N. Μαρινίδης

ΚΑΡΑΓΙΑΝΝΙΔΟΥ

τοῦ τῶν μαθηματικῶν

ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΔΙΑ ΤΗΝ Δ', Ε' ΚΑΙ ΣΤ' ΤΑΞΙΝ

ΕΓΚΡΙΘΕΙΣΑ

ΕΝ ΤΩι ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩι ΕΠΙ ΠΕΝΤΑΕΤΙΑΝ

1906—1911

«Τὸ βιβλίον τοῦτο εἶναι συντεταγμένον μετὰ πολλῆς ἐπιμελείας, ἀκριβείας καὶ συντομίας. Ἡ γλῶσσα τοῦ συγγραφέως ὁμαλὴ καὶ ῥέουσα. Ἡ μεθοδικὴ καὶ σύμμετρος διάταξις τῆς ὕλης ὡς καὶ τὰ ἐν τοῖς διαφόροις μέρεσι τοῦ βιβλίου παρενειρόμενα προβλήματα καθιστῶσι τὸ βιβλίον ὠφέλιμον τοῖς μαθηταῖς». **Οἱ κριταί.**

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΕΚΔΟΤΗΣ ΗΛΙΑΣ Ν. ΔΙΚΑΙΟΣ
1906

ΑΘΑΝ. ΚΑΡΑΓΙΑΝΝΙΔΟΥ
ὑφηγητοῦ τῶν μαθηματικῶν

ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΔΙΑ ΤΗΝ Δ΄, Ε΄ ΚΑΙ ΣΤ΄ ΤΑΞΙΝ

ΕΓΚΡΙΘΕΙΣΑ
ΕΝ ΤΩι ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩι ΕΠΙ ΠΕΝΤΑΕΤΙΑΝ
1906—1911

«Τὸ βιβλίον τοῦτο εἶναι συντεταγμένον μετὰ πολλῆς ἐπιμελείας, ἀκριβείας καὶ συντομίας. Ἡ γλῶσσα τοῦ συγγραφέως ὁμαλὴ καὶ ῥέουσα. Ἡ μεθοδικὴ καὶ σύμμετρος διάταξις τῆς ὕλης ὡς καὶ τὰ ἐν τοῖς διαφόροις μέρεσι τοῦ βιβλίου παρεντιθέμενα προβλήματα καθιστῶσι τὸ βιβλίον ὠφέλιμον τοῖς μαθηταῖς». Οἱ κριταί.

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΕΚΔΟΤΗΣ ΗΛΙΑΣ Ν. ΔΙΚΑΙΟΣ
1906

'Αριθ. { Πρωτ. 7361 / Διεκπ. 7939 }

'Εν 'Αθήναις τῇ 15 Μαΐου 1906

ΒΑΣΙΛΕΙΟΝ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

ΤΟ ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΝ ΤΩΝ ΕΚΚΛΗΣΙΑΣΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΤΗΣ ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΕΩΣ

Πρὸς τὸν κ. **'Αθ. Καραγιαννίδην,** *ὑφηγητήν.*

"Εχοντες ὑπ' ὄψει τὸν Νόμον ΒΤΓ' τῆς 12 'Ιουλίου 1895, τὸ σχετικὸν Β. Διάταγμα τῆς 28ης 'Οκτωβρίου ἰδίου ἔτους, τὰς προκηρύξεις περὶ διαγωνισμοῦ διδακτικῶν βιβλίων τῆς στοιχειώδους ἐκπαιδεύσεως καὶ τὴν ἔκθεσιν τῆς οἰκείας ἐπιτροπείας, δηλοῦμεν ὑμῖ ὅτι ἐγκρίνομεν τὴν ὑφ' ὑμῶν εἰς τὸν διαγωνισμὸν ὑποβληθεῖσα **« Γεωμετρίαν »** *ὅπως εἰσαχθῇ ἐπὶ πενταετίαν ἀρ χομένην ἀπὸ τοῦ σχολικοῦ ἔτους 1906—1907 ὡς διδακτικὸν βιβλίο διὰ τοὺς μαθητὰς τῆς* **Ε'** *καὶ* **ΣΤ' τάξεως** *τῶν δημοτικῶν σχο λείων ἐν γένει.*

Καλεῖσθε δέ, ὅπως ἐκτελέσητε τὰ ὑπὸ τοῦ εἰρημένου Νόμου κλπ. ὑπαγορευόμενα καὶ τὰς ὑπὸ τῆς ἐπιτροπείας ἀναγραφομένας παρατηρήσεις.

'Ο 'Υπουργὸς

Α. ΣΤΕΦΑΝΟΠΟΥΛΟΣ

Στέφ. Μ. Παρίσης

Τὸ γνήσιον ἑκάστου ἀντιτύπου πιστοποιεῖ ἡ κατωθι ὑπογραφὴ τοῦ συγγραφέως.

ΤΥΠΟΙΣ ΠΑΡΑΣΚΕΥΑ ΛΕΩΝΗ

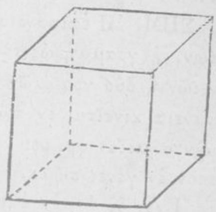
ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΒΙΒΛΙΟΝ Α΄.

ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΓΡΑΜΜΩΝ

Περὶ κύβου

1. Πᾶν πρᾶγμα, τὸ ὁποῖον κατέχει τόπον τινά, λέγεται *σῶμα*. Παραδείγματος χάριν ἡ οἰκία, ὁ πίναξ, τὸ βιβλίον, ὁ λίθος εἶναι σώματα.



Σῶμα εἶναι ἐπίσης καὶ τὸ πρᾶγμα, τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν ἀπέναντι μορφήν, καὶ τὸ ὁποῖον λέγεται *κύβος*.

2. Ἡ μορφή, ἣν ἔχει σῶμά τι, λέγεται καὶ *σχῆμα* αὐτοῦ.

3. Πᾶν σῶμα ἔχει σχῆμά τι καὶ δύναται νὰ ἐκτείνηται κατὰ τρεῖς κυρίας διευθύνσεις, ἤτοι ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιά, ἐκ τῶν ἔμπροσθεν πρὸς τὰ ὄπισθεν καὶ ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω. Ἡ μὲν πρώτη τῶν διευθύνσεων τούτων λέγεται *μῆκος*, ἡ δὲ δευτέρα *πλάτος*, ἡ δὲ τρίτη *ὕψος* (ἢ βάθος ἢ πάχος). Τὸ μῆκος, τὸ πλάτος καὶ τὸ ὕψος σώματός τινος λέγονται *διαστάσεις* αὐτοῦ. Ὁ κύβος ἔχει τρεῖς διαστάσεις.

4. *Ἴσα* εἶναι δύο σχήματα, ὅταν ἐπιτιθέμενα ἐφαρμόζωσι καθ' ὅλην αὐτῶν τὴν ἔκτασιν· *ἄνισα* δέ, ὅταν τὸ ἓν ἦναι μέρος τοῦ ἄλλου καὶ ἑπομένως τὸ ἓν ἦναι μεγαλείτερον τοῦ ἄλλου ἢ μικρότερον. Αἱ τρεῖς διαστάσεις τοῦ κύβου εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.

5. Ἡ *Γεωμετρία* ἐξετάζει τὸ σχῆμα, τὴν ἔκτασιν καὶ τὰς γεωμετρικὰς ἰδιότητας τῶν σωμάτων.

Ὅταν ἐξετάζωμεν σῶμά τι γεωμετρικῶς, δὲν λαμβάνομεν ὑπ' ὄψιν τὴν ὕλην, ἐξ ἧς δύναται νὰ ἀποτελῆται, ἀλλ' ἁπλῶς τὸ σχῆμα αὐτοῦ, τὸ ὁποῖον δυνάμεθα νὰ γράφωμεν π. χ. ἐπὶ τοῦ πίνακος. Τὸ δὲ οὕτως ἐξεταζόμενον σῶμα λέγεται *γεωμετρικὸν* ἢ *στερεὸν σῶμα*. Ὥστε ὁ κύβος, τὸν ὁποῖον ἐξετάζομεν κατὰ τὸ σχῆμα καὶ τὴν ἔκτασιν (ἀνεξαρτήτως τῆς ὕλης) εἶναι σῶμα στερεόν.

6. Πᾶν σῶμα δύναται νὰ θεωρηθῇ διῃρημένον εἰς μέρη. Τὸ μέρο (ἢ τὰ μέρη), ἔνθα περατοῦται στερεόν τι σῶμα, λέγεται *ἐπιφάνεια*· οἷον τὸ μέρος τοῦ κύβου, τὸ ὁποῖον φαίνεται διὰ τῶν ὀφθαλμῶν πανταχόθεν.

Τὸ μέρος (ἢ τὰ μέρη), ἔνθα περατοῦται ἐπιφάνειά τις, λέγεται *γραμμή*· οἷον τὰ μέρη, εἰς ἃ περατοῦται ἡ ἐπιφάνεια τοίχου δωματίου.

Τὸ μέρος (ἢ τὰ μέρη), ἔνθα περατοῦται γραμμή τις, λέγεται *σημεῖον*, ὅπερ οὐδὲν ἔχει μέρος· οἷον τὸ μέρος, εἰς ὃ τέμνονται δύο γραμμαὶ τοῦ πίνακος.

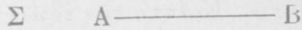
ΣΗΜ. Ἡ ἐπιφάνεια δύναται νὰ ὁρισθῇ καὶ ὡς τομὴ δύο στερεῶν σωμάτων, ἡ γραμμὴ ὡς τομὴ δύο ἐπιφανειῶν, τὸ σημεῖον ὡς τομὴ τριῶν ἐπιφανειῶν ἢ δύο γραμμῶν. Δύναται δὲ νὰ νοηθῇ, ὅτι σημεῖον ἢ γραμμὴ ἢ ἐπιφάνεια κινεῖται ἐν τῷ χώρῳ ἀλλάσσουσα θέσιν· ἐν τῇ κινήσει δὲ ταύτῃ τὸ μὲν σημεῖον γράφει γραμμήν, ἡ δὲ γραμμὴ ἐπιφάνειαν, ἡ δὲ ἐπιφάνεια στερεὸν ἐν γένει σῶμα.

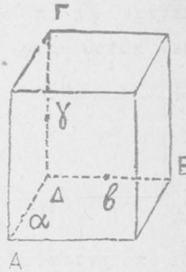
Ἔχει δὲ ἡ μὲν ἐπιφάνεια δύο διαστάσεις (μῆκος καὶ πλάτος), ἡ δὲ γραμμὴ μίαν (μῆκος), τὸ δὲ σημεῖον οὐδεμίαν ἔχει διάστασιν καὶ παρίσταται διὰ μιᾶς στιγμῆς.

7. Τῶν σωμάτων ἄλλα μὲν περατοῦνται εἰς μίαν μόνην ἐπιφάνειαν, ὡς τὸ ᾠόν· ἄλλα δὲ εἰς πολλὰς ἐπιφανείας, ὡς ὁ κύβος, ὁ πίναξ. Ἡ ὅλη ἐπιφάνεια τοῦ κύβου (ἢ τοῦ πίνακος) ἀποτελεῖται ἐξ 6 ἐπιφανειῶν, ἤτοι ἐκ τῆς ἄνω, τῆς κάτω, τῆς ἔμπροσθεν, τῆς ὄπισθεν, τῆς πρὸς τὰ δεξιὰ καὶ τῆς πρὸς τὰ ἀριστερά. Ἑκάστη δὲ τῶν ἐξ ἐπιφανειῶν τοῦ κύβου λέγεται *ἕδρα*. Ὥστε ὁ κύβος ἔχει 6 ἕδρας.

8. Αἱ γραμμαί, εἰς ἃς περατοῦνται αἱ ἕδραι τοῦ κύβου, (ἤτοι καθ' ἃς τέμνονται ἀνὰ δύο), λέγονται **ἀκμαὶ** ἢ *πλευραί*. Ὁ κύβος ἔχει 12 **ἀκμάς**. Τὰ σημεῖα δέ, εἰς ἃ περατοῦνται ἀνὰ τρεῖς αἱ ἀκμαὶ τοῦ κύβου (ἤτοι καθ' ἃ τέμνονται ἀνὰ τρεῖς), λέγονται **κορυφαί**. Ὁ κύβος ἔχει 8 **κορυφάς**.

ΣΗΜ. Τὰ σημεῖα, αἱ γραμμαί, αἱ ἐπιφάνειαι καὶ ἐν γένει τὰ στερεὰ παρίστανται γραφικῶς δι' εἰκόνων, αἵτινες εἶναι τὰ σχήματα αὐτῶν, καὶ ἐκφράζονται διακρινόμενα διὰ γραμμάτων τοῦ ἀλφαβήτου γραφομένων πλησίον αὐτῶν· οἷον τὸ σημεῖον Σ, ἡ γραμμὴ Β, ἡ ἐπιφάνεια Ε, τὸ στερεὸν Κ. Πρὸς μείζονα δὲ διάκρισιν γράφονται πλείονα γράμματα· οἷον ἡ γραμμὴ ΑΒ, ἡ ἐπιφάνεια ΔΑΒ, τὸ στερεὸν ΔΑΒΓ.

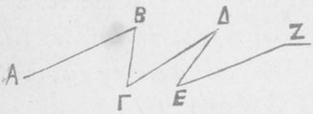




Εὐθεῖα γραμμὴ καὶ ἐπίπεδον

9. *Εὐθεῖα γραμμὴ* ἢ ἁπλῶς *εὐθεῖα* λέγεται τὸ σχῆμα, τὸ ὁποῖον λαμβάνει τεταμένον π.χ. νῆμα καθ' οἱανδήποτε διεύθυνσιν. Ἑκάστη τῶν ἀκμῶν τοῦ κύβου εἶναι εὐθεῖα γραμμή.

Τεθλασμένη γραμμὴ λέγεται ἡ γραμμὴ ἡ ἐξ εὐθειῶν μὲν συγκειμένη, μὴ οὖσα δὲ εὐθεῖα· οἷον ἡ γραμμὴ ΑΒΓΔΕΖ ἡ ἀποτελουμένη ἐξ εὐθειῶν κατὰ διαφόρους διευθύνσεις.



Καμπύλη γραμμὴ λέγεται ἐκείνη, ἧς οὐδὲν μέρος εἶναι εὐθεῖα γραμμή· οἷον ἡ γραμμὴ ΑΒ. Ἡ δὲ ἐξ εὐθειῶν καὶ καμπύλων ἀποτελουμένη λέγεται *μικτή*.

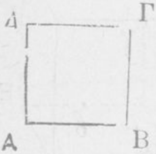
Ἐκ τινος σημείου εἰς ἕτερον σημεῖον μία μόνη εὐθεῖα δύναται νὰ ὑπάρχῃ· δύναται δὲ νὰ προσεκβάλληται ἑκατέρωθεν αὐτῆς.

Ἡ εὐθεῖα γραμμὴ εἶναι μικροτέρα πάσης ἄλλης γραμμῆς τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχούσης.

10. *Ἀπόστασις* ἢ *ἀπόστημα* δύο σημείων λέγεται τὸ μέγεθος τῆς εὐθείας τῆς συνδεούσης αὐτά· οἷον τῶν σημείων Α καὶ Β ἀπόστασις εἶναι τὸ μέγεθος τῆς μεταξὺ αὐτῶν εὐθείας ΑΒ, ἥτις εἶναι μικροτέρα πάσης ἄλλης γραμμῆς τὰ αὐτὰ πέρατα Α καὶ Β ἐχούσης.

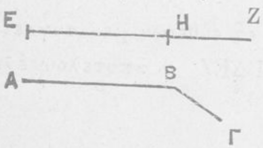
11. *Ἐπίπεδος ἐπιφάνεια* ἢ ἁπλῶς *ἐπίπεδον* λέγεται τὸ σχῆμα, τὸ ὁποῖον λαμβάνει τεταμένον π. χ. ὕφασμα καθ' οἱανδήποτε διεύθυνσιν. Ἑκάστη τῶν ἑδρῶν τοῦ κύβου εἶναι ἐπίπεδον.

Ἡ διὰ δύο οἱωνδήποτε σημείων τοῦ ἐπιπέδου διερχομένη εὐθεῖα κεῖται ὅλη ἐπ' αὐτοῦ, ὅπερ δύναται νὰ προσεκβάλληται πανταχόθεν αὐτοῦ μένον πάντοτε ἓν ἐπίπεδον, ὡς καὶ ἡ εὐθεῖα.



12. *Ἐπίπεδον σχῆμα* λέγεται ἐπίπεδος ἐπιφάνεια περατουμένη πανταχόθεν ὑπὸ γραμμῶν, ὡς ἑκάστη ἐπιφάνεια τῶν τοίχων δωματίου.

Ἑκάστη ἕδρα τοῦ κύβου, ὡς ἡ ΑΒΓΔ, εἶναι ἐπίπεδον σχῆμα καὶ λέγεται *τετράγωνον*· περιορίζεται δὲ ὑπὸ τεσσάρων ἴσων εὐθειῶν, αἵτινες λέγονται *πλευραὶ* τοῦ τετραγώνου καὶ ὁμοῦ λαμβανόμεναι ἀποτελοῦσι τὴν *περίμετρον* αὐτοῦ.



Αἱ ἕδραι τοῦ κύβου εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.

13. *Ἰσοδύναμα* λέγονται δύο σχήματα, ἐὰν ἦναι ἴσα κατὰ μέρη, ἤτοι ἐὰν πᾶν μέρος τοῦ ἑνὸς ἦναι ἴσον πρὸς ἓν μέρος τοῦ ἄλλου· οἷον ἡ τεθλασμένη γραμμὴ ΑΒΓ ἰσοδυναμεῖ πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΕΖ, ἐὰν τὰ μέρη ΑΒ, ΒΓ τῆς τεθλασμένης ἦναι ἴσα ἀντιστοίχως πρὸς ἰσάριθμα μέρη τῆς εὐθείας, ἤτοι πρὸς τὰ μέρη ΕΗ, ΗΖ.

Ἐὰν εὐθεῖα κεῖται ἐντὸς ἐπιπέδου σχήματος, προσεκβαλλομένη ἑκατέρωθεν αὐτῆς ἐξέρχεται τοῦ σχήματος τούτου.

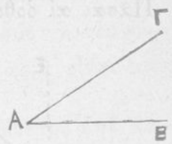
14. *Πολύεδρον* λέγεται στερεὸν πανταχόθεν ὑπὸ ἐπιπέδων περατούμενον, οἷον ὁ χῶρος δωματίου ὁ περατούμενος ὑπὸ τῶν τοίχων, τοῦ δαπέδου καὶ τῆς ὀροφῆς. *Ἕδραι* τοῦ πολυέδρου λέγονται τὰ ἐπίπεδα σχήματα, ὑφ' ὧν περατοῦται.

15. *Καμπύλη ἐπιφάνεια* λέγεται ἐκείνη, ἧς οὐδὲν μέρος εἶναι ἐπίπεδον· οἷον ἡ τοῦ ᾠοῦ, ἡ τοῦ βώλου κλ.

Εὐθεῖαι τεμνόμεναι καὶ παράλληλοι

16. *Ἐπίπεδος γωνία* ἢ ἁπλῶς *γωνία* λέγεται τὸ σχῆμα, τὸ ὁποῖον σχηματίζουσι δύο εὐθεῖαι ἀρχόμεναι ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου κατὰ δύο διευθύνσεις· οἷον τὸ σχῆμα ΑΒΓ εἶναι γωνία.

Τὸ σημεῖον Α, ἐξ οὗ ἄρχονται αἱ εὐθεῖαι, λέγεται *κορυφὴ* τῆς γωνίας· αἱ δὲ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΑΓ αἱ σχηματίζουσαι αὐτὴν λέγονται *πλευραί*.



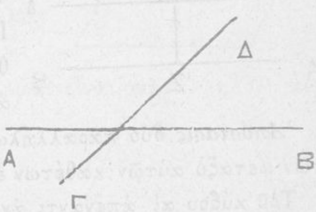
Αἱ γωνίαι αἱ σχηματιζόμεναι ὑπὸ τῶν ἀκμῶν τοῦ κύβου τεμνομένων ἀνὰ δύο εἶναι ἐπίπεδοι γωνίαι.

ΣΗΜ. Ἡ γωνία ἐκφράζεται ἢ διὰ μόνου τοῦ γράμματος τῆς κορυφῆς ἢ διὰ τριῶν γραμμάτων, ὧν τὸ μὲν πλησίον τῆς κορυφῆς, ἑκάτερον δὲ τῶν λοιπῶν δύο πλησίον τῶν δύο πλευρῶν τῆς γωνίας, ὡς ἐν τῷ σχήματι φαίνεται· τὸ γράμμα δὲ τῆς κορυφῆς γράφεται καὶ ἀναγινώσκεται πάντοτε μεταξὺ τῶν δύο ἄλλων, ὡς ἡ γωνία Α ἢ ἡ γωνία ΒΑΓ.

17. *Ἴσαι* λέγονται δύο γωνίαι, ὅταν τιθεμένης τῆς μιᾶς ἐπὶ τῆς ἄλλης συμπίπτωσιν αἱ κορυφαὶ καὶ αἱ πλευραὶ αὐτῶν.

Ἡ ἰσότης τῶν γωνιῶν εἶνε ἀνεξάρτητος τῆς ἰσότητος τῶν πλευρῶν (αἵτινες δύνανται νὰ ἦναι ἄνισοι)· ἀρκεῖ μόνον τὸ ἄνοιγμα τῶν πλευρῶν νὰ ἦναι τὸ αὐτὸ διὰ τὴν ἰσότητα τῶν γωνιῶν.

18. *Προσκείμεναι* ἢ *ἐφεξῆς γωνίαι* λέγονται δύο γωνίαι, ἐὰν ἔχωσι τὴν κορυφὴν καὶ μίαν πλευρὰν κοινὰ καὶ κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς κοινῆς πλευρᾶς· οἷον αἱ δύο γωνίαι ΑΕΔ καὶ ΔΕΒ.

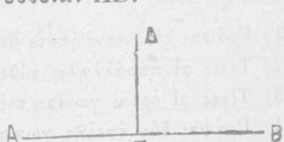


19. *Κατὰ κορυφὴν* λέγονται δύο γωνίαι, ἐὰν ἔχωσι τὴν κορυφὴν κοινήν, αἱ δὲ πλευραὶ τῆς μιᾶς αὐτῶν ἦναι προσεκβολαὶ τῶν πλευρῶν τῆς ἑτέρας· οἷον αἱ γωνίαι ΑΕΓ καὶ ΔΕΒ.

Αἱ κατὰ κορυφὴν γωνίαι εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.

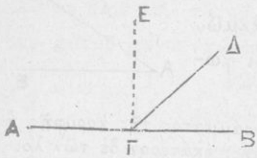
20. *Πλαγία* λέγεται εὐθεῖά τις πρὸς ἄλλην εὐθεῖαν, ἐὰν τέμνουσα αὐτὴν εἴς τι σημεῖον σχηματίζῃ μετ' αὐτῆς δύο ἐφεξῆς γωνίας ἀνίσους· οἷον ἡ εὐθεῖα ΕΔ εἶναι πλαγία πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΑΒ.

