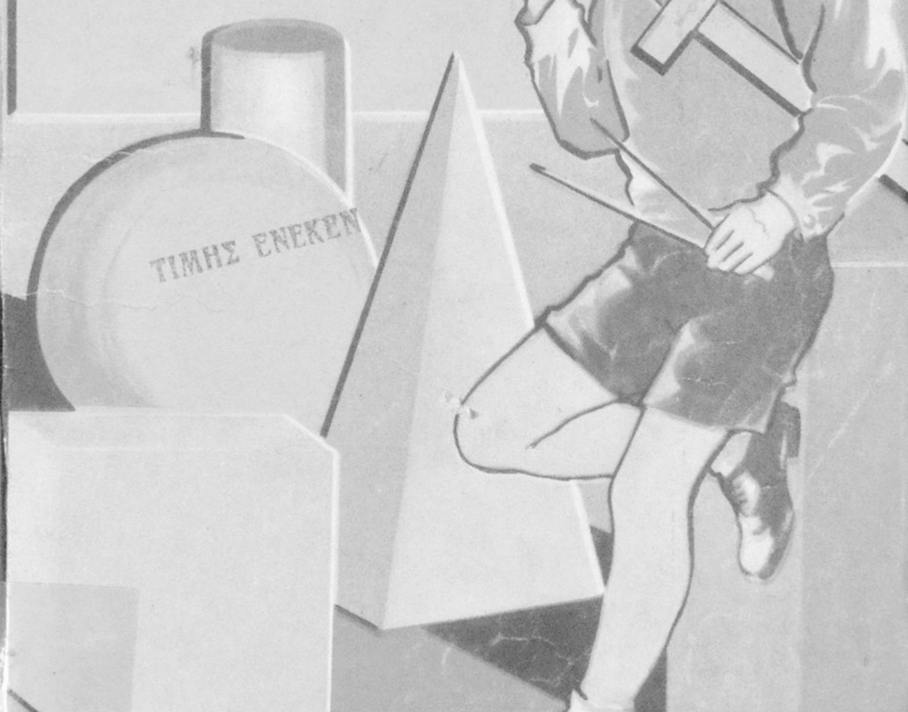
ΙΩΑΝΝΟΥ ΚΑΜΠΑΝΑ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΤΙΜΗΣ ΕΝΕΚΕΝ

Ε' ε' ΣΤ' Δημοτικού

ΕΓΚΕΚΡΙΜΕΝΗ



ΤΙΜΗΣ ΕΝΕΚΕΝ

ΙΚΟΣ ΟΙΚΟΣ
ΜΠΑΝΑ Ο. Ε.
ΚΚΑ 25 - ΑΘΗΝΑΙ

ΙΣΤ
ΜΑΘΗ
[1952]

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΙΩΑΝΝΟΥ ΚΑΜΠΑΝΑ
ΣΥΓΓΡΑΦΕΩΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ

ΤΙΜΗΣ ΕΝΕΚΕΝ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Ε΄ ΚΑΙ ΣΤ΄ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ

ΕΓΚΕΚΡΙΜΕΝΗ
Ἀριθ. ἀποφ. Ὑπουργείου Παιδείας 61452/52

ΤΙΜΗΣ ΕΝΕΚΕΝ

ΠΡΟΣΗΡΜΟΣΜΕΝΗ
ΜΕ ΤΑ ΝΕΑ ΜΕΤΡΑ ΚΑΙ ΣΤΑΘΜΑ

ΕΚΔΟΤΙΚΟΣ ΟΙΚΟΣ ΙΩ. ΚΑΜΠΑΝΑ Ο. Ε. — ΑΘΗΝΑΙ

18799
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΒΑΣΙΛΕΙΟΝ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΝ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΙΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ

Ἐν Ἀθήναις τῇ 20 Ἰουνίου 1952

Ἀριθ. πρωτ. 61.330

Πρός
τὸν κ. Ἰω. Καμπανᾶν
Λέκκα 25
Ἐνταῦθα

Ἀνακοινοῦμεν ὑμῖν ὅτι διὰ τῆς ὑπ' ἀριθ. 61452) 12) 6) 52 πράξεως τοῦ Ὑπουργείου μετὰ σύμφωνον γνωμοδότησιν τοῦ Κ.Γ.Δ.Σ.Ε. ἐνεκρίθη διὰ μίαν τριετίαν ἀρχομένην ἀπὸ τῆς ἐνάρξεως τοῦ σχολικοῦ ἔτους 1 - 9 - 52 τὸ ὑποβληθὲν εἰς τὸν διενεργηθέντα σχετικὸν διαγωνισμὸν βιβλίον σας «ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ» ὡς βοηθητικὸν τοῦ μαθήματος τῆς Γεωμετρίας διὰ τὴν Ε΄ καὶ ΣΤ΄ τάξιν τοῦ Δημοτικοῦ σχολείου.

Παρακαλοῦμεν ὅθεν, ὅπως προβῆτε εἰς τὴν ἐκτύπωσιν τούτου ἀφοῦ συμμορφωθῆτε πρὸς τὰς ὑποδείξεις τοῦ Ἐκπαιδευτικοῦ Συμβουλίου καὶ τὸν κανονισμὸν Ἐκδόσεως Βοηθητικῶν Βιβλίων.

Ἐντολῇ Ὑπουργοῦ
Ὁ Διευθυντὴς
Χ. ΜΟΥΣΤΡΗΣ

Κοινοποίησις
Κ.Γ.Δ.Σ.Ε.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

1. Σώματα

Εἰς τὴν τάξιν παρατηροῦμεν διάφορα ἀντικείμενα, ὅπως τὰ θρανία, τὸν πίνακα, τὸ τραπέζι κ.λ.π. Τ' ἀντικείμενα αὐτὰ λέγονται **σώματα** καὶ ἡ ἔκτασις ποὺ καταλαμβάνει ἕκαστον εἰς τὸ διάστημα, λέγεται ὄγκος τοῦ σώματος. Ἡ ἔκτασις ἑκάστου σώματος μετρεῖται διὰ τῆς συγκρίσεως αὐτοῦ πρὸς ὡρισμένον ὄγκον ἄλλου σώματος, ποὺ λαμβάνομεν ὡς **μονάδα μετρήσεως.**

Τὸ ἔξω μέρος τοῦ σώματος ποὺ φαίνεται, καὶ ἠμποροῦμεν νὰ τὸ ἐγγίσωμεν, λέγεται **ἐπιφάνεια.**

Ἕκαστον σῶμα ἀποτελεῖται ἀπὸ τὴν ὕλην μὲ τὴν ὁποίαν εἶναι κατασκευασμένον (ξύλον, σίδηρος, χαρτὶ κ.λ.π.) καὶ ἀπὸ τὴν ἐξωτερικὴν μορφήν του, ἤτοι τὸ σχῆμα ποὺ ἔχει. Ἡ Γεωμετρία δὲν ἐρευνᾷ τὴν ὕλην τῶν σωμάτων ἢ τὸ χρῶμα, εἰμὴ μόνον τὸ σχῆμα καὶ τὴν ἔκτασίν των. Τὰ σώματα λοιπὸν ποὺ κατὰ τὴν ἐξέτασίν των λαμβάνεται ὡς βάσις τὸ σχῆμα, λέγονται **γεωμετρικὰ σώματα** καὶ εἶναι πάντοτε στερεά.

Τὰ γεωμετρικὰ σώματα ποὺ θὰ ἐξετάσωμεν εἰς τὴν Γεωμετρίαν μας τῆς Ε΄ τάξεως εἶναι: **ὁ κύβος, τὸ παραλληλεπίπεδον** καὶ ἡ **πυραμίς.**

Καὶ εἰς τὴν Γεωμετρίαν τῆς ΣΤ΄ τάξεως: **ὁ κύλινδρος, ὁ κῶνος** καὶ ἡ **σφαῖρα.**

Ἄς λάβωμεν τώρα ἓν σῶμα, ὅπως τὴν κασετίναν, τὸ κιβώτιον ἢ ἄλλο τι. Εἰς ἕκαστον τούτων παρατηροῦμεν τρεῖς διευθύνσεις: τὸ **μῆκος,** ἤτοι τὸ μακρύτερον μέρος, τὸ **πλάτος,** τὸ στενώτερον καὶ τὸ **ὕψος** ἀπὸ κάτω ἕως ἐπάνω. Τὸ μῆκος τὸ πλάτος καὶ τὸ ὕψος, λέγονται μαζί: **διαστάσεις** τοῦ σώματος.

Εἰς τὴν σανίδα, τὸν τοῖχον καὶ μερικὰ ἄλλα σώματα, τὸ ὕψος λέγεται **πάχος.** Εἰς ἄλλα πάλιν, ὅπως εἰς τὴν λίμνην, τὸ πηγάδι κλπ. λέγεται **βάθος.** Ἐπομένως εἰς ὡρισμένας περιπτώσεις τὸ ὕψος τῶν σωμάτων λέγεται πάχος ἢ βάθος.

2. Ἐπιφάνειαι

Εἰς τὸ προηγούμενον μάθημα εἴδομεν τί λέγεται ἐπιφάνεια τοῦ σώματος. Οὕτω τὸ ἔξω μέρος τοῦ βιβλίου, τοῦ τετραδίου, τοῦ πίνακος

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

κλπ. εἶναι ἡ ἐπιφάνειά των. Ἡ ἐπιφάνεια, ὅπως βλέπομεν, ἔχει δύο διαστάσεις: **μῆκος** καὶ **πλάτος**.

Ἐξετάζοντες μὲ τὴν σειρὰν τὴν ἐπιφάνειαν τεσσάρων διαφορετικῶν σωμάτων, ἤτοι τοῦ πίνακος, τοῦ αὐγοῦ, τοῦ κουτιοῦ τῶν σπίρτων καὶ τοῦ κουτιοῦ τοῦ γάλακτος, βλέπομεν ὅτι :

Εἰς τὸν πίνακα, ὅπως καὶ νὰ τοποθετήσωμεν τὸν χάρακα ἢ τὴν τεντωμένην κλωστὴν ἐφαρμόζουν. Ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ τοῦ εἴδους λέγεται **ἐπίπεδος** ἢ ἁπλῶς **ἐπίπεδον.**

Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ αὐγοῦ δὲν ἔχει κανένα μέρος ἐπίπεδον. Αὐτὴ λέγεται **καμπύλη** καὶ εἶναι κυρτὴ ἢ κοίλη.

Τοῦ κουτιοῦ ποὺ βάζομεν τὰ σπίρτα ἀποτελεῖται ἀπὸ πολλὰ ἐπίπεδα ἀλλ' ὅλα δὲν κάμνουν ἓν ἐπίπεδον. Αὐτὴ λέγεται **τεθλασμένη** ἐπιφάνεια. Τεθλασμένη εἶναι καὶ ἡ ἐπιφάνεια τῆς σκάλας τοῦ σχολείου κ.τ.λ.

Τέλος τοῦ κουτιοῦ τοῦ γάλακτος, γύρω εἶναι κυρτὴ καὶ ἐπάνω καὶ κάτω ἐπίπεδος. Ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ τοῦ εἴδους λέγεται **μικτή.**

Ἀνακεφαλαιώνοντες τ' ἀνωτέρω, βλέπομεν ὅτι αἱ ἐπιφάνειαι τῶν σωμάτων εἶναι τεσσάρων εἰδῶν : **ἐπίπεδοι, κυρταί, τεθλασμέναι καὶ μικταί.**

Ἀσκήσεις :

1. Ὀνομάσετε μερικὰ σώματα, ἀπ' ὅσα βλέπετε ἐντὸς καὶ ἐκτὸς τοῦ σχολείου.
2. Δείξετε τὸ μῆκος τὸ πλάτος καὶ τὸ ὕψος τούτων.
3. Ὀνομάσετε σώματα ποὺ τὸ ὕψος των λέγεται πλάτος ἢ βάθος.
4. Δείξετε τὰς διαστάσεις τοῦ τετραδίου σας, μιᾶς κόλλας, τῶν παραθύρων, τῶν ὑαλοπινάκων, τοῦ τοίχου καὶ ἄλλων ἀντικειμένων τῆς αἰθούσης.
5. Ὀνομάσετε πέντε σώματα μὲ ἐπίπεδον ἐπιφάνειαν καὶ πέντε μὲ καμπύλην.
6. Ὁμοίως πέντε μὲ τεθλασμένην καὶ πέντε μὲ μικτὴν ἐπιφάνειαν.
7. Δείξετε μίαν καμπύλην ἐπιφάνειαν νὰ εἶναι κυρτὴ καὶ μίαν νὰ εἶναι κοίλη.
8. Διάφοροι ἀπορίαι.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ

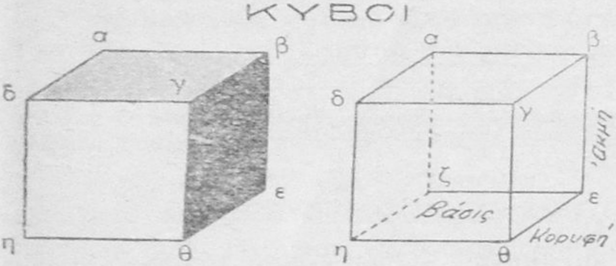
ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

(ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Ε΄ ΤΑΞΕΩΣ)

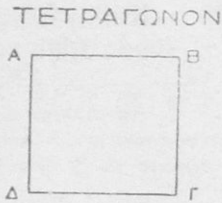
ΚΥΒΟΣ (*)

Τὸ στερεὸν σῶμα ποὺ παριστᾶ τὸ σχῆμα 1, θὰ τὸ λέγωμεν **κύβον.** Αὐτὸ τὸ σχῆμα ἔχουν τὰ ζάρια, μερικὰ κιβώτια, δωμάτια κ. ἄ.

Παρατηρῶ τὸν κύβον καὶ βλέπω ὅτι ἔχει 6 ἐπιφανείας, ὅλας ἐπιπέδους καὶ ἴσας μεταξύ των. Τὴν ἐπίπεδον ἐπιφάνειαν κάθε σώ-



Σχ. 1



Σχ. 2

ματος, θὰ τὴν λέγωμεν **ἕδραν**. Ὁ κύβος λοιπὸν ἔχει 6 ἕδρας ἴσας: μίαν ἐμπρός, μίαν ὀπίσω· μίαν δεξιά, μίαν ἀριστερά· μίαν ἐπάνω καὶ μίαν κάτω.

Ἡ κάτω ἕδρα ποὺ στηρίζεται ὁ κύβος λέγεται **βάσις** καὶ αἱ

(*) ***Σημ. διὰ τὸν διδάσκοντα:*** Ξεχωρίζεται ὁ κύβος, παρουσιάζεται εἰς τὰ παιδιὰ καὶ ἀφοῦ περιστραφῇ, νὰ ἴδουν ὅλας τὰς ὄψεις, ἀφήνονται νὰ εἴπουν τί βλέπουν. Οὕτω σχηματίζεται σαφὴς ἀντίληψις περὶ τῆς ἐξωτερικῆς μορφῆς του. Ἂν ὅμως τὸ σχολεῖον δὲν ἔχῃ γεωμετρικὰ σώματα, λαμβάνεται φροντὶς νὰ κατασκευασθῇ κύβος ἐγκαίρως ἀπὸ χαρτόνι ἢ ξύλον ἐκ κόντρα-πλακέ. Ἂν κατασκευασθοῦν περισσότεροι κύβοι, τόσον τὸ καλύτερον διότι θὰ ἠμποροῦν νὰ τοὺς παρατηροῦν πολλὰ παιδιὰ συγχρόνως.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

4 γύρω λέγονται μαζὶ **παράπλευρος ἐπιφάνεια**. Ἀλλὰ καὶ ἡ ἐπάνω λέγεται **βάσις**. Ἐπομένως ὁ κύβος ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰς δύο βάσεις καὶ τὴν παράπλευρον ἐπιφάνειαν.

Τοποθετοῦμεν τὸν κύβον ἐπάνω ἀπὸ τὸν πίνακα καὶ σύρομεν μὲ τὸ μολύβι γύρω εἰς τὴν βάσιν τέσσαρας εὐθείας. Τὸ σχῆμα ΑΒΓΔ (σχ. 2). ποὺ θὰ γίνῃ ἅμα σηκώσωμεν τὸν κύβον, λέγεται **τετράγωνον**. Ἐπάνω εἰς τὸ τετράγωνον αὐτὸ τοποθετοῦμεν κατόπιν μίαν ἀπὸ τὰς ἄλλας ἕδρας τοῦ κύβου. Τί παρατηροῦμεν;

Ἡ κόψις, ποὺ σχηματίζεται ἐκεῖ ποὺ συναντῶνται δύο ἕδραι, λέγεται **ἀκμή**. Ὅπως φαίνεται εἰς τὸ σχῆμα 1, ὁ κύβος ἔχει 12 ἀκμὰς (4 ἐπάνω, 4 κάτω, 4 γύρω). Μετρῶ μὲ τὸ ὑποδεκάμετρον τὰς ἀκμὰς τοῦ κύβου καὶ εὑρίσκω ὅτι εἶναι ἴσαι. Ἐπομένως ὁ κύβος ἔχει καὶ τὰς τρεῖς διαστάσεις ἴσας.

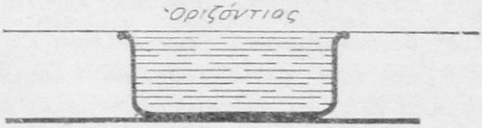
Τὰ σημεῖα ὅπου συναντῶνται ἀνὰ τρεῖς ἕδραι, λέγονται **κορυφαὶ** καὶ εἶναι 8 (4 ἐπάνω καὶ 4 κάτω). Ὥστε:

Κύβον λέγομεν τὸ στερεὸν τὸ ὁποῖον ἔχει καὶ τὰς 6 ἕδρας ἴσας καὶ τὰς γωνίας του ὀρθάς.

Ἀσκήσεις: 1. Παρατηρήσετε τὸν κύβον καὶ δείξετε: α) τὰς βάσεις καὶ τὴν παράπλευρον ἐπιφάνειαν, β) τὰς ἀκμάς, γ) τὰς κορυφάς του. 2. Δείξετε σώματα νὰ ἔχουν σχῆμα κύβου.

ΔΙΕΥΘΥΝΣΙΣ ΕΔΡΩΝ ΤΟΥ ΚΥΒΟΥ

α΄) **Ὁριζόντιος διεύθυνσις**. Ὅπως ἔχομεν τοποθετήσει τὸν κύβον ἐπάνω εἰς τὸ τραπέζι, παρατηροῦμεν τὴν ἐπάνω καὶ τὴν κάτω ἕδραν του. Βλέπομεν τότε ὅτι, αἱ δύο ἔχουν τὴν διεύθυνσιν τοῦ νεροῦ ποὺ ἠρεμεῖ ὅταν εἶναι εἰς τὴν λεκάνην, τὸν κουβὰν ἢ εἰς οἱονδήποτε ἄλλο δοχεῖον. Τὴν ἰδίαν διεύθυνσιν ἔχει τὸ πάτωμα



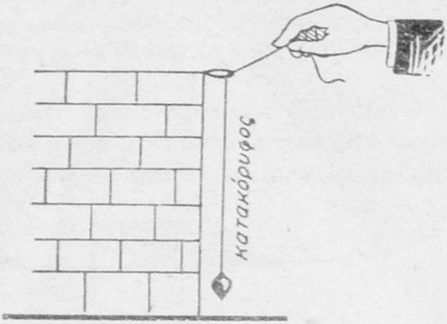
Σχ. 3

καὶ τὸ ταβάνι τῶν δωματίων. Ἡ ἕδρα λοιπὸν ποὺ ἔχει τὴν διεύθυνσιν τοῦ νεροῦ ὅταν ἠρεμῇ (σχ. 3), λέγεται **ὁριζόντιος ἕδρα** ἢ **ὁριζόντιον ἐπίπεδον**.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

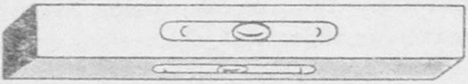
β΄) **Κατακόρυφος διεύθυνσις**. Αἱ ἄλλαι τέσσαρες ἕδραι τοῦ κύβου, ποὺ ἀποτελοῦν τὴν παράπλευρον ἐπιφάνειάν του, ἔχουν τὴν διεύθυνσιν τοῦ νήματος τῆς στάθμης (σχ. 4) καὶ λέγονται **κατακόρυφοι ἕδραι**.

Νῆμα τῆς στάθμης εἶναι ἕνα μολυβένιο βαρίδι, κρεμασμένον μὲ σπάγγον καὶ τὸ μεταχειρίζονται οἱ κτίσται νὰ κτίζουν τὸν τοῖχον κατακορύφως. Κρεμάσετε μίαν πέτραν μὲ σπάγγον καὶ ἔχετε πρόχειρον νῆμα τῆς στάθμης.



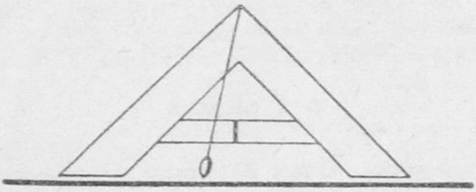
Σχ. 4.

Διὰ νά δοκιμάσωμεν ἓν σῶμα ἂν ἔχῃ ὁριζοντίαν διεύθυνσιν μεταχειριζόμεθα τὴν **ἀεροστάθμην** (σχ. 5). Αὐτὴ εἶναι ὑάλινος


Σχ. 5 ἀεροστάθμη

σωλὴν ποὺ δὲν εἶναι καλὰ γεμισμένος μὲ νερὸ καὶ ἐντὸς αὐτοῦ ὑπάρχει φυσαλίς. Πρόχειρον ἀεροστάθμην ἠμποροῦμεν νὰ κάμωμεν μὲ ἓν σωληνάριον κινίνης.

Ὅταν ὅμως ὁ τεχνίτης θέλῃ νὰ δοκιμάσῃ τὸ πάτωμα ἂν ἔχῃ ὁριζόντιον διεύθυνσιν, μεταχειρίζεται τὸ **ἀλφάδι** (σχ. 6). Αὐτὸ εἶναι ξύλινον ὄργανον μὲ τρεῖς σανίδας καὶ ὁμοιάζει μὲ τὸ κεφα-


Σχ. 6 ἀλφάδι

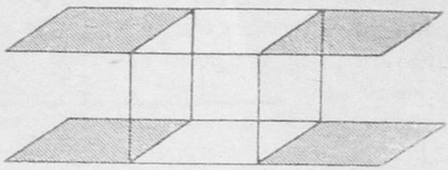
λαῖον Α. Ἡ μεσαία σανίς, ποὺ ἑνώνει τὰ δύο σκέλη τοῦ Α, ἔχει εἰς τὸ μέσον μίαν αὐλακιάν. Ἂν λοιπόν, ὅπως θὰ τοποθετηθῇ τὸ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἀλφάδι εἰς τὸ πάτωμα, τὸ νῆμα τῆς στάθμης, ποὺ κρέμεται ἀπὸ τὴν κορυφὴν τοῦ Α, πέσῃ εἰς τὴν αὐλακιάν, τὸ πάτωμα ἔχει ὁριζόντιον διεύθυνσιν.

ΘΕΣΙΣ ΕΔΡΩΝ ΤΟΥ ΚΥΒΟΥ ΜΕΤΑΞΥ ΤΩΝ

Παρατηρῶ τὴν ἐπάνω καὶ τὴν κάτω ἕδραν τοῦ κύβου καὶ βλέπω ὅτι δὲν συναντῶνται, ὅσον καὶ ἂν προεκταθοῦν καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη μὲ χαρτόνι, ὅπως δείχνει τὸ σχῆμα 7.



Σχ. 7

Αἱ ἕδραι λοιπὸν ποὺ εἶναι ἀπέναντι καὶ δὲν συναντῶνται ὅσον καὶ ἂν προεκταθοῦν ἀπὸ τὰ δύο ἄκρα, λέγονται **παράλληλοι**. Ἐπίσης παράλληλοι ἕδραι τοῦ κύβου εἶναι ἡ ἔμπροσθεν μὲ τὴν ὄπισθεν καὶ ἡ δεξιὰ μὲ τὴν ἀριστεράν.

Ἀνακεφαλαιώνοντες ὅσα ἐμάθαμε περὶ τῶν ἑδρῶν τοῦ κύβου, βλέπομεν ὅτι:

Ἐὰν τοποθετήσωμεν τὸν κύβον ἐπάνω εἰς τὸ τραπέζι, δύο ἕδραι του ἔχουν ὁριζόντιον διεύθυνσιν, τέσσαρες κατακόρυφον καὶ αἱ ἀπέναντι εἶναι παράλληλοι.

Ἀσκήσεις : 1. Δείξετε τὰς ὁριζοντίους ἕδρας τοῦ δωματίου, τὰς κατακορύφους καὶ τὰς παραλλήλους. 2. Δοκιμάσετε κατόπιν μὲ τὴν ἀεροστάθμην τὸ πάτωμα καὶ ὅσα ἄλλα ἀντικείμενα ἔχουν ὁριζόντιον διεύθυνσιν καὶ μὲ τὸ νῆμα τῆς στάθμης αὐτὰ πού ἔχουν κατακόρυφον διεύθυνσιν. 3. Δείξετε μίαν-μίαν τὰς ἕδρας τοῦ δωματίου καὶ κάθε φορὰν τὴν παράλληλόν της. 4. Τοποθετήσετε δύο ὑποδεκάμετρα ἢ δύο μολύβια νὰ εἶναι παράλληλα. 5. Διάφοροι ἀπορίαι.

ΓΡΑΜΜΑΙ

Αἱ ἀκμαὶ τοῦ κύβου, ὅπως βλέπομεν, εἶναι γραμμαί. Γραμμαὶ ὑπάρχουν ἄφθονοι γύρω μας. Αἱ ἄκραι τῶν τοίχων, τῶν τετραδίων, τοῦ πίνακος κλπ. εἶναι καὶ αὐταὶ γραμμαί. Ἡ ἄκρη τῆς γραμμῆς λέγεται **σημεῖον** καὶ σημειώνεται μὲ στιγμὴν (.).

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

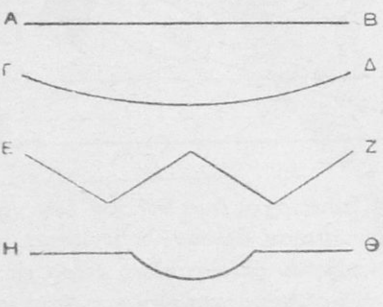
Ἡ γραμμὴ ἔχει μόνον μῆκος ἐνῷ τὸ σημεῖον δὲν ἔχει διάστασιν. Ἀναλόγως τοῦ σχήματος ποὺ ἔχει ἡ γραμμὴ λέγεται:

Εὐθεῖα, ὅταν ὁμοιάζῃ μὲ τεντωμένην κλωστήν, ὅπως ἡ ΑΒ (σχ. 8). Εὐθεῖαι εἶναι αἱ κόψεις τοῦ χάρακος, αἱ γωνίαι τῶν τοίχων καὶ πολλαὶ ἄλλαι.

Σημ. Τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα τῆς εὐθείας, ποὺ ἑνώνει δύο σημεῖα, λέγεται *ἀπόστασις*.

Καμπύλη, ὅταν κανὲν τμῆμά της δὲν εἶναι εὐθεῖα, ὅπως ἡ ΓΔ. Καμπύλαι εἶναι ἡ κλωστὴ ποὺ δὲν εἶναι τεντωμένη, τὰ σύρματα τοῦ τηλεγράφου ἅμα εἶναι χαλαρὰ καὶ ἄλλα.

Τεθλασμένη, ὅταν ἀποτελῆται ἀπὸ πολλὰς εὐθείας, ἀλλ' ὅλαι μαζὶ δὲν κάνουν μίαν εὐθεῖαν, ὅπως ἡ ΕΖ. Τεθλασμένην γραμμὴν κάνουν αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι γύρω εἰς τὸν πίνακα, γύρω εἰς τὴν κόλλαν, τὰ κεφαλαῖα Α Γ Δ Ζ κ. ἄ.



Σχ. 8

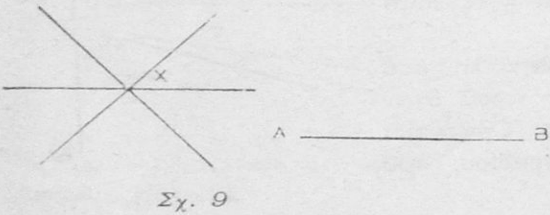
Μικτή, ὅταν ἀποτελεῖται ἀπὸ εὐθείας καὶ καμπύλας, ὅπως ἡ ΗΘ (σχ. 8). Μικταὶ γραμμαὶ εἶναι τὰ κεφαλαῖα Β, Θ, Ρ, Φ, οἱ δημόσιοι δρόμοι, αἱ σιδηροδρομικαὶ γραμμαὶ κ. ἄ.

Ὥστε γραμμαὶ εἶναι τεσσάρων εἰδῶν: **εὐθεῖα, καμπύλη, τεθλασμένη** καὶ **μικτή**.

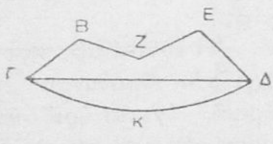
Ἀπ' ὅλας τὰς γραμμὰς σπουδαιοτέρα εἶναι ἡ **εὐθεῖα**.

ΠΕΡΙ ΕΥΘΕΙΑΣ ΓΡΑΜΜΗΣ

Ἰδιότητες εὐθείας: α΄) Ἀπὸ ἓν σημεῖον, τὸ Χ (σχ. 9), ἠμποροῦν νὰ περάσουν ὅσαι εὐθεῖαι θέλομεν.



Σχ. 9

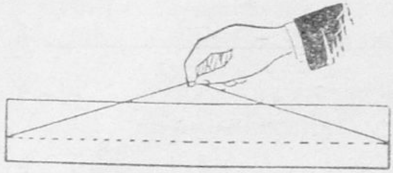


Σχ. 10

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

β΄) Ἀπὸ δύο ὅμως σημεῖα, τό Α καὶ τό Β, μία μόνον εὐθεῖα διέρχεται, ἡ ΑΒ. Ἂν θελήσωμεν νὰ σύρωμεν καὶ δευτέραν γραμμήν, αὕτη θὰ πέσῃ ἐπάνω εἰς τὴν πρώτην.

γ΄) Ἀπ' ὅλας τὰς γραμμάς, αἱ ὁποῖαι διέρχονται ἐκ δύο σημείων συντομωτέρα εἶναι ἡ εὐθεῖα (σχ. 10). Διὰ τοῦτο ἡ γραμμὴ τοῦ σιδηροδρόμου καὶ οἱ δρόμοι, ὅπου ἐπιτρέπει τὸ ἔδαφος, γίνονται εὐθεῖαι διὰ νὰ συντομεύεται ἡ ἀπόστασις. Εὐθεῖα πάλιν γίνεται καὶ ἡ γραμμὴ τοῦ τηλεγράφου, διὰ νὰ χρησιμοποιῶνται ὀλιγώτεροι στύλοι καὶ σύρμα.



Σχ. 11

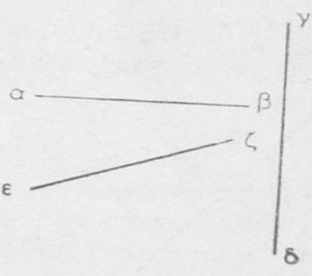
Χάραξις γραμμῶν. Εἰς τὸ τετράδιον εὐθεῖαι χαράσσονται, ὅπως γνωρίζομεν, μὲ τὸν χάρακα. Οἱ ξυλουργοὶ ἅμα θέλουν νὰ χαράξουν εὐθεῖαν ἐπάνω εἰς σανίδα, τὴν ὁποίαν θέλουν νὰ σχίσουν, χρωματίζουν ἕνα σπάγγον καὶ τὸν τεντώνουν ἀπὸ τὰ δύο ἄκρα εἰς τὸ μέρος ποὺ πρόκειται νὰ γίνῃ εὐθεῖα. Ἀνασηκώνουν κατόπιν μὲ τὸν δάκτυλον τὸν σπάγγον ἀπὸ τὸ μέσον, ὅπως δείχνει τὸ σχῆμα 11, πίπτει οὗτος ἀποτόμως εἰς τὴν σανίδα καὶ σχηματίζεται ἡ εὐθεῖα.

Οἱ κηπουροὶ πάλιν χαράσσουν εὐθείας μὲ τὸ σχοινί. Δένουν τ' ἄκρα τοῦ σχοινιοῦ εἰς δύο πασσάλους, τεντώνουν τὸ σχοινὶ καὶ σύρουν ὕστερα ἕνα σουβλερὸν ξύλον εἰς τὸ ἔδαφος καὶ εἰς ὅλον τὸ μῆκος τοῦ σχοινίου. Μὲ τὸν τρόπον τοῦτον χαράσσεται ἡ εὐθεῖα καὶ φυτεύουν ἐπάνω εἰς αὐτὴν δένδρα, ἄνθη κ.τ.λ.

ΔΙΑΦΟΡΟΙ ΘΕΣΕΙΣ ΕΥΘΕΙΩΝ ΜΕΤΑΞΥ ΤΩΝ

α΄) **Θέσις εὐθείας ὡς πρὸς ὁριζόντιον ἐπίπεδον**: Παρατηρήσετε τὰς τρεῖς εὐθείας τοῦ σχήματος 12. Ἡ αβ ἔχει διεύθυνσιν ἀπὸ τ' ἀριστερὰ πρὸς τὰ δεξιά, ἡ γδ ἀπὸ ἐπάνω πρὸς τὰ κάτω καὶ ἡ εζ πλαγίως.

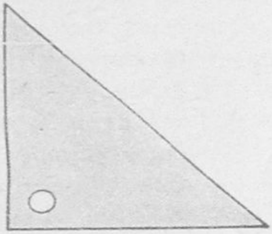
Ἡ εὐθεῖα αβ, καὶ κάθε ἄλλη ποὺ ἔχει τὴν διεύθυνσιν τοῦ νεροῦ ὅταν ἠρεμῇ, λέγεται ὁ**ριζόντιος**. Ὁριζόντιοι εἶναι αἱ γραμμαὶ τοῦ τετραδίου, τοῦ βιβλίου κ. ἄ.



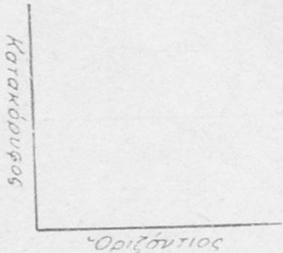
Σχ. 12

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἡ εὐθεῖα γδ, καὶ κάθε ἄλλη ποὺ ἔχει τὴ διεύθυνσιν τοῦ νήματος τῆς στάθμης (σχ. 4), λέγεται **κατακόρυφος**. Κατακόρυφοι εἶναι αἱ γωνίαι τῶν δωματίων ἀπὸ ἐπάνω πρὸς τὰ κάτω, τὰ καλώδια τοῦ ἠλεκτρικοῦ, ποὺ κρέμονται ἀπὸ τὸ ταβάνι κ. ἄ. Τέλος ἡ εζ, ἡ ὁποία δὲν εἶναι ὁριζόντιος, οὔτε κατακόρυφος, λέγεται **πλαγία**.



Σχ. 13

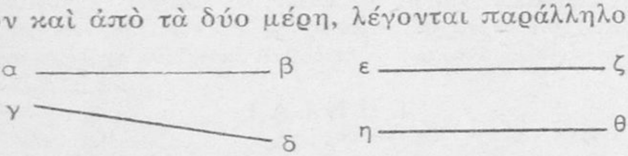


Σχ. 14

Αἱ ὁριζόντιοι καὶ αἱ κατακόρυφοι εὐθεῖαι γίνονται μὲ τὸν **γνώμονα** (σχ. 13), ὅπως δείχνει τὸ σχ. 14. Διὰ νὰ δοκιμάσωμεν μίαν εὐθεῖαν ἂν εἶναι ὁριζόντιος μεταχειριζόμεθα, ὅπως ἔχομεν μάθει, τὴν ἀεροστάθμην καὶ τὸ ἀλφάδι.

β΄) **Θέσεις δύο εὐθειῶν μεταξύ των**: Παρατηρήσετε τώρα τὴν θέσιν ποὺ ἔχουν αἱ 4 εὐθεῖαι τοῦ σχήματος 15. Αἱ δύο πρῶται, ἤτοι αβ καὶ ἡ γδ, ἂν προεκταθοῦν ἀπὸ τὰ σημεῖα α καὶ γ, θὰ συναντηθοῦν πιὸ πέρα. Αἱ εὐθεῖαι αὗται ὀνομάζονται **τεμνόμεναι**. Ἀντιθέτως ἡ εζ καὶ ἡ ηθ δὲν πρόκειται νὰ συναντηθοῦν ὅσον καὶ νὰ προεκταθοῦν καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη των. Αὗται ὀνομάζονται **παράλληλοι.**

Ὥστε: **Δύο ἢ περισσότεραι εὐθεῖαι, κείμεναι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, ὅταν δὲν συναντῶνται ὅσον καὶ ἂν προεκταθοῦν καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη, λέγονται παράλληλοι.**



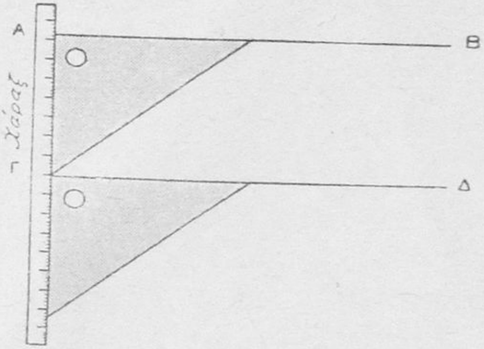
Σχ. 15

Παράλληλοι εἶναι αἱ γραμμαὶ τοῦ τετραδίου, τοῦ βιβλίου τοῦ σιδηροδρόμου κλπ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΠΩΣ ΧΑΡΑΣΣΟΝΤΑΙ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΙ ΕΥΘΕΙΑΙ

Παράλληλοι εὐθεῖαι χαράσσονται μὲ τὸν χάρακα. Τὸν τοποθετοῦμεν εἰς τὸ τετράδιον καὶ πιέζοντες αὐτὸν μὲ τὸ ἀριστερόν μας χέρι, σύρομεν γραμμὴν ἀπὸ τ' ἀριστερὰ πρὸς τὰ δεξιά. Κατόπιν γυρίζομεν τὸν χάρακα καὶ σύρομεν δευτέραν παράλληλον, κατόπιν τρίτην, τετάρτην κ. ο. κ. Ὅταν ὅμως θέλωμεν νὰ χαράξωμεν παράλληλον μὲ ἀκρίβειαν, μεταχειριζόμεθα τὸν γνώμονα ὡς ἑξῆς:



Σχ. 16

Θέλομεν αἴφνης νὰ χαράξωμεν παράλληλον εὐθεῖαν μὲ τὴν ΑΒ (σχ. 16) ποὺ ν' ἀρχίζῃ ἀπὸ τὸ σημεῖον Γ:

Κρατοῦμεν τὸν χάρακα ὄρθιον ὥστε ν' ἀκουμπᾷ εἰς τὸ σημεῖον Α τῆς εὐθείας ΑΒ καὶ ἐπάνω του στηρίζομεν τὴν μικροτέραν πλευρὰν τοῦ γνώμονος, ὅπως φαίνεται εἰς τὸ σχῆμα. Κατόπιν, ἐνῷ ὁ χάραξ μένει ἀκίνητος, μετακινοῦμεν ἐλαφρὰ τὸν γνώμονα πρὸς τά κάτω καὶ ὅταν φθάσῃ εἰς τὸ σημεῖον Γ σύρομεν τὴν ζητουμένην παράλληλον εὐθεῖαν ΓΔ. Μὲ τὸν ἴδιον τρόπον, μετακινοῦντες συνεχῶς πρὸς τὰ κάτω τὸν γνώμονα, γράφομεν τρίτην παράλληλον, τετάρτην κ.ο.κ.

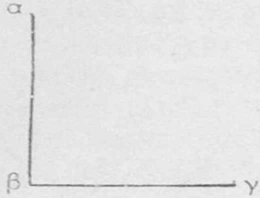
Ἀσκήσεις: 1) Εἰς τὴν αἴθουσαν τῆς τάξεως δείξετε εὐθείας, καμπύλας, τεθλασμένας καὶ μικτὰς γραμμάς. 2) Τί γραμμὴν κάμνει ἡ πέτρα ὅταν τὴν πετῶμεν μακράν; Τὰ πουλιὰ πού πετοῦν; 3) Χρωματίσετε ἕνα σπάγγον μὲ κιμωλίαν καὶ χαράξετε εὐθείας εἰς τὸν πίνακα. 4) Δείξετε τὰς ὁριζοντίους εὐθείας, τὰς κατακορύφους καὶ τὰς παραλλήλους εἰς τοὺς τοίχους, τὰ παράθυρα, τὸ τραπέζι καὶ εἰς ἄλλα ἀντικείμενα, ἐντὸς καὶ ἐκτὸς τοῦ σχολείου σας.

