 = x^2 + 1^2 - 2\cdot x\cdot 1 = (x-1)^2$$

$$x^2 + \frac{4x}{3} + \frac{4}{9} = x^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 2\cdot x\cdot \frac{2}{3} = \left(x+\frac{2}{3}\right)^2$$

$$x^2 - x + \frac{1}{4} = x^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2\cdot x\cdot \frac{1}{2} = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2.$$

β) Δευτεροβάθμιον διώνυμον ἴσον μέ διαφοράν τῶν τετραγώνων δύο μονωνύμων. Ὁ πολλαπλασιασμός $(\alpha x+\beta)\cdot(\alpha x-\beta)$ μᾶς ὁδηγεῖ εἰς τήν ἰσότητα

$$(\alpha x+\beta)\cdot(\alpha x-\beta) = \alpha^2 x^2 - \beta^2.$$

Ἀντιστρόφως, ὅταν ἕνα δευτεροβάθμιον διώνυμον ἔχῃ τήν μορφήν μιᾶς διαφορᾶς τῶν τετραγώνων δύο μονωνύμων, ὅπως τό δεξιόν μέλος τῆς τελευταίας ἰσότητος, τότε ἠμποροῦμεν νά τό μετασχηματίσωμεν εἰς γινόμενον δύο πρωτοβαθμίων διωνύμων. Π.χ.

$$9x^2 - 25 = (3x)^2 - 5^2 = (3x+5)\cdot(3x-5) = (-3x+5)\cdot(-3x-5)$$

$$x^2 - 1 = x^2 - 1^2 = (x+1)\cdot(x-1) = (-x+1)\cdot(-x-1)$$

$$x^2 - \frac{1}{4} = x^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(x+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right) = \left(-x+\frac{1}{2}\right)\left(-x-\frac{1}{2}\right)$$

$$2x^2 - 5 = (\sqrt{2}x)^2 - (\sqrt{5})^2 = (\sqrt{2}x+\sqrt{5})\cdot(\sqrt{2}x-\sqrt{5}) = (-\sqrt{2}x+\sqrt{5})\cdot(-\sqrt{2}x-\sqrt{5})$$

γ) Εἰς τήν προηγουμένην περίπτωσιν ἀνάγεται ἡ ἀκόλουθος:

$$(x+\delta)^2 - \beta^2 = [(x+\delta)+\beta]\cdot[(x+\delta)-\beta] = (x+\delta+\beta)\cdot(x+\delta-\beta).$$

Π.χ.

$$(x+3)^2 - 9^2 = (x+3+9)\cdot(x+3-9) = (x+12)\cdot(x-6)$$

$$(x-7)^2 - 36 = (x-7)^2 - 6^2 = (x-7+6)\cdot(x-7-6) = (x-1)\cdot(x-13)$$

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{9} = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \left(x+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) = \left(x+\frac{5}{6}\right)\left(x+\frac{1}{6}\right)$$

$$(x+2)^2 - 3 = (x+2)^2 - (\sqrt{3})^2 = (x+2+\sqrt{3})\cdot(x+2-\sqrt{3}).$$

δ) Δευτεροβάθμια τριώνυμα $x^2 + px + q$. Παρατηροῦμεν ὅτι ἰσχύει ἡ ἰσότης:

$$x^2 + px = \left(x^2 + 2\frac{p}{2}x + \frac{p^2}{4}\right) - \frac{p^2}{4} = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4}$$

Ἐπομένως:

$$x^2 + px + q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2-4q}{4}$$

Διακρίνομεν τώρα δύο περιπτώσεις.

<u>1η περίπτωσις</u>: $p^2 - 4q \geq 0$. Ὁ ἀριθμός $\frac{p^2-4q}{4}$ εἶναι τότε ≥ 0 καί ἐπομένως ἴσος μέ τετράγωνον σχετικοῦ ἀριθμοῦ:

$$\frac{p^2-4q}{4} = \theta^2, \text{ ὅπου } \theta = \frac{\sqrt{p^2-4q}}{2}$$

Ἄρα τό τριώνυμον $x^2 + px + q$ ἠμπορεῖ νά γραφῆ ὡς διαφορά δύο τετραγώνων:

$$x^2 + px + q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 - \theta^2,$$

καί, σύμφωνα μέ τό προηγούμενον ἐδάφιον, νά μετασχηματισθῆ εἰς γινόμενον δύο πρωτοβαθμίων παραγόντων :

$$x^2 + px + q = \left(x+\frac{p}{2}+\theta\right)\cdot\left(x+\frac{p}{2}-\theta\right).$$

<u>2α περίπτωσις</u> : $p^2 - 4q < 0$. Ὁ ἀριθμός $\frac{p^2-4q}{4}$ εἶναι τότε < 0 καί δέν ἰσοῦται μέ τό τετράγωνον κανενός σχετικοῦ ἀριθμοῦ. Τό τριώνυμον $x^2 + px + q$ εἶναι τώρα ἄθροισμα καί ὄχι διαφορά δύο τετραγώνων· ὁ μετασχηματισμός του εἰς γινόμενον δύο πρωτοβαθμίων παραγόντων δέν εἶναι δυνατός μέσα εἰς τό σύστημα τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν, θά γίνη δυνατός μέσα εἰς ἕνα περιεκτικώτερον σύστημα ἀριθμῶν τό ὁποῖον θά μελετήσωμεν εἰς ἀνωτέραν τάξιν.

<u>Παραδείγματα</u> I) Ἔστω τό τριώνυμον $x^2 + 6x + 8$. Εἰς αὐτό εἶναι $p = 6$, $q = 8$ καί $p^2 - 4q = 36 - 32 = 4 > 0$. Ἄρα τό τριώνυμον ἠμπορεῖ νά μετασχηματισθῆ εἰς γινόμενον πρωτοβαθμίων παραγόντων:

$$x^2+6x+8 = x^2+2\cdot3\cdot x+8 = (x+3)^2-9+8 = (x+3)^2-1^2 = (x+3+1)(x+3-1)$$
$$= (x+4)(x+2).$$

II) Ἔστω τό τριώνυμον x^2+5x+2, διά τό ὁποῖον $p = 5$, $q = 2$ καί $p^2-4q = 25 - 8 = 17 > 0$. Ἄρα

$$x^2+5x+2 = \left(x^2+2\,\frac{5}{2}\,x+\frac{25}{4}\right)-\frac{25}{4}+2 = \left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{17}{4}$$
$$= \left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{17}}{2}\right)^2$$
$$= \left(x+\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{17}}{2}\right)\left(x+\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{17}}{2}\right)$$

III) Ἔστω τό $x^2-\frac{3}{2}x-4$, διά τό ὁποῖον $p=-\frac{3}{2}$, $q=-4$ καί $p^2-4q=\frac{9}{4}+16=\frac{73}{4}>0$. Ἄρα

$$x^2-\frac{3}{2}x-4 = \left(x^2-2\cdot\frac{3}{4}\,x+\frac{9}{16}\right)-\frac{9}{16}-4 = \left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{73}{16}$$
$$= \left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{73}}{4}\right)^2$$
$$= \left(x-\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{73}}{4}\right)\left(x-\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{73}}{4}\right).$$

ε) <u>Δευτεροβάθμια τριώνυμα $\alpha x^2+\beta x+\gamma$.</u> Ἡ περίπτωσις αὐτῶν τῶν τριωνύμων ἀνάγεται εἰς τήν προηγουμένην, ἐπειδή

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma = \alpha\left(x^2+\frac{\beta}{\alpha}\,x+\frac{\gamma}{\alpha}\right) = \alpha(x^2+px+q)\ ,$$

ὅπου $p=\frac{\beta}{\alpha}$ καί $q=\frac{\gamma}{\alpha}$. Παρατηροῦμεν ὅτι ὁ ἀριθμός

$$p^2-4q = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2-4\,\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\beta^2}{\alpha^2}-\frac{4\alpha\gamma}{\alpha^2} = \frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{\alpha^2}$$

εἶναι ὁμόσημος μέ τόν $\beta^2-4\alpha\gamma$, διότι $\alpha^2>0$. Ἄρα, ἐάν

$$\beta^2-4\alpha\gamma \geqslant 0\ ,$$

τότε τό τριώνυμον $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ εἶναι δυνατόν νά μετασχηματισθῇ εἰς γινόμενον πρωτοβαθμίων παραγόντων. Ὁ μετασχηματισμός αὐτός λέγεται καί <u>ἀνάλυσις</u> τοῦ τριωνύμου εἰς <u>γινόμενον πρωτοβαθμίων παραγόντων.</u>

<u>Παραδείγματα</u> I) Ἔστω τό τριώνυμον $3x^2-9x+6$ μέ $\beta^2-4\alpha\gamma = 81-72>0$.

Ἔχομεν:

$$3x^2-9x+6 = 3(x^2-3x+2) = 3\left[\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+2\right] =$$
$$= 3\left[\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right] = 3\left(x-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(x-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)$$
$$= 3(x-1)\cdot(x-2) = (3x-3)\cdot(x-2).$$

II) Ἔστω τό τριώνυμον $2x^2+5x+3$ μέ $\beta^2-4\alpha\gamma = 25-24 = 1>0$.
Ἔχομεν:

$$2x^2+5x+3 = 2\left(x^2+\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}\right) = 2\left[\left(x+\frac{5}{4}\right)^2-\frac{25}{16}+\frac{3}{2}\right] = 2\left[\left(x+\frac{5}{4}\right)^2-\frac{1}{16}\right]$$

$$=2\left(x+\frac{5}{4}+\frac{1}{4}\right)\left(x+\frac{5}{4}-\frac{1}{4}\right) = 2\left(x+\frac{3}{2}\right)\cdot(x+1) = (2x+3)\cdot(x+1).$$

III) Ἔστω τό τριώνυμον $4x^2-8\sqrt{3}x+12$ μέ $\beta^2-4\alpha\gamma = 64\cdot 3 - 4\cdot 4\cdot 12 = 0$.
Ἔχομεν:

$$4x^2-8\sqrt{3}x+12 = 4(x^2-2\sqrt{3}x+3) = 4[(x-\sqrt{3})^2-3+3] = 4(x-\sqrt{3})^2 = (2x-2\sqrt{3})^2.$$

IV) Ἔστω τό τριώνυμον x^2+2x+3 μέ
$\beta^2-4\alpha\gamma = 4-4\cdot 1\cdot 3 = -8<0$.
Ἔχομεν:

$$x^2+2x+3 = x^2+2x+1-1+3 = (x+1)^2+2 = (x+1)^2+(\sqrt{2})^2.$$

Τό τριώνυμον ἠμπορεῖ νά γραφῇ ὡς ἄθροισμα δύο τετραγώνων, ἀλλά δέν μετασχηματίζεται εἰς γινόμενον δύο πρωτοβαθμίων παραγόντων μέσα εἰς τό σύστημα τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Νά διακρίνετε τόν βαθμόν καί τόν συντελεστήν εἰς τό καθένα ἀπό τά παρακάτω μονώνυμα τῆς μεταβλητῆς x ἤ y :

$3\alpha x^2,\ \frac{-2x^3}{5},\ \frac{\alpha^2\beta y^3}{\gamma},\ -\frac{x^2}{\beta},\ -\frac{2\alpha x}{\beta},\ y^2,\ -y,\ \frac{2y^4}{\gamma}$.

2) Νά χωρίσετε τά παρακάτω μονώνυμα τῶν μεταβλητῶν x ἤ y εἰς ὁμάδας ὁμοίων μονωνύμων καί νά εὕρετε τό ἄθροισμά των εἰς ἑκάστην ὁμάδα:

$3x^2,\ -2x,\ \frac{3y}{4},\ -x^2,\ -\frac{y}{2},\ \frac{3x}{4},\ 2y,\ -5x^2,\ -\frac{x}{4}$

3) Νά κάμετε τό ἴδιον εἰς τά μονώνυμα:

$\beta x^2,\ \frac{\alpha x}{2},\ \frac{2\alpha x}{3},\ -3\alpha x^2,\ -\frac{\alpha x}{2},\ \frac{\alpha x}{3},\ \alpha y^2,\ y,\ \beta y,\ -\beta y^2$

4) Νά προσθέσετε τά κατωτέρω μονώνυμα, νά κάμετε σύμπτυξιν τῶν ὁμοίων ὅρων καί νά διατάξετε κατά τάς κατερχομένας δυνάμεις τῆς μεταβλητῆς x ἤ y τά πολυώνυμα πού προκύπτουν.

α) $-5x^2$, $2x$, -7, $3x^2$, $5x$, $-x^3$, $-x^2$, $4x^3$.

β) $2y$, $-3y^2$, $-3y^3$, $-5y$, $3y$, -1., $5y^3$, 7.

γ) $\frac{x}{2}$, $3x^2$, $-\frac{2}{9}x^2$, x, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{2}x$, $-\frac{5}{4}$, $2x^3$.

Ποῖος εἶναι ὁ βαθμός τοῦ καθενός ἀπό τά πολυώνυμα αὐτά ;

5) Νά εὕρετε τάς διαφοράς :

$3x^2-\left(-\frac{2}{3}x^2\right)$, $5x^2-(2x^2)$, $7x^3-(-5x)$, $1-(-2x)$, $\frac{3}{4}x^3-\left(-\frac{1}{2}x^3\right)$,

$4y-(y^2)$, $5y^3-(-2{,}5y^3)$, $0{,}5y-(4y)$.

6) Νά πολλαπλασιάσετε κάθε ἕνα ἀπό τά μονώνυμα

$$3x^2,\quad -\frac{2}{3}x^3,\quad \frac{1}{2}x$$

μέ κάθε ἕνα ἀπό τά

$$\frac{3}{2}x,\quad -\frac{2}{3}x^2,\quad 6x$$ (9 πολλαπλασιασμοί).

7) Νά εὕρετε τά πηλίκα

$12x^3:(-4x)$, $-3x^2:5x$, $\alpha x^3:(-\beta x^2)$, $9x^2:-6x^2$.

8) Δίδονται τά πολυώνυμα

$\pi_1(x) = 5x^3-3x^2+2x-1$

$\pi_2(x) = 4x^2-3x+2$

$\pi_3(x) = 2x+3$

καί ζητεῖται νά ὑπολογίσετε τά

1ον) $\pi_1(x)+\pi_2(x)+\pi_3(x)$, 2ον) $\pi_1(x)-[\pi_1(x)+\pi_3(x)]$

3ον) $\pi_1(x)-[\pi_3(x)-\pi_2(x)]$, 4ον) $-\pi_1(x)+[\pi_3(x)-\pi_2(x)]$

9) Εἰς τά δύο κατωτέρω πολυώνυμα νά ἐξαλειφθοῦν αἱ ἀγκύλαι καί αἱ παρενθέσεις καί νά ἐπακολουθήση ἡ σύμπτυξις τῶν ὁμοίων ὅρων καί ἡ διάταξις τῶν πολυωνύμων κατά τάς ἀνερχομένας δυνάμεις τοῦ x :

I) $2-\left[3x^3+1-(2x^2-x+7)-(x+5x^3)\right]$

II) $x^2-\left[\alpha x-(3\alpha x+\beta)-(3\beta+2x^2)-1\right]$

10) Εἰς τά δύο κατωτέρω πολυώνυμα νά τεθοῦν ἐντός παρενθέσεως οἱ δύο τελευταῖοι ὅροι μέ τό πρόσημον − ἔμπρός ἀπό τήν παρένθεσιν:

α) $3x^2-2x+1$

β) $4x^3+5x^2+x-3$

11) Νά ἐκτελεσθοῦν αἱ κατωτέρω διαιρέσεις καί αἱ δοκιμαί των μέ τόν πολλαπλασιασμόν :

α) $(12x^4-6x^3+2x^2) : 3x^2$, β) $(3\alpha^2x^3-2\alpha^2x^2+5\alpha x) : (-5\alpha x)$

γ) $\left(\frac{3}{4}x^3-\frac{5}{2}x^2+\frac{1}{2}x\right) : \frac{2}{3}x$.

12) Ἄν εἰς τό πολυώνυμον $\frac{2}{3}x^4-5x^2+8x-\frac{1}{2}$ θέσωμεν τόν ἀριθμόν $\frac{2}{3}$ ὡς κοινόν παράγοντα ἐκτός παρενθέσεως, ποῖον θά εἶναι τό ἐντός παρενθέσεως πολυώνυμον ;

Ὅμοιον ἐρώτημα διά τό πολυώνυμον

$$\frac{3}{4}x^5-x^4+2x^3-\frac{3}{4}x^2-\frac{5}{4}x-6 ,$$

ὅταν ἐκτός παρενθέσεως τεθῇ ὡς κοινός παράγων ὁ ἀριθμός $\frac{3}{4}$;

13) Νά τεθοῦν ἐκτός παρενθέσεως οἱ κοινοί παράγοντες τῶν ὅρων εἰς ἕκαστον ἀπό τά πολυώνυμα :

$3x^2-6x$, $5\alpha x^3-15\alpha^2x^2$, $\alpha x^2-\alpha^2x$,

$(\alpha+\beta)x^2-(\alpha+\beta)x$, $\alpha(x-1)-\beta(x-1)$, $\alpha x^3+\alpha^2x^2+\alpha^3x$.

14) Δίδονται τά πολυώνυμα

$\pi_1(x)=3x^3-5x^2-x+1$, $\pi_2(x)=x^2-x+3$

$\pi_3(x)=3x+5$, $\pi_4(x)=\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{4}x+2$

καί ζητεῖται νά εὑρεθοῦν τά κατωτέρω γινόμενα μέ τήν συνεπτυγμένην των μορφήν διατεταγμένα κατά τάς κατερχομένας δυνάμεις τοῦ x :

α) $\pi_1(x)\cdot\pi_2(x)$, β) $\pi_2(x)\cdot\pi_3(x)$, γ) $\pi_2(x)\cdot\pi_4(x)$

δ) $\pi_1(x)\cdot\pi_2(x)\cdot\pi_3(x)$, ε) $\pi_2(x)\cdot\pi_3(x)\cdot\pi_4(x)$.

15) Νά ἐκτελέσετε τάς διαιρέσεις :

α) $(6x^5+2x^4+16x^2+12x-8) : (3x^3-5x^2-1)$

β) $(12x^3+7x^2-4x+4) : (4x+5)$

γ) $\left(4x^5-2x^4-\frac{3}{4}x^3+6x^2+\frac{3}{2}x\right) : \left(6x^2+\frac{3x}{2}\right)$

δ) $(32x^5-1) : (16x^4+8x^3+4x^2+2x+1)$.

Νά ἐκτελέσετε καί τάς δοκιμάς τῶν διαιρέσεων 1ον πολλαπλασιάζοντες καί προσθέτοντες πολυώνυμα, 2ον ἀντικαθιστῶντες τό x μέ τό -1 εἰς τήν ταυτότητα πού προκύπτει ἀπό κάθε διαίρεσιν.

16) Νά ἀναλύσετε εἰς γινόμενα πρωτοβαθμίων παραγόντων τά πολυώνυμα :

$25x^2+20x+4$, $16x^2-24x+9$, $36x^2-1$, $x^2-\frac{1}{25}$, $(x+8)^2-\frac{16}{9}$, x^2+5x-9 ,

$x^2+12x+3$, $2x^2-8x+3$, $\frac{1}{2}x^2-3x-7$,

$9x^2-30x+25-(2x+5)(2x-5)$, $3x^3-27x$, $2x^3-x^2-x$.

17) Νά δείξετε ὅτι τό γινόμενον $(x+3)\cdot(x+5)$ ἠμπορεῖ νά μετασχηματισθῆ εἰς εἰς διαφοράν δύο τετραγώνων.
Ὁμοίως τό $(x-3)\cdot(x+5)$ καί τό $(x-3)\cdot(x-5)$.

§ 2. Πολυώνυμα δύο ἤ τριῶν μεταβλητῶν.

2.1. Μονώνυμα καί πολυώνυμα δύο ἤ τριῶν μεταβλητῶν. Οἱ ὁρισμοί πού ἐδώσαμεν εἰς τήν προηγουμένην παράγραφον διά μονώνυμα καί πολυώνυμα μιᾶς μεταβλητῆς γενικεύονται ἀμέσως ὡς ἑξῆς:

Μονώνυμον δύο μεταβλητῶν x καί y καλεῖται μία συνάρτησις τῆς μορφῆς

$$\alpha x^{\nu} y^{\mu},$$

ὅπου α εἶναι μία ὁποιαδήποτε σταθερά (δηλ. ἕνας ὡρισμένος σχετικός ἀριθμός), ν καί μ δύο σταθεραί ἴσαι μέ ἀκεραίους ἀριθμούς ≥ 0. Ἡ σταθερά α λέγεται συντελεστής τοῦ μονωνύμου. Π.χ. τό ἐμβαδόν $xy\ m^2$, ἑνός ὀρθογωνίου μέ διαστάσεις x m καί y m, εἶναι ἕνα μονώνυμον τῶν δύο μεταβλητῶν x καί y μέ συντελεστήν τό 1· πεδίον μεταβολῆς κάθε μιᾶς ἀπό τάς δύο μεταβλητάς εἶναι τό σύνολον Π^{+} τῶν θετικῶν σχετικῶν ἀριθμῶν, κατά συνέπειαν τό ζεῦγος (x,y) ἔχει ὡς πεδίον μεταβολῆς τό καρτεσιανόν γινόμενον $\Pi^{+}\times\Pi^{+}$:

$$(x\in\Pi^{+} \text{ καί } y\in\Pi^{+}) \Longleftrightarrow (x,y)\in\Pi^{+}\times\Pi^{+}.$$

(Διά τό καρτεσιανόν γινόμενον βλ. Βιβλ. ΙΙ σελ. 67-69).

Ὅταν $\alpha\neq 0$, τότε τό μονώνυμον $\alpha x^{\nu}y^{\mu}$ ἔχει βαθμόν ν ὡς πρός x, βαθμόν μ ὡς πρός y καί βαθμόν $\nu+\mu$ ὡς πρός τάς δύο μεταβλητάς x, y. Ἔτσι τό ἀνωτέρω μονώνυμον xy εἶναι βαθμοῦ πρώτου ὡς πρός κάθε μίαν ἀπό τάς μεταβλητάς x,y καί βαθμοῦ δευτέρου ὡς πρός τάς δύο μαζί.

Τό μονώνυμον αx^{ν} ἠμπορεῖ νά γραφῆ καί μέ τήν μορφήν $\alpha x^{\nu}y^{0}$ (διά πᾶσαν τιμήν τοῦ y διάφορον ἀπό τό 0), διά τοῦτο ἠμπορεῖ νά θεωρηθῆ ὡς μονώνυμον τῶν δύο μεταβλητῶν x,y, μέ βαθμόν ὡς πρός y τό 0, ὅταν $\alpha\neq 0$.

Ὁμοίως μία σταθερά α ἠμπορεῖ νά γραφῆ καί μέ τήν μορφήν

$\alpha x^0 y^0$ (διά πᾶσαν τιμήν $\neq 0$ τῶν μεταβλητῶν x , y)· ἔτσι μία σταθερά α ἠμπορεῖ νά θεωρηθῇ καί ὡς μονώνυμον τῶν δύο μεταβλητῶν x,y μέ βαθμόν μηδενικόν ὡς πρός τάς δύο μεταβλητάς, ὅταν $\alpha \neq 0$.

Δύο μονώνυμα $\alpha x^\nu y^\mu$ καί $\beta x^\nu y^\mu$, πού ἔχουν τούς ἰδίους ἀντιστοίχως ἐκθέτας δυνάμεων τῶν x καί y , λέγονται <u>ὅμοια</u>. Τό ἄθροισμά των

$$\alpha x^\nu y^\mu + \beta x^\nu y^\mu = (\alpha+\beta) x^\nu y^\mu$$

εἶναι ἕνα ὅμοιον μονώνυμον, πού ἔχει συντελεστήν τό ἄθροισμα τῶν συντελεστῶν τῶν δύο μονωνύμων. Δύο ὅμοια μονώνυμα

$$\alpha x^\nu y^\mu \quad \text{καί} \quad -\alpha x^\nu y^\mu$$

μέ ἀντιθέτους συντελεστάς λέγονται <u>ἀντίθετα</u>· τό ἄθροισμά των εἶναι τό μηδενικόν μονώνυμον $0 x^\nu y^\mu = 0$.

Ἕνα ἄθροισμα ἀπό μονώνυμα τῶν δύο μεταβλητῶν x,y λέγεται <u>πολυώνυμον</u> τῶν μεταβλητῶν x,y. Τά μονώνυμα, πού ἀποτελοῦν τό ἄθροισμα, λέγονται <u>ὅροι</u> τοῦ πολυωνύμου. Π.χ. τό ἐμβαδόν εἰς m^2

$$2\pi x^2 + 2\pi xy$$

τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας ἑνός κυλίνδρου μέ ἀκτῖνα βάσεως x m καί ὕψος y m εἶναι ἕνα πολυώνυμον μέ δύο (ὄχι μηδενικούς) ἀνομοίους ὅρους 2ου βαθμοῦ ὡς πρός τάς μεταβλητάς x , y.

Ἀντικαθιστῶντες τούς ὁμοίους ὅρους ἑνός πολυωνύμου τῶν x,y μέ τό ἄθροισμά των (κάμνοντες, ὅπως συνηθίζεται νά λέγωμεν, <u>ἀναγωγήν</u> τῶν ὁμοίων ὅρων) καί παραλείποντες ὅλους τούς μηδενικούς ὅρους λαμβάνομεν τήν <u>συνεπτυγμένην</u> μορφήν τοῦ πολυωνύμου. Ὁ βαθμός ὡς πρός τάς δύο μεταβλητάς x , y τοῦ μεγιστοβαθμίου ὅρου τοῦ πολυωνύμου εἰς τήν συνεπτυγμένην του μορφήν λέγεται <u>βαθμός</u> τοῦ πολυωνύμου ὡς πρός τάς δύο μεταβλητάς x,y. Π.χ. βαθμός τοῦ $2\pi x^2 + 2\pi xy$ ὡς πρός x,y εἶναι ὁ 2.

Τά ἀνωτέρω ἐπεκτείνονται κατά φανερόν πλέον τρόπον εἰς μονώνυμα καί πολυώνυμα τριῶν μεταβλητῶν. Π.χ. ὁ ὄγκος

$$xyz \ m^3$$

ἑνός ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, μέ διαστάσεις x m, y m καί z m, εἶναι ἕνα μονώνυμον τῶν τριῶν θετικῶν μεταβλητῶν x, y, z, μέ συντελεστήν τό 1, βαθμοῦ πρώτου ὡς πρός ἑκάστην μεταβλητήν χωριστά καί βαθμοῦ τρίτου ὡς πρός τά τρεῖς μεταβλητάς x , y , z μαζί.

2.2. Πρωτοβάθμια πολυώνυμα δύο ἤ τριῶν μεταβλητῶν.

Σύμφωνα μέ τούς ἀνωτέρω ὁρισμούς ἕνα πολυώνυμον τῶν δύο μεταβλητῶν x καί y λέγεται <u>πρωτοβάθμιον</u>, ὅταν, ὕστερα ἀπό ἀναγωγήν ὁμοίων ὅρων, ἠμπορῆ νά πάρη τήν μορφήν

$$\alpha x + \beta y + \gamma ,$$

ὅπου α, β, γ σταθεραί καί μία τουλάχιστον ἀπό τάς α καί β εἶναι $\neq 0$. (Τό ὅτι αἱ σταθεραί α καί β δέν εἶναι συγχρόνως μηδενικαί ἠμπορεῖ νά σημειωθῆ ἔτσι: $|\alpha| + |\beta| > 0$).

Ὁμοίως, ἕνα πρωτοβάθμιον πολυώνυμον τῶν τριῶν μεταβλητῶν x, y, z ἔχει, ὕστερα ἀπό ἀναγωγήν ὁμοίων ὅρων, τήν μορφήν

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta ,$$

ὅπου α, β, γ, δ σταθεραί καί μία τουλάχιστον ἀπό τάς α, β, γ εἶναι $\neq 0$. (Τό τελευταῖον αὐτό ἠμπορεῖ νά σημειωθῆ ἔτσι: $|\alpha| + |\beta| + |\gamma| > 0$).

Ἰδού ἕνα συγκεκριμένον παράδειγμα:

Ἡ ἐσωτερική περίμετρος ἑνός ἀθλητικοῦ στίβου (σχ. 84) ἀποτελεῖται ἀπό τάς δύο ἀπέναντι πλευράς ΑΔ καί ΒΓ ἑνός ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ καί ἀπό τάς δύο ἡμιπεριφερείας πού ἔχουν διαμέτρους τά τμήματα ΑΒ καί ΔΓ καί κεῖνται ἔξω ἀπό τό ὀρθογώνιον.

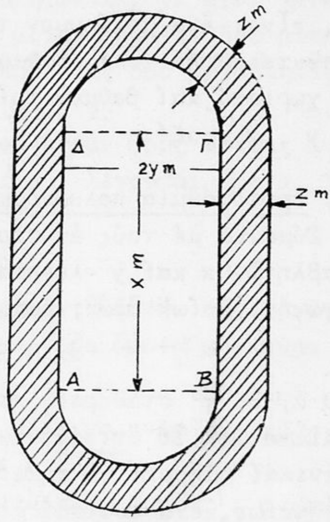
Ἄς παραστήσωμεν μέ x m τό μῆκος τῆς πλευρᾶς ΑΔ, μέ 2y m τό μῆκος τῆς διαμέτρου ΑΒ καί μέ z m τήν ἀπόστασιν μεταξύ τῆς ἐσωτερικῆς καί τῆς ἐξωτερικῆς περιμέτρου τοῦ στίβου. Τότε τό μῆκος εἰς m τῆς ἐσωτερικῆς περιμέτρου τοῦ στίβου θά εἶναι

$$2x + 2\pi y$$

καί τό μῆκος εἰς m τῆς ἐξωτερικῆς περιμέτρου :

$$2x + 2\pi(y+z) \quad \text{δηλαδή} \quad 2x + 2\pi y + 2\pi z .$$

Τό μῆκος λοιπόν τῆς ἐσωτερικῆς περιμέτρου εἶναι ἕνα πρωτοβάθμιον πολυώνυμον τῶν δύο θετικῶν μεταβλητῶν x ,y, καί τῆς ἐξωτερικῆς ἕνα πρωτοβάθμιον πολυώνυμον τῶν τριῶν θετικῶν μεταβλητῶν x,y,z.



(Σχέδ. 84)

2.3. <u>Τά πρωτοβάθμια πολυώνυμα δύο ἤ τριῶν μεταβλητῶν θεωρούμενα ὡς ἀπεικονίσεις.</u> Ἄς πάρωμεν ἕνα πρωτοβάθμιον πολυώνυμον $\alpha x + \beta y + \gamma$ δύο μεταβλητῶν x,y μέ συντελεστήν $\beta \neq 0$ καί μέ πεδίον μεταβολῆς ἑκάστης μεταβλητῆς τό σύνολον Π ὅλων τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν. Ἔστω π.χ.

$$\sigma(x,y) = 2x + 4y - 5 \qquad (x \in \Pi\ ,\quad y \in \Pi).$$

Τό διατεταγμένον ζεῦγος σχετικῶν ἀριθμῶν (x,y) ἔχει τότε ὡς πεδίον μεταβολῆς τό καρτεσιανόν γινόμενον $\Pi \times \Pi$. Εἰς κάθε διατεταγμένον ζεῦγος $(x_0, y_0) \in (\Pi \times \Pi)$ ἡ συνάρτησις σ ἀντιστοιχίζει ἕνα σχετικόν ἀριθμόν, τόν $(2x_0 + 4y_0 - 5)$· π.χ. εἰς τό ζεῦγος $(-3,1)$ ἡ σ ἀντιστοιχίζει τόν ἀριθμόν

$$2\cdot(-3) + 4\cdot 1 - 5 = -6 + 4 - 5 = -7 \in \Pi.$$

Χρησιμοποιοῦντες τόν συμβολισμόν διά τάς ἀπεικονίσεις ἤ συναρτήσεις γράφομεν :

$$\sigma : (x,y) \in (\Pi \times \Pi) \xrightarrow{\sigma} 2x + 4y - 5 = \sigma(x,y)$$

καί, εἰδικῶς ,

$$\sigma : (-3,\ 1) \in (\Pi \times \Pi) \xrightarrow{\sigma} -7 = \sigma(-3,1).$$

<u>Ἀντιστρόφως</u>, ἔστω λ ἕνας <u>ὁποιοσδήποτε</u> σχετικός ἀριθμός.

Ὅπως γνωρίζομεν (Βιβλ. II, σελ. 118-120), ἰσχύουν αἱ ἰσοδυναμίαι

$$2x+4y-5=\lambda \iff 4y = -2x+5+\lambda \iff y = -\frac{2}{4}x + \frac{5}{4} + \frac{\lambda}{4} = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{4} + \frac{\lambda}{4}.$$

Κατά συνέπειαν, ἄν δώσωμεν εἰς τό x μίαν <u>ὁποιανδήποτε</u> τιμήν x_0 καί εἰς τό y τήν ἀντίστοιχον τιμήν

$$y_0 = -\frac{1}{2}x_0 + \frac{5}{4} + \frac{\lambda}{4},$$

τότε εἰς τό ζεῦγος (x_0, y_0) ἡ συνάρτησις σ θά ἀντιστοιχίσῃ τόν ἀριθμόν λ. Αὐτό ἐπαληθεύεται ἄλλωστε καί ἀμέσως:

$$2x_0 + 4\left(-\frac{1}{2}x_0 + \frac{5}{4} + \frac{\lambda}{4}\right) - 5 = 2x_0 - 2x_0 + 5 + \lambda - 5 = \lambda.$$

Παρατηροῦμεν λοιπόν ὅτι ἡ συνάρτησις $\sigma(x,y) = 2x + 4y - 5$ ἀπεικονίζει τό σύνολον $\Pi \times \Pi$ τῶν ζευγῶν (x,y) ἀπό σχετικούς ἀριθμούς ἐπί τοῦ συνόλου Π τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν.

Τό ἴδιον πρᾶγμα ἀληθεύει καί διά κάθε πρωτοβάθμιον πολυώνυμον $\alpha x + \beta y + \gamma$ μέ $\beta = 0$, ὁπότε κατ' ἀνάγκην $\alpha \neq 0$. Π.χ. ἔστω τό πολυώνυμον

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{2}x + 0y + 5 = \frac{1}{2}x + 5, \quad (x \in \Pi, \ y \in \Pi).$$

Εἰς τό ζεῦγος $(x_0, y_0) \in (\Pi \times \Pi)$ ἡ συνάρτησις φ ἀντιστοιχίζει τόν σχετικόν ἀριθμόν $\frac{1}{2}x_0 + 5$. Ἀντιστρόφως, ἔστω λ ἕνας <u>ὁποιοσδήποτε</u> σχετικός ἀριθμός. Ἔχομεν τάς ἰσοδυναμίας:

$$\frac{1}{2}x + 5 = \lambda \iff \frac{1}{2}x = -5 + \lambda \iff x = -10 + 2\lambda.$$

Ἄρα, ἄν λάβωμεν τό ζεῦγος (x_1, y_1) μέ

$x_1 = -10 + 2\lambda$ καί y_1 = <u>τυχών</u> σχετικός ἀριθμός,

τότε εἰς αὐτό ἡ φ θά ἀντιστοιχίσῃ τόν ἀριθμόν λ. Ἐπαλήθευσις:

$$\frac{1}{2}(-10 + 2\lambda) + 0y_1 + 5 = -5 + \lambda + 5 = \lambda.$$

Ὥστε καί ἡ συνάρτησις $\frac{1}{2}x + 5$ ἀπεικονίζει τό σύνολον $\Pi \times \Pi$ ἐπί τοῦ συνόλου Π.

Ἐντελῶς ἀνάλογα πράγματα ἰσχύουν διά τά πρωτοβάθμια πολυώνυμα $f(x,y,z) = \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta$ τριῶν μεταβλητῶν x,y,z μέ πεδίον μεταβολῆς ἑκάστης μεταβλητῆς τό σύνολον Π τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν.

Τά πολυώνυμα αὐτά ἀπεικονίζουν τό σύνολον τῶν τριάδων (x,y,z) ἀπό σχετικούς ἀριθμούς ἐπί τοῦ συνόλου Π τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν:

$$f : (x\in\Pi\ ,\ y\in\Pi\ ,\ z\in\Pi) \xrightarrow{f} (\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta)\in\Pi\ .$$

<u>2.4. Πρόσθεσις καί ἀφαίρεσις πρωτοβαθμίων πολυωνύμων μέ δύο ἤ τρεῖς μεταβλητάς</u>. Θά ἀσχοληθῶμεν μόνον μέ τήν πρόσθεσιν καί τήν ἀφαίρεσιν ,διότι ὁ πολλαπλασιασμός δίδει μέν πολυώνυμα μέ τάς ἰδίας μεταβλητάς,ἀλλά βαθμοῦ $\geqslant 2$ ὡς πρός αὐτάς. Ἀντιθέτως ἡ πρόσθεσις καί ἡ ἀφαίρεσις δέν ἀνεβάζουν τόν βαθμόν.

Ἡ ἀφαίρεσις ἑνός πολυωνύμου $\alpha x + \beta y + \gamma$ ὁρίζεται καί ἐδῶ ὡς πρόσθεσις τοῦ ἀντιθέτου πολυωνύμου $-\alpha x - \beta y - \gamma$. Τό ἀφαιρούμενον πολυώνυμον πρέπει νά κλείνεται μέσα εἰς παρένθεσιν, διά νά ἀποφεύγωμεν τό λάθος, ν' ἀλλάξωμεν τό πρόσημον μόνον τοῦ πρώτου ὅρου του ἀφήνοντες τούς ὑπολοίπους ὅρους ὅπως ἔχουν. Ὅσον ἀφορᾶ τήν πρόσθεσιν, αὐτή σημειώνεται καί χωρίς παρένθεσιν, μέ ἁπλῆν παράθεσιν τοῦ προσθετέου πολυωνύμου. Ἐπακολουθεῖ ἡ ἀναγωγή (ἡ σύμπτυξις) τῶν ὁμοίων ὅρων διά νά δοθῆ εἰς τό ἄθροισμα ἡ ἁπλουστέρα δυνατή μορφή. Ἰδού δύο παραδείγματα .

I) Ἔστω $\sigma(x,y) = 3x - 2y + 1$ καί $\varphi(x,y) = -x + 3y - 5$. Ἔχομεν τότε :

$$\sigma(x,y) + \varphi(x,y) = 3x - 2y + 1 - x + 3y - 5 = 2x + y - 4$$

$$\sigma(x,y)-\varphi(x,y) = 3x-2y+1-(-x+3y-5) = 3x-2y+1+x-3y+5 = 4x-5y+6.$$

Εἶναι σκόπιμον νά ἀκολουθήσωμεν τήν ἀκόλουθον διάταξιν τῶν πράξεων :

$$\begin{array}{r} \sigma(x,y) = 3x - 2y + 1 \\ \varphi(x,y) = -x + 3y - 5 \\ \hline \sigma(x,y)+\varphi(x,y) = 2x + y - 4 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \sigma(x,y) = 3x - 2y + 1 \\ -\varphi(x,y) = x - 3y + 5 \\ \hline \sigma(x,y)-\varphi(x,y) = 4x - 5y + 6 \end{array}$$

ii) Ἔστω $f(x,y,z) = 5x - 3y - 2z - 8$ καί

$g(x,y,z) = -5x + 3y + 2z - 15$.

Τότε

$$\begin{array}{rl} f(x,y,z) &= 5x - 3y - 2z - 8 \\ g(x,y,z) &= -5x + 3y + 2z - 15 \\ \hline f(x,y,z)+g(x,y,z) &= 0x + 0y + 0z - 23 = -23 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} f(x,y,z) &= 5x - 3y - 2z - 8 \\ -g(x,y,z) &= 5x - 3y - 2z + 15 \\ \hline f(x,y,z)-g(x,y,z) &= 10x - 6y - 4z + 7 \end{array}$$

§ 3. Πρωτοβάθμιος ἐξίσωσις μέ δύο ἀγνώστους (δύο μεταβλητάς

3.1. Πρωτοβάθμιος ἐξίσωσις μέ δύο ἀγνώστους x,y (μέ δύο μεταβλητάς x,y) λέγεται ἡ ἰσότης πού λαμβάνομεν, ὅταν θέσωμεν ἕνα πρωτοβάθμιον πολυώνυμον τῶν x,y ἴσον μέ 0.

Ἐπομένως, μία πρωτοβάθμιος ἐξίσωσις ἔχει (ἤ ἠμπορεῖ νά πάρη ὕστερα ἀπό ἀναγωγήν ὁμοίων ὅρων) τήν μορφήν

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0 \quad , \quad \text{ὅπου } |\alpha| + |\beta| > 0.$$

Ἡ ἰσότης αὐτή ἀληθεύει, ὅπως θά ἴδωμεν, δι' ἀπειράριθμα ζεύγη (x,y) σχετικῶν ἀριθμῶν, ὄχι ὅμως καί διά πᾶν ζεῦγος· διά τοῦτο λέγεται ἐξίσωσις καί ὄχι ταυτότης.

Κάθε ζεῦγος τιμῶν (x_o, y_o) τῶν μεταβλητῶν x,y , διά τό ὁποῖον ἡ ἰσότης

$$\alpha x_o + \beta y_o + \gamma = 0$$

εἶναι ἀληθής, λέγεται λύσις τῆς ἐξισώσεως $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$. Ἡ εὕρεσις τῶν λύσεων λέγεται ἐπίλυσις τῆς ἐξισώσεως. Διακρίνομεν δύο περιπτώσεις.

1η περίπτωσις: $\beta \neq 0$. Ἔστω π.χ. ἡ ἐξίσωσις $2x - 3y + 5 = 0$. Ἔχομεν τάς ἰσοδυναμίας:

$$2x-3y+5 = 0 \Leftrightarrow -3y = -2x - 5 \Leftrightarrow y = \frac{-2}{-3}x + \frac{-5}{-3} = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}.$$

Ὥστε, ἄν δώσωμεν εἰς τό x μίαν ὁποιανδήποτε τιμήν x_o

καί εἰς τό y τήν ἀντίστοιχον τιμήν

$$y_0 = \frac{2}{3}x_0 + \frac{5}{3},$$

τότε τό ζεῦγος

$$(x_0,\quad y_0 = \frac{2}{3}x_0 + \frac{5}{3}),$$

εἶναι <u>μία λύσις τῆς ἐξισώσεως $2x - 3y + 5 = 0$</u>, ἐνῶ τό ζεῦγος

$$(x_0,\ y_1)\ ,\quad \text{ὅπου}\quad y_1 \neq \frac{2}{3}x_0 + \frac{5}{3},$$

δέν εἶναι λύσις τῆς ἐξισώσεως (δέν τήν ἐπαληθεύει). Κατά ταῦτα ὑπάρχουν ἀπειράριθμα ζεύγη (x, y) πού ἐπαληθεύουν τήν ἰσότητα $2x - 3y + 5 = 0$ καί ἀπειράριθμα πού δέν τήν ἐπαληθεύουν. Ὅλα τά ζεύγη πού τήν ἐπαληθεύουν τά λαμβάνομεν, ἐάν θεωρήσωμεν τό x ὡς μεταβλητήν, μέ πεδίον μεταβολῆς τό σύνολον Π τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν, καί μέ ἑκάστην τιμήν x_0 τοῦ x συνδυάσωμεν τήν τιμήν

$$y_0 = \frac{2}{3}x_0 + \frac{5}{3}$$

τοῦ y.

Γενικῶς, ἔστω ἡ πρωτοβάθμιος ἐξίσωσις

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0 \quad \text{μέ } \beta \neq 0 .$$

Ἰσχύουν αἱ ἰσοδυναμίαι :

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0 \Longleftrightarrow \beta y = -\alpha x - \gamma \Longleftrightarrow y = -\frac{\alpha}{\beta}x - \frac{\gamma}{\beta}$$

Ἄρα διά τάς λύσεις (x,y) τῆς ἐξισώσεως $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ ἰσχύει τό ἑξῆς: τό σύνολον τῶν λύσεων τῆς $\alpha x+\beta y+\gamma = 0$ εἶναι ἴσον (εἶναι τό ἴδιον) μέ τό σύνολον τῶν ζευγῶν (x,y) διά τά ὁποῖα

$$x \in \Pi \quad \text{καί} \quad y = -\frac{\alpha}{\beta}x - \frac{\gamma}{\beta} .$$

Μέ τόν γνωστόν συμβολισμόν τῶν συνόλων αὐτό σημειώνεται ὡς ἑξῆς :

$$\{(x,y) \mid x \in \Pi,\ y \in \Pi,\ \alpha x+\beta y+\gamma = 0\} = \{(x,y) \mid x \in \Pi, y = -\frac{\alpha}{\beta}x - \frac{\gamma}{\beta}\}.$$

Ὅπως βλέπομεν, τό σύνολον τῶν λύσεων τῆς $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$

ταυτίζεται μέ τό σύνολον τῶν ζευγῶν (x,y) ἀπό ἀντιστοίχους τιμάς τῆς μεταβλητῆς $x\in\Pi$ καί τῆς συναρτήσεώς της

$$f : x \xrightarrow{f} -\frac{\alpha}{\beta}x - \frac{\gamma}{\beta} = y \quad , \quad (x\in\Pi) .$$

Λέγομεν ὅτι ἡ συνάρτησις αὐτή f ὁρίζεται ἀπό τήν ἐξίσωσιν $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$.

2α περίπτωσις: εἰς τήν πρωτοβάθμιον ἐξίσωσιν $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ εἶναι $\beta = 0$, ὁπότε κατ' ἀνάγκην $\alpha \neq 0$. Ἔστω π.χ. ἡ ἐξίσωσις $2x + 0y - 7 = 0$. Ἔχομεν τάς ἰσοδυναμίας

$$2x+0y-7 = 0 \Longleftrightarrow 2x - 7 = 0 \Longleftrightarrow 2x = 7 \Longleftrightarrow x = \frac{7}{2} .$$

Ἄρα, ἐάν δώσωμεν εἰς τό x τήν τιμήν $\frac{7}{2}$ καί εἰς τό y μίαν ὁποιανδήποτε τιμήν y_0, τό ζεῦγος $\left(\frac{7}{2}, y_0\right)$ θά εἶναι μία λύσις τῆς ἐξισώσεως $2x + 0y - 7 = 0$, ἐνῶ τό ζεῦγος

$$(x_1, y_0) \quad , \quad \text{ὅπου } x_1 \text{ τυχών ἀριθμός} \neq \frac{7}{2} ,$$

δέν θά εἶναι λύσις τῆς ἐξισώσεως. Κατά ταῦτα ὑπάρχουν ἀπειράριθμα ζεύγη (x,y) πού ἐπαληθεύουν τήν ἐξίσωσιν $2x+0y-7 = 0$ καί ἀπειράριθμα ἄλλα πού δέν τήν ἐπαληθεύουν. Ὅλα τά ζεύγη πού τήν ἐπαληθεύουν, τά λαμβάνομεν δίδοντες εἰς τό x τήν τιμήν $\frac{7}{2}$ καί συνδυάζοντες μέ αὐτήν μίαν ὁποιανδήποτε y_0 τῆς μεταβλητῆς y· μέ πεδίον μεταβολῆς τό σύνολον Π τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν.

