ΠΑΡΑΣΤΑΤΙΚΗ
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΥΠΟ

ΝΙΚ. Α. ΚΑΡΑΚΑΤΣΑΝΙΔΟΥ

Ἐγκριθεῖσα
ἐν τῷ κατὰ τὸν νόμον ΓΣΑ' διαγωνισμῷ
διὰ τὴν τετραετίαν 1909-1913

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΕΚΔΟΤΗΣ Δ. Χ. ΤΕΡΖΟΠΟΥΛΟΣ
1910

ΔΡΑΧ. 1,50

ΘΕΣΙΣ ΒΙΒΛΙΟΣΗΜΟΥ

ΒΑΣΙΛΕΙΟΝ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

ΤΟ ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΝ ΤΩΝ ΕΚΚΛΗΣΙΑΣΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΤΗΣ ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΕΩΣ

Ἀριθ. *Πρωτ. 19,968* / *Διεκπ.* — *Ἐν Ἀθήναις τῇ 27η Νοεμβρίου 1909*

Πρὸς τὸν κ. Δ. Χ. ΤΕΡΖΟΠΟΥΛΟΝ

Γνωρίζομεν ὑμῖν ὅτι κατ' ἀπόφασιν τῆς ἐπὶ τῆς ἐκδόσεως τῶν διδακτικῶν βιβλίων ἐποπτικῆς Ἐπιτροπείας ἡ τιμὴ τῆς ***Παραστατικῆς Γεωμετρίας*** ὑπὸ ***Ν. Α. Καρακατσανίδου*** ἐκ φύλλων τυπογραφικῶν 7 $^1/_2$ ὡρίσθη εἰς δραχμὰς μίαν καὶ λεπτὰ πεντήκοντα ***(1,50)***, τὸ δὲ ἐπιθετέον βιβλιόσημον χρώματος ῥοδίνου ἔσται ἀξίας λεπτῶν τριάκοντα ***(30)***.

Ἐντελλόμεθα, ὅπως συμμορφωθῆτε πρὸς τὰς ἀποφάσεις ταύτας, ἐκτυπώσητε δὲ τὴν παροῦσαν ἐπὶ τῆς ἐσωτερικῆς ὄψεως τοῦ περικαλύμματος τοῦ βιβλίου κάτωθι τῆς θέσεως, εἰς ἣν κατὰ νόμον ἐπικολλᾶται τὸ βιβλιόσημον.

Ὁ Ὑπουργὸς

ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ Ν ΖΑΪΜΗΣ

Γ. ΒΕΝΘΥΛΟΣ

ΝΙΚΟΛΑΟΥ Α. ΚΑΡΑΚΑΤΣΑΝΙΔΟΥ
Καθηγητοῦ ἐν τῷ Πολυτεχνείῳ

ΠΑΡΑΣΤΑΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΠΕΡΙ ΟΡΘΗΣ ΠΡΟΒΟΛΗΣ ΣΗΜΕΙΟΥ, ΕΥΘΕΙΑΣ ΚΑΙ ΕΠΙΠΕΔΟΥ

ΚΑΙ

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΠΡΟΒΟΛΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΧΕΣΕΩΝ
ΜΕΤΑΞΥ ΤΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ ΤΟΥΤΩΝ

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΕΚΔΟΤΑΙ Δ. Χ. ΤΕΡΖΟΠΟΥΛΟΣ & Μ. ΣΑΛΙΒΕΡΟΣ
1909

10

Α. Κεραμόπουλλος

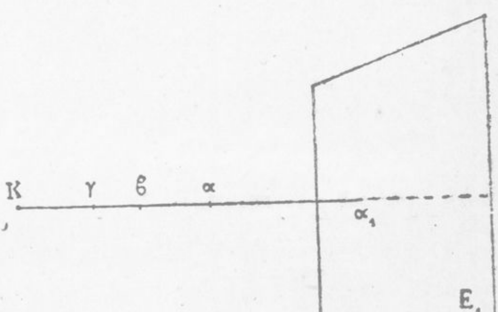
ΠΑΡΑΣΤΑΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

ΑΙ ΣΠΟΥΔΑΙΟΤΕΡΑΙ ΠΡΟΒΟΛΙΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΙ. — ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΠΑΡΑΣΤΑΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Προβολὴ ἐπὶ ἐπίπεδον.

1) *Προβολὴ σημείου.* — Τὸ σύνολον τῶν διὰ τοῦ τυχόντος σημείου Κ τοῦ χώρου ἐρχομένων εὐθειῶν καλεῖται *δέσμη* εὐθειῶν ἢ ἀκτίνων, τὸ δὲ σημεῖον Κ κέντρον τῆς δέσμης ταύτης· ***προβολὴ*** δὲ τοῦ τυχόντος σημείου α ἐπὶ τὸ τυχὸν ἐπίπεδον E_1, μὴ περιέχον τὸ κέντρον Κ (σχ. 1), λέγεται τὸ σημεῖον α_1 καθ' ὃ ἡ διὰ τοῦ α ἐρχομένη ἀκτὶς τῆς δέσμης τέμνει τὸ εἰρημένον ἐπίπεδον. Τὸ ἐπίπεδον τοῦτο λέγεται *Προβολικόν*, ἡ εὐθεῖα Κα *προβάλλουσα* (εὐθεῖα ἢ ἀκτὶς) καὶ τὸ σημεῖον Κ ***κέντρον προβολῆς***. Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τούτου συνάγομεν ὅτι



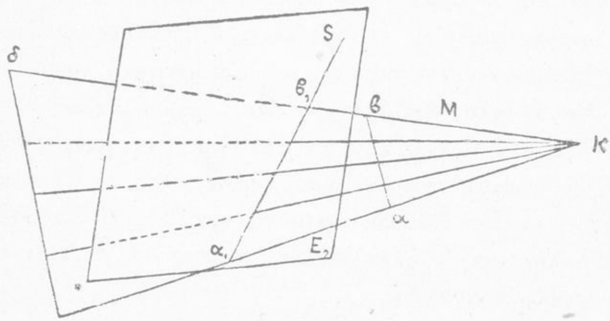
Σχ. 1

α) πάντα τὰ σημεῖα τὰ κείμενα ἐπὶ μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς προβαλλούσης, ὡς π. χ. τὰ α, β, γ..., ἔχουσι τὴν αὐτὴν προβολὴν α_1 καὶ

6) ἐὰν ἡ προβάλλουσα τὸ δοθὲν σημεῖον α εἶνε παράλληλος τῷ προβολικῷ ἐπιπέδῳ, ἡ προβολὴ τοῦ σημείου τούτου ἀφανίζεται εἰς τὸ ἄπειρον.

Σημείωσις. Τὸ προβολικὸν ἐπίπεδον ἐν τοῖς ἑπομένοις θὰ ἐμφαίνωμεν διὰ τῶν συγκεκομμένων λέξεων Προ. Επι., δύναται δὲ τοῦτο νὰ ἔχῃ τυχοῦσαν ἐν τῷ χώρῳ θέσιν, ἀλλ' εἰς τὰς ἐφαρμογὰς λαμβάνεται ὁριζόντιον ἢ κατακόρυφον.

2) Προβολὴ εὐθείας.—Ἐὰν ἔκ τινος κέντρου προβολῆς Κ προβάλωμεν ἐπὶ ἓν ἐπίπεδον E_1 (σχ. 2) πάντα τὰ σημεῖα τῆς δοθείσης



Σχ. 2

εὐθείας αβ, αἱ προβολαὶ τῶν σημείων τούτων ἀποτελοῦσι τὴν προβολὴν τῆς εὐθείας· ἐπειδὴ δὲ πᾶσαι αἱ προβάλλουσαι τὰ διάφορα σημεῖα τῆς εὐθείας αβ κεῖνται ἐν ἑνὶ καὶ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ Μ, ὁριζομένῳ ὑπὸ τῆς εὐθείας αβ καὶ τοῦ κέντρου προβολῆς Κ, ἔπεται ὅτι ἡ προβολὴ τῆς εὐθείας αβ εἶνε ἡ τομὴ τοῦ ἐπιπέδου Μ μετὰ τοῦ Προ. Επι. E_1, ἤτοι ἡ εὐθεῖα γραμμὴ $\alpha_1 \beta_1$. Τὸ ἐπίπεδον Μ λέγεται ***προβάλλον*** ἐπίπεδον· πᾶσαι δὲ αἱ εὐθεῖαι αἱ ἐν ἑνὶ καὶ τῷ αὐτῷ προβάλλοντι ἐπιπέδῳ Μ κείμεναι, ὡς π. χ. αἱ αβ, γδ, . . . ἔχουσι τὴν αὐτὴν προβολὴν $\alpha_1\beta_1$.

Ἐκ τῶν ἄνω εἰρημένων συνάγομεν ὅτι, ἐὰν δοθῇ τὸ κέντρον προβολῆς, τὸ προβολικὸν ἐπίπεδον καὶ τυχὸν σημεῖον ἢ τυχοῦσα εὐθεῖα, ἡ προβολὴ τοῦ σημείου ἢ τῆς εὐθείας εἶνε ἐντελῶς ὡρισμένη· ἀλλ' ἀντιστρόφως ἡ προβολὴ σημείου ἢ εὐθείας ἐπὶ ἓν ἐπίπεδον δὲν δύναται νὰ προσδιορίσῃ τὴν ἐν τῷ χώρῳ θέσιν αὐτῶν· διὰ τῆς προβολῆς τοῦ σημείου ὁρίζεται μόνον ἡ προβάλλουσα τοῦτο εὐθεῖα, καὶ διὰ τῆς προβολῆς τῆς εὐθείας τὸ προβάλλον ταύτην ἐπίπεδον.

Προβολὴ γραμμῆς οἱασδήποτε ἔκ τινος κέντρου Κ ἐπὶ ἐπίπεδον μὴ περιέχον τὸ Κ λέγεται ἡ γραμμὴ τὴν ὁποίαν ἀποτελοῦσιν αἱ προβολαὶ ἁπάντων τῶν σημείων αὐτῆς· καὶ γενικῶς προβολὴ τυχόντος ἐν τῷ χώρῳ σχήματος (σημείου, γραμμῆς, ἐπιφανείας) ἐπὶ ἐπίπεδον λέγεται τὸ σχῆμα τὸ ὁποῖον ἀποτελοῦσιν αἱ προβολαὶ ἁπάντων τῶν σημείων ἢ γραμμῶν αὐτοῦ.

Ἡ τοιαύτη προβολή, ἐν ᾗ τὸ κέντρον προβολῆς νοεῖται κείμενον εἰς πεπερασμένην ἀπόστασιν, λέγεται *κεντρικὴ προβολή*.

3) Παράλληλος προβολή.—Ἐὰν ἡ ἀπ' ἀλλήλων ἀπόστασις τοῦ προβαλλομένου σχήματος καὶ τοῦ Προ. Επι. μένῃ ἀμετάβλητος, τὸ δὲ κέντρον προβολῆς ἀπομακρύνεται εἰς τὸ ἄπειρον, τότε αἱ προβάλλουσαι τὰ διάφορα σημεῖα τοῦ σχήματος εὐθεῖαι καθίστανται παράλληλοι πρὸς ἀλλήλας, καὶ ἡ τοιαύτη προβολὴ λέγεται τότε *παράλληλος προβολή*.

Τὴν παράλληλον προβολὴν διακρίνομεν εἰς ὀρθὴν καὶ εἰς πλαγίαν, καθ' ὅσον αἱ προβάλλουσαι εὐθεῖαι εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὸ Προ. Επι., ἢ συναντῶσι τοῦτο ὑπὸ τυχοῦσαν, ἀλλὰ τὴν αὐτὴν πᾶσαι γωνίαν.

Αἱ τρεῖς αὗται προβολικαὶ μέθοδοι, ἡ κεντρική, ἡ πλαγία καὶ ἡ ὀρθὴ παράλληλος προβολή, εἶνε αἱ σπουδαιότεραι τῶν προβολικῶν μεθόδων, δι' ὧν ἡ Παραστατικὴ Γεωμετρία παριστᾷ πάντα τὰ σχήματα ἐπὶ ἐπιπέδου καὶ ἐξετάζει αὐτὰ διὰ τῶν προβολῶν των· ἐκ τούτων δὲ πάλιν ἡ τελευταία, ἤτοι ἡ ὀρθὴ παράλληλος προβολή, εἶνε ἡ ἁπλουστέρα καὶ ἡ μᾶλλον ἐν χρήσει εἰς τὰς ἐφαρμογάς.

4) Ὁρισμὸς τῆς Παραστατικῆς Γεωμετρίας. — Ἡ παραστατικὴ Γεωμετρία ὡς ὑποκείμενον ἔχει α΄) τὸν τρόπον καθ' ὃν κατασκευάζεται ἡ προβολὴ τυχόντος ἐν τῷ χώρῳ σχήματος (σημείου, γραμμῆς, ἐπιφανείας)·

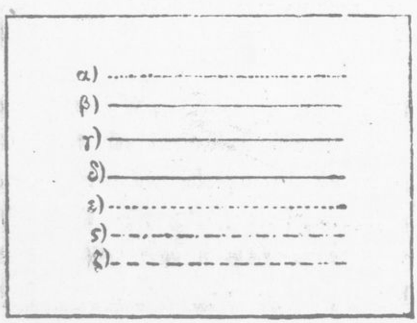
β΄) πῶς διὰ τῆς προβολῆς σχήματός τινος δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν τὴν ἐν τῷ χώρῳ θέσιν, τὸ σχῆμα καὶ τὸ μέγεθος αὐτοῦ, καὶ

γ΄) πῶς δι' ἁρμοδίων προβολικῶν κατασκευῶν δυνάμεθα νὰ λύσωμεν προβλήματα τῆς στερεᾶς Γεωμετρίας ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι

Α΄) ΟΡΘΗ ΠΡΟΒΟΛΗ ΣΗΜΕΙΟΥ, ΕΥΘΕΙΑΣ ΚΑΙ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΕΠΙ ΕΝ ΕΠΙΠΕΔΟΝ

5) Ἐν τῷ κεφαλαίῳ τούτῳ ἐκθέτομεν συντόμως τὸν τρόπον καθ' ὃν κατασκευάζομεν ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου τὴν ὀρθὴν προβολὴν σημείου, εὐθείας καὶ ἐπιπέδου, καὶ πῶς διὰ τῶν προβολῶν τούτων δυνάμεθα νὰ συμπεράνωμεν ἢ καὶ νὰ προσδιορίσωμεν, δοθέντων ἱκανῶν στοιχείων, τὴν ἐν τῷ χώρῳ θέσιν καὶ τὸ ἀληθὲς σχῆμα καὶ μέγεθος τῶν εἰρημένων σχημάτων. Ἵνα δὲ ἐξ ἁπλῆς ὄψεως αὐτοῦ τοῦ σχεδιάσματος τῆς προβολῆς σχήματός τινος διακρίνωμεν, ποῖαι εἶνε αἱ ζητούμεναι γραμμαί, ποῖαι αἱ δεδομέναι καὶ ποῖαι αἱ βοηθητικαὶ ἔν τινι προβλήματι, ποιούμεθα χρῆσιν κατὰ τὴν σχεδίασιν τῆς ἑξῆς διαφόρου γραμμογραφίας, (βλέπε σχ. 3 ἀπὸ α ἕως ζ), ἤτοι



Σχ. 3

α) πᾶσα προβάλλουσα παρίσταται διὰ λεπτῆς γραμμῆς διακεκομμένης καὶ ἐκ στιγμῶν ἀποτελουμένης.

β) Ἡ προβολὴ γραμμῆς δεδομένης παρίσταται διὰ συνεχοῦς γραμμῆς μετρίου πάχους.

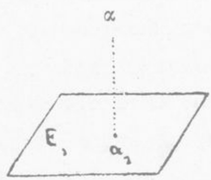
γ) Ἡ προβολὴ γραμμῆς ζητουμένης παρίσταται ἐπίσης διὰ συνεχοῦς γραμμῆς ἀλλὰ παχυτέρας τῆς (β).

δ) καὶ ε) Ἡ προσεκβολὴ εὐθυγράμμου τμήματος μέχρι τοῦ Προ. Επι. παρίσταται διὰ λεπτῆς συνεχοῦς γραμμῆς, ἡ δὲ πέραν καὶ ὄπισθεν τούτου ἐπέκτασις διὰ γραμμῆς τοῦ αὐτοῦ πάχους, ἀλλὰ διακεκομμένης καὶ ἐκ βραχέων γραμμικῶν τμημάτων ἀποτελουμένης (ε).

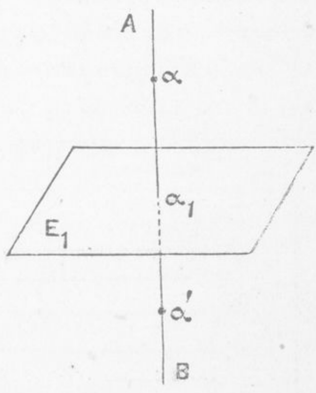
ϛ) Ἡ κατάκλισις (βλέπε ἐδ. 16) οἱασδήποτε γραμμῆς ἐπὶ τοῦ Προ. Επι. παρίσταται δι' ἐπιμήκων γραμμικῶν τμημάτων καὶ στιγμῶν διαδεχομένων ἄλληλα καὶ ἔχοντα τὸ ἀνάλογον πάχος, καθ' ὅσον ἡ γραμμὴ εἶνε δεδομένη (β), ἢ ζητουμένη (γ), ἢ προσεκβολὴ εὐθυγράμμου τμήματος (δ).

ζ) Πᾶσα βοηθητικὴ γραμμὴ παρίσταται διὰ λεπτῆς διακεκομμένης γραμμῆς.

6) Ὀρθὴ προβολὴ σημείου καὶ στοιχεῖα δι' ὧν ὁρίζεται ἡ ἐν τῷ χώρῳ θέσις αὐτοῦ.— Ὀρθὴ προβολὴ τοῦ τυχόντος σημείου α ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον E_1 (σχ. 4) λέγεται ὁ πούς α_1 τῆς ἀπὸ τοῦ ση-



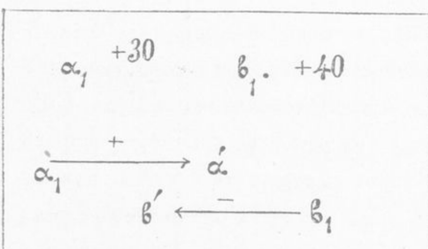
Σχ. 4



Σχ. 5

μείου α ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον E_1 ἠγμένης καθέτου. Καθ' ἃ δὲ ἐν τῇ εἰσαγωγῇ εἴπομεν (ἐδαφ. 2), δοθέντος τοῦ σημείου α ἡ προβολὴ αὐτοῦ α_1 εἶνε ἐντελῶς ὡρισμένη, ἀλλ' ἀντιστρόφως διὰ τῆς προβολῆς α_1 ἡ ἐν τῷ χώρῳ θέσις τοῦ σημείου μένει ἀόριστος, ὁρίζεται δὲ μόνον ἡ προβάλλουσα αὐτὸ εὐθεῖα, ἥτις εἶνε ἡ ἀπὸ τῆς προβολῆς α_1 τοῦ σημείου α ἐπὶ τὸ Προ. Επι. ἠγμένη κάθετος AB (σχ. 5). Ἡ τελευταία αὕτη εὐθεῖα, ἥτις εἶνε τόπος τοῦ ζητουμένου σημείου α, χωρίζεται διὰ τοῦ σημείου α_1 εἰς δύο μέρη, α_1Α καὶ α_1Β, ἐξ ὧν τὸ πρὸς τὸ ἄνω μέρος τοῦ Προ. Επι. κείμενον α_1 Α λαμβάνεται θετικόν, τὸ δ' ἕτερον α_1Β, τὸ πρὸς τὸ κάτω μέρος τοῦ Προ. Επι., λαμβάνεται ἀρνητικόν· ἀλλὰ καὶ τὸ Προ. Επι. χωρίζει τὸν χῶρον εἰς δύο μέρη, ἐξ ὧν τὸ κείμενον πρὸς ἐκεῖνο τὸ μέρος τοῦ Προ. Επι. E_1 πρὸς ὃ φέρεται τὸ θετικὸν μέρος τῆς καθέτου ΑΒ λαμβάνεται θετικόν, τὸ δ' ἕτερον ἀρνητικόν. Τούτων τεθέντων παρατηροῦμεν ὅτι ἱκανὰ καὶ ἀναγκαῖα στοιχεῖα πρὸς πλήρη προσδιορισμὸν τῆς ἐν τῷ χώρῳ θέσεως τοῦ σημείου α εἶνε ἡ προβολὴ αὐτοῦ α_1 καὶ ἡ κατὰ μέγεθος καὶ σημεῖον ἀπόστασις αὐτοῦ ἀπὸ τοῦ Προ. Επι., καθ' ὅσον δὲ ἡ τελευταία αὕτη εἶνε θετικὴ ἢ ἀρνητικὴ ἢ μηδέν, τὸ σημεῖον α κεῖται ἐν τῷ θετικῷ ἢ ἀρνητικῷ χώρῳ, ἢ ἐν τῷ Προ. Επι.

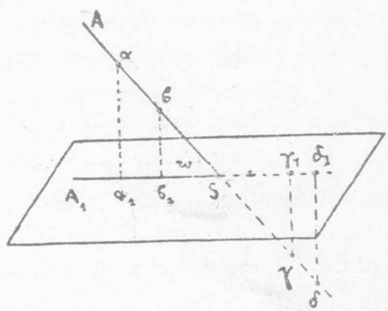
Σημείωσις Ι.—Ἡ ἀπὸ τοῦ Προ. Επι. ἀπόστασις σημείου τινὸς α παρίσταται ἢ δι' εὐθυγράμμου τμήματος p ἔχοντος ἀρχὴν τὴν προβολὴν τοῦ σημείου καὶ φορὰν θετικὴν ἢ ἀρνητικὴν (σχ. 6), ἢ δι' ἀριθμοῦ θετικοῦ ἢ ἀρνητικοῦ γραφομένου δεξιὰ τῆς προβολῆς τοῦ σημείου. Τὸ τελευταῖον τοῦτο εἶδος τῆς παραστάσεως εἶνε ἐν χρήσει ἐν τῇ χαρτογραφίᾳ, ὅπου οἱ παρακείμενοι τοῖς σημείοις ἀριθμοὶ καλοῦνται ὑψόμετρα καὶ ἐκφράζουσι τὰς ἀποστάσεις τῶν σημείων τοῦ ἐδάφους ἀπὸ τοῦ τυχόντος ὁριζοντίου ἐπιπέδου, καλουμένου καὶ ἁπλῶς ὁρίζοντος. Αἱ προβάλλουσαι ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ εἶνε κατακόρυφοι καὶ ἔχουσι τὴν κατεύθυνσιν τῆς βαρύτητος.



Σχ. 6

Σημείωσις ΙΙ.—Τὸ σημεῖον καὶ τὴν προβολὴν αὐτοῦ ὀνομάζομεν διὰ τοῦ αὐτοῦ μικροῦ γράμματος τῆς ἀλφαβήτου, ἀλλὰ τὸ γράμμα τῆς προβολῆς συνοδεύεται πάντοτε δεξιὰ καὶ κάτω ὑπὸ τοῦ ἀριθμοῦ 1.

7) ***Προβολὴ εὐθείας.*** — *Θέσεις αὐτῆς ὡς πρὸς τὸ Προ. Επι. καὶ στοιχεῖα δι' ὧν ὁρίζεται ἡ ἐν τῷ χώρῳ θέσις αὐτῆς.* — Ἡ ὀρθὴ προβολὴ τῆς τυχούσης εὐθείας Α ἐπὶ ἐπίπεδον εἶνε πάλιν εὐθεῖα A_1, διότι αἱ ἀκτῖνες αἱ προβάλλουσαι ἅπαντα τὰ σημεῖα αὐτῆς α, β, γ, δ, .. (σχ. 7) ἀποτελοῦσιν ἐπίπεδον, ὅπερ καλεῖται ***προβάλλον*** καὶ τοῦ ὁποίου ἡ εὐθεῖα τῆς τομῆς A_1 μετὰ τοῦ Προ. Επι. παριστᾷ τὴν προβολὴν τῆς εὐθείας Α. Ἐπειδὴ δὲ ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα Α καὶ ἡ προβολὴ αὐτῆς A_1 κεῖνται ἐν ἑνὶ καὶ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, τῷ προβάλλοντι, ἕπεται ὅτι αὗται ἀλληλοτομοῦσιν ἐν γένει εἴς τι σημεῖον s· τὸ σημεῖον τοῦτο,



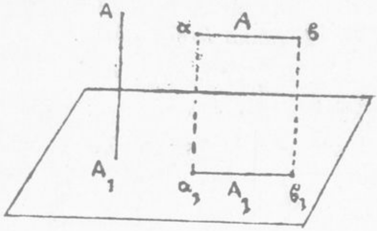
Σχ. 7

ὅπερ ταὐτίζεται μετὰ τῆς προβολῆς αὐτοῦ, εἶνε ἡ τομὴ τῆς εὐθείας Α μετὰ τοῦ Προ. Επι. καὶ λέγεται **ἴχνος** τῆς εὐθείας. Γενικῶς **ἴχνος** γεωμετρικοῦ τινος σχήματος λέγεται ἡ τομὴ αὐτοῦ μετὰ τοῦ Προ. Επι.

Ἡ εὐθεῖα Α χωρίζεται διὰ τοῦ ἴχνους αὐτῆς s εἰς δύο μέρη, τὸ θετικὸν καὶ τὸ ἀρνητικόν, καθ' ὅσον ἑκάτερον τῶν μερῶν τούτων κεῖται ἐν τῷ θετικῷ ἢ ἀρνητικῷ χώρῳ· καὶ τοῦ μὲν θετικοῦ μέρους ἡ προβολὴ παρίσταται πάντοτε διὰ γραμμῆς συνεχοῦς, τοῦ δὲ ἀρνητικοῦ διὰ διακεκομμένης. Ἡ ὀξεῖα γωνία ω, ἡ περιεχομένη ὑπὸ τοῦ θετικοῦ μέρους τῆς εὐθείας Α καὶ τῆς προβολῆς αὐτῆς A_1, λέγεται ***γωνία κλίσεως*** ἢ ***κλίσις*** τῆς εὐθείας πρὸς τὸ Προ. Επι.

Εὐθεῖά τις Α δύναται νὰ ἔχῃ τὰς ἑξῆς τρεῖς διαφόρους θέσεις ὡς πρὸς τὸ Προ. Επι. α) ἢ κεῖται ἡ εὐθεῖα ὅλη ἐπὶ τοῦ Προ. Επι., ὅτε ταὐτίζεται μετὰ τῆς προβολῆς αὐτῆς A_1.

β) ἢ εἶνε παράλληλος τῷ Προ. Επι., ὅτε εἶνε παράλληλος καὶ πρὸς τὴν προβολὴν αὐτῆς A_1, (σχ. 8), ἢ γ) κλίνει ὅπως δήποτε πρὸς τὸ Προ. Επι. (σχ. 7), ὅτε ἡ εὐθεῖα Α καὶ ἡ προβολὴ αὐτῆς A_1 ἀλληλοτομοῦσιν εἰς τὸ ἴχνος s τῆς εὐθείας καὶ περιέχουσι τὴν γωνίαν κλίσεως ω. Ἐὰν ἡ τελευταία αὕτη γωνία εἶνε ὀρθή, τότε πάντα τὰ σημεῖα τῆς εὐθείας Α ἔχουσι προβολὴν τὸ ἴχνος αὐτῆς s, ἤτοι: ***ἡ προβολὴ εὐθείας καθέτου ἐπὶ τὸ Προ. Επι. εἶνε ἓν σημεῖον· καὶ ἀντιστρόφως, ἕκαστον σημεῖον τοῦ Προ. Επι. εἶνε προβολὴ τῆς διὰ τοῦ σημείου τούτου ἐπὶ τὸ Προ. Επι. ἠγμένης καθέτου.***



Σχ. 8

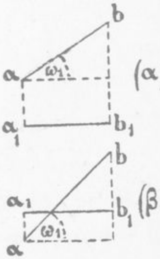
Ἵνα ὁρισθῇ ἡ θέσις τῆς εὐθείας Α (σχ. 7) ὡς πρὸς τὸ Προ. Επι., δέον νὰ δοθῶσιν, ἐκτὸς τῆς προβολῆς αὐτῆς A_1, καὶ αἱ ἀποστάσεις δύο σημείων α καὶ β αὐτῆς κατὰ μέγεθος καὶ σημεῖον ἀπὸ τοῦ Προ. Επι., διότι τότε ἡ ἐν τῷ χώρῳ θέσις τῶν σημείων α καὶ β, ἄρα καὶ τῆς εὐθείας ἐφ' ἧς ταῦτα κεῖνται, εἶνε ἐντελῶς ὡρισμένη.

Σημείωσις.—Τὴν εὐθεῖαν γραμμὴν καὶ τὴν προβολὴν αὐτῆς ὀνομάζομεν μὲ τὸ αὐτὸ κεφαλαῖον γράμμα τῆς ἀλφαβήτου, τοῦ γράμματος τῆς προβολῆς συνοδευομένου δεξιὰ καὶ κάτω ὑπὸ τοῦ ἀριθμοῦ 1.

8) Συντελεστὴς προβολῆς εὐθυγράμμου τμήματος.—Ὅσα δήποτε τμήματα μιᾶς εὐθείας εἶνε ἀνάλογα πρὸς τὰς προβολὰς αὐτῶν, ὁ δὲ λόγος τῶν προβολῶν ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν ληφθέντων τμημάτων, διότι αἱ προβάλλουσαι τὰ πέρατα αὐτῶν ἀκτῖνες εἶνε παράλληλοι πρὸς ἀλλήλας· αἱ προβολαὶ ἄρα ἴσων τμημάτων μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας εἶνε τμήματα ἴσα.

Τὸ τυχὸν εὐθύγραμμον τμῆμα αβ (σχ. 9 (α), (β)), ἡ προβολὴ αὐτοῦ $α_1β_1$ καὶ ἡ ἀλγεβρικὴ διαφορὰ ($ββ_1$-$αα_1$) τῶν προβαλλουσῶν τὰ πέρατα αὐτοῦ α καὶ β ἀποτελοῦσιν ὀρθογώνιον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ ἑτέρα τῶν ὀξειῶν γωνιῶν εἶνε ἡ *γωνία κλίσεως* ω_1 τοῦ τμήματος· ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τούτου τριγώνου ἔχομεν $\frac{\alpha_1 \beta_1}{\alpha\beta}=$ συν.ω_1 καὶ $\alpha_1\beta_1=\alpha\beta.$συν.$\omega_1$, ἤτοι

Ἡ προβολὴ εὐθυγράμμου τινὸς τμήματος ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τοῦ τμήματος ἐπὶ τὸ συνημίτονον τῆς γωνίας κλίσεως αὐτοῦ. Τὸ συνημίτονον τοῦτο λέγεται ***συντελεστὴς προβολῆς*** τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος καὶ παρίσταται διὰ τοῦ γράμματος λ, εἶνε δὲ διὰ $\omega_1=0$, $\lambda=1$ καὶ διὰ $\omega_1=90^0$, $\lambda=0$· ὁμοίως διὰ $0<\omega_1<90^0$ εἶνε $0<\lambda<1$.

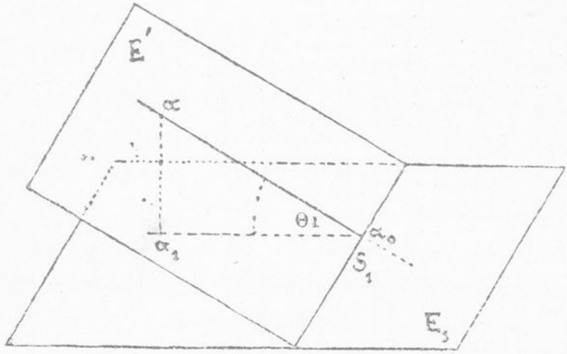


Σχ. 9

Αἱ παράλληλοι εὐθεῖαι ἔχουσι προβολὰς παραλλήλους, διότι τὰ προβάλλοντα ταύτας ἐπίπεδα, ὧν ἕκαστον ὁρίζεται ὑπὸ τῆς εὐθείας καὶ τῆς προβαλλούσης τυχὸν σημεῖον αὐτῆς, εἶνε παράλληλα· ἀλλ' ἀντιστρόφως, ἐὰν αἱ προβολαὶ δύο εὐθειῶν εἶνε παράλληλοι, δὲν ἕπεται ἀναγκαίως ὅτι αἱ ἐν τῷ χώρῳ εὐθεῖαι εἶνε παράλληλοι. Πᾶσαι αἱ παράλληλοι εὐθεῖαι ἔχουσι τὴν αὐτὴν γωνίαν κλίσεως ω_1, ἄρα καὶ τὸν αὐτὸν συντελεστὴν προβολῆς.

9) Προβολὴ ἐπιπέδου καὶ στοιχεῖα δι' ὧν ὁρίζεται ἡ ἐν τῷ χώρῳ θέσις αὐτοῦ.—Καθ' ὅσον τὸ ἐπίπεδον εἶνε πεπερασμένον ἢ ἐκτείνεται ἐπ' ἄπειρον, ἡ ὀρθὴ προβολὴ αὐτοῦ (εἰσαγωγὴ ἐδαφ. 2) ἐπὶ τὸ Προ. Επι. εἶνε ἢ μέρος τοῦ Προ. Επι. ἢ ἅπαν τὸ Προ. Επι. Ἐὰν τὸ ἐπίπεδον εἶνε προβάλλον, τότε αἱ προβάλλουσαι τὰ διάφορα αὐτοῦ σημεῖα κεῖνται πᾶσαι ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου καὶ ἑπομένως ἔχει προβολὴν τὴν τομὴν αὐτοῦ μετὰ τοῦ Προ. Επι., ἤτοι τὸ ἴχνος αὐτοῦ S_1. Ἐντεῦθεν συνάγομεν ὅτι α') τὸ ἐπίπεδον ἐν γένει δὲν ἔχει ὡρισμένην προβολήν, ἐκτὸς ἐὰν εἶνε προβάλλον, καὶ β') ὅτι ἡ προβολὴ παντὸς ἐπιπέδου σχήματος, κειμένου ἐπὶ προβάλλοντος ἐπιπέδου, ταυτίζεται μετὰ τοῦ ἴχνους τοῦ ἐπιπέδου τούτου.

Τὸ ἐπίπεδον Ε′ (σχ. 10) χωρίζεται διὰ τοῦ ἴχνους αὐτοῦ S_1 εἰς δύο μέρη, τὸ θετικὸν καὶ τὸ ἀρνητικόν, καθ' ὅσον ἑκάτερον τῶν



Σχ. 10

μερῶν τούτων κεῖται ἐν τῷ θετικῷ ἢ ἀρνητικῷ χώρῳ (ἐδαφ. 6.) ἀλλὰ καὶ το Προ. Επι. χωρίζεται διὰ τοῦ ἴχνους S_1 τοῦ ἐπιπέδου Ε′ εἰς δύο μέρη, ἐξ ὧν τὸ δεχόμενον τὴν προβολὴν τοῦ θετικοῦ μέρους τοῦ ἐπιπέδου Ε′ λαμβάνεται θετικόν, τὸ δὲ τὴν τοῦ ἀρνητικοῦ ἀρνητικόν.

Ἐπιπέδου, τοῦ Ε′, πρὸς ἐπίπεδον, τὸ E_1, ***γωνία κλίσεως*** ἢ ***κλίσις*** ἐστὶν ἡ ὀξεῖα γωνία $\alpha\alpha_0\alpha_1 = \Theta_1$, ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν $\alpha\alpha_0$, $\alpha_1\alpha_0$ τῶν πρὸς ὀρθὰς τῇ κοινῇ τομῇ S_1 ἀγομένων πρὸς τῷ αὐτῷ σημείῳ α_0 ἐν ἑκατέρῳ τῶν ἐπιπέδων (σχ. 10)· ἐπειδὴ δὲ τὸ ἐπίπεδον $\alpha\alpha_0\alpha_1$ τῆς γωνίας κλίσεως Θ_1 εἶνε κάθετον ἐπὶ τὸ Προ. Επι. E_1 καὶ ἄρα προβάλλον, ἕπεται ὅτι ἡ $\alpha_1\alpha_0$ εἶνε προβολὴ τῆς $\alpha\alpha_0$· τούτου ἕνεκα ἡ τελευταία αὕτη εὐθεῖα $\alpha\alpha_0$ λέγεται ***γραμμὴ κλίσεως*** τοῦ ἐπιπέδου Ε′, διότι περιέχει μετὰ τῆς προβολῆς αὐτῆς $\alpha_1\alpha_0$ τὴν γωνίαν κλίσεως Θ_1 τοῦ ἐπιπέδου Ε′ πρὸς τὸ Προ. Επι. E_1. Ἐντεῦθεν ἕπεται ὅτι πᾶσα γραμμὴ κλίσεως ἐπιπέδου τινὸς καὶ ἡ προβολὴ αὐτῆς εἰσὶν ἀμφότεραι κάθετοι ἐπὶ τὸ ἴχνος τοῦ ἐπιπέδου, καὶ προσέτι ὅτι πᾶσα γραμμὴ κλίσεως ἔχει συντελεστὴν προβολῆς $\lambda = \text{συν}\Theta_1$.

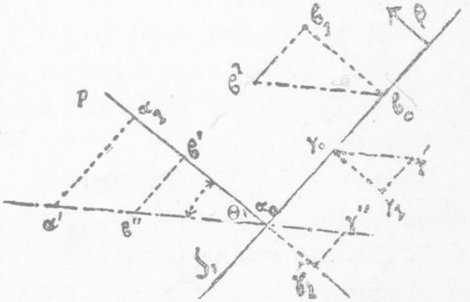
Τῆς γωνίας κλίσεως Θ_1 τελικὴ πλευρὰ λαμβάνεται ἡ γραμμὴ κλίσεως $\alpha\alpha_0$ καὶ ἀρχικὴ ἡ προβολὴ ταύτης $\alpha_1\alpha_0$.

Αἱ διάφοροι θέσεις ἐπιπέδου τινὸς Ε′ ὡς πρὸς τὸ Προ. Επι. εἶνε αἱ ἑπόμεναι τρεῖς, ἢ

α) κεῖται ὅλον τὸ ἐπίπεδον ἐπὶ τοῦ Προ. Επι., ἢ

β) εἶνε παράλληλον τῷ Προ. Επι., ὅτε τὸ ἴχνος αὐτοῦ S_1 ἀφανίζεται εἰς τὸ ἄπειρον καὶ ἡ γωνία κλίσεως αὐτοῦ Θ_1 εἶνε μηδέν, ἢ

γ) τέμνει τὸ Προ. Επι. κατὰ τὸ ἴχνος S_1 καὶ κλίνει πρὸς αὐτὸ κατὰ τὴν ὀξεῖαν γωνίαν Θ_1. *Στοιχεῖα δ' ἱκανὰ* διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῆς ἐν τῷ χώρῳ θέσεως τοῦ τυχόντος ἐπιπέδου Ε′ ὡς πρὸς τὸ Προ. Επι. εἶνε τὸ ἴχνος αὐτοῦ S_1, ἡ γωνία κλίσεως Θ_1 καὶ τὸ θετικὸν μέρος τοῦ Προ Επι. Τῷ ὄντι ἂν εἰς τὸ τυχὸν σημεῖον α_0 τοῦ δοθέντος ἴχνους S_1 (σχ. 11) καὶ ἐν τῷ θετικῷ προβολικῷ ἡμιεπιπέδῳ, δηλουμένῳ διὰ τῆς κατευθύνσεως τοῦ βέλους β, κατασκευασθῇ ἡ γωνία κλίσεως Θ_1 τοῦ ἐπιπέδου Ε′, ἡ θέσις τοῦ τελευταίου τούτου ὡς πρὸς τὸ Προ. Επι. εἶνε ἐντελῶς ὡρισμένη.



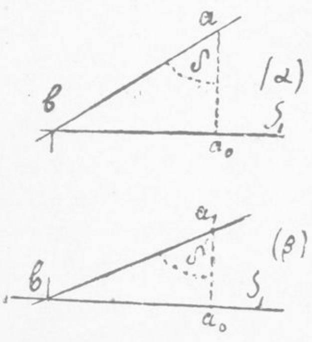
Σχ. 11

10) Χαρακτηριστικαὶ εὐθεῖαι τοῦ ἐπιπέδου. — Τὸ ἴχνος πάσης εὐθείας κειμένης ἔν τινι ἐπιπέδῳ Ε′ κεῖται πάντοτε ἐπὶ τοῦ ἴχνους S_1 τοῦ ἐπιπέδου τούτου εἰς ἄπειρον ἢ πεπερασμένην ἀπόστασιν, καθ' ὅσον ἡ εὐθεῖα εἶνε ἢ οὒ παράλληλος τῷ Προ. Επι. Ἐὰν ἡ εἰρημένη εὐθεῖα εἶνε παράλληλος πρὸς τὸ ἴχνος S_1 τοῦ ἐπιπέδου Ε′, ὅτε εἶνε παράλληλος καὶ πρὸς τὸ Προ. Επι., ἡ προβολὴ αὐτῆς, οὖσα ἐπίσης παράλληλος πρὸς τὸ ἴχνος S_1 (ἐδάφ. 8), θὰ εἶνε κάθετος ἐπὶ τὴν προβολὴν τῆς γραμμῆς κλίσεως τοῦ ἐπιπέδου Ε′. Πᾶσα τοιαύτη εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου, ἥτις ἔχει συντελεστὴν προβολῆς $\lambda = 1$, λέγεται *ἰχνοπαράλληλος* τοῦ ἐπιπέδου.

Αἱ ἰχνοπαράλληλοι παντὸς ἐπιπέδου καὶ αἱ ***γραμμαὶ κλίσεως*** αὐτοῦ ἀποτελοῦσι δύο σειρὰς εὐθειῶν, αἵτινες ἀλληλοτομοῦσι καθέτως καὶ λέγονται ***χαρακτηριστικαὶ εὐθεῖαι*** τοῦ ἐπιπέδου· ἀλλ' ὡς ἄνω εἴρηται καὶ αἱ προβολαὶ τῶν εὐθειῶν τῶν δύο τούτων σειρῶν ἀλληλοτομοῦσιν ἐπίσης καθέτως. Ἐντεῦθεν συνάγεται ἡ ἑξῆς πρότασις :

11) Ἐὰν ἡ ἑτέρα τῶν πλευρῶν ὀρθῆς γωνίας εἶνε παράλληλος τῷ Προ. Επι. E_1, ἡ προβολὴ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦτο εἶνε ἐπίσης γωνία ὀρθή.

12) Συντελεστὴς προβολῆς τυχούσης εὐθείας κειμένης ἐν ἐπιπέδῳ.—Ἔστω (σχ. 12 (α)) ἡ τυχοῦσα εὐθεῖα αϐ κειμένη ἐν τῷ ἐπιπέδῳ (S_1, Θ_1) καὶ τέμνουσα τὴν γραμμὴν κλίσεως αὐτοῦ $\alpha\alpha_0$ ὑπὸ γωνίαν δ εἰς τὸ σημεῖον α· τὰ σημεῖα τομῆς ϐ καὶ α_0 τῶν εὐθειῶν αϐ καὶ $\alpha\alpha_0$ μετὰ τοῦ ἴχνους S_1 τοῦ ἐπιπέδου (S_1, Θ_1) εἶνε τὰ ἴχνη τῶν εἰρημένων εὐθειῶν. Ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον $\alpha\beta\alpha_0$ εἶνε ὀρθογώνιον εἰς α_0, ἔχομεν $\frac{\beta\alpha_0}{\alpha\alpha_0} = \text{εφ}\ \delta$.

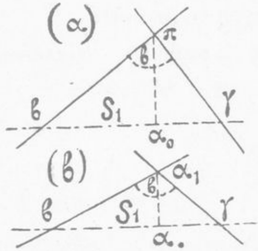


Σχ. 12

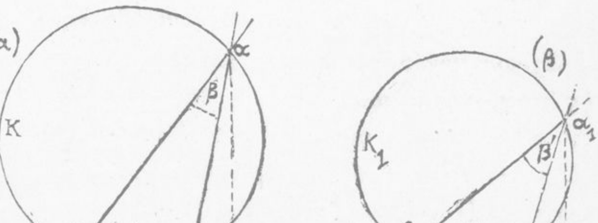
Ἀλλὰ καὶ ἡ προβολὴ $\alpha_1\beta\alpha_0$ (σχ. 12 (β)) τοῦ εἰρημένου τριγώνου εἶνε ἐπίσης τρίγωνον ὀρθογώνιον εἰς α_0 καὶ ἄρα ἔχομεν $\frac{\beta\alpha_0}{\alpha_1\alpha_0} =$ εφ δ', ὅπου δ' εἶνε ἡ προβολὴ τῆς γωνίας δ. Ἀλλ' ἐπειδὴ $\alpha_1\alpha_0 = \alpha\alpha_0 \cdot \text{συν}\ \Theta_1$, ἕπεται εφ $\delta' = \frac{\text{εφ}\ \delta}{\text{συν}\ \Theta_1}$: δηλαδὴ ἡ (ὀξεῖα) γωνία δ, τὴν ὁποίαν σχηματίζει τυχοῦσα εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου

(S_1, Θ_1) μετά τινος γραμμῆς κλίσεως αὐτοῦ, ἔχει προβολὴν ἑτέραν γωνίαν δ', ἥτις εἶνε μεγαλειτέρα τῆς προβαλλομένης δ.

Ὁ συντελεστὴς προβολῆς τῆς εὐθείας αϐ εἶνε $\lambda = \frac{\beta\alpha_1}{\beta\alpha}$. Ἐὰν δὲ ληφθῇ ἡ ϐα ὡς μονάς, τότε ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου αϐα$_0$ ἔχομεν $\beta\alpha_0 = \eta\mu\, \delta$ καὶ $\alpha\alpha_0 = \sigma\upsilon\nu\delta$, ἐκ δὲ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου $\alpha_1 \beta\alpha_0$ ἔχομεν $\alpha_1\alpha_0 = \alpha\alpha_0 .\ \sigma\upsilon\nu\ \Theta_1$ καὶ $\beta\alpha_1 = \sqrt{\overline{\beta\alpha_0}^2 + \overline{\alpha_1\alpha_0}^2}$, ἄρα $\lambda = \sqrt{\eta\mu^2\delta + \sigma\upsilon\nu^2\delta .\ \sigma\upsilon\nu^2\Theta_1}$, δηλαδὴ ὁ συντελεστὴς προβολῆς λ τῆς εὐθείας αϐ ἐξαρτᾶται ἐξ ἀμφοτέρων τῶν γωνιῶν δ καὶ



Σχ. 13



Σχ. 14

Θ_1, ἑπομένως διὰ δύο εὐθείας τοῦ ἐπιπέδου μὴ παραλλήλους εἶνε ἐν γένει διάφορος. Ἐκ τῶν εἰρημένων συνάγομεν ὅτι ἡ προβολὴ τυχούσης εὐθείας κειμένης ἐν ἐπιπέδῳ ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς θέσεως αὐτῆς πρὸς τὴν γραμμὴν κλίσεως, ἄρα καὶ πρὸς τὸ ἴχνος τοῦ ἐπιπέδου καὶ ἐκ τῆς θέσεως τοῦ τελευταίου τούτου πρὸς τὸ Προ Επι.

13) Σχέσις μεγέθους μεταξὺ γωνίας τινὸς καὶ τῆς προβολῆς αὐτῆς. — Δύο τυχοῦσαι εὐθεῖαι αϐ καὶ αγ τοῦ ἐπιπέδου (S_1, Θ_1) (σχ. 13 (α)), ἀλληλοτομοῦσαι εἰς τὸ σημεῖον α, περιέχουσι μεταξὺ αὐτῶν τὴν γωνίαν β· ἡ δ' ἀπὸ τῆς κορυφῆς α τῆς εἰρημένης γωνίας ἠγμένη γραμμὴ κλίσεως $\alpha\alpha_0$ τοῦ ἐπιπέδου ἀποτελεῖ μεθ' ἑκατέρας τῶν πλευρῶν αϐ καὶ αγ τῆς γωνίας ταύτης τὰς γωνίας δ καὶ δ', ὧν αἱ προβολαὶ δ_1 καὶ δ'_1, συμφώνως πρὸς τὸ προηγούμενον ἐδάφιον, εἶνε ἀντιστοίχως μεγαλείτεραι τῶν δ καὶ δ'. Ἐὰν ἡ γραμμὴ κλίσεως $\alpha\alpha_0$ κεῖται ἐντὸς τοῦ τριγώνου αϐγ (τὰ σημεῖα ϐ καὶ γ εἶνε τὰ ἴχνη τῶν εὐθειῶν αϐ καὶ αγ), τότε εἶνε $\delta+\delta'=\beta$, ἄρα καὶ $\delta_1+\delta'_1=\beta'>\beta$.

Ἐὰν ὅμως ἡ γραμμὴ κλίσεως $\alpha\alpha_0$ κεῖται ἐκτὸς τοῦ τριγώνου αϐγ (σχ. 14 (α)), τότε εἶνε $\pm(\delta-\delta')=\beta$, ἄρα καὶ $\pm(\delta_1-\delta'_1)=\beta'$· ἐν τῇ περιπτώσει δὲ ταύτῃ εἶνε $\beta' \gtreqless \beta$, καθ' ὅσον εἶνε $K_1 \lesseqgtr K$, ὅπου K_1 καὶ K εἶνε οἱ περιγεγραμμένοι εἰς τὰ τρίγωνα α_1ϐγ καὶ αϐγ κύκλοι (1), ἐξ οὗ συνάγομεν ὅτι *ἡ προβολὴ* ***τυχούσης γωνίας,*** *τῆς ὁποίας τὸ ἐπίπεδον κλίνει πρὸς τὸ Προ. Επι., εἶνε πάλιν γωνία διαφέρουσα ἐν γένει κατὰ μέγεθος τῆς προβαλλομένης γωνίας.*

14) Σχέσις μεγέθους μεταξὺ ἐπιπέδου τινὸς σχήματος καὶ τῆς προβολῆς αὐτοῦ. — Ἐὰν τὸ ἐπίπεδον τοῦ σχήματος, ἔστω τοῦ πολυγώνου Π, κεῖται ἐπὶ τοῦ Προ. Επι. τότε τὸ πολύγωνον Π καὶ ἡ προβολὴ αὐτοῦ Π_1 ταυτίζονται· ἐὰν τὸ ἐπίπεδον τοῦ πολυγώνου Π εἶνε παράλληλον τῷ Προ. Επι. τότε ἡ προβολὴ αὐτοῦ Π_1 εἶνε σχῆμα ἴσον πρὸς τὸ προβαλλόμενον πολύγωνον Π, διότι τὰ δύο ταῦτα ἐπίπεδα σχήματα Π καὶ Π_1 ἔχουσι καὶ πλευρὰς

(1) Εἶνε γνωστὸν ἐκ τῶν στοιχείων τῆς γεωμετρίας ὅτι ἐκ δύο κυκλικῶν τόξων ἐχόντων ἴσας χορδὰς (καὶ μικροτέρων ἡμιπεριφερείας) μεγαλείτερον εἶνε τὸ ἔχον μικροτέραν ἀκτῖνα.