ΓΩΝΙΑΙ

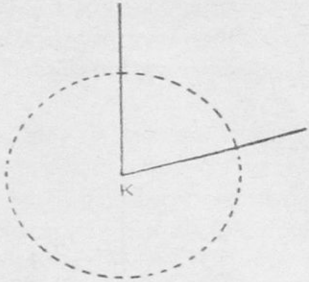
Τοποθετῶ τὸν κύβον εἰς τὸν πίνακα καὶ χαράσσω μίαν ὁριζόντιον εὐθεῖαν καὶ μίαν κατακόρυφον, ὥστε ν' ἀρχίζουν ἀπὸ τὴν ἰδίαν κορυφήν. Τοιουτοτρόπως γίνεται τὸ σχῆμα 17. Αὐτό, ὅπως βλέπομεν, ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο εὐθείας, τὴν αβ καὶ τὴν βγ,

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

αἱ ὁποῖαι ἀρχίζουν ἀπὸ τὸ ἴδιον σημεῖον, τὸ β, ἀλλὰ καὶ αἱ δύο δὲν ἀποτελοῦν μίαν εὐθεῖαν.



Σχ. 17

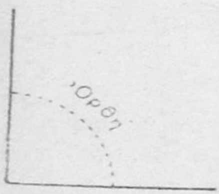


Σχ. 18

Τὸ σχῆμα λοιπὸν ποὺ ἀποτελοῦν δύο εὐθεῖαι, ὅταν ἀρχίζουν ἀπὸ τὸ ἴδιον σημεῖον χωρὶς ν' ἀποτελοῦν μίαν εὐθεῖαν, λέγεται **γωνία.**

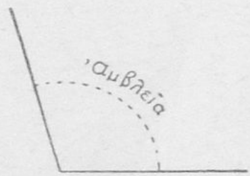
Αἱ δύο εὐθεῖαι λέγονται **πλευραὶ** ἢ **σκέλη** τῆς γωνίας καὶ τὸ σημεῖον β, λέγεται **κορυφή.**

Αἱ γωνίαι διαβάζονται ἢ μὲ τρία γράμματα, προσέχοντες ὥστε τὸ γράμμα τῆς κορυφῆς νὰ ἔρχεται δεύτερον (σχ. 17) ἢ μόνον μὲ τὸ γράμμα τῆς κορυφῆς (σχ. 18). Κατὰ τὴν μέτρησιν δὲν ὑπολογίζομεν τὸ μῆκος τῶν πλευρῶν ἀλλὰ τὸ ἄνοιγμα ποὺ ἔχουν. Καὶ ἐπειδὴ τὸ ἄνοιγμα ἑκάστης γωνίας εἶναι τμῆμα κύκλου



Σχ. 19

Σχ. 20



Σχ. 21

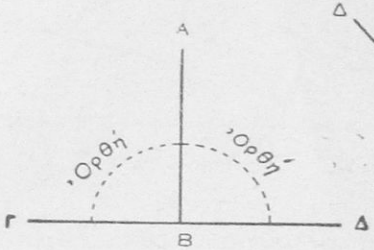
τοῦ ὁποίου εἰς τὸ κέντρον εἶναι ἡ κορυφὴ τῆς γωνίας (σχ. 18), ὑπολογίζεται εἰς μοίρας.

Ὅπως ἔχομεν μάθει ἀπὸ ἄλλα μαθήματα, ἕκαστος κύκλος χωρίζεται εἰς 360 μοίρας (360°).

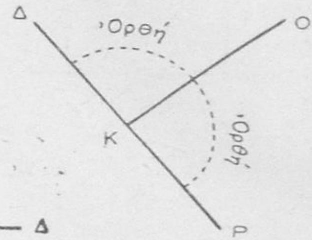
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἡ γωνία τοῦ σχήματος 19 ἔχει ἄνοιγμα $^1/_4$ τοῦ κύκλου, ἤτοι 90°. Αὐτὴ λέγεται **ὀρθὴ γωνία.** Κάθε ἄλλη γωνία ποὺ εἶναι μικροτέρα τῆς ὀρθῆς, λέγεται **ὀξεῖα** (σχ. 20). Καὶ ὅταν εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ὀρθῆς, λέγεται **ἀμβλεῖα** (σχ. 21).

— Τί γωνίαν σχηματίζει ὁ ὡροδείκτης μὲ τὸν λεπτοδείκτην



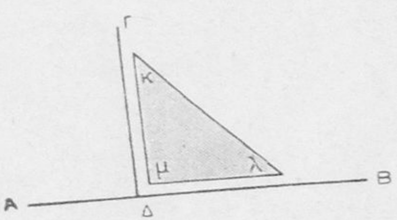
Σχ. 22



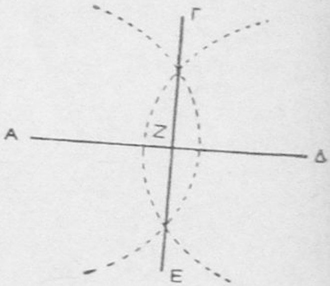
Σχ. 23

εἰς τὰς 9 ἡ ὥρα ἀκριβῶς; εἰς τὰς 10; εἰς τὰς 8; εἰς τὰς 5;

Κάθετοι εὐθεῖαι. Ὅταν μία εὐθεῖα, ὅπως ἡ ΑΒ (σχ. 22), συναντᾷ ἄλλην, τὴν ΓΔ, καὶ σχηματίζεται ὀρθὴ γωνία, λέγεται **κάθετος.** Οὕτως ἡ εὐθεῖα ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς ΓΔ. Ἐπίσης ἡ ΟΚ (σχ. 23) εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς ΔΡ. Ὅπως φαίνεται εἰς τὰ σχήματα 22 καὶ 23, ἡ κάθετος δὲν ἔχει ὡρισμένην διεύθυνσιν ὅπως



Σχ. 24



Σχ. 25

ἡ κατακόρυφος. Φθάνει μόνον, ὅπως συναντᾷ ἄλλην εὐθεῖαν, νὰ σχηματίζωνται ὀρθαὶ γωνίαι.

Χάραξις καθέτων. Ἔχω τὴν εὐθεῖαν Α Β (σχ. 24) καὶ θέλω νὰ φέρω ἐπ' αὐτῆς κάθετον.

Λαμβάνω τὸν γνώμονα καὶ ἐφαρμόζω τὴν βάσιν του μλ ἐπὶ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τῆς εὐθείας ΑΒ. Κατόπιν πλαγίως τῆς κμ τοῦ γνώμονος, γράφω τὴν ΓΔ καὶ αὐτὴ εἶναι ἡ κάθετος, ποὺ θέλω νὰ κάμω.

Ὅταν θέλω νὰ φέρω τὴν κάθετον ἀκριβῶς εἰς τὸ μέσον ἄλλης εὐθείας, τότε μεταχειρίζομαι τὸν διαβήτην.

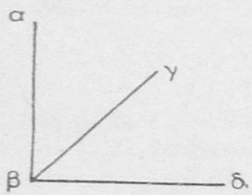
Ἔχω π. χ. νὰ μοιράσω τὴν εὐθεῖαν ΑΔ (σχ. 25) καὶ νὰ φέρω εἰς τὸ μέσον αὐτῆς κάθετον:

Μὲ κέντρον κύκλου τὸ σημεῖον Α καὶ ἀκτῖνα μεγαλυτέραν ἀπὸ τὸ ἥμισυ τῆς εὐθείας ΑΔ, γράφω περιφέρειαν κύκλου. Κατόπιν μὲ κέντρον τὸ Δ καὶ ἀκτῖνα τὴν ἰδίαν γράφω ἄλλην περιφέρειον κύκλου. Αἱ δύο περιφέρειαι, ὅπως βλέπομεν, τέμνονται εἰς δύο σημεῖα. Τὰ σημεῖα αὐτὰ ἑνώνω μὲ τὴν εὐθεῖαν ΓΕ, ἡ ὁποία εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς ΑΔ καὶ τὴν ἐμοίρασεν εἰς τὸ σημεῖον Ζ. Ὥστε: ΑΖ=ΖΔ.

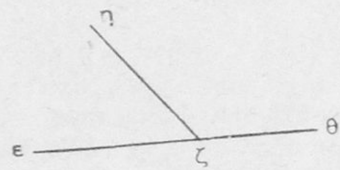
ΑΛΛΑ ΕΙΔΗ ΓΩΝΙΩΝ

Ἐκτὸς ἀπὸ τὰς γωνίας ποὺ εἴδομεν, ἔχομεν καὶ ἄλλας. Ἂς ἴδωμεν καὶ αὐτάς:

α´) **Γωνίαι συμπληρωματικαὶ καὶ παραπληρωματικαί.** Ἂν δύο γωνίαι, ὅπως ἡ αβγ καὶ γβδ (σχ. 26), ἔχουν ἄθροισμα



Σχ. 26



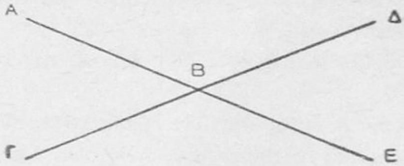
Σχ. 27

μιᾶς ὀρθῆς, λέγονται **συμπληρωματικαί.** Καὶ ὅταν τὸ ἄθροισμά των εἶναι δύο ὀρθαί, ὅπως αἱ εζη καὶ ηζθ (σχ. 27), λέγονται **παραπληρωματικαὶ γωνίαι.**

β´) **Γωνίαι κατὰ κορυφήν.** Αἱ γωνίαι ΑΒΓ καὶ ΔΒΕ (σχ. 28) ἔχουν τὴν ἰδίαν κορυφὴν καὶ αἱ πλευραὶ τῆς μιᾶς εἶναι προεκτάσεις τῶν πλευρῶν τῆς ἄλλης. Ἤτοι ἡ πλευρὰ ΑΒ εἶναι προέκτασις τῆς ΒΕ καὶ ἡ ΓΒ προέκτασις τῆς ΒΔ. Τὰς γωνίας αὐτὰς λέγομεν **κατὰ κορυφήν.** Ἐπίσης κατὰ κορυφὴν εἶναι καὶ αἱ γωνίαι ΑΒΔ καὶ ΓΒΕ. Ὥστε:

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Δύο γωνίαι λέγονται κατὰ κορυφήν, ὅταν αἱ πλευραὶ τῆς μιᾶς εἶναι προεκτάσεις τῶν πλευρῶν τῆς ἄλλης.

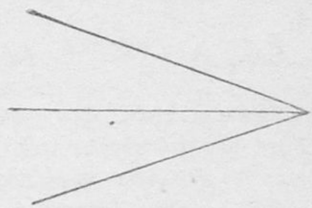


Σχ. 28

Ἂν κόψωμεν τὴν γωνίαν ΑΒΓ καὶ τὴν ἐφαρμόσωμεν ἐπὶ τῆς ΔΒΕ, βλέπομεν ὅτι εἶναι ἴσαι. Ἂν κάμωμεν τὸ ἴδιον καὶ μὲ τάς γωνίας ΑΒΔ καὶ ΓΒΕ, βλέπομεν ὅτι καὶ αὐταὶ εἶναι ἴσαι. Ἑπομένως αἱ κατὰ κορυφὴν γωνίαι εἶναι ἴσαι.

γ) **Γωνίαι ἐφεξῆς**: Αἱ γωνίαι τοῦ σχήματος 29 ἔχουν κορυφὴν κοινήν, μίαν πλευρὰν κοινὴν καὶ τὰς ἄλλας πλευρὰς ἀπὸ τὸ ἓν καὶ ἀπὸ τὸ ἄλλο μέρος τῆς κοινῆς πλευρᾶς. Αἱ γωνίαι αὐτοῦ τοῦ εἴδους λέγονται **ἐφεξῆς γωνίαι.**

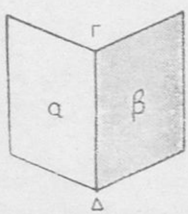
Αἱ γωνίαι ποὺ εἴδομεν ἕως τώρα γίνονται ἀπό εὐθείας καί, ἐπειδὴ ἔχουν γίνει ἐπάνω εἰς ἐπίπεδα, λέγονται **ἐπίπεδοι γωνίαι**. Ὑπάρχουν ὅμως καὶ ἄλλαι γωνίαι, αἱ ὁποῖαι δὲν εἶναι ἐπίπεδοι. Περὶ τούτων θὰ γίνῃ λόγος εἰς τὸ ἀμέσως ἑπόμενον κεφάλαιον.



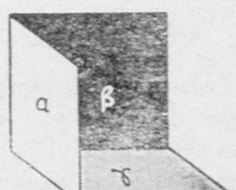
Σχ. 29

ΣΤΕΡΕΑΙ ΓΩΝΙΑΙ

Τὸ τμῆμα τοῦ κύβου, ποὺ ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο ἕδρας (ἐπίπεδα), ὅπως αἱ αβ (σχ. 30), λέγεται **δίεδρος γωνία.** Ἡ ΓΔ



Σχ. 30



Σχ. 31

λέγεται ἀκμὴ τῆς διέδρου γωνίας. Παρατηρῶ τὸν κύβον καὶ βλέπω ὅτι ἔχει 12 διέδρους γωνίας, ὅσαι εἶναι αἱ ἀκμαί του. Δίεδροι γωνίαι ἐπίσης σχηματίζονται εἰς τὸ ἔξω μέρος τῶν οἰκιῶν ἐκεῖ ποὺ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἑνώνονται δύο τοῖχοι, εἰς τὸ ἔξω μέρος τῶν κιβωτίων ἐκεῖ ποὺ ἑνώνονται δύο ἕδραι κτλ. Κρατήσετε τὸ βιβλίον σας μισοανοιγμένον, μὲ τὸ ἔξω μέρος του ἐστραμμένον πρὸς τὸ μέρος σας, καὶ ἔχετε ἔμπροσθέν σας δίεδρον γωνίαν.

Ἡ δίεδρος γωνία ποὺ σχηματίζεται εἰς τὸ μέσα μέρος τοῦ κύβου, τοῦ δωματίου, τοῦ μισοανοιγμένου βιβλίου κλπ. εἶναι **κοίλη δίεδρος γωνία.**

Τὸ τμῆμα τοῦ κύβου ποὺ ἀποτελεῖται ἀπὸ τρεῖς ἕδρας (ἐπίπεδο), ὅπως αἱ α, β, γ (σχ. 31), λέγεται **τρίεδρος γωνία.** Τοιαύτας γωνίας ὁ κύβος ἔχει 8, ὅσαι δηλαδὴ εἶναι αἱ κορυφαί του. Ἑκάστη ἀπὸ τὰς 8 γωνίας ποὺ βλέπομεν ἐντὸς τῶν δωματίων, εἶναι **κοίλη τρίεδρος γωνία.**

Αἱ δίεδροι καὶ τρίεδροι γωνίαι ἐπειδὴ σχηματίζονται ἀπὸ ἐπίπεδα, λέγονται καὶ **στερεαὶ γωνίαι.**

Ἀσκήσεις: 1) Σχηματίσετε μὲ σύρμα γωνίαν καὶ δείξετε τὰς πλευρὰς καὶ τὴν κορυφήν της. Κατόπιν κλείσετε καὶ ἀνοίξετε ὅσον πρέπει τὰ σκέλη τῆς γωνίας αὐτῆς ὥστε νὰ σχηματισθῇ γωνία ὀξεῖα, ὀρθὴ καὶ ἀμβλεῖα. 2) Χαράξετε δύο εὐθείας καὶ φέρετε καθέτους. Κατόπιν χαράξετε τρίτην εὐθεῖαν καὶ φέρετε κάθετον ἀκριβῶς εἰς τὸ μέσον. 3) Σχηματίσετε γωνίας συμπληρωματικάς, παραπληρωματικάς, κατὰ κορυφήν, ἐφεξῆς. 4) Κατὰ τί διαφέρουν αἱ στερεαὶ γωνίαι ἀπὸ τὰς ἐπιπέδους; 5) Πόσας διέδρους καὶ πόσας τριέδρους γωνίας ἔχει ὁ κύβος;

ΤΕΤΡΑΓΩΝΟΝ

Ὅπως γνωρίζομεν, ἑκάστη ἕδρα τοῦ κύβου ἔχει σχῆμα τετραγώνου (σχ. 32). Αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι (ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ) ποὺ κλείνουν τὸ τετράγωνον λέγονται πλευραὶ καὶ εἶναι ἴσαι, διότι εἶναι ἀκμαὶ τοῦ κύβου. Ἐπίσης καὶ αἱ τέσσαρες γωνίαι του εἶναι ὀρθαὶ καὶ ἑπομένως ἴσαι. Ὥστε:

Τετράγωνον λέγεται τὸ ἐπίπεδον σχῆμα ποὺ ἔχει 4 πλευρὰς ἴσας καὶ 4 γωνίας ἴσας.

Σχ. 32

Αἱ εὐθεῖαι ΑΓ καὶ ΔΒ πού ἑνώνουν τὰς ἀπέναντι γωνίας τοῦ τετραγώνου, λέγονται **διαγώνιοι.** Τὸ δὲ ἄθροισμα καὶ τῶν τεσσάρων πλευρῶν τοῦ τετραγώνου δίδει τὴν **περίμετρον.** Ἐπειδὴ καὶ αἱ 4 πλευραὶ τοῦ τετραγώνου εἶναι ἴσαι, διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν περίμετρον, πολλαπλασιά-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ζομεν τὸ μῆκος τῆς μιᾶς πλευρᾶς ἐπὶ τὸ 4. Οὕτω ἐὰν ἓν τετράγωνον ἔχῃ πλευρὰν 3 μέτρα, ἡ περίμετρός του θὰ εἶναι $(3 \times 4) = 12$ μέτρα κ.ο.κ.

᾿Ασκήσεις: 1. ᾿Επάνω εἰς τὸ τετράδιον σχηματίσετε τετράγωνον μὲ πλευρὰν 12 δακτύλους (πόντους) καὶ νὰ εὕρετε τὴν περίμετρον, 2) Πόση εἶναι ἡ περίμετρος τετραγωνικοῦ πατώματος ἂν ἔχῃ πλευρὰν 4 μέτρα; Καὶ πόση ἂν ἡ πλευρά του εἶναι 4,60 μ., καὶ 9,80 μέτρα; 3) Πόσον εἶναι τὸ μῆκος τῆς μιᾶς πλευρᾶς τετραγωνικοῦ οἰκοπέδου, ἂν ἡ περίμετρός του εἶναι 120 μέτρα; 4) Ὑποθέτομεν ὅτι ὁ σχολικός μας κῆπος εἶναι τετράγωνον μὲ πλευρὰν 52,50 μ. καὶ θέλομεν νὰ περιφραχθῇ μὲ συρματόπλεγμα. Πόσα μέτρα συρματόπλεγμα πρέπει ν᾿ ἀγοράσωμεν διὰ τὴν περίφραξίν του; Καὶ ἀκόμη: Τί χρήματα θὰ πληρώσωμεν ἂν τὸ τετραγωνικὸν μέτρον στοιχίζῃ 7,20 δραχμάς;

ΜΟΝΑΔΕΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ

Διὰ νὰ μετρήσωμεν τὰς διαστάσεις ἑνὸς σώματος, λαμβάνομεν ὡς μονάδα τὸ μέτρον. Παρατηροῦμεν διὰ μίαν ἀκόμη φορὰν τὸ μέτρον καὶ βλέπομεν ὅτι χωρίζεται εἰς δέκα παλάμας, ἡ παλάμη εἰς 10 δακτύλους (πόντους) καὶ ὁ δάκτυλος εἰς 10 γραμμάς.

Ὅταν ὅμως θέλωμεν τὰ μετρήσωμεν τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ σώματος, ὅπως τὸ πάτωμα τοῦ σχολείου, τὴν αὐλὴν κλπ. μεταχειριζόμεθα ὡς μονάδα τὸ **τετραγωνικὸν μέτρον.** Ἤτοι τετράγωνον μὲ πλευρὰν ἓν μέτρον. Διὰ μικρὰς ἐπιφανείας παίρνομεν ὡς μονάδα τὴν **τετραγωνικὴν παλάμην,** τετράγωνον μὲ πλευρὰν μίαν παλάμην, (=10 δακτύλους) καὶ δι᾿ ἀκόμη μικροτέρας τὸν **τετραγωνικὸν δάκτυλον,** τετράγωνον μὲ πλευρὰν ἕνα δάκτυλον.

Μὲ κιμωλίαν γράφω εἰς τὸν πίνακα ἢ εἰς τὸ πάτωμα ἓν τετραγωνικὸν μέτρον. Χωρίζω κατόπιν ἑκάστην πλευρὰν εἰς 10 παλάμας καὶ ἑνώνω μ᾿ εὐθείας τ᾿ ἀντικρυνὰ σημεῖα τῶν διαιρέσεων. Μὲ τὸν τρόπον τοῦτον εὑρίσκω ὅτι τὸ τετραγωνικὸν μέτρον (τ. μ. ἢ $μ^2$) ἰσοῦται μὲ 100 τετρ. παλάμας (τ. π.). Μὲ τὸν ἴδιον τρόπον εὑρίσκω ὅτι καὶ ἡ τετρ. παλάμη ἰσοῦται μὲ 100 τετραγωνικοὺς δακτύλους (τ. δ.).

Ἑπομένως : 1 τ. μ. = 100 τ. π.

Καὶ 1 τ. π. = 100 τ. δ.

Τὰ τ. μ. γράφονται μὲ ἀκεραίας μονάδας, αἱ τ. π. μὲ ἑκατοστὰ τοῦ τ. μ. καὶ οἱ τ. δ. μὲ δεκάκις χιλιοστὰ τοῦ τ. μ. (100×100). Οὕτω τὰ 6 τ. μ. καὶ 30 τ. π. γράφονται: 6,30 τ. μ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

καὶ τὰ 10 τ. μ., 25 τ. π. καὶ 30 τ. δ. γράφονται : 10,2530 τ. μ.

Ὁ ἀριθμὸς ὁ ὁποῖος δεικνύει πόσα τ. μ. (τ. π. ἢ τ. δ.) εἶναι μία ἐπιφάνεια, λέγεται **ἐμβαδόν.**

Διὰ τὴν μέτρησιν τῶν οἰκοπέδων συνήθως ἔχουν ἄλλην μονάδα, τὸν **τετραγωνικὸν τεκτονικὸν πῆχυν (τ. τ. π.),** ἤτοι τετράγωνον μὲ πλευρὰν $^3/_4$ τοῦ μέτρου ἢ 0,75 μ.

Ἑπομένως 1 τ.τ.π $= \frac{9}{16}$ τ.μ. $\left(\frac{3}{4} \times \frac{3}{4}\right)$ ἢ $(0{,}75 \times 0{,}75) = 0{,}5625$ τ. μ.

Και ἀντιστρόφως :

$$1 \text{ τ. μ.} = \frac{16}{9} \text{ τοῦ τετραγωνικοῦ τεκτονικοῦ πήχεως.}$$

Κατὰ τ' ἀνωτέρω ἂν ἓν οἰκόπεδον εἶναι 400 τ. τ. π. καὶ θέλομεν νὰ εὕρωμεν πόσα τ. μ. εἶναι, ἔχομεν :

$$400 \times \frac{9}{16} = \frac{3600}{16} = 225 \text{ τ. μ}$$

Ἂν πάλι ἄλλο οἰκόπεδον εἶναι 300 τ. μ. καὶ θέλομεν νὰ εὕρωμεν πόσοι τ. τ. π. εἶναι, ἔχομεν :

$$300 \times \frac{16}{9} \times \frac{4800}{9} = 533 \text{ τ. τ. π.}$$

Τέλος διὰ τὴν μέτρησιν τῶν ἀγροκτημάτων ἔχουν ὡς μονάδα τὸ **στρέμμα**=1000 τ. μ. καὶ διὰ μεγαλυτέρας ἐκτάσεις τὸ **τετραγωνικὸν χιλιόμετρον**=1000 στρέμματα ἢ 1.000.000 τ. μ. (1000 × 1000).

Ἀσκήσεις: 1) Μὲ πόσας τετρ. παλάμας ἰσοῦνται τὰ 15 τετρ, μέτρα; 2) Νὰ γραφοῦν μὲ δεκαδικούς : α') 3 τ. μ. καὶ 25 τ. π., β') 9 τ. μ. 20 τ. π. καὶ 20 τ. δ. γ') 80 τ. π. δ') 65 τ. π. καὶ 16 τ. δ. 3) Ἓν οἰκόπεδον ἔχει ἐμβαδὸν 353 τετρ. τεκτ. πήχεις καὶ ἐπωλήθη πρὸς 150 δραχ. τὸ τετραγ. μέτρον. Πόσον στοιχίζει ; (*Σημ.* Οἱ 353 τ. τ. π. πρέπει πρῶτον νὰ γίνουν τ. μ.). 4) Ἐμετρήσαμεν τὴν αἴθουσαν τῆς τάξεως καὶ εὕρομεν ἐμβαδὸν 72 τ. μ. Μὲ πόσους τετρ. πήχεις ἀντιστοιχοῦν ; 5) Ὁ νομὸς Ἀττικῆς ἔχει ἔκτασιν 3.800 τετραγωνικὰ χιλιόμετρα, ὁ νομὸς Δράμας 3.500 τ. χ. καὶ ὁ νομὸς Κυκλάδων 2.700 τ. χ. Πόσα στρέμματα εἶναι ἡ ἔκτασις ἑκάστου νομοῦ ;

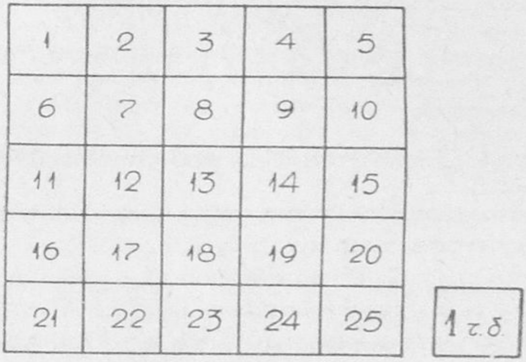
ΠΩΣ ΕΥΡΙΣΚΕΤΑΙ ΤΟ ΕΜΒΑΔΟΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΟΥ ΚΑΙ Η ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΤΟΥ ΚΥΒΟΥ

α') **Ἐμβαδὸν τετραγώνου.** Κατασκευάζω ἐπάνω εἰς τὸ τετράδιον τετράγωνον μὲ πλευρὰν 5 δακτύλους καὶ ζητῶ νὰ εὕρω τὸ ἐμβαδόν του

Μὲ τὸ ὑποδεκάμετρον μετρῶ πρῶτον μίαν πλευράν καὶ ὅπου

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τελειώνει ὁ δάκτυλος βάζω σημεῖον. Μετρῶ κατόπιν καὶ τὰς ἄλλας τρεῖς πλευρὰς καὶ βάζω καὶ ἐκεῖ σημεῖα. Τέλος ἑνώνω τ' ἀντικρυνὰ σημεῖα τῶν διαιρέσεων μὲ εὐθείας, ὅπως δεικνύει τὸ σχῆμα 33, καὶ βλέπω ὅτι τὸ τετράγωνόν μου ἐχωρίσθη εἰς 25 μικρὰ τετραγω-



Σχ. 33

νάκια. Ἤτοι 25 τετραγ. δακτύλους καὶ αὐτὸ εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραγώνου·

Ἀντὶ νὰ κάμω αὐτό, τὸν ἀριθμὸν 25 εὑρίσκω εὐκόλως ἂν πολλαπλασιάσω τὸ μῆκος τῆς μιᾶς πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου, τὸ 5, ἐπὶ τὸν ἑαυτόν του (5×5).

Ἂν τὸ ἴδιον τετράγωνον (σχ. 33) εἶχε πλευρὰν 5 παλάμας, ἐμβαδὸν=5×5=25 τ. παλάμαι. Καὶ ἂν εἶχε πλευρὰν 5 μέτρα, ἐμβαδὸν=5×5=25 τ. μ.

Ὥστε: **Διὰ νὰ εὕρω τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραγώνου, πολλαπλασιάζω τὸ μῆκος τῆς μιᾶς πλευρᾶς ἐπὶ τὸν ἑαυτόν της.**

β΄) **Ἐπιφάνεια τοῦ κύβου.** Ὑποθέτω ὅτι ἔχω ἕνα κύβον μὲ ἀκμὴν 5 δακτύλους καὶ θέλω νὰ εὕρω τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας καὶ τῶν 6 ἑδρῶν του.

Λύσις: Ἀφοῦ ἡ μία ἕδρα τοῦ κύβου εἶναι τετράγωνον μὲ πλευρὰν 4 δακτύλους, τὸ ἐμβαδόν της θὰ εἶναι 4×4=16 τ. δ. Πολλαπλασιάζω κατόπιν τὸ 15 ἐπὶ τὸ 6 (ὅσαι εἶναι αἱ ἕδραι τοῦ κύβου) καὶ εὑρίσκω ὅτι ἡ ἐπιφάνεια ὅλου τοῦ κύβου εἶναι 96 τ. δ. (16×6).

Ἂν ὁ ἴδιος ὁ κύβος εἶχε ἀκμὴν 4 παλάμας, ἐπιφάνεια =

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$4 \times 4 \times 6 = 96$ τετρ. παλάμας. Καὶ ἂν εἶχε ἀκμὴν 4 μέτρα, ἐπιφάνεια$=4 \times 4 \times 6 = 96$ τετρ. μέτρα. Ὥστε:

Διὰ νὰ εὕρω τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κύβου, εὑρίσκω πρῶτον τὸ ἐμβαδὸν τῆς μιᾶς ἕδρας καὶ κατόπιν πολλαπλασιάζω ἐπὶ τὸ 6.

Προβλήματα:

1. Τὸ πάτωμα τοῦ δωματίου μου εἶναι τετράγωνον μὲ πλευρὰς 4,20 μ. Πόσα τ. μ. εἶναι τὸ ἐμβαδόν του;

2. Ἡ περίμετρος ἑνὸς τετραγωνικοῦ κήπου εἶναι 200 μ. Πόσα τ. μ. εἶναι τὸ ἐμβαδόν του;

3. Τὸ δάπεδον τοῦ μαγειρείου μου εἶναι τετράγωνον μὲ πλευρὰν 3,20 μ. καὶ θέλω νὰ τὸ στρώσω μὲ χρωματιστὰς τετρ. πλάκας αἱ ὁποῖαι ἔχουν πλευρὰν 0,20 μ. Πόσαι πλάκες θὰ χρειασθοῦν;

4. Ἂν ἑκάστη πλὰξ τιμᾶται 1,20 δραχ. καὶ συμφωνήσω τὸν τεχνίτην ποὺ θὰ τὰς τοποθετήσῃ πρὸς 5 δραχμὰς τὸ τετραγωνικὸν μέτρον, τί θὰ στοιχίσῃ ἡ πλακόστρωσις τοῦ μαγειρείου;

5. Πόσα τ. μ. εἶναι ἡ ἐπιφάνεια κύβου ὅταν ἔχῃ ἀκμὴν 3 μέτρα; Καὶ πόση ὅταν ἔχῃ 3,50 μέτρα; Καὶ 4,15 μέτρα;

6. Ἐντὸς κυβικοῦ δωματίου μὲ ἀκμὴν 3,60 μ. πρόκειται νὰ ἀσβεστωθοῦν οἱ τέσσαρες τοῖχοι πρὸς 4,50 δραχ. τὸ τετρ. μέτρον. Τί θὰ στοιχίσῃ τὸ ἀσβέστωμα τοῦ δωματίου;

ΜΟΝΑΔΕΣ ΟΓΚΟΥ (ΧΩΡΟΥ)

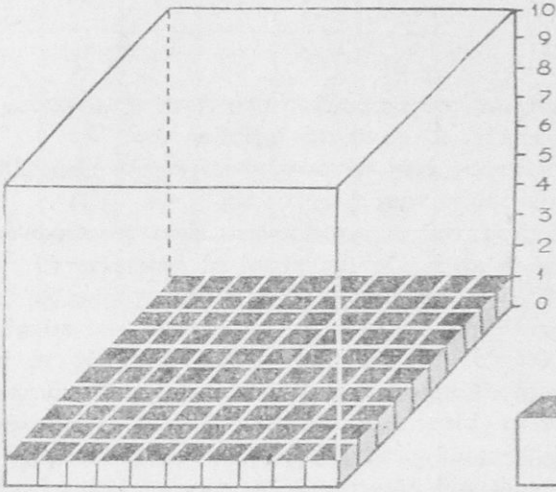
Ὅταν ἔχωμεν νὰ μετρήσωμεν τὸν ὄγκον ἑνὸς σώματος, λαμβάνομεν ἄλλην μονάδα, τὸ **κυβικὸν μέτρον** (κ. μ. ἢ $μ^3$). Ἤτοι ὡρισμένον κύβον τοῦ ὁποίου αἱ διαστάσεις εἶναι ἓν μέτρον. Διὰ τὰ μικρότερα σώματα λαμβάνομεν ὡς μονάδα τὴν **κυβικὴν παλάμην** (κ. π.), ἤτοι ἄλλον κύβον μὲ διαστάσεις μίαν παλάμην καὶ δι' ἀκόμη μικρότερα τὸν **κυβικὸν δάκτυλον** (κ. δ.). ἤτοι κύβον μὲ διαστάσεις ἕνα δάκτυλον. Τὸ ζάρι εἶναι περίπου κυβικὸς δάκτυλος.

Ὑποθέτομεν ὅτι τὸ σχῆμα 34 εἶναι κυβ. μέτρον. Ἀπ' ὅσα ἔχομεν μάθει, τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως θὰ εἶναι: $10 \times 10 = 100$ τετραγ. παλάμαι. Ἂν ἐπὶ ἑκάστης παλάμης τοποθετηθῇ μία κυβικὴ

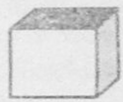
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

παλάμη, ἡ βάσις τοῦ κυβικοῦ μέτρου θὰ χωρέσῃ 100 κυβ. παλάμας καὶ τὸ στρῶμα αὐτὸ θ' ἀνέλθῃ εἰς ὕψος μιᾶς παλάμης. Ἐπειδὴ δὲ τὸ ὕψος τοῦ κυβικοῦ μέτρου εἶναι 10 παλάμαι ἕπεται ὅτι θὰ χωρέσῃ 10 στρώματα, ἀπὸ 100 κυβ. παλάμας ἕκαστον. Ἤτοι ἐν ὅλῳ 1000 κυβ. παλάμας.

Ἀντὶ νὰ κάμωμεν ὅλα αὐτά, τὸν ἀριθμὸν 1000 εὑρίσκομεν εὐκόλως ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸ 10 (ὅσαι παλάμαι εἶναι ἡ ἀκμὴ



Σχ. 34. Κυβικὸν μέτρον μὲ ἕνα στρῶμα ἀπὸ 100 κ.δ. εἰς τὴν βάσιν του.



(Εἰς φυσικὸν μέγεθος)

τοῦ κυβ. μέτρου) ἐπὶ τόν ἑαυτόν του καὶ τὸ γινόμενον πάλιν ἐπὶ 10.

Ὅ,τι ἔγινε μὲ τὸ κυβικὸν μέτρον, γίνεται καὶ μὲ τὴν κυβικὴν παλάμην καὶ εὑρίσκομεν ὅτι καὶ αὐτὴ εἶναι ἴση μὲ 1000 κυβ. δακτύλους $(10 \times 10 \times 10)$.

Κατὰ τ' ἀνωτέρω: 1 κ. μ. = 1000 κ. π. $(10 \times 10 \times 10)$.

Καὶ 1 κ. π. = 1000 κ. δ. $(10 \times 10 \times 10)$.

Ἑπομένως: Ἡ κυβ. παλάμη εἶναι τὸ $\frac{1}{1000}$ τοῦ κυβ. μέτρου.

Καὶ ὁ 1 κυβ. δάκτυλος εἶναι $\frac{1}{1000}$ τῆς κ. π. ἢ τὸ $\frac{1}{1\,000000}$ τοῦ κ. μ.

Ἂν λοιπὸν τὰ κυβικὰ μέτρα γράφωνται μὲ ἀκεραίας μονάδας, αἱ κυβικαὶ παλάμαι θὰ γράφωνται μὲ χιλιοστὰ τοῦ κυβ. μέτρου καὶ οἱ κυβικοὶ δάκτυλοι μὲ ἑκατομμυριοστὰ τοῦ κυβ. μέτρου. Οὕτως ὅταν

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἔχωμεν ἐξαγόμενον 5 κ. μ., 320 κ. π. καὶ 325 κ. δ. καὶ θέλομεν νὰ γίνῃ εἷς ἀριθμὸς ὁ ὁποῖος νὰ φανερώνῃ κυβικὰ μέτρα, τὸ γράφομεν: 5,320325 κ. μ.

Καὶ ἀντιστρόφως: Ἂν μᾶς ἔχῃ δοθῆ δεκαδικὸς ἀριθμὸς εἰς κυβικὰ μέτρα καὶ θέλομεν νὰ ἴδωμεν μὲ πόσας κυβικὰς παλάμας καὶ κυβικοὺς δακτύλους ἰσοῦται, χωρίζομεν τά δεκαδικὰ ψηφία του τρία - τρία ἀπὸ τὰ δεξιά. Τὰ τρία πρῶτα ψηφία ἀπὸ τὰ δεξιὰ φανερώνουν κυβικοὺς δακτύλους καὶ τὰ ἄλλα τρία κυβικὰς παλάμας. Ὅταν ὅμως τά δεκαδικὰ ψηφία εἶναι λιγώτερα ἀπὸ 6, συμπληρώνομεν μὲ μηδενικὰ καὶ γίνονται πάλιν 6.

Π.χ. 0,3456 κ.μ. = 0,345600 κ.μ, (= 345 κυβ. παλ. καὶ 600 κυβ. δάκτυλοι).

Ἀσκήσεις: 1. Πόσαι κυβ. παλάμαι εἶναι τὰ 6 κυβ. μέτρα; Πόσαι τὰ 16; τὰ 28; τὰ 85 κυβ. μέτρα; 2. Πόσοι κυβ. δάκτυλοι εἶναι αἱ 32 κυβ. παλάμαι; αἱ 175 κ. π.; 3. Νὰ γραφοῦν μὲ δεκαδικοὺς ἀριθμούς: α) 3 κ. μ. καὶ 420 κ. π., β) 280 κ.π. καὶ 145 κ.δ., γ) 750 κ.δ. 4. Χωρίσετε τὰς κυβ. παλάμας καὶ τοὺς κυβ. δακτύλους ἀπὸ τοὺς δεκαδικούς: 5,550780 κ.μ. 0,5537 κ.μ. 0,0085 κ.μ.

ΠΩΣ ΕΥΡΙΣΚΕΤΑΙ Ο ΟΓΚΟΣ ΤΟΥ ΚΥΒΟΥ

Παράδειγμα 1ον. Ἓν κυβικὸν δωμάτιον ἔχει ἀκμὴν 4 μέτρα. Πόσα μέτρα εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ δωματίου;

Πολλαπλασιάζω τὸ 4 μὲ τὸν ἑαυτόν του καὶ εὑρίσκω ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πατώματος εἶναι 16 τετρ. μέτρα. Ἂν τώρα εἰς ἕκαστον τ.μ. τοῦ πατώματος τοποθετήσω ἀπὸ ἓν κυβ. μέτρον, ὅπως φαίνεται στὸ σχ. 34, ὅλον τὸ πάτωμα θὰ χωρέσῃ 16 κ. μ. καὶ θ' ἀνέλθουν εἰς ὕψος ἑνὸς μέτρου. Ἐπειδὴ δὲ τὸ ὕψος τοῦ δωματίου εἶναι 4 μέτρα, θὰ χωρέσουν τέσσαρα στρώματα ἀπὸ 16 κ.μ. ἕκαστον, ἤτοι 64 κ.μ. καὶ αὐτὸς εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ δωματίου ποὺ ζητῶ νὰ εὕρω. Τὸν ἀριθμὸν 64 εὑρίσκω εὐκόλως ἂν πολλαπλασιάσω τὸ μῆκος τῆς ἀκμῆς τοῦ δωματίου, ἤτοι τὰ 4 μέτρα ἐπὶ τὸν ἑαυτόν του δύο φορὰς ($4 \times 4 \times 4 = 64$).

Παράδειγμα 2ον. Ἓν ἄλλο κυβ. δωμάτιον ἔχει ἀκμὴν 3,50 μέτρα. Τί ὄγκον ἔχει;

Ὄγκος = $3,50 \times 3,50 \times 3,50 = 42,875$ κυβ. μέτρα.

Ὥστε: **Διὰ νὰ εὕρω τὸν ὄγκον τοῦ κύβου, πολλαπλασιάζω τὸ μῆκος τῆς ἀκμῆς ἐπὶ τὸν ἑαυτόν του δυὸ φορές.**

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Προβλήματα:

7. Μία μπάλα βαμπακιοῦ σχήματος κύβου ἔχει ἀκμὴν 1,25 μέτρα. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος της;

8. Κυβικὴ δεξαμενὴ ἔχει ἀκμὴν 3,6 μ. Πόσα κυβικὰ μέτρα νεροῦ χωρεῖ;

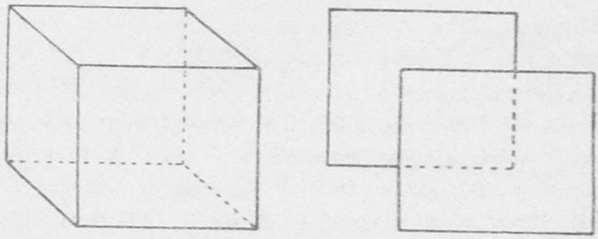
9. Κυβικὸν δωμάτιον ἔχει ἀκμὴν 3,80 μ. Νὰ εὑρεθῇ: α) Τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφανείας του, β) ὁ ὄγκος του.