Γενικῶς, ἔστω ἡ πρωτοβάθμιος ἐξίσωσις $\alpha x + 0y + \gamma = 0$, ὅπου ἑπομένως $\alpha \neq 0$. Ἔχομεν τάς ἰσοδυναμίας:

$$\alpha x+0y+\gamma = 0 \Longleftrightarrow \alpha x+\gamma = 0 \Longleftrightarrow \alpha x = -\gamma \Longleftrightarrow x = -\frac{\gamma}{\alpha} .$$

Ἄρα τό σύνολον τῶν λύσεων (x,y) τῆς ἐξισώσεως $\alpha x+0y+\gamma = 0$ εἶναι ἴσον (τό αὐτό) μέ τό σύνολον τῶν ζευγῶν $\left(-\frac{\gamma}{\alpha}, y\right)$ ὅπου $y\in\Pi$. Μέ τήν γνωστήν συμβολικήν γραφήν ἔχομεν:

$$\{(x,y) \mid x\in\Pi \ , \ y\in\Pi, \ \alpha x+0y+\gamma = 0\} = \left\{(x,y) \mid x = -\frac{\gamma}{\alpha} \ , \ y\in\Pi\right\} .$$

Ὅπως βλέπομεν, τό σύνολον τῶν λύσεων τῆς $\alpha x+0y+\gamma = 0$ ταυτίζεται μέ τό σύνολον τῶν ζευγῶν (x,y) ἀπό ἀντιστοίχους τιμάς τῆς μεταβλητῆς $y \in \Pi$ καί τῆς συναρτήσεώς της.

$$\varphi : y \xrightarrow{\varphi} 0y - \frac{\gamma}{\alpha} = -\frac{\gamma}{\alpha} = x \ , \quad (y \in \Pi) \ .$$

Τό πεδίον ὁρισμοῦ τῆς συναρτήσεως αὐτῆς εἶναι τό σύνολον Π τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν, ἐνῶ τό πεδίον τιμῶν τῆς συναρτήσεως εἶναι τό μονομελές σύνολον $\left\{-\frac{\gamma}{\alpha}\right\}$

3.2. Γραφική (ἤ γεωμετρική) παράστασις τῆς πρωτοβαθμίου ἐξισώσεως $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$.

Ἐάν τό ζεῦγος σχετικῶν ἀριθμῶν (x,y) τό πάρωμεν ὡς ζεῦγος συντεταγμένων ἑνός σημείου εἰς τό ἐπίπεδον ὡς πρός δύο ὀρθογωνίους ἄξονας Ox, Oy (Βιβλ. ΙΙ, σελ. 41-43Γ), τότε κάθε λύσις (x,y) μιᾶς πρωτοβαθμίου ἐξισώσεως $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ θά ἀπεικονίζεται εἰς ἕνα σημεῖον $M(x,y)$ τοῦ ἐπιπέδου καί τό σύνολον τῶν λύσεών της θά ἀπεικονίζεται ἐπί ἑνός σημειοσυνόλου τοῦ ἐπιπέδου πού θά ἀποτελῇ μίαν γραμμήν.

Ἡ γραμμή αὐτή εἶναι, διά πᾶσαν πρωτοβάθμιον ἐξίσωσιν $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$, μία εὐθεῖα. Πράγματι, ἔστω 1ον $\beta \neq 0$. Τό σύνολον τῶν λύσεων τῆς $\alpha x+\beta y+\gamma = 0$ ταυτίζεται τότε, σύμφωνα μέ τήν προηγουμένην παράγραφον, μέ τό σύνολον τῶν ζευγῶν (x,y) ἀπό ἀντιστοίχους τιμάς τῆς μεταβλητῆς $x \in \Pi$ καί τῆς συναρτήσεώς της

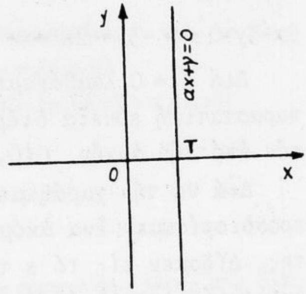
$$f : \ x \xrightarrow{f} -\frac{\alpha}{\beta} x - \frac{\gamma}{\beta} = y \qquad , \qquad (x \in \Pi).$$

Ὅπως δέ γνωρίζομεν (βλ. Βιβλ. ΙΙ, σελ. 47-52 Γ καί Βιβλ. ΙΙ, σελ. 117-118), τό σύνολον τῶν ζευγῶν αὐτῶν ἀπεικονίζεται ἐπί τοῦ συνόλου τῶν σημείων μιᾶς εὐθείας πού τέμνει τόν ἄξονα Oy εἰς τό σημεῖον μέ συντεταγμένας

$$\left(x = 0 \ , \ y = -\frac{\gamma}{\beta} \right).$$

Ἔστω 2ον $\beta = 0$, ὁπότε $\alpha \neq 0$ καί ἡ ἐξίσωσις $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ γίνεται $\alpha x + \gamma = 0$. Τό σύνολον τῶν λύσεών της, σύμφωνα πάλιν μέ τήν προηγουμένην παράγραφον, ταυτίζεται τώρα μέ τό σύνολον τῶν ζευγῶν (x, y) διά τά ὁποῖα εἶναι:

$$\left(x = -\frac{\gamma}{\alpha}\ ,\quad y \in \Pi\right).$$



(Σχέδ. 85)

Ἐπειδή αὐτά τά ζεύγη ἔχουν ὅλα ὡς πρῶτον στοιχεῖον τόν ἴδιον ἀριθμόν $-\frac{\gamma}{\alpha}$, τά σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου, πού τά ἔχουν ὡς συντεταγμένας, θά κεῖνται ἐπάνω εἰς μίαν εὐθεῖαν παράλληλον πρός τόν ἄξονα Oy καί ἡ ὁποία θά τέμνη τόν ἄξονα Ox εἰς τό σημεῖον T μέ συντεταγμένας $\left(-\frac{\gamma}{\alpha}, 0\right)$, (σχ. 85). Ἀντιστρόφως κάθε σημεῖον αὐτῆς τῆς εὐθείας ἔχει συντεταγμένας $\left(x = -\frac{\gamma}{\alpha}, y \in \Pi\right)$.

Κατά συνέπειαν τό σύνολον τῶν λύσεων τῆς $\alpha x + 0y + \gamma = 0$ ἀπεικονίζεται ἐπί τοῦ συνόλου τῶν σημείων αὐτῆς τῆς εὐθείας.

Ἡ εὐθεῖα, τῆς ὁποίας τά σημεῖα εἶναι οἱ εἰκόνες κατά τόν ἀνωτέρω τρόπον τῶν λύσεων μιᾶς ἐξισώσεως $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$, λέγεται <u>γραφική (ἤ γεωμετρική) παράστασις</u> τῆς ἐξισώσεως.

<u>Παρατήρησις</u>. Ἐάν εἰς τήν ἐξίσωσιν $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ εἶναι καί $\alpha \neq 0$ καί $\beta \neq 0$, τότε ἐκτός ἀπό τάς ἰσοδυναμίας

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0 \Longleftrightarrow \beta y = -\alpha x - \gamma \Longleftrightarrow y = -\frac{\alpha}{\beta}x - \frac{\gamma}{\beta}$$

πού ἐγράψαμεν εἰς τήν προηγουμένην παράγραφον, ἔχομεν καί τάς

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0 \Longleftrightarrow \alpha x = -\beta y - \gamma \Longleftrightarrow x = -\frac{\beta}{\alpha}\cdot y - \frac{\gamma}{\alpha}.$$

Διά τό σύνολον τῶν λύσεων τῆς $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ ἔχομεν λοιπόν καί τήν ἀκόλουθον ἰσότητα, ὅταν $\alpha \neq 0$:

$$\{(x, y) \mid x \in \Pi, y \in \Pi,\ \alpha x + \beta y + \gamma = 0\} = \left\{(x, y) \mid y \in \Pi,\ x = -\frac{\beta}{\alpha}y - \frac{\gamma}{\alpha}\right\}.$$

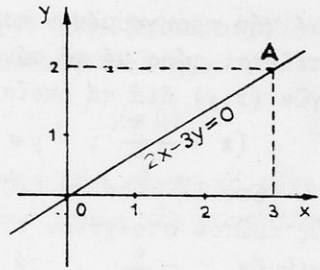
<u>Παραδείγματα</u>. 1) Ἔστω ἡ ἐξίσωσις

$$2x - 3y = 0.$$

Ἔχομεν

$2x-3y=0 \Leftrightarrow -3y=-2x \Leftrightarrow y=\frac{2}{3}x.$

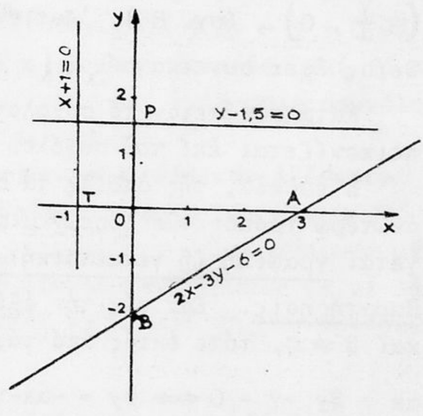
Διά $x = 0$ λαμβάνομεν $y = 0$. Ἡ παραστατική εὐθεῖα διέρχεται λοιπόν ἀπό τήν ἀρχήν $O(0,0)$.



(Σχέδιον 86)

Διά νά τήν χαράξωμεν, ἀρκεῖ νά προσδιορίσωμεν ἕνα ἀκόμη σημεῖον της. Δίδομεν εἰς τό x τήν τιμήν $x=3$ καί εὑρίσκομεν διά τό y ἀντίστοιχον τιμήν τό 2. Ἕνα δεύτερον σημεῖον τῆς παραστατικῆς εὐθείας εἶναι λοιπόν τό $A(3,2)$, καί ἡ εὐθεῖα OA (σχ. 86) εἶναι ἡ γραφική παράστασις τῆς $2x-3y=0$.

2) Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $2x-3y-6=0$. Ἡ παραστατική εὐθεῖα τέμνει τόν ἄξονα Oy εἰς τό σημεῖον $B(0,-2)$ καί τόν ἄξονα Ox εἰς τό σημεῖον $A(3,0)$.



(Σχέδιον 87)

Ἡ εὐθεῖα AB (σχ.87) εἶναι ἡ γραφική παράστασις τῆς ἐξισώσεως $2x-3y-6=0$.

3) Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $x+1=0$. Ἡ παραστατική εὐθεῖα εἶναι $\parallel Oy$ καί τέμνει τόν ἄξονα Ox εἰς τό σημεῖον $T(-1,0)$ (βλ. σχ. 87).

4) Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $y-1,5=0$. Ἡ παραστατική εὐθεῖα εἶναι $\parallel Ox$ καί τέμνει τόν ἄξονα Oy εἰς τό σημεῖον $P(0, 1,5)$, (βλ. σχ. 87).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Δίδονται τά πολυώνυμα:

$\pi_1(x,y) = 3x-2y+1,\ \pi_2(x,y) = \frac{2}{3}x + \frac{3}{2}y-3\ ,\ \ \pi_3(x,y,z) = 5x + 3y - 2z + 1$

καί ζητοῦνται τά ἀκόλουθα μέ τήν συνεπτυγμένην των μορφήν:

α) $\pi_1(x,y) + \pi_2(x,y)$, β) $\pi_1(x,y) - \pi_3(x,y,z)$

γ) $\pi_2(x,y) + \pi_3(x,y,z)$, δ) $\pi_3(x,y,z) - [\pi_1(x,y) + \pi_2(x,y)]$

2) Νά ἐκτελέσετε τάς ἀκολούθους πράξεις:

α) $3x + y - \left(\frac{2}{3}x + \frac{3}{2}y - z + 1\right)$

β) $x + \frac{1}{2}z - \left[3x + y - \left(x + \frac{z}{2} + 3\right) - (z+1)\right]$.

3) Εἰς τά ἀκόλουθα πολυώνυμα νά θέσετε ἐντός παρενθέσεως ὅλους τούς ὅρους πού ἀκολουθοῦν τόν πρῶτον· ἡ παρένθεσις νά ἔχῃ τό πρόσημον – ἐμπρός της:

α) $2x - 3y + 2z - 1$, β) $1 + 2y - 3x$,

γ) $3x + (2y-1) - z$, δ) $x - y + 3$

4) Χρησιμοποιοῦντες χιλιοστομετρικόν τετραγωνισμένον χάρτην καί παίρνοντες ἐπάνω εἰς τούς ἄξονας 0x , 0y ὡς μονάδα μήκους τό 1 cm νά παραστήσετε γραφικῶς τάς πρωτοβαθμίους ἐξισώσεις:

$x - y = 0$, $x + y = 0$, $2x + 6 = 0$, $3y + 9 = 0$, $3x - 5y = 0$,

$\frac{3}{5}x - y = 0$, $x + \frac{5}{3}y = 0$, $2x - 3y - 9 = 0$, $\frac{2}{5}x + y - 2 = 0$,

$-3x + 4y - 12 = 0$, $\frac{x}{3} + \frac{y}{5} - 1 = 0$, $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} + 1 = 0$.

5) Νά δείξετε α) ὅτι αἱ γραφικαί παραστάσεις τῶν ἐξισώσεων $2x - 4y + 5 = 0$ καί $2x - 4y - 3 = 0$ εἶναι εὐθεῖαι παράλληλοι καί β) ὅτι ἡ παραστατική εὐθεῖα τῆς πρώτης ἐξισώσεως προκύπτει ἀπό τήν παραστατικήν εὐθεῖαν τῆς δευτέρας, ἄν μετατοπίσωμεν τήν τελευταίαν αὐτήν εὐθεῖαν παραλλήλως πρός τόν ἄξονα 0y κατά ἕνα διάνυσμα πού ἔχει φοράν τήν θετικήν φοράν τοῦ ἄξονος καί μῆκος διπλάσιον ἀπό τήν ἐκλεγμένην μονάδα μήκους.

§ 4. Σύστημα δύο πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων μέ δύο ἀγνώστους. Γραφική καί ἀριθμητική ἐπίλυσίς του.

4.1. Δίδονται δύο πρωτοβάθμιοι ἐξισώσεις

$$\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 = 0 \quad \text{καί} \quad \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 = 0$$

μέ τούς ἰδίους ἀγνώστους x,y. Ὅπως εἴδαμεν, ἡ καθεμία χωριστά ἀπό τάς δύο ἐξισώσεις ἔχει ἀπειραρίθμους λύσεις· ἄς εἶναι A τό σύνολον τῶν λύσεων τῆς πρώτης, B τό σύνολον τῶν λύσεων τῆς δευτέρας:

$$A = \{(x,y) \mid x \in \Pi \ , \ y \in \Pi \ , \ \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 = 0\} \ ,$$
$$B = \{(x,y) \mid x \in \Pi \ , \ y \in \Pi \ , \ \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 = 0\} \ .$$

Θέτομεν τό πρόβλημα : Νά προσδιορισθοῦν αἱ κοιναί λύσεις τῶν δύο ἐξισώσεων, μέ ἄλλους λόγους νά προσδιορισθῆ κάθε ζεῦγος σχετικῶν ἀριθμῶν (x_0, y_0) διά τό ὁποῖον εἶναι

$$\alpha_1 x_0 + \beta_1 y_0 + \gamma_1 = 0 \qquad \text{καί} \qquad \alpha_2 x_0 + \beta_2 y_0 + \gamma_2 = 0 \ .$$

Μέ τήν βοήθειαν τῶν συνόλων A καί B αὐτό ἐκφράζεται ὡς ἑξῆς : Νά προσδιορισθῆ ἡ τομή $A \cap B$ τῶν δύο συνόλων A καί B. Ἄν τό σύνολον $A \cap B$ δέν εἶναι κενόν, κάθε ζεῦγος (x, y) πού ἀνήκει εἰς τό σύνολον $A \cap B$ λέγεται <u>λύσις τοῦ συστήματος τῶν δύο ἐξισώσεων</u>:

$$\begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 = 0 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 = 0 \ . \end{cases}$$

Μέ ἄλλους λόγους, <u>λύσις τοῦ συστήματος τῶν δύο ἐξισώσεων</u> καλεῖται κάθε ζεῦγος σχετικῶν ἀριθμῶν (x_0, y_0) πού ἐπαληθεύει καί τάς δύο ἐξισώσεις τοῦ συστήματος.

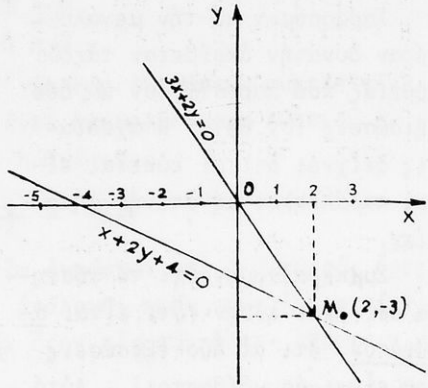
<u>4.2. Γραφική ἐπίλυσις ἑνός συστήματος δύο πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων μέ δύο ἀγνώστους.</u> Ὅπως εἴδαμεν, αἱ λύσεις κάθε μιᾶς ἐξισώσεως δίδονται ἀπό τά ζεύγη συντεταγμένων τῶν διαφόρων σημείων μιᾶς εὐθείας τοῦ ἐπιπέδου. Ἑπομένως μία κοινή λύσις τῶν δύο ἐξισώσεων θά δίδεται ἀπό τάς συντεταγμένας ἑνός κοινοῦ σημείου τῶν δύο εὐθειῶν πού παριστάνουν γραφικῶς τάς δύο ἐξισώσεις. Ἀντιστρόφως, ἕνα κοινόν σημεῖον M_0 τῶν δύο αὐτῶν εὐθειῶν θά ἔχῃ συντεταγμένας (x_0, y_0) τῶν ὁποίων τό ζεῦγος θά εἶναι μία κοινή λύσις τῶν δύο ἐξισώσεων, δηλαδή μία λύσις τοῦ συστήματός των.

Γνωρίζομεν ὅμως ὅτι δύο εὐθεῖαι τοῦ ἐπιπέδου

ἤ 1ον τέμνονται, δηλαδή ἔχουν ἕνα μόνον κοινόν σημεῖον ,

ἤ 2ον εἶναι παράλληλοι μέ στενήν σημασίαν, δηλαδή δέν ἔχουν κανένα κοινόν σημεῖον,

ἤ 3ον εἶναι παράλληλοι μέ εὐρεῖαν σημασιαν καί ἔχουν ὅλα τά ἀπειράριθμα σημεῖα των κοινά.



(Σχέδ. 88)

Κατά συνέπειαν εἰς τήν 1ην περίπτωσιν τό σύστημα τῶν δύο ἐξισώσεων ἔχει μίαν καί μόνον μίαν λύσιν. (Ἡ τομή $A \cap B$ εἶναι ἕνα μονομελές σύνολον). Εἰς τήν 2αν περίπτωσιν τό σύστημα δέν ἔχει λύσιν. (Ἡ τομή $A \cap B$ εἶναι τό κενόν σύνολον Φ). Εἰς τήν 3ην περίπτωσιν, τό σύστημα ἔχει ἀπειραρίθμους λύσεις. (Ἡ τομή $A \cap B$ εἶναι ἕνα ἀπειροσύνολον). Ἰδού τώρα παραδείγματα δι' ἑκάστην περίπτωσιν.

I) Ἔστω τό σύστημα

$$\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ x + 2y + 4 = 0 \end{cases}$$

Αἱ εὐθεῖαι αἱ ὁποῖαι παριστάνουν γραφικῶς τάς δύο ἐξισώσεις τέμνονται εἰς τό σημεῖον $M_o(2,-3)$, ὅπως δείχνει τό σχ. 88. Ἄρα τό σύστημα ἔχει μίαν μοναδικήν λύσιν, τήν $(2,-3)$. Ἰδού καί ἡ ἐπαλήθευσις:

$$3\cdot 2 + 2\cdot(-3) = 0 \quad \text{καί} \quad 2 + 2\cdot(-3) + 4 = 0.$$

Ἔχομεν λοιπόν :

$$\{(x,y) \mid 3x+2y = 0 \ \text{καί} \ x + 2y + 4 = 0\} = \{(2,-3)\} .$$

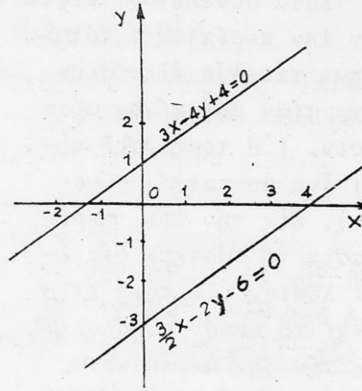
Παρατηροῦμεν ὅτι οἱ συντελεσταί τῶν ἀγνώστων x,y εἰς τήν μίαν ἐξίσωσιν <u>δέν</u> εἶναι ἀνάλογοι πρός τούς ἀντιστοίχους συντελεστάς εἰς τήν ἄλλην ἐξίσωσιν :

$$\frac{3}{1} \neq \frac{2}{2} \iff \frac{1}{3} \neq \frac{2}{2} .$$

II) Ἔστω τό σύστημα

$$\begin{cases} \frac{3}{2}x - 2y - 6 = 0 \\ 3x - 4y + 4 = 0 . \end{cases}$$

Χαράσσομεν μέ τήν μεγαλυτέραν δυνατήν ἀκρίβειαν τάς δύο εὐθείας πού παριστάνουν τάς δύο ἐξισώσεις (σχ.89). Ἡ σχεδίασις δείχνει ὅτι αἱ εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι μέ στενήν σημασίαν.



(Σχέδ. 89)

Συμπεραίνομεν ὅτι τό σύστημα δέν ἔχει λύσιν (ὅτι εἶναι <u>ἀδύνατον</u>, ὅτι αἱ δύο ἐξισώσεις του εἶναι <u>ἀσυμβίβαστοι</u>). Αὐτό ἐπαληθεύεται εὔκολα ὡς ἑξῆς:
Ἔχομεν τάς ἰσοδυναμίας:

$$\begin{cases} \frac{3}{2}x - 2y - 6 = 0 \\ 3x - 4y + 4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x - 4y - 12 = 0 \\ 3x - 4y + 4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x - 4y = 12 \\ 3x - 4y = -4 \end{cases}$$

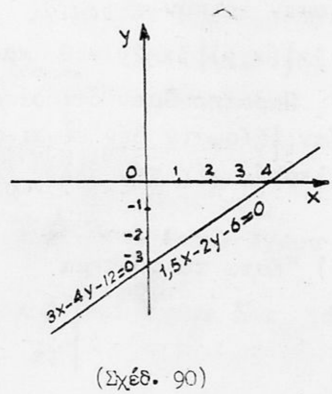
Ἡ πρώτη ἐξίσωσις τῆς τρίτης μορφῆς τοῦ συστήματος ἀπαιτεῖ, ἡ διαφορά $3x - 4y$ νά ἰσοῦται μέ 12, ἐνῶ ἡ δευτέρα ἐξίσωσις ἀπαιτεῖ ἡ <u>ἰδία</u> διαφορά νά ἰσοῦται μέ -4 · αὐτό ὅμως εἶναι ἀδύνατον.

Παρατηροῦμεν ὅτι οἱ συντελεσταί τῶν x καί y εἰς τήν μίαν ἐξίσωσιν εἶναι ἀνάλογοι πρός τούς ἀντιστοίχους συντελεστάς εἰς τήν ἄλλην ἐξίσωσιν :

$$\frac{3/2}{3} = \frac{-2}{-4} \quad ,$$

ἀλλά ὅτι ὁ ἀντίστοιχος λόγος $\frac{-6}{4}$ τῶν σταθερῶν ὅρων τῶν δύο ἐξισώσεων <u>δέν</u> ἰσοῦται μέ τούς ἀνωτέρω δύο ἴσους λόγους:

$$\frac{-6}{4} \neq \frac{-2}{-4}$$



(Σχέδ. 90)

III) Ἔστω τό σύστημα

$$\begin{cases} 3x - 4y - 12 = 0 \\ 1,5x - 2y - 6 = 0 \,. \end{cases}$$

Αἱ γραφικαί παραστάσεις τῶν δύο ἐξισώσεων συμπίπτουν (σχ. 90). Ἄρα τό σύστημα ἔχει ἀπειραρίθμους λύσεις.

Παρατηροῦμεν ὅτι ἰσχύει ἡ σχέσις:

$$\frac{3}{1,5} = \frac{-4}{-2} = \frac{-12}{-6} ,$$

δηλαδή ὅτι οἱ συντελεσταί τῶν ἀγνώστων καί ὁ σταθερός ὅρος εἰς τήν μίαν ἐξίσωσιν εἶναι ἀνάλογοι πρός τούς ἀντιστοίχους συντελεστάς καί τόν σταθερόν ὅρον εἰς τήν ἄλλην ἐξίσωσιν.

4.3. <u>Ἀριθμητική ἐπίλυσις ἑνός συστήματος 2 πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων μέ δύο ἀγνώστους.</u> Ἡ γεωμετρική μέθοδος πού ἐχρησιμοποιήσαμεν διά τήν ἐπίλυσιν ἑνός συστήματος δέν ἠμπορεῖ ἐν γένει νά δώση ἀκριβῆ ἀποτελέσματα, ἀφ' ἑνός λόγω τῶν ἀτελειῶν πού παρουσιάζει κάθε σχεδίασις καί ἀφ' ἑτέρου λόγω τῶν σφαλμάτων πού γίνονται κατά τήν μέτρησιν ἤ ἐκτίμησιν μηκῶν ἐπάνω εἰς τό σχέδιον. Διά τοῦτο θά ἐκθέσωμεν τώρα τάς ἀριθμητικάς μεθόδους ἐπιλύσεως πού ὁδηγοῦν εἰς ἀκριβῆ ἀποτελέσματα.

α) Ἔστω τό σύστημα

$$\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ x + 2y + 4 = 0 \end{cases}$$

Ἔχομεν τάς ἰσοδυναμίας

$$\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ x + 2y + 4 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{3}y \\ x = -2y - 4 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{3}y \\ -\frac{2}{3}y = -2y - 4 \,. \end{cases}$$

Εἰς τήν τρίτην μορφήν τοῦ συστήματος ἡ δευτέρα ἐξίσωσις περιέχει ἕνα μόνον ἄγνωστον, τόν y, καί ἔχομεν:

$$-\frac{2}{3}y = -2y - 4 \Longleftrightarrow -\frac{2}{3}y + 2y = -4 \Longleftrightarrow \frac{4}{3}y = -4 \Longleftrightarrow y = -3 \,.$$

Ἄρα τό δοθέν σύστημα εἶναι ἰσοδύναμον, ἔχει δηλαδή τάς ἰδίας λύσεις, μέ τό σύστημα $\begin{cases} x = -\frac{2}{3}y \\ y = -3 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{3}(-3) = 2 \\ y = -3 \end{cases}$.

τό τελευταῖον ὅμως σύστημα ἔχει προφανῶς ὡς μόνην λύσιν τήν

$$(x = 2 \,, \quad y = -3).$$

Ὥστε, τό δοθέν σύστημα ἔχει μίαν καί μόνον λύσιν τήν $(2,-3)$.

Ἰδού ἕνα δεύτερον παράδειγμα. Ἔστω τό σύστημα

$$\begin{cases} 3x + y = 4 \\ 6x - y = -1 \,. \end{cases}$$

Ἔχομεν τάς ἰσοδυναμίας :

$$\begin{cases} 3x + y = 4 \\ 6x - y = -1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = -3x + 4 \\ y = 6x + 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = -3x + 4 \\ -3x + 4 = 6x + 1 \,. \end{cases}$$

Ἡ δευτέρα ἐξίσωσις εἰς τήν τρίτην μορφήν περιέχει ἕνα μόνον ἄγνωστον, τόν x, καί ἔχομεν:

$$-3x+4 = 6x+1 \Longleftrightarrow -3x-6x = -4+1 \Longleftrightarrow -9x = -3 \Longleftrightarrow x = \frac{1}{3}.$$

Ὥστε τό δοθέν σύστημα εἶναι ἰσοδύναμον μέ τό

$$\begin{cases} y = -3x+4 \\ x = \frac{1}{3} \end{cases} \quad \text{πού ἔχει προφανῶς τήν λύσιν} \quad \begin{cases} y = -3\cdot\frac{1}{3} + 4 = 3 \\ x = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Ἐπομένως τό δοθέν σύστημα ἔχει μίαν καί μόνον μίαν λύσιν τήν $\left(\frac{1}{3}, 3\right)$. Μέ τόν συμβολισμόν τῶν συνόλων, αὐτό σημειώνεται ὡς ἐξῆς:

$$\left\{(x,y) \mid 3x+y = 4 \;\; \text{καί} \;\; 6x - y = -1\right\} = \left\{\left(\frac{1}{3}, 3\right)\right\}$$

Ὁ τρόπος αὐτός τῆς ἐπιλύσεως λέγεται <u>μέθοδος τῆς συγκρίσεως</u>.

β) <u>Μέθοδος τοῦ γραμμικοῦ συνδυασμοῦ</u>. Ἔστω τό σύστημα

$$\begin{cases} 2x - 4y + 5 = 0 \\ -2x + 3y - 2 = 0 \end{cases} \qquad \text{(I)}$$

Παρατηροῦμεν ὅτι οἱ συντελεσταί τοῦ x εἰς τάς δύο ἐξισώσεις εἶναι ἀντίθετοι ἀριθμοί· ἐπομένως, ἄν τάς προσθέσωμεν, κατά μέλη, θά προκύψη μία ἐξίσωσις εἰς τήν ὁποίαν ὁ συντελεστής τοῦ x θά εἶναι τό 0, ἄρα μία ἐξίσωσις μέ ἕνα μόνον ἄγνωστον, τόν y.

Τώρα ἄν τό σύστημα (I) ἔχη τήν λύσιν (x_0, y_0), τότε θά ἔχη αὐτήν τήν λύσιν καί τό σύστημα

$$\begin{cases} 2x - 4y + 5 = 0 \\ (2x-4y+5) + (-2x+3y-2) = 0 , \end{cases} \qquad \text{(II)}$$

δηλαδή τό

$$\begin{cases} 2x - 4y + 5 = 0 \\ \quad - y + 3 = 0 \end{cases} \qquad \text{(III)}$$

'Αντιστρόφως, ἄν τό σύστημα (III) ἔχη τήν λύσιν (x_1, y_1), τότε καί τό (II) θά ἔχη τήν λύσιν (x_1, y_1) , ἐπομένως καί τό (I) θά ἔχη αὐτήν τήν λύσιν. Ὥστε τά δύο συστήματα (I) καί (III) ἔχουν τάς ἰδίας λύσεις, εἶναι ἰσοδύναμα :

$$\begin{cases} 2x - 4y + 5 = 0 \\ -2x + 3y - 2 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x - 4y + 5 = 0 \\ \quad - y + 3 = 0 \end{cases}$$

'Η ἐπίλυσις τοῦ (III) τελειώνει τώρα ὅπως καί εἰς τό πρῶτον παράδειγμα. Ἔχομεν:

$$\begin{cases} 2x - 4y + 5 = 0 \\ \quad - y + 3 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x - 4y + 5 = 0 \\ y = 3 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x - 4\cdot 3 + 5 = 0 \\ y = 3 \end{cases}$$

καί

$$\begin{cases} 2x - 4\cdot 3 + 5 = 0 \\ y = 3 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x - 7 = 0 \\ y = 3 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x = 7 \\ y = 3 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{2} \\ y = 3 . \end{cases}$$

Κατά συνέπειαν τό δοθέν σύστημα ἔχει τήν μοναδικήν λύσιν $\left\{\left(\frac{7}{2}, 3\right)\right\}$:

$$\{(x,y) \mid 2x - 4y + 5 = 0 \text{ καί } -2x + 3y - 2 = 0\} = \{(7/2, 3)\} .$$

<u>2ον παράδειγμα:</u> Ἔστω τό σύστημα

$$\begin{cases} 5x + 7y - 6 = 0 \\ 3x - 8y + 2 = 0 . \end{cases} \qquad (1)$$

Οὔτε οἱ συντελεσταί τοῦ x οὔτε οἱ συντελεσταί τοῦ y εἶναι ἀντίθετοι ἀριθμοί, διά νά εἶναι ἀμέσως δυνατόν νά ἐφαρμόσωμεν τήν προηγουμένην μέθοδον. 'Ημποροῦμεν ὅμως νά ἀντικαταστήσωμεν τό σύστημα (1) μέ ἰσοδύναμον εἰς τό ὁποῖον εἶτε οἱ συντελεσταί τοῦ x εἴτε οἱ συντελεσταί τοῦ y νά εἶναι ἀντίθετοι. Π.χ. ἐάν πολλαπλασιάσωμεν μέ -3 τά δύο μέλη τῆς πρώτης ἐξισώσεως καί μέ 5 τά δύο μέλη τῆς δευτέρας ἐξισώσεως (πρᾶγμα πού, ὅπως γνωρίζομεν, δέν ἀλλοιώνει τάς λύσεις των), θά πάρωμεν τό ἰσοδύναμον σύστημα:

$$\begin{cases} -15x - 21y + 18 = 0 \\ 15x - 40y + 10 = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

εἰς τό ὁποῖον οἱ συντελεσταί τοῦ x εἶναι ἀντίθετοι ἀριθμοί.

Ὁμοίως, ἐάν πολλαπλασιάσωμεν μέ 8 τά δύο μέλη τῆς πρώτης ἐξισώσεως τοῦ (1) καί μέ 7 τά δύο μέλη τῆς δευτέρας, θά λάβωμεν τό ἰσοδύναμον σύστημα :

$$\begin{cases} 40x + 56y - 48 = 0 \\ 21x - 56y + 14 = 0 \end{cases} \qquad (3)$$

εἰς τό ὁποῖον οἱ συντελεσταί τοῦ y εἶναι ἀντίθετοι ἀριθμοί.

Ἡ μέθοδος τοῦ προηγουμένου παραδείγματος εἶναι τώρα ἐφαρμόσιμος· ἄς τήν ἐφαρμόσωμεν πρῶτα εἰς τό (2) καί ἔπειτα εἰς τό (3). Ἐννοεῖται ὅτι πρέπει νά καταλήξωμεν εἰς τά ἴδια ἀποτελέσματα.

Διά τό (2) ἔχομεν:

$$\begin{cases} -15x-21y+18 = 0 \\ 15x-40y+10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -15x-21y+18 = 0 \\ -61y+28 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -15x-21y+18 = 0 \\ y = \frac{28}{61} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -15x-21\cdot\frac{28}{61}+18=0 \\ y = \frac{28}{61} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{34}{61} \\ y = \frac{28}{61} \end{cases}.$$

Διά τό (3) ἔχομεν:

$$\begin{cases} 40x+56y-48 = 0 \\ 21x-56y+14 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 40x+56y-48 = 0 \\ 61x-34 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 40x+56y-48 = 0 \\ x = \frac{34}{61} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 40\cdot\frac{34}{61}+56y-48 = 0 \\ x = \frac{34}{61} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{28}{61} \\ x = \frac{34}{61} \end{cases}$$

Τό σύστημα (1) ἔχει λοιπόν μίαν μοναδικήν λύσιν, τήν $\left(\frac{34}{61}\ ,\ \frac{28}{61}\right)$.

Αὐτός ὁ τρόπος ἐπιλύσεως ἑνός συστήματος λέγεται <u>μέθοδος τοῦ γραμμικοῦ συνδυασμοῦ</u>, ἐπειδή, γενικῶς εἰς τήν Ἄλγεβραν ἡ ἐξίσωσις

$\lambda(\alpha_1 x+\beta_1 y+\gamma_1) + \mu(\alpha_2 x + \beta_2 y+\gamma_2) = 0$, ὅπου λ καί μ δύο σταθεραί $\neq 0$, λέγεται γραμμικός συνδυασμός τῶν ἐξισώσεων

$$\alpha_1 x+ \beta_1 y+ \gamma_1 = 0 \quad \text{καί} \quad \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 = 0 .$$

γ) <u>Μέθοδος τῆς ἀντικαταστάσεως</u>. Ἔστω τό σύστημα

$$3x + 2y - 4 = 0 \quad \text{καί} \quad -4x + 3y + 5 = 0.$$

Ἐπιλύομεν τήν μίαν ἐξίσωσιν ὡς πρός ἕνα ἀπό τούς ἀγνώστους πού περιέχει, π.χ. τήν 1ην ὡς πρός τόν ἄγνωστον y. Ἔχομεν:

$$3x + 2y - 4 = 0 \iff y = -\frac{3}{2}x + 2.$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τήν ἄλλην ἐξίσωσιν τό y μέ αὐτήν τήν ἔκφρασίν του ὡς συναρτήσεως τοῦ x τήν ὁποίαν ηὕραμεν. Ἔχομεν:

$$\begin{cases} 3x+2y-4=0 \\ -4x+3y+5=0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -\frac{3}{2}x + 2 \\ -4x+3\left(-\frac{3}{2}x+2\right)+5=0 \end{cases} \iff \begin{cases} y=-\frac{3}{2}\cdot x + 2 \\ -\frac{17}{2}x + 11 = 0. \end{cases}$$

Παρατηροῦμεν ὅτι $-\frac{17}{2}x + 11 = 0 \iff x = \frac{22}{17}$. Ἄρα

$$\begin{cases} y = -\frac{3}{2}\cdot x+2 \\ -\frac{17}{2}x+11 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -\frac{3}{2}\cdot x+2 \\ x = \frac{22}{17} \end{cases} \iff \begin{cases} y = -\frac{3}{2}\cdot\frac{22}{17}+2 \\ x = \frac{22}{17} \end{cases} \iff \begin{cases} y = \frac{1}{17} \\ x = \frac{22}{17} \end{cases}$$

Ὥστε τό δοθέν σύστημα ἔχει τήν μοναδικήν λύσιν $\left(\frac{22}{17}\ ,\ \frac{1}{17}\right)$

<u>2ον παράδειγμα.</u> Ἔστω τό σύστημα

$$\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ x - 6y = 1 \end{cases}$$

Ἐπιλύομεν τήν δευτέραν ἐξίσωσιν ὡς πρός x καί εἰσάγομεν τήν ἔκφρασιν πού λαμβάνομεν διά τό x ὡς συνάρτησιν τοῦ y εἰς τήν πρώτην ἐξίσωσιν.

Ἔχομεν:

$$\begin{cases} 2x+3y = 4 \\ x-6y = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x+3y = 4 \\ x = 6y+1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2(6y+1)+3y = 4 \\ x = 6y+1 \end{cases} \iff \begin{cases} 15y = 2 \\ x = 6y+1 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} y = \frac{2}{15} \\ x = 6y+1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = \frac{2}{15} \\ x = 6\,\frac{2}{15}+1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = \frac{2}{15} \\ x = \frac{27}{15} \end{cases}$$

Συνεπῶς τό θεωρούμενον σύστημα ἔχει τήν μοναδικήν λύσιν $\left(\frac{9}{15}, \frac{2}{15}\right)$.

4.4. Παρατηρήσεις. I) Ἡ βασική ἐργασία καί εἰς τάς τρεῖς μεθόδους ἀριθμητικῆς ἐπιλύσεως ἑνός συστήματος εἶναι ἡ ἀντικατάστασις τοῦ δοθέντος συστήματος μέ ἕνα ἰσοδύναμον εἰς τό ὁποῖον μία τουλάχιστον ἐξίσωσις νά περιέχῃ τόν ἕνα ἄγνωστον, πολλαπλασιασμένον μέ 0 · ὁ ἄγνωστος αὐτός ἠμπορεῖ τότε νά ἀπαλειφθῇ ἀπό τήν ἐξίσωσιν. Διά τοῦτο ἡ ἀνωτέρω ἀντικατάστασις ὀνομάζεται <u>ἀπαλοιφή</u> τοῦ ὑπ' ὄψιν ἀγνώστου εἰς τό σύστημα.

II) Εἰς τό ἐρώτημα πότε ἕνα σύστημα

$$\begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 = 0 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 = 0 \end{cases}$$

ἔχει 1ον μίαν μοναδικήν λύσιν, 2ον δέν ἔχει καμμίαν λύσιν καί 3ον ἀπειραρίθμους λύσεις, ἡ ἀπάντησις εἶναι ἡ ἑξῆς :

1ον τό σύστημα ἔχει μίαν μοναδικήν λύσιν, ὅταν $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$

$$\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0 ,$$

2ον τό σύστημα δέν ἔχει καμμίαν λύσιν, ὅταν $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$

$$\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = 0 \text{ καί εἴτε } \alpha_1\gamma_2 - \alpha_2\gamma_1 \neq 0 \text{ εἴτε } \beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1 \neq 0,$$

3ον τό σύστημα ἔχει ἀπειραρίθμους λύσεις, ὅταν $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$

$$\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = 0 \text{ καί } \alpha_1\gamma_2 - \alpha_2\gamma_1 = \beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1 = 0 .$$

Αὐτά διαπιστώνονται εἰς ὅλα τά παραδείγματα πού ἐπραγματεύθημεν, δέν εἶναι δέ δύσκολον ν' ἀποδειχθοῦν μέ τήν μέθοδον τοῦ γραμμικοῦ συνδυασμοῦ.

§ 5. Συστήματα τριῶν πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων μέ τρεῖς ἀγνώστους.

5.1. <u>Πρωτοβάθμιος ἐξίσωσις μέ τρεῖς ἀγνώστους x, y, z (μέ τρεῖς</u>

μεταβλητάς x,y,z) λέγεται ἡ ἰσότης πού λαμβάνομεν, ὅταν θέσωμεν ἕνα πρωτοβάθμιον πολυώνυμον τῶν x,y,z ἴσον μέ 0.

Ἐπομένως, μία πρωτοβάθμιος ἐξίσωσις ἔχει (ἤ ἠμπορεῖ νά πάρῃ ὕστερα ἀπό ἀναγωγήν ὁμοίων ὅρων) τήν μορφήν

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0, \text{ ὅπου } |\alpha| + |\beta| + |\gamma| > 0 \quad , \qquad (1)$$

Ἡ ἰσότης αὐτή ἀληθεύει δι' ἀπειραρίθμους τριάδας σχετικῶν ἀριθμῶν (x_0, y_0, z_0), ὄχι ὅμως καί διά πᾶσαν τριάδα. Πράγματι, ἐάν π.χ. $\alpha \neq 0$, τότε δίδομεν εἰς τάς μεταβλητάς y,z δύο ὁποιασδήποτε τιμάς y_0, z_0 καί ἐπιλύομεν τήν ἐξίσωσιν

$$\alpha x + \beta y_0 + \gamma z_0 + \delta = 0$$

ὡς πρός τήν μεταβλητήν x :

$$x = -\frac{\beta y_0 + \gamma z_0 + \delta}{\alpha} .$$

Ἡ τριάς

$$\left(-\frac{\beta y_0 + \gamma z_0 + \delta}{\alpha} \quad , y_0 \ , z_0 \right)$$

ἐπαληθεύει τήν ἰσότητα (1), ἐνῶ ἡ τριάς

$$(x_1,\ y_0,\ z_0), \text{ ὅπου } x_1 \neq -\frac{\beta y_0 + \gamma z_0 + \delta}{\alpha}$$

δέν τήν ἐπαληθεύει. Διά τοῦτο ἡ ἰσότης (1) λέγεται ἐξίσωσις καί ὄχι ταυτότης.

Κάθε τριάς τιμῶν (x_0, y_0, z_0) τῶν μεταβλητῶν x , y , z,διά τήν ὁποίαν ἡ ἰσότης

$$\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z + \delta = 0$$

εἶναι ἀληθής, λέγεται λύσις τῆς ἐξισώσεως (1). Ἡ εὕρεσις τῶν λύσεων λέγεται ἐπίλυσις τῆς ἐξισώσεως.

5.2. Σύστημα τριῶν πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων μέ τρεῖς ἀγνώστους x,y,z . Ἐάν δοθοῦν τρεῖς πρωτοβάθμιοι ἐξισώσεις

$$\alpha_1 x - \beta_1 y + \gamma_1 z + \delta_1 = 0 \quad , \quad \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z + \delta_2 = 0 \ , \ \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z + \delta_3 = 0$$

καί ζητηθοῦν αἱ κοιναί λύσεις των, τότε λέγομεν ὅτι ἔχομεν νά ἐπιλύσωμεν τό σύστημα.

$$\begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z + \delta_1 = 0 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z + \delta_2 = 0 \\ \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z + \delta_3 = 0 . \end{cases}$$

Κάθε <u>κοινή</u> λύσις τῶν τριῶν ἐξισωσεων, ἐάν ὑπάρχη, λέγεται <u>λύσις τοῦ συστήματος</u>. Τό γενικόν πρόβλημα τῆς ἐπιλύσεως ἑνός τοιούτου συστήματος θά μᾶς ἀπασχολήση εἰς ἀνωτέραν τάξιν. Ἐδῶ θά δείξωμεν μόνον εἰς ἕνα παράδειγμα πῶς ἡ ἐπίλυσις αὐτή ἠμπορεῖ νά γίνη μέ μίαν ἀπό τάς ἀριθμητικάς μεθόδους πού ἀνεφέραμεν εἰς τήν προηγουμένην παράγραφον, π.χ. μέ τήν μέθοδον τῆς ἀντικαταστάσεως.

Ἔστω τό σύστημα

$$\begin{cases} x - 2y + 2z + 6 = 0 \\ 2x + y + z = 0 \\ -x - 2y + 3z + 1 = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Ἐπιλύομεν μίαν ἀπό τάς τρεῖς ἐξισώσεις, ἔστω τήν 1ην, ὡς πρός ἕνα ἀπό τούς ἀγνώστους, ἔστω ὡς πρός x:

$$x - 2y + 2z + 6 = 0 \iff x = 2y - 2z - 6 .$$

Ἐξεφράσαμεν ἔτσι τό x ὡς συνάρτησιν τῶν μεταβλητῶν y, z. Εἰσάγοντες αὐτήν τήν ἔκφρασιν τοῦ x εἰς τάς δύο ἄλλας ἐξισώσεις τοῦ συστήματος λαμβάνομεν τάς ἰσοδυναμίας :

$$\begin{cases} x-2y+2z+6 = 0 \\ 2x+ y+ z = 0 \\ -x-2y+3z+1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2y-2z-6 \\ 2(2y-2z-6)+y+z = 0 \\ -(2y-2z-6)-2y+3z+1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2y-2z-6 \\ 5y-3z-12 = 0 \\ -4y+5z+7 = 0 \end{cases}$$

Ἀπό τήν μορφήν τοῦ τελευταίου συστήματος, πού εἶναι ἰσοδύναμον μέ τό δοθέν (1), προκύπτει ὅτι διά νά ἔχη λύσιν τό (1) πρέπει καί ἀρκεῖ νά ἔχη λύσιν τό

$$\begin{cases} 5y - 3z - 12 = 0 \\ -4y + 5z + 7 = 0 \end{cases}$$

μέ τούς δύο ἀγνώστους y καί z. Χρησιμοποιοῦντες καί ἐδῶ τήν μέθοδον τῆς ἀντικαταστάσεως εὑρίσκομεν :

$$\begin{cases} 5y-3z-12 = 0 \\ -4y+5z+7 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{5}z+\frac{12}{5} \\ -4\left(\frac{3}{5}z+\frac{12}{5}\right)+5z+7 = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{5}z+\frac{12}{5} \\ -\frac{12}{5}z-\frac{48}{5}+5z+7 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{5}z+\frac{12}{5} \\ \frac{13}{5}z-\frac{13}{5} = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{5}z+\frac{12}{5} \\ z = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ z = 1 \end{cases}$$

Κατά συνέπειαν ἔχομεν :

$$\begin{cases} x = 2y-2z-6 \\ 5y-3z-12 = 0 \\ -4y+5z+7 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 2y-2z-6 \\ y = 3 \\ z = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 2\cdot 3-2\cdot 1-6 \\ y = 3 \\ z = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=3 \\ z=1 \end{cases}$$

Τό σύστημα (1) ἔχει λοιπόν τήν μοναδικήν λύσιν $(-2,3,1)$.
Μέ τόν συμβολισμόν τῶν συνόλων αὐτό γράφεται ὡς ἑξῆς:

$$\left\{(x,y,z) \,\middle|\, x\in\Pi, y\in\Pi, z\in\Pi \text{ καί } \begin{cases} x-2y+2z+6=0 \\ 2x+y+z = 0 \\ -x-2y+3z+1=0 \end{cases}\right\} = \{(-2,3,1)\}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Νά ἐπιλυθοῦν γραφικῶς τά συστήματα:

$$\begin{cases} 2x-3y-8=0 \\ 4x-y-6=0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x+2y=2 \\ 2x-y=0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \frac{x}{2}+\frac{y}{2}=-1 \\ x-y=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x-y-2=0 \\ x-\frac{1}{3}y-4=0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \frac{2}{3}x+\frac{2}{3}y=1 \\ x+y=1 \end{cases}, \quad \begin{cases} \frac{10}{17}x+2y-1=0 \\ 10x+34y-17=0 \end{cases}$$

<u>Ὑπόδειξις</u>. Νά χρησιμοποιήσετε χιλιοστομετρικόν τετραγωνισμένον χάρτην καί νά ἐκλέξετε μονάδα μήκους ἐπάνω εἰς τούς ἄξονας τό 1 cm.

