ΧΡΙΣΤΟΥ Α. ΜΠΑΡΜΠΑΣΤΑΘΗ

ΑΛΓΕΒΡΑ

ΔΙΑ ΤΑΣ ΑΝΩΤΕΡΑΣ ΤΑΞΕΙΣ ΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
1948

[illegible] Ἀλέξανδρος
Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΝ
ΑΡΡΕΝΩΝ ΚΕΡΚΥΡΑΣ
τάξις Ε'

ΑΛΓΕΒΡΑ

ΧΡΙΣΤΟΥ Α. ΜΠΑΡΜΠΑΣΤΑΘΗ

Αρμενιάκας Αλέξανδρος

ΑΛΓΕΒΡΑ

ΔΙΑ ΤΑΣ ΑΝΩΤΕΡΑΣ ΤΑΞΕΙΣ ΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
1948

ΒΙΒΛΙΟΝ Α'

Η ΑΛΓΕΒΡΑ ΚΑΙ ΑΙ ΑΛΓΕΒΡΙΚΑΙ ΠΡΑΞΕΙΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι

ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ. ΣΥΣΤΗΜΑ ΤΩΝ ΘΕΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΑΡΝΗΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

1. Ἐὰν εἷς ἔμπορος ἀπὸ τὴν πώλησιν βουτύρου ἐκέρδισε 1000 δραχμάς, ἀπὸ δὲ τὴν πώλησιν τυροῦ ἔχασε 300 δραχμάς, τελικῶς ἀπὸ τὰ δύο αὐτὰ εἴδη ἐκέρδισε 1000—300=700 δραχμάς. Ἀλλ' ἐὰν ἔχανε ἀπὸ τὸ βούτυρον 1000 δραχμάς, ἐκέρδιζε δὲ ἀπὸ τὸν τυρὸν 300 δραχμάς, τελικῶς θὰ ἔχανεν 700 δραχμάς. Ἐὰν δὲ μᾶς εἴπουν γενικῶς, ὅτι ὁ ἔμπορος οὗτος ἀπὸ τὸ μὲν ἓν εἶδος ἐκέρδισεν α δραχμάς, ἀπὸ δὲ τὸ ἄλλο ἔχασε β δραχμάς, διὰ νὰ εὕρωμεν, ἐὰν ἐκέρδισεν ἢ ἐζημιώθη, πρέπει πρῶτον νὰ ἐξετάσωμεν, ποῖος ἐκ τῶν ἀριθμῶν α καὶ β εἶναι μεγαλύτερος. Καί, ἐὰν μὲν εἶναι $\alpha>\beta$, θὰ εὕρωμεν, ὅτι οὗτος ἐκέρδισεν $(\alpha-\beta)$ δραχμάς, ἐὰν δὲ εἶναι $\beta>\alpha$, θὰ εὕρωμεν, ὅτι ἔχασε $(\beta-\alpha)$ δραχμάς. Βλέπομεν λοιπόν, ὅτι εἰς τὰ προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα δίδεται τὸ κέρδος καὶ ἡ ζημία ἑνὸς ἐμπόρου καὶ ζητεῖται νὰ εὕρωμεν, ἂν τελικῶς ἐκέρδισεν ἢ ἐζημιώθη οὗτος, ἔχομεν δύο περιπτώσεις. Ἤτοι τὴν περίπτωσιν, κατὰ τὴν ὁποίαν κάμνομεν τὴν ἀφαίρεσιν $\alpha-\beta$, ὁπότε τὸ ἐξαγόμενον εἶναι κέρδος καὶ τὴν ἀντίθετον πρὸς αὐτήν, κατὰ τὴν ὁποίαν κάμνομεν τὴν ἀφαίρεσιν $\beta-\alpha$, ὁπότε τὸ ἐξαγόμενον εἶναι ζημία.

2. Ἀλλ' ἐὰν διὰ νὰ λύσωμεν τοιαῦτα προβλήματα ***δὲν εἴχομεν ἀνάγκην νὰ προσέξωμεν, ποῖος ἐκ τῶν ἀριθμῶν α καὶ β εἶναι μεγαλύτερος,*** ἀλλ' ἠδυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ ζητούμενον διὰ τῆς ἐκτελέσεως μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς πράξεως, π.χ. τῆς ἀφαιρέσεως $\alpha-\beta$, ἢ λύ-

σις αὐτῶν θὰ ἦτο 1ον) **γενικωτέρα**, διότι ἀντὶ δύο περιπτώσεων θὰ εἴχομεν μίαν, καὶ 2ον) **ἁπλουστέρα**, διότι ἀπὸ τὸ ἐξαγόμενον τῆς πράξεως μόνον, καὶ χωρὶς νὰ χρησιμοποιήσωμεν λέξεις ἢ φράσεις, θὰ ἐνοούσαμεν ἀμέσως, ἂν τοῦτο φανερώνῃ κέρδος ἢ ζημίαν.

3. **Ὁρισμὸς τῆς Ἀλγέβρας.**—Ὡς δυνάμεθα νὰ συμπεράνωμεν ἀπὸ τὰ προηγούμενα, ἡ Ἀριθμητικὴ δὲν λύει τὰ ζητήματα ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν γενικώτερον· οὔτε δὲ ἐν γένει χρησιμοποιεῖ γενικὰς μεθόδους διὰ τὴν λύσιν αὐτῶν. Ἀλλ᾽ ὅ,τι δὲν δύναται ἡ Ἀριθμητική, τὸ ἐπιτυγχάνει ἡ Ἄλγεβρα.

Ἡ Ἄλγεβρα εἶναι **γενικὴ Ἀριθμητικὴ** ἀσχολουμένη μὲ τοὺς ἀριθμοὺς καὶ τὰ ἐπ᾽ αὐτῶν ζητήματα. Λύει δὲ αὐτὰ μὲ γενικὰς μεθόδους ἁπλούστερον καὶ γενικώτερον. Πῶς δὲ ἐπιτυγχάνει ταῦτα θὰ ἴδωμεν εἰς τὰ κατωτέρω.

4. **Ἀλγεβρικὰ σύμβολα.**—Εἰς τὴν Ἄλγεβραν (ὡς καὶ εἰς τὴν Ἀριθμητικήν), διὰ νὰ γράφωμεν συντόμως τὰς σχέσεις μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν χρησιμοποιοῦμεν σύμβολα ἢ σημεῖα. Εἰς αὐτὴν αἱ πράξεις ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν καὶ αἱ μεταξὺ αὐτῶν σχέσεις ἰσότητος καὶ ἀνισότητος σημειοῦνται διὰ τῶν αὐτῶν σημείων, διὰ τῶν ὁποίων σημειοῦνται καὶ εἰς τὴν Ἀριθμητικήν, ἤτοι διὰ τῶν $+, -, ., :, =, >$ κτλ.

Ἐπίσης, διὰ νὰ καταστήσῃ ἡ Ἄλγεβρα τοὺς συλλογισμοὺς ἁπλουστέρους καὶ γενικωτέρους, χρησιμοποιεῖ συνήθως τὰ γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου, πρὸς παράστασιν τῶν ἀριθμῶν.

Ὅταν οἱ ἀριθμοὶ διαφέρουν μεταξύ των, παρίστανται διὰ διαφόρων γραμμάτων, π. χ. α, β, γ, δ, κτλ.· εἶναι δὲ φανερόν, ὅτι εἰς ἓν ζήτημα ἕκαστον γράμμα παριστᾷ ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

Σημείωσις. Τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν α καὶ β ἢ τῶν 5 καὶ β παριστῶμεν ὡς ἑξῆς: $\alpha\beta$ ἢ 5β. Ἀλλὰ τὴν παράστασιν αὐτὴν δὲν δυνάμεθα νὰ μεταχειρισθῶμεν, ὅταν ἀμφότεροι οἱ παράγοντες εἶναι ἀριθμοί, διότι τὸ γινόμενον π.χ. 7 ἐπὶ 5, ἐὰν παρασταθῇ διὰ τοῦ 75, συγχέεται μὲ τὸν ἀριθμὸν 75.

5. **Θετικοὶ καὶ ἀρνητικοὶ ἀριθμοί.**—Ἓν ἀπὸ τὰ αἴτια, διὰ τὰ ὁποῖα ἡ Ἀριθμητικὴ δὲν δύναται νὰ λύῃ τὰ ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν ζητήματα καὶ γενικώτερον εἶναι, ὅτι εἰς αὐτὴν ἡ ἀφαίρεσις δὲν εἶναι πάντοτε δυνατή. Π.χ. ἡ ἀφαίρεσις $5-8$ δὲν δύναται νὰ γίνῃ, διότι δὲν ὑπάρχει ἀριθμός, ὁ ὁποῖος, ὅταν προστεθῇ εἰς τὸν 8, νὰ δίδῃ,

ἄθροισμα μικρότερον τοῦ 8, ἤτοι 5. Ἐπίσης δὲ καὶ ἡ ἀφαίρεσις 0—1 δὲν εἶναι δυνατή, διότι δὲν ὑπάρχει ἀριθμός, ὁ ὁποῖος, ὅταν προστεθῇ εἰς τὴν μονάδα 1, νὰ δίδῃ ἄθροισμα 0. Ἐνῷ εἰς τὴν Ἄλγεβραν πᾶσα ἀφαίρεσις εἶναι δυνατή. Συμβαίνει δὲ τοῦτο, διότι αὕτη εἰσάγει **νέους ἀριθμούς.** Ἀλλ' ὅταν εἰσάγῃ νέους ἀριθμοὺς προϋποθέτει τὰ ἑξῆς : Οἱ νέοι ἀριθμοὶ μετὰ τῶν ἀκεραίων καὶ τῶν κλασματικῶν νὰ ἀποτελέσουν ἓν γενικώτερον σύστημα ἀριθμῶν, εἰς τὸ ὁποῖον καὶ ἡ ἀφαίρεσις νὰ γίνεται πάντοτε, καὶ ***νὰ διατηρηθοῦν ἀναλλοίωτοι αἱ ἀρχικαὶ ἰδιότητες τῶν τεσσάρων πράξεων καὶ τῆς ἰσότητος.***

6. Διὰ νὰ γίνῃ λοιπὸν ἡ ἀφαίρεσις 0—1 δυνατή, πρέπει νὰ ὑπάρχῃ εἷς ἀριθμός, ὁ ὁποῖος, ὅταν προστεθῇ εἰς τὴν μονάδα, νὰ δίδῃ ἄθροισμα 0. Τοιοῦτος ἀριθμὸς δεχόμεθα, ὅτι ὑπάρχει· ἤτοι δεχόμεθα μίαν νέαν μονάδα, ἡ ὁποία, ὅταν προστεθῇ εἰς τὴν μονάδα 1, νὰ δίδῃ ἄθροισμα 0. Λέγομεν δὲ τὴν νέαν αὐτὴν μονάδα **ἀντίθετον** τῆς πρώτης καὶ τὴν παριστῶμεν ὡς ἑξῆς : —1, ἤτοι τὴν παριστῶμεν μὲ τὸ ἴδιον σύμβολον ἔχον πρὸ αὐτοῦ τὸ σημεῖον —, δηλαδὴ δεχόμεθα, ὅτι $0-1=-1$. Ἐπίσης, διὰ νὰ εἶναι δυνατὴ ἡ ἀφαίρεσις 0—2, δεχόμεθα ὅτι ὑπάρχει εἷς ἀριθμός, ὁ ὁποῖος, ὅταν προστεθῇ εἰς τὸν 2, νὰ δίδῃ ἄθροισμα 0. Λέγομεν δὲ καὶ τοῦτον ἀντίθετον τοῦ 2 καὶ τὸν παριστῶμεν ὡς ἑξῆς : —2, ἤτοι δεχόμεθα, ὅτι $0-2=-2$. Καὶ διὰ νὰ εἶναι δυνατὴ πᾶσα ἀφαίρεσις, δεχόμεθα δι' ἕκαστον ἀριθμὸν ἕνα ἀντίθετον, ὥστε οἱ δύο ὁμοῦ νὰ ἔχουν ἄθροισμα 0, καὶ τὸν ὁποῖον παριστῶμεν μὲ τὸ αὐτὸ σύμβολον, ἔχον πρὸ αὐτοῦ τὸ σημεῖον —.

Οὕτω τῶν ἀριθμῶν

$$3, \quad 5, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{2}{3}, \quad 0{,}25$$

ἀντίθετοι εἶναι οἱ

$$-3, \quad -5, \quad -\frac{1}{2}, \quad -\frac{2}{3}, \quad -0{,}25$$

ἑπομένως εἶναι

$$0-3=-3, \quad 0-5=-5, \quad 0-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2} \quad \text{κ.ο.κ.}$$

Ὁμοίως εἶναι

$$5-8=5-(5+3)=(5-5)-3=0-3=-3$$

καὶ $$\frac{2}{7}-\frac{6}{7}=\left(\frac{2}{7}-\frac{2}{7}\right)-\frac{4}{7}=0-\frac{4}{7}=-\frac{4}{7}.$$

7. Τοὺς νέους ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι ἔχουν πρὸ αὐτῶν τὸ σημεῖον —, καλοῦμεν **ἀρνητικούς,** τοὺς δὲ προϋπάρχοντας **θετικούς**. Οἱ θετικοὶ ἀριθμοὶ γράφονται πρὸς διάκρισιν καὶ μὲ τὸ σημεῖον $+$ (σὺν) πρὸ αὐτῶν. Οὕτως ὁ θετικὸς ἀριθμὸς 5 γράφεται καὶ $+5$. Οἱ θετικοὶ καὶ ἀρνητικοὶ ἀριθμοὶ ἀποτελοῦν τὸ σύστημα τῶν θετικῶν καὶ τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν. Εἰς αὐτό, ὅπως οἱ θετικοὶ ἀριθμοὶ γίνονται ἐκ τῶν θετικῶν μονάδων

$$+1, \quad +\frac{1}{2}, \quad +\frac{1}{3}, \quad +\frac{1}{4} \ldots\ldots,$$

οὕτω καὶ οἱ ἀρνητικοὶ ἀριθμοὶ γίνονται ἐκ τῶν ἀντιθέτων μονάδων

$$-1, \quad -\frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{3}, \quad -\frac{1}{4} \ldots\ldots,$$

αἱ ὁποῖαι καλοῦνται ἀρνητικαί.

Εἶναι δὲ ὡς ἐδέχθημεν

$$(+1)+(-1)=0, (+5)+(-5)=0, \left(+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)=0$$

κ.ο.κ.

Σημείωσις. Εἰς τὴν εὕρεσιν τῶν νέων ἀριθμῶν ὡδηγήθησαν ἀπὸ τὰ ἑξῆς:

Πολλὰ ποσά, μὲ τὰ ὁποῖα ἀσχολεῖται ὁ ἄνθρωπος, εἶναι ἀντίθετα. Π.χ. κέρδος καὶ ζημία, περιουσία καὶ χρέος, αἱ εἰσπράξεις καὶ αἱ πληρωμαί, τὰς ὁποίας κάμνει ταμίας τραπέζης, τὸ ἐνεργητικὸν καὶ τὸ παθητικὸν ἑνὸς ἐμπόρου κ.ἄ. Εἰς αὐτὰ δέ, ὡς π.χ. εἰς τὸ κέρδος καὶ τὴν ζημίαν, παρατηροῦμεν τὸ ἑξῆς:

Ἐὰν π.χ. εἷς ἔμπορος κερδίσῃ μίαν δραχμὴν καὶ ἔπειτα χάσῃ μίαν δραχμήν, τελικῶς οὔτε ἐκέρδισε τίποτε, οὔτε ἐζημιώθη. Ἤτοι, ἂν εἰς τὴν μίαν δραχμὴν κέρδους προστεθῇ ἡ ζημία μιᾶς δραχμῆς, τὸ ἐξαγόμενον θὰ εἶναι 0. Ὁμοίως, ἐὰν εἰς τὰς δύο δραχμὰς κέρδους προστεθῇ ζημία δύο δραχμῶν, τὸ ἐξαγόμενον θὰ εἶναι πάλιν μηδὲν κ.ο.κ.

8. Ὁμόσημοι καὶ ἑτερόσημοι ἀριθμοί.—Ὅταν δύο ἀριθμοὶ ἔχουν τὸ αὐτὸ σημεῖον, λέγονται **ὁμόσημοι**· ἄλλως λέγονται **ἑτερόσημοι**. Οὕτως οἱ ἀριθμοὶ -3 καὶ -8 εἶναι ὁμόσημοι, οἱ δὲ $+\frac{3}{4}$ καὶ $-8{,}5$ εἶναι ἑτερόσημοι.

9. Ἀπόλυτος τιμὴ ἀριθμοῦ.—Ἐὰν ἀριθμοῦ τινος ἀφαιρέσωμεν τὸ πρὸ αὐτοῦ σημεῖον, προκύπτει ἀριθμός, ὅστις λέγεται **ἀπόλυτος τιμὴ** αὐτοῦ. Οὕτω τοῦ -7 ἀπόλυτος τιμὴ εἶναι ὁ 7 καὶ τοῦ $+7$ ἡ τοῦ 7 ἀπόλυτος τιμὴ εἶναι ὁ 7. Σημειοῦται δὲ οὕτω: $|-7|=7$ καὶ

$|7|=7$. Δηλαδὴ οἱ θετικοὶ ἀριθμοὶ εἶναι οἱ αὐτοὶ μὲ τὰς ἀπολύτους τιμάς των.

10. Ἴσοι ἀριθμοί.—Ἴσοι λέγονται δύο ἀριθμοί, ἐὰν ἔχουν τὸ αὐτὸ σημεῖον καὶ ἀπολύτους τιμὰς ἴσας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙ

ΠΡΑΞΕΙΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΘΕΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΑΡΝΗΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

11. Πρόσθεσις.—Ἡ πρόσθεσις ὁρίζεται ὅπως καὶ ἐπὶ τοῦ συστήματος τῶν ἀκεραίων καὶ τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν.

α′) Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν $+4$ καὶ $+7$· ἀλλ᾽ εἶναι φανερόν, ὅτι 4 θετικαὶ μονάδες καὶ 7 θετικαὶ μονάδες δίδουν ἄθροισμα 11 μονάδας θετικάς, ἤτοι εἶναι

$$(+4)+(+7)=(+11).$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι

$$(-4)+(-7)=-11$$

καὶ
$$\left(-\frac{4}{9}\right)+\left(-\frac{2}{9}\right)=-\frac{6}{9}$$

καὶ
$$\left(-\frac{1}{4}\right)+\left(-\frac{1}{7}\right)=-\frac{11}{28}.$$

β′) Ἔστω ἤδη, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν ἑτεροσήμων ἀριθμῶν $+5$ καὶ -7.

Ἀλλὰ $\quad (+5)+(-7)=(+5)+(-5)+(-2)$

καὶ ἐπειδὴ $\quad (+5)+(-5)=0$

ἕπεται, ὅτι $\quad (+5)+(-7)=-2.$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι

$$(-5)+(+7)=(-5)+(+5)+(+2)=+2$$

καὶ
$$\left(+\frac{2}{9}\right)+\left(-\frac{4}{5}\right)=\left(+\frac{10}{45}\right)+\left(-\frac{36}{45}\right)=$$
$$=\left(+\frac{10}{45}\right)+\left(-\frac{10}{45}\right)+\left(-\frac{26}{45}\right)=-\frac{26}{45}.$$

12. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι

1ον. ***Τὸ ἄθροισμα δύο ὁμοσήμων ἀριθμῶν εἶναι ὁμόσημον πρὸς αὐτοὺς καὶ ἔχει ἀπόλυτον τιμὴν τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν προσθετέων.***

2ον. ***Τὸ ἄθροισμα δύο ἑτεροσήμων ἀριθμῶν εἶναι ὁμόσημον*** *πρὸς τὸν κατ᾽ ἀπόλυτον τιμὴν μεγαλύτερον ἐξ αὐτῶν καὶ ἔχει ἀπόλυτον τιμὴν τὴν διαφορὰν τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν προσθετέων.*

Ἐνταῦθα παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ ἔννοια τῆς **προσθέσεως** ἔχει μεταβληθῆ· ἓν δὲ ἄθροισμα δὲν εἶναι πάντοτε μεγαλύτερον ἑκάστου τῶν προσθετέων.

Σημείωσις. Ἐὰν ὁ εἷς τῶν δύο προσθετέων εἶναι 0, τὸ ἄθροισμα εἶναι ὁ ἄλλος προσθετέος.

Ἀσκήσεις.

1. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἀθροίσματα :

$(+7)+(+10)$ $\qquad$ $\left(-2\frac{1}{4}\right)+\left(+1\frac{1}{2}\right)$

$(-13)+(-7)$ $\qquad$ $\left(-9\frac{3}{4}\right)+\left(+7\frac{5}{12}\right)$

$(+57)+(-100)$ $\qquad$ $(+3{,}15)+(-2{,}50)$

$(-100)+(+21)$ $\qquad$ $(+2{,}125)+(-4{,}625)$

$0+(-57)$ $\qquad$ $(-9)+(+2{,}75)$

$\left(+\frac{3}{8}\right)+\left(-\frac{2}{8}\right)$ $\qquad$ $(+6{,}8)+(-3{,}975)$

$\left(-\frac{1}{5}\right)+\left(-\frac{3}{5}\right)$ $\qquad$ $\left(+6\frac{1}{2}\right)+(-4{,}75)$.

13. Πρόσθεσις ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν.—Ὅταν οἱ προσθετέοι εἶναι περισσότεροι τῶν δύο, προσθέτομεν διαδοχικῶς κατὰ σειρὰν τοὺς προσθετέους, ὡς μᾶς δίδονται.

Π.χ. διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα

$$(+8)+(-5)+(+12)+(+18)+(-13)$$

ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς :

$$(+8)+(-5)=+3$$
$$(+3)+(+12)=+15$$
$$(+15)+(+18)=+33$$
$$(+33)+(-13)=+20$$

ὥστε εἶναι :

$$(+8)+(-5)+(+12)+(+18)+(-13)=+20.$$

14. Ἰδιότητες τῆς προσθέσεως.—Τὸ ἀνωτέρω δοθὲν ἄθροισμα παρατηροῦμεν, ὅτι ἀποτελεῖται ἀπὸ 38 $[=(+8)+(+12)+(+18)]$ θετικὰς μονάδας καὶ ἀπὸ 18$[=(-5)+(-13)]$ ἀρνητικάς. Αἱ 18 αὗται ἀρνητικαὶ μονάδες ὁμοῦ μὲ 18 θετικὰς (ἐκ τῶν 38) δίδουν ἄθροισμα 0. Εἶναι δὲ φανερόν, ὅτι γίνεται τοῦτο καθ' οἱανδήποτε τάξιν καὶ ἂν λάβωμεν τοὺς προσθετέους καὶ ἑπομένως τὸ ἄθροισμα τούτων εἶναι πάντοτε 20 θετικαὶ μονάδες. Ὥστε : ***Τὸ ἄθροισμα πολλῶν ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται, ὅταν ἀλλάξωμεν τὴν τάξιν τῶν προσθετέων.***

15. Βλέπομεν λοιπόν, ὅτι ***ἡ ἀρχικὴ ἰδιότης τῆς προσθέσεως διατηρεῖται καὶ εἰς τὸ σύστημα τῶν θετικῶν καὶ ἀρνητικῶν ἀριθμῶν.*** Ἑπομένως ***ἀληθεύουν καὶ διὰ τοὺς νέους ἀριθμοὺς καὶ ὅλαι αἱ ἄλλαι ἰδιότητες τῆς προσθέσεως.*** Οὕτω, πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἀθροίσματος πολλῶν ἀριθμῶν, δυνάμεθα νὰ ἐργαζώμεθα ὡς φαίνεται εἰς τὰ κάτωθι παραδείγματα :

1) $(+9)+(-7)+(+3)+(-15)+(+6)=$
$(+9)+(+3)+(+6)+(-7)+(-15)=(+18)+(-22)=-4$

2) $\left(+\frac{1}{3}\right)+(-2)+\left(-\frac{2}{5}\right)+(+1)=\left(+\frac{4}{3}\right)+\left(-\frac{12}{5}\right)=-\frac{16}{15}.$

16. **Ἐφαρμογὴ εἰς τὸν πρακτικὸν βίον.**—Ἡ ἐφαρμογὴ τῆς προσθέσεως τῶν θετικῶν καὶ ἀρνητικῶν ἀριθμῶν εἰς τὸν πρακτικὸν βίον εἶναι συνήθης. Διότι οἱ συγκεκριμένοι ἀριθμοὶ προκύπτουν ἀπὸ τὴν μέτρησιν ποσῶν· ἀλλ' ὑπάρχουν ποσά, τὰ ὁποῖα ἐπιδέχονται ἀντίθεσιν, ἤτοι ἔχουν δύο φορὰς ἀντιθέτους. Τοιαῦτα ποσὰ εἶναι π.χ. τὸ κέρδος καὶ ἡ ζημία ἑνὸς ἐμπόρου, ἡ θερμοκρασία ἡ ἄνω καὶ ἡ κάτω τοῦ μηδενός, ἡ χρονολογία ἡ π. Χ. καὶ ἡ μ. Χ., ἡ κίνησις ἐπὶ εὐθείας γραμμῆς ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιὰ καὶ ἐκ δεξιῶν πρὸς τὰ ἀριστερά, ἡ κίνησις ἐπὶ εὐθείας δεξιὰ ἢ ἀριστερὰ ἑνὸς σημείου, τὸ ὁποῖον λαμβάνεται ὡς ἀρχὴ κ. ἄ.

Δι' ὅλα δὲ τὰ τοιαῦτα ποσὰ δεχόμεθα **κατὰ συνθήκην,** ἤτοι συμφωνοῦμεν, τὸ ἑξῆς : Οἱ ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι προκύπτουν ἀπὸ τὴν μέτρησιν ὁμοειδῶν ποσῶν, καὶ τὰ ὁποῖα ἔχουν μίαν καὶ τὴν αὐτὴν φοράν, παριστῶνται δι' ἀριθμῶν ὁμοσήμων, π. χ. θετικῶν, ὁπότε, ὅταν ἔχουν ταῦτα τὴν ἀντίθετον φοράν, θὰ **παριστῶνται** διὰ τῶν ἀντιθέτων ἀριθμῶν. Οὕτω π. χ. ἐὰν 100 δραχμαὶ κέρδους παρασταθοῦν διὰ τοῦ $+100$, ἡ ζημία τῶν 100 δραχμῶν θὰ παρασταθῇ διὰ τοῦ -100.

17. Κατὰ ταῦτα, ἐὰν ἔμπορός τις ἐκέρδισε κατὰ πρῶτον 5000 δραχμὰς καὶ ἔπειτα ἐζημιώθη κατὰ 1000 δραχμάς, τὸ τελικὸν ἐξαγόμενον εἶναι τὸ ἄθροισμα (+5000 δρχ.)+(—1000 δρχ.)=(+4000 δρχ.).

δηλαδὴ κέρδος 4000 δραχμαί. Ὁμοίως, ἐὰν βαδίζῃ τις ἐπὶ εὐθείας γραμμῆς ΑΒ δεξιὰ καὶ τὰ διαστήματα, τὰ ὁποῖα διανύει, παραστήσωμεν διὰ θετικῶν ἀριθμῶν, τὰ πρὸς τὰ ἀριστερὰ διαστήματα, τὰ ὁποῖα τυχὸν θὰ διανύσῃ, θὰ παραστήσωμεν δι' ἀρνητικῶν ἀριθμῶν. Οὕτω δέ, ἐὰν ἀνεχώρησεν οὗτος ἀπὸ τὸ σημεῖον Ο τῆς εὐθείας ΑΒ καὶ ἐκινήθη δύο χιλιόμετρα πρὸς τὰ δεξιὰ καὶ κατόπιν τρία χιλιόμετρα πρὸς τὰ ἀριστερά, ἡ τελικὴ ἀπόστασις αὐτοῦ καὶ ἡ θέσις ἀπὸ τῆς ἀρχῆς θὰ δεικνύεται ὑπὸ τοῦ ἀθροίσματος (+2 χιλμ.)+(—3 χιλμ.) = — 1 χιλιόμετρον· ἤτοι οὗτος εὑρίσκεται ἤδη ἀριστερὰ τῆς ἀρχῆς καὶ εἰς ἀπόστασιν ἑνὸς χιλιομέτρου ἀπὸ ταύτης.

Σημείωσις α'. Κατὰ ταῦτα, τὸ πρόβλημα τῆς § 1 ἀνάγεται εἰς μίαν περίπτωσιν καὶ θὰ λυθῇ διὰ μιᾶς μόνον πράξεως, ἤτοι τῆς προσθέσεως τῶν α καὶ β, ὅπου ὁ α εἶναι θετικὸς ἀριθμὸς καὶ ὁ β ἀρνητικός· ἐκ τοῦ ἀθροίσματος δὲ θὰ συμπεράνωμεν, ἐὰν ὁ ἔμπορας ἐκέρδισεν ἢ ἐζημιώθη καὶ πόσον.

Σημείωσις β'. Ὑπάρχουν ποσά, τὰ ὁποῖα δὲν ἐπιδέχονται ἀντίθεσιν, ὅπως π.χ. εἶναι αἱ ὧραι τῆς ἡμερησίας ἐργασίας ἑνὸς ἐργάτου, ἡ χωρητικότης ἑνὸς βαρελίου, ἡ ἡλικία ἑνὸς ἀνθρώπου κ.ἄ. Τὰ τοιαῦτα ποσὰ παριστῶνται πάντοτε διὰ θετικῶν ἀριθμῶν.

Ἀσκήσεις.

2. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἀθροίσματα :

$$(+5)+(+9)+(+13)+(+8)+(+25)+(+34)$$
$$(-7)+(-2)+(-10)+(-6)+(-12)+(-18)$$
$$(+6)+(-23)+(-17)+(+45)+(-50)+(+55)$$
$$(+2{,}6)+(-1{,}4)+(-3{,}8)+(+1{,}8)+(+0{,}8)$$
$$\left(+\frac{5}{6}\right)+\left(-\frac{7}{10}\right)+\left(-\frac{11}{30}\right)+\left(+\frac{3}{5}\right)+\left(+\frac{13}{15}\right).$$

3. Νὰ παραστήσετε διὰ θετικῶν καὶ ἀρνητικῶν ἀριθμῶν τὰς θερμοκρασίας 13°, 8°, $11^\circ\frac{1}{2}$ τὰς ἄνω τοῦ μηδενὸς καὶ τὰς 2°, 5°, 6° τὰς κάτω τοῦ μηδενός.

4. Ἐὰν λάβωμεν ὡς ἀρχὴν τοῦ χρόνου τὴν μεσημβρίαν μιᾶς ἡμέρας, διὰ ποίων ἀριθμῶν θὰ παρασταθοῦν αἱ ὧραι 8, $9\frac{1}{2}$, $11\frac{1}{2}$ π.μ. καὶ αἱ ὧραι 1, 4, 8 μ.μ. τῆς αὐτῆς ἡμέρας ; Καὶ διὰ ποίου ἀριθμοῦ θὰ παρασταθῇ ἡ δωδεκάτη μεσημβρινή ;

5. Ἡ θερμοκρασία ἡμέρας τινὸς ἦτο κατά τινα στιγμὴν -3° Κ. Μετά τινας ὥρας ἡ θερμοκρασία τῆς ἡμέρας αὐτῆς ηὐξήθη κατὰ 9° Κ. Πόσους βαθμοὺς ἐδείκνυε τότε τὸ θερμόμετρον ;

6. Ἓν ἀεροπλάνον ἀνῆλθε κατ' ἀρχὰς ὑπὲρ τὴν Γῆν εἰς ὕψος 1800 μέτρων, ἔπειτα κατῆλθεν ἐκ τοῦ ὕψους αὐτοῦ κατὰ 600 μέτρα. Κατόπιν ἀνῆλθε κατὰ 850 μέτρα, κατῆλθε πάλιν κατὰ 700 μέτρα καὶ τέλος ἀνῆλθε κατὰ 450 μ. α') Νὰ παραστήσετε τὰς ἀνόδους καὶ καθόδους τοῦ ἀεροπλάνου διὰ θετικῶν καὶ ἀρνητικῶν ἀριθμῶν καὶ β') Νὰ εὕρητε διὰ τῶν ἀριθμῶν τούτων τὸ τελικὸν ὕψος τοῦ ἀεροπλάνου.

7. Κινητόν τι κινούμενον ἐπὶ εὐθείας γραμμῆς χ'χ ἀναχωρεῖ ἀπό τινος σημείου αὐτῆς Α, φθάνει ἔπειτα εἰς τὸ σημεῖον Β, ἔπειτα εἰς τὸ Γ καὶ τέλος εἰς τὸ Δ. Ἐὰν οἱ δρόμοι εἶναι ΑΒ=+7 μ., ΒΓ=−5 μ. καὶ ΓΔ=+14 μ., ποῖον εἶναι τὸ ἄθροισμα; Καὶ ποία εἶναι ἡ σχετικὴ θέσις τῶν σημείων Α, Β, Γ καὶ Δ πρὸς ἄλληλα;

18. Ἀφαίρεσις. — Ἡ ἀφαίρεσις ὁρίζεται ὅπως καὶ εἰς τὸ σύστημα τῶν ἀκεραίων καὶ τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν.

Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν

$$+11 \text{ τὸν } +5.$$

Ἀλλ' εἶναι $(+11)-(+5)=(+6)$,

διότι $(+6)+(+5)=+11$.

Ἀλλ' ἤδη παρατηροῦμεν ὅτι, ἐὰν εἰς τὰ μέλη τῆς τελευταίας ἰσότητος προσθέσωμεν τὸν −5,

θὰ ἔχωμεν $(+6)+(+5)+(-5)=(+11)+(-5)$

ἤτοι $+6=(+11)+(-5)$.

Ὁμοίως, ἐὰν τὴν διαφορὰν $(+11)-(-5)$ παραστήσωμεν διὰ δ, θὰ ἔχωμεν $\delta+(-5)=+11$. Ἐὰν δὲ εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἰσότητος αὐτῆς προσθέσωμεν τὸν +5,

θὰ ἔχωμεν $\delta+(-5)+(+5)=(+11)+(+5)$

ἤτοι $\delta=(+11)+(+5)=+16$.

Καὶ πράγματι, διότι $(+16)+(-5)=+11$.

Ὁμοίως εἶναι $\alpha-(+\beta)=\alpha+(-\beta)$

διότι $\alpha+(-\beta)+(+\beta)=\alpha$

καὶ $\alpha-(-\beta)=\alpha+(+\beta)$

διότι $\alpha+(+\beta)+(-\beta)=\alpha$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω βλέπομεν, ὅτι ***ἡ ἀφαίρεσις ἀνάγεται εἰς τὴν πρόσθεσιν. Εὑρίσκεται δὲ ἡ διαφορὰ δύο ἀριθμῶν, ὅταν εἰς τὸν μειωτέον προσθέσωμεν τὸν ἀντίθετον τοῦ ἀφαιρετέου.***

Οὕτως εἶναι:

$$(+6)-(+8)=(+6)+(-8)=-2$$
$$(-7)-(-9)=(-7)+(+9)=+2$$
$$(-5)-(+6)=(-5)+(-6)=-11$$
$$(+3)-(-4)=(+3)+(+4)=+7.$$

Παρατηρήσεις. 1) Ἐνταῦθα παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ διαφορὰ δύο ἀριθμῶν δὲν εἶναι πάντοτε μικροτέρα τοῦ μειωτέου.

2) Ἡ διαφορὰ $0-(-7)$ ἰσοῦται, κατὰ τὰ ἀνωτέρω, μὲ

$$0+(+7)=+7$$

καὶ ἡ διαφορὰ $0-(+4)$ εἶναι $0+(-4)=-4$.

Ταῦτα δὲ δύνανται νὰ γραφοῦν ὡς ἑξῆς:

$$-(-7)=+7 \qquad -(+4)=-4$$
$$+(+7)=+7 \qquad +(-4)=-4.$$

Σημείωσις α΄. Ὁ ἀριθμὸς α εἶναι ἴσος μὲ τὸν $+\alpha$. Ὁ ἀντίθετος δὲ τοῦ α εἶναι ὁ $-\alpha$.

Ὥστε, ἐὰν $\alpha=+5$, τότε εἶναι $-\alpha=-(+5)=-5$

καὶ ἐὰν $\alpha=-8$, » » $-\alpha=-(-8)=+8$.

Ὥστε οἱ ἀριθμοὶ $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$ κτλ. δὲν πρέπει νὰ λαμβάνωνται ἀσφαλῶς ὡς ἀρνητικοί. Θὰ εἶναι δὲ τοιοῦτοι, ἐὰν οἱ ἀντίθετοί των α, β, γ κτλ. εἶναι θετικοί. Ἀλλ' ἐὰν οἱ α, β, γ κτλ. εἶναι ἀρνητικοί, τότε οἱ $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$ κτλ. εἶναι θετικοί.

Σημείωσις β΄. Ἐκ τῆς ἄνω παρατηρήσεως 2 συνάγεται, ὅτι δύο σημεῖα διαδοχικὰ ἰσοδυναμοῦν μὲ ἓν μόνον σημεῖον, τὸ ὁποῖον θὰ εἶναι $+$, ἐὰν τὰ δύο σημεῖα εἶναι ἀμφότερα $+$ ἢ ἀμφότερα $-$· ἐὰν ὅμως τὰ δύο σημεῖα εἶναι ἀντίθετα, ἰσοδυναμοῦν μὲ τὸ $-$.

Ἀσκήσεις.

8. Νὰ γίνουν αἱ ἀφαιρέσεις:

$(+28)-(+18)$ $\qquad$ $(-2{,}6)-(-1{,}2)$

$(+17)-(-19)$ $\qquad$ $(+3{,}2)-(+0{,}25)$

$(-34)-(+13)$ $\qquad$ $(+0{,}04)-(-1{,}6)$

$(-48)-(-15)$ $\qquad$ $(-3{,}63)-(+5{,}875)$

$$\left(-\frac{20}{9}\right)-\left(+\frac{3}{9}\right) \qquad (-0{,}375)-\left(-\frac{3}{8}\right)$$

$$\left(+6\frac{5}{8}\right)-\left(+9\frac{3}{4}\right) \qquad \left(+9\frac{1}{6}\right)-(-1{,}225)$$

9. Ἡ ἐλαχίστη θερμοκρασία ἡμέρας τινὸς ἦτο $-2{,}5^{0}$, ἡ δὲ μεγίστη $+17{,}6^{0}$. Πόση εἶναι ἡ διαφορὰ τῆς ἐλαχίστης αὐτῆς θερμοκρασίας ἀπὸ τῆς μεγίστης καὶ ἑπομένως πόσων βαθμῶν ἦτο ἡ αὔξησις τῆς θερμοκρασίας κατὰ τὴν ἡμέραν αὐτήν;

10. Εἷς ἐργάτης ἀπὸ τὸ ἡμερομίσθιον μιᾶς ἡμέρας ἐπλήρωσεν ἓν χρέος 25 δρ. καὶ τοῦ ἔμειναν 85 δραχμαί. Νὰ παραστήσετε τοὺς ἀριθμοὺς αὐτοὺς διὰ θετικῶν καὶ ἀρνητικῶν ἀριθμῶν καὶ κατόπιν διὰ τῶν ἀριθμῶν τούτων νὰ εὕρετε τὸ ἡμερομίσθιον τῆς ἡμέρας αὐτῆς.

19. Σειρὰ προσθέσεων καὶ ἀφαιρέσεων.—Ἔστω ἤδη, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἐξαγόμενον τῶν κάτωθι πράξεων:

$$(-8)-(-7)-(+9)+(+11)-(-14).$$

Τοῦτο, κατὰ τὰ ἀνωτέρω, εὑρίσκεται, ὅτι εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα

$$(-8)+(+7)+(-9)+(+11)+(+14).$$

Ἀλλὰ τὸ τελευταῖον τοῦτο ἄθροισμα παριστῶμεν ἁπλούστερον γράφοντες **κατὰ συνθήκην** τοὺς προσθετέους τὸν ἕνα μετὰ τὸν ἄλλον καὶ ἕκαστον μετὰ τοῦ σημείου του, ἤτοι παριστῶμεν αὐτὸ ὡς ἑξῆς:

$$-8+7-9+11+14.$$

Τὸ δὲ ἄθροισμα

$$(+7)+(-9)+(-8)+(+18)$$

γράφεται : $\quad +7-9-8+18$

καὶ ἐπειδὴ εἰς αὐτὸ ὁ πρῶτος ἀριθμὸς εἶναι θετικός, γράφεται τοῦτο καὶ $\quad 7-9-8+18.$

20. Ἡ διπλῆ σημασία τῶν + καὶ —. Κατὰ τὰ ἀνωτέρω, ἡ παράστασις $8-5-11+13-9$ ἢ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν $+8, -5, -11, +13, -9$, ἢ ὡς φανερώνουσα τὰς πράξεις τῆς προσθέσεως καὶ τῆς ἀφαιρέσεως τῶν θετικῶν ἀριθμῶν 8, 5, 11, 13, 9, διότι εἶναι, ὡς εἴδομεν:

$$(+8)-(+5)-(+11)+(+13)-(+9)=$$
$$(+8)+(-5)+(-11)+(+13)+(-9)=$$
$$8-5-11+13-9.$$

Ὥστε τὰ σημεῖα + καὶ — ἔχουν διπλῆν σημασίαν, ἤτοι ἢ

α΄) φανερώνουν τὰς πράξεις τῆς προσθέσεως καὶ τῆς ἀφαιρέσεως ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν, τοὺς ὁποίους συνδέουν, ὁπότε οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι θεωροῦνται θετικοί, ἢ

β΄) φανερώνουν, ἐὰν ὁ ἀριθμός, πρὸ τοῦ ὁποίου εὑρίσκονται, εἶναι θετικὸς ἢ ἀρνητικός, ὁπότε μεταξὺ τῶν θετικῶν καὶ τῶν ἀρνητικῶν τούτων ἀριθμῶν πρέπει νὰ νοήσωμεν τὸ σημεῖον τῆς προσθέσεως. Τοῦτο δέ, ὡς εἴδομεν ἀνωτέρω, οὐδεμίαν προκαλεῖ σύγχυσιν.

Σημείωσις. Τὰ σημεῖα + καὶ —, ὅταν εἶναι πρὸ μεμονωμένων ἀριθμῶν, ὡς +9, —20, κτλ., δεικνύουν ἁπλῶς, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ εἶναι θετικοὶ ἢ ἀρνητικοί.

21. Πρόσθεσις ἀθροίσματος εἰς ἀριθμόν.—Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸν 48 τὸ ἄθροισμα 18 — 7 — 15. Ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν +18, —7 καὶ —15 εἶναι —4. Ὥστε εἶναι:

$$48 + (18 - 7 - 15) = 48 + (-4) = 44.$$

Ἀλλὰ τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν καὶ ὡς ἑξῆς: Τὸ ἄθροισμα 18—7—15 γράφεται $(+18) + (-7) + (-15)$, τοῦτο δὲ θέλομεν νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸν ἀριθμὸν +48.

Ἀλλὰ κατὰ τὴν γνωστὴν ἰδιότητα τῆς προσθέσεως ἀθροίσματος εἰς ἀριθμὸν ἔχομεν:

$$(+48) + [(+18) + (-7) + (-15)] =$$
$$(+48) + (+18) + (-7) + (-15) = 48 + 18 - 7 - 15.$$

Ὥστε εἶναι:

$$48 + (18 - 7 - 15) = 48 + 18 - 7 - 15 \qquad (1)$$

Συνάγομεν λοιπόν, ὅτι: ***Διὰ νὰ προσθέσωμεν ἄθροισμα εἰς ἀριθμόν, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν μετὰ τὸν ἀριθμὸν ὅλους τοὺς προσθετέους τοῦ ἀθροίσματος μετὰ τῶν αὐτῶν σημείων των καὶ ἔπειτα νὰ προσθέσωμεν.***

22. Ἀφαίρεσις ἀθροίσματος ἀπὸ ἀριθμοῦ.— Ἐὰν θέλωμεν νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ ἀνωτέρω ἄθροισμα ἀπὸ τὸν 48, θὰ ἔχωμεν:

$$48 - (18 - 7 - 15) = 48 - (-4) = 48 + 4 = 52$$

ἢ

$$(+48) - [(+18) + (-7) + (-15)] =$$
$$48 - (+18) - (-7) - (-15) =$$
$$48 + (-18) + (+7) + (+15)$$

ἤτοι:

$$48 - (18 - 7 - 15) = 48 - 18 + 7 + 15 \qquad (2)$$

Συνάγομεν λοιπόν, ὅτι: ***Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἄθροισμα ἀπὸ ἀριθμοῦ, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν μετὰ τὸν ἀριθμὸν ὅλους τοὺς προσθετέους τοῦ ἀθροίσματος μὲ ἀντίθετα σημεῖα καὶ ἔπειτα νὰ προσθέσωμεν.***

23. Θέσις καὶ ἄρσις παρενθέσεων.— Ἐκ τῶν ἄνω ἰσοτήτων (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι ἐὰν θέλωμεν νὰ θέσωμεν ἀριθμοὺς ἐντὸς παρενθέσεων ἤ, ὅταν εἶναι ἐντὸς παρενθέσεων, νὰ γράψωμεν αὐτοὺς ἄνευ παρενθέσεων, θὰ γράψωμεν τοὺς ἀριθμοὺς μετὰ τῶν αὐτῶν σημείων των, ἐὰν πρὸ τῶν παρενθέσεων ὑπάρχῃ τὸ σημεῖον +, μὲ ἠλλαγμένα δὲ τὰ σημεῖα, ἐὰν πρὸ τῶν παρενθέσεων ὑπάρχῃ τὸ σημεῖον —.

Οὕτω γράφομεν:

$$5 - 8 + 3 - 9 = (5 - 8 + 3 - 9) = -(-5 + 8 - 3 + 9)$$

καὶ

$$(9 - 4 + 3) - (8 + 6 - 9 - 4) = 9 - 4 + 3 - 8 - 6 + 9 + 4.$$

Ἀσκήσεις.

11. Τὰς κάτωθι σειρὰς προσθέσεων καὶ ἀφαιρέσεων νὰ γράψῃς πρῶτον ὡς ἀθροίσματα θετικῶν καὶ ἀρνητικῶν ἀριθμῶν καὶ κατόπιν ταῦτα νὰ γράψῃς ἁπλούστερον:

$$(+12)+(-9)-(+8)-(-15)+(+10)-(-6)$$
$$(-7)-(-4)+(-11)+(+13)-(-2)-(-5)$$
$$-(-20)-(-32)-(+44)-(-28)-(+17)+(+12).$$

12. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων:

$$(+18)-(+7)-(-9)-(+15)+(-10)$$
$$(-3)-(-2)+(-5)+(+2)-(-3)+(-5)$$
$$\left(-\frac{5}{2}\right)-\left(-\frac{3}{4}\right)+\left(-1\frac{1}{8}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{5}{8}\right)$$
$$(-4)-(-1{,}5)+(+3{,}25)-(-3)+(-1{,}75)$$
$$\left(+\frac{3}{4}\right)-(-0{,}5)+\left(+\frac{1}{2}\right)-\left(-1\frac{1}{2}\right)-(-2{,}75).$$

13. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ κάτωθι ἐξαγόμενα:

$$7-18, \quad -32-47+23$$
$$-9+36-15-29+36$$
$$5-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-5\frac{5}{8}+\frac{3}{4}$$
$$-0{,}5+2{,}25+4{,}625-7{,}25.$$

14. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ κάτωθι ἐξαγόμενα:

$$35+(28-30-12), \quad 100-(-24+9-36)$$
$$(7+9-8-12)+(-15+4-7-10)$$
$$(8-15-24)-(11-19+13-2)$$
$$(27-12)-(32-40)-(-24+50).$$

24. Πολλαπλασιασμός.—Εἰς τὸ σύστημα τῶν θετικῶν καὶ ἀρνητικῶν ἀριθμῶν ὁ πολλαπλασιασμός, ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι θετικὸς ἀριθμός, ὁρίζεται ὅπως καὶ εἰς τοὺς κλασματικοὺς ἀριθμούς. Ἤτοι ἔχομεν:

$$(+5)\,.\,(+3)=(+5)+(+5)+(+5)$$
$$(-5)\,.\,(+3)=(-5)+(-5)+(-5)$$
$$(-5)\,.\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{-5}{4}+\frac{-5}{4}+\frac{-5}{4}$$
$$(+5)\,.\,(+1)=+5$$
$$(-5)\,.\,(+1)=-5.$$

25. Σημασία τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἀριθμοῦ ἐπὶ — 1. Ἤδη μένει νὰ ἐξετασθῇ ἡ περίπτωσις, κατὰ τὴν ὁποίαν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι ἀρνητικὸς ἀριθμός. Πρὸς τοῦτο ὅμως θὰ ὁρίσωμεν προηγουμένως τὴν σημασίαν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ οἱουδήποτε ἀριθμοῦ ἐπὶ τὴν ἀρνητικὴν μονάδα -1, ὥστε ***νὰ διατηρῶνται αἱ ἀρχικαὶ ἰδιότητες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ*** (δηλαδὴ ἡ τῆς ἀδιαφορίας ὅσον ἀφορᾷ τὴν τάξιν τῶν παραγόντων καὶ ἡ ἐπιμεριστική).

Ἀλλὰ κατὰ τὴν ἰδιότητα τῆς ἀδιαφορίας, τὴν ὁποίαν διατηροῦμεν, ἔχομεν π.χ. $(+5).(-1) = (-1).(+5)$

Ἐπειδὴ δὲ εἶναι

$$(-1).(+5) = (-1) + (-1) + (-1) + (-1) + (-1) = -5,$$

ἕπεται, ὅτι πρέπει νὰ εἶναι καὶ $(+5).(-1) = -5$, ἤτοι πρέπει νὰ ὁρίσωμεν, ὅτι: ***Τὸ γινόμενον ἀριθμοῦ ἐπὶ τὴν ἀρνητικὴν μονάδα -1 εἶναι ὁ ἀντίθετος αὐτοῦ.***

Ἐκ τούτου ἕπονται τὰ ἑξῆς:

1) ***Τὸ γινόμενον τῆς ἀρνητικῆς μονάδος -1 ἐπὶ τὸν ἑαυτόν της ἰσοῦται μὲ τὴν θετικὴν μονάδα 1.*** Ἤτοι $(-1).(-1) = 1$.

2) ***Πᾶς ἀρνητικὸς ἀριθμὸς εἶναι γινόμενον τοῦ ἀντιθέτου του θετικοῦ ἀριθμοῦ ἐπὶ τὴν ἀρνητικὴν μονάδα -1.*** Ἤτοι

$$-8 = (+8).(-1), \qquad -\frac{5}{9} = \left(+\frac{5}{9}\right).(-1).$$

26. Πολλαπλασιασμὸς δύο οἱωνδήποτε ἀριθμῶν.—Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω ἔχομεν:

$(+6).(+5) = +30$ ἢ ἁπλούστερον $6.5 = 30$

$(+6).(-5) = (+6)(+5)(-1) = -30$ » $6.(-5) = -30$

$(-6).(+5) = (+6)(+5)(-1) = -30$ » $(-6).5 = -30$

$(-6).(-5) = (+6)(+5)(-1)(-1) = +30$ » $(-6).(-5) = 30$.

Ὥστε: ***Τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν εἶναι τὸ γινόμενον τῶν ἀπολύτων τιμῶν αὐτῶν καὶ μὲ τὸ σημεῖον $+$ μέν, ἂν οἱ παράγοντες εἶναι ὁμόσημοι, μὲ τὸ $-$ δέ, ἂν εἶναι ἑτερόσημοι.***

Σημείωσις α΄. Τὸ γινόμενον δύο παραγόντων, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ εἷς εἶναι 0, ἰσοῦται μὲ τὸ 0, ἤτοι εἶναι π. χ.

$$(+5).0 = 0.(+5) = 0.$$

Σημείωσις β΄. Τὸ σημεῖον τοῦ γινομένου δύο ἀριθμῶν λαμβάνεται κατὰ τὸν ἑπόμενον κανόνα, ὁ ὁποῖος λέγεται ***κανὼν τῶν σημείων***. Ἤτοι:

$+$ ἐπὶ $+$ δίδει $+$
$+$ » $-$ » $-$
$-$ » $+$ » $-$
$-$ » $-$ » $+$

27. Ἰδιότητες.—Ἀφοῦ τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν εἶναι τὸ γινόμενον τῶν ἀπολύτων τιμῶν αὐτῶν, εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ ἰδιότης τῆς ἀδιαφορίας ὡς πρὸς τὴν τάξιν τῶν παραγόντων ἀληθεύει καὶ ἐπὶ ὅλων τῶν ἀριθμῶν τοῦ νέου συστήματος. Ἀλλὰ καὶ ἡ ἐπιμεριστικὴ ἰδιότης ἀληθεύει· διότι π.χ. διὰ τὸ γινόμενον $(-5+7).3$

ἔχομεν $(-5+7).3=(-5)+7+(-5)+7+(-5)+7=$

$$(-5)+(-5)+(-5)+7+7+7=(-5).3+7.3$$

ἤτοι εἶναι $(-5+7).3=(-5).3+7.3$ (1)

Ἀλλ' ἀφοῦ ἀληθεύει ἡ ἰσότης αὐτή, θὰ ἀληθεύῃ καὶ ἡ

$$(-5+7).(-3)=(-5).(-3)+7.(-3),$$

διότι οἱ ἀριθμοὶ $(-5+7).(-3)$

καὶ $(-5).(-3)+7.(-3)$

εἶναι ἀντίθετοι τῶν ἴσων ἀριθμῶν τῆς ἰσότητος (1). Ἑπομένως καὶ αὐτοὶ εἶναι ἴσοι.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι : ***Ὅλαι αἱ ἰδιότητες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, τὰς ὁποίας ἐμάθομεν εἰς τὴν Ἀριθμητικήν, ἀληθεύουν καὶ ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν τοῦ νέου συστήματος.***

Ἀσκήσεις.

15. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ γινόμενα :

24.15 $\qquad$ $\left(-4\frac{5}{9}\right).1\frac{2}{3}$

$(-35).11$ $\qquad$ $\left(-1\frac{7}{8}\right).\left(-4\frac{11}{15}\right)$

$101.(-13)$ $\qquad$ $2,5.(-0,4)$

$(-7).2\frac{3}{7}$ $\qquad$ $\left(-4\frac{3}{4}\right).2,4$

$\left(-1\frac{1}{5}\right).\left(-3\frac{1}{6}\right)$ $\qquad$ $5\frac{5}{9}.(-4,5)$.

16. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων κατὰ δύο τρόπους :

$(-5+7).7$ $\qquad$ $(-2+6).(5-7)$

$(8-17).(-6)$ $\qquad$ $(-3,1+8,5).(-2,2-5,4)$

$(-2+7-3).(-5)$ $\qquad$ $(3-4-5).6+(-2-6+7).(-9)$.

28. Γινόμενον πολλῶν παραγόντων.—Τὸ γινόμενον πολλῶν παραγόντων ὁρίζεται ὅπως καὶ εἰς τὸ σύστημα τῶν ἀκεραίων καὶ τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν.

Οὕτω διὰ τὸ γινόμενον $(+5).(-3).(-4).(+7).(-2)$ λαμβάνομεν διαδοχικῶς

$$(+5).(-3) = -15, \qquad (-15).(-4) = +60$$
$$(+60).(+7) = +420, \qquad (+420).(-2) = -840$$

Ὥστε εἶναι :

$$(+5).(-3).(-4).(+7).(-2) = -840.$$

29. **Σημεῖον τοῦ γινομένου πολλῶν παραγόντων.**—Αἱ ἰδιότητες τοῦ γινομένου πολλῶν παραγόντων, τὰς ὁποίας ἐμάθομεν εἰς τὴν Ἀριθμητικήν, ἀληθεύουν, ὡς εἴδομεν, καὶ ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν τοῦ νέου συστήματος. Ἑπομένως ἀληθεύει καὶ ἡ ἰδιότης τῆς ἀντικαταστάσεως. Ἐὰν λοιπὸν εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα ἀντικαταστήσωμεν τοὺς θετικοὺς παράγοντας $(+5)$ καὶ $(+7)$, θὰ εὕρωμεν θετικὸν γινόμενον τὸ $+35$. Ἐὰν δὲ εὕρωμεν ἔπειτα τὸ γινόμενον τῶν λοιπῶν ἀρνητικῶν παραγόντων, τὸ σημεῖον αὐτοῦ εἶναι φανερόν, ὅτι δὲν θὰ ἀλλάξῃ, ὅταν θὰ τὸ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸν θετικὸν παράγοντα $+35$. Ἀλλ' ἐδῶ οἱ ἀρνητικοὶ παράγοντες εἶναι τρεῖς. Ἐπειδὴ δὲ οἱ δύο ἐξ αὐτῶν δίδουν γινόμενον θετικόν, τοῦτο πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸν τρίτον ἀρνητικὸν παράγοντα θὰ δώσῃ γινόμενον ἀρνητικόν, τὸ -24. Ὥστε τὸ ὅλον γινόμενον θὰ εἶναι ἀρνητικόν : $(-24).(+35) = -840$. Ἂν ὅμως οἱ ἀρνητικοὶ παράγοντες ἦσαν τέσσαρες, οὗτοι πολλαπλασιαζόμενοι ἀνὰ δύο θὰ ἔδιδον γινόμενον θετικόν. Ἑπομένως καὶ τὸ ὅλον γινόμενον θὰ ἦτο θετικόν. Συνάγομεν λοιπόν, ὅτι :

Τὸ σημεῖον τοῦ γινομένου πολλῶν παραγόντων ἐξαρτᾶται μόνον ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀρνητικῶν παραγόντων, καὶ 1) Εἶναι τοῦτο **θετικόν,** ἂν ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀρνητικῶν παραγόντων εἶναι **ἄρτιος** (ἢ 0). 2) Εἶναι **ἀρνητικόν**, ἂν ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀρνητικῶν παραγόντων εἶναι **περιττός**.

Πδ.
$$(-7).2.(-3).(-6) = -252$$
$$(-2).3.(-5).(-4).(-6) = +720$$

Σημείωσις α'. Εὑρίσκομεν ταχύτερον τὸ γινόμενον πολλῶν παραγόντων, ἂν εὕρωμεν πρῶτον τὸ σημεῖον αὐτοῦ, ὡς ἄνω εἴπομεν, καὶ ἔπειτα εὕρωμεν τὸ γινόμενον τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν παραγόντων.

Σημείωσις β'. Ὅταν εἷς τῶν παραγόντων γινομένου εἶναι 0, τὸ γινόμενον εἶναι 0. Ὅταν δὲ τὸ γινόμενον παραγόντων εἶναι 0, εἷς τοὐλάχιστον τῶν παραγόντων αὐτοῦ εἶναι 0.

30. Ἰδιότης τῆς ἰσότητος.— *Ἐὰν ἴσους ἀριθμοὺς πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, λαμβάνομεν γινόμενα ἴσα.* Διατί;

Ἀσκήσεις.

17. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ γινόμενα:

$$(+3) \cdot (-5) \cdot (-8) \cdot (+2)$$
$$(-4) \cdot (-5) \cdot 8 \cdot (-6)$$
$$(-10) \cdot (-2) \cdot 9 \cdot (-3) \cdot (-1)$$
$$\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \frac{2}{5} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{5}{6}\right)$$
$$1\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{5}{8}\right) \cdot 2\frac{3}{4}$$
$$(-1) \cdot (-2) \cdot (-0{,}3) \cdot (-0{,}5) \cdot (-4)$$
$$(-1{,}5) \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) \cdot 1\frac{1}{2} \cdot (-4) \cdot (-0{,}2).$$

31. Διαίρεσις.—Ἡ διαίρεσις καὶ εἰς τὴν Ἄλγεβραν ὁρίζεται ὡς πρᾶξις ἀντίστροφος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

Ἔστω ἡ διαίρεσις $(-8) : (+4)$. Τὸ ζητούμενον πηλίκον εἶναι -2, διότι $(-2) \cdot (+4) = -8$.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι

$(+8) : (-4) = -2$ ἢ ἁπλούστερον $8 : (-4) = -2$

$(-8) : (-4) = +2$ ἢ ἁπλούστερον $(-8) : (-4) = 2$.

Ἤτοι: ***Τὸ πηλίκον δύο ἀριθμῶν εἶναι τὸ πηλίκον τῶν ἀπολύτων τιμῶν αὐτῶν καὶ μὲ τὸ σημεῖον + μέν, ἂν οἱ ἀριθμοὶ εἶναι ὁμόσημοι, μὲ τὸ — δέ, ἂν οὗτοι εἶναι ἑτερόσημοι.***

32. Τὸ πηλίκον τοῦ 0 διαιρεθέντος δι' οἱουδήποτε ἄλλου ἀριθμοῦ εἶναι 0, ἤτοι $\frac{0}{\alpha} = 0$, διότι εἶναι $0 \cdot \alpha = 0$.

Διὰ τοῦ 0 οὐδεὶς ἀριθμὸς δύναται νὰ διαιρεθῇ· ἤτοι ***ἡ διὰ τοῦ 0 διαίρεσις εἶναι ἀδύνατος.*** Καὶ πράγματι οὐδεὶς ἀριθμὸς δύναται νὰ εἶναι πηλίκον τῆς τοιαύτης διαιρέσεως, διότι πᾶς ἀριθμὸς πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ 0 δίδει γινόμενον 0.

Ἀσκήσεις.

18. Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ διαιρέσεις:

$150 : 25$ $\qquad 9 : (-1{,}2)$

$(-240) : (-15)$ $\qquad (-3{,}4) : (-1{,}5)$

$216 : (-18)$ $\qquad$ $0{,}4 : (-0{,}15)$

$(-1001) : (-91)$ $\qquad$ $(-2{,}5) : \frac{1}{2}$

$\left(-2\frac{1}{4}\right) : 1\frac{1}{9}$ $\qquad$ $\left(-\frac{3}{4}\right) : (-0{,}5)$.

19. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ πηλίκα :

$2 . (-6) : (-12)$ $\qquad$ $(-600) : 2 . (-3) . (-5)$

$(30) : (-3) . (-5)$ $\qquad$ $2 . (-3) . (-5) : (-600)$

$5 . (-7) : (-0{,}35)$ $\qquad$ $(-2) . (-9) : (-6) . 3 . 15$.

20. Ἐπὶ ποῖον ἀριθμὸν πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ —25 διὰ νὰ δώσῃ γινόμενον 225 ; Καὶ ἐπὶ ποῖον ἀριθμὸν πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ καθεὶς τῶν κάτωθι ἀριθμῶν, διὰ νὰ δώσῃ γινόμενον τὸν ἀπέναντι αὐτοῦ ἀριθμόν ;

-17	-425	$\frac{1}{3}$	-1
32	-416	$1{,}6$	$-0{,}016$
-75	5	$-\frac{3}{5}$	$0{,}12$.

21. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων :

$(36-45-18+9) : 9$ $\qquad$ $(-120) : (7-12+11-21)$

$(56-64-80-120) : (-8)$ $\qquad$ $(-18) : (2-0{,}2)$.

22. Κινητόν τι κινούμενον ἐπ' εὐθείας, ἀναχωρεῖ ἀπὸ σημείου αὐτῆς Α καὶ φθάνει εἰς τὸ Β· εἶναι δὲ (ΑΒ)=18 μέτρα. Κατόπιν κινεῖται ἀντιθέτως μὲ ταχύτητα 1 μέτρου εἰς 5′. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ Α θὰ εὑρίσκεται τὸ κινητὸν μετὰ παρέλευσιν ἡμισείας ὥρας, ἀφ' ἧς ἀνεχώρησεν ἀπὸ τοῦ Β ;

23. Εἰς τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα νὰ εὑρεθῇ μετὰ πόσον χρόνον ἀπὸ τῆς ἀναχωρήσεώς του ἀπὸ τοῦ Β τὸ κινητόν, κινούμενον κατὰ τὴν ἀρνητικὴν φοράν, θὰ εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ Α ἴσην μὲ —12 μέτρα ;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III

ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΚΑΙ ΑΡΧΙΚΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΑΥΤΩΝ

33. Ὁρισμός.— Τὸ γινόμενον 5 . 5 . 5 λέγεται δύναμις τοῦ 5, τὸ δὲ γινόμενον (—5) . (—5) . (—5) . (—5) λέγεται δύναμις τοῦ —5. Καὶ τὸ γινόμενον ααααα λέγεται δύναμις τοῦ α. Ὥστε : ***Δύναμις ἀριθμοῦ λέγεται τὸ γινόμενον ἴσων παραγόντων πρὸς τὸν ἀριθμὸν αὐτόν.***

Αἱ δυνάμεις παριστῶνται ὅπως καὶ εἰς τὴν Ἀριθμητικήν· ὁ δὲ ἐκθέτης αὐτῶν, κατὰ τὸν ὁρισμόν, εἶναι ἀριθμὸς ἀκέραιος θετικὸς καὶ ὄχι μικρότερος τοῦ 2. Οὕτω γράφομεν :

$$5.5.5.=5^3 \text{ καὶ } (-5).(-5).(-5).(-5)=(-5)^4$$

καὶ $\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha=\alpha^5$

εἶναι δὲ $(-2)^5=(-2).(-2).(-2).(-2).(-2)$.

34. Σημεῖον τῶν δυνάμεων.—Ἀφοῦ αἱ δυνάμεις εἶναι γινόμενα παραγόντων, ἕπεται (§ 29), ὅτι :

1) ***Αἱ δυνάμεις τῶν θετικῶν ἀριθμῶν εἶναι πάντοτε θετικαί.*** Οὕτως εἶναι :

$$(+2)^3=+8, \quad (+2)^4=+16, \quad (+2)^5=+32.$$

2) ***Αἱ δυνάμεις τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν εἶναι θετικαὶ μὲν ὅταν ὁ ἐκθέτης εἶναι ἄρτιος, ἀρνητικαὶ δέ, ὅταν ὁ ἐκθέτης εἶναι περιττός.*** Οὕτως εἶναι :

$$(-3)^2=+9, \quad (-3)^3=-27, \quad (-3)^4=+81, \quad (-3)^5=-243.$$

Σημείωσις. Ἀλλὰ $-3^2=-9$, διότι $-3^2=-(+3)^2=-9$. Ὁμοίως εἶναι καὶ $-3^4=-81$.

Ἀσκήσεις.

24. Νὰ εὑρεθῇ ἡ δευτέρα, ἡ τρίτη, ἡ τετάρτη καὶ ἡ πέμπτη δύναμις καθενὸς τῶν ἀριθμῶν :

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5$$
$$(-1), \quad (-2), \quad (-3), \quad (-4), \quad (-5).$$

25. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι δυνάμεων :

$$(+6)^2, \quad (-6)^2, \quad -6^2, \quad (0{,}1)^2 \quad (0{,}2)^5$$
$$\left(\frac{3}{4}\right)^2, \quad \left(-\frac{2}{3}\right)^5, \quad \left(-\frac{1}{2}\right)^6, \quad (0{,}02)^2, \quad (0{,}03)^3.$$

26. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων :

$$(-1)^2+(-1)^3+(-1)^4+(-1)^5$$
$$(-1)^2-(-1)^3+(-1)^4-(-1)^5$$
$$(-1)^2+(-2)^3+(-3)^4+(-4)^5.$$

27. Νὰ εὑρεθοῦν ἐπίσης τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων :

$$(+2)^3+(-3)^2 \quad 3^3+(-3)^3 \quad 2^4+(-2)^4$$
$$(-5)^3-(+4)^2 \quad 3^3-(-3)^3 \quad 2^4-(-2)^4.$$

28. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων :

$$2^4.4^2 \quad 5^3.2^4 \quad (-0{,}2)^2.(-3)^3$$
$$2^5.5^3 \quad 2^5.10^3 \quad (0{,}1)^2.(-0{,}4)^3$$
$$(-3)^2.(-2)^3 \quad (-7)^3.(-1)^8 \quad \left(-\frac{2}{3}\right)^3.\left(-\frac{3}{4}\right)^2.$$

35. Ἀρχικαὶ ἰδιότητες τῶν δυνάμεων.— Ἀφοῦ αἱ δυνάμεις εἶναι γινόμενα, ἕπεται ὅτι αἱ ἰδιότητες αὐτῶν εὑρίσκονται ἀπὸ τὰς ἰδιότητας τοῦ πολλαπλασιασμοῦ. Εἶναι δὲ αἱ ἀρχικαὶ ἰδιότητες τῶν δυνάμεων αἱ ἑξῆς :

1) $\alpha^3 \,.\, \alpha^2 \,.\, \alpha^4 \,. = \alpha\alpha\alpha \,.\, \alpha\alpha \,.\, \alpha\alpha\alpha\alpha = \alpha^9\ (= \alpha^{3+2+4})$ καὶ γενικῶς εἶναι $\alpha^\mu \,.\, \alpha^\nu \,.\, \ldots\ldots \,.\, \alpha^\rho = \alpha^{\mu+\nu+\ldots\rho}$ ὅπου $\mu,\ \nu,\ \ldots\ldots,\ \rho$ εἶναι ἀκέραιοι θετικοί.

Ὥστε : ***Τὸ γινόμενον δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ εἶναι δύναμις τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ μὲ ἐκθέτην τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν.***

Πδ. $(-3)^3 \,.\, (-3)^5 \,.\, (-3)^2 = (-3)^{10}$.

2). Ἔστω, ὅτι τὴν δύναμιν $(-5)^3$ θέλομεν νὰ τὴν ὑψώσωμεν εἰς τὴν τετάρτην δύναμιν. Ἀλλὰ τότε εἶναι :

$[(-5)^3]^4 = (-5)^3.(-5)^3.(-5)^3.(-5)^3 = (-5)^{3+3+3+3} = (-5)^{3.4} = (-5)^{12}$

καὶ γενικῶς εἶναι $(\alpha^\mu)^\nu = \alpha^{\mu.\nu}$.

Ὥστε : ***Ὅταν ἔχωμεν νὰ ὑψώσωμεν δύναμιν ἀριθμοῦ εἰς ἄλλην δύναμιν, πολλαπλασιάζομεν τοὺς ἐκθέτας.***

3) Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ ὑψώσωμεν τὸ γινόμενον 2 . 5 . 7 εἰς τὴν τρίτην δύναμιν. Ἀλλὰ τότε ἔχομεν :

$$(2.5.7)^3 = 2.5.7.2.5.7.2.5.7 = 2^3.5^3.7^3$$

καὶ γενικῶς ἔχομεν $(\alpha.\beta.\gamma)^\mu = \alpha^\mu \,.\, \beta^\mu \,.\, \gamma^\mu$.

Ὥστε : ***Διὰ νὰ ὑψώσωμεν γινόμενον εἰς δύναμιν, ὑψοῦμεν ἕκαστον τῶν παραγόντων αὐτοῦ εἰς τὴν ἰδίαν δύναμιν.***

4) Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ ὑψώσωμεν τὸ κλάσμα $\frac{2}{3}$ εἰς τὴν τετάρτην δύναμιν. Ἀλλὰ τότε ἔχομεν :

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2}{3} \,.\, \frac{2}{3} \,.\, \frac{2}{3} \,.\, \frac{2}{3} = \frac{2^4}{3^4}$$

καὶ γενικῶς ἔχομεν $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\mu = \frac{\alpha^\mu}{\beta^\mu}$.

Ὥστε : ***Διὰ νὰ ὑψώσωμεν κλάσμα εἰς δύναμιν, ὑψοῦμεν καὶ τοὺς δύο ὅρους του εἰς τὴν αὐτὴν δύναμιν.***

36. Διαίρεσις δύο δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.— Ἔστω ἡ διαίρεσις $\alpha^7 : \alpha^3$. Ἀλλὰ τότε ἔχομεν :

$$\frac{\alpha^7}{\alpha^3} = \frac{\alpha.\alpha.\alpha.\alpha.\alpha.\alpha.\alpha}{\alpha.\alpha.\alpha} = \alpha^4\ (= \alpha^{7-3})$$

καὶ γενικῶς ἔχομεν, ὅταν $\mu > \nu$, $\frac{\alpha^\mu}{\alpha^\nu} = \alpha^{\mu-\nu}$

Ὥστε: ***Τὸ πηλίκον δύο δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ εἶναι δύναμις τοῦ ἀριθμοῦ τούτου ἔχουσα ἐκθέτην τὴν διαφορὰν τοῦ ἐκθέτου τοῦ διαιρέτου ἀπὸ τοῦ ἐκθέτου τοῦ διαιρετέου.***

37. Σημασία τῆς δυνάμεως α^1.—Ὅταν εἰς τὴν ὡς ἄνω διαίρεσιν ὁ ἐκθέτης τοῦ διαιρετέου εἶναι κατὰ μονάδα μεγαλύτερος τοῦ ἐκθέτου τοῦ διαιρέτου, ὡς εἰς τὴν διαίρεσιν $\alpha^6 : \alpha^5$, τότε, κατὰ τὰ ἀνωτέρω, ἔχομεν $\frac{\alpha^6}{\alpha^5} = \alpha^{6-5} = \alpha^1$. Ἀλλ' εἴδομεν προηγουμένως (§ 33), ὅτι ὁ ἐκθέτης πάσης δυνάμεως εἶναι ἀριθμὸς ἀκέραιος θετικὸς καὶ ὄχι μικρότερος τοῦ 2. Ὥστε ἡ δύναμις μὲ ἐκθέτην τὴν μονάδα 1 δὲν ἔχει σημασίαν· ἀλλ' ἐπειδὴ $\frac{\alpha^6}{\alpha^5} = \frac{\alpha.\alpha.\alpha.\alpha.\alpha.\alpha}{\alpha.\alpha.\alpha.\alpha.\alpha} = \alpha$, δεχόμεθα, ὅτι, ἐὰν $\alpha \neq 0$, εἶναι $\alpha^1 = \alpha$. Καὶ μὲ τὴν συμφωνίαν δὲ αὐτὴν αἱ ἀρχικαὶ ἰδιότητες τῶν δυνάμεων διατηροῦνται,

διότι π. χ. $\qquad \alpha^4.\alpha = \alpha\alpha\alpha\alpha.\alpha = \alpha^5$ καὶ $\alpha^4.\alpha^1 = \alpha^{4+1} = \alpha^5$.

38. Σημασία τῆς δυνάμεως α^0.—Ὅταν οἱ ἐκθέται τῶν δυνάμεων τοῦ ἀριθμοῦ εἶναι ἴσοι, ὡς εἰς τὴν διαίρεσιν $\alpha^5 : \alpha^5$, τότε κατὰ τὴν § 36 ἔχομεν $\frac{\alpha^5}{\alpha^5} = \alpha^0$· ἀλλὰ καὶ διὰ τὸν ἐκθέτην 0 παρατηροῦμεν ὅ,τι παρετηρήσαμεν καὶ διὰ τὸν ἐκθέτην 1. Ἀλλ' ἐπειδὴ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως ἴσων ἀριθμῶν εἶναι 1, ἤτοι ἐπειδὴ $\frac{\alpha^5}{\alpha^5} = 1$, δεχόμεθα, ὅτι, ἐὰν $\alpha \neq 0$, $\alpha^0 = +1$. Ἡ συμφωνία δὲ αὕτη δὲν μεταβάλλει τὰς ἀρχικὰς ἰδιότητας τῶν δυνάμεων, διότι

$$\alpha^\nu . 1 = \alpha^\nu \text{ καὶ } \alpha^\nu . \alpha^0 = \alpha^{\nu+0} = \alpha^\nu .$$

Ἀσκήσεις.

29. Νὰ εὕρῃς τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων, κατὰ δύο τρόπους, ἤτοι α΄) νὰ εὕρῃς χωριστὰ τὰς δυνάμεις καὶ ἔπειτα νὰ κάμῃς τὰς ἄλλας πράξεις, καὶ β΄) νὰ ἐφαρμόσῃς πρῶτον τὰς ἰδιότητας τῶν δυνάμεων: $2^4 . 2^2$, $\quad (-3)^2 . (-3)^3$, $\quad (10^2)^3$, $\quad [(-2)^3]^2$

$(2 . 3 . 5)^2$, $\quad [(-3) . (-5)]^2$, $\quad \left(\frac{2}{3}\right)^4$, $\quad \left(-\frac{3}{5}\right)^3$

$3^6 : 3^4$, $\quad (-5)^4 : (-5)^2$, $\quad (-2)^7 : (-2)^3$.

30. Αἱ δυνάμεις 9^3 καὶ 4^4 νὰ τραποῦν εἰς δυνάμεις τοῦ 3 καὶ τοῦ 2. Αἱ δὲ δυνάμεις 125^2 καὶ 8^4 νὰ τραποῦν εἰς δυνάμεις τοῦ 5 καὶ τοῦ 2.

31. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα:

25^1, $(-15)^1$, $\left(-\frac{3}{5}\right)^1$, $(-2)^5 : (-2)^4$

48^0, $(-59)^0$, $\left(-\frac{6}{11}\right)^0$, $(-3)^4 : (-3)^4$

$85^0 . (-42)^0$, $(-5)^1 . 90^0$, $(7^0)^5$, $(7^5)^0$

$15^0 . \left(\frac{3}{11}\right)^0$, $\left(15 \cdot \frac{8}{11}\right)^0$, $15^0 \cdot \frac{3^0}{11}$, $15^0 \cdot \frac{3}{11^0}$

$(-1)^5 . (-1)^0 . (-8)^0$, $(-9)^1 . (5-7)^0 . (5-7)^1$.

39. Δυνάμεις ἔχουσαι ἀρνητικὸν ἐκθέτην.— Ἐὰν θέλωμεν, ἵνα ἡ ἰσότης $\frac{\alpha^\mu}{\alpha^\nu} = \alpha^{\mu-\nu}$ ἀληθεύῃ καὶ ὅταν $\mu < \nu$, θὰ εὑρίσκωμεν εἰς τὰς περιπτώσεις αὐτὰς δυνάμεις μὲ ἐκθέτας ἀρνητικούς· π. χ. $\frac{\alpha^3}{\alpha^5} = \alpha^{3-5} = \alpha^{-2}$. Αἱ δυνάμεις ὅμως μὲ ἐκθέτην ἀρνητικὸν εἶναι ἄνευ ἐννοίας. Ἀλλ' ἐπειδὴ $\frac{\alpha^3}{\alpha^5} = \frac{\alpha.\alpha.\alpha}{\alpha.\alpha.\alpha.\alpha.\alpha} = \frac{1}{\alpha^2}$, δεχόμεθα, ὅτι, ἐὰν $\alpha \neq 0$, $\alpha^{-2} = \frac{1}{\alpha^2}$ καὶ γενικῶς ὅτι $\alpha^{-\lambda} = \frac{1}{\alpha^\lambda}$, ὅπου λ ἀκέραιος καὶ θετικός. Ὥστε: ***Πᾶσα δύναμις ἀριθμοῦ*** (διαφόρου τοῦ 0), ***ἡ ὁποία ἔχει ἐκθέτην ἀκέραιον ἀρνητικόν, ἰσοῦται μὲ κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν τὴν μονάδα καὶ παρονομαστὴν τὴν δύναμιν τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ἡ ὁποία ἔχει ἐκθέτην ἀντίθετον.*** Κατὰ ταῦτα, εἶναι:

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}, \quad (-3)^{-2} = \frac{1}{(-3)^2} = \frac{1}{9}, \quad \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{9}} = 9.$$

Σημείωσις. Ἀντιστρόφως δὲ εἶναι:

$$\frac{1}{2^3} = 2^{-3} \quad \text{καὶ} \quad \frac{1}{5^2} = 5^{-2}.$$

40. Αἱ ἰδιότητες τῶν δυνάμεων μὲ ἐκθέτας ἀκεραίους θετικοὺς ἰσχύουν καὶ διὰ τὰς δυνάμεις αὐτάς, ὡς συνάγεται ἀπὸ τὰ κάτωθι παραδείγματα:

1) $2^{-3} . 2^{-4} = \frac{1}{2^3} \cdot \frac{1}{2^4} = \frac{1}{2^3 . 2^4} = \frac{1}{2^7} = 2^{-7}$.

2) $(2.3.5)^{-2} = \frac{1}{(2.3.5)^2} = \frac{1}{2^2.3^2.5^2} = \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{3^2} \cdot \frac{1}{5^2} = 2^{-2} . 3^{-2} . 5^{-2}$

Ἀσκήσεις.

32. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι δυνάμεων:

2^{-1}, 2^{-2}, 2^{-5}, $(-2)^{-3}$

4^{-3}, 12^{-1}, 5^{-3}, $(-3)^{-5}$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}, \quad \left(\frac{1}{4}\right)^{-3}, \quad \left(\frac{2}{3}\right)^{-1}, \quad \left(\frac{3}{2}\right)^{-1}.$$

33. Νὰ ἐφαρμοσθοῦν αἱ ἰδιότητες τῶν δυνάμεων εἰς τὰ κάτωθι παραδείγματα:

$2^2 . 2^{-2}$,	$5^{-3} . 5^3$,	$3^5 . 3^{-2}$,	$7^2 , 7^{-4}$
$(3^5)^{-2}$,	$(2^{-3})^2$,	$(5^{-2})^{-3}$,	$(2.3.5)^{-3}$
$2^5 : 2^7$,	$2^{-5} : 2^7$,	$2^{-5} : 2^{-7}$,	$5^{-9} : 5^{-9}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV

ΠΕΡΙ ΑΝΙΣΟΤΗΤΩΝ

41. **Ἀνισότης θετικῶν καὶ ἀρνητικῶν ἀριθμῶν.**—Εἴδομεν εἰς τὴν Ἀριθμητικὴν ὅτι, ἐὰν $\alpha > \beta$, ἡ ἀφαίρεσις $\alpha - \beta$ εἶναι δυνατή. Ἀντιστρόφως δέ, ἐὰν ἡ ἀφαίρεσις $\alpha - \beta$ εἶναι δυνατή, τότε εἶναι $\alpha > \beta$. Ἑπομένως, ἐὰν ἡ ἀφαίρεσις $\alpha - \beta$ εἶναι ἀδύνατος, τότε εἶναι $\alpha < \beta$, ἢ μὲ ἄλλους λόγους, ἐὰν ἡ διαφορὰ $\alpha - \beta$ εἶναι θετικὸς ἀριθμός, τότε εἶναι $\alpha > \beta$, ἐὰν δὲ αὕτη εἶναι ἀρνητικὸς ἀριθμός, τότε εἶναι $\alpha < \beta$.

Τὴν ἰδιότητα αὐτὴν δεχόμεθα ὡς ἀληθῆ καὶ εἰς τὸ σύστημα τῶν θετικῶν καὶ ἀρνητικῶν ἀριθμῶν, ἤτοι δεχόμεθα ὅτι: ***Εἷς ἀριθμὸς α λέγεται μεγαλύτερος ἄλλου ἀριθμοῦ β, ἐὰν ἡ διαφορὰ α—β εἶναι θετικὸς ἀριθμός.***

Ἐκ τούτου ἕπονται τὰ ἑξῆς:

1) Ἡ διαφορὰ $(+5) - 0$ ἰσοῦται μὲ $+5$· ἄρα εἶναι $+5 > 0$· ἐπίσης ἡ διαφορὰ $(+8) - (-9)$ ἰσοῦται μὲ $+8 + (+9)$, ἤτοι εἶναι θετική· ἄρα $+8 > -9$. Ὅθεν: ***Πᾶς θετικὸς ἀριθμὸς εἶναι μεγαλύτερος τοῦ μηδενὸς καὶ παντὸς ἀρνητικοῦ ἀριθμοῦ.***

Ἑπομένως ἡ παράστασις $\alpha > 0$ φανερώνει, ὅτι ὁ α εἶναι ἀριθμὸς θετικός.

2) Ἐπειδὴ $0 - (-5) = 0 + (+5) = +5$

καὶ $0 - (-7) = +7$

ἕπεται, ὅτι $-5 < 0$ καὶ $-7 < 0$,

ἤτοι, ὅτι: ***Πᾶς ἀριθμὸς ἀρνητικὸς εἶναι μικρότερος τοῦ μηδενός.*** Ἑπομένως, εἶναι μικρότερος καὶ παντὸς θετικοῦ ἀριθμοῦ. Ἡ παράστασις ἄρα $\alpha < 0$ φανερώνει, ὅτι ὁ α εἶναι ἀριθμὸς ἀρνητικός.

3) Ἐπειδὴ $(-5) - (-7) = (-5) + (+7) = +2$

ἕπεται, ὅτι $-5 > -7$·

ὁμοίως, ἐπειδὴ $(-9)-(-4)=-9+(+4)=-5$.
ἕπεται, ὅτι $-9<-4$.

Συνάγεται λοιπόν, ὅτι: ***Ἐκ δύο ἀριθμῶν ἀρνητικῶν μεγαλύτερος εἶναι ὁ ἔχων τὴν μικροτέραν ἀπόλυτον τιμήν.***

42. **Ἰδιότητες.**—1) Ἔστω ἡ ἀνισότης $7>4$· τότε ἡ διαφορὰ $7-4$ εἶναι θετικὸς ἀριθμός. Ἀλλ' ἡ διαφορὰ αὐτὴ δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν προσθέσωμεν καὶ εἰς τοὺς δύο ὅρους της τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν π. χ. τὸν 5· ὥστε ἡ διαφορὰ $(7+5)-(4+5)$ εἶναι θετικὴ καὶ ἑπομένως εἶναι $7+5>4+5$. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι ἐὰν $\alpha>\beta$, θὰ εἶναι καὶ $\alpha+\gamma>\beta+\gamma$· ὅθεν:

Ἐὰν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη ἀνισότητος προσθέσωμεν τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, ἡ ἀνισότης μένει.

2) Ἔστωσαν αἱ ἀνισότητες $8>3$ καὶ $6>4$· ἀλλὰ τότε αἱ διαφοραὶ $8-3$ καὶ $6-4$ εἶναι θετικαί· ἄρα καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν $(8-3)+(6-4)$ εἶναι θετικόν· ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα τοῦτο γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς: $(8+6)-(3+4)$. Ὥστε εἶναι $8+6>3+4$· ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι, ἐὰν $\alpha>\beta$ καὶ $\gamma>\delta$ θὰ εἶναι καὶ $\alpha+\gamma>\beta+\delta$. Ὥστε: ***Ἐὰν προσθέσωμεν ἀνίσους ἀριθμοὺς εἰς ἀνίσους ἀλλὰ τὸν μεγαλύτερον εἰς τὸν μεγαλύτερον καὶ τὸν μικρότερον εἰς τὸν μικρότερον, ἡ ἀνισότης μένει.***

3) Ἔστω ἡ ἀνισότης $2>-9$· τότε ἡ διαφορὰ $2-(-9)$ εἶναι θετική. Ἐὰν δὲ πολλαπλασιάσωμεν αὐτὴν ἐπὶ θετικὸν ἀριθμόν, π. χ. ἐπὶ τὸν 5, τὸ γινόμενον, τὸ ὁποῖον θὰ λάβωμεν, θὰ εἶναι ἐπίσης θετικόν. Εἶναι δὲ τοῦτο $2.5-(-9).5$. Ὥστε εἶναι $2.5>(-9).5$. Ἂν ὅμως τὴν θετικὴν αὐτὴν διαφορὰν πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ ἀρνητικὸν ἀριθμόν, π. χ. ἐπὶ -5, τὸ γινόμενον $2.(-5)-(-9).(-5)$ θὰ εἶναι ἀρνητικόν. Ὥστε θὰ εἶναι $2.(-5)<(-9).(-5)$. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι, ἐὰν $\alpha>\beta$ καὶ μ θετικός, θὰ εἶναι $\alpha\mu>\beta\mu$· ἂν ὅμως ὁ μ εἶναι ἀρνητικός, θὰ εἶναι $\alpha\mu<\beta\mu$. Ἤτοι:

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὰ δύο μέλη ἀνισότητος ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, διάφορον τοῦ μηδενός, ἡ ἀνισότης μένει μὲν ἐὰν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι θετικός, ἀντιστρέφεται δὲ ἐὰν εἶναι ἀρνητικός.