21. *Κάθετος* λέγεται εὐθεῖά τις ἐπὶ ἑτέραν εὐθεῖαν, ἐὰν τέμνουσα αὐτὴν εἴς τι σημεῖον σχηματίζῃ μετ' αὐτῆς τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας πρὸς ἀλλήλας· αἱ δὲ γωνίαι αὗται λέγονται τότε *ὀρθαί*· οἷον ἡ εὐθεῖα ΔΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ, ἐὰν αἱ γω-



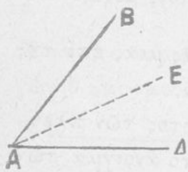
νίαι ΔΓΑ καὶ ΔΓΒ ἦναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.

Πᾶσαι αἱ ὀρθαὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.



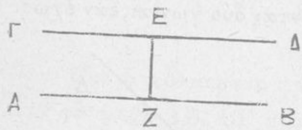
22. *Ὀξεῖα γωνία* λέγεται ἡ μικροτέρα ὀρθῆς· οἷον ἡ ΔΓΒ ἡ μικροτέρα τῆς ὀρθῆς ΕΓΒ.

23. *Ἀμβλεῖα γωνία* λέγεται ἡ μεγαλειτέρα τῆς ὀρθῆς· οἷον ἡ ΑΓΔ ἡ μεγαλειτέρα τῆς ὀρθῆς ΑΓΕ.



24. *Διχοτομοῦσα* γωνίας τινὸς λέγεται ἡ διαιροῦσα αὐτὴν εἰς δύο ἴσα μέρη· οἷον ἡ ΑΕ εἶναι διχοτομοῦσα τῆς ΒΑΔ, ἐὰν ἡ ΒΑΕ ἦναι ἴση τῇ ΕΑΔ γωνίᾳ.

25. *Παράλληλοι* εἶναι αἱ εὐθεῖαι, αἵτινες ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ κείμεναι δὲν τέμνουσιν ἀλλήλας, ὅσον καὶ ἂν αὐξηθῶσιν ἑκατέρωθεν· οἷον αἱ δύο εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ.



Πᾶσαι αἱ μεταξὺ δύο παραλλήλων εὐθειῶν ἐπ' αὐτὰς κάθετοι εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.

Ἀπόστασις δύο παραλλήλων εὐθειῶν λέγεται τὸ μέγεθος μιᾶς τινος τῶν μεταξὺ αὐτῶν καθέτων ἐπ' αὐτὰς εὐθειῶν· οἷον τὸ τῆς ΕΖ.

Τοῦ κύβου αἱ ἀπέναντι ἀκμαὶ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι. Ἑκάστη δὲ ἕδρα αὐτοῦ ἔχει 4 γωνίας ὀρθάς. Ὥστε ὁ κύβος ἔχει 24 ἐπιπέδους γωνίας ὀρθάς.

Καὶ τοῦ τετραγώνου αἱ ἀπέναντι πλευραὶ εἶναι οὐ μόνον ἴσαι, ἀλλὰ καὶ παράλληλοι.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Γράψαι εἰς οἱανδήποτε θέσιν μίαν γωνίαν ὀρθήν, ὀξεῖαν καὶ ἀμβλεῖαν.

2) Τίνες αἱ παράλληλοι εὐθεῖαι τοῦ πίνακος;

3) Τίνες αἱ ὀρθαὶ γωνίαι τοῦ πίνακος;

4) Γράψαι δύο ἐφεξῆς γωνίας οἱασδήποτε.

5) Γράψαι κατὰ κορυφὴν γωνίας.

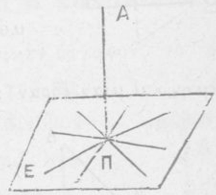
6) Τίνες ἀκμαὶ τοῦ κύβου δὲν εἶναι παράλληλοι, εἰ καὶ δὲν τέμνουσιν ἀλλήλας;

Ἐπίπεδα τεμνόμενα καὶ παράλληλα.

Εὐθεῖα καὶ ἐπίπεδον τεμνόμενα καὶ παράλληλα.

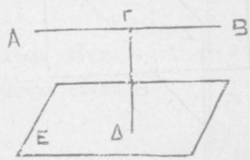
26. Αἱ διάφοροι θέσεις εὐθείας καὶ ἐπιπέδου εἶναι δύο· ἢ τέμνονται εἰς ἓν σημεῖον, τὸ ὁποῖον λέγεται ποὺς τῆς εὐθείας, ἢ εἶναι παράλληλα.

Κάθετος εἶναι εὐθεῖά τις ἐπὶ ἐπίπεδον, ἐὰν ἦναι κάθετος ἐπὶ πάσας τὰς ἐν τῷ ἐπιπέδῳ κειμένας εὐθείας καὶ διερχομένας διὰ τοῦ ποδὸς αὐτῆς· εἰ δὲ μή, ἡ εὐθεῖα εἶναι *πλαγία* πρὸς τὸ ἐπίπεδον.



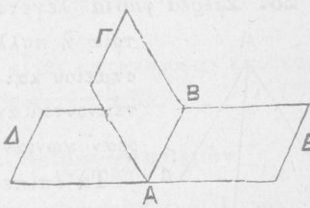
Ἀπόστασις σημείου ἀπὸ ἐπιπέδου λέγεται τὸ μέγεθος τῆς καθέτου ἀπὸ τοῦ σημείου τούτου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον, ὡς τὸ τῆς ΑΠ.

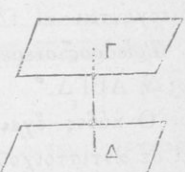
Παράλληλα εἶναι ἐπίπεδον καὶ εὐθεῖα, ἐὰν δὲν τέμνωσιν ἄλληλα, ὅσον καὶ ἂν αὐξηθῶσιν. *Ἀπόστασις* δὲ τούτων εἶναι τὸ μέγεθος μιᾶς κοινῆς αὐτῶν καθέτου, ὡς τὸ τῆς ΓΔ, μεταξὺ αὐτῶν κειμένης. Αἱ δὲ κάθετοι αὗται εἶναι πᾶσαι ἀλλήλαις ἴσαι.



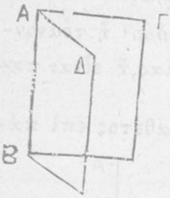
Ἐν τῷ κύβῳ αἱ ἀπέναντι ἕδραι καὶ ἀκμαὶ εἶναι παράλληλοι· αἱ δὲ τέμνουσαι ἀλλήλας ἀκμαὶ καὶ ἕδραι αὐτοῦ εἶναι κάθετοι.

27. Αἱ διάφοροι θέσεις δύο ἐπιπέδων πρὸς ἄλληλα εἶναι δύο· ἢ τέμνουσιν ἄλληλα κατὰ εὐθεῖαν *γραμμήν*, ὡς ἡ ΑΒ, ἢ εἶναι *παράλληλα*, ὅτε δὲν τέμνουσιν ἄλληλα, ὅσον καὶ ἂν αὐξηθῶσι πανταχόθεν. *Ἀπόστασις* δὲ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων εἶναι τὸ μέγεθος μιᾶς κοινῆς αὐτῶν καθέτου μεταξὺ αὐτῶν κειμένης, ὡς τὸ τῆς ΓΔ (διότι πᾶσαι αὗται εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας).





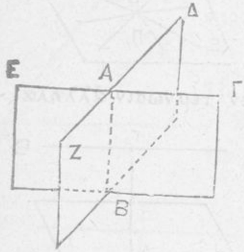
Δίεδρος γωνία λέγεται τὸ σχῆμα, ὅπερ ἀποτελοῦσι δύο ἐπίπεδα τέμνοντα ἄλληλα καὶ περατούμενα εἰς τὴν κοινὴν τομὴν αὐτῶν. *Ἀκμὴ* τῆς διέδρου γωνίας λέγεται ἡ τομὴ τῶν δύο ἐπιπέδων· ἕδραι δὲ αὐτῆς τὰ ἐπίπεδα. Τὸ σχῆμα ΔΑΒΓ, ἢ ἁπλῶς τὸ σχῆμα ΑΒ,



παριστᾷ δίεδρον γωνίαν σχηματιζομένην ὑπὸ τῶν ἐπιπέδων ΔΑΒ καὶ ΓΑΒ περατουμένων εἰς τὴν κοινὴν τομὴν αὐτῶν ΑΒ.

Ἴσαι λέγονται δύο δίεδροι γωνίαι, ἐὰν δύνανται νὰ τεθῶσιν οὕτως, ὥστε νὰ ἀποτελέσωσι μίαν μόνην δίεδρον.

Ἐφεξῆς λέγονται δύο δίεδροι γωνίαι, ἐὰν ἔχωσι τὴν ἀκμὴν καὶ μίαν ἕδραν κοινά, τὰς δὲ ἄλλας ἕδρας ἑκατέρωθεν τῆς κοινῆς· τοιαῦται εἶναι αἱ δίεδροι γωνίαι ΕΑΒΖ καὶ ΖΑΒΓ.



Κατὰ κορυφὴν λέγονται δύο δίεδροι γωνίαι, ὅταν σχηματίζωνται ὑπὸ δύο ἐπιπέδων διατεμνόντων ἄλληλα καὶ ἔχωσι μόνον τὴν ἀκμὴν κοινήν, ἀλλ' ἕδρας διαφόρους, ὡς αἱ ΔΑΒΓ καὶ ΕΑΒΖ.

Κάθετα λέγονται δύο ἐπίπεδα πρὸς ἄλληλα, ἐὰν διατέμνοντα ἄλληλα σχηματίζωσι τέσσαρας διέδρους γωνίας ἴσας· εἰ δὲ μή, τὰ ἐπίπεδα εἶναι *πλάγια* πρὸς ἄλληλα.

Ὅταν δίεδρος γωνία τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου καθέτου πρὸς τὴν ἀκμήν, ἡ προκύπτουσα ἐπίπεδος γωνία λέγεται *ἀντιστοιχοῦσα πρὸς τὴν δίεδρον.*

28. *Στερεὰ γωνία* λέγεται τὸ σχῆμα, τὸ ὁποῖον σχηματίζουσι τρία ἢ πολλὰ ἐπίπεδα διερχόμενα ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου καὶ περατούμενα εἰς τὴν τομήν, καθ' ἣν τέμνονται ἀνὰ δύο. Τὸ σχῆμα ΑΒΓΔ παριστᾷ στερεὰν γωνίαν.

Τὰ ἐπίπεδα τὰ σχηματίζοντα τὴν στερεὰν γωνίαν λέγονται *ἕδραι* αὐτῆς· αἱ δὲ εὐθεῖαι, καθ' ἃς τέμνονται αἱ ἕδραι ἀνὰ δύο, λέγονται *ἀκμαί*· τὸ δὲ σημεῖον, δι' οὗ διέρχονται αἱ ἕδραι, λέγεται *κορυφὴ* τῆς στερεᾶς γωνίας.

Τρίεδρος στερεὰ γωνία εἶναι ἡ σχηματιζομένη ὑπὸ τριῶν ἑδρῶν, ὡς ἡ ΑΒΓΔ.

Ὁ κύβος ἔχει 12 διέδρους γωνίας, 8 τριέδρους στερεὰς γωνίας· αἱ δὲ ἀντιστοιχοῦσαι ἐπίπεδοι γωνίαι εἶναι πᾶσαι ὀρθαί, ὡς καὶ αἱ δίεδροι.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

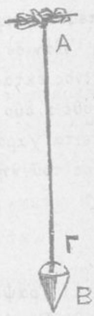
1) Γράψαι εἰς οἱανδήποτε θέσιν δίεδρον ἢ στερεὰν γωνίαν.

2) Δεῖξαι τὰς διέδρους γωνίας δωματίου, ὡς καὶ τὰς ἕδρας καὶ ἀκμὰς αὐτῶν.

3) Δεῖξαι τὰς στερεὰς γωνίας δωματίου, ὡς καὶ τὰς ἕδρας καὶ ἀκμὰς καὶ κορυφὰς αὐτῶν.

Στάθμη, εὐθεῖαι καὶ ἐπίπεδα ὁριζόντια ἢ κατακόρυφα

29. *Στάθμη* ἢ *νῆμα στάθμης* εἶναι γεωμετρικὸν ὄργανον, τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖται ἐκ τοῦ νήματος ΑΓ καὶ ἐκ τοῦ βάρους Β τοῦ προσδεδεμένου εἰς τὸ πέρας Γ. Ἡ διεύθυνσις, τὴν ὁποίαν λαμβάνει τὸ νῆμα τῆς στάθμης κρατούμενον ἀπὸ τοῦ πέρατος Α, λέγεται *κατακόρυφος*.



30. Πᾶσα δὲ εὐθεῖα κάθετος πρὸς τὴν κατακόρυφον λέγεται *ὁριζοντία*.

Αἱ ἀλύσσεις π.χ. τῶν κρεμαμένων πολυελαίων εἶναι κατακόρυφοι· αἱ δὲ ἐπ᾿ αὐτὰς κάθετοι εὐθεῖαι εἶναι ὁριζόντιαι.

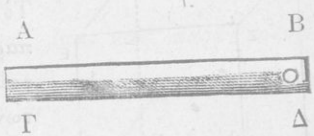
31. Πᾶν ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τῆς κατακορύφου λέγεται *κατακόρυφον ἐπίπεδον*.

Πᾶν δὲ ἐπίπεδον κάθετον πρὸς τὴν κατακόρυφον λέγεται *ὁριζόντιον ἐπίπεδον*.

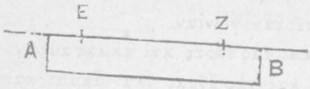
Οἱ τοῖχοι τοῦ δωματίου (ἐν γένει) εἶναι κατακόρυφα ἐπίπεδα· τὰ δὲ δάπεδα καὶ αἱ ὀροφαὶ εἶναι ὁριζόντια ἐπίπεδα.

Κανὼν καὶ γραφὴ τῶν εὐθειῶν γραμμῶν

32. Ὁ *Κανὼν* εἶναι γεωμετρικὸν ὄργανον κατασκευαζόμενον συνήθως ἐκ λεπτῆς σανίδος ἐπιμήκους ἐχούσης τὰς ἀκμὰς ΑΒ καὶ ΓΔ εὐθυγράμμους.



Ἵνα γράψωμεν διὰ τοῦ κανόνος εὐθεῖαν γραμμὴν διερχομένην διὰ δύο ὡρισμένων σημείων Ε καὶ Ζ, π. χ. ἐπὶ τοῦ χάρτου, θέτομεν αὐτὸν ἐπὶ τοῦ χάρτου οὕτως, ὥστε μία ἀκμὴ αὐτοῦ νὰ διέρχηται διὰ τῶν σημείων τούτων, ἔπειτα σύρομεν τὴν αἰχμὴν μολυβδοκονδύλου ἢ γραφίδος κατὰ μῆκος τῆς ἀκμῆς τοῦ κανόνος καὶ οὕτω γράφομεν τὴν διὰ τῶν Ε καὶ Ζ εὐθεῖαν γραμμήν.



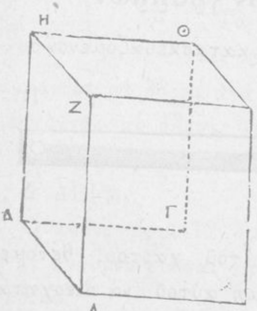
ΣΗΜ. Ἐὰν πρόκειται νὰ γράψωμεν εὐθεῖαν γραμμὴν ἐπὶ μεγάλης ἐπιπέδου ἐπιφανείας· οἷον ἐπὶ πατώματος, σανίδος κλ., προσδένομεν εἰς τὰ δύο σημεῖα, δι' ὧν θέλομεν νὰ διέλθῃ ἡ εὐθεῖα, τὰ πέρατα τεταμένου νήματος, τὸ ὁποῖον προηγουμένως χρίομεν διὰ χρώματος συνήθως ἐρυθροῦ. Ἔπειτα δὲ διὰ τῶν δύο δακτύλων (τοῦ μεγάλου καὶ τοῦ δείκτου) ἀνυψοῦμεν ἐκ τοῦ μέσου τὸ νῆμα καὶ ἀφίνομεν αὐτὸ νὰ πέσῃ· οὕτω δὲ πῖπτον τὸ νῆμα ἐπὶ τὴν δεδομένην ἐπίπεδον ἐπιφάνειαν σχηματίζει ἐπ' αὐτῆς ἐρυθρὰν εὐθεῖαν.

Ἐὰν δὲ πρόκειται νὰ χαραχθῇ εὐθεῖα γραμμὴ ἐπὶ τοῦ ἐδάφους ὡρισμένης τινὸς ἐκτάσεως, ἐμπήγομεν εἰς τὰ δύο σημεῖα, δι' ὧν θέλομεν νὰ διέλθῃ ἡ εὐθεῖα δύο πασσαλίσκους καὶ προσδένομεν εἰς αὐτοὺς νῆμά τι τεταμένον. Ἔπειτα χαράττομεν ἐπὶ τοῦ ἐδάφους δι' αἰχμηροῦ τινος πασσαλίσκου κατὰ μῆκος τοῦ νήματος τὴν εὐθεῖαν.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν

1) Γράψαι εὐθεῖαν ὁριζοντίαν ἢ κατακόρυφον.
2) Γράψαι πολλὰς εὐθείας ὁριζοντίας ἢ κατακορύφους.
3) Γράψαι δύο ἢ πολλὰς εὐθείας ὁριζοντίως παραλλήλους.
4) Γράψαι δύο ἢ πολλὰς εὐθείας πλαγίας.
5) Γράψαι δύο ἢ πολλὰς πλαγίας εὐθείας παραλλήλους.

Περὶ ὀρθογωνίου, ὀρθοῦ καὶ πλαγίου παραλληλεπιπέδου



33. *Ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον.*— Τὸ σχῆμα ΑΒΓΘ λέγεται *ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον.* Εἶναι δὲ σῶμα στερεὸν καὶ περιορίζεται ὑπὸ 6 ἐπιπέδων σχημάτων, ἅτινα λέγονται *ἕδραι* αὐτοῦ.

Αἱ ἀπέναντι αὐτοῦ ἕδραι εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι καὶ λέγονται *ὀρθογώνια παραλληλόγραμμα.*

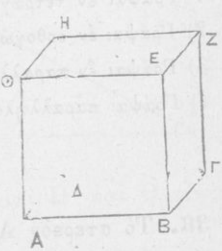
Τὸ σχῆμα ΑΒΓΔ εἶναι ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον ἢ ἁπλῶς ὀρθογώνιον περιοριζόμενον ὑπὸ τεσσάρων εὐθειῶν, αἵτινες λέγονται *πλευραὶ* τοῦ ὀρθογωνίου καὶ ὁμοῦ λαμβανόμεναι ἀποτελοῦσι τὴν *περίμετρον* αὐτοῦ. Αἱ δύο ἀπέναντι πλευραὶ τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι.

Αἱ πλευραὶ τοῦ ὀρθογωνίου τέμνονται ἀνὰ δύο καθέτως. Ὥστε τὸ ὀρθογώνιον (ὡς καὶ τὸ τετράγωνον) ἔχει τέσσαρας ὀρθὰς γωνίας.

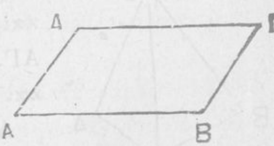
34. Τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ἔχει τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ἑδρῶν, ἀκμῶν, ὀρθῶν γωνιῶν, διέδρων γωνιῶν καὶ τριέδρων στερεῶν γωνιῶν, ὃν ἔχει καὶ ὁ κύβος. Διαφέρει δὲ τοῦ κύβου κατὰ τὸ σχῆμα τῶν ἑδρῶν· διότι τοῦ μὲν ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου αἱ ἕδραι εἶναι ὀρθογώνια παραλληλόγραμμα ἴσα μόνον τὰ ἀπέναντι, τοῦ δὲ κύβου αἱ ἕδραι εἶναι τετράγωνα πάντα πρὸς ἄλληλα ἴσα.

ΣΗΜ. Τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον δύναται νὰ ἔχῃ *τέσσαρας* ἕδρας ὀρθογώνια καὶ *δύο τετράγωνα*.

35. *Ὀρθὸν παραλληλεπίπεδον.*—Τὸ στερεὸν ΑΔΓΗ εἶναι *ὀρθὸν παραλληλεπίπεδον*. Διαφέρει δὲ τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου κατὰ τοῦτο μόνον, ὅτι ἔχει δύο ἀπέναντι ἕδρας *παραλληλόγραμμα*, τὰς ΔΒ καὶ ΗΕ.



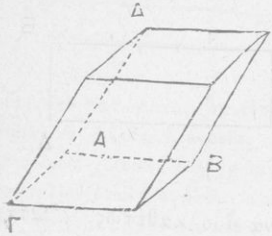
Παραλληλόγραμμον δὲ λέγεται τὸ ἐπίπεδον σχῆμα, τὸ ὁποῖον περιορίζεται ὑπὸ τεσσάρων εὐθειῶν, αἵτινες λέγονται *πλευραὶ* αὐτοῦ, καὶ ὧν αἱ ἀπέναντι εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι. Αἱ τέσσαρες πλευραὶ τοῦ παραλληλογράμμου ὁμοῦ λαμβανόμεναι ἀποτελοῦσι τὴν *περίμετρον* αὐτοῦ. Τὸ παραλληλόγραμμον διαφέρει τοῦ ὀρθογωνίου κατὰ τοῦτο μόνον, ὅτι οὐδεμίαν ἔχει ὀρθὴν γωνίαν.



Παντὸς δὲ παραλληλογράμμου αἱ ἀπέναντι γωνίαι εἶναι ἴσαι.

36. *Πλάγιον παραλληλεπίπεδον.*—Τὸ στερεὸν ΑΒΓΔ εἶναι *πλά-*

γιον *παραλληλεπίπεδον*. Διαφέρει δὲ τῶν λοιπῶν παραλληλεπιπέδων κατὰ τοῦτο μόνον, ὅτι πᾶσαι αἱ ἕδραι αὐτοῦ εἶναι παραλληλόγραμμα καὶ ἑπομένως αἱ ἀκμαὶ αἱ τέμνουσαι ἑκάστην ἕδραν δὲν εἶναι κάθετοι ἐπ' αὐτήν, ἀλλὰ πλάγιαι.



37. *Ῥόμβος* λέγεται τὸ παραλληλόγραμμον, τὸ ὁποῖον ἔχει πάσας τὰς πλευρὰς ἴσας πρὸς ἀλλήλας. Τοιοῦτον εἶναι τὸ ἐπίπεδον σχῆμα ΑΒΓΔ.

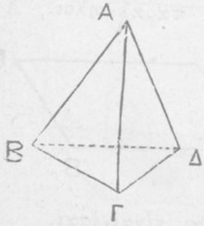
Πᾶν τετράγωνον εἶναι καὶ ῥόμβος καὶ ὀρθογώνιον· διότι ἔχει καὶ τὰς πλευρὰς ἴσας πρὸς ἀλλήλας καὶ τὰς γωνίας ὀρθάς.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν

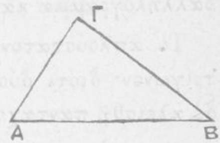
1) Γράψαι ἓν τετράγωνον καὶ ἕνα ῥόμβον.
2) Γράψαι ἓν ὀρθογώνιον καὶ ἓν τετράγωνον.
3) Γράψαι ἓν παραλληλόγραμμον καὶ ἕνα ῥόμβον.
4) Γράψαι παραλληλόγραμμον, ὀρθογώνιον, ῥόμβον καὶ τετράγωνον.

