ΝΙΚΟΛ. Δ. ΝΙΚΟΛΑΟΥ
Ἀριστοβαθμίου διδάκτορος καὶ καθηγητοῦ τῶν Μαθηματικῶν
ἐν τῷ προτύπῳ Γυμνασίῳ τοῦ Διδασκαλείου τῆς Μ. Ἐκπαιδεύσεως

ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ

***Τῶν μαθητῶν καὶ μαθητριῶν τῶν Γυμνασίων
καὶ πρακτικῶν Λυκείων.***

ΕΓΚΡΙΘΕΙΣΑ ΔΙΑ ΤΗΝ ΑΠΟ 1925—1935 ΔΕΚΑΕΤΙΑΝ

«Τὴν ὕλην ταύτην ὁ συγγραφεὺς πραγματεύεται ἐν γένει καλῶς καὶ ἐπιτυχῶς, παραθέτει δὲ καὶ ἀφθόνους σχετικὰς ἀσκήσεις μεγάλως συντελούσας εἰς τὴν ἐμπέδωσιν τῶν διδασκομένων παρὰ τοῖς μαθηταῖς».
(Ἐκ τῆς ἐκθέσεως τῶν κ. κ. κριτῶν).

ΕΚΔΟΣΙΣ Β΄

Τιμᾶται μετὰ βιβλιοσήμου καὶ φόρου Δρ. 24.35
Βιβλιόσημον Δρ. 8.70 Ἀναγκ. Δαν. » 2.60
Ἀριθ. Πράξεως 179—27/8/927

ΑΘΗΝΑΙ
ΕΚΔΟΤΙΚΟΣ ΟΙΚΟΣ Δ. Ν. ΤΖΑΚΑ, ΣΤ. ΔΕΛΑΓΡΑΜΜΑΤΙΚΑ & ΣΙΑ
81Α—ΟΔΟΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ—81Α

ΝΙΚΟΛ. Δ. ΝΙΚΟΛΑΟΥ
Ἀριστοβαθμίου διδάκτορος καὶ καθηγητοῦ τῶν μαθηματικῶν
ἐν τῷ προτύπῳ Γυμνασίῳ τοῦ Διδασκαλείου τῆς Μ. Ἐκπαιδεύσεως.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ

Τῶν μαθητῶν καὶ μαθητριῶν τῶν Γυμνασίων καὶ πρακτικῶν Λυκείων.

ΕΓΚΡΙΘΕΙΣΑ ΔΙΑ ΤΗΝ ΑΠΟ 1925—1935 ΔΕΚΑΕΤΙΑΝ

«Τὴν ὕλην ταύτην ὁ συγγραφεὺς πραγματεύεται ἐν γένει καλῶς καὶ ἐπιτυχῶς, παραθέτει δὲ καὶ ἀφθόνους σχετικὰς ἀσκήσεις μεγάλως συντελούσας εἰς τὴν ἐμπέδωσιν τῶν διδασκομένων παρὰ τοῖς μαθηταῖς».
(Ἐκ τῆς ἐκθέσεως τῶν κ. κ. κριτῶν).

ΕΚΔΟΣΙΣ Β΄

ΑΘΗΝΑΙ
ΕΚΔΟΤΙΚΟΣ ΟΙΚΟΣ Δ. Ν. ΤΖΑΚΑ, ΣΤ. ΔΕΛΑΓΡΑΜΜΑΤΙΚΑ & Σ^{ΙΑ}
8ΙΑ—ΟΔΟΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ—8ΙΑ
1927

Πᾶν γνήσιον ἀντίτυπον φέρει τὴν ἰδιόχειρον ὑπογραφὴν τοῦ συγγραφέως καὶ τὴν σφραγῖδα τῶν ἐκδοτῶν.

ΕΚΔΟΤΙΚΟΝ ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ
Ν. ΤΖΑΚΑ & Σ. ΔΕΛΑΓΡΑΜΜΑΤΙΚΑ
ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ

Τύποις, "ΑΥΓΗΣ" ΑΘ. Α. ΠΑΠΑΣΠΥΡΟΥ Ὁδὸς Λέκα—Στοὰ Σιμοπούλου

ΠΡΟΛΟΓΟΣ Α΄ ΕΚΔΟΣΕΩΣ

Σφοδρὰ ἀπό τινος διεξάγεται πολεμικὴ κατὰ τῆς διδασκαλίας τοῦ μαθήματος τῆς Θεωρητικῆς Ἀριθμητικῆς εἰς τοὺς μαθητὰς τῆς Α τάξεως τῶν Γυμνασίων. Οἱ τὴν πολεμικὴν ταύτην ἀσκοῦντες ὑποστηρίζουσιν ὅτι τὸ μάθημα τοῦτο δέον νὰ περιορισθῇ εἰς ἐλάχιστα μέρη αὐτοῦ, ὧν τὰ πλεῖστα νὰ διδάσκωνται ὅλως πρακτικῶς ἄνευ δηλ. αὐστηρῶν καὶ ἀκριβολόγων ἀποδείξεων, νὰ συγχωνευθῶσι δὲ ταῦτα μετὰ τῆς Ἀλγέβρας, ἵνα οὕτω τὸ μὲν μὴ καταπονῶνται οἱ μαθηταὶ διὰ τὴν ἐκμάθησιν τοῦ στρυφνοῦ, ὡς χαρακτηρίζεται, τούτου μαθήματος, τὸ δὲ ὅπως ὁ δι' αὐτὸ ἤδη καταναλισκόμενος ἀρκετὸς χρόνος δαπανᾶται διὰ τὴν διδασκαλίαν τῶν ἄλλων, τῶν χρησιμοτέρων μερῶν τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης.

Ἀναγνωρίζομεν βεβαίως ὅτι δυσχερῶς πως οἱ μαθηταὶ εἰσάγονται εἰς τὰ λεπτὰ ἐνίοτε νοήματα τοῦ μαθήματος τούτου, ἀλλ' ἡ τοιαύτη δυσχέρεια δὲν ὀφείλεται ἀποκλειστικῶς εἰς τὴν φύσιν τοῦ μαθήματος ἀλλὰ καὶ εἰς ἄλλα αἴτια, ὧν σπουδαιότερον εἶναι ἡ τὸ πρῶτον εἰσαγωγὴ τῶν μικρῶν μαθητῶν εἰς θεωρητικὸν μάθημα· τὴν αὐτὴν δὲ κατ' ἀκολουθίαν δυσχέρειαν θὰ ᾐσθάνοντο οἱονδήποτε καὶ ἂν ἦτο τὸ πρῶτον θεωρητικὸν μάθημα, ὅπερ θὰ ἐδιδάσκοντο. Πρόχειρος ἀπόδειξις τούτου εἶναι ἡ ἐπίσης σπουδαία δυσχέρεια, ἣν αἰσθάνονται κατὰ τὰ πρῶτα μαθήματα οἱ μαθηταὶ τῆς Α΄ τάξεως τῶν Λυκείων εἰς τὸ μάθημα τῆς Γεωμετρίας, εἰ καὶ ἡ φύσις τοῦ μαθήματος τούτου παρέχει περισσότερα βοηθητικὰ μέσα πρὸς κατανόησίν του.

Δέν εἶναι ὅθεν, καθ' ἡμᾶς ἡ παρουσιαζομένη δυσχέρεια αὕτη σοβαρὸς λόγος νὰ καταργήσωμεν ἢ νὰ ἀκρωτηριάσωμεν τὸ μάθημα τοῦτο, ὥστε νὰ χάσῃ τὴν πανθομολογουμένην μορφωτικήν του δύναμιν, ἐφ' ἧς ἑδράζεται ἡ ταχυτέρα καὶ τῶν ἄλλων μαθηματικῶν κατανόησις καὶ ἧς ἄνευ θὰ ἐθεμελιοῦμεν ἐπὶ τῆς ἄμμου. Τοὐναντίον ἐπιβάλλεται νὰ φροντίσωμεν, ὅπως τοῦτο καταστῇ, ὅσον τὸ δυνατὸν καλύτερον ἀντιληπτόν, ὅπως ἡ ὕλη αὐτοῦ ἐμπεδοῦται, ὅσον οἷόν τε μονιμώτερον, καὶ ὅπως ἡ ἐπὶ τῆς ἀναπτύξεως τῆς νοήσεως ἐπίδρασις αὐτοῦ καταστῇ μείζων. Πρὸς τοῦτο δέον, κατ᾽ ἐμὴν γνώμην, αἱ ἀποδείξεις νὰ γίνωνται πρῶτον ἐπὶ ὡρισμένων ἀριθμῶν καὶ εἶτα νὰ γενικεύωνται, νὰ εἶναι σαφῶς λεπτομερεῖς καὶ ὅσον ἔνεστι ἁπλαῖ, νὰ ἕπωνται δὲ τῶν θεωριῶν ἀσκήσεις θεωρητικαὶ καὶ πρακτικαί, ὅπως οἱ μαθηταὶ τὸ μὲν λαμβάνωσι τὴν εὐκαιρίαν νὰ αὐτενεργῶσι, τὸ δὲ ὅπως καθορῶντες τὴν ἀπὸ πρακτικῆς ἀπόψεως ὠφέλειαν τοῦ μαθήματος καὶ τερπόμενοι ἐκ τῆς ἐπιτυχοῦς τῶν ἀσκήσεων λύσεως ἀποκτῶσι μεγαλύτερον δι᾽ αὐτὸ ἐνδιαφέρον. Ἵνα δὲ ἐπαρκῇ δι᾽ ὅλα ταῦτα ὁ χρόνος, δέον νὰ περιορισθῇ ἡ διδασκαλία εἰς τὰ καθαρῶς θεωρητικὰ μέρη ἀποκλειομένων τῶν μερῶν, ὧν ἡ διδασκαλία θὰ ἦτο ἁπλῆ ἐπανάληψις ὕλης διδαχθείσης ἤδη ἐν τῇ πρακτικῇ ἀριθμητικῇ καὶ ὧν ἄλλως τε ἡ ἐπανάληψις ἀνεπαισθήτως δύναται νὰ γίνῃ εἰς τὴν Ἄλγεβραν καὶ τὴν Γεωμετρίαν διὰ καταλλήλων προβλημάτων.

Φρονοῦντες δὲ ὅτι καὶ τὸ εἰς χεῖρας τῶν μαθητῶν διδακτικὸν βιβλίον σπουδαίως βοηθεῖ τὴν διδασκαλίαν διὰ τῆς ἁπλότητος τῶν ἀποδείξεων, τῆς λογικῆς ἀλληλουχίας τῆς ὕλης καὶ τῶν πολλῶν, καταλλήλων καὶ ἐν οἰκείῳ τόπῳ παρεντεθειμένων ἀσκήσεων, συνετάξαμεν τὸ παρὸν ἔργον ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ἐκτεθεισῶν ἀρχῶν καὶ θὰ εἴμεθα εὐτυχεῖς, ἐὰν αἱ εἰς αὐτὸ στηριζόμεναι ἐλπίδες μας κυρωθῶσιν ὑπὸ τῆς κρίσεως τῶν ἐπαϊόντων καὶ τῶν ἀποτελεσμάτων τῆς διδασκαλίας αὐτοῦ.

Ὁ Συγγραφεὺς

Σημ. Τὰ δι᾽ ἀστερίσκων σημειούμενα μέρη καὶ ἀσκήσεις δύνανται νὰ παραλείπωνται κατὰ τὴν ἐν τοῖς κλασικοῖς Γυμνασίοις διδασκαλίαν, ἂν ὁ χρόνος δὲν ἐπαρκῇ.

ΤΙΚΗ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

§ **1. Ποσὸν ἢ μέγεθος.**—Εἶναι φανερὸν ὅτι σωρὸς μήλων, ἀφαιρουμένων τινῶν ἐξ αὐτῶν ἢ προστιθεμένων καὶ ἄλλων, ἐπιδέχεται ἐλάττωσιν ἢ αὔξησιν· τούτου ἕνεκα ὁ σωρὸς οὗτος τῶν μήλων καλεῖται ποσὸν ἢ μέγεθος. Ὁμοίως ποίμνη προβάτων, ὅμιλος μαθητῶν, τὸ βάρος σώματος κλπ. εἶναι ποσὰ ἢ μεγέθη.

Ὥστε: Ποσὸν ἢ μέγεθος καλεῖται πᾶν ὅ,τι ἐπιδέχεται αὔξησιν ἢ ἐλάτωσιν.

§ **2. Εἴδη ποσῶν.**—α'.) Ἕκαστον πρόβατον ποίμνης, ἕκαστον μῆλον κλπ. εἶναι διακεκριμένον ἀπὸ τῶν ἄλλων καὶ αὐτοτελές. Τὰ ποσὰ ταῦτα (ποίμνη προβάτων, σωρὸς μήλων κλπ.) καλοῦνται πλήθη.

Γενικῶς: Πᾶν ποσόν, τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖται ἐκ μερῶν διακεκριμένων ἀπ᾿ ἀλλήλων καὶ αὐτοτελῶν, καλεῖται πλῆθος.

β'.) Αἱ γραμμαί, αἱ ἐπιφάνειαι, οἱ ὄγκοι, τὰ βάρη τῶν σωμάτων, ὁ χρόνος κ. ἄ. εἶναι ποσά, τὰ ὁποῖα δὲν ἀποτελοῦνται ἐκ μερῶν διακεκριμένων καὶ αὐτοτελῶν. Δύναται ὅμως ἕκαστον τούτων νὰ νοηθῇ κεχωρισμένον εἰς μέρη, τὰ ὁποῖα συνέχονται πρὸς ἄλληλα καὶ ἓν ὅλον ἀποτελοῦσι. Διὰ τοῦτο ταῦτα καλοῦνται συνεχῆ ποσά.

Ὥστε: Πᾶν ποσόν, τοῦ ὁποίου τὰ μέρη συνέχονται πρὸς ἄλληλα καὶ ἓν ὅλον ἀποτελοῦσι, καλεῖται συνεχὲς ποσόν.

§ **3. Μέτρησις ποσοῦ.—Ἀρίθμησις.** — Συγκρίνοντες ποίμνην προβάτων πρός τι πρόβατον, συστάδα δένδρων πρός τι δένδρον, εὐθεῖάν τινα γραμμὴν πρὸς ὡρισμένην καὶ γνωστὴν εὐθεῖαν (π.χ. τὸν πῆχυν) εὑρίσκομεν ἐκ πόσων προβάτων ἀποτελεῖται ἡ ποίμνη, ἐκ πόσων δένδρων ἡ συστάς, ἐκ πόσων πήχεων ἢ μερῶν αὐτοῦ ἡ εὐθεῖα γραμμή. Οὕτω π. χ. λέγομεν: αὕτη ἡ ποίμνη ἔχει ἑκατὸν πρόβατα, ἐκείνη ἡ συστὰς ἀποτελεῖται ἐκ τριάκοντα δένδρων, αὕτη ἡ εὐθεῖα ἔχει μῆκος δύο πήχεων καὶ πέντε ὀγδόων αὐτοῦ.

Πᾶσα τοιαύτη ἐργασία καλεῖται μέτρησις ποσοῦ. Τὸ ἑκάστοτε μετρούμενον ποσὸν συγκρίνεται πρὸς ὁμοειδές τι, ὡρισμένον ἑκάστοτε καὶ γνωστὸν ποσόν, τὸ ὁποῖον μονάδα καλοῦμεν. Εἰς τὰ προηγούμενα παραδείγματα τὸ πρόβατον, τὸ δένδρον, ὁ πῆχυς εἶναι μονάδες. Αἱ ἔννοιαι ἑκατόν, τριάκοντα, δύο καὶ πέντε ὄγδοα, δι' ὧν ἐκφράζομεν ἐκ πόσων μονάδων ἢ καὶ μερῶν αὐτῆς σύγκειται ποσόν τι, καλοῦνται ἀριθμοί.

Ὥστε: Μέτρησις ποσοῦ καλεῖται ἡ ἐργασία, διὰ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν ἐκ πόσων μονάδων ἢ καὶ μερῶν αὐτῆς ἀποτελεῖται τὸ ποσὸν τοῦτο.

ΣΗΜ. Ἡ μέτρησις πλήθους λέγεται καὶ ἀρίθμησις αὐτοῦ.

Ἀριθμὸς εἶναι ἔννοια, διὰ τῆς ὁποίας ὁρίζομεν ἐκ πόσων μονάδων ἢ καὶ μερῶν αὐτῆς ἀποτελεῖται ποσόν τι.

Κατὰ ταῦτα ἕκαστον ὡρισμένον ποσὸν παρίσταται δι' ἀριθμοῦ τινός.

Τὸ ποσόν, ὅπερ λαμβάνεται ὡς μονάς, παρίσταται καὶ αὐτὸ ὑπ' ἀριθμοῦ. Τοῦτον καλοῦμεν ἕν. Δι' αὐτοῦ ἐκφράζομεν ὅτι τὸ μετρηθὲν ποσὸν περιέχει ἅπαξ καὶ ὁλόκληρον τὴν μονάδα. Τούτου ἕνεκα ὁ ἀριθμὸς ἓν καλεῖται καὶ ἀκεραία μονὰς ἢ ἁπλῶς μονάς.

ΣΗΜ. Ἐνίοτε ἡ μονὰς εἶναι ποσὸν ἐκ πολλῶν ὁμοίων συγκείμενον· οὕτω π. χ. ὅταν λέγωμεν ὅτι ἔμπορος ἠγόρασε πέντε δωδεκάδας μανδηλίων, θεωροῦμεν ὡς μονάδα τὴν δωδεκάδα τῶν μανδηλίων, ἤτοι δώδεκα μανδήλια ὁμοῦ θεωρούμενα ὥς τι ὅλον.

§ **4. Συγκεκριμένοι καὶ ἀφῃρημένοι ἀριθμοί.**—Ἐκ τῶν μέχρι τοῦδε λεχθέντων καθίσταται φανερὸν ὅτι πᾶς ἀριθμὸς παριστᾷ ὡρισμένον ἑκάστοτε ποσόν. Π. χ. ἓν μῆλον, τριάκοντα πρόβατα, ἑκατὸν δραχμάς. Τοῦτο ἐκφράζοντες λέγοντες ὅτι οἱ ἀριθμοὶ εἶναι συγκεκριμένοι.

Πολλάκις ὅμως θεωροῦνται οὗτοι καὶ ἀφῃρημένως, ἤτοι χωρὶς νὰ ὁρίζηται τὸ εἶδος τοῦ ποσοῦ, τὸ ὁποῖον ἕκαστος παριστᾷ. Οὕτω π. χ. λέγομεν ἁπλῶς ἕν, τριάκοντα, ἑκατὸν κλπ. Ὅταν οὕτω θεωρῶνται οἱ ἀριθμοί, λέγονται ἀφῃρημένοι ἀριθμοί.

Οἱ συγκεκριμένοι ἀριθμοὶ λέγονται ὁμοειδεῖς, ἐὰν παριστῶσι τὸ αὐτὸ ποσόν, ἑτεροειδεῖς δέ, ἐὰν παριστῶσι διάφορα ποσά. Οὕτως οἱ ἀριθμοὶ πέντε μέτρα καὶ ἑπτὰ μέτρα εἶναι ὁμοειδεῖς, ἐν ᾧ οἱ ἀριθμοὶ δύο μέτρα, δέκα ὀκάδες, τέσσαρες δραχμαὶ εἶναι ἑτεροειδεῖς.

§ **5. Ἀριθμητική.**—Ἡ ἐπιστήμη, ἡ ὁποία πραγματεύεται ἐν γένει περὶ τῶν ἀριθμῶν καλεῖται ἀριθμητική.

ΒΙΒΛΙΟΝ Α΄

ΟΙ ΑΚΕΡΑΙΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄.

ΑΡΙΘΜΗΣΙΣ

§ **6. Ἀκέραιοι ἀριθμοί.**—Εἰς τὸ πλῆθος τῶν μαθητῶν τάξεώς τινος, τῶν προβάτων ποίμνης κλπ. ἡ μονὰς (ὁ μαθητής, τὸ πρόβατον κλπ.) περιέχεται ἐν γένει πολλάκις π. χ. τεσσαρακοντάκις, ἑκατοντάκις· διὰ τοῦτο τὸ πρῶτον ἀπό τὰ πλήθη ταῦτα παρίσταται διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τεσσαράκοντα, τὸ δεύτερον διὰ τοῦ ἑκατόν. Οἱ τοιοῦτοι ἀριθμοὶ καλοῦνται ἀκέραιοι ἀριθμοί· Ὁμοίως τὸ ποσὸν ΓΔ, τὸ ὁποῖον περιέχει

Γ————————Δ   Α———Β

μονὰς

τὴν μονάδα ΑΒ ἀκεραίαν τρεῖς φορὰς ἀκριβῶς, παρίσταται ὑπὸ τοῦ ἀριθμοῦ τρία, ὁ ὁποῖος ἐπίσης λέγεται ἀκέραιος ἀριθμός. Ἐπίσης ὁ ἀριθμὸς ἕν, διὰ τοῦ ὁποίου παρίσταται ἡ μονάς, εἶναι ἀκέραιος ἀριθμός.

Ὥστε : Ἐὰν ποσόν τι περιέχῃ ἅπαξ ἢ πολλάκις καὶ ἀκριβῶς τὴν μονάδα ἀκεραίαν, παρίσταται ὑπὸ ἀριθμοῦ, τὸν ὁποῖον καλοῦμεν ἀκέραιον ἀριθμόν.

Ἐπειδὴ δὲ ἕκαστον τοιοῦτον ποσὸν ἀποτελεῖται ἢ νοεῖται ἀποτελούμενον ἀπὸ μέρει, ἕκαστον τῶν ὁποίων παρίσταται ὑπὸ τῆς μονάδος, ὁρίζομεν συνήθως τὸν ἀκέραιον ἀριθμὸν οὕτως :

Ἡ ἀκεραία μονὰς καὶ πᾶν σύνολον ἀκεραίων μονάδων καλεῖται ἀκέραιος ἀριθμός.

ΣΗΜ. Ἐκ τῶν ρηθέντων καθίσταται εὐνόητον ὅτι πᾶν πλῆθος παρίσταται ὑπὸ ἀκεραίου ἀριθμοῦ.

§ **7. Πλῆθος τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν.**—Ἐὰν μετὰ τῆς ἀκεραίας μονάδος ἑνωθῇ καὶ ἄλλη μία ἀκεραία μονάς, σχηματίζεται ἄλλος ἀριθμός, τὸν ὁποῖον καλοῦμεν δύο. Ἐὰν μετὰ τούτου ἑνωθῇ καὶ ἄλλη μονάς, σχηματίζεται νέος ἀριθμός, τὸν ὁποῖον καλοῦμεν τρία. Ἐξακολουθοῦντες οὕτω, ἐφ' ὅσον θέλομεν, δυνάμεθα νὰ σχηματίζωμεν ἐξ ἑκάστου ἀκεραίου ἀριθμοῦ ἄλλον, ὅστις ἔχει μίαν μονάδα περισσότερον αὐτοῦ.

Ἄρα : Τὸ πλῆθος τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν εἶναι ἄπειρον.

§ **8. Ἀρίθμησις.** — Διὰ τὸ ἄπειρον πλῆθος τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν εἶναι ἀδύνατον νὰ ἔχωμεν καὶ ἐνθυμώμεθα ἴδιον ὄνομα οὔτε ἴδιον σύμβολον διὰ τὴν σύντομον ἀπεικόνισιν ἑκάστου τούτων. Εὗρον ὅμως οἱ ἄνθρωποι μέθοδον, διὰ τῆς ὁποίας τὸ μὲν δι' ὀλίγων λέξεων, τὸ δὲ δι' ὀλίγων συμβόλων, δυνάμεθα νὰ ὀνομάζωμεν καὶ γράφωμεν πάντα ἀριθμόν. Περὶ τῆς μεθόδου ταύτης πραγματεύεται ἴδιον τῆς ἀριθμητικῆς κεφάλαιον, τὸ ὁποῖον καλεῖται ἀρίθμησις.

Ὥστε : Ἀρίθμησις καλεῖται τὸ κεφάλαιον τῆς ἀριθμητικῆς, τὸ ὁποῖον διδάσκει τὸν τρόπον τῆς ὀνομασίας καὶ γραφῆς τῶν ἀριθμῶν. Διαιρεῖται δὲ ἡ ἀρίθμησις εἰς προφορικὴν ἀρίθμησιν, ἡ ὁποία πραγματεύεται περὶ τῆς ὀνομασίας τῶν ἀριθμῶν καὶ εἰς γραπτὴν ἀρίθμησιν, ἡ ὁποία πραγματεύεται περὶ τῆς γραφῆς αὐτῶν.

Α'. Προφορικὴ ἀρίθμησις.

§ **9. Μονάδες διαφόρων τάξεων.** — Ἀριθμοί τινες ὀνομάζονται μὲ ὀνόματα ὅλως διάφορα ἀλλήλων. Τοιοῦτοι, ἐκτὸς ἄλλων τινῶν εὐαρίθμων, εἶναι οἱ ἀκόλουθοι κατὰ σειρὰν τοῦ σχηματισμοῦ (§ 7) αὐτῶν : ἕν, δύο, τρία, τέσσαρα, πέντε, ἕξ, ἑπτά, ὀκτώ, ἐννέα, δέκα.

Τὸν ἀριθμὸν δέκα θεωροῦμεν ὡς νέαν μονάδα, τὴν ὁποίαν καλοῦμεν δεκάδα ἢ μονάδα β' τάξεως. Τὸν ἐκ τῆς ἑνώσεως δέκα δεκάδων προκύπτοντα ἀριθμὸν καλοῦμεν ἑκατὸν καὶ θεωροῦμεν ὡς μονάδα γ' τάξεως, τὴν ὁποίαν καὶ ἑκατοντάδα καλοῦμεν. Ὁμοίως τὸν ἐκ δέκα ἑκατοντάδων συγκείμενον ἀριθμόν, τὸν ὁποῖον χίλια καλοῦμεν, θεωροῦμεν ὡς μονάδα δ' τάξεως, τὴν ὁποίαν καὶ χιλιάδα καλοῦμεν. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἐξακολουθοῦντες σχηματίζομεν, ὅσας θέλομεν μονάδας διαφόρων τάξεων, ἐκ τῶν ὁποίων ἀναγράφομεν ἀκολούθως τὰς δέκα πρώτας.

Μονὰς	α' τάξ.	ἡ ἁπλῆ μονὰς	. . . . . , . .	(ἡ ἀρχικὴ μονάς)
»	β' »	ἡ δεκὰς	περιέχει δέκα ἁπλᾶς μονάδας	
»	γ' »	ἡ ἑκατοντὰς	» » δεκάδας	

Μονὰς δ΄ τάξεως ἡ χιλιὰς περιέχει δέκα ἑκατοντάδας
» ε΄ » ἡ δεκὰς χιλιάδων » » χιλιάδας
» στ΄ τάξ. ἡ ἑκατοντὰς χιλιάδων » » δεκάδας χιλιάδων
» ζ΄ » ἡ ἑκατομμύριον » » ἑκατοντάδας χιλιάδων
» η΄ » ἡ δεκὰς ἑκατομμυρ. » » ἑκατομμύρια
» θ΄ » ἡ ἑκατοντὰς ἑκατομ. » » δεκάδας ἑκατομμυρίων
» ι΄ » ἡ δισεκατομμύριον » » ἑκατοντάδας ἑκατομμυρίων

Ἐκ τούτου καθίσταται φανερὸν ὅτι **αἱ μονάδες τῶν διαφόρων τάξεων σχηματίζονται ἐξ ἀλλήλων κατὰ τὸν ἀκόλουθον νόμον**:

«Δέκα μονάδες τάξεώς τινος σχηματίζουσι μίαν μονάδα τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως».

§ **10. Πρωτεύουσαι μονάδες.—Κλάσεις τῶν μονάδων.**—Ἡ ἁπλῆ μονάς, ἡ χιλιάς, τὸ ἑκατομμύριον, τὸ δισεκατομμύριον, τὸ τρισεκατομμύριον κλπ, ἑκάστη τῶν ὁποίων περιέχει χιλιάκις τὴν προηγουμένην, καλοῦνται πρωτεύουσαι μονάδες. Πᾶσα ἄλλη μονὰς περιέχει δεκάκις ἢ ἑκατοντάκις τὴν ἀμέσως προηγουμένην πρωτεύουσαν μονάδα. Οὕτω π. χ. ἡ δεκὰς τῶν χιλιάδων περιέχει δεκάκις τὴν χιλιάδα, ἡ ἑκατοντὰς τῶν ἑκατομμυρίων περιέχει ἑκατοντάκις τὸ ἑκατομμύριον. Κατὰ ταῦτα δυνάμεθα νὰ διατάξωμεν τὰς μονάδας τῶν διαφόρων τάξεων εἰς κλάσεις ἀρχομένας ἀπὸ τῶν πρωτευουσῶν μονάδων. Εἰς ἑκάστην δὲ τῶν κλάσεων τούτων δίδομεν τὸ ὄνομα τῆς πρωτευούσης μονάδος, τὴν ὁποίαν περιέχει. Οὕτως ἡ α΄ κλάσις καλεῖται κλάσις τῶν μονάδων, ἡ β΄ καλεῖται κλάσις τῶν χιλιάδων, ἡ γ΄ λέγεται κλάσις τῶν ἑκατομμυρίων καὶ καθ᾽ ἑξῆς, ὅπως εἰς τὸν ἀκόλουθον πίνακα σαφέστερον φαίνεται.

Κλάσις τῶν μονάδων	Κλάσις τῶν χιλιάδων	Κλάσις τῶν ἑκατομμυρ.
μονὰς	χιλιὰς	ἑκατομμύριον
δεκὰς	δεκὰς χιλιάδων	δεκὰς ἑκατομμυρίων
ἑκατοντὰς	ἑκατοντὰς χιλιάδων	ἑκατοντὰς ἑκατομμυρίων

Κλάσις τῶν δισεκατομμυρίων	Κλάσις τῶν τρισεκατομμυρίων
Δισεκατομμύριον	τρισεκατομμύριον
δεκὰς δισεκατομμυρίων	δεκὰς τρισεκατομμυρίων
ἑκατοντὰς δισεκατομμυρίων	ἑκατοντὰς τρισεκατομμυρίων

κ. τ. λ.

§ **11. Σύνθεσις τῶν ἀριθμῶν.** — Νοήσωμεν ἀριθμὸν ἔχοντα μονάδας περισσοτέρας τῶν ἐννέα, π. χ. τὸν παριστῶντα τὸ πλῆθος σωροῦ καρύων. Ἂς φαντασθῶμεν δὲ ὅτι λαμβάνει τις ἐκ τῶν καρύων τούτων δέκα καὶ τοποθετεῖ εἰς ἴδιον μέρος, ἔπειτα ἄλλα δέκα εἰς ἄλλο μέρος καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς, ἐφ' ὅσον τοῦτο εἶναι δυνατόν. Οὕτως ἐκ τῶν καρύων τούτων σχηματίζονται δεκάδες καρύων, ἂν δὲ περισσεύσωσι κάρυά τινα, ταῦτα θὰ εἶναι ὀλιγώτερα τῶν δέκα. Ἂν αἱ σχηματισθεῖσαι δεκάδες δὲν εἶναι ὀλιγώτεραι τῶν δέκα, εἶναι δυνατὸν νὰ σχηματίσωμεν ἐξ αὐτῶν μίαν ἢ καὶ περισσοτέρας ἑκατοντάδας, ἂν λαμβάνωμεν ἀνὰ δέκα δεκάδας καὶ τοποθετοῦμεν ὁμοῦ εἰς ἴδιον ἑκάστοτε μέρος, ἐφ' ὅσον τοῦτο εἶναι δυνατόν, ἂν δὲ περισσεύσωσι δεκάδες τινές, αὗται θὰ εἶναι ὀλιγώτεραι τῶν δέκα. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἐκ τῶν ἑκατοντάδων (ἂν αὗται δὲν εἶναι ὀλιγώτεραι τῶν δέκα) δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν χιλιάδας, ἐκ τούτων δεκάδας τῶν χιλιάδων κλπ. Ἐπειδὴ δὲ λαμβάνονται δέκα μονάδες ἐξ ἑκάστης τάξεως πρὸς σχηματισμὸν μιᾶς μονάδος ἀνωτέρας τάξεως, ὁ ἀριθμὸς τῶν οὕτω σχηματιζομένων μονάδων ἀνωτέρας τάξεως βαίνει ἐλαττούμενος καὶ κατ' ἀκολουθίαν θὰ σχηματισθῶσιν ἐπὶ τέλους μονάδες τάξεώς τινος ὀλιγώτεραι τῶν δέκα, ἐκ τῶν ὁποίων δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ σχηματισθῇ πλέον οὔτε μία μονὰς ἀνωτέρας τάξεως. Κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον τὰ κάρυα χωρίζονται εἰς μονάδας τινὰς καρύων ὀλιγωτέρας τῶν δέκα (ἂν ἐπερίσσευσαν), εἰς δεκάδας καρύων ὀλιγωτέρας τῶν δέκα, κλπ. μέχρι π.χ. δεκάδων τῶν χιλιάδων ὀλιγωτέρων ἐπίσης τῶν δέκα. Ὁμοίως σκεπτόμενοι καὶ ἐπὶ παντὸς ἄλλου ἀριθμοῦ π.χ. τοῦ παριστῶντος σωρὸν μήλων, ποίμνιον προβάτων κλπ. φθάνομεν εἰς τὸ ἀκόλουθον συμπέρασμα:

Πᾶς ἀριθμὸς συντίθεται ἐκ μονάδων διαφόρων τάξεων, ἐξ οὐδεμιᾶς δὲ τούτων περιέχει πλείονας τῶν ἐννέα.

ΣΗΜ. Εἶναι δὲ προφανὲς ὅτι τοῦτο ἀληθεύει καὶ διὰ τοὺς ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι ἔχουσι μονάδας ὀλιγωτέρας τῶν δέκα.

§ **12. Ὀνομασία τῶν ἀριθμῶν.** — Ἡ τοιαύτη τῶν ἀριθμῶν σύνθεσις εὐκολύνει τὴν ὀνομασίαν αὐτῶν. Ἀρκεῖ πρὸς τοῦτο νὰ δηλωθῇ ἐκ τίνων μονάδων ἀποτελεῖται ἕκαστος καὶ πόσας ἐξ ἑκάστης τάξεως περιέχει. Οὕτω π. χ. λέγοντες ὅτι αὐτὴ ἡ ποίμνη παρίσταται ὑπὸ τοῦ ἀριθμοῦ, ὅστις ἔχει τρεῖς ἑκατοντάδας, ἑπτὰ δεκάδας καὶ τέσσαρας ἁπλᾶς μονάδας, ἐκφράζομεν γνωστὸν καὶ τελείως ὡρισμένον ἀριθμόν. Διὰ νὰ ὀνομάσωμεν οὕτω πάντα ἀριθμὸν ἀρκοῦσι τὰ ὀνόματα τῶν ἐννέα πρώτων ἀριθμῶν καὶ τὰ ὀνόματα τῶν μονάδων τῶν διαφόρων τάξεων (§ 9).

Ἡ τοιαύτη ὅμως τῶν ἀριθμῶν ὀνοματολογία τροποποιεῖται οὐσιωδῶς ἐν τῇ συνήθει χρήσει, διότι εἰσήχθησαν καὶ ἐπεκράτησαν αἱ ἀκόλουθοι συντομίαι.

1) Ἀντὶ νὰ λέγωμεν	μία δεκὰς		δέκα
	δύο δεκάδες		εἴκοσι
	. . . . . .	λέγομεν	. . . , . .
	. . . . . .		. . . . . .
	ἐννέα δεκάδες		ἐννενήκοντα

2) Ἀντὶ νὰ λέγωμεν	μία ἑκατοντὰς		ἑκατὸν
	δύο ἑκατοντάδες		διακόσια
	. . . .	λέγομεν	. . . . . .
	. . . .		. . . . . .
	ἐννέα ἑκατοντάδες		ἐννεακόσια

3) Ἀντὶ νὰ λέγωμεν μία χιλιάς, λέγομεν ἁπλῶς χίλια.

Ἤδη διακρίνομεν δύο περιπτώσεις.

Α΄. *Ὀνομασία ἀριθμῶν περιεχόντων μονάδας τῆς α΄ μόνον κλάσεως.*

Τὸ ὄνομα παντὸς τοιούτου ἀριθμοῦ ἀποτελεῖται ἐκ τοῦ ὀνόματος τῶν ἑκατοντάδων, τοῦ ὀνόματος τῶν δεκάδων καὶ τοῦ ὀνόματος τῶν ἁπλῶν μονάδων, τὰς ὁποίας περιέχει, προτασσομένων τῶν ὀνομάτων τῶν μονάδων ἀνωτέρας τάξεως. Οὕτως ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἔχει ἑπτὰ ἑκατοντάδας, τρεῖς δεκάδας καὶ πέντε ἁπλᾶς μονάδας, ἀπαγγέλλεται οὕτω: ἑπτακόσια τριάκοντα πέντε, ὁ δὲ ἔχων τρεῖς ἑκατοντάδας καὶ ἐννέα δεκάδας ἀπαγγέλλεται οὕτω: τριακόσια ἐννενήκοντα, καὶ ὁ ἔχων τέσσαρας δεκάδας καὶ μίαν ἁπλῆν μονάδα οὕτω: τεσσαράκοντα ἕν.

ΣΗΜ. Ἀντὶ δέκα ἕν, δέκα δύο, λέγομεν ἕνδεκα, δώδεκα.

Β΄. *Ὀνομασία ἀριθμῶν περιεχόντων καὶ μονάδας κλάσεων ἀνωτέρων τῆς κλάσεως τῶν μονάδων.*—Ἔστω ὁ ἀριθμός, ὅστις ἔχει τρεῖς δεκάδας χιλιάδων, τέσσαρας χιλιάδας, ἑπτὰ ἑκατοντάδας, ἓξ δεκάδας καὶ δύο ἁπλᾶς μονάδας. Ἐπειδή, ὡς εἶναι εὐνόητον, αἱ τρεῖς δεκάδες τῶν χιλιάδων καὶ αἱ τέσσαρες χιλιάδες ἀποτελοῦσιν ὁμοῦ τριάκοντα τέσσαρας χιλιάδας, αἱ δὲ ἑπτὰ ἑκατοντάδες, ἓξ δεκάδες καὶ δύο μονάδες περιέχουσιν ἐν ὅλῳ ἑπτακοσίας ἑξήκοντα δύο ἁπλᾶς μονάδας, ὁ ῥηθεὶς ἀριθμὸς συντίθεται ἐκ τριάκοντα τεσσάρων χιλιάδων καὶ ἑπτακοσίων ἑξήκοντα δύο ἁπλῶν μονάδων. Ὁμοίως σκεπτόμενοι κατανοοῦμεν ὅτι ὁ ἀριθμός, ὅστις ἔχει πέντε ἑκατομμύρια, ἑπτὰ ἑκατοντάδας χιλιάδων, τρεῖς δεκάδας χιλιάδων, ἓξ ἑκατοντάδας καὶ ὀκτὼ ἁπλᾶς μονάδας, συντίθεται ἐκ πέντε ἑκατομμυρίων, ἑπτακοσίων τριάκοντα χιλιάδων καὶ ἑξακοσίων ὀκτὼ ἁπλῶν μονάδων.

Ἄρα: Πᾶς ἀριθμὸς δύναται νὰ νοηθῇ συντιθέμενος ἐκ πρωτευουσῶν μονάδων, ἐξ οὐδεμιᾶς δὲ τούτων περιέχει χιλίας ἢ πλείονας τῶν χιλίων.

Ἵνα ὅθεν ὀνομάσωμεν ἀριθμόν τινα, ἀρκεῖ νὰ ὀνομάσωμεν τὰς πρωτευούσας μονάδας, ἐκ τῶν ὁποίων οὗτος συντίθεται καὶ νὰ δηλώσωμεν πόσας ἐξ ἑκάστης τάξεως περιέχει. Δηλοῦμεν δὲ πρῶτον τὸ πλῆθος καὶ ἔπειτα τὸ ὄνομα ἑκάστης πρωτευούσης μονάδος ἀρχόμενοι ἀπὸ τῆς ἀνωτάτης τάξεως καὶ ἑξῆς μέχρι τῆς ἁπλῆς μονάδος, τῆς ὁποίας τὸ ὄνομα συνήθως παραλείπεται, ὡς εὐκόλως νοούμενον. Οὕτως ὁ α′ τῶν προειρημένων ἀριθμῶν ἀπαγγέλλεται οὕτω: τριάκοντα τέσσαρες χιλιάδες ἑπτακόσια ἑξήκοντα δύο.

Οὕτω διὰ τῶν ὀνομάτων τῶν πρωτευουσῶν μονάδων καὶ τῶν γνωστῶν ἤδη (§ 12 Α′.) ὀνομάτων τῶν ἐννεακοσίων ἐννενήκοντα ἐννέα πρώτων ἀριθμῶν δυνάμεθα νὰ ὀνομάζωμεν πάντα ἀριθμόν.

Ἀσκήσεις.

Νὰ χωρισθῇ εἰς πρωτευούσας μονάδας καὶ νὰ ὀνομασθῇ ἕκαστος τῶν ἀκολούθων ἀριθμῶν.

1) Ὁ ἔχων πέντε δεκάδας χιλιάδων καὶ τρεῖς δεκάδας.

2) Ὁ ἔχων ὀκτὼ ἑκατοντάδας ἑκατομμυρίων, τρεῖς χιλιάδας καὶ ἑπτὰ ἁπλᾶς μονάδας.

3) Ὁ ἔχων ἐννέα δισεκατομμύρια, τέσσαρας δεκάδας ἑκατομμυρίων, πέντε ἑκατοντάδας χιλιάδων, δύο δεκάδας χιλιάδων, ἑπτὰ ἑκατοντάδας καὶ τρεῖς ἁπλᾶς μονάδος.

Β′. Γραπτὴ ἀρίθμησις.

§ 13. Ψηφία, ἀξία ἑκάστου, γραφὴ τῶν ἀριθμῶν. — Διὰ τὴν συμβολικὴν παράστασιν ἑκάστου τῶν ἐννέα πρώτων ἀριθμῶν ἐπενοήθησαν τὰ ἀκόλουθα σύμβολα.

Διὰ τὸν ἀριθμὸν ἕν, δύο, τρία, τέσσαρα, πέντε, ἕξ, ἑπτά, ὀκτώ, ἐννέα
τὸ σύμβολον 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Τὰ σύμβολα ταῦτα καλοῦνται ψηφία ἢ ἀραβικοὶ χαρακτῆρες (1). Οὕτως ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἔχει πέντε ἑκατοντάδας, τρεῖς δεκάδας καὶ ἑπτὰ μονάδας, δύναται νὰ γραφῇ συντομώτερον οὕτω: 5 ἑκατοντάδες, 3 δεκάδες, 7 μονάδες. Ἂν δὲ παραλείψωμεν τὰ ὀνόματα τῶν μονάδων καὶ γράψωμεν πλησίον ἀλλήλων καὶ καθ' ἣν εὑρίσκονται τάξιν, τὰ ψηφία 5, 3, 7, σχηματίζεται ἡ παράστασις 537. Διὰ ταύτης παρίσταται ὁ ρηθεὶς ἀριθμός, ἀρκεῖ νὰ παραδεχθῶμεν ὅτι τὸ μὲν ψηφίων 7 δηλοῖ ἁπλᾶς μονάδας, τὸ 3 δεκάδας καὶ τὸ 5 ἑκατοντάδας. Ὁμοίως σκεπτόμενοι κατανοοῦμεν ὅτι ἡ παράστασις 2753 δύναται νὰ παραστήσῃ τὸν ἀριθμόν, ὅστις ἔχει 2 χιλιάδας 7 ἑκατοντάδας, 5 δεκάδας καὶ 3 ἁπλᾶς μονάδας, ἂν παραδεχθῶμεν ὅτι τὸ μὲν ψηφίον 3 παριστᾷ ἁπλᾶς μονάδας, τὸ 5 δεκάδας, τὸ 7 ἑκατοντάδας καὶ τὸ 2 χιλιάδας. Οὕτως ἔφθασαν οἱ ἄνθρωποι εἰς τὴν παραδοχὴν τῆς ἀκολούθου συνθήκης.

Πᾶν ψηφίον γεγραμμένον πρὸς τὰ ἀριστερὰ ἄλλου παριστᾷ μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως.

Κατὰ τὴν συνθήκην ταύτην ψηφίον τι παριστᾷ ἁπλᾶς μονάδας, δεκάδας, ἑκατοντάδας κτλ., ἂν κατέχῃ τὴν πρώτην, δευτέραν, τρίτην κτπ. θέσιν ἐκ δεξιῶν.

Ἐὰν ἐφαρμόσωμεν τὴν προηγουμένην μέθοδον ἐργασίας εἰς τὸν ἀριθμόν, ὅστις ἔχει 4 ἑκατοντάδας καὶ 7 μονάδας, καταλήγομεν εἰς τὴν παράστασιν 47, ἥτις προφανῶς δὲν παριστᾷ τὸν ῥηθέντα ἀριθμόν. Τοῦτο δὲ συμβαίνει διότι, μὴ ἔχοντος τοῦ ἀριθμοῦ δεκάδας, τὸ ψηφίον 4 τῶν ἑκατοντάδων κατέλαβε τὴν θέσιν τοῦ ψηφίου τῶν δεκάδων. Ἐντεῦθεν προῆλθεν ἡ ἀνάγκη τῆς ἐπινοήσεως καὶ ἑτέρου ψηφίου, τὸ ὁποῖον νὰ καταλαμβάνῃ τὴν θέσιν τῶν μονάδων, αἱ ὁποῖαι ἐλλείπουσιν. Ὡς τοιοῦτον δὲ καθιερώθη τὸ 0, ὅπερ, ὡς οὐδὲν σημαῖνον, καλεῖται μηδέν, ἐν ἀντιθέσει πρὸς τὰ ἄλλα, τὰ ὁποῖα καλοῦνται σημαντικὰ ψηφία, διότι ἕκαστον τούτων σημαίνει μονάδας τάξεως ἢ τάξεών τινων. Οὕτως ὁ προηγούμενος ἀριθμὸς γράφεται οὕτω 407.

(1) Διότι ἡμεῖς παρελάβομεν ταῦτα παρὰ τῶν Ἀράβων (12ον αἰῶνα μ. Χ.)

Κατὰ τὰ λεχθέντα δυνάμεθα διὰ τῶν δέκα ψηφίων 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0 νὰ γράφωμεν πάντα γνωστὸν (§ 12) ἀριθμὸν ἐργαζόμενοι ὡς ἀκολούθως.

α.΄) Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς περιέχῃ μόνον μονάδας πρώτης κλάσεως, γράφομεν διαδοχικῶς ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιὰ τὰ ψηφία τῶν ἑκατοντάδων, δεκάδων καὶ ἁπλῶν μονάδων, τὰς ὁποίας ὁ ἀριθμὸς οὗτος περιέχει, προσέχοντες νὰ γράφομεν 0 εἰς τὴν θέσιν τῶν τυχὸν ἐλλειπουσῶν δεκάδων καὶ ἁπλῶν μονάδων. Οὕτως ὁ ἀριθμὸς διακόσια τριάκοντα ἑπτὰ γράφεται οὕτω : 237, ὁ τετρακόσια πέντε οὕτω 405 καὶ ὁ ἑξήκοντα δύο οὕτω : 62.

β.΄) Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς περιέχῃ καὶ πρωτευούσας μονάδας ἀνωτέρων τάξεων, γράφομεν διαδοχικῶς ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιὰ τοὺς ἀριθμοὺς τῶν περιεχομένων πρωτευουσῶν μονάδων, ἀρχόμενοι ἀπὸ τῆς ἀνωτάτης ἐν αὐτῷ περιεχομένης πρωτευούσης μονάδος καὶ προσέχοντες νὰ γράφωμεν ἕν, ἢ δύο 0 πρὸς τὰ ἀριστερὰ παντὸς (πλὴν τοῦ τῆς ἀνωτάτης πρωτευούσης μονάδος)' τοιούτου ἀριθμοῦ, ὅστις ἔχει δύο ἢ ἓν ψηφίον, τρία δὲ 0 εἰς τὴν θέσιν τῶν ψηφίων πάσης πρωτευούσης μονάδος, μὴ περιεχομένης ἐν τῷ ἀριθμῷ καὶ κατωτέρας τῆς ἐν αὐτῷ ἀνωτάτης πρωτευούσης μονάδος. Οὕτως ὁ ἀριθμὸς τριάκοντα δύο ἑκατομμύρια καὶ ἑκατὸν ἑξήκοντα ἑπτὰ χιλιάδες τέσσαρα γράφεται οὕτω 32167004, ὁ δὲ ἓξ ἑκατομμύρια δύο χιλιάδες καὶ τριάκοντα πέντε οὕτω : 6002035.

Ἀσκήσεις.

4) Νὰ γραφῇ ὁ ἀριθμός, ὅστις ἔχει 7 ἑκατοντάδας χιλιάδων, 8 δεκάδας χιλιάδων καὶ 6 δεκάδας.

5) Νὰ γραφῶσιν οἱ εἰς τὰς ἀσκήσεις 1, 2, 3, ἀναφερόμενοι ἀριθμοί.

§ 14. Ἀπαγγελία γεγραμμένων ἀριθμῶν. — α΄) Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς δὲν περιέχῃ πλείονα ψηφία τῶν τριῶν, ἀπαγγέλλομεν διαδοχικῶς το ὄνομα τῶν ἑκατοντάδων, δεκάδων καὶ ἁπλῶν μονάδων, τὰς ὁποίας περιέχει. Οὕτως ὁ 632 ἀπαγγέλλεται ἑξακόσια τριάκοντα δύο, ὁ δὲ 58 οὕτω : πεντήκοντα ὀκτώ.

β΄) Ἐὰν περιέχῃ ψηφία πλείονα τῶν τριῶν, χωρίζομεν αὐτὸν εἰς τριψήφια τμήματα ἀρχόμενοι ἐκ δεξιῶν (δυνατὸν τὸ τελευταῖον πρὸς τὰ ἀριστερὰ τμῆμα νὰ εἶναι διψήφιον ἢ μονοψήφιον). Ἔπειτα ἀρχόμενοι ἐξ ἀριστερῶν ἀπαγγέλλομεν τὸν ὑπὸ ἑκάστου τμήματος ἀποτελούμενον ἀριθμὸν ἐπισυνάπτοντες μετ᾽ αὐτοῦ καὶ τὸ ὄνομα τῆς πρωτευούσης μονάδος, τὴν ὁποίαν παριστᾷ (παραλειπομένου συνήθως τοῦ ὀνόματος τῶν ἁπλῶν μονάδων). Οὕτως ὁ 48152 ἀπαγγέλλεται οὕτω: τεσσαράκοντα ὀκτὼ χιλιάδες καὶ ἑκατὸν πεντήκοντα δύο, ὁ δὲ 7945238 οὕτω: ἑπτὰ ἑκατομμύρια, ἐννεακόσιαι τεσσαράκοντα πέντε χιλιάδες καὶ διακόσια τριάκοντα ὀκτώ.

§. **15. Δεκαδικὸν σύστημα ἀριθμήσεως.**—Ἡ ἐκτεθεῖσα μέθοδος τῆς ὀνομασίας καὶ γραφῆς τῶν ἀριθμῶν βασίζεται κυρίως ἐπὶ τοῦ νόμου (§ 9) τοῦ σχηματισμοῦ τῶν μονάδων διαφόρων τάξεων, κατὰ τὸν ὁποῖον δέκα μονάδες τάξεώς τινος ἀποτελοῦσι μίαν μονάδα τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως. Διὰ τοῦτο ἡ μέθοδος αὕτη καλεῖται δεκαδικὸν σύστημα ἀριθμήσεως, ὁ δὲ ἀριθμὸς δέκα καλεῖται βάσις τοῦ συστήματος τούτου.

Ἀσκήσεις.

6) Πόσοι ἀριθμοὶ ἔχουσιν ἓν μόνον ψηφίον (μονοψήφιοι), πόσοι δύο (διψήφιοι), πόσοι τρία ; κλπ. Νὰ σχηματισθῇ σχετικὸς κανών.

7) Πόσοι διψήφιοι ἀριθμοὶ λήγουσιν εἰς 7;

8) Πόσοι οἱ διὰ σημαντικῶν ψηφίων γραφόμενοι διψήφιοι ἀριθμοί;

9) Πόσοι τριψήφιοι ἀριθμοὶ λήγουσιν εἰς 4 ;

10) Πόσων τριψηφίων ἀριθμῶν τὸ δεύτερον ψηφίον εἶναι 0 ;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄.

ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΠΡΑΞΕΙΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

ΙΣΟΙ ΚΑΙ ΑΝΙΣΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

§ **16. Αἱ θεμελιώδεις πράξεις.**—Ἐκ τῆς πρακτικῆς ἀριθμητικῆς γνωρίζομεν ὅτι αἱ θεμελιώδεις ἐπὶ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν πράξεις εἶναι αἱ ἀκόλουθοι τέσσαρες: πρόσθεσις, ἀφαίρεσις, πολλαπλασιασμὸς καὶ διαίρεσις.

Α΄. ***Πρόσθεσις καλεῖται ἡ πρᾶξις διὰ τῆς ὁποίας δοθέντων***

ἀριθμῶν τινων εὑρίσκεται ἄλλος, ὁ ὁποῖος περιέχει ὅλας τὰς μονάδας αὐτῶν καὶ μόνον αὐτάς.

Οἱ πρὸς πρόσθεσιν δοθέντες ἀριθμοὶ λέγονται προσθετέοι, τὸ δὲ ἐξαγόμενον τῆς προσθέσεως καλεῖται ἄθροισμα ἢ κεφάλαιον. Εἶναι δὲ εὐνόητον ὅτι οἱ προσθετέοι πρέπει νὰ εἶναι ὁμοειδεῖς, τὸ δὲ ἄθροισμα εἶναι ὁμοειδὲς πρὸς αὐτούς.

Τὸ ἄθροισμα δεδομένων ἀριθμῶν σημειοῦμεν γράφοντες αὐτοὺς τὸν ἕνα παραπλεύρως τοῦ ἄλλου καὶ θέτοντες μεταξὺ ἑκάστου καὶ τοῦ ἑπομένου τὸ σημεῖον $+$, ὅπερ καλεῖται σημεῖον τῆς προσθέσεως καὶ ἀναγινώσκεται σὺν ἢ καί. Οὕτω $5+3+12$ δηλοῖ τὸ ἄθροισμα, τὸ ὁποῖον εὑρίσκομεν ἑνοῦντες πάσας τὰς μονάδας τῶν ἀριθμῶν 5, 3 καὶ 12. Ὅταν δὲ θεωρῶμεν, χωρὶς νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν σημειωθεῖσαν πρᾶξιν, ὡς εὑρεθὲν τὸ ἄθροισμα, γράφομεν αὐτὸ ἐντὸς παρενθέσεως οὕτω: $(5+3+12)$.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα δεδομένων ἀριθμῶν ἑνοῦμεν μετὰ τῶν μονάδων τοῦ πρώτου τὰς μονάδας τοῦ δευτέρου, μετὰ δὲ τῶν μονάδων τοῦ οὕτω προκύπτοντος ἀθροίσματος ἑνοῦμεν τὰς μονάδας τοῦ τρίτου καὶ οὕτω καθεξῆς, μέχρις οὗ ληφθῶσι πάντες οἱ προσθετέοι. Οὕτω πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἀθροίσματος $5+3+12$ ἑνοῦμεν μετὰ τῶν μονάδων τοῦ 5 τὰς μονάδας τοῦ 3 καὶ εὑρίσκομεν τὸν ἀριθμὸν 8, εἶτα δὲ μετ᾽ αὐτοῦ ἑνοῦμεν τὰς μονάδας τοῦ 12 καὶ εὑρίσκομεν τὸν ἀριθμὸν 20, ὅστις εἶναι ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν 5, 3 καὶ 12. Ἐκ τοῦ τρόπου τούτου τῆς ἐκτελέσεως τῆς προσθέσεως καθίσταται φανερὸν ὅτι προσθέτοντες τοὺς ἀριθμοὺς 5, 3 καὶ 12 ἢ τοὺς ἀριθμοὺς 8 καὶ 12 εὑρίσκομεν τὸ αὐτὸ ἄθροισμα. Ὁμοίως εἴτε τοὺς 9, 2, 5, 10, 7 προσθέσωμεν εἴτε τοὺς 16, 10, 7, τὸ αὐτὸ εὑρίσκομεν ἄθροισμα, διότι μετὰ τὴν πρόσθεσιν τῶν 9, 2, καὶ 5 ἡ εὕρεσις τοῦ $9+2+5+10+7$ ἀνάγεται εἰς τὴν εὕρεσιν τοῦ ἀθροίσματος $16+10+7$.

Β′ ***Ἀφαίρεσις καλεῖται ἡ πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας ἐλαττοῦμεν δοθέντα ἀριθμὸν κατὰ τόσας μονάδας, ὅσας ἔχει ἄλλος δοθεὶς ἀριθμός.***

Ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος πρέπει νὰ ἐλαττωθῇ, καλεῖται μειωτέος, ὁ δὲ δηλῶν κατὰ πόσας μονάδας πρέπει νὰ ἐλαττωθῇ ὁ μειωτέος, καλεῖται ἀφαιρετέος. Τὸ ἐξαγόμενον τῆς ἀφαιρέσεως καλεῖται ὑπόλοιπον ἢ διαφορά

Κατὰ τὸν ῥηθέντα ὁρισμὸν τῆς ἀφαιρέσεως, ἂν ἀπὸ τὰς μονάδας τοῦ μειωτέου ἀφαιρεθῶσιν αἱ μονάδες τοῦ ἀφαιρετέου, μένουσιν αἱ μονάδες τῆς διαφορᾶς. Ἐὰν δὲ εἰς τὰς ὑπολειπομένας μονάδας τῆς διαφορᾶς προστεθῶσι πάλιν αἱ μονάδες τοῦ ἀφαιρετέου, εἶναι φανερὸν ὅτι προκύπτουσιν αἱ μονάδες τοῦ μειωτέου. Ἐντεῦθεν ἕπεται ὁ ἀκόλουθος ὁρισμὸς τῆς ἀφαιρέσεως.

Ἀφαίρεσις καλεῖται ἡ πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας δοθέντων δύο ἀριθμῶν εὑρίσκεται τρίτος, ὅστις προστιθέμενος εἰς τὸν β′ παράγει τὸν α′.

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦτον, ὁ μειωτέος εἶναι ἄθροισμα τοῦ ἀφαιρετέου καὶ τοῦ ὑπολοίπου. Ἐντεῦθεν δὲ ἕπεται ὁ γνωστὸς ἐκ τῆς πρακτικῆς ἀριθμητικῆς τρόπος, κατὰ τὸν ὁποῖον γίνεται ἡ δοκιμὴ τῆς ἀφαιρέσεως.

Ἵνα δηλώσωμεν τὴν διαφορὰν ἀριθμοῦ τινὸς ἀπὸ ἄλλου, γράφομεν τὸν ἀφαιρετέον δεξιὰ τοῦ μειωτέου καὶ μεταξὺ αὐτῶν τὸ σημεῖον τῆς ἀφαιρέσεως —, τὸ ὁποῖον ἀναγινώσκεται πλήν. Οὕτω 8—3 δηλοῖ τὴν διαφοράν, τὴν ὁποίαν θὰ εὕρωμεν ἂν ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ 8 τὸν 3. Ὁσάκις δὲ θέλομεν νοῇ εὑρεθεῖσαν τὴν διαφοράν, θέλομεν σημειοῖ αὐτὴν ἐντὸς παρενθέσεως, οὕτω (8—3).

Γ′. ***Πολλαπλασιασμὸς καλεῖται ἡ πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας ἐπαναλαμβάνομεν ἀριθμόν τινα πολλάκις.***

Οὕτως, ἂν ἐπαναλάβωμεν τὸν 5 τρεῖς φοράς ἤτοι, ἂν σχηματίσωμεν τὸ ἄθροισμα 5+5+5 ἢ 15, λέγομεν ὅτι ἐπολλαπλασιάσαμεν τὸν 5 ἐπὶ τὸν 3.

Ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἐπαναλαμβάνεται πολλακις, λέγεται πολλαπλασιαστέος· ἐκεῖνος δέ, ὁ ὁποῖος δηλοῖ ποσάκις πρέπει νὰ ἐπαναληφθῇ ὁ πολλαπλασιαστέος καλεῖται πολλαπλασιαστής. Τὸ ἐξαγόμενον τοῦ πολ[σμοῦ καλεῖται γινόμενον, Ὁ πολ[σέος καὶ πολ[στὴς καλοῦνται ὁμοῦ παράγοντες τοῦ γινομένου.

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ πολ[σμοῦ συνάγεται ὅτι τὸ γινόμενον εἶναι πάντοτε ὁμοειδὲς πρὸς τὸν πολ[στέον.

Τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν σημειοῦμεν γράφοντες τὸν πολ[στὴν δεξιὰ τοῦ πολ[στέου καὶ μεταξὺ αὐτῶν τὸ σημεῖον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ $\times$, ὅπερ ἀναγινώσκειται ἐπί. Οὕτω τὸ γινόμενον τοῦ 5 ἐπὶ 3 σημειοῦται οὕτω 5$\times$3. Ὁσάκις δὲ θεωροῦμεν τὸ γινόμενον ὡς εὑρεθέν, θέτομεν αὐτὸ ἐντὸς παρενθέσεως, οὕτω (5$\times$3).

ΣΗΜ. Τὸ σημεῖον $\times$ ἀντικαθίσταται πολλάκις διὰ μιᾶς τελείας στιγμῆς. Οὕτω τὸ γινόμενον 5×3 γράφεται καὶ οὕτω 5. 3.

Πολλαπλάσιον ἀριθμοῦ καλεῖται πᾶς ἀριθμός, ὁ ὁποῖος γίνεται ἐξ αὐτοῦ διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ ἀκέραιον ἀριθμόν. Οὕτως ὁ ἀριθμὸς 7×2 ἤτοι 14 εἶναι πολ]άσιον τοῦ 7, ὁ 12×3 ἤτοι ὁ 36 εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 12.

ΣΗΜ. Χάριν συντομίας καὶ γενικότητος πᾶν πολ]άσιον ἀριθμοῦ τινός α, θέλομεν σημειοῖ οὕτω πολ.α.

Δ΄. ***Διαίρεσις.*** — Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι θέλομεν νὰ μοιράσωμεν ἐξ ἴσου 15 δραχμὰς εἰς 3 ἀνθρώπους. Δίδοντες εἰς ἕκαστον ἀνὰ μίαν, μίαν δραχμὴν εὑρίσκομεν ὅτι δυνάμεθα νὰ δόσωμεν εἰς ἕκαστον ἀκριβῶς ἀπὸ 5 δραχμὰς χωρὶς νὰ περισσεύσῃ τι, ἤτοι ἡ διαφορὰ $15-(5\times3)$ εἶναι μηδέν. Ἐὰν τὸ μεριστέον ποσὸν εἶναι 17 δραχμαί, ἐργαζόμενοι ὁμοίως βλέπομεν ὅτι εἶναι δυνατὸν νὰ δόσωμεν εἰς ἕκαστον πάλιν ἀνὰ 5 δραχμάς, ἀλλὰ θὰ περισσεύσωσι καὶ 2 δραχμαί. Ὥστε κατὰ τὴν περίπτωσιν ταύτην ἡ διαφορὰ $17-(5\times3)$ εἶναι 2, ἤτοι ἀριθμὸς ἔχων ὀλιγωτέρας μονάδας τοῦ 3. Ἡ α΄ τῶν πράξεων τούτων καλεῖται μερισμὸς τοῦ 15 διὰ τοῦ 3, ἡ δὲ β΄ μερισμὸς τοῦ 17 διὰ τοῦ 3.

Ἄς ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι διαθέτομεν 15 δραχμὰς πρὸς ἀγορὰν ὑφάσματος, τοῦ ὁποίου ὁ πῆχυς τιμᾶται 3 δραχμὰς καὶ θέλομεν νὰ μάθωμεν πόσους πήχεις θὰ ἀγοράσωμεν. Εἶναι φανερὸν ὅτι δίδοντες εἰς τὸν ἔμπορον ἐκ τῶν 15 δρ. τὰς 3 λαμβάνομεν ἕνα πῆχυν, δίδοντες ἔπειτα ἐκ τῶν 12 δραχ., αἱ ὁποῖαι ἔμειναν, ἄλλας τρεῖς λαμβάνομεν ἄλλον ἕνα πῆχυν καὶ οὕτω καθεξῆς σκεπτόμενοι εὑρίσκομεν ὅτι θὰ λάβωμεν 5 πήχεις, τῶν ὁποίων ἡ ἀξία (3×5) εἶναι πράγματι 15 δραχμαί· ὥστε εἰς ἡμᾶς οὐδὲν μένει, ἤτοι ἡ διαφορὰ $15-(5\times3)$ εἶναι μηδέν. Ἐὰν δὲ διεθέτομεν 17 δραχμάς, ὁμοίως σκεπτόμενοι εὑρίσκομεν ὅτι ἔπρεπε νὰ λάβωμεν 5 πήχεις καὶ θὰ μᾶς ἔμενον καὶ 2 δραχμαί· ὥστε ἡ διαφορὰ $17-(5\times3)$ εἶναι 2, ἤτοι ἀριθμὸς ἔχων ὀλιγωτέρας τοῦ 3 μονάδας.

Ἡ α΄ τῶν πράξεων τούτων καλεῖται μέτρησις τοῦ 15 διὰ τοῦ 3, ἡ δὲ β΄ καλεῖται μέτρησις τοῦ 17 διὰ τοῦ 3.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω βλέπομεν ὅτι ὁ μερισμὸς ἢ ἡ μέτρησις τοῦ 15 διὰ τοῦ 3 εἶναι πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας εὑρίσκεται τρίτος ἀριθμὸς 5, τοιοῦτος ὥστε ἡ διαφορὰ $15-(5\times3)$ εἶναι μηδέν. Ὁμοίως μερισμὸς ἢ μέτρησις τοῦ 17 διὰ τοῦ 3 εἶναι πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν τρίτον 5, τοιοτον ὥστε ἡ διαφορὰ 17—(5×3) εἶναι ἀριθμὸς 2 ἔχων ὀλιγωτέρας μονάδας τοῦ 3.

Τὸν μερισμὸν καὶ τὴν μέτρησιν ἀριθμοῦ τινὸς α δι' ἄλλου β καλοῦμεν μὲ ἓν ὄνομα διαίρεσιν τοῦ α διὰ τοῦ β.

Ὥστε: Διαίρεσις ἀριθμοῦ α δι' ἄλλου β καλεῖται ἡ πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας εὑρίσκεται τρίτος ἀριθμὸς γ, τοιοῦτος ὥστε ἡ διαφορὰ α—(β×γ) νὰ εἶναι μηδὲν ἢ ἀριθμός τις υ ἔχων ὀλιγωτέρας μονάδας τοῦ β.

Ὁ α λέγεται διαιρετέος, ὁ β διαιρέτης, ὁ γ πηλίκον καὶ ὁ υ (ἂν ὑπάρχῃ) ὑπόλοιπον.

Ἡ διαίρεσις τοῦ α διὰ τοῦ β καλεῖται τελεία ἢ ἀτελής, καθ' ὅσον ἡ διαφορὰ α—(β×γ) εἶναι μηδὲν ἢ διάφορος τοῦ μηδενός.

Ἐὰν ἡ διαίρεσις τοῦ α διὰ τοῦ β εἶναι τελεία καὶ τὸ πηλίκον εἶναι γ, ἐπειδὴ ἡ διαφορὰ α—(β×γ) εἶναι 0, ὁ διαιρετέος α εἶναι γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον.

Ἐὰν δὲ ἡ διαίρεσις αὕτη εἶναι ἀτελής, ἐπειδὴ ἡ διαφορὰ α—(β×γ) εἶναι υ, ἕπεται (§ 16 Β') ὅτι ὁ διαιρετέος α εἶναι ἄθροισμα τοῦ γινομένου τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον καὶ τοῦ ὑπολοίπου.

Τὸ πηλίκον ἀριθμοῦ δι' ἄλλου σημειοῦμεν γράφοντες τὸν διαιρέτην δεξιὰ τοῦ διαιρετέου καὶ μεταξὺ αὐτοῦ το σημεῖον τῆς διαιρέσεως : τὸ ὁποῖον ἀναγινώσκεται διά. Οὕτω τὸ πηλίκιον τοῦ 8 διὰ τοῦ 4 σημειοῦμεν οὕτω 8 : 4, ὁσάκις δὲ θεωροῦμεν εὑρεθὲν τὸ πηλίκον γράφομεν αὐτὸ ἐντὸς παρενθέσεως οὕτω (8 : 4).

ΣΗΜ. Τοὺς κανόνας, κατὰ τοὺς ὁποίους ἐκτελοῦνται αἱ πράξεις αὗται διδάσκει ἡ πρακτικὴ ἀριθμητικὴ καὶ θέλομεν θεωρῇ αὐτοὺς εἰς τὰ ἀκόλουθα ὡς γνωστούς. Βραδύτερον δὲ ἐν οἰκείῳ τόπῳ, θέλομεν αἰτιολογήσῃ ἕκαστον τούτων.

§ 17. Ἴσοι ἀριθμοί, ἰδιότητες αὐτῶν.—Ὡς γνωστόν, εἰς ἕκαστον δάκτυλον τῆς δεξιᾶς χειρὸς ἀρτιμελοῦς ἀνθρώπου ἀντιστοιχεῖ εἷς δάκτυλος τῆς ἀριστερᾶς καὶ τἀνάπαλιν. Διὰ τοῦτο λέγομεν ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν δακτύλων τῆς δεξιᾶς χειρὸς εἶναι ἴσος πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν δακτύλων τῆς ἀριστερᾶς. Γενικῶς.

Δύο ἀριθμοὶ λέγονται ἴσοι, ἐὰν εἰς ἑκάστην μονάδα ἑκατέρου ἀντιστοιχῇ μία μονὰς τοῦ ἄλλου.

Ἵνα δηλώσωμεν τὴν ἰσότητα δύο ἀριθμῶν, γράφομεν τὸν ἕνα παρὰ τὸν ἄλλον καὶ μεταξὺ αὐτῶν τὸ σημεῖον=, τὸ ὁποῖον καλεῖται σημεῖον ἰσότητος καὶ ἀναγινώσκεται ἴσον. Οὕτως ὅτι ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν 5 καὶ 3 εἶναι ὁ 8 σημειοῦται οὕτω $5+3=8$, ὅτι ὁ α ἰσοῦται πρὸς τὸν β σημειοῦται οὕτω $\alpha=\beta$.

Οἱ ἑκατέρωθεν τοῦ $=$ γραμμένοι ἀριθμοὶ λέγονται μέλη τῆς ἰσότητος· τούτων ὁ μὲν πρὸ τοῦ $=$ καλεῖται πρῶτον μέλος, ὁ δὲ μετ᾽ αὐτὸ δεύτερον μέλος.

Περὶ τῶν ἴσων ἀριθμῶν ἀληθεύουσιν αἱ ἀκόλουθοι εὐνόητοι ἰδιότητες.

α΄. Ἐὰν εἰς ἴσους ἀριθμοὺς προστεθῶσιν ἴσοι, προκύπτουσιν ἀριθμοὶ ἴσοι. Οὕτως, ἂν $\alpha=\beta$, θὰ εἶναι καὶ $\alpha+\mu=\beta+\mu$, ἂν δὲ εἶναι καὶ $\gamma=\delta$, θὰ εἶναι καὶ $\alpha+\gamma=\beta+\delta$.

β΄. Ἐὰν ἀπὸ ἴσων ἀριθμῶν ἀφαιρεθῶσιν ἴσοι, προκύπτουσιν ἀριθμοὶ ἴσοι. Οὕτως, ἂν $\alpha=\beta$ καὶ εἶναι δυνατὴ ἀφαίρεσις τοῦ μ ἀπὸ τοῦ α. θὰ εἶναι καὶ $\alpha-\mu=\beta-\mu$.

γ΄. Τὰ ἰσοπολλαπλάσια ἴσων ἀριθμῶν εἶναι ἀριθμοὶ ἴσοι. Οὕτως, ἂν $\alpha=\beta$, θὰ εἶναι καὶ $\alpha\times\mu=\beta\times\mu$.

δ΄. Ἐὰν ἴσοι ἀριθμοὶ διαιρεθῶσιν δι᾽ ἴσων, προκύπτουσιν ἀριθμοὶ ἴσοι. Οὕτως ἂν ἡ διαίρεσις τοῦ α διὰ τοῦ γ εἶναι τελεία καὶ εἶναι $\alpha=\beta$ καὶ $\gamma=\delta$, θὰ εἶναι καὶ $(\alpha:\gamma)=(\beta:\delta)$.

ε΄. Οἱ τῷ αὐτῷ ἀριθμῷ ἴσοι εἶναι καὶ πρὸς ἀλλήλους ἴσοι. Οὕτως, ἂν $\alpha=\beta$ καὶ $\alpha=\gamma$, θὰ εἶναι καὶ $\beta=\gamma$.