10. Ἐντὸς κυβικῆς ἀποθήκης μὲ ἀκμὴν 4,60 μ. πρόκειται νὰ τοποθετηθοῦν κυβικὰ κιβώτια πλήρη ἐμπορεύματος μὲ ἀκμὴν 0,50 μ. Πόσα ἀπ' αὐτὰ τὰ κιβώτια θὰ χωρέσῃ ἡ ἀποθήκη;

11. Ἐντὸς κιβωτίου ποὺ εἶναι κύβος καὶ ἔχει ἀκμὴν 0,75 μ. πρόκειται νὰ τοποθετηθοῦν κυβικαὶ πλάκες σάπωνος μὲ ἀκμὴν 0,08 μ. Πόσας πλάκας σάπωνος θὰ χωρέσῃ τὸ κιβώτιον;

ΠΩΣ ΓΙΝΕΤΑΙ Η ΙΧΝΟΓΡΑΦΗΣΙΣ ΤΟΥ ΚΥΒΟΥ

Ἅμα κοιτάζωμεν τὸν κύβον, βλέπομεν μόνον τρεῖς ἕδρας του. Τὴν δεξιάν, τὴν ἀριστερὰν καὶ τὴν ἐπάνω. Αἱ ἄλλαι τρεῖς δὲν



Σχ 35

φαίνονται. Διὰ τοῦτο ὅταν θέλωμεν νὰ ἰχνογραφήσωμεν τὸ σχέδιόν του αἱ ἀκμαὶ τῶν 3 ἑδρῶν ποὺ δὲν φαίνονται παριστάνονται μὲ στιγμάς, ὅπως βλέπετε εἰς τὸ σχῆμα 35.

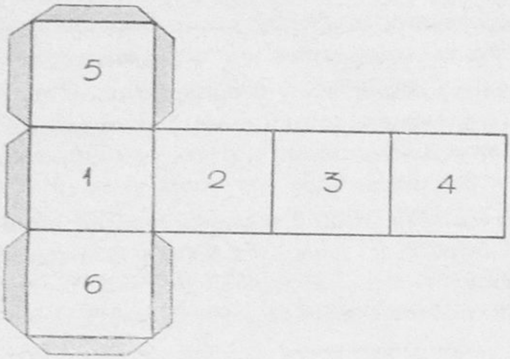
Ἰχνογραφήσετε τρεῖς κύβους σέ διάφορα μεγέθη.

ΠΩΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΖΕΤΑΙ Ο ΚΥΒΟΣ

α) **Μὲ χαρτόνι.** Ἂν ξεδιπλώσω ἕνα χάρτινον κύβον ἡ ξεδιπλωμένη ἐπιφάνειά του ὁμοιάζει μὲ τὸ σχῆμα 36. Αὐτὸ εἶναι τὸ ἀνάπτυγμα τοῦ κύβου. Ἑπομένως διὰ νὰ κατασκευάσω τὸν κύβον,

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

πρέπει νὰ σχεδιάσω ἐπάνω εἰς τὸ χαρτόνι τὸ ἀνάπτυγμά του. Πρὸς τοῦτο μὲ τὸν χάρακα καὶ τὸν γνώμονα σχεδιάζω πρῶτον τὰ 1, 2, 3, 4 τετράγωνα (σχ. 36). Αὐτὰ εἶναι ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια τοῦ κύβου. Κατόπιν σχεδιάζω τὰ 5 καὶ 6 τετράγωνα, ἤτοι τὴν ἐπάνω καὶ κάτω ἕδραν. Ἔξω ἀπὸ τὰ τετράγωνα ἀφήνω ὅπου πρέπει καὶ περιθώριο (ὅπως φαίνεται εἰς τὸ ἀνάπτυγμα) διὰ νὰ κολλοῦν ἀπὸ μέσα αἱ ἕδραι τοῦ κύβου.



Σχ. 36

Τέλος μὲ ἕνα ξυραφάκι χαράσσω ἐλαφρὰ τὰς εὐθείας τοῦ σχεδίου, διπλώνω τὰ τετράγωνα, κολλῶ ἀπὸ τὸ μέσα μέρος τὰ περιθώρια καὶ ὁ κύβος μου εἶναι ἕτοιμος.

β) **Ἐκ ξύλου κόντρα - πλακέ.** Κάτω ἀπὸ τὸ σχέδιον Νο 1 (ἐκδόσεως Καμπανᾶ) θέτομεν καρμπὸν καὶ τοποθετεῖται εἰς ἴσον τεμάχιον κόντρα-πλακέ. Μὲ καλοξυσμένον μολύβι μελάνης καὶ χάρακα σχεδιάζομεν ἐπάνω εἰς τὸ κόντρα-πλακὲ τὰς 6 ἕδρας τοῦ κύβου, χωρὶς τὰ τετραγωνάκια. Κατόπιν μὲ τὸ πριονάκι χωρίζομεν μίαν μίαν τὰς ἕδρας, κολλοῦνται μὲ καζεΐνην νὰ γίνῃ ὁ κύβος καὶ τὸν δένομεν σφικτὰ μὲ σπάγγον. Μετὰ 3—4 ὥρας ἀφαιρεῖται ὁ σπάγγος καὶ τρίβομεν μίαν μίαν ἕδραν εἰς γυαλόχαρτον Νο 2 ποὺ θὰ τὸ ἔχωμεν ἁπλώσει εἰς τὸ τραπέζι. Μετὰ τοῦτο κλείνομεν τὰς σχισμὰς τοῦ κύβου μὲ πολτὸν στόκου καὶ καζεΐνης, τὸν ἀφήνομεν νὰ ξεραθῇ καὶ κατόπιν τὸν τρίβομεν ἐκ νέου μὲ γυαλόχαρτον. Τώρα θ' ἀλειφθῇ μὲ μεῖγμα γομαλάκας καὶ τσίγκου, θὰ σχεδιασθοῦν μὲ καρμπὸν τὰ τετραγωνάκια καὶ τῶν 6 ἑδρῶν καὶ θὰ γεμισθοῦν μὲ οινική

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

μελάνη αὐτὰ ποὺ φαίνονται εἰς τὸ σχέδιον μαῦρα. Τέλος θ' ἀλειφθῇ ὅλος ὁ κύβος μὲ βερνίκι καὶ τότε πλέον εἶναι ἕτοιμος.

Ἀπὸ τὸν κύβον ποὺ ἔχομεν ἔμπροσθέν μας εὐκόλως εὑρίσκομεν τότε τὴν ἐπιφάνειαν εἰς κ.δ. καὶ κάμνομεν ὑπολογισμὸν διὰ τὴν ἐπιφάνειαν καὶ τὸν ὄγκον μεγαλυτέρων κύβων.

ΠΩΣ ΕΥΡΙΣΚΕΤΑΙ ΤΟ ΒΑΡΟΣ ΤΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ

Διὰ νὰ εὑρίσκωμεν τὸ βάρος τῶν σωμάτων ἔχομεν ὡς μονάδα: τὸν **τόννον,** τὸ **χιλιόγραμμον** καὶ τὸ **γραμμάριον.**

Ὁ τόννος εἶναι βάρος νεροῦ θερμοκρασίας 4° ποὺ χωρεῖ τὸ κυβικὸν μέτρον. Τὸ χιλιόγραμμον (ἢ κιλὸν) εἶναι καὶ αὐτὸ βάρος νεροῦ 4° ποὺ χωρεῖ ἡ κυβικὴ παλάμη καὶ τὸ γραμμάριον, βάρος νεροῦ 4° ποὺ χωρεῖ ὁ κυβικὸς δάκτυλος.

Ἀφοῦ τὸ κ.μ. ἔχει 1000 κ.π. πόσα χιλιόγραμμα πρέπει νὰ ἔχῃ ὁ τόννος; καὶ ἀφοῦ ἡ κ. παλ. ἔχει 1000 κ.δ. πόσα γραμμάρια ἔχει τὸ χιλιόγραμμον;

Ὥστε: **1 τόννος=1000 χιλιόγραμμα.**
1 χιλιόγραμμον=1000 γραμμάρια.

Διὰ τὴν μέτρησιν τῆς χωρητικότητος τῶν πλοίων, ἔχομεν ὡς μονάδα τὸν τόννον τῶν πλοίων, ὁ ὁποῖος ἰσοῦται μὲ 2,83 τόν.

Εἰδικὸν βάρος τῶν σωμάτων. Ζυγίζω ἕνα κυβικὸν δάκτυλον νεροῦ καὶ εὑρίσκω καθαρὸ νερὸ 1 γραμμάριον. Χύνω κατόπιν τὸ νερὸ καὶ τὸ γεμίζω πετρέλαιον. Ζυγίζω καὶ τὸ πετρέλαιον καὶ εὑρίσκω ὅτι εἶναι καθαρὸν 0,8 τοῦ γραμμαρίου. Ὕστερα χύνω καὶ τὸ πετρέλαιον καὶ γεμίζω τὸν κυβικὸν δάκτυλον ζάκχαριν. Ζυγίζω καὶ αὐτὴν καὶ τὴν εὑρίσκω 1,66 γραμ. Ὥστε εἰς τὸν ἴδιον ὄγκον τὰ σώματα ἔχουν διάφορον βάρος, ἀναλόγως τῆς πυκνότητος τῶν μορίων ἑνὸς ἑκάστου. Τὴν πυκνότητα τῶν σωμάτων ἐξετάζει ἡ Φυσικὴ Πειραματικὴ καὶ τὴν διαφορὰν ὀνομάζει: **εἰδικὸν βάρος** τοῦ σώματος.

Τὸ εἰδικὸν βάρος μερικῶν σωμάτων, ποὺ συνηθίζονται περισσότερον καὶ πρέπει νὰ γνωρίζωμεν, εἶναι:

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

1. Ὕδωρ (νερὸ) ἀπεσταγμένον 4^0 . . .	1	11. Ζάκχαρις	1,66
2. Πετρέλαιον	0,80	12. Λίθοι (πέτρες) . . .	2,08
3. Οἰνόπνευμα . . .	0,90	13. Ὕαλος (γυαλὶ) . .	2,5
4. Οἶνος (κρασὶ) . .	0,985	14. Μάρμαρον	2,07
5. Πάγος	0,93	15. Σίδηρος	7,5
6. Ἔλαιον (λάδι) . .	0,91	16. Χαλκὸς	8,9
7. Βούτυρον	0,94	17. Μόλυβδος (μολύβι)	11,3
8. Γάλα	1,02	18. Ὑδράργυρος . . .	13,6
9. Ἄλευρον	1,04	19. Χρυσὸς	19,3
10. Σῖτος (σιτάρι) . .	1,56	20. Λευκόχρυσος . . .	21,5

Παράδειγμα 1ον. Πόσα χιλιόγραμμα (κιλὰ) πετρελαίου χωρεῖ μιὰ κυβικὴ δεξαμενὴ ἂν ἡ ἀκμή της εἶναι 3 μέτρα;

Λύσις: α) Ὄγκος δεξαμενῆς $= 3 \times 3 \times 3 = 27$ κυβ. μέτρα.

β) Ἂν ἡ δεξαμενὴ εἶχε νερὸ θὰ ἐζύγιζε 27 τόννους. Ἐπειδὴ ὅμως ἔχει πετρέλαιον πολλαπλασιάζω τὸ 27 ἐπὶ τό 0,80 (εἰδικὸν βάρος πετρελαίου) καὶ εὑρίσκω ὅτι χωρεῖ 21,600 τόννους πετρελαίου ἢ 21600 χιλιόγραμμα.

Παράδειγμα 2ον. Πόσα κιλὰ λάδι θὰ χωρέσῃ ἓν κυβικὸν δοχεῖον τὸ ὁποῖον ἔχει ἀκμὴν 0,4 τοῦ μέτρου;

Λύσις: α) Ὄγκος δοχείου $0,4 \times 0,4 \times 0,4 = 0,064$ κ. μ. ἢ 64 κ. παλ. ποὺ ἀναλογοῦν μὲ 64 χιλιόγραμμα νερό.

β) Πολλαπλασιάζω τὸ 64 ἐπὶ 0,91 (εἰδ. βάρος λαδιοῦ) καὶ εὑρίσκω ὅτι τὸ δοχεῖον χωρεῖ 58,24 χιλιόγραμμα λάδι.

Ὥστε τὸ δοχεῖον χωρεῖ 58,24 κιλὰ λάδι.

Προβλήματα:

12. Κυβικὴ ἀποθήκη ἔχει ἀκμὴν 350 μέτρα. Πόσο σιτάρι χωρεῖ;

13. Πόσα κιλὰ λάδι χωρεῖ κυβικὸν δοχεῖον τὸ ὁποῖον ἔχει ἀκμὴν 1,80 παλάμας;

14. Μία δαμιζάνα χωρεῖ 8 κιλὰ νερὸ καὶ πρόκειται νὰ τὴν γεμίσωμεν βούτυρον. Πόσα κιλὰ βουτύρου θὰ χωρέσῃ;

15. Ἐντὸς ἀποθήκης σχήματος κύβου μὲ ἀκμὴν 3 μ. πρόκειται νὰ τοποθετηθοῦν κυβικὰ κιβώτια μὲ ἀκμὴν 0,75 μ. Πόσα τέτοια κιβώτια θὰ χωρέσῃ ἡ ἀποθήκη;

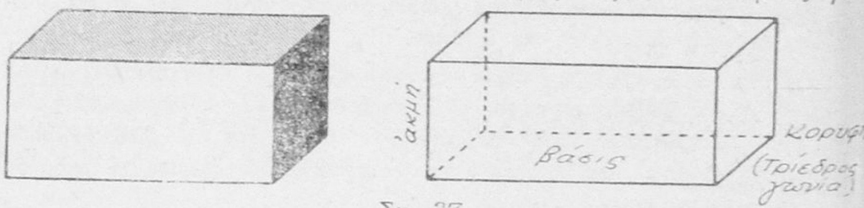
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

16. Ἄλλη ἀποθήκη σχήματος κύβου μὲ ἀκμὴν 4,6 μ. εἶναι γεμάτη κατὰ τὰ 3/4 μὲ ξυλείαν. Πόσα κυβικὰ μέτρα εἶναι ἡ ξυλεία;

ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΝ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΠΙΠΕΔΟΝ

Τὸ στερεὸν γεωμετρικὸν σῶμα ποὺ παριστάνει τὸ σχῆμα 37, λέγεται **ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον.** Εἶναι τὸ πιὸ συνηθισμένον σχῆμα γιατὶ αὐτὸ τὸ σχῆμα ἔχουν τὰ περισσότερα κουτιά, τὰ δωμάτια καὶ πολλὰ ἄλλα σώματα.

Παρατηρῶ τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον καὶ βλέπω ὅτι ἔχει καὶ αὐτὸ 6 ἕδρας ἀλλὰ μόνον αἱ ἀπέναντί του εἶναι ἴσαι. Κατὰ τὰ ἄλλα εἶναι ὅμοιον μὲ τὸ κύβον. Ἔχει δηλαδὴ καὶ τοῦτο 12 ἀκμὰς (8 ὁριζοντίους καὶ 4 κατακορύφους), 12 διέδρους γω-



Σχ. 37

νίας, 8 κορυφάς, **8** τριέδρους γωνίας καὶ 24 ἐπιπέδους ὀρθὰς γωνίας (6×4).

Ἡ κάτω καὶ ἡ ἐπάνω ἕδρα ἔχουν ὁριζόντιον διεύθυνσιν καὶ λέγονται **βάσεις.** Αἱ τέσσαρες ἄλλαι εἶναι κατακόρυφοι καὶ ἀποτελοῦν τὴν **παράπλευρον ἐπιφάνειαν** τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου. Ὥστε:

Ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον λέγεται τὸ ἑξάεδρον, τὸ ὁποῖον ἔχει τὰς ἀντικρυνὰς ἕδρας του ἴσας καὶ παραλλήλους, τὰς δὲ παραπλεύρους ἕδρας καθέτους ἐπὶ τὰς βάσεις.

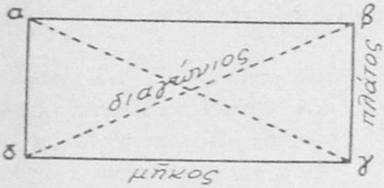
Ἄσκησις: Ἰχνογραφήσετε δύο ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα εἰς διάφορα μεγέθη.

ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΝ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟΝ

Τοποθετήσετε τὸ ὀρθ. παραλληλεπίπεδον ἐπάνω εἰς τὸν πίνακα καὶ σύρετε μὲ τὸ μολύβι γύρω εἰς τὴν βάσιν τέσσαρας εὐθείας.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ὅταν τὸ σηκώσετε θὰ μείνῃ τὸ σχῆμα 38. Παρατηροῦντες τὸ νέον σχῆμα βλέπετε ὅτι εἶναι ἴσαι μόνον αἱ ἀντικρυναὶ πλευραὶ



Σχ. 38

αβ=δγ καὶ αδ=βγ καὶ αἱ γωνίαι του ὀρθαί, ὅπως τοῦ τετραγώνου. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ τετράπλευρον αὐτὸ ἔχει τὰς γωνίας ὀρθὰς καὶ τὰς ἀντικρυνὰς πλευρὰς (γραμμὰς) παραλλήλους, θὰ τὸ λέγωμεν **ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον.** Ὥστε :

Ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον λέγεται τὸ τετράπλευρον τὸ ὁποῖον ἔχει τὰς ἀντικρυνὰς πλευρὰς ἴσας καὶ παραλλήλους καὶ τὰς γωνίας του ὀρθάς.

Τὰ περισσότερα τετράπλευρα ποὺ βλέπομεν γύρω μας (βιβλία, τετράδια, θύραι, ὑαλοπίνακες, φάκελλα κ.τ.λ.) εἶναι ὀρθογώνια παραλληλόγραμμα.

—Συγκρίνατε τὸ ὀρθ. παραλληλόγραμμον με τὸ τετράγωνον καὶ εὕρετε : α) τὰς ὁμοιότητας, β) τὰς διαφοράς των.

Ἡ μεγαλυτέρα πλευρὰ τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου λέγεται **μῆκος** ἢ **βάσις** καὶ ἡ μικροτέρα **πλάτος** ἢ **ὕψος.** Τὸ ἄθροισμα καὶ τῶν τεσσάρων πλευρῶν του δίδουν τὴν **περίμετρον.**

Ἐπειδὴ τὸ ὀρθ. παραλληλόγραμμον ἔχει τὰς ἀντικρυνὰς πλευρὰς ἴσας, διὰ νὰ εὕρω τὴν περίμετρον προσθέτω τὸ μῆκος μὲ τὸ πλάτος καὶ τὸ ἄθροισμα τὸ διπλασιάζω. Ἂν π. χ. τὸ μῆκος τοῦ πίνακος εἶναι 2,20 μ. καὶ τὸ πλάτος 1 μ. ἡ περίμετρός του θὰ εἶναι $2{,}20+1=3{,}20\times2=6{,}40$ μέτρα.

Αἱ εὐθεῖαι αγ καὶ δβ λέγονται **διαγώνιοι.**

ΕΡΓΑΣΙΑΙ : 1. Ὀνομάσατε σώματα νὰ εἶναι ὀρθ. παραλληλεπίπεδα καὶ δείξετε τὰς βάσεις καὶ τὴν παράπλευρον ἐπιφάνειάν των.

2. Δείξετε ὀρθογώνια παραλληλόγραμμα ἐντὸς τῆς τάξεως καὶ νὰ εὕρετε : α') τὸ μῆκος, β') τὸ πλάτος, γ') τὴν περίμετρόν των.

3. Ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον ἔχει μῆκος 0,20 μ. καὶ πλάτος 0,10 μ. Πόση εἶναι ἡ μερίμετρός του;

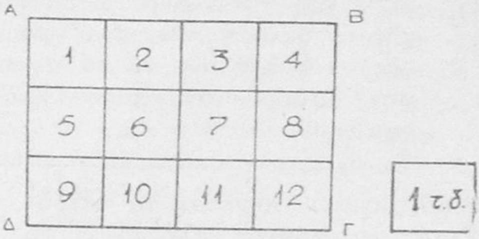
4. Σχημάτισε ἓν ὀρθογ. παραλληλόγραμμον, μέτρησε τὰς ἀποστάσεις καὶ νὰ εὕρῃς τὴν περίμετρόν του.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΕΜΒΑΔΟΝ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΥ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟΥ

Γράφω εἰς τὸ τετράδιον ἓν ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ (σχ. 39) νὰ ἔχῃ μῆκος 4 δακτύλους, πλάτος 3 δακτύλου καὶ ζητῶ νά εὕρω τὸ ἐμβαδόν του:

Μὲ τὸ ὑποδεκάμετρον μετρῶ πρῶτον τὴν μίαν πλευράν το καὶ ὅπου τελειώνει ὁ δά κτυλος βάζω σημεῖον. Με τρῶ κατόπιν καὶ τὰς ἄλ λας πλευρὰς καὶ βάζω κα ἐκεῖ σημεῖα. Τέλος ἑνώνω τὰ ἀντικρυνὰ σημεῖα τῶν διαιρέσεων μὲ εὐθείας, ὅ πως φαίνεται εἰς τὸ σχ. 39 καὶ βλέπω ὅτι τὸ ὀρθογώ νιον παραλληλόγραμμον ἐχωρίσθη εἰς 12 μικρὰ τετράγωνα. Με τρῶ τὴν πλευρὰν ἑκάστου τετραγώνου καὶ βλέπω ὅτι εἶναι 1 δά κτυλος. Ἑπομένως τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθ. παραλληλογράμμου εἶναι 12 τετρ. δάκτυλοι.



Σχ. 39

Ἀντὶ νὰ γίνουν τ' ἀνωτέρω ποὺ ἀπαιτοῦν χρόνον, τὸν ἀρι θμὸν 12 εὑρίσκω εὐκόλως ἂν πολλαπλασιάσω τὸ μῆκος ἐπὶ τὸ πλά τος (4×3).

Ἂν τὸ ἴδιον ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον εἶχε διαστά σεις 4 παλ. καὶ 3 παλ., τὸ ἐμβαδόν του θὰ ἦτο: 4×3=12 τετρ. παλάμαι

Καὶ ἄν εἶχε διαστάσεις 4 μ. καὶ 3 μ., ἐμβαδὸν: 4×3=12 τ. μ. Ὥστε:

Διὰ νὰ εὕρω τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου παραλλη λογράμμου, πολλαπλασιάζω τὸ μῆκος ἐπὶ τὸ πλάτος.

Προβλήματα:

17. Μετρήσατε τὸ μῆκος καὶ τὸ πλάτος τοῦ πατώματος καὶ νὰ εὕρετε α) Πόσα μέτρα εἶναι ἡ περίμετρος. β) Καὶ πόσα τ. μ. εἶναι τὸ ἐμβαδόν του;

18. Μετρήσατε κατόπιν τὸ μῆκος καὶ τὸ πλάτος τοῦ πίνακος, τοῦ τραπεζίου καὶ τῶν παραθύρων καὶ νὰ εὕρετε τὴν περίμετρον καὶ τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς ἑκάστου.

19. Ὁ διάδρομος ἑνὸς σχολείου ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλ-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ληλογράμμου μὲ μῆκος 27 μ. καὶ πλάτος 4 μ. Πόσα τ. μ. εἶναι τὸ ἐμβαδόν του.

20. Ἡ αὐλὴ τοῦ αὐτοῦ σχολείου εἶναι ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον, ἔχει δὲ ἐμβαδὸν 800 τ.μ. καὶ μῆκος 40 μ. Πόσα μέτρα εἶναι τὸ πλάτος;

21. Ἠγόρασα 50 ὑαλοπίνακας (τζάμια) διαστάσεων ἕκαστος 0,45 καὶ 0,35 μ. πρὸς 16,50 δραχμὰς τὸ τ. μ. Πόσας δραχμὰς θὰ πληρώσω;

22. Πρόκειται νὰ κατασκευάσω τὸ πάτωμα τῆς οἰκίας μου μὲ σανίδες διαστάσεων 4 μ. καὶ 0,25 μ. Τὸ μῆκος τοῦ πατώματος εἶναι 10 μ. καὶ τὸ πλάτος 7,50 μ. Πόσας σανίδας πρέπει ν' ἀγοράσω;

23. Ἂν ἡ μία σανὶς τιμᾶται 40 δραχμὰς καὶ πληρώνω τὸν τεχνίτην πρὸς 12,50 δραχ. τὸ τ.μ. πόσας δραχμὰς θὰ μοῦ στοιχίση ἐν ὅλῳ τὸ πάτωμα;

24. Ἂν κτῆμα σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου μὲ μῆκος 160 μ. καὶ πλάτος 90 μ., πωληθῇ πρὸς 6.500 δραχμὰς τὸ στρέμμα, πόσας δραχμὰς στοιχίζει;

25. Ἓν ἀπὸ τὰ παράθυρα τοῦ σχολείου ἔχει διαστάσεις 2 μ. καὶ 0,80 μ. Τὸ παράθυρον ἔχει 8 τζάμια (ὅλα ἴσα) διαστάσεων ἕκαστον 0,50 μ. καὶ 0,30 μ. Τί ἐμβαδὸν ἔχει τὸ ξύλινον μέρος τοῦ παραθύρου;

26. Σχημάτισε καὶ σὺ 2 τέτοια προβλήματα καὶ νὰ τὰ λύσῃς.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΠΕΡΙ ΚΛΙΜΑΚΟΣ

Κατὰ τὸ μάθημα τῆς Γεωμετρίας, τῆς Γεωγραφίας καὶ τῆς Ἰχνογραφίας, τὰ διάφορα ἀντικείμενα ἀπεικονίζονται μὲ ὁμοιά τους ἐπάνω εἰς τὸ χαρτί. Ὅπως ὅμως εἶναι φανερόν, ἀπεικονίζονται μικρότερα ἀπ' ὅ,τι εἶναι εἰς τὴν πραγματικότητα, διότι διαφορετικὰ δὲν χωροῦν.

Θέλω αἴφνης ν' ἀπεικονίσω εἰς τὸ τετράδιόν μου τὸ πάτωμα μιᾶς αἰθούσης τοῦ σχολείου μου ποὺ εἶναι τετράγωνον μὲ πλευρὰν 10 μέτρων, 100 φορὰς μικρότερον. Τὸ τετράγωνον τότε τοῦ σχεδίου μου θὰ γίνῃ μὲ πλευρὰν 10 πόντων (10 μ. : 100). Κάτω ὅμως ἀπὸ τὸ σχέδιον θὰ γράψω τὸν ἀριθμὸν 1 : 100 ἢ $\frac{1}{100}$ διὰ νὰ φαίνεται πόσας φορὰς ἔγινε μικρότερον.

Τὸ κλάσμα ποὺ ἔχει ἀριθμητὴν τὴν μονάδα καὶ παρανομαστὴν τὸν ἀριθμὸν ποὺ φανερώνει πόσας φορὰς ἐσχεδιάσθη μικρότερον κάθε ἀντικείμενον ἢ ἔκτασις, θὰ τὸ λέγωμεν κλίμακα.

Παρατηρήσετε τοὺς γεωγραφικοὺς χάρτας τοῦ σχολείου σας καὶ θὰ ἴδετε ὑπὸ ποίαν κλίμακαν ἔγινεν ἕκαστος μικρότερος ἀπὸ τὴν χώραν ποὺ παριστάνει. Μὲ τὸν χάρτην λοιπὸν ὄχι μόνον ἔχομεν παράστασιν τῆς χώρας ποὺ παριστάνει ἀλλ' ἀπὸ τὴν κλίμακα ἠμποροῦμεν νὰ εὑρίσκωμεν τὰς πραγματικὰς ἀποστάσεις.

Ὑποθέτομεν ὅτι ὁ χάρτης μας ἔχει γίνει ὑπὸ κλίμακα : $\frac{1}{1.000.000}$. Ἡ κλίμαξ αὐτὴ δείχνει ὅτι ἂν δυὸ τόποι ἀπέχουν εἰς τὸν χάρτην 1 μέτρον, ἔχουν πραγματικὴν ἀπόστασιν ἐπὶ τοῦ ἐδάφους 1.000.000 μέτρα. Ὁ πόντος ἐπὶ τοῦ χάρτου ποὺ εἶναι μικρότερος 100 φορὰς ἀπὸ τὸ μέτρον, θὰ ἀναλογῇ εἰς τὸ ἔδαφος μὲ 10.000 μέτρα (1.000.000 : 100) ἢ 10 χιλιόμετρα. Ἀφοῦ λοιπὸν ὁ 1 πόντος ἀναλογεῖ εἰς τὸ ἔδαφος μὲ 10 χιλιόμετρα, οἱ δύο πόντοι θ' ἀναλοῦν μὲ 20 χιλιόμετρα, οἱ 5 μὲ 50 χιλιόμετρα κ.ο.κ.

Παράδειγμα Α΄. Οἰκόπεδον τετραγωνικὸν μὲ πλευρὰν 45

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

μέτρων νὰ σμικρυνθῇ ὑπὸ κλίμακα $\frac{1}{100}$. Πόσον θὰ γίνῃ εἰς τὸ σχέδιον;

Λύσις: 100 μ. εἰς τὸ ἔδαφος ἀντιστοιχοῦν εἰς τὸ σχέδιον 1 μ.
45 » » » » » » » » ×;

$$\times = 1 \times \frac{45}{100} = 0,45 \text{ μ.}$$

Ὥστε τὸ οἰκόπεδον θὰ σχεδιασθῇ μὲ πλευρὰν 0,45 μ.

Παράδειγμα Β'. Δύο τόποι εἰς τὸν χάρτην, ὑπὸ κλίμακα $\frac{1}{5.000.000}$, ἀπέχουν 8 πόντους (0,08 μ.). Πόση εἶναι ἡ ἀπόστασις εἰς τὸ ἔδαφος;

Λύσις α' (ἀπὸ μνήμης):

Χωρίζω ἀπὸ τὰ δεξιὰ τοῦ παρανομαστοῦ τῆς κλίμακος δύο μηδενικὰ καὶ εὑρίσκω ὅτι ὁ πόντος ἐπὶ τοῦ χάρτου ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ ἔδαφος μὲ 50.000 μέτρα ἢ 50 χιλιόμετρα. Καὶ οἱ 8 πόντοι θ' ἀντιστοιχοῦν μὲ ἀπόστασιν 400 χιλιομέτρων (50×8).

Λύσις β' (γραπτῶς):

Τὸ 1 μ. εἰς τὸν χάρτην, ἀντιστοιχεῖ εἰς τό ἔδαφος μὲ 5.000.000 μ.
τὰ 0,08 μ. » » » » » » » × ;

$$\times = 5.000.000 \times \frac{0,08}{1} = 400.000 \text{ μ. ἢ 400 χιλιόμετρα.}$$

Ὥστε καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις ἡ ἀπόστασις εἶναι 400 χιλιόμετρα.

Παράδειγμα Γ'. Δύο τόποι ἀπέχουν εἰς τὸ ἔδαφος 150.000 μέτρα καὶ εἰς τὸν χάρτην 0,06 μ. Ὑπὸ ποίαν κλίμακα ἔχει γίνει ὁ χάρτης;

Λύσις: 150.000 μ. εἰς ἔδαφος, εἰς χάρτην 0,06 μ.
× ; » » » » » 1

$$\times = 150.000 \times \frac{1}{0,06} = \frac{150.000}{0,06} = 2.500.000$$

Ὥστε ὁ χάρτης ἔγινεν ὑπὸ κλίμακα $\frac{1}{2.500.000}$

Ἀσκήσεις: Κάμε τὸ διάγραμμα εὐθείας μήκους 250 μέτρων ὑπὸ κλίμακα $\frac{1}{500}$.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

2. Κάμε καὶ τὸ σχεδιάγραμμα τῆς αἰθούσης τοῦ σχολείου σας ὑπὸ κλίμακα $\frac{1}{100}$.

3. Γήπεδον ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου ἔχον μῆκος 10 μ. καὶ πλάτος 60 μ. νὰ σχεδιασθῆ εἰς τὸ τετράδιον ὑπὸ κλίμακα $\frac{1}{8.000}$.

4. Εἰς γεωγραφικὸν χάρτην ὑπὸ κλίμακα $\frac{1}{2.000.000}$ δύο πόλεις ἀπέχουν 12 δακτύλους. Πόση εἶναι ἡ πραγματική των ἀπόστασις ;

5. Ἀπὸ τὸν γεωγραφικὸν χάρτην τῆς Ἑλλάδος νὰ εὕρετε :
α΄) Πόσα χιλιόμετρα εἶναι ἡ σιδηρ. γραμμὴ Ἀθηνῶν—Χαλκίδος ;
β΄) Πόσα χιλιόμετρα εἶναι ἡ σιδηρ. γραμμὴ Πατρῶν—Πύργου ;
γ΄) Πόσα χιλ. εἶναι ἡ σιδηρ. γραμμὴ Δράμας—Ἀλεξανδρουπόλεως ;
δ΄) Πόσα χιλιόμετρα εἶναι εὐθεῖα ἀπὸ τὸν Πειραιᾶ εἰς τὰ Χανιά ;
ε΄) Πόσα μίλια εἶναι ἀπὸ τὸν Πειραιᾶ εἰς τὸ Ἡράκλειον ;

Σημ. Τὰ μέτρα ποὺ θὰ εὕρω, ἀπὸ τὴν κλίμακα τοῦ χάρτου, τὰ διαιρῶ διά 1852 μ. πού ἔχει ἓν μίλιον καί ἔχω τὴν ἀπόστασιν εἰς μίλια.

6. Τὸ ἀτμόπλιον «Καραϊσκάκης» ἀνεχώρησεν ἀπὸ τὸν Πειραιᾶ κατ' εὐθεῖαν διὰ Ρόδον μὲ ταχύτητα 16 μίλια τὴν ὥραν. Μετὰ πόσας ὥρας θὰ φθάση ;

7. Δύο πόλεις ἔχουν πραγματικὴν ἀπόστασιν 120.000 μ. καὶ εἰς τὸν χάρτην 0,20 μ. Ὑπὸ ποίαν κλίμακα ἔχει γίνει ὁ χάρτης ;

8. Τὸ σχεδιάγραμμα ἑνὸς τετραγωνικοῦ οἰκοπέδου ἔγινεν ὑπὸ κλίμακα $\frac{1}{500}$ καί ἔχει πλευράν 0,06 μ. Πόσα τ. μ. εἶναι ἡ ἔκτασις τοῦ οἰκοπέδου ;

ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΥ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΠΙΠΕΔΟΥ

Διὰ νὰ εὕρω τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ἐργάζομαι ὡς ἑξῆς:

Μετρῶ τὸ μῆκος καὶ τὸ πλάτος τῆς ἐμπροσθινῆς ἕδρας, ὕστερα πολλαπλασιάζω καὶ εὑρίσκω τὸ ἐμβαδόν της. Τὸ ἴδιον κάμνω διὰ τήν πλαγινὴν καὶ κάτω ἕδραν. Κάθε φορὰν διπλασιάζω τὸ γινόμενον νὰ ἔχω καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἀντικρυνῆς ἕδρας. Προσθέτω κατόπιν τὰ τρία γινόμενα καὶ τὸ ἄθροισμα εἶναι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου.

Παράδειγμα. Μοῦ ἔχει δοθῆ τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον (σχ. 40) μὲ μῆκος 4 δ., πλάτος 2 δ. καὶ ὕψος 3 δ. καὶ θέλω νὰ εὕρω πόσοι τ. δ. εἶναι ἡ ἐπιφάνειά του.

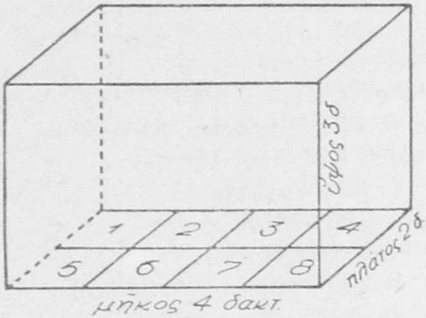
Λύσις: α΄) Ἐμβαδὸν ἐμπροσθινῆς ἕδρας: $4 \times 3 = 12$ τ. δ. Καὶ μὲ τὴν ὄπισθεν: $12 \times 2 = 24$ τ. δ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

β΄) Ἐμβαδὸν πλαγινῆς (δεξᾶς) ἕδρας: $2 \times 3 = 6$ τ. δ. Καὶ μὲ τὴν ἀντικρυνήν της (τὴν ἀριστεράν): $6 \times 2 = 12$ τ. δ.

γ΄) Ἐμβαδὸν κάτω ἕδρας (βάσεως) $4 \times 2 = 8$ τ. δ. Καὶ μὲ τὴν ἐπάνω ἕδραν: $8 \times 2 = 16$ τ δ.

δ) Προσθέτω τώρα τά γινόμενα: $24 + 12 + 16$. Ὥστε, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι 52 τετραγωνικοὶ δάκτυλοι.



Σχ. 40

ΟΓΚΟΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΥ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΠΙΠΕΔΟΥ

Ἔχω τώρα νὰ εὕρω καὶ τὸν ὄγκον τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, τοῦ σχήματος 40.

Πολλαπλασιάζω τὸ 4 ἐπὶ τὸ 2 καὶ εὑρίσκω τὸ ἐμβαδὸν τῆς κάτω ἕδρας (βάσεως) 8 τ. δ. Ἂν εἰς ἕκαστον τ. δ. τῆς κάτω ἕδρας τοποθετήσω ἀπὸ ἕν κυβικὸν δάκτυλον, θὰ χωρέσουν 8 κ. δ. καὶ θὰ φθάσουν εἰς ὕψος ἑνός δακτύλου. Ἐπειδὴ δὲ τὸ ὕψος τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι 3 δάκτυλοι, θὰ χωρέσουν ἐν ὅλῳ τρία στρώματα ἤτοι 24 κυβ. δάκτυλοι καὶ αὐτὸς εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου.

Τὸν ἀριθμὸν 24 εὑρίσκω εὐκόλως ἂν πολλαπλασιάσω τὰς τρεῖς διαστάσεις του (μῆκος, πλάτος, ὕψος). Ἤτοι $4 \times 2 \times 3 = 24$ κ. δ Ὥστε:

Διὰ νὰ εὕρω τὸν ὄγκον τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, πολλαπλασιάζω τὰς τρεῖς διαστάσεις του. (Ἢ πολλαπλασιάζω τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος).

Προβλήματα:

27. Μετρήσετε τὰς τρεῖς διαστάσεις τῆς αἰθούσης καὶ νὰ εὕρετε: α΄) Πόσα τ. μ. εἶναι ἡ ἐπιφάνεια. β΄) Πόσα κ μ. εἶναι ὁ ὄγκος της.

28. Ἓν κιβώτιον εἶναι ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον μὲ διαστάσεις 1,60 μ., 1 μ. καὶ 0,80 μ. Νὰ εὑρεθοῦν ἡ ἐπιφάνεια καὶ ὁ ὄγκος τοῦ κιβωτίου.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

29. Πόσα κυβικὰ μέτρα νεροῦ χωρεῖ μία δεξαμενὴ ἡ ὁποία ἔχει μῆκος 4,20 μ., πλάτος 2,50 μ. καὶ ὕψος 2 μέτρα;

30. Πρόκειται νὰ κτισθῇ μάνδρα, ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ μῆκος 90 μ., πλάτος (πάχος) 0,80 μ. καὶ ὕψος 1,60 μ. Ἡ συμφωνία μὲ τοὺς κτίστας ἔγινε πρὸς 50 δραχ. τὸ κ. μ. Πόσον θὰ στοιχίσῃ;

31. Ἠγόρασα 10 καδρόνια διαστάσεων ἕκαστον 4 μ., 0,05 μ. καὶ 0,1 μ. πρὸς 900 δραχ. τὸ κυβ. μέτρον. Τί θὰ πληρώσω;

32. Κατεσκεύασα ἕνα ἀμπάρι τὸ ὁποῖον ἔχει μῆκος 2 μ. πλάτος 1,20 καὶ ὕψος 1 μ. καὶ θέλω νὰ τὸ γεμίσω σιτάρι. Πόσα κιλὰ σιτάρι θὰ χωρέσῃ; (εἰδ. βάρος σιτ. 1,56).