2) Νά ἐπιλύσετε ἀριθμητικῶς τά συστήματα.

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = -2 \end{cases}, \quad \begin{cases} 3x + 2y - 1 = 0 \\ 2x - y + 4 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} 3x - y = 7 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y = 8 \\ -4x + 3y = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} \frac{5}{2}x - 4y + 5 = 0 \\ -x + 7y - 1 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x - 3y = -4 \\ 4x + y = -\frac{4}{5} \end{cases}.$$

3) Νά δείξετε μέ ἀριθμητικήν ἐπίλυσιν ὅτι τά παρακάτω συστήματα ἔχουν μίαν μοναδικήν λύσιν καί νά ἐπαληθεύσετε γραφικῶς αὐτό πού ηὕρατε:

$$\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x + y = 5 \end{cases}, \quad \begin{cases} -x + y + 2 = 0 \\ 2x - y - 1 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = y - 2 \\ 3x - 5y + 10 = 0 \end{cases}.$$

4) Νά ἐπιλυθοῦν ἀριθμητικῶς τά συστήματα :

$$\begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{3y+2x}{4} = \frac{3-x}{8} \\ \frac{x-2}{5} = \frac{2x-y}{5} - \frac{1+4x}{15} \end{cases}, \quad \begin{cases} \frac{x+1}{y+5} = \frac{1}{5} \\ \frac{y-3}{x+2} = -\frac{2}{5} \end{cases}.$$

5) Νά ἐξετάσετε ποῖα ἀπό τά παρακάτω συστήματα δέν ἔχουν καμμίαν λύσιν καί ποῖα ἔχουν ἀπειραρίθμους λύσεις :

$$\begin{cases} 2x - 4y = 4 \\ 4x - 8y = 6 \end{cases}, \quad \begin{cases} 8x - 4y - 1 = 0 \\ 6x - 3y - \frac{3}{4} = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x + 2y = 4 \\ -2x - 4y = -8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x - 7y = 10 \\ 0,5x - 0,7y = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x - 5y = 4 \\ x - \frac{5}{2}y = -4 \end{cases}, \quad \begin{cases} 3x - 4y + 6 = 0 \\ x - \frac{4}{3}y + 2 = 0 \end{cases}.$$

6) Πῶς προκύπτει ἡ μία ἐξίσωσις ἀπό τήν ἄλλην εἰς τά συστήματα τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως τά ὁποῖα ἔχουν ἀπειραρίθμους λύσεις ;

7) Νά ἐπιλυθοῦν τά συστήματα

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ x + 2y + 2z = -5 \\ -2x + y + z = 8 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x + \frac{1}{5}y + \frac{2}{5} = 0 \\ 2y + z = 2 \\ x + \frac{1}{6}y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = -1 \\ y + z = 1 \\ z + x = 4 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ 3x - y - z = 2 \\ 3y + 2z = -1 \end{cases}.$$

§ 5.* Προβλήματα πού λύονται μέ τήν βοήθειαν συστημάτων πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων.

5*.1 Ὅσα ἔχομεν ἀναφέρει (Βιβλ. II, σελ 121) διά τήν ἐπίλυσιν προβλημάτων μέ τήν βοήθειαν ἐξισώσεων μέ ἕνα ἄγνωστον ἰσχύουν καί διά τήν ἐπίλυσιν προβλημάτων μέ τήν βοήθειαν συστημάτων δύο ἤ τριῶν πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων μέ ἰσαρίθμους ἀγνώστους. Αἱ σχέσεις αἱ ὁποῖαι συνδέουν τούς ἀγνώστους μέ τούς ἀριθμούς πού δίδονται εἰς τό πρόβλημα, εὑρίσκονται ἐπί τῇ βάσει τῆς ἐκφωνήσεως, ὅπως θά φανῇ εἰς τά ἀκόλουθα προβλήματα.

5*.2 Ἄς ἐπαναλάβωμεν τό πρόβλημα τῆς Ἀσκ. 8, σελ. 123 τοῦ Βιβλ. II: Ἕνας πατέρας ἔχει τώρα πενταπλασίαν ἡλικίαν ἀπό τόν υἱόν του καί μετά 6 ἔτη θά ἔχῃ μόνον τριπλασίαν. Ποία ἡ τωρινή ἡλικία τοῦ υἱοῦ καί ποία ἡ ἡλικία τοῦ πατέρα ;

Ἐπίλυσις: Ἄς παραστήσωμεν μέ x (ἔτη) τήν τωρινήν ἡλικία τοῦ πατέρα καί μέ y (ἔτη) τήν ἡλικίαν τοῦ υἱοῦ. Σύμφωνα μέ τήν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος θά ἔχωμεν

1ον, διά τήν σχέσιν μεταξύ τῶν δύο ἡλικιῶν τώρα, τήν ἐξίσωσιν

$$x = 5y$$

καί 2ον, διά τήν σχέσιν μεταξύ τῶν δύο ἡλικιῶν ὕστερα ἀπό 6 ἔτη, τήν ἐξίσωσιν

$$x + 6 = 3(y+6).$$

Πράγματι μετά 6 ἔτη ἀπό τώρα ὁ πατέρας θά εἶναι x + 6 ἐτῶν καί ὁ υἱός y + 6 ἐτῶν. Ἐπιλύομεν τό σύστημα τῶν δύο ἐξισώσεων:

$$\begin{cases} x = 5y \\ x+6 = 3(y+6) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5y \\ x - 3y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5y \\ 5y - 3y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5y \\ y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 30 \\ y = 6. \end{cases}$$

Ὥστε ὁ πατέρας εἶναι τώρα 30 καί ὁ υἱός 6 ἐτῶν.

Ἐπαλήθευσις : Πράγματι ἡ τωρινή ἡλικία 30 τοῦ πατέρα εἶναι πενταπλασία ἀπό τήν ἡλικίαν 6 τοῦ υἱοῦ (30 = 5·6), ἐνῶ μετά 6 ἔτη, ἡ ἡλικία τοῦ πατέρα θά εἶναι 30 + 6 = 36 καί ἡ ἡλικία τοῦ υἱοῦ 6 + 6 = 12, εἶναι δέ 36 = 3·12.

5*.3 Πρόβλημα 2ον. Δύο κύκλοι ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς καί ἔχουν διάκεντρον (δηλ. ἀπόστασιν κέντρων) 5 cm. Ἐάν ὅμως οἱ ἴδιοι κύκλοι μετατοπισθοῦν ἔτσι ὥστε νά γίνουν ἐσωτερικῶς ἐφαπτόμενοι, τότε ἡ διάκεντρός των θά εἶναι 14 mm.
Νά προσδιορισθοῦν αἱ ἀκτῖνες τῶν δύο κύκλων.

Ἐπίλυσις. Γνωρίζομεν ὅτι, ὅταν δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἐξωτερικῶς, ἡ διάκεντρός των εἶναι ἴση μέ τό ἄθροισμα τῶν ἀκτίνων καί, ὅταν ἐφάπτωνται ἐσωτερικῶς, ἴση μέ τήν διαφοράν τῶν ἀκτίνων. Ἐάν λοιπόν παραστήσωμεν μέ x mm καί y mm τάς ἀκτῖνας των $(x>y)$, θά ἔχωμεν τάς δύο ἐξισώσεις

$$x+y=50 \quad \text{καί} \quad x-y=14\,.$$

Ἐπιλύομεν τό σύστημά των:

$$\begin{cases} x+y=50 \\ x-y=14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=50 \\ (x+y)+(x-y)=64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=50 \\ 2x=64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=50 \\ x=32 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 32+y=50 \\ x=32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=50-32 \\ x=32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=18 \\ x=32 \end{cases}$$

Αἱ ζητούμεναι ἀκτῖνες εἶναι λοιπόν $x=32$ mm καί $y=18$ mm.

Νά ἐπαληθεύσετε τό ἀποτέλεσμα γεωμετρικῶς.

5*.4 Πρόβλημα 3ον. Νά εὑρεθοῦν αἱ διαστάσεις ἑνός ὀρθογωνίου, ὅταν εἶναι γνωστόν ὅτι ἔχουν λόγον 2 : 3 καί ὅτι ἡ περίμετρος τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι 54 m.

Πρῶτος τρόπος ἐπιλύσεως. Ὀνομάζομεν x m καί y m τάς διαστάσεις καί ἔστω $x<y$. Θά ἔχωμεν τότε τό σύστημα :

$$\begin{cases} \frac{x}{y}=\frac{2}{3} \\ 2(x+y)=54 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{2}{3}y \\ x+y=27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{2}{3}y \\ \frac{2}{3}y+y=27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{2}{3}y \\ \frac{5}{3}y=27 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{2}{3}y \\ y=16,2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{2}{3}\cdot 16,2 \\ y=16,2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=10,8 \\ y=16,2 \end{cases}$$

Αἱ ζητούμεναι διαστάσεις εἶναι λοιπόν $x = 10{,}8$ m, $y = 16{,}2$ m.

<u>Δεύτερος τρόπος ἐπιλύσεως</u>. Ἐφαρμόζομεν διά τόν μετασχηματισμόν τοῦ συστήματος γνωστάς ἰδιότητας τῶν ἀναλογιῶν :

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{2}{3} \\ 2(x+y) = 54 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{3} \\ x+y = 27 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{x+y}{5} \\ x+y = 27 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{27}{5} \\ x + y = 27 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{2} = \dfrac{27}{5} \\ \dfrac{y}{3} = \dfrac{27}{5} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{54}{5} = 10{,}8 \\ y = \dfrac{81}{5} = 16{,}2 \end{cases}$$

<u>5*.5 Πρόβλημα 4ον</u>. Αἱ μεταβληταί διαστάσεις δύο ὀρθογωνίων P_1 καί P_2 εἶναι ἀντιστοίχως :

$$x\,\text{m} \times y\,\text{m} \qquad \text{καί} \qquad (x+3)\,\text{m} \times (y+4)\,\text{m}\,.$$

1ον) Νά ὑπολογίσετε τήν διαφοράν

$$\text{ἐμβ.}\,P_2 - \text{ἐμβ.}\,P_1 = z\ \text{m}^2$$

ὡς συνάρτησιν σ τῶν δύο μεταβλητῶν x, y.

2ον) Ἐάν ἡ διαφορά αὐτή z εἶναι σταθερῶς ἴση μέ $36\ \text{m}^2$, ποία πρωτοβάθμιος ἐξίσωσις συνδέει τάς μεταβλητάς x, y ;

3ον) Νά προσδιορισθοῦν αἱ διαστάσεις x καί y οὕτως ὥστε νά εἶναι ἀφ' ἑνός ἀνάλογοι πρός τούς ἀριθμούς $\frac{3}{4}$ καί $\frac{5}{3}$ καί ἀφ' ἑτέρου νά ἱκανοποιοῦν τήν συνθήκην $z = 36\text{m}^2$.

<u>Ἐπίλυσις</u> 1ον) Ἔχομεν: ἐμβ. P_2 − ἐμβ. $P_1 = (x+3)(y+4) - xy = (4x+3y+12)\text{m}^2$

Ἄρα:

$$\sigma : (x,y) \in (\Pi^+ \times \Pi^+) \xrightarrow{\ \sigma\ } 4x + 3y + 12 = z.$$

2ον) Ὅταν $z = 36\ \text{m}^2$, αἱ μεταβληταί x, y συνδέονται μεταξύ των μέ τήν ἐξίσωσιν

$$4x + 3y + 12 = 36\,.$$

3ον) Αἱ ζητούμεναι διαστάσεις ἱκανοποιοῦν τό σύστημα:

$$\begin{cases} 4x+3y+12 = 36 \\ \dfrac{x}{3/4} = \dfrac{y}{5/3} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 4x+3y = 24 \\ \dfrac{4x}{3} = \dfrac{3y}{5} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 4x+3y = 24 \\ \dfrac{4x}{3} = \dfrac{3y}{5} = \dfrac{4x+3y}{8} \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 4x+3y = 24 \\ \frac{4x}{3} = \frac{3y}{5} = \frac{24}{8} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \frac{4x}{3} = \frac{24}{8} \\ \frac{3y}{5} = \frac{24}{8} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \frac{9}{4} \\ y = \frac{15}{3} \end{cases}.$$

Ἄρα αἱ ζητούμεναι διαστάσεις εἶναι:

$$\frac{9}{4} = 2,25 \text{ m καί } \frac{15}{3} = 5 \text{ m.}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Εἰς ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ μέ γωνίαν $(\hat{A}) = 80°$ ἡ γωνία $\hat{B}$ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς Γ κατά 22°. Νά προσδιορισθοῦν μέ τήν βοήθειαν ἑνός συστήματος ἐξισώσεων αἱ γωνίαι $\hat{B}$ καί $\hat{\Gamma}$.

2) Εἰς ἕνα ἰσοσκελές τρίγωνον αἱ παρά τήν βάσιν γωνίαι ἔχουν ἄθροισμα κατά 16° μεγαλύτερον ἀπό τήν γωνίαν εἰς τήν ἀπέναντι κορυφήν. Νά προσδιορισθοῦν αἱ γωνίαι μέ τήν βοήθειαν ἑνός συστήματος 2 ἐξισώσεων μέ 2 ἀγνώστους.

3) Ἕνα τραπέζιον ἔχει ὕψος 4,8 cm καί ἐμβαδόν 32 cm^2. Αἱ δύο βάσεις του ἔχουν λόγον $= \frac{3}{2}$. Νά προσδιορισθοῦν αἱ βάσεις.

4) Ἕνα κλάσμα ἔχει τιμήν ἴσην πρός $\frac{3}{7}$. Ἄν ἐλαττώσωμεν τόν ἀριθμητήν του κατά 3 καί αὐξήσωμεν τόν παρονομαστήν του κατά 5, τότε ἡ τιμή του γίνεται ἴση πρός $\frac{1}{3}$. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμητής καί ποῖος ὁ παρονομαστής τοῦ κλάσματος.

5) Πόσα λίτρα οἰνόπνευμα τῶν 90 % μέ πόσα τῶν 36% πρέπει νά ἀναμείξωμεν διά νά λάβωμεν 45 λίτρα οἰνόπνευμα τῶν 60% ;
<u>Ἐπεξήγησις</u>. "Οἰνόπνευμα τῶν 90 %" σημαίνει ὅτι εἰς 100 μέρη ὄγκου τοῦ οἰνοπνεύματος τά 90 εἶναι καθαρόν ἀλκοόλ.

6) Νά προσδιορίσετε τό μῆκος καί τό πλάτος ἑνός ὀρθογωνίου, ὅταν γνωρίζετε τά ἑξῆς : α) τό ἐμβαδόν τοῦ ὀρθογωνίου παραμένει ἀμετάβλητον, ἄν τό μῆκος του ἐλαττωθῇ κατά 3 m καί τό πλάτος του αὐξηθῇ κατά 3 m , β) τό ἐμβαδόν τοῦ ὀρθογωνίου αὐξάνει κατά 16 m^2, ἄν τό μῆκος του ἐλαττωθῇ κατά 3 m καί τό πλάτος του αὐξηθῇ κατά 5 m.

7) Δίδεται ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ $(\hat{A} = 90°)$ μέ καθέτους πλευράς ΑΒ = 15 cm καί ΑΓ = 8 cm. Ἄς εἶναι Μ ἕνα μεταβλητόν σημεῖον τῆς ὑποτεινούσης ΒΓ, μεταξύ Γ καί Β. Καλοῦμεν Κ τήν (ὀρθήν) προβολήν τοῦ Μ ἐπάνω εἰς τήν ΑΒ καί Λ τήν προβολήν του ἐπάνω εἰς τήν ΑΓ, καί θέτομεν ΑΚ = x cm. (Τό x εἶναι μία μεταβλητή μέ πεδίον μεταβολῆς τό σύνολον τῶν ἀριθμῶν $0 < x < 15$).
Ζητεῖται: 1ον νά ὑπολογισθῇ τό τμῆμα ΚΜ = ΑΛ = y ὡς συνάρτησις τοῦ x.
2ον νά προσδιορισθῇ τό x οὕτως ὥστε τό ὀρθογώνιον ΑΚΜΛ νά εἶναι ἕνα τετράγωνον.
3ον νά ὑπολογισθῇ ἡ ἡμιπερίμετρος p τοῦ ὀρθογωνίου ΑΚΜΛ ὡς συνάρτησις τοῦ x

καί νά προσδιορισθῆ τό x οὕτως ὥστε ἡ ἡμιπερίμετρος αὐτή νά γίνη ἴση μέ τήν ὑποτείνουσαν.

8) Ἕνα κρᾶμα χρυσοῦ καί χαλκοῦ ζυγίζει 83 grp. Ἐάν βυθισθῆ εἰς καθαρόν νερόν (θερμοκρασίας 4° Κελσίου) χάνει ἀπό τό βάρος του 7 grp. Πόσον βάρος χρυσός καί πόσον χαλκός περιέχεται εἰς τό κρᾶμα, ἐάν τό ειδικόν βάρος τοῦ χρυσοῦ εἶναι 19,5 grp/cm^3, τοῦ χαλκοῦ 8,8 grp/cm^3 καί τοῦ νεροῦ 1 grp/cm^3.

<u>Ὑπόδειξις</u>. Θά ἐφαρμόσετε τήν ἀρχήν τοῦ Ἀρχιμήδους σύμφωνα μέ τήν ὁποίαν τό βάρος, πού χάνει τό κρᾶμα ὅταν βυθισθῆ εἰς τό νερόν, ἰσοῦται μέ τό βάρος νεροῦ ὄγκου ἴσου μέ τόν ὄγκον τοῦ κράματος. Θά ἔχετε ἀκόμη ὑπ' ὄψιν ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ κράματος ἰσοῦται μέ τό ἄθροισμα τῶν ὄγκων τοῦ χρυσοῦ καί τοῦ χαλκοῦ πού περιέχει καί ὅτι κάθε ὄγκος V εἶναι ἴσος πρός τό πηλίκον τοῦ βάρους B μέ τό ειδικόν βάρος ε ($V = \frac{B}{\varepsilon}$, βλ. Βιβλ. I, σελ. 34 A).

9) Τρεῖς ἐργάται εἰργάσθησαν ἀντιστοίχως 21, 23 καί 28 ὥρας καί ἐπληρώθησαν συνολικῶς 504 δρχ. Πόσας δραχμάς θά λάβη ἕκαστος, ἐάν πληρωθοῦν ἀνάλογα μέ τάς ὥρας ἐργασίας των ;

10) Εἰς μίαν αὐλήν ὑπάρχουν ὄρνιθες, χῆνες καί κουνέλια. Ὅλα αὐτά τά ζῶα ἔχουν συνολικῶς 82 κεφάλια καί 220 πόδια. Ἐάν γνωρίζωμεν ὅτι ὁ ἀριθμός τῶν κουνελιῶν εἶναι διπλάσιος ἀπό τόν ἀριθμόν τῶν χηνῶν, πόσα ζῶα ἀπό κάθε εἶδος ὑπάρχουν εἰς τήν αὐλήν ;

11) Νά εὑρεθῆ τριψήφιος ἀριθμός διά τόν ὁποῖον γνωρίζομεν ὅτι:
1ον τό ἄθροισμα τῶν ψηφίων του εἶναι 14, 2ον τό ψηφίον τῶν δεκάδων εἶναι ἴσον μέ τό ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων ψηφίων καί 3ον ἡ διαφορά τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ μεῖον ἐκεῖνος πού προκύπτει, ὅταν γράψωμεν τά ψηφία μέ ἀντίθετον σειράν, εἶναι 297.

12) Τό ἄθροισμα τῶν ἡλικιῶν ἑνός ἀνδρός καί τῆς συζύγου του εἶναι 6πλάσιον ἀπό τό ἄθροισμα τῶν ἡλικιῶν τῶν παιδιῶν τους. Πρό 2 ἐτῶν ἦτο τό 10 πλάσιον καί μετά 6 ἔτη θά εἶναι μόνον τό τριπλάσιον. Πόσα εἶναι τά παιδιά ;

<u>Ὑπόδειξις</u>. Νά ὀνομάσετε x τό ἄθροισμα τῶν ἡλικιῶν (εἰς ἔτη) τῶν γονέων, y τό ἄθροισμα τῶν ἡλικιῶν τῶν παιδιῶν, z τόν ἀριθμόν τῶν παιδιῶν.

13) Ἕνας διαθέτης μοιράζει εἰς τήν διαθήκην του ἕνα ποσόν χρημάτων εἰς τρεῖς κληρονόμους Α, Β, Γ ἀνάλογα πρός τούς ἀριθμούς 7,6,5. Κατόπιν ἀκυρώνει αὐτήν τήν διαθήκην καί μοιράζει τό ἴδιον ποσόν εἰς τούς ἰδίους κληρονόμους ἀνάλογα πρός τους ἀριθμούς 6, 5, 4. Ζητεῖται: 1ον. Ποῖος ἀπό τούς κληρονόμους παίρνει περισσότερα μέ τήν 2αν διαθήκην παρά μέ τήν 1ην, ποῖος τά ἴδια καί ποῖος ὀλιγώτερα ; 2ον. Ἐάν ἐκεῖνος, πού παίρνει περισσότερα, λαμβάνη μέ τήν 2αν διαθήκην 2400 δρχ. περισσοτέρας ἀπό ὅσας θά ἔπαιρνε μέ τήν 1ην, τότε πόσον ἦτο τό μοιραζόμενον χρηματικόν ποσόν καί πόσον τό μερίδιον τοῦ καθενός εἰς ἑκάστην διαθήκην;

<u>Ὑπόδειξις</u>. Νά παραστήσετε μέ x_1, y_1, z_1 ἀντιστοίχως τά μερίδια τῶν Α, Β, Γ εἰς τήν πρώτην διαθήκην καί μέ x_2, y_2, z_2 τά μερίδιά των εἰς τήν δευτέραν, μέ ω δέ

τό μοιραζόμενον χρηματικόν ποσόν. Κατόπιν νά προσδιορίσετε τά μερίδια αὐτά ὡς συναρτήσεις τοῦ ω καί νά τά συγκρίνετε· τέλος νά προσδιορίσετε τό ω καθώς καί τό καθένα ἀπό τά μερίδια.

§ 6. Πρωτοβάθμιοι ἀνισώσεις μέ δύο ἀγνώστους.

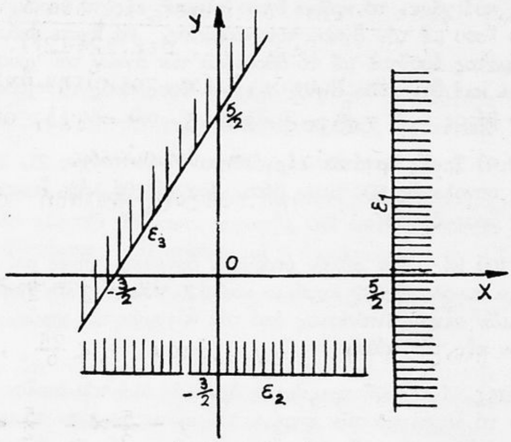
6.1. Πρωτοβάθμιος ἀνίσωσις μέ δύο ἀγνώστους (δύο μεταβλητάς) x,y .

Θεωροῦμεν τάς τρεῖς εὐθείας $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ (σχ. 91) πού παριστάνουν γραφικῶς τάς τρεῖς ἐξισώσεις

$x - \frac{5}{2} = 0, \quad y + \frac{3}{2} = 0,$

$y - \frac{5}{3}x - \frac{5}{2} = 0$

ἀντιστοίχως.



(Σχέδ. 91).

Τά σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου πού δέν ἀνήκουν εἰς τήν ε_1, ἱκανοποιοῦν μέ τάς συντεταγμένας των (x,y) τάς ἀνισότητας:

I) τά σημεῖα δεξιά ἀπό τήν ε_1 τήν ἀνισότητα $x - \frac{5}{2} > 0$,

II) » » ἀριστερά » ε_1 » » $x - \frac{5}{2} < 0$.

Τά σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου πού δέν ἀνήκουν εἰς τήν ε_2 ἱκανοποιοῦν μέ τάς συντεταγμένας των (x,y) τάς ἀνισότητας:

I) τά σημεῖα ἐπάνω ἀπό τήν ε_2 τήν ἀνισότητα $y + \frac{3}{2} > 0$,

II) » » κάτω » » ε_2 » » $y + \frac{3}{2} < 0$.

Τά σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου πού δέν ἀνήκουν εἰς τήν ε_3 ἱκανοποιοῦν μέ τάς συντεταγμένας των (x,y) τάς ἀνισότητας:

I) τά σημεῖα ἐπάνω ἀπό τήν ε_3 τήν ἀνισότητα $y - \frac{5}{3}x - \frac{5}{2} > 0$,

II) » » κάτω » » ε_3 » » $y - \frac{5}{3}x - \frac{5}{2} < 0$.

Αἱ ἐξ αὐταί ~~ἀνισότητες~~ ἀνισώσεις εἶναι τῆς μορφῆς

$\alpha x+\beta y+\gamma > 0$ ἤ $\alpha x+\beta y+\gamma < 0$, ὅπου $|\alpha| + |\beta| > 0$.

Διά τήν καθεμίαν των ὑπάρχουν ἀπειράριθμα ζεύγη (x,y) σχετικων ἀριθμῶν τά ὁποῖα τήν ἐπαληθεύουν καί ἀπειράριθμα ἄλλα πού δέν τήν ἐπαληθεύουν. Διά τοῦτο αἱ ~~ἀνισότητες~~ ἀνισώσεις αὐταί λέγονται <u>πρωτοβάθμιοι ἀνισώσεις μέ δύο ἀγνώστους (δύο μεταβλητάς) x , y</u> (Πρβ. Βιβλ. ΙΙ, σελ.124-127). Κάθε ζεῦγος σχετικῶν ἀριθμῶν πού ἐπαληθεύει μίαν τοιαύτην ἀνίσωσιν λέγεται <u>λύσις</u> της. Π.χ. τό ζεῦγος $(x=3\ ,\ y=y_0)$, ὅπου y_0 τυχών σχετικός ἀριθμός, εἶναι λύσις τῆς ἀνισώσεως

$$x+0y-\frac{5}{2}>0, \text{ δηλαδή τῆς } x-\frac{5}{2}>0,$$

ἐπειδή

$$3+0y_0-\frac{5}{2}=\frac{1}{2}>0.$$

Τό ζεῦγος $(x=1,\ y=y_1)$, ὅπου $y_1<\frac{25}{6}$, εἶναι λύσις τῆς ἀνισώσεως

$$y-\frac{5}{3}x-\frac{5}{2}<0,$$

διότι

$$y-\frac{5}{3}\cdot 1-\frac{5}{2}<\frac{25}{6}-\frac{5}{3}\cdot 1-\frac{5}{2}=0.$$

<u>6.2. Γραφική (ἤ γεωμετρική) παράστασις μιᾶς πρωτοβαθμίου ἀνισώσεως</u>. Ἐάν τό διατεταγμένον ζεῦγος (x,y) σχετικῶν ἀριθμῶν τό θεωρήσωμεν ὡς ζεῦγος σύντεταγμένων ἑνός σημείου τοῦ ἐπιπέδου, τότε κάθε λύσις (x_0, y_0) μιᾶς πρωτοβαθμίου ἀνισώσεως

$$\alpha x+\beta y+\gamma>0$$

θά παριστάνεται γεωμετρικῶς ἀπό τό σημεῖον $M(x_0, y_0)$ τοῦ ἐπιπέδου καί τό σύνολον τῶν λύσεών της ἀπό ἕνα σημειοσύνολον τοῦ ἐπιπέδου· τό σημειοσύνολον αὐτό, σύμφωνα μέ τά παραδείγματα τοῦ προηγουμένου ἐδαφίου, εἶναι τό ἕνα ἀπό τά δύο (ἀνοικτά) ἡμιεπίπεδα εἰς τά ὁποῖα ἡ εὐθεῖα, πού ἔχει ἐξίσωσιν $\alpha x+\beta y+\gamma=0$ χωρίζει τό ἐπίπεδον. Τό ἄλλο ἡμιεπίπεδον παριστάνει τότε το σύνολον τῶν λύσεων τῆς ἀνισώσεως

$$\alpha x + \beta y + \gamma < 0 .$$

Π.χ. τό σύνολον τῶν λύσεων τῆς ἀνισώσεως $y + \frac{3}{2} > 0$ παριστάνεται ἀπό τό σύνολον τῶν σημείων τοῦ ἡμιεπιπέδου ἐπάνω ἀπό τήν εὐθεῖαν ε_2 ἡ ὁποία ἔχει ἐξίσωσιν $y + \frac{3}{2} = 0$· τό σύνολον τῶν λύσεων τῆς ἀνισώσεως $x - \frac{5}{2} < 0$ παριστάνεται ἀπό τό ἡμιεπίπεδον ἀριστερά ἀπό τήν εὐθείαν ε_1 ἡ ὁποία ἔχει ἐξίσωσιν $x - \frac{5}{2} = 0$ καί τό σύνολον τῶν λύσεων τής ἀνισώσεως $y - \frac{5}{3}x - \frac{5}{2} < 0$ ἀπό τό ἡμιεπιπεδον κάτω ἀπό τήν εὐθεῖαν ε_3 τῆς ὁποίας ἐξίσωσις εἶναι ἡ $y - \frac{5}{3}x - \frac{5}{2} = 0$.

6.3. Σύστημα δύο πρωτοβαθμίων ἀνισώσεων μέ δύο μεταβλητάς. Λύσις ἑνός συστήματος

$$\begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 > 0 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 > 0 \end{cases} \tag{1}$$

δύο ἀνισώσεων μέ δύο μεταβλητάς x, y λέγεται κάθε κοινή λύσις τῶν δύο ἀνισώσεων

$$\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 > 0 \quad \text{καί} \quad \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 > 0 .$$

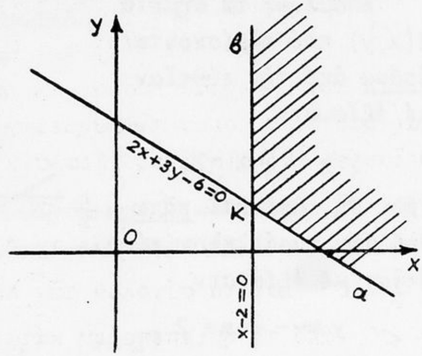
Διά νά προσδιορίσωμεν γραφικῶς τό σύνολον τῶν λύσεων τοῦ ἀνωτέρω συστήματος χαράσσομεν τάς δύο εὐθείας ε_1 καί ε_2 πού ἔχουν ἐξισώσεις

$$\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma = 0 \quad \text{καί} \quad \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 = 0 \tag{2}$$

ἀντιστοίχως ἔπειτα προσδιορίζομεν τήν τομήν τῶν δύο ἡμιεπιπέδων πού, σύμφωνα μέ τό προηγούμενον ἐδάφιον, παριστανουν τά δύο σύνολα τῶν λύσεων ἑκάστης ἀνισώσεως χωριστά. Ἐάν αἱ εὐθεῖαι ε_1 καί ε_2 δέν εἶναι παράλληλαι, τότε ἡ τομή αὐτή εἶναι τό ἐσωτερικόν μιᾶς κυρτῆς γωνίας. Ἰδού ἕνα παράδειγμα:
Εστω τό σύστημα

$$\begin{cases} 2x + 3y - 6 > 0 \\ x - 2 > 0 \end{cases} .$$

Τό συνολον τῶν λύσεων τῆς πρώτης ἀνισώσεως παριστάνεται ἀπό τό ἡμιεπίπεδον ἐπάνω ἀπό τήν εὐθεῖαν μέ ἐξίσωσιν $2x+3y-6=0$ (σχ. 92). Τό σύνολον τῶν λύσεων τῆς δευτέρας ἀνισώσεως παριστάνεται ἀπό τό ἡμιεπίπεδον δεξιά ἀπό τήν εὐθεῖαν μέ ἐξίσωσιν $x-2=0$. Ἡ τομή τῶν δύο ἡμιεπιπέδων εἶναι τό διαγραμμισμένον ἐσωτερικόν τῆς κυρτῆς γωνίας $\measuredangle(K\alpha, K\beta)$. Αὐτό παριστάνει τό σύνολον τῶν λύσεων τοῦ συστήματος.



(Σχέδ. 92)

Ἐάν αἱ εὐθεῖαι ε_1 καί ε_2 πού παριστάνουν τάς ἐξισώσεις (2) εἶναι παράλληλοι, τότε τό σύνολον τῶν λύσεων τοῦ συστήματος (1) ἤ 1ον θά εἶναι τό κενόν σύνολον ϕ ἤ 2ον θά παριστάνεται ἀπό τό ἐσωτερικόν μιᾶς ταινίας ἤ 3ον θά παριστάνεται ἀπό ἕνα (ἀνοικτόν) ἡμιεπίπεδον. Ἀντίστοιχα παραδείγματα διά τάς τρεῖς αὐτάς ὑποπεριπτώσεις εἶναι τά ἑξῆς:

1ον: $\begin{cases} 2x+3y-6>0 \\ -2x-3y+6>0 \end{cases}$, 2ον: $\begin{cases} -2x-3y+6>0 \\ 2x+3y+6>0 \end{cases}$, 3ον: $\begin{cases} 2x+3y-6>0 \\ 2x+3y+6>0. \end{cases}$

Πράγματι διά τό 1ον ἔχομεν:

$$\begin{cases} 2x+3y-6>0 \\ -2x-3y+6>0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x+3y-6>0 \\ 2x+3y-6<0 \end{cases}$$

Ἑπομένως μία λύσις (x_0, y_0) τοῦ συστήματος θά ἔπρεπε νά ἱκανοποιῇ συγχρόνως τάς δύο ἀνισότητας

$$2x_0+3y_0-6>0 \text{ καί } 2x_0+3y_0-6<0,$$

αὐτό ὅμως εἶναι ἀδύνατον.

Διά τό 2ον ἔχομεν:

$$\begin{cases} -2x-3y+6>0 \\ 2x+3y+6>0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 3y<-2x+6 \\ 3y>-2x-6 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y<-\frac{2}{3}x+2 \\ y>-\frac{2}{3}x-2 \end{cases}$$

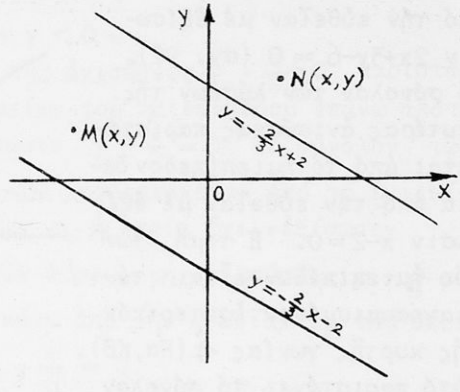
Ἑπομένως τά σημεῖα $M(x,y)$ πού εὑρίσκονται ἐπάνω ἀπό τήν εὐθεῖαν μέ ἐξίσωσιν

$$y = -\frac{2}{3}x - 2$$

(βλ. σχ. 93) καί κάτω ἀπό τήν παράλληλον εὐθεῖαν μέ ἐξίσωσιν

$$y = -\frac{2}{3}x + 2\ ,$$

παριστάνουν τό σύνολον τῶν λύσεων τοῦ συστήματος



(Σχέδ. 93)

Τέλος, διά τό 3ον ἔχομεν:

$$\begin{cases} 2x+3y-6>0 \\ 2x+3y+6>0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 3y>-2x+6 \\ 3y>-2x-6 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y>-\frac{2}{3}x+2 \\ y>-\frac{2}{3}x-2 \end{cases}.$$

Ἑπομένως τό σύνολον τῶν λύσεων τοῦ συστήματος παριστάνεται ται ἀπό τό σύνολον τῶν σημείων $N(x,y)$ πού κεῖνται ἐπάνω ἀπό τήν εὐθεῖαν μέ ἐξίσωσιν $y = -\frac{2}{3}x + 2$ (βλ. σχ. 93).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Νά παραστήσετε γραφικῶς τάς ἀνισώσεις:

α) $x<0$, β) $y>0$, γ) $x+3<0$, δ) $y-2>0$.

2) Νά παραστήσετε γραφικῶς τάς ἀνισώσεις:

α) $x+y<0$, β) $x-y>0$, γ) $x-2y>0$, δ) $y<2x-4$, ε) $2x-y+5>0$.

3) Νά προσδιορίσετε γραφικῶς τά σύνολα τῶν λύσεων τῶν ἀκολούθων συστημάτων δύο ἀνισώσεων μέ δύο μεταβλητάς x, y:

α) $\begin{cases} x>-2 \\ y<3 \end{cases}$ β) $\begin{cases} x>-1 \\ 2x<3 \end{cases}$ γ) $\begin{cases} 2x-y>0 \\ 4x-2y+6>0 \end{cases}$

δ) $\begin{cases} 2x+3y>0 \\ x-y+2>0 \end{cases}$ ε) $\begin{cases} -x+2y-4<0 \\ x+y-2<0 \end{cases}$

4) Νά προσδιορίσετε γραφικῶς τό σύνολον τῶν λύσεων τοῦ ἀκολούθου συστήματος τριῶν ἀνισώσεων μέ τούς δυο ἀγνώστους x , y :

$$\begin{cases} x - 2{,}5 < 0 \\ y + 3 > 0 \\ x - 2y - 3 > 0 \end{cases}.$$

§ 7. Ἡ τετραγωνική συνάρτησις $x \xrightarrow{\tau} x^2 = y$ καί αἱ ἀντίστροφοί της.

7.1. Θεωροῦμεν τήν συνάρτησιν

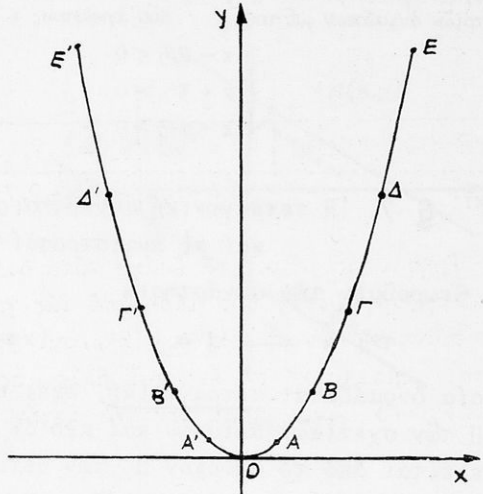
$$\tau : x \xrightarrow{\tau} x^2 = y \quad , \quad (x \in \Pi)$$

ἡ ὁποία ὀνομάζεται τετραγωνική, ἔχει πεδίον ὁρισμοῦ τό σύνολον Π τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν καί πεδίον τιμῶν τό σύνολον $\Pi^{\geq 0}$ πού ἀποτελεῖται ἀπό τό σύνολον Π^+ τῶν θετικῶν ἀριθμῶν καί ἀπό τό 0. Ἡ συνάρτησις αὐτή ἀπεικονίζει τό σύνολον Π ἐντός τοῦ ἑαυτοῦ του καί συγκεκριμένως τό σύνολον Π ἐπί τοῦ συνόλου $\Pi^{\geq 0}$ πού εἶναι γνήσιον ὑποσύνολον τοῦ Π. Εἰς κάθε τιμήν $x_0 \in \Pi$ τῆς μεταβλητῆς x ἡ συνάρτησις τ ἀντιστοιχίζει μίαν τιμήν $y_0 \in \Pi^{\geq 0}$ τῆς μεταβλητῆς y. Ἰδού μερικά ζεύγη (x_0, y_0) τοιούτων ἀντιστοίχων τιμῶν :

x	−2,5	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5
y	6,25	4	2,25	1	0,25	0	0,25	1	2,25	4	6,25

Παρατηροῦμεν ὅτι εἰς δύο ἀντιθέτους τιμάς τῆς x ἀντιστοιχεῖ ἡ ἰδία τιμή τῆς y .

Ἄν ὅλα τά ζεύγη (x,y) ἀπό ἀντιστοίχους τιμάς τῶν μεταβλητῶν x καί y τά παραστήσωμεν μέ τά σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου τά ὁποῖα τά ἔχουν ὡς ζεύγη συντεταγμένων, τότε λαμβάνομεν ἕνα σημειοσύνολον πού λέγεται γραφική παράστασις τῆς τετραγωνικῆς συναρτήσεως τ καθώς καί τῆς "δευτεροβαθμίου" ἐξισώσεως $y - x^2 = 0$ μεταξύ τῶν δύο μεταβλητῶν x καί y. Τό σημειοσύνολον αὐτό εἶναι μία ὄχι εὐθεῖα ἀλλά καμπύλη γραμμή, πού λέγεται παραβολή. Διά νά χαράξωμεν, ἐννοεῖται κατά προσέγγισιν, ἕνα μέρος της , προσδιορίζομεν (σχ. 94) τά σημεῖα Ε΄, Δ΄, Γ΄, Β΄, Α΄, Ο΄, Α΄, Β΄, Γ΄, Δ, Ε΄ πού ἔχουν συντεταγμένας κατά σειράν τά ζεύγη (x_0, y_0) ἀντιστοίχων τιμῶν πού ἀνεγράψαμεν εἰς τόν ἀνωτέρω πίνακα. Ἔπειτα ἑνώνομεν τά σημεῖα αὐτά κατά σειράν μέ μίαν, ὅπως συνηθίζεται νά λέγωμεν, "ὁμαλήν καμπύλην γραμμήν" (εἰς τοῦτο βοηθεῖ ἡ χρῆσις τοῦ ὀργάνου πού ὀνομάζεται καμπυλόγραμμος κανών). Ἡ καμπύλη αὐτή γραμμή εἶναι τό μέρος τῆς γραφικῆς παραστάσεως τῆς συναρτήσεως τό ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς τό διάστημα $-2{,}5 \leqslant x \leqslant 2{,}5$ μεταβολῆς τῆς μεταβλητῆς x. Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ἀνωτέρω γραμμή ἔχει ἄξονα συμμετρίας τόν ἄξονα τεταγμένων Oy, διότι τό συμμετρικόν παντός σημείου της $M_0(x_0, y_0 = x_0^2)$ εἶναι τό σημεῖον $M_0'(-x_0, y_0)$ πού ἀνήκει εἰς τήν ἰδίαν γραμμήν, ἐπειδή $y_0 = x_0^2 = (-x_0)^2$.



(Σχέδ. 94)

7.2. Θεωροῦμεν τώρα τάς δύο συναρτήσεις

$$\sigma_1 : \quad x \xrightarrow{\sigma_1} \sqrt{x} = y \quad , \qquad (x \in \Pi^{\geqslant 0})$$

καί

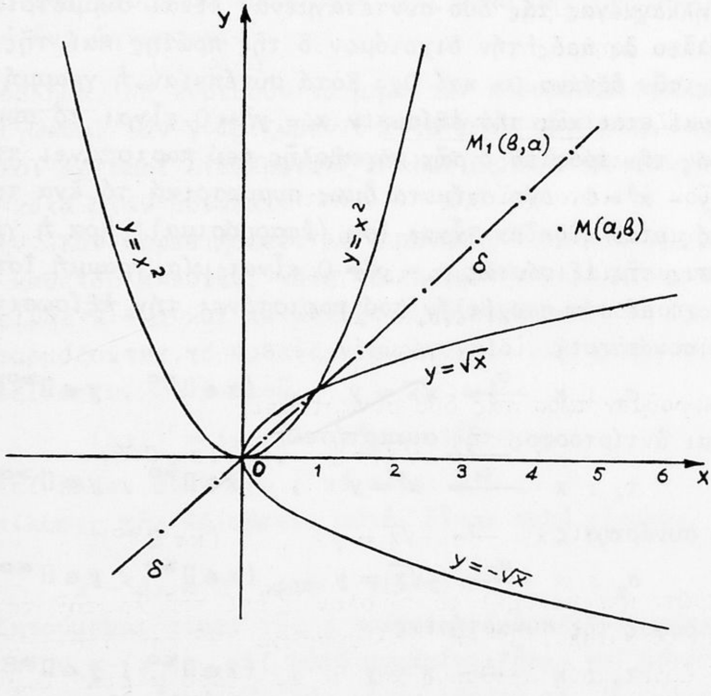
$$\sigma_2 : \quad x \xrightarrow{\sigma_2} -\sqrt{x} = y \quad , \qquad (x \in \Pi^{\geqslant 0})$$

Ἡ πρώτη ἀπεικονίζει τό σύνολον $\Pi^{\geqslant 0}$ ἐπί τοῦ ἑαυτοῦ του, ἡ δευτέρα, τό σύνολον $\Pi^{\geqslant 0}$ ἐπί τοῦ συνόλου $\Pi^{\leqslant 0}$ πού ἀποτελεῖται ἀπό τούς ἀρνητικούς ἀριθμούς καί τό 0. Ἰδού μερικά ζεύγη $(x_0,\ y_0 = \sigma_1(x_0) = \sqrt{x_0})$ καί $(x_0,\ y_0 = \sigma_2(x_0) = -\sqrt{x_0})$

ἀντιστοίχων τιμῶν τῶν μεταβλητῶν x καί y εἰς τάς δύο αὐτάς συναρτήσεις:

x	0	1/4	1	2	3	4	5	6
$y=\sqrt{x}$	0	1/2	1	$\sqrt{2}\simeq 1,4$	$\sqrt{3}\simeq 1,7$	2	$\sqrt{5}\simeq 2,2$	$\sqrt{6}\simeq 2,4$
$y=-\sqrt{x}$	0	−1/2	−1	$-\sqrt{2}\simeq -1,4$	$-\sqrt{3}\simeq -1,7$	−2	$-\sqrt{5}\simeq -2,2$	$-\sqrt{6}\simeq -2,4$

Χρησιμοποιοῦμεν τά ζεύγη αὐτά διά νά χαράξωμεν, φυσικά κατά προσέγγισιν, δύο μέρη ἀπό τάς γραφικάς παραστάσεις τῶν δύο συναρτήσεων σ_1 καί σ_2 (βλ. σχ. 95). Τά δύο αὐτά μέρη, πού εἶναι συμμετρικά τό ἕνα τοῦ ἄλλου ὡς πρός τόν ἄξονα τῶν τετμημένων Ox, ἑνώνονται εἰς τήν ἀρχήν O(0,0) τῶν συντεταγμέ-



(Σχέδ. 95)

νων καί ἀποτελοῦν, κατά τά φαινόμενα, ἕνα μέρος παραβολῆς ἴσον (δηλ. ἐφαρμόσιμον) μέ τό μέρος παραβολῆς πού ἐχαράξαμεν εἰς τό προηγούμενον σχ. 94. Αὐτό ἠμπορεῖ νά δειχθῆ ὡς ἑξῆς: Παρατηροῦμεν ὅτι ἰσχύουν αἱ συνεπαγωγαί:

$$y = \sqrt{x} \Longrightarrow y^2 = x \qquad (x \in \Pi^{\geq 0})$$

$$y = -\sqrt{x} \Longrightarrow y^2 = x \qquad (x \in \Pi^{\geq 0}) .$$

Ἄρα τά δύο μέρη πού ἐχαράξαμεν εἰς τό σχ. 95 ἀνήκουν εἰς τήν γραφικήν παράστασιν τῆς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως $x - y^2 = 0$ πού προκύπτει ἀπό τήν $y - x^2 = 0$, ὅταν εἰς τήν θέσιν τοῦ x γράψωμεν y καί εἰς τήν θέσιν τοῦ y, x. Ὅπως ὅμως γνωρίζομεν, δύο σημεῖα

$$M(\alpha, \beta) \quad \text{καί} \quad M_1(\beta, \alpha)$$

μέ ἐνηλλαγμένας τάς δύο συντεταγμένας εἶναι συμμετρικά τό ἕνα τοῦ ἄλλου ὡς πρός τήν διχοτόμον δ τῆς πρώτης καί τῆς τρίτης γωνίας τῶν ἀξόνων Ox καί Oy. Κατά συνέπειαν, ἡ γραμμή πού παριστάνει γραφικῶς τήν ἐξίσωσιν $x - y^2 = 0$ εἶναι τό συμμετρικόν ὡς πρός τήν εὐθεῖαν δ τῆς παραβολῆς πού παριστάνει τήν ἐξίσωσιν $y - x^2 = 0$. Δύο σχήματα ὅμως συμμετρικά τό ἕνα τοῦ ἄλλου ὡς πρός μίαν εὐθεῖαν εἶναι ἴσα (ἐφαρμόσιμα)· ἄρα ἡ γραφική παράστασις τῆς ἐξισώσεως $x - y^2 = 0$ εἶναι μία γραμμή ἴση (ἐφαρμόσιμος) μέ τήν παραβολήν πού παριστάνει τήν ἐξίσωσιν $y - x^2 = 0$.