§ 18. **Ἄνισοι ἀριθμοί, ἰδιότητες αὐτῶν.** — Ἄς ἀναγράψωμεν τὰς μονάδας δύο ἀριθμῶν π. χ. τοῦ 5 καὶ 3, ὡς κάτωθι φαίνεται:

μονάδες τοῦ 5	1, 1, 1, 1, 1.
» τοῦ 3	1, 1, 1.

Ὡς βλέπομεν αἱ δύο τελευταῖαι μονάδες τοῦ 5 δὲ ἔχουσιν ἀντιστοίχους μονάδας εἰς τὸν 3, ἤτοι ὁ 5 ἔχει ὅσας μονάδας ἔχει ὁ 3 καὶ δύο ἄλλας ἀκόμη. Οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι λέγονται ἄνισοι· ὁ 5, ὅστις, ὡς προείπομεν, ἔχει περισσοτέρας μονάδας, καλεῖται μεγαλύτερος τοῦ 3, οὗτος δὲ μικρότερος τοῦ 5. Γενικῶς·

Δύο ἀριθμοὶ λέγονται ἄνισοι, ἂν μονάδες τινὲς τοῦ ἑνὸς δὲν ἔχωσιν ἀντιστοίχους μονάδας εἰς τὸν ἄλλον.

Ἀριθμός τις λέγεται μεγαλύτερος ἄλλου, ἐὰν ἔχῃ μονάδας περισσοτέρας αὐτοῦ, μικρότερος δέ, ἂν ἔχῃ ὀλιγωτέρας μονάδας αὐτοῦ.

Ἵνα δηλώσωμεν ὅτι δύο ἀριθμοὶ εἶναι ἄνισοι, γράφομεν τὸν ἕνα παραπλεύρως τοῦ ἄλλου καὶ μεταξὺ αὐτῶν τὸ σημεῖον τῆς ἀνισότητος $>$, οὕτως ὥστε ὁ μεγαλύτερος νὰ κεῖται ἐντὸς τῆς γωνίας, ὁ δὲ μικρότερος εἰς τὴν κορυφὴν αὐτῆς· οὕτω $12>8$ σημαίνει ὅτι ὁ 12 εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 8. Οἱ ἑκατέρωθεν τοῦ $>$ γεγραμμένοι ἀριθμοὶ καλοῦνται μέλη τῆς ἀνισότητος, πρῶτον μὲν μέλος ἐκεῖνος, ὁ ὁποῖος εἶναι πρὸ τοῦ $>$ καὶ δεύτερον μέλος ἐκεῖνος, ὁ ὁποῖος εἶναι μετὰ τὸ $>$.

Περὶ τῶν ἀνίσων ἀριθμῶν ἀληθεύουσιν αἱ ἀκόλουθοι εὐνόητοι ἰδιότητες

α΄.) Ἐὰν εἰς ἀνίσους ἀριθμοὺς προστεθῇ ὁ αὐτὸς ἀριθμός, προκύπτουσιν ἀριθμοὶ ὁμοίως ἄνισοι. Οὕτως, ἂν εἶναι $\alpha>\beta$, θὰ εἶναι καὶ $\alpha+\mu>\beta+\mu$.

β΄.) Ἐὰν ἀπὸ ἀνίσων ἀριθμῶν ἀφαιρεθῇ ὁ αὐτὸς ἀριθμός, προκύπτουσιν ἀριθμοὶ ὁμοίως ἄνισοι. Οὕτως ἂν εἶναι $\alpha>\beta$ καὶ εἶναι δυνατὴ ἡ ἀφαίρεσις τοῦ μ ἀπὸ τοῦ β, θὰ εἶναι καὶ $\alpha-\mu>\beta-\mu$.

γ΄.) Ἐὰν εἰς ἀνίσους ἀριθμοὺς προστεθῶσιν ἄνισοι, ἀλλ᾽ ὁ μεγαλύτερος εἰς τὸν μεγαλύτερον καὶ ὁ μικρότερος εἰς τὸν μικρότερον, προκύπτουσιν ἀριθμοὶ ὁμοίως ἄνισοι. Οὕτως, ἂν εἶναι $\alpha>\beta$ καὶ $\gamma>\delta$, θὰ εἶναι καὶ $\alpha+\gamma>\beta+\delta$.

δ΄.) Τὰ ἰσοπολλαπλάσια ἀνίσων ἀριθμῶν εἶναι ἀριθμοὶ ὁμοίως ἄνισοι. Οὕτως, ἂν εἶναι $\alpha>\beta$, θὰ εἶναι καὶ $\alpha\times\mu>\beta\times\mu$.

ε΄.) Τὰ πηλίκα δύο ἀνίσων ἀριθμῶν διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ διαιρουμένων εἶναι ἀριθμοὶ ὁμοίως ἄνισοι. Οὕτως ἂν $\alpha>\beta$ καὶ ἡ διαίρεσις τοῦ α διὰ δ εἶναι τελεία, θὰ εἶναι καὶ $(\alpha:\delta)>(\beta:\delta)$.

Διάφοροι ὁρισμοί.

§ **19.**—Α΄. ***Ἀξίωμα*** καλεῖται πᾶσα πρότασις, τῆς ὁποίας ἡ ἀλήθεια εἶναι ἀφ᾽ ἑαυτῆς φανερά. Ἀξίωμα π. χ. εἶναι ἡ ἀκόλουθος πρότασις. «Παντὸς ἀριθμοῦ ὑπάρχει μεγαλύτερος».

Β΄.) Ἀπόδειξις καλεῖται συλλογισμὸς ἢ σειρὰ συλλογισμῶν, διὰ τῶν ὁποίων πειθόμεθα ὅτι πρότασίς τις εἶναι ἀληθής.

Γ'.) ***Θεώρημα*** καλεῖται πᾶσα πρότασις, τῆς ὁποίας ἡ ἀλήθεια γίνεται φανερὰ διὰ τῆς ἀπδείξεως.

Δ'.) ***Πόρισμα*** καλεῖται πᾶσα πρότασις πηγάζουσα ἀμέσως ἐκ μιᾶς ἢ περισσοτέρων ἀληθῶν προτάσεων.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΠΡΑΞΕΩΝ

Α'. Ἰδιότητες τῆς προσθέσεως.

§ 20. Θεώρημα Ι.— Τὸ ἄθροισμα ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται, ὁπωσδήποτε καὶ ἂν μεταβληθῇ ἡ τάξις αὐτῶν.

Ἔστω τὸ ἄθροισμα $2+5+4$ καὶ τὸ $5+4+2$, τὰ ὁποῖα περιέχουσι τοὺς αὐτοὺς προσθετέους κατὰ διάφορον τάξιν, Λέγω ὅτι:

$$2+5+4=5+4+2$$

Ἀπόδειξις. Ἵνα συγκρίνωμεν τὰ ἀθροίσματα ταῦτα εὐκόλως, γράφομεν τὰς μονάδας, ἐξ ὧν ἕκαστον σύγκειται, ὡς ἀκολούθως,

	α' ὁμὰς	β' ὁμὰς	γ' ὁμὰς
μονάδες τοῦ $A=2+5+4$	1, 1.	1, 1, 1, 1, 1.	1, 1, 1, 1
» » $B=5+4+2$	1, 1, 1, 1, 1.	1, 1, 1, 1.	1, 1,

Τώρα παρατηροῦμεν ὅτι εἰς ἑκάστην μονάδα τῆς α' ὁμάδος τοῦ ἀθροίσματος Α ἀντιστοιχεῖ μία μονὰς τῆς γ' ὁμάδος τοῦ Β καὶ τἀνάπαλιν· ὁμοίως εἰς ἑκάστην μονάδα τῆς β' ὁμάδος τοῦ Α ἀντιστοχεῖ μία μονὰς τῆς α' ὁμάδος τοῦ Β καὶ τἀνάπαλιν· τέλος εἰς ἑκάστην μονάδα τῆς γ' ὁμάδος τοῦ Α ἀντιστοιχεῖ μία μονὰς τῆς β' ὁμάδος τοῦ Β καὶ τἀνάπαλιν. Εἰς ἑκάστην λοιπὸν μονάδα τοῦ Α ἀντιστοιχεῖ μία μονὰς τοῦ Β καὶ τἀνάπαλιν· εἶναι ὅθεν (§ 17) τὰ ἀθροίσματα ταῦτα ἴσα, ἤτοι: $2+5+4=5+4+2$. ὅ. ἔ. δ.

Ἡ διὰ τοῦ θεωρήματος τούτου διατυπουμένη ἰδιότης ἐκφράζεται γενικῶς διὰ τῆς ἰσότητος $\alpha+\beta+\gamma+\delta=\beta+\alpha+\delta+\gamma$, καλεῖται δὲ αὕτη νόμος τῆς ἀντιμεταθέσεως ἢ καὶ θεμελιώδης ἰδιότης τῆς προσθέσεως, διότι ἐπ' αὐτῆς θεμελιοῦται ἡ ἀπόδειξις τῶν ἄλλων αὐτῆς ἰδιοτήτων.

ΣΗΜ. Εἰς τὴν ἰδιότητα ταύτην στηρίζεται ἡ ἐκ τῆς πρακτικῆς ἀριθμητικῆς γνωστὴ δοκιμὴ τῆς προσθέσεως, κατὰ τὴν ὁποίαν ἐκτελοῦμεν τὴν πρόσθεσιν ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω.

§ **21. Θεώρημα ΙΙ.** — Τὸ ἄθροισμα ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται, ἄν τινες τούτων ἀντικατασταθῶσι διὰ τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν.

Ἔστω τὸ ἄθροισμα $7+12+18+20$ καὶ τὸ $7+32+18$, τὸ ὁποῖον προκύπτει ἐκ τοῦ α΄ δι᾽ ἀντικαταστάσεως τῶν προσθετέων 12 καὶ 20 διὰ τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν 32. Λέγω ὅτι

$$7+12+18+20=7+32+18.$$

Ἀπόδειξις. Κατὰ τὴν θεμελιώδη ἰδιότητα τῆς προσθέσεως εἶναι $\quad 7+12+18+20=12+20+7+18 \quad (1)$

Ἀλλὰ $\quad 12+20+7+18=32+7+18 \quad (2)$, διότι ἡ ἀντικατάστασις τῶν δύο πρώτων προσθετέων 12 καὶ 20 διὰ τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν 22 εἶναι (§ 16 Α΄) ἐκτέλεσις μέρους τῆς προσθέσεως. Ἐπειδὴ δὲ (§ 17 ε΄) οἱ τῷ αὐτῷ ἀριθμῷ ἴσοι εἶναι καὶ πρὸς ἀλλήλους ἴσοι, ἕπεται ἐκ τῶν ἰσοτήτων (1) καὶ (2) ὅτι :

$7+12+18+20=32+7+18$, ὅθεν καὶ (§ 20)

$7+12+18+20=7+32+18$. ὅ. ἔ. δ.

Γενικῶς : $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon=\alpha+(\beta+\gamma+\delta)+\varepsilon$.

Ἐκ τῆς ἰδιότητος ταύτης συνάγεται καὶ ἡ ἀλήθεια τῆς ἀκολούθου ἰδιότητος.

§ **22. Θεώρημα ΙΙΙ.** — Τὸ ἄθροισμα ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται, ἄν τις τούτων ἀντικατασταθῇ δι᾽ ἄλλων, οἱ ὁποῖοι ἔχουσιν αὐτὸν ὡς ἄθροισμα.

Οὕτω π. χ. $8+15+36+10=8+15+30+6+10$.

ΣΗΜ. Ἂν ἐν τῷ ἀθροίσματι $8+15+30+6+10$ ἕνα τῶν ἀρχικῶν προσθετέων π. χ. τὸν 15 ἀντικαταστήσωμε δι᾽ ἄλλων, οἵτινες ἔχουσιν αὐτὸν ὡς ἄθροισμα π. χ. διὰ τῶν 12 καὶ 3 εὑρίσκομεν ὅτι : $8+15+30+6+10=8+12+3+30+6+10$. Ἐπειδὴ δέ, ὡς ἀπεδείχθη, εἶναι $8+15+30+6+10=8+15+36+10$, ἕπεται (§ 17 ε΄) ὅτι : $8+15+36+10=8+12+3+30+6+10$. Ὁμοίως κατανοοῦμεν ὅτι : $8+15+36+10=5+2+1+12+3+30+6+10$ κλπ. Εἶναι ὅθεν δυνατὴ ἡ ταὐτόχρονος πλειόνων προσθετέων ἀντικατάστασις, ἀρκεῖ ἕκαστος νὰ ἀντικαθίσταται ὑπὸ ἄλλων, οἵτινες ἔχουσιν αὐτὸν ὡς ἄθροισμα.

§ **23. Θεώρημα IV.** — Ἵνα προσθέσωμεν ἀριθμὸν εἰς ἄθροισμα, ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν αὐτὸν εἰς ἕνα τῶν προσθετέων τοῦ ἀθροίσματος, τοὺς δὲ ἄλλους ἀφήσωμεν, ὅπως ἔχουσιν.

Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα $(10+8+23)+7$, ἤτοι νὰ προσθέσωμεν τὸν 7 εἰς τὸ ἄθροισμα $10+8+23$. Λέγω ὅτι

$$(10+8+23)+7=10+15+23.$$

Ἀπόδειξις. Κατὰ τὴν προηγουμένην ἰδιότητα εἶναι

$$(10+8+23)+7=10+8+23+7$$

ἀλλὰ $\quad 10+8+23+7=10+15+23 \qquad$ (§ 21).

Ἐκ τῶν δύο τούτων ἰσοτήτων ἕπεται (§ 17 ε΄) ὅτι:

$$(10+8+23)+7=10+15+23.$$ ὅ. ἔ. δ.

§ **24 Θεώρημα V.** — Ἄθροισμα δεδομένων ἀθροισμάτων ἰσοῦται πρὸς ἄθροισμα, τὸ ὁποῖον περιέχει πάντας τοὺς προσθέτους αὐτῶν καὶ μόνον αὐτούς.

Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα

$$(2+7+12)+(9+20)+(4+8+13)\cdot$$

Λέγω ὅτι τοῦτο ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα

$$2+7+12+9+20+4+8+13.$$

Ἀπόδειξις Ἐφαρμόζοντες τὴν ὑπὸ τοῦ Θεωρ. ΙΙΙ (§ 22) διατυπουμένην ἰδιότητα καὶ εἰς τοὺς τρεῖς προσθετέους τοῦ ἀθροίσματος $(2+7+12)+(9+20)+(4+8+13)$ δὲν βλάπτομεν (§ 22 Σημ.) αὐτό· οὕτως εὑρίσκομεν ὅτι:

$(2+7+12)+(9+20)+(4+8+13)=2+7+12+9+20+4+8+13$ ὅ. ἔ. δ.

§ **25. Ἐξήγησις τοῦ κανόνος τῆς προσθέσεως.**— Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα $847+375+62$.

Ἐπειδὴ $847=800+40+7$

$375=300+70+5$

καὶ $62= \qquad 60+2$ ἕπεται (§ 22, 21)

ὅτι $847+375+62=(800+300)+(40+70+60)+(7+5+2)$ ἢ

$847+375+62=(8+3)$ ἑκατ. $+(4+7+6)$ δεκ. $+(7+5+2)$ ἁπλ. μον.

Οὕτως ἐξηγεῖται διατὶ πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἀθροίσματος δεδομένων ἀριθμῶν πρέπει νὰ προσθέσωμεν χωριστὰ τὰς εἰς αὐτοὺς περιεχομένας μονάδας ἑκάστης τάξεως.

Ἐπειδὴ δὲ $(7+5+2)$ ἁπλαῖ μονάδες $=14$ ἁ. μ. $=10$ ἁ. μ. $+4$ ἁ. μ. $=1$ δεκὰς $+4$ ἁ. μ., ἕπεται ὅτι:

$847+375+62=(8+3)$ ἑκ. $+(4+7+6+1)$ δεκ. $+4$ ἁ. μ.

Καὶ ἐπειδὴ $(4+7+6+1)$ δεκ. $=18$ δεκ. $=1$ ἑκ $+8$ δεκ. ἕπεται ὅτι:

$847+375+62=(8+3+1)$ ἑκ. $+8$ δεκ. $+4$ ἁ. μ. $=12$ ἑκ· $+8$ δεκ. $+4$ ἁ. μ. $=1284$. Οὕτως ἐξηγεῖται διατί, ὅταν τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τάξεώς τινος ὑπερβαίνῃ τὸν 9, γράφομεν μόνον τὰς ἁπλᾶς αὐτοῦ μονάδας, τὰς δὲ δεκάδας προσθέτομεν μετὰ τῶν ψηφίων τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως.

Ἀσκήσεις.

11) Νὰ εὑρεθῶσιν ἀπὸ μνήμης τὰ κάτωθι ἀθροίσματα καὶ ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ἰδιοτήτων τῆς προσθέσεως νὰ δικαιολογηθῇ ὁ τρόπος, κατὰ τὸν ὁποῖον εὑρίσκεται ἕκαστον.

α′) $46+4$, $51+9$, $33+7$, $124+6$, $262+8$.

β′) $53+10$, $81+20$, $365+30$, $482+20$.

γ′) $13+8$, $27+9$, $144+8$, $267+32$.

12) Νὰ μετασχηματισθῇ τὸ ἄθροισμα $7+5+12+3$ εἰς ἄθροισμα ἴσον αὐτῷ καὶ ἔχον δύο μόνον διψηφίους προσθετέους, ὧν ὁ εἷς νὰ λήγῃ εἰς 0.

13) Νὰ μετασχηματισθῇ τὸ ἄθροισμα $8+7+13+2$ εἰς ἄθροισμα ἴσον αὐτῷ καὶ ἔχον δύο μόνον προσθετέους λήγοντας ἀμφοτέρους εἰς 0.

14) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι: $(12+5+20)+3=32+8$.

15) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι: $(5+23+12)+(7+13)=30+30$.

16) Νὰ προστεθῶσιν οἱ κάτωθι ἀριθμοὶ ὁριζοντίως καὶ καθέτως καὶ ἔπειτα νὰ προστεθῶσιν χωριστὰ τὰ πρῶτα καὶ χωριστὰ τὰ δεύτερα ἀθροίσματα. Νὰ συγκριθῶσιν τέλος τὰ εὑρισκόμενα ἀθροίσματα καὶ νὰ δοθῇ ὁ λόγος τῆς μεταξὺ αὐτῶν σχέσεως.

$$
\begin{array}{r}
3567+283+169+35=\\
2842+597+586+79=\\
946+167+999+\ 8=\\
3862+\ 79+167+\ 5=\\
\hline
+\qquad+\qquad+\qquad=
\end{array}
$$

Β′. Ἰδιότητες τῆς ἀφαιρέσεως.

§ 26. Θεώρημα I.—Ἵνα ἀφαιρέσωμεν ἀριθμὸν ἀπὸ ἀθροίσματος, ἀρκεῖ νὰ ἀφαιρέσωμεν αὐτὸν ἀπὸ ἑνὸς τῶν προσθετέων τοῦ ἀθροίσματος τοὺς δὲ ἄλλους ἀφήσωμεν, ὅπως ἔχουσιν.

Ἔστω ὅτι ἀπὸ τοῦ ἀθροίσματος $5+16+23$ θέλομεν ἀφαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν 10. Λέγω ὅτι: $(5+16+23)\ \ 10=5+6+23$.

Ἀπόδειξις. Ἐὰν εἰς τὸ ἄθροισμα $5+6+23$ προστεθῇ ὁ ἀφαιρετέος 10, προκύπτει (§ 23) ὁ μειωτέος, ἤτοι $(5+6+23)+10=5+16+23$. Ὁ ἀριθμός, ὅθεν, $(5+6+23)$ εἶναι

(§ 16 Β′) τὸ ἀληθὲς ὑπόλοιπον τῆς ἀπὸ τοῦ $(5+16+23)$ ἀφαιρέσεως τοῦ 10. ὅ. ἔ. δ

ΣΗΜ. Εὐνόητον ὅτι πρέπει εἷς τοὐλάχιστον τῶν προσθετέων τοῦ ἀθροίσματος νὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ ἀφαιρετέου, ἵνα εἶναι δυνατὴ ἡ ἀφαίρεσις κατὰ τὸν ἐκτεθέντα τρόπον.

Γενικῶς: $(\alpha+\beta+\gamma)-\delta=\alpha+(\beta-\delta)+\gamma$, ἂν $\beta>\delta$.

§ **27. Πόρισμα Ι.**—Ἵνα ἀπὸ ἀθροίσματος ἀφαιρέσωμεν ἕνα τῶν προσθετέων αὐτοῦ, ἀρκεῖ νὰ ἐξαλείψωμεν αὐτόν.

Λέγω π.χ. ὅτι $(15+3+7)-3=15+7$.

Ἀπόδειξις. Κατὰ τὴν προηγουμένην ἰδιότητα εἶναι $(15+3+7)-3=15+(3-3)+7$. Ἐπειδὴ δὲ $3-3=0$ ἕπεται ὅτι :

$$15+3+7)-3=15+7.$$ ὅ. ἔ. δ.

Γενικῶς: $$(\alpha+\beta+\gamma)-\beta=\alpha+\gamma.$$

§ **28. Θεώρημα ΙΙ.**—Ἵνα ἀφαιρέσωμεν ἄθροισμα ἀπὸ ἀριθμοῦ ἀρκεῖ νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸν ἕνα μετὰ τὸν ἄλλον πάντας τοὺς προσθετέους τοῦ ἀθροίσματος.

Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὴν διαφορὰν $65-(21+17)$. Λέγω ὅτι αὕτη εὑρίσκεται, ἂν ἀπὸ τοῦ 65 ἀφαιρεθῇ ὁ 21 καὶ ἀπὸ τῆς διαφορᾶς, ἡ ὁποία θὰ προκύψῃ, ἀφαιρεθῇ ὁ 17 ἤτοι:

$$65-(21+17)=(65-21)-17.$$

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ $21+17=38$, ἡ ζητουμένη διαφορὰ εἶναι $65-38=27$, ὅθεν $65=38+27$. Ἐπειδὴ δὲ $38=21+17$, ἕπεται (§ 22) ὅτι $65=21+17+27$. Ἐὰν τώρα ἀπ' ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς ἰσότητος ταύτης ἀφαιρεθῇ ὁ 21, προκύπτει ἡ ἰσότης $65-21=17+27$, ἐκ ταύτης δὲ ὁμοίως προκύπτει ὅτι: $(65-21)-17=27$. Ἐκ ταύτης δὲ καὶ τῆς $65-38=27$ ἢ $65-(21+17)=27$ ἕπεται (§ 17 ε′) ὅτι: $65-(21+17)=(65-21)-17$. ὅ. ἔ. δ.

Γενικῶς $\alpha-(\beta+\gamma+\delta)=[(\alpha-\beta)-\gamma]-\delta$.

ΣΗΜ. Τὸ ὑπόλοιπον $(\alpha-\beta)-\gamma$ ἐτέθη ἐντὸς ἀγκυλῶν, ἵνα δηλωθῇ ὅτι θεωρεῖται τοῦτο εὑρεθέν. Προτιμῶνται δὲ αἱ ἀγκύλαι τῆς παρενθέσεως, διότι ἔγινεν ἤδη χρῆσις αὐτῆς εἰς τὴν αὐτὴν παράστασιν.

§ **29. Θεώρημα ΙΙΙ.**—Ἵνα προσθέσωμεν διαφοράς, ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν χωριστὰ τοὺς μειωτέους καὶ χωριστὰ τοὺς ἀφαιρετέους, ἀπὸ δὲ τοῦ α′ ἀθροίσματος ἀφαιρέσωμεν τὸ δεύτερον.

Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα $(68-51)+(40\ \ 25)$.

Λέγω ὅτι : $(68-51)+(40-27)=(68+40)-(51+27)$.

᾿Απόδειξις. ᾿Επειδὴ $68-51=17$ καὶ $40-27=13$ (1)

ἕπεται ὅτι $(68-51)+(40-27)=17+13$ (2)

᾿Αλλ᾿ ἐκ τῶν ἰσοτήτων (1) ἕπεται ὅτι :

$$68=51+17 \text{ καί } 40=27+13$$

᾿Εὰν δὲ προσθέσωμεν ταύτας κατὰ μέλη εὑρίσκομεν ὅτι :

$68+40=(51+27)+(17+13)$, ὅθεν ἕπεται εὐκόλως ὅτι :

$$(68+40)-(51+27)=17+13.$$

᾿Εκ ταύτης δὲ καὶ τῆς (2) ἕπεται ὅτι :

$(68-51)+(40-27)=(68+40)-(51+27)$. ὅ. ἔ. δ.

Γενικῶς: $(\alpha-\beta)+(\gamma-\delta)+(\varepsilon-\zeta)=(\alpha+\gamma+\varepsilon)-(\beta+\delta+\zeta)$.

§ **30. Θεώρημα IV.** Ἡ διαφορὰ δύο ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται, ἂν εἰς τὸν μειωτέον καὶ ἀφαιρετέον προστεθῇ ὁ αὐτὸς ἀριθμός.

Ἔστω ἡ διαφορὰ $45-20$· ἐὰν εἰς τὸν μειωτέον καὶ ἀφαιρετέον προστεθῇ ἀριθμός τις π. χ. ὁ 7, προκύπτει ἡ διαφορὰ $(45+7)-(20+7)$. Λέγω ὅτι : $45-20=(45+7)-(20+7)$.

᾿Απόδειξις. ᾿Επειδὴ $7-7=0$, ἕπεται ὅτι

$$45-20=(45-20)+(7-7).$$

᾿Αλλὰ κατὰ τὴν προηγουμένην ἰδιότητα εἶναι :

$$(45-20)+(7-7)=(45+7)-(20+7).$$

᾿Εκ τῶν δύο τούτων ἰσοτήτων ἕπεται ὅτι :

$45-20=(45+7)-(20+7)$. ὅ. ἔ. δ

Γενικῶς: $\alpha-\beta=(\alpha+\gamma)-(\beta+\gamma)$.

§ **31. Θεώρημα V.**— Ἵνα ἀφαιρέσωμεν διαφορὰν ἀπὸ ἀριθμοῦ, ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸν ἀριθμὸν τὸν ἀφαιρετέον τῆς διαφορᾶς καὶ ἀπὸ τοῦ ἀθροίσματος ἀφαιρέσωμεν τὸν μειωτέον τῆς διαφορᾶς.

Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὴν διαφορὰν $40-(28-12)$· λέγω ὅτι : $40-(28-12)=(40+12)-28$.

᾿Απόδειξις. Προσθέτοντες εἰς τὸν μειωτέον 40 καὶ τὸν ἀφαιρετέον $(28-12)$ τῆς διαφορᾶς ταύτης τὸν ἀριθμὸν 12, δὲν μεταβάλλομεν τὴν διαφορὰν ταύτην, ὡς προηγουμένως ἀπεδείχθη, ἤτοι εἶναι : $40-(28-12)=(40+12)-[(28-12)+12]$. ᾿Επειδὴ δὲ κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς ἀφαιρέσεως εἶναι $(28-12)+12=28$, ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται : $40-(28-12)=(40+12)-28$. ὅ. ἔ. δ.

Γενικῶς : $α-(β-γ)=(α+γ)-β$.

§ **32. Ἐξήγησις τοῦ κανόνος, κατὰ τὸν ὁποῖον ἐκτελεῖται ἡ ἀφαίρεσις.**— Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὴν διαφορὰν 867—453.

Ἐπειδὴ $867=800+60+7$ ·
καὶ $453=400+50+3$, ἕπεται ὅτι
$867-453=(800+60+7)-(400+50+3)$.

Ἐπειδὴ δὲ (§ 29) εἶναι καὶ
$(800-400)+(60-50)+(7-3)=(800+60+7)-(400+50+3)$,
ἕπεται (§ 17 ε΄) ὅτι :
$867-453=(800-400)+(60-50)+(7-3)$ ἢ
$867-453=$(8 ἑκ.—4 ἑκ)+(6 δεκ.—5 δεκ)+(7μ.—3μ).
=4 ἑκ.+1 δεκ.+4 μον.=414.

Οὕτως ἐξηγεῖται διατὶ ἀφαιροῦμεν τὰς μονάδας τῶν διαφόρων τάξεων τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τὰς ἀντιστοίχους μονάδας τοῦ μειωτέου.

Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν ἀκόμη τὴν διαφορὰν
$467-283=(400+60+7)-(200+80+3)$. Ἐπειδὴ ἡ ἀφαίρεσις τοῦ 80 ἀπὸ τοῦ 60 δὲν εἶναι δυνατή, πρὶν ἐπιχειρήσωμεν νὰ μετασχηματίσωμεν, ὡς ἀνωτέρω, τὴν διαφορὰν$(400+60+7)-(200+80+3)$, προσθέτομεν εἰς τὸν μειωτέον καὶ ἀφαιρετέον αὐτῆς τὸν ἀριθμὸν 100, οὕτως εὑρίσκομεν (§ 30, 23) ὅτι :
$467-283=(400+160+7)-(300+80+3)$ ἢ (§ 29)
$467-283=(400-300)+(160-80)+(7-3)$ ἢ
$467-283=$(4 ἑκ.—3 ἑκ.)+(16 δεκ—8 δεκ)+(7 μον.—3 μον.)=184

Οὕτως ἐξηγεῖται διατί, ὅταν ψηφίον τι τοῦ ἀφαιρετέου εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἀντιστοίχου ψηφίου τοῦ μειωτέου, αὐξάνομεν τὸ τελευταῖον τοῦτο ψηφίον κατὰ 10 καὶ τὸ πρὸς τὰ ἀριστερὰ ἀκόλουθον ψηφίον τοῦ ἀφαιρετέου κατὰ 1 (τὸ κρατούμενον).

Ἀσκήσεις.

17) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $506-56=500-50$.
18) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $543-71=552-80$.
19) Νὰ ἀποδειχθῇ ἄνευ ἀμέσου ἐκτελέσεως τῆς ἀφαιρέσεως ὅτι
$675-99=576$ (§ 31 ἢ 30).

20) Πῶς ἀφαιρεῖται ἀριθμὸς ἀπὸ διαφορὰν χωρὶς νὰ εὑρεθῇ αὕτη; (§ 28).

21) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : $\alpha+(\beta-\gamma)=(\alpha+\beta)-\gamma$.

22) Νὰ ἐξηγηθῇ διατὶ πρὸς εὕρεσιν τοῦ 17+9 ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν τὸν 10 εἰς τὸν 17 καὶ ἀπὸ τοῦ ἀθροίσματος νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸν 1.

23) Νὰ εὑρεθῶσι κατ' ἀνάλογον τρόπον ἀπὸ μνήμης τὰ ἀκόλουθα ἀθροίσματα.

α') 46+9, 83+9, 168+9.

β') 32+99, 568+99, 1672+99.

γ') 142+999, 781+999, 2463+999.

24) Νὰ ἐξηγηθῇ διατὶ πρὸς εὕρεσιν τοῦ 59+27 ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν τὸν 27 εἰς τὸν 60 καὶ ἀπὸ τοῦ ἀθροίσματος ἀφαιρέσωμεν 1. Νὰ εὑρεθῶσι κατ' ἀνάλογον τρόπον ἀπὸ μνήμης τὰ ἀθροίσματα 79+41, 19+38, 129+65.

25) Νὰ εὑρεθῶσι συντόμως καὶ ἀπὸ μνήμης τὰ ἀθροίσματα 17+98, 123+998, 73+999 καὶ νὰ αἰτιολογηθῇ ὁ τρόπος τῆς τοιαύτης αὐτῶν εὑρέσεως.

26) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ διαφορὰ δύο ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται, ἂν ἀπὸ ἀμφοτέρους ἀφαιρεθῇ ὁ αὐτὸς ἀριθμός.

Γ'. *Ἰδιότητες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.*

§ **33. Θεώρημα Ι.**—Τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται, ἂν μεταβληθῇ ἡ τάξις τῶν παραγόντων αὐτοῦ.

Ἔστω τὸ γινόμενον 3×4· λέγω ὅτι $3\times4=4\times3$.

Ἀπόδειξις. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολ]σμοῦ (§ 16 Γ') τὸ γινόμενον 3×4 σύγκειται ἐκ τῶν μονάδων τοῦ 3 τετράκις ληφθεισῶν, ἤτοι ἐκ τῶν ἀκολούθων μονάδων.

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}$$

Ἀθροίζοντες ταύτας πρῶτον μὲν κατὰ ὁριζοντίας γραμμάς, ἔπειτα δὲ κατὰ στήλας εὑρίσκομεν ὅτι :

$$\begin{array}{l} 1+1+1=3 \\ 1+1+1=3 \\ 1+1+1=3 \\ 1+1+1=3 \\ \hline 4+4+4=3+3+3+3, \text{ ὅθεν} \end{array}$$

$4\times3=3\times4$. ὅ. ἔ. δ.

Γενικῶς : $\alpha\times\beta=\beta\times\alpha$

Ἡ ἰδιότης αὕτη καλεῖται νόμος τῆς ἀντιμεταθέσεως καὶ θεμελιώδης ἰδιότης τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, διότι ἐπ' αὐτῆς στηρίζεται ἡ ἀπόδειξις τῶν ἄλλων τοῦ πολ]σμοῦ ἰδιοτήτων.

§ **34. Θεώρημα II.**—Ἵνα πολλαπλασιάσωμεν ἄθροισμα ἐπὶ ἀριθμόν ἀρκεῖ νὰ πολ]σωμεν πάντας τοὺς προσθετέους ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τοῦτον καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ προκύπτοντα γινόμενα. Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον $(5+8+2)\times3$. Λέγω ὅτι $(5+8+2)\times3=(5\times3)+(8\times3)+(2\times3)$.

Ἀπόδειξις. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ εἶναι :

$$(5+8+2)\times3=(5+8+2)+(5+8+2)+(5+8+2).$$

Ἐπειδὴ δὲ (§ 24)

$$(5+8+2)+(5+8+2)+(5+8+2)=5+8+2+5+8+2+5+8+2,$$

ἕπεται ὅτι :

$$(5+8+2)\times3=5+8+2+5+8+2+5+8+2, \text{ ὅθεν (§ 21)}$$

$$(5+8+2)\times3=(5+5+5)+(8+8+8)+(2+2+2)$$

Ἐκ ταύτης δὲ ἔχοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι

$$5+5+5=5\times3,\ 8+8+8=8\times3,\ 2+2+2=2\times3$$

συνάγομεν ὅτι :

$$(5+8+2)\times3=(5\times3)+(8\times3)+(2\times3). \text{ ὅ. ἔ. δ.}$$

Γενικῶς : $(\alpha+\beta+\gamma)\times\delta=(\alpha\times\delta)+(\beta\times\delta)+(\gamma\times\delta)$.

§ **35. Θεώρημα III.**—Ἵνα πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμὸν ἐπὶ ἄθροισμα, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν αὐτὸν ἐπὶ πάντας τοὺς προσθετέους τοῦ ἀθροίσματος καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ προκύπτοντα γινόμενα.

Ἔστω τὸ γινόμενον $4\times(7+3)$· λέγω ὅτι

$$4\times(7+3)=(4\times7)+(4\times3).$$

Ἀπόδειξις. Κατὰ τὴν θεμελιώδη ἰδιότητα $4\times(7+3)=(7+3)\times4$. Ἐπειδὴ δὲ (§ 34) $(7+3)\times4=(7\times4)+(3\times4)$, ἕπεται ὅτι $4\times(7+3)=(7\times4)+(3\times4)$, ὅθεν (§ 33) προκύπτει ὅτι :

$$4\times(7+3)=(4\times7)+(4\times3).\ \text{ὅ. ἔ. δ.}$$

Γενικῶς : $\alpha\times(\beta+\gamma+\delta)=(\alpha\times\beta)+(\alpha\times\gamma)+(\alpha\times\delta)$.

Ἑκατέρα τῶν προηγουμένων (§ 34, 35) ἰδιοτήτων καλεῖται ἐπιμεριστικὴ ἰδιότης.

§ **36. Θεώρημα IV.**— Ἵνα πολλαπλασιάσωμεν ἄθροισμα ἐπὶ ἄθροισμα, ἀρκεῖ νὰ πολ]σωμεν πάντας τοὺς προσθετέους τοῦ α΄ ἀθροίσματος ἐπὶ πάντας τοὺς προσθετέους τοῦ β΄ καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ προκύπτοντα γινόμενα.

Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον $(5+3+7)\times(8+15)$. Λέγω ὅτι :

$$(5+3+7)\times(8+15)=(5\times8)+(3\times8)+(7\times8)+(5\times15)+(3\times15)+(7\times15).$$

Ἀπόδειξις. Θεωροῦντες τὸ ἄθροισμα $(5+3+7)$ ὡς εὑρεθὲν καὶ ἐφαρμόζοντες τὴν προηγουμένην ἰδιότητα εὑρίσκομεν ὅτι : $(5+3+7)\times(8+15)=(5+3+7)\times8+(5+3+7)\times15$. Ἐπειδὴ δὲ (§ 34) εἶναι $(5+3+7)\times8=(5\times8)+(3\times8)+(7\times8)$ καὶ $(5+3+7)\times15=(5\times15)+(3\times15)+(7\times15)$, ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται $(5+3+7)\times(8+15)=(5\times8)+(3\times8)+(7\times8)+(5\times15)+(3\times15)+(7\times15)$. ὅ. ἔ. δ.

Γενικῶς : $(\alpha+\beta+\gamma)\times(\varepsilon+\zeta)=(\alpha\times\varepsilon)+(\beta\times\varepsilon)+(\gamma\times\varepsilon)+(\alpha\times\zeta)+(\beta\times\zeta)+(\gamma\times\zeta)$

ΣΗΜ. Ἐὰν ὁ εἷς τῶν παραγόντων ἔχῃ μ, ὁ δὲ ἄλλος ν προσθετέους, τὸ γινόμενον αὐτῶν ἀποτελεῖται ἀπὸ (μ.ν) μερικὰ γινόμενα.

§ **37. Θεώρημα V.**— Ἵνα πολ]σωμεν διαφορὰν ἐπὶ ἀριθμόν, ἀρκεῖ νὰ πολ]σωμεν τὸν μειωτέον καὶ τὸν ἀφαιρετέον ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τοῦτον καὶ ἀπὸ τοῦ πρώτου γινομένου νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ δεύτερον.

Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον $(25-17)\times3$.

Λέγω ὅτι $(25-17)\times3=(25\times3)-(17\times3)$.

Ἀπόδειξις. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολ]σμοῦ εἶναι :

$(25-17)\times3=(25-17)+(25-17)+(25-17)$. Ἐπειδὴ δὲ $(25-17)+(25-17)+(25-17)=(25+25+25)-(17+17+17)$,

(§ 29) ἕπεται ὅτι : $(25-17)\times 3=(25+25+25)-(17+17+17)$ ἢ
$(25-17)\times 3=(25\times 3)-(17\times 3)$. ὅ. ἔ. δ.
Γενικῶς : $(\alpha-\beta)\times\gamma=(\alpha\times\gamma)-(\beta\times\gamma)$.

Ἀσκήσεις

27) Τί πάσχει τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν, ἐὰν εἰς ἕνα τούτων προστεθῇ μία μονάς ;

28) Πῶς πολ]ζεται ἀριθμὸς ἐπὶ διαφορὰν χωρὶς προηγουμένως νὰ εὑρεθῇ αὕτη ;

29) Τί πάσχει τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν, ἐὰν ἀπὸ τὸν ἕνα ἀφαιρεθῇ μία μονάς ;

30) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι, ἂν εἰς ἀμφοτέρους τοὺς παράγοντας τοῦ γινομένου $\alpha\times\beta$ προστεθῇ ὁ μ, τὸ γινόμενον αὐξάνει κατὰ $\mu\times(\alpha+\beta+\mu)$.

Συντομίαι κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν τοῦ πολ]σμοῦ.

§ **38. Α΄. Γινόμενον ἀριθμοῦ ἐπὶ 10, 100, 1000 κλπ.**—Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμε τὸ γινόμενον 10×23. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολ]σμοῦ τὸ γινόμενον τοῦτο εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα $10+10+10+\ldots\ldots+10$, τὸ ὁποῖον ἔχει 23 προσθετέους. Ἐπειδὴ δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν μὲν μονάδων τῶν προσθετέων τοῦ ἀθροίσματος τούτου εἶναι 0, τῶν δὲ δεκάδων εἶναι $1+1+\ldots+1=23$ ἕπεται ὅτι τὸ ρηθὲν ἄθροισμα εἶναι 230, ἄρα καὶ $10\times 23=230$. Ὁμοίως πειθόμεθα ὅτι 100×127 ἢ 127×100 εἶναι 12700 κ.λ.π. Ἄρα : Ἵνα εὕρωμεν τὸ γινόμενον οἱουδήποτε ἀκεραίου ἀριθμοῦ ἐπὶ 10, 100, 1000 κλπ. ἀρκεῖ νὰ γράψωμεν δεξιὰ τοῦ ἀριθμοῦ τούτου ἕν, δύο, τρία κλπ. μηδενικά.

§ **39. Β΄. Γινόμενον, οὗ ὁ εἷς παράγων λήγει εἰς μηδενικά.** Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον 234×800 $=800\times 234$. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολ]σμοῦ τὸ γινόμενον τοῦτο ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα $800+800+\ldots\ldots+800$, τὸ ὁποῖον ἔχει 234 προσθετέους. Ἀλλ' εἶναι εὐνόητον ὅτι τὸ ἄθροισμα τοῦτο ἔχει 0 μονάδας καὶ 0 δεκάδας αἱ δὲ ἑκατοντάδες αὐτοῦ ἰσοῦνται πρὸς $8+8+8+\ldots\ldots+8=8\times 234=1872$. Τὸ ζητούμενον λοιπὸν γινόμενον εἶναι 187200. Ὁμοίως σκεπτόμενοι κατανοοῦμεν ὅτι πρὸς εὑρεσιν τοῦ γινομένου 54×30 ἀρκεῖ νὰ γράψωμεν ἓν 0 δεξιὰ τοῦ γινομένου $54\times3=162$, ἤτοι $54\times30=1620$.

Ἄρα : Ἐὰν ὁ εἷς τῶν παραγόντων γινομένου λήγῃ εἰς μηδενικά, πρὸς εὕρεσιν τοῦ γινομένου ἀρκεῖ νὰ πολ]σωμεν τὸν ἀριθμόν, τὸν ὁποῖον ἀποτελοῦσι τὰ ἄλλα ψηφία αὐτοῦ ἐπὶ τὸν ἄλλον παράγοντα καὶ δεξιὰ τοῦ γινομένου νὰ γράψωμεν τὰ παραλειφθέντα μηδενικά.

§ **40. Γ΄. Γινόμενον, τοῦ ὁποίου ἀμφότεροι οἱ παράγοντες λήγουσιν εἰς μηδενικά.**— Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον 13700×24000. Κατὰ τὰ προηγουμένως λεχθέντα, πρὸς εὕρεσιν τοῦ γινομένου τούτου ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον 13700×24 καὶ δεξιὰ αὐτοῦ νὰ γράψωμεν τρία μηδενικά. Ἀλλὰ πρὸς εὕρεσιν τοῦ γινομένου 13700×24 ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον 137×24 καὶ δεξιὰ αὐτοῦ νὰ γράψωμεν δύο μηδενικά. Ὥστε πρὸς εὕρεσιν τοῦ γινομένου 13700×24000 ἀρκεῖ δεξιὰ τοῦ γινομένου $137\times24=3288$ νὰ γράψωμεν 5 μηδενικά, ἤτοι :

$$13700\times24000=328800000.$$

Ἄρα : Ἐὰν ἀμφότεροι οἱ παράγοντες γινομένου λήγωσιν εἰς μηδενικά, ἀρκεῖ πρὸς εὕρεσιν αὐτοῦ νὰ πολ]σωμεν τοὺς ἀριθμούς, τοὺς ὁποίους ἀποτελοῦσι τὰ ἄλλα αὐτῶν ψηφία καὶ δεξιὰ τοῦ γινομένου νὰ γράψωμεν τὰ παραλειφθέντα μηδενικά.

§ **Δ΄. Γινόμενον ἀριθμοῦ ἐπὶ 9, 99, 999 κλπ.**— Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον 9×47. Ἐπειδὴ $9=10-1$ ἕπεται ὅτι $9\times47=(10-1)\times47$.

Ἐπειδὴ δὲ $(10-1)\times47=470-47$, ἕπεται ὅτι $9\times47=470-47=423$. Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι :

$$99\times123=12300-123=12177$$

$$247\times999=247000-247=246753.$$

Ἄρα : Ἐὰν πάντα τὰ ψηφία παράγοντός τινος εἶναι 9, πρὸς εὕρεσιν τοῦ γινομένου, ἀρκεῖ νὰ γράψωμεν δεξιὰ τοῦ ἄλλου παράγοντος μηδενικὰ ἰσάριθμα πρὸς τὰ 9 καὶ ἀπὸ τοῦ προκύπτοντος ἀριθμοῦ νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸν αὐτὸν παράγοντα.

Ἀσκήσεις

31) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $4008-48=40\times99$.

32) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $7045-745=700\times9$.

33) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $900-9=990-99$.

34) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $56\times11=560+56$.

35) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $473\times1001=473000+473$.

§ **42. Ἐξήγησις τοῦ κανόνος, κατὰ τὸν ὁποῖον ἐκτελεῖται ὁ πολ)σμός.**—Α΄. Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον 3452×4. Ἐπειδὴ $3452=3000+400+50+2$ ἕπεται, ὅτι:

$$3452\times4=(3000+400+50+2)\times4$$
$$=(3000\times4)+(400\times4)+(50\times4)+(2\times4).$$

Ἐπειδὴ δὲ $3000\times4=3$ χιλ.$\times4=12$ χιλ.

$400\times4=4$ ἑκ.$\times4=16$ ἑκ.

$50\times4=5$ δεκ.$\times4=20$ δεκ.

καὶ 2×4 , $=8$ μον.

ἕπεται ὅτι : $3452\times4=12$ χιλ.$+16$ ἑκ.$+20$ δεκ.$+8$ μον.

Ἐπειδὴ δὲ 20 δεκ. $=$ 2 ἑκ. ἕπεται ὅτι

$3452\times4=12$ χιλ.$+18$ ἑκ.$+0$ δεκ.$+8$ μον.

ὅθεν, λαμβανομένου ὑπ᾽ ὄψιν ὅτι 18 ἑκ.$=1$ χιλ.$+8$ ἑκ. προκύπτει ὅτι

$3452\times4=13$ χιλ.$+8$ ἑκ.$+0$ δεκ.$+8$ μον.$=13808$.

Οὕτως ἐξηγεῖται ὁ γνωστὸς κανών, καθ᾽ ὃν πρὸς εὕρεσιν τοῦ γινομένου πολυψηφίου ἐπὶ μονοψήφιον ἀριθμόν, πολ]ζομεν ἀπὸ τῶν ἁπλῶν μονάδων ἀρχόμενοι ἕκαστον ψηφίον τοῦ πολ/στέου ἐπὶ τὸν πολ/στὴν κλπ.

Β΄. Ἔστω δὲ ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον 5682×347. Ἐπειδὴ $347=300+40+7$, ἕπεται ὅτι

$$5682\times347=(5682\times300)+(5682\times40)+(5682\times7).$$

Διάταξις τῆς πράξεως

		5682
Ἐπειδὴ δὲ		347
$5682\times\ \ 7=$	39774	39774
$5682\times\ 40=$	227280	22728
καὶ $5682\times300=$	1704600 ἕπεται	17046
ὅτι $5682\times347=$	1971654 $=$	1971654

Οὕτως ἐξηγεῖται ὁ γνωστὸς κανών, κατὰ τὸν ὁποῖον πρὸς εὕρεσιν τοῦ γινομένου πολυψηφίου ἐπὶ πολυψήφιον ἀριθμόν, γράφομεν τὸν πολλαπλασιαστὴν ὑπὸ τὸν πολλαπλασιαστέον, καὶ πολλαπλασιάζομεν τὸν πολ]στέον ἐπὶ ἕκαστον ψηφίον τοῦ πολ]στοῦ ἀρχόμενοι ἀπὸ τοῦ ψηφίου τῶν ἁπλῶν μονάδων κλπ.

Γινόμενον πολλῶν παραγόντων.

§ **43. Πρόβλημα.**—Δωμάτιόν τι ἔχει τρία παράθυρα, ἕκαστον παράθυρον ἔχει 6 ὑαλοπίνακας καὶ ἕκαστος ὑαλοπίναξ τιμᾶται 4 δραχμάς. Πόση εἶναι ἡ τιμὴ ὅλων τῶν ὑαλοπινάκων τοῦ δωματίου τούτου;

Λύσις. Ἐπειδὴ ἕκαστον παράθυρον ἔχει 6 ὑαλοπίνακας, τὰ 3 παράθυρα θὰ ἔχωσιν $6\times3=18$ ὑαλοπίνακας. Ἐπειδὴ δὲ ἕκαστος ὑαλοπίναξ τιμᾶται 4 δραχ. οἱ 18 ὑαλοπίνακες θὰ τιμῶνται $4\times18=$ 72 δραχμάς. Ὥστε πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος τούτου ἐπολ]σαμεν τὸν 6 ἐπὶ τὸν 3 καὶ τὸ γινόμενον αὐτῶν 18 ἐπὶ 4. Τὸ οὕτως εὑρεθὲν ἐξαγόμενον 72 καλεῖται γινόμενον τῶν ἀριθμῶν 6, 3, 4 καὶ σημειοῦμενον οὕτω $6\times3\times4$.

Γενικῶς: Γινόμενον πολλῶν παραγόντων καλεῖται τὸ ἐξαγόμενον, τὸ ὁποῖον εὑρίσκομεν πολ]ζοντες τὸν α′ ἐπὶ τὸν β′, τὸ γινόμενον αὐτῶν ἐπὶ τὸν γ′, τὸ νέον γινόμενον ἐπὶ τὸν δ′ καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς, μέχρις οὗ ληφθῶσι πάντες οἱ παράγοντες αὐτοῦ.

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦτον ἡ ἀντικατάστασις τῶν δύο ἢ τριῶν κλπ. πρώτων παραγόντων διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν εἶναι μερικὴ ἐκτέλεσις τοῦ πολ]σμοῦ καὶ κατ' ἀκολουθίαν δὲν βλάπτει τὸ γινόμενον. Οὕτω $2\times5\times3\times4=10\times3\times4\times=30\times4$.

Δύο παράγοντες λέγονται ἐφεξῆς, ἐὰν οὐδεὶς ἄλλος ὑπάρχῃ μεταξὺ αὐτῶν.

Ἰδιότητες τῶν γινομένων πολλῶν παραγόντων.

§ **44. Θεώρημα I.**—Γινόμενον τριῶν παραγόντων εὑρίσκεται καὶ ἐὰν ὁ α′ παράγων πολ]σθῇ ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν ἄλλων.

Ἔστω τοιοῦτον γινόμενον τὸ $7\times4\times3$· λέγω ὅτι $7\times4\times3=7\times12$.

Ἀπόδειξις. Κατὰ τὸν δοθέντα (§ 43) ὁρισμὸν πρέπει πρὸς εὕρεσιν τοῦ γινομένου $7\times4\times3$ νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον 7×4 καὶ τοῦτο νὰ ἐπαναλάβωμεν 3 φοράς. Ἐπειδὴ δὲ $7\times4=7+7+7+7$, ἕπεται ὅτι:

$$7\times4\times3=\begin{array}{l}7+7+7+7+\\7+7+7+7+\\7+7+7+7.\end{array}$$

Καὶ ἐπειδὴ τὸ β′ μέλος τῆς ἰσότητος ταύτης ἔχει τρεῖς σειρὰς καὶ ἑκάστη σειρὰ ἔχει 4 προσθετέους, ἕπεται ὅτι ὅλον τὸ ἄθροισμα ἔχει $4\times3=12$ προσθετέους ἴσους τῷ 7, ἤτοι ὁ 7 ἐπαναλαμβάνεται δωδεκάκις· κατ' ἀκολουθίαν τὸ ἄθροισμα τοῦτο ἰσοῦται πρὸς 7×12, ἄρα καὶ $7\times4\times3=7\times12$, ὅ. ἔ. δ.

Γενικῶς $\alpha\times\beta\times\gamma=\alpha\times(\beta\times\gamma)$.

§ 45. Θεώρημα ΙΙ.—Γινόμενον πολλῶν παραγόντων δὲν μεταβάλλεται, ἂν ἀντιμετατεθῶσι δύο ἐφεξῆς παράγοντες.

Ἔστω τὸ γινόμενον $8\times12\times5\times3\times2$ καὶ τὸ ἐξ αὐτοῦ δι' ἀντιμεταθέσεως δύο ἐφεξῆς παραγόντων, π.χ. τῶν 5 καὶ 3 προερχόμενον γινόμενον $8\times12\times3\times5\times2$. Λέγω ὅτι:

$$8\times12\times5\times3\times2=8\times12\times3\times5\times2.$$

Ἀπόδειξις. Ἂν εἰς τὰ γινόμενα ταῦτα ἐκτελέσωμεν μέρος τοῦ πολ]σμοῦ σταματῶντες εἰς τὸν πρῶτον τῶν παραγόντων, οἱ ὁποῖοι ἀντιμετετέθησαν, εὑρίσκομεν ὅτι:

$$8\times12\times5\times3\times2=96\times5\times3\times2$$

καὶ $$8\times12\times3\times5\times2=96\times3\times5\times2 \quad (1)$$

Ἐπειδὴ δὲ κατὰ τὴν προηγουμένην ἰδιότητα εἶναι $96\times5\times3=96\times15$ καὶ $96\times3\times5=96\times15$, ἕπεται (§ 17 ε′) ὅτι $96\times5\times3=96\times3\times5$, κατ' ἀκολουθίαν δὲ θὰ εἶναι καὶ $96\times5\times3\times2=96\times3\times5\times2$, ἤτοι τὰ δεύτερα μέλη τῶν ἰσοτήτων (1) εἶναι ἴσα· θὰ εἶναι ἄρα καὶ $8\times12\times5\times3\times2=8\times12\times3\times5\times2$. ὅ.ἔ.δ.

Γενικῶς: $\alpha\times\beta\times\gamma\times\delta\times\varepsilon=\alpha\times\beta\times\delta\times\gamma\times\varepsilon$.

ΣΗΜ. Ἐπειδὴ $8\times12=12\times8$, ἕπεται εὐκόλως ὅτι:

$$8\times12\times5\times3\times2=12\times8\times5\times3\times2,$$

ἤτοι ἀληθεύει ἡ προηγουμένη ἰδιότης καὶ διὰ τοὺς δύο πρώτους παράγοντας.

§ 46. Θεώρημα ΙΙΙ.—Γινόμενον πολλλῶν παραγόντων δὲν μεταβάλλεται, [ὁπωσδήποτε καὶ ἂν μεταβληθῇ ἡ τάξις αὐτῶν.

Ἔστω τυχὸν γινόμενον $7\times12\times9\times3\times8\times6$· λέγω ὅτι τοῦτο δὲν μεταβάλλεται, ὁπωσδήποτε καὶ ἂν μεταβληθῇ ἡ τάξις αὐτῶν.

Ἀπόδειξις. Ἐὰν ἐν αὐτῷ ἀντιμεταθέσωμεν δύο τυχόντας ἐφεξῆς παράγοντας π.χ. τοὺς 9 καὶ 3, τὸ γινόμενον, κατὰ τὴν προηγουμένην ἰδιότητα, δὲν μεταβάλλεται, ἤτοι:

$$7\times12\times9\times3\times8\times6=7\times12\times3\times9\times8\times6.$$

Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον :

$$7\times12\times3\times9\times8\times6=7\times12\times3\times9\times6\times8$$
$$7\times12\times3\times9\times6\times8=7\times3\times12\times9\times6\times8 \text{ κλπ.}$$

Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι $7\times12\times9\times3\times8\times6$ $=7\times12\times3\times9\times8\times6=7\times3\times12\times9\times6\times8$ κλπ. ὅ. ἔ. δ.

Γενικῶς : $\alpha\times\beta\times\gamma\times\delta=\beta\times\delta\times\alpha\times\gamma$.

Κατὰ ταῦτα ὁ νόμος τῆς ἀντιμεταθέσεως (§ 33) ἰσχύει καὶ διὰ γινόμενον πολλῶν παραγόντων. Οὕτως ἕκαστον γινόμενον, ὅπως καὶ ἕκαστον ἄθροισμα (§ 20) ἀριθμῶν, εἶναι ἀνεξάρτητον τῆς τάξεως κατὰ τὴν ὁποίαν, λαμβάνονται οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι. Ἐκ τῆς ἰδιότητας ταύτης πηγάζουσιν αἱ ἀκόλουθοι ἰδιότητες ἀντιστοιχοῦσαι πρὸς τὰς ἄλλας (§ 21, 22, 23, 24) ἰδιότητας τῶν ἀθροισμάτων. Πρὸς μείζονα δὲ τῆς ἀντοστοιχίας ταύτης κατανόησιν ἐπαναλαμβάνομεν συντόμως τὴν α΄ τῶν εἰρημένων ἰδιοτήτων τῶν ἀθροισμάτων καὶ παραλλήλως τὴν ἀντίστοιχον τῶν γινομένων ἰδιότητα, ὡς ἀκολούθως φαίνεται.

Θεώρημα (§ 21).—Τὸ ἄθροισμα ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν δὲν μεταβάλεται, ἂν τινες αὐτῶν ἀντικατασταθῶσι διὰ τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν.	**§ 47. Θεώρημα IV.**—Τὸ γινόμενον ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται, ἂν τινες τούτων ἀντικατασταθῶσι διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν.
Λέγω δηλ. ὅτι $5+9+7+3=5+12+7$	Λέγω δηλ. ὅτι $5\times9\times7\times3=5\times27\times7$
Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ $5+9+7+3=9+3+5+7$	Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ $5\times9\times7\times3=9\times3\times5\times7$
καὶ $9+3+5+7=12+5+7$	καὶ $9\times3\times5\times7=27\times5\times7$
ἕπεται ὅτι $5+9+7+3=12+5+7$	ἕπεται ὅτι $5\times9\times7\times3=27\times5\times7$
ὅθεν $5+9+7+3=5+12+7$. ὅ. ἔ. δ.	ὅθεν $5\times9\times7\times3=5\times27\times7$. ὅ. ἔ. δ.

Κατ᾽ ἀνάλογον τρόπον ἀποδεικνύονται καὶ αἱ ἀκόλουθοι ἰδιότητες.

§ **48. Θεώρημα V.**—Τὸ γινόμενον ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται, ἂν τις τούτων ἀντικατασταθῇ δι᾽ ἄλλων, οἱ ὁποῖοι ἔχουσιν αὐτὸν ὡς γινόμενον.

§ **49. Θεώρημα VI.**—Ἵνα πολ]σωμεν γινόμενον ἐπὶ ἀριθμόν, ἀρκεῖ νὰ πολ]σωμεν ἕνα μόνον παράγοντα ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τοῦτον, τοὺς δὲ ἄλλους ἀφήσωμεν ὅπως ἔχουσιν.

§ 50. **Θεώρημα VII.** — Γινόμενον γινομένων ἰσοῦται πρὸς γινόμενον, τὸ ὁποῖον ἔχει πάντας τοὺς παράγοντας αὐτῶν καὶ μόνον αὐτούς.

Ἀσκήσεις.

36) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $5\times43\times2=430$.

37) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $3\times4\times9\times25=27\times100$.

38) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $7\times8\times125\times3=21000$.

39) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $3\times7\times33=700-7$.

40) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $9\times53\times111=53000-53$.

41) Τί πάσχει τὸ γινόμενον $\alpha\times\beta\times\gamma$, ἐὰν εἰς ἕνα τῶν παραγόντων αὐτοῦ προστεθῇ μία μονάς;

42) Τί πάσχει τὸ αὐτὸ γινόμενον, ἐὰν ἀπὸ ἕνα τῶν παραγόντων του ἀφαιρεθῇ μία μονάς;

Δ΄. Ἰδιότητες τῆς διαιρέσεως.

§ 51. **Θεώρημα I.** — Ἵνα διαιρέσωμεν ἄθροισμα δι᾿ἀριθμοῦ ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν πάντας τοὺς προσθετέους αὐτοῦ διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τούτου καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ προκύπτοντα πηλίκα.

Λέγω δηλ. ὅτι $(6+12+24):3=2+4+8$.

Ἀπόδειξις. Ἐὰν τὸ οὕτως εὑρεθὲν πηλίκον $2+4+8$ πολ]σθῇ ἐπὶ τὸν διαιρέτην 3, προκύπτει ὁ διαιρετέος, διότι

$$(2+4+8)\times3=(2\times3)+(4\times3)+8\times3)=6+12+24.$$

Ἄρα $2+4+8$ εἶναι τὸ ζητούμενον πηλίκον. ὅ. ἐ. δ.

Γενικῶς: $(\alpha+\beta+\gamma):\delta=(\alpha:\delta)+(\beta:\delta).+(\gamma:\delta)$.

ΣΗΜ. Εὐνόητον ὅτι πᾶσαι αὗται αἱ μερικαὶ διαιρέσεις ὑποτίθενται ἐνταῦθα τέλειαι.

§ 52. **Θεώρημα II.** — Ἵνα διαιρέσωμεν διαφορὰν δι᾿ ἀριθμοῦ ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὸν μειωτέον καὶ τὸν ἀφαιρετέον διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τούτου καὶ ἀπὸ τοῦ α΄ πηλίκου νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ δεύτερον.

Λέγω δηλ. ὅτι $48-20:4=12-5$.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ $(12-5)\times4=(12\times4)-(5\times4)=48-20$, ἕπεται ὄντως ὅτι $(12-5)$ εἶναι τὸ ζητούμενον πηλίκον. ὅ. ἐ. δ.

Γενικῶς : $(\alpha - \beta) : \delta = (\alpha : \delta) - (\beta : \delta)$.

ΣΗΜ. Ἰσχύει καὶ ἤδη ἡ ἀνωτέρω (§ 51) σημείωσις.

§ **53. Θεώρημα III.**—Ἵνα διαιρέσωμεν γινόμενον δι' ἀριθμοῦ, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν ἕνα μόνον παράγοντα αὐτοῦ διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τούτου, τοὺς δὲ ἄλλους ἀφήσωμεν ὅπως ἔχουσιν.

Λέγω δηλ. ὅτι $(7 \times 20 \times 9) : 4 = 7 \times 5 \times 9$.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ (§ 49) $(7 \times 5 \times 9) \times 4 = 7 \times (5 \times 4) \times 9 = 7 \times 20 \times 9$, ἕπεται ὅτι $7 \times 5 \times 9$ εἶναι τὸ ζητούμενον πηλίκον, ὅ. ἔ. δ.

Γενικῶς : $(\alpha \times \beta \times \gamma) : \delta = \alpha \times (\beta : \delta) \times \gamma$.

ΣΗΜ. Ὑποτίθεται ἐνταῦθα ὅτι ἡ διαίρεσις $\beta : \delta$ εἶναι τελεία.

§ **54. Πόρισμα I.**—Ἵνα διαιρέσωμεν γινόμενον δι' ἑνὸς τῶν παραγόντων αὐτοῦ, ἀρκεῖ νὰ ἐξαλείψωμεν αὐτόν.

Λέγω δηλ. ὅτι $(5 \times 8 \times 9) : 8 = 5 \times 9$.

Ἀπόδειξις. Κατὰ τὴν προηγουμένην ἰδιότητα εἶναι $5 \times 8 \times 9 : 8 = 5 \times (8 : 8) \times 9 = 5 \times 1 \times 9 = 5 \times 9$. ὅ. ἔ. δ.

Γενικῶς : $(\alpha \times \beta \times \gamma) : \beta = \alpha \times \gamma$.

§ **55. Θεώρημα IV.**—Ἵνα διαιρέσωμεν ἀριθμὸν διὰ γινομένου, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν ἀλλεπαλλήλως δια πάντων τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου τὸν ἀριθμὸν καὶ τὰ διαδοχικὰ πηλίκα.

Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸν 168 διὰ τοῦ γινομένου $4 \times 7 \times 2$· λέγω ὅτι $168 : (4 \times 7 \times 2 = [168 : 4) : 7] : 2$.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ $4 \times 7 \times 2 = 56$, ἕπεται ὅτι $168 : (4 \times 7 \times 2) = 168 : 56 = 3$, ὅθεν $168 = 56 \times 3$.

Ἐπειδὴ δὲ $56 = 4 \times 7 \times 2$, ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται (§ 48) $168 = 4 \times 7 \times 2 \times 3$. Διαιροῦντες ἤδη ἀμφότερα τὰ μέλη ταύτης διὰ 4 εὑρίσκομεν (§ 54) ὅτι $168 : 4 = 7 \times 2 \times 3$, ἐκ ταύτης ὁμοίως προκύπτει ὅτι $(168 : 4) : 7 = 2 \times 3$ καὶ ἐκ ταύτης τέλος προκύπτει ὅτι $[(168 : 4) : 7] : 2 = 3$.

Ἐκ ταύτης δὲ καὶ τῆς $168 : (4 \times 7 \times 2) = 3$ ἕπεται ὅτι : $168 : (4 \times 7 \times 2) = [(168 : 4) ; 7] : 2$. ὅ. ἔ. δ.

Γενικῶς : $A : (\alpha \times \beta \times \gamma) = [(A : \alpha) : \beta] : \gamma$.

ΣΗΜ. Πᾶσαι αἱ διαδοχικαὶ αὗται διαιρέσεις ὑποτίθενται ἐνταῦθα τέλειαι.

§ **56. Θεώρημα V.**—Ἐὰν διαιρετέος καὶ διαιρέτης πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, τὸ μὲν πηλίκον δὲν μεταβάλλεται, τὸ δὲ ὑπόλοιπον πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

Ἂς ληφθῇ π. χ. ὡς διαιρετέος ὁ 27 καὶ ὡς διαιρέτης ὁ 4· ἐκτελοῦντες τὴν διαίρεσιν ταύτην εὑρίσκομεν πηλίκον μὲν 6 ὑπόλοιπον δὲ 3.

Λέγω ἤδη ὅτι τῆς διαιρέσεως τοῦ 27×5 διὰ τοῦ 4×5 πηλίκον μὲν εἶναι πάλιν 6, ὑπόλοιπον δὲ 3×5.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ τῆς διαιρέσεως 27 διὰ 4 πηλίκον μὲν εἶναι 6, ὑπόλοιπον δὲ 3, ἕπεται (§ 16 Δ′) $27=(4\times6)+3$. Ἐὰν δὲ ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἰσότητος ταύτης πολ]σθῶσιν ἐπὶ 5, προκύπτει ἡ ἰσότης $27\times5=(4\times6)\times5+(3\times5)$ (§ 34), ὅθεν (§ 49) ἕπεται ὅτι

$27\times5=(4\times5)\times6+(3\times5)$, ὅθεν προκύπτει ἡ ἰσότης.

$$(27\times5)-(4\times5)\times6=(3\times5).$$

Ἐπειδὴ δὲ (§ 18 δ′) εἶναι $3\times5<4\times5$, ἕπεται ὅτι, ἂν 27×5 εἶναι διαιρετέος καὶ 4×5 διαιρέτης, τὸ πηλίκον θὰ εἶναι 6 καὶ τὸ ὑπόλοιπον 3×5 (§ 16 Δ′). ὅ. ἔ. δ.

Γενικῶς: Ἂν $\alpha-(\delta\times\pi)=\upsilon$ καὶ $\upsilon<\delta$, θὰ εἶναι

$$(\alpha\times\beta)-(\delta\times\beta)\times\pi=\upsilon\times\beta \text{ καὶ } \upsilon\times\beta<\delta\times\beta.$$

57. Πόρισμα I. – Ἐὰν ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης τελείας διαιρέσεως πολ]σθῶσιν ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, τὸ πηλίκον δὲν μεταβάλλεται καὶ ἡ διαίρεσις μένει τελεία.

Ἀσκήσεις.

43) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι, ἐὰν εἰς τὸν διαιρετέον τελείας διαιρέσεως προστεθῇ ὁ διαιρέτης, τὸ πηλίκον αὐξάνει κατὰ 1.

44) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι, ἐὰν ἀπὸ τὸν διαιρετέον τελείας διαιρέσεως ἀφαιρεθῇ ὁ διαιρέτης, τὸ πηλίκον ἐλαττοῦται κατὰ 1.

45) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι, ἐὰν ἀπὸ τὸν διαιρετέον ἀτελοῦς διαιρέσεως ἀφαιρεθῇ τὸ ὑπόλοιπον, ἡ διαίρεσις καθίσταται τελεία καὶ τὸ πηλίκον δὲν μεταβάλλεται.

46) Τί πάσχει τὸ πηλίκον τελείας διαιρέσεως, ἂν μόνον ὁ διαιρετέος πολ]σθῇ ἐπί τινα ἀριθμόν;

47) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $(5\times9\times8\times11\times6):(4\times10)=600-6$

48) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $(2\times\ (7+5)\times24]:12=12\times4$.

Συντομίαι κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς διαιρέσεως.

§ **38. Α'. Διαίρεσις ἀριθμοῦ διὰ 10, 100, 1000 κτλ.**—Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸν 567 διὰ τοῦ 10. Ἐπειδὴ $567=560+7$ καὶ $560=56\times10$ (§ 38) ἔπεται ὅτι

$$567=(56\times10)+7, \text{ ὅθεν } 567-(56\times10)=7.$$

Ἐπειδὴ δὲ εἶναι καὶ $7<10$, ἐκ τῆς προηγουμένης ἰσότητος συνάγεται κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς διαιρέσεως (§ 16 Δ') ὅτι τῆς διαιρέσεως 567 διὰ 10 τὸ μὲν πηλίκον εἶναι 56, τὸ δὲ ὑπόλοιπον 7. Ὁμοίως σκεπτόμενοι εὑρίσκομεν ὅτι τῆς διαιρέσεως 1483 διὰ 100 πηλίκον μὲν εἶναι 14, ὑπόλοιπον δὲ 83.

Ἄρα: Ἵνα διαιρέσωμεν ἀριθμὸν διὰ 10, 100, 1000 κτλ. ἀρκεῖ νὰ ἀποκόψωμεν ἕν, δύο, τρία κτλ. ψηφία ἐκ δεξιῶν αὐτοῦ. Καὶ τὰ μὲν ἀπομένοντα πρὸς τὰ ἀριστερὰ ψηφία ἀποτελοῦσιν, ὡς εἶναι γεγραμμένα, τὸ πηλίκον, τὰ δὲ ἀποκοπέντα τὸ ὑπόλοιπον.

§ **39. Β'. Διαίρεσις δι' ἀριθμοῦ λήγοντος εἰς μηδενικά.**—Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν 35982 διὰ τοῦ 6500. Διαιροῦντες τὸν 359 διὰ τοῦ 65 εὑρίσκομεν πηλίκον 5 καὶ ὑπόλοιπον 34, ἤτοι $359-(65\times5)=34$ καὶ $34<65$.

Ἐὰν ἤδη πολ]σωμεν ἐπὶ 100 ἀμφότερα τὰ μέλη τῶν σχέσεων τούτων, εὑρίσκομεν ὅτι

$$35900-(6500\times5)=3400 \text{ καὶ } 3400<6500,$$

ἐκ τῶν ὁποίων εὐκόλως εὑρίσκομεν ὅτι,

$$35982-(6500\times5)=3482 \text{ καὶ } 3482<6500.$$

Ἐκ τῶν σχέσεων τούτων, ἔπεται, κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς διαιρέσεως, ὅτι τῆς διαιρέσεως τοῦ 35982 διὰ 6500 τὸ μὲν πηλίκιον εἶναι 5, τὸ δὲ ὑπόλοιπον 3482.

Ἄρα: Ἵνα διαιρέσωμεν ἀριθμὸν δι' ἄλλου λήγοντος εἰς ἓν ἢ περισσότερα μηδενικά, ἀρκεῖ νὰ παραλείψωμεν ταῦτα καὶ ἰσάριθμα ψηφία ἀπὸ τοῦ τέλους τοῦ διαιρετέου, νὰ διαιρέσωμεν δὲ τὸν ἀριθμόν, τὸν ὁποῖον ἀποτελοῦσι τὰ μένοντα ψηφία τοῦ διαιρέτου δι' ἐκείνου, τὸν ὁποῖον ἀποτελοῦσι τὰ ἄλλα ψηφία τοῦ διαιρετέου Τὸ οὕτω προκύπτον πηλίκον εἶναι τὸ ζητούμενον· ἵνα δὲ εὕρωμεν τὸ ὑπόλοιπον, πρέπει δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου τῆς ἐκτελεσθείσης διαιρέσεως νὰ γράψωμεν καὶ τὰ παραληφθέντα ψηφία τοῦ διαιρετέου, ὅπως ἔχουσιν εἰς αὐτόν.