Πδ. Ἐπειδὴ εἶναι $-3>-5$
θὰ εἶναι $(-3).(+4)>(-5).(+4)$, ἤτοι $-12>-20$

καὶ $(-3).(-4) < (-5).(-4)$, ἤτοι $12 < 20$.

43. Πόρισμα 1ον. *Ἐὰν διαιρέσωμεν τὰ δύο μέλη ἀνισότητος διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ἡ ἀνισότης μένει μὲν ἐὰν ὁ διαιρέτης εἶναι θετικός, ἀντιστρέφεται δὲ ἐὰν εἶναι ἀρνητικὸς* (§ 31).

Πδ. Ἐπειδὴ εἶναι $-4 > -8$

θὰ εἶναι $(-4):(+2) > (-8):(+2)$

ἤτοι $-2 > -4$ καὶ $(-4):(-2) < (-8):(-2)$, ἤτοι $2 < 4$.

44. Πόρισμα 2ον. *Ἐὰν ἀλλάξωμεν τὰ σημεῖα ἀμφοτέρων τῶν μελῶν μιᾶς ἀνισότητος, ἡ ἀνισότης ἀντιστρέφεται.*

Π.χ. ἐκ τῆς ἀνισότητος $-6 > -12$ προκύπτει διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ -1 (ἤτοι διὰ τῆς ἀλλαγῆς τῶν σημείων) $+6 < +12$.

Ἀσκήσεις.

34. Αἱ κάτωθι σειραὶ τῶν ἀριθμῶν νὰ καταταχθοῦν κατὰ τάξιν μεγέθους αὐξανομένου:

$$1, \quad -\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad -\frac{1}{4}, \quad \frac{1}{5}, \quad -\frac{1}{6}, \quad \frac{1}{7}$$

$$-1, \quad 5, \quad -\frac{3}{4} \quad -\frac{5}{8}, \quad 7, \quad \frac{1}{4}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V

ΑΛΓΕΒΡΙΚΑΙ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΚΑΙ ΔΙΑΦΟΡΑ ΕΙΔΗ ΑΥΤΩΝ

45. **Τύποι.**—Ἡ ἀριθμητικὴ λύσις ἑνὸς προβλήματος δὲν φανερώνει τὰς πράξεις, αἱ ὁποῖαι ἔγιναν διὰ νὰ λάβωμεν τὸ ἐξαγόμενον αὐτοῦ. Ἂς ὑποθέσωμεν π.χ., ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸν τόκον κεφαλαίου 17500 δρχ. πρὸς 6 % ἐπὶ 3 ἔτη. Ὁ ζητούμενος τόκος κατὰ τὰ γνωστὰ ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς εἶναι 3150 δραχμαί. Ἀλλὰ τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο δὲν φανερώνει τὴν σειρὰν τῶν πράξεων, αἱ ὁποῖαι ἔγιναν, ἐνῷ, ἐὰν παραστήσωμεν τὸν τόκον διὰ τοῦ τ, τὸ κεφάλαιον διὰ τοῦ κ, τὸν χρόνον εἰς ἔτη διὰ τοῦ χ καὶ τὸ ἐπιτόκιον διὰ τοῦ ε, θὰ εὕρωμεν τὸν ἄγνωστον τόκον, ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὰς πράξεις ὡς δεικνύει ἡ παράστασις

$$\frac{\kappa.\varepsilon.\chi.}{100}, \text{ ἤτοι εἶναι } \tau = \frac{\kappa.\varepsilon.\chi.}{100}$$

Ἡ ἰσότης αὐτὴ λέγεται, ὡς εἴδομεν (Ἀριθμ. § 232), **τύπος** τοῦ τόκου. Γενικῶς δέ: ***Τύπος λέγεται ἡ ἰσότης, ἡ ὁποία δεικνύει τὰ πράξεις, αἱ ὁποῖαι πρέπει νὰ γίνουν ἐπὶ τῶν δεδομένων*** (τὰ ὁποῖ παριστῶνται διὰ γραμμάτων), ***ἵνα εὑρεθῇ ὁ ἄγνωστος.***

46. Πλεονεκτήματα τῶν τύπων.—1) Εἷς τύπος δεικνύει κατ τρόπον σαφῆ τὰς σχέσεις, αἱ ὁποῖαι ὑπάρχουν μεταξὺ τῶν δεδομένω καὶ τοῦ ἀγνώστου ἑνὸς προβλήματος.

2) Εἷς τύπος ἐπιτρέπει νὰ λύσωμεν ὅλα τὰ προβλήματα, τὰ ὁποῖ διαφέρουν μόνον κατὰ τὰ ἀριθμητικὰ δεδομένα. Πρὸς τοῦτο δὲ ἀρκεῖ νὰ ἀντικαταστήσωμεν τὰ γράμματα διὰ τῶν τιμῶν των.

3) Διὰ τοῦ μετασχηματισμοῦ ἑνὸς τύπου εὑρίσκομεν νέους τύπους, διὰ τῶν ὁποίων δυνάμεθα νὰ λύσωμεν νέα προβλήματα. Οὕτως ἐκ τοῦ τύπου τοῦ τόκου εὑρίσκομεν τοὺς τύπους:

$$\kappa = \frac{100.\tau}{\varepsilon.\chi}, \qquad \chi = \frac{100.\tau}{\kappa.\varepsilon}, \qquad \varepsilon = \frac{100.\tau}{\kappa.\chi},$$

διὰ τῶν ὁποίων λύομεν τὰ προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται τὸ κεφάλαιον, ὁ χρόνος, καὶ τὸ ἐπιτόκιον.

47. Σημασία τῶν τύπων.—Εἰς τὴν Ἀριθμητικὴν ἡ χρῆσις τῶν τύπων εἶναι πολὺ περιωρισμένη, ἐνῷ εἰς τὴν Ἄλγεβραν εἶναι γενική, διότι αὕτη ζητεῖ νὰ δώσῃ εἰς πᾶν ζήτημα μαθηματικὸν μίαν λύσιν γενικήν, ἐκφραζομένην μὲ ἕνα ἢ πολλοὺς τύπους.

Ὁ τρόπος, κατὰ τὸν ὁποῖον αἱ διάφοροι ποσότητες, αἱ ὁποῖαι εἰσέρχονται εἰς τὰ διάφορα ζητήματα, παριστῶνται γενικῶς διὰ γραμμάτων, καὶ ὁ ἄλλος, κατὰ τὸν ὁποῖον ἡ ζητουμένη λύσις ἑνὸς ζητήματος δίδεται διὰ τύπου καὶ ὄχι δι' ἀριθμοῦ, εἶναι σπουδαιοτάτης σημασίας. Ἡ ταχεῖα δὲ ἀνάπτυξις τῶν μαθηματικῶν χρονολογεῖται ἀπὸ τῆς ἐποχῆς (ἀπὸ τοῦ 16ου αἰῶνος), κατὰ τὴν ὁποίαν ἔγινε χρῆσις τῶν ἄνω τρόπων. Ἀλλὰ πρὶν ἴδωμεν λεπτομερείας τούτων, θὰ ἴδωμεν πῶς ἡ Ἄλγεβρα κατατάσσει τοὺς τύπους καὶ πῶς ἁπλοποιεῖ αὐτούς.

48. Ἀλγεβρικὴ παράστασις ἢ ἀλγεβρικὸς τύπος.—Τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν α καὶ β παριστᾶται διὰ τοῦ $\alpha+\beta$. Ἡ παράστασις αὐτὴ λέγεται **ἀλγεβρικὴ παράστασις** ἢ **ἀλγεβρικὸς τύπος**· ὁμοίως αἱ παραστάσεις:

$$\alpha^2-\beta^2, \quad 5\alpha\beta, \quad \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}, \quad 2\varrho(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$$

εἶναι ἀλγεβρικαί.

Γενικῶς δέ: ***Ἀλγεβρικὴ παράστασις ἢ ἀλγεβρικὸς τύπος λέγεται πᾶν σύνολον γραμμάτων ἢ γραμμάτων καὶ ἀριθμῶν συνδεομένων διὰ τῶν σημείων τῶν πράξεων.***

Εἰς τὰς ἀλγεβρικὰς παραστάσεις ὑποθέτομεν πρὸς τὸ παρὸν σημειουμένας μόνον τὰς τέσσαρας θεμελιώδεις πράξεις, διότι μόνον αὐτὰς εἴδομεν μέχρι τοῦδε.

49. Μονώνυμα.—Εἰς τὰς παραστάσεις:

$$+\chi, \quad -\chi, \quad 7\alpha\beta, \quad -3\alpha^2\beta, \quad -\frac{2}{3}\alpha\beta^2, \quad \frac{5\alpha}{\beta}, \quad -\frac{8\alpha\beta}{\gamma}$$

παρατηροῦμεν, ὅτι δὲν εἶναι σημειωμένη οὔτε πρόσθεσις, οὔτε ἀφαίρεσις. Αἱ τοιαῦται παραστάσεις λέγονται **μονώνυμα**.

Τί λέγεται λοιπὸν μονώνυμον;

50. Ἀκέραια καὶ κλασματικὰ μονώνυμα.—Εἰς τὰ ἄνω μονώνυμα:

$$+\chi\ (=+1.\chi), \quad -\chi\ (=-1.\chi), \quad 7\alpha\beta, \quad -3\alpha^2\beta, \quad -\frac{2}{3}\alpha\beta^2$$

παρατηροῦμεν, ὅτι δὲν περιέχεται διαίρεσις διὰ γράμματος· ταῦτα λέγονται διὰ τοῦτο **ἀκέραια,** ἐνῷ τὰ $\frac{5\alpha}{\beta}$, $-\frac{8\alpha\beta}{\gamma}$, εἰς τὰ ὁποῖα περιέχεται διαίρεσις διὰ γράμματος, λέγονται **κλασματικά**.

Πότε λοιπὸν ἓν μονώνυμον λέγεται ἀκέραιον καὶ πότε κλασματικόν;

51. Συντελεστὴς μονωνύμου.—Εἰς τὰ μονώνυμα τῆς § 49 παρατηροῦμεν, ὅτι ὑπάρχουν καὶ ἀριθμητικοὶ παράγοντες, οἱ ὁποῖοι εἶναι γραμμένοι πρῶτοι.

Ὁ ἀριθμητικὸς παράγων μονωνύμου (ὅστις γράφεται πρῶτος) ***λέγεται συντελεστὴς αὐτοῦ.*** Ὥστε τῶν ἄνω μονωνύμων συντελεσταὶ εἶναι οἱ ἀριθμοὶ

$$1, \quad -1, \quad 7, \quad -3, \quad -\frac{2}{3}, \quad 5, \quad -8.$$

Σημείωσις. Ὁ ἀριθμητικὸς παράγων μονωνύμου εἶναι συντελεστὴς αὐτοῦ ὡς πρὸς ὅλα τὰ γράμματα, τὰ ὁποῖα περιέχει. Δυνάμεθα ὅμως νὰ ἔχωμεν καὶ συντελεστὴν μονωνύμου ὡς πρὸς ἓν μόνον γράμμα ἢ καὶ πρὸς περισσότερα. Τότε συντελεστὴς τοῦ μονωνύμου λέγεται τὸ γινόμενον τῶν λοιπῶν γραμμάτων αὐτοῦ ἐπὶ τὸν ἀριθμητικόν του παράγοντα. Οὕτω τοῦ μονωνύμου $3\alpha\beta\chi$ συντελεστὴς ὡς πρὸς τὸ χ εἶναι τὸ γινόμενον $3\alpha\beta$, ὡς πρὸς $\beta\chi$ τὸ 3α καὶ ὡς πρὸς τὸ β τὸ $3\alpha\chi$.

52. **Βαθμὸς ἀκεραίου μονωνύμου.**—Εἰς τὰ ἀκέραια μονώνυμα ἐξετάζομεν καὶ τὸν **βαθμὸν** ἢ πρὸς ἓν γράμμα, τὸ ὁποῖον περιέχει τὸ θεωρούμενον μονώνυμον, ἢ πρὸς πολλὰ γράμματα αὐτοῦ. Καὶ ***βαθμὸς ἀκεραίου μονωνύμου πρὸς ἓν γράμμα αὐτοῦ λέγεται ὁ ἐκθέτης τοῦ γράμματος τούτου· πρὸς πολλὰ δὲ γράμματα αὐτοῦ λέγεται τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν τῶν γραμμάτων τούτων.***

Οὕτω τὸ μονώνυμον $9\alpha^3\beta^2\gamma$ εἶναι πρὸς τὸ α τρίτου βαθμοῦ, πρὸς τὸ β δευτέρου βαθμοῦ, πρὸς τὸ γ πρώτου βαθμοῦ, πρὸς τὰ γράμματα α καὶ γ τετάρτου βαθμοῦ, πρὸς ὅλα δὲ τὰ γράμματα αὐτοῦ ἕκτου βαθμοῦ κ.ο.κ.

Σημείωσις. Ἐπειδὴ

$$9\alpha^3\beta^2\gamma = 9\alpha^3\beta^2\gamma.\delta^0 = 9\alpha^3\beta^2\gamma.\varepsilon^0,$$

ἔπεται, ὅτι πᾶν μονώνυμον ὡς τὸ $9\alpha^3\beta^2\gamma$ εἶναι βαθμοῦ 0 πρὸς πᾶν γράμμα, τὸ ὁποῖον δὲν περιέχεται εἰς αὐτό.

53. **Πολυώνυμα.**—Ἐὰν ἔχωμεν πολλὰ μονώνυμα ὡς τὰ

$$+8\alpha^3, \quad -7\alpha^2\beta, \quad -3\alpha\beta^2, \quad +5\beta^3$$

καὶ γράψωμεν τὸ ἓν μετὰ τὸ ἄλλο καὶ ἕκαστον μετὰ τοῦ σημείου του ὡς ἑξῆς:

$$+8\alpha^3 - 7\alpha^2\beta - 3\alpha\beta^2 + 5\beta^3$$

ἢ

$$8\alpha^3 - 7\alpha^2\beta - 3\alpha\beta^2 + 5\beta^3$$

(ἐπειδὴ τὸ σημεῖον τοῦ πρώτου ὅρου εἶναι +), τότε ἔχομεν ἄθροισμα μονωνύμων. Λέγεται δὲ τὸ ἄθροισμα τοῦτο **πολυώνυμον**. Πολυώνυμον εἶναι καὶ ἡ παράστασις π.χ.

$$-5\chi^4 + 4\chi^2\psi - 5\chi\psi^3 + 9\psi^4,$$

ἡ ὁποία εἶναι ἄθροισμα τῶν μονωνύμων

$$-5\chi^4, \quad 4\chi^2\psi, \quad -5\chi\psi^3, \quad 9\psi^4.$$

Ἐπίσης καὶ ἡ παράστασις $\chi^2 - 2\chi + 3$.

Ὥστε: ***Πολυώνυμον λέγεται τὸ ἄθροισμα μονωνύμων καὶ ἑνὸς γνωστοῦ ἀριθμοῦ, ὅστις δύναται νὰ εἶναι καὶ μηδέν.***

54. **Ὅροι τοῦ πολυωνύμου.**—Τὰ μονώνυμα καὶ ὁ γνωστὸς ἀριθμός, ἐξ ὧν ἀποτελεῖται τὸ πολυώνυμον μετὰ τῶν πρὸ αὐτῶν σημείων των λέγονται **ὅροι** τοῦ πολυωνύμου. Οὕτω τοῦ δευτέρου πολυωνύμου τῆς προηγουμένης παραγράφου ὅροι εἶναι οἱ

$$-5\chi^4, \quad 4\chi^2\psi, \quad -5\chi\psi^3, \quad 9\psi^4.$$

Τοῦ δὲ τελευταίου, ὅροι εἶναι οἱ $\chi^2, \quad -2\chi, \quad 3.$

55. **Διώνυμον, τριώνυμον.**—Ἐὰν οἱ ὅροι τοῦ πολυωνύμου εἶναι δύο, τότε τοῦτο λέγεται **διώνυμον**, ἐὰν δὲ τρεῖς, τότε λέγεται **τριώνυμον**. Κατὰ ταῦτα, ἡ παράστασις $\alpha^2 - \beta^2$ εἶναι διώνυμον, ἡ δὲ $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$ εἶναι τριώνυμον.

56. **Ἀκέραια πολυώνυμα.**—Εἰς τὰ ἀνωτέρω πολυώνυμα παρατηροῦμεν, ὅτι ὅλα τὰ μονώνυμα, ἐκ τῶν ὁποίων ἀποτελοῦνται, εἶναι ἀκέραια. Λέγονται δὲ διὰ τοῦτο **ἀκέραια πολυώνυμα**.

Πότε λοιπὸν ἓν πολυώνυμον λέγεται ἀκέραιον;

57. **Βαθμὸς ἀκεραίου πολυωνύμου.**—Βαθμὸς ἀκεραίου πολυωνύμου πρὸς ἓν γράμμα αὐτοῦ λέγεται ὁ μέγιστος τῶν βαθμῶν τῶν ὅρων αὐτοῦ πρὸς τὸ γράμμα τοῦτο. Οὕτω τὸ πολυώνυμον $\alpha^3 - 3\alpha^2\chi + 5\alpha\chi^5$ εἶναι πρὸς τὸ α τρίτου βαθμοῦ, πρὸς δὲ τὸ χ πέμπτου βαθμοῦ.

Σημείωσις. Τὸ ἀνωτέρω πολυώνυμον πρὸς τὰ γράμματα α καὶ χ εἶναι ἕκτου βαθμοῦ.

58. **Πολυώνυμα ὁμογενῆ.**—Τὸ πολυώνυμον $5\alpha^3 - 8\alpha^2\beta + 7\beta^3$ παρατηροῦμεν, ὅτι ἀποτελεῖται ἀπὸ μονώνυμα τοῦ αὐτοῦ βαθμοῦ πρὸς τὰ γράμματα α καὶ β. Λέγεται δὲ διὰ τοῦτο **ὁμογενές**. Ὁμογενῆ εἶναι καὶ τὰ πολυώνυμα:

$$\chi^4 + \chi^2\psi^2 + \psi^4, \qquad \chi^2 + \alpha\psi^2$$

πρὸς τὰ γράμματα χ καὶ ψ.

Πότε λοιπὸν ἓν πολυώνυμον λέγεται ὁμογενές;

Ἀσκήσεις.

35. Ποῖος εἶναι ὁ βαθμὸς πρὸς καθὲν γράμμα χωριστὰ ἢ πρὸς ὅλα τὰ γράμματα τῶν κάτωθι μονωνύμων;

$$3\alpha\beta^2, \qquad -5\alpha^2\beta\gamma, \qquad \alpha^3\beta\gamma^4\delta, \qquad -\frac{3}{7}\chi^2\psi^3\varphi.$$

Ποῖοι εἶναι οἱ συντελεσταὶ τῶν ἀνωτέρω μονωνύμων;

36. Ποῖος εἶναι ὁ βαθμὸς τῶν πολυωνύμων:

1) $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma$ πρὸς τὸ χ;
2) $\alpha\chi + \beta\psi$ πρὸς τὸ χ; πρὸς τὸ ψ;
3) $5\alpha^3 - 4\alpha^2\beta^2 + 7\alpha^4\beta^3 - \beta^5$ πρὸς τὸ α; πρὸς τὸ β;
4) $\alpha\chi^3 + \beta\chi^2\psi + \gamma\chi\psi^2 + \delta\psi^3$ πρὸς τὰ χ καὶ ψ;

Ἐκ τῶν πολυωνύμων τούτων εἶναι κανὲν ὁμογενές; Καὶ ποῖον

59. **Ἀριθμητικὴ τιμὴ ἀλγεβρικῆς παραστάσεως.**—Γνωρίζο-

μεν ὅτι τὰ γράμματα, τὰ ὁποῖα ὑπάρχουν εἰς τὰς παραστάσεις, παριστοῦν ἀριθμούς. Ἐὰν λοιπὸν εἰς μίαν ἀλγεβρικὴν παράστασιν ἕκαστον τῶν γραμμάτων ἀντικατασταθῇ ὑπὸ ἀριθμοῦ καὶ ἐκτελεσθοῦν αἱ σημειωμέναι πράξεις, τὸ ἐξαγόμενον, τὸ ὁποῖον θὰ λάβωμεν, λέγεται **ἀριθμητικὴ τιμὴ** τῆς παραστάσεως. Ὁ ἀριθμός, διὰ τοῦ ὁποίου ἀντικαθιστῶμεν γράμμα τι, λέγεται **τιμὴ** τοῦ αὐτοῦ γράμματος.

Οὕτως ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς παραστάσεως

$3\alpha^2+5$ διὰ $\alpha=2$ εἶναι $3.2^2+5=12+5=17$,

ἡ δὲ τιμὴ τῆς παραστάσεως

$\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$ διὰ $\alpha=4$ καὶ $\beta=2$

εἶναι $4^3+3.4^2.2+3.4.2^2+2^3=64+96+48+8=216$

καὶ διὰ $\alpha=4$ καὶ $\beta=-2$

εἶναι $4^3+3.4^2.(-2)+3.4.(-2)^2+(-2)^3=64-96+48-8=8$.

Ἐκ τοῦ παραδείγματος δὲ αὐτοῦ βλέπομεν, ὅτι ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ παραστάσεως ἐξαρτᾶται ἐκ τῶν τιμῶν τῶν γραμμάτων, τὰ ὁποῖα περιέχει, ἀλλ' ὅταν αἱ τιμαὶ τῶν γραμμάτων δοθοῦν, ἡ τιμὴ αὐτῆς εἶναι ἐντελῶς ὡρισμένη.

Σημείωσις. Κατὰ τὴν εὕρεσιν τῆς τιμῆς τῆς ἀλγεβρικῆς παραστάσεως ἐκτελοῦμεν γενικῶς πρῶτον τοὺς πολλαπλασιασμοὺς καὶ τὰς διαιρέσεις καὶ ἔπειτα τὰς προσθέσεις καὶ ἀφαιρέσεις. Ἐὰν περιέχῃ ὅρους κλασματικούς, ἐκτελοῦμεν τὰς σημειουμένας πράξεις χωριστὰ εἰς τὸν ἀριθμητὴν καὶ χωριστὰ εἰς τὸν παρονομαστήν. Ἐπίσης, ἐὰν ἔχῃ παρενθέσεις ἢ ἀγκύλας, ἐκτελοῦμεν χωριστὰ τὰς πράξεις τῶν παραστάσεων, αἱ ὁποῖαι εὑρίσκονται ἐντὸς τῶν παρενθέσεων ἢ τῶν ἀγκυλῶν.

Ἀσκήσεις.

37. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀριθμητικαὶ τιμαὶ τῶν παραστάσεων:

1)	$\chi-3\psi$	ἐὰν $\chi=10$	$\psi=4$
2)	$\chi+3\psi$	» $\chi=10$	$\psi=-4$
3)	$\chi^2-9\psi$	» $\chi=-3$	$\psi=-2$
4)	$2\chi^2+3\psi^2$	» $\chi=-1$	$\psi=-4$
5)	$\chi^2+2\chi\psi+\psi^2$	» $\chi=7$	$\psi=-3$
6)	α^3+8	» $\alpha=-5$	
7)	$\alpha^3+\beta^3$	» $\alpha=1$	$\beta=-6$
8)	$(\alpha-\beta)^3$	» $\alpha=-4$	$\beta=1$
9)	$\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$	» $\alpha=6$	$\beta=-2$
10)	$\alpha^4-\beta^4$	» $\alpha=4$	$\beta=-3$

11)	$\alpha^4 + 5\beta\gamma$	ἐὰν $\alpha = 3$	$\beta = -4$,	$\gamma = 4$
12)	$8\alpha^2 - 9\beta^2 - 11\gamma^2 + 6\alpha\beta\gamma$	» $\alpha = 1$	$\beta = 3$	$\gamma = -5$
13)	$3\chi - 8\psi$	» $\chi = 3$	$\psi = \frac{1}{4}$	
14)	$9\chi - 5\psi$	» $\chi = \frac{1}{5}$	$\psi = -\frac{1}{9}$	
15)	$(2\psi + 3\omega)^2$	» $\psi = -\frac{1}{2}$	$\omega = -\frac{1}{3}$	
16)	$(\alpha - \beta)^2 - (\alpha + \beta)^2$	» $\alpha = -9$	$\beta = 5$	
17)	$(\alpha + \beta + \gamma)^2 + (\beta + \gamma - \alpha)^2$	» $\alpha = 2$	$\beta = -2$,	$\gamma = 2$
18)	$\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{3} + \frac{\alpha\beta}{6}$	» $\alpha = \frac{1}{3}$	$\beta = \frac{1}{2}$	
19)	$\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}$	» $\nu = -2, -1, 0, 1, 2, 3$		
20)	$2\chi^2 - 5\chi + 2$	» $\chi = -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}$.		

60. Ἴσαι ἀλγεβρικαὶ παραστάσεις.—Ἐκ τῆς ἀλγεβρικῆς παραστάσεως $\alpha+\beta+\gamma+\delta$, συνεπείᾳ τῆς ἰδιότητος τῆς ἀδιαφορίας, προκύπτει ἡ παράστασις $\alpha+\delta+\gamma+\beta$. Αἱ παραστάσεις αὗται λέγονται **ἴσαι.** Ἐπίσης ἴσαι εἶναι καὶ αἱ παραστάσεις $\varphi(\chi+\psi) = \varphi\chi + \varphi\psi$, διότι ἡ δευτέρα προκύπτει ἐκ τῆς πρώτης συνεπείᾳ τῆς ἐπιμεριστικῆς ἰδιότητος. Ὥστε: ***Δύο ἀλγεβρικαὶ παραστάσεις λέγονται ἴσαι, ὅταν ἡ μία προκύπτει ἐκ τῆς ἄλλης διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τῶν ἰδιοτήτων τῶν πράξεων.***

61. Ταυτότητες.—Εἴδομεν προηγουμένως, ὅτι εἶναι

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta = \alpha+\delta+\gamma+\beta.$$

Εἶναι δὲ φανερόν, ὅτι ἡ ἰσότης αὐτὴ ἀληθεύει, οἱασδήποτε τιμὰς καὶ ἂν λάβουν τὰ γράμματα $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Ὁμοίως εἶναι φανερόν, ὅτι καὶ ἡ ἰσότης $\varphi(\chi+\psi) = \varphi\chi+\varphi\psi$ ἀληθεύει, οἱασδήποτε τιμὰς καὶ ἂν λάβουν τὰ γράμματα φ, χ, ψ. Αἱ τοιαῦται ἰσότητες λέγονται **ταυτότητες**. Γενικῶς δέ: ***Ταυτότης λέγεται ἡ ἰσότης, ἡ ὁποία ἀληθεύει διὰ πάσας τὰς τιμὰς τῶν γραμμάτων, τὰ ὁποῖα περιέχει.***

62. Ἀλγεβρικὸς λογισμός. Σκοπὸς αὐτοῦ.—Ὅταν μίαν ἀλγεβρικὴν παράστασιν μετασχηματίζωμεν εἰς ἄλλην ἴσην, δυνάμει τῶν ἰδιοτήτων τῶν πράξεων, ἐκτελοῦμεν **ἀλγεβρικὴν πρᾶξιν.** Τὸ σύνολον δὲ τῶν ἀλγεβρικῶν πράξεων λέγεται **ἀλγεβρικὸς λογισμός.**

Ὁ ἀλγεβρικὸς λογισμός, ἤτοι αἱ ἀλγεβρικαὶ πράξεις, γίνονται ἐπὶ τῶν ἀλγεβρικῶν παραστάσεων ὄχι διὰ νὰ εὕρωμεν ἓν ἀριθμητικὸν ἐξαγόμενον, ὡς γίνεται εἰς τὴν Ἀριθμητικήν, ἀλλὰ διὰ νὰ μετασχηματίσωμεν τὰς παραστάσεις εἰς ἄλλας ἴσας, ἀλλ' ***ἁπλουστέρας. Ὁ μετασχηματισμὸς δὲ οὗτος τῶν ἀλγεβρικῶν παραστάσεων εἶναι εἷς ἐκ τῶν κυριωτέρων σκοπῶν τῆς Ἀλγέβρας.***

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VI

ΠΡΑΞΕΙΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

Α') ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ

63. Εἰς τὴν § 53 εἴδομεν πῶς προσθέτομεν μονώνυμα καὶ ὅτι τὸ ἄθροισμα μονωνύμων εἶναι ἐν γένει ἓν πολυώνυμον. Ἡ πρόσθεσις λοιπὸν δύο πολυωνύμων εἶναι πρόσθεσις δύο ἀθροισμάτων. Καὶ κατὰ συνέπειαν: ***Διὰ νὰ προσθέσωμεν ἓν πολυώνυμον εἰς ἄλλο, ἀρκεῖ νὰ σχηματίσωμεν ἓν πολυώνυμον περιέχον ὅλους τοὺς ὅρους τῶν δύο πολυωνύμων καὶ ἕκαστον μετὰ τοῦ σημείου του.***

Οὕτως εἶναι $(8\alpha^3-7\alpha^2\beta+5\beta^3)+(-5\alpha^3+3\alpha^2\beta-4\alpha\beta^2-2\beta^3)=$
$=8\alpha^3-7\alpha^2\beta+5\beta^3-5\alpha^3+3\alpha^2\beta-4\alpha\beta^2-2\beta^3.$

Φανερὸν δὲ εἶναι, ὅτι τὰ ἀνωτέρω ἰσχύουν καὶ ὅταν ἔχωμεν νὰ προσθέσωμεν ὁσαδήποτε πολυώνυμα.

Ὁμοίως εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ ἀθροίσματος ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμητικῶν τιμῶν τῶν προσθετέων (πολυωνύμων ἢ καὶ μονωνύμων).

64. **Ὅμοιοι ὅροι.**—Εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα παρατηροῦμεν, ὅτι οἱ ὅροι $8\alpha^3$ καὶ $-5\alpha^3$ τοῦ ἀθροίσματος διαφέρουν μόνον κατὰ τὸν συντελεστήν· τὸ αὐτὸ παρατηροῦμεν καὶ εἰς τοὺς ὅρους $-7\alpha^2\beta$ καὶ $3\alpha^2\beta$, ὡς καὶ εἰς τοὺς $5\beta^3$ καὶ $-2\beta^3$. ***Οἱ ὅροι, οἱ ὁποῖοι διαφέρουν μόνον κατὰ τὸν συντελεστὴν*** (ἢ οὐδόλως διαφέρουν), ***λέγονται ὅμοιοι.***

65. **Ἀναγωγὴ ὁμοίων ὅρων.**—Τὸ ἄθροισμα τῶν ὁμοίων ὅρων $8\alpha^3$ καὶ $-5\alpha^3$, ἤτοι τὸ $8\alpha^3-5\alpha^3$, εἶναι φανερόν, ὅτι ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον $(8-5)\alpha^3=3\alpha^3$.

Ἐπίσης εἶναι φανερόν, ὅτι

$$-7\alpha^2\beta+3\alpha^2\beta=(-7+3)\alpha^2\beta=-4\alpha^2\beta$$

καὶ
$$5\beta^3-2\beta^3=(5-2)\beta^3=3\beta^3.$$

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι: ***Τὸ ἄθροισμα ὁμοίων ὅρων εἶναι εἷς ὅρος ὅμοιος πρὸς αὐτούς. Συντελεστὴν δὲ ἔχει τὸ ἄθροισμα τῶν συντελεστῶν τῶν αὐτῶν ὅρων.***

Ἡ πρόσθεσις ὁμοίων ὅρων λέγεται **ἀναγωγὴ** αὐτῶν. Τὸ ἄθροισμα λοιπόν, τὸ ὁποῖον εὕρομεν ἀνωτέρω εἰς τὴν § 63, μετὰ τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων αὐτοῦ, εἶναι

$$3\alpha^3-4\alpha^2\beta-4\alpha\beta^2+3\beta^3.$$

Σημείωσις. Οἱ ὅμοιοι ὅροι, τοὺς ὁποίους εἴδομεν εἰς τὰ ἀνωτέρω πολυώνυμα, εἶναι ὅμοιοι ὡς πρὸς ὅλα τὰ γράμματα αὐτῶν· φανερὸν δὲ εἶναι, ὅτι ὅμοιοι ὅροι πολυωνύμου ὡς πρός τι ἢ πρός τινα γράμματα αὐτοῦ εἶναι οἱ διαφέροντες μόνον κατὰ τὸν συντελεστὴν ὡς πρὸς τὸ αὐτὸ ἢ τὰ αὐτὰ γράμματα. Οὕτως ἐν τῷ πολυωνύμῳ $\alpha\chi+\chi^2-\beta\chi+\gamma\chi$ ὅμοιοι ὅροι ὡς πρὸς χ εἶναι οἱ $\alpha\chi, -\beta\chi, \gamma\chi$, ἡ δὲ ἀναγωγὴ αὐτῶν δίδει τὸν ὅρον $(\alpha-\beta+\gamma)\chi$.

66. Διατεταγμένα πολυώνυμα.—Ἡ ἀναγωγὴ τῶν ὁμοίων ὅρων πολυωνύμου γίνεται εὐκολώτερα, ἂν οἱ ὅροι αὐτοῦ γραφοῦν καθ᾽ ὡρισμένην τάξιν· εἶναι δὲ αὕτη, ὅταν οἱ ὅροι τοῦ πολυωνύμου γράφωνται κατὰ τοιαύτην σειράν, ὥστε οἱ ἐκθέται ἑνὸς γράμματος αὐτοῦ ἐλαττοῦνται ἢ αὐξάνονται ἀπὸ ὅρου εἰς ὅρον, καὶ εἰς μὲν τὴν πρώτην περίπτωσιν τὸ πολυώνυμον λέγεται **διατεταγμένον κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις** τοῦ θεωρουμένου γράμματος, εἰς δὲ τὴν δευτέραν λέγεται **διατεταγμένον κατὰ τὰς ἀνιούσας δυνάμεις** τοῦ γράμματος αὐτοῦ.

Οὕτω τὸ πολυώνυμον $\chi^3-3\chi^2-5\chi+6$ εἶναι διατεταγμένον κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ γράμματος χ· τὸ αὐτὸ πολυώνυμον, ἂν γραφῇ $6-5\chi-3\chi^2+\chi^3$, θὰ εἶναι διατεταγμένον κατὰ τὰς ἀνιούσας δυνάμεις τοῦ αὐτοῦ γράμματος. Ὡσαύτως τὸ ὁμογενὲς πολυώνυμον $\chi^2-2\chi\psi+\psi^2$ εἶναι διατεταγμένον κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ γράμματος χ καὶ κατὰ τὰς ἀνιούσας δυνάμεις τοῦ γράμματος ψ.

Ἡ πρόσθεσις τῶν διατεταγμένων πολυωνύμων γίνεται οὕτως εὐκολωτέρα· διότι τότε γράφομεν τὰ μὲν ὑπὸ τὰ δὲ εἰς τρόπον, ὥστε οἱ ὅμοιοι ὅροι νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν κατακόρυφον στήλην, καὶ προσθέτομεν ἔπειτα, προσθέτοντες τοὺς ὁμοίους ὅρους ἑκάστης στήλης. Π. χ.

$$\begin{array}{rrrr}
\chi^3 & -\,5\chi^2 & +\,2\chi & +\,4 \\
 & 4\chi^2 & -\,3\chi & -\,7 \\
2\chi^3 & & +\,2\chi & +\,1 \\
-\chi^3 & -\,2\chi^2 & +\,3\chi & \\
\hline
2\chi^3 & -\,3\chi^2 & +\,4\chi & -\,2
\end{array}$$

Ἀσκήσεις.

38. Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι προσθέσεις :

1)
$$\begin{array}{r} +3\alpha \\ +9\alpha \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} -6\beta \\ -7\beta \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} +8\alpha^2 \\ -\alpha^2 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} -7\chi^2 \\ +\chi^2 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} -5\chi^3 \\ +2\chi^3 \\ \hline \end{array}$$

2)
$$\begin{array}{r} \frac{1}{2}\alpha \\ \frac{1}{4}\alpha \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} -\frac{12}{5}\beta \\ \frac{7}{10}\beta \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} -1\frac{1}{2}\alpha^2 \\ 2\frac{1}{4}\alpha^2 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} -\frac{2}{3}\chi^2 \\ -\frac{1}{2}\chi^2 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} -\frac{5}{6}\chi^3 \\ \frac{4}{5}\chi^3 \\ \hline \end{array}$$

3)
$$\begin{array}{r} \alpha \\ \beta \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} -\alpha \\ -\beta \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} \alpha^2 \\ -\beta^2 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2\chi^2 \\ -3\psi^2 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} -5\chi^3 \\ 7\psi^3 \\ \hline \end{array}$$

4)
$$\begin{array}{r} \alpha^2-1 \\ \alpha^2+1 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} \beta^2+8 \\ 2\beta^2-3 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5\mu^3-7 \\ 3-2\mu^3 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 8\nu^4-9 \\ 9-8\nu^4 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2\lambda^2-3 \\ 5-2\lambda^2 \\ \hline \end{array}$$

5)
$$\begin{array}{r} 8\alpha^3-5\beta^2+3\gamma-4 \\ 5\alpha^3-4\beta^2-5\gamma+9 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} \alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3 \\ \alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3 \\ \hline \end{array}$$

6)
$$\begin{array}{r} 8\chi^3-7\chi^2+5\chi-1 \\ -5\chi^3+\chi^2-2\chi+3 \\ 3\chi^3-5\chi^2-7\chi+1 \\ -5\chi^3+4\chi^2+4\chi-7 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6\chi-\psi+3\varphi-5\omega \\ -5\chi+3\psi-7\varphi+4\omega \\ -3\chi+4\psi-\varphi-\omega \\ 4\chi-6\psi+5\varphi+2\omega \\ \hline \end{array}$$

7)
$$\begin{array}{r} \frac{1}{2}\alpha-\frac{2}{3}\beta+\frac{2}{5}\gamma+\delta \\ \frac{1}{4}\alpha-\frac{5}{6}\beta-\frac{3}{5}\gamma-\frac{3}{4}\delta \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2\frac{3}{4}\chi-1\frac{1}{5}\psi-2\frac{2}{3}\varphi+2\frac{1}{3}\omega \\ -1\frac{1}{4}\chi+2\frac{3}{10}\psi+\frac{8}{3}\varphi-3\frac{1}{2}\omega \\ \hline \end{array}$$

Β') ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ

67. **Ἀφαίρεσις μονωνύμου.**— Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τῆς παραστάσεως $\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$ τὸ μονώνυμον $-4\alpha\beta$. Ἀλλ' εἶναι φανερὸν (§ 18), ὅτι

$$(\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2) - (-4\alpha\beta) = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 + 4\alpha\beta$$

ἤ, μετὰ τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων, $-2\alpha\beta$ καὶ $4\alpha\beta$.

$$\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω εὐκόλως συνάγεται ὁ κανὼν τῆς ἀφαιρέσεως μονωνύμου ἀπὸ μιᾶς ἀλγεβρικῆς παραστάσεως.

68. **Ἀφαίρεσις πολυωνύμου.**—Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸ πολυώνυμον $4\chi^3-5\chi^2+8\chi-4$ τὸ πολυώνυμον $4\chi^2-9\chi+6$. Ἀλλὰ τὸ ἀφαιρετέον πολυώνυμον παριστᾷ ἀριθμόν. Διὰ νὰ τὸν ἀφαιρέσωμεν δὲ ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν τὸν ἀντίθετον αὐτοῦ. Εἶναι δὲ φανερόν, ὅτι οὗτος (ὁ ἀντίθετος) εὑρίσκεται, ἐὰν ἀλλάξωμεν τὰ σημεῖα ὅλων τῶν ὅρων τοῦ ἀφαιρετέου πολυωνύμου. Κατὰ ταῦτα, εἶναι

$$4\chi^3-5\chi^2+8\chi-4-(4\chi^2-9\chi+6)=$$
$$4\chi^3-5\chi^2+8\chi-4-4\chi^2+9\chi-6=4\chi^3-9\chi^2+17\chi-10.$$

Καὶ πράγματι, διότι εἶναι

$$4\chi^3-9\chi^2+17\chi-10+4\chi^2-9\chi+6=4\chi^3-5\chi^2+8\chi-4.$$

Ὥστε: ***Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ μιᾶς παραστάσεως δοθὲν πολυώνυμον, γράφομεν κατόπιν αὐτῆς ὅλους τοὺς ὅρους τοῦ ἀφαιρετέου πολυωνύμου μὲ ἠλλαγμένα τὰ σημεῖα αὐτῶν.***

Καὶ ἐνταῦθα εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς διαφορᾶς ἰσοῦται μὲ τὴν διαφορὰν τῶν ἀριθμητικῶν τιμῶν τῶν ἀλγεβρικῶν παραστάσεων, αἱ ὁποῖαι ἀφαιροῦνται.

Σημείωσις. Ἐὰν θέλωμεν νὰ θέσωμεν παραστάσεις ἐντὸς παρενθέσεων ἤ, ἂν εἶναι ἐντὸς παρενθέσεων, νὰ γράψωμεν αὐτὰς ἐκτὸς παρενθέσεων, θὰ ἐργασθῶμεν συμφώνως μὲ ὅσα εἴπομεν εἰς τὴν § 23.

Οὕτως εἶναι $15-(3\chi^2-2\psi^2-\gamma)=15-3\chi^2+2\psi^2+\gamma$

καὶ $3\alpha^2-\chi^2+\psi^2+\chi-\psi=3\alpha^2-(\chi^2-\psi^2)+(\chi-\psi)$.

Ἀσκήσεις.

39. Νὰ γίνουν αἱ ἀφαιρέσεις:

1) $\begin{array}{r} +9\chi \\ +5\chi \\ \hline \end{array}\quad \begin{array}{r} +7\chi^2 \\ -3\chi^2 \\ \hline \end{array}\quad \begin{array}{r} -9\alpha^2 \\ -10\alpha^2 \\ \hline \end{array}\quad \begin{array}{r} -5\beta^3 \\ +3\beta^3 \\ \hline \end{array}\quad \begin{array}{r} -11\lambda^4 \\ +4\lambda^4 \\ \hline \end{array}$

2) $\begin{array}{r} 2\mu \\ 3\nu \\ \hline \end{array}\quad \begin{array}{r} 5\mu \\ -4\nu \\ \hline \end{array}\quad \begin{array}{r} -2\mu \\ -3\nu \\ \hline \end{array}\quad \begin{array}{r} 2\mu^2+1 \\ \mu^2 \\ \hline \end{array}\quad \begin{array}{r} 3\mu^2 \\ \mu^2-1 \\ \hline \end{array}$

3) $\begin{array}{r} \chi^2-1 \\ \psi^2+2 \\ \hline \end{array}\quad \begin{array}{r} \chi^2-4 \\ 4-\psi^2 \\ \hline \end{array}\quad \begin{array}{r} 3\chi^3-4\psi^2 \\ 3\psi^2-4\chi^3 \\ \hline \end{array}\quad \begin{array}{r} 5\chi^3-2\psi^2 \\ 2\psi^2+5\chi^3 \\ \hline \end{array}\quad \begin{array}{r} 5\chi^3+2\psi^2 \\ 5\psi^2+2\chi^3 \\ \hline \end{array}$

4) $\begin{array}{r} \alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2 \\ \alpha^2-2\alpha\beta-\beta^2 \\ \hline \end{array}\quad \begin{array}{r} 6\alpha^3-8\beta^2+5\gamma-9 \\ \alpha^3-5\beta^2-4\gamma+1 \\ \hline \end{array}\quad \begin{array}{r} 4\alpha^3-5\beta^3+7\gamma^3-2\delta^3 \\ 5\alpha^3+\beta^3-3\gamma^3-2\delta^3. \\ \hline \end{array}$

40. Εἰς τὰς κάτωθι παραστάσεις νὰ ἀρθοῦν αἱ παρενθέσεις καὶ ἔπειτα νὰ γίνῃ ἡ ἀναγωγὴ τῶν ὁμοίων ὅρων:

1) $(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)$ 3) $5\alpha-(2\alpha+3\beta)$
2) $(\chi-2\psi)+(\chi-3\psi)$ 4) $10\alpha-(3\alpha-5\beta)$
5) $(\alpha+\beta-\gamma)-(\alpha-\beta+\gamma)$
6) $(9\alpha-5\beta)-(3\alpha+4\beta)-(\alpha-7\beta)$.

41. Εἰς ἑκάστην τῶν κάτωθι παραστάσεων νὰ τεθοῦν ἐντὸς παρενθέσεων οἱ δύο πρῶτοι ὅροι μὲ τὸ σημεῖον + πρὸ αὐτῶν καὶ οἱ τρεῖς τελευταῖοι μὲ τὸ σημεῖον —

1) $\chi^2-\psi^2-\alpha^2+2\alpha\beta-\beta^2$
2) $\alpha^3+\beta^3+5\chi\psi-3\chi^2+7\psi^2$
3) $8\alpha^3-5-\chi^2-\chi\psi-\psi^2$.

42. Τί πρέπει νὰ προσθέσωμεν

1) εἰς τὴν παράστασιν $5\chi+2\psi$ διὰ νὰ λάβωμεν 5χ;
2) » » » $2\chi+3\psi-5$ » » » $3\psi+5$;

Γ') ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ

69. Πολλαπλασιασμὸς ἀκεραίων μονωνύμων.—Εἴδομεν ὅτι (§ 35) $\alpha^2.\alpha^3=\alpha^{2+3}=\alpha^5$. Ἐκ τοῦ παραδείγματος δὲ αὐτοῦ εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ γινόμενον δύο ἀκεραίων μονωνύμων εἶναι μονώνυμον ἀκέραιον.

Ἡ εὕρεσις τοῦ μονωνύμου, τοῦ ἴσου πρὸς τὸ γινόμενον δύο ἀκεραίων μονωνύμων, λέγεται πολλαπλασιασμὸς αὐτῶν.

Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰ ἀκέραια μονώνυμα $-5\alpha^3\beta^2\gamma$ καὶ $3\alpha^2\beta$. Ἀλλ' ἕκαστον τῶν μονωνύμων τούτων, ὡς καὶ πᾶν μονώνυμον, εἶναι γινόμενον πολλῶν παραγόντων. Ἑπομένως, ***τὸ γινόμενον αὐτῶν εἶναι μονώνυμον τὸ ὁποῖον περιέχει ὅλους τοὺς παράγοντας τῶν δύο μονωνύμων.***

Ὥστε εἶναι: $-5\alpha^3\beta^2\gamma.3\alpha^2\beta=-5.\alpha^3.\beta^2.\gamma.3.\alpha^2.\beta$·

ἀλλ' εἰς τὸ τελευταῖον αὐτὸ γινόμενον δυνάμεθα νὰ ἀλλάξωμεν τὴν τάξιν τῶν παραγόντων καὶ νὰ ἀντικαταστήσωμεν παράγοντας αὐτοῦ διὰ τοῦ γινομένου των. Ὥστε εἶναι:

$$-5\alpha^3\beta^2\gamma.3\alpha^2\beta=(-5).3.\alpha^3.\alpha^2.\beta^2.\beta.\gamma=-15\alpha^5\beta^3\gamma.$$

70. Καὶ διὰ περισσότερα μονώνυμα ἐργαζόμεθα ὁμοίως. Οὕτω τὸ γινόμενον τῶν μονωνύμων $-3\alpha^4\beta\gamma$, $-\alpha\gamma^3\delta$ καὶ $4\beta^2$ εἶναι: $(-3).(-1).4.\alpha^4.\alpha.\beta.\beta^2.\gamma.\gamma^3.\delta=12\alpha^5\beta^3\gamma^4\delta$.

Ὥστε: ***Ἵνα πολλαπλασιάσωμεν δύο ἢ περισσότερα ἀκέραια*** μονώνυμα, πολλαπλασιάζομεν πρῶτον τοὺς συντελεστὰς αὐτῶν καὶ ἔπειτα δεξιὰ τοῦ γινομένου των γράφομεν ὅλα τὰ γράμματα, τὰ ὁποῖα ὑπάρχουν εἰς τὰ μονώνυμα καὶ ἕκαστον μὲ ἐκθέτην ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν, τοὺς ὁποίους ἔχει εἰς τὰ μονώνυμα.

Ἀσκήσεις.

43. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ γινόμενα :

$$2\alpha^3 \,.\, 5\alpha^2, \qquad -5\alpha \,.\, \alpha^4, \qquad -2\alpha^2 \,.\, 6\beta^3$$

$$\frac{3}{4}\alpha \,.\, \frac{2}{3}\beta, \qquad \frac{2}{5}\chi^2\psi \,.\left(-\frac{5}{2}\psi^2\right), \qquad \frac{4}{9}\alpha^2\beta^2 \,.\left(-\frac{9}{11}\alpha\beta\right)$$

$$3\alpha^2\chi \,.\, 4\alpha^3\chi^2\psi, \qquad 0{,}5\chi\psi \,.\, (-2\chi\psi), \qquad 0{,}4\alpha\beta \,.\, (-0{,}5\alpha\beta\gamma).$$

44. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ γινόμενα :

$$(-\alpha)(-\beta)(-\gamma) \qquad\qquad (-\alpha)(-\beta)(-\gamma)(-\delta)$$

$$2\alpha \,.\, 3\beta^2 \,.\, (-\alpha\gamma^2) \qquad\qquad 6\chi^3 \,.\, (-2\alpha\chi^2) \,.\, (-3\alpha\chi)$$

$$-\frac{2}{3}\alpha\beta^2 \,.\left(-\frac{3}{4}\beta^2\chi\right) \,.\left(-\frac{4}{5}\alpha\chi\right)$$

$$-10\alpha\beta \,.\, (-0{,}2\beta\gamma) \,.\, (-0{,}5\gamma\delta).$$

45. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ γινόμενα :

$$(5\alpha)^2 \qquad (3\alpha\beta)^2 \qquad (-4\chi\psi)^2$$

$$(-\alpha^2)^2 \qquad (5\alpha^2)^2 \qquad (-3\alpha^2\beta^2)^2$$

$$(2\alpha)^3 \qquad (3\alpha\beta)^3 \qquad (-2\alpha\beta)^3.$$

71. Πολλαπλασιασμὸς ἀκεραίου πολυωνύμου ἐπὶ ἀκέραιον μονώνυμον. — Γνωρίζομεν, ὅτι

$$(\alpha+\beta+\gamma) \,.\, \delta = \alpha\delta+\beta\delta+\gamma\delta.$$

Ἐκ τοῦ παραδείγματος δὲ αὐτοῦ συνάγομεν, ὅτι τὸ γινόμενον ἀκεραίου πολυωνύμου ἐπὶ ἀκέραιον μονώνυμον εἶναι πολυώνυμον ἀκέραιον.

Ἡ εὕρεσις τοῦ πολυωνύμου, τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον πολυωνύμου ἐπὶ μονώνυμον, λέγεται πολλαπλασιασμὸς αὐτῶν.

Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ πολυώνυμον $2\chi^2-7\chi-4$ ἐπὶ $-3\chi^2$. Ἀλλ' ὁ πολλαπλασιασμὸς αὐτὸς θὰ γίνῃ ὡς ἔγινε ὁ ἄνω πολλαπλασιασμὸς $(\alpha+\beta+\gamma) \,.\, \delta$, διότι τὸ δοθὲν πολυώνυμον εἶναι ἄθροισμα τῶν ὅρων του. Ἑπομένως *θὰ πολλαπλασιάσωμεν ἕκαστον τῶν ὅρων του ἐπὶ τὸ μονώνυμον καὶ θὰ προσθέσωμεν ἔπειτα τὰ προκύπτοντα γινόμενα.*

Κατὰ ταῦτα, εἶναι

$$(2\chi^2-7\chi-4)\cdot(-3\chi^2)=-6\chi^4+21\chi^3+12\chi^2$$

Ἀσκήσεις.

46. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ γινόμενα :

$(7\chi-4)\cdot\chi$ $\quad(15\alpha^2-25\alpha+10)\cdot\frac{1}{5}\alpha$

$(3\chi-2\psi)\cdot 5\chi\psi$ $\quad\left(\frac{1}{3}\chi^2-\frac{1}{2}\chi-\frac{1}{6}\right)\cdot 12\chi\psi$

$(\alpha^2-\beta^2)\cdot(-2\alpha\beta)$ $\quad\left(\frac{3}{5}\chi^3+\frac{2}{3}\chi^2-\frac{1}{15}\chi\right)\cdot 15\chi^2$

$(\alpha\chi^2-\beta\chi+\gamma)\cdot(-2\psi)$, $\quad\left(\frac{2}{3}\chi^2-\frac{3}{5}\psi^2\right)\cdot\frac{2}{7}\chi\psi$

$(\alpha^4-5\alpha^3\beta+6\alpha\beta^3-\beta^4)\cdot(-4\alpha\beta)$, $\quad(15\chi^2-10\chi\psi+25\psi^2)\cdot(-0{,}2\chi\psi)$.

47. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων :

$$(5\chi-3\psi)\chi+(3\psi-5\chi)\psi$$
$$(9\chi-4\psi)\chi-(2\psi-7\chi)\psi$$
$$(4\alpha-5\beta)\gamma+(2\beta-3\gamma)\alpha-(7\gamma-3\alpha)\beta.$$

72. Πολλαπλασιασμὸς δύο ἀκεραίων πολυωνύμων.—Γνωρίζομεν, ὅτι $(\alpha+\beta)\cdot(\gamma+\delta)=\alpha\gamma+\beta\gamma+\alpha\delta+\beta\delta$. Ἐκ τοῦ παραδείγματος δὲ αὐτοῦ συνάγομεν, ὅτι τὸ γινόμενον δύο ἀκεραίων πολυωνύμων εἶναι πολυώνυμον ἀκέραιον.

Ἡ εὕρεσις τοῦ πολυωνύμου, τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον πολυωνύμου ἐπὶ πολυώνυμον, λέγεται πολλαπλασιασμὸς αὐτῶν.

1) Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ τριώνυμον $\chi^2-2\chi\psi+\psi^2$ ἐπὶ $\chi-3\psi$. Ἀλλ᾽ ὁ πολλαπλασιασμὸς αὐτὸς θὰ γίνῃ ὡς ἔγινεν ὁ ἄνω πολλαπλασιασμὸς $(\alpha+\beta)\cdot(\gamma+\delta)$, διότι, ὡς γνωρίζομεν, πᾶν πολυώνυμον εἶναι ἄθροισμα τῶν ὅρων του. Ἤτοι θὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ δοθὲν τριώνυμον πρῶτον ἐπὶ χ, ἔπειτα ἐπὶ -3ψ καὶ κατόπιν θὰ προσθέσωμεν τὰ γινόμενα, τὰ ὁποῖα θὰ εὕρωμεν· θὰ ἔχωμεν δὲ

$$\begin{array}{ll}(\chi^2-2\chi\psi+\psi^2)\cdot\chi= & \chi^3-2\chi^2\psi+\chi\psi^2\\ \underline{(\chi^2-2\chi\psi+\psi^2)\cdot(-3\psi)=} & \underline{\quad-3\chi^2\psi+6\chi\psi^2-3\psi^3}\\ \text{ἄθροισμα μερικῶν γινομένων} & =\chi^3-5\chi^2\psi+7\chi\psi^2-3\psi^3.\end{array}$$

Ὥστε : ***Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον δύο πολυωνύμων, πολ-***

λαπλασιάζομεν ἕκαστον τῶν ὅρων τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ ἕκαστον τῶν ὅρων τοῦ πολλαπλασιαστοῦ καὶ προσθέτομεν τὰ προκύπτοντα γινόμενα.

Ἡ ἀνωτέρω πρᾶξις διατάσσεται πρὸς εὐκολίαν ὡς ἑξῆς :

$$\begin{array}{r} \chi^2-2\chi\psi+\psi^2 \\ \chi-3\psi \\ \hline \chi^3-2\chi^2\psi+\chi\psi^2 \qquad\qquad \\ -3\chi^2\psi+6\chi\psi^2-3\psi^3 \\ \hline \chi^3-5\chi^2\psi+7\chi\psi^2-3\psi^3 \end{array}$$

διατάσσομεν δηλαδὴ ἀμφότερα τὰ πολυώνυμα πρὸς τὸ αὐτὸ γράμμα ὁμοίως· κατόπιν πολλαπλασιάζομεν τὸ πρῶτον πολυώνυμον ἐφ' ἕνα ἕκαστον τῶν ὅρων τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, τὰ δὲ μερικὰ γινόμενα γράφομεν τὸ ἓν ὑπὸ τὸ ἄλλο, ὥστε οἱ ὅμοιοι ὅροι νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν κατακόρυφον στήλην, καὶ ἔπειτα προσθέτομεν.

2) Νὰ γίνῃ ὁ πολλαπλασιασμός : $(3\alpha^2-4\alpha-6).(2\alpha^2+\alpha+3)$

$$\begin{array}{lr} & 3\alpha^2-4\alpha-6 \qquad\qquad \\ & 2\alpha^2+\alpha+3 \qquad\qquad \\ \hline \text{μερικὸν γινόμενον ἐπὶ } 2\alpha^2 & 6\alpha^4-8\alpha^3-12\alpha^2 \qquad\qquad\qquad \\ \text{» » » } \alpha & 3\alpha^3-4\alpha^2-6\alpha \qquad\qquad \\ \text{» » » } 3 & 9\alpha^2-12\alpha-18 \\ \hline \text{ὁλικὸν γινόμενον} & 6\alpha^4-5\alpha^3-7\alpha^2-18\alpha-18. \end{array}$$

3) Νὰ γίνῃ ὁ πολλαπλασιασμός : $(\chi^4+\chi^3+\chi^2+\chi+1).(\chi-1)$.

$$\begin{array}{r} \chi^4+\chi^3+\chi^2+\chi+1 \qquad \\ \chi-1 \qquad\qquad\qquad\qquad \\ \hline \chi^5+\chi^4+\chi^3+\chi^2+\chi \qquad\qquad \\ -\chi^4-\chi^3-\chi^2-\chi-1 \\ \hline \chi^5-1. \qquad\qquad \end{array}$$

73. Παρατηρήσεις. Εἰς τὸ πρῶτον παράδειγμα τῆς προηγουμένης παραγράφου παρατηροῦμεν, ὅτι οἱ ὅροι χ^2 καὶ χ, οἱ ὁποῖοι ἔχουν τὸ γράμμα χ τῆς διατάξεως μὲ τὸν μεγαλύτερον ἐκθέτην, δίδουν τὸν ὅρον χ^3 τοῦ γινομένου, ὅστις εἰς αὐτὸ ἔχει τὸ χ πάλιν μὲ τὸν μεγαλύτερον ἐκθέτην. Οἱ δὲ ὅροι ψ^2 καὶ -3ψ, οἱ ὁποῖοι ἔχουν τὸ χ μὲ τὸν μικρότερον ἐκθέτην (τὸν 0), δίδουν τὸν ὅρον $-3\psi^3$ τοῦ γινομένου, ὅστις εἰς αὐτὸ ἔχει πάλιν τὸ χ μὲ τὸν μικρότερον ἐκθέτην.

Ὥστε οἱ ὅροι χ^3 καὶ $-3\psi^3$ δὲν ἔχουν ἄλλον ὅρον ὅμοιον μὲ αὐτοὺς καὶ δὲν μεταβάλλονται διὰ τῆς ἀναγωγῆς. Ὁμοίας παρατηρήσεις κάμνομεν καὶ εἰς τὰ ἄλλα δύο παραδείγματα. Συνάγομεν λοιπόν, ὅτι τὸ γινόμενον δύο πολυωνύμων ἔχει τοὐλάχιστον δύο ὅρους. Ἐπίσης παρατηροῦμεν, ὅτι ὁ βαθμὸς τοῦ γινομένου πρὸς ἓν γράμμα ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν βαθμῶν τῶν παραγόντων πρὸς τὸ αὐτὸ γράμμα.

74. Ἀξιοσημείωτοι ταυτότητες.— Ἀξιοσημείωτοι ταυτότητες, αἱ ὁποῖαι ἀπαντῶνται συχνὰ εἰς τὴν Ἄλγεβραν, εἶναι αἱ ἑξῆς :

1) $(\chi+\alpha)^2=(\chi+\alpha).(\chi+\alpha)=\chi^2+2\alpha\chi+\alpha^2$

$$\begin{array}{l} \chi+\alpha \\ \underline{\chi+\alpha} \\ \chi^2+\alpha\chi \\ \underline{\qquad\ \alpha\chi+\alpha^2} \\ \chi^2+2\alpha\chi+\alpha^2 \end{array}$$

Ἤτοι : ***Τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος δύο ἀριθμῶν ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν, εἰς ὃ προστίθεται καὶ τὸ διπλάσιον γινόμενον αὐτῶν.***

Π. χ. $(\chi+3)^2=\chi^2+2.3\chi+3^2=\chi^2+6\chi+9.$

$(3\chi+5)^2=(3\chi)^2+2(3\chi).5+5^2=9\chi^2+30\chi+25.$

2) $(\chi-\alpha)^2=(\chi-\alpha).(\chi-\alpha)=\chi^2-2\alpha\chi+\alpha^2.$

Ἤτοι : ***Τὸ τετράγωνον τῆς διαφορᾶς δύο ἀριθμῶν ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν πλὴν τοῦ διπλασίου γινομένου αὐτῶν.***

Π. χ. $(\chi-7)^2=\chi^2-2.7\chi+7^2=\chi^2-14\chi+49.$

$(2\chi-3)^2=(2\chi)^2-2.(2\chi).3+3^2=4\chi^2-12\chi+9.$

3) $(\chi+\alpha).(\chi-\alpha)=\chi^2-\alpha^2$

$$\begin{array}{l} \chi+\alpha \\ \underline{\chi-\alpha} \\ \chi^2+\alpha\chi \\ \underline{\qquad -\alpha\chi-\alpha^2} \\ \chi^2-\alpha^2 \end{array}$$

Ἤτοι : ***Τὸ γινόμενον τοῦ ἀθροίσματος δύο ἀριθμῶν ἐπὶ τὴν διαφοράν των ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τοῦ πρώτου πλὴν τοῦ τετραγώνου τοῦ δευτέρου.***

Π. χ. $(\chi+5).(\chi-5)=\chi^2-5^2=\chi^2-25.$

$(6\chi+5\psi).(6\chi-5\psi)=(6\chi)^2-(5\psi)^2=36\chi^2-25\psi^2.$

Σημείωσις. Αἱ ἀνωτέρω ταυτότητες γράφονται καὶ ὡς ἑξῆς:

$$\chi^2+2\alpha\chi+\alpha^2=(\chi+\alpha).(\chi+\alpha)=(\chi+\alpha)^2$$
$$\chi^2-2\alpha\chi+\alpha^2=(\chi-\alpha).(\chi-\alpha)=(\chi-\alpha)^2$$
$$\chi^2-\alpha^2=(\chi+\alpha).(\chi-\alpha)$$

Ἑπομένως τριώνυμα ἢ διώνυμα ὡς τὰ ἀνωτέρω δυνάμεθα νὰ τὰ γράψωμεν ὡς γινόμενα δύο παραγόντων.

Π. χ. $\chi^2+10\chi+25=\chi^2+2.5\chi+5^2=(\chi+5).(\chi+5)=(\chi+5)^2$
$\chi^2-8\chi+16=\chi^2-2.4\chi+4^2=(\chi-4).(\chi-4)=(\chi-4)^2$
$\chi^2-36=\chi^2-6^2=(\chi+6).(\chi-6)$.

75. Ἄλλαι ταυτότητες ἀπαντώμεναι εἰς τὴν Ἄλγεβραν, ἀλλ' ὄχι τόσον συχνὰ ὅσον αἱ ἀνωτέρω, εἶναι αἱ ἑξῆς:

1) $(\alpha+\beta)^3=(\alpha+\beta)^2.(\alpha+\beta)=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$

2) $(\alpha-\beta)^3=(\alpha-\beta)^2.(\alpha-\beta)=\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3$

1)
$$\begin{array}{r} \alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2 \\ \alpha+\beta \\ \hline \alpha^3+2\alpha^2\beta+\alpha\beta^2 \\ \alpha^2\beta+2\alpha\beta^2+\beta^3 \\ \hline \alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3 \end{array}$$

2)
$$\begin{array}{r} \alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2 \\ \alpha-\beta \\ \hline \alpha^3-2\alpha^2\beta+\alpha\beta^2 \\ -\alpha^2\beta+2\alpha\beta^2-\beta^3 \\ \hline \alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3 \end{array}$$

Ἀσκήσεις.

48. Νὰ γίνουν οἱ κάτωθι πολλαπλασιασμοί:

$(\chi^2+\chi+2).(\chi+1)$ $(\alpha^2-5\alpha-6).(\alpha-4)$
$(\psi^2-9\psi+4).(-\psi+5)$ $(1+2\beta-3\beta^2).(1-5\beta)$
$(\varphi^2+3\varphi\omega+9\omega^2).(\varphi-3\omega)$ $(2\mu^2+4\mu\nu-6\nu^2).(3\mu-4\nu)$.

49. Νὰ γίνουν οἱ κάτωθι πολλαπλασιασμοί:

$(\alpha+\beta-\gamma).(\alpha-\beta+\gamma)$ $(\chi^2+2\chi\psi+3\psi^2).(\chi^2-2\chi\psi+3\psi^2)$
$(\alpha^2+\alpha+1).(\alpha^2+2\alpha+5)$ $(\psi^2+4\psi\varphi-2\varphi^2).(2\psi^2-\psi\varphi+\varphi^2)$
$(\beta^2+2\beta+2).(\beta^2-2\beta+2)$ $(5-\omega-\omega^2).(3+2\omega-\omega^2)$.

50. Νὰ γίνῃ ὁ πολλαπλασιασμός:

$$(\chi^3+2\chi-3).(\chi^3-3\chi+5)$$

καὶ ἔπειτα νὰ γίνῃ ἡ ἐπαλήθευσις τοῦ γινομένου διὰ $\chi=-2$.

51. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ κάτωθι τετράγωνα τοῦ ἀθροίσματος δύο ἀριθμῶν:

$(\psi+\omega)^2$, $(4\chi+\psi)^2$, $(\chi+3\psi)^2$, $(1+\chi\psi)^2$
$(\chi^2+\psi)^2$, $(\chi^2+\psi^2)^2$, $(2\varphi^2+3\omega^2)^2$, $\left(\frac{\varphi}{3}+\frac{\chi}{2}\right)^2$.

52. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ γινόμενα:

$(\psi-1)^2$ $(8-\varphi)^2$ $(2\alpha-1)^2$
$(\varphi^2-\omega^2)^2$ $(3\chi^2-\psi^2)^2$ $\left(\frac{\chi}{3}-\psi\right)^2$.

53. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ γινόμενα :

$(\alpha+\beta).(\alpha-\beta)$ $\quad$ $(4\varphi+5\omega).(5\omega-4\varphi)$

$(\alpha+5).(\alpha-5)$ $\quad$ $(\chi^2+\psi^2).(\chi^2-\psi^2)$

$(3\beta+1).(3\beta-1)$ $\quad$ $(\chi-\psi^3).(\chi+\psi^3)$

$(7\alpha+3\beta).(7\alpha-3\beta)$ $\quad$ $\left(\frac{\psi}{2}+\frac{\chi}{3}\right).\left(\frac{\psi}{2}-\frac{\chi}{3}\right).$

54. Νὰ ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενα δύο παραγόντων αἱ παραστάσεις :

$\alpha^2-\beta^2$ $\quad$ α^2-36 $\quad$ $25-\beta^2$ $\quad$ $9\alpha^2-16\beta^2$

$\chi^4-\psi^4$ $\quad$ $9\varphi^2-\omega^4$ $\quad$ $\chi^2-\frac{4}{9}$ $\quad$ $\frac{4\varphi^2}{25}-\frac{\omega^2}{64}$

55. Νὰ δειχθῇ ὅτι εἶναι :

$$(\alpha+\beta).(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)=\alpha^3+\beta^3$$
$$(\alpha-\beta).(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)=\alpha^3-\beta^3$$
$$(\alpha-\beta).(\alpha^3+\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta^3)=\alpha^4-\beta^4.$$

56. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων :

$$(\chi+\psi)^2+(\chi-\psi)^2$$
$$(\chi+\psi)^2-(\chi-\psi)^2$$
$$(5\alpha-3\beta)^2+(5\alpha+3\beta)^2.$$

57. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ γινόμενα :

$(\chi+\psi).(\chi+\psi).(\chi+\psi)$ $\quad$ $(\chi+1)^3$

$(\chi-\psi).(\chi-\psi).(\chi-\psi)$ $\quad$ $(\chi-1)^3$

$(\chi-1).(\chi-2).(\chi+3)$ $\quad$ $(\varphi+2)^3$

$(\chi-1).(\chi+2).(\chi-3)$ $\quad$ $(3-\omega)^3.$

58. Τὰ κάτωθι διώνυμα εἶναι οἱ δύο ὅροι τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀθροίσματος ἢ τῆς διαφορᾶς δύο ἀριθμῶν. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τρίτος.

$\alpha^2+2\alpha\beta+$ $\quad$ $25-10\chi+$

$\mu^2+2\mu\nu+$ $\quad$ $1-2\mu+$

$\alpha^2+4\alpha+$ $\quad$ $4-12\chi+$

$\psi^2+4\omega^2\pm$ $\quad$ $9+\chi^4\pm$

Δ') ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ

76. Διαίρεσις ἀκεραίων μονωνύμων.—Τὸ πηλίκον $\frac{\alpha^7}{\alpha^3}$ γνωρίζομεν (§ 36), ὅτι εἶναι ἴσον μὲ $\alpha^{7-3}=\alpha^4$, ἤτοι $\frac{\alpha^7}{\alpha^3}=\alpha^4$. Ἐπίσης γνωρίζομεν (§ 39), ὅτι $\frac{\alpha^3}{\alpha^5}=\frac{1}{\alpha^2}$. Παρατηροῦμεν δέ, ὅτι τὸ μὲν πηλίκον α^4 εἶναι ἀκεραία παράστασις, τὸ δὲ $\frac{1}{\alpha^2}$ εἶναι κλασματική.

Μονώνυμον ἀκέραιον λέγεται **διαιρετὸν** δι' ἄλλου, ὅταν ὑπάρχῃ ἀκέραιον μονώνυμον ἴσον μὲ τὸ πηλίκον αὐτῶν.

Διαίρεσις δύο ἀκεραίων μονωνύμων λέγεται ἡ εὕρεσις τοῦ ἀκεραίου μονωνύμου (ἐὰν ὑπάρχῃ), ***τὸ ὁποῖον εἶναι πηλίκον αὐτῶν.***

Ἐκ τῆς ταυτότητος $\frac{\alpha^7}{\alpha^3} = \alpha^4$ ἕπεται ἡ $\alpha^7 = \alpha^3.\alpha^4$. Συνάγομεν λοιπὸν ὅτι : ***Τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ ἀκέραιον μονώνυμον πηλίκον εἶναι ἴσον μὲ τὸν διαιρετέον.***

Ὅθεν ἕπεται εὐκόλως ὅτι : ***Διὰ νὰ εἶναι ἓν μονώνυμον διαιρετὸν δι᾽ ἄλλου, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ἔχῃ τοῦτο ὅλα τὰ γράμματα, τὰ ὁποῖα ἔχει ὁ διαιρέτης, καὶ ἕκαστον μὲ ἐκθέτην μὴ μικρότερον.***

Π. χ. τὸ μονώνυμον $35\alpha^3\beta^2\gamma$ εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ μονωνύμου $-2\alpha^2\beta^2$. Ἐνῷ τὸ μονώνυμον $8\alpha^3\beta^4\gamma$ δὲν εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ μονωνύμου $3\alpha\beta\gamma\delta$. Ἐπίσης τὸ μονώνυμον $9\chi^2\psi\varphi$ δὲν εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ μονωνύμου $3\chi\psi^2\varphi$. Ὥστε :

Ἡ διαίρεσις δύο ἀκεραίων μονωνύμων εἶναι ἀδύνατος :

1) Ὅταν ὁ διαιρέτης περιέχῃ γράμμα, τὸ ὁποῖον δὲν περιέχει ὁ διαιρετέος, καὶ

2) Ὅταν ὁ διαιρέτης περιέχῃ γράμμα μὲ ἐκθέτην μεγαλύτερον ἀπὸ τὸν ἐκθέτην τοῦ αὐτοῦ γράμματος, τὸ ὁποῖον ὑπάρχει καὶ εἰς τὸν διαιρετέον.

77. Ἔστω ἤδη, ὅτι πρόκειται νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον τοῦ μονωνύμου $42\alpha^4\beta^5$ διὰ τοῦ $6\alpha\beta^3$.

Ἐπειδὴ τὰ ἀκέραια ταῦτα μονώνυμα εἶναι γινόμενα πολλῶν παραγόντων, ἕπεται, ὅτι δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν τὸ $42\alpha^4\beta^5$ πρῶτον διὰ τοῦ 6, ἔπειτα τὸ εὑρεθὲν πηλίκον διὰ τοῦ α καὶ τέλος τὸ νέον πηλίκον διὰ τοῦ β^3.

Ἀλλὰ $$42\alpha^4\beta^5 : 6 = 7\alpha^4\beta^5$$
$$7\alpha^4\beta^5 : \alpha = 7\alpha^3\beta^5$$
καὶ $$7\alpha^3\beta^5 : \beta^3 = 7\alpha^3\beta^2$$
ἤτοι $$42\alpha^4\beta^5 : 6\alpha\beta^3 = 7\alpha^3\beta^2.$$

Ὅθεν : ***Ἵνα διαιρέσωμεν μονώνυμον δι᾽ ἄλλου μονωνύμου*** (ὅταν διαιρῆται), ***διαιροῦμεν τὸν συντελεστὴν αὐτοῦ διὰ τοῦ συντελεστοῦ τοῦ διαιρέτου. Ἔπειτα δὲ γράφομεν δεξιὰ τοῦ πηλίκου αὐτῶν ἕκαστον γράμμα τοῦ διαιρετέου, ἀφοῦ προηγουμένως ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸν ἐκθέτην αὐτοῦ τὸν ἐκθέτην τοῦ αὐτοῦ γράμματος τοῦ διαιρέτου.***

Ἐὰν γράμμα τι δὲν ὑπάρχῃ εἰς τὸν διαιρέτην, ὑποθέτομεν ὅ ὑπάρχει μὲ ἐκθέτην 0.

Πδ. 1) $18\alpha^4\beta^3\gamma^5\delta : 6\alpha^2\beta\gamma^3 = \frac{18}{6}\alpha^{4-2} . \beta^{3-1} . \gamma^{5-3} . \delta = 3\alpha^2\beta^2\gamma$

2) $-12\chi^3\psi^2\varphi : (-7\chi\psi^2) = \frac{12}{7}\chi^2\varphi$

Ἀσκήσεις.

59. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ πηλίκα τῶν κάτωθι διαιρέσεων:

$14\alpha^2\beta^2 : 7\alpha\beta$ $\qquad$ $\frac{3}{5}\chi\psi^2 : \left(-\frac{3}{2}\chi\psi\right)$

$9\alpha^2 : (-9)$ $\qquad$ $-1\frac{2}{3}\alpha\chi^4\psi^5 : \left(-\frac{5}{8}\alpha\psi^5\right)$

$-23\alpha^4\beta^3\gamma^2 : (-5\alpha\beta^3\gamma^2)$ $\qquad$ $\frac{1}{3}\alpha^3\chi^2\psi^6\varphi^4 : (-\alpha^3\chi\psi\varphi^4)$.

78. Διαίρεσις ἀκεραίου πολυωνύμου δι' ἀκεραίου μονωνύμου.—Ἐξ ὅσων εἴπομεν ἀνωτέρω (§ 76) συνάγομεν, ὅτι τὸ πηλίκον ἀκεραίου πολυωνύμου δι' ἀκεραίου μονωνύμου δὲν εἶναι πάντοτε ἀκέραιον πολυώνυμον. Ἐὰν τὸ πηλίκον τοῦτο εἶναι ἀκέραιον, τότε τὸ πολυώνυμον λέγεται **διαιρετὸν** διὰ τοῦ μονωνύμου τούτου. ***Ἡ εὕρεσις τοῦ πολυωνύμου καὶ ἀκεραίου πηλίκου λέγεται διαίρεσις τοῦ πολυωνύμου διὰ τοῦ μονωνύμου.***

Ἔστω ἤδη, ὅτι θέλομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸ πολυώνυμον $8\alpha^5-12\alpha^4+20\alpha^3-4\alpha^2$ διὰ τοῦ μονωνύμου $2\alpha^2$. Ἀλλὰ πᾶν πολυώνυμον εἶναι ἄθροισμα τῶν ὅρων του. Ἔχομεν ἑπομένως ἐδῶ νὰ διαιρέσωμεν ἄθροισμα δι' ἀριθμοῦ. Πρὸς τοῦτο δὲ πρέπει νὰ διαιρέσωμεν ἕκαστον τῶν ὅρων τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ διαιρέτου καὶ νὰ προσθέσωμεν ἔπειτα τὰ προκύπτοντα πηλίκα. Ἀλλὰ διὰ νὰ γίνῃ τοῦτο, ἤτοι διὰ νὰ ὑπάρχῃ πηλίκον τῆς διαιρέσεως αὐτῆς, ***πρέπει καὶ ἀρκεῖ, ὅλοι οἱ ὅροι τοῦ διαιρετέου πολυωνύμου*** (τὸ ὁποῖον εἶναι ἄνευ ὁμοίων ὅρων) ***νὰ εἶναι διαιρετοὶ διὰ τοῦ μονωνύμου.*** Ἐπειδὴ δὲ συμβαίνει τοῦτο εἰς τὸ ἄνω παράδειγμα, ἕπεται, ὅτι ὑπάρχει πηλίκον τῆς δοθείσης διαιρέσεως καὶ εἶναι τοῦτο τὸ ἑξῆς:

$$(8\alpha^5-12\alpha^4+20\alpha^3-4\alpha^2) : 2\alpha^2 =$$
$$\frac{8\alpha^5}{2\alpha^2}-\frac{12\alpha^4}{2\alpha^2}+\frac{20\alpha^3}{2\alpha^2}-\frac{4\alpha^2}{2\alpha^2}=$$
$$4\alpha^3-6\alpha^2+10\alpha-2.$$

79. 'Εξαγωγὴ κοινῶν παραγόντων ἐκτὸς παρενθέσεως.— 'Εκ τῆς προηγουμένης διαιρέσεως λαμβάνομεν τὴν ἰσότητα :

$$8\alpha^5-12\alpha^4+20\alpha^3-4\alpha^2=2\alpha^2(4\alpha^3-6\alpha^2+10\alpha-2).$$

"Ωστε, ὅταν ἓν πολυώνυμον εἶναι διαιρετὸν διὰ μονωνύμου, δύναται τοῦτο νὰ παρασταθῇ ὡς γινόμενον τοῦ μονωνύμου ἐπὶ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως αὐτοῦ διὰ τοῦ μονωνύμου· ὅταν δὲ ἓν πολυώνυμον παραστήσωμεν οὕτω, λέγομεν, ***ὅτι ἐξάγομεν τοὺς κοινοὺς παράγοντας τῶν ὅρων αὐτοῦ ἐκτὸς παρενθέσεως.***

'Α σ κ ή σ ε ι ς.

60. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ πηλίκα τῶν κάτωθι διαιρέσεων καὶ κατόπιν νὰ παρασταθῇ ὁ διαιρετέος ἑκάστης διαιρέσεως ὡς γινόμενον :

$$(24\alpha^2-12\alpha+4):4, \qquad (25\chi^2-15\chi+5):(-5)$$
$$(18\chi^2\psi-36\alpha\chi^3\psi^2+72\beta\chi^2\psi^3-18\gamma\chi^4\psi^3):18\chi^2\psi$$
$$(54\beta^4\psi^3-18\beta^3\psi^4-12\beta^2\psi^5+24\beta\psi^6):(-6\beta\psi^3)$$
$$(160\alpha^3\chi^3\psi^3-120\alpha^2\chi^4\psi^2-40\alpha\chi^5\psi^2):20\alpha\chi^3\psi.$$

80. Διαίρεσις δύο ἀκεραίων πολυωνύμων.—Καὶ ἐδῶ λέγομεν, ὅτι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως δύο πολυωνύμων δὲν εἶναι πάντοτε παράστασις ἀκεραία. 'Εὰν ὅμως ὑπάρχῃ ἀκεραία παράστασις (πολυώνυμον ἢ μονώνυμον) ἴση πρὸς τὸ πηλίκον δύο ἀκεραίων πολυωνύμων, τότε λέγεται τὸ ἓν **διαιρετὸν** διὰ τοῦ ἄλλου. ***'Η εὕρεσις δὲ τοῦ πηλίκου αὐτοῦ λέγεται διαίρεσις τῶν πολυωνύμων.***

'Η εὕρεσις τοῦ πηλίκου (ὅταν ὑπάρχῃ) τῆς διαιρέσεως δύο ἀκεραίων πολυωνύμων δὲν εἶναι τόσον εὔκολος, ὡς εἰς τὰς προηγουμένας περιπτώσεις τῆς διαιρέσεως. Διὰ νὰ ὁδηγηθῶμεν δὲ εἰς τὸν τρόπον τῆς εὑρέσεως αὐτοῦ, ἂς ἀναχωρήσωμεν ἀπὸ τὴν ταυτότητα

$$(\alpha+\beta)^3=(\alpha+\beta)^2.(\alpha+\beta)$$

ἥτις γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς (§ 75) :

$$\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3=(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2).(\alpha+\beta).$$

Αὕτη δὲ δεικνύει, ὅτι πηλίκον τῆς διαιρέσεως

$$(\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3):(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)$$

ὑπάρχει καὶ ὅτι εἶναι $\alpha+\beta$. "Ηδη ἂς ἴδωμεν, πῶς θὰ εὕρωμεν τοῦτο διὰ τῆς διαιρέσεως. 'Ημεῖς γνωρίζομεν, ὅτι τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον ἰσοῦται μὲ τὸν διαιρετέον· ἔχομεν δὲ οὕτως :

$$\begin{array}{rrl}
(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)(\alpha+\beta)= & & \\
(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)\alpha= & \alpha^3+2\alpha^2\beta+\alpha\beta^2 & \\
\text{καὶ}\ (\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)\beta= & \alpha^2\beta+2\alpha\beta^2+\beta^3 & \\
\hline
 & \alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3. &
\end{array}$$

Ἀλλ' ἀφοῦ ὁ $α^3$ εὑρίσκεται ἀπὸ τὸν πολλαπλασιασμὸν $α^2.α$, ἔπεται ὅτι, ἐὰν διαιρέσωμεν $α^3 : α^2$, θὰ εὕρωμεν τὸν $α$, ἤτοι τὸν πρῶτον ὅρον. Ὥστε ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ πηλίκου εὑρίσκεται, ἐὰν διαιρέσωμεν τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ διαιρέτου. Ἐὰν τώρα πολλαπλασιάσωμεν τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸν εὑρεθέντα πρῶτον ὅρον τοῦ πηλίκου, εὑρίσκομεν, ὡς βλέπομεν ἀνωτέρω, γινόμενον $α^3+2α^2β+αβ^2$. Ἐὰν δὲ τοῦτο ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸν διαιρετέον εὑρίσκομεν :

$$\begin{array}{r} α^3+3α^2β+3αβ^2+β^3 \\ -α^3-2α^2β-\ \ αβ^2 \\ \hline α^2β+2αβ^2+β^3 \end{array}$$

Ἀλλ' ἡ εὑρεθεῖσα διαφορὰ ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον $(α^2+2αβ+β^2)β$, ἤτοι μὲ τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸν δεύτερον ὅρον τοῦ πηλίκου. Ὥστε ἡ διαίρεσις

$$(α^2β+2αβ^2+β^3) : (α^2+2αβ+β^2)$$

θὰ μᾶς δώσῃ πηλίκον $β$, ἤτοι τὸν δεύτερον ὅρον τοῦ πηλίκου. Ἐὰν δὲ σκεφθῶμεν ὁμοίως ὡς ἄνω, θὰ ἴδωμεν, ὅτι ὁ ὅρος $β$ τοῦ πηλίκου εὑρίσκεται, ὅταν διαιρέσωμεν τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ νέου διαιρετέου διὰ τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ διαιρέτου, ἤτοι $α^2β : α^2=β$. Ἐπειδὴ δὲ τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸν $β$ ἰσοῦται μὲ τὸν νέον διαιρετέον, ἤτοι ἐπειδὴ τὸ γινόμενον τοῦτο ἀφαιρούμενον ἀπὸ τὸν διαιρετέον δίδει ὑπόλοιπον 0, ἔπεται ὅτι ἡ διαίρεσις ἐτελείωσε καὶ ὅτι πηλίκον αὐτῆς εἶναι $α+β$.

Ὁμοίως σκεπτόμενοι εὑρίσκομεν, ὅτι τῆς διαιρέσεως π.χ.

$$(α^3-3α^2β+3αβ^2-β^3) : (α-β)$$

ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ πηλίκου εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως

$$α^3 : α=α^2.$$

Κατόπιν τούτου πολλαπλασιάζομεν $(α-β).α^2=α^3-α^2β$ καὶ τὸ γινόμενον τοῦτο ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὸν διαιρετέον

$$\begin{array}{r} α^3-3α^2β+3αβ^2-β^3 \\ -α^3+\ \ α^2β \\ \hline -2α^2β+3αβ^2-β^3. \end{array}$$

Ἔπειτα διαιροῦμεν τὸν πρῶτον ὅρον $-2α^2β$ τοῦ ὑπολοίπου διὰ τοῦ πρώτου ὅρου $α$ τοῦ διαιρέτου καὶ εὑρίσκομεν τὸν δεύτερον ὅρον τοῦ πηλίκου, ἤτοι $-2α^2β : α=-2αβ$. Τὸν δεύτερον τοῦτον ὅρον πολλαπλασιάζομεν μὲ τὸν διαιρέτην, καὶ τὸ γινόμενον $(\alpha-\beta).(-2\alpha\beta)=-2\alpha^2\beta+2\alpha\beta^2$ ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὸν νέον διαιρετέον

$$\begin{array}{r} -2\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3 \\ +2\alpha^2\beta-2\alpha\beta^2 \\ \hline \alpha\beta^2-\beta^3. \end{array}$$

Τώρα διαιροῦμεν $(\alpha\beta^2-\beta^3):(\alpha-\beta)$ διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν τρίτον ὅρον τοῦ πηλίκου. Πρὸς τοῦτο δὲ διαιροῦμεν $\alpha\beta^2:\alpha=\beta^2$. Ἐὰν δὲ πολλαπλασιάσωμεν $(\alpha-\beta).\beta^2$ καὶ τὸ γινόμενον αὐτῶν ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸν νέον διαιρετέον, εὑρίσκομεν

$$\begin{array}{r} \alpha\beta^2-\beta^3 \\ -\alpha\beta^2+\beta^3 \\ \hline 0. \end{array}$$

Ὥστε ἡ διαίρεσις ἐτελείωσε καὶ τὸ πηλίκον αὐτῆς εἶναι

$$\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2.$$

Ἡ πρᾶξις αὐτη διατάσσεται ὡς ἑξῆς:

$$\begin{array}{r|l} \alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3 & \alpha-\beta \\ \cline{2-2} -\alpha^3+\alpha^2\beta \qquad\qquad & \alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2 \\ \hline -2\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3 & \\ +2\alpha^2\beta-2\alpha\beta^2 \quad & \\ \cline{1-1} \alpha\beta^2-\beta^3 & \\ -\alpha\beta^2+\beta^3 & \\ \cline{1-1} 0. & \end{array}$$

81. Ἐὰν τὸ ἄνω πολυώνυμον εἶναι διατεταγμένον κατὰ τὰς ἀνιούσας δυνάμεις τοῦ γράμματος α, οἱ συλλογισμοὶ καὶ ὁ τρόπος τῆς διαιρέσεως δὲν ἀλλάσσουν, μόνον θ᾽ ἀρχίσωμεν τὴν διαίρεσιν ἀπὸ τοὺς ὅρους, οἱ ὁποῖοι ἔχουν τὸ γράμμα τῆς διατάξεως μὲ τὸν μικρότερον ἐκθέτην, δηλαδὴ ἀπὸ τοὺς ὅρους β^3 καὶ β. Π.χ.

$$\begin{array}{r|l} -\beta^3+3\alpha\beta^2-3\alpha^2\beta+\alpha^3 & -\beta+\alpha \\ \cline{2-2} +\beta^3-\alpha\beta^2 \qquad\qquad\quad & \beta^2-2\alpha\beta+\alpha^2 \\ \hline 2\alpha\beta^2-3\alpha^2\beta+\alpha^3 & \\ -2\alpha\beta^2+2\alpha^2\beta \quad & \\ \cline{1-1} -\alpha^2\beta+\alpha^3 & \\ +\alpha^2\beta-\alpha^3 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

82. Ἐὰν εἰς μίαν διαίρεσιν ὑπάρχη πολυώνυμον πηλίκον, εἶναι φανερόν, ὅτι μία ἐκ τῶν μερικῶν διαιρέσεων, εἰς τὰς ὁποίας ἀνάγεται ἡ ἀρχική, θὰ δώση τὸν τελευταῖον ὅρον τοῦ πηλίκου καὶ θὰ ἀφήση ὑπόλοιπον 0.

Ἐὰν ὅμως εἰς μίαν διαίρεσιν δὲν ὑπάρχη ἀκέραιον πολυώνυμον ἴσον πρὸς τὸ πηλίκον αὐτῶν, τότε ἡ διαίρεσις δὲν δύναται νὰ τελειώση, ἢ

1) ***Ἐὰν ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ διαιρέτου δὲν διαιρῆ τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ διαιρετέου ἢ τὸν πρῶτον ὅρον ἑνὸς ἐκ τῶν ὑπολοίπων***, ἢ

2) ***Ἐὰν διαιρῆ ὅλους τούτους τοὺς ὅρους, ἀλλ' οὐδέποτε εὑρίσκεται ὑπόλοιπον Ο.***

Πδ. 1ον) Νὰ διαιρεθῆ τὸ πολυώνυμον :

$$2\alpha\chi^2+\alpha^2\chi+\alpha^3 \quad \text{διὰ τοῦ} \quad \chi-\alpha.$$

$$\begin{array}{r|l}
2\alpha\chi^2+\alpha^2\chi+\alpha^3 & \chi-\alpha \\ \cline{2-2}
-2\alpha\chi^2+2\alpha^2\chi & 2\alpha\chi+3\alpha^2 \\ \cline{1-1}
3\alpha^2\chi+\alpha^3 & \\
-3\alpha^2\chi+3\alpha^3 & \\ \cline{1-1}
4\alpha^3. &
\end{array}$$

2ον) Νὰ διαιρεθῆ τὸ πολυώνυμον :

$$2-9\chi-5\chi^2+16\chi^3-7\chi^4 \quad \text{διὰ τοῦ} \quad 1-\chi+2\chi^2-7\chi^3$$

$$\begin{array}{r|l}
2-9\chi-5\chi^2+16\chi^3-7\chi^4 & 1-\chi+2\chi^2-7\chi^3 \\ \cline{2-2}
-2+2\chi-4\chi^2+14\chi^3 & 2-7\chi-16\chi^2\ldots \\ \cline{1-1}
-7\chi-9\chi^2+30\chi^3-7\chi^4 & \\
+7\chi-7\chi^2+14\chi^3-49\chi^4 & \\ \cline{1-1}
-16\chi^2+44\chi^3-56\chi^4 & \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot &
\end{array}$$

Π α ρ α τ ή ρ η σ ι ς. Ἡ τελευταία διαίρεσις ἐξακολουθεῖ ἐπ' ἄπειρον, διότι τὰ πολυώνυμα εἶναι διατεταγμένα κατὰ τὰς ἀνιούσας δυνάμεις τοῦ γράμματος χ, ἐνῷ, ἐὰν ἦσαν διατεταγμένα κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ χ, θὰ ἐφθάνομεν εἰς ὑπόλοιπον βαθμοῦ κατωτέρου τοῦ βαθμοῦ τοῦ διαιρέτου (διότι εἰς ἑκάστην διαίρεσιν ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ διαιρετέου δὲν ὑπάρχει ἐν τῷ ὑπολοίπῳ), ὁπότε ἡ διαίρεσις θὰ διεκόπτετο. Διὰ τοῦτο, προτιμότερον εἰς τὴν διαίρεσιν νὰ διατάσσωμεν τὰ πολυώνυμα κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις ἑνὸς γράμματος.

Ἀσκήσεις.

61. Νὰ γίνουν αἱ διαιρέσεις :

$(\chi^2-\psi^2):(\chi+\psi)$ $\quad$ $(5\alpha^6+15\alpha^5+5\alpha+15):(\alpha+3)$

$(\alpha^2+\alpha\beta-2\beta^2):(\alpha-\beta)$ $\quad$ $(\alpha^3-2\alpha^2\beta-\alpha\beta^2+2\beta^3):(\alpha^2-\beta^2)$

$(3\alpha^2+\alpha\beta-2\beta^2):(3\alpha-2\beta)$ $\quad$ $(6\alpha^5-4\alpha^3\beta-3\alpha^2\beta^3+2\beta^4):(2\alpha^3-\beta^3)$

62. Νὰ γίνουν αἱ διαιρέσεις :

$$(\chi^3-\chi^2-5\chi+6):(\chi^2+\chi-3)$$
$$(4\chi^3-16\chi^2+25\chi-25):(2\chi^2-3\chi+5)$$
$$(21\alpha^4-16\alpha^3\beta+16\alpha^2\beta^2-5\alpha\beta^3+2\beta^4):(3\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$$

63. Νὰ γίνουν αἱ διαιρέσεις :

$(\alpha^5-\beta^5):(\alpha-\beta)$ $\quad$ $(\alpha^2+\beta^2):(\alpha+\beta)$

$(\alpha^3+\beta^3):(\alpha+\beta)$ $\quad$ $(\alpha^3-\beta^3):(\alpha^2-\beta^2)$

$(\alpha^5+\beta^5):(\alpha+\beta)$ $\quad$ $(\alpha^2+32):(\alpha+16)$

83. Ἀνάλυσις πολυωνύμου εἰς γινόμενον παραγόντων.— Ἡ ἀνάλυσις πολυωνύμου εἰς γινόμενον παραγόντων δὲν εἶναι πάντοτε δυνατή· ἀλλὰ καὶ ὅταν εἶναι δυνατή, δὲν ἔχομεν γενικὰς μεθόδους δι' αὐτήν.

Μέθοδοι τροπῆς πολυωνύμων εἰς γινόμενα παραγόντων ὑπάρχουν δι' ὡρισμένας περιπτώσεις, ἐκ τῶν ὁποίων ἀναφέρομεν τὰς ἑξῆς :

α') Ὅταν πάντες οἱ ὅροι πολυωνύμου ἔχουν μονώνυμον κοινὸν παράγοντα, ἐξάγομεν τοῦτο ἐκτὸς παρενθέσεως (§ 79).

Οὕτως : $\quad \alpha\chi^3+\beta\chi^2+\gamma\chi=\chi(\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma).$

β') Ἐὰν οἱ ὅροι πολυωνύμου δύνανται νὰ ἀποτελέσουν ὁμάδας, τῶν ὁποίων ἑκάστη περιέχει παράγοντας κοινούς, θέτομεν αὐτοὺς ἐκτὸς παρενθέσεως. Ἐὰν δὲ αἱ παρενθέσεις αὗται περιέχουν τὴν αὐτὴν παράστασιν, θέτομεν καὶ ταύτην ἐκτὸς παρενθέσεως.

Π.χ. $$\alpha\chi-\beta\chi+\gamma\chi+\alpha\psi-\beta\psi+\gamma\psi=$$
$$\chi(\alpha-\beta+\gamma)+\psi(\alpha-\beta+\gamma)=(\alpha-\beta+\gamma)(\chi+\psi).$$

γ') Ἐὰν διώνυμον εἶναι διαφορὰ τετραγώνων, ἀναλύεται εἰς γινόμενον δύο παραγόντων (ἄσκησις 54).

Π.χ. $\quad 16\alpha^2-25\beta^2=(4\alpha)^2-(5\beta)^2=(4\alpha+5\beta)(4\alpha-5\beta).$

δ') Τριώνυμον, τοῦ ὁποίου οἱ μὲν δύο ὅροι εἶναι τέλεια τετράγωνα ἀλγεβρικῶν παραστάσεων, ὁ δὲ τρίτος ὅρος εἶναι τὸ διπλάσιον γινόμενον τῶν παραστάσεων τούτων, τρέπεται εἰς τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος ἢ τῆς διαφορᾶς τῶν παραστάσεων τούτων (σημ. § 74). Οὕτως ἔχομεν :

$$25\chi^2+30\chi\psi+9\psi^2=(5\chi)^2+2.(5\chi).(3\psi)+(3\psi)^2=(5\chi+3\psi)^2$$
$$25\chi^2-30\chi\psi+9\psi^2=(5\chi)^2-2.(5\chi).(3\psi)+(3\psi)^2=(5\chi-3\psi)^2.$$

Ἀσκήσεις.

64. Νὰ τραποῦν εἰς γινόμενα αἱ παραστάσεις:

$5\alpha+5\beta$ $\quad$ $\alpha\chi+\beta\chi-\gamma\chi$
$-5\alpha-5\beta$ $\quad$ $\alpha\chi-5\alpha\psi-3\alpha\varphi$
$\alpha\beta-\beta$ $\quad$ $\alpha(\chi-\psi)-\beta(\chi-\psi)$
$\beta-\alpha\beta$ $\quad$ $(\alpha-\beta)\chi-2(\alpha-\beta)\psi$
$10\chi\psi-8\chi\varphi$ $\quad$ $(\alpha-\beta)\chi-(\alpha-\beta)$.

65. Ἐπίσης νὰ τραποῦν εἰς γινόμενα αἱ παραστάσεις:

$\alpha\chi+\beta\chi+\alpha\psi+\beta\psi$, $\quad$ $2\alpha\chi-2\beta\chi+3\alpha\psi-3\beta\psi$
$\alpha\chi+\beta\chi+\alpha+\beta$, $\quad$ $\alpha\gamma-\gamma\chi+\alpha\delta-\delta\chi$, $\quad$ $3\alpha\chi-5\beta\psi-3\beta\chi+5\alpha\psi$.

66. Νὰ ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενα δύο παραγόντων αἱ παραστάσεις:

$36\chi^2-25\psi^2$ $\quad$ $1.2-2.\alpha^2$ $\quad$ $3-3\alpha^2$ $\quad$ $3\alpha^4-27$
$5\chi^4-5\psi^2$ $\quad$ $\alpha\chi^4-25\alpha$ $\quad$ $(\alpha+\beta)^2-\gamma^2$ $\quad$ $(\alpha-\psi)^2-4\chi^2$.

67. Νὰ τραποῦν εἰς γινόμενα τὰ τριώνυμα:

$\mu^2+2\mu\nu+\nu^2$ $\quad$ $\alpha^2+6\alpha+9$ $\quad$ $\chi^2-6\chi+9$
$9\chi^2-6\chi\psi+\psi^2$ $\quad$ $4\alpha^2-12\alpha\beta+9\beta^2$ $\quad$ $64\psi^2-32\psi\chi+4\chi^2$.

84. **Ἀλγεβρικὰ κλάσματα.**—Τὸ πηλίκον δύο οἱωνδήποτε ἀλγεβρικῶν παραστάσεων παριστᾶται ὡς κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν τὸν διαιρετέον καὶ παρονομαστὴν τὸν διαιρέτην. Οὕτως ἔχομεν:

$$\alpha:\beta=\frac{\alpha}{\beta},\quad (3\alpha^2+2\beta^2):\alpha\beta=\frac{3\alpha^2+2\beta^2}{\alpha\beta},$$
$$(\chi^2+\chi\psi+\psi^2):(\alpha\chi-\beta\psi)=\frac{\chi^2+\chi\psi+\psi^2}{\alpha\chi-\beta\psi}.$$

Παραστάσεις ὡς αἱ

$$\frac{\alpha}{\beta},\qquad \frac{3\alpha^2+2\beta^2}{\alpha\beta},\qquad \frac{\chi^2+\chi\psi+\psi^2}{\alpha\chi-\beta\psi}$$

λέγονται **ἀλγεβρικὰ κλάσματα**.

85. Καὶ προηγουμένως εἴπομεν, ὅτι αἱ ἀλγεβρικαὶ παραστάσεις παριστοῦν ἀριθμούς. Ὥστε καὶ οἱ ὅροι ἑνὸς ἀλγεβρικοῦ κλάσματος ἀριθμοὺς παριστοῦν. Ἐκ τούτου λοιπὸν ἕπεται, ὅτι καὶ ἐπὶ τῶν ἀλγεβρικῶν κλασμάτων ἀληθεύουν αἱ ἰδιότητες τῶν ἀριθμητικῶν κλασμάτων. Διότι αἱ τελευταῖαι ἰδιότητες εἶναι συνέπειαι τῶν ἀρχικῶν ἰδιοτήτων τῶν πράξεων. Ἡμεῖς δὲ εἴδομεν, ὅτι αὗται ἀληθεύουν καὶ ἐπὶ τοῦ συστήματος τῶν θετικῶν καὶ ἀρνητικῶν ἀριθμῶν.

86. Ἁπλοποίησις.—1) Νὰ ἁπλοποιηθῇ τὸ ἀλγεβρικὸν κλάσμα :

$$\frac{20\alpha^5\beta^2\gamma}{15\alpha^3\beta\gamma^3\delta}.$$

Ἐδῶ παρατηροῦμεν, ὅτι οἱ παράγοντες $5\alpha^3\beta\gamma$ εἶναι κοινοὶ παράγοντες τῶν ὅρων αὐτοῦ. Ἐὰν διαιρέσωμεν λοιπὸν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος αὐτοῦ διὰ τοῦ μονωνύμου $5\alpha^3\beta\gamma$, θὰ ἔχωμεν :

$$\frac{20\alpha^5\beta^2\gamma}{15\alpha^3\beta\gamma^3\delta}=\frac{4\alpha^2\beta}{3\gamma^2\delta}.$$

2) Νὰ ἁπλοποιηθῇ τὸ κλάσμα : $\dfrac{\chi^2-2\chi\psi+\psi^2}{\chi^2-\psi^2}$.

Ἐδῶ παρατηροῦμεν, ὅτι

$$\chi^2-2\chi\psi+\psi^2=(\chi-\psi)^2=(\chi-\psi)(\chi-\psi)$$

καὶ ὅτι $$\chi^2-\psi^2=(\chi-\psi)\,.\,(\chi+\psi).$$

Ὥστε εἶναι $$\frac{\chi^2-2\chi\psi+\psi^2}{\chi^2-\psi^2}=\frac{(\chi-\psi)(\chi-\psi)}{(\chi-\psi)(\chi+\psi)}=\frac{\chi-\psi}{\chi+\psi}.$$

87. Πρόσθεσις καὶ ἀφαίρεσις κλασμάτων.—1) Νὰ προστεθοῦν τὰ κλάσματα : $\dfrac{\alpha}{\beta},\ \dfrac{\gamma}{\delta},\ \dfrac{\varepsilon}{\zeta}$.

Πρὸς τοῦτο θὰ τὰ τρέψωμεν εἰς ὁμώνυμα, μὲ κοινὸν παρονομαστὴν τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν· θὰ ἔχωμεν δὲ οὕτω :

$$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\gamma}{\delta}+\frac{\varepsilon}{\zeta}=\frac{\alpha\delta\zeta}{\beta\delta\zeta}+\frac{\gamma\beta\zeta}{\beta\delta\zeta}+\frac{\varepsilon\beta\delta}{\beta\delta\zeta}=\frac{\alpha\delta\zeta+\gamma\beta\zeta+\varepsilon\beta\delta}{\beta\delta\zeta}.$$

2) Ὁμοίως τά : $\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta},\ \dfrac{\beta}{\alpha-\beta},\ \dfrac{\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2}$.

Εἰς τὸ παράδειγμα τοῦτο θὰ λάβωμεν ὡς κοινὸν παρονομαστὴν ὄχι τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν, ἀλλὰ τὸ διώνυμον $\alpha^2-\beta^2$, διότι τοῦτο διαιρεῖται καὶ διὰ $\alpha+\beta$ καὶ διὰ $\alpha-\beta$· οὕτως ἔχομεν :

$$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}+\frac{\beta}{\alpha-\beta}+\frac{\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2}=\frac{\alpha(\alpha-\beta)}{\alpha^2-\beta^2}+\frac{\beta(\alpha+\beta)}{\alpha^2-\beta^2}+\frac{\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2}=$$
$$\frac{\alpha^2-\alpha\beta+\alpha\beta+\beta^2+\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2}=\frac{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}{\alpha^2-\beta^2}.$$

3) Νὰ ἀφαιρεθοῦν τὰ κλάσματα :

$$\frac{2\alpha\beta}{\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3},\quad \frac{1}{\alpha+\beta}.$$

Εἰς αὐτὰ κοινὸς παρονομαστὴς θὰ ληφθῇ ὁ

$$\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3=(\alpha+\beta)^3.$$

Θὰ ἔχωμεν λοιπόν :

$$\frac{2\alpha\beta}{\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3}-\frac{1}{\alpha+\beta}=\frac{2\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^3}-\frac{(\alpha+\beta)^2}{(\alpha+\beta)^3}=$$
$$\frac{2\alpha\beta-\alpha^2-2\alpha\beta-\beta^2}{(\alpha+\beta)^3}=\frac{-\alpha^2-\beta^2}{(\alpha+\beta)^3}=-\frac{\alpha^2+\beta^2}{(\alpha+\beta)^3}.$$

88. Πολλαπλασιασμός κλασμάτων.— 1) Νὰ πολλαπλασιασθοῦν τὰ κλάσματα :

$$\frac{\alpha}{\chi+\psi},\quad \frac{\chi-\psi}{\beta}.$$

Ἔχομεν $$\frac{\alpha}{\chi+\psi}\cdot\frac{\chi-\psi}{\beta}=\frac{\alpha(\chi-\psi)}{\beta(\chi+\psi)}.$$

2) Ὁμοίως τά : $\dfrac{12\chi\psi}{\chi^2-\psi^2},\quad \dfrac{\chi-\psi}{9\psi\varphi}$

Ἔχομεν $$\frac{12\chi\psi}{\chi^2-\psi^2}\cdot\frac{\chi-\psi}{9\psi\varphi}=\frac{12\chi\psi(\chi-\psi)}{9\psi\varphi(\chi^2-\psi^2)}=\frac{4\chi}{3\varphi(\chi+\psi)}.$$

89. Διαίρεσις κλασμάτων.—Νὰ γίνῃ ἡ διαίρεσις :

$$\frac{\chi^2-\psi^2}{3\alpha\beta}:\frac{2\chi-2\psi}{15\alpha^2}$$

Τὸ ζητούμενον πηλίκον εἶναι

$$\frac{\chi^2-\psi^2}{3\alpha\beta}\cdot\frac{15\alpha^2}{2(\chi-\psi)}=\frac{15\alpha^2(\chi^2-\psi^2)}{6\alpha\beta(\chi-\psi)}=\frac{5\alpha(\chi+\psi)}{2\beta}.$$

90. Σύνθετα κλάσματα.— Τὸ πηλίκον $\dfrac{1}{\alpha+\beta}:\dfrac{1}{\alpha-\beta}$

παριστᾶται διὰ τοῦ συνθέτου κλάσματος $\dfrac{\dfrac{1}{\alpha+\beta}}{\dfrac{1}{\alpha-\beta}}$.

Ἵνα ἓν σύνθετον κλάσμα τραπῇ εἰς ἁπλοῦν, διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητὴν αὐτοῦ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ του. Οὕτως ἔχομεν :

$$\frac{\dfrac{1}{\alpha+\beta}}{\dfrac{1}{\alpha-\beta}}=\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\quad\text{καὶ}\quad\frac{\beta+\dfrac{\alpha}{\beta}}{\alpha-\dfrac{\beta}{\alpha}}=\left(\beta+\frac{\alpha}{\beta}\right):\left(\alpha-\frac{\beta}{\alpha}\right)=$$
$$\frac{\beta^2+\alpha}{\beta}:\frac{\alpha^2-\beta}{\alpha}=\frac{\alpha(\alpha+\beta^2)}{\beta(\alpha^2-\beta)}$$

Ἀσκήσεις.

68. Νὰ ἁπλοποιηθοῦν τὰ κάτωθι ἀλγεβρικὰ κλάσματα :

$$\frac{\chi^2}{\chi\psi}\qquad\frac{5\chi^2\psi}{10\chi\psi^2}\qquad\frac{24\alpha^2\beta\chi}{12\alpha\beta^2}\qquad\frac{-5\alpha^3\beta^4\chi}{35\alpha^2\beta^4\chi^2}\qquad\frac{27\chi^3\psi^4\varphi^2}{-18\chi\psi^2\varphi^4}$$
$$\frac{\chi^2+\chi\psi}{\chi^2-\chi\psi}\qquad\frac{\chi^2-\chi\psi}{\chi\psi-\psi^2}\qquad\frac{\chi^2-\chi\psi}{\psi^2-\chi\psi}\qquad\frac{2\chi+\chi^2}{2\psi+\chi\psi}\qquad\frac{3\chi\psi-3\chi}{9\psi^2-9\psi}.$$

69. Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ πράξεις :

$$\frac{2\chi}{3}+\frac{\chi}{3}, \quad \frac{7\psi}{5}-\frac{2\psi}{5}, \quad \frac{5\alpha}{\chi}+\frac{3\alpha}{\chi}-\frac{2\alpha}{\chi}$$

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}, \quad \frac{3}{\alpha}-\frac{2}{\beta}, \quad \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}$$

$$\frac{2\chi}{3}+\frac{3\psi}{5}-\frac{\varphi}{15} \qquad \frac{\chi}{\psi\varphi}+\frac{\psi}{\chi\varphi}+\frac{\varphi}{\chi\psi}$$

$$\frac{\chi}{4}-\frac{\psi}{3}+\frac{\chi}{12}-\frac{\psi}{20} \qquad \frac{2}{\chi+1}+\frac{3}{\chi-1}.$$

70. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ γινόμενα τῶν κάτωθι πολλαπλασιασμῶν καὶ ἔπειτα νὰ ἁπλοποιηθοῦν ταῦτα :

1) $\frac{\alpha}{\chi}\cdot\chi$ 3) $\frac{\alpha}{18\chi^2}\cdot 12\chi$ 5) $-\frac{2\alpha\beta\chi}{\psi}\cdot\frac{3\varphi}{\alpha\beta\chi}$

2) $\frac{\beta}{\psi^2}\cdot\psi$ 4) $\frac{\alpha^2}{\beta}\cdot\frac{\beta^2}{\alpha\chi}$ 6) $\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\cdot\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}$

7) $\frac{\chi^2-\psi^2}{6\chi}\cdot\frac{3\psi}{\chi-\psi}$ 8) $\left(\frac{1}{\chi}+\frac{1}{\psi}-\frac{1}{\varphi}\right)\cdot\chi\psi\varphi.$

71. Νὰ γίνουν αἱ κάτωθι διαιρέσεις :

$$\frac{\alpha}{\beta}:\alpha, \qquad \alpha:\frac{\alpha}{\beta}, \qquad \frac{\alpha}{\beta}:\frac{\alpha}{5\beta}$$

$$\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}:\frac{(\alpha+\beta)^2}{\alpha^2-\beta^2}, \qquad (\alpha+\beta):\frac{\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2}{\alpha-\beta}$$

$$\frac{9\alpha^2\beta^2}{5\chi^2\psi}:\frac{3\alpha\beta}{20\chi^2\psi^3} \qquad \frac{\chi\psi^2}{\alpha-\beta}:\frac{\chi^3\psi}{\beta-\alpha}.$$

72. Νὰ ἁπλοποιηθοῦν τὰ κλάσματα :

$$\frac{\frac{\chi}{\psi}+1}{\frac{\chi}{\psi}-1} \qquad \frac{\alpha}{\alpha+\frac{\gamma}{\delta}} \qquad \frac{\alpha+\frac{\beta}{\gamma}}{\alpha-\frac{\beta}{\gamma}}$$

$$\frac{\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\beta}{\alpha}}{\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}} \qquad \frac{\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\gamma}}{\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\beta}{\gamma}} \qquad \frac{\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\gamma}{\delta}}{\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\gamma}{\delta}}$$

ΒΙΒΛΙΟΝ Β'

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΟΥ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΟΥ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ ΜΕ ΕΝΑ ΑΓΝΩΣΤΟΝ

91. **Ὁρισμοί.**—Ἐξ ὅσων εἴπομεν εἰς τὰς §§ 60 καὶ 61 συνάγομεν, ὅτι διὰ τῶν διαφόρων μετασχηματισμῶν τῶν ἀλγεβρικῶν παραστάσεων, οἱ ὁποῖοι γίνονται δυνάμει τῶν πράξεων, προκύπτουν ταυτότητες. Οὕτως αἱ ἰσότητες :
$(5\alpha-3\beta).7\chi=35\alpha\chi-21\beta\chi$, $(30\alpha^2-15\alpha):5\alpha=6\alpha-3$ κτλ. εἶναι ταυτότητες.

Ἤδη, ἄς λάβωμεν δύο τυχούσας ἀλγεβρικὰς παραστάσεις, π.χ. τὰς $5\chi+4$ καὶ $7\chi-2$ καὶ ἄς συνδέσωμεν αὐτὰς μὲ τὸ σημεῖον τῆς ἰσότητος, ἁπότε θὰ ἔχωμεν $5\chi+4=7\chi-2$. Ἀλλὰ παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ ἰσότης αὐτὴ ἀληθεύει μόνον διὰ $\chi=3$· διότι ἔχομεν $5.3+4=7.3-2$ ἤτοι $15+4=21-2$, ἐνῷ διὰ $\chi=2,4$ κτλ. ἔχομεν $10+4>14-2$ καὶ $20+4<28-2$ κτλ.

Αἱ τοιαῦται ἰσότητες καλοῦνται ἐξισώσεις. Γενικῶς δέ : ***Ἐξίσωσιν καλοῦμεν τὴν ἰσότητα, τῆς ὁποίας τὰ μέλη ἔχουν γράμματα καὶ ἡ ὁποία ἀληθεύει, ὅταν τὸ γράμμα ἢ τὰ γράμματα λάβουν καταλλήλους τιμάς.***

Τοιαύτη εἶναι ἡ ἰσότης $\chi^2-3\chi=10$, ἥτις ἀληθεύει διὰ $\chi=5$ καὶ διὰ $\chi=-2$, διότι $5^2-3.5=10$ καὶ $(-2)^2-3.(-2)=10$. Τὰ γράμματα τῆς ἐξισώσεως, τὰ ὁποῖα πρέπει νὰ ἀντικατασταθοῦν μὲ ὡρισμένους ἀριθμούς, ἵνα ἀληθεύσῃ ἡ ἰσότης, λέγονται **ἄγνωστοι** τῆς ἐξισώσεως. Οἱ δὲ ὡρισμένοι ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι, ὅταν ἀντικαταστήσουν τοὺς ἀγνώστους, ἐπαληθεύουν τὴν ἐξίσωσιν, λέγονται **λύσεις** ἢ **ρίζαι** τῆς ἐξισώσεως. Ἐὰν δὲ τοιοῦτοι ἀριθμοὶ δὲν ὑπάρχουν, ἡ ἐξίσωσις λέγεται **ἀδύνατος**.

Οἱ ἄγνωστοι παριστῶνται συνήθως διὰ τῶν τελευταίων γραμμάτων τοῦ ἀλφαβήτου φ, χ, ψ, ω.

Ἡ εὕρεσις τῶν τιμῶν τῶν ἀγνώστων λέγεται καὶ αὐτὴ λύσις τῆς ἐξισώσεως. Εἶναι δὲ ἡ λύσις τῶν ἐξισώσεων τὸ κυριώτατον ἔργον τῆς Ἀλγέβρας, διότι εἰς τοῦτο ἀνάγεται, ὡς θὰ ἴδωμεν, ἡ λύσις τῶν προβλημάτων.

92. Διάφοροι κατηγορίαι ἐξισώσεων.— Αἱ ἐξισώσεις δύνανται νὰ παρουσιασθοῦν ὑπὸ διαφόρους μορφάς· οὕτω π.χ.

1) Ἔχομεν τὰς ἐξισώσεις μὲ ἕνα μόνον ἄγνωστον, ὡς εἶναι αἱ:

$$2\chi + 5 = 9, \qquad \chi^2 - 4 = 21 \text{ κτλ.}$$

ἢ καὶ μὲ δύο, τρεῖς κτλ. ἀγνώστους, ὡς εἶναι αἱ:

$$\chi + \psi = 10, \quad \chi + \varphi + \psi - 15 = 42, \quad \chi^3 - \psi^2 = 5\omega \text{ κτλ.}$$

2) Ἔχομεν τὰς ἐξισώσεις, αἱ ὁποῖαι δὲν ἔχουν οὐδένα ἄγνωστον εἰς τὸν παρονομαστήν, λέγονται δὲ διὰ τοῦτο **ἀκέραιαι**, ὡς εἶναι ἡ ἐξίσωσις $7\chi + 13 = 15\chi - 3$. Ἐνῷ αἱ ἐξισώσεις, αἱ ὁποῖαι ἔχουν ἄγνωστον εἰς τὸν παρονομαστήν, λέγονται **κλασματικαί**. Κλασματικὴ ἐξίσωσις εἶναι π.χ. ἡ $\dfrac{8}{\chi+1} = \dfrac{3\chi}{2\chi-1}$.

93. Ἰσοδύναμοι ἐξισώσεις.— Αἱ ἐξισώσεις $3\chi + 1 = 13$ καὶ $5\chi - 3 = 17$ εὐκόλως βλέπομεν, ὅτι ἔχουν τὴν αὐτὴν ῥίζαν 4. Δύο ἐξισώσεις, ὅταν ἔχουν τὰς αὐτὰς ῥίζας, ἤτοι ὅταν αἱ ῥίζαι τῆς πρώτης εἶναι ῥίζαι τῆς δευτέρας καὶ ἀντιστρόφως, λέγονται **ἰσοδύναμοι**. Ὥστε αἱ ἀνωτέρω δύο ἐξισώσεις εἶναι ἰσοδύναμοι.

Ἡ λύσις μιᾶς ἐξισώσεως δὲν εἶναι πάντοτε εὔκολος. Διὰ τοῦτο μετασχηματίζομεν αὐτὴν διαδοχικῶς εἰς ἄλλας ἰσοδυνάμους ἐξισώσεις, μέχρις οὗ εὕρωμεν ἐξίσωσιν ἰσοδύναμον, τῆς ὁποίας ἡ λύσις εἶναι προφανής, ὡς π.χ. εἶναι ἡ λύσις τῆς ἐξισώσεως $\chi = 5$, τῆς ὁποίας ἡ ῥίζα εἶναι 5. Ὁ μετασχηματισμὸς μιᾶς ἐξισώσεως εἰς ἄλλην ἰσοδύναμον στηρίζεται ἐπὶ τῶν κάτωθι ἰδιοτήτων.

ΓΕΝΙΚΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

94. Α΄ ἰδιότης.—Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $3\chi = 18$, ἡ ὁποία ἀληθεύει διὰ τὴν τιμὴν $\chi = 6$. Ἐὰν ἤδη εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη αὐτῆς προστεθῇ ὁ τυχὼν ἀριθμός, π.χ. ὁ 7, προκύπτει ἡ ἐξίσωσις $3\chi + 7 = 18 + 7$. Ἀλλ' ἀφοῦ διὰ $\chi = 6$ ἔχομεν $3\chi = 18$, διὰ τὴν ἰδίαν τιμὴν $\chi = 6$ θὰ ἔχωμεν καὶ $3\chi+7=18+7$, διότι εἰς ἴσους ἀριθμοὺς προσεθέσαμεν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν 7. Ὥστε πᾶσα λύσις τῆς πρώτης ἐξισώσεως εἶναι λύσις καὶ τῆς δευτέρας. Καὶ ἀντιστρόφως, ἀφοῦ ἡ δευτέρα ἐξίσωσις ἀληθεύει διὰ $\chi=6$, θὰ ἀληθεύῃ καὶ ἡ πρώτη, διότι εὑρίσκομεν αὐτήν, ἂν ἀπὸ τὰ ἴσα μέλη τῆς δευτέρας ἀφαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν 7. Ὥστε αἱ ἀνωτέρω ἐξισώσεις εἶναι ἰσοδύναμοι. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι αἱ ἐξισώσεις $3\chi=18$ καὶ $3\chi+\mu=18+\mu$ εἶναι ἰσοδύναμοι, ὡς καὶ αἱ $3\chi=18$ καὶ $3\chi-\mu=18-\mu$. Ὥστε: ***Ἐὰν προσθέσωμεν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη ἐξισώσεως ἢ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ αὐτῶν τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, λαμβάνομεν ἐξίσωσιν ἰσοδύναμον.***

Π.χ. αἱ ἐξισώσεις:

$$\chi+5=6\chi \quad \text{καὶ} \quad \chi+5+3=6\chi+3$$

εἶναι ἰσοδύναμοι, ὅπως εἶναι καὶ αἱ

$$2\chi^2+\chi+3=\chi^2+\chi+28 \quad \text{καὶ} \quad 2\chi^2+3=\chi^2+28.$$

Πόρισμα 1ον. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $6\chi-5=2\chi+11$. Ἐὰν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη αὐτῆς προσθέσωμεν τὸν 5, λαμβάνομεν τὴν ἰσοδύναμον $6\chi=2\chi+11+5$, ἐὰν δὲ καὶ εἰς τὰ μέλη τῆς νέας αὐτῆς ἐξισώσεως προσθέσωμεν τὸν -2χ, λαμβάνομεν τὴν ἰσοδύναμον $6\chi-2\chi=11+5$. Ἀλλ' ἤδη παρατηροῦμεν, ὅτι ὁ ὅρος -5 τοῦ πρώτου μέλους εὑρίσκεται εἰς τὸ δεύτερον μέλος μὲ ἀντίθετον σημεῖον. Ἐπίσης καὶ ὁ ὅρος 2χ εὑρίσκεται εἰς τὸ πρῶτον μέλος, πάλιν μὲ ἀντίθετον σημεῖον. Ὥστε: ***Δυνάμεθα νὰ μεταφέρωμεν οἱονδήποτε ὅρον ἐξισώσεως ἀπὸ τοῦ ἑνὸς μέλους εἰς τὸ ἄλλο, ἀρκεῖ νὰ ἀλλάξωμεν τὸ σημεῖον αὐτοῦ.***

Πόρισμα 2ον. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις

$$3\chi^2+7+5\chi=2\chi^2-2\chi-5.$$

Ἀλλὰ κατὰ τὸ προηγούμενον πόρισμα δυνάμεθα νὰ μεταφέρωμεν ὅλους τοὺς ὅρους τοῦ ἑνὸς μέλους εἰς τὸ ἄλλο, π.χ. τοῦ δευτέρου εἰς τὸ πρῶτον· ἀλλὰ τότε θὰ ἔχωμεν:

$$3\chi^2+7+5\chi-2\chi^2+2\chi+5=0$$

ἤ, μετὰ τὴν ἀναγωγήν: $\chi^2+7\chi+12=0$.

Ἑπομένως: ***Πᾶσα ἐξίσωσις ἀκεραία δύναται νὰ τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν ἑνὸς πολυωνύμου ἴσου πρὸς τὸ 0.***

95. Β' ἰδιότης.—Δι' ὁμοίων συλλογισμῶν μὲ τοὺς τῆς προηγουμένης ἰδιότητος, συνάγομεν ὅτι:

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη ἐξισώσεως ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν (πλὴν τοῦ Ο) ἢ διαιρέσωμεν διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, λαμβάνομεν ἐξίσωσιν ἰσοδύναμον.

Οὕτως αἱ ἐξισώσεις :

$$3\chi+8=\frac{\chi}{3}-4 \text{ καὶ } (3\chi+8).3=\left(\frac{\chi}{3}-4\right).3$$

ἤτοι αἱ $\quad 3\chi+8=\frac{\chi}{3}-4$ καὶ $9\chi+24=\chi-12$

εἶναι ἰσοδύναμοι. Ἐπίσης ἰσοδύναμοι εἶναι καὶ αἱ ἐξισώσεις :

$5\chi=30$ καὶ $\frac{5\chi}{5}=\frac{30}{5}$, ἤτοι αἱ $5\chi=30$ καὶ $\chi=6$.

Πόρισμα 1ον. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $-5\chi=25$. Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὰ μέλη αὐτῆς ἐπὶ -1, λαμβάνομεν τὴν ἰσοδύναμον $5\chi=-25$. Ἐὰν κάμωμεν τὸ αὐτὸ καὶ εἰς τὴν ἐξίσωσιν $-8\chi=-23+7$, θὰ λάβωμεν τὴν ἰσοδύναμον $8\chi=23-7$.

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι : ***Δυνάμεθα νὰ ἀλλάξωμεν τὰ σημεῖα ὅλων τῶν ὅρων μιᾶς ἐξισώσεως.***

Πόρισμα 2ον. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $\frac{5\chi}{2}-9=\frac{4\chi}{3}-2$· ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη αὐτῆς ἐπὶ ἓν κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν παρονομαστῶν, π.χ. ἐπὶ τὸ γινόμενον αὐτῶν 2.3, λαμβάνομεν τὴν ἰσοδύναμον :

$$2.3.\frac{5\chi}{2}-2.3.9=2.3.\frac{4\chi}{3}-2.3.2,$$

ἤτοι τὴν $\quad 15\chi-54=8\chi-12,$

ἡ ὁποία παρατηροῦμεν, ὅτι δὲν ἔχει παρονομαστάς. Ὥστε : ***Δυνάμεθα νὰ ἀπαλείψωμεν ὅλους τοὺς παρονομαστὰς τῶν ὅρων μιᾶς ἐξισώσεως.***

Σημείωσις. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $5\chi-15=0$, ἡ ὁποία ἔχει μίαν μόνον ρίζαν, τὴν $\chi=3$. Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὰ μέλη αὐτῆς ἐπὶ $\chi-2$, λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν : $(\chi-2).(5\chi-15)=0$.
Ἀλλ' ἡ ἐξίσωσις αὐτὴ ἐκτὸς τῆς ρίζης $\chi=3$ περιέχει καὶ τὴν ρίζαν $\chi=2$, διότι $(2-2).(5.2-15)=0.(-5)=0$.
Ὥστε αἱ δύο ἀνωτέρω ἐξισώσεις δὲν εἶναι ἰσοδύναμοι. Βλέπομεν λοιπόν, ὅτι ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς περιέχῃ ἕνα ἢ περισσοτέρους ἀγνώστους τῆς ἐξισώσεως, ἡ προκύπτουσα ἐξίσωσις δὲν εἶναι ἐν γένει ἰσοδύναμος πρὸς τὴν ἀρχικήν. Διότι δύναται νὰ περιέχῃ μίαν ἢ περισσοτέρας ρίζας, αἱ ὁποῖαι δὲν εἶναι ρίζαι καὶ τῆς πρώτης, ἤτοι διότι περιέχει ξένας ρίζας.

Ὁμοίως, ἐὰν ὁ διαιρέτης περιέχῃ ἕνα ἢ περισσοτέρους ἀγνώστους τῆς ἐξισώσεως, ἡ προκύπτουσα ἐξίσωσις δὲν εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν πρώτην. Διότι δύναται νὰ περιέχῃ ρίζας ὀλιγωτέρας τῶν ριζῶν τῆς πρώτης.

96. **Βαθμὸς τῶν ἐξισώσεων.**—Εἴδομεν προηγουμένως, ὅτι πᾶσα ἐξίσωσις ἀκεραία δύναται νὰ τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν πολυωνύμου ἴσου πρὸς τὸ μηδέν. Ἐὰν δὲ τὸ ἀκέραιον τοῦτο πολυώνυμον δὲν ἔχῃ ὁμοίους ὅρους, ὁ βαθμὸς αὐτοῦ λέγεται βαθμὸς τῆς ἐξισώσεως.

Οὕτως αἱ ἐξισώσεις:

$$5\chi-10=0 \quad \text{καὶ} \quad 3\chi+2\psi-13=0$$

εἶναι πρώτου βαθμοῦ, δευτέρου δὲ βαθμοῦ εἶναι αἱ

$$\chi^2-7\chi+12=0 \quad \text{καὶ} \quad \chi\psi+\chi-\psi-19=0.$$

ΛΥΣΙΣ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΤΟΥ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ ΜΕ ΕΝΑ ΑΓΝΩΣΤΟΝ

97. Διὰ νὰ λύσωμεν μίαν ἐξίσωσιν πρώτου βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον, θὰ προσπαθήσωμεν πρῶτον νὰ φέρωμεν αὐτὴν εἰς τὴν ἁπλουστέραν της μορφήν, ἐφαρμόζοντες τὰς γνωστὰς ἰδιότητας τῶν ἐξισώσεων.

Π.χ. Ἔστω πρὸς λύσιν ἡ ἐξίσωσις

$$\frac{3(\chi+1)}{7}-4=\frac{1-\chi}{5} \tag{1}$$

Πρὸς τοῦτο, ἀπαλείφομεν τοὺς παρονομαστάς, τοὺς ὁποίους ἔχει, πολλαπλασιάζοντες τὰ μέλη της ἐπὶ τὸ γινόμενον 5.7, ὁπότε εὑρίσκομεν τὴν ἰσοδύναμον

$$5.7.\frac{3(\chi+1)}{7}-5.7.4=5.7.\frac{1-\chi}{5}$$

ἤτοι τὴν
$$5.3(\chi+1)-5.7.4=7(1-\chi)$$

ἤ, μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πράξεων, τὴν

$$15\chi+15-140=7-7\chi \tag{2}$$

Κατόπιν τούτων μεταφέρομεν τοὺς ὅρους, οἱ ὁποῖοι περιέχουν τὸν χ, εἰς τὸ ἓν μέλος καὶ τοὺς γνωστοὺς ὅρους εἰς τὸ ἄλλο μέλος, δηλαδὴ χωρίζομεν τοὺς γνωστοὺς ὅρους ἀπὸ τοὺς ὅρους, οἱ ὁποῖοι ἔχουν τὸν ἄγνωστον, ὅτε λαμβάνομεν τὴν ἰσοδύναμον πρὸς τὰς ἀνωτέρω (1) καὶ (2)

$$15\chi+7\chi=140+7-15$$

ἤ, μετὰ τὴν ἀναγωγήν, $22\chi=132$.

Εἶναι δὲ ἡ ἐξίσωσις αὐτὴ πρώτου βαθμοῦ· ἐὰν ἤδη διαιρέσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη διὰ 22, εὑρίσκομεν $\chi = \frac{132}{22} = 6$, δηλαδὴ εὑρίσκομεν, ὅτι ὁ 6 εἶναι ρίζα τῆς δοθείσης ἐξισώσεως. Καὶ πράγματι, ἂν ἀντικαταστήσωμεν τὸν χ διὰ τοῦ 6 εἰς τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν, εὑρίσκομεν $\frac{3(6+1)}{7} - 4 = \frac{1-6}{5}$, καὶ μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πράξεων εὑρίσκομεν, ὡς ἔπρεπε νὰ συμβῇ, τὴν ἰσότητα : $-1 = -1$.

98. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι διὰ νὰ λύσωμεν ἐξίσωσιν πρώτου βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον :

α΄) Ἀπαλείφομεν τοὺς παρονομαστάς, ἐὰν ἔχῃ.

β΄) Ἐκτελοῦμεν τὰς πράξεις.

γ΄) Χωρίζομεν τοὺς γνωστοὺς ὅρους ἀπὸ ἐκείνους, οἱ ὁποῖοι περιέχουν τὸν ἄγνωστον.

δ΄) Κάμνομεν τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων, καὶ

ε΄) Διαιροῦμεν τὰ μέλη τῆς τελευταίας ἐξισώσεως διὰ τοῦ συντελεστοῦ τοῦ ἀγνώστου, ἐὰν οὗτος εἶναι διάφορος τοῦ 0, ὁπότε εὑρίσκομεν τὴν λύσιν τῆς ἐξισώσεως, ἡ ὁποία προφανῶς εἶναι μία καὶ μόνη.

Πδ. 1) Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $5 - \frac{4+\chi}{4} = 4 - \frac{5+\chi}{5}$.

Πολλαπλασιάζοντες ὅλους τοὺς ὅρους ἐπὶ τὸ γινόμενον 5.4 εὑρίσκομεν:

$$5.4.5 - 5(4+\chi) = 5.4.4 - 4(5+\chi)$$

ἢ $$100 - 20 - 5\chi = 80 - 20 - 4\chi$$

ἢ $$100 - 20 - 80 + 20 = 5\chi - 4\chi, \text{ ἤτοι } \chi = 20.$$

2) Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $4\chi + 3 = \frac{12-\chi}{2} - 3$.

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω ἔχομεν:

$$8\chi + 6 = 12 - \chi - 6$$

ἢ $$8\chi + \chi = 12 - 6 - 6$$

ἢ $$9\chi = 0, \quad \text{ἤτοι} \quad \chi = \frac{0}{9} = 0.$$

99. Μερικαὶ περιπτώσεις.— α΄) ***Ἐξισώσεις ἀδύνατοι.*** Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις : $\frac{5\chi+1}{10} + 2 = \frac{\chi}{2} + \frac{1}{5}$.

Πολλαπλασιάζομεν ὅλους τοὺς ὅρους τῆς ἐξισώσεως ἐπὶ τὸ ἑ.κ.π. τῶν παρονομαστῶν, ἤτοι ἐπὶ 10, ὁπότε εὑρίσκομεν :

$$5\chi + 1 + 20 = 5\chi + 2\cdot$$

ἐὰν δὲ ἤδη χωρίσωμεν τοὺς γνωστοὺς ἀπὸ τῶν ἀγνώστων ὅρων καὶ κάμωμεν τὴν ἀναγωγήν, εὑρίσκομεν :

$$5\chi - 5\chi = -20 - 1 + 2 \quad \text{καὶ} \quad 0.\chi = -19.$$

Ἀλλὰ μὲ οἱονδήποτε ἀριθμὸν καὶ ἂν ἀντικαταστήσωμεν τὸν χ, θὰ ἔχωμεν γινόμενον 0, ἤτοι θὰ ἔχωμεν $0 = -19$. Τοῦτο ὅμως εἶναι ἀδύνατον. Ὥστε καὶ ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις εἶναι ἀδύνατος, ἤτοι ὑπὸ οὐδενὸς ἀριθμοῦ ἐπαληθεύεται.

β′) ***Ἐξισώσεις ἀπροσδιόριστοι.*** Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις :

$$\frac{5(3+16\chi)}{8} - 9\chi = \frac{8\chi+15}{8}.$$

Κατὰ τὰ προηγούμενα, ἔχομεν :

$$15 + 80\chi - 72\chi = 8\chi + 15$$

ἢ

$$80\chi - 72\chi - 8\chi = 15 - 15$$

ἢ

$$0.\chi = 0.$$

Ὥστε οἱανδήποτε τιμὴν καὶ ἂν δώσωμεν εἰς τὸν χ, πάντοτε θὰ ἔχωμεν $0=0$. Ἤτοι ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἐπαληθεύεται διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ χ καὶ ἑπομένως εἶναι ταυτότης.

100. Ἐγγράμματοι ἐξισώσεις.— Νὰ λυθῇ ἡ ἐγγράμματος ἐξίσωσις :

$$\frac{\alpha\chi}{\beta} - \frac{\beta(\chi-\beta)}{\alpha} = \alpha,$$

εἰς τὴν ὁποίαν παρατηροῦμεν, ὅτι οἱ γνωστοὶ ἀριθμοὶ παριστῶνται διὰ τῶν γραμμάτων α καὶ β. Πρὸς τοῦτο ἐργαζόμεθα ὅπως καὶ εἰς τὰς ἀριθμητικὰς ἐξισώσεις, ὁπότε εὑρίσκομεν διαδοχικῶς τὰς ἰσοδυνάμους πρὸς τὴν δοθεῖσαν ἐξισώσεις :

$$\alpha^2\chi - \beta^2(\chi-\beta) = \alpha^2\beta, \qquad \alpha^2\chi - \beta^2\chi + \beta^3 = \alpha^2\beta$$

$$(\alpha^2-\beta^2)\chi = \alpha^2\beta - \beta^3, \qquad (\alpha^2-\beta^2)\chi = \beta(\alpha^2-\beta^2).$$

Ἤδη, ἐὰν $\alpha^2-\beta^2 \neq 0$, ἤτοι ἐὰν $\alpha \neq \beta$, διαιροῦμεν τὰ μέλη τῆς τελευταίας ἐξισώσεως διὰ $\alpha^2-\beta^2$, ὁπότε εὑρίσκομεν $\chi=\beta$. Ἐὰν ὅμως εἶναι $\alpha=\beta$, ἤτοι, ἐὰν εἶναι $\alpha^2-\beta^2=0$, ἡ διαίρεσις διὰ τοῦ $\alpha^2-\beta^2$ εἶναι ἀδύνατος καὶ ἡ προηγουμένη ἐξίσωσις γίνεται $0=0$. Ὥστε εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γίνεται ταυτότης.

101. Γενικὴ μορφὴ τῆς ἐξισώσεως α′ βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον.— Πᾶσα ἐξίσωσις πρώτου βαθμοῦ, εἰς τὴν ὁποίαν ἐφαρμόζομεν τὰ α′, β′, γ′, δ′ τῆς § 98, λαμβάνει τὴν μορφὴν $\alpha\chi=\beta$, ὅπου α καὶ β εἶναι ὡρισμένοι ἀριθμοί. Εἶναι δὲ φανερόν, ὅτι ἡ ἐξίσωσις αὐτή, ἡ ὁποία εὑρέθη διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τῶν ἰδιοτήτων τῶν ἐξισώσεων (§ 94), εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν ἀρχικήν. Ὥστε πᾶσα ἐξίσωσις πρώτου βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν ἐξισώσεως ὡς ἡ $\alpha\chi=\beta$.

Ἤδη παρατηροῦμεν τὰ ἑξῆς :

1) Ἐὰν $\alpha\neq 0$, ἡ διαίρεσις τῶν μελῶν τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς δι' α εἶναι δυνατή, ὁπότε διαιροῦντες ἔχομεν $\chi=\frac{\beta}{\alpha}$· ὑπάρχει λοιπὸν εἷς ἀριθμὸς καὶ προφανῶς εἷς καὶ μόνος, ὅστις ἐπαληθεύει τὴν ἐξίσωσιν.

2) Ἐὰν $\alpha=0$ καὶ $\beta\neq 0$, οὐδέποτε εἶναι δυνατὴ ἡ ἰσότης $0.\chi=\beta$· δὲν ὑπάρχει λοιπὸν οὐδεμία λύσις καὶ ἡ ἐξίσωσις εἶναι ἀδύνατος (§ 99, α).

3) Ἐὰν $\alpha=0$ καὶ $\beta=0$, ὁποιαδήποτε καὶ ἂν εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ χ, θὰ εἶναι πάντοτε $0.\chi=0$· ὑπάρχει λοιπὸν ἀπειρία λύσεων καὶ ἡ ἐξίσωσις εἶναι ταυτότης (§ 99, β). Ἀνακεφαλαιοῦντες λοιπὸν λέγομεν. Ἐὰν εἰς τὴν ἐξίσωσιν $\boldsymbol{\alpha\chi=\beta}$ εἶναι :

1) ***α≠Ο, ὑπάρχει λύσις μία καὶ μόνη, ἡ*** $\frac{\beta}{\alpha}$

2) ***α=Ο καὶ β≠Ο, ἡ ἐξίσωσις εἶναι ἀδύνατος,*** καὶ

3) ***α=Ο καὶ β=Ο, ἡ ἐξίσωσις εἶναι ταυτότης.***

Σημείωσις. Τὰ κλάσματα

$$\frac{5}{0{,}1} \quad \frac{5}{0{,}01} \quad \frac{5}{0{,}001} \quad \frac{5}{0{,}0001} \text{ κτλ.}$$

εἶναι ἴσα κατὰ σειρὰν μὲ τοὺς ἀριθμοὺς 50, 500, 5000, 50000 κτλ. Συνάγομεν λοιπόν, ὅτι ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος, τοῦ ὁποίου ὁ ἀριθμητὴς εἶναι σταθερός, **αὐξάνει** συνεχῶς, ὅταν ὁ παρανομαστὴς αὐτοῦ **ἐλαττοῦται** συνεχῶς, εἶναι δὲ ἡ ἀξία αὐτοῦ τόσῳ μεγαλυτέρα, ὅσῳ ὁ παρονομαστής του γίνεται μικρότερος. Δύναται δὲ ἡ ἀξία αὐτοῦ νὰ ὑπερβῇ ἕνα οἱονδήποτε ἀριθμόν, ὁσονδήποτε μεγάλον, ὅταν ὁ παρονομαστὴς γίνῃ ἱκανῶς μικρός. Γενικῶς λοιπὸν ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος $\chi=\frac{\beta}{\alpha}$, εἰς ὃ ὁ β εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός, ὁ δὲ α, ἐλαττούμενος διαρκῶς, πλησιάζει πρὸς τὸ 0, αὐξάνει συνεχῶς κατ' ἀπόλυτον τιμὴν καὶ δύναται νὰ ὑπερβῇ πάντα ἀριθμόν. Διὰ τοῦτο, τὸ $\frac{\beta}{0}$ παριστᾶται διὰ τοῦ συμβόλου ∞, τὸ ὁποῖον καλεῖται **ἄπειρον**, δηλαδὴ ἀριθμὸς μεγαλύτερος κατ' ἀπόλυτον τιμὴν παντὸς ἀριθμοῦ. Ἀλλ' ἀφοῦ δὲν ὑπάρχει τοιοῦτος ἀριθμός, τὸ σύμβολον $\infty=\frac{\beta}{0}$ δὲν ἔχει καμμίαν ἀριθμητικὴν ἀξίαν.

Ἀσκήσεις.

73. Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις:

$10 + \chi = 18$ $\qquad 15 + \chi = 9$ $\qquad 25 = 18 - \chi$

$\frac{3}{8} + \chi = \frac{7}{8}$ $\qquad \frac{5}{9} + \chi = \frac{3}{5}$ $\qquad 7{,}5 = 3{,}5 + \chi$

74. Ὁμοίως νὰ λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις:

$3\chi = 12$ $\qquad 18 + 2\chi = 13 - 3\chi$

$5\chi = -35$ $\qquad 30 = 120 - 2\chi - 7\chi$

$-7\psi = 28$ $\qquad 95 + 30 - 2\chi = 100 - 11\chi - 20$

$5\chi = 0$ $\qquad -8 = 7 - 6\chi - 16 - 4\chi - 2\chi + 1$

$\frac{\chi}{12} = 0$ $\qquad 100 - 7\chi = 10 - 7\chi - 15 + 5 - 11\chi.$

75. Νὰ λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις:

$5\chi + (9 - \chi) = 21$ $\qquad 3\chi - (7 - \chi) = 13$

$3(5 - \psi) = 9$ $\qquad \varphi - 6 = 4(\varphi - 9)$

$5(12 - \chi) = 15(6 - \chi)$ $\qquad 5(\chi - 3) = 4(2\chi - 3)$

$0 = 3(4\chi - 1) + 5(7 - 4\chi)$ $\qquad 0 = 9(\chi - 7) - 3(2\chi - 14)$

$3(2\chi + 1) + 5(3\chi + 5) = -14$ $\qquad 5(7\chi + 8) - 13(3\chi + 4) = 4$

$9(2\chi - 1) - 5(8\chi - 1) = -15$ $\qquad 8(6\chi + 5) - 3(1 - 9\chi) = 13.$

76. Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις:

$\frac{\chi}{9} = 5$ $\qquad \frac{1}{6} \cdot \chi = -2$

$\frac{\chi}{5} + 9 = 13$ $\qquad \frac{\chi}{2} - 5 = 13$

$\frac{3\varphi}{5} - 1 = \frac{\varphi}{2}$ $\qquad \frac{5\varphi}{9} - 2 = \frac{7\varphi}{18} + 4$

$\frac{\chi}{3} - \frac{\chi}{4} + \frac{\chi}{6} = 3$ $\qquad \frac{2\chi}{5} + \frac{\chi}{2} - \frac{3\chi}{4} = 3$

$\frac{\chi}{2} - \frac{\chi}{3} + \frac{\chi}{4} - \frac{\chi}{5} = 46$ $\qquad \frac{2\psi}{3} - \frac{5\psi}{6} - \frac{\psi}{9} + \frac{11\psi}{36} = 0$

$2\chi = 5\frac{1}{3}\chi - 3\frac{1}{5}\chi - 2$ $\qquad 8\frac{1}{4}\chi - 5\frac{1}{2}\chi - 2\frac{1}{5}\chi = \frac{11}{20}$

$0{,}5\chi - 0{,}25\chi = 1$ $\qquad 0{,}3\chi - \frac{3\chi}{4} = 3{,}6.$

77. Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις:

$\frac{\chi - 5}{6} = \chi - 30$ $\qquad 2\chi - 7 = \frac{5\chi - 1}{8}$

$\frac{2\chi - 3}{5} = \frac{4\chi - 5}{7}$ $\qquad \frac{4\psi - 3}{4} = \frac{6\psi - 5}{7}$

$\frac{5(4 - 2\chi)}{3} = \frac{3(1 - 7\chi)}{5}$ $\qquad \frac{4}{5}(\chi + 8) = \frac{3}{7}(5\chi - 7)$

$$\frac{\chi-3}{11}-\frac{\chi+5}{6}=-3 \qquad \frac{2\chi-9}{3}-\frac{3\chi-7}{10}=1$$

78. Νὰ λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις:

$$\frac{12}{\chi}=3, \quad \frac{4}{\chi}=5 \qquad -2=\frac{20}{\chi}, \quad 4=-\frac{3}{\chi}$$

$$\frac{1}{\chi}+\frac{2}{\chi}+\frac{3}{\chi}=3 \qquad \frac{5}{\chi}-\frac{3}{\chi}+\frac{4}{\chi}=12$$

$$\frac{3}{\chi+5}=\frac{1}{2}, \quad \frac{8}{\chi-2}=4 \qquad -\frac{10}{\chi+7}=5, \quad \frac{1}{\chi+3}=\frac{3}{10}$$

$$\frac{\chi}{8+\chi}=\frac{1}{3}, \quad \frac{\chi-5}{\chi+7}=\frac{1}{4} \qquad \frac{\chi+2}{\chi-4}=\frac{5}{11}, \quad \frac{\chi-2}{\chi+2}=-\frac{5}{11}$$

79. Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐγγράμματοι ἐξισώσεις:

$$\chi-\alpha=0, \quad \chi+\alpha=0, \quad \chi-\alpha=-\alpha, \quad \alpha-\chi=-\alpha$$

$$\chi+\beta=0, \quad \chi+\beta-\alpha=\gamma, \quad \alpha-\beta+\gamma=\chi-\alpha+\beta+\gamma$$

$$(\alpha+\beta)\chi=\delta-\gamma, \quad \alpha\chi+\beta\chi=\gamma-\delta, \quad \alpha\chi+\gamma=\beta\chi+\delta$$

80. Ὁμοίως νὰ λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις:

$$\frac{\chi}{\alpha}=\beta, \qquad \frac{\beta}{\chi}=\alpha, \qquad \frac{\alpha}{\chi}-\frac{\beta}{\chi}=\gamma$$

$$\frac{\chi}{\alpha}+\frac{\chi}{\beta}=1, \qquad \frac{\alpha}{\chi}+\beta=\frac{\beta}{\chi}+\alpha, \qquad \frac{\chi}{2\alpha}-\frac{\chi}{2\beta}=2$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

ΛΥΟΜΕΝΑ ΔΙ' ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ Α' ΒΑΘΜΟΥ ΜΕ ΕΝΑ ΑΓΝΩΣΤΟΝ

102. Εἴδομεν προηγουμένως (§ 3), ὅτι σκοπὸς τῆς Ἀλγέβρας εἶναι ἡ λύσις τῶν προβλημάτων κατὰ τρόπον ἁπλοῦν καὶ γενικόν· καὶ ἁπλουστεύει μὲν αὕτη τὴν λύσιν τῶν προβλημάτων, διότι χρησιμοποιεῖ γράμματα, τὴν γενικεύει δὲ 1ον) ***διότι εἰσάγει νέους ἀριθμοὺς*** (εἴδομεν ὅτι εἰσήγαγε τοὺς ἀρνητικοὺς) καὶ 2ον) ***διότι ἀνάγει τὴν λύσιν αὐτῶν εἰς τὴν λύσιν ἐξισώσεων.***

1) Πρόβλημα. ***Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος, ὅταν ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τὸ πενταπλάσιον αὐτοῦ, δίδει διαφορὰν 15;***

Εἰς τὴν πρότασιν αὐτὴν παρατηροῦμεν, ὅτι ζητεῖται εἷς ἀριθμός, ὁ ὁποῖος πρέπει νὰ ἐκπληροῖ τὴν ἀπαίτησιν, κατὰ τὴν ὁποίαν, ἐὰν ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τὸ πενταπλάσιόν του, νὰ δίδῃ διαφορὰν 15.

Διὰ νὰ εὕρω ἤδη τὸν ζητούμενον ἀριθμόν, ἤτοι διὰ νὰ λύσω τὸ πρόβλημα, αὐτό, ἐργάζομαι ὡς ἑξῆς: Ὑποθέτω πρῶτον, ὅτι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εὑρέθη καὶ ὅτι εἶναι π.χ. ὁ χ. Κατόπιν σημειώνω διὰ τῶν ἀλγεβρικῶν συμβόλων ἐπὶ τοῦ ἀριθμοῦ χ καὶ τῶν γνωστῶν ἀριθμῶν τοῦ προβλήματος τὰς πράξεις, τὰς ὁποίας ἀπαιτεῖ τὸ πρόβλημα. Ἤτοι σημειώνω τὸν πολλαπλασιασμὸν 5χ, ἔπειτα τὴν ἀφαίρεσιν $5\chi-\chi$ καὶ τέλος ἐξισώνω τὴν διαφορὰν αὐτὴν μὲ τὸν ἀριθμὸν 15, ἤτοι σχηματίζω τὴν ἐξίσωσιν $5\chi-\chi=15$. Ἐὰν ἤδη λύσω τὴν ἐξίσωσιν $5\chi-\chi=15$, εὑρίσκω $\chi=3\frac{3}{4}$. Ἐπειδὴ δὲ ἡ λύσις αὐτὴ ἐπαληθεύει τὸ πρόβλημα, διότι

$$5.\left(3\frac{3}{4}\right)-3\frac{3}{4}=5.3+5.\frac{3}{4}-3\frac{3}{4}=15+\frac{15}{4}-\frac{15}{4}=15,$$

λέγω, ὅτι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι ὁ $3\frac{3}{4}$.

2) Πρόβλημα. ***Ἔδωσα εἰς πτωχοὺς καὶ εἰς τὸν καθένα ἐξ αὐτῶν 5 δραχμάς. Ἐὰν δὲ ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν τῶν δραχμῶν, τὰς ὁποίας ἔδωσα, ἀφαιρέσω τὸν ἀριθμὸν τῶν πτωχῶν, εὑρίσκω διαφορὰν 15. Πόσοι ἦσαν οἱ πτωχοί;***

Καὶ ἐνταῦθα, ἐὰν παραστήσωμεν διὰ χ τὸν ἀριθμὸν τῶν πτωχῶν, πρέπει νὰ εἶναι $5\chi-\chi=15$, ἐκ τῆς ὁποίας ἐξισώσεως εὑρίσκομεν πάλιν $\chi=\frac{15}{4}=3\frac{3}{4}$. Ἀλλὰ παρατηροῦμεν ἤδη, ὅτι ἡ λύσις αὕτη δὲν δύναται νὰ γίνῃ παραδεκτή. Διὰ νὰ ἦτο παραδεκτή, ἔπρεπεν ἡ λύσις αὐτὴ νὰ ἦτο ἀκέραιος καὶ θετικὸς ἀριθμός, διότι τότε τὸ πρόβλημα θὰ ἐλύετο **πραγματικῶς**. Ἐνῷ εἰς τὸ πρῶτον πρόβλημα δὲν ὑπάρχει οὐδεὶς **περιορισμός**, διότι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι ἀφῃρημένος. Εἷς δὲ ἀφῃρημένος ἀριθμὸς δύναται νὰ εἶναι θετικὸς ἢ ἀρνητικός, ἀκέραιος ἢ κλασματικός.

103. Ἐκ τῶν προηγουμένων συνάγομεν τὰ ἑξῆς γενικά:

α΄) Εἰς τὰ προβλήματα ζητοῦνται νὰ εὑρεθοῦν εἷς ἢ περισσότεροι ἄγνωστοι ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι ἐκπληροῦν ὡρισμένας ἀπαιτήσεις· αὗται δὲ μᾶς λέγουν τὰς σχέσεις, αἱ ὁποῖαι πρέπει νὰ ὑπάρχουν μεταξὺ τῶν γνωστῶν (τῶν δεδομένων) καὶ τῶν ἀγνώστων (τῶν ζητουμένων) ἀριθμῶν.

β΄) Ἐὰν εἰς ἓν πρόβλημα ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι ἀφῃρημένος, οὐδεὶς περιορισμὸς ὑπάρχει εἰς αὐτόν. Ἐνῷ, ἐὰν εἶναι συγκεκριμένος, ἤτοι ἐὰν παριστᾷ ποσόν τι, ὑπάρχουν συνήθως περιορισμοί.

104. Ἤδη ὡς πρὸς τὴν λύσιν τῶν προβλημάτων παρατηροῦμεν τὰ ἑξῆς:

1) Τὰ προβλήματα εἰς τὴν Ἄλγεβραν λύονται ὅλα δι᾽ ἐξισώσεων. Εἶναι δὲ δυνατὸν τοῦτο, διότι παριστῶμεν τοὺς ζητουμένους ἀγνώστους ἀριθμοὺς μὲ γράμματα, ἐπὶ τῶν ὁποίων ἐργαζόμεθα, ὡς ἐὰν ἦσαν γνωστοί. Ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν δὲ τοῦ προβλήματος σημειοῦμεν τὰς πράξεις, αἱ ὁποῖαι πρέπει νὰ γίνουν κατὰ τὰς ἀπαιτήσεις (τοὺς ὅρους) αὐτοῦ. Οὕτω δὲ σχηματίζομεν τὴν ἐξίσωσιν ἢ τὰς ἐξισώσεις τοῦ προβλήματος, πλησίον τῶν ὁποίων γράφομεν τοὺς περιορισμοὺς αὐτοῦ, ὅταν ὑπάρχουν.

2) Κατόπιν τούτου λύομεν τὴν ἐξίσωσιν ἢ τὰς ἐξισώσεις.

3) Τελευταῖον ἐξετάζομεν, ἐὰν ὁ ἀριθμός, τὸν ὁποῖον εὕρομεν ἐκ τῆς λύσεως τῆς ἐξισώσεως, εἶναι σύμφωνος μὲ τοὺς περιορισμοὺς τοῦ προβλήματος, ὁπότε ἡ λύσις εἶναι πραγματική.

Σημείωσις. Γενικοὶ κανόνες διὰ τὸν σχηματισμὸν τῆς ἐξισώσεως ἢ τῶν ἐξισώσεων, αἱ ὁποῖαι ἀπαιτοῦνται διὰ τὴν λύσιν ἑνὸς προβλήματος δὲν ὑπάρχουν, διότι ἡ ποικιλία τῶν προβλημάτων εἶναι πολὺ μεγάλη. Ἐν τούτοις ἔπειτα ἀπὸ προηγουμένην ἄσκησιν, ἡ ὁποία νὰ συνοδεύεται ὑπὸ προσοχῆς, ὁ σχηματισμὸς τῶν ἐξισώσεων γίνεται εὐκόλως.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

105. 1) ***Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὸ ἥμισυ, τὸ τρίτον καὶ τὸ τέταρτον κάμνουν τὸν ἀριθμὸν 52.***

Ἔστω ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς χ. Τὸ ἥμισυ αὐτοῦ εἶναι $\frac{\chi}{2}$, τὸ τρίτον $\frac{\chi}{3}$ καὶ τὸ τέταρτον $\frac{\chi}{4}$, τὸ δὲ ἄθροισμα τούτων,

ἤτοι
$$\frac{\chi}{2}+\frac{\chi}{3}+\frac{\chi}{4}$$
θὰ εἶναι, κατὰ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος, ἴσον μὲ 52.

Ὥστε ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν : $\frac{\chi}{2}+\frac{\chi}{3}+\frac{\chi}{4}=52$,

ἐκ τῆς ὁποίας λύοντες εὑρίσκομεν $\chi=48$.

2) ***Τρεῖς τάξεις ἑνὸς σχολείου ἔκαμον ἔρανον ὑπὲρ τῆς ἀεροπορίας καὶ ἔδωκαν ὁμοῦ 1472 δραχμάς. Ἀλλ᾽ ἡ δευτέρα τάξις ἔδωσε διπλασίας δραχμὰς ἀπὸ τὴν πρώτην καὶ ἡ τρίτη τάξις ἔδωσε τὰ $\frac{4}{5}$ τῶν δραχμῶν, τὰς ὁποίας ἔδωσεν ἡ δευτέρα τάξις. Πόσας δραχμὰς ἔδωσεν ἑκάστη ;***

Ἔστω, ὅτι ἡ πρώτη τάξις ἔδωσε χ δραχμάς· τότε ἡ δευτέρα ἔδωσε 2χ δραχμὰς καὶ ἡ τρίτη ἔδωσε $2\chi \cdot \frac{4}{5} = \frac{8\chi}{5}$ δρχ.· εἶναι δὲ κατὰ τὸ πρόβλημα : $\chi + 2\chi + \frac{8\chi}{5} = 1472$.

Πρέπει δὲ ὁ χ νὰ εἶναι θετικὸς ἀριθμός. Λύοντες τὴν σχηματισθεῖσαν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν $\chi = 320$.

Ἡ δὲ λύσις αὐτὴ εἶναι σύμφωνος μὲ τοὺς περιορισμοὺς τοῦ προβλήματος. Ὥστε ἡ α′ τάξις ἔδωσε 320 δρχ., ἡ β′ ἔδωσε $320.2=640$ δρχ. καὶ ἡ τρίτη $640. \frac{4}{5} = 512$ δρχ.

3) ***Μία τάξις ἀνεχώρησε δι᾽ ἐκδρομὴν ἐκ τοῦ σχολείου της βαδίζουσα 6 χιλιόμετρα τὴν ὥραν. Ἀλλ᾽ εἷς μαθητὴς τῆς τάξεως αὐτῆς καθυστέρησε καὶ ἀνεχώρησεν ἐκ τοῦ σχολείου πρὸς συνάντησίν της 1 ὥραν καὶ 20′ ἀργότερον, τρέχων ἐπὶ ποδηλάτου μὲ ταχύτητα 16 χιλιομέτρων τὴν ὥραν. Μετὰ πόσην ὥραν ἀπὸ τῆς ἀναχωρήσεώς του θὰ συναντήσῃ ὁ μαθητὴς τὴν τάξιν του ;***

Ἔστω, ὅτι ὁ μαθητὴς θὰ συναντήσῃ τὴν τάξιν του μετὰ χ πρῶτα λεπτὰ τῆς ὥρας. Ἀλλὰ παρατηροῦμεν, ὅτι μέχρι τῆς στιγμῆς τῆς συναντήσεως καὶ ὁ μαθητὴς καὶ ἡ τάξις διήνυσαν τὸ αὐτὸ διάστημα. Ἀλλ᾽ ἡ τάξις τὸ διήνυσεν εἰς $\chi+80$ πρῶτα λεπτὰ μὲ ταχύτητα 6 χιλιομέτρων τὴν ὥραν. Ὥστε ἀφοῦ εἰς 60 πρῶτα λεπτὰ διήνυσεν 6 χιλιόμετρα, εἰς $\chi+80$ πρῶτα λεπτὰ διήνυσε $\frac{6(\chi+80)}{60}$ χιλιόμετρα. Ἐξ ἄλλου ὁ μαθητὴς διήνυσε τὸ αὐτὸ διάστημα εἰς χ πρῶτα λεπτὰ μὲ ταχύτητα 16 χιλιομέτρων τὴν ὥραν. Διήνυσεν ἑπομένως εἰς τὰ χ πρῶτα λεπτὰ διάστημα $\frac{16\chi}{60}$ χιλιόμετρα. Ἔχομεν λοιπὸν τὴν ἐξίσωσιν $\frac{6(\chi+80)}{60} = \frac{16\chi}{60}$. Πρέπει δὲ ὁ χ νὰ εἶναι θετικὸς ἀριθμός. Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν $\chi=48$ πρῶτα λεπτά.

4) ***Εἷς ἐδάνεισε τὰ $\frac{2}{5}$ τοῦ κεφαλαίου του πρὸς 7 % καὶ τὰ ὑπόλοιπα πρὸς 5 %. Λαμβάνει δὲ καὶ ἐκ τῶν δύο κεφαλαίων 2436 δραχμὰς τόκον κατ᾽ ἔτος. Ζητεῖται τὸ κεφάλαιον.***

Ἔστω χ τὸ κεφάλαιον. Ἐπειδὴ τὰ $\frac{2}{5}$ αὐτοῦ ἐδάνεισε πρὸς 7 %, λαμβάνει ἀπὸ τὸ μέρος αὐτὸ τοῦ κεφαλαίου εἰς 1 ἔτος, τόκον

$\frac{\frac{2\chi}{5}.7}{100}=\frac{14\chi}{500}$. Ἀπὸ δὲ τὰ $\frac{3\chi}{5}$ λαμβάνει τόκον εἰς ἓν ἔτος $\frac{\frac{3\chi}{5}.5}{100}=\frac{3\chi}{100}$.

Εἶναι δὲ κατὰ τὸ πρόβλημα : $\frac{14\chi}{500}+\frac{3\chi}{100}=2436$. Πρέπει δὲ ὁ χ νὰ εἶναι θετικὸς ἀριθμός. Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν $\chi=42000$ δραχμαί.

5) ***Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὸ πέμπτον, ὅταν αὐξηθῇ κατὰ 6, ἰσοῦται μὲ τὸ διπλάσιον τοῦ δεκάτου, τὸ ὁποῖον ἔχει αὐξηθῇ κατὰ 15.***

Ἔστω χ ὁ ζητούμενος ἀριθμός· ἀλλὰ τότε θὰ εἶναι, κατὰ τὸ πρόβλημα

$$\frac{\chi}{5}+6=2\left(\frac{\chi}{10}+15\right).$$

Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν $0.\ \chi=24$, ἤτοι $0=24$. Ἀλλὰ τοῦτο εἶναι ἀδύνατον. Ὥστε καὶ τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον, διότι οὐδεὶς τοιοῦτος ἀριθμὸς ὑπάρχει.

6) ***Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὸ τρίτον ἠλαττωμένον κατὰ 9, ἰσοῦται μὲ τὸ τριπλάσιον τοῦ $\frac{1}{9}$, τὸ ὁποῖον ἔχει ἐλαττωθῇ κατὰ 3.***

Ἔστω χ ὁ ζητούμενος ἀριθμός· ἀλλὰ τότε θὰ ἔχωμεν κατὰ τὸ πρόβλημα

$$\frac{\chi}{3}-9=3\ .\left(\frac{\chi}{9}-3\right).$$

Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν $0.\ \chi=0$, ἤτοι $0=0$. Ὥστε πᾶς ἀριθμὸς εἶναι λύσις τοῦ προβλήματος αὐτοῦ.

7) ***Εἷς πατὴρ εἶναι ἐτῶν 58, ὁ δὲ υἱὸς αὐτοῦ 26 ἐτῶν. Πότε ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς θὰ εἶναι τριπλασία τῆς ἡλικίας τοῦ υἱοῦ;***

Ἔστω μετὰ χ ἔτη. Ἀλλὰ τότε ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς θὰ εἶναι $58+\chi$ ἔτη καὶ ἡ τοῦ υἱοῦ $26+\chi$. Ἔχομεν λοιπὸν τὴν ἐξίσωσιν $58+\chi=3\ .(26+\chi)$. Πρέπει δὲ ὁ χ, ὡς παριστῶν μέλλοντα χρόνον, νὰ εἶναι θετικὸς ἀριθμός, καὶ τοιοῦτος, ὥστε ἡ ἡλικία $58+\chi$ νὰ εἶναι δυνατή, ἤτοι νὰ μὴ ὑπερβαίνῃ τὴν δυνατὴν ἡλικίαν τοῦ ἀνθρώπου. Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν $\chi=-10$. Ὥστε τὸ πρόβλημα αὐτό, τὸ ὁποῖον ζητεῖ μέλλοντα χρόνον, πρέπει νὰ θεωρηθῇ ὡς ἀδύνατον. Ἀλλ' ἐπειδὴ ὁ ἀρνητικὸς χρόνος φανερώνει παρελθόντα χρόνον, τὸ ζητούμενον τοῦ προβλήματος συνέβη πρὸ 10 ἐτῶν. Καὶ πράγματι, πρὸ 10 ἐτῶν αἱ ἡλικίαι τοῦ πατρὸς καὶ τοῦ υἱοῦ ἦσαν 48 καὶ 16· εἶναι δὲ $48=16.3$. Ὥστε εἰς τὰ προβλήματα, ὡς τὰ ἀνωτέρω, διὰ νὰ εἶναι παραδεκταὶ καὶ αἱ ἀρνητικαὶ λύσεις (ὅταν πληροῦν καὶ τοὺς λοιποὺς περιορισμοὺς τοῦ προβλήματος), πρέπει νὰ ζητῆται ὄχι μόνον πότε θὰ εἶναι ἡ ἡλικία τριπλασία, ἀλλὰ καὶ πότε ἦτο.

Γενικῶς δέ, εἰς τὰ προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς παριστᾷ ποσόν, τὸ ὁποῖον ἐπιδέχεται ἀντίθεσιν, καὶ ***αἱ ἀρνητικαὶ λύσεις δύνανται νὰ ἑρμηνευθοῦν***. Εἶναι δὲ δυνατὸν νὰ περιέχωνται καὶ εἰς τὸ αὐτὸ πρόβλημα, ὅταν ἡ διατύπωσίς του εἶναι κατάλληλος, ὡς εἴδομεν προηγουμένως.

8) ***Εἷς ἔκαμε μεῖγμα λ ὀκάδων ἐκ δύο ποιοτήτων οἴνου. Καὶ τῆς μὲν μιᾶς ποιότητος, ἡ μία ὀκᾶ ἀξίζει α δραχμάς, τῆς ἄλλης ἀξίζει β δραχμὰς καὶ τοῦ μείγματος γ δραχμάς. Πόσας ὀκάδας οἴνου ἀνέμειξεν ἐκ τῆς μιᾶς ποιότητος καὶ πόσας ἐκ τῆς ἄλλης;***

Ἐὰν χ εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν ὀκάδων τῆς πρώτης ποιότητος τῶν α δραχμῶν τὴν ὀκᾶν, ὁ ἀριθμὸς τῶν ὀκάδων τῆς ἄλλης ποιότητος θὰ εἶναι $\lambda-\chi$. Τότε αἱ χ ὀκάδες ἀξίζουν $\alpha\chi$ δραχμάς, αἱ $(\lambda-\chi)$ ὀκάδες ἀξίζουν $(\lambda-\chi)\beta$ δραχμὰς καὶ τὸ μεῖγμα ἀξίζει $\gamma\lambda$ δραχμάς. Ὥστε ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $\alpha\chi+(\lambda-\chi)\beta=\gamma\lambda$· πρέπει δὲ νὰ εἶναι οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ καὶ οἱ χ καὶ $\lambda-\chi$ θετικοί· ἡ δὲ τιμὴ γ μεταξὺ τῶν τιμῶν α καὶ β. Ἐξ αὐτῆς λαμβάνομεν διαδοχικῶς:

$$\alpha\chi+\lambda\beta-\beta\chi=\gamma\lambda,\qquad \alpha\chi-\beta\chi=\gamma\lambda-\beta\lambda,\qquad \chi(\alpha-\beta)=\lambda(\gamma-\beta)$$

καὶ ἐπειδὴ εἶναι $\alpha-\beta\neq0$, διότι, ἂν ἦτο $\alpha=\beta$, δὲν θὰ ὑπῆρχε μεῖγμα, λαμβάνομεν

$$\chi=\frac{\lambda(\gamma-\beta)}{\alpha-\beta}.$$

Ἡ εὑρεθεῖσα τιμὴ χ εἶναι θετική, διότι ἐὰν εἶναι $\alpha>\beta$ θὰ εἶναι καὶ $\gamma>\beta$, ἐὰν δὲ εἶναι $\beta>\alpha$ θὰ εἶναι καὶ $\beta>\gamma$· ἀλλ' εἰς ἀμφοτέρας τὰς περιπτώσεις αὐτὰς τὸ πηλίκον $\frac{\gamma-\beta}{\alpha-\beta}$ εἶναι θετικόν. Ἐπειδὴ δὲ καὶ τὸ λ εἶναι θετικόν, ἕπεται ὅτι τὸ γινόμενον $\lambda.\frac{\gamma-\beta}{\alpha-\beta}$ εἶναι θετικόν. Εἶναι δὲ καὶ ὁ χ μικρότερος τοῦ λ, διότι τὸ κλάσμα $\frac{\gamma-\beta}{\alpha-\beta}$ εἶναι μικρότερον τῆς μονάδος, ἐπειδὴ ἡ διαφορὰ $\alpha-\beta$ εἶναι ὁμόσημος καὶ μεγαλυτέρα κατ' ἀπόλυτον τιμὴν τῆς διαφορᾶς $\gamma-\beta$. Ἡ εὑρεθεῖσα λύσις $\chi=\frac{\lambda(\gamma-\beta)}{\alpha-\beta}$ (1) εἶναι ὁ τύπος τῶν προβλημάτων μείξεως τοῦ ἀνωτέ-

-ρω εἴδους. Λύονται δὲ δι' αὐτοῦ ὅλα τὰ προβλήματα τοῦ εἴδους τούτου. Οὕτως, ἐὰν εἶναι $\alpha = 12$ δρχ., $\beta = 8$ δρχ., $\gamma = 9$ δρχ. καὶ $\lambda = 400$ ὀκάδες εὑρίσκομεν : $\chi = \frac{400(9-8)}{12-8} = \frac{400}{4} = 100$ ὀκάδες

καὶ $\lambda - \chi = 400 - 100 = 300$ ὀκ.

Ἐὰν δὲ εἶναι

$\beta = 10$ δρχ., $\alpha = 5{,}50$ δρχ., $\gamma = 8$ δρχ. καὶ $\lambda = 900$ ὀκ.

εὑρίσκομεν : $\chi = \frac{900(8-10)}{5{,}50-10} = \frac{900(-2)}{-4{,}5} = 400$

καὶ $\lambda - \chi = 500$.

Ἐὰν εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα εἶναι ἄγνωστον μόνον τὸ λ, λύοντες τὴν ἐξίσωσιν (1) πρὸς λ, εὑρίσκομεν :

$$\lambda = \frac{(\alpha-\beta)\chi}{\gamma-\beta}.$$

Ἐὰν δὲ εἶναι ἄγνωστον μόνον τὸ α, εὑρίσκομεν πάλιν ἐξ αὐτῆς λύοντες πρὸς α $\alpha = \frac{\lambda(\gamma-\beta)+\beta\chi}{\chi}$

ὁμοίως εὑρίσκομεν καὶ τὸ β καὶ τὸ γ. Ὥστε διὰ τοῦ τύπου αὐτοῦ, ὅταν κάμωμεν τοὺς καταλλήλους μετασχηματισμούς, δυνάμεθα νὰ λύσωμεν πέντε διαφορετικὰ προβλήματα. Ἐκ δὲ τοῦ παραδείγματος αὐτοῦ φαίνονται καθαρὰ τὰ πλεονεκτήματα καὶ ἡ σημασία τῶν τύπων, περὶ τῶν ὁποίων ἐκάμομεν λόγον εἰς τὰς §§ 46 καὶ 47.

9) ***Μία δεξαμενὴ γεμίζει διὰ δύο κρουνῶν. Ὁ πρῶτος κρουνὸς τὴν γεμίζει εἰς τ ὥρας, ὁ δὲ δεύτερος εἰς τ΄ ὥρας. Ἐὰν ἀνοιχθοῦν καὶ οἱ δύο κρουνοὶ συγχρόνως, εἰς πόσας ὥρας θὰ γεμίσουν τὴν δεξαμενήν ;***

Ἔστω, ὅτι εἰς χ ὥρας θὰ γεμίσουν τὴν δεξαμενήν, τῆς ὁποίας τὴν χωρητικότητα παριστῶμεν μὲ τὴν μονάδα 1. Ἀλλ' ἀφοῦ ὁ πρῶτος κρουνὸς τὴν γεμίζει μόνος του εἰς τ ὥρας, εἰς μίαν ὥραν θὰ γεμίσῃ τὸ $\frac{1}{\tau}$ τῆς δεξαμενῆς καὶ εἰς χ ὥρας θὰ γεμίσῃ τὰ $\frac{\chi}{\tau}$. Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι ὁ δεύτερος κρουνὸς θὰ γεμίσῃ εἰς χ ὥρας τὰ $\frac{\chi}{\tau'}$ τῆς δεξαμενῆς.

Ἔχομεν λοιπὸν τὴν ἐξίσωσιν $\frac{\chi}{\tau} + \frac{\chi}{\tau'} = 1$. Πρέπει δὲ νὰ εἶναι οἱ ἀριθμοὶ τ, τ' καὶ χ θετικοί. Ἤδη ἐκ τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς λαμβάνομεν :

$$\tau'\chi + \tau\chi = \tau\tau', \qquad \chi(\tau' + \tau) = \tau\tau' \quad \text{καὶ} \quad \chi = \frac{\tau\tau'}{\tau' + \tau}.$$

Ἡ λύσις δὲ αὕτη εἶναι παραδεκτή.

10) ***Ποῖον ἀριθμὸν πρέπει νὰ προσθέσωμεν εἰς ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος $\frac{\alpha}{\beta}$ διὰ νὰ γίνῃ ἴσον μὲ τὸ κλάσμα $\frac{\gamma}{\delta}$;***

Οἱ παρονομασταὶ β καὶ δ πρέπει νὰ εἶναι διάφοροι τοῦ μηδενός. Τότε, ἐὰν χ εἶναι ὁ ζητούμενος ἀριθμός, ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν :

$$\frac{\alpha+\chi}{\beta+\chi} = \frac{\gamma}{\delta},$$

ἐξ αὐτῆς δὲ εὑρίσκομεν :

$$(\alpha+\chi)\delta = \gamma(\beta+\chi), \qquad \alpha\delta + \delta\chi = \beta\gamma + \gamma\chi$$

$$\delta\chi - \gamma\chi = \beta\gamma - \alpha\delta, \qquad \chi(\delta - \gamma) = \beta\gamma - \alpha\delta \qquad (1)$$

α΄) Ἐὰν $\delta = \gamma$, θὰ εἶναι $\delta - \gamma = 0$, ἐὰν δὲ εἶναι καὶ $\beta\gamma - \alpha\delta = 0$, ἤτοι ἐὰν εἶναι καὶ $\alpha = \beta$, τότε ἡ ἐξίσωσις (1) γίνεται $0 = 0$, ἤτοι εἶναι ἀπροσδιόριστος. Ἑπομένως πᾶς ἀριθμὸς λύει τὸ πρόβλημα. Καὶ πράγματι, διότι μὲ τὰς ὑποθέσεις αὐτὰς τὰ κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ $\frac{\gamma}{\delta}$ εἶναι ἴσα μὲ τὴν μονάδα.

β΄) Ἐὰν $\delta = \gamma$ καὶ $\beta\gamma \neq \alpha\delta$, ἤτοι $\alpha \neq \beta$, τότε τὸ μὲν πρῶτον μέλος τῆς ἐξισώσεως (1) εἶναι 0, τὸ δὲ δεύτερον μέλος αὐτῆς εἶναι διάφορον τοῦ μηδενός. Ὥστε ἡ ἐξίσωσις (1) εἶναι ἀδύνατος. Ἑπομένως καὶ τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον. Καὶ πράγματι, διότι τὸ μὲν κλάσμα $\frac{\gamma}{\delta}$ ἰσοῦται μὲ τὴν μονάδα, τὸ δὲ $\frac{\alpha}{\beta}$ εἶναι διάφορον αὐτῆς. Ἑπομένως καὶ τὸ κλάσμα $\frac{\alpha+\chi}{\beta+\chi}$ εἶναι πάντοτε διάφορον τῆς μονάδος.

γ΄) Ἐὰν $\delta \neq \gamma$, τότε δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως (1) διὰ $\delta - \gamma$, ὁπότε θὰ ἔχωμεν $\chi = \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\delta - \gamma}$ (2)

Ἤτοι εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ ἐξίσωσις (1) ἔχει μίαν καὶ μόνην λύσιν, τὴν (2).

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

Α΄. 81. Ποῖος ἀριθμός, ἐὰν ἀφαιρεθῇ μὲν ἀπὸ τὸν 95, προστεθῇ δὲ εἰς τὸν 59, δίδει ἐξαγόμενα ἴσα ;

82. Ἐὰν εἰς τὸ $\frac{1}{4}$ ἀριθμοῦ τινος προσθέσωμεν τὸ $\frac{1}{5}$ αὐτοῦ καὶ

12 μονάδας ἀκόμη, θὰ εὕρωμεν ἐξαγόμενον 48. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμός;

83. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὸ $\frac{1}{3}$ καὶ τὸ $\frac{1}{6}$ δίδουν τὸ $\frac{1}{2}$ αὐτοῦ.

84. Ποίου ἀριθμοῦ τὸ $\frac{1}{3}$, τὸ $\frac{1}{4}$, τὸ $\frac{1}{6}$ καὶ τὸ $\frac{1}{8}$ δίδουν ἀριθμὸν μεγαλύτερον τοῦ ζητουμένου κατὰ 3;

85. Νὰ μερισθῇ ὁ ἀριθμὸς 71 εἰς δύο μέρη τοιαῦτα, ὥστε τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ πρώτου καὶ τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ δευτέρου νὰ δίδουν ἄθροισμα 17.

86. Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός, ὅστις, ὅταν προστεθῇ εἰς τοὺς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος $\frac{19}{69}$, νὰ δίδῃ κλάσμα ἴσον μὲ τὸ $\frac{1}{2}$.

87. Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ὅταν προστεθῇ εἰς ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος $\frac{4}{7}$, νὰ κάμνῃ αὐτὸν ἴσον μὲ τὴν μονάδα 1.

88. Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ὅταν προστεθῇ εἰς ἕκαστον τῶν ἀριθμῶν 3 καὶ 5, νὰ δίδῃ ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι νὰ ἔχουν λόγον ἴσον μὲ 3 : 4.

89. Νὰ εὑρεθοῦν τρεῖς περιττοὶ διαδοχικοὶ ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι νὰ ἔχουν ἄθροισμα 159.

90. Νὰ εὑρεθοῦν τρεῖς ἀκέραιοι διαδοχικοὶ ἀριθμοὶ τοιοῦτοι, ὥστε τὸ $\frac{1}{2}$ τοῦ μικροτέρου καὶ τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ μεγαλυτέρου νὰ ἀποτελοῦν τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ μεταξὺ αὐτῶν ἀριθμοῦ.

91. Νὰ εὑρεθοῦν δύο ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι νὰ ἔχουν διαφορὰν 24 καὶ λόγον ἴσον μὲ 8 : 5.

Β΄. 92. Τρεῖς ἐργάται ἐμοίρασαν μεταξύ των 300 δραχμάς. Ἔλαβε δὲ ὁ μὲν δεύτερος 12 δραχμὰς περισσοτέρας τοῦ πρώτου, ὁ δὲ τρίτος 32 δραχμὰς περισσοτέρας τοῦ δευτέρου. Πόσας δραχμὰς ἔλαβεν ἕκαστος;

93. Μεταξὺ τῶν προσώπων Α, Β, Γ διενεμήθη ἓν ποσὸν δραχμῶν. Ἔλαβον δὲ ὁ Α τὸ $\frac{1}{5}$ αὐτοῦ καὶ 19 δραχμάς, ὁ Β τὸ $\frac{1}{4}$ αὐτοῦ καὶ 17 δραχμὰς καὶ ὁ Γ τὸ $\frac{1}{3}$ αὐτοῦ καὶ 10 δραχμάς. Νὰ εὑρεθῇ πόσαι δραχμαὶ διενεμήθησαν καὶ πόσας δραχμὰς ἔλαβεν ἕκαστον πρόσωπον.

94. Αἱ κοινωνικαὶ ἀσφαλίσεις διέθεσαν διὰ τοὺς ἀρτεργάτας μιᾶς πόλεως εἰς ἓν ἔτος, τὰ $\frac{5}{8}$ ἑνὸς ποσοῦ δραχμῶν πλὴν 25000 δραχ.

δι' ἐπιδόματα ἀσθενείας, τὰ $\frac{3}{16}$ αὐτοῦ σὺν 62500 δραχ. διὰ συντάξεις καὶ τὰ $\frac{3}{20}$ αὐτοῦ δι' ἡμερομίσθια ἐργατῶν, οἱ ὁποῖοι ἔπαθον ἀτυχήματα. Ποῖον ἦτο τὸ διατεθὲν ποσόν ;

95. Εἰς μίαν ἐπιχείρησιν κατέθεσαν ὁ μὲν Α 7000 δραχμάς, ὁ δὲ Β 9000 δραχμάς. Ἐκέρδισαν δὲ ἐκ τῆς ἐπιχειρήσεως αὐτῆς 6400 δραχμάς. Πόσον κέρδος ἔλαβεν ἕκαστος ;

96. Ἀνέμειξέ τις δύο εἴδη ἐλαίου. Τοῦ ἑνὸς εἴδους ἡ ὀκᾶ ἀξίζει 40 δραχμάς, τοῦ δὲ ἄλλου ἀξίζει 30 δραχμάς. Πόσας ὀκάδας θὰ ἀναμείξῃ ἀπὸ ἕκαστον εἶδος, ἐὰν θέλῃ νὰ κάμῃ μεῖγμα 1500 ὀκάδων ἀξίας 36 δραχμῶν τὴν ὀκᾶν ;

97. Εἶχέ τις 32 ὀκάδας οἰνοπνεύματος τῶν 85°. Πόσας ὀκάδας ὕδατος πρέπει νὰ ρίψῃ εἰς αὐτό, ἵνα ὁ βαθμὸς τοῦ οἰνοπνεύματος κατέλθῃ εἰς 80° ;

98. Εἰς 6000 ὀκάδας οἴνου 14° πόσας ὀκάδας ὕδατος πρέπει νὰ ρίψῃ τις, ὥστε τὸ μεῖγμα νὰ ἐλαττωθῇ κατὰ 2° ;

99. Εἶχέ τις 120 γραμμάρια χρυσοῦ βαθμοῦ καθαρότητος 0,740 καὶ ἄλλον βαθμοῦ 0,880. Πόσα γραμμάρια τοῦ δευτέρου κράματος πρέπει νὰ ἀναμείξῃ μὲ τὰ 120, ἵνα ὁ βαθμὸς τοῦ κράματος γίνῃ 0,820 ;

Γ'. 100. Τοκίζει τις μὲ ἁπλοῦν τόκον κεφάλαιον 12000 δραχ. πρὸς 9 % καὶ ἄλλο κεφάλαιον 15000 δρχ. πρὸς 8 %. Μετὰ πόσα ἔτη θὰ λάβῃ ἐκ τῶν δύο κεφαλαίων τόκον 6400 δρχ. ;

101. Ἐκ κεφαλαίου 36000 δρχ. ἐτόκισέ τις ἓν μέρος πρὸς 5 % καὶ τὸ ὑπόλοιπον πρὸς 4 %, λαμβάνει δὲ ἐτησίως τόκον ἐκ τῶν δύο κεφαλαίων 1740 δρχ. Νὰ εὑρεθῇ ἕκαστον τῶν μερῶν τοῦ κεφαλαίου.

102. Ἐκ τοῦ κεφαλαίου του διέθεσέ τις τὸ $\frac{1}{3}$ δι' ἀγορὰν οἰκίας, ἡ ὁποία τοῦ ἀπέδιδεν 8 % ἐπὶ τοῦ κεφαλαίου, τὸ $\frac{1}{4}$ δι' ἀγορὰν κτήματος, τὸ ὁποῖον ἀπέδιδεν 6,5 % καὶ τὸ ὑπόλοιπον ἐτοποθέτησεν εἰς βιομηχανικὰς ἐπιχειρήσεις, ἐκ τῶν ὁποίων ἔχανε 1,5 %. Ποῖον ἦτο τὸ ἀρχικὸν κεφάλαιον, ἐὰν τὸ καθαρὸν ἐτήσιον εἰσόδημα αὐτοῦ ἦτο 44000 δραχμαί ;

103. Δύο κεφάλαια διαφέρουν κατὰ 1000 δραχμάς. Τὸ μικρότερον ἐτοκίσθη πρὸς 5 %, τὸ δὲ ἄλλο πρὸς 4 %. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ κεφάλαια αὐτά, τὰ ὁποῖα γίνονται ἴσα, ἐὰν εἰς καθὲν τούτων προστεθῇ ὁ τόκος του εἰς ἓν ἔτος.

104. Ἐκ τοῦ ἐτησίου εἰσοδήματός του οἰκονόμησέ τις 1500 δραχμάς. Τὸ ἑπόμενον ἔτος τὰς μὲν δαπάνας του ἠλάττωσε κατὰ 15 %, τὸ δὲ εἰσόδημά του ηὐξήθη κατὰ 10 %. Ἐξοικονόμησε δὲ οὕτω τὸ δεύτερον ἔτος 6000 δραχμάς. Ποῖον ἦτο τὸ εἰσόδημα τοῦ προηγουμένου ἔτους ;

ΚΙΝΗΣΕΩΣ

Δ΄. 105. Δύο φίλοι, τῶν ὁποίων αἱ κατοικίαι ἀπέχουν 18 χιλιόμετρα, ἐκκινοῦν ἀπὸ αὐτὰς συγχρόνως πρὸς συνάντησιν ὁ εἷς τοῦ ἄλλου. Ὁ εἷς βαδίζει 5 χιλιόμετρα τὴν ὥραν, ὁ δὲ ἄλλος 4,5 χιλιόμετρα τὴν ὥραν. Μετὰ πόσας ὥρας θὰ συναντηθοῦν ;

106. Δύο ποδηλάται ἀναχωροῦν συγχρόνως ἐκ δύο πόλεων, ὧν ἡ μεταξὺ αὐτῶν ἀπόστασις εἶναι $52\frac{1}{2}$ χιλ., πρὸς συνάντησιν ὁ εἷς τοῦ ἄλλου. Ἡ ταχύτης καθ' ὥραν τοῦ ἑνὸς εἶναι κατὰ 1,8 χλμ. μεγαλυτέρα τῆς ταχύτητος τοῦ ἄλλου, συναντῶνται δὲ μετὰ $1\frac{1}{2}$ ὥραν ἀπὸ τῆς ἐκκινήσεως. Πόσα χιλιόμετρα διέτρεξεν ἕκαστος ;

107. Μία τάξις σχολείου ἀνεχώρησεν εἰς ἐκδρομήν. Εἷς δὲ μαθητὴς ἀνεχώρησε πρὸς συνάντησίν της μίαν ὥραν βραδύτερον, τρέχων ἐπὶ ποδηλάτου μὲ ταχύτητα 15 χιλιομέτρων τὴν ὥραν. Συνήντησε δὲ τὴν τάξιν του μετὰ ἡμίσειαν ὥραν, ἀφ' ὅτου ἐξεκίνησεν οὗτος. Ποία ἦτο ἡ ταχύτης, μὲ τὴν ὁποίαν ἐβάδιζεν ἡ τάξις ;

108. Ἱππεύς, ὁ ὁποῖος διανύει εἰς 2 ὥρας 17 χιλιόμετρα, διώκεται ὑπὸ ἄλλου ἱππέως, ὁ ὁποῖος ἐξεκίνησε 1 ὥραν μετὰ τὸν πρῶτον καὶ ὅστις διανύει εἰς 3 ὥρας 30 χιλιόμετρα. Μετὰ πόσας ὥρας θὰ φθάσῃ ὁ δεύτερος τὸν πρῶτον ;

Ε΄. 109. Τὸ ἄθροισμα τῶν ἡλικιῶν τριῶν ἀδελφῶν εἶναι 53 ἔτη. Ὁ πρῶτος εἶναι κατὰ 5 ἔτη μεγαλύτερος τοῦ τρίτου· οὗτος δὲ εἶναι κατὰ 3 ἔτη μικρότερος τοῦ δευτέρου. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἡλικία ἑκάστου τῶν ἀδελφῶν.

110. Ἡ ἡλικία ἑνὸς εἶναι διπλασία τῆς ἡλικίας ἄλλου, ἐνῷ πρὸ 10 ἐτῶν ἦτο τριπλασία. Ποία εἶναι ἡ παροῦσα ἡλικία ἑκάστου ;

111. Πατήρ τις εἶναι 37 ἐτῶν, ὁ δὲ υἱὸς αὐτοῦ 8 ἐτῶν. Πότε ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς ἦτο ἢ θὰ εἶναι τριπλασία τῆς ἡλικίας τοῦ υἱοῦ ;

112. Πατήρ τις εἶναι κατὰ 30 ἔτη μεγαλύτερος τοῦ υἱοῦ του. Πρὸ 8 ἐτῶν τὸ ἄθροισμα τῶν ἡλικιῶν των ἦτο 46. Ποία εἶναι ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς καὶ ποία ἡ ἡλικία τοῦ υἱοῦ ;

ΣΤ΄. 113. Ἠγόρασέ τις 10 πήχεις ὑφάσματος. Ἐὰν ἡ τιμὴ τοῦ πήχεως ἦτο κατὰ 30 δραχμὰς μικροτέρα, μὲ τὰς αὐτὰς δραχμὰς θὰ ἠγόραζε 2 πήχεις περισσότερον. Ποία εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ πήχεως ;

114. Χωρικὸς ἐρωτηθεὶς τί ζῷα καὶ πόσα ἔχει, ἀπήντησεν ὡς ἑξῆς : «Ἔχω ὄρνιθας καὶ αἶγας ἐν ὅλῳ 23 κεφαλαὶ καὶ 56 πόδες». Πόσας ὄρνιθας καὶ αἶγας εἶχεν ὁ χωρικός ;

115. Ὀκτὼ ἐργάται ἐξετέλεσαν τὸ $\frac{1}{5}$ ἔργου τινὸς ἐργαζόμενοι 4 ὥρας καθ' ἡμέραν ἐπὶ 9 ἡμέρας. Πόσας ὥρας πρέπει νὰ ἐργάζωνται καθ' ἡμέραν 15 ἐργάται, ἵνα ἀποτελειώσουν τὸ ἔργον εἰς 3 ἡμέρας ;

116. Εἰς μίαν ἐκδρομὴν μετέσχον 28 πρόσωπα, ἄνδρες, γυναῖκες καὶ παιδία. Ὁ ἀριθμὸς τῶν γυναικῶν ἦτο τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἀν-

δρῶν, ὁ δὲ ἀριθμὸς τῶν παιδίων τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἀνδρῶν κα
τῶν γυναικῶν ὁμοῦ. Πόσοι ἦσαν οἱ ἄνδρες, αἱ γυναῖκες καὶ τὰ παιδία

117. Μία κρήνη γεμίζει δεξαμενὴν εἰς 7 ὥρας, ἄλλη δὲ κρήνη τὴ γεμίζει εἰς 9 ὥρας. Ὅταν δὲ ρέουν καὶ αἱ δύο συγχρόνως ἐπὶ ὥρας, ἡ δεξαμενή, διὰ νὰ γεμίσῃ ἐντελῶς, χρειάζεται ἀκόμη 120 ὀκάδας. Πόσας ὀκάδας χωρεῖ ἡ δεξαμενή ;

Ζ΄. 118. Πλίνθος ἔχει ὄγκον 1,95 κυβικὰς παλάμας καὶ ζυγίζει χιλιόγραμμα. Ποῖον εἶναι τὸ εἰδικὸν βάρος αὐτῆς ;

119. Τὸ βάρος σανίδος ἐκ ξύλου ὀξυᾶς εἶναι κατὰ 10 χιλιόγραμμα μικρότερον τοῦ βάρους τοῦ ὑπ᾿ αὐτῆς ἐκτοπιζομένου ὕδατος Τὸ εἰδικὸν βάρος τῆς ὀξυᾶς εἶναι 0,8. Ποῖον εἶναι τὸ βάρος τῆς σανίδος ;

120. Προκειμένου νὰ μάθῃ τις νὰ κολυμβᾷ, θέλει νὰ κατασκευάσ ζώνην ἐκ φελλοῦ τοιαύτην, ὥστε νὰ κρατῆται ὄρθιος ἐντὸς τοῦ ὕδατος μὲ τὴν κεφαλὴν ἐκτὸς αὐτοῦ. Πόσον βάρος πρέπει νὰ ἔχῃ ἡ ζώνη γνωστοῦ ὄντος, ὅτι οὗτος ζυγίζει 56 χιλιόγραμμα, ὅτι τὸ βάρος τῆ κεφαλῆς εἶναι 3 χιλιόγραμμα καὶ ὅτι τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ σώματο τοῦ ἐντὸς τοῦ ὕδατος εἶναι 1,02 καὶ τοῦ φελλοῦ 0,24 ;

121. Ράβδος ἔχει μῆκος 40 ἑκατοστῶν τοῦ μέτρου. Εἰς τὸ ἓ ἄκρον αὐτῆς κρέμαται βάρος 2,5 χιλιογράμμων, εἰς δὲ τὸ ἄλλο κρέμαται βάρος 0,75 χιλιογράμμων. Εἰς ποῖον σημεῖον πρέπει νὰ ὑποβαστάσωμεν τὴν ράβδον, ἵνα ἰσορροπήσῃ ; (Τὸ βάρος τῆς ράβδου δὲ λαμβάνεται ὑπ᾿ ὄψιν).

Η΄. 122. Εὐθεῖα μήκους 3,6 μέτρων νὰ διαιρεθῇ εἰς δύο μέρη, τ ὁποῖα νὰ ἔχουν λόγον 3 : 5.

123. Ἡ γωνία τῆς κορυφῆς ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι κατὰ 30 μεγαλυτέρα ἑκάστης τῶν γωνιῶν τῆς βάσεως. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τῶ γωνιῶν αὐτοῦ.

124. Ἐκ τῶν γωνιῶν τριγώνου Α, Β, Γ ἡ Α εἶναι κατὰ 5^0 μεγαλυτέρα τῆς Β, ἡ δὲ Γ τριπλασία τῆς Β. Πόσων μοιρῶν εἶναι ἑκάστη τῶ γωνιῶν αὐτοῦ ;

125. Νὰ εὑρεθῇ ἑκάστη τῶν πλευρῶν ὀρθογωνίου, τοῦ ὁποίου μὲν βάσις εἶναι διπλασία τοῦ ὕψους, ἡ δὲ περίμετρος ἔχει μῆκος δ μέτρων.

126. Ἡ περίμετρος ὀρθογωνίου εἶναι 40 μέτρων. Ἐὰν ἡ βάσι αὐτοῦ ἦτο 2,5 φορὰς μεγαλυτέρα τοῦ ὕψους του, ἡ περίμετρος θὰ ἦτ κατὰ 16 μέτρα μεγαλυτέρα. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ διαστάσεις αὐτοῦ.

Θ΄. 127. Τῆς ταυτότητος $\chi^2-\chi^2=\chi^2-\chi^2$ τὸ πρῶτον μέλος γράφεται $\chi(\chi-\chi)$, τὸ δὲ δεύτερον γράφεται $(\chi+\chi)(\chi-\chi)$· ὥστε ἔχομεν

$$\chi(\chi-\chi)=(\chi+\chi)(\chi-\chi).$$

Ἐὰν δὲ ἤδη διαιρέσωμεν τὰ μέλη διὰ $\chi-\chi$, εὑρίσκομεν $\chi=\chi+\chi$, ἤτοι $\chi=2\chi$. Νὰ εὑρεθῇ τὸ σφάλμα.

128. Ἐκ τῆς ἐξισώσεως

$$12\chi - 10 = 15\chi - 8$$

λαμβάνομεν τὴν

$$12\chi + 8 = 15\chi + 10$$

ἢ

$$4(3\chi + 2) = 5(3\chi + 2).$$

Ἐὰν δὲ διαιρέσωμεν τὰ μέλη τῆς τελευταίας ἐξισώσεως διὰ $3\chi+2$, εὑρίσκομεν $4=5$. Νὰ εὑρεθῇ τὸ σφάλμα.

Γ΄. 129. Νὰ μοιρασθοῦν α δραχμαὶ μεταξὺ δύο προσώπων οὕτως, ὥστε τὸ μερίδιον τοῦ πρώτου νὰ εἶναι τὸ $\nu^{\text{στὸν}}$ μέρος τοῦ μεριδίου τοῦ δευτέρου. Πόσον δραχμῶν ἦτο τὸ μερίδιον ἑκάστου;

130. Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός, ὅστις προστιθέμενος εἰς ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος $\frac{\alpha}{\beta}$ καθιστᾷ αὐτὸ διπλάσιον.

131. Εὑρεῖν ἀριθμόν, ὅστις προστιθέμενος εἰς τὸ $\mu^{\text{στὸν}}$ μέρος αὐτοῦ, δίδει ἄθροισμα τὸ $\nu^{\text{στὸν}}$ μέρος αὐτοῦ σὺν λ.

132. Τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν εἶναι γ· Τὸ ἄθροισμα τοῦ γινομένου, τοῦ μὲν ἑνὸς ἐπὶ μ, τοῦ δὲ ἄλλου ἐπὶ ν, εἶναι α. Ποῖοι εἶναι οἱ ἀριθμοί ;

133. Ἐργάτης χρειάζεται α ὥρας, ἵνα τελειώσῃ ἔργον τι, δεύτερος ἐργάτης χρειάζεται β ὥρας διὰ τὸ αὐτὸ ἔργον καὶ τρίτος γ ὥρας. Εἰς πόσας ὥρας οἱ τρεῖς ἐργάται ὁμοῦ θὰ τελειώσουν τὸ ἔργον;

134. Ἡ ἡλικία δύο ἀτόμων εἶναι, τοῦ μὲν ἑνὸς α ἐτῶν, τοῦ δὲ ἄλλου β ἐτῶν. Μετὰ πόσα ἔτη ἡ ἡλικία τοῦ πρώτου θὰ εἶναι μ φορὰς μεγαλυτέρα τῆς ἡλικίας τοῦ δευτέρου;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙ

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΤΟΥ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ ΜΕΤΑ ΠΟΛΛΩΝ ΑΓΝΩΣΤΩΝ

Α΄. ΛΥΣΕΙΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΤΟΥ 1ου ΒΑΘΜΟΥ ΜΕ ΔΥΟ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ

106. Λύσις μιᾶς ἐξισώσεως μὲ δύο ἀγνώστους.—Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν δύο ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι νὰ ἔχουν ἄθροισμα 10. Ἀλλ᾿ ἐὰν διὰ χ καὶ ψ παραστήσωμεν τοὺς ζητουμένους ἀριθμούς, θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν $\chi+\psi=10$. Ἀλλὰ παρατηροῦμεν ὅτι, ἐὰν $\psi=0$, θὰ εἶναι $\chi=10$, ἐὰν δὲ εἶναι $\psi=1$, θὰ εἶναι $\chi=9$ καὶ ἐὰν εἶναι $\psi=2, 3, \ldots -1, -2, -3$ κτλ., θὰ εἶναι $\chi=8, 7, \ldots 11, 12, 13$ κτλ. Ὥστε ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις ἔχει τὰς λύσεις :

$\psi = 0$	1	2	3 . . .	(1)
$\chi = 10$	9	8	7 . . .	

Ἤτοι : Ἑκάστη τιμὴ τοῦ ψ μὲ τὴν ἀντίστοιχον τιμὴν τοῦ χ ἀποτελοῦν μίαν λύσιν τῆς ἐξισώσεως. Ἐπειδὴ δὲ δυνάμεθα νὰ δώσωμεν εἰς τὸ ψ ἀπείρους τιμάς, εἰς ἑκάστην τῶν ὁποίων ἀντιστοιχεῖ καὶ μία τιμὴ τοῦ χ, ἕπεται, ὅτι ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἔχει λύσεις **ἀπείρους τὸ πλῆθος**. Τὸ αὐτὸ παρατηροῦμεν καὶ εἰς τὴν ἐξίσωσιν $2\chi-3\psi=6$, ἐκ τῆς ὁποίας διὰ

$$\psi=0, \qquad 1, \qquad 2, \qquad 3 \quad \text{κτλ.}$$

λαμβάνομεν $\chi=3, \quad 4\frac{1}{2}, \quad 6, \quad 7\frac{1}{2}$ »

Ὥστε : ***Πᾶσα ἐξίσωσις τῆς μορφῆς $\alpha\chi+\beta\psi=\gamma$***, ὅπου α, β, γ εἶναι γνωστοὶ ἀριθμοὶ (ἢ παραστάσεις γνωσταί), ***ἔχει λύσεις ἀπείρους τὸ πλῆθος.***

107. Λύσεις συστήματος δύο ἐξισώσεων α΄ βαθμοῦ μετὰ δύο ἀγνώστων.—Ἐὰν ζητήσωμεν, ἵνα οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ τοῦ προηγουμένου προβλήματος ἔχουν ὄχι μόνον ἄθροισμα 10, ἀλλὰ καὶ διαφορὰν 4, ἤτοι ἐὰν ζητήσωμεν, ἵνα αἱ αὐταὶ τιμαὶ τοῦ χ καὶ τοῦ ψ ἐπαληθεύουν καὶ τὰς δύο ἐξισώσεις

$$\chi+\psi=10$$
$$\chi-\psi=4$$

βλέπομεν εὐκόλως, ὅτι ἐκ τῶν ἄνω λύσεων (1) μόνον ἡ λύσις $\psi=3$, $\chi=7$, ἐπαληθεύει τὰς δύο αὐτὰς ἐξισώσεις ἢ τὸ σύστημα τῶν δύο αὐτῶν ἐξισώσεων. Λέγομεν δὲ ***σύστημα ἐξισώσεων τὸ σύνολον πολλῶν ἐξισώσεων, τὰς ὁποίας ἐπαληθεύουν αἱ αὐταὶ τιμαὶ τῶν ἀγνώστων.***

Διὰ νὰ λύσωμεν ἓν σύστημα ἐξισώσεων, προσπαθοῦμεν νὰ εὕρωμεν ἓν ἄλλο σύστημα **ἰσοδύναμον**, ἀλλὰ τὸ ὁποῖον νὰ λύεται εὐκολώτερον. Λέγομεν δὲ δύο συστήματα ***ἰσοδύναμα, ἐὰν αἱ αὐταὶ τιμαὶ τῶν ἀγνώστων ἐπαληθεύουν καὶ τὰ δύο.***

Ἀπὸ ἓν δοθὲν σύστημα λαμβάνομεν ἄλλο ἰσοδύναμον κατὰ πολλοὺς τρόπους. Π.χ. Ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν μίαν ἐξίσωσιν μὲ ἄλλην ἰσοδύναμον πρὸς αὐτήν. Οὕτω τὸ δοθὲν σύστημα

$$\begin{matrix} \chi+\psi=10 \\ \chi-\psi=4 \end{matrix} \quad \text{καὶ τὸ} \quad \begin{matrix} 2\chi+2\psi=20 \\ 3\chi-3\psi=12 \end{matrix}$$

εἶναι ἰσοδύναμα. Ἀλλ' ἐν γένει ὁ τρόπος οὗτος δὲν κάμνει εὐκολωτέραν τὴν ἐπίλυσιν τῶν συστημάτων. Ὁ κατάλληλος τρόπος διὰ τὴν ἐπίλυσιν τῶν συστημάτων θὰ ἦτο ἐκεῖνος, ὁ ὁποῖος διὰ τοῦ **συνδυασμοῦ** μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων θὰ ἔδιδεν ἐξίσωσιν, ἡ ὁποία νὰ μὴ ἔχῃ ἕνα τῶν ἀγνώστων. Διότι οὕτω θὰ ἦτο δυνατὸν νὰ ἀνάγωμεν τὴν λύσιν συστημάτων εἰς τὴν λύσιν ἐξισώσεων μὲ ἕνα ἄγνωστον. Ἀλλὰ τοιοῦτος συνδυασμὸς ὑπάρχει καὶ λέγεται **ἀπαλοιφὴ** τοῦ ἀγνώστου. Μέθοδοι ἀπαλοιφῆς ἑνὸς ἀγνώστου καὶ ἑπομένως μέθοδοι τῆς λύσεως ἑνὸς συστήματος εἶναι διάφοροι. Ταύτας δὲ θὰ ἴδωμεν κατωτέρω.

108. Μέθοδος τῆς προσθέσεως ἢ τῆς ἀναγωγῆς.—1) Εἰς τὸ ἄνω σύστημα

$$\begin{aligned} \chi+\psi&=10 \\ \chi-\psi&=4 \end{aligned} \qquad (1)$$

παρατηροῦμεν, ὅτι οἱ συντελεσταὶ τοῦ ψ εἶναι ἀντίθετοι ἀριθμοί. Ἐὰν λοιπὸν προσθέσωμεν τὰς ἐξισώσεις τοῦ συστήματος αὐτοῦ κατὰ μέλη, θὰ ἀπαλειφθῇ ὁ ψ. Καὶ πράγματι, διότι εὑρίσκομεν $2\chi=14$. Ἐὰν τώρα εἰς τὸ δοθὲν σύστημα ἀντικαταστήσωμεν μίαν τῶν δοθεισῶν ἐξισώσεων, π. χ. τὴν $\chi+\psi=10$ διὰ τῆς $2\chi=14$, θὰ ἔχωμεν τὸ σύστημα

$$\begin{aligned} 2\chi&=14 \\ \chi-\psi&=4, \end{aligned} \qquad (2)$$

τὸ ὁποῖον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ σύστημα (1), διότι ἐλάβομεν τὴν ἐξίσωσιν $2\chi=14$, ἀφοῦ εἰς ἴσους ἀριθμοὺς προσεθέσαμεν ἴσους. Ὥστε αἱ τιμαὶ τοῦ χ καὶ τοῦ ψ, αἱ ὁποῖαι ἐπαληθεύουν τὸ σύστημα (1), θὰ ἐπαληθεύουν καὶ τὸ σύστημα (2). Καὶ ἀντιστρόφως, αἱ τιμαὶ τοῦ χ καὶ τοῦ ψ, αἱ ὁποῖαι ἐπαληθεύουν τὸ σύστημα (2), θὰ ἐπαληθεύουν καὶ τὸ σύστημα (1). Διότι, ἐὰν ἀπὸ τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως $2\chi=14$ ἀφαιρέσωμεν τὰ μέλη τῆς $\chi-\psi=4$, εὑρίσκομεν :

$$\begin{array}{r} 2\chi=14 \\ -\chi+\psi=-4 \\ \hline \chi+\psi=10, \end{array}$$

ἤτοι τὴν πρώτην ἐξίσωσιν τοῦ συστήματος (1). Ὥστε ἡ λύσις τοῦ συστήματος (1) δύναται νὰ ἀναχθῇ εἰς τὴν λύσιν τοῦ συστήματος (2), ἡ ὁποία εἶναι εὐκολωτέρα. Διότι ἐκ τῆς πρώτης $2\chi=14$ εὑρίσκομεν $\chi=7$ καὶ ἐκ τῆς δευτέρας $\chi-\psi=4$ εὑρίσκομεν $7-\psi=4$, ἤτοι $\psi=3$. Ὥστε ἡ λύσις τοῦ δοθέντος συστήματος εἶναι $\chi=7$, $\psi=3$. Εἶναι δὲ καὶ ἡ μόνη.

2) Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $3χ+4ψ=19$
$$-2χ+5ψ=-5. \quad (1)$$
Εἰς τὸ σύστημα αὐτό, ἐὰν θελήσωμεν νὰ ἀπαλείψωμεν τὸν ψ, παρατηροῦμεν, ὅτι οἱ συντελεσταὶ αὐτοῦ δὲν εἶναι ἀντίθετοι ἀριθμοί. Δυνάμεθα ὅμως νὰ τοὺς κάμωμεν ἀντιθέτους ὡς ἑξῆς: Πολλαπλασιάζομεν τὰ μέλη τῆς πρώτης ἐξισώσεως τοῦ συστήματος ἐπὶ τὸν συντελεστὴν τοῦ ψ ἐν τῇ δευτέρᾳ, ἤτοι ἐπὶ 5, καὶ τὰ μέλη τῆς δευτέρας ἐπὶ τὸν συντελεστὴν τοῦ ψ ἐν τῇ πρώτῃ, ἤτοι ἐπὶ 4. Ἔχομεν δὲ οὕτω τὸ σύστημα
$$\begin{aligned} 15χ+20ψ&=95 \\ -8χ+20ψ&=-20 \end{aligned}$$
ἤ, ὅταν ἀλλάξωμεν τὰ σημεῖα μιᾶς τῶν ἐξισώσεων, π. χ. τῆς δευτέρας, τὸ
$$\begin{aligned} 15χ+20ψ&=95 \\ 8χ-20ψ&=20 \end{aligned} \quad (2)$$
Ἐὰν τώρα προσθέσωμεν κατὰ μέλη τὰς ἐξισώσεις τοῦ συστήματος (2), εὑρίσκομεν $23χ=115$. Ὥστε τὸ δοθὲν σύστημα εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ
$$\begin{aligned} 3χ+4ψ&=19 \\ 23χ&=115. \end{aligned}$$
Ἀλλ' ἐκ τῆς δευτέρας ἐξισώσεως τοῦ συστήματος τούτου λαμβάνομεν $χ=5$. Μετὰ δὲ τοῦτο εὑρίσκομεν ἐκ τῆς πρώτης
$$3.5+4ψ=19 \quad ἢ \quad ψ=1.$$
Ὥστε αἱ μόναι τιμαὶ τῶν ἀγνώστων, αἱ ὁποῖαι ἐπαληθεύουν τὸ δοθὲν σύστημα εἶναι $χ=5$, $ψ=1$.

Ἐὰν θελήσωμεν νὰ ἀπαλείψωμεν τὸν χ, θὰ ἐργασθῶμεν ὡς φαίνεται κατωτέρω:
$$\begin{array}{ll|r} 2) & 3χ+4ψ=19 & 6χ+8ψ=38 \\ 3) & -2χ+5ψ=-5 & -6χ+15ψ=-15 \\ \hline & & 23ψ=23 \quad ἢ \quad ψ=1 \end{array}$$
Μετὰ δὲ τοῦτο εὑρίσκομεν $3χ+4.1=19$, ἤτοι $χ=5$.

3) Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $3χ-6ψ=30$
$$5χ-8ψ=44.$$
Εἰς τὸ σύστημα αὐτό, διὰ νὰ ἀπαλείψωμεν τὸν ψ, τοῦ ὁποίου παρατηροῦμεν, ὅτι οἱ συντελεσταὶ ἔχουν κοινὸν παράγοντα, ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς φαίνεται:

8) $3\chi-6\psi=30$	4) $3\chi-6\psi=30$	$12\chi-24\psi=120$	$-12\chi+24\psi=-120$
6) $5\chi-8\psi=44$	3) $5\chi-8\psi=44$	$15\chi-24\psi=132$	$15\chi-24\psi=\ 132$
			$3\chi\ =\ 12$
		ἤτοι	$\chi\ =\ 4.$

Μετὰ δὲ τοῦτο εὑρίσκομεν, π.χ. ἐκ τῆς

$$3\chi-6\psi=30, \quad 3.4-6\psi=30,$$

ἤτοι

$$\psi=-3.$$

Ὥστε ἡ λύσις τοῦ δοθέντος συστήματος εἶναι

$$\chi=4, \quad \psi=-3.$$

109. Ἡ μέθοδος τῆς ἀπαλοιφῆς ἑνὸς ἀγνώστου, ὡς ἔγινεν εἰς τὰ προηγούμενα παραδείγματα, λέγεται ***μέθοδος τῆς προσθέσεως*** ἢ ***τῆς ἀναγωγῆς***. Στηρίζεται δὲ αὕτη, ὡς ἐδείξαμεν, εἰς τὸ ἑξῆς: Ὅτι ***δυνάμεθα εἰς σύστημα δύο ἐξισώσεων, ἀφοῦ προσθέσωμεν αὐτὰς κατὰ μέλη, νὰ ἀντικαταστήσωμεν μίαν τῶν δοθεισῶν ἐξισώσεων δι᾽ ἐκείνης, τὴν ὁποίαν εὕρομεν διὰ τῆς προσθέσεως.***

Σημείωσις. Ἀλλὰ καὶ ἀπὸ ὁσασδήποτε ἐξισώσεις καὶ ἂν ἀποτελῆται ἓν σύστημα, δυνάμεθα νὰ προσθέσωμεν κατὰ μέλη ἢ ὅλας ἢ μερικὰς μόνον καὶ ἔπειτα μίαν τῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήματος νὰ ἀντικαταστήσωμεν διὰ τῆς εὑρεθείσης διὰ τῆς προσθέσεως. Ἀποδεικνύεται δὲ ὁμοίως, ὅτι τὸ νέον σύστημα εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἀρχικόν.

Ἀσκήσεις.

135. Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα:

1) $\chi+\psi=97$, $\chi-\psi=73$	2) $\chi-4\psi=1$, $\chi-\psi=76$	3) $5\chi-\psi=62$, $3\chi+\psi=122$
4) $3\chi+5\psi=39$, $7\chi-4\psi=-50$	5) $21\chi+4\psi=10$, $3\chi-8\psi=-5$	6) $5\chi+3\psi+2=0$, $3\chi+2\psi+1=0$
7) $\frac{1}{2}\omega+\frac{1}{3}\psi=8$, $-5\omega+3\psi=-4$	8) $\frac{2}{5}\chi+\frac{3}{4}\psi=11$, $\frac{7}{10}\chi-\frac{3}{4}\psi=11$	9) $2{,}5\chi-2\psi=15$, $1{,}5\chi-3\psi=0.$

110. Μέθοδος τῆς ἀντικαταστάσεως. —1) Ἔστω τὸ σύστημα

$$2\chi+\psi=13$$
$$3\chi-2\psi=9 \qquad (1)$$

Ἐὰν ὑποθέσωμεν τὸν χ ὡς γνωστὸν καὶ λύσωμεν τὴν πρώτην ἐξίσωσιν ὡς πρὸς ψ, θὰ λάβωμεν τὴν ἰσοδύναμον $\psi=13-2\chi$. Ἐὰν δὲ κατόπιν τούτου εἰς τὴν δευτέραν ἐξίσωσιν τοῦ συστήματος ἀντικαταστήσωμεν τὸν ψ διὰ τῆς τιμῆς του, λαμβάνομεν

$$3\chi-2(13-2\chi)=9.$$

Ἀλλὰ τότε, ἀντὶ νὰ λύσωμεν τὸ σύστημα (1), λύομεν τὸ σύστημα

$$\begin{aligned}\psi&=13-2\chi\\ 3\chi-2(13-2\chi)&=9,\end{aligned}\qquad (2)$$

εἰς τὸ ὁποῖον ἡ δευτέρα ἐξίσωσις περιέχει ἕνα ἄγνωστον, τὸν χ. Διότι τὰ συστήματα (1) καὶ (2) εἶναι ἰσοδύναμα. Καὶ πράγματι· αἱ τιμαὶ τοῦ χ καὶ τοῦ ψ, αἱ ὁποῖαι ἐπαληθεύουν τὸ σύστημα (1), θὰ ἐπαληθεύουν καὶ τὸ σύστημα (2), καὶ ἀντιστρόφως. Διότι αἱ πρῶται ἐξισώσεις τῶν συστημάτων τούτων εἶναι ἰσοδύναμοι, αἱ δὲ δεύτεραι ἐξισώσεις διαφέρουν κατὰ τοῦτο μόνον, ὅτι δηλαδὴ ἡ μία περιέχει τὸν ψ, ἡ δὲ ἄλλη ἔχει, ἀντὶ τοῦ ψ, τὸν ἴσον πρὸς αὐτὸν ἀριθμὸν $13-2\chi$. Ὥστε θὰ λύσωμεν, ἀντὶ τοῦ συστήματος (1), τὸ σύστημα (2). Ἐκ τῆς λύσεως δὲ τῆς ἐξισώσεως $3\chi-2(13-2\chi)=9$ λαμβάνομεν $3\chi-26+4\chi=9$, $7\chi=35$ καὶ $\chi=5$. Ἐκ δὲ τῆς $\psi=13-2\chi$ εὑρίσκομεν, ὅτι $\psi=13-2.5$, ἤτοι $\psi=3$. Ὥστε ἡ λύσις τοῦ δοθέντος συστήματος εἶναι

$$\chi=5,\qquad \psi=3.$$

2) Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$$\begin{aligned}\chi-\psi&=9\\ \frac{\chi}{\psi}&=4.\end{aligned}$$

Λύοντες τὴν δευτέραν ἐξίσωσιν ὡς πρὸς χ λαμβάνομεν $\chi=4\psi$. Ἐὰν δὲ θέσωμεν εἰς τὴν πρώτην ἐξίσωσιν, ἀντὶ τοῦ χ, τὴν τιμήν του 4ψ, λαμβάνομεν $4\psi-\psi=9$ ἢ $3\psi=9$, ἤτοι $\psi=3$· ὥστε εἶναι $\chi=4.3$, ἤτοι $\chi=12$. Ἡ λύσις λοιπὸν τοῦ δοθέντος συστήματος εἶναι :

$$\chi=12,\qquad \psi=3.$$

111. Ἡ μέθοδος, διὰ τῆς ὁποίας εἰς τὰ προηγουμένως δοθέντα δύο συστήματα ἀπηλείψαμεν ἕνα τῶν ἀγνώστων, λέγεται μέθοδος τῆς **ἀντικαταστάσεως**. Στηρίζεται δέ, ὡς ἐδείξαμεν, εἰς τὸ ἑξῆς : Ὅτι δηλαδὴ ***δυνάμεθα εἰς σύστημα δύο ἐξισώσεων νὰ λύσωμεν τὴν μίαν ἐξ αὐτῶν πρὸς ἕνα τῶν ἀγνώστων (ὁπότε ὁ ἄλλος ἄγνωστος ὑποτίθεται γνωστός). Ἔπειτα δὲ νὰ ἀντικαταστήσωμεν τοῦτον διὰ τῆς τιμῆς του εἰς τὴν ἄλλην ἐξίσωσιν.***

Σημείωσις. Ἀλλὰ καὶ εἰς σύστημα ὁσωνδήποτε ἐξισώσεων δυνάμεθα νὰ λύσωμεν μίαν τῶν ἐξισώσεων πρὸς ἕνα τῶν ἀγνώστων (τῶν ἄλλων ὑποτιθεμένων γνωστῶν), καὶ ἔπειτα νὰ ἀντικαταστήσωμεν τοῦτον εἰς ὅλας τὰς ἄλλας ἐξισώσεις ἢ εἰς μερικὰς μόνον. Διότι τὸ νέον σύστημα εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἀρχικόν. Ἀποδεικνύεται δὲ τοῦτο ὁμοίως.

Ἀσκήσεις.

136. Νὰ λυθοῦν διὰ τῆς μεθόδου τῆς ἀντικαταστάσεως τὰ κάτωθι συστήματα :

1) $\psi=4\chi$, $2\chi+5\psi=176$	2) $2\chi=6\psi$, $5\chi-7\psi=72$	3) $3\chi-9\psi=-12$, $\chi-5\psi=0$
4) $\chi=\frac{5}{9}\psi$, $45\chi-13\psi=-36$	5) $5\psi-4\varphi=6$, $8\psi=7\varphi$	6) $4\varphi=3\omega$, $6\varphi-5\omega=-4$.

112. Μέθοδος τῆς συγκρίσεως.—Ἔστω τὸ σύστημα

$$\begin{aligned} 4\chi-3\psi&=11 \\ 8\chi+\psi&=1 \end{aligned} \qquad (1)$$

Λύομεν καὶ τὰς δύο ἐξισώσεις τοῦ συστήματος πρὸς τὸν αὐτὸν ἄγνωστον, π.χ. πρὸς τὸν χ, ὁπότε εὑρίσκομεν

$$\chi=\frac{11+3\psi}{4}$$
$$\chi=\frac{1-\psi}{8} \qquad (2)$$

Ἐπειδὴ δὲ τὰ πρῶτα μέλη τοῦ συστήματος (2) εἶναι ἴσα, θὰ εἶναι καὶ τὰ δεύτερα ἴσα, ἤτοι θὰ εἶναι :

$$\frac{11+3\psi}{4}=\frac{1-\psi}{8}.$$

Ἤδη λύομεν τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν καὶ εὑρίσκομεν

$$22+6\psi=1-\psi, \quad \text{ἤτοι} \quad \psi=-3.$$

Τὴν τιμὴν $\psi=-3$ θέτομεν εἰς μίαν τῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήματος (2), π.χ. εἰς τὴν $\chi=\frac{1-\psi}{8}$

καὶ εὑρίσκομεν $\chi=\frac{1+3}{8}$, ἤτοι $\chi=\frac{1}{2}$.

Ἡ μέθοδος αὐτή, κατὰ τὴν ὁποίαν λύομεν καὶ τὰς δύο ἐξισώσεις τοῦ συστήματος πρὸς τὸν αὐτὸν ἄγνωστον καὶ κατόπιν ἐξισοῦμεν τὰς εὑρεθείσας τιμὰς τοῦ ἀγνώστου τούτου, λέγεται **μέθοδος τῆς συγκρίσεως**. Ἀλλὰ **κυρίως** εἶναι μέθοδος τῆς ἀντικαταστάσεως. Διότι εἰς τὴν δευτέραν, π.χ., ἐξίσωσιν τοῦ συστήματος (2) ἀντικαθιστῶμεν τὸν χ διὰ τῆς τιμῆς του, τὴν ὁποίαν δίδει ἡ πρώτη ἐξίσωσις.

Ἀσκήσεις.

137. Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα διὰ τῆς μεθόδου τῆς συγκρίσεως.

1)	$\chi=10\psi-7$	2)	$\chi+2\psi=11$	3)	$12\chi=12\psi+5$
	$\chi=25\psi-10$		$\chi-3\psi=1$		$20\psi=12\chi-3$
4)	$9\chi-2\psi=20$	5)	$3\chi-2\psi=9$	6)	$3\chi+5\psi-51=0$
	$14\chi-4\psi=24$		$-9\chi+11\psi=-12$		$6\chi-15\psi-27=0.$

113. Μερικαὶ περιπτώσεις.—α) ***Συστήματα ἀδύνατα.*** Ἔστω τὸ σύστημα

$$\begin{aligned} 2\chi+3\psi&=8 \\ 4\chi+6\psi&=12 \end{aligned} \qquad (1)$$

Διὰ νὰ ἀπαλείψωμεν τὸν ψ, θὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰ μέλη τῆς πρώτης ἐξισώσεως ἐπὶ 2 καὶ τὰ μέλη τῆς δευτέρας ἐπὶ —1, ὁπότε θὰ ἔχωμεν:

$$\begin{aligned} 4\chi+6\psi&=16 \\ -4\chi-6\psi&=-12 \end{aligned} \qquad (2)$$

καὶ προσθέτοντες $0.\chi \quad = \quad 4$

Ἀλλ' ἀφοῦ ἡ εὑρεθεῖσα ἐξίσωσις εἶναι ἀδύνατος, καὶ τὸ δοθὲν σύστημα εἶναι ἀδύνατον, ἤτοι αἱ δοθεῖσαι ἐξισώσεις εἶναι **ἀσυμβίβαστοι**. Καὶ πράγματι, διότι τοῦτο φαίνεται ἀμέσως ἀπὸ τὸ σύστημα (1), ἐὰν τὸ γράψωμεν ὡς ἑξῆς

$$\begin{aligned} 4\chi+6\psi&=16 \\ 4\chi+6\psi&=12. \end{aligned}$$

β) ***Συστήματα ἀπροσδιόριστα.*** Ἔστω τὸ σύστημα

$$\begin{aligned} 4\chi-3\psi&=6 \\ 12\chi-9\psi&=18 \end{aligned} \qquad (1)$$

Διὰ νὰ ἀπαλείψωμεν τὸν χ, πολλαπλασιάζομεν τὰ μέλη τῆς πρώτης ἐπὶ —3 καὶ τῆς δευτέρας ἐπὶ 1, ὁπότε ἔχομεν

$$\begin{aligned} -12\chi+9\psi&=-18 \\ 12\chi-9\psi&=18 \end{aligned} \qquad (2)$$

καὶ προσθέτοντες $0.\psi= \quad 0.$

Ἀλλ' ἀφοῦ ἡ εὑρεθεῖσα ἐξίσωσις εἶναι ἀπροσδιόριστος, καὶ τὸ δοθὲν σύστημα εἶναι ἀπροσδιόριστον. Καὶ πράγματι, διότι τοῦτο φαίνεται ἀπὸ τὸ δοθὲν σύστημα, ἐὰν διαιρέσωμεν τὰ μέλη τῆς δευτέρας ἐξισώσεως διὰ 3, διότι τότε ἔχομεν

$$\begin{aligned} 4\chi-3\psi&=6 \\ 4\chi-3\psi&=6, \end{aligned}$$

ἤτοι ἔχομεν πραγματικῶς μίαν ἐξίσωσιν μὲ δύο ἀγνώστους, ἡ ὁποία γνωρίζομεν, ὅτι ἔχει ἀπείρους τὸ πλῆθος λύσεις.

Παρατήρησις. Ἐκ τῶν προηγουμένων παραδειγμάτων συνάγομεν, ὅτι ***ἓν σύστημα δύο ἐξισώσεων πρώτου βαθμοῦ μετὰ δύο ἀγνώστων ἢ ἔχει ἓν μόνον σύστημα λύσεων, ἢ εἶναι ἀδύνατον, ἢ ἔχει ἀπείρους τὸ πλῆθος λύσεις.*** Εἰς τὸ προηγούμενον ἀδύνατον σύστημα παρατηροῦμεν, ὅτι οἱ λόγοι $\frac{2}{4}$ καὶ $\frac{3}{6}$ τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων εἶναι ἴσοι μεταξύ των. Ὁ δὲ λόγος $\frac{8}{12}$ τῶν γνωστῶν ὅρων εἶναι διάφορος πρὸς αὐτούς. Ἐνῷ εἰς τὸ προηγούμενον ἀπροσδιόριστον σύστημα παρατηροῦμεν, ὅτι καὶ οἱ τρεῖς λόγοι $\frac{4}{12}$, $\frac{3}{9}$, $\frac{6}{18}$ εἶναι ἴσοι μεταξύ των. Ἐὰν δὲ λάβωμεν ἓν τῶν συστημάτων, τὰ ὁποῖα εἴδομεν ὅτι ἔχουν ἓν μόνον σύστημα λύσεων, π.χ. τὸ σύστημα (2) τῆς § 108, θὰ ἴδωμεν ὅτι οἱ λόγοι τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων, ἤτοι οἱ λόγοι $-\frac{3}{2}$ καὶ $\frac{4}{5}$ εἶναι διάφοροι. Διὰ νὰ συμπεράνωμεν δέ, πρὶν ἢ λύσωμεν τὸ σύστημα, τί λύσεις ἔχει, πρῶτον θὰ φέρωμεν τὸ σύστημα εἰς τὴν μορφὴν

$$\alpha\chi+\beta\psi=\gamma$$
$$\alpha'\chi+\beta'\psi=\gamma'$$

καὶ ἔπειτα θὰ προσέξωμεν τοὺς συντελεστὰς τῶν ἀγνώστων, ὡς καὶ τοὺς γνωστοὺς ὅρους. Καὶ τότε :

1ον) Ἐὰν οἱ λόγοι $\frac{\alpha}{\alpha'}$ καὶ $\frac{\beta}{\beta'}$ εἶναι ***διάφοροι***, τότε τὸ σύστημα ἔχει ***ἓν μόνον σύστημα λύσεων***.

2ον) Ἐὰν οἱ λόγοι $\frac{\alpha}{\alpha'}$ καὶ $\frac{\beta}{\beta'}$ εἶναι μεταξύ των ***ἴσοι***, ἀλλὰ ***διάφοροι πρὸς τὸν λόγον*** $\frac{\gamma}{\gamma'}$, τότε τὸ σύστημα εἶναι ***ἀδύνατον***.

3ον) Ἐὰν εἶναι $\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\beta}{\beta'}=\frac{\gamma}{\gamma'}$, τότε τὸ σύστημα εἶναι ***ἀπροσδιόριστον***.

Ἀσκήσεις.

138. Τὰ ἑπόμενα συστήματα νὰ λυθοῦν διὰ τῆς καταλληλοτέρας μεθόδου.

1) $2\chi=9\psi+17$, $8\psi=5\chi+1$

2) $(2\chi-\psi)+(\chi-2\psi)=18$, $(\chi-3\psi)-(3\chi-\psi)=-2$

3) $\chi=3\psi+8$, $12\psi=4\chi-32$

4) $\chi=5+3\psi$, $9\psi=3\chi-15$

5) $4\chi=3\psi+1$, $6(\chi-\psi)=9\psi-4\chi$

6) $7\psi+9\omega+33=0$, $9\psi-7\omega+15=0$

7) $3(\psi-\chi)+36=0$, $\chi-(\chi-\psi)+60=0$

8) $\psi=3\chi+5$, $3\psi=9\chi+7$.

139. Ὁμοίως νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα :

1) $23\chi+15\psi=4\frac{1}{4}$, $48\chi+45\psi=18$

2) $\frac{3}{4}\chi=2\psi+1$, $\frac{\chi}{3}-\psi=0$

3) $\frac{\chi}{2}=\frac{\psi}{3}+1$, $\frac{\chi}{4}=\frac{4}{3}\psi-10$

4) $2\frac{1}{5}\chi+13\frac{1}{2}\psi=31$, $3\frac{1}{2}\chi-1\frac{2}{3}\psi=33\frac{8}{9}$

5) $4\frac{1}{2}\chi-12=4\frac{1}{5}\psi$, $3\frac{2}{5}\psi=3\frac{1}{4}\chi-5$

6) $7\chi-10\psi=\frac{1}{10}$, $11\chi-16\psi=0{,}1$.

140. Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα :

1) $3(\chi-\psi)=2(\chi-1)$, $8(\psi-4)=2(\psi-\chi)$

2) $5(\chi+1)+2(\psi+1)=-5$, $4(\chi+7)-3(\psi-2)=29$

3) $\frac{\chi+1}{3}=\frac{\psi}{4}-1$, $\frac{\psi}{3}=\frac{3\chi+1}{4}$

4) $\frac{\chi+3\psi}{\chi-\psi}=8$, $\frac{7\chi-13}{3\psi-5}=4$

5) $\frac{5}{\chi+2\psi}=\frac{7}{2\chi+\psi}$, $\frac{7}{3\chi-2}=\frac{5}{6-\psi}$

6) $\frac{\chi-3}{\psi+2}=\frac{2}{3}$, $\frac{\psi-2}{\chi+1}=\frac{2}{3}$.

141. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα :

$$\frac{2}{\chi}-\frac{1}{\psi}=1$$
$$\frac{7}{\chi}-\frac{2}{\psi}=20$$

Τοῦτο γράφεται ὡς ἑξῆς :

$$2.\frac{1}{\chi}-\frac{1}{\psi}=1$$
$$7.\frac{1}{\chi}-2.\frac{1}{\psi}=20$$

Ἐὰν δὲ θέσω $\frac{1}{\chi} = \varphi$ καὶ $\frac{1}{\psi} = \omega$,

ἔχω νὰ λύσω τὸ σύστημα

$$2\varphi - \omega = 1$$
$$7\varphi - 2\omega = 20,$$

ἐξ οὗ εὑρίσκομεν $\varphi = 6$ καὶ $\omega = 11$,

ἤτοι $\frac{1}{\chi} = 6$ καὶ $\frac{1}{\psi} = 11$,

Ἐξ αὐτῶν εὑρίσκομεν ἔπειτα τὰς τιμὰς τῶν χ καὶ ψ.

142. Νὰ λυθοῦν τὰ συστήματα :

1) $\frac{1}{\chi} + \frac{1}{\psi} = \frac{5}{6}$, $\frac{1}{\chi} - \frac{1}{\psi} = \frac{1}{6}$

2) $5.\frac{1}{\chi} + 2.\frac{1}{\psi} = 13$, $4.\frac{1}{\chi} + 7.\frac{1}{\psi} = 5$

3) $\frac{8}{\chi} - \frac{7}{\psi} = 11$, $\frac{6}{\chi} - \frac{5}{\psi} = 9$

4) $\frac{27}{\chi} + \frac{5}{\psi} = -1$, $\frac{7}{2\chi} + \frac{7}{3\psi} = -\frac{77}{90}$

5) $17\chi - \frac{0{,}3}{\psi} = 3$, $16\chi - \frac{0{,}4}{\psi} = 1{,}7$

6) $\frac{\chi}{3} + \frac{5}{\psi} = 4\frac{1}{3}$, $\frac{\chi}{6} + \frac{10}{\psi} = 2\frac{2}{3}$

143. Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα :

1) $\chi + \psi = 5\alpha$, $\chi - \psi = 3\alpha$

2) $5\chi - \psi = 6\alpha$, $4\chi - 5\psi = 9\alpha$

3) $2\alpha\chi + \psi = 7\beta$, $\alpha\chi - \psi = 2\beta$

4) $\alpha\chi + 2\psi = -1$, $2\chi + 3\psi = \gamma$

5) $\chi - \beta\psi = 2$, $2\beta\chi + \alpha\psi = -2$

6) $\frac{\chi}{2} + \psi = 3\alpha$, $\frac{2\psi}{3} - \chi = 2\beta$

Β΄. ΛΥΣΙΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΟΣΩΝΔΗΠΟΤΕ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ 1ου ΒΑΘΜΟΥ ΜΕ ΙΣΑΡΙΘΜΟΥΣ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ

114. Ἔστω πρῶτον τὸ σύστημα τῶν τριῶν ἐξισώσεων :

$$\begin{aligned} \chi + \psi + \varphi &= 6 \\ 2\chi + \psi - 3\varphi &= -5 \\ \chi - 3\psi + 4\varphi &= 7. \end{aligned} \qquad (1)$$

Διὰ μιᾶς τῶν προηγουμένων μεθόδων ἀπαλείφομεν μεταξὺ τῆς πρώτης καὶ τῆς δευτέρας ἐξισώσεως ἕνα ἐκ τῶν ἀγνώστων, π.χ. τὸν χ, ὁπότε εὑρίσκομεν $\psi+5\varphi=17$. Ὁμοίως μεταξὺ τῆς πρώτης καὶ τῆς τρίτης ἀπαλείφομεν τὸν αὐτὸν ἄγνωστον χ, ὁπότε εὑρίσκομεν $-4\psi+3\varphi=1$. Ἐὰν ἤδη τὴν δευτέραν καὶ τρίτην ἐξίσωσιν τοῦ δοθέντος συστήματος ἀντικαταστήσωμεν μὲ τὰς εὑρεθείσας δύο ἐξισώσεις, ἔχομεν τὸ σύστημα τὸ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ δοθέν :

$$\begin{aligned} \chi+\psi+\ \varphi&=6 \\ \psi+5\varphi&=17 \\ -4\psi+3\varphi&=1 \end{aligned} \qquad (2)$$

εἰς ὃ παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ δύο τελευταῖαι ἐξισώσεις περιέχουν δύο καὶ τοὺς αὐτοὺς ἀγνώστους ψ καὶ φ. Ἀποτελοῦν λοιπὸν αὗται ἰδιαίτερον σύστημα, τὸ ὁποῖον γνωρίζομεν νὰ λύωμεν. Λύοντες δὲ τοῦτο, εὑρίσκομεν $\psi=2$ καὶ $\varphi=3$. Κατόπιν δὲ ἐκ τῆς ἐξισώσεως $\chi+\psi+\varphi=6$ εὑρίσκομεν $\chi+2+3=6$, ἤτοι $\chi=1$. Ὥστε αἱ τιμαὶ τῶν ἀγνώστων, αἱ ὁποῖαι ἐπαληθεύουν τὸ δοθὲν σύστημα, εἶναι $\chi=1$, $\psi=2$, $\varphi=3$. Ἀποτελοῦν δὲ αὗται ἓν σύστημα λύσεων, τὸ ὁποῖον εἶναι καὶ τὸ μόνον.

115. Ἐκ τῶν προηγουμένων βλέπομεν, ὅτι ἡ λύσις συστήματος τριῶν ἐξισώσεων μὲ τρεῖς ἀγνώστους ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν συστήματος δύο ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους. Ἀλλὰ καὶ ἡ λύσις παντὸς συστήματος πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν συστήματος δύο ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους. Διότι, ἂν ἔχωμεν π.χ. ἓν σύστημα τεσσάρων ἐξισώσεων α΄ βαθμοῦ μὲ τέσσαρας ἀγνώστους καὶ ἀπαλείψωμεν μεταξὺ τῆς πρώτης καὶ ἑκάστης τῶν ἄλλων τριῶν ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ἄγνωστον, θὰ εὕρωμεν τρεῖς ἐξισώσεις. Αὗται δὲ μετὰ τῆς πρώτης ἐξισώσεως ἀποτελοῦν σύστημα ἰσοδύναμον πρὸς τὸ δοθέν. Ἀλλ' αἱ τρεῖς εὑρεθεῖσαι ἐξισώσεις, αἱ ὁποῖαι περιέχουν τρεῖς ἀγνώστους, ἀποτελοῦν ἴδιον σύστημα, τὸ ὁποῖον ἐμάθομεν νὰ λύωμεν. Ἐὰν δὲ τὰς τιμὰς τῶν τριῶν ἀγνώστων, τὰς ὁποίας θὰ εὕρωμεν, θέσωμεν εἰς τὴν πρώτην ἐξίσωσιν, θὰ λάβωμεν ἐξ αὐτῆς τὴν τιμὴν τοῦ τετάρτου ἀγνώστου.

Ἐὰν ἔχωμεν σύστημα πέντε, ἓξ κτλ. ἐξισώσεων μὲ πέντε, ἓξ κτλ. ἀγνώστους, θὰ ἐργασθῶμεν ὁμοίως καὶ θὰ φθάσωμεν εἰς ἓν σύστημα δύο ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους.

Παρατηρήσεις. Κατὰ τὴν λύσιν ἑνὸς συστήματος πολλάκις παρεκκλίνομεν ἀπὸ τοὺς προηγουμένους κανόνας· τοῦτο δὲ διὰ νὰ φθάσωμεν ταχύτερον εἰς τὴν λύσιν. Ἀλλ' ἡ παρέκκλισις αὕτη ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν φύσιν τῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήματος, ἡ ὁποία θὰ μᾶς ὁδηγήσῃ ἢ εἰς τὴν ἐκλογὴν τοῦ ἀγνώστου, ὁ ὁποῖος ἀπαλείφεται εὐκολώτερον, ἢ εἰς τὸν συνδυασμὸν πολλῶν ἐξισώσεων, ἢ καὶ εἰς τὴν εὕρεσιν ἰδιαιτέρων τρόπων, ὡς φαίνεται εἰς τὰ κατωτέρω παραδείγματα.

1) Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$$\begin{aligned} 5\chi+3\psi+2\varphi &= 21 \\ 4\chi-5\psi &= -7 \\ 2\psi-3\varphi &= 3 \end{aligned}$$

Εἰς τὸ σύστημα αὐτὸ θὰ ἀπαλείψωμεν μεταξὺ τῆς πρώτης καὶ τῆς δευτέρας τὸν χ, ὥστε ἡ ἐξίσωσις, ἡ ὁποία θὰ εὑρεθῇ νὰ ἀποτελέσῃ μὲ τὴν τρίτην σύστημα δύο ἐξισώσεων μὲ τοὺς αὐτοὺς ἀγνώστους ψ καὶ φ, ἢ δυνάμεθα νὰ ἀπαλείψωμεν μεταξὺ τῆς πρώτης καὶ τῆς τρίτης τὸν φ, ὁπότε ἡ προκύπτουσα ἐξίσωσις θὰ ἀποτελέσῃ μὲ τὴν δευτέραν ἴδιον σύστημα μὲ ἀγνώστους τὸν χ καὶ τὸν ψ.

2) Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$$\begin{aligned} \chi+\psi-\varphi &= 0 \\ \chi-\psi+\varphi &= 2 \\ -\chi+\psi+\varphi &= 4 \end{aligned}$$

Ἐὰν εἰς τὸ σύστημα αὐτὸ προσθέσωμεν τὰς ἐξισώσεις ἀνὰ δύο, θὰ εὕρωμεν τὴν λύσιν του εὐκολώτατα.

3) Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$$\begin{aligned} \chi+\psi+\varphi &= 6 \\ \psi+\varphi+\omega &= -1 \\ \varphi+\omega+\chi &= 4 \\ \omega+\chi+\psi &= -3 \end{aligned}$$

Προσθέτοντες τὰς τέσσαρας ἐξισώσεις κατὰ μέλη, εὑρίσκομεν

$$3\chi+3\psi+3\varphi+3\omega=6$$

ἢ

$$\chi+\psi+\varphi+\omega=2.$$

Ἐὰν ἤδη ἀπὸ τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν ἀφαιρέσωμεν διαδοχικῶς τὰς τέσσαρας ἐξισώσεις τοῦ δοθέντος συστήματος, εὑρίσκομεν

$$\omega=-4,\ \chi=3,\ \psi=-2,\ \varphi=5.$$

4) Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$$\chi+\psi=20$$

$$\frac{\chi}{6}=\frac{\psi}{4}$$

Γνωρίζομεν, ὅτι $\dfrac{\chi}{6}=\dfrac{\psi}{4}=\dfrac{\chi+\psi}{10}$

ἀλλ᾽ ἐπειδὴ $\chi+\psi=20$, εἶναι $\dfrac{\chi}{6}=\dfrac{\psi}{4}=\dfrac{20}{10}=2.$

Ὥστε ἐκ τῆς ἐξισώσεως $\frac{\chi}{6} = 2$ εὑρίσκομεν

$$\chi = 12 \quad \text{καὶ ἐκ τῆς} \quad \frac{\psi}{4} = 2, \quad \psi = 8.$$

Σημείωσις. Ἐὰν ἐξισώσεις τινὰς τοῦ συστήματος, ἀφοῦ τὰς ἔχομεν πολλαπλασιάσει ἐπὶ ἀριθμὸν διάφορον τοῦ μηδενός, τὰς προσθέσωμεν καὶ λάβωμεν ἐξαγόμενον, τὸ ὁποῖον δὲν περιέχει κανένα ἄγνωστον, τὸ σύστημα εἶναι ἢ ἀδύνατον ἢ ἀόριστον.

116. Ἐκ τῶν προηγουμένων συνάγομεν: α΄) ὅτι, ὅταν εἰς ἓν σύστημα ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀγνώστων εἶναι μεγαλύτερος τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἐξισώσεων, ὑπάρχουν ἄπειρα τὸ πλῆθος συστήματα λύσεων· β΄) ὅταν εἰς ἓν σύστημα οἱ ἄγνωστοι εἶναι ἰσάριθμοι πρὸς τὰς ἐξισώσεις, τότε ἐν γένει ὑπάρχει ἓν καὶ μόνον σύστημα λύσεων· καὶ γ΄) ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐξισώσεων εἶναι μεγαλύτερος τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἀγνώστων, τὸ σύστημα εἶναι συνήθως ἀδύνατον· διότι, ἐὰν π. χ. ἔχωμεν τέσσαρας ἐξισώσεις, αἱ ὁποῖαι περιέχουν τρεῖς ἀγνώστους, δυνάμεθα ἐκ τριῶν ἐξ αὐτῶν νὰ εὕρωμεν ἓν σύστημα λύσεων, ἀλλὰ δὲν ἕπεται, ὅτι αἱ λύσεις αὗται ἐπαληθεύουν καὶ τὴν τετάρτην ἐξίσωσιν.

Ἀσκήσεις.

144. Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα:

1) $2\chi - 3\psi + \omega = 1$, $3\chi + 2\psi - \omega = 3$, $4\chi + 5\psi - \omega = 7$

2) $\chi + \psi + \varphi = 5$, $3\chi - 2\psi + \varphi = 1$, $2\chi + \psi - 3\varphi = 16$

3) $4\chi - 5\psi + 3\omega = 2$, $2\chi + 3\psi - 6\omega = -14$, $8\chi + 2\psi + 5\omega = 2$

4) $3\chi + \psi - 5\varphi = 0$, $3\chi - 5\psi - 4\varphi = 0$, $2\chi + 2\psi - 3\varphi = 14.$

145. Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα:

1) $\chi + \psi - \varphi = 2$, $\chi - \psi + \varphi = 4$, $-\chi + \psi + \varphi = -12$

2) $\chi + \psi + \varphi = 18$, $\chi - \psi + \varphi = 12$, $\chi + \psi - \varphi = 6$

3) $\chi + \psi = 28$, $\psi + \varphi = 10$, $\varphi + \chi = 12$

4) $\chi + 2\psi = 12$, $\psi + 2\omega = 21$, $\omega + 2\chi = 12$

5) $\chi - 2\psi = 9$, $3\psi - 4\varphi = 6$, $\psi - 4\varphi = 10$

6) $2\chi - \psi = 12$, $3\chi - 4\varphi = 36$, $\chi - \varphi = 11.$

146. Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα:

1) $\chi + \psi + \varphi = 36$, $\frac{\chi}{3} + \frac{\psi}{6} + \frac{\varphi}{2} = 10$, $\frac{\chi}{6} - \frac{\psi}{9} + \frac{\varphi}{3} = 2$

2) $\frac{\chi}{2} + \frac{\psi}{3} + \frac{\omega}{4} = 5$, $\frac{\chi}{3} - \frac{\psi}{4} + \frac{\omega}{2} = \frac{139}{12}$, $-\frac{\chi}{4} + \frac{\psi}{2} + \frac{\omega}{3} = -3$

3) $\frac{\chi}{2} + \frac{\psi}{4} + \frac{\omega}{3} = 24$, $\frac{\chi}{4} + \frac{\psi}{3} + \frac{\omega}{2} = 29$, $\frac{\chi}{3} + \frac{\psi}{2} + \frac{\omega}{4} = 25$

4) $\frac{\chi}{2} + \frac{\psi}{6} + \frac{\omega}{4} = 5$, $\psi + \frac{\omega}{2} = 10$, $\omega + \frac{\chi}{4} = 9.$

147. Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα:

1) $\frac{1}{\chi+\psi} = 1$, $\frac{2}{\chi+\omega} = 1$, $\frac{3}{\psi+\omega} = 1$

2) $\frac{\chi+1}{\psi+1} = 2$, $\frac{\psi+5}{\varphi+1} = 2$, $\frac{\chi+3}{\varphi+1} = 2$

3) $\frac{1}{\chi} + \frac{1}{\psi} = 2$, $\frac{1}{\psi} + \frac{1}{\varphi} = 4$, $\frac{1}{\varphi} + \frac{1}{\chi} = 6$

4) $\frac{1}{\chi} + \frac{1}{\psi} + \frac{1}{\varphi} = 9$, $\frac{1}{\chi} - \frac{1}{\psi} + \frac{1}{\varphi} = 3$, $\frac{1}{\chi} + \frac{1}{\psi} - \frac{1}{\varphi} = 1$

148. Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα:

1) $\chi+\psi+\varphi+\omega = 10$, $\chi-\psi+\varphi-\omega = -2$, $-\chi+\psi+\varphi+\omega = 8$, $\chi-\psi-\varphi+\omega = 0$

2) $\chi+\psi+\varphi = 18$, $\psi+\varphi+\omega = 12$, $\varphi+\omega+\chi = 15$, $\omega+\chi+\psi = 9$

3) $\chi-8\psi+3\omega-\varphi = -1$, $\psi-2\omega-\varphi = 0$, $5\omega+2\varphi = 0$, $4\varphi = 1$

4) $2\chi-\psi+5\omega-\varphi = 11$, $2\chi+\psi-3\omega+4\varphi = 11$, $\chi+5\psi-3\omega+\varphi = 6$, $6\chi-\psi+4\omega+2\varphi = 24$

149. Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα:

1) $\chi+\psi = \gamma$, $\psi+\omega = \alpha$, $\omega+\chi = \beta$

2) $\chi-\psi = \alpha$, $\psi-\omega = \beta$, $\omega-\chi = \gamma$

3) $\psi+\omega-\chi = \alpha$, $\omega+\chi-\psi = \beta$, $\chi+\psi-\omega = \gamma$

4) $\psi+\omega+\varphi = \alpha$, $\omega+\varphi+\chi = \beta$, $\varphi+\chi+\psi = \gamma$, $\chi+\psi+\omega = \delta.$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

117. 1) ***Οἱ μαθηταὶ δύο σχολείων ἀνέλαβον τὴν ἀναδάσωσιν ἑνὸς λόφου. Ἐξ αὐτῶν τὸ $\frac{1}{2}$ τοῦ ἑνὸς σχολείου καὶ τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ ἄλλου ἀπετέλεσαν ὁμάδα ἀπὸ 105 μαθητάς, οἱ ὁποῖοι ἀνέλαβον τὴν διάνοιξιν λάκκων. Τὰ δὲ $\frac{2}{3}$ τοῦ πρώτου σχολείου καὶ τὸ $\frac{1}{6}$ τοῦ ἄλλου ἀπετέλεσαν ὁμάδα ἀπὸ 110 μαθητάς, οἱ ὁποῖοι ἀνέλαβον τὴν φύτευσιν τῶν δενδρυλλίων. Πόσοι εἶναι οἱ μαθηταὶ τοῦ ἑνὸς σχολείου καὶ πόσοι οἱ τοῦ ἄλλου ;***

Ἐὰν διὰ τοῦ χ παραστήσωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν μαθητῶν τοῦ πρώτου σχολείου καὶ διὰ τοῦ ψ τὸν ἀριθμὸν τῶν μαθητῶν τοῦ δευτέρου σχολείου, θὰ ἔχωμεν :

$$\frac{\chi}{2} + \frac{\psi}{4} = 105$$

$$\frac{2\chi}{3} + \frac{\psi}{6} = 110.$$

Πρέπει δὲ οἱ χ καὶ ψ νὰ εἶναι ἀκέραιοι καὶ θετικοὶ ἀριθμοί. Λύοντες τὸ σύστημα εὑρίσκομεν $\chi=120$ καὶ $\psi=180$.

2) ***Νὰ εὑρεθῇ διψήφιος ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὰ ψηφία ἔχουν ἄθροισμα 8 καὶ ὅστις, ὅταν ἀντιστραφῇ, ἐλαττοῦται κατὰ 36.***

Ἔστω χ τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων καὶ ψ τὸ ψηφίον τῶν μονάδων. Κατὰ πρῶτον λοιπὸν ἔχομεν $\chi+\psi=8$. Κατόπιν παρατηροῦμεν, ὅτι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς ἔχει $10\chi+\psi$ μονάδας ἐν ὅλῳ. Ὅταν δὲ ἀντιστραφῇ θὰ ἔχῃ $10\psi+\chi$. Εἶναι δὲ αἱ μονάδες $10\psi+\chi$ κατὰ 36 ὀλιγώτεραι τῶν μονάδων $10\chi+\psi$. Ἔχομεν λοιπὸν τὴν ἐξίσωσιν :

$$10\chi+\psi-(10\psi+\chi)=36 \quad ἢ \quad 9\chi-9\psi=36, \text{ ἤτοι } \chi-\psi=4.$$

Ἔχομεν ἄρα τὸ σύστημα $\chi+\psi=8$

$$\chi-\psi=4$$

Πρέπει δὲ οἱ χ καὶ ψ νὰ εἶναι ἀριθμοὶ ἀκέραιοι, θετικοὶ καὶ μικρότεροι τοῦ 10.

Λύοντες τὸ σύστημα εὑρίσκομεν $\chi=6$ καὶ $\psi=2$. Ὥστε ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι ὁ 62. Καὶ πράγματι, διότι $6+2=8$ καὶ $62-26=36$.

3) ***Τεμάχιον ὀρειχάλκου, ὅστις εἶναι κρᾶμα χαλκοῦ καὶ ψευδαργύρου, ζυγίζει 160 χιλιόγραμμα. Ἐντὸς δὲ τοῦ ὕδατος χάνει 20 χιλιόγραμμα. Πόσα χιλιόγραμμα χαλκοῦ καὶ πόσα ψευ-***

ψευδαργύρου ἀποτελοῦν τὸ κρᾶμα αὐτό, ὅταν ἐντὸς τοῦ ὕδατος 9 χιλιόγραμμα χαλκοῦ καὶ 7 χιλιόγραμμα ψευδαργύρου χάνουν ἀπὸ 1 χιλιόγραμμον ;

Ἔστω χ χιλιόγραμμα τὸ βάρος τοῦ χαλκοῦ καὶ ψ χιλιόγραμμα τὸ βάρος τοῦ ψευδαργύρου. Ἔχομεν λοιπὸν κατὰ πρῶτον $\chi+\psi=160$. Κατόπιν παρατηροῦμεν, ὅτι, ἀφοῦ 9 χιλιόγραμμα χαλκοῦ χάνουν ἐντὸς τοῦ ὕδατος 1 χιλιόγραμμον, τὸ 1 χιλιόγραμμον χάνει τὸ $\frac{1}{9}$ αὐτοῦ καὶ τὰ χ χιλιόγραμμα χάνουν $\frac{\chi}{9}$ χιλιόγραμμα. Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι τὰ ψ χιλιόγραμμα ψευδαργύρου χάνουν ἐντὸς τοῦ ὕδατος $\frac{\psi}{7}$ χιλιόγραμμα.

Ὥστε ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $\frac{\chi}{9}+\frac{\psi}{7}=20$,

ἡ ὁποία μετὰ τῆς προηγουμένης ἀποτελεῖ τὸ σύστημα

$$\chi+\psi=160$$
$$\frac{\chi}{9}+\frac{\psi}{7}=20.$$

Πρέπει δὲ οἱ ἀριθμοὶ χ καὶ ψ νὰ εἶναι θετικοί. Λύοντες τὸ σύστημα, εὑρίσκομεν $\chi=90$ καὶ $\psi=70$.

4) ***Τὸ Ὑπουργεῖον Θρησκευμάτων καὶ Ἐθνικῆς Παιδείας διέθεσεν εἰς ἓν ἔτος ἓν ποσὸν χρημάτων διὰ νὰ κάμῃ νέα διδακτήρια, νὰ ἐπισκευάσῃ παλαιὰ καὶ νὰ ἀποτελειώσῃ ἡμιτελῆ, ἐν ὅλῳ 116. Ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐπισκευασθέντων διδακτηρίων εἶναι κατὰ 5 μεγαλύτερος τοῦ πενταπλασίου τῶν νέων. Ὁ δὲ ἀριθμὸς τῶν ἡμιτελῶν εἶναι κατὰ 2 μικρότερος τοῦ ἡμίσεος τῶν ἐπισκευασθέντων. Πόσα εἶναι τὰ σχολεῖα ἑκάστης κατηγορίας ;***

Ἔστω χ ὁ ἀριθμὸς τῶν νέων, ψ ὁ τῶν ἐπισκευασθέντων καὶ φ ὁ τῶν ἡμιτελῶν διδακτηρίων. Ἔχομεν ἑπομένως κατὰ τὸ πρόβλημα τὰς ἐξισώσεις :

$$\chi+\psi+\varphi=116.$$
$$\psi=5\chi+5$$
$$\varphi=\frac{\psi}{2}-2 \qquad (1)$$

Πρέπει δὲ οἱ ἀριθμοὶ χ, ψ καὶ φ νὰ εἶναι ἀκέραιοι καὶ θετικοί. Ἐὰν ἤδη λύσωμεν τὴν δευτέραν ἐξίσωσιν πρὸς χ, λαμβάνομεν :

$$\chi=\frac{\psi-5}{5} \qquad (2)$$

Ἐὰν δὲ θέσωμεν εἰς τὴν πρώτην ἐξίσωσιν ἀντὶ τοῦ χ καὶ τοῦ φ τὰς τιμάς των, λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\frac{\psi-5}{5}+\psi+\frac{\psi}{2}-2=116 \qquad (3)$$

ἡ ὁποία λυομένη, δίδει $\psi=70$.

Ὥστε εἶναι $\chi=\frac{70-5}{5}=13$ καὶ $\varphi=\frac{70}{2}-2=33$.

Παρατήρησις. Ἐὰν παραστήσωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν ἐπισκευασθέντων διδακτηρίων διὰ ψ, δυνάμεθα νὰ ἐκφράσωμεν διὰ τοῦ ψ τοὺς ἄλλους ἀριθμούς, ὡς δεικνύουν αἱ ἐξισώσεις (1) καὶ (2). Τότε θὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα αὐτὸ διὰ μιᾶς μόνον ἐξισώσεως, τῆς (3). Τὸ παράδειγμα δὲ τοῦτο φανερώνει, ὅτι ὑπάρχουν προβλήματα, τὰ ὁποῖα δύνανται νὰ λυθοῦν καὶ διὰ πολλῶν ἐξισώσεων καὶ διὰ μιᾶς. Τοιαῦτα δὲ εἶναι ὅσα ἔχουν πολλοὺς ἀγνώστους, ἀλλὰ τοιούτους, ὥστε ἀπὸ τὸν ἕνα ἄγνωστον νὰ εὑρίσκωνται εὐκόλως οἱ ἄλλοι. Θὰ προτιμῶμεν δὲ τὴν λύσιν τῶν τοιούτων προβλημάτων διὰ μιᾶς ἐξισώσεως ἢ διὰ πολλῶν, ὅταν ὁ εἷς τρόπος ἢ ὁ ἄλλος εἶναι εὐκολώτερος.

5) ***Νὰ εὑρεθοῦν δύο ἀριθμοὶ τοιοῦτοι, ὥστε, ὅταν ἀφαιρέσωμεν τὸ τριπλάσιον τοῦ δευτέρου ἀπὸ τὸ πενταπλάσιον τοῦ πρώτου, νὰ ἔχωμεν διαφορὰν 15· ἐὰν δὲ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸ δεκαπλάσιον τοῦ πρώτου τὸν 30, νὰ ἔχωμεν διαφορὰν τὸ ἑξαπλάσιον τοῦ δευτέρου.***

Ἐὰν χ καὶ ψ εἶναι οἱ ζητούμενοι ἀριθμοί, θὰ ἔχωμεν τὸ σύστημα

$$\begin{matrix} 5\chi-3\psi=15 \\ 10\chi-30=6\psi \end{matrix} \quad \text{ἢ τὸ} \quad \begin{matrix} 5\chi-3\psi=15 \\ 10\chi-6\psi=30 \end{matrix} \quad \text{ἢ τὸ} \quad \begin{matrix} 5\chi-3\psi=15 \\ 5\chi-3\psi=15 \end{matrix}$$

Ἀλλ' ἤδη παρατηροῦμεν, ὅτι κυρίως ἔχομεν μίαν ἐξίσωσιν μὲ δύο ἀγνώστους. Ὥστε τὸ πρόβλημα τοῦτο εἶναι ἀπροσδιόριστον.

6) ***Νὰ εὑρεθῇ τριψήφιος ἀριθμὸς τοιοῦτος, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων αὐτοῦ νὰ εἶναι 21, τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων νὰ εἶναι διπλάσιον τοῦ ψηφίου τῶν ἑκατοντάδων, ἐὰν δὲ τὰ ψηφία αὐτοῦ γραφοῦν κατὰ τάξιν ἀντίστροφον, νὰ προκύπτῃ ἀριθμὸς μεγαλύτερος κατὰ 99.***

Ἔστωσαν χ αἱ ἑκατοντάδες, ψ αἱ δεκάδες καὶ ω αἱ μονάδες τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ. Τότε κατὰ τὸ πρόβλημα θὰ ἔχωμεν τὸ σύστημα:

$$\chi+\psi+\omega=21$$

$$\psi=2\chi$$

$$100\chi+10\psi+\omega-(100\omega+10\psi+\chi)=-99, \text{ ἤτοι } \chi-\omega=-1.$$

Πρέπει δὲ οἱ ἀριθμοὶ χ, ψ καὶ ω νὰ εἶναι θετικοί, ἀκέραιοι καὶ μικρότεροι τοῦ 10. Λύοντες τὸ σύστημα εὑρίσκομεν :

$$\chi=5,\ \psi=10 \text{ καὶ } \omega=6.$$

Ὥστε τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον.

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

Α΄ 150. Νὰ εὑρεθοῦν δύο ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι νὰ ἔχουν ἄθροισμα 225 καὶ διαφορὰν 531.

151. Δύο ἀριθμοὶ ἔχουν διαφορὰν 3, τὸ δὲ τριπλάσιον τοῦ μεγαλυτέρου ἰσοῦται μὲ τὸ τετραπλάσιον τοῦ μικροτέρου. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ ἀριθμοί.

152. Νὰ εὑρεθοῦν δύο ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι νὰ ἔχουν ἄθροισμα 5 καὶ πηλίκον 5.

153. Νὰ εὑρεθοῦν δύο ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι νὰ ἔχουν ἄθροισμα 425. Ὅταν δὲ διαιρέσωμεν τὸν μεγαλύτερον διὰ τοῦ μικροτέρου, νὰ ἔχωμεν πηλίκον 5 καὶ ὑπόλοιπον 5.

154. Ἐὰν ἀπὸ τὸν ἀριθμητὴν ἑνὸς κλάσματος ἀφαιρεθῇ ὁ 11, γίνεται τοῦτο ἴσον μὲ $\frac{1}{6}$. Ἐὰν δὲ ἀφαιρεθῇ ἀπ' αὐτοῦ ὁ 12, γίνεται ἴσον μὲ $\frac{1}{7}$. Νὰ εὑρεθῇ τὸ κλάσμα.

155. Νὰ εὑρεθῇ κλάσμα, τὸ ὁποῖον γίνεται ἴσον μὲ $\frac{1}{2}$, ὅταν εἰς ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους του προστεθῇ ὁ 2 καὶ ἴσον μὲ $\frac{1}{6}$, ὅταν ἀπ' ἀμφοτέρων τῶν ὅρων του ἀφαιρεθῇ ὁ 2.

156. Ἐὰν διαιρεθοῦν δύο ἀριθμοί, δίδουν πηλίκον $\frac{2}{3}$. Ἐὰν δὲ εἰς ἕκαστον τούτων προστεθῇ ὁ 4 καὶ διαιρεθοῦν οἱ νέοι ἀριθμοί, θὰ δώσουν πηλίκον $\frac{4}{5}$. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ ἀριθμοί.

157. Νὰ εὑρεθῇ διψήφιος ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων νὰ εἶναι 11. Ἐὰν δὲ ἀντιστραφῇ νὰ προκύπτῃ ἀριθμὸς μεγαλύτερος κατὰ 27.

158. Νὰ εὑρεθῇ διψήφιος ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων νὰ εἶναι 10. Ἐὰν δὲ ἀντιστραφῇ, νὰ προκύπτῃ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος νὰ εἶναι κατὰ 4 μικρότερος τοῦ τετραπλασίου τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ.

Β΄ 159. Ἐὰν εἰς ἕκαστον θρανίον μιᾶς τάξεως καθίσουν δύο μαθηταί, θὰ μείνουν ὄρθιοι 7. Ἐὰν ὅμως καθίσουν 3 μαθηταί, θὰ μείνουν εἰς τὰ θρανία ὀκτὼ κεναὶ θέσεις. Πόσοι εἶναι οἱ μαθηταὶ τῆς τάξεως αὐτῆς καὶ πόσα τὰ θρανία ;

160. Παρήγγειλέ τις εἰς παντοπώλην 5 όκ. ζάχαριν καὶ 2 όκ. καφέ, διὰ τὰ ὁποῖα ὑπελόγισεν, ὅτι ἔπρεπε νὰ πληρώσῃ 260 δραχμάς. Ἀλλ' ὁ παντοπώλης τὸν ἐχρέωσε μὲ 360 δραχμὰς καὶ τοῦτο, διότι τοῦ ἀπέστειλεν ἐκ λάθους 6 όκ. ζάχαριν καὶ 3 όκ. καφέ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τῆς ὀκᾶς ἑκάστου εἴδους.

161. 5 ὀκάδες τυροῦ ἀξίζουν, ὅσον ἀξίζουν 3 ὀκάδες βουτύρου· ἀλλ' ἡ ἀξία 5 ὀκάδων βουτύρου εἶναι κατὰ 288 δραχμὰς μεγαλυτέρα τῆς ἀξίας 3 ὀκάδων τυροῦ. Πόσον τιμᾶται ἡ ὀκὰ ἑκάστου εἴδους ;

162. Εἷς γεωργὸς ἠγόρασε μίαν ἀγελάδα καὶ ἕνα ἵππον ἀντὶ 5200 δραχμῶν ἐν ὅλῳ· ἀλλ' ἡ ἀξία τοῦ ἵππου εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ διπλασίου τῆς ἀξίας τῆς ἀγελάδος κατὰ 460 δραχμάς. Ἀντὶ πόσων δραχμῶν ἠγόρασεν ἕκαστον ;

163. Ἐὰν ὁ Α δώσῃ ἐκ τῶν χρημάτων του 10 δραχμὰς εἰς τὸν Β, θὰ ἔχουν ἴσον ἀριθμὸν δραχμῶν· ἀλλ' ἐὰν ὁ Β δώσῃ εἰς τὸν Α 10 δραχμάς, ὁ Α θὰ ἔχῃ διπλασίας τοῦ Β. Πόσας δραχμὰς ἔχει ἕκαστος;

Γ' 164. Πατὴρ καὶ υἱὸς ἔχουν σήμερον ὁμοῦ ἡλικίαν 72 ἐτῶν. Ἀλλὰ πρὸ 4 ἐτῶν ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς ἦτο τριπλασία τῆς ἡλικίας τοῦ υἱοῦ. Πόσων ἐτῶν εἶναι σήμερον ὁ πατὴρ καὶ πόσων ὁ υἱός ;

165. Πρὸ 4 ἐτῶν ἡ ἡλικία ἑνὸς ἦτο τριπλασία τῆς ἡλικίας τοῦ ἀδελφοῦ του καὶ μετὰ 8 ἔτη θὰ εἶναι διπλασία. Νὰ εὑρεθῇ ἡ παροῦσα ἡλικία ἑκάστου.

166. Πρὸ 15 ἐτῶν ἡ ἡλικία ἑνὸς ἦτο διπλασία τῆς ἡλικίας ἄλλου, ἀλλὰ μετὰ 10 ἔτη ἡ ἡλικία τοῦ πρώτου θὰ εἶναι τὰ $\frac{11}{8}$ τῆς ἡλικίας τοῦ δευτέρου. Ποία εἶναι ἡ ἡλικία ἑκάστου ;

Δ' 167. Μίαν ἡμέραν εἰς ἕκαστον ἀντιτραχωματικὸν ἰατρεῖον τῶν Ἀθηνῶν προσῆλθον 100 παιδιὰ καὶ εἰς ἕκαστον παιδικὸν σταθμὸν ἀφῆκαν αἱ μητέρες των 70 παιδιά. Ἦσαν δὲ αὐτὰ ἐν ὅλῳ 750. Ἄλλην ἡμέραν προσῆλθον εἰς ἕκαστον ἀπὸ τὰ πρῶτα ἱδρύματα 120 καὶ παρέμειναν εἰς ἕκαστον ἀπὸ τὰ δεύτερα 60 παιδιά, ἐν ὅλῳ 780. Πόσα εἶναι τὰ ἀντιτραχωματικὰ ἰατρεῖα καὶ πόσοι οἱ παιδικοὶ σταθμοὶ τῶν Ἀθηνῶν ;

168. Ἐκ τῶν παιδιῶν, τὰ ὁποῖα γυμνάζονται εἰς τὰ κέντρα παιδικῆς χαρᾶς τὸ $\frac{1}{3}$ τῶν ἀρρένων καὶ τὸ $\frac{1}{4}$ τῶν θηλέων κάμνουν ὁμοῦ τὸν ἀριθμὸν 1600. Ἀλλὰ τὸ $\frac{1}{4}$ τῶν πρώτων καὶ τὸ $\frac{1}{3}$ τῶν δευτέρων κάμνουν τὸν ἀριθμὸν 1550. Πόσα ἄρρενα καὶ πόσα θήλεα γυμνάζονται εἰς τὰ ἀνωτέρω κέντρα ;

169. Τὸ Πατριωτικὸν Ἵδρυμα διένειμε μίαν ἡμέραν εἰς 35 ἀπόρους μητέρας γάλα καὶ εἰς 8 ἀπόρους οἰκογενειάρχας σάπωνα. Ἦσαν δὲ αἱ ὀκάδες τῶν εἰδῶν τούτων ὁμοῦ $29\frac{1}{2}$. Ὁμοίως τὴν αὐτὴν ἡμέραν διένειμε τὴν αὐτὴν ποσότητα γάλακτος εἰς 30 μητέρας καὶ σάπωνος εἰς 48 οἰκογενειάρχας, ἐν ὅλῳ 87 ὀκάδας. Πόσον γάλα διένειμε τὴν ἡμέραν αὐτὴν εἰς ἑκάστην μητέρα καὶ πόσον σάπωνα εἰς ἕκαστον οἰκογενειάρχην;

170. Ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀγροτῶν, οἱ ὁποῖοι ἠσφαλίσθησαν εἰς ἓν ἔτος κατὰ τῆς χαλάζης, εἶναι πενταπλάσιος τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἀγροτῶν, οἱ ὁποῖοι ἠσφαλίσθησαν κατὰ τὸ αὐτὸ ἔτος κατὰ τοῦ παγετοῦ. Τὸ $\frac{1}{4}$ ὅμως τῶν πρώτων ὑπερβαίνει τὸ $\frac{1}{2}$ τῶν δευτέρων κατὰ 1500. Πόσοι ἀγρόται ἠσφαλίσθησαν κατὰ τὸ ἔτος αὐτὸ κατὰ τῆς χαλάζης καὶ πόσοι κατὰ τοῦ παγετοῦ;

Ε΄. 171. Ἐκ δύο συνεταίρων ὁ πρῶτος κατέθεσεν εἰς τὴν ἐπιχείρησιν διπλάσια κεφάλαια τοῦ δευτέρου. Ἀλλὰ μετὰ 1 ἔτος ὁ πρῶτος ἠλάττωσε τὰ κεφάλαιά του κατὰ 5000 δραχμάς, ἐνῷ ὁ δεύτερος τὰ ηὔξησε κατὰ 5000 δραχμάς. Τότε δὲ ὁ λόγος τῶν κεφαλαίων ἦτο $\frac{3}{2}$. Πόσα κεφάλαια κατέθεσεν ἕκαστος ἀρχικῶς;

172. Ἐκ δύο κεφαλαίων, τὰ ὁποῖα ἐτόκιζέ τις πρὸς 5% καὶ 7%, ἐλάμβανεν ἐτήσιον τόκον 2580 δραχμάς. Ἐὰν ἐνήλλασσε τὰ ἐπιτόκια, ὁ τόκος οὗτος θὰ ηὐξάνετο κατὰ 120 δραχ. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ κεφάλαια.

173. Κεφάλαιον 12000 δραχμῶν τοκιζόμενον πρὸς ε% καὶ κεφάλαιον 6000 δραχμῶν τοκιζόμενον πρὸς ε'% φέρουν ὁμοῦ ἐτησίως τόκον 1380 δραχμάς. Ἐὰν ὅμως τὸ πρῶτον κεφάλαιον τοκισθῇ πρὸς $(\varepsilon+1)$% καὶ τὸ δεύτερον πρὸς $(\varepsilon'-1)$%, ἡ διαφορὰ τῶν τόκων κατ' ἔτος θὰ εἶναι 720 δραχμαί. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐπιτόκια ε καὶ ε'.

ΣΤ΄ 174. Δύο ἄνθρωποι ἀπέχουν ἀπ' ἀλλήλων 30 χιλιόμετρα. Ἐὰν ἀναχωρήσουν ταυτοχρόνως, βαδίζοντες πρὸς ἀντιθέτους διευθύνσεις, θὰ συναντηθοῦν μετὰ 3 ὥρας. Ἐὰν ὅμως βαδίσουν πρὸς τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν θὰ συναντηθοῦν μετὰ 15 ὥρας. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ταχύτης ἑκάστου.

175. Τὰ $\frac{2}{3}$ μιᾶς ἀποστάσεως διανύει τις εἰς 4 ὥρας. Ἐὰν ὅμως ἡ ταχύτης του ἐλαττωθῇ κατὰ 2 χιλιόμετρα τὴν ὥραν, θὰ διανύσῃ ὁλόκληρον τὴν ἀπόστασιν εἰς $7\frac{1}{2}$ ὥρας. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις καὶ ἡ ταχύτης.

176. Εἷς, ἀφοῦ διήνυσε τὸ ἥμισυ ἑνὸς δρόμου, ἐδιπλασίασε

τὴν ταχύτητά του καὶ οὕτω διήνυσεν ὅλον τὸν δρόμον εἰς $10\frac{4}{5}$ ὥρας. Κατὰ τὴν ἐπιστροφήν του ηὔξησε τὴν ἀρχικήν του ταχύτητα κατὰ 1 χιλιόμετρον τὴν ὥραν. Οὕτω δὲ διήνυσε τὸν ἴδιον δρόμον εἰς 12 ὥρας. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τοῦ δρόμου ὡς καὶ ἡ ταχύτης τοῦ ὁδοιπόρου.

Ζ΄ 177. Ἀνέμειξέ τις 7 χιλιόγραμμα οἰνοπνεύματος μετὰ 6 χιλιογράμμων οἰνοπνεύματος διαφόρου βαθμοῦ καὶ ἔλαβε μεῖγμα 18°. Ἐὰν ὅμως ἀνεμείγνυε 9 χιλιόγραμμα τοῦ πρώτου οἰνοπνεύματος μετὰ 4 χιλιογράμμων τοῦ δευτέρου, θὰ ἐλάμβανε μεῖγμα 16°. Ποῖος εἶναι ὁ βαθμὸς τοῦ πρώτου καὶ ποῖος ὁ τοῦ δευτέρου οἰνοπνεύματος;

178. Κρᾶμα ἀπὸ χαλκὸν καὶ σίδηρον ζυγίζει 108 χιλιόγραμμα· ὅταν δὲ εἶναι ἐντὸς τοῦ ὕδατος, χάνει ἀπὸ τὸ βάρος του 13 χιλιόγραμμα. Πόσα χιλιόγραμμα ἐξ ἑκάστου τῶν μετάλλων τούτων ὑπάρχουν εἰς τὸ κρᾶμα αὐτό, ὅταν γνωρίζωμεν, ὅτι 9 χιλιόγραμμα χαλκοῦ καὶ 8 χιλ/μα σιδήρου χάνουν ἐντὸς τοῦ ὕδατος ἀπὸ 1 χιλ/μον;

179. Λίθος συνδεδεμένος μὲ φελλὸν αἰωρεῖται ἐντὸς τοῦ ὕδατος. Τὸ ὅλον βάρος τοῦ σώματος αὐτοῦ εἶναι 115 χιλιόγραμμα. Τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ λίθου εἶναι 3 καὶ τοῦ φελλοῦ 0,24. Πόσον εἶναι τὸ βάρος τοῦ λίθου καὶ πόσον τοῦ φελλοῦ;

180. Κρᾶμα ἀπὸ χρυσὸν καὶ ἄργυρον, τὸ ὁποῖον ζυγίζει 375 γραμμάρια, ζυγίζει ἐντὸς τοῦ ὕδατος 350 γραμμάρια. Πόσα γραμμάρια χρυσοῦ καὶ πόσα γραμμάρια ἀργύρου ὑπάρχουν εἰς τὸ κρᾶμα, ὅταν εἶναι γνωστόν, ὅτι τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ χρυσοῦ εἶναι 19,5 καὶ τοῦ ἀργύρου 10,5;

181. Ἀπὸ τὰ ἄκρα μοχλοῦ κρέμανται δύο σώματα ζυγίζοντα ὁμοῦ 42 χιλιόγραμμα. Τὰ μήκη τῶν μοχλοβραχιόνων ἔχουν λόγον $\frac{2}{5}$. Νὰ εὑρεθῇ τὸ βάρος ἑκάστου σώματος.

Η΄ 182. Τὸ ἄθροισμα τριῶν ἀριθμῶν εἶναι 60. Τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων ἰσοῦται μὲ τὸν τρίτον. Τὸ δὲ ἄθροισμα τοῦ πρώτου καὶ τοῦ τρίτου ἰσοῦται μὲ τὸ διπλάσιον τοῦ δευτέρου. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ τρεῖς οὗτοι ἀριθμοί.

183. Νὰ εὑρεθοῦν τρεῖς ἀριθμοὶ τοιοῦτοι, ὥστε τὸ διπλάσιον τοῦ πρώτου καὶ ὁ δεύτερος νὰ ἔχουν ἄθροισμα 85. Τὸ διπλάσιον τοῦ δευτέρου καὶ ὁ τρίτος νὰ ἔχουν ἄθροισμα 65. Τὸ δὲ διπλάσιον τοῦ τρίτου καὶ ὁ πρῶτος νὰ ἔχουν ἄθροισμα 60.

184. Νὰ εὑρεθῇ τριψήφιος ἀριθμὸς τοιοῦτος, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων αὐτοῦ νὰ εἶναι 17. Τὸ ψηφίον τῶν ἑκατοντάδων νὰ εἶναι τετραπλάσιον τοῦ ψηφίου τῶν δεκάδων. Ἐὰν δὲ τὰ ψηφία αὐτοῦ γραφοῦν κατ' ἀντίστροφον τάξιν, νὰ προκύπτῃ ἀριθμὸς μικρότερος κατὰ 99.

185. Ἐκ τριῶν φίλων εἶπεν ὁ πρῶτος εἰς τοὺς δύο ἄλλους: Ἐὰν ἀπὸ τὰς δραχμάς, τὰς ὁποίας ἔχετε οἱ δύο σας, μοῦ δώσετε 40 δραχμάς, θὰ ἔχω τότε τριπλασίας δραχμὰς ἀπὸ ὅσας θὰ σᾶς μείνουν· Ὁ δεύτερος ἀπήντησεν: Ἐὰν σεῖς μοῦ δώσετε 83 δραχμάς, θὰ ἔχω τετραπλασίας ἀπὸ ὅσας θὰ σᾶς μείνουν. Ὁ δὲ τρίτος εἶπεν: Ἐὰν σεῖς μοῦ δώσετε 43 δραχμάς, θὰ ἔχω πενταπλασίας ἀπὸ τὰς ἰδικάς σας. Πόσας δραχμὰς εἶχεν ἕκαστος;

186. Ἵνα ἐκτελέσουν ἔργον τι, χρειάζονται οἱ μὲν Α καὶ Β ὁμοῦ 12 ὥρας, οἱ δὲ Β καὶ Γ ὁμοῦ 20 ὥρας, οἱ δὲ Γ καὶ Α ὁμοῦ 15 ὥρας. Πόσας ὥρας χρειάζεται ἕκαστος τούτων διὰ τὸ αὐτὸ ἔργον καὶ πόσας ὅλοι ὁμοῦ;

Θ΄ 187. Τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν τριγώνου ἀνὰ δύο εἶναι 19, 23 καὶ 21 μέτρα. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος ἑκάστης πλευρᾶς.

188. Εἰς τρίγωνον μία τῶν γωνιῶν αὐτοῦ εἶναι 65^0, ἡ δὲ διαφορὰ τῶν δύο ἄλλων εἶναι 39^0. Πόσων μοιρῶν εἶναι ἑκάστη τῶν δύο ἄλλων γωνιῶν;

189. Εἰς τετράπλευρον, ἐὰν προσθέσωμεν τὰς πλευράς του ἀνὰ τρεῖς, θὰ ἔχωμεν ἀθροίσματα 129 μ., 136 μ., 145 μ. καὶ 154 μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος ἑκάστης πλευρᾶς αὐτοῦ.

190. Ἐὰν αὐξηθῇ κατὰ 2 μέτρα ἡ βάσις ὀρθογωνίου, τὸ δὲ ὕψος αὐτοῦ ἐλαττωθῇ κατὰ 3 μέτρα, ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ ἐλαττοῦται κατὰ 41 τετραγ. μέτρα. Ἐὰν δὲ αὐξηθῇ ἡ βάσις αὐτοῦ κατὰ 3 μέτρα καὶ ἐλαττωθῇ τὸ ὕψος κατὰ 2, ἡ ἐπιφάνεια αὐξάνει κατὰ 24 τετραγ. μέτρα. Ζητοῦνται ἡ βάσις καὶ τὸ ὕψος τοῦ ὀρθογωνίου.

Ι΄ 191. Δύο ἀριθμοὶ ἔχουν ἄθροισμα α καὶ πηλίκον π. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι.

192. Δύο ἀριθμοὶ εἶναι τοιοῦτοι, ὥστε τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ πρώτου ἰσοῦται μὲ τὴν διαφορὰν τοῦ ἀριθμοῦ β ἀπὸ τοῦ δευτέρου· τὸ δὲ $\frac{1}{2}$ τοῦ δευτέρου ἰσοῦται μὲ τὴν διαφορὰν τοῦ ἀριθμοῦ α ἀπὸ τοῦ πρώτου. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι.

193. Αἱ τρεῖς γωνίαι τριγώνου εἶναι ἀνάλογοι τῶν ἀριθμῶν α, β, γ. Πόσων μοιρῶν εἶναι ἑκάστη γωνία αὐτοῦ;

194. Ἐὰν διπλασιασθῇ ἡ βάσις ὀρθογωνίου τινός, ἐλαττωθῇ δὲ τὸ ὕψος κατὰ 2 μέτρα, τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ δὲν βλάπτεται. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος τοῦ ὀρθογωνίου αὐτοῦ.

ΛΥΣΙΣ ΑΝΙΣΟΤΗΤΩΝ

118. Ἡ ἀνισότης $\chi > 5$ ἀληθεύει δι' ὅλας τὰς τιμὰς τοῦ χ, αἳ ὁποῖαι εἶναι μεγαλύτεραι τοῦ 5. Ἡ ἀνισότης $\psi^2 < -4$ δὲν ἀληθεύει

δι' οὐδεμίαν τιμὴν τοῦ ψ. Διότι τὸ τετράγωνον παντὸς ἀριθμοῦ εἶναι θετικὸς ἀριθμός. Ὡς δὲ γνωρίζομεν, πᾶς θετικὸς ἀριθμὸς εἶναι μεγαλύτερος παντὸς ἀρνητικοῦ ἀριθμοῦ. Ἡ δὲ ἀνισότης $5φ^2>3φ^2$ ἀληθεύει δι' οἱανδήποτε τιμὴν τοῦ φ. Διότι πάντοτε 5 τετράγωνα τοῦ φ εἶναι μεγαλύτερα ἀπὸ τὰ 3 τετράγωνα τοῦ φ. Ὥστε μία ἀνισότης, τῆς ὁποίας τὰ μέλη ἐκτὸς τῶν ὡρισμένων ἀριθμῶν ἔχουν γράμματα, δύναται νὰ ἀληθεύῃ ἢ δι' ὅλας τὰς τιμὰς τῶν γραμμάτων ἢ διὰ μερικὰς μόνον ἢ καὶ δι' οὐδεμίαν. Τότε τὰ γράμματα λέγονται **ἄγνωστοι** τῆς ἀνισότητος.

119. Αἱ γενικαὶ ἰδιότητες (§ 94) τῶν ἐξισώσεων ἀληθεύουν καὶ εἰς τὰς ἀνισότητας, τῶν ὁποίων τὰ μέλη ἔχουν γράμματα ἄγνωστα καὶ ἀποδεικνύονται ὁμοίως. Μόνον πρέπει, ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς ἢ ὁ διαιρέτης εἶναι ἀρνητικὸς ἀριθμός, νὰ ἀντιστρέφωμεν τὴν ἀνισότητα.

120. **Ἀνισότης πρώτου βαθμοῦ. Λύσις αὐτῆς.**— Ἡ ἀνισότης $5χ>18-χ$, ἡ ὁποία βλέπομεν, ὅτι περιέχει ἕνα ἄγνωστον, τὸν χ, εἰς τὸν πρῶτον βαθμόν, εἶναι πρώτου βαθμοῦ. Ὁμοίως πρώτου βαθμοῦ εἶναι καὶ ἡ ἀνισότης $4χ<χ-15$. Γενικῶς δὲ ἀνισότης πρώτου βαθμοῦ λέγεται ἡ ἀνισότης, ἡ ὁποία περιέχει ἕνα ἄγνωστον εἰς τὸν πρῶτον βαθμόν, ἤτοι ἡ ἀνισότης τῆς μορφῆς $αχ>β$ (ἢ $αχ<β$).

1) Ἔστω ἡ ἀνισότης $\frac{3χ}{4}+8>\frac{χ}{3}+13$.

Πολλαπλασιάζομεν τὰ δύο μέλη τῆς ἀνισότητος ἐπὶ τὸ γινόμενον 4.3 καὶ λαμβάνομεν $9χ+96>4χ+156$.

Κατόπιν χωρίζομεν τοὺς γνωστοὺς ὅρους ἀπὸ τῶν ἀγνώστων, ὁπότε εὑρίσκομεν $9χ-4χ>156-96$ ἢ $5χ>60$.

Ἐὰν δὲ τέλος διαιρέσωμεν τὰ μέλη αὐτῆς διὰ 5, εὑρίσκομεν $χ>12$. Ὥστε ἡ δοθεῖσα ἀνισότης ἀληθεύει μόνον, ὅταν ὁ ἀριθμὸς χ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 12. Ἤτοι ἐλύσαμεν τὴν ἀνισότητα.

2) Ποῖοι εἶναι οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι ἐπαληθεύουν συγχρόνως τὰς κατωτέρω δύο ἀνισότητας

$$3χ-2>χ-12, \qquad \frac{5χ+4}{2}<χ+10 \ ;$$

Ἐκ τῆς πρώτης ἀνισότητος εὑρίσκομεν:

$$3χ-χ>2-12, \quad 2χ>-10, \quad χ>-5,$$

ἤτοι οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι ἐπαληθεύουν τὴν ἀνισότητα αὐτήν, εἶναι οἱ −4, −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, κτλ. (1)

Ἐκ δὲ τῆς δευτέρας εὑρίσκομεν :

$$5\chi+4<2\chi+20, \quad 5\chi-2\chi<20-4, \quad 3\chi<16, \quad \chi<5\frac{1}{3},$$

ἤτοι οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι ἐπαληθεύουν τὴν ἀνισότητα αὐτήν, εἶναι οἱ 5, 4, 3, 2, 1, 0, —1, —2, —3, —4, —5, κτλ. (2)

Ὥστε ἐκ τῆς λύσεως τῶν δύο ἀνισοτήτων εὕρομεν :

$$-5<\chi<5\frac{1}{3}.$$

Οἱ ζητούμενοι λοιπὸν ἀκέραιοι ἀριθμοί, ὡς καὶ ἐκ τῶν σειρῶν (1) καὶ (2) φαίνεται, εἶναι οἱ —4, —3, —2, —1, 0, 1, 2, 3, 4, 5.

Σημείωσις. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω βλέπομεν, ὅτι ἡ λύσις τῶν ἀνισοτήτων γίνεται κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον, μὲ τὸν ὁποῖον γίνεται καὶ ἡ λύσις τῶν ἐξισώσεων.

Ἀσκήσεις.

195. Νὰ λυθοῦν αἱ ἀνισότητες :

1) $\frac{3}{4}\chi<5\chi-\frac{5}{7}$ 3) $\frac{2\chi}{5}-3>\frac{\chi-4}{15}-\frac{5}{6}$

2) $\frac{\chi+3}{4}>\frac{\chi+23}{6}$ 4) $\frac{\chi+2}{6}-\frac{\chi-7}{4}>\frac{\chi+25}{8}$.

196. Ὁμοίως νὰ εὑρεθοῦν οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι ἐπαληθεύουν ἀμφοτέρας τὰς ἀνισότητας :

$$7\chi-15>27-7\chi \qquad \frac{2\chi-11}{5}<\frac{\chi+6}{3}.$$

197. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι ἐπαληθεύουν ἀμφοτέρας τὰς ἀνισότητας :

$$\frac{13\chi-1}{9}<\frac{2+\chi}{11}-3 \qquad \frac{5\chi+1}{9}>\frac{4-3\chi}{5}-3.$$

198. Ἐρωτηθείς τις, πόσων ἐτῶν εἶναι, ἀπεκρίθη ὡς ἑξῆς : Ἐὰν ἀπὸ τὰ $\frac{2}{5}$ αὐτῶν ἀφαιρέσῃς τὸν 7, εὑρίσκεις ὑπόλοιπον μεγαλύτερον τοῦ 4. Ἐὰν δὲ εἰς τὸ $\frac{1}{3}$ αὐτῶν προσθέσῃς τὸν 1, εὑρίσκεις ἄθροισμα μεγαλύτερον τῆς διαφορᾶς τοῦ 4 ἀπὸ τὰ ἡμίση αὐτῶν. Μεταξὺ πόσων ἐτῶν κυμαίνεται ἡ ἡλικία του ;

ΒΙΒΛΙΟΝ Γ΄

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΟΥ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ I

ΑΣΥΜΜΕΤΡΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

121. Ὁ ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον εἶναι 4, εἶναι ὁ 2 ($2^2=4$). Ὁ δὲ ἀριθμός, τοῦ ὁποίου ὁ κύβος εἶναι 27, εἶναι ὁ 3 ($3^3=27$). Ἀλλὰ ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον ἰσοῦται μὲ 2;

Ἐπειδὴ $1^2=1$ καὶ $2^2=4$, ἔπεται ὅτι οὐδεὶς ἀκέραιος ἀριθμὸς ὑπάρχει, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον ἰσοῦται μὲ 2. Ἀλλ᾿ ἂς ἴδωμεν μήπως ὑπάρχει κλασματικὸς ἀριθμός. Ἂς δεχθῶμεν δέ, ὅτι ὑπάρχει τοιοῦτος κλασματικὸς ἀριθμός, π.χ. ὁ $\frac{\alpha}{\beta}$. Ἔστω δὲ τὸ κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ ἀνάγωγον, ἤτοι ὅτι οἱ ὅροι του δὲν ἔχουν κανένα κοινὸν παράγοντα. Ἀλλὰ τότε θὰ εἶναι $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2=2$, ἤτοι $\frac{\alpha^2}{\beta^2}=2$· ἡ ἰσότης δὲ αὕτη δεικνύει, ὅτι τὸ α^2, ἤτοι τὸ $\alpha.\alpha$, εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ β^2, ἤτοι διὰ τοῦ $\beta.\beta$ καὶ ὅτι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως ταύτης εἶναι 2. Ἀλλ᾿ ἵνα τὸ γινόμενον $\alpha.\alpha$ εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ $\beta.\beta$, πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὸ γινόμενον τοῦ $\alpha.\alpha$ νὰ περιέχῃ τοὺς παράγοντας τοῦ $\beta.\beta$, ἤτοι τὸ α νὰ περιέχῃ τοὺς παράγοντας τοῦ β. Ἀλλ᾿ ἡμεῖς γνωρίζομεν, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ α καὶ β δὲν ἔχουν κανένα κοινὸν παράγοντα. Ὥστε τὸ α^2 δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ διαιρῆται διὰ τοῦ β^2. Ἄρα οὔτε κλασματικὸς ἀριθμὸς ὑπάρχει, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον νὰ ἰσοῦται μὲ 2.

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι οὔτε ἀκέραιος οὔτε κλασματικὸς ἀριθμὸς ὑπάρχει, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον ἢ ὁ κύβος κτλ. νὰ ἰσοῦται μὲ τὸν ἀριθμὸν 10.

Βλέπομεν λοιπόν, ὅτι τὸ σύστημα τῶν ἀκεραίων καὶ τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν (τῶν θετικῶν καὶ τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν) δὲν δύναται νὰ λύσῃ ζητήματα, ὡς τὰ προηγούμενα.

Ἀλλὰ καθώς, διὰ νὰ καταστήσωμεν τὴν διαίρεσιν πάντοτε δυνατήν, εἰσηγάγομεν νέους ἀριθμούς, τοὺς κλασματικούς, καὶ διὰ νὰ καταστήσωμεν ὁμοίως δυνατὴν τὴν ἀφαίρεσιν εἰσηγάγομεν τοὺς ἀρνητικοὺς ἀριθμούς, οὕτω, διὰ νὰ καταστήσωμεν δυνατὴν τὴν λύσιν τῶν ζητημάτων τῶν ὁμοίων πρὸς τὰ προηγούμενα, θὰ εἰσαγάγωμεν νέους ἀριθμούς, μὲ τὴν προϋπόθεσιν ὅμως, ὅτι θὰ διατηρηθοῦν, ὡς πάντοτε, οἱ νόμοι τῶν πράξεων ἀναλλοίωτοι.

122. Ἀσύμμετροι ἀριθμοί.— Διὰ νὰ εὕρωμεν τοὺς νέους αὐτοὺς ἀριθμούς, παρατηροῦμεν τὰ ἑξῆς: Πᾶς ἀκέραιος ἀριθμός, ὡς π.χ. ὁ 5, ἀποτελεῖται ἀπὸ ὡρισμένον πλῆθος ἀκεραίων μονάδων. Ὁμοίως καὶ πᾶς κλασματικὸς ἀριθμός, ὡς π.χ. ὁ $\frac{3}{4}$, ἀποτελεῖται ἀπὸ ὡρισμένον πλῆθος κλασματικῶν μονάδων ἴσων μὲ $\frac{1}{4}$. Ἀλλὰ πάλιν γνωρίζομεν, ὅτι πᾶς ἀκέραιος ἢ κλασματικὸς ἀριθμὸς δύναται νὰ τραπῇ εἰς δεκαδικόν· π.χ. $5=\frac{50}{10}$, $\frac{3}{4}=\frac{75}{100}$.

Ἀλλὰ πλεῖστα τῶν κοινῶν κλασμάτων, ὅταν τραποῦν εἰς δεκαδικά, τρέπονται εἰς περιοδικά, ἤτοι τρέπονται εἰς ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι ἔχουν ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία, τὰ ὁποῖα ἀπό τινος καὶ ἐφεξῆς ἐπαναλαμβάνονται διαρκῶς τὰ ἴδια καὶ μὲ τὴν αὐτὴν τάξιν·

$$\pi.\chi.\quad \frac{7}{11}=0{,}636363\ldots \quad \frac{18}{111}=0{,}162162162\ \ldots$$

Ἀλλ᾿ ἀφοῦ δεχόμεθα, ὅτι ἄπειροι τὸ πλῆθος δεκαδικαὶ μονάδες ἀποτελοῦν ἀριθμόν, ὅταν τὰ ψηφία, διὰ τῶν ὁποίων γράφονται, ἔχουν τὴν ὡς ἀνωτέρω τάξιν, τίποτε δὲν μᾶς ἐμποδίζει νὰ δεχθῶμεν, ὅτι ἀποτελοῦν ἀριθμὸν καὶ ἄπειροι τὸ πλῆθος δεκαδικαὶ μονάδες (θετικαὶ ἢ ἀρνητικαί), ἔστω καὶ ἂν γράφωνται μὲ οἱαδήποτε ψηφία, ἀρκεῖ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων τούτων ὁμοειδῶν μονάδων νὰ εἶναι μικρότερον ἀκεραίου τινὸς ὁμοειδοῦς. Οὕτω τὸ ἄπειρον πλῆθος 1,41412135624. . ., τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων μονάδων εἶναι προφανῶς μικρότερον τοῦ 2, θεωροῦμεν ὡς ἀριθμόν. Εἶναι δὲ οὗτος διάφορος τῶν ἀκεραίων καὶ τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν. Ὅτι δὲ εἶναι διάφορος τῶν ἀκεραίων εἶναι προφανές. Ἂν δὲ ἦτο ἴσος μὲ κλάσμα, τοῦτο θὰ ἐτρέπετο εἰς δεκαδικόν, τὸ ὁποῖον θὰ εἶχεν ὡρισμένον ἀριθμὸν ψηφίων ἤ, ἂν εἶχεν ἄπειρα ψηφία, θὰ ἦσαν περιοδικά.

Οἱ ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι, ὅταν τρέπωνται εἰς δεκαδικούς, ἔχουν ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία μὴ περιοδικά, λέγονται **ἀσύμμετροι**. Πρὸς διάκρισιν δὲ οἱ ἀκέραιοι καὶ οἱ κλασματικοὶ ἀριθμοὶ λέγονται **σύμμετροι**.

123. Γενικὸς ὁρισμὸς τοῦ ἀριθμοῦ.—Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω ὁ ἀριθμὸς ὁρίζεται ὡς ἑξῆς : ***Ἀριθμὸς λέγεται τὸ σύνολον ὁμοειδῶν δεκαδικῶν μονάδων ὡρισμένου πλήθους ἢ καὶ ἀπείρου.***

124. Ἰσότης καὶ ἀνισότης τῶν θετικῶν ἀριθμῶν.—Ὁ ἀριθμὸς 2,1345 περιέχει, ὡς βλέπομεν, ὅλας τὰς μονάδας τοῦ ἀριθμοῦ 2,134 καὶ ἄλλας ἀκόμη. Εἶναι λοιπὸν μεγαλύτερος τοῦ δευτέρου. Ὥστε : ***Εἷς ἀριθμὸς λέγεται μεγαλύτερος ἄλλου, ὅταν ἔχῃ ὅλας τὰς μονάδας αὐτοῦ καὶ ἄλλας ἀκόμη.***

Ἐὰν ἤδη θελήσωμεν νὰ συγκρίνωμεν τοὺς ἀριθμοὺς 1 καὶ 0,9999. . . . , θὰ παρατηρήσωμεν, ὅτι πᾶς ἀκέραιος ἢ κλασματικὸς ἀριθμὸς μικρότερος τοῦ ἑνὸς ἐξ αὐτῶν εἶναι μικρότερος καὶ τοῦ ἄλλου. Συνάγομεν λοιπόν, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι εἶναι ἴσοι. Ὥστε : ***Δύο ἀριθμοὶ λέγονται ἴσοι, ὅταν πᾶς ἀριθμὸς (ἀκέραιος ἢ κλασματικός), ὅστις εἶναι μικρότερος τοῦ ἑνός, εἶναι μικρότερος καὶ τοῦ ἄλλου.***

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω λοιπὸν οἱ ἀριθμοὶ 3,146 καὶ 3,145999. . . εἶναι ἴσοι, ἐνῷ οἱ ἀριθμοὶ 3,146. . . καὶ 3,148. . . εἶναι ἄνισοι, οἱαδήποτε καὶ ἂν εἶναι τὰ ἄλλα δεκαδικὰ ψηφία αὐτῶν· εἶναι δὲ ὁ πρῶτος μικρότερος τοῦ δευτέρου.

Παρατήρησις. Καὶ μετὰ τὴν εἰσαγωγὴν τῶν νέων αὐτῶν ἀριθμῶν, ἤτοι τῶν ἀσυμμέτρων, οἱ ὁρισμοὶ τῶν τεσσάρων πράξεων μένουν οἱ αὐτοί. Ἀποδεικνύεται δέ, ὅτι ὅλαι αἱ πράξεις εἶναι δυναταὶ καὶ ὅτι αἱ ἀρχικαὶ ἰδιότητες τῶν δυνάμεων διατηροῦνται. Ἐπίσης ἀποδεικνύεται, ὅτι πᾶς θετικὸς ἀριθμὸς εἶναι καὶ τετράγωνον ἄλλου ἀριθμοῦ καὶ κύβος καὶ τετάρτη δύναμις ἄλλου κλπ.

Κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πράξεων ἐπὶ τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν, συνήθως διατηροῦμεν ὀλίγα δεκαδικὰ ψηφία αὐτῶν καὶ ὅσα χρειάζονται διὰ νὰ ἔχωμεν ἱκανοποιητικὴν προσέγγισιν. Τὰ δὲ λοιπὰ παραλείπομεν. Ἐν τούτοις ὑπάρχουν μέθοδοι, διὰ τῶν ὁποίων ἐκτελοῦνται αἱ πράξεις ἐπὶ τῶν ἀσυμμέτρων συντομώτερον· ταύτας δὲ θὰ ἴδωμεν κατωτέρω.

Σημείωσις. Διὰ τῆς εἰσαγωγῆς τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν γίνεται δυνατὴ καὶ ἡ μέτρησις πάσης εὐθείας γραμμῆς, ἐκ τῆς ὁποίας (μετρήσεως) προκύπτει ἀριθμὸς σύμμετρος ἢ ἀσύμμετρος.

ΠΕΡΙ ΡΙΖΩΝ

125. Ὁρισμοί.—Ἐπειδὴ ὁ 4 εἶναι τετράγωνον τοῦ 2, ὁ 2 λέγεται τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 4. Καὶ ἐπειδὴ $27=3^3$, ὁ 3 λέγεται τρίτη ἢ κυβικὴ ῥίζα τοῦ 27· καὶ ἐπειδὴ $625=5^4$, ὁ 5 λέγεται τετάρτη ῥίζα τοῦ 625· γενικῶς δέ, ἐὰν $\alpha=\beta^\mu$, ὁ β λέγεται μυοστὴ ῥίζα τοῦ α. Ὥστε: ***Μυοστὴ ῥίζα δοθέντος ἀριθμοῦ λέγεται ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος, ὑψούμενος εἰς τὴν μ δύναμιν, δίδει τὸν δοθέντα.***

Ἡ μυοστὴ ῥίζα τοῦ α παριστᾶται μὲ τὸ σύμβολον $\sqrt[\mu]{\alpha}$. Ὥστε, ἐὰν $\alpha=\beta^\mu$, θὰ εἶναι $\beta=\sqrt[\mu]{\alpha}$. Τὸ σύμβολον $\sqrt{}$ λέγεται **ῥιζικόν**, ὁ μ **δείκτης** τῆς ῥίζης καὶ ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ὑπάρχει ὑπὸ τὸ ῥιζικόν, λέγεται **ὑπόρριζον**· ἡ δὲ ῥίζα τῆς δευτέρας τάξεως, ἤτοι ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα γράφεται συνήθως ἄνευ τοῦ δείκτου 2 ὡς ἑξῆς:

$$\sqrt{4},\ \sqrt{\alpha},\ \sqrt{\alpha-\beta}\ \text{κλπ.}$$

Εἴδομεν ὅτι, ἐὰν $\alpha=\beta^\mu$, θὰ εἶναι $\beta=\sqrt[\mu]{\alpha}$. Ὥστε ἡ πρώτη ἰσότης γράφεται $\alpha=\left(\sqrt[\mu]{\alpha}\right)^\mu$. Ἀλλὰ καὶ $\sqrt[\mu]{\alpha^\mu}=\alpha$, κατὰ τὸν ὁρισμόν. Ὥστε εἶναι $\left(\sqrt[\mu]{\alpha}\right)^\mu=\sqrt[\mu]{\alpha^\mu}$.

126. Ῥίζαι ἀρτίας τάξεως.—Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὴν $\sqrt{16}$ ἢ τὴν $\sqrt[4]{16}$. Ἀλλ' ἐπειδὴ

$$4.4=16 \quad \text{καὶ} \quad (-4).(-4)=16,$$

ἕπεται, ὅτι ὁ 16 ἔχει δύο τετραγωνικὰς ῥίζας ἀντιθέτους, τὰς $+4$ καὶ -4. Γράφομεν δὲ ταύτας συντόμως ὡς ἑξῆς: $\sqrt{16}=\pm 4$.

Ὁμοίως ἐπειδὴ

$$2.2.2.2=16 \quad \text{καὶ} \quad (-2).(-2).(-2).(-2)=16,$$

ἕπεται, ὅτι ὁ 16 ἔχει δύο τετάρτας ῥίζας ἀντιθέτους, τὰς 2 καὶ -2, ἤτοι εἶναι $\sqrt[4]{16}=\pm 2$.

Ἀλλὰ $\sqrt{-16}$ ἢ $\sqrt[4]{-16}$ δὲν ὑπάρχει. Καὶ πράγματι, διότι πᾶν τετράγωνον καὶ γενικῶς πᾶσα δύναμις ἀρτίας τάξεως εἶναι θετική. Συνάγομεν λοιπόν, ὅτι :

1) ***Πᾶς θετικὸς ἀριθμὸς ἔχει δύο ρίζας ἑκάστης ἀρτίας τάξεως, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἀντίθετοι.***

2) ***Οἱ ἀρνητικοὶ ἀριθμοὶ δὲν ἔχουν ρίζας ἀρτίας τάξεως.***

127. Ρίζαι περιττῆς τάξεως.— Ἐπειδὴ

$$2.2.2=8 \quad \text{καὶ} \quad (-2).(-2).(-2)=-8,$$

ἕπεται, ὅτι $\sqrt[3]{8}=2$ καὶ $\sqrt[3]{-8}=-2$.

Ὁμοίως εἶναι $\sqrt[5]{32}=2$, διότι $2^5=32$,

καὶ $\sqrt[5]{-32}=-2$, διότι $(-2)^5=-32$.

Συνάγομεν λοιπόν, ὅτι :

Πᾶς ἀριθμὸς ἔχει μίαν ρίζαν ἑκάστης περιττῆς τάξεως καὶ εἶναι αὕτη θετική, ἐὰν ὁ ἀριθμὸς εἶναι θετικός. Ἐὰν ὅμως ὁ ἀριθμὸς εἶναι ἀρνητικός, ἡ ρίζα εἶναι ἀρνητική.

ΡΙΖΑΙ ΤΩΝ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

128. Εἰς τὴν § 121 ἀπεδείξαμεν, ὅτι ὁ ἀριθμὸς 2, ὁ ὁποῖος δὲν εἶναι τετράγωνον ἀκεραίου, δὲν εἶναι τετράγωνον οὐδὲ κλάσματος· τοῦτο δὲ σημαίνει, ὅτι ἡ $\sqrt{2}$, ἡ ὁποία δὲν εἶναι ἀκέραιος ἀριθμός, εἶναι ἀριθμὸς ἀσύμμετρος. Κατὰ τὸν ἴδιον δὲ τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι ***οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ ἔχουν ρίζας ἢ ἀκεραίους ἀριθμοὺς ἢ ἀσυμμέτρους, οὐδέποτε δὲ κλάσματα.***

129. Εἰς τὴν Ἀριθμητικὴν (§ 283) εἴδομεν, ὅτι, ἵνα εἷς ἀκέραιος ἀριθμὸς ἔχῃ τετραγωνικὴν ρίζαν ἀκριβῆ (δηλαδὴ ἀκέραιον ἀριθμόν), πρέπει καὶ ἀρκεῖ οἱ ἐκθέται τῶν πρώτων παραγόντων αὐτοῦ νὰ διαιροῦνται ὅλοι διὰ 2. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι, ἵνα εἷς ἀκέραιος ἀριθμὸς ἔχῃ τρίτην, τετάρτην καὶ γενικῶς μυοστὴν ρίζαν ἀκριβῆ, πρέπει καὶ ἀρκεῖ οἱ ἐκθέται τῶν πρώτων παραγόντων αὐτοῦ νὰ διαιροῦνται ὅλοι διὰ 3, 4 καὶ γενικῶς διὰ μ.

Οὕτως ὁ ἀριθμὸς $2^6.3^{12}$ ἔχει τετραγωνικὴν ρίζαν ἀκέραιον ἀριθμόν, τὸν $2^3.3^6$, τρίτην ρίζαν τὸν ἀριθμὸν $2^2.3^4$ καὶ ἕκτην ρίζαν τὸν 2.3^2.

130. Ἐὰν $\alpha^5=\beta^5$, ὅπου α καὶ β ἀριθμοὶ θετικοί, ἤτοι, ἐὰν

$\alpha.\alpha.\alpha.\alpha.\alpha=\beta.\beta.\beta.\beta.\beta$, εἶναι φανερόν, ὅτι θὰ εἶναι καὶ $\alpha=\beta$. Διότι, ἐὰν ὁ α ἦτο διάφορος τοῦ β, ἤτοι ἐὰν $\alpha\neq\beta$, εἶναι φανερόν, ὅτι θὰ ἦτο καὶ $\alpha.\alpha\neq\beta.\beta$ κλπ. Ἐπομένως θὰ ἔπρεπε καὶ τὰ γινόμενα $\alpha.\alpha.\alpha.\alpha.\alpha$ καὶ $\beta.\beta.\beta.\beta.\beta$ νὰ ἦσαν διάφορα. Ἀλλ' ἡμεῖς γνωρίζομεν, ὅτι εἶναι ἴσα· ὥστε εἶναι καὶ $\alpha=\beta$.

Γενικῶς δὲ ἐὰν $\alpha^{\mu}=\beta^{\mu}$, ὅπου μ εἶναι ἀκέραιος θετικὸς ἀριθμός, θὰ εἶναι $\alpha=\beta$. Κατόπιν τούτου εὐκόλως ἕπεται ὅτι, ἐὰν $\alpha^{\mu}=\beta^{\mu}$, ὅπου α καὶ β εἶναι ὁμόσημοι ἀριθμοί, θὰ εἶναι καὶ $\alpha=\beta$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙ

ΦΑΝΤΑΣΤΙΚΟΙ ΚΑΙ ΜΙΓΑΔΕΣ ΑΡΙΘΜΟΙ

131. Ὁρισμοί.— Εἴδομεν, ὅτι τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ -16, ὡς καὶ παντὸς ἀρνητικοῦ ἀριθμοῦ, δὲν ὑπάρχει, διότι πᾶν τετράγωνον εἶναι θετικόν. Ἐπομένως, ἐὰν θέλωμεν ἵνα καὶ οἱ ἀρνητικοὶ ἀριθμοὶ ἔχουν τετραγωνικὴν ῥίζαν, εἶναι ἀνάγκη νὰ πλάσωμεν καὶ νὰ παραδεχθῶμεν νέον τινὰ ἀριθμὸν καὶ τοιοῦτον, ὥστε τὸ τετράγωνον αὐτοῦ νὰ εἶναι -1. Τὸν ἀριθμὸν τοῦτον, τὸν ὁποῖον παριστῶμεν διὰ τοῦ i καὶ διὰ τὸν ὁποῖον θὰ ἔχωμεν $i^2=-1$, θεωροῦμεν ὡς νέαν μονάδα καὶ εἰσάγομεν αὐτὴν εἰς τὸ σύστημα τῶν ἀριθμῶν. Μετ' αὐτῆς δὲ εἰσάγομεν καὶ τὴν ἀντίθετον αὐτῆς $-i$. Ἤτοι δεχόμεθα, ὅτι:

$$\sqrt{-1}=i,\quad i^2=-1\quad \text{καὶ}\quad (-i)^2=-1.$$

Ἀλλ' ἐκτὸς τούτων δεχόμεθα ὡς ἀριθμοὺς καὶ ὅλα τὰ πολλαπλάσια τοῦ i καὶ τοῦ $-i$, ὡς καὶ τὰ μέρη αὐτῶν. Οὕτω:

$$i+i+i+i=4i,\quad (-i)+(-i)+(-i)=-3i,\quad \frac{i}{4}+\frac{i}{4}+\frac{i}{4}=\frac{3i}{4}$$

θεωροῦνται ὡς ἀριθμοί.

Αἱ νέαι μονάδες i καὶ $-i$ λέγονται **φανταστικαὶ** καὶ οἱ ἐξ αὐτῶν (καὶ οἱ ἐκ τῶν μερῶν αὐτῶν) ἀποτελούμενοι ἀριθμοὶ λέγονται **φανταστικοί**· αἱ δὲ παλαιαὶ 1 καὶ -1 πρὸς διάκρισιν λέγονται **πραγματικαὶ** καὶ οἱ ἐξ αὐτῶν ἀριθμοὶ **πραγματικοί**. Οὕτως οἱ προηγούμενοι ἀριθμοὶ $4i, -3i, \frac{3i}{4}$ εἶναι φανταστικοί.

Οἱ φανταστικοὶ καὶ οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ ἀποτελοῦν ἓν γενικώτερον σύστημα, εἰς τὸ ὁποῖον ὅλοι οἱ ἀριθμοὶ γίνονται ἀπὸ τὰς μονάδας 1, —1, i καὶ —i καὶ ἀπὸ τὰ μέρη αὐτῶν καὶ εἰς τὸ ὁποῖον διατηροῦνται (ἀποδεικνύεται δὲ τοῦτο) ἀμετάβλητοι αἱ ἀρχικαὶ ἰδιότητες τῶν πράξεων.

132. Μιγάδες ἀριθμοί.—Ὁ ἀριθμὸς $4+2i$ βλέπομεν, ὅτι ἔχει ἓν πραγματικὸν μέρος, τὸν ἀριθμὸν 4 καὶ ἓν φανταστικόν, τὸ 2i, λέγεται δὲ διὰ τοῦτο **μιγάς**. Ὥστε: ***Μιγὰς ἀριθμὸς λέγεται ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἀποτελεῖται ἀπὸ πραγματικὰς καὶ φανταστικὰς μονάδας.*** Οὕτως οἱ ἀριθμοί:

$$-3+4i,\quad 7-5,\quad -\frac{3}{4}-\frac{2}{5}i$$

εἶναι μιγάδες. Καὶ γενικῶς μιγὰς ἀριθμὸς εἶναι ὁ $\alpha+\beta i$, ὅπου οἱ α καὶ β εἶναι πραγματικοὶ ἀριθμοὶ οἱοιδήποτε.

Δύο μιγάδες ἀριθμοὶ λέγονται **ἴσοι**, ἐὰν τὰ πραγματικὰ μέρη αὐτῶν εἶναι ἴσα καὶ τὰ φανταστικὰ ἴσα.

Οὕτως, ἵνα ἔχωμεν:

$$\alpha+\beta i=\gamma+\delta i,$$

πρέπει νὰ εἶναι $\alpha=\gamma$ καὶ $\beta=\delta$.

Δύο μιγάδες ἀριθμοὶ λέγονται **συζυγεῖς,** ἐὰν διαφέρουν μόνον κατὰ τὸ σημεῖον τοῦ φανταστικοῦ μέρους αὐτῶν. Ὅθεν οἱ

$$5+8i,\quad 5-8i$$

εἶναι συζυγεῖς μιγάδες.

133. Αἱ πράξεις ἐπὶ τῶν φανταστικῶν ἀριθμῶν ἐκτελοῦνται ὅπως καὶ ἐπὶ τῶν πραγματικῶν· οὕτως ἔχομεν:

$$5i+3i=8i,\quad -4i-7i=-11i,\quad -9i+7i=-2i$$
$$-10i-(-3i)=-10i+3i=-7i,\quad 8i-8i=0.$$

Ἐπίσης ἔχομεν: $(-i)(-i)=(-i)^2=i^2=-1$

$$i^3=i^2.i=-1.i=-i,\quad i^4=(-1)^2=+1$$
$$i^5=i^4.i=i,\quad i^6=i^5.i=i^2=-1$$
$$i^7=-i,\quad i^8=1 \text{ κ.ο.κ.}$$

Βλέπομεν λοιπὸν ἐκ τῶν ἀνωτέρω, ὅτι αἱ διαδοχικαὶ δυνάμεις τοῦ i δίδουν ὡς ἐξαγόμενα τὰς μονάδας i, —1, —i, 1 καὶ ὅτι αἱ ἄρτιαι δυνάμεις τοῦ i δίδουν τὰς πραγματικὰς μονάδας.

Ἐπίσης εἶναι $4i.4i=(4i)^2=16(-1)=-16$

$$(-4i).(-4i)=(-4i)^2=16(-1)=-16,$$

ἐξ ὧν ἔπεται, ὅτι $\sqrt{-16}=\sqrt{16.(-1)}=\pm 4i.$

ἤτοι, ὅτι ***τετραγωνικαὶ ῥίζαι τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν ὑπάρχουν καὶ εἶναι φανταστικοὶ ἀριθμοί.***

Ἐπίσης ἔχομεν :

$$-8i : 4i = \frac{-8i}{4i} = -2, \qquad 5i : 9i = \frac{5i}{9i} = \frac{5}{9}$$

$$\alpha i^2 : \beta i = \frac{\alpha i^2}{\beta i} = \frac{\alpha}{\beta} i, \qquad \alpha i : \beta i^2 = \frac{\alpha i}{\beta i^2} = \frac{\alpha i}{-\beta} = -\frac{\alpha}{\beta} i.$$

Διὰ τοὺς μιγάδας ἀριθμοὺς ἔχομεν π.χ.

$$(5+7i)+(-3+2i)=5+7i-3+2i=2+9i$$

$$(8-7i)-(2-i)=8-7i-2+i=6-6i$$

$$(3+6i).(5+8i)=15+24i+30i+48i^2=15+54i-48=-33+54i.$$

Συνάγομεν δὲ ἐκ τῶν ἀνωτέρω παραδειγμάτων, ὅτι τὰ ἐξαγόμενα τῶν τεσσάρων πράξεων ἐπὶ τῶν μιγάδων ἀριθμῶν εἶναι γενικῶς μιγάδες ἀριθμοί. Τὸ ἄθροισμα ὅμως καὶ τὸ γινόμενον δύο συζυγῶν μιγάδων ἀριθμῶν εἶναι ἀριθμοὶ πραγματικοί, ὡς ἑξῆς φαίνεται :

$$(4+9i)+(4-9i)=8$$

καὶ $$(5+3i).(5-3i)=25+15i-15i-9i^2=25+9=34.$$

Ἀσκήσεις.

199. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ κάτωθι ῥίζαι :

$$\sqrt{49} \qquad \sqrt{81} \qquad \sqrt{-36} \qquad \sqrt{900}$$

$$\sqrt{(-8)^2} \qquad \sqrt{(-\alpha)^2} \qquad \sqrt{-\alpha^2} \qquad \sqrt{\alpha^4}$$

$$\sqrt[3]{1} \qquad \sqrt[6]{1} \qquad \sqrt[3]{-27} \qquad \sqrt[4]{81}$$

$$\left(\sqrt[3]{8}\right)^3 \qquad \sqrt[3]{8^3} \qquad \left(\sqrt[4]{16}\right)^4 \qquad \sqrt[4]{16^4}.$$

200. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ κάτωθι ἐξαγόμενα :

$$i^9 \qquad 3i.5i \qquad 6i.3i^2$$

$$i^{10} \qquad 8i.9i \qquad 5.\sqrt{-4}$$

$$i^{11} \qquad -8i.4i \qquad i.\sqrt{-25}$$

$$i^{12} \qquad (-2i)(-3i) \qquad 3i.\sqrt{-64}.$$

201. Ἐπίσης τά :

$$(7+8i)+(9-5i)+(-3i+4)$$

$$(2+3i)+(5-4i)-(11-7i)$$

$$2(4+10i)+3(6-5i)+5(1-2i)$$

$$9(5+3i)+(8-13i)+(15+4i).$$

202 Ἐπίσης τά :

$$(2+7i).(5+3i), \qquad (8-9i).(9-8i), \qquad (11+13i).(11-13i)$$

$$(2-5i).(5-9i), \qquad (10i+7).(10i-7), \qquad (-4+4i).(5-3i).$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙΙ

ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΕΧΟΥΣΑΙ ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΟΝ ΕΚΘΕΤΗΝ

134. Σημασία τῆς δυνάμεως $\alpha^{\frac{1}{\nu}}$.—Μέχρι τοῦδε ἐγενικεύσαμεν τὴν ἔννοιαν τῆς δυνάμεως εἰς τοὺς ἐκθέτας 1, 0 καὶ ἀκεραίους ἀρνητικούς. Ἤδη μένει νὰ περιλάβωμεν εἰς τοὺς ἐκθέτας καὶ τοὺς κλασματικοὺς ἀριθμοὺς (θετικοὺς ἢ ἀρνητικούς). Πρὸς τοῦτο ὅμως πρέπει νὰ ὁρίσωμεν τὴν σημασίαν τῶν δυνάμεων μὲ ἐκθέτας κλασματικούς, ὑπὸ τὸν ὅρον, ὅτι αἱ ἀρχικαὶ ἰδιότητες τῶν δυνάμεων θὰ διατηρηθοῦν. Ἑπομένως καὶ ἡ ἰδιότης $\alpha^{\mu}\,.\,\alpha^{\nu}=\alpha^{\mu+\nu}$ (1)

Ἡμεῖς εἴδομεν ὅτι, ἐπειδὴ

$$2^2=4 \quad \text{εἶναι} \quad \sqrt{4}=2$$

καὶ ἐπειδὴ $\quad 3^3=27 \quad$ εἶναι $\quad \sqrt[3]{27}=3$

ὥστε ἐπειδὴ $\quad 3^{\frac{1}{2}}\,.\,3^{\frac{1}{2}}=3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=3$

(κατὰ τὴν ἀνωτέρω ἰδιότητα (1), τὴν ὁποίαν διατηροῦμεν), ἤτοι ἐπειδὴ $\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^2=3$, πρέπει τὸ $3^{\frac{1}{2}}$ νὰ ὁρισθῇ ὡς τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 3, ἤτοι πρέπει νὰ ὁρισθῇ, ὅτι $3^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$.

Ὁμοίως ἐπειδὴ $2^{\frac{1}{3}}\,.\,2^{\frac{1}{3}}\,.\,2^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}=2$,

ἤτοι ἐπειδὴ $\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^3=2$, πρέπει τὸ $2^{\frac{1}{3}}$ νὰ ὁρισθῇ ὡς τρίτη ρίζα τοῦ 2, ἤτοι πρέπει νὰ ὁρισθῇ, ὅτι ὁ $2^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{2}$. Καὶ γενικῶς, διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν σημασίαν τοῦ $\alpha^{\frac{1}{\nu}}$, ὅπου ν εἶναι θετικὸς ἀκέραιος ἀριθμός, σχηματίζομεν γινόμενον ν παραγόντων ἴσων μὲ $\alpha^{\frac{1}{\nu}}$,

ἤτοι τὸ $\quad \alpha^{\frac{1}{\nu}}\,.\,\alpha^{\frac{1}{\nu}}\,.\,\alpha^{\frac{1}{\nu}}\,\ldots\ldots\,\alpha^{\frac{1}{\nu}}$,

τὸ ὁποῖον, κατὰ τὴν ἀρχικὴν ἰδιότητα (1), τὴν ὁποίαν διατηροῦμεν, εἶναι ἴσον μὲ

$$\alpha^{\frac{1}{\nu}+\frac{1}{\nu}+\frac{1}{\nu}+\ldots+\frac{1}{\nu}}=\alpha^{\frac{1}{\nu}.\nu}=\alpha,$$

ἤτοι ἔχομεν $\left(\alpha^{\frac{1}{\nu}}\right)^{\nu} = \alpha$. Ἀλλὰ τότε πρέπει τὸ $\alpha^{\frac{1}{\nu}}$ νὰ ὁρισθῇ ὡς νυοστὴ ρίζα τοῦ α, ἤτοι πρέπει νὰ ὁρισθῇ, ὅτι $\alpha^{\frac{1}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha}$.

Κατὰ ταῦτα, εἶναι :

$$27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3 \quad \text{καὶ} \quad (-32)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{-32} = -2.$$

135. Σημασία τῆς δυνάμεως $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$.—Ἔστω ἡ δύναμις $8^{\frac{2}{3}}$. Ἐὰν σχηματίσωμεν τὸ γινόμενον

$$8^{\frac{2}{3}} \cdot 8^{\frac{2}{3}} \cdot 8^{\frac{2}{3}}$$

θὰ ἔχωμεν $$8^{\frac{2}{3}} \cdot 8^{\frac{2}{3}} \cdot 8^{\frac{2}{3}} = 8^{\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}} = 8^2,$$

ἤτοι θὰ ἔχωμεν $$\left(8^{\frac{2}{3}}\right)^3 = 8^2.$$

Ὥστε τὸ $8^{\frac{2}{3}}$ πρέπει νὰ ὁρισθῇ ὡς ἡ τρίτη ρίζα τοῦ 8^2, ἤτοι πρέπει νὰ ὁρισθῇ, ὅτι $$8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2}.$$

Ὁμοίως, ἐὰν ἔχωμεν τὴν δύναμιν $32^{\frac{4}{5}}$ καὶ σχηματίσωμεν τὸ γινόμενον $$32^{\frac{4}{5}} \cdot 32^{\frac{4}{5}} \cdot 32^{\frac{4}{5}} \cdot 32^{\frac{4}{5}} \cdot 32^{\frac{4}{5}}$$
βλέπομεν, ὅτι τοῦτο εἶναι ἴσον μὲ

$$32^{\frac{4}{5}+\frac{4}{5}+\frac{4}{5}+\frac{4}{5}+\frac{4}{5}} = 32^4,$$

ἤτοι, ὅτι εἶναι $$\left(32^{\frac{4}{5}}\right)^5 = 32^4.$$

Πρέπει λοιπὸν νὰ ὁρισθῇ, ὅτι $32^{\frac{4}{5}} = \sqrt[5]{32^4}$.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι τὸ $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$, ὅπου μ καὶ ν εἶναι θετικοὶ ἀκέραιοι ἀριθμοί, πρέπει νὰ ὁρισθῇ ὡς ἡ νυοστὴ ρίζα τοῦ α^{μ}, ἤτοι :

$$\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}.$$

Κατὰ ταῦτα, εἶναι :

$$81^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{81^3} = \sqrt[4]{(3^4)^3} = \sqrt[4]{3^{12}} = 3^3 \qquad (\S\ 129)$$

Ἐξ ἄλλου, ἐπειδή :

$$32^{\frac{4}{5}} = 32^{\frac{1}{5}} \cdot 32^{\frac{1}{5}} \cdot 32^{\frac{1}{5}} \cdot 32^{\frac{1}{5}} = \left(32^{\frac{1}{5}}\right)^4,$$

ἕπεται, ὅτι $$32^{\frac{4}{5}} = \left(\sqrt[5]{32}\right)^4.$$

Ἐπειδὴ δὲ ὡρίσαμεν, ὅτι $32^{\frac{4}{5}} = \sqrt[5]{32^4}$,

ἕπεται, ὅτι πρέπει νὰ εἶναι $\left(\sqrt[5]{32}\right)^4 = \sqrt[5]{32^4}$.

Γενικῶς δὲ πρέπει νὰ εἶναι :

$$\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^\mu = \sqrt[\nu]{\alpha^\mu} = \alpha^{\frac{\mu}{\nu}}. \qquad (1)$$

ἢ $$\left(\alpha^{\frac{1}{\nu}}\right)^\mu = (\alpha^\mu)^{\frac{1}{\nu}} = \alpha^{\frac{\mu}{\nu}}.$$

Παρατήρησις. Κατὰ τὰ ἀνωτέρω λοιπὸν εἶναι :

1) $$\left(\sqrt[3]{8}\right)^2 = \sqrt[3]{8^2}.$$

Ἐπειδὴ δὲ $\sqrt[3]{8} = 2$, ἔχομεν $\left(\sqrt[3]{8}\right)^2 = 4$. Ἐπίσης, ἐπειδὴ

$$8^2 = (2^3)^2 = 2^6, \text{ ἔχομεν } \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{2^6} = 4.$$

2) $\left(\sqrt[4]{16}\right)^3 = \sqrt[4]{16^3}$. Ἀλλὰ $\sqrt[4]{16} = \pm 2$. Ὥστε εἶναι :

$$\left(\sqrt[4]{16}\right)^3 = (\pm 2)^3 = \pm 8.$$

Ἐξ ἄλλου εἶναι $16^3 = (2^4)^3 = 2^{12}$. Ὥστε εἶναι :

$$\sqrt[4]{16^3} = \sqrt[4]{2^{12}} = \pm 2^3 = \pm 8.$$

3) $\left(\sqrt[4]{16}\right)^2 = \sqrt[4]{16^2}$. Ἀλλ' εἰς τὸ παράδειγμα τοῦτο, τὸ πρῶτον μέλος ἰσοῦται μὲ $(\pm 2)^2 = 4$, ἐνῷ τὸ δεύτερον μέλος ἰσοῦται μὲ

$$\sqrt[4]{16^2} = \sqrt[4]{2^8} = \pm 2^2 = \pm 4.$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω λοιπὸν παραδειγμάτων βλέπομεν, ὅτι ἡ ἰσότης (1) δὲν εἶναι τελεία. Διὰ νὰ εἶναι δὲ τελεία ἡ ἰσότης αὐτή, θὰ ὑποθέτωμεν τὸν ἀριθμὸν α πάντοτε θετικόν, καὶ ὅταν ἡ ρίζα εἶναι ἀρτίας τάξεως, ὁπότε θὰ ἔχῃ δύο τιμὰς ἀντιθέτους, θὰ λαμβάνωμεν ἐξ αὐτῶν ὑπ' ὄψιν μόνον τὴν θετικήν.

136. Ρίζαι τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν περιττῆς τάξεως.—

Ἐπειδὴ $\sqrt[3]{-8} = -2$ καὶ $-\sqrt[3]{8} = -2$

ἕπεται, ὅτι $\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8}.$

Ὁμοίως ἔχομεν $\sqrt[5]{-16} = -\sqrt[5]{16}.$ Ταῦτα δὲ φανερώνουν, ὅτι τὰς ρίζας τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν περιττῆς τάξεως δυνάμεθα νὰ τὰς ἀνάγωμεν εἰς ρίζας τῆς αὐτῆς τάξεως τῶν θετικῶν ἀριθμῶν.

137. Ἰδιότητες τῶν ριζῶν.—Ἔστω ἡ δύναμις $5^{\frac{6}{8}}$. Ἐὰν τὸν κλασματικὸν ἐκθέτην αὐτῆς καταστήσωμεν ἀνάγωγον, λαμβάνομεν τὴν δύναμιν $5^{\frac{3}{4}}$. Ἐὰν ἤδη ὑψώσωμεν εἰς τὴν 8ην δύναμιν καὶ τὰς δύο δυνάμεις $5^{\frac{6}{8}}$ καὶ $5^{\frac{3}{4}}$, λαμβάνομεν ἐκ τῆς πρώτης $\left(5^{\frac{6}{8}}\right)^8 = 5^6$ καὶ ἐκ τῆς δευτέρας $\left(5^{\frac{3}{4}}\right)^8 = 5^6$. Ἀφοῦ λοιπὸν εἶναι:

$$\left(5^{\frac{6}{8}}\right)^8 = \left(5^{\frac{3}{4}}\right)^8$$

ἕπεται, ὅτι (§ 130) $\quad 5^{\frac{6}{8}} = 5^{\frac{3}{4}}$, ἤτοι $\sqrt[8]{5^6} = \sqrt[4]{5^3}.$

Ὥστε: ***Ἐὰν διαιρέσωμεν τὸν δείκτην τῆς ρίζης καὶ τὸν ἐκθέτην τοῦ ὑπορρίζου διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ*** (ὅστις τοὺς διαιρεῖ), ***ἡ ἀξία τῆς ρίζης δὲν βλάπτεται.***

Πόρισμα. Ἐπειδὴ ἡ ἀνωτέρω ἰσότης γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς: $\sqrt[4]{5^3} = \sqrt[8]{5^6}$, ἕπεται, ὅτι, ***ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸν δείκτην τῆς ρίζης καὶ τὸν ἐκθέτην τοῦ ὑπορρίζου ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, ἡ ἀξία τῆς ρίζης δὲν βλάπτεται,*** συμφώνως πρὸς τὴν παρατήρησιν 3 τῆς § 135, ὅπου ὡρίσθη, ὅτι, ὅταν ἡ ρίζα εἶναι ἀρτίας τάξεως, ὁπότε θὰ ἔχῃ δύο τιμὰς ἀντιθέτους, θὰ λαμβάνωμεν ἐξ αὐτῶν ὑπ᾽ ὄψιν μόνον τὴν θετικήν.

Κατὰ ταῦτα, εἶναι:

$$\alpha^{\frac{\mu\lambda}{\nu\lambda}} = \alpha^{\frac{\mu}{\nu}}, \text{ ἤτοι } \sqrt[\nu\lambda]{\alpha^{\mu\lambda}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}} \qquad (2)$$

138. Δυνάμεις μὲ ἐκθέτας κλάσματα ἀρνητικά.—Ὁ ὁρισμὸς τῶν δυνάμεων μὲ ἐκθέτας ἀκεραίους ἀρνητικούς (§ 39) ἐπεκτείνεται καὶ ἐπὶ τῶν δυνάμεων μὲ ἐκθέτας κλάσματα ἀρνητικά:

$\alpha^{-\frac{\mu}{\nu}} = \dfrac{1}{\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}}$ (μ καὶ ν ὄντων ἀριθμῶν ἀκεραίων), διότι, ἐὰν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἰσότητος ταύτης ὑψώσωμεν εἰς τὴν ν δύναμιν, λαμβάνομεν

$$\alpha^{-\mu} = \frac{1}{\alpha^{\mu}}$$

διὰ τὸν αὐτὸν λόγον εἶναι καὶ $\alpha^{-\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{-\mu}}$.

Οὕτως εἶναι $8^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{8^{\frac{2}{3}}} = \dfrac{1}{\left(\sqrt[3]{8}\right)^2} = \dfrac{1}{4}$.

Ἀσκήσεις.

202. Αἱ κάτωθι δυνάμεις νὰ γραφοῦν ὡς ρίζαι:

$\alpha^{\frac{1}{2}}$ $\alpha^{\frac{2}{3}}$ $\alpha^{\frac{3}{4}}$ $\alpha^{\frac{1}{\varrho}}$

$x^{-\frac{1}{2}}$ $x^{-\frac{3}{4}}$ $x^{2\frac{1}{2}}$ $x^{-2\frac{1}{2}}$

203. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι δυνάμεων:

$4^{\frac{1}{2}}$ $4^{-\frac{1}{2}}$ $27^{\frac{2}{3}}$ $27^{-\frac{2}{3}}$

$32^{\frac{3}{5}}$ $100^{\frac{2}{4}}$ $49^{\frac{4}{8}}$ $(-8)^{-\frac{2}{3}}$

204. Αἱ κάτωθι ρίζαι νὰ γραφοῦν ὡς δυνάμεις:

$\sqrt[3]{\alpha^2}$ $\sqrt[4]{\alpha^3}$ $\sqrt[4]{\alpha}$ $\sqrt{\alpha}$

$\sqrt{\beta^3}$ $\sqrt[6]{\beta^3}$ $\sqrt[\nu]{\beta^2}$ $\sqrt{\beta^\nu}$

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΚΑΙ ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ ΤΩΝ ΡΙΖΩΝ

139. Οἱ ὁρισμοὶ τῶν δυνάμεων, αἱ ὁποῖαι ἔχουν συμμέτρους ἐκθέτας, καὶ τοὺς ὁποίους εἴδομεν προηγουμένως, εἶναι τοιοῦτοι, ὥστε νὰ διατηροῦνται καὶ ἐπ' αὐτῶν (ἀποδεικνύεται δὲ τοῦτο), ὅλαι αἱ ἀρχικαὶ ἰδιότητες τῶν δυνάμεων. Οὕτω π.χ. εἶναι:

$$\alpha^{\frac{3}{4}} \cdot \alpha^{\frac{1}{2}} = \alpha^{\frac{3}{4}+\frac{1}{2}} = \alpha^{\frac{5}{4}}, \quad \left(\alpha^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{4}{5}} = \alpha^{-\frac{8}{15}}$$

$$(\alpha\beta\gamma)^{\frac{2}{7}} = \alpha^{\frac{2}{7}} \cdot \beta^{\frac{2}{7}} \cdot \gamma^{\frac{2}{7}}, \quad \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{\alpha^{\frac{1}{3}}}{\beta^{\frac{1}{3}}}$$

Ἐφαρμογαὶ δὲ τῶν ἀνωτέρω ἰδιοτήτων (ὡς καὶ τῶν ἰδιοτήτων τῆς § 137) εἶναι ὅσα θὰ ἴδωμεν κατωτέρω περὶ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ τῆς διαιρέσεως τῶν ῥιζῶν.

140. Πολλαπλασιασμὸς τῶν ῥιζῶν.— α΄) ***Τῶν ἰσοβαθμίων ῥιζῶν.*** Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον :

$$\sqrt[\nu]{\alpha} \cdot \sqrt[\nu]{\beta} \cdot \sqrt[\nu]{\gamma}$$

Ἀλλὰ παρατηροῦμεν, ὅτι :

$$\sqrt[\nu]{\alpha} \cdot \sqrt[\nu]{\beta} \cdot \sqrt[\nu]{\gamma} = \alpha^{\frac{1}{\nu}} \cdot \beta^{\frac{1}{\nu}} \cdot \gamma^{\frac{1}{\nu}}.$$

Ἐπειδὴ δὲ $\alpha^{\frac{1}{\nu}} \cdot \beta^{\frac{1}{\nu}} \cdot \gamma^{\frac{1}{\nu}} = (\alpha\beta\gamma)^{\frac{1}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha\beta\gamma}$,

ἕπεται, ὅτι $\sqrt[\nu]{\alpha} \cdot \sqrt[\nu]{\beta} \cdot \sqrt[\nu]{\gamma} = \sqrt[\nu]{\alpha\beta\gamma}$.

Ὥστε : ***Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἰσοβαθμίους ῥίζας, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰ ὑπόρριζα καὶ τοῦ γινομένου νὰ ἐξαγάγωμεν τὴν ἰσοβάθμιον ῥίζαν.***

Π.χ. εἶναι $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$ καὶ $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{64} = 4$.

β΄) ***Τῶν ῥιζῶν μὲ διαφόρους δείκτας.*** Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον $\sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[6]{8}$

Ἀλλὰ τὸ γινόμενον τοῦτο γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς : $7^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{4}} \cdot 8^{\frac{1}{6}}$.
Ἂν δὲ ἤδη, ἀντὶ τῶν ἐκθετῶν τούτων, γράψωμεν τὰ ἴσα πρὸς αὐτοὺς ἀλλ᾽ ὁμώνυμα κλάσματα, ἤτοι τὰ $\frac{4}{12}, \frac{3}{12}, \frac{2}{12}$

θὰ ἔχωμεν (παράγρ. 137) $7^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{4}} \cdot 8^{\frac{1}{6}} = 7^{\frac{4}{12}} \cdot 5^{\frac{3}{12}} \cdot 8^{\frac{2}{12}}$

ἤτοι θὰ ἔχωμεν $\sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[6]{8} = \sqrt[12]{7^4} \cdot \sqrt[12]{5^3} \cdot \sqrt[12]{8^2} = \sqrt[12]{7^4 \cdot 5^3 \cdot 8^2}$.

Ἐκ τούτου λοιπὸν συνάγομεν, ὅτι ***τὸ γινόμενον οἱωνδήποτε***

ριζῶν ἀνάγεται πάντοτε εἰς μίαν ρίζαν καὶ τοῦτο διότι δυνάμεθα νὰ τρέπωμεν ρίζας διαφόρων δεικτῶν εἰς ἰσοβαθμίους.

γ΄) ***Ρίζης ἐπὶ θετικὸν ἀριθμόν.*** Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὴν $\sqrt[3]{12}$ ἐπὶ 2 ἢ $2 . \sqrt[3]{12}$

Ἀλλ᾽ ἐπειδὴ $2 = 2^{\frac{3}{3}} = \sqrt[3]{2^3}$,

ἔχομεν $2\sqrt[3]{12} = \sqrt[3]{2^3} . \sqrt[3]{12} = \sqrt[3]{2^3 . 12} = \sqrt[3]{96}$.

Καὶ γενικῶς ἔχομεν :

$$\alpha\sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha^\nu} . \sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha^\nu \beta}.$$

Ἐπειδὴ ἡ τελευταία ἰσότης γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς :

$$\sqrt[\nu]{\alpha^\nu \beta} = \alpha\sqrt[\nu]{\beta},$$

ἕπεται, ὅτι : 1) ***Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ρίζαν ἐπὶ ἀριθμὸν θετικόν, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ ὑπόρριζον ἐπὶ τὴν ἰσοβάθμιον δύναμιν τοῦ ἀριθμοῦ τούτου.***

Π.χ. $2\sqrt{3} = \sqrt{2^2 . 3} = \sqrt{12}.$

2) ***Δυνάμεθα νὰ ἐξαγάγωμεν παράγοντά τινα τοῦ ὑπορρίζου ἐκτὸς τοῦ ριζικοῦ, ἐὰν προηγουμένως ἐξαγάγωμεν τὴν ἰσοβάθμιον ρίζαν αὐτοῦ.***

Π.χ. $\sqrt{300} = \sqrt{100.3} = 10\sqrt{3}.$

141. Διαίρεσις τῶν ριζῶν.—α΄) ***Τῶν ἰσοβαθμίων.*** Ἐὰν ἔχωμεν τὴν διαίρεσιν

$$\sqrt[\nu]{\alpha} : \sqrt[\nu]{\beta}$$

παρατηροῦμεν, ὅτι $$\frac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}} = \frac{\alpha^{\frac{1}{\nu}}}{\beta^{\frac{1}{\nu}}}$$

ἐπειδὴ δὲ $$\frac{\alpha^{\frac{1}{\nu}}}{\beta^{\frac{1}{\nu}}} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{1}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\frac{\alpha}{\beta}},$$

ἕπεται, ὅτι $$\frac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}} = \sqrt[\nu]{\frac{\alpha}{\beta}}.$$

ἤτοι : ***Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ρίζαν δι' ἄλλης ἰσοβαθμίου, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὰ ὑπόρριζα καὶ τοῦ πηλίκου νὰ ἐξαγάγωμεν τὴν ἰσοβάθμιον ρίζαν.***

Π.χ. $$\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \sqrt{4} = 2, \quad \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = 2.$$

β') ***Τῶν ριζῶν μὲ διάφορον δείκτην.*** Ἡ περίπτωσις αὕτη ἀνάγεται εἰς τὴν προηγουμένην, ὡς εἴδομεν εἰς τὴν ὁμοίαν περίπτωσιν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

Π.χ. εἶναι $$\frac{\sqrt[3]{10}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt[6]{10^2}}{\sqrt[6]{3^3}} = \sqrt[6]{\frac{10^2}{3^3}}.$$

γ') ***Διαίρεσις ρίζης δι' ἀριθμοῦ θετικοῦ.*** Ἐὰν ἔχωμεν τὴν διαίρεσιν $\dfrac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\beta}$, παρατηροῦμεν ὅτι :

$$\frac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\beta} = \frac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta^\nu}} = \sqrt[\nu]{\frac{\alpha}{\beta^\nu}} \quad \text{ἢ} \quad \sqrt[\nu]{\frac{\alpha}{\beta^\nu}} = \frac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\beta}.$$

Ἔπεται λοιπόν, ὅτι :

1) ***Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ρίζαν δι' ἀριθμοῦ θετικοῦ, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὸ ὑπόρριζον διὰ τῆς ἰσοβαθμίου δυνάμεως τοῦ ἀριθμοῦ τούτου.***

2) ***Δυνάμεθα νὰ ἐξαγάγωμεν διαιρέτην τοῦ ὑπορρίζου ἐκτὸς τοῦ ριζικοῦ, ἐὰν προηγουμένως ἐξαγάγωμεν τὴν ἰσοβάθμιον ρίζαν αὐτοῦ.***

Π.χ. $$\frac{\sqrt[3]{80}}{2} = \sqrt[3]{\frac{80}{2^3}} = \sqrt[3]{\frac{80}{8}} = \sqrt[3]{10} \quad \text{καὶ} \quad \sqrt{\frac{7}{100}} = \frac{\sqrt{7}}{10}.$$

142. Μεταβίβασις ριζῶν ἐκ τοῦ παρονομαστοῦ εἰς τὸν ἀριθμητήν.—Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἐξαγόμενον τῆς διαιρέσεως $\dfrac{5}{\sqrt{2}}$. Πρὸς τοῦτο, πρέπει νὰ εὕρωμεν τὴν $\sqrt{2}$, ἡ ὁποία εὑρίσκεται κατὰ προσέγγισιν, καὶ ἔπειτα νὰ διαιρέσωμεν. Θὰ ἔχωμεν δὲ οὕτω νὰ διαιρέσωμεν $\dfrac{5}{1{,}41421}$ ἤτοι $\dfrac{500000}{141421}$, ἀλλ' ἡ πρᾶξις αὕτη καὶ μακρὰ εἶναι καὶ δὲν μᾶς δίδει καὶ πολὺ ἀκριβὲς ἐξαγόμενον. Ἀλλ' ἐὰν εἶναι δυνατὸν νὰ μεταβιβάσωμεν τὸ ριζικὸν εἰς τὸν ἀριθμητήν, ὥστε εἰς τὸν παρονομαστὴν νὰ ἔχωμεν σύμμετρον ἀριθμὸν καὶ ἡ πρᾶξις θὰ γίνῃ εὐκολωτέρα καὶ τὸ ἐξαγόμενον θὰ εἶναι ἀκριβέστερον. Ἀλλὰ τοῦτο εἶναι δυνατόν, καὶ γίνεται ὡς ἑξῆς : Πολλαπλασιάζομεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος ἐπὶ $\sqrt{2}$, ὁπότε ἔχομεν :

$$\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}=\frac{5.1,41421}{2}=\frac{7,07105}{2}.$$

Ἡ δὲ τελευταία αὐτὴ πρᾶξις εἶναι εὐκολωτέρα τῆς προηγουμένης. Ὁμοίως ἔχομεν :

$$\frac{\alpha}{\sqrt{\beta}}=\frac{\alpha\sqrt{\beta}}{\sqrt{\beta}\sqrt{\beta}}=\frac{\alpha\sqrt{\beta}}{\beta}.$$

Ἤδη ἔστω τὸ κλάσμα $\frac{\alpha}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$. Ἀλλ᾽ ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ἄθροισμα $\sqrt{5}+\sqrt{2}$, θὰ ἔχωμεν :

$$\frac{\alpha}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}=\frac{\alpha(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})}=\frac{\alpha(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2}=$$

$$=\frac{\alpha(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{5-2}=\frac{\alpha(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{3}.$$

Ὁμοίως ἔχομεν :

$$\frac{\alpha}{2+\sqrt{2}}=\frac{\alpha(2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}=\frac{\alpha(2-\sqrt{2})}{4-2}=\frac{\alpha(2-\sqrt{2})}{2}.$$

Καὶ γενικῶς εἶναι $\frac{\alpha}{\sqrt{\beta}\pm\sqrt{\gamma}}=\frac{\alpha(\sqrt{\beta}\mp\sqrt{\gamma})}{\beta-\gamma}$.

Σημείωσις α΄. Εἰς τὰ προηγούμενα περὶ πολλαπλασιασμοῦ καὶ διαιρέσεως τῶν ριζῶν ὑπετίθετο διαρκῶς, ὅτι πρόκειται περὶ ριζῶν πραγματικῶν. Διὰ τοῦτο, κατὰ τὰς πράξεις αὐτὰς ἐπὶ τῶν ριζῶν δέον νὰ προσέχωμεν, ὥστε νὰ μὴ ὑποπίπτωμεν εἰς σφάλματα. Π.χ. ὁ πολλαπλασιασμὸς $\sqrt{-4}$ ἐπὶ $\sqrt{-4}$ δίδει κατὰ τὰ ἀνωτέρω :

$$\sqrt{(-4).(-4)}=\sqrt{16}=\pm 4,$$

ἐνῷ τὸ ἀληθὲς γινόμενον εἶναι -4.

Σημείωσις β΄. Ἡ πρόσθεσις καὶ ἡ ἀφαίρεσις τῶν ριζῶν γίνεται μὲ τοὺς αὐτοὺς κανόνας, μὲ τοὺς ὁποίους γίνονται αἱ πράξεις αὗται ἐπὶ τῶν ἀλγεβρικῶν παραστάσεων. Ἐὰν δὲ εἰς τὰ ἐξαγόμενα αὐτῶν ὑπάρχουν **ὅμοιαι ρίζαι**, ἤτοι ρίζαι μὲ τὸν αὐτὸν δείκτην καὶ μὲ τὸ αὐτὸ ἀκριβῶς ὑπόρριζον, κάμνομεν τὴν ἀναγωγὴν αὐτῶν, ὡς κάμνομεν τὴν ἀναγωγὴν ὁμοίων ὅρων.

Π. χ.
$$(7\sqrt{\alpha}+3\sqrt{\beta})+(\sqrt{\alpha}-2\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma})=$$
$$=7\sqrt{\alpha}+3\sqrt{\beta}+\sqrt{\alpha}-2\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}=8\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}.$$
$$(3\sqrt{\alpha}-5\sqrt{\beta}+9\sqrt{\gamma})-(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}+7\sqrt{\gamma})=$$
$$=3\sqrt{\alpha}-5\sqrt{\beta}+9\sqrt{\gamma}-\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}-7\sqrt{\gamma}=2\sqrt{\alpha}-4\sqrt{\beta}+2\sqrt{\gamma}.$$

Ἀσκήσεις.

205. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ γινόμενα :

$\sqrt{2}\sqrt{8}$, $\sqrt{3}\sqrt{12}$, $\sqrt[3]{6}\sqrt[3]{36}$, $\sqrt[3]{72}\sqrt[3]{3}$

$\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\sqrt{\beta}$, $\sqrt{2\alpha}\sqrt{18\alpha}$, $\sqrt[3]{5\alpha^2}\sqrt[3]{25\alpha}$, $\sqrt[3]{\frac{2\alpha}{3}}\sqrt[2]{\frac{3\alpha^2}{3}}$

$3\sqrt{5}\ 2\sqrt{20}$, $3\sqrt{50}\ 4\sqrt{2}$, $\alpha\sqrt{\chi}\ \beta\sqrt{\chi}$, $\alpha\sqrt{\beta}\ \beta\sqrt{\alpha}$

$\sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt{10}$, $\sqrt[3]{5}\sqrt[3]{9}\sqrt[3]{15}$, $\sqrt[4]{\alpha}\sqrt[4]{\alpha^2}\sqrt[4]{\alpha\beta}$, $\sqrt[4]{\alpha}\sqrt[4]{\alpha^3}\sqrt[4]{\alpha^5}$.

206. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἶναι :

$2\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{40}$ $\qquad$ $\sqrt{700}=10\sqrt{7}$

$5\sqrt{8}=\sqrt{200}$ $\qquad$ $\sqrt{180}=6\sqrt{5}$

$3\sqrt[4]{2}=\sqrt[4]{162}$ $\qquad$ $\sqrt[3]{875}=5\sqrt[3]{7}$.

207. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ πηλίκα :

$\frac{\sqrt{28}}{\sqrt{7}}$, $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}}$, $\frac{\sqrt{54}}{\sqrt{3}}$, $\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{5}}$

$\frac{\sqrt[3]{320}}{\sqrt[3]{5}}$, $\frac{\sqrt[3]{20}}{\sqrt[3]{12}}$, $\frac{\sqrt[3]{72}}{2}$, $\frac{\sqrt[4]{162}}{3}$

$\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}}$, $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt[3]{2}}$, $\frac{\sqrt[3]{25}}{\sqrt{5}}$, $\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[4]{8}}$

$\frac{\sqrt[4]{\alpha^3}}{\sqrt[3]{\alpha^2}}$, $\frac{\sqrt{\chi}}{\sqrt[5]{\chi}}$, $\frac{\sqrt[4]{\psi^5}}{\sqrt[5]{\psi^2}}$, $\frac{\sqrt[4]{\chi}}{\sqrt[8]{\chi}}$.

208. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων :

$\sqrt{\alpha}\cdot\alpha^{\frac{1}{4}}$ $\qquad$ $\beta^{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt[3]{\beta}$ $\qquad$ $\gamma^{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt[3]{\gamma}$ $\qquad$ $\sqrt[6]{\delta}\cdot\delta^{\frac{5}{6}}\cdot\delta^{\frac{1}{3}}$

$$\frac{\alpha^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{\alpha}} \qquad \frac{\sqrt{\beta}}{\beta^{\frac{1}{3}}} \qquad \frac{\sqrt[3]{\gamma^2}}{\gamma^{\frac{1}{2}}} \qquad \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\sqrt[3]{\frac{\alpha}{\beta}}}.$$

209. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα :

$$\left(\sqrt[3]{\alpha}\right)^2 \qquad \left(\sqrt{\alpha}\right)^3 \qquad \left(\sqrt[5]{\alpha^7}\right)^3$$

$$(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})^2 \qquad (\alpha-\sqrt{\alpha})^2 \qquad (-\alpha+\sqrt{\beta})^2.$$

210. Νὰ ἀπαλλαγοῦν τῶν ριζικῶν οἱ παρονομασταὶ τῶν κλασμάτων :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \sqrt{\frac{3}{7}} \qquad \sqrt{\frac{7}{12}}$$

$$\frac{1}{2-\sqrt{3}} \qquad \frac{1}{3+\sqrt{5}} \qquad \frac{2}{2+\sqrt{2}} \qquad \frac{3}{3-\sqrt{3}}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \qquad \frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} \qquad \frac{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}} \qquad \frac{\sqrt{\alpha}+}{\sqrt{\alpha}-\beta}.$$

211. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι εἶναι :

$$\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}} = \sqrt[\mu\nu]{\alpha} \quad \text{καὶ} \quad \sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}} = \sqrt[\nu]{\sqrt[\mu]{\alpha}}.$$

212. Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ πράξεις :

$$3\sqrt{3}+2\sqrt{3}+\sqrt{3} \qquad 5\sqrt{7}-8\sqrt{7}+3\sqrt{7}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{2}{3}\sqrt{5}+\frac{1}{4}\sqrt{5} \qquad \frac{7}{8}\sqrt{11}-\frac{1}{2}\sqrt{11}-\frac{1}{5}\sqrt{11}$$

$$(\sqrt{\alpha}-2\sqrt{3\chi})-(\sqrt{3\chi}-5\sqrt{\alpha}-3\sqrt{\alpha}+7\sqrt{3\chi})$$

$$4\sqrt{2}-3\sqrt{8}+\sqrt{18}, \qquad 3\sqrt{3}-5\sqrt{18}+6\sqrt{12}+\sqrt{8}.$$

143. Τετραγωνικὴ ρίζα τῶν μονωνύμων.—Ἡ τετραγωνικὴ ρίζα παντὸς ἀκεραίου μονωνύμου, ἤτοι ἡ $\frac{1}{2}$ δύναμις αὐτοῦ, ἐξάγεται κατὰ τὰς ἰδιότητας τῶν δυνάμεων, ἐὰν ἐξαχθῇ ἡ ρίζα ἑκάστου παράγοντος.

Ἐπειδὴ ἕκαστος παράγων εἶναι δύναμις ἀριθμοῦ τινος, ἡ τετραγωνικὴ ρίζα αὐτοῦ ἐξάγεται διαιρουμένου τοῦ ἐκθέτου αὐτῆς διὰ τοῦ 2. Κατὰ ταῦτα εἶναι :

$$\sqrt{64\alpha^2\beta^4\gamma^8} = 64^{\frac{1}{2}}\cdot(\alpha^2)^{\frac{1}{2}}\cdot(\beta^4)^{\frac{1}{2}}\cdot(\gamma^8)^{\frac{1}{2}} = \pm 8\alpha\beta^2\gamma^4.$$

Κλασματικοῦ μονωνύμου ἡ ρίζα ἐξάγεται κατὰ τὰς αὐτὰς ἰδιότητας, ἐὰν ἐξαχθῇ ἡ ρίζα ἀμφοτέρων τῶν ὅρων αὐτοῦ.

Κατὰ ταῦτα εἶναι:

$$\sqrt{\frac{25\alpha^4\beta^6\gamma^2}{36\chi^6}}=\left(\frac{25\alpha^4\beta^6\gamma^2}{36\chi^6}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{25^{\frac{1}{2}}.(\alpha^4)^{\frac{1}{2}}.(\beta^6)^{\frac{1}{2}}.(\gamma^2)^{\frac{1}{2}}}{36^{\frac{1}{2}}.(\chi^6)^{\frac{1}{2}}}=\pm\frac{5\alpha^2\beta^3\gamma}{6\chi^3}$$

Τὸ διπλοῦν σημεῖον $\pm$ ἐγράφη πρὸ τῶν ἐξαγομένων, διότι ἡ τετραγωνικὴ ρίζα καὶ πᾶσα ἀρτίου βαθμοῦ ρίζα ἔχει δύο ἀντιθέτους τιμὰς καὶ δύναται ἑπομένως τὸ ἐξαγόμενον νὰ ληφθῇ καὶ θετικῶς καὶ ἀρνητικῶς.

Ἐάν τινος τῶν παραγόντων δὲν ἐξάγεται ἡ ρίζα, ἀφίνομεν ἐπ' αὐτοῦ σημειωμένην τὴν πρᾶξιν· ἤ, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἀναλύομεν αὐτὸν εἰς δύο, οὕτως ὥστε νὰ ἐξάγηται ἡ ρίζα τοῦ ἑτέρου τῶν παραγόντων. Κατὰ ταῦτα, εἶναι:

$$\sqrt{5\alpha^2\beta^6\gamma^8}=\sqrt{5}\,\alpha\beta^3\gamma^4$$

$$\sqrt{8\alpha^3\beta^4\gamma^6}=\sqrt{8}.\sqrt{\alpha^3\beta^2\gamma^3}=\sqrt{2.4}.\sqrt{\alpha^2.\alpha.\beta^2.\gamma^3}=$$
$$=2\sqrt{2}\,\alpha\sqrt{\alpha}\,\beta^2\gamma^3=2\alpha\beta^2\gamma^3\sqrt{2\alpha}.$$

Ὁμοίως $\sqrt{\dfrac{4\alpha^2\beta^4\gamma^2}{\delta}}=\dfrac{2\alpha\beta^2\gamma}{\sqrt{\delta}}$

Ἀσκήσεις.

213. Νὰ ἐξαχθῇ ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τῶν μονωνύμων:

1) $36\alpha^4\beta^2$	4) $-625\chi^6\psi^8$	7) $16\alpha\beta\gamma$
2) $144\alpha^2\chi^4\psi^6$	5) $-\frac{1}{9}\alpha^2\beta^2\gamma^4$	8) $-5\alpha^3\beta^5\gamma^2$
3) $\frac{4\alpha^4}{49\beta^2}$	6) $-\frac{18}{98}\alpha\chi^2\psi^{10}$	9) $-\frac{4}{9}\alpha\beta^3\gamma^7$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΟΥ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

Α.' ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

144. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $\chi=5$ (1)
τῆς ὁποίας ἡ ρίζα εἶναι μία καὶ μόνη, ἡ 5. Ἐὰν ἤδη ἀμφότερα τὰ μέλη αὐτῆς ὑψωθοῦν εἰς τὸ τετράγωνον, λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν:

$$\chi^2=25 \qquad (2)$$

Ἀλλὰ τῆς νέας αὐτῆς ἐξισώσεως ρίζα εἶναι ὄχι μόνον ἡ 5, διότι $5^2=25$, ἀλλὰ καὶ ἡ -5, διότι $(-5)^2=25$. Βλέπομεν λοιπόν, ὅτι ἡ ἐξίσωσις (2) ἐπαληθεύεται διὰ $\chi=5$ καὶ διὰ $\chi=-5$. Ὥστε ἡ ἐξίσωσις (2) περιέχει πλὴν τῆς ρίζης τῆς ἐξισώσεως (1) καὶ τὴν ρίζαν $\chi=-5$.

Ἔστω ἤδη ἡ τυχοῦσα ἐξίσωσις $\alpha=\beta$ (1)

τῆς ὁποίας τὰ μέλη παριστῶμεν πρὸς συντομίαν μὲ ἓν γράμμα. Ἐὰν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς ὑψώσωμεν εἰς τὸ τετράγωνον, λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν $\alpha^2=\beta^2$ (2)

Ἀλλ' εἶναι φανερόν, ὅτι πᾶσα λύσις τῆς ἐξισώσεως (1) ἐπαληθεύει τὴν ἐξίσωσιν (2). Διότι, ἐὰν τὰ α καὶ β γίνουν ἴσοι ἀριθμοὶ καὶ τὰ τετράγωνα αὐτῶν εἶναι ἴσοι ἀριθμοί. Ἀλλὰ καὶ πᾶσα λύσις τῆς ἐξισώσεως (2) δὲν εἶναι καὶ λύσις τῆς ἐξισώσεως (1), διότι ἡ ἐξίσωσις (2) ἐπαληθεύεται καὶ ὅταν $\alpha=\beta$, καὶ ὅταν $\alpha=-\beta$, διότι $\alpha^2=\beta^2$ καὶ $\alpha^2=(-\beta)^2=\beta^2$. Ἐκ δὲ τῶν δύο τούτων λύσεων μόνον ἡ $\alpha=\beta$ ἐπαληθεύει καὶ τὴν ἐξίσωσιν (1), οὐχὶ δὲ καὶ ἡ $\alpha=-\beta$. Ὥστε: ***Ἐὰν ἀμφότερα τὰ μέλη ἐξισώσεως ὑψωθοῦν εἰς τὸ τετράγωνον, ἡ ἐξίσωσις, ἡ ὁποία θὰ προκύψῃ, θὰ περιέχῃ ὄχι μόνον τὰς ρίζας τῆς δοθείσης ἐξισώσεως, ἀλλὰ καὶ τὰς ρίζας τῆς ἐξισώσεως, ἡ ὁποία προκύπτει ἐκ τῆς δοθείσης, ὅταν ἀλλαγῇ τὸ σημεῖον τοῦ ἑνὸς μέλους αὐτῆς.***

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται, ὅτι ἡ ἐξίσωσις $\alpha^2=\beta^2$ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὰς $\alpha=\beta$ καὶ $\alpha=-\beta$. Εἶναι δὲ ἡ πρώτη τούτων ἡ αὐτὴ μὲ τὴν $\sqrt{\alpha^2}=\sqrt{\beta^2}$, ἡ δὲ δευτέρα ἡ αὐτὴ μὲ τὴν $\sqrt{\alpha^2}=-\sqrt{\beta^2}$. Ὥστε ἡ προηγουμένη πρότασις δύναται νὰ ἐκφρασθῇ ὡς ἑξῆς: ***Ἐὰν ἐξαγάγωμεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τῶν μελῶν μιᾶς ἐξισώσεως καὶ λάβωμεν τὴν ρίζαν τοῦ ἑνὸς ἐκ τῶν μελῶν καὶ μετὰ τοῦ + καὶ μετὰ τοῦ −, αἱ δύο ἐξισώσεις, τὰς ὁποίας θὰ λάβωμεν, εἶναι ἰσοδύναμοι πρὸς τὴν δοθεῖσαν.***

Β'. ΓΕΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΣ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ ΜΕ ΕΝΑ ΑΓΝΩΣΤΟΝ

145. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις:

$$\chi^2-8=\frac{\chi^2}{3}-\chi+1.$$

Ἐὰν τῆς ἐξισώσεως ταύτης ἀπαλείψωμεν πρῶτον τὸν παρονομαστήν, ἔπειτα ἐκτελέσωμεν τὰς πράξεις, κατόπιν μεταφέρωμεν ὅλους τοὺς ὅρους εἰς τὸ πρῶτον μέλος καὶ τέλος κάμωμεν τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων, θὰ ἔχωμεν τὴν $2\chi^2+3\chi-27=0$, ἡ ὁποία, ὡς βλέπομεν, εἶναι δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς τὸ χ. Ἐὰν δὲ θέσωμεν ἀντὶ 2 α, ἀντὶ 3 β καὶ ἀντὶ -27 γ, ἡ εὑρεθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται :

$$\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0 \qquad (1)$$

Συνάγομεν λοιπὸν ἐκ τούτων, ὅτι πᾶσα ἐξίσωσις 2ου βαθμοῦ δύναται νὰ ἀχθῇ εἰς τὴν μορφὴν (1).

Ὁ συντελεστὴς α δὲν δύναται νὰ εἶναι 0, διότι τότε ἡ ἐξίσωσις καταντᾷ $\beta\chi+\gamma=0$, ἤτοι πρώτου βαθμοῦ. Ἀλλ' ἐὰν ὁ συντελεστὴς β εἶναι 0, ἡ ἐξίσωσις γίνεται

$$\alpha\chi^2+\gamma=0 \qquad (2)$$

Ἐὰν δὲ ὁ γνωστὸς ὅρος γ εἶναι 0, ἡ ἐξίσωσις γίνεται :

$$\alpha\chi^2+\beta\chi=0 \qquad (3)$$

Τὰς δύο αὐτὰς μερικὰς περιπτώσεις (2) καὶ (3) θὰ ἐξετάσωμεν πρὸ τῆς γενικῆς.

146. Λύσις τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi^2+\gamma=0$.— 1) Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $\chi^2=25$. Ἀλλ' αἱ λύσεις αὐτῆς εἶναι ἢ $\chi=+\sqrt{25}$ ἢ $\chi=-\sqrt{25}$, δηλαδὴ $\chi=\pm5$.

2) Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $3\chi^2+27=0$. Ἐξ αὐτῆς λαμβάνομεν :

$$3\chi^2=-27, \quad \chi^2=-\frac{27}{3} \quad \text{καὶ ἢ } \chi=\sqrt{-\frac{27}{3}} \quad \text{ἢ } \chi=-\sqrt{-\frac{27}{3}},$$

$$\text{ἤτοι } \chi=\pm\sqrt{-9}, \text{ δηλαδὴ } \chi=\pm3i.$$

3) Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\alpha\chi^2+\gamma=0$. Ἐξ αὐτῆς λαμβάνομεν :

$$\alpha\chi^2=-\gamma, \quad \chi^2=-\frac{\gamma}{\alpha} \quad \text{καὶ} \quad \chi=\pm\sqrt{-\frac{\gamma}{\alpha}}.$$

Εἶναι δὲ αἱ εὑρεθεῖσαι λύσεις πραγματικαί, ὅταν $-\frac{\gamma}{\alpha}>0$ καὶ φανταστικαί, ὅταν $-\frac{\gamma}{\alpha}<0$.

147. Λύσις τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi^2+\beta\chi=0$.—1) Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $\chi^2-6\chi=0$. Ἀλλ' αὕτη γράφεται $\chi(\chi-6)=0$. Ἀλλ' ἵνα γινόμενον παραγόντων εἶναι 0, ἀρκεῖ εἷς τῶν παραγόντων νὰ εἶναι 0. Ὥστε θὰ εἶναι ἢ $\chi=0$ ἢ $\chi-6=0$, ἤτοι $\chi=6$. Ὥστε ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἔχει δύο ῥίζας, 0 καὶ 6.

2) Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $\alpha\chi^2+\beta\chi=0$. Αὕτη γράφεται $\chi(\alpha\chi+\beta)=0$

Ἐπαληθεύεται δὲ ἢ διὰ $\chi=0$ ἢ δι' $\alpha\chi+\beta=0$, ἤτοι διὰ $\chi=-\frac{\beta}{\alpha}$.

Ὥστε καὶ αὕτη ἔχει δύο ῥίζας, τὰς 0 καὶ $-\frac{\beta}{\alpha}$.

Ἀσκήσεις.

214. Νὰ λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις :

$\chi^2=81$, $\chi^2=-16$, $\chi^2-64=0$, $2\chi^2-162=0$

$23\chi^2-1127=0$, $\frac{5}{4}\chi^2=720$, $\frac{5}{3}\chi^2=\frac{243}{125}$, $4\chi^2-3=897$

$\frac{\chi^2}{4}-64=0$, $\frac{5\chi}{9}=\frac{125}{\chi}$, $\frac{7\chi^2}{10}-30=\frac{\chi^2}{4}+15$

$(\chi-1)(\chi+1)=35$, $(\chi+3)(\chi-3)=135$, $(2\chi+5)(2\chi-5)=11$

$\left(3\chi+\frac{1}{2}\right)\left(3\chi-\frac{1}{2}\right)=\frac{24}{36}$, $\chi^2=\alpha$, $\chi^2=\alpha\beta^2$, $\gamma\chi^2-\beta=\alpha$.

215. Νὰ λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις :

$\chi^2-13\chi=0$ $\chi^2+11\chi=0$

$\frac{\chi^2}{5}+20\chi=25\chi$ $5\chi^2-\frac{\chi}{2}=\frac{\chi}{3}$

$(\chi-7)(\chi+5)=9\chi-35$ $(5\chi+2)(7\chi-10)=34\chi-20$

$\left(\chi+\frac{1}{4}\right)\left(\chi-\frac{1}{4}\right)=5\chi-\frac{1}{16}$ $\frac{3\chi^2-2\chi}{3}=\frac{3\chi^2}{4}+\frac{2\chi}{3}$

216. Ὁμοίως νὰ λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις :

$\alpha\chi^2-\beta\chi=0$ $\frac{\chi^3}{\alpha}+\beta\chi=0$

$\frac{\chi^2}{\alpha}+\frac{\chi}{\beta}=0$ $(\chi-\alpha)(\chi+\alpha)=\beta\chi-\alpha^2$.

148. Λύσις τῆς γενικῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$. — Διὰ νὰ λύσωμεν ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$, θὰ προσπαθήσωμεν διὰ καταλλήλου μετασχηματισμοῦ, ἵνα ὁ ἄγνωστος χ, ὁ ὁποῖος εὑρίσκεται εἰς αὐτὴν εἰς δύο ὅρους, εὑρεθῇ εἰς ἕνα μόνον ὅρον. Θὰ εὕρωμεν δὲ τὸν κατάλληλον αὐτὸν μετασχηματισμὸν ἀπὸ τὰ ἑξῆς: Ἡμεῖς γνωρίζομεν, ὅτι :

$$(\chi+\alpha)^2=\chi^2+2\alpha\chi+\alpha^2.$$

Ἐκ τοῦ ἀναπτύγματος δὲ αὐτοῦ συνάγομεν τὰ ἑξῆς : Διώνυμον, ὡς τὸ $\chi^2+2\alpha\chi$, τοῦ ὁποίου, ὡς βλέπομεν, ὁ εἷς ὅρος εἶναι χ^2, ὁ δὲ ἄλλος περιέχει τὸ χ, εἶναι μέρος τοῦ ἀναπτύγματος τοῦ τετραγώνου ἑνὸς ἄλλου διωνύμου. Ὁ εἷς δὲ ὅρος τοῦ ἄλλου διωνύμου εἶναι ἡ $\sqrt{\chi^2}$, ἤτοι ὁ χ, ὁ δὲ ἄλλος ὅρος εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ συντελεστοῦ τοῦ χ, ἤτοι ὁ $\frac{2\alpha}{2}=\alpha$. Ὥστε, ἵνα τὸ διώνυμον $\chi^2+2\alpha\chi$ γίνῃ τέλειον τετράγωνον, πρέπει νὰ προσθέσωμεν εἰς αὐτὸ τὸ α^2. Ὥστε εἶναι :

$$\chi^2+2\alpha\chi=\chi^2+2\alpha\chi+\alpha^2-\alpha^2$$

ἤτοι

$$\chi^2+2\alpha\chi=(\chi+\alpha)^2-\alpha^2.$$

Κατὰ ταῦτα, εἶναι :

$$\chi^2+6\chi=(\chi+3)^2-3^2=(\chi+3)^2-9.$$

καὶ $\chi^2-\frac{1}{2}\chi=\left(\chi-\frac{1}{4}\right)^2-\left(\frac{1}{4}\right)^2=\left(\chi-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{16}$ κ.ο.κ.

149. Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω ἔστω πρὸς λύσιν α) ἡ ἐξίσωσις :

$$\chi^2-6\chi+5=0 \quad (1)$$

Μεταφέρομεν τὸν γνωστὸν ὅρον εἰς τὸ δεύτερον μέλος, ὁπότε ἔχομεν :

$$\chi^2-6\chi=-5 \quad (2)$$

Ἀλλὰ τὸ $\chi^2-6\chi$ εἶναι μέρος τοῦ ἀναπτύγματος τοῦ

$$(\chi-3)^2=\chi^2-6\chi+9.$$

Ἐὰν λοιπὸν προσθέσωμεν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως (2) τὸ 9, θὰ ἔχωμεν :

$$\chi^2-6\chi+9=9-5, \quad \text{ἤτοι} \quad (\chi-3)^2=4.$$

Ἐὰν ἤδη ἐξαγάγωμεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς τελευταίας ἐξισώσεως, λαμβάνομεν :

$$\chi-3=\pm 2 \quad \text{ἤτοι} \quad \chi=3\pm 2.$$

Ὥστε ἢ $\chi=3+2=5$ ἢ $\chi=3-2=1$.

Ὥστε αἱ ρίζαι τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶναι 5 καὶ 1. Καὶ πράγματι, διότι

$$\chi^2-6\chi+5=5^2-6.5+5=25-30+5=0$$

ἢ

$$1^2-6.1+5=1-6+5=0.$$

β) Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις :

$$2\chi^2-7\chi+3=0 \quad (1)$$

Ἐξ αὐτῆς λαμβάνομεν :

$$2\chi^2-7\chi=-3 \quad \text{καὶ κατόπιν} \quad \chi^2-\frac{7}{2}\chi=-\frac{3}{2} \quad (2)$$

Ἀλλὰ τὸ μέλος $\chi^2-\frac{7}{2}\chi$ εἶναι οἱ δύο ὅροι τοῦ ἀναπτύγματος :

$$\left(\chi-\frac{7}{4}\right)^2=\chi^2-\frac{7}{2}\chi+\frac{49}{16}.$$

Ὥστε, ἐὰν εἰς τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως (2) προσθέσωμεν τὸ $\frac{49}{16}$, λαμβάνομεν :

$$\chi^2 - \frac{7}{2}\chi + \frac{49}{16} = \frac{49}{16} - \frac{3}{2}.$$

ἢ

$$\left(\chi - \frac{7}{4}\right)^2 = \frac{25}{16},$$

ἐξ ἧς ἔχομεν :

$$\chi - \frac{7}{4} = \pm\sqrt{\frac{25}{16}},$$

ἤτοι, ἢ

$$\chi = \frac{7}{4} + \frac{5}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

ἢ

$$\chi = \frac{7}{4} - \frac{5}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Καὶ πράγματι, διότι εἶναι :

$$2.3^2 - 7.3 + 3 = 18 - 21 + 3 = 0$$

καὶ

$$2\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 7.\frac{1}{2} + 3 = \frac{1}{2} - \frac{7}{2} + 3 = 0.$$

γ) Ἔστω ἤδη ἡ γενικὴ ἐξίσωσις $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma = 0$. Ἐξ αὐτῆς λαμβάνομεν

$$\alpha\chi^2 + \beta\chi = -\gamma$$

καὶ κατόπιν

$$\chi^2 + \frac{\beta}{\alpha}\chi = -\frac{\gamma}{\alpha},$$

διὰ τῆς προσθέσεως δὲ εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τοῦ $\left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$

ἔχομεν

$$\chi^2 + \frac{\beta}{\alpha}\chi + \left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = \frac{\beta^2}{4\alpha^2} - \frac{\gamma}{\alpha},$$

ἤτοι

$$\left(\chi + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha^2},$$

ἐξάγοντες δὲ ἤδη τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν ἀμφοτέρων τῶν μελῶν, εὑρίσκομεν

$$\chi + \frac{\beta}{2\alpha} = \pm\frac{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$$

$\sqrt{324} = 18$

Ὅθεν, ἢ $\chi = \dfrac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$ ἢ $\chi = \dfrac{-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$

δηλαδὴ

$$\chi = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} \qquad (1)$$

150. Ἡ ἔκφρασις αὕτη τοῦ χ εἶναι **γενικὸς τύπος**, δι᾽ οὗ δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὰς λύσεις οἱασδήποτε ἐξισώσεως δευτέρου βαθμοῦ, χωρὶς νὰ ἐπαναλάβωμεν τοὺς προηγηθέντας συλλογισμούς.

Ἐκ τοῦ εὑρεθέντος τύπου (1) βλέπομεν, ὅτι ἡ ἐξίσωσις τοῦ δευτέρου βαθμοῦ ἔχει **δύο** μὲν πραγματικὰς λύσεις ἢ **ρίζας**, ἐὰν εἶναι ὁ ἀριθμὸς $\boldsymbol{\beta^2-4\alpha\gamma>0}$, **μίαν** δὲ μόνην (πραγματικήν), ἐὰν $\boldsymbol{\beta^2-4\alpha\gamma=0}$ καὶ **δύο μιγάδας**, ἐὰν $\boldsymbol{\beta^2-4\alpha\gamma<0}$.

Σημείωσις. Ἐὰν ὁ συντελεστὴς τοῦ χ εἶναι ἄρτιος, ὁ τύπος (1) λαμβάνει ἁπλουστέραν μορφήν, διότι, ἐὰν εἶναι $\beta=2\beta'$, ἔχομεν:

$$\chi=\frac{-2\beta'\pm\sqrt{4\beta'^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}=\frac{-2\beta'\pm 2\sqrt{\beta'^2-\alpha\gamma}}{2\alpha}=\frac{-\beta'\pm\sqrt{\beta'^2-\alpha\gamma}}{\alpha} \qquad (2)$$

Π.χ. 1) Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $5\chi^2-11\chi-12=0$.
Ἔχομεν κατὰ τὸν τύπον (1)

$$\chi=\frac{11\pm\sqrt{11^2-4.5.(-12)}}{2.5}=\frac{11\pm\sqrt{361}}{10}=\frac{11\pm19}{10}$$

ἤτοι $\chi=\frac{11+19}{10}=3$ καὶ $\chi=\frac{11-19}{10}=-\frac{4}{5}$.

2) Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\chi^2-10\chi+25=0$.
Κατὰ τὰ γνωστὰ ἔχομεν:

$$\chi=\frac{10\pm\sqrt{10^2-4.25}}{2}=\frac{10}{2}=5.$$

3) Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\chi^2-4\chi+13=0$.
Ἔχομεν τὸν τύπον (2)

$$\chi=2\pm\sqrt{4-13}=2\pm\sqrt{-9}=2\pm3i$$

ἤτοι $\chi=2+3i$ καὶ $\chi=2-3i$.

4) Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\chi^2-5\alpha\chi+6\alpha^2=0$.
Κατὰ τὸν τύπον (1) ἔχομεν:

$$\chi=\frac{5\alpha\pm\sqrt{25\alpha^2-24\alpha^2}}{2}=\frac{5\alpha\pm\alpha}{2},$$

ἤτοι $\chi=\frac{5\alpha+\alpha}{2}=3\alpha$ καὶ $\chi=\frac{5\alpha-\alpha}{2}=2\alpha$.

Ἀσκήσεις.

217. Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις:

$\chi^2-6\chi+8=0$	$\chi^2-8\chi+15=0$	$\chi^2+8\chi+15=0$
$\chi^2-3\chi-4=0$	$\chi^2-6\chi+13=0$	$\chi^2+2\chi+26=0$
$2+\chi=6\chi^2$	$20-7\chi=6\chi^2$	$-15\chi^2+8=2\chi$
$\chi^2-\frac{\chi}{2}=\frac{1}{2}$	$\chi^2-\frac{\chi}{3}=\frac{2}{3}$	$\chi^2-\frac{\chi}{3}=8$
$\chi^2-2\frac{1}{2}\chi=-1$	$\chi^2-1\frac{1}{3}\chi=5$	$\chi^2+1\frac{1}{3}\chi=2\frac{1}{3}$

218. Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις

$\chi(\chi-10)+21=0 \qquad \chi(\chi+13)+36=0 \qquad \chi(\chi-9)=22$

$(\chi+5)(\chi+3)=35. \qquad (\chi-6)(\chi-5)=20. \qquad (\chi-10)(\chi+3)=-40$

$(\chi-3)(\chi-1)+(\chi+7)(\chi+2)=50 \qquad (\chi-2)(\chi-4)+(\chi-3)(\chi-5)=23$

$(\chi+1)^2=\chi+7 \qquad (3\chi+5)^2+(5\chi+3)^2=8$

219. Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις

$3\chi+\frac{1}{\chi}=4 \qquad 8\chi-\frac{3}{\chi}=-10 \qquad \frac{9}{\chi}-\frac{\chi}{3}=-2$

$\chi+\frac{1}{\chi-5}=7 \qquad \chi-\frac{1}{\chi-7}=7 \qquad \chi+\frac{1}{\lambda-1}=\frac{7}{6}$

$\chi=\frac{\chi+4}{\chi-1} \qquad \frac{\chi}{3}+\frac{3}{\chi}=2\frac{1}{2} \qquad \frac{\chi+2}{6}+\frac{6}{\chi+2}=3\frac{1}{3}$

$\frac{1}{\chi+1}+\frac{1}{\chi-1}=\frac{2}{3} \qquad \frac{\chi}{\chi+1}+\frac{\chi}{\chi+4}=1 \qquad \frac{2\chi+1}{\chi-1}=\frac{\chi-1}{\chi+1}$

220. Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις

$\chi^2-5{,}2\chi+1=0 \qquad 1{,}2\chi^2-7\chi+10=0 \qquad \chi^2-4\chi+4{,}09=0$

$\chi^2-0{,}8\chi-10{,}5=0 \qquad \chi^2-0{,}8\chi+0{,}15=0 \qquad \chi^2+\frac{2\chi}{5}-0{,}05=0.$

221. Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις

$\chi^2-3\alpha\chi+2\alpha^2=0 \qquad \chi^2+2\alpha\chi-3\alpha^2=0 \qquad \chi^2-2\alpha\chi-15\alpha^2=0$

$3\chi^2-7\alpha\chi+2\alpha^2=0 \qquad \chi^2-3\alpha\beta\chi-10\alpha^2\beta^2=0 \qquad (\chi-\alpha)^2=\beta^2$

$\frac{\chi-\alpha}{5\alpha}=\frac{\alpha}{2\chi} \qquad \frac{\alpha+\beta}{\alpha-\chi}=\frac{\alpha+\chi}{\alpha-\beta} \qquad \frac{\alpha+\chi}{\alpha-\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha+\chi}$

222. Νὰ δειχθῇ, ὅτι αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $\chi^2+2\beta\chi-\gamma^2$ εἶναι πραγματικαὶ (οἱ ἐγγράμματοι συντελεσταὶ ὑποτίθεται, ὅτι εἶναι σύμμετροι ἀριθμοί).

223. Νὰ δειχθῇ, ὅτι αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $\chi^2+\pi\chi+\kappa=0$ εἶναι πάντοτε πραγματικαί, ὅταν τὸ κ εἶναι ἀρνητικόν.

224. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τοῦ μ, διὰ τὴν ὁποίαν ἡ ἐξίσωσις: $15\chi^2-\mu\chi+1=0$ ἔχει μίαν μόνον ρίζαν, ὡς καὶ διὰ τὴν ἐξίσωσιν $9\chi^2-3\chi+\mu=0$.

225. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ τιμαὶ τοῦ μ, διὰ τὰς ὁποίας ἡ ἐξίσωσις $\chi^2-5\chi+\mu=0$ ἔχει: 1) ρίζας πραγματικὰς καὶ ἀνίσους, καὶ 2) φανταστικάς· ὡς καὶ διὰ τὴν ἐξίσωσιν $\chi^2+9\chi+\mu=0$.

ΣΧΕΣΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΤΩΝ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΡΙΖΩΝ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΣ $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$.

151. Ἂν παραστήσωμεν διὰ χ' καὶ χ'' τὰς ρίζας τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$, ἔχομεν:

$$\chi'=\frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha} \qquad \chi''=\frac{-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}.$$

Προσθέτοντες τὰς ἰσότητας ταύτας κατὰ μέλη εὑρίσκομεν :

$$\chi' + \chi'' = \frac{-2\beta}{2\alpha} = -\frac{\beta}{\alpha}.$$

πολλαπλασιάζοντες δὲ ταύτας, εὑρίσκομεν :

$$\chi' \cdot \chi'' = \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} \cdot \frac{-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} =$$

$$= \frac{(-\beta)^2 - (\beta^2 - 4\alpha\gamma)}{4\alpha^2} = \frac{4\alpha\gamma}{4\alpha^2} = \frac{\gamma}{\alpha}.$$

Κατὰ ταῦτα, εἰς τὴν ἐξίσωσιν $10\chi^2 + \chi - 3 = 0$ εἶναι :

$$\chi' + \chi'' = -\frac{1}{10} \quad \text{καὶ} \quad \chi' \cdot \chi'' = -\frac{3}{10},$$

εἰς δὲ τὴν

$$\chi^2 - 9\chi + 20 = 0 \quad \text{εἶναι} \quad \chi' + \chi'' = 9 \quad \text{καὶ} \quad \chi' \cdot \chi'' = 20.$$

Καὶ εἰς τὴν

$$\chi^2 + 6\chi + 9 = 0 \quad \text{εἶναι} \quad \chi' + \chi'' = -6 \quad \text{καὶ} \quad \chi' \cdot \chi'' = 9.$$

Σημείωσις. Ἐὰν τὰς ἀνωτέρω σχέσεις θελήσωμεν νὰ ἐπαληθεύσωμεν εἰς τὴν προηγουμένως δοθεῖσαν ἐξίσωσιν $\chi^2 + 6\chi + 9 = 0$, θὰ ἴδωμεν, ὅτι αὕτη ἔχει μίαν μόνον ρίζαν, τὴν -3. Ἀλλ' ἐὰν θεωρήσωμεν αὐτὴν ὡς διπλῆν, θὰ ἔχωμεν :

$$-3 - 3 = -6 \quad \text{καὶ} \quad (-3) \cdot (-3) = 9.$$

Ἐφαρμογαί. 1) ***Νὰ εὑρεθοῦν δύο ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι ἔχουν ἄθροισμα 3 καὶ γινόμενον −40.***

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω, οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ χ' καὶ χ'' θὰ εἶναι ρίζαι δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ἐξίσωσις :

$$\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma = 0$$

γράφεται

$$\chi^2 + \frac{\beta}{\alpha}\chi + \frac{\gamma}{\alpha} = 0,$$

ἕπεται, ὅτι ἡ ἐξίσωσις, τῆς ὁποίας αἱ ρίζαι εἶναι οἱ ζητούμενοι ἀριθμοί, εἶναι ἡ

$$\chi^2 - 3\chi - 40 = 0 \quad \left(\chi' + \chi'' = -\frac{\beta}{\alpha} = +3\right),$$

$$\left(\chi' \cdot \chi'' = \frac{\gamma}{\alpha} = -40\right).$$

Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν αὐτήν, εὑρίσκομεν :

$$\chi = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 160}}{2} = \frac{3 \pm 13}{2},$$

ἤτοι

$$\chi' = \frac{3 + 13}{2} = 8 \quad \text{καὶ} \quad \chi'' = \frac{3 - 13}{2} = -5$$

ἢ $\chi'' = \frac{3+13}{2} = 8$ καὶ $\chi' = \frac{3-13}{2} = -5$,

διότι καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις τῶν λύσεων ἔχομεν ἄθροισμα τῶν ριζῶν 3 καὶ γινόμενον αὐτῶν —40. Ὥστε οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ εἶναι οἱ 8 καὶ —5.

2) ***Νὰ σχηματισθῇ ἐξίσωσις δευτέρου βαθμοῦ, ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ ρίζας τοὺς ἀριθμοὺς $\frac{3}{4}$ καὶ 2.***

Ἐπειδὴ $\chi' + \chi'' = 2 + \frac{3}{4} = \frac{11}{4}$

καὶ $\chi' \cdot \chi'' = 2 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$,

ἡ ζητουμένη ἐξίσωσις εἶναι ἡ

$$\chi^2 - \frac{11}{4}\chi + \frac{3}{2} = 0,$$

ἤτοι ἡ $4\chi^2 - 11\chi + 6 = 0$.

3) ***Νὰ εὑρεθοῦν τὰ σημεῖα τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$, πρὶν ἢ λυθῇ αὕτη.***

Διὰ νὰ λυθῇ τὸ ζήτημα τοῦτο, πρέπει ὁ ἀριθμὸς $\beta^2-4\alpha\gamma$ νὰ εἶναι θετικός. Διότι, ἂν $\beta^2-4\alpha\gamma<0$, αἱ ρίζαι εἶναι μιγάδες ἀριθμοί.

Ἔστω λοιπὸν $\beta^2-4\alpha\gamma>0$. Τότε :

α′) Ἐὰν τὸ γινόμενον $\chi'.\chi''$ εἶναι θετικόν, ἤτοι ἐὰν $\frac{\gamma}{\alpha} > 0$, αἱ δύο ρίζαι εἶναι ὁμόσημοι. Διὰ νὰ ἴδωμεν δέ, ἂν εἶναι θετικαὶ ἢ ἀρνητικαί, θὰ ἐξετάσωμεν τὸ ἄθροισμα $\chi'+\chi'' = -\frac{\beta}{\alpha}$. Ἐὰν δὲ τοῦτο εἶναι θετικόν, ἤτοι ἂν $-\frac{\beta}{\alpha} > 0$, θὰ εἶναι θετικαὶ αἱ ρίζαι. Ἐὰν ὅμως εἶναι $-\frac{\beta}{\alpha} < 0$, αἱ ρίζαι θὰ εἶναι ἀρνητικαί.

β′) Ἐὰν τὸ γινόμενον τῶν ριζῶν εἶναι ἀρνητικόν, ἤτοι ἐὰν εἶναι $\frac{\gamma}{\alpha} < 0$, αἱ ρίζαι εἶναι ἑτερόσημοι καὶ μεγαλυτέρα κατ᾽ ἀπόλυτον τιμὴν ἡ θετική, ἂν $-\frac{\beta}{\alpha}>0$. Ἂν ὅμως $-\frac{\beta}{\alpha}<0$, μεγαλυτέρα κατ᾽ ἀπόλυτον τιμὴν εἶναι ἡ ἀρνητική.

γ′) Ἐὰν $\frac{\gamma}{\alpha}=0$, ἤτοι ἐὰν $\gamma=0$, ἡ ἐξίσωσις γίνεται $\alpha\chi^2+\beta\chi=0$, τῆς ὁποίας (§ 147) ἡ μὲν μία ρίζα εἶναι 0, ἡ δὲ ἄλλη $-\frac{\beta}{\alpha}$.

Ἀνακεφαλαιοῦντες λοιπὸν τὰ ἀνωτέρω, ἔχομεν :

Ὅταν $\beta^2-4\alpha\gamma>O$ ***καὶ***

1) $\frac{\gamma}{\alpha}>O$, ***αἱ δύο ρίζαι ἔχουν τὸ σημεῖον τοῦ*** $-\frac{\beta}{\alpha}$.

2) $\frac{\gamma}{\alpha}<O$, ***αἱ ρίζαι εἶναι ἑτερόσημοι καὶ μεγαλυτέρα κατ' ἀπόλυτον τιμὴν ἡ ἔχουσα τὸ σημεῖον τοῦ*** $-\frac{\beta}{\alpha}$.

3) $\frac{\gamma}{\alpha}=O$, ***αἱ ρίζαι εἶναι Ο καὶ*** $-\frac{\beta}{\alpha}$.

Π.χ. 1) Ἡ ἐξίσωσις $\chi^2+4\chi-9=0$ (τῆς ὁποίας αἱ ρίζαι εἶναι πραγματικαὶ) ἔχει ρίζας ἑτεροσήμους, διότι $\chi'.\chi''=-9$ καὶ μεγαλυτέραν κατ' ἀπόλυτον τιμὴν τὴν ἀρνητικήν, διότι $\chi'+\chi''=-4$.

2) Ἡ ἐξίσωσις $\chi^2-5\chi+4=0$ (τῆς ὁποίας αἱ ρίζαι εἶναι πραγματικαὶ) ἔχει τὰς ρίζας της ἀμφοτέρας θετικάς.

Ἀσκήσεις.

226. Νὰ εὑρεθοῦν δύο ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι ἔχουν :

ἄθροισμα	16,	4,	—10,	—4,	34
καὶ γινόμενον	48,	—21,	—21,	2,	1.

227. Νὰ σχηματισθῇ ἡ ἐξίσωσις δευτέρου βαθμοῦ, ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ ρίζας τοὺς ἀριθμούς :

1) 2 καὶ 5	3) —7 καὶ —6
2) —10 » 2	4) —1 » 1
5) 7 » $\frac{1}{3}$	7) $1\frac{1}{2}$ » $-2\frac{1}{3}$
6) $\frac{2}{3}$ » $\frac{3}{4}$	8) α » β.

228. Νὰ εὑρεθῇ τὸ σημεῖον τῶν ριζῶν τῶν κάτωθι ἐξισώσεων χωρὶς νὰ λυθοῦν αὗται

$\chi^2-14\chi+40=0$ $\qquad$ $\chi^2+4\chi-21=0$ $\qquad$ $\frac{\chi^2-3}{\chi-2}=-\frac{1}{4}$.

$\chi^2+10\chi+24=0$ $\qquad$ $\chi^2-2\chi-15=0$ $\qquad$ $\frac{\chi^2+\chi-1}{\chi}=4$.

229. Τῆς ἐξισώσεως $10\chi^2-99\chi-10=0$ ἡ μία ρίζα εἶναι 10. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἄλλη, χωρὶς νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις.

230. Τῆς ἐξισώσεως $15\chi^2+19\chi+6=0$ ἡ μία ρίζα εἶναι $-\frac{2}{3}$. Νὰ εὑρεθῇ ὁμοίως ἡ ἄλλη.

231. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τοῦ γ, διὰ τὴν ὁποίαν ἐν τῇ ἐξισώσει $9\chi^2-18\chi+\gamma=0$, ἡ μία ρίζα εἶναι διπλασία τῆς ἄλλης.

232. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τοῦ γ, διὰ τὴν ὁποίαν ἐν τῇ ἐξισώσει $4\chi^2-8\chi+\gamma=0$ ἡ μία ρίζα εἶναι τριπλασία τῆς ἄλλης.

233. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τοῦ α, διὰ τὴν ὁποίαν τὸ ἄθροισμα τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi^2-2\chi+3\alpha=0$ ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενόν των.

234. Ἐὰν δύο ἐξισώσεις δευτέρου βαθμοῦ ἔχουν τὰς αὐτὰς ρίζας, οἱ συντελεσταὶ αὐτῶν εἶναι ἀνάλογοι· καὶ ἀντιστρόφως.

235. Νὰ εὑρεθῇ ἡ διαφορὰ τῶν ριζῶν τῶν κάτωθι ἐξισώσεων χωρὶς νὰ λυθοῦν

$$\chi^2-16\chi+63=0 \qquad 16\chi^2-16\chi+3=0$$
$$\chi^2+9\chi+36=0 \qquad 16\chi^2+3\chi-1=0.$$

236. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$.

Παρατηροῦμεν, ὅτι, ἐὰν ρ′ καὶ ρ″ εἶναι αἱ ρίζαι αὐτῆς, $\rho'^2+\rho''^2=(\rho'+\rho'')^2-2\rho'\rho''$. Ἐὰν δὲ ἀντικαταστήσωμεν τὰ $\rho'+\rho''$ καὶ $\rho'\rho''$ διὰ τῶν γνωστῶν $-\dfrac{\beta}{\alpha}$ καὶ $\dfrac{\gamma}{\alpha}$, εὑρίσκομεν, ὅτι τὸ ζητούμενον ἄθροισμα εἶναι $\dfrac{\beta^2-2\alpha\gamma}{\alpha^2}$.

237. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως $\chi^2-9\chi+3=0$, χωρὶς νὰ λυθῇ αὕτη, ὡς καὶ τῆς ἐξισώσεως $4\chi^2+13\chi+3=0$.

238. Ἐὰν ρ′ καὶ ρ″ εἶναι αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $3\chi^2+2\chi-5=0$ νὰ εὑρεθοῦν τὰ $\rho'^2\rho''-\rho'\rho''^2$, $\dfrac{\rho'}{\rho''}+\dfrac{\rho''}{\rho'}$, χωρὶς νὰ λυθῇ αὕτη.

239. Ἐν τῇ ἐξισώσει $\chi^2-(\mu-11)\chi+\mu=0$ νὰ ὁρισθῇ ἡ τιμὴ τοῦ μ, δι' ἣν τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ριζῶν αὐτῆς εἶναι 41.

240. Ἐὰν αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$ εἶναι ρ′ καὶ ρ″, νὰ σχηματισθῇ ἐξίσωσις δευτεροβάθμιος ἔχουσα ρίζας $\rho'+\varepsilon$ καὶ $\rho''+\varepsilon$.

ΑΝΑΛΥΣΙΣ ΠΑΝΤΟΣ ΤΡΙΩΝΥΜΟΥ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ ΕΙΣ ΓΙΝΟΜΕΝΟΝ ΠΑΡΑΓΟΝΤΩΝ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

152. Ἡ παράστασις $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$ εἶναι **τριώνυμον δευτέρου βαθμοῦ**. Ἐὰν τὸ τριώνυμον τοῦτο ἐξισωθῇ μὲ τὸ 0, ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0,$$

τῆς ὁποίας τὰς ρίζας παριστῶμεν διὰ χ′ καὶ χ″.

Τότε δὲ ἔχομεν :

$$\chi' + \chi'' = -\frac{\beta}{\alpha}, \quad \text{ἤτοι} \quad \beta = -\alpha(\chi' + \chi'')$$

$$\text{καὶ} \quad \chi'\chi'' = \frac{\gamma}{\alpha}, \quad \text{ἤτοι} \quad \gamma = \alpha\chi'\chi''.$$

Ἑπομένως τὸ τριώνυμον $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma$ γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς :

$$\alpha\chi^2 - \alpha(\chi' + \chi'')\chi + \alpha\chi'\chi'' = \alpha[\chi^2 - (\chi' + \chi'')\chi + \chi'\chi''].$$

Ἀλλ' εἶναι :

$$\chi^2 - (\chi' + \chi'')\chi + \chi'\chi'' = \chi^2 - \chi'\chi - \chi''\chi + \chi'\chi''$$

$$\text{καὶ } \chi^2 - \chi'\chi - \chi''\chi + \chi'\chi'' = \chi(\chi - \chi') - \chi''(\chi - \chi') = (\chi - \chi')(\chi - \chi'').$$

Εἶναι λοιπὸν $\qquad \alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma = \alpha(\chi - \chi')(\chi - \chi'')$.

Ἐὰν εἶναι $\chi' = \chi''$, τότε ἡ ἀνάλυσις τοῦ τριωνύμου δίδει :

$$\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma = \alpha(\chi - \chi')(\chi - \chi') = \alpha(\chi - \chi')^2.$$

Π. χ. 1) Νὰ ἀναλυθῇ τὸ τριώνυμον $\chi^2 - 7\chi + 12$.

Τῆς ἐξισώσεως $\qquad \chi^2 - 7\chi + 12 = 0$

ρίζαι εἶναι αἱ $\qquad \chi' = 3$ καὶ $\chi'' = 4$.

Ἔχομεν λοιπὸν κατὰ τὰ ἀνωτέρω $\chi^2 - 7\chi + 12 = (\chi - 3)(\chi - 4)$.

2) Νὰ ἀναλυθῇ τὸ τριώνυμον $3\chi^2 + 13\chi - 10$.

Αἱ ρίζαι τοῦ τριωνύμου αὐτοῦ εἶναι -5 καὶ $\frac{2}{3}$.

Ἔχομεν λοιπόν :

$$3\chi^2 + 13\chi - 10 = 3(\chi + 5)\left(\chi - \frac{2}{3}\right)$$

ἢ

$$3\chi^2 + 13\chi - 10 = 3(\chi + 5) . \frac{(3\chi - 2)}{3} = (\chi + 5)(3\chi - 2).$$

Π α ρ α τ η ρ ή σ ε ι ς. 1) Ἡ ἀνωτέρω ἀνάλυσις ἐξηγεῖ διατί ἡ ἐξίσωσις δευτέρου βαθμοῦ ἔχει δύο ρίζας. Διότι τὸ γινόμενον $\alpha(\chi - \chi')(\chi - \chi'')$ γίνεται 0, ὅταν εἷς τῶν παραγόντων του εἶναι 0. Ἀλλ' α εἶναι διάφορον τοῦ μηδενός. Ἑπομένως ἢ θὰ εἶναι :

$$\chi - \chi' = 0, \quad \text{ἤτοι} \quad \chi = \chi' \quad \text{ἢ} \quad \chi - \chi'' = 0, \quad \text{ἤτοι} \quad \chi = \chi''.$$

Δύο λοιπὸν ἀριθμοὶ μηδενίζουν τὸ ἀνωτέρω γινόμενον.

2) Ἡ ἐφαρμογὴ 2 τῆς § 151 λύεται ἤδη καὶ ὡς ἑξῆς :

Σχηματίζομεν τὸ γινόμενον $(\chi - 2)\left(\chi - \frac{3}{4}\right)$, τὸ ὁποῖον ἐξισοῦμεν μὲ τὸ 0. Ἔχομεν δὲ τότε :

$$\chi^2 - \frac{3}{4}\chi - 2\chi + 2 . \frac{3}{4} = 0$$

ἢ

$$\chi^2 - \frac{11}{4}\chi + \frac{6}{4} = 0,$$

ἤτοι

$$4\chi^2 - 11\chi + 6 = 0.$$

Ἀσκήσεις

241. Νὰ τραποῦν εἰς γινόμενα τὰ κάτωθι τριώνυμα

$\chi^2 - 9\chi + 14$ $\quad \chi^2 - 4\chi - 45$ $\quad 25\chi^2 + 10\chi + 1$

$12\chi^2 + 5\chi - 3$ $\quad 2\chi^2 + 3\chi + 2$ $\quad 35\chi^2 - 3\chi - 2$

242. Νὰ ἁπλοποιηθοῦν τὰ κλάσματα :

$$\frac{\chi^2 - 8\chi + 15}{\chi^2 - 10\chi + 21} \qquad \frac{\chi^2 + 5\chi - 6}{\chi^2 + 4\chi - 12} \qquad \frac{15\chi^2 - 11\chi + 2}{30\chi^2 - 17\chi + 2}$$

$$\frac{2\chi^2 - \chi - 3}{4\chi^2 - 12\chi + 9} \qquad \frac{15\chi^2 - 8\chi + 1}{3\chi - 1} \qquad \frac{7\chi + 2}{14\chi^2 + 53\chi + 14}.$$

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

153. Ἔστωσαν τὰ κάτωθι συστήματα

$$\begin{aligned}\chi^2+\psi^2&=34\\ \chi^2-\psi^2&=16\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\chi+\psi&=2\\ \chi\psi&=-35\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\chi^2+\psi^2+\varphi^2&=5\\ \chi+\psi+\varphi&=3\\ \chi-\psi-\varphi&=1.\end{aligned}$$

Παρατηροῦμεν δέ, ὅτι ἕκαστον ἐξ αὐτῶν ἀποτελεῖται ἢ ἀπὸ ἐξισώσεις δευτέρου βαθμοῦ, ἢ ἀπὸ ἐξισώσεις δευτέρου καὶ πρώτου βαθμοῦ. Τὰ τοιαῦτα συστήματα λέγονται δευτέρου βαθμοῦ. Ὥστε : ***Ἓν σύστημα ἐξισώσεων λέγεται δευτέρου βαθμοῦ, ὅταν ἀποτελῆται μόνον ἀπὸ ἐξισώσεις δευτέρου βαθμοῦ ἢ δευτέρου καὶ πρώτου βαθμοῦ.***

154. Αἱ μέθοδοι τῆς λύσεως τῶν συστημάτων δευτέρου βαθμοῦ εἶναι διάφοροι. Ἓν ὅμως σύστημα δύο ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους, τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖται ἀπὸ μίαν ἐξίσωσιν δευτέρου βαθμοῦ καὶ ἀπὸ μίαν πρώτου, δύναται νὰ λυθῇ πάντοτε διὰ τῆς μεθόδου τῆς ἀντικαταστάσεως.

Πδ. 1ον) Ἔστω πρὸς λύσιν τὸ σύστημα :

$$\chi-\psi=4$$
$$\chi\psi=12.$$

Ἐκ τῆς πρώτης λαμβάνομεν $\chi=4+\psi$· θέτοντες δὲ τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ χ ἐν τῇ δευτέρᾳ, λαμβάνομεν ἐξίσωσιν μὲ ἕνα ἄγνωστον, τὸν ψ, ἤτοι

$$(4+\psi)\psi=12 \qquad \text{ἢ} \qquad \psi^2+4\psi=12,$$

ἐξ ἧς εὑρίσκομεν $\psi_1=2$ καὶ $\psi_2=-6$.

Αἱ τιμαὶ ἤδη τοῦ χ εὑρίσκονται ἐκ τῆς ἐξισώσεως

$\chi=4+\psi$ καὶ εἶναι $\chi_1=6$ καὶ $\chi_2=-2$.

ἤτοι $\chi_1=6,\ \psi_1=2,$ ἢ $\chi_2=-2,\ \psi_2=-6.$

2ον)
$$3\chi+2\psi=7$$
$$\chi\psi=2.$$

Ἐκ τῆς πρώτης λαμβάνομεν $\psi=\frac{7-3\chi}{2}$ (1)

καὶ δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν δευτέραν :

$$\chi\cdot\frac{(7-3\chi)}{2}=2 \quad ἢ \quad 3\chi^2-7\chi+4=0,$$

ἐξ ἧς καὶ ἐκ τῆς (1) εὑρίσκομεν :

$$\chi_1=1,\quad \psi_1=2 \quad ἢ \quad \chi_2=\frac{4}{3},\quad \psi_2=\frac{3}{2}.$$

3ον)
$$\chi^2+\psi^2=25$$
$$\chi+\psi=7.$$

Λύοντες τὸ σύστημα τοῦτο διὰ τῆς μεθόδου τῆς ἀντικαταστάσεως εὑρίσκομεν $\chi_1=4,\quad \psi_1=3$ ἢ $\chi_2=3,\quad \psi_2=4.$

Ἀλλὰ λύομεν τὸ ἀνωτέρω σύστημα καὶ ὡς ἑξῆς :

Ὑψοῦμεν τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως $\chi+\psi=7$ εἰς τὸ τετράγωνον, ὁπότε εὑρίσκομεν $\chi^2+\psi^2+2\chi\psi=49$, καὶ ἐπειδή :

$$\chi^2+\psi^2=25 \qquad 25+2\chi\psi=49, \quad ἤτοι \quad \chi\psi=12.$$

Ἀλλ' ἀφοῦ γνωρίζομεν τὸ ἄθροισμα καὶ τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν χ, ψ, θὰ εὕρωμεν αὐτοὺς ἐκ τῆς λύσεως τῆς ἐξισώσεως :

$$X^2-7X+12=0.$$

Λύοντες αὐτὴν εὑρίσκομεν τὰς ῥίζας 4 καὶ 3.

Ὥστε εἶναι $\chi=4,\quad \psi=3,$ ἢ $\chi=3,\quad \psi=4.$

Ἔστωσαν ἤδη πρὸς λύσιν τὰ συστήματα :

4ον)
$$\chi^2+\psi^2=25$$
$$\chi^2-\psi^2=7.$$

Διὰ προσθέσεως εὑρίσκομεν :

$$2\chi^2=32, \quad ἤτοι \quad \chi_1=4,\quad \chi_2=-4$$

καὶ δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν πρώτην εὑρίσκομεν :

$$\psi_1=3 \quad καὶ \quad \psi_2=-3.$$

5ον)
$$\chi^2+\psi^2=29$$
$$\chi\psi=10.$$

Ἐὰν διπλασιάσωμεν τὰ μέλη τῆς δευτέρας, θὰ ἔχωμεν :

$$\chi^2+\psi^2=29$$
$$2\chi\psi=20$$

καὶ διὰ προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως αὐτῶν εὑρίσκομεν :

$(\chi+\psi)^2=49$ ἤτοι $\chi+\psi=\pm7$

$(\chi-\psi)^2=9$ » $\chi-\psi=\pm3$.

Διὰ νὰ εὕρωμεν ἤδη τὰς τιμὰς τῶν χ καὶ ψ, πρέπει νὰ λύσωμεν τὰ κάτωθι συστήματα πρώτου βαθμοῦ

$$\begin{array}{llll} \chi+\psi=7 & \chi+\psi=7 & \chi+\psi=-7 & \chi+\psi=-7 \\ \chi-\psi=3 & \chi-\psi=-3 & \chi-\psi=3 & \chi-\psi=-3 \\ \hline \chi_1=5 & \chi_2=2 & \chi_3=-2 & \chi_4=-5 \\ \psi_1=2 & \psi_2=5 & \psi_3=-5 & \psi_4=-2 \end{array}$$

Ἀσκήσεις.

243. Νὰ λυθοῦν τὰ συστήματα :

1) $\psi^2-\chi=2$, $\chi=\psi$ 2) $\chi-\psi=5$, $\chi\psi=14$ 3) $\chi-\psi=-3$, $\chi\psi=4$

4) $\chi-2\psi=3$, $\chi\psi=2$ 5) $\chi-\psi=\frac{5}{6}$, $\chi\psi=1$ 6) $\psi\left(1+\frac{\chi}{\psi}\right)=11$, $\chi\psi=24$

244. Νὰ λυθοῦν τὰ συστήματα :

1) $\chi^2+\psi^2=34$, $\chi+\psi=8$ 2) $\chi^2-\psi^2=11$, $\chi-\psi=1$ 3) $\chi^2+\psi^2=25$, $\chi+3\psi=5$

4) $\chi+\psi=2$, $2\chi^2-3\psi^2=23$ 5) $\frac{1}{\chi}+\frac{1}{\psi}=-\frac{1}{6}$, $\chi+\psi=1$ 6) $\frac{3}{\chi}-\frac{3}{\psi}=3$, $\chi-\psi=-\frac{1}{20}$

245. Νὰ λυθοῦν τὰ συστήματα :

1) $\chi^2+\psi^2=25$, $\chi^2-\psi^2=5$ 2) $\chi^2+\psi^2=45$, $\chi^2-\psi^2=-27$ 3) $5\chi^2+2\psi^2=22$, $3\chi^2-3\psi^2=7$

4) $9\psi^2-4\chi\psi=7$, $2\psi^2+4\chi\psi=4$ 5) $2\chi\psi+\chi^2=7$, $7\chi\psi+3\chi^2=0$ 6) $3\chi\psi+\chi^2=42$, $5\chi^2+6\chi\psi=192$

7) $\frac{1}{\chi^2}+\frac{1}{\psi^2}=20$, $\frac{1}{\chi^2}-\frac{1}{\psi^2}=-12$ 8) $\frac{6}{\chi^2}-\frac{3}{\psi^2}=45$, $\frac{3}{\chi^2}+\frac{6}{\psi^2}=45$ 9) $\frac{3}{\chi^2}-\frac{4}{\psi^2}=43$, $\frac{2}{\chi^2}-\frac{5}{\psi^2}=-2$

246. Νὰ λυθοῦν τὰ συστήματα :

1) $\chi^2+\psi^2=5$, $\chi\psi=2$ 2) $\chi^2+\psi^2=40$, $\chi\psi=12$ 3) $\chi^2+\psi^2=52$, $\chi\psi=24$

4) $\chi^2+\psi^2=89$, $4\chi\psi=160$ 5) $9\chi^2+\psi^2=52$, $\chi\psi=8$ 6) $\chi^2+4\psi^2=5$, $\chi\psi=1$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

155. 1ον) ***Εἷς ἠγόρασεν ὕφασμα ἀντὶ 800 δραχμῶν. Ἐὰν δὲ ἀντὶ τῶν αὐτῶν χρημάτων ἐλάμβανε 2 πήχεις περισσότερον, ἡ τιμὴ τοῦ πήχεως θὰ ἦτο κατὰ 20 δραχμὰς μικροτέρα. Πόσους πήχεις ἠγόρασεν ;***

Ἔστω χ ὁ ἀριθμὸς τῶν πήχεων. Ἡ τιμὴ τοῦ ἑνὸς πήχεως εἶναι $\frac{800}{\chi}$. Ἐὰν δὲ οἱ πήχεις ἦσαν $\chi+2$, ἡ τιμὴ τοῦ ἑνὸς θὰ ἦτο $\frac{800}{\chi+2}$. Ὅθεν ἕπεται ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος $\frac{800}{\chi}-\frac{800}{\chi+2}=20$, πρέπει δὲ νὰ εἶναι τὸ χ θετικόν.

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς εὑρίσκομεν τήν :

$$\chi^2+2\chi-80=0,$$

τῆς ὁποίας λύσεις εἶναι αἱ $\chi'=8$ καὶ $\chi''=-10$, ἐκ τῶν ὁποίων μόνον ἡ πρώτη εἶναι παραδεκτή, ὡς πληροῦσα πάντας τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος.

2ον) ***Εἷς ἐτόκισε κεφάλαιον 5000 δραχμῶν. Μετὰ ἓν ἔτος τὸν τόκον αὐτοῦ προσέθεσεν εἰς τὸ κεφάλαιον καὶ τὸ ὅλον ποσὸν ἐτόκισε μὲ ἐπιτόκιον κατὰ μονάδα μεγαλύτερον τοῦ προηγουμένου. Ἐλάμβανε δὲ τότε ἐτήσιον τόκον 260 δραχμάς. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἀρχικὸν ἐπιτόκιον.***

Ἐὰν χ εἶναι τὸ ζητούμενον ἐπιτόκιον, ὁ τόκος ἑνὸς ἔτους τῶν 5000 δραχμῶν εἶναι $\frac{5000\chi}{100}=50\chi$ καὶ τὸ νέον κεφάλαιον εἶναι $5000+50\chi$. Τούτου δὲ ὁ ἐτήσιος τόκος πρὸς $(\chi+1)$ % εἶναι :

$$\frac{(5000+50\chi)(\chi+1)}{100}=260.$$

Πρέπει δὲ τὸ χ νὰ εἶναι θετικόν. Ἐκ τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν $\chi^2+101\chi-420=0$,
τῆς ὁποίας λύσεις εἶναι αἱ $\chi'=4$ καὶ $\chi''=-105$. Ἐξ αὐτῶν δὲ παραδεκτὴ εἶναι ἡ $\chi'=4$.

3ον) ***Ἓν ποταμόπλοιον ἀναχωρεῖ ἔκ τινος χωρίου Α, φθάνει εἰς τὸ Β καὶ ἐπανέρχεται εἰς τὸ Α μετὰ $10\frac{2}{3}$ ὥρας. Ἡ ἀπόστασις τῶν δύο χωρίων Α καὶ Β εἶναι 24 χιλιόμετρα, ἡ δὲ ταχύτης τοῦ ρεύματος τοῦ ποταμοῦ εἶναι 3 χιλιόμετρα τὴν ὥραν. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἰδία ταχύτης τοῦ πλοίου.***

Ἔστω, ὅτι ἡ ἰδία ταχύτης τοῦ πλοίου ἦτο χ χιλιόμετρα τὴν ὥραν. Τότε ἡ ταχύτης του, ὅταν ἀνήρχετο τὸ ρεῦμα ἦτο $\chi-3$, καὶ ὅταν κατήρχετο $\chi+3$, ὁ δὲ χρόνος τοῦ ταξιδίου κατὰ τὴν ἄνοδον ἦτο $\frac{24}{\chi-3}$ καὶ κατὰ τὴν κάθοδον $\frac{24}{\chi+3}$. Ἔχομεν λοιπὸν τὴν ἐξίσωσιν :

$$\frac{24}{\chi-3}+\frac{24}{\chi+3}=\frac{32}{3}.$$

Πρέπει δὲ ὁ χ νὰ εἶναι θετικὸς ἀριθμός.

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς λαμβάνομεν τὴν

$$2\chi^2-9\chi-18=0,$$

τῆς ὁποίας λύσεις εἶναι αἱ

$$\chi'=6 \quad \text{καὶ} \quad \chi''=-\frac{3}{2}.$$

Ἐξ αὐτῶν δὲ παραδεκτὴ εἶναι ἡ $\chi'=6$.

4ον) ***Τὸ ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου εἶναι 60 τ. μ., ὁ δὲ λόγος τῶν διαστάσεων αὐτοῦ εἶναι $\frac{3}{5}$. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ διαστάσεις τοῦ ὀρθογωνίου τούτου.***

Ἔστωσαν χ καὶ ψ αἱ ζητούμεναι διαστάσεις. Τότε θὰ ἔχωμεν τὸ σύστημα

$$\chi\psi=60$$
$$\frac{\chi}{\psi}=\frac{3}{5}.$$

Πρέπει δὲ οἱ χ καὶ ψ νὰ εἶναι θετικοὶ ἀριθμοί. Λύοντες τὸ σύστημα εὑρίσκομεν :

α) $\chi_1=6, \quad \psi_1=10$ καὶ

β) $\chi_2=-6, \quad \psi_2=-10.$

Ὥστε παραδεκτὸν εἶναι τὸ πρῶτον σύστημα λύσεων.

5ον) ***Ἡ μία τῶν πλευρῶν τριγώνου, κειμένη ἀπέναντι ὀξείας γωνίας, εἶναι 37 μέτρα, ἡ διαφορὰ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν εἶναι 27 μέτρα καὶ ἡ ὀρθὴ προβολὴ τῆς μικροτέρας ἐξ αὐτῶν ἐπὶ τὴν ἄλλην εἶναι 5 μ. Νὰ εὑρεθοῦν καὶ αἱ δύο ἄλλαι πλευραὶ τοῦ τριγώνου.***

Ἔστωσαν χ ἡ μεγαλυτέρα ἐκ τῶν ζητουμένων πλευρῶν καὶ ψ ἡ ἄλλη. Ἔχομεν δὲ κατὰ τὸ πρόβλημα :

$$\chi-\psi=27 \quad \text{καὶ} \quad \chi^2+\psi^2-2.5.\chi=37^2.$$

Λύοντες ἤδη τὸ σύστημα τοῦτο εὑρίσκομεν, ὅτι :

$$\chi=40 \quad \text{καὶ} \quad \psi=13.$$

6ον) ***Νὰ εὑρεθοῦν αἱ τρεῖς πλευραὶ ὀρθογωνίου τριγώνου, οὗ τὸ ἐμβαδὸν εἶναι 84 τ. μ. καὶ ὅταν αἱ δύο κάθετοι πλευραὶ ἔχουν διαφορὰν 17 μ.***

Ἔστωσαν χ, ψ, φ ἡ ὑποτείνουσα καὶ αἱ ἄλλαι δύο πλευραὶ τοῦ τριγώνου. Τότε θὰ ἔχωμεν :

$$\chi^2 = \psi^2 + \varphi^2$$
$$\psi\varphi = 168$$
$$\psi - \varphi = 17.$$

Λύοντες ἤδη τὸ σύστημα τῶν δύο τελευταίων ἐξισώσεων εὑρίσκομεν $\psi = 24$ καὶ $\varphi = 7$.
Κατόπιν δὲ ἐκ τῆς πρώτης εὑρίσκομεν $\chi = 25$.

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

Α΄ 247. Τὸ $\frac{1}{3}$ ἀριθμοῦ, ὅταν πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸ $\frac{1}{4}$ αὐτοῦ, δίδει γινόμενον 108. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμός.

248. Ἐὰν εἰς ἀριθμὸν προσθέσωμεν τὴν μονάδα 1, ἀφαιρέσωμεν δὲ ἔπειτα αὐτὴν ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ, τὸ γινόμενον τοῦ ἀθροίσματος τούτου ἐπὶ τὴν διαφορὰν ἰσοῦται μὲ 840. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμός.

249. Τὸ ἄθροισμα ἀριθμοῦ τινος καὶ τοῦ ἀντιστρόφου του εἶναι $2\frac{1}{6}$. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμός.

250. Νὰ εὑρεθοῦν τρεῖς ἀκέραιοι διαδοχικοὶ ἀριθμοί, τῶν ὁποίων τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν τρίτον ἰσοῦται μὲ τὸ τριπλάσιον τοῦ δευτέρου σὺν 3.

251. Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων δύο ἀκεραίων διαδοχικῶν ἀριθμῶν εἶναι 85. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι.

252. Τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος ἀριθμοῦ τινος καὶ τοῦ 1 ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τῆς διαφορᾶς τοῦ 7 ἀπὸ τοῦ διπλασίου τοῦ ἀριθμοῦ τούτου. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμὸς οὗτος.

Β΄ 253. Ἠγόρασέ τις ὕφασμα ἀντὶ 220 δραχμῶν. Πόσα μέτρα ἠγόρασεν, ὅταν γνωρίζωμεν, ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν μέτρων ἰσοῦται μὲ τὸ $\frac{1}{2}$ τῆς τιμῆς τοῦ ἑνὸς μέτρου μεῖον 1 ;

254. Εἷς ἐπώλησεν 8 ὀκάδας σίτου ἀντὶ χ δραχμῶν. Ἀλλ' ἐὰν ἐπώλει χ ὀκάδας σίτου θὰ ἐλάμβανε 392 δραχμάς. Πόσον ἀξίζει ἡ μία ὀκᾶ τοῦ σίτου ;

255. Ἐπρόκειτο νὰ μοιρασθοῦν 600 δραχμαὶ εἰς πτωχοὺς ἐξ ἴσου. Ἀλλ' ἐπειδὴ κατὰ τὴν διανομὴν ἀπουσίαζον 4, τὸ μερίδιον ἑκάστου τῶν ἄλλων ηὐξήθη κατὰ 5 δραχμάς. Πόσοι ἦσαν οἱ πτωχοί ;

256. Οἱ μαθηταὶ μιᾶς τάξεως ἀπεφάσισαν νὰ δώσουν εἰς ἔρανον ὑπὲρ τοῦ Ἐρυθροῦ Σταυροῦ 900 δραχμάς. Πρὸς τοῦτο δὲ ἕκαστος τῶν παρόντων θὰ κατέβαλλεν ἴσα χρήματα. Ἀλλ' ἐπειδὴ εἰς τὸν ἔρανον αὐτὸν συμμετέσχον καὶ 6 ἄλλοι μαθηταί, οἱ ὁποῖοι ἀπουσίαζον προηγουμένως, ἕκαστος μαθητὴς κατέβαλε 5 δραχμὰς ὀλιγώτερον. Πόσοι ἦσαν οἱ μαθηταί ;

257. Ἐξοφλεῖ τις χρέος 3600 δραχμῶν διὰ μηνιαίων δόσεων. Ἐὰν ἐπλήρωνε κατὰ μῆνα 60 δραχμὰς περισσότερον, τὸ χρέος θὰ ἐξωφλεῖτο κατὰ 5 μῆνας ἐνωρίτερον. Ποία εἶναι ἡ μηνιαία δόσις καὶ εἰς πόσους μῆνας θὰ ἐξοφλήσῃ τὸ χρέος του ;

258. Ἐπληρώθησαν 96 δραχμαὶ εἰς 14 ἐργάτας, ἄνδρας καὶ γυναῖκας. Ἔλαβε δὲ ἕκαστος ἀνὴρ τόσας δραχμάς, ὅσαι ἦσαν αἱ γυναῖκες καὶ ἑκάστη γυνὴ τόσας δραχμάς, ὅσοι ἦσαν οἱ ἄνδρες. Πόσοι ἦσαν οἱ ἄνδρες καὶ πόσαι αἱ γυναῖκες ;

Γ' 259. Δύο ποδηλάται ἀνεχώρησαν συγχρόνως ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου διὰ νὰ μεταβοῦν εἰς μίαν πόλιν ἀπέχουσαν 90 χιλιόμετρα. Ἡ ταχύτης τοῦ πρώτου εἶναι χ χιλιόμετρα τὴν ὥραν, ἡ δὲ ταχύτης τοῦ δευτέρου εἶναι $\chi+1$ χιλιόμετρα. Εἰς πόσον χρόνον θὰ διανύσῃ ἕκαστος ποδηλάτης τὴν ἀπόστασιν τῶν 90 χιλιομέτρων ; Ἐὰν δὲ ἡ διαφορὰ τῶν χρόνων εἶναι 1 ὥρα, ποία εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ χ ;

260. Δύο πόλεις Α καὶ Β ἀπέχουν μεταξύ των 150 χιλιόμετρα. Ἐκ τῆς πόλεως Α ἀνεχώρησαν συγχρόνως δύο αὐτοκίνητα διὰ νὰ φθάσουν εἰς τὴν πόλιν Β. Τὸ πρῶτον αὐτοκίνητον, τὸ ὁποῖον ἔχει ταχύτητα μεγαλυτέραν τῆς ταχύτητος τοῦ ἄλλου κατὰ 5 χιλιόμετρα τὴν ὥραν, ἔφθασεν εἰς τὴν πόλιν Β κατὰ μίαν ὥραν ἐνωρίτερον τοῦ ἄλλου. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ταχύτης ἑκάστου αὐτοκινήτου.

261. Ἓν ποταμόπλοιον ἀναχωρεῖ ἐκ τοῦ χωρίου Α, φθάνει εἰς τὸ Β καὶ ἐπανέρχεται εἰς τὸ Α μετὰ 16 ὥρας. Τὰ δύο χωρία ἀπέχουν 60 χλμ., ἡ δὲ ταχύτης τοῦ ρεύματος τοῦ ποταμοῦ εἶναι 2 χλμ. τὴν ὥραν. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἰδία ταχύτης τοῦ πλοίου.

Δ' 262. Εἷς ἐδάνεισε κεφάλαιον 10000 δραχμῶν. Μετὰ ἓν ἔτος τὸν τόκον αὐτοῦ προσέθεσεν εἰς τὸ κεφάλαιον καὶ τὸ ὅλον ποσὸν ἐτόκισε μὲ ἐπιτόκιον κατὰ μονάδα μεγαλύτερον τοῦ προηγουμένου. Ἐλάμβανε δὲ τότε ἐτήσιον τόκον 630 δραχμάς. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἀρχικὸν ἐπιτόκιον.

263. Ἐτόκισέ τις κεφάλαιον 5000 δραχμῶν. Μετὰ ἓν ἔτος τὸν τόκον αὐτοῦ προσέθεσεν εἰς τὸ κεφάλαιον καὶ τὸ ὅλον ποσὸν ἔμεινε τοκισμένον ἐπὶ ἓν ἔτος ἀκόμη μὲ τὸ αὐτὸ ἐπιτόκιον. Πρὸς ποῖον ἐπι-

τόκιον ἐτοκίσθη, γνωστοῦ ὄντος, ὅτι εἰς τὸ τέλος τῶν δύο ἐτῶν ἔλαβε τόκον ἐν ὅλῳ 408 δραχμάς;

Ε΄ 264. Δύο ἀριθμοὶ ἔχουν διαφορὰν 7 καὶ γινόμενον 30. Ποῖοι εἶναι οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι;

265. Τὸ πηλίκον δύο ἀριθμῶν εἶναι 3, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν εἶναι 90. Ποῖοι εἶναι οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι;

266. Τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν εἶναι 6, ἡ δὲ διαφορὰ τῶν ἀντιστρόφων των εἶναι $\frac{1}{6}$. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι.

267. Ὁ 20 καὶ δύο ἄλλοι ἀριθμοὶ ἀποτελοῦν συνεχῆ ἀναλογίαν. Ὁ δὲ 20 εἶναι ὁ μέσος ἀνάλογος, οἱ δὲ ἄλλοι ἔχουν διαφορὰν 9. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ δύο ἀριθμοί

268. Νὰ εὑρεθῇ διψήφιος ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὸ γινόμενον τῶν ψηφίων ἰσοῦται μὲ τὸ διπλάσιον τοῦ ἀθροίσματός των· ἐὰν δὲ τὰ ψηφία αὐτοῦ γραφοῦν κατ' ἀντίστροφον τάξιν, προκύπτει ἀριθμὸς μικρότερος κατὰ 27.

ΣΤ΄ 269. Ἀριθμός τις προσώπων ἐξώδευσεν εἰς ξενοδοχεῖον διὰ φαγητὸν 216 δραχμάς. Ἐὰν τὰ πρόσωπα ἦσαν κατὰ 3 περισσότερα καὶ ἐξώδευεν ἕκαστον 3 δραχμὰς ὀλιγώτερον, ὁ λογαριασμὸς θὰ ἀνήρχετο εἰς 225 δραχ. Πόσα ἦσαν τὰ πρόσωπα καὶ ποία ἡ δαπάνη ἑκάστου;

270. Νὰ εὑρεθῇ τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ χρυσοῦ καὶ τοῦ χαλκοῦ, ὅταν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ πρώτου εἶναι κατὰ 10,4 μεγαλύτερον τοῦ εἰδικοῦ βάρους τοῦ δευτέρου καὶ ὅτι κρᾶμα 28 γραμμαρίων χρυσοῦ μετὰ 11 γραμμαρίων χαλκοῦ ἔχει εἰδικὸν βάρος 14,4.

271. Δύο ἐργάται, ὅταν ἐργάζωνται ὁμοῦ, ἐκτελοῦν ἓν ἔργον εἰς 3 ὥρας. Ἐὰν ὅμως ὁ εἷς ἐξ αὐτῶν μόνος ἐκτελέσῃ τὸ ἥμισυ τοῦ ἔργου καὶ ὁ ἄλλος τὸ ἄλλο ἥμισυ, θὰ χρειασθοῦν ἐν ὅλῳ 8 ὥρας. Εἰς πόσας ὥρας ἕκαστος ἐργάτης ἤθελεν ἐκτελέσει μόνος του τὸ ἔργον;

Ζ΄ 272. Ἡ περίμετρος τετραγώνου εἶναι 40 μέτρα. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς διαγωνίου του.

273. Τὸ ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου εἶναι 35 τ. μ. Ἐὰν ἡ βάσις αὐτοῦ αὐξηθῇ κατὰ 3 μέτρα, τὸ δὲ ὕψος ἐλαττωθῇ κατὰ 3 μέτρα, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ νέου ὀρθογωνίου εἶναι 20 τ. μ. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ διαστάσεις τοῦ πρώτου ὀρθογωνίου.

274. Αἱ διαστάσεις ὀρθογωνίου ἔχουν λόγον 3. Εἶναι δὲ τοῦτο ἰσοδύναμον μὲ τρίγωνον ἔχον βάσιν 24 μ. καὶ ὕψος 16 μ. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ διαστάσεις τοῦ ὀρθογωνίου.

275. Ὀρθογωνίου τριγώνου τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας εἶναι 51 μέτρα, ἡ δὲ ὑποτείνουσα κατὰ 3 μ. μεγαλυτέρα τῆς μεγαλυτέρας τῶν ἄλλων πλευρῶν. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου τούτου.

276. Ὀρθογώνιον εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον διαμέτρου 25 μ. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ διαστάσεις αὐτοῦ, ὅταν γνωρίζωμεν, ὅτι ἔχουν διαφορὰν 5 μ.

277. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ τρεῖς πλευραὶ ὀρθογωνίου τριγώνου, τοῦ ὁποίου ἡ περίμετρος εἶναι 24 μ. καὶ τὸ ἐμβαδὸν 24 τ. μ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΑΝΑΓΟΜΕΝΑΙ ΕΙΣ ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΟΥΣ

156. Διτετράγωνοι ἐξισώσεις.—Αἱ ἐξισώσεις τῆς μορφῆς

$$\alpha\chi^4+\beta\chi^2+\gamma=0$$

παρατηροῦμεν, ὅτι εἶναι τετάρτου βαθμοῦ καὶ ὅτι περιέχουν μόνον τὰς ἀρτίας δυνάμεις τοῦ ἀγνώστου. Λέγονται δὲ διὰ τοῦτο **διτετράγωνοι**.

Ἡ λύσις τῶν διτετραγώνων ἐξισώσεων ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν τῶν ἐξισώσεων τοῦ δευτέρου βαθμοῦ, ὡς ἑξῆς φαίνεται.

Ἔστω πρὸς λύσιν ἡ ἐξίσωσις $\chi^4-29\chi^2+100=0$ (1)

Ἐὰν θέσωμεν $\chi^2=\psi$, θὰ εἶναι $\chi^4=\psi^2$.

Ὥστε ἡ ἐξίσωσις (1) γίνεται $\psi^2-29\psi+100=0$.

Λύοντες ἤδη τὴν δευτεροβάθμιον αὐτὴν ἐξίσωσιν, εὑρίσκομεν:

$$\psi'=25 \quad \text{καὶ} \quad \psi''=4$$

ὥστε, ἢ $\chi^2=25$, ὁπότε $\chi=\pm\sqrt{25}=\pm5$

ἢ $\chi^2=4$, ὁπότε $\chi=\pm2$.

Ὥστε αἱ ῥίζαι τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶναι αἱ ἑξῆς τέσσαρες:

$$\chi_1=5, \quad \chi_2=-5, \quad \chi_3=2, \quad \chi_4=-2.$$

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω, ἡ λύσις τῆς ἐξισώσεως

$$\alpha\chi^4+\beta\chi^2+\gamma=0$$

ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν τῆς ἐξισώσεως

$$\alpha\psi^2+\beta\psi+\gamma=0, \quad \text{ὅπου} \quad \psi=\chi^2.$$

Ἐὰν δὲ αἱ ῥίζαι τῆς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως εἶναι ψ' καὶ ψ'', αἱ ῥίζαι τῆς διτετραγώνου εἶναι

$$\chi_1=+\sqrt{\psi'}, \quad \chi_2=-\sqrt{\psi'}, \quad \chi_3=+\sqrt{\psi''}, \quad \chi_4=-\sqrt{\psi''}.$$

Π. χ. νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\chi^4-7\chi^2-144=0$.

Ἐὰν θέσωμεν $\chi^2=\psi$, ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γίνεται

$$\psi^2-7\psi-144=0,$$

τῆς ὁποίας αἱ ρίζαι εἶναι 16 καὶ —9. Ἔχομεν λοιπὸν

ἢ $\chi^2 = 16$, ὁπότε $\chi = \pm 4$

ἢ $\chi^2 = -9$, ὁπότε $\chi = \pm 3i$.

Ὥστε αἱ ρίζαι τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶναι αἱ

$$\chi_1 = 4, \quad \chi_2 = -4, \quad \chi_3 = 3i, \quad \chi_4 = -3i.$$

157. Εἶδος τῶν ριζῶν τῆς διτετραγώνου ἐξισώσεως.— Διὰ νὰ ἴδωμεν, ἂν μία διτετράγωνος ἐξίσωσις ἔχῃ ὅλας τὰς ρίζας της ἢ μερικὰς μόνον πραγματικὰς ἢ φανταστικάς, θὰ ἐξετάσωμεν τὰς ρίζας τῆς δευτεροβαθμίου, ἡ ὁποία προκύπτει ἐξ αὐτῆς. Οὕτως, ἐὰν πρὸς τὸν σκοπὸν τοῦτον μᾶς δοθῇ π.χ. ἡ ἐξίσωσις $\chi^4 - 5\chi^2 + 4 = 0$, θὰ ἐξετάσωμεν τὰς ρίζας τῆς ἐξισώσεως $\psi^2 - 5\psi + 4 = 0$. Ἐπειδὴ δὲ τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς αἱ ρίζαι εἶναι πραγματικαὶ καὶ ἄνισοι καὶ ἀμφότεραι θετικαί, συνάγομεν ὅτι καὶ αἱ 4 ρίζαι τῆς διτετραγώνου εἶναι πραγματικαί. Διὰ δὲ τὴν ἐξίσωσιν $\chi^4 + 8\chi^2 - 9 = 0$ ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι ἐκ τῶν 4 ριζῶν αὐτῆς αἱ 2 εἶναι πραγματικαὶ καὶ αἱ ἄλλαι 2 φανταστικαί, διότι ἐκ τῶν ριζῶν τῆς δευτεροβαθμίου $\psi^2 + 8\psi - 9 = 0$, αἱ ὁποῖαι εἶναι πραγματικαί, ἡ μία εἶναι θετικὴ καὶ ἡ ἄλλη ἀρνητική. Τέλος, διὰ τὴν ἐξίσωσιν $\chi^4 + 5\chi^2 + 4 = 0$ εὑρίσκομεν, ὅτι καὶ αἱ 4 ρίζαι εἶναι φανταστικαί, διότι αἱ ρίζαι τῆς $\psi^2 + 5\psi + 4 = 0$ εἶναι ἀμφότεραι ἀρνητικαί.

158. Ἀνάλυσις διτετραγώνου τριωνύμου εἰς γινόμενον πρωτοβαθμίων παραγόντων.—Τὸ τριώνυμον $\alpha\chi^4 + \beta\chi^2 + \gamma$ ἀναλύεται εἰς γινόμενον πρωτοβαθμίων παραγόντων μὲ τὸν ἴδιον τρόπον, μὲ τὸν ὁποῖον ἀναλύεται τὸ τριώνυμον τοῦ δευτέρου βαθμοῦ (§ 152).

Οὕτως, ἐὰν π.χ. ἔχωμεν τὸ τριώνυμον $4\chi^4 - 37\chi^2 + 9$ καὶ θέσωμεν $\chi^2 = \psi$, τοῦτο τρέπεται εἰς τὸ $4\psi^2 - 37\psi + 9$. Ἐπειδὴ δὲ αἱ ρίζαι αὐτοῦ εἶναι 9 καὶ $\frac{1}{4}$, ἔχομεν κατὰ τὰ γνωστά:

$$4\psi^2 - 37\psi + 9 = 4(\psi - 9)\left(\psi - \frac{1}{4}\right)$$

ἤτοι $$4\chi^4 - 37\chi^2 + 9 = 4(\chi^2 - 3^2)\left[\chi^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right]$$

ἤ, τέλος $$4\chi^4 - 37\chi^2 + 9 = 4(\chi - 3)(\chi + 3)\left(\chi - \frac{1}{2}\right)\left(\chi + \frac{1}{2}\right).$$

Ἀλλ' ἤδη παρατηροῦμεν, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ -3, $+3$, $-\frac{1}{2}$ καὶ $+\frac{1}{2}$ εἶναι αἱ ρίζαι τοῦ δοθέντος διτετραγώνου τριωνύμου. Γενικῶς δέ, ἐὰν αἱ ρίζαι τοῦ τριωνύμου $\alpha\chi^4+\beta\chi^2+\gamma$ εἶναι $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4$, θὰ εἶναι $\alpha\chi^4+\beta\chi^2+\gamma=\alpha(\chi-\chi_1)(\chi-\chi_2)(\chi-\chi_3)(\chi-\chi_4)$.

Ἀσκήσεις.

278. Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις

1) $\chi^4-26\chi^2+25=0$ 4) $36\chi^4-13\chi^2+1=0$
2) $\chi^4-17\chi^2+16=0$ 5) $36\chi^4+7\chi^2-4=0$
3) $\chi^4+5\chi^2-36=0$ 6) $10\chi^4-21=\chi^2$

279. Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις

1) $(\chi^2+3)(\chi^2+2)=42$ 4) $\dfrac{\chi^2-11}{7}+\dfrac{2}{\chi^2-9}=1$
2) $(\chi^2+4)(\chi^2-3)=8$ 5) $\dfrac{\chi^2+2}{11}+\dfrac{32}{\chi^2-32}=7$
3) $(\chi^2+8)^2+(\chi^2-5)^2=97$

280. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμὸς τῶν πραγματικῶν ριζῶν τῶν κάτωθι ἐξισώσεων πρὶν ἢ λυθοῦν

1) $\chi^4-18\chi^2+65=0$ 3) $15\chi^4+13\chi^2+2=0$
2) $\chi^4+9\chi^2-136=0$ 4) $\chi^4-14\chi^2+49=0$.

281. Νὰ ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενα πρωτοβαθμίων παραγόντων τὰ τριώνυμα :

1) $\chi^4-41\chi^2+400$ 3) $36\chi^4+143\chi^2-4$
2) $400\chi^4-9\chi^2-1$ 4) $\chi^4-3\chi^2+2$.

282. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἐξισώσεις, αἱ ὁποῖαι ἔχουν ρίζας τάς :

1) $\pm 5, \quad \pm 2$ 3) $\pm 3, \quad \pm\dfrac{2}{3}$ 5) $\pm 5, \quad \pm\sqrt{2}$
2) $\pm 1, \quad \pm\dfrac{1}{4}$ 4) $\pm\dfrac{1}{2} \quad \pm\dfrac{3}{4}$ 6) $\pm\sqrt{7}, \quad \pm 5i$.

159. Ἐξισώσεις ἔχουσαι ριζικὰ δευτέρας τάξεως.—1ον) Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\chi-\sqrt{\chi}=2$. Ἐνταῦθα παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ ἐξίσωσις αὐτὴ ἔχει τετραγωνικὴν ρίζαν, ὑπὸ τὴν ὁποίαν ὑπάρχει ὁ ἄγνωστος χ. Διὰ νὰ λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν (ὡς καὶ πᾶσαν ἄλλην, ἡ ὁποία ἔχει ἓν ριζικὸν δευτέρας τάξεως), μετασχηματίζομεν αὐτὴν εἰς ἄλλην, ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ τὸ ριζικὸν εἰς τὸ ἓν μέλος καὶ κατόπιν τῆς νέας ἐξισώσεως ὑψοῦμεν καὶ τὰ δύο μέλη εἰς τὸ τετράγωνον.
Ἔχομεν δὲ οὕτω :

$$\chi-2=\sqrt{\chi} \quad \text{καὶ} \quad (\chi-2)^2=\chi \quad \text{ἢ} \quad \chi^2-5\chi+4=0.$$

Λύοντες ἤδη αὐτήν, εὑρίσκομεν :

$$\chi'=4, \qquad \chi''=1.$$

Ἐὰν ἤδη κάμωμεν τὴν ἐπαλήθευσιν εἰς τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν, παρατηροῦμεν, ὅτι
$$4-\sqrt{4}=4-2=2,$$
$$1-\sqrt{1}=1-1=0$$
καὶ ὄχι ἴσον μὲ 2. Τοῦτο δὲ συμβαίνει διότι κατὰ τὸ Θ. 144 ἡ ἐξίσωσις
$$\chi^2-5\chi+4=0$$
εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν δοθεῖσαν καὶ πρὸς τήν :

$X+\sqrt{\chi}=2$
$$\chi+\sqrt{\chi}=2,$$
καὶ πράγματι, διότι $\quad 1+\sqrt{1}=1+1=2.$

Σημείωσις. Αἱ ἐξισώσεις $\chi-\sqrt{\chi}=2$ καὶ $\chi+\sqrt{\chi}=2$ λέγονται συζυγεῖς.

2ον) Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\quad \chi+\sqrt{2\chi^2-2\chi-11}=4.$

Ἐργαζόμενοι ὁμοίως ὡς ἄνω εὑρίσκομεν :
$$\sqrt{2\chi^2-2\chi-11}=4-\chi, \quad 2\chi^2-2\chi-11=(4-\chi)^2 \quad \text{ἢ} \quad \chi^2+6\chi-27=0.$$
Τῆς τελευταίας δὲ αὐτῆς ἐξισώσεως ῥίζαι εἶναι αἱ :
$$\chi'=3, \quad \chi''=-9.$$

Ἐπαληθεύουν δὲ ἀμφότεραι τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν. Ἑπομένως ἡ συζυγὴς πρὸς αὐτὴν
$$\chi-\sqrt{2\chi^2-2\chi-11}=4$$
οὐδεμίαν ἔχει λύσιν.

3ον) Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις
$$\sqrt{2\chi+1}-\sqrt{\chi-3}=2.$$
Ὑψοῦντες εἰς τὸ τετράγωνον ἀμφότερα τὰ μέλη εὑρίσκομεν :
$$2\chi+1+\chi-3-2\sqrt{(2\chi+1)(\chi-3)}=4$$
ἤτοι
$$3\chi-6=2\sqrt{(2\chi+1)(\chi-3)} \qquad (1)$$
ὑψοῦντες δὲ πάλιν εἰς τὸ τετράγωνον εὑρίσκομεν :
$$9\chi^2-36\chi+36=4(2\chi+1)(\chi-3)$$
ἤτοι
$$\chi^2-16\chi+48=0 \qquad (2)$$
Λύοντες δὲ τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν εὑρίσκομεν τὰς ῥίζας :
$$\chi'=12, \quad \chi''=4.$$

Ἡ ἐξίσωσις (2) εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν (1) καὶ πρὸς τὴν συζυγῆ αὐτῆς :
$$3\chi-6=-2\sqrt{(2\chi+1)(\chi-3)} \qquad (3)$$
Ἐξ αὐτῶν δὲ ἡ μὲν (1) εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὰς ἐξισώσεις :
$$\sqrt{2\chi+1}-\sqrt{\chi-3}=2, \qquad -\sqrt{2\chi+1}+\sqrt{\chi-3}=2$$
ἡ δὲ (3) εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τάς :
$$-\sqrt{2\chi+1}-\sqrt{\chi-3}=2, \qquad \sqrt{2\chi+1}+\sqrt{\chi-3}=2.$$

Ὥστε ἡ ἐξίσωσις (2) εἶναι ἰσοδύναμος καὶ πρὸς τὰς τέσσαρας αὐτὰς ἐξισώσεις. Ἐπειδὴ δὲ αἱ εὑρεθεῖσαι ρίζαι $\chi'=12$, $\chi''=4$ ἐπαληθεύουν τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν, ἕπεται ὅτι αἱ ἄλλαι τρεῖς ἐξισώσεις οὐδεμίαν ἔχουν λύσιν.

Ἀσκήσεις.

283. Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις

$$\sqrt{x+7}=4 \qquad \sqrt{8-x}=9 \qquad \frac{1}{3}\sqrt{x+12}=13$$

$$\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}=2 \qquad \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}=3 \qquad \frac{2+3\sqrt{x}}{3-2\sqrt{x}}=5$$

$$\sqrt{x+5}=x-1 \qquad \sqrt{x+4}=x-2 \qquad \sqrt{11-x}=x+1$$

$$x-2\sqrt{x}-15=0 \qquad x-6\sqrt{x}+5=0 \qquad x-7\sqrt{x}+10=0$$

284. Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις

$$\sqrt{x+7}=\sqrt{x+2}+1 \qquad \sqrt{x-1}=\sqrt{x+6}-1$$

$$\sqrt{x-3}+\sqrt{x+9}=6 \qquad \sqrt{2x}+2\sqrt{x+2}=2$$

$$\sqrt{x+7-\sqrt{5(x-2)}}=3 \qquad \sqrt{3x+7+3\sqrt{2x-4}}=7$$

ΒΙΒΛΙΟΝ Δ΄

ΠΕΡΙ ΠΡΟΟΔΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι

Α΄. ΠΡΟΟΔΟΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑΙ

160. **Ὁρισμοί.**—Διὰ τὴν φυσικὴν σειρὰν τῶν ἀριθμῶν 1, 2, 3, 4, κτλ. (1) γνωρίζομεν, ὅτι καθεὶς τούτων γίνεται ἀπὸ τὸν προηγούμενον αὐτοῦ διὰ τῆς προσθέσεως τῆς μονάδος 1. Ὁμοίως, καθεὶς τῶν ἀριθμῶν τῆς σειρᾶς τῶν περιττῶν ἀριθμῶν 1, 3, 5, 7, 9 κτλ. (2) γίνεται ἀπὸ τὸν προηγούμενον αὐτοῦ διὰ τῆς προσθέσεως τοῦ ἀριθμοῦ 2. Ἐκ δὲ τῆς σειρᾶς τῶν ἀρτίων ἀριθμῶν 20, 18, 16, 14 κτλ. (3) παρατηροῦμεν, ὅτι καθεὶς τούτων γίνεται ἀπὸ τὸν προηγούμενον διὰ τῆς προσθέσεως τοῦ —2. Αἱ τοιαῦται σειραὶ ἀριθμῶν λέγονται **ἀριθμητικαὶ πρόοδοι**. Ὥστε: ***Ἀριθμητικὴ πρόοδος λέγεται σειρὰ ἀριθμῶν, τῶν ὁποίων ἕκαστος γίνεται ἐκ τοῦ προηγουμένου του διὰ τῆς προσθέσεως ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.***

Οἱ ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι ἀποτελοῦν πρόοδον, λέγονται **ὅροι** τῆς προόδου. Ὁ δὲ σταθερὸς ἀριθμός, ὅστις προστιθέμενος εἰς ἕκαστον ὅρον σχηματίζει τὸν ἑπόμενον, λέγεται **λόγος** τῆς προόδου. Οὕτω λόγος τῆς ἄνω προόδου (1) εἶναι ἡ μονὰς 1, τῆς προόδου (2) εἶναι ὁ 2 καὶ τῆς (3) εἶναι ὁ —2.

Ὁμοίως ἡ σειρὰ 19, 16, 13, 10, 7, κτλ. (4) εἶναι ἀριθμητικὴ πρόοδος καὶ λόγος αὐτῆς εἶναι ὁ —3. Διότι:

$$16-19=13-16=10-13=\text{κλπ.}=-3.$$

Ἐπειδὴ δὲ ἡ διαφορὰ δύο διαδοχικῶν ὅρων μιᾶς προόδου ἀριθμητικῆς εἶναι σταθερὰ (καὶ ἴση πρὸς τὸν λόγον), αἱ ἀριθμητικαὶ πρόοδοι λέγονται καὶ πρόοδοι **κατὰ διαφοράν.**

Οἱ ὅροι τῆς προόδου (1), ὡς καὶ τῆς (2), προβαίνουν αὐξανόμενοι, διότι ὁ λόγος αὐτῶν εἶναι θετικὸς ἀριθμὸς καὶ διὰ τοῦτο λέγονται **αὔξουσαι,** ἐνῷ ἡ πρόοδος (3), ὡς καὶ ἡ (4), τῶν ὁποίων οἱ ὅροι προβαίνουν ἐλαττούμενοι, διότι ὁ λόγος αὐτῶν εἶναι ἀρνητικός, λέγονται **φθίνουσαι.**

161. Εὕρεσις τοῦ ὅρου τοῦ κατέχοντος ὡρισμένην τάξιν ἐν τῇ προόδῳ.—Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸν 25ον ὅρον τῆς ἀριθμητικῆς προόδου, τῆς ὁποίας πρῶτος ὅρος εἶναι ὁ 7 καὶ λόγος ὁ $+3$.

Ἀλλὰ τότε θὰ εἶναι πρῶτος ὅρος ὁ 7, δεύτερος ὁ $7+3$, τρίτος ὁ $7+3+3=7+3.2$, τέταρτος ὁ $7+3+3+3=7+3.3$ καὶ προφανῶς 25ος εἶναι ὁ $7+3.24=79$. Γενικῶς δέ, ἂν ὁ πρῶτος ὅρος παρασταθῇ διὰ τοῦ α καὶ ὁ λόγος διὰ τοῦ λ, ὁ δεύτερος θὰ εἶναι $\alpha+\lambda$, ὁ τρίτος $\alpha+2\lambda$, ὁ τέταρτος $\alpha+3\lambda$ καὶ ὁ $\nu^{ος}$, τὸν ὁποῖον ἂς παραστήσωμεν διὰ τοῦ τ, θὰ εἶναι :

$$\alpha+(\nu-1)\lambda, \quad \text{ἤτοι} \quad \tau=\alpha+(\nu-1)\lambda. \quad \text{Ὥστε :}$$

Ἕκαστος ὅρος ἀριθμητικῆς τινος προόδου ἰσοῦται μὲ τὸν πρῶτον ὅρον αὐτῆς αὐξηθέντα κατὰ τὸ γινόμενον τοῦ λόγου ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν προηγουμένων αὐτοῦ ὅρων.

Οὕτως ὁ 15ος ὅρος τῆς προόδου 3, 5, 7, 9, κτλ. εἶναι ὁ $3+14.2=31$, ὁ δὲ 31ος ὅρος τῆς προόδου 70, 65, 60, κτλ. εἶναι ὁ $70+30.(-5)=-80$.

Ἐὰν δὲ γνωρίζωμεν, ὅτι π.χ. ὁ 5ος ὅρος μιᾶς προόδου εἶναι ὁ -2 καὶ ὁ 10ος εἶναι ὁ 8 καὶ ζητῆται ἡ πρόοδος, ἔχομεν τὸ σύστημα :

$$\alpha+4\lambda=-2$$
$$\alpha+9\lambda=\ \ 8$$

ἐκ τοῦ ὁποίου, λύοντες, εὑρίσκομεν :

$5\lambda=10$, ἤτοι $\lambda=2$ καὶ $\alpha+8=-2$, ἤτοι $\alpha=-10$. Ὥστε ἡ ζητουμένη πρόοδος εἶναι ἡ $-10, -8, -6$ κτλ.

Ἀσκήσεις.

285. Ποῖος εἶναι ὁ λόγος εἰς τὰς κάτωθι ἀριθμητικὰς προόδους :

3,	11,	19,	27 . . . .
100,	89,	78,	67 . . . .
	0,5,	0,75,	1 . . . .
$3\alpha-2\beta$,	$4\alpha-5\beta$,	$5\alpha-8\beta$	

286. Νὰ εὑρεθῇ:

ὁ $15^{ος}$ ὅρος τῆς ἀριθμητικῆς προόδου	3,	7,	11 . . . .
ὁ $20^{ὸς}$ » » » »	9,	6,	3 . . . .
ὁ $40^{ὸς}$ » » » »	3,	-1,	-5 . . . .
ὁ $35^{ος}$ » » » »	$\frac{1}{4}$,	3,	$5\frac{3}{4}$ . . . .
ὁ $ν^{ὸς}$ » » » »	1,	3,	5 . . . .
ὁ $10^{ος}$ » » » »	$α+β$,	$2α$,	$3α-β$ . . . .
ὁ $21^{ος}$ » » » »	$2α-β$,	$2α$,	$2α+β$ . . . .

287. Νὰ εὑρεθῇ ὁ πρῶτος ὅρος ἀριθμητικῆς προόδου, εἰς τὴν ὁποίαν εἶναι $τ=51$, $ν=15$ καὶ $λ=4$.

288. Τῆς ἀριθμητικῆς προόδου 40, $41\frac{1}{2}$, 43, κτλ. ποίαν τάξιν κατέχει ὁ ὅρος 52;

289. Ἀριθμητικῆς προόδου ὁ $3^{ος}$ ὅρος εἶναι -14 καὶ ὁ $15^{ος}$ εἶναι 46. Νὰ εὑρεθῇ ἡ πρόοδος.

290. Ὁ $5^{ος}$ ὅρος ἀριθμητικῆς προόδου εἶναι 13 καὶ ὁ $9^{ος}$ εἶναι 25. Νὰ εὑρεθῇ ὁ $7^{ος}$ ὅρος αὐτῆς.

291. Ὁ ἐτήσιος μισθὸς ὑπαλλήλου, ὅστις ἦτο ἀρχικῶς 9000 δραχμαί, ηὐξάνετο μεθ' ἕκαστον ἔτος κατὰ 600 δραχμάς. Ἐκ παραλλήλου αἱ ἐτήσιαι δαπάναι αὐτοῦ, αἱ ὁποῖαι ἦσαν ἀρχικῶς 7500 δραχμαί, ηὐξάνοντο μεθ' ἕκαστον ἔτος κατὰ 750 δραχμάς. Κατὰ ποῖον ἔτος αἱ δαπάναι του ἦσαν ἴσαι μὲ τὸν μισθόν του;

162. Ἄθροισμα τῶν ὅρων ἀριθμητικῆς προόδου.—Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα Κ τῶν ἀριθμῶν 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, οἱ ὁποῖοι, ὅπως βλέπομεν, ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον. Ἀλλ' ἐνταῦθα παρατηροῦμεν, ὅτι:

$$3+17=20, \qquad 5+15=20 \text{ κ.ο.κ.}$$

Ἑπομένως, ἂν γράψωμεν:

$$\begin{array}{l} Κ=3+5+7+9+11+13+15+17 \\ Κ=17+15+13+11+9+7+5+3 \\ \hline \end{array}$$

ἔχομεν

$$2Κ=20+20+20+20+20+20+20+20=20.8$$

$$\text{καὶ} \quad Κ=\frac{20.8}{2}=80.$$

Ἔστω ἤδη, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ $α, β, γ, \ldots ρ, σ, τ$, τῶν ὁποίων τὸ πλῆθος εἶναι $ν$, ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον μὲ λόγον $λ$ καὶ ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα Κ τῶν ὅρων αὐτῶν. Ἀλλ' ἡ ἀνωτέρω πρόοδος γράφεται:

$$α, \quad α+λ, \quad α+2λ, \ldots τ-2λ, \quad τ-λ, \quad τ.$$

Ὥστε ἔχομεν

$$\begin{array}{l} K=\alpha+(\alpha+\lambda)+(\alpha+2\lambda)+\ldots\ldots+(\tau-2\lambda)+(\tau-\lambda)+\tau \\ K=\tau+(\tau-\lambda)+(\tau-2\lambda)+\ldots\ldots+(\alpha+2\lambda)+(\alpha+\lambda)+\alpha \\ \hline 2K=(\alpha+\tau)+(\alpha+\tau)+(\alpha+\tau)+\ldots\ldots+(\alpha+\tau)+(\alpha+\tau)+(\alpha+\tau) \end{array}$$

ἤτοι $2K=(\alpha+\tau).\nu$ καὶ $K=\dfrac{(\alpha+\tau).\nu}{2}$ (1)

ἤτοι : *Τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων πάσης ἀριθμητικῆς προόδου εὑρίσκεται, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν ἄκρων ὅρων ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν ὅρων.*

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω δὲ συνάγεται καὶ ἡ ἰδιότης, κατὰ τὴν ὁποίαν *ἐν πάσῃ ἀριθμητικῇ προόδῳ τὸ ἄθροισμα δύο ὅρων ἐξ ἴσου ἀπεχόντων ἀπὸ τῶν ἄκρων εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἄκρων.*

Σημείωσις α΄. Ἐὰν ἐν τῷ τύπῳ (1) ἀντικαταστήσωμεν τὸ τ διὰ τοῦ ἴσου του $\alpha+(\nu-1)\lambda$, λαμβάνομεν :

$$K=\frac{[\alpha+\alpha+(\nu-1)\lambda]\nu}{2}=\frac{2\alpha\nu+\nu(\nu-1)\lambda}{2}$$

ἤτοι $K=\alpha\nu+\dfrac{\nu(\nu-1)}{2}.\lambda$ (2)

Διὰ τοῦ τύπου (2) εὑρίσκομεν τὸ Κ, ὅταν γνωρίζωμεν τὰ α, ν καὶ λ.

Πδ. 1) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἀπὸ τοῦ 1 μέχρι τοῦ 500. Τότε ἔχομεν $\alpha=1$, $\tau=500$ καὶ $\nu=500$. Ὥστε εἶναι :

$$K=\frac{(1+500).500}{2}=125250.$$

2) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα 51 ὅρων τῆς ἀριθμητικῆς προόδου 3, 7, 11, 15 κτλ.

Κατὰ τὸν τύπον (2) ἔχομεν :

$$K=3.51+\frac{51.50}{2}.4=153+5100,$$

ἤτοι $K=5253.$

Σημείωσις β΄. Ἐπὶ τῆς ἀνωτέρω ἰδιότητος περὶ τοῦ ἀθροίσματος δύο ὅρων ἐξ ἴσου ἀπεχόντων ἀπὸ τῶν ἄκρων κτλ. σημειοῦμεν, ὅτι, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν ὅρων εἶναι περιττός, ὁ μεσαῖος ὅρος ἰσοῦται μὲ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν ἄκρων. Οὕτως εἰς τὴν πρόοδον :

1, 4, 7, 10, 13, 16, 19 εἶναι $10=\dfrac{19+1}{2}$.

Ἑπομένως, ὅταν οἱ ἄκροι ὅροι εἶναι π.χ. 2 καὶ 340 καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν ὅρων εἶναι 31, ὁ 16ος ὅρος εἶναι ὁ

$$\frac{2+340}{2}=171$$

Λέγεται δὲ ὁ 171 **ἀριθμητικὸν μέσον** τῶν ἀριθμῶν 2 καὶ 340. Οὕτως ἀριθμητικὸν μέσον τῶν ἀριθμῶν 3 καὶ 15 εἶναι ὁ

$$\frac{3+15}{2}=9.$$

163. Παρεμβολὴ ἀριθμητικῶν μέσων.—Εἰς τὴν ἀνωτέρω πρόοδον 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19 παρατηροῦμεν, ὅτι ὁ ὅρος 4 εἶναι ἀριθμητικὸν μέσον τῶν ἑκατέρωθεν αὐτοῦ ὅρων 1 καὶ 7, ἐπίσης, ὅτι ὁ 7 εἶναι ἀριθμητικὸν μέσον τῶν 4 καὶ 10, καὶ ὁ 16 εἶναι ἀριθμητικὸν μέσον τῶν 13 καὶ 19. Ὥστε δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν, ὅτι μεταξὺ 1 καὶ 19 ὑπάρχουν 5 ἀριθμητικὰ μέσα. Ἤδη παρατηροῦμεν, ὅτι, ἐὰν μᾶς ζητηθῇ νὰ παρεμβάλωμεν μεταξὺ 1 καὶ 19 πέντε ἀριθμητικὰ μέσα, ἤτοι 5 ὅρους, οἱ ὁποῖοι μετὰ τῶν 1 καὶ 19 νὰ ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον, θὰ σκεφθῶμεν ὡς ἑξῆς: Οἱ 5 αὐτοὶ ὅροι μετὰ τῶν 1 καὶ 19 κάμνουν $5+2=7$ ὅρους. Ὥστε εἶναι $19=1+(7-1).\lambda$· ἐξ αὐτῆς δὲ λαμβάνομεν $\lambda=\frac{19-1}{6}=3$. Ὥστε ἡ ζητουμένη πρόοδος εἶναι:

$$1,\quad 4,\quad 7,\quad 10,\quad 13,\quad 16,\quad 19.$$

Γενικῶς δέ, ἐὰν μεταξὺ α καὶ β θέλωμεν νὰ παρεμβάλωμεν ν ἀριθμητικὰ μέσα, τὸ πλῆθος τῶν ὅρων τῆς ζητουμένης προόδου εἶναι $\nu+2$. Ὥστε εἶναι $$\beta=\alpha+(\nu+1)\lambda,$$ ἐξ ἧς λαμβάνομεν $$\lambda=\frac{\beta-\alpha}{\nu+1}$$ ἄρα ἡ ζητουμένη πρόοδος εἶναι:

$$\alpha,\quad \alpha+\frac{\beta-\alpha}{\nu+1},\quad \alpha+2\,\frac{\beta-\alpha}{\nu+1}\ldots$$

Οὕτως, ὅταν ζητῆται νὰ παρεμβληθοῦν μεταξὺ 2 καὶ 10 τρία ἀριθμητικὰ μέσα, θὰ ἔχωμεν $\lambda=\frac{10-2}{3+1}=2$ καὶ ἡ πρόοδος ἡ ζητουμένη θὰ εἶναι $$2,\quad 4,\quad 6,\quad 8,\quad 10.$$

Ἀσκήσεις

292. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἀπὸ τοῦ 1 μέχρι τοῦ 300 καὶ γενικῶς ἀπὸ τοῦ 1 μέχρι τοῦ ν.

293. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν 100 περιττῶν ἀριθμῶν ἀπὸ τοῦ

1 καὶ ἐφεξῆς κατὰ σειρὰν καὶ γενικῶς νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν περιττῶν ἀριθμῶν ἀπὸ τοῦ 1 μέχρι τοῦ ν.

294. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν 43 ὅρων ἀριθμητικῆς προόδου, τῆς ὁποίας εἶναι $\alpha=42$ καὶ $\tau=198$.

295. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα

τῶν 20 πρώτων ὅρων τῆς ἀριθ. προόδου 1, 4, 7 . . . .

» 13 » » » » » 18, 12, 6 . . . .

» 25 » » » » » $15\frac{1}{3}$, $14\frac{2}{3}$, 14 . . . .

296. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν πολλαπλασίων τοῦ 5 τῶν περιεχομένων μεταξὺ τοῦ 1 καὶ τοῦ 200.

297. Ὁ πρῶτος ὅρος ἀριθμητικῆς προόδου εἶναι 3 καὶ ὁ 30ὸς εἶναι 148. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν 30 πρώτων ὅρων αὐτῆς.

298. Χρέος τι ἐπληρώθη διὰ μηνιαίων δόσεων ἐντὸς ἑνὸς ἔτους. Ἡ πρώτη μηνιαία δόσις ἦτο 500 δρχ., ἡ δευτέρα 550 δρχ., ἡ τρίτη 600 δρχ. κ.ο.κ. Εἰς πόσας δραχμὰς ἀνήρχετο τὸ χρέος ;

299. Γνωρίζομεν ἐκ τῆς Φυσικῆς, ὅτι σῶμά τι βαρύ, ἀφιέμενον ἐλεύθερον ἐξ ὕψους, διανύει εἰς τὸ πρῶτον δευτερόλεπτον 4,9 μέτρα καὶ εἰς ἕκαστον ἑπόμενον 9,8 μέτρα περισσότερον ἀπὸ ὅ,τι διήνυσεν εἰς τὸ προηγούμενον. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος, ἐξ οὗ κατέπεσε σῶμά τι εἰς τὴν Γῆν, ὅταν ὁ χρόνος τῆς πτώσεως εἶναι 12″. (Ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀέρος δὲν λαμβάνεται ὑπ᾿ ὄψιν).

300. Σῶμά τι ἀφίεται ἐλεύθερον ἐξ ὕψους 490 μέτρων. Μετὰ πόσα δευτερόλεπτα θὰ φθάσῃ εἰς τὴν Γῆν ;

301. Ἀριθμητικῆς προόδου εἶναι $\alpha=7$, $\nu=12$ καὶ $K=414$. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τ ὡς καὶ ὁ λ.

302. Ἀριθμητικῆς προόδου εἶναι $\alpha=5$, $\tau=49$ καὶ $K=621$. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ν καὶ ὁ λ.

303. Τὸ ἄθροισμα τριῶν ἀριθμῶν ἐν ἀριθμητικῇ προόδῳ εἶναι 9 καὶ τὸ τῶν τετραγώνων των εἶναι 45. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι.

304. Αἱ ἐξισώσεις $\tau=\alpha+(\nu-1)\lambda$ καὶ $K=\frac{(\alpha+\tau)\nu}{2}$ συνδέουν μεταξύ των τοὺς πέντε ἀριθμοὺς α, λ, ν, τ καὶ Κ, ἐκ τῶν ὁποίων, ὡς γνωρίζομεν, εὑρίσκονται οἱ δύο, ὅταν οἱ ἄλλοι τρεῖς εἶναι γνωστοί. Δυνάμεθα λοιπὸν ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν τούτων νὰ προτείνωμεν δέκα διάφορα προβλήματα. Καταρτίσατε πίνακα δεικνύοντα τὰ προβλήματα αὐτά.

305. Νὰ παρεμβληθοῦν μεταξὺ 1 καὶ 33 ἑπτὰ ἀριθμητικὰ μέσα.

306. Ἐὰν μεταξὺ δύο διαδοχικῶν ὅρων ἀριθμητικῆς προόδου πα-

ρεμβληθῇ ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς ἀριθμητικῶν μέσων, σχηματίζεται νέα πρόοδος συνεχής.

307. Μεταξὺ δύο διαδοχικῶν ὅρων τῆς προόδου:

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad 4,$$

νὰ παρεμβληθοῦν 3 ἀριθμητικὰ μέσα.

Β΄. ΠΡΟΟΔΟΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑΙ

164. Ὁρισμοί.—Ἐκτὸς τῶν προηγουμένων σειρῶν ὑπάρχουν καὶ ἄλλαι σειραὶ ἀριθμῶν, π. χ. ἡ σειρὰ 2, 4, 8, 16 κτλ. (1). Εἰς αὐτὴν βλέπομεν, ὅτι:

$$4=2.2, \qquad 8=4.2, \qquad 16=8.2 \text{ κ.ο.κ.}$$

Αἱ τοιαῦται σειραὶ λέγονται **πρόοδοι γεωμετρικαί**. Ὥστε: ***Πρόοδος γεωμετρικὴ λέγεται σειρὰ ἀριθμῶν, τῶν ὁποίων ἕκαστος γίνεται ἐκ τοῦ προηγουμένου του διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.***

Οἱ ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι ἀποτελοῦν πρόοδον, λέγονται **ὅροι** αὐτῆς, ὁ δὲ σταθερὸς ἀριθμός, ὅστις πολλαπλασιάζων ἕκαστον ὅρον δίδει τὸν ἑπόμενον, λέγεται **λόγος** τῆς προόδου.

Οὕτω λόγος τῆς ἄνω προόδου εἶναι ὁ 2. Ὁμοίως ἡ σειρά:

$$1, \ \frac{1}{2}, \ \frac{1}{4}, \ \frac{1}{8} \text{ κτλ.} \tag{2}$$

εἶναι πρόοδος γεωμετρική, τῆς ὁποίας ὁ λόγος εἶναι $\frac{1}{2}$

διότι $\quad \frac{1}{2}:1=\frac{1}{2}, \ \frac{1}{4}:\frac{1}{2}=\frac{1}{2}, \ \frac{1}{8}:\frac{1}{4}=\frac{1}{2} \quad$ κ.ο.κ.

Ὁμοίως τῆς γεωμετρικῆς προόδου:

$$1, \ -\frac{1}{2}, \ \frac{1}{4}, \ -\frac{1}{8} \text{ κ.ο.κ.} \tag{3}$$

λόγος εἶναι ὁ $-\frac{1}{2}$. Ἐπειδὴ δὲ τὸ πηλίκον δύο διαδοχικῶν ὅρων μιᾶς γεωμετρικῆς προόδου εἶναι σταθερόν, λέγεται αὕτη καὶ πρόοδος **κατὰ πηλίκον.**

Ἡ πρόοδος εἶναι **αὔξουσα,** ἐὰν οἱ ὅροι αὐτῆς λαμβανόμενοι ἀπολύτως προβαίνουν αὐξανόμενοι, ὅπερ συμβαίνει, ὅταν ὁ λόγος κατ' ἀπόλυτον τιμὴν ὑπερβαίνῃ τὴν μονάδα 1· **φθίνουσα** δέ, ἐὰν οἱ ὅροι κατ' ἀπόλυτον τιμὴν προβαίνουν ἐλαττούμενοι, ὅπερ συμβαίνει, ὅταν ὁ λόγος εἶναι μικρότερος τῆς μονάδος 1 κατ' ἀπόλυτον τιμήν.

Οὕτως ἡ πρόοδος (1) εἶναι αὔξουσα, αἱ δὲ (2) καὶ (3) εἶναι φθίνουσαι.

165. Εὕρεσις τοῦ ὅρου τοῦ κατέχοντος ὡρισμένην τάξιν ἐν γεωμετρικῇ προόδῳ.—Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸν 7ον ὅρον τῆς γεωμετρικῆς προόδου, τῆς ὁποίας πρῶτος ὅρος εἶναι ὁ 2 καὶ λόγος ὁ 3. Ἀλλὰ τότε θὰ εἶναι πρῶτος ὅρος ὁ 2, δεύτερος ὁ 2.3, τρίτος ὁ $2.3.3=2.3^2$, τέταρτος ὁ 2.3^3 καὶ προφανῶς ἕβδομος εἶναι ὁ

$$2.3^6=2.729=1458.$$

Γενικῶς δέ, ἂν α εἶναι ὁ πρῶτος ὅρος γεωμετρικῆς προόδου καὶ λ ὁ λόγος αὐτῆς, ὁ δεύτερος ὅρος θὰ εἶναι αλ, ὁ τρίτος $αλ^2$, ὁ τέταρτος $αλ^3$ καὶ ὁ $ν^{ος}$, τὸν ὁποῖον παριστῶμεν διὰ τ, θὰ εἶναι $αλ^{ν-1}$, ἤτοι $τ=αλ^{ν-1}$. Ἤτοι : ***Εἰς πᾶσαν γεωμετρικὴν πρόοδον ἕκαστος ὅρος ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου ὅρου ἐπὶ δύναμιν τοῦ λόγου, ἔχουσαν ἐκθέτην τὸν ἀριθμὸν τῶν προηγουμένων ὅρων.***

1) Οὕτως ὁ 10ος ὅρος τῆς προόδου 3, 6, 12, 24 κτλ.

εἶναι $3(2)^9 = 3.512 = 1536$, ὁ 20ὸς ὅρος αὐτῆς

» $3(2)^{19} = 3.524288 = 1572864$, καὶ ὁ 25ος ὅρος

» $3(2)^{24} = 3.16777216 = 50331648$.

Παρατηροῦμεν δὲ εἰς τὸ παράδειγμα αὐτό, ὅτι, ἐφ' ὅσον προχωροῦμεν εἰς ὅρους μεγαλυτέρας τάξεως, ἐπὶ τοσοῦτον οἱ ὅροι γίνονται μεγαλύτεροι. Ἐπομένως δυνάμεθα νὰ λάβωμεν ὅρον μεγαλύτερον παντὸς ἀριθμοῦ, ὁσονδήποτε μεγάλου. Ἤ, μὲ ἄλλους λόγους, ὁ ὅρος τάξεως ν αὐξάνει ἀπεριορίστως καὶ τείνει πρὸς τὸ ἄπειρον, ὅταν καὶ ὁ ν αὐξάνῃ ὁμοίως καὶ τείνῃ πρὸς τὸ ἄπειρον. Καὶ τοῦτο, διότι εἰς τὴν πρόοδον αὐτήν, ἡ ὁποία γράφεται 3, 3.2, 3.2^2, 3.2^3 κτλ,, αἱ δυνάμεις 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, κτλ. εἶναι ὅλαι μεγαλύτεραι τῆς μονάδος 1 (ἐπειδὴ $2>1$) καὶ βαίνουν συνεχῶς αὐξανόμεναι. Ἡ δύναμις λοιπὸν $2^ν$ (ὅπου ν ἀκέραιος θετικὸς) δύναται νὰ γίνῃ μεγαλυτέρα παντὸς ἀριθμοῦ, ὁσονδήποτε μεγάλου, ὅταν ὁ ν γίνῃ ἱκανῶς μέγας.

Τὸ ἀνωτέρω ἀποδεικνύεται εὐκόλως, ὅτι ἀληθεύει καὶ εἰς πᾶσαν αὔξουσαν γεωμετρικὴν πρόοδον.

2) Διὰ τὴν γεωμετρικὴν πρόοδον 16, 8, 4, 2 κτλ. εὑρίσκομεν ὅτι

ὁ 8ος ὅρος εἶναι $16.\left(\frac{1}{2}\right)^7 = 16.\frac{1}{128} = 0,125$

ὁ 15ος » » $16.\left(\frac{1}{2}\right)^{14} = 16.\frac{1}{16384} = 0,0009765625$ καὶ ὁ 20ὸς ὅρος εἶναι $16.\left(\frac{1}{2}\right)^{19} = 16.\ \frac{1}{524288} = 0{,}000030517\ \ldots$

Παρατηροῦμεν δὲ ἤδη εἰς τὸ παράδειγμα αὐτό, ὅτι, ἐφ᾽ ὅσον προχωροῦμεν εἰς ὅρους μεγαλυτέρας τάξεως, ἐπὶ τοσοῦτον οἱ ὅροι γίνονται μικρότεροι. Ἑπομένως δυνάμεθα νὰ λάβωμεν ὅρον μικρότερον παντὸς ἀριθμοῦ ὁσονδήποτε μικροῦ. Ἢ, μὲ ἄλλους λόγους, ὁ ὅρος τάξεως ν τείνει πρὸς τὸ 0, ὅταν ὁ ν αὐξάνῃ καὶ τείνῃ πρὸς τὸ ἄπειρον. Καὶ τοῦτο διότι εἰς τὴν πρόοδον αὐτήν, ἡ ὁποία γράφεται :

$$16, \qquad 16.\frac{1}{2}, \qquad 16.\left(\frac{1}{2}\right)^2, \qquad 16.\left(\frac{1}{2}\right)^3$$

αἱ δυνάμεις $\left(\frac{1}{2}\right)^1, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^2, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^3$ κτλ.

εἶναι ὅλαι μικρότεραι τῆς μονάδος 1 (ἐπειδὴ $\frac{1}{2} < 1$) καὶ βαίνουν συνεχῶς ἐλαττούμεναι. Ἡ δύναμις λοιπὸν $\left(\frac{1}{2}\right)^ν$ δύναται νὰ γίνῃ μικροτέρα παντὸς ἀριθμοῦ, ὁσονδήποτε μικροῦ, ὅταν ὁ ν γίνῃ ἱκανῶς μέγας.

Τὸ ἀνωτέρω ἀποδεικνύεται εὐκόλως, ὅτι ἀληθεύει καὶ εἰς πᾶσαν φθίνουσαν γεωμετρικὴν πρόοδον.

Ἀσκήσεις.

308. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος εἰς τὰς κάτωθι γεωμετρικὰς προόδους.

$4,\ 12,\ 36\ 108\ldots \qquad 1,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{9},\ \frac{1}{27}\ldots$

$1,\ -3,\ 9,\ -27\ldots \qquad 6,\ -4,\ 2\frac{2}{3},\ -1\frac{7}{9}\ldots$

$χ^5,\ χ^4,\ χ^3,\ χ^2,\ldots \qquad χ^5,\ χ^4ψ,\ χ^3ψ^2,\ χ^2ψ^3\ldots$

309. Νὰ εὑρεθῇ :

ὁ 7ος ὅρος τῆς γεωμετρικῆς προόδου $1,\ 3,\ 9\ldots$

ὁ 6ος » » » » $1,\ 4,\ 16\ldots$

ὁ 9ος » » » » $\frac{1}{16},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{4}\ldots$

ὁ 6ος » » » » $900,\ 300,\ 100\ldots$

ὁ 8ος » » » » $54,\ -18,\ 6\ldots$

ὁ νὸς » » » » $\frac{1}{χ},\ \frac{1}{χ^3},\ \frac{1}{χ^5}\ldots$

310. Ὁ 5ος ὅρος γεωμετρικῆς προόδου, τῆς ὁποίας ὁ λόγος εἶναι 4, εἶναι 768. Νὰ εὑρεθῇ ἡ πρόοδος.

311. Ἐκ βαρελίου τὸ ὁποῖον περιέχει 256 ὀκάδας οἰνοπνεύματος ἀφαιροῦμεν τὸ ἥμισυ τοῦ περιεχομένου, ἔπειτα τὸ ἥμισυ τοῦ ὑπολοίπου κ.ο.κ. ἐπὶ 8 φοράς. Τί ποσὸν οἰνοπνεύματος θὰ μείνῃ εἰς τὸ βαρέλιον;

166. Παρεμβολὴ γεωμετρικῶν μέσων.— Νὰ παρεμβάλωμεν μεταξὺ δύο δοθέντων ἀριθμῶν α καὶ β, ν γεωμετρικὰ μέσα, σημαίνει νὰ παρεμβάλωμεν μεταξὺ τῶν δοθέντων ἀριθμῶν ν ὅρους, οἳ ὁποῖοι μετὰ τῶν δοθέντων νὰ ἀποτελοῦν γεωμετρικὴν πρόοδον, τῆς ὁποίας ὁ πρῶτος ὅρος νὰ εἶναι ὁ α καὶ τελευταῖος ὁ β.

Ἐὰν λ εἶναι ὁ ἄγνωστος λόγος, ἔχομεν, ἐπειδὴ τὸ πλῆθος τῶν ὅρων εἶναι $\nu+2$, $\beta=\alpha\lambda^{\nu+1}$,

ἐξ ἧς λαμβάνομεν $\lambda^{\nu+1}=\frac{\beta}{\alpha}$ καὶ $\lambda=\sqrt[\nu+1]{\frac{\beta}{\alpha}}$.

ἄρα ἡ ζητουμένη πρόοδος εἶναι :

$$\alpha, \quad \alpha.\sqrt[\nu+1]{\frac{\beta}{\alpha}}, \quad \alpha.\sqrt[\nu+1]{\frac{\beta^2}{\alpha^2}}, \quad \ldots \alpha.\sqrt[\nu+1]{\frac{\beta^\nu}{\alpha^\nu}}, \quad \beta.$$

Οὕτως, ἂν θέλωμεν νὰ παρεμβάλωμεν μεταξὺ 1 καὶ 16 τρία γεωμετρικὰ μέσα, θὰ ἔχωμεν $\lambda=\sqrt[4]{16}=2$ καὶ ἡ ζητουμένη πρόοδος θὰ εἶναι 1, 2, 4, 8, 16.

Ἀσκήσεις.

312. Νὰ παρεμβληθοῦν μεταξὺ 1 καὶ 10 ἐννέα γεωμετρικὰ μέσα, ὡς καὶ 5 γεωμετρικὰ μέσα μεταξὺ 54 καὶ $\frac{27}{32}$, καὶ μεταξὺ 21 καὶ $\frac{448}{243}$.

313. Ἐὰν μεταξὺ δύο διαδοχικῶν ὅρων γεωμετρικῆς προόδου παρεμβληθῇ ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς γεωμετρικῶν μέσων, σχηματίζεται νέα πρόοδος συνεχής.

314. Μεταξὺ τῶν διαδοχικῶν ὅρων τῆς προόδου 1, 4, 16, 64, 256 νὰ παρεμβληθῇ ἀνὰ ἓν γεωμετρικὸν μέσον.

167. Ἄθροισμα τῶν ὅρων γεωμετρικῆς προόδου.— Ἔστω πρὸς εὕρεσιν τὸ ἄθροισμα :

$$K=\alpha+\alpha\lambda+\alpha\lambda^2+\alpha\lambda^3+\ldots+\alpha\lambda^{\nu-1} \tag{1}$$

Ἐὰν ἤδη πολλαπλασιάσωμεν τὰ ἴσα ἐπὶ τὸν λόγον λ τῆς γεωμετρικῆς προόδου, εὑρίσκομεν :

$$K\lambda = \alpha\lambda + \alpha\lambda^2 + \alpha\lambda^3 + \ldots + \alpha\lambda^\nu, \qquad (2)$$

ἀφαιροῦντες δὲ κατὰ μέλη τὰς (2) καὶ (1) εὑρίσκομεν :

$$K\lambda - K = \alpha\lambda^\nu - \alpha \quad \text{ἢ} \quad K.(\lambda - 1) = \alpha\lambda^\nu - \alpha$$

καὶ ἂν ὁ λ διαφέρῃ τῆς μονάδος 1,

$$K = \frac{\alpha\lambda^\nu - \alpha}{\lambda - 1} = \frac{\alpha(\lambda^\nu - 1)}{\lambda - 1}$$

ἢ, ἂν γράψωμεν $K = \dfrac{\alpha\lambda^{\nu-1}.\lambda - \alpha}{\lambda - 1}$, $K = \dfrac{\tau\lambda - \alpha}{\lambda - 1}$ (3)

ἤτοι : ***Τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων μιᾶς γεωμετρικῆς προόδου εὑρίσκεται, ἂν ὁ τελευταῖος πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν λόγον καὶ ἀπὸ τοῦ γινομένου ἀφαιρεθῇ ὁ πρῶτος ὅρος, τὸ δὲ ὑπόλοιπον διαιρεθῇ διὰ τοῦ λόγου ἠλαττωμένου κατὰ μονάδα.***

Σημείωσις. Ὁ τύπος $K = \dfrac{\alpha(\lambda^\nu - 1)}{\lambda - 1}$ χρησιμοποιεῖται διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ Κ, ὅταν δίδωνται οἱ ἀριθμοὶ α, λ καὶ ν.

Πδ. 1) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα :

$$K = 3 + 6 + 12 + 24 + 48 + 96 + 192.$$

Ἐνταῦθα ἔχομεν $\alpha = 3,\ \tau = 192$ καὶ $\lambda = 2$.

Ὥστε εἶναι $K = \dfrac{192.2 - 3}{2 - 1} = \dfrac{384 - 3}{1} = 381.$

2) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν 10 πρώτων ὅρων τῆς γεωμετρικῆς προόδου 1, 2, 4 κτλ.

Ἔχομεν $K = \dfrac{1.(2^{10} - 1)}{2 - 1} = 2^{10} - 1 = 1024 - 1 = 1023.$

3) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν 8 πρώτων ὅρων τῆς προόδου 27, 9, 3 κτλ.

Ἔχομεν :

$$K = \frac{27.\left[\left(\frac{1}{3}\right)^8 - 1\right]}{\frac{1}{3} - 1} = \frac{27\left(-\frac{6560}{6561}\right)}{-\frac{2}{3}} = \frac{27.6560.3}{6561.2} = \frac{3280}{81}.$$

4) Τρεῖς ἀριθμοὶ εἶναι ἐν γεωμετρικῇ προόδῳ. Τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι 39 καὶ ἡ διαφορὰ τοῦ πρώτου ἀπὸ τὸν τρίτον εἶναι 24. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ τρεῖς οὗτοι ἀριθμοί.

Ἐὰν οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ εἶναι οἱ $\alpha,\ \alpha\lambda,\ \alpha\lambda^2$, ἔχομεν :

$$\alpha + \alpha\lambda + \alpha\lambda^2 = 39 \quad \text{ἤτοι} \quad \alpha(1 + \lambda + \lambda^2) = 39$$

$$\alpha\lambda^2 - \alpha = 24 \qquad\qquad \alpha(\lambda^2 - 1) = 24.$$

Διαιροῦντες τὰς ἐξισώσεις αὐτὰς κατὰ μέλη εὑρίσκομεν :

$$\frac{1 + \lambda + \lambda^2}{\lambda^2 - 1} = \frac{13}{8},$$

ἐξ αὐτῆς δὲ εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν :

$$5\lambda^2-8\lambda-21=0,$$

τῆς ὁποίας ῥίζαι εἶναι $\lambda=3$ ἢ $-\frac{7}{5}$. Ὥστε εἶναι $\alpha=3$ ἢ 25. Οἱ ζητούμενοι λοιπὸν ἀριθμοὶ εἶναι οἱ $3,\ 9,\ 27$ ἢ $25,\ -35,\ 49$.

Ἀσκήσεις.

315. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα

τῶν 6 πρώτων ὅρων τῆς γεωμετρικῆς προόδου		$1,\ 3,\ 9 \ldots$
» 7 » » » »	»	$2,\ 10,\ 50 \ldots$
» 6 » » » »	»	$120,\ 60,\ 30 \ldots$
» 5 » » » »	»	$3,\ \frac{3}{4},\ \frac{3}{16} \ldots$
» 7 » » » »	»	$\frac{1}{3},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{4} \ldots$

316. Νὰ εὑρεθοῦν τρεῖς ἀριθμοὶ ἀποτελοῦντες γεωμετρικὴν πρόοδον, τῆς ὁποίας ὁ πρῶτος ὅρος εἶναι 36 καὶ ἡ διαφορὰ αὐτοῦ ἀπὸ τοῦ τρίτου εἶναι 28.

317. Νὰ μερισθῇ ὁ ἀριθμὸς 91 εἰς τρεῖς ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι νὰ ἀποτελοῦν γεωμετρικὴν πρόοδον, ὁ δὲ τελευταῖος νὰ ὑπερβαίνῃ τὸν πρῶτον κατὰ 80.

318. Τριῶν ἀριθμῶν ἐν γεωμετρικῇ προόδῳ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων εἶναι 10 καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο τελευταίων 15. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ τρεῖς οὗτοι ἀριθμοί.

319. Τρεῖς ἀριθμοὶ εἶναι ἐν γεωμετρικῇ προόδῳ. Ἔχουν δὲ ἄθροισμα 21 καὶ γινόμενον 64. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι.

320. Ἐὰν $11-\chi$, $1+\chi$ καὶ $35-\chi$ ἀποτελοῦν γεωμετρικὴν πρόοδον, νὰ εὑρεθῇ ὁ χ.

168. Ἄθροισμα τῶν ὅρων φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου ἐχούσης ἀπείρους ὅρους.—Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὅρων τῆς φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου 16, 8, 4, 2, 1, κτλ. Ἀλλ' εἰς τὸ παράδειγμα τοῦτο, ἐπειδὴ οὔτε τὸν τελευταῖον ὅρον δυνάμεθα νὰ γνωρίζωμεν, οὔτε τὸ πλῆθος τῶν ὅρων, θὰ ἐργασθῶμεν ὡς ἑξῆς :

ὁ τύπος $$K=\alpha.\frac{\lambda^\nu-1}{\lambda-1}$$

γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς :

$$K=\frac{\alpha-\alpha\lambda^\nu}{1-\lambda} \quad \text{ἢ} \quad K=\frac{\alpha}{1-\lambda}-\frac{\alpha\lambda^\nu}{1-\lambda}.$$

Κατὰ τὸν τύπον λοιπὸν τοῦτον τὸ ἄθροισμα

τῶν 3 πρώτων ὅρων εἶναι: $\dfrac{16}{1-\dfrac{1}{2}}-\dfrac{16\left(\dfrac{1}{2}\right)^3}{1-\dfrac{1}{2}}$,

» 4 » » » $\dfrac{16}{1-\dfrac{1}{2}}-\dfrac{16\left(\dfrac{1}{2}\right)^4}{1-\dfrac{1}{2}}$,

» 5 » » » $\dfrac{16}{1-\dfrac{1}{2}}-\dfrac{16\left(\dfrac{1}{2}\right)^5}{1-\dfrac{1}{2}}$,

» 6 » » » $\dfrac{16}{1-\dfrac{1}{2}}-\dfrac{16\left(\dfrac{1}{2}\right)^6}{1-\dfrac{1}{2}}$, κ. ο. κ.

Ἤδη παρατηροῦμεν ὅτι: Ἕκαστον τῶν ἀνωτέρω ἀθροισμάτων εἶναι διαφορὰ δύο ἀριθμῶν. Ἀλλ' εἰς ὅλα ὁ μειωτέος εἶναι ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς $\dfrac{16}{1-\dfrac{1}{2}}$, ἐνῷ ὁ ἀφαιρετέος εἶναι διάφορος. Ἐπειδὴ δὲ αἱ δυνάμεις $\left(\dfrac{1}{2}\right)^3$, $\left(\dfrac{1}{2}\right)^4$, $\left(\dfrac{1}{2}\right)^5$ κτλ. βαίνουν ἐλαττούμεναι (§ 165,2), ἕπεται ὅτι καὶ οἱ ἀφαιρετέοι βαίνουν ἐλαττούμενοι καὶ δύνανται νὰ γίνοῦν μικρότεροι παντὸς ἀριθμοῦ ὁσονδήποτε μικροῦ, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν ὅρων, τοὺς ὁποίους λαμβάνομεν, εἶναι ἀρκετὰ μέγας. Π.χ. ὅταν προσθέσωμεν 1000 ὅρους, ὁ ἀφαιρετέος $\dfrac{16\left(\dfrac{1}{2}\right)^{1000}}{1-\dfrac{1}{2}}$ εἶναι ἐλάχιστος. Ἑπομένως τὸ ἄθροισμα αὐτῶν ἐλάχιστα διαφέρει τοῦ ἀριθμοῦ $\dfrac{16}{1-\dfrac{1}{2}}$. Θὰ διαφέρῃ δὲ ἀκόμη ὀλιγώτερον, ἐὰν προσθέσωμεν περισσοτέρους ὅρους. Ἀφοῦ λοιπόν, ἐφ' ὅσον προχωροῦμεν καὶ προσθέτομεν διαρκῶς περισσοτέρους ὅρους, ὁ ἀφαιρετέος τείνει πρὸς τὸ μηδέν, ἕπεται, ὅτι τὸ ζητούμενον ἄθροισμα τείνει πρὸς τὸν ἀριθμὸν $\dfrac{16}{1-\dfrac{1}{2}}$. Διὸ λέγομεν, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὅρων τῆς δοθείσης γεωμετρικῆς προόδου εἶναι $\dfrac{16}{1-\dfrac{1}{2}}$, ἤτοι εἶναι $K=32$. Γενικῶς δὲ τὸ ἄθροισμα:

$$K=\frac{\alpha}{1-\lambda}-\frac{\alpha\lambda^{\nu}}{1-\lambda} \qquad (1)$$

πάντων τῶν ὅρων φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου, ἐχούσης ἀπείρους ὅρους, ἀποτελεῖ τὸν ἀριθμὸν $\dfrac{\alpha}{1-\lambda}$. Διότι, ὅταν $\lambda<1$, ἡ δύναμις λ^{ν} (ὅπου ν ἀκέραιος θετικὸς) εἶναι μικροτέρα τῆς μονάδος καὶ γίνεται συνεχῶς μικροτέρα, ὅταν ὁ ν γίνεται μεγαλύτερος, καὶ τείνει πρὸς τὸ μηδέν, ὅταν ὁ ν τείνῃ πρὸς τὸ ἄπειρον, συγχρόνως δὲ τείνει πρὸς τὸ μηδὲν καὶ ὁ ἀριθμὸς $\dfrac{\alpha}{1-\lambda}\cdot\lambda^{\nu}$. Ἀποδεικνύονται δὲ ταῦτα εὐκόλως. Ὥστε, ὅταν προσθέσωμεν τοὺς ἀπείρους ὅρους, ἔχομεν $K=\dfrac{\alpha}{1-\alpha}$.

Π. χ. Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὅρων τῆς γεωμετρικῆς προόδου

$$1,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{9},\ \frac{1}{27}\ \text{κτλ.}$$

εἶναι ὁ ἀριθμὸς $\quad K=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{3}}=\dfrac{1}{\dfrac{2}{3}}=\dfrac{3}{2}$.

τῆς δὲ προόδου $\quad \alpha^2,\ \dfrac{\alpha^2}{4},\ \dfrac{\alpha^2}{16}$ κλπ.

εἶναι ὁ ἀριθμὸς $\quad K=\dfrac{\alpha^2}{1-\dfrac{1}{4}}=\dfrac{4}{3}\,\alpha^2$.

Ἀσκήσεις.

321. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὅρων ἑκάστης τῶν γεωμετρικῶν προόδων:

1) 8, 4, 2 . . . . 4) $0{,}555\ \ldots = \dfrac{5}{10}+\dfrac{5}{100}+\dfrac{5}{1000}+\ldots$

2) 12, 4, $\dfrac{4}{3}$ . . . . 5) 0,5888 . . . .

3) 16, 2, $\dfrac{1}{4}$ . . . . 6) $\dfrac{\alpha}{\beta},\ \left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^2,\ \left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^3 \ldots (\beta>\alpha)$.

322. Ὁ πρῶτος ὅρος φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου εἶναι 12, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὅρων αὐτῆς εἶναι 18. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος αὐτῆς.

323. Ὁ πρῶτος ὅρος γεωμετρικῆς προόδου εἶναι κατὰ 3 μεγα-

λύτερος τοῦ δευτέρου, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὅρων αὐτῆς εἶναι 27. Νὰ εὑρεθῇ ἡ πρόοδος.

324. Εἰς δοθὲν τετράγωνον ἐγγράφομεν ἄλλο τετράγωνον συνδέοντες τὰ μέσα τῶν πλευρῶν αὐτοῦ, εἰς τοῦτο πάλιν ἄλλο κ. ο. κ. ἐπ' ἄπειρον. Ζητεῖται α') τὸ ἄθροισμα τῶν περιμέτρων πάντων τούτων τῶν τετραγώνων, καὶ β') τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν αὐτῶν.

325. Νὰ λυθῇ τὸ αὐτὸ ζήτημα, ὅταν δίδεται ἰσόπλευρον τρίγωνον.

326. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὅρων τῆς σειρᾶς :

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+\ldots+\frac{\nu}{2^\nu}+\ldots$$

Σημείωσις. Ἡ σειρὰ αὕτη ἀναλύεται εἰς τὰς προόδους :

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots$$
$$\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots$$
$$\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots \quad \text{κ.ο.κ.}$$

327. Εἷς ὥρισεν ἐν τῇ διαθήκῃ του, ἵνα αἱ 19 ἀγελάδες του μοιρασθοῦν εἰς τοὺς τρεῖς υἱούς του ὡς ἑξῆς : Ὁ πρωτότοκος νὰ λάβῃ τὸ $\frac{1}{2}$ αὐτῶν, ὁ δεύτερος τὸ $\frac{1}{4}$ καὶ ὁ τελευταῖος τὸ $\frac{1}{5}$ αὐτῶν. Ἀλλ' ἐπειδὴ δὲν ἠδύναντο νὰ κάμουν οὕτω τὴν διανομήν, κατέφυγον εἰς τὸν προεστῶτα τοῦ χωρίου των, ὅστις ἔκαμε τὸ ἑξῆς : Προσέθεσεν εἰς τὰς 19 ἀγελάδας μίαν ἰδικήν του. Οὕτω δὲ ἐκ τῶν 20 ἀγελάδων ἔλαβεν ὁ πρῶτος τὸ $\frac{1}{2}$, ἤτοι 10, ὁ δεύτερος τὸ $\frac{1}{4}$, ἤτοι 5, καὶ ὁ τρίτος τὸ $\frac{1}{5}$, ἤτοι 4. Ἐπραγματοποιήθη δὲ οὕτως ἡ θέλησις τοῦ διαθέτου καὶ ὁ προεστὼς ἔλαβεν ὀπίσω τὴν ἀγελάδα του. Πῶς συνέβη τοῦτο ;

Λύσις. Ἐπειδὴ $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{19}{20}$ τῆς περιουσίας, τὸ ὑπόλοιπον $\frac{1}{20}$ αὐτῆς θὰ διανεμηθῇ ὁμοίως, καὶ τὸ νέον ὑπόλοιπον $\left(\frac{1}{20}\right)^2$ θὰ διανεμηθῇ καὶ πάλιν ὁμοίως κ.ο.κ. ἐπ' ἄπειρον. Εὑρίσκομεν δὲ οὕτως, ὅτι τὰ τρία μερίδια εἶναι :

$$\frac{10}{19}=10 \text{ ἀγελ.}, \ \frac{5}{19}=5 \text{ ἀγελ. καὶ } \frac{4}{19}=4 \text{ ἀγελ.}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙ

ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ ΠΡΟΣ ΒΑΣΙΝ 10

169. Τὸ ἐξαγόμενον τῶν πράξεων $\frac{3{,}2575 . 1{,}05^{10}}{\sqrt{1{,}3578}}$ δυνάμεθα νὰ τὸ εὕρωμεν. Ἀλλ' αἱ πράξεις, τὰς ὁποίας θὰ κάμωμεν, ἀπαιτοῦν καὶ χρόνον καὶ κόπον σχετικῶς πολύν. Ἐξ ἄλλου, πολὺ δυσκόλως δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὰ ἐξαγόμενα τῶν παραστάσεων $\sqrt[5]{1275}$ ἢ $\sqrt[7]{28394}$. Ὑπάρχει ὅμως τρόπος, τὰς μακρὰς καὶ κοπιώδεις πράξεις νὰ ἐκτελῶμεν ταχύτερον καὶ εὐκολώτερον. Τὸν τρόπον δὲ τοῦτον θὰ ἴδωμεν εἰς τὰ κατωτέρω.

170. Ἔστω ἡ δύναμις 10^{χ}, τὴν ὁποίαν ἂς παραστήσωμεν διὰ ψ, ἤτοι $\psi = 10^{\chi}$.

Διὰ $\chi = 0$ εἶναι $\psi = 10^{0} = 1$

» $\chi = \frac{1}{2}$ » $\psi = 10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10} = 3{,}162 \ldots$

» $\chi = \frac{1}{4}$ » $\psi = 10^{\frac{1}{4}} = \sqrt{3{,}162} = 1{,}778 \ldots$

» $\chi = \frac{3}{4}$ » $\psi = 10^{\frac{3}{4}} = 10^{\frac{1}{2}} . 10^{\frac{1}{4}} = 5{,}622 \ldots$

» $\chi = 1$ » $\psi = 10^{1} = 10$

» $\chi = 2$ » $\psi = 10^{2} = 100$

» $\chi = -1$ » $\psi = 10^{-1} = 0{,}1$

» $\chi = -2$ » $\psi = 10^{-2} = 0{,}01$ κτλ.

Ἐκ τῶν προηγουμένων παραδειγμάτων δυνάμεθα νὰ συμπεράνωμεν τὰ ἑξῆς, τὰ ὁποῖα καὶ ἀποδεικνύονται· ὅτι δηλαδή:

1) Ὅταν ὁ ἐκθέτης τῆς δυνάμεως 10^{χ} εἶναι θετικὸς καὶ πραγματικὸς ἀριθμός, ἡ δύναμις εἶναι μεγαλυτέρα τῆς μονάδος καὶ θετική.

2) Αὐξανομένου τοῦ χ αὐξάνεται καὶ ἡ δύναμις 10^{χ}.

3) Ὅταν ὁ χ εἶναι ἀρνητικὸς πραγματικὸς ἀριθμός, ἡ δύναμις 10^{χ} εἶναι μικροτέρα τῆς μονάδος καὶ γίνεται μικροτέρα, ἐφ' ὅσον ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ χ αὐξάνει.

4) Διὰ δύο διαφόρους τιμὰς τοῦ χ ἔχομεν δύο διαφόρους τιμὰς τῆς δυνάμεως 10^{χ}.

Σημείωσις. Τὰ ἀνωτέρω ἀληθεύουν καὶ ὅταν ὁ χ εἶναι ἀσύμμετρος ἀριθμός. Καὶ ἐπὶ τῶν δυνάμεων μὲ ἀσύμμετρον ἐκθέτην ἀληθεύουν ὅλαι αἱ ἀρχικαὶ ἰδιότητες τῶν δυνάμεων.

171. Ἐὰν ἤδη ἔχωμεν ὑπ' ὄψιν τὰ τῆς προηγουμένης παραγράφου, συνάγομεν, ὅτι ἡ ἐξίσωσις π.χ.

$10^{\chi} = 1$ ἐπαληθεύεται μόνον διὰ $\chi = 0$

ἢ $10^{\chi} = 100 = 10^2$ » » » $\chi = 2$

ἢ $10^{\chi} = \frac{1}{10} = 10^{-1}$ » » » $\chi = -1$

ἢ $10^{\chi} = \frac{1}{100} = 10^{-2}$ » » » $\chi = -2$ κτλ.

καὶ γενικῶς ἡ ἐξίσωσις $10^{\chi} = \beta$ (ὅπου β θετικὸς πραγματικὸς ἀριθμὸς) ἐπαληθεύεται διὰ μίαν μόνον τιμὴν τοῦ χ, ἡ ὁποία δύναται νὰ εἶναι σύμμετρος ἢ ἀσύμμετρος ἀριθμός. Καὶ θὰ εἶναι μὲν σύμμετρος ἀριθμός, ἐὰν ὁ β εἶναι δύναμίς τις τοῦ 10, ὁπότε ἡ τιμὴ τοῦ χ εἶναι ὁ ἐκθέτης τῆς δυνάμεως τοῦ 10, εἰς ἣν μετετράπη ὁ β. Ἄλλως ἡ ρίζα εἶναι ἀσύμμετρος καὶ εὑρίσκεται κατὰ προσέγγισιν.

172. Ὁρισμὸς τοῦ δεκαδικοῦ λογαρίθμου.—Γνωρίζομεν ὅτι $10^2=100$ καὶ $10^3=1000$. Τὸν ἐκθέτην 2 λέγομεν λογάριθμον τοῦ 100 ὡς πρὸς βάσιν 10 καὶ τὸν 3 λογάριθμον τοῦ 1000 πάλιν ὡς πρὸς βάσιν 10. Καὶ γενικῶς, ἐὰν $\beta=10^{\chi}$, ὁ ἐκθέτης χ λέγεται λογάριθμος τοῦ β ὡς πρὸς βάσιν 10 καὶ γράφεται $\lambda o\gamma_{10}\beta=\chi$ ἢ ἁπλούστερον $\lambda o\gamma\beta=\chi$. Ὥστε: ***Λογάριθμος ἀριθμοῦ τινος β ὡς πρὸς τὴν βάσιν 10 λέγεται ὁ ἐκθέτης τῆς δυνάμεως, εἰς ἣν πρέπει νὰ ὑψωθῇ ἡ βάσις 10, ἵνα δώσῃ τὸν β.***

Κατὰ ταῦτα, ἐπειδὴ

$10^4=10000$ εἶναι $\lambda o\gamma 10000=4$, $10^{-2}=0{,}01$, εἶναι $\lambda o\gamma 0{,}01=-2$,

$10^1=10$ εἶναι $\lambda o\gamma 10=1$, $10^{-3}=0{,}001$, εἶναι $\lambda o\gamma 0{,}001=-3$,

$10^0=1$ εἶναι $\lambda o\gamma 1=0$ καὶ $\lambda o\gamma\sqrt[3]{10000}=\frac{4}{3}$

ἐπειδὴ $$10^{\frac{4}{3}}=\sqrt[3]{10000}.$$

Οἱ λογάριθμοι αὐτοί, ἐπειδὴ ἔχουν βάσιν 10, λέγονται **δεκαδικοὶ ἢ κοινοὶ λογάριθμοι.**

Ἐξ ὅσων εἴπομεν ἀνωτέρω εὐκόλως συνάγεται, ὅτι:

1) ***Ἕκαστος πραγματικὸς ἀριθμὸς εἶναι λογάριθμος ἑνὸς καὶ μόνον θετικοῦ ἀριθμοῦ.***

Π. χ. ὁ 5 εἶναι λογάριθμος τοῦ ἀριθμοῦ $10^5=100000$, ὁ ὁποῖος εἶναι εἷς μόνον καὶ θετικός· ὁμοίως ὁ -4 εἶναι λογάριθμος τοῦ θετικοῦ ἀριθμοῦ $10^{-4}=0,0001$.

2) ***Ἕκαστος θετικὸς ἀριθμὸς ἔχει λογάριθμον ἕνα καὶ μόνον πραγματικὸν ἀριθμόν.***

Π.χ. ὁ ἀριθμὸς $+100$ ἔχει λογάριθμον τὸν 2, ὁ ὁποῖος εἶναι εἷς καὶ μόνον, διότι $10^2=100$, ὁ δὲ 0,1 ἔχει λογάριθμον τὸν -1, διότι

$$10^{-1}=0,1.$$

3) ***Οἱ ἀρνητικοὶ ἀριθμοὶ δὲν ἔχουν λογαρίθμους,*** διότι πᾶσα δύναμις τοῦ 10 εἶναι θετικὸς ἀριθμός.

Ἐπειδὴ δὲ εἶναι $10>1$, ἕπεται, ὅτι :

4) ***Οἱ μεγαλύτεροι τῆς μονάδος 1 ἀριθμοὶ ἔχουν λογαρίθμους θετικούς, καὶ οἱ μικρότεροι αὐτῆς ἔχουν λογαρίθμους ἀρνητικούς.***

5) ***Αὐξανομένου τοῦ ἀριθμοῦ αὐξάνεται καὶ ὁ λογάριθμος αὐτοῦ, καὶ ἐλαττουμένου ἐλαττοῦται.***

173. Ἰδιότητες τῶν λογαρίθμων. 1) Ἔστωσαν οἱ θετικοὶ ἀριθμοὶ Α, Β, Γ, δι' οὓς ἔχομεν $\lambda o\gamma A=\chi$, $\lambda o\gamma B=\psi$, $\lambda o\gamma \Gamma=\varphi$. Ἀλλὰ κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν λογαρίθμων ἔχομεν :

$$10^{\chi}=A,\quad 10^{\psi}=B\quad \text{καὶ}\quad 10^{\varphi}=\Gamma$$

ἄρα καὶ $$A.B.\Gamma=10^{\chi}\,.\,10^{\psi}\,.\,10^{\varphi}=10^{\chi+\psi+\varphi}.$$

Ἐξ αὐτῆς δὲ λαμβάνομεν :

$$\lambda o\gamma(A.B.\Gamma.)=\chi+\psi+\varphi \quad \text{ἢ} \quad \lambda o\gamma(A.B.\Gamma.)=\lambda o\gamma A+\lambda o\gamma B+\lambda o\gamma \Gamma.$$

Ὥστε : ***Ὁ λογάριθμος τοῦ γινομένου πολλῶν ἀριθμῶν ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν λογαρίθμων τῶν ἀριθμῶν τούτων.***

Οὕτω $$\lambda o\gamma 20=\lambda o\gamma 10+\lambda o\gamma 2=1+\lambda o\gamma 2,$$

$$\lambda o\gamma 500=\lambda o\gamma 100+\lambda o\gamma 5=2+\lambda o\gamma 5,$$

$$\lambda o\gamma 15000=\lambda o\gamma 1000+\lambda o\gamma 3+\lambda o\gamma 5=3+\lambda o\gamma 3+\lambda o\gamma 5.$$

2) Ἔστωσαν Α καὶ Β θετικοὶ ἀριθμοί, καὶ ἔστω $\lambda o\gamma A=\chi$ καὶ $\lambda o\gamma B=\psi$. Ἀλλὰ τότε θὰ εἶναι $10^{\chi}=A$ καὶ $10^{\psi}=B$.

Ὥστε εἶναι $$\frac{A}{B}=\frac{10^{\chi}}{10^{\psi}}=10^{\chi-\psi}.$$

Ἐξ αὐτῆς δὲ εὑρίσκομεν :

$$\lambda o\gamma\frac{A}{B}=\chi-\psi,\qquad \text{ἤτοι}\qquad \lambda o\gamma\frac{A}{B}=\lambda o\gamma A-\lambda o\gamma B.$$

Ὥστε : ***Ὁ λογάριθμος τοῦ πηλίκου δύο ἀριθμῶν ἰσοῦται μὲ***

τὴν διαφορὰν τοῦ λογαρίθμου τοῦ διαιρέτου ἀπὸ τοῦ λογαρίθμου τοῦ διαιρετέου.

Οὕτως εἶναι. $\lambda o\gamma 0{,}02 = \lambda o\gamma \frac{2}{100} = \lambda o\gamma 2 - \lambda o\gamma 100 = \lambda o\gamma 2 - 2,$

καὶ $\lambda o\gamma \frac{1}{3} = \lambda o\gamma 1 - \lambda o\gamma 3 = 0 - \lambda o\gamma 3 = -\lambda o\gamma 3.$

3) Ἔστω $A > 0$ καὶ $\lambda o\gamma A = \chi$. Ἀλλὰ τότε θὰ εἶναι:

$$A = 10^{\chi} \quad \text{καὶ} \quad A^{\mu} = (10^{\chi})^{\mu} = 10^{\mu\chi},$$

οἱοσδήποτε καὶ ἂν εἶναι ὁ μ. Ἀλλ' ἐκ τῆς τελευταίας ἰσότητος ἔχομεν:

$$\lambda o\gamma(A^{\mu}) = \mu\chi, \quad \text{ἤτοι} \quad \lambda o\gamma(A^{\mu}) = \mu\lambda o\gamma A.$$

Ὥστε: ***Ὁ λογάριθμος πάσης δυνάμεως ἰσοῦται μὲ τὸν λογάριθμον τῆς βάσεως πολλαπλασιασθέντα ἐπὶ τὸν ἐκθέτην.***

Οὕτως εἶναι:

$$\lambda o\gamma 8 = \lambda o\gamma(2^3) = 3\lambda o\gamma 2 \quad \text{καὶ} \quad \lambda o\gamma 81 = \lambda o\gamma(3^4) = 4\lambda o\gamma 3.$$

4) Κατὰ τὰ ἀνωτέρω, ἐπειδὴ

$$\sqrt[\nu]{A} = A^{\frac{1}{\nu}}, \text{ ἔχομεν } \lambda o\gamma\sqrt[\nu]{A} = \frac{1}{\nu}\lambda o\gamma A.$$

Ὥστε: ***Ὁ λογάριθμος πάσης ῥίζης ἰσοῦται μὲ τὸν λογάριθμον τοῦ ὑπορρίζου διαιρεθέντα διὰ τοῦ δείκτου τῆς ῥίζης.***

Π. χ. $\lambda o\gamma\sqrt{10} = \frac{1}{2}\lambda o\gamma 10 = \frac{1}{2}$

καὶ $\lambda o\gamma\sqrt[3]{10000} = \frac{1}{3}\lambda o\gamma 10^4 = \frac{4}{3}$.

Ἀσκήσεις.

328. Νὰ μετασχηματισθοῦν αἱ παραστάσεις:

$\lambda o\gamma(3\alpha\beta\gamma)$ $\quad$ $\lambda o\gamma(\alpha\beta^2)$ $\quad$ $\lambda o\gamma(\alpha\beta^2\gamma^3)$

$\lambda o\gamma\frac{\alpha\beta^3}{\gamma^4}$ $\quad$ $\lambda o\gamma\sqrt{\alpha\beta}$ $\quad$ $\lambda o\gamma(\alpha\sqrt[4]{\beta^3})$

$\lambda o\gamma\frac{5\sqrt{\alpha^3}}{\beta\gamma}$ $\quad$ $\lambda o\gamma\frac{\alpha}{\sqrt{\beta}}$ $\quad$ $\lambda o\gamma\frac{1}{\alpha\sqrt[3]{\gamma^2}}$.

329. Νὰ μετασχηματισθοῦν αἱ παραστάσεις:

$\lambda o\gamma 2 + \lambda o\gamma 5$ $\quad$ $\lambda o\gamma 5 + \lambda o\gamma 3 + \lambda o\gamma 11$

$\lambda o\gamma 12 - \lambda o\gamma 4$ $\quad$ $\lambda o\gamma 5 + \lambda o\gamma 7 - \lambda o\gamma 3$

$\lambda o\gamma 24 - 3\lambda o\gamma 2$ $\quad$ $4\lambda o\gamma\chi - \frac{1}{2}\lambda o\gamma\psi$

$\frac{1}{3}$λογx+λογ5$-\frac{2}{3}$λογψ   2λογα$-\frac{1}{2}$λογβ$-$3λογγ.

330. Νὰ δειχθῇ ὅτι:

1) λογ210= λογ2+ λογ3+ λογ5+λογ7

2) λογ30+λογ36=λογ24+λογ45

3) λογ$\frac{25}{8}$+λογ$\frac{2}{35}$$-$λογ$\frac{5}{14}$=$-$λογ2

4) $\frac{1}{2}$λογ16+$\frac{1}{3}$λογ8+$\frac{1}{5}$λογ32=4λογ2.

174. Δεκαδικὴ μορφὴ τῶν λογαρίθμων.—Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῶν λογαρίθμων, ποὺ εἴδομεν, ἕπεται, ὅτι αἱ δυνάμεις τοῦ 10 ἔχουν λογαρίθμους συμμέτρους ἀριθμοὺς καὶ εἶναι οὗτοι οἱ ἐκθέται τῶν δυνάμεων τούτων. Δι' ὅλους τοὺς ἄλλους ἀκεραίους ἀριθμοὺς οἱ λογάριθμοι εἶναι ἀσύμμετροι ἀριθμοί, ἀλλ' ἀντ' αὐτῶν λαμβάνομεν συμμέτρους ἀριθμούς, κατὰ προσέγγισιν, διὰ τοῦτο δὲ θὰ γράφωμεν **πάντοτε** τοὺς λογαρίθμους ὑπὸ **δεκαδικὴν μορφήν**.

Ἀλλ' ὅταν θὰ πρόκειται περὶ λογαρίθμων τῶν μικροτέρων τῆς μονάδος ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι εἶναι ἀρνητικοί, ***θὰ τρέπωμεν αὐτοὺς εἰς ἄλλους, τῶν ὁποίων μόνον τὸ ἀκέραιον μέρος θὰ εἶναι ἀρνητικόν, τὸ δὲ δεκαδικὸν μέρος θετικόν.*** Ἡ τροπὴ αὕτη γίνεται ὡς ἑξῆς: Ἔστω ὁ ὅλως ἀρνητικὸς λογάριθμος $-3{,}15742$.

Ἔχομεν $-3{,}15742=-3-0{,}15742$. Ἐὰν δὲ προσθέσωμεν εἰς αὐτὸν $+1$ καὶ -1, ὅπερ δὲν τὸν μεταβάλλει, λαμβάνομεν:

$$-3-1+1-0{,}15742=-4+(1-0{,}15742).$$

Ὥστε εἶναι $\qquad -3{,}15742=-4+0{,}84258.$

Ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα τοῦ ἀκεραίου ἀρνητικοῦ μέρους -4 καὶ τοῦ δεκαδικοῦ θετικοῦ $0{,}84258$ συμφωνοῦμεν νὰ τὸ γράφωμεν ὡς ἑξῆς: $\overline{4}{,}84258$. Ὁμοίως ἔχομεν:

$$-1{,}37894=-1-1+1-0{,}37894=\overline{2}{,}62106.$$

Ὥστε: ***Ἵνα τρέψωμεν λογάριθμον ὅλως ἀρνητικὸν εἰς ἄλλον, τοῦ ὁποίου μόνον τὸ ἀκέραιον μέρος νὰ εἶναι ἀρνητικόν, προσθέτομεν εἰς τὸ ἀκέραιον μέρος αὐτοῦ τὴν μονάδα −1 καὶ γράφομεν τὸ σημεῖον — ὑπεράνω αὐτοῦ, μετὰ δὲ ταῦτα ἀφαιροῦμεν τὸ δεκαδικὸν μέρος ἀπὸ τῆς μονάδος 1.***

Τὸ δεκαδικὸν μέρος ἀφαιρεῖται ἀπὸ τῆς μονάδος 1 εὐκόλως, ἐὰν ἀφαιρεθῇ τὸ τελευταῖον σημαντικὸν ψηφίον ἀπὸ τοῦ 10 καὶ ὅλα τὰ ἄλλα ἀπὸ τοῦ 9.

175. Χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου.—**Χαρακτηριστικὸν** τοῦ λογαρίθμου λέγεται τὸ **ἀκέραιον μέρος αὐτοῦ.** Τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου ἀριθμοῦ τινος εὑρίσκεται εὐκολώτατα, ὡς φαίνεται, ἐκ τῶν ἑξῆς :

α΄) Ἔστω ἀριθμός τις μεγαλύτερος τῆς μονάδος 1, π.χ. ὁ 458,24. Δι᾽ αὐτὸν παρατηροῦμεν, ὅτι :

$$100 < 458,24 < 1000 \quad \text{ἤτοι} \quad 10^2 < 458,24 < 10^3.$$

Ἑπομένως εἶναι καὶ

$$\text{λογ}(10^2) < \text{λογ}458,24 < \text{λογ}(10^3)$$

$$\text{ἢ} \quad 2 < \text{λογ}458,24 < 3,$$

ἤτοι ὁ λογάριθμος τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ περιέχεται μεταξὺ 2 καὶ 3 καὶ ἑπομένως τὸ χαρακτηριστικὸν αὐτοῦ εἶναι 2, ἤτοι τοῦτο ***ἔχει τόσας μονάδας, ὅσα εἶναι τὰ ψηφία τοῦ ἀκεραίου μέρους του ἠλαττωμένα κατὰ 1.***

Γενικῶς δὲ ἀποδεικνύεται, ὅτι, ***ἂν ἀριθμοῦ τινος Α τὰ ψηφία τοῦ ἀκεραίου μέρους εἶναι μ, τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου τοῦ Α εἶναι μ—1.*** Διότι διὰ τὸν δοθέντα ἀριθμὸν Α ἔχομεν :

$$10^{\mu-1} < A < 10^{\mu}, \quad \text{ἄρα καὶ} \quad (\mu-1)\text{λογ}10 < \text{λογ}A < \mu\text{λογ}10.$$

Καὶ ἐπειδὴ $\quad \text{λογ}10 = 1,$

ἔχομεν $\quad \mu - 1 < \text{λογ}A < \mu.$

Ἀφοῦ λοιπὸν ὁ λογΑ περιέχεται μεταξὺ τῶν διαδοχικῶν ἀκεραίων μ—1 καὶ μ, ἔπεται, ὅτι τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογΑ εἶναι μ—1.

β΄) Ἔστω ἤδη εἷς ἀριθμὸς μικρότερος τῆς μονάδος, π.χ. ὁ 0,4352. Ἀλλ᾽ οὗτος γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς :

$$0,4352 = \frac{4,352}{10}.$$

Ὥστε εἶναι :

$$\text{λογ}0,4352 = \text{λογ}4,352 - \text{λογ}10 = \text{λογ}4,352 - 1.$$

Ἀλλ᾽ ὁ λογ4,352 ἔχει χαρακτηριστικὸν 0. Ἐὰν δὲ ὑποτεθῇ, ὅτι τὸ δεκαδικὸν μέρος αὐτοῦ εἶναι 63869, ἔχομεν :

$$\text{λογ}0,4352 = 0,63869 - 1 = \overline{1},63869.$$

Ἐὰν δὲ ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς ἦτο ὁ 0,04352, θὰ εἴχομεν :

$$0,04352 = \frac{4.352}{100} \quad \text{καὶ} \quad \text{λογ}0,04352 = \text{λογ}4,352 - \text{λογ}100 = \overline{2},63869.$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω λοιπὸν συνάγομεν, ὅτι : ***Τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου ἑνὸς δεκαδικοῦ κλάσματος ἔχει τόσας ἀρνητικὰς μο-***

νάδας, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἐκφράζει τὴν τάξιν τοῦ πρώτου σημαντικοῦ ψηφίου μετὰ τὴν ὑποδιαστολήν.

Οὕτω τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογ0,004 εἶναι $\overline{3}$ καὶ τοῦ λογ0,00053 εἶναι $\overline{4}$.

176. Ἀνωτέρω εἴδομεν, ὅτι :

$$\lambda o\gamma 0{,}04352=\overline{2}{,}63869$$
$$\lambda o\gamma 0{,}4352=\overline{1}{,}63869.$$

Ὁμοίως βλέπομεν, ὅτι, ἐὰν

$$\lambda o\gamma 2=0{,}30103,$$

θὰ εἶναι :

$$\lambda o\gamma 20=\lambda o\gamma 2+\lambda o\gamma 10=0{,}30103+1=1{,}30103$$
$$\lambda o\gamma 200=\lambda o\gamma 2+\lambda o\gamma 100=0{,}30103+2=2{,}30103$$
$$\lambda o\gamma\frac{2}{1000}=\lambda o\gamma 2-\lambda o\gamma 1000=0{,}30103-3=\overline{3}{,}30103.$$

Καὶ γενικῶς, ἐὰν εἶναι λογΑ=χ, θὰ εἶναι καὶ

$$\lambda o\gamma(10^{\nu}.A)=\lambda o\gamma 10^{\nu}+\lambda o\gamma A=\nu+\chi$$

(ν ἀκέραιος θετικός)· καὶ

$$\lambda o\gamma\frac{A}{10^{\nu}}=\lambda o\gamma A-\lambda o\gamma 10^{\nu}=-\nu+\chi$$

Ὥστε : ***Ἐὰν εἷς ἀριθμὸς πολλαπλασιασθῇ ἢ διαιρεθῇ διὰ 10^ν, τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου δὲν μεταβάλλεται, τὸ χαρακτηριστικὸν ὅμως αὐτοῦ αὐξάνεται ἢ ἐλαττοῦται κατὰ ν μονάδας.***

Ἀσκήσεις

331. Οἱ κάτωθι ὅλως ἀρνητικοὶ λογάριθμοι νὰ τραποῦν εἰς ἄλλους, τῶν ὁποίων τὸ ἀκέραιον μέρος νὰ εἶναι ἀρνητικόν, τὸ δὲ δεκαδικὸν μέρος νὰ εἶναι θετικὸν

−1,47893, −0,37687, −4,68090.

332. Γράψατε τὸ χαρακτηριστικὸν τῶν λογαρίθμων :

λογ514 λογ1527 λογ15,27 λογ0,544
λογ0,0035 λογ0,053 λογ30007 λογ0,00009.

333. Δοθέντος ὅτι λογ7=0,84510, εὕρετε τοὺς λογαρίθμους τῶν ἀριθμῶν 70 700 0,07 0,007.

334. Δοθέντος, ὅτι λογ5=0,69897, εὕρετε τοὺς λογαρίθμους τῶν ἀριθμῶν 5.10^3 5.10^4 $\frac{5}{10^2}$, $\frac{5}{10^5}$.

335. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα :

λογ375—λογ3,75 λογ15,62—λογ1,562 λογ0,45—λογ4,5.

177. Περὶ τῶν λογαριθμικῶν πινάκων.—Εἴδομεν προηγουμένως, ὅτι, πλὴν τῶν ἀριθμῶν 1, 10, 100 κτλ., πάντων τῶν ἄλλων ἀκεραίων οἱ λογάριθμοι εἶναι ἀσύμμετροι ἀριθμοὶ καὶ ἔχουν διὰ τοῦτο ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία μὴ περιοδικά. Καὶ ἕνεκα τούτου εὑρίσκομεν τοὺς λογαρίθμους τῶν ἀριθμῶν τούτων κατὰ προσέγγισιν (συνήθως 0,00001).

Οἱ λογάριθμοι τῶν ἀριθμῶν ἀπὸ τοῦ 1 καὶ ἐφεξῆς, συνήθως μέχρι τοῦ 10000, εὑρέθησαν καὶ ἐγράφησαν εἰς πίνακας καλουμένους **λογαριθμικούς**. Οἱ πίνακες τῶν λογαρίθμων, οἱ ὁποῖοι χρησιμοποιοῦνται συνηθέστερον, περιέχουν λογαρίθμους μετὰ 5 δεκαδικῶν ψηφίων· ὑπάρχουν ὅμως καὶ πίνακες μὲ 4, μὲ 7 ἢ καὶ μὲ 12 δεκαδικὰ ψηφία.

Οἱ πίνακες, οἱ ὁποῖοι χρησιμοποιοῦνται συνηθέστατα παρ' ἡμῖν, εἶναι οἱ τοῦ Dupuis.

Ὡς πρὸς τὴν διάταξιν τῶν λογαριθμικῶν πινάκων τῶν ἀριθμῶν ἀναφέρομεν τὰ ἑξῆς γενικά:

1) Τὰ χαρακτηριστικὰ τῶν λογαρίθμων τῶν ἀριθμῶν δὲν ἀναγράφονται εἰς τοὺς πίνακας, διότι γνωρίζομεν νὰ τὰ εὑρίσκωμεν εὐκολώτατα.

2) Τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου ἑνὸς ἀριθμοῦ εἶναι ἀνεξάρτητον τῆς σχετικῆς ἀξίας τῶν ψηφίων τοῦ ἀριθμοῦ τούτου (§ 176).

178. Διάταξις τῶν πινάκων.—Αὕτη φαίνεται εἰς τὸν πίνακα τῆς ἑπομένης σελίδος. Εἰς τὴν πρὸς τὰ ἀριστερὰ στήλην, ὅπου τὸ γράμμα N, εἶναι γραμμέναι αἱ δεκάδες τῶν ἀριθμῶν, αἱ δὲ μονάδες αὐτῶν εἶναι εἰς τὴν ἄνω ὁριζοντίαν γραμμήν. Εἰς τὰς ἄλλας στήλας εἶναι γραμμένα τὰ δεκαδικὰ μέρη τῶν λογαρίθμων. Τὰ δύο ψηφία, τὰ ὁποῖα εἰς τὴν δευτέραν στήλην βλέπομεν ὅτι ἐξέχουν, νοοῦνται ἐπαναλαμβανόμενα, μέχρις ὅτου ἀλλάξουν. Καὶ τοῦτο, διότι πολλοὶ ἐφεξῆς λογάριθμοι ἔχουν τὰ δύο αὐτὰ ψηφία κοινά. Ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος εὑρίσκεται εἰς τὴν διασταύρωσιν τῆς σειρᾶς, εἰς τὴν ὁποίαν εὑρίσκονται αἱ δεκάδες τοῦ ἀριθμοῦ μὲ τὴν στήλην, εἰς τὴν ὁποίαν εὑρίσκονται αἱ μονάδες του, εἶναι τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἀριθμοῦ.

Κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον βλέπομεν, ὅτι εἶναι:

$$\lambda o\gamma 6432 = 3{,}80835 \qquad \lambda o\gamma 6450 = 3{,}80956$$
$$\lambda o\gamma 6458 = 3{,}81010 \qquad \lambda o\gamma 6509 = 3{,}81351.$$

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
640	80 618	625	632	638	645	652	659	665	672	679
1	685	693	699	705	713	720	726	733	740	747
2	754	760	767	774	781	787	794	801	808	814
3	821	828	835	841	848	855	852	858	875	882
4	889	895	902	909	916	922	929	936	943	949
5	955	953	959	976	983	990	996	*003	*010	*017
6	81 023	030	037	043	050	057	054	070	077	084
7	090	097	104	111	117	124	131	137	144	151
8	158	164	171	178	184	191	198	204	211	218
9	224	231	238	245	251	258	255	271	278	285
650	291	298	305	311	318	325	331	338	345	351
1	358	365	371	378	385	391	393	405	411	418
2	425	431	438	445	451	458	465	471	478	485
3	491	493	505	511	518	525	531	538	544	551
4	553	564	571	578	584	591	593	604	611	617
5	624	631	637	644	651	657	664	671	677	684
6	690	697	704	710	717	723	730	737	743	750
7	757	763	770	776	783	790	795	803	809	816
8	823	829	836	842	849	855	862	859	875	882
9	889	895	902	908	915	921	928	935	941	948
660	951	951	958	974	981	987	994	*000	*007	*014
1	82 020	027	033	040	045	053	050	055	073	079
2	085	092	099	105	112	119	125	132	138	145
3	151	158	164	171	178	184	191	197	204	210
4	217	223	230	235	243	249	255	263	269	276
5	232	239	295	302	303	315	321	328	334	341
6	347	354	350	357	373	380	387	393	400	405
7	413	419	425	432	439	445	452	458	465	471
8	478	484	491	497	504	510	517	523	530	535
9	545	549	555	552	559	575	582	588	595	601
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Σημείωσις. Ὁ ἀστερίσκος, τὸν ὁποῖον βλέπομεν εἰς τοὺς πενταψηφίους πίνακας, φανερώνει, ὅτι τὰ δύο πρῶτα ψηφία ἤλλαξαν καὶ πρέπει νὰ λαμβάνωνται τὰ ἀμέσως ἑπόμενα.

179. Χρῆσις τῶν λογαριθμικῶν πινάκων.—Διὰ νὰ χρησιμοποιήσωμεν τοὺς λογαρίθμους, πρέπει νὰ γνωρίζωμεν νὰ λύωμεν τὰ ἑξῆς δύο προβλήματα :

1) Νὰ εὑρεθῇ ὁ λογάριθμος δοθέντος ἀριθμοῦ· καὶ

2) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἀντιστοιχεῖ εἰς δοθέντα λογάριθμον.

180. 1ον Πρόβλημα.—***Νὰ εὑρεθῇ ὁ λογάριθμος δοθέντος ἀριθμοῦ.*** Διὰ τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος ὑποθέτομεν πρῶτον, ὅτι ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς εἶναι πάντοτε γραμμένος ὑπὸ δεκαδικὴν μορφήν, καὶ δεύτερον, ὅτι χρησιμοποιοῦμεν πενταψηφίους πίνακας. Οἱ πίνακες δὲ οὗτοι θὰ μᾶς δώσουν τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου, διότι τὸ χαρακτηριστικὸν αὐτοῦ θὰ τὸ εὕρωμεν μόνοι μας. Ἀλλὰ κατὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ δεκαδικοῦ μέρους τοῦ λογαρίθμου θὰ καθιστῶμεν τὸν δοθέντα ἀριθμὸν ἀκέραιον, ἤτοι θὰ παραλείπωμεν τὴν ὑποδιαστολήν. Τοῦτο δέ, ὡς εἴπομεν (§ 176), δὲν μεταβάλλει τὸ ζητούμενον δεκαδικὸν μέρος. Κατόπιν τούτων διακρίνομεν δύο περιπτώσεις :

1η Περίπτωσις. ***Ὁ ἀριθμὸς περιέχεται εἰς τοὺς πίνακας.*** Ἤτοι ὁ ἀριθμὸς δὲν ἔχει περισσότερα τῶν τεσσάρων ψηφίων. Τότε, ἀφοῦ εὕρωμεν αὐτὸν εἰς τοὺς πίνακας, εὑρίσκομεν ἀμέσως καὶ τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου του.

Οὕτως εἶναι $\text{λογ}6843=3,83525$ $\quad \text{λογ}0,8035=\overline{1},90499$

$\text{λογ}68,43=1,83525$ $\quad \text{λογ}0,08035=\overline{2},90499$

Τὸ δὲ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἀριθμοῦ 3,52 θὰ τὸ εὕρωμεν εἰς τὸν ἀριθμὸν 3520, οὕτω δὲ ἔχομεν :

$$\text{λογ}3,52=0,54654.$$

2α Περίπτωσις. ***Ὁ ἀριθμὸς δὲν περιέχεται εἰς τοὺς πίνακας.*** Ἤτοι ὁ ἀριθμὸς ἔχει περισσότερα τῶν τεσσάρων ψηφίων. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν εὑρίσκομεν πρῶτον τὸ χαρακτηριστικόν. Κατόπιν διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ δεκαδικοῦ μέρους τοῦ λογαρίθμου θὰ χωρίσωμεν τὰ τέσσαρα πρῶτα ψηφία δι᾽ ὑποδιαστολῆς καὶ θὰ ἐργασθῶμεν ἀκολούθως ὡς ἑξῆς :

Ἔστω π.χ. ὁ ἀριθμὸς 24647. Τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου του εἶναι 4. Κατόπιν γράφομεν αὐτὸν ὡς ἑξῆς : 2464,7. Ἀλλ' ὁ ἀριθμὸς 2464,7 περιέχεται μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν 2464 καὶ 2465. Συνάγομεν λοιπόν, ὅτι καὶ ὁ λογάριθμος αὐτοῦ περιέχεται μεταξὺ τῶν λογαρίθμων τῶν ἀκεραίων τούτων.

Ἀλλὰ λογ2464=3,39164

λογ2465=3,39182.

Ἡ διαφορὰ τῶν λογαρίθμων τούτων εἶναι 18 μονάδες τῆς πέμπτης δεκαδικῆς τάξεως. Ἐπειδὴ δὲ δεχόμεθα, ὅτι ***ἡ αὔξησις τῶν λογαρίθμων εἶναι ἀνάλογος τῆς αὐξήσεως τῶν ἀριθμῶν*** (καὶ τοῦτο διότι π.χ. ἡ διαφορὰ τῶν λογαρίθμων δύο διαδοχικῶν ἀκεραίων γειτονικῶν πρὸς τοὺς ἄνω ἀριθμοὺς εἶναι πάλιν 18), λέγομεν,

ἐὰν ὁ 2464 αὐξηθῇ κατὰ 1, ὁ λογ. αὐτοῦ αὐξάνεται κατὰ 18 (ἑξ.)

» » 2464 » » 0,7 » » » » » 18.0,7=

=12,6, ἤτοι κατὰ 13 (ἑκατοντάκις χιλιοστά). Ἔχομεν λοιπόν :

λογ2464,7=3,39164+0,00013=3,39177

καὶ κατὰ συνέπειαν λογ24647=4,39177.

Ἔστω προσέτι ὁ ἀριθμὸς 0,587984. Τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου του εἶναι $\overline{1}$. Ἤδη, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου, γράφομεν πρῶτον αὐτὸν ὡς ἑξῆς : 5879,84 καὶ ἔπειτα εὑρίσκομεν λογ5879=3,76930.

Ἡ διαφορὰ τῶν λογαρίθμων τῶν ἀριθμῶν 5879 καὶ 5880 εἶναι 8 (ἑκατοντάκις χιλιοστά). Ὥστε, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν λογ5879,84 πρέπει εἰς τὸν 3,76930 νὰ προσθέσωμεν 8.0,84=6,72, ἤτοι 7 ἑκατοντάκις χιλιοστά. Ὥστε εἶναι :

λογ5879,84=3,76937 καὶ λογ0,587984=$\overline{1}$,76937.

181. 2ον Πρόβλημα.—***Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἀντιστοιχεῖ εἰς δοθέντα λογάριθμον.*** Πρὸς τοῦτο θὰ ἀσχοληθῶμεν πρῶτον μὲ τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου, διὰ νὰ εὕρωμεν τὰ ψηφία, διὰ τῶν ὁποίων κατὰ σειρὰν γράφεται ὁ ἀριθμός. Ἔπειτα δὲ θὰ ἀσχοληθῶμεν μὲ τὸ χαρακτηριστικὸν αὐτοῦ, διὰ νὰ προσδιορίσωμεν τὴν ἀξίαν ἑκάστου ψηφίου. Κατόπιν τούτων διακρίνομεν δύο περιπτώσεις :

1η Περίπτωσις. ***Τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου εὑρίσκεται εἰς τοὺς πίνακας.*** Τότε εὑρίσκομεν ἀμέσως ἀπέναντι τὰ τέσσαρα ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ ἀντιστοιχοῦντος εἰς τὸ δεκαδικὸν τοῦτο μέρος. Ζητοῦμεν δὲ τοῦτο πάντοτε μεταξὺ τῶν λογαρίθμων τῶν τετραψηφίων ἀριθμῶν.

Ἔστω π.χ. ὁ λογάριθμος 2,59095. Τὸ δεκαδικὸν μέρος αὐτοῦ εὑρίσκεται εἰς τοὺς πίνακας. Εἶναι δὲ τοῦ ἀριθμοῦ 3899. Ἐπειδὴ δὲ ὁ δοθεὶς λογάριθμος ἔχει χαρακτηριστικὸν 2, ἕπεται, ὅτι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς πρέπει νὰ ἔχῃ 3 ἀκέραια ψηφία.

Εἶναι λοιπὸν οὗτος ὁ 389,9. Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι εἰς τὸν λογάριθμον 5,59095 ἀντιστοιχεῖ ὁ ἀριθμὸς 389900, εἰς δὲ τὸν λογάριθμον $\overline{2},18808$ ἀντιστοιχεῖ ὁ ἀριθμὸς 0,01542.

2α Περίπτωσις. ***Τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου δὲν ὑπάρχει εἰς τοὺς πίνακας.*** Ἀλλὰ τότε θὰ περιέχεται τοῦτο μεταξὺ τῶν δεκαδικῶν μερῶν τῶν λογαρίθμων δύο διαδοχικῶν ἀκεραίων.

Ἔστω π.χ. ὁ λογάριθμος 4,55575. Τὸ δεκαδικὸν μέρος 55575 περιέχεται μεταξὺ τῶν δεκαδικῶν μερῶν 55570 καὶ 55582 τῶν λογαρίθμων τῶν ἀριθμῶν 3595 καὶ 3596. Ἀλλὰ παρατηροῦμεν, ὅτι οἱ λογάριθμοι τῶν ἀριθμῶν τούτων διαφέρουν κατὰ 12 (ἑκατοντάκις χιλιοστά), ὁ δὲ λογάριθμος τοῦ 3595 ἀπὸ τοῦ δοθέντος διαφέρει κατὰ 5 (ἑκατοντάκις χιλιοστά). Ἐπειδὴ δὲ καὶ τώρα δεχόμεθα, ὅτι ἡ αὔξησις τῶν λογαρίθμων εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὴν αὔξησιν τῶν ἀριθμῶν, λέγομεν : Ἐὰν τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου αὐξηθῇ κατὰ 12, ὁ ἀριθμὸς αὐξάνει κατὰ 1. Ἐὰν τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου αὐξηθῇ κατὰ 5, ὁ ἀριθμὸς αὐξάνει κατὰ $\frac{1.5}{12}=0,416=0,42$.

Ὥστε ὁ ἀριθμός, τοῦ ὁποίου ὁ λογάριθμος ἔχει δεκαδικὸν μέρος τὸ 55575, εἶναι ὁ $3595+0,42=3595,42$.

Ἀλλ᾽ ἐπειδὴ ὁ δοθεὶς λογάριθμος ἔχει χαρακτηριστικὸν 4, ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι ὁ 35954,2.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι ὁ ἀριθμός, ὅστις ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸν λογάριθμον $\overline{1},95094$, εἶναι ὁ 0,89318.

Σημείωσις. Ἐὰν δοθῇ λογάριθμος ὅλως ἀρνητικός, τρέπομεν αὐτὸν εἰς ἄλλον, τοῦ ὁποίου μόνον τὸ χαρακτηριστικὸν νὰ εἶναι ἀρνητικόν.

Ἀσκήσεις

336. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ λογάριθμοι τῶν ἀριθμῶν :

52	407	31,50	4,568
47245	483,743	0,46579	0,0684555.

337. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι ἀντιστοιχοῦν εἰς τοὺς λογαρίθμους :

3,76671	2,93034	5,03941	$\overline{1},97007$
3,94722	4,47239	$\overline{2},95416$	$\overline{3},02050$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΛΟΓΙΣΜΟΥ ΔΙΑ ΤΩΝ ΛΟΓΑΡΙΘΜΩΝ

1) Πρόσθεσις. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν λογαρίθμων $\overline{4},78345$ καὶ 5,86592.

$$\begin{array}{r} \overline{4},78345 \\ 5,86592 \\ \hline 2,64937 \end{array}$$

Θὰ ἀρχίσωμεν τὴν πρόσθεσιν ἐκ δεξιῶν, καὶ ἀφοῦ φθάσωμεν εἰς τὰ δέκατα, θὰ εὕρωμεν 16 δέκατα, ἤτοι 1 θετικὴν ἀκεραίαν μονάδα καὶ 6 δέκατα. Κατόπιν δὲ θὰ εὕρωμεν :

$$1+5=6 \quad \text{καὶ} \quad 6+\overline{4}=2.$$

Ὥστε τὸ ἄθροισμα εἶναι 2,64937.

2) Ἀφαίρεσις. Νὰ γίνῃ ἡ ἀφαίρεσις $\overline{1},57345-2,63459=\overline{4},93886$.

$$\begin{array}{r} \overline{1},57345 \\ 2,63459 \\ \hline \overline{4},93886 \end{array}$$

Ὅταν θὰ φθάσωμεν εἰς τὴν ἀφαίρεσιν τῶν δεκάτων, θὰ εἴπωμεν 6 ἀπὸ 15=9, 1 τὸ κρατούμενον καὶ 2=3. Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἤδη τὸ 3 ἀπὸ τὸ −1 προσθέτομεν εἰς τὸ −1 τὸ −3 καὶ εὑρίσκομεν −4· ὥστε ἡ ζητουμένη διαφορὰ εἶναι $\overline{4},93886$.

Ὁμοίως διὰ τὴν διαφορὰν $2,48593-\overline{4},53284=5,95309$.

$$\begin{array}{r} 2,48593\ - \\ \overline{4},53284 \\ \hline 5,95309 \end{array}$$

Ὅταν θὰ φθάσωμεν εἰς τὰ δέκατα, θὰ εἴπωμεν 5 ἀπὸ 14=9, 1 τὸ κρατούμενον καὶ $\overline{4}$=—3. Ἤδη τὸ —3 ἀφαιρούμενον γίνεται +3 καὶ 2=5, ὥστε ἡ ζητουμένη διαφορὰ εἶναι 5,95309.

3) Π ο λ λ α π λ α σ ι α σ μ ό ς. Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν λογάριθμον $\overline{3},81257$ ἐπὶ 4

$$\begin{array}{r} \overline{3},81257 \\ 4 \\ \hline \overline{9},25028. \end{array}$$

Ὅταν θὰ φθάσωμεν εἰς τὰ δέκατα, θὰ εἴπωμεν 8 ἐπὶ 4=32. Γράφομεν 2 καὶ κρατοῦμεν 3. Ἔπειτα θὰ εἴπωμεν —3 ἐπὶ 4=—12, —12 καὶ +3=—9. Ὥστε τὸ ζητούμενον γινόμενον εἶναι $\overline{9},25028$.

4) Δ ι α ί ρ ε σ ι ς. Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸν λογάριθμον $\overline{1},53128$ διὰ 4. Πρὸς τοῦτο προσθέτομεν —3 εἰς τὸ χαρακτηριστικὸν διὰ νὰ γίνῃ διαιρετὸν διὰ 4. Ἀλλὰ διὰ νὰ μὴ ἀλλάξῃ ἡ ἀξία τοῦ δοθέντος λογαρίθμου προσθέτομεν εἰς τὸ δεκαδικὸν μέρος αὐτοῦ +3, γράφομεν δηλαδὴ τὸν δοθέντα λογάριθμον ὡς ἑξῆς: $\overline{4}+3,53128$ καὶ διαιροῦμεν ἕκαστον τῶν μερῶν του χωριστὰ διὰ 4, εὑρίσκομεν δὲ πηλίκον $\overline{1},88282$.

Ὁμοίως, διὰ νὰ διαιρέσωμεν τὸν λογάριθμον $\overline{4},15703$ διὰ 3, γράφομεν αὐτὸν ὡς ἑξῆς: $\overline{6}+2,15703$ καὶ ἔπειτα διαιροῦμεν ἕκαστον τῶν μερῶν χωριστὰ διὰ 3. Εὑρίσκομεν δὲ πηλίκον $\overline{2},71901$.

5) Νὰ εὑρεθῇ τὸ γινόμενον 35,32.0,7508.

Ἔστω χ τὸ ζητούμενον γινόμενον· ἐφαρμόζοντες ὅμως τὴν πρώτην ἰδιότητα τῶν λογαρίθμων ἔχομεν:

λογχ=λογ35,32+λογ0,7508

$$\begin{array}{rl} \text{λογ}35,32 & =1,54802 \\ \text{λογ}0,7508 & =\overline{1},87552 \\ \hline \text{λογχ} & =1,42354 \end{array}$$

Ἀλλ' ὁ πρὸς τὸν λογάριθμον 1,42354 ἀντιστοιχῶν ἀριθμὸς εἶναι 26,518, ἤτοι χ=26,518, κατὰ προσέγγισιν 0,001.

6) Νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον ψ=853,54 : 195,817.

Ἔχομεν $\lambda o\gamma\psi = \lambda o\gamma 853{,}54 - \lambda o\gamma 195{,}817$

$$\begin{aligned} \lambda o\gamma 853{,}54 &= 2{,}93122 \\ \lambda o\gamma 195{,}817 &= 2{,}29185 \\ \hline \lambda o\gamma\psi &= 0{,}63937 \end{aligned}$$

καὶ $\psi = 4{,}3588$ (προσ. 0,0001)

7) Νὰ εὑρεθῇ ἡ δύναμις $\chi = (1{,}05)^{20}$.

Ἔχομεν $\lambda o\gamma\chi = 20\lambda o\gamma 1{,}05$

$$\begin{aligned} \lambda o\gamma 1{,}05 &= 0{,}02119 \\ \text{ἐπὶ} \quad & \quad\quad 20 \\ \hline \lambda o\gamma\chi &= 0{,}42380 \end{aligned}$$

Ἐπειδὴ δὲ ὁ ἀληθὴς λογάριθμος τοῦ 1,05 δύναται νὰ διαφέρῃ ἀπὸ τὸν ὑπάρχοντα ἐν τῷ πίνακι κατὰ ἡμίσειαν μονάδα τῆς τελευταίας τάξεως, ἕπεται, ὅτι ὁ εὑρεθεὶς λογάριθμος τοῦ $(1{,}05)^{20}$ δύναται νὰ διαφέρῃ τοῦ ἀληθοῦς κατὰ 10 μονάδας τῆς αὐτῆς τάξεως. Ἑπομένως ὁ ἀληθὴς λογάριθμος τοῦ $(1{,}05)^{20}$ περιλαμβάνεται μεταξὺ τοῦ 0,42370 καὶ τοῦ 0,42390, ἄρα, ὡς φαίνεται ἐκ τῶν πινάκων, ἡ ζητουμένη δύναμις περιλαμβάνεται μεταξὺ τοῦ 2,652 καὶ τοῦ 2,654. Ἐκ τούτου ἕπεται, ὅτι ἡ ζητουμένη δύναμις εἶναι $\chi = 2{,}653$ (προσ. 0,001).

8) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμὸς $\psi = \sqrt[3]{120^2}$.

Ἔχομεν $\lambda o\gamma\psi = \frac{2}{3}\lambda o\gamma 120$

$$\begin{aligned} \lambda o\gamma 120 &= 2{,}07918 \\ \text{ἐπὶ} \quad & \quad\quad \tfrac{2}{3} \\ \hline \lambda o\gamma\psi &= 1{,}38612 \\ \text{καὶ} \quad \psi &= 24{,}329 \end{aligned}$$

9) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμὸς $\psi = \sqrt[5]{0{,}854}$.

Λαμβάνομεν $\lambda o\gamma\psi = \frac{1}{5}\lambda o\gamma 0{,}854$

$$\begin{aligned} \lambda o\gamma 0{,}854 &= \overline{1}{,}93146 \\ \text{ἐπὶ} \quad & \quad\quad \tfrac{1}{5} \\ \hline \lambda o\gamma\psi &= \overline{1}{,}98629 \\ \text{καὶ} \quad \psi = \sqrt[5]{0{,}854} &= 0{,}968925. \end{aligned}$$

10) Νὰ εὑρεθῇ ἡ παράστασις $\chi = \dfrac{(\sqrt{28})^3 \cdot \sqrt[5]{53}}{8993}$.

Ἔχομεν $\lambda o\gamma\chi = \frac{3}{2}\lambda o\gamma 28 + \frac{1}{5}\lambda o\gamma 53 - \lambda o\gamma 8993$, Διάταξις τῶν πράξεων

$\lambda o\gamma 28 = 1{,}44716$ $\qquad \frac{3}{2}\lambda o\gamma 28 = 2{,}17074$

$\lambda o\gamma 53 = 1{,}72428$ $\qquad \frac{1}{5}\lambda o\gamma 53 = 0{,}34486$

ἄθροισμα $2{,}51560$

$\lambda o\gamma 8993 = 3{,}95390$ $\qquad$ ἀφαιρεῖται $3{,}95390$

ὑπόλοιπον $\overline{2}{,}56170$

καὶ $\chi = 0{,}03645.$

Σημείωσις. Τὰ ἀνωτέρω παραδείγματα ἀρκοῦν διὰ νὰ δείξουν τὴν ὠφέλειαν τοῦ λογισμοῦ διὰ τῶν λογαρίθμων· διότι διὰ τῶν ἰδιοτήτων τῶν λογαρίθμων κατορθώνομεν νὰ ἀνάγωμεν τὰς πράξεις ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν εἰς ἄλλας ἁπλουστέρας, ἤτοι τὸν πολλαπλασιασμὸν εἰς πρόσθεσιν, τὴν διαίρεσιν εἰς ἀφαίρεσιν, τὴν ὕψωσιν εἰς δυνάμεις εἰς πολλαπλασιασμὸν καὶ τὴν ἐξαγωγὴν τῶν ριζῶν εἰς διαίρεσιν, χρησιμοποιοῦντες πρὸς τοῦτο τοὺς πίνακας τῶν λογαρίθμων. Οὕτω δι' αὐτῶν ἐκτελοῦνται πράξεις, αἱ ὁποῖαι, ὡς εἴπομεν καὶ προηγουμένως (§ 169), θὰ ἦσαν μακρόταται καὶ ἐπιπονώταται.

Ὅταν αἱ παραστάσεις εἶναι ἄθροισμα μονωνύμων ἢ διαφορά, οἱ λογάριθμοι ἐφαρμόζονται μετὰ δυσκολίας· π. χ. εἰς τὴν παράστασιν $36\alpha^2-49\beta^2$. Διότι εἰς αὐτὴν πρέπει νὰ ὑπολογίσωμεν πρῶτον χωριστὰ τὰ μονώνυμα $36\alpha^2$ καὶ $49\beta^2$ καὶ ἔπειτα ὅλην τὴν παράστασιν. Οὕτω δὲ ἔχομεν περισσοτέρας πράξεις νὰ κάμωμεν. Ἐκτὸς δὲ τούτου καὶ τὸ ἐξαγόμενον δὲν εἶναι πολὺ ἀκριβές. Διὰ τοῦτο, ἐὰν εἶναι δυνατόν, μετασχηματίζομεν τὴν δεδομένην παράστασιν εἰς μονώνυμον, τὸ ὁποῖον εἶναι λογιστὸν διὰ τῶν λογαρίθμων. Οὕτω τὴν ἄνω παράστασιν μετασχηματίζομεν εἰς τὴν $(6\alpha+7\beta)(6\alpha-7\beta)$. Ἐπειδὴ δὲ τὰ α καὶ β ὑποτίθενται δεδομένα, εὑρίσκομεν τοὺς παράγοντας $6\alpha+7\beta$ καὶ $6\alpha-7\beta$ καὶ ἔπειτα ἐφαρμόζομεν τοὺς λογαρίθμους.

Ἀσκήσεις.

338. Νὰ ὑπολογισθοῦν διὰ τῶν λογαρίθμων αἱ παραστάσεις:

$47{,}3 . 0{,}845 \qquad 9{,}814 . 0{,}0625 \qquad 898{,}9 . 0{,}05377$

$\frac{50{,}4}{89{,}43} \qquad \frac{0{,}8948}{3{,}155} \qquad \frac{0{,}7469}{0{,}6743}$

$12^5 \qquad (0{,}25)^7 \qquad (1{,}04)^{30} \qquad (0.034)^4$

$\left(\frac{17}{11}\right)^{10}, \qquad \left(\frac{31}{35}\right)^7 \qquad \left(\frac{109}{83}\right)^6 \qquad \left(\frac{81}{67}\right)^9$

$\sqrt{719}$ $\sqrt[3]{14}$ $\sqrt{0{,}374}$ $\sqrt[4]{0{,}00478}$.

$19^{\frac{2}{3}}$ $28^{\frac{3}{5}}$ $\sqrt{\frac{3}{42{,}5}}$ $\sqrt{\frac{1}{2{,}144}}$.

339. Νὰ ὑπολογισθοῦν ὁμοίως αἱ παραστάσεις :

$\frac{153.0{,}5424}{3{,}172}$, $\frac{69(32{,}5)^2}{0{,}31}$, $\frac{20\sqrt[4]{15}}{0{,}04}$

$\frac{9{,}7.(0{,}06)^4}{\sqrt{0.09}}$, $\frac{23}{29}\sqrt{\frac{0{,}25}{0{,}15}}$, $\frac{\sqrt[3]{28}.\sqrt[4]{5^3}}{142}$.

340. Νὰ ὑπολογισθῇ διὰ τῶν λογαρίθμων ἡ $\sqrt{\alpha^2-\beta^2}$, ὅταν εἶναι :
$\alpha = 30{,}45$ $\beta = 17{,}48$.

341. Ὁμοίως νὰ ὑπολογισθῇ ἡ παράστασις $\frac{4}{3}\pi\rho^3$, ὅταν εἶναι :

$\pi = 3{,}141$ καὶ $\rho = 3{,}37$.

342. Νὰ εὑρεθῇ ὁ 21ος ὅρος τῆς γεωμετρικῆς προόδου :
3, 15, 75, 375....

343. Ὁμοίως νὰ εὑρεθῇ ὁ 25ος ὅρος τῆς προόδου :

$1, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{4}{9}, \quad \frac{8}{27} \ldots$

344. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου, οὗ αἱ τρεῖς πλευραὶ εἶναι $\alpha=18{,}20$, $\beta=22{,}50$, $\gamma=36{,}24$ ($E=\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$, ὅπου τ εἶναι ἡ ἡμιπερίμετρος τοῦ τριγώνου).

ΑΝΑΤΟΚΙΣΜΟΣ

182. Εἰς τὴν Ἀριθμητικὴν εἴδομεν τί λέγεται τόκος, τί ἐπιτόκιον καὶ τί κεφάλαιον. Εἴδομεν δὲ ἐπίσης, ὅτι, ὅταν τὸ κεφάλαιον μένῃ τὸ αὐτὸ καθ' ὅλην τὴν διάρκειαν τοῦ δανείου, ὁ τόκος λέγεται **ἁπλοῦς**.

Ἀλλὰ πολλάκις ὁ τόκος ἑκάστης χρονικῆς μονάδος, π.χ. ἑνὸς ἔτους, καὶ εἰς τὸ τέλος αὐτῆς, προστίθεται εἰς τὸ κεφάλαιον καὶ ἀποτελεῖται οὕτω νέον κεφάλαιον, τὸ ὁποῖον τοκίζεται κατὰ τὴν ἑπομένην χρονικὴν μονάδα.

Ἡ πρόσθεσις τοῦ τόκου εἰς τὸ κεφάλαιον, ἤτοι ἡ κεφαλαιοποίησις τοῦ τόκου, λέγεται **ἀνατοκισμός**, ὁ δὲ τόκος, ὁ ὁποῖος λαμβάνεται ἀπὸ τὸν ἀνατοκισμόν, λέγεται **σύνθετος**.

183. Πρόβλημα. ***Κεφάλαιον α δραχμῶν, ἀνατοκιζόμενον κατ' ἔτος, πόσον θὰ γίνῃ μετὰ ν ἔτη, ἐὰν ὁ τόκος τῆς μιᾶς δραχμῆς εἰς ἓν ἔτος εἶναι τ;***

Ἀφοῦ ὁ τόκος τῆς 1 δραχμῆς εἰς ἓν ἔτος εἶναι τ, ὁ τόκος τῶν α δραχμῶν εἰς ἓν πάλιν ἔτος εἶναι ατ. Ὥστε τὸ ἀρχικὸν κεφάλαιον α εἰς τὸ τέλος τοῦ πρώτου ἔτους θὰ γίνῃ $\alpha+\alpha\tau$ ἢ $\alpha(1+\tau)$, ἤτοι τὸ κεφάλαιον, τὸ ὁποῖον τοκίζεται κατὰ τὸ δεύτερον ἔτος, εἶναι $\alpha(1+\tau)$. Ὥστε αἱ $\alpha(1+\tau)$ δραχμαὶ θὰ φέρουν εἰς ἓν ἔτος τόκον $\alpha(1+\tau)\tau$. Ἑπομένως τὸ κεφάλαιον εἰς τὸ τέλος τοῦ δευτέρου ἔτους θὰ γίνῃ:

$$\alpha(1+\tau)+\alpha(1+\tau)\tau \quad \text{ἢ} \quad \alpha(1+\tau)(1+\tau)=\alpha(1+\tau)^2.$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω βλέπομεν λοιπόν, ὅτι ***ἡ ἀξία οἱουδήποτε κεφαλαίου μετὰ ἓν ἔτος εὑρίσκεται, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ τοῦτο ἐπὶ (1+τ).***

Κατὰ ταῦτα, εἰς τὸ τέλος τοῦ τρίτου ἔτους τὸ κεφάλαιον θὰ γίνῃ:

$$\alpha(1+\tau)^2.(1+\tau)=\alpha(1+\tau)^3$$

καὶ γενικῶς εἰς τὸ τέλος τοῦ νυοστοῦ ἔτους θὰ γίνῃ $\alpha(1+\tau)^\nu$. Ἐὰν λοιπὸν παραστήσωμεν διὰ Κ τὴν ἀξίαν τοῦ δανείου, εἰς τὸ τέλος τῶν ν ἐτῶν θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν

$$K=\alpha(1+\tau)^\nu \qquad (1)$$

Φανερὸν δέ, ὅτι ἡ αὐτὴ προκύπτει ἐξίσωσις καὶ ὅταν ὁ ἀνατοκισμὸς συμβαίνῃ οὐχὶ κατ' ἔτος, ἀλλὰ κατ' ἴσα χρονικὰ διαστήματα οἱαδήποτε, π.χ. κατὰ ἑξάμηνα, τρίμηνα κτλ., ἀρκεῖ νὰ παρασταθῇ διὰ τοῦ τ ὁ τόκος τῆς δραχμῆς εἰς ἓν τῶν διαστημάτων τούτων καὶ διὰ τοῦ ν τὸ πλῆθος τῶν ἑξαμήνων, τριμήνων κτλ.

Ἡ ἐξίσωσις (1) βλέπομεν, ὅτι περιέχει τέσσαρα ποσά, τὰ Κ, α, τ καὶ ν· ὅταν δὲ ἐκ τῶν τεσσάρων αὐτῶν ποσῶν γνωρίζωμεν τὰ τρία, εὑρίσκομεν τὸ τέταρτον λύοντες τὴν ἐξίσωσιν (1). Γίνεται δὲ τοῦτο εὐκόλως διὰ τῶν λογαρίθμων, διότι λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους ἀμφοτέρων τῶν ἴσων εὑρίσκομεν:

$$\lambda o\gamma K=\lambda o\gamma\alpha+\nu\lambda o\gamma(1+\tau) \qquad (1')$$

184. Προβλήματα ἀνατοκισμοῦ. 1ον) ***Ἐδάνεισέ τις κεφάλαιον 30000 δραχμῶν ἐπ' ἀνατοκισμῷ κατ' ἔτος πρὸς 8 %. Πόσον θὰ γίνῃ μετὰ 12 ἔτη;***

Ἔχομεν $\nu=12$, $\alpha=30000$, $\tau=0{,}08$

Ὅθεν ὁ τύπος (1΄) γίνεται :

$$\lambda o\gamma K = \lambda o\gamma 30000 + 12\lambda o\gamma(1,08)$$

$$\lambda o\gamma 30000 = 4,47712$$

$\lambda o\gamma(1,08) = 0,03342$ $\qquad 12\lambda o\gamma(1,08) = 0,40104$

$$\lambda o\gamma K = 4,87816$$

$$\text{καὶ} \quad K = 75536,7.$$

2ον) ***Πόσας δραχμὰς πρέπει νὰ δανείσῃ τις ἐπ᾽ ἀνατοκισμῷ πρὸς 6 %, ἵνα λάβῃ μετὰ 15 ἔτη 60000 ;***

Ἔχομεν $K = 60000, \quad \tau = 0,06, \quad \nu = 15.$

Ὅθεν ἕπεται ἐκ τοῦ τύπου (1΄)

$$\lambda o\gamma \alpha = \lambda o\gamma 60000 - 15\lambda o\gamma(1,06)$$

$$\lambda o\gamma 60000 = 4,77815$$

$\lambda o\gamma(1,06) = 0,02531$ $\qquad 15\lambda o\gamma(1,06) = 0,37965$

$$\lambda o\gamma \alpha = 4,39850$$

$$\alpha = 25032,4$$

3ον) ***Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον 40000 δρχ. ἀνατοκιζόμεναι ἐπὶ 20 ἔτη ἔγιναν 87632 ;***

Ἔχομεν $\nu = 20, \quad K = 87632, \quad \alpha = 40000$

Ὅθεν

$$\lambda o\gamma(1+\tau) = \frac{1}{20}(\lambda o\gamma 87632 - \lambda o\gamma 40000)$$

$$\lambda o\gamma 87632 = 4,94266$$

$$\lambda o\gamma 40000 = 4,60206$$

$$\text{διαφορὰ} \qquad = 0,34060$$

$\frac{1}{20}$ τῆς διαφορᾶς ἢ $\lambda o\gamma(1+\tau) = 0,01703$

$$(1+\tau) = 1,04$$

ὅθεν $\qquad \tau = 0,04$

καὶ τὸ ἐπιτόκιον 100τ εἶναι 4 %.

4ον) ***Μετὰ πόσα ἔτη κεφάλαιον 40000 δρχ. ἀνατοκιζόμενον κατ᾽ ἔτος πρὸς 4,5 % γίνεται 67841,6 ;***

Ὁ τύπος (1΄) δίδει :

$$\nu = \frac{\lambda o\gamma 67841,6 - \lambda o\gamma 40000}{\lambda o\gamma 1,045}$$

Ἔχομεν $\quad \lambda o\gamma 67841,6 = 4,83150$

$\lambda o\gamma 40000 = 4,60206$

διαφορὰ $= 0,22944$

$\lambda o\gamma 1,045 = 0,01912$

Ὥστε $\quad \nu = \dfrac{0,22944}{0,01912} = \dfrac{22944}{1912} = 12$ ἔτη.

5ον) ***Μετὰ πόσα ἔτη 12589 δραχμαὶ ἀνατοκιζόμεναι πρὸς 5 % γίνονται 45818;***

Ὁ τύπος (1′) δίδει:

$$\nu = \frac{\lambda o\gamma 45818 - \lambda o\gamma 12589}{\lambda o\gamma (1,05)}$$

Ἔχομεν $\quad \lambda o\gamma 45818 = 4,66104$

$\lambda o\gamma 12589 = 4,09999$

διαφορὰ $= 0,56105$

$\lambda o\gamma (1,05) = 0,02119$

καὶ $\quad \nu = \dfrac{0,56105}{0,02119} = \dfrac{56105}{2119} = 26$ ἔτη καί τι πλέον.

Διὰ νὰ εὕρωμεν ἤδη τὸ μέρος τοῦ 27ου ἔτους, θὰ εὕρωμεν πρῶτον τί γίνονται αἱ 12589 δραχμαὶ εἰς τὸ τέλος τοῦ 26ου ἔτους. Εὑρίσκομεν δέ, ὅτι $12589.(1,05)^{26} = 44764$.

Ὥστε αἱ 44764 δραχμαὶ διὰ τὸν ὑπόλοιπον χρόνον φέρουν ἁπλοῦν τόκον $45818 - 44764 = 1054$ δραχμάς. Κατόπιν τούτου εὑρίσκομεν τὸν χρόνον διὰ τοῦ γνωστοῦ τύπου τοῦ ἁπλοῦ τόκου:

$$\chi = \frac{1054.36000}{44764.5} = 170 \text{ ἡμέραι.}$$

Σημείωσις. Ἐν τῇ πράξει πρὸς εὐκολίαν γίνεται συνήθως τὸ ἑξῆς: Ἡ ἄνω διαίρεσις $\dfrac{56105}{2119}$ μετὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ πηλίκου 26 δίδει ὑπόλοιπον 1011. Λαμβάνομεν δὲ ὡς τὸν ζητούμενον χρόνον 26 ἔτη καὶ $\dfrac{1011}{2119}$ τοῦ ἔτους, τὸ ὁποῖον τρέπομεν εἰς μῆνας καὶ ἡμέρας. Εὑρίσκομεν δὲ 5 μῆνας καὶ 22 περίπου ἡμέρας, ἤτοι 172 ἡμέρας. Εἰς ἄλλας περιπτώσεις τὸ ἐξαγόμενον τὸ ὁποῖον εὑρίσκομεν κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον, διαφέρει τοῦ ἀκριβοῦς πολὺ ὀλίγον.

6ον) ***Κεφάλαιον 4000 δραχμῶν ἀνατοκίζεται καθ᾽ ἑξάμηνον. Τί γίνεται μετὰ 15 ἔτη, ὅταν τὸ ἐπιτόκιον εἶναι 4 %;***

Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο εἶναι:

$$\nu = 15.2 = 30 \quad \text{καὶ} \quad \tau = \frac{0{,}04}{2} = 0{,}02$$

Ἔχομεν λοιπὸν $K = 4000.(1{,}02)^{30}$

Εὑρίσκομεν δὲ διὰ τῶν λογαρίθμων, ὅτι :

$$K = 7245{,}50 \text{ δραχμαί.}$$

185. Οἱ τύποι τοῦ ἀνατοκισμοῦ ἐφαρμόζονται καὶ εἰς ζητήματα πληθυσμοῦ. Π.χ. ***Ὁ πληθυσμὸς μιᾶς πόλεως εἶναι α, αὐξάνει δὲ οὗτος κατὰ 3 %₀ ἐτησίως. Πόσος θὰ εἶναι μετὰ ν ἔτη;***

Ἐὰν συλλογισθῶμεν ὡς εἰς τὸ πρόβλημα τῆς παραγράφου 183 εὑρίσκομεν, ὅτι $K = \alpha(1{,}03)^{\nu}$.

186. Πρόβλημα. ***Εἰς μίαν πόλιν, ἡ κατ' ἔτος αὔξησις τοῦ πληθυσμοῦ εἶναι 8 ‰. Μετὰ πόσα ἔτη ὁ πληθυσμὸς αὐτῆς θὰ διπλασιασθῇ;***

Ἐὰν ὁ πληθυσμὸς εἶναι α, θὰ ἔχωμεν $K = 2\alpha$. Εἶναι δὲ καὶ $\tau = 0{,}008$. Ἔχομεν λοιπόν :

$$2\alpha = \alpha(1{,}008)^{\nu} \quad \text{ἢ} \quad 2 = (1{,}008)^{\nu}$$

Ὥστε
$$\lambda o\gamma 2 = \nu \lambda o\gamma 1{,}008$$

καὶ
$$\nu = \frac{\lambda o\gamma 2}{\lambda o\gamma 1{,}008} = \frac{0{,}30103}{0{,}00346}, \quad \text{ἤτοι} \quad \nu = 87 \text{ ἔτη.}$$

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

345. Εἰς ποῖον ποσὸν θὰ ἀνέλθουν τὰ κάτωθι κεφάλαια, ἀνατοκιζόμενα κατ' ἔτος;

1) 25000 δραχμῶν πρὸς 4 % ἐπὶ 20 ἔτη;
2) 10000 » » 4,5 % » 10 » ;
3) 7300 » » $6\frac{1}{2}$ % » 15 » ;
4) 100 λιρῶν » $4\frac{1}{5}$ % » 18 » ;

346. Κατὰ τὴν ἡμέραν τῆς γεννήσεως τοῦ τέκνου του κατέθεσέ τις εἰς τὸ Ταμιευτήριον 12500 δραχμάς, τὰς ὁποίας ἀφῆκεν ἀνατοκιζομένας κατ' ἔτος πρὸς 4 % ἐπὶ 21 ἔτη. Πόσας δραχμὰς θὰ λάβῃ εἰς τὸ τέλος τῶν ἐτῶν τούτων;

347. Μία πόλις ἔχει πληθυσμὸν 20000 κατοίκων. Αὐξάνει δὲ οὗτος κατὰ 7 ‰ κατ' ἔτος. Πόσος θὰ γίνῃ μετὰ 25 ἔτη;

348. Κεφάλαιον 50000 δραχμῶν ἀνατοκίζεται καθ' ἑξάμηνον. Πόσον θὰ γίνῃ μετὰ 10 ἔτη, τοῦ ἐπιτοκίου ὄντος 6 %;

349. Ποῖα κεφάλαια πρέπει νὰ καταθέσῃ τις ἐπ' ἀνατοκισμῷ κατ' ἔτος, ἵνα λάβῃ :

1) 6500 δραχ. μετὰ 10 ἔτη, τοῦ ἐπιτοκίου ὄντος 6 %;
2) 25000 » » 6 » » » » 4,5 %;
3) 37675 » » 15 » » » » 4 %;

350. Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον πρέπει νὰ ἀνατοκισθῇ κατ' ἔτος κεφάλαιον 24850 δραχμῶν, ἵνα μετὰ 12 ἔτη γίνῃ 50000 δραχμαί;

351. Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον κεφάλαιόν τι ἀνατοκιζόμενον κατ' ἔτος διπλασιάζεται μετὰ 15 ἔτη;

352. Μετὰ πόσα ἔτη 7000 δραχμαὶ ἀνατοκιζόμεναι κατ' ἔτος πρὸς 5 % γίνονται 9850 δραχμαί;

353. Μετὰ πόσον χρόνον 35000 δραχμαὶ ἀνατοκιζόμεναι κατ' ἔτος πρὸς $6\frac{1}{2}$ % γίνονται 60000;

354. Μετὰ πόσον χρόνον κεφάλαιόν τι ἀνατοκιζόμενον κατ' ἔτος πρὸς 4 % (ἢ 4,50 % ἢ 5 %) διπλασιάζεται καὶ μετὰ πόσον χρόνον ἀνατοκιζόμενον κατ' ἔτος πρὸς 6 % τριπλασιάζεται;

355. Κεφάλαιον 15000 δραχμῶν ἀνατοκίζεται κατ' ἔτος πρὸς 5 %. Εἰς ποῖον ποσὸν θὰ ἀνέλθῃ, ἐὰν ὁ χρόνος εἶναι 6 ἔτη καὶ 9 μῆνες;

356. Ἐὰν ὁ πληθυσμὸς τόπου τινὸς αὐξάνεται κατ' ἔτος κατὰ τὸ 5 ‰ αὐτοῦ καὶ εἶναι σήμερον 2000000, πόσος θὰ γίνῃ μετὰ 100 ἔτη;

357. Εἰς μίαν πόλιν αἱ γεννήσεις ἀνέρχονται κατ' ἔτος εἰς 44 ‰ ἐπὶ τοῦ πληθυσμοῦ, οἱ δὲ θάνατοι εἰς 19 ‰. Μετὰ πόσα ἔτη ὁ πληθυσμὸς τῆς πόλεως θὰ εἶναι ηὐξημένος κατὰ τὸ ἥμισυ τοῦ πληθυσμοῦ τῆς σήμερον;

187. Προβλήματα ἴσων καταθέσεων. ***Ἐὰν εἰς τὴν ἀρχὴν ἑκάστου ἔτους καταθέτῃ τις εἰς Τράπεζαν τὸ αὐτὸ ποσὸν α δραχμῶν ἐπ' ἀνατοκισμῷ, πόσα θὰ ἔχῃ νὰ λάβῃ μετὰ ν ἔτη, ὅταν ὁ τόκος τῆς μιᾶς δραχμῆς εἰς ἓν ἔτος εἶναι τ;***

Ἡ πρώτη κατάθεσις τῶν α δραχμῶν θὰ γίνῃ μετὰ ν ἔτη $\alpha(1+\tau)^{\nu}$. Ἡ δευτέρα κατάθεσις ἡ γενομένη εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ δευτέρου ἔτους θὰ γίνῃ $\alpha(1+\tau)^{\nu-1}$, διότι ἐπὶ $(\nu-1)$ ἔτη θὰ ἀνατοκισθῇ. Ἡ τρίτη κατάθεσις θὰ γίνῃ $\alpha(1+\tau)^{\nu-2}$ κ.ο.κ. Τέλος ἡ τελευταία κατάθεσις θὰ τοκισθῇ ἐπὶ 1 ἔτος καὶ θὰ γίνῃ $\alpha(1+\tau)$.

Ὥστε, ἐὰν διὰ τοῦ Σ παραστήσωμεν τὸ ποσόν, ὅπερ θὰ λάβῃ εἰς τὸ τέλος τῶν ν ἐτῶν, θὰ εἶναι :

$$\Sigma=\alpha(1+\tau)+\alpha(1+\tau)^2+\alpha(1+\tau)^3+\ldots+\alpha(1+\tau)^{\nu},$$

ἤτοι $\Sigma = \frac{\alpha(1+\tau)^{\nu+1} - \alpha(1+\tau)}{1+\tau-1} = \frac{\alpha(1+\tau)[(1+\tau)^{\nu}-1]}{\tau}$.

Ἵνα ὑπολογίσωμεν τὴν παράστασιν ταύτην διὰ τῶν λογαρίθμων, πρέπει νὰ ὑπολογίσωμεν πρῶτον τὴν δύναμιν $(1+\tau)^{\nu}$ καὶ νὰ ἐλαττώσωμεν ἔπειτα αὐτὴν κατὰ μονάδα· τὸ δὲ ὑπόλοιπον νὰ θέσωμεν εἰς τὴν παράστασιν ἀντὶ τοῦ παράγοντος $(1+\tau)^{\nu}-1$ καὶ νὰ ἐφαρμόσωμεν ἐπ' αὐτῆς τοὺς λογαρίθμους.

Σημείωσις α΄. Τὰς δυνάμεις $(1+\tau)^{\nu}$ διὰ $\tau=0{,}03\ldots\tau=0{,}06$ καὶ διὰ $\nu=1, 2\ldots.50$ ἔχουν οἱ ὑπὸ τοῦ Dupuis ἐκδοθέντες πίνακες εἰς σελ. 134. Ὥστε δυνάμεθα νὰ λαμβάνωμεν αὐτὰς ἐκεῖθεν.

Σημείωσις β΄. Ἐὰν αἱ καταθέσεις τοῦ ἄνω προβλήματος γίνωνται εἰς τὸ τέλος ἑκάστου ἔτους, θὰ εὕρωμεν τὸ ζητούμενον αὐτοῦ κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον. Ἡ διαφορὰ εἶναι, ὅτι ἑκάστη κατάθεσις θὰ ἀνατοκίζεται τώρα ἐπὶ ἓν ἔτος ὀλιγώτερον. Οὕτως ἡ πρώτη κατάθεσις θὰ ἀνατοκισθῇ ἐπὶ $\nu-1$ ἔτη, ἡ δευτέρα ἐπὶ $\nu-2$ ἔτη κτλ. Ἡ δὲ τελευταία κατάθεσις θὰ μείνῃ α. Ἂν λοιπὸν παραστήσωμεν διὰ Σ' τὸ ζητούμενον, θὰ ἔχωμεν:

$$\Sigma' = \frac{\alpha(1+\tau)^{\nu} - \alpha}{1+\tau-1} \quad \text{ἢ} \quad \Sigma' = \frac{\alpha[(1+\tau)^{\nu}-1]}{\tau}.$$

Παράδειγμα 1ον. ***Καταθέτει τις εἰς Τράπεζαν εἰς τὴν ἀρχὴν ἑκάστου ἔτους 1000 δραχμὰς ἐπ' ἀνατοκισμῷ πρὸς 6 %. Πόσα θὰ λάβῃ μετὰ 20 ἔτη;***

Ἔχομεν $\alpha=1000$, $\tau=0{,}6$ καὶ $\nu=20$.

Ὥστε εἶναι $$\Sigma = \frac{1000.1{,}06[(1{,}06)^{20}-1]}{0{,}06} \tag{1}$$

Ἐπειδὴ δὲ εἶναι (Dupuis, σελ. 134) $(1{,}06)^{20}=3{,}20713$, ἕπεται ὅτι:

$$\lambda o\gamma\Sigma = \lambda o\gamma 1000 + \lambda o\gamma(1{,}06) + \lambda o\gamma(2{,}20713) - \lambda o\gamma(0{,}06),$$

$$\begin{aligned}
\lambda o\gamma 1000 &= 3\\
\lambda o\gamma(1{,}06) &= 0{,}02531\\
\lambda o\gamma(2{,}20713) &= 0{,}34383\\
\text{ἄθροισμα}\quad &= 3{,}36914\\
\lambda o\gamma(0{,}06) &= \overline{2}{,}77815\\
\text{ὑπόλοιπον} = \lambda o\gamma\Sigma &= 4{,}59099\\
\text{καὶ}\quad \Sigma &= 38993{,}6
\end{aligned}$$

Σημείωσις. Τὴν παράστασιν (1) δυνάμεθα προηγουμένως νὰ καταστήσωμεν ἁπλουστέραν. Θὰ ἔχωμεν δὲ οὕτω:

$$\Sigma = \frac{106000.2,20713}{6} \text{ καὶ } \lambda o\gamma\Sigma = \lambda o\gamma 106000 + \lambda o\gamma(2,20713) - \lambda o\gamma 6.$$

$$\begin{array}{lr} & \lambda o\gamma 106000 = 5,02531 \\ & \lambda o\gamma(2,20713) = 0,34383 \\ \hline \text{ἄθροισμα} & = 5,36914 \\ & \lambda o\gamma 6 = 0,77815 \\ \hline & \lambda o\gamma\Sigma = 4,59099 \text{ κτλ.} \end{array}$$

Παράδειγμα 2ον. ***Τί ποσὸν πρέπει νὰ καταθέτῃ τις ἐπ' ἀνατοκισμῷ εἰς τὸ τέλος ἑκάστου ἔτους πρὸς 5 %, ἵνα μετὰ 15 ἔτη ἔχῃ 100000 δραχμάς;***

Ἔχομεν $\Sigma' = 100000$, $\tau = 0,05$ καὶ $\nu = 15$

ὥστε εἶναι $$100000 = \frac{\alpha[(1,05)^{15} - 1]}{0,05}$$

ἤτοι $$\alpha = \frac{0,05.100000}{(1,05)^{15} - 1}$$

Ἐπειδὴ εἰς τοὺς πίνακας Dupuis εὑρίσκομεν :

$$(1,05)^{15} = 2,0789$$

ἔχομεν $\alpha = \frac{5000}{1,0789}$ καὶ $\lambda o\gamma\alpha = \lambda o\gamma 5000 - \lambda o\gamma 1,0789.$

$$\begin{array}{r} \lambda o\gamma 5000 = 3,69897 \\ \lambda o\gamma 1,0789 = 0,03298 \\ \hline \lambda o\gamma\alpha = 3,66599 \end{array}$$

καὶ $\alpha = 4634,3$

ΧΡΕΩΛΥΣΙΑ

188. Συνήθως τὰ σχετικῶς μεγάλα δάνεια, τῶν ὁποίων ἡ διάρκεια εἶναι μᾶλλον μακρά, ἐξοφλοῦνται δι' ἴσων δόσεων, αἱ ὁποῖαι πληρώνονται κατ' ἴσα χρονικὰ διαστήματα, π.χ. ἐτήσια, ἑξάμηνα, τρίμηνα κτλ.

Τὸ ποσόν, τὸ ὁποῖον πληρώνεται εἰς τὸ τέλος ἑκάστου χρονικοῦ διαστήματος, λέγεται **χρεωλύσιον**.

189. Πρόβλημα. ***Ἔστω, ὅτι ἐδανείσθη τις ἓν ποσὸν α δραχμῶν ἐπ' ἀνατοκισμῷ, τὸ ὁποῖον θὰ ἐξοφλήσῃ διὰ ν ἐτησίων δόσεων. Ποῖον εἶναι τὸ χρεωλύσιον, ὅταν ὁ τόκος ἑκάστης δραχμῆς εἰς ἓν ἔτος εἶναι τ;***

Ἐὰν τὸ ποσὸν τῶν α δραχμῶν ἐπρόκειτο νὰ πληρωθῇ μετὰ τῶν τόκων του διὰ μιᾶς εἰς τὸ τὸ τέλος τῶν ν ἐτῶν, θὰ ἐχρειάζοντο δραχμαὶ

$\alpha(1+\tau)^{\nu}$. Ἀλλ' ἐπειδὴ θὰ ἐξοφληθῇ χρεωλυτικῶς, εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν χρεωλυσίων μετὰ τῶν συνθέτων τόκων των πρέπει νὰ ἀποτελέσῃ ποσότητα ἴσην μὲ $\alpha(1+\tau)^{\nu}$. Ἀλλ' ἐὰν διὰ χ παραστήσωμεν τὸ ἐτήσιον χρεωλύσιον, τὸ ὁποῖον, ὡς εἴπομεν προηγουμένως, πληρώνεται εἰς τὸ τέλος ἑκάστου ἔτους, θὰ ἔχωμεν ἄθροισμα τῶν ν χρεωλυσίων μετὰ τῶν συνθέτων τόκων των, κατὰ τὴν σημείωσιν β' τοῦ προβλήματος 187, ἴσον μὲ

$$\frac{\chi[(1+\tau)^{\nu}-1]}{\tau}$$

Ὡς δὲ εἴπομεν προηγουμένως, θὰ εἶναι:

$$\alpha(1+\tau)^{\nu}=\frac{\chi[(1+\tau)^{\nu}-1]}{\tau} \qquad (1)$$

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν ἓν τῶν ποσῶν χ, α, τ, ν, ὅταν τὰ ἄλλα τρία εἶναι γνωστά, ἑπομένως καὶ τὸ χ. Λύοντες λοιπὸν τὴν ἐξίσωσιν (1) πρὸς χ εὑρίσκομεν:

$$\chi=\frac{\alpha\tau(1+\tau)^{\nu}}{(1+\tau)^{\nu}-1} \qquad (2)$$

Π α ρ α δ ε ί γ μ α τ α. 1) ***Ἐδανείσθη τις 80000 δραχμὰς πρὸς 7 % καὶ θέλει νὰ ἐξοφλήσῃ τὸ χρέος τοῦτο δι' ἐτησίων δόσεων εἰς 12 ἔτη. Πόσον θὰ εἶναι τὸ χρεωλύσιον;***

Ἔχομεν $\alpha=80000$, $\tau=0{,}07$, $\nu=12$.

Κατὰ πρῶτον ὑπολογίζομεν τὴν δύναμιν $(1{,}07)^{12}$

$\lambda o \gamma(1{,}07)=0{,}02938 \qquad 12\lambda o\gamma(1{,}07)=0{,}35256$

ὅθεν $\qquad (1{,}07)^{12}=2{,}2519$

καὶ κατὰ τὴν ἐξίσωσιν (2) ἔχομεν:

$$\chi=\frac{80000(2{,}2519)(0{,}07)}{1{,}2519}$$

$$\begin{aligned}
\lambda o\gamma 80000&=4{,}90309\\
\lambda o\gamma 2{,}2519&=0{,}35256\\
\lambda o\gamma(0{,}07)&=\bar{2}{,}84510\\
\hline
\text{ἄθροισμα}\quad&=4{,}10075\\
\lambda o\gamma(1{,}2519)&=0{,}09757\\
\text{ὑπόλοιπον}=\lambda o\gamma\chi&=4{,}00318\\
\text{καὶ}\quad \chi&=10073{,}5
\end{aligned}$$

2) ***Πόσον εἶναι τὸ χρέος, ὅπερ ἐξοφλεῖται εἰς 25 ἔτη διὰ χρεωλυσίου 8900 δραχμῶν, τοῦ ἐπιτοκίου ὄντος 6 %;***

Ἐνταῦθα ἔχομεν

$$\chi=8900, \quad \tau=0{,}06, \quad \nu=25$$

καὶ ἡ ἐξίσωσις (1) γίνεται:

$$\alpha=8900 \cdot \frac{(1{,}06)^{25}-1}{0{,}06(1{,}06)^{25}}$$

Ἐπειδὴ δὲ εἶναι (Dupuis, σελ. 134) $(1{,}06)^{25}=4{,}29187$, ἕπεται:

$$\lambda o\gamma\alpha=\lambda o\gamma 8900+\lambda o\gamma(3{,}29187)-\lambda o\gamma(0{,}06)-\lambda o\gamma(4{,}29187)$$

$$\lambda o\gamma 0{,}06=\overline{2}{,}77815 \qquad \lambda o\gamma 8900=3{,}94939$$

$$\lambda o\gamma 4{,}29187=0{,}63265 \qquad \lambda o\gamma 3{,}29187=0{,}51744$$

$$\overline{1}{,}41080 \qquad 4{,}46683$$

$$4{,}46683$$

$$\overline{1}{,}41080$$

$$\lambda o\gamma\alpha=5{,}05603$$

καὶ $\alpha=113771.$

3) ***Εἰς πόσα ἔτη ἐξοφλεῖται δάνειον 1200000 δραχμῶν, ὅταν τὸ ἐτήσιον χρεωλύσιον εἶναι 150000 δραχμαὶ καὶ τὸ ἐπιτόκιον 8%;***

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως (1) λαμβάνομεν:

$$\chi(1+\tau)^\nu-\chi=\alpha\tau(1+\tau)^\nu$$

$$\chi(1+\tau)^\nu-\alpha\tau(1+\tau)^\nu=\chi$$

$$(1+\tau)^\nu(\chi-\alpha\tau)=\chi$$

καὶ

$$(1+\tau)^\nu=\frac{\chi}{\chi-\alpha\tau}.$$

Ἐκ τῆς τελευταίας δὲ αὐτῆς ἐξισώσεως ἔχομεν:

$$\nu\lambda o\gamma(1+\tau)=\lambda o\gamma\chi-\lambda o\gamma(\chi-\alpha\tau)$$

καὶ

$$\nu=\frac{\lambda o\gamma\chi-\lambda o\gamma(\chi-\alpha\tau)}{\lambda o\gamma(1+\tau)}.$$

Ἤδη δὲ παρατηροῦμεν, ὅτι, διὰ νὰ εἶναι τὸ πρόβλημα τοῦτο δυνατόν, πρέπει ὁ ἀριθμὸς $(\chi-\alpha\tau)$ νὰ εἶναι θετικός, δηλαδὴ πρέπει νὰ εἶναι $\chi>\alpha\tau$, ἢ μὲ ἄλλους λόγους πρέπει τὸ χρεωλύσιον νὰ ὑπερβαίνῃ τὸν ἐτήσιον τόκον τοῦ ἀρχικοῦ κεφαλαίου, ὅπερ εἶναι καὶ ἀφ' ἑαυτοῦ φανερόν. Εἰς τὸ δοθὲν πρόβλημα εἶναι $\alpha=1200000$ καὶ $\tau=0{,}08$. Ὥστε $\alpha\tau=96000$ καὶ ἑπομένως:

$$\chi-\alpha\tau=150000-96000=54000$$

$$\lambda o\gamma(1{,}08)=0{,}03342$$

$$\lambda o\gamma 150000=5{,}17609$$

$$\lambda o\gamma 54000=4{,}73239$$

$$\delta\iota\alpha\varphi o\rho\grave{\alpha}=0{,}44370$$

$$\nu = \frac{0{,}44370}{0{,}03342} = \frac{44370}{3342} = 13 \text{ ἔτη καί τι πλέον.}$$

Ὥστε μὲ 13 δόσεις δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἐξοφληθῇ ἐντελῶς τὸ χρέος· πρέπει νὰ πληρωθῇ ἀκόμη ἓν ποσόν, τὸ ὁποῖον εἶναι φανερόν, ὅτι θὰ εἶναι μικρότερον τοῦ χρεωλυσίου. Διὰ νὰ εὕρωμεν δὲ τοῦτο, ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν πόσον γίνεται τὸ δάνειον εἰς τὸ τέλος τῶν 14 ἐτῶν, ἔπειτα τί γίνονται αἱ 13 δόσεις εἰς τὸ τέλος τῶν αὐτῶν ἐτῶν, καὶ ἔπειτα νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ δεύτερον ποσὸν ἀπὸ τοῦ πρώτου. Οὕτως εὑρίσκομεν, ὅτι πρέπει νὰ πληρωθοῦν ἀκόμη 42551 δραχμαί.

Σημείωσις α΄. Πρόβλημα, εἰς τὸ ὁποῖον νὰ ζητῆται τὸ τ, δὲν δυνάμεθα νὰ λύσωμεν. Οὔτε καὶ ἐν τῇ πράξει παρουσιάζεται ἡ ἀνάγκη τοιούτου προβλήματος, διότι τὰ ἐπιτόκια καθορίζονται ἐκ τῶν προτέρων καὶ εἶναι γνωστά. Ἐν τούτοις ὅμως ὑπάρχουν πίνακες διὰ δάνεια 100 δραχμῶν, τῇ βοηθείᾳ τῶν ὁποίων δι' ἁπλουστάτων πράξεων δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν τὸ τ.

Σημείωσις β΄. Τὰ δάνεια, τὰ ὁποῖα κάμνει τὸ Κράτος καὶ περὶ ὧν γίνεται λόγος εἰς τὴν Ἀριθμητικὴν (σελ. 236), ἐξοφλοῦνται συνήθως ὡς ἑξῆς: Ἕκαστον ἔτος ἢ ἕκαστον ἑξάμηνον ἐξοφλεῖται εἷς ὡρισμένος ἀριθμὸς ὁμολογιῶν καὶ πρὸς τοῦτο γίνεται κλήρωσις. Αἱ δὲ ὁμολογίαι, αἱ ὁποῖαι ἐκληρώθησαν, πληρώνονται εἰς τὸ ἄρτιον, ἤτοι εἰς τὴν τιμήν, τὴν ὁποίαν ἀναγράφουν. Τὸ ποσόν, τὸ ὁποῖον διατίθεται εἰς ἑκάστην περίοδον διὰ τὴν ἐξόφλησιν τῶν κληρουμένων ὁμολογιῶν καὶ διὰ τὴν πληρωμὴν τῶν τόκων τῶν ὁμολογιῶν, αἱ ὁποῖαι ἀπομένουν, εἶναι σταθερὸν καὶ ἀποτελεῖ τὸ χρεωλύσιον. Οὕτω δὲ μετὰ τὴν πάροδον τῶν καθωρισμένων ἐτῶν τὸ δάνειον ἐξοφλεῖται. Ἀλλ' ὑπάρχουν δάνεια, εἰς τὰ ὁποῖα εἷς ὡρισμένος ἀριθμὸς ὁμολογιῶν ἐξοφλεῖται κατ' ἔτος ἢ καθ' ἑξάμηνον εἰς τιμὴν μεγαλυτέραν τοῦ ἀρτίου. Τὰ δάνεια αὐτὰ εἶναι τὰ λαχειοφόρα. Τὸ δὲ χρεωλύσιον αὐτῶν ἀποτελεῖται ἀπὸ τὸν τόκον, ἀπὸ τὸ ποσόν, τὸ ὁποῖον διατίθεται διὰ τὴν ἐξόφλησιν τῶν ὁμολογιῶν αἱ ὁποῖαι κληροῦνται εἰς τὸ ἄρτιον, καὶ ἀπὸ τὸ ποσόν, τὸ ὁποῖον διατίθεται διὰ τὴν πληρωμὴν τῶν λαχνῶν.

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

358. Πατὴρ τις ἀπέκτησε τέκνον καὶ ἀπὸ τῆς γεννήσεως αὐτοῦ καὶ χάριν αὐτοῦ καταθέτει κατ' ἔτος ἐπ' ἀνατοκισμῷ πρὸς 5% τὸ ποσὸν τῶν 2000 δραχμῶν. Πόσα θὰ ἔχῃ εἰς τὸ τέλος τοῦ 18ου ἔτους;

359. Πατὴρ τις ἀπέκτησε τέκνον καὶ θέλει νὰ καταθέτῃ ἓν ποσὸν δι' αὐτὸ κατ' ἔτος, ὥστε τὰ ποσὰ αὐτὰ ἀνατοκιζόμενα κατ' ἔτος πρὸς 4% νὰ γίνουν μετὰ 20 ἔτη 150000 δραχμαί. Πόσων δραχμῶν πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἐτησία κατάθεσις;

360. Καταθέτει τις κατ' ἔτος ἐπ' ἀνατοκισμῷ πρὸς 4% τὸ ποσὸν τῶν 1000 δραχ. Μετὰ πόσα ἔτη θὰ ἔχῃ 50000 δραχμάς ;

361. Δῆμός τις ἐδανείσθη 3000000 δραχμὰς πρὸς 5%, μὲ τὴν συμφωνίαν, ἵνα τὸ ποσὸν αὐτὸ ἐξοφλήσῃ χρεωλυτικῶς δι' ἴσων ἐτησίων δόσεων ἐντὸς 30 ἐτῶν. Πόσον εἶναι τὸ χρεωλύσιον ;

362. Ποῖον χρέος ἐξώφλησεν εἷς, ὁ ὁποῖος ἐπλήρωνεν ἐτήσιον χρεωλύσιον 5000 δραχμὰς πρὸς 4% ἐπὶ 20 ἔτη ;

363. Ἐδανείσθη τις 250000 δραχμὰς ἐπ' ἀνατοκισμῷ κατ' ἔτος πρὸς 6% μὲ τὴν συμφωνίαν, ἵνα ἐξοφλήσῃ τὸ χρέος του χρεωλυτικῶς δι' ἴσων ἐτησίων δόσεων ἐκ 40000 δραχμῶν. Μετὰ πόσα ἔτη θὰ ἐξοφλήσῃ τὸ χρέος του ;

364. Δῆμός τις ἐδανείσθη τὸ ποσὸν τῶν 3000000 δραχμῶν διὰ τὴν ἀνέγερσιν διδακτηρίων, τὸ ὁποῖον θὰ ἐξοφλήσῃ χρεωλυτικῶς διὰ 12 ἴσων ἐτησίων δόσεων ἀρχομένων 3 ἔτη μετὰ τὴν σύναψιν τοῦ δανείου. Ποῖον εἶναι τὸ χρεωλύσιον, ὅταν τὸ ἐπιτόκιον εἶναι 5% ;

Διάφοροι ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

365. Ὁ τύπος $\alpha=13{,}6$ γραμ. $\upsilon\varepsilon$ δίδει τὴν ἀτμοσφαιρικὴν πίεσιν εἰς γραμμάρια ὑπὸ βαρομετρικῆς στήλης, τῆς ὁποίας τὸ ὕψος υ παριστᾷ ἑκατοστόμετρα, ἐπὶ ἐπιφανείας ε εἰς τετραγωνικὰ ἑκατοστόμετρα. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις ἐπὶ διαφόρων ἐπιφανειῶν ὑπὸ στήλης ὕψους 0,76 μ. 0,751 μ. κτλ.

366. Ὁ τύπος τῆς γραμμικῆς διαστολῆς εἶναι :

$$\mu'=\mu[(1+\sigma(\tau'-\tau)],$$

ὅπου μ καὶ μ' εἶναι τὸ μῆκος μιᾶς ράβδου εἰς θερμοκρασίας τ καὶ τ' καὶ σ ὁ συντελεστὴς τῆς γραμμικῆς διαστολῆς τῆς ράβδου. Εὕρετε τὸ μῆκος ράβδου σιδηρᾶς 100°, ὅταν τὸ μῆκος αὐτῆς εἰς 10° εἶναι 1 μέτρον. Ὁ μέσος συντελεστὴς τῆς γραμμικῆς διαστολῆς τοῦ σιδήρου εἶναι 0,0000122.

367. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα :

$$\alpha\chi+\beta\psi=\gamma$$
$$\alpha'\chi+\beta'\psi=\gamma'$$

καὶ κατὰ τὴν λύσιν αὐτοῦ νὰ ἐξετασθοῦν αἱ περιπτώσεις, κατὰ τὰς ὁποίας εἶναι :

1) $\alpha\beta'-\alpha'\beta=0$ καὶ $\gamma\beta'-\gamma'\beta=0$ (ἢ $\alpha\gamma'-\alpha'\gamma=0$) καὶ τοὐλάχιστον $\beta\neq0$ (ἢ $\alpha\neq0$).

2) $\alpha\beta'-\alpha'\beta=0$ καὶ $\gamma\beta'-\gamma'\beta\neq0$ (ἢ $\alpha\gamma'-\alpha'\gamma\neq0$) καὶ $\beta\neq0$ (ἢ $\alpha\neq0$).

3) $\alpha\beta'-\alpha'\beta\neq0$.

4) $\alpha=\alpha'=\beta=\beta'=0$ καὶ $\gamma\neq0$ (ἢ $\gamma'\neq0$).

5) $\alpha=\alpha'=\beta=\beta'$ καὶ $\gamma=0$ (ἢ $\gamma'=0$).

368. Κατὰ τὴν λύσιν τοῦ συστήματος τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως ἐὰν $\alpha \neq 0$ καὶ $\alpha\beta' - \alpha'\beta = 0$, $\alpha\gamma' - \alpha'\gamma = 0$, νὰ ἐξετασθῇ ἡ σχέσις ἡ μεταξὺ τῶν λόγων $\frac{\alpha}{\alpha'}$, $\frac{\beta}{\beta'}$, $\frac{\gamma}{\gamma'}$.

369. Ἀεροπλάνον ἔχον ἀντίθετον τὸν ἄνεμον διήνυσεν 690 χιλιόμετρα εἰς 3 ὥρας. Κατόπιν ὅμως, ἐπειδὴ ἐδιπλασιάσθη ἡ ταχύτης τοῦ ἀνέμου, ηὔξησε τὴν ἰδίαν του ταχύτητα κατὰ 40 χιλιόμετρα τὴν ὥραν καὶ διήνυσεν ἄλλα 470 χιλιόμετρα εἰς 2 ὥρας. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἰδία ταχύτης τοῦ ἀεροπλάνου καὶ τοῦ ἀνέμου κατὰ τὰς 3 πρώτας ὥρας.

370. Τεμάχιον μολύβδου βάρους 10 χιλιογράμμων πρόκειται νὰ συνδεθῇ μὲ φελλὸν οὕτως, ὥστε τὸ ὅλον σῶμα ἐντὸς τοῦ ὕδατος νὰ ζυγίζῃ 2 χιλιόγραμμα. Πόσος φελλὸς θὰ χρειασθῇ πρὸς τοῦτο, ὅταν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ μολύβδου εἶναι 11,35 καὶ τοῦ φελλοῦ 0,24;

371. Κρᾶμα δύο μετάλλων ζυγίζει α χιλιόγραμμα. Νὰ εὑρεθῇ τὸ βάρος ἑκάστου τῶν μετάλλων τοῦ κράματος, ὅταν τὸ μὲν ὅλον κρᾶμα χάνῃ ἐντὸς τοῦ ὕδατος ζυγιζόμενον μ χιλιόγραμμα καὶ ὅταν β χιλιόγραμμα τοῦ ἑνὸς ἐξ αὐτῶν χάνουν ἐντὸς τοῦ ὕδατος ν χιλιόγραμμα, ἐνῷ γ χιλιόγραμμα τοῦ ἄλλου χάνουν ἐντὸς τοῦ ὕδατος λ χιλιόγραμμα.

372. Ἠλεκτρικὸν ρεῦμα 10 βὸλτ ἔχει δύναμιν 5 ἀμπέρ. Διὰ ποίας ἀντιστάσεως ἡ δύναμις αὐτη κατέρχεται εἰς 2 ἀμπέρ;

373. Ρεῦμα 3 ἀμπὲρ διακλαδοῦται εἰς δύο χάλκινα σύρματα, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ μὲν ἔχει μῆκος 1 μέτρου καὶ διάμετρον τῆς καθέτου τομῆς 2 χιλιοστομέτρων, τὸ δὲ ἔχει μῆκος 2 μέτρων καὶ διάμετρον τῆς καθέτου τομῆς 1 χιλιοστομέτρου. Πῶς κατανέμεται ἡ ἠλεκτρικὴ δύναμις εἰς ἕκαστον τῶν συρμάτων;

374. Νὰ εὑρεθῇ ἡ διάρκεια τοῦ συνοδικοῦ μηνὸς ἐκ τοῦ ἀστρικοῦ μηνὸς καὶ τοῦ ἀστρικοῦ ἔτους.

375. Μεταξὺ τῆς ἀποστάσεως α ἑνὸς ἀντικειμένου, τῆς ἀποστάσεως β τοῦ εἰδώλου του ἀπὸ ἀμφικύρτου φακοῦ ἑστιακῆς ἀποστάσεως ε ὑπάρχει ἡ σχέσις $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\varepsilon}$. Νὰ εὑρεθῇ: 1ον) τὸ α ἐκ τῶν β καὶ ε, 2ον) τὸ β ἐκ τῶν α καὶ ε, καὶ 3ον) τὸ ε ἐκ τῶν α καὶ β.

376. Ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι, ἐὰν

$$x + x^{-1} = \alpha, \text{ θὰ εἶναι καὶ } x^2 + x^{-2} = \alpha^2 - 2.$$

377. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως:

$$\frac{x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}} - x^{-\frac{1}{3}}} \quad \text{ἐὰν } x = 64$$

378. Ποῖον ἀριθμὸν πρέπει νὰ προσθέσωμεν εἰς ἕκαστον τῶν ἀριθμῶν 6, 8, 10, 13, ἵνα τὰ ἀθροίσματα συνιστῶσιν ἀναλογίαν;

379. Ποῖον ἀριθμὸν πρέπει νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ ἕκαστον τῶν ἀριθμῶν 8, 10, 13, 17, ἵνα αἱ διαφοραὶ συνιστῶσιν ἀναλογίαν;

380. Σῶμα πίπτει μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα 0 εἰς φρέαρ βάθους 87 μέτρων. Μετὰ πόσον χρόνον θὰ ἴδωμεν τὸ σῶμα φθάνον εἰς τὸν πυθμένα τοῦ φρέατος; Καὶ μετὰ πόσον χρόνον θὰ ἀκούσωμεν, εὑρισκόμενοι εἰς τὸ ἄνω στόμιον τοῦ φρέατος, τὸν κρότον ὁ ὁποῖος θὰ παραχθῇ, ὅταν τὸ σῶμα τοῦτο φθάσῃ εἰς τὸν πυθμένα;

381. Σῶμα πίπτει εἰς φρέαρ καὶ ὁ κρότος, ὅταν τοῦτο φθάσῃ εἰς τὸν πυθμένα τοῦ φρέατος, ἀκούεται εἰς τὸ στόμιον αὐτοῦ μετὰ 4 δευτερόλεπτα ἀπὸ τῆς ἐνάρξεως τῆς πτώσεως. Πόσων μέτρων εἶναι τὸ βάθος τοῦ φρέατος;

382. Βέλος ἐξακοντίζεται κατακορύφως πρὸς τὰ ἄνω καὶ φθάνει εἰς ὕψος 70 μέτρων. Μετὰ πόσον χρόνον φθάνει εἰς τὸ ὕψος τοῦτο; Μετὰ πόσον χρόνον θὰ πέσῃ πάλιν ἐπὶ τῆς Γῆς; Ποία ἦτο ἡ ἀρχικὴ ταχύτης του;

383. Φλοιὸς σχήματος σφαίρας καὶ πάχους 1 ἑκατοστοῦ τοῦ μέτρου βυθίζεται ἐντὸς τοῦ ὕδατος εἰς βάθος 0,13 τοῦ μέτρου. Ποῖον τὸ μῆκος τῶν ἀκτίνων τῆς ἐσωτερικῆς καὶ τῆς ἐξωτερικῆς ἐπιφανείας της, ὅταν τὸ εἰδικὸν βάρος τῆς ὕλης, ἐκ τῆς ὁποίας ἀποτελεῖται, εἶναι 2,75;

384. Ἐκ δύο ἐκκρεμῶν, τῶν ὁποίων τὰ μήκη διαφέρουν κατὰ 0,45 μ., ὅταν τὸ βραχύτερον κάμνῃ 5 αἰωρήσεις, τὸ μακρότερον κάμνει 4. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος ἑκάστου ἐκκρεμοῦς.

385. Εἰς κοῖλον κάτοπτρον ἑστιακῆς ἀποστάσεως 0,40 μ. τὸ ἀντικείμενον καὶ τὸ εἴδωλόν του ἀπέχουν ἀπ' ἀλλήλων 0,64 μ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις ἑκάστου τούτων ἀπὸ τοῦ κατόπτρου.

386. Νὰ εὑρεθῇ τὸ γινόμενον $\alpha.\alpha^2.\alpha^3.\alpha^4 \ldots \alpha^\nu$.

387. Νὰ εὑρεθῇ τὸ γινόμενον $\alpha^{\frac{1}{2}} . \alpha^{\frac{1}{4}} \cdot \alpha^{\frac{1}{8}} \ldots$ ἀπείρου πλήθους παραγόντων.

388. Τὰ ψηφία τριψηφίου ἀριθμοῦ εἶναι ἐν ἀριθμητικῇ προόδῳ. Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς οὗτος διαιρεθῇ διὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ψηφίων, δίδει πηλίκον 26. Ἐὰν δὲ ἡ τάξις τῶν ψηφίων ἀντιστραφῇ, προκύπτει ἀριθμὸς μεγαλύτερος κατὰ 198. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμὸς οὗτος.

389. Ἀριθμητικῆς προόδου, τῆς ὁποίας ὁ πρῶτος ὅρος εἶναι 1, τὸ ἄθροισμα τῶν 10 πρώτων ὅρων αὐτῆς εἶναι τετραπλάσιον τοῦ ἀθροίσματος τῶν 5 πρώτων ὅρων της. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῆς προόδου.

390. Εἰς μίαν γεωμετρικὴν πρόοδον ὁ λόγος τοῦ ἀθροίσματος

τῶν τριῶν πρώτων ὅρων αὐτῆς πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὅρων της ἰσοῦται μὲ 7 : 8. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῆς προόδου ταύτης.

391. Νὰ ἁπλοποιηθῇ ἡ παράστασις :

$$\lambda o\gamma 0{,}06+\lambda o\gamma(0{,}6)^2-\lambda o\gamma 4-\lambda o\gamma 54.$$

392. Ἐὰν $\lambda o\gamma 2=\alpha$ καὶ $\lambda o\gamma 3=\beta$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

1) $\lambda o\gamma 240=3\alpha+\beta+1$ καὶ 2) $\lambda o\gamma 50=2-\alpha$.

393. Νὰ δειχθῇ, ὅτι οἱ λογάριθμοι τῶν ὅρων γεωμετρικῆς προόδου $\alpha, \alpha\lambda, \alpha\lambda^2, \alpha\lambda^3 \dots$ ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον (α καὶ $\lambda>0$).

394. Νὰ γραφοῦν τρεῖς περιφέρειαι μὲ κέντρα τὰς τρεῖς κορυφὰς τριγώνου, καὶ νὰ ἐφάπτωνται ἐξωτερικῶς.

395. Ἐὰν $(\alpha+\beta)^2-(\alpha-\gamma)^2=\alpha(\alpha+2\beta+2\gamma)$ νὰ δειχθῇ, ὅτι α, β, γ εἶναι τὰ μήκη τῶν πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου.

396. Ὁ ἀριθμὸς δ τῶν διαγωνίων πολυγώνου μὲ ν πλευρὰς δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου $\delta=\frac{\nu}{2}(\nu-3)$. Νὰ εὑρεθῇ : 1ον) ποίου πολυγώνου ὁ ἀριθμὸς τῶν διαγωνίων εἶναι κατὰ 2 μικρότερος τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλευρῶν, καὶ 2ον) ποίου πολυγώνου ὁ ἀριθμὸς τῶν διαγωνίων εἶναι κατὰ 12 μεγαλύτερος τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλευρῶν.

397. Ἐκ σημείου Δ τῆς ὑποτεινούσης ΒΓ ἰσοσκελοῦς ὀρθογωνίου τριγώνου φέρομεν τὴν ΔΕ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΓ, καὶ τὴν ΔΖ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς ΑΕ, ὅταν ἡ ΑΒ εἶναι 7 μέτρα καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου ΑΕΔΖ εἶναι 12 τετραγωνικὰ μέτρα.

398. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ μήκη τῶν πλευρῶν ἰσοσκελοῦς τριγώνου, τοῦ ὁποίου ἡ περίμετρος εἶναι 32 μ. καὶ ἡ ἀπόστασις τῆς κορυφῆς ἀπὸ τῆς ἀνίσου πλευρᾶς 4 μ.

399. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ διαστάσεις ὀρθογωνίου ἔχοντος ἐμβαδὸν μ^2 καὶ ὁμοίου πρὸς ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου αἱ διαστάσεις εἶναι α καὶ β.

400. Νὰ ἐγγραφῇ εἰς δοθέντα κύκλον ἀκτῖνος ρ ὀρθογώνιον, τὸ ὁποῖον ἔχει δοθεῖσαν περίμετρον 2λ.

ΤΕΛΟΣ

ΠΙΝΑΞ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΒΙΒΛΙΟΝ Α΄. Η ΑΛΓΕΒΡΑ ΚΑΙ ΑΙ ΑΛΓΕΒΡΙΚΑΙ ΠΡΑΞΕΙΣ

ΒΙΒΛΙΟΝ Β΄. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΟΥ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

$\left(\frac{y^2-2y}{x^2+3y}\right)\cdot\left(\frac{y^2+3x}{x}\right)=\frac{(x^2-2y)(y^2+3x)}{(x^2+3y)x}$

$\sqrt{324}=\pm18,\ \sqrt{484}=\pm22,\ \sqrt{144}=\pm12,\ \sqrt{256}=\pm16,\ \sqrt{196}=\pm14$

$\sqrt{576}=\pm24,\ \sqrt{289}=\pm17,\ \sqrt{169}=\pm13,\ \sqrt{441}=\pm21,\ \sqrt{361}=\pm19$

Ἀνάδοχος Ἐκτυπώσεως — Βιβλιοδεσίας : Α. ΣΙΔΕΡΗΣ

[illegible]

$$\frac{\overset{6}{x-3}}{11} - \frac{\overset{11}{x+5}}{6} = -\overset{66}{3}$$

$$\begin{array}{r} 66 \\ 3 \\ \hline 198 \\ 73 \\ \hline 125 \end{array}$$

$$6x - 18 - 11x - 55 = -198$$

$$6x - 11x = -198 + 55 + 18$$

$$-5x = -125$$

$$x = \frac{125}{5}$$

$$x = 25$$

$$\frac{\overset{x(x+1)}{3}}{x-1} + \frac{\overset{x(x-1)}{5}}{x+1} = \frac{\overset{(x-1)(x+1)}{4}}{x}$$

$$\frac{3x(x+1) + 5x(x-1) - 4(1-x)(-x-1)}{(x+1)(x-1)x}$$