Ἡ συνάρτησις

$$\sigma_1 : x \xrightarrow{\sigma_1} \sqrt{x} = y \quad , \quad (x \in \Pi^{\geq 0} \ , \ y \in \Pi^{\geq 0})$$

λέγεται ἀντίστροφος τῆς συναρτήσεως

$$\tau_1 : x \xrightarrow{\tau_1} x^2 = y \quad , \quad (x \in \Pi^{\geq 0} \ , \ y \in \Pi^{\geq 0})$$

καί ἡ συνάρτησις

$$\sigma_2 : x \xrightarrow{\sigma_2} -\sqrt{x} = y \quad , \quad (x \in \Pi^{\geq 0} \ , \ y \in \Pi^{\leq 0}) ,$$

ἀντίστροφος τῆς συναρτήσεως

$$\tau_2 : x \xrightarrow{\tau_2} x^2 = y \quad , \quad (x \in \Pi^{\leq 0} \ , \ y \in \Pi^{\geq 0}) .$$

§ 8. Ἐξισώσεις 2ου βαθμοῦ μέ ἕνα ἄγνωστον Ἀριθμητική καί γραφική ἐπίλυσίς των.

8.1. Ἐξίσωσις δευτέρου βαθμοῦ μέ ἕνα ἄγνωστον λέγεται ἡ ἐξίσωσις πού λαμβάνομεν, ὅταν θέσωμεν ἕνα δευτεροβάθμιον πολυώνυμον μιᾶς μεταβλητῆς ἴσον μέ 0 καί ἀναζητήσωμεν τάς τιμάς τῆς μεταβλητῆς αἱ ὁποῖαι ἐπαληθεύουν τήν ἐξίσωσιν.

Ἄρα, μετά ἐνδεχομένην ἀναγωγήν ὁμοίων ὅρων, γενική μορφή μιᾶς ἐξισώσεως 2ου βαθμοῦ μέ ἕνα ἄγνωστον x εἶναι ἡ ἀκόλουθος :

$\alpha x^2+\beta x+\gamma = 0$, ὅπου α, β, γ δεδομέναι σταθεραί , ἡ $\alpha \neq 0$.

Λύσις τῆς ἐξισώσεως λέγεται κάθε τιμή τῆς μεταβλητῆς x ἐπαληθεύουσα τήν ἐξίσωσιν.

Ἰδού ἕνα πρόβλημα πού ὁδηγεῖ εἰς μίαν δευτεροβάθμιον ἐξίσωσιν μέ ἕνα ἄγνωστον.

8.2. Πρόβλημα. Νά εὑρεθοῦν τά μήκη τῶν πλευρῶν ἑνός ὀρθογωνίου τριγώνου, ἐάν γνωρίζωμεν ὅτι τά μήκη αὐτά εἶναι τρεῖς διαδοχικοί ἀριθμοί διαφέροντες ὁ καθένας ἀπό τόν προηγούμενόν του κατά μίαν μονάδα.

Ἐπίλυσις. Ἐάν παραστήσωμεν μέ x μονάδας τό μῆκος τῆς μεγαλυτέρας καθέτου πλευρᾶς, τότε τό μῆκος τῆς μικροτέρας καθέτου θά εἶναι $x - 1$ καί τό μῆκος τῆς ὑποτεινούσης $x + 1$ μονάδας. Ἐφαρμόζοντες τό Πυθαγόρειον θεώρημα λαμβάνομεν διά τό x τήν ἐξίσωσιν 2ου βαθμοῦ

$$(x+1)^2 = (x-1)^2 + x^2 \Longleftrightarrow x^2 - 4x = 0 ,$$

μέ τήν ἐπί πλέον συνθήκην : νά εἶναι $x > 1$.

Ἡ ἐπίλυσις τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς εἶναι πολύ εὔκολος, ἐπειδή

$$x^2 - 4x = 0 \Longleftrightarrow x(x-4) = 0 \cdot$$

ἄρα αἱ ζητούμεναι τιμαί τῆς x πρέπει καί ἀρκεῖ νά μηδενίζουν τό γινόμενον $x\cdot(x-4)$, καί αὐτό συμβαίνει ὅταν καί μόνον ὅταν ἤ $x = 0$ ἤ $x = 4$. Ἀπό τάς δύο αὐτάς λύσεις τῆς ἐξισώσεως ἡ

$x=0$ δέν ἱκανοποιεῖ τήν ἐπί πλέον συνθήκην $x>1$ καί ἀπορρίπτεται. Ἡ ἄλλη $x=4$ εἶναι δεκτή καί δίδει διά τά ζητούμενα μήκη τῶν τριῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου τούς ἀριθμούς 3,4, 5 μονάδας.

8.3 Ἀριθμητική ἐπίλυσις μιᾶς ἐξισώσεως 2ου βαθμοῦ μέ ἕνα ἄγνωστον.

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, ὅπου $\alpha\neq 0$. Ὅπως εἴδαμεν εἰς τήν §1.4, ε), ἐάν $\beta^2-4\alpha\gamma\geq 0$, τότε εἶναι δυνατόν νά μετασχηματίσωμεν τό ἀριστερόν μέλος $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ εἰς ἕνα γινόμενον δύο παραγόντων 1ου βαθμοῦ:

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=(\alpha_1x+\beta_1)\cdot(\alpha_2x+\beta_2)\quad,\ \text{ὅπου}\ \alpha_1\neq 0\ ,\ \alpha_2\neq 0.$$

Ἐπομένως ἡ ἐπίλυσις τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ ἀνάγεται εἰς τήν ἐπίλυσιν τῆς

$$(\alpha_1x+\beta_1)\cdot(\alpha_2x+\beta_2)=0.$$

Ἕνα γινόμενον δύο (ἤ περισσοτέρων) παραγόντων εἶναι ὅμως μηδέν, ὅταν καί μόνον ὅταν ἕνας τουλάχιστον ἀπό τούς παράγοντας εἶναι μηδέν. Κατά συνέπειαν αἱ ζητούμεναι λύσεις τῆς $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ εἶναι αἱ λύσεις τῆς καθεμιᾶς **χωριστά** (πρωτοβαθμίου) ἐξισώσεως :

$$\alpha_1x+\beta_1=0\quad\text{καί}\quad\alpha_2x+\beta_2=0\ .$$

Μέ τόν γνωστόν συμβολισμόν διά τά σύνολα, αὐτό γράφεται ὡς ἑξῆς :

$$\{x\mid\alpha x^2+\beta x+\gamma=0\}=\{x\mid\alpha_1x+\beta_1=0\}\cup\{x\mid\alpha_2x+\beta_2=0\}\ .$$

Παραδείγματα. I) Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $x^2-x+\frac{1}{4}=0$. Σύμφωνα μέ τήν § 1.4 ἔχομεν :

$$x^2-x+\frac{1}{4}=x^2-2\cdot\frac{1}{2}x+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right).$$

Ἄρα

$$x^2-x+\frac{1}{4}=0\iff\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)=0.$$

Αἱ δύο (πρωτοβάθμιοι) ἐξισώσεις $x-\frac{1}{2}=0$ καί $x-\frac{1}{2}=0$ ἔχουν λύσεις τόν ἴδιον ἀριθμόν $\frac{1}{2}$. Ἄρα

$$\{x \mid x^2 - x + \tfrac{1}{4} = 0\} = \{\tfrac{1}{2}\}.$$

μέ ἄλλους λόγους, ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις $x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$ ἔχει μίαν μόνον λύσιν, τήν $\frac{1}{2}$.

II) Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $2x^2 - 5 = 0$. Σύμφωνα μέ τήν §1.4 ἔχομεν:

$$2x^2 - 5 = (x\sqrt{2}+\sqrt{5})\cdot(x\sqrt{2}-\sqrt{5}).$$

Ἄρα

$$2x^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow (x\sqrt{2}+\sqrt{5})\cdot(x\sqrt{2}-\sqrt{5}) = 0 \Leftrightarrow \text{εἴτε } x\sqrt{2}+\sqrt{5} = 0 \text{ εἴτε } x\sqrt{2}-\sqrt{5} = 0.$$

Κατά συνέπειαν αἱ λύσεις τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶναι δύο

$$x = -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = -\sqrt{\frac{5}{2}} \quad \text{καί} \quad x = \sqrt{\frac{5}{2}}.$$

III) Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{9} = 0$. Ἔχομεν :

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{9} = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \left(x+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(x+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) = \left(x+\frac{5}{6}\right)\cdot\left(x+\frac{1}{6}\right).$$

Ἄρα ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἔχει ὡς λύσεις τάς λύσεις τῆς καθεμιᾶς χωριστά (πρωτοβαθμίου) ἐξισώσεως

$$x + \frac{5}{6} = 0 \quad \text{καί} \quad x + \frac{1}{6} = 0.$$

Ἐπομένως αἱ λύσεις τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶναι δύο: $-\frac{5}{6}$ καί $-\frac{1}{6}$.

IV) Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $x^2 + 6x + 8 = 0$. Σύμφωνα μέ τήν §1.4 ἔχομεν:

$$x^2+6x+8 = x^2+2\cdot 3x+8 = (x+3)^2-9+8 = (x+3)^2-1 = (x+4)\cdot(x+2).$$

Ἄρα

$$x^2+6x+8 = 0 \Longleftrightarrow (x+4)\cdot(x+2) = 0 \Longleftrightarrow \text{εἴτε } x+4 = 0 \text{ εἴτε } x+2 = 0.$$

Κατά συνέπειαν ἡ ἐξίσωσις $x^2 + 6x + 8 = 0$ ἔχει τάς δύο λύσεις: -4 καί -2.

V) Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $3x^2 - 9x + 6 = 0$. Σύμφωνα μέ τήν § 1.4 ἔχομεν:

$$3x^2-9x+6 = 3(x^2-3x+2) = 3\left[\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 2\right] = 3\left[\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right]$$

$$= 3\left(x-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right) = 3(x-1)\cdot(x-2).$$

Κατά συνέπειαν :

$$3x^2-9x+6=0 \iff 3(x-1)\cdot(x-2)=0 \iff \text{είτε } x-1=0 \text{ είτε } x-2=0.$$

Ἐπομένως αἱ λύσεις τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶναι δύο:

$$\{x \mid 3x^2-9x+6=0\}=\{1,\ 2\}$$

VI) Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $x^2-\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}=0$. Ἔχομεν:

$$x^2-\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}=x^2-2\cdot\frac{5}{4}x+\frac{3}{2}=\left(x-\frac{5}{4}\right)^2-\frac{25}{16}+\frac{3}{2}=\left(x-\frac{5}{4}\right)^2-\frac{1}{16}$$

$$=\left(x-\frac{5}{4}+\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{5}{4}-\frac{1}{4}\right)=(x-1)\cdot\left(x-\frac{3}{2}\right).$$

Ἄρα αἱ λύσεις εἶναι δύο:

$$\left\{x \mid x^2-\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}=0\right\}=\left\{1,\ \frac{3}{2}\right\}.$$

VII) Ἔστω τέλος ἡ ἐξίσωσις $-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+2=0$. Ἔχομεν:

$$-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+2=-\frac{1}{2}(x^2-3x-4)=-\frac{1}{2}\left(x^2-2\cdot\frac{3}{2}x-4\right)$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}-4\right]=-\frac{1}{2}\left[\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{25}{4}\right]$$

$$=-\frac{1}{2}(x+1)\cdot(x-4).$$

Ἄρα αἱ λύσεις εἶναι δύο:

$$\left\{x \mid -\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+2=0\right\}=\{-1,\ 4\}.$$

8.4. Εἰς ὅλα τά παραδείγματα τῶν ἐδαφίων 8.2 καί 8.3 αἱ ἐξισώσεις 2ου βαθμοῦ πού εἴχομεν νά ἐπιλύσωμεν ἦσαν τῆς μορφῆς $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ μέ $\beta^2-4\alpha\gamma \geq 0$. Εἰς τό παράδειγμα I) ἡ ποσότης $\beta^2-4\alpha\gamma$ ἦτο $=0$ καί ἡ ἐξίσωσις εἶχε μίαν μόνον λύσιν· εἰς τά ἄλλα παραδείγματα ἡ ποσότης $\beta^2-4\alpha\gamma$ ἦτο >0 καί κάθε ἐξίσωσις εἶχε δύο διακεκριμένας λύσεις. Διά λόγους πού θά ἐξηγήσωμεν εἰς ἀνωτέραν τάξιν, ὅταν μία 2βάθμιος ἔχῃ μίαν μόνον λύσιν, τότε ἡ λύσις αὐτή λέγεται διπλῆ. Θά δώσωμεν τώρα ἕνα παράδειγμα ἐξισώσεως $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ μέ $\beta^2-4\alpha\gamma<0$, ὁπότε, ὅπως προκύπτει ἀπό τήν § 1.4, ἡ ἐξίσωσις δέν ἔχει λύσιν μέσα εἰς τό σύνολον τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν.

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{11}{2}=0$ μέ $\beta^2-4\alpha\gamma=(-2)^2-4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{11}{2}=-7$.

Ἔχομεν :

$$\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{11}{2}=\frac{1}{2}[x^2-4x+11]=\frac{1}{2}\cdot[(x-2)^2-4+11]=\frac{1}{2}\cdot[(x-2)^2+7]\ .$$

Διά νά εἶναι $\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{11}{2}=0$, πρέπει λοιπόν ὁ x νά πάρη τιμήν πού να μηδενίζη τό ἄθροισμα $(x-2)^2+7$ ἑνός τετραγώνου καί τοῦ ἀριθμοῦ 7· αὐτό ὅμως εἶναι ἀδύνατον μέσα εἰς τό σύνολον τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν, διότι μέ ὅποιον σχετικόν ἀριθμόν καί ἄν ἀντικαταστήσωμεν τό x θά εἶναι

$$(x-2)^2\geqslant 0 \quad \text{καί} \quad (x-2)^2+7\geqslant 7>0.$$

Ἡ ἐξίσωσις $\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{11}{2}=0$ δέν ἔχει λοιπόν λύσιν, ἐφόσον περιοριζόμεθα εἰς τό σύστημα τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν. Αὐτό γράφεται ὡς ἑξῆς μέ τόν γνωστόν συμβολισμόν διά τά σύνολα:

$$\left\{x \mid x\in\Pi \quad \text{καί} \quad \frac{1}{2}x^2-2x+\frac{11}{2}=0\right\}=\phi\ .$$

<u>8.5</u>. Ἡ παραβολή πού, ὅπως εἴδαμεν εἰς τήν §7.1 , παριστάνει γραφικῶς τήν ἐξίσωσιν $y-x^2=0$ μεταξύ τῶν δύο μεταβλητῶν x καί y ἠμπορεῖ νά χρησιμοποιηθῆ διά τήν <u>γραφικήν ἐπίλυσιν</u> μιᾶς 2βαθμίου ἐξισώσεως $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$.

Βέβαια ἡ γραφική αὐτή ἐπίλυσις δέν ἔχει τήν ἰδίαν ἀξίαν μέ τήν ἀριθμητικήν ἐπίλυσιν πού ἐξεθέσαμεν, διότι δίδει τάς λύσεις μόνον κατά προσέγγισιν· ὅμως ἡ γραφική μέθοδος ἐπιλύσεως ἔχει τήν χρησιμότητα νά ἑρμηνεύη κατά τρόπον πολύ παραστατικόν τάς τρεῖς περιπτώσεις πού παρουσιάζονται: 1ον τήν περίπτωσιν νά ἔχη ἡ 2βάθμιος ἐξίσωσις δύο διαφορετικάς λύσεις, 2ον τήν περίπτωσιν νά ἔχη μίαν μόνον λύσιν (πού θεωροῦμεν διπλῆν) καί 3ον νά μή ἔχη ἡ ἐξίσωσις καμμίαν λύσιν μέσα εἰς τό σύστημα τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν.

Παρατηροῦμεν πρῶτα ὅτι, ἐπειδή εἶναι $\alpha\neq 0$, ἰσχύουν αἱ ἰσοδυναμίαι

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=0 \Longleftrightarrow \alpha\left(x^2+\frac{\beta}{\alpha}x+\frac{\gamma}{\alpha}\right)=0 \Longleftrightarrow x^2+\frac{\beta}{\alpha}x+\frac{\gamma}{\alpha}=0$$

μέ ἄλλους λόγους ἡ ἐξίσωσις $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ ἔχει τάς ἰδίας λύσεις μέ τήν

$$x^2 + \frac{\beta}{\alpha} x + \frac{\gamma}{\alpha} = 0 ,$$

τήν ὁποίαν θά γράψωμεν ἁπλούστερα ὡς ἑξῆς : $x^2 + px + q = 0$, θέτοντες $\frac{\beta}{\alpha} = p$, $\frac{\gamma}{\alpha} = q$. Ὅπως εἴδαμεν ὅμως εἰς τήν §1.4,δ), ἰσχύει ἡ ἰσότης

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2 - 4q}{4} .$$

Ἑπομένως, ἐάν τήν ποσότητα $\frac{p^2-4q}{4}$ τήν παραστήσωμεν συντόμως μέ δ καί πάρωμεν ἀντί τοῦ x ὡς νέον ἄγνωστον τόν $x' = x + \frac{p}{2}$, τότε ἡ ἐξίσωσις $x^2+px+q = 0$ μετατρέπεται εἰς τήν

$$x'^2 - \delta = 0 ,$$

καί θά ἔχωμεν:

$$\{ x \mid x^2+px+q = 0 \} = \{ x \mid x = x' + \frac{p}{2} \ \ \text{καί} \ \ x'^2 - \delta = 0 \} .$$

Μέ ἄλλους λόγους, αἱ λύσεις τῆς ἐξισώσεως $x^2+px+q = 0$ προκύπτουν ἀπό τάς λύσεις τῆς ἐξισώσεως $x'^2 - \delta = 0$, ἐάν προσθέσωμεν εἰς αὐτάς τόν ἀριθμόν $p/2$. Ἀπομένει τώρα νά ἐπιλύσωμεν γραφικῶς τήν $x'^2 - \delta = 0$. Αὐτό γίνεται ὡς ἑξῆς :

Θεωροῦμεν τήν συνάρτησιν

$$f : \ x' \xrightarrow{f} x'^2 - \delta = y \ \ , \ \ (x' \in \Pi)$$

καί χαράσσομεν τήν γραφικήν της παράστασιν· ἔπειτα προσδιορίζομεν τά σημεῖα τῆς γραφικῆς αὐτῆς παραστάσεως τά ὁποῖα ἔχουν τεταγμένην $y = 0$, τά ὁποῖα ἐπομένως κεῖνται ἐπάνω εἰς τόν ἄξονα τετμημένων Ox'. Αἱ τετμημέναι αὐτῶν τῶν σημείων εἶναι αἱ λύσεις τῆς ἐξισώσεως $x'^2 - \delta = 0$.

Ἔχομεν νά διακρίνωμεν τρεῖς περιπτώσεις:

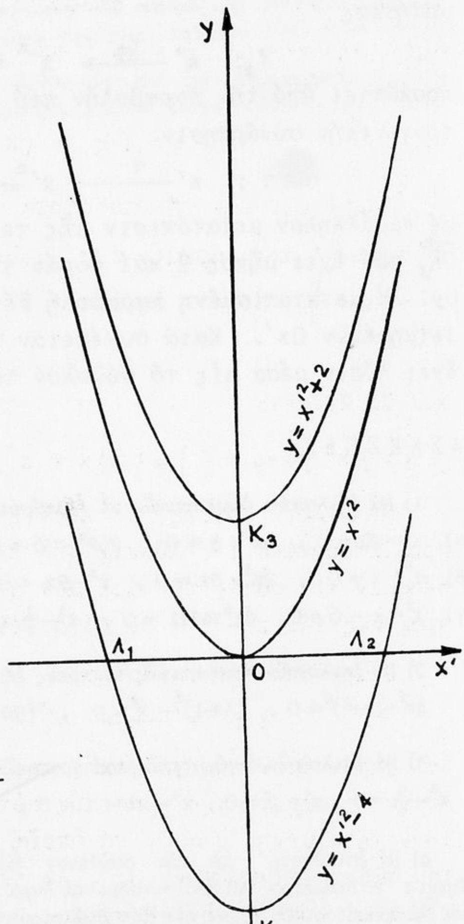
1η περίπτωσις: $\delta > 0$. Ἔστω π.χ. $\delta = 4$. Ἡ γραφική παράστασις τῆς συναρτήσεως

$$f_1 : \ x' \xrightarrow{f_1} x'^2 - 4 = y \ \ , \ \ (x' \in \Pi)$$

προκύπτει ἀπό τήν παραβολήν πού παριστάνει γραφικῶς τήν τετραγωνικήν συνάρτησιν

$$\tau : x' \xrightarrow{\tau} x'^2 = y \quad , \quad (x' \in \Pi),$$

ἐάν προσθέσωμεν εἰς τήν τεταγμένην παντός σημείου αὐτῆς τῆς παραβολῆς τήν ποσότητα -4. Αὐτό σημαίνει παράλληλον μετατόπισιν τῆς παραβολῆς κατά τό διάνυσμα $\overrightarrow{OK_1}$ πού ἔχει μῆκος 4 καί φοράν ἀντίθετον πρός τήν θετικήν φοράν τοῦ ἄξονος Oy (βλ.σχ. 96). Γραφική παράστασις τῆς συναρτήσεως f_1: $y = x'^2 - 4$ εἶναι λοιπόν ἡ μετατοπισμένη παραβολή· αὐτή συναντᾶ τόν ἄξονα τετμημένων Ox΄ εἰς τά σημεῖα $\Lambda_1(-2,0)$ καί $\Lambda_2(2,0)$. Οἱ ἀριθμοί -2 καί 2 εἶναι αἱ λύσεις τῆς ἐξισώσεως $x'^2 - 4 = 0$.



(Σχέδ. 96)

<u>2α περίπτωσις</u> : $\delta = 0$. Ἡ γραφική παράστασις τῆς συναρτήσεως

$$f_2 : x' \xrightarrow{f_2} x'^2 = y \quad , \quad (x' \in \Pi).$$

Ἡ γραφική αὐτή παράστασις ἔχει ἕνα μόνον κοινόν σημεῖον μέ τόν ἄξονα τῶν τετμημένων Ox΄, τό σημεῖον O(0,0).

Ἡ ἐξίσωσις $x'^2 - 0 = 0$ ἔχει μίαν μόνον λύσιν, τό 0, τήν ὁποίαν θεωροῦμεν διπλῆν (βλ. σχ. 96).

<u>3η περίπτωσις</u> : $\delta < 0$. Ἔστω π.χ. $\delta = -2$. Ἡ ἐξίσωσις $x'^2 - \delta = 0$ γίνεται $x'^2 + 2 = 0$. Ἡ γραφική παράστασις τῆς συναρτήσεως

$$f_3 : \ x' \xrightarrow{f_3} x'^2 + 2 = y \ , \quad (x' \in \Pi)$$

προκύπτει ἀπό τήν παραβολήν πού παριστάνει γραφικῶς τήν τετραγωνικήν συνάρτησιν

$$\tau : \ x' \xrightarrow{\tau} x'^2 = y \ , \quad (x' \in \Pi)$$

μέ παράλληλον μετατόπισιν τῆς τελευταίας κατά τό διάνυσμα $\overrightarrow{OK_3}$ πού ἔχει μῆκος 2 καί φοράν τήν θετικήν φοράν τοῦ ἄξονος Oy. Ἡ μετατοπισμένη παραβολή δέν συναντᾶ τώρα τόν ἄξονα τῶν τετμημένων Ox'. Κατά συνέπειαν ἡ ἐξίσωσις $x'^2 + 2 = 0$ δέν ἔχει λύσιν μέσα εἰς τό σύνολον τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν (βλ. σχ. 96).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Νά ἐπιλυθοῦν ἀριθμητικῶς αἱ ἐξισώσεις :

α) $x^2 - 49 = 0$, $4x^2 - 9 = 0$, $25x^2 - 36 = 0$, $9x^2 - 2 = 0$

β) $x^2 + x = 0$, $2x^2 - 3x = 0$, $x^2 - 5x + 6 = 0$, $x^2 + 5x + 6 = 0$

γ) $x^2 - x - 6 = 0$, $4x^2 + 4x + 1 = 0$, $x^2 - \frac{1}{2}x - 3 = 0$, $x^2 - \sqrt{2}x - 4 = 0$.

2) Νά ἐπιλυθοῦν ἀριθμητικῶς αἱ τρεῖς ἐξισώσεις:

$4x^2 - (x+3)^2 = 0$, $(3x-1)^2 - x^2 = 0$, $(5x-1)^2 - (2x+3)^2 = 0$.

3) Νά ἐπιλυθοῦν ἀριθμητικῶς καί γραφικῶς αἱ πέντε ἐξισώσεις:

$x^2 - \frac{9}{4} = 0$, $x^2 + 2 = 0$, $x^2 - 2x - 1 = 0$, $x^2 + 2x - 3 = 0$, $x^2 + x + 1 = 0$.

4) Νά ἐπιλύσετε μέ τήν βοήθειαν ἐξισώσεως, τό ἑξῆς γεωμετρικόν πρόβλημα : Ἡ διάμετρος ΑΒ πού συνδέει τά ἄκρα μιᾶς ἡμιπεριφερείας ἔχει μῆκος 13 cm. Νά προσδιορισθῇ ἐπάνω εἰς τήν διάμετρον αὐτήν ἕνα σημεῖον Γ ἔτσι ὥστε τό εὐθύγραμμον τμῆμα ΓΔ, πού εἶναι ⊥ ΑΒ καί ἔχει τό ἄκρον του Δ ἐπάνω εἰς τήν ἡμιπεριφέρειαν, νά ἔχῃ μῆκος 6 cm.

<u>Ὑπόδειξις.</u> Νά πάρετε ὡς ἄγνωστον x τό μῆκος τοῦ ΑΓ εἰς cm καί νά εὕρετε τήν ἐξίσωσιν διά τό x χρησιμοποιοῦντες τήν Παρατήρησιν τῆς σελ. 215 τοῦ Βιβλ. ΙΙ.

5) Εἰς ἕνα κύκλον μέ διάμετρον 5 m εἶναι ἐγγεγραμμένον ὀρθογώνιον τοῦ ὁποίου αἱ δύο διαστάσεις ἔχουν διαφοράν ἑνός m. Νά προσδιορισθοῦν μέ ἐπίλυσιν ἐξισώσεως αἱ διαστάσεις αὐταί.

6) Δύο πεζοπόροι ἀναχωροῦν συγχρόνως ἀπό ἕνα τόπον διά νά φθάσουν εἰς μίαν πόλιν πού ἀπέχει 20 km ἀκολουθοῦντες τόν ἴδιον δρόμον. Ὁ πρῶτος διατρέχει κάθε ὥραν 1 km περισσότερον ἀπό τόν δεύτερον καί φθάνει εἰς τήν πόλιν μίαν ὥραν ἐνωρίτερα ἀπό αὐτόν. Νά εὑρεθοῦν αἱ μέσαι ταχύτητες ἀνά ὥραν τῶν δύο πεζοπόρων.

7) Νά εὑρεθοῦν αἱ διαστάσεις ἑνός ὀρθογωνίου πού ἔχει ἴσον ἐμβαδόν μέ ἕνα τετράγωνον πλευρᾶς 8,1 m, ἐάν αἱ διαστάσεις αὐταί εἶναι ἀνάλογοι πρός τούς ἀριθμούς 2 καί 4,5.

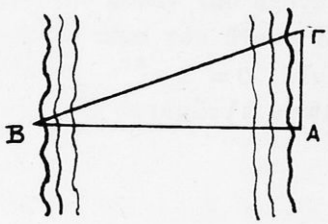
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ΄

Τ Ρ Ι Γ Ω Ν Ο Μ Ε Τ Ρ Ι Α

§ 1. Ἐφαπτομένη ὀξείας γωνίας.

<u>1.1. Πρόβλημα.</u> Νά προσδιορισθῆ ἡ ὁριζόντιος ἀπόστασις ΑΒ δύο σημείων Α καί Β πού κεῖνται εἰς τάς δύο ὄχθας ἑνός ποταμοῦ (σχέδ. 97).

<u>Γραφική ἐπίλυσις.</u> Ὁ προσδιορισμός ἠμπορεῖ νά γίνη μέ τήν ἀκόλουθον γραφικήν μέθοδον ἐπί τῆ βάσει τῶν ὅσων ἐμάθαμεν ἕως τώρα:

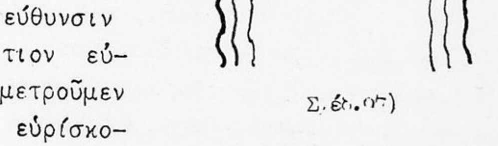


(Σχέδ. 97)

Καθέτως πρός τήν διεύθυνσιν ΑΒ παίρνομεν ἕνα ὁριζόντιον εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΓ καί μετροῦμεν τό μῆκος του· ἔστω ὅτι εὑρίσκομεν ΑΓ = 24,6 m. Ἔπειτα, μέ κατάλληλον τοπογραφικόν ὄργανον μετροῦμεν τήν ὁριζόντιον γωνίαν $\widehat{\text{ΑΓΒ}}$ καί ἔστω ὅτι εὑρίσκομεν 70°40΄. Τά δύο αὐτά ἀριθμητικά δεδομένα προσδιορίζουν τό ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΓΒ καί ἠμποροῦμεν νά τό σχεδιάσωμεν, ἐννοεῖται <u>ὑπό κλίμακα.</u> Ἄς πάρωμεν π.χ. ὡς κλίμακα τό 1:1000· θά ἔχωμεν τότε νά σχεδιάσωμεν τό τρίγωνον Α΄Γ΄Β΄ (σχ. 98) μέ τά δεδομένα :

$$\widehat{\text{Β΄Α΄Γ΄}} = 90^\circ \ , \quad \text{Α΄Γ΄} = 24{,}6 \text{ mm} \ , \quad \widehat{\text{Α΄Γ΄Β΄}} = 70^\circ 40΄.$$

Τό τρίγωνον αὐτό εἶναι ὅμοιον πρός τό ΑΓΒ μέ λόγον ὁμοιότητος 1:1000, ἄρα



(Σχέδ. 98)

$$(A'B') = \frac{1}{1000}(AB) \Longleftrightarrow (AB) = 1000\,(A'B').$$

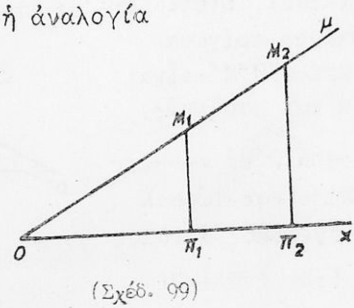
Μετροῦμεν λοιπόν τό μῆκος τοῦ $A'B'$ καί, ἐπειδή εὑρίσκομεν $(A'B') \simeq 67$ mm, συμπεραίνομεν ὅτι ἡ ζητουμένη ἀπόστασις AB εἶναι

$$(AB) \simeq 1000 \cdot 67 \text{ mm} = 67 \text{ m}.$$

Ἡ ἀνωτέρω γραφική μέθοδος ἐπιλύσεως δέν εἶναι ἱκανοποιητική, ἐπειδή ὁ βαθμός ἀκριβείας τῶν συμπερασμάτων, πού συνάγομεν ἀπό ἕνα σχέδιον ὑπό κλίμακα εἶναι μικρός καί γίνεται μικρότερος ὅσον μικροτέρα εἶναι ἡ κλῖμαξ, μέ τήν ὁποίαν ἐσχεδιάσαμεν. Διά τοῦτο ἐπενοήθησαν ἀριθμητικαί μέθοδοι διά τήν ἐπίλυσιν προβλημάτων ὅπως τό ἀνωτέρω καί εἰς τό παρόν κεφάλαιον θά ἐκθέσωμεν μερικάς ἐξ αὐτῶν. Μέ τάς μεθόδους αὐτάς ἠμποροῦμεν ἀπό τρία γνωστά κύρια στοιχεῖα ἑνός τριγώνου (2 πλευράς καί τήν περιεχομένην γωνίαν ἤ 2 γωνίας καί μίαν πλευράν ἤ 3 πλευράς) νὰ προσδιορίσωμεν μέ ὑπολογισμούς τά ὑπόλοιπα τρία κύρια στοιχεῖα τοῦ τριγώνου καθώς καί τό ἐμβαδόν ἤ ἄλλα δευτερεύοντα στοιχεῖα του (ὕψη, διαμέσους κτλ.). Διά τοῦτο ὁ μαθηματικός κλάδος πού περιλαμβάνει τάς μεθόδους αὐτάς λέγεται <u>ἀριθμητική τριγωνομετρία</u> καί, συντόμως, <u>τριγωνομετρία</u>.

<u>1.2.</u> <u>Ἐφαπτομένη ὀξείας γωνίας.</u> Ἔστω (σχ. 99) $\sphericalangle(Ox, O\mu)$ μία ὀξεῖα γωνία, δηλαδή $0^\circ \leqslant \sphericalangle(Ox, O\mu) < 90^\circ$. Ἐπάνω εἰς τήν πλευράν της $O\mu$ παίρνομεν δύο ὁποιαδήποτε σημεῖα M_1, M_2, διάφορα ἀπό τό O, καί χαράσσομεν τάς καθέτους $M_1\Pi_1$, $M_2\Pi_2$ πρός τήν ἄλλην πλευράν. Τά δύο ὀρθογώνια τρίγωνα $O\Pi_1M_1$ καί $O\Pi_2M_2$ εἶναι ὅμοια (διατί;)· ἑπομένως ἰσχύει ἡ ἀναλογία

$$\frac{\Pi_1M_1}{\Pi_2M_2} = \frac{O\Pi_1}{O\Pi_2} \Longleftrightarrow \frac{\Pi_1M_1}{O\,\Pi_1} = \frac{\Pi_2M_2}{O\,\Pi_2}.$$



(Σχέδ. 99)

Ὥστε εἰς τήν δεδομένην ὀξεῖαν γωνίαν $\sphericalangle(Ox, O\mu)$ ἀντιστοιχεῖ ἕνας ἐντελῶς ὡρισμένος ἀριθμός $\geqslant 0$: ἡ τιμή τοῦ λόγου $\frac{\Pi M}{O\Pi}$, ὅπου M τυχόν σημεῖον τῆς πλευρᾶς Oμ, διάφορον ἀπό τό O, καί Π ἡ προβολή τοῦ M ἐπάνω εἰς τήν ἄλλην πλευράν Ox. Ὁ ἀριθμός αὐτός λέγεται <u>ἐφαπτομένη</u> τῆς γωνίας $\sphericalangle(Ox, O\mu)$ καί σημειώνεται συντόμως ἔτσι:

$$\varepsilon\varphi \sphericalangle(Ox, O\mu) \quad ἤ \quad , \text{διεθνῶς}, \quad tg \sphericalangle(Ox, O\mu) ,$$

ὅπου tg εἶναι συντομογραφία τῆς λατινικῆς λέξεως tangens, πού σημαίνει ἐφαπτομένη. Π.χ. εἰς τό παράδειγμα τοῦ σχ. 99 εὑρίσκομεν κατά προσέγγισιν μέ μετρήσεις :

$$\varepsilon\varphi \sphericalangle(Ox, O\mu) = \frac{\Pi_2 M_2}{O\,\Pi_2} \simeq \frac{25\text{mm}}{40\text{mm}} = \frac{5}{8} .$$

Εἶναι φανερόν ὅτι ἡ ἐφαπτομένη μιᾶς γωνίας ἐξαρτᾶται ἀποκλειστικά ἀπό τό μέγεθος τῆς γωνίας, μέ ἄλλας λέξεις, δύο ἴσαι γωνίαι ἔχουν τήν ἰδίαν ἐφαπτομένην. Διά τοῦτο τήν ἐφαπτομένην μιᾶς ὀξείας γωνίας τήν γράφομεν καί ὡς ἐφαπτομένην τοῦ μέτρου της. Π.χ. διά τήν $\sphericalangle(Ox, O\mu)$ τοῦ σχ. 99, ἡ ὁποία, ὅταν μετρηθῆ μέ τό μοιρογνωμόνιον, ἔχει μέτρον $\simeq 31^\circ 50'$, γράφομεν:

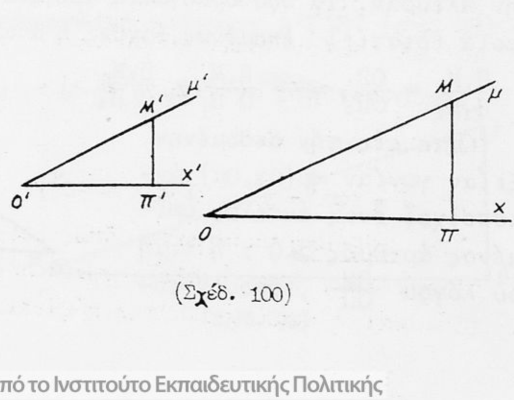
$$\varepsilon\varphi\, 31^\circ 50' \simeq \frac{5}{8}$$

Ἀντιστρόφως, ὅλαι αἱ ὀξεῖαι γωνίαι πού ἔχουν τήν ἰδίαν ἐφαπτομένην εἶναι μεταξύ των ἴσαι. Π.χ. αἱ γωνίαι $\sphericalangle(Ox, O\mu)$ καί $\sphericalangle(O'x', O'\mu')$ (σχ. 100) πού ἔχουν ἴσας ἐφαπτομένας:

$$\frac{\Pi M}{O\Pi} = \frac{\Pi' M'}{O'\Pi'} = \frac{1}{2} ,$$

εἶναι ἴσαι, διότι τά ὀρθογώνια τρίγωνα ΟΠΜ καί Ο΄Π΄Μ΄ εἶναι ὅμοια καί συνεπῶς

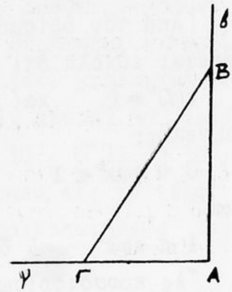
$$\widehat{\Pi O M} = \widehat{\Pi' O' M'} .$$



(Σχέδ. 100)

Ἄς εἶναι τώρα λ ἕνας σχετικός ἀριθμός $\geqslant 0$, π.χ. $\lambda = 1{,}5$.

Σύμφωνα μέ τόν δοθέντα ὁρισμόν τῆς ἐφαπτομένης εἶναι εὔκολον νά προσδιορίσωμεν μίαν γωνίαν πού ἔχει ἐφαπτομένην τόν ἀριθμόν αὐτόν 1,5. Πρός τοῦτο ἐπάνω εἰς μίαν πλευράν μιᾶς ὀρθῆς γωνίας ∢(Αβ, Αγ) (βλ. σχ. 101) παίρνομεν κατ' ἐλευθέραν ἐκλογήν ἕνα τμῆμα ΑΓ (π.χ. ΑΓ = 2cm) καί ἐπάνω εἰς τήν ἄλλην πλευράν τό τμῆμα ΑΒ = λ·ΑΓ = 1,5·ΑΓ (ΑΒ = 1,5 2 cm = =3 cm). Ἡ γωνία $\widehat{ΑΓΒ}$ ἔχει τότε ἐφαπτομένην τόν ἀριθμόν



(Σχέδ. 101)

$$λ = \frac{ΑΒ}{ΑΓ} = \frac{3}{2} = 1.5 .$$

1.3. Κατά ταῦτα εἰς κάθε ὀξεῖαν γωνίαν (μέ μέτρον ω°) ἀντιστοιχεῖ ἕνας ὡρισμένος ἀριθμός λ ≥ 0 ὡς ἐφαπτομένη (εφω°=λ) καί, ἀντιστρόφως, κάθε ἀριθμός λ ≥ 0 εἶναι ἀντίστοιχος μιᾶς ὡρισμένης ἀπό ἄποψιν μεγέθους ὀξείας γωνίας. Ἡ ἀντιστοιχία αὐτή εἶναι λοιπόν μία συνάρτησις μέ πεδίον ὁρισμοῦ τό σύνολον τῶν ὀξειῶν γωνιῶν καί μέ πεδίον τιμῶν τό σύνολον τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν λ ≥ 0. Ἐάν μετρήσωμεν τάς γωνίας εἰς μοίρας καί τάς ἀντικαταστήσωμεν μέ τά μέτρα των x°, τότε ἡ ἀνωτέρω συνάρτησις μετατρέπεται εἰς μίαν ἀριθμητικήν συνάρτησιν μέ πεδίον ὁρισμοῦ τό σύνολον

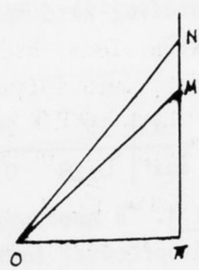
$\{x° \mid x°$ ἀριθμός $\geq 0°$ καί $< 90°\}$

καί μέ πεδίον τιμῶν τό σύνολον

$\{y \mid y$ ἀριθμός σχετικός $\geq 0\}$.

Ἡ συνάρτησις αὐτή

$$x° \xrightarrow{εφ} εφx° = y \;,\; (0° \leq x° < 90°)$$



(Σχέδ. 102)

εἶναι αὔξουσα· πράγματι, ὅπως δείχνει τό σχ. 102, ὅταν ἡ ὀξεῖα γωνία αὐξάνη, τότε καί ἡ ἐφαπτομένη της αὐξάνει:

$$\widehat{\Pi O M} < \widehat{\Pi O N} \Rightarrow \Pi M < \Pi N \Rightarrow \frac{\Pi M}{O\Pi} < \frac{\Pi N}{O\Pi} \Rightarrow \varepsilon\varphi\widehat{\Pi O M} < \varepsilon\varphi\widehat{\Pi O N}.$$

'Από τόν ὁρισμόν τῆς ἐφαπτομένης ἕπεται εὔκολα ὅτι

$\varepsilon\varphi 0^\circ = 0$ καί $\varepsilon\varphi 45^\circ = 1$.

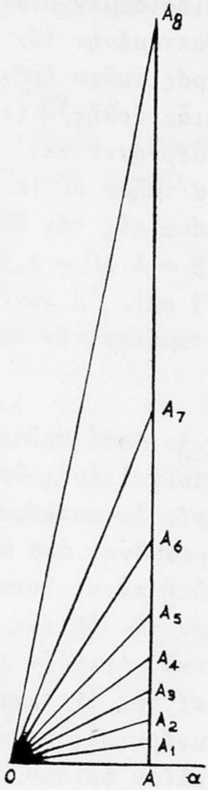
Συνεπῶς:

$0 < \varepsilon\varphi x^\circ < 1$ ὅταν $0^\circ < x^\circ < 45^\circ$

καί

$1 < \varepsilon\varphi x^\circ$ ὅταν $45^\circ < x^\circ < 90^\circ$.

"Ας προσδιορίσωμεν τώρα κατά προσέγγισιν τάς ἐφαπτομένας τῶν γωνιῶν $10^\circ, 20^\circ, \ldots, 70^\circ, 80^\circ$. Χρησιμοποιοῦντες μοιρογνωμόνιον χαράσσομεν (σχ.103) γωνίας μέ τά ἀνωτέρω μέτρα καί μέ κοινήν πλευράν τήν ἡμιευθεῖαν Οα. 'Επάνω εἰς αὐτήν παίρνομεν τό σημεῖον Α εἰς ἀπόστασιν 20 mm ἀπό τό Ο καί ὑψώνομεν εἰς τό Α κάθετον πρός τήν Οα. Τέλος σημειώνομεν τά σημεῖα τομῆς $A_1, A_2, \ldots, A_7, A_8$ τῆς καθέτου μέ τάς πλευράς τῶν γωνιῶν πού ἐχαράξαμεν. Οἱ ἀριθμοί, πού ἐκφράζουν εἰς mm τά μήκη τῶν τμημάτων $AA_1, AA_2, \ldots, AA_7, AA_8$, διαιρούμενοι μέ 20 θά μᾶς δώσουν τάς ζητουμένας ἐφαπτομένας κατά προσέγγισιν ἑνός ἑκατοστοῦ:



(Σχέδ. 103)

x°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°
$\varepsilon\varphi x^\circ$	0,18	0,36	0,58	0,84	1,19	1,73	2,74	5,67

1.4. Ἡ προσέγγισις τήν ὁποίαν ἠμποροῦμεν νά ἐπιτύχωμεν προσδιορίζοντες ἐφαπτομένας γωνιῶν μέ γραφικάς μεθόδους ὅπως ἡ ἀνωτέρω, δέν εἶναι ἐπαρκής διά τάς περισσοτέρας ἐφαρμογάς τῆς Τριγωνομετρίας. Τιμάς μέ καλυτέραν προσέγγισιν μᾶς παρέχουν ἀριθμητικαί μέθοδοι ὑπολογισμοῦ ἐφαπτομένων πού διδάσκονται εἰς τά 'Ανώτερα Μαθηματικά. Μέ τήν βοήθειαν αὐτῶν τῶν μεθόδων ἔχουν καταρτισθῆ π.χ. πίνακες οἱ ὁποῖοι δίδουν τάς τιμάς τῆς ἐφαπτομένης μέ προσέγγισιν μισοῦ χιλιοστοῦ διά τάς γωνίας πού προχωροῦν ἀπό τήν 0° ἕως εἰς τήν $89^\circ 50'$ κατά $10'$ κάθε φοράν (δηλ. διά τάς γωνίας 0°, $0^\circ 10'$, $0^\circ 20'$, $0^\circ 30'$, ..., $89^\circ 50'$). Ἕνα τέτοιον πίνακα παραθέτομεν εἰς τό τέλος τοῦ βιβλίου. 'Ιδού μερικά παραδείγματα χρησιμοποιήσεως τοῦ πίνακος.

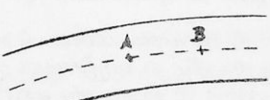
'Από τήν γωνίαν νά εὑρεθῆ ἡ ἐφαπτομένη	'Από τήν ἐφαπτομένην νά εὑρεθῆ ἡ γωνία
$\varepsilon\varphi 25^\circ = 0,466$	$\varepsilon\varphi x = 0,589 \Longrightarrow x = 30^\circ 30'$
$\varepsilon\varphi 44^\circ 30' = 0,983$	$\varepsilon\varphi x = 1,732 \Longrightarrow x = 60^\circ$
$\varepsilon\varphi 65^\circ 12' \simeq \varepsilon\varphi 65^\circ 10' = 2,161$	$\varepsilon\varphi x = 3,320 \simeq 3,305 \Longrightarrow x = 73^\circ 10'$

1.5. Ἄς ἐπιλύσωμεν ἀκόμη μέ τήν βοήθειαν τοῦ πίνακος τό πρόβλημα τοῦ ἐδαφίου 1.1. Τά δεδομένα ἦσαν $\mathrm{A\Gamma} = 24,6$ m καί $\widehat{\mathrm{A\Gamma B}} = 70^\circ 40'$. Σύμφωνα μέ τόν ορισμόν τῆς ἐφαπτομένης ἔχομεν $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{\Gamma A}} = \varepsilon\varphi\widehat{\mathrm{A\Gamma B}} = \varepsilon\varphi 70^\circ 40'$. Ὁ πίναξ μᾶς δίδει διά τήν $\varepsilon\varphi 70^\circ 40'$ τήν τιμήν 2,850. Ἑπομένως

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{\Gamma A}} = 2,850 \Longrightarrow \mathrm{AB} = \mathrm{\Gamma A}\cdot 2,85 = 24,6\cdot 2,85 \simeq 70 \text{ m}.$$

Ἡ ζητουμένη ἀπόστασις AB εἶναι λοιπόν 70 m, δηλαδή κατά 3m μεγαλυτέρα ἀπό ὅ,τι ηὕραμεν μέ τήν γραφικήν μέθοδον τοῦ ἐδ. 1.1.