§ 60 Γ'. Διαίρεσις δι' ἀριθμοῦ, τοῦ ὁποίου πάντα τὰ ψηφία εἶναι 9.- Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ μοιράσωμεν 167945 δραχμὰς εἰς 99 ἀνθρώπους. Νοήσωμεν ὅτι μοιράζομεν τὸ ποσὸν τοῦτο εἰς 100 ἀνθρώπους, ὅτε ἕκαστος θὰ λάβῃ ἀνὰ 1679 δραχμὰς καὶ θὰ περισσεύσωσι καὶ 45 δραχ. (§ 58). Ἐὰν λοιπὸν δόσωμεν εἰς ἕκαστον τῶν 99 ἀνθρώπων ἀνὰ 1679 δραχ. θὰ μείνῃ πλὴν τῶν 45 δραχ. καὶ τὸ μερίδιον τοῦ ἑκατοστοῦ, ἤτοι 1679+45=1724 δραχμαί. Ἐὰν ταύτας μοιράσωμεν κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον εἰς τοὺς 99 ἀνθρώπους, εὑρίσκομεν ὅτι θὰ λάβῃ ἕκαστος ἀνὰ 17 δραχ. καὶ θὰ περισσεύσωσι 17+24=41 δραχ. Ὥστε ἕκαστος λαμβάνει τὸ ὅλον 1679+17=1696 δραχμαι καὶ ὑπολείπονται 41 δραχμαί. Ἄρα :

Ἵνα διαιρέσωμεν ἀριθμὸν δι' ἄλλου, τοῦ ὁποίου πάντα τὰ ψηφία εἶναι 9, ἀποκόπτομεν ἀπὸ τοῦ τέλους τοῦ διαιρετέου ψηφία ἰσάριθμα πρὸς τὰ τοῦ διαιρέτου· καὶ ὁ μὲν ὑπὸ τῶν ἄλλων ψηφίων αὐτοῦ ἀποτελούμενος ἀριθμὸς ἀποτελεῖ τὸ πρῶτον μερικὸν πηλίκον, τὸ δὲ ἄθροισμα αὐτοῦ καὶ τοῦ ὑπὸ τῶν ἀποκοπέντων ψηφίων ἀποτελουμένου ἀριθμοῦ διαιροῦμεν ἐκ νέου κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, μέχρις οὗ εὕρωμεν μικρότερον τοῦ διαιρέτου ἄθροισμα, ὅπερ εἶναι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως. Ἀθροίζοντες ἔπειτα τὰ διάφορα μερικὰ πηλίκα εὑρίσκομεν τὸ ζητούμενον πηλίκον.

Διάταξις διὰ πράξεως

```
 1679(45      |99
   45         |------
 -------      |1679
  17(24          17
   24         ------
 -------       1696
   41
```

§ 61. Πλῆθος τῶν ψηφίων τοῦ πηλίκου.—Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν χωρὶς νὰ κάμωμεν τὴν διαίρεσιν, πόσα ψηφία ἔχει τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 5832 διὰ 746. Ἐπειδὴ $746 \times 10 = 7460 > 5832$, ἔπεται ὅτι τὸ πηλήκον εἶναι ἀριθμὸς μικρότερος τοῦ 10, ἔχει ἄρα ἓν ψηφίον. Ἔστω ἤδη διαιρετέος μὲν ὁ 17936, διαιρέτης δὲ ὁ 536. Ἐπειδὴ $536 \times 10 = 5360 < 17936$, τὸ πηλίκον ὑπερβαίνει τὸν 9. Ἐπειδὴ δὲ ἀφ' ἑτέρου $536 \times 100 = 53600 > 17936$, τὸ πηλίκον εἶναι μικρότερον τοῦ 100· εἶναι ἄρα τὸ πηλίκον διψήφιος ἀριθμός.

Ἄρα: Τὸ πηλίκον ἔχει τόσα ψηφία, ὅσα τὸ ὀλιγώτερον μηδενικὰ πρέπει νὰ γραφῶσι δεξιὰ τοῦ διαιρέτου ἵνα οὗτος ὑπερβῇ τὸν διαιρετέον.

Ἐξήγησις τοῦ κανόνος, καθ' ὃν ἐκτελεῖται ἡ διαίρεσις

§ **62. Α'. Διαίρεσις, τῆς ὁποίας τὸ πηλίκον εἶναι μονοψήφιον.**—Ἐὰν ὁ διαιρέτης εἶναι μονοψήφιος, τὸ μονοψήφιον πηλίκον εὑρίσκομεν εὐκόλως, διότι ἀπὸ μνήμης γνωρίζομεν τὰ γινόμενα τῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν.

Ἔστω ἤδη ὅτι θέλομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸν 5832 διὰ τοῦ 654. Ἐφαρμόζοντες τὸν προηγούμενον κανόνα εὑρίσκομεν ὅτι τὸ πηλίκον εἶναι μονοψήφιος ἀριθμός. Ἐπειδὴ δὲ ὁ διαρέτης 654 εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 600, ἐννοεῖται εὐκόλως ὅτι τὸ ζητούμενον πηλίκον δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ πηλίκου τῆς διαιρέσεως τοῦ 5832 διὰ 600 ἤτοι (§ 59) τοῦ $58 : 6 = 9$. Οὕτως ἐξηγεῖται διατί πρὸς εὕρεσιν τοῦ ζητουμένου πηλίκου διαιροῦμεν τὸν 58 διὰ 6 καὶ δοκιμάζομεν ἂν τὸ πηλίκον 9 τῆς διαιρέσεως ταύτης εἶναι τὸ ζητούμενον.

§ **63. Β'. Διαίρεσις, τῆς ὁποίας τὸ πηλίκον εἶναι πολυψήφιον.**—Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ μοιράσωμεν ἐξ ἴσου 6482 δραχμὰς εἰς 5 ἀνθρώπους. Ἐπειδὴ 6482 δραχ. = 6 χιλιόδραχμα + 4 ἑκατοντάδραχμα + 8 δεκάδραχμα + 2 δραχ., εἶναι φανερὸν ὅτι δυνάμεθα νὰ μοιράσωμεν α'. τὰ χιλιόδραχμα, ἔπειτα τὰ ἑκατοντάδραχμα κλπ. καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ μερίδια ἑκάστου. Οὕτω διαιροῦντες τὰ 6 χιλ. διὰ 5 εὑρίσκομεν ὅτι ἕκαστος θὰ λάβῃ ἀνὰ 1 χιλ. καὶ θὰ περισσεύσῃ καὶ 1 χιλ· τρέποντες τοῦτο εἰς ἑκατοντάδραχμα εὑρίσκομεν ὅτι ἔχομεν πρὸς διανομὴν $10 + 4 = 14$ ἑκατ. Διαιροῦντες ταῦτα διὰ 5 εὑρίσκομεν ὅτι ἕκαστος θὰ λάβῃ ἀνὰ 2 ἑκατ. καὶ θὰ περισσεύσωσι 4 ἑκατ. ἢ 40 δεκ. Ὥστε ἔχομεν νὰ μοιράσωμεν $40 + 8 = 48$ δεκ. ἐξ ὧν ἕκαστος λαμβάνει 9 δέκ. καὶ περισσεύουσι καὶ 3 δεκ. ἢ 30 δραχμαί. Ὥστε ἔχομεν τέλος νὰ μοιράσωμεν $30 + 2 = 32$ δραχ., ἐξ ὧν ἕκαστος λαμβάνει 6 δραχ. καὶ μένουσι καὶ 2 δραχ. Ἕκαστος λοιπὸν λαμβάνει ἐν ὅλῳ $1000 + 200 + 90 + 6 = 1296$ δρχ. καὶ μένουσι καὶ 2 δρχ. Οὕτως ἐξηγεῖτα διατί διαιροῦμεν διὰ 5 τὸ α'. ἐκ δεξιῶν ψηφίον τοῦ διαιρετέου κτλ. Ὁμοίως σκεπτόμενοι ἐξηγοῦμεν διατί πρὸς πρὸς ἐκτέλεσιν τῆς διαιρέσεως τοῦ 17945 διὰ 23 διαιροῦμεν πρῶτον τὸν 179 διὰ 23 κλπ.

Ἀσκήσεις.

49) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι πρὸς εὕρεσιν τοῦ πηλίκου 3875 : 25 ἀρκεῖ νὰ ἀποκόψωμεν τὰ 2 τελευταῖα ψηφία τοῦ γινομένου 3875×4.

50) Νὰ εὑρεθῇ κατ' ἀνάλογον τρόπον τὸ πηλίκον 15375 : 125 καὶ νὰ αἰτιολογοθῇ ὁ τρόπος οὗτος τῆς εὑρέσεως τοῦ πηλίκου.

51) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $(700 \times 16) : (8 \times 25) = 7 \times 8$.

51) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τῆς διαιρέσεως 467 διὰ 25 πηλίκον μὲν εἶναι ὁ ἀριθμός, τὸν ὁποῖον ἀποτελοῦσι τὰ ὑπολειπόμενα ψηφία τοῦ γινομένου 467×4 μετα τὴν ἀποκοπὴν τῶν δύο τελευταίων ψηφίων αὐτοῦ, ὑπόλοιπον δὲ τὸ πηλίκον τῆς διὰ 4 διαιρέσεως τοῦ ἀριθμοῦ, τὸν ὁποῖον ἀποτελοῦσι τὰ ἀποκοπέντα ταῦτα ψηφία, ὅπως εἶναι γεγραμμένα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'.

ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

§ **64. Δύναμις ἀριθμοῦ.**—Ἑκάστου τῶν γινομένων 5×5, $5 \times 5 \times 5$, $5 \times 5 \times 5 \times 5$ οἱ παράγοντες εἶναι πάντες ἴσοι πρὸς τὸν ἀριθμὸν 5· καλεῖται δὲ ἕκαστον τῶν γινομένων τούτων δύναμις τοῦ 5. Ὁμοίως τὰ γινόμενα $8 \times 8 \times 8$, $8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8$ εἶναι δυνάμεις τοῦ 8 καὶ τὸ $\alpha \times \alpha \times \alpha \times \ldots\ldots \times \alpha$ εἶναι δύναμις τοῦ α. Ὥστε :

Δύναμις ἀριθμοῦ καλεῖται πᾶν γινόμενον, τοῦ ὁποίου οἱ παράγοντες εἶναι ὅλοι ἴσοι πρὸς τὸν ἀριθμὸν τοῦτον.

Τὸ γινόμενον $5 \times 5 = 25$ καλεῖται δευτέρα δύναμις ἢ τετράγωνον τοῦ 5, τὸ δὲ γινόμενον $2 \times 2 \times 2 = 8$ καλεῖται τρίτη δύναμις ἢ κύβος τοῦ 2, τὸ δὲ γινόμενον $6 \times 6 \times 6 \times 6 = 1296$ καλεῖται τετάρτη δύνατοῦ 6. Γενικῶς τὸ γινόμενον $\alpha \times \alpha \times \alpha \times \ldots\ldots \times \alpha$, τὸ ὁποῖον ἔχει ν παράγοντας, καλεῖται νυοστὴ δύναμις τοῦ α. Ὥστε

Δευτέρα, τρίτη .... νυοστὴ δύναμις ἀριθμοῦ καλεῖται τὸ γινόμενον, 2, 3 ..... ν παραγόντων ἴσων πρὸς τὸν ἀριθμὸν τοῦτον.

Ὅταν σχηματίζωμεν τὸ γινόμενον ν παραγόντων ἴσων πρός τινα ἀριθμὸν α, λέγομεν ὅτι ὑψοῦμεν τὸν α εἰς τὴν νυοστὴν δύναμιν. Ὁ ἀριθμὸς α λέγεται βάσις τῆς οὕτω προκυπτούσης δυνάμεως, ὁ δὲ ἀριθμὸς ν, ὁ ὁποῖος δηλοῖ τὸ πλῆθος τῶν ἴσων παραγόντων, καλεῖται ἐκθέτης αὐτῆς.

Ἑκάστην δύναμιν ἀριθμοῦ τινος παριστῶμεν συντόμως γράφοντες ἅπαξ τὸν ἀριθμὸν τοῦτον, δεξιὰ δὲ καὶ ὀλίγον ὑψηλότερον γράφομεν μὲ μικρότερα ψηφία τὸν ἐκθέτην τῆς δυνάμεως. Οὕτω τὸ γινόμενον 9×9 γράφεται συντόμως οὕτω 9^2, τὸ $4\times4\times4$ οὕτω 4^3, τὸ $\alpha\times\alpha\times\alpha\times \ldots\ldots \times\alpha$, οὗ οἱ παράγοντες εἶναι ν, γράφεται οὕτω α^ν.

Δύναμίς τις καλεῖται ἀρτία ἢ περιττὴ δύναμις, καθ' ὅσον ἔχει ἄρτιον ἢ περιττὸν ἐκθέτην. Οὕτω 7^4, 6^6, α^{10} εἶναι ἄρτιαι δυνάμεις, ἐν ᾧ αἱ 3^5, 4^3, α^9 εἶναι περιτταὶ δυνάμεις.

Ἄξιον ἰδιαιτέρας παρατηρήσεως εἶναι ὅτι $10^2=100$, $10^3=1000$, $10^4=10000$ κλπ. ἤτοι:

Πᾶσα δύναμις τοῦ 10 εἶναι ἀριθμός, ὅστις γράφεται διὰ τῆς 1 ἀκολουθομένης ὑπὸ τόσων μηδενικῶν, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ ἐκθέτης αὐτῆς.

Ἰδιότητες τῶν δυνάμεων.

§ **65. Θεώρημα I.** — Τὸ γινόμενον δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ εἶναι δύναμις τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ἡ ὁποία ἔχει ἐκθέτην τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν αὐτῶν.

Λέγω δηλ. ὅτι $4^3\times4^5\times4^2=4^{10}$

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν δυνάμεων εἶναι

$$4^3=4\times4\times4,\quad 4^5=4\times4\times4\times4\times4,\quad 4^2=4\times4,$$

ἕπεται ὅτι $4^3\times4^5\times4^2=(4\times4\times4)\times(4\times4\times4\times4\times4)\times(4\times4)$

Ἐπειδὴ δὲ (§ 50) $(4\times4+4)\times(4\times4\times4\times4\times4)\times(4\times4)=4\times4\times4\times4\times4\times4\times4\times4\times4\times4$,

ἕπεται ὅτι $4^3\times4^5\times4^2=4\times4\times4\times4\times4\times4\times4\times4\times4\times4$

ἢ $4^3\times4^5\times4^2=4^{10}$ ὅ. ἔ. δ.

Γενικῶς: $\alpha^\mu\times\alpha^\nu\times\alpha^\varrho\times\ldots\ldots\times\alpha^\tau=\alpha^{\mu+\nu+\varrho+\ldots\ldots+\tau}$

§ **66. Θεώρημα II.** Ἵνα ὑψώσωμεν δύναμιν ἀριθμοῦ εἰς ἄλλην δύναμιν, ἀρκεῖ νὰ θέσωμεν εἰς τὸν ἀριθμὸν τοῦτον ὡς ἐκθέτην τὸ γινόμενον τῶν ἐκθετῶν τῶν δυνάμεων τούτων.

Λέγω δηλ. ὅτι $(5^3)^4=5^{12}$.

Ἀπόδειξις. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν δυνάμεων εἶναι $(5^3)^4=5^3\times5^3\times5^3\times5^3$.

Ἀλλὰ κατὰ τὴν προηγουμένην ἰδιότητα

$$5^3\times5^3\times5^3\times5^3=5^{3+3+3+3}=5^{3\times4}\quad \text{ἄρα}$$

$$(5^3)^4=5^{12}.\ \text{ὅ. ἔ. δ.}$$

Γενικῶς: $(\alpha^\mu)^\nu=\alpha^{\mu.\nu}$.

§ **67. Θεώρημα III.** — Γινόμενον ὑψοῦται εἰς δύναμιν, ἂν πάντες οἱ παράγοντες αὐτοῦ ὑψωθῶσιν εἰς τὴν δύναμιν ταύτην

Λέγω ὅτι π. χ. $(5\times2\times8)^3=5^3\times2^3\times8^3$.

Ἀπόδειξις. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν δυνάμεων

$(5\times2\times8)^3=(5\times2\times8)\times(5\times2\times8)\times(5\times2\times8)$· ἀλλὰ (§ 50)

$(5\times2\times8)\times(5\times2\times8)\times(5\times2\times8)=5\times2\times8\times5\times2\times8\times5\times2\times8$.

Ἄρα: $(5\times2\times8)^3=5\times2\times8\times5\times2\times8\times5\times2\times8$, ὅθεν προκύπτει (§ 47) ὅτι

$(5\times2\times8)^3=(5\times5\times5)\times(2\times2\times2)\times(8\times8\times8)$ ἢ

$(5\times2\times8)^3=5^3\times2^3\times8^3$. ὅ. ἔ. δ.

Γενικῶς: $(\alpha\times\beta\times\gamma\times.......\times\tau)^\nu=\alpha^\nu\times\beta^\nu\times\gamma^\nu\times.....\times\tau^\nu$.

§ **68. Θεώρημα IV.** — Τὸ πηλίκον δυνάμεως δι᾽ ἄλλης δυνάμεως τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ εἶναι δύναμις τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ἡ ὁποία ἔχει ἐκθέτην τὴν διαφοράν, τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν ἀφαιροῦντες τὸν ἐκθέτην τοῦ διαιρέτου ἀπὸ τὸν ἐκθέτην τοῦ διαιρετέου.

Λέγω π. χ. ὅτι $7^5 : 7^3=7^2$.

Ἀπόδειξις. Ἐὰν τὸ οὕτως εὑρεθὲν πηλίκον 7^2 πολ)σωμεν ἐπὶ τὸν διαιρέτην 7^3 εὑρίσκομεν (§ 65) ὅτι $7^3\times7^2=7^5$, ἤτοι τὸν διαιρετέον. Τὸ εὑρεθὲν ἄρα πηλίκον 7^2 εἶναι τὸ ζητούμενον. ὅ. ἔ. δ.

Γενικῶς: $\alpha^\mu : \alpha^\nu=\alpha^{\mu-\nu}$, ἂν ἡ ἀφαίρεσις τοῦ ν ἀπὸ τοῦ μ εἶναι δυνατή.

* § **69. Ὁρισμὸς τῶν συμβόλων α^0 καὶ α^1.**

Α΄.—Ἐφαρμόζοντες τὴν προηγουμένην ἰδιότητα εἰς τὴν διαίρεσιν $\alpha^5:\alpha^5$ εὑρίσκομεν ὡς πηλίκον α^0, τὸ ὁποῖον οὐδεμίαν ἔχει ἔννοιαν ὡς δύναμις, διότι γινόμενον οὐδένα ἔχον παράγοντα δὲν ὑπάρχει. Παρατηροῦντες ὅμως ὅτι τὸ αὐτὸ πηλίκον $\alpha^5:\alpha^5$ εἶναι ἴσον πρὸς 1, διότι ὁ διαιρετέος καὶ διαιρέτης εἶναι ἴσοι, ἀγόμεθα εἰς τὸ συμπέρασμα νὰ θεωρῶμεν τὸ σύμβολον α^0 ὡς ταὐτόσημον πρὸς τὴν 1.

Ἄρα: Μηδενικὴ δύναμις παντὸς ἀριθμοῦ καλεῖται ἡ μονάς.

Β΄.—Ἐὰν ἤδη τὴν αὐτὴν ἰδιότητα (§ 68) ἐφαρμόσωμεν εἰς τὴν διαίρεσιν $\alpha^6:\alpha^5$ εὑρίσκομεν πηλίκον α^1, τὸ ὁποῖον οὐδεμίαν ἔχει ἔννοιαν ὡς δύναμις. Ἀλλ᾽ ἀφ᾽ ἑτέρου, ἐπειδὴ

$\alpha^6=(\alpha\times\alpha\times\alpha\times\alpha\times\alpha)\times\alpha=\alpha^5\times\alpha$, ἕπεται ὅτι $\alpha^6:\alpha^5=(\alpha^5\times\alpha):\alpha^5=\alpha$. Ἕπεται ὅθεν ὅτι τὸ σύμβολον α^1 δέον νὰ θεωρῆται ὡς ταὐτόσημον πρὸς τὸ α, Ἄρα:

Πρώτη δύναμις παντὸς ἀριθμοῦ καλεῖται ὁ ἀριθμὸς οὗτος.

Ἀσκήσεις.

53). Νὰ τραπῇ ἡ δύναμις 4^3 εἰς δύναμιν τοῦ 2.

54). Νὰ τραπῇ ἡ δύναμις 9^2 εἰς δύναμιν τοῦ 3.

55). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ τετραπλάσιον τετραγώνου εἶναι τετράγωνον.

56). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ὀκταπλάσιον κύβου εἶναι κύβος.

57). Νὰ μετασχηματισθῇ τὸ γινόμενον $2^2 \times 4^5$ εἰς μίαν δύναμιν.

58). Νὰ μετασχηματισθῇ τὸ γινόμενον $9^1 \times 3^3 \times 9^2 \times 27$ εἰς μίαν δύναμιν.

59). Νὰ μετασχηματισθῇ τὸ γινόμενον $5^2 \times 3^3 \times 25^3 \times 9^2$ εἰς γινόμενον δύο δυνάμεων.

60). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $5^2 \times 3^2 \times 25^3 \times 9^3 = 15^8$.

61). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $(7^3 \times 3^2 \times 5^3) : 9 = 35^3$.

62). Νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον $(7^2 \times 3^2 \times 5^4) : (7 \times 3^2 \times 5^3)$.

63). Νά ἀποδειχθῇ ὅτι $(10 \times 10^4) : (2^2 \times 5^2)$ εἶναι δύναμις τοῦ 10·

* Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα ἐπὶ τῶν τεσσάρων πράξεων

64). Ἐὰν εἰς τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν προστεθῇ ἡ διαφορὰ αὐτῶν, προκύπτει τὸ διπλάσιον τοῦ μεγαλυτέρου (§ 23).

65). Ἐὰν ἀπὸ τοῦ ἀθροίσματος δύο ἀριθμῶν ἀφαιρεθῇ ἡ διαφορὰ αὐτῶν, προκύπτει τὸ διπλάσιον τοῦ μικροτέρου (§ 31, 27).

66). Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοὶ ἔχοντες ἄθροισμα 94 καὶ διαφορὰν 8.

67) Νὰ εὑρεθῶσι δύο διαδοχικοὶ ἀριθμοὶ ἔχοντες ἄθροισμα 673.

68). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι, ἐὰν γράψωμεν κατὰ σειρὰν τυχόντας ἀριθμούς, ὧν ἕκαστος εἶναι μεγαλύτερος τοῦ προηγουμένου, καὶ ἀφαιρέσωμεν ἕκαστον ἀπὸ τοῦ ἑπομένου, αἱ προκύπτουσαι διαφοραὶ ἔχουσιν ἄθροισμα ἴσον πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν ἄκρων ἀριθμῶν (§ 29, 28, 27)·

69). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $(13-6)+(6-3)=10$ (§ 29).

70). Κὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $1+2+3+4+5=3 \times 5$.

(ΣΗΜ. $1=3-2$, $2=3-1$, $4=3+1$, $5=3+2$ ἄσκ. 64).

71). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν εἶναι 5×9.

72). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $12345679 \times 9 = 111111111$

73). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι α΄) $12345679 \times 18 = 222222222$ β΄) $12345679 \times 27 = 333333333$ γ΄) $12345679 \times 36 = 444444444$.

74). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι, ἐὰν εἰς τὸν διαιρετέον ἀτελοῦς διαιρέσεως προστεθῇ ἡ ὑπεροχὴ τοῦ διαιρέτου ἀπὸ τοῦ ὑπολοίπου, τὸ πηλίκον αὐξάνει κατὰ μονάδα καὶ ἡ διαίρεσις καθίσταται τελεία.

75). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ὑπόλοιπον πάσης διαιρέσεως εἶναι μικρότερον τοῦ ἡμίσεως τοῦ διαιρετέου.

76). Εὑρεῖν τὸ ἄθροισμα $2 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 7 \times 10 + 6$.

77). Νὰ τεθῇ ὁ ἀριθμὸς 3467 ὑπὸ τὴν μορφὴν $\alpha \times 10^{\mu} + \beta \times 10^{\mu-1} + \gamma \times 10^{\mu-2} + \ldots\ldots + \tau$, ἔνθα $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \tau$ εἶναι ἀριθμοὶ μικρότεροι τοῦ 10,

78). Νὰ μερισθῇ ὁ 150 εἰς δύο μέρη διαφέροντα κατὰ 70.

79). Εἴς τι φρούριον ἦσαν 500 ἄνδρες καὶ εἶχον τροφὰς διὰ 48 ἡμέρας. Μετὰ 15 ἡμέρας ἡ φρουρὰ ηὔξησε καὶ οὕτως αἱ τροφαὶ ἐξηντλήθησαν μετὰ 11 ἡμέρας. Ποσοι ἄνδρες προσετέθησαν;

80). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ γινόμενον τῆς διαφορᾶς δύο ἀριθμῶν ἐπὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν ἰσοῦται πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων αὐτῶν.

81). Ποῖος ὁ μέγιστος ἀριθμός, κατὰ τὸν ὁποῖον δυνάμεθα νὰ αὐξήσωμεν τὸν διαιρετέον χωρὶς νὰ βλάψωμεν τὸ πηλίκον;

82). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι, ἐὰν τὸ πηλίκον διαιρέσεως ἰσοῦται πρὸς τὸ ὑπόλοιπον αὐτῆς, ἡ διαίρεσις τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ πηλίκου εἶναι τελεία καὶ τὸ πηλίκον αὐτῆς ὑπερβαίνει κατὰ μονάδα τὸν ἀρχικὸν διαιρέτην.

83). Θέλει τις νὰ πληρώσῃ 500 δραχμὰς μὲ 38 χαρτονομίσματα τῶν 10 καὶ τῶν 25 δραχμῶν. Πόσα πρέπει νὰ δώσῃ ἐξ ἑκάστου εἴδους;

84). Ἀξιωματικὸς κατατάσσει τοὺς ὑπ᾿ αὐτὸν ἄνδρας εἰς ἑξάδας· ἐὰν δὲ κατέτασσεν αὐτοὺς εἰς τετράδας, θὰ ἐσχηματίζοντο 52 τετράδες περισσότεραι τῶν ἑξάδων. Πόσοι ἦσαν οἱ ἄνδρες;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ΄

ΔΙΑΙΡΕΤΟΤΗΣ

§ **70. Ἀριθμὸς διαιρετὸς ὑπὸ ἄλλου, διαιρέτης ἀριθμοῦ.**—Ὁ ἀριθμὸς 12 διαιρεῖται ἀκριβῶς ὑπὸ τοῦ 4, ἤτοι ἡ διαίρεσις τοῦ 12 διὰ 4 εἶναι τελεία, διότι $12 - (4 \times 3) = 0$. Τούτου ἕνεκα ὁ μὲν 12 λέγεται διαιρετὸς ὑπὸ τοῦ 4, ὁ δὲ 4 καλεῖται διαιρέτης τοῦ 12.

Γενικῶς: Ἀριθμός τις λέγεται διαιρετὸς ὑπὸ ἄλλου, ἐὰν διαιρῆται ὑπ᾽ αὐτοῦ ἀκριβῶς.

Διαιρέτης ἀριθμοῦ τινὸς καλεῖται πᾶς ἀριθμός, ὅστις διαιρεῖ αὐτὸν ἀκριβῶς.

Γενικαὶ ἀρχαὶ τῆς διαιρετότητος.

§ 71. Θεώρημα I. Πᾶς ἀριθμὸς διαιρεῖ πάντα τὰ πολλαπλάσια αὐτοῦ καὶ μόνον αὐτά.

Ἀπόδειξις. α΄) Ἔστω τυχὸν τοῦ 3 πολλαπλάσιον π χ. ὁ 3×8 ἤτοι 24· λέγω ὅτι ὁ 24 διαιρεῖται ἀκριβῶς ὑπὸ τοῦ 3. Καὶ ὄντως· ἐκ τῆς ἰσότητος $24=3\times8$ προκύπτει ὅτι $24-(3\times8)=0$, ἄρα (§ 16 Δ΄) ἡ διαίρεσις τοῦ 24 διὰ 3 εἶναι τελεία, ἤτοι ὁ 24 διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ 3.

β΄) Ὑποτεθείσθω ὅτι ἀριθμός τις Α διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ 3 καὶ ἔστω π τὸ πηλίκον· κατὰ τὰ γνωστὰ (§ 16 Δ΄) θὰ εἶναι

$A-(3\times\pi)=0$, ὅθεν $A=3\times\pi$, ἤτοι ὁ Α εἶναι πολ]σιον τοῦ 3.

Ὥστε πᾶν πολ]σιον τοῦ 3 διαιρεῖται διὰ τοῦ 3· καὶ πᾶς ἀριθμὸς διαιρούμενος διὰ 3 εἶναι πολ]σιον αὐτοῦ· ὁ 3 ἄρα διαιρεῖ πάντα τὰ πολ]σια αὐτοῦ καὶ πλὴν τούτων οὐδένα ἄλλον ἀριθμόν. ὅ. ἔ. δ.

ΣΗΜ. Πρὸς ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματος τούτου παρουσιάσθη ἀνάγκη νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι: α΄). Ἐὰν ἀριθμὸς εἶναι πολ.3, διαιρεῖται ὑπὸ τοῦ 3 καὶ 6΄). Ἐὰν ἀριθμὸς διαιρῆται διὰ τοῦ 3, εἶναι πολ.3. Ἡ ὑπόθεσις ἑνὸς ἑκάστου ἀπὸ τὰ θεωρήματα ταῦτα εἶναι συμπέρασμα τοῦ ἄλλου. Τὰ τοιαῦτα θεωρήματα λέγονται ἀντίστροφα θεωρήματα.

§ 72. Θεώρημα II. Ἐὰν ἀριθμὸς διαιρῇ ἄλλους, διαιρεῖ καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν.

Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ 12,20 καὶ 32, οἱ ὁποῖοι διαιροῦνται διὰ τοῦ 4. Λέγω ὅτι καὶ τὸ ἄθροισμα $12+20+32$ διαιρεῖται διὰ τοῦ 4.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ $12:4=3$, $20:4=5$, $32:4=8$, ἕπεται ὅτι

$$12=4\times3,\ 20=4\times5 \text{ καὶ } 32=4\times8.$$

Ἐὰν δὲ προσθέσωμεν ταύτας κατὰ μέλη, εὑρίσκομεν ὅτι

$12+20+32=(4\times3)+(4\times5)+(4\times8)$. Ἐπειδὴ δὲ (§ 35) καὶ $4\times(3+5+8)=(4\times3)+(4\times5)+(4\times8)$ ἕπεται ὅτι

$$12+20+32=4\times(3+5+8),$$

ἤτοι τὸ ἄθροισμα $12+20+32$ εἶναι πολ]σιον τοῦ 4· κατ' ἀκολουθίαν (§ 71) διαιρεῖται δι' αὐτοῦ. δ. ἔ. δ.

Γενικῶς: Ἐὰν α=πολ.δ, β=πολ.δ, γ=πολ.δ,..... τ=πολ.δ, θὰ εἶναι καὶ $\alpha+\beta+\gamma+\ldots\ldots+\tau$=πολ. δ.

ΣΗΜ. Κατὰ τὴν ἰδιότητα ταύτην πᾶν ἄθροισμα τῆς μορφῆς πολ.δ+πολ.δ +......+πολ.δ εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ δ ἤτοι εἶναι καὶ αὐτὸ πολ.δ.

§ 73. Πόρισμα I.—Ἐὰν ἀριθμὸς διαιρῇ ἄλλον, διαιρεῖ καὶ πᾶν πολλαπλάσιον αὐτοῦ.

Ὁ 3 π.χ. διαιρῶν τὸν 15 θὰ διαιρῇ καὶ τυχὸν αὐτοῦ πολ]σιον, π.χ. τὸν 15×4.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ $15\times4=15+15+15+15$, ὁ δὲ 3 διαιρεῖ ἕκαστον προσθετέον τοῦ β' μέλους, ἐξ ὑποθέσεως, θὰ διαιρῇ καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν ἤτοι τὸν 15×4. ὅ.ἔ.δ.

Γενικῶς: Ἐὰν α=πολ.δ, θὰ εἶναι καὶ $\alpha\times\mu$=πολ.δ.

§ 74. Θεώρημα III.—Ἐὰν ἀριθμὸς διαιρῇ δύο ἄλλους, διαιρεῖ καὶ τὴν διαφορὰν αὐτῶν.

Ὁ 6 π.χ. διαιρῶν τοὺς 54 καὶ 30 θὰ διαιρῇ καὶ τὴν διαφορὰν 54—30.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ $54:6=9$ καὶ $30:6=5$ ἕπεται ὅτι $54=6\times9$ καὶ $30=6\times5$. Ἐκ τούτων συνάγεται εὐκόλως ὅτι

$$54-30=(6\times9)-(6\times5)$$

Ἀλλὰ εἶναι καὶ $6\times(9-5)=(6\times9)-(6\times5)$, (§ 37)

ἄρα $(54-30)=6\times(9-5)$, ἤτοι

ἡ διαφορὰ 54—30 εἶναι πολ]σιον τοῦ 6 καὶ κατ' ἀκολουθίαν (§ 71) διαιρεῖται δι' αὐτοῦ.

Γενικῶς: Ἐὰν α=πολ.δ, β=πολ.δ καὶ $\alpha>\beta$, θὰ εἶναι καὶ $\alpha-\beta$=πολ.δ.

§ 75. Θεώρημα IV.—Ἐὰν ἀριθμὸς διαιρῇ διαιρετέον καὶ διαιρέτην ἀτελοῦς διαιρέσεως, θὰ διαιρῇ καὶ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ταύτης.

Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ 264 καὶ 40, οἱ ὁποῖοι διαιροῦνται διὰ 8. Λέγω ὅτι ὁ 8 διαιρεῖ καὶ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ 264 διὰ 40.

Ἀπόδειξις. Διαιροῦντες τὸν 264 διὰ τοῦ 40 εὑρίσκομεν πηλίκον 6 καὶ ὑπόλοιπον 24, ἄρα $264-(6\times40)=24$. Ὁ 8 διαιρῶν τὸν 40, ἐξ ὑποθέσεως, διαιρεῖ καὶ τὸ γινόμενον (6×40) ὡς πολ]σιον τοῦ 40· διαιρῶν δὲ ἐξ ὑποθέσεως καὶ τὸν 264 διαιρεῖ (§ 74) καὶ τὴν διαφορὰν αὐτῶν 24. δ. ἔ. δ.

Γενικῶς: Ἐὰν $\alpha-(\beta\times\pi)=\upsilon$, $\alpha=\pi o\lambda.\delta$ καὶ $\beta=\pi o\lambda.\delta$, θὰ εἶναι καὶ $\upsilon=\pi o\lambda.\ \delta$.

§ 76. Θεώρημα V. – Ἐὰν ἀριθμὸς διαιρῇ τὸν διαιρέτην καὶ τὸ ὑπόλοιπον ἀτελοῦς διαιρέσεως, θὰ διαιρῇ καὶ τὸν διαιρετέον αὐτῆς.

Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ἀριθμός τις Α διαιρούμενος διὰ 12 δίδει πηλίκον 7 καὶ ὑπόλοιπον 9· ἔστω δὲ ὁ ἀριθμὸς 3, ὁ ὁποῖος διαιρεῖ τὸν διαιρέτην 12 καὶ τὸ ὑπόλοιπον 9· λέγω ὅτι ὁ 3, θὰ διαιρῇ καὶ τὸν **Α**.

Ἀπόδειξις. Κατὰ τὰ λεχθέντα $A-(12\times7)=9$, ὅθεν $A=(12\times7)+9$. Ὁ 3 διαιρῶν τὸν 12 διαιρεῖ (§ 73) καὶ τὸ γινόμενον 12×7· διαιρῶν δὲ καὶ τὸν 9 ἐξ ὑποθέσεως, διαιρεῖ καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν Α. δ. ἔ. δ.

Γενικῶς. Ἐὰν $\alpha-(\beta\times\pi)=\upsilon$, $\beta=\pi o\lambda.\delta$ καὶ $\upsilon=\pi o\lambda.\delta$, θὰ εἶναι καὶ $\alpha=\pi o\lambda.\ \delta$.

§ 77. Θεώρημα VI. Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ διαιρούμενοι διὰ τρίτου δίδωσι τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον, ἡ διαφορὰ αὐτῶν εἶναι πολ]σιον τοῦ τρίτου ἐκείνου.

Ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ Α καὶ Β, οἱ ὁποῖοι διαιρούμενοι διὰ 7 δίδουσιν ἀντιστοίχως πηλίκα 9 καὶ 4, ὑπόλοιπον δὲ ἀμφότεροι 3. Λέγω ὅτι $A-B=\pi o\lambda.\ 7$.

Ἀπόδειξις. Κατὰ τὰ λεχθέντα $A-7\times9=3$ καὶ $B-(7\times4)=3$, ἄρα $A=(7\times9)+3$ καὶ $B=(7\times4)+3$. Ἐὰν δὲ ἀφαιρέσωμεν τὰς ἰσότητας ταύτας κατὰ μέλη, εὑρίσκομεν ὅτι:

$$A-B=[(7\times9)+3]-[(7\times4)+3].$$

Ἐπειδὴ δὲ (§ 29)

$$[(7\times9)-(7\times4)]+(3-3)=[(7\times9)+3]-[(7\times4)+3]$$

ἕπεται ὅτι:

$$A-B=(7\times9)-(7\times4)+(3-3)=7\times(9-4)=\pi o\lambda.7.\quad \delta.\ \varepsilon.\ \delta.$$

Γενικῶς. Ἐὰν $A-(\delta\times\pi)=\upsilon$ καὶ $B-(\delta\times\pi')=\upsilon$ θὰ εἶναι καὶ $A-B=\pi o\lambda.\ \delta$.

§ 78. Θεώρημα VII. (ἀντίστροφον). Ἐὰν ἡ διαφορὰ δύο ἀριθμῶν εἶναι πολ]σιον ἄλλου, ἀμφότεροι διαιρούμενοι δι' ἐκείνου ἀφίνουσι τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον.

Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ 100 καὶ 60, τῶν ὁποίων ἡ διαφορὰ 40 εἶναι πολ. τοῦ 8. Λέγω ὅτι οἱ ἀριθμοὶ 100 καὶ 60 διαιρούμενοι διὰ 8 δίδουσι τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον.

Ἀπόδειξις. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ μὲν 100 διαιρούμενος διὰ 8 δίδει ὑπόλοιπον υ, ὁ δὲ 60 δίδει υ', ἔστωσαν δὲ 12 καὶ 7 τὰ ἀντίστοιχα πηλίκα τῶν διαιρέσεων τούτων. Κατὰ ταῦτα $100-(12\times8)=υ$ καὶ $60-(7\times8)=υ'$· ἐκ τούτων δέ, ὡς προηγουμένως, εὑρίσκομεν ὅτι $40=8\times(12-7)+(υ-υ')$, ὅθεν $40-8\times(12-7)=υ-υ'$. Ἐπειδὴ δὲ ἀμφοτέρων τῶν ἀριθμῶν υ καὶ υ' ὄντων μικροτέρων τοῦ 8, καὶ ἡ διαφορὰ $υ-υ'$ θὰ εἶναι κατὰ μείζονα λόγον μικροτέρα τοῦ 8, συνάγομεν ἐκ τῆς ἰσότητος ταύτης ὅτι $(υ-υ')$ εἶναι ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ 40 διὰ 8· ἀλλὰ καθ' ὑπόθεσιν ἡ διαίρεσις αὕτη εἶναι τελεία καὶ ἑπομένως $υ-υ'=0$, ἄρα $υ=υ'$. ὅ. ἔ. δ.

ΣΗΜ. Ἐν τῇ ἀποδείξει ὑπετέθη ὅτι ὁ υ' δὲν ὑπερβαίνει τὸν υ. Τῷ ὄντι' ἂν ἦτο $υ'=υ+θ$, ἐκ τῶν ἰσοτήτων

$$100=12\times8+υ=(11\times8)+(8+υ)$$
$$60=(7\times8)+υ+θ$$

θὰ προέκυπτε δι' ἀφαιρέσεως κατὰ μέλη ἡ ἰσότης

$$40=(11-7)\times8+[(8+υ)-(υ+θ)] \text{ ἢ}$$
$$\text{πολ } 8=\text{πολ } 8+(8-θ), \text{ ἐξ ἧς}$$
$$8-θ=\text{πολ } 8, \text{ ἥτις εἶναι προφανῶς ψευδής.}$$

Ἀσκήσεις.

Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

85) Ἐὰν ἀριθμὸς διαιρῇ τὸ ἄθροισμα δύο ἄλλων καὶ τὸν ἕνα ἐξ αὐτῶν θὰ διαιρῇ καὶ τὸν ἄλλον (§ 74).

86) Ἐὰν ἀριθμὸς διαιρῇ ἕνα τῶν προσθετέων ἀθροίσματος, χωρὶς νὰ διαιρῇ τὸ ἄθροισμα, δὲν θὰ διαιρῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ἄλλων αὐτοῦ προσθετέων.

87) Ἐὰν εἰς τὸν διαιρετέον προστεθῇ πολ]σιον τοῦ διαιρέτου, τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως δὲν μεταβάλλεται.

88) Ἐὰν ἀπὸ τοῦ διαιρετέου ἀφαιρεθῇ πολ]σιον τοῦ διαιρέτου, τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως δὲν μεταβάλλεται.

89) Δύο ἀριθμοὶ διαιρούμενοι διὰ τῆς διαφορᾶς αὐτῶν δίδουσι τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον.

90) Τὰ πηλίκα τῆς διαιρέσεως δύο ἀριθμῶν διὰ τῆς διαφορᾶς αὐτῶν διαφέρουσι κατὰ 1.

Χαρακτῆρες διαιρετότητος

§ **79. Θεώρημα Ι.** — Ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀριθμοῦ διὰ 10^{ν} εἶναι ὁ ἀριθμός, τὸν ὁποῖον ἀποτελοῦσι τὰ ν τελευταῖα ψηφία αὐτοῦ, ὅπως εἶναι γραμμένα.

Ἀρκεῖ νὰ ἐνθυμηθῶμεν ὅτι 10^{ν} εἶναι ἡ 1 ἀκολουθουμένη ὑπὸ ν μηδενικῶν καὶ ὅ,τι περὶ διαιρέσεως ἀριθμοῦ διὰ 10, 100, 1000 κλπ. ἐμάθομεν (§ 58)

Πόρισμα. Διὰ 10^{ν} διαιροῦνται πάντες οἱ ἀριθμοί, οἵτινες λήγουσιν εἰς ν τοὐλάχιστον μηδενικὰ καὶ μόνον αὐτοί.

§ **80. Θεώρημα ΙΙ.** — Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀριθμοῦ διὰ 2 ἢ 5 ἰσοῦται πρὸς τὸ ὑπόλοιπον τῆς διὰ 2 ἢ 5 διαιρέσεως τοῦ τελευταίου ψηφίου αὐτοῦ.

Ἔστω π. χ. ὁ ἀριθμὸς 3467· λέγω ὅτι οὗτος διαιρούμενος διὰ 2 ἢ 5 θὰ δόσῃ τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον, τὸ ὁποῖον δίδει ὁ 7 διαιρούμενος διὰ 2 ἢ 5.

Ἀπόδειξις. Ἐκ τῆς προφανοῦς ἰσότητος $3467=3460+7$, ἕπεται ὅτι $3467-7=3460$. (1)

Ἐπειδὴ δὲ $3460=346\times10$ καὶ $10=2\times5$, ἕπεται ὅτι $3460=346\times2\times5$ καὶ κατ' ἀκολουθίαν ἡ ἰσότης (1) γίνεται $3467-7=346\times2\times5$· ἐκ ταύτης δὲ γίνεται φανερὸν ὅτι ἡ διαφορὰ $3467-7$ εἶναι πολ]σιον τοῦ 2 καὶ τοῦ 5. Ἄρα (§ 78) ὁ καθ' εἷς ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 3467 καὶ 7 διαιρούμενος διὰ 2 ἢ 5 δίδει τὸ ὑπόλοιπον, τὸ ὁποῖον δίδει καὶ ὁ ἄλλος διαιρούμενος διὰ τοῦ αὐτοῦ διαιρέτου. ὅ.ἔ.δ.

Πόρισμα. Ἐὰν τὸ τελευταῖον ψηφίον ἀριθμοῦ διαιρεῖται διὰ 2 ἢ 5, καὶ ὁ ἀριθμὸς οὗτος διαιρεῖται διὰ 2 ἢ 5· καὶ ἀντιστρόφως. Διότι, ἐὰν τὸ τελευταῖον ψηφίον ἀριθμοῦ διαιρούμενον διὰ 2 ἢ 5 ἀφίνῃ ὑπόλοιπον 0, καὶ ὁ ἀριθμὸς οὗτος διὰ τοῦ αὐτοῦ διαιρούμενος ἀριθμοῦ θὰ ἀφίσῃ ὑπόλοιπον μηδέν, καὶ τἀνάπαλιν (§ 80 Θ).

ΣΗΜ. Εἰς τούτους καταλέγονται καὶ οἱ λήγοντες εἰς 0.

§ **81. Ἄρτιοι καὶ περιττοὶ ἀριθμοί.**— Πᾶς ἀριθμὸς διαιρετὸς διὰ τοῦ 2 καλεῖται ἄρτιος ἀριθμός. Πᾶς δὲ μὴ διαιρετὸς διὰ τοῦ 2 καλεῖται περιττὸς ἀριθμός. Κατὰ ταῦτα, πᾶς ἄρτιος ἀριθμὸς λαμβάνει τὴν μορφὴν $2\times\nu$, πᾶς δὲ περιττὸς τὴν μορφὴν

$$(2\times\nu)+1 \text{ ἢ } (2\times\nu)-1.$$

Οὕτως $28=2\times14$, $35=(2\times17)+1$ ἢ $35=(2\times18)-1$.

§ **82. Θεώρημα III.**— Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀριθμοῦ διὰ 4 ἢ 25 ἰσοῦται πρὸς τὸ ὑπόλοιπον τῆς διὰ 4 ἢ 25 διαιρέσεως τοῦ ἀριθμοῦ, τὸν ὁποῖον ἀποτελοῦσι τὰ δύο τελευταῖα ψηφία αὐτοῦ, ὅπως εἶναι γραμμένα.

Λέγω π. χ. ὅτι 37967 διαιρούμενος διὰ 4 ἢ 25 δίδει τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον, τὸ ὁποῖον δίδει ὁ ἀριθμὸς 67 διαιρούμενος διὰ 4 ἢ 25.

Ἀπόδειξις. Ἐκ τῆς προφανοῦς ἰσότητος $37967=37900+67$, ἕπεται ὅτι $37967-67=37900$ (1).

Ἐπειδὴ δὲ $37900=379\times100$ καὶ $100\times4=25$, ἕπεται ὅτι $37900=379\times4\times25$ καὶ κατ᾽ ἀκολουθίαν ἡ ἰσότης (1) γίνεται: $31967-67=379\times4\times25$· ἐκ ταύτης δὲ γίνεται φανερὸν ὅτι ἡ διαφορὰ $37967-67$ εἶναι πολ]σιον τοῦ 4 καὶ τοῦ 25. Ἄρα (§ 78) ὁ καθ᾽ εἷς ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 37967 καὶ 67 διαιρούμενος διὰ 4 ἢ 25 δίδει τὸ ὑπόλοιπον, τὸ ὁποῖον δίδει καὶ ὁ ἄλλος διαιρούμενος διὰ τοῦ αὐτοῦ διαιρέτου. ὅ. ἔ. δ.

Πόρισμα. Ἐὰν τὰ δύο τελευταῖα ψηφία ἀριθμοῦ ἀποτελῶσιν, ὅπως εἶναι γραμμένα, ἀριθμὸν διαιρετὸν διὰ 4 ἢ 25, καὶ ὁ ἀριθμὸς οὗτος διαιρεῖται διὰ 4 ἢ 25· καὶ ἀντιστρόφως.

Διότι, ἐὰν ὁ ἀριθμός, τὸν ὁποῖον ἀποτελοῦσι τὰ δύο τελευταῖα ψηφία ἀριθμοῦ τινός, διαιρούμενος διὰ 4 ἢ 25 ἀφίνῃ ὑπόλοιπον 0, καὶ ὅλος ὁ ἀριθμὸς διαιρούμενος διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ θὰ ἀφίσῃ ὑπόλοιπον 0, καὶ τἀνάπαλιν (§ 82 Θ).

ΣΗΜ. Εἰς τούτους καταλέγονται καὶ ἐκεῖνοι, τῶν ὁποίων τὰ δύο τελευταῖα ψηφία εἶναι ἀμφότερα μηδενικά.

Σκεπτόμενοι ὡς προηγουμένως (§ 80, 82) καὶ ἔχοντες ὑπ᾽ ὄψιν ὅτι $8\times125=1000$, ἀποδεικνύομεν τὰς ἀκολούθους ἰδιότητας.

§ **83. Θεώρημα IV.**—Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀριθμοῦ διὰ 8 ἢ 125 ἰσοῦται πρὸς τὸ ὑπόλοιπον τῆς διὰ 8 ἢ 125 διαιρέσεως τοῦ ἀριθμοῦ, τὸν ὁποῖον ἀποτελοῦσι τὰ τρία τελευταῖα ψηφία αὐτοῦ, ὅπως εἶναι γραμμένα.

Πόρισμα. Ἐὰν τὰ τρία τελευταῖα ψηφία ἀριθμοῦ ἀποτελῶσιν, ὅπως εἶναι γραμμένα, ἀριθμὸν διαιρετὸν διὰ 8 ἢ 125, καὶ ὁ ἀριθμὸς οὗτος διαιρεῖται διὰ 8 ἢ 125· καὶ ἀντιστρόφως.

§ **84. Θεώρημα V.** — Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀριθμοῦ διὰ 3 ἢ 9 ἰσοῦται πρὸς τὸ ὑπόλοιπον τῆς διὰ 3 ἢ 9 διαιρέσεως τοῦ ἀθροίσματος τῶν ψηφίων αὐτοῦ.

Ἀπόδειξις. Ἐν πρώτοις παρατηροῦμεν ὅτι

$$10^1=10=9+1=\text{πολ. } 9+1.$$
$$10^2=100=99+1=9\times11+1=\text{πολ. } 9+1$$
$$10^3=1000=999+1=9\times111+1=\text{πολ. } 9+1 \text{ κλπ.}$$

Ἤτοι : Πᾶσα δύναμις τοῦ 10 ἰσοῦται πρὸς ὡρισμένον ἑκάστη πολ]σιον τοῦ 9 ηὐξημένον κατὰ 1.

α'). Τούτων τεθέντων, ἔστω τυχὸν ἀριθμὸς π. χ. ὁ 7382. Ἀναλύοντες τοῦτον εἰς τὰς μονάδας τῶν διαφόρων τάξεων, ἐκ τῶν ὁποίων σύγκειται, εὑρίσκομεν τὴν ἰσότητα $7382=7000+300+80+2$.

Ἐπειδὴ δὲ

$$7000=7\times1000=7\times(\text{πολ. } 9+1)=7\times\text{πολ. } 9+7=\text{πολ. } 9+7$$
$$300=3\times100=3\times(\text{πολ. } 9+1)=3\times\text{πολ. } 9+3=\text{πολ. } 9+3$$
$$80=8\times10=8\times(\text{πολ. } 9+1)=8\times\text{πολ. } 9+8=\text{πολ. } 9+8$$
$$\text{καὶ } 2 \qquad\qquad =2$$

ἕπεται εὐκόλως ὅτι

$$7382 = \text{πολ. } 9+(7+3+8+2),$$

ὅθεν $7382-(7+3+8+2)=\text{πολ. } 9.$

Οἱ ἀριθμοὶ λοιπὸν 7382 καὶ $(7+3+8+2)$ διαφέρουσι κατὰ πολ. 9, ἄρα (§ 78) οὗτοι διαιρούμενοι διὰ 9 ἀφίνουσι τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον. ὃ. ἔ. δ.

β'). Ἐπειδὴ ὁ 3 διαιρῶν τὸν 9 διαιρεῖ καὶ πᾶν πολ]σιον αὐτοῦ, ἡ διαφορὰ $7382-(7+3+8+2)$ εἶναι καὶ τοῦ 3 πολ]σιον. Ἄρα οἱ ἀριθμοὶ 7382 καὶ $(7+3+8+2)$ διαιρούμενοι διὰ 3 ἀφίνουσι τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον. ὃ. ἔ. δ.

Πόρισμα. Ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων ἀριθμοῦ εἶναι διαιρετὸν διὰ 3 ἢ 9, καὶ ὁ ἀριθμὸς οὗτος διαιρεῖται διὰ 3 ἢ 9· καὶ ἀντιστρόφως.

Διότι, ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων ἀριθμοῦ διαιρούμενον διὰ 3 ἢ 9 ἀφίνῃ ὑπόλοιπον 0, καὶ ὁ ἀριθμὸς διαιρούμενος διὰ τοῦ αὐτοῦ διαιρέτου θὰ ἀφίνῃ ὑπόλοιπον 0. Καὶ ἀντιστρόφως.

§ **85. Θεώρημα VI**.—Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀριθμοῦ διὰ 11 ἰσοῦται πρὸς τὸ ὑπόλοιπον τῆς διὰ 11 διαιρέσεως τοῦ ἀθροίσματος τῶν διψηφίων τμημάτων, εἰς τὰ ὁποῖα οὗτος χωρίζεται ἐκ δεξιῶν πρὸς τὰ ἀριστερά.

Ἀπόδειξις Ἐν πρώτοις παρατηροῦμεν ὅτι

$$10^2=100=(9\times 11)+1=\text{πολ. } 11+1,$$

Ἐὰν δὲ τὸ καθ' ἓν ἀπὸ τὰ μέλη τῆς ἀποδειχθείσης ἰσότητος

$$10^2=\text{πολ. } 11+1 \qquad (1)$$

πολ]ωμεν ἐπὶ τὸν ἑαυτόν του, εὑρίσκομεν ὅτι:

$$10^4=\text{πολ. } 11\times\text{πολ. } 11+\text{πολ. } 11+\text{πολ. } 11+1=\text{πολ. } 11+1$$

Πολ]ντες δὲ τὰ μέλη ταύτης ἐπὶ τὰ ἀντίστοιχα μέλη τῆς προηγουμένης εὑρίσκομεν ὅτι $10^6=\text{πολ. } 11+1$· ἐκ ταύτης δὲ καὶ τῆς (1) εὑρίσκομεν ὁμοίως ὅτι $10^8=\text{πολ. } 11+1$ καὶ καθ' ἑξῆς οὕτω.

Ἤτοι: Πᾶσα ἀρτία δύναμις τοῦ 10 ἰσοῦται πρὸς ὡρισμένον ἑκάστη πολ[σιον τοῦ 11 ηὐξημένον κατὰ 1.

Τούτων τεθέντων, ἔστω τυχὸν ἀριθμὸς π. χ. ὁ 196784· χωρίζοντες τοῦτον εἰς διψήφια τμήματα ἐκ δεξιῶν πρὸς τὰ ἀριστερὰ καὶ ἀντικαθιστῶντες διὰ μηδενικῶν τὰ δεξιὰ ἑκάστου ὑπάρχοντα ψηφία σχηματίζομεν τοὺς ἀριθμοὺς 190000, 6700 καὶ 84, οἱ ὁποῖοι ἔχουσιν ἄθροισμα τὸν 196784, ἤτοι $196784=190000+6700+84$.

Ἐπειδὴ δὲ

$$190000=19\times 10^4=19\times(\text{πολ. } 11+1)=\text{πολ. } 11+19$$
$$6700=67\times 10^2=67\times(\text{πολ. } 11+1)=\text{πολ. } 11+67$$
$$\text{καὶ } \quad 84 \quad = \quad 84$$

ἕπεται εὐκόλως ὅτι

$$196784 \qquad =\text{πολ. } 11+(19+67+84),$$

ὅθεν $196784-(19+67+84)=\text{πολ. } 11.$

ἤτοι οἱ ἀριθμοὶ 196784 καὶ $(19+67+84)$ διαφέρουσι κατὰ πολ-λ)σιον τοῦ 11, ἄρα (§ 78) διαιρούμενοι διὰ 11 δίδουσι τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον. ὅ. ἔ. δ.

ΣΗΜ. Ἂν τὸ πλῆθος τῶν ψηφίων εἶναι περιττόν, τὸ πρῶτον πρὸς τὰ ἀριστερὰ τμῆμα θὰ εἶναι μονοψήφιον, ἡ ἀπόδειξις ὅμως κατ' οὐδὲν μεταβάλλεται.

Πόρισμα. Ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν διψηφίων τμημάτων, εἰς τὰ ὁποῖα ἐκ δεξιῶν πρὸς τὰ ἀριστερὰ χωρίζεται ἀριθμός τις, εἶναι διαιρετὸν διὰ 11, καὶ ὁ ἀριθμὸς οὗτος διαιρεῖται διὰ 11 καὶ ἀντιστρόφως· Διότι, ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν διψηφίων τούτων τμημάτων διαιρούμενον διὰ 11 ἀφίνῃ ὑπόλοιπον 0, καὶ ὁ ἀριθμὸς διαιρούμενος διὰ 11 θὰ ἀφίσῃ ὑπόλοιπον 0, καὶ ἀντιστρόφως.

Ἀσκήσεις

91). Ποῖοι ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 567,985,1470,3948,15480 διαιροῦνται διὰ 2, ποῖοι διὰ 5 καὶ ποῖοι δι' ἀμφοτέρων τῶν ἀριθμῶν τούτων; Ποῖον τὸ ὑπόλοιπον ἑκάστου τῶν μὴ διαιρουμένων δι' ἑκατέρου τούτων;

92). Ποῖοι ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 1816,91950,4175,35900,8132 διαιροῦνται διὰ 4, ποῖοι διὰ 25 καὶ ποῖοι δι' ἀμφοτέρων; Ποῖον τὸ ὑπόλοιπον ἑκάστου τῶν μὴ διαιρουμένων δι' ἑκατέρου τῶν ἀριθμῶν 4 ἢ 25;

93). Ποῖοι ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 4760, 14375 καὶ 7442 διαιροῦνται διὰ 8 καὶ ποῖοι διὰ 125; Ποῖον τὸ ὑπόλοιπον ἑκάστου τῶν μὴ διαιρουμένων διὰ 8 ἢ 125;

94). Ποῖοι ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 7143,963,1274,4617 διαιροῦνται διὰ 3 καὶ ποῖοι διὰ 9; Ποῖον τὸ ὑπόλοιπον ἑκάστου τῶν μὴ διαιρουμένων δι' ἑκάστου τῶν ἀριθμῶν 3 ἢ 9;

95). Ποῖοι ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 21417,91220,91703,1611,2019 διαιροῦνται διὰ 11; Ποῖον τὸ ὑπόλοιπον τῆς διὰ 11 διαιρέσεως ἑκάστου τῶν ἄλλων;

Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι

96). Τὸ ἄθροισμα καὶ ἡ διαφορὰ δύο ἀρτίων ἢ δύο περιττῶν ἀριθμῶν εἶνε ἀριθμὸς ἄρτιος.

97). Τὸ ἄθροισμα δύο διαδοχικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἀριθμὸς περιττός.

98). Ἐὰν εἷς παράγων γινομένου εἶναι ἄρτιος, τὸ γινόμενον εἶναι ἀριθμὸς ἄρτιος.

99). Δύο ἀριθμοὶ ἔχοντες τὰ αὐτὰ ψηφία διαιρούμενοι διὰ 9 δίδουσι τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον. Ὁμοίως καὶ ἐὰν διαιρεθῶσι διὰ 3.

100). Ἐὰν τὸ ἄθροισμα τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων καὶ τοῦ τριπλασίου τοῦ ὅλου ἀριθμοῦ τῶν δεκάδων ἀριθμοῦ τινὸς εἶναι διαιρετὸν διὰ 7, καὶ ὁ ἀριθμὸς οὗτος διαιρεῖται διὰ 7.}

ΣΗΜ. Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν $10=7+3$ ἀποδεικνύομεν εὐκόλως ὅτι πᾶς ἀριθμὸς εἶναι πολ. 7 ηὐξημένον κατὰ τὸ εἰρημένον ἄθροισμα.

Δοκιμὴ διὰ τῶν ὑπολοίπων.

§ **86**. **Θεώρημα I**. — Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀθροίσματος δι' ἀριθμοῦ δὲν μεταβάλλεται, ἂν ἕκαστος τῶν προσθετέων αὐτοῦ ἀντικατασταθῇ διὰ τοῦ ὑπολοίπου τῆς διαιρέσεως αὐτοῦ διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.

Ἔστω τὸ ἄθροισμα $14+27+35$, τοῦ ὁποίου οἱ προσθετέοι διαιρούμενοι δι' ἀριθμοῦ τινὸς π. χ τοῦ 6 δίδουσιν ὑπόλοιπα κατὰ σειρὰν 2, 3,5. Λέγω ὅτι τὰ ἀθροίσματα $(14+27+35)$ καὶ $(2+3+5)$ διαιρούμενα διὰ τοῦ 6 ἀφίνουσι τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ $14=(6\times2)+2$, $27=(6\times4)+3$ καὶ $35=(6\times5)+5$, ἕπεται ὅτι

$$14+27+35=(6\times2)+(6\times4)+(6\times5)+(2+3+5).$$

ὅθεν $(14+27+35)-(2+3+5)=$πολ. 6, ἤτοι ἡ διαφορὰ τῶν ρηθέντων ἀθροισμάτων εἶναι πολ. 6· ἄρα (§ 78) τὰ ἀθροίσματα ταῦτα διαιρούμενα διὰ 6 δίδουσι τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον. ὅ. ἔ. δ.

§ **87**. **Δοκιμὴ τῆς προσθέσεως διὰ τῶν ὑπολοίπων**. — Κατὰ τὴν προηγουμένην ἰδιότητα ἄθροισμά τι π. χ. τὸ $12+47+68=127$ διαιρούμενον διὰ 9 ἀφίνει τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον, τὸ ὁποῖον ἀφίνει διὰ 9 διαιρούμενον καὶ τὸ ἄθροισμα $3+2+5=10$, ὅπερ προῆλθεν ἐξ ἐκείνου δι' ἀντικαταστάσεως ἑκάστου προσθετέου διὰ τοῦ ὑπολοίπου τῆς διαιρέσεως αὐτοῦ διὰ 9. Ἐντεῦθεν προκύπτει ἡ ἀκόλουθος μέθοδος δοκιμῆς τῆς προσθέσεως.

Εὑρίσκομεν τὰ ὑπόλοιπα τῆς διὰ τοῦ 9 διαιρέσεως ἑκάστου τῶν προσθετέων καὶ προσθέτομεν ταῦτα. Ἔπειτα εὑρίσκομεν τὸ ὑπόλοιπον τῆς διὰ 9 διαιρέσεως τοῦ εὑρεθέντος τούτου ἀθροίσματος τῶν ὑπολοίπων καὶ τοῦ δοκιμαζομένου ἀθροίσματος. Ἂν τὰ οὕτως εὑρισκόμενα ὑπόλοιπα δὲν εἶναι ἴσα, ἡ πρόσθεσις δὲν ἐγένετο ὀρθῶς.

§ 88. Θεώρημα ΙΙ.— Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως γινομένου δι' ἀριθμοῦ δὲν μεταβάλλεται, ἂν ἕκαστος παράγων αὐτοῦ ἀντικατασταθῇ διὰ τοῦ ὑπολοίπου τῆς διαιρέσεως αὐτοῦ διὰ τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ.

Ἔστω τὸ γινόμενον $12\times18\times44$, τοῦ ὁποίου οἱ παράγοντες διαιρούμενοι διά τινος ἀριθμοῦ, π. χ. τοῦ 7, δίδουσιν ὑπόλοιπα κατὰ σειρὰν 5, 4, 2. Λέγω ὅτι τὰ γινόμενα $12\times18\times44$ καὶ $5\times4\times2$ διαιρούμενα διὰ 7 δίδουσι τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ $12=(7\times1)+5=\text{πολ. }7+5$

$18=(7\times2)+4=\text{πολ. }7+4$

καὶ $44=(7\times6)+2=\text{πολ. }7+2$

ἕπεται ὅτι: $12\times18\times44=(\text{πολ. }7+5)\times(\text{πολ. }7+4)\times(\text{πολ. }7+2)$ (1)

Ἀλλὰ (§ 36) $(\text{πολ. }7+5)\times(\text{πολ. }7+4)=\text{πολ. }7\times\text{πολ. }7+5\text{ πολ. }7+4.\text{ πολ. }7+(5\times4)=\text{πολ. }7+(5\times4)$

καὶ $[\text{ πολ. }7+(5\times4)\,]\times(\text{πολ. }7+2)=\text{πολ. }7+(5\times4\times2)$·

Ἡ ἰσότης ἄρα (1) γίνεται $12\times18\times44=\text{πολ. }7+(5\times4\times2)$.

ὅθεν ἕπεται ὅτι: $(12\times18\times44)-(5\times4\times2)=\text{πολ. }7$, ἤτοι ἡ διαφορὰ τῶν ρηθέντων γινομένων εἶναι πολ. 7· ἄρα (§ 78) τὰ γινόμενα ταῦτα διαιρούμενα διὰ 7 δίδουσι τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον. ὅ. ἔ. δ.

§ 89. Δοκιμὴ τοῦ πολ]σμοῦ διὰ τῶν ὑπολοίπων.

Κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα γινόμενόν τι π. χ. τὸ $735\times47=34545$ διαιρούμενον διὰ 9 ἀφίνει τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον, τὸ ὁποῖον καὶ τὸ γινόμενον $6\times2=12$, τοῦ ὁποίου οἱ παράγοντες εἶναι ἀντιστοίχως ὑπόλοιπα τῆς διὰ 9 διαιρέσεως τῶν παραγόντων τοῦ α'. Ἐντεῦθεν ἕπεται ἡ ἑξῆς μέθοδος δοκιμῆς τοῦ πολ)σμοῦ.

Εὑρίσκομεν τὸ ὑπόλοιπον τῆς διὰ 9 διαιρέσεως ἑκατέρου τῶν παραγόντων καὶ τοῦ γινομένου. Καὶ τὰ μὲν δύο πρῶτα ὑπόλοιπα γράφομεν εἰς τὰς δύο ἄνω γωνίας σταυροῦ, τὸ δὲ γ' εἰς μίαν τῶν κάτω γωνιῶν αὐτοῦ. Τέλος εὑρίσκομεν τὸ ὑπόλοιπον τῆς διὰ 9 διαρέσεως τοῦ γινομένου τῶν εἰς τὰς ἄνω γωνίας ἀναγραφέντων ἀριθμῶν καὶ γράφομεν αὐτὸ εἰς τὴν ἄλλην κάτω γωνίαν. Ἐὰν οὕτως ἀναγραφῶσιν εἰς τὰς δύο κάτω γωνίας διάφοροι ἀλλήλων ἀριθμοί, ὁ πολ]σμὸς δὲν ἐγένετο ὀρθῶς.

6	2
3	3

ΣΗΜ. α΄ Ἐὰν τὸ σφάλμα εἶναι πολ.9, ἤτοι, ἂν τὸ ἀληθὲς γινόμενον καὶ τὸ εὑρεθὲν ἐσφαλμένον διαφέρουσι κατὰ πολ. 9, ἀμφότερα διὰ 9 διαιρούμενα δίδουσι τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον, κατ' ἀκολουθίαν ἡ δοκιμὴ δὲν ἀποκαλύπτει τὸ σφάλμα. Οὕτως ἐκτελοῦντες ἐσφαλμένως τὸν πολ]σμὸν 235×67, ὡς κάτωθι φαίνεται, εὑρίσκομεν γινόμενον 3055 τοῦ ὁποίου τὸ σφάλμα ἡ δοκιμὴ διὰ 9 δὲν ἀποκαλύπτει· πράγματι δὲ τὸ σφάλμα εἶναι πολ. 9, διότι ἀντὶ νὰ γράψωμεν 14100, ἐγράψαμεν 1410, ἤτοι τὸ σφάλμα εἶναι $14100-1410=1410 \times (10-1)=1410 \times 9$.

Ἡ δοκιμὴ διὰ τοῦ 11 ἀποκαλύπτει τὸ σφάλμα.

	δοκιμὴ διὰ 9	δοκιμὴ διὰ 11
235	1 | 4	4 | 1
67		
1645	4 | 4	4 | 8
1410 .		
3055		

ΣΗΜ. β΄. Εἶναι εὐνόητον ὅτι εἰς τὰς ἄνω ἐκτεθείσας δοκιμὰς ἠδυνάμεθα ἀντὶ τῶν ὑπολοίπων διὰ 9 νὰ μεταχειρισθῶμεν τὰ ὑπόλοιπα δι' οἱουδήποτε ἄλλου ἀριθμοῦ. Προτιμῶνται δὲ τὰ διὰ 9 ὑπόλοιπα διὰ τοὺς ἀκολούθους δύο λόγους. 1) Εἰς τὴν εὕρεσιν τοῦ ὑπολοίπου ἑκάστου ἀριθμοῦ διὰ 9 μετέχουσιν ὅλα τὰ ψηφία αὐτοῦ, κατ' ἀκολουθίαν δὲ ἡ δοκιμὴ δύναται νὰ δείξῃ σφάλμα τι, εἰς οἱονδήποτε ψηφίον καὶ ἂν ἔγεινε τοῦτο. 2) Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διὰ 9 διαιρέσεως ἀριθμοῦ εὑρίσκεται εὐκόλως.

Ἀσκήσεις,

Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

101). Τὸ γινόμενον περιττῶν ἀριθμῶν εἶναι ἀριθμὸς περιττός.

102). Τὸ γινόμενον τριῶν διαδοχικῶν ἀριθμῶν εἶνε διαιρετὸν διὰ 3.

103). Ἐὰν ἀριθμός τις α διαιρούμενος διὰ δ δίδῃ ὑπόλοιπον υ, δ α×μ καὶ δ υ×μ διαιρούμενοι διὰ δ δίδουσιν τὸ αὐτὸ ὑπόλοιον.

104). Ἐὰν α=πολ. δ+υ καὶ υ<δ, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι

$$α^μ - υ^μ = πολ.\ δ$$

105). Μαθητὴς πολ]ζων ἀριθμὸν ἐπὶ ἄλλον τριψήφιον ἀνέγραψεν ἐξ ἀπροσεξίας τὸ τελευταῖον ψηφίον τοῦ γ΄ μερικοῦ γινομένου ὑπὸ τὸ τελευταῖον τοῦ α΄ μερικοῦ γινομένου. Θὰ δείξῃ ἢ ὄχι τὸ σφάλμα ἡ διὰ 9 ἢ 11 δοκιμὴ καὶ διατί;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε΄.

ΜΕΓΙΣΤΟΣ ΚΟΙΝΟΣ ΔΙΑΙΡΕΤΗΣ ΚΑΙ ΕΛΑΧΙΣΤΟΝ ΚΟΙΝΟΝ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΟΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

§ 90. Κοινοὶ διαιρέται.—Μέγιστος κοινὸς διαιρέτης δεδομένων ἀριθμῶν.—Ὁ ἀριθμὸς 4 διαιρῶν ἀκριβῶς τοὺς ἀριθμοὺς 12, 20, 32, 40 καλεῖται κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν· ὁμοίως ὁ 2 εἶναι κ. δ. τῶν αὐτῶν ἀριθμῶν.

Γενικῶς: Κοινὸς διαιρέτης δοθέντων ἀριθμῶν καλεῖται πᾶς ἀριθμός, ὅστις διαιρεῖ πάντας τούτους ἀκριβῶς.

Οἱ ἀριθμοὶ 3, 8, 12, 15 πλὴν τῆς 1 οὐδένα ἄλλον κοινὸν διαιρέτην ἔχουσιν. Οὗτοι καλοῦνται πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Γενικῶς: Ἀριθμοί τινες λέγονται πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ἐὰν πλὴν τῆς 1 οὐδένα ἄλλον κοινὸν διαιρέτην ἔχωσι.

Τῶν ἀριθμῶν 16, 24, 40 κοινοὶ διαιρέται εἶναι ἀριθμοὶ 2, 4 καὶ 8· ὁ μεγαλύτερος τούτων 8 καλεῖται ἰδιαιτέρως μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν ῥηθέντων ἀριθμῶν.

Γενικῶς: Μέγιστος κοινὸς διαιρέτης δοθέντων ἀριθμῶν καλεῖται ὁ μεγαλύτερος ἐκ τῶν κοινῶν διαιρετῶν, ~~τοὺς ὁποίους ἔχουσιν οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι.~~

Εὐνόητον ὅτι οἱ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοὶ ἔχουσι μ. κ. δ. τὴν 1· καὶ ἀντιστρόφως οἱ ἔχοντες μ. κ. δ. τὴν 1 ἀριθμοὶ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Ἡ εὕρεσις τοῦ μ. κ. δ. δοθέντων ἀριθμῶν στηρίζεται ἐπὶ τῶν ἀκολούθων δύο θεωρημάτων.

§ 91. Θεώρημα Ι. Μέγιστος κ. διαιρέτης δοθέντων ἀριθμῶν εἶναι ὁ μικρότερος τούτων, ἂν οὗτος διαιρῇ πάντας τοὺς ἄλλους. Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ 6, 24, 30, 42, τῶν ὁποίων ὁ μικρότερος 6 διαιρεῖ πάντας τοὺς ἄλλους. Λέγω ὅτι ὁ 6 εἶναι μ. κ. δ. τῶν ῥηθέντων ἀριθμῶν.