Περὶ τετραέδρου

38. Τὸ στερεὸν ΑΒΓΔ λέγεται τετράεδρον, ὡς περιοριζόμενον ὑπὸ τεσσάρων ἐπιπέδων σχημάτων, αἵτινες εἶναι αἱ ἕδραι αὐτοῦ. Τὸ τετράεδρον ἔχει 6 ἀκμὰς καὶ ἑπομένως 6 διέδρους γωνίας, ἤτοι τὰς ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΒ· ἔχει 4 στερεὰς γωνίας καὶ ἑπομένως 4 κορυφάς, ἤτοι τὰς Α, Β, Γ, Δ.

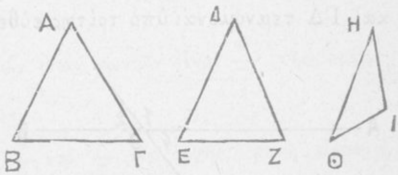


Αἱ ἕδραι τοῦ τετραέδρου λέγονται *τρίπλευρα* ἢ *τρίγωνα*, ὡς περιοριζόμεναι ὑπὸ τριῶν εὐθειῶν, αἵτινες λέγονται *πλευραὶ* καὶ αἵτινες τεμνόμεναι ἀνὰ δύο σχηματίζουσι τρεῖς γωνίας. Τὸ σχῆμα ΑΒΓ εἶναι τρίγωνον ἔχον πλευρὰς τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ, αἵτινες ὁμοῦ λαμβανόμεναι ἀποτελοῦσι τὴν *περίμετρον* αὐτοῦ καὶ αἵτινες τεμνόμεναι ἀνὰ δύο σχηματίζουσι τὰς τρεῖς γωνίας, ὧν κορυφαὶ αἱ Α, Β, Γ.



39. Ἐκ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ λέγεται τὸ τρίγωνον·

Ἰσόπλευρον, ἐὰν ἔχῃ καὶ τὰς τρεῖς πλευρὰς ἴσας πρὸς ἀλλήλας, ὡς τὸ ΑΒΓ.

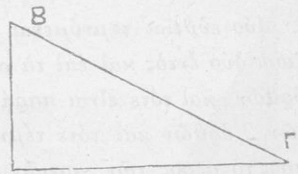


Ἰσοσκελές, ἐὰν ἔχῃ δύο μόνον πλευρὰς ἴσας πρὸς ἀλλήλας, ὡς τὸ ΔΕΖ. Αἱ δὲ ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν ΔΕ καὶ ΔΖ γωνίαι Ζ καὶ Ε εἶναι ἴσαι.

Σκαληνόν, ἐὰν δὲν ἔχῃ πλευρὰς ἴσας, ὡς τὸ ΗΘΙ.

Ἐκ δὲ τῶν γωνιῶν αὐτοῦ λέγεται τὸ τρίγωνον·

Ὀρθογώνιον, ἐὰν ἔχῃ μίαν γωνίαν ὀρθήν, ὡς τὸ ΒΑΓ, ἐν ᾧ ἡ γωνία Α εἶναι ὀρθή, αἱ δὲ λοιπαὶ γωνίαι Β καὶ Γ εἶναι ὀξεῖαι. Ἡ πλευρὰ ΒΓ ἡ ἀπέναντι τῆς ὀρθῆς γωνίας λέγεται *ὑποτείνουσα*.



Ἀμβλυγώνιον, ἐὰν ἔχῃ μίαν ἀμβλεῖαν γωνίαν, ὡς τὸ ΗΙΘ, ἐν ᾧ ἡ γωνία Ι εἶναι ἀμβλεῖα, αἱ δὲ λοιπαὶ δύο γωνίαι Η καὶ Θ εἶναι ἑκατέρα ὀξεῖα.

Ὀξυγώνιον, ἐὰν καὶ τὰς τρεῖς ἔχῃ ὀξείας, ὡς τὸ ἰσόπλευρον ΑΒΓ.

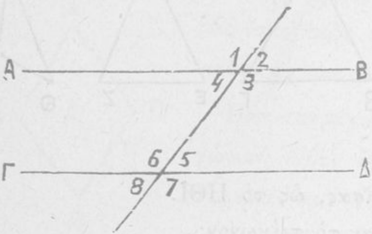
Ἰσογώνιον, ἐὰν ἔχῃ καὶ τὰς τρεῖς γωνίας ἴσας πρὸς ἀλλήλας, ὅπερ συμβαίνει πάντοτε ἐν τῷ ἰσοπλεύρῳ τριγώνῳ, καὶ ἑπομένως πᾶν ἰσόπλευρον τρίγωνον εἶναι καὶ ἰσογώνιον.

40. Τὸ ἁπλούστατον τῶν πολυέδρων εἶναι τὸ τετράεδρον· διότι τρία ἐπίπεδα τοὐλάχιστον σχηματίζουσι στερεὰν γωνίαν· ἵνα δὲ κλεισθῇ πανταχόθεν ὁ χῶρος ὑπὸ ἐπιπέδων ἀπαιτεῖται τοὐλάχιστον καὶ τέταρτον ἐπίπεδον.

41. *Εὐθύγραμμον ἐπίπεδον σχῆμα* λέγεται ἐπίπεδος ἐπιφάνεια περιεχομένη πανταχόθεν ὑπὸ εὐθειῶν γραμμῶν. Π. χ. πάντα τὰ παραλληλόγραμμα καὶ τὰ τρίγωνα εἶναι εὐθύγραμμα σχήματα.

Τὸ ἁπλούστατον τῶν εὐθυγράμμων ἐπιπέδων σχημάτων εἶναι τὸ τρίγωνον· διότι δύο εὐθεῖαι δύνανται νὰ σχηματίζωσι γωνίαν· ἵνα δὲ κλεισθῇ πανταχόθεν τὸ ἐπίπεδον ὑπὸ εὐθειῶν ἀπαιτεῖται τοὐλάχιστον καὶ τρίτη εὐθεῖα.

42. Ὅταν ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ὑπάρχωσι δύο εὐθεῖαι, ὡς αἱ ΑΒ καὶ ΓΔ τεμνόμεναι ὑπὸ τρίτης εὐθείας ΕΖ, τότε σχηματίζονται περὶ τὰ σημεῖα τῆς τομῆς 8 γωνίαι, αἵτινες ὀνομάζονται ἐκ τῆς θέσεως αὐτῶν, ὡς ἑξῆς:



1) *Ἐντὸς ἐναλλάξ*, ὡς αἱ 4 καὶ 5, αἱ 6 καὶ 3.

2) *Ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη*, ὡς αἱ 5 καὶ 3, αἱ 6 καὶ 4.

3) *Ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη*, ὡς αἱ 5 καὶ 2, 6 καὶ 1, 3 καὶ 7, 4 καὶ 8.

Δύο εὐθεῖαι τεμνόμεναι ὑπὸ τρίτης εὐθείας δύνανται νὰ σχηματίζωσι δύο ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας ἢ ἐχούσας ἄθροισμα 2 ὀρθῶν καὶ τότε εἶναι παράλληλοι, ἢ ἐχούσας ἄθροισμα μικρότερον τῶν 2 ὀρθῶν καὶ τότε τέμνουσιν ἀλλήλας, ὅταν ἐφ' ἱκανὸν αὐξηθῶσι, πρὸς τὸ μέρος τῶν γωνιῶν τούτων.—Ἐὰν δὲ δύο εὐθεῖαι τεμνόμεναι ὑπὸ τρίτης εὐθείας σχηματίζωσι τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας ἐχούσας ἄθροισμα 2 ὀρθῶν, σχηματίζουσι καὶ τὰς ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας πρὸς ἀλλήλας καὶ τὰς ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας ἴσας πρὸς ἀλλήλας.

Ὅταν δὲ αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ ἦναι *παράλληλοι*, τότε τεμνόμεναι ὑπὸ τρίτης εὐθείας ΕΖ σχηματίζουσι 1) *τὰς ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας*, 2) *τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ὁμοῦ λαμβανομένας ἴσας πρὸς 2 ὀρθὰς γωνίας καὶ* 3) *τὰς ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσας πρὸς ἀλλήλας.*

43. *Αἱ τρεῖς γωνίαι παντὸς τριγώνου ὁμοῦ λαμβανόμεναι ἀποτελοῦσι 2 ὀρθὰς γωνίας.* Ἐκ τούτου δὲ συνάγομεν, ὅτι παντὸς ὀρθογωνίου τριγώνου αἱ δύο ὀξεῖαι γωνίαι ἀποτελοῦσιν ὁμοῦ 1 ὀρθὴν καὶ ὅτι παντὸς ἰσοπλεύρου τριγώνου ἑκάστη γωνία εἶναι τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς ὀρθῆς.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν

1) Γράψαι πάντα τὰ εἴδη τριγώνων.

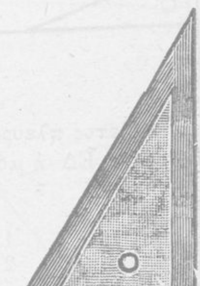
2) Τριγώνου τινὸς μία γωνία εἶναι $\frac{1}{5}$ τῆς ὀρθῆς, ἑτέρα δὲ $\frac{4}{5}$ τῆς ὀρθῆς· πόση εἶναι ἡ λοιπὴ γωνία;

3) Τριγώνου τινὸς ἰσοσκελοῦς μία τῶν ἴσων γωνιῶν εἶναι $\frac{5}{7}$ τῆς ὀρθῆς· πόση εἶναι ἑκατέρα τῶν λοιπῶν γωνιῶν;

4) Τριγώνου τινὸς δύο γωνίαι εἶναι $\frac{4}{5}$ καὶ $\frac{2}{7}$ τῆς ὀρθῆς· πόση εἶναι ἡ τρίτη γωνία;

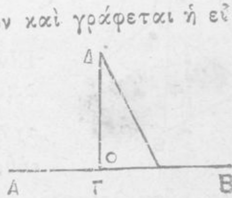
Γνώμων, γραφὴ καθέτων καὶ παραλλήλων.

44. Ὁ *γνώμων* εἶναι γεωμετρικὸν ὄργανον ἐν σχήματι ὀρθογωνίου τριγώνου ἐκ λεπτῆς συνήθως σανίδος καὶ χρησιμεύει πρὸς γραφὴν καθέτων καὶ παραλλήλων εὐθειῶν γραμμῶν, ὡς ἑξῆς φαίνεται·



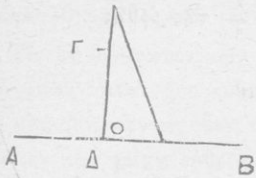
1) *Γράψαι ἐκ σημείου κειμένου ἐπὶ εὐθείας γραμμῆς κάθετον ἐπ' αὐτὴν εὐθεῖαν.*

Ἔστω εὐθεῖά τις ΑΒ καὶ σημεῖόν τι Γ ἐπ' αὐτῆς κείμενον. Ἵνα ἐκ τοῦ Γ ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ, τίθεται ὁ γνώμων οὕτως, ὥστε ἡ ἀκμὴ τῆς μιᾶς τῶν καθέτων αὐτοῦ πλευρῶν νὰ κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ, ἡ δὲ ἀκμὴ τῆς ἑτέρας καθέτου νὰ διέρχηται διὰ τοῦ σημείου Γ· αὕτη δὲ ἡ ἀκμὴ λαμβάνεται εἶτα ὡς κανὼν καὶ γράφεται ἡ εὐθεῖα ΓΔ ἡ μόνη κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ ἐκ τοῦ σημείου αὐτῆς Γ.

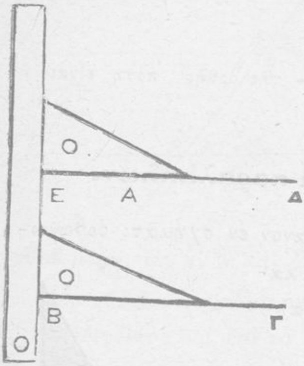


2) *Γράψαι ἐκ σημείου ἐκτὸς εὐθείας κειμένου κάθετον ἐπ' αὐτήν.*

Ἔστω εὐθεῖά τις ΑΒ καὶ σημεῖόν τι Γ ἐκτὸς αὐτῆς κείμενον. Ἵνα ἐκ τοῦ Γ ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ, τίθεται ὁ γνώμων οὕτως, ὥστε ἡ ἀκμὴ τῆς μιᾶς τῶν καθέτων αὐτοῦ πλευρῶν νὰ κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ, ἡ δὲ ἀκμὴ τῆς ἑτέρας καθέτου νὰ διέρχηται διὰ τοῦ σημείου Γ· αὕτη δὲ ἡ ἀκμὴ λαμβάνεται εἶτα ὡς κανὼν καὶ γράφεται ἡ εὐθεῖα ΓΔ ἡ μόνη κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ ἐκ τοῦ ἐκτὸς αὐτῆς κειμένου σημείου Γ.

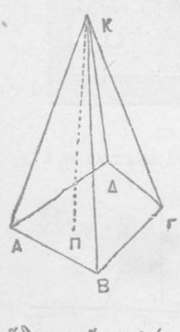


3) *Γράψαι ἐκ σημείου ἐκτὸς εὐθείας κειμένου παράλληλον αὐτῇ.*



Ἔστω εὐθεῖά τις ΒΓ καὶ σημεῖόν τι Α ἐκτὸς αὐτῆς κείμενον. Ἵνα ἐκ τοῦ Α ἀχθῇ παράλληλος τῇ ΒΓ, τίθεται ὁ γνώμων οὕτως, ὥστε ἡ μία κάθετος πλευρὰ νὰ κεῖται ἐπὶ τῆς ΒΓ, ἐπὶ δὲ τῆς ἑτέρας καθέτου πλευρᾶς τίθεται ἡ ἀκμὴ τοῦ κανόνος· εἶτα δὲ μετατίθεται ὁ γνώμων οὕτως, ὥστε τῆς ἑτέρας ταύτης καθέτου πλευρᾶς μενούσης ἐπὶ τῆς ἀκμῆς τοῦ ἀκινήτου ἤδη κανόνος νὰ διέλθῃ διὰ τοῦ σημείου Α ἡ ἑτέρα κάθετος πλευρά· αὕτη δὲ λαμβάνεται εἶτα ὡς κανὼν καὶ γράφεται ἡ ΕΔ ἡ μόνη παράλληλος τῇ ΑΒ ἐκ τοῦ σημείου Α.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.



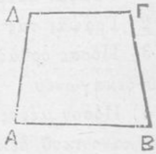
1) Γράψαι, ὡς ἔτυχεν, εὐθείας καὶ τὰς καθέτους ἐπ' αὐτάς·
2) Γράψαι, ὡς ἔτυχεν, εὐθείας καὶ τὰς παραλλήλους πρὸς αὐτάς.
3) Γράψαι ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον.

Περὶ πυραμίδος.

45. Τὸ στερεὸν ΚΑΒΓΔ λέγεται *πυραμίς*. Εἶναι δὲ πολύεδρον, τοῦ ὁποίου αἱ ἕδραι εἶναι τρίγωνα, πλὴν μιᾶς, ἥτις εἶναι εὐθύγραμμον σχῆμα περατούμενον καὶ εἰς πλείονας τῶν τριῶν εὐθείας, αἵτινες λέγονται *πλευραὶ* αὐτοῦ. Ἡ δὲ ἕδρα αὕτη λέγεται *τετράπλευρον*, ἐὰν ἔχῃ 4 πλευράς· *πεντάγωνον*, ἀν ἔχῃ 5, *ἑξάγωνον*, ἐὰν ἔχῃ 6· καὶ ἐν γένει λέγεται *πολύγωνον*, ἐὰν ἔχῃ πολλὰς πλευρὰς ἢ γωνίας. Ἡ δὲ πυραμὶς καλεῖται ἐκ τῆς ἕδρας ταύτης *τριγωνική*, ἐὰν ἦναι τρίγωνον· *τετραγωνική*, ἐὰν τετράπλευρον· *πενταγωνική*, ἐὰν πεντάγωνον· καὶ ἐν γένει *πολυγωνική*, ἐὰν ἡ ἕδρα αὕτη ἦναι οἱονδήποτε πολύγωνον. Τὸ τετράεδρον εἶναι τριγωνικὴ πυραμίς.

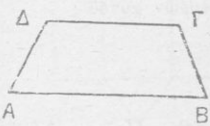
ΣΗΜ. Ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀκμῶν, διέδρων γωνιῶν, στερεῶν γωνιῶν, ἐπιπέδων γωνιῶν καὶ ἑδρῶν τῆς πολυγωνικῆς πυραμίδος ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλευρῶν τῆς μὴ τριγωνικῆς αὐτῆς ἕδρας.

46. Τὸ σχῆμα ΑΒΓΔΑ εἶναι τετράπλευρον.



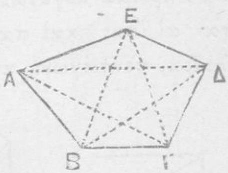
Εἰς τὰ τετράπλευρα σχήματα ὑπάγονται τὸ τετράγωνον, τὸ ὀρθογώνιον, ὁ ῥόμβος, τὸ παραλληλόγραμμον, τὸ τραπέζιον.

Τραπέζιον λέγεται τὸ τετράπλευρον, τὸ ὁποῖον ἔχει δύο ἀπέναντι πλευρὰς παραλλήλους. Τοιοῦτον εἶναι τὸ ἔναντι σχῆμα ΑΒΓΔ, ἐνῷ ἡ ΑΒ παράλληλος τῇ ἀπέναντι αὐτῆς ΔΓ.



Τὸ σχῆμα ΑΒΓΔΕ εἶναι πεντάγωνον.

Διαγώνιος τοῦ πολυγώνου λέγεται πᾶσα εὐθεῖα, ἥτις συνδέει δύο κορυφὰς χωρὶς νὰ ἦναι πλευρά.



Τοῦ πενταγώνου ΑΒΓΔΕ πλευραὶ εἶναι αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ, αἵτινες ὁμοῦ ἀποτελοῦσι τὴν *περίμετρον* αὐτοῦ· γωνίαι δὲ αἱ ἔχουσαι κορυφὰς τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ, Ε· διαγώνιοι δὲ αἱ εὐθεῖαι ΑΓ, ΑΔ, ΒΔ, ΒΕ, ΓΕ.

47. *Κυρτὸν* λέγεται τὸ πολύγωνον, ἐὰν ἑκάστη πλευρὰ αὐτοῦ προσεκβαλλομένη ἔχῃ ὅλον τὸ σχῆμα πρὸς τὸ ἓν μέρος αὐτῆς. Ὁμοίως πᾶν πολύεδρον εἶναι κυρτόν, ἐὰν ἑκάστη ἕδρα αὐτοῦ προσεκβαλλομένη ἔχῃ ὅλον τὸ πολύεδρον πρὸς τὸ ἓν μέρος αὐτῆς.

48. *Κανονικὸν πολύγωνον* λέγεται τὸ πολύγωνον τὸ ἔχον πάσας τὰς πλευρὰς ἴσας καὶ πάσας τὰς γωνίας ἴσας· οἷον τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον καὶ τὸ τετράγωνον εἶναι κανονικὰ σχήματα.

49. *Αἱ γωνίαι παντὸς κυρτοῦ πολυγώνου ὁμοῦ λαμβανόμεναι ἀποτελοῦσι τόσας ὀρθὰς γωνίας, ὅσον εἶναι τὸ διπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλευρῶν ἠλαττωμένον κατὰ 4·* οἷον τοῦ πενταγώνου αἱ γωνίαι ἀποτελοῦσιν ὁμοῦ 5.2—4, ἤτοι 10—4, ἤτοι 6 ὀρθάς. Τοῦ τετραπλεύρου εἶναι 4.2—4, ἤτοι 4 ὀρθαὶ κτλ.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν

1) Γράψαι τετράπλευρον, πεντάγωνον, ἑξάγωνον.

2) Γράψαι τὰς διαγωνίους παντὸς τετραπλεύρου ἢ πολυγώνου.

3) Πόσας ὀρθὰς ἀποτελοῦσιν ὁμοῦ αἱ γωνίαι τοῦ ἑξαγώνου, τοῦ ὀκταγώνου, τοῦ δεκαγώνου ;

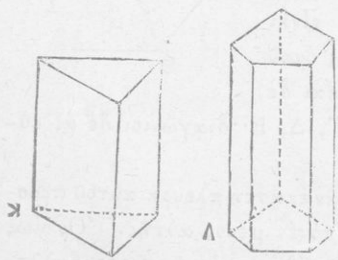
4) Πόσον μέρος τῆς ὀρθῆς εἶναι ἑκάστη γωνία τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου, τοῦ κανονικοῦ δεκαγώνου ;

5) Αἱ γωνίαι πολυγώνου ἀποτελοῦσιν ὁμοῦ 10 ὀρθάς. Τίς ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν αὐτοῦ ;

Περὶ πρίσματος

50. *Πρῖσμα* λέγεται τὸ στερεόν, οὗτινος δύο ἕδραι εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι, αἱ δὲ λοιπαὶ παραλληλόγραμμα.

Τὸ πρῖσμα λέγεται *τριγωνικόν, τετραγωνικόν, πενταγωνικὸν* κτλ., ὅταν αἱ ἴσαι καὶ παράλληλοι αὐτοῦ ἕδραι ἦναι τρίγωνα, τετράπλευρα, πεντάγωνα κτλ.



Τὸ μὲν στερεὸν Κ εἶναι τριγωνικὸν πρῖσμα, τὸ δὲ Λ πενταγωνικόν.

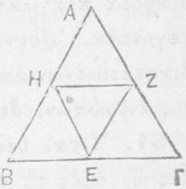
Εἰς τὰ πρίσματα ὑπάγονται καὶ ὁ κύβος καὶ τὰ παραλληλεπίπεδα. Τὰ πρίσματα λέγονται *ὀρθὰ* ἢ *πλάγια*, καθ' ὅσον αἱ ἀκμαὶ αἱ συνδέουσαι τὰς ἀντιστοίχους κορυφὰς τῶν δύο ἴσων καὶ παραλλήλων ἑδρῶν εἶναι κάθετοι ἢ πλάγιαι πρὸς αὐτάς.

Αἱ πυραμίδες καὶ τὰ πρίσματα εἶναι πολύεδρα.

51. *Παράπλευρος ἐπιφάνεια* λέγεται τῆς μὲν πυραμίδος τὸ σύνολον τῶν τριγωνικῶν αὐτῆς ἑδρῶν, τοῦ δὲ πρίσματος τὸ σύνολον τῶν παραλληλογράμμων αὐτοῦ ἑδρῶν.

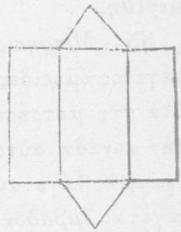
ΣΗΜ. Κατασκευὴ τριγωνικῆς πυραμίδος, τριγωνικοῦ πρίσματος καὶ παραλληλεπιπέδου ἐκ χάρτου.