1.5. Κλίσις δρόμου. 'Επάνω εἰς τήν μεσαίαν γραμμήν τῆς ἐπιφανείας ἑνός δρόμου (σχ. 104) παίρνομεν ἕνα ἀρκετά μικρόν τμῆμα (κομμάτι) AB· τό τμῆμα αὐτό τῆς γραμμῆς ἠμπορεῖ τότε νά θεωρηθῆ εὐθύγραμμον χωρίς σημαντικόν σφάλμα, καί ἡ διεύθυνσις τῆς εὐθείας AB εἰς τόν χῶρον μᾶς ὁρίζει τήν διεύθυνσιν



(Σχέδ. 104)

τοῦ δρόμου εἰς τό σημεῖον του Α. <u>Γωνία κλίσεως τοῦ δρόμου εἰς τό σημεῖον του Α</u> καλεῖται ἡ ὀξεῖα γωνία Β΄ΑΒ τήν ὁποίαν σχηματίζει ἡ εὐθεῖα ΑΒ μέ προβολήν της ΑΒ΄ ἐπάνω εἰς τό ὁριζόντιον ἐπίπεδον πού περνᾶ ἀπό τό Α (Σχ. 105). Ἡ γωνία κλίσεως ἠμπορεῖ νά προσδιορισθῇ μέ τό μέτρον της εἰς μοίρας ἤ πρῶτα λεπτά κτλ. Αὐτός ὅμως ὁ ἀριθμητικός προσδιορισμός ἔχει τό μειονέκτημα νά ἐξαρτᾶται ἀπό τήν μονάδα γωνιῶν πού χρησιμοποιοῦμεν διά τήν μέτρησιν. Διά τοῦτο οἱ ὁδοποιοί προτιμοῦν νά προσδιορίζουν τήν γωνίαν κλίσεως τοῦ δρόμου μέ τήν <u>ἐφαπτομένην της πού εἶναι ἀνεξάρτητος ἀπό τήν μονάδα μέ τήν ὁποίαν ἐμετρήθη ἡ γωνία.</u> Φθάνομεν ἔτσι εἰς τόν ἀκόλουθον ὁρισμόν: <u>κλίσις ἑνός δρόμου εἰς ἕνα σημεῖον του Α</u> λέγεται <u>ἡ ἐφαπτομένη τῆς γωνίας κλίσεώς του εἰς τό Α.</u> Π.χ. εἰς τό παράδειγμα τοῦ σχ. 105 ἡ γωνία κλίσεως εἶναι περίπου 7° καί ἡ κλίσις $εφ7^\circ \simeq 0,12$.

(Σχέδ. 105)

Συνηθίζεται ἡ κλίσις νά ἐκφράζεται ὡς ποσοστόν ἐπί τοῖς ἑκατόν. Π.χ. εἰς τό ἀνωτέρω παράδειγμα ἡ κλίσις εἶναι 12%.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Νά κατασκευάσετε ὀξείας γωνίας μέ τάς ἀκολούθους ἐφαπτομένας:

$εφα_1 = \frac{3}{4}$, $εφα_2 = \frac{4}{3}$, $εφβ_1 = \frac{1}{2}$, $εφβ_2 = \frac{2}{1}$.

Κατόπιν, νά μετρήσετε μέ τό μοιρογνωμόνιον τό μέγεθός των καί νά ἐλέγξετε ἄν ἰσχύουν μέ ἀρκετά καλήν προσέγγισιν αἱ σχέσεις $α_1 + α_2 = 90^\circ$ καί $β_1 + β_2 = 90^\circ$.

2) Νά κατασκευάσετε μέ κανόνα καί διαβήτην ἕνα ἰσόπλευρον τρίγωνον μέ μῆκος πλευρᾶς 40 mm. Ἔπειτα μέ μετρήσεις καταλλήλων στοιχείων τοῦ σχεδιασμένου τριγώνου νά εὕρετε τήν $εφ60^\circ$ καί τήν $εφ30^\circ$, ἐννοεῖται κατά προσέγγισιν. Νά παραβάλετε τέλος τά ἐξαγόμενά σας μέ τάς τιμάς, πού παρέχει ὁ πίναξ ἐφαπτομένων διά τάς $εφ60^\circ$ καί $εφ30^\circ$.

3) Χρησιμοποιοῦντες τό Πυθαγόρειον θεώρημα νά δείξετε ὅτι τό ὕψος υ εἰς ἕνα ἰσόπλευρον τρίγωνον μέ πλευράν α εἶναι $\frac{α\sqrt{3}}{2}$. Ἐξ αὐτοῦ νά συμπεράνετε ὅτι ἡ ἀκριβής τιμή τῆς $εφ60^\circ$ καί τῆς $εφ30^\circ$ εἶναι $\sqrt{3}$ καί $1/\sqrt{3} = \sqrt{3}/3$ ἀντιστοίχως. Τέλος, ἀφοῦ ὑπολογίσετε τήν $\sqrt{3}$ μέ προσέγγισιν ἑνός χιλιοστοῦ, νά παραβάλετε τάς τιμάς πού προκύπτουν διά τήν $εφ60^\circ$ καί $εφ30^\circ$ μέ τάς ἀντιστοίχους τιμάς τοῦ

πίνακος ἐφαπτομένων.

4) Νά κατασκευάσετε εἰς χιλιοστομετρικόν χαρτί τά ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ διά τά ὁποῖα εἶναι $\hat{A} = 90^\circ$ καί

1ον $\varepsilon\varphi\hat{B} = \frac{3}{5}$ καί $(B\Gamma) = 75$ mm

2ον $\varepsilon\varphi\hat{B} = \frac{5}{2}$ καί $(A\Gamma) = 39$ mm

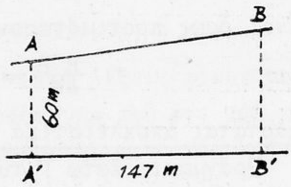
3ον $\varepsilon\varphi\hat{B} = 2$ καί $(AB) = 48$ mm

4ον $\varepsilon\varphi\hat{B} = 0.5$ καί $(AB) = 65$ mm.

5) Νά κατασκευασθοῦν εἰς χιλιοστομετρικόν χαρτί ἰσοσκελῆ τρίγωνα ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) μέ τά ἀκόλουθα δεδομένα:

1ον βάσις $(B\Gamma) = 58$ mm καί $\varepsilon\varphi\hat{B} = \frac{5}{3}$

2ον ὕψος $(A\Delta) = 71$ mm καί $\varepsilon\varphi\frac{1}{2}\hat{A} = \frac{2}{5}$.



(Σχέδ. 106)

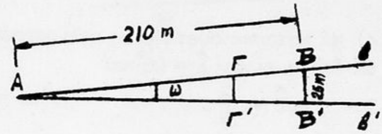
6) Ἡ μεσαία γραμμή ΑΒ (σχ. 106) ἑνός δρόμου εἶναι εὐθεῖα· ἡ γωνία κλίσεως, ἄρα καί ἡ κλίσις, τοῦ δρόμου εἰς ὅλα τά σημεῖα τῆς γραμμῆς αὐτῆς εἶναι τότε ἡ ἰδία (εἶναι σταθερά). Ἄς ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι ἡ κλίσις αὐτή εἶναι 8 ‰. 1ον Νά εὕρετε τότε μέ τήν βοήθειαν τοῦ πίνακος τῶν ἐφαπτομένων ποία εἶναι κατά προσέγγισιν ἡ γωνία κλίσεως τοῦ δρόμου. 2ον Ἄς εἶναι Α′ καί Β′ αἱ προβολαί τῶν σημείων Α καί Β ἐπάνω εἰς ἕνα ὁριζόντιον ἐπίπεδον καί τό ὑψόμετρον Α′Α, ὡς πρός τό ἐπίπεδον αὐτό, τοῦ χαμηλοτέρου σημείου Α, 60 m. Ἐάν ἡ ὁριζοντία ἀπόστασις Α′Β′ εἶναι 147 m, πόσον εἶναι τό ὑψόμετρον τοῦ σημείου Β ὡς πρός τό θεωρούμενον ὁριζόντιον ἐπίπεδον;

§ 2. Τό ἡμίτονον καί τό συνημίτονον ὀξείας γωνίας.

2.1. Πρόβλημα. Νά ευρεθῆ ἡ γωνία κλίσεως ω ἑνός εὐθυγράμμου δρόμου, ἐάν ἡ ἀπόστασις ΑΒ (σχ. 107) μεταξύ δύο σημείων Α καί Β τῆς μεσαίας γραμμῆς του εἶναι 210 m καί τά ὑψόμετρα τῶν Α καί Β ὡς πρός τό ὁριζόντιον ἐπίπεδον, πού περνᾶ ἀπό τό Α, εἶναι ἀντιστοίχως 0 m καί 25 m.

Μετροῦντες μέ τό μοιρογνωμόνιον εἰς τό ὑπό κλίμακα $\frac{1}{5000}$

σχέδιον 107 τήν γωνίαν ω εὑρίσκομεν γραφικῶς τήν ἀπάντησιν: $\omega \simeq 6^{\circ}30'$. Διά μίαν ἀκριβεστέραν ἀριθμητικήν ἐπίλυσιν τοῦ προβλήματος δέν ἠμποροῦμεν νά χρησιμοποιήσωμεν τήν ἐφαπτομένην:



(Σχέδ. 107)

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{B'B}{AB'} ,$$

διότι ἀγνοοῦμεν τό μῆκος AB'. Θά ἠμπορούσαμεν βέβαια νά τό ὑπολογίσωμεν ἀπό τά δεδομένα B'B καί AB ἐπί τῇ βάσει τοῦ Πυθαγορείου θεωρήματος:

$$AB'^2 = \sqrt{AB^2 - B'B^2} ,$$

εἶναι ὅμως προτιμότερον νά σκεφθῶμεν ὡς ἑξῆς: Ὁ λόγος

$$\frac{B'B}{AB} = \frac{25}{210} \simeq 0,119$$

ἐξαρτᾶται ἀποκλειστικά ἀπό τό μέγεθος τῆς γωνίας ω.

Πράγματι, ἔστω Γ τυχόν σημεῖον τῆς ἡμιευθείας Aβ διάφορον ἀπό τό A καί τό B, καί Γ' ἡ προβολή του ἐπάνω εἰς τήν ἡμιευθεῖαν Aβ'. Τά ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΓ'Γ καί AB'B εἶναι ὅμοια, κατά συνέπειαν ἰσχύει ἡ ἰσότης

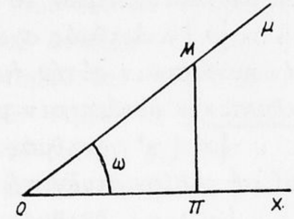
$$\frac{B'B}{AB} = \frac{\Gamma'\Gamma}{A\Gamma} ,$$

ἀπό τήν ὁποίαν συμπεραίνομεν ὅτι ὁ λόγος $\frac{B'B}{AB}$ ἐξαρτᾶται ἀπό τό μέγεθος τῆς γωνίας ω καί μόνον.

Ἠμποροῦμεν λοιπόν νά καταρτίσωμεν ἕνα πίνακα τῶν τιμῶν τοῦ λόγου $\frac{B'B}{AB}$ διά τάς διαφόρους τιμάς τῆς ὀξείας γωνίας ω καί νά χρησιμοποιήσωμεν κατόπιν τόν πίνακα αὐτόν διά νά προσδιορίσωμεν τήν ζητουμένην εἰς τό ἀνωτέρω πρόβλημα γωνίαν ω ἀπό τόν ὑπολογισμ νον λόγον 0,119.

2.2. Ἡμίτονον ὀξείας γωνίας. Ἔστω (σχ. 108) $\sphericalangle(Ox, O\mu)$ μία ὀξεῖα γωνία. Ἐπάνω εἰς τήν πλευράν της Oμ παίρνομεν ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖον M διάφορον ἀπό τό O καί χαράσσομεν τήν κάθετον MΠ πρός τήν ἄλλην πλευράν. Ὅπως εἴδαμεν, ὁ λόγος $\frac{\Pi M}{OM}$

δέν ἐξαρτᾶται ἀπό τήν θέσιν τοῦ σημείου Μ ἐπάνω εἰς τήν ἡμιευθεῖαν Ομ καί εἶναι ἕνας ἀριθμός ≥ 0 καί < 1, διότι $0 \leq ΠΜ < \overline{ΟΜ}$. Ὥστε εἰς τήν δεδομένην ὀξεῖαν γωνίαν $(\widehat{Οx, Ομ})$ ἀντιστοιχεῖ ἕνας ἐντελῶς ὡρισμένος ἀριθμός, ἡ τιμή τοῦ λόγου $\frac{ΠΜ}{ΟΜ}$, καί εἰς δύο ἴσας ὀξείας γωνίας ἀντιστοιχεῖ προφανῶς ὁ ἴδιος ἀριθμός.



(Σχέδ. 108)

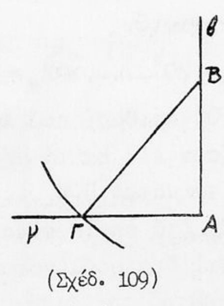
Ὁ ἀριθμός αὐτός, πού εἶναι ≥ 0 καί < 1, λέγεται ἡμίτονον τῆς γωνίας $\sphericalangle(Οx, Ομ)$ καθώς καί ἡμίτονον τοῦ μέτρου της ω, σημειώνεται δέ ἔτσι:

ημ $\sphericalangle(Οx, Ομ) =$ ημω ἤ, διεθνῶς, sin $\sphericalangle(Οx, Ομ) = \sin ω$,

ὅπου sin εἶναι συντομογραφία τῆς λατινικῆς λέξεως sinus πού σημαίνει κοιλότης . Π.χ. εἰς τό παράδειγμα τοῦ σχ. 108, εἰς τό ὁποῖον $ω = 36°$, εὑρίσκομεν μέ μετρήσεις:

$$ημ \sphericalangle(Οx, Ομ) = ημ36° = \frac{20 \text{ mm}}{34 \text{ mm}} \simeq 0,588 .$$

Ἀντιστρόφως, ἔστω τώρα λ ἕνας ὁποιοσδήποτε ἀριθμός ≥ 0 καί < 1, π.χ. $λ = \frac{3}{4}$. Ἐπάνω εἰς τήν πλευράν Αβ μιᾶς ὀρθῆς γωνίας $\sphericalangle(Αβ, Αγ)$ (βλ. σχ. 109) παίρνομεν ἕνα μῆκος ΑΒ , π.χ. $ΑΒ = 3 \cdot 7 = 21$ mm. Κατόπιν, μέ κέντρον τό Β καί μέ ἄνοιγμα διαβήτου ἴσον πρός $4 \cdot 7 = 28$ mm χαράσσομεν περιφέρειαν καί ἔστω Γ τό σημεῖον ὅπου αὐτή τέμνεται ἀπό τήν ἡμιευθεῖαν Αγ. Ἡ γωνία $\widehat{ΑΓΒ}$ ἔχει σύμφωνα μέ τήν κατασκευήν της, ἡμίτονον $= \frac{ΑΒ}{ΓΒ} = \frac{21}{28} = \frac{3}{4}$.



(Σχέδ. 109)

Ὥστε εἰς κάθε ὀξεῖαν γωνίαν (μέ μέτρον ω°) ἀντιστοιχεῖ ἕνας ὡρισμένος ἀριθμός ≥ 0 καί < 1 (ὁ λ = ημω°) · ἀντιστρόφως, κάθε ἀριθμός $λ \geq 0$ καί < 1 εἶναι ἀντίστοιχος μιᾶς ὀξείας γωνίας ὡρισμένου μεγέθους. Ἡ ἀντιστοιχία αὐτή εἶναι λοιπόν μία συνάρτησις μέ πεδίον ὁρισμοῦ τό σύνολον τῶν ὀξειῶν γωνιῶν καί μέ πεδίον τιμῶν τό σύνολον ἀριθμῶν

$$\{\lambda \mid \lambda \text{ ἀριθμός σχετικός } \geq 0 \text{ καί } < 1\}.$$

Τήν συνάρτησιν αὐτήν ἠμποροῦμεν νά τήν θεωρήσωμεν καί ὡς ἀριθμητικήν συνάρτησιν μέ πεδίον ὁρισμοῦ τό σύνολον

$$\{x^\circ \mid x^\circ \text{ ἀριθμός } \geq 0^\circ \text{ καί } < 90^\circ\}$$

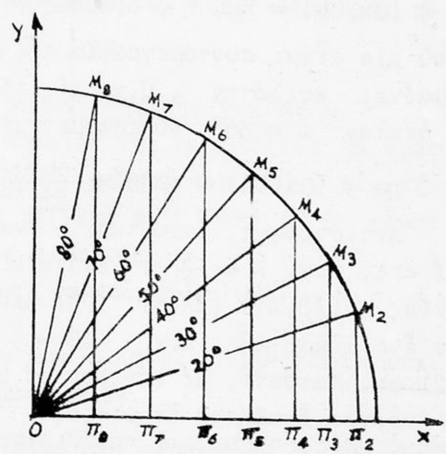
καί μέ πεδίον τιμῶν τό σύνολον

$$\{y \mid y \text{ ἀριθμός σχετικός } \geq 0 \text{ καί } < 1\}.$$

Συμβολικῶς γράφομεν :

$$x^\circ \xrightarrow{\text{ημ}} \text{ημ}\,x^\circ = y \quad , \quad (0^\circ \leq x^\circ < 90^\circ).$$

Ἡ συνάρτησις ημ$x^\circ = y$ εἶναι αὔξουσα, δηλ. ὅταν τό x° αὐξάνη, αὐξάνει καί ἡ ἀντίστοιχος τιμή τοῦ y. Αὐτό φαίνεται καθαρά εἰς τό σχ. 110, ὅπου μέ κέντρον τό O καί μέ ἀκτῖνα 50 mm ἐχαράξαμεν τεταρτοκύκλιον καί εἰς αὐτό μίαν σειράν ἐπικέντρων γωνιῶν $\widehat{xOM_2} = 20^\circ, \ldots, \widehat{xOM_8} = 80^\circ$.



(Σχέδ. 110)

Οἱ ἀριθμοί πού ἐκφράζουν εἰς mm τά μήκη τῶν τμημάτων $\Pi_2M_2, \ldots, \Pi_8M_8$ (τά ὁποῖα εἶναι $\perp Ox$) διαιρούμενοι διά 50 μᾶς δίδουν κατά προσέγγισιν ἑνός ἑκατοστοῦ τάς τιμάς τῶν ημ20°, ..., ημ80°. Ἔτσι εὑρίσκομεν:

x°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°
ημx°	0,34	0,50	0,64	0,76	0,86	0,94	0,98

2.3. Ἐπειδή ἡ προσέγγισις τήν ὁποίαν ἠμποροῦμεν νά ἐπιτύχαμεν εἰς τόν προσδιορισμόν τῶν ἡμιτόνων τῶν ὀξειῶν γωνιῶν μέ γραφικάς μεθόδους, ὅπως ἡ ἀνωτέρω, εἶναι ἀνεπαρκής , ἐχρησιμοποιήθησαν ἀριθμητικαί μέθοδοι ὑπολογισμοῦ ἀπό τά ἀνώτερα Μαθηματικά καί κατηρτίσθησαν πίνακες τῶν τιμῶν τῶν ἡμιτόνων μέ πολύ καλυτέραν προσέγγισιν. Εἰς τό τέλος τοῦ βιβλίου παραθέτομεν ἕνα τέτοιον πίνακα εἰς τόν ὁποῖον ἀναγράφονται μέ προσέγγισιν ἑνός μισοῦ χιλιοστοῦ αἱ τιμαί τῶν ἡμιτόνων διά τάς γωνίας πού προχωροῦν ἀπό τήν 0° ἕως εἰς τήν $89^\circ 50'$ κατά $10'$ κάθε φοράν. Ἰδού μερικά παραδείγματα ἀπό τά ὁποῖα φαίνεται ὁ τρόπος χρησιμοποιήσεως τοῦ πίνακος.

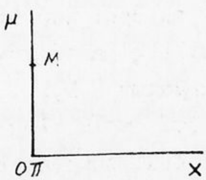
Ἀπό τήν γωνίαν νά εὑρεθῇ τό ἡμίτονον	Ἀπό τό ἡμίτονον νά εὑρεθῇ ἡ γωνία
$ημ25^\circ = 0{,}423$	$ημx = 0{,}353 \Longrightarrow x = 20^\circ 40'$
$ημ44^\circ 30' = 0{,}701$	$ημx = 0{,}799 \Longrightarrow x = 53^\circ$
$ημ65^\circ 12' \simeq ημ65^\circ 10' = 0{,}908$	$ημx = 0{,}440 \simeq 0{,}441 \Longrightarrow x = 26^\circ 10'$

Διά τό πρόβλημα τοῦ ἐδαφίου 2.1 ἔχομεν:

$$ημω = 0{,}119 \Longrightarrow ω = 6^\circ 50'.$$

Ἡ τιμή αὐτή τῆς γωνίας κλίσεως εἶναι φυσικά ἀκριβεστέρα ἀπό τήν τιμήν $6^\circ 30'$ πού ηὕραμεν γραφικῶς εἰς τήν ἀρχήν τοῦ ἐδ. 2.1.

Παρατήρησις. Ἡ κατασκευή τοῦ ἐδ. 2.2, μέσω τῆς ὁποίας ὡρίσαμεν τό ἡμίτονον ὀξείας γωνίας, ἠμπορεῖ νά ἐφαρμοσθῇ καί εἰς τήν περίπτωσιν μιᾶς ὀρθῆς γωνίας $\measuredangle(Ox, Oμ)$ (βλ. σχ. 111). Ἡ προβολή Π τοῦ Μ ἐπάνω εἰς τήν πλευράν Ox συμπίπτει τότε μέ τό Ο καί ὁ λόγος $\frac{ΠΜ}{ΟΜ} = \frac{ΠΜ}{ΠΜ}$ ἰσοῦται μέ 1 · διά τοῦτο θέτομεν $ημ90^\circ = 1$, πρᾶγμα πού ἐναρμονίζεται μέ τήν ἑξῆς παρατήρησιν : ὅταν μία μεταβλητή ὀξεῖα γωνία διατρέχῃ μίαν σειράν τιμῶν πού πλησιάζουν ὁλοένα περισσότερον πρός τό 90°, τότε τό



(Σχέδ. 111)

ἡμίτονόν της διατρέχει μίαν σειράν τιμῶν ὁλοένα πλησιεστέρων πρός τό 1. Προκειμένου διά τήν ἐφαπτομένην τά πράγματα εἶναι διάφορα.

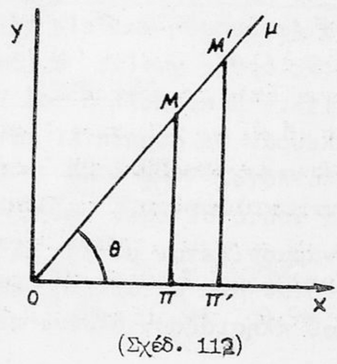
Ὁ λόγος $\frac{\Pi M}{O\Pi}$ χάνει τό ἀριθμητικόν νόημά του, ὅταν ἡ προβολή Π τοῦ Μ συμπίπτη μέ τό Ο · διά τοῦτο δέν εἶναι δυνατόν νά ὁρίσωμεν ἀριθμητικήν τιμήν διά τήν εφ90° βάσει τῆς γεωμετρικῆς κατασκευῆς πού ἐχρησιμοποιήσαμεν διά νά ὁρίσωμεν τήν ἐφαπτομένην ὀξείας γωνίας. Ἐξ ἄλλου, ὅσον περισσότερον μία μεταβλητή ὀξεῖα γωνία πλησιάζει πρός τήν ὀρθήν, τόσον μεγαλυτέρα γίνεται ἡ ἐφαπτομένη της ὑπερβαίνουσα κάθε ἐκ τῶν προτέρων δι δόμενον ἀριθμόν. Αὐτό μερικοί, ἰδίως παλαιότεροι συγγραφεῖς τό σημειώνουν συμβολικά ὡς ἑξῆς: εφ$90^\circ = \infty$ καί διαβάζουν : ἐφαπτομένη 90° μοιρῶν ἴσον ἄπειρον. Αὐτή ὅμως ἡ γραφή καί ἡ ἀνάγνωσις δέν χρησιμοποιοῦνται πλέον εἰς τά σύγχρονα Μαθηματικά .

<u>2.4</u>. <u>Συνημίτονον ὀξείας γωνίας</u>. <u>Πρόβλημα</u>. Τό διάνυσμα $\overrightarrow{OM}$ σχηματίζει μέ τόν ἄξονα Οx (σχ. 112) ὀξεῖαν γωνίαν $\theta = 55^\circ$ καί ἔχει μῆκος 32 m. Ποῖον εἶναι τό μῆκος τῆς προβολῆς του ΟΠ ἐπάνω εἰς τόν Οx ;

Διά νά ἐπιλύσωμεν μέ ἀριθμητικήν μέθοδον αὐτό τό πρόβλημα, ἀρκεῖ νά γνωρίζωμεν τήν τιμήν τοῦ λόγου $\frac{O\Pi}{OM}$. Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ τιμή αὐτή ἐξαρτᾶται ἀποκλειστικά ἀπό τό μέγεθος τῆς γωνίας $(\widehat{Ox, OM})$. Πράγματι, ἐάν πάρωμεν ἐπάνω εἰς τήν ἡμιευθεῖαν ΟΜ ἕνα ἄλλο τυχόν σημεῖον Μ΄ καί εἶναι Π΄ ἡ προβολή του ἐπάνω εἰς τόν Οx, τότε τά σχηματιζόμενα ὀρθογώνια τρίγωνα ΟΠΜ καί ΟΠ΄Μ΄ θά εἶναι ὅμοια καί θά ἰσχύη ἡ ἀναλογία

$$\frac{O\Pi}{OM} = \frac{O\Pi'}{OM'} .$$

Ἐπομένως, ἄν καταρτίσωμεν ἕνα πίνακα τῶν τιμῶν τοῦ λόγου



(Σχέδ. 112)

τούτου $\frac{ΟΠ}{ΟΜ}$ διά τάς διαφόρους τιμάς τῆς γωνίας θ, θά ἠμποροῦμεν νά τόν χρησιμοποιοῦμεν διά νά ἐπιλύσωμεν ἀριθμητικῶς τό παραπάνω πρόβλημα καθώς καί τά ὅμοιά του μέ ἄλλας τιμάς τῆς γωνίας θ. Εἶναι λοιπόν σκόπιμον νά δώσωμεν ἕνα ὄνομα εἰς τόν λόγον αὐτόν. Καί ἔτσι ὁδηγούμεθα εἰς τόν ἀκόλουθον ὁρισμόν.

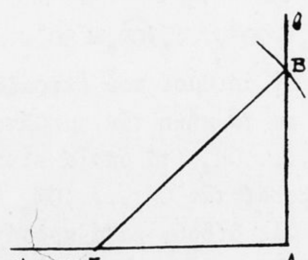
Συνημίτονον τῆς ὀξείας γωνίας $(\widehat{Ox,Oμ})$ καλεῖται ὁ λόγος $\frac{ΟΠ}{ΟΜ}$ τῆς προβολῆς ΟΠ ἑνός τμήματος ΟΜ τῆς μιᾶς πλευρᾶς ἐπάνω εἰς τήν ἄλλην πλευράν πρός τό τμῆμα ΟΜ.

Ὁ λόγος αὐτός εἶναι ἕνας ἀριθμός >0 καί ≤ 1, διότι $0 < ΟΠ \leq ΟΜ$. Ἡ ἰσότης $ΟΠ = ΟΜ$ ἰσχύει, ὅταν ἡ γωνία $\sphericalangle(\widehat{Ox,Oμ})$ εἶναι μηδενική, ἑπομένως τό συνημίτονον τῆς μηδενικῆς γωνίας ἰσοῦται μέ 1. Τό συνημίτονον τῆς γωνίας $(\widehat{Ox,Oμ})$ μέ μέτρον $θ^\circ$ σημειώνεται συντόμως μέ τάς γραφάς :

$συν(\widehat{Ox,Oμ}) = συνθ^\circ$ καί, διεθνῶς , $\cos(\widehat{Ox,Oμ}) = \cos θ^\circ$,

ὅπου cos εἶναι συντομογραφία τῆς λατινικῆς λέξεως cosinus πού εἶναι σύνθετος ἀπό τάς λέξεις cum = σύν καί sinus.

Ὅπως εἰς κάθε ὀξεῖαν γωνίαν $θ^\circ$ ἀντιστοιχεῖ ἕνας ὡρισμένος ἀριθμός $λ > 0$ καί ≤ 1, ὁ $συνθ^\circ$, ἔτσι καί ἀντιστρόφως, εἰς κάθε δεδομένον ἀριθμόν $λ > 0$ καί ≤ 1 ἀντιστοιχεῖ μία ὀξεῖα γωνία ὡρισμένου μεγέθους ἡ ὁποία ἔχει ὡς συνημίτονον τόν δοθέντα ἀριθμόν. Π.χ. μία γωνία πού ἔχει συνημίτονον τόν ἀριθμόν $λ = \frac{3}{4}$ κατασκευάζεται ὡς ἑξῆς (σχ.113): Ἐπάνω εἰς τήν πλευράν Αγ τῆς ὀρθῆς γωνίας $(\widehat{Αβ, Αγ})$ παίρνομεν κατ' ἐλευθέραν ἐκλογήν ἕνα μῆκος ΑΓ, ἔστω τό $ΑΓ = 3\cdot 1$ cm $= 3$ cm. Κατόπιν, μέ κέντρον τό Γ καί μέ ἄνοιγμα διαβήτου ἴσον πρός $4\cdot 1$ cm $= 4$ cm χαράσσομεν περιφέρειαν καί ἔστω Β τό σημεῖον τῆς τομῆς της μέ τήν ἡμιευθεῖ-



(Σχέδ. 113)

αν Αβ. Ἡ ὀξεῖα γωνία $\widehat{A\Gamma B}$ ἔχει τότε

$$\text{συνημίτονον} = \frac{\Gamma A}{\Gamma B} = \frac{3\,cm}{4\,cm} = \frac{3}{4}\ .$$

2.5. Σύμφωνα μέ τά ἀνωτέρω τό συνημίτονον εἶναι μία συνάρτησις μέ πεδίον ὁρισμοῦ τό σύνολον τῶν ὀξειῶν γωνιῶν καί μέ πεδίον τιμῶν τό σύνολον ἀριθμῶν $\{\lambda \mid \lambda$ ἀριθμός σχετικός >0 καί $\leqslant 1\}$. Ἐάν μετρήσωμεν τάς ὀξείας γωνίας εἰς μοίρας, τότε ἡ συνάρτησις γίνεται ἀριθμητική μέ πεδίον ὁρισμοῦ τό σύνολον

$$\{x^\circ \mid x^\circ \ \text{ἀριθμός} \geqslant 0^\circ \ \text{καί} < 90^\circ\}$$

καί μέ πεδίον τιμῶν τό σύνολον

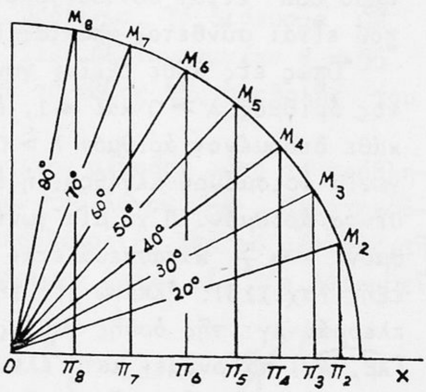
$$\{y \mid y \ \text{ἀριθμός} \leqslant 1 \ \text{καί} > 0\}.$$

Συμβολικῶς γράφομεν:

$$x^\circ \xrightarrow{\text{συν}} \text{συν}x^\circ = y\ , \quad (0^\circ \leqslant x^\circ < 90^\circ).$$

Ἡ συνάρτησις συν$x^\circ = y$ εἶναι φθίνουσα, δηλαδή ὅταν τό x° αὐξάνη, τό συνx° ἐλαττώνεται. Αὐτό φαίνεται σαφῶς εἰς τό σχ. 114, εἰς τό ὁποῖον μέ κέντρον τό Ο καί μέ ἀκτῖνα 50 mm ἐχαράξαμεν τεταρτοκύκλιον καί εἰς αὐτό μίαν σειράν ἐπικέντρων γωνιῶν

$\widehat{xOM_2} = 20^\circ, \ldots, \widehat{xOM_8} = 80^\circ$.



(Σχέδ. 114)

Οἱ ἀριθμοί πού ἐκφράζουν εἰς mm τά μήκη τῶν τμημάτων $O\Pi_2, \ldots, O\Pi_8$ (τά ὁποῖα εἶναι προβολαί τῶν $OM_2, \ldots, OM_8$ ἐπάνω εἰς τήν Ox), διαιρούμενοι διά 50, μᾶς δίδουν κατά προσέγγισιν ἑνός ἑκατοστοῦ τάς τιμάς τῶν συν20°,...,συν80°. Ἔτσι εὑρίσκομεν:

x°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°
συνx°	0,94	0,87	0,77	0,64	0,50	0,34	0,17

2.6. Διά νά προσδιορίσωμεν άκριβέστερα τάς τιμάς τῶν συνημιτόνων διαθέτομεν ἀριθμητικάς μεθόδους πού διδάσκονται εἰς τά 'Ανώτερα Μαθηματικά. Όπως ἔγινε διά τάς ἐφαπτομένας καί τά ἡμίτονα, δίδομεν εἰς τό τέλος τοῦ βιβλίου ἕνα πίνακα πού παρέχει μέ προσέγγισιν μισοῦ χιλιοστοῦ τά συνημίτονα τῶν γωνιῶν ἀπό 0° ἕως $89^\circ 50'$ ἀνά $10'$. Ὁ τρόπος χρήσεως τοῦ πίνακος γίνεται φανερός εἰς τά ἀκόλουθα παραδείγματα.

'Από τήν γωνίαν νά εὑρεθῆ τό συνημίτονον	'Από τό συνημίτονον νά εὑρεθῆ ἡ γωνία
$\sigma\upsilon\nu 67^\circ = 0,391$	$\sigma\upsilon\nu x = 0,334 \Longrightarrow x = 70^\circ 30'$
$\sigma\upsilon\nu 42^\circ 20' = 0,739$	$\sigma\upsilon\nu x = 0,707 \Longrightarrow x = 45^\circ$
$\sigma\upsilon\nu 35^\circ 47' \simeq \sigma\upsilon\nu 35^\circ 50' = 0,811$	$\sigma\upsilon\nu x = 0,964 \Longrightarrow x \simeq 15^\circ 20'$

Ἄς ἐπιλύσωμεν τώρα μέ τήν βοήθειαν τοῦ πίνακος τούτου τό πρόβλημα τοῦ ἐδ. 2.4. Πρός τοῦτο ἦτο ἀρκετόν νά γνωρίζωμεν τόν λόγον

$$\frac{O\Pi}{OM} = \sigma\upsilon\nu 55^\circ$$

'Από τόν πίνακα εὑρίσκομεν $\sigma\upsilon\nu 55^\circ = 0,574$. Κατά συνέπειαν

$$O\Pi = OM\cdot 0,574 = 32\cdot 0,574 \simeq 18,37 \text{ m}.$$

Ἡ γραφική ἐπίλυσις μέ μέτρησιν τοῦ τμήματος ΟΠ εἰς τό ὑπό κλίμακα 1/1000 σχέδιον 112 θά μᾶς ἔδιδε τήν λύσιν : $O\Pi = 1000\cdot 19,5 \text{ mm} = 19,5 \text{ m}$.

Ἡ λύσις αὐτή προσεγγίζει ἀνεπαρκῶς τήν ἀκριβῆ, διότι παρουσιάζει ἕνα ἀναλογικόν σφάλμα περίπου ἴσον μέ

$$\frac{19,5-18,4}{18} = \frac{1,1}{18} \simeq 0,06 \text{, δηλαδή } 6\ \%.$$

<u>Παρατήρησις</u>. Ὅταν μία μεταβλητή ὀξεῖα γωνία διατρέχῃ μίαν σειράν τιμῶν πού πλησιάζουν ὁλοένα περισσότερον πρός τήν ὀρθήν γωνίαν, τότε τό συνημίτονόν της διατρέχει μίαν σειράν τιμῶν ὁλοένα πλησιεστέρων πρός τό 0. 'Εξ ἄλλου ὁ λόγος $\frac{O\Pi}{OM}$ εἰς τήν περίπτωσιν τῆς ὀρθῆς γωνίας, ὁπότε τό σημεῖον Π συμπίπτει μέ τό

σημεῖον Ο (βλ. σχ. 111), λαμβάνει τήν τιμήν $\frac{00}{0M} = 0$. Διά τοῦτο θέτομεν $συν90^\circ = 0$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Νά σχεδιάσετε εἰς χιλιοστομετρικόν χαρτί μέ τό μοιρογνωμόνιον μίαν γωνίαν 43° καί νά προσδιορίσετε γραφικῶς τό ημ43° καί τό συν43°. Ἔπειτα νά παραβάλετε τά ἐξαγόμενά σας μέ τάς τιμάς πού δίδουν οἱ πίνακες ἡμιτόνων καί συνημιτόνων εἰς τό τέλος τοῦ βιβλίου.

2) Νά κατασκευάσετε τέσσαρας ὀξείας γωνίας μέ τά ἀκόλουθα ἡμίτονα:

$ημα_1 = \frac{1}{3}$, $ημα_2 = \frac{2}{5}$, $ημα_3 = \frac{3}{5}$, $ημα_4 = \frac{5}{6}$

καί τέσσαρας ὀξείας γωνίας μέ τά ἀκόλουθα συνημίτονα:

$συνβ_1 = \frac{1}{3}$, $συνβ_2 = \frac{2}{5}$, $συνβ_3 = \frac{3}{5}$, $συνβ_4 = \frac{5}{6}$.

Κατόπιν νά μετρήσετε μέ τό μοιρογνωμόνιον τά μεγέθη των καί νά ἐλέγξετε ἄν ἰσχύουν μέ ἀρκετήν προσέγγισιν αἱ σχέσεις:

$α_1 + β_1 = 90^\circ$, $α_2 + β_2 = 90^\circ$, $α_3 + β_3 = 90^\circ$, $α_4 + β_4 = 90^\circ$.

3) Νά κατασκευάσετε εἰς χιλιοστομετρικόν χαρτί τά ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ διά τά ὁποῖα εἶναι $\hat{Α} = 90^\circ$ καί

1ον $ημ\hat{Β} = \frac{4}{5}$ καί ΒΓ = 62 mm

2ον $ημ\hat{Β} = \frac{2}{5}$ καί ΑΒ = 35 mm

3ον $ημ\hat{Β} = 0,75$ καί ΑΓ = 56 mm.

4) Νά κατασκευάσετε εἰς χιλιοστομετρικόν χαρτί τά ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ διά τά ὁποῖα εἶναι $\hat{Α} = 90^\circ$ καί

1ον $συν\hat{Γ} = 0,5$ καί ΑΓ = 47 mm

2ον $συν\hat{Γ} = 0,75$ καί ΑΒ = 62 mm

3ον $συν\hat{Γ} = \frac{2}{5}$ καί ΒΓ = 49 mm.

5) Νά κατασκευασθοῦν εἰς χιλιοστομετρικόν χαρτί τά ἰσοσκελῆ τρίγωνα ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) μέ τά ἑξῆς δεδομένα:

1ον βάσις ΒΓ = 46 mm καί $ημ\hat{Β} = 0,7$

2ον ὕψος ΑΔ = 63 mm καί $συν\hat{Β} = \frac{3}{5}$.

6) Νά κατασκευάσετε ἕνα ἰσοσκελές ὀρθογώνιον τρίγωνον καί μέ χρῆσιν τοῦ Πυθαγορείου θεωρήματος νά δείξετε ὅτι αἱ ἀκριβεῖς τιμαί τοῦ ημ45° καί συν45° εἶναι:

$$ημ45^\circ = συν45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ποῖαι εἶναι αἱ τιμαί των κατά προσέγγισιν ἑνός δεκάκις χιλιοστοῦ.

7) Νά κατασκευάσετε ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΓΒ μέ τά δεδομένα $\hat{A} = 90°$ καί $\hat{\Gamma} = 60°$. Ἔστω Ο τό μέσον τῆς ὑποτεινούσης ΒΓ. Νά δείξετε ὅτι ΑΟ = ΟΓ = ΓΑ καί ἑπομένως $ΑΓ = \frac{1}{2}$ ΒΓ. Κατόπιν τούτου νά δείξετε ὅτι

$$ημ30° = \frac{1}{2} \quad , \quad συν30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad ημ60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad συν60° = \frac{1}{2} \; .$$

8) Νά διαπιστώσετε ἀπό τούς πίνακας τῶν ἡμιτόνων καί συνημιτόνων ὅτι

$$ημx° = συν(90° - x°) \quad , \quad διά \quad 0° < x° < 90° .$$

Προσπαθήσατε νά δικαιολογήσετε αὐτήν τήν ἰσότητα ἐφαρμόζοντες τόν ὁρισμόν τοῦ ἡμιτόνου εἰς τήν γωνίαν $\hat{B}$ καί τόν ὁρισμόν τοῦ συνημιτόνου εἰς τήν γωνίαν $\hat{\Gamma}$ ἑνός ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ μέ $(\hat{A}) = 90°$ καί $(\hat{B}) = x°$.

9) Ἀφοῦ διαπιστώσετε ὅτι

$$(ημ45°)^2 + (συν45°)^2 = 1 \; , \qquad (ημ30°)^2 + (συν30°)^2 = 1 \; ,$$

προσπαθήσατε νά δείξετε ὅτι ἰσχύει γενικῶς ἡ σχέσις

$$(ημx°)^2 + (συνx°)^2 = 1 \quad διά \; 0° < x° < 90°$$

ἐφαρμόζοντες τούς ὁρισμούς τοῦ ἡμιτόνου καί τοῦ συνημιτόνου εἰς τήν γωνίαν $\hat{B}$ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως καί κάμνοντες χρῆσιν τοῦ Πυθαγορείου θεωρήματος.

10) Ἀφοῦ διαπιστώσετε ὅτι

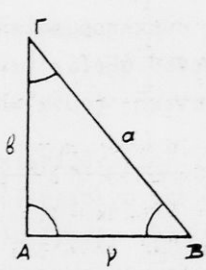
$$εφ45° = \frac{ημ45°}{συν45°} \quad , \quad εφ30° = \frac{ημ30°}{συν30°} \quad , \quad εφ60° = \frac{ημ60°}{συν60°} \; ,$$

προσπαθήσατε νά δείξετε ὅτι ἰσχύει γενικῶς ἡ σχέσις

$$εφx° = \frac{ημx°}{συνx°} \quad , \; διά \; 0° < x° < 90° ,$$

ἐφαρμόζοντες τούς ὁρισμούς τοῦ ἡμιτόνου καί τοῦ συνημιτόνου εἰς μίαν γωνίαν $\sphericalangle(Ox, Oμ)$ μέ μέτρον x°

§ 3. Μερικαί ἐφαρμογαί



(Σχέδ. 115)

3.1. Ἐπίλυσις ὀρθογωνίων τριγώνων. Ἄς εἶναι τό τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 115) ὀρθογώνιον εἰς τό Α. Διά νά ἁπλουστεύσωμεν τόν συμβολισμόν μας, συμφωνοῦμεν νά παριστάνωμεν τά μέτρα τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου μέ τά γράμματα Α, Β, Γ τῶν κορυφῶν των καί τά μήκη τῶν ἀπέναντι πλευρῶν μέ τά ἀντίστοιχα μικρά γράμματα

$$\alpha = B\Gamma \quad , \quad \beta = \Gamma A \quad , \quad \gamma = AB.$$

Ὕστερα ἀπό ὅσα εἴπαμεν εἰς τάς §§1 καί 2 εἶναι εὔκολον νά συμπεράνωμεν τάς ἀκολούθους σχέσεις εἰς τό ἀνωτέρω τυχόν ὀρθογώνιον τρίγωνον:

I) $\quad εφB = \frac{\beta}{\gamma} \quad , \quad εφ\Gamma = \frac{\gamma}{\beta}$

II) $\quad ημB = \frac{\beta}{\alpha} \quad , \quad ημ\Gamma = \frac{\gamma}{\alpha}$

III) $\quad συνB = \frac{\gamma}{\alpha} \quad , \quad συν\Gamma = \frac{\beta}{\alpha}$

Ἤτοι μέ λόγια :

I) Ἡ ἐφαπτομένη ὀξείας γωνίας ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι ἴση μέ τόν λόγον τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς πρός τήν προσκειμένην πλευράν.

II) Τό ἡμίτονον ὀξείας γωνίας ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι ἴσον μέ τόν λόγον τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς πρός τήν ὑποτείνουσαν.

III) Τό συνημίτονον ὀξείας γωνίας ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι ἴσον μέ τόν λόγον τῆς προσκειμένης πλευρᾶς πρός τήν ὑποτείνουσαν.

Παρατήρησις. Ἀπό τάς σχέσεις II) καί III) προκύπτει τό ἀκόλουθον συμπέρασμα, ἐπειδή $B = 90° - \Gamma$ καί $\Gamma = 90° - B$ (βλ. καί Ἄσκ. 8 τῆς προηγουμένης §):

Τό ἡμίτονον ὀξείας γωνίας εἶναι ἴσον μέ τό συνημίτονον τῆς συμπληρωματικῆς γωνίας $\big(ημx° = συν(90° - x°)\big)$ καί τό συνημίτονον ὀξείας γωνίας εἶναι ἴσον μέ τό ἡμίτονον τῆς συμπληρωματικῆς $\big(συνx° = ημ(90° - x°)$ διά $0° < x° < 90°\big)$.

3.2. Τριγωνομετρικοί ὑπολογισμοί εἰς τό ὀρθογώνιον τρίγωνον.

Ἀπό τάς σχέσεις I) , II) καί III) ἕπονται εὔκολα τά ἑξῆς:

1ον. Ἐάν γνωρίζωμεν τά μήκη δύο πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου ἠμποροῦμεν, χρησιμοποιοῦντες τούς πίνακας διά τάς ἐφαπτομένας, τά ἡμίτονα καί συνημίτονα, νά εὕρωμεν μέ ὑπολογισμούς τό μῆκος τῆς τρίτης πλευρᾶς καθώς καί τάς γωνίας τοῦ τριγώνου.

2ον. Ἐάν γνωρίζωμεν τό μῆκος μιᾶς πλευρᾶς καί τό μέτρον μιᾶς ὀξείας γωνίας ὀρθογωνίου τριγώνου, ἠμποροῦμεν μέ ὑπολογισμούς νά εὕρωμεν τά μήκη τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν καθώς καί τό μέτρον τῆς ἑτέρας ὀξείας γωνίας τοῦ τριγώνου.

Ἡ ἀνωτέρω ἐργασία ἐπεκράτησε νά λέγεται ἐπίλυσις τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου. Ἐπειδή δέ κατ' αὐτήν χρησιμοποιοῦνται οἱ ἀριθμοί ἡμίτονον, συνημίτονον καί ἐφαπτομένη γωνίας, πού ὡρίσθησαν ὡς λόγοι εὐθυγράμμων τμημάτων, διά τοῦτο εἰς τούς ἀριθμούς αὐτούς ἐδόθη τό κοινόν ὄνομα τριγωνομετρικοί λόγοι (ἤ ἀριθμοί) γωνίας.

Θά δώσωμεν τώρα μερικά παραδείγματα ἐπιλύσεως ὀρθογωνίων τριγώνων.