Ἀπόδειξις. Ὁ 6 διαιρῶν τοὺς ἄλλους καὶ τὸν ἑαυτόν του εἶναι κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν 6, 24, 30 καὶ 42. Οὐδεὶς δὲ μεγαλύτερος τοῦ 6 ἀριθμὸς δύναται νὰ εἶναι κ. δ. τῶν αὐτῶν ἀριθμῶν, διότι οὐδεὶς τοιοῦτος ἀριθμὸς διαιρεῖ τὸν 6· εἶναι λοιπὸν ὁ 6 μ. κ. δ. τῶν ῥηθέντων ἀριθμῶν. ὅ. ἔ. δ.

§ **92. Θεώρημα. ΙΙ** - Οἱ κοινοὶ διαιρέται δοθέντων ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλονται, ἄν τινες ἤ τις τούτων ἀντικατασταθῇ διὰ τοῦ ὑπολοίπου τῆς διαιρέσεώς του διὰ τινος ἄλλου ἐξ αὐτῶν.

Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ 8, 20, 32, 46, τῶν ὁποίων οἱ 20 καὶ 46 διαιρούμενοι διὰ 8 ἀφίνουσιν ὑπόλοιπον 4 ὁ εἷς καὶ 6 ὁ ἄλλος.

Λέγω ὅτι οἱ ἀριθμοὶ 8 20 32 46 (1)
καὶ οἱ 8 4 32 6 (2)
ἔχουσι τοὺς αὐτοὺς κοινοὺς διαιρέτας.

Ἀπόδειξις. Ἐὰν ἀριθμός τις εἶναι κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν (1), οὗτος διαιρῶν τοὺς 8, 20 καὶ 46 θὰ διαιρῇ καὶ τοὺς 4 καὶ 6, διότι (§ 75) πᾶς ἀριθμὸς διαιρῶν διαιρετέον καὶ διαιρέτην ἀτελοῦς διαιρέσεως διαιρεῖ καὶ τὸ ὑπόλοιπον αὐτῆς. Θὰ εἶναι ἄρα οὗτος κοινὸς διαιρέτης καὶ τῶν ἀριθμῶν (2). Ἀντιστρόφως· ἐὰν ἀριθμός τις εἶναι κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν (2), οὗτος διαιρῶν τοὺς 8, 4 καὶ 6 θὰ διαιρῇ καὶ τοὺς 20 καὶ 46, διότι (§ 76) πᾶς ἀριθμὸς διαιρῶν τὸν διαιρέτην καὶ τὸ ὑπόλοιπον διαιρέσεως διαιρεῖ καὶ τὸν διαιρετέον.

Εἶναι ἄρα κοινὸς διαιρέτης καὶ τῶν ἀριθμῶν (1). Οἱ ἀριθμοὶ ὅθεν (1) καὶ (2) ἔχουσι τοὺς αὐτοὺς κοινοὺς διαιρέτας. ὅ. ἔ. δ.

§ **93. Εὕρεσις τοῦ μ. κ. διαιρέτου δύο ἀριθμῶν.** Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸν μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν 25 καὶ 675. Ἐπειδὴ ὁ 25 διαιρεῖ (§ 82 Πόρ) τὸν 675, κατὰ τὸ α΄ τῶν προηγουμένων θεωρημάτων, ὁ ζητούμενος μ. κ. δ. εἶναι 25.

Ἄς ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸν μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν 1192 καὶ 232. Ἔχοντες ὄψιν τὸ αὐτὸ θεώρημα (§91) ἀγόμεθα εἰς τὴν διαίρεσιν τοῦ 1192 διὰ τοῦ 232, ἵνα ἴδωμεν, ἂν ὁ μικρότερος διαιρῇ τὸν ἄλλον ἀκριβῶς· ἐκτελοῦντες τὴν διαίρεσιν ταύτην εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον 32· δὲν εἶναι λοιπὸν ὁ 232 κ. δ. τῶν δοθέντων ἀριθμῶν. Ἐπειδὴ ὅμως οἱ ἀριθμοὶ 1192 καὶ 232 ἀφ' ἑνὸς καὶ οἱ 32 καὶ 232 ἀφ' ἑτέρου ἔχουσι (§ 92) τοὺς αὐτοὺς κοινοὺς διαιρέτας, ἡ εὕρεσις τοῦ ζητουμένου μ. κ. δ. ἀνάγεται εἰς τὸν εὕρεσιν τοῦ μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν 32 καὶ 232. Ὁμοίως δὲ ἐργαζόμενοι ἐπ' αὐτῶν ἀνάγομεν τὸ ζήτημα εἰς τὴν εὕρεσιν τοῦ μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν 32 καὶ 8· ἐπειδὴ δὲ οὗτοι ἔχουσι μ. κ. δ. τὸν 8, ἕπεται ὅτι καὶ οἱ 1192 καὶ 232 ἔχουσι μ. κ. δ. τὸν 8.

Ἄρα : Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν μ. κ. δ. δύο ἀριθμῶν, διαιροῦμεν τὸν μεγαλύτερον διὰ τοῦ μικροτέρου, τοῦτον διὰ τοῦ εὑρεθέντος ὑπολοίπου, τὸν νέον διαιρέτην διὰ τοῦ νέου ὑπολοίπου καὶ οὕτω καθ᾽ ἑξῆς, μέχρις οὗ εὕρωμεν ὑπόλοιπον μηδέν. Ὁ διαιρέτης τῆς τελευταίας ταύτης διαιρέσεως εἶναι ὁ ζητούμενος μ. κ. δ.

Γράφοντες ἕκαστον πηλίκον ὑπεράνω τοῦ ἀντιστοίχου διαιρέτου δυνάμεθα νὰ διατάξωμεν τὴν πρᾶξιν ὡς ἀκολούθως.

	5	7	4
1192	232	32	8
32	8	0	

Σημ. Τὸ ὑπόλοιπον βαίνει ἀπὸ διαιρέσεως εἰς διαίρεσιν ἐλαττούμενον, διότι ὀφείλει νὰ εἶναι πάντοτε μικρότερον τοῦ διαιρέτου· κατ᾽ ἀνάγκην λοιπὸν ἡ προηγουμένη πρᾶξις τελειώνει πάντοτε. Ἂν δὲ συμβῇ ὁ διαιρέτης τῆς τελευταίας διαιρέσεως νὰ εἶναι 1, οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

§ 94. Εὕρεσις τοῦ μ. κ. δ. ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν.— Τῶν ἀριθμῶν 9, 27 καὶ 63 μ. κ. δ. εἶναι ὁ μικρότερος τούτων 9, διότι οὗτος διαιρεῖ πάντας τοὺς ἄλλους (§ 91).

Ἔστωσαν τώρα οἱ ἀριθμοὶ 240,1128,1232 τῶν ὁποίων ζητεῖται ὁ μ. κ. δ. Διαιροῦντες διὰ τοῦ μικροτέρου 240 τοὺς ἄλλους καὶ ἀντικαθιστῶντες ἕκαστον τούτων διὰ τοῦ ἀντιστοίχου ὑπολοίπου ἀνάγομεν (§ 92) τὸ ζήτημα εἰς τὴν εὕρεσιν τοῦ μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν 240,168,32 καὶ ἔπειτα ὁμοίως εἰς τὴν εὕρεσιν τοῦ μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν 16,8,32. Ἐπειδὴ δὲ οὗτοι ἔχουσι μ. κ. δ. 8, ἕπεται ὅτι οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ 240,1128,1232 ἔχουσι μ. κ. δ. τὸν 8. Ἡ πρᾶξις διατάσσεται οὕτω:

240	1128	1232	
240	168	32	
16	8	32	μ. κ. δ.=8
0	8	0	

Ἄρα: Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν μ. κ. δ. ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν, ἀφ᾽ οὗ γράψωμεν αὐτοὺς ἐπὶ ὁριζοντίου εὐθείας, διαιροῦμεν διὰ τοῦ μικροτέρου πάντας τοὺς ἄλλους καὶ γράφομεν ὑποκάτω ἑκάστου τούτων τὸ ἀντίστοιχον ὑπόλοιπον καὶ ὑπὸ τὸν διαιρέτην τὸν ἑαυτόν του. Ἐπαναλαμβάνομεν δὲ τὴν αὐτὴν πρᾶξιν ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν τῆς β′

σειρᾶς καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς, μέχρις οὗ εὕρωμεν σειρὰν ἀριθμῶν, τῶν ὁποίων ὁ μικρότερος διαιρεῖ πάντας τοὺς ἄλλους. Ὁ τελευταῖος οὗτος διαιρέτης εἶναι ὁ ζητούμενος μ. κ. δ.

ΣΗΜ. Ἐὰν εὕρωμεν μ. κ. δ. 1, οἱ ἀριθμοὶ θὰ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Ἀσκήσεις.

106). Νὰ εὑρεθῇ ὁ μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν 420 καὶ 315· ὁμοίως τῶν ἀριθμῶν 187, 493 καὶ 765.

107). Κηπουρὸς ἔχει 100 γαρύφαλλα, 160 τριαντάφυλλα καὶ 120 κρίνους. Πόσας τὸ πολὺ ὁμοιομόρφους ἀνθοδέσμας δύναται νὰ κάμῃ μὲ ὅλα αὐτά ; Πόσα δὲ ἄνθη ἀπὸ κάθε εἶδος θὰ ἔχῃ κάθε μία ;

108). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι οἱ κ. δ. δοθέντων ἀριθμῶν δὲν βλάπτονται, ἄν τις τούτων ἀντικατασταθῇ διὰ τοῦ ὑπολοίπου, τό ὁποῖον εὑρίσκομεν ἀφαιροῦντες ἐξ αὐτοῦ ἄλλον τινὰ τῶν δοθέντων.

109). Ὁ μ. κ. δ. δοθέντων ἀριθμῶν δὲν βλάπτεται, ἄν τινες τούτων ἀντικατασταθῶσι διὰ τοῦ μ. κ. δ. αὐτῶν. Ποία μέθοδος εὑρέσεως τοῦ μ. κ. δ. πολλῶν ἀριθμῶν προκύπτει ἐντεῦθεν ;

110) Ὁ μ. κ. δ. δύο ἀριθμῶν εἶναι 6, τὰ δὲ πηλίκα τῶν διαδοχικῶν διαιρέσεων διὰ τῶν ὁποίων εὑρίσκεται οὗτος εἶναι κατὰ σειρὰν 3, 2, 5, 4. Ποῖοι εἶναι οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι ;

Ἰδιότητες τοῦ μ. κ. δ. δοθέντων ἀριθμῶν.

95. Θεώρημα I.—Ἐὰν ἀριθμὸς διαιρῇ ἄλλους θὰ διαιρῇ καὶ τὸν μ. κ. δ. αὐτῶν. Καὶ ἀντιστρόφως : Ἐὰν ἀριθμὸς διαιρῇ τὸν μ. κ. δ. δοθέντων ἀριθμῶν, θὰ διαιρῇ καὶ τοὺς ἀριθμοὺς τούτους.

Ἀπόδειξις α'). Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ 42,72,102 καὶ μ. κ. δ. αὐτῶν ὁ 6 εὑρισκόμενος, ὅπως κάτωθι φαίνεται

42	72	102
42	30	18
6	12	18
6	0	0

Ἔστω δὲ δ εἷς κοινὸς διαιρέτης τῶν δοθέντων ἀριθμῶν· οὗτος θὰ διαιρῇ καὶ τοὺς ἀριθμοὺς ἑκάστης τῶν ἀκολούθων σειρῶν, διότι οἱ κοινοὶ διαιρέται δοθέντων ἀριθμῶν δὲν βλάπτονται, ἄν τινες τούτων ἀντικατασταθῶσιν ἕκαστος διὰ τοῦ ὑπολοίπου τῆς διαιρέσεως αὐτοῦ δι' ἄλλου τινὸς ἐξ αὐτῶν (§ 92). Θὰ διαιρῇ λοιπὸν ὁ δ καὶ τὸν 6, ὅστις ἀνήκει εἰς τὴν γ'. σειράν. ὅ. ἔ. δ.

β'). Ἀντιστρόφως τυχὼν τοῦ 6 διαιρέτης π. χ. ὁ 3, διαιρεῖ πάντα τὰ πολ]σια τοῦ 6, ἄρα καὶ τοὺς 42, 72, 102, οἱ ὁποῖοι ὡς διαιρούμενοι ὑπὸ τοῦ 6 εἶναι πολλαπλάσια αὐτοῦ. ὅ. ἔ. δ.

Πόρισμα. Κοινοὶ διαιρέται δοθέντων ἀριθμῶν εἶναι πάντες οἱ διαιρέται τοῦ μ. κ. δ. αὐτῶν καὶ μόνον αὐτοί.

§ **96. Θεώρημα ΙΙ.**—Ἐὰν δοθέντες ἀριθμοὶ πολ]σθῶσι πάντες ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, καὶ ὁ μ. κ. δ. αὐτῶν πολ]ζεται ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ 80,206,262 τῶν ὁποίων μ. κ. δ. εἶναι ὁ 2 εὑρεθείς, ὡς παραπλεύρως φαίνεται. Πολ]ζομένων πάντων τῶν ἀριθμῶν τούτων ἐπί τινα ἀριθμὸν λ προκύπτουσιν οἱ ἀριθμοὶ 80×λ, 206×λ, 262×λ· λέγω ὅτι μ. κ. δ. αὐτῶν εἶναι ὁ 2×λ.

80,	206,	262
80,	46,	22
14,	2,	22
0,	2,	0

Ἀπόδειξις. Ἀναζητοῦντες τὸν μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν 80×λ, 206×λ, 262×λ, παρατηροῦμεν πρῶτον ὅτι, ἐπειδὴ $80<206<262$ θὰ εἶναι (§ 18 δ') καὶ $80\times\lambda<206\times\lambda<262\times\lambda$, ἤτοι ὁ 80×λ εἶναι μικρότερος τούτων. Κατ' ἀκολουθίαν (§ 94) ἕκαστος τῶν ἄλλων θὰ ἀντικατασταθῇ διὰ τοῦ ὑπολοίπου τῆς διαιρέσεως αὐτοῦ διὰ 80×λ. Ἐπειδὴ δὲ οἱ ἀριθμοὶ 206 καὶ 262 διαιρούμενοι διὰ 80 ἀφίνουσιν ἀντιστοίχως ὑπόλοιπα 46 καὶ 22, οἱ ἀριθμοὶ 206×λ καὶ 262×λ διαιρούμενοι διὰ 80×λ θὰ ἀφίνωσιν ὑπόλοιπα ἀντιστοίχως 46×λ, 22×λ (§ 56). Οὕτως ἡ εὕρεσις τοῦ μ. κ. δ. τῶν ῥηθέντων γινομένων ἀνάγεται εἰς τὴν εὕρεσιν τοῦ μ. κ. δ. τῶν γινομένων 80×λ, 46×λ καὶ 22×λ. Ὁμοίως καὶ ἐπ' αὐτῶν σκεπτόμενοι ἀνάγομεν τὸ ζήτημα εἰς τὴν εὕρεσιν τοῦ μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν 14×λ, 2×λ, 22×λ.

Ἐπειδὴ δὲ ὁ μικρότερος τούτων (2×λ) διαιρεῖ (§ 57) τοὺς ἄλλους, οὗτος εἶναι ὁ ζητούμενος μ. κ. δ. ὅ. ἔ. δ. Ἡ πρᾶξις διατάσσεται οὕτω :

$$\left.\begin{array}{ccc} 80\times\lambda & 206\times\lambda & 262\times\lambda \\ 80\times\lambda & 46\times\lambda & 22\times\lambda \\ 14\times\lambda & 2\times\lambda & 22\times\lambda \\ 0 & 2\times\lambda & 0 \end{array}\right\}\ \mu.\ \kappa.\ \delta. = 2\times\lambda$$

§ 97. Θεώρημα III.— Ἐὰν δοθέντες ἀριθμοὶ διαιρεθῶσι πάντες διὰ τοῦ αὐτοῦ κ. δ. αὐτῶν, καὶ ὁ μ. κ. δ. αὐτῶν διαιρεῖται διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.

Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ 400, 1030 καὶ 1310 τῶν ὁποίων μ. κ. δ. εἶναι ὁ 10. Διαιροῦντες τούτους διά τινος κ. δ. αὐτῶν π. χ. διὰ τοῦ 5, εὑρίσκομεν πηλίκα τοὺς ἀριθμούς, 80, 206 καὶ 262. Λέγω ὅτι μ. κ. δ. τούτων εἶναι ὁ 10 : 5=2.

Ἀπόδειξις. Κατὰ τὴν προηγουμένην ἰδιότητα, ἐὰν πολ]σθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ 80, 206 καὶ 262 ἐπὶ 5, ὁ μ. κ. δ. αὐτῶν Δ πολ]ζεται ἐπὶ 5, ἤτοι οἱ ἀριθμοὶ $80\times5=400$, $206\times5=1030$ καὶ $262\times5=1310$ ἔχουσι μ. κ. δ. τὸν $Δ\times5$. Ἐπειδὴ δὲ οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι ἕνα μόνον ἔχουσι μ. κ. δ. τὸν 10, ἕπεται ὅτι πρέπει νὰ εἶναι $Δ\times5=10$, ὅθεν $Δ=2$. ὅ. ἔ. δ.

Πόρισμα I. Ἐὰν ἀριθμοί τινες διαιρεθῶσι διὰ τοῦ μ. κ. δ. αὐτῶν, τὰ προκύπτοντα πηλίκα εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Πόρισμα II. (ἀντίστροφον τοῦ I). Ἐὰν τὰ πηλίκα τῆς διαιρέσεως δοθέντων ἀριθμῶν διά τινος κ. δ. αὐτῶν εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ὁ κοινὸς οὗτος διαιρέτης εἶναι ὁ μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν τούτων.

Ἀσκήσεις.

111) Γνωστοῦ ὄντος ὅτι οἱ ἀριθμοὶ 3 καὶ 5 εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, νὰ εὑρεθῇ ἀμέσως ὁ μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν 18 καὶ 30.

112) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τῶν ἀριθμῶν $2\times λ$, $3\times λ$, $5\times λ$, μ. κ. δ. εἶναι ὁ λ.

113) Ὁ μ. κ. δ. δύο ἀριθμῶν εἶναι 127, ὁ δὲ μεγαλύτερος τῶν ἀριθμῶν τούτων εἶναι 1524. Ποῖος εἶναι ὁ μικρότερος;

114) Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοὶ ἔχοντες ἄθροισμα 30 καὶ μ. κ. δ. τὸν 6.

Παριστῶντες διὰ π καὶ π′ τὰ πηλίκα τῆς διαιρέσεως τῶν ζητουμένων ἀριθμῶν διὰ 6, εὑρίσκομεν εὐκόλως ὅτι $π+π'=5$. Οὕτω δέον νὰ εὕρωμεν δύο ἀριθμοὺς ἔχοντας ἄθροισμα 5 καὶ μ. κ. δ. τὸν 1. κτλ.

Ἰδιότητες τῶν πρώτων πρὸς ἀλλήλους ἀριθμῶν.

§ **98. Θεώρημα I.**— Ἐὰν ἀριθμὸς διαιρῇ τὸ γινόμενον δύο ἄλλων καὶ εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν ἕνα τούτων, θὰ διαιρῇ τὸν ἄλλον (1).

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ γινόμενον $17 \times A$ διαιρεῖται διὰ τοῦ 6, ὁ ὁποῖος εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν 17. Λέγω ὅτι ὁ 6 διαιρεῖ τὸν Α.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ οἱ ἀριθμοὶ 17 καὶ 6 ὡς πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔχουσι μ. κ. δ. τὴν 1, οἱ ἀριθμοὶ $17 \times A$ καὶ $6 \times A$ θὰ ἔχωσι (§ 96) μ. κ. δ. $1 \times A = A$. Ὁ ἀριθμὸς δὲ 6 διαιρῶν τὸν $17 \times A$ ἐξ ὑποθέσεως καὶ τὸν $6 \times A$ ὡς πολ]σιόν του θὰ διαιρῇ (§ 95) καὶ τὸν μ. κ. δ. αὐτῶν Α. ὅ. ἔ. δ.

§ **99. Θεώρημα II.** - Ἐὰν ἀριθμὸς εἶναι διαιρετὸς δι᾿ ἄλλων πρώτων πρὸς ἀλλήλους ἀνὰ δύο, εἶναι διαιρετὸς καὶ διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν.

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἀριθμός τις Α διαιρεῖται δι᾿ ἑκάστου τῶν ἀριθμῶτ 2, 3, 5, οἱ ὁποῖοι εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀνὰ δύο· λέγω ὅτι ὁ Α θὰ διαιρῆται καὶ ὑπὸ τοῦ γινομένου αὐτῶν $2 \times 3 \times 5$.

Ἀπόδειξις. Ἂν $A:2=\Pi$, θὰ εἶναι καὶ $A=2 \times \Pi$ (1).

Ἐπειδὴ ὁ 3 διαιρεῖ ἐξ ὑποθέσεως τὸν Α, ἤτοι τὸ γινόμενον $2 \times \Pi$ καὶ εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν 2, θὰ διαιρῇ (§ 98) τὸν Π. Ἂν δὲ $\Pi:3=\Pi'$, θὰ εἶναι καὶ $\Pi=3 \times \Pi'$ (2).

Ἐπειδὴ δὲ ὁ 5 διαιρεῖ τὸν Α ἢ $2 \times \Pi$ καὶ εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν 2, διαιρεῖ τὸν Π ἢ τὸ γινόμενον $3 \times \Pi'$· ἐπειδὴ δὲ εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν 3, θὰ διαιρῇ καὶ τὸν Π΄Καὶ ἂν $\Pi':5=\Pi''$, θὰ εἶναι $\Pi'=5 \times \Pi''$ (3).

Πολ]ζοντες δὲ κατὰ μέλη τὰς ἰσότητας (1), (2), (3) εὑρίσκομεν ὅτι $A \times \Pi \times \Pi' = 2 \times 3 \times 5 \times \Pi \times \Pi' \times \Pi''$· ἐκ ταύτης δέ, διαιρουμένων ἀμφοτέρων τῶν μελῶν διὰ $\Pi \times \Pi'$, προκύπτει ἡ ἰσότης $A=(2 \times 3 \times 5 \times).\Pi''$. Ἐκ ταύτης δὲ καθίσταται φανερὸν ὅτι ὁ Α εἶναι πολ]σιον καὶ κατ᾿ ἀκολουθίαν διαιρετὸς διὰ τοῦ γινομένου $(2 \times 3 \times 5)$. ὅ. ἔ. δ.

§ **100. Ἐφαρμογὴ τοῦ προηγουμένου θεωρή-**

(1) Τὸ θεώρημα τοῦτο ὀφείλεται εἰς τὸν ἕλληνα μαθηματικὸν Εὐκλείδην (300 π. Χ.). Οὗτος ἵδρυσεν ἐν Ἀλεξανδρείᾳ ἐπὶ Πτολεμαίου τοῦ Α΄ τὴν ἐνδοξοτέραν Ἑλληνικὴν μαθηματικὴν Σχολὴν καὶ συνέταξε πλὴν ἄλλων καὶ τὰ περίφημα «στοιχεῖα» ἐν τοῖς βιβλίοις VII, VIII, IX τῶν ὁποίων πραγματεύεται περὶ ἀριθμῶν.

ματος εἰς τὴν εὕρεσιν διαφόρων χαρακτήρων διαιρετότητος.— Ἡ προηγουμένη ἰδιότης διευκολύνει τὴν ἀνεύρεσιν χαρακτήρων διαιρετότητος διὰ παντὸς ἀριθμοῦ, ὅστις ἀναλύεται εἰς γινόμενον ἀριθμῶν πρώτων πρὸς ἀλλήλους ἀνὰ δύο. Οὕτω π. χ. ἐπειδὴ $6=2\times3$, οἱ δὲ 2 καὶ 3 εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ἕπεται ὅτι:

Πᾶς ἀριθμὸς διαιρετὸς διὰ 2 καὶ 3 εἶναι διαιρετὸς καὶ διὰ 6. Εἶναι δὲ φανερὸν ὅτι καὶ πᾶς ἀριθμὸς διαιρετὸς διὰ 6, ἤτοι τῆς μορφῆς $6\times\Pi$ ἢ $2\times3\times\Pi$ εἶναι διαιρετὸς καὶ διὰ 2 καὶ 3.

Ὥστε: Ἵνα ἀριθμός τις διαιρῆται διὰ 6, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ διαιρῆται διὰ 2 καὶ 3. Ὁμοίως σκεπτόμενοι κατανοοῦμεν ὅτι:

Ἵνα ἀριθμός τις διαιρῆται διὰ 30, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ διαιρῆται διὰ 2 καὶ 3 καὶ 5.

Ἀσκήσεις.

115). Ποῖοι ἀριθμοὶ διαιροῦνται διὰ 12;

116). Ποῖοι ἀριθμοὶ διαιροῦνται διὰ 18;

117). Ποῖοι ἀριθμοὶ διαιροῦνται διὰ 20;

118). Ποῖοι ἀριθμοὶ διαιροῦνται διὰ 90;

119). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι, ἐὰν τὰ ψηφία ἀριθμοῦ τινὸς Α ἔχωσιν ἄθροισμα Κ, τὰ δὲ ψηφία τοῦ $\mathrm{A}\times2$ ἔχωσιν ἄθροισμα $\Lambda\times2$, ἡ διαφορὰ τῶν ἀριθμῶν Κ καὶ Λ εἶναι πολ. 9.

§ 101. Κοινὰ πολ]σια, ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον ἀριθμῶν.—Ὁ ἀριθμὸς 12 διαιρούμενος ὑπὸ ἑνὸς ἑκάστου τῶν ἀριθμῶν 2, 3 καὶ 4 εἶναι (§ 71) πολλαπλάσιον ἑκάστου τούτων· ἕνεκα τούτου καλεῖται κοινὸν πολ]σιον αὐτῶν. Ὁμοίως οἱ ἀριθμοὶ $12\times2=24$, $12\times3=36$, $12\times4=48$ κλπ. εἶναι κοινὰ πολ]σια τῶν 2, 3 καὶ 4.

Γενικῶς: Κοινὸν πολ]σιον δοθέντων ἀριθμῶν καλεῖται πᾶς ἀριθμός, ὅστις εἶναι διαιρετὸς δι᾽ αὐτῶν.

Δοθέντων ἀριθμῶν τινῶν π. χ. τῶν 3,5,6 τὸ γινόμενον $3\times5\times6$ εἶναι προφανῶς κοινὸν πολ]σιον αὐτῶν· καὶ πᾶν δὲ πολ]σιον τοῦ γινομένου τούτου εἶναι ἐπίσης (§ 73) κοινὸν πολ]σιον τῶν αὐτῶν ἀριθμῶν.

Ἄρα: Δοθέντες ἀριθμοὶ ἔχουσιν ἄπειρα κοινὰ πολλαπλάσια. Ἐπειδὴ δὲ οὐδὲν τούτων δύναται νὰ εἶναι μικρότερον ἑκάστου τῶν δοθέντων ἀριθμῶν, ἕπεται ὅτι ὑπάρχει κοινόν τι πολ]σιον μικρότερον πάντων τῶν ἄλλων. Οὕτω π. χ. δεδομένων τῶν ἀριθμῶν 2,3 καὶ 4 βλέπομεν εὐκόλως ὅτι ὁ 12 εἶναι κοινὸν πολ]σιον αὐτῶν καὶ οὐδὲν ἄλλο μικρότερον τοῦ 12 κοινὸν πολ]σιον ἔχουσιν οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι, Διὰ τοῦτο ὁ 12 λέγεται ἐλάχιστον κοινὸν πολ]σιον τῶν ἀριθμῶν 2,3 καὶ 4.

Γενικῶς: Ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον δοθέντων ἀριθμῶν καλεῖται τὸ μικρότερον ἐκ τῶν κοινῶν πολ]σίων, τὰ ὁποῖα ἔχουσιν οὗτοι.

§ 102. Εὕρεσις τοῦ ἐλ. κ. πολλαπλασίου δοθέντων ἀριθμῶν.—α'), Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἐ. κ. π. τῶν ἀριθμῶν 2,4,5 καὶ 20, τῶν ὁποίων ὁ μεγαλύτερος 20 διαιρεῖται δι' ὅλων τῶν ἄλλων. Ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς ὡς διαιρούμενος ὑπὸ τοῦ 20 θὰ εἶναι εἷς τῶν ἀριθμῶν $20, 20\times2, 20\times3$ κλπ. Ἐπειδὴ δὲ ὁ μικρότερος τούτων 20 διαιρεῖται δι' ἑκάστου τῶν ἄλλων δεδομένων ἀριθμῶν 2,4 καὶ 5, ἕπεται ὅτι οὗτος εἶναι τὸ ζητούμενον ἐ. κ. π. τῶν ἀριθμῶν 2,4,5,20.

β'). Ἔστω τώρα ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἐ. κ. π. τῶν ἀριθμῶν 5, 8 καὶ 10. Ἐπειδὴ ἐκ τῶν ἀριθμῶν

$10\times1=10,\ 10\times2=20,\ 10\times3=30,\ 10\times4=40,\ 10\times5=50$ κλπ.

οἱ μὲν 10,20 καὶ 30 δὲν διαιροῦνται διὰ τῶν δύο ἄλλων ἀριθμῶν 5 καὶ 8, ὁ δὲ μετ' αὐτοὺς $10\times4=40$ διαιρεῖται δι' ἐκείνων καὶ διὰ τοῦ 10, ἕπεται ὅτι οὗτος (δηλ. ὁ 40) εἶναι τὸ ζητούμενον ἐ. κ. π. τῶν ἀριθμῶν 5, 8 καὶ 10.

Ἄρα: Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐλ. κ. π. δοθέντων ἀριθμῶν πολ]ζομεν τὸν μεγαλύτερον τούτων κατὰ σειρὰν ἐπὶ 1,2,3 κλπ. μέχρις οὗ εὕρωμεν γινόμενον διαιρετὸν διὰ πάντων τῶν ἄλλων δοθέντων ἀριθμῶν. Τὸ γινόμενον τοῦτο εἶναι τὸ ζητούμενον ἐλ. κ. π. τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

Ἀσκήσεις.

120). Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐλ. κ. π. τῶν ἀριθμῶν 8 καὶ 12 καὶ τὸ ἐ. κ. π. τῶν ἀριθμῶν 6,8 καὶ 10.

121). Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐλ. κ. π. τῶν ἀριθμῶν 3,4,5,6.

122). Ἀτμόπλοιον ἀναχωρεῖ ἀπὸ λιμένα ἀνὰ πᾶσαν 5ην ἡμέραν, ἄλλο ἀνὰ πᾶσαν 4ην καὶ τρίτον ἀνὰ πᾶσαν 8ην ἡμέραν. Ἐὰν κατά τινα ἡμέραν συμπέσῃ νὰ ἀναχωρήσωσι καὶ τὰ τρία ἀτμόπλοια, μετὰ πόσας ἡμέρας θὰ γίνῃ πάλιν ἡ πρώτη ταὐτόχρονος ἀναχώρησις αὐτῶν;

Ἰδιότητες τοῦ ἐ. κ. π. δοθέντων ἀριθμῶν.

§ **103. Θεώρημα I.**—Ἐλάχιστον κοινὸν πολ]σιον ἀριθμῶν πρώτων πρὸς ἀλλήλους ἀνὰ δύο εἶναι τὸ γινόμενον αὐτῶν.

Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ 3,4 καὶ 7, οἱ ὁποῖοι εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀνὰ δύο· λέγω ὅτι ἐ. κ. π. αὐτῶν εἶναι τὸ γινόμενον αὐτῶν $3\times4\times7$.

Ἀπόδειξις. Πᾶν κοινὸν πολ]σιον τῶν ἀριθμῶν τούτων ὡς διαιρούμενον δι᾿ ἑνὸς ἑκάστου τούτων θὰ διαιρῆται (§ 99) καὶ διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν $3\times4\times7$. Ἀλλὰ ἀπὸ τοὺς ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι διαιροῦνται διὰ τοῦ γινομένου $3\times4\times7$, μικρότερος εἶναι ὁ $3\times4\times7$· αὐτὸς ἄρα εἶναι τὸ ἐ. κ. π. τῶν ἀριθμῶν 3,4 καὶ 7. ὅ. ἔ. δ.

§ **104. Θεώρημα II.**—Πᾶν πολ]σιον τοῦ ἐ. κ. π. δοθέντων ἀριθμῶν εἶναι κοινὸν πολ]σιον τῶν ἀριθμῶν τούτων. Καὶ ἀντιστρόφως: Πᾶν κοινὸν πολλαπλάσιον δοθέντων ἀριθμῶν εἶναι πολ]σιον τοῦ ἐ. κ. π. αὐτῶν.

α΄). Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ 5,8 καὶ 10, τῶν ὁποίων ἐ. κ. π. εἶναι 40· λέγω ὅτι πᾶν πολ]σιον τοῦ 40, ἤτοι πᾶς ἀριθμὸς τῆς μορφῆς $40\times\lambda$ εἶναι κοινὸν πολ]σιον τῶν ἀριθμῶν 5,8 καὶ 10.

Ἀπόδειξις. Ἕκαστος τῶν ἀριθμῶν 5,8,10 διαιρῶν τὸν 40 διαιρεῖ καὶ τὸν $40\times\lambda$ (§ 73)· εἶναι ἄρα ὁ $40\times\lambda$ κοινὸν πολ]σιον τῶν ἀριθμῶν τούτων. ὅ. ἔ. δ.

β΄). Ἔστω Π τυχὼν κοινὸν πολ]σιον τῶν ἀριθμῶν 5,8,10. Λέγω ὅτι ὁ Π. εἶναι πολ. 40.

Ἀπόδειξις. Κατὰ τὴν ὑπόθεσιν εἶναι $40<\Pi$· ἂν δὲ ὁ Π δὲν ἦτο πολ. 40, ἡ διαίρεσις τοῦ Π διὰ 40 θὰ ἄφινεν ὑπόλοιπόν τι, ἔστω υ, τὸ ὁποῖον θὰ ἦτο μικρότερον τοῦ 40. Ἀλλ᾿ ἕκαστος τῶν ἀριθμῶν 5,8,10 διαιρῶν τὸν Π καὶ τὸν 40 ἐξ ὑποθέσεως, θὰ διῄρει (§ 75) καὶ τὸν υ, ὁ ὁποῖος θὰ ἦτο διὰ τοῦτο κοινὸν πολ]σιον τῶν αὐτῶν ἀριθμῶν 5,8,10· ἀλλ᾿ ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει, ἐπειδὴ $\upsilon<40$, ὁ 40 δὲν θὰ ἦτο ἐ. κ. π. τῶν ἀριθμῶν 5,8,10, ὅπερ ἄτοπον. Ὥστε ὁ Π εἶναι πολ. 40. ὅ. ἔ. δ.

ΣΗΜ. Ὁ Π εἶναι ἢ δὲν εἶναι πολ. 40. Παραδεχθέντες ὅτι ὁ Π δὲν εἶναι πολ. 40 ἐφθάσαμεν εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι ὁ 40 δὲν εἶναι ἐ. κ. π. τῶν ἀριθμῶν 5, 8, 10, ὅπερ εἶναι ψευδὲς (ἄτοπον). Διὰ τοῦτο τὴν πρότασιν «ὁ Π δὲν εἶναι πολ. 40» χαρακτηρίζομεν ὡς ψευδῆ· ἀληθεύει ἄρα ὅτι ὁ Π εἶναι πολ. 40. Ἡ τοιαύτη ἀποδεικτικὴ μέθοδος καλεῖται μέθοδος τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς.

Πόρισμα. Κοινὰ πολλαπλάσια δοθέντων ἀριθμῶν εἶναι πάντα τὰ πολ]σια τοῦ ἐ. κ. π. αὐτῶν καὶ μόνον αὐτά.

Ἀσκήσεις.

123). Νὰ εὑρεθῶσιν ὅλα τὰ μικρότερα τοῦ 200 κ. π. τῶν ἀριθμῶν 5,6,15.

124). Νὰ εὑρεθῶσιν ὅλα τὰ διψήφια κ. π. τῶν ἀριθμῶν 3,6,9.

125). Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἐλάχιστος ἀπὸ τοὺς ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι ἀφίνουσιν ὑπόλοιπον 1 εἴτε διὰ 3 εἴτε διὰ 5 εἴτε διὰ 6 διαιρεθῶσιν.

127). Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἐλάχιστος ἀπὸ τοὺς ἀριθμούς, ἕκαστος τῶν ὁποίων διαιρούμενος διὰ 3 ἀφίνει ὑπόλοιπον 2, διὰ 4 ἀφίνει ὑπόλοιπον 3 καὶ διὰ 5 ὑπόλοιπον 4.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΣΤ′.

ΠΡΩΤΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

§ **105. Πρῶτοι καὶ σύνθετοι ἀριθμοί.**— Ἐπειδὴ ἕκαστος τῶν ἀριθμῶν 2, 3, 5, 7 δὲν ἔχει ἄλλον διαιρέτην πλὴν τοῦ ἑαυτοῦ του καὶ τῆς 1, καλεῖται πρῶτος ἀριθμός.

Γενικῶς: Πᾶς ἀριθμός, ὅστις δὲν ἔχει ἄλλον διαιρέτην πλὴν τοῦ ἑαυτοῦ του καὶ τῆς μονάδος, καλεῖται πρῶτος ἀριθμός.

ΣΗΜ. Δὲν πρέπει νὰ συγχέωνται οἱ πρῶτοι καθ' ἑαυτοὺς πρὸς τοὺς πρώτους πρὸς ἀλλήλους. Οἱ ἀριθμοὶ 6, 8, 9 εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ἐν ᾧ οὐδεὶς τούτων εἶναι πρῶτος καθ' ἑαυτόν.

Τῶν ἀριθμῶν 4, 6, 9, 12 οὐδεὶς εἶναι πρῶτος· καλεῖται δὲ ἕκαστος τούτων σύνθετος ἀριθμός.

Γενικῶς: Πᾶς μὴ πρῶτος ἀριθμὸς καλεῖται σύνθετος ἀριθμός.

§ **106. Κόσκινον τοῦ Ἐρατοσθένους.**— Διὰ νὰ εὕρωμεν ὅλους τοὺς πρώτους ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι εἶναι μικρότεροι δοθέντος ἀριθμοῦ π. χ. τοῦ 500, μεταχειριζόμεθα τὴν ἀκόλουθον μέθοδον, ἡ ὁποία εἶναι γνωστὴ ὑπὸ τὸ ὄνομα κόσκινον τοῦ Ἐρατοσθένους(¹). Γράφομεν κατὰ τὴν φυσικὴν αὐτῶν σειρὰν πάντας τοὺς μὴ ὑπερβαίνοντας τὸν 500 ἀριθμούς. Ἔπειτα παρατηροῦμεν ὅτι ὁ 2 εἶναι ἀριθμὸς πρῶτος, τὰ πολλαπλάσια ὅμως αὐτοῦ εἶναι ἀριθμοὶ σύνθετοι καὶ πρέπει νὰ διαγραφῶσι· πρὸς τοῦτο ἀπὸ τοῦ 3 ἀρχόμενοι μετροῦμεν τοὺς ἀριθμοὺς ἀνὰ 2 καὶ διαγράφομεν πάντα δεύτερον. Μετὰ τοῦτο διαγράφομεν τὰ πολ]σια τοῦ 3 ἀρχόμενοι ἀπὸ τοῦ 3×3=9, (διότι τὸ γινόμενον 3×2=6 διεγράφη ὡς πολ. τοῦ 2) καὶ μετροῦντες τοὺς ἀκολούθους ἀνὰ 3 διαγράφομεν πάντα τρίτον. Ἐπειδὴ τα πολ]σια τοῦ 4 διεγράφησαν ἤδη ὡς πολ]σια τοῦ 2, θὰ διαγράψωμεν τὰ μὴ διαγραφέντα πολλαπλάσια τοῦ 5· πρὸς τοῦτο διαγράφομεν πρῶτον τὸ γινόμενον 5×5=25 καὶ μετροῦντες τοὺς ἀκολούθους ἀνὰ 5 διαγράφομεν πάντα πέμπτον. Ἔπειτα διαγράφομεν οὕτω τὰ μὴ διαγραφέντα πολ]σια ἑκάστου τῶν πρώτων ἀριθμῶν 7,11 13,.....19. Μετὰ ταῦτα πρέπει νὰ διαγράψωμεν τὰ μὴ διαγραφέντα πολ]σια τοῦ 23. Ἐπειδὴ δὲ τὸ πρῶτον μὴ διαγραφὲν πολ]σιον αὐτοῦ 23×23=529 δὲν περιέχεται εἰς τὸν πίνακα ἡμῶν, ἕπεται ὅτι ἡ ἐργασία ἐτελείωσεν καὶ ὅσοι ἀριθμοὶ τοῦ πίνακος δὲν διεγράφησαν, εἶναι ὅλοι πρῶτοι.

Πίναξ τῶν μικροτέρων τοῦ 500 πρώτων ἀριθμῶν.

1	37	89	151	223	281	359	433
2	41	97	57	27	83	67	39
3	43	101	63	29	93	73	43
5	47	03	67	33	307	79	49
7	53	07	73	39	11	83	57
11	59	09	79	41	13	89	61
13	61	13	81	51	17	397	63
17	67	27	91	57	31	401	67
19	71	31	93	63	37	09	79
23	73	37	97	69	47	19	87
29	79	39	199	71	49	21	91
31	83	49	211	77	53	31	419

(1) Ἕλλην ἐκ Κυρήνης τῆς Ἀφρικῆς (275 π. Χ.), ἐχρημάτισεν Ἔφορος τῆς ἐν Ἀλεξανδρείᾳ περιφήμου βιβλιοθήκης καὶ ἐμέτρησε τὸ μεταξὺ Συήνης καὶ Ἀλεξανδρείας μεσημβρινὸν τόξον.

Ἄσκησις.

127). Ἐὰν ἀριθμὸς δὲν διαιρῆται δι' οὐδενὸς τῶν πρώτων ἀριθμῶν, ἑκάστου τῶν ὁποίων τὸ τετράγωνον εἶναι μικρότερον αὐτοῦ, ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἶναι πρῶτος.

§ **107. Δεύτερος διαιρέτης ἀριθμοῦ.**—Τοῦ ἀριθμοῦ 12 διαιρέται εἶναι οἱ ἀριθμοὶ 1, 2, 3, 4, 6, 12· τούτων ὁ 2, ὁ ὁποῖος εἶναι ἀμέσως μεγαλύτερος τῆς μονάδος, καλεῖται δεύτερος διαιρέτης τοῦ 12. Ὁμοίως ἐκ τῶν διαιρετῶν 1,3,5,15 τοῦ 15 ὁ 3 καλεῖται δεύτερος διαιρέτης αὐτοῦ.

Γενικῶς: Δεύτερος διαιρέτης ἀριθμοῦ καλεῖται ὁ ἀμέσως μεγαλύτερος τῆς μονάδος διαιρέτης αὐτοῦ.

Ὁ β' διαιρέτης δ παντὸς ἀριθμοῦ Α εἶναι ἀριθμὸς πρῶτος. Διότι, ἂν ὁ δ ἦτο σύνθετος, θὰ εἶχε διαιρέτην δ' διάφορον τῆς μονάδος καὶ μικρότερόν του. Ὁ δ' διαιρῶν τὸν δ θὰ διῄρει καὶ τὸν Α ὡς πολ]σιον τοῦ δ, κατ' ἀκολουθίαν ὁ δ δὲν θὰ ἦτο δεύτερος διαιρέτης τοῦ Α, ὡς ὑπετέθη. Ἐκ τούτου ἕπεται εὐκόλως ὅτι πᾶς πρῶτος ἀριθμὸς ἔχει β' διαιρέτην τὸν ἑαυτόν του.

Ἰδιότητες τῶν πρώτων ἀριθμῶν.

§ **108. Θεώρημα Ι.**—Ἐκ τῶν διαιρετῶν ἀριθμοῦ εἷς τοὐλάχιστον εἶναι ἀριθμὸς πρῶτος.

Ἀπόδειξις. Ἕκαστος ἀριθμὸς ἔχει δεύτερον διαιρέτην, ὅστις, ὡς προείπομεν, εἶναι ἀριθμὸς πρῶτος.

§ **109. Θεώρημα ΙΙ.**—Ἐκ τῶν κοινῶν διαιρετῶν ἀριθμῶν μὴ πρώτων πρὸς ἀλλήλους εἷς τοὐλάχιστον εἶναι ἀριθμὸς πρῶτος.

Ἔστωσαν οἱ μὴ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοὶ 24, 32, 48. Λέγω ὅτι εἷς τοὐλάχιστον τῶν κοινῶν αὐτῶν διαιρετῶν εἶναι ἀριθμὸς πρῶτος.

Ἀπόδειξις. Ὁ μ. κ. δ. 8 τῶν δοθέντων ἀριθμῶν ἔχει δεύτερον διαιρέτην τὸν πρῶτον ἀριθμὸν 2. Οὗτος διαιρῶν τὸν 8 εἶναι (§ 95) κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν 24, 32, 48· ἔχουσι λοιπὸν οὗτοι κοινόν τινα διαιρέτην ἀριθμὸν πρῶτον. ὅ. ἔ. δ.

ΣΗΜ. Ἐὰν ὁ μ. κ. δ. τῶν θεωρουμένων ἀριθμῶν εἶναι πρῶτος, τὸ θεώρημα εἶναι ἀποδεδειγμένον.

§ **110. Θεώρημα III.**—Ἐὰν ἀριθμὸς πρῶτος δὲν διαιρῇ ἄλλον, εἶναι πρῶτος πρὸς αὐτόν.

Ἔστω ὁ πρῶτος ἀριθμὸς 11 καὶ ἄλλος μὴ διαιρούμενος ὑπ' αὐτοῦ π.χ. ὁ 18· λέγω ὅτι οἱ ἀριθμοὶ 11 καὶ 18 εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Ἀπόδειξις. Ἐκ τῶν διαφόρων τοῦ 1 καὶ 11 ἀριθμῶν οὐδεὶς εἶναι κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν 11 καὶ 18, διότι οὐδεὶς διαιρεῖ τὸν 11. Ἐκ δὲ τῶν δύο τούτων 1 καὶ 11 ἀριθμῶν, ὁ 11 μὴ διαιρῶν τὸν 18 δὲν εἶναι κοινὸς διαιρέτης τῶν 11 καὶ 18. Ὥστε μόνον ὁ ἀριθμὸς 1 εἶναι κ. δ. τῶν ἀριθμῶν 11 καὶ 18· εἶναι ἄρα οὗτοι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. ὅ. ἔ. δ.

§ **111. Θεώρημα IV.**—Ἐὰν ἀριθμὸς πρῶτος διαιρῇ γινόμενόν τι, θὰ διαιρῇ ἕνα τοὐλάχιστον τῶν παραγόντων αὐτοῦ.

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ πρῶτος ἀριθμὸς 7 διαιρεῖ τὸ γινόμενον $\alpha\times\beta\times\gamma$. Λέγω ὅτι ὁ 7 θὰ διαιρῇ ἕνα τοὐλάχιστον τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου τούτου

Ἀπόδειξις. Ἐὰν ὁ 7 διαιρῇ τὸν α, τὸ θεώρημα εἶναι ἀποδεδειγμένον· ἐὰν δὲ δὲν διαιρῇ τὸν α, θὰ εἶναι (§ 110) πρῶτος πρὸς αὐτόν· ἀλλ' ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει, ἐπειδὴ $\alpha\times\beta\times\gamma=\alpha\times(\beta\times\gamma)$, ὁ 7 διαιρῶν τὸ γινόμενον $\alpha\times(\beta\times\gamma)$ καὶ ἐπειδὴ εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν α, θὰ διαιρῇ (§ 98) τὸ ἄλλον παράγοντα $(\beta\times\gamma)$· καὶ ἂν μὲν διαιρῇ τὸν β τὸ θεώρημα ἀπεδείχθη, ἂν δὲ δὲν διαιρῇ τὸν β, θὰ εἶναι πρῶτος πρὸς αὐτόν, ὅτε ὀφείλει νὰ διαιρῇ τὸν γ. Ὥστε ἐξάπαντος ὁ 7 θὰ διαιρῇ ἕνα τοὐλάχιστον τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου $\alpha\times\beta\times\gamma$. ὅ. ἔ. δ.

Πόρισμα I. Ἐὰν ἀριθμὸς πρῶτος διαιρῇ γινόμενον παραγόντων πρώτων, θὰ εἶναι ἴσος πρὸς ἕνα τοὐλάχιστον τῶν παραγόντων αὐτοῦ.

Πόρισμα II. Ἐὰν ἀριθμὸς πρῶτος διαιρῇ δύναμιν ἀριθμοῦ τινός, θὰ διαιρῇ καὶ τὸν ἀριθμὸν τοῦτον.

Πόρισμα III. Ἐὰν ἀριθμοί τινες εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, καὶ αἱ τυχοῦσαι δυνάμεις αὐτῶν εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. (§ 109).

§ **112. Θεώρημα V.**—Ἐὰν δύο γινόμενα παραγόντων πρώτων εἶναι ἴσα, οἱ παράγοντες αὐτῶν εἶναι οἱ αὐτοὶ καὶ ἕκαστος τούτων περιέχεται ἰσάκις καὶ εἰς τὰ δύο γινόμενα.

Ἀπόδειξις. α'). Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι $\alpha\times\beta\times\gamma=A\times B\times\Gamma$ καὶ ὅτι ἕκαστος τῶν ἀριθμῶν α,β,γ, Α,Β,Γ, εἶναι ἀριθμὸς πρῶτος. Λέγω ὅτι τὰ δύο ταῦτα ἴσα γινόμενα ἔχουσι τοὺς αὐτοὺς πρώτους παράγοντας. Καὶ ὄντως· ἕκαστος παράγων τοῦ α' γινομένου διαιρῶν τὸ $\alpha\times\beta\times\gamma$ διαιρεῖ καὶ τὸ $A\times B\times\Gamma$, ἄρα θὰ εἶναι ἴσος πρὸς ἕνα ἀπὸ τοὺς παράγοντας τοῦ β' γινομένου (§ 111 Πόρ. Ι). Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν ὅτι καὶ πᾶς παράγων τοῦ β' γινομένου ἰσοῦται πρὸς ἕνα ἀπὸ τοὺς παράγοντας τοῦ α'. Ἔχουσι λοιπὸν τὰ δύο ταῦτα γινόμενα τοὺς αὐτοὺς πρώτους παράγοντας. ὅ. ἔ. δ.

β)' Ἄς ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι δύο ἴσα γινόμενα περιέχουσι τοὺς πρώτους παράγοντας α, β, γ καὶ ὅτι παράγων τις τούτων π. χ. ὁ α περιέχεται τρὶς μὲν εἰς τὸ πρῶτον δὶς δὲ εἰς τὸ δεύτερον γινόμενον, ἤτοι $\alpha\times\alpha\times\alpha\times\beta\times\gamma=\alpha\times\alpha\times\beta\times\gamma$. Διαιροῦντες ἀμφότερα τὰ ἴσα ταῦτα γινόμενα διὰ τοῦ ἀριθμοῦ $\alpha\times\alpha$ εὑρίσκομεν $\alpha\times\beta\times\gamma=\beta\times\gamma$, ὅπερ ἄτοπον, διότι τὸ β' γινόμενον δὲν περιέχει τὸν πρῶτον παράγοντα α τοῦ α' γινομένου. Εἶναι λοιπὸν ἀδύνατον νὰ περιέχηται παράγων τις περισσοτέρας φορὰς εἰς τὸ ἓν ἀπὸ τὰ ἴσα γινόμενα· κατ' ἀκολουθίαν ἕκαστος περιέχεται ἰσάκις καὶ εἰς τὰ δύο ἴσα γινόμενα. ὅ ἔ.δ.

*§ **113. Θεώρημα VI.** Τὸ πλῆθος τῶν πρώτων ἀριθμῶν εἶναι ἄπειρον (1)

Ἀπόδειξις. Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι οἱ πρῶτοι ἀριθμοὶ εἶναι περιωρισμένοι τὸ πλῆθος καὶ ὅτι τ εἶναι ὁ μεγαλύτερος τούτων. Ἐὰν εἰς τὸ γινόμενον $1\times2\times3\times5\times7\times11\times\ldots\ldots\times\tau$ ὅλων τῶν πρώτων τούτων ἀριθμῶν προστεθῇ μία μονὰς καὶ κληθῇ Α τὸ προκύπτον ἄθροισμα, θὰ εἶναι προφανῶς $A-(1\times2\times3\times5\times\ldots\times\tau)=1$. Ἔστω δὲ δ ὁ δεύτερος διαιρέτης τοῦ Α, ὁ ὁποῖος εἶναι ἀριθμὸς πρῶτος· ἐὰν ὁ δ ἦτο ἴσος πρὸς ἕνα ἀπὸ τοὺς παράγοντας τοῦ γινομένου $1\times2\times3\times5\times\ldots\times\tau$, θὰ διῄρει τοῦτο, ἐπειδὴ δὲ διαιρεῖ καὶ τὸν Α, θὰ διῄρει καὶ τὴν διαφορὰν αὐτῶν 1, ὅπερ ἄτοπον, διότι ὁ δ ὡς δεύτερος διαιρέτης ἄλλου εἶναι μεγαλύτερος τῆς 1. Εἶναι λοιπὸν ὁ πρῶτος ἀριθμὸς δ μεγαλύτερος τοῦ τ, ὅσον δήποτε μέγας καὶ ἂν εἶναι ὁ τ. Ὥστε ὁσουσδήποτε πρώτους ἀριθμοὺς εἰς περιωρισμένον πλῆθος καὶ ἂν ἀναγράψωμεν,

(1). Καὶ τὸ θεώρημα τοῦτο ὀφείλεται εἰς τὸν Εὐκλείδην.

εὑρίσκομεν πλὴν αὐτῶν καὶ ἄλλον. Ἄρα τὸ πλῆθος τῶν ἀριθμῶν τούτων εἶναι ἄπειρον. ὅ. ἔ. δ,

Ἀσκήσεις.

128). Πρὸς ποίους ἐκ τῶν ἀριθμῶν 1,2,3. . . . .30 εἶναι πρῶτος ὁ 5;

129). Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ λ μικροτέρας τοῦ 40 τὸ γινόμενον $5\times\lambda$ εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ 7;

130). Διὰ ποίας ἐν γένει τιμὰς τοῦ α ὁ ἀριθμὸς α^5 εἶναι διαιρετὸς διὰ 11;

131). Διὰ ποίων πρώτων ἀριθμῶν διαιρεῖται τὸ γινόμενον $5\times13\times19$;

132). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἀριθμὸς πρῶτος οὐδεμίαν δύναμιν ἀριθμοῦ μικροτέρου του διαιρεῖ.

133). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι, ἐὰν α καὶ β εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, οἱ ἀριθμοὶ $\alpha\times\beta$ καὶ $\alpha+\beta$ εἶναι ἐπίσης πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Τὸ αὐτὸ καὶ περὶ τῶν ἀριθμῶν $\alpha-\beta$ καὶ $\alpha\times\beta$.

Ἀνάλυσις ἀριθμοῦ εἰς γινόμενον παραγόντων πρώτων

114. Θεώρημα. Πᾶς ἀριθμὸς ἀναλύεται εἰς γινόμενον παραγόντων πρώτων.

Ἀπόδειξις. α'). Ἔστω τυχὸν σύνθετος ἀριθμὸς π.χ. ὁ 168, ὁ ὁποῖος ἔχει δεύτερον διαιρέτην τὸν 2. Ἐπειδὴ $168:2=84$ ἕπεται ὅτι

$$168=2\times84. \qquad (1)$$

Διαιροῦντες δὲ καὶ τὸν 84 διὰ τοῦ δευτέρου διαιρέτου 2, εὑρίσκομεν ὅτι $84:2=42$, ὅθεν $84=2\times42$ καὶ ἑπομένος ἡ ἰσότης (1) γίνεται

$$168=2\times2\times42 \qquad (2)$$

Ἐπειδὴ δὲ ὁμοίως $42=2\times21$, αὕτη γίνεται

$$168=2\times2\times2\times21. \qquad (3)$$

Διαιροῦντες ἤδη τὸν παράγοντα 21 διὰ τοῦ δευτέρου αὐτοῦ διαιρέτου 3 εὑρίσκομεν ὅτι $21=3\times7$ καὶ ἑπομένως ἡ προηγουμένη ἰσότης (3) γίνεται

$$168=2\times2\times2\times3\times7, \qquad (4)$$

ἤτοι ὁ 168 ἀνελύθη εἰς γινόμενον, τοῦ ὁποίου πάντες οἱ παράγοντες εἶναι πρῶτοι ἀριθμοί. Παρατηροῦντες ὅτι ὁ τελευταῖος παράγων ἑκάστης τῶν ἰσοτήτων (1), (2), (3), βαίνει ἐλαττούμενος, κατανοοῦμεν ὅτι, μὲ οἱονδήποτε σύνθετον ἀριθμὸν καὶ ἂν ἐργασθῶμεν, θὰ καταλήξωμεν εἰς γινόμενον, τοῦ ὁποίου ὁ τελευταῖος παράγων δὲν θὰ ἔχῃ διαιρέτην μικρότερον τοῦ ἑαυτοῦ του καὶ τῆς 1 διάφορον, ἤτοι θὰ εἶναι ἀριθμὸς πρῶτος, Ἐπειδὴ δὲ οἱ ἄλλοι παράγοντες τοῦ προκύπτοντος γινομένου εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι, ὡς δεύτεροι διαιρέται ἀριθμῶν, ἕπεται ὅτι πᾶς σύνθετος ἀριθμὸς ἀναλύεται εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντων.

β') Ὁ τυχὼν πρῶτος ἀριθμὸς π. χ. ὁ 7 ἔχει δεύτερον διαιρέτην τὸν 7· ἐκ δὲ τῆς ἰσότητος $7:7=1$ ἕπεται ὅτι $7=7\times1$, ἤτοι ὁ 7 ἀναλύεται εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντων. Ἀπεδείχθη λοιπὸν τὸ θεώρημα διὰ πάντα ἀριθμόν.

§ **115. Μέθοδοι ἀναλύσεως ἀριθμοῦ εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντων.** α'). Ἔχοντες πρὸ ὀφθαλμῶν τὸν τρόπον, κατὰ τὸν ὁποῖον ἐγένετο ἡ ἀπόδειξις τοῦ προηγουμένου θεωρήματος συνάγομεν εὐκόλως τὸν ἀκόλουθον κανόνα ἀναλύσεως ἀριθμοῦ εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντων.

Διὰ νὰ ἀναλύσωμεν ἀριθμὸν εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντων, διαιροῦμεν αὐτὸν διὰ τοῦ δευτέρου διαιρέτου αὐτοῦ, τὸ εὑρεθὲν πηλίκον διαιροῦμεν ἐπίσης διὰ τοῦ δευτέρου διαιρέτου του καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς, μέχρις οὗ εὕρωμεν πηλίκον 1. Τὸ γινόμενον, ὅπερ, ἔχει παράγοντας μόνον τοὺς διαιρέτας τῶν διαιρέσεων τούτων εἶναι τὸ ζητούμενον.

Διάταξις τῆς πράξεως

168	2	
84	2	$168=2\times2\times2\times3\times7$
42	2	ἢ $168=2^3\times3\times7$
21	3	
7	7	
1		

ΣΗΜ. Ἐπειδὴ $2\times2\times2=2^3$, ἡ ἰσότης $168=2\times2\times2\times3\times7$ γράφεται συνήθως διὰ τὸ συντομώτερον οὕτω $168=2^3\times3\times7$.

β'). Ἐὰν ὁ πρὸς ἀνάλυσιν δοθεὶς ἀριθμὸς ἀναλύεται εὐκόλως εἰς γινόμενον ἄλλων παραγόντων, ἡ ἀνωτέρω ἐργασία ἁπλοποιεῖται ἀναλυομένου χωριστὰ ἑκάστου τῶν παραγόντων τούτων εἰς γινόμενον πρώτων ἀριθμῶν. Οὕτως, ἐπειδὴ $720=8\times90=8\times9\times10$ καὶ $8=2^3$, $9=3^2$, $10=2\times5$, ἕπεται ὅτι $720=2^3\times3^2\times2\times5=2^4\times3^2\times5$.

Καθ' οἱανδήποτε δὲ τῶν μεθόδων τούτων καὶ ἂν ἀναλύσωμεν ἀριθμόν τινα Α, τὸ αὐτὸ εὑρίσκομεν ἐξαγόμενον, διότι τὰ κατὰ τὴν μίαν καὶ τὴν ἄλλην μέθοδον εὑρισκόμενα γινόμενα, ὡς ἴσα πρὸς τὸν Α, ὀφείλουσι νὰ εἶναι καὶ πρὸς ἄλληλα ἴσα· οἱ παράγοντες ἄρα αὐτῶν θὰ εἶναι οἱ αὐτοὶ καὶ ἕκαστος περιέχεται ἰσάκις εἰς ἀμφότερα (§ 112).

Ἀσκήσεις.

134) Νὰ ἀναλυθῶσιν εἰς γινόμενα πρώτων παραγόντων οἱ ἀριθμοὶ 280, 2520, 1650, 3465 καὶ 8346.

135) Διὰ τίνων πρώτων ἀριθμῶν διαιρεῖται τὸ γινόμενον $2^3 \times 5^2 \times 7$;

136) Διὰ ποίαν τιμὴν τοῦ α τὸ πρώτων παραγόντων γινόμενον $2^3 \times \alpha^2 \times 7^4$ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ $2^3 \times 11^2 \times 7^4$;

137) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους οὐδένα ἔχουσι πρῶτον παράγοντα κοινόν.

Ἐφαρμογαὶ τῆς ἀναλύσεως τῶν ἀριθμῶν εἰς γινόμενα παραγόντων πρώτων.

§ **116. Α΄. Γινόμενον ἀριθμῶν ἀναλελυμένων εἰς πρώτους παράγοντας.** Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι
$A=2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7$, $B=2 \times 3^4 \times 5^2 \times 11$ καὶ $\Gamma=2^4 \times 3^3 \times 7^3 \times 13$.
Ἐὰν πολ]μεν τὰς ἰσότητας ταύτας κατὰ μέλη, εὑρίσκομεν ὅτι
$A \times B \times \Gamma=(2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7) \times (2 \times 3^4 \times 5^2 \times 11) \times (2^4 \times 3^3 \times 7^3 \times 13)$
ἢ (§ 50)
$$A \times B \times \Gamma=2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 2 \times 3^4 \times 5^2 \times 11 \times 2^4 \times 3^3 \times 7^3 \times 13 \quad (1)$$
Ἐπειδὴ δὲ $2^3 \times 2 \times 2^4=2^8$, $3^2 \times 3^4 \times 3^3=3^9$, $5 \times 5^2=5^3$, $7 \times 7^3=7^4$, αὕτη γίνεται $A \times B \times \Gamma=2^8 \times 3^9 \times 5^3 \times 7^4 \times 11 \times 13$.

Ἄρα: Τὸ γινόμενον ἀριθμῶν ἀναλελυμένων εἰς τοὺς πρώτους αὐτῶν παράγοντας περιέχει πάντας τοὺς πρώτους αὐτῶν παράγοντας καὶ μόνον αὐτούς, ἕκαστον δὲ μὲ ἐκθέτην ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν, τοὺς ὁποίους ὁ παράγων οὗτος ἔχει εἰς τοὺς ἀριθμοὺς τούτους.

§ **117. Β΄. Δυνάμεις ἀριθμῶν ἀναλελυμένων εἰς πρώτους παράγοντας.** Ἔστω ὅτι $A=2^3 \times 3^2 \times 5$· ὑψοῦντες εἰς τὸ τετράγωνον ἀμφότερα τὰ μέλη εὑρίσκομεν ὅτι
$A^2=2^{3 \times 2} \times 3^{2 \times 2} \times 5^2$ (§ 67, 66). Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι

$A^3 = 2^{3\times 3} \times 3^{2\times 3} \times 5^3$ καὶ γενικῶς $A^\nu = 2^{3\times\nu} \times 3^{2\times\nu} \times 5^\nu$.

Ἄρα: Ἀριθμὸς ἀναλελυμένος εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντων ὑψοῦται εἰς τὴν 2αν, 3ην, 4ην. . . . . . . .νην δύναμιν, ἐὰν οἱ ἐκθέται πάντων τῶν πρώτων παραγόντων αὐτοῦ πολ]σθῶσιν ἐπὶ 2, 3, 4 . . . . . . ν.

Ἀναλύοντες ἀριθμὸν εἰς τοὺς πρώτους αὐτοῦ παράγοντας δυνάμεθα νὰ διακρίνωμεν, ἂν οὗτος εἶναι τετράγωνον, κύβος, τετάρτη καὶ γενικῶς νυοστὴ δύναμις ἄλλου, ὡς ἐκ τοῦ ἀκολούθου θεωρήματος καθίσταται φανερόν.

Θεώρημα I. Ἐὰν οἱ ἐκθέται πάντων τῶν πρώτων παραγόντων ἀριθμοῦ εἶναι διαιρετοὶ διὰ 2, ἢ 3 ἢ 4 καὶ γενικῶς διὰ ν, ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἶναι τετράγωνον κύβος, τετάρτη καὶ γενικῶς νυοστὴ δύναμις ἄλλου· καὶ ἀντιστρόφως.

α΄) Ἔστω ὅτι $A = 2^6 \times 3^8 \times 5^4 \times 7^2$, ἤτοι οἱ ἐκθέται πάντων τῶν πρώτων παραγόντων τοῦ Α εἶναι διαιρετοὶ διὰ τοῦ 2. Λέγω ὅτι ὁ Α εἶναι τετράγωνον ἄλλου (τέλειον τετράγωνον).

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ $(2^3 \times 3^4 \times 5^2 \times 7)^2 = 2^6 \times 3^8 \times 5^4 \times 7^2$ καὶ $A = 2^6 \times 3^8 \times 5^4 \times 7^2$, ἕπεται ὅτι $A = (2^3 \times 3^4 \times 5^2 \times 7)^2$ ἤτοι ὁ Α εἶναι τετράγωνον τοῦ $2^3 \times 3^4 \times 5^2 \times 7$. ὅ. ἔ. δ.

β΄) Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἀριθμός τις Δ εἶναι τετράγωνον ἄλλου Ε ἤτοι $\Delta = E^2$. Λέγω ὅτι οἱ ἐκθέται πάντων τῶν πρώτων παραγόντων τοῦ Δ εἶναι ἄρτιοι.

Ἀπόδειξις. Ἔστω ὅτι $E = 2^2 \times 3^5 \times 7$· ὑψοῦντες εἰς τὸ τετράγωνον ἀμφότερα τὰ μέλη εὑρίσκομεν ὅτι $E^2 = 2^{2\times 2} \times 3^{5\times 2} \times 7^2$.

Ἐκ ταύτης δὲ καὶ τῆς $\Delta = E^2$ προκύπτει ὅτι $\Delta = 2^{2\times 2} \times 3^{5\times 2} \times 7^2$, ὅθεν βλέπομεν ὅτι οἱ ἐκθέται πάντων τῶν πρώτων παραγόντων τοῦ Δ εἶναι πολ)σια τοῦ 2, ἤτοι ἀριθμοὶ ἄρτιοι. ὅ. ἔ. δ. Ὁμοίως γίνεται ἡ ἀπόδειξις καί διὰ πᾶσαν ἄλλην δύναμιν.

§ 118. Γ΄. Ρίζαι ἀριθμῶν, οἵτινες εἶναι δυνάμεις ἄλλων.—Ἐπειδὴ $5^2 = 25$, ὁ 5 λέγεται τετραγωνικὴ ἢ δευτέρα ῥίζα τοῦ 25.

Ὥστε: Τετραγωνικὴ ἢ δευτέρα ῥίζα ἀριθμοῦ καλεῖται ὁ ἀριθμός, ὅστις ἔχει αὐτὸν ὡς τετράγωνον.

Ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα ἀριθμοῦ τινός α σημειοῦται οὕτω : $\sqrt{\alpha}$.

Ἐπειδὴ $2^3=8$, ὁ 2 καλεῖται κυβικὴ ἢ τρίτη ῥίζα τοῦ 8. Ὥστε : Κυβικὴ ἢ τρίτη ῥίζα ἀριθμοῦ καλεῖται ὁ ἀριθμός, ὅστις ἔχει αὐτὸν ὡς κύβον. Ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ α σημειοῦται οὕτω $\sqrt[3]{\alpha}$. Γενικῶς δέ : Νυοστὴ ῥίζα ἀριθμοῦ καλεῖται ὁ ἀριθμός, ὅστις ἔχει αὐτὸν ὡς νυοστὴν δύναμιν.

Οὕτως, ἂν $\alpha^\nu=\beta$, ὁ α εἶναι νυοστὴ ῥίζα τοῦ β. Ἡ νυοστὴ ῥίζα τοῦ β σημειοῦται οὕτω $\sqrt[\nu]{\beta}$.

ΣΗΜ. Τὸ σημεῖον $\sqrt{\ }$ καλεῖται ριζικόν, ὁ ὑπ' αὐτὸ τιθέμενος ἀριθμός καλεῖται ὑπόρριζον, ὁ δὲ ἐντὸς τῆς γωνίας του δείκτης τῆς ῥίζης. Ὁ δείκτης 2 οὐδέποτε γράφεται. Ἡ εὕρεσις ῥίζης τινὸς καλεῖται ἐξαγωγὴ τῆς ῥίζης ταύτης. Ἐὰν ἀριθμός τις εἶναι δύναμις ἄλλου, εὑρίσκομεν τὴν ἀντίστοιχον ῥίζαν κατὰ τὸν τρόπον, τόν ὁποῖον διδάσκει τὸ ἀκόλουθον θεώρημα.

Θεώρημα. Ἐὰν οἱ ἐκθέται πάντων τῶν πρώτων παραγόντων ἀριθμοῦ εἶναι διαιρετοὶ διὰ 2,3,.......ν, ἡ τετραγωνικὴ κυβική......, νυοστὴ ῥίζα αὐτοῦ εὑρίσκεται, ἂν διαιρεθῶσιν οἱ ἐκθέται οὗτοι πάντες διὰ 2. 3,.......ν.

Ἔστω ὅτι $A=2^6\times3^4\times5^2$ ἤτοι οἱ ἐκθέται πάντων τῶν πρώτων παραγόντων τοῦ Α εἶναι ἄρτιοι· λέγω ὅτι $\sqrt{A}=2^3\times3^2\times5$.

Ἀπόδειξις. Ὑψοῦντες τὸν $2^3\times3^2\times5$ εἰς τὸ τετράγωνον εὑρίσκομεν (§ 117) ὅτι $(2^3\times3^2\times5)^2=2^6\times3^4\times5^2$. Ἐπειδὴ δὲ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι καὶ $A=2^6\times3^4\times5^2$, ἕπεται ὅτι $(2^3\times3^2\times5^2)=A$, ἤτοι ὁ $2^3\times3^2\times5$ ἔχει τετράγωνον τὸν Α, ἄρα $\sqrt{A}=2^3\times3^2\times5$. ὅ. ἔ. δ.

Ὁμοίως γίνεται ἡ ἀπόδειξις καὶ διὰ πᾶσαν ἄλλην ῥίζαν.

Ἀσκήσεις.

138) Ποῖοι ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς

$$5^4\times3^2\times5^3\times7^2,\ 3^4\times5^2\times7^6,\ 2^2\times3^6\times11^2.$$

εἶναι τετράγωνα ἄλλων ; Ποῖαι δὲ αἱ τετραγωνικαὶ ῥίζαι αὐτῶν ;

138) Ποῖος ἀπὸ τοὺς δύο ἀριθμοὺς $2^6\times3^3\times5^{12}$, $3^9\times5^3\times7^6\times11^2$ εἶναι κύβος ἄλλου, καὶ ποία ἡ κυβικὴ ῥίζα αὐτοῦ ;

140). Ποῖοι ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 5832,44100,450 εἶναι τετράγωνα καί ποῖοι κύβοι ἄλλων; Ποῖαι δὲ αἱ ἀντίστοιχοι ῥίζαι αὐτῶν;

141). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ διπλάσιον τετραγώνου δὲν εἶναι τετράγωνον.

142). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ τριπλάσιον κύβου δὲν εἶναι κύβος.

Δ΄. Γενικὸς Χαρακτὴρ διαιρετότητος.

§ **119. Θεώρημα Ι.**—Ἐὰν ἀριθμός τις Α διαιρῆται ὑπὸ ἄλλου Β, θὰ περιέχῃ πάντας τοὺς πρώτους παράγοντας τοῦ Β καὶ οὐδένα μὲ μικρότερον ἐκθέτην.

Ἀπόδειξις. Ἐὰν κληθῇ Π τὸ πηλίκον Α:Β. θὰ εἶναι $Α=Β\times Π$. Ἐὰν δὲ ὑποθέσωμεν ὅτι $Β=2^3\times 5^2\times 7$ καὶ $Π=2\times 3^2$, ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται

$$Α=(2^3\times 5^2\times 7)\times(2\times 3^2)=2^4\times 5^2\times 3^2\times 7$$

Ἐκ τῆς ἰσότητος ταύτης φαίνεται ὅτι:

α΄) Ὅλοι οἱ παράγοντες τοῦ Β εἶναι καὶ τοῦ Α παράγοντες.