ἴσας ($\lambda = 1$) καὶ γωνίας ἴσας μίαν πρὸς μίαν, ὡς ἐχούσας τὰς πλευρὰς αὐτῶν παραλλήλους καὶ ὁμοῤῥόπους. Ἐὰν ὅμως τὸ ἐπίπεδον τοῦ πολυγώνου Π κλίνῃ πρὸς τὸ Προ. Επι. ὑπὸ γωνίαν τινὰ Θ_1, τότε ἡ προβολὴ Π_1 διαφέρει τοῦ πολυγώνου Π κατὰ σχῆμα καὶ μέγεθος, διότι καὶ αἱ πλευραὶ καὶ αἱ γωνίαι τοῦ πολυγώνου Π_1 διαφέρουσι τῶν πλευρῶν καὶ γωνιῶν τοῦ Π.

15) Πρόβλημα. — ***Δοθέντος ἐπιπέδου (S_1, Θ_1) εὑρεῖν τὴν ἀπόστασιν τοῦ τυχόντος σημείου α αὐτοῦ ἀπὸ τοῦ Προ. Επι.*** Ἡ ἀπὸ τοῦ σημείου α τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου (S_1, Θ_1) (σχ. 10) ἐπὶ τὸ Προ. Επι. E_1 ἠγμένη κάθετος $\alpha\alpha_1$ εἶνε ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου α ἀπὸ τοῦ Προ. Επι. Ἡ κάθετος αὕτη κεῖται προφανῶς ἐπὶ τοῦ προβάλλοντος τὴν διὰ τοῦ σημείου α ἐρχομένην γραμμὴν κλίσεως $\alpha\alpha^0$ τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου καὶ ἀποτελεῖ μετὰ τῆς γραμμῆς ταύτης καὶ τῆς προβολῆς αὐτῆς $\alpha_1\alpha_0$ τὸ εἰς α_1 ὀρθογώνιον τρίγωνον $\alpha\,\alpha_1\,\alpha_0$, τοῦ ὁποίου ἡ ἀπέναντι τῆς ζητουμένης ἀποστάσεως $\alpha\,\alpha_1$ κειμένη ὀξεῖα γωνία Θ_1 εἶνε ἡ γωνία κλίσεως τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου πρὸς τὸ Προ. Επι. Τὸ τρίγωνον τοῦτο, τοῦ ὁποίου ἡ κατασκευὴ παρέχει τὴν ζητουμένην ἀπόστασιν, λέγεται *κλισιγώνιον* τρίγωνον τοῦ ἐπιπέδου, εἰς ἕκαστον σημεῖον τοῦ ὁποίου ἀντιστοιχεῖ καὶ ἓν τοιοῦτον· Ἐὰν νῦν δοθῇ ἡ προβολὴ α_1 (βλεπ. σχ. 11) τοῦ τυχόντος σημείου α τοῦ ἐπιπέδου, ἡ κατασκευὴ τοῦ εἰς αὐτὸ ἀντιστοιχοῦντος κλισιγωνίου τριγώνου γίνεται ὡς ἑξῆς :

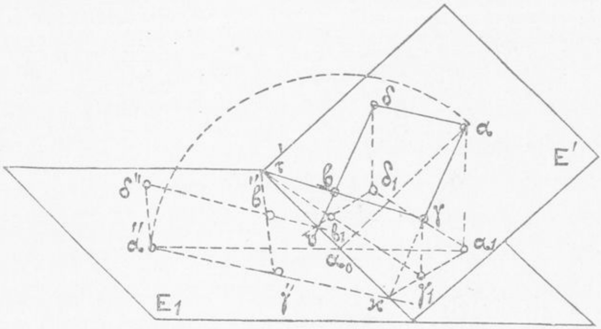
Ἂς ἀχθῇ ἐν τῷ Προ. Επι. καὶ ἐκ τοῦ σημείου α_1 ἡ ἐπὶ τὸ ἴχνος S_1 κάθετος $\alpha_1\alpha_0$, καὶ μὲ ταύτην ὡς πλευρὰν καὶ κορυφὴν τὸ σημεῖον α_0 ἂς κατασκευασθῇ ἡ γωνία κλίσεως Θ_1, τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου, ἔπειτα ἂς ἀχθῇ ἐκ τοῦ α_1 ἑτέρα κάθετος ἐπὶ τὴν ἀρχικὴν πλευρὰν $\alpha_1\alpha_0$ τῆς γωνίας Θ_1, ἤτοι παράλληλος πρὸς τὸ ἴχνος S_1· τὸ τμῆμα $\alpha_1\alpha'$ τῆς τελευταίας ταύτης καθέτου, τὸ μεταξὺ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας Θ_1 περιεχόμενον, εἶνε ἡ ζητουμένη ἀπόστασις τοῦ σημείου α ἀπὸ τοῦ Προ. Επι., διότι τὸ οὕτω κατασκευασθὲν τρίγωνον $\alpha_1\alpha'\alpha_0$ καὶ τὸ ἐν τῷ χώρῳ κλισιγώνιον τρίγωνον $\alpha\alpha_1\alpha_0$ (σχ. 10) εἶνε ἴσα, ὡς ἔχοντα μίαν τῶν ὀξειῶν γωνιῶν, τὴν Θ_1, καὶ τὴν προσκειμένην κάθετον, τὴν $\alpha_1\alpha_0$, ἴσην.

Ἐπειδὴ πάντα τὰ εἰς τὰ διάφορα σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου ἀντιστοιχοῦντα κλισιγώνια τρίγωνα εἰσὶν ὅμοια ἀλλήλοις, ἡ κατασκευὴ τῶν ἀποστάσεων ὅσων δήποτε σημείων β, γ, . . . τοῦ ἐπιπέδου (σχ. 11) ἀπὸ τοῦ Προ. Επι. γίνεται ταχύτερον, ἐὰν εἰς τὸ τυχὸν σημεῖον α_0 τοῦ ἴχνους S_1 κατασκευασθῇ ἡ γωνία Θ_1 καὶ ἡ κατὰ κορυφὴν ταύτης, ἀχθῶσι δὲ ἀπὸ τῶν προβολῶν β_1, γ_1, . . . τῶν σημείων καὶ παρὰ τὸ ἴχνος S_1 εὐθεῖαι τέμνουσαι τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας Θ_1, ἢ τῆς κατὰ κορυφὴν αὐτῆς, εἰς τὰ σημεῖα β', β''· γ'_1, γ''· . . . τὰ κατὰ τοῦτον τὸν τρόπον προκύπτοντα τρίγωνα $\alpha_0\,\beta'\,\beta''$, $\alpha_0\,\gamma'_1\,\gamma''$ . . . εἶνε ἴσα πρὸς τὰ εἰς τὰ σημεῖα β, γ, . . . ἀντιστοιχοῦντα κλισιγώνια τρίγωνα τοῦ ἐπιπέδου, καὶ ἄρα αἱ πλευραὶ τούτων αἱ ἀπέναντι τῆς γωνίας Θ_1, ἢ τῆς κατὰ κορυφὴν αὐτῆς, κείμεναι, παριστῶσι τὰς ἀποστάσεις τῶν σημείων ἀπὸ τοῦ Προ. Επι.

Β') ΕΥΡΕΣΙΣ ΤΟΥ ΣΧΗΜΑΤΟΣ ΕΚ ΤΗΣ ΠΡΟΒΟΛΗΣ ΤΟΥ ΚΑΙ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΩΣ

Ἐκ τῆς προβολῆς ἐπιπέδου σχήματος νὰ κατασκευασθῇ τὸ ἀληθὲς αὐτοῦ σχῆμα καὶ μέγεθος· καὶ ἀντιστρόφως: δεδομένου ἐπιπέδου σχήματος νὰ κατασκευασθῇ ἡ προβολὴ αὐτοῦ.

16) Τὸ ἀληθὲς σχῆμα καὶ μέγεθος ἐπιπέδου τινὸς σχήματος, π. χ. τοῦ πολυγώνου $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$ (σχ. 15), τοῦ ὁποίου τὸ ἐπίπεδον κλίνει ὅπως δήποτε πρὸς τὸ Προ. Επι., ποριζόμεθα, ἐὰν κατακλίνωμεν ἐπὶ τοῦ Προ. Επι. τὸ ἐπίπεδον Ε' τοῦ σχήματος στρέφοντές το περὶ τὸ ἴχνος αὐτοῦ S_1. Κατὰ τὴν στροφὴν ταύτην πάντα τὰ σημεῖα καὶ αἱ γραμμαὶ τοῦ σχήματος $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$ διατηροῦσι τὴν πρὸς ἄλληλα θέσιν αὐτῶν, καὶ ἑπομένως ἡ κατάκλισις $\alpha''\,\beta''\,\gamma''\,\delta''$ τοῦ εἰρημένου σχήματος ἐπὶ τοῦ Προ. Επι. παριστᾷ τὸ ἀληθὲς σχῆμα καὶ μέγεθος αὐτοῦ. Παρατηρητέον ἐπίσης ὅτι κατὰ τὴν κατάκλισιν τοῦ ἐπιπέδου σχήματος ἐπὶ τοῦ Προ. Επι. πάντα τὰ σημεῖα αὐτοῦ, πλὴν τῶν ἐπὶ τοῦ ἴχνους S_1 τοῦ ἐπιπέδου του κειμένων, γράφουσι τόξα κύκλων ἔχοντα τὰ κέντρα αὐτῶν ἐπὶ τοῦ ἴχνους S_1, ἀκτῖνας δὲ τὰς ἀποστάσεις τῶν σημείων τούτων ἀπὸ τοῦ ἄξονος



Σχ. 15

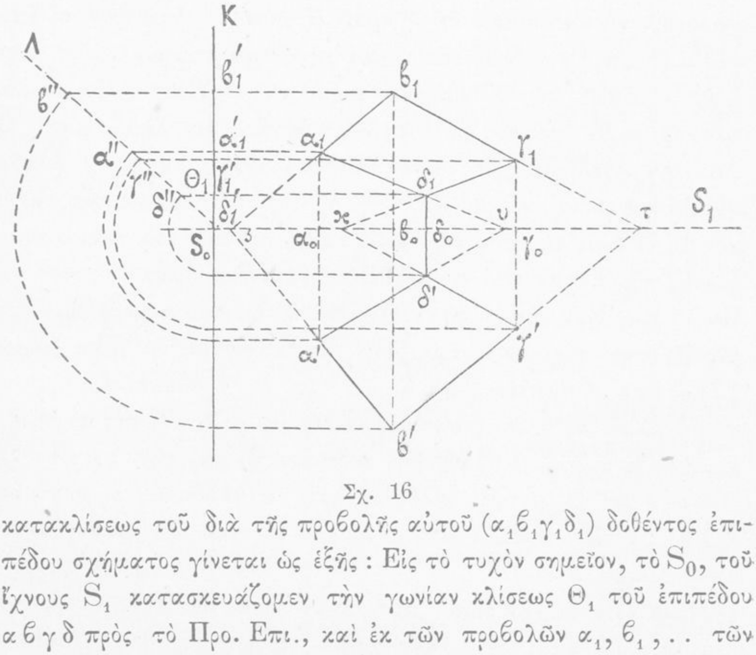
τῆς στροφῆς S_1, ἤτοι τὰς ὑποτεινούσας τῶν κλισιγωνίων τριγώνων. Τῶν κύκλων τούτων τὰ ἐπίπεδα εἶνε κάθετα ἐπὶ τὸν ἄξονα τῆς στροφῆς.

Σημείωσις.—Τὰς ἐπὶ τοῦ Προ. Επι. κατακλίσεις σημείων καὶ γραμμῶν ὀνομάζομεν διὰ τοῦ αὐτοῦ γράμματος τοῦ σημείου ἢ τῆς γραμμῆς συνοδευομένου ὑπὸ τόνου πρὸς τὰ δεξιὰ καὶ ἄνω.

17) Πρόβλημα.—*Δεδομένης τῆς προβολῆς ἐπιπέδου σχήματος εὑρεῖν τὴν κατάκλισιν αὐτοῦ ἐπὶ τοῦ Προ. Επι., ἤτοι τὸ ἀληθὲς αὐτοῦ σχῆμα καὶ μέγεθος.* Ἔστω (σχ. 16) $(\alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \delta_1)$ ἡ προβολὴ τοῦ τυχόντος τετραπλεύρου $\alpha\, \beta\, \gamma\, \delta$ καὶ (S_1, Θ_1) τὸ ἐπίπεδον τούτου, τὸ ὁποῖον νοοῦμεν στρεφόμενον (1) περὶ τὸ ἴχνος αὐτοῦ S_1 ἕως οὗ κατακλιθῇ ἐπὶ τοῦ Προ. Επι. Ἐπειδὴ ἡ διὰ τοῦ τυχόντος σημείου, ἔστω τοῦ α, ἐρχομένη γραμμὴ κλίσεως $\alpha\alpha_0$ τοῦ ἐπιπέδου καὶ ἡ προβολὴ αὐτῆς $\alpha_1\alpha_0$ εἶνε ἀμφότεραι κάθετοι ἐπὶ τὸ ἴχνος S_1 τοῦ ἐπιπέδου εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον α_0, ἡ δὲ θέσις τῆς γραμμῆς

(1) Χάριν σαφηνείας τοῦ σχεδιάσματος, ἡ στροφὴ τοῦ ἐπιπέδου γίνεται συνήθως ἐντὸς τῆς ἀμβλείας γωνίας τῆς παρακειμένης τῇ γωνίᾳ κλίσεως Θ_1, ὥστε ἡ κατάκλισις καὶ ἡ προβολὴ τοῦ σχήματος νὰ κεῖνται ἑκατέρωθεν τοῦ ἴχνους S_1.

κλίσεως $\alpha\alpha_0$ ὡς πρὸς τὸ εἰρημένον ἴχνος δὲν μεταβάλλεται κατὰ τὴν στροφὴν τοῦ ἐπιπέδου, ἕπεται ὅτι ἡ κατάκλισις τῆς εἰρημένης γραμμῆς κλίσεως καὶ ἡ προβολὴ αὐτῆς $\alpha_1\alpha_0$ κεῖνται ἐπὶ μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας καθέτου ἐπὶ τὸ ἴχνος S_1· ἡ δὲ κατάκλισις α' τοῦ σημείου α κειμένη ἐπὶ τῆς εἰρημένης καθέτου ὁρίζεται ἐκ τῆς σχέσεως $\alpha_1\alpha_0 = \alpha_0\alpha' . \text{συν}\, \Theta_1$· τὰ αὐτὰ ἰσχύουσι καὶ διὰ τὰ λοιπὰ σημεῖα β, γ, δ τοῦ τετραπλεύρου. Τούτων τεθέντων ἡ κατασκευὴ τῆς



Σχ. 16

κατακλίσεως τοῦ διὰ τῆς προβολῆς αὐτοῦ $(\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1)$ δοθέντος ἐπιπέδου σχήματος γίνεται ὡς ἑξῆς: Εἰς τὸ τυχὸν σημεῖον, τὸ S_0, τοῦ ἴχνους S_1 κατασκευάζομεν τὴν γωνίαν κλίσεως Θ_1 τοῦ ἐπιπέδου αβγδ πρὸς τὸ Προ. Επι., καὶ ἐκ τῶν προβολῶν $\alpha_1, \beta_1, ..$ τῶν κορυφῶν τοῦ τετραπλεύρου ἄγομεν ἐπὶ τὴν ἀρχικὴν πλευρὰν K τῆς γωνίας Θ_1 καθέτους, ἤτοι παραλλήλους πρὸς τὸ ἴχνος S_1· αἱ παράλληλοι αὗται ὁρίζουσιν ἐπὶ τῆς τελικῆς πλευρᾶς Λ τῆς γωνίας Θ_1 τὰ τμήματα $S_0\alpha''$, $S_0\beta''$, . . , ἅτινα παριστῶσι τὰς ἀποστάσεις τῶν σημείων α, β, . . . , ἄρα καὶ τῶν κατακλίσεων αὐτῶν $\alpha', \beta' ...$, ἀπὸ τοῦ ἴχνους S_1, διότι εἶνε

$$S_0\alpha'_1 = \alpha_0\alpha_1 = S_0\alpha'' . \text{συν}\, \Theta_1 \text{ κ.τ.λ.}$$

Ἐὰν ἄρα ἀπὸ τῶν σημείων α_0, β_0, ... τοῦ ἴχνους S_1 μεταφέρωμεν ἐπὶ τῶν κατακλιθεισῶν γραμμῶν κλίσεως τὰ εἰρημένα τμήματα $s_0\alpha''$, $s_0\beta''$..., ὡς εἰς τὸ σχῆμα ἐμφαίνεται, πορίζόμεθα τὰ σημεῖα α', β', γ', δ', ἅτινα ὁρίζουσι τὴν κατάκλισιν, ἤτοι τὸ ἀληθὲς σχῆμα καὶ μέγεθος τοῦ τετραπλεύρου $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$.

18) Πρόβλημα.—Δεδομένου ἐπιπέδου σχήματος α β γ δ, καὶ τῆς θέσεως αὐτοῦ ὡς πρὸς τὸ ἴχνος S_1 τοῦ ἐπιπέδου (S_1, Θ_1) οὔσης γνωστῆς, νὰ κατασκευασθῇ ἡ προβολὴ αὐτοῦ. Ἂς νοηθῇ τὸ ἐπίπεδον (S_1, Θ_1) τοῦ δοθέντος σχήματος $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$ στρεφόμενον περὶ τὸ ἴχνος αὐτοῦ S_1 ἕως οὗ κατακλιθῇ ἐπὶ τοῦ Προ. Επι. E_1, καὶ ἂς κατασκευασθῇ ἐπὶ τοῦ τελευταίου τούτου, ὅπερ λαμβάνεται ὡς ἐπίπεδον σχεδιάσεως, τὸ δοθὲν ἐπίπεδον σχῆμα κατὰ τὸ ἀληθὲς αὐτοῦ σχῆμα καὶ μέγεθος $(\alpha'\,\beta'\,\gamma'\,\delta')$ (σχ. 16) καὶ εἰς τὴν ἀληθῆ αὐτοῦ ὡς πρὸς τὸ ἴχνος S_1 θέσιν· κατὰ τοῦτον τὸν τρόπον πορίζόμεθα τὴν κατάκλισιν τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου σχήματος ἐπὶ τοῦ Προ. Επι. Ἐὰν ἔπειτα ἀνακλίνωμεν τὸ (S_1, Θ_1) μέχρις ἐπαναφορᾶς εἰς τὴν ἀρχικὴν αὐτοῦ θέσιν, καὶ λάβωμεν ὑπ' ὄψει (ἐδαφ. 17) ὅτι αἱ κατακλίσεις α', β', ... καὶ αἱ προβολαὶ α_1, β_1, ... τῶν σημείων α, β, ... κεῖνται ἀνὰ δύο ἐπὶ μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας καθέτου ἐπὶ τὸ ἴχνος S_1, ἐν ταὐτῷ δὲ καὶ τὴν σχέσιν $\alpha_1\alpha_0 = \alpha'\alpha_0$. συν Θ_1 μεταξὺ προβολῆς καὶ κατακλίσεως, αἱ προβολαὶ α_1, β_1 ... τῶν σημείων α, β, ... εἶνε ἐντελῶς ὡρισμέναι ἐκ τῶν κατακλίσεων αὐτῶν.

Πρὸς κατασκευὴν τῶν ζητουμένων προβολῶν α_1, β_1, .., ἤτοι πρὸς προσδιορισμὸν τῶν ἀποστάσεων αὐτῶν ἀπὸ τοῦ ἴχνους S_1, μεταφέρομεν ἐπὶ τῆς τελικῆς πλευρᾶς τῆς γωνίας Θ_1 καὶ ἀπὸ τῆς κορυφῆς αὐτῆς s_0 (σχ. 16) τὰ τμήματα $\alpha_0\,\alpha'$, $\beta_0\,\beta'$... καὶ ἐκ τῶν περάτων α'', β'', .. τῶν τμημάτων τούτων ἄγομεν ἐπὶ τὴν ἀρχικὴν πλευρὰν τῆς εἰρημένης γωνίας καθέτους, ἤτοι παραλλήλους πρὸς τὸ ἴχνος S_1· αἱ παράλληλοι αὗται ἀποτέμνουσιν ἐπὶ τῆς ἀρχικῆς πλευρᾶς τῆς γωνίας Θ_1 τὰ τμήματα $s_0\alpha'_1$, $s_0\beta'_1$, .., ἅτινα παριστῶσι τὰς ἀποστάσεις τῶν προβολῶν α_1, β_1, ... τῶν σημείων α, ϐ, . . . ἀπὸ τοῦ ἴχνους S_1, καὶ δι' ὧν ἡ προϐολὴ $α_1 ϐ_1 γ_1 δ_1$ τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου σχήματος ὁρίζεται θέσει καὶ μεγέθει.

Παρατήρησις. — *Ἡ κατάκλισις* ἐπιπέδου ἐπὶ τοῦ Προ. Επι. E_1 καὶ *ἡ ἀνάκλισις* αὐτοῦ εἰς τὴν προτέραν του θέσιν ἀποτελοῦσι τὰς δύο θεμελιώδεις μεθόδους τῆς Παραστατικῆς Γεωμετρίας, δι' ὧν πᾶσα κατασκευὴ ἐν τῷ χώρῳ ἀνάγεται εἰς κατασκευὴν ἐν ἐπιπέδῳ καὶ δι' ὧν λύονται τὰ δύο τελευταῖα (17 καὶ 18) θεμελιώδη αὐτῆς προβλήματα.

Σημείωσις. — Ἐπειδὴ πάντα τὰ εἰς τὰ διάφορα σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου α ϐ γ δ (ϐλ. σχ. 16) ἀντιστοιχοῦντα κλισιγώνια τρίγωνα εἶνε ὅμοια ἀλλήλοις, ἔχομεν, δι' ὅλα τὰ σημεῖα τὰ κείμενα ἐν ἑνὶ καὶ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, τὴν σχέσιν

$\frac{s_0 α'_1}{s_0 α''} = \frac{α_0 α_1}{α_0 α'} =$ συν $Θ_1$ = σταθερά, ἤτοι «Ὁ λόγος μεταξὺ τῶν ἀποστάσεων τῆς προβολῆς $α_1$ τοῦ τυχόντος σημείου α τοῦ ἐπιπέδου, καὶ τῆς κατακλίσεως αὐτοῦ α′ ἀπὸ τοῦ ἴχνους τοῦ ἐπιπέδου (ἄξων στροφῆς) εἶνε σταθερὸς καὶ ἴσος τῷ συνημιτόνῳ τῆς γωνίας κλίσεως τοῦ ἐπιπέδου τούτου πρὸς τὸ Προ. Επι.».

Ἐπειδὴ δὲ προσέτι τὰ σημεῖα s, τ, υ, κ, καθ' ἃ αἱ προσεκβολαὶ τῶν προβολῶν τῶν πλευρῶν α ϐ, ϐ γ . . . τοῦ τετραπλεύρου α ϐ γ δ συναντῶσι τὸ ἴχνος S_1, εἶνε καὶ σημεῖα τῶν εἰρημένων πλευρῶν (ἴχνη αὐτῶν), ταῦτα δὲ κατὰ τὴν στροφὴν τοῦ τετραπλεύρου α ϐ γ δ περὶ τὸ ἴχνος S_1 μένουσιν ἀμετάστατα, ἕπεται ὅτι καὶ αἱ κατακλίσεις α′ ϐ′, ϐ′ γ′ , . . τῶν πλευρῶν α ϐ, ϐ γ , . . διέρχονται διὰ τῶν αὐτῶν σημείων s, τ, υ, κ, δι' ὧν καὶ αἱ προβολαὶ αὐτῶν $α_1 ϐ_1$, $ϐ_1 γ_1$ . . . Ἂν δὲ πρὸς τούτοις ληφθῇ ὑπ' ὄψει ὅτι αἱ προβολαὶ $α_1$, $ϐ_1$, . . τῶν σημείων α, ϐ, . . . καὶ αἱ κατακλίσεις τούτων α′, ϐ′, . . . κεῖνται ἐπὶ παραλλήλων εὐθειῶν (καθέτων ἐπὶ τὸ ἴχνος S_1), ἕπονται μεταξὺ τῆς προβολῆς ἐπιπέδου τινὸς σχήματος καὶ τῆς κατακλίσεως αὐτοῦ αἱ ἑξῆς δύο γεωμετρικαὶ σχέσεις : ὅτι

α) Εἰς ἕκαστον σημεῖον τοῦ ἑνὸς σχήματος (τῆς προβολῆς) ἀντιστοιχεῖ ἓν σημεῖον τοῦ ἑτέρου (τῆς κατακλίσεως) καὶ τὰ δύο ταῦτα ἀντίστοιχα σημεῖα κεῖνται ἐπὶ μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας παραλλήλου πρὸς ὡρισμένην κατεύθυνσιν.

β) Εἰς ἑκάστην εὐθεῖαν τοῦ ἑνὸς σχήματος διερχομένην διὰ δύο σημείων, ἀντιστοιχεῖ μία εὐθεῖα τοῦ ἑτέρου σχήματος διερχομένη διὰ τῶν ἀντιστοίχων σημείων, καὶ ὅτι ἀμφότεραι αἱ εὐθεῖαι αὗται ἀλληλοτομοῦσιν εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον τοῦ ἴχνους S_1.

Ἡ γεωμετρικὴ αὕτη ἀλληλεξαρτησία μεταξὺ δύο ἐπιπέδων σχημάτων κειμένων ἐν ἑνὶ καὶ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ καλεῖται *ὁμολογία*, καὶ δύο ἐπίπεδα σχήματα ἐν τοιαύτῃ εὑρισκόμενα σχέσει καλοῦνται *ὁμόλογα* καὶ *ὁμολόγως κείμενα*. Ἡ προβολὴ ἄρα καὶ ἡ κατάκλισις παντὸς ἐπιπέδου σχήματος εἶνε σχήματα ὁμόλογα.

Ἡ εὐθεῖα S_1, ἐν ᾗ αἱ ἀντιστοιχοῦσαι εὐθεῖαι δύο ὁμολόγων σχημάτων ἀλληλοτομοῦσιν ἀνὰ δύο, λέγεται *ἄξων ὁμολογίας*, αἱ δὲ παράλληλοι εὐθεῖαι, ὧν ἑκάστη ἐπιζευγνύει δύο ἀντίστοιχα σημεῖα α_1 καὶ α', λέγονται *ἀκτῖνες ὁμολογίας*, ἡ δὲ κατεύθυνσις τούτων *κατεύθυνσις ὁμολογίας*.

Διὰ τῶν σχέσεων α) καὶ β) τῆς ὁμολογίας μεταξὺ προβολῆς καὶ κατακλίσεως ἐπιπέδου τινὸς σχήματος δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν τὴν ἑτέραν, δοθείσης τῆς ἑτέρας, ἐὰν ἐν ταὐτῷ δοθῇ ὁ ἄξων ὁμολογίας S_1 καὶ ἓν ζεῦγος ἀντιστοίχων σημείων α_1 καὶ α'. Τῷ ὄντι ἔστωσαν δεδομένα ἡ προβολὴ $\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1$ (βλ. σχ. 16) τοῦ ἐπιπέδου σχήματος $\alpha\beta\gamma\delta$, τὸ ἴχνος αὐτοῦ S_1 (ἄξων ὁμολογίας) καὶ ἓν ζεῦγος ἀντιστοίχων σημείων α_1 καὶ α' (κατεύθυνσις ὁμολογιας). Αἱ προσεκβολαί τῶν προβολῶν $\alpha_1\beta_1$ καὶ $\alpha_1\delta_1$ ὁρίζουσιν ἐπὶ τοῦ ἄξονος ὁμολογίας S_1 τὰ σημεῖα s καὶ υ δι' ὧν, κατὰ τὴν β) ἰδιότητα, διέρχονται καὶ αἱ εἰς ταύτας ἀντιστοιχοῦσαι εὐθεῖαι τοῦ ὁμολόγου σχήματος, ἤτοι αἱ κατακλίσεις $\alpha'\beta'$ καὶ $\alpha'\delta'$· ἐὰν ἄρα ἐπιζευχθῇ τὸ σημεῖον α' μὲ τὰ σημεῖα s καὶ υ, καὶ ἐκ τῶν σημείων β_1 καὶ δ_1 ἀχθῶσι κάθετοι ἐπὶ τὸν ἄξονα S_1, αἱ τομαὶ τῶν τελευταίων τούτων καθέτων μετὰ τῶν εὐθειῶν α' s καὶ α' υ παρέχουσι τὰ εἰς β_1 καὶ δ_1 ἀντίστοιχα σημεῖα, ἤτοι τὰς κατακλίσεις β' καὶ δ' τῶν σημείων β καὶ δ. Καθ' ὅμοιον τρόπον κατασκευάζομεν καὶ τὸ σημεῖον γ'

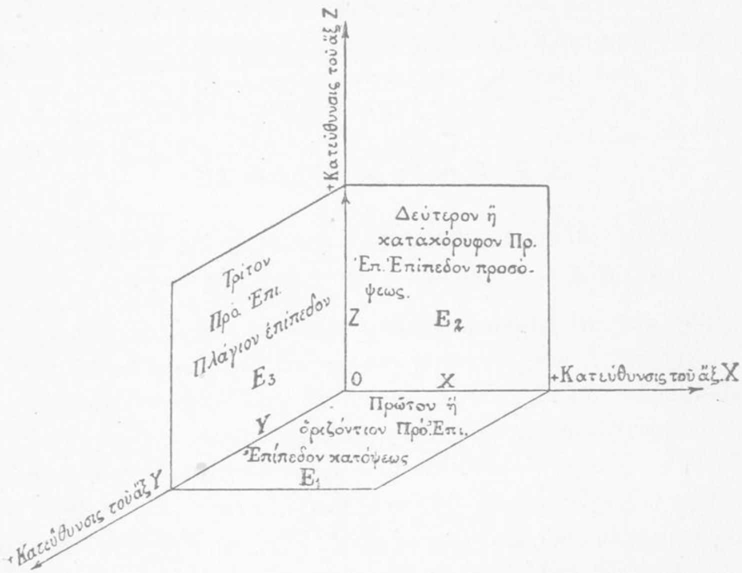
ἀντίστοιχον τῷ γ_1. Ἐπιζευγνύοντες δ' ἔπειτα τὰ σημεῖα $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ δι' εὐθειῶν πορίζόμεθα τὴν κατάκλισιν $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ τοῦ τετραπλεύρου $\alpha\beta\gamma\delta$ ἐκ τῆς προβολῆς αὐτοῦ $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \delta_1$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙ

ΟΡΘΗ ΠΡΟΒΟΛΗ ΣΗΜΕΙΟΥ, ΕΥΘΕΙΑΣ ΚΑΙ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΕΠΙ ΠΛΕΙΟΝΑ ΤΟΥ ΕΝΟΣ ΕΠΙΠΕΔΑ.

19) Γενικαὶ παρατηρήσεις.— Ἡ προβολὴ σημείου, εὐθείας, ἐπιπέδου καὶ ἐν γένει τυχόντος γεωμετρικοῦ σχήματος ἐπὶ ἓν μόνον ἐπίπεδον δὲν εἶνε ἐπαρκὲς στοιχεῖον πρὸς πλήρη καθορισμὸν τῆς ἐν τῷ χώρῳ θέσεως καὶ τοῦ ἀληθοῦς μεγέθους καὶ σχήματος αὐτοῦ, ἀλλ', ὡς μέχρι τοῦδε εἴδομεν, ἀπαιτοῦνται, ἐκτὸς τῆς προβολῆς τοῦ σχήματος, καὶ ἄλλα τινὰ στοιχεῖα, ὡς π.χ. αἱ ἀποστάσεις ὡρισμένου ἀριθμοῦ σημείων αὐτοῦ ἀπὸ τοῦ Προ. Επι. Διὰ τοῦτο ἐθεωρήθη πολλαχῶς σκοπιμώτερον ν' ἀπεικονίζεται καὶ ἐπὶ ἄλλου Προ. Επι., ἁρμοδίως λαμβανομένου, καὶ ἄλλη προβολὴ τῶν γεωμετρικῶν σχημάτων, ὥστε διὰ τῶν προβολῶν, καὶ μόνον δι' αὐτῶν, νὰ δυνάμεθα νὰ προσδιορίζωμεν τὸ σχῆμα, τὸ μέγεθος καὶ τὴν ἐν τῷ χώρῳ θέσιν αὐτῶν.

Ἡ πρὸς ἄλληλα θέσις τῶν Προ. Επι. εἶνε ἐν γένει ἀδιάφορος, κατὰ κανόνα ὅμως λαμβάνεται τὸ ἓν τούτων ὁριζόντιον, τὰ δὲ λοιπὰ κάθετα ἐπὶ τοῦτο. Συνήθως ἀρκοῦσι δύο Προ. Επι., ἐξ ὧν τὸ ἓν λέγεται ***πρῶτον*** ἢ ***ὁριζόντιον*** Προ. Επι. E_1, ἢ ἐπίπεδον ***κατόψεως***· τὸ δ' ἕτερον ***δεύτερον*** ἢ ***κατακόρυφον*** Προ. Επι. E_2 ἢ ἐπίπεδον ***προσόψεως***. Ἐνίοτε ὅμως ἡ θέσις τοῦ προβαλλομένου σχήματος ὡς πρὸς τὰ δύο Προ. Επι. E_1 καὶ E_2 εἶνε τοιαύτη, ὥστε ἡ διὰ τῶν δύο προβολῶν λύσις τοῦ προβλήματος νὰ καθίσταται ἀδύνατος· ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει λαμβάνομεν καὶ ***τρίτον*** Προ. Επι. E_3 (σχ. 17) ἐπὶ τοῦ ὁποίου κατασκευάζομεν τὴν τρίτην προβολὴν



Σχ. 17

τοῦ σχήματος. Τὸ ἐπίπεδον τοῦτο, ὅπερ ἄγεται κάθετον ἐπὶ τὰ δύο ἄλλα Προ. Επι. E_1 καὶ E_2 καὶ ἄρα κάθετον ἐπὶ τὴν τομὴν αὐτῶν X, λέγεται *τρίτον* ἢ *πλάγιον* Προ. Επι. E_3, ἡ δ' ἐπὶ τοῦτο προβολὴ τῶν γεωμετρικῶν σχημάτων συντελεῖ εἰς τὴν λύσιν εἰδικῶν τινων προβλημάτων.

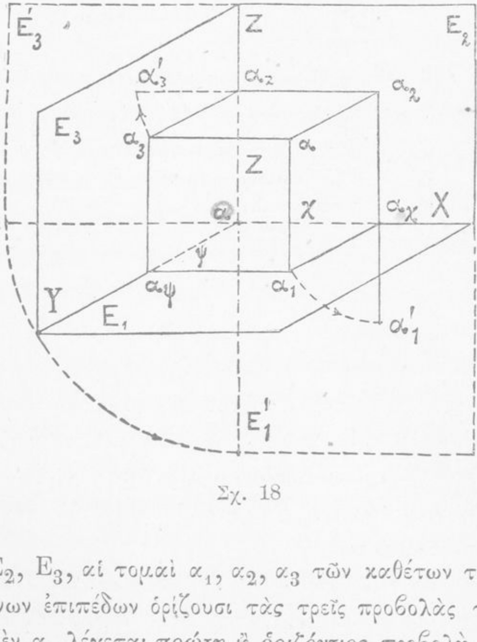
Αἱ τομαὶ τῶν τριῶν Προ. Επι. E_1, E_2, καὶ E_3 ἀνὰ δύο λέγονται ἄξονες προβολῆς· καὶ ἡ μὲν τομὴ τῶν E_1 καὶ E_2 λέγεται ἄξων προβολῆς τῶν X, ἢ ἁπλῶς ἄξων τῶν X· ὁμοίως ἡ τομὴ τῶν E_1 καὶ E_3, ἄξων τῶν Ψ· καὶ ἡ τομὴ τῶν E_2 καὶ E_3 ἄξων τῶν Z.

Τὰ τρία Προ. Επι. ἀλληλοτομοῦσιν εἴς τι σημεῖον O, ὅπερ λέγεται ἀρχὴ τῶν ἀξόνων καὶ χωρίζει ἕκαστον τούτων εἰς δύο μέρη. Τὰ ἀπὸ τῆς ἀρχῆς O τμήματα ἑκάστου τῶν ἀξόνων πρὸς ἓν τῶν μερῶν αὐτοῦ λαμβάνονται θετικά, τὰ δὲ πρὸς τὸ ἕτερον ἀρνητικά.

καὶ τοῦ μὲν Χ θετικὸν μέρος λαμβάνεται τὸ πρὸς τὰ δεξιά, τοῦ Ψ τὸ ἔμπροσθεν καὶ τοῦ Ζ τὸ ἄνω τῆς ἀρχῆς Ο.

α) Ὀρθὴ προβολὴ σημείου.

20) Δοθέντος σημείου ἐν τῷ χώρῳ νὰ ὁρισθῶσιν αἱ τρεῖς αὐτοῦ προβολαὶ ἐπὶ τῶν Προ. Επι. E_1, E_2 καὶ E_3.—Ἐὰν ἐκ τοῦ δοθέντος σημείου α (σχ. 18) ἀχθῶσι κάθετοι ἐπὶ τὰ τρία Προ.



Σχ. 18

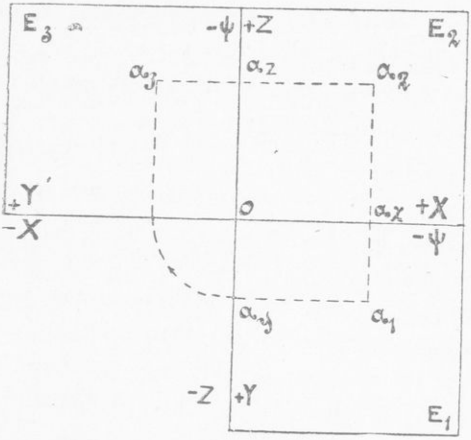
Επι. E_1, E_2, E_3, αἱ τομαὶ $α_1$, $α_2$, $α_3$ τῶν καθέτων τούτων μετὰ τῶν εἰρημένων ἐπιπέδων ὁρίζουσι τὰς τρεῖς προβολὰς τοῦ σημείου α· καὶ τὸ μὲν $α_1$ λέγεται *πρώτη* ἢ *ὁριζόντιος* προβολὴ ἢ *κάτοψις*, τὸ $α_2$ *δευτέρα* ἢ *κατακόρυφος* προβολὴ ἢ *πρόσοψις* καὶ τό $α_3$ *τρίτη* ἢ *πλαγία* προβολὴ τοῦ σημείου α. Αἱ ἐκ τοῦ σημείου α ἐπὶ τὰ τρία Προ. Επι. ἠγμέναι κάθετοι λέγονται *προβάλλουσαι* (εἰσαγωγὴ ἐδ. 1) καὶ μάλιστα *πρώτη*, *δευτέρα* ἢ *τρίτη* προβάλλουσα, καθ' ὅσον ἑκάστη τούτων ἄγεται κάθετος ἐπὶ τὸ πρῶτον, δεύτερον ἢ τρίτον Προ. Επι.· ὁρίζουσι δ' αὗται ἀνὰ δύο τρία ἐπίπεδα : τὸ $\alpha\alpha_1\alpha_2$ παράλληλον τῷ E_3, τὸ $\alpha\alpha_1\alpha_3$ παράλληλον τῷ E_2 καὶ τὸ $\alpha\alpha_2\alpha_3$ παράλληλον τῷ E_1. Τὰ ἐπίπεδα ταῦτα τέμνουσιν ἀντιστοίχως τοὺς τρεῖς ἄξονας Χ, Ψ καὶ Ζ καθέτως εἰς τὰ σημεῖα α_x, α_y, α_z καὶ ἀποτελοῦσι μετὰ τῶν τριῶν Προ. Επι. ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον, ὅπερ λέγεται *προβάλλον* παραλληλεπίπεδον τοῦ σημείου α.

Τὰ ἐπὶ τῶν τριῶν ἀξόνων Χ, Ψ καὶ Ζ τμήματα $O\alpha_x = x$, $O\alpha_y = y$ καὶ $O\alpha_z = z$ τὰ ἔχοντα ἀρχὴν τὴν ἀρχὴν τῶν ἀξόνων, καλοῦνται *συντεταγμέναι* τοῦ σημείου α· καὶ τὸ μὲν x λέγεται *τετμημένη*, τὸ y *τεταγμένη* καὶ τὸ z *κατηγμένη* τοῦ σημείου α, καὶ ἑκάστη τούτων λαμβάνεται θετικὴ ἢ ἀρνητική, καθ' ὅσον κεῖται ἐπὶ τοῦ θετικοῦ ἢ ἀρνητικοῦ ἡμιάξονος τῶν Χ, Ψ ἢ Ζ. Ἐπειδὴ δέ, ὡς ἐκ τοῦ σχήματος ἐμφαίνεται, εἶνε $z = \alpha\alpha_1 = \alpha_2\alpha_x = \alpha_3\alpha_y$, $y = \alpha\alpha_2 = \alpha_1\alpha_x = \alpha_3\alpha_z$, καὶ $x = \alpha\alpha_3 = \alpha_1\alpha_y = \alpha_2\alpha_z$, ἕπεται ὅτι αἱ συντεταγμέναι οἱουδήποτε σημείου εἶνε αἱ ἀποστάσεις αὐτοῦ ἀπὸ τῶν τριῶν Προ. Επι., ἢ αἱ ἀποστάσεις τῶν προβολῶν αὐτοῦ ἀπὸ τῶν ἀντιστοίχων ἀξόνων.

Τὰ τρία Προ. Επι. E_1, E_2 καὶ E_3 λέγονται *συντεταγμένα* ἐπίπεδα.

21) *Παράστασις τῶν τριῶν προβολῶν σημείου ἐπὶ ἑνὸς μόνον ἐπιπέδου.* — Ἵνα παραστήσωμεν τὰς τρεῖς προβολὰς α_1, α_2 καὶ α_3 τοῦ τυχόντος σημείου α ἐπὶ ἑνὸς μόνον ἐπιπέδου, ὅπερ εἶνε τὸ ἐπίπεδον τῆς σχεδιάσεως ἢ ἐπίπεδον τοῦ πίνακος, λαμβάνομεν τὸ *δεύτερον* ἢ *κατακόρυφον* Προ. Επι. E_2 ὡς ἐπίπεδον σχεδιάσεως, τὰ δὲ λοιπὰ δύο E_1 καὶ E_3 νοοῦμεν στρεφόμενα περὶ τοὺς ἄξονας Χ καὶ Ζ, ἕως οὗ κατακλιθῶσιν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου E_2. Κατὰ τὴν στροφὴν ταύτην αἱ εὐθεῖαι $\alpha_1\alpha_x$ καὶ $\alpha_3\alpha_z$ μένουσι κάθετοι ἐπὶ ἑκάτερον τῶν ἀξόνων Χ καὶ Ζ καὶ ἄρα, ὅταν τὰ ἐπίπεδα E_1 καὶ E_3 κατακλιθῶσιν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ πίνακος E_2 καὶ λάβωσι τὰς θέσεις E'_1 καὶ E'_3 (σχ. 18), ἑκατέρα τῶν εἰρημένων εὐθειῶν κεῖται ἀντιστοίχως ἐπὶ τῆς προσεκβολῆς τῆς $\alpha_2\alpha_x$ καὶ $\alpha_2\alpha_z$ (σχ. 19).

Ἐκ τούτων καὶ ἐκ τῶν ἐν τῷ προηγουμένῳ ἐδαφίῳ (20) εἰρημένων συνάγομεν τὰς ἑξῆς μεταξὺ τῶν τριῶν προβολῶν τοῦ τυχόντος σημείου α γεωμετρικὰς σχέσεις :



Σχ. 19

α΄) Ὅτι ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τοῦ πίνακος (σχ. 19) ἡ πρώτη καὶ δευτέρα προβολὴ α_1 καὶ α_2 τοῦ τυχόντος σημείου α κεῖνται πάντοτε ἐπὶ μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, καθέτου ἐπὶ τὸν ἄξονα Χ, καὶ ὅτι αἱ ἀποστάσεις τῶν εἰρημένων προβολῶν α_1 καὶ α_2 ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ ἄξονος Χ εἶνε ἀντιστοίχως ἴσαι κατὰ μέγεθος καὶ σημεῖον πρὸς τὰς ἀποστάσεις τοῦ σημείου α ἀπὸ τοῦ δευτέρου καὶ πρώτου Προ. Επι. E_2 καὶ E_1.

β΄) Ὅτι ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τοῦ πίνακος ἡ δευτέρα καὶ τρίτη προβολὴ α_2 καὶ α_3 τοῦ τυχόντος σημείου α κεῖνται πάντοτε ἐπὶ μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, καθέτου ἐπὶ τὸν ἄξονα Ζ, καὶ ὅτι αἱ ἀποστάσεις τῶν εἰρημένων προβολῶν α_2 καὶ α_3 ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ ἄξονος Ζ εἶνε ἀντιστοίχως ἴσαι κατὰ μέγεθος καὶ σημεῖον πρὸς τὰς ἀποστάσεις τοῦ σημείου α ἀπὸ τοῦ τρίτου καὶ δευτέρου Προ. Επι. E_3 καὶ E_2.

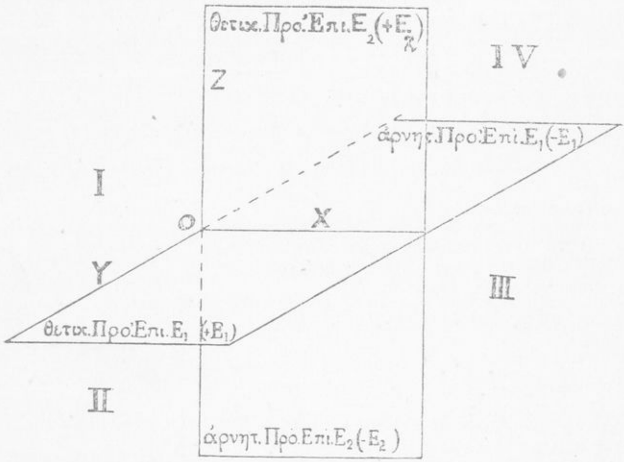
Ἀντιστρόφως, ἐὰν δύο σημεῖα ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τοῦ πίνακος παριστῶσι τὰς προβολὰς ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου, ἡ ἐπιζευγνύουσα ταῦτα εὐθεῖα εἶνε κάθετος ἐπὶ τὸν ἀντίστοιχον ἄξονα προβολῆς.

22) Δύο προβολαὶ τοῦ τυχόντος σημείου ὁρίζουσι τὴν ἐν τῷ χώρῳ θέσιν αὐτοῦ. — Πρὸς ὁρισμὸν τῆς θέσεως σημείου ἐν τῷ χώρῳ ἀρκοῦσι προφανῶς δύο μόνον προβολαὶ αὐτοῦ, διότι ἐὰν α_1 καὶ α_2 (σχ. 19) εἶνε αἱ προβολαὶ τοῦ τυχόντος σημείου α, τότε τὰ τμήματα $\alpha_2\alpha_x$ καὶ $\alpha_1\alpha_x$, ὡρισμένα κατὰ μέγεθος καὶ σημεῖον, παριστῶσι τὰς ἀποστάσεις τοῦ σημείου α ἀπὸ τοῦ πρώτου καὶ δευτέρου Προ. Επι. Ἐὰν ἄρα ἀπὸ τοῦ σημείου α_2 ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὸ Προ. Επι. E_2 καὶ ληφθῇ ἐπὶ τοῦ θετικοῦ μέρους αὐτῆς καὶ ἀπὸ τοῦ α_2 ὡς ἀρχῆς τμῆμα ἴσον τῷ $\alpha_1\alpha_x$, τὸ πέρας τοῦ τμήματος τούτου ὁρίζει τὴν ἐν τῷ χώρῳ θέσιν τοῦσημείου α.

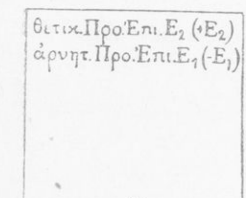
Ἐντεῦθεν ἕπεται ὅτι τὰ Προ. Επι. E_1, E_2 καὶ E_3 ἀνὰ δύο λαμβανόμενα ἀποτελοῦσι καὶ ἓν σύστημα προβολῆς. Οὕτω τὰ ἐπίπεδα E_1 καὶ E_2, E_1 καὶ E_3, E_2 καὶ E_3 ἀποτελοῦσιν ἀντιστοίχως τὰ προβολικὰ συστήματα I-II, I-III καὶ II-III, ἀλλ' ἐν τοῖς ἑπομένοις ὁσακις γίνεται λόγος περὶ τῶν προβολῶν γεωμετρικοῦ τινος σχήματος, θέλομεν νοεῖ πάντοτε, ἐκτὸς ἂν ἄλλως ὁρίζεται, τὰς προβολὰς τοῦ σχήματος ἐπὶ τὰ Προ. Επι. E_1 καὶ E_2, ἅτινα ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τοῦ πίνακος θεωροῦνται ἀπέρατα καὶ χωρίζονται διὰ τοῦ ἄξονος X, τῶν λοιπῶν ἀξόνων Ψ καὶ Z παραλειπομένων.