1) Ἡ ἁπλουστάτη τριγωνικὴ πυραμὶς ἔχει καὶ τὰς τέσσαρας αὐτῆς ἕδρας τρίγωνα ἴσα καὶ ἰσόπλευρα· κατασκευάζεται δὲ ἐκ χάρτου ὡς ἑξῆς·



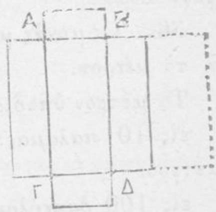
Ἐπὶ χάρτου γράφεται ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ἐπιζευγνύονται τὰ μέσα Ε, Ζ, Η τῶν πλευρῶν αὐτοῦ διὰ τῶν εὐθειῶν ΕΖ, ΖΗ, ΗΕ. Εἶτα ἀποκόπτεται τὸ ΑΒΓ καὶ χαράσσονται διὰ μαχαιρίου αἱ ΕΖ,ΖΗ, ΗΕ. Τέλος κάμπτονται τὰ πέριξ τρίγωνα οὕτως, ὥστε αἱ κορυφαὶ αὐτῶν Α, Β, Γ νὰ συμπέσωσιν. Οὕτω δὲ προκύπτει ἡ τριγωνικὴ πυραμίς.

2) Τὸ ἁπλούστατον τριγωνικὸν πρῖσμα ἔχει τὰς δύο ἴσας καὶ παραλλήλους ἕδρας αὐτοῦ ἰσόπλευρα τρίγωνα· κατασκευάζεται δὲ ἐκ χάρτου ὡς ἑξῆς.



Ἐπὶ χάρτου γράφονται τρία ὀρθογώνια, ἑκατέρωθεν δὲ τοῦ μέσου ὀρθογωνίου δύο ἰσόπλευρα τρίγωνα, ὡς ἐν τῷ σχήματι φαίνεται, καὶ ἀποκόπτεται τὸ οὕτω προκῦπτον σχῆμα. Εἶτα χαράσσονται διὰ μαχαιρίου αἱ τέσσαρες πλευραὶ τοῦ μέσου ὀρθογωνίου καὶ κάμπτονται τὰ λοιπὰ μέρη τοῦ σχήματος, μέχρις οὗ συμπέσωσιν αἱ πλευραὶ αὐτῶν. Οὕτω δὲ προκύπτει τὸ τριγωνικὸν πρῖσμα.

3) Πρὸς κατασκευὴν ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ἐκ χάρτου γράφεται ἐπ' αὐτοῦ ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ καὶ πέριξ αὐτοῦ 4 ὀρθογώνια ἔχοντα τὸ αὐτὸ πλάτος καὶ ἀποκόπτεται τὸ οὕτω προκῦπτον σταυροειδὲς σχῆμα.



Εἶτα διὰ μαχαιρίου χαράσσονται αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ καὶ ἀνυψοῦνται τὰ λοιπὰ ὀρθογώνια καθέτως πρὸς τὸ ΑΒΓΔ· οὕτω δὲ προκύπτει κυτίον, ὅπερ κλείει καμπτομένου τοῦ διὰ στιγμῶν ὀρθογωνίου (τοῦ ἴσου πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ) ἐπὶ τὰ κάθετα ὀρθογώνια.

Καθ' ὅμοιον τρόπον κατασκευάζεται ἐκ χάρτου καὶ ὁ κύβος· ἀρκεῖ πρὸς τοῦτο νὰ χαραχθῶσιν ἐπὶ τοῦ χάρτου ὡς ἀνωτέρω τετράγωνα.

Περὶ μετρήσεως εὐθειῶν γραμμῶν.

52. *Ποσὸν* ἢ *μέγεθος* λέγεται πᾶν ὅ,τι ἐπιδέχεται αὔξησιν ἢ ἐλάττωσιν· οἷον τὸ πλῆθος οἰκιῶν ἢ ἀνθρώπων, τὸ μέγεθος ὁδοῦ ἢ χρόνου.

53. Τὰ ποσὰ εἶναι συνεχῆ ἢ ἀσυνεχῆ. *Συνεχὲς* εἶναι τὸ ποσὸν τὸ συνιστάμενον ἐκ μερῶν συνεχομένων πρὸς ἄλληλα πρὸς ἀποτέλεσιν ὅλου τινός· οἷον ὁ τόπος ἢ ὁ χῶρος, ἐν τῷ ὁποίῳ εὑρίσκονται τὰ διάφορα πράγματα· ὁ χρόνος, ἐν τῷ ὁποίῳ συμβαίνουσι τὰ διάφορα γεγονότα. *Ἀσυνεχὲς* δὲ εἶναι τὸ ποσὸν τὸ συνιστάμενον ἐκ μερῶν διακεκριμένων ἀπ' ἀλλήλων, ὧν ἕκαστον ἀποτελεῖ ὅλον τι· οἷον πλῆθος ἀνθρώπων, δένδρων, οἰκιῶν.

54. Ὅταν θεωρῶμεν τὰ στερεά, τὰς ἐπιφανείας καὶ τὰς γραμμὰς ὡς πρὸς τὸ σχῆμα, λέγομεν αὐτὰ ἁπλῶς *γεωμετρικὰ σχήματα*· ὅταν δὲ ὡς πρὸς τὴν ἔκτασιν, λέγομεν αὐτὰ *γεωμετρικὰ ποσὰ* ἢ *μεγέθη*.

55. *Μέτρησις* μεγέθους λέγεται ἡ σύγκρισις αὐτοῦ πρὸς ἕτερον μέγεθος ὁμοειδὲς καὶ ὡρισμένον, τὸ ὁποῖον λαμβάνεται ὡς *μονάς*. Διὰ τῆς μετρήσεως ταύτης εὑρίσκεται, ποσάκις μέγεθός τι περιέχει τὴν μονάδα αὐτοῦ καὶ τὰ μέρη αὐτῆς. Τὸ ἐξαγόμενον μετρήσεως γραμμῆς λέγεται *μῆκος* αὐτῆς· τὸ δὲ ἐκ τῆς μετρήσεως ἐπιφανείας λέγεται *ἐμβαδόν*· τὸ δὲ ἐκ τῆς μετρήσεως στερεοῦ λέγεται *ὄγκος*. Ὥστε τὸ μῆκος, τὸ ἐμβαδὸν καὶ ὁ ὄγκος εἶναι ἀριθμοὶ παριστῶντες μετρηθέντα γεωμετρικὰ ποσά, ἤτοι γραμμήν, ἐπιφάνειαν, στερεὸν σῶμα.

56. Ὡς μονὰς μετρήσεως γραμμῶν λαμβάνεται ὁ *βασιλικὸς πῆχυς* ἢ τὸ *μέτρον*.

Τὸ μέτρον ὑποδιαιρεῖται·

εἰς 10 *παλάμας*. Ὥστε ἑκάστη παλάμη εἶναι τὸ δέκατον τοῦ μέτρου.

εἰς 100 *δακτύλους*. Ὥστε ἕκαστος δάκτυλος εἶναι τὸ ἑκατοστὸν τοῦ μέτρου καὶ τὸ δέκατον τῆς παλάμης.

εἰς 1000 *γραμμάς*. Ὥστε ἑκάστη γραμμὴ εἶναι τὸ χιλιοστὸν τοῦ μέτρου, τὸ ἑκατοστὸν τῆς παλάμης καὶ τὸ δέκατον τοῦ δακτύλου.

Εἰς δὲ τὸ ἐμπόριον πρὸς μέτρησιν ὑφασμάτων γίνεται χρῆσις καὶ τῶν ἑξῆς πήχεων·

τοῦ *πήχεως Ἀθηνῶν*, ὁ ὁποῖος εἶναι τὰ 0,64 τοῦ μέτρου.

τοῦ *μικροῦ πήχεως Κωνσταντινουπόλεως*, ὁ ὁποῖος εἶναι τὰ 0,648 τοῦ μέτρου καὶ τοῦ *μεγάλου πήχεως Κωνσταντινουπόλεως*, ὁ ὁποῖος εἶναι τὰ 0,669 τοῦ μέτρου· ἑκάτερος δὲ διαιρεῖται εἰς 8 *ρούπια*. Εἰς δὲ τὴν μέτρησιν οἰκοδομῶν καὶ οἰκοπέδων λαμβάνεται μονὰς ὁ *τεκτονικὸς πῆχυς*, ὅστις εἶναι τὰ 0,75 τοῦ μέτρου.

ΣΗΜ. Τὴν μέτρησιν εὐθείας γραμμῆς ἐκτελοῦμεν ἀρχόμενοι ἐκ τοῦ ἑνὸς πέρατος τῆς εὐθείας δι' ἀλληλοδιαδόχου ἐπιθέσεως τοῦ πήχεως ἐπ' αὐτῆς οὕτως, ὥστε τὸ τέλος τοῦ προηγουμένου πήχεως νὰ γίνηται ἀρχὴ τοῦ ἑπομένου πήχεως. Πρὸς μέτρησιν δὲ μεγάλων ἀποστάσεων χρησιμεύει τὸ *στάδιον*, τὸ ὁποῖον ἔχει 1000 μετρα.

Ἐὰν ἤδη μετρήσωμεν εὐθεῖάν τινα, π. χ. μίαν δοκόν, καὶ εὕρωμεν, ὅτι περιέχει τὸ μέτρον τρίς, τὴν παλάμην ἑξάκις καὶ τὸν δάκτυλον πεντάκις, τὸ μῆκος αὐτῆς εἶναι ὁ ἀριθμὸς 3 μ. 6 παλ. 5 δάκ., ὅστις συντομώτερον γράφεται ὑπὸ δεκαδικὴν μορφὴν 3,65 μ.

Ὁμοίως ἐὰν μετρήσωμεν κανόνα τινὰ καὶ εὕρωμεν ὡς μῆκος τὸν ἀριθμὸν 3 πλ. 4 δ. 7 γρ., οὗτος γράφεται καὶ συντομώτερον 0,347 μ.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν

1) Πόσον μῆκος ἔχει ὅλη ἡ περίμετρος τετραγώνου, οὗτινος ἡ πλευρὰ 6 μ.;

2) Ἡ περίμετρος τετραγώνου ἔχει μῆκος 80 πλ. Πόσον τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς αὐτοῦ;

3) Ἔχει τις βιβλία εἰς δύο στήλας· ἡ πρώτη περιέχει 40 ὅμοια βιβλία, τῶν ὁποίων ἕκαστον ἔχει πάχος 7 γρ., ἡ δευτέρα περιέχει 27 βιβλία, τῶν ὁποίων ἕκαστον ἔχει πάχος 4 δακ. Τίς τῶν δύο στηλῶν εἶναι ὑψηλοτέρα καὶ κατὰ πόσον;

4) Ἐὰν τὸ μῆκος ἑνὸς βήματος εἶναι 0,65 μ., πόσον εἶναι τὸ μῆκος ὁδοῦ, ἣν διήνυσέ τις διὰ 500 βημάτων;

5) Ὁδός τις ἔχει μῆκος 2378 μ. Πόσα δένδρα δύνανται νὰ φυτευθῶσιν ἑκατέρωθεν τῆς ὁδοῦ, ἐὰν τὸ ἓν ἀπέχῃ τοῦ ἄλλου κατὰ 3,5 μ.;

ΒΙΒΛΙΟΝ Β΄.

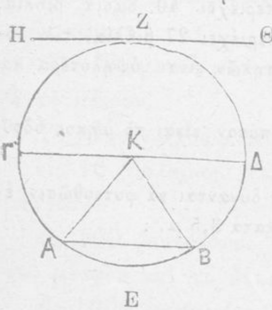
ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ

Περὶ σφαίρας.

57. *Σφαῖρα* λέγεται τὸ στερεόν, τοῦ ὁποίου ἓν σημεῖον (ἐντὸς αὐτοῦ κείμενον) ἀπέχει ἴσον ἀπὸ πάντων τῶν σημείων τῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ. Τὸ σημεῖον τοῦτο λέγεται *κέντρον* τῆς σφαίρας. Τὸ σχῆμα ΠΑΒΠ΄ παριστᾷ σφαῖραν, ἧς κέντρον τὸ σημεῖον Κ.

58. Πᾶσα εὐθεῖα ἀγομένη ἐκ τοῦ κέντρου εἴς τι σημεῖον τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας λέγεται *ἀκτίς*, ὡς ἡ ΚΑ. Πᾶσα δὲ εὐθεῖα διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου καὶ περατουμένη εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας λέγεται *διάμετρος*, ὡς ἡ ΑΒ. Αἱ ἀκτῖνες σφαίρας εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας, ὡς καὶ αἱ διάμετροι. Ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας εἶναι μία μόνη καὶ καμπύλη.

Πᾶν ἐπίπεδον τέμνει τὴν σφαῖραν κατὰ κύκλον.



59. *Κύκλος* λέγεται ἐπίπεδος ἐπιφάνεια, ἧς ἓν σημεῖον ἀπέχει ἴσον ἀπὸ πάντων τῶν σημείων τῆς γραμμῆς, εἰς ἣν περατοῦται· τὸ δὲ σημεῖον τοῦτο λέγεται *κέντρον* τοῦ κύκλου. Ἡ ἐπίπεδος ἐπιφάνεια ΑΒΓΔ εἶναι κύκλος. Ἡ γραμμή, εἰς ἣν περατοῦται ὁ κύκλος, εἶναι μία μόνη καμπύλη καὶ λέγεται *περιφέρεια*.

Πᾶσα εὐθεῖα ἀγομένη ἐκ τοῦ κέντρου εἴς τι σημεῖον τῆς περιφερείας κύκλου λέγεται ἀκτὶς αὐτοῦ, ὡς ἡ ΚΑ. Πᾶσα δὲ εὐθεῖα διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου καὶ περατουμένη εἰς τὴν περιφέρειαν λέγεται *διάμετρος*, ὡς ἡ ΓΔ. Αἱ ἀκτῖνες κύκλου εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας, ὡς καὶ αἱ διάμετροι.

Πᾶσα εὐθεῖα ἀγομένη ἔκ τινος σημείου τῆς περιφερείας εἰς ἕτερον λέγεται *χορδή*, ὡς ἡ ΑΒ.

Πᾶν μέρος τῆς περιφερείας λέγεται *τόξον*, ὡς τὸ ΑΕΒ.

Πᾶν μέρος τοῦ κύκλου περιεχόμενον ὑπὸ τόξου καὶ χορδῆς λέγεται *τμῆμα κύκλου*, ὡς τὸ ΑΕΒΑ.

Πᾶν μέρος τοῦ κύκλου περιεχόμενον ὑπὸ τόξου καὶ δύο ἀκτίνων λέγεται *κυκλικὸς τομεύς*, ὡς τὸ ΚΑΕΒΚ.

Πᾶσα εὐθεῖα τέμνει τὴν περιφέρειαν εἰς δύο σημεῖα· ἡ δὲ εὐθεῖα ἡ ἔχουσα ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον μετὰ τῆς περιφερείας λέγεται *ἐφαπτομένη* καὶ εἶναι κάθετος πρὸς τὴν ἀκτῖνα κατὰ τὸ σημεῖον τοῦτο τῆς ἐπαφῆς· οἷον ἡ ΗΘ. Πᾶσα διάμετρος τέμνει τὸν κύκλον καὶ τὴν περιφέρειαν εἰς δύο ἴσα μέρη καὶ ἑκάτερον λέγεται *ἡμιπεριφέρεια* καὶ *ἡμικύκλιον*· οἷον τὸ τόξον ΓΖΔ εἶναι ἡμιπεριφέρεια, τὸ δὲ τμῆμα ΓΔΖΓ εἶναι ἡμικύκλιον.

60. *Μέγιστος κύκλος* τῆς σφαίρας λέγεται ὁ κύκλος, ὅστις σχηματίζεται, ὅταν τὸ τέμνον ἐπίπεδον διέρχηται διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, ὡς ὁ ΑΓΒΔ ὁ ἔχων κέντρον καὶ ἀκτῖνα τὰ τῆς σφαίρας. Πάντες οἱ μέγιστοι κύκλοι τῆς σφαίρας εἶναι ἴσοι πρὸς ἀλλήλους.

Πᾶς μέγιστος κύκλος διαιρεῖ τὴν σφαῖραν εἰς δύο ἴσα μέρη, ἅτινα λέγονται *ἡμισφαίρια*.

Μικρὸς κύκλος τῆς σφαίρας λέγεται ὁ κύκλος, ὅστις σχηματίζεται, ὅταν τὸ τέμνον ἐπίπεδον δὲν διέρχηται διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, ὡς ὁ ΕΖΗΘ.

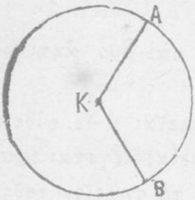
Τὸ ἐπίπεδον τὸ ἔχον ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον μετὰ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας λέγεται *ἐφαπτόμενον* καὶ εἶναι κάθετον πρὸς τὴν ἀκτῖνα κατὰ τὸ σημεῖον τοῦτο τῆς ἐπαφῆς.

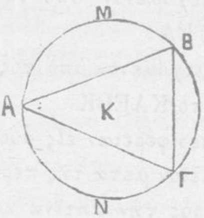
Σφαιρικὴ ζώνη λέγεται τὸ μέρος τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας τὸ μεταξὺ δύο περιφερειῶν παραλλήλων κύκλων (ἢ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων).

Πόλοι κύκλου τῆς σφαίρας λέγονται τὰ πέρατα τῆς διαμέτρου, ἥτις εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου τούτου, οἷα τὰ σημεῖα Π καὶ Π΄ πρὸς τοὺς κύκλους ΑΓΒΔ καὶ ΕΖΗΘ.

ΣΗΜ. Δυνάμεθα νὰ νοήσωμεν τὴν σφαῖραν ὡς γεννωμένην ὑπὸ ἡμικυκλίου στρεφομένου περὶ τὴν διάμετρον αὐτοῦ· τὸν δὲ κύκλον ὡς γεννώμενον ὑπὸ εὐθείας ΚΑ ἐφ' ἑνὸς ἐπιπέδου μενούσης καὶ περιστρεφομένης περὶ τὸ ἓν μόνιμον ἄκρον αὐτῆς Κ, μέχρις οὗ ἐπανέλθῃ εἰς τὴν ἀρχικὴν αὐτῆς θέσιν, ὅτε ἡ μὲν εὐθεῖα ΚΑ γράφει τὸν κύκλον, τὸ δὲ ἕτερον ἄκρον αὐτῆς Α γράφει τὴν περιφέρειαν.

61. Πᾶσα γωνία, τῆς ὁποίας ἡ κορυφὴ εἶναι τὸ κέντρον κύκλου καὶ αἱ πλευραὶ ἀκτῖνες αὐτοῦ λέγεται *ἐπίκεντρος γωνία*, ὡς ἡ ΑΚΒ.





Πᾶσα γωνία, τῆς ὁποίας ἡ κορυφὴ εἶναι σημεῖον τῆς περιφερείας κύκλου καὶ αἱ πλευραὶ χορδαὶ αὐτοῦ λέγεται *ἐγγεγραμμένη γωνία*, ὡς ἡ ΑΓΒ.

Εὐθύγραμμον σχῆμα λέγεται *ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον*, ἐὰν πᾶσαι αἱ κορυφαὶ αὐτοῦ κεῖνται ἐπὶ τῆς περιφερείας· ὁ δὲ κύκλος λέγεται τότε *περιγεγραμμένος* περὶ τὸ σχῆμα.

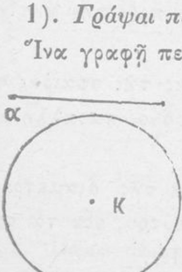
Διαβήτης, γραφὴ περιφερειῶν.

62. Ὁ *διαβήτης* εἶναι γεωμετρικὸν ὄργανον ἀποτελούμενον ἐκ δύο μεταλλίνων συνήθως σκελῶν ἀπολη γόντων εἰς αἰχμὴν καὶ ἀνοιγομένων κατὰ βούλησιν περὶ τὰ δύο συνδεδεμένα ἄκρα αὐτῶν. Τὸ ἀπέναντι σχῆμα παριστᾷ διαβήτην.

Ὁ διαβήτης χρησιμεύει ἰδίᾳ πρὸς γραφὴν περιφερειῶν κύκλων, ὡς ἑξῆς φαίνεται.

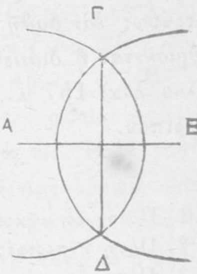
1). *Γράψαι περιφέρειαν, τῆς ὁποίας δίδεται τὸ κέντρον καὶ ἡ ἀκτίς.*

Ἵνα γραφῇ περιφέρεια ἔχουσα κέντρον σημεῖόν τι Κ καὶ ἀκτῖνα α, ἀνοίγεται ὁ διαβήτης τόσον, ὥστε νὰ περιέχηται μεταξὺ τῶν αἰχμῶν αὐτοῦ τὸ μέγεθος τῆς δοθείσης εὐθείας α· εἶτα δὲ τίθεται ἡ αἰχμὴ τοῦ ἑνὸς σκέλους τοῦ διαβήτου εἰς τὸ σημεῖον Κ καὶ περὶ τὸ σκέλος τοῦτο περιστρέφεται τὸ ἕτερον σκέλος, ὅτε ἡ αἰχμὴ αὐτοῦ γράφει τὴν ζητουμένην περιφέρειαν.



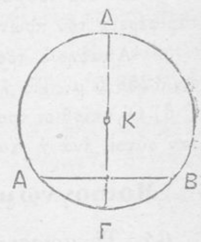
2) *Εὑρεῖν τὸ μέσον εὐθείας καὶ τὴν ἐξ αὐτοῦ ἐπ' αὐτὴν κάθετον.*

Ἵνα εὑρεθῇ τὸ μέσον Ε εὐθείας τινὸς ΑΒ καὶ ἡ ἐξ αὐτοῦ ἐπ' αὐτὴν κάθετος ΓΔ, γράφονται δύο περιφέρειαι ἔχουσαι κέντρα τὰ ἄκρα Α καὶ Β τῆς ΑΒ καὶ ἀκτῖνα τὴν αὐτήν, ἀλλὰ ἔχουσαν μῆκος μεγαλείτερον τοῦ ἡμίσεως τοῦ μήκους τῆς ΑΒ. Εἶτα δὲ ἐπεζευγνύονται τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ τῆς τομῆς τῶν δύο τούτων περιφερειῶν διὰ τῆς εὐθείας ΓΔ, ἥτις εἶναι ἡ ἐπὶ την ΑΒ κάθετος ἐκ τοῦ μέσου αὐτῆς Ε.



3) *Εὑρεῖν τὸ κέντρον δοθέντος κύκλου.*

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ κέντρου δοθέντος κύκλου λαμβάνεται χορδή τις αὐτοῦ ΑΒ, ἧς εὑρίσκεται τὸ μέσον καὶ ἡ ἐξ αὐτοῦ κάθετος ΓΔ· τοῦ δὲ μέρους τῆς καθέτου ταύτης τοῦ ὑπὸ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου περατουμένου λαμβάνεται τὸ μέσον Κ, ὅπερ εἶναι τὸ ζητούμενον κέντρον.