β΄) Ἐκ τῶν παραγόντων τοῦ Β ὁ μὲν 2, ὁ ὁποῖος εἶναι καὶ τοῦ Π παράγων, ἔχει εἰς τὸν Α μεγαλύτερον ἢ εἰς τὸν Β ἐκθέτην, ὁ καθ᾿ εἷς δὲ ἀπὸ τοὺς 5 καὶ 7, οἱ ὁποῖοι δὲν εἶναι παράγοντες τοῦ Π, ἔχει τὸν αὐτὸν εἰς τὸν Α καὶ Β ἐκθέτην. Περιέχει λοιπὸν ὁ Α ὅλους τοὺς παράγοντας τοῦ Β καὶ οὐδένα μὲ μικρότερον ἐκθέτην.

§ **120. Θεώρημα ΙΙ.** (ἀντίστροφον τοῦ Ι). Ἐὰν ἀριθμός τις Α περιέχῃ πάντας τοὺς πρώτους παράγοντας ἄλλου Β καὶ οὐδένα μὲ μικρότερον ἐκθέτην, ὁ Α εἶναι διαιρετὸς ὑπὸ τοῦ Β. Ἔστω ὅτι $Α=2^3\times 3^4\times 5^2\times 7$ καὶ $Β=2\times 3^2\times 7$, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ Α περιέχει πάντας τοὺς πρώτους παράγοντας τοῦ Β κοὶ οὐδένα μὲ μικρότερον ἐκθέτην. Λέγω ὅτι ὁ Α διαιρεῖται ὑπὸ τοῦ Β.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ οἱ παράγοντες 2,3,7 τοῦ Β περιέχονται ἐξ ὑποθέσεως πάντες εἰς τὸν Α καὶ οὐδεὶς μὲ μικρότερον ἐκθέτην, ἡ δύναμις ἑκάστου τούτων, ἥτις περιέχεται εἰς τὸν Α, διαιρεῖται διὰ τῆς δυνάμεως τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ἥτις περιέχεται εἰς τὸν Β. Ἐπειδὴ δὲ

$$2^3:2=2^2,\ 3^4:3^2=3^2 \text{ καὶ } 7:7=1,$$

ἔπεται ὅτι $2^3=2\times 2^2,\ 3^4=3^2\times 3^2,\ 7=7\times 1$

καὶ $2^3\times 3^4\times 5^2\times 7=2\times 2^2\times 3^2\times 3^2\times 5^2\times 7,$

ἢ $2^3\times 3^4\times 5^2\times 7=(2\times 3^2\times 7)\times(2^2\times 3^2\times 5^2)$, ὅθεν

$$Α=Β\times(2^2\times 3^2\times 5^2).$$

Εἶναι, ἄρα ὁ Α πολ]σιον τοῦ Β καὶ ἑπομένως διαιρετὸς ὑπὸ τοῦ Β. ὅ. ἔ. δ.

Πόρισμα. Ἵνα ἀριθμός τις διαιρῆται δι' ἄλλου Β, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ἔχῃ ὅλους τοὺς πρώτους παράγοντας τοῦ Β καὶ οὐδένα μὲ μικρότερον ἐκθέτην.

§ 121. Ε΄. Πηλίκον τῆς διαιρέσεως ἀριθμοῦ ἀναλελυμένου εἰς πρώτους παράγοντας δι' ἄλλου τοιούτου.—Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὸν τρόπον, κατὰ τὸν ὁποῖον ἐγένετο ἡ ἀπόδειξις τοῦ προηγουμένου θεωρήματος συμπεραίνομεν εὐκόλως ὅτι:

Ἐὰν ἀριθμός τις Α ἀναλελυμένος εἰς τοὺς πρώτους αὐτοῦ παράγοντας εἶναι διαιρετὸς ὑπὸ ἄλλου τοιούτου Β, τὸ πηλίκον Α : Β περιέχει ὅλους τοὺς παράγοντας τοῦ Α καὶ ἕκαστον μὲ ἐκθέτην τὴν ὑπεροχὴν τοῦ ἐκθέτου, τὸν ὁποῖον οὗτος ἔχει εἰς τὸν Α ἀπὸ ἐκείνου, τὸν ὁποῖον ἔχει εἰς τὸν Β.

Οὕτω $(2^4\times3^5\times5^3\times7\times11^2):(2\times3^2\times11)=2^3\times3^3\times5^3\times7\times11$, $(2\times3^4\times7^2\times11\times13):4(3^3\times7\times11)=2\times3\times7\times13$ κτλ.

ΣΗΜ. Ἕκαστος παράγων τοῦ Α, ὁ ὁποῖος δὲν περιέχεται εἰς τὸν Β, θεωρεῖται ὑπάρχων εἰς αὐτὸν μὲ ἐκθέτην μηδὲν (§ 69). Ἐὰν δὲ κοινός τις παράγων ἔχῃ τὸν αὐτὸν εἰς ἀμφοτέρους ἐκθέτην, οὗτος ὀφείλει νὰ εἶναι παράγων τοῦ πηλίκου μὲ ἐκθέτην 0. Ἐπειδὴ δὲ (§ 69 Α΄) ἡ δύναμις αὕτη ἰσοῦται πρὸς 1, παραλείπεται.

***§ 122. ΣΤ΄. Εὕρεσις τῶν διαιρετῶν ἀριθμοῦ.**—Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν ὅλους τοὺς διαιρέτας τοῦ 360. Ἀναλύοντες αὐτὸν εἰς τοὺς πρώτους αὐτοῦ παράγοντας εὑρίσκομεν ὅτι $360=2^3\times3^2\times5$. Ἕκαστος ἄρα τῶν ἀριθμῶν.

$$
\begin{array}{llll}
2^0=1, & 2, & 2^2, & 2^3 \\
3^0=1, & 3, & 3^2 & \\
5^0=1, & 5 & &
\end{array}
$$

διαιρεῖ τὸν 360 (§ 120). Ἐπειδὴ οἱ ἀριθμοὶ 2, 3, 5 εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους καὶ αἱ τυχοῦσαι δυνάμεις αὐτῶν εἶναι (§ 111 Πόρ. ΙΙΙ) ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· ὁ δὲ 360 διαιρούμενος ὑπὸ ἑκάστης τῶν ἀνωτέρω δυνάμεων τούτων θὰ διαιρῆται (§ 99) καὶ ὑπὸ παντὸς γινομένου, τὸ ὁποῖον σχηματίζομεν λαμβάνοντες ἀνὰ ἕνα παράγοντα ἐξ ἑκάστης των ἀνωτέρω σειρῶν. Πλὴν δὲ τῶν τοιούτων διαιρετῶν οὐδένα ἄλλον ἔχει ὁ 360, διότι πᾶς ἄλλος ἀριθμὸς ἢ θὰ ἔχῃ παράγοντά τινα διάφορον ἀπὸ τοὺς 2, 3, 5 ἢ θὰ περιέχῃ δύναμίν τινα τούτων ἀνωτέραν ἀπὸ ἐκείνας, αἱ ὁποῖαι ἀνεγράφησαν εἰς τὸν ἀνωτέρω πίνακα, κατ' ἀκολουθίαν δὲν θὰ εἶναι διαιρέτης τοῦ 360. Ἵνα λοιπὸν σχηματίσωμεν τοὺς διαιρέτας τοῦ 360, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ σχηματίσωμεν ὅλα τὰ γινόμενα, ἕκαστον τῶν ὁποίων ἔχει ἕνα παράγοντα ἐξ ἑκάστης τῶν σειρῶν τοῦ ἀνωτέρω πίνακος. Πρὸς τοῦτο πολ]ζομεν τοὺς ἀριθμοὺς τῆς α' σειρᾶς ἐπὶ ἕκαστον ἀριθμὸν τῆς β' σειρᾶς καὶ ἕκαστον τῶν οὕτω προκυπτόντων γινομένων 1, 2, 2^2, 2^3, 3, 2×3, $2^2\times3$, $2^3\times3$, 3^2, 2×3^2, $2^2\times3^2$, $2^3\times3^2$ πολ]ζομεν ἐπὶ ἕκαστον ἀριθμὸν τῆς γ' σειρᾶς. Οὕτως εὑρίσκομεν ὅτι ὁ 360 ἔχει τοὺς ἀκολούθους μόνον διαιρέτας 1, 2, 4, 8, 3, 6, 12, 24, 9, 18, 36, 72, 5, 10, 20, 40, 15, 30, 60, 120, 45, 90, 180, 360.

Ἄρα : Διὰ να εὕρωμεν ὅλους τοὺς διαιρέτας δοθέντος ἀριθμοῦ, ἀναλύομεν αὐτὸν εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντων καὶ γράφομεν ἐπὶ ἰδίας δι' ἕκαστον παράγοντα ὁριζοντίου σειρᾶς τὰς διαδοχικὰς ἑκάστου παράγοντος δυνάμεις ἀπὸ τῆς μηδενικῆς (1) μέχρι τῆς ἀνωτάτης ἐν τῷ ἀριθμῷ περιεχομένης. Ἔπειτα πολ]ζομεν ἕκαστον ἀριθμὸν τῆς α' σειρᾶς ἐπὶ ἕκαστον τῆς β' σειρᾶς, πάντα δὲ τὰ προκύπτοντα γινόμενα πολ]ζομεν ἐπὶ ἕκαστον ἀριθμὸν τῆς γ' σειρᾶς καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς. Τὰ γινόμενα, τὰ ὁποῖα προκύπτουσι διὰ πολ]σμοῦ ἐπὶ τοὺς ἀριθμοὺς τῆς τελευταίας σειρᾶς εἶναι οἱ ζητούμενοι διαιρέται.

* § **123. Ζ'. Πλῆθος τῶν διαιρετῶν ἀριθμοῦ.**— Παρατηροῦντες ὅτι διὰ τοῦ πολ]σμοῦ ἑκάστου τῶν 4 ἀριθμῶν τῆς α' σειρᾶς τοῦ προηγουμένου (§ 122) πίνακος ἐπὶ ἕκαστον τῶν 3 τῆς β' σειρᾶς ἐσχηματίσθησαν 4×3 γινόμενα, διὰ δὲ τοῦ πολ]σμοῦ ἑκάστου τῶν γινομένων τούτων ἐπὶ ἕκαστον τῶν δύο ἀριθμῶν τῆς γ' σειρᾶς ἐσχηματίσθησαν $4\times3\times2$ τελικὰ γινόμενα, συμπεραίνομεν ὅτι ὁ 360 ἔχει $4\times3\times2=24$ διαιρέτας. Ὁμοίως σκεπτόμενοι εὑρίσκομεν ὅτι, ἂν $A=2^\mu\times5^\nu\times11^\rho$, ὁ A θὰ ἔχῃ $(\mu+1)\times(\nu+1\times(\rho+1)$ διαιρέτας.

Ἄρα : Ἵνα εὕρωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν διαιρετῶν δοθέντος ἀριθμοῦ, ἀφοῦ ἀναλύσωμεν αὐτὸν εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντων, προσθέτομεν εἰς τὸν ἐκθέτην ἑκάστου παράγοντος τὴν 1 καὶ πολ]ζομεν τὰ οὕτω προκύπτοντα ἀθροίσματα.

Ἀσκήσεις.

143) Ποῖοι ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς $2^2 . 5^3 . 7^3 . 11$, $2^3 . 5^2 . 7^3 . 11$, $2^3 . 5^4 . 7^2 . 11^2 . 13$ καὶ $5^3 . 7^4 . 11^2 . 13$ εἶναι διαιρετοὶ ὑπὸ τοῦ $2^3 . 5^2 . 7$ καὶ ποῖα τὰ ἀντίστοιχα πηλίκα ;

144) Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ διαιρέται τοῦ 580 καὶ τοῦ 120.

145) Πόσους διαιρέτας ἔχει ὁ 504 καὶ πόσους ὁ 2520 ;

146) Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοί, ἕκαστος τῶν ὁποίων διαιρεῖται ὑπὸ τοῦ 15 καὶ ἔχει 10 διαιρέτας.

147) Ἐὰν ἀριθμὸς εἶναι τέλειον τετράγωνον, ὁ ἀριθμὸς τῶν διαιρετῶν αὐτοῦ εἶναι περιττός.

148) Ἐὰν ἀριθμὸς δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον, ὁ ἀριθμὸς τῶν διαιρετῶν αὐτοῦ εἶναι ἄρτιος.

149) Ἐὰν ἀριθμὸς εἶναι νυοστὴ δύναμις ἄλλου, ὁ ἀριθμὸς τῶν διαιρετῶν αὐτοῦ εἶναι πολ. $\nu+1$.

§ 124. Η΄. Εὕρεσις τοῦ μ. κ. δ. δεδομένων ἀριθμῶν. — Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸν μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν $A=2^4 \times 3^2 \times 5$, $B=2^3 \times 3^4 \times 7^2$, $\Gamma=2^5 \times 3^3 \times 11$. Ὁ τυχὼν κ. διαιρέτης Δ τῶν ἀριθμῶν τούτων δὲν δύναται νὰ ἔχῃ πρώτους παράγοντας διαφόρους ἀπὸ τοὺς κοινοὺς παράγοντας αὐτῶν 2 καὶ 3· διότι, ἂν ὁ Δ εἶχε καὶ ἄλλον τινὰ παράγοντα π.χ. τὸν 11, δὲν θὰ διῄρει τοὺς ἀριθμοὺς Α καὶ Β, οἱ ὁποῖοι δὲν περιέχουσι τὸν 11. Ἀφ' ἑτέρου δὲ ὁ Δ δὲν δύναται νὰ ἔχῃ τὸν 2 μὲ ἐκθέτην μεγαλύτερον τοῦ 3, οὐδὲ τὸν 3 μὲ ἐκθέτην μεγαλύτερον τοῦ 2· διότι, ἂν εἶχε π. χ. τὸν 2 μὲ ἐκθέτην 4, δὲν θὰ διῄρει τὸν Β. Κατὰ ταῦτα πᾶς κ. δ. τῶν δοθέντων ἀριθμῶν Α, Β, Γ θὰ ἔχῃ τὴν μορφὴν $2^\mu \times 3^\nu$, ἔνθα μ εἶναι 0 ἢ 1 ἢ 2 ἢ 3 καὶ ν εἶναι 0 ἢ 1 ἢ 2. Κατ' ἀκολουθίαν μ. κ. διαιρέτης εἶναι ἐκεῖνος, εἰς τὸν ὁποῖον οἱ ἐκθέται μ καὶ ν ἔχουσι τὴν μεγίστην ἐπιτρεπομένην τιμὴν ἤτοι ὁ $2^3 \times 3^2$.

Ἄρα : Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν μ. κ. δ. δοθέντων ἀριθμῶν, ἀναλύομεν αὐτοὺς εἰς πρώτους παράγοντας καὶ σχηματίζομεν γινόμενον, τὸ ὁποῖον ἔχει ὅλους τοὺς κοινοὺς μόνον παράγοντας αὐτῶν καὶ ἕκαστον μὲ τὸν ἐλάχιστον ἀπὸ τοὺς ἐκθέτας, τοὺς ὁποίους ἔχει οὗτος εἰς τοὺς δοθέντας ἀριθμούς.

§ 125. Θ΄. Εὕρεσις τοῦ ἐ. κ. π. δεδομένων ἀριθμῶν.—Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἐ. κ. π. τῶν προειρημέ-

νων ἀριθμῶν Α, Β, Γ. Τὸ τυχὸν κ. πολ. αὐτῶν Π ὀφείλει νὰ περιέχῃ ὅλους τοὺς πρώτους αὐτῶν παράγοντας 2, 3, 5, 7, 11· διότι, ἂν δὲν περιεῖχεν ἕνα ἀπὸ αὐτοὺς π. χ. τὸν 11, δὲν θὰ διῃρεῖτο ὑπὸ τοῦ Γ, ὁ ὁποῖος ἔχει τὸν 11. Ἀφ' ἑτέρου ὁ Π δὲν δύναται νὰ περιέχῃ τὸν 2 μὲ ἐκθέτην μικρότερον τοῦ 5, τὸν 3 μὲ ἐκθέτην μικρότερον τοῦ 4 καὶ τὸν 7 μὲ ἐκθέτην μικρότερον τοῦ 2· διότι, ἂν εἶχε π. χ. τὸν 3 μὲ ἐκθέτην 3, δὲν θὰ διῃρεῖτο ὑπὸ τοῦ Β, ὁ ὁποῖος ἔχει τὸν 3 μὲ ἐκθέτην 4. Πλὴν δὲ τούτων δύναται νὰ ἔχῃ καὶ ἄλλους πρώτους παράγοντας, οἱ ὁποῖοι, ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχουσι γινόμενον Λ. Κατὰ ταῦτα πᾶν κοινὸν πολ]σιον τῶν Α,Β,Γ, θὰ ἔχῃ τὴν μορφὴν
$2^{\mu}\times 3^{\nu}\times 5^{\lambda}\times 7^{\rho}\times 11^{\tau}\times\Lambda$ ἔνθα εἶναι $\mu\geq 5, \nu\geq 4, \lambda\geq 1, \rho\geq 2, \tau\geq 1$. Κατ' ἀκολουθίαν ἐ. κ. π. εἶναι ἐκεῖνο, εἰς τὸ ὁποῖον ἕκαστος ἀπὸ τοὺς ἐκθέτους μ,ν,λ,ρ,τ ἔχει τὴν ἐλαχίστην ἐπιτρεπομένην τιμὴν καὶ $\Lambda=1$, ἤτοι ὁ $2^5\times 3^4\times 5\times 7^2\times 11$.

Ἄρα: Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐ. κ. π. δοθέντων ἀριθμῶν ἀναλύομεν αὐτοὺς εἰς πρώτους παράγοντας καὶ σχηματίζομεν γινόμενον, τὸ ὁποῖον περιέχει μόνον τοὺς πρώτους αὐτῶν παράγοντας κοινοὺς καὶ μὴ κοινούς, ἕκαστον δὲ μὲ τὸν μέγιστον ἀπὸ τοὺς ἐκθέτας, τοὺς ὁποίους ἔχει οὗτος εἰς τοὺς δοθέντας ἀριθμούς.

Σχέσεις δύο ἀριθμῶν πρὸς τὸν μ.κ.δ. καὶ τὸ ἐκ π. αὐτῶν.

§ **126. Θεώρημα I.** — Τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ μ.κ.δ. ἐπὶ τὸ ἐ.κ.π. αὐτῶν.

Ἔστωσαν Α καὶ Β δύο ἀριθμοί, Δ ὁ μ.κ.δ. καὶ Ε τὸ ἐ. κ. π. αὐτῶν. Λέγω ὅτι : $A\times B=\Delta\times E$.

Ἀπόδειξις. Ἔστω ὅτι $A=2^3\times 3\times 5^2\times 7$ καὶ $B=2^2\times 3^4\times 5\times 11^2$, ὅτε (§ 124, 125) θὰ εἶναι καὶ $\Delta=2^2\times 3\times 5$, $E=2^3\times 3^4\times 5^2\times 7\times 11^2$. Πολ]ζοντες τὰς δύο πρώτας ἰσότητας κατὰ τὰ μέλη εὑρίσκομεν ὅτι:

$$A\times B=(2^3\times 3\times 5^2\times 7)\times(2^2\times 3^4\times 5\times 11^2)=$$
$$(2^2\times 3\times 5)\times(2^3\times 3^4\times 5^2\times 7\times 11^2).$$

Ὁμοίως ἐκ τῶν ἄλλων δύο εὑρίσκομεν ὅτι :

$$\Delta\times E=(2^2\times 3\times 5)\times(2^3\times 3^4\times 5^2\times 7\times 11^2).$$

Ἄρα: $A\times B=\Delta\times E$. ὅ. ἔ. δ.

Πόρισμα. Τὸ ἐ. κ. π. δύο ἀριθμῶν ἰσοῦται πρὸς τὸ πηλίκον, τὸ ὁποῖον εὑρίσκομεν διαιροῦντες τὸ γινόμενον αὐτῶν διὰ τοῦ μ.κ.δ. αὐτῶν.

Ἀσκήσεις.

150). Νὰ εὑρεθῇ ὁ μ. κ. δ. καὶ τὸ ἐ. κ. π. τῶν ἀριθμῶν 150, 540, 7875.

151). Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐ. κ. π. τῶν ἀριθμῶν 60, 130 καὶ 285.

152). Νὰ εὑρεθῶσι τὰ μικρότερα τοῦ 600 κοινὰ πολ]σια τῶν ἀριθμῶν 6,4 καὶ 8.

153). Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοί, τῶν ὁποίων τὸ μὲν ἄθροισμα εἶναι 16, τὸ δὲ ἐ. κ. π. ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον αὐτῶν.

154). Διὰ ποίας μονοψηφίους τιμὰς τοῦ α τὸ γινόμενον $2\times3\times\alpha$ εἶναι ἐ. κ. π. τῶν ἀριθμῶν 2, 3 καὶ α;

155). Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι ἔχουσι μ. κ. δ. 8 καὶ ἐ. κ. π. 120.

156). Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοί, ἔχοντες γινόμενον 5600 καὶ ἐ. κ. π. 500.

157). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἐ. κ. π. δύο ἀριθμῶν ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ μ. κ. δ. αὐτῶν ἐπὶ τὰ πηλίκια τῆς διαιρέσεως τῶν ἀριθμῶν τούτων διὰ τοῦ μ. κ. δ. αὐτῶν.

158). Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἐλάχιστος ἀπὸ τοὺς ἀριθμούς, ἕκαστος τῶν ὁποίων διαιρούμενος διὰ 3,5,9, ἀφήνει ὑπόλοιπον ἀντιστοίχως 2,4,8.

159). Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἐλάχιστος ἀπὸ τοὺς ἀριθμούς, ἕκαστος τῶν ὁποίων διαιρούμενος διὰ 35 ἢ 28 ἢ 42 ἀφίνει ὑπόλοιπον 10.

*Διάφοροι ἀσκήσεις ἐπὶ τῆς διαιρετότητος καὶ τῶν πρώτων ἀριθμῶν.

160) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι δὲν ὑπάρχει ἀριθμός, ὁ ὁποῖος διαιρούμενος διὰ 6 δίδει ὑπόλοιπον 5 καὶ διὰ 8 ἀφίνει ὑπόλοιπον 4.

161). Ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ α καὶ β διαιρούμενοι διὰ δ δίδωσιν ἴσα ὑπόλοιπα, καὶ οἱ ἀριθμοὶ $\alpha\times\mu$, $\beta\times\mu$ διαιρούμενοι διὰ δ θὰ δίδωσιν ἴσα ὑπόλοιπα.

162). Τὸ γινόμενον δύο ἀρτίων διαδοχικῶν ἀριθμῶν εἶναι πολ. 8.

163). Ἐὰν τὸ ἄθροισμα τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων καὶ τοῦ διπλασίου τοῦ ψηφίου τῶν δεκάδων ἀριθμοῦ εἶναι διαιρετὸν διὰ 4, ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἶναι διαιρετὸς διὰ 4.

164). Ἐὰν τὸ ἄθροισμα τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων καὶ τοῦ διπλασίου τοῦ ψηφίου τῶν δεκάδων κα- τοῦ τετραπλασίου τοῦ ψηφίου τῶν ἑκατοντάδων ἀριθμοῦ εἶναι διαιρετὸν διὰ 8, ὁ ἀριθμὸς οὗτος διαιρεῖται διὰ 8.

165). Ἐὰν τὸ ἄθροισμα τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων καὶ τοῦ τετραπλασίου ἑκάστου τῶν ἄλλων ψηφίων ἀριθμοῦ εἶναι διαιρετὸν διὰ 6, ὁ ἀριθμὸς οὗτος διαιρεῖται διὰ 6.

166). Ἡ διαφορὰ δύο ἀριθμῶν μὲ τὰ αὐτὰ ψηφία γεγραμμένων εἶναι διαιρετὴ διὰ 9.

167). Ἐὰν εἰς διψήφιον ἀριθμὸν προστεθῇ ὁ διὰ τῆς ἀντιστροφῆς τῆς τάξεως τῶν ψηφίων προκύπτων ἀριθμός, τὸ προκύπτον ἄθροισμα εἶναι πολ. 11. Καὶ γενικῶς: Ἐὰν εἰς ἀριθμὸν ἔχοντα ἄρτιον πλῆθος ψηφίων προστεθῇ ὁ μετὰ αὐτὰ ψηφία κατ' ἀντίστροφον τάξιν γεγραμμένος ἀριθμός, τὸ προκύπτον ἄθροισμα εἶναι πολ. 11.

168). Τὸ γινόμενον $\nu(\nu+1).(2\nu+1)$ εἶναι διαιρετὸν διὰ 3, διὰ πᾶσαν ἀκεραίαν τιμὴν τοῦ ν.

169). Ἐὰν α καὶ β εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, οἱ ἀριθμοὶ $(\alpha+\beta)$ καὶ $(\alpha-\beta)$ ἔχουσι μ. κ. δ. 1 ἢ 2.

170). Τό γινόμενον τεσσάρων διαδοχικῶν ἀριθμῶν εἶναι διαιρετὸν διὰ 24.

171). Τὰ πηλίκα τῶν διαιρέσεων τοῦ ἐ. π. κ. δοθέντων ἀριθμῶν διὰ τῶν ἀριθμῶν τούτων εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

172). Ἐὰν τὰ πηλίκα τῶν διαιρέσεων κοινοῦ πολ]σίου δεδομένων ἀριθμῶν διὰ τῶν ἀριθμῶν τούτων εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, τὸ κοινὸν τοῦτο πολ]σιον εἶναι τὸ ἐ. κ. π. τῶν αὐτῶν ἀριθμῶν.

173). Ἐὰν ἀριθμὸς εἶναι πρῶτος πρὸς ἕκαστον τῶν παραγόντων γινομένου, θὰ εἶναι πρῶτος καὶ πρὸς τὸ γινόμενον καὶ ἀντιστρόφως.

174). Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοί, ὧν ἕκαστος ἔχει 15 διαιρέτας καὶ οἵτινες εἶναι διαιρετοὶ διὰ 7 καὶ 11 καὶ ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου πρώτου ἀριθμοῦ.

175). Ἐὰν πάντες οἱ διαιρέται ἀριθμοῦ γραφῶσιν εἰς μίαν σειρὰν κατὰ τάξιν μεγέθους, τὸ γινόμενον δύο διαιρετῶν ἴσον ἀπεχόντων τῶν ἄκρων εἶναι ἴσον πρὸς τὸν ἀριθμὸν τοῦτον.

176). Νὰ εὑρεθῇ τὸ γινόμενον πάντων τῶν διαιρετῶν δοθέντος ἀριθμοῦ.

177). Γνωστοῦ ὄντος ὅτι $3\nu(\nu+1)=5166$ νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀκέραιος ν.

178). Ἐὰν α καὶ β εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ὁ χ πρῶτος πρὸς τὸν β καὶ ὁ ψ πρῶτος πρὸς τὸ α, οἱ ἀριθμοὶ $(\alpha\chi+\beta\psi)$ καὶ $\alpha\beta$ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

179). Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἐλάχιστος ἀπὸ τοὺς τριψηφίους ἀριθμούς, ὧν ἕκαστος διαιρούμενος διὰ 3, 4, 8 ἀφίνει ὑπόλοιπον 2.

180). Ἐὰν $\alpha=\nu\rho$, τὸ γινόμενον $(\alpha-\rho)\alpha(\alpha+\rho)$ εἶναι πολ]σιον τοῦ $6\rho^3$.

181). Ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ Α καὶ Β ἔχωσι μ. κ.δ. τὸν Δ, ποῖος εἶναι ὁ μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν $(A+\mu B)$ καὶ Β;

182). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι οἱ ἀριθμοὶ β καὶ $(\alpha\beta+1)$ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

183). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι πάντα τὰ γινόμενα 1×3, 2×3, 3×3, ..., 9×3 λήγουσιν εἰς ψηφία διάφορα ἀλλήλων.

184). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $\alpha^{\nu+4}-\alpha^{\nu}$ πολ. 10, οἱουδήποτε ὄντος τοῦ ἀκεραίου α, ἂν ν διάφορος τοῦ 0.

ΣΗΜ. Θέτοντες τὴν παράστασιν $\alpha^{\nu+4}-\alpha^{\nu}$ ὑπὸ τὴν μορφὴν $\alpha^{\nu}(\alpha^4-1)$ ἀποδεικνύομεν ὅτι αὕτη διαιρεῖται διὰ 5. Ἐὰν δὲ ταύτην θέσωμεν ὑπὸ τὴν μορφὴν $\alpha^{\nu}(\alpha^2+1)(\alpha+1)(\alpha-1)$ ἀποδεικνύομεν ὅτι αὕτη διαιρεῖται διὰ τοῦ 2.

185). Πᾶς περιττὸς ἀριθμὸς εἶναι πρῶτος πρὸς τὸ ἥμισυ τοῦ κατὰ μονάδα μεγαλυτέρου ἀριθμοῦ.

186). Εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς ἔχοντας ἄθροισμα 667 καὶ ὧν τὸ ἐ. κ. π. διαιρούμενον διὰ τοῦ μ. κ. δ. αὐτῶν δίδει πηλίκον 120.

Παρατηροῦντες ὅτι ὁ μ. κ. δ. τῶν ζητουμένων ἀριθμῶν Α καὶ Β ὀφείλει νὰ διαιρῇ τὸν $667=23\times29$ συμπεραίνομεν ὅτι οὗτος θὰ εἶναι 23 ἢ 29. Κατὰ τὴν α΄ περίπτωσιν θέτοντες $A:23=\pi$ καὶ $B:23=\pi'$ εὑρίσκομεν ὅτι $\pi+\pi'=29$ καὶ $\pi.\pi'=120$, ἐξ ὧν $\pi=24$ καὶ $\pi'=5$, ἐντεῦθεν δὲ $A=552$ καὶ $B=115$. Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι, ἂν μ.κ.δ. εἶναι ὁ 29, θὰ εἶναι $A=435$ καὶ $B=232$.

ΒΙΒΛΙΟΝ Β΄.

ΟΙ ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄.

ΚΛΑΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΑΥΤΩΝ

§ **127**. **Ὁρισμὸς καὶ στοιχεῖα τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν.**—Ἐὰν ἡ ἀκεραία μονὰς διαιρεθῇ εἰς δύο ἴσα μέρη, τὸ καθ' ἓν ἀπὸ αὐτὰ καλεῖται ἥμισυ ἢ ἓν δεύτερον τῆς ἀκεραίας μονάδος καὶ γράφεται οὕτω $\frac{1}{2}$. Ἐὰν δὲ ἡ ἀκεραία μονὰς διαιρεθῇ εἰς τρία, τέσσαρα, πέντε κλπ. ἴσα μέρη, ἕκαστον τούτων καλεῖται ἓν τρίτον $\left(\frac{1}{3}\right)$, ἓν τέταρτον $\left(\frac{1}{4}\right)$, ἓν πέμπτον $\left(\frac{1}{5}\right)$ κλπ.

Ἕκαστον τῶν ἴσων μερῶν, εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται ἡ ἀκεραία μονάς, καλεῖται κλασματικὴ μονάς. Οὕτως $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ κλπ. εἶναι κλασματικαὶ μονάδες.

Λαμβάνοντες τὸ ὄγδοον τοῦ πήχεως τρεῖς φοράς, θὰ ἔχωμεν τρία ὄγδοα $\left(\frac{3}{8}\right)$ τοῦ πήχεως· ὁ ἀριθμὸς οὗτος καλεῖται κλάσμα ἢ κλασματικὸς ἀριθμός.

Γενικῶς: Κλάσμα ἢ κλασματικὸς ἀριθμὸς καλεῖται πᾶς ἀριθμός, ὁ ὁποῖος γίνεται διὰ τῆς ἐπαναλήψεως κλασματικῆς τινὸς μονάδος.

Ἕκαστον κλάσμα γράφεται μὲ δύο ἀκεραίους ἀριθμούς, ὧν ὁ εἷς γράφεται ὑποκάτω ἀπὸ τὸν ἄλλον, χωρίζονται δὲ δι' ὁριζοντίου εὐθείας γραμμῆς. Ὁ ὑπὸ τὴν γραμμὴν τιθέμενος καλεῖται παρονομαστὴς καὶ δηλοῖ εἰς πόσα ἴσα μέρη διηρέθη ἡ ἀκεραία μονάς. Ὁ δὲ ὑπεράνω τῆς γραμμῆς καλεῖται ἀριθμητὴς καὶ δηλοῖ πόσα ἐκ τῶν ἴσων ἐκείνων μερῶν ἐλήφθησαν. Ἀμφότεροι οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι καλοῦνται ὁμοῦ ὅροι τοῦ κλάσματος. Ὁ ἀριθμητὴς ἀπαγγέλλεται ὡς ἀπόλυτον ὁ δὲ παρονομαστὴς ὡς τακτικὸν ἀριθμητικόν.

§ **128. Σύγκρισις τῶν κλασμάτων πρὸς τὴν ἀκεραίαν μονάδα.**—Ἔστω ὅτι ἔχομεν δύο ἐντελῶς ὅμοια μῆλα διῃρημένα εἰς 4 ἴσα μέρη τὸ καθέν. Εἶναι εὐνόητον ὅτι τρία τοιαῦτα μέρη ἀποτελοῦσι μέρος μικρότερον ἑνὸς μήλου, τέσσαρα ἀποτελοῦσιν ἀκριβῶς ἓν μῆλον καὶ ἑπτὰ ἀποτελοῦσι μέρος μεγαλύτερον ἑνὸς μήλου. Ὥστε εἶναι $\frac{3}{4} < 1$, $\frac{4}{4} = 1$ καὶ $\frac{7}{4} > 1$.

Ἄρα: Ἐὰν ὁ ἀριθμητὴς κλάσματος εἶναι μικρότερος, ἴσος ἢ μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν παρονομαστήν, τὸ κλάσμα εἶναι μικρότερον, ἴσον ἢ μεγαλύτερον ἀπὸ τὴν ἀκεραίαν μονάδα.

§ **129. Τροπὴ ἀκεραίου εἰς κλάσμα.**—Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι θέλομεν νὰ τρέψωμεν τὸν ἀριθμὸν 6 εἰς κλάσμα, τὸ ὁποῖον ἔχει παρονομαστὴν 3. Πρὸς τοῦτο σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς. Ἐπειδὴ μία ἀκεραία μονὰς ἔχει, κατὰ τὰ προηγούμενα, 3 τρίτα, αἱ δύο θὰ ἔχωσιν 3×2 καὶ αἱ 6 θὰ ἔχωσιν 3×6 τρίτα, ἤτοι $6 = \frac{18}{3}$.

Ἄρα: Διὰ νὰ τρέψωμεν ἀκέραιον εἰς κλάσμα, τὸ ὁποῖον ἔχει δοθέντα παρονομαστήν, πολ]ζομεν αὐτὸν ἐπὶ τὸν δοθέντα παρονομαστὴν καὶ ὑπὸ τὸ γινόμενον γράφομεν τὸν δοθέντα τοῦτον παρονομαστήν.

§ **130. Μικτοὶ ἀριθμοί, τροπὴ αὐτῶν εἰς κλάσματα.**—Ὁ ἀριθμὸς $2 + \frac{1}{3}$ ἢ συντομώτερον $2\frac{1}{3}$ συγκείμενος ἐξ ἀκεραίου καὶ κλάσματος καλεῖται μικτὸς ἀριθμός.

Γενικῶς: Πᾶς ἀριθμὸς συγκείμενος ἐξ ἀκεραίου καὶ κλάσματος καλεῖται μικτὸς ἀριθμός.

Ἐπειδὴ ὁ ἀκέραιος 2 ἔχει (2×3) τρίτα, ὁ μικτὸς $2\frac{1}{3}$ ἔχει τὸ ὅλον $(2 \times 3) + 1$ τρίτα, ἤτοι παρίσταται ὑπὸ τοῦ κλάσματος $\frac{(2 \times 3)+1}{3}$ ἢ $\frac{7}{3}$.

Ἄρα: Διὰ νὰ τρέψωμεν μικτὸν εἰς κλάσμα πολ]ζομεν τὸν ἀκέραιον ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος καὶ εἰς τὸ γινόμενον προσθέτομεν τὸν ἀριθμητήν, ὑπὸ δὲ τὸ ἄθροισμα γράφομεν τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος.

§ **131. Ἐξαγωγὴ τῶν ἀκεραίων μονάδων κλάσματος.**—Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ πλῆθος τῶν ἀκεραίων μονάδων, αἱ ὁποῖαι περιέχονται εἰς τὸ μεγαλύτερον τῆς ἀκεραίας μονάδος κλάσμα $\frac{17}{5}$. Πρὸς τοῦτο σκεπτόμεθα ὡς ἀκολούθως: Ἐπειδὴ 5 πέμπτα ἀποτελοῦσι μίαν ἀκεραίαν μονάδα, τὰ $\frac{17}{5}$ θὰ ἀποτελῶσι τόσας ἀκεραίας μονάδας, ὅσας φορὰς ὁ 5 χωρεῖ εἰς τόν 17, ἤτοι 3 ἀκεραίας μονάδας καὶ ἄλλα $\frac{2}{5}$. Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι:

Διὰ νὰ ἐξαγάγωμεν τὰς ἀκεραίας μονάδας κλάσματος, διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητὴν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ, καὶ τὸ μὲν πηλίκον δηλοῖ τὰς περιεχομένας ἀκεραίας μονάδας, τὸ δὲ ὑπόλοιπον (ἂν εἶναι διάφορον τοῦ 0) δηλοῖ τὸ πλῆθος τῶν περιεχομένων ἀκόμη κλασματικῶν μονάδων.

Ἀκριβὲς πηλίκον τῆς διαιρέσεως ἀκεραίου ἀριθμοῦ δι' ἄλλου τυχόντος τοιούτου.

§ **132. Θεώρημα I.**— Πᾶν κλάσμα πολ]ζόμενον ἐπὶ τὸν παρονομαστήν του δίδει γινόμενον τὸν ἀριθμητὴν αὐτοῦ.

Λέγω π. χ. ὅτι $\frac{3}{4}\times 4=3$.

Ἀπόδειξις. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολ]σμοῦ $\frac{3}{4}\times 4$ σημαίνει νὰ ἐπαναλάβωμεν τόν ἀριθμὸν $\frac{3}{4}$ τέσσαρας φοράς. Ἐπειδὴ δὲ $\frac{3}{4}$ εἶναι $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$

ἕπεται ὅτι:

$$\frac{3}{4}\times 4=\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\\ \frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\\ \frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\\ \frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\\ \hline =1+1+1=3,\ \text{ὅ. ἔ. δ.}\end{array}\right.$$

Πόρισμα Ι. Πᾶν κάσμα πολ]ζόμενον ἐπὶ τὸ διπλάσιον, τριπλάσιον, κλπ. τοῦ παρονομαστοῦ δίδει τὸ διπλάσιον, τριπλάσιον κλπ. τοῦ ἀριθμητοῦ αὐτοῦ. Τὸ $\frac{3}{4}$ π. χ. ὀκτάκις ληφθὲν γίνεται 6, διότι ἐὰν ληφθῇ τέσσαρας φοράς, ἀποτελεῖ τὸν 3, ἄλλας τέσσαρας θὰ ἀποτελέσῃ πάλιν 3, ὥστε τὸ ὅλον ἀποτελεῖ $3+3=6$. ὅ. ἔ. δ.

Πόρισμα ΙΙ. Πᾶν κλάσμα εἶναι πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμητοῦ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ αὐτοῦ. Π. χ. $3:7=\frac{3}{7}$, διότι $\frac{3}{7}\times 7=3$.

Κατὰ ταῦτα τὸ πηλίκον ἀκεραίου ἀριθμοῦ δι' ἄλλου τοιούτου δύναται νὰ παρασταθῇ ὡς κλάσμα, ὅπερ ἔχει ἀριθμητὴν τὸν διαιρετέον καὶ παρονομαστὴν τὸν διαιρέτην. Πᾶσα ὅθεν διαίρεσις εἶναι δυνατὴ καὶ τελεία. Οὕτω $3:5=\frac{3}{5}$, $20:3=\frac{20}{3}$ κλπ.

§ **133. Γενίκευσις τοῦ ὁρισμοῦ τῶν ἴσων καὶ ἀνίσων ἀριθμῶν.**—Οἱ γνωστοὶ (§ 17, 18) ὁρισμοὶ τῶν ἴσων καὶ ἀνίσων ἀριθμῶν δὲν ἰσχύουσι διὰ τὰ κλάσματα, διότι ταῦτα δὲν γίνονται πάντα ἐκ τῆς αὐτῆς μονάδος. Διὰ τοῦτο εἶναι ἀνάγκη νὰ δοθῶσιν ἄλλοι γενικώτεροι ὁρισμοὶ τῶν ἴσων καὶ ἀνίσων ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι νὰ ἰσχύωσι καὶ διὰ τὰ κλάσματα. Οἱ ὁρισμοὶ οὗτοι εἶναι οἱ ἀκόλουθοι.

Δύο κλάσματα λέγονται ἴσα, ἐὰν ἰσάκις λαμβανόμενα γίνονται ἀκέραιοι ἴσοι. Οὕτως, ἐπειδὴ $\frac{6}{8}\times 8=6$ καὶ $\frac{3}{4}\times 8=6$ (§ 132 Θ. καὶ Πορ. Ι), ἕπεται ὅτι $\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$.

Δύο κλάσματα λέγονται ἄνισα, ἐὰν ἰσάκις λαμβανόμενα δίδωσιν ἀνίσους ἀκεραίους. Τούτων μεγαλύτερον εἶναι ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον δίδει μεγαλύτερον ἀκέραιον καὶ μικρότερον ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον δίδει μικρότερον ἀκέραιον. Οὕτως, ἐπειδὴ $\frac{3}{4}\times 12=9$ καὶ $\frac{5}{6}\times 12=10$, ἕπεται ὅτι $\frac{5}{6}>\frac{3}{4}$. Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι:

α') Δύο κλάσματα, τὰ ὁποῖα ἔχουσι τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν εἶναι ἴσα, ἐὰν ἔχωσι καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμητήν.

β') Δύο κλάσματα, τὰ ὁποῖα ἔχουσι τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν καὶ διαφόρους ἀριθμητὰς εἶναι ἄνισα καὶ μεγαλύτερον εἶναι ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον ἔχει μεγαλύτερον ἀριθμητήν.

γ'.) Δύο κλάσματα, τὰ ὁποῖα ἔχουσι τὸν αὐτὸν ἀριθμητὴν καὶ διαφόρους παρονομαστὰς εἶναι ἄνισα καὶ μεγαλύτερον εἶναι ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον ἔχει τὸν μικρότερον παρονομαστήν.

Οὕτως ἐκ τῶν κλασμάτων $\frac{3}{4}$ καὶ $\frac{3}{5}$ μεγαλύτερον εἶναι τὸ $\frac{3}{4}$, διότι $\frac{3}{4}\times(4\times5)=3\times5$ καὶ $\frac{3}{5}\times(5\times4)=3\times4$.

Κατὰ τοὺς τεθέντας ὁρισμοὺς τῶν ἴσων καὶ ἀνίσων κλασμάτων, ἡ ἰσότης ἢ ἀνισότης αὐτῶν ἀνάγεται εἰς ἰσότητα ἢ ἀνισότητα ἀκεραίων, κατ' ἀκολουθίαν ἰσχύουσι καὶ περὶ τῶν κλασμάτων πᾶσαι αἱ ἰδιότητες τῶν ἴσων καὶ ἀνίσων ἀκεραίων ἀριθμῶν (§ 17, 18).

Ἀσκήσεις.

187). Διὰ ποίαν τιμὴν ἑκάστου τῶν ἀριθμῶν α, β, γ ἀληθεύουσιν αἱ ἰσότητες $\frac{2}{3}\times\alpha=2$, $\frac{5}{11}\times\beta=5$ καὶ $\frac{7}{15}\times\gamma=7$;

188). Διὰ ποίαν τιμὴν ἑκάστου τῶν α, β, γ. δ εἶναι $\alpha : 7=\frac{3}{7}$, $8 : \beta=\frac{8}{9}$, $11 : \gamma=\frac{11}{19}$, $31 : 7=\frac{31}{\delta}$;

189) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ κλάσματα $\frac{\alpha}{3}$ καὶ $\frac{\alpha+\alpha}{6}$ εἶναι ἴσα, διὰ πᾶσαν ἀκεραίαν τιμὴν τοῦ α.

Ἰδιότητες τῶν κλασμάτων.

§ **134**. **Θεώρημα I**.— Ἐὰν ὁ ἀριθμητὴς κλάσματος πολ]σθῇ ἐπί τινα ἀριθμόν, τὸ κλάσμα πολ]ζεται ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν. Πολ)ζομένου τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ κλάσματος $\frac{3}{5}$ ἐπὶ 2 προκύπτει τὸ $\frac{6}{5}$.

Λέγω ὅτι $\frac{6}{5}=\frac{3}{5}\times2$.

Ἀπόδειξις. Ὡς γνωστὸν $\frac{6}{5}=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}$.

Ἐπειδὴ δὲ οἱ μὲν τρεῖς πρῶτοι προσθετέοι τοῦ β′ μέλους ἀποτελοῦσι τὸ κλάσμα $\frac{3}{5}$, οἱ δὲ ἄλλοι τρεῖς ἐπίσης $\frac{3}{5}$, ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται $\frac{6}{5}=\frac{3}{5}+\frac{3}{5}$ ἢ $\frac{6}{5}=\frac{3}{5}\times 2$. ὅ. ἔ. δ.

Ὁμοίως γίνεται ἡ ἀπόδειξις καὶ διὰ πάντα ἄλλον πολ]στήν.

Πόρισμα Ι. Διὰ νὰ πολ]σωμεν κλάσμα ἐπὶ ἀκέραιον, ἀρκεῖ νὰ πολ]σωμεν τὸν ἀριθμητὴν ἐπὶ τὸν ἀκέραιον καὶ ὑπὸ τὸ γινόμενον νὰ γράψωμεν τὸν παρονομαστὴν αὐτοῦ.

Πόρισμα ΙΙ. Ἐὰν ὁ ἀριθμητὴς κλάσματος διαιρεθῇ διά τινος διαιρέτου αὐτοῦ, τὸ κλάσμα διαιρεῖται διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.

Οὕτω διαιρουμένου τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ $\frac{8}{17}$ διὰ 4 προκύπτει τὸ $\frac{2}{17}$· λέγω ὅτι τοῦτο εἶναι τὸ τέταρτον τοῦ $\frac{8}{17}$. Τῷ ὄντι $\frac{2}{17}\times 4=\frac{8}{17}$.

Πόρισμα ΙΙΙ. Διὰ νὰ διαιρέσωμεν κλάσμα διά τινος διαιρέτου τοῦ ἀριθμητοῦ, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν δι᾽ αὐτοῦ τὸν ἀριθμητὴν καὶ ὑπὸ τὸ πηλίκον νὰ γράψωμεν τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος.

§ **135, Θεώρημα ΙΙ.**—Ἐὰν ὁ παρονομαστὴς κλάσματος πολ]σθῇ ἐπί τινα ἀριθμόν, τὸ κλάσμα διαιρεῖται διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ. Πολ]ζομένου π.χ. τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ $\frac{2}{3}$ ἐπὶ 4 προκύπτει τὸ κλάσμα $\frac{2}{12}$· λέγω ὅτι τοῦτο εἶναι τὸ τέταρτον τοῦ $\frac{2}{3}$, ἤτοι

$$\frac{2}{12}\times 4=\frac{2}{3}.$$

Ἀπόδειξις. Ὡς γνωστὸν $\frac{2}{12}\times 4=\frac{8}{12}$ (1)

Ἀλλ᾽ ἐπειδὴ $\frac{8}{12}\times 12=8$ καὶ $\frac{2}{3}\times 12=\frac{2}{3}\times(3\times 4)=2\times 4=8$, ἕπεται (§ 133) ὅτι $\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$ καὶ κατ᾽ ἀκολουθίαν ἡ ἰσότης (1) γίνεται

$\frac{2}{12}\times 4=\frac{2}{3}$ ὅ. ἔ. δ.

Πόρισμα Ι. Διὰ νὰ διαιρεσωμεν κλάσμα διὰ τυχόντος ἀκεραίου ἀρκεῖ νὰ πολ]σωμεν τὸν παρονομαστὴν ἐπὶ τὸν ἀκέραιον καὶ ἀριθμητὴν νὰ ἀφίσωμεν τὸν ἴδιον.

Πόρισμα II. Ἐὰν ὁ παρονομαστὴς κλάσματος διαιρεθῇ διά τινος διαιρέτου αὐτοῦ, τὸ κλάσμα πολ]ζεται ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν. Οὕτω π. χ. διαιρουμένου τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ $\frac{2}{12}$ διὰ 4 προκύπτει τὸ κλάσμα $\frac{2}{3}$. Λέγω ὅτι τοῦτο εἶναι τετραπλάσιον τοῦ $\frac{2}{12}$.

Ἀπόδειξις. Κατὰ τὴν προηγουμένην ἰδιότητα $\frac{2}{3}:4=\frac{2}{12}$,

ἄρα $\frac{2}{3}=\frac{2}{12}\times 4$. ὅ. ἔ. δ.

Πόρισμα III. Διὰ νὰ πολ]σωμεν κλάσμα ἐπὶ ἀκέραιον, ὅστις εἶναι διαιρέτης τοῦ παρονομαστοῦ, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν δι᾿ αὐτοῦ τὸν παρονομαστὴν καὶ ἀριθμητὴν νὰ ἀφίσωμεν τὸν ἴδιον.

§ 136. Θεώρημα III.—Ἐὰν ἀμφότεροι οἱ ὅροι κλάσματος πολ]σθῶσι ἢ διαιρεθῶσι διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ἡ ἀξία αὐτοῦ δὲν μεταβάλλεται.

α΄.). Λέγω π. χ. ὅτι $\frac{6}{7}=\frac{6\times 4}{7\times 3}=\frac{24}{28}$.

Ἀπόδειξις. Γνωρίζομεν ὅτι :

$\frac{24}{28}\times 28=24$ καὶ $\frac{6}{7}\times 28=\frac{6}{7}\times(7\times 4)=6\times 4=24$. Ἄρα $\frac{6}{7}=\frac{24}{28}$.

ὅ. ἔ. δ.

β΄.). Διαιρουμένων ἀμφοτέρων τῶν ὅρων τοῦ κλάσματος $\frac{6}{8}$ διὰ 2 προκύπτει τὸ $\frac{3}{4}$. λέγω ὅτι $\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$.

Ἀπόδειξις Ὡς προηγουμένως ἀπεδείχθη, $\frac{3}{4}=\frac{3\times 2}{4\times 3}=\frac{6}{8}$. ὅ. ἔ. δ.

Ἀσκήσεις.

190). Νὰ εὑρεθῇ τὸ διπλάσιον ἑκάστου τῶν κλασμάτων

$$\frac{2}{5},\ \frac{6}{7},\ \frac{3}{4},\ \frac{5}{9}.$$

191). Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἥμισυ ἑκάστου τῶν κλασμάτων

$$\frac{4}{7}, \frac{8}{9}, \frac{3}{5}, \frac{7}{10}.$$

192). Ποῖον ἐκ τῶν κλασμάτων, ἅτινα ἔχουσι παρονομαστὴν 40 ἰσοῦται πρὸς τὸ $\frac{3}{8}$;

193). Νὰ τραπῇ ὁ 4 εἰς κλάσμα ἔχον παρονομαστὴν 12.

194). Νὰ εὑρεθῇ τὸ τριπλάσιον ἑκάστου τῶν κλασμάτων $\frac{4}{7}, \frac{5}{8}, \frac{2}{9}$

195). Νὰ εὑρεθῇ τὸ τρίτον ἑκάστου τῶν $\frac{6}{11}, \frac{12}{17}, \frac{5}{6}, \frac{7}{10}$.

Ἁπλοποίησις κλάσματος.—Κλάσματα ἀνάγωγα.

§ **137**. **Ἁπλοποίησις κλάσματος.**—Ἁπλοποίησις δοθέντος κλάσματος καλεῖται ἡ πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν κλάσμα ἴσον πρὸς αὐτὸ καὶ ἔχον μικροτέρους ὅρους.

Ἵνα ἁπλοποιήσωμεν κλάσμα, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους αὐτοῦ διὰ τοῦ αὐτοῦ κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν. Τῷ ὄντι· οὕτως οἱ μὲν ὅροι αὐτοῦ γίνονται μικρότεροι, ἡ δὲ ἀξία του δὲν μεταβάλλεται (§ 136).

Κατὰ ταῦτα, ὅταν οἱ ὅροι κλάσματος ἔχωσι κοινὸν διαιρέτην ἡ ἁπλοποίησις εἶναι δυνατή. Ὅτι δὲ μόνον τότε εἶναι αὕτη δυνατή, φαίνεται ἐκ τῶν ἀκολούθων ἰδιοτήτων.

§ **138**. **Θεώρημα I.** — Ἐὰν οἱ ὅροι κλάσματος εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, οἱ ὅροι παντὸς κλάσματος ἴσου πρὸς αὐτὸ εἶναι ἰσοπολλαπλάσια τῶν ὅρων αὐτοῦ.

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι κλάσμα τι $\frac{\alpha}{6}$ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ $\frac{3}{8}$, τοῦ ὁποίου οἱ ὅροι εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Λέγω ὅτι οἱ ἀριθμοὶ α καὶ 6 εἶναι ἰσοπολλαπλάσια τῶν ἀριθμῶν 3 καὶ 8.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδή, ἐξ ὑποθέσεως, εἶναι $\frac{3}{8} = \frac{\alpha}{\beta}$, τὰ κλάσματα ταῦτα πολ]ζόμενα ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀκέραιον (6×8) δίδουσιν ἴσους ἀκεραίους· ἀλλὰ τὸν μὲν $\frac{3}{8}$ δίδει (§ 133 Π. I) τὸν ἀκέραιον 3×6, τὸ δὲ $\frac{\alpha}{6}$ τὸν $\alpha\times8$· εἶναι ἄρα $3\times6=\alpha\times8$. Ὁ 3 διαιρῶν τὸν 3×6 ὡς πολ]σιόν του διαιρεῖ καὶ τὸ γινόμενον $\alpha\times8$ ὡς ἴσον πρὸς τὸ 3×6· ἐπειδὴ δὲ ὁ 3 εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν 8 θὰ διαιρῇ τὸν α· ἔστω δὲ $\alpha:3=\pi$, ὅθεν $\alpha=3\times\pi$. Θέτοντες ἤδη τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ α ἐν τῇ ἰσότητι $3\times6=\alpha\times8$ βλέπομεν ὅτι $3\times6=3\times\pi\times8$, ὅθεν $6=8\times\pi$. Ἀπεδείχθη ὅθεν ὅτι $\alpha=3\times\pi$ καὶ $6=8\times\pi$. ὅ. ἔ. δ.

Πόρισμα I. Ἐὰν οἱ ὅροι κλάσματος εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, τὸ κλάσμα δὲν ἁπλοποιεῖται.

Πᾶν κλάσμα μὴ ἁπλοποιούμενον καλεῖται ἀνάγωγον, ὡς μὴ δυνάμενον ἄνευ μεταβολῆς τῆς ἀξίας αὐτοῦ νὰ ἀναχθῇ εἰς κλάσμα ἔχον ὅρους μικροτέρους.

Πόρισμα II. Ἐὰν ἀμφότεροι οἱ ὅροι κλάσματος διαιρεθῶσι διὰ τοῦ μ. κ. δ. αὐτῶν, προκύπτει κλάσμα ἀνάγωγον.

Πόρισμα III. Διὰ νὰ εἶναι δύο ἀνάγωγα κλάσματα ἴσα, πρέπει καὶ ἀρκεῖ οἱ ὁμώνυμοι ὅροι των νὰ εἶναι ἴσοι.

Πόρισμα IV. Ἐὰν οἱ ὁμώνυμοι ὅροι ἴσων κλασμάτων προστεθῶσι, προκύπτει κλάσμα ἴσον πρὸς αὐτά. Ἐὰν δηλ. εἶναι $\frac{\alpha}{6}=\frac{\alpha'}{6'}=\frac{\alpha''}{6''}$ λέγω ὅτι $\frac{\alpha+\alpha'+\alpha''}{6+6'+6''}=\frac{\alpha}{6}=\frac{\alpha'}{6'}=\frac{\alpha''}{6''}$.

Ἀπόδειξις. Ἐὰν οὐδὲν τῶν κλασμάτων τούτων εἶναι ἀνάγωγον, διαιροῦντες ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ ἑνὸς τούτων διὰ τοῦ μ. κ. δ. αὐτῶν εὑρίσκομεν κλάσμα τι, ἔστω $\frac{\pi}{\rho}$ ἀνάγωγον καὶ ἴσον προς αὐτά. Κατὰ δὲ τὸ προηγούμενον θεώρημα θὰ εἶναι

$$\alpha=\pi\times\mu,\quad \alpha'=\pi\times\nu,\quad \alpha''=\pi\times\lambda$$
$$6=\rho\times\mu,\quad 6'=\rho\times\nu,\quad 6''=\rho\times\lambda$$

ἔνθα μ, ν, λ εἶναι ἀκέραιοι ἀριθμοί.

Προσθέτοντες κατὰ μέλη τὰς ἰσότητας τῆς α' καὶ τῆς β' σειρᾶς εὑρίσκομεν ὅτι : $\alpha+\alpha'+\alpha''=\pi\times(\mu+\nu+\lambda)$ καὶ

$$6+6'+6''=\rho\times(\mu+\nu+\lambda),$$

ἐξ ὧν εὐκόλως ἕπεται ὅτι $\frac{\alpha+\alpha'+\alpha''}{6+6'+6''}=\frac{\pi\times(\mu+\nu+\lambda)}{\rho\times(\mu+\nu+\lambda)}=$

$=\frac{\pi}{\rho}=\frac{\alpha}{6}=\frac{\alpha'}{6'}=\frac{\alpha''}{6''}$. ὅ. ἔ. δ.

ΣΗΜ. Ἐὰν κλάσμα τι ἐκ τῶν δοθέντων εἶναι ἀνάγωγον, τοῦτο καταλαμβάνει ἐν τῇ ἀποδείξει τὴν θέσιν τοῦ $\frac{\pi}{\rho}$.

Ἀσκήσεις.

196). Νὰ ἁπλοποιηθῶσι τὰ κλάσματα $\frac{8}{22}$, $\frac{10}{15}$, $\frac{9}{12}$, $\frac{25}{30}$, μέχρις οὗ καταστῶσιν ἀνάγωγα.

197). Νὰ εὑρεθῇ κλάσμα ἴσον πρὸς τὸ $\frac{3}{4}$ καὶ τοῦ ὁποίου οἱ ὅροι ἔχουσιν ἄθροισμα 63.

198). Νὰ εὑρεθῇ κλάσμα ἴσον πρὸς τὸ $\frac{12}{15}$ καὶ τοῦ ὁποίου οἱ ὅροι ἔχουσιν ἄθροισμα 99.

199). Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοὶ ἔχοντες μ. κ. δ. 90 καὶ πηλίκον $\frac{7}{8}$.

200). Ἐὰν τὸ $\frac{\alpha}{6}$ εἶναι ἀνάγωγον, καὶ ἕκαστον τῶν $\frac{6+\alpha}{6}$, $\frac{6-\alpha}{6}$ θὰ εἶναι ἀνάγωγον.

201). Ἐὰν τὸ κλάσμα μικτοῦ εἶναι ἀνάγωγον, ὁ μικτὸς τρέπεται εἰς κλάσμα ἀνάγωγον.

202). Νὰ διαιρεθῇ ὁ 60 εἰς τρία μέρη τοιαῦτα ὥστε τὰ πηλίκα ταῦ α′ διὰ 2, τοῦ β′ διὰ 3, καὶ τοῦ γ′ διὰ 7 νὰ εἶναι ἴσα.

203). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ κλάσμα $\frac{\alpha}{2\alpha+1}$ εἶναι ἀνάγωγον, οἱουδήποτε ὄντος τοῦ ἀκεραίου α.

Ὁμώνυμα καὶ ἑτερώνυμα κλάσματα, τροπὴ τῶν ἑτερωνύμων κλασμάτων εἰς ὁμώνυμα.

§ 139. ***Δύο ἢ πλείονα κλάσματα λέγονται ὁμώνυμα ἢ ἑτερώνυμα, ἐὰν ἔχωσι τὸν αὐτὸν ἢ διαφόρους παρονομαστάς.*** Οὕτω τὰ $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$ εἶναι ὁμώνυμα, ἐν ᾧ τὰ $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{8}$ εἶναι ἑτερώνυμα.

Ἐπειδὴ (§ 136) ἡ ἀξία κλάσματος δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν πολ]σθῶσιν ἀμφότεροι οἱ ὅροι αὐτοῦ ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, εἶναι δυνατὸν ἐκλέγοντες καταλλήλους πολ]τὰς νὰ τρέψωμεν δοθέντα ἑτερώνυμα κλάσματα εἰς ὁμώνυμα καὶ ἴσα πρὸς ἐκεῖνα, ἓν πρὸς ἕν.

Ἔστω π. χ. ὅτι θέλομεν νὰ τρέψωμεν εἰς ὁμώνυμα τὰ κλάσματα $\frac{1}{4}, \frac{6}{8}, \frac{8}{16}$. Κατὰ τὴν τεθεῖσαν ἀρχὴν ὁ κοινὸς παρονομαστής, τὸν ὁποῖον θὰ ἀποκτήσωσι ταῦτα, εἶναι κοινὸν τῶν παρονομαστῶν αὐτῶν πολ]σιον. Οὕτω π. χ. ὁ 32, ὅστις εἶναι κοινὸν πολ]σιον τῶν 4, 8, 16 δύναται νὰ γείνῃ κοινὸς παρονομαστής. Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ οἱ ὅροι τοῦ α′ νὰ πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ τὸ πηλίκον $32:4=8$, οἱ ὅροι τοῦ β′ ἐπὶ $32:8=4$ καὶ οἱ ὅροι τοῦ γ′ ἐπὶ $32:16=2$. Οὕτω προκύπτουσι τὰ ἀντιστοίχως ἴσα πρὸς αὐτὰ καὶ ὁμώνυμα κλάσματα $\frac{8}{32}, \frac{24}{32}, \frac{16}{32}$. Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι:

Διὰ νὰ τρέψωμεν ἑτερώνυμα κλάσματα εἰς ὁμώνυμα, εὑρίσκομεν κοινόν τι τῶν παρονομαστῶν πολ]σιον (συνήθως τὸ ἐ. κ. π.)· διαιροῦμεν αὐτὸ δι᾿ ἑκάστου τῶν παρονομαστῶν τούτων καὶ πολ]ζομεν τοὺς ὅρους ἑκάστου κλάσματος ἐπὶ τὸ ἀντίστοιχον πηλίκον.

ΣΗΜ. Εἴς τινας περιπτώσεις εἶναι δυνατὸν καὶ δι᾿ ἁπλοποιήσεως τῶν δοθέντων κλασμάτων ἤ τινων ἐξ αὐτῶν νὰ καταστῶσιν ὁμώνυμα. Οὕτως ἁπλοποιουμένων τῶν δύο τελευταίων τῶν ἀνωτέρω ληφθέντων κλασμάτων προκύπτουσι τὰ ὁμώνυμα κλάσματα $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{4}$.

Ἔχοντες ὑπ᾿ ὄψιν ὅτι τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν τῶν δοθέντων κλασμάτων εἶναι κοινὸν πολλαπλάσιον αὐτῶν καὶ ὅτι γινόμενον διαιρεῖται δι᾿ ἑνὸς τῶν παραγόντων αὐτοῦ, ἂν ἐξαλειφθῇ οὗτος, συνάγομεν εὐκόλως τοὺς ἀκολούθους ἔτι δύο κανόνας.

α′.). Διὰ νὰ τρέψωμεν δύο ἑτερώνυμα κλάσματα εἰς ὁμώνυμα ἀρκεῖ νὰ πολ]σωμεν τοὺς ὅρους ἑκατέρου ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦ ἄλλου.

Οὕτω τὰ $\frac{3}{5}$ καὶ $\frac{5}{8}$ γίνονται $\frac{24}{40}$, $\frac{25}{40}$, ἤτοι ὁμώνυμα.

β′) Διὰ νὰ τρέψωμεν περισσότερα κλάσματα ἑτερώνυμα εἰς ὁμώνυμα, ἀρκεῖ νὰ πολ]σωμεν τοὺς ὅρους ἑκάστου ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν τῶν ἄλλων κλασμάτων. Οὕτω τὰ $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{2}{9}$, τρέπονται εἰς τὰ $\frac{4\times6\times9}{5\times6\times9}=\frac{216}{270}$, $\frac{3\times5\times9}{6\times5\times9}=\frac{135}{270}$, $\frac{2\times5\times6}{9\times5\times6}=\frac{60}{270}$, τὰ ὁποῖα εἶναι ὁμώνυμα καὶ ἀντιστοίχως ἴσα πρὸς τὰ δοθέντα.

§ 140. Ἐλάχιστος κοινὸς παρονομαστὴς δεδομένων κλασμάτων.—Ὅταν τρέποντες ἑτερώνυμα κλάσματα εἰς ὁμώνυμα καθιστῶμεν κοινὸν παρονομαστὴν αὐτῶν τὸ ἐ. κ. π. τῶν παρονομαστῶν των, δὲν πρέπει νὰ νομίζωμεν ὅτι οὗτος εἶναι πάντοτε ὁ ἐλάχιστος κοινὸς παρονομαστής, τὸν ὁποῖον ταῦτα δύνανται νὰ ἀποκτήσωσιν. Οὕτως, ἐν ᾧ οἱ παρονομασταὶ τῶν κλασμάτων $\frac{1}{4}$, $\frac{6}{8}$, $\frac{8}{16}$ ἔχουσιν ἐ. κ. π. τὸν 16, ταῦτα δύνανται, ὡς ἀνωτέρω ἐσημειώσαμεν, νὰ ἀποκτήσωσι κοινὸν παρονομαστὴν καὶ τὸν 4. Ὑπάρχει ὅμως καὶ περίπτωσις, κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ ἐ. κ. π. τῶν παρονομαστῶν εἶναι συγχρόνως καὶ ὁ ἐλ. κ. παρονομαστής, τὸν ὁποῖον δύνανται νὰ ἀποκτήσωσι δοθέντα κλάσματα. Τοῦτο καθίσταται φανερὸν ἐκ τοῦ ἀκολούθου θεωρήματος.

Θεώρημα. Ἐὰν ἑτερώνυμα κλάσματα εἶναι ἀνάγωγα, ὁ ἐλάχιστος κοινὸς παρονομαστής, τὸν ὁποῖον δύνανται ν' ἀποκτήσωσιν, εἶναι τὸ ἐ. κ. π. τῶν παρονομαστῶν αὐτῶν.

Ἔστωσαν τὰ ἑτερώνυμα καὶ ἀνάγωγα κλάσματα $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{8}$. Λέγω ὅτι ὁ ἐλ. κ. παρονομαστής, τὸν ὁποῖον ταῦτα δύνανται νὰ ἀποκτήσωσιν, εἶναι τὸ ἐλ. κ. π. τῶν παρονομαστῶν 5, 4, 8.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ τὸ κλάσμα $\frac{2}{5}$ εἶναι ἀνάγωγον, ὁ παρονομαστὴς παντὸς κλάσματος ἴσου πρὸς αὐτὸ θὰ εἶναι (§ 138 Θ) πολ]σιον τοῦ 5· διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ὁ παρονομαστὴς παντὸς κλάσματος ἴσου πρὸς τὸ $\frac{3}{8}$ θὰ εἶναι πολ]σιον τοῦ 4 κλπ. Ὁ κοινὸς λοιπὸν παρονομαστής, τὸν ὁποῖον θὰ ἔχωσι τὰ ἴσα πρὸς τὰ δοθέντα κλάσματα, ὀφείλει νὰ εἶναι κοινὸν πολ]σιον τῶν 5, 4, 8, κατ' ἀκολουθίαν δὲ ἐλάχιστος κοινὸς παρονομαστὴς θὰ εἶναι τὸ ἐ. κ. π. τῶν αὐτῶν ἀριθμῶν. ὅ. ἔ. δ.

Παρατήρησις. Διὰ τῆς τροπῆς ἑτερωνύμων κλασμάτων εἰς ὁμώνυμα διακρίνομεν εὐκόλως τὴν μεταξὺ αὐτῶν ὑπάρχουσαν σχέσιν ἰσότητος ἢ ἀνισότητος.

Ἀσκήσεις.

204). Νὰ τραπῶσιν εἰς ὁμώνυμα τὰ κλάσματα $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$ καὶ τὰ $\frac{5}{8}$, $\frac{3}{12}$, $\frac{7}{14}$, $\frac{11}{30}$.

205). Νὰ καταστῶσιν ὁμώνυμα μὲ τὸν ἐλάχιστον κοινὸν παρονομαστὴν τὰ κλάσματα $\frac{12}{48}$, $\frac{4}{24}$, $\frac{5}{58}$.

206). Νὰ ταχθῶσι κατὰ τάξιν μεγέθους τὰ κλάσματα

$$\frac{4}{21}, \frac{11}{15}, \frac{5}{9}.$$

207). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $\frac{3+\chi}{5\times\chi} > \frac{3}{5}$ οἱουδήποτε ὄντος τοῦ ἀκεραίου χ (§ 133).

208). Ὁμοίως ὅτι $\frac{7+\chi}{4+\chi} < \frac{7}{4}, \frac{9-\chi}{5-\chi} > \frac{9}{5}$ καὶ $\frac{6-\chi}{11-\chi} < \frac{6}{11}$.

ΣΗΜ. Εὐνόητον ὅτι ἡ τιμὴ τοῦ χ πρέπει νὰ ἀφαιρῆται ἀπὸ τοῦ ἀντιστοίχου μειωτέου.

ΠΡΑΞΕΙΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

Α΄. Πρόσθεσις.

§ **141. Πρόσθεσις ὁμωνύμων κλασμάτων.**— Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ προσθέσωμεν τὰ κλάσματα $\frac{5}{20}, \frac{3}{20}, \frac{4}{20}$ καὶ $\frac{6}{20}$, ἤτοι νὰ εὕρωμεν ἕνα ἀριθμόν, ὅστις περιέχει ὅλας τὰς μονάδας αὐτῶν καὶ μόνον αὐτάς. Ἐπειδὴ τὸ α΄ τῶν κλασμάτων τούτων ἔχει 5 εἰκοστά, τὸ β΄ 3 εἰκοστὰ κλπ. ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς θὰ περιέχῃ $5+3+4+6=18$ εἰκοστά, ἤτοι $\frac{5}{20}+\frac{3}{20}+\frac{4}{20}+\frac{6}{20}=\frac{18}{20}$.

Ἄρα: Διὰ νὰ προσθέσωμεν ὁμώνυμα κλάσματα, ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν τοὺς ἀριθμητὰς αὐτῶν καὶ ὑπὸ τὸ ἄθροισμα νὰ γράψωμεν τὸν παρονομαστὴν αὐτῶν.

§ **142. Πρόσθεσις οἱωνδήποτε ἀριθμῶν.** — Ἐπειδὴ τὰ ἑτερώνυμα κλάσματα τρέπονται εἰς ὁμώνυμα, οἱ δὲ ἀκέραιοι καὶ μικροὶ τρέπονται εἰς κλάσματα, ἡ πρόσθεσις οἱωνδήποτε ἀριθμῶν ἀνάγεται εἰς τὴν πρόσθεσιν ὁμωνύμων κλασμάτων. Οὕτω

$$\frac{2}{5}+3+7\frac{1}{10}+\frac{3}{20}=\frac{8}{20}+\frac{60}{20}+\frac{142}{20}+\frac{3}{20}=\frac{213}{20}.$$

Ἄρα: Διὰ νὰ προσθέσωμεν οἱουσδήποτε ἀριθμούς, τρέπομεν αὐτοὺς εἰς ὁμώνυμα κλάσματα καὶ προσθέτομεν τοὺς ἀριθμητὰς αὐτῶν, ὑπὸ δὲ τὸ ἄθροισμα τούτων γράφομεν τὸν κοινὸν αὐτῶν παρονομαστήν.

Οἱ προστιθέμενοι ἀριθμοὶ καλοῦνται πάλιν προσθετέοι, τὸ δὲ ἐξαγόμενον τῆς προσθέσεως ἄθροισμα ἢ κεφάλαιον.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΠΡΟΣΘΕΣΕΩΣ

§ **143. Θεώρημα Ι.** - Τὸ ἄθροισμα οἱωνδήποτε ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται, ἂν μεταβληθῇ ὁπωσδήποτε ἡ τάξις αὐτῶν.