3.3. Πρόβλημα 1ον. Ἡ ὁριζόντιος ἀπόστασις δύο σημείων Α καί Β τοῦ ἐδάφους ἔχει εἰκόνα εἰς ἕνα τοπογραφικόν χάρτην μέ κλίμακα 1:2000 ἕνα εὐθύγοαμμον τμῆμα μήκους 4.5 cm. Τά σημεῖα Α καί Β ἔχουν ὑψόμετρον ὡς πρός τήν ὁριζόντιον ἐπιφάνειαν τῆς θαλάσσης 135 m καί 120 m ἀντιστοίχως. Νά εὑρεθῆ ἡ γωνία κλίσεως τοῦ δρόμου πού θά συνδέση εὐθυγράμμως τό σημεῖον Β μέ τό σημεῖον Α.

Ἐπίλυσις. Ἡ πραγματική ὁριζόντιος ἀπόστασις τῶν δύο σημείων Α καί Β εἶναι

$$2000 \cdot 4,5 \text{ cm} = 9000 \text{ cm} = 90 \text{ m}.$$

Ἡ διαφορά ὑψομέτρων τῶν δύο σημείων εἶναι

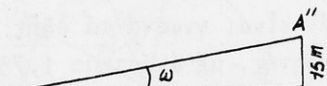
$$135 - 120 = 15 \text{ m}.$$

Ἐπομένως ἔχομεν νά προσδιορίσωμεν τήν ὀξεῖαν γωνίαν ω ἑνός ὀρθογωνίου τριγώνου Α΄Α΄΄Β΄ (σχ. 116) μέ τά δεδομένα

$B'A' = 90$ m, $A'A'' = 15$ m.

Αὐτό ἠμπορεῖ νά γίνη μέσω τῆς

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{A'A''}{A'B'} = \frac{15}{90} = 0,166\ldots$$



Ὁ πίναξ τῶν ἐφαπτομένων δίδει:

$$\varepsilon\varphi\omega = 0,166\ldots \simeq 0,167 \Longrightarrow \omega = 9^\circ 30'.$$

(Σχέδ. 116)

Ἄρα ἡ ζητουμένη γωνία κλίσεως εἶναι 9°30΄ (καί ἡ κλίσις τοῦ δρόμου 0,166,... ≃ 17 %).

3.4. Πρόβλημα 2ον. Ἐπάνω εἰς ἕνα εὐθύγραμμον δρόμον δύο σημεῖα Β καί Γ τῆς μεσαίας γραμμῆς του ἀπέχουν 148 m.

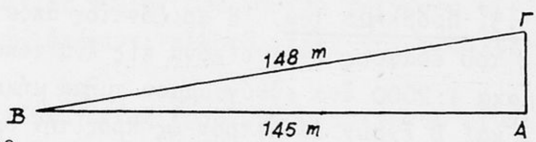
Ἡ ὁριζοντία ἀπόστασις τῶν δύο σημείων (δηλ. τό μῆκος τῆς προβολῆς τοῦ τμήματος ΒΓ ἐπάνω εἰς ὁριζόντιον ἐπίπεδον) εἶναι 145 m. Ποία εἶναι ἡ διαφορά τῶν ὑψομέτρων τῶν δύο σημείων ὡς πρός ἕνα ὁριζόντιον ἐπίπεδον ;

Ἐπίλυσις. Ὑποθέτοντες ὅτι Β εἶναι τό χαμηλότερον ἀπό τά δύο σημεῖα θά ἔχωμεν νά ἐπιλύσωμεν ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΓΒ (σχ. 117) μέ τά ἀκόλουθα δεδομένα:

$$A = 90°, \quad BA = 145 \text{ m}, \quad B\Gamma = 148 \text{ m}.$$

Προσδιορίζομεν πρῶτα τήν γωνίαν Β ἀπό τήν σχέσιν

$\sigma\upsilon\nu B = \frac{BA}{B\Gamma} = \frac{145}{148} \simeq 0,980.$



(Σχέδ. 117)

Μέ τήν βοήθειαν τῶν πινάκων τῶν συνημιτόνων καί τῶν ἐφαπτομένων εὑρίσκομεν:

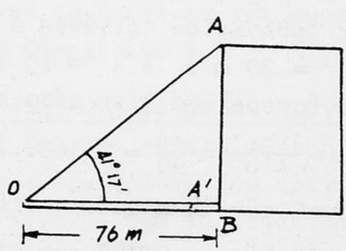
$$\sigma\upsilon\nu B = 0,980 \Longrightarrow B = 11^\circ 30' \Longrightarrow \varepsilon\varphi B = 0,203.$$

Ἠμποροῦμεν τώρα νά προσδιορίσωμεν τήν ζητουμένην διαφοράν ΑΓ ὑψομέτρων βάσει τῆς σχέσεως

$$\frac{A\Gamma}{BA} = \varepsilon\varphi B \Longrightarrow A\Gamma = BA \cdot \varepsilon\varphi B = 145 \cdot 0,203 \simeq 29,40 \text{ m}.$$

Ἀπάντησις: διαφορά ὑψομέτρων εἰς τά σημεῖα Γ καί Β = 29,40 m.

3.5. Πρόβλημα 3ον. Νά εὑρεθῆ τό ὕψος ΒΑ ἑνός κτιρίου (σχ. 118), ἐάν εἶναι γνωστά τά ἑξῆς: Παρατηρητής, μέ ἀνάστημα 1,73 m ἀπό τό ἔδαφος ἕως εἰς τόν ὀφθαλμόν του Ο, στέκεται εἰς ἀπόστασιν 76 m ὁριζοντίως ἀπό τό σημεῖον Β καί βλέπει τό σημεῖον Α κατά



(Σχέδ. 118

τήν όπτικήν γραμμήν ΟΑ πού σχηματίζει γωνίαν 41° 17΄ μέ τήν προβολήν της ΟΑ΄ είς όριζόντιον έπίπεδον.

'Επίλυσις. Τό ζητούμενον ὕψος ἰσοῦται μέ (Α΄Α+1,73)m. Διά νά εὕρωμεν τό μῆκος Α΄Α ἀρκεῖ νά γνωρίζωμεν τήν $\varepsilon\varphi\widehat{A'OA} = \frac{A'A}{OA'}$

'Από τόν πίνακα ἐφαπτομένων εὑρίσκομεν:

$$\varepsilon\varphi\widehat{A'OA} = \varepsilon\varphi 41^\circ 17' \simeq \varepsilon\varphi 41^\circ 20' = 0{,}880.$$

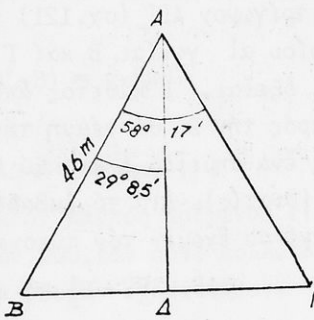
Κατά συνέπειαν:

$$A'A = OA' \cdot \varepsilon\varphi\widehat{A'OA} \simeq 76 \cdot 0{,}880 = 66{,}88 \text{ m}.$$

"Αρα:

$$\text{ζητούμενον ὕψος } BA = 66{,}88 + 1{,}73 = 68{,}61 \text{ m}.$$

3.6. Πρόβλημα 4ον. Είς ίσοσκελές τρίγωνον ΑΒΓ τό κοινόν μῆκος τῶν ἴσων πλευρῶν ΑΒ καί ΑΓ εἶναι 46m καί ἡ γωνία Α είς τήν κορυφήν ἔχει μέτρον 58°17΄. Νά εὑρεθῆ τό ὕψος ΑΔ καί ἡ βάσις ΒΓ τοῦ τριγώνου (σχ.119).



(Σχέδ. 119)

'Επίλυσις. Είς τό ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΔΒ δίδονται ἡ ὑποτείνουσα ΑΒ καί ἡ ὀξεῖα γωνία $\widehat{BA\Delta} = 29^\circ 8{,}5'$, ζητοῦνται αἱ δύο κάθετοι πλευραί ΑΔ καί $B\Delta = \frac{1}{2}B\Gamma$. "Εχομεν:

ΜΟ 158

$$A\Delta = AB \cdot \sigma\upsilon\nu 29^\circ 8{,}5' \simeq 46 \cdot \sigma\upsilon\nu 29^\circ 10' = 46 \cdot 0{,}873 \simeq 40{,}16 \text{ m} = \text{ὕψος}$$

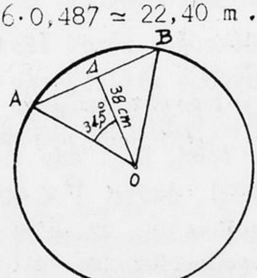
29,409

$$B\Delta = BA \cdot \eta\mu 29^\circ 8{,}5' \simeq 46 \cdot \eta\mu 29^\circ 10' = 46 \cdot 0{,}487 \simeq 22{,}40 \text{ m}.$$

"Αρα

$$\beta\acute{\alpha}\sigma\iota\varsigma\ B\Gamma = 44{,}80 \text{ m}.$$

3.6. Πρόβλημα 5ον. Νά εὑρεθῆ ἡ ἀκτίς κύκλου είς τόν ὁποῖον χορδή τόξου 69° ἀπέχει ἀπό τό κέντρον ἀπόστασιν 38cm.



(Σχέδ. 120)

'Επίλυσις. Είς τό ὀρθογώνιον τρίγωνον ΟΔΑ (σχ. 120) δίδονται μία κάθετος πλευρά ΟΔ = 38 cm καί ἡ προσκειμένη ὀξεῖα γωνία $\widehat{ΑΟΔ} = \frac{1}{2}\widehat{ΑΟΒ} = 34,5°$, ζητεῖται δέ ἡ ὑποτείνουσα ΟΑ. Ἔχομεν:

$$ΟΔ = ΟΑ \cdot συν 34,5° \Longrightarrow ΟΑ = \frac{ΟΔ}{συν 34,5°}$$

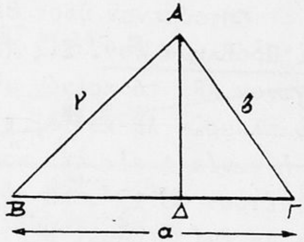
Ἀπό τούς πίνακας εὑρίσκομεν:

$$συν 34,5° = συν 34°\ 30' = 0,824 .$$

Ἄρα:

$$ΟΑ = \frac{38}{0,824} \simeq 46,10 \text{ cm} .$$

3.7. Ἐμβαδόν τριγώνου. Ἔστω τό τρίγωνον ΑΒΓ (σχ.121) τοῦ ὁποίου αἱ γωνίαι Β καί Γ εἶναι ὀξεῖαι. Ἡ κάθετος ἀπό τό Α πρός τήν ΒΓ θά τέμνη τήν ΒΓ εἰς ἕνα σημεῖον Δ μεταξύ Β καί Γ (διατί;). Διά τό ἐμβαδόν τοῦ τριγώνου ἔχομεν τόν τύπον:



(Σχέδ. 121)

$$εμβ.\ ΑΒΓ = \frac{1}{2}\ ΒΓ \cdot ΑΔ = \frac{1}{2}\ α \cdot ΑΔ .$$

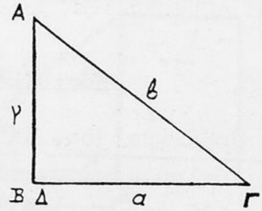
Ἀπό τά ὀρθογώνια τρίγωνα ΔΑΒ καί ΔΑΓ λαμβάνομεν:

$$ΑΔ = ΑΒ \cdot ημΒ = γ ημΒ \quad καί \quad ΑΔ = ΑΓ ημΓ = β ημΓ .$$

Ἄρα

$$εμβ.ΑΒΓ = \frac{1}{2}\ αγ ημΒ \quad καί \quad εμβ.ΑΒΓ = \frac{1}{2}\ αβ ημΓ . \qquad (Ι)$$

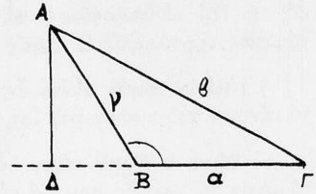
Οἱ τύποι αὐτοί ἐξακολουθοῦν νά ἰσχύουν καί εἰς τήν περίπτωσιν πού ἡ γωνία Β ἤ ἡ γωνία Γ εἶναι ὀρθή. Π.χ. ἐάν $\widehat{Β} = 90°$ (βλ. σχ. 122). ὁπότε $\widehat{Γ} < 90°$, θά εἶναι $ημΒ = 1$, $ΑΔ = ΑΒ = γ$ καί $ΑΔ = β ημΓ$, ἄρα



(Σχέδ. 122)

$$εμβ.ΑΒΓ = \frac{1}{2}\ αγ = \frac{1}{2}\ αγ ημΒ = \frac{1}{2}\ αβ ημΓ .$$

Εἰς τήν περίπτωσιν πού ἡ γωνία Β ἤ ἡ γωνία Γ εἶναι ἀμβλεῖα, ὁ ἕνας ἐκ τῶν δύο τύπων (I) δέν ἔχει νόημα, διότι τό ἡμίτονον ἀμβλείας γωνίας δέν ἔχει ὁρισθῆ ἀκόμη· ὁ ἕτερος τύπος ἰσχύει, ὅπως φαίνεται ἀμέσως ἀπό τό σχ. 123, ὅπου $\widehat{B} > 90$, ἄρα $\widehat{\Gamma} < 90°$, καί $A\Delta = \beta\eta\mu\Gamma$.



(Σχέδ. 123)

Εἰς ἀνωτέραν τάξιν θά προκύψη ἀπό τούς ὁρισμούς, πού θά δώσωμεν, ὅτι τό ἡμίτονον ἀμβλείας γωνίας ω ἰσοῦται μέ τό ἡμίτονον τῆς παραπληρωματικῆς της 180°- ω. Ἄν ληφθῆ αὐτό ὑπ' ὄψιν, θά ἔχωμεν

$$A\Delta = AB\cdot\eta\mu\widehat{\Delta BA} = \gamma\cdot\eta\mu(180°-B) = \gamma\cdot\eta\mu B$$

ἄρα καί πάλιν

$$\varepsilon\mu\beta.\,AB\Gamma = \frac{1}{2}\,B\Gamma\cdot A\Delta = \frac{1}{2}\,\alpha\gamma\eta\mu B\ .$$

Ἔτσι ἔχομεν γενικῶς: Τό ἐμβαδόν παντός τριγώνου εἶναι ἴσον μέ τό ἡμιγινόμενον δύο πλευρῶν του, ἐάν αὐτό πολλαπλασιασθῆ μέ τό ἡμίτονον τῆς γωνίας τήν ὁποίαν σχηματίζουν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Εἰς ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ($A = 90°$) γνωρίζομεν τήν κάθετον πλευράν $AB = 8$ dm καί τό ὕψος $AH = 4,8$ dm. Νά ὑπολογίσετε κάθε μίαν χωριστά ἀπό τάς ὀξείας γωνίας του ἀπό τά ἀνωτέρω δύο στοιχεῖα καί νά ἐλέγξετε κατά πόσον τό ἄθροισμά των ἰσοῦται μέ 90°.

2) Εἰς ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ δίδονται: $AB = 7$ m , $A\Gamma = 13$ m, $A = 40°$. Ἐάν ΓΗ εἶναι τό ὕψος τοῦ τριγώνου ἀπό τήν κορυφήν Γ, νά ὑπολογισθοῦν κατά σειράν τά μήκη τῶν τμημάτων ΑΗ , ΓΗ , ΒΗ , ἡ γωνία Β, τό μῆκος τῆς πλευρᾶς ΒΓ. Νά ὑπολογισθῆ ἐπίσης τό ἐμβαδόν τοῦ τριγώνου.

3) Δίδεται τρίγωνον μέ τά στοιχεῖα $B\Gamma = 17$ m , $B = 38°$, $\Gamma = 75°$. Ἐάν ΓΗ εἶναι τό ὕψος τοῦ τριγώνου ἀπό τήν κορυφήν Γ, νά ὑπολογισθοῦν μέ τήν κατάλληλον σειράν τά μήκη τῶν τμημάτων ΒΗ , ΓΗ , ΑΓ , ΑΗ , ΑΒ καθώς καί ἡ γωνία Α.

4) Εἰς ἕνα ὀρθογώνιον τραπέζιον ΑΒΓΔ εἶναι $\sphericalangle A = \sphericalangle \Delta = 90°$, $\varepsilon\varphi\widehat{\Gamma} = \frac{3}{4}$,

βάσις ΑΒ = 24 m, βάσις ΓΔ = 72 m. 'Εάν Β΄ εἶναι ἡ προβολή τοῦ σημείου Β ἐπάνω εἰς τήν ΓΔ, νά ὑπολογίσετε τά μήκη τῶν τμημάτων ΓΒ΄ , ΒΒ΄ = ΑΔ, τήν γωνίαν Γ, τό μῆκος τῆς πλευρᾶς ΒΓ καθώς καί τήν γωνίαν Β.

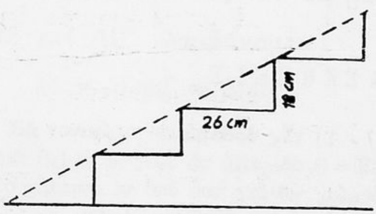
5) Πόσων μοιρῶν εἶναι ἕνα τόξον κύκλου, ὅταν ἡ χορδή του ἀπέχῃ 7,5 m ἀπό τό κέντρον τοῦ κύκλου καί ἔχῃ μῆκος 280 cm;

6) Βέλος κυκλικοῦ τόξου λέγεται τό τμῆμα πού ἑνώνει τό μέσον τοῦ τόξου μέ τό μέσον τῆς χορδῆς του. Νά εὑρεθῆ τό μῆκος τοῦ βέλους ἑνός τόξου 82° εἰς κύκλον ἀκτῖνος 4m.

7) Νά κατασκευασθῆ εἰς χιλιοστομετρικόν χαρτί τρίγωνον ΑΒΓ εἰς τό ὁποῖον ΑΒ = 78 mm , $εφΒ = \frac{5}{3}$, ΒΓ = 83 mm. 'Αφοῦ χαράξετε τό ὕψος ΑΗ, νά ὑπολογίσετε τριγωνομετρικῶς τό τμῆμα ΒΗ, τό ὕψος ΑΗ, τήν γωνίαν Γ καί τήν πλευράν ΑΓ. Ἔπειτα νά παραβάλετε τά ἐξαγόμενά σας μέ τά μέτρα πού εὑρίσκετε μετροῦντες εἰς τό σχέδιόν σας τήν γωνίαν Γ καί τά τμήματα ΒΗ , ΑΗ , ΑΓ.

8) Ὕψος τοῦ ἡλίου κατά τινα στιγμήν εἰς ἕνα τόπον ὀνομάζομεν τήν γωνίαν πού σχηματίζει μέ τήν προβολήν της ἐπάνω εἰς ὁριζόντιον ἐπίπεδον ἡ ὀπτική ἀκτίς ἀπό τό σημεῖον τῆς παρατηρήσεως πρός τό κέντρον τοῦ ἡλιακοῦ δίσκου. Ζητεῖται νά εὑρεθῆ τό ὕψος ἑνός κυπαρισσιοῦ πού ρίχνει ἐπάνω εἰς τό ὁριζόντιον ἐπίπεδον, τό ὁποῖον διέρχεται ἀπό τήν βάσιν του, σκιάν μήκους 65 m τήν στιγμήν κατά τήν ὁποίαν ὁ ἥλιος ἔχει ὕψος 38°40΄.

9) Μέχρι ποίου ὕψους φθάνει ξυλίνη μετακινητή σκάλα πού ἀκουμπᾶ ἐπάνω εἰς ἕνα τοῖχον, ἐάν ἡ γωνία κλίσεώς της πρός τό ὁριζόντιον ἐπίπεδον εἶναι 73°20΄ καί ἡ ἀπόστασις τῆς βάσεώς της ἀπό τήν βάσιν τοῦ τοίχου εἶναι 1,10 m; Πόσον εἶναι τό μῆκος τῆς σκάλας;



(Σχέδ. 124)

10) Μία εὐθεῖα κτιστή σκάλα ὁδηγεῖ ἀπό τό ἰσόγειον εἰς τόν πρῶτον ὄροφον οἰκίας. Τό κάθε σκαλοπάτι της ἔχει πλάτος 26 cm καί ὕψος 18 cm. α) Νά εὑρεθῆ ἡ γωνία κλίσεως τῆς σκάλας (δηλ. ἡ δίεδρος γωνία τήν ὁποίαν σχηματίζει μέ τό ὁριζόντιον ἐπίπεδον τό ἰδεατόν ἐπίπεδον πού περιέχει τάς παραλλήλους ἐξωτερικάς ἀκμάς τῶν σκαλοπατιῶν (σχ. 124)). β) Νά εὑρεθῆ τό ὕψος τοῦ ἰσογείου ὀρόφου τῆς οἰκίας, ἀπό τό δάπεδόν του ἕως εἰς τό δάπεδον τοῦ πρώτου ὀρόφου, ἐάν τό ὁριζόντιον μῆκος τῆς σκάλας εἶναι 4,42 m.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΠΕΡΙΓΡΑΦΙΚΗΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

§ 1. Βασικαί έννοιαι καί ορισμοί.

1.1. Τί εἶναι ἡ Στατιστική. Πολύ συχνά εἰς τήν καθημερινήν ζωήν γίνεται λόγος περί Στατιστικῆς. Λέγομεν π.χ. ὅτι, κατά τήν στατιστικήν τῆς τουριστικῆς κινήσεως, ἦλθαν τό 1961 εἰς τήν Ἑλλάδα 472 000 περιηγηταί ἀπό τούς ὁποίους 40 % ἔφθασαν ἀεροπορικῶς. Ἤ διαβάζομεν εἰς τήν ἐφημερίδα τό ἑξῆς: κατά μίαν στατιστικήν ἔρευναν, ἡ ὁποία ἔγινε τό 1960, εὑρέθη ὅτι ἀπό τόν πληθυσμόν τῆς Ἑλλάδος, ἡλικίας 10 ἐτῶν καί ἄνω,

οἱ 2% εἶναι διπλωματοῦχοι ἀνωτάτων σχολῶν,
8% εἶναι ἀπόφοιτοι γυμνασίου,
42% εἶναι ἀπόφοιτοι δημοτικοῦ σχολείου,
30 % δέν ἐτελείωσαν τό δημοτικόν ἀλλά γνωρίζουν γραφήν καί ἀνάγνωσιν
καί 18 % εἶναι ἀγράμματοι.

Ἀκούομεν ἐπίσης ὅτι ἀπεδείχθη στατιστικῶς ἡ συσχέτισις μεταξύ καπνίσματος καί καρκίνου τῶν πνευμόνων.

Αὐτά καί ἄλλα παρόμοια παραδείγματα μᾶς βοηθοῦν νά ἀντιληφθῶμεν εὔκολα τόν ἀκόλουθον ὁρισμόν: Ἡ περιγραφική Στατιστική εἶναι ἕνας μαθηματικός κλάδος πού ἔχει ὡς ἔργον νά συγκεντρώνῃ ἀριθμητικά δεδομένα, νά τά ταξινομῇ καί νά τά παρουσιάζῃ μέ μορφήν κατάλληλον ὥστε νά ἠμποροῦν νά ἑρμηνευθοῦν καί νά χρησιμοποιηθοῦν πρός διαφόρους σκοπούς.

1.2. Πληθυσμός, στατιστικά δεδομένα. Τά ἀριθμητικά δεδομένα, δηλαδή οἱ ἀριθμοί τούς ὁποίους συγκέντρώνει καί μελετᾶ ἡ Στατιστική, λέγονται <u>στατιστικά δεδομένα</u> ἤ <u>στατιστικά στοιχεῖα</u> καί ἀναφέρονται εἰς ἕνα σύνολον ἐμψύχων ἤ ἀψύχων, τό ὁποῖον εἰς τήν Στατιστικήν ὀνομάζεται <u>στατιστικός πληθυσμός</u> καί, συντόμως , <u>πληθυσμός</u>. Ἔτσι τό σύνολον τῶν μαθητῶν ἑνός σχολείου εἶναι ἕνας "πληθυσμός" καί, ἄν ὑποθέσωμεν ὅτι ἐνδιαφερόμεθα διά τό ἀνάστημά των, τά στατιστικά δεδομένα λαμβάνονται με μέτρησιν τῶν ἀναστημάτων· ἄν ἐνδιαφερώμεθα διά τάς ἀπουσίας τῶν μαθητῶν κατά τήν διάρκειαν ἑνός διμήνου, τά στατιστικά δεδομένα εὑρίσκονται δι' ἀπαριθμήσεως τῶν ἀπουσιῶν. Ἐπίσης τό σύνολον 50 διαφόρων μολυβιῶν εἶναι ἕνας "πληθυσμός καί, ἄν μᾶς ἐνδιαφέρῃ τό μῆκος των, κάμνομεν μετρήσεις, ἄν δέ τό χρῶμα των, κάμνομεν ἀπαριθμήσεις. Ἄρα τά ἀριθμητικά δεδομένα τῆς Στατιστικῆς εἶναι τά ἀποτελέσματα τῶν μετρήσεων ἤ τῶν ἀπαριθμήσεων μιᾶς ἰδιότητος τῶν στοιχείων ἑνός στατιστικοῦ πληθυσμοῦ.

<u>1.3. Ποιοτικαί καί ποσοτικαί ἰδιότητες τῶν στοιχείων ἑνός πληθυσμοῦ</u>. Ὅπως εἴδαμεν ἀνωτέρω, τά στατιστικά δεδομένα ἀναφέρονται εἰς μίαν ἰδιότητα τῶν στοιχείων ἑνός πληθυσμοῦ. Διακρίνομεν δύο κατηγορίας ἰδιοτήτων: τάς <u>ποιοτικάς</u> καί τάς <u>ποσοτικάς</u>.

Ποιοτικαί ἰδιότητες λέγονται ἐκεῖναι πού δέν ἠμποροῦν νά μετρηθοῦν. Π.χ. τό χρῶμα τῶν μολυβιῶν εἶναι ποιοτική ἰδιότης ἡ ὁποία ἔχει διάφορα χαρακτηριστικά: κόκκινο, μαῦρο, πράσινο κλπ. Τά στατιστικά δεδομένα τά ὁποῖα ἀναφέρονται εἰς τό χρῶμα τῶν μολυβιῶν εἶναι αἱ ἀπαριθμήσεις τῶν μολυβιῶν τοῦ ἰδίου χρώματος. Ἄλλα παραδείγματα ποιοτικῶν ἰδιοτήτων εἶναι τό φῦλον μέ χαρακτηριστικά ἄνδρας καί γυναῖκα, ἡ ἐθνικότης μέ χαρακτηριστικά Ἕλλην, Ἀμερικανός, Γάλλος κλπ., ἡ ἀστική κατάστασις μέ χαρακτηριστικά ἔγγαμος, ἄγαμος, χῆρος καί διεζευγμένος.

Ποσοτικαί ἰδιότητες εἶναι ἐκεῖναι πού ἠμποροῦν νά μετρηθοῦν μέ μίαν ὡρισμένην μονάδα καί νά λάβουν διαφόρους ἀριθμητι-

κάς τιμάς. Παραδείγματα ποσοτικῶν ἰδιοτήτων εἶναι τό ἀνά-
στημα, τό βάρος, ἡ ἡλικία, ἡ πυκνότης πληθυσμοῦ, τό μέγεθος
τῆς οἰκογενείας (ἀριθμός μελῶν), τό μηνιαῖον εἰσόδημα κλπ.

1.4. Συνεχεῖς καί ἀσυνεχεῖς μεταβληταί. 'Επειδή μία ποσοτι-
κή ἰδιότης δύναται νά μετρηθῆ καί νά λάβη διαφόρους ἀρθμητι-
κάς τιμάς, ὀνομάζεται μεταβλητή ποσότης καί, συντόμως, μετα-
βλητή.

Θά διακρίνωμεν δύο κατηγορίας μεταβλητῶν: τάς συνεχεῖς
καί τάς ἀσυνεχεῖς. Συνεχης θά λέγεται μία μεταβλητή, ὅταν
ἡμπορῆ νά λάβη ὅλας τάς δυνατάς τιμάς ἀπό μίαν ἐλαχίστην ἕ-
ως μίαν μεγίστην. Π.χ. τό ἀνάστημα εἰς ἑκατοστόμετρα τῶν μα-
θητῶν ἑνός σχολείου εἶναι μία συνεχής μεταβλητή διότι ἡμπο-
ρεῖ νά λαμβάνη ὅλας τάς τιμάς, ἀκεραίας ἤ ὄχι, ἀπό τό μικρό-
τερον ἀνάστημα ἕως εἰς τό μεγαλύτερον. 'Ασυνεχής θά λέγεται
μία μεταβλητή ὅταν λαμβάνη μόνον ἀκεραίας τιμάς. Π.χ. τό μέ-
γεθος τῆς οἰκογενείας, τό ὁποῖον ἐκφράζεται μέ τόν ἀριθμόν
τῶν μελῶν της, εἶναι ἀσυνεχής μεταβλητή, διότι ἡμπορεῖ νά
λάβη ὡς τιμάς μόνον τούς ἀκεραίους ἀριθμούς 1, 2, 3, ... 'Ο
ἀριθμός τῶν γεννήσεων κατά μῆνα εἰς μίαν χώραν εἶναι ἐπίσης
ἀσυνεχής μεταβλητή.

1.5. 'Εξέλιξις καί χρησιμότης τῆς Στατιστικῆς. 'Η Στατιστική
ἤρχισε νά διαμορφώνεται ὡς ἐπιστήμη καί νά ἐξελίσσεται ὡς κλά-
δος τῶν ἐφηρμοσμένων μαθηματικῶν ἀπό τόν 19ον αἰῶνα, πλήν ὅ-
μως ἐφηρμόζετο μέ ἁπλουστέραν μορφήν ἀπό ἀρχαιοτάτους χρόνους.
Ἔτσι οἱ Κινέζοι πρό 4 000 ἐτῶν συνεκέντρωναν στοιχεῖα τῆς γε-
ωργικῆς παραγωγῆς των καί τοῦ ἐμπορίου, οἱ Αἰγύπτιοι ἐτήρουν
στοιχεῖα διά τήν κατανομήν τῶν γεωργικῶν ἐκτάσεων, εἰς δια-
φόρους χώρας ἐγίνοντο ἀπογραφαί τῶν ἀνδρῶν πού ἠδύναντο νά φέ-
ρουν ὅπλα καί ἀργότερον γενικαί ἀπογραφαί τοῦ πληθυσμοῦ,ὅπως
π.χ. ἀπό τήν Ρωμαϊκήν αὐτοκρατορίαν κατά τό ἔτος τῆς γεννήσε-
ως τοῦ Χριστοῦ.

'Η λέξις Στατιστική προέρχεται ἀπό τήν λατινικήν λέξιν
Status, πού σημαίνει Κράτος, καί ἐχρησιμοποιήθη διά νά δηλώ-

ση ὅτι ἐνδιαφέρεται διά τό σύνολον τῶν ἀριθμητικῶν δεδομένων τά ὁποῖα σχετίζονται μέ τήν λειτουργίαν τοῦ Κράτους.

Ἡ Στατιστική εἶναι ἕνα ὄργανον μέ τό ὁποῖον ἠμποροῦμεν νά ἐξά γωμεν συμπεράσματα καί νά κάμνωμεν διαφόρους προβλέψεις. Διά τοῦτο σήμερα δέν εἶναι δυνατόν νά νοηθῆ κρατική διοίκησις ἤ μεγάλη ἐπιχείρησις πού νά μή βασίζεται εἰς πλήρη στατιστικά στοιχεῖα, ὅταν πρόκειται νά λάβη ἀποφάσεις.'Εξ ἄλλου ἡ Στατιστική ἔχει γίνει ἀπαραίτητον μέσον ἐργασίας διά τούς ἐρευνητάς ἐπιστήμονας καί ἡ ἐξέλιξίς της συνεχίζεται μέ τάς διαφόρους ἐφαρμογάς της εἰς ὅλας τάς ἐπιστήμας.

1.6. Συλλογή στατιστικῶν στοιχείων. Ἡ ὀρθότης τῶν συμπερασμάτων καί τῶν προβλέψεων τῆς Στατιστικῆς ἐξαρτᾶται κατά πολύ ἀπό τόν τρόπον μέ τόν ὁποῖον συγκεντρώνονται τά δεδομένα καί ὁ ὁποῖος πρέπει νά βασίζεται εἰς ὡρισμένους κανόνας καί μεθόδους. Διά τήν συλλογήν π.χ. τῶν στατιστικῶν δεδομένων τά ὁποῖα ἀναφέρονται εἰς τήν λειτουργίαν ἑνός Κράτους ,ὑπάρχει μία Κεντρική Στατιστική Ὑπηρεσία ἡ ὁποία προγραμματίζει καταλλήλως καί διενεργεῖ τήν συγκέντρωσιν τῶν στοιχείων· αὐτά δημοσιεύονται, ἀφοῦ προηγουμένως ὑποστοῦν ειδικήν ἀνάλυσιν, δηλαδή ἐπεξεργασίαν καί ἑρμηνείαν μέ τάς μεθόδους τῆς Στατιστικῆς ἐπιστήμης.

Διακρίνομεν τούς ἑξῆς τρόπους συλλογῆς στατιστικῶν δεδομένων:

α) τήν ἀπογραφήν, ἤτοι τήν συγκέντρωσιν στοιχείων κατά μίαν ὡρισμένην ἡμέραν, ἀφοῦ προηγηθῆ κατάρτισις ειδικοῦ ἐρωτηματολογίου καί συστηματική προετοιμασία τῆς ὅλης ἐργασίας. Ἀπογραφή τοῦ πληθυσμοῦ μιᾶς χώρας γίνεται συνήθως κάθε 10 ἔτη. Ἄλλα παραδείγματα ἀπογραφῶν εἶναι ἡ ἀπογραφή γεωργίας καί κτηνοτροφίας, ἡ ἀπογραφή βιομηχανίας κλπ.

β) Τήν συνεχῆ ἐγγραφήν. Κατ' αὐτόν τόν τρόπον γίνεται ἐγγραφή, εἰς ειδικά δελτία (ἔντυπα), τῶν στοιχείων διαφόρων γεγονότων διά τά ὁποῖα ἐνδιαφερόμεθα. Τά δελτία συγκεντρώνονται ἀπό μίαν κεντρικήν ὑπηρεσίαν εἰς τό τέλος μιᾶς ὡρισμένης χρο νικῆς περιόδου. Παραδείγματα αὐτοῦ τοῦ τρόπου εἶναι αἱ ἐγγραφαί εἰς τά ληξιαρχεῖα, εἰς τά τελωνεῖα, εἰς τά νοσοκομεῖα κ λ π.

γ) Τήν δειγματοληψίαν. Δειγματοληψία εἶναι ἡ ἀπογραφή τῶν στοιχείων ἑνός δείγματος, δηλαδή ἑνός ὑποσυνόλου τοῦ "πληθυσμοῦ". Μέ ειδικάς μεθόδους, κατόπιν ἀναλύσεως τῶν στοιχείων τοῦ "δείγματος", γίνεται ἐξαγωγή συμπερασμάτων δι' ὁλόκληρον τόν πληθυσμόν.

δ) Τάς ἐρεύνας. Αἱ ἔρευναι χρησιμοποιοῦνται διά τήν συγκέντρωσιν στοιχείων εἰς ειδικάς περιπτώσεις καί θέματα. Π.χ. ἔρευνα ἐπί τῶν προϋπολογισμῶν τῶν νοικοκυριῶν μιᾶς πόλεως, ἔρευνα ἐπί τῆς παιδικῆς ἐγκληματικότητος κλπ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Ποῖαι ἐκ τῶν κατωτέρω ἰδιοτήτων εἶναι ποιοτικαί καί ποῖαι ποσοτικαί; Ἀναφέρατε μερικά ἀπό τά χαρακτηριστικά ἑκάστης ποιοτικῆς καί μερικάς ἀπό τάς δυνατάς τιμάς ἑκάστης ποσοτικῆς. Ἀναφέρατε ἐπίσης ποῖαι ἐκ τῶν ποσοτικῶν εἶναι συνεχεῖς καί ποῖαι ἀσυνεχεῖς μεταβληταί.

α) Ἡλικία
β) Ἀριθμός διαζυγίων
γ) Ποσοστόν ἀναλφαβήτων ἐπί τοῖς ἑκατόν
δ) Ἐπάγγελμα
ε) Αἰτία θανάτου
στ) Ἀριθμός ἀναλφαβήτων
ζ) Ἐμβαδόν τριγώνου
η) Κοινωνική τάξις
θ) Ταχύτης αὐτοκινήτου
ι) Πυκνότης πληθυσμοῦ.

2) Εὕρετε διάφορα παραδείγματα πληθυσμῶν καί ἀναφέρατε ἰδιότητας τῶν στοιχείων των.

3) Κατά ποῖον τρόπον γίνεται ἡ συγκέντρωσις στατιστικῶν δεδομένων ἀναφερομένων εἰς τάς κατωτέρω περιπτώσεις;

α) Θάνατοι κατά ἡλικίαν
β) Ὁ πληθυσμός μιᾶς χώρας κατά γεωγραφικά διαμερίσματα
γ) Καταδικαστικαί ἀποφάσεις δικαστηρίων
δ) Κίνησις διώρυγος Κορίνθου
ε) Νοσοκομεῖα κατά ειδικότητας καί ἀριθμούς κλινῶν

στ) Ἡ γνώμη τοῦ κοινοῦ ἐπί ἑνός πολιτικοῦ θέματος

ζ) Ἡ κατάστασις τῶν ἐργατικῶν κατοικιῶν μιᾶς πόλεως.

§ 2. Παρουσίασις στατιστικῶν δεδομένων διά πινάκων.

2.1. Στατιστικοί πίνακες. Τά στατιστικά δεδομένα, πού συλλέγομεν κατά ἕνα οἱονδήποτε τρόπον, ἀποτελοῦν συνήθως ἕνα μεγάλο σύνολον ἀριθμῶν τό ὁποῖον οὔτε εὔχρηστον εἶναι οὔτε μᾶς δίδει συνοπτικῶς τάς πληροφορίας διά τάς ὁποίας ἐνδιαφερόμεθα. Εἶναι λοιπόν ἀπαραίτητον νά γίνῃ μία συστηματική ταξινόμησις καί συμπύκνωσις τῶν δεδομένων, εἰς τρόπον ὥστε ἡ παρουσίασίς των νά διευκολύνῃ τήν ἐπιδιωκομένην μελέτην. Κατωτέρω θά ἐκθέσωμεν μέ παραδείγματα τήν μέθοδον παρουσιάσεως δεδομένων διά συνοπτικῶν στατιστικῶν πινάκων. Ὑπάρχει μεγάλη ποικιλία πινάκων ὡς πρός τήν μορφήν καί τό περιεχόμενόν των, θά περιορισθῶμεν ὅμως εἰς ἐκείνους πού συνηθίζονται περισσότερον.

2.2. 1ον Παράδειγμα. Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ἐνδιαφερόμεθα διά τάς εἰδικότητας τῶν διαφόρων θεραπευτηρίων (νοσοκομείων καί κλινικῶν) τῆς Ἑλλάδος. Ὁ "πληθυσμός" μας εἰς αὐτήν τήν περίπτωσιν εἶναι τό σύνολον τῶν θεραπευτηρίων τῆς χώρας, ἡ δέ εἰδικότης ἑκάστου εἶναι μία ποιοτική ἰδιότης τῶν στοιχείων τοῦ πληθυσμοῦ διά τήν ὁποίαν ἐνδιαφερόμεθα.

Τά χαρακτηριστικά τῆς ἰδιότητος εἶναι: Γενικόν, Καρδιολογικόν, Παθολογικόν, Παιδιατρικόν κλπ. Κατά μίαν λοιπόν ὡρισμένην ἡμέραν κάμνομεν μίαν ἀπογραφήν καί διά κάθε θεραπευτήριον συμπληρώνομεν ἕνα εἰδικόν δελτίον μέ τάς καταλλήλους πληροφορίας. Κατόπιν, ἀφοῦ συγκεντρώσωμεν ὅλα αὐτά τά δελτία, τά ταξινομοῦμεν κατά εἰδικότητας θεραπευτηρίων καί ἀπαριθμοῦμεν τά δελτία ἑκάστης εἰδικότητος. Τέλος μέ τά εὑρεθέντα ἀποτελέσματα σχηματίζομεν ἕνα συνοπτικόν πίνακα ὁ ὁποῖος μᾶς δίδει μίαν σαφῆ εἰκόνα τῆς κατανομῆς τῶν θεραπευτηρίων κατά εἰδικότητας. Μέ τήν ἐργασίαν αὐτήν, κατά τήν ὁποίαν ταξινομοῦμεν τά δεδομένα είς ὁμάδας καί ἀπαριθμοῦμεν τά ἀνήκοντα είς ἑκάστην ὁμάδα, λέγομεν ὅτι κάμνομεν κατανομήν τοῦ "πληθυσμοῦ" κατά συχνότητας ἤ κατανομήν συχνοτήτων.

'Απογραφή τῶν θεραπευτηρίων ἔγινε είς τήν 'Ελλάδα τό 1961 καί τά δεδομένα ὡς πρός τάς είδικότητάς των ἀπετέλεσαν τόν κατωτέρω πίνακα

ΘΕΡΑΠΕΥΤΗΡΙΑ ΚΑΤΑ ΕΙΔΙΚΟΤΗΤΑ, ΕΛΛΑΣ, 1961
('Αλφαβητική σειρά είδικοτήτων)

Είδικότης	'Αριθμός Θεραπευτηρίων
'Αντικαρκινικά	2
Γενικά	384
Δερματολογικά	2
Καρδιολογικά	2
Λοιμωδῶν νόσων	3
Μαιευτικά	242
Νευρολογικά	54
'Ορθοπεδικά	10
'Οφθαλμολογικά	43
Οὐρολογικά	8
Παθολογικά	44
Παιδιατρικά	24
Φυματιολογικά	26
Χειρουργικά	172
'Ωτορινολαρυγγολογικά	69
Συνολικός ἀριθμός θεραπευτηρίων	1 085

Πηγή: Συνοπτική Στατιστική 'Επετηρίς τῆς 'Ελλάδος, 1962.

Είς κάθε πίνακα ὑπάρχει πάντοτε ἕνας τίτλος ὁ ὁποῖος γράφεται είς τό ἄνω μέρος του καί ἀναφέρεται είς τά ἐρωτήματα: τί; ποία κατάταξις; ποῦ; καί πότε;

"Αν ὑπάρχη ἀνάγκη ἐπεξηγήσεως, χρησιμοποιεῖται καί ὑπότιτλος ἐντός παρενθέσεως. Τίτλον φέρει ἐπίσης καί ἑκάστη στήλη τοῦ πίνακος. Διάφοροι ἄλλαι ἐπεξηγήσεις δύνανται νά γραφοῦν μέ μικρότερα γράμματα εἴτε κάτω ἀπό τόν τίτλον τοῦ πίνακος, εἴτε ὡς ὑποσημειώσεις είς τό τέλος, ὅπου γράφεται καί ἡ πηγή ἀπό τήν ὁποίαν ἐλήφθησαν τά δεδομένα τοῦ πίνακος.

2.3. 2ον Παράδειγμα. Ἔστω ὅτι θέλομεν νά μελετήσωμεν ἀπό στατιστικήν ἄποψιν τό θέμα τῶν ἐργατικῶν ἡμερομισθίων εἰς ἕνα ἐργοστάσιον. Τό ἐργοστάσιον ἀπασχολεῖ 40 ἐργάτας μέ τά κατωτέρω ἡμερομίσθια εἰς δραχμάς κατ' ἀλφαβητικήν σειράν τῶν ἐπωνύμων καί ὀνομάτων τῶν ἐργατῶν:

Ἀναγνώστου Γ.	62	60	57	73,80	66,20
Ἀναγνώστου Κ.	83,50	67,50	68	84	71
Ἀνυφαντῆς Γ.	71	83	71	59	74
Ἀρμακόλας Π.	54	70	63,50	71	55,40
Ἀσπιώτης Γερ.	70,80	79,20	50	75	70
Βασιλείου Κ.,	69,50	72	76,20	66,20	92,50
κ.ο.κ.	75	56	65	57,50	64
	93	69,50	74,30	77	74,30

Πίναξ 1.

Ὁ πληθυσμός μας ἐδῶ εἶναι τό σύνολον τῶν 40 ἐργατῶν, ἡ δέ ποσοτική ἰδιότης διά τήν ὁποίαν ἐνδιαφερόμεθα εἶναι ἡ συνεχής μεταβλητή : ἡμερομίσθιον.

Τά δεδομένα, ὅπως παρουσιάζονται ἀνωτέρω, δημιουργοῦν σημαντικήν δυσχέρειαν εἰς τήν ἐξέτασίν των. Ἡ δυσχέρεια θά ἦτο ἀκόμη μεγαλυτέρα, ἄν τά δεδομένα ἦσαν πολυαριθμότερα. Ὑπάρχει ἑπομένως ἀνάγκη ταξινομήσεώς των, δηλ. κατατάξεώς των εἰς ὁμάδας ἤ τάξεις καί, κατόπιν, μιᾶς κατανομῆς εἰς ἀντιστοίχους συχνότητας.

Παρατηροῦμεν ὅτι αἱ ἄκραι τιμαί τῆς μεταβλητῆς (δηλαδή ἡ ἐλαχίστη καί ἡ μεγίστη τιμή) εἶναι 50 καί 94 ἀντιστοίχως. Ἡ διαφορά 93 - 50 = 43 μεταξύ τῶν ἄκρων τιμῶν ὀνομάζεται <u>εὖρος</u> τῆς κατανομῆς καί μᾶς δεικνύει τό πλάτος τῆς διακυμάνσεως τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς. Τώρα πρέπει νά ἀποφασίσωμεν εἰς πόσας τάξεις (ὁμάδας) θά χωρίσωμεν τάς τιμάς τῆς μεταβλητῆς. Ἡ πεῖρα ἔχει δείξει ὅτι ὁ ἀριθμός τῶν τάξεων πρέπει νά εἶναι ἀπό 8 ἕως 15, χωρίς ὅμως αὐτό νά ἀποτελῇ καί γενικόν κανόνα. Ἐπειδή εἰς τήν περίπτωσίν μας τό εὖρος τῆς κατανομῆς εἶναι

43, θά ορίσωμεν 9 τάξεις, εκάστη εκ των οποίων θά καλύπτη πέντε ακεραίας τιμάς της μεταβλητής. 'Επειδή $5 \times 9 = 45$, ή τελευταία τάξις θά έπρεπε νά είναι μικροτέρα άπό τάς άλλας, δυνάμεθα όμως νά τήν συμπληρώσωμεν μέ τιμάς μεγαλυτέρας της μεγίστης 93, εις τρόπον ώστε όλαι αί τάξεις νά έχουν τό αυτό πλάτος. 'Επομένως αί τάξεις θά είναι:

50 - 55
55 - 60
:
90 - 95 .

Αί άκραι τιμαί εκάστης τάξεως αποτελούν τό κατώτερον καί ανώτερον άκρον της αντιστοίχως. "Ετσι ή τάξις 50 - 55 έχει κατώτερον άκρον συμπεριλαμβανόμενον τό 50 καί ανώτερον μή συμπεριλαμβανόμενον τό 55.

Μέ άλλους λόγους, τά δεδομένα τά οποία ισούνται πρός τό ανώτερον άκρον μιάς τάξεως δέν ανήκουν εις αυτήν άλλά εις τήν επομένην. Τό πλάτος μιάς τάξεως ορίζεται ώς διαφορά μεταξύ των δύο άκρων της. Αί τάξεις του παραδείγματός μας έχουν πλάτος 5. Προχωρούμεν τώρα εις τήν ταξινόμησιν των δεδομένων μας καί σχηματίζομεν τόν κατωτέρω πίνακα.