Μέτρησις περιφερείας κύκλου.

63. Ἡ περιφέρεια κύκλου δύναται νὰ μετρηθῇ διὰ τῆς μονάδος τοῦ μήκους, ἤτοι τοῦ μέτρου. Τοῦτο δ' ἐπιτυγχάνεται ὡς ἑξῆς· περιβάλλεται ἡ περιφέρεια διὰ λεπτοῦ νήματος, τὸ δὲ μῆκος τούτου εἶναι καὶ τὸ τῆς περιφερείας. Εὑρεθὲν δὲ οὕτω τὸ μῆκος τῆς περιφερείας συγκρίνεται εἶτα πρὸς τὸ μῆκος τῆς διαμέτρου αὐτῆς.

Ἐκ δὲ τῆς συγκρίσεως ταύτης εὑρίσκεται, ὅτι *πάσης περιφερείας κύκλου τὸ μῆκος εἶναι* $3\frac{1}{7}\left(\text{ἢ } \frac{22}{7}\right)$ *περίπου μεγαλείτερον τοῦ τῆς διαμέτρου αὐτῆς*, ἤτοι *τὸ μῆκος πάσης περιφερείας εὑρίσκεται, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ τὸ μῆκος τῆς διαμέτρου αὐτῆς ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν* $\frac{22}{7}$ *ἢ ἀκριβέστερον ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 3,141.* Ὁ ἀριθμὸς δὲ οὗτος παρίσταται συντόμως διὰ τοῦ γράμματος *π*. Κατὰ ταῦτα, ἐὰν παρασταθῇ διὰ τοῦ γράμματος α τὸ μῆκος ἀκτῖνος κύκλου, τὸ μῆκος τῆς περιφερείας αὐτοῦ εἶναι 2.α.π ἢ 2πα.

Ἐὰν ἦναι π.χ. τὸ α ὁ ἀριθμὸς 5, ἔχομεν 2.3,141.5 ἢ 31,41 μ., ὅπερ εἶναι τὸ μῆκος περιφερείας ἀκτῖνος 5 μέτρων. Καὶ ἀντιστρόφως· *ἐὰν δοθῇ τὸ μῆκος περιφερείας κύκλου καὶ διαιρεθῇ διὰ π, εὑρίσκεται ἡ διάμετρος αὐτοῦ*. Π. χ. ἐὰν τὸ μῆκος περιφερείας κύκλου ἦναι 157 μ., ἡ διάμετρος αὐτοῦ εἶναι 157 : 3,14 ἤτοι 50 μ. περίπου.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Πόσον τὸ μῆκος περιφερείας ἀκτῖνος 2,5 μ. ;

2) Πόση ἡ περιφέρεια τροχοῦ ἀκτῖνος 0,5 μ. ;

3) Πόση εἶναι ἡ περιφέρεια κύκλου διαμέτρου 2 μ. ;

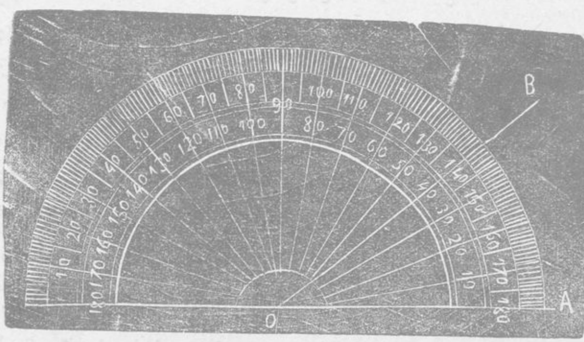
4) Ἐκ δύο τροχῶν ὁ μὲν ἔχει ἀκτῖνα 0,35, ὁ δὲ 0,28 μ. κατὰ πόσον ἡ περιφέρεια τοῦ πρώτου διαφέρει τῆς τοῦ δευτέρου ;

5) Ἁμάξης ὁ τροχὸς ἐστράφη 500 στροφάς, ἵνα διανύσῃ ἡ ἅμαξα ἀπόστασιν 1258,5 μ. Τίς ἡ περιφέρεια καὶ ἡ ἀκτὶς τοῦ τροχοῦ;

6) Οἱ ὀπίσθιοι τροχοὶ ἁμάξης ἔχουσι διάμετρον 1,30 μ. Ποσάκις ἐστράφησαν οὗτοι, ἵνα ἡ ἅμαξα διανύσῃ ἀπόστασιν 5 σταδίων ;

Μοιρογνωμόνιον, μέτρησις τόξων καὶ γωνιῶν.

64. Τὸ *μοιρογνωμόνιον* εἶναι ἡμικύκλιον (συνήθως ἐκ μετάλλου), τοῦ ὁποίου τὸ τόξον, ἤτοι τὸ ἥμισυ τῆς περιφερείας, εἶναι διῃρημέ-



νον εἰς 180 ἴσα μέρη, ἅτινα λέγονται *μοῖραι*· ὥστε ὅλη ἡ περιφέρεια κύκλου ἔχει 360 μοίρας.

Ἑκάστη μοῖρα διαιρεῖται εἰς 60 ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται *πρῶτα λεπτά*, καὶ ἕκαστον λεπτὸν εἰς 60 *δεύτερα λεπτά*.

Ὁ ἀριθμὸς τῶν μοιρῶν σημειοῦται συμβολικῶς δι' ἑνὸς μηδενικοῦ γραφομένου εἰς τὰ δεξιὰ καὶ ὀλίγον ἄνω τοῦ ἀριθμοῦ, τὰ πρῶτα λεπτὰ σημειοῦνται ὁμοίως διὰ μιᾶς ὀξείας καὶ τὰ δεύτερα λεπτὰ διὰ δύο ὀξειῶν. Π. χ. τὸ τόξον, τὸ ὅποιον περιέχει 38 μοίρας, 20 πρῶτα λεπτὰ καὶ 45 δεύτερα λεπτά, γράφεται $38^0\ 20'\ 45''$.

Χρησιμεύει δὲ τὸ μοιρογνωμόνιον εἰς τὴν εὕρεσιν πόσων μοιρῶν, πρώτων λεπτῶν καὶ δευτέρων λεπτῶν εἶναι γωνία τις. Πρὸς τοῦτο τίθεται τὸ μοιρογνωμόνιον ἐπὶ τῆς δεδομένης γωνίας οὕτως, ὥστε τὸ μὲν κέντρον αὐτοῦ νὰ πέσῃ εἰς τὴν κορυφὴν τῆς γωνίας, ἡ δὲ διάμετρος νὰ κεῖται ἐπὶ τῆς μιᾶς πλευρᾶς τῆς γωνίας· τότε δὲ ἡ ἑτέρα πλευρὰ τῆς γωνίας διέρχεται διά τινος σημείου τοῦ τόξου τοῦ μοιρογνωμονίου, ὁ δὲ ἀριθμὸς ὁ γεγραμμένος κατὰ τὸ σημεῖον τοῦτο δεικνύει (ἀπὸ τῆς διαμέτρου καὶ ἐφεξῆς ἐπὶ τὸ τόξον), πόσων μοιρῶν κλ. εἶναι τὸ τόξον τὸ μεταξὺ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας. Ὁ ἀριθμὸς δὲ οὗτος παριστᾷ καὶ τὴν γωνίαν. Ἐὰν π. χ. τόξον τι ἦναι 35 μοιρῶν 15 πρώτων λεπτῶν καὶ 20 δευτέρων λεπτῶν, λέγομεν, ὅτι καὶ ἡ γωνία ἡ ἐπίκεντρος ἡ ἀντιστοιχοῦσα πρὸς τὸ τόξον τοῦτο εἶναι ὡσαύτως $35^0\ 15'\ 20''$.

Ὡς μονὰς μετρήσεως τῶν γωνιῶν λαμβάνεται ἡ ὀρθὴ γωνία, ἥτις εἶναι 90 μοιρῶν· διότι, ἐὰν ἀχθῶσι δύο διάμετροι τοῦ κύκλου κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας, διαιρεῖται ἡ περιφέρεια εἰς τέσσαρα ἴσα μέρη καὶ ἑπομένως πρὸς ἑκάστην ὀρθὴν γωνίαν ἀντιστοιχεῖ τὸ τέταρτον τῆς περιφερείας, ἤτοι $360^0 : 4 = 90^0$. Ὥστε, ἐπειδὴ πρὸς 90^0 ἀντιστοιχεῖ 1 ὀρθὴ γωνία, πρὸς 1^0 ἀντιστοιχεῖ τὸ $\frac{1}{90}$ τῆς ὀρθῆς, πρὸς 2^0, 3^0, 4^0,.... ἀντιστοιχεῖ τὸ $\frac{2}{90}$, $\frac{3}{90}$, $\frac{4}{90}$,....τῆς ὀρθῆς.

65. Ἐκ τῶν προηγουμένων συνάγεται, ὅτι·

1) *Ἐπὶ ἴσα τόξα τοῦ αὐτοῦ κύκλου ἢ ἴσων κύκλων βαίνουσιν ἴσαι ἐπίκεντροι γωνίαι.*

2) *Πρὸς ἴσας ἐπικέντρους γωνίας τοῦ αὐτοῦ κύκλου ἢ ἴσων κύκλων ἀντιστοιχοῦσιν ἴσα τόξα.*

Ἀληθεύει δέ, ὅτι *πᾶσα ἐπίκεντρος γωνία* εἶναι *διπλασία ἐγγεγραμμένης βαινούσης ἐπὶ τὸ αὐτὸ τόξον.*

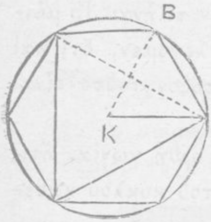
66. Ἵνα ἐγγραφῇ εἰς δοθέντα κύκλον κανονικὸν πολύγωνον, ἀρκεῖ νὰ διαιρεθῇ ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου εἰς τόσα ἴσα μέρη, ὅσαι εἶναι αἱ πλευραὶ τοῦ σχήματος καὶ νὰ ἀχθῶσιν εἶτα αἱ χορδαὶ αὐτῶν, ὡς ἑξῆς φαίνεται.

1) *Ἐγγράψαι τετράγωνον εἰς δοθέντα κύκλον.*

Πρὸς τοῦτο ἄγονται δύο διάμετροι τοῦ κύκλου κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας, αἵτινες μερίζουσι τὴν περιφέρειαν εἰς τέσσαρα ἴσα τόξα, ὧν αἱ χορδαὶ ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.

Τὸ δὲ ὑπὸ τῶν χορδῶν τούτων σχηματιζόμενον οὕτω τετράπλευρον εἶναι τὸ ζητούμενον ἐγγεγραμμένον τετράγωνον.

2) *Ἐγγράψαι κανονικὸν ἑξάγωνον εἰς δοθέντα κύκλον.*



Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ διαιρεθῇ ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου εἰς ἓξ ἴσα μέρη. Τοῦτο δὲ γίνεται ὡς ἑξῆς. Ἔστω ΑΒ τὸ ἕκτον τῆς περιφερείας· ἡ χορδὴ ΑΒ τοῦ τόξου τούτου εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ ἑξαγώνου. Διοτι ἡ γωνία ΑΚΒ οὖσα τὸ ἕκτον τῶν 360^0 εἶναι 60^0, ἑκατέρα δὲ τῶν ἴσων γωνιῶν ΚΑΒ καὶ ΚΒΑ εἶναι $\frac{180^0-60^0}{2}$, ἤτοι 60^0. Τὸ τρίγωνον ἄρα ΑΚΒ εἶναι ἰσογώνιον καὶ ἑπομένως ἰσόπλευρον. Ὥστε *ἡ πλευρὰ κανονικοῦ ἑξαγώνου ἐγγεγραμμένου ἐν κύκλῳ ἰσοῦται τῇ ἀκτῖνι τοῦ κύκλου.*

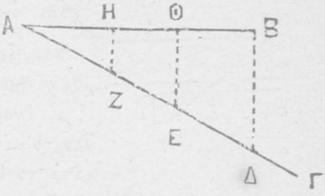
Ἐντεῦθεν δὲ συνάγεται, ὅτι, ἵνα ἐγγραφῇ εἰς κύκλον κανονικὸν ἑξάγωνον, ἀρκεῖ νὰ ληφθῶσι διὰ τοῦ διαβήτου κατὰ σειρὰν ἓξ χορδαὶ ἴσαι ἑκάστη τῇ ἀκτῖνι τοῦ κύκλου.

Ἐὰν δὲ ἐπιζευχθῶσιν ἐναλλὰξ αἱ κορυφαὶ τοῦ κανονικοῦ ἐγγεγραμμένου ἑξαγώνου, σχηματίζεται τὸ ἰσόπλευρον ἐγγεγραμμένον τρίγωνον.

ΣΗΜ. Διαιρεθεῖσα ἡ περιφέρεια κύκλου εἰς τέσσαρα ἴσα μέρη διαιρεῖται καὶ εἰς 8, 16, 32, . . . ἴσα μέρη. Ὥστε εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον κανονικὸν πολύγωνον ἔχον 8, 16, 32, . . . πλευρὰς ἢ γωνίας.

Ὁμοίως διαιρεθεῖσα ἡ περιφέρεια κύκλου εἰς τρία ἴσα μέρη διαιρεῖται καὶ εἰς 6, 12, 24, . . . ἴσα μέρη. Ὥστε εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον κανονικὸν πολύγωνον ἔχον 6, 12, 24, . . . πλευρὰς ἢ γωνίας, καὶ καθεξῆς.

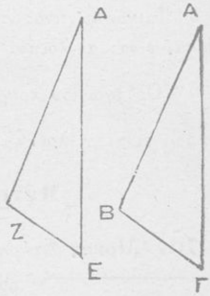
67. *Πᾶσα εὐθεῖα διαιρεῖται εἰς ἴσα μέρη, ὡς ἑξῆς.*



Ἔστω εὐθεῖά τις ΑΒ. Ἵνα διαιρεθῇ αὕτη π.χ. εἰς τρία ἴσα μέρη, ἄγεται ἑτέρα τις εὐθεῖα ΑΓ σχηματίζουσα μετὰ τῆς εὐθείας ΑΒ γωνίαν τινὰ καὶ λαμβάνονται ἐπὶ τῆς ΑΓ διὰ τοῦ διαβήτου τρία ἴσα τμήματα, τὰ ΑΖ, ΖΕ, ΕΔ· εἶτα ἄγεται ἡ εὐθεῖα ΔΒ καὶ αἱ παράλληλοι αὐτῇ ΕΘ, ΖΗ, αἵτινες διαιροῦσι τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ΑΒ εἰς τὰ ἴσα τμήματα αὐτῆς ΑΗ, ΗΘ, ΘΒ, ἅτινα εἶναι τὰ ζητούμενα.

Ἰσότης τριγώνων.

68. Δύο τρίγωνα εἶναι ἴσα κατὰ τὰς ἑξῆς τρεῖς θεμελιώδεις περιπτώσεις.



1). *Ἐὰν ἔχωσι δύο πλευρὰς ἴσας κατὰ μίαν καὶ τὰς ὑπ' αὐτῶν σχηματιζομένας γωνίας ἴσας.*

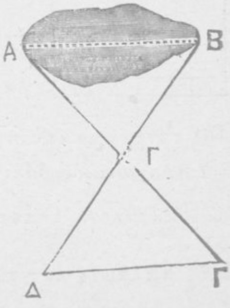
2). *Ἐὰν ἔχωσι μίαν πλευρὰν ἴσην καὶ τὰς προσκειμένας αὐτῇ γωνίας ἴσας.*

3). *Ἐὰν ἔχωσι τὰς πλευρὰς αὐτῶν ἴσας κατὰ μίαν.*

Κατὰ τὰς τρεῖς ταύτας περιπτώσεις ἐπιτιθέμενα τὰ δύο τρίγωνα καταλλήλως ἐφαρμόζουσι καθ' ὅλην αὐτῶν τὴν ἔκτασιν.

69. Ἡ ἰσότης τῶν τριγώνων χρησιμεύει εἰς πολλὰ ζητήματα, ὧν καὶ τὰ ἑξῆς.

1) Εὑρεῖν τὸ μῆκος λίμνης, εἰς ἣν ἀδύνατος ἡ εἴσοδος.

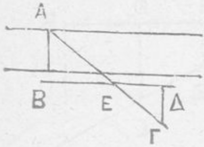


Ἔστω ΑΒ τὸ μῆκος τῆς λίμνης.

Ἔκ τινος σημείου Γ μετροῦμεν τὰς ἀποστάσεις ΑΓ καὶ ΓΒ. Εἶτα ἐπεκτείνομεν τὰς ΑΓ καὶ ΒΓ λαμβάνοντες ΓΕ ἴσην πρὸς ΑΓ καὶ ΓΔ ἴσην πρὸς ΒΓ καὶ ἄγομεν τὴν ΔΕ, ἥτις εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΒ διὰ τὴν ἰσότητα τῶν τριγώνων ΑΓΒ καὶ ΔΓΕ ἐχόντων τὰς γωνίας ΑΓΒ καὶ ΔΓΕ ἴσας (ὡς κατὰ κορυφὴν) καὶ περιεχομένας ὑπὸ πλευρῶν ἴσων.

2) Εὑρεῖν τὸ πλάτος ποταμοῦ, οὗτινος ἡ ἀπέναντι ὄχθη ἀπρόσιτος.

Ἔστω σημεῖόν τι Α ὁρατὸν τῆς ἀπέναντι ὄχθης καὶ Β σημεῖόν τι ἐπὶ τῆς ὄχθης, ἐν ᾗ εὑρίσκεταί τις.



Νοοῦμεν τὴν ΑΒ καὶ ἐκ τοῦ Β τείνομεν παρὰ τὴν ὄχθην νῆμα καθέτως ἐπὶ τὴν ΑΒ μέχρι σημείου τινὸς Δ, ἐξ οὗ ἄγομεν τὴν κάθετον ΔΓ ἐπὶ τὴν ΒΔ. Εἶτα εὑρίσκομεν τὸ μέσον Ε, δι' οὗ διερχομένη ἡ ΑΓ τέμνει τὴν ΔΓ κατὰ τὸ Γ. Ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν τριγώνων ΑΒΕ καὶ ΕΔΓ ἐχόντων ΒΕ ἴσην πρὸς ΕΔ καὶ τὰς προσκειμένας αὐταῖς γωνίας ἴσας προκύπτει ΑΒ ἴση πρὸς ΔΓ, ἧς τὸ μῆκος εἶναι τὸ ζητούμενον πλάτος τοῦ ποταμοῦ.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν

1) Πόσον μέρος τῆς ὀρθῆς εἶναι γωνία 45^0, 60^0, 120^0;

2) Πόσον μέρος τῆς ὀρθῆς εἶναι γωνία $45^0\ 30'\ 15''$;

2) Πόσον μοιρῶν κλ. εἶναι γωνία, ἥτις εἶναι τὰ $\frac{5}{6}$ τῆς ὀρθῆς;

4) Πῶς διαιρεῖται εὐθεῖά τις εἰς 5 ἴσα μέρη;

5) Τριγώνου τινὸς ἰσοσκελοῦς ἡ μία τῶν ἴσων γωνιῶν εἶναι $30^0\ 40'\ 20''$. Πόσαι εἶναι αἱ λοιπαὶ γωνίαι;

6) Ὀρθογωνίου τριγώνου ἡ μία τῶν ὀξειῶν γωνιῶν εἶναι $\frac{2}{3}$ ὀρθῆς. Πόσων μοιρῶν εἶναι ἡ λοιπὴ ὀξεῖα γωνία;

Μέτρησις ἐπιπέδων ἐπιφανειῶν

70. *Μονὰς ἐπιφανείας* λαμβάνεται τὸ τετράγωνον τὸ ἔχον πλευρὰν τὴν μονάδα τοῦ μήκους καὶ λέγεται *τετραγωνικὸν μέτρον* ἢ *τετραγωνικὸς πῆχυς*.

Τετραγωνικὴ παλάμη λέγεται τὸ τετράγωνον τὸ ἔχον πλευρὰν τὴν παλάμην. Ἡ τετραγωνικὴ παλάμη εἶναι τὸ $\frac{1}{100}$ τοῦ τετραγωνικοῦ μέτρου· διότι 100 τετραγωνικαὶ παλάμαι ἀποτελοῦσι τὸ τετραγωνικὸν μέτρον,

Τετραγωνικὸς δάκτυλος λέγεται τὸ τετράγωνον τὸ ἔχον πλευρὰν τὸν δάκτυλον. Ὁ τετραγωνικὸς δάκτυλος εἶναι τὸ $\frac{1}{100}$ τῆς τετραγωνικῆς παλάμης καὶ τὸ $\frac{1}{10000}$ τοῦ τετραγωνικοῦ μέτρου· διότι 100 τετραγωνικοὶ δάκτυλοι ἀποτελοῦσι τὴν τετραγωνικὴν παλάμην καὶ έπομενως 10000 τετραγωνικοὶ δάκτυλοι ἀποτελοῦσι τὸ τετραγωνικὸν μέτρον.

Ὥστε, ἐὰν ἐπιφάνειά τις μετρηθεῖσα εὑρέθη (ἐδ.55) ἔχουσα ἐμβαδὸν 15 τ.μ. 38 τ. παλ. 20 τ. δακ., γράφεται συντόμως ὑπὸ δεκαδικὴν μορφὴν 15,382 τ. μ.

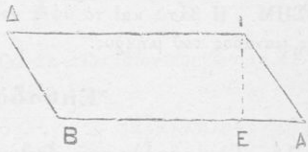
71. Διὰ τὴν μέτρησιν οἰκοπέδων λαμβάνεται ὡς μονὰς τὸ τετράγωνον τὸ ἔχον πλευρὰν τὸν τεκτονικὸν πῆχυν, ἤτοι τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ μέτρου. Εἶναι δὲ ὁ *τεκτονικὸς τετραγωνικὸς πῆχυς* τὰ $\frac{9}{16}$ τοῦ τετραγωνικοῦ πήχεως ἢ ὁ τετραγωνικὸς πῆχυς εἶναι τὰ $\frac{16}{9}$ τοῦ τεκτονικοῦ τετραγωνικοῦ πήχεως.

ΣΗΜ. 1. Διὰ τὴν μέτρησιν μεγάλων ἐπιφανειῶν ὡς μονὰς λαμβάνεται παρ' ἡμῖν τὸ *βασιλικὸν στρέμμα*, ὅπερ εἶναι τετράγωνον ἔχον πλευρὰν 31,6 μ. περίπου.

ΣΗΜ. 2. Ἡ μέτρησις ἐπιφανειῶν ἀνάγεται εἰς τὴν μέτρησιν εὐθειῶν ὡς ἐκ τῶν ἑπομένων φαίνεται.

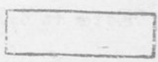
Εὕρεσις τοῦ ἐμβαδοῦ παραλληλογράμμων

72. Ἐν παντὶ παραλληλογράμμῳ ἢ τριγώνῳ διακρίνομεν δύο εὐθείας, αἵτινες λέγονται ἡ μία *βάσις* καὶ ἡ ἑτέρα *ὕψος*.

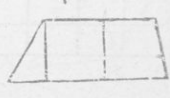


Βάσις παραλληλογράμμου λέγεται ἑκατέρα τῶν δύο ἀπέναντι πλευρῶν αὐτοῦ· *ὕψος* δὲ αὐτοῦ τὸ ἀπόστημα τῶν πλευρῶν τούτων ἀπ' ἀλλήλων.

Ἐὰν τὸ παραλληλόγραμμον ἦναι ὀρθογώνιον, *βάσις* καὶ *ὕψος* αὐτοῦ εἶναι δύο προσκείμεναι πλευραὶ αὐτοῦ.



Τοῦ τραπεζίου *βάσεις* λέγονται αἱ δύο παράλληλοι πλευραὶ αὐτοῦ· *ὕψος* δὲ τὸ ἀπόστημα τῶν βάσεων αὐτοῦ ἀπ' ἀλλήλων· ἐπειδὴ δὲ αἱ μεταξὺ δύο παραλλήλων εὐθειῶν κάθετοι ἐπ' αὐτὰς εὐθεῖαι εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις, δύναται οἱαδήποτε αὐτῶν νὰ ληφθῇ ὡς ὕψος τοῦ παραλληλογράμμου ἢ τοῦ τραπεζίου.



Βάσις τριγώνου λέγεται μία τις τῶν πλευρῶν αὐτοῦ. Τοῦ δὲ ἰσοσκελοῦς τριγώνου λαμβάνεται συνήθως βάσις ἡ πρὸς τὰς δύο λοιπὰς πλευρὰς ἄνισος πλευρὰ αὐτοῦ.

Ὕψος τριγώνου λέγεται ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς ἀπέναντι αὐτῆς γωνίας. Ἐν δὲ τῷ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ λαμβάνονται συνήθως βάσις καὶ ὕψος αἱ δύο κάθεται πλευραὶ αὐτοῦ.

Διάμεσος τριγώνου λέγεται ἡ εὐθεῖα ἡ ἐπιζευγνύουσα τὴν κορυφὴν μιᾶς γωνίας καὶ τὸ μέσον τῆς ἀπέναντι αὐτῆς πλευρᾶς.

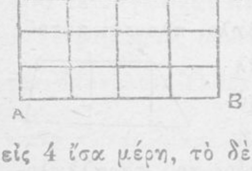
73. Ἡ διαγώνιος παντὸς παραλληλογράμμου διαιρεῖ αὐτὸ εἰς δύο ἴσα τρίγωνα, ὡς ἔχοντα τὰς τρεῖς αὐτῶν πλευρὰς ἴσας κατὰ μίαν (ἤτοι τὴν διαγώνιον ὡς πλευρὰν κοινὴν καὶ τὰς λοιπὰς δύο πλευρὰς ἴσας κατὰ μίαν ὡς ἀπέναντι πλευρὰς τοῦ παραλληλογράμμου). Τέμνονται δὲ αἱ δύο διαγώνιοι παραλληλογράμμου δίχα. Τοῦ ὀρθογωνίου αἱ διαγώνιοι εἶναι ἴσαι· τοῦ ῥόμβου τέμνονται δίχα καὶ καθέτως· τοῦ δὲ τετραγώνου εἶναι ἴσαι καὶ τέμνονται δίχα καὶ καθέτως (ὡς δεικνύεται ἐκ τῆς ἰσότητος τριγώνων).

ΣΗΜ. Ἡ βάσις καὶ τὸ ὕψος νοοῦνται ἐν τοῖς ἑπομένοις μεμετρημένα διὰ τῆς μονάδος τοῦ μήκους.

Ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου.

74. *Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι γινόμενον τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.*

Ἔστω τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ, οὗτινος ἡ μὲν βάσις ΑΒ παρίσταται ὑπὸ τοῦ ἀριθμοῦ 4, τὸ δὲ ὕψος ΑΓ ὑπὸ τοῦ ἀριθμοῦ 3· λέγω, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου τούτου παρίσταται ὑπὸ τοῦ ἀριθμοῦ 12, ἤτοι ὑπὸ τοῦ γενομένου 4.3.



Διότι, ἐὰν διαιρέσωμεν τὴν μὲν βάσιν ΑΒ εἰς 4 ἴσα μέρη, τὸ δὲ ὕψος ΑΓ εἰς 3 ἴσα μέρη καὶ ἐκ τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως ἀχθῶσι παράλληλοι εὐθεῖαι τῇ ΑΒ καὶ τῇ ΑΓ, τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ μερίζεται προφανῶς εἰς 12 ἴσα τετράγωνα, ὧν ἕκαστον εἶναι ἡ μονὰς τῶν ἐπιφανειῶν. Ὥστε τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ ἔχει ἐμβαδὸν παριστάμενον ὑπὸ τοῦ γινομένου 4.3, ἤτοι ὑπὸ τοῦ 12.

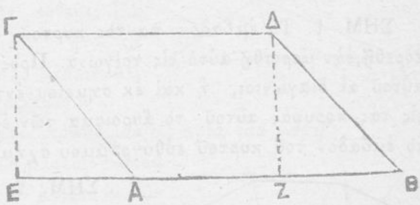
ΣΗΜ. 1. Ὑπετέθη ἀνωτέρω, ὅτι τὸ μῆκος τῆς βάσεως καὶ τοῦ ὕψους εἶναι ἀκέραιοι ἀριθμοί. ἀλλ' ἡ πρότασις ἀληθεύει, καὶ ὅταν ἦναι οἱοιδήποτε ἀριθμοὶ τὰ μήκη ταῦτα

ΣΗΜ. 2. Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς τετραγώνου εἶναι τὸ γινόμενον τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ παριστῶντος τὴν πλευρὰν αὐτοῦ ἐφ' ἑαυτόν. Ἐὰν π. χ. τετραγώνου τινὸς ἡ πλευρὰ παρίσταται ὑπὸ τοῦ ἀριθμοῦ 5, τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ εἶναι 5.5 (ἢ συντόμως 5^2), ἤτοι 25 τ. μ.

Μετασχηματισμὸς εὐθυγράμμων ἐπιπέδων σχημάτων εἰς ὀρθογώνια καὶ μέτρησις αὐτῶν.

75. *Πᾶν παραλληλόγραμμον εἶναι ἰσοδύναμον ὀρθογωνίῳ ἔχοντι τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος.*

Ἔστω τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ· ἐὰν ἀχθῶσιν αἱ κάθετοι ΔΖ καὶ ΓΕ ἐπὶ τὴν ΑΒ, τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΓΕΑ καὶ ΔΖΒ εἶναι ἴσα (ὡς ἔχοντα τὰς πλευρὰς αὐτῶν ἴσας κατὰ μίαν). Οὕτω δὲ τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ καὶ τὸ ὀρθογώνιον ΕΖΓΔ ἀποτελοῦνται ἐκ τοῦ κοινοῦ τετραπλεύρου ΑΖΔΓ καὶ ἐκ τῶν ἴσων τριγώνων ΑΕΓ καὶ ΒΖΔ καὶ ἐπομένως εἶναι ἰσοδύναμα (ἐδ. 13).



Ἐκ τούτου δὲ συνάγομεν, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου εἶναι γινόμενον τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.

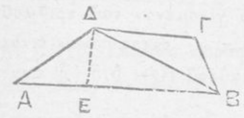
76. *Πᾶν τρίγωνον εἶναι τὸ ἥμισυ παραλληλογράμμου ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος.*

Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΔ. Ἐὰν ἐκ τῶν κορυφῶν Β καὶ Δ ἀχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΒΓ καὶ ΔΓ παράλληλοι ταῖς ΑΔ καὶ ΑΒ, σχηματίζεται τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ, ὅπερ εἶναι διπλάσιον (ἐδ. 75) τοῦ τριγώνου ΑΒΔ.

Ἐκ τούτου δὲ συνάγομεν, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.

77. *Πᾶν τραπέζιον ἰσοδυναμεῖ πρὸς δύο τρίγωνα, ὧν ὕψος μὲν τὸ τοῦ τραπεζίου, βάσεις δὲ τοῦ μὲν ἡ ἄνω, τοῦ δὲ ἡ κάτω τοῦ τραπεζίου.*

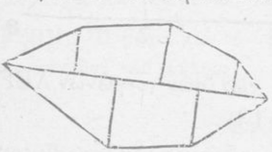
Ἔστω τὸ τραπέζιον ΑΒΓΔ. Διὰ τῆς ἑτέρας ΒΔ τῶν δύο διαγωνίων μερίζεται τὸ τραπέζιον εἰς τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΔΒΓ, ὧν ὕψος μὲν κοινὸν ΔΕ τὸ τοῦ τραπεζίου, βάσεις δὲ τοῦ μὲν ΑΒΔ ἡ ΑΒ, τοῦ δὲ ΒΔΓ ἡ ΓΔ τοῦ τραπεζίου.



Ἐκ τούτου δὲ συνάγομεν, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου εἶναι $\frac{1}{2}\Delta E.\ AB + \frac{1}{2}\ \Delta E.\ \Gamma\Delta$ ἢ $\frac{1}{2}(AB+\Gamma\Delta).\ \Delta E$, ἤτοι τὸ ἡμιάθροισμα τῶν δύο παραλλήλων βάσεων ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.

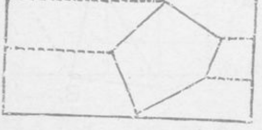
Ἐὰν π.χ. ἡ μὲν ΑΒ ᾖναι 6 μέτρα, ἡ δὲ ΓΔ ᾖναι 4 μ. καὶ τὸ ὕψος ΔΕ ᾖναι 3μ., ἔχομεν $\frac{1}{2}.\ 3.\ (6+4)$ ἢ $\frac{1}{2}\ 3.10$ ἢ 3.5 ἢ 15 τ. μ.

ΣΗΜ. 1. Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς κυρτοῦ εὐθυγράμμου σχήματος δύναται νὰ εὑρεθῇ, ἐὰν μερισθῇ αὐτὸ εἰς τρίγωνα. Πρὸς τοῦτο δὲ ἄγονται ἔκ τινος κορυφῆς αὐτοῦ αἱ διαγώνιοι, ἢ καὶ ἐκ σημείου ἐντὸς αὐτοῦ κειμένου ἄγονται εὐθεῖαι εἰς τὰς κορυφὰς αὐτοῦ· τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριγώνων τούτων εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κυρτοῦ εὐθυγράμμου σχήματος.



ΣΗΜ. 2. Πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἐμβαδοῦ πολυγώνου δύναται νὰ ἄγηται ἡ μεγαλειτέρα διαγώνιος αὐτοῦ, ἐκ πασῶν δὲ τῶν κορυφῶν αὐτοῦ αἱ ἐπ' αὐτὴν κάθετοι. Οὕτω δὲ τὸ πολύγωνον μερίζεται ἐν γένει εἰς τρίγωνα ὀρθογώνια καὶ εἰς τραπέζια, ὧν τὰ μὲν ὕψη κεῖνται ἐπὶ τῆς ἀχθείσης διαγωνίου, αἱ δὲ βάσεις εἶναι αἱ ἀχθεῖσαι κάθετοι ἐκ τῶν κορυφῶν ἐπὶ τὴν διαγώνιον.

Πρὸς εὕρεσιν δὲ τοῦ ἐμβαδοῦ πολυγώνου, ἐντὸς τοῦ ὁποίου ἀδύνατος ἡ εἴσοδος, σχηματίζεται πέριξ αὐτοῦ εὐθύγραμμον σχῆμα· εἶτα δὲ ἐκ τῶν κορυφῶν τοῦ πολυγώνου ἄγονται κάθετοι ἐπὶ τὰς πλευρὰς τοῦ περιέχοντος σχήματος. Ἐὰν δὲ ἀπὸ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ περιέχοντος σχήματος ἀφαιρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν πέριξ σχημάτων, προκύπτει τὸ ἐμβαδὸν τοῦ περιεχομένου σχήματος.]



Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Πῶς εὑρίσκεται τὸ ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου οἰκοπέδου;

2) Πῶς εὑρίσκεται τὸ ἐμβαδὸν τριγωνικοῦ κήπου;

3) Πῶς εὑρίσκεται τὸ ἐμβαδὸν πολυγωνικοῦ ἀγροῦ;

4) Αὐλή τις ἔχουσα ἐμβαδὸν 50 τ. μ. ἐστρώθη διὰ πλακῶν ὀρθογωνίων, ὧν ἑκάστης ἡ βάσις 0,25 μ. καὶ τὸ ὕψος 0,15. Πόσαι εἶναι αἱ πλάκες;

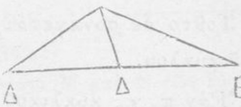
Λύσις. Διαιρεῖται τὸ ἐμβαδὸν τῆς αὐλῆς διὰ τοῦ ἐμβαδοῦ μιᾶς τῶν πλακῶν καὶ οὕτως εὑρίσκεται ὁ ἀριθμὸς τῶν πλακῶν.

5) Πόσαι σανίδες ἀπαιτοῦνται διὰ τὸ πάτωμα δωματίου ὀρθογωνίου, οὗ αἱ διαστάσεις εἶναι 4 καὶ 3 μέτρα, διὰ σανίδων, ὧν ἑκάστης αἱ διαστάσεις 2 καὶ 0,20 μ.;

6) Κῆπος σχήματος παραλληλογράμμου διαστάσεων 25 καὶ 10 μέτρων ἐπωλήθη ἀντὶ 1000 δραχμῶν Πόσου τιμᾶται τὸ τετραγωνικὸν μέτρον;

7) Πῶς μερίζεται τριγωνικὸν χωράφιον ΑΒΓ εἰς δύο ἴσα μέρη ἔχοντα κοινὴν εἴσοδον εἰς τὴν κορυφὴν Γ;

Λύσις. Λαμβάνεται ὡς βάσις ἡ ΑΒ καὶ εὑρίσκεται τὸ μέσον αὐτῆς Δ. Διὰ δὲ τῆς εὐθείας ΓΔ διαιρεῖται τὸ χωράφιον εἰς δύο ἴσα μέρη, ἤτοι τὰ τρίγωνα ΑΓΔ καὶ ΔΓΒ τὰ ἔχοντα ἴσας βάσεις ΑΔ καὶ ΔΒ καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος, τὸ τοῦ χωραφίου.



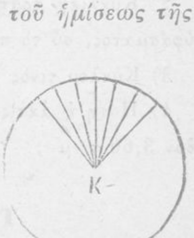
8) Πῶς μερίζεται χωράφιον σχήματος τραπεζίου εἰς τρία ἴσα μέρη;

Λύσις. Διαιρεῖται ἑκατέρα τῶν δύο βάσεων αὐτοῦ εἰς 3 ἴσα μέρη· διὰ δὲ τῶν εὐθειῶν τῶν ἐπιζευγνυουσῶν τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως διαιρεῖται τὸ τραπέζιον εἰς 3 ἴσα μέρη, ἤτοι εἰς τρία ἴσα τραπέζια ἔχοντα ἴσας βάσεις καὶ ὕψος τὸ τοῦ τραπεζίου.

Ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου.

78. *Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου εἶναι τὸ γινόμενον τοῦ ἡμίσεως τῆς ἀκτῖνος ἐπὶ τὴν περιφέρειαν αὐτοῦ.*

Ἔστω πρὸς εὕρεσιν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου Κ. Πρὸς τοῦτο ἄγονται πολλαὶ ἀκτῖνες σχηματίζουσαι πολλοὺς κυκλικοὺς τομεῖς, ὧν αἱ ἐπίκεντροι γωνίαι ὅσον τὸ δυνατὸν μικραί. Τότε δὲ ἕκαστος τῶν κυκλικῶν τούτων τομέων δύναται νὰ ἐξομοιωθῇ πρὸς τρίγωνον ἔχον βάσιν μὲν τὸ τόξον αὐτοῦ, ὕψος δὲ τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου καὶ ἑπομένως τὸ ἐμβαδὸν ἑκά-



στου κυκλικοῦ τομέως εἶναι τὸ γινόμενον τοῦ ἡμίσεως τῆς ἀκτῖνος ἐπὶ τὸ μῆκος τοῦ τόξου αὐτοῦ. Ὥστε τὸ ἐμβαδὸν πάντων ὁμοῦ τῶν κυκλικῶν τούτων τομέων, ἤτοι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος ἐπὶ τὸ μῆκος πάντων ὁμοῦ τῶν τόξων, ἅτινα ἀποτελοῦσι τὸ μῆκος τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου.

Ἐὰν π.χ. κύκλου τινὸς ἡ ἀκτὶς ἦναι 6 μ., ἡ δὲ περιφέρεια 15 μ., τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ εἶναι $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 15$ ἤτοι 45 τ. μ.

Ἐπειδὴ δὲ εὑρέθη (ἐδ. 63), ὅτι τὸ μῆκος τῆς περιφερείας κύκλου εἶναι $2\pi\alpha$, συνάγεται, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου εἶναι $\frac{1}{2}\ \alpha \cdot 2\pi\alpha$ ἤτοι $\pi\alpha^2$ (ἐδ. 74 Σημ. 2).

79. *Τὸ ἐμβαδὸν οἱουδήποτε κυκλικοῦ τομέως εἶναι τὸ γινόμενον τοῦ ἡμίσεως τῆς ἀκτῖνος ἐπὶ τὸ μῆκος τοῦ τόξου αὐτοῦ.*

Τοῦτο δὲ συνάγεται ἐκ τοῦ τρόπου, καθ' ὃν εὑρέθη τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου.

Ἐὰν π. χ. κυκλικοῦ τινος τομέως ἡ μὲν ἀκτὶς ἦναι 3 μ., τὸ δὲ μῆκος τοῦ τόξου αὐτοῦ 6 μ., ἐμβαδὸν αὐτοῦ εἶναι $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6$, ἤτοι $3 \cdot 3$ ἢ 9 τ. μ.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ἡμικυκλίου ἀκτῖνος 5 μ.;

2) Κυκλικὴ τράπεζα, ἧς ἡ περιφέρεια 2,80 μ., πρόκειται νὰ στρωθῇ δι' ὑφάσματος, οὗ τὸ πλάτος 0,60 μ. Πόσον ὕφασμα ἀπαιτεῖται;

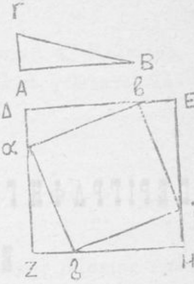
3) Κύκλου τινὸς ἡ περιφέρεια εἶναι 20,50 μ. Πόσον τὸ ἐμβαδόν;

4) Πόση ἡ ἀκτὶς κυκλικοῦ τομέως, οὗ τὸ μὲν τόξον 2,10 μ., τὸ δὲ ἐμβαδὸν 3,60 τ. μ.;

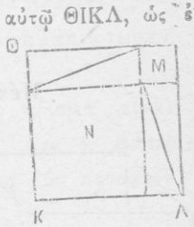
Τὸ θεώρημα τοῦ Πυθαγόρα.

80. *Τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτεινούσης ὀρθογωνίου τριγώνου ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν τετραγώνων τῶν δύο καθέτων αὐτοῦ πλευρῶν.*

Ἔστω τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ. Ἐπὶ τῆς ΔΕ ἴσης τῷ ἀθροίσματι τῶν δύο καθέτων πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζομεν τὸ τετράγωνον ΔΕΖΗ. Ἐν τῷ τετραγώνῳ δὲ τούτῳ γράφομεν, ὡς ἐν τῷ σχήματι φαίνεται, 4 τρίγωνα ἴσα ἕκαστον τῷ ΑΒΓ, ὅτε ὑπολείπεται ἐν αὐτῷ τὸ τετράγωνον αβγδ ἔχον πλευρὰν τὴν ὑποτείνουσαν τοῦ ΑΒΓ.



Ἀλλὰ τὰ 4 τρίγωνα, ὧν ἕκαστον ἴσον τῷ ΑΒΓ, δύνανται νὰ τεθῶσιν ἐν τῷ τετραγώνῳ ΔΖΗΕ ἢ ἐν τῷ ἴσῳ αὐτῷ ΘΙΚΛ, ὡς ἐν τῷ ἑπομένῳ σχήματι φαίνεται, ὅτε ὑπολείπονται ἐν αὐτῷ τὰ τετράγωνα Μ καὶ Ν, ὧν τὸ μὲν Μ ἔχει πλευρὰν τὴν μίαν τῶν καθέτων πλευρῶν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, τὸ δὲ Ν ἔχει πλευρὰν τὴν ἑτέραν τῶν καθέτων πλευρῶν τοῦ ΑΒΓ.



Ὥστε ἐν τῷ τετραγώνῳ ΔΕΖΗ ἢ τῷ ἴσῳ αὐτῷ ΘΙΚΛ δύναται νὰ τεθῇ τετράκις τὸ τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ἢ τὸ τετράγωνον αβγδ τῆς ὑποτεινούσης ἢ τὰ δύο τετράγωνα Μ καὶ Ν τῶν δύο καθέτων αὐτοῦ πλευρῶν· ὅπερ σημαίνει, ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτεινούσης ἰσοδυναμεῖ πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο καθέτων αὐτοῦ πλευρῶν.

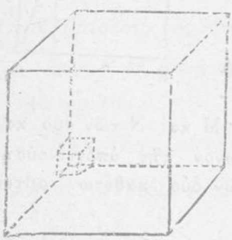
81. Ἐκ δὲ τοῦ τετραγώνου ΘΙΚΛ συνάγεται, ὅτι, ἐὰν ἡ πλευρὰ αὐτοῦ ΘΙ ἦναι ἄθροισμα δύο εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΑΓ, τὸ τετράγωνον Θ ΚΛ ἀποτελεῖται ἐκ τῶν τετραγώνων τῶν δύο εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΑΓ καὶ ἐκ δύο ὀρθογωνίων, ὧν βάσις καὶ ὕψος αἱ δύο εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΑΓ.

ΣΗΜ. Ἐν παντὶ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ΑΒΓ, ἐὰν τὸ μὲν μῆκος τῆς ὑποτεινούσης παρασταθῇ διὰ τοῦ α, τὰ δὲ μήκη τῶν καθέτων αὐτοῦ πλευρῶν διὰ β καὶ γ, ὑπάρχει κατὰ τὰ ἀνωτέρω $α^2=β^2+γ^2$ (ἐδ. 74. Σημ. 2).

ΒΙΒΛΙΟΝ Γ'.

ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ ΚΑΙ ΣΤΕΡΕΩΝ

Μέτρησις τῶν στερεῶν σωμάτων.



83. *Μονὰς στερεοῦ* λαμβάνεται ὁ κύβος, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκμὴ εἶναι ἡ μονὰς τοῦ μήκους καὶ λέγεται *κυβικὸν μέτρον* ἢ *κυβικὸς πῆχυς*.

Κυβικὴ παλάμη λέγεται ὁ κύβος ὁ ἔχων ἀκμὴν τὴν παλάμην. Ἡ κυβικὴ παλάμη εἶναι τὸ $\frac{1}{1000}$ τοῦ κυβικοῦ μέτρου· διότι 1000 κυβικαὶ παλάμαι ἀποτελοῦσι τὸ κυβικὸν μέτρον.