Λέγω δηλ. ὅτι:

$$5+\frac{2}{3}+6\frac{1}{4}+\frac{7}{8}+3=\frac{2}{3}+\frac{7}{8}+5+6\ \frac{1}{4}+3.$$

Ἀπόδειξις. Κατὰ τὰ προηγούμενα εἶναι

$$5+\frac{2}{3}+6\ \frac{1}{4}+\frac{7}{8}+3=\frac{120+16+150+21+72.}{24}$$

$$\text{καὶ}\ \frac{2}{3}+\frac{7}{8}+5+6\ \frac{1}{4}+3=\frac{16+21+120+150+72.}{24}$$

Ἐπειδὴ δὲ (§ 20) εἶναι:

$$120+16+150+21+72=16+21+120+150+72$$

ἔπεται ὅτι τὰ εὑρεθέντα ἀθροίσματα εἶναι ἴσα, ἄρα;

$$5+\frac{2}{3}+6\ \frac{1}{4}+\frac{7}{8}+3=\frac{2}{3}+\frac{7}{8}+5+6\frac{1}{4}+3.\ \text{ὅ. ἔ. δ.}$$

Βλέπομεν οὕτω ὅτι ἀληθεύει δι' οἱουσδήποτε ἀριθμοὺς ἡ θεμελιώδης τῆς προσθέσεως ἰδιότης· ἀληθεύουσιν ὅθεν καὶ πᾶσαι αἱ ἄλλαι ἐξ αὐτῆς ἀπορρέουσαι ἰδιότητες (§ 21, 22, 23, 24) καὶ ἀποδεικνύονται, ὡς καὶ διὰ τοὺς ἀκεραίους ἀπεδείχθησαν. Στηριζόμενοι δὲ ἐπὶ τῶν ἰδιοτήτων τούτων ἀποδεικνύομεν εὐκόλως ὅτι:

I. Ἵνα προσθέσωμεν ἀκέραιον εἰς μικτόν, ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν αὐτὸν εἰς τὸν ἀκέραιον τοῦ μικτοῦ.

II. Ἵνα προσθέσωμεν κλάσμα εἰς μικτὸν ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν αὐτὸ εἰς τὸ κλάσμα τοῦ μικτοῦ· ἐὰν δὲ τὸ ἄθροισμα ἔχῃ ἀκεραίας μονάδας ἐξάγοντες ταύτας ἑνοῦμεν μετὰ τοῦ ἀκεραίου τοῦ μικτοῦ.

III. Ἵνα προσθέσωμεν μικτοὺς ἀριθμούς, ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν χωριστὰ τοὺς ἀκεραίους καὶ χωριστὰ τὰ κλάσματα, ἔπειτα δὲ νὰ ἑνώσωμεν τὰ προκύπτοντα ἀθροίσματα.

Ἀσκήσεις

209) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $\left(\frac{7}{8}+3+\frac{1}{16}\right)+\frac{1}{4}=3\ \frac{7}{8}+\frac{5}{16}$

210) Ὁμοίως ὅτι $2+\frac{1}{3}+5\ \frac{4}{9}+\frac{5}{6}=5\ \frac{4}{9}+3\ \frac{1}{6}$.

211) Ὁμοίως ὅτι $\left(6+\frac{2}{5}+3\ \frac{1}{10}\right)+\left(\frac{4}{5}+7\ \frac{3}{10}\right)=6+11\ \frac{3}{5}$.

212). Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοί, ὧν ὁ α′ καὶ β′ ἔχουσιν ἄθροισμα $\frac{23}{20}$, ὁ β′ καὶ ὁ γ′ $\frac{41}{28}$, ὁ α′ καὶ ὁ γ′ $\frac{39}{35}$.

213). Ἐὰν οἱ παρονομασταὶ δύο ἀναγώγων κλασμάτων εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι κλάσμα ἀνάγωγον.

Β′. Ἀφαίρεσις.

§ 144. Ἀφαίρεσις κλάσματος ἀπὸ ἄλλου ὁμωνύμου.— Ἔστω ὅτι θέλομεν ἀπὸ τὸ κλάσμα $\frac{9}{8}$ νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ $\frac{5}{8}$, ἤτοι νὰ εὕρωμεν τρίτον ἀριθμὸν (ὑπόλοιπον ἢ διαφορά), ὅστις προστιθέμενος εἰς τὸν $\frac{5}{8}$ (ἀφαιρετέον) δίδει τὸν $\frac{9}{8}$ (μειωτέον). Ἐπειδὴ $9-5=4$ εἶναι εὐνόητον ὅτι 9 ὄγδοα—5 ὄγδοα=4 ὄγδοα, ἤτοι $\frac{9}{8}-\frac{5}{8}=\frac{4}{8}$· ὄντως δὲ $\frac{5}{8}+\frac{4}{8}=\frac{9}{8}$. Ἄρα:

Ἵνα ἀπὸ κλάσματος ἀφαιρέσωμεν ἄλλο ὁμώνυμον, ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ μειωτέου τὸν ἀριθμητὴν τοῦ ἀφαιρετέου καὶ ὑπὸ τὴν διαφορὰν θέτομεν τὸν κοινὸν παρονομαστὴν αὐτῶν.

§ 145. Ἀφαίρεσις οἱουδήποτε ἀριθμοῦ ἀπὸ ἄλλου οἱουδήποτε. Ἡ πρᾶξις αὕτη, διὰ τοὺς λόγους τοὺς ὁποίους εἰς τὴν πρόσθεσιν οἱωνδήποτε ἀριθμῶν (§ 142) εἴπομεν, ἀνάγεται εἰς τὴν ἀφαίρεσιν κλάσματος ἀπὸ ἄλλου ὁμωνύμου· οὕτω

$$5\frac{3}{4}-\frac{1}{8}=\frac{46}{8}-\frac{1}{8}=\frac{45}{8}, \qquad 7\frac{3}{5}-2\frac{7}{20}=\frac{152}{20}-\frac{47}{20}=\frac{105}{20}$$

$$8-3\frac{1}{4}=\frac{32}{4}-\frac{13}{4}=\frac{19}{4} \text{ κτλ.}$$

Ἄρα: Ἵνα ἀφαιρέσωμεν οἱονδήποτε ἀριθμὸν ἀπὸ οἱουδήποτε ἄλλου, ἀρκεῖ νὰ τρέψωμεν αὐτοὺς εἰς ὁμώνυμα κλάσματα καὶ ἀπὸ τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ μειωτέου νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸν ἀριθμητὴν τοῦ ἀφαιρετέου, ὑπὸ δὲ τὴν διαφορὰν νὰ γράψωμεν τὸν κοινὸν αὐτῶν παρονομαστήν.

§ 146, Ἰδιότητες τῆς ἀφαιρέσεως,—Κατὰ τὰ προηγούμενα πᾶσα ἀφαίρεσις ἀνάγεται εἰς ἀφαίρεσιν ἀκεραίων (ἀριθμητοῦ ἀπὸ ἀριθμητήν) καὶ κατ᾽ ἀκολουθίαν αἱ διὰ τοὺς ἀκεραίους ἀποδειχθεῖσαι ἰδιότητες (§ 26—32) ἰσχύουσι δι᾽ οἱουσδήποτε ἀριθμοὺς καὶ ἀποδεικνύονται ὁμοίως. Στηριζόμενοι δὲ ἐπ' αὐτῶν ἀποδεικνύομεν εὐκόλως ὅτι:

I. Ἵνα ἀφαιρέσωμεν ἀκέραιον ἀπὸ μικτοῦ, ἀρκεῖ νὰ ἀφαιρέσωμεν αὐτὸν ἀπὸ τὸν ἀκέραιον τοῦ μικτοῦ.

II. Ἵνα ἀφαιρέσωμεν κλάσμα ἀπὸ μικτοῦ, ἀρκεῖ νὰ ἀφαιρέσωμεν αὐτὸ ἀπὸ τὸ κλάσμα τοῦ μικτοῦ (ἐὰν ἀφαιρῆται).

III. Ἵνα ἀφαιρέσωμεν μικτὸν ἀπὸ μικτοῦ, ἀρκεῖ νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸν ἀκέραιον καὶ τὸ κλάσμα τοῦ ἀφαιρετέου ἀντιστοίχως ἀπὸ τὸν ἀκέραιον καὶ τὸ κλάσμα τοῦ μειωτέου καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ δύο ὑπόλοιπα.

ΣΗΜ. Εὐνόητον ὅτι πρέπει τὸ κλάσμα τοῦ ἀφαιρετέου νὰ ἀφαιρῆται ἀπὸ τὸ τοῦ μειωτέου.

Ἀσκήσεις.

214). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $\left(\frac{7}{8}+3\frac{1}{4}+\frac{1}{16}\right)-\frac{3}{4}=3\frac{1}{4}+\frac{3}{16}$.

215). Ὁμοίως ὅτι $8-\frac{3}{4}=7\frac{1}{4}$ καὶ $5\frac{2}{7}-\frac{6}{7}=4\frac{3}{7}$.

216). Ὁμοίως ὅτι

$$\left(\frac{4}{5}-\frac{3}{5}\right)+\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{7}{5}-\frac{2}{4}\right)=\frac{14}{5}-\frac{6}{4}.$$

217). Ὁμοίως ὅτι $12\frac{1}{4}-7\frac{3}{5}=4+\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{5}\right)$.

218). Νὰ ἀφαιρεθῇ τὸ ἄθροισμα τοῦ μεγίστου καὶ ἐλαχίστου τῶν κλασμάτων $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{2}{3}$ ἀπὸ τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων.

219). Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοὶ ἔχοντες ἄθροισμα $\frac{7}{8}$ καὶ διαφορὰν $\frac{3}{8}$. (ἄσκ. 64 καὶ 65).

220). Διὰ ποίαν τιμὴν τοῦ ν ἡ διαφορὰ $\frac{5}{\nu}-\frac{3}{4}$ εἶναι $\frac{1}{12}$;

221). Ἐὰν οἱ παρονομασταὶ δύο ἀναγώγων κλασμάτων εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ἡ διαφορὰ αὐτῶν εἶναι κλάσμα ἀνάγωγον.

Γ΄. Πολλαπλασιασμός.

Α΄. Ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι ἀκέραιος.

§ 147. Πολλαπλασιασμὸς κλάσματος ἐπὶ ἀκέραιον.—Ἡ πρᾶξις αὐτὴ ἐμάθομεν ἤδη (§ 134 Π. I) πῶς γίνεται.

§ 148. Πολ)σμὸς μικτοῦ ἐπὶ ἀκέραιον.—α΄). Τρεπομένου τοῦ μικτοῦ εἰς κλάσμα, ὁ πολ]σμὸς οὗτος ἀνάγεται εἰς τὸν προηγούμενον. Οὕτω $2\frac{4}{10}\times 3=\frac{24}{10}\times 3=\frac{24\times 3}{10}=\frac{72}{10}$. Ἄρα :

Διὰ νὰ πολ]σωμεν μικτὸν ἐπὶ ἀκέραιον, τρέπομεν αὐτὸν εἰς κλάσμα καὶ πολ]ζομεν τὸν ἀριθμητὴν αὐτοῦ ἐπὶ τὸν ἀκέραιον, ὑπὸ δὲ τὸ γινόμενον γράφομεν τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος.

β΄). Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολ)σμοῦ εἶναι

$$2\frac{4}{10}\times 3=2\frac{4}{10}+2\frac{4}{10}+2\frac{4}{10}.$$

Ἐπειδὴ δὲ $2\frac{4}{10}+2\frac{4}{10}+2\frac{4}{10}=(2+2+2)+\left(\frac{4}{10}+\frac{4}{10}+\frac{4}{10}\right)$

ἕπεται ὅτι : $2\frac{4}{10}\times 3=(2+2+2)+\left(\frac{4}{10}+\frac{4}{10}+\frac{4}{10}\right)$

ἢ $\qquad 2\frac{4}{10}\times 3=(2\times 3)+\left(\frac{4}{10}\times 3\right).$

Ἄρα :

Ἵνα πολ]σωμεν μικτὸν ἐπὶ ἀκέραιον, ἀρκεῖ νὰ πολ)σωμεν χωριστὰ τὸν ἀκέραιον καὶ χωριστὰ τὸ κλάσμα ἐπὶ τὸν ἀκέραιον καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ προκύπτοντα γινόμενα.

§ **149**. **Ἐπιμεριστικὴ ἰδιότης**. — Ἐργαζόμενοι ὡς προηγουμένως (§ 148 β΄) ἀποδεικνύομεν ὅτι :

Ἵνα πολ)σωμεν ἄθροισμα οἱωνδήποτε ἀριθμῶν ἐπὶ ἀκέραιον, ἀρκεῖ νὰ πολ)σωμεν ἕκαστον προσθετέον τοῦ ἀθροίσματος ἐπὶ τὸν ἀκέραιον καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ προκύπτοντα γινόμενα.

Οὕτω $\left(2+\frac{5}{6}+7\frac{1}{4}\right)\times 3=(2\times 3)+\left(\frac{5}{6}\times 3\right)+\left(7\frac{1}{4}\times 3\right)$

Β΄. Ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι κλάσμα.

§ **150**. **Γενικὸς ὁρισμὸς τοῦ γινομένου δύο ἀριθμῶν**.—Ὁ ὁρισμὸς τοῦ πολ)σμοῦ, ὁ ὁποῖος ἐδόθη (§ 16 Γ΄) διὰ τοὺς ἀκεραίους ἀριθμούς, δὲν ἰσχύει προφανῶς, ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι κλάσμα ἢ μικτός. Εἶναι λοιπὸν ἀνάγκη νὰ διατυπωθῇ ὁ ὁρισμὸς οὗτος γενικώτερον, ὥστε νὰ ἰσχύῃ καὶ διὰ τὰς περιπτώσεις ταύτας. Εἰς τὴν γενίκευσιν ταύτην ὁδηγεῖ ἡμᾶς ἡ λύσις τοῦ ἀκολούθου προβλήματος.

Ὁ πῆχυς ὑφάσματος τιμᾶται α δραχμάς, πόσον τιμῶνται $\frac{5}{8}$ τοῦ πήχεως ἐκ τοῦ αὐτοῦ ὑφάσματος ;

Λύσις. Ἐν πρώτοις παρατηροῦμεν ὅτι ἡ τιμὴ 5 πήχεων εἶναι $\alpha \times 5$. Κατ' ἀναλογίαν παριστῶμεν καὶ τὴν τιμὴν τῶν $\frac{5}{8}$ διὰ τοῦ γινομένου $\alpha \times \frac{5}{8}$· ἀλλὰ τὴν τιμὴν ταύτην δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν οὕτω :

Ἀφοῦ ὁ εἷς πῆχυς, ἤτοι τὰ $\frac{8}{8}$ πήχ. τιμῶνται α δραχμάς,

τὸ $\frac{1}{8}$ πηχ. θὰ τιμᾶται $\frac{\alpha}{8}$ δραχ.

καὶ τὰ $\frac{5}{8}$ » » $\frac{\alpha}{8} \times 5$ δραχ.

Ὥστε πρέπει νὰ δεχθῶμεν ὅτι $\alpha \times \frac{5}{8} = \frac{\alpha}{8} \times 5$. Ὁμοίως $\alpha \times \frac{3}{4} = \frac{\alpha}{4} \times 3$ καὶ γενικῶς $\alpha \times \frac{\mu}{\nu} = \frac{\alpha}{\nu} \times \mu$.

Ἔστω ἤδη τὸ γινόμενον $\alpha \times 3\frac{2}{5}$. Κατὰ τὰ προηγούμενα $\alpha \times 3\frac{2}{5} = \alpha \times \frac{17}{5} = \frac{\alpha}{5} \times 17$. Ἐπειδὴ δὲ $\frac{\alpha}{5} \times 17 = \left(\frac{\alpha}{5} + \frac{\alpha}{5} + \dots + \frac{\alpha}{5}\right) + \frac{\alpha}{5} + \frac{\alpha}{5}$, ἔνθα ἐντὸς τῆς παρενθέσεως ὑπάρχουσι 15 προσθετέοι καὶ ἐπειδὴ $\frac{\alpha}{5} + \frac{\alpha}{5} + \frac{\alpha}{5} + \frac{\alpha}{5} + \frac{\alpha}{5} = \alpha$, ἔπεται ὅτι $\alpha \times 3\frac{2}{5} = \alpha + \alpha + \alpha + \frac{\alpha}{5} + \frac{\alpha}{5}$.

Ἐκ τῶν ἰσοτήτων $\alpha \times 5 = \alpha + \alpha + \alpha + \alpha + \alpha$

$$\alpha \times \frac{5}{8} = \frac{\alpha}{8} \times 5 = \frac{\alpha}{8} + \frac{\alpha}{8} + \frac{\alpha}{8} + \frac{\alpha}{8} + \frac{\alpha}{8}$$

$$\alpha \times 3\frac{4}{5} = \alpha + \alpha + \alpha + \frac{\alpha}{5} + \frac{\alpha}{5}$$

ἔχοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι $5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$,

$$\frac{5}{8} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$$

καὶ $3\frac{2}{5} = 1 + 1 + 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}$

ἀγόμεθα εἰς τὸν ἀκόλουθον γενικὸν ὁρισμόν.

Γινόμενον ἀριθμοῦ α ἐπὶ ἄλλον καλεῖται ὁ ἀριθμός, ὅστις γίνεται ἐκ τοῦ α καὶ ἐκ τῶν μερῶν αὐτοῦ, ὅπως ὁ πολ)στὴς γίνεται ἐκ τῆς ἀκεραίας μονάδος καὶ ἐκ τῶν μερῶν αὐτῆς.

§ **131. Πολ]σμὸς ἀκεραίου ἐπὶ κλάσμα.**—Κατὰ τὰ προηγουμένως λεχθέντα $3\times\frac{5}{6}=\frac{3}{6}\times5$· ἐπειδὴ δὲ $\frac{3}{6}\times5=\frac{3\times5}{6}$, ἕπεται ὅτι καὶ $3\times\frac{5}{6}=\frac{3\times5}{6}=\frac{15}{6}$. Ἄρα:

Διὰ νὰ πολ]σωμεν ἀκέραιον ἐπὶ κλάσμα ἀρκεῖ νὰ πολ]σωμεν τὸν ἀκέραιον ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος καὶ ὑπὸ τὸ γινόμενον νὰ γράψωμεν τὸν παρανομαστὴν αὐτοῦ.

§ **132. Πολ]σμὸς κλάσματος ἐπὶ κλάσμα.**—Κατὰ τὰ ἀνωτέρω πρὸς εὕρεσιν τοῦ γινομένου $\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}$ πρέπει νὰ λάβωμεν τὸ πέμπτον τοῦ $\frac{2}{3}$ τέσσαρας φοράς· ἐπειδὴ δὲ (§ 135 Πόρ. I.) τὸ πέμπτον τοῦ $\frac{2}{3}$ εἶναι $\frac{2}{3\times5}$, ἕπεται ὅτι $\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{2}{3\times5}\times4$, ὅθεν $\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{2\times4}{3\times5}$. Ἄρα:

Διὰ νὰ πολ]σωμεν κλάσμα ἐπὶ κλάσμα, ἀρκεῖ νὰ πολ]σωμεν ἀριθμητὴν ἐπὶ ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν ἐπὶ παρονομαστὴν καὶ ὑπὸ τὸ α΄ γινόμενον νὰ γράψωμεν τὸ β΄.

§ **133. Πολ]σμὸς μικτοῦ ἐπὶ κλάσμα**—Πρὸς εὕρεσιν τοῦ γινομένου $7\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}$ πρέπει νὰ λάβωμεν τὸ τέταρτον τοῦ $7\frac{2}{5}$ τρεῖς φοράς. Ἀλλὰ τὸ τέταρτον τοῦ $7\frac{2}{5}$ εἶναι $\frac{7}{4}+\frac{2}{5\times4}$, διότι τοῦτο τετράκις λαμβανόμενον (§ 149) γίνεται $7\frac{2}{5}$. Ὥστε

$$7\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}=\left(\frac{7}{4}+\frac{2}{5\times4}\right)\times3=\frac{7}{4}\times3+\frac{2}{5\times4}\times3.$$

Ἐπειδὴ δὲ καὶ $\left(7\times\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}\right)=\frac{7}{4}\times3+\frac{2}{5\times4}\times3$, ἕπεται ὅτι

$$7\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}=\left(7\times\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}\right).$$

Ἄρα: Διὰ νὰ πολ]σωμεν μικτὸν ἐπὶ κλάσμα, ἀρκεῖ νὰ πολ]σωμεν χωριστὰ τὸν ἀκέραιον καὶ χωριστὰ τὸ κλάσμα τοῦ μικτοῦ ἐπὶ τὸν πολ]στὴν καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ προκύπτοντα γινόμενα.

ΣΗΜ. Εὐνόητον ὅτι ἡ πρᾶξις αὕτη δύναται νὰ ἀναχθῇ εἰς πολ]σμὸν κλάσματος ἐπὶ κλάσμα, ἐὰν τραπῇ ὁ μικτὸς εἰς κλάσμα.

Ἐργαζόμενοι, ὡς ἀνωτέρω, δυνάμεθα ν' ἀποδείξωμεν ἰσχύουσαν τὴν ἐπιμεριστικὴν ἰδιότητα (§ 149) καὶ ὅταν ὁ πολ]στὴς εἶναι κλάσμα.

§ **154**. **Ἀντίστροφοι ἀριθμοί**.—Οἱ ἀριθμοὶ $\frac{3}{5}$ καὶ $\frac{5}{3}$, ὧν ἑκάτερος ἔχει τοὺς ὅρους τοῦ ἄλλου ἀντεστραμμένους, καλοῦνται ἀντίστροφοι ἀριθμοί. Τοῦ ἀκεραίου $6=\frac{6}{1}$ ἀντίστροφος εἶναι ὁ $\frac{1}{6}$. Παρατηροῦντες ὅτι $\frac{3}{5}\times\frac{5}{3}=\frac{3\times5}{5\times3}=1$, $6\times\frac{1}{6}=\frac{6}{6}=1$ δίδομεν τὸν ἑξῆς ὁρισμόν.

Δύο ἀριθμοὶ λέγονται ἀντίστροφοι, ἐὰν ἔχωσι γινόμενον 1.

Τυχόντος μικτοῦ π. χ. τοῦ $7\frac{3}{4}=\frac{31}{4}$ ἀντίστροφος εἶναι ὁ $\frac{4}{31}$.

Γ.' Ὁ πολ)στὴς εἶναι μικτός

§ **155**. **Πολ)σμὸς οἱουδήποτε ἀριθμοῦ ἐπὶ μικτόν**.—Ἡ εὕρεσις τοῦ γινομένου $\alpha\times3\frac{2}{7}$ ἀνάγεται εἰς τὰς προηγουμένας περιπτώσεις, ἐὰν τραπῇ ὁ $3\frac{2}{7}$ εἰς κλάσμα. Δύναται ὅμως νὰ εὑρεθῇ τοῦτο καὶ ἄνευ τῆς τροπῆς ταύτης. Τῷ ὄντι· κατὰ τὸν γενικὸν ὁρισμὸν (§ 150) τοῦ γινομένου, ἐπειδὴ $3\frac{2}{7}=1+1+1+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}$ θὰ εἶναι $\alpha\times3\frac{2}{7}=\alpha+\alpha+\alpha+\frac{\alpha}{7}+\frac{\alpha}{7}=(\alpha\times3)=\left(\frac{\alpha}{7}\times2\right)$. Ἐπειδὴ δὲ $\frac{\alpha}{7}\times2=\alpha\times\frac{2}{7}$, ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται $\alpha\times3\frac{2}{7}=(\alpha\times3)+\left(\alpha\times\frac{2}{7}\right)$.

Ἄρα : Ἵνα πολ]σωμεν ἀριθμὸν ἐπὶ μικτόν, ἀρκεῖ νὰ πολ]σωμεν τὸν ἀριθμὸν χωριστὰ ἐπὶ τὸν ἀκέραιον καὶ χωριστὰ ἐπὶ τὸ κλάσμα τοῦ μικτοῦ καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ προκύπτοντα γινόμενα.

Ἀξιοσημείωτος μερικὴ περίπτωσις εἶναι ἐκείνη, κατὰ τὴν ὁποίαν καὶ ὁ α εἶναι μικτὸς ἀριθμός. Οὕτω

$$4\frac{2}{7}\times3\frac{5}{6}=\left(4\frac{2}{7}\times3\right)+\left(4\frac{2}{7}\times\frac{5}{6}\right).$$

Ἐπειδὴ δὲ

$$4\frac{2}{7}\times3=(4\times3)+\left(\frac{2}{7}\times3\right) \text{ καὶ } 4\frac{2}{7}\times\frac{5}{6}=\left(4\times\frac{5}{6}\right)$$

$+\left(\frac{2}{7}\times\frac{5}{6}\right)$, ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται

$$4\frac{2}{7}\times3\frac{5}{6}=(4\times3)+\left(\frac{2}{7}\times3\right)+\left(4\times\frac{5}{6}\right)+\left(\frac{2}{7}\times\frac{5}{6}\right).$$

$\boxed{\text{Ἄρα:}}$ Ἵνα πολ]σωμεν μικτὸν ἐπὶ μικτόν, ἀρκεῖ νὰ πολ]σωμεν ἀμφότερα τὰ μέρη τοῦ ἑνὸς ἐπὶ ἀμφότερα τὰ μέρη τοῦ ἄλλου καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ προκύπτοντα γινόμενα.

Ἰδιότητες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

§ **156. Θεώρημα I.**—Τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται, ἂν μεταβληθῇ ἡ τάξις αὐτῶν. Λέγω πχ. ὅτι $\frac{3}{7}\times\frac{4}{5}=\frac{4}{5}\times\frac{3}{7}$.

Ἀπόδειξις. Κατὰ τὰ γνωστὰ (§ 152)

$$\frac{3}{7}\times\frac{4}{5}=\frac{3\times4}{7\times5} \text{ καὶ } \frac{4}{5}\times\frac{3}{7}=\frac{4\times3}{5\times7}.$$

Ἐπειδὴ δὲ τὰ ἐξαγόμενα ταῦτα εἶναι ἴσα ὡς ἔχοντα ἴσους ὁμωνύμους ὅρους, ἕπεται ὅτι $\frac{3}{7}\times\frac{4}{5}=\frac{4}{5}\times\frac{3}{7}$. ὅ. ἔ. δ.

§ **157. (Θ. II). Ἐπιμεριστικὴ ἰδιότης.** — Ὑπεδείξαμεν ἤδη (§ 149, 153) πῶς ἀποδεικνύεται ἰσχύουσα ἡ ἰδιότης αὕτη, ὅταν ὁ πολ]στὴς εἶναι ἀκέραιος ἢ κλάσμα. Ὅταν οὗτος εἶναι μικτός, τρέποντες αὐτὸν εἰς κλάσμα ἀναγόμεθα εἰς τὴν ἑτέραν τῶν εἰρημένων περιπτώσεων.

§ **158. Θεώρημα III.**—Ἵνα πολ]σωμεν διαφορὰν ἐπὶ ἀριθμὸν ἀρκεῖ νά πολ]σωμεν τὸν μειωτέον καὶ τὸν ἀφαιρετέον ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τοῦτον καὶ ἀπὸ τοῦ α΄ γινομένου νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ β΄.

Λέγω π. χ. ὅτι $\left(\frac{5}{8}-\frac{2}{7}\right)\times\frac{6}{9}=\left(\frac{5}{8}\times\frac{6}{9}\right)-\left(\frac{2}{7}\times\frac{6}{9}\right)$.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ $\frac{5}{8}-\frac{2}{7}=\frac{(5\times7)-(8\times2)}{8\times7}$, ἕπεται ὅτι

$$\left(\frac{5}{8}-\frac{2}{7}\right)\times\frac{6}{9}=\frac{(5\times7)-(8\times2)}{8\times7}\times\frac{6}{9}.$$

Ἐπειδὴ δὲ (§ 152) $\frac{(5\times7)-(8\times2)}{8\times7}\times\frac{6}{9}=\frac{[(5\times7)-(8\times2)]\times6}{8\times7\times9}$, ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται $\left(\frac{5}{8}-\frac{2}{7}\right)\times\frac{6}{9}=\frac{[(5\times7)-(8\times2)]\times6}{8\times7\times9}$ ἢ (§ 37)

$$\left(\frac{5}{8}-\frac{2}{7}\right)\times\frac{6}{9}=\frac{(5\times7\times6)-(8\times2\times6)}{8\times7\times9}.$$

Λαμβάνοντες δὲ ὑπ' ὄψιν ὅτι $\frac{5\times7\times6}{8\times7\times9}-\frac{8\times2\times6}{8\times7\times9}=\frac{(5\times7\times6)-(8\times2\times6)}{8\times7\times9}$,

συμπεραίνομεν ὅτι $\left(\frac{5}{8}-\frac{2}{7}\right)\times\frac{6}{9}=\frac{5\times7\times6}{8\times7\times9}-\frac{8\times2\times6}{8\times7\times9}$, ὅθεν μετὰ τὴν ἁπλοποίησιν τῶν κλασμάτων τοῦ β′ μέλους προκύπτει ἡ ἰσότης

$$\left(\frac{5}{8}-\frac{2}{7}\right)\times\frac{6}{9}=\frac{5\times6}{8\times9}-\frac{2\times6}{7\times9}.$$

Ἐκ ταύτης δὲ καὶ τῶν προφανῶν ἰσοτήτων

$$\frac{5}{8}\times\frac{6}{9}=\frac{5\times6}{8\times9},\ \frac{2}{7}\times\frac{6}{9}=\frac{2\times6}{7\times9}$$ ἕπεται ὅτι :

$$\left(\frac{5}{8}-\frac{2}{7}\right)\times\frac{6}{9}=\left(\frac{5}{8}\times\frac{6}{9}\right)-\left(\frac{2}{7}\times\frac{6}{9}\right).$$ ὅ. ἔ. δ.

§ **139. Θεώρημα IV.**—Ἵνα πολ]σωμεν ἄθροισμα ἐπὶ ἄθροισμα, ἀρκεῖ νὰ πολ(σωμεν πάντας τοὺς προσθετέους τοῦ α′ ἐπὶ πάντας τούς προσθετέους τοῦ β′ ἀθροίσματος καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ προκύπτοντα γινόμενα.

Λέγω π. χ. ὅτι $\left(\frac{2}{3}+\frac{4}{7}\right)\times\left(\frac{5}{6}+\frac{8}{9}\right)=\left(\frac{2}{3}\times\frac{5}{6}\right)+\left(\frac{2}{3}\times\frac{8}{9}\right)+$

$$+\left(\frac{4}{7}\times\frac{5}{6}\right)+\left(\frac{4}{7}\times\frac{8}{9}\right).$$

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ $\frac{5}{6}+\frac{8}{9}=\frac{(5\times9)+(6\times8)}{6\times9}$, ἕπεται ὅτι :

$$\left(\frac{2}{3}+\frac{4}{7}\right)\times\left(\frac{5}{6}+\frac{8}{9}\right)=\left(\frac{2}{3}+\frac{4}{7}\right)\times\frac{(5\times9)+(6\times8)}{6\times9}.$$

Ἀλλὰ κατὰ τὴν ἐπιμεριστικὴν ἰδιότητα εἶναι

$$\left(\frac{2}{3}+\frac{4}{7}\right)\times\frac{(5\times9)+(6\times8)}{6\times9}=\frac{2}{3}\times\frac{5\times9)+(6\times8)}{6\times9}+\frac{4}{7}\times\frac{(5\times9)+(6\times8)}{6\times9}$$

$$=\frac{2\times[(5\times9)+(6\times8)]}{3\times6\times9}+\frac{4\times[(5\times9)+(6\times8)]}{7\times6\times9}$$

Ἄρα : $\left(\frac{2}{3}+\frac{4}{7}\right)\times\left(\frac{5}{6}+\frac{8}{9}\right)=\frac{2\times[(5\times9)+(6\times8)]}{3\times6\times9}+\frac{4\times[(5\times9)+(6\times8)]}{7\times6\times9}$

Ἐὰν δὲ ἐκτελέσωμεν τοὺς εἰς τοὺς ἀριθμητὰς τοῦ β′. μέλους σημειουμένους πολ]σμοὺς (§ 35) καὶ χωρίσωμεν ἕκαστον κλάσμα εἰς ἄθροισμα δύο κλασμάτων, εὑρίσκομεν μετὰ τὰς ἀναγκαίας ἁπλοποιήσεις ὅτι $\left(\frac{2}{3}+\frac{4}{7}\right)\times\left(\frac{5}{6}+\frac{8}{9}\right)=\frac{2\times5}{3\times6}+\frac{2\times8}{3\times9}+\frac{4\times5}{7\times6}+\frac{4\times8}{7\times9}$, ὅθεν ἕπεται εὐκόλως ὅτι

$$\left(\frac{2}{3}+\frac{4}{7}\right)\times\left(\frac{5}{6}+\frac{8}{9}\right)=\left(\frac{2}{3}\times\frac{5}{6}\right)+\left(\frac{2}{3}\times\frac{8}{9}\right)+$$

$$\left(\frac{4}{7}\times\frac{5}{6}\right)+\left(\frac{4}{7}\times\frac{8}{9}\right).$$ ὅ. ἔ. δ.

ΣΗΜ. Ἐν τῇ ἀποδείξει ἑκάστου τῶν προηγουμένων θεωρημάτων ὑπετέθησαν πάντες οἱ ἀριθμοὶ κλασματικοί· ἂν μερικοὶ ἀπὸ αὐτοὺς ἢ πάντες εἶναι μικτοὶ ἢ μερικοὶ ἀκέραιοι, τρέπονται εἰς κλάσματα καὶ αἱ ἀποδείξεις χωροῦσιν ὁμοίως.

Παρατήρησις. Αἱ διὰ τοὺς ἀκεραίους ἀποδειχθεῖσαι ἰδιότητες (§ 33 ἕως 38) τοῦ πολ]σιασμοῦ ἀληθεύουσι δι' οἱουσδήποτε ἀριθμοὺς καὶ εἶναι κατ' ἀκολουθίαν γενικαί.

Ἀσκήσεις.

222). Νὰ εὑρεθῶσι τὰ $\frac{5}{6}$ ἑκάστου τῶν ἀριθμῶν $12, \frac{3}{4}, 5\frac{2}{3}$.

223). Νὰ εὑρεθῶσι τὰ $\frac{5}{8}$ τοῦ ἀθροίσματος $\left(3+\frac{1}{6}+\frac{7}{9}\right)$.

224). Ἐὰν ὁ ἀριθμητὴς ἑκατέρου τῶν ἀναγώγων κλασμάτων $\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ $\frac{\gamma}{\delta}$ εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν παρονομαστὴν τοῦ ἄλλου, τὸ κλάσμα $\frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}$ εἶναι ἀνάγωγον.

225). Τὸ γινόμενον τοῦ α ἐπὶ κλάσμα εἶναι μικρότερον ἢ μεγαλύτερον τοῦ α, καθ' ὅσον τὸ κλάσμα εἶναι μικρότερον ἢ μεγαλύτερον τοῦ 1.

226). Ἵνα τὸ γινόμενον δύο ἀναγώγων κλασμάτων εἶναι ἀκέραιος ἀριθμός, πρέπει καὶ ἀρκεῖ ὁ παρονομαστὴς ἑκατέρου νὰ διαιρῇ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ ἄλλου.

227). Ἔμπορος ἐζημιώθη τὰ $\frac{3}{7}$ τοῦ κεφαλαίου του, ὅπερ ἦτο 22129 δραχμαί. Πόσαι δραχμαὶ τῷ ἔμειναν;

228). Ἐργάτης σκάπτει εἰς 9 ὥρας 250 τ. μ. ἀμπέλου, ἕτερος εἰς 8 ὥρας 242 τ. μ. καὶ γ'. εἰς 12 ὥρας 300 τ. μ. Πόσα τετρ. μέτρα σκάπτουσιν οἱ τρεῖς ὁμοῦ εἰς 36 ὥρας;

Γινόμενον πολλῶν παραγόντων.

§ **160**. Ὁ ἐν (§ 43) δοθεὶς ὁρισμὸς τοῦ γινομένου πολλῶν παραγόντων καὶ ὁ τρόπος τῆς παραστάσεως αὐτοῦ διατηρεῖται δι' οἱουσδήποτε ἀριθμούς. Τρέποντες δὲ τοὺς τυχὸν ὑπάρχοντας ἀκεραίους ἢ μικτοὺς παράγοντας εἰς κλάσματα ἀνάγομεν τὴν εὕρεσιν παντὸς γινομένου οἱωνδήποτε ἀριθμῶν εἰς τὴν εὕρεσιν γινομένου κλασμάτων· εἶναι ὅθεν ἀναγκαῖον νὰ μάθωμεν πῶς εὑρίσκεται πᾶν τοιοῦτον γινόμενον.

Ἔστω π. χ. τὸ γινόμενον $\frac{3}{5}\times\frac{4}{7}\times\frac{6}{9}\times\frac{2}{8}$. Ἀκολουθοῦντες τὸν ὁρισμὸν τοῦ γινομένου πολλῶν παραγόντων καὶ ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὸν τρόπον, κατὰ τὸν ὁποῖον πολ]ζεται κλάσμα ἐπὶ κλάσμα εὑρίσκομεν ὅτι

$$\frac{3}{5}\times\frac{4}{7}=\frac{3\times4}{5\times7},\ \frac{3\times4}{5\times7}\times\frac{6}{9}=\frac{3\times4\times6}{5\times7\times9}\text{ καὶ }\frac{3\times4\times6}{5\times7\times9}\times\frac{2}{8}=\frac{3\times4\times6\times2}{5\times7\times9\times8},$$

$$\text{ἑπομένως }\frac{3}{5}\times\frac{4}{7}\times\frac{6}{9}\times\frac{2}{8}=\frac{3\times4\times6\times2}{5\times7\times9\times8}.$$

Ἄρα: Ἵνα εὕρωμεν γινόμενον ὁσωνδήποτε κλασμάτων, ἀρκεῖ ὑπὸ τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμητῶν νὰ γράψωμεν τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν αὐτῶν.

Ἰδιότητες γινομένου πολλῶν παραγόντων.

§ 161. Θεώρημα I.— Τὸ γινόμενον ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται, ὁπωσδήποτε καὶ ἂν μεταβληθῇ ἡ τάξις αὐτῶν.

Λέγω π. χ. ὅτι $\frac{2}{7}\times5\times6\frac{1}{8}=5\times\frac{2}{7}\times6\frac{1}{8}$.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ $5=\frac{5}{1}$ καὶ $6\frac{1}{8}=\frac{49}{8}$, ἕπεται ὅτι:

$\frac{2}{7}\times5\times6\frac{1}{8}=\frac{2}{7}\times\frac{5}{1}\times\frac{49}{8}=\frac{2\times5\times48}{7\times8}$ καὶ $5\times\frac{2}{7}\times6\frac{1}{8}=$ $=\frac{5}{1}\times\frac{2}{7}\times\frac{49}{8}=\frac{5\times2\times49}{7\times8}$. Ἀλλὰ τὰ ἐξαγόμενα, εἰς τὰ ὁποῖα κατελήξαμεν εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα τοὺς ὁμωνύμους ὅρους αὐτῶν ἴσους (§ 46)· ὥστε:

$$\frac{2}{7}\times5\times6\frac{1}{8}=5\times\frac{2}{7}\times6\frac{1}{8}\text{ ὅ. ἔ. δ.}$$

Ἀφ' οὗ ἡ ἰδιότης αὕτη ἀληθεύει, ἕπεται ὅτι καὶ αἱ ἄλλαι ἰδιότητες (§ 46 ἕως 51), αἱ ὁποῖαι πηγάζουσιν ἀπὸ αὐτὴν ἀληθεύουσι καὶ ἀποδεικνύονται, ὅπως καὶ διὰ τοὺς ἀκεραίους.

Κατὰ ταῦτα, οἱωνδήποτε ὄντων τῶν ἀριθμῶν α, β, γ, δ, ε ἀληθεύουσιν αἱ ἰσότητες:

$$\alpha\times\beta\times\gamma\times\delta=\beta\times\gamma\times\alpha\times\delta$$
$$\alpha\times\beta\times\gamma\times\delta=\alpha(\beta\times\gamma)\times\delta$$
$$(\alpha\times\beta\times\gamma)\times\delta=\alpha\times(\beta\times\delta)\times\gamma$$
$$\text{καὶ }(\alpha\times\beta\times\gamma)\times(\delta\times\varepsilon)=\alpha\times\beta\times\gamma\times\delta\times\varepsilon.$$

Ἀσκήσεις.

229) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ $\frac{2}{3}$ τῶν $\frac{3}{4}$ τοῦ 8.

230). Νὰ εὑρεθῶσι τὰ $\frac{5}{}$ τῶν $\frac{2}{7}$ τῶν $\frac{6}{9}$ τοῦ $\frac{3}{4}$.

231) Ἐλαστικὴ σφαῖρα ἀναπηδᾷ εἰς τὰ $\frac{2}{3}$, τοῦ ὕψους ἀπὸ τὸ ὁποῖον πίπτει. Εἰς πόσον ὕψος ἀνέρχεται κατὰ τὴν γ' ἀναπήδησιν, ἐὰν ἀρχικῶς ἀφέθη ἐξ ὕψους 6 μέτρων ;

Δ'. Διαίρεσις.

Α'. Ὁ διαιρέτης εἶναι ἀκέραιος.

§ 162. Διαίρεσις κλάσματος δι' ἀκεραίου.—Ἐμάθομεν ἤδη (§134 Π. III, § 135 Π. I) πῶς γίνεται ἡ πρᾶξις αὕτη. Οὕτω :

$$\frac{6}{8} : 2 = \frac{6:2}{8} = \frac{3}{8}, \quad \frac{5}{7} : 3 = \frac{5}{7\times3} = \frac{5}{21}.$$

§ 163. Διαίρεσις μικτοῦ δι' ἀκεραίου.—α') Τρέποντες τὸν μικτὸν εἰς κλάσμα ἀνάγομεν τὴν πρᾶξιν ταύτην εἰς τὴν προηγουμένην. Οὕτω $3\frac{2}{7} : 4 = \frac{23}{7} : 4 = \frac{23}{28}$. Ὥστε :

Ἵνα διαιρέσωμεν μικτὸν δι' ἀκεραίου, ἀρκεῖ νὰ τρέψωμεν τὸν μικτὸν εἰς κλάσμα καὶ νὰ διαιρέσωμεν αὐτὸ διὰ τοῦ ἀκεραίου.

β'). Δυνάμεθα ὅμως καὶ ἄλλως νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν ταύτην. Ἐὰν π. χ. ἔχωμεν $7\frac{3}{4}$ δραχ. καὶ θέλωμεν νὰ μοιράσωμεν αὐτὰς ἐξ ἴσου εἰς δύο πτωχούς, τὸ μερίδιον ἑκάστου νὰ εἶναι τὸ πηλίκον $7\frac{3}{4} : 2$. Εἶναι ὅμως φανερὸν ὅτι, ἂν μοιράσωμεν πρῶτον τὰς 7 δραχ., θὰ λάβῃ ἕκαστος $\frac{7}{2}$ δραχ· ἐὰν δὲ ἔπειτα μοιράσωμεν καὶ τὰ $\frac{3}{4}$ δραχ. θὰ λάβῃ ἕκαστος ἀκόμη $\frac{3}{4\times2}$ δραχ. ἤτοι τὸ μερίδιον ἑκάστου εἶναι $\left(\frac{7}{2}+\frac{3}{4\times2}\right)$ δραχ. Ἄρα $7\frac{3}{4} : 2 = \frac{7}{2}+\frac{3}{4\times2}$. Ὅτι δὲ πράγματι τὸ $\left(\frac{7}{2}+\frac{3}{4\times2}\right)$ εἶναι τὸ ἀληθὲς πηλίκον, πειθόμεθα πολ]ζοντες αὐτὸ ἐπὶ τὸν διαιρέτην 2, ὅτε εὑρίσκομεν (§ 149) τὸν διαιρετέον $7+\frac{3}{4} = 7\frac{3}{4}$. Ὥστε :

Ἵνα διαιρέσωμεν μικτὸν δι' ἀκεραίου, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν χωριστὰ τὸν ἀκέραιον καὶ χωριστὰ τὸ κλάσμα διὰ τοῦ ἀκεραίου καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ προκύπτοντα πηλίκα.

Β'. Ὁ διαιρέτης εἶναι κλάσμα.

§ **164. Διαίρεσις ἀριθμοῦ διὰ κλάσματος.**—Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον $9 : \frac{3}{4}$, ἤτοι ἀριθμὸν τινα π, τοιοῦτον ὥστε νὰ εἶναι $\pi \times \frac{3}{4} = 9$. Ἐπειδὴ $\pi \times \frac{3}{4} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}$ (§ 150), ἕπεται ὅτι τὸ $\frac{\pi}{4}$ τρὶς λαμβανόμενον ἀποτελεῖ τὸν 9, ἅπαξ δὲ λαμβανόμενον θὰ ἀποτελῇ $\frac{9}{3}$ καὶ τετράκις λαμβανόμενον θὰ ἀποτελῇ τὸν $\frac{9}{3} \times 4$, ἤτοι $\frac{\pi}{4} \times 4 = \frac{9}{3} \times 4$ ἢ $\pi = \frac{9}{3} \times 4 = 9 \times \frac{4}{3} = \frac{36}{3} = 12$.

Ὥστε τὸ πηλίκον $9 : \frac{3}{4}$ εὑρίσκεται πολ]ζομένου τοῦ 9 ἐπὶ τὸν ἀντίστροφον τοῦ διαιρέτου ἀριθμόν.

Λέγω ἤδη ὅτι καὶ $\alpha : \frac{3}{4} = \alpha \times \frac{4}{3}$, οἱοσδήποτε ἀριθμὸς καὶ ἂν εἶναι ὁ α.

Τῷ ὄντι· $\left(\alpha \times \frac{4}{3}\right) \times \frac{3}{4} = \alpha \times \left(\frac{4}{3} \times \frac{3}{4}\right)$. Ἐπειδὴ δὲ $\frac{4}{3} \times \frac{3}{4} = 1$ (§ 154), ἡ ἰσότης αὕτη γίνεται $\left(\alpha \times \frac{4}{3}\right) \times \frac{3}{4} = \alpha$, ἐξ ἧς φαίνεται ὅτι ὁ ἀριθμὸς $\left(\alpha \times \frac{4}{3}\right)$ ἐπὶ τὸν διαιρέτην πολ]ζόμενος δίδει τὸν διαιρετέον. Εἶναι λοιπὸν ὁ $\left(\alpha \times \frac{4}{3}\right)$ τὸ ζητούμενον πηλίκον.

Ὥστε :

Ἵνα διαιρέσωμεν ἀριθμὸν διὰ κλάσματος, ἀρκεῖ νὰ πολ]σωμεν αὐτὸν ἐπὶ τὸν ἀντίστροφον τοῦ διαιρέτου ἀριθμόν.

Γ'. Ὁ διαιρέτης εἶναι μικτός.

§ **165. Διαίρεσις ἀριθμοῦ διὰ μικτοῦ.** — Τρέποντες τὸν μικτὸν διαιρέτην εἰς κλάσμα ἀνάγομεν τὴν διαίρεσιν ταύτην εἰς τὴν προηγουμένην.

Ἄρα : Ἵνα διαιρέσωμεν ἀριθμὸν διὰ μικτοῦ, πολ]ζομεν τὸν ἀριθμὸν τοῦτον ἐπὶ τὸν ἀντίστροφον τοῦ μικτοῦ διαιρέτου ἀριθμὸν (§ 154).

§ **166. Γενικὸς κανὼν διαιρέσεως.**—Ἐκ τῶν ἰσοτήτων $6 : 4 = \frac{6}{4} = 6 \times \frac{1}{4}$, $\frac{2}{5} : 4 = \frac{2}{5 \times 4} = \frac{2 \times 1}{5 \times 4} = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4}$, $9 \frac{3}{5} : 4 =$ $= \frac{9}{4} + \frac{3}{5 \times 4} = 9 \times \frac{1}{4} + \frac{3}{5} \times \frac{1}{4} = 9 \frac{3}{5} \times \frac{1}{4}$ καὶ τῶν προηγουμένων (§ 164, 165) κανόνων ἕπεται ὁ ἀκόλουθος γενικῶς κανὼν τῆς διαιρέσεως.

Ἵνα διαιρέσωμεν ἀριθμὸν δι' οἱονδήποτε ἄλλου, ἀρκεῖ νὰ πολ)σωμεν τὸν διαιρετέον ἐπὶ τὸν ἀντίστροφον τοῦ διαιρέτου ἀριθμόν.

Κατὰ ταῦτα ἡ διαίρεσις ἀνάγεται εἰς τὸν πολλαπλασιασμόν. Οὕτως ἡ διαίρεσις τοῦ α διὰ τοῦ β εἶναι πολ)σμὸς τοῦ α ἐπὶ $\frac{1}{β}$.

§ **167. Ἰδιότητες τῆς διαιρέσεως:** Αἱ διὰ τοὺς ἀκεραίους ἀποδειχθεῖσαι (§ 51 ἕως 58) ἰδιότητες τῆς διαιρέσεως ἀληθεύουσι δι' οἱουσδήποτε ἀριθμοὺς καὶ ἀποδεικνύονται ὁμοίως. Οὕτως, οἱωνδήποτε ὄντων τῶν ἀριθμῶν α, β, γ, δ, ε ἀληθεύουσιν αἱ ἰσότητες:

$$(α+β+γ) : δ = (α : δ) + (β : δ) + (γ : δ)$$
$$(α-β) : δ = (α : δ) - (β : δ)$$
$$(α \times β \times γ) : δ = α \times (β : δ) \times γ$$
$$A : (α \times β \times γ) = [(A : α) : β] : γ$$
$$α : β = (α \times λ) : (β \times λ).$$

Ἀσκήσεις.

232). Διὰ ποίαν τιμὴν τοῦ α εἶναι $\frac{α}{5} : \frac{2}{3} = \frac{12}{10}$;

233). Τίνος ἀριθμοῦ τὰ $\frac{2}{3}$ ἐλαττωθέντα κατὰ 5 γίνονται 14;

234). Τίς ὁ ἐλάχιστος ἀκέραιος, ὅστις διαιρούμενος δι' ἑκάστου τῶν κλασμάτων $\frac{3}{4}$ καὶ $\frac{7}{8}$ δίδει ἀκέραιον πηλίκον;

235). Πότε τὸ πηλίκον ἀναγώγου κλάσματος δι' ἄλλου τοιούτου εἶναι ἀκέραιος;

236). Πότε τὸ πηλίκον ἀναγώγου κλάσματος δι' ἄλλου τοιούτου εἶναι ἀνάγωγον;

237). Ἐδαπάνησέ τις 40 δραχμὰς καὶ τὸ $\frac{1}{5}$ τῶν ὑπολειφθέντων εἶτα χρημάτων του· οὕτω δὲ τῷ ἔμειναν 48 δραχμαί. Πόσας δραχμὰς εἶχεν ἀρχικῶς;

Δυνάμεις τῶν κλασμάτων.

§ **168.** Ὁ ἐν (§ 64) δοθεὶς ὁρισμὸς δυνάμεως ἀριθμοῦ διατηρεῖται καὶ ὅταν ὁ ἀριθμὸς (ἡ βάσις) εἶναι κλάσμα. Ὁμοίως διατηροῦνται οἱ ὁρισμοὶ τῶν στοιχείων, (βάσις, ἐκθέτης) καὶ ὁ τρόπος τῆς συντόμου παραστάσεως ἑκάστης δυνάμεως. Οὕτω $\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}$ καὶ καλεῖται τετράγωνον τοῦ $\frac{3}{5}$, $\left(\frac{5}{7}\right)^3=\frac{5}{7}\times\frac{5}{7}\times\frac{5}{7}$ καὶ καλεῖται κύβος τοῦ $\frac{5}{7}$.

Ἐὰν θελήσωμεν νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν τελευταίαν ταύτην δύναμιν, παρατηροῦμεν ὅτι

$$\left(\frac{5}{7}\right)^3=\frac{5}{7}\times\frac{5}{7}\times\frac{5}{7}=\frac{5^3}{7^3} \text{ ἤτοι } \left(\frac{5}{7}\right)^3=\frac{5^3}{7^3}.$$

Ἄρα: Κλάσμα ὑψοῦται εἰς δύναμιν, ἂν ἀμφότεροι οἱ ὅροι ὑψωθῶσιν εἰς τὴν δύναμιν ταύτην.

Αἱ δυνάμεις τῶν ἀναγώγων κλασμάτων ἔχουσι τὴν ἀκόλουθον ἰδιότητα.

§ **169. Θεώρημα.**—Πᾶσα δύναμις ἀναγώγου κλάσματος εἶναι κλάσμα ἀνάγωγον.

Λέγω δηλ. ὅτι τοῦ ἀναγώγου κλάσματος $\frac{5}{9}$ ἡ τυχοῦσα δύναμις π. χ. ἡ τρίτη εἶναι κλάσμα ἀνάγωγον.

Ἀπόδειξις. Κατὰ τὰ προηγούμενα $\left(\frac{5}{9}\right)^3=\frac{5^3}{9^3}$. Ἐπειδὴ δὲ οἱ ἀριθμοὶ 5 καὶ 9 εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, καὶ οἱ 5^3, 9^3 εἶναι (§111 II. III) ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους καὶ κατ' ἀκολουθίαν (§ 138 II. 1) τὸ κλάσμα $\frac{5^3}{9^3}$ εἶναι ἀνάγωγον. ὅ. ἔ. δ.

§ **170. Ἰδιότητες τῶν δυνάμεων.**—Αἱ διὰ τοὺς ἀκεραίους ἀριθμοὺς (βάσεις) ἀποδειχθεῖσαι ἰδιότητες (§ 65 ἕως 69) τῶν δυνάμεων ἀληθεύουσι καὶ διὰ τὰ κλάσματα καὶ ἀποδεικνύονται ὁμοίως.

Οὕτω

$$\left(\left(\frac{5}{8}\right)^5\right)^2=\left(\frac{5}{8}\right)^{10}, \left(\frac{3}{4}\times\frac{2}{5}\times\frac{7}{9}\right)^3=\left(\frac{3}{4}\right)^3\times\left(\frac{2}{5}\right)^3\times\left(\frac{7}{9}\right)^3 \text{ κτλ.}$$

Ἀσκήσεις.

238). Διὰ ποίαν τιμὴν τοῦ α εἶναι $\left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{\alpha}{9}$;

239). Νὰ εὑρεθῇ τὸ τετράγωνον καὶ ὁ κύβος ἑκάστου τῶν κλασμάτων $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{2}{7}$.

240). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι, ἡ διαφορὰ ἀναγώγου κλάσματος καὶ τοῦ τετραγώνου αὐτοῦ εἶναι κλάσμα ἀνάγωγον.

241). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι, ἂν εἰς ἀνάγωγον κλάσμα προστεθῇ τυχοῦσα δύναμις αὐτοῦ, προκύπτει κλάσμα ἀνάγωγον.

242). Νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον κλάσματος διὰ τοῦ τετραγώνου αὐτοῦ.

§ **171. Σύνθετα κλάσματα.**— Ὅπως τὸ πηλίκον 15 : 6 παριστῶμεν διὰ τοῦ κλάσματος $\frac{15}{6}$, οὕτω κατ' ἀναλογίαν δυνάμεθα καὶ τὸ πηλίκον 7 : $\frac{5}{8}$ νὰ παραστήσωμεν οὕτω $\dfrac{7}{\frac{5}{8}}$, τὸ $5\frac{2}{9} : \frac{6}{11}$ οὕτω $\dfrac{5\frac{2}{9}}{\frac{6}{11}}$ κτλ.

Αἱ τοιαῦται κλασματικαὶ μορφαὶ καλοῦνται σύνθετα κλάσματα.

Πρὸς διάκρισιν δὲ ἀπὸ τούτων τα μέχρι τοῦδε γνωστὰ κλάσματα καλοῦμεν ἁπλᾶ κλάσματα.

Οἱ διὰ τῆς ὁριζοντίου γραμμῆς χωριζόμενοι ἀριθμοὶ εἰς ἕκαστον σύνθετον κλάσμα καλοῦνται ἀμφότεροι ὅροι τοῦ συνθέτου κλάσματος. Τούτων ὁ ὑπεράνω τῆς γραμμῆς (ὁ διαιρετέος) καλεῖται ἀριθμητής, ὁ δὲ ὑπ' αὐτὴν (ὁ διαιρέτης) καλεῖται παρονομαστὴς τοῦ συνθέτου κλάσματος.

Τὰ σύνθετα κλάσματα ἔχουσιν ἁπάσας τὰς ἰδιότητας τῶν ἁπλῶν· τούτων ἀποδεικνύομεν μόνον τὴν ἀκόλουθον.

Θεώρημα I.— Ἐὰν ἀμφότεροι οἱ ὅροι συνθέτου κλάσματος πολ]σθῶσιν ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, ἡ ἀξία αὐτοῦ δὲν μεταβάλλεται.

Λέγω π. χ. ὅτι $\dfrac{\frac{5}{8}}{7\frac{2}{3}} = \dfrac{\frac{5}{8}\times\lambda}{7\frac{2}{3}\times\lambda}$, οἱουδήποτε ὄντος τοῦ λ.

Ἀπόδειξις. Τὸ σύνθετον κλάσμα $\dfrac{\frac{5}{8}}{7\frac{2}{3}}$ δηλοῖ τὸ πηλίκον $\frac{5}{8} : 7\frac{2}{3}$.

Τὸ δὲ $\dfrac{\frac{5}{8}\times\lambda}{7\frac{2}{3}\times\lambda}$ δηλοῖ τὸ πηλίκον $\left(\frac{5}{8}\times\lambda\right) : \left(7\frac{2}{3}\times\lambda\right)$.

Ἐπειδὴ δέ (§ 167) τὰ δύο ταῦτα πηλίκα εἶναι ἴσα, ἕπεται ὅτι τὰ ρηθέντα σύνθετα κλάσματα εἶναι ἴσα. ὅ. ἔ. δ.

§ **172, Τροπὴ συνθέτου κλάσματος εἰς ἁπλοῦν.**— α΄.) Ἔστω τὸ σύνθετον κλάσμα $\dfrac{6}{\frac{4}{5}}$, τοῦ ὁποίου ὁ παρονομαστὴς ἔχει ἴδιον παρονομαστὴν τὸν 5. Πολ]ζοντες ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ συνθέτου τούτου κλάσματος ἐπὶ 5 εὑρίσκομεν τὸ ἁπλοῦν κλάσμα $\frac{30}{4}$, ὅπερ κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα εἶναι ἴσον πρὸς τὸ $\dfrac{6}{\frac{4}{5}}$, ἤτοι $\dfrac{6}{\frac{4}{5}}=\dfrac{30}{4}$.

β΄.) Ἔστω ἤδη τὸ σύνθετον κλάσμα $\dfrac{\frac{3}{4}}{7\frac{5}{6}}$, τοῦ ὁποίου οἱ ὅροι ἔχουσιν ἰδίους παρονομαστὰς τὸν 4 καὶ 6, ὧν ἐ. κ. π. εἶναι ὁ 12. Πολ]ζοντες ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ συνθέτου τούτου κλάσματος ἐπὶ 12 καὶ παρατηροῦντες ὅτι $\frac{3}{4}\times12=\frac{3}{4}\times4\times3=3\times3=9$, $7\frac{5}{6}\times12=(7\times12)+\frac{5}{6}\times6\times2=84+10=94$ καὶ ἔχοντες ὑπ᾿ ὄψιν τὸ προηγούμενον θεώρημα συνάγομεν ὅτι: $\dfrac{\frac{3}{4}}{7\frac{5}{6}}=\dfrac{9}{94}$. Θέτοντες τὸ σύνθετον κλάσμα $\dfrac{6}{\frac{4}{5}}$, ὑπὸ τὴν μορφὴν $\dfrac{\frac{6}{1}}{\frac{4}{5}}$ καὶ παρατηροῦντες ὅτι οἱ ἰδιαίτεροι παρονομασταὶ 1 καὶ 5 ἔχουσιν ἐ. κ. π. 5 κατανοοῦμεν ὅτι εἰς ἀμφότερα τὰ παραδείγματα ἡ αὐτὴ ἐφηρμόσθη μέθοδος. Ἄρα:

Ἵνα τρέψωμεν σύνθετον κλάσμα εἰς ἁπλοῦν, ἀρκεῖ νὰ πολ]σωμεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ἐ.κ.π. τῶν ἰδιαιτέρων παρονομαστῶν, τοὺς ὁποίους ἔχουσιν οἱ ὅροι οὗτοι.

§ **173. Πράξεις ἐπὶ τῶν συνθέτων κλασμάτων.**— Αἱ ἐπὶ τῶν συνθέτων κλασμάτων πράξεις γίνονται κατὰ τοὺς αὐτοὺς καὶ αἱ ἐπὶ τῶν ἁπλῶν κανόνας. Εὐκολώτερον ὅμως εἶναι νὰ τρέπωνται ταῦτα εἰς ἁπλᾶ καὶ νὰ ἐκτελῶνται αἱ ἐπ᾿ αὐτῶν σεσημειωμέναι πράξεις. Οὕτω $\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{6}}+\dfrac{\frac{7}{9}}{\frac{1}{3}}=\dfrac{4}{5}+\dfrac{7}{3}=\dfrac{12+35}{15}=\dfrac{47}{15}=3\dfrac{2}{15}$,

$$\frac{7\frac{1}{8}}{\frac{2}{16}}\times\frac{9\frac{2}{5}}{4\frac{1}{10}}=\frac{114}{2}\times\frac{94}{41}=57\times\frac{94}{41}\quad \text{κ. λ. π.}$$

Ἀσκήσεις.

243) Νὰ τραπῶσιν εἰς ἁπλᾶ τὰ σύνθετα κλάσματα

$$\frac{6}{\frac{2}{3}},\quad \frac{\frac{7}{9}}{\frac{5}{9}},\quad \frac{4\frac{1}{3}}{\frac{2}{6}}.$$

244) Ὁμοίως τὰ $\dfrac{5\frac{1}{3}+\frac{7}{9}}{\frac{2}{9}}$, $\dfrac{6\times3\frac{1}{4}}{5\frac{3}{3}}$, $\dfrac{8+3\frac{2}{5}}{8-3\frac{2}{5}}$, $\dfrac{\frac{3}{4}-\frac{1}{8}}{\frac{3}{4}+\frac{1}{8}}$,

245) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ ἀκόλουθοι πράξεις :

$$\alpha')\ \frac{7-\frac{3}{4}}{\frac{5}{12}+\frac{5}{8}},\quad \beta')\ \frac{\frac{5}{9}}{3\frac{1}{4}}:\frac{4\frac{1}{5}}{2\frac{4}{15}}.$$

246) Νὰ ἁπλοποιηθῇ ἡ παράστασις $\dfrac{\frac{2}{3}-\frac{3}{7}}{\frac{5}{6}-\frac{5}{14}}$ καὶ ἡ $\dfrac{2\frac{3}{4}-1}{2\frac{3}{4}+1}$.

* Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα ἐπὶ τῶν κλασμάτων ἐν γένει.

247) Ἐὰν τὸ κλάσμα $\dfrac{\alpha}{\beta}$ εἶναι ἀνάγωγον, ἕκαστον τῶν κλασμάτων $\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}$, $\dfrac{\beta-\alpha}{\alpha\beta}$ εἶναι ἀνάγωγον

248) Νὰ εὑρεθῶσι τρία κλάσματα ἀντιστοίχως ἴσα πρὸς τὰ $\frac{5}{9}$, $\frac{3}{11}$, $\frac{7}{31}$ ἔχοντα τοὺς ἐλαχίστους δυνατοὺς ὅρους καὶ τοιαῦτα ὥστε ὁ παρονομαστὴς ἑκάστου νὰ ἰσοῦται πρὸς τὸν ἀριθμητὴν τοῦ ἑπομένου.

249) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἕκαστον τῶν κλασμάτων $\frac{\alpha}{2\alpha-1}$, $\frac{2\alpha+1}{3\alpha+1}$ εἶναι ἀνάγωγον, οἱουδήποτε ὄντος τοῦ ἀκεραίου α.

250) Ἐὰν $\frac{\alpha}{\beta}<1$, θὰ εἶναι $\frac{\alpha+\chi}{\beta+\chi}>\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ $\frac{\alpha-\chi}{\beta-\chi}<\frac{\alpha}{\beta}$. ἐὰν δὲ $\frac{\alpha}{\beta}>1$, θὰ εἶναι $\frac{\alpha+\chi}{\beta+\chi}<\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ $\frac{\alpha-\chi}{\beta-\chi}>\frac{\alpha}{\beta}$ διὰ πᾶσαν ἀκεραίαν τιμὴν τῶν α, β καὶ χ [1].

251) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα δύο ἀναγώγων καὶ ἑτερωνύμων κλασμάτων δὲν δύναται νὰ εἶναι ἀκέραιος ἀριθμός.

252) Τὸ αὐτὸ διὰ τὴν διαφοράν.

253) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἐὰν $\frac{\alpha}{\beta}<1$, θὰ εἶναι $\frac{\alpha}{\beta}>\frac{\alpha^2}{\beta^2}$

254) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι, ἐὰν α, β, α΄, β΄. εἶναι ἀκέραιοι ἐπαληθεύοντες τὴν ἰσότητα $\alpha\beta'-\beta\alpha'=1$, ἕκαστον τῶν κλασμάτων $\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\alpha'}{\beta'}$, $\frac{\alpha+\alpha'}{\beta+\beta'}$ εἶναι ἀνάγωγον.

Θέτοντες τὴν ἰσότητα $\alpha\beta'-\alpha'\beta=1$ ὑπὸ τὴν μορφὴν $\alpha(\beta+\beta')-\beta(\alpha+\alpha')=1$ ἀποδεικνύομεν εὐκόλως ὅτι $\frac{\alpha+\alpha'}{\beta+\beta'}$ εἶναι ἀνάγωγον. Διὰ τὰ ἄλλα κλάσματα ἡ ἀπόδειξις εἶναι ἁπλουστάτη.

255) Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀκέραιοι ἀριθμοὶ τοιοῦτοι ὥστε, ἂν ὁ εἷς προστεθῇ εἰς τὸν ἀριθμητήν, ὁ δὲ ἄλλος εἰς τὸν παρονομαστὴν τοῦ $\frac{12}{20}$ νὰ μὴ βλάπτωσιν αὐτό.

256) Ἐὰν εἶναι $\frac{\alpha}{\beta}<\frac{\gamma}{\delta}<\frac{\varepsilon}{\zeta}$, θὰ εἶναι καὶ $\frac{\alpha}{\beta}<\frac{\alpha+\gamma+\varepsilon}{\beta+\delta+\zeta}<\frac{\varepsilon}{\zeta}$.

257) Ἐὰν τὰ κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\gamma}{\delta}$, $\frac{\varepsilon}{\zeta}$ εἶναι ἀνάγωγα, καὶ οἱ ἀριθ-

---

(1) Εὐνόητον ὅτι πρέπει νὰ γίνηται ἡ ἀφαίρεσις τοῦ χ ἀπὸ τοῦ α καὶ β.

μοὶ β καὶ δ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, διὰ νὰ εἶναι τὸ ἄθροισμα $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\gamma}{\delta}+\frac{\varepsilon}{\zeta}$ ἀκέραιος ἀριθμός, πρέπει να εἶναι $\zeta=\beta\delta$.

258) Νὰ μερισθῇ ὁ 24 εἰς δύο μέρη τοιαῦτα ὥστε τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ ἑνὸς καὶ τὸ $\frac{1}{7}$ τοῦ ἄλλου νὰ ἔχωσιν ἄθροισμα 4.

259) Δαπανήσας τις τὰ $\frac{3}{8}$ τῶν χρημάτων του παρετήρησεν ὅτι, ἂν εἰς τὰ ὑπολειφθέντα προσθέσῃ 84 δραχμάς, ἀποτελεῖ τὰ $\frac{3}{2}$ τοῦ ἀρχικοῦ ποσοῦ. Πόσα χρήματα εἶχεν ἀρχικῶς;

260) Δύο καλάθια περιέχουσι 80 μῆλα. Ἐὰν λάβωμεν τὸ $\frac{1}{5}$ τῶν ἐν τῷ α΄ περιεχομένων καὶ ρίψωμεν αὐτὰ εἰς τὸ β΄, θὰ ἔχωσιν ἀμφότερα ἴσα μῆλα. Πόσα μῆλα περιέχει ἑκάτερον;

261) Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός, ὅστις προστιθέμενος εἰς ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ $\frac{2}{7}$ καθιστᾷ αὐτὸ ἴσον πρὸς τὸ $\frac{1}{2}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ΄.

ΟΙ ΔΕΚΑΔΙΚΟΙ ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

§ **174. Δεκαδικαὶ κλασματικαὶ μονάδες.**—Ἑκάστη τῶν κλασματικῶν μονάδων $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}$ κλπ. ἔχουσα παρονομαστὴν δύναμίν τινα τοῦ 10 καλεῖται δεκαδικὴ κλασματικὴ μονὰς ἢ ἁπλῶς δεκαδικὴ μονάς.

Γενικῶς: Δεκαδικὴ κλασματικὴ μονὰς ἢ ἁπλῶς δεκαδικὴ μονὰς καλεῖται πᾶσα κλασματικὴ μονάς, ἥτις ἔχει παρονομαστὴν δύναμιν τοῦ 10.

Κατὰ ταῦτα πᾶσα δεκαδικὴ μονὰς εἶναι τῆς μορφῆς $\frac{1}{10^\nu}$, ἔνθα ν εἶναι τυχὼν ἀκέραιος ἀριθμός.

Ἐπειδὴ

$\frac{1}{1000}\times10=\frac{1}{100}, \frac{1}{100}\times10=\frac{1}{10}, \frac{1}{10}\times10=1, 1\times10=10$. κ.λ.π. ἔπεται ὅτι αἱ δεκαδικαὶ μονάδες καὶ αἱ μονάδες τῶν διαφόρων τάξεων (§ 9) τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος δύνανται νὰ γραφῶσιν οὕτω:

$$\ldots\ldots\frac{1}{10000}, \frac{1}{1000}, \frac{1}{100}, \frac{1}{10}, 1, 10, 100, \ldots\ldots \qquad (\alpha)$$

ἤτοι εἰς μίαν σειράν, εἰς τὴν ὁποίαν ἑκάστη δεκάκις λαμβανομένη ἀποτελεῖ μίαν μονάδα τῆς ἀμέσως δεξιώτερον κειμένης, ἤτοι τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως.

§ **175. Δεκαδικοὶ ἀριθμοί, σύνθεσις καὶ γραφὴ αὐτῶν.**— Ὁ ἀριθμὸς $\frac{3}{10}$, ὅστις ἰσοῦται πρὸς $\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}$ καλεῖται δεκαδικὸς κλασματικὸς ἀριθμός· ὁμοίως οἱ $\frac{75}{100}, \frac{3465}{1000}, \frac{142}{10000}$ κλπ. εἶναι δεκαδικοὶ κλασματικοὶ ἀριθμοί.

Γενικῶς: Δεκαδικὸς κλασματικὸς ἀριθμὸς ἢ ἁπλῶς δεκαδικὸς ἀριθμὸς καλεῖται πᾶς ἀριθμός, ὅστις γίνεται δι᾽ ἐπαναλήψεως δεκαδικῆς τινὸς μονάδος.

Κατὰ ταῦτα πᾶς δεκαδικὸς ἀριθμὸς εἶναι τῆς μορφῆς $\frac{A}{10^{\nu}}$, ἔνθα A καὶ ν τυχόντες ἀκέραιοι.

Ἕκαστος δεκαδικὸς ἀριθμὸς συντίθεται ἐκ διαφόρων μονάδων τῆς σειρᾶς (α) (§ 174) καὶ ἐξ οὐδεμιᾶς τούτων περιέχει πλείονας τῶν 9

Ἔστω π. χ. ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς $\frac{3467}{1000}$.