ΚΑΤΑΝΟΜΗ 40 ΕΡΓΑΤΩΝ
ΚΑΤΑ ΤΑΞΕΙΣ ΗΜΕΡΟΜΙΣΘΙΩΝ

Τάξεις ημερομισθίων		'Αριθμός εργατών (συχνότης)
50 - 55	II	2
55 - 60	~~IIII~~	5
60 - 65	IIII	4
65 - 70	~~IIII~~ II	7
70 - 75	~~IIII~~ ~~IIII~~ II	12
75 - 80	~~IIII~~	5
80 - 85	III	3
85 - 90		0
90 - 95	II	2
συνολικός αριθμός εργατών		40

Δεδομένα υποθετικά.

Ἡ δευτέρα στήλη τοῦ προηγουμένου πίνακος μέ τάς μικράς καθέτους ἤ λοξάς γραμμάς δείχνει τόν τρόπον μέ τόν ὁποῖον εὑρίσκονται αἱ συχνότητες: διαβάζομεν διαδοχικῶς τούς ἀριθμούς πού περιέχονται εἰς τόν ἀρχικόν πίνακα μέ τά ἀταξινόμητα δεδομένα καί μέ μίαν μικράν γραμμήν σημειώνομεν εἰς ποίαν τάξιν ἀνήκει ἕκαστος. Διά κάθε πεντάδα ἀριθμῶν εἰς μίαν τάξιν σχηματίζεται τό σύμβολον ~~////~~ . Ἀντί αὐτοῦ τοῦ συμβόλου χρησιμοποιεῖται καί τό $\boxtimes$.

Ἑκάστη τάξις τιμῶν ἔχει μίαν μέσην τιμήν, τήν ὁποίαν εὑρίσκομεν, ἄν λάβωμεν τό ἡμιάθροισμα τῶν ἄκρων τιμῶν της. Ἔτσι π.χ. ἡ μέση τιμή τῆς τάξεως 50-55 εἶναι (50+55) : 2 = =52,50 καί δύναται νά ἀντικαταστήσῃ τάς τιμάς αὐτῆς τῆς τάξεως. Δηλαδή ἀντί νά λέγωμεν ὅτι 2 ἐργάται ἔχουν ἡμερομίσθια ἀπό 50-55 δρχ , λέγομεν ὅτι 2 ἐργάται ἔχουν ἡμερομίσθιον 52,50 δρχ ἕκαστος. Ἡ στήλη ἡ ὁποία φέρει τόν τίτλον :"ἀριθμός ἐργατῶν", λέγεται στήλη τῆς ἀπολύτου συχνότητος καί,συντόμως, τῆς συχνότητος. Ὁ πίναξ ἠμπορεῖ νά συμπληρωθῆ καί μέ ἄλλην στήλην, ἄν γράψωμεν κάθε ἀριθμόν τῆς ἀπολύτου συχνότητος ὡς ἑκατοστιαῖον ποσοστόν (%) ἐπί τῆς καλουμένης ὁλικῆς συχνότητος, ἤτοι ἐπί τοῦ συνολικοῦ πλήθους τῶν δεδομένων. Τά ποσοστά αὐτά εὑρίσκονται, ἄν ὑπολογίσωμεν τόν λόγον ἑκάστης ἀπολύτου συχνότητος πρός τήν ὁλικήν συχνότητα καί τόν πολλαπλασιάσωμεν ἐπί 100. Ἔτσι ἡ ἀπόλυτος συχνότης 2 ὡς ποσοστόν ἐπί τῆς ὁλικῆς συχνότητος 40 θά γραφῆ 5%, ἡ συχνότης 5 θά γραφῆ 12,5% κ.ο.κ.

Ἡ στήλη τῶν ποσοστῶν ὀνομάζεται στήλη τῆς σχετικῆς συχνότητος.

Ἄλλη συμπλήρωσις τοῦ πίνακος ἠμπορεῖ νά γίνῃ μέ μίαν στήλην ἡ ὁποία λέγεται στήλη τῆς ἀθροιστικῆς συχνότητος καί σχηματίζεται ἄν δι' ἑκάστην τάξιν γράψωμεν τό ἄθροισμα τῶν συχνοτήτων αὐτῆς καί ὅλων τῶν προηγουμένων τάξεων· ὁμοίως ἠμποροῦμεν νά σχηματίσωμεν καί στήλην ἀθροιστικῆς σχετικῆς συχνότητος. Ἄς γράψωμεν τώρα πάλιν τόν πίνακα τοῦ παραδείγματός μας μέ τάς διαφόρους αὐτάς συμπληρώσεις. Ἄς σημειωθῆ ὅτι μέ τό γράμμα x συμβολίζομεν μίαν τυχοῦσαν τιμήν τῆς μεταβλητῆς, μέ τό f τήν συχνότητα μιᾶς τάξεως καί μέ τό N ἤ Σf τήν ὁλικήν συχνότητα, δηλαδή τό συνολικόν πλῆθος τῶν δεδομένων.

ΚΑΤΑΝΟΜΗ 40 ΕΡΓΑΤΩΝ
ΚΑΤΑ ΤΑΞΕΙΣ ΗΜΕΡΟΜΙΣΘΙΩΝ

Τάξεις ἡμερομισθίων	Μέση τιμή τάξεως x	Ἀριθμός ἐργατῶν f	Ἀθροιστική συχνότης	Σχετική συχνότης %	Ἀθροιστική σχετική συχνότης
50 - 55	52,5	2	2	5,0	5,0
55 - 60	57,5	5	7	12,5	17,5
60 - 65	62,5	4	11	10,0	27,5
65 - 70	67,5	7	18	17,5	45,0
70 - 75	72,5	12	30	30,0	75,0
75 - 80	77,5	5	35	12,5	87,5
80 - 85	82,5	3	38	7,5	95,0
85 - 90	87,5	0	38	0	95,0
90 - 95	92,5	2	40	5,0	100,0
		N = 40		100,0	

Ἀπό αὐτόν τόν πίνακα δυνάμεθα νά συναγάγωμεν ὡρισμένα συμπεράσματα ἀνάλογα μέ τόν σκοπόν τῆς μελέτης μας. Π.χ. ἀπό τήν στήλην τῆς συχνότητος βλέπομεν ὅτι ἡ μεγαλυτέρα συχνότης εἶναι 12 καί ὅτι ἀντιστοιχεῖ εἰς τήν τάξιν 70 - 75. Ἡ ἀντίστοιχος σχετική συχνότης εἶναι 30% καί αὐτό σημαίνει ὅτι 30% τῶν ἐργατῶν λαμβάνουν ἡμερομίσθιον ≥ 70 καί < 75 δρχ. Ἀπό τήν ἀθροιστικήν συχνότητα βλέπομεν ὅτι 30 ἐργάται (2+5+4+7+ +12 = 30) λαμβάνουν ἡμερομίσθιον μικρότερον τῶν 75 δρχ, ἀπό δέ τήν ἀθροιστικήν σχετικήν συχνότητα βλέπομεν ὅτι 75% τῶν ἐργατῶν λαμβάνουν ἡμερομίσθιον μικρότερον τῶν 75 δρχ κ.ο.κ.

2.4. 3ον Παράδειγμα. Εἰς τήν περίπτωσιν πού ἡ ποσοτική μεταβλητή εἶναι ἀσυνεχής, αἱ τιμαί της εἶναι ἀριθμοί ἀκέραιοι καί ὁ σχηματιζόμενος πίναξ κατανομῆς συχνοτήτων δύναται νά ἔχη εἰς τήν πρώτην στήλην τάς τιμάς εἴτε μεμονωμένας, ἰδίως ὅταν εἶναι ὀλίγαι, εἴτε ὁμαδοποιημένας. Δίδομεν δύο παραδείγματα τοιούτων πινάκων.

α) Τό 1957 ἔγινε εἰς τήν Ἑλλάδα μία δειγματοληπτική ἔρευνα διά τήν μελέτην διαφόρων στοιχείων τῶν ἀστικῶν νοικοκυριῶν. Ὡς ἀστικαί περιοχαί ὡρίσθησαν αἱ πόλεις μέ πληθυσμόν ἄνω τῶν 10 000 κατοίκων, ὡς νοικοκυριό ὡρίσθη κάθε ὁμάς προσώπων (ἤ καί ἕνα πρόσωπον) τά ὁποῖα ζοῦν εἰς τήν αὐτήν κατοικίαν καί μετέχουν εἰς ἕνα τουλάχιστον κύριον γεῦμα ἡμερησίως. Ἀπό ὅλα λοιπόν τά νοικοκυριά τῶν ἀστικῶν περιοχῶν ἔγινε κατάλληλος ἐπιλογή ἑνός ἀντιπροσωπευτικοῦ δείγματος 2568 νοικοκυριῶν· δι' αὐτά συνεκεντρώθησαν διάφορα στοιχεῖα (π.χ. ἔσοδα, δαπάναι, ἀπασχόλησις καί ἡλικία τῶν μελῶν κλπ.) καί αὐτό ἐβοήθησε κατόπιν εἰς τό νά ἐξαχθοῦν χρήσιμα συμπεράσματα διά τό σύνολον ὅλων τῶν ἀστικῶν νοικοκυριῶν. Ἕνα ἁπλοῦν παράδειγμα τῶν ἀποτελεσμάτων εἶναι τό ἑξῆς:

ΠΟΣΟΣΤΙΑΙΑ ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΑΣΤΙΚΩΝ ΝΟΙΚΟΚΥΡΙΩΝ
ΚΑΤΑ ΜΕΓΕΘΟΣ ΝΟΙΚΟΚΥΡΙΟΥ, ΕΛΛΑΣ, 1957

Ἀριθμός μελῶν νοικοκυριοῦ	Ἀριθμός νοικοκυριῶν %
1	5,4
2	16,0
3	24,1
4	23,7
5	16,0
6	8,4
7	3,7
8 καί ἄνω	2,7
Συνολικός ἀριθμός νοικοκυριῶν	100,0

Πηγή: Ε.Σ.Υ.Ε. "Ἔρευνα οἰκογενειακῶν προϋπολογισμῶν, 1961.

β) Εἰς τό κατωτέρω παράδειγμα ἡ ἀσυνεχής μεταβλητή παρουσιάζει πολλάς τιμάς. Διά τοῦτο διεμερίσαμεν τό σύνολόν των εἰς τάξεις συμπεριλαμβάνοντες εἰς ἑκάστην τάξιν ὄχι μόνον τό κατώτερον ἀλλά καί τό ἀνώτερον ἄκρον της.

ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΑΝΘΡΑΚΩΡΥΧΕΙΩΝ ΚΑΤΑ ΜΕΓΕΘΟΣ
ΜΕΓΑΛΗ ΒΡΕΤΑΝΙΑ, 1945

Ἀριθμός ἀπασχολουμένων	Ἀριθμός ὀρυχείων
1 - 19	393
20 - 49	174
50 - 99	109
100 - 249	147
250 - 499	214
500 - 749	189
750 - 999	115
1 000 - 1 499	129
1 500 - 1 999	63
2 000 - 2 499	19
2 500 - 2 999	14
3 000 καί ἄνω	4
Συνολικός ἀριθμός ὀρυχείων	1 570

Πηγή: Βιβλίον "Στατιστική δι' οἰκονομολόγους" τοῦ R.G.D. ALLEN

Ἐδῶ παρατηροῦμεν ὅτι αἱ τάξεις τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς δέν ἔχουν τό αὐτό πλάτος. Τοῦτο ἐπιτρέπεται ἀνάλογα μέ τήν φύσιν τῶν δεδομένων καί τόν τρόπον τῆς μελέτης των. Διά νά εὕρωμεν τό πλάτος ἑκάστης τάξεως εἰς τήν περίπτωσιν ἀσυνεχοῦς μεταβλητῆς προσθέτομεν μίαν μονάδα εἰς τήν διαφοράν τῶν ἄκρων τιμῶν. Π.χ. τό πλάτος τῆς πρώτης τάξεως εἶναι $19=(19-1)+1$· εἰς αὐτήν περιέχονται 19 διαφορετικαί τιμαί τῆς μεταβλητῆς.

<u>2.5</u>. <u>4ον Παράδειγμα</u>. Πολύ συνήθεις εἶναι οἱ πίνακες εἰς τούς ὁποίους αἱ συχνότητες ἀναφέρονται εἰς δύο ἤ περισσοτέρας ἰδι-

ότητας τῶν στοιχείων τοῦ πληθυσμοῦ.

῎Ας ἐξετάσωμεν τόν ἑξῆς πίνακα:

ΑΡΙΘΜΟΣ ΠΡΟΣΩΠΩΝ ΗΛΙΚΙΑΣ 10 ΕΤΩΝ ΚΑΙ ΑΝΩ
ΚΑΤΑ ΕΠΙΠΕΔΟΝ ΠΑΙΔΕΥΣΕΩΣ ΚΑΙ ΦΥΛΟΝ, ΕΛΛΑΣ, 1960

ΕΠΙΠΕΔΟΝ ΠΑΙΔΕΥΣΕΩΣ	Φ Υ Λ Ο Ν		ΑΡΙΘΜΟΣ προσώπων καί τῶν δύο φύλων
	῎Αρρενες	Θήλεις	
Διπλωματοῦχοι Ἀνωτάτων σχολῶν	95 000	26 000	121 000
Ἀπόφοιτοι γυμνασίων	311 000	233 000	544 000
Ἀπόφοιτοι δημοτικοῦ	1 628 000	1 208 000	2 836 000
Μή τελειώσαντες τό δημοτικόν	974 000	1 021 000	1 995 000
Ἀγράμματοι	246 000	999 000	1 245 000
Συνολικός ἀριθμός προσώπων	3 254 000	3 487 000	6 741 000

Πηγή: Συνοπτική Στατιστική Ἐπετηρίς τῆς Ἑλλάδος, 1962.

Αἱ δύο ἰδιότητες τοῦ πληθυσμοῦ μας εἶναι: τό φῦλον μέ δύο χαρακτηριστικά καί τό ἐπίπεδον παιδεύσεως μέ πέντε χαρακτηριστικά. ῞Ενεκα τούτου λέγομεν ὅτι ἔχομεν πίνακα 2×5 θυρίδων ἤ ἁπλῶς πίνακα 2×5.

Κάθε ἀριθμός εἰς τό κύριον σῶμα τοῦ πίνακος, δηλαδή εἰς τήν 2αν καί τήν 3ην στήλην του, ἀναφέρεται εἰς δύο ἰδιότητας. Π.χ. ὁ πρῶτος ἀριθμός δηλώνει ὅτι ὑπάρχουν 95 000 ἄνδρες διπλωματοῦχοι ἀνωτάτων σχολῶν. Εἰς τόν πίνακα ἀναγράφονται ἐπίσης τά ὁλικά ἀθροίσματα τῶν στηλῶν καθώς καί τά ὁλικά ἀθροίσματα τῶν γραμμῶν. Ὁ ἀριθμός 6 741 000 εἶναι τό γενικόν ἄθροισμα.

Ὁ ἴδιος πίναξ δύναται νά γραφῆ μέ ποσοστά ἐπί τοῦ γενικοῦ ἀθροίσματος ἤ ἐπί τῶν ἀθροισμάτων τῶν στηλῶν ἤ ἐπί τῶν ἀθροισμάτων τῶν γραμμῶν.

῎Ας τόν γράψωμεν π.χ. μέ στρογγυλευμένα ἑκατοστιαῖα ποσοστά ἐπί τῶν ἀθροισμάτων τῶν στηλῶν.

	῎Αρρενες	Θήλεις	
Διπλωματοῦχοι	3	1	2
᾿Απόφ. γυμνασίου	10	7	8
᾿Απόφ. δημοτικοῦ	50	35	42
Μή τελειώσαντες τό δημοτικόν	30	29	30
᾿Αγράμματοι	7	28	18
	100	100	100

Οὕτω παρατηροῦμεν ὅτι 50% τῶν ἀνδρῶν εἶναι ἀπόφοιτοι δημοτικοῦ , 28% τῶν γυναικῶν εἶναι ἀγράμματοι, 8% τοῦ συνόλου ἀνδρῶν καί γυναικῶν εἶναι ἀπόφοιτοι γυμνασίου κ λ π.

2.6. 5ον Παράδειγμα. ᾿Ενδιαφέρον παρουσιάζουν καί οἱ πίνακες χρονολογικῆς κατατάξεως οἱ ὁποῖοι μᾶς ἐπιτρέπουν νά κάμνωμεν συγκρίσεις, νά μελετῶμεν τήν ἐξέλιξιν ἑνός φαινομένου κατά τήν πάροδον τοῦ χρόνου καί νά κάμνωμεν προβλέψεις διά τό μέλλον.

Δίδομεν ἕνα παράδειγμα τοιούτου πίνακος.

ΠΛΗΘΥΣΜΟΣ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ ΚΑΙ ΠΥΚΝΟΤΗΣ ΑΥΤΟΥ

1920 - 1960

῎Ετος	Πληθυσμός	Κάτοικοι κατά km^2
1920	5 007 500	33,6
1930	6 367 149	49,7
1940	7 318 915	57,1
1950	7 566 028	59,0
1960	8 327 405	63,6

Πηγή: Στατιστική ᾿Επετηρίς τῆς ῾Ελλάδος, 1961.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Συμπληρώσατε τόν πίνακα τῆς παραγρ. 2.2 μέ μίαν ἀκόμη στήλην εἰς τήν ὁποίαν νά γράψετε τούς ἀριθμούς τῶν θεραπευτηρίων κατά ειδικότητα ὡς ποσοστά (%) ἐπί τοῦ συνολικοῦ ἀριθμοῦ των. Στρογγυλεύσατε τά ἀποτελέσματα εἰς τό πρῶτον δεκαδικόν ψηφίον κατά τρόπον ὥστε τό ἄθροισμά των νά εἶναι 100.

2) Δίδεται ἡ ἡλικία 60 προσώπων εἰς ἔτη:

32	24	10	5	14	19	26	38	47	42
10	15	18	20	15	23	4	20	19	3
17	21	23	12	27	28	11	26	14	18
25	11	25	17	16	31	16	37	30	22
29	28	31	31	36	13	23	8	37	34
2	16	19	24	27	26	29	48	33	24

Σχηματίσατε πίνακα κατανομῆς ἀπολύτων καί σχετικῶν συχνοτήτων. Συνήθως αἱ ἡλικίαι λαμβάνονται κατά πενταετεῖς ὁμάδας: 0 – 5 , 5 – 10 κ.ο.κ. Τό ἄνω ἄκρον ἑκάστης ὁμάδος δέν συμπεριλαμβάνεται εἰς τήν ὁμάδα.
Ἑκάστη δοθεῖσα ἡλικία ἔχει στρογγυλευθῆ εἰς τόν ἀμέσως κατώτερον ἀκέραιον· π.χ. ἡλικία 17 ἔτη καί 9 μῆνες γίνεται 17.
Γράψατε ἐπίσης τήν ἀθροιστικήν συχνότητα καθώς καί τήν ἀθροιστικήν σχετικήν συχνότητα.

3) Εἰς τήν προηγουμένην ἄσκησιν γράψατε ἀθροιστικήν συχνότητα ἀρχίζοντες τήν πρόσθεσιν ἐκ τῶν κάτω πρός τά ἄνω.
Πόσα ἄτομα ἔχουν ἡλικίαν κάτω τῶν 25 ἐτῶν; Πόσα ἄνω τῶν 35; Πόσα τοῖς ἑκατόν τῶν ἀτόμων ἔχουν ἡλικίαν ἄνω τῶν 20 ἐτῶν;

4) Εἰς ἕνα πληθυσμόν 800 προσώπων ἐξετάζομεν δύο ποιοτικάς ἰδιότητας: τό φῦλον (ἄνδρες, γυναῖκες) καί τήν ἀπασχόλησιν (ἐργαζόμενοι, ἄνεργοι). Ὁ πληθυσμός ἔχει 400 ἄνδρας, 399 γυναῖκες ἐργάζονται, 21 ἄτομα εἶναι ἄνεργα. Μέ αὐτά τά δεδομένα νά κατασκευασθῆ πίναξ 2×2.

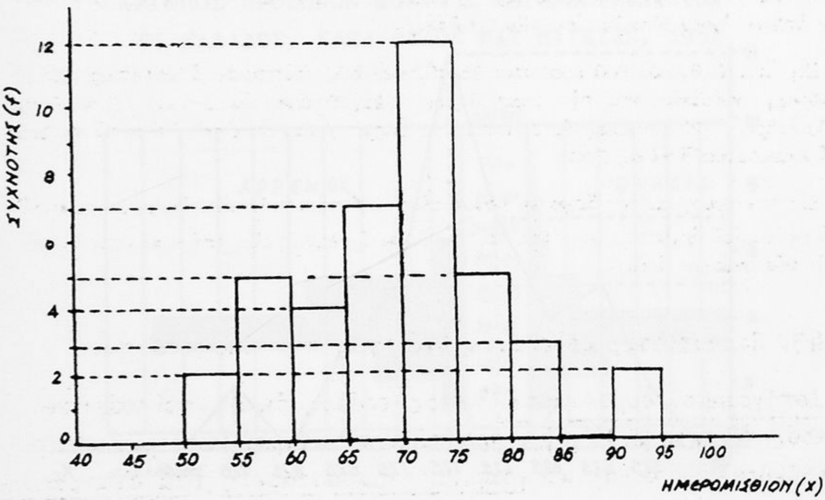
5) Εἰς τήν προηγουμένην ἄσκησιν ποῖον εἶναι τό ποσοστόν τῶν ἀνέργων γυναικῶν ἐπί τοῦ συνολικοῦ ἀριθμοῦ των; Ἐπί τοῦ συνολικοῦ πληθυσμοῦ; ἐπί τοῦ συνολικοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἀνέργων ἀτόμων;

§3. Παρουσίασις δεδομένων διά γραφικῶν παραστάσεων.

3.1. Ἱστόγραμμον συχνότητος. Ἄλλος τρόπος ἐκτός ἀπό τούς στατιστικούς πίνακας διά τήν παρουσίασιν καί μελέτην τῶν στατιστικῶν δεδομένων εἶναι αἱ γραφικαί παραστάσεις (τά διαγράμματα) πού δίδουν γεωμετρικάς άπεικονίσεις τών άριθμητικών δεδομένων αί όποΐαι άφήνουν ζωηροτέρας καί διαρκεστέρας έντυπώσεις μέ τό ένδιαφέρον τό όποΐον προκαλοΰν. Έπί πλέον ό γραφικός αύτός τρόπος έπιτρέπει τήν παρακολούθησιν πολυπληθών δεδομένων μέ ένα μόνον βλέμμα καί παρέχει μέ εύσύνοπτον τρόπον διαφόρους χρησίμους πληροφορίας.

Συνηθέστατος τρόπος γραφικής παραστάσεως είναι τό ιστόγραμμον συχνότητος. Θά κάμωμεν μίαν έφαρμογήν αύτοΰ είς τόν πίνακα κατανομής συχνοτήτων τής παραγράφου 2.3. Χαράσσομεν ένα σύστημα όρθογωνίων άξόνων, έκ τών όποίων ό μέν όριζόντιος άναφέρεται είς τάς τιμάς τής μεταβλητής, ό δέ κάθετος είς τήν συχνότητα. Ή όλη έργασία διευκολύνεται,άν χρησιμοποιήσωμεν τετραγωνισμένον χάρτην.

Ώς μονάδα μήκους έκλέγομεν ένα κατάλληλον εύθύγραμμον τμήμα διά κάθε άξονα, είς τρόπον ώστε τό μέν σχέδιον τοΰ όριζοντίου άξονος νά χωρή όλας τάς παρουσιαζομένας τιμάς τής μετα-

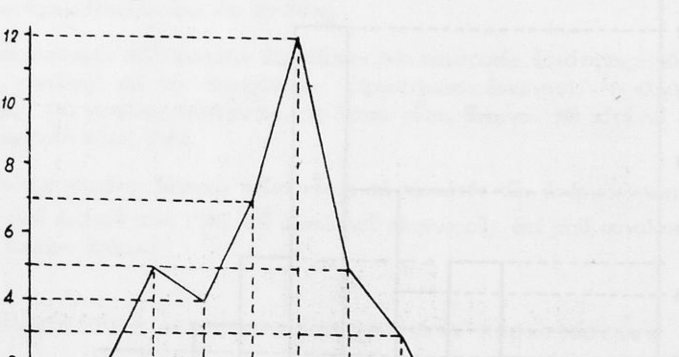


(Σχέδ. 129)

βλητῆς, τό δέ σχέδιον τοῦ καθέτου ἄξονος,ὅλας τάς συχνότητας ἀπό μηδέν μέχρι τῆς μεγίστης. Καλόν εἶναι τά σχέδια τῶν δύο ἀξόνων νά ἔχουν περίπου τό αὐτό μῆκος. Μετά ταῦτα κατασκευάζομεν ὀρθογώνια μέ βάσεις τά τμήματα τοῦ ὁριζοντίου ἄξονος τά ἀντίστοιχα πρός τάς τάξεις τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς καί ὕψη τάς ἀντιστοίχους συχνότητας.Διά τό παράδειγμά μας λοιπόν σχηματίζομεν τό ὑπ' ἀριθμ. σχ. 129 ἱστόγραμμον συχνότητος.

3.2. Πολύγωνον συχνότητος. Ὅταν ἡ μεταβλητή μας εἶναι συνεχής ἀντί τοῦ ἱστογράμμου ἠμποροῦμεν νά σχηματίσωμεν τό πολύγωνον συχνότητος. Τοῦτο χαράσσεται, ἄν προσδιορίσωμεν τά μέσα τῶν ἄνω πλευρῶν τῶν ὀρθογωνίων τοῦ ἱστογράμμου καί τά συνδέσωμεν κατά σειράν δι' εὐθυγράμμων τμημάτων. Τά δύο ἄκρα σημεῖα τῆς σχηματιζομένης γραμμῆς τά συνδέομεν ἀντιστοίχως μέ τά μέσα τῶν δύο τμημάτων τοῦ ὁριζοντίου ἄξονος πού γειτονεύουν μέ τά ἀκραῖα ὀρθογώνια.

Τό πολύγωνον συχνότητος χαράσσεται καί κατ' ἄλλον τρόπον ὡς ἑξῆς: Λαμβάνομεν ἐπάνω εἰς τόν ὁριζόντιον ἄξονα τά σημεῖα πού παριστάνουν τάς μέσας τιμάς τῶν τάξεων τιμῶν τῆς



(Σχέδ. 130)

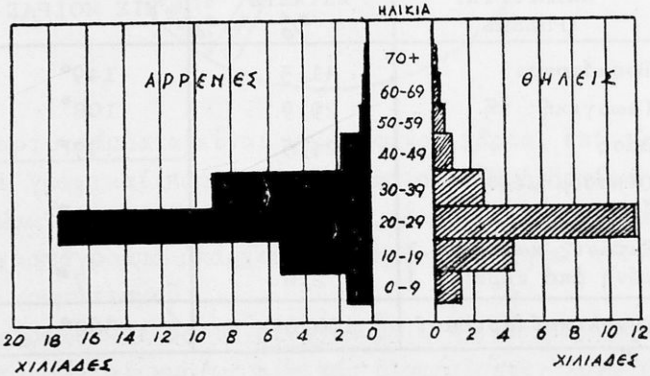
μεταβλητῆς καί ἀπό τά σημεῖα αὐτά φέρομεν καθέτους ἀντιστοίχους πρός τάς συχνότητας. Κατόπιν συνδέομεν τά ἄνω ἄκρα αὐτῶν τῶν καθέτων δι' εὐθυγράμμων τμημάτων κατά σειράν. Τό ὑπ' ἀριθμ. σχ. 130 πολύγωνον συχνότητος ἀναφέρεται ἐπίσης εἰς τό παράδειγμα τῶν ἡμερομισθίων τῶν 40 ἐργατῶν.

Κατά παρόμοιον τρόπον χαράσσεται καί τό ἱστόγραμμον ἤ τό πολύγωνον σχετικῆς συχνότητος. Διά τήν γραφικήν παράστασιν τῆς ἀθροιστικῆς συχνότητος θά γίνη λόγος κατωτέρω εἰς τήν παράγραφον 4.3 περί "διαμέσου".

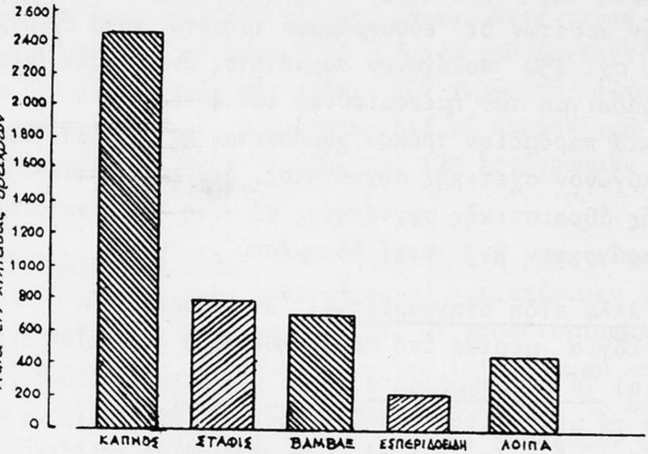
3.3. Ἄλλα εἴδη διαγραμμάτων. Ἀναφέρομεν ἐδῶ μέ ὀλίγα λόγια μερικά ἀπό τά συνηθέστερα ἄλλα εἴδη διαγραμμάτων. α) Τά ραβδογράμματα εἶναι μία σειρά ἀπό ὀρθογώνια τῶν ὁποίων τά μήκη εἶναι ἀνάλογα πρός τάς ἀντιστοίχους συχνότητας. Ὅταν ἀναφέρωνται εἰς χαρακτηριστικά ποιοτικῆς μεταβλητῆς, χαράσσονται συνήθως μέ μικράς ἴσας ἀποστάσεις μεταξύ των.

Δίδομεν δύο παραδείγματα:

ΑΡΙΘΜΟΣ ΠΡΟΣΩΠΩΝ ΜΟΝΙΜΩΣ ΜΕΤΑΝΑΣΤΕΥΣΑΝΤΩΝ
ΕΞ ΕΛΛΑΔΟΣ, ΚΑΤΑ ΦΥΛΟΝ ΚΑΙ ΗΛΙΚΙΑΝ, 1961



ΕΞΑΓΩΓΑΙ ΕΛΛΗΝΙΚΩΝ ΓΕΩΡΓΙΚΩΝ ΠΡΟΪΟΝΤΩΝ, 1961,
ΚΑΤΑ ΕΙΔΟΣ ΚΑΙ ΑΞΙΑΝ

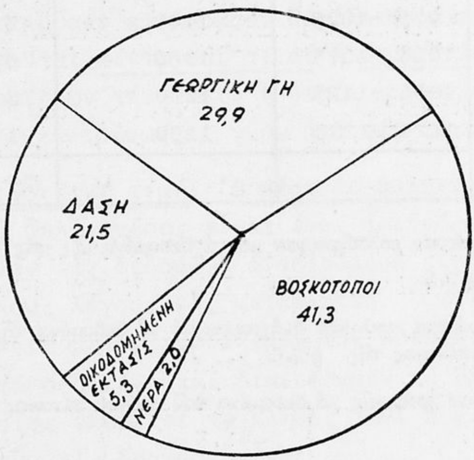


β) <u>Τά κυκλικά διαγράμματα</u> εἶναι κύκλοι χωρισμένοι εἰς κυκλικούς τομεῖς μέ ἐμβαδά (ἄρα καί μέ τόξα) ἀνάλογα πρός τάς ἀντιστοίχους συχνότητας. Ἄς λάβωμεν τά ἑξῆς δεδομένα:

ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΤΗΣ ΕΚΤΑΣΕΩΣ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ
ΚΑΤΑ ΒΑΣΙΚΑΣ ΚΑΤΗΓΟΡΙΑΣ ΧΡΗΣΕΩΣ, 1961

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑΙ ΧΡΗΣΕΩΣ	ΕΚΤΑΣΙΣ %	ΕΙΣ ΜΟΙΡΑΣ
Βοσκότοποι	41,3	149°
Γεωργική γῆ	29,9	108°
Δάση	21,5	77°
Οἰκοδομημένη ἔκτασις	5,3	19°
Ἔκτασις καλυπτομένη ἀπό νερά	2,0	7°
Συνολικοί ἀριθμοί	100,0	360°

Κατ'ἀρχάς γράφομεν περιφέρειαν κύκλου μέ τυχοῦσαν ἀκτῖνα. 'Επειδή τό ἐμβαδόν τοῦ κύκλου ἀντιστοιχεῖ πρός τό 100% τῆς ἐκτάσεως τῆς χώρας, ὁ κυκλικός τομεύς ὁ ὁποῖος ἀντιστοιχεῖ πρός τό 1% θά ἔχῃ γωνίαν ἴσην πρός 3,6°, ἐπομένως ὁ κυκλικός τομεύς πού ἀντιστοιχεῖ εἰς ποσοστόν 41,3% θά ἔχῃ γωνίαν $3,6 \times 41,3 = 149°$ περίπου κ.ο.κ. Λαμβάνομεν τώρα ἐπάνω εἰς τήν περιφέρειαν τοῦ κύκλου διαδοχικά τόξα 149°, 108°, 77°, 19°,7° καί χαράσσομεν τάς ἀκτῖνας πού καταλήγουν εἰς τά ἄκρα των. Οἱ ἀντίστοιχοι τομεῖς μᾶς δίδουν τήν γραφικήν παράστασιν τῆς κατανομῆς τῆς ἐκτάσεως τῆς 'Ελλάδος κατά κατηγορίας χρήσεως. Καλυτέραν ἐμφάνισιν ἔχουν οἱ ἔγχρωμοι τομεῖς.



γ) Τά χαρτογράμματα εἶναι γεωγραφικοί χάρται ἐπί τῶν ὁποίων γίνονται γραφικαί παραστάσεις στατιστικῶν δεδομένων μέ διάφορα χρώματα ἤ μέ τό ἴδιον χρῶμα ἀλλά διαφόρου τόνου. Κάτω ἀπό τό χαρτόγραμμα ὑπάρχει ὑπόμνημα πού ἐξηγεῖ τήν σημασίαν ἑκάστου χρωματισμοῦ.

'Αναφέρομεν τέλος τά εἰδογράμματα ἤ εἰδογραφήματα, τά ὁποῖα χρησιμοποιοῦνται κυρίως εἰς τάς διαφημίσεις, λόγῳ τῆς ἐντυπώσεως τήν όποίαν προκαλοῦν μέ εἰκόνας προσώπων ἤ πραγμάτων. Ἀποτελοῦν μέσον γραφικῆς παραστάσεως πολύ ἐκφραστικόν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Μέ τά δεδομένα τοῦ κατωτέρω πίνακος κατασκευάσατε ἱστόγραμμον καί πολύγωνον συχνότητος εἰς ἕνα σχέδιον:

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΖΩΗΣ 25 ΗΛΕΚΤΡ. ΛΑΜΠΤΗΡΩΝ

Διάρκεια εἰς ὥρας	Μέση τιμή τάξεως	f
775 - 825	800	2
825 - 875	850	2
875 - 925	900	5
925 - 975	950	4
975 -1025	1000	3
1025 -1075	1050	6
1075 -1125	1100	2
1125 -1175	1150	1
		25

2) Κατασκευάσατε ραβδόγραμμον μέ τά δεδομένα εἰς τάς δύο πρώτας στήλας τοῦ πίνακος τῆς §2.6.

3) Κατασκευάσατε κυκλικόν διάγραμμα μέ τά δεδομένα τῆς στήλης τῶν ἀρρένων τοῦ δευτέρου πίνακος τῆς §2.5.

4) Παραστήσατε γραφικῶς τά δεδομένα τοῦ πρώτου πίνακος τῆς §2.4.

§4. Κεντρικαί τιμαί

4.1. Οἱ στατιστικοί πίνακες καί αἱ γραφικαί παραστάσεις ἀποτελοῦν τό πρῶτον βῆμα εἰς τήν μελέτην τῶν δεδομένων μέ τάς μεθόδους τῆς Στατιστικῆς. Μᾶς ἀπαλλάσσουν ἀπό τήν σύγχυσιν τῶν ἑκατοντάδων ἤ χιλιάδων μεμονωμένων ἀριθμῶν καί μᾶς διευκολύνουν εἰς τήν. διατύπωσιν συμπερασμάτων. Ἕνα δεύτερον βῆμα συνίσταται εἰς τήν προσπάθειαν νά περιγράψωμεν τό σύνολον τῶν στατιστικῶν δεδομένων μέ ὀλίγους μόνον χαρακτηριστικούς ἀριθμούς πού καλοῦνται τυπικαί τιμαί ἤ παράμετροι. Γνωστόν παράδειγμα περιγραφῆς ἑνός συνόλου μέ μίαν μόνον χαρακτηριστικήν τιμήν εἶναι ὁ μέσος ὅρος τῶν βαθμῶν ἑνός μαθητοῦ εἰς ὅλα τά μαθήματα. Ὁ μέσος ὅρος τῆς βαθμολογίας δέν μᾶς πληροφορεῖ ἀσφαλῶς διά τήν ἐπίδοσιν τοῦ μαθητοῦ εἰς κάθε μάθημα ἰδιαιτέρως, δίδει ὅμως ἁπλῆν καί σαφῆ πληροφορίαν διά τήν γενικήν ἐπίδοσίν του.

Ἡ Στατιστική χρησιμοποιεῖ συστηματικῶς διαφόρους τυπικάς τιμάς (ἤ παραμέτρους), πού ἠμποροῦν νά δώσουν ἱκανοποιητικήν περιγραφήν ἑνός συνόλου δεδομένων. Μία ἀπό αὐτάς εἶναι καί τό εὖρος τῆς κατανομῆς ποσοτικῶν δεδομένων, διά τό ὁποῖον ἔχει γίνει λόγος εἰς τά προηγούμενα.

Εἰς τήν παροῦσαν παράγραφον θά ἐξετάσωμεν τρεῖς τυπικάς τιμάς πού λέγονται κεντρικαί τιμαί ἤ τιμαί κεντρικῆς τάσεως, διότι χαρακτηρίζουν τήν τάσιν ἡ ὁποία παρατηρεῖται εἰς τά δεδομένα νά συγκεντρώνωνται γύρω ἀπό τάς τιμάς αὐτάς.

4.2. Μέση ἀριθμητική τιμή. Ἡ μέση ἀριθμητική τιμή ἤ ἀριθμητικός μέσος ἤ ἁπλῶς μέσος εἶναι ἕνας ἀριθμός ὁ ὁποῖος ἔχει ἐφαρμογήν μόνον εἰς δεδομένα ἀναφερόμενα εἰς ποσοτικάς ἰδιότητας, μέ ἄλλους λόγους εἰς μεταβλητάς. Ὅταν τά δεδομένα μας εἶναι ἀταξινόμητα, εὑρίσκομεν τόν ἀριθμητικόν μέσον, ἄν προσθέσωμεν τά δεδομένα καί διαιρέσωμεν τό ἄθροισμα διά τοῦ ἀριθμοῦ ὁ ὁποῖος ἐκφράζει τό πλῆθος των. Π.χ. ἄν τά ἡμερομίσθια 5 ἐργατῶν εἰς δραχμάς εἶναι

$$60 \ , \ 80 \ , \ 110 \ , \ 120 \ , \ 130,$$

τότε ὁ μέσος εἶναι $(60+80+110+120+130) : 5 = \frac{500}{5} = 100$ δρχ.

Ὁ μέσος 100 σημαίνει ὅτι, ἄν οἱ 5 ἐργάται ἐλάμβανον χωρίς διάκρισιν τό ἴδιον ἡμερομίσθιον 100 δρχ , τό συνολικόν ποσόν τῶν 5 ἡμερομισθίων θά ἦτο 500 δρχ , δηλαδή ἴσον μέ τό συνολικόν ποσόν τό ὁποῖον διατίθεται διά τά πέντε διαφορετικά ἡμερομίσθια. Τά δεδομένα αὐτοῦ τοῦ παραδείγματος δύνανται νά παρασταθοῦν μέ τά σύμβολα x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 ἀντιστοίχως, ὁπότε συνηθίζεται ὁ ἀριθμητικός μέσος νά συμβολίζεται μέ $\bar{x}$· ἑπομένως θά ἔχωμεν:

$$\bar{x} = \frac{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5}{5}$$

Ὁ τύπος αὐτός γράφεται γενικώτερα ὡς ἑξῆς:

$$\bar{x} = \frac{x_1+x_2+\ldots+x_N}{N} = \frac{\Sigma x}{N} ,$$

ὅπου τό Σx σημαίνει ἄθροισμα τῶν N δεδομένων τιμῶν: x_1, x_2, x_3,..., x_N.

Ὁ γενικός αὐτός τύπος χρησιμοποιεῖται διά τόν ὑπολογισμόν τοῦ μέσου ἀριθμητικοῦ ἀταξινομήτων δεδομένων.

Διά τόν ὑπολογισμόν τοῦ μέσου ἀριθμητικοῦ ἀπό πίνακα κατανομῆς συχνοτήτων ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς:

Ἄν αἱ τιμαί τῆς μεταβλητῆς δέν ἔχουν κατανεμηθῆ εἰς τάξεις, πολλαπλασιάζομεν ἑκάστην τιμήν μέ τήν ἀντίστοιχον συχνότητα, προσθέτομεν τά εὑρισκόμενα γινόμενα καί διαιροῦμεν τό ἄθροισμα μέ τήν ὁλικήν συχνότητα.

Ἄν ἔχωμεν τάξεις τιμῶν τῆς μεταβλητῆς, λαμβάνομεν τήν μέσην τιμήν ἑκάστης τάξεως καί ἐργαζόμεθα ὁμοίως.

Ὁ τύπος καί διά τάς δύο περιπτώσεις εἶναι:

$$\bar{x} = \frac{\Sigma fx}{\Sigma f} ,$$

ὅπου fx σημαίνει γινόμενον τῆς τιμῆς x μέ τήν ἀντίστοιχον συχνότητα f, Σfx τό ἄθροισμα τῶν γινομένων τούτων καί Σf τήν ὁλικήν συχνότητα.

Κατωτέρω δίδομεν δύο παραδείγματα ὑπολογισμοῦ τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου ἀπό πίνακας κατανομῆς συχνοτήτων.

α) Ἔστω ὅτι δίδεται τό μέγεθος, δηλ. ὁ ἀριθμός μελῶν, 100 οἰκογενειῶν. Ἡ διάταξις τῶν πράξεων διά τήν εὕρεσιν τοῦ μέσου γίνεται κατά τόν ἀκόλουθον τρόπον:

ἀριθμ. μελῶν x	ἀριθμ. οἰκογεν. f	fx
1	20	20
2	24	48
3	17	51
4	15	60
5	9	45
6	5	30
7	4	28
8	3	24
9	1	9
10	2	20
$N = \Sigma f = 100$		$\Sigma fx = 335$

$$\bar{x} = \frac{\Sigma fx}{N} = \frac{335}{100}$$

= 3,35 πρόσωπα κατά οἰκογένειαν

Ἄν τά δεδομένα ἦσαν ὁμαδοποιημένα θά εἴχαμεν:

Μέγεθος οἰκογενείας	Μέση τιμή τάξεως x	f	fx
1 - 2	1,5	44	66
3 - 4	3,5	32	112
5 - 6	5,5	14	77
7 - 8	7,5	7	52,5
9 -10	9,5	3	28,5
		N = 100	336,0

$$\bar{x} = \frac{\Sigma fx}{N} = \frac{336}{100} = 3,36$$

β) Δίδεται τό βάρος (εἰς χιλιόγραμμα) 25 βρεφῶν ἡλικίας τριῶν μηνῶν (βλέπε πίνακα εἰς τήν ἑπομένην σελίδα).

4.3. Ἄλλη τυπική κεντρική τιμή πού χρησιμοποιεῖται εἰς τήν Στατιστικήν εἶναι ἡ διάμεσος, ἡ ὁποία ὅπως καί ὁ ἀριθμητικός μέσος ἐφαρμόζεται μόνον εἰς μεταβλητάς.

Ἄν ἔχωμεν μίαν σειράν στατιστικῶν δεδομένων μέ κατάταξιν

Βάρος	x	t	fx
3,5 - 4,5	4	2	8
4,5 - 5,5	5	2	10
5,5 - 6,5	6	3	18
6,5 - 7,5	7	4	28
7,5 - 8,5	8	5	40
8,5 - 9,5	9	3	27
9,5 -10,5	10	3	30
10,5 -11,5	11	2	22
11,5 -12,5	12	1	12
		N = 25	195

$$\bar{x} = \frac{\Sigma fx}{N} = \frac{195}{25} = 7,8$$

Δεδομένα ὑποθετικά

κατά μέγεθος, διάμεσος λέγεται ἡ τιμή ἡ ὁποία κατέχει τήν κεντρικήν θέσιν, δηλαδή ἡ τιμή ἡ ὁποία χωρίζει τά δεδομένα εἰς δύο ἰσοπληθεῖς ὁμάδας.

Εἰς τό παράδειγμα τῶν 5 ἡμερομισθίων: 60, 80, 110, 120, 130, ἡ διάμεσος εἶναι 110, διότι πρίν ἀπό τήν αὐτήν ὑπάρχουν δύο μικρότεραι τιμαί καί ὕστερα ἀπό αὐτήν δύο μεγαλύτεραι.

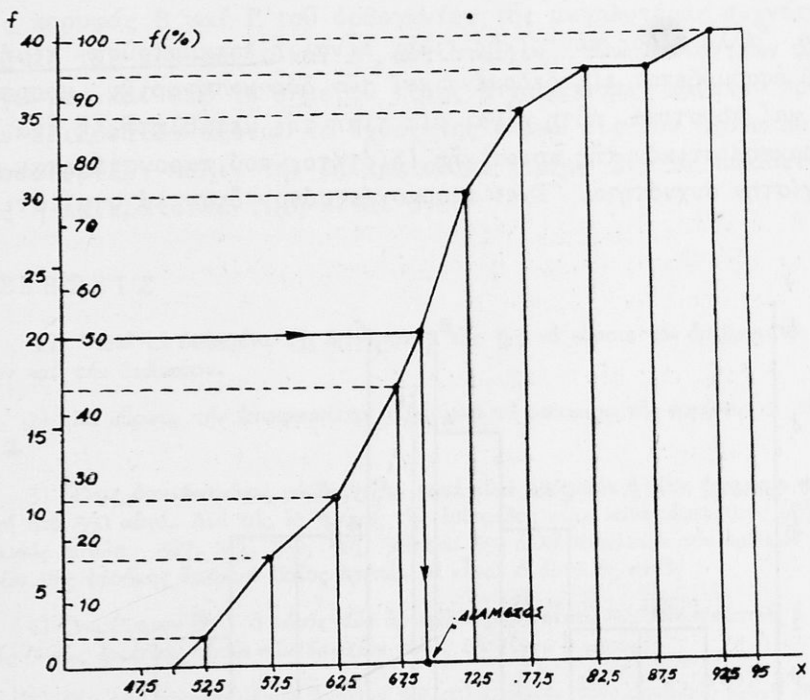
Ἄν εἴχομεν τά 6 ἡμερομίσθια: 60, 80, 110, 120, 130, 135, ὡς διάμεσος θά ἐλαμβάνετο ἡ μέση ἀριθμητική τιμή τῶν δύο κεντρικῶν δεδομένων: (110+120) : 2 = 115.

Διά τόν ὑπολογισμόν τῆς διαμέσου, ὅταν τά δεδομένα δίδωνται εἰς πίνακα κατανομῆς κατά συχνότητας ὑπάρχει κατάλληλος μαθηματικός τύπος, τόν ὁποῖον θά μάθωμεν εἰς ἀνωτέραν τάξιν· ἐδῶ θά περιορισθῶμεν εἰς τήν εὕρεσιν τῆς διαμέσου μέ γραφικήν μέθοδον.

Ἄς λάβωμεν τό παράδειγμα τῆς κατανομῆς τῶν 40 ἐργατῶν κατά τάξεις ἡμερομισθίων (§ 2.3).

