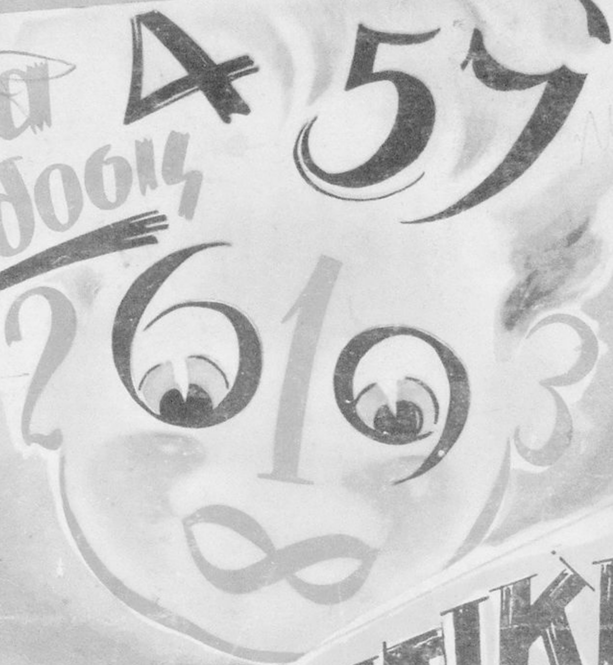
ΠΕΤΡΟΥ ΠΑΠΑΪΩΑΝΝΟΥ

Νέα Έκδοσις



ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

Ε' κ' ΣΤ'!

ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ

ΕΓΚΕΚΡΙΜΕΝΗ

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΤΗΣ "ΕΣΤΙΑΣ"
Ι. Δ. ΚΟΛΛΑΡΟΥ & ΣΙΑΣ Α. Ε.

ΠΕΤΡΟΥ Π. ΠΑΠΑΪΩΑΝΝΟΥ
ΔΙΔΑΣΚΑΛΟΥ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

Ε΄ ΚΑΙ ΣΤ΄ ΤΑΞΕΩΣ
ΤΟΥ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ ΣΧΟΛΕΙΟΥ

ΕΓΚΕΚΡΙΜΕΝΗ
Διὰ τῆς ὑπ' ἀριθ. 61452/12 - 6 - 52 ἀποφάσεως Ὑπ. Παιδείας

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΤΗΣ "ΕΣΤΙΑΣ"
ΙΩΑΝΝΟΥ Δ. ΚΟΛΛΑΡΟΥ & ΣΙΑΣ Α.Ε.

ΒΑΣΙΛΕΙΟΝ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΝ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΚΑΙ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΙΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ

Ἀθῆναι τῇ 20 Ἰουνίου 1952

Ἀριθ. Πρωτ. 61330

Πρὸς
τὸν κ. Πέτρον Παπαϊωάννου
Μπόταση 3
Πειραιᾶ

Ἀνακοινοῦμεν ὑμῖν, ὅτι διὰ τῆς ὑπ' ἀριθ. 61452/12-6-52 ἀποφάσεως τοῦ Ὑπουργείου μετὰ σύμφωνον γνωμοδότησιν τοῦ Κεντρικοῦ Γνωμοδοτικοῦ καὶ Διοικητικοῦ Συμβουλίου Ἐκπαιδεύσεως, ἐνεκρίθη τὸ ὑπὸ τὸν τίτλον ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ βιβλίον σας ὡς βοηθητικὸν τοῦ μαθήματος τῆς Ἀριθμητικῆς διὰ τοὺς μαθητὰς τῆς Ε' καὶ ΣΤ' τάξεως τοῦ Δημοτικοῦ Σχολείου ἐπὶ μίαν τριετίαν, ἀρχομένην ἀπὸ 1-9-1952.

Παρακαλοῦμεν ὅθεν, ὅπως μεριμνήσητε διὰ τὴν ἔγκαιρον ἐκτύπωσιν τοῦ βιβλίου τούτου, συμμορφούμενος πρὸς τὰς ὑποδείξεις τοῦ Ἐκπαιδευτικοῦ Συμβουλίου καὶ τὸν κανονισμὸν ἐκδόσεως βοηθητικῶν βιβλίων τοῦ Δημοτικοῦ Σχολείου.

Κοινοποίησις:
Κ.Γ.Δ.Σ.Ε.

Ἐντολῇ Ὑπουργοῦ
Ὁ Διευθυντὴς
Χ. ΜΟΥΣΤΡΗΣ

Τὰ γνήσια ἀντίτυπα φέρουν τὴν ὑπογραφὴν τοῦ συγγραφέως.

ΕΠΑΝΑΛΗΨΙΣ

ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΚΑΙ ΔΕΚΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Προβλήματα

Τῶν τεσσάρων πράξεων ἀκεραίων ἀριθμῶν.

1. Ἡ Ἀθήνα ἔχει 750.350 κατοίκους, ὁ Πειραιεὺς 367.328 καὶ ἡ Θεσσαλονίκη 237.436. Πόσους κατοίκους ἔχει περισσοτέρους ἡ Ἀθήνα ἀπὸ τὸν Πειραιᾶ καὶ πόσους ἀπὸ τὴ Θεσσαλονίκη;

2 Τὸ ὄρος Ὄλυμπος ἔχει ὕψος 2.965 μέτρα, τὸ ὄρος Παρνασσὸς ἔχει ὕψος 2.495 μέτρα καὶ τὸ ὄρος Ταΰγετος 2.410 μέτρα. Πόσα μέτρα εἶναι ὁ Ὄλυμπος ὑψηλότερος ἀπὸ τὸν Παρνασσὸ καὶ πόσα ἀπὸ τὸν Ταΰγετο;

3. Ἡ Στερεὰ Ἑλλὰς ἔχει 1.855.000 κατοίκους, ἡ Πελοπόννησος 1.174.000, τὰ νησιὰ τοῦ Αἰγαίου Πελάγους μαζὶ μὲ τὴν Κρήτη καὶ τὴ Δωδεκάνησο 1.168.000, τὰ νησιὰ τοῦ Ἰονίου Πελάγους 222.000, ἡ Θεσσαλία 573.000, ἡ Ἤπειρος 362.000, ἡ Μακεδονία 1.760.000 καὶ ἡ Θράκη 360.000 κατοίκους. Πόσους κατοίκους ἔχει ὅλη ἡ Ἑλλάς;

4. Οἱ Τοῦρκοι πῆραν τὴν Κωνσταντινούπολι τὸ 1453 μ. Χ. Πόσα χρόνια πέρασαν μέχρι σήμερα καὶ πόσα μέχρι τῆς Ἑλληνικῆς Ἐπαναστάσεως τοῦ 1821:

5. Ἕνας ἀγόρασε 37 δωδεκάδες μαντήλια πρὸς 7 δραχμὲς τὸ κάθε μαντήλι. Πόσες δραχμὲς ἐπλήρωσε;

6. Ἕνας μῦλος ἀλέθει τὴν ὥρα 27 ὀκάδες σιτάρι. Ἂν ἀλέθῃ 24 ὧρες τὸ ἡμερονύκτιο, πόσες ὀκάδες σιτάρι θὰ ἀλέσῃ σὲ 38 ἡμερονύκτια;

7. Τρεῖς ἐργάτες ἐργάσθηκαν σὲ μία οἰκοδομὴ μὲ ἡμερομίσθιο 37 δραχμές. Ὁ ἕνας ἐργάσθηκε 27 ἡμέρες, ὁ ἄλλος 32 ἡμέρες καὶ ὁ τρίτος 29 ἡμέρες. Πόσες δραχμὲς πῆρε ὁ κάθε ἕνας καὶ πόσες πῆραν καὶ οἱ τρεῖς μαζί;

8. Ἕνα ἀτμόπλοιο ἐξεφόρτωσε στὸν Πειραιᾶ σιτάρι, τὸ ὁποῖον ἐφορτώθη σὲ 37 αὐτοκίνητα. Κάθε αὐτοκίνητο ἐφόρτωσε

5 τόννους (ὁ κάθε τόννος=781 ὀκ περίπου). Πόσες ὀκάδες σιτάρι ἔφερε τὸ ἀτμόπλοιο ;

9. Ἕνας ἔμπορος ἀγόρασε 2.584 αὐγά πρὸς 1 δραχμὴ τὸ ἕνα. Κατὰ τὴν μεταφορὰ ἔσπασαν 297 αὐγὰ καὶ πούλησε τὰ ὑπόλοιπα πρὸς 2 δραχ. τὸ ἕνα. Πόσες δραχμὲς ἐκέρδισε ;

10. Ἕνας γιὰ νὰ στρώσῃ τὴν αὐλή του μὲ τσιμέντο ἀγόρασε 13 σακκιά, ποὺ τὸ κάθε ἕνα ἔχει 29 ὀκάδες τσιμέντο, πρὸς 1 δραχμὴ τὴν ὀκᾶ. Ἐπλήρωσε γιὰ χαλίκι καὶ ἄμμο 86 δραχμές. Ἐπίσης ἐπλήρωσε 3 ἐργάτες, ποὺ ἐργάσθηκαν 5 ἡμέρες, πρὸς 40 δραχμὲς τὴν ἡμέρα τὸν κάθε ἕνα. Πόσο τοῦ ἐστοίχισε τὸ στρώσιμο τῆς αὐλῆς ;

11. Ἕνας ἀγόρασε ἕνα χωράφι μὲ 6.850 δραχμὲς καὶ ἔδωσε γιὰ νὰ τὸ ἐξοφλήσῃ 13 χρυσὲς λίρες, ποὺ ἡ κάθε μία ἔχει 310 δραχμές. Πόσες δραχμὲς χρεωστᾶ ἀκόμη ;

12. Σὲ μιὰ θερινὴ μαθητικὴ κατασκήνωσι εἶναι 158 μαθηταί. Ὁ κάθε μαθητὴς χρειάζεται γιὰ διατροφή του τὴν ἡμέρα 14 δραχμές. Πόσο στοιχίζει ἡ διατροφὴ ὅλων τῶν μαθητῶν γιὰ 28 ἡμέρες ;

13. Δύο ἀτμόπλοια ξεκινοῦν τὴν ἴδια ὥρα ἀπὸ τὸν Πειραιᾶ γιὰ τὴ Θεσσαλονίκη. Τὸ ἕνα τρέχει 16 μίλια τὴν ὥρα καὶ τὸ ἄλλο 12 μίλια τὴν ὥρα. Μετὰ 13 ὧρες τί ἀπόστασι θὰ ἔχουν μεταξύ τους ;

14. Ἕνας χωρικὸς ἐπούλησε 1.627 ὀκάδες σιτάρι πρὸς 3 δραχμὲς τὴν ὀκᾶ καὶ 850 ὀκάδες κρασὶ πρὸς 2. δραχ. τὴν ὀκᾶ. Μὲ τὰ λεπτὰ ποὺ πῆρε ἀγόρασε 19 πρόβατα πρὸς 187 δραχμὲς τὸ κάθε ἕνα. Πόσες δραχμὲς τοῦ ἐπερίσσευσαν ;

15. Ἕνας ἀγόρασε 588 ὀκάδες λάδι καὶ μὲ αὐτὸ ἐγέμισε 42 ὅμοια δοχεῖα. Πόσες ὀκάδες λάδι χωρεῖ κάθε δοχεῖο ;

16. Ἕνας ἀγόρασε 78 ὀκάδες ἐλιὲς πρὸς 6 δραχμὲς τὴν ὀκᾶ. Πόσο πρέπει νὰ τὶς πουλήσῃ τὴν ὀκᾶ, γιὰ νὰ κερδίσῃ ἀπὸ ὅλες 234 δραχμές ;

17. Ἕνας ἀγόρασε 40 ὀκάδες ρύζι πρὸς 6 δραχμὲς τὴν ὀκᾶ καὶ 20 ὀκάδες ρύζι καλυτέρας ποιότητος πρὸς 9 δραχ. τὴν ὀκᾶ καὶ ἔπειτα ἀνέμιξε τὶς δύο ποιότητες τὸ ρύζι. Πόσο κοστίζει ἡ ὀκᾶ τοῦ μίγματος ;

18. Ἕνας ἀγόρασε 420 ὀκάδες κρασὶ πρὸς 3 δραχμὲς τὴν ὀκᾶ καὶ ἐπρόσθεσε μέσα σ' αὐτὸ 210 ὀκάδες νερό. α) Πόσο κοστίζει ἡ ὀκᾶ τὸ νερωμένο κρασί ; β) Πόσο πρέπει νὰ που-

λήση τὴν ὀκᾶ γιὰ νὰ κερδίση ἀπὸ ὅλο 1260 δραχμές ;

19. Ἕνας ἀγόρασε 76 ὀκάδες μέλι πρὸς 13 δραχμὲς τὴν ὀκᾶ. Ἀπὸ αὐτὸ πούλησε 38 ὀκάδες πρὸς 15 δραχμὲς τὴν ὀκᾶ καὶ τὸ ὑπόλοιπο τὸ πούλησε ὅλο μαζὶ μὲ 608 δραχμές. α) Πόσο πούλησε τὴν ὀκᾶ τὸ ὑπόλοιπο μέλι ; β) Πόσες δραχμὲς ἐκέρδισε ἀπὸ ὅλο ;

20. Ἕνας μανάβης ἀγόρασε 185 ὀκάδες κρεμμύδια μὲ 370 δραχμές, ἀλλὰ τοῦ σάπισαν 35 ὀκάδες. Πόσο πρέπει νὰ πουλήση τὴν ὀκᾶ τὰ κρεμμύδια ποὺ τοῦ ἔμειναν γιὰ νὰ εἰσπράξη τὰ λεπτὰ ποὺ ἔδωσε νὰ τὰ ἀγοράση καὶ νὰ κερδίση 80 δραχμές ;

21. Ἕνα ἀτμόπλοιο ἔκανε ἕνα ταξίδι 1.632 μίλια σὲ 136 ὧρες. Τὶς πρῶτες 34 ὧρες ἔτρεχε 15 μίλια τὴν ὥρα. Πόσα μίλια τὴν ὥρα ἔτρεχε τὶς ὑπόλοιπες ὧρες τοῦ ταξιδίου ;

22. Ἕνας ἔμπορος ἀγόρασε 38 τόννους σιτάρι (κάθε τόννος=781 ὀκ. περίπου). Ἀπὸ αὐτὸ πούλησε 3.578 ὀκάδες καὶ τὸ ὑπόλοιπο θέλει νὰ τὸ βάλη μέσα σὲ σακκιά, ποὺ τὸ κάθε ἕνα χωρεῖ 45 ὀκάδες. Πόσα σακκιὰ θὰ χρειασθῆ ;

23. Στὸν Πειραιᾶ ἔφθασε ἕνα ἀτμόπλοιο μὲ 645 τόννους σιτάρι (ὁ τόννος=781 ὀκ. περίπου). Γιὰ νὰ μεταφερθῆ στις ἀποθῆκες θὰ φορτωθῆ σὲ φορτηγὰ αὐτοκίνητα, ποὺ τὸ κάθε ἕνα φορτώνει 3.905 ὀκάδες. Πόσα αὐτοκίνητα θὰ χρειασθοῦν ;

24. Ἕνας ἔμπορος ἀγόρασε ἐμπορεύματα ποὺ ἄξιζαν 5.900 δραχμές. Ἐπλήρωσε 2.300 δραχμὲς καὶ τὸ ὑπόλοιπο χρέος του θὰ τὸ πληρώση σὲ 12 δόσεις. Πόσες δραχμὲς θὰ εἶναι ἡ κάθε δόσις :

25. Ἕνας καφεπώλης ἀγόρασε 35 ὀκάδες καφὲ πρὸς 84 δραχμὲς τὴν ὀκᾶ καὶ ἐπλήρωσε γιὰ τὴ μεταφορὰ 30 δραχμές. Ἔπειτα τὸν ἐκαβούρδισε, τὸν ἄλεσε καὶ τὸν πούλησε ἔτσι ἀλεσμένον. Μὲ τὸ καβούρδισμα ὁ καφὲς εἶχε φύρα 2 ὀκάδες. Πόσο στοιχίζει ἡ ὀκᾶ ὁ ἀλεσμένος καφές ;

26. Ἕνας μανάβης ἀγόρασέ 182 ὀκάδες πατάτες καὶ 120 ὀκάδες κρεμμύδια, ἔδωσε δὲ γιὰ τὰ δύο εἴδη 786 δραχμές. Τὶς πατάτες τὶς ἀγόρασε πρὸς 3 δραχμὲς τὴν ὀκᾶ. Πόσο ἀγόρασε τὴν ὀκᾶ τὰ κρεμμύδια ;

27. Ἕνας ἔμπορος ἀγόρασε μὲ 2.048 δραχμὲς 128 πήχες ὕφασμα καὶ ἔπειτα ἐπούλησε ὅλο τὸ ὕφασμα πρὸς 18 δραχμες τὸν πῆχυ. Πόσες δραχμὲς ἀγόρασε τὸν πῆχυ καὶ πόσες ἐκέρδισε :

28. Ἕνας ἀγόρασε 100 ὀκάδες λάδι πρὸς 12 δραχμὲς τὴν ὀκᾶ καὶ 50 ὀκάδες σπορέλαιο πρὸς 6 δραχμὲς τὴν ὀκᾶ καὶ ἀνέμιξε αὐτά. Πόσο στοιχίζει ἡ ὀκᾶ τοῦ μίγματος ;

29. Ἕνας ἀγόρασε ὕφασμα πρὸς 7 δραχμὲς τον πῆχυ γιὰ νὰ κάνῃ πουκάμισα καὶ ἔδωσε 350 δραχμές. α) Πόσους πῆχες ἀγόρασε ; καὶ β) Πόσα πουκάμισα θὰ κάνῃ, ὅταν γιὰ κάθε πουκάμισο χρειάζεται 5 πῆχες ;

Προβλήματα

Τῶν τεσσάρων πράξεων ἀκεραίων καὶ δεκαδικῶν ἀριθμῶν

30. Ἕνας ἔμπορος ἀγόρασε 25,5 μέτρα ὕφασμα, 47,35 μ. ἀπὸ ἄλλο ὕφασμα καὶ 180,6 μ. ἀπὸ ἄλλο. Πόσα μέτρα ἀγόρασε ;

31. Μία κόρη ἔπλεξε σὲ τρεῖς ἑβδομάδες 78,4 μέτρα δαντέλλα. Τὴ πρώτη ἑβδομάδα ἔπλεξε 18,36 μέτρα καὶ τὴ δεύτερη 27,85 μέτρα. Πόσα μέτρα ἔπλεξε τὴν τρίτη ἑβδομάδα ;

32. Ἡ θερμοκρασία ἑνὸς ἀσθενοῦς ἦτο τὸ πρωῒ 37,8, τὸ δὲ βράδυ 40,5. Πόσο αὐξήθηκε ἡ θερμοκρασία τοῦ ἀσθενοῦς ;

33. Τὸ ἀνάστημα τοῦ πατέρα εἶναι 1,74 μ. καὶ τοῦ παιδιοῦ του 1,38 μ. Πόσο εἶναι μικρότερο τὸ ἀνάστημα τοῦ παιδιοῦ ;

34. Μία νοικοκυρὰ ἀγόρασε 20 μέτρα ὕφασμα. Ἀπὸ αὐτὸ ἔκοψε 5,85 μέτρα γιὰ νὰ κάνῃ φόρεμα στὴ μεγάλη κόρη της, 3,78 μέτρα γιὰ τὴν ἄλλη κόρη της καὶ 6,5 μέτρα γιὰ δικό της φόρεμα. Πόσο ὕφασμα τῆς ἐπερίσσευσε ;

35. Ἕνας ἐργάτης πρόκειται νὰ σκάψῃ ἕνα χαντάκι μάκρους 48,5 μέτρων. Τὴ μία ἡμέρα ἔσκαψε 17,38 μ. καὶ τὴν ἄλλη μέρα 16,95 μ. Πόσο μένει γιὰ νὰ σκάψῃ τὴν τρίτη μέρα ;

36. Ἕνας ἀθλητὴς ἐπήδησε 2,75 μ., δεύτερος ἀθλητὴς ἐπήδησε 0,87 μ. περισσότερο ἀπὸ τὸν πρῶτο καὶ τρίτος ἀθλητὴς ἐπήδησε 0,39 μ. περισσότερο ἀπὸ τὸ δεύτερο. Πόσα μέτρα ἐπήδησε ὁ δεύτερος καὶ πόσα ὁ τρίτος ἀθλητής ;

37. Μία κονσέρβα κρέατος ζυγίζει 3,382 κιλά, μία ἄλλη 2,015 κιλὰ καὶ τρίτη κονσέρβα ζυγίζει 0,382 τοῦ κιλοῦ. Πόσο ζυγίζουν καὶ οἱ τρεῖς κονσέρβες, καὶ πόσο βαρύτερη εἶναι ἡ πρώτη ἀπὸ τὴν τρίτη ;

38. Ἕνας εἶχε ἕνα οἰκόπεδο 984,5 τετραγωνικὰ μέτρα καὶ μέσα σ' αὐτὸ ἔκτισε δύο σπίτια. Γιὰ τὸ ἕνα ἐχρειάσθη 298,4 τετραγ. μέτρα καὶ γιὰ τὸ ἄλλο 308,15 τετραγ. μέτρα. Πόσα τετραγωνικὰ μέτρα ἀπὸ τὸ οἰκόπεδο ἔμεινε ἄχτιστο;

39. Σὲ ἕνα ὑφαντουργεῖο μία ἐργάτρια ὑφαίνει σὲ μία μέρα 28,72 μέτρα ὕφασμα, ἄλλη ὑφαίνει 36,75 μέτρα καὶ τρίτη 41 μέτρα. Πόσο ὑφαίνουν τὴν ἡμέρα καὶ οἱ τρεῖς μαζὶ καὶ πόσο ὑφαίνει περισσότερο ἡ τρίτη ἀπὸ τὴν πρώτη;

40. Μιὰ νοικοκυρὰ ἀγόρασε 9,8 μέτρα ὕφασμα καὶ ἀπὸ αὐτὸ ἔκοψε γιὰ ἕνα φόρεμα 7,15 μέτρα. Πόσο ὕφασμα πρέπει νὰ ἀγοράσῃ ἀκόμη γιὰ νὰ κάνῃ ἕνα ἄλλο φόρεμα ἴδιο;

41. Σὲ ἕνα ὀρφανοτροφεῖο πρόκειται νὰ κάνουν 350 φορεσιὲς γιὰ τὰ ὀρφανά. Κάθε φορεσιὰ χρειάζεται 2,50 μέτρα ὕφασμα, ποὺ ἔχει 14.15 δραχμὲς τὸ μέτρο. Πόσες δραχμὲς στοιχίζουν ὅλες οἱ φορεσιές;

42. Μία νοικοκυρὰ ἀγόρασε 53,5 μέτρα ὕφασμα πρὸς 21.35 δραχμὲς τὸ μέτρο. Μὲ τὸ ὕφασμα αὐτὸ ἔκανε 8 φορέματα ἴδια καὶ τῆς ἐπερίσσευσαν 5,50 μέτρα. Πόσες δραχμὲς στοιχίζει τὸ κάθε φόρεμα;

43. Ἕνας ἔμπορος χρεωστᾶ σὲ ἄλλον 1.200 δραχμές. Τοῦ δίνει γιὰ νὰ ἐξοφλήσῃ 35,5 μέτρα ὕφασμα πρὸς 13.50 δραχμὲς τὸ μέτρο καὶ 25 μέτρα ἄλλο ὕφασμα πρὸς 16.50 δραχμὲς τὸ μέτρο. Πόσες δραχμὲς τοῦ χρεωστᾶ ἀκόμη;

44. Ἕνας ἀγόρασε 80,6 μέτρα ὕφασμα πρὸς 10 δραχμὲς τὸ μέτρο καὶ μὲ αὐτὸ ἔκανε μαντήλια. Γιὰ κάθε μαντήλι ἐχρειάσθη 0,13 τοῦ μέτρου. α) Πόσα μαντήλια ἔκανε; καὶ β) πόσο τοῦ στοιχίζει τὸ κάθε μαντήλι;

45. Γιὰ νὰ κάνωμε ἕνα πουκάμισο χρειαζόμαστε 3,45 μέτρα ὕφασμα. Πόσα πουκάμισα θὰ κάνωμε μὲ 106,95 μέτρα ὕφασμα;

46. Σὲ ἕνα δρόμο μήκους 2.580 μέτρων πρόκειται νὰ φυτευθοῦν δένδρα σὲ ἀπόστασι 2,5 μέτρων τὸ ἕνα ἀπὸ τὸ ἄλλο. Πόσα δένδρα θὰ φυτευθοῦν;

47. Σὲ μία δεξαμενὴ ἄδεια ἀνοίγομε δύο βρύσες ποὺ τὴ γεμίζουν. Ἀπὸ τὴ μία χύνεται 528 ὀκάδες νερὸ τὴν ὥρα καὶ ἀπὸ τὴν ἄλλη 396 ὀκάδες τὴν ὥρα. Στὸ κάτω μέρος τῆς δεξαμενῆς ὑπάρχει μία βρύση ποὺ ἀδειάζει 674 ὀκάδες νερὸ τὴν ὥρα. Πόσες ὀκάδες νερὸ θὰ ἔχῃ ἡ δεξαμενή, ἂν ἀφήσωμε ἀνοικτὲς καὶ τὶς τρεῖς βρύσες 17,5 ὧρες;

48. Γιὰ νὰ μεταφερθῇ τὸ νερὸ ἀπὸ μιὰ πηγὴ σὲ ἕνα χωριὸ ἐχρησιμοποιήθησαν σωλῆνες μήκους 2,45 μέτρων ὁ καθένας καὶ ἡ ἀπόστασις ἀπὸ τὴν πηγὴ ἕως τὸ χωριὸ εἶναι 1837,5 μέτρα. α) Πόσοι σωλῆνες ἐχρειάσθησαν; καὶ β) Πόσοι σωλῆνες θὰ ἐχρειάζοντο, ἂν ὁ κάθε ἕνας εἶχε μῆκος 0,85 τοῦ μέτρου;

49. Ἕνα τόπι ὕφασμα 89,65 μ. πρόκειται νὰ μοιρασθῇ σὲ δύο κομμάτια, τὸ ἕνα δὲ ἀπὸ αὐτὰ νὰ εἶναι 10,85 μ. μεγαλύτερο ἀπὸ τὸ ἄλλο. Πόσα μέτρα θὰ εἶναι τὸ καθένα ἀπὸ τὰ δύο;

50. Ἕνας ἀγόρασε πιάτα πρὸς 135 δραχμὲς τὴ δωδεκάδα. Ἔπειτα τὰ πούλησε πρὸς 14.50 δραχμὲς τὸ ἕνα καὶ ἐκέρδισε ἀπὸ ὅλα 559 δραχμές. Πόσα πιάτα ἀγόρασε;

51. Ἕνας ἔμπορος εἶχε 127 μέτρα ὕφασμα. Ἀπὸ αὐτὸ ἔκανε 15 πουκάμισα μὲ 3,45 μέτρα τὸ κάθε ἕνα καὶ μὲ τὸ ὑπόλοιπο ἔκανε παιδικὰ πουκάμισα μὲ 1,75 μέτρα τὸ κάθε ἕνα. Πόσα παιδικὰ πουκάμισα ἔκανε;

52. Ἕνας πεζοπόρος διέτρεξε μία ἀπόστασι 27 χιλιομέτρων (1 χιλιόμετρο = 1000 μέτρα). Νὰ εὑρεθῇ πόσα βήματα ἔκανε, ἂν κάθε βῆμα του εἶναι 0,75 τοῦ μέτρου;

53. Ἕνας ἔμπορος ἀγόρασε 268,75 μέτρα ὕφασμα πρὸς 14.50 δραχμὲς τὸ μέτρο καὶ μὲ αὐτὸ ἔκανε 125 παιδικὰ κοστούμια. Ἐπλήρωσε ραπτικὰ 87.50 δραχμὲς γιὰ τὸ κάθε ἕνα. α) Πόσα μέτρα ὕφασμα ἐχρειάσθη γιὰ κάθε κοστούμι; καὶ β) Πόσο τοῦ στοιχίζει τὸ κάθε ἕνα κοστούμι μαζὶ μὲ τὰ ραπτικά;

54. Ἕνας εἶχε 500 ὀκάδες λάδι καὶ ἀπὸ αὐτὸ ἐγέμισε 123 δοχεῖα, ποὺ τὸ κάθε ἕνα χωροῦσε 3,25 ὀκάδες. Τὸ ὑπόλοιπο λάδι πρόκειται νὰ τὸ βάλῃ μέσα σὲ μπουκάλια, ποὺ τὸ κάθε ἕνα χωρεῖ 0,78 τῆς ὀκᾶς λάδι. Πόσα μπουκάλια θὰ χρειασθῇ;

55. Ἕνας ἀγόρασε 50,70 μ. ὕφασμα μὲ 608.40 δραχμές. Ἀπὸ τὸ ὕφασμα αὐτὸ τὰ 16,90 μ. τὰ ἀγόρασε πρὸς 10 δραχμὲς τὸ μέτρο. Πόσο ἀγόρασε τὸ μέτρο τὸ ὑπόλοιπο ὕφασμα;

56. Ἕνας κεσὲς χωρεῖ 0,25 τῆς ὀκᾶς γιαούρτι. Πόσους κεσέδες θὰ γεμίσουμε μὲ 25,5 ὀκάδες γιαούρτι;

57. Ὁ Πειραιεὺς ἀπέχει ἀπὸ τὴ Θεσσαλονίκη 254 μίλια. Σὲ πόσες ὧρες θὰ φθάσῃ ἕνα ἀτμόπλοιο, ποὺ τρέχει 12,7 μίλια τὴν ὥρα;

58. Μὲ μία ὀκᾶ ἀλεύρι γίνεται 1,25 τῆς ὀκᾶς ψωμί. Πόσες ὀκάδες ψωμὶ θὰ βγάλῃ ἕνας φούρναρης, ἂν ζυμώσῃ 3,5 σακκιὰ ἀλεύρι, ποὺ τὸ καθένα χωρεῖ 45 ὀκάδες;

ΣΥΜΜΙΓΕΙΣ ΑΡΙΘΜΟΙ

Ὁ ἀριθμὸς 17 ὀκάδες καὶ 250 δράμια ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο ἀριθμοὺς καὶ ὁ μὲν πρῶτος φανερώνει ὀκάδες, ὁ δὲ δεύτερος ὑποδιαιρέσεις τῆς ὀκᾶς (δράμια).

Ἐπίσης ὁ ἀριθμὸς 5 ὧρες καὶ 20^{π} ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο ἀριθμούς, ὁ ἕνας φανερώνει ὧρες καὶ ὁ ἄλλος λεπτά. Τὰ λεπτὰ εἶναι ὑποδιαιρέσεις τῆς ὥρας καὶ ἡ ὥρα εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ λεπτοῦ.

Οἱ παραπάνω ἀριθμοὶ λέγονται ***Συμμιγεῖς ἀριθμοί.***

Ὥστε: ***Συμμιγὴς ἀριθμὸς λέγεται ἐκεῖνος, ποὺ ἀποτελεῖται ἀπὸ ἄλλους ἀριθμούς, ποὺ ὁ καθένας ἔχει δικό του ὄνομα καὶ οἱ μονάδες του εἶναι ὑποδιαιρέσεις ἢ πολλαπλάσια τῶν μονάδων τοῦ ἄλλου.***

ΜΟΝΑΔΕΣ ΜΕΤΡΗΣΕΩΣ ΠΟΣΩΝ

Μονάδες βάρους.

Γιὰ νὰ μετρήσωμε τὸ βάρος ἑνὸς πράγματος, μεταχειριζόμαστε ὡς μονάδα μετρήσεως, ἕνα ὡρισμένο βάρος ποὺ τὸ λέμε ***ὀκᾶ***. Ἔπειτα συγκρίνομε τὸ βάρος τοῦ πράγματος πρὸς τὸ βάρος τῆς ὀκᾶς καὶ βρίσκομε ἀπὸ πόσες τέτοιες ὀκάδες ἀποτελεῖται.

Ἡ ὀκᾶ, λοιπόν, εἶναι ἡ ἀρχικὴ μονάδα μετρήσεως τοῦ βάρους καὶ διαιρεῖται σὲ 400 δράμια.

Γιὰ μεγαλύτερα βάρη μεταχειριζόμαστε τὸν ***στατῆρα,*** ποὺ ἔχει 44 ὀκάδες.

Ἄλλη ἀρχικὴ μονάδα μετρήσεως τοῦ βάρους εἶναι τὸ ***χιλιόγραμμον,*** ποὺ διαιρεῖται σὲ 1000 ***γραμμάρια.*** Γιὰ μεγαλύτερα βάρη μεταχειριζόμαστε τὸν ***τόννο,*** ποὺ ἔχει 1000 χιλιόγραμμα.

Ἡ ὀκᾶ ἔχει βάρος 1280 γραμμάρια. Τὸ ***χιλιόγραμμο*** ἔχει βάρος 312,5 δράμια. Ὁ ***τόννος*** ἔχει βάρος 781,25 ὀκάδες.

Μονάδες μήκους.

Γιὰ νὰ μετρήσωμε τὸ μῆκος ἑνὸς πράγματος, μεταχειριζόμαστε ὡς μονάδα μετρήσεως τὸ ***μέτρο***.

Τὸ μέτρο, λοιπόν, εἶναι ἡ ἀρχικὴ μονάδα μετρήσεως τοῦ μήκους. Τὸ μέτρο διαιρεῖται σὲ 10 ***παλάμες*** (δέκατα), κάθε παλάμη διαιρεῖται σὲ 10 ***δακτύλους*** (ἑκατοστὰ) καὶ κάθε δάκτυλος σὲ 10 ***γραμμὲς*** (χιλιοστά).

Γιὰ τὴ μέτρησι μεγάλων ἀποστάσεων μεταχειριζόμαστε τὸ χιλιόμετρο, ποὺ εἶναι 1000 μέτρα.

Ἄλλη μονάδα μετρήσεως, ποὺ μεταχειριζόμαστε στὰ οἰκόπεδα καὶ στὶς οἰκοδομές, εἶναι ὁ τεκτονικὸς πῆχυς, ποὺ εἶναι ἴσος μὲ 0,75 τοῦ μέτρου.

Ἐπίσης γιὰ τὴ μέτρησι τῶν ὑφασμάτων κλπ., μεταχειριζόμαστε τὸν ἐμπορικὸ πῆχυ, ποὺ εἶναι ἴσος μὲ 0,64 τοῦ μέτρου καὶ διαιρεῖται σὲ 8 ρούπια.

Στὴν Ἀγγλία ὡς ἀρχικὴ μονάδα μετρήσεως μεταχειρίζονται τὴν ὑάρδα, ἡ ὁποία διαιρεῖται σὲ 3 πόδια (φοὺτ) καὶ κάθε πόδι σὲ 12 δακτύλους (ἴντσες). Ἡ ὑάρδα ἔχει μῆκος 0,914 τοῦ μέτρου.

Γιὰ μεγάλες ἀποστάσεις οἱ ναυτικοὶ ὅλου τοῦ κόσμου μεταχειρίζονται τὸ ναυτικὸν μίλιον, ποὺ εἶναι 1852 μέτρα.

Ἀσκήσεις.

59. 58 μέτρα πόσους ἐμπορικοὺς πήχεις μᾶς κάνουν;
60. 175 μέτρα πόσους τεκτ. πήχεις μᾶς κάνουν;
61. 120 ἐμπορικοὶ πῆχες, πόσα μέτρα κάνουν;
62. 42 τεκτ. πῆχες, πόσα μέτρα κάνουν;

Μονάδες νομισμάτων.

Κάθε κράτος ἔχει ξεχωριστὴ μονάδα νομίσματος.

Ἡ Ἑλλάδα ἔχει τὴ δραχμὴ ποὺ διαιρεῖται	σὲ	100	λεπτά.
Ἡ Γαλλία τὸ φράγκο ποὺ διαιρεῖται	σὲ	100	σαντίμ.
Ἡ Ἰταλία τὴ λιρέτα ποὺ διαιρεῖται	σὲ	100	τσεντέσιμα.
Ἡ Τουρκία τὴ λίρα ποὺ διαιρεῖται	σὲ	100	γρόσια.
Ἡ Γερμανία τὸ μάρκο ποὺ διαιρεῖται	σὲ	100	πφένιγκ.
Ἡ Ῥωσσία τὸ ρούβλι ποὺ διαιρεῖται	σὲ	100	καπίκια.
Ἡ Ἀμερικὴ τὸ δολλάριο ποὺ διαιρεῖται	σὲ	100	σέντς.
Ἡ Ἀγγλία ἔχει τὴ λίρα ποὺ διαιρεῖται	σὲ	20	σελλίνια.
κάθε σελλίνιο	σὲ	12	πέννες.
καὶ κάθε πέννα	σὲ	4	φαρδίνια.

Μονάδες χρόνου.

Γιὰ νὰ μετροῦμε τὸ χρόνο παίρνομε ὡς ἀρχικὴ μονάδα μετρήσεως τὸ ἡμερονύκτιο, ποὺ διαιρεῖται σὲ 24 ὧρες, κάθε ὥρα σὲ 60^{π} (πρῶτα λεπτὰ) καὶ κάθε 1^{π} σὲ 60^{δ} (δευτερόλεπτα).

Ἕνας μῆνας ἔχει 30 ἡμέρες. Ὁ χρόνος ἔχει 12 μῆνες.

Μονάδες ἐπιφανείας.

Γιὰ νὰ μετροῦμε τὶς ἐπιφάνειες, παίρνομε ὡς ἀρχικὴ μονάδα μετρήσεως τὸ ***τετραγωνικὸ μέτρο***.

Τετραγωνικὸ μέτρο εἶναι ἕνα τετράγωνο ποὺ ἔχει κάθε πλευρά του ἴση μὲ ἕνα μέτρο.

Τὸ τετραγωνικὸ μέτρο διαιρεῖται σὲ 100 τετραγωνικὲς παλάμες, κάθε τετρ. παλάμη σὲ 100 τετρ. δακτύλους καὶ κάθε τετρ. δάκτυλος σὲ 100 τετρ. γραμμές.

Γιὰ νὰ μετροῦμε τὰ χωράφια, μεταχειριζόμαστε τὸ στρέμμα, τὸ ὁποῖον ἔχει 1000 τετραγωνικὰ μέτρα.

Ἄλλη μονάδα μετρήσεως, ποὺ τὴ μεταχειριζόμαστε γιὰ τὴ μέτρησι τῶν οἰκοπέδων, εἶναι ὁ τετρ. τεκτ. πῆχ., ὁ ὁποῖος εἶναι ἴσος μὲ τὰ 0,56 τοῦ τετραγωνικοῦ μέτρου.

Ἀσκήσεις.

63. Ἕνα οἰκόπεδο ἔχει ἐμβαδὸν 620 τετρ. πήχεις. Πόσα τετραγωνικὰ μέτρα εἶναι τὸ οἰκόπεδο;

64. Νὰ τραποῦν σὲ τετρ. μέτρα 850 τετρ. πήχεις.

65. 550 τετ. μέτρα πόσους τετραγ. πήχεις μᾶς κάνουν;

Μονάδες ὄγκου.

Γιὰ νὰ μετροῦμε τὸν ὄγκο τῶν σωμάτων, παίρνομε ὡς ἀρχικὴ μονάδα μετρήσεως τὸ κυβικὸ μέτρο, τὸ ὁποῖον διαιρεῖται σὲ 1000 κυβικὲς παλάμες καὶ κάθε κυβικὴ παλάμη διαιρεῖται σὲ 1000 κυβικοὺς δακτύλους.

ΤΡΟΠΗ ΣΥΜΜΙΓΩΝ ΣΕ ΜΟΝΑΔΕΣ ΤΗΣ ΤΕΛΕΥΤΑΙΑΣ ΤΑΞΕΩΣ

Πρόβλημα: Ἕνα ἀεροπλάνο ἔκανε ἕνα ταξίδι σὲ 2 ὥρ. 15 πρῶτα λεπτὰ καὶ 20 δευτερόλεπτα. Πόσα δευτερόλεπτα διήρκεσε τὸ ταξίδι;

Λύσις: Πρῶτα τρέπομε τὶς ὧρες σὲ πρῶτα λεπτά, ἀφοῦ σκεφθοῦμε ὡς ἑξῆς:

Ἀφοῦ ἡ 1 ὥρα ἔχει 60 πρῶτα λεπτά, οἱ 2 ὧρες θὰ ἔχουν $2 \times 60 = 120$ πρῶτα λεπτὰ καὶ 15 πρῶτα λεπτὰ ποὺ ἔχει ὁ συμμιγὴς μᾶς κάνουν 135 πρῶτα λεπτά.

Ἔπειτα τρέπομε τὰ πρῶτα λεπτὰ σὲ δευτερόλεπτα, ἀφοῦ σκεφθοῦμε ὡς ἑξῆς:

Ἀφοῦ τὸ 1 πρῶτο λεπτὸ ἔχει 60 δευτερόλεπτα, τὰ 135 πρῶτα λεπτὰ θὰ ἔχουν $135 \times 60 = 8100$ δευτερόλεπτα καὶ 20, ποὺ ἔχει ὁ συμμιγής, μᾶς κάνουν 8120 δευτερόλεπτα.

Γιὰ εὐχολία μας ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς:

2 ὧρες 15^{π} 20^{δ} $=8120^{\delta}$ (δευτερόλεπτα)

$$\begin{array}{rl} \times\ 60 & \\ \hline 120 & \\ +\ 15 & \\ \hline 135^{\pi} & \text{(πρῶτα λεπτὰ)} \\ \times\ 60 & \\ \hline 8100 & \\ +\ 20 & \\ \hline 8120^{\delta} & \text{(δευτερόλεπτα)} \end{array}$$

Ἀσκήσεις.

66. Πόσα δευτερόλεπτα εἶναι 5 ὥρ. 8^{π} 15^{δ} ;
67. Πόσα δράμια εἶναι 2 στατ., 10 ὀκ. 300 δρμ. ;
68. Πόσες πέννες εἶναι 4 λίρες, 5 σελλίνια 6 πέννες ;

ΠΡΑΞΕΙΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΣΥΜΜΙΓΩΝ

Πρόσθεσις.

Γιὰ νὰ προσθέσωμε τοὺς συμμιγεῖς:

α', 14 ὀκάδες καὶ 150 δράμια, β'. 12 ὀκάδες καὶ 350 δράμια καὶ γ'. 9 ὀκάδες καὶ 300 δράμια. Τοὺς γράφομε ἔτσι:

	14	ὀκάδες	150	δράμια
	12	»	350	»
+	9	»	360	»
	35	ὀκάδες	860	δράμια
ἢ	37	»	60	»

Προσθέτομε χωριστὰ τὰ δράμια καὶ χωριστὰ τὶς ὀκάδες. Τὰ 860 δράμια εἶναι 2 ὀκάδες καὶ 60 δράμια. Τὰ 60 δράμια τὰ ἀφήνομε κάτω ἀπὸ τὰ δράμια, τὶς δὲ 2 ὀκάδες προσθέτομε στὶς ἄλλες ὀκάδες.

Ἀφαίρεσις.

Παράδειγμα 1ον:

20	ὧρες	35^{π}	50^{δ}
— 8	»	19^{π}	30^{δ}
12	ὧρες	16^{π}	20^{δ}

Ἀφαιροῦμε χωριστὰ τὰ δευτερόλεπτα, χωριστὰ τὰ πρῶτα λεπτὰ καὶ χωριστὰ τὶς ὧρες.

Παράδειγμα 2ον:

15	ὧρες	40^{π}	15^{δ}
— 9	»	30^{π}	40^{δ}
6	ὧρες	9^{π}	35^{δ}

Ἐπειδὴ δὲν ἀφαιροῦνται τὰ 40^{δ} ἀπὸ τὰ 15^{δ}, δανειζόμαστε ἕνα λεπτό, ποὺ εἶναι 60^{δ} καὶ τότε τὰ δευτερόλεπτα γίνονται $75^{\delta}-40=35^{\delta}$. Ἔπειτα λέμε 30^{π} καὶ 1^{π} ποὺ δανειστήκαμε 31^{π} ἀπὸ 40^{π} μένουν 9^{π} κ.οὕ.κ.

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

69. Ἕνας ἀγόρασε σιτάρι τὴν πρώτη ἡμέρα 5 στατ. 17 ὀκ. καὶ 300 δραμ., τὴ δευτέρα ἡμέρα 9 στ. 16 ὀκ. καὶ 180 δρμ. καὶ τὴν τρίτη ἡμέρα 7 στατ. 25 ὀκ. καὶ 250 δραμ. Πόσο σιτάρι ἀγόρασε;

70. Ἕνας ἔμπορος εἶχε 84 πηχ. καὶ 7 ρούπια ἀπὸ ἕνα ὕφασμα καὶ ἐπούλησε 25 πηχ. καὶ 5 ρούπια. Πόσο ὕφασμα τοῦ ἔμεινε;

71. Ἀπὸ ἕνα τόπι ὕφασμα, ποὺ ἦταν 82 ὑάρδες 2 πόδια καὶ 4 δάκτυλοι, ἐκόπησαν 18 ὑάρδες 2 πόδια καὶ 7 δάκτυλοι. Πόσο ὕφασμα ἔμεινε;

Ἀσκήσεις.

72. Κάνε τὶς παρακάτω προσθέσεις:

α)	5 στατ.	8 ὀκ.	250 δρμ.	β)	5 ὥρ.	15^{π}	8^{δ}
	4 »	38 »	300 »		1 »	50^{π}	45^{δ}
+	2 »	32 »	145 »	+	9 »	40^{π}	30^{δ}

γ)	3 λίρ.	15 σελ.	7 πέν.	δ)	23 πήχ.	5 ρούπ.
	8 »	10 »	4 »		14 »	6 »
+	2 »	13 »	9 »	+	8 »	7 »

73 Κάνε τὶς παρακάτω ἀφαιρέσεις:

α)	15 στατ.	19 ὀκ.	150 δρμ.	β)	9 ὥρ.	50^{π}	25^{δ}
—	7 »	30 »	300 »	—	3 »	42^{π}	50^{δ}

γ)	7 λίρες	15 σελ.	5 πέν.	δ)	15 ὑάρδ.	2 πόδ.	5 δάκ.
—	3 »	12 »	15 »	—	7 »	5 »	3 »

ε)	27 στατ.	35 ὀκ.	150 δράμ.	στ)	15 λίρες	8 σελ.	4 πέν.
—	»	40 »	240 »	—	7 »	14 »	5 »

Πολλαπλασιασμὸς (συμμιγοῦς ἐπὶ ἀκέραιον).

Πρόβλημα: Γιὰ ἕνα κοστούμι χρειαζόμαστε 4 πῆχες καὶ 3 ρούπια. Πόσο ὕφασμα χρειαζόμαστε γιὰ 7 κοστούμια;

	4 πῆχες	3 ρούπια
	Χ	7 »
	28 »	21 ρούπια
ἤ	30 »	5 »

Πολλαπλασιάζομε χωριστὰ πρῶτα τὰ ρούπια καὶ ἔπειτα τοὺς πῆχες.

Διαίρεσις (συμμιγοῦς διὰ ἀκεραίου).

Πρόβλημα: Ἕνας ἐγέμισε 7 ἴσα δοχεῖα μὲ 58 ὀκάδες καὶ 250 δράμια λάδι. Πόσο χωρεῖ κάθε δοχεῖο;

58 ὀκάδες 250 δράμια	7
2 »	8 ὀκάδες 150 δράμια
× 400 δράμια	
800 »	
+ 250 »	
1050 δράμια	
35 »	
00 »	

Διαιροῦμε πρῶτα τὶς ὀκάδες. Ὅσες ὀκάδες μένουν ὑπόλοιπον τὶς πολλαπλασιάζομε ἐπὶ 400, γιὰ νὰ τὶς κάνωμε δράμια καὶ προσθέτομε σὲ αὐτὰ τὰ δράμια ποὺ ἔχομε. Ἔπειτα διαιροῦμε τὰ δράμια.

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

74. Ἕνας ἔμπορος ἀγόρασε 25 τόπια ὕφασμα. Κάθε τόπι ἔχει μῆκος 68 πήχ. καὶ 7 ρούπια. Πόσο ὕφασμα εἶναι ὅλα τὰ τόπια;

75. Γιὰ ἕνα κοστούμι χρειάζεται ὕφασμα 5 ὑαρδ. 2 πόδια καὶ 7 δάκτυλοι. Πόσο ὕφασμα χρειάζεται γιὰ νὰ γίνουν 14 κοστούμια;

76. Μία ὀκᾶ νήματος μεταξωτοῦ στοιχίζει 1 λίρ. 5 σελ. καὶ 2 πέννες. Πόσο στοιχίζουν οἱ 27 ὀκάδες;

77. Ἕνα ἀεροπλάνο διατρέχει 400 χιλιόμετρα σὲ 1 ὥρ. 15$^{\pi}$ καὶ 20$^{\delta}$. Σὲ πόσο χρόνο διατρέχει τὸ 1 χιλιόμετρο;

Ἀσκήσεις.

78. Κάνε τοὺς παρακάτω πολλαπλασιασμούς:

α) 5 ὧρες 17^{π} 25^{δ} × 9

β) 15 λίρες 13 σελ. 7 πέννες × 12

79. Κάνε τὶς παρακάτω διαιρέσεις:

α) 23 ὧρες 18^{π} 25^{δ} | 5

β) 25 ὑάρδ. 2 πόδ. 8 ἴντσ. | 8

Προβλήματα

Τῶν τεσσάρων πράξεων συμμιγῶν ἀριθμῶν

80. Ἀπὸ ἕνα τόπι ὕφασμα, ποὺ εἶχε μῆκος 49 πήχ. καὶ 4 ρούπια, ἐκόπησαν 24 πῆχες καὶ 7 ρούπια. Πόσο ὕφασμα ἔμεινε;

81. Ὁ Γιῶργος εἶναι σήμερον 13 χρόνων, 9 μηνῶν καὶ 10 ἡμερῶν, ὁ δὲ Γιαννάκης 7 χρόνων, 10 μηνῶν καὶ 25 ἡμερῶν. Πόσο εἶναι μεγαλύτερος ὁ Γιῶργος;

82. Ἕνας ἔμπορος ἀγόρασε 387 μέτρα Ἀγγλικοῦ ὑφάσματος πρὸς 1 λίρα, 5 σελλίνια καὶ 2 πέννες τὸ μέτρο. Πόσες λίρες ἔδωσε;

83. Ἕνας μῦλος ἀλέθει 28 στατῆρες, 34 ὀκάδες καὶ 200 δράμια σὲ 24 ὧρες. Πόσο ἀλέθει τὴν ὥρα;

84. Ἕνας ἀγόρασε 25 μέτρα Ἀγγλικοῦ ὑφάσματος καὶ ἔδωσε 32 λίρες, 15 σελλίνια καὶ 10 πέννες. Πόσο τοῦ στοιχίζει τὸ μέτρο;

85. Ἕνας βιβλιοπώλης ἀπὸ τὴν Ἀθήνα ἔστειλε στὴν Ἐπαρχία 2000 βιβλία. Τὸ κάθε βιβλίο ζυγίζει 125 γραμμάρια. Πόσα κιλὰ ἦταν ὅλα τὰ βιβλία;

86. Ἕνας φοῦρνος ἔβγαλε γιὰ τὸ μαθητικὸ συσσίτιο 2500 ψωμάκια. Τὸ κάθε ψωμάκι ζυγίζει 30 δράμια. Πόσες ὀκάδες ἦταν ὅλα τὰ ψωμάκια;

87. Πόσες βδομάδες μᾶς κάνουν 6 χρόνια καὶ 2 βδομάδες;

88. Ἕνας ξεκίνησε μὲ τὰ πόδια ἀπὸ τὸν Πειραιᾶ γιὰ τὴν Ἀθήνα τὸ πρωῒ στὶς 8 ὥρ. 15^{π} καὶ 30^{δ}. Στὴν Ἀθήνα ἔφθασε στὶς 10 ὥρ. 45^{π} καὶ 15^{δ}. Πόσο περπάτησε;

89. Γιὰ τὸ πρωϊνὸ ρόφημα 122 μαθητῶν ἑνὸς σχολείου ἐχρειάσθησαν 3 ὀκ. καὶ 20 δράμια γάλα σκόνη, 366 δράμια ζάχαρη καὶ 122 δράμια κακάο. Πόσα δράμια ἀπ' τὸ κάθε εἶδος περιέχει ἡ μερίδα κάθε μαθητοῦ;

90. Τὸ καθαρὸ βάρος ἐμπορεύματος ποὺ περιέχει ἕνα κιβώτιο εἶναι 5 στατῆρες, 12 ὀκάδες καὶ 350 δράμια. Τὸ ἀπόβαρο εἶναι 1 στατήρ, 35 ὀκάδες καὶ 150 δράμια. Πόσο εἶναι τὸ μικτὸ βάρος του;

91. Πόσο ἀξίζουν 3 ὀκάδες καὶ 135 δράμια κρέας, ὅταν τὸ δράμι ἔχῃ 8 λεπτά;

92. Ἕνας πατέρας εἶχε τρία χωράφια. Τὸ ἕνα ἦταν 22 στρέμματα καὶ 450 τετρ. μέτρα, τὸ ἄλλο 15 στρέμματα καὶ 370 τετρ. μέτρα, καὶ τὸ τρίτο 28 στρέμματα καὶ 700 τετραγωνικὰ μέτρα. Ὅλα αὐτὰ τὰ μοίρασε στὰ 4 παιδιά του. Πόσο πῆρε τὸ καθένα;

93. Τὰ μαθήματα στὰ σχολεῖα ἀρχίζουν στὶς 8 π. μ. καὶ τελειώνουν τὸ μεσημέρι στὶς 12. Γίνονται ὅμως τρία διαλείμματα. Τὸ πρῶτο διαρκεῖ 10^{π}, τὸ δεύτερο 10^{π} καὶ τὸ τρίτο 15^{π}. Στὸ ἄλλο χρονικὸ διάστημα γίνονται 4 μαθήματα. Πόση ὥρα διαρκεῖ κάθε μάθημα;

94. Ἕνας ἀνθρακέμπορος ἔφερε ἀπὸ τὴν Ἀγγλία 320 τόννους ἀνθρακίτη καὶ ἐπλήρωσε 1313 λίρ., 6 σελ. καὶ 8 πέννες. Πόσο τοῦ στοιχίζει ὁ τόννος;

95. Ἕνα ἀτμόπλοιο διατρέχει τὴν ἀπόστασι ἀπὸ τὸν Πειραιᾶ ἕως τὴ Θεσσαλονίκη, ποὺ εἶναι 254 μίλια, σὲ 26 ὥρ. καὶ 40^{π}. Σὲ πόσο χρόνο διατρέχει τὸ ἕνα μίλι;

96. Ἕνας ἔμπορος ἐπούλησε στὸ ἐξωτερικὸ 5 τόννους λάδι καὶ πῆρε ἀπὸ ὅλο 750 λίρ., 6 σελλ., 5 πέννες. α) Πόσο πούλησε τὸν τόννο; καὶ β) Πόσο πούλησε τὴν ὀκᾶ; (ὁ τόνν.=781 ὀκάδ. περίπου).

ΚΛΑΣΜΑΤΑ

Ἐὰν κόψωμε ἕνα ὁλόκληρο ***(ἀκέραιο)*** ψωμὶ σὲ δύο ἴσα κομμάτια, τὸ κάθε ἕνα ἀπὸ αὐτὰ τὸ λέμε μισὸ ψωμὶ ἢ ***ἕνα δεύτερο*** τοῦ ψωμιοῦ καὶ τὸ γράφομε ἔτσι : $\frac{1}{2}$

Δηλαδὴ τὸ $\frac{1}{2}$ τοῦ ψωμιοῦ = 

Ἐὰν κόψωμε ἕνα ὁλόκληρο ***(ἀκέραιο)*** ψωμὶ σὲ τέσσερα ἴσα κομμάτια, τὸ κάθε ἕνα ἀπὸ αὐτὰ τὸ λέμε ***ἕνα τέταρτο*** τοῦ ψωμιοῦ καὶ τὸ γράφομε ἔτσι : $\frac{1}{4}$.

Δηλαδὴ $\frac{1}{4}$ τοῦ ψωμοῦ = 

Ἐπίσης ἂν κόψωμε ἕνα ***ἀκέραιο*** ψωμὶ σὲ ὀκτὼ ἴσα κομμάτια, τὸ κάθε ἕνα ἀπὸ αὐτὰ τὸ λέμε ***ἕνα ὄγδοο*** τοῦ ψωμιοῦ καὶ τὸ γράφομε ἔτσι : $\frac{1}{8}$.

Δηλαδὴ $\frac{1}{8}$ τοῦ ψωμιοῦ = 

Ὅπως κόψαμε ***(διαιρέσαμε)*** τὸ ψωμὶ σὲ ἴσα κομμάτια, τὸ ἴδιο μποροῦμε νὰ διαιρέσωμε καὶ κάθε ἄλλο ἀκέραιο ***(ὁλόκληρο)*** πρᾶγμα σὲ ἴσα μέρη.

Ἂν π. χ. τὴ 1 ὥρα, ποὺ ἔχει 60^{π} ***(πρῶτα λεπτά)***, τὴ διαιρέσωμε σὲ δύο μέρη (ὄχι βέβαια μὲ τὸ μαχαίρι ὅπως κόψαμε τὸ ψωμί), τὸ κάθε ἕνα ἀπὸ αὐτὰ εἶναι 30^{π} ***(πρῶτα λεπτά).*** Δηλαδή:

$$30^{\pi} \text{ (πρῶτα λεπτὰ)} = \frac{1}{2} \text{ τῆς ὥρας.}$$

Ἂν διαιρέσωμε τὴν ὥρα σὲ 4 ἴσα μέρη ($60 : 4 = 15$), τὸ κάθε ἕνα ἀπὸ αὐτὰ εἶναι 15^{π} (λεπτά). Δηλαδή:

$$\text{τὰ } 15^{\pi} = \frac{1}{4} \text{ τῆς ὥρας.}$$

Ἂν διαιρέσωμε τὴν ὥρα σὲ τρία ἴσα μέρη, τὸ κάθε ἕνα εἶναι 20^{π}.

$$\text{Δηλαδή: } 20^{\pi} = \frac{1}{3} \text{ τῆς ὥρας.}$$

Ἂν διαιρέσωμε τὴν ὀκᾶ σὲ 8 ἴσα μέρη, ($400 : 8 = 50$), τὸ κάθε ἕνα ἀπὸ αὐτὰ εἶναι 50 δράμια.

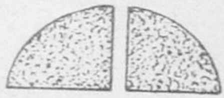
$$\text{Δηλαδή: } \frac{1}{8} \text{ τῆς ὀκᾶς} = 50 \text{ δράμια.}$$

Στοὺς ἀκεραίους ἀριθμοὺς τὸ 1 λέγεται ***ἀκεραία μονάς.***

Στοὺς κλασματικοὺς ἀριθμοὺς τὸ $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ κ.λ.π., λέγονται ***κλασματικὲς μονάδες.***

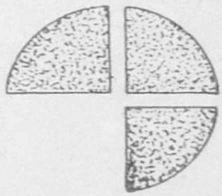
Ἂν ἀπὸ τὰ 4 ἴσα κομμάτια, ποὺ κόψαμε τὸ ψωμί, πάρωμε τὰ δύο: $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}$, δηλαδὴ δύο τέταρτα, ὁ ἀριθμὸς γράφεται ἔτσι: $\frac{2}{4}$.

Εἶναι δηλαδὴ $\frac{2}{4}$ τοῦ ψωμιοῦ =



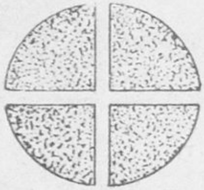
Ὁ ἀριθμὸς τρία τέταρτα γράφεται ἔτσι: $\frac{3}{4}$

Δηλαδὴ $\frac{3}{4}$ τοῦ ψωμιοῦ =



῾Ο ἀριθμὸς τέσσερα τέταρτα γράφεται ἔτσι : $\frac{4}{4}$.

Δηλαδὴ $\frac{4}{4}$ τοῦ ψωμιοῦ =

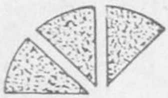


῎Αν, τώρα, ἀπὸ τὰ 8 ἴσα κομμάτια, ποὺ κόψαμε τὸ ψωμί, πάρωμε τὰ δύο : $\frac{1}{8} + \frac{1}{8}$, δηλ. τὰ δύο ὄγδοα, ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς γράφεται ἔτσι : $\frac{2}{8}$.

Εἶναι δηλ. $\frac{2}{8}$ τοῦ ψωμιοῦ =

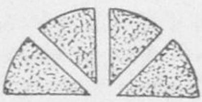
῾Ο ἀριθμὸς τρία ὄγδοα γράφεται ἔτσι : $\frac{3}{8}$.

Εἶναι δηλ. $\frac{3}{8}$ τοῦ ψωμιοῦ =

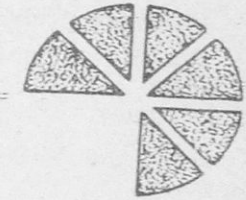


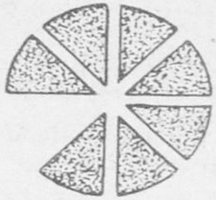
῾Ομοίως εἶναι :

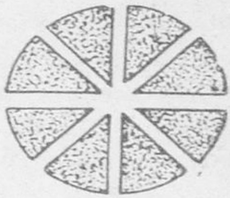
Τὰ $\frac{4}{8}$ τοῦ ψωμιοῦ =



Τὰ $\frac{5}{8}$ τοῦ ψωμιοῦ = 

Τὰ $\frac{6}{8}$ τοῦ ψωμιοῦ = 

Τὰ $\frac{7}{8}$ τοῦ ψωμιοῦ = 

Τὰ $\frac{8}{8}$ τοῦ ψωμιοῦ (ὁλόκληρο) = 

Ἂν τώρα ἀπὸ τὰ 4 ἴσα μέρη, ποὺ μοιράσαμε τὴν ὥρα (δηλ. $15^{\pi} + 15^{\pi} + 15^{\pi} + 15^{\pi}$), πάρωμε τὰ δύο τέταρτα ($15^{\pi} + 15^{\pi}$), τὸν ἀριθμὸ αὐτὸ τὸν γράφομε ἔτσι : $\frac{2}{4}$ τῆς ὥρας.

Εἶναι δηλ. $\frac{2}{4}$ τῆς ὥρας $= 30^{\pi}$ (δηλ. $15^{\pi} + 15^{\pi}$).

Ὁμοίως εἶναι $\frac{3}{4}$ τῆς ὥρας $= 45^{\pi}$ (δηλ. $15^{\pi} + 15^{\pi} + 15^{\pi}$) κ.οὖ.κ.

Ἐπίσης, ἂν ἀπὸ τὰ 3 μέρη ποὺ μοιράσαμε τὴν ὥρα (δηλ. $20^{\pi} + 20^{\pi} + 20^{\pi}$), πάρωμε τὰ δύο τρίτα, τὸν ἀριθμὸ αὐτὸ τὸν γράφομε ἔτσι : $\frac{2}{3}$.

Εἶναι δηλ. $\frac{2}{3}$ τῆς ὥρας $= 40^{\pi}$ (δηλ. $20^{\pi} + 20^{\pi}$).

Ὁμοίως εἶναι $\frac{3}{3}$ τῆς ὥρας $= 60^{\pi}$ (δηλ. $20^{\pi} + 20^{\pi} + 20^{\pi}$).

Ἂν πάλι ἀπὸ τὰ 8 ἴσα μέρη, ποὺ μοιράσαμε τὴν ὀκᾶ (δηλ. 50 δρμ. + 50 δρμ. + 50 δρμ. + 50 δρμ. + 50 δρμ. + 50 δρμ. + 50 δρμ. + 50 δρμ.), πάρωμε τὰ δύο ὄγδοα, τὰ τρία ὄγδοα, τὰ τέσσερα ὄγδοα κ.λ.π. οἱ ἀριθμοὶ αὐτοὶ γράφονται ἔτσι :

$\frac{2}{8}$ τῆς ὀκᾶς (δηλ. $50 + 50$) $= 100$ δράμια

$\frac{3}{8}$ τῆς ὀκᾶς $= 150$ δράμια

$\frac{4}{8}$ τῆς ὀκᾶς = 200 δράμια

$\frac{5}{8}$ τῆς ὀκᾶς = 250 δράμια

κ. οὕ. κ.

Οἱ ἀριθμοὶ 1, 2, 3, 4, 5, κ.λ.π., ὅπως ξαίρομε, λέγονται ***ἀκέραιοι ἀριθμοί***.

Οἱ ἀριθμοὶ $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{8}$ κ.λ.π., ποὺ μᾶς φανερώνουν ἕνα μέρος τῆς ἀκεραίας μονάδος ***(τοῦ ὁλοκλήρου)*** καὶ οἱ ἀριθμοὶ $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{8}$ κ.λ.π., ποὺ μᾶς φανερώνουν πολλὰ μέρη τῆς ἀκεραίας μονάδος, λέγονται ***κλασματικοὶ ἀριθμοὶ*** ἢ ***κλάσματα***.

Ἀπ᾽ ὅσα εἴπαμε παραπάνω, βλέπομε ὅτι τὸ κλάσμα γράφεται μὲ δύο ἀκεραίους ἀριθμούς.

Ἀπὸ αὐτοὺς ἐκεῖνος ποὺ βρίσκεται κάτω ἀπὸ τὴν εὐθεῖα μᾶς φανερώνει σὲ πόσα ἴσα μέρη διαιρέσαμε τὴν ἀκεραία μονάδα καὶ λέγεται ***παρονομαστής***, ὁ δὲ ἄλλος, ποὺ βρίσκεται ἐπάνω ἀπὸ τὴν εὐθεῖα, φανερώνει πόσα τέτοια μέρη παίρνουμε καὶ λέγεται ***ἀριθμητής***.

Ὁ ἀριθμητὴς καὶ ὁ παρονομαστὴς ἑνὸς κλάσματος λέγονται μὲ ἕνα ὄνομα ***ὅροι*** τοῦ κλάσματος.

Ἡ ὁριζοντία εὐθεῖα ποὺ χωρίζει τοὺς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος λέγεται ***κλασματικὴ*** γραμμή.

Ἔτσι, στὸ κλάσμα $\frac{3}{4}$ τοῦ ψωμιοῦ ὁ 3 εἶναι ἀριθμητὴς καὶ ὁ 4 παρονομαστής, καὶ τὸ μὲν 4 μᾶς φανερώνει ὅτι διαιρέσαμε σὲ 4 ἴσα μέρη τὴν ἀκεραία μονάδα (τὸ ψωμί), τὸ δὲ 3 μᾶς φανερώνει ὅτι ἀπὸ τὰ ἴσα αὐτὰ μέρη πήραμε τὰ 3.

Ἐπίσης τὸ κλάσμα $\frac{2}{3}$ τῆς ὥρας φανερώνει ὅτι διαιρέσαμε τὴν ὥρα σὲ τρία ἴσα μέρη, ποὺ τὸ κάθε ἕνα εἶναι 20^{π} καὶ πήραμε τὰ δύο ($20^{\pi} + 20^{\pi}$).

Ὥστε: $\frac{2}{3}$ τῆς ὥρας $= 40^{\pi}$

Ἐπίσης τὸ κλάσμα $\frac{5}{8}$ τοῦ πήχεως φανερώνει ὅτι διαιρέσαμε τὸν πῆχυ σὲ 8 ἴσα κομμάτια ***(ῥούπια)*** καὶ πήραμε ἀπὸ αὐτὰ τὰ 5.

Ἀσκήσεις.

Α΄. (Ἀπὸ μνήμης)

97. Πῶς λέγονται τὰ κλάσματα ποὺ ἔχουν ἀριθμητὴ τὴν μονάδα;

98. Ἂν κόψωμε ἕνα μῆλο σὲ 5 κομμάτια ἴσα, πῶς λέγεται τὸ κάθε κομμάτι; Καὶ πῶς λέγονται τὰ 3 κομμάτια;

99. Ἕνα ταψὶ γλυκὸ ἐμοιράσθη σὲ 12 παιδιά, κανένα δὲ παιδὶ δὲν πῆρε περισσότερο ἀπὸ τὰ ἄλλα. Τί μέρος τοῦ γλυκοῦ πῆρε τὸ κάθε παιδὶ καὶ τί μέρος τοῦ γλυκοῦ πῆραν τὰ 7 παιδιά;

100. Ὁ πῆχυς διαιρεῖται σὲ 8 ῥούπια. Τί μέρος (κλάσμα) τοῦ πήχεως εἶναι τὸ 1 ῥούπι καὶ τί μέρος τοῦ πήχεως εἶναι τὰ 3 ῥούπια;

101. Διάβασε τὰ κλάσματα: $\frac{5}{5}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{7}{20}$, $\frac{6}{100}$, $\frac{7}{60}$, $\frac{8}{25}$.

102. Τί μέρος (κλάσμα) τῆς ὀκᾶς εἶναι τὸ 1 δράμι καὶ τί μέρος τὰ 15 δράμια;

(Ἀφοῦ ἡ ὀκᾶ ἔχει 400 δράμια, τὸ 1 δράμι εἶναι τὸ $\frac{1}{400}$ τῆς ὀκᾶς καὶ τὰ 15 δράμια τὰ $\frac{15}{400}$ τῆς ὀκᾶς).

103. Τί μέρος (κλάσμα) τοῦ μέτρου εἶναι ὁ 1 πόντος καὶ τί μέρος εἶναι οἱ 7 πόντοι; (1 μέτρο=100 πόντοι).

104. Ἡ ὥρα διαιρεῖται σὲ 60 $^{\pi}$. Τί μέρος τῆς ὥρας εἶναι τὸ 1$^{\pi}$; Καὶ τί μέρος τὰ 5$^{\pi}$, 6$^{\pi}$, 10$^{\pi}$, 7$^{\pi}$, 32$^{\pi}$;

105. Ὁ χρόνος ἔχει 12 μῆνες. Τί μέρος τοῦ χρόνου εἶναι ὁ 1 μῆνας;

106. Ὁ μῆνας ἔχει 30 ἡμέρες. Τί μέρος τοῦ μῆνα εἶναι ἡ 1 ἡμέρα;

107. Ἡ ἑβδομάδα ἔχει 7 ἡμέρες. Τί μέρος τῆς ἑβδομάδος εἶναι ἡ μία ἡμέρα;

108. Ἡ λίρα ἔχει 20 σελλίνια. Τί μέρος τῆς λίρας εἶναι τὸ 1 σελλίνι; Τὰ 3 σελλίνια;

109. Ὁ στατῆρας ἔχει 44 ὀκάδες. Τί μέρος τοῦ στατῆρος εἶναι ἡ 1 ὀκᾶ; οἱ 7 ὀκάδες;

110. Δύο μαθηταὶ ἔλυσαν ἕνα πρόβλημα, ὁ πρῶτος σὲ $\frac{1}{4}$ τῆς ὥρας καὶ ὁ ἄλλος σὲ $\frac{1}{5}$ τῆς ὥρας. Ποιός τὸ ἔλυσε γρηγορώτερα;

Β΄. (Γραπτῶς)

111. Γράψε μὲ ἀριθμοὺς τὰ κλάσματα: Τρία ἕβδομα, δύο εἰκοστά, ἐννέα δέκατα, πέντε ἐνδέκατα, τρία δέκατα ἕκτα, ἐννέα εἰκοστὰ πέμπτα, ὀκτὼ δέκατα ἔνατα, εἴκοσι ἑκατοστά, ἑπτὰ ἑξηκοστά, δέκα πέντε τετρακοσιοστά, τρία πεντηκοστὰ καὶ ἑπτὰ τριακοστὸ πέμπτα.

112. Γράψε στὸ τετράδιό σου 10 διάφορα κλάσματα μὲ ἀριθμοὺς καὶ διάβασέ τα.

113. Ἀπὸ τὶς κλασματικὲς μονάδες $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{8}$ καὶ $\frac{1}{20}$, ποιὰ εἶναι ἡ μεγαλύτερη καὶ γιατί;

114. Ἀπὸ τὶς κλασματικὲς μονάδες $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{6}$ καὶ $\frac{1}{4}$, ποία εἶναι ἡ μικρότερη καὶ γιατί;

115. Ποιὸ ἀπὸ τὰ κλάσματα: $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{2}{8}$ εἶναι μεγαλύτερο καὶ ποῖο μικρότερο;

116. Ποιὸ ἀπὸ τὰ κλάσματα: $\frac{4}{5}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{4}{10}$ εἶναι μεγαλύτερο καὶ ποῖο μικρότερο;

117. Πόσα πρῶτα λεπτὰ εἶναι τὸ $\frac{1}{5}$ τῆς ὥρας καὶ πόσα τὰ $\frac{3}{5}$ τῆς ὥρας; (ἀφοῦ ἡ ὥρα ἔχει $60^{π}$, τὸ $\frac{1}{5}$ τῆς ὥρας εἶναι $60 : 5 = 12^{π}$ καὶ τὰ $\frac{2}{5}$ τῆς ὥρας εἶναι $2 \times 12 = 24^{π}$).

118. Πόσα πρῶτα λεπτὰ εἶναι τὰ $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{8}{15}$, $\frac{3}{20}$ τῆς ὥρας;

119. Πόσα δράμια εἶναι τὸ $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{20}$ τῆς ὀκᾶς;

120. Πόσα δράμια εἶναι τὰ $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{3}{16}$, $\frac{7}{50}$ τῆς ὀκᾶς;

121. Ποιὸς ἀριθμός εἶναι τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ 100, $\frac{1}{4}$ τοῦ 1000 καὶ $\frac{1}{8}$ τοῦ 120;

ΣΥΓΚΡΙΣΙΣ ΤΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ ΠΡΟΣ ΤΗΝ ΑΚΕΡΑΙΑ ΜΟΝΑΔΑ

Ἂν κόψωμε ἕνα μῆλο σὲ 4 ἴσα κομμάτια καὶ πάρωμε τὸ 1 ἢ τὰ 2 ἢ τὰ 3 κομμάτια, εἶναι φανερὸ ὅτι παίρνομε λιγώτερο ἀπὸ ὁλόκληρο τὸ μῆλο Δηλαδὴ καθένα ἀπὸ τὰ κλάσματα: $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$ τοῦ μήλου εἶναι μικρότερο ἀπὸ ἕνα μῆλο.

Ἐπίσης τὸ κλάσμα $\frac{3}{8}$ τοῦ πήχεως, δηλ. τὰ 3 ρούπια, εἶναι μικρότερο ἀπὸ τὸν πῆχυ, τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ ψωμιοῦ εἶναι λιγώτερο ἀπὸ ἕνα ψωμὶ κ.τ.λ.

Βλέπομε λοιπὸν ὅτι:

Ὅταν ὁ ἀριθμητὴς ἑνὸς κλάσματος εἶναι μικρότερος ἀπὸ τὸν παρονομαστή, τὸ κλάσμα εἶναι μικρότερο ἀπὸ τὴν ἀκεραία μονάδα.

Ἂν πάρωμε καὶ τὰ 4 κομμάτια τοῦ μήλου καὶ τὰ 8 ὄγδοα τοῦ πήχεως καὶ τὰ 4 τέταρτα τοῦ ψωμιοῦ κ.τ.λ., τότε παίρνομε ὁλόκληρο τὸ μῆλο, ὁλόκληρο τὸν πῆχυ, ὁλόκληρο τὸ ψωμὶ κ.τ.λ.

Δηλ. $\frac{4}{4}$ τοῦ μήλου εἶναι 1 μῆλο

$\frac{8}{8}$ τοῦ πήχεως εἶναι 1 πῆχυς

$\frac{4}{4}$ τοῦ ψωμιοῦ εἶναι 1 ψωμὶ

Ὥστε:

Ὅταν ὁ ἀριθμητὴς ἑνὸς κλάσματος εἶναι ἴσος μὲ τὸν παρονομαστή, τὸ κλάσμα εἶναι ἴσο μὲ μία ἀκεραία μονάδα.

Ἂν τώρα κόψωμε καὶ ἕνα ἄλλο μῆλο σὲ 4 ἴσα κομμάτια καὶ πάρωμε τὰ 4 κομμάτια τοῦ πρώτου μήλου (δηλ. ὁλόκληρο τὸ μῆλο) καὶ ἕνα κομμάτι ἀπὸ τὸ δεύτερο μῆλο θὰ ἔχωμε πάρει περισσότερο ἀπὸ ἕνα μῆλο, δηλαδὴ τὰ $\frac{5}{4}$ τοῦ μήλου εἶναι περισσότερο ἀπὸ ἕνα μῆλο.

Γιὰ τὸν ἴδιο λόγο τὰ $\frac{3}{2}$ τοῦ ψωμιοῦ (δηλ. τρία μισὰ ψωμιὰ) εἶναι μεγαλύτερο ἀπὸ τὸ ὁλόκληρο (ἀκέραιο) ψωμί.

Βλέπομε λοιπὸν ὅτι :

> ***Ὅταν ὁ ἀριθμητὴς ἑνὸς κλάσματος εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν παρονομαστή, τὸ κλάσμα εἶναι μεγαλύτερο ἀπὸ μία ἀκεραία μονάδα.***

Τὰ κλάσματα ποὺ εἶναι μεγαλύτερα ἀπὸ μία ἀκεραία μονάδα λέγονται ***καταχρηστικὰ*** κλάσματα.

Ἀσκήσεις.

122. Ἀπὸ τὰ κλάσματα $\frac{3}{5}, \frac{6}{8}, \frac{7}{7}, \frac{3}{2}, \frac{9}{8}, \frac{3}{8}, \frac{4}{4}$, ποῖα εἶναι μικρότερα τῆς ἀκεραίας μονάδος, ποῖα εἶναι ἴσα καὶ ποῖα εἶναι μεγαλύτερα αὐτῆς ;

123. Ποῖο ἀπὸ τὰ παρακάτω κλάσματα εἶναι τὸ μεγαλύτερο καὶ ποῖο τὸ μικρότερο ; $\frac{3}{3}, \frac{4}{4}, \frac{7}{7}, \frac{2}{2}, \frac{5}{5}, \frac{10}{10}, \frac{15}{15}$.

124. Γράψε τρία κλάσματα μικρότερα ἀπὸ τὴν ἀκεραία μονάδα, τρία μεγαλύτερα καὶ τρία ἴσα μὲ τὴν ἀκεραία μονάδα.

125. Ἀπὸ ἕνα πορτοκάλι ὁ Γιῶργος πῆρε τὸ $\frac{1}{2}$ καὶ ὁ Γιαννάκης τὰ $\frac{3}{8}$. Ποῖος πῆρε περισσότερο ;

126. Γράψε 10 κλάσματα καταχρηστικά.

ΤΡΟΠΗ ΑΚΕΡΑΙΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ ΣΕ ΚΛΑΣΜΑ

Πρόβλημα: Ἕνας ἀγόρασε 3 πῆχες ὕφασμα γιὰ νὰ κάνη ἕνα φόρεμα στὴν κόρη του. Πόσα ὄγδοα (ρούπια) εἶναι τὸ ὕφασμα ποὺ ἀγόρασε ;

Λύσις: Ἀφοῦ ὁ 1 πῆχυς ἔχει 8 ὄγδοα, οἱ 2 πῆχες ἔχουν $2 \times 8 = 16$

ὄγδοα καὶ οἱ 3 πῆχες θὰ ἔχουν $3 \times 8 = 24$ ὄγδοα· ἀλλὰ αὐτὸ γράφεται σὰν κλάσμα ἔτσι : $\frac{24}{8}$.

$$\text{Δηλαδή}:\quad 3 = \frac{3 \times 8}{8} = \frac{24}{8},$$

Ἂν πάλι θέλωμε νὰ τρέψωμε τὸν ἀκέραιο ἀριθμὸ 7 σὲ πέμπτα (δηλ. σὲ κλάσμα ποὺ νὰ ἔχῃ παρονομαστὴ τὸ 5), σκεπτόμαστε μὲ τὸν ἴδιο τρόπο καὶ βρίσκομε ὅτι :

$$7 = \frac{7 \times 5}{5} = \frac{35}{5}.$$

Ἀσκήσεις.

127. Πῶς τρέπομε ἕνα ἀκέραιο ἀριθμὸ σὲ κλάσμα μὲ ὡρισμένο παρανομαστή ; (Νὰ βρῇς τὸν κανόνα καὶ νὰ τὸν γράψῃς στὸ τετράδιό σου).

128. 10 πῆχες πόσα ὄγδοα (ρούπια) μᾶς κάνουν ;

129. 15 ψωμιὰ πόσα τέταρτα τοῦ ψωμιοῦ μᾶς κάνουν ;

130. Τρέψε τὸν ἀκέραιο ἀριθμὸ 9 σὲ ἕβδομα, σὲ δέκατα, σὲ ἕκτα καὶ σὲ δωδέκατα.

131. Τρέψε τοὺς ἀκεραίους ἀριθμοὺς 5, 8, 7, 10, 6, 25, σὲ τέταρτα.

Σημείωσις : Ἕνα ἀκέραιο ἀριθμὸ μποροῦμε νὰ τὸν παραστήσωμε σὰν κλάσμα, ἂν βάλωμε παρονομαστὴ τὴν μονάδα. π. χ. $3 = \frac{3 \times 1}{1} = \frac{3}{1}$ $9 = \frac{9}{1}$, $7 = \frac{7}{1}$ κ.λ.π.

ΜΙΚΤΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Ἂν ἕνας ἔχῃ 4 πῆχες ὕφασμα καὶ $\frac{3}{8}$ τοῦ πήχεως, μποροῦμε νὰ γράψωμε ὅτι ἔχει $4 + \frac{3}{8}$ πῆχες. Ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς γράφεται ἁπλούστερα (ἂν παραλείψωμε τὸ $+$) ἔτσι : $4\frac{3}{8}$ πῆχες καὶ λέγεται ***Μικτὸς ἀριθμός.***

Ὅπως βλέπομε ὁ παραπάνω μικτὸς ἀριθμὸς ἀποτελεῖται ἀπὸ τὸν ἀκέραιον 4 καὶ τὸ κλάσμα $\frac{3}{8}$.

Ὥστε :

Μικτὸς ἀριθμὸς λέγεται ἐκεῖνος ποὺ ἀποτελεῖται ἀπὸ ἀκέραιον καὶ ἀπὸ κλάσμα.

ΤΡΟΠΗ ΜΙΚΤΟΥ ΣΕ ΚΛΑΣΜΑ

Πρόβλημα: Ἕνας ἀγόρασε $4\frac{3}{8}$ πῆχες ὕφασμα γιὰ νὰ κάνη ἕνα κοστούμι. Πόσα ὄγδοα (ρούπια) εἶναι τὸ ὕφασμα ποὺ ἀγόρασε;

Λύσις: Ἀφοῦ ὁ ἕνας πῆχυς (ἡ μία ἀκεραία μονὰς) ἔχει 8 ὄγδοα, οἱ 4 πῆχες θὰ ἔχουν $4 \times 8 = 32$ ὄγδοα. Σὲ αὐτὰ προσθέτομε καὶ τὰ 3 ὄγδοα τοῦ μικτοῦ καὶ βρίσκομε ὅτι τὸ ὕφασμα εἶναι: $32 + 3 = 35$ ὄγδοα ἢ $\frac{35}{8}$.

Πολλαπλασιάσαμε δηλαδὴ τὸν ἀκέραιον 4 ἐπὶ τὸν παρονομαστὴ τοῦ κλάσματος 8 καὶ στὸ γινόμενο προσθέσαμε τὸν ἀριθμητὴ 3. Αὐτὸ ποὺ βρήκαμε τὸ βάλαμε ἀριθμητή, παρονομαστὴ δὲ ἀφήσαμε τὸν ἴδιο.

Ἀσκήσεις.

132. Πῶς τρέπομε ἕνα μικτὸ σὲ κλάσμα; (Νὰ βρῆς τὸν κανόνα καὶ νὰ τὸν γράψης στὸ τετράδιό σου).

133. Οἱ $7\frac{5}{8}$ πῆχες, ἀπὸ πόσα ὄγδοα συνολικὰ ἀποτελοῦνται;

134. Τὰ $9\frac{3}{4}$ ψωμιὰ ἀπὸ πόσα τέταρτα ἀποτελοῦνται;

135 Πόσα δέκατα ἔχει συνολικὰ ὁ μικτὸς ἀριθμὸς $8\frac{7}{10}$;

136. Νὰ τραποῦν οἱ παρακάτω μικτοὶ ἀριθμοὶ σὲ κλάσματα:

α') $3\frac{1}{2}$, $5\frac{3}{8}$, $7\frac{4}{5}$, $9\frac{6}{7}$, $7\frac{3}{5}$.

β') $6\frac{7}{8}$, $15\frac{1}{4}$, $25\frac{4}{11}$, $38\frac{3}{5}$, $19\frac{5}{6}$.

ΕΞΑΓΩΓΗ ΤΩΝ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΜΟΝΑΔΩΝ ΤΟΥ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ —ΤΡΟΠΗ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ ΣΕ ΜΙΚΤΟΝ

Ἂν ἔχωμε ἕνα κλάσμα καταχρηστικό, δηλαδὴ μεγαλύτερο ἀπὸ 1 ἀκεραία μονάδα, μποροῦμε νὰ βροῦμε πόσες ἀκέραιες μονάδες περιέχει.

Παίρνομε π. χ. τὸ καταχρηστικὸ κλάσμα $\frac{23}{4}$ τῆς ὀκᾶς. Γιὰ νὰ βροῦμε πόσες ἀκέραιες μονάδες (ὀκάδες) περιέχει τὸ κλάσμα αὐτό, σκεπτόμαστε ὡς ἑξῆς:

Ἀφοῦ τὰ 4 τέταρτα εἶναι μία ἀκεραία μονάδα, τὰ 23 τέταρτα θὰ ἔχουν τόσες ἀκέραιες μονάδες, ὅσον εἶναι τὸ ἀκέραιον πηλίκον τοῦ 23 διὰ 4.

$$\begin{array}{r|l} 23 & 4 \\ \cline{2-2} 3 & 5 \end{array}$$

Ὥστε τὸ καταχρηστικὸ κλάσμα $\frac{23}{4}$ **περιέχει 5 ἀκέραιες μονάδες καὶ μένει ὑπόλοιπον 3 τέταρτα.**

Δηλαδή : $\frac{23}{4}$ τῆς ὀκᾶς $= 5\frac{3}{4}$ ὀκάδες.

Ἄλλο παράδειγμα: Τὸ κλάσμα $\frac{16}{3}$ **περιέχει τόσες ἀκέραιες μονάδες** ὅσες φορὲς χωρεῖ ὁ παρονομαστής του στὸν ἀριθμητή, **δηλ. 5 καὶ μᾶς μένει ὑπόλοιπον** $\frac{1}{3}$. Ὥστε: $\frac{16}{3} = 5\frac{1}{3}$.

Γιὰ νὰ βροῦμε λοιπὸν τὶς ἀκέραιες μονάδες ποὺ περιέχει ἕνα καταχρηστικὸ κλάσμα, διαιροῦμε τὸν ἀριθμητή του διὰ τοῦ παρονομαστοῦ.

Ἡ πρᾶξις ποὺ κάνομε γιὰ νὰ βροῦμε πόσες ἀκέραιες μονάδες περιέχει ἕνα καταχρηστικὸ κλάσμα λέγεται ***ἐξαγωγὴ τῶν ἀκεραίων μονάδων***.

Βλέπουμε λοιπὸν ὅτι:

Γιὰ νὰ ἐξαγάγωμε τὶς ἀκέραιες μονάδες ἀπὸ ἕνα κλάσμα, διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητὴ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ καὶ τὸ μὲν πηλίκον μᾶς φανερώνει τὶς ἀκέραιες μονάδες, τὸ δὲ ὑπόλοιπον (ἂν ὑπάρχῃ) γράφομε ἀριθμητὴ καὶ παρονομαστὴ ἀφήνομε τὸν ἴδιο.

Ἂν ὁ ἀριθμητὴς διαιρῆται ἀκριβῶς διὰ τοῦ παρονομαστοῦ, τότε τὸ κλάσμα εἶναι ἴσο μὲ ἀκέραιο ἀριθμὸ π. χ. $\frac{10}{5} = 2$, $\frac{12}{3} = 4$.

Ἀσκήσεις.

137. 32 ρούπια (ὄγδοα) ὕφασμα, πόσες πῆχες εἶναι;

138. 32 τέταρτα ψωμιοῦ, πόσα ψωμιὰ ὁλόκληρα εἶναι;

139. Νὰ ἐξαχθοῦν οἱ ἀκέραιες μονάδες, ποὺ περιέχονται στὰ παρακάτω καταχρηστικὰ κλάσματα:

α΄) $\frac{37}{5}$, $\frac{25}{3}$, $\frac{36}{8}$, $\frac{29}{5}$, $\frac{48}{6}$, β΄) $\frac{13}{2}$, $\frac{57}{3}$, $\frac{49}{11}$, $\frac{50}{7}$, $\frac{52}{13}$

γ΄) $\frac{84}{5}$, $\frac{183}{8}$, $\frac{207}{3}$, $\frac{580}{10}$, $\frac{183}{5}$.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

Α΄. Τί παθαίνει ἕνα κλάσμα, ἂν πολλαπλασιάσωμε ἢ διαιρέσωμε τὸν ἀριθμητή του;

Κόβομε ἕνα μῆλο σὲ 8 κομμάτια καὶ δίνομε τὰ $\frac{2}{8}$ τοῦ μήλου στὸ Γιαννάκη.

Ἂν στὸ κλάσμα αὐτὸ μεγαλώσωμε τὸν ἀριθμητὴ δύο φορές, θὰ ἔχωμε τὸ κλάσμα $\frac{2\times2}{8}=\frac{4}{8}$ τοῦ μήλου, ποὺ εἶναι διπλάσιο ἀπὸ τὸ κλάσμα $\frac{2}{8}$. Ἂν τώρα μεγαλώσωμε τὸν ἀριθμητὴ τοῦ κλάσματος $\frac{2}{8}$ τρεῖς φορὲς, θὰ ἔχωμε τὸ κλάσμα $\frac{2\times3}{8}=\frac{6}{8}$ τοῦ μήλου, ποὺ εἶναι τρεῖς φορὲς μεγαλύτερο ἀπὸ τὸ κλάσμα $\frac{2}{8}$.

Ὅσες φορές, δηλαδή, μεγαλώσαμε τὸν ἀριθμητὴ τοῦ κλάσματος $\frac{2}{8}$, τόσες φορὲς μεγάλωσε καὶ ἡ ἀξία ὅλου τοῦ κλάσματος.

Βλέπομε λοιπὸν ὅτι:

> *Ἂν πολλαπλασιάσωμε τὸν ἀριθμητὴ ἑνὸς κλάσματος ἐπὶ ἕνα ἀριθμό, ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν ἴδιο ἀριθμό.*

Ἂν πάλι διαιρέσωμε τὸν ἀριθμητὴ τοῦ κλάσματος $\frac{6}{8}$ τοῦ μήλου διὰ τοῦ 3, θὰ ἔχωμε τὸ κλάσμα $\frac{6:3}{8} = \frac{2}{8}$ τοῦ μήλου, ποὺ εἶναι 3 φορὲς μικρότερο ἀπὸ τὸ κλάσμα $\frac{6}{8}$.

Ὥστε:

> *Ἂν διαιρέσωμε τὸν ἀριθμητὴ ἑνὸς κλάσματος διὰ ἑνὸς ἀριθμοῦ, ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος διαιρεῖται διὰ τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ* (μικραίνει δηλ. τόσες φορὲς ὅσος εἶναι ὁ ἀριθμὸς αὐτός).

Ἀσκήσεις

140. Πόσες φορὲς μεγαλύτερο εἶναι τὸ κλάσμα $\frac{15}{20}$ ἀπὸ τὸ κλάσμα $\frac{5}{20}$;

141. Πόσες φορὲς εἶναι μεγαλύτερο τὸ $\frac{12}{16}$ ἀπὸ τὸ $\frac{3}{16}$;

142. Πόσες φορὲς εἶναι μικρότερο τὸ κλάσμα $\frac{3}{10}$ ἀπὸ τὸ κλάσμα $\frac{9}{10}$;

143. Πόσες φορὲς εἶναι μικρότερο τὸ $\frac{4}{35}$ ἀπὸ τὸ $\frac{28}{35}$;

144. Κάνε τὰ κλάσματα $\frac{4}{5}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{7}{25}$ τρεῖς φορὲς μεγαλύτερα.

145. Κάνε 4 φορὲς μικρότερα τὰ κλάσματα: $\frac{20}{25}$, $\frac{16}{20}$, $\frac{8}{10}$ (μὲ διαίρεσι τοῦ ἀριθμητοῦ).

Β΄. Τί παθαίνει ἕνα κλάσμα, ἂν πολλαπλασιάσωμε ἢ διαιρέσωμε τὸν παρονομαστή του;

Δίνομε στὸ Γιαννάκη τὰ $\frac{2}{4}$ καὶ στὸ Γιῶργο τὰ $\frac{2}{8}$ τοῦ μήλου. Ἀπὸ τὰ δύο αὐτὰ κλάσματα, ποὺ ἔχουν τὸν ἴδιο ἀριθμητή, καταλαβαίνομε πὼς τὸ $\frac{2}{4}$ εἶναι μεγαλύτερο ἀπὸ τὸ $\frac{2}{8}$.

Τὸ κάθε τέταρτο τοῦ μήλου εἶναι διπλάσιο ἀπὸ τὸ ὄγδοο καὶ ἀντίθετα, τὸ κάθε ὄγδοο τοῦ μήλου εἶναι τὸ μισὸ τοῦ τετάρτου.

Ὥστε τὸ κλάσμα $\frac{2}{4}$ εἶναι διπλάσιον ἀπὸ τὸ κλάσμα $\frac{2}{8}$ καὶ ἀντίθετα, τὸ κλάσμα $\frac{2}{8}$ εἶναι δύο φορὲς μικρότερο ἀπὸ τὸ $\frac{2}{4}$.

Ἀλλὰ τὸ κλάσμα $\frac{2}{8}$ γίνεται ἀπὸ τὸ κλάσμα $\frac{2}{4}$, ἂν πολλαπλασιάσωμε τὸν παρονομαστή του ἐπὶ 2 καὶ τὸ κλάσμα $\frac{2}{4}$ γίνεται ἀπὸ τὸ κλάσμα $\frac{2}{8}$, ἂν διαιρέσωμε τὸν παρονομαστή του διὰ 2.

Βλέπομε λοιπὸν ὅτι :

Ἂν πολλαπλασιάσωμε τὸν παρονομαστὴ ἑνὸς κλάσματος ἐπὶ ἕνα ἀριθμό, ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος διαιρεῖται διὰ τοῦ ἀριθμοῦ αὐτοῦ καὶ ἂν διαιρέσωμε τὸν παρονομαστὴ ἑνὸς κλάσματος διὰ ἑνὸς ἀριθμοῦ, ἡ ἀξία του πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν αὐτόν.

Ἀσκήσεις

146. Τὸ κλάσμα $\frac{3}{10}$ πόσες φορὲς εἶναι μικρότερο ἀπὸ τὸ κλάσμα $\frac{3}{5}$;

147. Πόσες φορὲς μικρότερο εἶναι τὸ $\frac{3}{20}$ ἀπὸ τὸ $\frac{3}{5}$;

148. Πόσες φορὲς μεγαλύτερο εἶναι τὸ $\frac{1}{4}$ ἀπὸ τὸ $\frac{1}{20}$;

149. Πόσες φορὲς μεγαλύτερο εἶναι τὸ $\frac{2}{7}$ ἀπὸ τὸ $\frac{2}{28}$;

150. Κάνε 3 φορὲς μικρότερα τὰ κλάσματα : $\frac{2}{5}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{7}{10}$, (μὲ πολλαπλασιασμὸ τοῦ παρονομαστοῦ).

151. Κάνε 4 φορὲς μεγαλύτερα τὰ κλάσματα : $\frac{3}{20}$, $\frac{5}{40}$, $\frac{3}{16}$, $\frac{1}{24}$, $\frac{2}{8}$ (μὲ διαίρεσι τοῦ παρονομαστοῦ).

Γ'. Τί παθαίνει ἕνα κλάσμα, ἂν πολλαπλασιάσωμε καὶ τοὺς δύο ὅρους του ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ἢ τοὺς διαιρέσωμε διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ;

Παίρνομε ἕνα ψωμί, τὸ μοιράζομε σὲ 4 ἴσα μέρη ἢ **τέταρτα** καὶ τὸ κάθε τέταρτο τὸ μοιράζομε σὲ 2 μέρη. Τὸ ψωμί, λοιπόν, κόπηκε σὲ 8 ἴσα μέρη ἢ **ὄγδοα**. Ὥστε τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ ψωμιοῦ εἶναι τὸ ἴδιο μὲ τὰ $\frac{2}{8}$ αὐτοῦ καὶ τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ ψωμιοῦ εἶναι τὸ ἴδιο μὲ τὰ $\frac{6}{8}$ αὐτοῦ. Ἀλλὰ τὸ κλάσμα $\frac{6}{8}$ γίνεται ἀπὸ τὸ κλάσμα $\frac{3}{4}$, ἂν καὶ οἱ δύο ὅροι του πολλαπλασιασθοῦν ἐπὶ 2 $\left(\frac{3 \times 2}{4 \times 2} = \frac{6}{8}\right)$ καὶ ἀντίθετα, τὸ κλάσμα $\frac{3}{4}$ γίνεται ἀπὸ τὸ κλάσμα $\frac{6}{8}$, ἂν καὶ οἱ δύο ὅροι του διαιρεθοῦν διὰ 2 $\left(\frac{6 : 2}{8 : 2} = \frac{3}{4}\right)$.

Βλέπομε λοιπὸν ὅτι:

Ἂν πολλαπλασιάσωμε καὶ τοὺς δύο ὅρους ἑνὸς κλάσματος ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ἢ διαιρέσωμε αὐτοὺς διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ (ἂν διαιροῦνται ἀκριβῶς), ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος δὲν μεταβάλλεται.

Ἀσκήσεις

152. Γράψε 4 κλάσματα ἴσα πρὸς τὸ κλάσμα $\frac{1}{2}$.

153. Γράψε 2 κλάσματα ἴσα πρὸς τὸ κλάσμα $\frac{10}{30}$ ἀλλὰ μὲ μικροτέρους ὅρους.

154. Ποῖο ἀπὸ τὰ κλάσματα $\frac{1}{2}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{5}{10}$, $\frac{8}{16}$, εἶναι μεγαλύτερο;

ΑΠΛΟΠΟΙΗΣΙΣ ΤΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

Ἕνα κλάσμα μποροῦμε νὰ τὸ κάνωμε ἁπλούστερο, δηλαδὴ μὲ μικροτέρους ὅρους, χωρὶς νὰ μεταβληθῇ ἡ ἀξία του. Ἂν π. χ. ἔχωμε τὸ κλάσμα $\frac{5}{10}$ καὶ διαιρέσωμε καὶ τοὺς δύο ὅρους του διὰ τοῦ 5 : $\left(\frac{5\ :\ 5}{10\ :\ 5} = \frac{1}{2}\right)$, βρίσκομε τὸ ἁπλούστερο κλάσμα $\frac{1}{2}$. Ἀλλά, ὅπως μάθαμε, τὸ κλάσμα $\frac{1}{2}$ ἔχει τὴν ἰδία ἀξία μὲ τὸ κλάσμα $\frac{5}{10}$.

Ἐπίσης τὸ κλάσμα $\frac{9}{12}$ μποροῦμε νὰ τὸ κάνωμε ἁπλούστερο, ἂν διαιρέσωμε τοὺς ὅρους του διὰ τοῦ 3, δηλ. $\frac{9\ :\ 3}{12\ :\ 3} = \frac{3}{4}$.

Ἡ πρᾶξις, ποὺ κάναμε γιὰ νὰ γίνη τὸ κλάσμα ἁπλούστερο, λέγεται ***ἁπλοποίησις*** τοῦ κλάσματος.

Γιὰ νὰ ἁπλοποιηθῆ ἕνα κλάσμα, δηλαδὴ νὰ γίνη ἁπλούστερο χωρὶς νὰ μεταβληθῆ ἡ ἀξία του, πρέπει οἱ ὅροι του νὰ διαιρεθοῦν διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ (ἐὰν διαιροῦνται ἀκριβῶς) καὶ ἔτσι τὸ κλάσμα, ποὺ θὰ βρεθῆ, θὰ ἔχη μικροτέρους ὅρους, ἀλλὰ τὴν ἴδια ἀξία. Γιὰ νὰ ἁπλοποιήσωμε π.χ. τὸ κλάσμα $\frac{24}{40}$, διαιροῦμε καὶ τοὺς δύο ὅρους του διὰ τοῦ 4 καὶ βρίσκομε τὸ κλάσμα $\frac{6}{10}$, ποὺ ἔχει τὴν ἴδια ἀξία μὲ τὸ προηγούμενο. Ἂν καὶ αὐτοῦ τοῦ κλάσματος διαιρέσωμε τοὺς ὅρους διὰ τοῦ 2, βρίσκομε τὸ κλάσμα $\frac{3}{5}$, ποὺ εἶναι καὶ αὐτὸ ἴδιο μὲ τὰ προηγούμενα.

Τὸ κλάσμα, τώρα, $\frac{3}{5}$ δὲν ἁπλοποιεῖται, γιατὶ δὲν βρίσκεται ἀριθμὸς διὰ τοῦ ὁποίου νὰ διαιροῦνται ἀκριβῶς καὶ οἱ δύο ὅροι του.

Τὸ κλάσμα αὐτό, ποὺ δὲν μπορεῖ νὰ ἁπλοποιηθῆ, λέγεται ***ἀνάγωγον.***

Μὲ τὴν ἁπλοποίησι τῶν κλασμάτων, ὅπως θὰ ἰδοῦμε παρακάτω, εὐκολυνόμεθα στὴν ἐκτέλεσι τῶν πράξεων, γιατὶ ἔχομε μικροτέρους ὅρους.

Ἀσκήσεις

155. Νὰ ἁπλοποιηθοῦν τὰ παρακάτω κλάσματα:

$\frac{15}{25}$, $\frac{4}{18}$, $\frac{8}{24}$, $\frac{10}{40}$, $\frac{9}{18}$, $\frac{14}{32}$, $\frac{25}{35}$.

156. Ἐπίσης νὰ ἁπλοποιηθοῦν τὰ κλάσματα:

$\frac{10}{24}$, $\frac{8}{20}$, $\frac{10}{15}$, $\frac{9}{15}$, $\frac{12}{18}$, $\frac{21}{42}$, $\frac{60}{180}$.

157. Ἐπίσης ἁπλοποίησε τὰ κλάσματα:

$$\frac{18}{300}, \frac{48}{120}, \frac{75}{450}, \frac{80}{240}, \frac{160}{200}$$

ΟΜΩΝΥΜΑ ΚΑΙ ΕΤΕΡΩΝΥΜΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

Τὰ κλάσματα $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{2}{8}$, ποὺ ἔχουν τὸν ἴδιο παρονομαστή, λέγονται ***ὁμώνυμα*** κλάσματα.

Ἐπίσης τὰ κλάσματα: $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{4}{5}$ λέγονται ὁμώνυμα.

Τὰ κλάσματα $\frac{3}{8}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{7}$, ποὺ ἔχουν διαφόρους παρονομαστάς, λέγονται ***ἑτερώνυμα*** κλάσματα. Ἐπίσης τὰ κλάσματα $\frac{7}{10}$, $\frac{3}{9}$, $\frac{5}{12}$ εἶναι ἑτερώνυμα.

ΤΡΟΠΗ ΕΤΕΡΩΝΥΜΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ ΣΕ ΟΜΩΝΥΜΑ

Πολλὲς φορὲς μᾶς χρειάζεται δύο ἢ περισσότερα ἑτερώνυμα κλάσματα νὰ τὰ τρέπωμε σὲ ὁμώνυμα, ὅπως θὰ ἰδοῦμε παρακάτω.

Πρόβλημα: Ἕνας ἀγόρασε $\frac{3}{5}$ τῆς ὀκᾶς καφὲ καὶ ἄλλος $\frac{5}{8}$ τῆς ὀκᾶς. Ποῖος ἀπὸ τοὺς δύο ἀγόρασε περισσότερο καφέ;

Ἂν πολλαπλασιάσωμε καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ πρώτου κλάσματος $\frac{3}{5}$ ἐπὶ τὸν παρονομαστὴ 8 τοῦ ἄλλου κλάσματος $\left(\frac{3\times8}{5\times8}\right)$, βρίσκομε τὸ κλάσμα $\frac{24}{40}$, τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν ἴδια ἀξία μὲ τὸ κλάσμα $\frac{3}{5}$, γιατὶ πολλαπλασιάσαμε καὶ τοὺς δύο ὅρους του ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

Ἐπίσης ἂν πολλαπλασιάσωμε τοὺς ὅρους τοῦ δευτέρου κλάσματος $\frac{5}{8}$ ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν 5 τοῦ πρώτου κλάσματος $\left(\frac{5\times5}{8\times5}\right)$, βρίσκομε τὸ κλάσμα $\frac{25}{40}$, ποὺ ἔχει τὴν ἴδια ἀξία μὲ τὸ κλάσμα $\frac{5}{8}$.

Ἀντί, λοιπόν, τῶν ἑτερωνύμων κλασμάτων $\frac{3}{5}$ καὶ $\frac{5}{8}$, ἔχομε τὰ ὁμώνυμα κλάσματα $\frac{24}{40}$ καὶ $\frac{25}{40}$, ποὺ ἔχουν τὴν ἴδια ἀξία μὲ τὰ προηγούμενα.

Εἶναι φανερό ὅτι τὸ κλάσμα $\frac{25}{40}$ εἶναι μεγαλύτερο ἀπὸ τὸ $\frac{24}{40}$.

Ἄρα περισσότερο καφὲ ἔχει ἐκεῖνος ποὺ ἀγόρασε τὰ $\frac{5}{8}$ τῆς ὀκᾶς.

Βλέπομε λοιπὸν ὅτι :

Γιὰ νὰ τρέψωμε δύο ἑτερώνυμα κλάσματα σὲ ὁμώνυμα, πολλαπλασιάζομε τοὺς ὅρους τοῦ πρώτου κλάσματος ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦ δευτέρου καὶ τοὺς ὅρους τοῦ δευτέρου κλάσματος ἐπὶ τὸν παρονομαστὴ τοῦ πρώτου.

Ἂν τώρα ἔχωμε περισσότερα ἀπὸ δύο ἑτερώνυμα κλάσματα, π. χ. $\frac{4}{5}$, $\frac{1}{2}$ καὶ $\frac{3}{4}$, γιὰ νὰ τὰ τρέψωμε σὲ ὁμώνυμα,ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς:

Πολλαπλασιάζομε τοὺς δύο ὅρους τοῦ πρώτου κλάσματος $\frac{4}{5}$ ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν ἄλλων παρονομαστῶν, δηλ. ἐπὶ (2×4) ἢ 8 καὶ βρίσκουμε τὸ κλάσμα $\frac{4 \times 8}{5 \times 8} = \frac{32}{40}$, τὸ ὁποῖον (ὅπως ξέρομε) ἔχει τὴν ἴδια ἀξία μὲ τὸ κλάσμα $\frac{4}{5}$. Ἐπίσης πολλαπλασιάζομε τοὺς ὅρους τοῦ δευτέρου κλάσματος $\frac{1}{2}$ ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν ἄλλων παρονομαστῶν, δηλ. ἐπὶ (4×5) ἢ 20 καὶ βρίσκομε τὸ ἴσης ἀξίας κλάσμα $\frac{1 \times 20}{2 \times 20} = \frac{20}{40}$. Τέλος πολλαπλασιάζομε τοὺς ὅρους τοῦ τρίτου κλάσματος $\frac{3}{4}$ ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν ἄλλων παρονομαστῶν, δηλ. ἐπὶ (2×5) ἢ 10 καὶ βρίσκομε τὸ ἴσης ἀξίας κλάσμα $\frac{3 \times 10}{4 \times 10} = \frac{30}{40}$.

Ἀντί, λοιπόν, τῶν ἑτερωνύμων κλασμάτων $\frac{4}{5}$, $\frac{1}{2}$, καὶ $\frac{3}{4}$, βρήκαμε τὰ ὁμώνυμα κλάσματα $\frac{32}{40}$, $\frac{20}{40}$, καὶ $\frac{30}{40}$, ποὺ ἔχουν τὴν ἴδια ἀξία.

Γιὰ εὐκολία μας γράφομε τὰ κλάσματα ὡς ἑξῆς :

$$\overbrace{\frac{4}{5}}^{8} \quad \overbrace{\frac{1}{2}}^{20} \quad \overbrace{\frac{3}{4}}^{10} \text{ (ἑτερώνυμα)}$$

$$\frac{32}{40} \quad \frac{20}{40} \quad \frac{30}{40} \text{ (ὁμώνυμα)}$$

Δηλαδὴ πάνω ἀπὸ κάθε κλάσμα γράφομε τὸ γινόμενο τῶν παρονομαστῶν τῶν ἄλλων κλασμάτων καὶ ἔπειτα πολλαπλασιάζομε μὲ αὐτὸ τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος ποὺ βρίσκεται κάτω.

Ἄλλο παράδειγμα : Νὰ τραποῦν σὲ ὁμώνυμα τὰ κλάσματα : $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{1}{4}$.

$$\overbrace{\frac{2}{3}}^{20} \quad \overbrace{\frac{3}{5}}^{12} \quad \overbrace{\frac{1}{4}}^{15} \text{ (ἑτερώνυμα)}$$

$$\frac{40}{60} \quad \frac{36}{60} \quad \frac{15}{60} \text{ (ὁμώνυμα}$$

Ὥστε :

Γιὰ νὰ τρέψωμε τρία ἢ περισσότερα ἑτερώνυμα κλάσματα σὲ ὁμώνυμα, πολλαπλασιάζομε τοὺς ὅρους κάθε κλάσματος ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν τῶν ἄλλων κλασμάτων.

ΕΛΑΧΙΣΤΟ ΚΟΙΝΟ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΟ (Ε. Κ. Π.)

Ὁ ἀριθμὸς 15 λέγεται πολλαπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ 5 γιατὶ γίνεται ἀπὸ αὐτόν, ἂν τὸν πολλαπλασιάσωμε ἐπὶ 3. Ἐπίσης γιὰ τὸν ἴδιο λόγο οἱ ἀριθμοὶ 20, 25, 30, 35 κλπ. εἶναι πολλαπλάσια τοῦ 5. Εἶναι φανερὸ ὅτι τὰ πολλαπλάσια ἑνὸς ἀριθμοῦ διαιροῦνται ἀκριβῶς δι᾽ αὐτοῦ.

Ἂν τώρα λάβωμε δύο ἢ περισσοτέρους ἀριθμούς, π. χ. τοὺς ἀριθμοὺς 2, 4, καὶ 5 καὶ ἕνα ἄλλο ἀριθμό, π. χ. τὸν 40, ποὺ νὰ διαιρῆται ἀκριβῶς δι᾽ ὅλων τῶν δοθέντων, βλέπομε ὅτι ὁ ἴδιος ἀριθμὸς 40 εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ 2, τοῦ 4 καὶ τοῦ 5.

Ὁ ἀριθμὸς 40 λέγεται ***κοινὸ πολλαπλάσιο*** τῶν ἀριθμῶν 2, 4 καὶ 5.

Ἐπίσης οἱ ἀριθμοὶ 20, 40, 80, 100, κλπ. εἶναι ***κοινὰ πολλαπλάσια*** τῶν ἀριθμῶν 2, 4, καὶ 5.

Τὸν ἀριθμὸ 20, ποὺ εἶναι τὸ μικρότερο κοινὸ πολλαπλάσιο ἀπὸ ὅλα τὰ ἄλλα κοινὰ πολλαπλάσια, τὸν λέμε ***ἐλάχιστο κοινὸ πολλαπλάσιο*** τῶν ἀριθμῶν 2, 4 καὶ 5.

Ἐπίσης τῶν ἀριθμῶν 2, 3 καὶ 4 κοινὰ πολλαπλάσια (Κ. Π.) εἶναι οἱ ἀριθμοὶ 12, 24, 36, 48 κ.λ.π. καὶ Ἐλάχιστον Κοινὸν Πολλαπλάσιον (Ε. Κ. Π.) ὁ ἀριθμὸς 12.

Ὥστε :

Ἐλάχιστο κοινὸ πολλαπλάσιο (Ε. Κ. Π.) δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν λέγεται τὸ μικρότερο ἀπὸ τὰ κοινὰ πολλαπλάσια αὐτῶν.

ΠΩΣ ΒΡΙΣΚΟΜΕ ΤΟ Ε.Κ.Π. ΔΥΟ Ἢ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ;

Παράδειγμα 1ον : Νὰ εὑρεθῇ τὸ Ε.Κ.Π. τῶν ἀριθμῶν 2, 5 καὶ 10.

Παίρνομε τὸ μεγαλύτερο ἀριθμὸ (τὸν 10) καὶ βλέπομε ὅτι αὐτὸς διαιρεῖται ἀκριβῶς δι ὅλων τῶν ἄλλων. Ὁ ἀριθμὸς 10 εἶναι τὸ Ε.Κ.Π. τῶν ἀριθμῶν 2, 5 καὶ 10. Ὅταν, λοιπόν, ὁ μεγαλύτερος ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς διαιρῆται ἀκριβῶς διὰ τῶν ἄλλων, τότε αὐτὸς εἶναι τὸ Ε. Κ. Π. αὐτῶν.

Παράδειγμα 2ον : Νὰ εὑρεθῇ τὸ Ε. Κ. Π. τῶν ἀριθμῶν 3, 8, 4.

Παίρνομε τὸ μεγαλύτερο ἀπὸ αὐτούς, τὸν 8, καὶ βλέπομε ὅτι δὲν διαιρεῖται διὰ τῶν ἄλλων. Ἔπειτα διπλασιάζομε τὸν 8 καὶ βρίσκομε τὸν ἀριθμὸ 16, ὁ ὁποῖος πάλι δὲν διαιρεῖται δι᾽ ὅλων. Ἔπειτα τριπλασιάζομε τὸν 8 καὶ βρίσκομε τὸν ἀριθμὸ 24, ποὺ διαιρεῖται ἀκριβῶς δι᾽ ὅλων τῶν ἄλλων ἀριθμῶν.

Ὁ ἀριθμὸς 24 εἶναι τὸ Ε.Κ.Π. τῶν ἀριθμῶν 3, 8 καὶ 4.

Παράδειγμα 3ον : Νὰ εὑρεθῇ τὸ Ε.Κ.Π. τῶν ἀριθμῶν 2, 6 καὶ 5.

Ἂν σκεφθοῦμε μὲ τὸν ἴδιο τρόπο βρίσκομε ὅτι Ε.Κ.Π.=30.

Ὥστε :

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ Ε.Κ.Π. δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν, παίρνομε τὸ μεγαλύτερο ἀπὸ αὐτοὺς καὶ βλέπομε ἂν διαιρῆται ἀκριβῶς διὰ τῶν ἄλλων. Ἂν διαιρῆται, τότε αὐτὸς εἶναι τὸ Ε.Κ.Π., ἂν ὄχι τὸν διπλασιάζομε, τριπλασιάζομε κ.λ.π. μέχρις ὅτου βροῦμε ἀριθμό, ποὺ νὰ διαιρῆται ἀκριβῶς δι᾽ ὅλων. Ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς εἶναι τὸ Ε.Κ.Π.

Τὸ Ε.Κ.Π. μᾶς χρειάζεται, ὅπως θὰ ἰδοῦμε ἀμέσως παρακάτω, γιὰ νὰ τρέπωμε δύο ἢ περισσότερα ἑτερώνυμα κλάσματα σὲ ὁμώνυμα.

ΤΡΟΠΗ ΕΤΕΡΩΝΥΜΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ ΣΕ ΟΜΩΝΥΜΑ ΜΕ ΤΟ Ε.Κ.Π. ΤΩΝ ΠΑΡΟΝΟΜΑΣΤΩΝ

Παράδειγμα 1ον: Νὰ τραποῦν σὲ ὁμώνυμα τὰ ἑτερώνυμα κλάσματα $\frac{4}{5}$, $\frac{1}{2}$ καὶ $\frac{3}{4}$.

Βρίσκομε πρῶτον τὸ Ε.Κ.Π. τῶν παρονομαστῶν 5, 2 καὶ 4 μὲ τὸν τρόπο ποὺ μάθαμε.

Παίρνομε δηλ. τὸ μεγαλύτερο παρονομαστή, τὸν 5, βλέπομε ὅτι δὲν διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τῶν ἄλλων. Διπλασιάζομε αὐτὸν καὶ βρίσκομε τὸν 10, ὁ ὁποῖος πάλι δὲν διαιρεῖται διὰ τῶν ἄλλων. Ἔπειτα τριπλασιάζομε (15) καὶ τέλος τετραπλασιάζομε αὐτὸν καὶ ἔτσι βρίσκομε τὸν ἀριθμὸ 20, ποὺ διαιρεῖται ἀκριβῶς δι᾽ ὅλων τῶν ἄλλων παρονομαστῶν.

Ὁ 20 εἶναι τὸ Ε.Κ.Π. τῶν παρονομαστῶν.

Ἔπειτα διαιροῦμε τὸν 20 διὰ τῶν παρονομαστῶν 5, 2, 4 καὶ βρίσκομε κατὰ σειρὰν τὰ ἑξῆς πηλίκα: 4, 10, 5. Κάθε πηλίκον τὸ γράφομε πάνω ἀπὸ τὸ ἀντίστοιχο κλάσμα του.

Τέλος πολλαπλασιάζομε τοὺς ὅρους κάθε κλάσματος ἐπὶ τὸ ἀντίστοιχο πηλίκο (ποὺ βρίσκεται πάνω ἀπὸ τὸ κλάσμα).

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς:

$$\underbrace{4}\qquad \underbrace{10}\qquad \underbrace{5}\qquad\qquad \text{Ε.Κ.Π.} = 20$$

$$\frac{4}{5}\qquad \frac{1}{2}\qquad \frac{3}{4}\ \text{(ἑτερώνυμα)}$$

$$\frac{16}{20}\qquad \frac{10}{20}\qquad \frac{15}{20}\ \text{(ὁμώνυμα)}$$

Παράδειγμα 2ον: Νὰ τραποῦν σὲ ὁμώνυμα τὰ ἑτερώνυμα κλάσματα $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{12}$ καὶ $\frac{3}{4}$.

$$\underbrace{2}\qquad \underbrace{1}\qquad \underbrace{3}\qquad\qquad \text{Ε.Κ.Π.} = 12$$

$$\frac{5}{6}\qquad \frac{7}{12}\qquad \frac{3}{4}\ \text{(ἑτερώνυμα)}$$

$$\frac{10}{12}\qquad \frac{7}{12}\qquad \frac{9}{12}\ \text{(ὁμώνυμα)}$$

Ὥστε :

> ***Γιὰ νὰ τρέψωμε δύο ἢ περισσότερα ἑτερώνυμα κλάσματα σὲ ὁμώνυμα, βρίσκομε τὸ Ε.Κ.Π. τῶν παρονομαστῶν καὶ διαιροῦμε αὐτὸ διὰ κάθε παρονομαστοῦ. Ἔπειτα πολλαπλασιάζομε τοὺς ὅρους κάθε κλάσματος ἐπὶ τὸ ἀντίστοιχο πηλίκο.***

Μὲ τὸν τρόπο αὐτό, διὰ τοῦ Ε.Κ.Π., τρέπομε εὐκολώτερα τὰ ἑτερώνυμα κλάσματα σὲ ὁμώνυμα, γιατὶ βρίσκομε μικρότερο κοινὸ παρονομαστὴ τῶν ὁμωνύμων κλασμάτων.

Σημ. Εἶναι καλό, γιὰ εὐκολία μας, νὰ ἁπλοποιοῦμε πρῶτα ὅσα κλάσματα ἁπλοποιοῦνται καὶ ὕστερα νὰ τὰ τρέπωμε σὲ ὁμώνυμα.

Ἀσκήσεις

158. Νὰ βρεθῆ ποιό ἀπὸ τὰ κλάσματα $\frac{3}{5}$ καὶ $\frac{5}{8}$ εἶναι μεγαλύτερο.

159. Νὰ τραποῦν σὲ ὁμώνυμα τὰ κλάσματα :

α) $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$. β) $\frac{7}{8}$, $\frac{4}{9}$. γ) $\frac{9}{10}$, $\frac{3}{4}$. δ) $\frac{8}{9}$, $\frac{2}{5}$.

160. Ὁμοίως νὰ τραποῦν σὲ ὁμώνυμα τὰ κλάσματα :

α) $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{8}$. β) $\frac{6}{7}$, $\frac{3}{8}$. γ) $\frac{2}{11}$, $\frac{6}{7}$. δ) $\frac{7}{8}$, $\frac{4}{15}$

161. Νὰ βρεθῆ ποῖο ἀπὸ τὰ κλάσματα $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{7}$ καὶ $\frac{5}{8}$ εἶναι μεγαλύτερο καὶ ποῖο μικρότερο ;

162. Τρεῖς ἐργάτες σκάβουν ἕνα χαντάκι. Ὁ ἕνας ἔσκαψε σὲ μία ἡμέρα τὸ $\frac{1}{4}$ αὐτοῦ καὶ ὁ ἄλλος τὰ $\frac{7}{20}$. Ποῖος ἔσκαψε περισσότερο ;

163. Νὰ τραποῦν σὲ ὁμώνυμα, μὲ τὸ Ε. Κ. Π. τῶν παρονομαστῶν, τὰ κλάσματα : α) $\frac{7}{60}$, $\frac{3}{20}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{10}$, β) $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{9}{20}$.

164. Νὰ τραποῦν τὰ παρακάτω ἑτερώνυμα κλάσματα σὲ ὁμώνυμα μὲ τοὺς δύο τρόπους, δηλ. καὶ μὲ τὸ γινόμενο τῶν παρονομαστῶν καὶ μὲ τὸ Ε. Κ. Π.

α) $\frac{4}{5}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{3}{4}$. β) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$. γ) $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{2}{3}$.

165. Ἐπίσης νὰ τραποῦν σὲ ὁμώνυμα καὶ μὲ τοὺς δύο τρόπους τὰ κλάσματα :

α) $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$. β) $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$. γ) $\frac{7}{8}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{10}$.

166. Ἀπὸ τοὺς κατοίκους μιᾶς πόλεως τὰ $\frac{3}{10}$ εἶναι γυναῖκες, τὸ $\frac{1}{4}$ ἄνδρες, τὸ $\frac{1}{5}$ ἀγόρια καὶ τὰ $\frac{2}{8}$ κορίτσια. Ποῖοι εἶναι περισσότεροι καὶ ποῖοι λιγώτεροι ;

167. Μία βρύση γεμίζει σὲ μία ὥρα τὰ $\frac{3}{8}$ μιᾶς δεξαμενῆς, ἄλλη βρύση σὲ μιὰ ὥρα γεμίζει τὰ $\frac{4}{7}$ αὐτῆς καὶ τρίτη βρύση σὲ μιὰ ὥρα τὸ $\frac{1}{3}$ αὐτῆς. Ἀπὸ ποία βρύση χύνεται περισσότερο νερό ;

ΠΡΑΞΕΙΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

Πρόσθεσις

1ον) Πρόσθεσις ὁμωνύμων κλασμάτων.

Πρόβλημα : Μία κόρη ἔπλεξε τὴ μία ἡμέρα $\frac{3}{8}$ τοῦ πήχεως δαντέλλα, τὴν ἄλλη ἡμέρα $\frac{5}{8}$ τοῦ πήχεως καὶ τὴν τρίτη ἡμέρα $\frac{7}{8}$ τοῦ πήχεως. Πόσο ἔπλεξε καὶ τὶς τρεῖς ἡμέρες ;

Εἶναι φανερὸ ὅτι, γιὰ νὰ βροῦμε πόσο ἔπλεξε τὶς τρεῖς ἡμέρες, θὰ κάνωμε πρόσθεσι :

$$\frac{3}{8} + \frac{5}{8} + \frac{7}{8}$$

Ἀλλὰ 3 ὄγδοα + 5 ὄγδοα + 7 ὄγδοα, μᾶς κάνουν 15 ὄγδοα ἢ $\frac{15}{8}$. Ὥστε : $\frac{3}{8} + \frac{5}{8} + \frac{7}{8} = \frac{15}{8}$ ἢ $1\frac{7}{8}$ πήχ.

Βρήκαμε, λοιπόν, ὅτι ἔπλεξε $\frac{15}{8}$ τοῦ πήχεως ἤ, ἂν βγάλωμε τὶς ἀκέραιες μονάδες ἀπὸ τὸ καταχρηστικὸ κλάσμα : $1\frac{7}{8}$ πῆχες

῎Αλλο παράδειγμα : $\frac{3}{5}+\frac{4}{5}+\frac{2}{5}+\frac{4}{5}=\frac{13}{5}=2\frac{3}{5}$.

Ἀσκήσεις.

168 Πῶς προσθέτομε δύο ἢ περισσότερα ὁμώνυμα κλάσματα ; (νὰ βρῇς μόνος σου τὸν κανόνα καὶ νὰ τὸν γράψῃς στὸ τετράδιό σου).

169. Κάνε μόνος σου τρεῖς ἀσκήσεις προσθέσεως ὁμωνύμων κλασμάτων.

2ον) Πρόσθεσις ἑτερωνύμων κλασμάτων.

Πρόβλημα : ῞Ενας μαθητὴς μελετᾷ κάθε πρωῒ $\frac{3}{4}$ τῆς ὥρας καὶ κάθε ἀπόγευμα $\frac{4}{5}$ τῆς ὥρας. Πόση ὥρα μελετᾷ τὴν ἡμέρα ;

Γιὰ νὰ βροῦμε πόσο μελετᾷ τὴν ἡμέρα, θὰ κάνωμε πρόσθεσι :

$$\frac{3}{4}+\frac{4}{5}$$

᾿Αλλὰ τρία τέταρτα καὶ τέσσαρα πέμπτα δὲν μποροῦμε νὰ τὰ προσθέσωμε. Πρέπει, λοιπόν, νὰ τρέψωμε τὰ ἑτερώνυμα αὐτὰ κλάσματα εἰς ὁμώνυμα καὶ ὕστερα νὰ κάνωμε τὴν πρόσθεσι.

Δηλ. $\frac{3}{4}+\frac{4}{5}=\frac{15}{20}+\frac{16}{20}=\frac{31}{20}=1\frac{11}{20}$ τῆς ὥρας.

῎Αλλο παράδειγμα : $\frac{1}{2}+\frac{3}{5}+\frac{2}{3}=\frac{15}{30}+\frac{18}{30}+\frac{20}{30}=\frac{53}{30}=1\frac{23}{30}$.

Ἀσκήσεις.

170. Πῶς προσθέτομε δύο ἢ περισσότερα ἑτερώνυμα κλάσματα; (νὰ βρῇς τὸν κανόνα καὶ νὰ τὸν γράψῃς στὸ τετράδιό σου).

171. Κάνε τὶς προσθέσεις :

α) $\frac{4}{7}+\frac{2}{3}=$ β) $\frac{3}{8}+\frac{1}{2}=$

γ) $\frac{2}{5}+\frac{5}{6}=$ δ) $\frac{3}{10}+\frac{2}{3}=$

172. Ἐπίσης πρόσθεσε:

α) $\frac{3}{5} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} =$ β) $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{7}{8} =$

γ) $\frac{2}{5} + \frac{3}{10} + \frac{1}{2} =$

3ον) Πρόσθεσις μικτῶν ἀριθμῶν.

Πρόβλημα: Ἕνας ἔχει τρία δοχεῖα λάδι. Τὸ ἕνα ζυγίζει $14\frac{1}{2}$ ὀκάδες, τὸ ἄλλο $12\frac{1}{4}$ ὀκάδες καὶ τὸ τρίτο $8\frac{1}{5}$ ὀκάδες. Πόσες ὀκάδες ζυγίζουν καὶ τὰ τρία δοχεῖα;

Λύσις.—α' τρόπος: Προσθέτομε πρῶτα τοὺς ἀκεραίους:

$$14 + 12 + 8 = 34 \text{ ὀκάδες.}$$

Ἔπειτα προσθέτομε τὰ κλάσματα:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{10}{20} + \frac{5}{20} + \frac{4}{20} = \frac{19}{20} \text{ τῆς ὀκᾶς.}$$

Τὰ τρία, λοιπόν, δοχεῖα ζυγίζουν 34 ὀκάδες καὶ $\frac{19}{20}$ τῆς ὀκᾶς ἢ $34\frac{19}{20}$ ὀκάδες.

Γιὰ εὐκολία μας κάνομε τὴν πρόσθεσι ἔτσι:

$$14\overbrace{\frac{1}{2}}^{10} + 12\overbrace{\frac{1}{4}}^{5} + 8\overbrace{\frac{1}{5}}^{4} = 14\frac{10}{20} + 12\frac{5}{20} + 8\frac{4}{20} = 34\frac{19}{20}. \quad (\text{Ε.Κ.Π. } 20)$$

β' Τρόπος: Τρέπομε τοὺς μικτοὺς ἀριθμοὺς σὲ κλάσματα:

$$14\frac{1}{2} + 12\frac{1}{4} + 8\frac{1}{5} = \overbrace{\frac{29}{2}}^{10} + \overbrace{\frac{49}{4}}^{5} + \overbrace{\frac{41}{5}}^{4}. \quad (\text{Ε. Κ. Π. } 20)$$

$$= \frac{290}{20} + \frac{245}{20} + \frac{164}{20} = \frac{699}{20} = 34\frac{19}{20} \text{ ὀκάδες.}$$

Ἄλλο παράδειγμα.—α' τρόπος:

$$3\overbrace{\frac{1}{2}}^{15} + 5\overbrace{\frac{5}{6}}^{5} + 4\overbrace{\frac{2}{5}}^{6} = 3\frac{15}{30} + 5\frac{25}{30} + 4\frac{12}{30} =$$

$$12\frac{52}{30} = 12 + 1\frac{22}{30} = 13\frac{22}{30} = 13\frac{11}{15}.$$

Ὅταν, ὅπως στὸ παράδειγμά μας, μὲ τὴν πρόσθεσι, βρίσκομε μικτὸ ἀριθμό, ποὺ τὸ κλάσμα του εἶναι καταχρηστικό, τότε βγάζομε ἀπὸ αὐτὸ τὶς ἀκέραιες μονάδες καὶ τὶς προσθέτομε στὸ ἀκέραιο μέρος τοῦ μικτοῦ.

Δηλ. $12\frac{52}{30} = 12 + 1\frac{22}{30} = 13\frac{22}{30}$.

Ἐπίσης ἁπλοποιοῦμε τὸ κλάσμα τοῦ μικτοῦ, ἂν ἁπλοποιῆται, δηλ. $13\frac{22}{30} = 13\frac{11}{15}$.

β' τρόπος: (Ε.Κ.Π 30).

$$3\frac{1}{2} + 5\frac{5}{6} + 4\frac{2}{5} = \overset{15}{\frown}\frac{7}{2} + \overset{5}{\frown}\frac{35}{5} + \overset{6}{\frown}\frac{22}{5} =$$

$$= \frac{105}{30} + \frac{175}{30} + \frac{132}{30} = \frac{412}{30} = 13\frac{22}{30} = 13\frac{11}{15}$$

Ὥστε:

Γιὰ νὰ προσθέσωμε μικτοὺς ἀριθμοὺς προσθέτομε χωριστὰ τοὺς ἀκεραίους καὶ χωριστὰ τὰ κλάσματα καὶ ἑνώνομε τὰ δύο μερικὰ ἐξαγόμενα, ἢ τρέπομε τοὺς μικτοὺς σὲ κλάσματα καὶ ἔπειτα προσθέτομε.

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

173. Ἕνας ἔμπορος ἐπούλησε ἀπὸ ἕνα τόπι ὕφασμα τὴ μία ἡμέρα $12\frac{3}{8}$ πήχες, τὴν ἄλλη μέρα $9\frac{5}{8}$ καὶ τὴν τρίτη ἡμέρα $16\frac{7}{8}$ πήχες. Πόσες πήχες ἐπούλησε καὶ τὶς τρεῖς ἡμέρες;

174. Ἕνας ἐργάτης ἐργάζεται τὸ πρωῒ $5\frac{1}{4}$ ὧρες καὶ τὸ ἀπόγευμα $2\frac{5}{6}$ ὧρες. Πόσες ὧρες ἐργάζεται τὴν ἡμέρα;

175. Ἕνας παντοπώλης εἶχε ἕνα βαρέλι λάδι. Ἀπὸ αὐτὸ ἐπούλησε τὴ μία ἡμέρα $28\frac{3}{5}$ ὀκάδες καὶ τὴν ἄλλη ἡμέρα $56\frac{7}{8}$

ὀκάδες, ἔμειναν δὲ μέσα στὸ βαρέλι $36\frac{3}{4}$ ὀκάδες λάδι. Πόσες ὀκάδες λάδι εἶχε τὸ βαρέλι ἀπὸ τὴν ἀρχή;

176. Μία κόρη ἔπλεξε τὴ μία ἡμέρα $1\frac{3}{5}$ πῆχες δαντέλλα, τὴν ἄλλη $\frac{7}{8}$ πῆχ. καὶ τὴν τρίτη $1\frac{1}{2}$ πῆχ. Πόσους πῆχες ἔπλεξε καὶ τὶς τρεῖς ἡμέρες;

177. Μία βρύση γεμίζει σὲ μία ὥρα τὰ $\frac{3}{16}$ μιᾶς δεξαμενῆς, ἄλλη βρύση τὸ $\frac{1}{4}$ αὐτῆς καὶ τρίτη βρύση τὸ $\frac{1}{2}$ αὐτῆς. Ἂν ἀνοίξωμε καὶ τὶς τρεῖς βρύσες μαζί, τί μέρος τῆς δεξαμενῆς θὰ γεμίσουν σὲ μία ὥρα;

Ἀσκήσεις.

178. Κάνε ἀπὸ μνήμης τὶς παρακάτω προσθέσεις:

α) $\frac{3}{8}+\frac{2}{8}+\frac{1}{8}=$ β) $10\frac{3}{5}+8=$ γ) $4\frac{5}{8}+7\frac{3}{8}=$

δ) $\frac{5}{10}+\frac{3}{10}+\frac{2}{10}=$ ε) $9+6\frac{2}{7}=$

ς) $3\frac{1}{5}+6\frac{2}{5}+7\frac{3}{5}=$

179. Κάνε τὶς παρακάτω προσθέσεις:

α) $\frac{3}{5}+\frac{7}{8}=$ β) $\frac{4}{9}+\frac{3}{8}=$ γ) $\frac{8}{11}+\frac{7}{8}=$

δ) $\frac{5}{6}+\frac{9}{10}=$ ε) $\frac{4}{7}+\frac{3}{4}=$ ς) $\frac{7}{10}+\frac{3}{5}=$

ζ) $\frac{7}{12}+\frac{1}{2}=$ $\frac{4}{15}+\frac{3}{10}=$

180. Ἐπίσης πρόσθεσε:

α) $\frac{1}{4}+\frac{3}{5}+\frac{2}{3}=$ β) $\frac{9}{10}+\frac{3}{5}+\frac{3}{4}=$

γ) $\frac{8}{9}+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}=$ δ) $\frac{3}{4}+\frac{2}{7}+\frac{1}{2}=$

ε) $\frac{1}{20}+\frac{3}{8}+\frac{1}{4}=$ ς) $\frac{7}{8}+\frac{4}{5}+\frac{3}{4}=$

181. Ἐπίσης πρόσθεσε:

α) $\frac{1}{8} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} =$ β) $\frac{4}{5} + \frac{3}{10} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} =$

γ) $\frac{5}{12} + \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{5}{6} =$ δ) $\frac{3}{4} + \frac{7}{10} + \frac{3}{5} + \frac{1}{4} =$

182. Πρόσθεσε τοὺς μικτοὺς ἀριθμούς:

α) $4\frac{3}{5} + 2\frac{1}{2} + 8\frac{2}{3} =$ β) $9\frac{1}{8} + 10\frac{1}{4} + 12\frac{3}{18} =$

γ) $5\frac{4}{5} + 7\frac{3}{10} + 6\frac{7}{15} =$ δ) $8\frac{3}{4} + 5\frac{7}{8} + 9\frac{1}{10} =$

183. Ἐπίσης πρόσθεσε:

α) $8\frac{3}{5} + \frac{7}{8} + 4\frac{5}{12} =$ β) $15\frac{4}{15} + 3\frac{7}{20} + \frac{4}{5} =$

γ) $3\frac{6}{7} + 1\frac{3}{8} + 5\frac{3}{4} + 23 =$ δ) $9\frac{3}{5} + \frac{5}{8} + \frac{1}{2} =$

Προβλήματα.

184. Ἕνας παντοπώλης εἶχε ἕνα δοχεῖο βούτυρο καὶ ἀπὸ αὐτὸ πούλησε τὴ μία ἡμέρα $3\frac{5}{8}$ ὀκάδες καὶ τὴν ἄλλη ἡμέρα $2\frac{4}{5}$ ὀκάδες περισσότερο ἀπὸ τὴν πρώτη ἡμέρα. Τοῦ ἔμειναν ἀκόμη μέσα στὸ δοχεῖο $2\frac{1}{2}$ ὀκάδες. Πόσες ὀκάδες βούτυρο πούλησε τὴ δεύτερη ἡμέρα καὶ πόσο εἶχε ἀπὸ τὴν ἀρχή;

185. Μία νοικοκυρὰ τὸ Σάββατο ἔκανε τὰ ἑξῆς ψώνια: $1\frac{2}{5}$ ὀκ. κρέας, $2\frac{7}{8}$ ὀκ. πατάτες, $\frac{3}{4}$ τῆς ὀκᾶς λάδι, $\frac{1}{8}$ ὀκ. βούτυρο καὶ 3 ὀκάδες διάφορα ἄλλα ψώνια. Πόσες ὀκάδες τρόφιμα ἀγόρασε ἐκείνη τὴν ἡμέρα;

186. Ἕνα ἀτμόπλοιο ἀπέπλευσε ἀπὸ τὸν Πειραιᾶ στὶς $2\frac{1}{4}$ καὶ ὕστερα ἀπὸ $9\frac{2}{5}$ ὧρες ἔφθασε στὸ Βόλο. Ποία ὥρα ἔφθασε;

187. Ἕνα βαρέλι περιέχει $78\frac{3}{4}$ ὀκάδες ἐλιὲς καὶ $7\frac{1}{2}$ ὀκάδες σαλαμούρα. Τὸ βαρέλι ζυγίζει ἄδειο $7\frac{3}{5}$. Πόσο εἶναι τὸ μικτὸ βάρος του;

188. Μία μητέρα ἀγόρασε ὕφασμα γιὰ νὰ κάνη φορέματα στὶς τρεῖς κόρες της. Γιὰ τὴ μία ἀγόρασε $5\frac{3}{8}$ πῆχες, γιὰ τὴν ἄλλη $4\frac{1}{2}$ πῆχες καὶ γιὰ τὴν τρίτη $3\frac{2}{5}$ πῆχες. Πόσες πῆχες ἀγόρασε;

Ἀφαίρεσις.

1ον) Ἀφαίρεσις ὁμωνύμων κλασμάτων.

Πρόβλημα : Τὸ μάθημα διαρκεῖ $\frac{5}{6}$ τῆς ὥρας. Ὁ διδάσκαλος ἐξετάζει τὰ παιδιὰ ἐπὶ $\frac{2}{6}$ τῆς ὥρας καὶ τὴν ὑπόλοιπη ὥρα παραδίδει τὸ νέο μάθημα. Πόση ὥρα διαρκεῖ ἡ παράδοσις;

Λύσις : $\frac{5}{6} - \frac{2}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ τῆς ὥρας.

Ἄλλο παράδειγμα : $\frac{9}{16} - \frac{5}{16} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$.

2ον) Ἀφαίρεαις ἑτερωνύμων κλασμάτων.

Πρόβλημα : Ἕνα μπουκάλι ἔχει μέσα $\frac{4}{5}$ τῆς ὀκᾶς λάδι. Ἀπὸ αὐτὸ ρίξαμε στὸ φαγητὸ $\frac{1}{8}$ τῆς ὀκᾶς. Πόσο λάδι ἔμεινε;

Λύσις : $\frac{4}{5} - \frac{1}{8} = \frac{32}{40} - \frac{5}{40} = \frac{27}{40}$ τῆς ὀκᾶς.

Ἄλλο παράδειγμα : $\frac{3}{4} - \frac{2}{5} = \frac{15}{20} - \frac{8}{20} = \frac{7}{20}$.

Ἀσκήσεις.

189. Πῶς ἀφαιροῦμε ὁμώνυμα κλάσματα; (νὰ βρῆς τὸν κανόνα καὶ νὰ τὸν γράψης στὸ τετράδιό σου).

190. Πῶς ἀφαιροῦμε ἑτερώνυμα κλάσματα; (νὰ βρῆς τὸν κανόνα καὶ νὰ τὸν γράψης στὸ τετράδιό σου).

191. Κάνε ἀπὸ μνήμης τὶς παρακάτω ἀφαιρέσεις:

α) $\frac{4}{5} - \frac{2}{5} =$ β) $7\frac{5}{8} - \frac{3}{8} =$ γ) $8\frac{1}{4} - 5 =$

δ) $\frac{6}{7} - \frac{3}{7} =$ ε) $9\frac{4}{5} - 2\frac{1}{5} =$ ς) $6 - \frac{1}{4} =$

192. Κάνε τὶς παρακάτω ἀφαιρέσεις :

α) $\frac{9}{10} - \frac{7}{10} =$ β) $\frac{8}{15} - \frac{3}{15} =$ γ) $\frac{17}{20} - \frac{9}{20} =$

193. Ἐπίσης κάνε τὶς ἀφαιρέσεις :

α) $\frac{3}{4} - \frac{7}{15} =$ β) $\frac{1}{2} - \frac{3}{8} =$ γ) $\frac{1}{2} - \frac{9}{20} =$

δ) $\frac{9}{10} - \frac{3}{5} =$ ε) $\frac{3}{11} - \frac{1}{5} =$ ς) $\frac{7}{8} - \frac{3}{4} =$

3ον) Ἀφαίρεσις μικτῶν ἀριθμῶν.

Πρόβλημα 1ον : Μία νοικοκυρὰ εἶχε $6\frac{4}{5}$ ὀκάδες ζάχαρη καὶ ἀπὸ αὐτὴν ἐχάλασε $2\frac{3}{8}$ ὀκάδες γιὰ νὰ κάνῃ ἕνα γλυκό. Πόση ζάχαρη τῆς ἔμεινε ;

Λύσις. α΄ τρόπος : $6\frac{\overbrace{4}^{8}}{5} - 2\frac{\overbrace{3}^{5}}{8} = 6\frac{32}{40} - 2\frac{15}{40} = 4\frac{17}{40}$.

β΄ τρόπος : Τρέπομε τοὺς μικτοὺς σὲ κλάσματα :

$6\frac{4}{5} - 2\frac{3}{8} = \frac{\overbrace{34}^{8}}{5} - \frac{\overbrace{19}^{5}}{8} = \frac{272}{40} - \frac{95}{40} = \frac{177}{40} = 4\frac{17}{40}$ ὀκάδες.

Ἄλλο παράδειγμα : $7\frac{\overbrace{5}^{1}}{12} - 2\frac{\overbrace{1}^{3}}{4} = 7\frac{5}{12} - 2\frac{3}{12} = 5\frac{2}{12} = 5\frac{1}{6}$.

ἢ $7\frac{5}{12} - 2\frac{1}{4} = \frac{\overbrace{89}^{1}}{12} - \frac{\overbrace{9}^{3}}{4} = \frac{89}{12} - \frac{27}{12} = \frac{62}{12} = 5\frac{2}{12} = 5\frac{1}{6}$.

Ὥστε :

Γιὰ νὰ ἀφαιρέσωμε μικτὸν ἀριθμὸν ἀπὸ μικτόν, ἀφαιροῦμε χωριστὰ τοὺς ἀκεραίους καὶ χωριστὰ τὰ κλάσματα καὶ ἑνώνομε τὰ μερικὰ ἐξαγόμενα, ἢ τρέπομε τοὺς μικτοὺς σὲ κλάσματα καὶ ἔπειτα ἀφαιροῦμε.

Πρόβλημα 2ον : Μία νοικοκυρὰ εἶχε $9\frac{1}{2}$ πῆχες ὕφασμα καὶ ἀπὸ αὐτὸ ἔκοψε $5\frac{7}{8}$ πῆχες γιὰ νὰ κάνη ἕνα φόρεμα. Πόσες πῆχες τῆς ἔμειναν ;

Λύσις : Τρέπομε πρῶτα τὰ κλάσματα τῶν μικτῶν εἰς ὁμώνυμα, ἔτσι ἔχομε :

$$9\overbrace{\frac{1}{2}}^{4} - 5\overbrace{\frac{7}{8}}^{1} = 9\frac{4}{8} - 5\frac{7}{8}.$$

Ἐπειδὴ τὸ κλάσμα $\frac{7}{8}$ δὲν ἀφαιρεῖται ἀπὸ τὸ κλάσμα $\frac{4}{8}$, γι'αὐτὸ παίρνομε ἀπὸ τὸν ἀκέραιο 9 μία μονάδα καὶ τὴν τρέπομε σὲ κλάσμα ὁμώνυμο (δηλ. $\frac{8}{8}$). Ἔπειτα προσθέτομε τὸ $\frac{8}{8}$ εἰς τὸ κλάσμα $\frac{4}{8}$ καὶ βρίσκομε $\frac{12}{8}$.

Ἔτσι ἔχομε νὰ ἀφαιρέσωμε : $8\frac{12}{8} - 5\frac{7}{8} = 3\frac{5}{8}$ πῆχες.

Ἄλλο παράδειγμα : $10\frac{1}{5} - 3\frac{3}{4} = 10\frac{4}{20} - 3\frac{15}{20} = 9\frac{24}{20} - 3\frac{15}{20} = 6\frac{9}{20}$.

Ὥστε :

> ***Ἂν τὰ κλάσματα τῶν μικτῶν δὲν ἀφαιροῦνται, παίρνομε μία ἀκεραία μονάδα ἀπὸ τὸν ἀκέραιο τοῦ πρώτου μικτοῦ, τὴν τρέπομε σὲ ὁμώνυμο κλάσμα καὶ τὴν προσθέτομε στὸ κλάσμα του. Ἔπειτα ἀφαιροῦμε χωριστὰ τὰ κλάσματα καὶ χωριστὰ τοὺς ἀκεραίους.***

Πρόβλημα 3ον : Ἀπὸ ἕνα δοχεῖο ποὺ ἔχει 14 ὀκάδες λάδι βγάζομε $4\frac{5}{8}$ ὀκάδες. Πόσες ὀκάδες λάδι μένουν μέσα στὸ δοχεῖο ;

Λύσις : $14 - 4\frac{5}{8} = 13\frac{8}{8} - 4\frac{5}{8} = 9\frac{3}{8}$ ὀκάδες.

Ἄλλο παράδειγμα : (ἀφαιρέσεως κλάσματος ἀπὸ ἀκέραιον).

$$8 - \frac{3}{4} = 7\frac{4}{4} - \frac{3}{4} = 7\frac{1}{4}.$$

Ὥστε:

Γιὰ νὰ ἀφαιρέσωμε μικτὸν ἢ κλάσμα ἀπὸ ἀκέραιον, παίρνομε μία μονάδα ἀπὸ τὸν ἀκέραιο τοῦ μειωτέου, τὴν τρέπομε σὲ κλάσμα ὁμώνυμον μὲ τὸ κλάσμα τοῦ ἀφαιρετέου καὶ ἔπειτα ἀφαιροῦμεν.

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

194 $8\frac{3}{5} - 5 = 3\frac{3}{5}$.

Πῶς ἀφαιροῦμε ἀκέραιον ἀπὸ μικτόν; (νὰ βρῇς τὸν κανόνα καὶ νὰ τὸν γράψῃς στὸ τετράδιό σου).

195. $7\frac{4}{5} - \frac{2}{3} = 7\frac{12}{15} - \frac{10}{15} = 7\frac{2}{15}$.

Πῶς ἀφαιροῦμε κλάσμα ἀπὸ μικτόν; (νὰ βρῇς τὸν κανόνα καὶ νὰ τὸν γράψῃς στὸ τετράδιό σου).

196. $9\frac{1}{4} - \frac{4}{5} = 9\frac{5}{20} - \frac{16}{20} = 8\frac{25}{20} - \frac{16}{20} = 8\frac{9}{20}$.

Πῶς ἀφαιροῦμε κλάσμα ἀπὸ μικτόν, ὅταν τὰ κλάσματα δὲν ἀφαιροῦνται; (νὰ βρῇς τὸν κανόνα καὶ νὰ τὸν γράψῃς στὸ τετράδιό σου).

197. Τί μένει ἀπὸ μία ὀκᾶ λαδιοῦ, ἂν ἐξοδεύσωμε τὰ $\frac{3}{5}$ τῆς ὀκᾶς;

198. Τί μένει ἀπὸ $\frac{1}{2}$ τῆς ὀκᾶς βουτύρου, ἂν ἐξοδεύσωμε τὸ $\frac{1}{4}$ τῆς ὀκᾶς;

199. Ἕνας ἔμπορος εἶχε $68\frac{1}{2}$ πῆχες ἀπὸ ἕνα ὕφασμα καὶ ἐπούλησε $17\frac{3}{8}$ πῆχες. Πόσο ὕφασμα τοῦ ἔμεινε;

200. Ἕνα καλάθι σῦκα ζυγίζει $7\frac{1}{2}$ ὀκάδες καὶ ἄδειο ζυγίζει $\frac{4}{5}$ τῆς ὀκᾶς. Πόσες ὀκάδες σῦκα περιέχει;

201. Μία κόρη ἔπλεξε $9\frac{3}{8}$ πῆχες δαντέλλα καὶ μία ἄλλη ἔπλεξε $14\frac{1}{2}$ πῆχες. Πόσο ἔπλεξε περισσότερο ἡ δεύτερη;

202. Ἕνας παντοπώλης εἶχε $54\frac{2}{5}$ ὀκάδες ζάχαρηκαὶ πούλησε $27\frac{7}{8}$ ὀκάδες. Πόση ζάχαρη τοῦ ἔμεινε;

Ἀσκήσεις.

203. Κάνε τὶς παρακάτω ἀφαιρέσεις:

α) $9\frac{3}{8} - 6\frac{1}{3} =$ β) $14\frac{1}{2} - 3\frac{2}{7} =$

γ) $10\frac{3}{10} - 4\frac{1}{2} =$ δ) $8\frac{3}{10} - 3\frac{1}{5} =$

ε) $25\frac{3}{4} - 12\frac{7}{16} =$ στ) $15\frac{7}{8} - 9\frac{1}{2} =$

204. Ἐπίσης κάνε τὶς ἀφαιρέσεις:

α) $8\frac{1}{3} - 2\frac{3}{5} =$ β) $7\frac{1}{8} - 2\frac{1}{2} =$

γ) $10\frac{3}{10} - 4\frac{4}{5} =$ δ) $4\frac{3}{8} - 2\frac{4}{7} =$

ε) $9\frac{2}{5} - 3\frac{7}{10} =$ στ) $18\frac{1}{3} - 7\frac{5}{9} =$

205 Ἐπίσης κάνε τὶς ἀφαιρέσεις:

α) $8\frac{3}{4} - \frac{2}{5} =$ β) $24\frac{1}{3} - 12 =$

γ) $8 - \frac{3}{5} =$ δ) $9\frac{5}{8} - \frac{3}{4} =$

ε) $7\frac{8}{11} - 4 =$ στ) $10 - 3\frac{4}{5} =$

206. Ἐπίσης κάνε τὶς πράξεις:

α) $\left(\frac{3}{8} + \frac{2}{5} + \frac{1}{2}\right) - \frac{7}{20} =$ β) $\frac{4}{5} - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{15}\right) =$

207. Ἐπίσης:

α) $\left(\frac{7}{8} - \frac{1}{4}\right) + \frac{3}{5} + \frac{3}{8} =$ β) $\left(3\frac{1}{2} + 7\frac{1}{4}\right) - 8\frac{1}{3} =$

208. Ἐπίσης:

c $\left(9\frac{4}{5} - 2\frac{1}{2}\right) - \frac{3}{4} =$ β) $6\frac{3}{4} - \left(2\frac{1}{3} + \frac{5}{8}\right) =$

Προβλήματα

Προσθέσεως καὶ Ἀφαιρέσεως.

209. Ἕνα κουτὶ κονσέρβα κρέατος ζυγίζει $\frac{4}{5}$ τῆς ὀκᾶς. Τὸ κουτὶ ἄδειο ζυγίζει $\frac{1}{8}$ τῆς ὀκᾶς. Πόσο καθαρὸ βάρος κρέατος περιέχει;

210. Μία κόρη εἶχε $\frac{7}{8}$ τοῦ πήχεως δαντέλλα καὶ ἀπὸ αὐτὴν ἔβαλε σὲ ἕνα φόρεμα $\frac{1}{2}$ τοῦ πήχεως. Πόση δαντέλλα τῆς ἔμεινε;

211. Ἕνα μπουκάλι χωρεῖ $\frac{3}{4}$ τῆς ὀκᾶς λάδι καὶ ἕνα ἄλλο μπουκάλι $\frac{7}{8}$ τῆς ὀκᾶς. Ποῖο ἀπὸ τὰ δύο μπουκάλια χωρεῖ περισσότερο λάδι καὶ πόσο περισσότερο;

212. Μία βρύση γεμίζει σὲ μία ὥρα τὰ $\frac{7}{8}$ μιᾶς δεξαμενῆς Μία ἄλλη βρύση ποὺ βρίσκεται στὸ κάτω μέρος τῆς δεξαμενῆς ἀδειάζει σὲ μιὰ ὥρα τὸ $\frac{1}{5}$ αὐτῆς. Πόσο μέρος τῆς δεξαμενῆς θὰ γεμίση, ἂν ἀφήσωσε καὶ τὶς δύο βρύσες ἀνοικτὲς μία ὥρα;

213. Ὁ Σιδηρόδρομος ξεκινᾶ ἀπὸ τὴν Ἀθήνα τὸ βράδυ στὶς $8\frac{1}{4}$ καὶ φθάνει στὴ Θεσσαλονίκη στὶς 9 τὸ πρωΐ. Πόσες ὧρες διαρκεῖ τὸ ταξίδι;

214. Ἕνας παντοπώλης ἀγόρασε $78\frac{3}{4}$ όκ. ζάχαρη Ἀπὸ αὐτὴν πούλησε τὴ μία ἑβδομάδα $24\frac{1}{8}$ ὀκάδες, τὴν ἄλλη $38\frac{2}{5}$ ὀκ. καὶ τὶς ὑπόλοιπες ὀκάδες τὶς πούλησε τὴν τρίτη ἑβδομάδα. Πόσες ὀκάδες πούλησε τὴν τρίτη ἑβδομάδα;

215. Τὰ μαθήματα τοῦ Σχολείου ἀρχίζουν τὸ πρωὶ τὶς $8\frac{1}{4}$ καὶ τελειώνουν στὶς 12 ἀκριβῶς. Τὸ ἀπόγευμα ἀρχίζουν στὶ $2\frac{1}{2}$

καὶ τελειώνουν στὶς $4\frac{2}{5}$. Πόσες ὧρες διαρκοῦν;

216. Ἕνα δοχεῖο χωρεῖ $14\frac{3}{10}$ ὀκάδες λάδι καὶ ἄδειο ζυγίζει $\frac{7}{8}$ τῆς ὀκᾶς. Τώρα τὸ δοχεῖο ἔχει μέσα λάδι καὶ ζυγίζει μικτὸ βάρος $8\frac{3}{5}$ ὀκάδες. Πόσο λάδι περιέχει τὸ δοχεῖο καὶ πόσο λάδι θὰ χρειασθῆ ἀκόμη νὰ γεμίσῃ;

217. Ἕνας ἔμπορος εἶχε ἕνα τόπι ὕφασμα $75\frac{3}{8}$ πῆχες. Ἀπὸ αὐτὸ πούλησε τὴ μία ἡμέρα $14\frac{1}{2}$ πῆχες, τὴ δεύτερη ἡμέρα $24\frac{1}{4}$ πῆχες καὶ τὴν τρίτη $21\frac{2}{5}$ πῆχες. Πόσες πῆχες τοῦ ἔμειναν;

218. Ἕνας ἐργάτης ἐργάζεται 8 ὧρες τὴν ἡμέρα. Τὸ πρωῒ ἀρχίζει τὴν ἐργασία του στὶς $7\frac{1}{4}$ καὶ τελειώνει τὴν $11\frac{3}{4}$ π. μ. καὶ τὸ ἀπόγευμα ἀρχίζει τὴν ἐργασία του στὶς $3\frac{1}{5}$. Ποία ὥρα τελειώνει ἡ ἀπογευματινὴ ἐργασία του;

219. Μία ἐργάτρια ὕφανε σὲ μία ἑβδομάδα $80\frac{1}{4}$ πῆχες ὕφασμα, μία ἄλλη ὕφανε $87\frac{3}{5}$ πῆχ. καὶ τρίτη ἐργάτρια ὕφανε $92\frac{7}{8}$ πῆχ. Πόσο ὕφασμα ὕφαναν καὶ οἱ τρεῖς μαζὶ καὶ πόσο ὕφανε περισσότερο ἡ τρίτη ἀπὸ τὴν πρώτη ἐργάτρια;

220. Ἕνας εἶχε $28\frac{3}{8}$ ὀκάδες λάδι. Ἀπὸ αὐτὸ ἐξώδευσε τὸν πρῶτο μῆνα $6\frac{3}{4}$ ὀκάδες καὶ τὸν ἄλλο μῆνα $4\frac{2}{5}$ ὀκάδες λάδι περισσότερο ἀπὸ τὸν πρῶτο μῆνα. Πόσο λάδι ἐξώδεψε τὸ δεύτερο μῆνα καὶ πόσο λάδι τοῦ ἔμεινε;

221. Δύο ἄνθρωποι ἐμοιράσθησαν ἕνα ὕφασμα. Ὁ πρῶτος πῆρε $8\frac{3}{5}$ πῆχες καὶ ὁ δεύτερος $2\frac{3}{8}$ ὀλιγώτερο ἀπὸ τὸν πρῶτο.

Πόσες πῆχες πῆρε ὁ δεύτερος καὶ πόσες πῆχες ἦταν ὅλο τὸ ὕφασμα;

222. Ἕνα ἀτμόπλοιο ἀπέπλευσε ἀπὸ τὸν Πειραιᾶ στὶς $7\frac{3}{4}$ π. μ. καὶ ἔφθασε εἰς τὴ Θεσσαλονίκη στὶς $6\frac{2}{5}$ μ. μ. τῆς ἑπομένης ἡμέρας. Πόσες ὧρες διήρκεσε τὸ ταξίδι;

223. Ἕνας ἐργάτης ἔκτισε τὴν πρώτη ἡμέρα τὰ $\frac{2}{5}$ ἑνὸς τοίχου, τὴ δεύτερη ἡμέρα τὸ $\frac{1}{2}$ τοῦ τοίχου καὶ τὴν τρίτη ἡμέρα ἔκτισε τὸν ὑπόλοιπο τοῖχο. Τί μέρος τοῦ τοίχου ἔκτισε τὴν τρίτη ἡμέρα;

Πολλαπλασιασμὸς

Πολλαπλασιασμὸς κλάσματος ἐπὶ ἀκέραιον.

Πρόβλημα 1ον: Μία κόρη πλέκει σὲ μία ὥρα $\frac{3}{8}$ τοῦ πήχεως δαντέλλα. Πόση δαντέλλα θὰ πλέξῃ σὲ 6 ὧρες;

Λύσις: Ἀφοῦ σὲ μιὰ ὥρα πλέκει $\frac{3}{8}$ τοῦ πήχεως, σὲ 6 ὧρες θὰ πλέξῃ 6 φορὲς τὸ $\frac{3}{8}$ τοῦ πήχεως.

Δηλ. $\frac{3}{8}+\frac{3}{8}+\frac{3}{8}+\frac{3}{8}+\frac{3}{8}+\frac{3}{8}=\frac{3+3+3+3+3+3}{8}=$
$=\frac{3\times6}{8}=\frac{18}{8}=2\frac{2}{8}=2\frac{1}{4}$ πήχ.

Βλέπομε ὅτι πρέπει νὰ ἐπαναλάβωμε 6 φορὲς τὰ $\frac{3}{8}$, θὰ κάνωμε δηλαδὴ πολλαπλασιασμό:

$$\frac{3}{8}\times6=\frac{3\times6}{8}=\frac{18}{8}=2\frac{2}{8}=2\frac{1}{4}\text{ πῆχες.}$$

Ἄλλο παράδειγμα: $\frac{3}{4}\times7=\frac{21}{4}=5\frac{1}{4}$.

Ὥστε:

Γιὰ νὰ πολλαπλασιάσωμε κλάσμα ἐπὶ ἀκέραιον πολλαπλασιάζομε τὸν ἀριθμητὴ τοῦ κλάσματος ἐπὶ τὸν ἀκέραιο, παρονομαστὴ δὲ ἀφήνομε τὸν ἴδιο.

Σημ. 1η: Ἂν κάνωμε τοὺς πολλαπλασιασμούς:

$\frac{3}{5}\times 5=\frac{15}{5}=3,\quad \frac{3}{4}\times 4=\frac{12}{4}=4,\quad \frac{2}{3}\times 3=3$ κ. λ. π.

βλέπομε ὅτι, ἂν πολλαπλασιάσωμε ἕνα κλάσμα ἐπὶ τὸν παρονομαστή του, βρίσκομε γινόμενο τὸν ἀριθμητή του.

Σημ. 2α: Ὅταν ἔχωμε νὰ πολλαπλασιάσωμε μία κλασματικὴ μονάδα ἐπὶ ἕνα ἀκέραιον, π. χ. $\frac{1}{4}\times 28=\frac{28}{4}=7$, τότε ὁ πολλαπλασιασμὸς καταντᾶ διαίρεσις τοῦ ἀκεραίου διὰ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ κλάσματος.

Πολλαπλασιασμὸς ἀκεραίου ἐπὶ κλάσμα.

Πρόβλημα 1ον: Ἡ ὀκᾶ τὸ κρέας στοιχίζει 24 δραχμές. Πόσο στοιχίζουν τὰ $\frac{3}{8}$ τῆς ὀκᾶς;

Λύσις: Ξαίρομε τὴν ἀξία τῆς μιᾶς μονάδος (τῆς ὀκᾶς) καὶ ζητοῦμε τὴν ἀξία μέρους τῆς μονάδος (τῶν $\frac{3}{8}$ τῆς ὀκᾶς). Τὸ πρόβλημα αὐτὸ μποροῦμε νὰ τὸ λύσωμε, ἀφοῦ σκεφθοῦμε ὡς ἑξῆς:

Ἡ 1 ὀκ. ἢ τὰ $\frac{8}{8}$ τῆς ὀκᾶς στοιχίζουν 24 δραχμέ[ς]

τὸ $\frac{1}{8}$ τῆς ὀκᾶς ἀξίζει 8 φορὲς λιγώτερο, Δηλ $\frac{24}{8}$ δρχ.

καὶ τὰ $\frac{3}{8}$ τῆς ὀκᾶς ἀξίζουν 3 φορὲς περισσότερο ἀπὸ ὅ,τι ἀξίζει τὸ $\frac{1}{8}$ τῆς ὀκᾶς. Δηλ.

ἀξίζουν $\frac{24}{8}+\frac{24}{8}+\frac{24}{8}=$

$=\frac{24}{8}\times 3=\frac{24\times 3}{8}=9$ δρχ.

Ἄλλο παράδειγμα: Μία βενζινομηχανὴ καίει σὲ 1 ὥρα 2 ὀκάδες βενζίνη. Πόση βενζίνη θὰ κάψη σὲ $\frac{3}{4}$ τῆς ὥρας;

Λύσις: Ὁμοίως σκεπτόμενοι βρίσκομε ὅτι σὲ $\frac{1}{4}$ τῆς ὥρας θὰ κάψη $\frac{2}{4}$ ὀκ. βενζίνη καὶ σὲ $\frac{3}{4}$ τῆς ὥρας: $\frac{2}{4}+\frac{2}{4}+\frac{2}{4}=\frac{2}{4}\times 3=$

$=\frac{2\times 3}{4}=\frac{6}{4}=1\frac{1}{2}$ ὀκάδ.

Ὁμοίως εἶναι:

$$9 \times \frac{4}{5} = \frac{9}{5} + \frac{9}{5} + \frac{9}{5} + \frac{9}{5} = \frac{9+9+9+9}{5} = \frac{9 \times 4}{5} = \frac{36}{5} = 7\frac{1}{5}.$$

Ἀπὸ τὴ λύσι τῶν παραπάνω προβλημάτων βλέπομεν ὅτι:

> ***Γιὰ νὰ πολλαπλασιάσωμε ἀκέραιο ἐπὶ κλάσμα, πολλαπλασιάζομε τὸν ἀκέραιο ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴ τοῦ κλάσματος, παρονομαστὴ δὲ ἀφήνομε τὸν ἴδιο.***

Ἐπίσης βλέπομε ὅτι εἰς τὰ προβλήματα αὐτὰ μᾶς δίδεται ἡ ἀξία τῆς μιᾶς μονάδος (τῆς ὀκᾶς) καὶ μᾶς ζητεῖται ἡ ἀξία μέρους τῆς μονάδος (τῶν $\frac{3}{8}$ ὀκ., τῶν $\frac{3}{4}$ τῆς ὀκᾶς).

Ὥστε:

> ***Ὅταν ξαίρωμε τὴν ἀξία τῆς μιᾶς μονάδος καὶ ζητοῦμε τὴν ἀξία μέρους τῆς μονάδος, κάνομε πολλαπλασιασμό.***

Πολλαπλασιασμὸς μικτοῦ ἐπὶ ἀκέραιον.

Πρόβλημα: Γιὰ κάθε πουκάμισο χρειάζονται $4\frac{7}{8}$ πῆχες ὕφασμα. Πόσες πῆχες ὕφασμα θὰ χρειασθοῦν γιὰ νὰ κάνωμε 3 πουκάμισα;

Λύσις: Ἀφοῦ γιὰ ἕνα πουκάμισο θέλομε $4\frac{7}{8}$ πῆχες, γιὰ 3 πουκάμισα θὰ χρειασθοῦμε 3 φορὲς τοὺς $4\frac{7}{8}$ πῆχες.

$$4\frac{7}{8} + 4\frac{7}{8} + 4\frac{7}{8} = 12\frac{21}{8} = 12 + 2\frac{5}{8} = 14\frac{5}{8} \text{ πῆχες.}$$

Βλέπομε ὅτι πρέπει νὰ ἐπαναλάβωμε 3 φορὲς τοὺς $4\frac{7}{8}$ πῆχες, δηλαδὴ θὰ κάνωμε πολλαπλασιασμό.

Ὥστε:

> ***Γιὰ νὰ πολλαπλασιάσωμε μικτὸ ἐπὶ ἀκέραιον, πολλαπλασιάζομε χωριστὰ τὸν ἀκέραιο καὶ χωριστὰ τὸ κλάσμα τοῦ μικτοῦ ἐπὶ τὸν ἀκέραιο καὶ ἔπειτα προσθέτομε τὰ δύο γινόμενα.***

Μποροῦμε νὰ κάνωμε τὸν πολλαπλασιασμὸ καὶ μὲ ἄλλο τρόπο ὡς ἑξῆς:

$$4\frac{7}{8} \times 3 = \frac{39}{8} \times 3 = \frac{39 \times 3}{8} = \frac{117}{8} = 14\frac{5}{8} \text{ πῆχες.}$$

τρέπομε, δηλαδή, τὸ μικτὸ σὲ κλάσμα καὶ ἔπειτα πολλαπλασιάζομε ὅπως ξαίρομε.

Ἄλλο παράδειγμα : $5\frac{3}{4} \times 7 =$

1ος τρόπος : $5\frac{3}{4} \times 7 = 5 \times 7 + \frac{3 \times 7}{4} = 35 + \frac{21}{4} = 35 + 5\frac{1}{4} =$
$= 40\frac{1}{4}$.

2ος τρόπος : $5\frac{3}{4} \times 7 = \frac{23}{4} \times 7 = \frac{23 \times 7}{4} = \frac{161}{4} = 40\frac{1}{4}$.

Σημείωσις : Ὅταν ὁ ἀκέραιος τοῦ μικτοῦ ἢ ὁ ἄλλος ἀκέραιος εἶναι ἀριθμοὶ μεγάλοι, π. χ. $158\frac{3}{5} \times 14 =$, μεταχειριζόμαστε γιὰ εὐκολία μας τὸν πρῶτο τρόπο· δηλ. πολλαπλασιάζομε χωριστὰ τὸν ἀκέραιο καὶ χωριστὰ τὸ κλάσμα τοῦ μικτοῦ ἐπὶ τὸν ἀκέραιον.

Πολλαπλασιασμός ἀκεραίου ἐπὶ μικτόν

Πρόβλημα : Ἡ ὀκᾶ ὁ καφὲς ἀξίζει 64 δραχμές. Πόσο ἀξίζουν $2\frac{3}{4}$ ὀκάδες;

Λύσις : Ἡ μία ὀκᾶ στοιχίζει 64 δραχμές, οἱ $2\frac{3}{4}$ ὀκάδ. θὰ στοιχίζουν $2\frac{3}{4}$ φορὲς περισσότερες δραχμές. Θὰ κάνωμε δηλ. πολλαπλασιασμὸ ἀκεραίου ἐπὶ τὸν μικτόν·

1ος τρόπος : $64 \times 2\frac{3}{4} = 64 \times 2 + 64 \times \frac{3}{4} = 128 + \frac{64 \times 3}{4} =$

$$= 128 + \frac{192}{4} = 128 + 48 = 176 \text{ δραχμές.}$$

2ος τρόπος : $64 \times 2\frac{3}{4} = 64 \times \frac{11}{4} = \frac{704}{4} = 176$ δραχμές.

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

224. Πῶς πολλαπλασιάζομεν ἀκέραιον ἐπὶ μικτόν ;
(Γράψε στὸ τετράδιό σου τὸν κανόνα καὶ μὲ τοὺς δύο τρόπους).

225. Πῶς πολλαπλασιάζομεν μικτὸν ἐπὶ ἀκέραιον ;
(Γράψε στὸ τετράδιό σου τὸν κανόνα καὶ μὲ τοὺς δύο τρόπους).

226. Ἕνας εἶχε 7 δοχεῖα λάδι. Κάθε δοχεῖο χωρεῖ $14\frac{5}{8}$ ὀκάδες. Πόσο λάδι περιέχουν ὅλα τὰ δοχεῖα ;

227. Μία οἰκογένεια ἐξοδεύει $\frac{3}{4}$ τῆς ὀκᾶς γάλα τὴν ἡμέρα. Πόσο γάλα ἐξοδεύει τὸ μῆνα ;

228. Γιὰ κάθε πουκάμισο χρειάζεται $5\frac{3}{8}$ πῆχες. Πόσοι πῆχες χρειάζονται γιὰ νὰ γίνουν 12 πουκάμισα ;

229. Ἀπὸ μία βρύση χύνεται κάθε ὥρα 640 ὀκάδες νερό. Πόσο νερὸ θὰ χυθῇ σὲ $\frac{3}{5}$ τῆς ὥρας καὶ πόσο σὲ $7\frac{1}{2}$ ὧρες ;

230. Μία οἰκογένεια ἐξοδεύει $2\frac{3}{16}$ ὀκάδες λάδι τὴν ἑβδομάδα. Πόσο λάδι ἐξοδεύει τὸ ἔτος (52 ἑβδομάδες) ;

231. Μία πετρελαιομηχανὴ καίει τὴν ὥρα $1\frac{3}{5}$ ὀκάδες πετρέλαιο. Πόσο πετρέλαιο χρειάζεται σὲ 7 ὧρες ;

Ἀσκήσεις.

232. Κάνε ἀπὸ μνήμης τοὺς πολλαπλασιασμούς :

α) $16 \times \frac{1}{2}$, $30 \times \frac{1}{3}$, $45 \times \frac{1}{9}$.

β) $100 \times \frac{1}{4}$, $80 \times \frac{1}{5}$, $300 \times \frac{1}{10}$.

233. Ἐπίσης κάνε ἀπὸ μνήμης τοὺς πολλαπλασιασμούς :

α) $\frac{1}{5} \times \frac{1}{2} =$ β) $\frac{2}{5} \times 5 =$ γ) $6 \times \frac{5}{6} =$

$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} =$ $\frac{7}{8} \times 8 =$ $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} =$

234. Κάνε τοὺς πολλαπλασιασμούς :

α) $\frac{4}{5} \times 8 =$ β) $\frac{7}{8} \times 32 =$ γ) $15 \times \frac{4}{5} =$

$\frac{2}{5} \times 14 =$ $\frac{9}{10} \times 30 =$ $22 \times \frac{5}{6} =$

235. Ἐπίσης τοὺς πολλαπλασιασμούς :

α) $3\frac{1}{2} \times 8 =$ β) $9 \times 4\frac{3}{8} =$ γ) $5\frac{4}{11} \times 10 =$

δ) $7\frac{3}{5} \times 4 =$ ε) $12 \times 2\frac{1}{7} =$ στ) $12 \times 6\frac{1}{3} =$

236. Ἐπίσης πολλαπλασίασε :

α) $15\frac{3}{8} \times 7 =$ β) $100\frac{1}{4} \times 2 =$ γ) $10 \times 80\frac{3}{4} =$

$25\frac{1}{3} \times 4 =$ $250\frac{2}{5} \times 3 =$ $15 \times 7\frac{3}{16} =$

Προβλήματα

237. Γιὰ ἕνα μαξιλάρι θέλομε $1\frac{3}{8}$ πήχες χασέ. Πόσους πήχες θέλομε γιὰ 5 μαξιλάρια καὶ πόσους γιὰ 2 δωδεκάδες ;

238. Ἕνας παντοπώλης ἀγόρασε $13\frac{3}{5}$ ὀκάδες βούτυρο πρὸς 47 δραχμὲς τὴν ὀκᾶ. Πόσες δραχμὲς ἐπλήρωσε ;

239. Ὁ τεκτονικὸς πῆχυς εἶναι ἴσος μὲ τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ μέτρου. Πόσα μέτρα εἶναι 28 τεκτονικοὶ πήχες ;

240. Ἕνας παντοπώλης ἔχει τὰ δελτία 185 ἀτόμων. Πόσες ὀκάδες ρύζι πρέπει νὰ παραλάβη γιὰ νὰ μοιράση ἀπὸ $\frac{3}{8}$ τῆς ὀκᾶς σὲ κάθε ἄτομο ;

241. Ὁ ἴδιος παντοπώλης πόσες ὀκάδες μακαρόνια πρέπει νὰ παραλάβη γιὰ νὰ μοιράση $1\frac{1}{4}$ ὀκάδες σὲ κάθε ἄτομο ;

Πολλαπλασιασμὸς κλάσματος ἐπὶ κλάσμα.

Πρόβλημα : Μία ὑφάντρια ὑφαίνει σὲ μιὰ ὥρα $\frac{7}{8}$ τοῦ πήχεως ὕφασμα. Πόσο θὰ ὑφάνη σὲ $\frac{3}{4}$ τῆς ὥρας ;

Λύσις: Στὸ πρόβλημα αὐτὸ ξαίρομε τὴν τιμὴ μιᾶς μονάδος ($\frac{7}{8}$ τοῦ πήχεως σὲ 1 ὥρα), καὶ ζητοῦμε τὴν τιμὴ μέρους τῆς μονάδος (τῶν $\frac{3}{4}$ τῆς ὥρας).

Γιὰ νὰ βροῦμε τὴν τιμὴ τοῦ μέρους τῆς μονάδος, ὅπως μάθαμε, θὰ κάνωμε πολλαπλασιασμό, δηλ. $\frac{7}{8} \times \frac{3}{4} =$

Μένει τώρα νὰ μάθωμε πῶς θὰ κάνωμε τὸν πολλαπλασιασμὸ κλάσματος ἐπὶ κλάσμα, γιὰ νὰ βροῦμε πόσο ὕφασμα θὰ ὑφάνῃ σὲ $\frac{3}{4}$ τῆς ὥρας (δηλ. τὴν ἀξία τῶν $\frac{3}{4}$ τῆς μονάδος).

Ἀλλὰ τοῦτο τὸ βρίσκομε, ὅπως μάθαμε στὸν πολλαπλασιοσμὸ ἀκεραίου ἐπὶ κλάσματος, ὡς ἑξῆς:

Ἀφοῦ σὲ 1 ὥρα ἢ $\frac{4}{4}$ τῆς ὥρας ὑφαίνει $\frac{7}{8}$ τοῦ πήχεως, σὲ $\frac{1}{4}$ τῆς ὥρας, ποὺ εἶναι 4 φορὲς μικρότερο ἀπὸ τὴ μία ὥρα, θὰ ὑφάνῃ 4 φορὲς λιγώτερο ὕφασμα.

Ἀλλὰ γιὰ νὰ κάνωμε τὸ κλάσμα $\frac{7}{8}$ τέσσερες φορὲς μικρότερο, πρέπει, ὅπως ἔχομε μάθει, νὰ πολλαπλασιάσωμε τὸν παρονομαστή του ἐπὶ 4, δηλ. σὲ $\frac{1}{4}$ τῆς ὥρας θὰ ὑφάνῃ $\frac{7}{8 \times 4}$ τοῦ πήχεως.

Καὶ σὲ $\frac{3}{4}$ τῆς ὥρας θὰ ὑφάνῃ $\frac{7}{8 \times 4} + \frac{7}{8 \times 4} + \frac{7}{8 \times 4} = \frac{7 \times 3}{8 \times 4} = \frac{21}{32}$ τοῦ πήχεως.

Ἀπὸ τὴ λύσι τοῦ προβλήματος αὐτοῦ βλέπομε ὅτι:

> ***Γιὰ νὰ πολλαπλασιάσωμε κλάσμα ἐπὶ κλάσμα, πολλαπλασιάζομε ἀριθμητὴ ἐπὶ ἀριθμητὴ καὶ παρονομαστὴ ἐπὶ παρονομαστή, καὶ τὸ μὲν γινόμενον τῶν ἀριθμητῶν γράφομε ἀριθμητή, τὸ δὲ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν παρονομαστή.***

Ἄλλο παράδειγμα: $\frac{3}{5} \times \frac{5}{6} = \frac{3 \times 5}{5 \times 6} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$.

Πολλαπλασιασμός μικτοῦ ἐπί κλάσμα καί μικτοῦ ἐπί μικτόν.

Πρόβλημα 1ον: Μία λάμπα καίει $\frac{2}{5}$ τῆς ὀκᾶς πετρέλαιο τὴν ὥρα. Πόσο πετρέλαιο θὰ κάψη σὲ $7\frac{5}{6}$ ὧρες;

Λύσις: Ἀφοῦ σὲ μιὰ ὥρα καίει $\frac{2}{5}$ τῆς ὀκᾶς, σὲ $7\frac{5}{6}$ ὧρες θὰ κάψη $\frac{2}{5} \times 7\frac{5}{6}$.

Τρέπομε τὸ μικτὸ σὲ κλάσμα καὶ ἔχομε νὰ πολλαπλασιάσωμε κλάσμα ἐπὶ κλάσμα.

$$\frac{2}{5} \times 7\frac{5}{6} = \frac{2}{5} \times \frac{47}{6} = \frac{2 \times 47}{5 \times 6} = \frac{94}{30} = 3\frac{4}{30} = 3\frac{2}{15} \text{ ὀκάδες.}$$

Πρόβλημα 2ον: Μία οἰκογένεια ξοδεύει τὸ μῆνα ἕνα δοχεῖο λάδι, ποὺ χωρεῖ $4\frac{7}{8}$ ὀκάδ. Πόσες ὀκάδες λάδι θὰ ξοδέψη σὲ $5\frac{1}{2}$ μῆνες;

Λύσις: $4\frac{7}{8} \times 5\frac{1}{2} = \frac{39}{8} \times \frac{11}{2} = \frac{39 \times 11}{8 \times 2} = \frac{429}{16} = 26\frac{13}{16}$ ὀκάδες.

Ὅπως βλέπομε, τρέψαμε τοὺς μικτοὺς σὲ κλάσματα καὶ ἔπειτα πολλαπλασιάσαμε.

Προβλήματα πρός ἄσκησιν.

242. Πῶς πολλαπλασιάζομε μικτὸν ἐπὶ κλάσμα;
(Γράψε τὸν κανόνα στὸ τετράδιό σου).

243. Πῶς πολλαπλασιάζομε μικτὸ ἐπὶ μικτό;
(Γράψε τὸν κανόνα στὸ τετράδιό σου).

244. Μια λάμπα καίει τὴν ὥρα $\frac{3}{25}$ τῆς ὀκᾶς πετρέλαιο. Πόσο πετρέλαιο θὰ κάψη σὲ $\frac{3}{4}$ τῆς ὥρας καὶ πόσο σὲ $5\frac{1}{2}$ ὧρες;

245. Μιὰ κόρη πλέκει τὴν ὥρα $\frac{7}{8}$ τοῦ πήχεως δαντέλλα. Πόση δαντέλλα θὰ πλέξη σὲ $7\frac{3}{4}$ ὧρες καὶ πόση σὲ $\frac{2}{3}$ τῆς ὥρας;

246. Ἕνα ἀτμόπλοιον πλέει μὲ ταχύτητα $12\frac{1}{4}$ μίλια τὴν ὥρα. Πόσα μίλια θὰ κάνη σὲ $17\frac{5}{12}$ ὧρες;

247. Μία ὑφάντρια ὑφαίνει τὴν ὥρα $5\frac{3}{5}$ πῆχες. Πόσους πήχεις θὰ ὑφάνῃ σὲ 6 ἡμέρες ὅταν ἐργάζεται $7\frac{2}{5}$ ὥρες κάθε ἡμέρα;

Ἀσκήσεις.

248. Κάνε τὶς παρακάτω πράξεις.

α) $\frac{3}{5} \times \frac{3}{8} =$ β) $\frac{4}{7} \times \frac{8}{9} =$ γ) $\frac{7}{8} \times \frac{3}{7} =$

δ) $\frac{9}{10} \times \frac{5}{8} =$ ε) $\frac{5}{6} \times \frac{1}{4} =$ στ) $\frac{9}{10} \times \frac{1}{5} =$

249. Ἐπίσης κάνε τοὺς πολλαπλασιασμούς:

α) $5\frac{1}{3} \times \frac{4}{7} =$ β) $8\frac{3}{8} \times \frac{3}{7} =$ γ) $7\frac{3}{5} \times \frac{1}{20} =$

δ) $\frac{3}{5} \times 6\frac{1}{2} =$ ε) $\frac{4}{11} \times 1\frac{1}{2} =$ στ) $\frac{10}{11} \times 3\frac{1}{4} =$

250. Ἐπίσης κάνε τοὺς πολλαπλασιασμούς:

α) $3\frac{1}{2} \times 7\frac{4}{5} =$ β) $9\frac{3}{4} \times 10\frac{3}{5} =$ γ) $11\frac{1}{2} \times 4\frac{7}{8} =$

δ) $8\frac{5}{6} \times 3\frac{1}{2} =$ ε) $4\frac{3}{5} \times 2\frac{1}{8} =$ στ) $15\frac{1}{3} \times 4\frac{1}{2} =$

Προβλήματα

251. Ἕνα ἀτμόπλοιο ἀπέπλευσε ἀπὸ τὸν Πειραιᾶ γιὰ τὴ Θεσσαλονίκη στὶς $6\frac{3}{4}$ τὸ πρωῒ μὲ ταχύτητα 12 μίλια τὴν ὥρα. Σὲ ποιὰ ἀπόστασι ἀπὸ τὸ λιμάνι τοῦ Πειραιῶς θὰ βρίσκεται στὶς $4\frac{1}{2}$ τὸ ἀπόγευμα τῆς ἴδιας ἡμέρας;

252. Σὲ μιὰ μαθητικὴ κατασκήνωσι, ποὺ εἶχε 156 μαθητές, ἔγιναν σὲ ἕνα μῆνα 8 συσσίτια κρέατος. Ὁ κάθε μαθητὴς γιὰ κάθε συσσίτιο δικαιοῦται $\frac{1}{5}$ τῆς ὀκᾶς κρέας. Πόσες ὀκάδες κρέας ἐξωδεύτηκε ὅλο τὸ μῆνα;

253. Μία λάμπα καίει 25 δράμια πετρέλαιο τὴν ὥρα. Πόσα δράμια πετρέλαιο θὰ κάψῃ σὲ μιὰ βδομάδα (7 ἡμέρες), ὅταν κάθε βράδυ καίῃ $3\frac{7}{10}$ ὥρες;

254. Μία κόρη πλέκει $\frac{3}{4}$ τοῦ πήχεως δαντέλλα σὲ μιὰ ὥρα. Πόση δαντέλλα θὰ πλέξη σὲ $2\frac{1}{2}$ ὧρες ;

255. Μία βενζινομηχανὴ καίει σὲ κάθε ὥρα $2\frac{3}{5}$ ὀκ. βενζίνη. Πόση βενζίνη θὰ κάψη σὲ $6\frac{1}{2}$ ὧρες ;

256. Τὸ δράμι εἶναι ἴσο μὲ $3\frac{1}{5}$ γραμμάρια. Πόσα γραμμάρια μᾶς κάνουν $312\frac{1}{2}$ δράμια ;

257. Ἕνα σῶμα ποὺ ζυγίζει 280 δράμια καὶ ὅταν βυθισθῆ στὸ νερὸ χάνει τὰ $\frac{3}{10}$ ἀπὸ τὸ βάρος του. Πόσο ζυγίζει ὅταν εἶναι βυθισμένο μέσα στὸ νερὸ καὶ πόσο βάρος χάνει ;

258. Ὁ τετραγωνικὸς τεκτονικὸς πῆχυς εἶναι ἴσος μὲ τὰ $\frac{9}{16}$ τοῦ τετραγωνικοῦ μέτρου. Ἕνα οἰκόπεδο εἶναι 656 τετρ. πῆχες. Πόσα τετραγωνικὰ μέτρα εἶναι τὸ οἰκόπεδο ;

259. Γιὰ κάθε πουλόβερ χρειάζεται $\frac{3}{16}$ τῆς ὀκᾶς νῆμα. Πόσες ὀκάδες νῆμα θὰ χρειασθῆ γιὰ 17 ὅμοια πουλόβερ ;

260. Ἕνα αὐτοκίνητο καίει $\frac{2}{5}$ τοῦ γαλονίου βενζίνα τὴν ὥρα. Τί μέρος τοῦ γαλονίου καίει σὲ $\frac{5}{6}$ τῆς ὥρας ;

261. Ἕνας μῦλος ἀλέθει $23\frac{3}{5}$ ὀκάδες σιτάρι τὴν ὥρα. Πόσες ὀκάδες ἀλέθει σὲ $\frac{3}{4}$ τῆς ὥρας ;

262. Μία πλάκα σαπούνι ζυγίζει $\frac{3}{20}$ τῆς ὀκᾶς. Πόσες ὀκάδες σαπούνι εἶναι 14 κιβώτια, ποὺ τὸ κάθε ἕνα περιέχει 192 πλάκες ;

263. Ἕνας ἔμπορος ἔκανε 15 δωδεκάδες πετσέτες τοῦ φαγητοῦ μὲ $\frac{7}{8}$ τοῦ πήχεως τὴν κάθε μία. Τὸ ὕφασμα τοῦ στοιχίζει 4 δραχμὲς ὁ πῆχυς. α) Πόσες πῆχες ὕφασμα ἐχρειάσθη ; καὶ β) Πόσες δραχμὲς στοιχίζει ἡ κάθε πετσέτα ;

264. Ένας έμπορος χρεωστά σε έναν άλλον 850 δραχμές. Του δίνει γιά νά εξοφλήση $15\frac{5}{8}$ πήχες από ένα ύφασμα πρός 12 δραχμές τόν πήχυ καί $24\frac{3}{4}$ πήχες από άλλο ύφασμα πρός 9 δραχμές τόν πήχυ. Πόσες δραχμές του χρεωστά ακόμη;

265. Σέ ένα ορφανοτροφείο πρόκειται νά κάνουν 96 φορεσιές γιά τά ορφανά. Κάθε φορεσιά χρειάζεται $2\frac{3}{8}$ πήχες ύφασμα πού αξίζει 18 δραχμές ό πήχυς. Πόσες δραχμές στοιχίζουν όλες οί φορεσιές;

Διαίρεσις

Διαίρεσις κλάσματος ή μικτού διά ακεραίου

Πρόβλημα 1ον: Μία οίκογένεια, πού αποτελείται από 5 άτομα, εξοδεύει κάθε πρωί $\frac{3}{4}$ τής οκάς γάλα. Πόσο γάλα πίνει κάθε άτομο;

Λύσις: Αφού τά 5 άτομα πίνουν $\frac{3}{4}$ τής οκάς γάλα, τό ένα θά πίνει 5 φορές λιγώτερο τών $\frac{3}{4}$ τής οκάς. Αλλά γιά νά κάνωμε τό κλάσμα $\frac{3}{4}$ πέντε φορές μικρότερο πρέπει νά διαιρέσωμε αυτό διά τού 5.

Ξαίρομε από τίς ιδιότητες τών κλασμάτων ότι: ***Όταν πολλαπλασιάσωμε τόν παρονομαστή ενός κλάσματος επί ένα αριθμό ή αξία τού κλάσματος διαιρείται διά τού αριθμού αυτού.***

Ώστε: Γιά νά διαιρέσωμε τό κλάσμα $\frac{3}{4}$ διά τού 5 πολλαπλασιάζομε τόν παρονομαστή του.

Δηλ. $\frac{3}{4} : 5 = \frac{3}{4 \times 5} = \frac{3}{20}$ τής οκάς.

Σημείωσις: Τό παραπάνω κλάσμα $\frac{3}{20}$ είναι πραγματικά τό πηλίκο τής διαιρέσεως $\frac{3}{4} : 5$, γιατί άν πολλαπλασιάσωμε αυτό επί τόν διαιρέτην 5, βρίσκομε τόν διαιρετέον $\frac{3}{4}$.

Δηλ. $\frac{3}{20} \times 5 = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$.

Πρόβλημα 2ον: Μία κόρη ἔπλεξε σὲ 3 ἡμέρες $\frac{6}{8}$ τοῦ πήχεως δαντέλλα. Πόση δαντέλλα πλέκει σὲ μία ἡμέρα;

Λύσις: $\frac{6}{8} : 3 = \frac{6}{8 \times 3} = \frac{6}{24} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ τοῦ πήχεως.

Τὴ διαίρεσι αὐτὴ μποροῦμε νὰ τὴν κάνωμε καὶ μὲ ἄλλο τρόπο:

$$\frac{6}{8} : 3 = \frac{6 : 3}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \text{ τοῦ πήχεως.}$$

Διαιροῦμε δηλαδὴ τὸν ἀριθμητὴ τοῦ κλάσματος (ἂν διαιρῆται ἀκριβῶς) διὰ τοῦ ἀκεραίου.

Ὥστε:

Γιὰ νὰ διαιρέσωμε ἕνα κλάσμα διὰ ἀκεραίου, πολλαπλασιάζομε τὸν παρονομαστὴ τοῦ κλάσματος ἐπὶ τὸν ἀκέραιο ἢ διαιροῦμε τὸν ἀριθμητὴ αὐτοῦ (ἂν διαιρῆται) διὰ τοῦ ἀκεραίου.

Πρόβλημα 3ον: Ἕνας οἰκογενειάρχης ἀγόρασε $2\frac{4}{5}$ ὀκάδες λάδι, γιὰ νὰ περάση τὴν ἑβδομάδα. Πόσο λάδι πρέπει νὰ ξοδεύη τὴν ἡμέρα;

Λύσις: Ἀφοῦ σὲ 7 ἡμέρες θὰ ξοδέψη $2\frac{4}{5}$ ὀκάδες, σὲ μία ἡμέρα πρέπει νὰ ξοδεύη 7 φορὲς λιγώτερο, δηλ. $2\frac{4}{5} : 7$.

Τρέπομε τὸ μικτὸ σὲ κλάσμα καὶ ἔπειτα κάνομε τὴ διαίρεσι ὅπως μάθαμε.

$$2\frac{4}{5} : 7 = \frac{14}{5} : 7 = \frac{14 : 7}{5} = \frac{2}{5} \text{ τῆς ὀκᾶς}$$

$$\text{ἢ} \quad 2\frac{4}{5} : 7 = \frac{14}{5} : 7 = \frac{14}{5 \times 7} = \frac{14}{35} = \frac{2}{5}.$$

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

266 Πῶς διαιροῦμε μικτὸν διὰ ἀκεραίου; (Γράψε τὸν κανόνα στὸ τετράδιό σου).

267. Ἕνα παιδὶ πίνει σὲ 15 ἡμέρες $\frac{3}{8}$ τῆς ὀκᾶς μουρουνόλαδο. Πόσο μουρουνόλαδο πίνει τὴν ἡμέρα;

268. Ἕνα πεπόνι, ποὺ ζύγιζε $\frac{7}{8}$ τῆς ὀκᾶς, μοιράσθηκε σὲ 5 παιδιὰ ἐξ ἴσου. Πόσο πῆρε τὸ καθένα;

269. 5 δοχεῖα λάδι ζυγίζουν $72\frac{1}{2}$ ὀκάδες. Πόσο ζυγίζει τὸ κάθε ἕνα;

270. Μία κόρη σὲ 4 ἡμέρες ἔπλεξε $7\frac{1}{2}$ πῆχες δαντέλλα. Πόση δαντέλλα πλέκει τὴν ἡμέρα;

271. Μὲ $48\frac{3}{8}$ πῆχες ὕφασμα κάνομε 9 πουκάμισα. Πόσες χρειάζονται γιὰ κάθε ἕνα πουκάμισο;

272. Κάνε τὶς παρακάτω διαιρέσεις:

α) $\frac{3}{5} : 2 =$ β) $\frac{9}{10} : 3 =$ γ) $\frac{4}{5} : 6 =$

δ) $\frac{5}{8} : 5 =$ ε) $\frac{8}{9} : 4 =$ στ) $\frac{7}{10} : 3 =$

273. Ἐπίσης διαίρεσε:

α) $3\frac{1}{2} : 5 =$ β) $4\frac{3}{8} : 3 =$ γ) $12\frac{4}{5} : 8 =$

δ) $\frac{3}{4} : 6 =$ ε) $17\frac{1}{2} : 5 =$ στ) $16\frac{1}{4} : 3 =$

274. Ἐπίσης κάνε τὶς διαιρέσεις:

α) $17\frac{3}{5} : 8 =$ β) $2\frac{3}{7} : 10 =$ γ) $15\frac{1}{3} : 100 =$

δ) $\frac{9}{16} : 5 =$ ε) $7\frac{1}{3} : 8 =$ στ) $27\frac{1}{2} : 15 =$

Προβλήματα.

275. 50 κουτιὰ κονσέρβες ζυγίζουν $43\frac{3}{4}$ ὀκάδες. Πόσο ζυγίζει τὸ καθένα;

276. Μία οἰκογένεια ἐξώδεψε σὲ ἕνα χρόνο (365 ἡμέρες) $91\frac{1}{4}$ ὀκάδες λάδι. Πόσο ἐξώδευε τὴν ἡμέρα;

277. Μὲ 6 ὀκάδες ἀλεύρι γίνονται $7\frac{1}{2}$ ὀκάδες ψωμί. Πόσο ψωμὶ θὰ γίνῃ μὲ 1 ὀκᾶ ἀλεύρι;

278. Μία λάμπα πετρελαίου καίει 3 ὧρες κάθε βράδυ καὶ σὲ μία ἑβδομάδα (7 ἡμέρες) ἔκαψε $4\frac{1}{5}$ ὀκάδες πετρέλαιο. Πόσο πετρέλαιο καίει τὴν ὥρα ;

279. Μὲ $61\frac{1}{2}$ πῆχες γίνονται 12 πουκάμισα. Πόσους πῆχες χρειάζεται τὸ κάθε πουκάμισο ;

Διαίρεσις ἀκεραίου διὰ κλάσματος.

Πρόβλημα: Μὲ 64 δραχμὲς ἀγοράζομε 4 ὀκάδες ζάχαρη. Πόσο ἀξίζει ἡ ὀκᾶ ;

Λύσις: Ξαίρομε τὴν ἀξία τῶν πολλῶν μονάδων καὶ ζητοῦμε τὴν ἀξία τῆς μιᾶς μονάδος. Ἄρα θὰ κάνωμε διαίρεσι. Θὰ διαιρέσωμε τὶς 64 δραχμὲς (δηλ. τὴν ἀξία τῶν πολλῶν μονάδων) διὰ τοῦ 4, ποὺ μᾶς φανερώνει τὶς μονάδες.

Δηλ. $64 : 4 = 16$ δραχμές.

Ἂν τὸ πρόβλημα ἦταν ἔτσι :

Πρόβλημα: Μὲ 12 δραχμὲς ἀγοράζομε $\frac{3}{4}$ τῆς ὀκᾶς ζάχαρη. Πόσο ἀξίζει ἡ ὀκᾶ : Πάλι θὰ διαιρέσωμε τὴν ἀξία τῶν πολλῶν κλασματικῶν μονάδων (δηλ. τὶς 12 δραχμὲς) διὰ τοῦ $\frac{3}{4}$, ποὺ μᾶς φανενερώνει τὶς κλασματικὲς μονάδες, δηλ. $12 : \frac{3}{4}$.

Ὥστε :

> ***Ὅταν ξαίρωμε τὴν ἀξία μέρους (κλάσματος) τῆς ἀκεραίας μονάδος καὶ ζητοῦμε τὴν ἀξία τῆς μιᾶς ἀκεραίας μονάδος, κάνομε διαίρεσι.***
>
> ***Διαιρετέος εἶναι πάντοτε ἡ ἀξία τοῦ μέρους τῆς ἀκεραίας μονάδος.***

Μποροῦμε νὰ βροῦμε μὲ ἄλλο τρόπο (διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα), τὴν ἀξία τῆς ὀκᾶς, ἂν σκεφθοῦμε ὡς ἑξῆς :

Τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς ὀκᾶς ἀξίζουν	12 δραχ.
Τὸ $\frac{1}{4}$ τῆς ὀκᾶς ἀξίζει 3 φορὲς λιγώτερο δηλ.	$\frac{12}{3}$ »

Τὰ $\frac{4}{4}$ τῆς ὀκᾶς (ἢ 1 ὀκᾶ) ἀξίζουν 4 φορὲς περισσότερο δηλ. $\frac{12}{3} \times 4$

$$\text{ἢ } 12 \times \frac{4}{3} = \frac{48}{3} = 16 \text{ δραχμές.}$$

Ὁ τρόπος αὐτὸς τῆς λύσεως λέγεται ***μέθοδος διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα.***

Βλέπομε λοιπὸν ὅτι ἀντὶ νὰ κάνωμε τὴ διαίρεσι $12 : \frac{3}{4}$, κάνομε τὸν πολλαπλασιασμὸ $12 \times \frac{4}{3} = \frac{48}{3} = 16$ δραχμές.

Σημείωσις: Ὁ ἀριθμὸς 16 εἶναι πραγματικὰ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως $12 : \frac{3}{4}$, διότι ἂν πολλαπλασιάσωμεν αὐτὸν ἐπὶ τὸν διαιρέτην $\frac{3}{4}$, θὰ βροῦμε τὸν διαιρετέον 12.

$$\text{Δηλ. } 16 \times \frac{3}{4} = \frac{16 \times 3}{4} = \frac{48}{4} = 12.$$

Ἄλλο παράδειγμα.: $8 : \frac{2}{5} = 8 \times \frac{5}{2} = \frac{8 \times 5}{2} = \frac{40}{2} = 20.$

Ὥστε :

> ***Γιὰ νὰ διαιρέσωμε ἕνα ἀκέραιον διὰ κλάσματος, πολλαπλασιάζομε αὐτὸν ἐπὶ τὸ κλάσμα ἀντεστραμμένον.***

Διαίρεσις κλάσματος διὰ κλάσματος.

Πρόβλημα. Μία βενζινομηχανὴ σὲ $\frac{2}{5}$ τῆς ὥρας καίει $\frac{3}{4}$ τῆς ὀκᾶς βενζίνη. Πόσο καίει τὴν ὥρα ;

Λύσις: Εἰς τὸ πρόβλημα αὐτὸ μᾶς εἶναι γνωστὴ ἡ ἀξία τῶν μερῶν, δηλ. τῶν $\frac{2}{5}$ τῆς ἀκεραίας μονάδος (ἡ ἀξία εἶναι $\frac{3}{4}$ τῆς ὀκᾶς) καὶ μᾶς ζητεῖται ἡ ἀξία τῆς μιᾶς μονάδος (δηλ. τῆς 1 ὥρας).

Ὅπως μάθαμε παραπάνω, στὴν περίπτωσι αὐτὴ θὰ κάνωμε διαίρεσι· θὰ διαιρέσωμε τὸ $\frac{3}{4}$, ποὺ μᾶς φανερώνει τὴν ἀξία τῶν μερῶν τῆς ἀκεραίας μονάδος, διὰ τοῦ $\frac{2}{5}$, ποὺ μᾶς φανερώνει τὰ μέρη τῆς ἀκεραίας μονάδος.

Δηλ. $\frac{3}{4} : \frac{2}{5}$.

Μποροῦμε καὶ μὲ τὴ μέθοδο διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα νὰ βροῦμε πόση βενζίνη καίει ἡ μηχανὴ σὲ μία ὥρα, ἂν σκεφθοῦμε ὡς ἑξῆς:

Ἀφοῦ σὲ $\frac{2}{5}$ τῆς ὥρας καίει $\frac{3}{4}$ τῆς ὀκᾶς,

σὲ $\frac{1}{5}$ τῆς ὥρας θὰ καίη $\frac{3}{4} : 2 = \frac{3}{4 \times 2}$ ὀκ.

καὶ σὲ $\frac{5}{5}$ τῆς ὥρας (ἢ 1 ὥρα) θὰ καίη $\frac{3}{4 \times 2} \times 5 = \frac{3 \times 5}{4 \times 2}$ ἢ $\frac{3}{4} \times \frac{5}{2}$.

Ὥστε πρέπει νὰ εἶναι $\frac{3}{4} : \frac{2}{5} = \frac{3}{4} \times \frac{5}{2} = \frac{15}{8} = 1\frac{7}{8}$ ὀκ.

Σημείωσις. Ὁ ἀριθμὸς $1\frac{7}{8}$ εἶναι πραγματικὰ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσως $\frac{3}{4} : \frac{2}{5}$, διότι, ἂν πολλαπλασιάσωμε αὐτὸν ἐπὶ τὸν διαιρέτη $\frac{2}{5}$, θὰ βροῦμε τὸν διαιρετέον $\frac{3}{4}$.

Δηλ. $1\frac{7}{8} \times \frac{2}{5} = \frac{15}{8} \times \frac{2}{5} = \frac{30}{40} = \frac{3}{4}$.

Ἀπὸ αὐτὸ βλέπομε ὅτι ;

Ἀντὶ νὰ διαιρέσωμε $\frac{3}{4} : \frac{2}{5}$, πολλαπλασιάζομε τὸ κλάσμα τοῦ διαιρετέου ἐπὶ τὸ κλάσμα τοῦ διαιρέτου ἀντεστραμμένον.

Δηλ. $\frac{3}{4} : \frac{2}{5} = \frac{3}{4} \times \frac{5}{2} = \frac{3 \times 5}{4 \times 2} = \frac{15}{8} = 1\frac{7}{8}$ ὀκάδ.

Ὥστε :

> ***Γιὰ νὰ διαιρέσωμε κλάσμα διὰ κλάσματος, πολλαπλασιάζομεν αὐτὸ ἐπὶ τὸ κλάσμα τοῦ διαιρέτου ἀντεστραμμένον.***

Ἄλλο παράδειγμα: $\frac{4}{5} : \frac{3}{10} = \frac{4}{5} \times \frac{10}{3} = \frac{40}{15} = 2\frac{10}{15} = 2\frac{2}{3}$.

Διαίρεσις μικτοῦ διὰ μικτοῦ.

Πρόβλημα. Μία ὑφάντρια εἰς $6\frac{1}{4}$ ὧρες ὑφαίνει $9\frac{3}{8}$ πῆχες ὕφασμα. Πόσο ὑφαίνει τὴν ὥρα ;

Λύσις: Ἀφοῦ σὲ $6\frac{1}{4}$ ὧρες ὑφαίνει $9\frac{3}{8}$ πῆχες, σὲ μία ὥρα θὰ ὑφαίνη $6\frac{1}{4}$ λιγώτερο. Δηλ. $9\frac{3}{8} : 6\frac{1}{4}$.

Τρέπομε τοὺς μικτοὺς σὲ κλάσματα καὶ ἔπειτα κάνομε τὴ διαίρεσι ὅπως ξαίρομε.

$$9\frac{3}{8} : 6\frac{1}{4} = \frac{75}{8} : \frac{25}{4} = \frac{75}{8} \times \frac{4}{25} = \frac{300}{200} = 1\frac{100}{200} = 1\frac{1}{2} \text{ πῆχες.}$$

Διαίρεσις ἀκεραίου διὰ μικτοῦ.

Πρόβλημα: Ἕνας οἰκογενειάρχης ἀγόρασε $2\frac{3}{5}$ ὀκάδες κρέας καὶ ἔδωσε 65 δραχμές. Πόσο ἀξίζει ἡ ὀκᾶ;

Λύσις: Ἀφοῦ οἱ $2\frac{3}{5}$ ὀκάδες ἀξίζουν 65 δραχμές, ἡ μία ὀκᾶ θὰ ἀξίζη $2\frac{3}{5}$ φορὲς λιγώτερο, δηλ. $65 : 2\frac{3}{5}$.

Τρέπομε τὸ μικτὸ σὲ κλάσμα καὶ ὕστερα κάνομε τὴ διαίρεσι.

$$65 : 2\frac{3}{5} = 65 : \frac{13}{5} = 65 \times \frac{5}{13} = 25 \text{ δραχμές.}$$

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

280. α) Πῶς διαιροῦμε ἀκέραιον διὰ μικτοῦ;
β) Πῶς διαιροῦμε μικτὸν διὰ μικτοῦ;
(Γράψε τοὺς κανόνας στὸ τετράδιό σου).

281. Μία βρύση, ἂν μείνη ἀνοικτὴ 8 ὧρες, γεμίζει τὰ $\frac{2}{3}$ μιᾶς δεξαμενῆς. Τί μέρος τῆς δεξαμενῆς γεμίζει σὲ μία ὥρα;

282. Ἕνας οἰκογενειάρχης ἀγόρασε $\frac{7}{8}$ τῆς ὀκᾶς κρέας καὶ ἐπλήρωσε 21 δραχμές. Πόσο ἀγόρασε τὴν ὀκᾶ τὸ κρέας;

283. Μία βρύση σὲ $\frac{3}{4}$ τῆς ὥρας τρέχει 273 ὀκάδες νερό. Πόσες ὀκάδες τρέχει σὲ μιὰ ὥρα;

284. Μία λάμπα καίει σὲ $\frac{2}{5}$ τῆς ὥρας 74 δράμια πετρέλαιο. Πόσα δράμια καίει σὲ μιὰ ὥρα;

285. Ἕνας ἀγόρασε $4\frac{3}{8}$ πῆχες ὕφασμα γιὰ νὰ κάνη ἕνα κοστούμι καὶ ἐπλήρωσε 420 δραχμές. Πόσες δραχμὲς ἀγόρασε τὸν πῆχυ;

Ἀσκήσεις.

286. Κάνε τὶς παρακάτω διαιρέσεις:

α) $75 : \frac{3}{5} =$ β) $1500 : \frac{7}{8} =$ γ) $4200 : \frac{6}{7} =$

δ) $94 : \frac{5}{6} =$ ε) $356 : \frac{3}{4} =$ στ) $8000 : \frac{4}{5} =$

287. Ἐπίσης διαίρεσε:

α) $\frac{5}{6} : \frac{3}{5} =$ β) $\frac{3}{8} : \frac{1}{2} =$ γ) $\frac{1}{2} : \frac{3}{4} =$

δ) $\frac{7}{8} : \frac{4}{5} =$ ε) $\frac{4}{5} : \frac{3}{4} =$ στ) $\frac{9}{10} : \frac{4}{7} =$

288. Ἐπίσης κάνε τὶς διαιρέσεις:

α) $15 : 2\frac{1}{3} =$ β) $23 : 4\frac{3}{5} =$ γ) $9 : 6\frac{2}{3} =$

δ) $8 : 4\frac{1}{2} =$ ε) $12 : 3\frac{1}{7} =$ στ) $11 : 5\frac{1}{2} =$

289. Ἐπίσης κάνε τὶς διαιρέσεις:

α) $8\frac{1}{2} : 3\frac{2}{5} =$ β) $6\frac{4}{4} : \frac{3}{5} =$ γ) $8\frac{3}{4} : 1\frac{1}{2} =$

δ) $9\frac{3}{5} : 7\frac{1}{2} =$ ε) $2\frac{3}{5} : \frac{7}{8} =$ στ) $12\frac{1}{3} : 3\frac{1}{2} =$

Προβλήματα.

290. Ἕνας ἀγόρασε δύο δοχεῖα, ποὺ τὸ κάθε ἕνα εἶχε $14\frac{1}{2}$ ὀκάδες λάδι καὶ ἐπλήρωσε γιὰ ὅλα 413.25 δραχμές. Πόσες δραχμὲς ἀγόρασε τὴν ὀκᾶ τὸ λάδι;

291. Γιὰ ἕνα πουκάμισο χρειάζονται $5\frac{3}{8}$ πῆχες ἀπὸ ἕνα ὕφασμα. Πόσα πουκάμισα θὰ γίνουν μὲ 86 πῆχες;

292. Ἕνα ἀτμόπλοιο διέτρεξε 185 μίλια σὲ $12\frac{1}{3}$ ὧρες. Ἕνα ἄλλο διέτρεξε $237\frac{3}{5}$ μίλια σὲ $17\frac{3}{5}$ ὧρες. Πόσα μίλια τρέχει τὴν ὥρα τὸ κάθε ἕνα ;

293. Ἀπὸ $23\frac{5}{8}$ ὀκάδες ἐλιὲς βγαίνει $4\frac{1}{2}$ ὀκάδες λάδι. Ἀπὸ πόσες ὀκάδες ἐλιὲς βγαίνει μία ὀκᾶ λάδι ;

294. Μία λάμπα καίει σὲ $\frac{3}{5}$ τῆς ὥρας $\frac{3}{10}$ τῆς ὀκᾶς πετρέλαιο. Πόσο καίει τὴν ὥρα ;

295. Ὁ τεκτονικὸς πῆχυς εἶναι τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ μέτρου. Πόσοι τεκτονικοὶ πῆχες εἶναι 48 μέτρα ;

296. Ὁ τετραγωνικὸς τεκτονικὸς πῆχυς εἶναι τὰ $\frac{9}{16}$ τοῦ τετραγ. μέτρου. Πόσοι τεκτονικοὶ τετραγ. πήχεις εἶναι ἕνα οἰκόπεδο ποὺ ἔχει ἐμβαδὸν 540 τετραγ. μέτρα ;

297. Γιὰ κάθε ζευγάρι κάλτσες χρειάζονται $25\frac{3}{4}$ δράμια μαλλί. Πόσα ζευγάρια κάλτσες θὰ γίνουν μὲ μία ὀκᾶ καὶ 12 δράμια μαλλί ;

Προβλήματα ποὺ λύνονται
μὲ τὴ μέθοδο τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα.

Πρόβλημα 1ον. Μία ὀκᾶ καφὲ ἀξίζει 72 δραχμές. Πόσο ἀξίζουν τὰ $\frac{3}{8}$ τῆς ὀκᾶς ;

Λύσις: Ἀφοῦ τὰ $\frac{8}{8}$ τῆς ὀκᾶς (ἢ 1 ὀκᾶ) ἀξίζουν 72 δραχ.

Τὸ $\frac{1}{8}$ τῆς ὀκ. ἀξίζει 8 φορὲς λιγώτερο, δηλ. $\frac{72}{8}$

Τὰ $\frac{3}{8}$ τῆς ὀκ. ἀξίζουν 3 φορὲς περισσότερο, δηλ. $\frac{72}{8} \times 3 =$

$= \frac{216}{8} = 27$ δραχμές.

Τὸ πρόβλημα αὐτὸ μποροῦμε νὰ τὸ λύσωμε ἂν κάνωμε ἕνα πολλαπλασιασμό, ***γιατὶ ξαίρομε τὴν ἀξία τῆς μιᾶς μονάδος καὶ ζητοῦμε τὴν ἀξίαν τῶν μερῶν αὐτῆς***.

$$\Delta\eta\lambda.\ 72 \times \frac{3}{8} = \frac{216}{8} = 27 \text{ δραχμές.}$$

Πρόβλημα 2ον: Μία λάμπα καίει σὲ μία ὥρα $\frac{2}{5}$ τῆς ὀκᾶς πετρέλαιο. Πόσο πετρέλαιο θὰ κάψη σὲ $\frac{3}{4}$ τῆς ὥρας;

Λύσις: Ἀφοῦ σὲ $\frac{4}{4}$ τῆς ὥρας (1 ὥρα) καίει $\frac{2}{5}$ τῆς ὀκ.

σὲ $\frac{1}{4}$ τῆς ὥρας θὰ κάψη 4 φορὲς λιγώτερο, δηλ. $= \frac{2}{5} : 4 = \frac{2}{5\times4}$ ὀκ.

καὶ σὲ $\frac{3}{4}$ τῆς ὥρας θὰ κάψη 3 φορὲς περισσότερο δηλ. $\frac{2}{5\times4}\times3 = \frac{2\times3}{5\times4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$ τῆς ὀκ.

Τὸ πρόβλημα αὐτὸ μποροῦμε νὰ τὸ λύσωμε μὲ ἕνα πολλαπλασιασμό, γιατὶ σὲ αὐτὸ ὅπως καὶ στὸ προηγούμενο πρόβλημα: ***Ξαίρομε τὴν ἀξίαν τῆς μιᾶς μονάδος*** (δηλ. τῆς μιᾶς ὥρας ἡ ὁποία εἶναι $\frac{2}{5}$ τῆς ὀκᾶς) ***καὶ ζητοῦμε τὴν ἀξία τῶν μερῶν τῆς μονάδος*** (τῶν $\frac{3}{4}$ τῆς ὥρας), δηλ. $\frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$ τῆς ὀκᾶς.

Πρόβλημα 3ον: Μία νοικοκυρὰ ἀγόρασε $\frac{5}{8}$ τοῦ πήχεως ἀπὸ ἕνα ὕφασμα καὶ ἔδωσε **12** δραχμές. Πόσες δραχμὲς ἀγόρασε τὸν πῆχυ;

Λύσις: Ἀφοῦ τὰ $\frac{5}{8}$ τοῦ πήχεως ἀξίζουν 12 δραχ.

Τὸ $\frac{1}{8}$ τοῦ πήχ. ἀξίζει 5 φορὲς λιγώτερο, δηλ. $\frac{12}{5}$ »

καὶ τὰ $\frac{8}{8}$ τοῦ πήχεως (1 πῆχυς) ἀξίζουν 8 φορὲς περισσότερο, δηλ. $\frac{12}{5} \times 8 = \frac{96}{5} = 19.20$ δραχμές

Τὸ πρόβλημα αὐτὸ μποροῦμε νὰ τὸ λύσωμε μὲ μία διαίρεσι, γιατὶ ***ξαίρομε τὴν ἀξία μέρους τῆς ἀκεραίας μονάδος καὶ ζητοῦμε τὴν ἀξία ὅλης τῆς ἀκεραίας μονάδος.***

Στὴν περίπτωσι αὐτὴ βάζομε πάντοτε διαιρετέο τὴν ἀξία τῶν μερῶν τῆς μονάδος (δηλ. 12) καὶ διαιρέτη τὰ μέρη τῆς ἀκεραίας μονάδος (δηλ. τὰ $\frac{5}{8}$).

Θὰ ἔχωμε λοιπὸν $12 : \frac{5}{8} = 12 \times \frac{8}{5} = \frac{96}{5} = 19.20$ δραχ.

Πρόβλημα 4ον: Μία βρύση σὲ $\frac{3}{4}$ τῆς ὥρας γεμίζει τὰ $\frac{5}{8}$ μιᾶς δεξαμενῆς. Τί μέρος τῆς δεξαμενῆς θὰ γεμίση σὲ μία ὥρα;

Λύσις: Ἀφοῦ σὲ $\frac{3}{4}$ τῆς ὥρας γεμίζει τὰ $\frac{5}{8}$ τῆς δεξ.

σὲ $\frac{1}{4}$ τῆς ὥρας θὰ γεμίση 3 φορὲς λιγώτερο μέρος τῆς δεξαμενῆς, δηλ. $\frac{5}{8} : 3 = \frac{5}{8 \times 3}$ τῆς δεξ.

καὶ σὲ $\frac{4}{4}$ ὥρ. (1 ὥρα) θὰ γεμίση 4 φορὲς περισσότερο μέρος τῆς δεξαμενῆς, δηλ. $\frac{5}{8 \times 3} \times 4 =$

$= \frac{5 \times 4}{8 \times 3}$ ἢ $\frac{5}{8} \times \frac{4}{3} = \frac{20}{24} = \frac{5}{6}$ τῆς δεξ.

Ὅπως καὶ τὸ προηγούμενο πρόβλημα, ἔτσι καὶ τοῦτο μποροῦμε νὰ τὸ λύσωμε μὲ μία διαίρεσι:

$$\frac{5}{8} : \frac{3}{4} = \frac{5}{8} \times \frac{4}{3} = \frac{20}{24} = \frac{5}{6} \text{ τῆς δεξ.}$$

Γιατί: ***ξαίρομε τὴν ἀξία τῶν μερῶν τῆς ἀκεραίας μονάδος καὶ ζητοῦμε τὴν ἀξία τῆς μιᾶς μονάδος*** (τὰ μέρη τῆς ἀκεραίας μονάδος εἶναι τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς ὥρας καὶ ἡ ἀξία τους τὰ $\frac{5}{8}$ τῆς δεξαμενῆς).

Στὴν περίπτωσι αὐτὴ διαιρετέο βάζομε τὴν ἀξία τῶν μερῶν τῆς μονάδος (δηλ. τὰ $\frac{5}{8}$ τῆς δεξαμενῆς) καὶ διαιρέτη τὰ μέρη τῆς μονάδος (δηλ. τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς ὥρας).

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

Α'. Νὰ βρῆς ἀπὸ μνήμης:

298. Πόσα δράμια εἶναι τὰ $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{8}$ καὶ $\frac{3}{8}$ τῆς ὀκᾶς;

299. Πόσα πρῶτα λεπτὰ εἶναι τὰ $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{10}$ καὶ $\frac{3}{10}$ τῆς ὥρας ;

300. Πόσες δραχμὲς εἶναι τὰ $\frac{3}{10}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{4}$ τοῦ χιλιάρικου ;

301. Ποῖος ἀριθμὸς εἶναι τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ ἀριθμοῦ 800 ;

302. Ποίου ἀριθμοῦ τὰ $\frac{2}{3}$ εἶναι ὁ ἀριθμὸς 40 ;

303. Ποίου ἀριθμοῦ τὰ $\frac{3}{4}$ εἶναι ὁ ἀριθμὸς 75 ;

304. Ποίου ἀριθμοῦ τὰ $\frac{4}{5}$ εἶναι ὁ ἀριθμὸς 80 ;

Β'. Νὰ λύσῃς διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα τὰ παρακάτω προβλήματα :

305. Σὲ ἕνα σχολεῖο, ποὺ εἶχε 232 μαθητάς, στὸ τέλος τοῦ ἔτους προήχθησαν τὰ $\frac{7}{8}$ τῶν μαθητῶν. Πόσοι μαθηταὶ προήχθησαν καὶ πόσοι ἔμειναν στάσιμοι ;

306. Ἕνα αὐτοκίνητο διέτρεξε τὰ $\frac{4}{13}$ τῆς ἀποστάσεως ἀπὸ Ἀθηνῶν μέχρι Θεσσαλονίκης. Πόσα χιλιόμετρα διέτρεξε ; Καὶ πόσα πρέπει νὰ διατρέξῃ ἀκόμη ; (ἡ ἀπόστασις ἀπὸ Ἀθηνῶν μέχρι Θεσσαλονίκης εἶναι 520 χιλιόμ.).

307. Τὸ ναυτικὸν μίλιον εἶναι ἴσο μὲ 1852 μέτρα. Πόσα μέτρα εἶναι τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ μιλίου ;

308. Ἕνας βοσκὸς εἶχε 80 γιδοπρόβατα. Ἀπὸ αὐτὰ τὰ $\frac{7}{10}$ εἶναι πρόβατα. Πόσα εἶναι τὰ γίδια ;

309. Ἕνας πατέρας ἐμοίρασε τὴν περιουσία του, ποὺ ἦταν 800.000 δραχμὲς ὡς ἑξῆς : στὴν κόρη του ἔδωσε τὰ $\frac{2}{5}$ τῆς περιουσίας, στὸ μεγαλύτερο γιό του τὰ $\frac{3}{8}$ αὐτῆς καὶ στὸ μικρότερο γιὸ τὰ ὑπόλοιπα. Πόσες δραχμὲς πῆρε ὁ καθένας ;

310. Μία ἀντλία σὲ μιὰ ὥρα ἀδειάζει τὰ $\frac{5}{8}$ μιᾶς δεξαμενῆς. Τί μέρος τῆς δεξαμενῆς ἀδειάζει σὲ $\frac{5}{6}$ τῆς ὥρας;

311. Ἕνας ἀγόρασε τὰ $\frac{3}{8}$ τῆς ὀκᾶς καφὲ καὶ ἔδωσε 24.75 δραχμές. Πόσο ἀξίζει ἡ ὀκᾶ τοῦ καφέ;

312. Μία ἀντλία βγάζει ἀπὸ ἕνα πηγάδι 860 ὀκάδες νερὸ σὲ $\frac{4}{5}$ τῆς ὥρας. Πόσες ὀκάδες νερὸ βγάζει τὴν ὥρα;

313. Ἕνα ἀεροπλάνο σὲ $\frac{3}{4}$ τῆς ὥρας διατρέχει μία ἀπόστασι 270 χιλιομέτρων καὶ ἕνα ἄλλο ἀεροπλάνο τὴν ἴδια ἀπόστασι τὴν διατρέχει σὲ $\frac{9}{10}$ τῆς ὥρας. Πόσα χιλιόμετρα τρέχει τὴν ὥρα τὸ κάθε ἕνα;

314. Σὲ ἕνα σχολεῖο ἔμειναν στάσιμοι ἀπὸ ὅλες τὶς τάξεις τὰ $\frac{2}{15}$ τῶν μαθητῶν. Οἱ μαθηταὶ ποὺ ἔμειναν στάσιμοι εἶναι 34. Πόσους μαθητὰς εἶχε ὅλο τὸ σχολεῖο: Καὶ πόσοι ἀπ' αὐτοὺς προήχθησαν;

ΣΧΕΣΙΣ ΔΕΚΑΔΙΚΩΝ ΚΑΙ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

Α΄. Τροπὴ κλάσματος σὲ δεκαδικό.

Οἱ ἄνθρωποι προτιμοῦν νὰ κάνουν τοὺς λογαριασμούς των μὲ δεκαδικοὺς ἀριθμούς, γιατὶ οἱ πράξεις μὲ δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς εἶναι εὔκολες. Γι' αὐτὸ, ὅταν στοὺς λογαριασμούς των παρουσιάζωνται κλάσματα, τὰ τρέπουν σὲ δεκαδικούς.

Παράδειγμα 1ον: Νὰ τραπῆ τὸ κλάσμα $\frac{3}{4}$ σὲ δεκαδικὸ ἀριθμό.

Ξαίρομε ὅτι κάθε κλάσμα μᾶς παριστάνει τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμητοῦ του διὰ τοῦ παρονομαστοῦ του. Διαιροῦμε λοιπὸν τὸν ἀριθμητὴ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ καὶ ἔχομεν:

$$\begin{array}{r|l} 30 & 4 \\ \hline 20 & 0{,}75 \end{array}$$

Ὥστε $\frac{3}{4} = 0{,}75$.

Παράδειγμα 2ον: Νὰ τραπῆ τὸ κλάσμα $\frac{2}{3}$ σὲ δεκαδικὸ ἀριθμό.

Διαιροῦμεν:

$$\begin{array}{l|l} 20 & 4 \\ \hline 20 & 0,666\ldots \\ \;\;20 & \end{array}$$

Ὅσο καὶ ἂν ἐξακολουθήσωμε τὴ διαίρεσι, ποτὲ δὲν θὰ βροῦμε ὑπόλοιπον 0.

Βλέπομε, λοιπόν, ὅτι τὸ κλάσμα $\frac{2}{3}$ δὲν τρέπεται ἀκριβῶς σὲ δεκαδικὸ ἀριθμό.

Ὥστε τὸ $\frac{2}{3} = 0,666\ldots..$

Β΄. Τροπὴ δεκαδικοῦ σὲ κλάσμα.

Κάθε δεκαδικὸ ἀριθμὸ μποροῦμε νὰ τὸν γράψωμε σὰν κλάσμα, ὅπως ἀκριβῶς τὸν ἀπαγγέλλομε:

Π. χ. τὸ δεκαδικὸ ἀριθμὸ 0,25 τὸν γράφομε $\frac{25}{100}$, τὸν ἀριθμὸ 0,356 τὸν γράφομε $\frac{356}{1000}$ κ.τ.λ.

Ἂν ὁ δεκαδικὸς ἔχη καὶ ἀκέραιο μέρος, τότε τὸν γράφομε σὰν μικτὸ ἀριθμό. Π.χ. τὸν δεκαδικὸ ἀριθμὸ 15,8 τὸν γράφομε $15\frac{8}{10}$, τὸν 20,56 τὸν γράφομε $20\frac{56}{100}$ κ.τ.λ.

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς.

315. Τρέψε σὲ δεκαδικοὺς τὰ κλάσματα:

$$\frac{3}{5},\ \frac{7}{8},\ \frac{7}{12},\ \frac{2}{15},\ \frac{5}{6},\ \frac{7}{10}$$

316. Τρέψε σὲ δεκαδικοὺς κατὰ προσέγγισιν (νὰ φθάσης στὴ διαίρεσι μέχρι τὰ χιλιοστὰ) τὰ κλάσματα:

$$\frac{1}{3},\ \frac{5}{9},\ \frac{2}{13},\ \frac{8}{11}$$

317. Γράψε σὰν κλάσματα τοὺς δεκαδικοὺς ἀριθμούς:

α) 0,15	β) 3,08	γ) 4,008
0,06	15,36	19,014
0,187	128,03	78,065

Πράξεις δεκαδικῶν καὶ κλασμάτων.

Ἡ πρόσθεσι, ἀφαίρεσι, πολλαπλασιασμὸς ἢ διαίρεσι δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ καὶ κλάσματος γίνεται ὡς ἑξῆς: ἢ τρέπομε τὸ κλάσμα σὲ δεκαδικὸ ἀριθμὸ καὶ ἔτσι κάνομε τὴν πρᾶξι μὲ δεκαδικοὺς ἀριθμούς, ἢ τρέπομε τὸ δεκαδικὸ ἀριθμὸ σὲ κλάσμα καὶ κάνομε τὴν πρᾶξι μὲ κλάσματα.

Πρόσθεσις.

Παράδειγμα 1ον. $0,5+\frac{3}{4}=0,5+0,75=1,25$

ἢ $0,5+\frac{3}{4}=\frac{5}{10}+\frac{3}{4}=\frac{10}{20}+\frac{15}{20}=\frac{25}{20}=1\frac{5}{20}=1\frac{1}{4}$.

Ἀφαίρεσις.

Παράδειγμα 2ον. $2,6-\frac{1}{2}=2,6-0,5=2,1$

ἢ $2,6-\frac{1}{2}=2\frac{6}{10}-\frac{1}{2}=2\frac{6}{10}-\frac{5}{10}=2\frac{1}{10}$.

Πολλαπλασιασμός.

Παράδειγμα 3ον. $0,8\times\frac{1}{4}=0,8\times0,25=0,2$

ἢ $0,8\times\frac{1}{4}=\frac{8}{10}\times\frac{1}{4}=\frac{8}{40}=\frac{1}{5}$.

Διαίρεσις.

Παράδειγμα 4ον $\frac{2}{5}:0,4=0,4:0,4=1$

ἢ $\frac{2}{5}:0,4=\frac{2}{5}:\frac{4}{10}=\frac{2}{5}\times\frac{10}{4}=1$.

Σημ. Ὁ πολλαπλασιασμὸς καὶ ἡ διαίρεσις μπορεῖ νὰ γίνη, ὅπως γίνεται ὁ πολλαπλασιασμὸς καὶ ἡ διαίρεσις ἀκεραίου καὶ κλάσματος π.χ.

$$0,8\times\frac{1}{4}=\frac{0,8\times1}{4}=\frac{0,8}{4}=0,2$$

Καὶ $\frac{2}{5}:0,4=\frac{2}{5\times0,4,}=\frac{2}{2}=1$.

Ἀσκήσεις.

318. Κάνε τὶς προσθέσεις :

$8\frac{3}{5} + 6{,}04 =$ $\quad 78 + \frac{3}{8} =$ $\quad \frac{5}{6} + 0{,}25 =$

319. Κάνε τὶς ἀφαιρέσεις :

$3{,}5 - \frac{3}{4} =$ $\quad 2{,}5 - 1\frac{3}{8} =$ $\quad 2\frac{4}{5} - 1{,}5 =$

320. Κάνε τοὺς πολλαπλασιασμούς :

$0{,}6 \times \frac{3}{5} =$ $\quad 1{,}5 \times 1\frac{1}{2} =$ $\quad 4\frac{5}{8} \times 0{,}7 =$

321. Κάνε τὶς διαιρέσεις :

$15{,}5 : \frac{2}{5} =$ $\quad 2\frac{5}{12} : 0{,}4 =$ $\quad \frac{7}{15} : 0{,}5 =$

Προβλήματα

Τῶν τεσσάρων πράξεων ἀκεραίων, δεκαδικῶν καὶ κλασμάτων.

322. Ἕνας ἐργάτης ἀρχίζει τὴν ἐργασία του στὶς $7\frac{1}{4}$ τὸ πρωΐ καὶ τὴν διακόπτει στὶς $12\frac{1}{2}$. Ἔπειτα ἀρχίζει στὶς $2\frac{3}{5}$ μ. μ. καὶ τελειώνει στὶς $6\frac{1}{3}$ μ. μ. Πόσες ὧρες ἐργάζεται τὴν ἡμέρα ;

323 Μία νοικοκυρὰ ἀγόρασε $9\frac{5}{8}$ πῆχες ὕφασμα καὶ ἀπὸ αὐτὸ ἔκοψε ἕνα φόρεμα $6\frac{1}{4}$ πῆχες. Πόσες πῆχες πρέπει νὰ ἀγοράση ἀκόμη, γιὰ νὰ κάμη ἄλλο ἕνα φόρεμα ἴδιο ;

324. Ἀπὸ δύο ὑφάσματα, ποὺ ἔχουν τὸ ἴδιο πλάτος, τὸ ἕνα ἔχει μῆκος $\frac{7}{8}$ τοῦ μέτρου καὶ τὸ ἄλλο 0,85 τοῦ μέτρου. Ποῖο ἀπὸ τὰ δύο ὑφάσματα εἶναι μεγαλύτερο ;

325. Ἕνα αὐτοκίνητο ἐφόρτωσε 84 καφάσια σταφύλια, ποὺ τὸ κάθε ἕνα ζυγίζει $13\frac{3}{5}$ ὀκάδες καὶ 32 καφάσια ἀχλάδια, ποὺ τὸ κάθε ἕνα ζυγίζει 16,5 ὀκάδες. Πόσες ὀκάδες εἶναι τὸ φορτίο τοῦ αὐτοκινήτου ;

326. Ἕνα στερεὸ σῶμα, ἂν βυθισθῇ στὸ νερό, χάνει τὰ $\frac{3}{5}$ τοῦ βάρους του. Ὅταν εἶναι ἔξω ἀπὸ τὸ νερὸ ζυγίζει 385 δράμια. Πόσα δράμια θὰ χάσῃ ἀπὸ τὸ βάρος του, ὅταν τὸ βυθίσωμε στὸ νερό;

327. Ἕνα σῶμα ποὺ ζυγίζει μία ὀκᾶ καὶ 240 δράμια, ὅταν βυθιστῇ στὸ νερὸ χάνει τὰ $\frac{3}{16}$ τοῦ βάρους του. Πόσα δράμια ζυγίζει στὸ νερό;

328. Ἕνας ἔμπορος ἀγόρασε 8 δοχεῖα λάδι πρὸς 11.20 δραχμὲς τὴν ὀκᾶ. Κάθε δοχεῖο εἶχε $14\frac{3}{8}$ ὀκάδες λάδι. Πόσες δραχμὲς ἐπλήρωσε;

329. Ἕνας ἐργάτης παίρνει 7 δραχμὲς τὴν ὥρα καὶ ἐργάζεται $7\frac{3}{4}$ ὧρες κάθε ἡμέρα. Πόσες δραχμὲς θὰ πάρῃ, ἂν ἐργασθῇ 26 ἡμέρες;

330. Ἕνας καφεπώλης ἀγόρασε $7\frac{3}{4}$ ὀκάδες καφὲ πρὸς 68 δραχμὲς τὴν ὀκᾶ καὶ τριπλάσιες ὀκάδες ζάχαρη πρὸς 14 δραχμὲς τὴν ὀκᾶ. Πόσες δραχμὲς ἔδωσε γιὰ ὅλα;

331. Δύο ἀτμόπλοια ξεκινοῦν τὴν ἴδια ὥρα ἀπὸ τὸν Πειραιᾶ γιὰ τὴν Ἀλεξάνδρεια. Τὸ ἕνα πλέει μὲ ταχύτητα $12\frac{3}{4}$ μίλια τὴν ὥρα καὶ τὸ ἄλλο μὲ ταχύτητα $15\frac{1}{2}$ μίλια τὴν ὥρα. Μετὰ $18\frac{4}{5}$ ὧρες τί ἀπόστασι θὰ ἔχουν μεταξύ τους;

332. Ἕνας ἔμπορος εἶχε $76\frac{3}{4}$ ὀκάδες νῆμα. Ἀπὸ αὐτὸ ἔκανε 168 πουλόβερ, ποὺ γιὰ καθένα ἐχρειάσθη $\frac{3}{16}$ τῆς ὀκᾶς νῆμα. Πόσο νῆμα τοῦ ἐπερίσσευσε;

333. Σὲ ἕνα ὑφαντουργεῖο ἐργάζονται 16 ὑφάντριες καὶ ὑφαίνουν $3\frac{5}{8}$ πῆχες ὕφασμα τὴν ὥρα ἡ κάθε μιά. Πόσες πῆχες ὕφασμα θὰ ὑφάνουν ὅλες οἱ ὑφάντριες σὲ μία ἡμέρα, ἂν ἐργασθοῦν $7\frac{3}{4}$ ὧρες;

334. Ἕνας κτίστης ἔκτισε σὲ 12 ἡμέρες τὰ $\frac{3}{5}$ ἑνὸς τοίχου. Πόσες ἡμέρες πρέπει νὰ ἐργασθῇ ἀκόμη γιὰ νὰ κτίσῃ τὸν ὑπόλοιπο τοῖχο ;

335. Οἱ μαθηταὶ τῆς Ε΄ τάξεως ἑνὸς σχολείου ἐκαλλιέργησαν τὰ $\frac{3}{8}$ τοῦ σχολικοῦ κήπου, οἱ δὲ μαθηταὶ τῆς ΣΤ΄ τάξεως ἐκαλλιέργησαν τὸν ὑπόλοιπο κῆπο. Ὁ κῆπος εἶχε σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου, τοῦ ὁποίου τὸ μῆκος ἦταν 24,5 μέτρα καὶ τὸ πλάτος 16 μέτρα. Πόσα τετραγωνικὰ μέτρα κῆπο ἐκαλλιέργησε κάθε τάξι ;

336. 4 ἀδέλφια ἐκληρονόμησαν τὰ $\frac{3}{5}$ ἑνὸς οἰκοπέδου. Ἔπειτα τὸ οἰκόπεδο πουλήθηκε 8.500 δραχμές. Πόσες δραχμὲς θὰ πάρῃ κάθε ἕνα ἀπὸ τὰ 4 ἀδέλφια ;

337. Ἕνας ὑπάλληλος παίρνει 1.250 δραχμὲς τὸ μῆνα. Ἀπὸ τὰ λεπτὰ αὐτὰ ξοδεύει τὰ $\frac{2}{5}$ γιὰ τροφή, τὸ $\frac{1}{8}$ γιὰ ἐνοίκιο καὶ τὰ 0,3 γιὰ διάφορα ἄλλα ἔξοδα. Πόσες δραχμὲς τοῦ περισσεύουν τὸ μῆνα ;

338. Ἕνα ἀτμόπλοιο ξεκινᾶ ἀπὸ τὸν Πειραιᾶ γιὰ τὴ Θεσσαλονίκη στὶς $7\frac{1}{4}$ τὸ πρωῒ καὶ πλέει μὲ ταχύτητα $14\frac{2}{5}$ μίλια τὴν ὥρα. Πόσα μίλια θὰ ἀπέχῃ ἀπὸ τὴ Θεσσαλονίκη στὶς 12 τὸ μεσημέρι ; (ἡ ἀπόστασις ἀπὸ τὸν Πειραιᾶ στὴ Θεσσαλονίκη εἶναι 254 μίλια).

339. Ἕνας κτηνοτρόφος πούλησε $24\frac{3}{4}$ ὀκάδ. βούτυρο πρὸς 48 δραχμὲς τὴν ὀκᾶ καὶ 3 βαρέλια, ποὺ τὸ καθένα εἶχε $15\frac{1}{2}$ ὀκάδες τυρὶ πρὸς 14.50 τὴν ὀκᾶ. Ἀπὸ τὰ λεπτὰ ποὺ πῆρε ἀγόρασε $10\frac{1}{4}$ πήχες βαμβακερὸ ὕφασμα πρὸς 7.50 δραχμὲς τὸν πῆχυ καὶ $15\frac{1}{2}$ πήχες μάλλινο ὕφασμα πρὸς 30 δραχμὲς τὸν πῆχυ. α) Πόσες δραχμὲς εἰσέπραξε ; β) Πόσες δραχμὲς ἐπλήρωσε ; καὶ γ) πόσες δραχμὲς τοῦ ἔμειναν ;

340. Ἕνας παντοπώλης ἀγόρασε 3 δοχεῖα ποὺ τὸ καθένα εἶχε $13\frac{3}{8}$ ὀκάδες βούτυρο καὶ ἔδωσε γιὰ ὅλα 2.107,50 δραχμές. Πόσο πρέπει νὰ πουλήση τὴν ὀκᾶ τὸ βούτυρο, γιὰ νὰ εἰσπράξη τὰ λεπτὰ ποὺ ἔδωσε καὶ νὰ κερδίση ἀπὸ ὅλο 300 δραχμές;

341. Ἕνα ἔμπορος εἶχε ἕνα τόπι ὕφασμα $84\frac{3}{8}$ πῆχες. Ἀπὸ τὸ ὕφασμα αὐτὸ ἔκανε 12 πουκάμισα μὲ $5\frac{3}{4}$ πῆχες τὸ κάθε ἕνα. Πόσοι πῆχες τοῦ ἐπερίσσευσαν;

342. Ἕνα ἀτμόπλοιο σὲ 8,5 ὧρες διατρέχει 84 μίλια, ἄλλο ἀτμόπλοιο διατρέχει 156 μίλια σὲ $15\frac{3}{4}$ ὧρες. Ποῖο ἀπὸ τὰ δύο ἀτμόπλοια εἶναι ταχύτερο;

343. Ἕνας χωρικὸς ἀγόρασε μία ἀγελάδα καὶ ἐπλήρωσε ἀμέσως τὸ $\frac{1}{2}$ τῆς ἀξίας της. Ἔπειτα ἀπὸ λίγο καιρὸ ἐπλήρωσε τὸ $\frac{1}{3}$ τῆς ἀξίας της καὶ χρεωστᾶ ἀκόμη 250 δραχμές. Πόσες δραχμὲς ἀγόρασε τὴν ἀγελάδα;

344. Ἕνας ἀρτοποιὸς ἐζύμωσε 45 ὀκάδες ἀλεύρι καὶ ἔγινε $56\frac{1}{4}$ ὀκάδες ψωμί. Πόσο ψωμὶ γίνεται μὲ 1 ὀκᾶ ἀλεύρι;

345. Μία πτωχὴ γυναῖκα ἀγόρασε $15\frac{5}{8}$ πῆχες ὕφασμα πρὸς 16 δραχμὲς τὸν πῆχυ καὶ συμφώνησε νὰ πληρώνη 25 δραχμὲς τὴν ἑβδομάδα. Σὲ πόσες ἑβδομάδες θὰ ἐξοφλήση τὸ χρέος της;

346. Μία νοικοκυρὰ ἀγόρασε $25\frac{1}{2}$ πῆχες ὕφασμα πρὸς 12,80 δραχμὲς τὸν πῆχυ. Μὲ τὸ ὕφασμα αὐτὸ ἔκανε 3 φορέματα ἴδια καὶ τῆς ἐπερίσσευσαν $4\frac{3}{8}$ πῆχες. Πόσες πῆχες ἐχρειάσθη τὸ κάθε φόρεμα καὶ πόσες δραχμὲς στοιχίζει τὸ καθένα;

347. Ἕνας ἀγόρασε 180,4 ὀκάδες λάδι καὶ ἀπὸ αὐτὸ ἐγέμισε 9 δοχεῖα, ποὺ τὸ κάθε ἕνα χωροῦσε $14\frac{3}{5}$ ὀκάδες. Τὸ ὑπόλοιπο λάδι πρόκειται νὰ τὸ βάλη σὲ δοχεῖα, ποὺ τὸ καθένα χωρεῖ $3\frac{1}{2}$ ὀκάδες. Πόσα τέτοια δοχεῖα θὰ χρειασθῆ;

348. Ἕνας ἔμπορος εἶχε 400 πῆχες ὕφασμα καὶ ἀπὸ αὐτὸ ἔκαμε 36 δωδεκάδες μαντήλια. Γιὰ κάθε μαντήλι ἐχρειάσθη $\frac{5}{8}$ τοῦ πήχεως. α΄. Πόσες πῆχες τοῦ ἐπερίσσευσαν; β΄. Πόσο στοιχίζει ἡ δωδεκάδα, ἂν ὁ πῆχυς στοιχίζῃ 11.50 δραχμές;

349. Σὲ ἕνα Ὀρφανοτροφεῖο πρόκειται νὰ κάνουν 185 φορεσιὲς γιὰ τὰ ὀρφανά. Γιὰ κάθε φορεσιὰ χρειάζονται $3\frac{5}{8}$ πῆχες ὕφασμα, ποὺ ἔχει 9.80 δραχμὲς ὁ πῆχυς. Πόσες πῆχες ὕφασμα θὰ χρειασθοῦν; Καὶ πόσο θὰ στοιχίσῃ ἡ κάθε φορεσιά;

350. Ἕνας ἀγόρασε 15 ὀκάδες βούτυρο πρὸς 41 δραχμὲς τὴν ὀκᾶ. Ἀπὸ αὐτὸ ἐκράτησε γιὰ τὸ σπίτι του $4\frac{3}{4}$ ὀκάδες. Πόσο πρέπει νὰ πουλήσῃ τὴν ὀκᾶ τὸ ὑπόλοιπο βούτυρο, γιὰ νὰ εἰσπράξῃ τὰ χρήματα ποὺ ἔδωσε νὰ τὸ ἀγοράσῃ;

351. Ἕνας ἀγόρασε 250 δράμια ζάχαρη καὶ ἔδωσε 10.50 δραχμές. Πόσες δραχμὲς ἀξίζει ἡ ὀκᾶ;

352. Ἀγόρασε ἕνας 1 ὀκᾶ καὶ 150 δράμια κρέας καὶ ἐπλήρωσε 24.20 δραχμές. Πόσο ἀγόρασε τὴν ὀκᾶ τὸ κρέας;

353. Ἕνας ἀγόρασε ἕνα οἰκόπεδο 420 τετραγ. πῆχες πρὸς 12 δραχμὲς τὸν τετραγ. πῆχυ. Ἐπλήρωσε τὰ $\frac{2}{5}$ τῆς ἀξίας, τὸ δὲ ὑπόλοιπο συμφώνησε νὰ τὸ ἐξοφλήσῃ σὲ 24 μηνιαῖες δόσεις. Πόσες δραχμὲς θὰ πληρώνῃ τὸ μῆνα;

354. Ἕνας καφεπώλης ἀγόρασε 15 ὀκάδες καφὲ πρὸς 54 δραχμὲς τὴν ὀκᾶ, τὸν ἐκαβούρδισε, τὸν ἄλεσε καὶ τὸν πούλησε ἔτσι ἀλεσμένον πρὸς 76 δραχμὲς τὴν ὀκᾶ. Μὲ τὸ καβούρδισμα ὁ καφὲς χάνει τὰ $\frac{4}{25}$ τοῦ βάρους του. Πόσες δραχμὲς ἐκέρδισε;

355. Ἕνας ἀγόρασε $3\frac{1}{4}$ ὀκάδες καφὲ καὶ 10,5 ὀκάδες ζάχαρη καὶ ἔδωσε γιὰ τὰ δύο εἴδη 360.25 δραχμές. Τὴ ζάχαρη τὴν ἀγόρασε πρὸς 14.50 δραχμὲς τὴν ὀκᾶ. Πόσες δραχμὲς ἀγόρασε τὴν ὀκᾶ τὸν καφέ;

356. Ἕνας χωρικὸς ἔφερε στὴν πόλι 238 αὐγὰ καὶ τὰ πούλησε πρὸς 1.15 δραχμὲς τὸ ζευγάρι. Ἀπὸ τὰ λεπτὰ ποὺ πῆρε ἀγόρασε $2\frac{1}{2}$ ὀκάδες ρύζι πρὸς 6.80 δραχ. τὴν ὀκᾶ, $3\frac{1}{4}$ ὀκάδες σαπούνι πρὸς 9.20 δραχμὲς τὴν ὀκᾶ καὶ 100 δράμια καφὲ πρὸς 72 δραχμὲς τὴν ὀκᾶ. Πόσες δραχμὲς τοῦ ἐπερίσσευσαν;

ΠΕΡΙ ΜΕΘΟΔΩΝ

Ποσὸν

Παίρνω στὸ χέρι μου μερικοὺς βόλους. Ἂν σὲ αὐτοὺς προσθέσω ἀκόμη μερικούς, θὰ ἔχω περισσοτέρους βόλους, δηλαδὴ οἱ βόλοι μου θὰ αὐξηθοῦν. Ἂν πάλι ἀφαιρέσω λίγους, οἱ βόλοι μου θὰ ἐλαττωθοῦν.

Μὲ τὸν ἴδιο τρόπο μποροῦμε νὰ αὐξήσωμε ἢ νὰ ἐλαττώσωμε κάθε πρᾶγμα, ὅπως π. χ. μποροῦμε νὰ αὐξήσωμε ἢ νὰ ἐλαττώσωμε τὰ μῆλα ποὺ ἔχομε μέσα σ' ἕνα καλάθι, τὰ θρανία μιᾶς τάξεως, τὰ τετράδια ἑνὸς μαθητοῦ, τὶς ὧρες ἐργασίας ἑνὸς ἐργάτου κ.τ.λ.

Ὅλα αὐτὰ τὰ πράγματα ποὺ μποροῦν νὰ αὐξηθοῦν ἢ νὰ ἐλαττωθοῦν (βόλοι, μῆλα, τετράδια, ὧρες κ.λ.π.) λέγονται ***ποσά***.

Ὥστε :

Κάθε πρᾶγμα ποὺ μπορεῖ νὰ αὐξηθῇ ἢ νὰ ἐλαττωθῇ λέγεται ποσόν.

Ἂς ὑποθέσωμε ὅτι ἕνας μαθητὴς ἔχει 16 καραμέλλες, δεύτερος μαθητὴς 10 καραμέλλες καὶ τρίτος μαθητὴς 12 καραμέλλες. Κάθε μαθητὴς ἔχει ἕνα ποσὸν ἀπὸ καραμέλλες. Τὰ ποσὰ αὐτὰ διαφέρουν στὸν ἀριθμό, ἀλλὰ εἶναι ὅλα ἀπὸ τὸ ἴδιο εἶδος, γι' αὐτὸ λέγονται ***Ὁμοειδῆ***.

Ἐπίσης τὰ ποσὰ 3 ὀκάδες ρύζι καὶ 7 ὀκάδες ρύζι διαφέρουν στὸ βάρος, ἀλλὰ εἶναι ποσὰ ***Ὁμοειδῆ***.

Ὥστε :

Τὰ ποσὰ ποὺ εἶναι ἀπὸ τὸ ἴδιο εἶδος λέγονται ὁμοειδῆ.

Ἂν τώρα πάρωμε 3 ὀκάδες ζάχαρη, 15 μῆλα καὶ 6 μολύβια, βλέπομε ὅτι τὰ ποσὰ αὐτὰ δὲν εἶναι ἀπὸ τὸ ἴδιο εἶδος, γι' αὐτὸ τὰ λέμε ***ἑτεροειδῆ*** ποσά.

Ὥστε :

Τὰ ποσὰ ποὺ δὲν εἶναι ἀπὸ τὸ αὐτὸ εἶδος λέγονται ἑτεροειδῆ.

Ποσὰ ἀνάλογα.

Ἂς ὑποθέσωμε ὅτι τὰ 10 αὐγὰ τὰ ἀγοράζομε μὲ 6 δραχμές.

Ἂν ἀγοράσωμε διπλάσια αὐγά, θὰ πληρώσωμε 12 δραχ., δηλαδὴ διπλάσιο ποσὸ δραχμῶν. Ἂν πάλι ἀγοράσωμε τὰ μισὰ αὐγά, θὰ πληρώσωμε μισὰ λεπτά.

Βλέπομε ὅτι τὰ δύο ἑτεροειδῆ ποσά:

τὰ αὐγὰ καὶ ***οἱ δραχμές***, ποὺ ἀξίζουν, ἔχουν κάποια σχέσι μεταξύ τους.

Ὅταν διπλασιάζεται, τριπλασιάζεται κτλ. τὸ ἕνα, ἀμέσως διπλασιάζεται, τριπλασιάζεται καὶ τὸ ἄλλο. Καὶ ὅσες φορὲς λιγοστεύει τὸ ἕνα, ἄλλες τόσες φορὲς λιγοστεύει καὶ τὸ ἄλλο.

Τὰ ποσὰ ποὺ ἔχουν τέτοια σχέσι μεταξύ των λέγονται ***ἀνάλογα***.

Ἄλλο παράδειγμα: Γιὰ νὰ κάνωμε 4 πουκάμισα θέλομε 20 πῆχες ὕφασμα, γιὰ 8 πουκάμισα θέλομε 40 πῆχες καὶ γιὰ 2 πουκάμισα θέλομε 10 πῆχες.

Τὰ δύο ποσὰ ***πουκάμισα*** καὶ ***πῆχες*** εἶναι ἀνάλογα.

Ὥστε:

Δύο ποσὰ λέγονται ἀνάλογα, ὅταν ὅσες φορὲς αὐξάνεται τὸ ἕνα ποσόν, τόσες φορὲς αὐξάνεται καὶ τὸ ἄλλο. Καὶ ὅσες φορὲς λιγοστεύει τὸ ἕνα ποσόν, τόσες φορὲς λιγοστεύει καὶ τὸ ἄλλο.

Ποσὰ ἀντίστροφα.

Πέρυσι ἔσκαψαν τὸ ἀμπέλι μας 4 ἐργάτες, ποὺ ἐργάσθηκαν 10 ἡμέρες.

Ἐφέτος, ἂν βάλωμε διπλάσιους ἐργάτες, θὰ σκάψουν τὸ ἀμπέλι σὲ 5 ἡμέρες. Ἂν πάλι ἐφέτος βάλωμε τοὺς μισοὺς ἐργάτες, (δηλ. 2) θὰ σκάψουν τὸ ἀμπέλι σὲ διπλάσιες ἡμέρες.

Βλέπομε ὅτι τὰ ποσὰ ***ἐργάτες*** καὶ ***ἡμέρες*** ποὺ ἐργάσθηκαν, ἔχουν μεταξύ των μία σχέσι.

Ὅσες φορὲς αὐξάνεται τὸ ἕνα ποσόν, τόσες φορὲς λιγοστεύει τὸ ἄλλο καὶ ὅσες φορὲς λιγοστεύει τὸ ἕνα, ἄλλες τόσες φορὲς αὐξάνεται τὸ ἄλλο.

Τὰ ποσὰ ποὺ ἔχουν τέτοια σχέσι μεταξύ των λέγονται ***ἀντίστροφα***

Ὥστε :

Δύο ποσὰ λέγονται ἀντίστροφα ὅταν, ὅσες φορὲς αὐξάνεται τὸ ἕνα ποσόν, τόσες φορὲς λιγοστεύει τὸ ἄλλο. Καί, ἀντίθετα, ὅσες φορὲς λιγοστεύει τὸ ἕνα ποσὸν τόσες φορὲς αὐξάνεται τὸ ἄλλο.

ΑΠΛΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΤΡΙΩΝ

Πρόβλημα 1ον: **25 ὀκάδες ζάχαρη στοιχίζουν 375 δραχμές.** Πόσες δραχμὲς στοιχίζουν οἱ 9 ὀκάδες;

Α' Λύσις: Μποροῦμε νὰ λύσωμε τὸ πρόβλημα διὰ τῆς ἀναγωγῆς ς τὴν μονάδα ἂν σκεφθοῦμε ὡς ἑξῆς:

Ἀφοῦ οἱ 25 ὀκάδες ἀξίζουν **375 δραχμὲς**

1 ὀκᾶ ποὺ εἶναι 25 φορὲς μικρότερη ἀξίζει $\frac{375}{25}$ »

αἱ οἱ 9 ὀκάδες ἀξίζουν $\frac{375}{25} \times 9 = 135$ δρχ.

Β' Λύσις: Τώρα θὰ μάθωμε ἕνα νέο τρόπο (μέθοδο), γιὰ νὰ λύωμε τὰ προβλήματα τοῦ εἴδους αὐτοῦ γρηγορώτερα.

Πρῶτα κατατάσσομε τοὺς δοθέντας ἀριθμοὺς τοῦ προβλήματος σὲ ύο σειρὲς ὡς ἑξῆς:

Κατάταξις

25	ὀκάδες	ἀξίζουν	375	δραχμὲς
9	»	»	X	»

Ὕστερα κάνομε τὴ ***σύγκρισι*** τῶν δύο ἑτεροειδῶν ποσῶν (ὀκάδων αὶ δραχμῶν) γιὰ νὰ ἰδοῦμε ἂν εἶναι ἀνάλογα ἢ ἀντίστροφα.

Τὴ σύγκρισι τὴν κάνομε ὡς ἑξῆς: Οἱ 25 ὀκάδες στοιχίζουν 375 ραχμές. Διπλάσιες ὀκάδες θὰ στοιχίζουν διπλάσιες δραχμές. Ἄρα τὰ οσὰ εἶναι ἀνάλογα.

Γιὰ νὰ λύσωμε τώρα τὸ πρόβλημα πολλαπλασιάζομε τὸν ἀριθμὸ **75, ποὺ εἶναι πάνω ἀπὸ τὸν ἄγνωστο X, ἐπὶ τὸ κλάσμα ποὺ σχη**ατίζουν οἱ ἄλλοι δύο ἀριθμοὶ ἀντεστραμμένο (ἐπειδὴ τὰ ποσὰ εἶναι ινάλογα).

Θὰ ἔχωμε λοιπὸν $X = 375 \times \frac{9}{25} =$ **135 δραχμές.**

Πρόβλημα 2ον: Πέρυσι 5 ἐργάτες ἔσκαψαν ἕνα ἀμπέλι σὲ 18 ἡμέρες. Ἐφέτος, ἂν ἐργασθοῦν 9 ἐργάτες, σὲ πόσες ἡμέρες θὰ σκάψουν τὸ ἴδιο ἀμπέλι ;

Α΄ λύσις: Μποροῦμε νὰ λύσωμε τὸ πρόβλημα διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα, ἂν σκεφθοῦμε ὡς ἑξῆς :

Ἀφοῦ οἱ 5 ἐργάτες θὰ σκάψουν τὸ ἀμπέλι σὲ 18 ἡμέρες, ὁ ἕνας ἐργάτης θὰ τὸ σκάψῃ σὲ (18×5) ἡμέρες. Καὶ οἱ 9 ἐργάτες θὰ σκάψουν τὸ ἀμπέλι σὲ $\frac{18\times5}{9}=10$ ἡμέρες.

Β΄ λύσις; Τώρα μὲ τὴ νέα μέθοδο θὰ λύσωμε τὸ πρόβλημα ὡς ἑξῆς :

Κατάταξις

5	ἐργάτες (σκάβουν τὸ ἀμπέλι) σὲ	18	ἡμέρες
9		X	»

Σύγκρισις. Οἱ 5 ἐργάτες σκάβουν τὸ ἀμπέλι σὲ 18 ἡμέρες. Διπλάσιοι ἐργάτες θὰ σκάψουν τὸ ἀμπέλι σὲ μισὲς ἡμέρες.

Ἄρα τὰ ποσὰ εἶναι ***ἀντίστροφα.***

Γιὰ νὰ λύσωμε τώρα τὸ πρόβλημα πολλαπλασιάζομε τὸν ἀριθμὸ ποὺ βρίσκεται πάνω ἀπὸ τὸν Χ ἐπὶ τὸ κλάσμα ὅπως ἔχει (ἐπειδὴ τὰ ποσὰ εἶναι ἀντίστροφα).

Θὰ ἔχωμε λοιπὸν $X = 18\times\frac{5}{9}=\frac{90}{9}=10$ ἡμέρες.

Ὁ τρόπος μὲ τὸν ὁποῖον λύομε τὰ προβλήματα αὐτοῦ τοῦ εἴδους λέγεται ***Μέθοδος.***

Ἐπειδὴ εἰς τὰ προβλήματα αὐτὰ μᾶς δίδονται τρεῖς ἀριθμοὶ καὶ ἀπὸ αὐτοὺς βρίσκομε ἐκεῖνο ποὺ ζητοῦμε, γι' αὐτὸ ὁ τρόπος μὲ τὸν ὁποῖον λύομε τὰ προβλήματα αὐτὰ λέγεται ***ἁπλῆ μέθοδος τῶν τριῶν.***

Ὥστε :

> ***Γιὰ νὰ λύσωμε ἕνα πρόβλημα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν, πολλαπλασιάζομε τὸν ἀριθμὸ ποὺ εἶναι πάνω ἀπὸ τὸν ἄγνωστο Χ ἐπὶ τὸ κλάσμα ποὺ σχηματίζουν οἱ δύο ἄλλοι ἀριθμοὶ ἀντεστραμμένο, ἂν τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα ἢ ὅπως εἶναι, ἂν τὰ ποσὰ εἶναι ἀντίστροφα.***

Πρόβλημα 3ον. Ἕνας ἀγόρασε 2 ὀκάδες καὶ 150 δράμια κρέας καὶ ἐπλήρωσε 57 δραχμές. Ἂν ἀγόραζε ἕνα ὁλόκληρο ἀρνί, π ζύγιζε 8 ὀκάδες καὶ 250 δράμια, πόσες δραχμὲς θὰ ἐπλήρωνε ;

Κατάταξις

$$\frac{2 \text{ ὀκ. } 150 \text{ δράμ.}}{8 \text{ ὀκ. } 250 \text{ δράμ.}} \qquad \frac{57 \text{ δραχ.}}{X \quad »}$$

Ἐπειδὴ οἱ ὅροι τοῦ κλάσματος εἶναι συμμιγεῖς τοὺς τρέπομε σὲ δράμια, διότι πρέπει καὶ οἱ δύο ὅροι τοῦ κλάσματος νὰ εἶναι ὁμοειδεῖς.

$$\frac{950 \text{ δράμια}}{3450 \text{ δράμια}} \qquad \frac{57 \text{ δραχ.}}{X \quad »}$$

Σύγκρισις: Τὰ 950 δράμια ἀξίζουν 57 δραχμές. Διπλάσια δράμια ἀξίζουν διπλάσιες δραχμές.

Ἄρα τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα.

Θὰ ἔχωμε λοιπὸν $X = 57 \times \frac{3450}{950} = 207$ δραχμές.

Πρόβλημα 4ον: Τὰ $\frac{3}{8}$ τῆς ὀκᾶς τοῦ βουτύρου στοιχίζουν 21 δραχμές. Πόσο ἀξίζουν οἱ 2 ὀκάδες;

Κατάταξις

$$\frac{\frac{3}{8} \text{ ὀκ.}}{2 \text{ ὀκ.}} \qquad \frac{21}{X} \text{ δραχμές.}$$

Σύγκρισις: Τὰ $\frac{3}{8}$ τῆς ὀκᾶς στοιχίζουν 21 δραχμές, τὰ διπλάσια ἀξίζουν διπλάσιες δραχμές.

Ἄρα τὰ ποσὰ εἶναι ***ἀνάλογα***.

$$\text{Θὰ ἔχωμε λοιπὸν } X = 21 \times \frac{2}{\frac{3}{8}} =$$

$$= 21 \times \frac{2 \times 8}{3} = 21 \times \frac{16}{3} =$$

$$= \frac{336}{3} = 112 \text{ δραχμές.}$$

Γιὰ νὰ ἀποφύγωμε τὰ σύνθετα κλάσματα, μποροῦμε νὰ τρέψωμε τὸ κλάσμα $\frac{3}{8}$ σὲ δεκαδικὸ ἀριθμὸ ($\frac{3}{8} = 0,375$)·

Ἔτσι θὰ ἔχωμε $X = 21 \times \frac{2}{0,375} = \frac{42}{0,375} = \frac{42.000}{375} =$
= 112 δραχμές.

Σημείωσις. Ἂν οἱ ἀριθμοὶ εἶναι μικτοί, τοὺς τρέπομε σὲ κλάσματα ἢ σὲ δεκαδικοὺς ἀριθμούς.

Προβλήματα

357. 8 ὀκάδες σαπούνι στοιχίζουν 58.30 δραχμές. Πόσες ὀκάδες σαπούνι θὰ ἀγοράσωμε μὲ 292 δραχμές;

358. Ἀπὸ 100 ὀκάδες σταφύλια βγαίνει 70 ὀκάδες μοῦστος. Πόσες ὀκάδες μοῦστος θὰ βγῆ ἀπὸ 980 ὀκάδες σταφύλια;

6 X *359.* Μία οἰκογένεια λογαριάζει ὅτι ἂν ξοδεύῃ 100 δράμια λάδι τὴν ἡμέρα, θὰ περάση μὲ τὸ λάδι ποὺ ἔχει 27 ἡμέρες. Πόσο πρέπει νὰ ξοδεύῃ τὴν ἡμέρα γιὰ νὰ περάση 45 ἡμέρες;

360. Ἕνας ἐργάτης ἐργάσθηκε $3\frac{1}{2}$ ἡμέρες καὶ πῆρε 122 δραχμές. Πόσες δραχμὲς θὰ πάρη, ἂν ἐργασθῆ 13 ἡμέρες;

361. Ἕνα ἀτμόπλοιο χρειάζεται 6,5 τόννους κάρβουνο γιὰ ἕνα ταξίδι 5 ὡρῶν. Πόσους τόννους κάρβουνο θὰ χρειασθῆ γιὰ ἕνα ταξίδι 12 ὡρῶν, ἂν πλέῃ μὲ τὴν ἴδια ταχύτητα;

362. 8 ἐργάτες σκάβουν ἕνα ἀμπέλι σὲ $7\frac{1}{2}$ ἡμέρες. Σὲ πόσες ἡμέρες θὰ σκάψουν τὸ ἴδιο ἀμπέλι 6 ἐργάτες;

363. Ἕνα αὐτοκίνητο τρέχει 174 χιλιόμετρα σὲ 4 ὧρες. Πόσα χιλιόμετρα θὰ τρέξη σὲ 13 ὧρες;

364. Ἕνας κτηνοτρόφος ἔχει 6 ἀγελάδες καὶ χρειάζεται γι' αὐτὲς 51 ὀκάδες χόρτο τὴν ἡμέρα. Πόσες ὀκάδες χόρτο χρειάζεται τὴν ἡμέρα ἕνας ἄλλος κτηνοτρόφος ποὺ ἔχει 14 ἀγελάδες;

365. Μία κόρη, ὅταν ἐργάζεται 6 ὧρες τὴν ἡμέρα, τελειώνει τὸ ἐργόχειρό της σὲ 4 ἡμέρες. Ἂν ἐργαζόταν 8 ὧρες τὴν ἡμέρα σὲ πόσες ἡμέρες θὰ τελείωνε τὸ ἐργόχειρο;

366. Ἀπὸ ἕνα ὕφασμα ποὺ ἔχει πλάτος 6 ρούπια γίνονται 12 κοστούμια. Πόσα κοστούμια θὰ γίνουν ἀπὸ ἕνα ἄλλο ὕφασμα τοῦ ἰδίου μήκους, ποὺ ἔχει πλάτος 9 ρούπια;

367. Ἀπὸ 50 ὀκάδες ἐλιὲς βγαίνουν 12 ὀκάδες λάδι. Πόσες ὀκάδες ἐλιὲς θὰ χρειασθοῦν γιὰ νὰ βγοῦν 300 ὀκάδες λάδι;

368. Ἕνα αὐτοκίνητο, ὅταν τρέχῃ 30,5 χιλιόμετρα τὴν ὥρα, φθάνει ἀπὸ τὴν Ἀθήνα στὴν Ἄμφισσα σὲ $6\frac{1}{2}$ ὧρες. Εἶναι ὅμως ἀνάγκη νὰ διανύση τὸ διάστημα αὐτὸ σὲ 5 ὧρες. Πόσα χιλιόμετρα πρέπει νὰ τρέχῃ τὴν ὥρα;

369. Μὲ 100 ὀκάδες ἀλεύρι γίνονται 132 ὀκάδες ψωμί. Πόσες ὀκάδες ἀλεύρι χρειάζεται ἕνας ἀρτοποιὸς γιὰ νὰ κάνη 957 ὀκάδες ψωμί ;

370. Ἕνα ἀτμόπλοιο, ποὺ πλέει μὲ ταχύτητα 12,5 μίλια τὴν ὥρα, κάνει τὴ διαδρομὴ ἀπὸ τὸν Πειραιᾶ στὴν Τῆνο σὲ 6 ὧρες. Σὲ πόσες ὧρες θὰ κάμη τὴ διαδρομὴ αὐτή, ἂν πλέη μὲ ταχύτητα 15 μίλια ;

371. Ἕνας ἔμπορος κέρδισε ἀπὸ 5 πῆχες ὕφασμα 12.50 δραχμές. Πόσο θὰ κερδίση, ἂν πουλήση $38\frac{1}{2}$ πῆχες ἀπὸ τὸ ἴδιο ὕφασμα ;

372. Γιὰ νὰ γίνη ἕνα χαλὶ χρειάζονται 10 μέτρα ὕφασμα πλάτους 1,20 μέτρ. Πόσα μέτρα ἀπὸ τὸ ἴδιο ὕφασμα χρειάζονται γιὰ νὰ γίνη ἕνα ἄλλο χαλὶ ὅμοιο, ἂν τὸ πλάτος τοῦ ὑφάσματος εἶναι 1,50 μέτρα ;

373. Οἱ μαθηταὶ τῆς ΣΤ΄ τάξεως ἑνὸς σχολείου ἔσκαψαν στὸ σχολικὸ κῆπο 15 μέτρα αὐλάκι καὶ ἐργάσθησαν 2 ὧρες. Πόσες ὧρες ἔπρεπε νὰ ἐργασθοῦν τὰ ἴδια παιδιὰ γιὰ νὰ σκαφτῆ ἕνα αὐλάκι ὁλόγυρα ἀπὸ τὸ σχολικὸ κῆπο μήκους 52,5 μέτρων ;

374. 100 βαθμοὶ τοῦ Κελσίου ἰσοδυναμοῦν μὲ 80° Ρεωμύρου. Μὲ πόσους βαθμοὺς Ρεωμύρου ἰσοδυναμοῦν 20° Κελσίου ;

375. 28° Ρεωμύρου μὲ πόσους βαθμοὺς Κελσίου ἰσοδυναμοῦν ;

376. Ὁ χάρτης τῆς Ἑλλάδος ἔχει κλίμακα 1 : 1.000.000. Ἡ σιδηροδρομικὴ γραμμὴ Ἀθηνῶν-Θεσσαλονίκης εἶναι 520 χιλιόμετρα. Πόσα ἑκατοστὰ τοῦ μέτρου μῆκος εἶναι ἡ σιδηροδρομικὴ γραμμὴ στὸ χάρτη ;

377. Στὸν ἴδιο χάρτη ἡ κατ' εὐθεῖαν ἀπόστασις τῆς Θεσσαλονίκης ἀπὸ τὰς Ἀθήνας ἐπάνω στὸ χάρτη εἶναι 0,31 τοῦ μέτρου. Πόσα χιλιόμετρα εἶναι ἡ κατ' εὐθεῖαν πραγματικὴ ἀπόστασις ;

378. Μία ὁμάδα κτιστῶν κτίζει 20 κυβικὰ μέτρα τοίχου σὲ 3 ἡμέρες. Οἱ ἴδιοι κτίστες σὲ πόσες ἡμέρες θὰ κτίσουν τοὺς τοίχους ἑνὸς σπιτιοῦ, ποὺ εἶναι 130 κυβικά ;

379. Γιὰ νὰ γίνη ἕνα φόρεμα χρειάζονται $7\frac{1}{2}$ πῆχες, ἂν τὸ ὕφασμα ἔχη πλάτος 6 ρούπια. Πόσοι πῆχες θὰ χρειασθοῦν, ἂν τὸ ὕφασμα εἶχε πλάτος 8 ρούπια.

380. Ἕνα καράβι τῆς γραμμῆς Κορινθιακοῦ πλέει 10 μίλια τὴν ὥρα καὶ κάνει τὴ διαδρομὴ ἀπὸ τὸν Πειραιᾶ στὴν Πάτρα σὲ $10\frac{1}{2}$ ὧρες. Σὲ πόσες ὧρες θὰ κάμη τὴ διαδρομὴ αὐτὴ ἕνα ἄλλο καράβι ποὺ πλέει μὲ 15 μίλια τὴν ὥρα ;

381. $8\frac{1}{2}$ πῆχες ἑνὸς ὑφάσματος στοιχίζουν 85 δραχμές. Πόσο στοιχίζουν $25\frac{1}{4}$ πῆχες τοῦ ἰδίου ὑφάσματος ;

382. Μία ὑφάντρια ὑφαίνει 9,40 μέτρα ὕφασμα σὲ 4 ὧρες. Πόσα μέτρα θὰ ὑφάνῃ σὲ 5 ἡμέρες, ὅταν ἐργάζεται 10 ὧρες τὴν ἡμέρα ;

383. Τὸ πλήρωμα ἑνὸς ὑποβρυχίου, ποὺ ἀποτελεῖται ἀπὸ 8 ἄνδρες, ἔχει τρόφιμα γιὰ 2 μῆνες καὶ 15 ἡμέρες. Ἂν τὸ πλήρωμα ἦταν 10 ἄνδρες, γιὰ πόσο χρόνο θὰ εἶχε τρόφιμα ;

384. Ἕνα τόπι ὕφασμα 60 ὑάρδες καὶ 2 πόδια στοιχίζει 910 δραχμές. Πόσο θὰ πληρώσωμε γιὰ ἕνα φόρεμα παιδικό, ποὺ χρειάζεται 5 ὑάρδες καὶ 2 πόδια ; (1 ὑάρδα=3 πόδια).

385. Ἕνας στῦλος ὕψους 3,80 μέτρων ρίχνει σκιὰ 2 μέτρα. Τὴν ἴδια στιγμὴ ἕνα δένδρο ρίχνει σκιὰ 3,5 μέτρα. Πόσο εἶναι τὸ ὕψος τοῦ δένδρου ;

386. Ἕνας ἀγροτικὸς διανομεὺς βαδίζει 8 ὧρες τὴν ἡμέρα καὶ τελειώνει τὴν περιοδεία του σὲ 5 ἡμέρες. Σὲ πόσες ἡμέρες θὰ τελείωνε τὴν περιοδεία του, ἂν ἐβάδιζε 10 ὧρες τὴν ἡμέρα ;

387. Ἕνα πάτωμα σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου μήκους 5,6 μέτρων καὶ πλάτους 4,8 μέτρων, πρόκειται νὰ στρωθῇ μὲ μουσαμᾶ, τοῦ ὁποίου τὸ πλάτος εἶναι 1,20 μέτρα. Πόσα μέτρα θὰ χρειασθοῦν ;

388. Ὁ Μεσημβρινὸς τῆς γῆς ἔχει μῆκος 40.000 χιλιόμετρα καὶ διαιρεῖται σὲ 360 μοῖρες. Ἂν δύο πόλεις βρίσκονται στὸν ἴδιο μεσημβρινὸ καὶ ἀπέχουν μεταξύ των 18 μοῖρες, πόσα χιλιόμετρα εἶναι ἡ μεταξύ των ἀπόστασις ;

389. 80 στρατιῶτες εἶναι κλεισμένοι σὲ ἕνα φρούριο καὶ ἔχουν τροφὲς γιὰ 20 ἡμέρες. Μὲ μιὰ διαταγὴ ἔφυγαν γιὰ μιὰ ἀποστολὴ 30 στρατιῶτες. Γιὰ πόσες ἡμέρες θὰ ἔχουν τροφὲς οἱ στρατιῶτες ποὺ ἔμειναν στὸ φρούριο ;

390. Σὲ 3^{δ} (δευτερόλεπτα) ὁ ἦχος διατρέχει 1020 μέτρα. Βλέπομε ἀπὸ μακριὰ τὴ λάμψι ἑνὸς κανονιοῦ καὶ μετὰ 20^{δ} ἀκοῦμε τὸν κρότο. Πόσα μέτρα μακριὰ εἶναι τὸ κανόνι ;

391. 4 ἐργάτες ἀνοίγουν ἕνα πηγάδι σὲ 15 ἡμέρες. Ἂν ἦσαν 5 ἐργάτες, σὲ πόσες ἡμέρες θὰ ἄνοιγαν τὸ ἴδιο πηγάδι;

392. Ἕνας οἰκογενειάρχης ἀγόρασε κρέας ἕνα ὁλόκληρο ἀρνί, ποὺ ζύγιζε 5 ὀκάδες καὶ 150 δράμια, καὶ πλήρωσε 150.50 δραχμές. Πόσες δραχμὲς θὰ πλήρωνε, ἂν ἀγόραζε ἕνα ἄλλο ἀρνὶ ποὺ ζύγιζε $6\frac{1}{4}$ ὀκάδες;

393. Ἕνα ἀεροπλάνο σὲ 1 ὥρα καὶ 20^{π} διατρέχει μία ἀπόστασι 420 χιλιομέτρων. Σὲ πόσο χρόνο θὰ διατρέξη μία ἀπόστασι 1050 χιλιομέτρων, ἂν πετᾶ μὲ τὴν ἴδια ταχύτητα;

ΣΥΝΘΕΤΟΣ ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΤΡΙΩΝ

Πρόβλημα 1ον. 5 ἐργάτριες ὑφαίνουν σὲ 6 ἡμέρες 750 μέτρα ὕφασμα. 12 ἐργάτριες σὲ 8 ἡμέρες πόσα μέτρα ὕφασμα θὰ ὑφάνουν;

Κατάταξις:

$$\frac{5 \text{ ἐργ.}}{12} \qquad \frac{6 \text{ ἡμ.}}{8} \qquad \frac{750 \text{ μέτρα}}{X}$$

Σημείωσις: Κατὰ τὴν κατάταξι προσέχομε νὰ γράφωμε τὰ ὁμοειδῆ ποσὰ τὸ ἕνα κάτω ἀπὸ τὸ ἄλλο καὶ τὸ X στὴ σωστή του θέσι.

Λύσις. Στὸ πρόβλημα αὐτὸ μᾶς δίδονται 5 ἀριθμοὶ καὶ ζητεῖται ὁ ἄγνωστος ἕκτος. Διὰ νὰ λύσωμε τὸ πρόβλημα κάνομε πρῶτα τὴ σύγκρισι κάθε ποσοῦ μὲ τὸ ποσὸν κάτω ἀπὸ τὸ ὁποῖον εἶναι ὁ ἄγνωστος X.

Σύγκρισις: 1) ***ἐργατριῶν καὶ μέτρων.***

Οἱ 5 ἐργάτριες ὑφαίνουν 750 μέτρα. Διπλάσιες ἐργάτριες θὰ ὑφάνουν διπλάσια μέτρα. Ἄρα τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα.

2) ***ἡμερῶν καὶ μέτρων.***

Σὲ 6 ἡμέρες οἱ 5 ἐργάτριες ὑφαίνουν 750 μέτρα. Σὲ διπλάσιες ἡμέρες, οἱ ἴδιες ἐργάτριες, θὰ ὑφάνουν διπλάσια μέτρα. Ἄρα καὶ αὐτὰ τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα.

Ἔπειτα θὰ πολλαπλασιάσουμε τὸν ἀριθμὸ 750, ποὺ βρίσκεται πάνω ἀπὸ τὸν ἄγνωστο X, ἐπὶ τὰ δύο κλάσματα ἀντεστραμμένα (ἐπειδὴ τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα), δηλ. θὰ ἔχωμε $X = 750 \times \frac{12}{5} \times \frac{8}{6} = \frac{750 \times 12 \times 8}{5 \times 6}$

$= \frac{72.000}{30} = \frac{7.200}{3} = 2.400$ μέτρα.

Πρόβλημα 2ον. 3 ἐργάτες, ὅταν ἐργάζωνται 9 ὥρες τὴν ἡμέρα, σκάβουν ἕνα χαντάκι μήκους 36 μέτρων. Πόσοι ἐργάτες, ὅταν ἐργάζωνται 8 ὥρες τὴν ἡμέρα, θὰ σκάψουν ἕνα χαντάκι μήκους 224 μέτρων;

$$\frac{3 \text{ ἐργ.}}{X} \qquad \frac{9 \text{ ὥρ.}}{8} \qquad \frac{36 \text{ μέτρ.}}{224}$$

Σύγκρισις: 1) ***μέτρων καὶ ἐργατῶν***

Τὰ 36 μέτρα τὰ σκάβουν 3 ἐργάτες. Τὰ διπλάσια μέτρα θὰ τὰ σκάψουν διπλάσιοι ἐργάτες (ποσὰ ἀνάλογα).

2) ***ὡρῶν καὶ ἐργατῶν.***

Ὅταν οἱ ἐργάτες ἐργάζωνται 9 ὥρες τὴν ἡμέρα, χρειάζονται 3 ἐργάτες. Ὅταν ἐργάζωνται διπλάσιες ὥρες τὴν ἡμέρα, θὰ χρειασθοῦν οἱ μισοὶ ἐργάτες (ποσὰ ἀντίστροφα).

Ἄρα θὰ πολλαπλασιάσωμε τὸν ἀριθμὸ 3 ἐπὶ τὸ κλάσμα τῶν ἀναλόγων ποσῶν ἀντεστραμμένο καὶ ἐπὶ τὸ κλάσμα τῶν ἀντιστρόφων ποσῶν, ὅπως ἔχει.

Δηλ. $X = 3 \times \frac{224}{36} \times \frac{9}{8} = \frac{3 \times 224 \times 9}{36 \times 8} = 21$ ἐργάτες.

Ὥστε:

> ***Διὰ νὰ λύσωμε ἕνα πρόβλημα τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν, πολλαπλασιάζομε τὸν ἄνω τοῦ ἀγνώστου X ἀριθμὸν ἐπὶ κάθε κλάσμα*** (ποὺ σχηματίζουν οἱ δύο τιμὲς κάθε ποσοῦ), ***ἀντεστραμμένον μέν, ἂν τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὸ ποσὸν τοῦ ἀγνώστου, ὅπως ἔχει δέ, ἂν τὰ ποσά του εἶναι ἀντίστροφα.***

Προβλήματα

394. 4 ἐργάτριες ἔρραψαν σὲ 8 ἡμέρες 40 ὑποκάμισα. Πόσα ὅμοια πουκάμισα θὰ ράψουν 5 ἐργάτριες σὲ 20 ἡμέρες;

395. Μία ὑφάντρια γιὰ νὰ ὑφάνῃ 60 πῆχες ὕφασμα, τοῦ ὁποίου τὸ πλάτος εἶναι 6 ρούπια, χρειάζεται 5 ὀκάδες νῆμα. Πόσο νῆμα θὰ χρειασθῆ γιὰ νὰ ὑφάνη 180 πῆχες ἀπὸ τὸ ἴδιο ὕφασμα, ἂν τὸ πλάτος του ἦτο 10 ρούπια;

396. 3 ἐργάτες ἐργάζονται 8 ὧρες τὴν ἡμέρα καὶ σκάβουν ἕνα ἀμπέλι σὲ 12 ἡμέρες. Σὲ πόσες ἡμέρες θὰ ἔσκαβαν τὸ ἀμπέλι 8 ἐργάτες, ἂν ἐργάζονταν 10 ὧρες τὴν ἡμέρα;

397. Μία λάμπα, ποὺ μένει ἀναμμένη 2 ὧρες κάθε βράδυ, ἔκαψε σὲ 5 βράδυα 320 δράμια πετρέλαιο. Ἂν μένη ἀναμμένη 3 ὧρες κάθε βράδυ, πόσο πετρέλαιο θὰ κάψη σὲ ἕνα μῆνα; (30 ἡμέρας);

398. Ἕνας πεζὸς ταχυδρόμος βαδίζει 5 ὧρες καὶ 30' τὴν ἡμέρα καὶ σὲ 5 ἡμέρες διατρέχει ἀπόστασι 80 χιλιομέτρων. Σὲ πόσες ἡμέρες θὰ διατρέξη μία ἄλλη ἀπόστασι 132 χιλιομέτρων, ἂν βαδίζη 4 ὧρες τὴν ἡμέρα;

399. Ἕνας ἐργάτης, ὅταν ἐργάζεται 8 ὧρες τὴν ἡμέρα, παίρνει σὲ 12 ἡμέρες 384 δραχμές. Ὁ ἴδιος ἐργάτης πόσες δραχμὲς θὰ πάρη σὲ 14 ἡμέρες, ἐὰν ἐργάζεται 9 ὧρες τὴν ἡμέρα;

400. Μὲ 96 πῆχες ἑνὸς ὑφάσματος, τοῦ ὁποίου τὰ πλάτος εἶναι 0,78 τοῦ μέτρου, γίνονται 12 σεντόνια. Πόσοι πῆχες θὰ χρειασθοῦν ἀπὸ ἕνα ἄλλο ὕφασμα πλάτους 0,90 μέτρ. γιὰ νὰ γίνουν 30 ὅμοια σεντόνια;

401. 20 θεριστὲς θερίζουν 120 στρέμματα σὲ 6 ἡμέρες. Πόσα στρέμματα θὰ θερίσουν 35 θεριστὲς σὲ 4 ἡμέρες;

402. Γιὰ νὰ γίνουν 10 παιδικὰ κοστούμια ἐχρειάσθησαν 28 πῆχες ὕφασμα πλάτους $1\frac{1}{4}$ πήχ. Πόσοι πῆχες ὕφασμα πλάτους 1 πήχεως θὰ χρειασθοῦν γιὰ νὰ γίνουν 45 ὅμοια κοστούμια;

403. Ἕνας σωφέρ, γιὰ νὰ μεταφέρη μὲ τὸ φορτηγὸ αὐτοκίνητό του 1500 ὀκάδες ἐμπορεύματα σὲ ἀπόστασι 84 χιλιομέτρων, πῆρε ἀγώγι 525 δραχμές. Πόσο ἀγώγι θὰ πάρη, γιὰ νὰ μεταφέρη 2.400 ὀκάδες σὲ ἀπόστασι 120 χιλιομέτρων;

404. Ἐὰν ἑνὸς βιβλίου καθεμιὰ σελίδα ἔχει 34 στίχους καὶ κάθε στίχος 45 γράμματα, τὸ βιβλίον ἀποτελεῖται ἀπὸ 140 σελίδες. Πόσες σελίδες θὰ εἶχε τὸ βιβλίο, ἂν καθεμιὰ σελίδα εἶχε 30 στίχους καὶ κάθε στίχος 35 γράμματα;

405. Μία γυναῖκα μὲ $3\frac{3}{4}$ ὀκάδες νῆμα ὑφαίνει $31\frac{5}{8}$ πῆχες ὕφασμα πλάτους 0,5 τοῦ μέτρου. Πόσους πῆχες πλάτους $\frac{3}{4}$ τοῦ μέτρου θὰ ὑφάνη μὲ $11\frac{1}{4}$ ὀκάδες νήματος;

Σημείωσις: Πρὸς εὐκολίαν μας τρέπομε τὰ κλάσματα σὲ δεκαδικοὺς ἀριθμούς, γιὰ νὰ ἀποφύγωμε τὰ σύνθετα κλάσματα.

406. 5 ἐργάτες, ὅταν ἐργάζωνται 8 ὧρες τὴν ἡμέρα, σκάβουν 150 μέτρα χαντάκι σὲ 5 ἡμέρες. 10 ἐργάτες, ἂν ἐργάζωνται 9 ὧρες τὴν ἡμέρα, πόσα μέτρα ὅμοιο χαντάκι θὰ σκάψουν σὲ 12 ἡμέρες;

407. Ἕνας ἐργάτης, ποὺ ἐργάζεται 6 ὧρες τὴν ἡμέρα, σὲ 5 ἡμέρες ἐτελείωσε τὸ $\frac{1}{4}$ ἑνὸς ἔργου. Πόσες ὧρες πρέπει νὰ ἐργάζεται τὴν ἡμέρα γιὰ νὰ τελειώσῃ τὸ ὑπόλοιπο ἔργο σὲ 12 ἡμέρες;

408. Ἕνα χαλὶ μήκους 4,2 μέτρων καὶ πλάτους 3,25 μέτρων στοιχίζει 2.820 δραχμές. Πόσες δραχμὲς ἀξίζει ἕνα ἄλλο χαλὶ τῆς αὐτῆς ποιότητος μήκους 5,5 μέτρων καὶ πλάτους 3,6 μέτρων;

409. Γιὰ ἔξοδα διατροφῆς 160 μαθητῶν ἐπὶ 26 ἡμέρες σὲ μιὰ θερινὴ κατασκήνωσι ἐξωδεύτηκαν 37.440 δραχμές. Πόσες δραχμὲς θὰ χρειασθοῦν γιὰ διατροφὴ 200 μαθητῶν ἐπὶ 30 ἡμέρες;

410. Μία γυναῖκα, ὅταν ἐργάζεται 5 ὧρες τὴν ἡμέρα, πλέκει σὲ 6 ἡμέρες 4 πουλόβερ. Πόσες ὧρες πρέπει νὰ ἐργάζεται τὴν ἡμέρα, γιὰ νὰ πλέξῃ σὲ 15 ἡμέρες 12 ὅμοια πουλόβερ;

411. Μία γυναῖκα, ποὺ ἐργαζόταν 6 ὧρες τὴν ἡμέρα, ὕφανε ἕνα χαλὶ μήκους 4,5 μέτρων καὶ πλάτους 3 μέτρων σὲ 5 ἡμέρες. Ἡ ἴδια γυναῖκα, πόσες ὧρες πρέπει νὰ ἐργάζεται τὴν ἡμέρα γιὰ νὰ ὑφάνῃ ἕνα χαλὶ μήκους 5,4 μέτρων καὶ πλάτους 4,2 μέτρων σὲ 6 ἡμέρες;

412. Μία βρύση γεμίζει σὲ 4 ὧρες ἕνα τεπόζιτο μήκους 1,5 μ., πλάτους 0,80 μ. καὶ βάθους 2 μέτρων. Σὲ πόσες ὧρες ἡ ἴδια βρύση θὰ γεμίσῃ ἕνα ἄλλο τεπόζιτο μήκους 2 μ., πλάτους 1,20 καὶ βάθους 3 μέτρων;

413. Ἕνας ἐργολάβος ἀνέλαβε νὰ ἐκτελέσῃ ἕνα ἔργο σὲ 30 ἡμέρες καὶ ἔβαλε στὴν ἐργασία αὐτὴ 8 ἐργάτες, οἱ ὁποῖοι σὲ 25 ἡμέρες τελείωσαν τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ ἔργου. Πόσους ἐργάτες πρέπει νὰ βάλῃ ἀκόμη στὴν ἐργασία, ὥστε νὰ τελειώσῃ τὸ ἔργο στὴν ὡρισμένη προθεσμία;

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΟΣΟΣΤΩΝ

Ἂν ὑποθέσωμε ὅτι ἕνας εἶχε ἀγοράσει μὲ 100 χρυσὲς λίρες ἕνα οἰκόπεδο καὶ ἔπειτα πούλησε τὸ οἰκόπεδο σὲ ἄλλον μὲ 108 λίρες, βλέπομε ὅτι ἀπὸ τὴ μεταπώλησι ἐκέρδισε 8 λίρες.

Ὥστε στὶς 100 λίρες ποὺ διέθεσε ὁ ἄνθρωπος αὐτὸς ἐκέρδισε 8 λίρες· λέγομε τότε ὅτι ἐκέρδισε ***8 τοῖς ἑκατὸ*** ἐπὶ τῆς ἀγορᾶς καὶ γράφομε τοῦτο ἔτσι: 8 %.

Ἄλλο παράδειγμα: Ὁ ὡρολογᾶς ἀγοράζει τὰ ὡρολόγια **πρὸς 500 δραχμὲς** τὸ ἕνα καὶ τὰ πωλεῖ 600 δραχμές. Στὶς 500, **λοιπόν, δραχμὲς** ποὺ διαθέτει γιὰ τὴν ἀγορὰ κάθε ὡρολογίου, **κερδίζει 100 δραχμές**. Ἂς δοῦμε **τώρα** πόσο κερδίζει στὶς 100 δραχμές. Ἀφοῦ στὶς **500 δραχμές, δηλ. στὰ 5 ἑκατοστάρικα, κερδίζει 100 δραχμές, στὸ ἕνα** ἑκατοστάρικο κερδίζει 100 : 5 = 20 δραχμές.

Ὥστε ὁ ὡρολογὰς κερδίζει ***20 τοῖς ἑκατὸν*** ἐπὶ τῆς ἀγορᾶς **τῶν ὡρολογίων, ποὺ** γράφεται ἔτσι: 20%.

Το κέρδος, λοιπόν, **τῶν** ἐμπόρων ὑπολογίζεται μὲ ***τόσον τοῖς ἑκατόν***, ἀλλὰ καὶ ἡ ζημία ἐπίσης ὑπολογίζεται μὲ τόσον τοῖς ἑκατόν:

Παράδειγμα.—Ἕνας αὐγοπώλης ἀγόρασε 400 αὐγὰ καὶ κατὰ τὴ μεταφορὰ ἔσπασαν 20. Πόσο τοῖς ἑκατὸν ἐζημιώθη;

Ἀφοῦ στὰ 400 αὐγὰ εἶχε ζημία 20, στὰ 100, ποὺ εἶναι 4 φορὲς λιγώτερο, θὰ ἔχη ζημία 20 : 4 = 5 αὐγά.

Ὥστε ὁ αὐγοπώλης ζημιώνεται 5 % ***(5 τοῖς ἑκατὸν)***.

Μερικὲς φορὲς τὸ κέρδος ἢ ἡ ζημία ὑπολογίζονται στὶς 1000 μονάδες. Π χ. ἂν ὁ ἔμπορος στὶς 1000 δραχμὲς ἔχη κέρδος 9 δραχμὲς, λέγομε ὅτι κερδίζει ***9 τοῖς χιλίοις***, ποὺ γράφεται ἔτσι: 9 ‰.

Τὸ ποσὸν ἐπὶ τοῦ ὁποίου ὑπολογίζεται τὸ κέρδος ἢ ἡ ζημία λέγεται ***ἀρχικὸν ποσόν***.

Εἰς τὸ πρῶτο παράδειγμα ***ἀρχικὸν ποσὸν*** ἐπὶ τοῦ ὁποίου ὑπολογίζεται τὸ κέρδος τοῦ ὡρολογᾶ εἶναι οἱ 500 δραχμές, εἰς δὲ τὸ **δεύτερο παραδειγμα *ἀρχικὸν ποσὸν*** ἐπὶ τοῦ ὁποίου ὑπολογίζεται ἡ ζημία **εἶναι** τὰ 400 **αὐγά**.

Τὸ κέρδος ἢ ἡ ζημία, ποὺ ἀναλογεῖ στὸ ***ἀρχικὸ ποσόν***, λέγεται ***ποσοστόν***.

Στὸ πρῶτο παράδειγμα ***τὸ ποσοστὸν*** ἐπὶ τοῦ ἀρχικοῦ ποσοῦ εἶναι αἱ 100 δραχμαί, εἰς δὲ τὸ δεύτερον παράδειγμα τὸ ***ποσοστὸν*** ἐπὶ τοῦ ἀρχικοῦ ποσοῦ τῶν 400 αὐγῶν εἶναι τὰ 20 αὐγά.

Τὸ % (τόσον τοῖς ἑκατὸν) ἢ τὸ ‰ (τόσον τοῖς χιλίοις), δὲν χρησιμοποιεῖται μόνο γιὰ νὰ ὑπολογίζεται τὸ κέρδος ἢ ἡ ζημία, ἀλλὰ καὶ σὲ πολλὲς ἄλλες περιπτώσεις Π. χ. οἱ φόροι ποὺ ἐπιβάλλει τὸ κράτος εἶναι ***τόσον τοῖς ἑκατὸν*** (π.χ. 4 %) ἐπὶ τοῦ εἰσοδήματος. Ἡ ***ἔκπτωσις*** (σκόντο) ἐπὶ τῆς ἀξίας τῶν ἐμπορευμάτων, ποὺ κάνουν οἱ ἔμποροι ὅταν διαλύουν τὸ κατάστημά των, ὑπολογίζεται μὲ ***τόσο τοῖς ἑκα-***

τὸν (π. χ. 10 %). ***Οἱ Ἀσφάλειες*** Πυρὸς καὶ Θαλάσσης κ.τ.λ. ὑπολογίζονται ***σὲ τόσο τοῖς χιλίοις*** (π. χ. 2 ‰). ***Ἡ Μεσιτεία***, δηλ. ἡ ἀμοιβὴ ποὺ παίρνει ὁ μεσίτης, ὅταν διαπραγματεύεται τὴν ἀγορὰ ἢ τὴν πώλησι ἑνὸς ἐμπορεύματος, ὑπολογίζεται ***σὲ τόσον τοῖς ἑκατὸν*** (π.χ. 2 %) κ.τ.λ.

Τὰ προβλήματα, στὰ ὁποῖα ζητεῖται νὰ βρεθῇ τὸ ποσοστὸν ἢ ὅταν δίδεται τὸ ποσοστὸν καὶ ζητεῖται νὰ βρεθῇ ἄλλο ποσόν, λέγονται προβλήματα Ποσοστῶν.

Τὰ προβλήματα τῶν ποσοστῶν λύνονται ὅπως καὶ τὰ προβλήματα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν.

Πρόβλημα 1ον: Ἕνας βιβλιοπώλης ἀγόρασε σχολικὰ βιβλία ἀξίας 150 δραχμῶν. Ἔπειτα τὰ πούλησε μὲ κέρδος 20 % ἐπὶ τῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς. Πόσες δραχμὲς ἐκέρδισε;

Κατάταξις:

στὶς 100 δραχμὲς κερδίζει 20 δραχ.
στὶς 150 » » X »

Ἐπειδὴ τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα, βρίσκομε: $X = 20 \times \frac{150}{100} =$
$= 30$ δραχμές.

Πρόβλημα 2ον: Ἕνας ἔμπορος ἀσφάλισε τὸ ἐμπόρευμά του ἐναντίον τοῦ κινδύνου πυρὸς πρὸς 2 ‰ καὶ ἐπλήρωσε γιὰ ἀσφάλιστρα 35 δραχμές. Ποία ἦτο ἡ ἀξία τοῦ ἐμπορεύματος;

Κατάταξις:

γιὰ ἀξία 1000 δραχμῶν ἐπλήρωσε 2 δραχ.
» » X » » 35 »

$$X = 1000 \times \frac{35}{2} = 17.500 \text{ δραχμές.}$$

Πρόβλημα 3ον: Ὁ πληθυσμὸς μιᾶς πόλεως ἦτο πρὶν τοῦ πολέμου 12.000 κάτοικοι. Τώρα εἶναι 15.000. Πόσον τοῖς ἑκατὸν αὐξήθηκε ὁ πληθυσμός της;

Κατάταξις:

Οἱ 12.000 κάτοικοι αὐξήθηκαν κατὰ 3.000 κάτ.
Οἱ 1.000 » » » X »

$$X = 3.000 \times \frac{100}{12.000} = 25\ \%.$$

Παρατήρησις. Στὴν κατάταξι τῶν προβλημάτων αὐτῶν πρέπει νὰ προσέχωμε νὰ βάζωμε τὰ ὁμοειδῆ ποσὰ στὴν αὐτὴ στήλη.

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν

414. Ἕνα σπίτι ποὺ ἄξιζε 300 λίρες ἐπωλήθη 10 ‰ λιγώτερο ἀπὸ τὴν ἀξία του. Πόσες λίρες ἐπωλήθη;

415. Τὸ βιβλίο τῆς γεωγραφίας ἀξίζει 8 δραχμὲς καὶ ὁ βιβλιοπώλης τὸ πωλεῖ 10 δραχμές. Πόσο τοῖς ἑκατὸν ἐπὶ τῆς ἀξίας του κερδίζει;

416. Σ' ἕνα σχολεῖο, ποὺ ἔχει 420 μαθητάς, παίρνουν συσσίτιο τὰ 30 % τῶν μαθητῶν. Πόσοι μαθηταὶ παίρνουν συσσίτιο;

417. Τὸ ἀγελαδινὸ γάλα ἀποδίδει 7 % βούτυρο. Ἀπὸ πόσες ὀκάδες γάλα θὰ βγοῦν 17,5 ὀκάδες βούτυρο;

418. Ἕνας βοσκὸς εἶχε 350 πρόβατα. Ἔπειτα ἀγόρασε ἄλλα 70. Πόσο τοῖς ἑκατὸν αὐξήθηκε τὸ κοπάδι του;

419. Ἕνας ἀσφάλισε τὸ σπίτι του ποὺ ἀξίζει 116.500 δραχμὲς πρὸς 2 ‰ τὸ χρόνο. Πόσες δραχμὲς πληρώνει γιὰ ἀσφάλιστρα τὸ χρόνο;

420. Οἱ ἐλιὲς ἀποδίδουν 15 % λάδι. Πόσο λάδι θὰ βγῆ ἀπὸ 820 ὀκάδες ἐλιές;

421. Τὸ θαλασσινὸ νερὸ περιέχει 2,5 % τοῦ βάρους του ἀλάτι. Πόσες ὀκάδες ἀλάτι περιέχουν 4 τόννοι θαλασσινοῦ νεροῦ; (ὁ τόννος $= 781\frac{1}{4}$ ὀκ.).

422. Ἡ ἔκτασις τῆς Ἑλλάδος εἶναι 132 000 τετρ. χιλιόμετρα. Ἀπὸ αὐτὰ τὰ 20,8 % εἶναι χωράφια καὶ τὰ 8,5 % δάση. Πόσα τετραγωνικὰ χιλιόμετρα εἶναι χωράφια καὶ πόσα δάση;

423. Ἕνας ὑπάλληλος ἐμπορικοῦ καταστήματος ἐκτὸς ἀπὸ τὸ μισθό του παίρνει ποσοστὰ 3 % ἀπὸ τὰ κέρδη. Τὸ κατάστημα σὲ ἕνα μῆνα εἶχε κέρδη 4.500 δραχμές. Πόσες δραχμές, ἐκτὸς τοῦ μισθοῦ του, θὰ πάρη ὁ ὑπάλληλος αὐτὸν τὸ μῆνα;

424. Ἕνας ἐργάτης παίρνει ἡμερομίσθιο 35 δραχμές, ἀλλὰ τοῦ γίνεται κράτησις 4 % γιὰ τὶς κοινωνικὲς ἀσφαλίσεις. Τί καθαρὸ ποσὸ θὰ πάρη σὲ ἕνα μῆνα, ἂν τὸ μῆνα αὐτὸν ἐργασθῆ 26 ἡμέρες;

425. Ἕνας ἔμπορος πωλεῖ τὸν πῆχυ ἑνὸς ὑφάσματος 18.60 δραχμὲς καὶ κερδίζει 3.60 δραχμές. Πόσο τοῖς ἑκατὸν ἐπὶ τῆς ἀγορᾶς κερδίζει;

426. Ἕνας ἔμπορος πωλεῖ τὰ ὑφάσματα μὲ ἔκπτωσι

15 °/₀ ἐπὶ τῆς τιμῆς ποὺ εἶναι γραμμένη πάνω σ' αὐτά. Πόσο πρέπει νὰ πληρώσωμε τὸν πῆχυ ἑνὸς ὑφάσματος, ἐπάνω στὸ ὁποῖο εἶναι γραμμένη ἡ τιμὴ 14 δραχμές;

427. Ἕνας ἔμπορος ἀγόρασε 185 ὀκάδες λάδι πρὸς 12.30 δραχμὲς τὴν ὀκᾶ. Ἡ τιμὴ ὅμως τοῦ λαδιοῦ ἔπεσε καὶ ὁ ἔμπορος ἀναγκάστηκε νὰ τὸ πωλήση μὲ ζημία 15 °/₀ ἐπὶ τῆς ἀγορᾶς. Πόσες δραχμὲς ἐζημιώθη;

428. Ἕνας λαδέμπορος πωλεῖ τὸ λάδι προς 13.20 δραχμὲς τὴν ὀκᾶ καὶ κερδίζει 10 °/₀ ἐπὶ τῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς του. Πόσες δραχμὲς τὸ ἀγόρασε τὴν ὀκᾶ;

429. Ὁ καφὲς κοστίζει στὸν παντοπώλη 63 δραχμὲς ἡ ὀκᾶ. Πόσο πρέπει νὰ πωλῆ τὴν ὀκᾶ γιὰ νὰ κερδίζη 12 °/₀;

430. Ἕνας ἀγόρασε ἕνα χωράφι 2650 τετραγ. μέτρα πρὸς 2.60 δραχμὲς τὸ τετραγ. μέτρο. Ἔπειτα πούλησε τὸ χωράφι 7 579 δραχμές. Πόσο τοῖς ἑκατὸν ἐκέρδισε;

431. Ἕνας ὑπάλληλος, ποὺ παίρνει μισθὸ 1.400 δραχμες, πληρώνει γιὰ ἐνοίκιο τοῦ σπιτιοῦ του 210 δραχμές. Πόσο τοῖς ἑκατὸν ἐπὶ τοῦ μισθοῦ του πληρώνει γιὰ ἐνοίκιο;

432. Ἡ Ἑλλὰς τὸ 1940 εἶχε πληθυσμὸ περίπου 6.500.000 κατοίκους. Κατὰ τὴν περίοδο τῆς Κατοχῆς (1941—1944) σκοτώθηκαν ἢ πέθαναν ἀπὸ τὴν πεῖνα, τὶς στερήσεις καὶ τὶς καταπιέσεις τοῦ ἐχθροῦ 500.000 Ἕλληνες. Πόσοι τοῖς ἑκατὸν ἐπὶ τοῦ πληθυσμοῦ πέθαναν ἢ σκοτώθηκαν;

433. Ὁ πληθυσμὸς ὁλοκλήρου τῆς γῆς εἶναι 2.100.000.000 κάτοικοι. Ἀπὸ αὐτοὺς 810.000.000 εἶναι χριστιανοί. Πόσοι τοῖς ἑκατὸν ἐπὶ τοῦ πληθυσμοῦ τῆς γῆς εἶναι χριστιανοί;

434. Ὁ πληθυσμὸς τῆς Στερεᾶς Ἑλλάδος καὶ τῆς Εὐβοίας κατὰ τὴν Ἀπογραφὴ τοῦ 1928 ἦτο 1.592.842 κάτοικοι. Ἀπὸ αὐτοὺς 795.300 ἦσαν ἄρρενες. Πόσο τοῖς ἑκατὸν ἦσαν ἄρρενες κάτοικοι;

435. Ἡ μπαρούτη ἀποτελεῖται ἀπὸ 75 °/₀ νίτρο, 10 °/₀ θειάφι καὶ 15 °/₀ κάρβουνο. Πόση μπαρούτη μπορεῖ νὰ γίνη μὲ 825 ὀκάδες νίτρο, ὅταν ὑπάρχη ἄφθονη ποσότητα ἀπὸ θειάφι καὶ κάρβουνο;

436. Ἕνας μεσίτης πῆρε γιὰ μεσιτεία πρὸς 2 °/₀ ἀπὸ τὴν πώλησι ἑνὸς σπιτιοῦ 580 δραχμές. Πόσες δραχμὲς πουλήθηκε τὸ σπίτι;

437. Στοὺς μισθοὺς τῶν δημοσίων ὑπαλλήλων κάνουν κραήσεις. Ένας ὑπάλληλος, μετὰ τὴν ἀφαίρεσι τῶν κρατήσεων ,2 % ἐπὶ τοῦ μισθοῦ του, παίρνει καθαρὸ μισθὸ 1 271.20 δραχμές. Πόσος εἶναι ὁ μισθός του μαζὶ μὲ τὶς κρατήσεις;

438. Ἕνας εἶχε 5 ξύλινα κιβώτια γεμᾶτα σαπούνι, ποὺ τὸ καθένα ἐζύγιζε 24 ὀκάδες. Τὸ βάρος τοῦ κάθε κιβωτίου ἦτο τὰ 8 % τοῦ μικτοῦ βάρους. Ἔπειτα ἀπὸ λίγον καιρὸ ἕνεκα τῆς ξηρασίας τὸ σαπούνι ἐφύρανε κατὰ 5 % τοῦ ἀρχικοῦ βάρους του. Πόσες ὀκάδες ζυγίζουν τὰ 5 κιβώτια; Καὶ πόσες ὀκάδες ζυγίζει τὸ σαπούνι ποὺ περιέχουν;

439. Σὲ μιὰ πόλι, ποὺ εἶχε πληθυσμὸ 27.000 κατοίκους, οἱ γεννήσεις σὲ ἕνα ἔτος ἔφθασαν 25 ‰ καὶ οἱ θάνατοι 12 ‰ ἐπὶ τοῦ πληθυσμοῦ. Κατὰ πόσους κατοίκους αὐξήθηκε ὁ πληθυσμὸς τῆς πόλεως;

440. Ὁ μισθὸς ἑνὸς ὑπαλλήλου, ποὺ ἦτο 800 δραχμές αὐξήθηκε κατὰ τὰ $\frac{2}{5}$ αὐτοῦ. Πόσο τοῖς ἑκατὸν ἐπὶ τοῦ ἀρχικοῦ μισθοῦ ἔγινε αὔξησις;

441. Ἕνας παντοπώλης ἀγόρασε 80 ὀκάδες ζάχαρη μὲ 1.000 δραχμές. Πόσο πρέπει νὰ πωλῇ τὴν ὀκᾶ γιὰ νὰ κερδίζῃ 15 % ἐπὶ τῆς ἀξίας της;

442. Τὰ 21 % τοῦ ἀτμοσφαιρικοῦ ἀέρος εἶναι ὀξυγόνον. Πόσα κυβικὰ μέτρα ὀξυγόνο περιέχει μία αἴθουσα διδασκαλίας, ποὺ ἔχει μῆκος 7 μέτρα, πλάτος 5 μέτρα καὶ ὕψος 4,2 μέτρα;

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΟΚΟΥ

Πολλὲς φορὲς οἱ ἄνθρωποι, ὅταν δὲν ἔχουν χρήματα γιὰ νὰ κάνουν τις δουλειές των, δανείζονται χρήματα εἴτε ἀπὸ τὶς τράπεζες, εἴτε ἀπὸ ἄλλους ἀνθρώπους.

Ἐκεῖνος ποὺ δανείζει χρήματα λέγεται ***δανειστὴς*** καὶ ἐκεῖνος ποὺ δανείζεται ***ὀφειλέτης***.

Καθὼς ξαίρομε, ὅταν ἕνας νοικιάση ἕνα σπίτι γιὰ νὰ κατοικήση ἢ ἕνα χωράφι γιὰ νὰ τὸ καλλιεργήση, πληρώνει στὸν ἰδιοκτήτη ἐνοίκιο. Ἔτσι καὶ ὅταν ἕνας δανεισθῇ χρήματα, πληρώνει στὸ δανειστή του ἕνα ποσὸ χρημάτων γιὰ ἐνοίκιο τῶν χρημάτων ποὺ δανείστηκε.

Παράδειγμα: Ὁ Γεώργιος Παπαδόπουλος ἐδανείσθη ἀπὸ τὸν Νικόλαον Γεωργιάδην 800 δραχμὲς καὶ ὑπεσχέθη νὰ τοῦ ἐπιστρέψη μετὰ 6 μῆνες 950. Δηλ. ὁ δανειστὴς Νικ. Γεωργιάδης θὰ πάρη ἀπὸ τὸν ὀφειλέτη του μετὰ 6 μῆνες 150 δραχμὲς παραπάνω ἀπὸ τὰ χρήματα ποὺ τοῦ ἐδάνεισε, γιὰ ἐνοίκιο τῶν χρημάτων του. Οἱ 150 δραχμὲς ποὺ πῆρε ὁ δανειστὴς λέγονται **τόκος.**

Ὥστε :

Τόκος λέγεται τὸ κέρδος ποὺ παίρνει ὁ δανειστὴς ἀπὸ τὸν ὀφειλέτη γιὰ τὰ χρήματα ποὺ τοῦ δάνεισε γιὰ ὡρισμένο χρόνο.

Τὸ ποσὸ ποὺ δανείσθηκε ὁ ὀφειλέτης, δηλαδὴ οἱ 800 δραχμές, λέγεται **κεφάλαιον.**

Ὥστε :

Κεφάλαιον λέγεται τὸ ποσὸ τῶν χρημάτων ποὺ δανείζεται ἢ δανείζει ἕνας.

Ἐπίσης στὸ παράδειγμα βλέπομε ὅτι τὸ κεφάλαιο ἔμεινε στὰ χέρια τοῦ ὀφειλέτου 6 μῆνες.

Οἱ 6 μῆνες, ποὺ πέρασαν ἀπὸ τὴν ἡμέρα ποὺ ἐδανείσθη τὸ κεφάλαιο μέχρι τὴν ἡμέρα ποὺ ἐπεστράφη στὸ δανειστή, λέγεται **χρόνος.**

Ὥστε :

Χρόνος λέγεται τὸ χρονικὸ διάστημα ποὺ τὸ κεφάλαιο μένει δανεισμένο στὸν ὀφειλέτη.

Ὁ τόκος ὑπολογίζεται μὲ βάσι τὸν συμφωνούμενο τόκο τῶν 100 δραχμῶν σὲ ἕνα ἔτος. Δηλ. ἂν δανεισθῆ ἕνας χρήματα θὰ συμφωνήση πόσον τόκο θὰ δίνη σὲ κάθε 100 δραχμὲς γιὰ ἕνα ἔτος. Ἂς ὑποθέσωμε ὅτι συμφώνησαν νὰ δίνη 12 δραχμὲς τόκο γιὰ κάθε 100 δραχμὲς σὲ ἕνα χρόνο, ὁ τόκος αὐτὸς λέγεται **επιτόκιο** καὶ γράφεται ἔτσι : 12 %.

Ὥστε :

Ἐπιτόκιον λέγεται ὁ τόκος τῶν 100 δραχμῶν σὲ ἕνα ἔτος.

Στὰ προβλήματα, λοιπόν, τοῦ τόκου διακρίνομε τέσσερα ποσά : 1) τὸ κεφάλαιο, 2) τὸν τόκο, 3) τὸν χρόνο καὶ 4) τὸ ἐπιτόκιο.

Ἀπὸ τὰ τέσσερα αὐτὰ ποσὰ τὰ τρία μᾶς εἶναι γνωστὰ καὶ ζητοῦμε τὸ τέταρτο.

Τὰ προβλήματα τοῦ τόκου λύνονται μὲ τὴ σύνθετο μέθοδο τῶν τριῶν.

Προβλήματα στὰ ὁποῖα ζητεῖται ὁ τόκος

Ὁ χρόνος σὲ ἔτη

Πρόβλημα 1ο. — Πόσο τόκο φερει κεφάλαιο 500 δραχμῶν σὲ 3 ἔτη μὲ ἐπιτόκιο 10 %;

Κατάταξις

Κεφάλαιο	100	δραχ. σὲ	1	ἔτος	φέρει τόκον	10	δραχ.
	500		3	ἔτη	» »	X	»

Σύγκρισις : 1) ***κεφαλαίου καὶ τόκου*** :

Κεφάλαιο 100 δραχμῶν φέρει τόκο 10 δραχμῶν. Διπλάσιο κεφάλαιο θὰ φέρῃ τόκο διπλάσιο (ποσὰ ἀνάλογα).

2) ***χρόνου καὶ τόκου*** :

Σὲ ἕνα ἔτος ὁ τόκος τῶν 100 δραχμῶν εἶναι 10 δραχμές. Σὲ 2 ἔτη ὁ τόκος τῶν ἰδίων δραχμῶν θὰ εἶναι διπλάσιος (ποσὰ ἀνάλογα).

Ἄρα θὰ ἔχωμε $X = 10 \times \frac{500}{100} \times \frac{3}{1} =$

$$= \frac{10 \times 500 \times 3}{100} = 150 \text{ δραχμές.}$$

β΄. Ὁ χρόνος σὲ μῆνες

Πρόβλημα 2ο. — Πόσον τόκο φέρουν 800 δραχμὲς σὲ 3 μῆνες πρὸς 15 %;

Κατάταξις :

100	δρχ. σὲ	12	μῆν.	φέρουν	τόκ.	15	δρχ.
800	»	3	»	»	»	X	»

Ἐπειδὴ τὰ ποσὰ κεφάλαιο καὶ χρόνος συγκρινόμενα πρὸς τὸν τόκο εἶναι ἀνάλογα, θὰ ἔχωμε :

$$X = 15 \times \frac{800}{100} \times \frac{3}{12} = \frac{15 \times 800 \times 3}{1200} = 30 \text{ δραχ.}$$

γ΄. Ὁ χρόνος σὲ ἡμέρες

Πρόβλημα 3ο. — Πόσον τόκο φέρουν 600 δραχμὲς σὲ 20 ἡμέρες πρὸς 12 %;

Κατάταξις :

100	δρχ. σὲ	360	ἡμέρ.	φέρουν	τόκο	12	δρχ.
600	» »	20	»	»	»	X	»

Σημ.— Τὸ ἔτος ὑπολογίζεται σὲ 360 ἡμέρες.

Ἐπειδὴ τὰ ποσὰ κεφάλαιο καὶ χρόνος συγκρινόμενα πρὸς τὸν τόκο εἶναι ἀνάλογα θὰ ἔχωμε :

$$X = 12 \times \frac{600}{100} \times \frac{20}{360} = \frac{12 \times 600 \times 20}{36.000} = 4 \text{ δραχμές.}$$

Ἀπὸ τὴν λύσι τῶν παραπάνω τριῶν προβλημάτων βλέπομεν ὅτι: ***Γιὰ νὰ βροῦμε τὸν τόκο πολλαπλασιάζομε τὰ τρία ἄλλα ποσὰ*** (τὸ κεφάλαιο, τὸν χρόνο καὶ τὸ ἐπιτόκιο). ***Ἔπειτα τὸ γινόμενο τὸ διαιροῦμε διὰ τοῦ 100 ἂν ὁ χρόνος εἶναι σὲ ἔτη, διὰ 1200 ἂν ὁ χρόνος εἶναι σὲ μῆνες καὶ διὰ 36.000 ἂν ὁ χρόνος εἶναι σὲ ἡμέρες.***

Ἐὰν παραστήσωμε τὸν τόκο μὲ τὸ γράμμα Τ, τὸ κεφάλαιο μὲ τὸ γράμμα Κ, τὸ ἐπιτόκιο μὲ τὸ γράμμα Ε, τὸν χρόνο σὲ ἔτη μὲ τὸ γράμμα Χ, τὸν χρόνο σὲ μῆνες μὲ τὸ γράμμα Μ καὶ τὸν χρόνο σὲ ἡμέρες μὲ τὸ γράμμα Η, θὰ ἔχωμε, σύμφωνα μὲ ὅσα μάθαμε, τὴν ἰσότητα:

$$\mathrm{T} = \frac{\mathrm{E \cdot K \cdot X}}{100} \quad \text{ὅταν ὁ χρόνος εἶναι ἔτη.}$$

$$\mathrm{T} = \frac{\mathrm{E \cdot K \cdot M}}{1.200} \quad \text{ὅταν ὁ χρόνος εἶναι μῆνες.}$$

$$\mathrm{T} = \frac{\mathrm{E \cdot K \cdot H}}{36.000} \quad \text{ὅταν ὁ χρόνος εἶναι ἡμέρες.}$$

(Ἀντὶ γιὰ τὸ σημεῖο × τοῦ πολλαπλασιασμοῦ βάζομε μία τελεία ποὺ εἶναι τὸ ἴδιο).

Ἡ ἰσότης αὐτὴ λέγεται **τύπος** τοῦ τόκου. Μὲ τὸν τύπο αὐτὸν λύνομε εὔκολα κάθε πρόβλημα στὸ ὁποῖο ζητεῖται ὁ τόκος, ἂν ἀντὶ τῶν γραμμάτων Ε, Κ, (Χ ἢ Μ ἢ Η), βάλωμε τοὺς ἀριθμοὺς τοῦ προβλήματος καὶ ὕστερα διαιρέσωμε διὰ 100 ἢ 1.200 ἢ 36.000.

Παράδειγμα: — Πόσον τόκο φέρουν 800 δραχμὲς πρὸς 10%
α) σε 3 ἔτη;
β) σὲ 9 μῆνες;
καὶ γ) σὲ 27 ἡμέρες;

Λύσις Α'. $\mathrm{T} = \frac{\mathrm{E \cdot K \cdot X}}{100} = \frac{10 \times 800 \times 3}{100} = 240$ δραχ.

Λύσις Β'. $\mathrm{T} = \frac{\mathrm{E \cdot K \cdot M}}{1.200} = \frac{10 \times 800 \times 9}{1.200} = 60$ δραχ.

Λύσις Γ'. $\mathrm{T} = \frac{\mathrm{E \cdot K \cdot H}}{36.000} = \frac{10 \times 800 \times 27}{36.000} = 6$ δραχ.

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

443. Πόσον τόκο φέρουν 348 δραχμὲς σὲ 4 ἔτη πρὸς 12%;

444. Πόσον τόκο φέρουν 7.200 δραχμὲς σὲ 8 μῆνες πρὸς 9%;

445. Πόσον τόκο φέρουν 240 δραχμὲς σὲ 3 ἔτη καὶ 8 μῆνες πρὸς 6%;

(Τὸν συμμιγῆ ἀριθμὸ 3 ἔτη καὶ 8 μῆνες τὸν τρέπομε σὲ μῆνες, δηλ. 3 ἔτη καὶ 8 μῆνες = 44 μῆνες).

446. Πόσον τόκο φέρουν 630 δραχμὲς σὲ 20 ἡμέρες πρὸς 15 %;

447. Πόσον τόκο φέρουν 250 δραχμὲς σὲ 1 ἔτος, 5 μῆνες καὶ 12 ἡμέρες πρὸς 9 %;

(Τρέπομε τὸν συμμιγῆ σὲ ἡμέρες).

448. Κάνε μόνος σου 3 ὅμοια προβλήματα. Στὸ ἕνα ὁ χρόνος νὰ εἶναι ἔτη, στὸ ἄλλο ὁ χρόνος νὰ εἶναι μῆνες καὶ στὸ τρίτο ὁ χρόνος νὰ εἶναι ἡμέρες.

Προβλήματα στὰ ὁποῖα ζητεῖται τὸ κεφάλαιο.

Πρόβλημα 1ο. — Ποιὸ κεφάλαιο σὲ 3 ἔτη πρὸς 10 % φέρει τόκο 450 δραχμές;

Κατάταξις :

Κεφάλαιο	100	δρχ.	σὲ	1	ἔτ.	φέρει	τόκο	10	δραχμὲς
»	X	»	»	3	»	»	»	450	»

Σύγκρισις: 1) ***τόκου καὶ κεφαλαίου.***

Τόκο 10 δραχμῶν φέρει κεφάλαιο 100 δραχ., διπλάσιο τόκο θὰ φέρῃ διπλάσιο κεφάλαιο (ποσὰ ἀνάλογα).

2) ***χρόνου καὶ κεφαλαίου.***

Σὲ 1 ἔτος φέρει ἕνα τόκο κεφάλαιο 100 δρχ. Σὲ 2 ἔτη τὸν ἴδιο τόκο θὰ φέρῃ τὸ μισὸ κεφάλαιο.

Ἄρα θὰ ἔχωμε :

$$X = 100 \times \frac{1}{3} \times \frac{450}{10} = \frac{100 \times 450}{3 \times 10} = 1.500 \text{ δραχ.}$$

Πρόβλημα 2ο. — Πόσον κεφάλαιο πρέπει νὰ καταθέσω στὸ Ταμιευτήριο πρὸς 6 %, γιὰ νὰ πάρω σὲ 5 μῆνες τόκο 200 δραχμές;

Κατάταξις :

100	δρχ.	σὲ	12	μῆνες	φέρουν	τόκο	6	δρχ.
X	»	»	5	»	»	»	200	»

Ὅπως εἴδαμε, τὰ ποσὰ **τόκος** καὶ **κεφάλαιο** εἶναι ἀνάλογα. Τὰ ποσὰ **χρόνος** καὶ **κεφάλαιο** εἶναι ἀντίστροφα.

Ἄρα θὰ ἔχωμε :

$$X = 100 \times \frac{12}{5} \times \frac{200}{6} = \frac{100 \times 12 \times 200}{5 \times 6} =$$

$$= \frac{1.200 \times 200}{5 \times 6} = 8.000 \text{ δραχ.}$$

Πρόβλημα 3ο. — Ποιὸ κεφάλαιο θὰ φέρῃ σὲ 25 ἡμέρες πρὸς 20 % τόκο 5.000 δραχμῶν ;

Κατάταξις :

$$\frac{100}{X}\ \text{δρχ.}\quad \frac{360}{25}\ \text{ἡμ.}\quad \frac{20}{5.000}\ \text{δρχ.}$$

Τὰ ποσὰ **τόκος** καὶ **κεφάλαιο** εἶναι ἀνάλογα. Τὰ ποσὰ **χρόνος** καὶ **κεφάλαιο** εἶναι ἀντίστροφα.

Ἄρα θὰ ἔχωμε :

$$X = 100 \times \frac{350}{25} \times \frac{5.000}{20} = \frac{100 \times 360 \times 5.000}{25 \times 20} =$$

$$= \frac{36.000 \times 5.000}{25 \times 20} = 360.000 \text{ δρχ.}$$

Ἀπὸ τὴ λύσι τῶν παραπάνω τριῶν προβλημάτων βλέπομε ὅτι :

Α΄) ***Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ κεφάλαιο, ὅταν ὁ χρόνος εἶναι σὲ ἔτη, πολλαπλασιάζομε τὸν τόκο ἐπὶ 100 καὶ ὅ,τι βροῦμε τὸ διαιροῦμε διὰ τοῦ γινομένου τῶν δύο ἄλλων ποσῶν*** (χρόνου καὶ ἐπιτοκίου).

Β΄) ***Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ κεφάλαιο, ὅταν ὁ χρόνος εἶναι σὲ μῆνες, πολλαπλασιάζομε τὸν τόκο ἐπὶ 1200 καὶ ὅ,τι βροῦμε τὸ διαιροῦμε διὰ τοῦ γινομένου τῶν δύο ἄλλων ποσῶν.***

Γ΄) ***Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ κεφάλαιο, ὅταν ὁ χρόνος εἶναι σὲ ἡμέρες, πολλαπλασιάζομε τὸν τόκο ἐπὶ 36.000 καὶ ὅ,τι βροῦμε τὸ διαιροῦμε διὰ τοῦ γινομένου τῶν δύο ἄλλων ποσῶν.***

Ὁ τύπος, λοιπόν, τοῦ κεφαλαίου εἶναι :

$$K = \frac{100 \cdot T}{X \cdot E} \text{ ὅταν ὁ χρόνος εἶναι ἔτη, ἢ}$$

$$K = \frac{1200 \cdot T}{M \cdot E} \text{ ὅταν ὁ χρόνος εἶναι μῆνες, ἢ}$$

$$K = \frac{36.000 \cdot T}{H \cdot E} \text{ ὅταν ὁ χρόνος εἶναι ἡμέρες.}$$

Μὲ τὸν **τύπο** αὐτὸν λύνομε εὔκολα κάθε πρόβλημα, στὸ ὁποῖο ζητεῖται τὸ κεφάλαιο ἂν ἀντὶ τῶν γραμμάτων βάλωμε τοὺς ἀριθμοὺς τοῦ προβλήματος καὶ ἐκτελέσωμε τὶς πράξεις

Παράδειγμα : Πόσο κεφάλαιο πρέπει νὰ καταθέσωμε στὴν τράπεζα πρὸς 5 % γιὰ νὰ πάρωμε τόκο 40 δραχμές :

α) σὲ 2 ἔτη ;

β) σὲ 8 μῆνες ;

καὶ γ) σὲ 50 ἡμέρες ;

Λύσις Α΄. $K = \frac{100 \cdot T}{X \cdot E} = \frac{100 \times 40}{2 \times 5} = 400$ δραχμὲς

Λύσις Β΄. $K = \frac{1.200 \cdot T}{M \cdot E} = \frac{1.200 \times 40}{8 \times 5} = 1.200$ δραχμὲς

Λύσις Γ΄. $K = \frac{36.000 \cdot T}{H \cdot E} = \frac{36.000 \times 40}{50 \times 5} = 5.760$ δραχμὲς

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

449. Ποῖον κεφάλαιο, ἂν τοκισθῆ 3 ἔτη πρὸς 7,5 %, θὰ φέρη τόκο 81 δραχμές;

450. Ἕνας κατέθεσε στὴν Τράπεζα ἕνα ποσὸ χρημάτων πρὸς 6 %. Ἔπειτα ἀπὸ 8 μῆνες καὶ 20 ἡμέρες εἰσέπραξε 104 δραχμὲς τόκο. Πόσες δραχμὲς εἶχε καταθέσει στὴν Τράπεζα;

451. Πόσες δραχμὲς πρέπει νὰ τοκίση ἕνας πρὸς 15 % γιὰ νὰ πάρη τόκο ὕστερα ἀπὸ 9 μῆνες 180 δραχμές;

452. Ποῖον κεφάλαιο σὲ 1 ἔτος 5 μῆνες καὶ 20 ἡμέρες, ἂν τοκισθῆ πρὸς 12 % θὰ φέρη τόκο 318 δραχμές;

453. Κάνε μόνος σου τρία ὅμοια προβλήματα ποὺ νὰ ζητῆται τὸ κεφάλαιο. Στὸ ἕνα ὁ χρόνος νὰ εἶναι ἔτη, στὸ ἄλλο ὁ χρόνος νὰ εἶναι μῆνες καὶ στὸ τρίτο ὁ χρόνος νὰ εἶναι ἡμέρες.

Προβλήματα στὰ ὁποῖα ζητεῖται τὸ ἐπιτόκιο.

Πρόβλημα 1ο. — Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιο ἐτοκίσθη κεφάλαιο 6.000 δραχμῶν, τὸ ὁποῖον σὲ 4 ἔτη ἔφερε τόκο 2.400 δραχμές;

Κατάταξις

Κεφάλαιο	6.000	δρχ.	σὲ	4 ἔτ.	φέρει	τόκον	2.400	δραχμὲς
x	100	»	»	1 »	»	»	X	»

Σύγκρισις: 1) ***κεφαλαίου καὶ τόκου:***

Κεφάλαιο 6.000 **δραχμῶν** φέρει τόκον 2.400 δραχμές. Διπλάσιο κεφάλαιο θὰ φέρη διπλάσιο τόκο (ποσὰ ἀνάλογα).

2) ***χρόνου καὶ τόκου:***

Σὲ 4 ἔτη ὁ τόκος εἶναι 2.400 δραχμές. Σὲ 8 ἔτη ὁ τόκος εἶναι διπλάσιος (ποσὰ ἀνάλογα).

Ἄρα θὰ ἔχωμε:

$$X = 2.400 \times \frac{100}{6.000} \times \frac{1}{4} = \frac{100 \times 2.400}{4 \times 6.000} = 10\,\%$$

Πρόβλημα 2ο: Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον ἐτοκίσθη κεφάλαιον 500 δραχμῶν, τὸ ὁποῖον σὲ 9 μῆνες ἔφερε τόκο 60 δραχμές;

Κατάταξις

Κεφάλαιο	500	σὲ 9 μῆν.	φέρει	τόκο	60	δρχ.
»	100	» 12 »	»	»	X	»

Ἐπειδὴ τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα θὰ ἔχωμε:

$$X = 60 \times \frac{100}{500} \times \frac{12}{9} = \frac{1.200 \times 60}{9 \times 500} = 16\ \%.$$

Πρόβλημα 3ο: Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιο ἐτοκίσθη κεφάλαιο 1.000.000 δραχμῶν τὸ ὁποῖον σὲ 40 ἡμέρες ἔφερε τόκο 15.000 δρχ.;

Κατάταξις

Κεφάλαιο	1.000.000	δρχ.	σὲ	40	ἡμ.	φέρει τόκο	1.500	δρχ.
»	100	»	»	360	»	» »	X	

Ἐπειδὴ τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα θὰ ἔχωμε:

$$X = 15.000 \times \frac{100}{1.000.000} \times \frac{360}{40} = \frac{36.000 \times 15.000}{40 \times 1.000.000} = 13,5\%.$$

Ἀπὸ τὴ λύσι τῶν παραπάνω τριῶν προβλημάτων βλέπομε ὅτι:

Α΄) ***Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐπιτόκιο, ὅταν ὁ χρόνος εἶναι σὲ ἔτη, πολλαπλασιάζομε τὸν τόκο ἐπὶ 100 καὶ ὅ,τι βροῦμε τὸ διαιροῦμε διὰ τοῦ γινομένου τῶν δύο ἄλλων ποσῶν*** (κεφαλαίου καὶ χρόνου).

Β΄) ***Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐπιτόκιο, ὅταν ὁ χρόνος εἶναι σὲ μῆνες, πολλαπλασιάζομε τὸν τόκο ἐπὶ 1200 καὶ ὅ,τι βροῦμε τὸ διαιροῦμε διὰ τοῦ γινομένου τῶν δύο ἄλλων ποσῶν.***

Γ΄) ***Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐπιτόκιο, ὅταν ὁ χρόνος εἶναι σὲ ἡμέρες, πολλαπλασιάζομε τὸν τόκο ἐπὶ 36.000 καὶ ὅ,τι βροῦμε τὸ διαιροῦμε διὰ τοῦ γινομένου τῶν δύο ἄλλων ποσῶν.***

Ὁ τύπος, λοιπόν, τοῦ ἐπιτοκίου εἶναι:

$E = \dfrac{100 \cdot T}{X \cdot K}$ ὅταν ὁ χρόνος εἶναι ἔτη, ἢ

$E = \dfrac{1200 \cdot T}{M \cdot K}$ ὅταν ὁ χρόνος εἶναι μῆνες, ἢ

$E = \dfrac{36.000 \cdot T}{H \cdot K}$ ὅταν ὁ χρόνος εἶναι ἡμέρες.

Μὲ τὸν τύπο αὐτὸ λύνομε εὔκολα κάθε πρόβλημα στὸ ὁποῖο ζητεῖται τὸ ἐπιτόκιο ἄν, ἀντὶ τῶν γραμμάτων, βάλωμε τοὺς ἀριθμοὺς τοῦ προβλήματος καὶ ἐκτελέσωμε τὶς πράξεις.

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

454. Πρὸς ποῖο ἐπιτόκιο ἐτοκίσθη κεφάλαιο 450 δραχμῶν, τὸ ὁποῖον σὲ 6 ἔτη ἔφερε τόκο 270 δραχμές;

455. Πρὸς ποῖο ἐπιτόκιο ἐτοκίσθη κεφάλαιο 1.200 δραχμῶν, τὸ ὁποῖον σὲ 9 μῆνες καὶ 10 ἡμέρες ἔφερε τόκο 112 δραχμές;

456. Πρὸς ποῖο ἐπιτόκιο ἐτοκίσθη κεφάλαιον 3.000 δραχμῶν τὸ ὁποῖον σὲ 1 ἔτος, 2 μῆνες καὶ 20 ἡμέρες ἔφερε τόκο 330 δραχμές;

457. Ἕνας δανείστηκε 800 δραχμὲς καὶ ὑπεσχέθη μετα 5 μῆνες νὰ ἐπιστρέψη στὸ δανειστή του 900 δραχμὲς (δηλ. 100 δραχ. τόκο). Μὲ πόσο τοῖς ἑκατὸν ἐδανείσθη;

458. Τὸ σχολικὸ Ταμεῖο κατέθεσε στὸ Ταμιευτήριο 2.700 δραχμές. Μετὰ 6 μῆνες καὶ 20 ἡμέρες ἀπέσυρε τὰ χρήματα καὶ πῆρε γιὰ κεφάλαιο καὶ τόκο μαζὶ 2.760 δραχμές. Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιο δέχεται καταθέσεις τὸ Ταμιευτήριο;

459. Κάνε μόνος σου τρία ὅμοια προβλήματα, ποὺ νὰ ζητῆται τὸ ἐπιτόκιο. Στὸ ἕνα ὁ χρόνος νὰ εἶναι ἔτη, στὸ ἄλλο ὁ χρόνος νὰ εἶναι μῆνες καὶ στὸ τρίτο ὁ χρόνος νὰ εἶναι ἡμέρες.

Προβλήματα στὰ ὁποῖα ζητεῖται ὁ χρόνος.

Πρόβλημα 1ο: Σὲ πόσο χρόνο κεφάλαιο 1.500 δραχμῶν, ἂν τοκισθῇ πρὸς 8 %, φέρει τόκο 300. δραχμές;

Κατάταξις

Κεφ.	100	δρχ.	σὲ	360	ἡμ.	φέρει	τόκο	8	δρχ.
»	1.500	»	»	Χ	»	»		300	»

Σύγκρισις: 1) ***Κεφαλαίου καὶ χρόνου:***

Κεφάλαιο 100 δραχμῶν φέρει ἕνα τόκο σὲ 360 ἡμέρες. Διπλάσιο κεφάλαιο φέρει τὸν ἴδιο τόκο σὲ μισὲς ἡμέρες (ποσὰ ἀντίστροφα).

2) ***Τόκου καὶ χρόνου:***

Τόκο 8 δραχμὲς φέρει ἕνα κεφάλαιο σὲ 360 ἡμέρες. Διπλάσιο τόκο τὸ ἴδιο κεφάλαιο θὰ φέρῃ σὲ διπλάσιες ἡμέρες (ποσὰ ἀνάλογα).

Ἄρα θὰ ἔχωμε:

$$X = 360 \times \frac{100}{1.500} \times \frac{300}{8} = \frac{36.000 \times 300}{1.500 \times 8} = 900 \text{ ἡμ. ἢ}$$

900 : 30 = 30 μῆνες ἢ 2 ἔτη καὶ 6 μῆνες.

Ἀπὸ τὴ λύσι τοῦ προβλήματος αὐτοῦ βλέπομε ὅτι:

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ χρόνο, πολλαπλασιάζομε τὸν τόκο ἐπὶ 36.000, καὶ ὅ,τι βροῦμε τὸ διαιροῦμε διὰ τοῦ γινομένου τῶν δύο ἄλλων ποσῶν (κεφαλαίου καὶ ἐπιτοκίου).

Ὅπως βλέπομε, τὸν χρόνο τὸν βρίσκουμε πρῶτα σὲ ἡμέρες. Ἔπειτα διαιροῦμε τὶς ἡμέρες διὰ τοῦ 30 καὶ βρίσκουμε μῆνες καὶ τέλος τοὺς μῆνες τοὺς διαιροῦμε διὰ 12 καὶ βρίσκουμε ἔτη.

Ὁ τύπος, λοιπόν, τοῦ Χρόνου εἶναι :

$$Η = \frac{36.000 \cdot Τ}{Κ \quad Ε}$$ ὁ χρόνος βρίσκεται σὲ ἡμέρες.

Παράδειγμα : Σὲ πόσο χρόνο κεφάλαιο 560 δραχμῶν ἂν τοκισθῆ πρὸς 10 % θὰ φέρη τόκο 21 δραχμές ;

Λύσις : $Η = \frac{36.000 \cdot Τ}{Κ \cdot Ε} = \frac{36.000 \times 21}{560 \times 10} = 135$ ἡμέρες ἢ (135 : 30) 4 μῆνες καὶ 15 ἡμέρες

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

460. Γιὰ πόσο χρόνο πρέπει νὰ τοκίσωμε κεφάλαιο 650 δραχμῶν πρὸς 15 %,γιὰ νὰ πάρωμε τόκο 130 δραχμές ;

461. Σὲ πόσο χρόνο 480 δραχμές, ἂν τοκισθοῦν πρὸς 8 %, γίνονται μὲ τοὺς τόκους των 600 δραχμές ;

462. Ἕνας ἔμπορος ἐδανείσθη 2.500 δραχμὲς πρὸς 16 % καὶ ἐξώφλησε τὸ δάνειο μὲ 2.800 δραχμές. Πόσο χρόνο διήρκεσε τὸ δάνειο ;

463. Σὲ πόσο χρόνο ἕνα κεφάλαιο 450 δραχμῶν, ἂν τοκισθῆ πρὸς 12,5 %,θὰ γίνη μαζὶ μὲ τοὺς τόκους 500 δραχμές ;

464. Κάνε μόνος σου ἕνα πρόβλημα, ποὺ νὰ ζητῆται ὁ χρόνος.

Ἀνακεφαλαίωσις

Τύποι τῶν προβλημάτων τοῦ τόκου.

1) $Τ = \frac{Κ.Ε.Χ.}{100}$ ἢ $\frac{Κ.Ε.Μ.}{1.200}$ ἢ $\frac{Κ.Ε.Η.}{36.000}$

2) $Κ = \frac{100 \cdot Τ}{Χ \cdot Ε}$ ἢ $\frac{1200 \cdot Τ}{Μ \cdot Ε}$ ἢ $\frac{36000 \cdot Τ}{Η \cdot Ε}$

3) $Ε = \frac{100 \cdot Τ}{Κ \cdot Χ}$ ἢ $\frac{1200 \cdot Τ}{Κ \cdot Μ}$ ἢ $\frac{36000 \cdot Τ}{Κ \cdot Η}$

4) $Η = \frac{36000 \cdot Τ}{Κ \cdot Ε}$

Ὥστε :

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸν τόκο, πολλαπλασιάζομε τὰ τρία ἄλλα ποσὰ καὶ ὅ,τι βροῦμε τὸ διαιροῦμε διὰ 100 ἢ 1200 ἢ 36000.

Γιὰ νὰ βροῦμε ὁποιοδήποτε ἄλλο ποσό, πολλαπλασιάζομε τὸν τόκο ἐπὶ 100 ἢ 1200 ἢ 36000 καὶ ὅ,τι βροῦμε τὸ διαιροῦμε διὰ τοῦ γινομένου τῶν δύο ἄλλων ποσῶν.

Προβλήματα

465. Ένας γεωργὸς δανείσθηκε 3.500 δραχμὲς γιὰ 2 ἔτη πρὸς 8 %. Ὅταν ἔληξε ἡ προθεσμία ὁ γεωργὸς ἔδωσε στὸ δανειστή του 725 ὀκάδες σιτάρι πρὸς 2.80 δραχμὲς τὴν ὀκᾶ. Πόσες δραχμὲς πρέπει νὰ τοῦ δώση ἀκόμη γιὰ νὰ ἐξοφλήση τὸ χρέος του;

466. Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιο πρέπει νὰ τοκισθοῦν 2.500 δραχμὲς γιὰ νὰ γίνουν μετὰ 1 ἔτος καὶ 6 μῆνες μαζὶ μὲ τὸν τόκο 2.800 δραχμές;

467. Ἕνας παίρνει κάθε 6 μῆνες ἀπὸ τὴν Τράπεζα 375 δραχμὲς ἀπὸ ἕνα ποσόν, ποὺ εἶχε καταθέσει πρὸς 5 %. Πόσο κεφάλαιο εἶχε καταθέσει;

468. Ἕνας ἔμπορος ἐδανείσθη τὴν 1 Φεβρουαρίου 3.600 δραχμὲς πρὸς 10 %. Τὴν 1ην Δεκεμβρίου τοῦ ἰδίου ἔτους ἐξώφλησε τὸ χρέος του. Πόσα ἐπλήρωσε γιὰ κεφάλαιο καὶ τόκους;

469. Ἕνας ἐπούλησε 5200 ὀκάδες κρασὶ πρὸς 2 δραχμὲς τὴν ὀκᾶ. Τὰ χρήματα ποὺ πῆρε τὰ ἐδάνεισε πρὸς 13 %. Πόσο τόκο θὰ πάρη μετὰ 4 μῆνες καὶ 24 ἡμέρες;

470. Ἕνας γεωργὸς πῆρε ἀπὸ τὴν Ἀγροτικὴ Τράπεζα στὶς 5 Μαρτίου δάνειο 2.500 δραχμῶν πρὸς 9 %, γιὰ νὰ καλλιεργήση τὰ κτήματά του. Στὶς 5 Ἰουνίου τοῦ ἑπομένου ἔτους ἐπέστρεψε τὰ χρήματα. Πόσα χρήματα ἐπέστρεψε μαζὶ μὲ τὸν τόκο;

471. Ἕνας ἐδανείσθη 5.000 δραχμὲς πρὸς 15 % γιὰ ἕνα ἔτος ἀλλὰ μετὰ 4 μῆνες ἔδωσε ἀπέναντι τοῦ χρέους του 2..000 δραχμές. Πόσες δραχμὲς πρέπει να δώση στὸ τέλος τοῦ ἔτους γιὰ νὰ ἐξοφλήση τὸ χρέος του;

472. Ἕνας ἔμπορος ἀγόρασε δύο τόπια ὕφασμα. Τὸ ἕνα, ποὺ ἦτο 85,5 πήχες, τὸ ἀγόρασε πρὸς 60 δραχμὲς τὸν πῆχυ καὶ τὸ ἄλλο, ποὺ ἦτο 60,5 πήχες, πρὸς 45 δραχμὲς τὸν πῆχυ. Τὴν ἀξία τῶν δύο ὑφασμάτων ἐσυμφώνησαν νὰ τὴν πληρώση ἔπειτα ἀπὸ 9 μῆνες πρὸς 8 %. Πόσες δραχμὲς θὰ πληρώση μαζὶ μὲ τοὺς τόκους γιὰ νὰ ἐξοφλήση τὸ χρέος του;

473. Ἕνας ἔμπορος ἐδανείσθη ἀπὸ τὴν Τράπεζα τὴν 10ην Αὐγούστου 1949 4.500 δραχμὲς καὶ τὴν 20ὴν Νοεμβρίου 1950 ἐπλήρωσε γιὰ νὰ ἐξοφλήση τὸ χρέος του γιὰ τόκο καὶ κεφάλαιο μαζὶ 5.100 δραχμές. Πρὸς πόσο τοῖς ἑκατὸν εἶχε κάνει τὸ δάνειο;

474. Ἕνας χωρικὸς ἐδανείσθη 1.500 δραχμὲς πρὸς 15 %, γιὰ νὰ ἀγοράση μία ἀγελάδα. Μετὰ 8 μῆνες ἔδωσε στὸ δανειστή του 450 ὀκάδες σιτάρι πρὸς 2.30 δραχμὲς τὴν ὀκᾶ. Πόσες δραχμὲς πρέπει νὰ τοῦ δώση ἀκόμη γιὰ νὰ ἐξοφλήση τὸ χρέος του μαζὶ μὲ τοὺς τόκους ;

475. Ἕνας εἰσπράττει ἀπὸ ἐνοίκιο σπιτιοῦ 145 δραχμὲς τὸν μῆνα. Ποῖο κεφάλαιο θὰ τοῦ ἔδινε τὸ ἴδιο εἰσόδημα, ἐὰν τοκιζόταν πρὸς 12 % ;

476. Ἕνας ἀγόρασε ἕνα οἰκόπεδο 450 τετρ. μέτρων πρὸς 10.50 δραχμὲς τὸ τετραγωνικὸ μέτρο. Ἐπλήρωσε τὸ $\frac{1}{3}$ τῆς ἀξίας ἀμέσως καὶ τὸ ὑπόλοιπο τὸ ἐπλήρωσε μετὰ 9 μῆνες μὲ τοὺς τόκους των πρὸς 12,5 %. Πόσες δραχμὲς ἐπλήρωσε ἀμέσως καὶ πόσες δραχμὲς μετὰ 9 μῆνες ;

477. Ἕνας ἐτόκισε 2.400 δραχμὲς πρὸς 6 % γιὰ 1 ἔτος καὶ 6 μῆνες. Πόσο κεφάλαιο ἔπρεπε νὰ τοκίση πρὸς 10 %, γιὰ νὰ εἰσπράξη τὸν ἴδιο τόκο στὸ αὐτὸ χρονικὸ διάστημα ;

478. Ἕνας ἐξώδεψε 30.000 δραχμὲς, γιὰ νὰ κτίση ἕνα σπίτι. Πόσο πρέπει νὰ τὸ ἐνοικιάση τὸ μῆνα, γιὰ νὰ ἔχη εἰσόδημα 8 % ἐπὶ τῶν χρημάτων ποὺ ἐξώδεψε ;

479. Ἕνας ἐδανείσθη χρήματα πρὸς 15 % καὶ μετὰ 2 ἔτη 3 μῆνες καὶ 10 ἡμέρες ἐπλήρωσε διὰ τόκον 1025 δραχμές. Πόσες δραχμὲς ἦτο τὸ κεφάλαιον ποὺ ἐδανείσθη ;

480. Ἕνας εἶχε 8.400 δραχμές. Ἀπὸ αὐτὲς ἐδάνεισε τὰ $\frac{2}{5}$ πρὸς 10 % καὶ τὰ ὑπόλοιπα πρὸς 15 %. Πόσες δραχμὲς θὰ εἰσπράξη μαζὶ μὲ τοὺς τόκους ἔπειτα ἀπὸ 2 ἔτη ;

481. Ἕνας ἐδάνεισε 7.200 δραχμὲς πρὸς 7,5 %. Μετὰ πόσον χρόνο θὰ εἰσπράξη τόκο ἴσο πρὸς $\frac{5}{8}$ τοῦ κεφαλαίου ποὺ ἐδάνεισε ;

482. Ἕνας ἀμπελουργὸς ἐδανείσθη 2.700 δραχμὲς πρὸς 10 %. Γιὰ νὰ ἐξοφλήση τὸ χρέος του ἔδωσε ὕστερα ἀπὸ 8 μῆνες 1440 ὀκάδες κρασί. Πόσο λογάριασαν τὴν ὀκᾶ τὸ κρασί ;

483. Ἕνας ἔμπορος ἐδανείσθη 4.500 δραχμὲς πρὸς 10 % γιὰ ἕνα ἔτος, ἀλλὰ μετὰ 4 μῆνες ἐπλήρωσε ἀπέναντι τοῦ χρέους του 2.130 δραχμές. Πόσες δραχμὲς πρέπει νὰ δώση στὸ τέλος τοῦ ἔτους γιὰ νὰ ἐξοφλήση τὸ χρέος του ;

484. Ἕνας κτηνοτρόφος ἐπούλησε 280 ὀκάδες τυρὶ πρὸς

8,50 δραχμὲς τὴν ὀκᾶ καὶ $20\frac{2}{5}$ ὀκάδες βούτυρο πρὸς 40 δραχμὲς τὴν ὀκᾶ. Τὰ χρήματα ποὺ πῆρε τὰ κατέθεσε στὴν Τράπεζα πρὸς 4 %. Πόσες δραχμὲς θὰ πάρη μαζὶ μὲ τοὺς τόκους ὕστερα ἀπὸ 1 ἔτος καὶ 3 μῆνες ;

ΠΕΡΙ ΥΦΑΙΡΕΣΕΩΣ

Γραμμάτιον

Ὅπως εἴδαμε στὰ προβλήματα τοῦ τόκου, ὅταν ἕνας δανείζη χρήματα σὲ ἄλλον, τὰ δανείζει γιὰ ὡρισμένο χρόνο καὶ μὲ ὡρισμένο ἐπιτόκιο. Ὁ δανειστής, γιὰ νὰ εἶναι σίγουρος πὼς τὴν ὡρισμένη προθεσμία θὰ πάρη πίσω τὰ χρήματά του, παίρνει ἀπὸ τὸν ὀφειλέτη του μία ἀπόδειξι. Στὴν ἀπόδειξι αὐτὴ ὁ ὀφειλέτης ὑπόσχεται νὰ πληρώση στὸ δανειστὴ σὲ ὡρισμένη ἡμερομηνία τὸ ποσὸ τῶν χρημάτων ποὺ ἐδανείσθη καὶ τὸν τόκο τῶν χρημάτων.

Ἡ ἀπόδειξις αὐτὴ γράφεται σὲ χαρτόσημο καὶ λέγεται ***Γραμμάτιον***.

Ἕνα παράδειγμα : Ὁ κ. Γ. Δημητρίου ἐδάνεισε στὸν κ. Π. Γεωργίου στὶς 10 Μαΐου 1950 800 δραχμὲς πρὸς 12 %, μὲ τὴ συμφωνία ὅτι τὸ χρέος θὰ ἐξοφληθῆ μετὰ 7 μῆνες (δηλ. τὴν 10ην Δεκεμβρίου 1950).

Πρὶν γραφῆ τὸ γραμμάτιο βρίσκεται ὁ τόκος τῶν 800 δραχμῶν σὲ 7 μῆνες πρὸς 12 %. Ὁ τόκος αὐτὸς εἶναι :

$$T = \frac{K \cdot E \cdot M}{1.200} = \frac{800 \times 12 \times 7}{1.200} = 56 \text{ δραχ.}$$

Ὁ τόκος αὐτὸς προστίθεται στὸ κεφάλαιο τῶν 800 δραχμῶν καὶ γίνεται κεφάλαιο καὶ τόκος μαζὶ 856 δραχμές.

Ἔπειτα γράφεται τὸ γραμμάτιο ὡς ἑξῆς :

Ἐν Ἀθήναις τῇ 10ῃ Μαΐου 1950.

Διὰ δραχμὰς 856

Μετὰ ἑπτὰ μῆνας ἀπὸ σήμερον ὑπόσχομαι καὶ ὑποχρεοῦμαι νὰ πληρώσω εἰς τὸν κ. Γεώργ. Δημητρίου ἢ εἰς διαταγὴν αὐτοῦ ὀκτακοσίας πεντήκοντα ἓξ δραχμὰς (856), τὰς ὁποίας ἔλαβον παρ' αὐτοῦ εἰς μετρητὰ (ἢ εἰς ἐμπορεύματα).

(ὑπογραφὴ) Παν. Γεωργίου

Ἔτσι ὁ μὲν ὀφειλέτης παίρνει 800 δραχμὲς καὶ ὑπογράφει τὸ γραμμάτιο γιὰ 856 δραχμές, ὁ δὲ δανειστὴς παίρνει τὸ γραμμάτιο.

Στὸ παραπάνω γραμμάτιο, ὅπως καὶ σὲ κάθε γραμμάτιο, γράφεται: 1) τὸ χρηματικὸ ποσὸν ποὺ ὑπόσχεται νὰ πληρώση ὁ ὀφειλέτης. Τὸ ποσὸ αὐτὸ (δηλ. 856 δραχμὲς) λέγεται ***ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου***. 2) ὁ χρόνος ποὺ πρέπει τὸ γραμμάτιο νὰ ἐξοφληθῆ. Ἡ ἡμερομηνία, κατὰ τὴν ὁποίαν ὁ ὀφειλέτης εἶναι ὑποχρεωμένος νὰ πληρώση τὸ χρέος του, λέγεται ἡμέρα ***λήξεως τοῦ γραμματίου***. Στὸ παραπάνω γραμμάτιο ἡμέρα λήξεως εἶναι ἡ 10η Δεκεμβρίου 1950.

Ἐπίσης στὸ παραπάνω γραμμάτιο ὑπάρχουν οἱ λέξεις ***εἰς διαταγήν***, γι' αὐτὸ τὸ γραμμάτιο λέγεται: ***γραμμάτιον εἰς διαταγήν***.

Ἀσκήσεις

485. Ὁ κ. Ν. Ἀντωνίου ἐδανείσθη σήμερον ἀπὸ τὸν κ. Γ. Παπαγεωργίου 1.500 δραχμὲς γιὰ 8 μῆνες πρὸς 10 %.

Νὰ ὑπολογίσης πόση θὰ εἶναι ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου καὶ νὰ γράψης τὸ γραμμάτιο σὲ ἕνα φύλλο χαρτί.

486. Ὁ Ἔμπορος Γ. Πετρίδης τὴν 1ην Δεκεμβρίου 1950 ἐδανείσθη ἀπὸ τὴν Ἐθνικὴ Τράπεζα 4.500 δραχμὲς γιὰ 6 μῆνες πρὸς 10 %.

Γράψε τὸ γραμμάτιο σὲ ἕνα φύλλο χαρτί.

487. Ὁ ἔμπορος Κ. Ἰωάννου ἀγόρασε ἀπὸ τὸν ἔμπορον Π. Ἀντωνιάδην ἐμπορεύματα ἀξίας 2.000 δραχμῶν, μὲ τὴ συμφωνία νὰ τὸν πληρώση ἔπειτα ἀπὸ 3 μῆνες πρὸς 8 %.

Γράψε τὸ γραμμάτιο ποὺ θὰ πάρη ὁ δανειστής.

Προεξόφλησις γραμματίου.

Ὁ κάτοχος τοῦ γραμματίου θὰ εἰσπράξη τὰ χρήματά του τὴν ἡμέρα τῆς λήξεως τοῦ γραμματίου. Ἄν, τώρα, ἔχη ἀνάγκη ἀπὸ χρήματα, προεξοφλεῖ τὸ γραμμάτιο, δηλαδὴ τὸ πωλεῖ σὲ ἄλλον πρὸ τῆς λήξεώς του. Ἐκεῖνος ποὺ θὰ τὸ ἀγοράση δὲν θὰ δώση στὸν κάτοχο τοῦ γραμματίου ὁλόκληρο τὸ ποσὸ τῆς ὀνομαστικῆς ἀξίας τοῦ γραμματίου, ἀλλὰ θὰ κρατήση τὸν τόκο τῆς ὀνομαστικῆς ἀξίας τοῦ γραμματίου γιὰ τὸ χρονικὸ διάστημα ἀπὸ τὴν ἡμέραν τῆς προεξοφλήσεως μέχρι τῆς ἡμέρας λήξεως τοῦ γραμματίου μὲ ὡρισμένο ἐπιτόκιο.

Παράδειγμα: Ὅπως εἴδαμε στὸ προηγούμενο παράδειγμα ὁ κ. Γ. Δημητρίου εἶναι κάτοχος ἑνὸς γραμματίου 856 δραχμῶν ποὺ λήγει τὴν 10ην Δεκεμβρίου 1950. Ἐπειδὴ αὐτὸς ἔχει ἀνάγκην ἀπὸ χρήματα προεξοφλεῖ τὸ γραμμάτιο δύο μῆνες πρὸ τῆς λήξεώς του (δηλ. τὴν 10ην Ὀκτωβρίου 1950) πρὸς 15 %. Πόσες δραχμὲς θὰ πάρη;

· ***Λύσις :*** Θὰ βροῦμε τὸν τόκο τῶν 856 δραχμῶν πρὸς 15 % σὲ 2 μῆνες.

$$T = \frac{K \cdot E \cdot M}{1.200} = \frac{856 \times 15 \times 2}{1.200} = 21.40 \text{ δραχ.}$$

Τὸ ποσὸν τῶν 21.40 δραχμῶν, ποὺ θὰ κρατήση ὁ ἀγοραστὴς τοῦ γραμματίου, λέγεται ***Ὑφαίρεσι*** (σκόντο). Ἂν τώρα ἀφαιρέσωμε τὴν ὑφαίρεσι ἀπὸ τὴν ὀνομαστικὴ ἀξία, βρίσκομε ὅτι : Ὁ κ. Δημητρίου θὰ πάρη 856 — 21.40 = 834.60 δραχμές. Τὸ ποσὸ αὐτὸ λέγεται ***πραγματικὴ*** ἢ ***παροῦσα ἀξία*** τοῦ γραμματίου.

Ὥστε κάθε γραμμάτιο ἔχει δύο ἀξίας, τὴν ***ὀνομαστική***, δηλαδὴ ἐκείνην ποὺ γράφεται ἐπάνω στὸ γραμμάτιο, καὶ τὴν ***πραγματική***, δηλ. ἐκείνη ποὺ βρίσκεται ὅταν ἀφαιρέσωμε τὴν ὑφαίρεσι.

Τὰ προβλήματα τῆς ὑφαιρέσεως λύνονται, ὅπως καὶ τὰ προβλήματα τοῦ τόκου. Πρέπει ὅμως νὰ ξαίρωμε ὅτι : ἡ ***ὑφαίρεσι*** εἶναι τόκος καὶ ἡ ***ὀνομαστικὴ ἀξία*** εἶναι κεφάλαιο.

Προβλήματα

488. Ἕνας προεξώφλησε γραμμάτιο ὀνομαστικῆς ἀξίας 7.500 δραχμῶν, 6 μῆνες πρὸ τῆς λήξεώς του, πρὸς 10 %. Τί ὑφαίρεσιν ἐπλήρωσε ; Καὶ πόσες δραχμὲς εἰσέπραξε ;

489. Ἕνας προεξώφλησε ἕνα γραμμάτιο ὀνομαστικῆς ἀξίας 3.800 δραχμῶν 4 μῆνες καὶ 20 ἡμέρες πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 12,5 %. Πόσες δραχμὲς εἰσέπραξε ;

490. Ἕνα γραμμάτιο ὀνομ. ἀξίας 2.400 δραχμῶν, ποὺ ἔληγε τὴν 30 Σεπτεμβρίου, προεξωφλήθη τὴν 15ην Μαρτίου πρὸς 12 %. Ποία ἦτο ἡ ὑφαίρεσις ; Καὶ ποία ἡ πραγματικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου ;

491. Ἕνας προεξώφλησε γραμμάτιο 6 μῆνες πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 15 % καὶ ἐπλήρωσε ὑφαίρεσι 45 δραχμές. Ποία ἦτο ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου ;

492. Ἕνας προεξώφλησε χραμμάτιο 3 μῆνες πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 20 % καὶ ἐπλήρωσε ὑφαίρεσι 180 δραχμές. Πόσες δραχμὲς ἦτο ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου ;

493. Ἕνας προεξώφλησε γραμμάτιο 1.080 δραχμῶν πρὸς 15 % καὶ ἐπλήρωσε ὑφαίρεσι 117 δραχμές. Πόσες ἡμέρες πρὸ τῆς λήξεώς του ἔγινε ἡ προεξόφλησις ;

494. Ἕνας προεξόφλησε γραμμάτιο ὀνομ. ἀξίας 1.500 δραχμῶν πρὸς 9 % καὶ πῆρε 1.462.50 δραχμὲς (πραγματικὴ ἀξία). Πόσες ἡμέρες πρὸ τῆς λήξεώς του προεξωφλήθη ;.

495. Ἕνα γραμμάτιο ὀνομ. ἀξίας 2.000 δραχμῶν προεξωφλήθη τὴν 30ὴν Νοεμβρίου 1950 πρὸς 9 % μὲ ὑφαίρεσι 50 δραχμές. Πότε ἔληγε τὸ γραμμάτιο ;

496. Ἕνα γραμμάτιο ὀνομ. ἀξίας 3.000 δραχμῶν ἔληγε μετὰ 5 μῆνες καὶ προεξωφλήθη σήμερον μὲ 2.825 δραχμὲς (πραγματικὴ ἀξία). Πρὸς πόσο τοῖς % ἔγινε ἡ προεξόφλησις ;

497. Ἕνας προεξώφλησε γραμμάτιο ὀνομ. ἀξίας 12.000 δραχμῶν 4 μῆνες καὶ 10 ἡμέρες πρὸ τῆς λήξεώς του μὲ ὑφαίρεσι 910 δραχμές. Πρὸς πόσο % προεξωφλήθη ;

498. Ἕνα γραμμάτιο ἔληγε τὴν 30ὴν Ἀπριλίου τοῦ 1951 καὶ προεξωφλήθη πρὸς 16 % τὴν 20ὴν Δεκεμβρίου μὲ ὑφαίρεσι 91 δραχμές. Ποία ἦτο ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου ;

499. Κάνε μόνος σου ἕνα πρόβλημα στὸ ὁποῖο νὰ ζητῆται ἡ ὑφαίρεσις.

500. Ἐπίσης κάνε ἕνα πρόβλημα στὸ ὁποῖο νὰ ζητῆται ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου.

501. Ἐπίσης κάνε ἕνα πρόβλημα στὸ ὁποῖο νὰ ζητῆται ὁ χρόνος.

502. Ἐπίσης κάνε ἕνα πρόβλημα στὸ ὁποῖο νὰ ζητῆται τὸ ἐπιτόκιο.

ΜΕΡΙΣΜΟΣ ΕΙΣ ΜΕΡΗ ΑΝΑΛΟΓΑ

Πρόβλημα : Τρεῖς ἐργάτες ἔσκαψαν ἕνα χαντάκι καὶ πῆραν γιὰ τὴν ἐργασία αὐτὴ 150 δραχμές. Ἀπὸ αὐτοὺς ὁ πρῶτος ἐργάσθηκε 7 ὧρες, ὁ δεύτερος 8 ὧρες καὶ ὁ τρίτος 18 ὧρες. Πόσες δραχμὲς πρέπει νὰ πάρῃ ὁ καθένας ;

Λύσις : Ἐπειδὴ οἱ τρεῖς ἐργάτες δὲν ἐργάσθηκαν τὶς ἴδιες ὧρες ἐργασίας, δὲν εἶναι σωστὸ νὰ μοιρασθοῦν τὶς 150 δραχμὲς καὶ νὰ πάρουν ἀπὸ ἴσο μερίδιο χρημάτων ὁ καθένας τους. Ἐκεῖνος ποὺ ἐργάσθηκε περισσότερες ὧρες θὰ πρέπει νὰ πάρῃ περισσότερες δραχμὲς κ.ο.κ. Πρέπει, λοιπόν, νὰ μοιράσωμε τὶς 150 δραχμὲς σὲ τρία μερίδια, ἀνάλογα μὲ τὶς ὧρες ἐργασίας τοῦ κάθε ἐργάτη.

Οἱ ὧρες ἐργασίας καὶ τῶν τριῶν ἐργατῶν εἶναι : $7+8+10=25$. Ἄρα πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὸ 150 διὰ τοῦ 25, γιὰ νὰ βροῦμε μὲ πόσες δραχμὲς πρέπει νὰ πληρωθῇ ἡ κάθε ὥρα ἐργασίας.

Θὰ ἔχωμε : $150:25=6$ δραχμές. Ἀφοῦ λοιπὸν ὁ πρῶ-

τος ἐργάτης ἐργάσθη 7 ὧρες θὰ πάρῃ $7 \times 6 = 42$ δραχ.
ὁ δεύτερος θὰ πάρῃ $8 \times 6 = 48$ δραχ.
ὁ τρίτος θὰ πάρῃ $10 \times 6 = 60$ δραχ.
Καὶ οἱ τρεῖς μαζί : 150 δραχ.

Βλέπομε ὅτι οἱ ἀριθμοὶ 42, 48 καὶ 60 (δηλ. τὰ μερίδια τῶν τριῶν ἐργατῶν), ἔγιναν ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 7, 8 καὶ 10, ἀφοῦ οἱ ἀριθμοὶ αὐτοὶ πολλαπλασιάσθηκαν ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν 6.

Οἱ ἀριθμοὶ 42, 48 καὶ 60 λέγονται ***ἀνάλογοι*** τῶν ἀριθμῶν 7, 8 καὶ 10.

Ὥστε :

Δύο ἢ περισσότεροι ἀριθμοὶ λέγονται ἀνάλογοι πρὸς ἄλλους, ἂν καθένας ἀπὸ αὐτοὺς γίνεται ἀπὸ τὸν ἀντίστοιχόν του, ὅταν τὸν πολλαπλασιάσωμε ἐπὶ ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

Ὁ ἀριθμὸς 42 ἀντιστοιχεῖ μὲ τὸν 7
Ὁ » 48 » » » 8
Ὁ » 60 » » » 10

Τὸ παραπάνω πρόβλημα στὸ ὁποῖο ὁ ἀριθμὸς 150 ***ἐμερίσθη*** (ἐμοιράσθη) σὲ μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 7, 8 καὶ 10 λέγεται ***πρόβλημα μερισμοῦ εἰς μέρη ἀνάλογα.***

Ὅπως εἴδαμε, ἐλύσαμε τὸ πρόβλημα ὡς ἑξῆς :

1) Προσθέσαμε τοὺς τρεῖς δοθέντας ἀριθμοὺς $(7 + 8 + 10 = 25)$.

2) Διαιρέσαμε τὸν ἀριθμὸ ποὺ πρόκειται νὰ ***μερίσωμε*** διὰ τοῦ εὑρεθέντος ἀθροίσματος $(150 : 25 = 6)$ καὶ

3) Πολλαπλασιάσαμε καθένα ἀπὸ τοὺς δοθέντας ἀριθμοὺς ἐπὶ τὸ εὑρεθὲν πηλίκον, δηλ. $(7 \times 6 = 42)$, $(8 \times 6 = 48)$, $(10 \times 6 = 60)$.

Τὸ πρόβλημα μπορεῖ νὰ λυθῆ καὶ μὲ ἄλλον τρόπο, ὡς ἑξῆς :

1) $\dfrac{150 \times 7}{25} = 42$ δραχμὲς

2) $\dfrac{150 \times 8}{25} = 48$ δραχμὲς

3) $\dfrac{150 \times 10}{25} = 60$ δραχμὲς

Δηλαδὴ πρῶτα πολλαπλασιάζομε τὸν ἀριθμὸ ποὺ πρόκειται νὰ μερίσωμε ἐπὶ κάθε ἕνα δοθέντα ἀριθμὸ καὶ ἔπειτα διαιροῦμε τὸ γινόμενο διὰ τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν.

Ὥστε :

Γιὰ νὰ μερίσωμε ἕνα ἀριθμὸ σὲ μέρη ἀνάλογα δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν, πολλαπλασιάζομεν αὐτὸν ἐπὶ κάθε ἕνα ἀριθμὸ καὶ ὅ,τι βροῦμε τὸ διαιροῦμε διὰ τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν.

Παράδειγμα :

Νὰ μερισθῆ ὁ ἀριθμὸς 280 σὲ μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 6, 10, 12.

$$1)\ \frac{280 \times 6}{28} = 60 \qquad 2)\ \frac{280 \times 10}{28} = 100$$

$$3)\ \frac{280 \times 12}{28} = 120$$

Σημείωσις.— Ἂν οἱ ἀριθμοὶ 6, 10, 12 πολλαπλασιασθοῦν ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, π.χ. τὸν 3, καὶ μερίσωμε τὸν ἀριθμὸ 280 σὲ μέρη ἀνάλογα τῶν γινομένων, 18, 30, 36, θὰ βροῦμε τὰ ἴδια μέρη, δηλαδή:

$$1)\ \frac{280 \times 18}{84} = 60 \qquad 2)\ \frac{280 \times 30}{84} = 100$$

$$\text{καὶ}\quad 3)\ \frac{280 \times 36}{84} = 120$$

Ἐπίσης ἂν διαιρέσωμε τοὺς ἀριθμοὺς 6, 10, 12 διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ (ὅταν διαιροῦνται ἀκριβῶς), π.χ. διὰ τοῦ 2. καὶ μερίσωμε τὸν ἀριθμὸν 280 σὲ μέρη ἀνάλογα τῶν εὑρεθέντων πηλίκων 3, 5, 6, πάλιν τὰ ἴδια μέρη θὰ βροῦμε, δηλ.

$$1)\ \frac{280 \times 3}{14} = 60 \qquad 2)\ \frac{280 \times 5}{14} = 100$$

$$\text{καὶ}\quad 3)\ \frac{280 \times 6}{14} = 120$$

Παράδειγμα 2ον

Δύο κτίστες ἔκτισαν ἕνα τοῖχο καὶ πῆραν 378 δραχμές. Ὁ πρῶτος ἐργάσθηκε 5 ἡμέρες ἐπὶ 6 ὧρες κάθε ἡμέρα καὶ ὁ ἄλλος 3 ἡμέρες ἐπὶ 8 ὧρες κάθε ἡμέρα. Πόσες δραχμὲς πρέπει νὰ πάρη ὁ καθένας;

Λύσις : Ὁ πρῶτος ἐργάσθηκε 5 ἡμ. × 6 ὥρ. = 30 ὧρες
Ὁ δεύτερος » 3 » × 8 » = 24 »
Καὶ οἱ δυὸ μαζὶ = 54 ὧρες

Θὰ μερίσωμε λοιπὸν τὶς 378 δραχμὲς σὲ μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 30 καὶ 24.

Ὁ α′ θὰ πάρῃ $\dfrac{378 \times 30}{54} = 210$ δραχμὲς

Ὁ β′ θὰ πάρῃ $\dfrac{378 \times 24}{54} = 168$ δραχμὲς

Πρόβλημα 3ον : Νὰ μερισθῇ ὁ ἀριθμὸς 100 σὲ μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 3, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$.

Λύσις : Τρέπομε καὶ τοὺς τρεῖς ἀριθμοὺς σὲ ὁμώνυμα κλάσματα :

$$\overset{6}{\frac{3}{1}} \qquad \overset{3}{\frac{1}{2}} \qquad \overset{2}{\frac{2}{3}} \quad \text{ἑτερώνυμα}$$

$$\frac{18}{6} \qquad \frac{3}{6} \qquad \frac{4}{6} \quad \text{ὁμώνυμα}$$

Ἂν τὰ ὁμώνυμα κλάσματα πολλαπλασιάσωμε ἐπὶ τὸν ἀριθμὸ 6 (δηλ. τὸν κοινὸ παρονομαστή), βρίσκομε γινόμενα τοὺς ἀριθμητὰς 18, 3, 4. Καί, ἂν μερίσωμε τὸν ἀριθμὸ 100 σὲ μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 18, 3, 4, θὰ βροῦμε τὰ ἴδια μέρη, σύμφωνα μὲ ὅσα μάθαμε. Παραλείπομε λοιπὸν τοὺς παρονομαστὰς καὶ μερίζομε τὸν ἀριθμὸ 100 σὲ μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν : 18, 3 καὶ 4.

δηλ. α) $\dfrac{100 \times 18}{25} = 76$, β) $\dfrac{100 \times 3}{25} = 12$

καὶ γ) $\dfrac{100 \times 4}{25} = 16$

Προβλήματα.

503. Νὰ μερισθῇ ὁ ἀριθμὸς 300 σὲ μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν : 3, 5, 7.

504. Ἐπίσης ὁ ἀριθμὸς 2.000 σὲ μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν : 4, 5, 2, 9.

505. Ἐπίσης ὁ ἀριθμὸς 600 σὲ μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν : $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$.

506. Δύο γεωργοὶ ἀγόρασαν ἕνα περιβόλι ἐκτάσεως 600 τετραγ. μέτρων. Ὁ πρῶτος ἔδωσε 7.000 δραχμὲς καὶ ὁ ἄλλος 5.000 δραχμές. Πόσα τεραγ. μέτρα ἀναλογοῦν στὸν καθένα ;

507. Δύο ἐργάτες, γιὰ τὸν ὑδροχρωματισμὸ ἑνὸς σχολείου, πῆραν 350 δραχμές. Ὁ ἕνας ἐργάσθηκε 4 ἡμέρες καὶ ὁ ἄλλος 3 ἡμέρες. Πόσες δραχμὲς θὰ πάρῃ ὁ καθένας ;

508. Τρεῖς κτηνοτρόφοι νοίκιασαν ἕνα λιβάδι γιὰ βοσκὴ καὶ πλήρωσαν 4.000 δραχμές. Ὁ πρῶτος εἶχε 180 πρόβατα, ὁ δεύτερος 150 καὶ ὁ τρίτος 170. Πόσο θὰ πληρώση ὁ καθένας ἀνάλογα μὲ τὰ πρόβατα ποὺ ἔχει;

509. Γιὰ νὰ γίνουν 350 δράμια κουραμπιέδες, χρειάζονται τὰ ἑξῆς ὑλικά: 200 δράμια ἀλεύρι, 50 δράμια βούτυρο καὶ 100 δράμια ζάχαρι. Πόσα δράμια ἀπὸ τὸ κάθε εἶδος θὰ χρειασθοῦμε, γιὰ νὰ κάνωμε $3\frac{1}{2}$ ὀκάδες κουραμπιέδες;

510. Μία ἐνοριακὴ ἐπιτροπὴ ἐμοίρασε τὰ Χριστούγεννα 1.350 δραχμὲς σὲ 5 ἄπορες οἰκογένειες ἀνάλογα μὲ τὸν ἀριθμὸ τῶν μελῶν κάθε οἰκογενείας. Ἡ α΄ οἰκογένεια εἶχε 5 μέλη, ἡ β΄ 4, ἡ γ΄ 7, ἡ δ΄ 6 καὶ ἡ στ΄ 8. Πόσες δραχμὲς πῆρε ἡ κάθε οἰκογένεια;

511. Τρεῖς ἐργάτες ἔσκαψαν ἕνα ἀμπέλι καὶ πῆραν 500 δραχμές. Ὁ πρῶτος ἐργάσθηκε 4 ἡμέρες ἐπὶ 8 ὧρες τὴν ἡμέρα, ὁ δεύτερος 3 ἡμέρες ἐπὶ 11 ὧρες τὴν ἡμέρα καὶ ὁ τρίτος 5 ἡμέρες ἐπὶ 7 ὧρες τὴν ἡμέρα. Πόσες δραχμὲς θὰ πάρη ὁ καθένας;

512. Δύο αὐτοκινητισταὶ μετέφεραν ἐμπορεύματα καὶ πῆραν 310 δραχμές. Ὁ πρῶτος μετέφερε 8 τόννους σὲ 20 χιλιόμετρα ἀπόστασι καὶ ὁ δεύτερος 5 τόννους σὲ 30 χιλιόμετρα ἀπόστασι. Πόσες δραχμὲς πρέπει νὰ πάρη ὁ καθένας;

513. Δύο κτηνοτρόφοι νοίκιασαν ἕνα λιβάδι καὶ πλήρωσαν 1.270 δραχμές. Ὁ πρῶτος ἐβόσκησε 370 πρόβατα 30 ἡμέρες καὶ ὁ δεύτερος ἐβόσκησε 230 πρόβατα 20 ἡμέρες. Πόσες δραχμὲς πρέπει νὰ πληρώση ὁ καθένας;

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ

Πρόβλημα 1ο. Τρεῖς ἄνθρωποι ἐσυμφώνησαν νὰ κάνουν μιὰ ἐμπορικὴ ἐπιχείρησι: ὁ α) κατέθεσε 40.000 δραχμές, ὁ β) 50.000 δραχμὲς καὶ ὁ γ) 60.000 δραχμές. Ἀπὸ τὴν ἐπιχείρησι αὐτὴ ἐκέρδισαν 36.000 δραχμές. Πόσο κέρδος πρέπει νὰ πάρη ὁ καθένας;

Λύσις: Θὰ μερίσωμε τὸ κέρδος σὲ μέρη ἀνάλογα τῶν δραχμῶν ποὺ κατέθεσε κάθε ἔμπορος.

Πρόβλημα 2ο: Ἕνας ἔμπορος ἄρχισε μία ἐπιχείρησι μὲ 40.000 δραχμές. Μετὰ 5 μῆνες πῆρε ἕνα συνεταῖρο ποὺ κατέθεσε 40.000 δραχμές. Στὸ τέλος τοῦ ἔτους, ἀφ' ὅτου ἄρχισε ἡ ἐπιχείρησι, εἶδαν ὅτι ἐκέρδισαν 28.500 δραχμές. Πόσες δραχμὲς πρέπει νὰ πάρῃ ὁ καθένας;

Λύσις: Ἀφοῦ οἱ ἔμποροι κατέθεσαν τὸ ἴδιο ποσὸν χρημάτων ὁ καθένας, θὰ μερίσωμε τὸ κέρδος τῶν 28.500 δραχμῶν σὲ μέρη ἀνάλογα τῶν χρόνων ποὺ ἔμειναν στὴν ἐπιχείρησι. Τὸ πρῶτο κεφάλαιο ἔμεινε στὴν ἐπιχείρησι 12 μῆνες καὶ τὸ δεύτερο 7 μῆνες, δηλαδὴ

$$\alpha)\ \frac{28.500 \times 12}{19} = 18.000 \text{ δρχ.}$$

$$\beta)\ \frac{28.500 \times 7}{19} = 10.500 \text{ δρχ.}$$

Πρόβλημα 3ο: Ἕνας ἔμπορος ἄρχισε μία ἐπιχείρησι μὲ 150 χρυσὲς λίρες. Ἔπειτα ἀπὸ 6 μῆνες πῆρε ἕνα συνεταῖρο, ὁ ὁποῖος κατέθεσε στὴν ἐπιχείρησι 130 λίρες. Ἔπειτα ἀπὸ 2 ἔτη, ἀφ' ὅτου ἄρχισε ἡ ἐπιχείρησις, ἐλογάριασαν ὅτι εἶχαν κέρδη 17.820 δραχμές. Πόσες δραχμὲς πρέπει νὰ πάρῃ ὁ καθένας;

Τὸ α΄ κεφάλαιο ἔμεινε στὴν ἐπιχείρησι 24 μῆνες καὶ τὸ β΄ 18 μῆνες.

Λύσις: Βλέπομε ὅτι καὶ τὰ κεφάλαια εἶναι διάφορα καὶ οἱ χρόνοι ποὺ ἔμειναν στὴν ἐπιχείρησι διάφοροι. Πρέπει λοιπὸν τὸ κέρδος νὰ μοιρασθῇ σὲ μέρη ἀνάλογα ὄχι μόνον τῶν κεφαλαίων, ἀλλὰ καὶ τῶν χρόνων.

Γιὰ νὰ τὸ πετύχωμε αὐτὸ χωρίζομε τὸ κέρδος σὲ μερίδια. Ἕνα δὲ μερίδιο νὰ εἶναι τὸ κέρδος τῆς μιᾶς λίρας σὲ ἕνα μῆνα. Ἄν, λοιπόν, ὁ πρῶτος κατέθετε 150 λίρες γιὰ ἕνα μῆνα, θὰ ἔπαιρνε 150 μερίδια. Ἀφοῦ ὅμως κατέθεσε 150 λίρες γιὰ 24 μῆνες, θὰ λάβῃ $150 \times 24 = 3600$ μερίδια. Τὸ ἴδιο σκεπτόμενοι, βρίσκομε ὅτι ὁ δεύτερος θὰ λάβῃ $130 \times 18 = 2340$ μερίδια.

Ὥστε ὁλόκληρον τὸ κέρδος τῶν 17.820 δραχμῶν θὰ χωρισθῇ σὲ $3600 + 2340 = 5940$ μερίδια.

Ἀφοῦ, λοιπόν, τὰ 5940 μερίδια εἶναι 17.820 δραχμές, τὸ ἕνα μερίδιο θὰ εἶναι $\frac{17.820}{5.940}$ δραχμές.

Ἄρα ὁ πρῶτος θὰ πάρῃ $\frac{17.820 \times 3600}{5940} = 10.800$ δραχ.

καὶ ὁ δεύτερος $\frac{17.820 \times 2340}{5940} = 7.020$ δραχ.

Ἡ λύσις αὐτὴ φανερώνει ὅτι πρέπει νὰ μερίσωμε τὸ κέρδος τῶν 17.820 δραχμῶν σὲ μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν ποὺ βρίσκομε, ἂν πολλαπλασιάσωμε τὰ κεφάλαια ἐπὶ τοὺς ἀντιστοίχους χρόνους.

Τὸ α΄ κεφάλαιο ἔμεινε στὴν ἐπιχείρησι 24 μῆνες καὶ τὸ β΄ 18 μῆνες. Θὰ μερίσωμε λοιπὸν τὸν ἀριθμό: 17.820 σὲ μέρη ἀνάλογα τῶν γινομένων:

$$\begin{aligned} &\alpha)\ 150 \times 24 = 3.600 \\ &\beta)\ 130 \times 18 = 2.340 \\ &\text{Σύνολο} \quad 5.940 \end{aligned}$$

Ἄρα ὁ α΄ θὰ πάρῃ $\frac{17.820 \times 3.600}{5.940} = 10.800$ δραχμὲς

καὶ ὁ β΄ θὰ πάρῃ $\frac{17.820 \times 2.340}{5.940} = 7.020$ δραχμές.

Ἀπὸ τὴ λύσι τῶν παραπάνω τριῶν προβλημάτων βλέπομε ὅτι ἔχομε τριῶν εἰδῶν προβλήματα ἑταιρείας.

A) ***κεφάλαια διάφορα — χρόνοι ἴσοι***

B) ***κεφάλαια ἴσα — χρόνοι διάφοροι***

Γ) ***κεφάλαια διάφορα — χρόνοι διάφοροι***

Γιὰ νὰ λύσωμε τὰ προβλήματα αὐτὰ μερίζομε τὸ κέρδος:

Εἰς τὴν Α΄ περίπτωσιν εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν κεφαλαίων

» » Β΄ » » » » » χρόνων

» » Γ΄ » » » » » ἀριθμῶν ποὺ βρίσκομε, ὅταν πολλαπλασιάζωμε κάθε κεφάλαιο ἐπὶ τὸν χρόνο ποὺ ἔμεινε στὴν ἐπιχείρησι.

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

514. Τρεῖς ἔμποροι συνεταιρίσθησαν καὶ ἄνοιξαν ἕνα κατάστημα ὑφασμάτων. Ὁ πρῶτος κατέθεσε 5 ἑκατομμύρια, ὁ δεύτερος 3 ἑκατομμύρια καὶ ὁ τρίτος 2 ἑκατομμύρια. Ὕστερα ἀπὸ ἕνα χρονικὸ διάστημα διέλυσαν τὸ κατάστημα καὶ λογάριασαν ὅτι εἶχαν ζημία 100.000 δραχμές. Πόση ζημία ἀναλογεῖ στὸν κάθε συνεταῖρο ;

515. Τρεῖς ἔμποροι ἔκαναν μίαν ἑταιρεία γιὰ μία ἐπιχείρησι καὶ κατέθεσε ὁ α΄ 3 ἑκατομμ., ὁ β΄ 5 ἑκατομμ. καὶ ὁ γ΄ 2 ἑκατομμ. Ἀπὸ τὴν ἐπιχείρησι αὐτὴ ἐκέρδισαν 500.000 δραχμές. Πόσο κέρδος θὰ πάρῃ ὁ καθένας ;

516. Τρεῖς ἔμποροι κατέθεσαν ἀπὸ ἴσο κεφάλαιο ὁ καθένας καὶ ἔκαναν μία ἐπιχείρησι. Ὁ πρῶτος ἔμεινε στὴν ἑταιρεία 9 μῆνες, ὁ β΄ 15 μῆνες καὶ ὁ γ΄ ἔμεινε 6 μῆνες ἀκόμη μετὰ τὴν ἀποχώρησι τοῦ δευτέρου. Κατόπιν ἔγινε λογαριασμὸς καὶ εἶδαν ὅτι εἶχαν κερδίσει 600.000 δραχμές. Πόσο κέρδος πρέπει νὰ πάρῃ ὁ καθένας ;

517. Δύο ἔμποροι ἄνοιξαν ἕνα κατάστημα μὲ κεφάλαιο 6 ἑκατομμυρίων. Ὁ πρῶτος κατέθεσε τὰ $\frac{2}{5}$ τοῦ κεφαλαίου καὶ ὁ δεύτερος τὰ ὑπόλοιπα. Στὸ τέλος τοῦ ἔτους εἶχαν κέρδη 800.000 δραχμές. Πόσο κέρδος πρέπει νὰ πάρη ὁ καθένας;

518. Ἕνας ἄνθρωπος ἄρχισε μία ἐπιχείρησι μὲ 4 ἑκατομμύρια δραχμῶν. Μετὰ 10 μῆνες πῆρε ἕνα συνεταῖρο ποὺ κατέθεσε 2 ἑκατομμύρια. Δύο ἔτη ἀπὸ τὴν ἡμέρα ποὺ ἄρχισε ἡ ἐπιχείρησις, ἐλογαριάσθησαν καὶ εἶδαν ὅτι εἶχαν κέρδη 750.000 δραχμές. Πόσο κέρδος πρέπει νὰ πάρη ὁ καθένας;

519. Ἱδρύθη μία ἑταιρεία ἀπὸ 3 κεφαλαιούχους. Ὁ α΄ κατέθεσε 2 ἑκατομμύρια, ὁ β΄ 4 ἑκατομμύρια καὶ ὁ γ΄ μετὰ 9 μῆνες ἀπὸ τὴν ἡμέρα τῆς ἱδρύσεως τῆς ἑταιρείας κατέθεσε 3 ἑκατομμύρια. Μετὰ 3 ἔτη ἀπὸ τὴν ἡμέρα ποὺ ἱδρύθη ἡ ἑταιρεία ἔκαναν λογαριασμὸ καὶ εἶδαν ὅτι ἐκέρδισαν 350.000 δραχμές. Πόσο κέρδος θὰ πάρη ὁ καθένας;

520. Κάνε μόνος σου ἕνα πρόβλημα μὲ διάφορα κεφάλαια σὲ ἴσο χρόνο.

521. Ἐπίσης ἕνα πρόβλημα μὲ ἴσα κεφάλαια σὲ διάφορους χρόνους.

522. Ἐπίσης ἕνα πρόβλημα μὲ διάφορα κεφάλαια σὲ διάφορους χρόνους.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΕΣΟΥ ΟΡΟΥ

Πρόβλημα 1ο. Ἕνας μαθητὴς τῆς ΣΤ΄ τάξεως τοῦ Δημοτικοῦ Σχολείου πῆρε στὸ τέλος τοῦ ἔτους τοὺς ἑξῆς βαθμούς: Θρησκευτικὰ 10, Ἑλληνικὰ 7, Ἀριθμητικὴ 8, Ἱστορία 7, Φ. Πειραματικὴ 5, Φυσικὴ Ἱστορία 7, Γεωγραφία 5, Ἰχνογραφία 6, Καλλιγραφία 7, Χειροτεχνία 7, Ὠδικὴ 6 καὶ Γυμναστικὴ 9. Ποῖος εἶναι ὁ μέσος ὅρος τῆς βαθμολογίας τοῦ μαθητοῦ;

Λύσις: Προσθέτομε τοὺς βαθμοὺς τῶν μαθημάτων: $10+7+8+$ $+7+5+7+5+6+7+7+6+9=84$.

Ἔπειτα διαιροῦμε τὸ ἄθροισμα ποὺ βρήκαμε διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μαθημάτων.

Ἐπειδὴ τὰ μαθήματα εἶναι 12 θὰ ἔχωμε $84 : 12 = 7$.

Ἄρα ὁ μέσος ὅρος τῶν βαθμῶν τοῦ μαθητοῦ εἶναι 7.

Πρόβλημα 2ο. Ἕνας οἰκογενειάρχης κρατεῖ λογαριασμὸ τί ξοδεύει κάθε ἡμέρα γιὰ τὴ συντήρησι τῆς οἰκογενείας του. Σὲ μιὰ ἑβδομάδα ἐξώδεψε τὰ ἑξῆς ποσά: Τὴν Δευτέρα, Τρίτη, καὶ Τετάρτη ἀπὸ 36 δραχμὲς τὴν ἡμέρα, τὴν Πέμπτη καὶ τὴν Παρασκευὴ ἀπὸ 28 δραχμὲς τὴν ἡμέρα, τὸ Σάββατο 73 δραχμὲς καὶ τὴν Κυριακὴ 50 δραχμές. Πόσες δραχμὲς ἐξώδεψε κατὰ μέσον ὅρον τὴν ἡμέρα, τὴν ἑβδομάδα αὐτή;

Λύσις: ἐξώδεψε:

$$\begin{array}{rr} 36 \times 3 = & 108 \\ 28 \times 2 = & 56 \\ 73 \times 1 = & 73 \\ 50 \times \underline{1} = & \underline{50} \\ 7 \text{ ἡμ.} & 287 \text{ δραχμ.} \end{array}$$

287 : 7 = 41 δραχμὲς κατὰ μέσον ὅρον.

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

523. Μία ἡμέρα ἡ θερμοκρασία ἦτο τὸ πρωῒ 11,2°, τὸ μεσημέρι 15,1° καὶ τὸ ἀπόγευμα 12,4°. Ποία εἶναι ἡ μέση θερμοκρασία τῆς ἡμέρας αὐτῆς;

524. Ἕνα κατάστημα εἶχεν τὶς παρακάτω εἰσπράξεις σὲ 6 ἡμέρες: τὴν α) 1.348 δραχμές, τὴν β) 598 δραχμές, τὴν γ) 620.50 δραχμές, τὴν δ) 234.50 δραχμές, τὴν ε) 427 δραχμὲς καὶ τὴν στ) 708 δραχμές. Πόσες δραχμὲς εἶναι ὁ μέσος ὅρος τῶν εἰσπράξεων κάθε ἡμέρας;

525. Ἕνας ὑπάλληλος ποὺ ἔχει μηνιαῖο μισθὸ 1.280 δραχμὲς ἐξώδεψε γιὰ διατροφὴ τῆς οἰκογενείας του τὰ παρακάτω ποσά: Τὴν α΄ ἑβδομάδα 224 δραχμές, τὴν β΄ 187.50 δραχμές, τὴν γ΄ 323 δραχ. καὶ τὴν δ΄ 203.50 δραχ. Πόσες δραχμὲς κατὰ μέσον ὅρον τὴν ἑβδομάδα ἐξώδεψε; Καὶ πόσες δραχμὲς τοῦ ἔμειναν γιὰ τὶς ἄλλες ἀνάγκες του;

526. Σὲ μιὰ πόλι ἔγιναν σὲ ἕνα ἑξάμηνο οἱ παρακάτω γεννήσεις: Τὸν α΄ μῆνα 37, τὸν β΄ 45, τὸν γ΄ 84, τὸν δ΄ 67, τὸν ε΄ 72 καὶ τὸν στ΄ 85. Πόσες γεννήσεις κατὰ μέσον ὅρον γίνονται κάθε μῆνα;

527. Ἕνα ἐργοστάσιο ὑφαντουργίας εἶχε τὴν παρακάτω παραγωγὴ ὑφασμάτων τὸ ἔτος 1950: Τὸν Ἰανουάριο 5.840 μέτρα ὕφασμα, τὸν Φεβρουάριο 4.700 μέτρα, τοὺς 3 μῆνες τῆς ἀνοίξεως ἀπὸ 6.000 μέτρα κάθε μῆνα καὶ τοὺς ὑπολοίπους 7 μῆνες τοῦ ἔτους ἀπὸ 3.800 μέτρα κάθε μῆνα. Πόσα μέτρα εἶχε παραγωγὴ κατὰ μέσον ὅρον κάθε μῆνα τὸ ἔτος 1950;

528. Γράψε μόνος σου τὸ βαθμὸ προόδου ποὺ νομίζεις ὅτι ἔχεις σὲ κάθε ἕνα ἀπὸ τὰ μαθήματα.

Ἔπειτα νὰ βρῆς τὸν μέσο ὅρο τῶν βαθμῶν ποὺ θὰ εἶναι ὁ γενικὸς βαθμὸς τοῦ ἀπολυτηρίου σου.

529. Νὰ μάθης πόσους μαθητὰς ἔχει ἡ Α΄, ἡ Β΄, ἡ Γ΄, ἡ Δ΄, ἡ Ε΄ καὶ ἡ ΣΤ΄ τάξις τοῦ σχολείου σου.

Ἔπειτα νὰ βρῆς πόσους μαθητὰς ἔχει κατὰ μέσον ὅρο κάθε τάξις.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΝΑΜΙΞΕΩΣ

Α΄ Εἶδος

Ἕνας παντοπώλης ἀνέμιξε 35 ὀκ. λάδι Α΄ ποιότητος, ποὺ τὸ πωλεῖ πρὸς 14 δραχμὲς τὴν ὀκᾶ, 40 ὀκάδες λάδι Β΄ ποιότητος, ποὺ τὸ πωλεῖ πρὸς 12 δραχμὲς τὴν ὀκᾶ καὶ 25 ὀκάδες σπορέλαιο, ποὺ τὸ πωλεῖ πρὸς 8 δραχμὲς τὴν ὀκᾶ. Πόσο πρέπει νὰ πωλῆ τὴν ὀκᾶ τοῦ μίγματος, γιὰ νὰ πάρη τὰ ἴδια χρήματα ποὺ θὰ ἔπαιρνε, ἂν πωλοῦσε κάθε εἶδος χωριστά ;

Λύσις :	ἀπὸ	τὶς	35 ὀκ.	θὰ ἔπαιρνε	35 × 14	=	490
	»	»	40 »	» »	40 × 12	=	480
	»	»	25 »	» »	25 × 8	=	200
					100 ὀκ. μῖγμα	=	1.170

Βλέπομε ὅτι ὁ παντοπώλης, ἂν πωλοῦσε χωριστὰ κάθε εἶδος, θὰ ἔπαιρνε καὶ ἀπὸ τὰ τρία εἴδη 1.170 δραχμές. Τόσες δραχμὲς πρέπει νὰ πάρη καὶ ἀπὸ τὶς 100 ὀκάδες τοῦ μίγματος. Ἀφοῦ οἱ 100 ὀκάδες τοῦ μίγματος ἀξίζουν 1.170 δραχμές, ἡ 1 ὀκᾶ ἀξίζει 1.170 : 100 = 11.70 δραχμές.

Ὥστε πρέπει νὰ πωλῆ τὴν ὀκᾶ τοῦ μίγματος 11.70 δραχμές.

Ὅπως βλέπομε, στὰ προβλήματα ἀναμίξεως **α΄ εἴδους** μᾶς δίδονται πρὸς ἀνάμιξιν ὡρισμένες ποσότητες δύο ἢ περισσοτέρων πραγμάτων, ποὺ μποροῦν νὰ ἀναμιχθοῦν καὶ ἡ ἀξία τῆς ὀκᾶς καθενὸς ἀπὸ αὐτὰ καὶ μᾶς ζητεῖται ἡ ἀξία τῆς ὀκᾶς τοῦ μίγματος.

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

530. Ἕνας παντοπώλης ἀνέμιξε 48 ὀκάδες ρύζι, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ στοιχίζει 4 δραχμές, μὲ 72 ὀκάδες ρύζι καλυτέρας ποιότητος, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ στοιχίζει 7 δραχμές. Πόσο στοιχίζει ἡ ὀκᾶ τοῦ μίγματος ;

531. Ἕνας ἀγόρασε 80 ὀκάδες βούτυρο καὶ 120 ὀκάδες λίπος. Τὸ βούτυρο τὸ ἀγόρασε 42 δραχ. τὴν ὀκᾶ καὶ τὸ λίπος 12,50 δραχ. Ἔπειτα ἀνέμιξε τὰ δύο αὐτὰ εἴδη. Πόσο τοῦ στοιχίζει ἡ ὀκᾶ τοῦ μίγματος ;

532. Ἕνας λαδέμπορος ἀνέμιξε τρία εἴδη λαδιοῦ. Ἀπὸ τὸ α΄ εἶδος, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ στοιχίζει 14 δραχμές, πῆρε 45 ὀκάδες, ἀπὸ τὸ β΄ εἶδος, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ στοιχίζει 12 δραχ. πῆρε 60 ὀκάδες καὶ ἀπὸ τὸ γ΄ εἶδος, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ στοιχίζει 8 δραχ., πῆρε 95 ὀκ. Πόσο τοῦ στοιχίζει ἡ ὀκᾶ τοῦ μίγματος :

533. Κάνε μόνος σου δύο προβλήματα μίξεως α΄ εἴδους καὶ λύσε τα στὸ τετράδιό σου.

Β΄ Εἶδος

Πρόβλημα: Ἕνας βουτυρέμπορος ἔχει δύο ποιότητες βουτύρου. Τὴν ὀκᾶ τῆς α΄ ποιότητος τὴν πωλεῖ 70 δραχμὲς καὶ τὴν ὀκᾶ τῆς β΄ ποιότητος 54 δραχ. Πόσες ὀκάδες πρέπει νὰ πάρῃ ἀπὸ κάθε ποιότητα γιὰ νὰ κάνῃ ἕνα μῖγμα 320 ὀκάδων, τὸ ὁποῖον νὰ πωλῇ πρὸς 60 δραχμὲς τὴν ὀκᾶ ;

Λύσις: Ἡ μία ὀκᾶ τῆς πρώτης ποιότητος θὰ πουλιόταν χωριστὰ 70 δραχμές. Τώρα στὸ μῖγμα θὰ πωλῆται 60 δραχμές. Ἄρα ὁ ἔμπορος ἀπὸ κάθε ὀκᾶ τῆς πρώτης ποιότητος ποὺ θὰ βάλῃ μέσα στὸ μῖγμα, θὰ χάνῃ (70—60)=10 δραχμές.

Ἡ μία ὀκᾶ τῆς δευτέρας ποιότητος θὰ πουλιόταν χωριστὰ 54 δραχμές. Τώρα στὸ μῖγμα θὰ πωλῆται 60 δραχμές. Ἄρα ὁ ἔμπορος ἀπὸ κάθε ὀκᾶ τῆς δευτέρας ποιότητος, ποὺ θὰ βάλῃ μέσα στὸ μῖγμα, θὰ κερδίζῃ (60—54)=6 δραχμές.

Ἂν λοιπὸν βάλῃ ἀπὸ τὴν α΄ ποιότητα τοῦ βουτύρου 6 ὀκάδες (δηλ. ὅσες δραχμὲς κερδίζει ἀπὸ κάθε ὀκᾶ τῆς β΄ ποιότητος), θὰ χάσῃ 10Χ6=60 δραχμές. Κι' ἂν βάλῃ ἀπὸ τὴ β΄ ποιότητα τοῦ βουτύρου 10 ὀκάδες (δηλ. ὅσες δραχμὲς χάνει ἀπὸ κάθε ὀκᾶ τῆς α΄ ποιότητος), θὰ κερδίσῃ 6Χ10=60 δραχμές.

Ὥστε οὔτε κέρδος οὔτε ζημιὰ θὰ ἔχῃ, ἂν ἀναμίξῃ 6 ὀκάδες ἀπὸ τὸ βούτυρο α΄ ποιότητος καὶ 10 ὀκάδες ἀπὸ τὸ βούτυρο β΄ ποιότητος. Ὥστε :

Γιὰ νὰ κάνῃ μῖγμα 16 ὀκ. παίρνει ἀπὸ τὴν **α΄** ποιότητα 6 ὀκ.
» » » » 320 » » » » » » Χ

Ἀπὸ τὴν α΄ ποιότητα θὰ πάρῃ $X=6X\frac{320}{16}=\frac{6X320}{16}=120$ **ὀκ.**

Γιὰ νὰ κάνη μῖγμα $\frac{16}{320}$ ὀκ. παίρνει ἀπὸ τὴν β΄ ποιότητα $\frac{10}{X}$ ὀκ.
» » » » 320 » » » » » » X

'Απὸ τὴν β΄ ποιότητα θὰ πάρη $X = 10X\frac{320}{16} = \frac{10X320}{16} = 200$ ὀκ.

Μποροῦμε ἐπίσης νὰ λύσωμε τὸ πρόβλημα αὐτό, ἂν μερίσωμε τὸν ριθμὸ 320 σὲ μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 6 καὶ 10.

'Η πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς:

	α΄ 70 δρχ.		6
Μῖγμα ***320*** ὀκ.		60 δρχ.	
	β΄ 54 δρχ.		10 +
			16

'Απὸ τὴν α΄ ποιότητα θὰ πάρη $= \frac{320X6}{16} = 120$ ὀκάδ.

'Απὸ τὴν β΄ ποιότητα θὰ πάρη $= \frac{320X10}{16} = 200$ ὀκάδ.

Σημείωσις: Γιὰ μὴ κάνωμε λάθος πρέπει νὰ ἔχωμε ὑπ' ὄψιν ὅτι στὸ μῖγμα τὶς περισσότερες ὀκάδες θὰ βάζωμε ἀπὸ τὴν ποιότητα ἐκείνην τῆς ὁποίας ἡ τιμὴ πλησιάζει περισσότερο πρὸς τὴν τιμὴ τοῦ μίγματος. Π. χ. στὸ προηγούμενο πρόβλημα τὶς περισσότερες ὀκάδες (τὶς 200) βάζομε ἀπὸ τὴν β΄ ποιότητα βουτύρου τοῦ ὁποίου ἡ τιμὴ πλησιάζει περισσότερο στὴν τιμὴ τοῦ μίγματος (60 δραχ.) ἀπὸ τὴν τιμὴ τοῦ βουτύρου τῆς α΄ ποιότητος.

῞Οπως βλέπομε στὰ προβλήματα ἀναμίξεως ***β΄ εἴδους*** μᾶς δίδονται:
1) ***Οἱ τιμὲς τῆς ὀκάδος δύο διαφόρων εἰδῶν ποὺ πρόκειται νὰ ἀναμιχθοῦν***. 2) ***Οἱ ὀκάδες ἀπὸ τὶς ὁποῖες θὰ ἀποτελῆται τὸ μῖγμα*** καὶ 3) ***'Η τιμὴ τῆς ὀκᾶς τοῦ μίγματος.***

Ζητεῖται δέ: ***Πόσες ὀκάδες θὰ πάρωμε ἀπὸ κάθε εἶδος, γιὰ νὰ κάνωμε αὐτὸ τὸ μῖγμα.***

Προβλήματα.

534. ῞Ενας οἰνοπώλης ἀνέμιξε 350 ὀκάδες κρασὶ τῶν 2,30 δραχμῶν καὶ 200 ὀκάδες ἄλλο κρασὶ τῶν 2,75 δραχμῶν Πόσο τοῦ στοιχίζει ἡ ὀκᾶ τοῦ μίγματος;

535. ῞Ενας βουτυρέμπορος ἀνέμιζε 50 ὀκάδες βούτυρο γάλακτος τῶν 52 δραχμῶν μὲ 10 ὀκάδες λίπος τῶν 19 δραχμῶν. Πόσο τοῦ στοιχίζει ἡ ὀκᾶ τοῦ μίγματος;

536. Ἕνας λαδέμπορος ἀνέμιξε τρία εἴδη λαδιοῦ. Ἀπὸ τὸ α΄ εἶδος, ποὺ ἄξιζε 12 δραχμὲς ἡ ὀκᾶ, πῆρε 48 ὀκάδες, ἀπὸ τὸ β΄ εἶδος, ποὺ ἄξιζε 11.50 δραχ. ἡ ὀκᾶ, πῆρε 30 ὀκάδες, καὶ ἀπὸ τὸ γ΄ εἶδος, ποὺ ἄξιζε 14 δραχμὲς ἡ ὀκᾶ, πῆρε 22 ὀκάδες. Πόσο θὰ ἀξίζη ἡ ὀκᾶ τοῦ μίγματος;

537. Ἕνας παντοπώλης ἀνέμιξε 36 ὀκάδες ρύζι, ποὺ ἄξιζε 8.40 δραχμὲς ἡ ὀκᾶ, μὲ 24 ὀκάδες ρύζι, ποὺ ἄξιζε 10 δραχμὲς ἡ ὀκᾶ. Πόσο ἀξίζει ἡ ὀκᾶ τοῦ μίγματος;

538 Ἕνας βουτυρέμπορος ἀνέμιξε 37,5 ὀκάδες βούτυρο, τῶν 44 δραχμῶν τὴν ὀκᾶ, μὲ τριπλασίαν ποσότητα λίπους τῶν 16 δραχμῶν τὴν ὀκᾶ. Πόσες δραχμὲς ἀξίζει ἡ ὀκᾶ τοῦ μίγματος;

539. Ἕνας ἀλευρέμπορος ἀγόρασε 350 ὀκάδες ἄλευρα πρὸς 2.80 δραχμὲς τὴν ὀκᾶ καὶ 250 ὀκάδες ἄλευρα καλυτέρας ποιότητος πρὸς 3.40 δραχμὲς τὴν ὀκᾶ. Ἐὰν ἀναμίξῃ τὰ δύο αὐτὰ εἴδη, πόσο τοῦ στοιχίζει ἡ ὀκᾶ τοῦ μίγματος; Καὶ πόσο πρέπει νὰ πωλῇ τὴν ὀκᾶ τοῦ μίγματος γιὰ νὰ κερδίσῃ ἀπὸ ὅλο τὸ μῖγμα 450 δραχμές;

540 Ἕνας οἰνοπώλης εἶχε ἕνα βαρέλι ποὺ χωροῦσε 400 ὀκάδες. Μέσα στὸ βαρέλι αὐτὸ ἔβαλε 320 ὀκάδες κρασί, ποὺ τὸ ἀγόρασε πρὸς 2.40 δραχμὲς την ὀκᾶ καὶ ἔπειτα ἀπογέμισε τὸ βαρέλι μὲ νερό. Πόσο τοῦ στοιχίζει ἡ ὀκᾶ τὸ νερωμένο κρασί; Καὶ πόσο πρέπει νὰ τὸ πωλῇ τὴν ὀκᾶ γιὰ νὰ κερδίσῃ ἀπὸ ὅλο 500 δραχμές;

541. Ἕνας καφεπώλης ἀγόρασε 5 ὀκάδες καὶ 250 δράμια καφὲ ἀλεσμένο πρὸς 80 δραχμὲς τὴν ὀκᾶ. Μέσα στὸν καφὲ ἔβαλε μιὰ ὀκᾶ καὶ 350 δράμια καβουρδισμένο καὶ ἀλεσμένο ρεβύθι ποὺ τὸ ἀγόρασε 6.40 δραχμὲς τὴν ὀκᾶ. Πόσο τοῦ στοιχίζει τὸ κάθε δράμι τοῦ μίγματος;

542. Ἕνας βουτυρέμπορος θέλει νὰ ἀναμίξῃ βούτυρο τῶν 48 δααχμῶν τὴν ὀκᾶ μὲ λίπος τῶν 18 δραχμῶν τὴν ὀκᾶ. Πόσες ὀκάδες ἀπὸ κάθε εἶδος πρέπει νὰ πάρῃ γιὰ νὰ κάνῃ ἕνα μῖγμα 45 ὀκάδων καὶ νὰ τοῦ στοιχίζῃ 30 ἡ ὀκᾶ;

543. Ἕνας παντοπώλης ἔχει δύο ποιότητες ρυζιοῦ. Τὴν πρώτη ποιότητα τὴν πωλεῖ πρὸς 11 δραχμὲς τὴν ὀκᾶ καὶ τὴν δευτέρα ποιότητα πρὸς 8 δραχμὲς τὴν ὀκᾶ. Πόσες ὀκάδες ἀπὸ κάθε εἶδος ρυζιοῦ πρέπει νὰ πάρῃ γιὰ νὰ κάνῃ ἕνα μῖγμα 78 ὀκάδων, ποὺ νὰ τὸ πωλῇ πρὸς 10 δραχ. τὴν ὀκᾶ;

544 Ἕνας λαδέμπορος ἔχει δύο εἴδη λαδιοῦ. Τοῦ πρώτου ἡ ὀκᾶ ἀξίζει 16 δραχμὲς καὶ τοῦ δευτέρου 12.50 δραχμές. Πόσες ὀκάδες ἀπὸ κάθε εἶδος πρέπει νὰ πάρῃ γιὰ νὰ κάνῃ μῖγμα 210 ὀκάδων ποὺ νὰ ἀξίζῃ **13 δραχμὲς ἡ ὀκᾶ ;**

545. Ἕνας ἀλευρέμπορος θέλει νὰ ἀναμίξῃ ἄλευρα δύο ποιοτήτων. Τὰ ἄλευρα τῆς πρώτης ποιότητος ἀξίζουν 3.70 δραχμὲς ἡ ὀκᾶ τῆς δευτέρας ποιότητος 3 δραχμὲς ἡ ὀκᾶ. Πόσες ὀκάδες ἄλευρα ἀπὸ κάθε ποιότητα θὰ πάρῃ γιὰ νὰ κάνῃ μῖγμα 350 ὀκάδων, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ νὰ ἀξίζῃ 3.20 δραχμές;

546. Ἕνας οἰνοπώλης εἶχε 520 ὀκάδες κρασὶ καὶ τὸ πωλοῦσε πρὸς 3.60 δραχμὲς τὴν ὀκᾶ. Ἐὰν μέσα στὸ κρασὶ αὐτὸ βάλῃ 80 ὀκάδες νερό, πόσες δραχμὲς πρέπει νὰ πωλῇ τὴν ὀκᾶ τοῦ νερωμένου κρασιοῦ γιὰ νὰ εἰσπράξῃ τὰ ἴδια χρήματα ;

547. Ἕνας λαδέμπορος ἀνέμιξε λάδι τῶν 15.50 τὴν ὀκᾶ μὲ σπορέλαιο τῶν 9.50 δραχμῶν τὴν ὀκᾶ καὶ ἔκανε ἕνα μῖγμα 280 ὀκάδων ποὺ τὸ πωλοῦσε 13 δρχ. τὴν ὀκᾶ. Ἀπὸ τὴν πώλησι τοῦ μίγματος αὐτοῦ θὰ εἰσπράξῃ τὰ ἴδια χρήματα ποὺ θὰ εἰσέπραττε ἂν πωλοῦσε χωριστὰ τὸ κάθε εἶδος. Πόσες ὀκάδες ἀπὸ κάθε εἶδος ἔβαλε στὸ μῖγμα ;

Προβλήματα κραμάτων.

Ὁ καθαρὸς χρυσὸς καὶ ὁ ἄργυρος εἶναι μέταλλα μαλακά. Γι᾽ αὐτό, ὅταν πρόκειται μὲ αὐτὰ νὰ κατασκευάσουν κοσμήματα ἢ νομίσματα, συγχωνεύουν διὰ τήξεως μαζὶ μὲ αὐτὰ καὶ χαλκὸν ἢ ἄλλο σκληρὸ μέταλλο. Τοῦτο γίνεται γιὰ νὰ ἀποκτήσουν τὰ μέταλλα αὐτὰ μεγαλύτερη σκληρότητα καὶ ἔτσι νὰ μὴ καταστρέφωνται διὰ τῆς τριβῆς, νὰ μὴ μεταβάλλεται τὸ σχῆμα των κ.λ.

Τὸ σῶμα - μῖγμα, τὸ ὁποῖον γίνεται ἀπὸ τὴ συγχώνευσι διὰ τήξεως δύο ἢ περισσοτέρων μετάλλων, λέγεται ***κρᾶμα***.

Τὸ ποσὸ τοῦ πολυτίμου μετάλλου (δηλ. τοῦ χρυσοῦ ἢ τοῦ ἀργύρου) ποὺ περιέχεται μέσα σὲ μιὰ μονάδα τοῦ κράματος (π. χ. σὲ 1 γραμμάριο) λέγεται ***βαθμὸς καθαρότητος*** ἢ ***τίτλος*** τοῦ κράματος.

Ὁ τίτλος ἑνὸς κράματος ὁρίζεται σὲ χιλιοστά. Π. χ. ὅταν λέγωμε ὅτι ἕνα νόμισμα ἔχει Τίτλο 0,900 ἐννοοῦμε ὅτι στὰ 1000 γραμμάρια τοῦ κράματος μόνον 900 γραμμάρια εἶναι καθαρὸς χρυσὸς καὶ τὰ ἄλλα 100 γραμμάρια εἶναι χαλκὸς ἢ ἄλλο μέταλλο μὴ πολύτιμο.

Ἐπίσης ὁ Τίτλος τῶν χρυσῶν κοσμημάτων ἐκφράζεται καὶ σὲ εἰκοστὰ τέταρτα, τὰ ὁποῖα λέγονται ***Καράτια.***

Ὅταν π.χ. λέγωμε ὅτι ἕνα δακτυλίδι εἶναι 18 καρατίων, ἐννοοῦμεν ὅτι τὰ 18 μέρη αὐτοῦ εἶναι καθαρὸς χρυσὸς καὶ τὰ ὑπόλοιπα 6 εἶναι μέταλλο μὴ πολύτιμο. Ὁ καθαρὸς χρυσὸς λέγομε ὅτι εἶναι 24 καρατίων.

Τὰ προβλήματα τῶν καρατίων λύονται ὅπως καὶ τὰ προβλήματα τῆς ἀναμίξεως.

Πρόβλημα 1ο. Ἕνας χρυσοχόος ἔλειωσε 10 δράμια χρυσοῦ τίτλου 0,900 μὲ 5 δράμια χρυσοῦ 0,720 καὶ ἔκανε ἕνα βραχιόλι. Ποῖος εἶναι ὁ τίτλος τοῦ κράματος;

Λύσις. Τὰ 10 δράμ. περιέχουν καθ. χρυσ. 0,900×10 = 9 δρ.

» 5 » » » » 0,720× 7 = 3,6 »

15 12,6 »

Ἄρα ὁ τίτλος τοῦ κράματος θὰ εἶναι 12,6 : 15 = 0,840.

Πρόβλημα 2ο. Ἕνας χρυσοχόος ἔχει χρυσὸν τίτλου 0,900 καὶ ἄλλον τίτλου 0,600, θέλει δὲ νὰ κάνῃ ἕνα δακτυλίδι 15 γραμμαρίων τίτλου 0,700. Πόσα γραμμάρια θὰ πάρῃ ἀπὸ κάθε εἶδος χρυσοῦ;

Λύσις: Κατάταξις.

	α) 0,900		0,100	100
15. γρ.		0,700		ἢ
	β) 0,600		0,200	200

Θὰ μερίσωμε τὸν ἀριθμὸ 15 σὲ μέρη ἀνάλογα τῶν 0,100 καὶ 0,200 ἢ τῶν 100 καὶ 200.

Ἄρα ἀπὸ τὸ α΄ εἶδος θὰ πάρῃ $\frac{15\times100}{300} = 5$ γραμ.

καὶ ἀπὸ τὸ β΄ εἶδος θὰ πάρῃ $\frac{15\times205}{300} = 10$ »

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

548. Ἕνας χρυσοχόος ἔλειωσε μαζὶ 18 δράμια χρυσοῦ τίτλου 0,600 καὶ 32 δράμια χρυσοῦ τίτλου 0,950. Ποῖος εἶναι ὁ τίτλος τοῦ κράματος αὐτοῦ;

549. Μία ἁλυσίδα χρυσὴ τίτλου 14 καρατίων ἔχει βάρος 35 γραμμάρια. Πόσο καθαρὸ χρυσὸ περιέχει;

550. Ἕνας χρυσοχόος ἔχει χρυσὸν τίτλου 0,900 καὶ ἄλλον χρυσὸν τίτλου 0,500. Ἀπὸ αὐτὰ τὰ δύο εἴδη θέλει νὰ κάνῃ ἕνα βραχιόλι βάρους 20 γραμμαρίων καὶ τίτλου 0.600. Πόσα γραμμάρια θὰ πάρῃ ἀπὸ κάθε εἶδος;

551. Ἕνας χρυσοχόος ἔλειωσε 12 γραμμάρια χρυσοῦ τίτλου 0,900 μαζὶ μὲ 3 γραμμάρια χαλκοῦ. Πόσο εἶναι ὁ τίτλος τοῦ κράματος εἰς χιλιοστά;

1958 1924 23
1937 8 1
21 6

1300/95

888888

ΕΡΓΑ ΤΟΥ ΣΥΓΓΡΑΦΕΩΣ ΠΕΤΡΟΥ Π. ΠΑΠΑΪΩΑΝΝΟΥ

ΓΡΑΜΜΑΤΙΚΗ ΤΗΣ ΝΕΑΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΓΛΩΣΣΗΣ Ε' καὶ ΣΤ' τάξεως ἔκδοσις 1957.

Περιέχει πολλοὺς πρακτικοὺς ὀρθογραφικοὺς κανόνας.

ΦΥΣΙΚΗ καὶ ΧΗΜΕΙΑ Ε' τάξεως ἐγκεκριμένη.

«Ἡ ἔκθεσις τῆς ὕλης εἰς τὸ βιβλίον τοῦτο γίνεται μετὰ σαφηνείας καὶ ἀκριβείας» (ἀπόσπασμα πράξεως Ἐκπαιδευτικοῦ Συμβουλίου).

ΦΥΣΙΚΗ καὶ ΧΗΜΕΙΑ ΣΤ' τάξεως ἐγκεκριμένη.

«Ἡ διάταξις τῆς ὕλης εἰς τὸ βιβλίον τοῦτο γίνεται μετὰ μεθοδικότητος, ἡ δὲ ἔκθεσις τῆς ὕλης μετὰ σαφηνείας καὶ πληρότητος» (ἀπόσπασμα πράξεως Ἐκπαιδευτικοῦ Συμβουλίου).

ΦΥΣΙΚΗ καὶ ΧΗΜΕΙΑ Ε' καὶ ΣΤ' τάξεως (1ον ἔτος συνδιδ.) ἐγκεκριμένη.

Περιέχει τὴν ὑπὸ τοῦ Ἀναλυτικοῦ Προγράμματος ὕλην τοῦ 1ου ἔτους συνδιδασκαλίας.

ΦΥΣΙΚΗ καὶ ΧΗΜΕΙΑ Ε' καὶ ΣΤ' τάξεως (2ον ἔτος συνδιδ.) ἐγκεκριμένη.

Περιέχει τὴν ὑπὸ τοῦ Ἀναλυτικοῦ Προγράμματος ὕλην τοῦ 2ου ἔτους συνδιδασκαλίας.

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ Γ' τάξεως νέα ἔκδοσις.

Περιέχει **417 ἐκλεκτὰ προβλήματα** συγχρονισμένα μὲ ΝΕΕΣ ΔΡΑΧ., ὡς καὶ καλοδουλεμένους κανόνες ποὺ περικλείονται ἐντὸς πλαισίου.

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ Δ' τάξεως νέα ἔκδοσις.

Περιέχει ἐκτὸς τῶν κανόνων, ποὺ ἐξάγονται ἀβίαστα ἐκ τῆς λύσεως σχετικῶν προβλημάτων, **482 ἐκλεκτὰ προβλήματα** συγχρονισμένα μὲ ΝΕΕΣ ΔΡΑΧΜΕΣ.

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ Ε' καὶ ΣΤ' τάξεως ἐγκεκριμένη.

«Ἡ ὕλη εἰς τὸ βιβλίον τοῦτο ἐκτίθεται μὲ σαφήνεια, ἁπλότητα καὶ συντομία. Σὲ ἰδιαίτερο τετρασέλιδο φυλλάδιο **διανεμόμενο δωρεὰν** περιέχονται οἱ ἀποκρίσεις τῶν **551** συγχρονισμένων μὲ ΝΕΕΣ ΔΡΑΧΜΕΣ προβλημάτων τοῦ βιβλίου.

ΤΕΤΡΑΔΙΟΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ Α' τάξεως (οἱ ἀριθ. 1—10) Α 1
ΤΕΤΡΑΔΙΟΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ » » (οἱ ἀριθ. 10—20) Α 2
ΤΕΤΡΑΔΙΟΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ Β' τάξεως (οἱ ἀριθ. 1—50) Β 1
ΤΕΤΡΑΔΙΟΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ » » (οἱ ἀριθ. 50—100) Β 2
ΤΕΤΡΑΔΙΟΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ Γ' τάξεως (οἱ ἀριθ. 1—1000) Γ
ΤΕΤΡΑΔΙΟΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ Δ' » (ἀκέρ. καὶ δεκαδ.) Δ
ΤΕΤΡΑΔΙΟΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ Ε' τάξεως (κλάσματα). Ε
ΤΕΤΡΑΔΙΟΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ϛ' » (μέθοδοι, τόκ. κλπ). ΣΤ

Ὅλα τὰ τετράδια εἶναι τυπωμένα σὲ χαρτὶ γραφῆς ἀρίστης ποιότητος. Κάθε τετράδιο περιέχει **200 ἕως 300 προβλήματα**, ὡς καὶ τὸν ἀπαραίτητο χῶρο πρὸς λύσιν τούτων· δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ κατὰ τὴν ὥρα τῶν **σιωπηρῶν ἐργασιῶν** ἢ διὰ **τὰς κατ' οἶκον** (ἢ ἐν τῷ σχολείῳ) ἐργασίας τῶν μαθητῶν.

Εἰδικῶς τὸ **τετράδιον Α' τάξεως A_1**, τὸ ὁποῖον εἶναι σειρὰ ἐγχρώμων καλλιτεχνικῶν εἰκόνων, δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ ἀπὸ τὴν πρώτην ἡμέρα τῆς εἰσόδου τοῦ μαθητοῦ εἰς τὸ σχολεῖον. Διὰ τούτου ἐπιτυγχάνεται, κατὰ τρόπον πρωτότυπον, εὐχάριστον καὶ μεθοδικόν, ἡ αἰσθητοποίησις τῶν ἀριθμῶν τῆς πρώτης δεκάδος, καθὼς καὶ τῶν πράξεων ἐντὸς τῶν ἀριθμῶν τούτων.

ΕΚΤΥΠ. Ι. ΜΑΚΡΗΣ