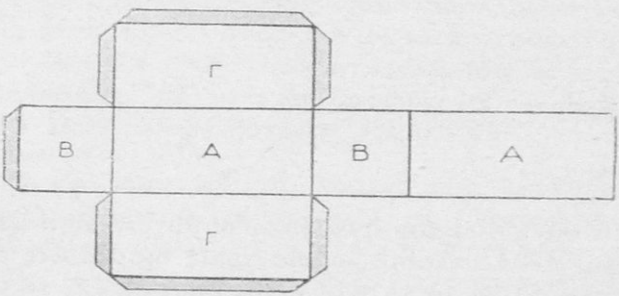
33. Μετρήσετε τὰς διαστάσεις ἑνὸς τενεκὲ πετρελαίου, ὁ ὁποῖος εἶναι ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον καὶ νὰ εὕρετε:

α') Πόσα κιλὰ πετρελαίου χωρεῖ (εἰδ. βάρ. πετρ 0,80).

β') Πόσα κιλὰ λάδι χωρεῖ (εἰδ. βάρ. λαδ. 0,91).

ΠΩΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΖΕΤΑΙ ΤΟ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΝ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΠΙΠΕΔΟΝ

α') **Μὲ χαρτόνι.** Ἂν ξεδιπλώσωμεν ἓν χάρτινον ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον, τὸ ἀνάπτυγμά του ἔχει τὸ σχῆμα 41. Μὲ τὸν χάρακα καὶ τὸν γνώμονα σχεδιάζομεν τὰ 6 τετράπλευρα



Σχ. 41

(σχ. 41) μὲ τὰς διαστάσεις ποὺ θέλομεν, προσέχοντες ὥστε τ' ἀντικρυνὰ νὰ εἶναι ἴσα. Πρὸς τὸ ἔξω μέρος ἀφήνομεν καὶ περιθώρια ὅπως ἔγινε μὲ τὸν κύβον. Κατόπιν χαράσσομεν ἐλαφρὰ μ' ἕνα ξυραφάκι τὰς εὐθείας τοῦ σχεδίου, διπλώνομεν τὰς ἕδρας, κολλῶμεν ἀπὸ τὸ μέσα μέρος τὰ περιθώρια καὶ τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον εἶναι ἕτοιμον.

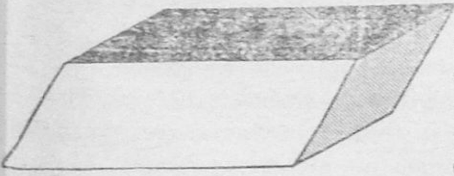
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

β') **Ἐκ ξύλου κόντρα-πλακέ.** Σχεδιάζομεν ἐπάνω εἰς ἴσον τεμάχιον κόντρα-πλακὲ καὶ τὰς 6 ἕδρας τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, θέτοντες κάτω καρμπόν. Κατόπιν χωρίζομεν μὲ πριονάκι μίαν-μίαν τὰς ἕδρας, κολλοῦνται μὲ καζεΐνην καὶ τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον δένεται σφικτὰ μὲ σπάγγον. Μετὰ 3-4 ὥρας λύνομεν τὸν σπάγγον καὶ τρίβομεν μίαν-μίαν ἕδραν εἰς γυαλόχαρτον No 1, ἁπλωμένον εἰς τὸ τραπέζι. Κατόπιν κλείνονται αἱ σχισμαὶ τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου μὲ πολτὸν στόκου καὶ καζεΐνης καὶ ὅταν ξεραθῆ τρίβεται ἐκ νέου μὲ γυαλόχαρτον. Μόλις γίνῃ καὶ αὐτό, ἀλείφεται μὲ μεῖγμα γομαλάκας καὶ τσίγκου, σχεδιάζονται μὲ τετραγωνάκια τῶν ἑδρῶν καὶ γεμίζονται μὲ σινικὴν μελάνην αὐτὰ ποὺ εἰς τὸ σχέδιον εἶναι μαῦρα. Τέλος τὸ γεωμετρικὸν σῶμα ἀλείφεται μὲ βερνίκι καὶ εἶναι πλέον ἕτοιμον.

γ') **Μὲ καδρόνι.** Ἀπὸ ἕνα καδρόνι κόπτομεν μὲ πριόνι ἓν τεμάχιον ὥστε αἱ τομαὶ καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη νὰ εἶναι κάθετοι καὶ ἔχομεν τό Ο. Π.

ΠΛΑΓΙΟΝ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΠΙΠΕΔΟΝ

Τὸ σῶμα ποὺ παριστᾷ τὸ σχῆμα 42 ὁμοιάζει μὲ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον. Ἐπειδὴ ὅμως τὰ ἐπίπεδά του (ἕδραι) εἶναι πλάγια, λέγεται **πλάγιον παραλληλεπίπεδον.**



Σχ. 42

Ἂν συγκρίνω τὸ πλάγιον παραλληλεπίπεδον μὲ τὸ ὀρθογώνιον βλέπω ὅτι ἔχει καὶ αὐτὸ 12 ἀκμὰς καὶ 8 κορυφὰς ἀλλ' αἱ γωνίαι ἑκάστης ἕδρας δὲν εἶναι ὀρθαί. Δύο, αἱ ἀντικρυναί, εἶναι ὀξεῖαι καὶ δύο ἀμβλεῖαι.

Ὥστε: **Πλάγιον παραλληλεπίπεδον λέγεται τὸ ἑξάεδρον ποὺ ἔχει τὰς ἀντικρυνὰς ἕδρας ἴσας καὶ παραλλήλους ἀλλ' αἱ παράπλευροι ἀκμαὶ δὲν εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰς βάσεις.**

Ὅπως τὸ ὀρθογώνιον οὕτω καὶ τὸ πλάγιον παραλληλεπίπεδον ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰς δύο βάσεις καὶ τὴν παράπλευρον ἐπιφάνειαν.

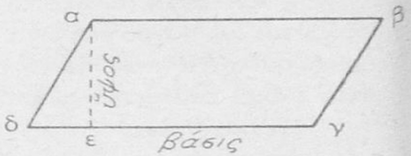
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἐργασίαι: 1. Σχηματίσετε μὲ χαρτόνι ἓν πλάγιον παραλληλεπίπεδον μὲ διαστάσεις ποὺ θέλετε. Τὸ σχέδιον θὰ γίνῃ ὅπως καὶ εἰς τὸ ὀρθογώνιον μὲ τὴν διαφορὰν ὅτι αἱ ἕδραι νὰ εἶναι πλάγιαι.

2. Ἀπὸ ἕνα καδρόνι κόψετε μὲ πριόνι ἕνα κομμάτι λοξὰ καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη καὶ θὰ ἔχετε τὸ πλάγιον παραλληλεπίπεδον.

ΠΛΑΓΙΟΝ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟΝ

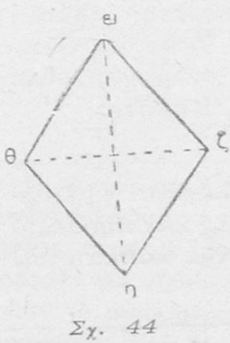
Τοποθετήσετε τὸ πλάγιον παραλληλεπίπεδον ἐπάνω σὲ χαρτί, χαράξατε μὲ τὸ μολύβι γύρω εἰς τὴν βάσιν τέσσαρας εὐθείας καὶ θὰ ἔχετε τό σχῆμα ποὺ εἶναι καὶ αὐτὸ παραλληλόγραμμον. Ἐπειδὴ ὅμως αἱ πλευραί του (γραμμαὶ) εἶναι πλάγιαι, αὐτὸ θὰ τὸ λέγωμεν **πλάγιον παραλληλόγραμμον.**



Σχ. 43

Παρατηροῦντες τὸ νέον σχῆμα, βλέπομεν ὅτι δύο ἀντικρυναὶ γωνίαι του (β καὶ δ) εἶναι ὀξεῖαι καὶ δύο ἀμβλεῖαι (α καὶ γ). Ἂν μετρήσωμεν μὲ τὸ μοιρογνωμόνιον τὰς ἀντικρυνὰς γωνίας, θὰ ἴδωμεν ὅτι εἶναι ἴσαι καὶ ὄχι ὀρθαί.

Πλάγιον παραλληλόγραμμον λέγεται τὸ τετράπλευρον ποὺ ἔχει τὰς ἀντικρυνὰς πλευρὰς ἴσας καὶ παραλλήλους ἀλλὰ πλαγίας καὶ τὰς ἀντικρυνὰς γωνίας ἴσας καὶ ὄχι ὀρθάς.



Σχ. 44

Αἱ μεγαλύτεραι πλευραὶ (αβ καὶ δγ) λέγονται **βάσεις** καὶ ἡ κάθετος **αε**, ἀπὸ τὴν ἀπέναντι κορυφὴν εἰς τὴν βάσιν, λέγεται **ὕψος.**

Ρόμβος. Ὅταν καὶ αἱ 4 πλευραὶ τοῦ πλαγίου παραλληλογράμμου εἶναι ἴσαι, τότε λέγεται **ρόμβος** (σχ. 44). Ρόμβοι εἶναι τὸ ἐπιγονάτιον τοῦ ἱερέως κ.ἄ. Ὅπως βλέπομεν εἰς τὸ σχῆμα 44, αἱ διαγώνιοι τοῦ ρόμβου **εη** καὶ **θζ** τέμνονται καθέτως.

Σύγκρισις ρόμβου μὲ τετράγωνον.

Ὁμοιότητες: Καὶ τὰ δύο ἔχουν τὰς 4 πλευρὰς ἴσας καὶ τὰς ἀπέναντι παραλλήλους.

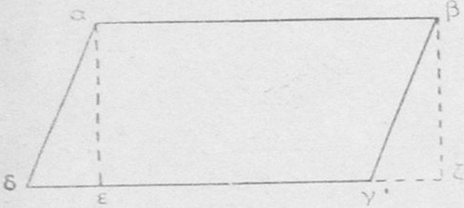
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Διαφοραί : Καὶ αἱ 4 γωνίαι τοῦ τετραγώνου εἶναι ὀρθαὶ ἐνῷ τοῦ ρόμβου 2 εἶναι ὀξεῖαι καὶ 2 ἀμβλεῖαι.

ΕΜΒΑΔΟΝ ΠΛΑΓΙΟΥ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟΥ

Μοῦ ἔχει δοθῆ τὸ πλάγιον παραλληλόγραμμον α β γ δ (σχ.45) καὶ ζητῶ νὰ εὕρω τὸ ἐμβαδόν του.

Ἀπὸ τὴν κορυφὴν α φέρω κάθετον εἰς τὴν βάσιν γδ καὶ σχηματίζεται τὸ τρίγωνον αδε. Ἐπίσης ἀπὸ τὴν κορυφὴν β φέρω ἄλλην κάθετον εἰς τὴν προέκτασιν τῆς δγ καὶ σχηματίζεται τρίγωνον βγζ. Ἂν τώρα κόψω τὸ τρίγωνον αδε καὶ τὸ ἐφαρμόσω εἰς τὸ βγζ θὰ ἰδῶ ὅτι εἶναι ἴσα καὶ τὸ πλάγιον παραλληλόγραμμον (αβ γδ) ἔγινεν ὀρθογώνιον (αβ ζε). Καὶ τὰ δύο αὐτὰ παραλληλόγραμμα εἶναι ἴσα διότι ἔχουν τὴν ἰδίαν βάσιν (ἀφοῦ δε=γζ) καὶ τὸ ἴδιον ὕψος. Ὥστε :



Σχ. 45

Διὰ νὰ εὕρω τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πλαγίου παραλληλογράμμου, πολλαπλασιάζω τὸ μῆκος ἐπὶ τὸ ὕψος του.

Ἐμβαδὸν ρόμβου. Σχηματίζομεν ἕνα ρόμβον ἐπάνω εἰς τὸ χαρτὶ καὶ φέρομεν τὰς διαγωνίους. Μὲ τὸν τρόπον τοῦτον ὁ ρόμβος χωρίζεται εἰς 4 τρίγωνα, ὅπως φαίνεται εἰς τὸ σχ. 44. Κατόπιν ἀφαιροῦμεν μ' ἕνα ξυραφάκι τὰ 4 τρίγωνα καὶ τοποθετοῦντες αὐτὰ καταλλήλως τὸ ἓν πλησίον τοῦ ἄλλου θὰ γίνῃ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον. Μῆκος τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου εἶναι ἡ μία διαγώνιος καὶ ὕψος τοῦ ἥμισυ τῆς ἄλλης. Ἑπομένως:

Διὰ νὰ εὕρω τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ρόμβου, πολλαπλασιάζω τὸ μῆκος τῶν δύο διαγωνίων του καὶ διαιρῶ διὰ 2.

ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΚΑΙ ΟΓΚΟΣ ΠΛΑΓΙΟΥ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΠΙΠΕΔΟΥ

Ἐδῶ ἐργάζομαι ὅπως καὶ εἰς τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον: Εὑρίσκω τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐμπροσθινῆς ἕδρας, ἔπειτα τῆς πλαγινῆς καὶ τελευταῖα τῆς κάτω ἕδρας. Κάθε φορὰν διπλασιάζω τὸ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

γινόμενον νὰ ἔχω καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἀντικρυνῆς ἕδρας. Τέλος προσθέτω τὰ τρία γινόμενα καὶ τὸ ἄθροισμα εἶναι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου.

Ἐπειδὴ τὸ πλάγιον παραλληλεπίπεδον ἔχει τὸν ἴδιον ὄγκον μὲ τὸ ὀρθογώνιον ποὺ ἔχει τὰς ἰδίας διαστάσεις, διὰ νὰ εὕρω καὶ τὸν ὄγκον του πολλαπλασιάζω τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος.

Προβλήματα :

34. Σχολικὸς κῆπος εἶναι πλάγιον παραλληλόγραμμον μὲ πρόσοψιν 42 μ. καὶ βάθος 12 μ. Τί ἐμβαδὸν ἔχει ;

35. Οἰκόπεδον σχήματος πλαγίου παραλληλογράμμου ἔχει ἐμβαδὸν 390 τ.μ. καὶ πρόσοψιν 32,5 μέτρα. Πόσα μέτρα εἶναι τὸ βάθος (ὕψος);

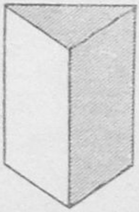
36. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ἀνθοκήπου σχήματος ρόμβου τοῦ ὁποίου ἡ μία διαγώνιος εἶναι 8 μέτρα καὶ ἡ ἄλλη 6 μέτρα;

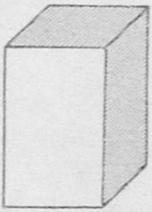
37. Πλάγιον παραλληλεπίπεδον ἔχει διαστάσεις 6 μ., 4 μ. καὶ 3,50 μ. Νὰ εὑρεθῇ α) ἡ ἐπιφάνεια β) ὁ ὄγκος.

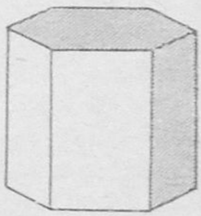
38. Ἄλλο πλάγιον παραλληλεπίπεδον ἔχει μῆκος 5 παλάμας, πλάτος 3 παλάμας καὶ ὄγκον 37,5 κυβ. παλάμας. Πόσαι παλάμαι εἶναι τὸ ὕψος;

ΠΡΙΣΜΑΤΑ

Παρατηροῦντες τὰ σώματα ποὺ παριστοῦν τὰ σχήματα 46, 47 καὶ 48, βλέπομεν ὅτι ἔχουν τὰς δύο βάσεις ἴσας καὶ παραλλήλους καὶ τὰς ἄλλας ἕδρας των, ποὺ εἶναι γύρω, παραλληλόγραμμα. Κάθε πολύεδρον σῶμα ποὺ ἔχει τὰς δύο βάσεις ἴσας καὶ παραλλήλους καὶ τὴν παράπλευρον ἐπιφάνειάν του ἀποτελουμένην ἀπὸ παραλληλόγραμμα , λέγεται πρῖσμα.


Τριγωνικόν
Σχ. 46


Τετραγωνικόν
Σχ. 47


Πολυγωνικόν
Σχε. 48

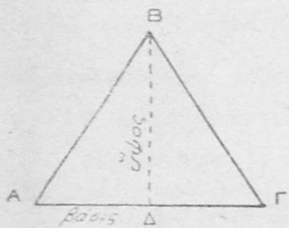
Ἀπὸ τὸ σχῆμα τῆς βάσεώς των τὰ πρίσματα λαμβάνουν καὶ τὸ ὄνομα. Οὕτως ἂν ἡ βάσις των εἶναι τρίγωνον, λέγονται **τριγω-**

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

νικά, ἂν εἶναι τετράγωνον (τετράπλευρον) **τετραγωνικὰ** καὶ ἂν εἶναι πολύγωνον (πεντάγωνον, ἑξάγωνον κλπ.) λέγονται **πολυγωνικὰ πρίσματα.** Αἱ κηρῆθραι τῶν μελισσῶν ἀποτελοῦνται ἀπὸ ἑξαγωνικὰ πρίσματα. Ὅταν αἱ ἀκμαὶ τοῦ πρίσματος εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰς βάσεις, ὅπως εἰς τὰ σχήματα 46, 47 καὶ 48, τότε τὸ πρῖσμα λέγεται **ὀρθὸν** καὶ ἂν εἶναι πλάγιαι λέγεται **πλάγιον.** Εἰς τὰ ὀρθὰ πρίσματα τὰ γύρω παραλληλόγραμμα εἶναι ὀρθογώνια. Κάθε ὀρθὸν πρῖσμα ποὺ αἱ βάσεις του εἶναι κανονικὰ πολύγωνα, λέγεται **κανονικὸν πρῖσμα.**

ΤΡΙΓΩΝΙΚΟΝ ΠΡΙΣΜΑ

Ἀπὸ τὸ κιβώτιον τῶν γεωμετρικῶν σωμάτων τοῦ σχολείου λαμβάνομεν τὸ τριγωνικὸν πρῖσμα καὶ τὸ παρατηροῦμεν μὲ προσοχήν. Ἂν δὲν ἔχῃ τὸ σχολεῖον γεωμετρικὰ σώματα, παρατηροῦμεν τὸν πολυέλαιον τῆς ἐκκλησίας καὶ βλέπομεν νὰ κρέμωνται πολλὰ τριγωνικὰ πρίσματα διότι ἔχουν τὴν ἰδιότητα ν' ἀναλύουν τὸ ἡλιακὸν φῶς εἰς τὰ ἑπτὰ χρώματά του.



Σχ. 49

Παρατηροῦντες τὸ τριγωνικὸν πρῖσμα (σχ. 46) βλέπομεν ὅτι αἱ δύο βάσεις εἶναι τρίγωνα ἴσα καὶ παράλληλα καὶ ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια ἀποτελεῖται ἀπὸ 3 παραλληλόγραμμα. Ἤτοι ἔχει ἐν ὅλῳ 5 ἕδρας, 9 ἀκμὰς καὶ 6 κορυφάς.

Τρίγωνον. (σχ. 49) λέγομεν τὸ ἐπίπεδον ποὺ ἔχει 3 πλευρὰς καὶ 3 γωνίας. Μία ἀπὸ τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου, ἡ ΑΓ, εἶναι ἡ βάσις του καὶ ἡ κάθετος ΒΔ, ἀπὸ τὴν ἀπέναντι κορυφὴν εἰς τὴν βάσιν, εἶναι τὸ ὕψος.

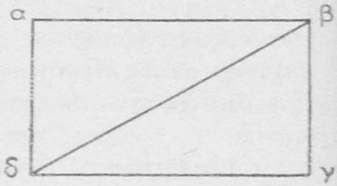
ΠΩΣ ΕΥΡΙΣΚΕΤΑΙ ΤΟ ΕΜΒΑΔΟΝ ΤΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

Πάρετε ἕνα φύλλον χαρτὶ καὶ κάνετέ το νὰ γίνῃ **ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον** (σχ. 50). Κατόπιν τσακίσετε τὸ φύλλον ἐπάνω εἰς τὴν διαγώνιον βδ καὶ τότε τὸ παραλληλόγραμμον χωρίζεται εἰς δύο τρίγωνα, τὸ αβδ καὶ βγδ. Τὰ τρίγωνα αὐτὰ χωρίσατέ τα μ' ἕνα ξυραφάκι, βάλετε τὸ ἕνα ἐπάνω εἰς τὸ ἄλλο καὶ θὰ ἰδῆτε ὅτι εἶναι ἴσα. Ἄρα ἔχουν τὸ ἴδιον ἐμβαδόν. Ἀλλὰ καὶ πρέπει νὰ εἶναι

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἴσα, διότι αἱ βάσεις των καὶ τὸ ὕψος εἶναι ἀπέναντι πλευραὶ τοῦ παραλληλογράμμου. Ἤτοι αβ=δγ καὶ αδ=βγ.

Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ τρίγωνον εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ παραλληλογράμμου, τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν ἰδίαν βάσιν καὶ τὸ ἴδιον ὕψος, ἕπεται ὅτι :



Σχ. 50

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου εὑρίσκεται ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸ μῆκος τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος καὶ τὸ γινόμενον διαιρεθῆ διὰ 2.

Τύπος: Ἐμβαδὸν τριγώνου $= \left(\frac{\beta \times \upsilon}{2}\right)$

Ἂν π.χ. ἡ βάσις τοῦ τριγώνου ΑΒΓ (σχ. 49) εἶναι 5 δάκτυλοι, καὶ τὸ ὕψος 4 δάκτυλοι, ἐμβαδόν: $\frac{\beta \times \upsilon}{2} = \frac{5 \times 4}{2}\ \frac{20}{2} = 10$ τ. δ.

Ἀσκήσεις: 1. Σχηματίσετε τρίγωνα εἰς τὴν αὐλὴν τοῦ σχολείου σας, μετρήσατε τὴν βάσιν καὶ τὸ ὕψος καὶ νὰ εὕρετε τὸ ἐμβαδόν των.

2. Τμῆμα σχολικοῦ κήπου εἶναι τρίγωνον μὲ βάσιν 14,50 μ. καὶ ὕψος 8 μ. Τί ἐμβαδὸν ἔχει ;

3. Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τριγώνου εἶναι 40 τ. μ. καὶ ἡ βάσις 10 μέτρα. Πόσον εἶναι τὸ ὕψος του ;

4. Τὸ σχεδιάγραμμα χωραφιοῦ σχήματος ὀρθογωνίου τριγώνου ἔγινε ὑπὸ κλίμακα $\frac{1}{400}$. Αἱ πλευραὶ τῆς ὀρθῆς γωνίας τοῦ σχεδιαγράμματος εἶναι 0,125 μ. καὶ 0,10 μ. Πόση εἶναι ἡ ἔκτασις τοῦ χωραφιοῦ ;

ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΙ ΤΡΙΓΩΝΙΚΟΥ ΠΡΙΣΜΑΤΟΣ

Πρόβλημα 1ον. Ὑποθέτομεν ὅτι τὸ τρ. πρῖσμα ΑΒΓΔΕΖ (σχ. 51) ἔχει τὰς πλευρὰς τῆς βάσεως ΕΔΖ: 4 δακτύλ., 6 δ. καὶ 8 δ. Τὸ ὕψος ΔΗ τῆς βάσεως εἶναι 5,8 δ. καὶ τὸ ὕψος ΒΔ τοῦ πρίσματος 20 δ. Πόση θὰ εἶναι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος;

Λύσις: α΄) Ἐμβ. κάτω βάσεως ΕΔΖ: $\frac{4 \times 5,8}{2} = \frac{23,2}{2} = 11,6$ τ. δ.

β΄) Ἐμβ. καὶ τῶν δύο βάσεων $11,6 \times 2 = 23,2$ τετρ. δάκτυλοι.

γ΄) Ἐμβ. παραπλεύρου ἐπιφανείας: περίμετρος βάσεως ΕΔΓ ἐπὶ ὕψος. Ἤτοι: $(4+6+8) \times 20 = 360$ τετρ. δάκτυλοι.

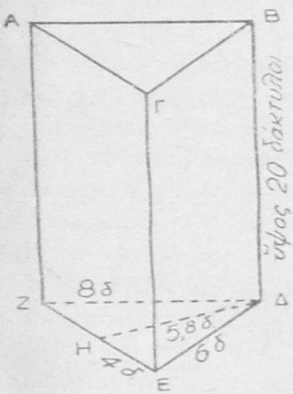
Καὶ δ΄) Ἐπιφάνεια τριγων. πρίσματος: ἐμβ. 2 βάσεων 23,2 τ. δ.+ἐμβαδ. παράπλ. ἐπιφ. 360 τ. δ.=383,2 τετραγ. δάκτυλοι.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ωστε:

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν ἐπιφανείας τριγ. πρίσματος, εὑρίσκομεν πρῶτον τὸ ἐμβαδὸν τῶν δύο βάσεων, ἔπειτα τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας καὶ προσθέτομεν.

2. Τί ἐπιφάνεια ἔχει ἄλλον τριγωνικὸν πρῖσμα ὅταν ἔχῃ πλευρὰς βάσεως 10 παλάμας, 8 παλάμας καὶ 7 παλάμας, ὕψος βάσεως 6 παλάμας καὶ ἀπόστασιν τῶν δύο βάσεων (ὕψος πρίσματος) 25 παλάμας;



Σχ. 51

Σημ. Ὅταν ἔχωμεν νὰ λύσωμεν ἓν γεωμετρικὸν πρόβλημα, εἶναι ἀπαραίτητον νὰ σχεδιάζωμεν τὸ σχῆμα τοῦ γεωμετρικοῦ σώματος εἰς τὸ τετράδιον, ὅπως ἔγινεν εἰς τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα. Κατόπιν νὰ γράφωμεν μὲ προσοχήν, ἐπάνω εἰς τὸ σχῆμα τὰς διαστάσεις ποὺ μᾶς δίδει τὸ πρόβλημα καὶ τότε μόνον νὰ ἐπιχειροῦμεν νὰ τὸ λύσωμεν. Ἂν δὲν γίνῃ αὐτὸ θὰ δυσκολευθῶμεν νὰ τὸ λύσωμεν· διότι εἶναι δύσκολον νὰ κρατῶμεν εἰς τὸν νοῦν μας τὸ σχέδιον καὶ νὰ ἐργαζώμεθα συγχρόνως.

ΟΓΚΟΣ ΟΡΘΟΥ ΤΡΙΓΩΝ. ΠΡΙΣΜΑΤΟΣ

Πρόβλημα 1. Ἔχομεν τὸ τριγωνικὸν πρῖσμα τοῦ σχήματος 51 καὶ θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον του.

Λύσις: α) Εὑρίσκομεν πρῶτον τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως ΕΔΖ τὸ ὁποῖον εἶναι $\frac{4 \times 5}{2} = 10$ τ. δ.

β΄) Πολλαπλασιάζομεν κατόπιν τὸ 10 τ. δ. ἐπὶ τὸ ὕψος 20 δ. καὶ εὑρίσκομεν ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος εἶναι 200 κυβικοὶ δάκτυλοι. Ὥστε:

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον ὀρθοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος, πολλαπλασιάζομεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος.

2. Τριγωνικὸν πρῖσμα ἔχει τὴν μίαν πλευρὰν βάσεως 5 παλ. καὶ τὴν κάθετον ἐπ' αὐτὴν (ὕψος) 4 παλάμας. Τὸ ὕψος τοῦ πρίσματος εἶναι 15 παλάμαι. Πόσαι κυβ. παλ. εἶναι ὁ ὄγκος;

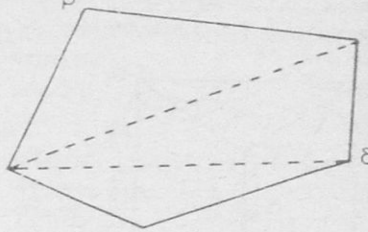
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΕΜΒΑΔΟΝ ΠΟΛΥΓΩΝΟΥ

Ἔχω τὸ πολύγωνον αβγδε (σχ. 52) καὶ θέλω νὰ εὕρω τὸ ἐμβαδόν του.

Ἀπὸ τὴν κορυφὴν α φέρω τὸς διαγωνίους (αγ καὶ αδ) καὶ τὸ πολύγωνον χωρίζεται εἰς τρία τρίγωνα (αβγ, αγδ καὶ αδε). Εὑρίσκω κατόπιν τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστου τριγώνου, προσθέτω καὶ ἔχω τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πολυγώνου. Ὥστε:

Διὰ νὰ εὕρω τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πολυγώνου, τὸ χωρίζω εἰς τρίγωνα, εὑρίσκω τὰ ἐμβαδά των καὶ προσθέτω.



Σχ. 52

— Σχηματίσετε πολύγωνα εἰς τὴν αὐλὴν τοῦ σχολείου καὶ νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδόν των, ὅπως ἐμάθαμε.

ΠΩΣ ΕΥΡΙΣΚΟΜΕΝ ΤΟΝ ΟΓΚΟΝ ΤΩΝ ΑΛΛΩΝ ΠΡΙΣΜΑΤΩΝ

Ὅπως τοῦ τριγωνικοῦ οὕτω καὶ οἱουδήποτε ἄλλου πρίσματος (τετραγωνικοῦ καὶ πολυγωνικοῦ), ὁ ὄγκος εὑρίσκεται ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος.

Ἂν π. χ. ἓν τετραγωνικὸν πρῖσμα ἔχει ἐμβαδὸν βάσεως 20 τ. παλ. καὶ ὕψος 5 παλάμας, ὄγκος $20 \times 5 = 100$ κυβ. παλάμαι.

Προβλήματα:

39. Οἰκόπεδον σχήματος τριγώνου μὲ βάσιν 40 μέτρα καὶ ὕψος 24 μέτρα, ἐπωλήθη πρὸς 140 δραχ. τὸ τετραγωνικὸν μέτρον. Πόσον στοιχίζει;

40. Τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως τριγ. πρίσματος εἶναι 120 τ. δ. καὶ τὸ ὕψος 25 δάκτυλοι. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος;

41. Ἄλλο τριγωνικὸν πρῖσμα ἔχει μῆκος πλευρῶν βάσεως 25 δακτύλους, 32 δ. καὶ 36 δ. Τὸ ὕψος τῆς βάσεως ποὺ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν πλευρὰν 32 δ. εἶναι 24,4 δ. καὶ ἡ ἀπόστασις τῶν δύο βάσεων (ὕψος τοῦ πρίσματος) 60 δάκτυλοι: Νὰ εὑρεθῆ α΄) ἡ ἐπιφάνεια, β΄) ὁ ὄγκος.

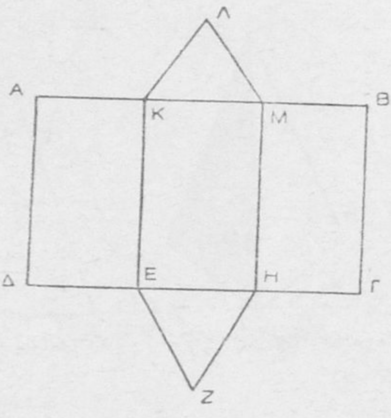
42. Ὁ κῆπος ἑνὸς σχολείου εἶναι πολύγωνον τὸ ὁποῖον ἐχωρί-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

σθη εἰς τρία τρίγωνα. Τὸ α' τρίγωνον ἔχει βάσιν 10 μ. καὶ ὕψος 14,2 μ. Τὸ β' βάσιν 23, 5 μ. καὶ ὕψος 19,4 μ. καὶ τὸ γ' τρίγωνον βάσιν 16,8 καὶ ὕψος 17,6 μέτρα. Ἠμπορεῖτε νὰ εὕρετε πόσα τ. μ. εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πολυγώνου;

ΑΝΑΠΤΥΓΜΑ ΟΡΘΟΥ ΤΡΙΓΩΝΙΚΟΥ ΠΡΙΣΜΑΤΟΣ

Γράφω ἐπάνω εἰς τὸ χαρτόνι τὴν εὐθεῖαν ΑΒ (σχ. 53), ἡ ὁποία εἶναι ἴση μὲ τὴν περίμετρον τῆς βάσεως τοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος ποὺ θέλω νὰ κάμω. Γράφω καὶ τὴν ΔΓ, παράλληλον τῆς ΑΒ, ἑνώνω τ' ἄκρα τῶν δύο εὐθειῶν καὶ σχηματίζεται τὸ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ. Μῆκος του εἶναι ἡ περίμετρος τῆς βάσεως τοῦ τριγ. πρίσματος καὶ πλάτος τὸ ὕψος του. Κατόπιν διαιρῶ τὸ παραλληλόγραμμον εἰς τρία μέρη καὶ σχηματίζονται αἱ τρεῖς ἕδραι τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας. Εἰς τὸ ἐπάνω καὶ εἰς τὸ κάτω μέρος τῆς μεσαίας ἕδρας (ΕΚΜΗ) σχεδιάζω τὰ τρίγωνα ΚΛΜ καὶ ΕΖΗ ὥστε αἱ δύο ἄλλαι πλευραί των νὰ εἶναι ἴσαι μὲ τὴν ΚΜ καὶ τὴν ΕΗ. Οὕτω θὰ ἔχω ἔμπροσθέν μου τὸ ἀνάπτυγμα τοῦ ὀρθοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος, ὅπως φαίνεται εἰς τὸ σχῆμα 53.



Σχ 53

Τέλος χαράσσω τὰς γραμμὰς τοῦ ἀναπτύγματος ἐλαφρὰ μὲ ξυραφάκι διπλώνω τὰς ἕδρας, κολλῶ τὰς κόψεις μὲ ταινίας χαρτιοῦ καὶ τὸ τριγωνικὸν πρῖσμα εἶναι ἕτοιμον. Ἂν θέλω νὰ βάλω ταινίας, ἀφήνω περιθώρια ὅπως ἔκαμα εἰς τὸν κύβον καὶ τὰ κολλῶ ἀπὸ τὸ μέσα μέρος νὰ μὴ φαίνωνται.

ΠΥΡΑΜΙΔΕΣ

Ἀπὸ τὸ κιβώτιον γεωμετρικῶν σωμάτων ξεχωρίζομεν τὰ παρακάτω σώματα. Αὐτὰ θὰ τὰ λέγωμεν **πυραμίδας** (σχ. 54).

Σχῆμα πυραμίδος ἔχουν αἱ στέγαι τῶν οἰκιῶν, πολλὰ μνημεῖα, αἱ ἀναμνηστικαὶ στῆλαι κ. ἄ.

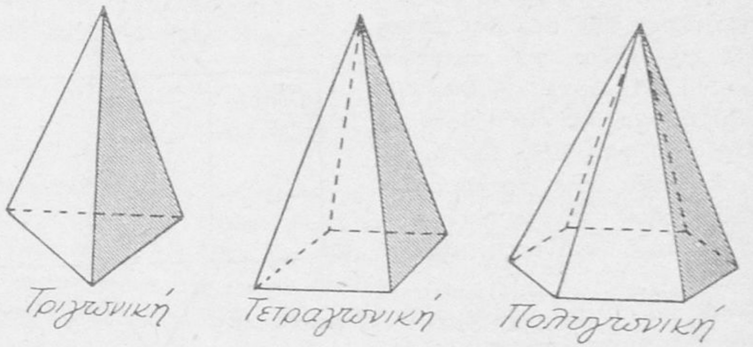
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ὅπως βλέπομεν, αἱ πυραμίδες ἔχουν μίαν μόνον βάσιν (τρί-γωνον, τετράγωνον, πολύγωνον) καὶ αἱ παράπλευροι ἕδραι τω εἶναι τρίγωνα τὰ ὁποῖα τελειώνουν εἰς ἓν σημεῖον, ἀπέναντι ἀπ τὴν βάσιν. Τὸ σημεῖον αὐτὸ λέγεται **κορυφὴ τῆς πυραμίδος**. Ὥστε:

Πυραμὶς λέγεται τὸ στερεὸν ποὺ ἔχει μίαν βάσιν καὶ αἱ παράπλευροι ἕδραι εἶναι τρίγωνα ποὺ τελειώνουν εἰς τὴν κορυφήν, κειμένην ἀπέναντι τῆς βάσεως.

Ἡ κάθετος ἀπὸ τὴν κορυφὴν ἐπὶ τὴν βάσιν, εἶναι τὸ ὕψος τῆ πυραμίδος.

Καὶ αἱ πυραμίδες, ὅπως τὰ πρίσματα, ἀπὸ τὸ σχῆμα τῆς βά-σεώς των εἶναι **τριγωνικαί, τετραγωνικαὶ** καὶ **πολυγωνικαί.**



Σχ. 54

Σημ. Τὸ ὄνομα πυραμὶς ἐλήφθη ἀπὸ τήν λέξιν ***πῦρ*** (= φωτιά). Οἱ ἀρ-χαῖοι Αἰγύπτιοι, οἱ ὁποῖοι ἦσαν πυρολάτραι καὶ ἐλάτρευον τὸν Ὄσιριν, Θεὸ τοῦ Ἡλίου καί τῆς φωτιᾶς, ἐπίστευον ὅτι αἱ ψυχαὶ τῶν πεθαμένων ἐπήγαινο εἰς αὐτόν. Διὰ τοῦτο εἰς τὰ μνήματα ἔδιδον τὸ σχῆμα πυραμίδος πού ὁμοιάζε μέ φλόγα. Πυραμίδες ὑπάρχουν πολλαὶ σήμερον εἰς τὴν Αἴγυπτον. Σπουδαιό-τεραι εἶναι τρεῖς εἰς τὰ Ν.Δ. καὶ πλησίον τοῦ Καΐρου — ***οἱ πυραμίδες τῆς Γίζης*** — ὅλαι τετραγωνικαὶ ἀπὸ ὀγκολίθους καί ἐχρησίμευον ὡς τάφοι τῶ βασιλέων. Ἡ μεσαία, τοῦ ***Χέοπος***, ἔχει πλευρὰν τετραγωνικῆς βάσεως 227 μέ-τρα, ὕψος 138 μέτρα καὶ ἀκμὴν 217 μέτρα.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΤΡΙΓΩΝΙΚΗ ΠΥΡΑΜΙΣ

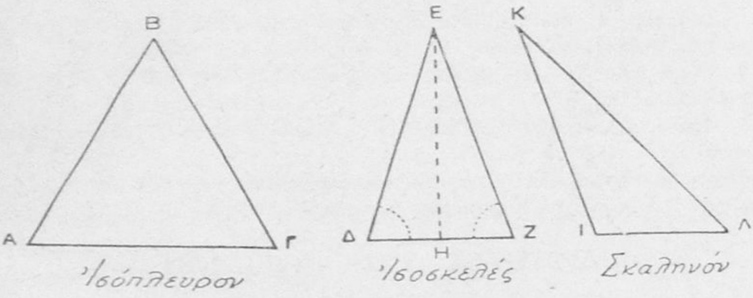
Ἡ τριγωνικὴ πυραμὶς (σχ. 54) ἀποτελεῖται ἀπὸ 4 τρίγωνα (1 εἶναι ἡ βάσις καὶ 3 ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια), 6 ἀκμὰς (3 ὁριζόντιοι γύρω εἰς τὴν βάσιν καὶ 3 πλάγιαι) καὶ 12 ἐπιπέδους γωνίας (ἀνὰ 3 εἰς ἑκάστην ἕδραν). Ὥστε :

Τριγωνικὴ πυραμὶς εἶναι τὸ στερεὸν τὸ ὁποῖον ἔχει βάσιν τρίγωνον καὶ αἱ τρεῖς παράπλευροι ἕδραι του εἶναι καὶ αὐταὶ τρίγωνα.

ΕΙΔΗ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

Α΄. Ἀπὸ τὰς πλευράς των τὰ τρίγωνα εἶναι τριῶν εἰδῶν :

1. **Ἰσόπλευρα,** ὅταν ἔχουν καὶ τὰς τρεῖς πλευρὰς ἴσας, ὅπως τὸ ΑΒΓ (σχ. 55).



Σχ. 55

2. **Ἰσοσκελῆ,** ὅταν ἔχουν τὰς δύο πλευρὰς (σκέλη) ἴσας. Οὕτω τὸ τρίγωνον ΔΕΖ εἶναι ἰσοσκελὲς διότι ΔΕ=ΕΖ.

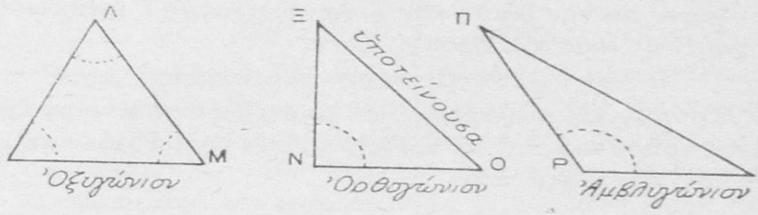
3. **Σκαληνά,** ὅταν καὶ αἱ τρεῖς πλευραὶ εἶναι ἄνισοι, ὅπως εἰς τὸ ΙΚΛ.

Β΄. Ἀλλὰ καὶ ἀπὸ τὰς γωνίας των εἶναι τριῶν εἰδῶν, ἤτοι :

1. **Ὀξυγώνια,** ὅταν καὶ αἱ τρεῖς γωνίαι εἶναι ὀξεῖαι, ὅπως εἰς τὸ ΚΛΜ (σχ. 56). Εἰς τὰ ὀξυγώνια τρίγωνα ὡς βάσις λαμβάνεται ὁποιαδήποτε πλευρά. Ἂν εἶναι ὅμως ἰσοσκελῆ, ὡς βάσις λαμβάνεται ἡ πλευρὰ ποὺ δὲν εἶναι ἴση, ὅπως ἡ ΔΖ τοῦ τριγώνου ΔΕΖ (σχ. 55).