Εὔκολα κατασκευάζομεν πολύγωνον ἀθροιστικῆς συχνότητος, ἄν ὁρίσωμεν ἐπάνω εἰς τόν ὁριζόντιον ἄξονα τά σημεῖα πού παριστάνουν τάς μέσας τιμάς τῶν τάξεων τιμῶν τῆς μεταβλητῆς καί φέρωμεν ἀπό αὐτά κάθετα εὐθύγραμμα τμήματα μέ μῆκη ἀνάλογα πρός τάς ἀντιστοίχους ἀθροιστικάς συχνότητας. Τά ἄνω ἄκρα αὐτῶν τῶν καθέτων τμημάτων τά συνδέομεν κατά σειράν μέ εὐθύγραμμα τμήματα καί ἔτσι λαμβάνομεν τό πολύγωνον. Ἐπάνω εἰς τόν κάθετον ἄξονα δυνάμεθα νά ὁρίσωμεν δύο κλίμακας: τήν μίαν διά τήν ἀθροιστικήν ἀπόλυτον συχνότητα καί τήν ἄλλην διά τήν σχετικήν.

Ἔχομεν λοιπόν το κατωτέρω διάγραμμα:

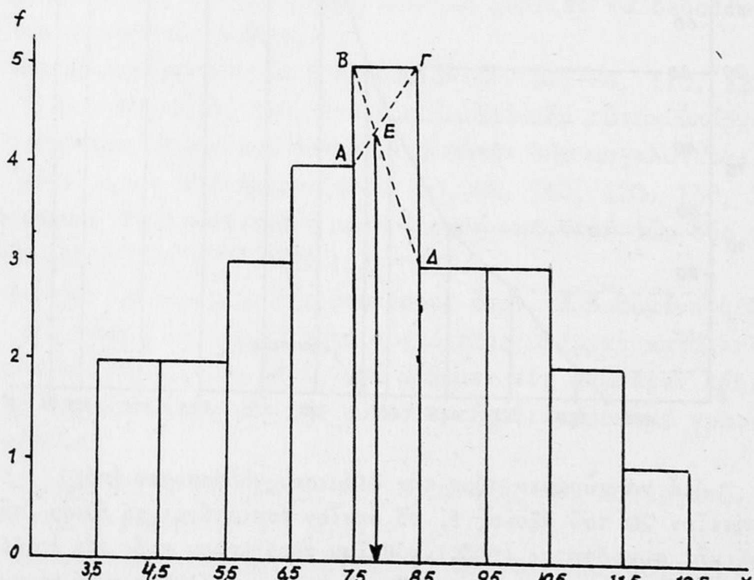


Διά νά εὕρωμεν τώρα τήν διάμεσον, χαράσσομεν ἀπό τό σημεῖον 20 τοῦ ἄξονος f, τό ὁποῖον παριστάνει τό ἥμισυ τῆς ὁλικῆς συχνότητος (50%), εὐθεῖαν παράλληλον πρός τόν ὁριζόντιον ἄξονα καί ἀπό τό σημεῖον ὅπου ἡ παράλληλος αὐτή θά συναντήση τό πολύγωνον ἀθροιστικῆς συχνότητος φέρομεν κάθετον πρόν τόν ἄξονα x · τό ἴχνος αὐτῆς τῆς καθέτου ἐπάνω· εἰς τόν ἄξονα x προσδιορίζει τήν ζητουμένην διάμεσον. Αὐτή εἰς τό παράδειγμά μας εἶναι 70,6.

Τοῦτο σημαίνει ὅτι 20 ἐργάται ἔχουν ἡμερομίσθιον μικρότερον ἀπό 70,6 δρχ., οἱ δέ ἄλλοι 20 μεγαλύτερον.

Ἡ εὕρεσις τῆς διαμέσου δύναται νά γίνη κατά παρόμοιον τρόπον, ὅταν ἀντί πολυγώνου διαθέτωμεν ἱστόγραμμον ἀθροιστικῆς συχνότητος.

<u>4.4.</u> Ἄλλο εἶδος κεντρικῆς τιμῆς εἶναι ἡ <u>ἐπικρατοῦσα τιμή</u>, πού ἐφαρμόζεται εἰς δεδομένα καί τῶν δύο κατηγοριῶν, ποσοτικά καί ποιοτικά. Αὔτη εἶναι μία τιμή τῆς μεταβλητῆς ἤ ἕνα χαρακτηριστικόν τῆς ποιοτικῆς ἰδιότητος πού παρουσιάζεται μέ μεγίστην συχνότητα. Ἔχει ἐφαρμογήν μόνον ὅταν τά στατιστικά



(Σχέδ. 131)

δεδομένα παρουσιάζωνται μέ συχνότητας, κατ' ἀντίθεσιν πρός τόν μέσον καί τήν διάμεσον πού δέν προϋποθέτουν τοιαύτην παρουσίασιν τῶν δεδομένων. Διά τήν εὕρεσιν τῆς ἐπικρατούσης τιμῆς θά περιορισθῶμεν πάλιν εἰς γραφικήν μέθοδον. Λαμβάνομεν τό παράδειγμα β) τῆς §4.2 τό ἀναφερόμενον εἰς τό βάρος τῶν 25 βρεφῶν καί κατασκευάζομεν τό ἱστόγραμμον συχνότητος (σχ.131).

Παρατηροῦμεν ὅτι τήν μεγαλυτέραν συχνότητα ἔχει ἡ τάξις 7,5 - 8,5 ἐντός τῆς ὁποίας εὑρίσκεται ἡ ἀκριβής ἐπικρατοῦσα τιμή. Διά νά εὕρωμεν αὐτήν τήν τιμήν συνδέομεν δι' εὐθειῶν τάς κορυφάς Β καί Γ τοῦ ὀρθογωνίου τῆς μεγαλυτέρας συχνότητος μέ τάς κορυφάς Α καί Δ, ἀντιστοίχως, τῶν γειτονικῶν ὀρθογωνίων καί ἀπό τό σημεῖον τομῆς Ε χαράσσομεν κάθετον πρός τόν ὁριζόντιον ἄξονα· τό ἴχνος της ἐπάνω εἰς τόν ἄξονα αὐτόν προσδιορίζει πάλιν τήν ἐπικρατοῦσαν τιμήν. Εἰς τό παράδειγμά μας ἡ ἐπικρατοῦσα τιμή εἶναι 7,8.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) 'Από τά δεδομένα τῆς ἀσκήσεως 1 τῆς §3 νά εὕρετε τόν ἀριθμητικόν μέσον καί τήν διάμεσον.

2) Νά εὕρετε τήν ἐπικρατοῦσαν τιμήν ἀπό τά δεδομένα τῆς ἀσκήσεως 2 τῆς §2.

3) Ἕνας ὀρνιθοτρόφος εὕρηκεν ὅτι κατά μίαν ἑβδομάδα ἡ μέση ἡμερησία παραγωγή ἦτο 350 αὐγά. Διά τάς ἕξ ἡμέρας τῆς ἑβδομάδος εἶχε καταγράψει τούς ἑξῆς ἀριθμούς αὐγῶν: 347, 351, 358, 345, 350 καί 353 ἀλλά παρέλειψε τόν ἀριθμόν τῶν αὐγῶν τῆς ἑβδόμης ἡμέρας. Ποῖος πρέπει νά εἶναι ὁ ἀριθμός αὐτός ;

4) Γνωρίζομεν ὅτι ὁ μέσος τῶν ἀριθμῶν 1,6,8 εἶναι 5. Ἐάν προστεθῆ ὁ ἀριθμός 7 εἰς ἕκαστον αὐτῶν τῶν ἀριθμῶν ποῖος θά εἶναι ὁ μέσος;

5) Εἰς τήν προηγουμένην ἄσκησιν πολλαπλασιάσατε τούς ἀριθμούς 1,6,8 ἐπί 7 καί εὕρετε τόν μέσον αὐτῶν. Τί συμπεραίνετε;

6) Ἔστω ὅτι τά δεδομένα x_1, x_2, x_3 ἔχουν μέσον $\bar{x}$. Μέ αὐτά τά δεδομένα σχηματίζομεν τά $\lambda x_1+\mu$, $\lambda x_2+\mu$, $\lambda x_3+\mu$, ὅπου λ,μ τυχόντες ἀριθμοί. Ἄν τά νέα δεδομένα ἔχουν μέσον $\bar{y}$, δείξατε ὅτι $\bar{y} = \lambda\bar{x} + \mu$.

7) Γνωρίζομεν ὅτι οἱ βαθμοί C Κελσίου μετατρέπονται εἰς βαθμούς F Φαρενάϊτ βάσει τοῦ τύπου :

$F = \frac{9}{5}C + 32$. Εἰς ἕνα πείραμα εὑρέθησαν μέ μετρήσεις οἱ ἑξῆς 10 βαθμοί Κελσίου: 35 , 38 , 36, 42, 41, 37, 42, 37, 35, 40.
Ποῖος ὁ ἀριθμητικός μέσος εἰς βαθμούς Φαρενάϊτ αὐτῶν τῶν δεδομένων ;

§ 5. Μέτρησις διασπορᾶς.

5.1. Διασπορά τῶν στατιστικῶν δεδομένων. Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι δύο μαθηταί Α καί Β ἔλαβον εἰς ἐννέα μαθήματα τούς ἑξῆς ἀντιστοίχως βαθμούς:

Α	16	10	14	7	17	15	19	13	17
Β	12	16	11	11	17	12	15	17	17

Εὔκολα εὑρίσκομεν ὅτι ὁ μέσος ὅρος τῆς βαθμολογίας τοῦ Α εἶναι $\frac{128}{9}$ καί τοῦ Β ὁμοίως $\frac{128}{9}$. Γράφοντες τούς βαθμούς ἑκάστου κατ' αὔξανον μέγεθος εὑρίσκομεν ὅτι καί αἱ διάμεσοι (15) καθώς καί αἱ ἐπικρατοῦσαι τιμαί (17) τῶν δύο αὐτῶν σειρῶν εἶναι ἴσαι. Ἐν τούτοις ἡ μορφή τῆς πρώτης σειρᾶς διαφέρει πολύ ἀπό τήν μορφήν τῆς δευτέρας: Οἱ βαθμοί τοῦ Α εἶναι διεσπαρμένοι ἀπό 7 ἕως 19, τοῦ Β , ἀπό 11 ἕως 17. Μέ ἄλλους λόγους, ἡ κατανομή τῶν βαθμῶν τοῦ Β ἔχει μικρότερον εὖρος.

Κάμνομεν λοιπόν τήν διαπίστωσιν ὅτι αἱ τρεῖς κεντρικαί τιμαί δέν εἶναι πάντοτε ἐπαρκεῖς διά τήν περιγραφήν μιᾶς κατανομῆς δεδομένων. Ἔχομεν ἑπομένως ἀνάγκην καί ἄλλων χαρακτηριστικῶν τιμῶν (παραμέτρων), αἱ ὁποῖαι νά μᾶς περιγράφουν τήν διασποράν τῶν δεδομένων πέριξ μιᾶς κεντρικῆς τιμῆς.

Τό εὖρος μιᾶς κατανομῆς μᾶς δίδει περιωρισμένην πληροφορίαν περί τοῦ μεγέθους τῆς διασπορᾶς καί δέν μᾶς δεικνύει πάντοτε τήν διαφοράν τῆς διασπορᾶς μεταξύ δύο κατανομῶν στατιστικῶν δεδομένων. Ἔτσι ἄν λάβωμεν π.χ. τάς δύο σειράς πέντε στοιχείων: 9 , 10 , 10 , 10 , 11
καί 9 , 9 , 10 , 11 , 11 ,

παρατηροῦμεν ὅτι ἔχουν τόν αὐτόν μέσον 10 καί τό αὐτό εὖρος, ἐν τούτοις ἡ δευτέρα σειρά ἔχει μεγαλυτέραν διασποράν. Πράγματι εἰς μέν τήν πρώτην μόνον δύο διαφορετικά στοιχεῖα εὑρίσκονται ἑκατέρωθεν τοῦ μέσου, εἰς δέ τήν δευτέραν τέσσαρα.

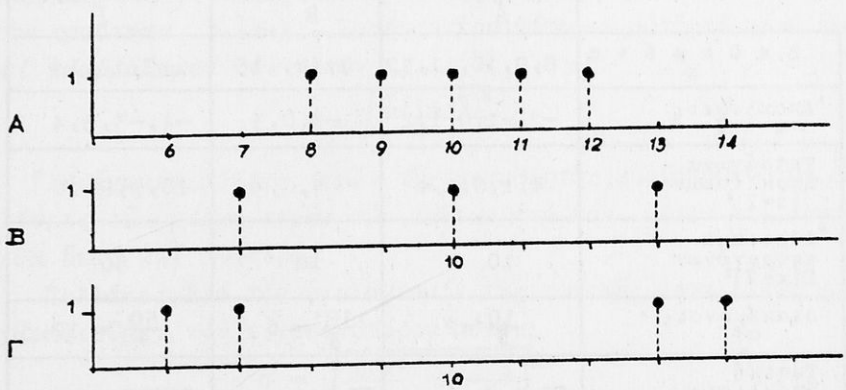
5.2. Διακύμανσις καί τυπική ἀπόκλισις. Ἡ περιγραφή τῆς διασπορᾶς τῶν δεδομένων εἰς μίαν κατανομήν γίνεται μέ μίαν παραμετρον πού μετρᾶ τό μέγεθος τῆς συγκεντρώσεως τῶν δεδομένων πέριξ τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου.

Διά νά ἀντιληφθῶμεν τήν ἔννοιαν τῆς μετρήσεως τῆς διασπορᾶς, ἄς ἀρχίσωμεν ἀπό παραδείγματα εἰς τά ὁποῖα τά δεδομένα κατανέμονται συμμετρικῶς πέριξ τοῦ αὐτοῦ μέσου $\overline{x}$.

Πρός τοῦτο θά λάβωμεν τάς ἑξῆς τρεῖς σειράς δεδομένων:

Α 8 , 9 , 10 , 11 , 12
Β 7 , 10 , 13
Γ 6 , 7 , 13 , 14 .

Ἄν παραστήσωμεν μέ τά κατωτέρω (στικτά) διαγράμματα, ὑπό τήν αὐτήν κλίμακα, τάς σειράς Α, Β, Γ, ἀντιλαμβανόμεθα ὅτι ἡ Α παρουσιάζει μικροτέραν διασποράν ἀπό τήν Β καί ἡ Β μικροτέραν ἀπό τήν Γ.



Κατά συνέπειαν ἡ διασπορά τῆς Α πρέπει νά ἐκφρασθῆ μέ ἀριθμόν (παράμετρον) μικρότερον ἀπό ἐκεῖνον πού θά ἐκφράζη τή διασποράν τῆς Β ἤ τῆς Γ.

῞Ας προχωρήσωμεν εἰς τήν εὕρεσιν αὐτῶν τῶν παραμέτρων. Γράφομεν τήν διαφοράν $x - \bar{x}$ πού παρουσιάζει ὁ μέσος $\bar{x} = 10$ ἀπό ἕκαστον στοιχεῖον τῆς σειρᾶς Α :

$8-10 = -2$, $9-10 = -1$, $10-10 = 0$, $11-10 = 1$, $12-10 = 2$.

Αἱ διαφοραί αὐταί ὀνομάζονται ἀποκλίσεις τῶν δεδομένων ἀπό τόν ἀριθμητικόν μέσον.

Τά τετράγωνα $(x-\bar{x})^2$ αὐτῶν τῶν ἀποκλίσεων εἶναι 4,1,0,1, 4 ἀντιστοίχως, καί τό ἄθροισμά των:

$$\Sigma(x-\bar{x})^2 = 4 + 1 + 0 + 1 + 4 = 10.$$

Διαιροῦμεν αὐτό τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποκλίσεων μέ τόν ἀριθμόν 5, πού δίδει τό πλῆθος τῶν δεδομένων, καί εὑρίσκομεν τόν ἀριθμόν 2 ὁ ὁποῖος καλεῖται μέση τετραγωνική ἀπόκλισις ἤ διακύμανσις τῆς κατανομῆς τῶν δεδομένων. Ἡ διακύμανσις συμβολίζεται μέ τό γράμμα σ^2 καί ἐκφράζεται μέ τόν τύπον:

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma(x-\bar{x})^2}{N}.$$

Εἰς τόν κατωτέρω πίνακα δίδομεν τούς ὑπολογισμούς διά τήν εὕρεσιν τῶν διακυμάνσεων τῶν σειρῶν Α, Β, Γ.

	Α	Β	Γ
Δεδομένα x	8,9,10,11,12	7,10, 13	6,7,13,14
Ἀποκλίσεις $x - \bar{x}$	-2,-1,0,1,2	-3,0,3	-4,-3,3,4
Τετράγωνα ἀποκλίσεων $(x-\bar{x})^2$	4,1,0,1,4	9,0,9	16,9,9,16
Ἄθροισμα τετραγώνων $\Sigma(x-\bar{x})^2$	10	18	50
Διακύμανσις σ^2	$\frac{10}{5} = 2$	$\frac{18}{3} = 6$	$\frac{50}{4} = 12,5$
Τύπική ἀπόκλισις σ	$\sqrt{2} = 1,41$	$\sqrt{6} = 2,45$	$\sqrt{12,5} = 3,54$

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ διακύμανσις $\sigma^2 = 2$ τῆς σειρᾶς Α εἶναι μικροτέρα ἀπό τήν διακύμανσιν $\sigma^2 = 6$ τῆς Β, ἡ ὁποία πάλιν εἶναι μικροτέρα ἀπό τήν διακύμανσιν $\sigma^2 = 12,5$ τῆς Γ. Δυνάμεθα λοιπόν νά θεωρήσωμεν ὡς ἱκανοποιητικόν μέτρον τῆς διασπορᾶς τῶν δεδομένων τήν διακύμανσιν. Ἐν τούτοις οἱ Στατιστικοί προτιμοῦν ἀντί αὐτῆς τῆς παραμέτρου τήν θετικήν τετραγωνικήν ρίζαν σ τῆς διακυμάνσεως ἡ ὁποία ὀνομάζεται <u>τυπική ἀπόκλισις</u>. Ἡ προτίμησις ὀφείλεται εἰς τό ὅτι ἡ τυπική ἀπόκλισις σ εἶναι ἀριθμός τῆς αὐτῆς φύσεως μέ τά δεδομένα, ἐνῶ ἡ διακύμανσις σ^2 δέν εἶναι. Π.χ. ἐάν τά δεδομένα εἶναι μήκη τότε καί τό σ εἶναι μῆκος, ἐνῶ τό σ^2 εἶναι ἐμβαδόν. Ἡ τυπική ἀπόκλισις ἀταξινομήτων δεδομένων ἐκφράζεται μέ τόν τύπον:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(x-\bar{x})^2}{N}} .$$

Διά τόν ὑπολογισμόν τῆς τυπικῆς ἀποκλίσεως ἀπό πίνακα κατανομῆς συχνοτήτων ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς: Ἄν αἱ τιμαί τῆς μεταβλητῆς δέν ἔχουν κατανεμηθῆ εἰς τάξεις, εὑρίσκομεν τά τετράγωνα τῶν ἀποκλίσεων αὐτῶν τῶν τιμῶν ἀπό τόν ἀριθμητικόν μέσον καί τά πολλαπλασιάζομεν μέ τάς ἀντιστοίχους συχνότητας. Δηλαδή δι' ἑκάστην τιμήν τῆς μεταβλητῆς ὑπολογίζομεν τήν ποσότητα $f\cdot(x-\bar{x})^2$. Κατόπιν προσθέτομεν αὐτά τά γινόμενα καί ἐφαρμόζομεν τόν τύπον:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f(x-\bar{x})^2}{N}} .$$

Ἄν ἔχωμεν τάξεις τιμῶν τῆς μεταβλητῆς, εὑρίσκομεν τάς ἀποκλίσεις τῶν μέσων τιμῶν τῶν τάξεων ἀπό τόν μέσον καί ἐργαζόμεθα ὅπως καί ἀνωτέρω.

Πολλάκις διά τόν ὑπολογισμόν τῆς τυπικῆς ἀποκλίσεως χρησιμοποιοῦμεν τόν εὐχρηστότερον τύπον:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f x^2}{N} - \left(\frac{\Sigma f x}{N}\right)^2}$$

ὁ ὁποῖος εἶναι ἰσοδύναμος μέ τόν προηγούμενον.

Ἄς λάβωμεν πρός ἐφαρμογήν τούτου τά δεδομένα τοῦ τελευταίου παραδείγματος τῆς παραγράφου 4.2.

Βάρος	x	f	fx	x^2	fx^2
3,5 - 4,5	4	2	8	16	32
4,5 - 5,5	5	2	10	25	50
5,5 - 6,5	6	3	18	36	108
6,5 - 7,5	7	4	28	49	196
7,5 - 8,5	8	5	40	64	320
8,5 - 9,5	9	3	27	81	243
9,5 - 10,5	10	3	30	100	300
10,5 - 11,5	11	2	22	121	242
11,5 - 12,5	12	1	12	144	144
		25	195		1 635

Βάσει τοῦ ἀνωτέρω τύπου ἔχομεν:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f x^2}{N} - \left(\frac{\Sigma f x}{N}\right)^2} = \sqrt{\frac{1635}{25} - \left(\frac{195}{25}\right)^2} = \sqrt{65,4 - 60,84}$$

$$= \sqrt{4,56} = 2,1.$$

5.3. Σημασία τῆς τυπικῆς ἀποκλίσεως. Ὅταν ἡ κατανομή τῶν δεδομένων εἶναι ὁμαλή καί συμμετρική ἑκατέρωθεν τοῦ μέσου, δυνάμεθα νά περιγράψωμεν τήν μορφήν τῆς κατανομῆς τῶν συχνοτήτων γνωρίζοντες μόνον δύο παραμέτρους: τόν μέσον καί τήν τυπικήν ἀπόκλισιν. Ὁ κανών εἶναι ὁ ἑξῆς: Ἄν ἑκατέρωθεν τοῦ μέσου λάβωμεν δύο διαστήματα ἴσα πρός τήν τυπικήν ἀπόκλισιν, τότε εἰς τό διάστημα τιμῶν τῆς μεταβλητῆς τό ὁποῖον ἀποτελεῖται ἀπό τήν ἕνωσιν τῶν δύο αὐτῶν διαστημάτων ἀνήκουν τά 68,3% τοῦ ὁλικοῦ ἀριθμοῦ τῶν δεδομένων. Ἄν ἑκατέρωθεν τοῦ μέσου λάβωμεν τά διπλάσια τῶν τυπικῶν ἀποκλίσεων, ἡ ἕνωσίς των θά περιλαμβάνῃ τά 95,4 % καί ἄν λάβωμεν τά τριπλάσια τῶν τυπικῶν ἀποκλίσεων, τά 99,7 % τοῦ ὁλικοῦ ἀριθμοῦ τῶν δεδομένων. Π.χ. ἄν γνωρίζωμεν ὅτι ὁ μέσος τῶν ἀναστημάτων 4000 ἀτόμων εἶναι $\bar{x} = 162$ cm , ἡ δέ τυπική ἀπόκλισις $\sigma = 5$, θά συμπεράνωμεν ὅτι τά 68,3% αὐτῶν τῶν ἀτόμων (ἤτοι 2732 ἄτομα) ἔχουν ἀνάστημα ἀπό 157 - 167 cm, τά 95,4% (ἤτοι 3816 ἄτομα) ἀπό 152-172 cm καί τά 99,7%, δηλαδή τό σύνολον σχεδόν τῶν 4000 ἀτόμων, ἀπό 147 - 177 cm.

Ὁ ἀνωτέρω κανών τῆς περιγραφῆς μιᾶς κατανομῆς συχνοτήτων δύναται νά ἐπεκταθῆ καί διά κλασματικά πολλαπλάσια τῆς τυπικῆς ἀποκλίσεως. Τοῦτο ὅμως ὡς καί τό θέμα τῆς ἐφαρμογῆς τῆς τυπικῆς ἀποκλίσεως εἰς κατανομάς ὄχι ἀπαραιτήτως ὁμαλάς καί συμμετρικάς, ἀποτελοῦν ἀντικείμενον μιᾶς ὄχι στοιχειώδους στατιστικῆς ἀναλύσεως.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Ὑπολογίσατε τήν διακύμανσιν καί τήν τυπικήν ἀπόκλισιν τῆς κατωτέρω κατανομῆς τῶν μαθητῶν ἑνός σχολείου κατά ἡλικίαν:

Ἡλικία	Συχνότης
6	32
7	26
8	25
9	20
10	20
11	27
	150

2) Ὁ μέσος μιᾶς κανονικῆς κατανομῆς εἶναι $\bar{x} = 20$, ἡ δέ διακύμανσις $s^2 = 6,25$. Μεταξύ ποίων ὁρίων πέριξ τοῦ μέσου κεῖνται τά 95,4% τῶν δεδομένων;

Ἡμίτονα ὀξειῶν γωνιῶν.

Μοῖρες	0′	10′	20′	30′	40′	50′	Μοῖρες	0′	10′	20′	30′	40′	50′
0	0,000	0,003	0,006	0,009	0,012	0,015	45	0,707	0,709	0,711	0,713	0,715	0,717
1	0,017	0,020	0,023	0,026	0,029	0,032	46	0,719	0,721	0,723	0,725	0,727	0,729
2	0,035	0,038	0,041	0,044	0,047	0,049	47	0,731	0,733	0,735	0,737	0,739	0,741
3	0,052	0,055	0,058	0,061	0,064	0,067	48	0,743	0,745	0,747	0,749	0,751	0,753
4	0,070	0,073	0,076	0,078	0,081	0,084	49	0,755	0,757	0,759	0,760	0,762	0,764
5	0,087	0,090	0,093	0,096	0,099	0,102	50	0,766	0,768	0,770	0,772	0,773	0,775
6	0,105	0,107	0,110	0,113	0,116	0,119	51	0,777	0,779	0,781	0,783	0,784	0,786
7	0,122	0,125	0,128	0,131	0,133	0,136	52	0,788	0,790	0,792	0,793	0,795	0,797
8	0,139	0,142	0,145	0,148	0,151	0,154	53	0,799	0,800	0,802	0,804	0,806	0,807
9	0,156	0,159	0,162	0,165	0,168	0,171	54	0,809	0,811	0,812	0,814	0,816	0,817
10	0,174	0,177	0,179	0,182	0,185	0,188	55	0,819	0,821	0,822	0,824	0,826	0,827
11	0,191	0,194	0,197	0,199	0,202	0,205	56	0,829	0,831	0,832	0,834	0,835	0,837
12	0,208	0,211	0,214	0,216	0,219	0,222	57	0,839	0,840	0,842	0,843	0,845	0,847
13	0,225	0,228	0,231	0,233	0,236	0,239	58	0,848	0,850	0,851	0,853	0,854	0,856
14	0,242	0,245	0,248	0,250	0,253	0,256	59	0,857	0,859	0,860	0,862	0,863	0,865
15	0,259	0,262	0,264	0,267	0,270	0,273	60	0,866	0,867	0,869	0,870	0,872	0,873
16	0,276	0,278	0,281	0,284	0,287	0,290	61	0,875	0,876	0,877	0,879	0,880	0,882
17	0,292	0,295	0,298	0,301	0,303	0,306	62	0,883	0,884	0,886	0,887	0,888	0,890
18	0,309	0,312	0,315	0,317	0,320	0,323	63	0,891	0,892	0,894	0,895	0,896	0,898
19	0,326	0,328	0,331	0,334	0,337	0,339	64	0,899	0,900	0,901	0,903	0,904	0,905
20	0,342	0,345	0,347	0,350	0,353	0,356	65	0,906	0,908	0,909	0,910	0,911	0,912
21	0,358	0,361	0,364	0,367	0,369	0,372	66	0,914	0,915	0,916	0,917	0,918	0,919
22	0,375	0,377	0,380	0,383	0,385	0,388	67	0,921	0,922	0,923	0,924	0,925	0,926
23	0,391	0,393	0,396	0,399	0,401	0,404	68	0,927	0,928	0,929	0,930	0,931	0,933
24	0,407	0,409	0,412	0,415	0,417	0,420	69	0,934	0,935	0,936	0,937	0,938	0,939
25	0,423	0,425	0,428	0,431	0,433	0,436	70	0,940	0,941	0,942	0,943	0,944	0,945
26	0,438	0,441	0,444	0,446	0,449	0,451	71	0,946	0,946	0,947	0,948	0,949	0,950
27	0,454	0,457	0,459	0,462	0,464	0,467	72	0,951	0,952	0,953	0,954	0,955	0,955
28	0,469	0,472	0,475	0,477	0,480	0,482	73	0,956	0,957	0,958	0,959	0,960	0,960
29	0,485	0,487	0,490	0,492	0,495	0,497	74	0,961	0,962	0,963	0,964	0,964	0,965
30	0,500	0,503	0,505	0,508	0,510	0,513	75	0,966	0,967	0,967	0,968	0,969	0,970
31	0,515	0,518	0,520	0,523	0,525	0,527	76	0,970	0,971	0,972	0,972	0,973	0,974
32	0,530	0,532	0,535	0,537	0,540	0,542	77	0,974	0,975	0,976	0,976	0,977	0,978
33	0,545	0,547	0,550	0,552	0,554	0,557	78	0,978	0,979	0,979	0,980	0,981	0,981
34	0,559	0,562	0,564	0,566	[illegible]	0,571	79	0,982	0,982	0,983	0,983	0,984	0,984
35	0,574	0,576	0,578	0,581	0,583	0,585	80	0,985	0,985	0,986	0,986	0,987	0,987
36	0,588	0,590	0,592	0,595	0,597	0,599	81	0,988	0,988	0,989	0,989	0,989	0,990
37	0,602	0,604	0,606	[illegible]	0,611	0,613	82	0,990	0,991	0,991	0,991	0,992	0,992
38	0,616	0,618	0,620	0,623	0,625	0,627	83	0,993	0,993	0,993	0,994	0,994	0,994
39	0,629	0,632	0,634	0,636	[illegible]	0,641	84	0,995	0,995	0,995	0,995	0,996	0,996
40	0,643	0,645	0,647	0,649	0,652	0,654	85	0,996	0,996	0,997	0,997	0,997	0,997
41	0,656	0,658	0,660	0,663	0,665	0,667	86	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998
42	0,669	0,671	0,673	0,676	0,678	0,680	87	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999
43	0,682	0,684	0,686	0,688	0,690	0,693	88	0,999	0,999	1,000	1,000	1,000	1,000
44	0,695	0,697	0,699	0,701	0,703	0,705	89	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000

Συνημίτονα όξειών γωνιών.

Μοίρες	0′	10′	20′	30′	40′	50′	Μοίρες	0′	10′	20′	30′	40′	50′
0	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	45	0,707	0,705	0,703	0,701	0,699	0,697
1	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	46	0,695	0,693	0,690	0,688	0,686	0,684
2	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	47	0,682	0,680	0,678	0,676	0,673	0,671
3	0,999	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	48	0,669	0,667	0,665	0,663	0,660	0,658
4	0,998	0,997	0,997	0,997	0,967	0,996	49	0,656	0,654	0,652	0,649	0,647	0,645
5	0,996	0,996	0,996	0,995	0,995	0,995	50	0,643	0,641	0,638	0,636	0,634	0,632
6	0,995	0,994	0,994	0,994	0,993	0,993	51	0,629	0,627	0,625	0,623	0,620	0,618
7	0,993	0,992	0,992	0,991	0,991	0,991	52	0,616	0,613	0,611	0,609	0,606	0,604
8	0,990	0,990	0,989	0,989	0,989	0,988	53	0,602	0,599	0,597	0,595	0,592	0,590
9	0,988	0,987	0,987	0,986	0,986	0,985	54	0,588	0,585	0,583	0,581	0,578	0,576
10	0,985	0,984	0,984	0,983	0,983	0,982	55	0,574	0,571	0,569	0,566	0,564	0,562
11	0,982	0,981	0,981	0,980	0,979	0,979	56	0,559	0,557	0,554	0,552	0,550	0,547
12	0,978	0,978	0,977	0,976	0,976	0,975	57	0,545	0,542	0,540	0,537	0,535	0,532
13	0,974	0,974	0,973	0,972	0,972	0,971	58	0,530	0,527	0,525	0,523	0,520	0,518
14	0,970	0,970	0,969	0,968	0,967	0,967	59	0,515	0,513	0,510	0,508	0,505	0,503
15	0,966	0,965	0,964	0,964	0,963	0,962	60	0,500	0,497	0,495	0,492	0,490	0,487
16	0,961	0,960	0,960	0,959	0,958	0,957	61	0,485	0,482	0,480	0,477	0,475	0,472
17	0,956	0,955	0,955	0,954	0,953	0,952	62	0,469	0,467	0,464	0,462	0,459	0,457
18	0,951	0,950	0,949	0,948	0,947	0,946	63	0,454	0,451	0,449	0,446	0,444	0,441
19	0,946	0,945	0,944	0,943	0,942	0,941	64	0,438	0,436	0,433	0,431	0,428	0,425
20	0,940	0,939	0,938	0,937	0,936	0,935	65	0,423	0,420	0,417	0,415	0,412	0,409
21	0,934	0,933	0,931	0,930	0,929	0,928	66	0,407	0,404	0,401	0,399	0,396	0,393
22	0,927	0,926	0,925	0,924	0,923	0,922	67	0,391	0,388	0,385	0,383	0,380	0,377
23	0,921	0,919	0,918	0,917	0,916	0,915	68	0,375	0,372	0,369	0,367	0,364	0,361
24	0,914	0,912	0,911	0,910	0,909	0,908	69	0,358	0,356	0,353	0,350	0,347	0,345
25	0,906	0,905	0,904	0,903	0,901	0,900	70	0,342	0,339	0,337	0,334	0,331	0,329
26	0,899	0,898	0,896	0,895	0,894	0,892	71	0,326	0,323	0,320	0,317	0,315	0,312
27	0,891	0,890	0,888	0,887	0,886	0,884	72	0,309	0,306	0,303	0,301	0,298	0,295
28	0,883	0,882	0,880	0,879	0,877	0,876	73	0,292	0,290	0,287	0,284	0,281	0,278
29	0,875	0,873	0,872	0,870	0,869	0,867	74	0,276	0,273	0,270	0,267	0,264	0,262
30	0,866	0,865	0,863	0,862	0,860	0,859	75	0,259	0,256	0,253	0,250	0,248	0,245
31	0,857	0,856	0,854	0,853	0,851	0,850	76	0,242	0,239	0,236	0,233	0,231	0,228
32	0,848	0,847	0,845	0,843	0,842	0,840	77	0,225	0,222	0,219	0,216	0,214	0,211
33	0,839	0,837	0,835	0,834	0,832	0,831	78	0,208	0,205	0,202	0,199	0,197	0,194
34	0,829	0,827	0,826	0,824	0,822	0,821	79	0,191	0,188	0,185	0,182	0,179	0,177
35	0,819	0,817	0,816	0,814	0,812	0,811	80	0,174	0,171	0,168	0,165	0,162	0,159
36	0,809	0,807	0,806	0,804	0,802	0,800	81	0,156	0,154	0,151	0,148	0,145	0,142
37	0,799	0,797	0,795	0,793	0,792	0,790	82	0,139	0,136	0,133	0,131	0,128	0,125
38	0,788	0,786	0,784	0,783	0,781	0,779	83	0,122	0,119	0,116	0,113	0,110	0,107
39	0,777	0,775	0,773	0,772	0,770	0,768	84	0,105	0,102	0,099	0,096	0,093	0,090
40	0,766	0,764	0,762	0,760	0,759	0,757	85	0,087	0,084	0,081	0,078	0,076	0,073
41	0,755	0,753	0,751	0,749	0,747	0,745	86	0,070	0,067	0,064	0,061	0,058	0,055
42	0,743	0,741	0,739	0,737	0,735	0,733	87	0,052	0,049	0,047	0,044	0,041	0,038
43	0,731	0,729	0,727	0,725	0,723	0,721	88	0,035	0,032	0,029	0,026	0,023	0,020
44	0,719	0,717	0,715	0,713	0,711	0,709	89	0,017	0,015	0,012	0,009	0,006	0,003

Ἐφαπτομένες ὀξειῶν γωνιῶν.

Μοίρες	0′	10′	20′	30′	40′	50′	Μοίρες	0′	10′	20′	30′	40′	50′
0	0,000	0,003	0,006	0,009	0,012	0,015	45	1,000	1,006	1,012	1,018	1,024	1,030
1	0,017	0,020	0,023	0,026	0,029	0,032	46	1,036	1,042	1,048	1,054	1,060	1,066
2	0,035	0,038	0,041	0,044	0,047	0,049	47	1,072	1,079	1,085	1,091	1,098	1,104
3	0,052	0,055	0,058	0,061	0,064	0,067	48	1,111	1,117	1,124	1,130	1,137	1,144
4	0,070	0,073	0,076	0,079	0,082	0,085	49	1,150	1,157	1,164	1,171	1,178	1,185
5	0,087	0,090	0,093	0,096	0,099	0,102	50	1,192	1,199	1,206	1,213	1,220	1,228
6	0,105	0,108	0,111	0,114	0,117	0,120	51	1,235	1,242	1,250	1,257	1,265	1,272
7	0,123	0,126	0,129	0,132	0,135	0,138	52	1,280	1,288	1,295	1,303	1,311	1,319
8	0,141	0,144	0,146	0,149	0,152	0,155	53	1,327	1,335	1,343	1,351	1,360	1,368
9	0,158	0,161	0,164	0,167	0,170	0,173	54	1,376	1,385	1,393	1,402	1,411	1,419
10	0,176	0,179	0,182	0,185	0,188	0,191	55	1,428	1,437	1,446	1,455	1,464	1,473
11	0,194	0,197	0,200	0,203	0,206	0,210	56	1,483	1,492	1,501	1,511	1,520	1,530
12	0,213	0,216	0,219	0,222	0,225	0,228	57	1,540	1,550	1,560	1,570	1,580	1,590
13	0,231	0,234	0,237	0,240	0,243	0,246	58	1,600	1,611	1,621	1,632	1,643	1,653
14	0,249	0,252	0,256	0,259	0,262	0,265	59	1,664	1,675	1,686	1,698	1,709	1,720
15	0,268	0,271	0,274	0,277	0,280	0,284	60	1,732	1,744	1,756	1,767	1,780	1,792
16	0,287	0,290	0,293	0,296	0,299	0,303	61	1,804	1,816	1,829	1,842	1,855	1,868
17	0,306	0,309	0,312	0,315	0,318	0,322	62	1,881	1,894	1,907	1,921	1,935	1,949
18	0,325	0,328	0,331	0,335	0,338	0,341	63	1,963	1,977	1,991	2,006	2,020	2,035
19	0,344	0,348	0,351	0,354	0,357	0,361	64	2,050	2,066	2,081	2,097	2,112	2,128
20	0,364	0,367	0,371	0,374	0,377	0,381	65	2,145	2,161	2,177	2,194	2,211	2,229
21	0,384	0,387	0,391	0,394	0,397	0,401	66	2,246	2,264	2,282	2,300	2,318	2,337
22	0,404	0,407	0,411	0,414	0,418	0,421	67	2,356	2,375	2,394	2,414	2,434	2,455
23	0,424	0,428	0,431	0,435	0,438	0,442	68	2,475	2,496	2,517	2,539	2,560	2,583
24	0,445	0,449	0,452	0,456	0,459	0,463	69	2,605	2,628	2,651	2,675	2,699	2,723
25	0,466	0,470	0,473	0,477	0,481	0,484	70	2,747	2,773	2,798	2,824	2,850	2,877
26	0,488	0,491	0,495	0,499	0,502	0,506	71	2,904	2,932	2,960	2,989	3,018	3,047
27	0,510	0,513	0,517	0,521	0,524	0,528	72	3,078	3,108	3,140	3,172	3,204	3,237
28	0,532	0,535	0,539	0,543	0,547	0,551	73	3,271	3,305	3,340	3,376	3,412	3,450
29	0,554	0,558	0,562	0,566	0,570	0,573	74	3,487	3,526	3,566	3,606	3,647	3,689
30	0,577	0,581	0,585	0,589	0,593	0,597	75	3,732	3,776	3,821	3,867	3,914	3,962
31	0,601	0,605	0,609	0,613	0,617	0,621	76	4,011	4,061	4,113	4,165	4,219	4,275
32	0,625	0,629	0,633	0,637	0,641	0,645	77	4,331	4,390	4,449	4,511	4,574	4,638
33	0,649	0,654	0,658	0,662	0,666	0,670	78	4,705	4,773	4,843	4,915	4,989	5,066
34	0,675	0,679	0,683	0,687	0,692	0,696	79	5,145	5,226	5,309	5,396	5,485	5,576
35	0,700	0,705	0,709	0,713	0,718	0,722	80	5,671	5,769	5,871	5,976	6,084	6,197
36	0,727	0,731	0,735	0,740	0,744	0,749	81	6,314	6,435	6,561	6,691	6,827	6,968
37	0,754	0,758	0,763	0,767	0,772	0,777	82	7,115	7,269	7,429	7,596	7,770	7,953
38	0,781	0,786	0,791	0,795	0,800	0,805	83	8,144	8,345	8,556	8,777	9,010	9,255
39	0,810	0,815	0,819	0,824	0,829	0,834	84	9,514	9,788	10,08	10,39	10,71	11,06
40	0,839	0,844	0,849	0,854	0,859	0,864	85	11,43	11,83	12,25	12,71	13,20	13,73
41	0,869	0,874	0,880	0,885	0,890	0,895	86	14,30	14,92	15,60	16,35	17,17	18,07
42	0,900	0,906	0,911	0,916	0,922	0,927	87	19,08	20,21	21,47	22,90	24,54	26,43
43	0,933	0,938	0,943	0,949	0,955	0,960	88	28,64	31,24	34,37	38,19	42,96	49,10
44	0,966	0,971	0,977	0,983	0,988	0,994	89	57,29	68,75	85,94	114,6	171,9	343,8

Πίνακες τετραγώνων, τετραγωνικών ριζών, κύβων καὶ κυβικῶν ριζῶν.

ΑΡΙΘΜΟΙ	ΤΕΤΡΑΓΩΝΑ	ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΕΣ ΡΙΖΕΣ	ΚΥΒΟΙ	ΚΥΒΙΚΕΣ ΡΙΖΕΣ
1	1	1,000	1	1,000
2	4	1,414	8	1,260
3	9	1,732	27	1,442
4	16	2,000	64	1,587
5	25	2,236	125	1,710
6	36	2,450	216	1,817
7	49	2,646	343	1,913
8	64	2,828	512	2,000
9	81	3,000	729	2,080
10	100	3,162	1 000	2,154
11	121	3,317	1 331	2,224
12	144	3,464	1 728	2,289
13	169	3,606	2 197	2,351
14	196	3,742	2 744	2,410
15	225	3,873	3 375	2,466
16	256	4,000	4 096	2,520
17	289	4,123	4 913	2,571
18	324	4,243	5 832	2,602
19	361	4,359	6 859	2,668
20	400	4,472	8 000	2,714
21	441	4,583	9 261	2,759
22	484	4,690	10 648	2,802
23	529	4,796	12 167	2,844
24	576	4,899	13 824	2,885
25	625	5,000	15 625	2,924
26	676	5,099	17 576	2,963
27	729	5,196	19 683	3,000
28	784	5,292	21 952	3,037
29	841	5,385	24 389	3,072
30	900	5,477	27 000	3,107
31	961	5,568	29 791	3,141
32	1 024	5,657	32 768	3,175
33	1 089	5,745	35 937	3,208
34	1 156	5,831	39 304	3,240
35	1 225	5,916	42 875	3,271
36	1 296	6,000	46 656	3,302
37	1 369	6,083	50 653	3,332
38	1 444	6,164	54 872	3,362
39	1 521	6,245	59 319	3,391
40	1 600	6,325	64 000	3,420
41	1 681	6,403	68 921	3,448
42	1 764	6,481	74 088	3,476
43	1 849	6,557	79 507	3,503
44	1 936	6,633	85 184	3,530
45	2 025	6,708	91 125	3,557
46	2 116	6,782	97 336	3,583

Πίνακες τετραγώνων, τετραγωνικῶν ριζῶν, κύβων καὶ κυβικῶν ριζῶν (συνέχεια).

ΑΡΙΘΜΟΙ	ΤΕΤΡΑΓΩΝΑ	ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΕΣ ΡΙΖΕΣ	ΚΥΒΟΙ	ΚΥΒΙΚΕΣ ΡΙΖΕΣ
47	2 209	6,856	103 823	3,609
48	2 304	6,928	110 592	3,634
49	2 401	7,000	117 649	3,659
50	2 500	7,071	125 000	3,684
51	2 601	7,141	132 651	3,708
52	2 704	7,211	140 608	3,733
53	2 809	7,280	148 877	3,756
54	2 916	7,349	157 464	3,780
55	3 025	7,416	166 375	3,803
56	3 136	7,483	175 616	3,826
57	3 249	7,550	185 193	3,849
58	3 364	7,616	195 112	3,871
59	3 481	7,681	205 379	3,893
60	3 600	7,746	216 000	3,915
61	3 721	7,810	226 981	3,937
62	3 844	7,874	238 328	3,958
63	3 969	7,937	250 047	3,979
64	4 096	8,000	262 144	4,000
65	4 225	8,062	274 625	4,021
66	4 356	8,124	287 496	4,041
67	4 489	8,185	300 763	4,062
68	4 624	8,246	314 432	4,082
69	4 761	8,307	328 509	4,102
70	4 900	8,367	343 000	4,121
71	5 041	8,426	357 911	4,141
72	5 184	8.485	373 248	4,160
73	5 329	8,544	389 017	4,179
74	5 476	8,602	405 224	4,198
75	5 625	8,660	421 875	4,217
76	5 776	8,718	438 976	4,236
77	5 929	8,775	456 533	4,254
78	6 084	8,832	474 552	4,273
79	6 241	8,888	493 039	4,291
80	6 400	8,944	512 000	4,309
81	6 561	9,000	531 441	4,327
82	6 724	9,055	551 368	4,345
83	6 889	9,110	571 787	4,362
84	7 056	9,165	592 704	4,380
85	7 225	9,220	614 125	4,397
86	7 396	9,274	636 056	4,414
87	7 569	9,327	658 503	4,431
88	7 744	9,381	681 472	4,448
89	7 921	9,434	704 969	4,465
90	8 100	9,487	729 000	4,481
91	8 281	9,539	753 571	4,498
92	8 464	9,592	778 688	4,514

Πίνακες τετραγώνων, τετραγωνικῶν ριζῶν, κύβων καὶ κυβικῶν ριζῶν (συνέχεια).

ΑΡΙΘΜΟΙ	ΤΕΤΡΑΓΩΝΑ	ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΕΣ ΡΙΖΕΣ	ΚΥΒΟΙ	ΚΥΒΙΚΕΣ ΡΙΖΕΣ
93	8 649	9,644	804 357	4,531
94	8 836	9,695	830 584	4,547
95	9 025	9,747	857 375	4,563
96	9 216	9,798	884 736	4,579
97	9 409	9,849	912 673	4,595
98	9 604	9,900	941 192	4,610
99	9 801	9,950	970 299	4,626
100	10 000	10,000	1 000 000	4,642

Τὰ ἀντίτυπα τοῦ βιβλίου φέρουν τὸ κάτωθι βιβλιόσημον εἰς ἀπόδειξιν τῆς γνησιότητος αὐτῶν.

Ἀντίτυπον στερούμενον τοῦ βιβλιοσήμου τούτου θεωρεῖται κλεψίτυπον. Ὁ διαθέτων, πωλῶν ἢ χρησιμοποιῶν αὐτὸ διώκεται κατὰ τὰς διατάξεις τοῦ ἄρθρου 7 τοῦ νόμου 1129 τῆς 15/21 Μαρτίου 1946 (Ἐφ. Κυβ. 1946, Α 108).

024000028282

ΕΚΔΟΣΙΣ: Α' 1967 (VIII) — ΑΝΤ. 80.000 ΣΥΜΒ. 1.582/1-8-67—1604/16-8-67

Ἐκτύπωσις Ι. ΔΙΚΑΙΟΣ — Βιβλιοδεσία Ι. ΚΑΜΠΑΝΑΣ Ο.Ε.

ΟΕ
ΔΒ