23) Θετικὸν καὶ ἀρνητικὸν μέρος ἑκατέρου τῶν Προ. Επι. — Ἑκάτερον τῶν Προ. Επι. E_1 καὶ E_2 χωρίζεται ὑπὸ τοῦ ἑτέρου διὰ τοῦ ἄξονος X εἰς δύο μέρη, ἐξ ὧν τὸ μὲν λαμβάνεται θετικόν, τὸ δ' ἕτερον ἀρνητικόν. Τοῦ δευτέρου Προ. Επι. θετικὸν μέρος λαμβάνεται τὸ πρὸς τὰ ἄνω τοῦ πρώτου Προ. Επι. κείμενον. τοῦ δὲ πρώτου Προ. Επι. θετικὸν μέρος λαμβάνεται τὸ πρὸ τοῦ δευτέρου Προ. Επι. κείμενον. Τὰ δύο Προ. Επι., τὰ ὁποῖα ὑποθέτομεν ἀπέρατα, ἀλληλοτομοῦντα καθέτως χωρίζουσι τὸν χῶρον εἰς τέσσαρα μέρη ἢ γωνίας I, II, III, IV (σχ. 20)· καὶ ἡ μὲν γωνία I περιέχεται ὑπὸ τῶν θετικῶν ἡμιεπιπέδων ($+E_1$), ($+E_2$), ἡ III η γωνία ὑπὸ τῶν ἀρνητικῶν ἡμιεπιπέδων ($-E_1$), ($-E_2$), ἡ II α γωνία ὑπὸ τῶν ἡμιεπιπέδων ($+E_1$), ($-E_2$) καὶ ἡ IV η γωνία ὑπὸ τῶν ἡμιεπιπέδων ($-E_1$), ($+E_2$).

Ἡ κατάκλισις τοῦ ***πρώτου*** Προ. Επι. ἐπὶ τοῦ ***δευτέρου***, ἤτοι ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ πίνακος, γίνεται πάντοτε κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε τὰ θετικὰ ἡμιεπίπεδα ($+E_1$) καὶ ($+E_2$) νὰ κεῖνται ἑκατέρωθεν τοῦ ἄξονος X (σχ. 21), ἡ δὲ κατάκλισις τοῦ τρίτου



Σχ. 20



Σχ. 21

Προ, Επι. E_3, στρεφομένου περὶ τὸν ἄξονα Z, ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ πίνακος E_2 γίνεται ἐπίσης κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε τὰ θετικὰ ἡμιεπίπεδα ($+E_3$) καὶ ($+E_2$) νὰ κεῖνται ἑκατέρωθεν τοῦ ἄξονος Z· λαμβάνεται δὲ ὡς θετικὸν μέρος τοῦ E_3 τὸ πρὸ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ πίνακος E_2 κείμενον· καθ' ὅσον λοιπὸν τὸ κατακλιθὲν θετικὸν ἡμιεπίπεδον ($+E_3$) κεῖται δεξιὰ ἢ ἀριστερὰ τοῦ ἄξονος Z, τὸ θετικὸν ἡμιεπίπεδον ($+E_2$) κεῖται ἀντιστοίχως ἀριστερὰ ἢ δεξιὰ τούτου. Δέον πρὸς τούτοις νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι, κατὰ τὴν ἄνω ὁρισθεῖσαν περὶ τοὺς ἄξονας X καὶ Z στροφὴν τῶν δύο Προ. Επι. E_1 καὶ E_3 διὰ τὴν κατάκλισιν τούτων ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ πίνακος $Ε_2$, οἱ μὲν ἄξονες Χ καὶ Ζ μένουσιν ἀμετάστατοι, ἐν ᾧ ὁ ἄξων Ψ μετὰ τὴν κατάκλισιν τοῦ Προ. Επι. $Ε_1$ ταὐτίζεται μετὰ τοῦ ἄξονος Ζ, τῶν θετικῶν ἡμιαξόνων Ψ καὶ Ζ κειμένων ἑκατέρωθεν τῆς ἀρχῆς Ο, καὶ μετὰ τὴν κατάκλισιν τοῦ Προ. Επι. $Ε_3$ ταὐτίζεται μετὰ τοῦ ἄξονος Χ, τῶν θετικῶν ἡμιαξόνων Χ καὶ Ψ κειμένων ἐπίσης ἑκατέρωθεν τῆς ἀρχῆς Ο (βλεπ. σχ. 19).

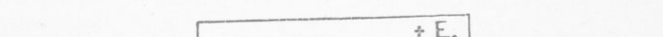
24) Θέσις σημείου.— Αἱ διάφοροι θέσεις τοῦ τυχόντος σημείου τοῦ χώρου ὡς πρὸς τὰ δύο Προ. Επι. $Ε_1$ καὶ $Ε_2$ εἶνε αἱ ἑξῆς ἐννέα, δηλαδὴ τὸ σημεῖον κεῖται ἢ

α΄) ἐν μιᾷ τῶν τεσσάρων διέδρων γωνιῶν I, II, III, IV τῶν δύο Προ. Επι. $Ε_1$ καὶ $Ε_2$, ἢ

β΄) ἐν ἑνὶ τῶν τεσσάρων ἡμιεπιπέδων $(+Ε_1)$, $(-Ε_1)$, $(+Ε_2)$, $(-Ε_2)$, ἢ

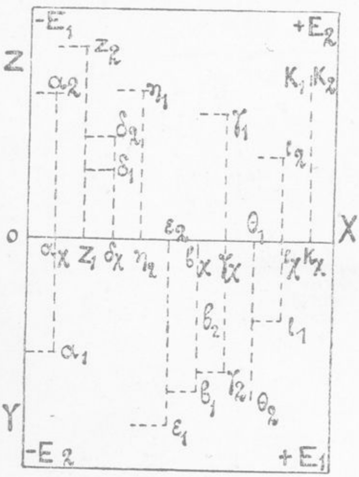
γ΄) ἐπὶ τοῦ ἄξονος Χ.

Ἑκάστην τῶν θέσεων τούτων τοῦ σημείου μανθάνομεν ἐκ τῆς θέσεως τῶν δύο προβολῶν αὐτοῦ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ πίνακος ὡς



Σχ. 22

πρὸς τὸν ἄξονα Χ. Τῷ ὄντι 1) ἂν σημεῖόν τι α (σχ. 22) κεῖται ἐν τῇ Ιῃ γωνίᾳ, τότε αἱ προβολαὶ αὐτοῦ $α_1$ καὶ $α_2$ πίπτουσιν ἐπὶ τῶν θετικῶν ἡμιεπιπέδων ($+E_1$) καὶ ($+E_2$) καὶ ἄρα ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τοῦ πίνακος E_2 (σχ. 23), λαμβανομένου ὑπ' ὄψει τοῦ τρόπου καθ' ὃν στρέφεται τὸ E_1, ἕως οὗ κατακλιθῇ ἐπὶ τοῦ E_2, κεῖνται ἑκατέρωθεν τοῦ ἄξονος X. 2) ἐὰν σημεῖόν τι γ (σχ. 22) κεῖται ἐν τῇ III ῃ γωνίᾳ τῶν Προ. Επι., τότε αἱ δύο προβολαὶ αὐτοῦ γ_1 καὶ γ_2 πίπτουσιν ἐπὶ τῶν ἀρνητικῶν ἡμιεπιπέδων ($-E_1$) καὶ ($-E_2$), ἐν δὲ τῷ ἐπιπέδῳ τοῦ πίνακος (σχ. 23) κεῖνται πάλιν ἑκατέρωθεν τοῦ ἄξονος X. 3) ἐὰν σημεῖόν τι β κεῖται ἐν τῇ II ᾳ γωνίᾳ (σχ. 22) τῶν Προ. Επι., τότε αἱ προβολαὶ αὐτοῦ β_1 καὶ β_2 πίπτουσιν ἡ μὲν πρώτη β_1 ἐπὶ τοῦ θετικοῦ ἡμιεπιπέδου ($+E_1$), ἡ δὲ δευτέρα β_2 ἐπὶ τοῦ ἀρνητικοῦ ἡμιεπιπέδου ($-E_2$) (σχ. 22), καὶ ἄρα ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τοῦ πίνακος ἀμφότεραι αἱ προβολαὶ κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος καὶ κάτω τοῦ ἄξονος X (σχ. 23). 4) Ἐὰν σημεῖόν τι δ κεῖται ἐν τῇ IV ῃ γωνίᾳ (σχ. 22), τότε αἱ προβολαὶ αὐτοῦ πίπτουσιν, ἡ μὲν πρώτη δ_1 ἐπὶ τοῦ ἀρνητικοῦ ἡμιεπιπέδου ($-E_1$), ἡ δὲ δευτέρα δ_2 ἐπὶ τοῦ θετικοῦ ἡμιεπιπέδου ($+E_2$) καὶ ἑπομένως ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τοῦ πίνακος ἀμφότεραι αἱ προβολαὶ αὗται κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος καὶ ἄνω τοῦ ἄξονος X.

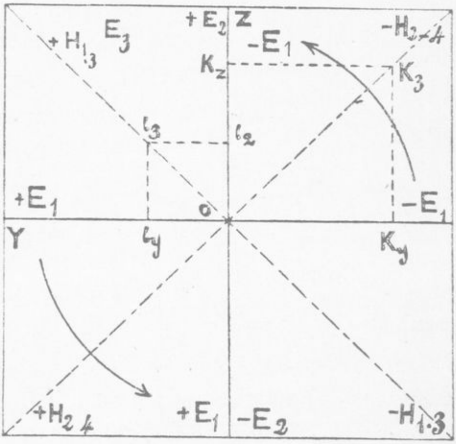


Σχ. 23

5,6,7,8) Ἐὰν τὸ σημεῖον κεῖται ἐν ἑνὶ τῶν τεσσάρων προβολικῶν ἡμιεπιπέδων ($+E_1$), ($+E_2$), ($-E_1$), ($-E_2$), ὡς π.χ. τὰ σημεῖα ε, ζ, η, θ (σχ. 22), τότε ἡ μὲν μία προβολὴ συμπίπτει μετὰ τοῦ σημείου αὐτοῦ, ἡ δ' ἑτέρα κεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος X· ὅθεν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τοῦ πίνακος (σχ. 23), ἡ μὲν μία προβολὴ κεῖται πάντοτε ἐν ἐκείνῳ τῷ προβολικῷ ἡμιεπιπέδῳ ἐν ᾧ καὶ τὸ σημεῖον, ἡ δὲ ἑτέρα ἐπὶ τοῦ ἄξονος X.

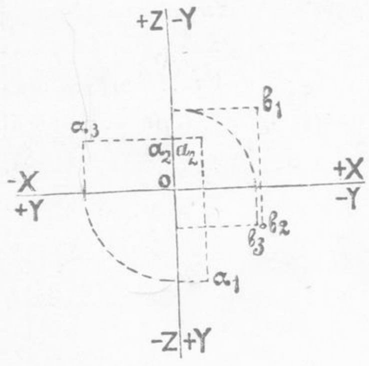
9) Ἐὰν τέλος σημεῖόν τι κεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῆς προβολῆς X, τότε ἀμφότεραι αἱ προβολαὶ αὐτοῦ ταυτίζονται μετὰ τοῦ σημείου, ὡς π.χ. τὸ σημεῖον o (σχ. 23).

25) Ἰδιαίτεραι θέσεις τοῦ σημείου.— Ὅταν σημεῖόν τι ἀπέχῃ ἴσον ἀπὸ τῶν δύο Προ. Επι., τότε κεῖται ἐπὶ ἐπιπέδου διχοτομοῦντος δύο κατὰ κορυφὴν γωνίας τῶν δύο Προ. Επι.. Τοιαῦτα ἐπίπεδα εἶνε δύο, τὸ $H_{1 \cdot 3}$ (σχ. 24), ὅπερ διχοτομεῖ τὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας I καὶ III, καὶ τὸ $H_{2 \cdot 4}$, ὅπερ διχοτομεῖ τὰς γωνίας II καὶ IV. Καὶ ὅταν μὲν τὸ σημεῖον, ἔστω τὸ ι, κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου $H_{1 \cdot 3}$, αἱ δύο αὐτοῦ προβολαὶ κεῖνται προφανῶς ἑκατέρωθεν καὶ εἰς ἴσας ἀποστάσεις ἀπὸ τοῦ ἄξονος X (βλέπ. σχ. 23)· ὅταν δὲ τὸ σημεῖον, ἔστω τὸ K, κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου $H_{2 \cdot 4}$, τότε αἱ δύο αὐτοῦ προβολαὶ κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἄξονος X, ἐπειδὴ δὲ αἱ ἀποστάσεις αὐτοῦ ἀπὸ τῶν δύο Προ. Επι. εἶνε ἴσαι, ἕπεται ὅτι αἱ δύο αὐτοῦ προβολαὶ συμπίπτουσιν εἰς μίαν (σχ. 23). Ἐν γένει αἱ προβολαὶ τυχόντος σχήματος (σημείου, γραμμῆς, ἐπιφανείας) κειμένου ἐπὶ τοῦ διχοτομοῦντος ἐπιπέδου $H_{2 \cdot 4}$ συμπίπτουσι· τούτου ἕνεκα τὸ εἰρημένον ἐπίπεδον λέγεται ἐπίπεδον *συμπτώσεως*.



Σχ. 24

26) Δεδομένων τῶν δύο προβολῶν $α_1$ καὶ $α_2$ τοῦ τυχόντος σημείου α, νὰ κατασκευασθῇ ἡ τρίτη αὐτοῦ προβολὴ $α_3$. — Συμφώνως πρὸς τὰ ἐν ἐδαφίῳ 21 εἰρημένα (α′, β′) ἀρκεῖ νὰ ἀχθῆ ἐκ τῆς δευτέρας προβολῆς α_2 τοῦ σημείου α κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα Ζ (σχ. 25) καὶ νὰ ληφθῇ ἐπὶ ταύτης καὶ ἐκ τοῦ σημείου α_z, καθ' ὃ τέμνει τὸν εἰρημένον ἄξονα, τμῆμα ἴσον κατὰ μέγεθος καὶ σημεῖον πρὸς τὴν ἀπόστασιν τῆς πρώτης προβολῆς α_1 τοῦ σημείου ἀπὸ τοῦ ἄξονος Χ. τὸ πέρας τοῦ τμήματος τούτου παριστᾷ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τοῦ πίνακος τὴν τρίτην προβολὴν α_3 τοῦ σημείου α. Ὁμοίως προσδιορίζεται καὶ ἡ τρίτη προβολὴ β_3 τοῦ σημείου β δοθέντος διὰ τῆς πρώτης καὶ δευτέρας αὐτοῦ προβολῆς· θὰ κεῖται δὲ ἡ τρίτη προβολὴ τοῦ τυχόντος σημείου πρὸς τὰ θετικὰ ἢ ἀρνητικὰ τοῦ κατακλιθέντος ἄξονος Ψ', καθ' ὅσον ἡ ἀπόστασις τῆς πρώτης προβολῆς αὐτοῦ ἀπὸ τοῦ ἄξονος Χ, ἥτις εἶνε (ἐδαφ. 20) ἡ τεταγμένη τοῦ σημείου, εἶνε θετικὴ ἢ ἀρνητική.

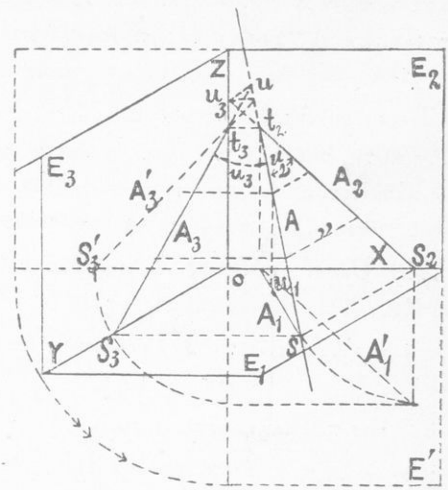


Σχ. 25

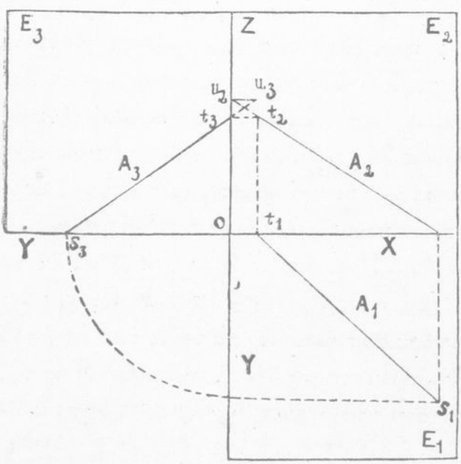
Ἄσκησις.—Νὰ γραφῶσιν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τοῦ πίνακος ἡ πρώτη καὶ δευτέρα προβολὴ σημείου εὑρισκομένου ἐν ἑκάστῃ τῶν δυνατῶν θέσεων αὐτοῦ ὡς πρὸς τὰ Προ. Επι. E_1 καὶ E_2 καὶ νὰ κατασκευασθῇ ἐν ἑκάστῃ τοιαύτῃ θέσει ἡ τρίτη προβολὴ τοῦ σημείου.

Β') ΟΡΘΗ ΠΡΟΒΟΛΗ ΕΥΘΕΙΑΣ

27) ***Δοθείσης εὐθείας νὰ κατασκευασθῶσιν αἱ τρεῖς αὐτῆς προβολαί.*** — Ἐὰν δι' ὅλων τῶν σημείων τῆς τυχούσης εὐθείας Α (σχ. 26) ἀχθῶσι κάθετοι ἐπὶ τὰ Προ. Επι. E_1, E_2 καὶ E_3, αἱ κάθετοι αὗται σχηματίζουσι τρία ἐπίπεδα, καλούμενα ***προβάλλοντα***, ὧν αἱ τομαὶ μεθ' ἑκάστου τῶν Προ. Επι. ὁρίζουσι τὰς τρεῖς προβολὰς A_1, A_2 καὶ A_3 τῆς εὐθείας Α· κατακλινομένων δὲ τῶν ἐπιπέδων E_1 καὶ E_3 ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου E_2 (παράβ. ἐδάφ. 21), αἱ τρεῖς εἰρημέναι προβολαὶ A_1, A_2 καὶ A_3 παρίστανται ἐπὶ ἑνὸς μόνον ἐπιπέδου, τοῦ E_2 (σχ. 27) καὶ τέμνουσιν ἐν γένει τοὺς ἄξονας X, Ψ, Z ὑπὸ τρεῖς διαφόρους γωνίας. Τὰ σημεῖα s_1, t_2 καὶ u_3 τῶν Προ. Επι. E_1, E_2, καὶ E_3 καθ' ἃ αἱ εὐθεῖαι Α καὶ A_1, Α καὶ A_2, Α καὶ A_3 ἀλληλοτομοῦσιν (ἂν ἀλληλοτομῶσι), λέγονται *ἴχνη* τῆς εὐθείας, πρῶτον, δεύτερον καὶ τρίτον.



Σχ. 26



Σχ. 27

28) Διὰ τῶν δύο προβολῶν A_1 καὶ A_2 τῆς εὐθείας ὁρίζεται ἐν γένει ἡ ἐν τῷ χώρῳ θέσις αὐτῆς. — Τῷ ὄντι ἐὰν νοηθῇ τὸ κατακλιθὲν Προ. Επι. E_1 μετὰ τῆς ἐν αὐτῷ εὐθείας A_1 ἐπανερχόμενον εἰς τὴν ἀρχικὴν αὐτοῦ θέσιν ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦ πίνακος E_2, καὶ ἀχθῶσι διὰ τῶν δύο προβολῶν A_1 καὶ A_2 τῆς εὐθείας Α τὰ δύο προβάλλοντα αὐτὴν ἐπιπεδα, ἡ τομὴ τῶν τελευταίων τούτων ἐπιπέδων ὁρίζει ἐν τῷ χώρῳ τὴν εὐθεῖαν Α, τῆς ὁποίας προβολαὶ ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα E_1 καὶ E_2 εἶνε αἱ A_1 καὶ A_2.

Ἐντεῦθεν ἕπεται ὅτι, δοθεισῶν τῶν δύο προβολῶν εὐθείας, ἡ τρίτη αὐτῆς προβολὴ εἶνε ἐντελῶς ὡρισμένη καὶ δὲν δύναται νὰ ληφθῇ αὐθαιρέτως· ὁρίζεται δ' ἡ τελευταία αὕτη, ἂν κατασκευασθῶσιν αἱ τρίται προβολαὶ δύο σημείων τῆς εὐθείας (παράβαλ. ἐδάφ. 26).

29) Θέσεις εὐθείας.—Αἱ διάφοροι θέσεις εὐθείας ὡς πρὸς τὰ δύο Προ. Επι. εἶνε αἱ ἑπόμεναι : ἢ

α') ἡ εὐθεῖα εἶνε παράλληλος πρὸς ἀμφότερα τὰ Προ. Επι. E_1 καὶ E_2, ἢ

β') εἶνε παράλληλος πρὸς τὸ ἕν, κλίνει δὲ πρὸς τὸ ἕτερον, ἢ

γ') κλίνει πρὸς ἀμφότερα τὰ Προ. Επι. E_1 καὶ E_2.

Ἑκάστην τῶν θέσεων τούτων τῆς ἐν τῷ χώρῳ εὐθείας μανθάνομεν ἐκ τῆς θέσεως τῶν δύο προβολῶν αὐτῆς ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τοῦ πίνακος ὡς πρὸς τὸν ἄξονα Χ.

α') Ἐὰν ἡ εὐθεῖα Α εἶνε παράλληλος πρὸς ἀμφότερα τὰ Προ. Επι. E_1 καὶ E_2, τότε εἶνε παράλληλος καὶ πρὸς τὸν ἄξονα Χ καὶ ἄρα αἱ δύο αὐτῆς προβολαὶ A_1 καὶ A_2 εἶνε ἐπίσης παράλληλοι τῷ ἄξονι τούτῳ (ἐδάφ. 8). Οὖσα δὲ ἡ εὐθεῖα παράλληλος πρὸς ἀμφότερα τὰ Προ. Επι. δύναται νὰ κεῖται ἰδιαιτέρως ἢ ἐπὶ τοῦ ἄξονος Χ, ἢ ἐν ἑνὶ τῶν τεσσάρων προβολικῶν ἡμιεπιπέδων, ἢ ἐν μιᾷ τῶν τεσσάρων γωνιῶν τῶν δύο Προ. Επι.. Ἐὰν ἡ εὐθεῖα, ἐν τῇ τελευταίᾳ ταύτῃ θέσει, κεῖται ἐν ταὐτῷ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ $H_{1\cdot3}$, τότε ἀμφότεραι αἱ προβολαὶ αὐτῆς κεῖνται εἰς ἴσας ἀποστάσεις ἀπὸ τοῦ ἄξονος Χ· ἐὰν δὲ κεῖται ἐν τῷ ἐπιπέδῳ $H_{2\cdot4}$, αἱ προβολαὶ αὐτῆς συμπίπτουσιν εἰς μίαν καὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν (ἐδάφ. 25) παράλληλον τῷ ἄξονι Χ.

Ἀντιστρόφως : δύο εὐθεῖαι A_1 καὶ A_2 ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τοῦ πίνακος παράλληλοι τῷ ἄξονι Χ παριστῶσι πάντοτε τὰς δύο προβολὰς ὡρισμένης εὐθείας τοῦ χώρου, παραλλήλου πρὸς τὰ δύο Προ. Επι. E_1

καὶ E_2· διότι ἐὰν διὰ τῶν δύο εὐθειῶν A_1 καὶ A_2 ἀχθῶσιν ἐπίπεδα κάθετα ἐπὶ τὰ Προ. Επι., ἡ τομὴ τούτων εἶνε εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα X, ἄρα καὶ πρὸς τὰ δύο Προ. Επι.

ϐ') Ὅταν ἡ εὐθεῖα εἶνε παράλληλος πρὸς ἓν τῶν Προ. Επι., ἔστω πρὸς τὸ E_1, κλίνῃ δὲ πρὸς τὸ ἕτερον E_2, τότε ἡ προϐολὴ αὐτῆς ἐπὶ τὸ τελευταῖον τοῦτο εἶνε παράλληλος τῷ ἄξονι X, ἐπὶ δὲ τὸ E_1 κλίνει πρὸς τὸν εἰρημένον ἄξονα· διότι πάντα τὰ σημεῖα τῆς εὐθείας ἀπέχουσιν ἴσον ἀπὸ τοῦ Προ. Επι. E_1 καὶ ἄρα αἱ δεύτεραι προϐολαὶ τούτων ἀπέχουσιν ἴσον τοῦ ἄξονος X, δηλαδὴ ἡ δευτέρα προϐολὴ A_2 τῆς εὐθείας εἶνε παράλληλος τῷ ἄξονι τούτῳ, ἐν ᾧ ἡ πρώτη αὐτῆς προϐολὴ A_1, παράλληλος οὖσα τῇ εὐθείᾳ A, κλίνει μετ' αὐτῆς πρὸς τὸ Προ. Επι. E_2, ἄρα καὶ πρὸς τὸν ἄξονα X. Ἡ εὐθεῖα ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ δύναται νὰ κεῖται ἐν ἑνὶ τῶν τεσσάρων προϐολικῶν ἡμιεπιπέδων, ὅτε ἡ προϐολὴ αὐτῆς ἐπὶ τοῦτο ταυτίζεται μετὰ τῆς εὐθείας, ἐπὶ δὲ τὸ ἕτερον κεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος X.

Ἀντιστρόφως : δύο εὐθεῖαι ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τοῦ πίνακος, ἐξ ὧν ἡ μία εἶνε παράλληλος τῷ ἄξονι X, ἡ δ' ἑτέρα κλίνει πρὸς αὐτὸν (ἀλλ' οὐχὶ καθέτως), παριστῶσι πάντοτε τὰς δύο προϐολὰς μιᾶς εὐθείας τοῦ χώρου, παραλλήλου πρὸς τὸ ἓν καὶ κεκλιμένης πρὸς τὸ ἕτερον Προ. Επι..

Ἐὰν ἡ εὐθεῖα εἶνε ἐν ταὐτῷ κάθετος ἐπὶ ἓν τῶν Προ. Επι., ἔστω ἐπὶ τὸ E_1, τότε ἡ προϐολὴ αὐτῆς ἐπὶ τοῦτο εἶνε ἓν σημεῖον, ἐπὶ δὲ τὸ ἕτερον E_2, εἶνε εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα X διερχομένη διὰ τοῦ εἰρημένου σημείου, διότι τὸ Προ. Επι. E_2 καὶ τὸ δεύτερον προϐάλλον AA_2 τὴν εὐθεῖαν A εἶνε ἀμφότερα κάθετα ἐπὶ τὸ Προ. Επι. E_1.

Ἀντιστρόφως : ἐὰν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τοῦ πίνακος ἡ μία τῶν προϐολῶν εὐθείας εἶνε κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα X, ἡ ἑτέρα θὰ εἶνε ἓν σημεῖον κείμενον ἐπὶ τῆς εἰρημένης καθέτου, διὰ τῶν δύο δὲ τούτων προϐολῶν ὁρίζεται ὡς τομὴ δύο ἐπιπέδων ἡ ἐν τῷ χώρῳ θέσις εὐθείας καθέτου ἐπὶ τὸ ἕτερον τῶν Προ. Επι.

γ') Ἐὰν ἡ εὐθεῖα κλίνῃ πρὸς ἀμφότερα τὰ Προ. Επι.., τότε ἀμφότεραι αἱ προβολαὶ αὐτῆς A_1 καὶ A_2 κλίνουσι πρὸς τὸν ἄξονα X. Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει ἡ εὐθεῖα ἔχει δύο ἴχνη s_1 καὶ t_2 (βλέπ. σχ. 26 καὶ 27) καὶ τέσσαρας θέσεις, καθ' ὅσον τὸ μεταξὺ τῶν ἴχνων αὐτῆς περιεχόμενον τμῆμα s_1t_2 κεῖται ἐν μιᾷ τῶν τεσσάρων γωνιῶν τῶν δύο Προ. Επι. Τὸ τμῆμα τοῦτο μηδενίζεται, ὅταν τὰ δύο ἴχνη συμπίπτωσιν εἰς ἓν σημεῖον, ἤτοι ὅταν ἡ εὐθεῖα καὶ ὁ ἄξων X ἀλληλοτομῶσιν.

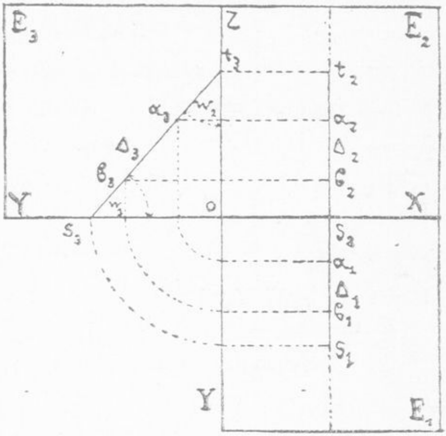
Ἐὰν ἡ εὐθεῖα κεῖται ἐν ταὐτῷ ἐπὶ τοῦ διχοτομοῦντος ἐπιπέδου $H_{1\cdot3}$, αἱ δύο προβολαὶ αὐτῆς A_1 καὶ A_2, ἀλληλοτομοῦσαι εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον τοῦ ἄξονος X, κεῖνται συμμετρικῶς πρὸς αὐτόν· ἐὰν δὲ ἡ εὐθεῖα κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου $H_{2\cdot4}$, αἱ δύο προβολαὶ αὐτῆς συμπίπτουσι καὶ ἀποτελοῦσι μίαν εὐθεῖαν.

Ἀντιστρόφως: ἐὰν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τοῦ πίνακος δοθῶσι δύο εὐθεῖαι A_1 καὶ A_2 συναντῶσαι τὸν ἄξονα X, αἱ εὐθεῖαι αὗται παριστῶσι πάντοτε τὰς προβολὰς ὡρισμένης εὐθείας τοῦ χώρου, κεκλιμένης πρὸς ἀμφότερα τὰ Προ. Επι.· διότι τὰ δι' ἑκατέρας τῶν εὐθειῶν A_1 καὶ A_2 διερχόμενα ἐπίπεδα καὶ κάθετα ἐπὶ τὰ Προ. Επι. κλίνουσιν ἑκάτερον πρὸς ἑκάτερον τῶν Προ. Επι., τὸ αὐτὸ ἄρα ποιεῖ καὶ ἡ κοινὴ αὐτῶν τομή (1).

Ἐὰν ἡ κεκλιμένη πρὸς ἀμφότερα τὰ Προ. Επι. εὐθεῖα Δ κεῖται ἐν ταὐτῷ ἐπὶ ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὸν ἄξονα X, τότε μετὰ τοῦ ἐπιπέδου τούτου ταυτίζονται τὰ δύο προβάλλοντα τὴν εὐθεῖαν ἐπίπεδα, καὶ ἄρα ἀμφότεραι αἱ προβολαὶ αὐτῆς Δ_1 καὶ Δ_2 (σχ. 28), κάθετοι οὖσαι ἐπὶ τὸν ἄξονα X, συμπίπτουσιν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τοῦ πίνακος εἰς μίαν καὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν, κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονα X. Αἱ δύο ἄρα προβολαὶ Δ_1 καὶ Δ_2 ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ὁρίζουσι μόνον τὸ προβάλλον τὴν εὐθεῖαν ἐπίπεδον, ἡ δὲ θέσις αὐτῆς ἐπὶ

(1). Ἡ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τοῦ πίνακος παράστασις τῶν ἰδιαιτέρων τούτων θέσεων τῆς εὐθείας πρὸς τὰ Προ. Επι. ἀφήνεται, ὡς εὔκολος, εἰς τὸν μαθητήν.

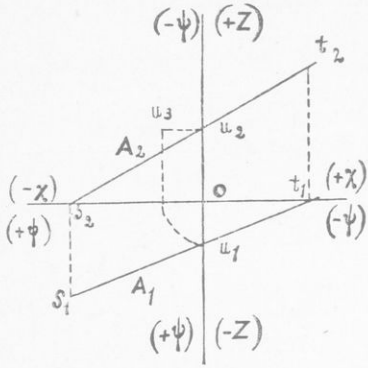
τούτου ὁρίζεται διὰ τῆς τρίτης προβολῆς Δ_3 τῆς εὐθείας. Καὶ ἀντιστρόφως: ἐὰν ἡ ἑτέρα τῶν δύο προβολῶν εὐθείας εἶνε κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα X, καὶ ἡ ἑτέρα (ὅταν δὲν εἶνε ἓν σημεῖον) (ἐδάφ. 29,6′) θὰ εἶνε ἐπίσης κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα τοῦτον καὶ εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον, ἐν δὲ τῷ ἐπιπέδῳ τοῦ πίνακος ἀποτελοῦσι μίαν καὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονα X διότι ἀνὰ δύο τὰ σημεῖα τῶν δυο προβολῶν εὐθείας, ὡς προβολαὶ ἑνὸς σημείου τοῦ χώρου, κεῖνται ἐπὶ μιᾶς εὐθείας καθέτου ἐπὶ τὸν ἄξονα X.



Σχ. 28

Παρατήρησις.—Δύο εὐθεῖαι κείμεναι ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τοῦ πίνακος δὲν δύνανται νὰ θεωρηθῶσιν ὡς προβολαὶ εὐθείας τοῦ χώρου, α′) ὅταν ἀμφότεραι εἶνε μὲν καθετοι ἐπὶ τὸν ἄξονα X, ἀλλὰ δὲν ἀποτελοῦσι μίαν καὶ τὴν αὐτὴν εὐθείαν, ἢ β′) ὅταν ἡ μία εἶνε κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα X, ἡ δ' ἑτέρα παράλληλος ἢ κεκλιμένη πρὸς αὐτόν.

30) Πρόβλημα. — *Δεδομένων ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ πίνακος τῆς πρώτης καὶ δευτέρας προβολῆς A_1 καὶ A_2 εὐθείας, εὑρεῖν τὰ δύο ἴχνη* s, t *αὐτῆς.* Τὰ δύο ἴχνη s καὶ t ἑκάστης εὐθείας, ἤτοι τὰ σημεῖα τῆς τομῆς αὐτῆς μετὰ τῶν δύο Προ. Επι. E_1 καὶ E_2, ταυτίζονται μετὰ τῶν ὁμωνύμων αὐτοῖς προβολῶν s_1 καὶ t_2. Ἵνα δὲ προσδιορίσωμεν ἑκάτερον τούτων, ἔστω τὸ δεύτερον $t=t_2$, ἐπὶ τοῦ ἀντιστοίχου ἐπιπέδου, ἀρκεῖ νὰ ληφθῇ ὑπ' ὄψει ὅτι, τοῦ εἰρημένου σημείου κειμένου ἐπὶ τοῦ Προ. Επι. E_2 καὶ ἐπὶ τῆς εὐθείας A, ἡ πρώτη αὐτοῦ προβολὴ t_1 (σχ. 29) κεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος X καὶ ἐπὶ τῆς πρώτης προβολῆς A_1 τῆς εὐθείας, καὶ ἄρα εἶνε ἡ τομὴ τῆς εὐθείας A_1 μετὰ τοῦ ἄξονος X· ἡ δευτέρα προβολὴ $t_2 = t$(1) κεῖται προφανῶς ἐπὶ τῆς δευτέρας προβολῆς A_2 τῆς εὐθείας καὶ ἐπὶ τῆς διὰ τοῦ σημείου t_1 καὶ ἐπὶ τὸν ἄξονα X ἠγμένης καθέτου, εἶνε ἄρα ἡ τομὴ t_2 τῆς εὐθείας A_2 μετὰ τῆς εἰρημένης καθέτου t_1 t_2.



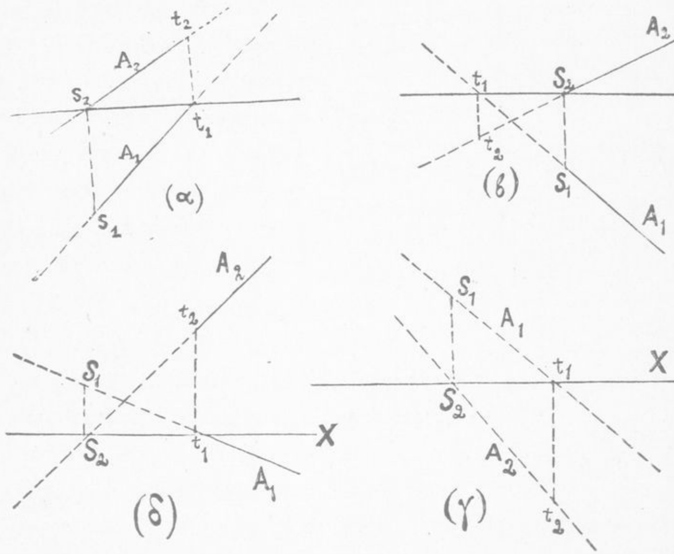
Σχ. 29

Σημείωσις. — Διὰ τὴν κατασκευὴν τοῦ τρίτου ἴχνους $u = u_3$ τῆς εὐθείας A παρατηροῦμεν ὅτι ἡ δευτέρα αὐτοῦ προβολὴ u_2 κεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος Z καὶ ἐπὶ τῆς δευτέρας προβολῆς A_2 τῆς εὐθείας, εἶνε ἄρα ἡ τομὴ τῶν δύο τούτων εὐθειῶν· ἡ δὲ πρώτη προβολὴ u_1 τοῦ αὐτοῦ σημείου κεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος Ψ καὶ ἐπὶ τῆς πρώτης προβολῆς A_1 τῆς εὐθείας. Ἐκ τῶν δύο τούτων προβολῶν ὁρίζεται, κατὰ τὰ γνωστὰ (ἐδάφ. 26) καὶ ὡς εἰς τὸ σχῆμα ἐμφαίνεται, ἡ τρίτη προβολὴ u_3 τοῦ τρίτου ἴχνους, ἤτοι αὐτὸ τοῦτο τὸ ἴχνος.

Ἐὰν ἡ εὐθεῖα κλίνῃ πρὸς ἀμφότερα τὰ Προ. Επι., τὸ μεταξὺ τῶν ἰχνῶν αὐτῆς περιεχόμενον τμῆμα s_1 t_2 δύναται νὰ κεῖται ἐν μιᾷ τῶν τεσσάρων γωνιῶν I, II, III, IV τῶν δύο Προ. Επι. E_1 καὶ E_2· τὰ σχήματα 30 ἀπὸ α ἕως δ παριστῶσι τὰς τέσσαρας δυνατὰς περιπτώσεις, καθ' ὅσον τὸ τμῆμα s_1 t_2 κεῖται ἐν μιᾷ τῶν εἰρημένων γωνιῶν. Ὅσον δ' ἀφορᾷ εἰς τὰ μέρη τῆς εὐθείας τὰ πέραν τῶν ἰχνῶν ἐκτεινόμενα, παρατηροῦμεν ὅτι τὰ Προ. Επι. νοοῦνται ἀδια-

(1) Διὰ τοῦ συμβόλου = μεταξὺ δύο σημείων, δύο εὐθειῶν ἢ δύο ἐπιπέδων νοοῦμεν πάντοτε τὴν συνταύτισιν τῶν σημείων, τῶν εὐθειῶν ἢ ἐπιπέδων.

φανῆ, καὶ ἑπομένως διὰ παρατηρητὴν εὑρισκόμενον ἐν τῇ Ι ῃ γωνίᾳ τὸ ἡμιεπίπεδον ($+E_1$) κρύπτει τὸ ἡμιεπίπεδον ($-E_2$), καὶ τὸ



Σχ. 30

ἡμιεπίπεδον ($+E_2$) κρύπτει τὸ ἡμιεπίπεδον ($-E_1$)· εἰς τὴν σχεδίασιν λοιπὸν τῶν δύο προβολῶν A_1 καὶ A_2 τῆς εὐθείας **A** μόνον ἐκεῖνα τὰ μέρη αὐτῶν γράφονται διὰ συνεχοῦς εὐθείας, ἅτινα παριστῶσι τὰς προβολὰς τμήματος τῆς εὐθείας κειμένου ἐν τῇ Ι ῃ γωνίᾳ, ἐν ᾧ τὰ λοιπὰ μέρη αὐτῶν γράφονται δι' εὐθειῶν ἐστιγμένων καὶ παριστῶσι τὰς προβολὰς τῶν μὴ ὁρατῶν μερῶν τῆς εὐθείας.

31) Πρόβλημα. *—Δεδομένων τοῦ πρώτου καὶ δευτέρου ἴχνους* s_1 *καὶ* t_2 *τυχούσης εὐθείας A, νὰ κατασκευασθῶσιν αἱ δύο αὐτῆς προβολαὶ* A_1 *καὶ* A_2. Ἡ προβολὴ εὐθείας ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τοῦ πίνακος εἶνε ἐντελῶς ὡρισμένη, ἐὰν δοθῶσιν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου αἱ προβολαὶ δύο σημείων αὐτῆς· ἀλλ' ἐξ ὅλων τῶν σημείων τῆς εὐθείας τὰ ἴχνη αὐτῆς ἔχουσιν ἰδιάζουσαν σημασίαν, διότι, συμφώνως πρὸς τὸ προηγούμενον πρόβλημα, ἕκαστον τῶν ἰχνῶν αὐτῆς ταυτίζεται μετὰ τῆς ὁμωνύμου αὐτῷ προβολῆς, ἐν ᾧ ἡ ἑτέρα κεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος καὶ ἐπὶ τῆς ὁμωνύμου προβολῆς τῆς εὐθείας. Ἐὰν ἄρα δοθῶσιν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τοῦ πίνακος (βλέπ. σχ. 27) τὸ *πρῶτον καὶ δεύτερον* ἴχνος s_1 καὶ t_2 τῆς εὐθείας, δίδονται ἐν ταὐτῷ καὶ αἱ ὁμώνυμοι προβολαὶ τῶν σημείων τούτων, ἐν ᾧ οἱ πόδες τῶν διὰ τῶν σημείων τούτων καὶ ἐπὶ τὸν ἄξονα X ἠγμένων καθέτων ὁρίζουσιν ἀντιστοίχως τὰς πρὸς τὰς δοθείσας ἑτερωνύμους προβολὰς s_2 καὶ t_1. Κατὰ τοῦτον τὸν τρόπον ἔχομεν ἐπὶ ἑκατέρου τῶν ἡμιεπιπέδων ($+E_1$) καὶ ($+E_2$) τὰς προβολὰς δύο σημείων (τῶν ἰχνῶν) τῆς εὐθείας, αἵτινες ἀνὰ δύο ὁρίζουσι τὰς προβολὰς A_1 καὶ A_2 αὐτῆς.

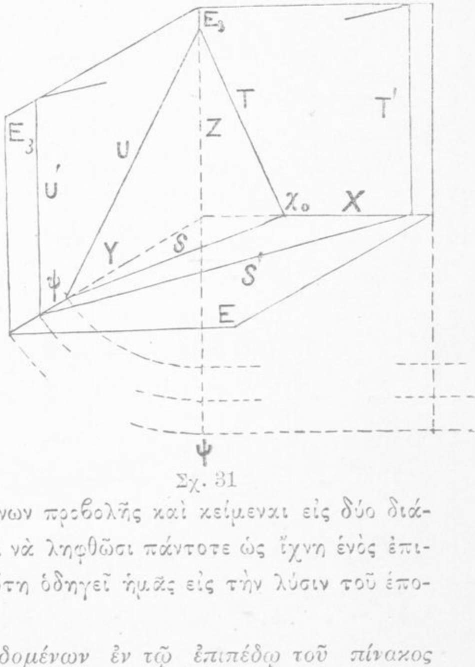
Σημείωσις. — Τὴν τρίτην προβολὴν A_3 τῆς εὐθείας A εὑρίσκομεν κατασκευάζοντες τὴν τρίτην προβολὴν ἑκατέρου τῶν σημείων s καὶ t (ἢ δύο τυχόντων αὐτῆς σημείων) ἐκ τῆς πρώτης καὶ δευτέρας αὐτῶν προβολῆς (παράβαλ. ἐδάφ. 26 καὶ σχ. 27).

Ἄσκησις.— Δεδομένων τῶν δύο προβολῶν εὐθείας ἐχούσης πάσας τὰς δυνατὰς θέσεις ὡς πρὸς τὰ Προ. Ἐπι. E_1 καὶ E_2 νὰ κατασκευασθῶσι τὰ ἴχνη καὶ ἡ τρίτη αὐτῆς προβολή.

Γ) ΟΡΘΗ ΠΡΟΒΟΛΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ

32). Τὰ ἐν τῷ ἐδαφίῳ (9) εἰρημένα περὶ τῆς ὀρθῆς προβολῆς ἐπιπέδου ἐπὶ ἓν ἐπίπεδον ἰσχύουσι καὶ ἐνταῦθα δι᾽ ἕκαστον τῶν Προ. Ἐπι. Παρατηροῦμεν ἐπίσης ὅτι δύο προβολαὶ ἑνὸς ἐπιπέδου ἀρκοῦσιν, ἵνα ὁρίσωσι τὴν ἐν τῷ χώρῳ θέσιν αὐτοῦ, ἐφ᾽ ὅσον τὸ ἐπίπεδον εἶνε ὡρισμένον καὶ πεπερασμένον (ἐπίπεδον σχῆμα)· ἐὰν ὅμως τὸ ἐπίπεδον εἶνε ἀπέρατον, τότε δὲν ἔχει ὡρισμένην προβολήν, διότι (ἐδάφ. 9) ἅπαν τὸ Προ. Ἐπι. δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς προβολὴ αὐτοῦ. Τούτου ἕνεκα πρὸς παράστασιν τοῦ ἐπιπέδου καὶ καθορισμὸν τῆς θέσεως αὐτοῦ ἐν τῷ χώρῳ ὡς πρὸς τὰ τρία

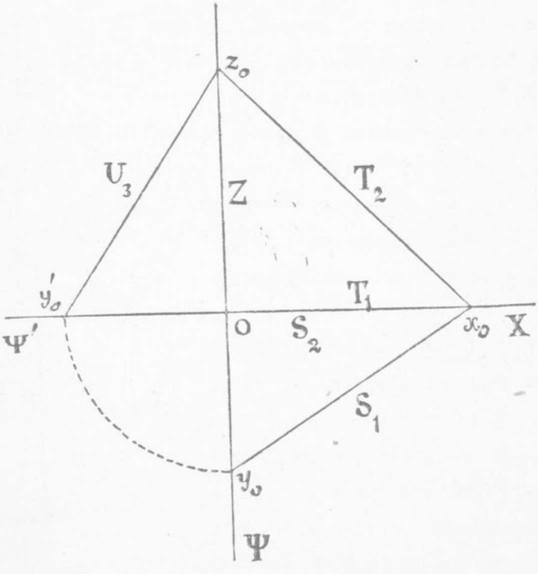
Προ. Ἐπι. δέον νὰ δοθῶσιν αἱ προβολαὶ τριῶν σημείων αὐτοῦ μὴ ἐπ' εὐθείας κειμένων ἤ, ὅπερ ταὐτό, αἱ προβολαὶ ἑνὸς σημείου καὶ μιᾶς εὐθείας μὴ διερχομένης διὰ τοῦ σημείου, ἢ αἱ προβολαὶ δύο εὐθειῶν αὐτοῦ ἀλληλοτομουσῶν ἢ παραλλήλων. Ἀλλ' ἐξ ὅλων τῶν εὐθειῶν τοῦ ἐπιπέδου ἐκλέγουσι, πρὸς παράστασιν αὐτοῦ, ἐκείνας, καθ' ἃς τὸ δοθὲν ἐπίπεδον E τέμνει τὰ Προ. Ἐπι., δηλαδὴ τὰ τρία αὐτοῦ ἴχνη S, T, U (σχ. 31), ὧν δύο μόνον ἀρκοῦσιν, ἵνα ὁρίσωσι τὴν ἐν τῷ χώρῳ θέσιν αὐτοῦ ὡς πρὸς τὰ Προ. Ἐπι. Ἐπειδὴ δὲ τρία ἐπίπεδα ἀλληλοτομοῦσιν ἐν γένει εἰς ἓν σημεῖον, ἕπεται ὅτι τὰ εἰρημένα ἴχνη S, T, U τοῦ ἐπιπέδου ἀλληλοτομοῦσιν ἀνὰ δύο εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον x_0, y_0, z_0 ἑκάστου τῶν ἀντιστοίχων ἀξόνων· καὶ ἀντιστρόφως, δύο εὐθεῖαι ἀλληλοτομοῦσαι εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον ἑνὸς τῶν ἀξόνων προβολῆς καὶ κείμεναι εἰς δύο διάφορα Προ. Ἐπι., δύνανται νὰ ληφθῶσι πάντοτε ὡς ἴχνη ἑνὸς ἐπιπέδου. Ἡ παρατήρησις αὕτη ὁδηγεῖ ἡμᾶς εἰς τὴν λύσιν τοῦ ἑπομένου προβλήματος.



Σχ. 31

33) Πρόβλημα. — *Δεδομένων ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τοῦ πίνακος τῶν δύο ἰχνῶν ἐπιπέδου, νὰ κατασκευασθῇ τὸ τρίτον αὐτοῦ ἴχνος.* Ἔστωσαν S_1 καὶ T_2 (σχ. 32) τὸ πρῶτον καὶ δεύτερον ἴχνος τοῦ τυχόντος ἐπιπέδου E. Τὸ σημεῖον z_0 τῆς τομῆς τοῦ δευτέρου ἴχνους T_2 μετὰ τοῦ ἄξονος Z εἶνε ἐν ταὐτῷ, κατὰ τὰ ἀνωτέρω, καὶ σημεῖον τοῦ τρίτου ἴχνους U· καὶ ἐπειδὴ τὸ σημεῖον τοῦτο z_0 κατὰ τὴν κατάκλισιν τοῦ Προ. Ἐπι. E_3 περὶ τὸν ἄξονα Z ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ πίνακος μένει ἀμετάστατον, ἕπεται ὅτι θὰ εἶνε καὶ σημεῖον τοῦ κατακλιθέντος τρίτου ἴχνους U_3. Ὁμοίως τὸ πρῶτον ἴχνος S_1 τέμνει τὸν ἄξονα Ψ εἰς τὸ σημεῖον y_0, ὅπερ εἶνε ἐν ταὐτῷ καὶ σημεῖον τοῦ τρίτου ἴχνους U. Τὸ σημεῖον τοῦτο y_0 μετὰ τὴν κατάκλισιν τοῦ Προ. Ἐπι. E_3 ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ πίνακος λαμβάνει ἐπὶ τοῦ κατακλιθέντος ἐπίσης ἄξονος Ψ′ τὴν θέσιν y'_0 $(Oy_0=Oy_0')$. Ἡ εὐθεῖα ἄρα U_3 ἡ τὰ σημεῖα z_0 καὶ y'_0 ἐπιζευγνύουσα εἶνε ἡ κατάκλισις τοῦ τρίτου ἴχνους U.