Ἐπειδὴ $3467=3000+400+60+7$, ἕπεται ὅτι (§ 167)

$$\frac{3467}{1000}=\frac{3000}{1000}+\frac{400}{1000}+\frac{60}{1000}+\frac{7}{1000}=3+\frac{4}{10}+\frac{6}{100}+\frac{7}{1000},$$

ἤτοι ὁ $\frac{3467}{1000}$ ἀποτελεῖται ἐκ τριῶν ἁπλῶν μονάδων, 4 δεκάτων, 6 ἑκατοστῶν καὶ 7 χιλιοστῶν. Ὁμοίως σκεπτόμενοι εὑρίσκομεν ὅτι

$$\frac{5658}{100}=50+6+\frac{5}{10}+\frac{8}{100}$$

ἤτοι ὁ $\frac{5658}{100}$ συντίθεται ἐκ 5 δεκάδων, 6 ἁπλῶν μονάδων, 5 δεκάτων καὶ 8 ἑκατοστῶν. Ἐφαρμόζοντες εἰς τοὺς τοιούτους ἀριθμοὺς τὴν γνωστὴν (§ 13) συνθήκην περὶ τῆς ἀξίας ἑκάστου ψηφίου καὶ ἔχοντες ὑπ᾽ ὄψιν τὸν τρόπον, καθ᾽ ὃν σχηματίζονται ἐξ ἀλλήλων αἱ μονάδες τῆς σειρᾶς (α) δυνάμεθα νὰ γράφωμεν τοὺς δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς ἄνευ παρονομαστῶν. Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ δεξιὰ τοῦ ψηφίου τῶν ἁπλῶν μονάδων νὰ γράφωμεν τὸ ψηφίον τῶν δεκάτων, δεξιὰ τούτου τὸ ψηφίον τῶν ἑκατοστῶν, δεξιὰ τούτου τὸ ψηφίον τῶν χιλιοστῶν καὶ καθ᾽ ἑξῆς οὕτω. Ἵνα δὲ διακρίνηται τὸ ψηφίον τῶν ἁπλῶν μονάδων, θέτομεν εὐθὺς μετ᾽ αὐτὸ ὑποδιαστολήν. Ἐὰν ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς δὲν ἔχῃ ἀκεραίας μονάδας, γράφομεν 0 εἰς τὴν θέσιν των καὶ μετ᾽ αὐτὸ γράφομεν τὴν ὑποδιαστολήν. Ὁμοίως γράφομεν 0 εἰς τὴν θέσιν πάσης μονάδος, ἥτις δὲν ὑπάρχει εἰς τὸν ἀριθμὸν καὶ εἶναι ἀνωτέρα τῆς τελευταίας δεκαδικῆς μονάδος. Οὕτως ὁ α΄. τῶν ἀνωτέρω ἀριθμῶν γράφεται οὕτω: 3,467, ὁ β΄ οὕτω 56,58 καὶ ὁ $\frac{23}{1000}$ οὕτω 0,023. Τὴν τοιαύτην μορφὴν τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων καλοῦμεν δεκαδικὴν μορφήν.

Ὥστε: Ἵνα δεκαδικὸν κλάσμα γράψωμεν ὑπὸ δεκαδικὴν μορφήν, ἀρκεῖ νὰ γράψωμεν τόν ἀριθμητὴν αὐτοῦ καὶ νὰ χωρίσωμεν δι᾽ ὑποδιαστολῆς εἰς τὸ τέλος τόσα ψηφία, ὅσα μηδενικὰ ἔχει ὁ παρονομαστὴς μετὰ τὴν ἀκεραίαν μονάδα. Ἐὰν δὲ ὁ ἀριθμητὴς δὲν ἔχῃ ἀρκετὰ πρὸς τοῦτο ψηφία, γράφομεν πρὸ αὐτοῦ ὅσα ἀπαιτοῦνται μηδενικά.

Τὰ πρὸ τῆς ὑποδιαστολῆς ψηφία ἑκάστου δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ ἀποτελοῦσι τὸ ἀκέραιον μέρος αὐτοῦ τὰ δὲ μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴν καλοῦνται δεκαδικὰ ψηφία καὶ τὸ ὑπ᾽ αὐτῶν ἀποτελούμενον μέρος καλεῖται δεκαδικὸν μέρος. Εὐνόητον ὅτι ἔχοντες δεκαδικὸν ἀριθμὸν γεγραμμένον ὑπὸ δεκαδικὴν μορφὴν δυνάμεθα νὰ γράψωμεν αὐτὸν καὶ ὡς κοινὸν κλάσμα. Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ τεθῇ ἀριθμητὴς ὁ ὑπὸ τῶν ψηφίων αὐτοῦ μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν τῆς ὑποδιαστολῆς ἀποτελούμενος ἀριθμὸς καὶ παρονομαστὴς ἡ ἀκεραία μονὰς ἀκολουθουμένη ὑπὸ τόσων μηδενικῶν, ὅσα εἶναι τὰ δεκαδικὰ ψηφία τοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ. Οὕτως ὁ 1,473 γράφεται $\frac{1473}{1000}$, ὁ 0,75 οὕτω $\frac{75}{100}$ κλπ.

§ 176. Ἀπαγγελία δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ.—Δεκαδικὸν ἀριθμὸν ὑπὸ δεκαδικὴν γεγραμμένον μορφὴν ἀπαγγέλλομεν κατά τινα τῶν ἀκολούθων τρόπων.

α΄.) Ἀναγινώσκομεν τὸν ὑπὸ τῶν ψηφίων αὐτοῦ ἀποτελούμενον ἀκέραιον ἀριθμὸν (ἤτοι δὲν λαμβάνομεν ὑπ᾽ ὄψιν τὴν ὑποδιαστολὴν) καὶ προσαρτῶμεν εἰς τὸ τέλος τὸ ὄνομα τῶν μονάδων τοῦ τελευταίου ψηφίου αὐτοῦ. Οὕτως ὁ 5,67 ἀπαγγέλλεται 567 ἑκατοστά.

β΄.) Ἀναγινώσκομεν χωριστὰ ἕκαστον ψηφίον προσαρτῶντες ἀμέσως τὸ ὄνομα τῶν μονάδων, ἃς τοῦτο παριστᾷ. Οὕτως ὁ 0,267 ἀπαγγέλλεται: 2 δέκατα, 6 ἑκατοστὰ καὶ 7 χιλιοστά.

γ΄.) Χωρίζομεν αὐτὸν εἰς ὅσα θέλομεν τμήματα καὶ ἀναγινώσκομεν ἐξ ἀριστερῶν κατὰ σειρὰν τὸν ὑπὸ ἑκάστου ἀποτελούμενον ἀκέραιον ἀριθμὸν προσαρτῶντες ἀμέσως τὸ ὄνομα τῶν μονάδων τοῦ τελευταίου ψηφίου ἑκάστου τμήματος. Οὕτως ὁ 43,56104 ἀπαγγέλλεται: 43 ἀκέραιαι μονάδες, 56 ἑκατοστὰ καὶ 104 ἑκατοντάκις χιλιοστά, ἢ συνηθέστερον οὕτω: 43 ἀκέραιαι μονάδες καὶ 56104 ἑκατοντάκις χιλιοστά.

Ἰδιότητες τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν.

§ 177. Θεώρημα I. Ἡ ἀξία δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ δὲν μεταβάλλεται ὁσαδήποτε μηδενικὰ καὶ ἂν γράψωμεν εἰς τὴν ἀρχὴν ἢ τὸ τέλος αὐτοῦ.

Λέγω π. χ. ὅτι $3,56 = 03,5600$.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ $3,56 = \frac{356}{100}$ καὶ $\frac{356}{100} = \frac{356 \times 100}{100 \times 100} = \frac{035600}{10000}$, ἕπεται ὅτι $3,56 = \frac{035600}{10000}$ ἢ $3,56 = 03,5600$. ὅ. ἔ. δ.

§ 178. Θεώρημα II.—Ἵνα πολ)σωμεν δεκαδικὸν ἀριθμὸν ἐπὶ δύναμίν τινα τοῦ 10, ἀρκεῖ νὰ μεταθέσωμεν τὴν ὑποδιαστολὴν πρὸς τὰ δεξιὰ τόσας θέσεις, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ ἐκθέτης τῆς δυνάμεως, ἐφ' ἣν πολ]ζομεν.

Λέγω π. χ. ὅτι $56,142 \times 100 = 56,142 \times 10^2 = 5614,2$.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ $56,142 = \frac{56142}{1000}$, ἕπεται ὅτι $56,142 \times 100 = \frac{56142}{1000} \times 100 = \frac{5614200}{1000} = \frac{56142}{10} = 5614,2$. ὅ. ἔ. δ.

§ 179. Θεώρημα III.—Ἵνα διαιρέσωμεν δεκαδικὸν ἀριθμὸν διὰ δυνάμεως τοῦ 10, ἀρκεῖ νὰ μεταθέσωμεν πρὸς τὰ ἀριστερὰ τὴν ὑποδιαστολὴν τόσας θέσεις, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ ἐκθέτης τῆς δυνάμεως, διὰ τῆς ὁποίας διαιροῦμεν.

Λέγω π. χ. ὅτι $2148,7 : 1000 = 2148,7 : 10^3 = 2,1487$.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ $2148,7 = \frac{21487}{10}$, ἕπεται ὅτι $2148,7 : 1000 = \frac{21487}{10} : 1000 = \frac{21487}{10 \times 1000} = \frac{21487}{10000} = 2,1487$. ὅ. ἔ. δ.

ΣΗΜ. α'. Ἐὰν δεκαδικός τις ἀριθμὸς δὲν ἔχῃ ἀρκετὰ ψηφία πρὸς μετάθεσιν τῆς ὑποδιαστολῆς, γράφομεν (§ 177) εἰς τὸ τέλος ἢ τὴν ἀρχὴν αὐτοῦ, ὅσα χρειάζονται μηδενικά. Οὕτω $1,34 \times 1000 = 1,340 \times 1000 = 1340$,

$5,68 : 100 = 005,68 : 100 = 0,0568$.

ΣΗΜ. β'. Ἐπειδὴ πᾶς ἀκέραιος δύναται νὰ γραφῇ ὡς δεκαδικός, τοῦ ὁποίου πάντα τὰ δεκαδικὰ ψηφία εἶναι μηδενικά (π. χ. 5=5,00, 37=37,000 κλπ.) ἕπεται ὅτι αἱ προηγούμεναι ἰδιότητες ἐφαρμόζονται καὶ ἐπὶ τῶν ἀκεραίων. Οὕτω

$$25\times10=25,0\times10=250,\ 367\times100=367,00\times100=36700,$$
$$5:100=005,00:100=0,050=0,05,\quad 167:1000=0,167 \text{ κ λ π.}$$

Πλὴν τῶν ἀνωτέρω ἰδιοτήτων οἱ δεκαδικοὶ ἀριθμοὶ ἔχουσι καὶ πάσας τὰς ἰδιότητας τῶν κοινῶν κλασμάτων, διότι πᾶς δεκαδικὸς ἀριθμὸς εἶναι κλάσμα.

Ἀσκήσεις.

262). Ἕκαστον πορτοκάλλιον τιμᾶται 0,40 δραχ. Πόσον τιμῶνται 100 πορτοκάλλια;

263). Ἐὰν ἡ χιλιὰς τῶν λεμονίων τιμᾶται 320 δραχ. πόσον τιμᾶται ἕκαστον λεμόνιον;

264). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι α') $\frac{3,45\times100}{345}=1$, β') $0,02:10=0,2:100$,

ΠΡΑΞΕΙΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΔΕΚΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Α'. Πρόσθεσις, ἀφαίρεσις καὶ πολ)σμός.

§ 180. Πρόσθεσις δεκαδικῶν ἀριθμῶν.— Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα 34,75+167,5+0,168.

Ἐπειδὴ $34,75=\frac{3475}{100}$, $167,5=\frac{1675}{10}$ καὶ $0,168=\frac{168}{1000}$, ἕπεται ὅτι $34,75+167,5+0,168=$

$$\frac{3475}{100}+\frac{1675}{10}+\frac{168}{1000}=\frac{34750+167500+168}{1000}=\frac{202418}{1000}=202,418.$$

Διάταξις τῆς πράξεως

$$\begin{array}{r} 34,750 \\ 167,500 \\ 0,168 \\ \hline 202,418 \end{array} \quad \text{ἢ} \quad \begin{array}{r} 34,75 \\ 167,5 \\ 0,188 \\ \hline 202,418 \end{array}$$

Ἄρα: Διὰ νὰ προσθέσωμεν δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς γράφομεν αὐτοὺς τὸν ἕνα ὑπὸ τὸν ἄλλον καὶ οὕτως ὥστε αἱ ὑποδιαστολαὶ νὰ κεῖνται εἰς τὴν αὐτὴν στήλην, μεθ' ὃ προσθέτομεν αὐτούς, ὡς ἐὰν ἦσαν ἀκέραιοι καὶ θέτομεν εἰς τὸ ἄθροισμα τὴν ὑποδιαστολὴν πρὸ τοῦ ψηφίου, ὅπερ προέρχεται ἐκ τῆς προσθέσεως τῶν δεκάτων, ἤτοι εἰς τὴν αὐτὴν μὲ τὰς ὑποδιαστολὰς τῶν προσθετέων στήλην.

§ **181. β΄. Ἀφαίρεσις δεκαδικοῦ ἀπὸ ἄλλου τοιούτου.**— Ἐργαζόμενοι ὡς ἀνωτέρω εὑρίσκομεν ὅτι π χ.

$$48,75-3,465=\frac{48750-3465}{1000}=\frac{45285}{1000}=45,285.$$

Διάταξις τῆς πράξεως
$$\begin{array}{r} 48,750 \\ 3,465 \\ \hline 45,285 \end{array}$$

Ἄρα: Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν δεκαδικὸν ἀπὸ δεκαδικοῦ, καθιστῶμεν πρῶτον ἰσοπληθῆ τὰ δεκαδικὰ αὐτῶν ψηφία, καὶ ἀφαιροῦμεν, ὡς ἐὰν ἀμφότεροι ἦσαν ἀκέραιοι, χωρίζομεν δὲ δι᾽ ὑποδιαστολῆς εἰς τὸ τέλος τοῦ ὑπολοίπου τόσα ψηφία, ὅσα ἤδη δεκαδικὰ ψηφία ἔχει ἑκάτερος τῶν δοθέντων δεκαδικῶν ἀριθμῶν.

ΣΗΜ, Εὐνόητον ὅτι ὁ κανὼν οὗτος ἐφαρμόζεται καὶ ὅταν ὁ ἕτερος τῶν δοθέντων ἀριθμῶν εἶναι ἀκέραιος. Οὕτω

$$20,35-18=20,35-18,00=2,35, \quad 5-2,25=5,00-2,25=2,75.$$

§ **182. γ΄ Πολ]σμὸς δεκαδικοῦ ἐπὶ δεκαδικὸν ἢ ἀκέραιον.** - Ἐργαζόμενοι ὡς προηγουμένως εὑρίσκομεν ὅτι $53,7\times0,23=\frac{537}{10}\times\frac{23}{100}=\frac{537\times23}{1000}=\frac{12351}{1000}=12,351$. Ὁμοίως $8,75\times3=\frac{875}{100}\times3=\frac{875\times3}{100}=\frac{2625}{100}=26,25$.

Ἄρα Διὰ νὰ πολ]σωμεν δεκαδικὸν ἐπὶ δεκαδικὸν ἢ ἐπὶ ἀκέραιον, πολλλαπλασιάζομεν αὐτούς, ὡς ἐὰν ἦσαν ἀμφότεροι ἀκέραιοι καὶ χωρίζομεν δι᾽ ὑποδιαστολῆς τόσα δεκαδικὰ ψηφία, ὅσα τοιαῦτα ἔχουσιν ἀμφότεροι οἱ παράγοντες.

Β΄. Διαίρεσις.

§ **183. α΄. Διαίρεσις δεκαδικοῦ δι᾽ ἀκεραίου.**— Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον 71,36 : 8.

Ἐπειδὴ $71,36=\frac{7136}{100}$ ἕπεται ὅτι :

$$71,36 : 8=\frac{7136}{100}:8=\frac{7136:8}{100}=\frac{892}{100}=8,92.$$

Ὁμοίως $4,152 : 12=\frac{4152}{1000} : 12=\frac{4152:12}{1000}$

$$=\frac{346}{1000}=0,446,$$

Διάταξις τῆς πράξεως

$$\begin{array}{r|l} 71,36 & 8 \\ \cline{2-2} 73 & 8,92 \\ 16 & \\ 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 4,152 & 12 \\ \cline{2-2} 55 & 0,346 \\ 72 & \\ 0 & \end{array}$$

Εἰς κάθε ἓν ἀπὸ τὰ παραδείγματα ταῦτα ὁ διαιρετέος διῃρέθη, ὡς ἂν ἦτο ἀκέραιος, ἐχωρίσθησαν δὲ δι᾽ ὑποδιαστολῆς ἀπὸ τοῦ τέλους τοῦ πηλίκου δεκαδικὰ ψηφία ἰσάριθμα πρὸς τὰ δεκαδικὰ ψηφία τοῦ διαιρετέου. Παρατηροῦντες δὲ ὅτι οὕτως ἡ ὑποδιαστολὴ χωρίζει τὰ ἐκ τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀκεραίου μέρους τοῦ διαιρετέου προερχόμενα ψηφία τοῦ πηλίκου ἀπὸ τὰ ἄλλα αὐτοῦ ψηφία ἀγόμεθα εἰς τὸν ἀκόλουθον κανόνα.

Ἵνα διαιρέσωμεν δεκαδικὸν δι᾽ ἀκεραίου ἐκτελοῦμεν τὴν διαίρεσιν, ὡς ἐὰν ὁ διαιρετέος ἦτο ἀκέραιος προσέχοντες νὰ γράφωμεν τὴν ὑποδιαστολὴν μετὰ τὰ ψηφία τοῦ πηλίκου, τὰ ὁποῖα προέρχονται ἐκ τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀκεραίου μέρους τοῦ διαιρετέου.

ΣΗΜ. Τῆς διαιρέσεως 13,46 : 20 τὸ κατὰ τὸν ῥηθέντα κανόνα εὑρισκόμενον πηλίκον 0,67 διαφέρει τοῦ ἀληθοῦς $0,67 + \frac{6}{20} \times \frac{1}{100}$ κατὰ τὰ $\frac{6}{20}$ τοῦ $\frac{1}{100}$,

13,46	20
1 46	0,67
6	

13,460	20
1 40	0,673
60	
0	

ἤτοι διαφορὰν μικροτέραν μιᾶς μονάδος τῆς τελευταίας ἐν αὐτῷ περιεχομένης δεκαδικῆς τάξεως. Τοῦτο ἐκφράζομεν λέγοντες ὅτι 0,67 εἶναι πηλίκον τοῦ 13,46 διὰ 20 κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{100}$. Νοοῦντες δὲ δεξιὰ τοῦ διαιρετέου ἀναγεγραμμένον ἓν 0, καταβιβάζοντες τοῦτο δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου καὶ ἐξακολουθοῦντες τὴν διαίρεσιν εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον 0 καὶ κατ᾽ ἀκολουθίαν ἀκριβὲς πηλίκον 0,673. Ὁμοίως μὴ περατοῦντες τὴν διαίρεσιν τοῦ 58,7 διὰ 40, εὐθὺς ὡς καταβιβασθῇ τὸ τελευταῖον ψηφίον 7 τοῦ διαιρετέου, ἀλλὰ συνεχίζοντες αὐτὴν διὰ τῆς ἀναγραφῆς δεξιὰ ἑκάστου τῶν ὑπολοίπων ἀνὰ ἓν 0, εὑρίσκομεν ὅτι τὸ ἀκριβὲς πηλίκον εἶναι 1,4675. Διαιροῦντες ὁμοίως τὸν 1,7 διὰ τοῦ 3 βλέπομεν ὅτι μένει πάντοτε ὑπόλοιπον 2· κατ᾽ ἀκολουθίαν ἡ διαίρεσις αὕτη οὐδέποτε περατοῦται, ἤτοι τὸ πηλίκον 1,7 : 3 δὲν δύναται νὰ παρασταθῇ ἀκριβῶς διὰ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ. Διακόπτοντες τὴν διαίρεσιν μετὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ ψηφίου τῶν χιλιοστῶν τοῦ πηλίκου διαπράττομεν σφάλμα

58,7	40
187	1,4675
270	
300	
200	
0	

1,7	3
20	0,566
50	
2	

ἴσον πρὸς τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ χιλιοστοῦ, ἤτοι μικρότερον $\frac{1}{1000}$. Ὥστε 0,566 παριστᾷ τὸ ζητούμενον πηλίκον κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{1000}$. Ἐὰν ἐξηκολουθοῦμεν τὴν διαίρεσιν μέχρι τῆς εὑρέσεως καὶ τοῦ ψηφίου τῶν ἑκατομμυριοστῶν, θὰ ὡρίζομεν τὸ πηλίκον κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{1000000}$. Κατὰ ταῦτα· ἂν κατὰ τὴν ἐφαρμογὴν τοῦ ἀνωτέρω κανόνος μένῃ ὑπόλοιπον, δυνάμεθα νὰ συνεχίσωμεν τὴν διαίρεσιν θέτοντες δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου τούτου καὶ ἑκάστου τῶν ἀκολούθων ἓν 0. Οὕτως ἢ θὰ εὕρωμεν τὸ ἀκριβὲς πηλίκον ἢ θὰ ὁρίσωμεν αὐτό, μὲ ὅσην θέλομεν προσέγγισιν.

ΣΗΜ. β') Ἐπειδὴ πᾶς ἀκέραιος δύναται νὰ γραφῇ καὶ ὡς δεκαδικὸς (§ 179 σημ. β'), ὁ ἀνωτέρω κανὼν δύναται νὰ ἐφαρμοσθῇ καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν, κατὰ τὴν ὁποίαν καὶ ὁ διαιρετέος εἶναι ἀκέραιος. Οὕτως εὑρίσκομεν ὅτι 17 : 4=4, 25, 3 : 5=0,6.

17	4	3,0	5
10	4,25	0	0,6
20			
0			

§ **184. Διαίρεσις ἀριθμοῦ διὰ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ.**—Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον 153,55 : 41,5. Ἐπειδὴ πολ]ζομένου διαιρετέου καὶ διαιρέτου ἐπὶ 10 τὸ πηλίκον δὲν μεταβάλλεται (§ 167), ἔπεται ὅτι

153,55 : 41, 5=1535, 5 : 415=3, 7.
Ὁμοίως 5, 7 : 0, 15=570 : 15=38
88 : 2,75=8800 : 275=32 κλπ.

1535.5	415
2905	3, 7
000	

Ἄρα: Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμὸν διὰ δεκαδικοῦ μεταθέτομεν τὴν ὑποδιαστολὴν ἀμφοτέρων πρὸς τὰ δεξιὰ ἴσας θέσεις καὶ τόσας ὅσαι χρειάζονται διὰ νὰ γείνῃ ὁ διαιρέτης ἀκέραιος. Ἔπειτα διαιροῦμεν διὰ τοῦ ἀκεραίου τούτου διαιρέτου κατὰ τὰ γνωστά.

ΣΗΜ. Ἐὰν ὁ διαιρετέος δὲν ἔχῃ ἐπαρκῆ δεκαδικὰ ψηφία πρὸς μετάθεσιν τῆς ὑποδιαστολῆς, γράφομεν ὅσα χρειάζονται μηδενικὰ εἰς τὸ τέλος αὐτοῦ. Τὸ αὐτὸ πράττομεν καὶ ὅταν ὁ διαιρετέος εἶναι ἀκέραιος.

§ **185. Τροπὴ κοινοῦ κλάσματος εἰς δεκαδικόν.**—Γνωρίζομεν ὅτι πᾶν κλάσμα παριστᾷ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεω τοῦ ἀριθμητοῦ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ αὐτοῦ. Οὕτω $\frac{3}{4}=3:4$. Ἐκτελοῦντες κατὰ τὰ ἀνωτέρω τὴν διαίρεσιν ταύτην εὑρίσκομεν πηλίκον 0,75. Τὴν ἐργασίαν ταύτην διὰ τῆς ὁποίας ἐξεφράσαμεν τὸ πηλίκον $3:4=\frac{3}{4}$ διὰ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ, καλοῦμεν τροπὴν τοῦ κοινοῦ κλάσματος $\frac{3}{4}$ εἰς δεκαδικὸν ἀριθμόν. Τὸ ὑπὸ τοῦ κλάσματος $\frac{5}{6}$ παριστώμενον πηλίκον 5 : 6 δὲν ἐκφράζεται ἀκριβῶς διὰ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ, διότι ἡ διαίρεσις τοῦ 5 διὰ 6 οὐδέποτε περατοῦται.

$$\begin{array}{r|l} 50 & 6 \\ \hline 20 & 0,833 \\ 20 & \\ 2 & \end{array}$$

Ἂν δὲ σταματήσωμεν τὴν διαίρεσιν, εὐθὺς ὡς εὕρωμεν π. χ. τὸ ψηφίον τῶν χιλιοστῶν τοῦ πηλίκου, λέγομεν ὅτι τὸ κλάσμα $\frac{5}{6}$ παρίσταται ὑπὸ τοῦ 0,833 κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{1000}$.

Ἄρα: Ἵνα τρέψωμεν κοινὸν κλάσμα εἰς δεκαδικόν, διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητὴν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ θέτοντες ἀνὰ ἓν 0 δεξιὰ ἑκάστου τῶν μετὰ τὴν ἐξάντλησιν τῶν ψηφίων τοῦ διαιρετέου ἀναφαινομένων ὑπολοίπων, μέχρις οὗ εὕρωμεν ὑπόλοιπον μηδὲν ἢ ὁρίσωμεν τὸ πηλίκον, μὲ ὅσην θέλομεν προσέγγισιν.

Ἐκ τῶν προηγουμένων παραδειγμάτων κατέστη, φανερὸν ὅτι ἄλλα μὲν κοινὰ κλάσματα τρέπονται ἀκριβῶς εἰς δεκαδικά, ἄλλα δὲ οὐχί. Διακρίνομεν δὲ τὰ μὲν ἀπὸ τὰ δὲ τῇ βοηθείᾳ τοῦ ἀκολούθου θεωρήματος.

§ **186. Θεώρημα I.** - Ἵνα κοινὸν ἀνάγωγον κλάσμα τρέπηται ἀκριβῶς εἰς δεκαδικόν, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ μὴ ἔχῃ ὁ παρονομαστὴς αὐτοῦ πρώτους παράγοντας διαφόρους τοῦ 2 καὶ 5.

Ἀπόδειξις. α΄.) Ἔστω τυχὸν ἀνάγωγον κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ $\frac{\Delta}{10^\nu}$ δεκαδικὸν κλάσμα ἴσον πρὸς αὐτό, ἤτοι ἔστω $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\Delta}{10^\nu}$. Ἕνεκα τῆς ἰσότητος ταύτης θὰ εἶναι (§ 138) $\Delta=\alpha\times\lambda$ καὶ $10^\nu=\beta\times\lambda$, ἔνθα λ εἶναι ἀριθμὸς ἀκέραιος. Ἐπειδὴ δὲ $10=2\times5$ καὶ $10^\nu=2^\nu\times5^\nu$, ἡ τελευταία τῶν προηγουμένων ἰσοτήτων γίνεται $2^\nu\times5^\nu=\beta\times\lambda$ ἢ $2^\nu\times5^\nu=$πολ.β. Ἐκ ταύτης καθίσταται φανερὸν ὅτι ὁ β διαιρεῖ τὸν $2^\nu\times5^\nu$, ἄρα (§ 119) ὁ β δὲν δύναται νὰ περιέχῃ παράγοντος διαφόρους ἀπὸ τοὺς παράγοντας τοῦ $2^\nu\times5^\nu$, ἤτοι διαφόρους τοῦ 2 καὶ 5. ὅ. ἔ. δ.

β΄.) Ὅτι δὲ τοῦτο ἀρκεῖ ἀποδεικνύεται οὕτω. Ἔστω τὸ κλάσμα $\frac{27}{2^6\times5^2}$, τοῦ ὁποίου ὁ παρονομαστὴς δὲν ἔχει παράγοντας διαφόρους τοῦ 2 καὶ 5· λέγω ὅτι τοῦτο τρέπεται ἀκριβῶς εἰς δεκαδικόν. Τῷ ὄντι· πολ]ζομένων ἀμφοτέρων τῶν ὅρων αὐτοῦ ἐπὶ 5^4, $(6-2=4)$, ἡ ἀξία αὐτοῦ δὲν μεταβάλλεται, ἤτοι $\frac{27}{2^6\times5^2}=\frac{27\times5^4}{2^6\times5^6}$. Ἐπειδὴ δὲ $2^6\times5^6=(2\times5)^6=10^6$, ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται $\frac{27}{2^6\times5^2}=\frac{27\times5^4}{10^6}$, ἤτοι τὸ δοθὲν κοινὸν κλάσμα ἰσοῦται πρὸς τὸ δεκαδικὸν $\frac{27\times5^4}{10^6}=\frac{16875}{1000000}=$ $=0,016875$. δ. ἔ. δ.

ΣΗΜ. Ἐὰν ὁ παρονομαστὴς ἔχῃ τὸν ἕνα μόνον ἀπὸ τοὺς παράγοντας 2 ἢ 5, πολ)ζομεν τοὺς ὅρους αὐτοῦ ἐπὶ τὴν δύναμιν τοῦ ἄλλου, ἡ ὁποία ἔχει τὸν αὐτὸν ἐκθέτην· οὕτω $\frac{3}{5^2}=\frac{3\times2^2}{5^2\times2^2}=\frac{12}{10^2}=0,12$.

Ἀσκήσεις.

265). Ποῖα ἀπὸ τὰ κλάσματα $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{20}$, $\frac{14}{27}$, $\frac{3}{40}$ καὶ $\frac{21}{24}$ τρέπονται ἀκριβῶς εἰς δεκαδικοὺς ἀριθμούς;

266). Πόσα δεκαδικὰ ψηφία ἔχει ὁ ἀριθμός, εἰς τὸν ὁποῖον τρέπεται πᾶν κλάσμα τῆς μορφῆς $\frac{A}{2^5\times5}$, ἔνθα A εἶναι ἀκέραιος περιττὸς μὴ λήγων εἰς 5;

267). Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα $0,125+\frac{5}{8}+\frac{7}{20}$.

268). Νὰ ἁπλοποιηθῇ ἡ παράστασις $\frac{1-0,25}{1+0,25}$ καὶ ἡ $\dfrac{\frac{2}{5}+0,15}{\frac{2}{5}-0,15}$

§ **187. Δεκαδικὰ περιοδικὰ κλάσματα.**—Ἡ ἐφαρμογὴ τοῦ κανόνος, κατὰ τὸν ὁποῖον κοινὸν κλάσμα τρέπεται εἰς δεκαδικὸν (§ 185), εἰς τὸ κλάσμα $\frac{4}{7}$ ἄγει εἰς ἀτελεύτητον διαίρεσιν, διότι τὸ κλάσμα τοῦτο, κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα, δὲν τρέπεται ἀκριβῶς εἰς δεκαδικόν. Ἐπειδὴ ὅμως ἕκαστον τῶν μερικῶν ὑπολοίπων τῆς διαιρέσεως ταύτης ὀφείλει νὰ εἶναι μικρότερον τοῦ διαιρέτου 7 καὶ διάφορον τοῦ 0, τὰ δυνατὰ ὑπόλοιπα εἶναι 1, 2, 3, 4, 5, 6· διὰ τοῦτο μετὰ ἓξ τὸ πολὺ διαιρέσεις ἀνευρίσκομεν ἓν ἀπὸ τὰ προηγούμενα ὑπόλοιπα καὶ κατ' ἀκολουθίαν ἀπὸ τῆς στιγμῆς ταύτης θὰ ἐκτελῶμεν τὰς προηγουμένας μερικὰς διαιρέσεις καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν σειράν. Τὰ ψηφία ἄρα τοῦ

$$\begin{array}{l|l} 40 & 7 \\ \hline \;\;50 & 0,5714285 \\ \;\;\;\;10 & \\ \;\;\;\;\;\;30 & \\ \;\;\;\;\;\;\;\;20 & \\ \;\;\;\;\;\;\;\;\;\;60 & \\ \;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;40 & \\ \;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;5 & \end{array}$$

πηλίκου ἀπό τινος τάξεως καὶ ἐφεξῆς ἐπαναλαμβάνονται τὰ αὐτὰ καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν, ἐφ' ὅσον παρατείνομεν τὴν διαίρεσιν. Ἐὰν σταματήσωμεν τὴν διαίρεσιν, εὐθὺς ὡς εὕρωμεν τὸ 1ον, 2ον, 3ον,..... $\nu^{ον}$ δεκαδικὸν ψηφίον, ὁ οὕτως ὁριζόμενος δεκαδικὸς ἀριθμὸς παριστᾷ τὸ κλάσμα $\frac{4}{7}$ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000} \cdot \ldots\ldots \frac{1}{10\nu}$, ἤτοι κατὰ προσέγγισιν, ἥτις αὐξάνει μετὰ τοῦ ἀριθμοῦ ν τῶν δεκαδικῶν ψηφίων τοῦ πηλίκου· τοῦτο σημαίνει ὅτι ἡ διαφορὰ μεταξὺ τοῦ κλάσματος $\frac{4}{7}$ καὶ τοῦ οὕτως ὁριζομένου καὶ ν δεκαδικὰ ψηφία ἔχοντος δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ βαίνει μειουμένη τοῦ ν αὐξάνοντος. Ἐάν, ὅθεν, νοήσωμεν συνεχιζομένην ἐπ' ἄπειρον τὴν διαίρεσιν, ἡ διαφορὰ αὕτη μηδενίζεται καὶ κατ' ἀκολουθίαν λέγομεν ὅτι τὸ κλάσμα $\frac{4}{7}$ παρίσταται ὑπὸ τοῦ ἐξ ἀπείρων μερῶν ἀποτελουμένου (ἀπειρομεροῦς) πλήθους 0,571428571428........Τὸ ἀπειρομερὲς τοῦτο πλῆθος 0,571428571428.... ἔχει τὰς ἀκολούθους προφανεῖς ἰδιότητας.

α'.) Τὰ μέρη αὐτοῦ διαδέχονται ἄλληλα κατὰ ὡρισμένον νόμον, ὥστε δυνάμεθα νὰ γράψωμεν, ὅσα ἐξ αὐτῶν θέλομεν.

β'.) Λαμβάνοντες ὁσαδήποτε θέλομεν (εἰς πεπερασμένον πλῆθος) ἐκ τῶν μερῶν τούτων σχηματίζομεν ἀριθμόν, τοῦ ὁποίου ὑπάρχε μεγαλύτερος. Οὕτως οἱ ἀριθμοὶ 0,571, 0,571428, 0,571428571 κλπ, εἶναι πάντες μικρότεροι τοῦ 1.

Τὸ ἀπειρομερὲς τοῦτο πλῆθος ὡς ἔχον τὰς ρηθείσας ἰδιότητας, θεωροῦμεν ὡς ἀριθμόν· οὗτος, ἕνεκα τῆς δεκαδικῆς αὐτοῦ μορφῆς καὶ τῆς περιοδικῆς ἐπαναλήψεως τῶν ψηφίων αὐτοῦ, καλεῖται δεκαδικὸν περιοδικὸν κλάσμα. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους τὸ ἀπειρομερὲς πλῆθος 2,3575757..... ἀποτελεῖ ἀριθμόν, ὃν ἐπίσης δεκαδικὸν περιοδικὸν κλάσμα καλοῦμεν.

Γενικῶς: Δεκαδικὸν περιοδικὸν κλάσμα καλεῖται πᾶς ἀριθμὸς ἀποτελούμενος ἐξ ἀπείρου πλήθους δεκαδικῶν ψηφίων, ἅτινα ἀπό τινος τάξεως καὶ ἐφεξῆς ἐπαναλαμβάνονται τὰ αὐτὰ καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν.

Τὸ σύνολον τῶν ψηφίων, ἅτινα ἐπαναλαμβάνονται τὰ αὐτὰ καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν, καλεῖται περίοδος. Οὕτω τοῦ α' τῶν ἀνωτέρω παραδειγμάτων ἡ περίοδος εἶναι 571428 τοῦ δὲ β' εἶναι 57.

Περιοδικόν τι δεκαδικὸν κλάσμα καλεῖται ἁπλοῦν μέν, ἂν ἡ περίοδος αὐτοῦ ἀρχίζῃ εὐθὺς μετὰ τὴν ὑποδιαστολήν, μικτὸν δέ, ἂν αὕτη δὲν ἀρχίζῃ ἀμέσως μετὰ τὴν ὑποδιαστολήν. Τό 0,735735735 .... εἶναι ἁπλοῦν, τὸ δὲ 0,23646464 .... εἶναι μικτὸν περιοδικόν.

§ **188.** Ἐκ τῶν εἰρημένων ἕπεται ἀμέσως ἡ ἀλήθεια τῆς ἀκολούθου ἰδιότητος.

Θεώρημα. Ἐὰν κοινὸν κλάσμα δὲν τρέπηται ἀκριβῶς εἰς δεκαδικόν, τρέπεται εἰς δεκαδικὸν περιοδικὸν κλάσμα.

Εὕρεσις τοῦ κοινοῦ κλάσματος. ἐξ οὗ παράγεται δοθὲν δεκαδικὸν περιοδικὸν κλάσμα.

§ **189. Α΄. Τὸ δοθὲν περιοδικὸν δεκαδικὸν κλάσμα εἶναι ἁπλοῦν.**—α΄) Ἔστω τὸ ἁπλοῦν καὶ τῆς μονάδος μικρότερον, ἤτοι μὴ ἔχον ἀκέραιον μέρος, δεκαδικὸν περιοδικὸν κλάσμα 0,272727 ...... καὶ ἔστω χάριν συντομίας Α ὁ ὑπ᾽ αὐτοῦ παριστώμενος ἀριθμός. Πολ]ζοντες ἐπὶ 100 ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἰσότητος Α=0,272727......εὑρίσκομεν τὴν ἰσότητα Α×100=27,2727 .... ἢ Α×100=27+0,2727...... Ἐὰν δὲ ἀπὸ τὰ μέλη ταύτης ἀφαιρέσωμεν τὰ ἀντίστοιχα μέλη τῆς Α=0,272727 ....προκύπτει ἡ ἰσότης Α×99=27, ἐξ ἧς $A=\frac{27}{99}$, ὅθεν καὶ $0,272727\ldots=\frac{27}{99}$. Ὁμοίως σκεπτόμενοι εὑρίσκομεν ὅτι $0,356356356\ldots=\frac{356}{990}$.

Ἄρα: Τὸ κοινόν κλάσμα, ἀπὸ τὸ ὁποῖον παράγεται δοθὲν ἁπλοῦν περιοδικὸν κλάσμα ἄνευ ἀκεραίου μέρους, ἔχει ἀριθμητὴν μὲν μίαν περίοδον αὐτοῦ, παρονομαστὴν δὲ τὸν ἐκ ταύτης προκύπτοντα ἀριθμόν, ἂν ἕκαστον ψηφίον αὐτῆς ἀντικατασταθῇ διὰ τοῦ 9.

ΣΗΜ. Τὸ δεκαδικὸν περιοδικὸν κλάσμα 0,999.... ἐξ οὐδενὸς κλάσματος παράγεται, διότι τοῦτο κατὰ τὸ προηγούμενον συμπέρασμα ἰσοῦται πρὸς $\frac{9}{9}=1$.

β΄.) Ἔστω ἤδη τὸ μετ᾽ ἀκεραίου μέρους ἁπλοῦν περιοδικὸν 2,763763763 .... Ἐπειδὴ προφανῶς εἶναι 2,763763763.....= =2+0,763763763...... καὶ κατὰ τὰ προηγουμένως λεχθέντα

$\frac{763}{999}=0,763763763\ldots\ldots$ ἕπεται ὅτι

$2,763763763\ldots=2+\frac{763}{999}=\frac{(2\times999)+763}{999}$. Ἐπειδὴ δὲ

$(2\times999)+763=2\times(1000-1)+763=2000-2+763=2763-2$,

ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται $2,763763763\ldots\ldots=\frac{2763-2}{999}$. Ὁμοίως

εὑρίσκομεν ὅτι : $135,4848\ldots=\frac{13548-135}{99}$.

Ἄρα : Τὸ κοινὸν κλάσμα, ἀπὸ τὸ ὁποῖον παράγεται δεδομένον ἁπλοῦν περιοδικὸν μετ᾽ ἀκεραίου μέρους, ἔχει ἀριθμητὴν μὲν τὴν διαφορὰν τοῦ ἀκεραίου μέρους ἀπὸ τοῦ ἀκεραίου, τὸν ὁποῖον ἀποτελοῦσι τὰ ψηφία τοῦ ἀκεραίου μέρους καὶ τῆς α΄ περιόδου (ὅπως εἶναι γραμμένα) παρονομαστὴν δὲ τὸν ἐκ τῆς περιόδου προκύπτοντα ἀριθμόν, ἂν ἕκαστον ψηφίον αὐτῆς ἀντικατασταθῇ διὰ τοῦ 9.

ΣΗΜ. Τὸ δεκαδικὸν περιοδικὸν κλάσμα $3,999\ldots$ ἐξ οὐδενὸς κλάσματος προέρχεται, διότι τοῦτο ἰσοῦται πρὸς $3+0,999\ldots\ldots=3+1=4$.

§ 190. Β΄. Τὸ δοθὲν περιοδικὸν δεκαδικὸν κλάσμα εἶναι μικτόν. — Ἔστω τὸ μικτὸν περιοδικὸν δεκαδικὸν κλάσμα $0,35167167\ldots\ldots$ καὶ Β ὁ ὑπ᾽ αὐτοῦ παριστώμενος ἀριθμός. Πολ]ζοντες ἐπὶ 100 ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἰσότητος $B=0,35167167\ldots\ldots$ εὑρίσκομεν ὅτι $B\times100=35,167167\ldots$ Ἐπειδὴ δὲ κατὰ τὰ προηγούμενα εἶναι $35,167167\ldots\ldots\ldots=\frac{35167-35}{999}$, ἕπεται ὅτι

$B\times100=\frac{35167-35}{999}$, ὅθεν $0,35167167\ldots=\frac{35167-35}{99900}$. Ὁμοίως

εὑρίσκομεν ὅτι $27,4656565\ldots\ldots=\frac{27465-274}{990}$.

Ἄρα : Τὸ κοινὸν κλάσμα, ἀπὸ τὸ ὁποῖον παράγεται δοθὲν μικτὸν περιοδικὸν κλάσμα ἔχει ἀριθμητὴν μὲν τὴν διαφορὰν τοῦ ἀκεραίου ἀριθμοῦ, τὸν ὁποῖον ἀποτελοῦσι τὰ πρὸ τῆς α΄ περιόδου ψηφία ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ, ὅστις προκύπτει ἀναγραφομένων δεξιὰ τοῦ προηγουμένου καὶ τῶν ψηφίων τῆς α΄ περιόδου, παρονομαστὴν δὲ τὸν ἀριθμὸν ὅστις γράφεται δι᾽ ἰσαρίθμων πρὸς τὰ ψηφία τῆς περιόδου 9 ἀκολουθουμένων ὑπὸ μηδενικῶν ἰσαρίθμων πρὸς τὰ ψηφία τοῦ μὴ περιοδικοῦ δεκαδικοῦ μέρους αὐτοῦ.

ΣΗΜ. α΄. Ὁ ἀριθμητὴς παντὸς τοιούτου κλάσματος, οὐδέποτε λήγει εἰς μηδέν. Διότι, ἵνα τοῦτο συμβῇ, πρέπει τὸ τελευταῖον ψηφίον τοῦ μὴ περιοδικοῦ μέρους καὶ τὸ τελευταῖον ψηφίον τῆς περιόδου νὰ ὦσι τὰ αὐτά. Ἀλλὰ τότε ἡ περίοδος θὰ ἤρχιζε μίαν θέσιν πρότερον.

ΣΗΜ. β'. Τὸ μικτὸν περιοδικὸν 0,47999 . . . . ἰσοῦται πρὸς τὸ δεκαδικὸν κλάσμα, 0,48· τῷ ὄντι· $0,47999 \ldots = 0,47 + 0,00999 \ldots = 0,47 + \frac{9}{900}$ $= 0,47 + 0,01 = 0,48$.

Ἀσκήσεις.

269). Νὰ εὑρεθῇ τὸ κοινὸν κλάσμα, ἐξ οὗ παράγεται ἕκαστον τῶν ἀκολούθων περιοδικῶν δεκαδικῶν κλασμάτων 0,8181 . . . ., 0,777 . . . 3,151515 . . . ., 29,86161 . . . . ., 0,41222 . . . . ., 0,9324324 . . . . . 7,38585 . . . .

260). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $\frac{5}{9} = \frac{55}{99} = \frac{555}{999}$ κλπ.

271). Τίνος ἀριθμοῦ τὰ $\frac{2}{3}$ εἶναι 0,8585. . . .

272). Νὰ εὑρεθῶσι τὰ $\frac{2}{5}$ τῶν $\frac{5}{7}$ τοῦ 13,999 . . . .

* *Εἶδος τοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ, εἰς τὸν ὁποῖον τρέπεται δοθὲν κοινὸν ἀνάγωγον κλάσμα.*

§ 191.—Γνωρίζομεν ἤδη (§ 186) ὅτι : Ἐάν ὁ παρονομαστὴς κοινοῦ ἀναγώγου κλάσματος δὲν ἔχῃ παράγοντας διαφόρους τοῦ 2 ἢ 5, τὸ κλάσμα τοῦτο τρέπεται ἀκριβῶς εἰς δεκαδικὸν ἀριθμόν.

Ἐμάθομεν ἐπίσης (§ 188) ὅτι : Πᾶν κοινὸν κλάσμα μὴ τρεπόμενον ἀκριβῶς εἰς δεκαδικὸν ἀριθμὸν τρέπεται εἰς δεκαδικὸν περιοδικὸν κλάσμα.

Τῇ βοηθείᾳ δὲ τῶν ἀκολούθων θεωρημάτων δυνάμεθα νὰ διακρίνωμεν τὸ εἶδος τοῦ περιοδικοῦ κλάσματος, εἰς τὸ ὁποῖον τρέπεται πᾶν τοιοῦτον ἀνάγωγον κλάσμα.

§ 192. Θεώρημα Ι.—Ὁ παρονομαστὴς τοῦ κοινοῦ ἀναγώγου κλάσματος, ἀπὸ τὸ ὁποῖον παράγεται δοθὲν ἁπλοῦν περιοδικὸν κλάσμα, οὐδένα τῶν παραγόντων 2 ἢ 5 περιέχει.

Ἀπόδειξις. Ἔστω $\frac{\alpha}{\beta}$ κοινὸν ἀνάγωγον κλάσμα ἴσον πρός τι κλάσμα $\frac{\Pi}{99\ldots9}$, ἀπὸ τὸ ὁποῖον παράγεται δοθὲν ἁπλοῦν περιοδικὸν κλάσμα. Ἐκ τῆς ἰσότητος $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\Pi}{99\ldots9}$ ἕπεται (§ 138) ὅτι 99...9=πολ β· ἐὰν δὲ ὁ 2 ἢ 5 διήρει τὸν β, θὰ διήρει καὶ τὸν 99....9, ὅπερ ἄτοπον, καθ' ὅσον ὁ ἀριθμὸς 99....9 λήγων εἰς 9 ὑπ' οὐδενὸς τῶν ἀριθμῶν 2 καὶ 5 διαιρεῖται. Δὲν ἔχει λοιπὸν ὁ β οὐδένα τῶν παραγόντων 2 καὶ 5.ὅ.ἔ.δ.

ΣΗΜ. Ἂν τὸ κλάσμα $\frac{\Pi}{99.......9}$ εἶναι ἀνάγωγον, ἡ ἀλήθεια τοῦ θεωρήματος εἶναι καταφανής, διότι ὁ 99....9 ὑπ' οὐδενὸς τῶν ἀριθμῶν 2 καὶ 5 διαιρεῖται.

§ **193. Θεώρημα ΙΙ.** — Ὁ παρονομαστὴς τοῦ κοινοῦ ἀναγώγου κλάσματος, ἀπὸ τὸ ὁποῖον παράγεται δοθὲν μικτὸν περιοδικὸν κλάσμα, ἔχει πλὴν ἄλλων παραγόντων καὶ ἀμφοτέρους ἢ ἕνα τοὐλάχιστον τῶν παραγόντων 2 ἢ 5 μὲ ἐκθέτην τὸν ἀριθμὸν τῶν μὴ περιοδικῶν δεκαδικῶν ψηφίων αὐτοῦ.

Ἀπόδειξις. Ὡς γνωστὸν (§ 190) τὸ κοινὸν κλάσμα, ἀπὸ τὸ ὁποῖον παραγάγεται δοθὲν μικτὸν περιοδικὸν κλάσμα, ἔχει τὴν μορφὴν $\frac{M}{99....9\times10^{\nu}}$, ἂν ν δηλοῖ τὸ πλῆθος τῶν μὴ περιοδικῶν δεκαδικῶν ψηφίων αὐτοῦ. Ἐπειδὴ $10^{\nu}=2^{\nu}\times5^{\nu}$ ἕπεται ὅτι $99...9\times10^{\nu}=99...9\times2^{\nu}\times5^{\nu}$ · περιέχει ἄρα ὁ παρονομαστὴς τοῦ κλάσματος $\frac{M}{99...9\times10^{\nu}}$ ἀμφοτέρους τοὺς παράγοντας 2 καὶ 5, ἑκάτερον δὲ μὲ ἐκθέτην τὸν ἀριθμὸν τῶν μὴ περιοδικῶν δεκαδικῶν ψηφίων αὐτοῦ. Ἂν δὲ τὸ κλάσμα τοῦτο δὲν εἶναι ἀνάγωγον καὶ ἁπλοποιηθῇ μέχρις οὗ καταστῇ τοιοῦτον, θὰ διατηρηθῇ ὁ εἷς τοὐλάχιστον τῶν ῥηθέντων παραγόντων μὲ τὸν αὐτὸν ἐκθέτην. Τῷ ὄντι· ἵνα ἐλαττωθῇ ἀμφοτέρων ὁ ἐκθέτης πρέπει νὰ διαιρεθῶσιν ἀμφότεροι οἱ ὅροι τοῦ κλάσματος διὰ 2 καὶ διὰ 5· ὁ ἀριθμητὴς ὅμως Μ δὲν διαιρεῖται ὑπ' ἀμφοτέρων τούτων, διότι, ἂν τοῦτο συνέβαινεν θὰ διῃρεῖτο (§ 99) καὶ ὑπὸ τοῦ $2\times5=10$, ὅπερ ἀδύνατον, ἀφ' οὗ ὁ Μ δὲν λήγει εἰς μηδὲν (§ 190 σημ. α'.) Εἶναι λοιπὸν ἀδύνατος ἡ ταὐτόχρονος διαίρεσις ἀμφοτέρων τῶν ὅρων τοῦ κλάσματος τούτου διὰ 2 καὶ 5. Ἐπομένως καὶ μετὰ τὴν ἁπλοποίησιν αὐτοῦ ὁ παρονομαστὴς διατηρεῖ τὸν ἕνα τοὐλάχιστον ἀπὸ τοὺς παράγοντας 2 καὶ 5 μὲ τὸν αὐτὸν ἐκθέτην ν. ὅ. ἔ. δ.

§ **194. Θεώρημα ΙΙΙ.** — (Ἀντίστροφον τοῦ Θ. § 192) Πᾶν ἀνάγωγον κλάσμα, τοῦ ὁποίου ὁ παρονομαστὴς οὐδένα τῶν παραγόντων 2 ἢ 5 περιέχει, τρέπεται εἰς ἁπλοῦν περιοδικόν.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ ὁ παρονομαστὴς παντὸς τοιούτου κλάσματος ἔχει παράγοντας διαφόρους τοῦ 2 καὶ 5, τρέπεται (§ 186, 188) εἰς περιοδικὸν δεκαδικὸν κλάσμα· εἶναι δὲ τὸ περιοδικὸν τοῦτο ἁπλοῦν, διότι, ἂν ἦτο μικτόν, ὁ παρονομαστὴς αὐτοῦ θὰ εἶχε, κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα, ἕνα τοὐλάχιστον ἀπὸ τοὺς παράγοντας 2 ἢ 5, ὅπερ ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσιν.

§ **195. Θεώρημα IV.** (ἀντίστροφον τοῦ Θ § 193)— Πᾶν ἀνάγωγον κλάσμα, τοῦ ὁποίου ὁ παρονομαστὴς περιέχει πλὴν ἄλλων καὶ ἕνα τοὐλάχιστον ἀπὸ τοὺς παράγοντας 2 ἢ 5, τρέπεται εἰς μικτὸν περιοδικὸν κλάσμα.

Ἡ ἀπόδειξις εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὴν ἀπόδειξιν τοῦ προηγουμένου θεωρήματος.

Ἀσκήσεις.

273) Νὰ διακριθῇ τὸ εἶδος τοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ, εἰς τὸν ὁποῖον τρέπεται ἕκαστον τῶν κλασμάτων $\frac{5}{9}, \frac{5}{6}, \frac{9}{20}, \frac{12}{46}, \frac{15}{70}$.

274). Ἂν ἀκέραιος ἀριθμὸς ν οὐδένα τῶν παραγόντων 2 ἢ 5 περιέχῃ, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ πηλίκον τυχόντος ἁπλοῦ περιοδικοῦ διὰ ν εἶναι ἁπλοῦν περιοδικόν.

275) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ κλάσμα $\frac{1}{\nu(\nu+1)\,(\nu+2)}$ τρέπεται εἰς μικτὸν περιοδικόν, οἱουδήποτε ὄντος τοῦ ἀκεραίου ν.

Ἀσκήσεις ἐπὶ τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν ἐν γένει.

276) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα 0,5656....+0,321321....+0,1717..

277) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα 0,8363636....+0,363636....

278). Τὸ ἄθροισμα ἁπλῶν περιοδικῶν κλασμάτων εἶναι ἁπλοῦν περιοδικὸν (ἐὰν δὲν εἶναι ἀκέραιος).

279). Ἡ διαφορὰ δύο ἁπλῶν περιοδικῶν εἶναι ἁπλοῦν περιοδικὸν κλάσμα.

280). Τὸ γινόμενον ἁπλῶν περιοδικῶν εἶναι ἁπλοῦν περιοδικόν.

281). Τὸ πηλίκον ἁπλοῦ περιοδικοῦ δι' ἄλλου τοιούτου εἶναι ἁπλοῦν περιοδικὸν ἢ οὔ;

282). Ἐὰν ἀκέραιος ἀριθμὸς ν εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν 2 καὶ πρὸς τὸν 5, ὑπάρχει πολλαπλάσιον αὐτοῦ, τοῦ ὁποίου πάντα τὰ ψηφία εἶναι 9.

283). Τὸ ἄθροισμα $\frac{1}{\nu}+\frac{1}{\nu+1}+\frac{1}{\nu+2}$ τρέπεται εἰς μικτὸν περιοδικόν, οἱουδήποτε ὄντος τοῦ ἀκεραίου ν.

284) Ἐὰν τὸ κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ εἶναι ἀνάγωγον καὶ ὁ β πρῶτος πρὸς τοὺς 2, 3 καὶ 5, τὸ $\frac{\alpha}{\beta}$ τρέπεται εἰς ἁπλοῦν περιοδικόν, τοῦ ὁποίου ἡ περίοδος ἀποτελεῖ ἀριθμὸν διαιρετὸν διὰ 9.

285). Ἐὰν τὰ κλάσματα $\frac{1}{\delta}$, $\frac{1}{\delta'}$, τῶν ὁποίων οἱ παρονομασταὶ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, τρέπονται ἀμφότερα εἰς ἁπλᾶ περιοδικά, ὧν ἡ περίοδος ἔχει τὸ αὐτὸ πλῆθος ψηφίων, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο περιόδων εἶναι πολ]σιον τοῦ (δ+δ΄).

286). Ἀληθευούσης τῆς ὑποθέσεως τοῦ προηγουμένου ζητήματος νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ κλασμα $\frac{1}{\delta\,\delta'}$ τρέπεται εἰς ἁπλοῦν περιοδικὸν, τὸ ὁποῖον ἔχει τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν περιοδικῶν ψηφίων πρὸς ἕκαστον τῶν $\frac{1}{\delta}$ καὶ $\frac{1}{\delta'}$.

Νίκα Εὐθυμίου
Ὁδὸς Ναυαρίνου 12
Ἀθῆναι

ΒΙΒΛΙΟΝ Γ΄.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄.

ΤΕΤΡΑΓΩΝΟΝ ΚΑΙ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ ΡΙΖΑ ΑΡΙΘΜΟΥ

§ 196. Τετράγωνον ἀριθμοῦ.—Τετρ. ρίζα τελείου τετραγώνου.—Τὸ γινόμενον $3 \times 3 = 9$ καλεῖται τετράγωνον τοῦ 3 καί, ὡς γνωστὸν (§ 64) σημειοῦται συντόμως οὕτω 3^2. Ὁμοίως τὸ γινόμενον $\frac{2}{5} \times \frac{2}{5}$ ἢ $\left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$ καλεῖται τετράγωνον τοῦ $\frac{2}{5}$.

Γενικῶς: Τετράγωνον ἀριθμοῦ καλεῖται τὸ γινόμενον αὐτοῦ ἐπὶ τὸν ἑαυτόν του.

Τὰ τετράγωνα τῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν εἶναι κατὰ σειρὰν 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81. Ἄξιον δὲ παρατηρήσεως εἶναι ὅτι οὐδὲν τούτων λήγει εἰς 0, ἢ 2 ἢ 3 ἢ 7 ἢ 8.

Πᾶς ἀριθμός, ὅστις εἶναι τετράγωνον ἄλλου καλεῖται τέλειον τετράγωνον. Τοιοῦτοι π.χ. εἶναι οἱ ἀριθμοὶ 1, 4, 9, $\frac{4}{25}$, $\frac{9}{36}$ κλπ. Ὁ 3 ἔχων τετράγωνον τὸν 9 καλεῖται τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 9, ὁ $\frac{2}{5}$ εἶναι τετρ. ρίζα τοῦ $\frac{4}{25}$.

Γενικῶς: Τετραγωνικὴ ρίζα ἀριθμοῦ καλεῖται ὁ ἀριθμός, ὅστις ἔχει αὐτὸν ὡς τετράγωνον (§ 118).

ΣΗΜ. Ὑπενθυμίζομεν ὅτι τὴν τετρ. ρίζαν ἀριθμοῦ α σημειοῦμεν οὕτω: $\sqrt{\alpha}$.

Ἰδιότητες τῶν τετραγώνων τῶν ἀριθμῶν.

§ 197. Θεώρημα Ι.—Τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος δύο ἀριθμῶν ἀποτελεῖται ἐκ τῶν τετραγώνων τῶν ἀριθμῶν τούτων καὶ ἐκ τοῦ διπλασίου τοῦ γινομένου αὐτῶν.

Λέγω δηλ. ὅτι $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + 2.\alpha.\beta + \beta^2$.

Ἀπόδειξις. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ τετραγώνου εἶναι $(\alpha+\beta)^2 = (\alpha+\beta).(\alpha+\beta)$. Ἐκτελοῦντες δὲ τὸν εἰς τὸ β΄ μέλος τῆς ἰσότητος ταύ-

της σημειωμένον πολ]σμὸν ἀθροίσματος ἐπὶ ἄθροισμα κατὰ τὸν γνωστὸν (§ 36) τρόπον εὑρίσκομεν ὅτι $(\alpha+\beta).(\alpha+\beta)=\alpha^2+\beta.\alpha+\alpha.\beta+\beta^2$
Ἐπειδὴ $\beta.\alpha=\alpha\,\beta$, τὸ ἄθροισμα $\beta.\alpha+\alpha.\beta$ εἶναι ἴσον πρὸς $(\alpha.\beta).2=2\,\alpha\beta$ ἡ δὲ προηγουμένη ἰσότης γράφεται καὶ οὕτω

$$(\alpha+\beta).(\alpha+\beta=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2 \text{ ἢ } (\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2. \text{ ὅ. ἔ. δ,}$$

Πόρισμα I. Τὸ τετράγωνον παντὸς ἀριθμοῦ λήγει, εἰς τὸ ψηφίον, εἰς τὸ ὁποῖον λήγει καὶ τὸ τετράγωνον τοῦ τελευταίου αὐτοῦ ψηφίου.

Λέγω π. χ. ὅτι τὸ τετράγωνον τοῦ 49, λήγει εἰς τὸ ψηφίον, εἰς τὸ ὁποῖον λήγει καὶ τὸ τετράγωνον 81 τοῦ 9, ἤτοι εἰς 1.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ $49=40+9=(4\times10)+9$, ἔπεται ὅτι

$49^2=\left[(4\times10)+9\right]^2$. Ἐπειδὴ δὲ κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα.

$$\left[(4\times10)+9\right]^2=(4\times10)^2+2\times(4\times10)\times9+9^2=$$

$4^2\times100+72\times10+81$, ἔπεται ὅτι $49^2=4^2\times100+72\times10+81$.
Ἐκ ταύτης εἶναι φανερὸν ὅτι οἱ δύο πρῶτοι προσθετέοι λήγουσιν εἰς 0, τὸ ἄθροισμα ἑπομένως ὅλων τῶν προσθετέων θὰ λήγῃ εἰς ὃ ψηφίον λήγει ὁ γ΄ προσθετέος, ἤτοι εἰς 1. ὅ. ἔ. δ.

Πόρισμα II. Οὐδενὸς ἀριθμοῦ τὸ τετράγωνον λήγει εἰς 2 ἢ 3 ἢ 7 ἢ 8.

Πόρισμα III. Τὰ τετράγωνα δύο διαδοχικῶν ἀκεραίων διαφέρουσι κατὰ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν.

Ἔστωσον α καὶ $(\alpha+1)$ δύο διαδοχικοὶ ἀκέραιοι.

Λέγω ὅτι $(\alpha+1)^2-\alpha^2=\alpha+(\alpha+1)$.

Ἀπόδειξις. Κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα εἶναι

$$(\alpha+1)^2=\alpha^2+2\alpha.\,1+1^2=\alpha^2+2\,\alpha+1.$$

Ἐὰν δὲ ἀφαιρέσωμεν ἀπ᾽ ἀμφότερα τὰ μέλη τὸν α^2, εὑρίσκομεν ὅτι $(\alpha+1)^2-\alpha^2=2\,\alpha+1$. Ἐπειδὴ δὲ $2\,\alpha=\alpha.\,2=\alpha+\alpha$, αὕτη γίνεται $(\alpha+1)^2-\alpha^2=\alpha+\alpha+1$. ὅθεν $(\alpha+1)^2-\alpha^2=\alpha+(\alpha+1)$. ὅ. ἔ. δ.

Ἐφαρμογή. Ἐκ τῆς προηγουμένης ἰσότητος προκύπτει εὐκόλως ἡ ἰσότης $(\alpha+1)^2=\alpha^2+\left[\alpha+(\alpha+1)\right]$, ἐκ τῆς ὁποίας ἔπεται ὅτι: Προσθέτοντες εἰς τὸ τετράγωνον ἀκεραίου τὸ ἄθροισμα αὐτοῦ καὶ τοῦ ἀμέσως μεγαλυτέρου εὑρίσκομεν τὸ τετράγωνον τοῦ δευτέρου τούτου ἀριθμοῦ. Οὕτως, ἐπειδὴ $10^2=100$, εὑρίσκομεν ὅτι
$11=100+(10+11)=121$, εἶτα $12^2=121+(11+12)=144$ κλπ.

Διάκρισις τῶν τελείων τετραγώνων ἀπὸ τῶν μὴ τοιούτων.

§ **198. Θεώρημα Ι.**—Ἐὰν ἀκέραιος ἀριθμὸς δὲν εἶναι τετράγωνον ἀκεραίου, δὲν εἶναι οὐδὲ κλάσματος τετράγωνον.

Ὁ ἀκέραιος π.χ. 15, ὁ ὁποῖος οὐδενὸς ἀκεραίου εἶναι τετράγωνον, δὲν θὰ εἶναι τετράγωνον κλάσματος.

Ἀπόδειξις. Ἂν κλάσμα τι $\frac{\alpha}{\beta}$ εἶχε τετράγωνον τὸν 15, καὶ τὸ ἐξ αὐτοῦ δι' ἁπλοποιήσεως προερχόμενον ἀνάγωγον κλάσμα, ἔστω τὸ $\frac{\gamma}{\delta}$, θὰ εἶχε τετράγωνον τὸν 15, θὰ ἠλήθευε δηλ. ἡ ἰσότης $\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^2=15$. Ἐπειδὴ δὲ (§ 168) $\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^2=\frac{\gamma^2}{\delta^2}$, ἕπεται ὅτι θὰ ἠλήθευε καὶ ἡ ἰσότης $\frac{\gamma^2}{\delta^2}=15$, ἤτοι ὁ γ^2 θὰ διῃρεῖτο διὰ τοῦ δ^2 ἀκριβῶς. Τοῦτο ὅμως εἶναι ἀδύνατον, διότι, τοῦ $\frac{\gamma}{\delta}$ ὄντος ἀναγώγου, καὶ τὸ $\frac{\gamma^2}{\delta^2}$ εἶναι (§ 169) ἀνάγωγον. Παραδεχθέντες λοιπὸν ὅτι ὁ 15 εἶναι τετράγωνον κλάσματος, κατελήξαμεν εἰς ψευδὲς συμπέρασμα. Ἄρα ὁ 15 δὲν εἶναι τετράγωνον κλάσματος. ὅ. ἔ. δ.

§ **199. Γνώρισμα τελείων ἀκεραίων τετραγώνων.** —Κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα, ἀκέραιος ἀριθμὸς θὰ εἶναι ἢ οὐχὶ τέλειον τετράγωνον, καθ' ὅσον εἶναι ἢ οὔ τετράγωνον ἀκεραίου. Ἵνα ὅθεν διακρίνωμεν, ἂν δοθεὶς ἀκέραιος εἶναι ἢ οὒ τέλειον τετράγωνον, ἀρκεῖ, ὡς ἐμάθομεν (§ 117), νὰ ἀναλύσωμεν αὐτὸν εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντων καὶ νὰ παρατηρήσωμεν, ἂν οἱ ἐκθέται τῶν πρώτων παραγόντων αὐτοῦ εἶναι πάντες ἄρτιοι ἢ οὐχί. Κατὰ τὴν α΄ περίπτωσιν ὁ ἀριθμὸς αὐτοῦ εἶναι τέλειον τετράγωνον καὶ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα αὐτοῦ εὑρίσκεται (§ 118 Θ.), ἂν οἱ ἐκθέται πάντων τῶν πρώτων αὐτοῦ παραγόντων διαιρεθῶσι διὰ 2. Κατὰ δὲ τὴν β΄ περίπτωσιν ὁ ἀριθμὸς δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον.

Εἰς τὰς ἀκολούθους ὅμως περιπτώσεις ἄνευ ἀναλύσεως διακρίνομεν ὅτι ἀριθμός τις δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον.

α΄). Ἐὰν ἀριθμὸς λήγῃ εἰς περιττὸν πλῆθος μηδενικῶν, δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον. Τῷ ὄντι· ἂν οὗτος ἦτο τετράγωνον ἄλλου Β, ὁ Β θὰ ἔληγεν εἰς μηδέν, διότι μόνον τῶν εἰς 0 ληγόντων τὰ τετράγωνα λήγουσιν εἰς 0. Ἀλλ' ἂν ὁ Β ἔληγεν εἰς ἕν, δύο, τρία κλπ. μηδενικά, τὸ τετράγωνόν του θὰ ἔληγεν (§ 40) εἰς δύο, τέσσαρα, ἓξ κλπ. ἤτοι εἰς ἄρτιον πλῆθος μηδενικῶν.

β΄.) Ἐὰν ἀριθμὸς λήγῃ εἰς 2 ἢ 3 ἢ 4 ἢ 7 ἢ 8 δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον. (§ 197 Πορ. ΙΙ).

γ΄.) Ἐὰν ἀριθμὸς διαιρῆται διὰ πρώτου ἀριθμοῦ χωρὶς νὰ διαιρῆται διὰ τοῦ τετραγώνου αὐτοῦ, δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον. Ὁ ἀριθμὸς π.χ. 435, ὁ ὁποῖος διαιρεῖται διὰ τοῦ 3, ἀλλὰ δὲν διαιρεῖται διὰ τοῦ 9, δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον. Τῷ ὄντι· ἂν $435=A^2$, ὁ πρῶτος ἀριθμὸς 3 διαιρῶν τὸν A^2, θὰ διῄρει (§ 111 Π .ΙΙ) καὶ τὸν Α. Ἐὰν λοιπὸν $A=3\times\lambda$, θὰ ἦτο καὶ $A^2=9\times\lambda^2$ ἢ $435=9\times\lambda^2$, ἤτοι ὁ 435 θὰ διῃρεῖτο ὑπὸ τοῦ 9, ὅπερ ἄτοπον.

§ 200. Θεώρημα ΙΙ.—Διὰ νὰ εἶναι κλάσμα ἀνάγωγον τέλειον τετράγωνον, πρέπει καὶ ἀρκεῖ ἀμφότεροι οἱ ὅροι αὐτοῦ νὰ εἶναι τέλεια τετράγωνα. Ἡ δὲ τετρ. ῥίζα του ἔχει ὅρους τὰς τετρ. ῥίζας τῶν ὁμωνύμων ὅρων αὐτοῦ.

α΄.) Ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ ἀνάγωγον κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ εἶναι τέλειον τετράγωνον· λέγω ὅτι οἱ ὅροι του εἶναι ἀμφότεροι τέλεια τετράγωνα.

Ἀπόδειξις. Ἐν πρώτοις παρατηροῦμεν ὅτι τὸ κλάσμα τοῦτο εἶναι τετράγωνον κλάσματος, διότι τὸ τετράγωνον ἀκεραίου εἶναι ἀκέραιος καὶ οὐχὶ κλάσμα ἀνάγωγον $\frac{\alpha}{\beta}$. Ἔστω λοιπὸν ὅτι εἶναι τετράγωνον κλάσματος, τὸ ὁποῖον μετὰ τὴν ἁπλοποίησιν καθίσταται ἴσον πρὸς τὸ ἀνάγωνον κλάσμα $\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)$, ἤτοι ἔστω $\frac{\alpha}{\beta}=\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^2$ ἢ $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma^2}{\delta^2}$. Ἐπειδὴ τὸ κλάσμα $\frac{\gamma}{\delta}$ εἶναι ἀνάγωνον, καὶ τὸ $\frac{\gamma^2}{\delta^2}$ εἶναι (§ 169) ἀνάγωγον καὶ κατ' ἀκολουθίαν ἀμφότερα τὰ κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ $\frac{\gamma^2}{\delta^2}$ εἶναι ἀνάγωγα. Διὰ νὰ εἶναι δὲ ταῦτα ἴσα πρέπει (§ 138 Πόρ. ΙΙΙ) νὰ εἶναι $\alpha=\gamma^2$ καὶ $\beta=\delta^2$. ὅ. ἔ. δ.

β'). Ἐὰν $\alpha = \gamma^2$ καὶ $\beta = \delta^2$, τὸ $\frac{\alpha}{\beta}$ εἶναι τέλειον τετράγωνον. Τῷ ὄντι· ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ εἶναι $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma^2}{\delta^2}$. Ἐπειδὴ δὲ $\frac{\gamma^2}{\delta^2} = \left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^2$, ἕπεται ὅτι $\frac{\alpha}{\beta} = \left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^2$, ἤτοι τὸ $\frac{\alpha}{\beta}$ εἶναι τετράγωνον τοῦ $\frac{\gamma}{\delta}$. ὅ. ἔ. δ.

γ'.) Ὑποθέσαντες ὅτι $\alpha = \gamma^2$ καὶ $\beta = \delta^2$, ἀπεδείξαμεν προηγουμένως ὅτι $\frac{\alpha}{\beta} = \left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^2$. Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι τοῦ $\frac{\alpha}{\beta}$ τετρ. ρίζα εἶναι $\frac{\gamma}{\delta}$, ὅπερ ἔχει ἀριθμητὴν $\gamma = \sqrt{\alpha}$ καὶ παρονομαστὴν $\delta = \sqrt{\beta}$. ὅ. ἔ. δ.

ΣΗΜ. Κλάσμα ἁπλοποιήσιμον δύναται νὰ εἶναι τέλειον τετράγωνον χωρὶς οὐδεὶς τῶν ὅρων αὐτοῦ νὰ εἶναι τέλειον τετράγωνον. Οὕτως ἐκ τῶν ἰσοτήτων $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16} = \frac{18}{32} = \frac{27}{48} = \frac{45}{80}$ κλπ. βλέπομεν ὅτι ἕκαστον τῶν κλασμάτων $\frac{18}{32}, \frac{27}{48}, \frac{45}{80}$ εἶναι τετράγωνον τοῦ $\frac{3}{4}$, ἂν καὶ οὐδενὸς τούτων οἱ ὅροι εἶναι τέλεια τετράγωνα.

Ἀσκήσεις.

287). Τὸ τετράγωνον περιττοῦ εἶναι ἀριθμὸς περιττός.

288). Τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων τοῦ τετραγώνου παντὸς ἀριθμοῦ λήγοντος εἰς 5 εἶναι 2.

289). Νὰ εὑρεθῶσι δύο διαδοχικοὶ ἀριθμοί, τῶν ὁποίων τὰ τετράγωνα διαφέρουσι κατὰ 29.

290). Ποῖα ἀπὸ τὰ κλάσματα $\frac{4}{9}, \frac{7}{16}, \frac{5}{20}, \frac{50}{72}$ καὶ $\frac{27}{48}$ εἶναι τέλεια τετράγωνα καὶ ποία ἡ τετρ. ρίζα ἑκάστου;

291). Ἐὰν κλάσμα εἶναι τέλειον τετράγωνον, καὶ τὸ ἀντίστροφον αὐτοῦ εἶναι τέλειον τετράγωνον.

292). Γνωστοῦ ὄντος ὅτι $20^2 = 400$, νὰ εὑρεθῇ τὸ τετράγωνον τοῦ 21 ἄνευ ἀμέσου ἐκτελέσεως τοῦ πολ]σμοῦ 21 ἐπὶ 21.

293). Ἐὰν ἀκέραιος καὶ κλάσμα εἶναι τέλειον τετράγωνον, τὸ γινόμενον αὐτῶν εἶναι τέλειον τετράγωνον.