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

2. **Ὀρθογώνια,** ὅταν ἡ μία γωνία των εἶναι ὀρθή, ὅπως εἰς τὸ ΞΝΟ. Εἰς τὰ ὀρθογώνια ἡ μία πλευρὰ τῆς ὀρθῆς γωνίας, ἡ ΝΟ, εἶναι ἡ βάσις καὶ ἡ ἄλλη, ἡ ΞΝ, εἶναι τὸ ὕψος. Ἡ με-



Σχ. 56

γαλυτέρα πλευρὰ ΞΟ ἡ ὁποία εἶναι ἀπέναντι ἀπὸ τὴν ὀρθὴν γωνίαν, λέγεται **ὑποτείνουσα.**

3. **Ἀμβλυγώνια,** ὅταν ἡ μία γωνία εἶναι ἀμβλεῖα, ὅπως τὸ ΠΡΣ (σχ. 56).

Ἀσκήσεις: 1. Ἂν τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 55) ἔχῃ μῆκος μιᾶς πλευρᾶς 4 δακτύλους, πόση εἶναι ἡ περίμετρος τοῦ τριγώνου;

2. Ἂν ἡ βάσις τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΔΕΖ (σχ. 55) εἶναι 5 δάκτυλοι καὶ τὸ ἓν σκέλος, τὸ ΕΖ, 8 δάκτυλοι, πόση εἶναι ἡ περίμετρος;

3. Ἰσοσκελὲς τρίγωνον ἔχει βάσιν 12 μ. καὶ ὕψος 18,60 μέτρα. Πόσα τετραγωνικὰ μέτρα εἶναι τὸ ἐμβαδόν του;

Ἂν τὸ ὀρθογώνιον ΝΞΟ (σχ. 55) εἶχε τὴν μίαν κάθετον 16 παλάμας καὶ τὴν ἄλλην 18 παλάμας, πόσον θὰ ἦτο τὸ ἐμβαδόν του;

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

1. Ἀφοῦ ἑκάστη πλευρὰ τοῦ τριγώνου εἶναι εὐθεῖα ἕπεται ὅτι εἶναι μικροτέρα ἀπὸ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων, αἱ ὁποῖαι ἀποτελοῦν μαζὶ τεθλασμένην γραμμήν.

2. Ἑκάστου τριγώνου ἡ μεγαλυτέρα πλευρὰ εἶναι ἀπέναντι ἀπὸ τὴν μεγαλυτέραν γωνίαν καὶ ἡ μικροτέρα πλευρὰ εἶναι ἀπέναντι ἀπὸ τὴν μικροτέραν γωνίαν. Κοιτάξετε τὰ τρίγωνα τοῦ σχήματος 56.

Τὸ ἄθροισμα καὶ τῶν τριῶν γωνιῶν παντὸς τριγώνου ἰσοῦται μὲ δύο ὀρθὰς γωνίας. Διότι, ἐὰν κόψωμεν τὰς τρεῖς γωνίας τοῦ τριγώνου καὶ τὰς θέσωμεν τὴν μίαν πλησίον τῆς ἄλλης, βλέπομεν ὅτι καὶ αἱ τρεῖς ἔχουν ἄθροισμα 180°, ἤτοι 2 ὀρθῶν.

4. Μετρῶ μὲ τὸ μοιρογνωμόνιον τὰς γωνίας Δ καὶ Ζ τοῦ ἰσο-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

σκελοῦς τριγώνου ΔΕΖ (σχ. 55) καὶ βλέπω ὅτι εἶναι ἴσαι. Κατόπιν ἀπὸ τὴν κορυφὴν Ε φέρω τὴν κάθετον ΕΗ καὶ μετρῶ μὲ τὸ ὑποδεκάμετρον τὰ τμήματα ΔΗ καὶ ΗΖ τῆς βάσεως. Βλέπω ὅτι καὶ αὐτὰ εἶναι ἴσα. Τέλος μετρῶ καὶ τὰς γωνίας ΔΕΗ καὶ ΗΕΖ καὶ βλέπω ὅτι καὶ αὐταὶ εἶναι ἴσαι. Ἀπ' τ' ἀνωτέρω βγαίνουν αὐτὰ τὰ συμπεράσματα :

α΄) Ὅτι αἱ παρὰ τὴν βάσιν γωνίαι τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι ἴσαι καί,

β΄) Ὅτι ἡ κάθετος ἀπὸ τὴν ἀπέναντι κορυφὴν εἰς τὴν βάσιν χωρίζει τὴν βάσιν καὶ τὴν γωνίαν τῆς κορυφῆς εἰς δύο ἴσα μέρη.

Ἀσκήσεις : 1. Ἂν ἓν τρίγωνον ἔχῃ τὴν μίαν γωνίαν 80° καὶ τὴν ἄλλην 50°, πόσων μοιρῶν θὰ εἶναι ἡ τρίτη γωνία ;

2. Ὑπάρχει τρίγωνον τὸ ὁποῖον ἔχει γωνίας 68°, 65° καὶ 40° ;

3. Ἂν ἡ μία γωνία τοῦ τριγώνου εἶναι $^2/_8$ τῆς ὀρθῆς καὶ ἡ ἄλλη $^4/_8$ τῆς ὀρθῆς, τί μέρος τῆς ὀρθῆς εἶναι ἡ τρίτη γωνία ;

4. Πόσων μοιρῶν εἶναι ἑκάστη γωνία ἰσοπλεύρου τριγώνου καὶ διατί ;

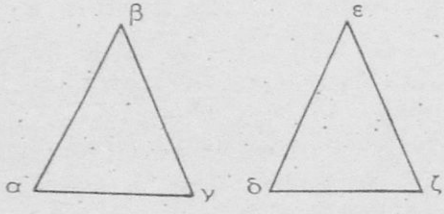
5. Ἂν τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΔΕΣ (σχ. 55) ἔχῃ τὴν γωνίαν Δ 75°, πόσων μοιρῶν εἶναι ἡ γωνία Ζ καὶ πόσων ἡ γωνία Ε ;

6. Ὅταν ἡ ἀπέναντι τῆν βάσεως γωνία ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι 22°, πόσων μοιρῶν εἶναι ἑκάστη ἀπὸ τὰς δύο ἄλλας γωνίας ;

ΠΟΤΕ ΔΥΟ ΤΡΙΓΩΝΑ ΕΙΝΑΙ ΙΣΑ

1. Εἰς φύλλον χάρτου γράφω δύο τρίγωνα, τὰ ὁποῖα νὰ ἔχουν τὰς πλευρὰς μίαν πρὸς μίαν ἴσας καὶ τὰς γωνίας ἴσας. Κατόπιν ἀφαιρῶ τὰ τρίγωνα ἀπὸ τὸ χαρτὶ καὶ τὰ βάζω τὸ ἓν ἐπὶ τοῦ ἄλλου ὥστε νὰ ἐφαρμόσουν αἱ ἴσαι πλευραί των. Τί παρατηρῶ ;

2. Γράφω τὰ τρίγωνα αβγ καὶ δεζ (σχ. 57) ὥστε αβ=δε, βγ=εζ καὶ ἡ γωνία β ἴση μὲ τὴν γωνίαν ε. Κατόπιν μετρῶ καὶ τὰς πλευρὰς αγ καὶ δζ. Τί παρατηρῶ ;



Σχ 57

3. Γράφω δύο ἀκόμη τρίγωνα ὥστε νὰ ἔχουν μίαν πλευρὰν ἴσην (π.χ. 8 δακτύλους καὶ τὰς γωνίας ποὺ εἶναι εἰς τὰ ἄκρα της, ἴσας. Ἔπειτα μετρῶ τὰς ἄλλας δύο πλευρὰς τῶν τριγώνων. Τί παρατηρῶ ;

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἀπὸ τὰς ὡς ἄνω ἐργασίας εὑρίσκω ὅτι δύο τρίγωνα εἶναι ἴσα·

α) Ὅταν ἔχουν τὰς τρεῖς πλευρὰς καὶ τὰς τρεῖς γωνίας ἴσας·

β) Ὅταν ἔχουν δύο πλευρὰς ἴσας καὶ τὰς μεταξὺ αὐτῶν σχηματιζομένας γωνίας ἴσας. Καὶ

γ΄) Ὅταν ἔχουν μίαν πλευρὰν ἴσην καὶ τὰς παρ᾽ αὐτὴν γωνίας ἴσας.

Ἀσκήσεις: 1. Νὰ σχηματίσῃς τρίγωνον τοῦ ὁποίου αἱ δύο πλευραὶ νὰ εἶναι 10 δάκτυλοι, 12 δάκτυλοι καὶ ἡ μεταξὺ τῶν πλευρῶν τούτων γωνία 80°.

2. Σχηματίσετε ἄλλο τρίγωνον τοῦ ὁποίου μία πλευρὰ νὰ εἶναι 5 δάκτυλοι καὶ αἱ γωνίαι ποὺ εἶναι εἰς τὰ ἄκρα της 52° καὶ 68°.

ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΚΑΝΟΝΙΚΗΣ ΤΡΙΓΩΝΙΚΗΣ ΠΥΡΑΜΙΔΟΣ

Ἡ τριγωνικὴ πυραμὶς λέγεται κανονικὴ ὅταν ἡ βάσις της εἶναι ἰσόπλευρον τρίγωνον καὶ αἱ παράπλευροι ἕδραι ἰσοσκελῆ τρίγωνα. Τὰ ἰσοσκελῆ τρίγωνα εἶναι ὅλα ἴσα διότι ἔχουν τὴν ἰδίαν βάσιν καὶ τὸ ἴδιον ὕψος.

Παράδειγμα. Κανονικὴ πυραμὶς ἔχει τὴν μίαν πλευρὰν βάσεως 4 παλ., ὕψος βάσεως 3,4 παλ. καὶ ὕψος μιᾶς παραπλεύρου ἕδρας 10 παλάμας. Τί ἐμβαδὸν ἔχει ἡ ἐπιφάνειά της;

Σημ. Ὁ διδάσκων δύναται νὰ ἐξηγήσῃ εἰς τοὺς μαθητάς του ὅτι τὸ ὕψος ἰσοπλεύρου τριγώνου ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ μῆκος τῶν πλευρῶν του. Τοῦτο ἔχοντες ὑπ᾽ ὄψει μας εἰς τὸ πρόβλημα ἐθέσαμεν 3,4 παλάμας.

Λύσις α΄) Ἐμβ. παραπλ. ἕδρας: $\frac{4\times 10}{2}=\frac{40}{2}=20$ τ.π.

β΄) Ἐμβ. καὶ τῶν τριῶν παραπλ. ἑδρῶν $20\times 3=60$ τ.π.

γ΄) Ἐμβ. βάσεως: $\frac{4\times 3{,}4}{3}=\frac{13{,}6}{2}=6{,}8$ τ. παλάμαι. Καὶ

δ΄) Ἐπιφάνεια ὅλης τῆς πυραμίδος $60+6{,}8=66{,}8$ τ.π.

Ὥστε:

Διὰ νὰ εὕρω τὴν ἐπιφάνειαν κανονικῆς τριγωνικῆς πυραμίδος, εὑρίσκω πρῶτον τὸ ἐμβαδὸν μιᾶς παραπλεύρου ἕδρας καὶ τὸ τριπλασιάζω νὰ ἔχω τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας. Ἔπειτα εὑρίσκω τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως καὶ προσθέτω.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Σημ. Ἂν ἡ πυραμὶς δὲν εἶναι κανονική, εὑρίσκω τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστου τριγώνου χωριστὰ καὶ προσθέτω.

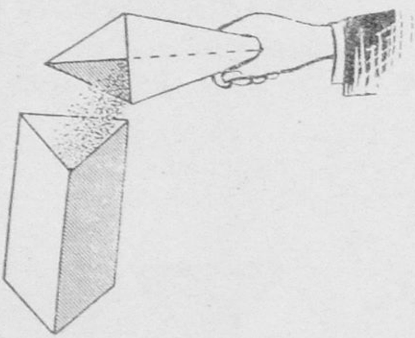
Προβλήματα

43. Τριγωνικὴ πυραμὶς κανονικὴ ἔχει πλευρὰν βάσεως 1,20 μ., ὕψος βάσεως 1,02 μ. καὶ ὕψος παραπλεύρων ἑδρῶν 2 μέτρα. Πόσα τετραγωνικὰ μέτρα εἶναι ἡ ἐπιφάνεια;

44. Τρίτη τριγωνικὴ πυραμὶς κανονικὴ ἔχει περίμετρον βάσεως 6,60 μ., ὕψος βάσεως 1,87 μ. καὶ ὕψος παραπλεύρων ἑδρῶν 4,50 μ. Τί ἐπιφάνειαν ἔχει;

ΟΓΚΟΣ ΤΡΙΓΩΝΙΚΗΣ ΠΥΡΑΜΙΔΟΣ

Ἀπὸ χαρτόνι κατασκευάζω μίαν τριγωνικὴν πυραμίδα καὶ κατόπιν ἓν τριγωνικὸν πρῖσμα ὥστε καὶ τὰ δύο σώματα νὰ ἔχουν τὴν ἰδίαν βάσιν καὶ τὸ ἴδιον ὕψος (σχ. 58). Γεμίζω τὴν πυραμίδα μὲ ἄμμον καὶ τὴν ἀδειάζω εἰς τό πρῖσμα. Ἅμα αὐτὸ γίνῃ τρεῖς φορὰς τὸ πρῖσμα γεμίζει.



Σχ. 58

Ἀπὸ τὸ παράδειγμα τοῦτο βλέπω ὅτι ἡ πυραμὶς χωρεῖ τὸ τρίτον ἀπ' ὅ,τι χωρεῖ τὸ πρῖσμα τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν ἰδίαν βάσιν καὶ τό ἴδιον ὕψος. Ἂν π.χ. μία τριγωνικὴ πυραμὶς ἔχει ἐμβαδὸν βάσεως 20 τ. δ. καὶ ὕψος 15 δ. ὁ ὄγκος θὰ εἶναι $(20 \times 15) : 3 = 100$ κ.δ. Ὥστε:

Διὰ νὰ εὕρω τὸν ὄγκον τριγωνικῆς πυραμίδος πολλαπλασιάζω τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος καὶ τὸ γινόμενον διαιρῶ διὰ 3.

Σημ. Κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον εὑρίσκεται ὁ ὄγκος τῆς τετραγωνικῆς καὶ πολυγωνικῆς πυραμίδος.

Προβλήματα

45. Τὸ ἐμβαδὸν βάσεως τριγωνικῆς πυραμίδος εἶναι 12 τετραγωνικαὶ παλάμαι καὶ τὸ ὕψος 20 παλάμαι. Τί ὄγκον ἔχει;

$$\text{Ὄγκος}: \frac{\text{ἐμβ. } \beta \times \upsilon}{3} = \frac{12 \times 20}{3} = ;$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

46. Τριγωνικὴ πυραμὶς ἔχει βάσιν ὀρθογώνιον τρίγωνον μὲ τὴν μίαν κάθετον πλευρὰν 1,20 μ., τὴν ἄλλην 1,50 μ. καὶ ὕψος αὐτῆς 4 μ. Πόσα κυβικὰ μέτρα εἶναι ὁ ὄγκος της;

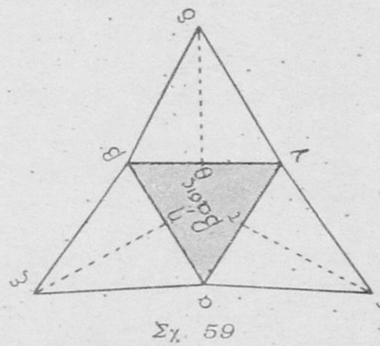
47. Ἐπάνω εἰς ἀναμνηστικὴν στήλην εἶναι τετραγωνικὴ πυραμὶς μαρμαρίνη μὲ περίμετρον βάσεως 2 μ. καὶ ὕψος πυραμίδος 1,50 μ. Νὰ εὑρεθῇ: α΄) Ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδος καὶ β΄) τὸ βάρος της. (Εἰδικὸν βάρος μαρμάρου 2,7).

48. Πυραμὶς ἔχει ἐμβαδὸν βάσεως $1\frac{1}{2}$ τ.μ. καὶ ὄγκον $2\frac{1}{2}$ κ. μ. Πόσον εἶναι τὸ ὕψος; (υ=ὄγκ. : ἐμβ. βάσ. × 3).

49. Ἡ πυραμὶς τοῦ Χέοπος εἶναι τετραγωνικὴ μὲ πλευρὰν βάσεως 227 μ. καὶ ὕψος 138 μ. Τί ὄγκον ἔχει;

ΠΩΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΖΕΤΑΙ Η ΤΡΙΓΩΝΙΚΗ ΠΥΡΑΜΙΣ

Σχεδιάζω ἐπάνω εἰς τὸ χαρτόνι ἓν ἰσόπλευρον τρίγωνον, τὸ αβγ. Εἰς τὸ μέσον κάθε πλευρᾶς τοῦ τριγώνου φέρω ἴσας καθέτους, τὴν ξη, τὴν δθ καὶ τὴν ει. Κατόπιν ἀπὸ τὸ σημεῖον ξ, φέρω τὰς εὐθείας ξα καὶ ξβ, ἀπὸ τὸ σημεῖον δ, τὰς εὐθείας δβ καὶ δγ καὶ ἀπὸ τὸ σημεῖον ε, τὰς εὐθείας εγ καὶ εα. Μὲ τὸν τρόπον τοῦτον γίνεται τὸ ἀνάπτυγμα τῆς τριγωνικῆς πυραμίδος (σχ. 59). Κατόπιν χαράσσω μὲ ξυραφάκι τὰ ἰσοσκελῆ τρίγωνα, τὰ διπλώνω πρὸς τὸ ἐπάνω μέρος ὥστε νὰ ἑνωθοῦν αἱ κορυφαὶ των, κολλῶ τὰς ἀκμὰς μὲ ταινίας χαρτιοῦ καὶ ἡ τριγωνικὴ πυραμίς μου εἶναι ἕτοιμος.



Σχ. 59

Σημ. Μὲ τὸν ἴδιον τρόπον κατασκευάζονται ἡ τετραγωνικὴ καὶ ἡ πολυγωνική πυραμίς.

ΚΟΛΟΥΡΟΣ ΠΥΡΑΜΙΣ (*)

Νὰ καὶ μία πυραμὶς μὲ κομμένον τὸ ἐπάνω μέρος, παράλληλα εἰς τὴν βάσιν της. Αὐτὴν θὰ λέγωμεν κόλουρον πυραμίδα (σχ. 60).

---

* Ὁ διδάσκων ἔχει ἕτοιμον τὴν σωστὴν πυραμίδα ἀπὸ πηλόν, κόπτει τὸ ἐπάνω μέρος ἔμπροσθεν τῶν μαθητῶν του καὶ γίνεται ἡ κόλουρος πυραμίς.

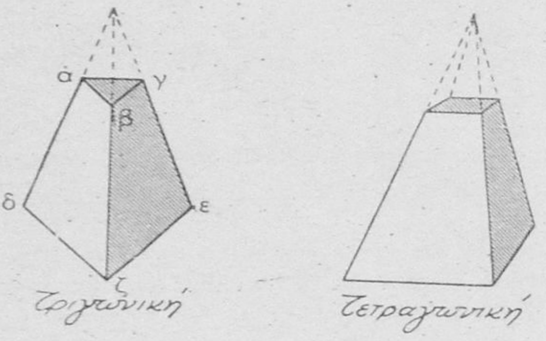
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Σχῆμα κολούρου πυραμίδος ἔχουν αἱ καπνοδόχοι τῶν οἰκιῶν αἱ τῶν ἐργοστασίων, μερικοὶ πύργοι, αἱ ἀναμνηστικαὶ στῆλαι, αἱ σκάφαι, τὰ καρφιὰ καὶ πολλὰ ἄλλα σώματα.

Ὅπως βλέπομεν ἡ κόλουρος τριγωνικὴ πυραμὶς ἔχει πέντε ἕδρας. Δύο βάσεις (ἡ αβγ καὶ ἡ δζε) αἱ ὁποῖαι εἶναι τρίγωνα παράλληλα καὶ ἄνισα καὶ τρεῖς παράπλευροι ἕδραι (ἤτοι ἡ αβζδ, ἡ γεδ καὶ ἡ ἀγεδ) αἱ ὁποῖαι εἶναι τετράπλευρα. Ἐπίσης ἔχει 9 ἀκμὰς καὶ 6 κορυφάς.

— Κατὰ τί διαφέρει ἡ κόλουρος τριγωνικὴ πυραμὶς ἀπὸ τὸ τριγωνικὸν πρῖσμα;

Ἡ κόλουρος τετραγωνικὴ πυραμὶς (σχ. 60) ἔχει 2 βάσεις τετράγωνα παράλληλα καὶ ἄνισα καὶ 4 παραπλεύρους ἕδρας αἱ



Σχ. 60

ὁποῖαι εἶναι τετράπλευρα. Ἤτοι ἐν ὅλῳ 6 ἕδρας, 12 ἀκμὰς καὶ 8 κορυφάς. Ἑπομένως:

Κόλουρος πυραμὶς λέγεται τὸ στερεὸν τὸ ὁποῖον ἔχει δύο βάσεις παραλλήλους, ὁμοίας ἀλλ' ὄχι ἴσας καὶ τὰς παραπλεύρους ἕδρας τετράπλευρα.

Ἑκάστη κόλουρος πυραμὶς ἔχει δύο ἕδρας περισσοτέρας ἀπ' ὅ,τι λέγει τὸ ὄνομά της. Οὕτω ἡ τριγωνικὴ ἔχει 5 ἕδρας (3+2), ἡ τετραγωνικὴ ἔχει 6 ἕδρας (4+2) κ.ο.κ.

Ἀσκήσεις: Ἰχνογραφήσατε μίαν κόλουρον πυραμίδα, μίαν τριγωνικήν μίαν τετραγωνικὴν καὶ μίαν πενταγωνικὴν καὶ νὰ δείξετε τὰς βάσεις καὶ τὰς παραπλεύρους ἕδρας των.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΤΡΑΠΕΖΙΟΝ

Τοποθετήσετε μίαν παράπλευρον ἕδραν τῆς κολούρου πυραμίδος σας ἐπάνω εἰς τὸ χαρτὶ καὶ γράψετε γύρω 4 εὐθείας. Τό ε θὰ γίνῃ τὸ τετράπλευρον αβγδ (σχ. 61), τὸ ὁποῖον ἔχει τὰς πλευρὰς αβ καὶ γδ παραλλήλους, ἀλλ' ὄχι ἴσας καὶ τὰς αδ καὶ βγ πλαγίας. Τὸ παράπλευρον αὐτὸ θά τὸ λέγωμεν **τραπέζιον**. Ὥστε :

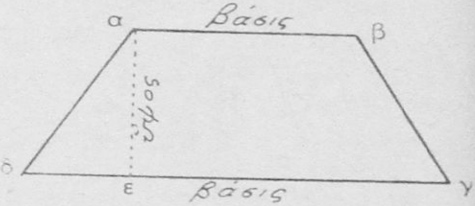
Τραπέζιον λέγομεν τὸ τετράπλευρον τὸ ὁποῖον ἔχει μόνον τὰς δύο πλευρὰς παραλλήλους καὶ ἀνίσους.

Αἱ παράλληλοι πλευραὶ λέγονται βάσεις καὶ ἡ κάθετος αε ἀπὸ τὴν ἀπέναντι κορυφὴν εἰς τὴν βάσιν λέγεται ὕψος.

Τὸ τραπέζιον τοῦ ὁποίου αἱ πλάγιαι πλευραὶ εἶναι ἴσαι, λέγεται **ἰσοσκελὲς τραπέζιον** (σχ. 61).

Εἰς τὸ ἰσοσκελὲς τραπέζιον αἱ διαγώνιοι εἶναι ἴσαι, ἐνῷ εἰς ὅλα τὰ ἄλλα εἶναι ἄνισοι.

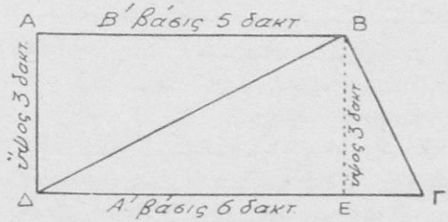
Ἐρώτησις: Κατὰ τί διαφέρει τὸ τραπέζιον ἀπὸ τὸ παραλληλόγραμμον ;



Σχ. 61

ΠΩΣ ΕΥΡΙΣΚΕΤΑΙ ΤΟ ΕΜΒΑΔΟΝ ΤΡΑΠΕΖΙΟΥ

Παράδειγμα. Ἔχω τὸ τραπέζιον ΑΒΓΔ (σχ. 62) μὲ τὴν μίαν βάσιν 6 δακτύλους, τὴν ἄλλην 5 δακτύλους καὶ τὸ ὕψος 3 δακτύλους.



Σχ. 62

Λύσις. Φέρω τὴν διαγώνιον ΔΒ καὶ τὸ τραπέζιον χωρίζεται εἰς δύο τρίγωνα, τὸ ΑΒΔ καὶ ΔΒΓ.

Τὰ τρίγωνα αὐτὰ ἔχουν τό ἴδιον ὕψος διότι ΑΔ=ΒΕ, ὡς ἴση ἀπόστασις μεταξὺ δύο παραλλήλων. Εὑρίσκω τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστου τριγώνου καὶ προσθέτω. Οὕτω ἔχω :

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

α') Ἐμβ. τριγών. ΑΒΔ : $\frac{\beta \times \upsilon}{2} = \frac{6 \times 3}{2} = \frac{18}{2} = 9$ τ. δάκτυλοι.

β') Ἐμβ. τριγών. ΔΒΓ : $\frac{\beta \times \upsilon}{2} = \frac{5 \times 3}{2} = \frac{15}{2} = 7{,}5$ τ. δάκτυλοι.

Ἐμβαδὸν τραπεζίου 16,5 τετρ. δάκτυλοι

Ἀφοῦ τὰ δύο τρίγωνα ἔχουν τὸ ἴδιον ὕψος καὶ βάσιν τὰς παραλλήλους ἕδρας τοῦ τραπεζίου, τὸ ἐμβαδὸν εὑρίσκεται εὐκολώτερον ὡς ἑξῆς :

α') Προσθέτω τὸ μῆκος τῶν δύο βάσεων καὶ ἔχω: 6+5=11 δ.

β') Διαιρῶ τὸ 11 διὰ 2 καὶ εὑρίσκω ἡμιάθροισμα 5,5 δακτ.

γ') Πολλαπλασιάζω τὸ ἡμιάθροισμα 5,5 ἐπὶ τό ὕψος 3 καὶ εὑρίσκω ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου εἶναι 16,5 τ. δ. Ὥστε:

Διὰ νὰ εὕρω τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου, πολλαπλασιάζω τὸ ἡμιάθροισμα τῶν δύο βάσεων ἐπὶ τὸ ὕψος.

Προβλήματα :

50. Ἡ αὐλὴ τοῦ σχολείου εἶναι τραπέζιον μὲ τὴν μίαν βάσιν 12,4 μ., τὴν ἄλλην 10 μ. καὶ ὕψος 15 μ. Πόσα τετραγωνικὰ μέτρα εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς αὐλῆς;

51. Οἰκόπεδον σχήματος τραπεζίου μὲ βάσεις 24,10 μ., 29 μ. καὶ ὕψος 12,50 μ. ἐπωλήθη πρὸς 220 δραχμὰς τὸ τετραγωνικὸν μέτρον. Πόσον στοιχίζει;

52. Κῆπος σχήματος τραπεζίου ἔχει τὴν μίαν βάσιν 40 μ. ὕψος 10 μ. καὶ ἐμβαδὸν 500 τ. μ. Πόσα μέτρα εἶναι ἡ ἄλλη βάσις;

53. Τὸ σχεδιάγραμμα περιβολίου σχήματος τραπεζίου ἔγινεν ὑπὸ κλίμακα $\frac{1}{1000}$. Αἱ δύο βάσεις τοῦ σχεδίου ἔχουν μῆκος 0,06 μ. καὶ 0,04 μ., ὕψος δὲ 0,05. Πόση εἶναι ἡ ἔκτασις τοῦ περιβολιοῦ καὶ τί στοιχίζει ἂν πωληθῇ πρὸς 7.500 δραχμὰς τὸ στρέμμα;

ΠΩΣ ΕΥΡΙΣΚΕΤΑΙ Η ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΚΟΛΟΥΡΟΥ ΠΥΡΑΜΙΔΟΣ

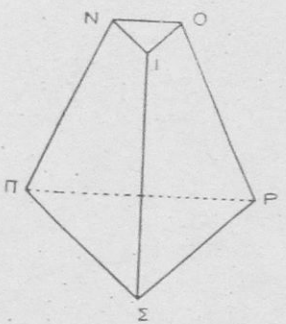
Ἔχω τὴν κόλουρον τριγωνικὴν πυραμίδα (σχ. 63) τὴν ὁποίαν ξεδιπλώνω καὶ σχηματίζεται τὸ ἀνάπτυγμά της (σχ. 64). Ἂν παρατηρήσω μὲ προσοχὴν τὸ ἀνάπτυγμα, βλέπω ὅτι ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰς δύο τριγωνικὰς βάσεις ΠΡΣ'' καὶ ΝΟΙ'', ἡ δὲ παράπλευ-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

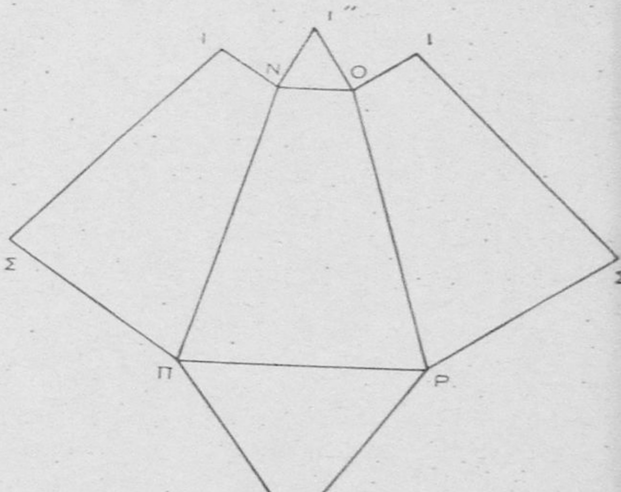
ρος ἐπιφάνεια εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν τραπεζίων ΝΙΣΠ, ΝΟΡΠ, ΡΟΙΣ. Ἀλλὰ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κάθε τραπεζίου εὑρίσκω ἂν πολλαπλασιάσω τὸ ἡμιάθροισμα τῶν βάσεών του ἐπὶ τὸ ὕψος. Ἐπειδὴ δὲ ὅλα τὰ τραπέζια ἔχουν τὸ ἴδιον ὕψος, τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας θὰ εὕρω ἂν πολλαπλασιάσω τὸ ἡμιάθροισμα τῶν περιμέτρων τῶν δύο βάσεων αὐτῆς ἐπὶ τὸ ὕψος ἑνὸς τραπεζίου. Ὥστε:

Διὰ νὰ εὕρω τὴν ἐπιφάνειαν κανονικῆς κολούρου πυραμίδος εὑρίσκω πρῶτον τὸ ἐμβαδὸν τῶν δύο βάσεων, ἔπειτα τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας καὶ προσθέτω.

Παράδειγμα. Ὑποθέτω ὅτι ἡ κόλουρος κανονικὴ πυραμὶς τοῦ σχήματος 63, ἔχει βάσεις ἰσόπλευρα τρίγωνα. Τὸ κάτω τρίγωνον



Σχ. 63



Σχ. 64

ἔχει πλευρὰν 6 δακτ. καὶ ὕψος 5 δ. καὶ τὸ ἐπάνω πλευρὰν 3 δακτ. καὶ ὕψος 2,5 δακτύλους. Τὸ ὕψος τῶν τραπεζίων εἶναι 16 δάκτυλοι. Τί ἐπιφάνειαν ἔχει;

Λύσις α') Ἐμβαδὸν κάτω βάσεως: $\frac{6\times5}{2}=\frac{30}{2}=15$ τ. δ. Ἐμ-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

βαδὸν ἐπάνω βάσεως: $\frac{3\times2,5}{2}=\frac{7,5}{2}=3,75$ τ δ καὶ τῶν δύο βάσεων: $15+3,75=18,75$ τετραγωνικοὶ δάκτυλοι.

β') Περίμετρος κάτω βάσεως: $6+6+6=18$ δάκτυλοι. Τῆς ἐπάνω $3+3+3=9$ δάκτυλοι. Ἄθροισμα περιμέτρων $18+9=27$ δάκτυλοι. Καὶ ἡμιάθροισμα $=13,5$ δάκτυλοι·

γ') Ἐμβαδὸν παραπλεύρου ἐπιφανείας $13,5\times16=216$ τ. δ. Καὶ

δ') Ἐπιφάνεια κολούρου πυραμίδος: $18,75+216=234,75$ τετραγωνικοὶ δάκτυλοι.

ΟΓΚΟΣ ΚΟΛΟΥΡΟΥ ΠΥΡΑΜΙΔΟΣ

Ὅταν: ΔΕ=4 δ. ΑΒ=15 δ.
ΕΖ=5 δ. ΘΛ=3 δ. ΑΚ=6δ.

Ὄγκος τῆς σωστῆς πυραμίδος ΑΓΔΕ

α') Ἐμβ. βάσεως: $\frac{4\times5}{2}=\frac{20}{2}$

β') Ὄγκος πυρ.: $\frac{10\times12}{3}=\frac{120}{3}=40$κ.

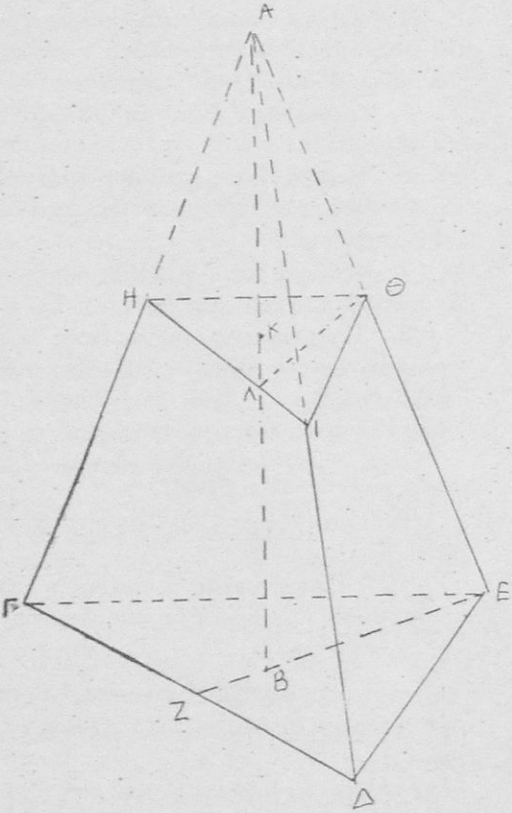
Μεῖον ὄγκος ἄνω τμήματο, τοῦ ΑΗΙΘ, πού λείπει:

α') Ἐπιφ. βάσεως: $\frac{2\times3}{2}=\frac{6}{2}=3$ τ. δ.

β') Ὄγκος: $\frac{3\times6}{4}=\frac{18}{3}=6$ τ. δ.

Ὥστε, ὁ ὄγκος τῆς κολ. πυραμίδος ΓΔΕ ΗΘΙ, εἶναι: $40-6=$ $=34$ κυβ. δ·

Ὥστε: Διὰ νὰ εὕρω τὸν ὄγκον τῆς κολούρου πυραμίδος, εὑρίσκω τὸν ὄγκον τῆς σωστῆς πυραμίδος, ἀπὸ τὴν ὁποίαν ἔγινεν ἡ κόλουρος, ἀφαιρῶ τὸν ὄγκον ποὺ λείπει καὶ τὸ ὑπόλοιπον εἶναι ὁ ὄγκος τῆς κολούρου πυραμίδος.



Σχ. 64 α

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΓΕΝΙΚΗ ΕΠΑΝΑΛΗΨΙΣ ΤΩΝ ΚΑΝΟΝΩΝ ΔΙΑ ΤΗΝ ΜΕΤΡΗΣΙΝ ΕΜΒΑΔΟΥ ΚΑΙ ΟΓΚΟΥ ΤΩΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ

Α΄. Κανόνες εὑρέσεως ἐμβαδοῦ

1. **Τετραγώνου:** Πολλαπλασιάζω τὸ μῆκος τῆς μιᾶς πλευρᾶς ἐπὶ τὸν ἑαυτόν του.

2. **Ἐπιφανείας κύβου:** Εὑρίσκω τὸ ἐμβαδὸν τῆς μιᾶς ἕδρας καὶ πολλαπλασιάζω ἐπὶ τὸ 6.

3. **Παραλληλογράμμου:** Πολλαπλασιάζω τὸ μῆκος ἐπὶ τὸ πλάτος.

4. **Ἐπιφανείας παραλληλεπιπέδου:** Εὑρίσκω τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας (περίμετρος ἐπὶ τὸ ὕψος), κατόπιν τῶν δύο βάσεων καὶ προσθέτω.

5. **Τριγώνου:** Πολλαπλασιάζω τὴν βάσιν ἐπὶ τὸ ὕψος καὶ διαιρῶ διὰ 2.

6. **Ἐπιφανείας τριγωνικοῦ πρίσματος:** Εὑρίσκω πρῶτον τὸ ἐμβαδὸν τῶν δύο βάσεων, ἔπειτα τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας καὶ προσθέτω.

7. **Πολυγώνου:** Χωρίζω τὸ πολύγωνον εἰς τρίγωνα, εὑρίσκω τὰ ἐμβαδά των καὶ προσθέτω.

8. **Ἐπιφανείας κανονικῆς τριγωνικῆς πυραμίδος:** Εὑρίσκω πρῶτον τὸ ἐμβαδὸν μιᾶς παραπλεύρου ἕδρας καὶ πολλαπλασιάζω ἐπὶ 3, νὰ ἔχω τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας. Κατόπιν εὑρίσκω τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως καὶ προσθέτω.

Σημ. Ἂν ἡ πυραμὶς δὲν εἶναι κανονική, εὑρίσκω τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστου τριγώνου χωριστὰ καὶ προσθέτω.

9. **Τραπεζίου:** Πολλαπλασιάζω τὸ ἡμιάθροισμα τῶν δύο βάσεων ἐπὶ τὸ ὕψος.

10. **Ἐπιφανείας κολούρου πυραμίδος:** Εὑρίσκω πρῶτον τὸ ἐμβαδὸν τῶν δύο βάσεων, ἔπειτα τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας καὶ προσθέτω.

Β.΄ Κανόνες εὑρέσεως ὄγκου

1. **Κύβου:** Πολλαπλασιάζω τὴν ἀκμὴν ἐπὶ τὸν ἑαυτόν της δύο φορές.

2. **Παραλληλεπιπέδου:** Πολλαπλασιάζω τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

3. **Πρίσματος**: Πολλαπλασιάζω τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος.

4. **Πυραμίδος**: Πολλαπλασιάζω τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος καὶ διαιρῶ διὰ 3.

5. **Κολούρου πυραμίδος**: Ἀπὸ τὸν ὄγκον τῆς σωστῆς πυραμίδος, ἀπὸ τὴν ὁποίαν ἔγινεν ἡ κόλουρος ἀφαιρῶ τὸν ὄγκον τῆς κομμένης καὶ τὸ ὑπόλοιπον εἶναι ὄγκος τῆς κολούρου πυραμίδος.

ΔΙΑΦΟΡΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Ἐπανάληψις ὕλης Ε΄ τάξεως

1. Ἡ πλατεῖα τοῦ χωριοῦ μου ἔχει σχῆμα τετραγώνου μὲ πλευρὰν 37,5 μέτρων καὶ πρόκειται νὰ φυτευθῆ γύρω μὲ καλλωπιστικὰ δένδρα. Πόσα δένδρα θὰ χρειασθοῦν ἂν ἡ ἀπόστασις μεταξύ των εἶναι δύο μέτρα;

2. Ἡ ταράτσα τοῦ σπιτιοῦ μου εἶναι τετράγωνον μὲ πλευρὰν 3,2 μ καὶ πρόκειται νὰ στρωθῆ μὲ χρωματιστὲς πλάκες ποὺ εἶναι καὶ αὐταὶ τετράγωνα μὲ πλευρὰν 0,2 μ. Πόσαι πλάκες θὰ χρειασθοῦν;

3. Ἐὰν ἀγοράσω τὴν κάθε πλάκα πρὸς 2,25 δραχ. καὶ πληρώσω τὸν τεχνίτην ποὺ θὰ τὰς τοποθετήση πρὸς 12,50 δραχ. τὸ τ. μ. πόσας δραχμὰς θὰ στοιχίση ἐν ὅλῳ ἡ πλακόστρωσις τῆς ταράτσας μου;

4. Ἠγόρασα διὰ τὸ ἑστιατόριόν μου 52 μ. ὕφασμα πλάτους 1,20 μ. νὰ κάμω 25 τραπεζομάνδηλα τετράγωνα μὲ πλευρὰν 1,50 μ. Ἐπίσης 80 πετσέτες τετράγωνες μὲ πλευρὰν 0,30 μ. Θὰ φθάση τὸ ὕφασμα ποὺ ἠγόρασα ἢ θὰ περισσεύση καὶ πόσον;

5. Ἐὰν ἀγοράσω τὸ ὕφασμα πρὸς 25,50 δραχ. τὸ τ.μ. καὶ πληρώσω τὸν ράπτην 12 δρχ. τὸ τραπεζομάνδηλον καὶ 2,50 δρχ. τὴν πετσέταν, πόσον θὰ μοῦ στοιχίση ἕκαστον τραπεζομάνδηλον καὶ πόσον ἑκάστη πετσέτα;

6. Ἐπώλησα ἕνα οἰκόπεδον ἐκτάσεως 580 τετρ. μέτρων πρὸς 150 δραχμὰς τὸ τετραγωνικὸν μέτρον. Πόσας δραχμὰς θὰ λάβω;

7. Χωράφι σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου ἔχον μῆκος 124 μ. καὶ πλάτος 75,6 μ. πρόκειται νὰ πωληθῆ πρός 3.500 δραχμὲς τὸ στρέμμα. Πόσον στοιχίζει;

8. Δωμάτιον σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ἔχον μῆκος 4,5 μ. πλάτος 3,5 μ. καὶ ὕψος 3 μ. συνεφωνήθη ν' ἀσβεστω-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

θοῦν οἱ τέσσαρες τοῖχοι γύρω, πρὸς 28,50 δραχ. τὸ τετραγωνικὸν μέτρον. Πόσον θὰ στοιχίσῃ ἡ ἀσβέστωσις τοῦ δωματίου ;

9. Ἀγόρασα 80 καδρόνια ἔχοντα ἕκαστον μῆκος 4 μ., πλάτος 0,08 μ. καὶ ὕψος (πάχος) 0,05 μ. πρὸς 1600 δραχμὲς τὸ κυβικὸν μέτρον. Τί θὰ πληρώσω ;

10. Τό δενδροπερίβολόν μου εἶναι ὀρθογώνιον τρίγωνον μὲ τὴν μίαν κάθετον πλευράν του 35,75 μ. καὶ τὴν ἄλλην 48,60 μ. Τί ἐμβαδὸν ἔχει ;

11. Ἀνθόκηπος σχήματος τραπεζίου ἔχει τὴν μίαν βάσιν 70 μέτρα, ὕψος 10 μ. καὶ ἐμβαδὸν 600 τ. μ. Πόσα μέτρα εἶναι ἡ ἄλλη βάσις τοῦ τραπεζίου ;

12. Ἡ στέγη τῆς ἀποθήκης μου ἀποτελεῖται α΄) ἀπὸ δύο ἴσα τραπέζια ἔχοντα κοινὴν βάσιν 5 μ. καὶ τὰς κάτω βάσεις, ἐπὶ τῶν ἀπέναντι τοίχων μὲ μῆκος 12 μ., τὸ ὕψος δὲ ἑκάστου εἶναι 6,8 μ. Καὶ β΄) ἀπὸ δύο τρίγωνα ἔχοντα βάσεις τοὺς δύο ἄλλους ἀπέναντι τοίχους μὲ μῆκος 6 μ. καὶ ὕψος ἑκάστου τριγώνου 4 μ. Πόσα κεραμίδια θὰ χρειασθοῦν διὰ τὴν στέγην ἂν διὰ κάθε τετραγωνικὸν μέτρον χρειάζονται 50 κεραμίδια ;

13. Τετραγωνικὴ πυραμὶς ἔχει πλευρὰν βάσεως 1,25 μ. καὶ ὕψος 1,60 μ. Ποῖος εἶναι ὁ ὄγκος της ;

14. Αἱ βάσεις κολούρου πυραμίδος εἶναι τρίγωνα ἰσόπλευρα. Τὸ ἐπάνω τρίγωνον ἔχει πλευρὰν 4 δακτύλους καὶ ὕψος 3 δακτύλους καὶ τὴν κάτω πλευρὰν 10 δακτύλους καὶ ὕψος 6 δακτύλους. Τὸ ὕψος τοῦ τραπεζίου εἶναι 20 δάκτυλοι. Τί ἐμβαδὸν ἔχει ἡ ἐπιφάνεια τῆς κολούρου πυραμίδος;

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

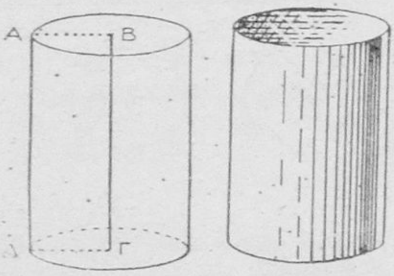
ΚΑΜΠΥΛΟΓΡΑΜΜΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

(ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΣΤ' ΤΑΞΕΩΣ)

ΚΥΛΙΝΔΡΟΣ

Ὡς τώρα ἔχομεν μάθει ἀρκετὰ γεωμετρικὰ σώματα ἀλλ' ὅλα μὲ πολλὰς ἕδρας (πολύεδρα). Τὸ νέον ὅμως σῶμα ποὺ παριστᾶ τὸ σχῆμα 65 δὲν ὁμοιάζει μὲ τὰ προηγούμενα. Αὐτὸ θὰ τὸ λέγωμεν **κύλινδρον.** Σχῆμα κυλίνδρου ἔχουν οἱ σωλῆνες, τὰ μολύβια, μερικὰ κουτιὰ καὶ πολλὰ ἄλλα σώματα.

Παρατηρῶ τὸν κύλινδρον καὶ βλέπω ὅτι ἔχει τρεῖς μόνον ἐπι-



Σχ 65

φανείας. Ἡ ἐπάνω καὶ ἡ κάτω εἶναι ἐπίπεδα ἴσα καὶ παράλληλα καὶ λέγονται **βάσεις** τοῦ κυλίνδρου. Ἡ ἄλλη ἐπιφάνεια, ἡ γύρω, εἶναι κυρτὴ (καμπουριαστὴ) ἀπ' ἔξω, κοίλη (βαθουλὴ) ἀπὸ μέσα καὶ λέγεται **κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια.** Ὥστε:

Κύλινδρος, λέγεται **τὸ στερεὸν ποὺ ἔχει δύο ἐπιφανείας ἐπιπέδους, ἴσας καὶ παραλλήλους καὶ μίαν γύρω ποὺ εἶναι κυρτή.**

Ἂν περιστρέψω τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ, αἱ εὐθεῖαι ΒΑ καὶ ΓΔ θὰ γράψουν τὰς βάσεις τοῦ κυλίνδρου καὶ ἡ ΑΔ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν. Ἡ εὐθεῖα ΒΓ λέγεται **ἄξων ἢ ὕψος** τοῦ κυλίνδρου.

— Κατὰ τί διαφέρει ὁ κύλινδρος ἀπὸ τὰ πολύεδρα σώματα;

— Δείξετε γύρω σώματα μὲ σχῆμα κυλίνδρου.

ΠΩΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΖΕΤΑΙ Ο ΚΥΛΙΝΔΡΟΣ (*)

Σχεδιάζω ἐπάνω εἰς τὸ χαρτόνι ἕνα παραλληλόγραμμον μὲ μῆκος ὅση ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου καὶ πλάτος ὅσον τὸ ὕψος του. Ἀριστερὰ ἀφήνω καὶ περιθώριον διὰ τὸ κόλλημα. Τὸ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον αὐτὸ τὸ κόπτω μὲ ξυραφάκι,

Σχ. 66

τὸ γυρίζω νὰ γίνῃ ὅμοιον μὲ σωλῆνα, τὸ κολλῶ καὶ ἔχω τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου (σχ. 66).

Κατόπιν σχεδιάζω καὶ τὰς δύο κυκλικὰς βάσεις (τὴν Α' καὶ Β') καὶ ἀφήνω γύρω μικρά τριγωνάκια διὰ τὸ κόλλημα. Τέλος ἐφαρμόζω τοὺς κύκλους στὸ ἄνοιγμα τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας μὲ τὰ τριγωνάκια ἀπὸ τὸ μέσα μέρος καὶ ὁ κύλινδρος εἶναι ἕτοιμος.

(*) Ὁ διδάσκαλος ὁρίζει ἐγκαίρως μίαν ὁμάδα μαθητῶν νὰ ἐπισκεφθῇ τὸν φαναρὰν τῆς συνοικίας καὶ νὰ παρατηρήσῃ πῶς κατασκευάζονται τὰ διάφορα κυλινδρικὰ δοχεῖα (κουτιά γάλακτος, ποτιστήρια, τεπόζιτα ἐλαίου κτλ.). Οὕτω πρὶν ἀρχίσῃ τὸ μάθημα περί τῆς κατασκευῆς τοῦ κυλίνδρου καλοῦνται οἱ μαθηταὶ καὶ ἀνακοινώνουν εἰς τὴν τάξιν τὰς παρατηρήσεις των.

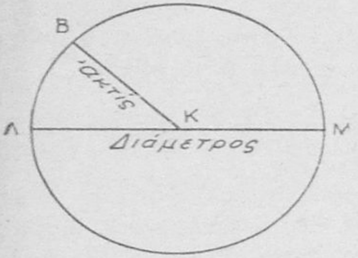
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΚΥΚΛΟΣ

Λαμβάνω τὸν κύλινδρον καὶ τοποθετῶ εἰς τὴν ἐπάνω βάσιν του ἕνα χαρτί. Ἔπειτα κόβω γύρω τὸ χαρτὶ ὥστε νὰ ἐφαρμόζῃ καλὰ εἰς τὴν βάσιν καὶ ἔχω τὸ σχῆμα 67. Αὐτὸ λέγεται κύκλος.

Σχῆμα κύκλου ἔχουν τὰ μετάλλινα νομίσματα, τὰ δακτυλίδια, τὰ χείλη τῶν ποτηριῶν καὶ πολλὰ ἄλλα.

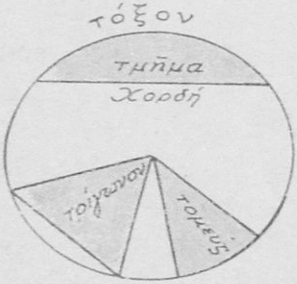
Παρατηρῶ τὸν χάρτινον κύκλον καὶ βλέπω ὅτι κλείνεται ἀπὸ καμπύλην γραμμήν. Αὐτὴ εἶναι ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου. Τὸ σημεῖον Κ, ποὺ εἶναι εἰς τὸ μέσον τοῦ κύκλου καὶ ἀπέχει ἐξ ἴσου ἀπὸ ὅλα τὰ σημεῖα τῆς περιφερείας, εἶναι τὸ κέντρον τοῦ κύκλου. Ὥστε:



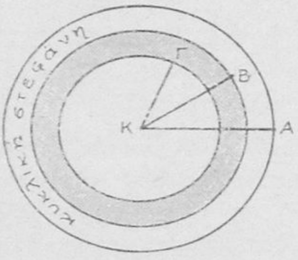
Σχ. 67

Κύκλος λέγεται ἐπίπεδος ἐπιφάνεια ποὺ κλείνεται ἀπὸ καμπύλην γραμμήν, ὅλα δὲ τὰ σημεῖα τῆς καμπύλης γραμμῆς ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπὸ τὸ κέντρον.

Ἡ εὐθεῖα ΚΒ ποὺ ἑνώνει τὸ κέντρον μὲ ἓν σημεῖον τῆς περιφερείας, λέγεται **ἀκτίς.** Καὶ ἀφοῦ, ὅπως εἴδωμεν, ὅλα τὰ σημεῖα τῆς περιφερείας ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπὸ τὸ κέντρον, αἱ ἀκτῖνες τοῦ αὐτοῦ κύκλου εἶναι ὅλαι ἴσαι.



Σχ. 68



Σχ. 68α

Ἡ εὐθεῖα ΛΜ ποὺ περνᾶ ἀπὸ τὸ κέντρον καὶ ἑνώνει δύο σημεῖα τῆς περιφερείας λέγεται **διάμετρος.** Αἱ διάμετροι εἶναι

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

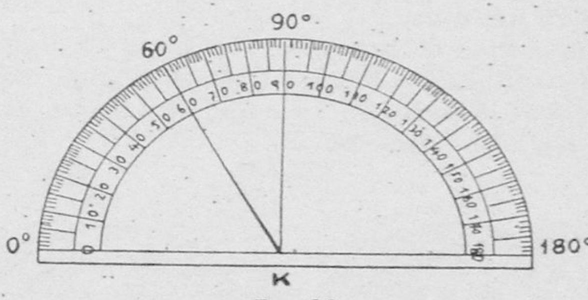
διπλάσιαι ἀπὸ τὰς ἀκτῖνας καὶ χωρίζουν τὸν κύκλον εἰς δύο ἡμικύκλια (μισοὶ κύκλοι).

Μέρος ἀπὸ τὴν περιφέρειαν λέγεται **τόξον** (σχ. 68). Ἡ εὐθεῖα ΑΒ ποὺ ἑνώνει τὰ ἄκρα τοῦ τόξου λέγεται **χορδὴ** καὶ τὸ μέρος τοῦ κύκλου ποὺ εἶναι μεταξὺ τοῦ τόξου καὶ τῆς χορδῆς, λέγεται **τμῆμα.** Ἐπίσης τὸ μέρος τοῦ κύκλου ποὺ περιλαμβάνεται μεταξὺ δύο ἀκτίνων, λέγεται **τομεύς.** Ἂν εἰς τὸ τόξον τοῦ τομέως φέρωμεν χορδήν, ὁ τομεὺς χωρίζεται εἰς ἓν τρίγωνον καὶ ἓν τμῆμα.

Δύο ἢ περισσότεροι κύκλοι ὅταν ἔχουν τὸ ἴδιον κέντρον, λέγονται **ὁμόκεντροι κύκλοι** (σχ. 68α). Ἡ ἐπιφάνεια ποὺ εἶναι μεταξὺ τῶν ὁμοκέντρων κύκλων, λέγεται **κυκλικὴ στεφάνη.**

ΜΟΙΡΟΓΝΩΜΟΝΙΟΝ — ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΓΩΝΙΩΝ

Τὸ ὄργανον μὲ τὸ ὁποῖον μετροῦνται αἱ γωνίαι, λέγεται **μοιρογνωμόνιον** ἢ γωνιόμετρον (σχ. 69). Αὐτὸ εἶναι μισὸς κύκλος μετάλλινος, χωρισμένος εἰς 180°. Ὅταν λοιπὸν θέλωμεν νὰ



Σχ. 69.

μετρήσωμεν μίαν γωνίαν, θέτομεν τὸ σημεῖον Κ τοῦ μοιρογνωμονίου εἰς τὴν κορυφὴν τῆς γωνίας, οὕτως ὥστε ἡ μία πλευρὰ της νὰ πέσῃ εἰς τὴν εὐθεῖαν τοῦ μοιρογνωμονίου ΚΟ°. Προσέχομεν τότε πόσας μοίρας γράφει τὸ μοιρογνωμόνιον εἰς τὸ σημεῖον ποὺ θά πέσῃ ἡ ἄλλη πλευρὰ τῆς γωνίας καὶ αὐτὸς εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν μοιρῶν ποὺ θέλομεν.

Μὲ τὸ μοιρογνωμόνιον ἀκόμη γράφομεν γωνίας, ὅσων μοιρῶν θέλομεν. Διὰ νὰ γράψωμεν π. χ. γωνίαν 60° θέτομεν τὸ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

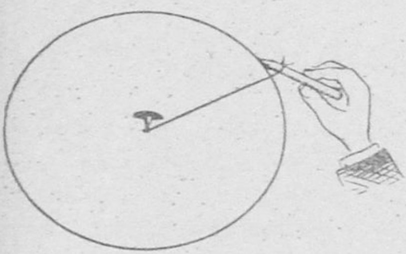
μοιρογνωμόνιον εἰς τὸ τετράδιον καὶ σύρομεν μὲ τὸ μολύβι μίαν εὐθεῖαν εἰς τὸ μῆκος τῆς ΚΟ. Κατόπιν σημειώνομεν μίαν στιγμὴν ἐκεῖ ποὺ τὸ μοιρογνωμόνιον γράφει τὸν ἀριθμὸν 60°, ἑνώνομεν μὲ εὐθεῖαν τὴν στιγμὴν μὲ τὸ σημεῖον Κ καὶ ἔχομεν γωνίαν 60° (σχ.).

—Μὲ τὸν ἴδιον τρόπον νὰ κάνετε καὶ σεῖς γωνίας 45°, 75°, 90°.

—Ἠμπορεῖτε νὰ κάνετε γωνίαν 180°; Διατί;

ΠΩΣ ΓΡΑΦΟΜΕΝ ΚΥΚΛΟΥΣ

Διά νὰ γράψωμεν κύκλους ἐπάνω εἰς χαρτὶ ἢ σανίδα, μᾶς εἶναι ἀπαραίτητος ὁ **διαβήτης.** Αὐτὸς εἶναι ὄργανον μετάλλινον ἢ ξύλινον μὲ δύο σκέλη ἴσα. Τὸ ἓν μυτερὸν καὶ τὸ ἄλλο καταλήγει εἰς τρύπαν ὅπου τοποθετοῦμεν τὸ μολύβι ἢ τὴν κιμωλίαν. Ἡ ἐργασία εἶναι αὐτή: Ἀνοίγωμεν πρῶτα τὰ σκέλη τοῦ διαβήτου, ὅσον θέλομεν νὰ εἶναι ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου. Στηρίζομεν κατόπιν τὸ μυτερὸν σκέλος ἐπάνω εἰς τὸ χαρτὶ ἢ τὴν σανίδα καὶ περιστρέφομεν τὸ ἄλλο σκέλος μὲ τὸ μολύβι, νὰ γράψη τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου.



Σχ. 70

Ἐὰν θέλωμεν νὰ γίνη εἰς τὴν αὐλὴν ἢ τὸν σχολικὸν κῆπον, μπήγομεν ἕνα καρφὶ (σχ. 70), εἰς τὸ σημεῖον ὅπου θὰ εἶναι τὸ κέντρον. Ἔπειτα δένομεν εἰς τὸ καρφὶ ἕνα σχοινὶ ἴσον μὲ τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου καὶ εἰς τὴν ἄλλην ἄκρην τοῦ σχοινίου δένομεν ἄλλο καρφὶ ἢ μυτερὸν ξύλον. Μετὰ ταῦτα τεντώνομεν τὸ σχοινί, γυρίζομεν γύρω καὶ τὸ μυτερὸν ξύλον χαράσσει τὸν κύκλον.

Ἀσκήσεις: 1) Μάθετε νὰ σχηματίζετε κύκλους μὲ τὸν διαβήτην. 2) Καρφώσετε μίαν πρόκαν εἰς τὸ πάτωμα, δέσετε εἰς αὐτὴν τὸ ἓν ἄκρον τοῦ σπάγγου καὶ εἰς τὸ ἄλλο ἄκρον, κιμωλίαν. Κατόπιν τεντώσετε τὸν σπάγγον καὶ γράψετε μὲ τὴν κιμωλίαν περιφερείας ὁμοκέντρων κύκλων.

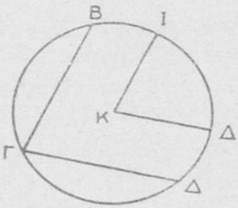
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΑΙ ΓΩΝΙΑΙ ΕΙΣ ΚΥΚΛΟΝ ΚΑΙ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΑΙ

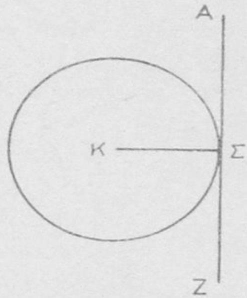
Εἰς τὸν κύκλον τοῦ σχήματος 71 βλέπω δύο γωνίας, τὴν ΙΚΔ καὶ τὴν ΒΓΔ. Ἡ πρώτη ἔχει τὴν κορυφήν της εἰς τὸ κέντρον καὶ αἱ πλευραί της εἶναι ἀκτῖνες τοῦ αὐτοῦ κύκλου. Αὐτὴ λέγεται **ἐπίκεντρος** γωνία.

Ἡ ἄλλη ἔχει τὴν κορυφήν της εἰς τὴν περιφέρειαν καὶ αἱ πλευραί της εἶναι χορδαὶ τοῦ αὐτοῦ κύκλου. Αὐτὴ λέγεται **ἐγγεγραμμένη εἰς κύκλον γωνία.**

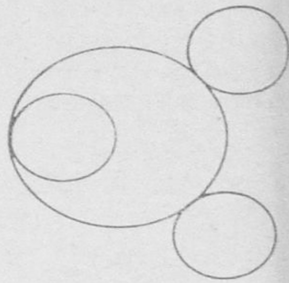
Ἡ εὐθεῖα ΑΖ (σχ. 72) ποὺ ἐφάπτεται (ἐγγίζει εἰς ἓν ση-



Σχ. 71



Σχ. 72



Σχ. 73

μεῖον τῆς περιφερείας) λέγεται **ἐφαπτομένη.** Τὸ σημεῖον Σ τῆς ἐφαπτομένης λέγεται σημεῖον ἐπαφῆς. Ἂν τώρα φέρω τὴν ἀκτῖνα ΚΣ καὶ μετρήσω τὰς γωνίας ΚΣΑ καὶ ΚΣΖ, εὑρίσκω ὅτι εἶναι ὀρθαί. Ἑπομένως ἡ ἐφαπτομένη εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα ποὺ φθάνει εἰς τὸ σημεῖον ἐπαφῆς. Καὶ οἱ κύκλοι ὅταν ἐφάπτωνται εἰς ἓν σημεῖον, λέγονται **ἐφαπτόμενοι** κύκλοι (σχ. 73).

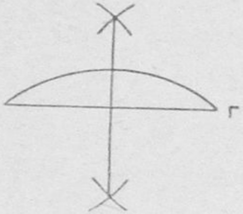
Ἀσκήσεις : Σχηματίσετε κύκλον μὲ ἀκτῖνα 0,4 μ. καὶ γράψετε μίαν ἐπίκεντρον καὶ μίαν ἐγγεγραμμένην γωνίαν.

ΠΩΣ ΔΙΑΙΡΟΥΜΕΝ ΤΟΞΟΝ ΚΑΙ ΓΩΝΙΑΝ

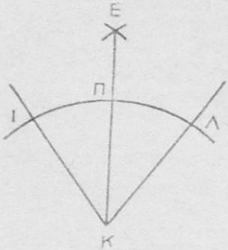
1. **Ἔχομεν τὸ τόξον ΒΓ** (σχ. 74). Γράφομεν τὴν χορδὴν ΒΓ καὶ κατόπιν εἰς τὸ μέσον αὐτῆς κάθετον (κοίταξε σχ. 25, σελὶς 14), ἡ ὁποία διαιρεῖ τὸ τόξον εἰς δύο ἴσα μέρη.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

2. **Ἔχομεν τὴν γωνίαν ΙΚΛ** (σχ. 75). Μὲ κέντρον τὴν κορυφὴν τῆς γωνίας Κ καὶ ἀκτῖνα ὁποιανδήποτε γράφομεν τόξον τὸ ὁποῖον τέμνει τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας εἰς τὰ σημεῖα Ι καὶ Λ.



Σχ. 74

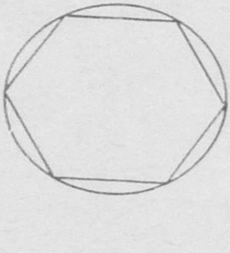


Σχ. 75

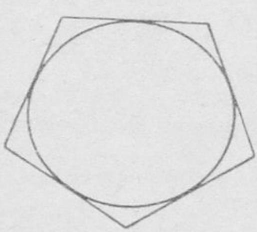
Διαιροῦμεν κατόπιν τὸ τόξον ΙΛ εἰς δύο, φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΕΠΚ καὶ ἡ γωνία ΙΚΛ διηρέθη εἰς τὰς γωνίας ΙΚΠ καὶ ΠΚΛ, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἴσαι

ΠΟΛΥΓΩΝΑ

Ὅταν ἓν πολύγωνον εὑρίσκεται ἐντὸς κύκλου ὥστε αἱ κορυφαί του νὰ εἶναι εἰς τὴν περιφέρειαν, ὅπως φαίνεται εἰς τὸ σχῆμα 76, λέγεται **ἐγγεγραμμένον** εἰς κύκλον. Ὁ κύκλος τότε λέγεται **περιγεγραμμένος.** Ὅταν ὅμως τὸ πολύγωνον εἶναι ἔξω



Σχ. 76



Σ. 77

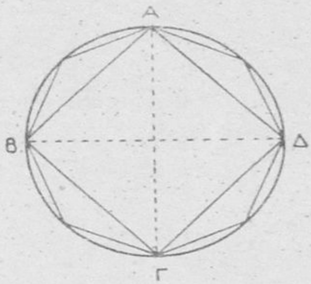
ἀπὸ τὸν κύκλον ὥστε αἱ πλευραί του νὰ εἶναι ἐφαπτόμεναι τοῦ κύκλου, ὅπως φαίνεται εἰς τὸ σχ. 77, λέγεται **περιγεγραμμένον** καὶ ὁ κύκλος **ἐγγεγραμμένος.**

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

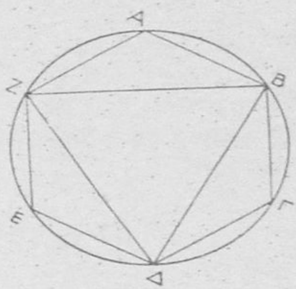
Τὸ **πολύγωνον** (σχ. 76), ἐπειδὴ ἔχει ὅλας τὰς πλευρὰς καὶ τὰς γωνίας ἴσας, λέγεται **κανονικόν**. Καὶ τὸ πολύγωνον (σχ. 77), ἐπειδὴ δὲν ἔχει τὰς πλευρὰς καὶ τὰς γωνίας ἴσας, λέγεται **ἀκανόνιστον πολύγωνον.**

ΠΩΣ ΕΓΓΡΑΦΟΝΤΑΙ ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ ΕΙΣ ΚΥΚΛΟΝ

α') Τὸ **τετράγωνον.** Φέρω τὰς δύο διαμέτρους (σχ. 78) τὴν μίαν κάθετον ἐπὶ τῆς ἄλλης. Ἑνώνω κατόπιν τ' ἄκρα τῶν διαμέ-



Σχ. 78



Σχ. 79

τρων μὲ εὐθείας καὶ ἔχω κανονικὸν τετράγωνον (σχ. 78).

Ἂν τώρα διαιρέσω τὰ 4 τόξα διὰ 2 καὶ φέρω τὰς χορδάς, ἔχω τὸ κανονικὸν **ὀκτάγωνον,** ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον. Μὲ τὸν ἴδιον τρόπον ἐγγράφω εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον τὸ δεκαεξάγωνον κ.ο.κ.

Σημ. Τὸ ὀκτάγωνον γίνεται καὶ διὰ διχοτομήσεως τῶν ἐπικέντρων ὀρθῶν γωνιῶν τοῦ τετραγώνου. Οὕτω ἡ κάθε γωνία τοῦ ὀκταγώνου θὰ γίνῃ 45°.

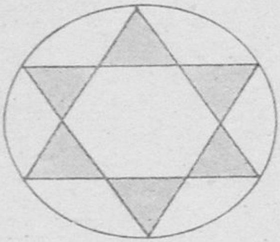
β) Τὸ **ἑξάγωνον.** Ἀνοίγω τὸν διαβήτην ὅσον εἶναι ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου καὶ μοιράζω τὴν περιφέρειαν εἰς 6 ἴσα μέρη. Κατόπιν φέρω τὰς χορδὰς καὶ γίνεται κανονικὸν ἑξάγωνον (σχ. 79), ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον. Ἂν τώρα διχοτομήσω τὰ 6 τόξα καὶ φέρω τὰς χορδάς, ἔχω τὸ κανονικὸν δωδεκάγωνον. Μὲ τὸν ἴδιον τρόπον ἔχω τὸ 24γωνον κ.ο.κ.

Σημ. Τὸ δωδεκάγωνον γίνεται καὶ διὰ διχοτομήσεως τῶν ἐπικέντρων γωνιῶν τοῦ ἑξαγώνου, ὁπότε ἑκάστη γωνία (ἀπὸ 30°) θὰ γίνῃ 15°.

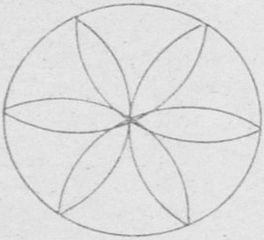
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ὅταν θέλω νὰ κατασκευάσω ἰσόπλευρον τρίγωνον, μοιράζω πρῶτον μὲ τὸν διαβήτην τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου εἰς 6 ἴσα μέρη, ὅπως ἔγινε μὲ τὸ ἑξάγωνον. Κατόπιν λαμβάνω ἀνὰ δύο τὰ σημεῖα τῶν διαιρέσεων, φέρω τὰς τρεῖς χορδάς καὶ γίνεται τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον (σχ 79), ἐγγεγραμμένον καὶ αὐτὸ εἰς κύκλον.

Ἀσκήσεις : 1. Μὲ ἀκτῖνα 5 δακτύλους κάμετε κύκλον καὶ ἐγγράψετε ἐντὸς αὐτοῦ τετράγωνον καὶ κανονικὸν ὀκτάγωνον.



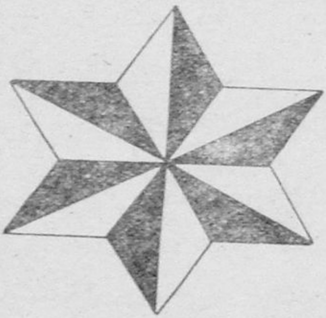
Σχ. 80



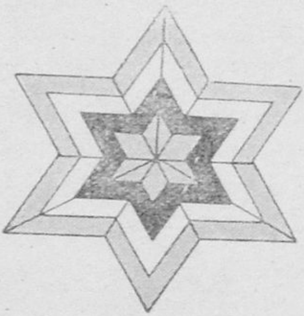
Σχ. 81

2. Μὲ τὴν ἰδίαν ἀκτῖνα κάμετε ἄλλον κύκλον καὶ ἐγγράψετε κανονικὸν ἑξάγωνον, δωδεκάγωνον καὶ ἰσόπλευρον τρίγωνον.

3. Ἐπάνω εἰς λευκὸ χαρτὶ κάμετε τὰ σχήματα 80, 81, 82 καὶ 82α μεγα-



Σχ. 82



Σχ. 82α

λύτερα καὶ νὰ τὰ χρωματίσετε. Τ' ἀστεροειδῆ σχήματα 81, 82 καὶ 82α γίνονται ἀπὸ 2 ἰσόπλευρα τρίγωνα ἐγγεγραμμένα εἰς κύκλον.

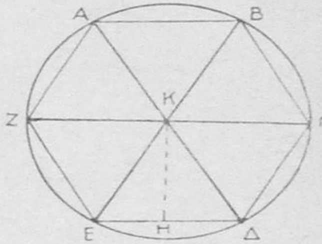
4. Δοκιμάσετε μὲ τὸν διαβήτην σας νὰ κάμετε καὶ ἄλλα σχέδια.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΠΩΣ ΕΥΡΙΣΚΕΤΑΙ ΤΟ ΕΜΒΑΔΟΝ ΚΑΝΟΝΙΚΟΥ ΠΟΛΥΓΩΝΟΥ

Μᾶς ἔχει δοθῆ τὸ ἑξαγωνικὸν πολύγωνον (σχ. 83), ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον.

Ἀπὸ τὸ κέντρον Κ τοῦ κύκλου, ποὺ εἶναι καὶ κέντρον τοῦ πολυγώνου, φέρω ἀκτῖνας εἰς τὰς γωνίας τοῦ πολυγώνου καὶ χωρίζεται εἰς 6 τρίγωνα, ὅσαι δηλαδὴ εἶναι αἱ πλευρρὶ τοῦ πολυγώνου. Τὰ τρίγωνα αὐτὰ εἶναι ὅλα ἴσα, διότι δύο πλευραί των εἶναι ἀκτῖνες τοῦ αὐτοῦ κύκλου καὶ ἡ τρίτη εἶναι πλευρὰ κανονικοῦ πολυγώνου. Τὸ ὕψος ἑκάστου τριγώνου, ἤτοι ἡ κάθετος ΚΗ τοῦ τριγώνου ΕΚΔ, λέγεται **ἀπόστημα** τοὺ κανονικοῦ πολυγώνου.



Σχ. 83

Διὰ νὰ εὕρω τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τριγώνου, π.χ. τοῦ ΕΚΔ, πολλαπλασιάζω τὴν βάσιν ἐπὶ τὸ ὕψος καὶ διαιρῶ διὰ 2. Τὸ ἐμβαδὸν καὶ τῶν 6 τριγώνων, ἤτοι τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου, εἶναι 6 φορὰς περισσότερον ἀπ' ὅ,τι τοῦ ΕΚΔ. Καὶ ἀφοῦ αἱ βάσεις τῶν 6 τριγώνων ἀποτελοῦν τὴν περίμετρον τοῦ πολυγώνου:

Διὰ νὰ εὕρω τὸ ἐμβαδὸν κανονικοῦ πολυγώνου, πολλαπλασιάζω τὴν περίμετρον ἐπὶ τὸ ἀπόστημα (ὕψος) καὶ τὸ γινόμενον διαιρῶ διὰ 2.

Παράδειγμα: Ὑποθέτω ὅτι ἡ πλευρὰ ΕΔ τοῦ πολυγώνου (σχ. 83) εἶναι 2 παλάμαι καὶ τό ἀπόστημα ΚΗ εἶναι 1,73 παλάμαι. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πολυγώνου;

Λύσις: Περίμετρος $= 2 \times 6 = 12$ παλάμαι. Καὶ ἐμβαδὸν $=$ $\frac{\text{περ.} \times \text{ἀπ.}}{2} = \frac{12 \times 1,73}{2} = \frac{20,76}{2} = 10,38$ τετραγ. παλάμαι.

Σημ. Ἂν τὸ πολύγωνον εἶναι ἀκανόνιστον, τὸ χωρίζω εἰς τρίγωνα, εὑρίσκω τὰ ἐμβαδά των καὶ προσθέτω.

Προβλήματα:

1. Σχηματίσατε εἰς τὸν πίνακα μεγαλύτερον πολύγωνον ἀπὸ τὸ σχῆμα 83 καὶ νὰ εὕρετε τὸ ἐμβαδόν του.

2. Κανονικὸν πεντάγωνον ἔχει μῆκος ἑκάστης πλευρᾶς του 2,50 μ. καὶ ἀπόστημα 1,80 μ. Τί ἐμβαδὸν ἔχει;

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

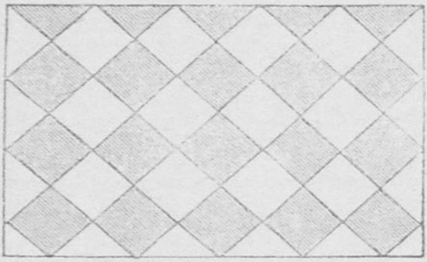
3. Ἡ πλατεῖα τῆς συνοικίας εἶναι κανονικὸν ἑξάγωνον μὲ μῆκος ἑκάστης πλευρᾶς 12 μ. καὶ ἀπόστημα 10 μ. Πόσα τ. μ. εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς πλατείας;

4. Εἰς τὸ μέσον τῆς πλατείας ὑπάρχει ἀνθόκηπος ποὺ εἶναι κανονικὸν ὀκτάγωνον μὲ πλευρὰν 3,50 μ. καὶ ἀπόστημα 4,30 μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἀνθοκήπου καὶ τί χῶρος μένει ἐλεύθερος εἰς τὴν πλατεῖαν;

5. Οἰκόπεδον σχήματος κανονικοῦ ἑξαγώνου μὲ πλευρὰν 7,50 μ. καὶ ἀπόστημα 5,55 περίπου μ. ἐπωλήθη πρὸς 130 δραχ. τὸ τ. μ. Πόσον στοιχίζει;

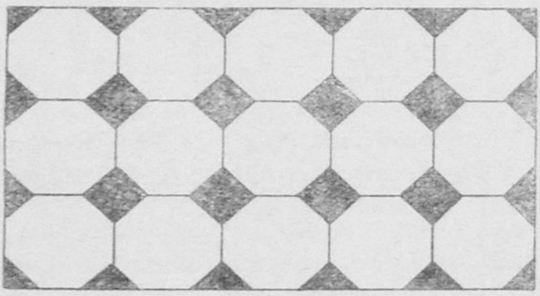
ΙΧΝΟΓΡΑΦΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Τὰ πλακάκια ποὺ συχνὰ στρώνουν στὰ μαγειρεῖα, δωμάτια, διαδρόμους κτλ. συνήθως εἶναι κανονικὰ σχήματα. Τὸ σχῆμα 84



Σχ. 84

δεικνύει ἐπίστρωσιν μὲ πλακάκια τετραγωνικὰ καὶ τὸ σχῆμα 84α δεικνύει ἐπίστρωσιν μὲ πλακάκια ἑξαγωνικὰ καὶ τετραγωνικά. Τέ-

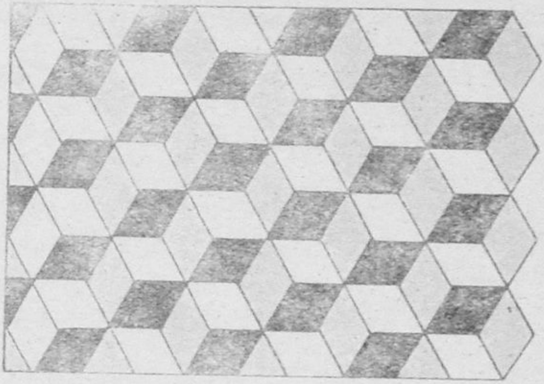


Σχ. 84α

λος τὸ σχ. 84β γίνεται καὶ αὐτὸ μὲ κανονικὰ ἑξάγωνα, ἀλλὰ χωρισμένα εἰς τρεῖς ρόμβους ἕκαστον. Οἱ ρόμβοι βάφονται

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

κατόπιν μὲ διάφορα χρώματα καὶ τὰ ἑξάγωνα φαίνονται ὡσὰν κύβοι.



Σχ. 84β

Ἄσκησις: Σχεδιάσετε τὰ σχήματα 84, 54α καὶ 84β ἢ καὶ ἄλλα παρόμοιά των καὶ νὰ τὰ χρωματίσετε.

ΠΩΣ ΕΥΡΙΣΚΕΤΑΙ Η ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑ ΚΥΚΛΟΥ

Γράφω εἰς τὸν πίνακα ἕναν κύκλον μὲ διάμετρον 1 μέτρον. Κατόπιν ἐφαρμόζω γύρω εἰς τὴν περιφέρειαν ἕνα σπάγγον, μετρῶ καὶ τὸν εὑρίσκω 3 μέτρα καὶ κάτι παραπάνω ἀπὸ 10 δακτύλους. Τὸ ἴδιον κάμνω εἰς τὸν ἄλλον κύκλον μὲ διάμετρον 2 μέτρων, μετρῶ τὴν περιφέρειαν καὶ εὑρίσκω 6 μέτρα καὶ κάτι παραπάνω ἀπὸ 25 δακτύλους. Οἱ μαθηματικοί, μὲ ἀκριβεῖς μετρήσεις ποὺ ἔκαμαν, εὑρῆκαν ὅτι ἡ περιφέρεια ἑκάστου κύκλου εἶναι 3,14 φορὰς μεγαλυτέρα ἀπὸ τὴν διάμετρον. Ὥστε :

Διὰ νὰ εὕρω τὴν περιφέρειαν κύκλου πολλαπλασιάζω τὴν διάμετρον ἐπὶ 3,14. Καὶ ἀντιθέτως :
Ὅταν γνωρίζω τὴν περιφέρειαν καὶ θέλω νὰ εὕρω τὴν διάμετρον, διαιρῶ διὰ 3,14.

Ὁ ἀριθμὸς 3,14 χάριν συντομίας παριστᾶται εἰς τὴν Γεωμετρίαν μὲ τὸ γράμμα π, ἡ ἀκτὶς μὲ τὸ α, ἡ διάμετρος μὲ τὸ δ καὶ ἡ περιφέρεια μὲ τὸ Π. Κατὰ τοὺς ἀνωτέρω κανόνας, ὁ τύπος εὑρέσεως τῆς περιφερείας θὰ εἶναι : $\Pi = \delta \times \pi$ ἢ $\Pi = 2\alpha \times \pi$ (ἐπειδὴ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

διάμετρος = 2 ἀκτῖνες). Καὶ ὁ τύπος διὰ τὴν εὕρεσιν τῆς διαμέτρου ἀπὸ τὴν περιφέρειαν εἶναι : $\delta = \frac{\Pi}{\pi}$.