Κυβικὸς δάκτυλος λέγεται ὁ κύβος ὁ ἔχων ἀκμὴν τὸν δάκτυλον. Ὁ κυβικὸς δάκτυλος εἶναι τὸ $\frac{1}{1000}$ τῆς κυβικῆς παλάμης καὶ τὸ $\frac{1}{1000000}$ τοῦ κυβικοῦ μέτρου· διότι 1000 κυβικοὶ δάκτυλοι ἀποτελοῦσι τὴν κυβικὴν παλάμην καὶ ἐπομένως 1000000 κυβικοὶ δάκτυλοι ἀποτελοῦσι τὸ κυβικὸν μέτρον.

Ὥστε, ἐὰν στερεόν τι μετρηθὲν εὑρέθη (ἐδ. 55) ἔχον ὄγκον 20 κ. μ. 3 κ. πλ. καὶ 27 κ. δακ., γράφεται συντόμως ὑπὸ δεκαδικὴν μορφὴν 20,003027 κ. μ.

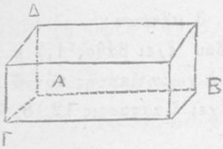
Ἡ χωρητικότης μιᾶς κυβικῆς παλάμης λέγεται λίτρα καὶ χρησιμεύει πρὸς μέτρησιν ὑγρῶν.

Διὰ δὲ τὴν μέτρησιν τῶν δημητριακῶν καρπῶν λαμβάνεται ὡς μονὰς τὸ *κοιλόν*, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ $\frac{1}{10}$ τοῦ κυβικοῦ πήχεως· ἐπειδὴ δὲ ὁ κυβικὸς πῆχυς περιέχει 1000 κυβ. παλάμας ἢ λίτρας, τὸ κοιλὸν περιέχει 100 κ. παλ. ἢ λίτρας.

ΣΗΜ. Τὸ βάρος τοῦ ὕδατος (ἀπεσταγμένου καὶ θερμοκρασίας 4^0 Κελσίου), ὅσον χωρεῖ εἰς μίαν λίτραν, λέγεται *χιλιόγραμμον*· τούτου δὲ τὸ χιλιοστὸν λέγεται *γραμμάριον*.

Μέτρησις πρισμάτων.

84. *Ὁ ὄγκος παντὸς πρίσματος εἶναι τὸ γινόμενον τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ*, ἤτοι ἵνα εὕρωμεν τὸν ὄγκον παντὸς πρίσματος ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως καὶ νὰ πολλαπλασιάσωμεν αὐτὸ ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.



Ὑποθέσωμεν π. χ., ὅτι τὸ πρῖσμα εἶναι ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον, ὅτε ἡ βάσις αὐτοῦ ἔχει ἐμβαδὸν τὸ γινόμενον δύο προσκειμένων αὐτῆς πλευρῶν (ἐδ. 74).

Ἐὰν τὸ ἐμβαδὸν τοῦτο πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸ μῆκος τοῦ ὕψους τοῦ παραλληλεπιπέδου, εὑρίσκεται ὁ ὄγκος αὐτοῦ. Ἐὰν ἦναι π. χ. ΑΒ=4 μ. ΑΓ = 2μ. καὶ ΑΔ = 3μ. ἔχομεν, παριστῶντες διὰ Κ τὸν ὄγκον τοῦ στερεοῦ, Κ=ΑΒ. ΑΓ.ΑΔ =4.2.3=24 κ. μ.

Ἀλλ' αἱ τρεῖς ἀκμαὶ ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ αἱ ἀρχόμεναι ἐκ τῆς κορυφῆς Α εἶναι αἱ τρεῖς διαστάσεις (τὸ μῆκος, τὸ πλάτος καὶ τὸ ὕψος) τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου καὶ ἑπομένως πρὸς εὕρεσιν τοῦ ὄγκου τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ἀρκεῖ νὰ εὑρεθῇ τὸ γινόμενον τῶν τριῶν ἀριθμῶν τῶν παριστώντων αὐτάς.

Τοῦ δὲ κύβου ὁ ὄγκος εἶναι τὸ γινόμενον τριῶν ἴσων ἀριθμῶν, ὧν ἕκαστος παριστᾷ τὴν ἀκμὴν αὐτοῦ. Ἐὰν π. χ. ἡ ἀκμὴ τοῦ κύβου παρίσταται ὑπὸ τοῦ ἀριθμοῦ 4, ὁ ὄγκος αὐτοῦ εἶναι 4.4.4. (ἢ συντόμως 4^3), ἤτοι 64 κ. μ.

ΣΗΜ. Ὁ ὄγκος παντὸς παραλληλεπιπέδου εἶναι γινόμενον τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ· διότι μετασχηματίζεται εἰς ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον, ὡς πᾶν παραλληλόγραμμον μετασχηματίζεται εἰς ὀρθογώνιον.

85. *Τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας ὀρθοῦ πρίσματος* *εἶναι τὸ γινόμενον τῆς περιμέτρου τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.*

Ἐὰν δὲ εἰς τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τοῦ πρίσματος προστεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῶν δύο βάσεων αὐτοῦ, εὑρίσκεται τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ.

Πρὸς εὕρεσιν δὲ τοῦ ἐμβαδοῦ ὅλης τῆς ἐπιφανείας κύβου ἀρκεῖ νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν μιᾶς τῶν ἑδρῶν αὐτοῦ καὶ νὰ πολλαπλασιασθῇ αὐτὸ ἐπὶ 6, ὅστις εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν ἴσων αὐτοῦ ἑδρῶν.

ΣΗΜ. 1. Αἱ τρεῖς διαστάσεις παντὸς στερεοῦ δύνανται νὰ ἦναι οἱοιδήποτε ἀριθμοί.

ΣΗΜ. 2. Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας παντὸς πολυέδρου εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν ἑδρῶν αὐτοῦ.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1). Τίς ὁ ὄγκος παραλληλεπιπέδου διαστάσεων 6, 7, 3 μέτρων;

2). Κιβώτιον σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ἔχει βάθος 1,2 μ. αἱ δὲ πλευραὶ τῆς βάσεως εἶναι 1,7 μ. καὶ 0,8 μ. Τίς ἡ χωρητικότης αὐτοῦ

3). Ἀποθήκη σχήματος ὀρθογ. παραλληλεπιπέδου ἔχει διαστάσεις 12, 8, 7 μέτρα. Πόσα κοιλὰ σίτου χωρεῖ;

4). Τίς ἡ ἀξία τοίχου ἔχοντος μῆκος 15 πήχ., τοῦ ὁποίου ὁ κυβ. πῆχυς τιμᾶται 7 δραχ.;

5). Δεξαμενὴ σχήματος ὀρθογ. παραλληλεπιπέδου ἔχει βάσιν τετράγωνον πλευρᾶς 7 μ., τὸ δὲ βάθος αὐτῆς εἶναι 4,80 μ. Πόσας ὀκάδας ὕδατος χωρεῖ γνωστοῦ ὄντος, ὅτι τὸ βάρος μιᾶς λίτρας ὕδατος (καθαροῦ καὶ θερμοκρασίας 4 βαθμῶν Κελσίου) εἶναι $312\frac{1}{2}$ δράμια;

Περὶ ὀρθοῦ κυλίνδρου.

82. Ὁ *κύλινδρος* εἶναι στερεὸν σῶμα περιοριζόμενον ὑπὸ δύο ἴσων καὶ παραλλήλων κύκλων καὶ ὑπὸ τῆς πέριξ αὐτοῦ κυρτῆς ἐπιφανείας· οἷον τὸ στερεὸν ΑΒΓΔ.

Βάσεις τοῦ κυλίνδρου λέγονται οἱ δύο ἴσοι καὶ παράλληλοι αὐτοῦ κύκλοι ΒΓ καὶ ΑΔ.

Ὕψος ἢ *ἄξων* τοῦ κυλίνδρου λέγεται ἡ εὐθεῖα ΑΒ ἡ ἐπιζευγνύουσα τὰ κέντρα τῶν δύο βάσεων αὐτοῦ.

ΣΗΜ. Ὁ ὀρθὸς κύλινδρος δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ὀρθὸν πρῖσμα ἔχον ἀπείρους τὸ πλῆθος παραπλεύρους ὀρθογωνίους ἕδρας (ὡς ὁ κύκλος δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς κανονικὸν πολύγωνον ἔχον ἀπείρους τὸ πλῆθος πλευράς', αἵτινες δύνανται νὰ ἀναπτυχθῶσι κατὰ σειρὰν ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου. ὅτε ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τρέπεται εἰς ὀρθογώνιον ἔχον βάσιν μὲν τὸ μῆκος τῆς περιφερείας τῆς βάσεως, ὕψος δὲ τὸ τοῦ κυλίνδρου.

Μέτρησις ὀρθοῦ κυλίνδρου.

86. *Ὁ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου εἶναι τὸ γινόμενον τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.*

Ὑποθέσωμεν, ὅτι ἡ διάμετρος κυλίνδρου τινὸς εἶναι δ, τότε ἡ βάσις αυτοῦ ἔχει ἐμβαδὸν (ἐδ. 78) τὸ $\pi . \frac{\delta}{2} . \frac{\delta}{2}$ ἢ $\pi . \frac{\delta^2}{4}$. Ἐὰν δὲ τὸ ὕψος αὐτοῦ ἦναι υ, ὁ ὄγκος αὐτοῦ Κ εἶναι $K = \pi \frac{\delta^2}{4} \upsilon$. Ἐὰν π. χ. δ=4 μ. καὶ υ=5 μ., ἔχομεν Κ=3,14.4.5 κ. μ.

87. *Τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κυλίνδρου εἶναι τὸ γινόμενον τῆς περιφερείας τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.*

Ἐὰν π. χ. δ=6 καὶ υ=4, ἔχομεν 3,14.6.4 τ. μ (ἐδ. 63).

Ἐὰν δὲ εἰς τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου προστεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῶν δύο βάσεων αὐτοῦ, εὑρίσκεται τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1). Ἡ βάσις κυλίνδρου εἶναι 15,80 τ. μ., τὸ δὲ ὕψος 3 μ. Τίς ὁ ὄγκος αὐτοῦ ;

2). Τίς ὁ ὄγκος κυλίνδρου, οὗτινος ἡ διάμετρος τῆς βάσεως 10 μ. καὶ τὸ ὕψος 18 μ, ;

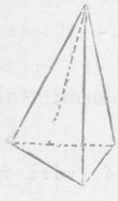
3). Ἀγγεῖον κυλινδρικὸν, τοῦ ὁποίου ἡ διάμετρος 0,60 μ. καὶ τὸ ὕψος 0,80 μ. περιέχει ὕδωρ μέχρι τοῦ τρίτου τοῦ ὕψους αὐτοῦ. Πόσας ὀκάδας ὕδατος περιέχει ;

4) Πόσα τετραγ. μέτρα λευκοσιδήρου ἀπαιτοῦνται, ἵνα κατασκευασθῇ σωλὴν ἔχων μῆκος 6μ καὶ διάμετρον 0,30 μ ;

5). Δοκὸς σιδηρᾶ κυλινδρικὴ ἔχει μῆκος 4 μ. καὶ διάμετρον βάσεως 0,04 μ. Πόσον τὸ βάρος αὐτῆς, ἐὰν ἑκάστη κυβ. παλ. ἔχῃ βάρος χιλιογρ. 7, 2 ;

Μέτρησις πυραμίδων.

90, *Ὁ ὄγκος πάσης πυραμίδος εἶναι τὸ τρίτον τοῦ γινομένου τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτῆς.*



Ὑποθέσωμεν, ὅτι ἡ βάσις πυραμίδος τινὸς εἶναι τρίγωνον, οὗτινος τὸ ἐμβαδὸν (ἐδ 76) εἶναι 8,5 τ. μ., τὸ δὲ ὕψος αὐτῆς (ἤτοι ἡ ἐκ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος) εἶναι 6 μ. Ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδος ταύτης εἶναι $\frac{1}{3}.8,5.6$κ.μ.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

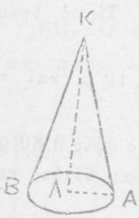
1). Πυραμίς τις ἔχει βάσιν τετράγωνον πλευρᾶς 6,2 μ. καὶ ὕψος 8 μ. Τίς ὁ ὄγκος αὐτῆς;

2) Τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως πολυγωνικῆς πυραμίδος εἶναι 25,7 τ. μ., τὸ δὲ ὕψος 6,35. Τίς ὁ ὄγκος αὐτῆς;

3) Ἡ μεγαλειτέρα πυραμὶς τῆς Αἰγύπτου ἔχει βάσιν τετράγωνον πλευρᾶς 232,75 μ., καὶ ὕψος 146 μ. Τίς ὁ ὄγκος αὐτῆς;

Περὶ ὀρθοῦ κώνου.

88. Ὁ *κῶνος* εἶναι στερεὸν σῶμα περιοριζόμενον ὑπὸ ἑνὸς κύκλου καὶ ὑπὸ τῆς πέριξ αὐτοῦ κυρτῆς ἐπιφανείας, ἥτις ἀπολήγει εἰς σημεῖον, τὸ ὁποῖον λέγεται *κορυφὴ* τοῦ κώνου· οἷον τὸ στερεὸν ΚΑΒ, οὗ κορυφὴ τὸ Κ.



Βάσις τοῦ κώνου λέγεται ὁ κύκλος αὐτοῦ ΛΑ.

Ὕψος ἢ *ἄξων* τοῦ κώνου λέγεται ἡ ἐκ τῆς κορυφῆς αὐτοῦ εἰς τὸ κέντρον τῆς βάσεως εὐθεῖα ΚΛ.

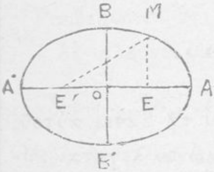
Πλευρὰ τοῦ κώνου λέγεται πᾶσα εὐθεῖα ἐπιζευγνύουσα τὴν κορυφὴν καί τι σημεῖον τῆς περιφερείας τῆς βάσεως αὐτοῦ, ὡς ἡ ΚΑ. Πᾶσαι δὲ αἱ πλευραὶ αὗται ἐν τῷ ὀρθῷ κώνῳ εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.

ΣΗΜ. 1. Ὁ ὀρθὸς κῶνος δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς πυραμίς, ἧς ἡ βάσις εἶναι κανονικὸν πολύγωνον ἔχον ἀπείρους τὸ πλῆθος πλευρὰς καὶ ἧς αἱ ἕδραι τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας δύνανται νὰ ἀναπτυχθῶσι κατὰ σειρὰν ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου, ὅτε ἡ μὲν περιφέρεια τῆς βάσεως τρέπεται εἰς κυκλικὸν τόξον (οὗ κέντρον ἡ κορυφὴ τοῦ κώνου), ἡ δὲ κυρτὴ ἐπιφάνεια εἰς κυκλικὸν τομέα.

ΣΗΜ. 2. Ὁ κύλινδρος δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς κῶνος, οὗτινος ἡ κορυφὴ ἠφανίσθη ἀπομακρυνομένη ἐπ' ἄπειρον.

Ἐὰν ὀρθὸς κῶνος τέμνηται ὑπὸ ἐπιπέδου καθέτου πρὸς τὸν ἄξονα αὐτοῦ, αἱ τομαὶ εἶναι κύκλοι ἔχοντες τὰ κέντρα ἐπὶ τοῦ ἄξονος. Ἐὰν δὲ τὸ τέμνον ἐπίπεδον τέμνῃ πλαγίως τὸν ἄξονα, ἡ τομὴ εἶναι σχῆμα, ὅπερ καλεῖται *ἔλλειψις*.

Ἡ ἔλλειψις εἶναι ἐπίπεδος καμπύλη, ἧς τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων



παντὸς σημείου ἀπὸ δύο μονίμων σημείων εἶναι σταθερόν, ἤτοι εἶναι ΕΜ+Ε'Μ=σταθ.

Τὰ δύο μόνιμα σημεῖα Ε καὶ Ε' τῆς ἐλλείψεως λέγονται *ἑστίαι* αὐτῆς. Ἡ ἔλλειψις δύναται νὰ γραφῇ διὰ συνεχοῦς κινήσεως. Πρὸς τοῦτο εἰς τὰς ἑστίας αὐτῆς προσηλοῦνται τὰ πέρατα νήματος, οὗ τὸ μῆκος σταθερόν, καὶ τείνεται αὐτὸ διὰ τῆς αἰχμῆς ἥλου ἢ μολυβδοκονδύλου περιαγομένης, τεταμένου ὄντος πάντοτε τοῦ νήματος. Αἱ πρὸς ἀλλήλας κάθετοι εὐθεῖαι ΑΑ' καὶ ΒΒ' κατὰ τὸ *κέντρον* Ο τῆς ἐλλείψεως λέγονται *ἄξονες* αὐτῆς· ἡ μὲν ΑΑ'=2α ὁ μέγας ἄξων, ἡ δὲ ΒΒ'=2β ὁ μικρὸς ἄξων· τὸ δὲ πηλίκον ΕΕ' : ΑΑ' ἡ *ἐκκεντρότης* αὐτῆς.

Καθ' ὅσον ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις ΕΕ' ἐλαττοῦται, ἤτοι καθ' ὅσον τὰ σημεῖα Ε καὶ Ε' τείνουσιν εἰς τὸ κέντρον Ο, κατὰ τοσοῦτον ἡ ἔλλειψις τείνει νὰ καταστῇ κύκλος, ὅπερ συμβαίνει. ὅταν ἡ ἐκκεντρότης ἦναι 0.

Ἐὰν ἡ ἔλλειψις περιστραφῇ περὶ τὸν ἕτερον τῶν δύο ἀξόνων, μέχρις οὗ ἐπανέλθῃ εἰς τὴν ἀρχικὴν θέσιν, σχηματίζεται στερεόν, ὅπερ καλεῖται *ἐλλειψοειδὲς ἐκ περιστροφῆς*· καὶ εἶναι *ἐπίμηκες* μέν, ἐὰν ἡ περιστροφὴ ἐγένετο περὶ τὸν μέγαν ἄξονα· *πεπλατυσμένον* δέ, ἐὰν περὶ τὸν μικρὸν ἄξονα.

Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐλλείψεως εἶναι τὸ γινόμενον παβ, ἤτοι τοῦ ἀριθμοῦ π=3,14....καὶ τῶν ἡμιαξόνων α καὶ β αὐτῆς.

ΣΗΜ. 3. Καὶ ἡ σφαῖρα δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς κυρτὸν πολύεδρον ἔχον ἀπείρους τὸ πλῆθος ἕδρας καὶ ἐπομένως ὡς ἀποτελουμένη ἐξ ἀπείρων τὸ πλῆθος πυραμίδων ἐχουσῶν κοινὴν μὲν κορυφὴν τὸ κέντρον τῆς σφαίρας, βάσεις δὲ τὰς ἕδρας ταύτας.

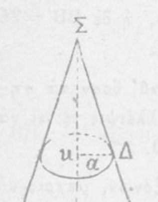
ΣΗΜ. 4. Ὁ ὀρθὸς κῶνος γεννᾶται, ὅταν ὀρθογώνιον τρίγωνον ΚΛΑ περιστραφῇ περὶ μίαν τῶν καθέτων αὐτοῦ πλευρῶν ΚΛ (μένουσαν ἀκίνητον) πάντοτε κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν μέχρις οὗ ἐπανέλθῃ εἰς τὴν ἀρχικὴν αὐτοῦ θέσιν· τότε δὲ ἡ ἑτέρα κάθετος πλευρὰ ΛΑ γράφει τὴν βάσιν τοῦ κώνου, ἡ δὲ ὑποτείνουσα ΚΑ τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν αὐτοῦ· ἡ ΚΑ λέγεται *γενέτειρα* τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου.

Ὁμοίως ὁ κύλινδρος γεννᾶται, ὅταν ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ περιστραφῇ περὶ μίαν τῶν πλευρῶν αὐτοῦ ΑΒ (μένουσαν ἀκίνητον) πάντοτε κατὰ τὴν αὐτὴν φοράν, μέχρις οὗ ἐπανέλθῃ εἰς τὴν ἀρχικὴν αὐτοῦ θέσιν· τότε δὲ αἱ μὲν ΑΓ καὶ ΒΔ γράφουσι τὰς βάσεις τοῦ κυλίνδρου, ἡ δὲ ΓΔ τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν αὐτοῦ. Ἡ ΓΔ λέγεται *γενέτειρα* τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου.

Περὶ ὀρθοῦ κολούρου κώνου.

89. Ἐὰν κῶνος τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου τῇ βάσει αὐτοῦ, τὸ μεταξὺ τῆς βάσεως καὶ τῆς τομῆς μέρος τοῦ κώνου λέγεται *κόλουρος κῶνος*.

Βάσεις τοῦ ὀρθοῦ κολούρου κώνου λέγονται οἱ δύο κύκλοι ΚΓ καὶ κΔ, ὑφ' ὧν περατοῦται. *Ἄξων* δὲ ἢ *ὕψος* αὐτοῦ λέγεται ἡ εὐθεῖα ἡ συνδέουσα τὰ κέντρα Κ καὶ κ τῶν δύο βάσεων.



Πλευρὰ δὲ αὐτοῦ λέγεται τὸ μέρος ΚΔ τῆς πλευρᾶς ΣΓ τοῦ ὅλου κώνου τὸ μεταξὺ τῶν δύο βάσεων.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Γράψαι πρῖσμα καὶ κύλινδρον.
2) Γράψαι πυραμίδα καὶ κῶνον.
3) Γράψαι πολύεδρον καὶ σφαῖραν.
4) Ὑπὸ τίνος ἐπιπέδου εὐθυγράμμου σχήματος γεννᾶται ὁ κόλουρος κῶνος;

Μέτρησις ὀρθοῦ κώνου.

93. *Ὁ ὄγκος τοῦ κώνου εἶναι τὸ τρίτον τοῦ γινομένου τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.*

Ὑποθέσωμεν, ὅτι κῶνός τις ἔχει ἀκτῖνα βάσεως 3μ. καὶ ὕψος 5μ. Ἐπειδὴ τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως εἶναι (ἐδ. 78) 3,14.3.3, ὁ ὄγκος αὐτοῦ εἶναι $^1/_3$. 3,14. 3.3.5. κ. μ.

94. *Τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κώνου εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τῆς περιφερείας τῆς βάσεως ἐπὶ τὴν πλευρὰν αὐτοῦ.*

Ὑποθέσωμεν, ὅτι ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως κώνου τινὸς εἶναι 28,5 μ., ἡ δὲ πλευρὰ αὐτοῦ 7 μ., τότε ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια αὐτοῦ ἔχει ἐμβαδὸν $\frac{1}{2}$. 28.5.7 τ. μ.

Ἐὰν δὲ εἰς τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου προστεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως αὐτοῦ, εὑρίσκεται τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

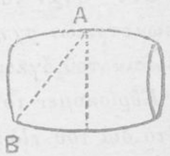
1) Τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως κώνου τινὸς εἶναι 7,5 τ. μ., τὸ δὲ ὕψος 4,5 μ. Τίς ὁ ὄγκος αὐτοῦ;

2) Τίς ὁ ὄγκος κώνου ἔχοντος περιφέρειαν βάσεως 15 μ. καὶ ὕψος 3 μ;

3) Πόσον τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφανείας κώνου ἔχοντος ἀκτῖνα βάσεως 0,8 μ. καὶ πλευρὰν 1,8 μ;

4) Εὑρεῖν τὸν ὄγκον ἢ τὴν χωρητικότητα βυτίου ἢ βαρελίου.

Τὸν ὄγκον τοῦτον εὑρίσκομεν κατὰ τὸν ἑξῆς πρακτικὸν τρόπον. Μετροῦμεν διὰ τῆς γραμμικῆς παλάμης τὴν ἀπόστασιν τοῦ στομίου Α τοῦ βυτίου μέχρι τοῦ βαθυτάτου μέρους αὐτοῦ Β· εἶτα τὸ μῆκος τοῦτο πολλαπλασιάζομεν ἐφ' ἑαυτὸ τρὶς καὶ τὸ γινόμενον τοῦτο πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸν ὡρισμένον ἀριθμὸν 0.60. Ὁ οὕτως εὑρισκόμενος ἀριθμὸς παριστᾷ τὸν ὄγκον εἰς κυβ. παλ. ἤτοι εἰς λίτρας. Ἐὰν π.χ. ἦναι ΑΒ=8 παλ., ὁ ὄγκος εἶναι 8.8.8.0.60 κυβ. παλ.



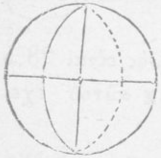
ΣΗΜ. Τὸ βυτίον δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἀποτελούμενον ἐκ δύο ἴσων κολούρων κώνων.

Μέτρησις σφαίρας.

95. *Τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας εἶναι τὸ γινόμενον τῆς περιφερείας μεγίστου κύκλου ἐπὶ τὴν διάμετρον αὐτῆς.*

Ὑποθέσωμεν, ὅτι ἡ ἀκτὶς σφαίρας τινὸς εἶναι 2,5 μ., τότε ἡ διάμετρος αὐτῆς εἶναι 5 μ. καὶ ἡ περιφέρεια μεγίστου κύκλου αὐτῆς εἶναι 3,14.5 καὶ ἐπομένως τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς εἶναι 3,14.5.5 τ. μ.

96. *Ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας εἶναι τὸ τρίτον τοῦ γινομένου τῆς ἐπιφανείας ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα αὐτῆς.* Ἐὰν π. χ. ἡ ἐπιφάνεια σφαίρας ἦναι 35,5 τ. μ., ἡ δὲ ἀκτὶς αὐτῆς ἦναι 2 μ., ὁ ὄγκος αὐτῆς εἶναι $\frac{1}{3}\cdot 35,5.\ 2$ κ. μ.



Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Πόσον τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας σφαίρας διαμέτρου 6 μ. ;

2) Ἡ περιφέρεια μεγίστου κύκλου τῆς Γῆς εἶναι 40000 χιλιόμετρα. Πόση ἡ ἐπιφάνεια, ὁ ὄγκος καὶ τὸ βάρος αὐτῆς ;

4) Ἡ διάμετρος σφαίρας εἶναι 8 μ. Πόσος ὁ ὄγκος αὐτῆς ;

5) Πόσων ὀκάδων εἶναι σιδηρᾶ σφαῖρα ἀκτῖνος 0,2 μ. γνωστοῦ ὄντος, ὅτι ἑκάστη κυβ. παλ. ἔχει βάρος χιλιογράμμου 7,2 ;

Εὕρεσις τοῦ ὄγκου τῶν σωμάτων ἐκ τοῦ βάρους αὐτῶν· καὶ ἀντιστρόφως.

97. Ὅταν τὸ σῶμα, οὗτινος ζητεῖται ὁ ὄγκος, δὲν ἔχῃ ἓν τῶν γεωμετρικῶν σχημάτων, ἅτινα ἐν τοῖς προηγουμένοις εἴδομεν, πρὸς εὕρεσιν τοῦ ὄγκου ἢ τοῦ βάρους αὐτοῦ πράττομεν ὡς ἑξῆς :

Εὑρίσκομεν τὸ βάρος τοῦ σώματος εἰς χιλιόγραμμα καὶ διαιροῦμεν αὐτὸ διὰ τοῦ εἰδικοῦ βάρους τοῦ σώματος. Καὶ ἀντιστρόφως· *εὑρίσκομεν τὸν ὄγκον τοῦ σώματος εἰς κυβ. παλάμας (εἰς λίτρας) καὶ πολλαπλασιάζομεν αὐτὸν ἐπὶ τὸ ειδικὸν βάρος τοῦ σώματος.* Π. χ. Ἀγγεῖον πλῆρες πετρελαίου, οὗ τὸ εἰδικὸν βάρος 0,891, ζυγισθὲν ἔδωκε βάρος 22 χιλιόγρ., κενὸν δὲ 2 χιλιόγρ. Πόση ἡ χωρητικότης ἤτοι ὁ ὄγκος τοῦ ἀγγείου;

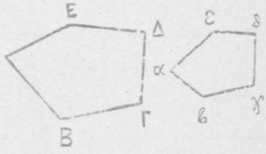
Λύσις. Ἐπειδὴ τὸ βάρος τοῦ ἐν τῷ ἀγγείῳ πετρελαίου εἶναι 20 χιλιόγρ., ἡ χωρητικότης τοῦ ἀγγείου εἶναι 20: 0,891. Καὶ ἀντιστρόφως·(20000:891).0,891 ἢ 20 χιλιόγρ. εἶναι τὸ βάρος τοῦ πετρελαίου.

ΣΗΜ. 1. *Εἰδικὸν βάρος* σώματος λέγεται ὁ λόγος τοῦ βάρους σώματος ὑπὸ θερμοκρασίαν 0° πρὸς τὸ βάρος ἴσου ὄγκου ὕδατος ἀπεσταγμένου θερμοκρασίας 4°,1 τοῦ κοινοῦ θερμομέτρου Κελσίου.

ΣΗΜ. 2. Πρὸς εὕρεσιν τοῦ ὄγκου σώματος ἐξ αὐτοῦ τοῦ βάρους χρησιμεύει καὶ ἡ ἑπομένη ἀρχὴ τοῦ Ἀρχιμήδους. Ἐμβαπτίζομεν το σῶμα ἐντὸς ἀγγείου πεπληρωμένου ὕδατος καὶ τὸ ἐκχυθὲν ὕδωρ χέομεν εἰς ἀγγεῖον γνωστῆς χωρητικότητος, ἐξ ἧς εὑρίσκεται ὁ ὄγκος τοῦ σώματος.

Περὶ ὁμοίων σχημάτων.

84. *Ὅμοια* λέγονται δύο εὐθύγραμμα σχήματα, ἐὰν ἔχωσι τὰς μὲν γωνίας αὐτῶν ἴσας κατὰ μίαν καὶ κατὰ σειράν, τὰς δὲ πλευρὰς αὐτῶν τὰς ἀντιστοίχους (ἤτοι τὰς ἐπιζευγνυούσας τὰς κορυφὰς ἴσων γωνιῶν) ἀναλόγους. Αἱ ἀντίστοιχοι πλευραὶ τῶν ὁμοίων σχημάτων λέγονται καὶ *ὁμόλογοι* καὶ παράγονται αἱ μὲν ἐκ τῶν δὲ διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν. Π. χ. τὰ δύο πολύγωνα ΑΒΓΔΕ καὶ αβγδε εἶναι ὅμοια, ἐὰν αἱ μὲν γωνίαι αὐτῶν ἦναι ἴσαι, ἤτοι Α=α, Β=β. Γ = γ, Δ = δ, Ε=ε· αἱ δὲ πλευραὶ αὐτῶν ἦναι ἀνάλογοι, ἤτοι



$$\frac{\alpha\beta}{AB}=\frac{\beta\gamma}{B\Gamma}=\frac{\gamma\delta}{\Gamma\Delta}=\frac{\delta\varepsilon}{\Delta E}=\frac{\varepsilon\alpha}{EA}=\lambda,$$ τουτέστιν $\alpha\beta=AB.\lambda$, $\beta\gamma=B\Gamma.\lambda$, $\gamma\delta=\Gamma\Delta.\lambda$, $\delta\varepsilon=\Delta E.\lambda$, $\varepsilon\alpha=EA.\lambda$, ὅπου λ οἱοσδήποτε ἀριθμός· ἐνταῦθα εἶναι $\lambda=\frac{1}{2}$.

86. *Ὅμοια τρίγωνα.* Αἱ θεμελιώδεις περιπτώσεις, καθ' ἃς δύο τρίγωνα εἶναι ὅμοια, εἶναι αἱ ἑξῆς·

1) *'Εὰν ἔχωσι τὰς γωνίας αὐτῶν ἴσας κατὰ μίαν.*

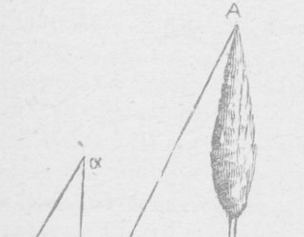
2) *'Εὰν ἔχωσι τὰς ὁμολόγους πλευρὰς αὐτῶν ἀναλόγους*

3) *'Εὰν ἔχωσι μίαν γωνίαν ἴσην καὶ τὰς περιεχούσας αὐτὴν πλευρὰς ἀναλόγους.*

ΣΗΜ. Πάντα ἐν γένει τὰ σχήματα, ἅτινα γράφομεν ἐπὶ χάρτου εἶναι ὅμοια πρὸς ἀντίστοιχα σώματα ἔμψυχα ἢ ἄψυχα. Ὁ δὲ λόγος τῆς ἐπὶ τοῦ χάρτου γραμμῆς πρὸς τὴν ἐπὶ τοῦ σώματος ἀντίστοιχον λέγεται *κλῖμαξ*. Ὁ λόγος ἢ τὸ πηλίκον τοῦτο παρίσταται ὑπὸ κλασματικῆς μονάδος, ἧς παρονομαστὴς εἶναι ὁ ἀριθμὸς ὁ ἐκφράζων τὸ μῆκος τῆς ἐπὶ τοῦ σώματος γραμμῆς. 'Εὰν π. χ. ἡ κλῖμαξ ἦναι $\frac{1}{1000}$, τοῦτο σημαίνει, ὅτι 1000 χιλιοστὰ τοῦ μέτρου (ἤτοι 1 μέτρον) ἐπὶ τοῦ σώματος ἀντιστοιχοῦσι πρὸς 1 χιλιοστὸν τοῦ μέτρου ἐπὶ τοῦ χάρτου. Οὕτω πως γράφονται καὶ οἱ γεωγραφικοὶ χάρται κ. λ.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Εὑρεῖν τὸ ὕψος δένδρου ἐκ τῆς σκιᾶς αὐτοῦ.



'Εὰν ἐπὶ τοῦ ἐδάφους ἵσταται καθέτως καὶ τὸ δένδρον ΑΒ καὶ ἡ ῥάβδος αβ, ἧς τὸ μῆκος γνωστόν, ὡς καὶ τὸ τῶν σκιῶν ΒΓ καὶ βγ, προκύπτει ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων ΑΒΓ καὶ αβγ, ὅτι

$$\frac{AB}{B\Gamma}=\frac{\alpha\beta}{\beta\gamma} \text{ ἢ } AB=B\Gamma.\frac{\alpha\beta}{\beta\gamma}$$

'Εὰν π.χ. ἦναι $B\Gamma=3$ μ., $\beta\gamma=0,5$ καὶ $\alpha\beta=1,2$, ἔχομεν $AB=3.\frac{1,3}{0,5}$.

2) Τριγώνου τινὸς αἱ πλευραὶ εἶναι 3, 4, 5 μέτρα, τίνες αἱ πλευραὶ τοῦ πρὸς ἀπὸ ὁμοίου τριγώνου καὶ ἔχοντος περίμετρον 30 μέτρων ; (Μερισμὸς τοῦ 30 εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν 3,4,5).

3) Εὑρεῖν τὴν ἀπόστασιν δύο σημείων κειμένων ἐπὶ τῶν ὀχθῶν ποταμοῦ, ὧν ἡ ἑτέρα προσιτὴ (διὰ τῆς ὁμοιότητος τριγώνων, ἰδὲ σελ. 31—32).

Ζητήματα διάφορα πρὸς ἄσκησιν.

1) Πόσον ζυγίζει σφαῖρα ἐκ μολύβδου, ἧς ἡ διάμετρος 0,25 μ., ἐὰν ὁ μόλυβδος ἦναι 11,4 βαρύτερος τοῦ ὕδατος καὶ ἐὰν 1 κ. πλ. ὕδατος ζυγίζῃ 1 χιλιόγρ. ;

2) Ἡ σφαῖρα κωδωνοστασίου, ἧς ἡ περιφέρεια (μεγίστου κύκλου) εἶναι 2,5

. πρόκειται νὰ χρυσωθῇ. Τίς ἡ ἀπαιτουμένη δαπάνη, ἐὰν διὰ τὴν χρύσωσιν τ. μ. ἀπαιτῶνται 250 δρ.;

3) Τετραγωνικὴ πλατεῖα, ἧς ἡ πλευρὰ 26 μ. πρόκειται νὰ στρωθῇ διὰ τε-ραγωνικῶν πλακῶν, ὧν ἡ πλευρὰ 0,20 μ. Πόσαι πλάκες ἀπαιτοῦνται;

4) Τίς ἡ ἀξία ἀγροῦ ἔχοντος μῆκος 68 μ. καὶ πλάτος 24μ., ἐὰν ἡ ἀξία τῶν 00 τ. μ. ἦναι 40 δρχ.;

5) Οἰκόπεδον τετραγωνικόν, οὗ ἡ πλευρὰ 38 μ., ἠγοράσθη ἀντὶ 14555,50 ρ. Τίς ἡ ἀξία τοῦ τετραγωνικοῦ μέτρου;

6) Εὑρεῖν τὴν πλευρὰν τετραγώνου, οὗτινος ἡ ἐπιφάνεια ἰσοδυναμεῖ πρὸς ὴν ἐπιφάνειαν τριγώνου ἔχοντος βάσιν 5,20 μ. καὶ ὕψος 0,4 μ.

7) Περὶ κυκλικὴν τράπεζαν διαμέτρου 1,2 μ. κάθηνται 6 ἄνθρωποι. Πόσον ιῆκος αὐτῆς ἀντιστοιχεῖ πρὸς ἕκαστον ἄνθρωπον;

8) Ἐπὶ κυκλικῆς πλατείας διαμέτρου 120 μ. πρόκειται νὰ φυτευθῶσι δέν-ρα εἰς ἀπόστασιν 2 μ. πρὸς τὰ ἐντὸς ἀπὸ τῶν δοίων τῆς πλατείας καὶ οὕτως ὥστε τὸ μεταξὺ δύο δένδρων τόξον νὰ ἦναι 3 μ. Πόσα δένδρα ἀπαιτοῦνται;

9) Ἡ ἐπίκεντρος γωνία τομέως εἶναι 65° καί ἡ ἀκτὶς 0,4 μ. Τίς ἡ ἐπιφά-νεια αὐτοῦ;

10) Ἐλλειπτικῆς πρασιᾶς ὁ μέγας ἄξων εἶναι 3 μ., ὁ μικρὸς 2 μ. Πόσον τὸ ἐμβαδὸν αὐτῆς;

11) Ἐπίπεδος πλατεῖα, ἧς τὸ μῆκος καὶ τὸ πλάτος 38 καὶ 25 μ., πρόκει-ται νὰ καταβιβασθῇ 0,20 μ. Πόσα κυβικὰ μέτρα γῆς πρέπει νὰ ἀφαιρεθῶσιν;

12) Ἐν κυλινδρικῷ ἀγγείῳ διαμέτρου 4 μ. ὑπάρχει ὕδωρ εἰς ὕψος 2 μ. Πόσα κυβ. μ. ὕδατος περιέχει τὸ ἀγγεῖον;

13) Τίς ἡ ἐπιφάνεια σφαίρας διαμέτρου 0,4 μ.;

14) Σωρὸς λίθων σχήματος ὀρθογ. παραλληλεπιπέδου ἔχει διαστάσεις 8,4, 1,5 μ. Τίς ὁ ὄγκος αὐτοῦ;

15) Κήπου ὀρθογωνίου τὸ μῆκος καὶ τὸ πλάτος εἶναι 250 καὶ 18 μ. Πόσον τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ καὶ πόσα δένδρα δύνανται νὰ φυτευθῶσι κατὰ τὴν περίμε-τρον αὐτοῦ, ἂν δύο ἐφεξῆς ἀπέχωσι 3 μ.;

16) Κατὰ τὴν σπορὰν τῆς βρώμης δι' ἕκαστον τετρ. μέτρον ἀρκοῦσι περίπου 200 κόκκοι ἔχοντες βάρος 8 γραμμαρίων. Πόση βρώμη ἀπαιτεῖται δι' ἀγρὸν ὀρθογώνιον ἔχοντα μῆκος καὶ πλάτος 820 καὶ 350 μ.;

17) Οἰκόπεδον τριγωνικὸν ἔχον βάσιν 25 μ. καὶ ὕψος 15 μ. πρόκειται νὰ ἀνταλλαχθῇ ὑπὸ ἰσοδυνάμου ὀρθογωνίου (παραλληλογράμμου) ἔχοντος πλάτος 15 μ. Πόσον τὸ μῆκος αὐτοῦ;

18) Πόση ἡ ἐπιφάνεια ἱστίου ἔχοντος σχῆμα τραπεζίου, οὗ αἱ παράλληλοι πλευραὶ 4 καὶ 6 μ. καὶ τὸ ὕψος 3 μ.;

19) Μετρηθεῖσα ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως κυλινδρικοῦ ποτηρίου εὑρέθη 0,258μ., Πόση ἡ διάμετρος αὐτοῦ;

20) Κωνικῆς σκηνῆς ἐμετρήθη καὶ εὑρέθη ἡ μὲν πλευρὰ 3,2 μ., ἡ δὲ δι-
μετρος τῆς βάσεως 4 μ. Πόση ἡ κυρτὴ αὐτῆς ἐπιφάνεια;

21) Πόσα τετραγωνικὰ μέτρα σιδηροῦ ἐλάσματος ἀπαιτοῦνται πρὸς κατ-
σκευὴν καπνοδόχου, ἧς τὸ μὲν ὕψος 2,5 μ. ἡ δὲ διάμετρος 0.52 μ.;

22) Αἴθουσά τις ἔχει μῆκος 8 μ. πλάτος 6,5 καὶ ὕψος 4,8 μ. Πόσος ὁ ὄγ-
κος τοῦ ἐν αὐτῷ περιεχομένου ἀέρος;

23) Οἰκοδόμος κτίζει τοῖχον μήκους 38,25 μ., ὕψους 1,80 μ. καὶ πλάτο-
0,60 μ. Πόση ἡ δαπάνη πρὸς κατασκευὴν αὐτοῦ, ἐὰν ὁ κυβ. πῆχυς τιμᾶτ-
6,30 δρχ.;

24) Κοιτῶνος τὸ μῆκος εἶναι 25 μ., τὸ πλάτος 8μ. καὶ τὸ ὕψος 3μ. Πόσ-
ἄνθρωποι δύνανται νὰ κοιμῶνται ἐν αὐτῷ, ἐὰν δι' ἕκαστον ἀπαιτῶνται 15
μ. ἀέρος;

25) Κυλινδρικὸν δοχεῖον ἔχον διάμετρον 0,80 περιέχει γάλα εἰς ὕψος 0,
μ. Πόσας λίτρας γάλακτος περιέχει;

26) Δύο κυλινδρικαὶ στῆλαι ὕψους 5 μ. καὶ διαμέτρου 0,6 πρόκειται
χρωματισθῶσιν. Τίς ἡ πρὸς χρωματισμὸν δαπάνη, ἐὰν συνεφωνήθη πρὸς 2,5
δρχ. τὸ τετραγ. μέτρον;

27) Ἔν τινι τάφρῳ μήκους 24 μ. καὶ πλάτους 1 μ. εὑρίσκεται ὕδωρ
ὕψος 0 30 μ. Πόσον τὸ ἐν αὐτῇ ὕδωρ;

28) Κυκλικὴ πλατεῖα, ἧς ἡ περιφέρεια 42 μ., πρόκειται νὰ πλακοστρωθῇ
Πόσαι πλάκες ἀπαιτοῦνται τετραγωνικαὶ πλευρᾶς 0,20μ. καὶ ἐὰν εἰς τὸ ἐξαγ-
μενον προστεθῇ 5 % πρὸς ἀναπλήρωσιν τῶν τυχὸν θραυσθεισῶν;

29) Εὑρεῖν τὸ ὕψος πύργου ρίπτοντος σκιὰν κατὰ τὴν 10ην ὥραν π. μ.
μέτρων.

30) Εὑρεῖν εἰς μοίρας τὴν γωνίαν τὴν παρισταμένην διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 1.

42 μ

0,20
0,20
0,0400

'Αριθ. Πρωτ. 7361 / Διεκπ. 7939

'Εν 'Αθήναις τῇ 15 Μαΐου 1906

ΒΑΣΙΛΕΙΟΝ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

ΤΟ ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΝ ΤΩΝ ΕΚΚΛΗΣΙΑΣΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΤΗΣ ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΕΩΣ

Πρὸς τὸν κ. **'Αθ. Καραγιαννίδην,** *ὑφηγητήν.*

"Εχοντες ὑπ' ὄψει τὸν Νόμον ΒΤΓ' τῆς 12 'Ιουλίου 1895, τὸ σχετικὸν Β. Διάταγμα τῆς 28ης 'Οκτωβρίου ἰδίου ἔτους, τὰς προκηρύξεις περὶ διαγωνισμοῦ διδακτικῶν βιβλίων τῆς στοιχειώδους ἐκπαιδεύσεως καὶ τὴν ἔκθεσιν τῆς οἰκείας ἐπιτροπείας, δηλοῦμεν ὑμῖν ὅτι ἐγκρίνομεν τὴν ὑφ' ὑμῶν εἰς τὸν διαγωνισμὸν ὑποβληθεῖσαν **«Γεωμετρίαν»** *ὅπως εἰσαχθῶσιν ἐπὶ πενταετίαν ἀρχομένην ἀπὸ τοῦ σχολικοῦ ἔτους 1906—1907 ὡς διδακτικὸν βιβλίον διὰ τοὺς μαθητὰς τῆς* **Ε'** *καὶ* **ΣΤ' τάξεως** *τῶν δημοτικῶν σχολείων ἐν γένει.*

Καλεῖσθε δέ, ὅπως ἐκτελέσητε τὰ ὑπὸ τοῦ εἰρημένου Νόμου κλπ. ὑπαγορευόμενα καὶ τὰς ὑπὸ τῆς ἐπιτροπείας ἀναγραφομένας παρατηρήσεις.

'Ο 'Υπουργὸς

Α. ΣΤΕΦΑΝΟΠΟΥΛΟΣ

Στέφ. Μ. Παρίσης