294) Τὸ πηλίκον $\mu : \frac{\nu^2}{\mu}$ εἶναι τέλειον τετράγωνον.

295) Νὰ εὑρεθῇ κλάσμα, τὸ ὁποῖον διαιρούμενον διὰ τοῦ ἀντιστρόφου του γίνεται ἴσον πρὸς τὰ $\frac{32}{98}$.

§ **201. Τετραγωνικὴ ρίζα ἀκεραίου ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν μονάδος.**—Τοῦ μὴ τελείου τετραγώνου 20 δὲν ὑπάρχει ἀκριβὴς τετρ. ρίζα, ἤτοι ἀριθμὸς (ἀκέραιος ἢ κλάσμα), ὅστις νὰ ἔχῃ τετράγωνον τὸν 20. Ἀμέσως μικρότερον αὐτοῦ τέλειον τετράγωνον εἶναι ὁ 16, ὁ ὁποῖος ἔχει τετρ. ρίζαν τὸν 4. Ὁ ἀριθμὸς 4 καλεῖται καὶ τετρ. ρίζα κατὰ προσέγγισιν μονάδος τοῦ ἀριθμοῦ 20. Ὁμοίως τοῦ 52 τετρ. ρίζα κατὰ προσέγγισιν μονάδος εἶναι ὁ 7, ἤτοι ἡ ἀκριβὴς τετρ. ρίζα τοῦ ἀμέσως μικροτέρου τοῦ 52 τελείου τετραγώνου.

Γενικῶς : Τετ. ρίζα κατὰ προσέγγισιν μονάδος ἀκεραίου ἀριθμοῦ καλεῖται ἡ τετρ. ρίζα τοῦ ἀμέσως μικροτέρου τοῦ ἀριθμοῦ τούτου τελείου τετραγώνου.

Κατὰ ταῦτα, ἵνα ἀριθμός τις χ εἶναι τετρ. ρίζα (ἀκριβὴς ἢ κατὰ προσέγγισιν μονάδος) τοῦ ἀκεραίου Α, πρέπει τὸ τετράγωνον τοῦ χ νὰ μὴ ὑπερβαίνῃ τὸν Α, τὸ δὲ τετράγωνον τοῦ $(\chi+1)$ νὰ ὑπερβαίνῃ αὐτόν, ἤτοι πρέπει νὰ εἶναι $\chi^2 \leq A < (\chi+1)^2$.

Ἡ εὕρεσις τῆς ἀκριβοῦς (ἂν εἶναι τέλειον τετράγωνον) ἢ τῆς κατὰ προσέγγισιν μονάδας τετρ. ρίζης ἀριθμοῦ καλεῖται ἐξαγωγὴ τῆς τετρ. ρίζης αὐτοῦ. Ἡ ἀκριβὴς ἢ κατὰ προσέγγισιν μονάδος τετρ. ρίζα ἀκεραίου ἀριθμοῦ μεγαλυτέρου τοῦ 100 ἔχει τὴν ἀκόλουθον ἰδιότητα.

§ **202. Θεώρημα I.**—Δεκάδες τῆς τετρ. ρίζης ἀριθμοῦ ἀκεραίου εἶναι ἡ τετρ. ρίζα (ἀκριβὴς ἢ κατὰ προσέγγισιν μονάδος) τῶν ἑκατοντάδων τοῦ ἀριθμοῦ τούτου.

Ἔστω ὁ ἀριθμὸς 4285, ὅστις ἔχει 42 ἑκατοντάδας. Ἐπειδὴ ἡ κατὰ προσέγγισιν μονάδος τετρ. ρίζα τοῦ 42 εἶναι 6, λέγω ὅτι ἡ τετρ. ρίζα τοῦ 42·5 ἔχει 6 δεκάδας.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ τ. ρίζα κατὰ προσέγγισιν μονάδος τοῦ 42 εἶναι ὁ 6, ἕπεται ὅτι $6^2 < 42$ καὶ $7^2 > 42$, ἄρα $6^2 \times 10^2 < 42 \times 100$ καὶ $7^2 \times 10^2 > 42 \times 100$ ἢ $60^2 < 4200$ καὶ $70^2 > 4200$. Ἐκ τῆς α΄ τούτων ἕπεται ὅτι κατὰ μείζονα λόγον εἶναι $60^2 < 4285$, ἄρα ἡ τετρ. ρίζα τοῦ 4285 δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι ἀριθμὸς μικρότερος τοῦ 60. Ἐκ τῆς β΄ δὲ ἀνισότητος $70^2 > 4200$ παρατηροῦντες ὅτι ἡ διαφορὰ τῶν δύο μελῶν αὐτῆς οὐδέποτε εἶναι μικροτέρα τοῦ 100 (1)

1) Τῆς τετρ. ρίζης τῶν ἑκατοντάδων οὔσης 6 ἡ μεγίστη τιμὴ τῶν ἑκατοντάδων τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ εἶναι 48, ὅτε ἡ ἀνισότης θὰ ἦτο $70^2 > 4800$ ἢ $4900 > 4800$ καὶ $4900 - 4800 = 100$.

συνάγομεν ὅτι καὶ $70^2>4285$, ἄρα ἡ τετρ. ῥίζα τοῦ 4285, εἶναι ἀριθμὸς μικρότερος τοῦ 70. Τετρ. ῥίζα λοιπὸν τοῦ 4285 θὰ εἶναι εἷς τῶν ἀριθμῶν 60, 61, 62.....69, θὰ ἔχῃ ἄρα 6 δεκάδας. ὅ. ἔ. δ.

§**503. Ἐξαγωγὴ τῆς τετρ. ῥίζης ἀκεραίου ἀριθμοῦ.**—α΄.) Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς εἶναι μικρότερος τοῦ 100, ἡ τετρ. ῥίζα αὐτοῦ εἶναι μικροτέρα τοῦ 10· εὑρίσκομεν δὲ αὐτὴν ἀπὸ μνήμης, διότι γνωρίζομεν τὰ τετράγωνα ὅλων τῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν. Οὕτω π. χ. ἡ κατὰ προσέγγισιν μονάδος τετρ. ῥίζα τοῦ 72 εἶναι 8, τοῦ 49 ἀκριβὴς τετρ. ῥίζα εἶναι ὁ 7 κλπ.

β΄.) Ἔστω τώρα ὁ ἀριθμὸς 5386, ὁ ὁποῖος περιέχεται μεταξὺ 100 καὶ 10000· ἡ τετρ. ῥίζα αὐτοῦ θὰ περιέχηται μεταξὺ 10 καὶ 100 ἤτοι θὰ εἶναι διψήφιος ἀριθμός. Κατὰ τὴν προηγουμένην ἰδιότητα ὁ ἀριθμὸς οὗτος θὰ ἔχῃ 7 δεκάδας ($\sqrt{53}$ εἶναι ὁ 7). Ἐὰν δὲ παραστήσωμεν τὰς ἁπλᾶς μονάδας αὐτοῦ διὰ τοῦ μ, ἡ ζητουμένη τετρ. ῥίζα θὰ εἶναι $70+\mu$. Τούτου τὸ τετράγωνον θὰ ἰσοῦται πρὸς τὸν 5386 ἂν οὗτος εἶναι τέλειον τετράγωνον, ἢ πρέπει νὰ προσλάβῃ καὶ ἄλλον τινὰ ἀριθμόν, ἵνα ἀποτελέσῃ τὸν 5386· ἄρα ἀληθεύει ἡ ἰσότης $5386=(70+\mu)^2+\upsilon$, ἔνθα υ δύναται νὰ εἶναι καὶ 0. Ἐπειδὴ δὲ (§ 197) $(70+\mu)^2=70^2+2\times70\times\mu+\mu^2$, ἕπεται ὅτι

$$5386=70^2+2\times70\times\mu+\mu^2+\upsilon.$$

Ἐὰν δὲ ἀφαιρέσωμεν ἀπ' ἀμφότερα τὰ μέλη ταύτης τὸν 4900 εὑρίσκομεν ὅτι $\quad 486=2\times70\times\mu+\mu^2+\upsilon.$

Ἤδη παρατηροῦμεν ὅτι ὁ α΄ προσθετέος τοῦ β΄. μέλους ἔχει $2\times7\times\mu$ δεκάδας· αὗται μὲ τὰς ἄλλας δεκάδας τὰς ὁποίας δυνατὸν νὰ ἔχῃ τὸ ἄθροισμα $\mu^2+\upsilon$, ὀφείλουσι νὰ ἀποτελῶσι τὰς 48 δεκάδας τοῦ α΄ μέλους. Πρέπει ἄρα νὰ εἶναι $2\times7\times\mu\leq48$. Ἐκ ταύτης διαιροῦντες ἀμφότερα τὰ μέλη διὰ 2×7, ἤτοι διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ ψηφίου τῶν δεκάδων, εὑσκομεν ὅτι $\mu\leq\frac{48}{2\times7}$ ἢ $\mu\leq3\ \frac{6}{14}$. Ἐπειδὴ δὲ ὁ μ ὀφείλει νὰ εἶναι ἀκέραιος, ἕπεται ὅτι ἡ μεγίστη τιμή, τὴν ὁποίαν οὗτος δύναται νὰ λάβῃ εἶναι 3. Ἵνα ἴδωμεν, ἂν δύναται νὰ εἶναι $\mu=3$, παρατηροῦμεν ὅτι πρέπει συγχρόνως τὸ ἄθροισμα $2\times7\times10\times\mu+\mu^2$ τῶν δύο πρώτων προσθετέων τοῦ β΄. μέλους τῆς ἰσότητος (1) νὰ μὴ ὑπερβαίνῃ τὸν 486. Ἐπειδὴ δὲ διὰ $\mu=3$ τὸ ἄθροισμα τοῦτο γίνεται $140\times3+3^2=(140+3)\times3=143\times3$, ἀρκεῖ νὰ μὴ ὑπερβαίνῃ τὸν 486 τὸ γινόμενον 143×3, τοῦ ὁποίου εἷς μὲν παράγων εἶναι τὸ δοκιμαζόμενον ψηφίον 3, ὁ δὲ ἄλλος προκύπτει ἀναγραφομένου τοῦ δοκιμαζομένου τούτου ψηφίου 3 δεξιὰ τοῦ διπλασίου τοῦ ψηφίου τῶν δεκάδων τῆς ῥίζης. Καὶ ἐπειδὴ $143\times3=429<486$, ἕπεται ὅτι μ=3 καὶ κατ' ἀκολουθίαν ἡ ζητουμένη τετρ. ῥίζα εἶναι 73· ἡ δὲ ἰσότης (1) γίνεται $486=429+υ$, ὅθεν $υ=57$, ἤτοι ἡ εὑρεθεῖσα τετρ. ῥίζα δὲν εἶναι ἀκριβής, ἀλλὰ κατὰ προσέγγισιν μονάδος.

Κατὰ ταῦτα πρέπει προσθέτοντες εἰς τὸν 73^2 τὸν 57 νὰ εὑρίσκωμεν τὸν 5386. Τῷ ὄντι· ἐκ τοῦ τρόπου, καθ' ὃν εὑρέθη ἡ τετρ. ῥίζα προκύπτει ὅτι ἀπὸ τοῦ 5386 ἀφῃρέθη ὁ $4900=70^2$ καὶ ἀπὸ τοῦ ὑπολοίπου ἀφῃρέθη τὸ γινόμενον $143\times3=(140+3)\times3=2\times70\times3+3^2$ καὶ οὕτως ἔμεινεν ὁ 57. Ἄρα :

$$5386=70^2+2\times70\times3+3^2+57=(70+3)^2+57=73^2+57.$$

ΣΗΜ. α'. Ὁ ἀριθμὸς 57, ὅστις προστιθέμενος εἰς τὸν 73^2 δίδει τὸν δοθέντα ἀριθμόν, καλεῖται ὑπόλοιπον.

ΣΗΜ. β'. Ἀντὶ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ 5387 τὸν 4900 ἀρκεῖ ἀπὸ των 53 ἑκατονχάδων νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸν 49 καὶ δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου νὰ γράψωμεν τὰ δύο τελευταῖα ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ.

Ἐργαζόμενοι ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι τοῦ ἀριθμοῦ 2025 ἡ ἀκριβὴς τετρ. ῥίζα εἶναι 45.

Διάταξις τῆς πράξεως

53/86	73	20/25	45
49	143	16	85
48,6	3	42,5	5
429	429	425	425
57		0	

γ'). Ἔστω ἤδη ὁ μεγαλύτερος τοῦ 10000 ἀριθμὸς 25369. Ἐπειδὴ δεκάδες τῆς τετρ. ῥίζης αὐτοῦ εἶναι ἡ τετρ. ῥίζα τῶν ἑκατοντάδων του, πρέπει πρῶτον νὰ εὕρωμεν τὴν τετρ. ῥίζαν τῶν 253 ἑκατοντάδων αὐτοῦ. Ἐργαζόμενοι κατὰ τὰ προηγούμενα εὑρίσκομεν ὅτι ἡ κατὰ προσέγγισιν μονάδος τετρ. ῥίζα τοῦ 253 εἶναι 15 τὸ δὲ ὑπόλοιπον 28, ἤτοι εἶναι $253=15^2+28$. Ἤδη πρέπει ἀπὸ τοῦ 253 νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸν 15^2 καὶ δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου $253-15^2=28$ νὰ γράψωμεν τὰ δύο τελευταῖα ψηφία τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ 25369. Οὕτω σχηματίζεται ὁ ἀριθμὸς 2869, τοῦ ὁποίου τὰς 286 δεκάδας πρέπει νὰ διαιρέσωμεν διὰ τοῦ διπλασίου τῶν δεκάδων τῆς τετρ. ῥίζης, ἤτοι διὰ τοῦ 30. Διὰ νὰ ἴδωμεν, ἂν τὸ πηλίκον 9 εἶναι ψηφίον μονάδων τῆς ῥίζης, γράφομεν αὐτὸ δεξιὰ τοῦ 30 καὶ τὸν προκύπτοντα ἀριθμὸν 309 πολ]ζομεν

2/53	15		
1	27	26	25
15,3	7	6	5
125	189	156	125
28			

ἐπὶ 9. Ἐπειδὴ τὸ γινόμενον $309 \times 9 = 2781$ δὲν ὑπερβαίνει τὸν 2869, τὸ ψηφίον τῶν μονάδων εἶναι 9. Ἡ ζητουμένη λοιπὸν τετρ. ρίζα εἶναι 159 κατὰ προσέγγισιν μονάδος καὶ τὸ ὑπόλοιπον εἶναι $2869 - 2781 = 88$. Ἐκ τούτων ἕπεται ὁ ἑξῆς κανών.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ἀκριβῆ ἢ κατὰ προσέγγισιν μονάδος τετρ. ρίζαν ἀκεραίου ἀριθμοῦ μεγαλυτέρου τοῦ 100 ἐργαζόμεθα ὡς ἀκολούθως: α΄.) Χωρίζομεν αὐτὸν εἰς διψήφια τμήματα ἀρχόμενοι ἐκ δεξιῶν καὶ

Διάταξις τῆς πράξεως

2/53/69	159	
1	25	309
15,3	5	9
125	125	2781
286,9		
2781		
88		

ἐξάγομεν τὴν ἀκριβῆ ἢ κατὰ προσέγγισιν μονάδος τετρ. ρίζαν τοῦ α΄. πρὸς τὰ ἀριστερὰ τμήματος, ὅπερ δυνατὸν νὰ εἶναι καὶ μονοψήφιον. Οὕτως εὑρίσκομεν τὸ α΄ ψηφίον τῆς ζητουμένης τετρ. ρίζης. β΄) Ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ εἰρημένου α΄ τμήματος τὸ τετράγωνον τοῦ εὑρεθέντος ψηφίου τῆς ῥίζης καὶ δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου καταβιβάζομεν τὸ ἀκόλουθον διψήφιον τμῆμα. Οὕτω προκύπτει ἀριθμός τις, τὸν ὁποῖον χάριν εὐκολίας, ἂς καλέσωμεν Δ_1 γ΄) Διαιροῦμεν τὰς δεκάδας τοῦ Δ_1 διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ εὑρεθέντος ψηφίου τῆς τετρ. ρίζης καὶ δοκιμάζομεν, ἂν τὸ πηλίκον εἶναι ἢ οὐχὶ δεύτερον ψηφίον τῆς τ. ρίζης. Πρὸς τοῦτο γράφομεν δεξιὰ τοῦ εἰρημένου διαιρέτου τὸ δοκιμαζόμενον πηλίκον καὶ τὸν οὕτω προκύπτοντα ἀριθμὸν πολ]ζομεν ἐπὶ τὸ πηλίκον τοῦτο. Ἂν τὸ προκύπτον γινόμενον δὲν ὑπερβαίνῃ τὸ Δ_1, τὸ δοκιμαζόμενον πηλίκον θὰ εἶναι τὸ δεύτερον ψηφίον τῆς ῥίζης καὶ γράφομεν αὐτὸ δεξιὰ τοῦ εὑρεθέντος ἤδη πρώτου ψηφίου· ἄλλως, δοκιμάζομεν ὁμοίως τὸ κατὰ μονάδα μικρότερον καὶ καθ' ἑξῆς οὕτω, μέχρις οὗ εὕρωμεν γινόμενον μὴ ὑπερβαῖνον τὸν Δ_1. δ΄) Ἀφαιροῦμεν τὸ οὕτως εὑρεθὲν γινόμενον ἀπὸ τοῦ Δ_1 καὶ δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου καταβιβάζομεν τὸ ἀκόλουθον διψήφιον τμῆμα. Οὕτω σχηματίζεται ἀριθμός τις, τὸν ὁποῖον ἂς καλέσωμεν Δ_2. ε΄) Διαιροῦμεν τὰς δεκάδας τοῦ Δ_2 διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ ἀριθμοῦ, τὸν ὁποῖον ἀποτελοῦσι τὰ δύο εὑρεθέντα ψηφία τῆς τ. ῥίζης καὶ δοκιμάζομεν, ὡς προηγουμένως, ἂν τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως ταύτης εἶναι ἢ οὐχὶ τὸ τρίτον ψηφίον τῆς ῥίζης. Οὕτως ἐξακολουθοῦμεν, μέχρις οὗ κατ βιβάσωμεν ὅλα τὰ διψήφια τμήματα τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ. Ἂν τὸ τελευταῖον ὑπόλοιπον εἶναι μηδέν, ἡ εὑρισκομένη τετρ. ῥίζα εἶναι ἀκριβής, ἄλλως αὕτη εἶναι κατὰ προσέγγισιν μονάδος.

Σημ. *α'*. Ἂν πηλίκον τι τῶν ἐκτελουμένων διαιρέσεων εἶναι μεγαλύτερον τοῦ 9, ἀρχίζομεν τὰς δοκιμὰς ἀπὸ τοῦ 9. Ἂν δὲ πηλίκον τι εἶναι 0, τὸ ἀντίστοιχον ψηφίον τῆς τ. ῥίζης θὰ εἶναι 0.

Σημ. *β'*. Τὸ ὑπόλοιπον τῆς τετρ. ῥίζης δὲν δύναται νὰ ὑπερβαίνῃ τὸ διπλάσιον τῆς τετρ. ῥίζης. Διότι, ἂν εἶναι τ ἡ τετρ. ῥίζα ἀριθμοῦ τινος Α καὶ τὸ ὑπόλοιπον υ ἦτο ἴσον πρὸς $2τ+λ$, θὰ ἦτο

$$Α=τ^2+2τ+λ \text{ ἢ } Α=τ^2+2τ+1+(λ-1).$$

Ἐπειδὴ δὲ $τ^2+2τ+1=(τ+1)^2$, ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται $Α=(τ+1)^2+(λ-1)$, ἐκ τῆς ὁποίας καθίσταται φανερὸν ὅτι ὁ Α δὲν εἶναι μικρότερος τοῦ $(τ+1)^2$ καὶ κατ' ἀκολουθίαν ἡ τετρ. ῥίζα αὐτοῦ δὲν θὰ ἦτο τ, ὅπερ ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσιν.

Σημ. *γ'*. Τετρ. ῥίζα κατὰ προσέγγισιν μονάδος ἀριθμοῦ μεγαλυτέρου τῆς 1 καὶ μὴ ἀκεραίου εἶναι ἡ ἀκριβὴς ἢ κατὰ προσέγγισιν μονάδος τετρ. ῥίζα τοῦ ἀκεραίου μέρους αὐτοῦ. Οὕτω τοῦ ἀριθμοῦ 54,65 τετρ. ῥίζα κατὰ προσέγγισιν μονάδος εἶναι 7, καθ' ὅσον προφανῶς $7^2 < 54,65 < 8^2$.

§ **204. Τετρ. ῥίζα ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{ν}$.**

Ἔστω π. χ. ὁ ἀριθμὸς 2, τοῦ ὁποίου ἡ κατὰ προσέγγισιν μονάδος τετρ. ῥίζα εἶναι 1. Ἐὰν σχηματίσωμεν τῶν ἀριθμῶν $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{10}$, $\frac{3}{10}$ ... $\frac{14}{10}$, $\frac{15}{10}$ τὰ τετράγωνα 0,01 0,04 0,09....1,96,2,25 βλέπομεν ὅτι ἐκ τῶν μικροτέρων τοῦ 2 τετραγώνων τούτων μέγιστον εἶναι τὸ τετράγωνον τοῦ 1,4. Ὁ ἀριθμὸς 1,4 καλεῖται τ. ῥίζα τοῦ 2 κατὰ προσέγσέγγισιν $\frac{1}{10}$.

Γενικῶς: Τετρ. ῥίζα ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{ν}$ καλεῖται τὸ μέγιστον ἀπὸ τὰ κλάσματα, τὰ ὁποῖα ἔχουσι παρονομαστὴν ν καὶ τῶν ὁποίων τὰ τετράγωνα δὲν ὑπερβαίνουσι τὸν ἀριθμὸν τοῦτον.

Κατὰ ταῦτα, διὰ νὰ εἶναι κλάσμα τι $\frac{χ}{ν}$ τετρ. ῥίζα ἀριθμοῦ τινος Α κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{ν}$ πρέπει καὶ ἀρκεῖ, νὰ εἶναι

$$\left(\frac{χ}{ν}\right)^2 \leq Α < \left(\frac{χ+1}{ν}\right)^2,$$

ἤτοι νὰ χωρῇ μὲν εἰς τὸν Α ὁ $\left(\frac{\chi}{\nu}\right)^2$ οὐχὶ ὅμως καὶ ὁ $\left(\frac{\chi+1}{\nu}\right)^2$.

Ἔστω ἤδη ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὴν τετρ. ῥίζαν τοῦ 5 κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{10}$. Κατὰ τὸν προηγούμενον ὁρισμὸν ἡ ζητουμένη τετρ. ῥίζα θὰ εἶναι κλάσμα τι $\frac{\chi}{10}$ τοιοῦτον ὥστε νὰ ἀληθεύωσιν αἱ σχέσεις

$$\left(\frac{\chi}{10}\right)^2 \leq 5 < \left(\frac{\chi+1}{10}\right)^2.$$

Ἐπειδὴ δὲ $\left(\frac{\chi}{10}\right)^2 = \frac{\chi^2}{100}$ καὶ $\left(\frac{\chi+1}{10}\right)^2 = \frac{(\chi+1)^2}{100}$, αἱ προηγούμεναι σχέσεις γίνονται $\frac{\chi^2}{100} \leq 5 < \frac{(\chi+1)^2}{100}$, ἐξ ὧν διὰ τοῦ πολ]σμοῦ πάντων τῶν ἀριθμῶν ἐπὶ 100 ἕπονται αἱ σχέσεις $\chi^2 \leq 500 < (\chi+1^2)$. Ἐκ τούτων κατανοοῦμεν (§ 201) ὅτι ὁ χ εἶναι ἡ ἀκριβὴς ἢ κατὰ προσέγγισιν μονάδος τετρ. ῥίζα τοῦ 500, ἤτοι $\chi = 22$· ἡ ζητουμένη ἄρα τετρ. ῥίζα τοῦ 5 εἶναι $\frac{22}{10} = 2{,}2$. Ὁμοίως ἐργαζόμενοι κατανοοῦμεν ὅτι, ἵνα ἡ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{\nu}$ τετρ. ῥίζα ἀριθμοῦ Α εἶναι $\frac{\chi}{\nu}$ πρέπει νὰ ἀληθεύωσιν αἱ σχέσεις $\chi^2 \leq A.\ \nu^2 < (\chi+1)^2$, ἐξ ὧν προκύπτει ὅτι ὁ χ. εἶναι ἡ ἀκριβὴς ἢ κατὰ προσέγγισιν μονάδος τετρ. ῥίζα τοῦ γινομένου Α. ν^2.

Ἄρα : Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{\nu}$ τ. ῥίζαν ἀριθμοῦ τινὸς Α, πολ)ζομεν αὐτὸν ἐπὶ ν^2 καὶ τὴν ἀκριβῆ ἢ κατὰ προσέγγισιν μονάδος τετρ. ῥίζαν τοῦ Α. ν^2 διαιροῦμεν διὰ ν.

Ἀσκήσεις.

296) Νὰ ἐξαχθῇ ἡ ἀκριβὴς ἢ ἡ κατὰ προσέγγισιν μονάδος τετρ. ῥίζα ἑκάστου τῶν ἀριθμῶν

729, 1250, 10609, 2024929 καὶ 38764124.

297) Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός, ὅστις διαιρούμενος διὰ τοῦ ἀντιστρόφου αὐτοῦ γίνεται 2601.

298) Νὰ εὑρεθῇ ἡ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{100}$ τετρ. ῥίζα ἑκάστου τῶν ἀριθμῶν 3, 5, $\frac{2}{7}$, $\frac{9}{20}$.

299). Νὰ εὑρεθῇ ἡ τετραγωνικὴ ρίζα κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{1000}$ ἑκάστου τῶν ἀριθμῶν 2, 35, 164, 15 καὶ 7423,854.

300). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι, ἂν ἐξαγάγωμεν τὴν κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{100}$ τετρ. ρίζαν τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ $\frac{3}{4}$ καὶ ταύτην διαιρέσωμεν διὰ 2, προκύπτει ἡ τετρ. ρίζα τοῦ $\frac{3}{4}$ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{200}$.

§ **205. Ἀσύμμετροι ἀριθμοί.**—Ἡ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{10000}$ τετρ. ρίζα τοῦ 2 εἶναι κατὰ σειρὰν 1,4 1,41 1,414 1,4142. Ἐὰν νοήσωμεν τὸν παρονομαστὴν τῆς προσεγγίσεως ἀπαύστως καὶ διαδοχικῶς πολ]ζόμενον ἐπὶ 10, εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ πλῆθος τῶν δεκαδικῶν ψηφίων τῆς οὕτως ἑκάστοτε ὑπολογιζομένης τετρ. ρίζης τοῦ 2 θὰ βαίνῃ ἐπ' ἄπειρον αὐξανόμενον· θέλει ὅθεν οὕτω προκύψει ἀπειρομερές τι πλῆθος. Τὸ ἀπειρομερὲς τοῦτο πλῆθος ἔχει ἀμφοτέρας τὰς ἐν (§ 187) ἐκτεθείσας ἰδιότητας ἤτοι:

α'.) Τὰ μέρη αὐτοῦ διαδέχονται ἄλληλα καθ' ὡρισμένον νόμον. [εἶναι ὁ τρόπος (§ 204), κατὰ τὸν ὁποῖον εὑρίσκονται ταῦτα].

β'.) Λαμβάνοντες ὁσαδήποτε (εἰς πεπερασμένον πλῆθος) ἐκ τῶν μερῶν αὐτοῦ ἀποτελοῦμεν ἀριθμόν, οὗ ὑπάρχει μεγαλύτερος. Οὕτως ἕκαστος τῶν ἀνωτέρω ἀναγραφέντων ἀριθμῶν εἶναι μικρότερος τοῦ 2. Τούτων ἕνεκα τὸ ἀπειρομερὲς τοῦτο πλῆθος δεχόμεθα ὡς ἀριθμόν, τὸν ὁποῖον καλοῦμεν τετρ. ρίζαν τοῦ 2 καὶ σημειοῦμεν οὕτω $\sqrt{2}$.

Καὶ τὸ ἀπειρομερὲς πλῆθος 3,102100210002......... ἔχον τὰς ἀνωτέρω ρηθείσας ἰδιότητας θεωρεῖται ἀριθμός. Ἀμφότεροι οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι ἔχουσιν ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία, ἅτινα δὲν εἶναι περιοδικά· διότι ἂν τὰ δεκαδικὰ ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ 1,4142........ ἦσαν περιοδικά, οὗτος θὰ ἦτο ἴσος πρός τι κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$, ὅτε θὰ ἦτο $2=\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2$, ὅπερ ἄτοπον (§ 198). Ὅτι δὲ καὶ τοῦ ἑτέρου ἀριθμοῦ τὰ ψηφία δὲν εἶναι περιοδικὰ εἶναι αὐτόδηλον. Ἑκάτερος τῶν ἀριθμῶν τούτων καλεῖται ἀσύμμετρος ἀριθμός.

Γενικῶς: Ἀσύμμετρος ἀριθμὸς καλεῖται πᾶς δεκαδικὸς ἀριθμός, ὅστις ἔχει ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία μὴ περιοδικά.

Κατ' ἀντίθεσιν πρὸς τούτους οἱ μέχρι τοῦδε γνωστοὶ ἀριθμοὶ (ἀκέραιοι καὶ κλάσματα) καλοῦνται σύμμετροι ἀριθμοί.

Οἱ ἀσύμμετροι ἀριθμοὶ ἔχουσιν ὅλας τὰς ἰδιότητας τῶν συμμέτρων ἀριθμῶν. Αἱ δέ ἐπ' αὐτῶν πράξεις ἐκτελοῦνται συνήθως παραλειπομένων τῶν ἀπείρων δεκαδικῶν ψηφίων ἀπό τινος τάξεως, ἤτοι ἀντικαθισταμένου ἑκάστου ἀριθμοῦ διὰ συμμέτρου, ὁ ὁποῖος διαφέρει ἀπὸ αὐτοῦ διαφοράν, ἡ ὁποία ἐλαττοῦται, ἐφ' ὅσον τὸ πλῆθος τῶν διατηρουμένων δεκαδικων ψηφίων αὐξάνεται· εὐνόητον δὲ ὅτι τὸ ἐξαγόμενον τῶν πράξεων δὲν εἶναι ἀκριβές, ἀλλὰ κατὰ προσέγγισιν. Οὕτω λαμβάνοντες ὡς τιμὴν τοῦ ἀθροίσματος $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ τὸ ἄθροισμα $1{,}414+1{,}732=3{,}146$ κάμνομεν λάθος μικρότερον τοῦ $\frac{2}{1000}$, διότι τὸ ἐπὶ ἑκάστου προσθετέου γινόμενον λάθος εἶναι μικρότερον τοῦ $\frac{1}{1000}$.

Ἄρα τὸ ἄθροισμα $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ ἔχει τιμὴν 3,146 κατὰ προσέγγισιν $\frac{2}{1000}$.

ΣΗΜ. Εἰς ἄλλο βιβλίον τῶν μαθηματικῶν διδάσκονται τύποι τινές, διὰ τῶν ὁποίων συντομώτερον ἐνίοτε δὲ καὶ ἀκριβῶς ἐκτελοῦνται αἱ ἐπί τινων ἀσυμμέτρων πράξεις.

* Ἀσκήσεις ἐπὶ τοῦ τετραγώνου, τετρ. ῥίζης καὶ ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν.

301). Τὸ τετράγωνον παντὸς περιττοῦ ἀριθμοῦ εἶναι πολ. $8+1$.

302). Ἂν ἀριθμὸς λήγει εἰς 4 ἢ 6, τὸ τετράγωνόν του ἔχει περιττὸν ψηφίον δεκάδων.

303). Νὰ εὑρεθῇ ἀκέραιος ἀριθμὸς Α τοιοῦτος ὥστε νὰ εἶναι $(\nu+1)^2=A+5$ καὶ $\nu^2=A-20$, τοῦ ν ὄντος ἀκεραίου.

304). Ἐὰν περιττὸς ἀριθμὸς εἶναι τέλειον τετράγωνον, δύναται νὰ λάβῃ τὴν μορφὴν $4\nu+1$.

305). Τὸ τετράγωνον παντὸς περιττοῦ ἀριθμοῦ εἶναι ἄθροισμα δύο διαδοχικῶν ἀριθμῶν, τῶν ὁποίων ὁ μεγαλύτερος εἶναι ἄθροισμα δύο τετραγώνων,

306). Ἐὰν α καὶ β εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, τὸ ἄθροισμα $\alpha^2+\beta^2$ δὲν διαιρεῖται διὰ 3.

307). Νὰ εὑρεθῇ ἡ κατὰ προσέγγισιν μονάδος τετρ. ῥίζα τοῦ γινομένου $(\alpha-1)\,\alpha$, ἔνθα α ἀκέραιος.

308). Τὸ κλάσμα $\frac{\nu-1}{\nu}$ εἶναι ἡ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{\nu}$ τετρ. ῥίζα τοῦ ἑαυτοῦ του.

309). Τὸ ἄθροισμα τῶν τετρ. ριζῶν δύο ἀριθμῶν εἶναι 9, ἡ δὲ διαφορὰ αὐτῶν 3· ποῖοι ἀριθμοὶ οὗτοι.

310). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $(\sqrt{\alpha}.\sqrt{6})^2=\alpha.6$.

311). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $\sqrt{\alpha}\sqrt{6}=\sqrt{\alpha 6}$.

312). Νὰ εὑρεθῇ τὸ γινόμενον $\sqrt{2}.\sqrt{8}$. Ὁμοίως τὸ $\sqrt{3}.\sqrt{12}$.

313). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}\right)^2=\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ εἶτα ὅτι $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}=\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}$.

314). Νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'.

ΛΟΓΟΙ ΚΑΙ ΑΝΑΛΟΓΙΑΙ

206. Λόγος ἀριθμοῦ πρὸς ἄλλον.— Τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 6 διὰ 3, ἤτοι ὁ ἀριθμὸς 2, καλεῖται καὶ λόγος τοῦ 6 πρὸς τὸν 3, σημειοῦται δὲ οὕτω 6 : 3 ἢ καὶ οὕτω $\frac{6}{3}$.

Γενικῶς: Λόγος ἀριθμοῦ πρὸς ἄλλον καλεῖται τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ πρώτου διὰ τοῦ δευτέρου.

Οἱ ἀπαρτίζοντες λόγον τινὰ ἀριθμοὶ καλοῦνται *ὅροι* αὐτοῦ.

Δύο λόγοι ἔχοντες τοὺς αὐτοὺς ὅρους κατ' ἀντίστοφον τάξιν καλοῦνται ἀντίστροφοι λόγοι. Τοιοῦτοι π. χ. εἶναι οἱ λόγοι $\frac{2}{6}$ καὶ $\frac{6}{2}$.

§ **207. Ἀναλογίαι.** — Ἐπειδὴ $\frac{6}{2}=3$ καὶ $\frac{12}{4}=3$, ἕπεται ὅτι οἱ δύο λόγοι $\frac{6}{2}$ καὶ $\frac{12}{4}$ εἶναι ἴσοι, ἤτοι $\frac{6}{2}=\frac{12}{4}$. Ἡ ἰσότης αὕτη καλεῖται ἀναλογία.

Γενικῶς: Ἀναλογία καλεῖται ἰσότης δύο λόγων.

Οἱ ὅροι ἀμφοτέρων τῶν λόγων ἑκάστης ἀναλογίας καλοῦνται ὅλοι ὁμοῦ ὅροι τῆς ἀναλογίας. Τούτων οἱ διαιρετέοι ἀμφοτέρων τῶν λόγων λέγονται ἡγούμενοι, οἱ δὲ διαιρέται ἑπόμενοι ὅροι· ὁ διαιρετέος τοῦ πρώτου καὶ ὁ διαιρέτης τοῦ δευτέρου λόγου καλοῦνται ἄκροι ὅροι· ὁ δὲ διαιρέτης τοῦ πρώτου καὶ διαιρετέος τοῦ β' λόγου καλοῦνται μέσοι ὅροι. Οὕτω τῆς ἀναλογίας $\frac{6}{2}=\frac{12}{4}$ ἡγούμενοι μὲν εἶναι οἱ 6 καὶ 12, ἑπόμενοι οἱ 2 καὶ 4, ἄκροι οἱ 6 καὶ 4 καὶ μέσοι οἱ 2 καὶ 12.

Τῆς ἀναλογίας $\frac{8}{4}=\frac{4}{2}$ οἱ μέσοι ὅροι εἶναι ἴσοι· αὕτη λέγεται συνεχὴς ἀναλογία.

Γενικῶς: Συνεχὴς ἀναλογία καλεῖται πᾶσα ἀναλογία, τῆς ὁποίας οἱ μέσοι ὅροι εἶναι ἴσοι.

Ὁ μέσος ὅρος συνεχοῦς ἀναλογίας καλεῖται μέσος ἀνάλογος τῶν ἄκρων ὅρων αὐτῆς. Οὕτως ὁ 4 εἶναι μέσος ἀνάλογος τῶν ἀριθμῶν 8 καὶ 2.

Ἰδιότητες τῶν ἀναλογιῶν.

§ **208. Θεώρημα I.**— Εἰς πᾶσαν ἀναλογίαν τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῶν μέσων ὅρων αὐτῆς.

Ἔστω π. χ. ἡ ἀναλογία $\frac{12}{4}=\frac{6}{2}$, λέγω ὅτι $12\times2=6\times4$.

Ἀπόδειξις. Πολ]ζοντες τοὺς ἴσους λόγους ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν (4×2) εὑρίσκομεν ἴσα γινόμενα, ἤτοι $\frac{12}{4}\times(4\times2)=\frac{6}{2}\cdot\times(4\times2)$. Ἐπειδὴ δὲ $\frac{12}{4}\times(4\times2)=\frac{12\times4\times2}{4}=12\times2$ καὶ $\frac{6}{2}\times(4\times2)=\frac{6\times4\times2}{2}=6\times4$, ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται $12\times2=4\times6$. ὅ. ἔ. δ.

Γενικῶς: Ἂν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ θὰ εἶναι καὶ $\alpha\times\delta=\beta\times\gamma$.

Πόρισμα. Εἰς πᾶσαν συνεχῆ ἀναλογίαν τὸ τετράγωνον τοῦ μέσου ἀναλόγου ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων ὅρων αὐτῆς.

§ **209. Θεώρημα II.**— (Ἀντίστροφον τοῦ I). Ἐὰν τέσσαρες ἀριθμοὶ γραμμένοι κατὰ σειρὰν εἶναι τοιοῦτοι, ὥστε τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῶν μέσων, οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι, ὅπως εἶναι γραμμένοι, συνιστῶσιν ἀναλογίαν.

Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ 2,3,6,9, οἱ ὁποῖοι εἶναι τοιοῦτοι ὥστε $2\times9=3\times6$. Λέγω ὅτι ἀληθεύει ἡ ἀναλογία $\frac{2}{3}=\frac{6}{9}$.

Ἀπόδειξις. Διαιροῦντες ἀμφότερα τὰ ἴσα γινόμενα διὰ τοῦ (3×9) εὑρίσκομεν ὅτι $\frac{2\times9}{3\times9}=\frac{3\times6}{3\times9}$, ὅθεν δι' ἁπλοποιήσεως προκύπτει ὅτι $\frac{2}{3}=\frac{6}{9}$. ὅ. ἔ. δ.

Γενικῶς: Ἂν οἱ α, β, γ, δ εἶναι τοιοῦτοι ὥστε $\alpha\times\delta=\beta\times\gamma$, θὰ εἶναι $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$.

Πόρισμα Ι. Εἰς πᾶσαν ἀναλογίαν δυνάμεθα νὰ ἀνταλλάξωμεν τοὺς μέσους ὅρους, ὁμοίως δὲ καὶ τοὺς ἄκρους ὅρους.

Λέγω δηλ. ὅτι, ἂν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$, θὰ εἶναι α΄) $\frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\beta}{\delta}$ καὶ β΄) $\frac{\delta}{\beta}=\frac{\gamma}{\alpha}$.

Ἀπόδειξις. α΄). Κατὰ τὴν α΄ ἰδιότητα τῶν ἀναλογιῶν (208) εἶναι $\alpha\times\delta=\beta\times\gamma$, ἤτοι τῶν ἀριθμῶν α, β, γ, δ οἱ ἄκροι ἔχουσι γινόμενον ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τῶν μέσων. Ἀλλὰ καὶ οἱ ἀριθμοὶ α, γ, β, δ θὰ ἔχωσι προφανῶς τὴν αὐτὴν ἰδιότητα, ἄρα κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα θὰ εἶναι $\frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\beta}{\delta}$. ὅ. ἔ. δ. (1)

β΄) Ἐπειδὴ καὶ οἱ ἀριθμοὶ δ, β, γ, α ἔχουσι τὴν ῥηθεῖσαν ἰδιότητα, ἕπεται ὅτι $\frac{\delta}{\beta}=\frac{\gamma}{\alpha}$. ὅ. ἔ. δ. (2)

ΣΗΜ. Ἀνταλλάσσοντες τοὺς μέσους τῆς ἀναλογίας (2) λαμβάνομεν τὴν ἀναλογίαν $\frac{\delta}{\gamma}=\frac{\beta}{\alpha}$. (3). Ὥστε ἐκ τῆς $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\beta}$ πηγάζουσι τρεῖς ἄλλαι ἀναλογίαι τοὺς αὐτοὺς ἔχουσαι ὅρους, αἱ (1), (2), (3). Ἐκ τῶν δύο ἀναλογιῶν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ καὶ $\frac{\delta}{\gamma}=\frac{\beta}{\alpha}$ ἕπεται ὅτι:

Ἐὰν δύο λόγοι εἶναι ἴσοι, καὶ οἱ ἀντίστροφοι αὐτῶν θὰ εἶναι ἴσοι.

Ἐντεῦθεν δὲ ἕπεται εὐκόλως ὅτι:

Οἱ ἀντίστροφοι ἴσων ἀριθμῶν εἶναι ἀριθμοὶ ἴσοι.

* § **210. Θεώρημα ΙΙΙ.**—Ἐὰν εἰς ἑκάτερον τῶν ἡγουμένων ἀναλογίας προστεθῇ ὁ ἑπόμενος αὐτῷ, ἡ ἀναλογία διατηρεῖται.

Λέγω δηλ. ὅτι ἐκ τῆς ἀναλογίας π. χ. $\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$, προκύπτει ἡ ἀναλογία $\frac{6+4}{4}=\frac{3+2}{2}$.

Ἀπόδειξις. Προσθέτοντες εἰς ἀμφοτέρους τοὺς ἴσους λόγους τῆς ληφθείσης ἀναλογίας 1 εὑρίσκομεν ἴσα ἀθροίσματα, ἤτοι

$\frac{6}{4}+1=\frac{3}{2}+1$, ὅθεν εὐκόλως $\frac{6+4}{4}=\frac{3+2}{2}$. ὅ. ἔ. δ.

Γενικῶς: Ἂν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$, θὰ εἶναι καὶ $\frac{\alpha+\beta}{\beta}=\frac{\gamma+\delta}{\delta}$.

* § **211. Θεώρημα IV.** — Ἐὰν εἰς ἑκάτερον τῶν ἑπο-

μένων ἀναλογίας προστεθῇ ὁ ἡγούμενος αὐτοῦ, ἡ ἀναλογία διατηρεῖται.

Λέγω δηλ. ὅτι ἐκ τῆς ἀναλογίας π. χ. $\frac{9}{18}=\frac{5}{10}$ προκύπτει ἡ ἀναλογία $\frac{9}{18+9}=\frac{5}{10+5}$.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ οἱ λόγοι $\frac{9}{18}$ καὶ $\frac{5}{10}$ εἶναι ἴσοι, καὶ οἱ ἀντίστροφοι αὐτῶν εἶναι ἴσοι, ἤτοι $\frac{18}{9}=\frac{10}{5}$. Ἐὰν δὲ εἰς τὴν ἀναλογίαν ταύτην ἐφαρμόσωμεν τὴν προηγουμένην ἰδιότητα, λαμβάνομεν τὴν ἀναλογίαν $\frac{18+9}{9}=\frac{10+5}{5}$, ἐξ ἧς πάλιν δι' ἀντιστροφῆς τῶν λόγων προκύπτει ἡ ἀναλογία $\frac{9}{18+9}=\frac{5}{10+5}$. ὅ. ἔ. δ.

Γενικῶς : Ἂν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ θὰ εἶναι καὶ $\frac{\alpha}{\alpha+\beta}=\frac{\gamma}{\gamma+\delta}$.

* § **212. Θεώρημα V.** — Ἐὰν ἀπὸ ἑκατέρου τῶν ἡγουμένων ὅρων ἀναλογίας ἀφαιρεθῇ ὁ ἑπόμενος αὐτῷ, ἡ ἀναλογία διατηρεῖται.

Λέγω π. χ. ὅτι ἐκ τῆς ἀναλογίας $\frac{20}{4}=\frac{15}{3}$ προκύπτει ἡ ἀναλογία $\frac{20-4}{4}=\frac{15-3}{3}$.

Ἀπόδειξις. Ἐὰν ἀμφοτέρων τῶν ἴσων καὶ τῆς μονάδος μεγαλυτέρων ($20>4$) λόγων ἀφαιρεθῇ ἡ μονάς, προκύπτει ἡ ἰσότης

$\frac{20}{4}-1=\frac{15}{3}-1$, ὅθεν εὐκόλως $\frac{20-4}{4}=\frac{15-3}{3}$. ὅ. ἔ. δ.

Γενικῶς : Ἂν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ καὶ $\alpha>\beta$, θὰ εἶναι καὶ $\frac{\alpha-\beta}{\beta}=\frac{\gamma-\delta}{\delta}$

* § **213. Θεώρημα VI.** — Ἐὰν ἀπὸ ἑκατέρου τῶν ἑπομένων ὅρων ἀναλογίας ἀφαιρεθῇ ὁ προηγούμενος αὐτοῦ, ἡ ἀναλογία διατηρεῖται.

Λέγω π. χ. ὅτι ἀληθευούσης τῆς ἀναλογίας $\frac{3}{8}=\frac{12}{32}$ ἀληθεύει καὶ ἡ $\frac{3}{8-3}=\frac{12}{32-12}$.

Ἀπόδειξις. Ἀντιστρέφοντες τοὺς λόγους τῆς δοθείσης ἀναλογίας λαμβάνομεν τὴν ἀναλογίαν $\frac{8}{3}=\frac{32}{12}$. Ἐὰν δὲ εἰς ταύτην ἐφαρμοσθῇ ἡ προηγουμένη ἰδιότης προκύπτει ἡ $\frac{8-3}{3}=\frac{32-12}{12}$ ἐκ τῆς ὁποίας δι' ἀντιστροφῆς τῶν λόγων προκύπτει ἡ ἀναλογία $\frac{3}{8-3}=\frac{12}{32-12}$. ὅ. ἔ. δ.

Γενικῶς: ἂν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ καὶ $\beta>\alpha$, θὰ εἶναι καὶ $\frac{\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{\gamma}{\delta-\gamma}$.

* § **214. Θεώρημα VII.** — Εἰς πᾶσαν ἀναλογίαν τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων ὅρων ἔχει λόγον πρὸς τὴν διαφορὰν αὐτῶν, ὅν λόγον ἔχει τὸ ἄθροισμα τῶν δύο τελευταίων πρὸς τὴν διαφορὰν αὐτῶν.

Λέγω δηλ. ὅτι ἐκ τῆς ἀναλογίας $\frac{6}{3}=\frac{10}{5}$ προκύπτει ἡ ἀναλογία $\frac{6+3}{6-3}=\frac{10+5}{10-5}$.

Ἀπόδειξις. Κατὰ τὸ θεωρ. (§ 210) ἐκ τῆς δοθείσης ἀναλογίας προκύπτει ἡ ἀναλογία $\frac{6+3}{3}=\frac{10+5}{5}$ ἐξ ἧς δι' ἀνταλλαγῆς τῶν μέσων προκύπτει ἡ ἀναλογία $\frac{6+3}{10+5}=\frac{3}{5}$. (1)

Κατὰ δὲ τὸ θεωρ. (§ 212) ἐκ τῆς δοθείσης προκύπτει ἡ $\frac{6-3}{3}=\frac{10-5}{5}$ ἐξ ἧς προκύπτει ἡ $\frac{6-3}{10-5}=\frac{3}{5}$. Ἐκ ταύτης δὲ καὶ τῆς (1) ἕπεται ὅτι $\frac{6+3}{10+5}=\frac{6-3}{10-5}$. Ὅθεν εὐκόλως προκύπτει ὅτι $\frac{6+3}{6-3}=\frac{10+5}{10-5}$. ὅ. ἔ. δ.

Γενικῶς: ἂν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ καὶ $\alpha>\beta$ θὰ εἶναι καὶ $\frac{\alpha+\gamma}{\alpha-\beta}=\frac{\gamma+\delta}{\gamma-\delta}$.

Ἀσκήσεις.

315). Νὰ εὑρεθῇ ὁ δ΄ ὅρος δ τῆς ἀναλογίας $\frac{9}{6}=\frac{3}{\delta}$.

316). Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τοῦ α, διὰ τὴν ὁποίαν ἀληθεύει ἡ ἀναλογία $\frac{2}{\alpha}=\frac{\alpha}{8}$.

317). Νὰ εὑρεθῇ ὁ μέσος ἀνάλογος τῶν ἀριθμῶν 36 καὶ 4.

318). Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τοῦ χ, διὰ τὴν ὁποίαν ἀληθεύει ἡ ἀναλογία $\frac{2,5}{\chi}=\frac{4}{10}$.

319). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι, ἐὰν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$, θὰ εἶναι καὶ $\frac{4\alpha+\beta}{\beta}=\frac{4\gamma+\delta}{\delta}$. ἐπίσης ὅτι $\frac{2\alpha+7\beta}{\beta}=\frac{3\gamma+7\delta}{\delta}$.

* 320. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἐκ τῆς ἀναλογίας $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ προκύπτει ἡ ἀναλογία $\frac{4\alpha+\beta}{2\alpha+7\beta}=\frac{4\gamma+\delta}{2\gamma+7\delta}$.

* 321). Ποία ἀναλογία προκύπτει ἐκ τῆς ἰσότητος $\chi^2=6\times294$ καὶ ποία ἡ τιμὴ τοῦ χ, διὰ τὴν ὁποίαν ἀληθεύει αὕτη;

322). Διὰ ποίαν τιμὴν τοῦ χ ἀληθεύει ἡ ἀναλογία $\frac{\chi-2}{2}=\frac{15}{5}$;

* ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Διάφορα συστήματα ἀριθμήσεως.

§ **215.** Πλὴν τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος ἀριθμήσεως (§ 15) τοῦ ὁποίου μόνον γίνεται χρῆσις, εἶναι δυνατὴ ἡ δημιουργία καὶ ἄλλων τοιούτων συστημάτων, τὰ ὁποῖα διακρίνονται ἀπ' ἀλλήλων ἐκ τῆς βάσεως, τοῦ ἀριθμοῦ δηλ. τοῦ δηλοῦντος πόσαι μονάδες τάξεώς τινος ἀποτελοῦσι μίαν μονάδα τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως ἑκάστου συστήματος. Ἐὰν π.χ. ἐκ πέντε μονάδων τάξεώς τινος ἀποτελοῦμεν μίαν μονάδα ἀνωτέρας τάξεως, αἱ μονάδες τῶν διαφόρων τάξεων τοῦ δημιουργουμένου συστήματος (πενταδικοῦ) θὰ εἶναι κατὰ σειρὰν 1, 5, 25, 125κλπ. Δυνάμεθα δὲ εὐκόλως (§ 11) νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι:

Πᾶς ἀριθμὸς συντίθεται ἐκ μονάδων διαφόρων τάξεων τοῦ πενταδικοῦ συστήματος καὶ ἐξ οὐδεμιᾶς τούτων περιέχει περισσοτέρας τῶν 4. Ὥστε μὲ τὰ ὀνόματα τῶν τεσσάρων πρώτων ἀριθμῶν καὶ μὲ τὰ ὀνόματα τῶν μονάδων τῶν διαφόρων τάξεων τοῦ συστήματος τούτου δυνάμεθα νὰ ὀνομάζωμεν πάντα ἀριθμόν, ἀρκεῖ νὰ γνωρίζωμεν ἀπὸ ποίας μονάδας τοῦ συστήματος τούτου ἀποτελεῖται καὶ πόσας ἐξ ἑκάστης τάξεως περιέχει. Οὕτω π. χ. λέγομεν ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν μαθητῶν τάξεώς τινος ἀποτελεῖται ἐκ μιᾶς εἰκοσιπεντάδος, τριῶν πεντάδων καὶ δύο ἁπλῶν μονάδων ἐκφράζομεν ὡρισμένον ἀριθμὸν τοῦ πενταδικοῦ συστήματος. Ἐὰν δὲ παραδεχθῶμεν τὴν συνθήκην (§ 13) τὴν ὁποίαν ἐν τῷ δεκαδικῷ συστήματι παρεδέχθημεν, ὁ ρηθεὶς ἀριθμὸς γράφεται οὕτω 132. Ἵνα δὲ κατανοῶμεν ὅτι πρόκειται περὶ ἀριθμοῦ τοῦ πενταδικοῦ συστήματος, γράφομεν κάτωθεν αὐτοῦ τὸν 5 ἐντὸς ἀγκυλῶν δηλ. οὕτω $\underset{5}{132}$ Εὐνόητον ὅτι διὰ τῶν ψηφίων 1, 2, 3, 4, 0 δυνάμεθα νὰ γράφωμεν οὕτω πάντα ἀριθμὸν τοῦ πενταδικοῦ συστήματος.

Σκεπτόμενοι οὕτω κατανοοῦμεν γενικῶς ὅτι: Πᾶς ἀριθμὸς συντίθεται ἐκ μονάδων διαφόρων τάξεων τοῦ συστήματος, τὸ ὁποῖον ἔχει βάσιν οἱονδήποτε ἀκέραιον χ καὶ ἐξ οὐδεμιᾶς τούτων περιέχει περισσοτέρας τῶν (χ—1). Διὰ τὴν γραφὴν δὲ παντὸς ἀριθμοῦ κατὰ τὸ σύστημα τοῦτο ἀπαιτοῦνται (χ—1) σημαντικὰ ψηφία καὶ τὸ 0.

Ἐάν, ὅθεν, εἶναι $\chi > 10$, τὰ γνωστὰ ψηφία δὲν ἀρκοῦσιν· οὕτως, ἂν $\chi = 13$, πρέπει νὰ ὁρίσωμεν ἓν σύμβολον διὰ τὸν 10, ἄλλο διὰ τὸν 11 καὶ ἄλλο διὰ τὸν 12. Ὡς τοιαῦτα νέα σύμβολα προκρίνομεν τὰ ἀκόλουθα: $10 = \alpha_0$ $11 = \alpha_1$ $12 = \alpha_2$..... $19 = \alpha_9$, $20 = \beta_0$ $21 = \beta_1$, $22 = \beta_2$... $29 = \beta_9$ $30 = \gamma_0$..... $39 = \gamma_9$, κλπ. Οὕτω τὸ σύμβολον $\underset{[15]}{12\alpha_2\alpha_1 3}$ δηλοῖ τὸν ἀριθμόν, ὅστις ἔχει τρεῖς ἁπλᾶς μονάδας 11 μονάδας β΄ τάξεως, 12 μονάδας τρίτης τάξεως, 2 μονάδας δ΄ καὶ 1 μονάδα ε΄ τάξεως τοῦ δεκαπενταδικοῦ συστήματος.

Ἀσκήσεις.

323) Τίνων ἐκ τῶν ψηφίων 1, 2, 3 ...... 9, 0 δὲν γίνεται χρῆσις διὰ τὴν κατὰ τὸ ἑξαδικὸν σύστημα γραφὴν τῶν ἀριθμῶν;

324) Πόσοι εἶναι οἱ μονοψήφιοι ἀριθμοὶ κατὰ τὸ ἑξαδικὸν σύστημα καὶ πόσοι κατὰ τὸ δωδεκαδικόν;

325) Εἰς ποῖον σύστημα ἀριθμήσεως ἑκάστη μονὰς β΄ τάξεως ἔχει 16 ἁπλᾶς μονάδας;

326) Ποῖος εἶναι ὁ κατὰ τὸ τριαδικὸν σύστημα μεγαλύτερος διψήφιος ἀριθμός;

§ **216. Γραφὴ κατὰ τὸ δεκαδικὸν σύστημα ἀριθμοῦ γεγραμμένου κατ' ἄλλο σύστημα.** — Α΄ Μέθοδος. Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ γράψωμεν κατὰ τὸ δεκαδικὸν σύστημα τὸν ἀριθμὸν $\underset{[6]}{2345.}$ Πρὸς τοῦτο σκεπτόμεθα ὡς ἀκολούθως:

Ὁ ἀριθμὸς οὗτος περιέχει.....	$1 \times 5 = 5$	ἁπλᾶς	μονάδας
4 μον. β΄ τάξεως, αἱ ὁποῖαι περιέχουσιν	$6 \times 4 = 24$	»	»
3 » γ΄ » » »	$36 \times 3 = 108$	»	» καὶ
2 » δ΄ » » »	$216 \times 2 = 432$	»	»
Περιέχει ἄρα ἐν ὅλῳ..............	569	»	»

Ἄρα: Ἵνα γράψωμεν κατὰ τὸ δεκαδικὸν σύστημα ἀριθμὸν γεγραμμένον κατ' ἄλλο σύστημα, πολ]ζομεν ἕκαστον ψηφίον αὐτοῦ ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν ἁπλῶν μονάδων, τὰς ὁποίας περιέχει ἑκάστη μονὰς τῆς ὑπὸ τοῦ ψηφίου τούτου κατεχομένης τάξεως καὶ προσθέτομεν τὰ προκύπτοντα γινόμενα.

Κατὰ ταῦτα ὁ ἀριθμὸς $\underset{[\chi]}{2435}$ περιέχει $2\chi^3 + 4\chi^2 + 3\chi + 5$ ἁπλᾶς μονάδας.

Β΄ Μέθοδος. Ἔστω ὁ ἀριθμὸς $\underset{[5]}{2341.}$ Ἐπειδὴ ἑκάστη μονὰς δ΄ τάξεως τοῦ πενταδικοῦ συστήματος ἔχει 5 μονάδας γ΄ τάξεως, αἱ 2 μονάδες δ΄ τάξεως τοῦ ἀριθμοῦ τούτου περιέχουσιν $5 \times 2 = 10$ μ. γ΄

τάξεως. Ἔχει ἄρα ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς 10+3=13 μ. γ′ τάξεως. Ἐπειδὴ δὲ αὗται περιέχουσιν 5×13=65 μ β′ τάξεως, ὁ ἀριθμὸς ἔχει 65+4=69 μ. β′ τάξεως, αἵτινες ἔχουσι 5×69=345 ἁπλᾶς μονάδας. Ἔχει ἄρα ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς 345+1=346 ἁπλᾶς μονάδας.

Ἄρα: Ἵνα γράψωμεν κατὰ τὸ δεκαδικὸν σύστημα ἀριθμὸν γεγραμμένον κατ᾽ ἄλλο σύστημα, πολ]ζομεν τὸ α′ ἐξ ἀριστερῶν ψηφίον αὐτοῦ ἐπὶ τὴν βάσιν τοῦ συστήματος καὶ εἰς τὸ γινόμενον προσθέτομεν τὸ ἀκόλουθον ψηφίον· τὸ εὑρεθὲν ἄρθοισμα πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὴν βάσιν καὶ εἰς τὸ γινόμενον προσθέτομεν τὸ ἑπόμενον ψηφίον καὶ οὕτω καθ᾽ ἑξῆς, μέχρις οὗ προσθέσωμεν καὶ τὸ τελευταῖον ψηφίον.

Ἀσκήσεις.

327) Νὰ γραφῶσι κατὰ τὸ δεκαδικὸν σύστημα οἱ ἀριθμοὶ $24_{[5]}$, $46_{[8]}$, καὶ $10111_{[2]}$.

328) Νὰ γραφῇ κατὰ τὸ δεκαδικὸν σύστημα ὁ ἀριθμὸς $510\alpha_1 0\alpha_2{}_{[15]}$.

329) Νὰ γραφῇ κατὰ τὸ δεκαδικὸν σύστημα ὁ ἀριθμὸς $34567_{[12]}$.

§ **217. Γραφὴ κατ᾽ ἄλλο σύστημα ἀριθμοῦ τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος.** — Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ γράψωμεν κατὰ τὸ πενταδικὸν σύστημα τὸν ἀριθμὸν 237. Πρέπει προφανῶς νὰ εὕρωμεν ἀπὸ ποίας μονάδας τοῦ πενταδικοῦ συστήματος συντίθεται οὗτος καὶ πόσας ἐξ ἑκάστης τάξεως περιέχει.

Πρὸς τοῦτο σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς. Ἐπειδὴ 5 ἁπλαῖ μονάδες ἀποτελοῦσι μίαν μονάδα β′ τάξεως, ἐκ τῶν 237 ἁπλῶν μονάδων σχηματίζονται τόσαι μονάδες β′ τάξεως, ὅσας φορὰς χωρεῖ ὁ 5 εἰς τὸν 237· διαιροῦντες λοιπὸν τὸν 237 διὰ τοῦ 5 εὑρίσκομεν ὅτι αἱ 237 ἁπλαῖ μονάδες ἀποτελοῦσι 47 μ, β′ τάξεως καὶ ὑπολείπονται καὶ 2 ἁπλαῖ μονάδες. Ὁμοίως σκεπτόμενοι κατονοοῦμεν ὅτι ἐκ τῶν 47 μ. β′ τάξεως ἀποτελοῦνται τόσαι μονάδες γ′ τάξεως, ὅσας φορὰς χωρεῖ ὁ 5 εἰς τὸν 47. ἤτοι 9 μ, γ′ τάξεως καὶ μένουσι καὶ 2 μ. β′ τάξεως. Αἱ 9 μ. γ′ τάξεως εὑρίσκομεν ὁμοίως ὅτι ἀποτελοῦσιν 1 μ. δ′. τάξεως καὶ μένουσι καὶ 4 μ. γ′ τάξεως. Ὥστε ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς γράφεται οὕτω $1422_{[5]}$.

Διάταξις τῆς πράξεως

$$\begin{array}{r|l} 237 & 5 \\ \cline{2-2} 37 & \begin{array}{r|l} 47 & 5 \\ \cline{2-2} 2 & \begin{array}{r|l} 9 & 5 \\ \cline{2-2} 4 & 1 \end{array} \end{array} \\ 2 & \end{array}$$

Ἄρα: Ἵνα ἀριθμὸν κατὰ τὸ δεκαδικὸν σύστημα γεγραμμένον γράψωμεν κατ' ἄλλο ὡρισμένον σύστημα, διαιροῦμεν αὐτὸν καὶ τὰ διαδοχικὰ πηλίκα διὰ τῆς βάσεως τοῦ ἑτέρου τούτου συστήματος, μέχρις οὗ εὕρωμεν πηλίκον μικρότερον τῆς βάσεως. Γράφομεν ἔπειτα τὸ τελευταῖον πηλίκον καὶ δεξιὰ αὐτοῦ τὰ ὑπόλοιπα τῶν διαιρέσεων κατὰ τάξιν ἀντίστροφον ἐκείνης, κατὰ τὴν ὁποίαν εὑρέθησαν.

Ἀσκήσεις.

330) Νὰ γραφῇ κατὰ τὸ ὀκταδικὸν σύστημα ὁ ἀριθμὸς 10.

331) Νὰ γραφῇ ὁ μὲν 29 κατά τὸ ἐννεαδικόν, ὁ δὲ 40 κατὰ τὸ ἑπταδικὸν σύστημα.

332) Νὰ γραφῇ κατὰ τὸ δυαδικὸν σύστημα ὁ 100

333) Νὰ γραφῇ κατὰ τὸ δωδεκαδικὸν σύστημα ὁ 1594.

334) Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς $\underset{[\chi]}{30}$ ἰσοῦται πρὸς τὸν 21, ποία ἡ βάσις χ;

335) Ἐὰν ὁ 48 ἰσοῦται πρὸς $\underset{[\chi]}{300}$, ποία εἶναι ἡ βάσις χ;

336) Νὰ γραφῶσιν κατὰ τὸ τριαδικὸν σύστημα οἱ δέκα πρῶτοι ἀριθμοί.

337) Ἐὰν ὁ 1465 ἰσοῦται πρὸς $\underset{[\chi]}{2007}$, ποία εἶναι ἡ βάσις χ;

338). Νὰ γραφῇ κατὰ τὸ δυαδικὸν σύστημα ὁ κατὰ τὸ ἐννεαδικὸν οὕτω 457 γραφόμενος ἀριθμὸς καὶ κατὰ το δωδεκαδικὸν ὁ κατὰ τὸ ἑξαδικὸν οὕτω 130401 γραφόμενος ἀριθμός.

§ **218. Πράξεις ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν.**—Αἱ ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν τῶν ἄλλων συστημάτων πράξεις γίνονται, ὅπως καὶ αἱ ἀντίστοιχοι τῶν τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος ἀριθμῶν. Οὕτω πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἀθροίσματος $\underset{[7]}{503}+\underset{[7]}{134}+\underset{[7]}{666}$ ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς. Προσθέτομεν τὰς μονάδας καὶ εὑρίσκομεν ἄθροισμα 13 ἁπλᾶς μονάδας, αἱ ὁποῖαι ἀποτελοῦσι μίαν μονάδα β' τάξεως καὶ 6 ἁπλᾶς μονάδας· γράφομεν λοιπὸν τὰς 6 ἁπλᾶς μονάδας, τὴν δὲ 1 μ. β' τάξεως (κρατούμενον) προσθέτομεν εἰς τὰς μονάδας β' τάξεως καὶ εὑρίσκομεν 10 μ. β' τάξεως, αἵτινες ἀποτελοῦσι 1 μ. γ' τάξεως καὶ 3 β' τάξεως. Γράφομεν λοιπὸν τὰς 3 μονάδας ἀριστερὰ τοῦ 6 καὶ τὴν μίαν μονάδα γ' τάξεως προσθέτομεν εἰς τὰς μονάδας τῆς γ' τάξεως καὶ εὑρίσκομεν ἄθροισμα 13 μ. γ', τάξεως αἱ ὁποῖαι ἀποτελοῦσι

$$\begin{array}{r} 503 \\ 134[7] \\ 666 \\ \hline 1636 \\ [7] \end{array}$$

6 μονάδας γ' τάξεως καὶ 1 δ' τάξεως. Γράφομεν λοιπὸν 6 εἰς τὴν θέσιν τῶν μονάδων τῆς γ' τάξεως καὶ 1 ἀριστερὰ αὐτοῦ. Οὕτως εὑρίσκομεν ἄθροισμα $\frac{1636}{[7]}$. Ὁμοίως καὶ αἱ ἄλλαι πράξεις γίνονται κατὰ τρόπον ἀνάλογον πρὸς ἐκεῖνον, κατὰ τὸν ὁποῖον γίνονται αἱ ἀντίστοιχοι πράξεις ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος.

Ἀσκήσεις.

339). Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν τοῦ τετραδικοῦ συστήματος ἀριθμῶν 1023, 1310, 102.

340). Νὰ εὑρεθῇ ἡ διαφορὰ τῶν τοῦ ὀκταδικοῦ συστήματος ἀριθμῶν 642 καὶ 1301.

341). Νὰ εὑρεθῇ τὸ γινόμενον τῶν τοῦ πενταδικοῦ συστήματος ἀριθμῶν 2312 καὶ 3.

342) Νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως διὰ 4 τοῦ ἀριθμοῦ 414 τοῦ πενταδικοῦ συστήματος.

343) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι, ἐὰν τὸ τελευταῖον ψηφίον ἀριθμοῦ τοῦ ἑξαδικοῦ συστήματος διαιρῆται διὰ 2 ἢ 3 ($2\times3=6$), καὶ ὁ ἀριθμὸς οὗτος διαιρεῖται διὰ 2 ἢ 3.

344). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι, ἂν ἀριθμοῦ τοῦ ὀκταδικοῦ συστήματος τὰ δύο τελευταῖα ψηφία, ὅπως εἶναι γραμμένα ἀποτελῶσιν ἀριθμὸν τοῦ αὐτοῦ συστήματος διαιρετὸν διὰ 4, καὶ ὅλος ὁ ἀριθμὸς διαιρεῖται διὰ 4.

345). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι, ἂν τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων ἀριθμοῦ τοῦ ἑξαδικοῦ συστήματος ἀποτελῇ ἀριθμὸν διαιρετὸν διὰ 5, καὶ ὅλος ὁ ἀριθμὸς οὗτος διαιρεῖται διὰ 5.

346). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι, ἂν τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων ἀριθμοῦ τοῦ συστήματος, ὅπερ ἔχει βάσιν χ διαιρεῖται διὰ (χ—1), καὶ ὅλος ὁ ἀριθμὸς διαιρεῖται διὰ χ—1.

ΤΕΛΟΣ

'Αριθ. Πρωτ. 11975 / Διεκπ.

'Εν 'Αθήναις τῇ 30 Μαρτίου 1925

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ

ΤΟ ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΝ
ΤΩΝ ΕΚΚΛΗΣΙΑΣΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΤΗΣ ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΕΩΣ

Πρὸς τὸν κ. Ν. Νικολάου
Καθηγητὴν τοῦ Πρακτικοῦ Λυκείου 'Αθηνῶν,

'Ανακοινοῦμεν ὑμῖν ὅτι δι' ἡμετέρας πράξεως τῇ 18ῃ τοῦ λήγοντος μηνὸς ἐκδοθείσης καὶ τῇ 23 τοῦ αὐτοῦ δημοσιευθείσης ἐν τῷ ὑπ' ἀριθ. 29 δευτέρῳ τεύχει τῆς 'Εφημ. τῆς Κυβερνήσεως ἐνεκρίθησαν τὰ ἑξῆς πρὸς κρίσιν ὑποβληθέντα ὑφ' ὑμῶν διδακτικὰ βιβλία.

2) **Θεωρητικὴ 'Αριθμητικὴ** πρὸς χρῆσιν τῶν μαθητῶν τῶν Γυμνασίων καὶ πρακτικῶν Λυκείων καὶ

2) **Συμπλήρωμα τῆς Θεωρητικῆς Γεωμετρίας** πρὸς χρῆσιν τῶν μαθητῶν τῶν Πρακτικῶν Λυκείων.

'Εντολῇ τοῦ ΥΠΟΥΡΓΟΥ
'Ο Τμηματάρχης τοῦ Γ' τμήματος
'Ιωάννης Γρυπάρης

ΕΡΓΑ ΤΟΥ ΑΥΤΟΥ ΣΥΓΓΡΑΦΕΩΣ

1. **Στοιχειώδης Γεωμετρία** πρὸς χρῆσιν τῶν μαθητῶν τῶν Γυμνασίων καὶ Λυκείων, ἄρτι ἐγκριθεῖσα καὶ διακρινομένης διὰ τὸ εὐμέθοδον, σύντομον καὶ τὰς πολυπληθεῖς καὶ καταλλήλους ἀσκήσεις.

2. **Στοιχεῖα Εὐθ. Τριγωνομετρίας** πρὸς χρῆσιν τῶν μαθητῶν τῶν Γυμνασίων συντεταγμένα κατὰ τὰς συγχρόνους ἀπαιτήσεις τῆς Μαθηματικῆς ἐπιστήμης καὶ διδακτικῆς.

3. **Εὐθύγραμμος Τριγωνομετρία** (μεγάλη), ἡ μόνη ἐγκεκριμένη πρὸς χρῆσιν τῶν μαθητῶν τῶν Πρακτικῶν Λυκείων, τῶν σπουδαστῶν τῶν Μαθηματικῶν, Φυσικῶν κ.τ.λ. ἀπαραίτητος εἰς τοὺς ὑποψηφίους διὰ τὰς ἀνωτέρας σχολὰς (Πανεπιστήμιον, Πολυτεχνεῖον, Δασολογικὴ καὶ Γεωπονικὴ σχολή).

4. **Συμπλήρωμα Γεωμετρίας** πρὸς χρῆσιν τῶν μαθητῶν τῶν Πρακτικῶν Λυκείων. Τὸ πρῶτον ἐκδίδεται παρ' ἡμῖν τοιοῦτον βιβλίον χρήσιμον διὰ πάντα περὶ τὰ Μαθηματικὰ ἀσχολούμενον.

5. **Κοσμογραφία** πρὸς χρῆσιν τῶν μαθητῶν τῶν Γυμνασίων καὶ Λυκείων, εὐμενεστάτης τυχοῦσα ὑποδοχῆς διὰ τὴν μεθοδικότητα καὶ ἁπλότητα αὐτῆς.

6. **Πρακτικὴ Γεωμετρία** πρὸς χρῆσιν τῶν μαθητῶν τῶν 'Ελληνικῶν καὶ ἀστικῶν σχολείων, ἐγκεκριμένη καὶ μεθοδικωτάτη.

7. **Λύσις** τῶν ἐν ἀμφοτέραις ταῖς Τριγωνομετρίαις καὶ τῇ Κοσμογραφίᾳ περιεχομένων ἀσκήσεων.