Προβλήματα:

6. Σχηματίσετε εἰς τὴν αὐλήν σας κύκλον μὲ ἀκτῖνα 2,25 μ καὶ νὰ εὕρετε τὸ μῆκος τῆς περιφερείας του

7. Μὲ τὸ αὐτὸ κέντρον σχηματίσετε κατόπιν ἄλλον κύκλον (ὁμόκεντρον) πού νὰ ἔχῃ διάμετρον 8 μ. καὶ εὕρετε καὶ αὐτοῦ τὸ μῆκος τῆς περιφερείας.

8. Κυκλικὸν τραπεζομάνδηλον ἔχει ἀκτῖνα 0,65 μ. Πόσα μέτρα δαντέλλα πρέπει νὰ ἀγοράσωμεν διὰ νὰ τοποθετήσωμεν ὁλόγυρά του ;

9. Πόσοι ἄνθρωποι ἠμποροῦν νὰ καθήσουν εἰς κυκλικὸν τραπεζάκι ἀκτῖνος 0,80 μ. ὅταν ἕκαστος καταλαμβάνῃ χῶρον 0,45 τοῦ μέτρου ;

10. Τὸ στόμιον ἑνὸς πηγαδιοῦ ἔχει περιφέρειαν 92,42 μ. Πόσα μέτρα εἶναι ἡ ἀκτὶς ;

11. Νὰ εὕρετε τὴν ἀκτῖνα τῶν κύκλων μὲ περιφέρειαν :
2,412 μ.   3,768 μ.   12,56 μ   31,4 μ.

12. Οἱ τροχοὶ ποδηλάτου ἔχουν ἀκτῖνα 0,50 μ. Πόσας στροφὰς θὰ κάμουν διὰ νὰ διανύσῃ τὸ ποδήλατον ἀπόστασιν 4.710 μέτρων; Καὶ πόσας νὰ διανύσῃ ἀπόστασιν 30 χιλιομέτρων ;

13. Τροχὸς ἁμάξης μὲ ἀκτῖνα 0,8 μ. ἔκαμε κατὰ τὴν κίνησίν του 000 στροφάς. Πόσον διάστημα διέτρεξε ;

14. Ἱπποδρόμιον κυκλικὸν ἔχει ἀκτῖνα 42 μ. Πόσα μέτρα διέτρεξεν ὁ ἵππος, ὁ ὁποῖος ἐπανέλαβε 54 φορὰς τὸν γῦρον τοῦ ἱπποδρομίου ;

15. Εἰς τὸ πηγάδι μου ἔχω τοποθετήσει βαροῦλκον ξύλινον τὸ ὁποῖον ἔχει ἀκτῖνα βάσεως 0,24 μ. Διὰ νὰ φθάσῃ ὁ κουβὰς εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ νεροῦ, τὸ σχοινὶ ἐκτυλίσσεται 20 φορὰς γύρω εἰς τὸ βαροῦλκον καὶ διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὸν πυθμένα, ἐκτυλίσσεται 30 φοράς. Νὰ εὑρεθῇ: α΄) Πόσα μέτρα εἶναι τὸ βάθος τοῦ πηγαδιοῦ. Καὶ β΄) πόσα μέτρα νερὸ περιέχει;

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΠΩΣ ΕΥΡΙΣΚΕΤΑΙ ΤΟ ΜΗΚΟΣ ΤΟΞΟΥ

Παράδειγμα 1ον. Τί μῆκος ἔχει τὸ τόξον 30° ὅταν ἡ διάμετρος εἶναι 8 μέτρα.

Σκέψις. Ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου ἔχει 360° καὶ τὸ μῆκος της θὰ εἶναι $3 \times 3,14 = 9,42$ μέτρα.

Κατάταξις τοῦ προβλήματος: Αἱ 360° ἔχουν μῆκος 9,42 μ.
αἱ 30° » » × ;

$$\times = 9,42 \times \frac{30}{360} = ;$$

Παράδειγμα 2ον. Πόσων μοιρῶν εἶναι τόξον μήκους 1,57 μ., ὅταν ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου εἶναι δύο μέτρα;

Σκέψις. Ἡ περιφ. τοῦ κύκλου εἶναι $2 \times 2 \times 3,14 = 12,56$ μ.

Κατάταξις. Μῆκος 12,56 μ. (ὅλης τῆς περιφ.) εἶναι 360°
» 1,57 μ. (τόξου) » × ;

$$\times = 360 \times \frac{1,57}{12,56} = ;$$

Ὥστε:

Διὰ νὰ εὕρω τὸ μῆκος τόξου, εὑρίσκω πρῶτον τὴν περιφέρειαν καὶ κατατάσσω τὸ πρόβλημα ἀναλόγως.

Προβλήματα:

16. Ἡ διάμετρος κυκλικοῦ ἀνθοκήπου εἶναι 6 μ. Πόσον εἶναι τὸ μῆκος τοῦ τόξου 30°;

17. Ἄλλος κυκλικὸς ἀνθόκηπος ἔχει ἀκτῖνα 2,50 μ. Πόσον εἶναι τὸ μῆκος τοῦ τόξου 60°;

18. Εἰς κύκλον μὲ ἀκτῖνα 3,20 μ. νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τόξου 45°.

19. Τὸ μῆκος ἑνὸς τόξου εἶναι 3,53 μ. καὶ ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου 4,50 μ. Πόσων μοιρῶν εἶναι τό τόξον;

20. Νὰ εὕρετε τὸ μῆκος τόξου κύκλου ἀκτῖνος 2,40 μ. ποὺ ἡ χορδή του εἶναι πλευρὰ κανονικοῦ ἑξαγώνου.

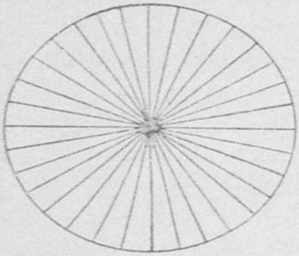
21. Αἱ περιφέρειαι δύο ὁμοκέντρων κύκλων ἀπέχουν 3.50 μ. ἡ μία ἀπὸ τὴν ἄλλην. Τὸ μῆκος τῆς μικροτέρας περιφερείας εἶναι 76,36 μ. Πόσον εἶναι τὸ μῆκος τῆς μεγαλυτέρας;

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΠΩΣ ΕΥΡΙΣΚΕΤΑΙ ΤΟ ΕΜΒΑΔΟΝ ΚΥΚΛΟΥ

Ἔχω τὸν κύκλον τοῦ σχήματος 85

Ἀπὸ τὸ κέντρον φέρω πολλὰς ἀκτῖνας καὶ χωρίζω τὸν κύκλον εἰς πολλοὺς τομεῖς. Ἂν ἐξακολουθήσω νὰ διαιρῶ τοὺς τομεῖς, τὰ τόξα τῶν νέων τομέων θὰ εἶναι τόσον μικρά, ὥστε θὰ ὁμοιάζουν μὲ εὐθείας. Καὶ οἱ τομεῖς θά ὁμοιάζουν μὲ τρίγωνα. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου εὑρίσκεται ἂν πολλαπλασιάσω τὴν βάσιν ἐπὶ τὸ ὕψος καὶ διαιρέσω διὰ 2. Ἀφοῦ τὸ ἐμβαδὸν ὅλων τῶν τριγώνων (τῶν ἐντὸς τοῦ κύκλου) εἶναι καὶ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τοῦ κύκλου :



Σχ. 85

Διὰ νὰ εὕρω τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου, πολλαπλασιάζω τὴν περιφέρειαν ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα καὶ διαιρῶ διὰ 2.

$$\left(\text{Τύπος : Ἐμβαδὸν κύκλου} = \frac{\Pi \times \alpha}{2} \right)$$

Παράδειγμα : Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ἁλωνίου, τὸ ὁποῖον ἔχει ἀκτῖνα 6 μέτρων ;

Λύσις : α΄) Περιφέρεια $= 12 \times 3,14 = 37,68$ μ. Καὶ

β΄) Ἐμβαδὸν $= 37,68 \times \frac{6}{2} =$;

Ἐμβαδὸν τομέως : Ἀφοῦ οἱ μικροὶ τομεῖς ὁμοιάζουν μὲ τρίγωνα, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τομέως εὑρίσκεται ὅπως τοῦ τριγώνου, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸ μῆκος τοῦ τόξου ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου καὶ διαιρέσωμεν διὰ 2.

Παράδειγμα : Τὸ μῆκος τοῦ τόξου ἑνὸς κυκλικοῦ τομέως εἶναι 7,50 μ. καὶ ἡ ἀκτὶς 3 μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τομέως ;

Λύσις : Ἐμβαδὸν τομέως $= 7,50 \times \frac{3}{2} =$;

Προβλήματα :

22. Κυκλικὴ πλατεῖα ἔχει διάμετρον 30 μέτρων. Πόσα τετραγωνικὰ μέτρα εἶναι τὸ ἐμβαδόν ;

23. Περιφέρεια κύκλου εἶναι 15,70 μέτρα. Τί ἐμβαδὸν ἔχει ;

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

24. Ἀπὸ δύο ὁμοκέντρους κύκλους ὁ μικρότερος ἔχει ἀκτῖνα 0,50 μ. καὶ ὁ μεγαλύτερος 0,78 μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυκλικῆς στεφάνης ;

25. Τὸ μῆκος τόξου ἑνὸς τομέως εἶναι 6,4 καὶ ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου 2,50 μέτρα. Πόσα τ. μ. εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τομέως ;

26 Τμῆμα ἀνθοκήπου εἶναι τομεὺς μὲ τόξον 90° καὶ διάμετρον κύκλου 12 μ. Πόσα τ. μ. εἶναι τὸ ἐμβαδόν ;

27. Σχηματίσατε διαφόρους κύκλους καὶ νὰ εὕρετε τὸ ἐμβαδόν των.

ΠΩΣ ΕΥΡΙΣΚΕΤΑΙ Η ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΤΟΥ ΚΥΛΙΝΔΡΟΥ

Λάβετε ἕνα κυλινδρικὸ κουτὶ καὶ περιτυλίξετε τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν μὲ χαρτὶ ὥστε νὰ ἐφαρμόζῃ καλῶς. Ξεδιπλώσετε κατόπιν τὸ χαρτὶ καὶ θὰ ἰδῆτε ὅτι εἶναι ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον. Μῆκος τοῦ παρ. εἶναι ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως τοῦ κουτιοῦ καὶ πλάτος, τὸ ὕψος του. Ἀφοῦ λοιπὸν ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου εἶναι παραλληλόγραμμον, διὰ νὰ εὕρω τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου, πολλαπλασιάζω τὸ μῆκος τῆς περιφερείας τῆς βάσεως ἐπὶ τό ὕψος τοῦ κυλίνδρου Διὰ νὰ ἔχω ὅμως τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου πρέπει νὰ προσθέσω καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῶν δύο κυκλικῶν βάσεων. Ὥστε :

Διὰ νὰ εὕρω τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου, εὑρίσκω πρῶτον τὸ ἐμβοδὸν τῶν δύο κυκλικῶν βάσεων, ἔπειτα τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας καὶ προσθέτω.

Παράδειγμα: Ὑποθέτω ὅτι τὸ κουτὶ ἔχει διάμετρον βάσεως 10 δακτύλους, ὕψος 18 δακτ. καὶ ζητῶ τὴν ἐπιφάνειαν.

Λύσις: α') Περιφέρεια κυκλικῆς βάσεως $= 10 \times 3,14 = 31,40$.

β') Ἐμβαδὸν κυκλ. βάσεως $= \frac{31,4 \times 5}{2} = \frac{157}{2} = 78,5$ τετραγ. δάκτυλοι. Καὶ ἐμβαδόν 2 βάσεων $= 78,5 \times 2 = 157$ τετραγ. δάκτ.

γ') Ἐμβαδὸν κυρτῆς ἐπιφ. $= 31,40 \times 18 = 565,2$ τετραγ. δάκτ.

Καὶ δ') Ἐπιφάνεια $= 157 + 565,2 = 722,2$ τετραγ. δάκτυλοι.

Προβλήματα:

28. Ρόλος χάρτου ἔχει ἀκτῖνα βάσεως 0,5 καὶ ὕψος 0,9 μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας ;

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

29. Κυλινδρική κολώνα μὲ περιφέρειαν βάσεως 2,5 μ. καὶ ὕψος 4 μ. πρόκειται νὰ χρωματισθῇ εἰς τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν πρὸς 32,50 δραχμὰς τὸ τετραγωνικὸν μέτρον. Πόσας δραχμὰς θὰ στοιχίσῃ ὁ χρωματισμός της;

30. Πόσα τετ. μ. λευκοσιδήρου χρειάζεται τὰ γίνῃ κυλινδρικὸν τεπόζιτον ἐλαίου, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ ἀκτῖνα βάσεως 0,60 μ. καὶ ὕψος 1,5 τοῦ μέτρου; Ἂν ἡ ἀξία τοῦ λευκοσιδήρου εἶναι 25 δραχμαὶ κατὰ τ. μ. καὶ πληρώσωμεν ἐν ὅλῳ διὰ ἐργατικὰ 95 δραχμάς, πόσας δραχμὰς θὰ στοιχίσῃ ἐν ὅλῳ τὸ τεπόζιτον;

31. Θέλω νὰ κατασκευάσω σωλῆνα μήκους 9 μέτρων μὲ διάμετρον βάσεως 0,12 μ. Πόσα τετρ. μέτρα λαμαρίνα πρέπει νὰ ἀγοράσω; Καὶ ἀκόμη: Πόσον θὰ πληρώσω ἂν ἡ ἀξία τῆς λαμαρίνας εἶναι 45 δραχ. τὸ τετραγωνικὸν μέτρον;

32. Ἔχω 25 κυψέλας κυλινδρικὰς καὶ θέλω νὰ ἐλαιοχρωματίσω τὴν ἐπάνω βάσιν καὶ τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν. Ὅλοι αἱ κυψέλαι μου εἶναι ἴσαι μὲ διάμετρον βάσεως 0,45 μ. καὶ ὕψος 0,90 μ. Τί θὰ μοῦ στοιχίσῃ ὁ ἐλαιοχρωματισμός των ἐὰν πληρώσω 25 δραχμὰς δι' ἕκαστον τετραγωνικὸν μέτρον;

ΠΩΣ ΕΥΡΙΣΚΕΤΑΙ Ο ΟΓΚΟΣ ΚΥΛΙΝΔΡΟΥ

Ἀπ' ὅσα ἔχομεν μάθει, ἂν ἑνὸς κανονικοῦ πολυγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον διπλασιάζω συνεχῶς τὰς πλευράς του, θὰ ἔλθῃ στιγμὴ ποὺ ἡ περίμετρος τοῦ πολυγώνου θὰ πέσῃ ἐπάνω εἰς τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου. Ἀπ' αὐτὸ εὐκόλως ἐννοοῦμεν ὅτι ὁ κύλινδρος ἔχει τὸν ἴδιον ὄγκον μὲ τὸ πολυγωνικὸν πρίσμα ποὺ ἔχει τὸ ἴδιον ἐμβαδὸν βάσεως καὶ τὸ ἴδιον ὕψος. Ἑπομένως:

Ὁ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου εὑρίσκεται, ὅπως καὶ τοῦ πρίσματος. Ἂν δηλαδὴ πολλαπλασιάσωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος.

Παραδείγμματα: Τί ὄγκον ἔχει τὸ κυλινδρικό κουτὶ τοῦ προηγουμένου μαθήματος; (Παράδειγμα βλ. σελ. 75).

Λύσις: α') Περιφέρεια βάσεως $10 \times 3{,}14 = 31{,}40$ δάκτυλοι.

β') Ἐμβ. βάσεως $= \dfrac{31{,}4 \times 5}{2} = \dfrac{157}{2} = 78{,}5$ τ. δ. καὶ

γ') Ὄγκος $= 78{,}5 \times 18 = 1413$ κυβικοὶ δάκτυλοι.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Προβλήματα:

33. Κυλινδρικὸν τεπόζιτον ἐλαίου ἔχει διάμετρον βάσεως 0,80 μ. καὶ ὕψος 1,50 μ. Πόσον ὄγκον ἔχει;

34. Κορμὸς δένδρου σχήματος κυλίνδρου ἔχει ἀκτῖνα βάσεως 0,40 μ. καὶ ὕψος 3,50. Τί ὄγκον ἔχει;

35. Θέλω ν' ἀνοίξω πηγάδι μὲ διάμετρον βάσεως 2,60 μ., βάθος 13,6 μ. καὶ τὸ συνεφώνησα πρὸς 120 δραχ. τὸ κυβ. μέτρον. Πόσας δραχμὰς θὰ στοιχίσῃ τὸ ἄνοιγμα τοῦ πηγαδιοῦ;

36. Τὸ πηγάδι αὐτὸ κατόπιν ἐκτίσθη καὶ ἡ διάμετρός του ἐμίκρυνε κατὰ 0,40 μ. Βάθος νεροῦ ἔχει 9,50 μέτρα. Πόσους τόννους νερὸ ἔχει καὶ μὲ πόσα κιλὰ ἀναλογοῦν;

37. Τί ὄγκον ἔχει καὶ πόσα κιλὰ ἐλαίου χωρεῖ τεπόζιτον τὸ ὁποῖον ἔχει ἀκτῖνα βάσεως 0,40 μέτρου καὶ ὕψος 1,4 μέτρου; (εἰδικὸν βάρος ἐλαίου 0,91).

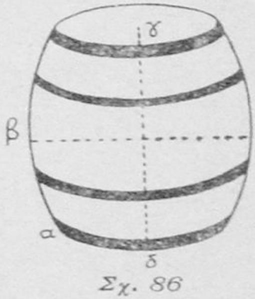
38. Μαρμαρίνη κολώνα κυλινδρική, ἔχει περιφέρειαν βάσεως 3,14 μ. καὶ ὕψος 2,80 μ. Πόσας ὀκάδας ζυγίζει; (εἰδ. βάρος μαρμάρου 2,7).

39. Κύλινδρος ἔχει ὄγκον 132,75 κυβ. μέτρα καὶ ὕψος 5,9 μ. Πόσα τ. μ. εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του:

40. Μετρήσετε διάφορα κυλινδρικὰ σώματα (χάρακα, κουτιά, σωλῆνες κ. ἄ.) ποὺ ὑπάρχουν εἰς τὸ σχολεῖον ἢ θὰ φέρουν οἱ μαθηταὶ καὶ νὰ εὕρετε: α') τὴν ἐπιφάνειαν, β') τὸν ὄγκον των.

ΠΩΣ ΕΥΡΙΣΚΕΤΑΙ Ο ΟΓΚΟΣ ΒΑΡΕΛΙΟΥ

Τὸ βαρέλιον (σχ. 86) ὁμοιάζει μὲ κύλινδρον μὲ τὴν διαφορὰν ὅτι εἶναι ἐξογκωμένον εἰς τὸ μέσον. Ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς κάτω βάσεως α ἐπὶ τὸ ὕψος γδ, εὑρίσκομεν ὀλιγώτερον ἀπὸ τὸν πραγματικὸν ὄγκον τοῦ βαρελίου, διότι θὰ μείνῃ ἔξω τὸ ἐξόγκωμά του.



Σχ. 86

Ἂν πάλιν πολλαπλασιάσωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς μεσαίας βάσεως β ἐπὶ τὸ ὕψος, θὰ εὕρωμεν περισσότερον. Διὰ νὰ μὴν πέσωμεν λοιπὸν ἔξω πρέπει νὰ εὕρωμεν τὸν μέσον ὅρον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς κάτω καὶ μεσαίας βάσεως (α καὶ β) καὶ αὐτὸ νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸ ὕψος τοῦ βαρελίου. Πρὸς τοῦτο μετροῦμεν τὰς δύο διαμέτρους τῶν βάσεων αὐ-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τῶν, προσθέτομεν καὶ λαμβάνομεν τὸ ἥμισυ. Μὲ βάσιν τὸ ἥμισυ τοῦ ἀθροίσματος (ἡμιάθροισμα) τῶν δύο διαμέτρων, εὑρίσκομεν τὸν μέσον ὅρον τοῦ ἐμβαδοῦ τῶν δύο βάσεων, πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸ ὕψος καὶ ἔχομεν τὸν ὄγκον τοῦ βαρελίου. Ὥστε:

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον τοῦ βαρελίου, πολλαπλασιάζομεν τὸ ἡμιάθροισμα τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς κάτω καὶ μεσαίας βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος

Παράδειγμα: Ὑποθέτομεν ὅτι ἓν βαρέλιον ἔχει διάμετρον κάτω βάσεως 0,40 μ., μεσαίας 0,60 μ. καὶ ὕψος 1 μ. Τί ὄγκον ἔχει;

Λύσις: α') Ἡμιάθροισμα 2 διαμέτρων $= (0,40+0,60):2=0,50$ μ.

β') Περιφέρεια $= 0,50 \times 3,14 = 1,57$ μ.

γ') Ἐμβ. βάσεως $= 1,57 \times 0,25$ (ἀκτῖνα) $: 2 = 0,196$ τ. μ. Καὶ

δ') Ὄγκος βαρελίου $= 0,196 \times 1 = 0,196$ κ μ., ἢ 196 κυβ. παλ.

Ἂν τώρα θέλωμεν νὰ εὕρωμεν καὶ πόσα κιλὰ κρασὶ χωρεῖ τὸ βαρέλιον, σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς:

Τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ κρασιοῦ εἶναι 0,985. Ἤτοι μία κυβικὴ παλάμη χωρεῖ 985 γραμμάρια κρασί. Αἱ 196 κυβ. παλ. θὰ χωροῦν ὅσον $196 \times 0,985 = 193060$ γραμάρια ἢ 193 χιλιόγρ. (κιλὰ) περίπου.

Ὥστε τὸ βαρέλιον χωρεῖ 193 περίπου κιλὰ κρασί.

Προβλήματα:

41. Ἓν ἄλλο βαρέλιον ἔχει διαμέτρους 0,60 μ. καὶ 0,52 μ. ὕψος δὲ 2 μ. Πόσα κ μ. εἶναι ὁ ὄγκος του;

42 Εἰς ἓν οἰνοπωλεῖον ἐμετρήσαμεν μ' ἕνα φίλον μου 10 βαρέλια, ὅλα ἴσα, τὰ ὁποῖα εἶναι γεμᾶτα κρασί. Ὁ ἰδιοκτήτης μᾶς ἔδωσε τὰς ἀκτῖνας τῶν βάσεων ἑκάστου βαρελίου αἱ ὁποῖαι εἶναι 0,32 μ. καὶ 0,40 μ., τὸ ὕψος 1,50 μ. καὶ μᾶς παρεκάλεσε νὰ εὕρωμεν πόσα κιλὰ κρασὶ ἔχουν καὶ τὰ 10 βαρέλια. Μήπως ἠμπορεῖτε νὰ τὸ εὕρετε σεῖς;

43. Νὰ γίνουν μετρήσεις διαφόρων βαρελίων καὶ νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος καὶ ἡ περιεκτικότης των.

ΕΛΛΕΙΨΙΣ

Γενικῶς. Λαμβάνω ἓν κυλινδρικὸν ξύλον καὶ τὸ κόπτω μὲ πριόνι πλαγίως. Τότε ἡ καμπύλη γραμμὴ ποὺ θὰ σχηματισθῇ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

μετὰ τὴν τομὴν ὁμοιάζει μὲ τὸ σχῆμα 87 καὶ λέγεται **ἔλλειψις.**

Σχῆμα ἐλλείψεως ἔχουν ἡ περίμετρος τῶν κουταλιῶν, μερικῶν δίσκων, μερικῶν κουτιῶν κ. ἄ. Τὸ τοιοῦτον σχῆμα εἶναι περισσότερον ἐν χρήσει εἰς τὴν Ἀστρονομίαν, διότι αἱ τροχιαὶ τῶν πλανητῶν εἶναι ἐλλείψεις.

Καὶ ἡ ἔλλειψις εἶναι καμπύλη γραμμὴ ἀλλ' ὅλα τὰ σημεῖα τῆς καμπύλης γραμμῆς ἐδῶ δὲν ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπὸ τὸ κέντρον, ὅπως συμβαίνει μὲ τὸν κύκλον. Ἡ διάμετρος ΑΒ (σχ. 87) λέγεται **μέγας ἄξων** καὶ ἡ ΓΔ **μικρὸς ἄξων.** Τὸ σημεῖον ὅπου διασταυροῦνται οἱ ἄξονες, εἶνας τὸ *κέντρον* τῆς ἐλλείψεως. Ὅπως βλέπετε ἀπὸ τὸ σχῆμα 87, ἕκαστος ἄξων χωρίζει τὴν ἔλλειψιν εἰς δύο ἴσα μέρη.

Πῶς χαράζεται ἡ ἔλλειψις. Διὰ νὰ χαράξωμεν ἔλλειψιν εἰς τὸν πίνακα, καρφώνομεν δύο προκάκια εἰς τὰ σημεῖα Κ καὶ Λ

Σχ. 87

Σχ. 88

σχ. 88) καὶ δένομεν εἰς αὐτὰ ἕνα σπάγγον, ὁ ὁποῖος πρέπει νὰ εἶναι μακρύτερος ἀπὸ τὴν ἀπόστασιν ΚΛ. Ἔπειτα τεντώνομεν τὸν σπάγγον, περιφέρομεν τὸ ἄκρον του γύρω εἰς τὰ σημεῖα Κ καὶ Λ. καὶ ἡ κιμωλία, ποῦ εἶναι μέσα ἀπὸ τὸν σπάγγον γράφει τὴν ἔλλειψιν.

Μὲ τὸν ἴδιον τρόπον γίνεται ἔλλειψις εἰς τὴν αὐλὴν ἢ τὸν κῆπον. Τότε ὅμως χρειαζόμεθα σχοινί, πασσάλους καὶ ἕν μυτερὸν ξύλον διὰ τὴν χάραξιν τῆς ἐλλείψεως.

Τὰ σημεῖα Κ καὶ Λ (σχ. 88) λέγονται **ἑστίαι** τῆς ἐλλείψεως.

Ὅπως καταλαβαίνετε, ὅσον πλησιάζουν αἱ ἑστίαι ἡ ἔλλειψις γίνεται περισσότερον στρογγυλὴ καὶ ὅσον ἀπομακρύνονται γίνεται μακρουλή.

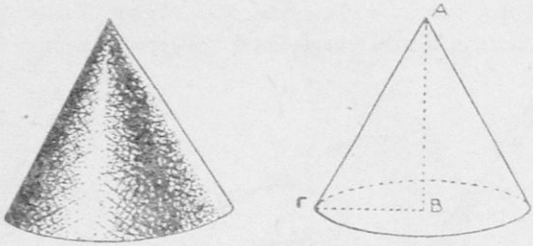
Ἄσκησις: 1. Σχηματίσετε ἔλλειψιν μὲ μέγαν ἄξονα 3 μ., ἀλλ' ἡ ἀπόστασις τῶν ἑστιῶν νὰ εἶναι 2 μέτρα.

2. Σχηματίσετε ἐλλείψεις μὲ μέγαν ἄξονα, ὅσον θέλετε.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΚΩΝΟΣ

Ἀπὸ τὸ κιβώτιον γεωμετρικῶν σωμάτων ξεχωρίζομεν τὸν κῶνον καὶ τὸν παρατηροῦμεν. Ἐπίσης παρατηροῦμεν καὶ διάφορα σώματα μὲ σχῆμα κώνου (χωνιά, σκηναί, μερικοὶ πύργοι κ. ἄ.).



Σχ. 89

Ὅλα αὐτὰ ἔχουν δύο ἐπιφανείας: Ἡ μία εἶναι κύκλος καὶ αὐτὴ εἶναι ἡ βάσις τοῦ κώνου. Ἡ ἄλλη εἶναι κυρτὴ καὶ τελειώνει εἰς κορυφήν. Ὥστε:

Κῶνος λέγεται τὸ στερεὸν ποὺ ἔχει δύο μόνον ἐπιφανείας. Μία ἀπ' αὐτὰς εἶναι κύκλος καὶ αὐτὴ εἶναι ἡ βάσις τοῦ κώνου· ἡ ἄλλη εἶναι κυρτὴ καὶ τελειώνει εἰς τὴν κορυφήν.

Ἂν περιστρέψωμεν τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΓ (σχ. 89) γύρω εἰς τὴν ΑΒ, ἡ πλευρὰ ΒΓ θὰ γράψῃ τὴν βάσιν τοῦ κώνου καὶ ἡ ΑΓ τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν. Ἡ νοητὴ κάθετος ΑΒ ἀπὸ τὴν κορυφὴν εἰς τὴν βάσιν, λέγεται **ἄξων** ἢ **ὕψος** καὶ ἡ ΑΓ **πλευρὰ** τοῦ κώνου.

Συγκρίνετε τὸν κῶνον μὲ τὸν κύλινδρον καὶ τὴν πυραμίδα καὶ νὰ εὕρετε τὰς ὁμοιότητας καὶ τὰς διαφοράς των.

ΠΩΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΖΕΤΑΙ Ο ΚΩΝΟΣ (*)

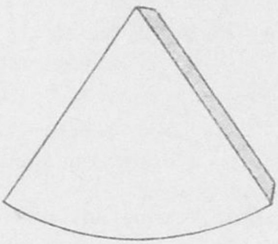
α) **Μὲ χαρτόνι.** Σχεδιάζω ἐπάνω εἰς τὸ χαρτόνι τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου μὲ ἀκτῖνα ὅση ἡ πλευρὰ καὶ τόξον ὅση ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως τοῦ κώνου ποὺ θέλω νὰ κάμω. Εἰς τὴν μίαν πλευρὰν ἀφήνω καὶ ὀλίγον περιθώριον διὰ τὸ κόλλημα. Οὕτω θὰ

(*) Ὁ διδ. ὁρίζει ἀπὸ τὴν προηγουμένην διδακτικὴν ὥραν μίαν ὁμάδα μαθητῶν νὰ ἐπισκεφθῇ τὸν φαναρὰν τῆς συνοικίας καὶ νὰ παρατηρήσῃ πῶς κατασκευάζει τὰ χωνιά. Πρὶν ἀρχίσῃ τὸ μάθημα, οἱ μαθηταὶ καλοῦνται καὶ ἀνακοινώνουν τὰς παρατηρήσεις των.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

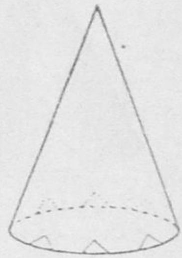
γίνῃ τὸ σχῆμα 90. Κατόπιν κόπτω γύρω τὸ χαρτόνι, τὸ κλείνω, κολλῶ ἀπὸ τὸ μέσα μέρος τὸ περιθώριον καὶ ἔχω τὸ χωνὶ τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας. Ἂν ἐκεῖ πλησίον ὑπάρχῃ φαναρᾶς, πηγαίνω καὶ βλέπω πῶς κάμνει τὰ χωνιά, διότι αὐτὸς σὰν τεχνίτης εἶναι ἐπιτήδειος.

Ἔπειτα σχεδιάζω καὶ τὴν βάσιν (σχ. 91) μὲ τὰ τριγωνάκια διὰ τὸ κόλλημα, ὅπως ἔκαμα καὶ εἰς τὸν κύλινδρον. Τέλος ἐφαρμόζω τὸν κύκλον εἰς τὸ ἄνοιγμα τοῦ χωνιοῦ μὲ τριγωνάκια, πρὸς τὸ μέσα



Σχ. 90

Σχ. 91



Σχ. 92

μέρος, ἀφοῦ, ἐννοεῖται, βάλλω κόλλαν καὶ ἔχω τὸν κῶνον τοῦ σχήματος 92.

β΄) **Μὲ ξύλον κόντρα-πλακέ.** Διὰ τὴν κατασκευὴν τοῦ κώνου τούτου θὰ χρησιμοποιηθῇ τὸ σχέδιον Νο 8 (ἔκδ. Ἰω. Καμπανᾶ).

Σημ. Ἡ κατασκευὴ τοῦ κώνου μὲ ἄλλο ξύλον εἶναι δύσκολος. Ἀντιθέτως μὲ πηλὸν εἶναι εὔκολος. Γεμίζω τὸ χωνὶ τοῦ κώνου μὲ πηλὸν καὶ ὅταν ξεραθῇ σχίζω τὸ χαρτὶ καὶ μένει ὁ πήλινος κῶνος.

Κατασκευάσετε καὶ σεῖς ἕναν κῶνον μὲ χαρτόνι.

ΠΩΣ ΕΥΡΙΣΚΕΤΑΙ Η ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΤΟΥ ΚΩΝΟΥ

Σκεπάζω τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου μὲ χαρτί, ἔπειτα τὸ ἁπλώνω καὶ βλέπω πώς ἔχει σχῆμα τομέως (σχ. 93). Τόξον τοῦ τομέως ΑΒΓ εἶναι ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως καὶ ἡ ἀκτὶς ΑΓ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ κώνου. Ἑπομένως τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου εὑρίσκετα ὅπως καὶ τοῦ τομέως, ἂν δηλ. πολλαπλασιάσω τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως ἐπὶ τὴν πλευρὰν καὶ τὸ γινόμενον διαιρέσω διὰ 2.

Παράδειγμα: Πρόκειται νὰ κατασκευασθῇ κωνικὴ σκηνὴ μὲ ἀκτῖνα βάσεως 2 μέτρων καὶ πλευρὰν 4 μέτρων. Πόσα τ. μ. καραβόπανον χρειάζεται;

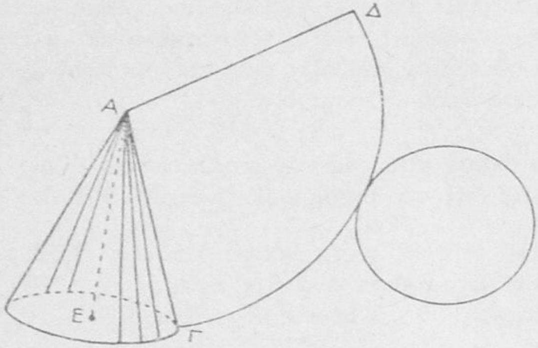
Λύσις: α΄) Περιφέρεια βάσεως $= 4 \times 3{,}14 = 12{,}56$ τ. μ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Καὶ β΄) ἐμβ. κυρτῆς ἐπιφ. $= 12{,}56 \times \frac{4}{2} = \frac{50{,}24}{2} = 25{,}12$ τ. μ.

Ὥστε : Χρειάζονται 25,12 τ. μ. καραβόπανο.

Διὰ νὰ ἔχω ὅμως ὅλην τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου, ὑπολείπεται



Σχ. 93

α=2 μ.
δ=4 μ.
Π=12,56 μ.
Ἐμβ. κυρτῆς=
=25,12 τ.μ.

νὰ εὕρω καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως ποὺ εἶναι κύκλος. Ἑπομένως :

Διὰ νὰ εὕρω τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου, εὑρίσκω πρῶτον τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως, ἔπειτα τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας καὶ προσθέτω.

Προβλήματα :

44. Πόσα τετραγωνικὰ μέτρα πισσόχαρτον χρειάζομαι διὰ νὰ σκεπάσω τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τῆς καλύβης μου, ἡ ὁποία ἔχει διάμετρον βάσεως 4 μέτρων καὶ πλευρὰν 4,60 μέτρων ;

45. Πρόκειται νὰ κατασκευασθῇ κωνικὴ σκηνὴ μὲ ἀκτῖνα βάσεως 1,50 μ. καὶ πλευρὰν 3,60 μ. Πόσα τετρ. μέτρα ὕφασμα χρειάζονται ;

46. Κωνικὸν δοχεῖον ἔχει ἀκτῖνα βάσεως 0,4 μ. καὶ πλευρὰν 0,8 μ. Πόση εἶναι ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνειά του ;

47. Πόσα τ. μ. εἶναι ἡ ἐσωτερικὴ ἐπιφάνεια κωνικοῦ φούρνου, ὁ ὁποῖος ἔχει ἀκτῖνα βάσεως 0,80 μ. καὶ πλευρὰν 2 μέτρα ;

48. Πόσα ψωμιὰ (καρβέλια) χωρεῖ ὁ φοῦρνος αὐτὸς ἂν κάθε ψωμὶ ἔχῃ ἀκτῖνα 15 δακτύλους ;

49. Νὰ εὑρεθῇ ὅλη ἡ ἐπιφάνεια κώνου ὁ ὁποῖος ἔχει ἀκτῖνα βάσεως 1,50 μ. καὶ πλευρὰν 3,60 μ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΠΩΣ ΕΥΡΙΣΚΕΤΑΙ Ο ΟΓΚΟΣ ΚΩΝΟΥ

Ἐδῶ κάμνω ὅ,τι ἔκαμα νὰ εὕρω τὸν ὄγκον τῆς πυραμίδος. Κατασκευάζω δηλαδὴ ἕναν κῶνον χάρτινον καὶ ἕναν κύλινδρον ὥστε νὰ ἔχουν τὴν ἰδίαν βάσιν καὶ τὸ ἴδιον ὕψος. Κατόπιν γεμίζω τὸν κῶνον μὲ ἄμμον καὶ ἀδειάζω εἰς τὸν κύλινδρον. Ὅταν αὐτὸ γίνῃ τρεῖς φοράς, ὁ κύλινδρος γεμίζει. Ἀπὸ τὸ παράδειγμα αὐτὸ βλέπω ὅτι ὁ κῶνος χωρεῖ τὸ τρίτον ἀπ' ὅ,τι ὁ κύλινδρος ποὺ ἔχει τὴν ἰδίαν βάσιν καὶ τὸ ἴδιον ὕψος. Ὥστε:

Διὰ νὰ εὕρω τὸν ὄγκον τοῦ κώνου πολλαπλασιάζω τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος καὶ διαιρῶ διὰ 3.

Παράδειγμα: Κωνικὸς πύργος ἔχει ἀκτῖνα βάσεως 1,50 μ. καὶ ὕψος 6 μ. Πόσα κυβικὰ μέτρα εἶναι ὁ ὄγκος του;

Λύσις: α') Περιφ. βάσεως: $3 \times 3{,}14 = 9{,}42$ μέτρα.

β') Ἐμβαδὸν βάσεως $9{,}42 \times \frac{1{,}50}{2} = \frac{14{,}130}{2} = 7{,}065$ τετραγ. μ.

Καὶ γ') ὄγκος $7{,}065 \times \frac{6}{3} = \frac{42{,}390}{3} = 14{,}130$ κυβ. μέτρα.

Προβλήματα:

50. Κωνικὴ καλύβη ἔχει ἐμβαδὸν βάσεως 12 τ. μ. καὶ ὕψος 3 μ. Πόσα κυβικὰ μέτρα εἶναι ὁ ὄγκος της;

51. Πόσα κυβ. μέτρα ἀέρος καταλαμβάνει κωνικὴ σκηνή, ἡ ὁποία ἔχει ἐμβαδὸν βάσεως 12,56 τ. μ. καὶ ὕψος 3,75 μέτρα;

52. Τὸ χωνὶ ἑνὸς ἀλευρομύλου ἔχει ἀκτῖνα βάσεως 0,30 μ. καὶ ὕψος 0,80 μ. Πόσα κιλὰ σιτάρι χωρεῖ; (εἰδ. βάρ. σιτ. 1,56).

53. Κωνικὸς πύργος ἔχει διάμετρον βάσεως 3,60 μ., πλευρὰν 5,80 μ. καὶ ὕψος 5 μ. Νὰ εὑρεθῆ: α) τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του καὶ β) ὁ ὄγκος τοῦ πύργου.

54. Μετρήσετε διάφορα κωνικὰ ἀντικείμενα καὶ εὕρετε τὸν ὄγκον των.

ΚΟΛΟΥΡΟΣ ΚΩΝΟΣ*

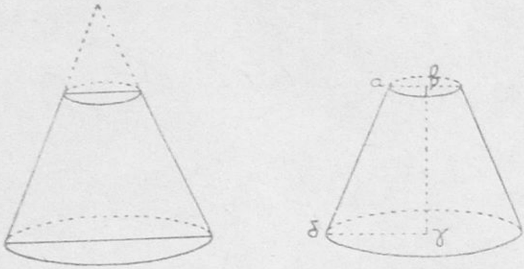
Νὰ καὶ ἕνας κῶνος μὲ κομμένον τὸ ἐπάνω μέρος, παράλληλα μὲ τὴν βάσιν του. Αὐτὸν θὰ τὸν λέγωμεν κόλουρον κῶνον (σχ. 94).

* Ὁ διδάσκων ἔχει ἕτοιμον τὸν πήλινον κῶνον, κόπτει τὸ ἐπάνω μέρος ἔμπροσθεν τῶν μαθητῶν καὶ γίνεται ὁ κόλουρος κῶνος.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Σχῆμα κολούρου κώνου ἔχουν τὸ ποτήρι, ἡ γλάστρα, ὁ κουβάς, ἡ κάδη, ἡ καραβάνα, τ' ἀμπαζοὺρ τῆς λάμπας καὶ πολλὰ ἄλλα.