Παρατήρησις I.— Τὰ σημεῖα z_0 καὶ y_0, καθ' ἃ τὰ ἴχνη S_1 καὶ T_2 ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τοῦ πίνακος (σχ. 32) τέμνουσι τοὺς ἄξονας Z καὶ Ψ, παριστῶσι τὸ δεύτερον καὶ πρῶτον ἴχνος τῆς εὐθείας τῆς τομῆς U τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου E μετὰ τοῦ Προ. Ἐπι. E_3. Τὸ νὰ ὁρίσωμεν λοιπὸν τὴν θέσιν τῆς εὐθείας U ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τοῦ πίνακος ἀνάγεται εἰς τὸ νὰ εὕρωμεν τὴν τρίτην προβολὴν εὐθείας, ἧς εἶνε γνωστὰ τὸ πρῶτον y_0 καὶ δεύτερον z_0 ἴχνος αὐτῆς (βλέπ. σημείωσιν ἐδαφ. 31).

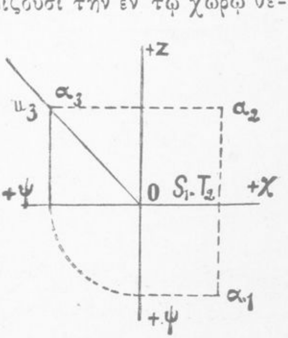


Σχ. 32

Παρατήρησις ΙΙ. — Ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τοῦ πίνακος (σχ. 32) ἡ ἑτέρα προβολὴ ἑκατέρου τῶν ἰχνῶν S_1 καὶ T_2, ἵνα ταῦτα μόνον θεωρήσωμεν, κεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος X (ἐδάφ. 29 β΄). Οὕτως ἡ δευτέρα προβολὴ τοῦ S_1, δηλαδὴ S_2, ὡς καὶ ἡ πρώτη προβολὴ τοῦ T_2, δηλαδὴ T_1, κεῖνται ἐπὶ τοῦ ἄξονος X.

34) Θέσεις ἐπιπέδου ὡς πρὸς τὸν ἄξονα X καὶ πρὸς τὰ δύο Προ. Ἐπι. E_1 καὶ E_2. — Αἱ διάφοροι θέσεις ἐπιπέδου ὡς πρὸς τὸν ἄξονα X εἶνε αἱ ἑπόμεναι τρεῖς : ἢ α΄) διέρχεται τὸ ἐπίπεδον διὰ τοῦ ἄξονος X, ἢ β΄) εἶνε παράλληλον τούτῳ, ἢ γ΄) τέμνει αὐτόν. Εἰς ἑκάστην τῶν περιπτώσεων τούτων ἀντιστοιχοῦσι καὶ ἰδιαίτεραι θέσεις τοῦ ἐπιπέδου ὡς πρὸς τὰ Προ. Ἐπι. E_1 καὶ E_2, τὰς ὁποίας μανθάνομεν ἐκ τῆς πρὸς ἄλληλα καὶ πρὸς τὸν ἄξονα X θέσεως τῶν ἰχνῶν αὐτοῦ·

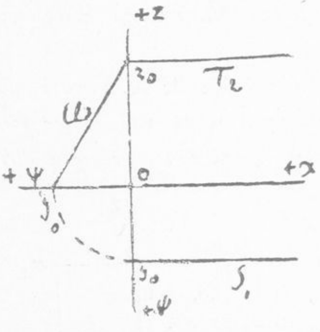
α΄) *Ὅταν τὸ ἐπίπεδον διέρχηται διὰ τοῦ ἄξονος X*, τότε ἀμφότερα τὰ ἴχνη αὐτοῦ S_1 καὶ T_2 ταυτίζονται μετὰ τοῦ ἄξονος τούτου (σχ. 33) καὶ ἐπομένως δὲν προσδιορίζουσι τὴν ἐν τῷ χώρῳ θέσιν τοῦ ἐπιπέδου· πρὸς τοῦτο δέον νὰ δοθῇ προσέτι καὶ ἓν τοὐλάχιστον σημεῖον α διὰ τῶν προβολῶν αὐτοῦ α_1 καὶ α_2. Ἐπειδὴ δὲ τὸ εἰρημένον ἐπίπεδον εἶνε κάθετον ἐπὶ τὸ Προ. Ἐπι. E_3, ἡ τρίτη προβολὴ τοῦ σημείου α, ὡς καὶ παντὸς σημείου τοῦ ἐπιπέδου, κεῖται ἐπὶ τοῦ τρίτου αὐτοῦ ἴχνους, διερχομένου προφανῶς διὰ τῆς ἀρχῆς O τῶν ἀξόνων, εἶνε ἄρα $U_3 = O\alpha_3$.



Σχ. 33

Τὸ ἐπίπεδον ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ δύναται νὰ κεῖται ἢ ἐν ἑνὶ τῶν Προ. Ἐπι. E_1, E_2, ἢ ἐν τῇ πρώτῃ καὶ τρίτῃ γωνίᾳ ἢ ἐν τῇ δευτέρᾳ καὶ τετάρτῃ γωνίᾳ τῶν Προ. Ἐπι., ἢ τέλος νὰ συμπίπτῃ μεθ' ἑνὸς τῶν ἐπιπέδων $H_{1\cdot 3}$ ἢ $H_{2\cdot 4}$. Περὶ ἑκάστης τῶν θέσεων τούτων κρίνομεν ἐκ τῆς θέσεως, ἣν ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας αἱ δύο προβολαὶ α_1 καὶ α_2 τοῦ δοθέντος σημείου α τοῦ ἐπιπέδου (1).

β΄) *Ὅταν τὸ ἐπίπεδον εἶνε παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα Χ*, τότε ἀμφότερα τὰ ἴχνη αὐτοῦ S_1 καὶ T_2 εἶνε ὡσαύτως παράλληλα πρὸς τὸν ἄξονα τοῦτον· καὶ ἂν μὲν τὸ ἐπίπεδον εἶνε παράλληλον ἑνὶ τῶν Προ. Ἐπι., τότε εἶνε κάθετον ἐπὶ τὸ ἕτερον, καὶ τὸ μὲν ἴχνος αὐτοῦ ἐπὶ ἐκείνου ἀφανίζεται εἰς τὸ ἄπειρον, ἐπὶ δὲ τοῦ τελευταίου εἶνε παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα Χ. Ἐὰν τὸ ἐπίπεδον πρὸς οὐδέτερον τῶν Προ. Ἐπι. εἶνε παράλληλον, τότε ἀμφότερα τὰ ἴχνη αὐτοῦ S_1 καὶ T_2 εἶνε παράλληλα πρὸς τὸν ἄξονα Χ, ἄρα καὶ πρὸς ἄλληλα (σχ. 34). Ἀλλ᾽ ἐὰν τὸ ἐπίπεδον εἶνε παράλληλον τῷ ἐπιπέδῳ $H_{2\cdot4}$ ἢ $H_{1\cdot3}$, τότε τὰ ἴχνη αὐτοῦ S_1 καὶ T_2 ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τοῦ πίνακος κεῖνται ἑκατέρωθεν καὶ εἰς ἴσας ἀποστάσεις ἀπὸ τοῦ ἄξονος Χ, ἢ ταυτίζονται εἰς μίαν καὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν.

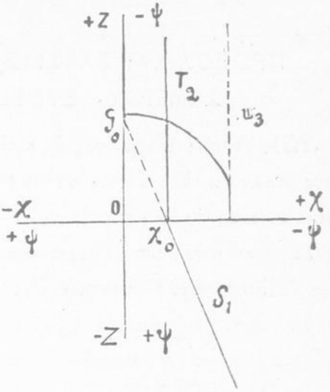


Σχ. 34

γ΄) *Ὅταν τὸ ἐπίπεδον τέμνῃ τὸν ἄξονα Χ*, τότε ἀμφότερα τὰ ἴχνη αὐτοῦ S_1 καὶ T_2 διέρχονται διὰ τοῦ σημείου τῆς τομῆς χ_0 (σχ. 35)· καὶ ἂν μὲν τὸ ἐπίπεδον εἶνε κάθετον ἐπὶ ἓν τῶν Προ. Ἐπι., ἔστω ἐπὶ τὸ E_1, κλίνῃ δὲ πρὸς τὸ ἕτερον E_2, τότε τὸ πρῶτον αὐτοῦ ἴχνος κλίνει πρὸς τὸν ἄξονα Χ, ἐν ᾧ τὸ δεύτερον T_2, ὡς κοινὴ τομὴ τοῦ δοθέντος καὶ τοῦ Προ. Ἐπι. E_2, ὄντων ἀμφοτέρων καθέτων ἐπὶ τὸ E_1, εἶνε κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονα Χ. Ἐὰν δὲ τὸ ἐπίπεδον εἶνε κάθετον ἐπ᾽ ἀμφότερα τὰ Προ. Ἐπι., τότε τὰ ἴχνη

(1) Ἀφήνεται εἰς τὸν μαθητὴν νὰ δείξῃ ἐκ τῶν προβολῶν α_1 καὶ α_2 τοῦ σημείου α τὰς διαφόρους ταύτας θέσεις τοῦ ἐπιπέδου καὶ νὰ κατασκευάσῃ καὶ τὸ τρίτον ἴχνος.

αὐτοῦ S_1 καὶ T_2 εἶνε ἀμφότερα κάθετα ἐπὶ τὸν ἄξονα X καὶ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τοῦ πίνακος ταυτίζονται καὶ ἀποτελοῦσι μίαν εὐθεῖαν κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονα X εἰς τὸ σημεῖον χ_0. Τέλος ἐὰν τὸ ἐπίπεδον κλίνῃ πρὸς ἀμφότερα τὰ Προ. Επι., τότε ἀμφότερα τὰ ἴχνη αὐτοῦ S_1 καὶ T_2 κλίνουσι πρὸς τὸν ἄξονα X.



Σχ. 35

Ἀντιστρόφως: δύο εὐθεῖαι ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τοῦ πίνακος ἀλληλοτομοῦσαι εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον τοῦ ἄξονος X ἢ παράλληλοι τούτῳ, δύνανται πάντοτε νὰ θεωρηθῶσιν ὡς ἴχνη ἑνὸς ἐπιπέδου τέμνοντος τὸν ἄξονα X ἢ παραλλήλου πρὸς αὐτόν. Ὁμοίως ἐὰν εὐθεῖά τις T_2 κειμένη ἐν τῷ Προ. Ἐπι. E_2 εἶνε κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα X, πᾶν ἐπίπεδον δι' αὐτῆς διερχόμενον εἶνε κάθετον ἐπὶ τὸ Προ. Ἐπι E_1· καὶ ἐὰν εὐθεῖά τις S_1 ἐν τῷ Προ. Ἐπι. E_1 κειμένη εἶνε κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα X, πᾶν ἐπίπεδον δι' αὐτῆς διερχόμενον εἶνε κάθετον ἐπὶ τὸ E_2· ἢ ἐὰν δύο εὐθεῖαι S_1 καὶ T_2 κεῖμεναι ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τοῦ πίνακος εἶνε κάθετοι ἐπὶ τὸν ἄξονα X εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον χ_0, αἱ εὐθεῖαι αὗται ὁρίζουσιν ἐπίπεδον κάθετον ἐπ' ἀμφότερα τὰ Προ. Ἐπι.

Ἐκ τῶν ἄνω εἰρημένων βλέπομεν ὅτι καὶ τὰ ἀντίστροφα τῶν ὑπὸ τὰ στοιχεῖα α, β, καὶ γ ἀληθεύουσι, καὶ ἄρα ἐκ τῆς πρὸς ἄλληλα καὶ πρὸς τὸν ἄξονα X θέσεως τῶν ἰχνῶν τοῦ ἐπιπέδου δυνάμεθα πάντοτε νὰ κρίνωμεν περὶ ἑκάστης τῶν θέσεων τοῦ ἐπιπέδου ὡς πρὸς τὰ Προ. Ἐπι.

Ἄσκησις. — Νὰ γραφῶσιν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τοῦ πίνακος τὰ δύο ἴχνη S_1 καὶ T_2 ἐπιπέδου ἔχοντος πάσας τὰς δυνατὰς θέσεις ὡς πρὸς τὰ Προ. Ἐπι. E_1 καὶ E_2, καὶ νὰ κατασκευασθῇ εἰς ἑκάστην τῶν θέσεων τούτων καὶ τὸ τρίτον ἴχνος αὐτοῦ U_3.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III

ΠΡΟΒΟΛΙΚΑΙ ΣΧΕΣΕΙΣ (Η ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ) ΜΕΤΑΞΥ ΣΗΜΕΙΟΥ, ΕΥΘΕΙΑΣ ΚΑΙ ΕΠΙΠΕΔΟΥ

35). Ὅσαι ἰδιότητες ἢ σχέσεις ἀναφέρονται μόνον εἰς τὴν πρὸς ἄλληλα θέσιν τῶν στοιχείων (σημείων καὶ γραμμῶν) γεωμετρικοῦ τινος σχήματος ἢ πολλῶν γεωμετρικῶν σχημάτων, χωρὶς νὰ λαμβάνωνται ὑπ' ὄψει γραμμικὰ ἢ γωνιώδη μεγέθη, λέγονται *Προβολικαί*, καὶ ἐν γενικωτέρᾳ ἐκδοχῇ τῆς λέξεως αὐτὰ ταῦτα τὰ ὑπ' ὄψει γεωμετρικὰ σχήματα λέγονται *Προβολικὰ σχήματα*.

Τοιαῦται π. χ. θεμελιώδεις προβολικαὶ γεωμετρικαὶ σχέσεις εἶνε αἱ ἑπόμεναι :

α') ἡ θέσις σημείου πρὸς εὐθεῖαν·

β') ἡ θέσις δύο εὐθειῶν πρὸς ἀλλήλας·

γ') ἡ θέσις σημείου πρὸς ἐπίπεδον·

δ') ἡ θέσις δύο ἐπιπέδων πρὸς ἄλληλα·

ε') ἡ θέσις εὐθείας πρὸς ἐπίπεδον.

36). Ἐκ τῶν μέχρι τοῦδε εἰρημένων περὶ παραστάσεως καὶ προβολῆς σημείου, εὐθείας καὶ ἐπιπέδου, καὶ ἐκ τῶν στοιχείων, ἕπονται αἱ ἑξῆς προτάσεις :

Αἱ προβολαὶ σημείου κεῖνται πάντοτε ἐπὶ τῶν ὁμωνύμων προβολῶν εὐθείας διερχομένης διὰ τοῦ σημείου τούτου.

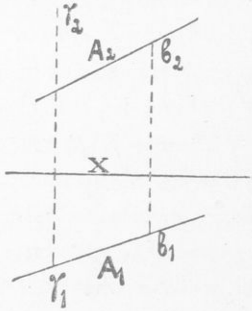
Τὰ ἴχνη πάσης εὐθείας κειμένης ἐν ἐπιπέδῳ κεῖνται πάντοτε ἐπὶ τῶν ὁμωνύμων ἰχνῶν τοῦ ἐπιπέδου.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι κεῖνται ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ, πᾶσα εὐθεῖα ἐπιζευγνύουσα δύο τυχόντα σημεῖα τῶν εὐθειῶν τούτων κεῖται ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ.

Αἱ εὐθεῖαι, ὧν τὰ ὁμώνυμα ἴχνη ὁρίζουσιν εὐθείας ἀλληλοτομούσας εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον τοῦ ἄξονος X ἢ παραλλήλως τῷ ἄξονι τούτῳ, κεῖνται ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ· ἐὰν δὲ τὰ ὁμώνυμα ἴχνη τῶν δύο εὐθειῶν οὐδεμίαν τῶν συνθηκῶν τούτων πληρῶσιν, αἱ εὐθεῖαι οὐδὲν ὁρίζουσιν ἐπίπεδον.

Α΄) ΘΕΣΕΙΣ ΣΗΜΕΙΟΥ ΠΡΟΣ ΕΥΘΕΙΑΝ

37). Αἱ διάφοροι θέσεις σημείου ὡς πρὸς εὐθεῖαν εἶνε δύο: ἢ κεῖται τὸ σημεῖον ἐπὶ τῆς εὐθείας ἢ οὔ. Ἐπειδὴ αἱ προβολαὶ εὐθείας εἶνε ὁ τόπος τῶν προβολῶν ὅλων τῶν σημείων αὐτῆς, ἕπεται ὅτι κριτήριον τῆς ἐν τῷ χώρῳ θέσεως σημείου πρὸς εὐθεῖαν εἶνε, ἐν γένει, ἡ πρὸς ἀλλήλας θέσις τῶν δύο προβολῶν αὐτῶν· ὅτι δηλαδὴ σημεῖόν τι β (σχ. 36) κεῖται ἐπ' εὐθείας τινὸς Α, ὅταν ἀμφότεραι αἱ προβολαὶ β_1 καὶ β_2 αὐτοῦ κεῖνται ἐπὶ τῶν ὁμωνύμων προβολῶν A_1 καὶ A_2 τῆς εἰρημένης εὐθείας. Ἐὰν μόνον ἡ μία τῶν προβολῶν γ_1 τοῦ τυχόντος σημείου γ κεῖται ἐπὶ τῆς ὁμωνύμου προβολῆς A_1 τῆς εὐθείας Α, τότε τὸ σημεῖον κεῖται ἐπὶ τοῦ προβάλλοντος τὴν εὐθεῖαν ἐπιπέδου, ἀλλ' οὐχὶ καὶ ἐπὶ τῆς εὐθείας. Παρατηρητέον ἐπίσης ὅτι, ὅταν ἡ εὐθεῖα κεῖται ἐπὶ ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὸν ἄξονα Χ, αἱ δύο προβολαὶ αὐτῆς δὲν ἀρκοῦσιν, ἵνα ὁρίσωσι τὴν ἐν τῷ χώρῳ θέσιν τοῦ σημείου πρὸς τὴν εὐθεῖαν, ἀλλ' ἀπαιτοῦνται πρὸς τοῦτο αἱ τρίται προβολαὶ τῶν εἰρημένων σχημάτων.



Σχ. 36

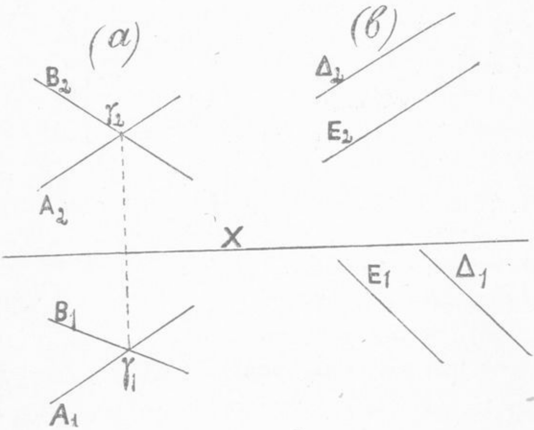
Β΄) ΘΕΣΕΙΣ ΔΥΟ ΕΥΘΕΙΩΝ ΠΡΟΣ ΑΛΛΗΛΑΣ

38). Αἱ διάφοροι θέσεις δύο εὐθειῶν πρὸς ἀλλήλας εἶνε τρεῖς:

1) ἢ ἀλληλοτομοῦσιν } ὁπότε κεῖνται ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ, ἢ
2) ἢ εἶνε παράλληλοι }

3) δὲν κεῖνται ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ, ὅτε οὔτε ἀλληλοτομοῦσιν οὔτε παράλληλοι εἶνε.

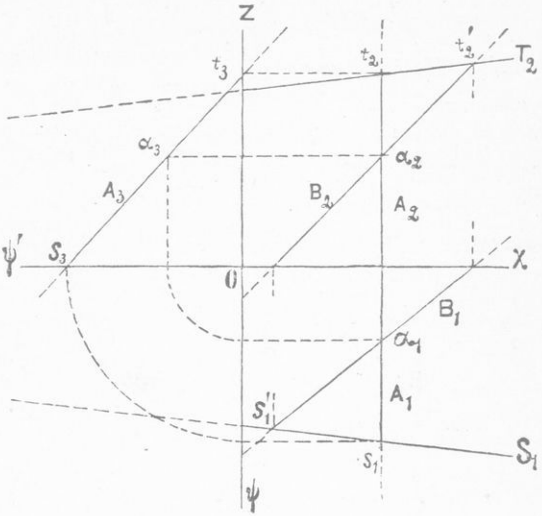
Ὅταν δύο εὐθεῖαι A καὶ B ἀλληλοτομῶσιν, αἱ δύο προβολαὶ γ_1, γ_2 τοῦ σημείου τῆς τομῆς αὐτῶν γ δέον, κατὰ τὰ προειρημένα, νὰ κεῖνται ἑκατέρα ἐπὶ τῶν ὁμωνύμων προβολῶν (A_1, B_1), (A_2, B_2) ἀμφοτέρων τῶν εὐθειῶν (σχ. 37 (α)), ἐν ταὐτῷ δέ, ὡς προβολαὶ ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου τοῦ χώρου, καὶ ἐπὶ εὐθείας καθέτου ἐπὶ τὸν ἄξονα X. Ἀντιστρόφως, δύο εὐθεῖαι A καὶ B ἀλληλοτομοῦσιν *ἐν γένει*, ὅταν τὰ σημεῖα γ_1 καὶ γ_2 τῆς τομῆς τῶν ὁμωνύμων προβολῶν αὐτῶν A_1, B_1 καὶ A_2, B_2 κεῖνται ἐπὶ μιᾶς εὐθείας καθέτου ἐπὶ τὸν ἄξονα X.



Σχ. 37

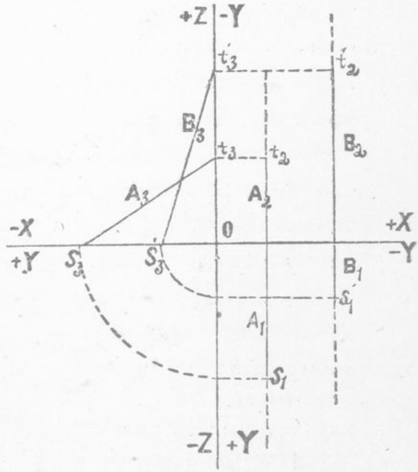
Ὅταν δύο εὐθεῖαι Δ καὶ E (σχ. 37 (β)) εἶνε παράλληλοι καὶ αἱ ὁμώνυμοι αὐτῶν προβολαὶ εἶνε παράλληλοι (ἐδάφ.8). Καὶ ἀντιστρόφως δύο εὐθεῖαι εἶνε *ἐν γένει* παράλληλοι, ὅταν αἱ ὁμώνυμοι προβολαὶ αὐτῶν εἶνε παράλληλοι. Ἄρα· «*Δύο εὐθεῖαι κεῖνται ἐν γένει ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ, ὅταν ἢ τὰ σημεῖα τῆς τομῆς τῶν ὁμωνύμων προβολῶν αὐτῶν κεῖνται ἐπ' εὐθείας καθέτου ἐπὶ τὸν ἄξονα X ἢ αἱ ὁμώνυμοι προβολαὶ αὐτῶν εἶνε παράλληλοι*». Εἰς πᾶσαν ἄλλην περίπτωσιν αἱ εὐθεῖαι δὲν κεῖνται ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ.

Ἀλλ' ἐὰν ἡ ἑτέρα τῶν εὐθειῶν, ἔστω ἡ A, ἢ καὶ ἀμφότεραι αἱ δοθεῖσαι διὰ τῶν προβολῶν αὐτῶν εὐθεῖαι κεῖνται ἐπὶ ἐπιπέδου



Σχ. 38

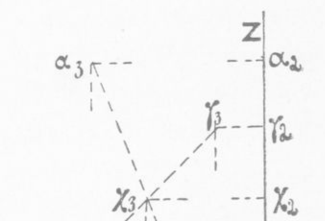
καθέτου ἐπὶ τὸν ἄξονα X, τότε αἱ δύο μόνον προβολαὶ (πρώτη καὶ δευτέρα) τῶν εὐθειῶν A καὶ B δὲν ἐπαρκοῦσιν ἵνα γνωρίσωσιν ἡμῖν τὴν ἐν τῷ χώρῳ θέσιν τῶν εἰρημένων εὐθειῶν. Τῷ ὄντι ἐν τῇ πρώτῃ περιπτώσει, καθ' ἣν ἡ εὐθεῖα A κεῖται ἐπὶ ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὸν ἄξονα X, (σχ. 38) τὰ σημεῖα α_1 καὶ α_2 τῆς τομῆς τῶν ὁμωνύμων προβολῶν τῶν εὐθειῶν A καὶ B κεῖνται ἐπὶ εὐθείας καθέτου ἐπὶ τὸν ἄξονα X, ἀλλὰ τοῦτο δὲν δύναται νὰ ληφθῇ ὡς ἀσφαλὲς κριτήριον ὅτι αἱ δύο εὐθεῖαι ἀλληλοτομοῦσιν· ἵνα τοῦτο



Σχ. 39

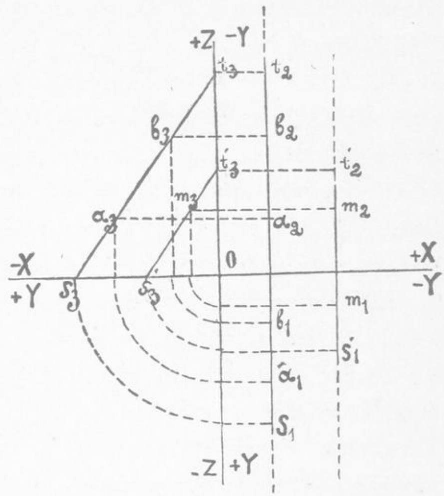
συμβαίνῃ, δέον ἡ εὐθεῖα Α νὰ διέρχεται διὰ τῆς τομῆς α τῆς εὐθείας Β μετὰ τοῦ ἐπὶ τὸν ἄξονα Χ καθέτου ἐπιπέδου, δέον ἐπομένως ἡ τρίτη προβολὴ $α_3$ τοῦ σημείου α νὰ κεῖται ἐπὶ τῆς τρίτης προβολῆς $Α_3$ τῆς εὐθείας Α. Ὁμοίως ἐὰν αἱ εὐθεῖαι Α καὶ Β εἶνε κάθετοι ἐπὶ τὸν ἄξονα Χ καὶ κεῖνται εἰς δύο διάφορα ἐπίπεδα κάθετα ἐπὶ τὸν ἄξονα τοῦτον (σχ. 39), αἱ ὁμώνυμοι προβολαὶ $Α_1$, $Β_1$ καὶ $Α_2$, $Β_2$ αὐτῶν εἶνε παράλληλοι, ἀλλ' αἱ εὐθεῖαι τότε μόνον εἶνε παράλληλοι, ὅταν καὶ αἱ τρίται αὐτῶν προβολαὶ εἶνε ὡσαύτως παράλληλοι, ἄλλως (ὅπως ἐπὶ τοῦ προκειμένου) αἱ εὐθεῖαι δὲν κεῖνται ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ.

Ἐὰν ἀμφότεραι αἱ εὐθεῖαι Α καὶ Β κεῖνται ἐν ἑνὶ καὶ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ καθέτῳ ἐπὶ τὸν ἄξονα Χ, αἱ εὐθεῖαι αὗται ἀλληλοτομοῦσιν ἢ εἶνε παράλληλοι, καθ' ὅσον αἱ τρίται αὐτῶν προβολαὶ ποιοῦσι τὸ αὐτὸ (σχ. 40).



Σχ 40

39) Πρόβλημα. — *Διὰ δοθέντος σημείου ν' ἀχθῇ εὐθεῖα παρὰ δοθεῖσαν εὐθεῖαν.* Ἐὰν ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα δὲν εἶνε κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα Χ, ἀρκεῖ πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος νὰ ἀχθῶσιν ἀπὸ τῶν δύο προβολῶν τοῦ δοθέντος σημείου εὐθεῖαι παράλληλοι πρὸς τὰς ὁμωνύμους προβολὰς τῆς δοθείσης εὐθείας· αἱ παράλληλοι αὗται εἶνε, συμφώνως πρὸς τὰ προειρημένα, αἱ προβολαὶ τῆς ζητουμένης εὐθείας. Ἀλλ' ἐὰν ἡ διὰ τῶν δύο προβολῶν ($α_1$, $α_2$) καὶ ($β_1$, $β_2$) δύο σημείων αὐτῆς α καὶ β δοθεῖσα εὐθεῖα εἶνε κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα Χ (σχ. 41), τότε ἡ πρὸς αὐτὴν ἠγμένη παρἀλληλος καὶ διὰ τοῦ δοθέντος σημείου (m_1, m_2) διερχομένη εὐθεῖα δὲν ὁρίζεται ἐντελῶς διὰ τῆς πρώτης καὶ δευτέρας αὐτῆς προβολῆς· τούτου ἕνεκα κατασκευάζομεν τὴν τρίτην προβολὴν $α_3 β_3$ τῆς δοθείσης εὐθείας, καὶ τὴν τρίτην προβολὴν m_3 τοῦ δοθέντος σημείου, καὶ ἄγομεν διὰ τοῦ σημείου m_3 καὶ παρὰ τὴν $α_3 β_3$ τὴν εὐθεῖαν $s_3 t_3$. Ἡ τελευταία αὕτη εἶνε ἡ τρίτη προβολὴ εὐθείας διερχομένης διὰ τοῦ m καὶ παραλλήλου πρὸς τὴν αβ. Κατὰ τοῦτον τὸν τρόπον τὴν ἐν τῷ



Σχ. 41

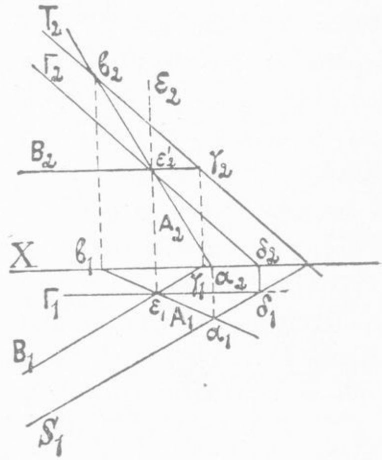
χώρῳ θέσιν τῆς ζητουμένης εὐθείας καθορίζομεν ἐντελῶς διὰ τῆς τρίτης αὐτῆς προβολῆς, ἐξ ἧς εὐκόλως ποριζόμεθα διὰ κατασκευῆς τοῦ πρώτου καὶ δευτέρου ἴχνους s_1 καὶ t_2 τῆς εὐθείας καὶ τὰς λοιπὰς δύο αὐτῆς προβολὰς $m_1 s_1$ καὶ $m_2 t_2$.

Γ΄) ΘΕΣΕΙΣ ΣΗΜΕΙΟΥ ΠΡΟΣ ΕΠΙΠΕΔΟΝ

40) Αἱ διάφοροι θέσεις σημείου ὡς πρὸς ἐπίπεδον εἶνε δύο: ἢ κεῖται τὸ σημεῖον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ἢ οὔ. Ἐν τῇ πρώτῃ περιπτώσει αἱ δύο προβολαὶ τοῦ σημείου δέον νὰ κεῖνται ἐπὶ τῶν ὁμωνύμων προβολῶν εὐθείας κειμένης ὅλης ἐν τῷ ἐπιπέδῳ καὶ διερχομένης διὰ τοῦ εἰρημένου σημείου· ἐξ ὅλων δὲ τῶν εὐθειῶν τοῦ ἐπιπέδου τῶν διὰ τοῦ δοθέντος σημείου διερχομένων ἐκλέγομεν συνήθως μίαν τῶν ἰχνοπαραλλήλων αὐτοῦ (ἐδάφ. 10) *πρώτην* ἢ *δευτέραν*, ἤτοι τὴν παρὰ τὸ πρῶτον ἴχνος S_1 ἢ τὸ δεύτερον T_2 ἠγμένην εὐθεῖαν τοῦ ἐπιπέδου.

41) Πρόβλημα. — *Ἐπὶ δοθέντος ἐπιπέδου νὰ γραφῇ τυχοῦσα εὐθεῖα.* Δύο τυχόντα σημεῖα α_1, β_2 κείμενα ἑκάτερον ἐπὶ ἑκατέρου τῶν ἰχνῶν S_1 καὶ T_2 (σχ. 42) τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου δύνανται νὰ θεωρηθῶσι πάντοτε ὡς ἴχνη μιᾶς εὐθείας A κειμένης ὅλης ἐπὶ τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου· ἐκ τῶν ἰχνῶν δὲ τῆς εὐθείας κατασκευάζονται, κατὰ τὰ γνωστά, αἱ δύο αὐτῆς προβολαὶ $A_1=\alpha_1\beta_1$ καὶ $A_2=\alpha_2\beta_2$.

Ἐὰν ἡ εὐθεῖα, τὴν ὁποίαν θέλομεν νὰ γράψωμεν ἐπὶ τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου, εἶνε μία τῶν ἰχνοπαραλλήλων αὐτοῦ *πρώτη* ἢ *δευτέρα*, τότε ἡ ἑτέρα τῶν προβολῶν αὐτῆς εἶνε παράλληλος πρὸς τὸ ὁμώνυμον αὐτῇ ἴχνος τοῦ ἐπιπέδου, ἡ δὲ λοιπὴ παράλληλος τῷ ἄξονι X.



Σχ. 42

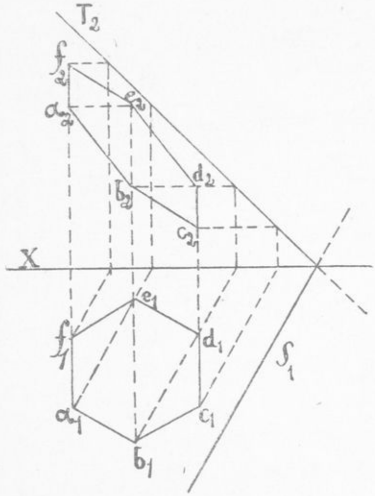
Ἐὰν ἄρα εἰς τυχοῦσαν ἀπὸ του πρώτου ἴχνους S_1 τοῦ ἐπιπέδου ἀπόστασιν καὶ παραλλήλως πρὸς αὐτὸ ἀχθῇ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τοῦ πίνακος ἡ εὐθεῖα B_1, ἡ τελευταία αὕτη παριστᾷ τὴν πρώτην προβολὴν *πρώτης* ἰχνοπαραλλήλου εὐθείας B τοῦ ἐπιπέδου, ἐν ᾧ ἡ δευτέρα προβολὴ B_2 τῆς αὐτῆς εὐθείας διέρχεται διὰ τοῦ δευτέρου αὐτῆς ἴχνους γ_2, ὁριζομένου ἐκ τῆς πρώτης αὐτοῦ προβολῆς γ_1, καὶ εἶνε παράλληλος τῷ ἄξονι X. Κατ' ἀνάλογον τρόπον κατασκευάζονται αἱ προβολαὶ Γ_1 καὶ Γ_2 *δευτέρας* ἰχνοπαραλλήλου εὐθείας Γ τοῦ ἐπιπέδου.

42) Πρόβλημα. — *Δεδομένης τῆς ἑτέρας τῶν προβολῶν εὐθείας κειμένης ἐπὶ δεδομένου ἐπιπέδου, νὰ κατασκευασθῇ ἡ ἑτέρα.* Ἔστω ὅτι δίδεται ἡ πρώτη προβολὴ A_1 τῆς τυχούσης εὐθείας A τοῦ ἐπιπέδου οὕτως, ὥστε νὰ τέμνῃ τὸ πρῶτον ἴχνος S_1 τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου καὶ τὸν ἄξονα X εἰς τὰ σημεῖα $α_1$ καὶ $β_1$ (σχ. 42)· τὰ σημεῖα ταῦτα εἶνε, τὸ μὲν $α_1$, τὸ πρῶτον ἴχνος τῆς εὐθείας Α, τὸ δὲ $β_1$ ἡ πρώτη προβολὴ τοῦ δευτέρου αὐτῆς ἴχνους. Αἱ ἐκ τῶν σημείων τούτων $α_1$ καὶ $β_1$ ἀγόμεναι κάθετοι ἐπὶ τὸν ἄξονα X ὁρίζουσιν ἀντιστοίχως ἐπὶ τούτου καὶ ἐπὶ τοῦ δευτέρου ἴχνους T_2 τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου τὰ σημεῖα $α_2$ καὶ $β_2$, ἡ δ' ἐπὶ τὰ τελευταῖα ταῦτα σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα $α_2β_2=A_2$ εἶνε ἡ δευτέρα προβολὴ εὐθείας Α τοῦ ἐπιπέδου, ἐχούσης πρώτην προβολὴν τὴν εὐθεῖαν A_1. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἐκ τῆς δευτέρας προβολῆς εὐθείας κειμένης ἐπὶ ἐπιπέδου κατασκευάζεται ἡ πρώτη αὐτῆς προβολή.

Ἐὰν ἡ δοθεῖσα πρώτη προβολὴ B_1 (σχ. 42) εἶνε παράλληλος πρὸς τὸ πρῶτον ἴχνος S_1 τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου, τότε ἡ ἐν τῷ εἰρημένῳ ἐπιπέδῳ εὐθεῖα B εἶνε πρώτη ἰχνοπαράλληλος αὐτοῦ, τῆς ὁποίας ἡ δευτέρα προβολὴ B_2 κατασκευάζεται συμφώνως πρὸς τὸ προηγούμενον πρόβλημα.

43) ***Πρόβλημα.***—*Δεδομένων τῶν δύο προβολῶν σημείου καὶ τῶν δύο ἰχνῶν ἐπιπέδου, εὑρεῖν τὴν ἐν τῷ χώρῳ πρὸς ἄλληλα θέσιν αὐτῶν.* Ἔστωσαν (σχ. 42) $ε_1$, $ε_2$ αἱ προβολαὶ τοῦ δοθέντος σημείου καὶ S_1, T_2 τὰ ἴχνη τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου. Ἄς ἀχθῇ διὰ τῆς ἑτέρας τῶν προβολῶν τοῦ σημείου ε, ἔστω τῆς $ε_1$, ἡ πρώτη προβολὴ B_1 τῆς πρώτης ἰχνοπαραλλήλου (ἢ καὶ τυχούσης) εὐθείας B τοῦ ἐπιπέδου, καὶ ἂς κατασκευασθῇ, συμφώνως πρὸς τὰ προειρημένα, ἡ δευτέρα αὐτῆς προβολὴ B_2· ἐὰν ἡ τελευταία αὕτη διέρχηται διὰ τῆς δευτέρας προβολῆς $ε_2$ τοῦ δοθέντος σημείου ε, ἕπεται (ἐδάφ. 40) ὅτι τὸ εἰρημένον σημεῖον κεῖται ἐπὶ τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου (S_1,T_2), εἰ δὲ μή, ὅπως ἐν τῇ προκειμένῃ περιπτώσει, κεῖται ἐκτὸς αὐτοῦ.

Ἐπειδὴ ἡ πρώτη ἢ ἡ δευτέρα προβολὴ τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου (S_1,T_2) εἶνε ἅπαν τὸ Προ. Επι. E_1 ἢ E_2, ἕπεται ὅτι τὸ τυχὸν σημεῖον $ε_1$ τοῦ ἑτέρου τῶν Προ. Επι., ἔστω τοῦ E_1, εἶνε προβολὴ ἑνὸς σημείου ε τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου, καὶ ἄρα ἡ δευτέρα αὐτοῦ προβολὴ ε'_2 (σχ. 42) δέον νὰ κεῖται ἐπὶ τῆς δευτέρας προβολῆς τῆς πρώτης ἰχνοπαραλλήλου (ἢ καὶ τυχούσης) εὐθείας τοῦ ἐπιπέδου τῆς διερχομένης διὰ τοῦ σημείου ε. Τὸν τρόπον τοῦτον, καθ' ὅν, δοθείσης τῆς ἑτέρας τῶν προβολῶν σημείου ἢ εὐθείας, προσδιορίζομεν τὴν ἑτέραν οὕτως, ὥστε τὸ σημεῖον ἢ ἡ εὐθεῖα νὰ κεῖνται ἐν ἐπιπέδῳ δεδομένῳ διὰ τῶν ἰχνῶν αὐτοῦ, ἐφαρμόζομεν ἐπιτυχῶς καὶ εἰς τυχὸν ἐπίπεδον σχῆμα, ὡς ἕπεται.

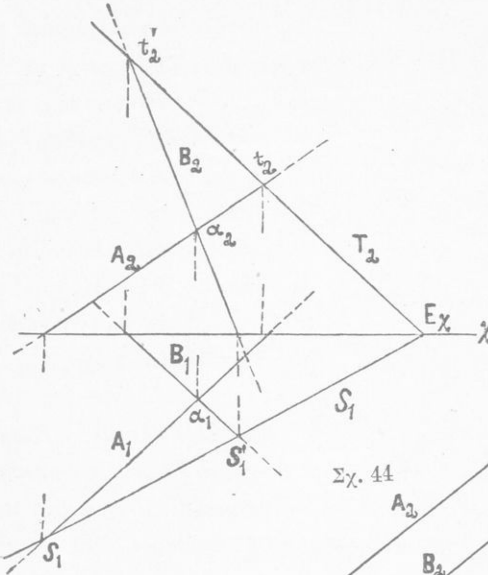


Σχ. 43.

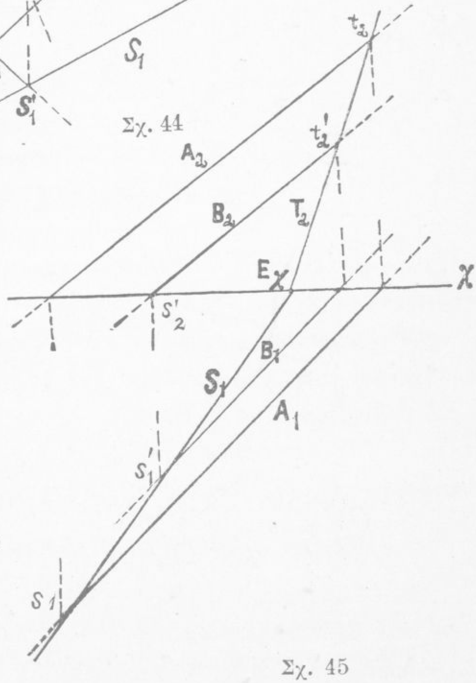
44) ***Πρόβλημα.***—*Νὰ κατασκευασθῇ ἡ δευτέρα προβολὴ πολυγώνου κειμένου ἐπὶ δεδομένου ἐπιπέδου καὶ ἔχοντος ὡς πρώτην προβολὴν κανονικὸν ἑξάγωνον.* Ἡ λύσις καὶ ἡ κατασκευὴ (σχ. 43) τοῦ προβλήματος τούτου ἀνάγεται εἰς τὸ προηγούμενον, διότι ἀρκεῖ νὰ κατασκευασθῶσιν αἱ δεύτεραι προβολαὶ τῶν κορυφῶν τοῦ πολυγώνου οὕτως, ὥστε αἱ κορυφαὶ αὗται, καὶ ἄρα τὸ πολύγωνον, νὰ κεῖνται ἐπὶ τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου (S_1, T_2).

ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΙΧΝΩΝ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ ΙΚΑΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΑΥΤΟΥ.

45) ***Πρόβλημα.***—*Εὑρεῖν τὰ ἴχνη ἐπιπέδου, τοῦ ὁποίου δίδονται δύο εὐθεῖαι ἀλληλοτομοῦσαι ἢ παράλληλοι.* Ἐκ τῶν προβολῶν A_1, A_2 καὶ B_1, B_2 τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν A καὶ B (σχ. 44 καὶ 45) εὑρίσκομεν τὰ ἴχνη αὐτῶν s_1, t_2 καὶ s'_1, t'_2· αἱ εὐθεῖαι αἱ ἐπιζευγνύουσαι τὰ ὁμώνυμα ἴχνη s_1, s'_1 καὶ t_2, t'_2 τῶν εἰρημένων



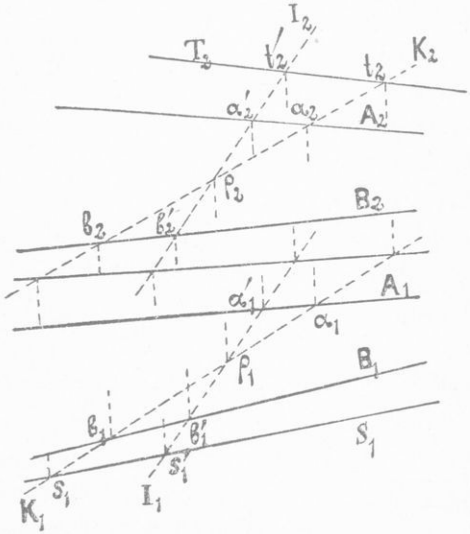
Σχ. 44



Σχ. 45

εὐθειῶν Α καὶ Β ὁρίζουσι τὰ ὁμώνυμα ἴχνη S_1 καὶ T_2 τοῦ ἐπιπέδου αὐτῶν.

Ἐὰν τὰ ἴχνη τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν A καὶ B κεῖνται εἴτε τινὰ εἴτε καὶ ὅλα ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου τοῦ πίνακος, τότε ποιούμεθα χρῆσιν δύο βοηθητικῶν εὐθειῶν I καὶ K (σχ. 46), ἑκατέρα τῶν ὁποίων τέμνει τὴν εὐθεῖαν A καὶ τὴν B καὶ τὰς ὁποίας λαμβάνομεν οὕτως, ὥστε τὰ ἴχνη αὐτῶν s_1, t_2 καὶ s'_1, t'_2 νὰ κεῖνται ἐντὸς τοῦ ἐπιπέδου τοῦ πίνακος· αἱ εὐθεῖαι αἱ ἐπὶ τὰ ὁμώνυμα ἴχνη τῶν δύο τούτων εὐθειῶν I καὶ K ἐπιζευγνύμεναι ὁρίζουσι τὰ ὁμώνυμα ἴχνη S_1 καὶ T_2 τοῦ ἐπιπέδου τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν A καὶ B.

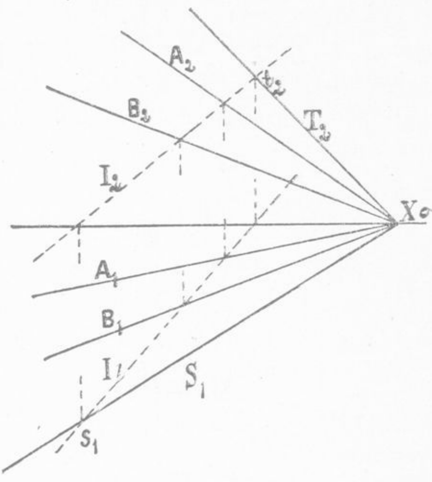


Σχ. 46

Σημείωσις.— Ἐπειδὴ αἱ ὁμώνυμοι προβολαὶ τῶν εὐθειῶν A καὶ B δὲν ἀλληλοτομοῦσιν ἐντὸς τοῦ χάρτου τῆς σχεδιάσεως, διὰ τοῦτο δὲν δυνάμεθα νὰ γνωρίζωμεν ἐκ τῶν προτέρων, ἂν αἱ δοθεῖσαι εὐθεῖαι κεῖνται ἢ οὒ ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ· τοῦτο μανθάνομεν ἐκ τῶν σημείων τομῆς ρ_1 καὶ ρ_2 τῶν ὁμωνύμων προβολῶν τῶν βοηθητικῶν εὐθειῶν I καὶ K, ἤτοι καθ' ὅσον τὰ σημεῖα ταῦτα κεῖνται ἢ οὒ ἐπὶ εὐθείας καθέτου ἐπὶ τὸν ἄξονα X, αἱ εὐθεῖαι A καὶ B κεῖνται ἢ οὒ ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ: ἢ ἀκόμη καὶ ἐκ τῶν εὐθειῶν S_1 καὶ

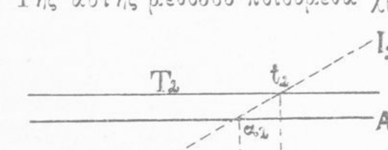
T_2, ἤτοι καθ' ὅσον αἱ εὐθεῖαι αὗται ἀλληλοτομοῦσιν εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον τοῦ ἄξονος X, ἢ εἶνε παράλληλοι τούτῳ, αἱ δοθεῖσαι εὐθεῖαι A καὶ B κεῖνται ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ, ἄλλως αἱ εἰρημέναι εὐθεῖαι οὔτε ἀλληλοτομοῦσιν οὔτε παράλληλοι εἶνε.

Ἐὰν αἱ δοθεῖσαι εὐθεῖαι A καὶ B ἀλληλοτομῶσιν εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον x_0 τοῦ ἄξονος X (σχ. 47), ἀρκεῖ μία μόνον βοηθητικὴ εὐθεῖα I τέμνουσα τὰς δοθείσας A καὶ B· διότι ἂν ἑκάτερον τῶν ἰχνῶν s_1 καὶ t_2 τῆς βοηθητικῆς ταύτης εὐθείας ἐπιζεύξωμεν δι' εὐθείας μετὰ τοῦ σημείου x_0, ὅπερ εἶνε κοινὸν σημεῖον τῶν ζητουμένων ἰχνῶν, πορίζόμεθα τὰ εἰρημένα ἴχνη S_1 καὶ T_2 τοῦ ἐπιπέδου τῶν εὐθειῶν A,B.



Σχ. 47

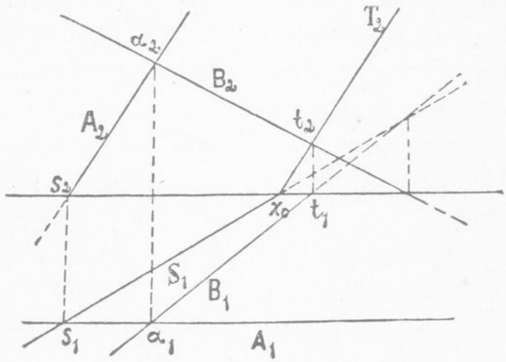
Τῆς αὐτῆς μεθόδου ποιούμεθα χρῆσιν καὶ ὅταν τὸ σημεῖον x_0 ἀφανισθῇ εἰς τὸ ἄπειρον, τουτέστιν ὅταν αἱ δοθεῖσαι εὐθεῖαι εἶνε ἀμφότεραι παράλληλοι τῷ ἄξονι X (σχ. 48), διότι τότε τοῦ ἐπιπέδου τῶν δύο εὐθειῶν A καὶ B ὄντος παραλλήλου τῷ ἄξονι X καὶ τὰ ἴχνη αὐτοῦ S_1 καὶ T_2 θὰ εἶνε ὡσαύτως παράλληλα τῷ ἄξονι τούτῳ καὶ ἑπομένως ἓν μόνον σημεῖον ἑκατέρου τούτων ἐπαρκεῖ πρὸς καθορισμὸν τῆς θέσεως αὐτοῦ. Τὰ σημεῖα ταῦτα εἶνε τὰ ἴχνη s_1 καὶ t_2 τῆς βοηθητικῆς εὐθείας



Σχ. 48

I· αἱ δὲ διὰ τούτων καὶ παρὰ τὸν ἄξονα X ἀγόμεναι εὐθεῖαι S_1 καὶ T_2 εἶνε τὰ ἴχνη τοῦ ἐπιπέδου (A,B).

Ἐὰν ἡ ἑτέρα τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν A καὶ B, ἔστω ἡ A, εἶνε ἰχνοπαράλληλος τοῦ ἐπιπέδου αὐτῶν (A, B), π. χ. δευτέρα, τότε τὸ δεύτερον ἴχνος T_2 τοῦ εἰρημένου ἐπιπέδου (A, B) θὰ εἶνε παράλληλον τῇ ὁμωνύμῳ προβολῇ τῆς εὐθείας A, καὶ ἄρα πρὸς προσδιορισμὸν τῆς θέσεως αὐτοῦ ἀρκεῖ μόνον τὸ δεύτερον ἴχνος t_2 τῆς εὐθείας B (σχ. 49)· ἐν ᾧ τὸ πρῶτον ἴχνος S_1 τοῦ εἰρημένου



Σχ. 49

ἐπιπέδου ὁρίζεται ὑπὸ τῆς εὐθείας, ἥτις ἐπιζευγνύει τὸ πρῶτον ἴχνος s_1 τῆς εὐθείας A μετὰ τοῦ σημείου τῆς τομῆς x_0 τοῦ δευτέρου ἴχνους T_2 καὶ τοῦ ἄξονος X.

46) Πρόβλημα. — *Εὑρεῖν τὰ ἴχνη ἐπιπέδου, τοῦ ὁποίου δίδονται α΄) ἢ μία εὐθεῖα καὶ ἓν σημεῖον ἐκτὸς τῆς εὐθείας κείμενον, ἢ β΄) τρία σημεῖα μὴ ἐπ' εὐθείας κείμενα.* α΄) Ἐὰν διὰ τοῦ δοθέντος σημείου καὶ παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἀχθῇ ἑτέρα εὐθεῖα, αἱ προβολαὶ ταύτης θὰ εἶνε παράλληλοι πρὸς τὰς ὁμωνύμους προβολὰς τῆς δοθείσης εὐθείας, καὶ ἑπομένως ἡ κατασκευὴ τοῦ προτεθέντος προβλήματος ἀνάγεται εἰς τὸ προηγούμενον (45) (παράβ. σχ. 45). β΄) Ἐὰν ἐπιζεύξωμεν δι' εὐθειῶν τὰς ὁμωνύμους προβολὰς α_1, β_1, γ_1, καὶ α_2, β_2, γ_2 τῶν τριῶν δοθέντων σημείων α, β, γ, πορίζόμεθα τὰς προβολὰς εὐθειῶν ἀλληλοτομουσῶν ἀνὰ δύο καὶ κειμένων ἐν τῷ ἐπιπέδῳ (α, ϐ, γ), ἡ κατασκευὴ ἄρα τῶν ἰχνῶν τοῦ εἰρημένου ἐπιπέδου ἀνάγεται πάλιν εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα (45) (παράϐ. σχ. 44).

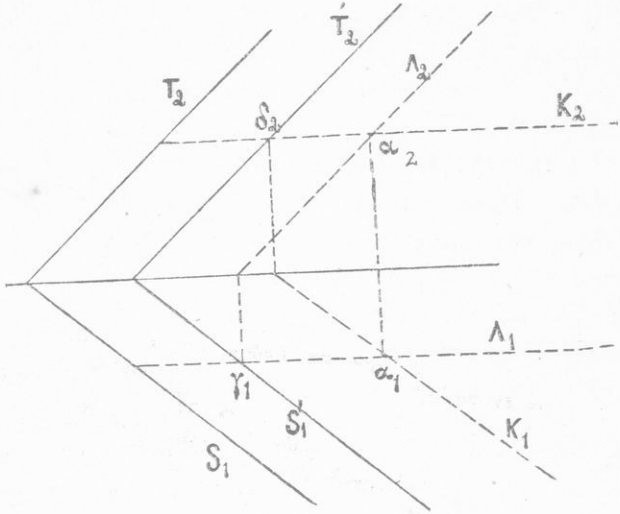
Δ') ΘΕΣΕΙΣ ΔΥΟ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΠΡΟΣ ΑΛΛΗΛΑ

47) Αἱ διάφοροι θέσεις δύο ἐπιπέδων πρὸς ἄλληλα εἶνε δύο: ἢ εἶνε παράλληλα ἢ τέμνουσιν ἄλληλα κατά τινα εὐθεῖαν.

48) ***Παράλληλα ἐπίπεδα.*** — Ἐπειδὴ δύο παράλληλα ἐπίπεδα τέμνονται ὑπὸ τρίτου κατὰ δύο εὐθείας παραλλήλους, ἕπεται ὅτι τὰ ὁμώνυμα ἴχνη δύο παραλλήλων ἐπιπέδων εἶνε παράλληλα· καὶ ἀντιστρόφως, ἐὰν ἀμφότερα τὰ ζεύγη τῶν ὁμωνύμων ἰχνῶν δύο ἐπιπέδων εἶνε παράλληλα, τὰ ἐπίπεδα εἶνε *ἐν γένει* παράλληλα.

Ὅταν ἀμφότερα τὰ ζεύγη τῶν ὁμωνύμων ἰχνῶν δύο ἐπιπέδων εἶνε ἐν ταὐτῷ παράλληλα καὶ πρὸς τὸν ἄξονα X, τότε ἐκ τοῦ παραλληλισμοῦ τῶν ὁμωνύμων ἰχνῶν δὲν ἕπεται ἀναγκαίως ὁ παραλληλισμὸς τῶν ἐπιπέδων· ἵνα τὸ τελευταῖον τοῦτο συμβαίνῃ, δέον καὶ τὰ τρίτα ἴχνη τῶν δύο ἐπιπέδων νὰ εἶνε ὡσαύτως παράλληλα.

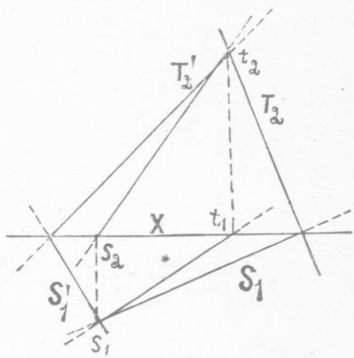
49) ***Πρόβλημα.*** — ***Εὑρεῖν τὰ ἴχνη ἐπιπέδου διερχομένου διὰ δοθέντος σημείου καὶ παραλλήλου πρὸς δοθὲν ἐπίπεδον.*** Ἔστωσαν S_1 καὶ T_2 (σχ. 50) τὰ ἴχνη τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου καὶ (α_1, α_2) τὸ δοθὲν σημεῖον. Τὰ ἴχνη S'_1 καὶ T'_2 τοῦ ζητουμένου ἐπιπέδου θὰ εἶνε, κατὰ τὰ ἄνω εἰρημένα, παράλληλα πρὸς τὰ δοθέντα S_1 καὶ T_2 καὶ ἄρα αἱ δύο ἰχνοπαράλληλοι αὐτοῦ εὐθεῖαι (πρώτη καὶ δευτέρα) αἱ διὰ τοῦ δοθέντος σημείου (α_1, α_2) διερχόμεναι θὰ εἶνε ὡσαύτως παράλληλοι πρὸς τὰ δοθέντα ἴχνη S_1 καὶ T_2. Ἐὰν ἄρα ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου α ἀχθῶσιν αἱ δύο ἰχνοπαράλληλοι Κ καὶ Λ τοῦ ζητουμένου ἐπιπέδου καὶ προσδιορισθῶσιν ἑκατέρας τούτων τὰ ἴχνη γ_1 καὶ δ_2, αἱ ἀπὸ τῶν τελευταίων τούτων σημείων καὶ παρὰ τὰ ἴχνη S_1 καὶ T_2 τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου ἀγόμεναι εὐθεῖαι S'_1 καὶ T'_2 εἶνε τὰ δύο ἴχνη τοῦ ζητουμένου ἐπιπέδου· τὰ δύο ταῦτα ἴχνη δέον ν' ἀλληλοτομῶσι κατὰ τὸ αὐτὸ σημεῖον τοῦ ἄξονος X.



Σχ. 50

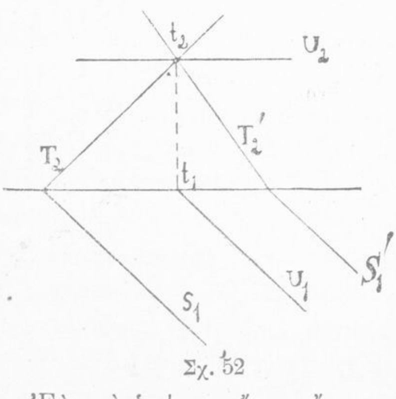
Ἐὰν τὸ δοθὲν ἐπίπεδον S_1, T_2 διέρχηται διὰ τοῦ ἄξονος X ἢ εἶνε παράλληλον τούτῳ, τότε πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος ποιούμεθα χρῆσιν τοῦ τρίτου Προ. Επι., ἐπὶ τοῦ ὁποίου προσδιορίζομεν, κατὰ τὰ γνωστά, τὸ τρίτον ἴχνος τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου (παράβαλε 33 καὶ 34 (α)) καὶ τὴν τρίτην προβολὴν τοῦ δοθέντος σημείου. Ἡ διὰ τῆς τρίτης προβολῆς τοῦ δοθέντος σημείου καὶ παρὰ τὸ τρίτον ἴχνος τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου ἠγμένη εὐθεῖα παριστᾷ τὸ τρίτον ἴχνος τοῦ ζητουμένου ἐπιπέδου, τοῦ ὁποίου τὰ λοιπὰ δύο ἴχνη, πρῶτον καὶ δεύτερον, ὡς παράλληλα πρὸς τὰ ὁμώνυμα ἴχνη τοῦ δοθέντος, κατασκευάζονται εὐκόλως. (Αἱ κατασκευαὶ αὗται ἀφήνονται εἰς τὸν μαθητὴν πρὸς ἄσκησιν).

*50) **Πρόβλημα.**—Εὑρεῖν τὰ ἴχνη ἐπιπέδου διερχομένου διὰ δοθείσης εὐθείας Α καὶ παραλλήλου πρὸς ἑτέραν δοθεῖσαν εὐθεῖαν Β.* Ἐὰν ἀπὸ τοῦ τυχόντος σημείου τῆς δοθείσης εὐθείας Α καὶ παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν Β ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα Γ, τὸ ἐπίπεδον τῶν δύο εὐθειῶν (Α, Γ) εἶνε τὸ ζητούμενον, τὰ δὲ ἴχνη αὐτοῦ κατασκευάζονται συμφώνως πρὸς τὸ πρόβλημα (45).



Σχ. 51

*51) **Ἀλληλοτομοῦντα ἐπίπεδα—Προσδιορισμὸς τῆς εὐθείας τῆς τομῆς αὐτῶν.*** Δύο μὴ παράλληλα ἐπίπεδα ἀλληλοτομοῦσιν, ὡς γνωστόν, πάντοτε κατὰ μίαν εὐθεῖαν, τῆς ὁποίας, ὡς κειμένης ἐπ' ἀμφοτέρων τῶν ἐπιπέδων, τὰ ἴχνη s_1 καὶ t_2 (σχ. 51) κεῖνται ἐπὶ τῶν ὁμωνύμων ἰχνῶν S_1, S'_1 καὶ T_2, T'_2 τῶν δύο ἐπιπέδων, καὶ ἄρα εἶνε τὰ σημεῖα τῆς τομῆς αὐτῶν· ἐκ τῶν ἰχνῶν δὲ s_1 καὶ t_2 τῆς εἰρημένης εὐθείας τῆς τομῆς κατασκευάζομεν, κατὰ γνωστὸν πρόβλημα, τὰς δύο αὐτῆς προβολὰς $s_1\ t_1 = U_1$ καὶ $s_2\ t_2 = U_2$.



Σχ. 52

Ἐὰν τὰ ὁμώνυμα ἴχνη, ἔστω τὰ πρῶτα S_1 καὶ S'_1, δύο ἀλληλοτομούντων ἐπιπέδων εἶνε παράλληλα (σχ. 52), τότε τὸ πρῶτον ἴχνος τῆς εὐθείας τῆς τομῆς αὐτῶν ἀφανίζεται εἰς τὸ ἄπειρον, ἤτοι ἡ εἰρημένη εὐθεῖα εἶνε παράλληλος πρὸς τὸ Προ. Επι. E_1, καὶ ἄρα ἡ μὲν δευτέρα αὐτῆς προβολὴ διερχομένη διὰ τοῦ δευτέρου ἴχνους t_2 τῆς εὐθείας εἶνε παράλληλος τῷ ἄξονι X, ἐν ᾧ ἡ πρώτη αὐτῆς προβολὴ εἶνε παράλληλος πρὸς τὰ πρῶτα ἴχνη S_1 καὶ S'_1 τῶν δύο ἐπιπέδων καὶ διέρχεται διὰ τῆς πρώτης προβολῆς t_1 τοῦ δευτέρου ἴχνους τῆς εὐθείας. Ἀνάλογα ἰσχύουσι καὶ ὅταν τὰ δεύτερα ἴχνη T_2 καί T'_2 τῶν ἀλληλοτομούντων ἐπιπέδων εἶνε παράλληλα.

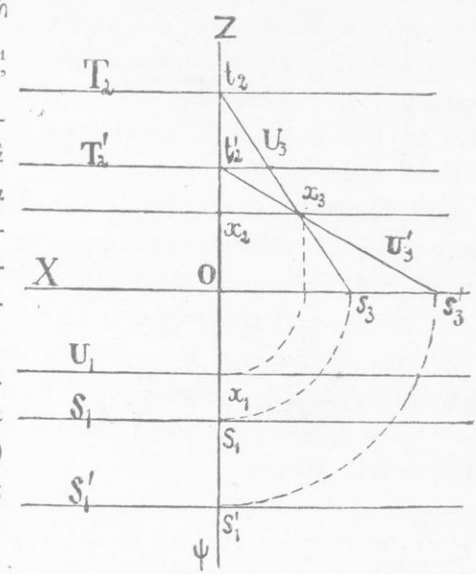
52) Ἰδιαίτεραι θέσεις δύο ἀλληλοτομούντων ἐπιπέδων.— Κατασκευὴ τῆς εὐθείας τῆς τομῆς αὐτῶν. 1) Ὅταν ἀμφότερα τ' ἀλληλοτομοῦντα ἐπίπεδα εἶνε παράλληλα τῷ ἄξονι X, ἢ 2) ὅταν ἀμφότερα τέμνωσι τὸν ἄξονα X εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον, ἢ 3) ὅταν τὸ ἕτερον τούτων διέρχεται διὰ τοῦ ἄξονος X ἢ 4) ὅταν ἓν ζεῦγος ἢ καὶ ἀμφότερα τὰ ζεύγη τῶν ὁμωνύμων ἰχνῶν τῶν δύο ἐπιπέδων ἀλληλοτομῶσιν ἐκτὸς τοῦ χάρτου τῆς σχεδιάσεως, τότε πρὸς κατασκευὴν τῆς εὐθείας τῆς τομῆς τῶν δύο ἐπιπέδων ποιούμεθα χρῆσιν τρίτου βοηθητικοῦ ἐπιπέδου (ὅπερ δύναται νὰ εἶνε καὶ τὸ τρίτον Προ. Επι.) ἁρμοδίαν ἔχοντος θέσιν πρὸς τὰ δεδομένα, καὶ τέμνοντος αὐτὰ κατὰ δύο εὐθείας δυναμένας εὐκόλως νὰ κατασκευασθῶσιν.

Τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν δύο τούτων εὐθειῶν εἶνε προφανῶς καὶ σημεῖον τῆς ζητουμένης εὐθείας τῆς τομῆς τῶν δύο ἐπιπέδων· ἐπιζευγνύοντες δὲ τοῦτο δι' εὐθείας μεθ' ἑτέρου σημείου τῆς εὐθείας τῆς τομῆς, εἴτε δεδομένου εἴτε καθ' ὅμοιον τρόπον ὁριζομένου, πορίζόμεθα τὴν θέσιν τῆς εἰρημένης εὐθείας τῆς τομῆς τῶν δύο ἐπιπέδων. Οὕτω π. χ. ἔστω

1) Ὅτι τὰ δοθέντα ἐπίπεδα εἶνε παράλληλα τῷ ἄξονι X (σχ. 53)· τότε καὶ ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ (ἂν ὑπάρχῃ) θὰ εἶνε παράλληλος τῷ ἄξονι X. Πρὸς κατασκευὴν τῆς τομῆς ταύτης προσδιορίζομεν τῶν δοθέντων ἐπιπέδων (S_1, T_2) καὶ (S'_1, T'_2) τὰ τρίτα ἴχνη U_3 καὶ U'_3, ἅτινα ἀλληλοτομοῦσιν *ἐν γένει* [1] εἴς τι

[1] Τὰ δεδομένα ἐπίπεδα ἀλληλοτομοῦσιν ἢ εἶνε παράλληλα καθ' ὅσον τὰ τρίτα αὐτῶν ἴχνη ποιοῦσι τὸ αὐτό.

σημεῖον χ_3, ὅπερ εἶνε ἡ τρίτη προβολὴ καὶ τὸ τρίτον ἴχνος τῆς εὐθείας τῆς τομῆς τῶν δύο ἐπιπέδων. Ἐὰν νῦν τοῦ σημείου τούτου κατασκευασθῶσιν ἡ δευτέρα X_2 καὶ ἡ πρώτη X_1 προβολή, καὶ ἀχθῶσι δι' αὐτῶν καὶ παρὰ τὸν ἄξονα X αἱ εὐθεῖαι U_2 καὶ U_1, αἱ τελευταῖαι αὗται εἶνε αἱ λοιπαὶ δύο προβολαὶ τῆς ζητουμένης εὐθείας τῆς τομῆς τῶν δοθέντων ἐπιπέδων.

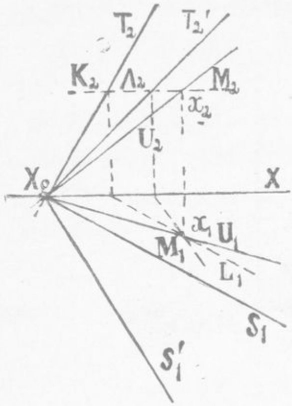


Σχ. 53

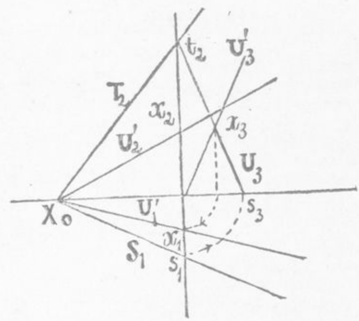
2) Ἔστω (σχ.54) ὅτι ἀμφότερα τὰ ἐπίπεδα (S_1, T_2) καὶ (S'_1, T_2') τέμνουσι τὸν ἄξονα X εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον X_0, μετ τοῦ ὁποίου ταυτίζονται ἀμφότερα τὰ ἴχνη τῆς εὐθείας τῆς τομῆς τῶν εἰρημένων ἐπιπέδων. Πρὸς κατασκευὴν τῆς τελευταίας ταύτης εὐθείας ἂς ἀχθῇ παρὰ τὸ Προ. Ἐπι. E_1 τὸ δεύτερον προβάλλον ἐπίπεδον K_2, τέμνον τὰ δεδομένα κατὰ δύο εὐθείας Λ καὶ Μ πρώτας ἰχνοπαραλλήλους· ἐὰν τὸ σημεῖον τῆς τομῆς (X_1, X_2) τῶν δύο τούτων εὐθειῶν Λ καὶ Μ ἐπιζευχθῇ δι' εὐθείας μετὰ τοῦ δεδομένου σημείου X_0, ἡ τελευταία αὕτη εὐθεῖα XX_0 εἶνε ἡ εὐθεῖα τῆς τομῆς τῶν δύο ἐπιπέδων, αἱ δ' ἐπὶ τὰ σημεῖα X_2, X_0 καὶ X_1, X_0 ἐπιζευγνύμεναι εὐθεῖαι U_2 καὶ U_1 εἶνε ἀντιστοίχως ἡ δευτέρα καὶ πρώτη προβολὴ τῆς εἰρημένης εὐθείας.

3) Ἔστω (σχ.55) ὅτι τὸ ἕτερον τῶν ἀλληλοτομούντων ἐπιπέδων (S'_1, T'_2) διέρχεται διὰ τοῦ ἄξονος X καὶ ὁρίζεται ἑπομένως διὰ τοῦ τρίτου αὐτοῦ ἴχνους U'_3. Τὸ σημεῖον X_0 τοῦ ἄξονος X, καθ' ὃ τὰ ἴχνη τοῦ ἑτέρου ἐπιπέδου (S_1, T_2) ἀλληλοτομοῦσιν, εἶνε

σημεῖον τῆς κοινῆς τομῆς τῶν δύο δοθέντων ἐπιπέδων, ἀλλὰ καὶ τὸ σημεῖον x_3, καθ' ὃ τὰ τρίτα ἴχνη U_3 καὶ U'_3 τῶν δύο ἐπιπέδων ἀλληλοτομοῦσιν, εἶνε ὡσαύτως σημεῖον τῆς κοινῆς τῶν



Σχ. 54



Σχ. 55

ἐπιπέδων τομῆς (τρίτον ἴχνος αὐτῆς). Ἐὰν κατασκευασθῶσι νῦν ἡ δευτέρα x_2 καὶ ἡ πρώτη x_1 προβολὴ τοῦ σημείου x_3 καὶ ἐπιζευχθῇ ἑκατέρα τούτων δι' εὐθείας μετὰ τοῦ σημείου x_0, προκύπτουσιν αἱ δύο προβολαὶ U'_2 καὶ U'_1 τῆς ζητουμένης κοινῆς τομῆς τῶν δύο ἐπιπέδων.

Σχ. 56

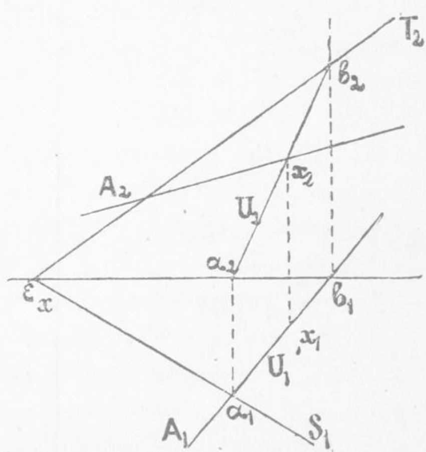
4) Ἔστω (σχ. 56) ὅτι τὸ ἕτερον ζεῦγος τῶν ὁμωνύμων ἰχνῶν T_2, T'_2 τῶν δύο ἐπιπέδων (S_1, T_2) καὶ (S'_1, T'_2) ἀλληλοτομοῦσιν ἐκτὸς τοῦ χάρτου τῆς σχεδιάσεως. Τὸ σημεῖον s_1, καθ' ὃ ἀλληλοτομοῦσι τὰ ἕτερα ὁμώνυμα ἴχνη S_1 καὶ S'_1 εἶνε, ὡς γνωστόν, σημεῖον τῆς εὐθείας τῆς τομῆς τῶν δοθέντων ἐπιπέδων· πρὸς εὕρεσιν δὲ καὶ ἄλλου σημείου ταύτης ἂς ἀχθῇ πάλιν παρὰ τὸ Προ. Επι. E_1 τὸ τυχὸν δεύτερον προβάλλον ἐπίπεδον K_2. Τὸ τε-

λευταῖον τοῦτο τέμνει τὰ δοθέντα κατὰ δύο εὐθείας Λ καὶ Μ πρώτας ἰχνοπαραλλήλους, ὧν τὸ σημεῖον τῆς τομῆς (y_1, y_2) εἶνε σημεῖον τῆς εὐθείας τῆς τομῆς τῶν δύο δοθέντων ἐπιπέδων, αἱ δ' ἐπὶ τὰ σημεῖα y_1, s_1 καὶ y_2, s_2 ἐπιζευγνύμεναι εὐθεῖαι U_1 καὶ U_2 εἶνε ἀντιστοίχως ἡ πρώτη καὶ δευτέρα προβολὴ τῆς ζητουμένης εὐθείας τῆς τομῆς.

Ἐὰν καὶ τὰ πρῶτα καὶ τὰ δεύτερα ἴχνη τῶν δοθέντων ἐπιπέδων (S_1, T_2) καὶ (S'_1, T'_2) ἀλληλοτομῶσιν ἐκτὸς τοῦ χάρτου τῆς σχεδιάσεως, ἄγομεν καὶ ἄλλο δεύτερον προβάλλον ἐπίπεδον καὶ προσδιορίζομεν καθ' ὅμοιον τρόπον καὶ ἕτερον σημεῖον τῆς εὐθείας τῆς τομῆς τῶν δύο ἐπιπέδων.

Ε') ΘΕΣΕΙΣ ΕΥΘΕΙΑΣ ΠΡΟΣ ΕΠΙΠΕΔΟΝ·

53) Αἱ διάφοροι θέσεις εὐθείας πρὸς ἐπίπεδον εἶνε τρεῖς : ἢ 1) κεῖται ἡ εὐθεῖα ὅλη ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου, ἢ 2) εἶνε παράλληλος τῷ ἐπιπέδῳ, ὅτε οὐδὲν ἔχουσι κοινὸν σημεῖον, ἢ 3) τέμνει τὸ ἐπίπεδον, ὅτε ἔχουσιν ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον. Ἑκάστην τῶν θέσεων τούτων μανθάνομεν ἐκ τῶν προβολῶν τῆς εὐθείας καὶ τοῦ ἐπιπέδου, δεδομένου διὰ τῶν ἰχνῶν αὐτοῦ, ὡς ἕπεται.



Σχ. 57

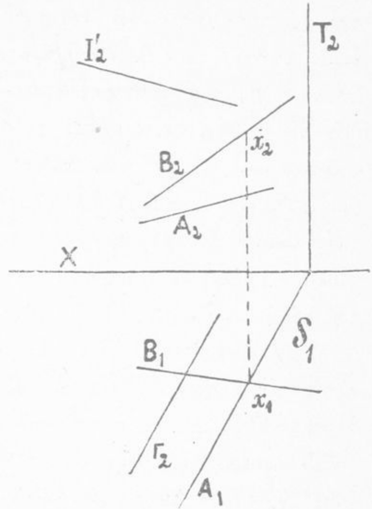
Ἔστω (σχ. 57) (A_1, A_2) ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα καὶ (S_1, T_2) τὸ δοθὲν ἐπίπεδον, τυχοῦσαν ἔχον κλίσιν πρὸς τὰ δύο Προ. Επι. Ἂς ἀχθῇ διὰ τῆς δοθείσης εὐθείας Α τυχὸν βοηθητικὸν ἐπίπεδον καὶ μάλιστα πρῶτον (A_1) (ἢ δεύτερον) προβάλλον, καὶ ἂς κατασκευασθῶσιν (ἐδάφ. 51) αἱ προβολαὶ U_1 καὶ U_2 τῆς εὐθείας τῆς τομῆς U τοῦ δοθέντος καὶ τοῦ βοηθητικοῦ ἐπιπέδου. Ἐπειδὴ ἡ τελευταία αὕτη εὐθεῖα (U_1, U_2) καὶ ἡ δοθεῖσα (A_1, A_2) κεῖνται ἐν ἑνὶ καὶ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, τῷ προβάλλοντι τὴν A, ἕπεται ὅτι αἱ εὐθεῖαι αὗται, ἢ ἀλληλοτομοῦσιν εἴς τι σημεῖον x, ἢ εἶνε παράλληλοι ἢ συμπίπτουσι καὶ ἀποτελοῦσι μίαν καὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν. Ἐν τῇ πρώτῃ περιπτώσει αἱ δεύτεραι προβολαὶ U_2 καὶ A_2 (αἱ πρῶται κεῖνται ἐπὶ τοῦ πρώτου ἴχνους τοῦ βοηθητικοῦ ἐπιπέδου) τῶν εὐθειῶν U καὶ A ἀλληλοτομοῦσιν ἐπίσης εἴς τι σημεῖον x_2, ὅπερ εἶνε ἡ δευτέρα προβολὴ τοῦ σημείου τῆς τομῆς x τῶν δύο εὐθειῶν U καὶ A· εἶνε δὲ τὸ σημεῖον τοῦτο x κοινὸν τῇ εὐθείᾳ A καὶ τῷ ἐπιπέδῳ (S_1, T_2) καὶ ἄρα σημεῖον τῆς τομῆς αὐτῶν.

Ἐὰν αἱ εὐθεῖαι U καὶ A εἶνε παράλληλοι, τότε αἱ δεύτεραι προβολαὶ αὐτῶν U_2 καὶ A_2 εἶνε ὡσαύτως παράλληλοι, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθεῖα A εἶνε παράλληλος τῷ δοθέντι ἐπιπέδῳ.

Τέλος ἐὰν αἱ εὐθεῖαι U καὶ A συμπίπτωσι καὶ ἀποτελῶσι μίαν εὐθεῖαν, καὶ αἱ ὁμώνυμοι αὐτῶν προβολαὶ U_1, A_1 καὶ U_2, A_2 συμπίπτουσιν, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθεῖα A κεῖται ἐν τῷ δοθέντι ἐπιπέδῳ (S_1, T_2).

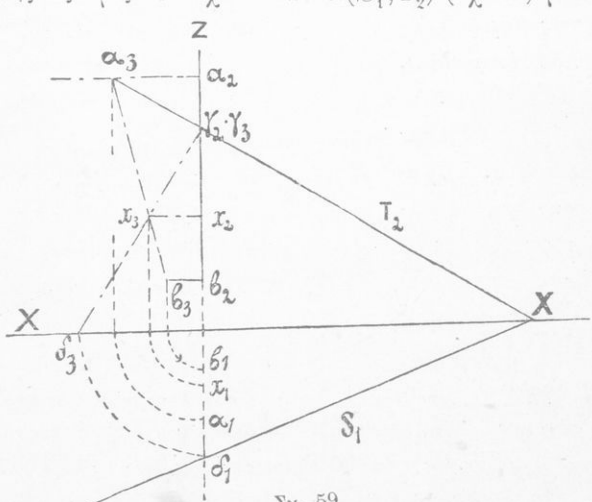
Ἐκ τῶν ἄνω εἰρημένων συνάγομεν ὅτι, ἵνα ὁρίσωμεν τὴν ἐν τῷ χώρῳ πρὸς ἄλληλα θέσιν τῆς τυχούσης εὐθείας A καὶ τοῦ τυχόντος ἐπιπέδου (S_1, T_2), ἄγομεν τὸ πρῶτον (ἢ δεύτερον) προβάλλον τὴν εὐθεῖαν ἐπίπεδον, καὶ προσδιορίζομεν τὰς προβολὰς τῆς εὐθείας τῆς τομῆς τούτου μετὰ τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου (S_1, T_2)· καθ' ὅσον δ' ἀντιστοίχως ἡ δευτέρα (ἢ ἡ πρώτη) προβολὴ τῆς εὐθείας τῆς τομῆς τῶν δύο ἐπιπέδων *συμπίπτει* μετὰ τῆς ὁμωνύμου προβολῆς τῆς δοθείσης εὐθείας A, ἢ *τέμνει* αὐτήν, ἢ εἶνε παράλληλος ταύτῃ, ἡ εὐθεῖα A *κεῖται* ἐπὶ τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου, ἢ *τέμνει* τοῦτο, ἢ εἶνε *παράλληλος* τούτῳ.

54) Ἰδιαίτεραι θέσεις τῆς εὐθείας ἢ τοῦ ἐπιπέδου πρὸς τὰ Προ. Ἐπι. Ἐὰν τὸ δοθὲν ἐπίπεδον (S_1, T_2) εἶνε προβάλλον, ἔστω πρῶτον (σχ. 58), τότε ἡ πρώτη προβολὴ τῆς δοθεσης εὐθείας ἔχει τὴν αὐτὴν θέσιν ὡς πρὸς τὸ πρῶτον ἴχνος S_1 τοῦ ἐπιπέδου, οἵαν ἔχει ἡ ἐν τῷ χώρῳ εὐθεῖα πρὸς τὸ δοθὲν ἐπίπεδον. Καθ' ὅσον λοιπὸν ἡ πρώτη προβολὴ B_1 τῆς δοθείσης εὐθείας *τέμνει* τὴν ὁμώνυμον προβολὴν (=πρῶτον ἴχνος S_1) τοῦ ἐπιπέδου, ἢ *κεῖται* ἐπὶ ταύτης (A_1), ἢ εἶνε *παράλληλος* ταύτῃ (Γ_1), ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἀντιστοίχως *τέμνει* τὸ ἐπίπεδον, *κεῖται* ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου, ἢ εἶνε *παράλληλος* τούτῳ.



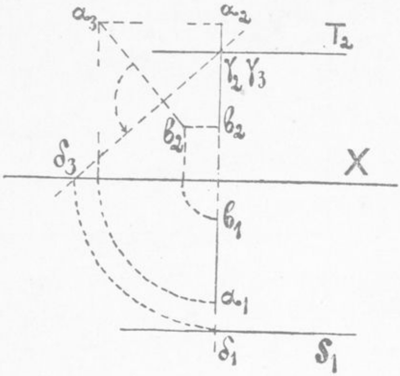
Σχ. 58

Ἐὰν ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα $A=\alpha\beta$ κεῖται ἐπὶ ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὸν ἄξονα X, τότε τὴν θέσιν αὐτῆς ὡς πρὸς τὸ τυχὸν ἐπίπεδον(S_1, T_2) (σχ. 59) μανθάνομεν



Σχ. 59

ἐκ τῆς θέσεως, τὴν ὁποίαν ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας ἡ τρίτη προβολὴ $\alpha_3\beta_3$ τῆς δοθείσης εὐθείας Α καὶ ἡ τρίτη προβολὴ $\gamma_3\delta_3$ τῆς εὐθείας τῆς τομῆς τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου καὶ τοῦ βοηθητικοῦ, τοῦ προβάλλοντος τὴν εὐθεῖαν Α ἐπ' ἀμφότερα τὰ Προ. 'Επι.

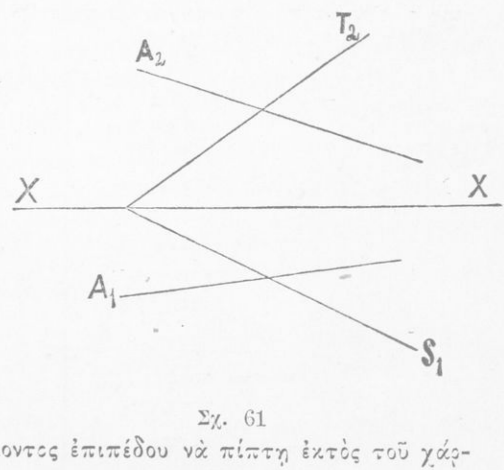


Σχ. 60

Καθ' ὅσον αἱ εἰρημέναι προβολαὶ *ἀλληλοτομοῦσιν*, ἢ εἶνε *παράλληλοι*, ἢ *ταυτίζονται* εἰς μίαν καὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν, ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα Α *τέμνει* τὸ δοθὲν ἐπίπεδον, ἢ εἶνε *παράλληλος* τούτῳ ἢ *κεῖται* ἐπ' αὐτοῦ.

Τὴν αὐτὴν μέθοδον ἐφαρμόζομεν καὶ ὅταν τὸ δεδομένον ἐπίπεδον (S_1, T_2) εἶνε παράλληλον τῷ ἄξονι Χ (σχ. 60).

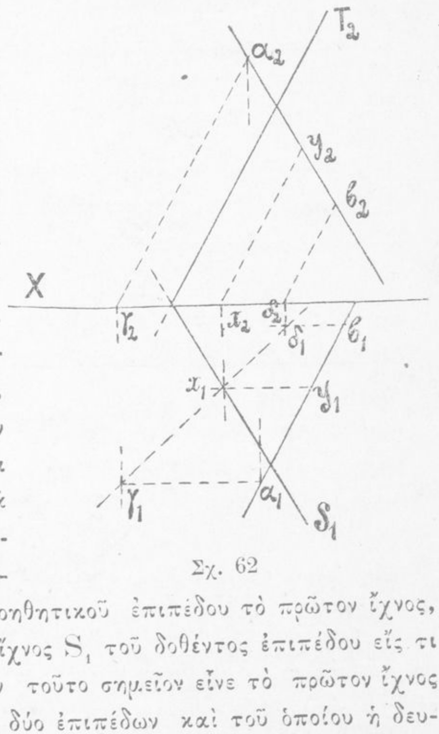
55) Ἁρμοδία ἐκλογὴ τοῦ βοηθητικοῦ ἐπιπέδου πρὸς κατασκευὴν τοῦ σημείου τῆς τομῆς εὐθείας καὶ ἐπιπέδου. 'Ενίοτε αἱ προβολαὶ A_1 καὶ A_2 (σχ. 61) τῆς δοθείσης εὐθείας Α σχηματίζουσι μετὰ τοῦ ἄξονος Χ τόσον ὀξείας γωνίας, ὥστε τὸ ἐπὶ τὸν ἄξονα Χ κάθετον ἴχνος τοῦ διὰ τῆς δοθείσης εὐθείας ἀγομένου πρώτου ἢ δευτέρου προβάλλοντος ἐπιπέδου νὰ πίπτῃ ἐκτὸς τοῦ χάρτου τῆς σχεδιάσεως, καὶ ἐπομένως ἡ εὐθεῖα τῆς τομῆς (U_1, U_2) τούτου μετὰ τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου νὰ μὴ δύναται νὰ προσ-



Σχ. 61

διορισθῇ. Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει ἐκλέγομεν συνήθως ὡς βοηθητικὸν ἐπίπεδον τὸ διὰ τῆς δοθείσης εὐθείας ($\alpha_1 \beta_1$, $\alpha_2 \beta_2$) (σχ. 62) καὶ παρὰ τὸ δεύτερον ἴχνος T_2 τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου ἠγμένον· ἡ εὐθεῖα τῆς τομῆς τοῦ ἐπιπέδου τούτου μετὰ τοῦ δοθέντος θὰ εἶνε ὡσαύτως παράλληλος πρὸς τὸ δεύτερον ἴχνος T_2 τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου, καὶ ἄρα δευτέρα ἰχνοπαράλληλος ἀμφοτέρων τῶν ἐπιπέδων.

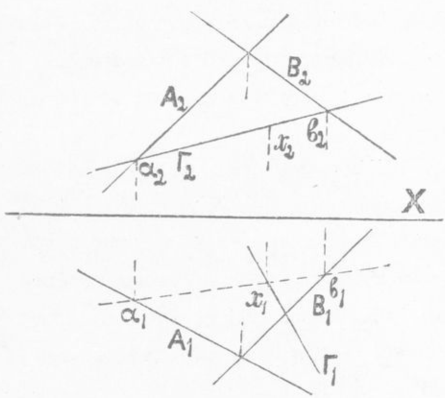
Τὸ εἰρημένον βοηθητικὸν ἐπίπεδον ὁρίζεται, ἐὰν ἐκ δύο τυχόντων σημείων α καὶ β τῆς δοθείσης εὐθείας ἀχθῶσι παράλληλοι πρὸς τὸ ἴχνος T_2 τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου. Τῶν εὐθειῶν τούτων αἱ μὲν δεύτεραι προβολαί, διερχόμεναι διὰ τῶν σημείων α_2 καὶ β_2, εἶνε παράλληλοι πρὸς τὸ δεύτερον ἴχνος T_2, αἱ δὲ πρῶται, διερχόμεναι διὰ τῶν σημείων α_1 καὶ β_1, εἶνε παράλληλοι τῷ ἄξονι X· ἡ δ' ἐπὶ τὰ πρῶτα ἴχνη γ_1, δ_1 τῶν εἰρημένων παραλλήλων ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ὁρίζει τοῦ βοηθητικοῦ ἐπιπέδου τὸ πρῶτον ἴχνος, ὅπερ τέμνει τὸ ὁμώνυμον ἴχνος S_1 τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου εἴς τι σημεῖον x_1. Τὸ τελευταῖον τοῦτο σημεῖον εἶνε τὸ πρῶτον ἴχνος τῆς εὐθείας τῆς τομῆς τῶν δύο ἐπιπέδων καὶ τοῦ ὁποίου ἡ δευτέρα προβολὴ x_2 κεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος X. Ἐὰν νῦν ἐκ τῶν σημείων x_1 καὶ x_2 ἀχθῶσιν ἀντιστοίχως παράλληλοι πρὸς τὸν ἄξονα X καὶ πρὸς τὸ δεύτερον ἴχνος T_2 τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου, αἱ παράλληλοι αὗται εἶνε αἱ προβολαὶ τῆς εὐθείας τῆς τομῆς τῶν δύο ἐπιπέδων (βοηθητικοῦ καὶ δοθέντος)· τὰ δὲ σημεῖα y_1 καὶ y_2,



Σχ. 62

καθ'ἃ αἱ εἰρημέναι προβολαὶ τέμνουσι τὰς ὁμωνύμους προβολὰς $α_1$ $β_2$ καὶ $α_2$ $β_2$ τῆς δοθείσης εὐθείας αβ, εἶνε αἱ προβολαὶ τοῦ ζητουμένου σημείου τῆς τομῆς εὐθείας αβ μετὰ τοῦ ἐπιπέδου (S_1, T_2).

Παρατήρησις. — Τὸ πρόβλημα τοῦ προσδιορισμοῦ τοῦ σημείου τῆς τομῆς εὐθείας μετ' ἐπιπέδου εἶνε ἓν τῶν σπουδαιοτέρων προβλημάτων τῆς Παραστατικῆς Γεωμετρίας, καθ' ὅσον ἀπαντᾷ εἰς πλείστας ἐφαρμογὰς αὐτῆς, ὡς π. χ., εἰς τὴν τομὴν στερεοῦ σώματος ὑπὸ ἐπιπέδου, εἰς τὴν πρὸς ἄλληλα τομὴν τῶν στερεῶν σωμάτων, εἰς τὴν κατασκευὴν τῆς σκιᾶς τῶν σωμάτων κ.τ.λ.



Σχ. 63

56) Πρόβλημα. — *Εὑρεῖν τὸ σημεῖον καθ' ὃ ἀλληλοτομοῦσιν εὐθεῖα καὶ ἐπίπεδον, ὁριζόμενον ἢ α') διὰ δύο εὐθειῶν ἀλληλοτομουσῶν ἢ παραλλήλων, ἢ β') διὰ τριῶν σημείων μὴ ἐπ' εὐθείας κειμένων, ἢ γ') διὰ μιᾶς εὐθείας καὶ ἑνὸς σημείου ἐκτὸς αὐτῆς κειμένου.*

α') Ἔστωσαν (σχ. 63) A_1, A_2 καὶ B_1, B_2 αἱ προβολαὶ τῶν ἀλληλοτομουσῶν εὐθειῶν καὶ $Γ_1$, $Γ_2$ αἱ προβολαὶ τῆς δοθείσης εὐθείας Γ. Ἐὰν νοήσωμεν τὸ δεύτερον προβάλλον τὴν εὐθεῖαν Γ ἐπίπεδον, ἡ εὐθεῖα $α_2β_2$ εἶνε ἡ δευτέρα προβολὴ τῆς εὐθείας τῆς τομῆς U τοῦ εἰρημένου προβάλλοντος τὴν εὐθεῖαν Γ μετὰ τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου (A,B), ἡ δὲ $α_1$ $β_1$ ἡ πρώτη προβολὴ τῆς εὐθείας ταύτης U· τὸ δὲ σημεῖον x_1, καθ' ὃ ἡ πρώτη προβολὴ $α_1β_1$ τῆς εὐθείας τῆς τομῆς U συναντᾷ τὴν πρώτην προβολὴν $Γ_1$ τῆς δοθείσης εὐθείας Γ, εἶνε (παράβ. ἐδ. 53) ἡ πρώτη προβολὴ τοῦ σημείου τῆς τομῆς x τῆς δοθείσης εὐθείας Γ μετὰ τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου (A,B)· ἡ δευτέρα προβολὴ x_2 τοῦ εἰρημένου σημείου x κεῖται ἐπὶ τῆς δευτέρας προβολῆς $Γ_2$

τῆς δοθείσης εὐθείας Γ καὶ ἐπὶ τῆς διὰ τοῦ X_1 καὶ ἐπὶ τὸν ἄξονα X ἠγμένης καθέτου. Ἡ λύσις εἶνε ἐντελῶς ἡ αὐτή, καὶ ὅταν αἱ εὐθεῖαι A καὶ B, αἱ καθορίζουσαι τὸ ἐπίπεδον, εἶνε παράλληλοι.

β′) Ὅταν τὸ δοθὲν ἐπίπεδον ὁρίζηται διὰ τριῶν αὐτοῦ σημείων μὴ ἐπ' εὐθείας κειμένων, ἐπιζευγνύομεν τὰς ὁμωνύμους προβολὰς α_1, β_1 γ_1 καὶ α_2, β_2, γ_2 τῶν δοθέντων σημείων α,β,γ ἀνὰ δύο δι' εὐθειῶν καὶ ἔχομεν οὕτω τὰς προβολὰς εὐθειῶν τοῦ ἐπιπέδου ἀλληλοτομουσῶν ἀνὰ δύο, καὶ ἄρα ἡ λύσις ἀνάγεται εἰς τὴν προηγουμένην α′.

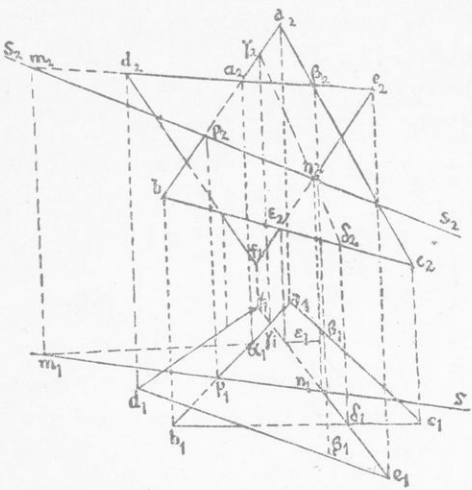
γ′) Ὅταν δοθῇ μία εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου καὶ ἓν σημεῖον ἐκτὸς αὐτῆς κείμενον, ἄγομεν διὰ τοῦ δοθέντος σημείου εὐθεῖαν παράλληλον τῇ δοθείσῃ, καὶ κατὰ τοῦτον τὸν τρόπον ἡ λύσις ἀνάγεται καὶ πάλιν εἰς τὴν προηγουμένην α′.

Τὸν τρόπον τοῦτον, καθ' ὃν κατασκευάζεται τὸ σημεῖον τομῆς εὐθείας καὶ ἐπιπέδου δεδομένου οὐχὶ διὰ τῶν ἰχνῶν αὐτοῦ ἀλλὰ διὰ προσδιοριστικῶν στοιχείων ἀναφερομένων εἰς τὰς περιπτώσεις α′, β′, γ′ τοῦ παρόντος προβλήματος, ἐφαρμόζομεν ἐπιτυχῶς καὶ εἰς τὴν κατασκευὴν τῆς κοινῆς τομῆς δύο ἐπιπέδων δεδομένων διὰ στοιχείων ἀναγομένων εἰς μίαν τῶν περιπτώσεων α′, β′, γ′.

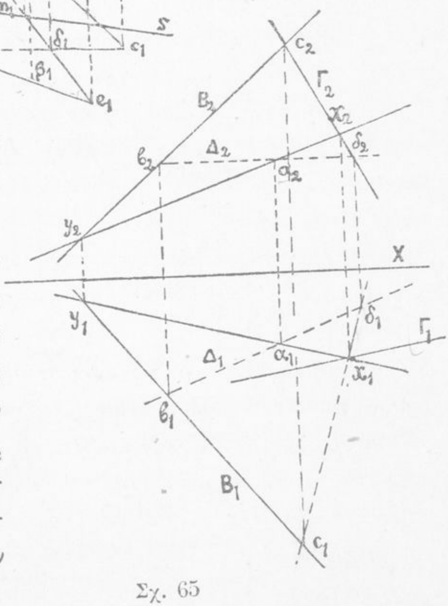
57) Πρόβλημα.—*Νὰ κατασκευασθῇ ἡ εὐθεῖα τῆς τομῆς δύο ἐπιπέδων τριγώνων, δεδομένων ἀμφοτέρων διὰ τῶν προβολῶν αὐτῶν* $(a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2)$ *καὶ* $(d_1, e_1, f_1, d_2, e_2, f_2)$ (σχ. 64). Ἀρκεῖ, ὅπως ἐν τῷ προηγουμένῳ προβλήματι, νὰ κατασκευασθῶσι τὰ σημεῖα τῆς τομῆς m καὶ n τῶν δύο πλευρῶν de καὶ ef τοῦ ἑνὸς τριγώνου μετὰ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ἑτέρου τριγώνου· ἡ εὐθεῖα ἡ ἐπιζευγνύουσα τὰ σημεῖα ταῦτα εἶνε ἡ εὐθεῖα τῆς τομῆς τῶν ἐπιπέδων τῶν δοθέντων τριγώνων.

Κατασκευή. — Ἂς ἀχθῇ διὰ τῆς εὐθείας de τὸ δεύτερον προβάλλον ταύτην ἐπίπεδον καὶ ἂς κατασκευασθῇ ἡ πρώτη προβολὴ $\alpha_1\beta_1$ τῆς κοινῆς τομῆς τοῦ εἰρημένου προβάλλοντος ἐπιπέδου καὶ τοῦ τριγώνου a b c· τὸ σημεῖον m_1, καθ' ὃ ἡ εὐθεῖα

α_1 β_1 καὶ ἡ πρώτη προβολὴ $d_1 e_1$ τῆς εὐθείας de ἀλληλοτομοῦσιν, εἶνε ἡ πρώτη προβολὴ τοῦ ζητουμένου σημείου τῆς τομῆς τῆς εὐθείας de καὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ τριγώνου a b c. Καθ' ὅμοιον τρόπον, ἂν ἀχθῇ διὰ τῆς ef τὸ πρῶτον προβάλλον ταύτην ἐπίπεδον καὶ προσδιορισθῇ ἡ δευτέρα προβολὴ δ_2 γ_2 τῆς κοινῆς τομῆς τούτου μετὰ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ τριγώνου a bc, πορίζομεθα τὸ σημεῖον n_2 ὡς δευτέραν προβολὴν τοῦ ζητουμένου σημείου τῆς τομῆς τῆς εὐθείας ef μετὰ τοῦ ἐπιπέδου abc. Αἱ εὐθεῖαι m_2 n_2 καὶ $m_1 n_1$ εἶνε αἱ προβολαὶ τῆς εὐθείας τῆς τομῆς τῶν ἐπιπέδων τῶν δύο δοθέντων τριγώνων.



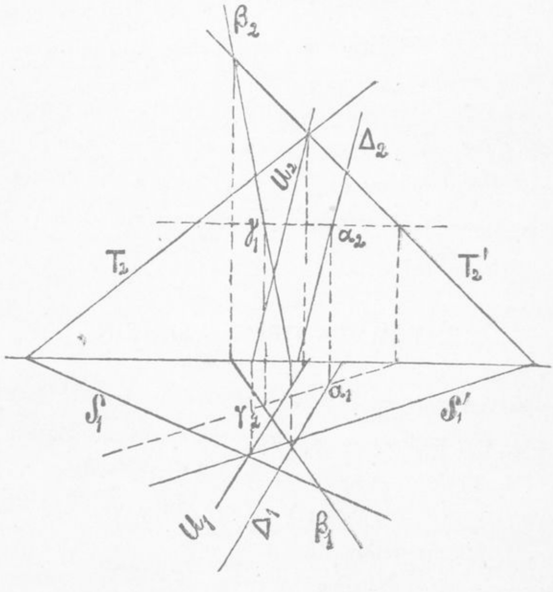
Σχ. 64



Σχ. 65

58) ***Πρόβλημα.*** — *Ἀπὸ δοθέντος σημείου α ἀγαγεῖν εὐθεῖαν συναντῶσαν δύο δοθείσας εὐθείας Β καὶ Γ.* Ἔστωσαν (σχ. 65) (α_1, α_2) τὸ δοθὲν σημεῖον καὶ B_1, B_2 καὶ Γ_1, Γ_2 αἱ δοθεῖσαι εὐθεῖαι. Ἡ εὐθεῖα ἡ ἐπιζευγνύουσα τὸ δοθὲν σημεῖον α μετὰ τοῦ σημείου τῆς τομῆς τῆς εὐθείας Γ καὶ τοῦ ἐπιπέδου (α, Β) κεῖται προφανῶς ἐπὶ τοῦ τελευταίου τούτου ἐπιπέδου, τέμνει ἄρα τὴν εὐθεῖαν Β, ἀλλὰ τέμνει καὶ τὴν Γ, εἶνε ἄρα ἡ ζητουμένη εὐθεῖα.

Κατασκευή.—Ἂς ἀχθῇ διὰ τοῦ δοθέντος σημείου α ἡ τυχοῦσα εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου (α, Β) ἤ, διὰ τὴν ἁπλότητα τῆς κατασκευῆς, ἡ πρώτη ἰχνοπαράλληλος αὐτοῦ εὐθεῖα Δ, τῆς ὁποίας ἡ δευτέρα προβολὴ Δ_2 εἶνε παράλληλος τῷ ἄξονι Χ· καὶ ἂς κατασκευασθῇ ἡ πρώτη αὐτῆς προβολὴ Δ_1 ἐν ταὐτῷ δὲ καὶ τὸ ση-



Σχ. 66

μεῖον τῆς τομῆς x τῆς εὐθείας Γ μετὰ τοῦ ἐπιπέδου (Β, Δ) (παραβ. ἐδ. 56, ά). Ἡ ἐπὶ τὰ σημεῖα α καὶ x ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα εἶνε ἡ ζητουμένη, ἥτις τέμνει τὰς δοθείσας εὐθείας Β καὶ Γ εἰς τὰ σημεῖα x καὶ y.

Σημείωσις.—Ἐὰν ἡ κατασκευὴ ἐγένετο ὀρθῶς, δέον τὰ σημεῖα y_1, y_2, ὡς προβολαὶ τοῦ σημείου τῆς τομῆς y τῶν εὐθειῶν α Χ καὶ Β, νὰ κεῖνται ἐπὶ μιᾶς εὐθείας καθέτου ἐπὶ τὸν ἄξονα Χ.

*59) **Πρόβλημα.**— Ἀπὸ δοθέντος σημείου ν' ἀχθῇ εὐθεῖα συναντῶσα ἑτέραν δοθεῖσαν εὐθεῖαν καὶ παράλληλος πρὸς δοθὲν ἐπίπεδον.* Ἔστωσαν (σχ. 66) (α_1, α_2) τὸ δοθὲν σημεῖον, (B_1, B_2) ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα καὶ (S_1, T_2) τὸ δοθὲν ἐπίπεδον. Ἡ ζητουμένη εὐθεῖα κεῖται προφανῶς ὅλη ἐν τῷ ἐπιπέδῳ (α, Β), εἶνε δὲ καὶ παράλληλος πρὸς τὸ δοθὲν ἐπίπεδον (S_1, T_2), δέον ἄρα αὕτη νὰ εἶνε παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν τῆς τομῆς τῶν δύο εἰρημένων ἐπιπέδων (S_1, T_2) καὶ (α,Β).

Κατασκευή.— Ἂς κατασκευασθῶσι τὰ ἴχνη S'_1 καὶ T'_2 τοῦ ἐπιπέδου (α, Β), ἐν ταὐτῷ δὲ καὶ ἡ εὐθεῖα τῆς τομῆς U_1, U_2 τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου (S_1, T_2) καὶ τοῦ ἐπιπέδου (α, Β)=(S'_1, T'_2)· ἡ ἐκ τοῦ σημείου (α_1, α_2) καὶ παρὰ τὴν κοινὴν τομὴν U_1, U_2 τῶν εἰρημένων ἐπιπέδων ἠγμένη εὐθεῖα Δ_1, Δ_2 εἶνε ἡ ζητουμένη.

ΖΗΤΗΜΑΤΑ ΠΡΟΣ ΑΣΚΗΣΙΝ·

1) Δεδομένων τῶν προβολῶν δύο εὐθειῶν Α καὶ Β ἀλληλοτομουσῶν, καὶ τῶν προβολῶν α_1, α_2 τοῦ τυχόντος σημείου α, διακρῖναι, ἂν τὸ σημεῖον α κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (Α, Β) ἢ οὔ.

2) Ἀγαγεῖν διὰ τυχούσης εὐθείας, δεδομένης διὰ τῶν προβολῶν αὐτῆς, τυχὸν ἐπίπεδον.

3) Ἀγαγεῖν διὰ δοθείσης εὐθείας ἐπίπεδον παρὰ δοθεῖσαν εὐθεῖαν.

4) Εὑρεῖν τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τριῶν ἐπιπέδων Α, Β, Γ.— Κατασκευάζομεν πρῶτον τὴν εὐθεῖαν τῆς τομῆς τῶν ἐπιπέδων Α καὶ Β, ἔπειτα τὴν εὐθεῖαν τῆς τομῆς τῶν ἐπιπέδων Β καὶ Γ. Τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν δύο τούτων εὐθειῶν εἶνε τὸ ζητούμενον.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV

ΜΕΤΡΙΚΑΙ ΣΧΕΣΕΙΣ Ή ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΜΕΤΑΞΥ ΣΗΜΕΙΟΥ, ΕΥΘΕΙΑΣ ΚΑΙ ΕΠΙΠΕΔΟΥ.

60) Αἱ γεωμετρικαὶ σχέσεις, αἱ ὁποῖαι ἀφορῶσιν εἰς τὴν εὕρεσιν τοῦ ἀληθοῦς μεγέθους γεωμετρικοῦ τινος σχήματος, δεδομένου διὰ τῶν προβολῶν αὐτοῦ, ἢ αἱ ἀναφερόμεναι εἰς τὸν προσδιορισμὸν τῆς ἀπ' ἀλλήλων ἀποστάσεως σημείου, εὐθείας καὶ ἐπιπέδου, καλοῦνται *μετρικαί.*

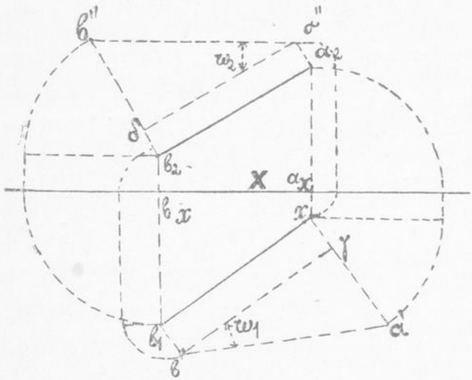
Ἐπειδὴ τὸ τυχὸν ἐπίπεδον σχῆμα, δεδομένον διὰ τῶν προβολῶν αὐτοῦ, τότε μόνον φαίνεται κατὰ τὸ ἀληθὲς αὐτοῦ μέγεθος, ὅταν κεῖται ἐν ἑνὶ τῶν Προ. Επι. ἢ εἶνε παράλληλον τούτῳ (παράβ. ἐδάφ. 14), ἕπεται ὅτι τὸ ἀληθὲς μέγεθος παντὸς ἐπιπέδου σχήματος κεκλιμένου ὅπως δήποτε πρὸς τὰ Προ. Επι., κατὰ δύο τρόπους δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν, ἢ

1) διὰ κατακλίσεως τοῦ ἐπιπέδου τοῦ σχήματος, στρεφομένου περὶ τὸ ἴχνος αὐτοῦ, ἐπὶ ἑνὸς τῶν Προ. Επι., ἢ

2) διὰ παραλληλισμοῦ τοῦ εἰρημένου ἐπιπέδου τοῦ σχήματος πρὸς ἓν τῶν Προ. Επι.

61) Πρόβλημα. — *Εὑρεῖν τὴν ἀπ' ἀλλήλων ἀπόστασιν δύο σημείων δεδομένων διὰ τῶν προβολῶν αὐτῶν, ἤ, ὅπερ ταὐτό, τὸ ἀληθὲς μέγεθος τυχόντος εὐθυγράμμου τμήματος καὶ τὰς γωνίας κλίσεως αὐτοῦ πρὸς τὰ Προ. Επι.* E_1 *καὶ* E_2.

Πρῶτος τρόπος, διὰ κατακλίσεως. — Ἔστωσαν (σχ. 67) α_1, β_1 καὶ α_2, β_2 αἱ προβολαὶ τῶν περάτων τοῦ δοθέντος εὐθυγράμμου τμήματος $\alpha\beta$. Τὰ σημεῖα α, β καὶ δύο ὁμώνυμοι αὐτῶν προβολαί, ἔστωσαν αἱ πρῶται α_1, β_1, ἀποτελοῦσιν ἐν γένει τὰς τέσσαρας κορυφὰς τραπεζίου, τοῦ ὁποίου αἱ μὴ παράλληλοι πλευραὶ εἶνε τὸ ζητούμενον τμῆμα $\alpha\beta$ καὶ ἡ πρώτη αὐτοῦ προβολὴ $\alpha_1\beta_1$· αἱ δ' ἕτεραι δύο, αἱ πρὸς ἀλλήλας παράλληλοι, εἶνε αἱ προβάλλουσαι $\alpha\alpha_1$ καὶ $\beta\beta_1$ τὰ σημεῖα α καὶ β ἐπὶ τὸ Προ. Επι. E_1, ἑκατέρα τῶν ὁποίων, ὡς γνωστόν, εἶνε ἀντιστοίχως ἴση πρὸς τὴν ἀπόστασιν $\alpha_2\alpha_X$ καὶ $\beta_2\beta_X$ τῆς δευτέρας προβολῆς ἑκατέρου τῶν σημείων α καὶ β ἀπὸ τοῦ ἄξονος X.



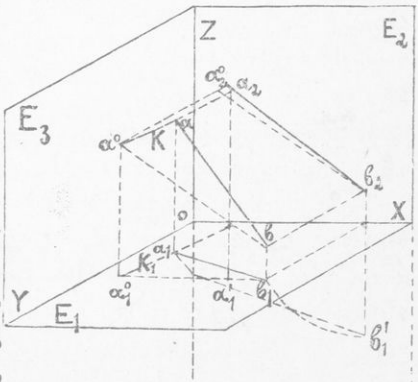
Σχ. 67

Τούτων τεθέντων, ἂς περιστραφῇ τὸ ἐπίπεδον τοῦ εἰρημένου τραπεζίου $\alpha\beta\alpha_1\beta_1$, ἤτοι τὸ πρῶτον προβάλλον τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα αβ ἐπίπεδον, περὶ τὸ πρῶτον αὐτοῦ ἴχνος α_1 β_1, ἕως οὗ κατακλιθῇ ἐπὶ τοῦ Προ. Επι. E_1, καὶ ἂς ἀχθῶσιν ἐκ τῶν προβολῶν α_1, β_1 τῶν περάτων α, β τοῦ τμήματος καὶ ἐν τῷ Προ. Επι. E_1 κάθετοι ἐπὶ τὸ ἴχνος $\alpha_1\beta_1$, ἂς ληφθῶσι δ' ἐπὶ τῶν τελευταίων τούτων καθέτων τὰ τμήματα $\alpha_1\alpha'$ καὶ $\beta_1\beta'$ ἀντιστοίχως ἴσα πρὸς τὰς ἀποστάσεις $\alpha\alpha_1=\alpha_2\,\alpha_X$ καὶ $\beta\beta_1=\beta_2\beta_X$ τῶν σημείων α καὶ β ἀπὸ τοῦ Προ. Επι. E_1· τὰ πέρατα α' καὶ β' τῶν τμημάτων τούτων εἶνε αἱ κατακλίσεις τῶν σημείων α καὶ β (παράβ. ἐδάφ. 16 καὶ 17) ἐπὶ τοῦ Προ. Επι. E_1, ἡ δ' ἐπιζευγνύουσα ταῦτα εὐθεῖα α' β' εἶνε ἡ κατάκλισις τοῦ ἐν τῷ χώρῳ εὐθυγράμμου τμήματος αβ, καὶ ἄρα τὸ ἀληθὲς αὐτοῦ μέγεθος.

Καθ' ὅμοιον τρόπον κατασκευάζεται ἡ κατάκλισις α''β'' τοῦ αὐτοῦ εὐθυγράμμου τμήματος αβ ἐπὶ τοῦ δευτέρου Προ. Επι. προφανῶς δὲ δέον να εἶνε α' β' = α'' β''.

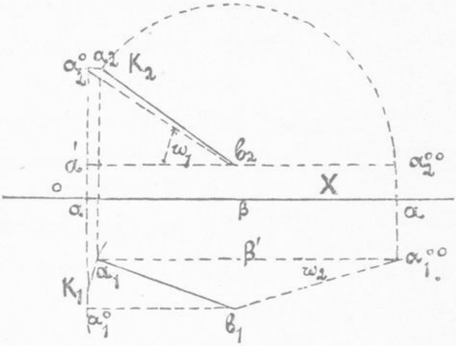
Τὸ ἐν τῷ χώρῳ δοθὲν εὐθύγραμμον τμῆμα αβ δύναται προσέτι νὰ θεωρηθῇ ὡς ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου τριγώνου, κειμένου ἐν τῷ προβάλλοντι τὸ τμῆμα ἐπιπέδῳ, τοῦ ὁποίου ἡ μὲν μία κάθετος πλευρὰ εἶνε ἡ ἐκ τοῦ ἑνὸς πέρατος ἠγμένη κάθετος εὐθεῖα ἐπὶ τὴν προϐάλλουσαν τὸ ἕτερον πέρας τοῦ τμήματος καὶ ἄρα ἴση καὶ παράλληλος πρὸς τὴν ὁμώνυμον (τῇ προϐαλλούσῃ) προϐολὴν τοῦ τμήματος, τὴν $\alpha_1 \beta_1$ ἢ τὴν $\alpha_2 \beta_2$, ἡ δ' ἑτέρα κάθετος εἶνε ἡ (ἀλγεϐρικὴ) διαφορὰ τῶν ὁμωνύμων προϐαλλουσῶν τὰ αὐτὰ πέρατα α καὶ β τοῦ τμήματος $\alpha\beta$, ἄρα $\pm(\alpha_x \alpha_2 - \beta_x \beta_2)$ ἢ $\pm(\alpha_x \alpha_1 - \beta_x \beta_1)$. Διὰ τῶν δύο τούτων καθέτων πλευρῶν τοῦ εἰρημένου ὀρθογωνίου τριγώνου εὐοδοῦται ἡ κατασκευὴ τῆς κατακλίσεως αὐτοῦ ἐπὶ ἑνὸς τῶν Προ. Επι. (σχ. 67), καὶ ἄρα τὸ ἀληθὲς μέγεθος $\alpha'\beta' = \alpha''\beta''$ τοῦ δοθέντος εὐθυγράμμου τμήματος $\alpha\beta$ καὶ τῶν γωνιῶν κλίσεως ω_1 καὶ ω_2 αὐτοῦ πρὸς τὰ Προ. Επι. E_1 καὶ E_2. Ἑκατέρα τῶν τελευταίων τούτων γωνιῶν εἶνε ἡ ὀξεῖα γωνία τοῦ κατακλιθέντος ὀρθογωνίου τριγώνου ἡ περιεχομένη μεταξὺ τῆς πρώτης ἢ δευτέρας προϐολῆς τοῦ τμήματος $\alpha\beta$ καὶ τῆς ὁμωνύμου κατακλίσεως αὐτοῦ $\alpha\beta'$ ἢ $\alpha'\beta''$.

Λύσις τοῦ αὐτοῦ προβλήματος διὰ παραλληλισμοῦ τοῦ δοθέντος εὐθυγράμμου τμήματος αβ πρὸς ἓν τῶν Προ. Επι. — Ἂς στραφῇ τὸ τραπέζιον $\alpha\beta\alpha_1\beta_1$ περὶ τὴν πρώτην προϐάλλουσαν $\beta\beta_1$ τὸ σημεῖον β (τὸ σχ. 68 παριστᾷ τὴν στροφὴν ταύτην), ἕως οὗ τὸ ἐπίπεδον αὐτοῦ, ἄρα καὶ τὸ τμῆμα $\alpha\beta$, καταστῇ παράλληλον τῷ Προ. Επι. E_2. Κατὰ τὴν στροφὴν ταύτην τὸ μὲν σημεῖον β μένει, ἐν ᾧ τὸ σημεῖον α γράφει τόξον κύκλου $\alpha\alpha^0 = K$ (σχ. 68) παράλληλον πρὸς τὸ Προ. Επι. E_1 καὶ ἔχον τὸ μὲν



Σχ. 68

κέντρον αὐτοῦ ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῆς στροφῆς $\beta\beta_1$, ἀκτῖνα δὲ τὴν ἀπόστασιν τοῦ σημείου α ἀπὸ τοῦ εἰρημένου ἄξονος, ἑπομένως ἴσην πρὸς τὴν πρώτην προβολὴν $\beta_1\alpha_1$ τοῦ τμήματος $\beta\alpha$. Ἡ πρώτη ἄρα προβολὴ K_1 (σχ. 69) τοῦ εἰρημένου τόξου K εἶνε τόξον ἴσον πρὸς αὐτὸ γραφόμενον μὲ κέντρον β_1 καὶ μὲ ἀκτῖνα $\beta_1\alpha_1$, ἐν ᾧ ἡ δευτέρα αὐτοῦ προβολὴ εἶνε ἡ διὰ τῆς δευτέρας προβολῆς α_2 τοῦ σημείου α καὶ παρὰ τὸν ἄξονα X ἠγμένη εὐθεῖα K_2. Ἀλλ' ὅταν τὸ τμῆμα $\alpha\beta$ στρεφόμενον περὶ τὴν $\beta\beta_1$ κατασταθῇ παράλληλον τῷ Προ. Επι. E_2 καὶ καταλάβῃ τὴν θέσιν $\alpha^0\beta$ (σχ. 68), τότε ἡ πρώτη αὐτοῦ προβολὴ $\alpha_1{}^0\beta_1$ (σχ. 69) καθίσταται παράλληλος τῷ ἄξονι X, καὶ ἡ τομὴ ταύτης μετὰ τοῦ τόξου K_1 ὁρίζει τὴν πρώτην προβολὴν $\alpha_1{}^0$ τοῦ σημείου α^0· τοῦ τελευταίου τούτου σημείου ἡ δευτέρα προβολὴ $\alpha_2{}^0$ εἶνε ἡ τομὴ τῆς δευτέρας προβολῆς K_2 τοῦ τόξου K καὶ τῆς ἀπὸ τοῦ σημείου $\alpha_1{}^0$ καὶ ἐπὶ τὸν ἄξονα X ἠγμένης καθέτου. Ἡ ἐπὶ τὰ σημεῖα $\alpha_2{}^0$ καὶ β_2 ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα εἶνε ἡ δευτέρα προβολὴ $\alpha_2{}^0\beta_2$ τοῦ τμήματος $\alpha^0\beta = \alpha\beta$, ἐν ταὐτῷ δὲ καὶ τὸ ἀληθὲς αὐτοῦ μέγεθος.



Σχ. 69

Δυνάμεθα ὡσαύτως νὰ στρέψωμεν τὸ τραπέζιον $\alpha\alpha_2\beta_2\beta$ περὶ τὴν δευτέραν προβάλλουσαν $\beta\beta_2$ τὸ σημεῖον β, ἕως οὗ τὸ ἐπίπεδον αὐτοῦ γίνῃ παράλληλον τῷ Προ. Επι. E_1, ὁπότε τὸ δοθὲν τμῆμα $\alpha\beta$ προβάλλεται ἐπὶ τὸ Προ. Επι. E_1 κατὰ τὸ ἀληθὲς αὐτοῦ μέγεθος. Ἡ στροφὴ αὕτη ἐμφαίνεται ἐν τῷ σχήματι 69, ἐν ᾧ τὸ τμῆμα $\alpha_1{}^{00}\beta_1$ παριστᾷ τὸ ἀληθὲς μέγεθος τοῦ δοθέντος εὐθυγράμμου τμήματος $\alpha\beta$.

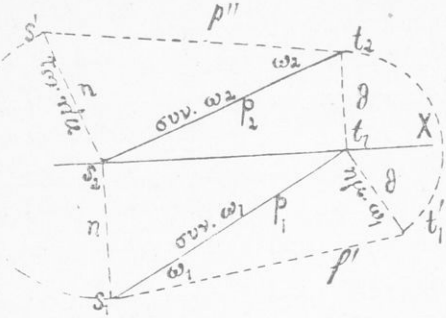
Αἱ γωνίαι κλίσεως ω_1 καὶ ω_2 τοῦ δοθέντος εὐθυγράμμου τμήματος $\alpha\beta$ πρὸς τὰ Προ. Επι. E_1 καὶ E_2 εἶνε, ὡς ἤδη εἴπομεν, ἡ ἑτέρα τῶν ὀξειῶν γωνιῶν ὀρθογωνίου τριγώνου, οὗ ἡ μὲν μία κάθετος εἶνε ἴση πρὸς τὴν ἀπ' ἀλλήλων ἀπόστασιν τῶν ὁμωνύμων προβολῶν τῶν σημείων α καὶ β, ἤτοι ἴση πρὸς τὴν $\alpha_1\beta_1$ ἢ $\alpha_2\beta_2$, ἡ δὲ ἑτέρα εἶνε ἡ (ἀλγεβρικὴ) διαφορὰ τῶν ὁμωνύμων προβαλλουσῶν τὰ σημεῖα ταῦτα, ἤτοι $\pm(\alpha^0{}_2\alpha-\beta_2\beta)$ ἢ $\pm(\alpha_1\alpha-\beta_1\beta)$ $=\pm(\alpha_1{}^{00}\alpha-\beta_1\beta)$, ἀπέναντι τῆς ὁποίας κεῖται καὶ ἡ ζητουμένη γωνία κλίσεως. Ἀλλ' ἑκάτερον τῶν τριγώνων τούτων μετὰ τὸν παραλληλισμὸν τοῦ ἐπιπέδου του πρὸς τὸ δεύτερον ἢ πρῶτον Προ. Επι. προβάλλεται ἐπὶ ἑκάτερον τῶν ἐπιπέδων τούτων κατὰ τὸ ἀληθὲς αὐτοῦ μέγεθος, καὶ ἄρα αἱ γωνίαι κλίσεως $\omega_1=\alpha'\beta_2\alpha^0{}_2$ καὶ $\omega_2=\beta'\alpha_1{}^{00}\beta_1$ ἐμφανίζονται κατὰ τὸ ἀληθὲς αὐτῶν μέγεθος.

Παρατήρησις. — Ἐκ τοῦ σχήματος 69 εὐκόλως πορίζόμεθα τὴν μεταξὺ τῶν ἑξῆς εὐθυγράμμων τμημάτων ἰσότητα

$$\alpha_1\beta_1=\alpha^0{}_1\beta_1=\alpha\beta=\alpha'\beta_2,$$

τὴν ὁποίαν λαμβάνοντες ὑπ' ὄψει κατασκευάζομεν τὸ ἀληθὲς μέγεθος τοῦ δοθέντος εὐθυγράμμου τμήματος αβ καὶ τῆς γωνίας κλίσεως αὐτοῦ πρὸς ἓν τῶν Προ Επι. ὡς ἑξῆς: Ἐκ τῶν δύο περάτων τῆς ἑτέρας τῶν προβολῶν, ἔστω τῆς $\alpha_2\beta_2$, τοῦ τμήματος αβ ἂς ἀχθῶσι παρὰ τὸν ἄξονα Χ δύο εὐθεῖαι, καὶ ἐπὶ τῆς ἑτέρας τούτων, ἔστω τῆς διὰ τοῦ β_2 ἠγμένης, ἂς ληφθῇ, ἀπὸ τοῦ β_2 ὡς ἀρχῆς, τὸ τμῆμα $\beta_2\alpha'$ ἴσον τῇ ἑτέρᾳ προβολῇ $\alpha_1\beta_1$, καὶ ἐκ τοῦ σημείου α' ἂς ἀχθῇ εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα Χ. Ἡ τελευταία αὕτη εὐθεῖα τέμνει τὴν διὰ τοῦ α_2 καὶ παρὰ τὸν ἄξονα Χ ἠγμένην εὐθεῖαν εἰς τὸ σημεῖον $\alpha^0{}_2$, ἡ δ' ἐπὶ τὰ σημεῖα $\alpha^0{}_2$, β_2 ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα $\alpha^0{}_2\beta_2$ παριστᾷ τὸ ἀληθὲς μέγεθος τοῦ δοθέντος εὐθυγράμμου τμήματος αβ, ἡ δὲ γωνία $\alpha_2{}^0\beta_2\alpha'$ τὸ ἀληθὲς μέτρον τῆς γωνίας κλίσεως τοῦ εἰρημένου τμήματος πρὸς τὸ Προ. Επι. E_1· διότι τὸ τμῆμα $\alpha_2{}^0\beta_2$ εἶνε ὑποτείνουσα τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου $\alpha^0{}_2\beta_2\alpha'$, τοῦ ὁποίου ἡ μὲν μία κάθετος $\beta_2\alpha'$ εἶνε ἴση πρὸς τὴν ἑτέραν τῶν προβολῶν $\alpha_1\beta_1$, ἡ δὲ λοιπὴ ἴση πρὸς τὴν διαφορὰν $\alpha^0{}_2\alpha-\beta_2\beta=\alpha^0{}_2\alpha'$ τῶν ὁμωνύμων προβαλλουσῶν τὰ πέρατα α καὶ β τοῦ δοθέντος τμήματος αβ.

62) Πρόβλημα. — Δοθείσης εὐθείας νὰ κατασκευασθῶσιν αἱ δύο γωνίαι κλίσεως ω_1 καὶ ω_2 αὐτῆς πρὸς ἀμφότερα τὰ Προ. Επι. E_1 καὶ E_2. Ἔστωσαν (σχ. 70) $P_1 . P_2$ ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα καὶ s_1t_2 τὸ ὑπὸ τῶν ἰχνῶν αὐτῆς ὁριζόμενον τμῆμα· αἱ γωνίαι κλίσεως τοῦ τελευταίου τούτου εὐθυγράμμου τμήματος πρὸς τὰ δύο Προ. Επι. E_1 καὶ E_2 εἶνε προφανῶς αἱ ζητούμεναι γωνίαι ω_1 καὶ ω_2 καὶ ἄρα ἡ λύσις καὶ ἡ κατασκευὴ τοῦ προτεθέντος προβλήματος γίνεται ὅπως καὶ εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα (61).



Σχ. 70

Οὕτως ἡ γωνία κλίσεως ω_1 τῆς δοθείσης εὐθείας P πρὸς τὸ Προ. Επι. E_1 εἶνε ἡ ἑτέρα τῶν ὀξειῶν γωνιῶν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου s_1t_1t', τοῦ ὁποίου ἡ μὲν μία κάθετος πλευρὰ εἶνε ἡ πρώτη προβολὴ s_1t_1 τοῦ εἰρημένου τμήματος s_1t_2, ἡ δ' ἑτέρα κάθετος $t_1t'=t_1t_2$ εἶνε ἡ διαφορὰ τῶν ὁμωνύμων προβαλλουσῶν t_2t_1 καὶ O τὰ πέρατα t_2 καὶ s_1 αὐτοῦ. Καθ' ὅμοιον τρόπον κατασκευάζεται καὶ ἡ γωνία κλίσεως ω_2 τῆς δοθείσης εὐθείας P πρὸς τὸ Προ. Επι. E_2.

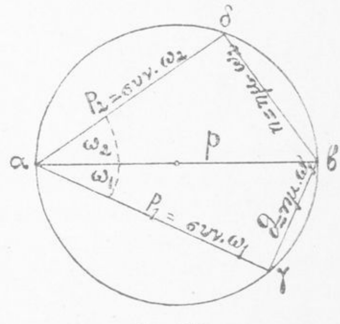
Ἐὰν τὸ ὑπὸ τῶν ἰχνῶν s_1, t_2 τῆς εὐθείας P ὁριζόμενον τμῆμα s_1t_2 ληφθῇ ὡς μονάς, τότε ἔχομεν $s_1t_1=$ συν. ω_1, $t_2t_1=t_1t'=$ ημ. ω_1, καὶ $s_2t_2=$ συν. ω_2, $s_2s_1=s_2s'=$ ημ. ω_2. Ἐπειδὴ δὲ τὸ τμῆμα s_1s_2 εἶνε κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονα X, ἕπεται $s_1t_1 \geq s_1s_2$, ἤτοι: συν. $\omega_1 \geq$ ημω_2 καὶ ἄρα $\omega_1+\omega_2 \leq 90^0$. Ὅταν $\omega_1+\omega_2=90^0$, τότε ἡ εὐθεῖα P κεῖται ἐπὶ ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὸν ἄξονα X.

Ἐὰν τὰ ἴχνη τῆς δοθείσης εὐθείας P πίπτωσιν ἐκτὸς τοῦ χάρτου τῆς σχεδιάσεως, τότε ἀπὸ τοῦ τυχόντος σημείου α τοῦ χώρου ἄγομεν εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὴν δοθεῖσαν καὶ οὕτως, ὥστε τὰ ἴχνη αὐτῆς νὰ κεῖνται ἐκτὸς τοῦ χάρτου τῆς σχεδιάσεως. Τῆς τελευταίας ταύτης εὐθείας αἱ γωνίαι κλίσεως ω_1 καὶ ω_2, κατασκευαζόμεναι κατὰ τὰ ἄνω εἰρημένα, εἶνε αἱ γωνίαι κλίσεως τῆς δοθείσης εὐθείας.

63) ***Πρόβλημα.*** *—Ἀπὸ δοθέντος σημείου ϱ ν' ἀχθῇ εὐθεῖα δεδομένας ἔχουσα κλίσεις ω_1 καὶ ω_2 πρὸς τὰ Προ. Επι. E_1 καὶ E_2.*

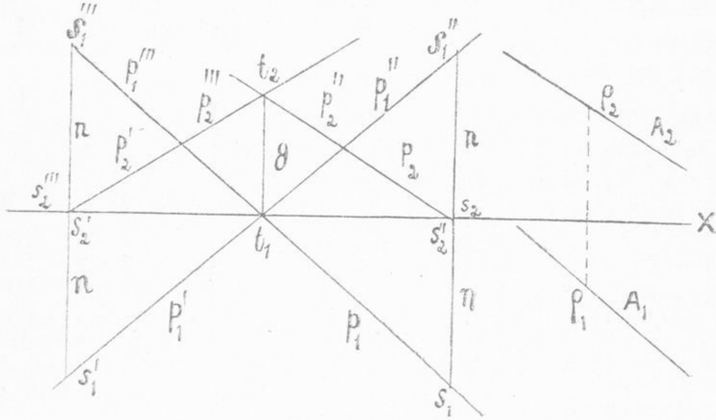
Περιορισμός. — Κατὰ τὸ προηγούμενον πρόβλημα δέον νὰ εἶνε $\omega_1 + \omega_2 \leq 90^0$.

Κατασκευή.—Λαμβάνομεν τὸ τυχὸν εὐθύγραμμον τμῆμα P, (σχ. 71 (α)), τὸ ὁποῖον θεωροῦμεν ὡς τὸ ἀληθὲς μέγεθος τοῦ μεταξὺ τῶν ἰχνῶν s_1 καὶ t_2 περιεχομένου τμήματος εὐθείας κεκλιμένης πρὸς τὰ Προ. Επι. E_1 καὶ E_2 ἐν ταῖς δοθείσαις γωνίαις ω_1 καὶ ω_2, καὶ μὲ διάμετρον τὸ εἰρημένον τμῆμα P γράφομεν τὸν κύκλον K· ἔπειτα μὲ κορυφὴν τὸ ἕτερον πέρας, ἔστω τὸ α, τῆς διαμέτρου P κατασκευάζομεν ἑκατέρωθεν ταύτης, ὡς κοινῆς πλευρᾶς, τὰς δύο δοθείσας γωνίας κλίσεως ω_1 καὶ ω_2, καὶ ἐπιζευγνύομεν δι' εὐθείας τὰ σημεῖα γ καὶ δ, καθ' ἃ αἱ δύο ἄλλαι πλευραὶ P_1 καὶ P_2 τῶν εἰρημένων γωνιῶν τέμνουσι τὴν περιφέρειαν K, μὲ τὸ ἕτερον πέρας β τῆς διαμέτρου P. Κατὰ τοῦτον τὸν τρόπον πορίζόμεθα τὰ δύο ὀρθογώνια εἰς δ καὶ γ τρίγωνα α δ β καὶ α γ β, ἐν οἷς, ἐὰν ἡ κοινὴ εἰς ταῦτα ὑποτείνουσα P ληφθῇ ὡς μονάς, ἔχομεν $\alpha\delta = P_2 = \text{συν}\ \omega_2$, $\beta\ \delta = \eta = \eta\mu\omega_2$, καὶ $\alpha\ \gamma = P_1 = \text{συν}\ \omega_1$, $\beta\ \gamma = \theta = \eta\mu\omega_1$· ἤτοι τὰ τμήματα P_1 καὶ P_2 παριστῶσιν ἀντιστοίχως τὴν πρώτην καὶ δευτέραν προβολὴν τοῦ ληφθέντος εὐθυγράμμου τμήματος P καὶ κεκλιμένου πρὸς τὰ Προ. Επι. E_1 καὶ E_2 ἐν ταῖς γωνίαις ω_1 καὶ ω_2, ἐν ᾧ τὰ τμήματα $\eta = \delta\beta = \eta\mu\omega_2$ καὶ $\theta = \gamma\beta = \eta\mu\omega_1$ παριστῶ-



Σχ. 71α

σιν ἀντιστοίχως τὰς ἀποστάσεις τοῦ πρώτου s_1 καὶ δευτέρου t_2 ἴχνους τοῦ εἰρημένου τμήματος P ἀπὸ τοῦ ἄξονος X (παράβαλ. ἐδάφ. 62 καὶ σχ. 70). Ἐὰν ἄρα ληφθῇ τὸ σημεῖον (t_2, t_1) τοῦ Προ. Επι. E_2 (Σχ. 71 (β)) εἰς ἀπόστασιν $t_2t_1 = \theta = \eta\mu\omega_1$ ἀπὸ τοῦ ἄξονος X καὶ ἀχθῇ t_2s_2 οὕτως, ὥστε νὰ εἶνε τὸ τμῆμα $t_2s_2 = P_2 = \sigma\upsilon\nu\,\omega_2$, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου s_2 ἡ ἐπὶ τὸν ἄξονα X κάθετος $s_2s_1 = \eta = \eta\mu\omega_2$ καὶ ἐπιζευχθῶσι τὰ σημεῖα s_1t_1 διὰ τῆς εὐθείας P_1, πoριζόμεθα τὸ τραπέζιον $s_1t_1t_2s_2$, τοῦ ὁποίου αἱ δύο μὴ κάθετοι ἐπὶ τὸν ἄξονα X πλευραὶ P_1 καὶ P_2 ὁρίζουσι



Σχ. 71β

τὰς δύο προβολὰς εὐθείας P κεκλιμένης πρὸς τὰ Προ. Επι. ἐν ταῖς γωνίαις ω_1 καὶ ω_2. Ἡ διὰ τοῦ δοθέντος σημείου (ρ_1, ρ_2) καὶ παρὰ τὴν (P_1, P_2) ἠγμένη εὐθεῖα A εἶνε ἡ ζητουμένη.

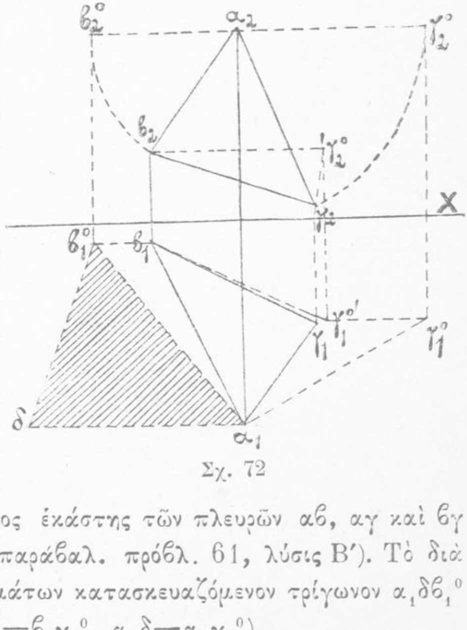
Ἀλλ' ὡς ἐκ τοῦ σχήματος (71 (β)) ἐμφαίνεται, τὸ τμῆμα P_2 δύναται νὰ ληφθῇ δεξιὰ ἢ ἀριστερὰ τοῦ σημείου (t_1, t_2), καὶ προσέτι ὅτι τὸ ἀπὸ τοῦ σημείου s_2 καὶ ἐπὶ τὸν ἄξονα X καθέτως ἀγόμενον τμῆμα $s_2s_1 = \eta_1$ δύναται νὰ φέρηται πρὸς τὰ θετικὰ ἢ ἀρνητικὰ τοῦ ἄξονος Y. Ὑπάρχουσιν ἄρα τέσσαρες *ἐν γένει* εὐθεῖαι (ὅταν $\omega_1 + \omega_2 < 90^0$) λύουσαι τὸ πρόβλημα.

Τὰς κατευθύνσεις (P_1, P_2), (P_1', P_2'), (P_1'', P_2'') καὶ $(P_1''',$

P_2''') τῶν τεσσάρων τούτων εὐθειῶν ὁρίζουσι τὰ τέσσαρα εὐθύγραμμα τμήματα τὰ ἔχοντα κοινὸν μὲν πέρας τὸ σημεῖον (t_1, t_2), ἕτερον δὲ πέρας τὰ σημεῖα (s_1, s_2), (s_1', s_2'), (s_1'', s_2'') καὶ (s_1''', s_2''').

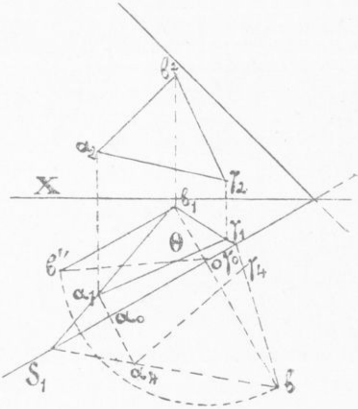
Τὸ πρόβλημα ἐπιδέχεται δύο λύσεις, ὅταν εἶνε $\omega_1+\omega_2=90^0$, καὶ οὐδεμίαν, ὅταν εἶνε $\omega_1+\omega_2>90^0$.

64) ***Πρόβλημα.*** — *Δεδομένων τῶν δύο προβολῶν $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ καὶ $\alpha_2\beta_2\gamma_2$ τοῦ τριγώνου αβγ, εὑρεῖν τὸ ἀληθὲς αὐτοῦ μέγεθος διὰ τοῦ προσδιορισμοῦ τοῦ μήκους τῶν πλευρῶν αὐτοῦ.* Ἐὰν περιστραφῇ ἑκάστη τῶν πλευρῶν τοῦ δοθέντος τριγώνου αϐγ (σχ. 72) περὶ τὴν δευτέραν προβάλλουσαν τὸ ἕτερον πέρας αὐτῆς, ἕως οὗ γίνῃ παράλληλος τῷ Προ. Επι. E_1, προκύπτουσιν ἐπὶ τοῦ τελευταίου τούτου ἐπιπέδου τὰ τμήματα $\alpha_1 \beta_1{}^0$, $\alpha_1\gamma_1{}^0$ καὶ $\beta_1\gamma_1{}^0$ παριστῶντα ἕκαστον ἀντιστοίχως τὸ ἀληθὲς μῆκος ἑκάστης τῶν πλευρῶν αϐ, αγ καὶ ϐγ τοῦ δοθέντος τριγώνου (παράϐαλ. πρόϐλ. 61, λύσις Β'). Τὸ διὰ τῶν εἰρημένων ἄρα τμημάτων κατασκευαζόμενον τρίγωνον $\alpha_1\delta\beta_1{}^0$ εἶνε τὸ ζητούμενον ($\beta_1{}^0\delta=\beta_1\gamma_1{}^0$, $\alpha_1\delta=\alpha_1\gamma_1{}^0$).



Σχ. 72

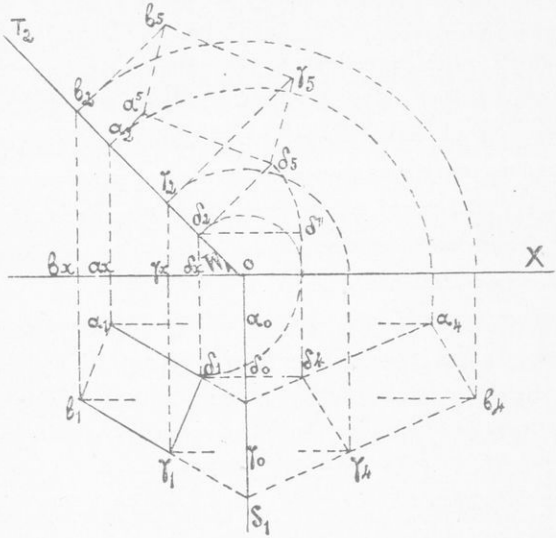
65) ***Πρόβλημα.*** — *Δεδομένων τῶν δύο προβολῶν ἐπιπέδου τινὸς σχήματος, κειμένου ἐπὶ δεδομένου ἐπιπέδου, εὑρεῖν τὸ ἀληθὲς αὐτοῦ μέγεθος διὰ κατακλίσεως.* Ἔστωσαν ($\alpha_1\beta_1\gamma_1$) καὶ ($\alpha_2\beta_2\gamma_2$) (σχ. 73) αἱ δύο προϐολαὶ τριγώνου τινὸς κειμένου ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (S_1, T_2). Ἡ κατάκλισις αὐτοῦ ἐπὶ τοῦ Προ. Επι. E_1 (ἢ E_2) γίνεται συμφώνως πρὸς τὰ ἐν ἐδαφίῳ 17 εἰρημένα ἢ πρὸς τὴν σημείωσιν τοῦ ἐδαφίου 18· εἴτε δηλονότι κατασκευάζομεν τὰ κλισιγώνια τρίγωνα, τὰ ἀντιστοιχοῦντα εἰς ἕκαστον τῶν σημείων α, β, γ καὶ προσδιορίζομεν τὰς κατακλίσεις $α_4$, $β_4$, $γ_4$ τῶν εἰρημένων σημείων ἐπὶ τοῦ Προ. Επι. E_1, στρεφομένου τοῦ ἐπιπέδου τοῦ τριγώνου περὶ τὸ πρῶτον αὐτοῦ ἴχνος S_1, ἤ, ὅπως ἐν τῷ προτεθέντι προβλήματι, κατασκευάζομεν τὸ κλισιγώνιον τρίγωνον τοῦ ἑνὸς μόνον τῶν τριῶν σημείων, π. χ. τοῦ σημείου β, προσδιορίζομεν τὴν κατάκλισιν τούτου $β_4$ ἐπὶ τοῦ Προ. Επι. E_1, καὶ διὰ τῶν σχέσεων τῆς ὁμολογίας μεταξὺ προβολῆς κατακλίσεως τῶν ἐπιπέδων σχημάτων (ἐδάφ. 18, σημείωσις) κατασκευάζομεν τὰς κατακλίσεις $α_4$, $γ_4$ καὶ τῶν λοιπῶν σημείων α καὶ γ.



Σχ. 73

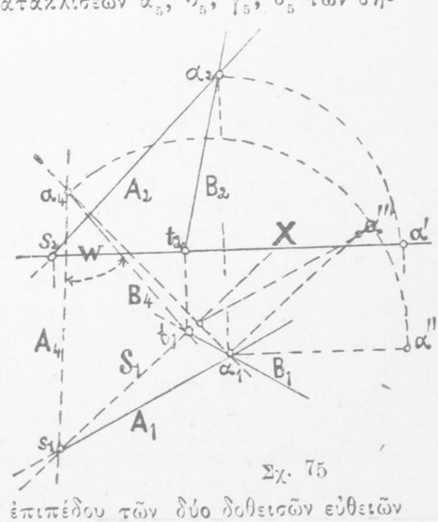
Ἐὰν τὸ ἐπίπεδον τοῦ δοθέντος σχήματος εἶνε κάθετον ἐπὶ ἓν τῶν Προ.Επι., ἔστω ἐπὶ τὸ E_2, ὅπως τὸ ἐπίπεδον $S_1 T_2$ τοῦ τετραπλεύρου αβγδ (σχ. 74), τότε ἡ γωνία W_1, ἡ ὑπὸ τοῦ δευτέρου ἴχνους T_2 καὶ τοῦ ἄξονος X περιεχομένη, εἶνε ἡ γωνία κλίσεως τοῦ ἐπιπέδου αβγδ πρὸς τὸ Προ. Επι. E_1 καὶ ἄρα γωνία τῶν κλισιγωνίων τριγώνων τῶν σημείων α, β, γ, δ τοῦ τετραπλεύρου. Οὕτω τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὸ σημεῖον α τοῦ ἐπιπέδου αβγδ κλισιγώνιον τρίγωνον εἶνε τὸ $οα_x α_2$· ἐὰν ἄρα ἀπὸ τοῦ σημείου $α_1$ ἀχθῇ ἡ ἐπὶ τὸ πρῶτον ἴχνος S_1 κάθετος εὐθεῖα $α_1α_0$ καὶ ληφθῇ ἐπὶ τῆς προσεκβολῆς ταύτης $α_0α_4=οα_2$ (=ὑποτείνουσα τοῦ κλισιγωνίου τριγώνου τοῦ σημείου α), τὸ σημεῖον $α_4$ εἶνε ἡ κατάκλισις τοῦ σημείου α ἐπὶ τοῦ Προ. Επι. E_1. Καθ' ὅμοιον τρόπον πορίζόμεθα καὶ τῶν λοιπῶν σημείων β, γ, δ τὰς κατακλίσεις $β_4$, $γ_4$, $δ_4$.

Ἐὰν ἡ κατάκλισις τοῦ ἐπιπέδου S_1T_2 τοῦ δοθέντος τετραπλεύρου αβγδ γίνῃ ἐπὶ τοῦ Προ. Επι. E_2 περὶ τὸ ἴχνος T_2,



Σχ. 74

τότε, πρὸς κατασκευὴν τῶν κατακλίσεων $α_5$, $β_5$, $γ_5$, $δ_5$ τῶν σημείων α, β, γ, δ, ἀρκεῖ νὰ μεταφέρωμεν ἐπὶ τῶν καθέτων τῶν διὰ τῶν σημείων $α^2$, $β^2$, $γ_2$, $δ_2$ ἐπὶ τὸ ἴχνος T_2 ἀγομένων, τὰς ἀποστάσεις τῶν εἰρημένων σημείων τοῦ τετραπλεύρου αβγδ ἀπὸ τοῦ Πρ. Επι. E_1.

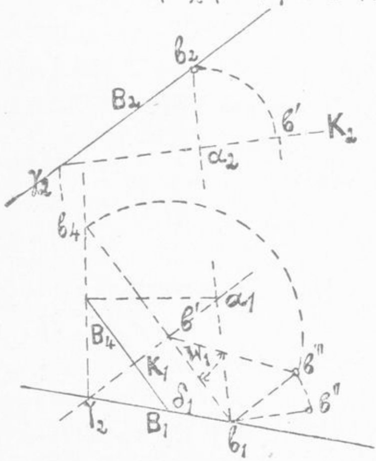


Σχ. 75

66) Πρόβλημα. — *Εὑρεῖν τὸ ἀληθὲς μέγεθος τῆς γωνίας δύο ἀλληλοτομουσῶν εὐθειῶν.* Ἐὰν κατασκευασθῇ, κατὰ τὰ γνωστὰ (ἐδάφ. 45), τὸ πρῶτον ἴχνος S_1 τοῦ ἐπιπέδου τῶν δύο δοθεισῶν εὐθειῶν

Α καὶ Β καὶ κατακλιθῇ, συμφώνως πρὸς τὸ προηγούμενον πρόβλημα, τὸ ἐπίπεδον τούτων ἐπὶ τοῦ Προ. Επι. E_1, πορίζόμεθα τὸ ἀληθὲς μέγεθος τῆς γωνίας τῶν δύο εἰρημένων εὐθειῶν Α καὶ Β.

Κατασκευή.— Ἂς προσδιορισθῇ ἡ κατάκλισις α_4 τοῦ σημείου τῆς τομῆς (α_1, α_2) (σχ. 75) τῶν δύο εὐθειῶν Α καὶ Β ἐπὶ τοῦ Προ. Επι. E_1, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ τὸ σημεῖον α_4 μετὰ τῶν μενόντων καθ' ὅλην τὴν στροφὴν σημείων s_1 καὶ t_2 διὰ τῶν εὐθείων A_4 καὶ B_4. Αἱ τελευταῖαι αὗται παριστῶσι τὰς κατακλίσεις τῶν πλευρῶν τῆς δοθείσης γωνίας ἐπὶ τοῦ Προ. Επι. E_1, καὶ ἄρα ἡ ὑπ' αὐτῶν περιεχομένη γωνία W εἶνε ἡ ζητουμένη.



Σχ. 76

67) Πρόβλημα.—*Εὑρεῖν τὴν ἀπ' ἀλλήλων ἀπόστασιν σημείου καὶ εὐθείας, δεδομένων ἀμφοτέρων διὰ τῶν προβολῶν αὐτῶν.* Ἐὰν ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου α ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν Β καὶ προσδιορισθῇ τὸ ἀληθὲς μέγεθος τοῦ μεταξὺ τοῦ σημείου α καὶ τοῦ ποδὸς τῆς εἰρημένης καθέτου περιεχομένου τμήματος αὐτῆς, τὸ τελευταῖον τοῦτο θὰ παριστᾷ τὴν ζητουμένην ἀπόστασιν.

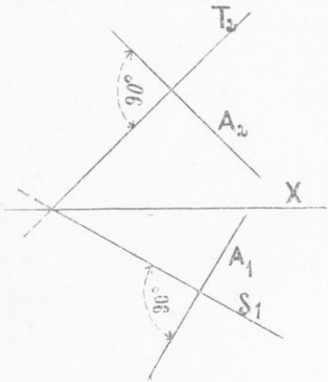
Κατασκευή.— Ἔστωσαν (α_1, α_2) καὶ (B_1, B_2) (σχ. 76) τὸ δοθὲν σημεῖον καὶ ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα. Ἡ ἀπὸ τοῦ σημείου α ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν Β ἠγμένη κάθετος κεῖται ὅλη ἐν τῷ ἐπιπέδῳ (α, Β)· ἐὰν δὲ τὸ τελευταῖον τοῦτο ἐπίπεδον κατασταθῇ παράλληλον ἑνὶ τῶν Προ. Επι., ἔστω πρὸς τὸ E_1, τότε ἡ εἰρημένη καθετος προβάλλεται ἐπὶ τὸ Προ. Επι. E_1 κατὰ τὸ ἀληθὲς αὐτῆς μέγεθος. Πρὸς ἀποκατάστασιν τοῦ παραλληλισμοῦ τούτου ἄγομεν διὰ τοῦ δοθέντος σημείου α τὴν πρώτην ἰχνοπαράλληλον ($K_2=\alpha_2\gamma_2$, $K_1=\alpha_1\gamma_1$)

τοῦ ἐπιπέδου (α, Β) καὶ κατακλίνομεν τὸ τελευταῖον τοῦτο ἐπίπεδον, στρέφοντές το περὶ τὴν ῥηθεῖσαν ἰχνοπαράλληλον αὐτοῦ (K_1, K_2), ἐπὶ τοῦ διὰ τῆς εὐθείας ταύτης καὶ παρὰ τὸ Προ. Επι. E_1 ἠγμένου ἐπιπέδου E′. Κατὰ τὴν στροφὴν ταύτην τὰ σημεῖα (α_1, α_2) καὶ (γ_1, γ_2), ὡς κείμενα ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῆς στροφῆς, μένουσιν ἀμετάστατα, ἡ δὲ κατακλισις τῆς εὐθείας Β ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου E′ καθορίζεται ὑπὸ τοῦ μένοντος σημείου (γ_1 γ_2) καὶ τῆς κατακλίσεως τοῦ τυχόντος σημείου ϐ αὐτῆς, καὶ μάλιστα, πρὸς ἁπλοποίησιν τῆς κατασκευῆς, ἐκείνου, οὗτινος αἱ προβολαὶ $ϐ_1$ καὶ $ϐ_2$ κεῖνται ἐπὶ τῆς εὐθείας α_1 α_2. Προσδιορίζοντες ἄρα τὴν κατάκλισιν $ϐ_4$ τοῦ σημείου ϐ κατὰ τὰ ἤδη γνωστὰ ($ϐ_1ϐ'$ κάθετος ἐπὶ τὴν K_1, $ϐ_4ϐ' = ϐ'ϐ''' = \alpha_2ϐ_2$) καὶ ἐπιζευγνύοντες τὰ σημεῖα $ϐ_4$ καὶ γ_1 δι εὐθείας ποριζόμεθα τῆς δοθείσης εὐθείας Β τὴν κατάκλισιν B_4, ἡ δ' ἀπὸ τοῦ σημείου α_1 ἐπὶ τὴν τελευταίαν ταύτην εὐθεῖαν B_4 ἀγομένη κάθετος $\alpha_1\delta$ παριστᾷ τὸ ἀληθὲς μέγεθος τῆς ἀπ' ἀλλήλων ἀποστάσεως τοῦ δοθέντος σημείου α καὶ τῆς δοθείσης εὐθείας Β.

Ἐπειδὴ ἡ προβολὴ καὶ ἡ κατάκλισις παντὸς σημείου κεῖνται πάντοτε ἐπὶ μιᾶς καὶ αὐτῆς εὐθείας καθέτου ἐπὶ τὸν ἄξονα τῆς στροφῆς, ἕπεται ὅτι, ἐὰν ἐκ τοῦ δ ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν K_1, τὸ σημεῖον δ_1, καθ' ὃ αὔτη συναντᾷ τὴν B_1, παριστᾷ τὴν πρώτην προβολὴν τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου ἐπὶ τὴν Β, ἡ δ' ἐπὶ τὰ σημεῖα δ_1 καὶ α_1 ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα $\delta_1\alpha_1$ παριστᾷ τὴν πρώτην προβολὴν τῆς ἀπ' ἀλλήλων ἀποστάσεως τοῦ σημείου α καὶ τῆς εὐθείας Β.

ΕΥΘΕΙΑ ΚΑΙ ΕΠΙΠΕΔΟΝ ΚΑΘΕΤΑ ΕΠ' ΑΛΛΗΛΑ

68) Θεώρημα.—*Ἵνα εὐθεῖά τις ᾖ κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον, πρέπει καὶ ἀρκεῖ ἀμφότεραι αἱ προβολαὶ αὐτῆς νὰ ὦσι κάθετοι ἐπὶ τὰ ὁμώνυμα ἴχνη τοῦ ἐπιπέδου.* Τῷ ὄντι ἐὰν εὐθεῖά τις Α εἶνε κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (S, T), θὰ εἶνε κάθετος καὶ ἐπὶ τὰς διὰ τοῦ ποδὸς αὐτῆς διερχομένας δύο ἰχνοπαραλλήλους τοῦ ἐπιπέδου, καὶ ἄρα (ἐδάφ. 10 καὶ 11) αἱ δύο προβολαὶ A_1 καὶ A_2 τῆς εἰρημένης εὐθείας A εἶνε ἀντιστοίχως κάθετοι ἐπὶ τὰς ὁμωνύμους προβολὰς τῶν δύο ἰχνοπαραλλήλων, καὶ ἑπομένως κάθετοι καὶ ἐπὶ τὰ ὁμώνυμα ἴχνη S_1 καὶ T_2 (σχ. 77) τοῦ ἐπιπέδου. Τοῦτο δὲ καὶ ἀρκεῖ· διότι ἐὰν αἱ προβολαὶ A_1, A_2 τῆς εὐθείας A εἶνε ἀντιστοίχως κάθετοι ἐπὶ τὰ ὁμώνυμα ἴχνη S_1 καὶ T_2 τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου, τότε ἑκάτερον τῶν προβαλλόντων τὴν εὐθεῖαν A ἐπιπέδων A_1 καὶ A_2, κάθετον ὂν ἐπὶ τὴν κοινὴν τομὴν S_1 καὶ



Σχ. 77

T_2 τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου μεθ' ἑκατέρου τῶν Προ. Επι., θὰ εἶνε κάθετον καὶ ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον (S_1, T_2), καὶ ἄρα ἡ κοινὴ αὐτῶν (τῶν προβαλλόντων) τομή, δηλαδὴ ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα A, εἶνε κάθετος

Σχ. 78

ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦτο. Ἐκ τῶν εἰρημένων συνάγεται ὅτι, ἵν' ἀχθῇ ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ δοθεῖσαν εὐθεῖαν (A_1, A_2), ἀρκεῖ τὰ ἴχνη αὐτοῦ S_1 καὶ T_2 ν' ἀχθῶσι κάθετα ἐπὶ τὰς ὁμωνύμους προβολὰς τῆς εὐθείας.

69) **Πρόβλημα.**—*Ἀπὸ δοθέντος σημείου α ἀγαγεῖν ἐπίπεδον*

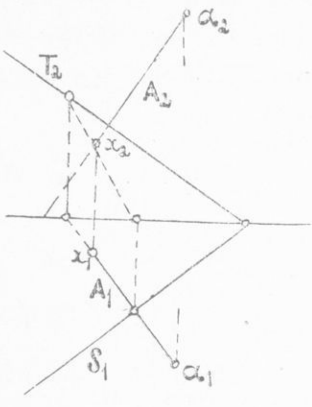
κάθετον ἐπὶ δοθεῖσαν εὐθεῖαν. Ἔστωσαν (σχ. 78) (α_1, α_2) τὸ δοθὲν σημεῖον καὶ (B_1, B_2) ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα. Ἐπειδή, κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα, τὰ ἴχνη S_1 καὶ T_2 τοῦ ζητουμένου ἐπιπέδου δέον νὰ εἶνε ἀντιστοίχως κάθετα ἐπὶ τὰς ὁμωνύμους προβολὰς B_1 καὶ B_2 τῆς δοθείσης εὐθείας B, ἕπεται ὅτι καὶ αἱ ὁμώνυμοι προβολαὶ τῶν διὰ τοῦ σημείου α ἀγομένων ἰχνοπαραλλήλων K καὶ Λ τοῦ ζητουμένου ἐπιπέδου θὰ εἶνε ἐπίσης κάθετοι ἐπὶ τὰς αὐτὰς προβολὰς B_1 καὶ B_2 τῆς δοθείσης εὐθείας B.

Κατασκευή. — Διὰ τῶν δύο προβολῶν α_1 καὶ α_2 τοῦ δοθέντος σημείου α ἂς ἀχθῶσιν ἀντιστοίχως αἱ εὐθεῖαι K_1 καὶ K_2, ἡ μὲν κάθετος ἐπὶ τὴν B_1, ἡ δὲ παρὰ τὸν ἄξονα X· ὁμοίως ἂς ἀχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι Λ_1 καὶ Λ_2 ἡ μὲν ἐκ τοῦ α_1 παρὰ τὸν ἄξονα X, ἡ δὲ ἐκ τοῦ α_2 κάθετος ἐπὶ τὴν B_2. Αἱ εὐθεῖαι αὗται παριστῶσι τὰς προβολὰς τῶν δύο προειρημένων ἰχνοπαραλλήλων K καὶ Λ τοῦ ζητουμένου ἐπιπέδου, καὶ ἐκ τούτων αἱ K_1 καὶ Λ_2 ὁρίζουσιν ἀντιστοίχως τὰς κατευθύνσεις τῶν ἰχνῶν S_1 καὶ T_2 αὐτοῦ, τὴν θέσιν δὲ τῶν τελευταίων τούτων ὁρίζουσι τὰ ἀντίστοιχα ἴχνη γ_1 καὶ δ_2 τῶν δύο ἰχνοπαραλλήλων K καὶ Λ.

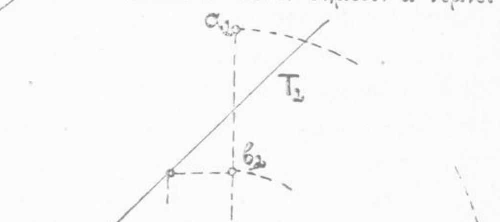
70) Πρόβλημα. — *Εὑρεῖν τὴν ἀπ' ἀλλήλων ἀπόστασιν σημείου καὶ ἐπιπέδου.* Ἀπόστασις σημείου καὶ ἐπιπέδου λέγεται τὸ τμῆμα τῆς διὰ τοῦ σημείου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ἠγμένης καθέτου, τὸ μεταξὺ τούτων περιεχόμενον· ὅθεν πρὸς εὕρεσιν τῆς ἀποστάσεως ταύτης ἀρκεῖ ν' ἀχθῇ διὰ τοῦ δοθέντος σημείου εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον καὶ νὰ προσδιορισθῇ ὁ ποὺς τῆς καθέτου ταύτης, ἤτοι ἡ τομὴ τῆς καθέτου μετὰ τοῦ ἐπιπέδου.

Κατασκευή. — Ἔστωσαν (α_1, α_2) καὶ (S_1, T_2) (σχ. 79) τὸ δοθὲν σημεῖον καὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον· ἐὰν διὰ τῶν δύο προβολῶν α_1 καὶ α_2 τοῦ δοθέντος σημείου ἀχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι A_1 καὶ A_2 ἀντιστοίχως κάθετοι ἐπὶ τὰ ὁμώνυμα ἴχνη S_1 καὶ T_2 τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου, αἱ εὐθεῖαι αὗται παριστῶσι τὰς προβολὰς τῆς διὰ τοῦ σημείου α ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον ἠγμένης καθέτου. Τὸ σημεῖον (x_1, x_2) τῆς τομῆς τῆς καθέτου ταύτης μετὰ τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου (S_I, T_2), ὡς καὶ τὸ ἀληθὲς μέγεθος τοῦ τμήματος ($\alpha_I x_I$, $\alpha_2 x_2$) εὑρίσκομεν λαμβάνοντες ὑπ' ὄψει τὰ ἐν ἐδαφίοις 53 καὶ 61 εἰρημένα.

Λύσις Β'. — Τὸ αὐτὸ πρόβλημα λύεται καὶ ἄλλως ὡς ἑξῆς : Θεωροῦμεν τὴν πρώτην προβολὴν α_I τοῦ δοθέντος σημείου α (σχ. 80) καὶ ὡς πρώτην προβολὴν β_I τοῦ σημείου β τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου (S_I, T_I), ἤτοι τοῦ σημείου ἐκείνου, καθ' ὃ ἡ πρώτη προβάλλουσα τὸ δοθὲν σημεῖον α τέμνει τὸ εἰρημένον ἐπίπεδον, καὶ προσδιορίζομεν τὴν δευτέραν προβολὴν β_2 τοῦ σημείου τούτου. Ἡ πρώτη προβάλλουσα τὰ σημεῖα α καὶ β καὶ ἡ ἐκ τοῦ α ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον (S_I, T_2) ἠγμένη κάθετος ὁρίζουσι τὸ ἐπίπεδον Ν, ὅπερ εἶνε κάθετον ἐπὶ τὸ Προ. Επι. E_I, ἐν ταὐτῷ δὲ καὶ ἐπὶ τὸ δοθέν, καὶ ἄρα κάθετον ἐπὶ τὴν κοινὴν αὐτῶν τομὴν S_I, τέμνει ἄρα τὸ δοθὲν ἐπίπεδον (S, T) κατὰ μίαν γραμμὴν κλίσεως αὐτοῦ, ἐφ' ἧς κεῖται ὁ πούς τῆς ζη-



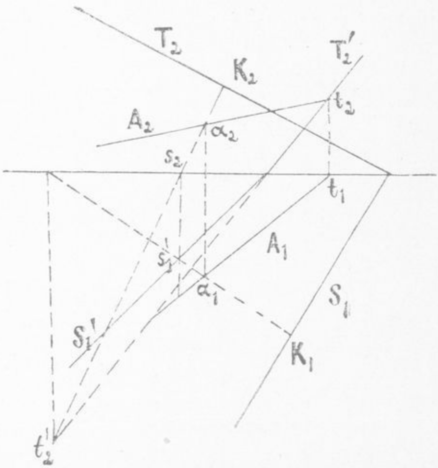
Σχ. 79



Σχ. 80

τουμένης καθέτου. Ἐὰν νῦν τὸ διὰ τῶν ἄνω εἰρημένων εὐθειῶν αϐ καὶ αγ ὁριζόμενον ἐπίπεδον N στραφῇ περὶ τὸ πρῶτον αὐτοῦ ἴχνος $\beta_1\beta_0$, ἕως οὗ κατακλιθῇ ἐπὶ τοῦ Προ. Επι. E_1, τὸ μὲν σημεῖον ϐ λαμϐάνει τὴν θέσιν ϐ''' ($\alpha_1 \beta'''=\alpha_x \beta_2$), τὸ δὲ σημεῖον α τὴν θέσιν α''' ($\alpha_1\alpha'''=\alpha_x\alpha_2$)· καὶ ἡ ἐκ τοῦ α''' ἐπὶ τὴν κατακλιθεῖσαν $\beta_0\beta'''$ γραμμὴν κλίσεως τοῦ ἐπιπέδου (S,T) ἠγμένη κάθετος α'''γ, παριστᾷ τὴν κατάκλισιν τῆς ζητουμένης ἀποστάσεως, ἤτοι τὸ ἀληθὲς αὐτῆς μέγεθος.

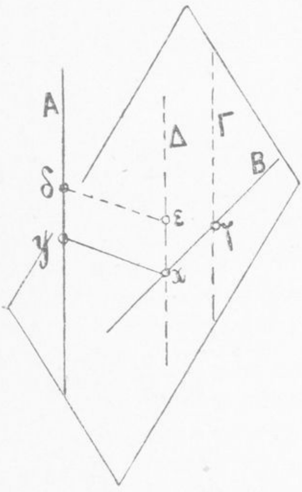
71) Πρόβλημα. — *Δι' εὐθείας δεδομένης ἀγαγεῖν ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ δεδομένον ἐπίπεδον.* Ἔστωσαν (σχ. 81) A_1, A_2 καὶ S_1, T_2 αἱ προϐολαὶ τῆς δοθείσης εὐθείας καὶ τὰ ὁμώνυμα πρὸς ταύτας ἴχνη τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου. Ἐὰν ἀπὸ τοῦ τυχόντος σημείου α τῆς δοθείσης εὐθείας A ἀχθῇ ἡ κάθετος K ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον (S_1, T_2), τὸ ὑπὸ τῆς καθέτου ταύτης καὶ τῆς δοθείσης εὐθείας A ὁριζόμενον ἐπίπεδον(S_1', T_2') εἶνε κάθετον ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον (S_1, T_2).



Σχ. 81

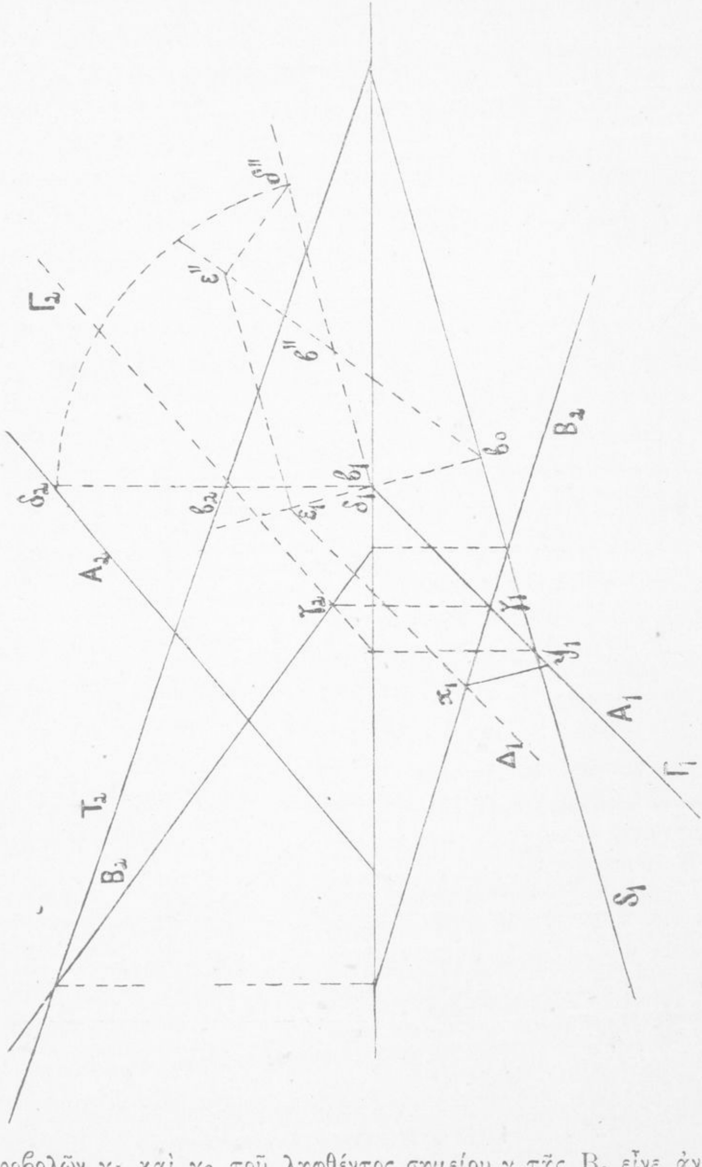
72) Πρόβλημα.—*Εὑρεῖν τὴν ἐλαχίστην ἀπ' ἀλλήλων ἀπόστασιν δύο δοθεισῶν εὐθειῶν μὴ κειμένων ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ.* Ἡ ἐλαχίστη ἀπ' ἀλλήλων ἀπόστασις δύο εὐθειῶν A καὶ B μὴ κειμένων ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ εἶνε, ὡς γνωστὸν ἐκ τῶν στοιχείων τῆς Γεωμετρίας, τὸ μεταξὺ αὐτῶν περιεχόμενον τμῆμα εὐθείας καθέτου ἐπ' ἀμφοτέρας. Ἀλλ' ἂν διὰ τῆς ἑτέρας τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν, ἔστω τῆς B, ἀχθῇ ἐπίπεδον παράλληλον τῇ ἑτέρᾳ A, ἡ ἀπόστασις τοῦ τυχόντος σημείου τῆς A ἀπὸ τοῦ εἰρημένου ἐπιπέδου ἰσοῦται τῇ κοινῇ καθέτῳ τῶν δύο εὐθειῶν Α καὶ Β. Ἐντεῦθεν ἕπεται ἡ ἑξῆς λύσις.

Ἔστωσαν (σχ. 82) Α καὶ Β αἱ δοθεῖσαι εὐθεῖαι. Ἂς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ τυχόντος σημείου γ τῆς εὐθείας Β καὶ παρὰ τὴν εὐθεῖαν Α ἡ εὐθεῖα Γ· τὸ ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν Β καὶ Γ ὁριζόμενον ἐπίπεδον εἶνε παράλληλον τῇ εὐθείᾳ Α, ἡ δ' ἀπὸ τοῦ τυχόντος σημείου δ τῆς Α ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Β,Γ) ἠγμένη κάθετος δε εἶνε ἴση τῇ κοινῇ καθέτῳ τῶν δύο δοθεισῶν εὐθειῶν Α καὶ Β. Ἡ δὲ θέσις τῆς κοινῆς ταύτης καθέτου ὁρίζεται, ἐὰν ἀπὸ τοῦ ποδὸς ε τῆς καθέτου δε ἀχθῇ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ (Β,Γ) καὶ παρὰ τὴν εὐθεῖαν Γ ἡ εὐθεῖα Δ· ἡ τελευταία αὕτη εὐθεῖα, ἥτις εἶνε προβολὴ τῆς Α ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Β,Γ), τέμνει τὴν εὐθεῖαν Β εἰς τὸ σημεῖον x, ἡ δ' ἀπὸ τοῦ σημείου τούτου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Β, Γ) ἠγμένη κάθετος, κειμένη ὅλη ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῶν παραλλήλων εὐθειῶν Α καὶ Δ, τέμνει τὴν εὐθεῖαν Α εἰς τὸ σημεῖον y. Ἡ εὐθεῖα xy εἶνε θέσει καὶ μεγέθει ἡ ζητουμένη κοινὴ κάθετος τῶν δύο δοθεισῶν εὐθειῶν Α καὶ Β καὶ ἄρα ἡ ἐλαχίστη ἀπ' ἀλλήλων ἀπόστασις αὐτῶν.



Σχ. 82

Κατασκευή.— Ἐκ τῶν ἄνω εἰρημένων ὁδηγούμεθα εἰς τὴν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς σχεδιάσεως προβολικὴν κατασκευὴν τῆς κοινῆς καθέτου τῶν δύο δοθεισῶν εὐθειῶν. Τῷ ὄντι ἔστωσαν (σχ.83) (A_1, A_2) καὶ (B_1,B_2) αἱ προβολαὶ τῶν δύο δοθεισῶν εὐθειῶν Α καὶ Β. Ἂς ληφθῇ τὸ τυχὸν σημεῖον γ τῆς Β καὶ μάλιστα ἐκεῖνο, ὅπερ ἔχει ὡς πρώτην προβολὴν γ_1 τὴν τομὴν τῶν ὁμωνύμων προβολῶν A_1 καὶ B_1 τῶν εὐθειῶν Α καὶ Β, ἂς ἀχθῇ δ' ἀπὸ τοῦ σημείου τούτου καὶ παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν Α ἡ εὐθεῖα Γ, τῆς ὁποίας αἱ προβολαὶ Γ_1 καὶ Γ_2, διερχόμεναι διὰ τῶν ὁμωνύμων



Σχ. 83

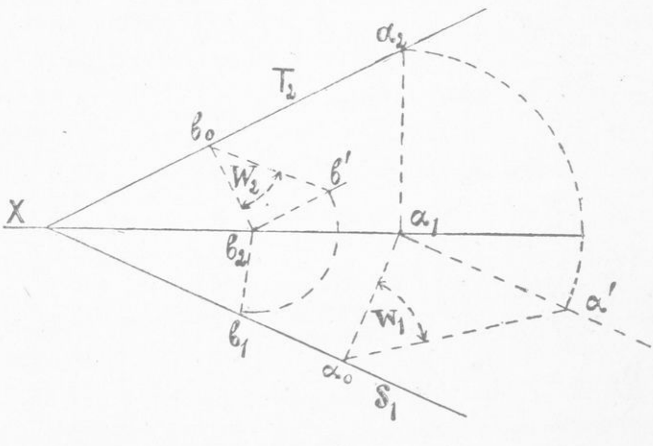
προβολῶν γ_1 καὶ γ_2 τοῦ ληφθέντος σημείου γ τῆς B, εἶνε ἀντιστοίχως παράλληλοι πρὸς τὰς ὁμωνύμους προβολὰς A_1 καὶ A_2

τῆς εὐθείας Α· ἂς κατασκευασθῶσιν ἔπειτα τὰ ἴχνη S_1 καὶ T_2 τοῦ ἐπιπέδου (Β,Γ) καὶ ἡ ἀπὸ τούτου ἀπόστασις τοῦ τυχόντος σημείου τῆς εὐθείας Α, ἤ, διὰ τὴν ἁπλοποίησιν τῆς κατασκευῆς, τοῦ δευτέρου αὐτῆς ἴχνους δ_2 (παράβαλ. πρόβλ. 70, Λύσις Β′). Κατὰ τοῦτον τὸν τρόπον ποριζόμεθα τὴν $\delta'' \varepsilon''$, ἥτις παριστᾷ τὸ ἀληθὲς μέγεθος τῆς ἀποστάσεως τοῦ σημείου δ ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου (S, T) καὶ ἥτις, κατὰ τὰ ἄνω εἰρημένα, εἶνε ἴση τῇ κοινῇ καθέτῳ, ἤτοι τῇ ἐλαχίστῃ ἀπ' ἀλλήλων ἀποστάσει τῶν εὐθειῶν Α καὶ Β.

Ἐπειδὴ ἡ προσδιορισθεῖσα κάθετος δε κεῖται ἐν τῷ πρώτῳ προβάλλοντι ἐπιπέδῳ τῷ διερχομένῳ διὰ τοῦ δ καὶ καθέτῳ ἐν ταὐτῷ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (S, T), ἕπεται ὅτι ἡ πρώτη αὐτῆς προβολὴ $\delta_1 \varepsilon_1$ θὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ πρώτου ἴχνους $\beta_0 \delta_1$ τοῦ εἰρημένου προβάλλοντος ἐπιπέδου (τὸ σημεῖον ε_1 προσδιορίζεται, ὡς εἰς τὸ σχῆμα ἐμφαίνεται, ἐκ τῆς κατακλίσεως ε'' τοῦ σημείου ε). Ἀλλ' ἡ εὐθεῖα Δ, ὡς προβολὴ τῆς Α ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (S_1,T_2), διέρχεται διὰ τοῦ ποδὸς ε τῆς ἐν λόγῳ καθέτου δε (σχ. 82), ἄρα καὶ ἡ πρώτη αὐτῆς προβολὴ Δ_1 διέρχεται διὰ τῆς πρώτης προβολῆς ε_1 τοῦ σημείου ε καὶ διήκει παραλλήλως τῇ A_1 (Α ∥ Δ). Τὸ σημεῖον x_1, καθ' ὃ ἡ Δ_1 τέμνει τὴν B_1, εἶνε ἡ πρώτη προβολὴ τῆς τομῆς x τῶν εὐθειῶν Β καὶ Δ (βλ. σχ. 82), ἡ δ' ἐκ τοῦ x_1 ἠγμένη κάθετος εὐθεῖα ἐπὶ τὸ ἴχνος S_1, παριστᾷ τὴν πρώτην προβολὴν τῆς ἐκ τοῦ σημείου x ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (S_1, T_1)=(Β,Γ) ἀγομένης καθέτου (παράβαλ. σχ. 82 καὶ 83), τὸ δὲ μεταξὺ τῶν προβολῶν A_1 καὶ B_1 περιεχόμενον τμῆμα $x_1 y_1$ τῆς εἰρημένης καθέτου εἶνε ἡ πρώτη προβολὴ τῆς κοινῆς καθέτου τῶν δύο δοθεισῶν εὐθειῶν Α καὶ Β. Ἡ δευτέρα προβολὴ τῆς κοινῆς ταύτης καθέτου ὁρίζεται εὐκόλως ἐκ τῆς πρώτης.

73) Πρόβλημα. — *Εὑρεῖν τὰς γωνίας κλίσεως W_1 καὶ W_2 δοθέντος ἐπιπέδου πρὸς ἑκάτερον τῶν Προ. Επι. E_1 καὶ E_2.* Ἡ γωνία κλίσεως δοθέντος ἐπιπέδου πρὸς ἓν τῶν Προ. Επι. εἶνε ἡ ἑτέρα τῶν ὀξειῶν γωνιῶν τοῦ εἰς τὸ τυχὸν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου ἀντιστοιχοῦντος κλισιγωνίου τριγώνου, ἡ ἀπέναντι τῆς ἀποστάσεως τοῦ ληφθέντος σημείου ἀπὸ τοῦ Προ. Επι. κειμένη (παράβ. ἐδάφ. 15). Πρὸς κατασκευὴν ἄρα τῶν ζητουμένων γωνιῶν W_1 καὶ W_2 ἀρκεῖ νὰ κατασκευάσωμεν τὰ εἰς δύο τυχόντα σημεῖα α καὶ β τοῦ ἐπιπέδου ἀντιστοιχοῦντα κλισιγώνια τρίγωνα αὐτοῦ πρὸς τὰ Προ. Επι. E_1 καὶ E_2.

Πρὸς ἁπλοποίησιν τῆς κατασκευῆς λαμβάνομεν τὰ σημεῖα α καὶ β οὕτως, ὥστε τὸ μέν, ἔστω τὸ α, νὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ δευτέρου ἴχνους T_2 τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου (Σχ. 84), τὸ δ' ἕτερον β

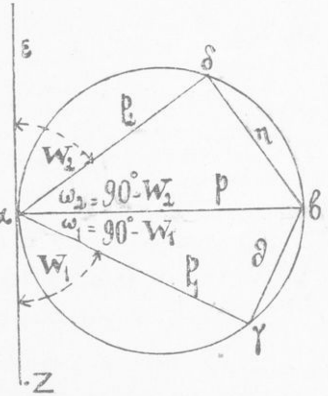


Σχ. 84

ἐπὶ τοῦ πρώτου ἴχνους S_1· κατασκευάζοντες δ' ἔπειτα κατὰ τὰ γνωστὰ (ἐδάφ. 15) τὰ εἰς τὰ σημεῖα ταῦτα α καὶ β ἀντιστοιχοῦντα κλισιγώνια τρίγωνα $\alpha_1\alpha_0\alpha'$ ($\alpha_1\alpha'=\alpha_1\alpha_2$) καὶ $\beta_1\beta_0\beta'$ ($\beta_2\beta'=\beta_2\beta_1$) τοῦ ἐπιπέδου ($S_1, T_2$) ὡς πρὸς ἑκάτερον τῶν Προ. Επι. E_1 καὶ E_2, πορίζόμεθα τὰς ζητουμένας γωνίας κλίσεως W_1 καὶ W_2.

Ἑκατέρα τῶν γωνιῶν κλίσεως ω_1 καὶ ω_2 τυχούσης εὐθείας καθέτου ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον (S_1, T_2) εἶνε συμπλήρωμα τῆς ὁμωνύμου γωνίας κλίσεως W_1, W_2 τοῦ εἰρημένου ἐπιπέδου, ἤτοι $\omega_1 + W_1 = 90^0$, $\omega_2 + W_2 = 90^0$ καὶ $\omega_1 + \omega_2 + W_1 + W_2 = 180^0$· ἐπειδὴ δὲ εἶνε (ἐδάφ. 62) $\omega_1 + \omega_2 \leq 90^0$, ἕπεται $W_1 + W_2 \geq 90^0$. Ἐπὶ τῶν σχέσεων τούτων στηρίζεται ἡ λύσις τοῦ ἑπομένου προβλήματος.

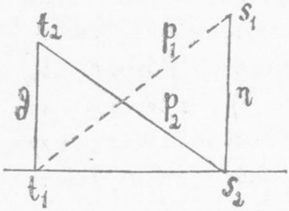
74) Πρόβλημα. — *Ἀπὸ δεδομένου σημείου α ἀγαγεῖν ἐπίπεδον κεκλιμένον πρὸς τὰ Προ. Επι. E_1 καὶ E_2 ἐν ταῖς δοθείσαις γωνίαις W_1 καὶ W_2.* Ἐὰν ἀπὸ τοῦ τυχόντος σημείου Ο τοῦ χώρου ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα Α οὕτως, ὥστε νὰ κλίνῃ πρὸς τὰ Προ. Επι. E_1 καὶ E_2 ἐν ταῖς γωνίαις $\omega_1 = 90 - W_1$ καὶ $\omega_2 = 90 - W_2$, τότε, συμφώνως πρὸς τὰ ἐν τῷ προηγουμένῳ προβλήματι εἰρημένα, τὸ ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου α ἐπὶ τὴν εἰρημένην εὐθεῖαν Α ἠγμένον κάθετον ἐπίπεδον εἶνε τὸ ζητούμενον.



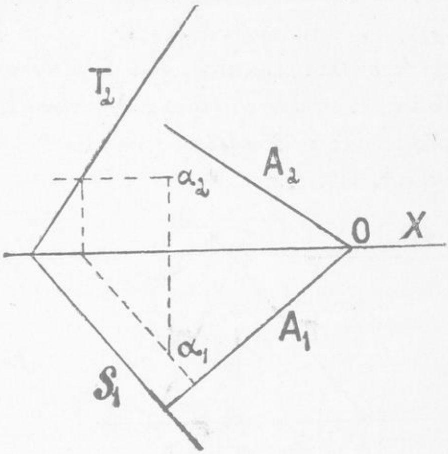
Σχ. 85 (α)

Κατασκευή. — Ἔστωσαν (α_1, α_2) (σχ. 85 (γ)) τὸ δοθὲν σημεῖον καὶ $\delta\alpha\varepsilon = W_2$, $\gamma\alpha Z = W_1$ (σχ. 85 (α)) αἱ δοθεῖσαι γωνίαι κλίσεως τοῦ ζητουμένου ἐπιπέδου πρὸς τὰ Προ. Επι. E_1 καὶ E_2. Ἂς ληφθῇ ἐπὶ τοῦ ἄξονος Χ τὸ τυχὸν σημεῖον ο (σχ. 85 (γ)) καὶ ἂς ἀχθῇ διὰ τοῦ σημείου τούτου ἡ τὰς δοθείσας ἔχουσα κλίσεις $\omega_1 = 90 - W_1$ καὶ $\omega_2 = 90 - W_2$ πρὸς τὰ Προ. Επι. E_1 καὶ E_2 εὐθεῖα Α (παράβαλ. πρόβλ. 63 σχ. 71 (α), (β))· ἔστω δὲ ἐκ τῶν τεσσάρων λύσεων, ἃς ἐπιδέχεται τὸ πρόβλημα 63, ἄρα καὶ τὸ προτεθέν, ἐκείνη, καθ' ἣν τὸ καθορίζον τὴν κατεύθυνσιν τῆς εὐθείας Α εὐθύγραμμον τμῆμα Ρ κεῖται ἐν τῇ IVῃ γωνίᾳ τῶν Προ. Επι. (σχ. 85 (β)), καὶ τοῦ ὁποίου αἱ προβολαί, εὑρισκόμεναι συμφώνως πρὸς τὸ πρόβλημα 63, εἶνε αἱ P_1 καὶ P_2. Αἱ ἀπὸ τοῦ σημείου Ο καὶ παρὰ τὰς P_1 καὶ P_2 ἠγμέναι εὐθεῖαι A_1 καὶ A_2 (σχ. 85 (γ)) παριστῶσι τὰς προβολὰς τῆς ζητουμένης εὐθείας Α, τὸ δὲ διὰ τοῦ δοθέντος σημείου (α_1, α_2) καὶ ἐπὶ τὴν ὁρισθεῖσαν εὐθεῖαν (A_1, A_2) ἠγμένον κάθετον ἐπίπεδον (S_1, T_2) (παράβαλ. πρόβλ. 69) εἶνε τὸ ζητούμενον.*

75) *Πρόβλημα.* — *Εὑρεῖν τὴν γωνίαν δύο ἀλληλοτομούντων ἐπιπέδων.* Ἐὰν ἀπὸ τοῦ τυχόντος σημείου δ τῆς εὐθείας τῆς

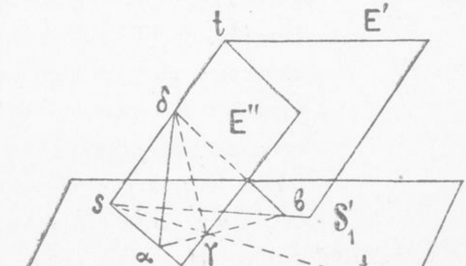


Σχ. 85 (β)



Σχ. 85 (γ)

τομῆς st τῶν δύο ἐπιπέδων Ε′ καὶ Ε′′ (σχ. 86 (α)) ἀχθῇ ἐπὶ τὴν εἰρημένην εὐθεῖαν τῆς τομῆς κάθετον τὸ ἐπίπεδον δαβ, τὸ τελευταῖον τοῦτο τέμνει τὰ δοθέντα Ε′ καὶ Ε′′ κατὰ δύο εὐθείας δβ καὶ δα, αἵτινες εἶνε πλευραὶ τῆς ζητουμένης γωνίας W τῆς ἐχούσης κορυφὴν τὸ σημεῖον δ.

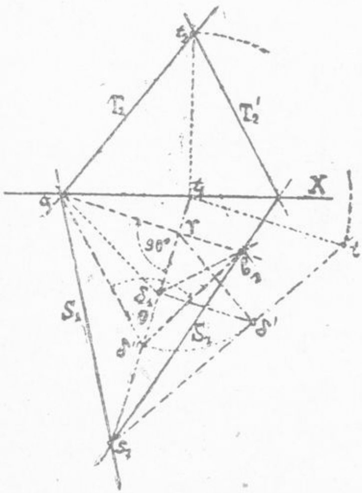


Σχ. 86 (α)

Τούτων τεθέντων ἂς κατασκευασθῇ ἡ ἑτέρα τῶν προβολῶν, ἔστω

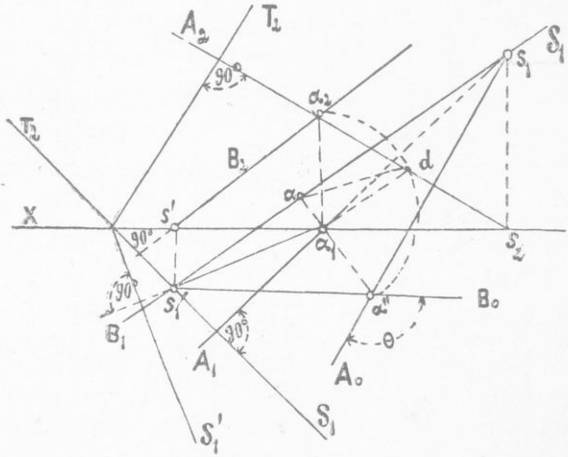
* Πότε τὸ πρόβλημα ἔχει τέσσαρας λύσεις, πότε δύο καὶ πότε οὐδεμίαν;

ἡ πρώτη s_1t_1, τῆς εὐθείας τῆς τομῆς st τῶν δοθέντων ἐπιπέδων (S_1, T_2) καὶ (S_1', T_2') (σχ. 86 (β)), καὶ ἄς ἀχθῇ ἐν τῷ Προ. Επι. E_1 καὶ ἀπὸ τοῦ τυχόντος σημείου γ τῆς εὐθείας s_1t_1 ἡ ἐπὶ ταύτην κάθετος εὐθεῖα $α_1β_1$. Ἡ τελευταία αὕτη εἶνε τὸ πρῶτον ἴχνος τοῦ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν τῆς τομῆς st καθέτου ἐπιπέδου δαβ, τὰ δὲ σημεῖα $α_1$ καὶ $β_1$ εἶνε τὰ πρῶτα ἴχνη τῶν πλευρῶν δα καὶ δβ τῆς ζητουμένης γωνίας W τῶν δύο δοθέντων ἐπιπέδων, καὶ τῆς ὁποίας τὸ ἀληθὲς μέγεθος εὑρίσκομεν κατακλίνοντες ταύτην ἐπὶ τοῦ Προ. Επι. E_1.



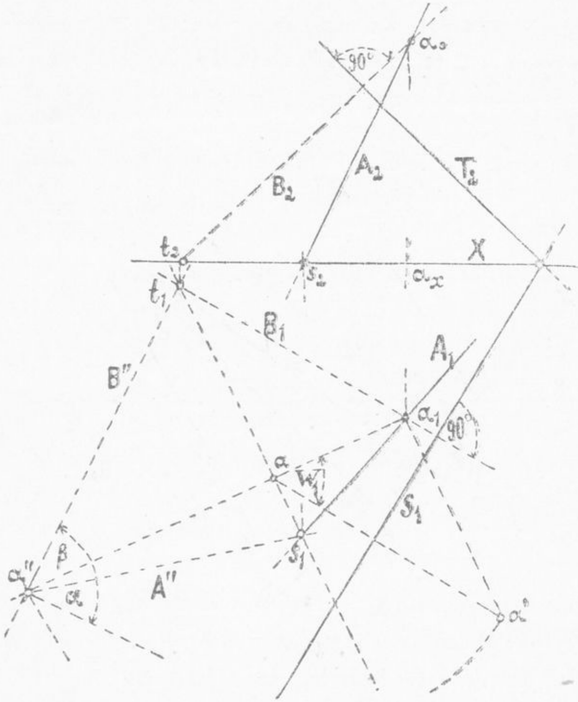
Σχ. 86 (β)

Πρὸς κατασκευὴν τῆς κατακλίσεως ταύτης παρατηροῦμεν ὅτι ἡ εὐθεῖα δγ (σχ. 86 (α)) εἶνε ἐν ταὐτῷ κάθετος ἐπὶ τὰς εὐθείας st καὶ αβ, διότι κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου αβδ, ἐφ' ὃ εἶνε κάθετος ἡ st, ἐν ταὐτῷ δὲ κεῖται καὶ ἐπὶ τοῦ πρώτου προβάλλοντος τὴν εὐθεῖαν st ἐπιπέδου (S_1, T_1), ἐφ' ὃ εἶνε κάθετος ἡ αβ, ἅτε κάθετος οὖσα ἐπὶ τὸ πρῶτον αὐτοῦ ἴχνος s_1t_1 (παράβαλ. ἐδάφ. 54). Ἐντεῦθεν συνάγομεν ὅτι, ἐὰν ἡ γωνία αδβ = W, στραφεῖσα περὶ τὴν $α_1β_1$, κατακλιθῇ ἐπὶ τοῦ Προ. Επι. E_1, ἡ κατάκλισις δ'' τῆς κορυφῆς αὐτῆς δ θὰ καταλάβῃ θέσιν τινὰ ὡρισμένην ἐπὶ τῆς εὐθείας s_1t_1 καὶ εἰς ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ γ ἴσην πρὸς τὴν γδ (σχ. 86 (α)). Ἀλλ' ἐπειδή, ὡς ἄνω εἴρηται, ἡ τελευταία αὕτη εὐθεῖα γδ εἶνε κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν st εἰς τὸ σημεῖον δ, ἔπεται ὅτι, ἐὰν κατακλιθῇ τὸ πρῶτον προβάλλον τὴν εὐθεῖαν st ἐπίπεδον, στρεφόμενον περὶ τὸ πρῶτον αὐτοῦ ἴχνος s_1t_1, ἐπὶ τοῦ Προ. Επι. E_1, καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου γ ἀχθῇ ἐπὶ τὴν κατάκλισιν s_1t' τῆς εὐθείας st ἡ κάθετος γδ' (σχ. 86 (β)), ἡ τελευταία αὕτη εὐθεῖα θὰ παριστᾷ τὸ ἀληθὲς μέγεθος τῆς γδ. Λαμβάνοντες ἄρα ἐπὶ τῆς s_1t_2 καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου γ τὸ τμῆμα γδ''= γδ' πορίζόμεθα εἰς τὸ σημεῖον δ'' τὴν κατάκλισιν τῆς κορυφῆς δ τῆς γωνίας αδϐ=W, τῆς ὁποίας τὸ ἀληθὲς μέγεθος εἶνε ἡ γωνία $\alpha_1\delta''\beta_1$.



Σχ. 87

Ἐὰν τὰ ἴχνη τῶν ἀλληλοτομούντων ἐπιπέδων ἔχωσι τοιαύτην πρὸς ἄλληλα θέσιν, ὥστε, πρὸς κατασκευὴν τῆς εὐθείας τῆς τομῆς αὐτῶν, ν' ἀπαιτῆται ἡ χρῆσις βοηθητικοῦ ἐπιπέδου, ὡς π.χ. ὅταν τὰ ἴχνη (S_1, T_2) καὶ (S_1', T_2') τῶν εἰρημένων ἐπιπέδων ἀλληλοτομῶσιν εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον τοῦ ἄξονος X (σχ. 87), τότε πρὸς εὕρεσιν τῆς γωνίας τῶν δύο ἐπιπέδων ἄγομεν ἀπὸ τοῦ τυχόντος σημείου τοῦ χώρου (α_1, α_2) [ἐπὶ τοῦ προκειμένου τὸ σημεῖον α ἐλήφθη ἐπὶ τοῦ Προ. Επι. E_2] ἐφ' ἑκάτερον τῶν ἐπιπέδων (S_1, T_2) καὶ (S_1', T_2') τὰς καθέτους εὐθείας (A_1, A_2) καὶ (B_1, B_2). Ἡ ὑπὸ τῶν εὐθειῶν τούτων περιεχομένη ὀξεῖα γωνία εἶνε, ὡς γνωστόν, ἡ γωνία τῶν δύο ἐπιπέδων. Τὸ ἀληθὲς μέγεθος τῆς γωνίας ταύτης εὑρίσκομεν συμφώνως πρὸς τὸ πρόβλημα 66 καὶ ὡς εἰς τὸ σχῆμα 87 ἐμφαίνεται.



Σχ. 88

76) Πρόβλημα. — Δοθείσης εὐθείας καὶ ἐπιπέδου εὑρεῖν τὴν κλίσιν τῆς πρώτης πρὸς τὸ δεύτερον. Ἔστωσαν (σχ. 88) (A_1, A_2) ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα καὶ (S_1, T_2) τὸ δοθὲν ἐπίπεδον. Ἡ ἀπὸ τοῦ τυχόντος σημείου (α_1, α_2) τῆς δοθείσης εὐθείας (A_1, A_2) ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον (S_1, T_2) ἠγμένη καθετος (B_1, B_2) σχηματίζει μετὰ τῆς δοθείσης εὐθείας (A_1, A_2) τὴν ὀξεῖαν γωνίαν β, ἥτις εἶνε συμπλήρωμα τῆς ζητουμένης γωνίας α. Ἐὰν ἄρα κατασκευασθῇ, κατὰ τὰ γνωστά, τὸ ἀληθὲς μέγεθος τῆς ὀξείας γωνίας β τῶν δύο εὐθειῶν Α καὶ Β, προκύπτει ἐκ τῆς σχέσεως $\alpha=90-\beta$ καὶ ἡ γωνία κλίσεως τῆς εὐθείας Α πρὸς τὸ δοθὲν ἐπίπεδον (S_1, T_2).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V

ΠΕΡΙ ΤΗΣ ΟΡΘΗΣ ΠΡΟΒΟΛΗΣ ΚΑΙ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ ΤΗΣ ΤΡΙΕΔΡΟΥ ΓΩΝΙΑΣ·

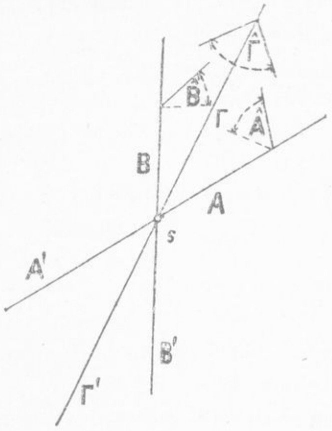
77) ***Ὁρισμοί.***—Τὸ σχῆμα, ὅπερ ἀποτελοῦσι τρία ἢ περισσότερα ἐπίπεδα διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου διερχόμενα καὶ περατούμενα ἕκαστον εἰς τὰς δύο εὐθείας, καθ' ἃς τέμνεται ὑπὸ τῶν πλησίον αὐτοῦ δύο ἐπιπέδων, λέγεται *στερεὰ γωνία.*

Τὰ τὴν στερεὰν γωνίαν σχηματίζοντα ἐπίπεδα, λέγονται *ἕδραι* αὐτῆς, αἱ δὲ τομαὶ αὐτῶν (ἑκάστου ὑπο τῶν δύο πλησίον αὐτοῦ) λέγονται *ἀκμαὶ* τῆς στερεᾶς γωνίας, καὶ τὸ σημεῖον, εἰς ὃ αἱ ἀκμαὶ πᾶσαι συνέρχονται, λέγεται *κορυφὴ* τῆς στερεᾶς γωνίας.

Αἱ γωνίαι, τὰς ὁποίας ἀποτελοῦσιν αἱ ἀκμαὶ ἑκάστης τῶν ἑδρῶν, λέγονται καὶ αὐταὶ ἕδραι ἢ *ἐπίπεδοι γωνίαι* τῆς στερεᾶς γωνίας· αἱ δὲ γωνίαι, τὰς ὁποίας ἀποτελοῦσιν αἱ δι' ἑκάστης τῶν ἀκμῶν διερχόμεναι ἕδραι, λέγονται *δίεδροι γωνίαι* τῆς στερεᾶς γωνίας.

Κυρτὴ λέγεται ἡ στερεὰ γωνία, ἐὰν ἑκάστη ἕδρα αὐτῆς ἐκβαλλομένη ἀφήνῃ 'τὴν στερεὰν γωνίαν ὁλόκληρον πρὸς τὸ ἓν μέρος αὐτῆς.

Τρίεδρος λέγεται ἡ στερεὰ γωνία ἡ τρεῖς μόνον ἔχουσα ἕδρας· ἀλλὰ διὰ τῆς ἀλληλετομίας τριῶν ἐπιπέδων ΑΒ, ΑΓ καὶ ΒΓ διερχομένων διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου S (σχ. 89) προκύπτουσιν ἐν συνόλῳ ὀκτὼ τρίεδροι γωνίαι· εἶνε ὅμως φανερὸν ὅτι τῆς μιᾶς τούτων όριζομένης καὶ αἱ λοιπαὶ εἶνε ἐντελῶς ὡρισμέναι. Ἑκάστην τρίεδρον γωνίαν ὀνομάζομεν διὰ τῆς κορυφῆς αὐτῆς S καὶ τῶν τριῶν αὐτῆς ἀκμῶν Α, Β καὶ Γ οὕτως : S(ΑΒΓ).



Σχ. 89

Ἐκ τῶν ἄνω εἰρημένων συνάγομεν ὅτι τὰ στοιχεῖα πάσης τριέδρου γωνίας εἶνε ἐν συνόλῳ ἕξ : *τρεῖς ἐπίπεδοι καὶ τρεῖς δίεδροι γωνίαι*· καὶ τας μὲν πρώτας ὀνομάζομεν συνήθως διὰ τῶν δύο ἀκμῶν τῶν περιεχουσῶν τὴν γωνίαν συνδέοντες τὰ γράμματα τῶν ἀκμῶν τούτων διὰ τοῦ συμβόλου $\wedge$, ὅπερ γράφεται ἄνωθεν αὐτῶν· τὰς δὲ τελευταίας, ἤτοι τὰς διέδρους, διὰ τοῦ γράμματος τῆς κοινῆς ἀκμῆς τῶν ἑδρῶν τῆς γωνίας, γράφοντες ἄνωθεν ἑκάστου τὸ αὐτὸ σύμβολον $\wedge$. Κατὰ τοῦτον τὸν τρόπον αἱ μὲν ἀκμαὶ Α, Β, Γ περιέχουσιν ἀνὰ δύο τὰς ἑξῆς τρεῖς ἐπιπέδους γωνίας :

$\widehat{AB}$, $\widehat{A\Gamma}$ καὶ $\widehat{B\Gamma}$, τὰ δ' ἐπίπεδα $\widehat{AB}$, $\widehat{A\Gamma}$ καὶ $\widehat{B\Gamma}$ τὰς ἑξῆς τρεῖς διέδρους γωνίας $\hat{A}$, $\hat{B}$ καὶ $\hat{\Gamma}$.

78). Μεταξὺ τῶν στοιχείων πάσης τριέδρου γωνίας ἰσχύουσιν αἱ ἑπόμεναι, γνωσταὶ ἐκ τῶν στοιχείων τῆς Γεωμετρίας, ἀνισότητες.

$$(1) \quad 0 < (\widehat{AB} + \widehat{A\Gamma} + \widehat{B\Gamma}) < 4 \text{ὀρθ.}$$

$$(2) \quad 2 \text{ὀρθ.} < \hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} < 6 \text{ὀρθ.}$$

$$(3) \quad \widehat{AB} < \widehat{A\Gamma} + \widehat{B\Gamma},\ \widehat{A\Gamma} < \widehat{AB} + \widehat{B\Gamma},\ \widehat{B\Gamma} < \widehat{A\Gamma} + \widehat{AB}$$

$$(4) \quad \hat{A} + \hat{B} < \hat{\Gamma} + 2 \text{ὀρθ.},\ \hat{B} + \hat{\Gamma} < \hat{A} + 2 \text{ὀρθ.},\ \hat{A} + \hat{\Gamma} < \hat{B} + 2 \text{ὀρθ.}$$

Ἐὰν δ' ἐκ τῶν ἓξ στοιχείων τριέδρου τινὸς γωνίας δοθῶσι τρία ἐπαληθεύοντα τὰς ἄνω ἀνισότητας, ἡ γωνία εἶνε ἐντελῶς ὡρισμένη καὶ δύναται νὰ κατασκευασθῇ. Ἐντεῦθεν προκύπτουσι τὰ ἑπόμενα ἓξ θεμελιώδη προβλήματα, ἐν οἷς δίδονται

1) Αἱ τρεῖς ἐπίπεδοι γωνίαι $\widehat{AB}, \widehat{A\Gamma}$ καὶ $\widehat{B\Gamma}$,

2) Δύο ἐπίπεδοι γωνίαι, ἔστωσαν αἱ $\widehat{AB}, \widehat{A\Gamma}$, καὶ ἡ ὑπ' αὐτῶν περιεχομένη δίεδρος γωνία $\widehat{A}$,

3) Δύο ἐπίπεδοι γωνίαι, ἔστωσαν αἱ $\widehat{AB}, \widehat{A\Gamma}$, καὶ ἡ ἀντικειμένη εἰς τὴν μίαν τούτων, ἔστω τὴν $\widehat{A\Gamma}$, δίεδρος γωνία $\widehat{B}$,

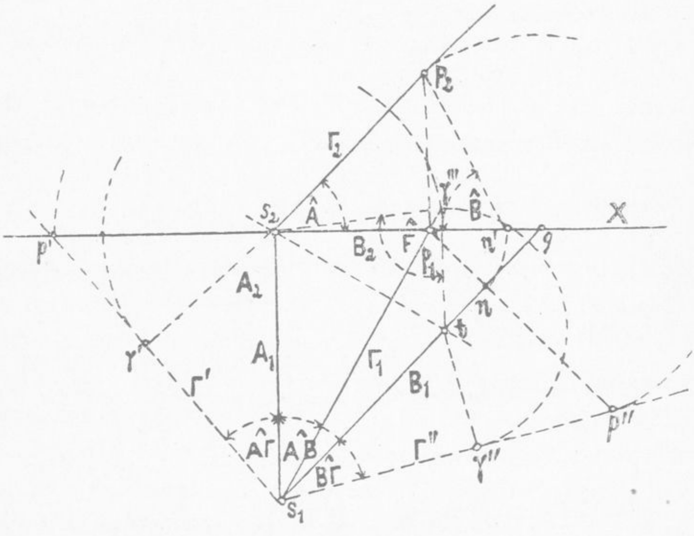
4) Μία ἐπίπεδος γωνία, ἔστω ἡ $\widehat{AB}$, καὶ αἱ προσκείμεναι ταύτῃ δίεδροι $\widehat{A}$ καὶ $\widehat{B}$.

5) Μία ἐπίπεδος γωνία, ἡ $\widehat{AB}$, ἡ εἰς αὐτὴν προσκειμένη δίεδρος $\widehat{A}$ καὶ ἡ ἀντικειμένη εἰς ταύτην δίεδρος $\widehat{\Gamma}$.

6) Αἱ τρεῖς δίεδροι γωνίαι $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{\Gamma}$, καὶ ζητοῦνται τὰ λοιπὰ στοιχεῖα τῆς τριέδρου γωνίας.

Ἡ παραστατικὴ γεωμετρία ὑποδιαιρεῖ ἕκαστον τῶν ἀνωτέρω προβλημάτων εἰς δύο μέρη: ά) εἰς τὴν κατασκευὴν τῶν ἐπὶ τὰ Προ. Επι. E_1 καὶ E_2 δύο ὀρθῶν προβολῶν τῆς τριέδρου γωνίας ἐξ ἱκανῶν δεδομένων στοιχείων αὐτῆς, καὶ β') εἰς τὸν προσδιορισμὸν τοῦ ἀληθοῦς μεγέθους τῶν μὴ δεδομένων στοιχείων αὐτῆς, ἐπιπέδων ἢ διέδρων γωνιῶν. Ἀλλ' ὡς ἐν τῷ ἀμέσως ἑπομένῳ προβλήματι ἀποδεικνύεται, ἡ λύσις τοῦ πρώτου συνεπάγεται τὴν λύσιν τοῦ δευτέρου.

79) Πρόβλημα.—*Δεδομένης τῆς πρώτης καὶ δευτέρας ὀρθῆς προβολῆς τριέδρου τινὸς γωνίας κατασκευάσαι τὸ ἀληθὲς μέγεθος* *τῶν ἐπιπέδων καὶ διέδρων γωνιῶν αὐτῆς.* Πρὸς ἁπλουστέραν παράστασιν τῶν προβολῶν τριέδρου τινὸς γωνίας λαμβάνομεν (ἐὰν ἡ θέσις τῶν Προ. Επι. πρὸς τὴν τρίεδρον γωνίαν εἰς οὐδένα ὑπόκειται περιορισμὸν) ὡς πρῶτον Προ. Επι. μίαν τῶν ἑδρῶν, ἔστω τὴν ΑΒ, τῆς τριέδρου γωνίας (σχ. 90), τὸ δὲ Προ. Επι. E_2 κάθετον ἐπὶ τὴν ἀκμὴν Α.



Σχ. 90

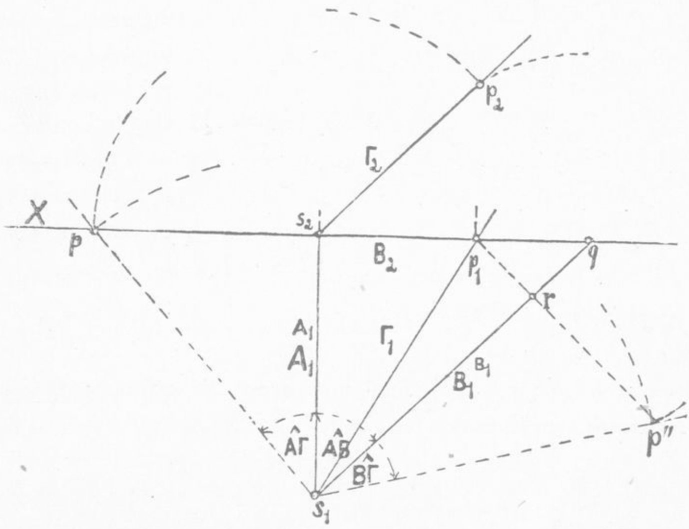
Διὰ τῆς τοιαύτης ἐκλογῆς τῶν Προ. Επι. πορίζόμεθα ἀμέσως ἐκ τῶν προβολῶν τῆς τριέδρου γωνίας τὸ ἀληθὲς μέγεθος τῆς ἐπιπέδου $\widehat{AB}$ καὶ διέδρου $\widehat{A}$ γωνίας αὐτῆς.

Τὸ ἀληθὲς μέγεθος τῶν δύο ἄλλων ἐπιπέδων γωνιῶν $\widehat{ΑΓ}$ καὶ $\widehat{ΒΓ}$ εὑρίσκομεν κατακλίνοντες τὰ ἐπίπεδα αὐτῶν ΑΓ καὶ ΒΓ ἐπὶ τοῦ Προ. Επι. E_1 μὲ ἄξονας στροφῆς τὰ πρῶτα αὐτῶν ἴχνη A_1 καὶ B_1. Πρὸς τοῦτο ἐκλέγομεν τὸ δεύτερον ἴχνος P_2 τῆς εὐθείας τῆς τομῆς Γ τῶν δύο εἰρημένων ἐπιπέδων ΑΓ καὶ ΒΓ, καὶ τοῦ σημείου τούτου, ὄντος κοινοῦ εἰς ἀμφότερα τὰ ἐπίπεδα, προσδιορίζομεν τὰς δύο κατακλίσεις p' καὶ p'' κατασκευάζοντες τὰ δύο κλισιγώνια τρίγωνα $p_2p_1s_2$ καὶ p_2p_1r' ἑκατέρου τῶν ἐπιπέδων ΑΓ καὶ ΒΓ πρὸς τὸ Προ. Επι. E_1, τὰ ἀντιστοιχοῦντα εἰς τὸ κοινὸν αὐτοῖς σημεῖον p_2 ($p_1r'=p_1r$ καὶ $p''r=p_2r'$). Κατὰ τοῦτον τὸν τρόπον ποριζόμεθα ἐπὶ τοῦ Προ. Επι. E_1 τὰς δύο κατακλίσεις Γ′ καὶ Γ″ τῆς ἀκμῆς Γ, αἱ ὁποῖαι μετὰ τῶν A_1 καὶ B_1 περιέχουσι τὰς γωνίας $\widehat{A\Gamma}$ καὶ $\widehat{B\Gamma}$ εἰς τὸ ἀληθὲς αὐτῶν μέγεθος, ἐν ᾧ ἡ ἑτέρα τῶν ὀξειῶν γωνιῶν εἰς r' τοῦ κλισιγωνίου τριγώνου p_2p_1r' παριστᾷ τὴν δίεδρον γωνίαν $\widehat{B}$.

Τὴν λοιπὴν δίεδρον γωνίαν $\widehat{\Gamma}$ προσδιορίζομεν συμφώνως πρὸς τὸ πρόβλημα 75, ἄγοντες τὸ τυχὸν ἐπίπεδον Ε′ κάθετον ἐπὶ τὴν ἀκμὴν Γ. Ἡ κατασκευὴ ἐν τῇ προκειμένῃ περιπτώσει ἁπλοποιεῖται, ἐὰν ἐκ τῶν σημείων s_2 καὶ t (ἡ εὐθεῖα s_2t παριστᾷ τὸ ἴχνος τοῦ ἐπὶ τὴν ἀκμὴν Γ καθέτου ἐπιπέδου Ε′) ἀχθῶσιν ἐπὶ τὰς κατακλίσεις Γ′ καὶ Γ″ αἱ κάθετοι $s_2\gamma'$ καὶ $t\gamma''$, καὶ διὰ τῶν τελευταίων τούτων εὐθειῶν, αἵτινες παριστῶσι τὰς κατακλίσεις τῶν εὐθειῶν τῆς τομῆς τοῦ ἐπιπέδου Ε′ μετὰ τῶν ἐπιπέδων ΑΓ καὶ ΒΓ, κατασκευασθῇ τὸ τρίγωνον $s_2\gamma'''t$. Ἡ εἰς τὸ γ''' γωνία τοῦ τριγώνου τούτου παριστᾷ τὸ ἀληθὲς μέγεθος τῆς τρίτης διέδρου γωνίας $\widehat{\Gamma}$.

Ἐκ τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος τούτου συνάγομεν ὅτι ἡ λύσις ἑκάστου τῶν ἐν τῷ προηγουμένῳ ἐδαφίῳ (78) ἓξ διαφόρων προβλημάτων περὶ τριέδρου γωνίας ἀνάγεται εἰς τὴν κατασκευὴν τῶν δύο αὐτῆς ὀρθῶν προβολῶν· διότι τούτων κατασκευασθεισῶν ἐξ ἱκανῶν δεδομένων εὐκόλως εὑρίσκομεν, κατὰ τὰ ἐν τῷ προτεθέντι προβλήματι ἐκτεθέντα, καὶ τῶν μὴ δεδομένων αὐτῆς στοιχείων τὸ ἀληθὲς μέγεθος.

Παρατήρησις. — Ἐπειδὴ τὰ τμήματα s_1p' καὶ s_1p'' παριστῶσι τὸ ἀληθὲς μέγεθος τοῦ μεταξὺ τῶν ἰχνῶν s_1 καὶ p_2 περιεχομένου τμήματος τῆς ἀκμῆς Γ, ἕπεται ὅτι εἶνε $s_1p'=s_1p''$. Ἐπίσης παρατηροῦμεν ὅτι αἱ ἀποστάσεις τοῦ σημείου τῆς τομῆς q τοῦ πρώτου ἴχνους B_1 τοῦ ἐπιπέδου ΒΓ μετὰ τοῦ ἄξονος X ἀπὸ τῶν σημείων p_2 καὶ p'' εἶνε τμήματα ἰσομεγέθη· ἤτοι $p_2q=p''q$. Δυνάμεθα ἄρα διὰ τῶν ἰσοτήτων τούτων νὰ κατασκευάσωμεν τὸ σημεῖον p'' καὶ ἄνευ τοῦ κλισιγωνίου τριγώνου p_2p_1r', ὡς σημεῖον τομῆς δύο τόξων γραφομένων μὲ κέντρα τὰ σημεῖα s_1, q καὶ ἀκτῖνας s_1p' καὶ qp_2.



Σχ. 91

80) Πρόβλημα. — *Ἐκ τριῶν ἐπιπέδων γωνιῶν $\widehat{AB}, \widehat{A\Gamma}$ καὶ $\widehat{B\Gamma}$ τριέδρου τινὸς γωνίας κατασκευάσαι τὰς δύο αὐτῆς ὀρθὰς προβολάς.* Ἂς τεθῶσιν αἱ τρεῖς δοθεῖσαι γωνίαι $\widehat{AB}$, $\widehat{A\Gamma}$ καὶ $\widehat{B\Gamma}$ ἐπὶ τοῦ Προ. Επι. E_1 ἐφεξῆς ἀλλήλαις καὶ οὕτως, ὥστε νὰ ἔχωσι πᾶσαι κοινὴν κορυφὴν τὸ σημεῖον s_1 (σχ. 91), αἱ δὲ γωνίαι $\widehat{AB}$,

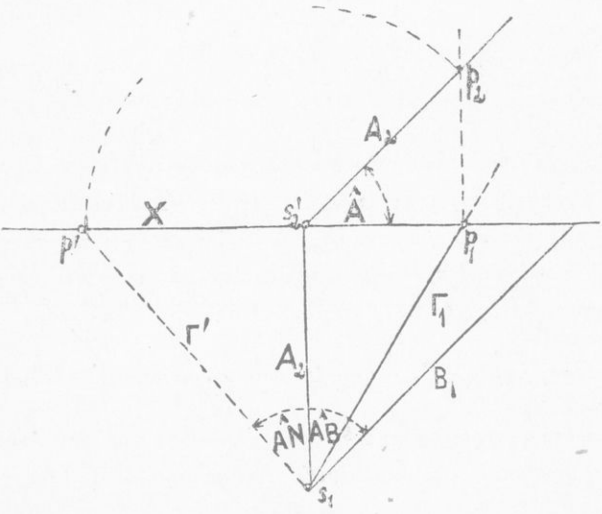
$\widehat{\text{ΑΓ}}$ ὡς καὶ αἱ $\widehat{\text{ΑΒ}}$, $\widehat{\text{ΒΓ}}$ νὰ ἔχωσιν ἀντιστοίχως τὰς ἀκμὰς $Α_1$ καὶ $Β_1$ κοινάς· ἂς ληφθῇ δὲ καὶ τὸ Προ. Επι. $Ε_2$ κάθετον ἐπὶ τὴν ἀκμὴν $Α_1$. Τούτων τεθέντων ἡ τομὴ τῶν τόξων τῶν γραφομένων μὲ κέντρα τὰ σημεῖα s_2 καὶ q καὶ μὲ ἀκτῖνας ἀντιστοίχως ἴσας πρὸς τὰ τμήματα s_2p' καὶ qp'' (παράβαλ. παρατήρησιν ἐδαφ. 79) παρέχει τὸ δεύτερον ἴχνος p_2 τῆς ἀκμῆς Γ. Ἡ εὐθεῖα $Γ_1$ ἡ τὴν πρώτην προβολὴν p_1 τοῦ σημείου p_2 καὶ τὸ πρῶτον ἴχνος s_1 τῆς ἀκμῆς Γ ἐπιζευγνύουσα παριστᾷ τὴν πρώτην προβολὴν τῆς τελευταίας ταύτης εὐθείας Γ, ἧς ἡ δευτέρα προβολὴ εἶνε ἡ εὐθεῖα p_2s_2.

Τῶν δύο προβολῶν τῆς τριέδρου γωνίας κατασκευασθεισῶν, προσδιορίζομεν, συμφώνως πρὸς τὸ προηγούμενον πρόβλημα (79), τὸ ἀληθὲς μέγεθος τῶν τριῶν διέδρων γωνιῶν $\widehat{\text{Α}}$, $\widehat{\text{Β}}$ καὶ $\widehat{\text{Γ}}$.

Ἐὰν αἱ τρεῖς δοθεῖσαι ἐπίπεδοι γωνίαι πληρῶσι τὰς ἀνισότητας (1) καὶ (3) τοῦ ἐδαφίου 78, τὸ πρόβλημα ἔχει πάντοτε μίαν λύσιν καὶ παρέχει δύο τριέδρους γωνίας συμμετρικῶς κειμένας πρὸς τὸ ἐπίπεδον ΑΒ, ἤτοι πρὸς τὸ Προ. Επι. $Ε_1$.

*81) **Πρόβλημα.**—Ἐκ δύο ἐπιπέδων γωνιῶν $\widehat{ΑΒ}$ καὶ $\widehat{ΑΓ}$ καὶ τῆς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένης διέδρου γωνίας $\widehat{Α}$ τριέδρου τινὸς γωνίας κατασκευάσαι τὰς δύο αὐτῆς ὀρθὰς προβολάς.* Ἂς τεθῶσι πάλιν αἱ δύο δοθεῖσαι ἐπίπεδοι γωνίαι $\widehat{\text{ΑΒ}}$ καὶ $\widehat{\text{ΑΓ}}$ ἐφεξῆς ἀλλήλαις ἐπὶ τοῦ Προ. Ἐπι. $Ε_1$ οὕτως, ὥστε νὰ ἔχωσι κοινὴν κορυφὴν τὸ σημεῖον s_1 (σχ. 92) καὶ κοινὴν τὴν ἀκμὴν $Α_1$, καὶ ἂς ἀχθῇ ἐπὶ τὴν τελευταίαν ταύτην κάθετον τὸ Προ. Επι. $Ε_2$. Ἐὰν τώρα μὲ κορυφὴν s_2 καὶ μὲ πλευρὰν τὸν ἄξονα Χ κατασκευάσωμεν γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ διέδρῳ $\widehat{\text{Α}}$, ἡ δευτέρα πλευρὰ τῆς γωνίας ταύτης παριστᾷ τὴν δευτέραν προβολὴν $Γ_2$ τῆς ἀκμῆς Γ, τῆς ὁποίας τὸ δεύτερον ἴχνος p_2 ὁρίζεται εὐκόλως ἐκ τῆς κατακλίσεως αὐτοῦ

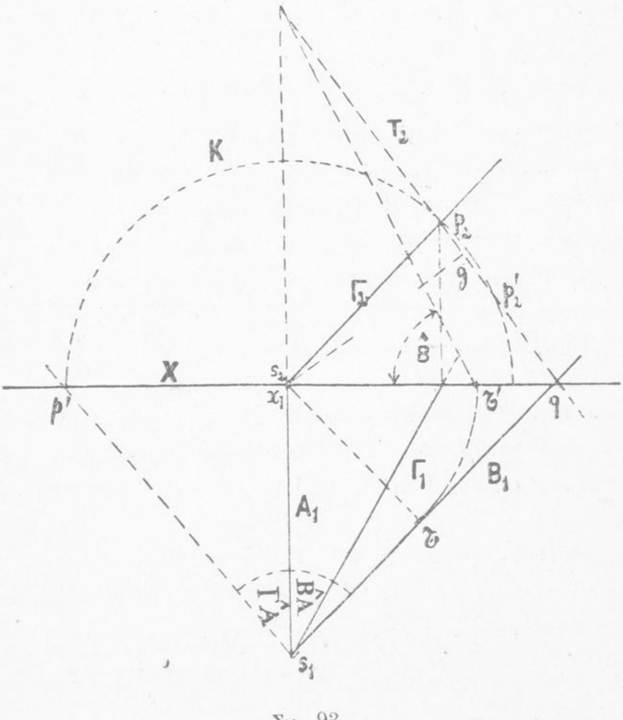
p', ἐκ τοῦ σημείου δὲ p_2 ὁρίζεται καὶ τὸ σημεῖον p_1· ἡ δ' ἐπὶ τὰ σημεῖα p_1 καὶ s_1 ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα p_1s_1 παριστᾷ τὴν πρώτην προβολὴν $Γ_1$ τῆς ἀκμῆς Γ. Κατὰ τοῦτον τὸν τρόπον αἱ δύο προβολαὶ τῆς τριέδρου γωνίας εἶνε ἐντελῶς ὡρισμέναι, ἐκ τούτων δέ, συμφώνως πρὸς τὸ πρόβλημα (79), κατασκευάζομεν καὶ τὰ λοιπὰ στοιχεῖα, ἤτοι τὴν ἐπίπεδον γωνίαν $\widehat{ΒΓ}$ καὶ τὰς δύο διέδρους $\widehat{Β}$ καὶ $\widehat{Γ}$ τῆς τριέδρου γωνίας.



Σχ. 92

Ἡ λύσις τοῦ προβλήματος τούτου δίδει ἐπίσης δύο τριέδρους γωνίας συμμετρικῶς κειμένας πρὸς τὸ ἐπίπεδον ΑΒ, ἤτοι πρὸς τὸ Προ. Επι. $Ε_1$.

82) *Πρόβλημα.* — *Ἐκ δύο ἐπιπέδων γωνιῶν $\widehat{ΑΒ}$ καὶ $\widehat{ΑΓ}$ καὶ τῆς διέδρου $\widehat{Β}$, ἀντικειμένης τῇ $\widehat{ΑΓ}$, τριέδρου τινὸς γωνίας κατασκευασθήτωσαν αἱ δύο αὐτῆς ὀρθαὶ προβολαί.* Ἐκλέγομεν τὰ Προ. Επι. $Ε_1$ καὶ $Ε_2$, ὅπως καὶ εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα, καὶ θέτομεν τὰς δοθείσας ἐπιπέδους γωνίας ἐφεξῆς ἀλλήλαις ἐπὶ τοῦ Προ. Επι. E_1 οὕτως, ὥστε νὰ ἔχωσι κοινὴν τὴν κορυφὴν s_1 (σχ. 93) καὶ τὴν ἀκμὴν A_1. Τὸ δεύτερον ἴχνος p_2 τῆς ἀκμῆς Γ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου K τοῦ γραφομένου μὲ κέντρον s_2 καὶ ἀκτῖνα s_2p', ἐν ταὐτῷ δὲ καὶ ἐπὶ τοῦ δευτέρου ἴχνους T_2 τοῦ ἐπιπέδου ΒΓ. Τὸ δεύτερον τοῦτο ἴχνος T_2 προσδιορίζομεν



Σχ. 93

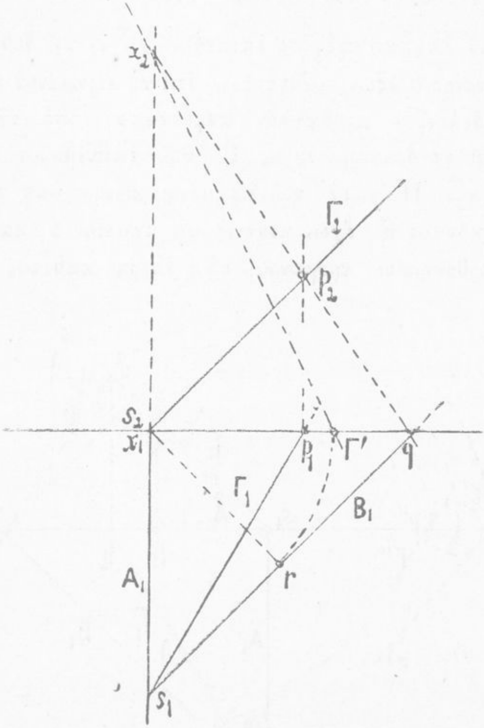
κατασκευάζοντες τὸ κλισιγώνιον τρίγωνον τοῦ ἐπιπέδου ΒΓ, τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τυχὸν σημεῖον τοῦ ζητουμένου ἴχνους του T_2. Πρὸς τοῦτο, ἐὰν θεωρήσωμεν τὸ σημεῖον s_2 καὶ ὡς πρώτην προβολὴν x_1 σημείου τινὸς x τοῦ ζητουμένου ἴχνους T_2, τότε ἡ ἐκ τοῦ x_1 ἐπὶ τὸ πρῶτον ἴχνος B_1 τοῦ ἐπιπέδου ΒΓ ἠγμένη κάθετος x_1r

παριστᾷ τὴν ἑτέραν τῶν καθέτων τοῦ κλισιγωνίου τριγώνου τοῦ εἰρημένου ἐπιπέδου, τοῦ ἀντιστοιχοῦντος εἰς τὸ σημεῖον x· διὰ τῆς καθέτου δὲ ταύτης καὶ τῆς δοθείσης γωνίας κλίσεως $\hat{B}$ τοῦ ἐπιπέδου ΒΓ πρὸς τὸ Προ. Επι. E_1, κατασκευάζομεν τὸ εἰρημένον κλισιγώνιον τρίγωνον x_1x_2r'. Τὰ σημεῖα x_2 καὶ q ὁρίζουσιν ἐντελῶς τὴν θέσιν τοῦ δευτέρου ἴχνους T_2 τοῦ ἐπιπέδου ΒΓ. Καθ' ὅσον δὲ ὁ κύκλος Κ, ὁ κέντρῳ s_2 καὶ ἀκτῖνι s_2p' γραφόμενος, τέμνει τὸ ἴχνος T_2 εἰς δύο σημεῖα, ἢ εἰς ἓν ἢ εἰς οὐδέν, τὸ πρόβλημα ἔχει δύο λύσεις, ἢ μίαν ἢ οὐδεμίαν.

Ἐκ τῶν σημείων s_1, p_1 καὶ s_2, p_2 ὁρίζεται ἡ πρώτη καὶ ἡ δευτέρα προβολὴ Γ_1 καὶ Γ_2 τῆς ἀκμῆς Γ, καὶ ἄρα καὶ αἱ δύο προβολαὶ τῆς τριέδρου γωνίας εἶνε ἐντελῶς ὡρισμέναι· ἐκ τῶν προβολῶν δέ, συμφώνως πρὸς τὸ πρόβλημα (79), κατασκευάζονται καὶ τὰ ἀληθῆ μεγέθη τῶν ἓξ στοιχείων τῆς τριέδρου γωνίας.

83) ***Πρόβλημα.*** — *Ἐκ μιᾶς ἐπιπέδου γωνίας $\hat{AB}$ καὶ τῶν εἰς αὐτὴν προσκειμένων διέδρων γωνιῶν $\hat{A}$ καὶ $\hat{B}$ τριέδρου τινὸς γωνίας, κατασκευασθήτωσαν αἱ δύο αὐτῆς ὀρθαὶ προβολαί.* Ἐκλέγομεν πάλιν τὰ Προ. Επι. E_1 καὶ E_2, ὡς καὶ προηγουμένως, καὶ διὰ τῶν δοθεισῶν γωνιῶν $\hat{A}$ καὶ $\hat{B}$, αἵτινες εἶνε αἱ γωνίαι κλίσεως τῶν ἐπιπέδων ΑΓ καὶ ΒΓ πρὸς τὸ Προ. Επι. E_1, προσδιορίζομεν τῶν εἰρημένων ἐπιπέδων τὰ δεύτερα ἴχνη Γ_2 καὶ T_2 (σχ. 94), καθ' ὃν τρόπον καὶ εἰς τὰ προηγούμενα προβλήματα (81) καὶ (82). Ἡ τομὴ τῶν δευτέρων τούτων ἰχνῶν Γ_2 καὶ T_2 τῶν εἰρημένων ἐπιπέδων εἶνε τὸ δεύτερον ἴχνος p_2 τῆς ἀκμῆς Γ· τοῦ τελευταίου τούτου σημείου ἡ πρώτη προβολὴ p_1 μετὰ τοῦ σημείου s_1 ὁρίζουσι τὴν πρώτην προβολὴν Γ_1 τῆς αὐτῆς ἀκμῆς Γ. Κατὰ τοῦτον τὸν τρόπον πορίζόμεθα τὰς δύο προβολὰς τῆς τριέδρου γωνίας.

84) Πρόβλημα.—*Ἐκ μιᾶς ἐπιπέδου γωνίας $\widehat{AB}$ καὶ δύο διέδρων, ἐξ ὧν ἡ μία, ἔστω ἡ $\widehat{A}$, προσκειμένη, ἡ δ' ἑτέρα, ἡ $\widehat{Γ}$, ἀντικειμένη, νὰ κατασκευασθῶσιν αἱ δύο προβολαὶ τῆς τριέδρου γωνίας.* Νοοῦντες, ὡς μέχρι τοῦδε, τὴν ἐπίπεδον γωνίαν $\widehat{AB}$ τιθε-

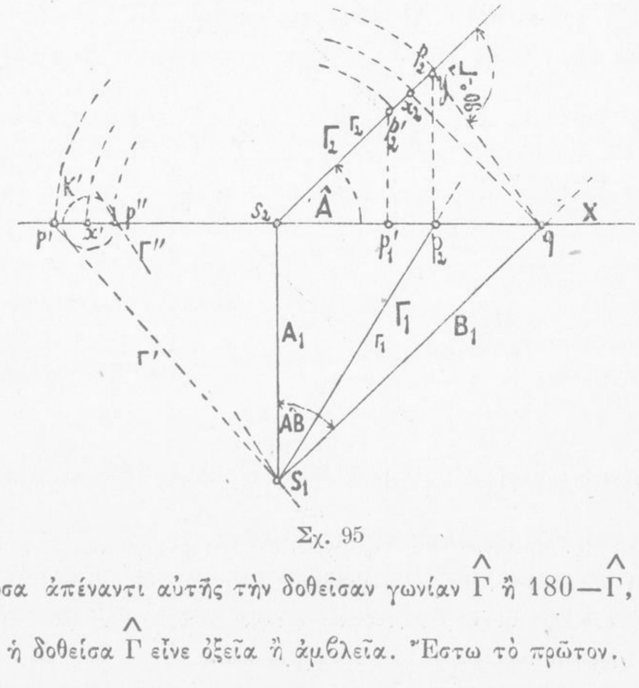


Σχ. 94

μένην ἐπὶ τοῦ Προ. Επι. E_1 καὶ τὸ Προ. Επι. E_2 κάθετον ἐπὶ τὴν ἀκμὴν A_1, πορίζόμεθα ἐκ τῆς δοθείσης διέδρου γωνίας $\widehat{A}$ τὸ δεύτερον ἴχνος $Γ_2$ (σχ. 95) τοῦ ἐπιπέδου ΑΓ, ἅμα δὲ καὶ τὴν δευτέραν προβολὴν τῆς ἀκμῆς Γ, ἥτις εἶνε ἡ εὐθεῖα τῆς τομῆς τῶν ἐπιπέδων

ΑΓκαὶ ΒΓ, ἐξ ὧν τὸ τελευταῖον, διερχόμενον διὰ τοῦ πρώτου αὐτοῦ ἴχνους B_1, κλίνει πρὸς τὸ πρῶτον ΑΓ ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ $\hat{\Gamma}$.

Πρὸς κατασκευὴν καὶ τῆς πρώτης προβολῆς Γ_1 τῆς ἀκμῆς Γ, ἃς ληφθῇ τὸ σημεῖον q, καθ' ὃ ἡ ἀκμὴ B_1 τέμνει τὸν ἄξονα X, ὡς κορυφὴ ὀρθοῦ κώνου ἐκ περιστροφῆς, τοῦ ὁποίου αἱ γενέτειραι νὰ κλίνωσιν ἅπασαι πρὸς τὸ ἐπίπεδον ΑΓ ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ $\hat{\Gamma}$ καὶ τοῦ ὁποίου ὁ ἄξων, κάθετος ὢν ἐπὶ τὸ εἰρημένον ἐπίπεδον ΑΓ, ὅπερ εἶνε δεύτερον προβάλλον, παρίσταται ὑπὸ τῆς ἐκ τοῦ σημείου q ἐπὶ τὸ δεύτερον ἴχνος Γ_2 τοῦ ἐπιπέδου τούτου ἠγμένης καθέτου qx_2. Ἡ τομὴ τοῦ εἰρημένου κώνου ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου ΑΓ εἶνε κύκλος Κ, ἔχων κέντρον τὸ σημεῖον x_2 καὶ ἀκτῖνα τὴν κάθετον ὀρθογωνίου τριγώνου, οὗ ἡ ἑτέρα κάθετος εἶνε ἡ qx_2 ἡ



Σχ. 95

ἔχουσα ἀπέναντι αὐτῆς τὴν δοθεῖσαν γωνίαν $\hat{\Gamma}$ ἢ $180-\hat{\Gamma}$, καθ' ὅσον ἡ δοθεῖσα $\hat{\Gamma}$ εἶνε ὀξεῖα ἢ ἀμβλεῖα. Ἔστω τὸ πρῶτον.

Τούτων τεθέντων παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ἐπίπεδον ΒΓ, διερχόμενον διὰ τῆς εὐθείας B_1 καὶ κεκλιμένον πρὸς τὸ ΑΓ ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ $\hat{\Gamma}$, δέον νὰ περιέχῃ μίαν ὁλόκληρον γενέτειραν τοῦ ἄνω εἰρημένου κώνου (q,K), ἀλλὰ τότε, κατὰ γνωστὴν ἰδιότητα τῶν κωνικῶν καὶ ἐν γένει ἀναπτυκτῶν ἐπιφανειῶν, ἡ εὐθεῖα τῆς τομῆς αὐτοῦ μετὰ τοῦ ἐπιπέδου ΑΓ θὰ εἶνε ἐφαπτομένη εἰς τὴν κυκλικὴν βάσιν Κ τοῦ κώνου (q,K). Ἐὰν ἄρα κατακλιθῇ τὸ ἐπίπεδον ΑΓ, στρεφόμενον περὶ τὸ πρῶτον αὐτοῦ ἴχνος A_1, ἐπὶ τοῦ Προ. Επι. E_1, τὸ μὲν σημεῖον x_2 λαμβάνει ἐπὶ τοῦ ἄξονος Χ τὴν θέσιν x′, ἡ δὲ κυκλικὴ βάσις Κ τοῦ κώνου ταυτίζεται μετὰ τοῦ κύκλου Κ′, τοῦ γραφομένου μὲ κέντρον x′ καὶ μὲ ἀκτῖνα x_2y· ἡ δ᾽ ἀπὸ τοῦ σημείου s_1 (=πρῶτον ἴχνος τῆς εὐθείας τῆς τομῆς Γ τῶν ἐπιπέδων ΑΓ καὶ ΒΓ) εἰς τὸν κύκλον Κ′ ἠγμένη ἐφαπτομένη Γ′ παριστᾷ τὴν κατάκλισιν τῆς εὐθείας τῆς τομῆς Γ τοῦ ἐπιπέδου ΑΓ μετὰ τοῦ ἐπιπέδου ΒΓ, τοῦ διερχομένου διὰ τῆς εὐθείας B_1 καὶ κεκλιμένου πρὸς τὸ ΑΓ ἐν τῇ δοθείσῃ ὀξείᾳ γωνίᾳ $\hat{\Gamma}$. Ἡ κατακλιθεῖσα ἀκμὴ Γ′ τέμνει τὸν ἄξονα Χ εἰς τὸ σημεῖον p′, ἐξ οὗ προσδιορίζομεν ἐπὶ τῆς δευτέρας προβολῆς Γ_2 τῆς αὐτῆς ἀκμῆς τὸ δεύτερον ἴχνος αὐτῆς p_2, καὶ ἐκ τοῦ τελευταίου τούτου τὸ σημεῖον p_1, ὅπερ μετὰ τοῦ σημείου s_1 καθορίζει τὴν πρώτην προβολὴν Γ_1 τῆς ἀκμῆς Γ. Κατὰ τοῦτον τὸν τρόπον αἱ δύο προβολαὶ τῆς τριέδρου γωνίας εἶνε ἐντελῶς ὡρισμέναι.

Ἡ δευτέρα ἐκ τοῦ σημείου s_1 εἰς τὸν κύκλον Κ′ ἠγμένη ἐφαπτομένη Γ″ παρέχει δευτέραν λύσιν τοῦ προβλήματος, ἤτοι ἑτέραν τρίεδρον γωνίαν ἔχουσαν δίεδρον τὴν γωνίαν $180-\hat{\Gamma}$ ἀντὶ τῆς $\hat{\Gamma}$, ὅταν ἡ τελευταία αὕτη εἶνε ἀμβλεῖα.

Ἐκ τῆς ἄνω ἐκτεθείσης κατασκευῆς φανερὸν γίνεται ὅτι τὸ πρόβλημα ἔχει δύο λύσεις, ἢ μίαν ἢ οὐδεμίαν, καθ᾽ ὅσον τὸ σημεῖον S_1 κεῖται ἐκτὸς τοῦ κύκλου Κ΄, ἢ ἐπὶ τοῦ κύκλου τούτου ἢ ἐντὸς αὐτοῦ.

85) Πρόβλημα.—Δεδομένων τῶν τριῶν διέδρων γωνιῶν $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ *καὶ* $\widehat{\Gamma}$ *τριέδρου τινὸς γωνίας, νὰ προσδιορισθῶσιν αἱ ἐπίπεδοι αὐτῆς γωνίαι* $\widehat{AB}$, $\widehat{A\Gamma}$, $\widehat{B\Gamma}$ *καὶ αἱ δύο αὐτῆς ὀρθαὶ προβολαί.* Ἔστωσαν S (ΑΒΓ) ἡ ζητουμένη τρίεδρος γωνία καὶ S_1 $(A_1B_1\Gamma_1)$ ἡ παραπληρωματικὴ αὐτῆς (βλέπ. Γεωμ. Ι. Χατζιδάκι, σελὶς 224, Θεωρ. 340), ἤτοι δευτέρα τρίεδρος γωνία, ἧς αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι εἶνε παραπληρωματικαὶ τῶν διέδρων γωνιῶν τῆς ζητουμένης S (ΑΒΓ), καὶ ἀντιστρόφως αἱ ἐπίπεδοι τῆς τελευταίας εἶνε παραπληρωματικαὶ τῶν διέδρων τῆς τριέδρου γωνίας S_1 $(A_1B_1\Gamma_1)$. συνδέονται δηλονότι αἱ ἐπίπεδοι καὶ δίεδροι γωνίαι τῶν δύο τούτων τριέδρων γωνιῶν διὰ τῶν σχέσεων

α΄) $\widehat{A_1B_1}+\widehat{\Gamma}=2^{\text{ὀρθ.}}$, $\widehat{A_1\Gamma_1}+\widehat{B}=2^{\text{ὀρθ.}}$, $\widehat{B_1\Gamma_1}+\widehat{A}=2^{\text{ὀρθ.}}$ καὶ

β΄) $\widehat{AB}+\widehat{\Gamma_1}=2^{\text{ὀρθ.}}$, $\widehat{A\Gamma}+\widehat{B_1}=2^{\text{ὀρθ.}}$, $\widehat{B\Gamma}+\widehat{A_1}=2^{\text{ὀρθ.}}$.

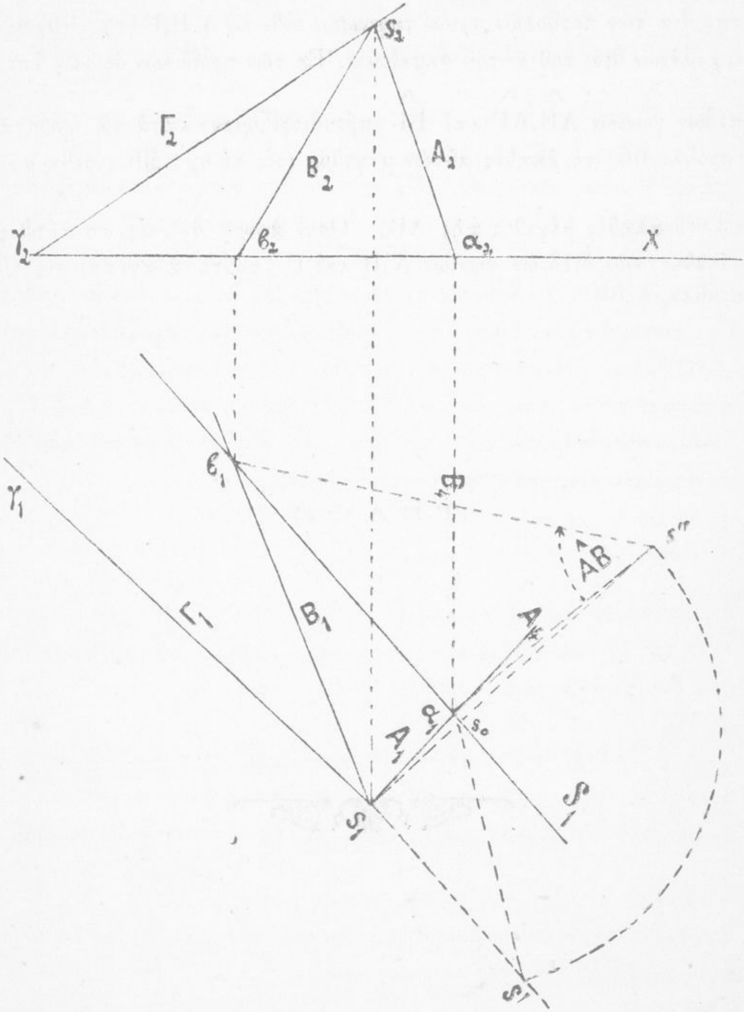
Ἀλλ' ἐκ τῶν σχέσεων α΄) γίνονται γνωσταὶ ἀμέσως αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι τῆς τριέδρου $S_1(A_1B_1\Gamma_1)$, ἤτοι

$$\widehat{A_1B_1}=2^{\text{ὀρθ.}}-\widehat{\Gamma},\ \widehat{A_1\Gamma_1}=2^{\text{ὀρθ.}}-\widehat{B},\ \text{καὶ}\ \widehat{B_1\Gamma_1}=2^{\text{ὀρθ.}}-\widehat{A},$$

δυνάμεθα ἄρα, συμφώνως πρὸς τὸ πρόβλημα 80, νὰ κατασκευάσωμεν τὰς δύο αὐτῆς ὀρθὰς προβολὰς καὶ νὰ προσδιορίσωμεν καὶ τ' ἀληθῆ μεγέθη τῶν τριῶν διέδρων αὐτῆς γωνιῶν $\widehat{A_1}$, $\widehat{B_1}$ καὶ $\widehat{\Gamma_1}$. Τούτου γενομένου προκύπτουσιν ἐκ τῶν σχέσεων β΄) αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι τῆς ζητουμένης τριέδρου γωνίας S(ΑΒΓ), ἤτοι ἔχομεν

$$\widehat{AB}=2^{\text{ὀρθ.}}-\widehat{\Gamma_1},\ \widehat{A\Gamma}=2^{\text{ὀρθ.}}-\widehat{B_1},\ \widehat{B\Gamma}=2^{\text{ὀρθ.}}-\widehat{A_1}\cdot$$

ἐκ τῶν ἐπιπέδων δὲ τούτων γωνιῶν εὐκόλως κατασκευάζομεν, κατὰ τὸ πρόβλημα 80, καὶ τὰς δύο ὀρθὰς προβολὰς τῆς τριέδρου γωνίας S (ΑΒΓ).



Σχ. 96

86) ***Προσδιορισμὸς τῶν ἐπιπέδων καὶ διέδρων γωνιῶν τριέ-***

δρου τινὸς γωνίας ἐχούσης τυχοῦσαν θέσιν πρὸς τὰ Προ. Επι. E_1 καὶ E_2.—Ὅταν ἡ τρίεδρος γωνία ἔχῃ τυχοῦσαν θέσιν ὡς πρὸς τὰ δύο Προ. Επι. E_1 καὶ E_2, τότε αἱ δύο αὐτῆς προβολαὶ παρίστανται διὰ τῶν προβολῶν τριῶν τυχουσῶν εὐθειῶν Α,Β,Γ (σχ. 96) διερχομένων διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου s. Ἐκ τῶν προβολῶν δὲ τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν $\widehat{AB}$,$\widehat{A\Gamma}$ καὶ $\widehat{B\Gamma}$ προσδιορίζομεν κατὰ τὰ γνωστὰ (πρόβλ. 66) τὸ ἀληθὲς αὐτῶν μέγεθος (εἰς τὸ σχ. 96 εὑρέθη μόνον τὸ ἀληθὲς μέγεθος τῆς $\widehat{AB}$). Ὅσον ἀφορᾷ δὲ εἰς τὸ ἀληθὲς μέγεθος τῶν διέδρων γωνιῶν Α,Β καὶ Γ, τοῦτο ἀνάγεται εἰς τὸ πρόβλημα 80.

ΤΕΛΟΣ

Ἐν Ἀθήναις, ἐκ τοῦ τυπογραφείου τῶν Καταστημάτων
Δ. Χ. Τερζοπούλου καὶ Μ. Σαλιβέρου

024000020016