Παρατηρῶ τὸν κόλουρον κῶνον καὶ βλέπω ὅτι ἔχει δυὸ κυκλικὰς βάσεις παραλλήλους, ἀλλ' ὄχι ἴσας καὶ μίαν κυρτὴν ἐπιφάνειαν. Ἡ κάθετος βγ ἀπὸ τὴν μίαν βάσιν εἰς τὴν ἄλλην εἶναι τὸ ὕψος καὶ ἡ αδ εἶναι ἡ **πλευρὰ** τοῦ κολούρου κώνου.

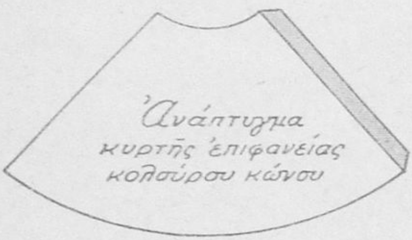


Σχ. 94

Συγκρίνετε τὸν κόλουρον κῶνον μὲ τὸν σωστὸν κῶνον καὶ τὴν κόλουρον πυραμίδα καὶ νὰ εὕρετε τὰς ὁμοιότητας καὶ τὰς διαφοράς των.

ΕΥΡΕΣΙΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ ΚΟΛΟΥΡΟΥ ΚΩΝΟΥ

Σκεπάζω τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κολούρου κώνου μὲ χαρτί, κατόπιν τὸ ἁπλώνω καὶ βλέπω ὅτι τὸ ἀνάπτυγμά της ὁμοιάζει μὲ τραπέζιον (σχ. 95). Βάσεις τοῦ τραπεζίου εἶναι αἱ περιφέρειαι τῶν βάσεων τοῦ κολούρου κώνου ποὺ δὲν εἶναι βέβαια εὐθεῖαι ἀλλὰ καμπύλαι καὶ ὕψος ἡ ἀπόστασις τῶν δύο βάσεων. Ἑπομένως τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κολούρου κώνου εὑρίσκεται, ὅπως τοῦ τραπεζίου, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸ ἡμιάθροισμα τῶν περιφερειῶν τῶν δύο βάσεων ἐπὶ τὸ ὕψος.



Σχ. 95

Παράδειγμα. Ὁ κουβὰς ἔχει περιφέρειαν τῶν δύο βάσεων 6 παλάμας καὶ 4 παλάμας, πλευρὰν δὲ 5 παλάμας. Τί ἐμβαδὸν ἔχει ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια;

Λύσις: α) Ἡμιάθροισμα περιφερειῶν (6+4): 2=5 παλάμαι.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Καὶ β΄) ἐμβαδὸν κυρτῆς ἐπιφανείας: 5×5=25 τετραγ. παλάμαι. Διὰ νὰ ἔχω ὅμως ὅλην τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κολούρου κώνου, πρέπει νὰ εὕρω καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῶν δύο κυκλικῶν βάσεων καὶ νὰ τὸ προσθέσω καὶ αὐτό.

Ἑπομένως :

Διὰ νὰ εὕρω τὴν ἐπιφάνειαν κολούρου κώνου εὑρίσκω πρῶτον τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας, ἔπειτα τῶν δύο κυκλικῶν βάσεων καὶ προσθέτω.

ΕΥΡΕΣΙΣ ΟΓΚΟΥ ΚΟΛΟΥΡΟΥ ΚΩΝΟΥ

Ὅταν : ΚΒ=3 δάκτ. | ΓΔ=1 δάκτυλος
ΑΚ=8 δάκτ. | ΑΓ=4 δάκτυλοι

Περιφέρεια κάτω βάσεως : 6×3,14=18,84 δ.

Περιφέρεια ἄνω βάσεως : 2×3,14= 6,28 δ.

Ὄγκος σωστοῦ κώνου

α) Ἐμβ. βάσεως: $\frac{18,84\times 8}{2}=\frac{56,52}{2}=28,26$ τ. δ.

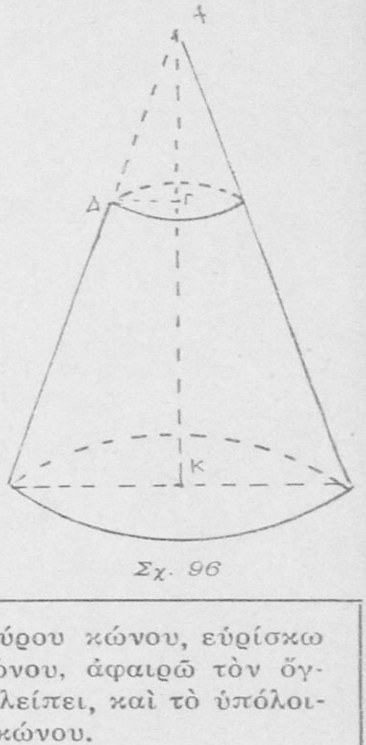
β) Ὄγκος : $\frac{28,26\times 8}{3}=\frac{226,08}{3}=75,36$ τ. δ.

Ὄγκος κώνου ποὺ λείπει

α) Ἐμβ. βάσεως : $\frac{6,28\times 1}{2}=\frac{6,28}{2}=3,14$ τ. δ.

β) Ὄγκος : $\frac{3,14\times 4}{3}=\frac{12,56}{8}=4,18$ κ. δ.

Ὥστε: ὄγκος κολ. κών.: 75,36 −4,18=71,18 κ.δ.



Σχ. 96

Διὰ νὰ εὕρω τὸν ὄγκον κολούρου κώνου, εὑρίσκω πρῶτον τὸν ὄγκον τοῦ σωστοῦ κώνου, ἀφαιρῶ τὸν ὄγκον τοῦ κώνου τῆς κορυφῆς, ποὺ λείπει, καὶ τὸ ὑπόλοιπον εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ κολούρου κώνου.

Προβλήματα :

55. Πόση εἶναι ἡ ἐπιφάνεια κολούρου κώνου ὅταν αἱ διάμετροι

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

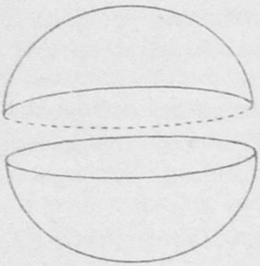
τῶν βάσεών του εἶναι 4 μέτρα, 2 μέτρα καὶ ἡ πλευρά του 1 μέτρον;

56. Θέλω νὰ κάμω 10 κουβάδες μὲ ἀκτῖνα βάσεως ἕκαστος 0,20 μ. καὶ 0,10 μ., πλευρὰν δὲ 0,30 μ. Πόσα τ. μ. τσίγκον χρειάζομαι καὶ τί θὰ στοιχίσῃ ἂν ὁ τσίγκος πωλῆται πρὸς 30 δραχ. τὸ τετραγωνικὸν μέτρον;

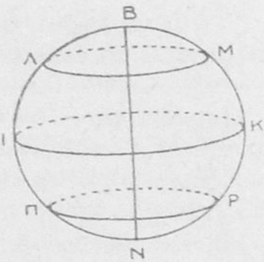
57. Κάνετε μετρήσεις εἰς σώματα μὲ σχῆμα κολούρου κώνου (γλάστρες, κάδες κ. ἄ.), καὶ εὕρετε τὴν ἐπιφάνειαν ἑκάστου.

ΣΦΑΙΡΑ

Τὸ τόπι, ἡ μπάλα τοῦ ποδοσφαίρου, οἱ ὑάλινοι βῶλοι, τὰ πορτοκάλια, τὰ κεράσια κ. ἄ. σώματα, ἔχουν σχῆμα **σφαίρας**. Ἡ σφαῖρα δὲν ἔχει οὔτε βάσιν, οὔτε κορυφήν, παρὰ κλείνεται



Σχ. 97



Σχ. 98

ἀπὸ μίαν μόνον ἐπιφάνειαν κυρτὴν καὶ πολὺ κανονικὴν διότι ὅλα τὰ σημεῖα της ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπὸ ἓν σημεῖον ποὺ εἶναι εἰς τὸ μέσον τῆς σφαίρας καὶ λέγεται **κέντρον.** Ἡ εὐθεῖα ποὺ ἑνώνει τὸ κέντρον μὲ ἓν σημεῖον τῆς ἐπιφανείας, λέγεται **ἀκτὶς** τῆς σφαίρας. Καὶ ἡ εὐθεῖα ποὺ περνᾶ ἀπὸ τὸ κέντρον καὶ ἑνώνει δύο σημεῖα τῆς ἐπιφανείας, λέγεται **ἄξων** ἢ **διάμετρος.** Αἱ διάμετροι τῆς σφαίρας εἶναι ὅλαι ἴσαι καὶ διπλάσιαι τῶν ἀκτίνων. Τὸ ἡμισφαίριον, ὅπως δεικνύει τὸ σχῆμα 97, ἔχει δύο ἐπιφανείας: Μίαν κυρτὴν καὶ μίαν ἐπίπεδον, ἡ ὁποία εἶναι κύκλος.

Παρατηρήσετε τὴν σφαίραν τοῦ σχήματος 98. Ὁ κύκλος ΙΚ ποὺ περνᾶ ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας, λέγεται **μέγιστος κύκλος**, Καὶ οἱ κύκλοι ΛΜ καὶ ΠΡ ποὺ δὲν περνοῦν ἀπὸ τὸ κέντρον λέγονται **μικροὶ κύκλοι** καὶ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὸν μέγιστον κύκλον.

Παρατηρήσετε τώρα καὶ τὴν ὑδρόγειον σφαῖραν τοῦ σχο-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

λείου σας καὶ νὰ εὕρετε τὸν Ἰσημερινόν, τοὺς παραλλήλους κύ-
κλους, τοὺς μεσημβρινοὺς καὶ τοὺς πόλους.

ΠΩΣ ΕΥΡΙΣΚΕΤΑΙ Η ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΤΗΣ ΣΦΑΙΡΑΣ

Τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας δὲν ἠμποροῦμεν ν' ἁπλώσωμε κάτω, ὅπως ἐκάμομεν εἰς τὰ ἄλλα γεωμετρικὰ σώματα, διότι αὐτὸ εἶναι ἀδύνατον.

Ἑπομένως δὲν ἠμποροῦμεν νὰ ἐξηγήσωμεν ἐποπτικὰ πῶς εὑρίσκεται ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας. Ἀπὸ μετρήσεις ὅμως πού ἔγιναν εὑρέθη ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας εἶναι 4 φορὲς μεγαλυτέρα ἀπὸ τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς μεγίστου κύκλου της. Ὥστε:

Διὰ νὰ εὕρω τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας, πολλαπλασιάζω τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μεγίστου κύκλου ἐπὶ 4.

Παράδειγμα: Ἂν ἡ ὑδρόγειος σφαῖρα τοῦ σχολείου ἔχῃ διάμετρον 0,24 μ., πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπειφανείας της;

Λύσις: α') Περιφέρεια μεγ. κύκλου (μ. κ.) $=0{,}24 \times 3{,}14=$ 0,7536 μέτρα.

β') Ἐμβαδὸν μεγίστου κύκλου $0{,}7536 \times 0{,}06$ ($^1/_2$ ἀκτῖνος) $=$ 0,045216 τ. μέτρα.

Καὶ γ') ἐπιφάνεια ὑδρ. σφαίρας $=0{,}045216 \times 4=0{,}1808$ τ. μ. ἢ 18 μ. παλ. καὶ 8 τ. δ.

Προβλήματα:

58. Μέτρησε τὴν μπάλα τοῦ σχολείου σας καὶ νὰ εὕρῃς τί ἐπιφάνειαν ἔχει.

59. Τί ἐπιφάνειαν ἔχει ἕνα τόπι μὲ ἀκτῖνα 0,10 μέτρου;

60. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐπιφάνεια σφαίρας μὲ διαμέτρους 0,8 μ. καὶ 1,2 μ.

61. Πόσα τετρ. μέτρα ὕφασμα χρειάζονται νὰ γίνῃ ἓν σφαιρικὸν ἀερόστατον μὲ ἀκτῖνα 5,80 μέτρου;

62. Σφαῖρα ἔχουσα ἀκτῖνα 0,28 μ. πρόκειται νὰ ἐπιχρυσωθῇ πρὸς 450 δραχ. τὸ τ. μ. Πόσον στοιχίζει;

63. Τὸ τόπι τοῦ Γιώργου ἔχει διάμετρον 0,12 μ. Τὸ ἐκύλισα καὶ ἔκαμε 20 στροφές. Τί ἀπόστασιν διήνυσε;

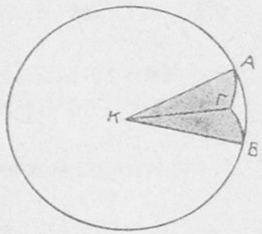
64. Πόση εἶναι ἡ ἀκτὶς σφαίρας ὅταν ἡ ἐπιφάνειά της εἶναι 8,0384 τετραγωνικὰ μέτρα;

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

65. Ἡ ἀκτὶς τῆς γῆς εἶναι 6370 χιλιόμετρα. Τί ἐπιφάνειαν ἔχει ;

ΠΩΣ ΕΥΡΙΣΚΕΤΑΙ Ο ΟΓΚΟΣ ΣΦΑΙΡΑΣ

Λαμβάνω ἓν σφαιρικὸν σῶμα (πορτοκάλι ἢ ἄλλο τι) καὶ τοποθετῶ εἰς τρία σημεῖα τῆς περιφερείας του, τὸ Α, Β καὶ Γ (σχ. 98) ἀπὸ μίαν καρφίτσαν. Κατόπιν, μὲ τομὰς πρὸς τὴν διεύθυνσιν τοῦ κέντρου, ἀφαιρῶ τὸ τεμάχιον ΑΒΓΚ, τὸ παρατηρῶ καὶ βλέπω πὼς ὁμοιάζει μὲ πυραμίδα. Μὲ τὴν διαφορὰν ὅτι ἡ βάσις της εἶναι καμπουριαστὴ ἐπειδὴ εἶναι τμῆμα ἀπὸ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας. Κορυφὴ τῆς πυραμίδος εἶναι τὸ κέντρον Κ. Ἂν ὅμως τὰ σημεῖα ΑΒΓ τοποθετήσω πιὸ κοντὰ καὶ ἀφαιρέσω ὅπως ἔκαμα παραπάνω, βλέπω ὅτι ἡ βάσις τῆς πυραμίδος ἔγινε σχεδὸν ἐπίπεδον.



Σχ. 99

Ἑπομένως ἠμποροῦμεν νὰ φαντασθῶμεν ὅτι ἡ σφαῖρα εἶναι πολλαὶ πυραμίδες μὲ ἄθροισμα βάσεων τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας καὶ κορυφὴν τὸ κέντρον.

Ὁ ὄγκος πυραμίδος εὑρίσκεται ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος καὶ τὸ γινόμενον διαιρεθῇ διὰ 3. Καὶ ἐπειδὴ ἡ σφαῖρα εἶναι ἄθροισμα πυραμίδων :

Διὰ νὰ εὕρω τὸν ὄγκον τῆς σφαίρας πολλαπλασιάζω τὸ ἐμβαδὸν αὐτῆς ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα καὶ διαιρῶ διὰ 3.

Παράδειγμα 1ον. Τί ὄγκον ἔχει ἡ ὑδρόγειος σφαῖρα τοῦ σχολείου, ὅταν τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας της εἶναι 0,18 τ. μ. καὶ ἡ ἀκτὶς 0,12 μέτρου ;

Λύσις : Ὄγκος $=0{,}18\times\frac{0{,}12}{3}=\frac{0{,}0216}{3}=0{,}0072$ κ.μ.

Ἤτοι 7 κυβ. παλάμαι καὶ 2 κυβ. δάκτυλοι.

Παράδειγμα 2ον. Τί ὄγκον ἔχει ἓν ἀερόστατον ὅταν ὁ μέγιστος κύκλος του εἶναι 12,56 μέτρα ;

Λύσις : Διάμετρος $=12{,}56 : 3{,}14=4$ μ. Καὶ ἀκτὶς $=4 : 2=2$ μέτρα.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

α) Ἐμβ. μεγ. κύκλου = 1256×1 (1/2 ἀκτῖνος) = 12,56 τ.μ.

β) Ἐπιφάνεια ἀεροστάτου = $12{,}56 \times 4 = 50{,}24$ τ.μ·

Καὶ γ) ὄγκος ἀεροστάτου $= 50{,}24 \times \frac{2}{3} = \frac{100{,}48}{3} = 33{,}49$ κ.μ.

Προβλήματα :

66. Μετρήσετε τὴν περιφέρειαν μεγίστου κύκλου τῆς μπάλας τοῦ σχολείου σας καὶ νὰ εὕρετε τὸν ὄγκον της.

67. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος μπαλονίου τὸ ὁποῖον ἔχει ἐπιφάνειαν 0,72 τ.μ. καὶ ἀκτῖνα 0,24 τοῦ μέτρου ;

68. Ποῖος ὁ ὄγκος σφαίρας ὅταν ἔχῃ ἀκτῖνα 0,20 μέτρου ;

69. Ἡ διάμετρος τῆς γῆς εἶναι 12740 χιλιόμετρα. Νὰ εὑρεθοῦν : α′) τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μεγίστου κύκλου, β′) ἡ ἐπιφάνεια, γ′) ὁ ὄγκος της.

Μέτρησε ἕνα σφαιρικὸν σῶμα καὶ νὰ εὕρῃς τὸν ὄγκον του.

ΟΓΚΟΣ ΑΚΑΝΟΝΙΣΤΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ

Τὰ σώματα, τὰ ὁποῖα ὥς τώρα ἐμάθομεν, εἶναι ὅλα γεωμετρικὰ σώματα (κανονικὰ) καὶ γνωρίζομεν νὰ εὑρίσκωμεν τὸν ὄγκον των μετρῶντες τὰς διαστάσεις. Πολλὰς φορὰς ὅμως εἴμεθα ὑποχρεωμένοι νὰ γνωρίζωμεν καὶ τὸν ὄγκον μιᾶς πέτρας ἢ ἄλλου ἀκανονίστου σώματος. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν γεμίζομεν ἓν δοχεῖον μὲ νερὸ καὶ ρίπτομεν ἐντὸς αὐτοῦ τὴν πέτραν. Ἡ πέτρα τότε θὰ ἐκτοπίσῃ τόσην ποσότητα νεροῦ, ὅσος εἶναι ὁ ὄγκος της. Τὸ νερὸ αὐτὸ χύνεται εἰς ἄλλο δοχεῖον. Κατόπιν τὸ συλλέγομεν, μετροῦμεν τὸν ὄγκον του καὶ τὸ ἐξαγόμενον εἶναι ὁ ὄγκος τῆς πέτρας.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΓΕΝΙΚΗ ΕΠΑΝΑΛΗΨΙΣ ΤΩΝ ΚΑΝΟΝΩΝ ΔΙΑ ΤΗΝ ΜΕΤΡΗΣΙΝ ΕΜΒΑΔΟΥ ΚΑΙ ΟΓΚΟΥ

(ΔΕΥΤΕΡΟΝ ΜΕΡΟΣ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ)

Α΄) Κανόνες εὑρέσεως ἐμβαδοῦ

1. **Κανονικοῦ πολυγώνου:** Πολλαπλασιάζω τὴν περίμετρον ἐπὶ τὸ ἀπόστημα (ὕψος) καὶ διαιρῶ διὰ 2.

2. **Κύκλου:** Πολλαπλασιάζω τὴν περιφέρειαν ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα καὶ διαιρῶ διὰ 2.

3. **Τομέως:** Πολλαπλασιάζω τὸ μῆκος τοῦ τόξου ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα καὶ διαιρῶ διὰ 2.

4. **Ἐπιφανείας κυλίνδρου:** Εὑρίσκω πρῶτον τὸ ἐμβαδὸν τῶν δύο κυκλικῶν βάσεων, ἔπειτα τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας καὶ προσθέτω.

5. **Κυρτῆς ἐπιφανείας κώνου:** Πολλαπλασιάζω τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως ἐπὶ τὴν πλευρὰν καὶ διαιρῶ διὰ 2.

6. **Ἐπιφανείας κώνου:** Εὑρίσκω πρῶτον τὸ ἐμβαδὸν ἐπιφανείας τῆς βάσεως, ἔπειτα τῆς κυρτῆς καὶ προσθέτω.

7. **Κυρτῆς ἐπιφανείας κολούρου κώνου:** Πολλαπλασιάζω τὸ ἡμιάθροισμα τῶν περιφερειῶν τῶν 2 βάσεων ἐπὶ τὸ ὕψος.

8. **Ἐπιφανείας κολούρου κώνου:** Εὑρίσκω πρῶτον τὸ ἐμβαδὸν τῶν δύο κυκλικῶν βάσεων, ἔπειτα τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας καὶ προσθέτω.

9. **Ἐπιφανείας σφαίρας:** Πολλαπλασιάζω τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μεγίστου κύκλου ἐπὶ 4.

Β΄. Κανόνες εὑρέσεως ὄγκου

1. **Κυλίνδρου:** Πολλαπλασιάζω τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος.

2. **Βαρελίου:** Πολλαπλασιάζω τὸ ἡμιάθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῆς κάτω καὶ μεσαίας βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος.

3. **Κώνου:** Πολλαπλασιάζω τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος καὶ διαιρῶ διὰ 3.

4. **Κολούρου κώνου:** Διὰ νὰ εὕρω τὸν ὄγκον κολούρου κώνου, ἀφαιρῶ τὸν ὄγκον τοῦ κώνου τῆς κορυφῆς, ποὺ λείπει, καὶ τὸ ὑπόλοιπον εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ κολούρου κώνου.

5. **Σφαίρας:** Πολλαπλασιάζω τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα καὶ διαιρῶ διὰ 3.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΔΙΑΦΟΡΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

(Γενικὴ ἀνασκόπησις ὅλης τῆς ὕλης τοῦ βιβλίου)

Α΄. Ἀπὸ μνήμης :

70. Τετραγωνικὴ αἴθουσα ἔχει πλευρὰν 4 μ. Πόση εἶναι ἡ περίμετρος καὶ ποῖον τὸ ἐμβαδὸν τῆς αἰθούσης;

71. Τὰ 12 τ. μ. μὲ πόσας τετρ. παλάμας ἰσοῦνται; καὶ αἱ 2 τετρ. παλάμαι μὲ πόσους τετρ. δακτύλους (πόντους);

72. Θέλω νὰ περιφράξω τὸν κῆπον μου σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου μὲ μῆκος 42,5 μ. καὶ πλάτος 32 μ. Πόσα μέτρα συρματοπλέγματος θὰ χρειασθοῦν διὰ τὴν περίφραξίν του;

73. Πόσα κυβικὰ μέτρα χωρεῖ δεξαμενὴ σχήματος ὀρθ. παραλληλεπιπέδου ἔχουσα μῆκος 4,5 μ., πλάτος 3 μ. καὶ ὕψος 2 μ.;

74. Ἂν ἡ μία γωνία ἑνὸς τριγώνου εἶναι 50^0 καὶ ἡ ἄλλη 65 πόσον μοιρῶν εἶναι ἡ τρίτη γωνία;

75. Ἰσοσκελὲς τρίγωνον ἔχει τὴν ἀπέναντι τῆς βάσεως γωνία 40^0. Πόσων μοιρῶν εἶναι ἑκάστη ἀπὸ τὰς ἄλλας δύο γωνίας;

76. Τριγωνικὸν οἰκόπεδον ἔχει τὴν βάσιν του 30 μ. καὶ τὸ ὕψος 24 μ. Πόσα τ. μ. εἶναι τὸ ἐμβαδόν του;

77. Ἄλλο οἰκόπεδον ἔχει σχῆμα τραπεζίου μὲ βάσεις 30,26 μ. καὶ ὕψος 20 μ. Τί ἐμβαδὸν ἔχει καὶ πόσον εἶναι μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ προηγούμενον;

78. Κυκλικὸς ἀνθόκηπος ἔχει ἀκτῖνα 10 μέτρων. Πόση εἶναι ἡ περιφέρεια τοῦ ἀνθοκήπου;

79. Εἰς τὸ ὑπόστεγον τοῦ σχολείου ὑπάρχει κυλινδρικὴ στήλη (κολώνα), ἡ ὁποία ἔχει περιφέρειαν βάσεως 2,5 μ. καὶ ὕψος 4 μέτρα. Τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τῆς στήλης θέλω νὰ περιτυλίξω μὲ χαρτί. Πόσα τ. μ. χαρτιοῦ χρειάζομαι;

80. Κανονικὸν ἑξάγωνον, πολύγωνον, ἔχει περίμετρον 24 μέτρων καὶ ὕψος 4 μέτρων. Πόσα τ. μ. εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πολυγώνου.

81. Ἡ ὑδρόγειος σφαῖρα τοῦ σχολείου ἔχει ἐμβαδὸν μεγίστου κύκλου 0,050 τεραγωνικὰ μέτρα. Πόσα τετραγωνικὰ μέτρα εἶναι ὅλη ἡ ἐπιφάνεια τῆς ὑδρογείου σφαίρας ;

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

82. Βαρέλιον οἴνου ἔχει διάμετρον μεσαίας βάσεως 1 μέτρου αὶ κάτω βάσεως 0,60 μ. Τὸ ὕψος τοῦ βαρελίου εἶναι 2 μέτρα. Πόα κυβικὰ μέτρα εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ βαρελίου ;

83. Μετρήσετε τὰς διαστάσεις τοῦ σχολικοῦ κήπου καὶ νὰ εὕετε πόση εἶναι ὅλη ἡ ἐπιφάνειά του.

Β'. Γραπτῶς :

84. Τὸ χωράφι μου εἶναι τετράγωνον μὲ πλευρὰν 82,5 μ. καὶ έλω νὰ εὕρω πόσα στρέμματα εἶναι. Τί θὰ κάμω ;

85. Τετραγωνικὸν οἰκόπεδόν μου μὲ πλευρὰν 32,50 μ. ἐπωλήθη πρὸς 125 δραχ. τὸ τετραγωνικὸν μέτρον. Πόσας δραχμὰς θὰ ἰσπράξω ;

86. Τὸ γραφεῖον τοῦ σχολείου εἶναι κύβος μὲ ἀκμὴν 4,2 μ. πρόκειται δὲ ν' ἀσβεστωθοῦν αἱ τέσσαρες πλευραὶ γύρω καὶ ἡ πάνω. Τὸ ἀσβέστωμα συνεφωνήθη πρὸς 4,50 δραχ. τὸ τ μ. Πόσον θὰ στοιχίση ;

87. Εἰς ἀποθήκην διαστάσεων 8 μ. 6 μ. καὶ 3 μ. ἐτοποθετήθησαν 16 κυβικὰ κιβώτια μὲ ἀκμὴν ἕκαστον 1,50 μ. Πόσα κυβικὰ μέτρα ἐλεύθερος χῶρος μένει εἰς τὴν ἀποθήκην ;

88. Ἕν παράθυρον τῆς ἀποθήκης ἔχει διαστάσεις 1,80 μ. καὶ 1,20 μ., ἐπ' αὐτοῦ δὲ ἔχουν τοποθετηθῆ 6 τζάμια διαστάσεων ἕκαστον 0,6 μ. καὶ 0,4 μ. Τί ἐπιφάνειαν ἔχει τὸ ξύλινον μέρος τοῦ παραθύρου ;

89. Εἰς τὸ πάτωμα τοῦ δωματίου μου διαστάσεων 6 μ. καὶ 4,50 μ. ἔχω στρώσει χαλὶ διαστάσεων 3,50 μ. καὶ 2,60 μ. Πόσα τ.μ. εἶναι τὸ ἀκάλυπτον μέρος τοῦ πατώματος ;

90. Ἡ δεξαμενὴ γειτονικοῦ κτήματος ἔχει μῆκος 5 μ., πλάτος 4 μ. καὶ χωρεῖ 60 κυβ. μέτρα νεροῦ. Ἠμπορεῖτε νὰ εὕρετε τί ὕψος ἔχει ἡ δεξαμενή ;

91. Ἡ βρύση τοῦ κήπου μου χύνει ἕναν τόννον νερὸ εἰς ἡμίσειαν ὥραν. Εἰς πόσας ὥρας θὰ γεμίση δεξαμενὴν ἡ ὁποία ἔχει διαστάσεις 6 μ., 5 μ. καὶ 3,20 μέτρα ;

92. Δρόμος μήκους 12 χιλιομέτρων καὶ πλάτους 4,2 μ. πρόκειται νὰ στρωθῆ μὲ χαλίκια εἰς ὕψος 0,25 μ. Πόσα κυβικὰ μέτρα χαλίκια θὰ χρειασθοῦν ;

93. Διὰ νὰ κτισθῆ μία οἰκοδομὴ ἔσκαψαν θεμέλια μήκους 102,5 μ., πλάτους 0,90 μ καὶ βάθους 1,80 μ. Πόσα κυβικὰ μέτρα χώματος ἀφῃρέθησαν ;

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

94. Φορτηγὸν αὐτοκίνητον ποὺ μεταφέρει τὸ χῶμα αὐτὸ ἔξω τῆς πόλεως χωρεῖ 4,2 κυβ. μέτρα. Πόσους δρόμους θὰ κάμη διὰ νὰ μεταφέρῃ ὅλο τὸ χῶμα τῶν θεμελίων ; Καὶ πόσους δρόμους θὰ κάμῃ ἄλλο αὐτοκίνητον ποὺ χωρεῖ 6 κυβικὰ μέτρα χώματος ;

95. Πρόκειται νὰ κτισθοῦν οἱ τέσσαρες τοῖχοι οἰκίας μὲ περίμετρον 48 μ., πλάτος 0,60 μ. καὶ ὕψους 9 μ. Πόση θὰ εἶναι ἡ δαπάνη, ἂν τὸ κυβικὸν μέτρον συμφωνηθῇ πρὸς 125 δραχμάς ;

96. Τριγωνικὸν οἰκόπεδον τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν βάσιν του 25 μ. καὶ τὸ ὕψος 30,25 μ., ἐπωλήθη πρὸς 186 δραχ. τὸ τετραγωνικὸν μέτρον. Τί ἀξίαν ἔχει ;

97. Εἰς γεωγραφικὸν χάρτην ὑπὸ κλίμακα $\frac{1}{1.500.000}$ δύο πόλεις ἀπέχουν 0,12 μ Πόση εἶναι ἡ πραγματική των ἀπόστασις ;

98. Οἰκόπεδον σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου ἐσχεδιάσθη ὑπὸ κλίμακα $\frac{1}{200}$. Τὸ σχέδιόν μου ἔχει μῆκος 0,20 μ. καὶ πλάτος 0,10 μ. Πόση εἶναι ἡ ἔκτασις τοῦ οἰκοπέδου ;

99. Πόσα κυβικὰ μέτρα εἶναι ὁ ὄγκος τετραγωνικῆς πυραμίδος ἡ ὁποία ἔχει πλευρὰν βάσεως 1,50 μ. καὶ ὕψος 3 μέτρα ;

100. Ἐπάνω εἰς ἀναθηματικὴν στήλην εἶναι μαρμαρίνη πυραμὶς μὲ βάσιν κανονικὸν τετράγωνον ποὺ ἔχει ἐμβαδὸν 40,25 τ.μ. Τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος εἶναι 2,50 μ. Τί ὄγκον ἔχει ἡ πυραμὶς καὶ πόσα κιλὰ ζυγίζει ; (εἰδ. βάρος μαρμάρου 2,7).

101. Ἰσοσκελὲς τρίγωνον ἔχει βάσιν 6,50 μ., τὸ ἓν σκέλος 8,60 μ. καὶ ὕψος 7,90 μέτρα. Νὰ εὑρεθῇ : α΄) ἡ περίμετρος τοῦ τριγώνου· β΄) τὸ ἐμβαδόν του.

102. Ἡ ἀπέναντι τῆς βάσεως γωνία ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι 72°. Πόσων μοιρῶν εἶναι ἑκάστη τῶν δύο ἄλλων γωνιῶν ;

103. Ὁ κῆπος ἑνὸς σχολείου εἶναι ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον μὲ διαστάσεις 25 μ καὶ 30 μέτρα. Εἰς τὸ μέσον τοῦ κήπου ὑπάρχει κυκλικὸς χῶρος ἀκαλλιέργητος μὲ ἀκτῖνα 4,20 μ. Πόση εἶναι ἡ καλλιεργήσιμος ἐπιφάνεια τοῦ κήπου ;

104. Ὁ Α ἔχει ἕνα χωράφι ποὺ εἶναι τετράγωνον μὲ περίμετρον 240 μέτρων. Ὁ Β ἐκεῖ πλησίον ἔχει χωράφι ποὺ εἶναι ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον τῆς αὐτῆς ποιότητος καὶ τῆς αὐτῆς περιμέτρου. Προτείνει δὲ νὰ τὸ ἀνταλλάξῃ μὲ τὸν Α. Συμφέρει τοῦτο εἰς τὸν Α καὶ διατί;

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

105. Δύο ὁμόκεντροι κύκλοι ἔχουν ἀκτῖνα 8,20 μ. καὶ 6,40 μ. Ποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυκλικῆς στεφάνης;

106. Ἔχω ἕνα κυκλικόν ἁλώνιο νμὲ περιφέρειαν 50,24 μ. καὶ συνεφώνησα νὰ τὸ πλακοστρώσω πρὸς 52 δραχ. τὸ τετραγωνικὸν μέτρον. Τί θὰ μοῦ στοιχίσῃ ἡ πλακόστρωσις;

107. Ρόδα αὐτοκινήτου μὲ διάμετρον 0,5 μ. κάνει 400 στροφὰς τὸ πρῶτον λεπτὸν τῆς ὥρας. Πόσα χιλιόμετρα θὰ διατρέξῃ τὸ αὐτοκίνητον εἰς 4 ὥρας καὶ 25 πρῶτα λεπτὰ τῆς ὥρας;

108. Ποῖον εἶναι τὸ μῆκος τόξου 50° ὅταν ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου εἶναι 10 παλάμαι;

109. Κυλινδρικὸν τεπόζιτον ἐκ λευκοσιδήρου ἔχον ἀκτῖνα βάσεως 0,48 μ. καὶ ὕψος 1,80 μ. πρόκειται νὰ γεμισθῇ μὲ ἔλαιον, Πόσα κιλὰ ἐλαίου θὰ χωρέσῃ;

110. Εἰς τὴν αὐλὴν γειτονικοῦ ἐργοστασίου οἰνοπνευματοποιίας ἐμέτρησα 52 βαρέλια κυλινδρικὰ πλήρη οἰνοπνεύματος. Ἡ διάμετρος ἑκάστου βαρελίου εἶναι 0,56 μ. καὶ τὸ ὕψος 0,90 μ. Ἠμπορεῖτε νὰ εὕρετε πόσο κιλὰ οἰνοπνεύματος περιέχουν καὶ τὰ 52 βαρέλια; (Εἰδ. βάρος οἰνοπνεύματος 0,90).

111. Ἐὰν τὰ βαρέλια αὐτὰ ἐγεμίζοντο μὲ κρασὶ πόσα κιλὰ θὰ ἐχωροῦσαν; (Εἰδ. βάρος οἴνου 0,985).

112. Πόσα κιλὰ οἴνου χωρεῖ βαρέλιον ἐὰν ἡ περίμετρος τῆς κάτω βάσεως εἶναι 0,8 μ., τῆς μεσαίας 1,2 μ. καὶ τὸ ὕψος 1,80 μέτρα;

113. Σωρὸς σίτου σχ. κώνου ἔχει περιφ. βάσεως 12,56 μ. καὶ ὕψος 1,75 μ. Πόσα κιλά εἶναι τὸ σιτάρι; (εἰδ. βάρ. σίτου 1,56).

114. Κωνικὴ καλύβη ἔχει ἐμβαδὸν βάσεως 4,521 τετραγωνικὰ μέτρα καὶ ὕψος 3,75 μ. Πόσα κυβικὰ μέτρα εἶναι ὁ ὄγκος τῆς καλύβης;

115. Πόσα μέτρα καραβόπανον πλάτους 0,90 μ. χρειάζονται νὰ γίνῃ μία κωνικὴ σκηνὴ μὲ ἀκτῖνα βάσεως 2,50 μ. καὶ πλευρὰν 3,40 μέτρων; Καὶ ἀκόμη: πόσον θὰ στοιχίσῃ τὸ ὕφασμα ἂν ἀγορασθῇ πρὸς 25 δραχμὰς τὸ μέτρον.

Σημ. Ἀφοῦ τὸ καραβόπανον ἔχει 0,90 πλάτος, διὰ νὰ εὕρω πόσα μέτρα χρειάζονται θὰ διαιρέσω τὰ τ. μ. τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας διὰ 0,9 μ.

119. Μετρήσετε τὸν μέγιστον κύκλον τῆς μπάλας (ποδοσφαίρου) τοῦ σχολείου σας, κάνετε τοὺς λογαριασμοὺς καὶ νὰ εὕρετε: α΄) τὴν ἐπιφάνειαν τῆς μπάλας, β΄) τὸν ὄγκον της.

Ι. Κ.

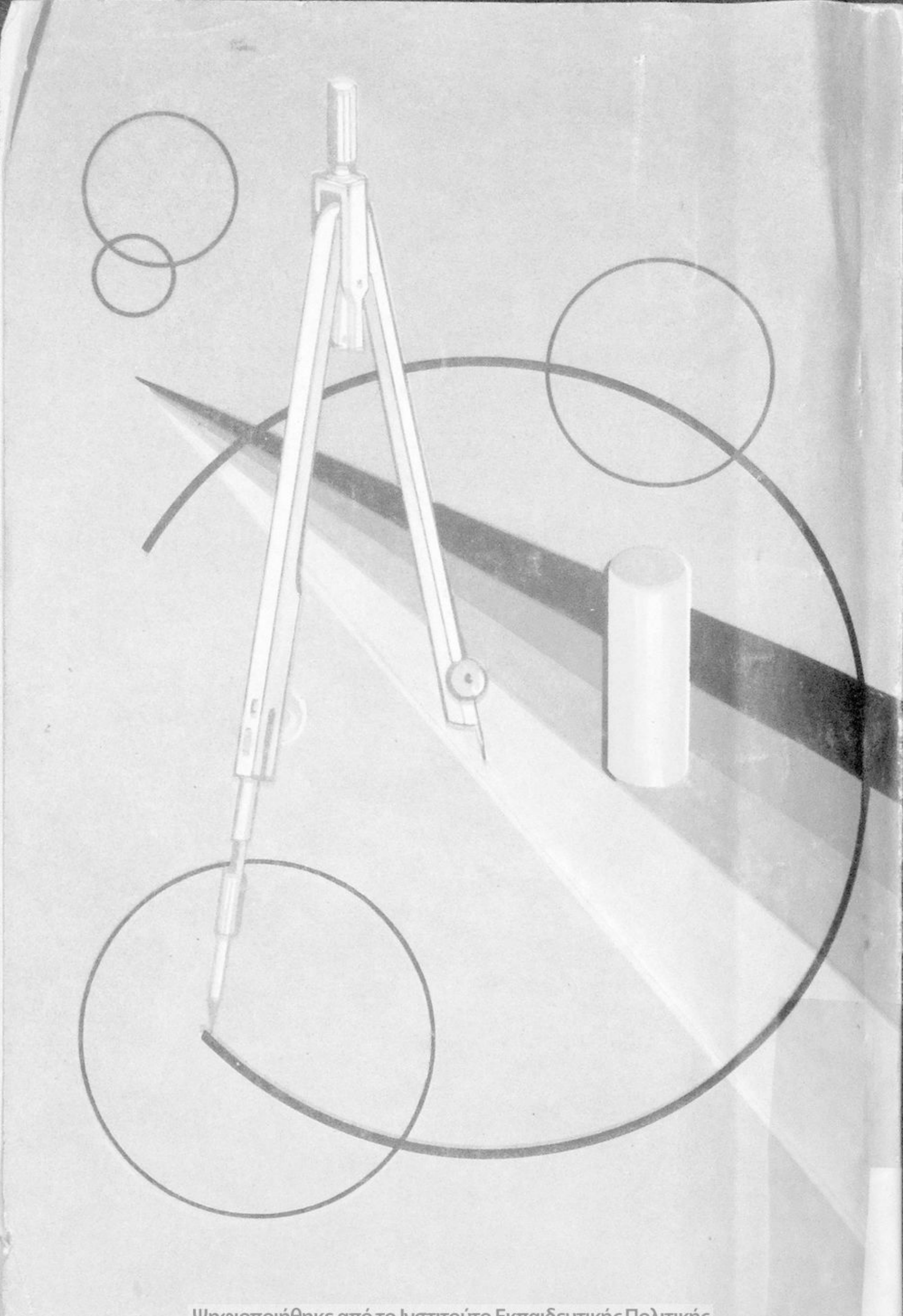
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

024000028317

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής



Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής