15..51

ΦΑΓΙΣ ΤΟΥ ΧΑΡΤΟΥ

769 25
8 7900 25
190 40
150

Ἐν Ἀθήναις τῇ

ΕΙΟΝ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

ΕΚΚΛ. ΚΑΙ ΤΗΣ ΔΗΜ. ΑΚΠΑΙΔΕΥΣΕΩΣ

Μαντζεβελάκην,

κατ' ἀπόφασιν τῆς ἐπὶ τῆς ἐκδόσεως τῶν
πτικῆς ἐπιτροπείας, ἡ τιμὴ τῆς Πρακτικῆς
ηνικὰ σχολεῖα ἐκ φύλλων τυπογραφικῶν
ύο καὶ λεπτὰ δέκα (2,10). Τὸ δὲ ἐπιθετέον
οδίνου ἔσται ἀξίας δραχμῆς καὶ λεπτῶν
27).
ως συμμορφωθῆτε πρὸς τὰς ἀποφάσεις ταύτας,
ην παροῦσαν ἐπὶ τῆς ἐσωτερι
οῦ βιβλίου κάτωθι τῆς θέσεως,
τὸ βιβλιόσημον

ΠΡΑΚΤΙΚΗ
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ

ΤΩΝ ΕΛΛΗΝΙΚΩΝ ΣΧΟΛΕΙΩΝ ΚΑΙ ΠΑΡΘΕΝΑΓΩΓΕΙΩΝ

Κ. ΠΑΠΑΖΑΧΑΡΙΟΥ
Διευθυντοῦ τῆς Ἐμπορικῆς Σχολῆς Χάλκης.

ΚΑΙ

Κ. ΧΑΤΖΗΒΑΣΙΛΕΙΟΥ
Καθηγητοῦ τῶν Μαθηματικῶν τοῦ ἐν Βόλῳ γυμνασίου.

Ἡ μόνη ἐγκεκριμένη κατὰ τὸν νόμον ΓΣΑ΄ διὰ τὴν τετραετίαν 1913—1917.

Ζητήσατε τὰς λύσεις ἁπάντων τῶν προβλημάτων τῆς παρούσης Ἀριθμητικῆς

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΕΚΔΟΤΗΣ ΜΙΧΑΗΛ ΜΑΝΤΖΕΒΕΛΑΚΗΣ
1913

ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1) α΄. *Ὁρισμοί*. — Οἱ μαθηταὶ τάξεώς τινος ὁμοῦ λαμβανόμενοι ἀποτελοῦσιν ἓν πλῆθος καὶ ἐν γένει πολλὰ ὅμοια πράγματα ἢ ἀνόμοια ὧν τὰς διαφορὰς παραβλέπομεν, ὁμοῦ λαμβανόμενα ἀποτελοῦσιν ἓν πλῆθος. Ἀλλὰ καὶ ἓν μόνον πρᾶγμα δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς πλῆθος.

Τὸ πλῆθος καλεῖται ὡρισμένον ἂν γνωρίζωμεν ἀπὸ πόσα πράγματα ἀποτελεῖται τοῦτο· ὡς π. χ. εἴκοσι μαθηταί, δέκα θρανία, ἓν μῆλον κτλ. Τὸ εἴκοσι, δέκα, ἓν κτλ. διὰ τῶν ὁποίων ὁρίζεται τὸ πλῆθος καλοῦνται ἀριθμοί.

Εὑρίσκομεν δὲ τὸν ἀριθμὸν τὸν ὁρίζοντα πλῆθός τι, ἂν συγκρίνωμεν τὸ πλῆθος τοῦτο τῶν θεωρουμένων πραγμάτων πρὸς ἓν ἐξ αὐτῶν· ἡ τοιαύτη σύγκρισις καλεῖται ἀρίθμησις καὶ τὸ ἓν πρᾶγμα πρὸς τὸ ὁποῖον ἐγένετο ἡ σύγκρισις μονάς.

Διὰ νὰ ὁρίσωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν μαθητῶν τάξεώς τινος λαμβάνομεν ὡς μονάδα τὸν ἕνα ἐξ αὐτῶν· ἐὰν ὅμως θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὸ πλῆθος τῶν τάξεων σχολείου τινὸς λαμβάνομεν ὡς μονάδα τὴν μίαν τάξιν ἤτοι σύνολον πολλῶν μαθητῶν· ὁμοίως κατὰ δωδεκάδας ἀριθμοῦμεν τὰ ῥινόμακτρα καὶ πολλὰ οἰκιακὰ σκεύη. Ὅθεν καὶ ὁλόκληρον πλῆθος, ὡς μία τάξις μαθητῶν, δωδεκὰς ῥινομάκτρων κτλ. λαμβάνεται ὡς μονάς.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπονται οἱ ἑξῆς ὁρισμοί·

2) «Μονὰς καλεῖται τὸ ἓν τῶν πολλῶν ὁμοίων πραγμάτων ἢ τὸ σύνολον πολλῶν πραγμάτων ὁμοῦ λαμβανομένων».

3) «Ἀριθμὸς καλεῖται ἡ ἔννοια ἡ ὁρίζουσα πλῆθός τι».

4) «Ἀριθμητικὴ καλεῖται ἡ ἐπιστήμη ἡ πραγματευομένη περὶ τῶν ἀριθμῶν ἐν γένει».

β΄. ἀρίθμησις.

5) Ἀρίθμησις πλήθους τινὸς καλεῖται ἡ εὕρεσις τοῦ ἀριθμοῦ, ὅστις παριστᾷ τὸ πλῆθος τοῦτο, ἔτι δὲ καὶ ἡ διδασκαλία περὶ τῆς γραφῆς καὶ ὀνομασίας τῶν ἀριθμῶν.

α΄. *Ὀνοματολογία καὶ γραφὴ τῶν ἀριθμῶν.*

6) Ἡ μονὰς καλεῖται καὶ ἕν· ἐὰν εἰς ταύτην προστεθῇ καὶ ἄλλη μονὰς προκύπτει ὁ ἀριθμὸς δύο, ἐὰν προστεθῇ καὶ ἄλλη ἀκόμη μονὰς προ-

κύπτει ὁ ἀριθμὸς τρία κ. ο. κ. λαμβάνομεν τοὺς ἀριθμοὺς τέσσαρα, πέντε, ἕξ, ἑπτά, ὀκτώ, ἐννέα· οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι παρίστανται διὰ τῶν ἑξῆς συμβόλων· 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ἅτινα καλοῦνται σημαντικὰ ψηφία.

Ἐὰν ἐξηκολουθοῦμεν εἰς ἕκαστον ἑπόμενον ἀριθμόν, σχηματιζόμενον τῇ προσθήκῃ μιᾶς μονάδος, νὰ δίδωμεν νέαν ὀνομασίαν καὶ νὰ παριστῶμεν αὐτὸν δι' ἰδίου συμβόλου, θὰ ἐχρειαζόμεθα ἀπειρίαν λέξεων καὶ συμβόλων, ἅτινα θὰ ἦτο δυσχερέστατον καὶ μόνον νὰ ἀπομνημονεύσωμεν.

Κατορθώνομεν δι' ὀλίγων μόνον λέξεων καὶ διὰ τῶν ἐννέα συμβόλων καὶ διὰ νέου τινὸς συμβόλου τοῦ 0, ὅπερ καλοῦμεν μηδὲν καὶ διὰ τοῦ ὁποίου παριστάνομεν τὴν ἔλλειψιν τῶν μονάδων, νὰ γράφωμεν τοὺς ἀπείρους ἀριθμοὺς ὡς ἑξῆς·

Ἐὰν εἰς τὸ ἐννέα προστεθῇ μία μονάς, προκύπτει ἀριθμὸς τὸ ὁποῖον καλοῦμεν δέκα· τοῦτον δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ὡς νέαν μονάδα τὴν ὁποίαν καλοῦμεν δεκάδα. Ὅπως ἤδη ἐκ τῆς ἁπλῆς μονάδος ἐσχηματίσθησαν οἱ ἀριθμοὶ ἕν, δύο, τρία.....ἐννέα, οὕτω καὶ ἐκ τῆς δεκάδος διʼ ἐπαναλήψεως σχηματίζονται αἱ διάφοροι δεκάδες, αἵτινες ὀνομάζονται ὡς ἑξῆς· αἱ δύο δεκάδες εἴκοσι, αἱ τρεῖς τριάκοντα, αἱ τέσσαρες τεσσαράκοντα κ. ο. κ. πεντήκοντα, ἑξήκοντα, ἑβδομήκοντα, ὀγδοήκοντα, ἐνενήκοντα. Αἱ δέκα δεκάδες ἀποτελοῦσιν ἀριθμὸν καλούμενον ἑκατόν, τὸν ὁποῖον λαμβάνομεν ὡς νέαν μονάδα καλουμένην ἑκατοντάδα· ἐκ ταύτης ἐπίσης διὰ τῆς ἐπαναλήψεως σχηματίζονται αἱ διάφοροι ἑκατοντάδες, δύο ἑκατοντάδες ἢ διακόσια, τρεῖς ἑκατοντάδες ἢ τριακόσια κ. ο. κ. τετρακόσια, πεντακόσια, ἑξακόσια, ἑπτακόσια, ὀκτακόσια, ἐννεακόσια.

Αἱ δέκα ἑκατοντάδες ἀποτελοῦσι τὸν ἀριθμὸν χίλια, τὸν ὁποῖον θεωροῦμεν ὡς νέαν μονάδα καὶ καλοῦμεν χιλιάδα· ἐκ ταύτης γίνονται πάλιν διὰ τῆς ἐπαναλήψεως αἱ διάφοροι χιλιάδες, αἱ δύο χιλιάδες, τρεῖς χιλιάδες.....ἐννέα χιλιάδες. Αἱ δέκα χιλιάδες ἀποτελοῦσι νέαν μονάδα, τὴν δεκάδα χιλιάδων, ἐξ ἧς γίνονται αἱ διάφοροι δεκάδες χιλιάδων ἤτοι εἴκοσι χιλιάδες, τριάκοντα χιλιάδες κτλ. Αἱ δέκα δεκάδες χιλιάδων ἀποτελοῦσι νέαν μονάδα, τὴν ἑκατοντάδα χιλιάδων, ἐξ ἧς γίνονται αἱ διάφοροι ἑκατοντάδες χιλιάδων ἤτοι διακόσιαι χιλιάδες, τριακόσιαι χιλιάδες κτλ.

Αἱ δέκα ἑκατοντάδες χιλιάδων ἀποτελοῦσι νέαν μονάδα καλουμένην ἑκατομμύριον, ἐξ ἧς κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον σχηματίζεται νέα μονάς, ἡ δεκὰς ἑκατομμυρίων καὶ ἐκ ταύτης ἡ ἑκατοντὰς ἑκατομμυρίων· ὁμοίως λαμβάνομεν τὴν μονάδα, δεκάδα καὶ ἑκατοντάδα δισεκατομμυρίων.

Αἱ οὕτω σχηματισθεῖσαι μονάδες κατατάσσονται εἰς διαφόρους τάξεις ὡς ἑξῆς· ἡ ἁπλῆ μονὰς *πρώτης τάξεως*, ἡ δεκὰς *δευτέρας τάξεως*, ἡ ἑκατοντὰς *τρίτης*, ἡ μονὰς χιλιάδων ἢ ἡ χιλιάς *τετάρτης*, ἡ δεκὰς χιλιάδων *πέμπτης*, ἡ ἑκατοντὰς χιλιάδων *ἕκτης*, ἡ μονὰς ἑκατομμυρίων ἢ τὸ ἑκατομμύριον *ἑβδόμης*, κτλ.

7) Αἱ μονάδες αὗται τῶν διαφόρων τάξεων ἐσχηματίσθησαν πᾶσαι κατὰ

τὸν αὐτὸν τρόπον ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ δέκα, ἑκάστη δηλαδὴ ἐγένετο ἐκ τῆς προηγουμένης ἐπαναληφθείσης δεκάκις.

Μετὰ ταῦτα θέτομεν τὴν ἑξῆς συμφωνίαν.

8) Ἕκαστον ἐκ τῶν ἐννέα σημαντικῶν ψηφίων σημαίνει μονάδας ἁπλᾶς. Ἐὰν δὲ πρὸ αὐτοῦ γραφῇ ἕτερον, τὸ δεύτερον τοῦτο πρὸς τὰ ἀριστερὰ ψηφίον θὰ σημαίνῃ μονάδας δευτέρας τάξεως ἤτοι δεκάδας· καὶ ἐὰν πρὸ τοῦ ψηφίου τῶν δεκάδων γραφῇ ἕτερον, τοῦτο θὰ σημαίνῃ μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως ἤτοι ἑκατοντάδας κ.ο.κ.

Κατὰ ταῦτα οἱ ἀριθμοὶ οἱ περιέχοντες ἁπλᾶς μονάδας οὐχὶ περισσοτέρας τῶν ἐννέα θὰ παρασταθῶσι διὰ τῶν σημαντικῶν ψηφίων 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 καὶ καλοῦνται μονοψήφιοι.

Ἐὰν πρὸ τοῦ O γράψωμεν τὴν 1, ἔχομεν τὸν ἀριθμὸν 10, ὅστις ἔχει μίαν μόνον δεκάδα καὶ ἐλλείπουσιν αἱ ἁπλαῖ μονάδες. Ἂν εἰς τὴν θέσιν τοῦ 1 γράψωμεν κατὰ σειρὰν τὰ διάφορα σημαντικὰ ψηφία θὰ ἔχωμεν γεγραμμένας τὰς διαφόρους δεκάδας.

10 μία δεκὰς ἢ δέκα
20 δύο δεκάδες ἢ εἴκοσι
30 τρεῖς δεκάδες ἢ τριάκοντα
40 τέσσαρες δεκάδες ἢ τεσσαράκοντα
50 πέντε δεκάδες πεντήκοντα
60 ἓξ δεκάδες ἢ ἑξήκοντα
70 ἑπτὰ δεκάδες ἢ ἑβδομήκοντα
80 ὀκτὼ δεκάδες ἢ ὀγδοήκοντα
90 ἐννέα δεκάδες ἢ ἐνενήκοντα.

Ἐὰν εἰς ἑκάστην τῶν δεκάδων τούτων προσθέσωμεν 1, 2, 3 κτλ. μονάδας, θὰ σχηματίσωμεν ἀριθμοὺς περιέχοντας δεκάδας καὶ μονάδας. Ἑπομένως ἐὰν εἰς τὴν θέσιν τοῦ O τῶν ἄνω ἀριθμῶν γράψωμεν σημαντικὸν ψηφίον θὰ ἔχωμεν ἀριθμοὺς ἔχοντας δεκάδας καὶ μονάδας. Π. χ. 75 ἔχει ἑπτὰ δεκάδας καὶ πέντε μονάδας, ἢ 28 ἔχει 2 δεκάδας καὶ 8 μονάδας. Οὕτω γράφονται οἱ ἀριθμοὶ οἱ περιέχοντες μονάδας καὶ δεκάδας οὐχὶ περισσοτέρας τῶν 9 ἐξ ἑκάστης, τὸ δὲ ψηφίον τῶν δεκάδων κατέχει τὴν δευτέραν θέσιν ἐν τῷ ἀριθμῷ ἐκ δεξιῶν ἀρχομένῳ. Οἱ τοιοῦτοι ἀριθμοὶ καλοῦνται *διψήφιοι*.

Ἂν γράψωμεν δύο μηδενικὰ κατέχοντα τὰς θέσεις τῶν μονάδων καὶ δεκάδων καὶ πρὸ αὐτῶν τὸ 1, ἔχομεν τὸν ἀριθμὸν 100 (ἑκατόν), ὅστις ἔχει μίαν ἑκατοντάδα. Καὶ ἀντικαθιστῶντες τὸ 1 διὰ τῶν λοιπῶν σημαντικῶν ψηφίων κατὰ σειρὰν λαμβάνομεν ἀριθμοὺς παριστάνοντας τὰς διαφόρους ἑκατοντάδας, ἤτοι

100	μία ἑκατοντὰς	ἢ	ἑκατὸν
200	δύο ἑκατοντάδες	»	διακόσια
300	τρεῖς »	»	τριακόσια
400	τέσσαρες »	»	τετρακόσια
500	πέντε »	»	πεντακόσια
600	ἓξ »	»	ἑξακόσια
700	ἑπτὰ »	»	ἑπτακόσια
800	ὀκτὼ »	»	ὀκτακόσια
900	ἐννέα »	»	ἐννεακόσια

Γράφοντες ἤδη εἰς τὴν θέσιν τῶν μηδενικῶν σημαντικὰ ψηφία λαμβάνομεν ἀριθμὸν περιέχοντα ἑκατοντάδας, δεκάδας καὶ μονάδας π. χ. 478 περιέχει 4 ἑκατοντάδας, 7 δεκάδας καὶ 8 μονάδας, ὁμοίως 709 περιέχει 7 ἑκατοντάδας καὶ 9 μονάδας.

Οὕτω λαμβάνομεν τοὺς ἀριθμοὺς τοὺς περιέχοντας μονάδας, δεκάδας καὶ ἑκατοντάδας οὐχὶ περισσοτέρας τῶν ἐννέα ἐξ ἑκάστης· καὶ ἐν ἑκάστῳ τούτων, τὸ ψηφίον τῶν ἑκατοντάδων κατέχει τὴν τρίτην θέσιν πρὸς τὰ ἀριστερά. Οἱ τοιοῦτοι ἀριθμοὶ καλοῦνται *τριψήφιοι.*

Ὁμοίως αἱ διάφοροι χιλιάδες γράφονται ὡς ἑξῆς·

1000	μία χιλιὰς ἢ χίλια	
2000	δύο χιλιάδες	
3000	τρεῖς	»
4000	τέσσαρα	»
5000	πέντε	»
6000	ἓξ	»
7000	ἑπτὰ	»
8000	ὀκτὼ	»
9000	ἐννέα	»

Εἰς τὴν θέσιν τῶν μηδενικῶν γράφομεν πάλιν διάφορα σημαντικὰ ψηφία, ἅτινα θὰ παριστῶσι τὰς ἑκατοντάδας, δεκάδας καὶ μονάδας π. χ. ὁ 7583 περιέχει 7 χιλιάδας, 5 ἑκατοντάδας, 8 δεκάδας καὶ 3 μονάδας.

Οὕτω λαμβάνομεν πάντας τοὺς τετραψηφίους ἀριθμοὺς τοὺς περιέχοντας μονάδας, δεκάδας, ἑκατοντάδας καὶ μονάδας χιλιάδων οὐχὶ περισσοτέρας τῶν ἐννέα ἐξ ἑκάστης· ἐν ἑκάστῳ τούτων τὸ ψηφίον τῶν χιλιάδων κατέχει τὴν τετάρτην πρὸς τὰ ἀριστερὰ θέσιν.

Ὡσαύτως αἱ διάφοροι δεκάδες χιλιάδων γράφονται ὡς ἑξῆς·

10000	μία δεκὰς χιλιάδων	ἢ	δέκα χιλιάδες		
20000	δύο δεκάδες χιλιάδων	ἢ	εἴκοσι χιλιάδες		
30000	τρεῖς »	»	»	τριάκοντα	»
40000	τέσσαρες »	»	»	τεσσαράκοντα	»
50000	πέντε »	»	»	πεντήκοντα	»
60000	ἓξ »	»	»	ἑξήκοντα	»

70000 ἑπτὰ » » » ἑβδομήκοντα
80000 ὀκτὼ » » » ὀγδοήκοντα »
90000 ἐννέα » » » ἐννενήκοντα »

Ἂν εἰς τὴν θέσιν τῶν μηδενικῶν γράψωμεν σημαντικὰ ψηφία θὰ ἔχωμεν καὶ μονάδας ἄλλων τάξεων κατωτέρων· π. χ. 58073 ἔχει 5 δεκάδας χιλιάδων, 8 μονάδας χιλιάδων, 7 δεκάδας καὶ 3 μονάδας. Οὕτω λαμβάνομεν καὶ πάντας τοὺς πενταψηφίους ἀριθμοὺς εἰς τοὺς ὁποίους τὸ ψηφίων τῶν δεκάδων χιλιάδων κατέχει τὴν πέμπτην πρὸς τὰ ἀριστερὰ θέσιν, καὶ τὸ ψηφίον τῶν μονάδων ἑκάστης τάξεως δὲν ὑπερβαίνει τὸ ἐννέα.

Αἱ ἑκατοντάδες χιλιάδων γράφονται ὡς ἑξῆς·

100000 μία ἑκατοντὰς χιλιάδων ἢ ἑκατὸν χιλιάδες
200000 δύο ἑκατοντάδες » » διακόσιαι »
300000 τρεῖς » » » τριακόσιαι »
400000 τέσσαρες » » » τετρακόσι ι »
500000 πέντε » » » πεντακόσιαι »
600000 ἕξ » » » ἑξακόσιαι »
700000 ἑπτὰ » » » ἑπτακόσιαι »
800000 ὀκτὼ » » » ὀκτακόσιαι »
900000 ἐννέα » » » ἐννεακόσιαι »

Ἑπομένως τὸ ψηφίον τῶν ἑκατοντάδων χιλιάδων κατέχει τὴν ἕκτην πρὸς τὰ ἀριστερὰ θέσιν.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον παριστῶμεν καὶ τὸ ἓν ἑκατομμύριον διὰ τοῦ 1.000.000 καὶ τὸ ψηφίον ὅπερ κατέχει τὴν ἑβδόμην πρὸς τὰ ἀριστερα θέσιν σημαίνει μονάδας ἑκατομμυρίων, ψηφίον ὅπερ κατέχει τὴν ὀγδόην θέσιν σημαίνει δεκάδας ἑκατομμυρίων καὶ ψηφίον ὅπερ κατέχει τὴν ἐννάτην θέσιν σημαίνει ἑκατοντάδας ἑκατομμυρίων κ. ο. κ.

9) Ἐκ τῶν ἀνωτέρω παρατηροῦμεν ὅτι ἕκαστον ψηφίον σημαίνει μονάδας ὡρισμένης τάξεως ἀναλόγως τῆς θέσεως, τὴν ὁποίαν κατέχει ἐν τῷ ἀριθμῷ ἐκ δεξιῶν ἀρχομένῳ.—Δυνάμεθα νῦν νὰ γράψωμεν οἷον δήποτε ἀριθμὸν μὲ τὰ ἐννέα σημαντικὰ ψηφία καὶ τὸ 0. Οὕτω π. χ. ἂν θέλωμεν νὰ γράψωμεν τὸν ἀριθμὸν ὅστις ἔχει 8 δεκάδας, 3 μονάδας χιλιάδων καὶ 5 ἑκατοντάδας χιλιάδων θὰ γράψωμεν 0 εἰς τὴν πρώτην θέσιν ἐκ δεξιῶν, τὰς 8 δεκάδας εἰς τὴν δευτέραν θέσιν, 0 εἰς τὴν τρίτην θέσιν, τὰς 3 μονάδας χιλιάδων εἰς τὴν τετάρτην, 0 εἰς τὴν πέμπτην, καὶ τὰς 5 ἑκατοντάδας χιλιάδων εἰς τὴν ἕκτην θέσιν, ἤτοι θὰ ἔχωμεν τὸν ἀριθμὸν 503080.

Δυνάμεθα προσέτι διὰ ἐλαχίστων λέξεων νὰ ὀνομάσωμεν τὸ ἄπειρον τοῦτο πλῆθος τῶν ἀριθμῶν. Ἐν πρώτοις ἔχομεν δέκα λέξεις διὰ τῶν ὁποίων ἀπαγγέλλονται οἱ 10 πρῶτοι ἀριθμοί. Ὁ ἀριθμὸς 11 ὀνομάζεται δέκα καὶ ἕν, ὅπερ γίνεται ἕνδεκα, προτασσομένης τῆς λέξεως ἕν. Ὁ ἀριθμὸς 12 ὀνομάζεται δέκα καὶ δύο, ὅπερ γίνεται δώδεκα προτασσομένου τοῦ δύο· οἱ ἑπόμενοι ἀριθμοὶ ὀνομάζονται κανονικῶς δέκα τρία, δέκα τέσσαρα . . . δέκα ἐννέα. Ὁ ἀριθμὸς 20 ὀνομάζεται εἴκοσι, οἱ δὲ μετὰ τοῦτον εἴκοσι ἕν, εἴκοσι δύο . . . εἴκοσιν ἐννέα. Ὁ ἀριθμὸς 30 ὀνομάζεται τριάκοντα διὰ λέξεως γενομένης ἐκ τοῦ τρία. Ὁ ἀριθμὸς 40, τεσσαράκοντα διὰ λέξεως γενομένης ἐκ τοῦ τέσσαρα κ. ο. κ. πεντήκοντα ἐκ τοῦ πέντε, ἑξήκοντα ἐκ τοῦ ἕξ, ἑβδομήκοντα ἐκ τοῦ ἑπτά, ὀγδοήκοντα ἐκ τοῦ ὀκτώ, ἐννενήκοντα ἐκ τοῦ ἐννέα. Διὰ νέων λέξεων ὀνομάζονται τέλος οἱ ἑξῆς ἀριθμοὶ ὁ 100 ἑκατόν, ὁ 1000 χίλια καὶ 1.000.000 ἑκατομμύριον. Οὕτω δι᾽ ὀλίγων λέξεων ὀνομάζομεν τοὺς ἀπείρους ἀριθμούς.

10) *β'. Ἀπαγγελία.*—Ἀριθμὸν γεγραμμένον διὰ ψηφίων δυνάμεθα νὰ ἀπαγγείλωμεν ὡς ἑξῆς·

1ον) Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς δὲν ἔχῃ περισσότερα τῶν τριῶν ψηφίων, δύναται ν᾽ ἀπαγγελθῇ κατὰ δύο τρόπους· ἢ ἀπαγγέλλομεν ἕκαστον ψηφίον χωριστὰ μὲ τὸ ὄνομα τῶν μονάδων του, ἢ ἀπαγγέλλομεν ὁλόκληρον τὸν ἀριθμὸν ὡς μονάδας τὰς ὁποίας παριστᾷ τὸ τελευταῖον ψηφίον, δηλαδὴ ὡς ἁπλᾶς μονάδας π.χ. ὁ ἀριθμὸς 48 ἀπαγγέλλεται ἢ τέσσαρες δεκάδες καὶ 8 μονάδες ἢ τεσσαράκοντα ὀκτὼ μονάδες. Ὁμοίως ὁ ἀριθμὸς 709 ἀπαγγέλλεται ἢ 7 ἑκατοντάδες καὶ 9 μονάδες ἢ ἑπτακόσιαι ἐννέα μονάδες.

2ον) Ὅταν ὁ ἀριθμὸς ἔχῃ περισσότερα τῶν τριῶν ψηφίων ἀπαγγέλλεται κατὰ δύο τρόπους· ἢ ἀπαγγέλλομεν ἕκαστον ψηφίον αὐτοῦ χωριστὰ μὲ τὸ ὄνομα τῶν μονάδων του ἢ χωρίζομεν αὐτὸν εἰς τριψήφια τμήματα, ἀπὸ τοῦ ψηφίου τῶν ἁπλῶν μονάδων ἀρχόμενοι, καὶ ἀπαγγέλλομεν ἕκαστον τμῆμα χωριστὰ μὲ τὸ ὄνομα τῶν μονάδων τοῦ τελευταίου πρὸς τὰ δεξιὰ ψηφίου ἑκάστου τμήματος· ἑπομένως τὸ πρῶτον ἐκ δεξιῶν τριψήφιον τμῆμα εἶναι τῶν ἁπλῶν μονάδων, τὸ δεύτερον τῶν χιλιάδων, τὸ τρίτον τῶν ἑκατομμυρίων, τὸ τέταρτον τῶν δισεκατομμυρίων κλπ. Π.χ. ὁ ἀριθμὸς 45807 ἀπαγγέλλεται 4 δεκάδες χιλιάδων, 5 μονάδες χιλιάδων, 8 ἑκατοντάδες καὶ 7 μονάδες. Δύναται ὅμως ν᾽ ἀπαγγελθῇ καὶ ἄλλως, ἀφ᾽ οὗ χωρισθῇ εἰς τριψήφια τμήματα 45,807 ὡς ἑξῆς· τεσσααράκοντα πέντε χιλιάδες καὶ ὀκτακόσιαι ἑπτὰ μονάδες. Ὁμοίως ὁ 9.705.480 ἀπαγγέλλεται κατὰ τὸν πρῶτον τρόπον 9 μονάδες ἑκατομμυρίων, 7 ἑκατοντάδες χιλιάδες, 5 μονάδες χιλιάδων, 4 ἑκατοντάδες, 8 δεκάδες, ἢ κατὰ τὸν δεύτερον τρόπον ἐννέα ἑκατομμύρια ἑπτακόσιαι πέντε χιλιάδες καὶ τετρακόσιαι ὀγδοήκοντα μονάδες.

Σημ. *Τὰ τριψήφια τμήματα, εἰς τὰ ὁποῖα χωρίζομεν τὸν ἀριθμὸν ὁρίζονται διὰ τῶν ἑξῆς μονάδων 1, 1000, 1000000 ἑκάστη τῶν ὁποίων γίνεται ἐκ τῆς προηγουμένης χιλιάκις ἐπαναλαμβανομένης. Αἱ μονάδες αὗται καλοῦνται* ***κύριαι ἢ πρωτεύουσαι μονάδες.***

Συγκεκριμένοι καὶ ἀφῃρημένοι ἀριθμοί.

11) Οἱ ἀριθμοὶ διακρίνονται εἰς *συγκεκριμένους καὶ ἀφῃρημένους.*

Καὶ συγκεκριμένοι μὲν λέγονται ἐκεῖνοι οἱ ὁποῖοι σημαίνουσι πρᾶγμά τι ὡς 8 μῆλα, 15 ἄνθρωποι, 9 οἰκίαι κτλ. Ἀφῃρημένοι δὲ ἐκεῖνοι οἱ ὁποῖοι δὲν σημαίνουσι πρᾶγμά τι ὡς οἱ ἀριθμοὶ 8, 9, 15.

12. Οἱ συγκεκριμένοι ἀριθμοὶ λέγονται *ὁμοειδεῖς* ὅταν παριστῶσι τὸ αὐτὸ πρᾶγμα ὡς 18 θρανία, 20 θρανία καὶ 25 θρανία· *ἑτεροειδεῖς* δὲ ὅταν παριστῶσι διάφορα πράγματα π. χ. 4 οἰκίαι, 12 δένδρα, 7 θρανία κτλ.

Ἴσοι καὶ ἄνισοι ἀριθμοί.

13) Δύο ἀριθμοὶ καλοῦνται ἴσοι, ὅταν ἑκάστη μονὰς τοῦ ἑνὸς ἀντιστοιχῇ εἰς μίαν μονάδα τοῦ ἑτέρου ἤτοι ὅταν ἀποτελῶνται ἀπὸ τὸ αὐτὸ πλῆθος μονάδων π. χ. ὁ ἀριθμὸς τῶν δακτύλων τῆς δεξιᾶς χειρὸς εἶναι ἴσος πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν δακτύλων τῆς ἀριστερᾶς χειρός.

Τὸ σημεῖον δι' οὗ δηλοῦμεν τὴν ἰσότητα δύο ἀριθμῶν εἶναι τὸ (=) ἴσον, ὅπερ γράφεται μεταξὺ τῶν δύο ἴσων ἀριθμῶν, ὡς 5=5 ἢ 8=8 κτλ.

14) Ἄνισοι εἶναι οἱ ἀριθμοὶ οἵτινες δὲν εἶναι ἴσοι καὶ ὁ ἔχων τὰς περισσοτέρας μονάδας καλεῖται μεγαλύτερος, ὁ δὲ ἕτερος μικρότερος π. χ. ὁ 8 εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 5 ἢ ὁ 5 μικρότερος τοῦ 8.

Τὸ σημεῖον τῆς ἀνισότητος εἶναι (>) καὶ γράφεται μεταξὺ τῶν ἀνίσων ἀριθμῶν καὶ ὁ μεγαλύτερος εἰς τὸ ἄνοιγμα τοῦ συμβόλου π. χ. 8>5 ἢ ὁ 8 μεγαλύτερος τοῦ 5, 3<7 ἢ ὁ 3 μικρότερος τοῦ 7.

Ἀσκήσεις ἐπὶ τῆς γραφῆς καὶ ἀπαγγελίας τῶν ἀριθμῶν.

1) Γράψατε εἰς μίαν κατακόρυφον στήλην καὶ κατὰ σειρὰν τὰς μονάδας διαφόρων τάξεων, ἀπὸ τῆς ἁπλῆς μονάδος μέχρι τοῦ δισεκατομμυρίου.

2) Ὁρίσατε τὴν τάξιν ἑκάστης τῶν μονάδων τούτων·

3) Ποίαν τάξιν κατέχει ἡ ἑκατοντάς, ποίαν ἡ δεκὰς χιλιάδων, ποίαν ἡ ἑκατοντὰς ἑκατομμυρίου κτλ.

4) Ποσάκις ἡ χιλιὰς εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἑκατοντάδος, ποσάκις τῆς δεκάδος, καὶ ποσάκις τῆς μονάδος ;

5) Τὸ χιλιόδραχμον πόσα ἑκατοντάδραχμα ἔχει, πόσα δεκάδραχμα καὶ πόσα μονόδραχμα.

6) Ποσάκις ἡ χιλιὰς εἶναι μικροτέρα τῆς δεκάδος χιλιάδων, ποσάκις τῆς ἑκατοντάδος χιλιάδων καὶ ποσάκις τοῦ ἑκατομμυρίου

7) Πόσα χιλιόδραχμα περιέχονται εἰς 10.000 δραχμάς, πόσα εἰς 100,000 δραχμὰς καὶ πόσα εἰς 1.000000 δραχμάς ;

8) Ποσάκις ἡ ἑκατοντὰς χιλιάδων εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἁπλῆς δεκάδος;

9) Πόσα δεκάδραχμα περιέχονται εἰς 10.000 δραχμάς ;

10) Ποσάκις τὸ ἑκατομμύριον εἶναι μεγαλύτερον τῆς ἁπλῆς μονάδος;

11) Νὰ γραφῶσιν οἱ ἀριθμοὶ α'.) ἀπὸ τοῦ 10 μέχρι τοῦ 100 οἱ περιέχοντες μόνον δεκάδας· β'.) οἱ ἀριθμοὶ κατὰ σειρὰν ἀπὸ τοῦ 60 μέχρι 70.

12) Νὰ γραφῶσι οἱ ἀριθμοὶ α'.) ἀπὸ τοῦ 100 μέχρι τοῦ 1000 οἱ πε-

ριέχοντες μόνον ἑκατοντάδας· β'.) ἀπὸ τοῦ 400 μέχρι τοῦ 500 οἱ περιέχοντες ἑκατοντάδας καὶ δεκάδας· γ'.) οἱ περιεχόμενοι ἀπὸ τοῦ 480 μέχρι τοῦ 490 κατὰ σειράν.

13) Νὰ γραφῶσιν α') ὁ ἀριθμὸς ὁ περιέχων 8 ἑκατοντάδας καὶ 7 μονάδας. β') Ὁ ἀριθμὸς ὁ περιέχων 8 δεκάδας χιλιάδων, 7 ἑκατοντάδας καὶ 3 δεκάδας. γ') Ὁ ἀριθμὸς ὁ περιέχων 5 μονάδας ἑκατομμυρίου, 7 ἑκατοντάδας χιλιάδων, 8 μονάδας χιλιάδων, 2 δεκάδας ἁπλᾶς καὶ 5 μον. ἁπλᾶς.

14) Νὰ γραφῶσι α') Ὁ ἀριθμὸς τετρακόσια ἐννέα. β') Πεντακόσια ὀγδοήκοντα καὶ τρία. γ') Τρεῖς χιλιάδες ὀκτακόσια ἑβδομήκοντα. δ') Χίλια πέντε. ε') Δέκα χιλιάδες ὀκτώ. ς') Ἑκατὸν χιλιάδες διακόσια τρία κλπ.

15) Νὰ ἀπαγγελθῶσι καὶ κατὰ τοὺς δύο τρόπους οἱ ἑξῆς ἀριθμοὶ 508, 7008, 35802, 458324, 9508237, 500008, 17348250, 85023475.

16) Νὰ γραφῶσιν οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι ὁ εἷς κάτωθεν τοῦ ἄλλου οὕτως ὥστε αἱ μονάδες τῆς αὐτῆς τάξεως νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν κατακόρυφον στήλην.

17) Ἐν τῷ ἀριθμῷ 58204 α') Ποῖον εἶναι τὸ ψηφίον τῶν ἑκατοντάδων καὶ πόσας ἑκατοντάδας ἔχει ἐν ὅλῳ οὗτος; β') Ποῖον εἶναι τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων καὶ πόσας δεκάδας ἔχει ἐν ὅλῳ οὗτος; γ') Ποῖον εἶναι τὸ ψηφίον τῶν ἑκατοντάδων χιλιάδων καὶ πόσας ἑκατοντάδας χιλιάδων ἔχει ἐν ὅλῳ οὗτος;

Σημ. *Διὰ εὕρωμεν πόσας μονάδας τάξεώς τινος ἔχει ἐν ὅλῳ ἀριθμός τις, χωρίζομεν ἐκ δεξιῶν τὸ τμῆμα τοῦ ἀριθμοῦ μέχρι τοῦ ψηφίου τοῦ παριστάνοντος μονάδας τῆς τάξεως ταύτης· τὸ ὑπολειπόμενον τμῆμα τοῦ ἀριθμοῦ παριστᾷ τὰς ζητουμένας μονάδας. Π. χ. ὁ ἀριθμὸς 58204 ἔχει ἐν ὅλῳ 582 ἑκατοντάδας.*

18) Ὁ ἀριθμὸς 50837 ἀποτελεῖται ἐξ ἑπτὰ ἁπλῶν μονάδων, ἐκ τριῶν δεκάδων, αἵτινες περιέχουσι 30 ἁπλᾶς μονάδας, ἐξ 8 ἑκατοντάδων αἵτινες περιέχουσιν 800 ἁπλᾶς μονάδας καὶ ἐκ 5 δεκάδων χιλιάδων αἵτινες περιέχουσι 50000 ἁπλᾶς μονάδας, ἤτοι ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς ἀποτελεῖται ἐκ τῶν

50000, 800, 30, 7.

Καθ' ὅμοιον τρόπον ν' ἀναλυθῶσι καὶ οἱ ἑξῆς ἀριθμοὶ α') ὁ 508, β') ὁ 45089, γ') ὁ 540803, δ') ὁ 8450372 κ. ο. κ.

ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΠΡΑΞΕΙΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΑΚΕΡΑΙΩΝ

ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ

Ἂς ὑποτεθῇ ὅτι γνωρίζομεν, ὅτι αἱ τρεῖς τάξεις Ἑλληνικοῦ τινος σχολείου περιέχουσιν ἡ μὲν Αη 35 μαθητάς, ἡ δὲ Βα 28 καὶ ἡ Γη 15 καὶ θέλομεν νὰ εὕρωμεν πόσους μαθητὰς ἔχει ἐν ὅλῳ τὸ σχολεῖον τοῦτο· εἶναι ἀνάγκη νὰ εὕρωμεν ἀριθμόν τινα, ὅστις νὰ περιέχῃ καὶ τοὺς μαθητὰς τῆς Αης ἤτοι τὰς μονάδας τοῦ 35 καὶ τοὺς μαθητὰς τῆς Βας ἤτοι τὰς μονάδας τοῦ 28 καὶ τοὺς μαθητὰς τῆς Γης ἤτοι τὰς μονάδας τοῦ 15 καὶ μόνον ταύτας. Ἡ πρᾶξις διὰ τῆς ὁποίας θὰ εὕρωμεν τὸν ἀριθμὸν τοῦτον καλεῖται *πρόσθεσις*.

15) **Ὁρισμός**. «Πρόσθεσις εἶναι ἡ πρᾶξις διὰ τῆς ὁποίας σχηματίζομεν ἕνα ἀριθμὸν ἐκ πασῶν τῶν μονάδων, τὰς ὁποίας περιέχουσι δύο ἢ περισσότεροι δοθέντες ἀριθμοί.»

Οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ καλοῦνται *προσθετέοι*, ὁ δὲ ἐξ αὐτῶν εὑρισκόμενος *κεφάλαιον* ἢ *ἄθροισμα*.

Τὸ σημεῖον τῆς προσθέσεως εἶναι τὸ (+) ὅπερ γράφεται μεταξὺ τῶν προσθετέων καὶ ἀπαγγέλλεται *σὺν* ἢ *καὶ* π.χ. 4+8 σημαίνει νὰ προστεθῶσιν ὁ 4 καὶ ὁ 8, καὶ ἀπαγγέλλεται 4 σὺν 8 ἢ 4 καὶ 8.

Σημ. *Ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ εἶναι ἀφῃρημένοι ἡ πρόσθεσις αὐτῶν γίνεται πάντοτε· οἱ συγκεκριμένοι ἀριθμοὶ προστίθενται μόνον ἐὰν εἶναι ὁμοειδεῖς· π.χ. δυνάμεθα νὰ προσθέσωμεν 5 οἰκίας καὶ 7 οἰκίας, δὲν εἶναι ὅμως δυνατὸν νὰ προσθέσωμεν ἑτεροειδεῖς ἀριθμοὺς ὡς 7 δένδρα καὶ 8 οἰκίας. Τὸ ἄθροισμα τῶν ὁμοειδῶν ἀριθμῶν εἶναι καὶ τοῦτο ὁμοειδὲς πρὸς τοὺς προσθετέους.*

Εἰς τὴν πρόσθεσιν διακρίνομεν δύο περιπτώσεις.

α΄) Ἐὰν ἔχωμεν νὰ προσθέσωμεν μονοψήφιον εἰς δοθέντα ἀριθμόν.

β΄) Ἐὰν ἔχωμεν νὰ προσθέσωμεν πολυψηφίους ἀριθμούς.

16) *α΄ περίπτωσις.*—Διὰ νὰ προσθέσωμεν εἴς τινα ἀριθμὸν ἕτερον μονοψήφιον, ἀρκεῖ εἰς τὰς μονάδας τούτου νὰ προσθέσωμεν τὰς μονάδας τοῦ δευτέρου ἀνὰ μίαν, π. χ. διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα 8+3 λαμβάνομεν μίαν μονάδα ἀπὸ τοῦ 3 καὶ προσθέτομεν ταύτην εἰς τὸ 8, ὅτε ἔχομεν 9+2· λαμβάνομεν πάλιν ἀπὸ τοῦ 2 μίαν μονάδα, τὴν ὁποίαν προσθέτομεν εἰς τὸ 9, ὅτε ἔχομεν 10+1· τέλος προσθέτομεν καὶ τὴν μείνασαν μονάδα ἤτοι 10+1=11 καὶ οὕτω ἔχομεν τὸ ζητούμενον ἄθροισμα 8+3=11.

Σημ. *Τὸ ἄθροισμα τῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν πρέπει νὰ γνωρίζωμεν ἀπὸ μνήμης καὶ εὐχερῶς, διότι καὶ πᾶσα πρόσθεσις οἱωνδήποτε ἀριθμῶν, ὡς θὰ ἴδωμεν ἀνάγεται εἰς τοιαύτην πρόσθεσιν.*

17) Τὸ ἄθροισμα πολλῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν εὑρίσκεται, ἐὰν εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων, εἰς τοῦτο προστεθῇ ὁ τρίτος, εἰς τοῦτο ὁ τέταρτος κ. ο. κ. Διὰ νὰ εὕρωμεν π. χ. τὸ ἄθροισμα 8+7+5+9 προσθέτομεν πρῶτον 8+7=15, εἰς τοῦτο προσθέτομεν τὸ 5 καὶ εἰς τὸ ἄθροισμα 20 προσθέτομεν καὶ τὸ 9 καὶ ἔχομεν τὸ ὁλικὸν ἄθροισμα 8+7+5+9=29.

18) *β΄ περίπτωσις.*—Ἡ πρόσθεσις τῶν πολυψηφίων ἀριθμῶν ἀνάγεται εἰς τὴν πρόσθεσιν τῶν μονοψηφίων, διότι δυνάμεθα νὰ προσθέσωμεν χωριστὰ τὰς μονάδας αὐτῶν, χωριστὰ τὰς δεκάδας, χωριστὰ ἐν γένει τὰς μονάδας τῆς αὐτῆς τάξεως.

Ἄς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι ἔχομεν νὰ προσθέσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς 897, 4789, 248. Πρὸς εὐκολίαν τῆς πράξεως γράφομεν τὸν ἕνα κάτωθεν τοῦ ἄλλου, οὕτως ὥστε αἱ μονάδες τῆς αὐτῆς τάξεως νὰ εὑρίσκονται εἰς τὴν αὐτὴν κατακόρυφον στήλην· ὑπ' αὐτοὺς σύρομεν γραμμὴν ὁριζοντίαν καὶ ἀρχίζομεν τὴν πρόσθεσιν ἀπὸ τῶν ἁπλῶν μονάδων· τὸ ἄθροισμα τούτων εἶναι 24 καὶ περιέχει 2 δεκάδας καὶ 4 μονάδας. Γράφομεν ὑπὸ τὴν ὁριζοντίαν γραμμὴν εἰς τὴν στήλην τῶν μονάδων τὰς 4 μονάδας, τὰς δὲ δύο δεκάδας προσθέτομεν μετὰ τῶν ψηφίων τῶν δεκάδων. Τὸ ἄθροισμα τούτων εἶναι 23 δεκάδες, ὅπερ περιέχει 2 ἑκατ. καὶ 3 δεκάδας, τὰς ὁποίας γράφομεν ὑπὸ τὴν γραμμὴν εἰς τὴν στήλην τῶν δεκάδων, τὰς δὲ δύο ἑκατοντάδας προσθέτομεν μετὰ τῶν ψηφίων τῶν ἑκατοντάδων. Τὸ ἄθροισμα τούτων εἶναι 20, ὅπερ ἀποτελεῖ ἀκριβῶς 2 μονάδας χιλιάδων, γράφομεν ἤδη εἰς τὴν στήλην τῶν ἑκατοντάδων ὑπὸ τὴν γραμμὴν 0 καὶ προσθέτομεν τὰς 2 χιλιάδας εἰς τὰς 4 χιλιάδας, τὸ δὲ ἄθροισμα αὐτῶν 6 γράφομεν εἰς τὴν στήλην τῶν χιλιάδων ὑπὸ τὴν γραμμήν, καὶ οὕτω ἔχομεν τὸ ζητούμενον ἄθροισμα 6034.

897
4789
348
6034

19) *Κανών*. — «Διὰ νὰ προσθέσωμεν οἱουσδήποτε ἀριθμούς, γράφομεν αὐτοὺς τὸν ἕνα κάτωθεν τοῦ ἄλλου οὕτως ὥστε αἱ μονάδες τῆς αὐτῆς τάξεως νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν κατακόρυφον στήλην, καὶ ὑπ' αὐτοὺς σύρωμεν γραμμὴν ὁριζοντίαν. Ἔπειτα ἀρχομένοι ἀπὸ τῶν ἁπλῶν μονάδων προσθέτομεν τὰ ψηφία ἑκάστης στήλης χωριστὰ καὶ ἂν μὲν τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων στήλης τινὸς δὲν ὑπερβαίνῃ τὸ 9 γράφεται ὑπὸ τὴν γραμμὴν εἰς τὴν αὐτὴν στήλην· ἂν δὲ περιέχῃ καὶ δεκάδας τότε τὰς μὲν μονάδας αὐτοῦ γράφομεν ὑπὸ τὴν γραμμὴν εἰς τὴν αὐτὴν στήλην, τὰς δὲ δεκάδας προσθέτομεν μετὰ τῶν ψηφίων τῆς ἑπομένης στήλης πρὸς τὰ ἀριστερά· προχωροῦμεν δὲ οὕτω μέχρις οὗ προστεθῶσι καὶ τὰ ψηφία τῆς τελευταίας πρὸς τἀριστερὰ στήλης».

Κατὰ τὸν κανόνα τοῦτον ἐκτελοῦνται αἱ ἑξῆς προσθέσεις·

	45832	
58347	794	4008
7582	6897	347
173478	12475	10298
239.407	65998	145653

Πρόβλημα. — Πόσους μαθητὰς ἔχει Ἑλληνικὸν σχολεῖον τὸ ὁποῖον εἰς τὴν Αην τάξιν ἔχει 38 μαθητάς, εἰς τὴν Βαν 24 καὶ εἰς τὴν Γην *18* ;

Εἰς τοὺς 38 μαθητὰς τῆς Αης θὰ προσθέσωμεν τοὺς 24 τῆς Βας καὶ εὑρίσκομεν 38+25=62· εἰς τούτους θὰ προσθέσωμεν τοὺς 18 τῆς Γης ἤτοι 62+18=80 μαθητὰς ἔχει ἐν ὅλῳ τὸ σχολεῖον· εὑρίσκομεν δηλ. τὸ ἄθροισμα 38+24+18=80.

Εἶναι φανερὸν ὅτι δυνάμεθα εἰς τοὺς 18 μαθητὰς τῆς Γης νὰ προσθέσωμεν τοὺς 24 τῆς Βας τάξεως (18+24=42) καὶ εἰς τὸ ἄθροισμα τοῦτο νὰ προσθέσωμεν καὶ τοὺς μαθητὰς τῆς Αης (42+38=80)· ἤτοι τὸ αὐτὸ πλῆθος μαθητῶν εὑρίσκομεν καθ᾽οἱανδήποτε τάξιν καὶ ἂν προσθέσωμεν τοὺς μαθητὰς τῶν τριῶν τάξεων τοῦ Ἑλληνικοῦ σχολείου. Ὅθεν ἔχομεν $38+24+18=18+24+38$.

Ἐκ τούτων ἕπεται ἡ ἑξῆς ἰδιότης·

20) «Τὸ ἄθροισμα πολλῶν προσθετέων δὲν μεταβάλλεται καθ᾽οἱανδήποτε τάξιν καὶ ἂν προσθέσωμεν αὐτούς».

Δοκιμὴ τῆς προσθέσεως.

21) Δοκιμὴ μιᾶς πράξεως καλεῖται ἄλλη πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας ἐξελέγχομεν, ἐὰν ἡ πρώτη πρᾶξις ἐγένετο ἄνευ λάθους.

22) Ἡ δοκιμὴ τῆς προσθέσεως γίνεται πάλιν διὰ τῆς προσθέσεως τῶν αὐτῶν ἀριθμῶν ἄνωθεν πρὸς τὰ κάτω· ἂν εὕρωμεν πάλιν τὸ αὐτὸ ἄθροισμα, ἡ πρᾶξις ἐγένετο ἄνευ λάθους (§ 20).

Νὰ δοκιμασθῶσιν αἱ προηγούμεναι προσθέσεις.

ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ

Ἐὰν μαθητής τις ἔχῃ 23 πεντάλεπτα καὶ ἐξοδεύσῃ κατά τινα ἡμέραν τὰ 8, διὰ νὰ εὕρωμεν πόσα τῷ ὑπολείπονται ἀκόμη, πρέπει νὰ ἐλαττώσωμεν τὰς μονάδας τοῦ 23 κατὰ τὰς μονάδας τοῦ 8· ὁ οὕτω προκύψας ἀριθμὸς παριστᾷ τὰ μένοντα πεντάλεπτα. Ἡ πρᾶξις διὰ τῆς ὁποίας τοῦτο εὑρίσκεται καλεῖται *Ἀφαίρεσις*.

Ἡ πρᾶξις αὕτη ὁρίζεται ὡς ἑξῆς.

23) «Ἀφαίρεσις εἶναι πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας ἐλαττοῦμεν ἕνα ἀριθμὸν κατὰ τόσας μονάδας, ὅσας ἔχει ἄλλος τις ἀριθμός.»

Ὁ ἀριθμὸς ὅστις πρόκειται νὰ ἐλαττωθῇ καλεῖται *μειωτέος*, ὁ δὲ δεικνύων κατὰ πόσας μονάδας θὰ ἐλαττωθῇ ὁ μειωτέος καλεῖται *ἀφαιρετέος* αἱ ὑπολειπόμεναι μονάδες ἀποτελοῦσι τὸ *ὑπόλοιπον* ἢ τὴν *διαφοράν*.

Τὸ ὑπόλοιπον ἑπομένως δεικνύει κατὰ πόσας μονάδας εἶναι ὁ μειωτέος μεγαλύτερος τοῦ ἀφαιρετέου.

Εἶναι προφανὲς ὅτι τὸ ὑπόλοιπον προστιθέμενον εἰς τὸν ἀφαιρετέον δίδει τὸν μειωτέον. Διὰ τοῦτο ἡ ἀφαίρεσις δύναται νὰ ὁρισθῇ καὶ διὰ τῆς προσθέσεως, ὡς ἑξῆς·

24) «Ἀφαίρεσις εἶναι πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας δοθέντων δύο ἀριθμῶν, εὑρίσκομεν τρίτον, ὅστις προστιθέμενος εἰς τὸν μικρότερον μᾶς δίδει τὸν μεγαλύτερον».

Τὸ σημεῖον τῆς ἀφαιρέσεως εἶναι(—) ὅπερ γράφεται μεταξὺ τοῦ μειωτέου καὶ τοῦ ἀφαιρετέου καὶ ἀπαγγέλλεται *μεῖον* ἢ *πλὴν* ἢ *ἀπὸ* π. χ. $8-5$ σημαίνει ἀφαίρεσιν τοῦ 5 ἀπὸ τοῦ 8 καὶ ἀπαγγέλλεται 8 μεῖον 5 ἢ 8 πλὴν 5 ἢ 5 ἀπὸ 8.

Ἐὰν ὁ ἀφαιρετέος ἰσοῦται τῷ μειωτέῳ δὲν μένει μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν οὐδεμία μονὰς τοῦ μειωτέου ἤτοι τὸ ὑπόλοιπον εἶναι 0· ὡς $7-7=0$. Ἐὰν ὅμως ὁ ἀφαιρετέος εἶναι μεγαλύτερος τοῦ μειωτέου, ἡ ἀφαίρεσις δὲν εἶναι δυνατή.

Σημ. *Ὅπως εἰς τὴν πρόσθεσιν οὕτω καὶ εἰς τὴν ἀφαίρεσιν, ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ εἶναι συγκεκριμένοι πρέπει νὰ εἶναι ὁμοειδεῖς.*

Καὶ εἰς τὴν ἀφαίρεσιν διακρίνομεν δύο περιπτώσεις:

α'.) Ὅταν ἔχομεν ν' ἀφαιρέσωμεν ἀπό τινος ἀριθμοῦ ἄλλον μονοψήφιον καὶ τὸ ὑπόλοιπον εἶναι μονοψήφιον.

β'.) Ὅταν ἔχομεν ν' ἀφαιρέσωμεν οἱουσδήποτε ἀριθμούς.

25) α'. ***Περίπτωσις.***—Ἡ ἀφαίρεσις ἐκτελεῖται, ἂν ἀφαιρέσωμεν ἀνὰ μίαν πάσας τὰς μονάδας τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τὰς μονάδας τοῦ μειωτέου· π. χ. 11—3, ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ 11 μίαν μονάδα καὶ ἔχομεν 10, ἀπὸ τούτου ἀφαιροῦμεν ἄλλην μονάδα καὶ ἔχωμεν 9. τέλος ἀφαιροῦμεν καὶ τρίτην μονάδα ἀκόμη καὶ ἔχομεν ὑπόλοιπον 8 ἤτοι 11—3=8·

Σημ. *Αἱ τοιαῦται ἀφαιρέσεις πρέπει νὰ γίνωνται ἀπὸ μνήμης καὶ εὐχερῶς, διότι εἰς ταύτας ἀνάγεται ἡ ἀφαίρεσις οἱωνδήποτε ἀριθμῶν.*

Πρόβλημα.—Πατήρ τις ἔχει δύο τέκνα· καὶ τὸ μὲν μεγαλύτερον εἶναι 13, τὸ δὲ μικρότερον 7 ἐτῶν· κατὰ πόσα ἔτη εἶναι μεγαλύτερον τὸ α' τοῦ β';

Θέλομεν νὰ εὕρωμεν ἐν τῷ προβλήματι τούτῳ τὴν διαφορὰν 13—7=6. Εἶναι φανερὸν ὅτι μετὰ 8 ἔτη ἡ ἡλικία τοῦ α' θὰ εἶναι 13+8=21 ἡ δὲ τοῦ β' 7+8=15, καὶ ἡ διαφορὰ τῶν ἡλικιῶν τῶν δύο τέκνων θὰ εἶναι ἡ αὐτὴ 21—15=6. Ἀλλὰ καὶ πρὸ 5 ἐτῶν ὅτε ἡ ἡλικία τοῦ α' ἦτο 13—5=8, ἡ διαφορὰ τῶν ἡλικιῶν ἦτο ἡ αὐτὴ ἤτοι 8—2=6.

Ἐντεῦθεν συνάγομεν τὴν ἑξῆς ἰδιότητα.

25) «Ἐὰν προσθέσωμεν (ἢ ἀφαιρέσωμεν) τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν εἰς τὸν μειωτέον καὶ εἰς τὸν ἀφαιρετέον ἡ διαφορὰ δὲν μεταβάλλεται.»

27) ***β' περίπτωσις.***—Ἔστω ἡ ἀφαίρεσις 96837—4785.

Ἐν πρώτοις γράφομεν τὸν ἀφαιρετέον κάτωθεν τοῦ μειωτέου οὕτως ὥστε τὰ ψηφία τῶν μονάδων τῆς αὐτῆς τάξεως νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν στήλην καὶ ὑπ' αὐτοὺς σύρομεν γραμμὴν ὁριζοντίαν. Ἔπειτα δὲ ἐκτελοῦμεν τὴν πρᾶξιν ὡς ἑξῆς: Ἀφαιροῦμεν τὸ ψηφίον 5 τῶν μονάδων τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τοῦ ἀντιστοίχου ψηφίου 7 τοῦ μειωτέου, καὶ τὸ ὑπόλοιπον 2 γράφομεν ὑπὸ τὴν γραμμὴν καὶ εἰς τὴν στήλην τῶν μονάδων. Μετὰ ταῦτα προχωροῦμεν εἰς τὰς δεκάδας, ἀλλὰ παρατηροῦμεν ὅτι αἱ 8 δεκάδες τοῦ ἀφαιρετέου δὲν ἀφαιροῦνται ἀπὸ τῶν 3 τοῦ μειωτέου· διὰ νὰ γείνῃ τοῦτο δυνατόν, προσθέτομεν εἰς τὰς 3 δεκάδας τοῦ μειωτέου 1 ἑκατοντάδα ἤτοι 10 δεκάδας· ἀπὸ τῶν 13 τούτων δεκάδων ἀφαιροῦμεν τὰς 8 τοῦ ἀφαιρετέου καὶ τὸ ὑπόλοιπον 5 γράφομεν ὑπὸ τὴν γραμμὴν εἰς τὴν στήλην τῶν δεκάδων. Ἵνα ἀφαιρέσωμεν τώρα τὰς 7 ἑκατοντάδας τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τῶν 8 τοῦ μειωτέου, πρέπει νὰ προσθέσωμεν εἰς τὰς 7 ἑκατοντάδας τοῦ ἀφαιρετέου 1 ἑκατοντάδα διὰ νὰ μὴ βλαφθῇ ἡ διαφορὰ (§ 26), καὶ ἔπειτα ἀφαιροῦμεν τὸ

$$\begin{array}{r} 96837 \\ \underline{4785} \\ 92052 \end{array}$$

ὑπόλοιπον 8—8 ἢ τὸ 0 γράφομεν ὑπὸ τὴν γραμμὴν εἰς τὴν στήλην τῶν ἑκατοντάδων. Ἔπειτα ἀφαιροῦμεν τὰς 4 χιλιάδας ἀπὸ τὰς 6 χιλιάδας, τὸ ὑπόλοιπον 2 γράφομεν ὑπὸ τὴν γραμμὴν καὶ εἰς τὴν στήλην τῶν χιλιάδων. Τέλος τὰς 9 δεκάδας χιλιάδων τοῦ μειωτέου καταβιβάζομεν ὑπὸ τὴν γραμμὴν καὶ εἰς τὴν στήλην τῶν δεκάδων χιλιάδων. Οὕτως εὑρίσκομεν τὸ ὑπόλοιπον ἤτοι 96837—4785=96052.

28) ***Κανών***. «Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν δύο οἱουσδήποτε ἀριθμούς, γράφομεν τὸν ἀφαιρετέον κάτωθεν τοῦ μειωτέου οὕτως, ὥστε αἱ μονάδες τῆς αὐτῆς τάξεως νὰ εἶναι εἰς τὴν αὐτὴν στήλην, καὶ σύρομεν ὑπ' αὐτοὺς γραμμὴν ὁριζοντίαν. Ἀφαιροῦμεν ἔπειτα ἕκαστον ψηφίον τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τοῦ ἀντιστοίχου ψηφίου τοῦ μειωτέου, ἀρχόμενοι ἀπὸ τῶν ἁπλῶν μονάδων· ἐὰν δὲ τύχῃ ψηφίον τι τοῦ ἀφαιρετέου νὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἀντιστοίχου τοῦ μειωτέου, αὐξάνομεν τὸ μὲν ψηφίον τοῦ μειωτέου κατὰ 10 τὸ δὲ προηγούμενον ψηφίον τοῦ ἀφαιρετέου κατὰ 1 καὶ ἔπειτα ἀφαιροῦμεν· ἐξακολουθοῦμεν δὲ οὕτω μέχρις ὅτου ἀφαιρεθῶσι πάντα τὰ ψηφία τοῦ ἀφαιρετέου».

Κατὰ τὸν κανόνα τοῦτο ἐκτελοῦνται αἱ ἑξῆς ἀφαιρέσεις.

58034	150837	300827
37718	4592	20709
20316	146245	280118

29) ***Δοκιμὴ τῆς ἀφαιρέσεως***.— Αὕτη γίνεται διὰ τῆς προσθέσεως τοῦ ὑπολοίπου καὶ τοῦ ἀφαιρετέου· ἂν ὡς ἄθροισμα τούτων εὕρωμεν τὸν τὸν μειωτέον ἡ πρᾶξις ἐγένετο ἄνευ λάθους (§ 24).

Ἀσκήσεις προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως.

1. Πρόσθεσις ἀπὸ μνήμης.

α) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ ἑξῆς προσθέσεις·

15+8=	5+4+7+2=	18+7+4+8=
23+5=	8+2+9+4=	23+5+7+9=
18+7=	17+5+9+3=	12+8+3+5=
45+8=	28+7+3+5=	7+8+5+2=

β') Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ ἑξῆς προσθέσεις·

547+10=	1005+100=	2583+1000=
378+10=	2537+100=	17832+1000=
207+10=	13458+100=	34582+1000=

Σημ. *Διὰ νὰ προσθέσωμεν 10, 100, 1000 κτλ. εἴς τινα ἀριθμὸν ἀρκεῖ ν' αὐξήσωμεν κατὰ 1 τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων ἢ τῶν ἑκατοντάδων ἢ τῶν χιλιάδων κλπ. ἐν τῷ δοθέντι ἀριθμῷ.— Οὕτω 45+10=55 καὶ 35+100=135 καὶ 12538+1000=13538 κλπ.*

γ') Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ ἑξῆς προσθέσεις·

35+9=	58+99=	39+999=
158+9=	175+99=	257+999=
245+9=	1253+99=	3458+999=

Σημ.. Διὰ νά προσθέσωμεν εἴς τινα ἀριθμὸν τὸ 9, ἢ 99 ἢ 999 κτλ. ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν εἰς αὐτὸν 10, 100 ἢ 1000 κτλ. καὶ ν' ἀφαιρέσωμεν ἔπειτα 1 π. χ. 37+9=37+10—1=47—1=46. Ὁμοίως 2548+99=2548+100—1=2647 κτλ.

δ') Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ ἑπόμεναι προσθέσεις.

20+30=	500+700=	800+500+200=
150+70=	2500+800=	1200+300+700=
340+80=	3500+600=	2500+800+500=

Σημ.. Διὰ νὰ προσθέσωμεν ἀριθμοὺς λήγοντας εἰς ἰσάριθμα μηδενικά, παραλείπομεν ταῦτα καὶ προσθέτομεν τὰ μένοντα μέρη καὶ δεξιὰ τοῦ ἀθροίσματος γράφομεν τόσα μηδενικά, ὅσα ἔχει εἷς τῶν προστεθέντων π.χ. 50+30 εὑρίσκεται ὡς ἑξῆς· 5+3=8· καὶ γράφομεν ἓν μηδενικὸν 80 ἤτοι 50+30=80.

2. Νὰ ἐκτελεσθῶσι αἱ ἑξῆς προσθέσεις·

78+31=	123+47=	583+55=
35+52=	248+35=	277+36=
78+45=	358+27=	1247+52=

Σημ.. Διὰ νὰ προσθέσωμεν ἀπὸ μνήμης δύο ἀριθμοὺς οἱουσδήποτε ὅταν δὲν εἶνε οὗτοι μεγάλοι, χωρίζομεν αὐτοὺς εἰς δεκάδας καὶ μονάδας καὶ προσθέτομεν χωριστὰ τὰς δεκάδας καὶ χωριστὰ τὰς μονάδας καὶ ἑνώνομεν ἔπειτα τὰ ἀθροίσματα π.χ. 45+24 προσθέτομεν 40+20=60 καὶ 5+4=9 ὅθεν 45+24=69. Ὁμοίως 238+85 προσθέτομεν 230+80=310 καὶ 8+5=13 ὅθεν 238+85=323.

2. Νὰ ἐκτελεσθῶσι γραπτῶς αἱ ἑξῆς προσθέσεις :

α') 5835+24579+405087+35=
β') 758+25940+3587+945823+258=
γ') 5087+37+25830+458+173457=

Αἱ προσθέσεις αὗται νὰ ἐκτελεσθῶσι πρῶτον ἀφ' οὗ οἱ ἀριθμοὶ τεθῶσιν ὁ εἷς κάτωθεν τοῦ ἄλλου καταχορύφως καὶ δεύτερον, ὡς ἔχουσιν ὁριζοντίως.

δ') 5834+745+50837+2578=
347+87+2753+805=
19757+890+3582+7087=
9457+35+17508+375=

Νὰ προστεθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ ὡς εἶναι γεγραμμένοι πρῶτον ἀνὰ τέσσαρες ὁριζοντίως, δεύτερον καταχορύφως καὶ τρίτον νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν τεσσάρων τούτων ἀθροισμάτων καὶ καταχορύφως καὶ ὁριζοντίως.

1. Ἀφαίρεσις ἀπὸ μνήμης.

α') Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ ἑξῆς ἀφαιρέσεις·

17—8=	45—4=	745—8=
27—5=	87—6=	379—6=
15—7=	91—8=	523—7=
47—(8+5+4)	120—(8+5+7+10)	

Σημ. *Όταν ολόκληρον άθροισμα αφαιρήται από τινος άλλου αριθμού, κλείομεν αυτό εντός παρενθέσεως.*

β΄) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ ἑξῆς ἀφαιρέσεις·

45—10=	897—100=	15847—1000=
258—10=	1253—100=	35872—10000=
3467—10=	8459—100=	758347—100000=

Σημ. *Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν 10 ἢ 100 ἢ 1000 κτλ. ἀπό τινος ἀριθμοῦ, ἀρκεῖ νὰ ἐλαττώσωμεν κατὰ 1 τὸ ἀντίστοιχον ψηφίον τοῦ δοθέντος π.χ. 378—10=368 κτλ.*

γ΄) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ ἑξῆς ἀφαιρέσεις·

48—9=	137—99=	2583—999=
157—9=	847—99=	8472—999=
243—9=	2583—99=	12573—999=

Σημ. *Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ 9 ἢ 99 ἢ 999 κτλ. ἀπό τινος ἀριθμοῦ ἀρκεῖ νὰ αὐξήσωμεν τὸν μειωτέον κατὰ 1 καὶ ἀφαιρέσωμεν ἔπειτα τὸ 10 ἢ 100 ἢ 1000 κλπ. ὡς 45—9=46—10=36 (προσθέτομεν μίαν μονάδα καὶ εἰς τὸν μειωτέον καὶ εἰς τὸν ἀφαιρετέον § 26)· ὁμοίως 235—99=236—100=136·*

δ΄) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ ἑξῆς ἀφαιρέσεις·

70—50=	900—300=	5000—2000=
60—20=	1200—500=	17000—9000=
160—70=	1500—900=	25000—8000=

Σημ. *Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν δύο ἀριθμοὺς λήγοντας εἰς ἰσάριθμα μηδενικά παραλείπομεν ταῦτα καὶ ἀφαιροῦμεν, δεξιὰ δὲ τοῦ ὑπολοίπου γράφομεν τὰ μηδενικὰ τοῦ ἑνὸς ἀριθμοῦ π. χ. 1800—600 ἀφαιροῦμεν 18—6=12 καὶ γράφομεν δεξιὰ τοῦ 12 δύο μηδενικὰ ἤτοι 1800—600=1200.*

Νὰ ἐκτελεσθῶσι γραπτῶς αἱ ἑξῆς ἀφαιρέσεις·

5834—245=	345083—84773=
75835—2498=	1200834—783459=

Αἱ ἀφαιρέσεις αὗται νὰ ἐκτελεσθῶσι πρῶτον ἀφ' οὗ τεθῇ ὁ ἀφαιρετέος κάτωθεν τοῦ μειωτέου, καὶ δεύτερον ὡς εἶναι γεγραμμένοι οἱ ἀριθμοὶ ὁριζοντίως.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως πρὸς ἄσκησιν.

1) Εἶχέ τις 15408 δραχ. καὶ ἐκέρδισεν ἔκ τινος ἐπιχειρήσεως 2597 δραχ. πόσας δραχμὰς ἔχει;

2) Εἶχέ τις 10000 δραχ. καὶ ἐζημιώθη ἔκ τινος ἐπιχειρήσεως 1923 δραχ. Πόσαι δραχμαὶ τῷ ἔμειναν;

3) Ποῖον ἀριθμὸν δίδει ὁ ἀριθμὸς 8457 αὐξανόμενος κατὰ τὸν 792;

4) Ποῖον ἀριθμὸν δίδει ὁ 15783 ἐλαττούμενος κατὰ τὸν 3458;

5) Ἠγόρασέ τις κτῆμα ἀντὶ 12575 δραχ. καὶ ἐπώλησεν αὐτὸ ἀντὶ 14500 δραχ. Πόσας δραχμὰς ἐκέρδισεν;

6) Ἠγόρασέ τις ἐμπορεύματα ἀξίας 4580 δραχ. ἅτινα ἐπώλησεν ἀντὶ 3875 δραχ. Πόσας δραχμὰς ἐζημιώθη;

7) Οἰκία τις ἐπωλήθη ἀντὶ 50870 δραχ. μὲ ζημίαν 4590. Πόσον ἠγοράσθη;

8) 18 δέρματα βοὸς κατειργασμένα ζυγίζουσιν ἐν ὅλῳ 195 ὀκ. Τὰ δέρματα ταῦτα ἀπέβαλον διὰ τῆς κατεργασίας 112 ὀκ. Πόσας ὀκάδας ἐζύγιζον πρὸ τῆς κατεργασίας;

9) Σιδηροῦν βαρέλλιον πλῆρες οἰνοπνεύματος ζυγίζει 248 ὀκ., κενὸν δὲ 67 ὀκ. Πόσας ὀκάδ. οἰνοπνεύματος περιέχει τὸ βαρέλιον τοῦτο;

10) Ἠγόρασέ τις τέσσαρα φορτία ἀνθράκων· τὸ 1ον ζυγίζει 87 ὀκ., τὸ 2ον 75 ὀκ., τὸ 3ον 92 ὀκ. καὶ τὸ 4ον 69 ὀκ. Πόσας ὀκάδας ἀνθράκων ἠγόρασεν ἐν ὅλῳ;

11) Ἄνθρωπός τις ἐγεννήθη κατὰ τὸ ἔτος 1854 μ. Χ. καὶ ἀπέθανε τῷ 1902 μ. Χ. Εἰς ποίαν ἡλικίαν ἀπέθανεν; (ἀπ. 48 ἐτῶν).

12) Ἄνθρωπός τις ἔχει κατὰ τὸ ἔτος 1907 μ. Χ. ἡλικίαν 63 ἐτῶν, κατὰ ποῖον ἔτος ἐγεννήθη; (ἀπ. 1844 ἔτος).

13) Πόσα ἔτη παρῆλθον ἀπὸ τῆς ἁλώσεως τῆς Κων)πόλεως μέχρι τοῦ 1ου ἔτους τῆς Ἑλλην. Ἐπαναστάσεως; (ἀπ. 368 ἔτη).

14) Πόσα ἔτη παρῆλθον ἀπὸ τῆς ἐν Σαλαμῖνι Ναυμαχίας μέχρι τῆς ἁλώσεως τῆς Κων)πόλεως (ἀπ. 1933 ἔτη).

15) Ἄνθρωπός τις ἐγεννήθη κατὰ τὸ 1842 μ. Χ. Κατὰ ποῖον ἔτος θὰ ἔχῃ ἡλικίαν 85 ἐτῶν; (ἀπ, 1927).

16) Κατὰ τὴν ἀπογραφὴν τοῦ 1896, ἡ μὲν Στερεὰ Ἑλλὰς εἶχε πληθυσμὸν 630933 κατοίκους, ἡ Πελοπόννησος 902185 κατ., αἱ νῆσοι τοῦ Αἰγαίου Πελάγους 250262 κατ., αἱ τοῦ Ἰονίου 252973 κατ. καὶ ἡ Θεσσαλία μετὰ τοῦ Νομοῦ Ἄρτης 397459 κατ. Πόσος ἦτο ὁ πληθυσμὸς ὁλοκλήρου τῆς Ἑλλάδος κατὰ τὸ 1896; (ἀπ. 2433810 κάτοικοι).

17) Τρία κιβώτια περιέχουσι 1435 πορτοκάλια. Τὸ α΄ περιέχει 458, τὸ β΄ 635· πόσα πορτοκάλια περιέχει τὸ τρίτον; (ἀπ. 342).

18) Πόσας ὀκάδας ἄρτου δίδουσιν 100 ὀκ. ἀλεύρου ἐὰν χρειάζωνται 58 ὀκ. ὕδατος διὰ νὰ ζυμωθῇ τὸ ἄλευρον τοῦτο, καὶ ἂν κατὰ τὴν ὄπτησιν ἐξατμίζωνται 24 ὀκάδ. ὕδατος; (ἀπόκρ. 133 ὀκάδ.).

19) Οἰκογενειάρχης τις ἐπλήρωσεν εἰς τὸ τέλος τοῦ μηνὸς 48 δρ. διὰ 115 ὀκ. ἄρτου, εἰς τὸν κρεωπώλην 74 δραχ. διὰ 45 ὀκ. κρέατος, δι᾽ ἐνοίκιον τοῦ μηνὸς 125 δραχ., εἰς τὸν ῥάπτην του 95 δραχ., εἰς τὸν οἰνοπώλην 18 δραχ. διὰ 29 ὀκ. οἴνου καὶ τέλος 10 δραχ. δι᾽ ἀγορὰν λαχείων τοῦ Ἐθν. στόλου. Πόσα ἐξώδευσεν ἐν ὅλῳ κατὰ τὸν μῆνα τοῦτον; (ἀπ. 370 δραχ.).

20) Κρεωπώλης τις ἐπώλησεν εἰς βυρσοδέψην

63 δέρματα βοὸς βάρους 1845 ὀκ. ἀντὶ δρ. 1675
45 » ἀγελάδος » 973 » » » 758
173 » μόσχου » 1032 » » » 1345

Πόσα εἶναι τὰ πωληθέντα δέρματα, ποῖον τὸ βάρος αὐτῶν, καὶ πόσα εἰσέπραξεν ἐν ὅλῳ ; (ἀπ. α΄ 281 δέρμ. β΄ 3850 ὀκ. γ΄ 3778 δρ.).

21) Χρεωστεῖ τις εἴς τινα 58749 δραχ. καὶ πληρώνει εἰς αὐτὸν κατά τινα ἐποχὴν 7459 δραχ. κατά τινα ἄλλην 3478 δρ. καὶ ἄλλην 757 δραχ. καὶ τέλος 10405 δρ. Πόσας δραχμὰς ὀφείλει ἀκόμη ; (ἀπ. 36650 δρ.).

22) Ἔμπορός τις εἶχε 8750 δραχ. καὶ χρεωστεῖ εἴς τινα 7840 δρ., εἰς ἄλλον 2879 δραχ. καὶ εἰς τρίτον 3458 δραχ. Πόσας δραχ. χρειάζεται ἀκόμη διὰ νὰ πληρώσῃ καὶ τοὺς τρεῖς ; (ἀπ. 5427 δραχ).

23) Ἔμπορός τις εἶχε τὴν πρωΐαν τῆς Δευτέρας ἐν τῷ χρηματοκιβωτίῳ του 5672 δραχ. Εἰσέπραξε κατὰ τὸ διάστημα τῆς ἡμέρας α΄) 2458 δραχ. β΄) 845 δραχ. γ΄) 157 δραχ. καὶ δ΄) 257 δραχ. Ἐπλήρωσε δὲ τὰ ἑξῆς ποσά· α΄) 783 δραχ. β΄) 1257 δραχ. γ΄) 349 δρ. Πόσαι δραχμαὶ εὑρίσκονται ἐν τῷ χρηματοκιβωτίῳ του κατὰ τὴν ἑσπέραν τῆς Δευτέρας; (ἀπ. 7000 δραχ.).

24) Ἔμπορός τις ἠγόρασε ζάκχαριν ἀντὶ 12347 δραχ. Τὰ ἔξοδα τῆς μεταφορᾶς ἀνῆλθον εἰς 328 δρχ. τὰ τῆς ἀποθηκεύσεως εἰς 295 δρχ. ἐπλήρωσε δὲ καὶ διὰ δασμὸν 9547 δραχ., ἐκ τῆς μεταπωλήσεως αὐτῆς εἰσέπραξεν 25512 δραχ. Πόσον εἶνε τὸ κέρδος ἢ ἡ ζημία ἐκ τοῦ ἐμπορεύματος τούτου ; (ἀπ. κέρδος 2995 δραχ.).

25) Ὑφασματοπώλης εἶχεν εἰς τὸ κατάστημά του 1961 πήχεις ὑφάσματος οἵτινες τῷ στοιχίζουσι 19925 δρχ. Ἐπώλησεν 842 πήχεις ἀντὶ 10567 δρχ., ἔπειτα 702 πήχεις ἀντὶ 6318 δρχ. καὶ τέλος 243 πήχεις ἀντὶ 1822 δρχ., τὰς δὲ ὑπολοίπους ἐπώλησεν ἀντὶ 3405 δρχ. Πόσους πήχεις ἐπώλησε τὴν τελευταίαν φορὰν καὶ πόσον ἐκέρδισεν ἢ ἐζημιώθη ἐκ τῆς πωλήσεως τοῦ ὑφάσματος τούτου ; (Ἀπ. 174 πήχεις, ἐκέρδισε 2187 δραχμ.).

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ

Ἐὰν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν πόσας δραχμὰς ἀξίζουσιν αἱ 3 ὀκάδες πράγματός τινος ὅταν ἡ ὀκᾶ τιμᾶται 9 δρχ.. σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς : Ἀφ' οὗ ἡ μία ὀκᾶ τιμᾶται 9 δραχ. αἱ 2 ὀκ. θὰ τιμῶνται 2 φορὰς τὸ 9 ἤτοι $9+9=18$ καὶ αἱ 3 ὀκ. θὰ τιμῶνται 3 φορὰς τὸ 9 ἤτοι $9+9+9=27$ δραχμάς.

Παρατηροῦμεν λοιπὸν ἐντεῦθεν, ὅτι διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ζητούμενον, πρέπει νὰ προσθέσωμεν τρία 9 ἤτοι νὰ ἐπαναλάβωμεν τὸ 9 τρεῖς φοράς. Ἡ πρᾶξις αὕτη λέγεται *πολλαπλασιασμὸς* καὶ ὁρίζεται ὡς ἑξῆς:

30) «Πολλαπλασιασμὸς εἶνε πρᾶξις διὰ τῆς ὁποίας ἐπαναλαμβάνομεν ἀριθμόν τινα τόσας φοράς, ὅσας μονάδας ἔχει ἄλλος τις».

Ὁ ἀριθμὸς ὅστις πρόκειται νὰ ἐπαναληφθῇ λέγεται *πολλαπλασιαστέος* ὁ δὲ ἕτερος ὁ δεικνύων πόσας φορὰς θὰ ἐπαναληφθῇ ὁ πρῶτος λέγεται *πολλαπλασιαστής*· καὶ τὸ προκῦπτον ἐξαγόμενον *γινόμενον*· ὁ δὲ πολλαπλασιαστέος καὶ ὁ πολλασιαστὴς ὁμοῦ καλοῦνται παράγοντες τοῦ γινομένου.

Τὸ σημεῖον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ εἶνε (×) ἢ (·) γραφόμενον μεταξὺ τοῦ πολλαπλασιαστέου καὶ τοῦ πολλασιαστοῦ καὶ ἀπαγγέλλεται ἐπὶ π.χ. 7×5 ἢ 7 · 5 σημαίνει νὰ πολλασιασθῇ τὸ 7 ἐπὶ τὸ 5 καὶ ἀπαγγέλλεται 7 ἐπὶ 5 καὶ ὁ μὲν 7 εἶναι πολλαπλασιαστέος, τὸ δὲ 5 πολλαπλασιαστής.

Τὸ ἐξαγόμενον τῆς πράξεως ταύτης ἐκλήθη γινόμενον διότι γίνεται ἐκ τοῦ πολλαπλασιαστέου καθ' ὃν τρόπον ὁ πολλαπλασιαστὴς γίνεται ἐκ τῆς μονάδος. Π. χ. 7×5 σημαίνει ἀπὸ τὸν 7 νὰ γίνῃ ἄλλος ἀριθμὸς ὡς ὁ 5 ἐγένετο ἐκ τῆς μονάδος, ἤτοι ἐπειδὴ 5=1+1+1+1+1 διὰ τοῦτο καὶ 7×5=7+7+7+7+7.

Ἐκ τούτων συνάγομεν τὸν ἑξῆς γενικώτερον ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ:

31) «Πολλαπλασιασμὸς εἶναι πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας δοθέντων δύο ἀριθμῶν σχηματίζομεν ἐκ τοῦ πρώτου τρίτον ὅπως ὁ δεύτερος σχηματίζεται ἐκ τῆς μονάδος». Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τούτου ἕπεται ὅτι, ὅταν ὁ πολλαπλασιαστέος εἶναι συγκεκριμένος ἀριθμός, τὸ γινόμενον εἶναι ἀριθμὸς ὁμοειδὴς πρὸς τὸν πολλαπλασιαστέον. Ὁ πολλαπλασιαστὴς λαμβάνεται πάντοτε ὡς ἀφῃρημένος ἀριθμός.

Εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν διακρίνομεν τρεῖς περιπτώσεις.

Α) Πολλαπλασιασμὸν μονοψηφίου ἐπὶ μονοψήφιον.

Β) Πολλαπλασιασμὸν πολυψηφίου ἐπὶ μονοψήφιον.

Γ) Πολλαπλασιασμὸν πολυψηφίου ἐπὶ πολυψήφιον.

Α'. Περίπτωσις.

32) Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον δύο μονοψηφίων πρέπει κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ νὰ προσθέσωμεν τὸν πολλαπλασιαστέον τόσας φοράς, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ πολλαπλασιαστὴς π.χ. 8×3 σημαίνει νὰ προσθέσωμεν 8+8+8=24· ἄρα 8×3=24.

Παρατηροῦμεν λοιπὸν ὅτι τὰ γινόμενα τῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν εὑρίσκονται διὰ τῆς προσθέσεως· εἶναι ἀνάγκη ὅμως νὰ γνωρίζωμεν ταῦτα ἀπὸ μνήμης καὶ πρὸς τοῦτο μᾶς χρησιμεύει ὁ ἑπόμενος πίναξ, ὅστις καλεῖται *Πυθαγόρειος*.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Εἰς τὴν πρώτην γραμμὴν γράφομεν τοὺς 9 μονοψηφίους ἀριθμούς· εἰς τὴν δευτέραν γράφομεν τὰ διπλάσια αὐτῶν τὰ ὁποῖα εὑρίσκομεν ἂν εἰς ἕκαστον ἐξ αὐτῶν προσθέσωμεν τὸν ἑαυτόν του· εἰς τὴν τρίτην γράφομεν τὰ τριπλάσια προσθέτοντες εἰς τοὺς ἀριθμοὺς τῆς δευτέρας γραμμῆς τοὺς ἀντιστοίχους τῆς πρώτης· ἐξακολουθοῦμεν οὕτω μέχρις οὗ εἰς τὴν τελευταίαν γραμμὴν γράψωμεν τὰ ἐννεαπλάσια τῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν. Ἐὰν ζητῶμεν τὸ γινόμενον δύο μονοψηφίων ἀριθμῶν ὡς 8×5 ἄγομεν νοερῶς ἀπὸ τοῦ 8 τῆς ὁριζοντίας γραμμῆς μίαν κατακόρυφον καὶ ἀπὸ τοῦ 5 τῆς πρώτης στήλης μίαν ὁριζοντίαν· εἰς τὴν συνάντησιν τῶν δύο τούτων γραμμῶν εὑρίσκεται τὸ ζητούμενον γινόμενον, τὸ 40. Τὸ αὐτὸ γινόμενον εὑρίσκομεν καὶ ἂν σύρωμεν τὰς ἀνωτέρω γραμμὰς τὴν μὲν κατακόρυφον ἀπὸ τοῦ 5 τῆς ὁριζοντίας γραμμῆς, τὴν δὲ ὁριζοντίαν ἀπὸ τοῦ 8 τῆς πρώτης στήλης.

Τὰ γινόμενα τῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν πρέπει νὰ γνωρίζωμεν ἀπὸ μνήμης, διότι πᾶς πολλαπλασιασμὸς ἀνάγεται, ὡς θὰ ἴδωμεν, εἰς τοιούτους πολλαπλασιασμούς.

Ἰδιότητες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

Διὰ νὰ προχωρήσωμεν εἰς τὰς ἄλλας περιπτώσεις τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἔχομεν ἀνάγκην νὰ γνωρίσωμεν ἰδιότητάς τινας τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

Πρόβλημα.—Εἴς τινα τάξιν εὑρίσκονται 5 θρανία καὶ εἰς ἕκαστον ἐξ αὐτῶν κάθηνται 8 μαθηταί· πόσους μαθητὰς ἔχει ἡ τάξις ;

Εὑρίσκομεν τοὺς μαθητὰς τῆς τάξεως προσθέτοντες τοὺς μαθητὰς ἑνὸς ἑκάστου θρανίου ἤτοι θὰ ἔχωμεν $8+8+8+8+8=8\times5=40$.

Δυνάμεθα ὅμως νὰ εὕρωμεν τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο λαμβάνοντες ἐξ ἑκάστου θρανίου τὸν πρῶτον ἤτοι 5 μαθητάς· ἔπειτα λαμβάνομεν τὸν δεύτερον ἤτοι ἄλλους 5 *καὶ* κ. ο. κ. μέχρι τοῦ ὀγδόου ἤτοι θὰ ἔχωμεν $5+5+5+5+5+5+5+5=5\times8=40$.

Προφανῶς τὸ πλῆθος τῶν μαθητῶν τῆς τάξεως εὑρίσκεται τὸ αὐτὸ ἤτοι $8\times5=5\times8$.

Ἐντεῦθεν ἕπεται ἡ ἑξῆς ἰδιότης τοῦ πολλαπλασιασμοῦ·

33) «Τὸ γινόμενον δύο παραγόντων μένει τὸ αὐτό, ἂν ὁ πολλαπλασιαστέος γίνῃ πολλαπλασιαστὴς *καὶ* ὁ πολλαπλασιαστὴς πολλαπλασιαστέος».

Ἐκ τῆς ἰδιότητος ταύτης ἕπονται ἀμέσως *καὶ* τὰ ἑξῆς·

Τὸ γινόμενον ἀριθμοῦ τινος ἐπὶ τὴν 1 εἶναι ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς π.χ. $6\times1=6$ διότι $6\times1=1\times6=1+1+1+1+1+1=6$.

Τὸ γινόμενον ἀριθμοῦ τινος ἐπὶ 0 εἶναι 0, π.χ. $4\times0=0$ διότι $4\times0=0+0+0+0=0$.

Πρόβλημα.—Ἐκ τῶν τριῶν ἐργατῶν ὁ α΄ λαμβάνει ἡμερομίσθιον 5 δρχ., ὁ β΄ 4 δραχ. *καὶ* ὁ γ΄ 3 δραχ. Πόσας δραχμὰς θὰ λάβωσι *καὶ* οἱ 3 ὁμοῦ κατὰ τὰς 6 ἐργασίμους ἡμέρας τῆς ἑβδομάδος ;

Τὸ πρόβλημα τοῦτο δύναται νὰ λυθῇ κατὰ δύο τρόπους.

Εὑρίσκομεν πρῶτον πόσας δραχμὰς λαμβάνουσι *καὶ* οἱ 3 ὁμοῦ καθ' ἡμέραν $5+4+3=12$, τὸ ποσὸν τοῦτο πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ 6 ἤτοι $12\times6=72$ ἢ $(5+4+3)\times6=72$.

Ἡ παρένθεσις δεικνύει ὅτι πρέπει πρῶτον νὰ ἐκτελεσθῇ ἡ πρόσθεσις $5+4+3$ *καὶ* ἔπειτα ὁ πολλαπλασιασμὸς ἐπὶ 6.

Δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ ζητούμενον *καὶ* ὡς ἑξῆς· Νὰ εὕρωμεν πρῶτον πόσας δραχμὰς θὰ λάβῃ ὁ α΄ ἐπὶ 6 ἡμ. $(5\times6=30)$, ἔπειτα ὁ β΄ $(4\times6=24)$ *καὶ* ἔπειτα ὁ γ΄ $(3\times6=18)$ *καὶ* τέλος νὰ προσθέσωμεν τὰ τρία ταῦτα ποσὰ $30+24+18=72$ δραχ. ἤτοι $5\times6+4\times6+3\times6=72$.

Ὅθεν ἔχομεν $(5+4+3)\times6=5\times6+4\times6+3\times6$.

Ἡ ἰσότης αὕτη ἐκφράζει τὴν ἑξῆς ἰδιότητα·

34) «Ἄθροισμα ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἀριθμόν, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ἕκαστος τῶν προσθετέων ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν καὶ προστεθῶσι τὰ μερικὰ γινόμενα.»

Ἐπειδὴ δὲ $(5+4+3)\times 6=6\times(5+4+3)=6\times 5+6\times 5+6\times 3$, κατὰ τὴν ἰδιότητα (§ 33), ἕπεται καὶ ἡ ἑξῆς ἰδιότης·

35) «Ἀριθμὸς πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἄθροισμα, ἂν πολλαπλασιασθῇ ἐφ' ἕκαστον τῶν προσθετέων καὶ προστεθῶσι τὰ μερικὰ γινόμενα».

β'. Περίπτωσις.

Ἔστω πρὸς εὕρεσιν τὸ γινόμενον 8059×4. Ἐπειδὴ $8059=8^{\text{χιλ.}}+5^{\text{δεκ.}}+9^{\text{μον.}}$ ἕπεται κατὰ τὴν ἰδιότητα (§ 34) $8059\times 4=(8^{\text{χιλ.}}+5^{\text{δεκ.}}+9^{\text{μον.}})\times 4=8^{\text{χιλ.}}\times 4+5^{\text{δεκ.}}\times 4+9^{\text{μον.}}\times 4$, δηλ. διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν πολυψήφιον ἐπὶ μονοψήφιον ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσιάσωμεν ἕκαστον ψηφίον τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστήν. Ἡ πρᾶξις ἐκτελεῖται ὡς ἑξῆς·

Γράφομεν τὸν πολλαπλασιαστὴν ὑπὸ τὸ ψηφίον τῶν μονάδων τοῦ πολλαπλασιαστέου καὶ ὑπ' αὐτοὺς σύρομεν γραμμὴν ὁριζοντίαν.

$$\begin{array}{r} 8059 \\ 4 \\ \hline 32236 \end{array}$$

Μετὰ τοῦτο πολλαπλασιάζομεν τὸ ψηφίον τῶν μονάδων 9×4 καὶ εὑρίσκομεν γινόμενον 36· καὶ τὸ μὲν ψηφίον 6 τῶν μονάδων τοῦ γινομένου γράφομεν ὑπὸ τὴν γραμμὴν καὶ εἰς τὴν στήλην τῶν μονάδ. τὰς δὲ 3 δεκάδας αὐτοῦ προσθέτομεν εἰς τὸ γινόμενον τοῦ ψηφίου τῶν δεκάδων 5×4, ἤτοι εἰς τὰς 20 δεκάδας καὶ εὑρίσκομεν 23 δεκάδας. Τοῦ ἐξαγομένου τούτου τὰς μὲν 3 δεκ. γράφομεν ὑπὸ τὴν γραμμὴν καὶ τὴν στήλην τῶν δεκ., τὰς δὲ 2 ἑκαντοντάδ. προσθέτομεν εἰς τὸ ἀμέσως ἑπόμενον γινόμενον $0\times 4=0$ ἑκατοντ. καὶ εὑρίσκομεν 2 ἑκατοντ. τὰς ὁποίας γράφομεν ὑπὸ τὴν γραμμὴν καὶ τὴν στήλην τῶν ἑκατοντ. Τέλος πολλαπλασιάζομεν τὰς 8 χιλ. τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ 4 καὶ τὸ γινόμενον 32 γράφομεν ὁλόκληρον ὑπὸ τὴν γραμμὴν καὶ εἰς τὰς στήλας τῶν χιλ. καὶ τῶν δεκ. χιλ.

Οὕτως εὑρίσκομεν τὸ ζητούμενον γινόμενον 32236.

Ἐντεῦθεν ἕπεται ὁ ἑξῆς κανών·

36) ***Κανών.***—«Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν πολυψήφιον ἐπὶ μονοψήφιον, γράφομεν τὸν μονοψήφιον κάτωθεν τοῦ πολυψηφίου καὶ ὑπ' αὐτούς, ἄγομεν γραμμὴν ὁριζοντίαν. Ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν ἕκαστον ψηφίον τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστήν, ἀρχόμενοι ἀπὸ τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων· καὶ ἂν μὲν γινόμενόν τι εἶναι μονοψήφιον, γράφομεν αὐτὸ ὑπὸ τὴν ὁριζοντίαν γραμμὴν καὶ εἰς τὴν ἀντίστοιχον στήλην· ἂν δὲ εἶναι διψήφιον, τὰς μὲν μονάδας αὐτοῦ γράφομεν ὑπὸ τὴν γραμμὴν καὶ εἰς τὴν αὐτὴν στήλην, τὰς δὲ δεκάδας προσθέτομεν εἰς τὸ ἀμέσως ἑπόμενον γινόμενον. Τὸ τελευταῖον γινόμενον γράφομεν ὁλόκληρον ὑπὸ τὴν γραμμήν»

Κατὰ τὸν κανόνα τοῦτον ἐκτελοῦνται οἱ ἑξῆς πολλαπλασιασμοί·

$$\begin{array}{r}34872\\ \cdot\ 8\\ \hline 278976\end{array}\qquad \begin{array}{r}23087\\ 5\\ \hline 115435\end{array}\qquad \begin{array}{r}800307\\ 9\\ \hline 7202763\end{array}$$

γ΄. Περίπτωσις.

Ὁ πολλαπλασιασμὸς δύο πολυψηφίων ἀριθμῶν δύναται ν᾽ ἀναχθῇ εἰς πολλαπλασιασμοὺς πολυψηφίου ἐπὶ μονοψήφιον. Διὰ νὰ γίνῃ τοῦτο φανερὸν ἂς θεωρήσωμεν τὰς ἑξῆς μερικὰς περιπτώσεις·

α΄) Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμὸν ὡς τὸν 85 ἐπὶ 10. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ πρέπει ὁ ἀριθμὸς 85 νὰ ἐπαναληφθῇ 10 φοράς· ἀλλ᾽ ἑκάστη μονὰς δεκάκις ἐπαναλαμβανομένη γίνεται δεκάς, ἑπομένως αἱ 85 μον. τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ θὰ γείνωσι 85 δεκ. ἢ 850 μον. Ἄρα τὸ γινόμενον 85×10 εὑρίσκεται συντόμως ἂν εἰς τὸ τέλος τοῦ 85 γραφῇ ἓν μηδενικὸν ἤτοι $85\times10=850$.

Ὁμοίως ἂν ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀρiθμόν τινα ὡς τὸν 48 ἐπὶ 100, παρατηροῦμεν ὅτι ἑκάστη μονὰς ἑκατοντάκις ἐπαναλαμβανομένη γίνεται ἑκατοντάς· ἄρα αἱ 48 μον. τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ θὰ γίνωσι 48 ἑκατοντ. ἢ 4800 μον. Ὥστε τὸ γινόμενον 48×100 εὑρίσκεται συντόμως ἂν εἰς τὸ τέλος τοῦ 48 γραφῶσι δύο μηδενικὰ ἤτοι $48\times100=4800$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα·

37) «Πολλαπλασιάζομεν ἀριθμόν τινα ἐπὶ 10, 100, 1000 ἤτοι ἐπὶ ἀριθμὸν ἀποτελούμενον ἐκ τῆς 1 παρακολουθουμένης ὑπὸ ὁσωνδήποτε μηδενικῶν, ἂν γράψωμεν εἰς τὸ τέλος τοῦ ἀριθμοῦ ὅσα μηδενικὰ ἔχει ὁ πολλαπλασιαστής».

π. χ. $845\times1000=845000$, $4583\times10.000=45830000$.

β΄) Ἔστω νῦν 158×30.

Θὰ ἔχωμεν $158\times30=158\times3^{\text{δεκ}}=3^{\text{δεκ.}}\times158=474^{\text{δεκ.}}=4740$.

Ὁμοίως $45\times700=45\times7^{\text{ἑκατ.}}=7^{\text{ἑκατ.}}\times45=315^{\text{ἑκατ.}}=31500$·

Ἐντεῦθεν συνάγεται ὁ ἑξῆς κανών·

38) «Πολλαπλασιάζομεν ἀριθμόν τινα ἐπὶ ἄλλον ἀποτελούμενον ἐξ ἑνὸς σημαντικοῦ ψηφίου καὶ μηδενικῶν, ἂν πολαπλασιάσωμεν αὐτὸν ἐπὶ τὸ σημαντικὸν ψηφίον καὶ γράψωμεν δεξιὰ τοῦ γινομένου τὰ μηδενικὰ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ».

π. χ. $458\times700=3206\times100=320600$.

Ἔστω τέλος πρὸς εὕρεσιν τὸ ἑξῆς γινόμενον 3587×754·

Ἐπειδὴ $754=700+50+4$ ἔχομεν $3587\times754=3587\times(700+50+4)=3587\times700+3587\times50+3587\times4$ (§ 35).

Ἀλλὰ $3587\times700=2510900$ καὶ $3587\times50=179350$ καὶ $3587\times4=14348$.

Ὅθεν $3587 \times 754 = 2510900 + 179350 + 14348 = 2704598$.

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ γινομένου διατάσσομεν τὴν πρᾶξιν ὡς ἑξῆς·

$$\begin{array}{r} 3587 \\ 754 \\ \hline 14348 \\ 179350 \\ 2510900 \\ \hline 2704598 \end{array}$$

Γράφομεν τὸν πολλαπλασιαστέον καὶ κάτωθεν αὐτοῦ τὸν πολλαπλασιαστὴν καὶ σύρομεν ὑπ' αὐτοὺς γραμμὴν ὁριζοντίαν, ὑπὸ τὴν ὁποίαν γράφομεν τὰ τρία μερικὰ γινόμενα, ἅτινα προστιθέμενα δίδουσι τὸ ὁλικὸν γινόμενον.

Ἀλλὰ τὰ εἰς τὸ τέλος τῶν μερικῶν γινομένων μηδενικὰ δύνανται νὰ παραλειφθῶσιν.

$$\begin{array}{l} 3587 \\ 754 \\ \hline 14348 \\ 17935 \\ 25109 \\ \hline 2704598 \end{array}$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὁ ἑξῆς κανών·

39) ***Κανών***.—«Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν δύο οἱουσδήποτε ἀριθμούς, γράφομεν τὸν πολλαπλασιαστὴν κάτωθεν τοῦ πολλαπλασιαστέου καὶ ὑπ' αὐτοὺς σύρομεν γραμμὴν ὁριζοντίαν. Πολλαπλασιάζομεν ἔπειτα τὸν πολλαπλασιαστέον χωριστὰ ἐφ' ἕκαστον ψηφίον τοῦ πολλαπλασιαστοῦ ἀρχόμενοι ἀπὸ τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων καὶ γράφομεν ἕκαστον μερικὸν γινόμενον ὑπὸ τὴν γραμμὴν οὕτως, ὥστε τὸ πρῶτον ψηφίον αὐτοῦ ἐκ δεξιῶν νὰ κῆται κάτωθεν τοῦ ψηφίου τοῦ πολλαπλασιαστοῦ ἐπὶ τὸ ὁποῖον πολλαπλασιάζομεν· μετὰ τοῦτο ἄγομεν γραμμὴν ὁριζοντίαν καὶ προσθέτομεν τὰ μερικὰ γινόμενα καὶ εὑρίσκομεν οὕτω τὸ ζητούμενον ὁλικὸν γινόμενον».

Σημ. *Ἐάν τινα τῶν ἐν τῷ μεταξὺ ψηφίων τοῦ πολλαπλασιαστοῦ εἶναι μηδενικά, τὰ μερικὰ γινόμενα αὐτῶν εἶναι μηδενικὰ καὶ ἑπομένως παραλείπονται.*

Κατὰ τὸν κανόνα τοῦτον ἐκτελοῦνται οἱ ἑξῆς πολλαπλασιασμοί·

$$\begin{array}{r} 4583 \\ 805 \\ \hline 22915 \\ 36664 \\ \hline 3689315 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7504 \\ 3008 \\ \hline 60032 \\ 22512 \\ \hline 22572032 \end{array}$$

Παρατήρ. *Ἐὰν ὁ εἷς τῶν παραγόντων ἢ ἀμφότεροι λήγωσιν εἰς μηδενικά, πολλαπλασιάζομεν αὐτοὺς παραλείποντες τὰ εἰς τὸ τέλος αὐτῶν μηδενικὰ καὶ ἔπειτα γράφομεν δεξιὰ τοῦ γινομένου τὰ παραλειφθέντα μηδενικά.*

Παραδείγματα

```
   35800              130800
  . 730                   14
 ------              -------
   1074                 5232
  2506                 1308
---------           --------
26134000             1831200
```

40) Δοκιμὴ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ

Αὕτη γίνεται πάλιν διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, λαμβανομένου τοῦ πολλαπλασιαστέου ὡς πολλαπλασιαστοῦ καὶ τἀνάπαλιν· ἂν εὕρωμεν πάλιν τὸ αὐτὸ γινόμενον ἡ πρᾶξις ἐγένετο ἄνευ λάθους (§ 33).

Νὰ δοκιμασθῶσιν οἱ προηγούμενοι πολλαπλασιασμοί.

Γινόμενον πολλῶν παραγόντων.

Πρόβλημα.—Οἰκοδομή τις ἔχει 3 πατώματα· εἰς ἕκαστον πάτωμα ὑπάρχουσι 4 δωμάτια καὶ εἰς ἕκαστον δωμάτιον 6 παράθυρα καὶ εἰς ἕκαστον παράθυρον 8 ὑελοπίνακες. Πόσους ὑελοπίνακας ἔχει ἡ οἰκοδομή;

Εὑρίσκομεν πρῶτον τὰ δωμάτια τὰ ὁποῖα ἔχουσι τὰ τρία πατώματα $(3\times4=12)$· ἔπειτα εὑρίσκομεν τὰ παράθυρα τὰ ὁποῖα ἔχουσι τὰ 12 δωμάτια $(12\times6=72)$ καὶ τέλος εὑρίσκομεν τοὺς ὑελοπίνακας τοὺς ὁποίους ἔχουσι τὰ 72 παράθυρα ἤτοι ἡ ὅλη οἰκοδομὴ $(72\times8=576)$. Τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο εἶναι γινόμενον $3\times4\times6\times8$ ἤτοι γινόμενον πολλῶν παραγόντων.

41) Γινόμενον πολλῶν δεδομένων ἀριθμῶν καλεῖται τὸ ἐξαγόμενον, ὅπερ εὑρίσκομεν πολλαπλασιάζοντες τὸν πρῶτον ἐπὶ τὸν δεύτερον, τὸ γινόμενον τοῦτο ἐπὶ τὸν τρίτον κ. ο. κ. μέχρις οὗ λάβωμεν πάντας τοὺς δοθέντας ἀριθμούς.

Ἀλλὰ ὁ ἀριθμὸς τῶν ὑελοπινάκων δύναται νὰ εὑρεθῇ καὶ ὡς ἑξῆς·

Εὑρίσκομεν πρῶτον τοὺς ὑελοπίνακας τοὺς ὁποίους ἔχουσι τὰ 6 παράθυρα τοῦ ἑνὸς δωματίου $(8\times6=48)$· ἔπειτα εὑρίσκομεν τοὺς ὑελοπίνακας τοὺς ὁποίους ἔχουσι τὰ 4 δωμάτια τοῦ ἑνὸς πατώματος $(48\times4=192)$, καὶ τέλος τοὺς ὑελοπίνακας τοὺς ὁποίους ἔχουσι τὰ 3 πατώματα ἤτοι ὁλόκληρος ἡ οἰκοδομὴ $(192\times3=576)$ δηλ. θὰ ἔχωμεν τὸ γινόμενον $8\times6\times4\times3$. Ὅθεν $3\times4\times6\times8=8\times6\times4\times3$.

Ἐντεῦθεν ἕπεται ἡ ἑξῆς ἰδιότης·

42) «Τὸ γινόμενον πολλῶν παραγόντων μένει τὸ αὐτὸ καθ' οἱανδήποτε τάξιν καὶ ἂν πολλαπλασιάσωμεν αὐτούς».

Ἀσκήσεις πολλαπλασιασμοῦ.

α') Νὰ ἐκτελεσθῶσιν ἀπὸ μνήμης οἱ ἑξῆς πολλαπλασιασμοί·

$23\times4=$	$85\times7=$	$87\times7=$
$47\times5=$	$37\times6=$	$63\times4=$
$52\times8=$	$92\times3=$	$83\times8=$

Σημ. *Εὑρίσκομεν ἀπὸ μνήμης τὸ γινόμενον διψηφίου ἀριθμοῦ ἐπὶ μονοψήφιον, ἂν πολλαπλασιάσωμεν χωριστὰ τὰς δεκάδας καὶ τὰς μονάδας αὐτοῦ καὶ ἑνώσωμεν τὰ δύο μερικὰ γινόμενα π.χ. 32×4=πολλαπλασιάζομεν 30×4=120 καὶ 2×4=8 καὶ προσθέτομεν ταῦτα 120+8=128.*

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον δύναται νὰ εὑρεθῇ ἀπὸ μνήμης καὶ τὸ γινόμενον τριψηφίου ἐπὶ μονοψήφιον ὡς εἰς τὰ ἑξῆς παραδείγματα·

β′)	145×4=	307×8=	215×4=
	208×3=	503×7=	323×3=
	132×5=	809×4=	257×4=

γ′) Ἐπίσης νὰ ἐκτελεσθῶσιν ἀπὸ μνήμης οἱ ἑξῆς πολλαπλασιασμοί·

8×9×4=	30×40=	80×70× 30=
15×3×7=	50×70=	47× 500=
12×4×7=	80×90=	480× 20=
17×3×5=	38×60=	458×2000=

δ′) Ὁμοίως νὰ ἐκτελεσθῶσιν ἀπὸ μνήμης οἱ ἑξῆς πολλαπλασιασμοί·

480× 5×2=	547×50×2=
245×25×4=	43×15×4=
832×20×5=	87× 8×5=

Σημ. *Πολλάκις εἰς τὸ γινόμενον πολλῶν παραγόντων δύνανται δύο ἢ περισσότεροι παράγοντες νὰ δίδωσι γινόμενον ἀριθμὸν ἐπὶ τὸν ὁποῖον εὐκόλως πολλαπλασιάζομεν ἕτερον· π. χ. 379×5×2=379×10=3790 (§ 42).*

ε′) Ἔστω πρὸς εὕρεσιν τὸ γινόμενον 72×9, πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν 72 ἐπὶ 10 καὶ ἀπὸ τοῦ γινομένου 720 ν' ἀφαιρέσωμεν τὸν 72 (διότι 9=10—1) ἤτοι 720—72=648, ὅθεν ἔχομεν 72×9=720—72=648.

Ὁμοίως εὑρίσκεται καὶ τὸ γινόμενον 458×99 ἤτοι 458×100=45800 καὶ 45800—458=45342 ὅθεν 458×99=45800—458=45342.

Καθ' ὅμοιον τρόπον νὰ ἐκτελεσθῶσιν οἱ ἑξῆς πολλαπλασιασμοί·

1. Ἀπὸ μνήμης.

17×9=	25×99=
32×9=	27×99=
450×9=	3400×99=
380×9=	230×99=

2. Γραπτῶς ἀλλὰ συντόμως ὡς ἐν τῷ ἀνωτέρῳ παραδείγματι.

4583×9=	1245×99=	456×999=
2745×9=	372×99=	7582×999=
17583×9=	8457×99=	5473×999=

στ') Ἔστω πρὸς εὕρεσιν τὸ γινόμενον 345×11.

Ἐπειδὴ τὸ $11=10+1$, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν $345\times10=3450$ καὶ εἰς τὸ γινόμενον τοῦτο νὰ προσθέσωμεν τὸν 345 ἤτοι $3450+345=3795$.

Ὅθεν ἔχομεν $345\times11=3450+345=3795$.

Ὁμοίως εὑρίσκεται καὶ τὸ γινόμενον 783×101 ἤτοι $783\times100=78300$ καὶ $78300+783=79083$, ὅθεν $783\times101=78300+783=79083$.

Νὰ εὑρεθῶσι καθ' ὅμοιον τρόπον τὰ ἑξῆς γινόμενα·

1. *Ἀπὸ μνήμης.*

$35\times11=$	$27\times101=$
$42\times11=$	$83\times101=$
$37\times11=$	$4500\times101=$
$2400\times11=$	$830\times101=$
$8\times7\times11=$	$9\times4\times101=$

Σημ.. *Τὸ γινόμενον διψηφίου ἀριθμοῦ ἐπὶ 11 εὑρίσκεται ταχύτερον ἀπὸ μνήμης ὡς ἑξῆς. Προσθέτομεν τὰ δύο ψηφία τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ καὶ τὸ ἄθροισμα τοῦτο (ἂν δὲν ὑπερβαίνῃ τὸ 9) γράφομεν μεταξὺ τῶν δύο ψηφίων τοῦ ἀριθμοῦ καὶ ἔχομεν τὸ ζητούμενον γινόμενον· ὡς $45\times11=495$. Ἂν δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τοῦ ἀριθμοῦ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ 9, τότε γράφομεν μεταξὺ τῶν δύο ψηφίων τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ τὰς μονάδας τοῦ ἀθροίσματος τούτου καὶ αὐξάνομεν κατὰ 1 τὸ πρῶτον ψηφίον ὡς*

$$85\times11=935$$

2. *Γραπτῶς* ἀλλὰ συντόμως.

$3472\times11=$	$12580\times101=$	$2803\times1001=$
$4580\times11=$	$7258\times101=$	$345\times1001=$
$7523\times11=$	$34527\times101=$	$4587\times1001=$

Προβλήματα πολλαπλασιασμοῦ πρὸς ἄσκησιν.

Ὁ πῆχυς ὑφάσματός τινος τιμᾶται 18 δρχ., πόσον τιμῶνται οἱ 8 πήχεις;

Λύσις.—Ἀφ' οὗ ὁ 1 πῆχυς τιμᾶται 18 δρχ., εἶναι φανερὸν ὅτι οἱ 2 πήχεις θὰ τιμῶνται $18+18$ ἤτοι δύο φορὰς 18 δρχ. Ὁμοίως οἱ 3 πήχεις θὰ τιμῶνται $18+18+18$ ἢ τρεῖς φορὰς 18 δρχ. καὶ τέλος οἱ 8 πήχεις θὰ τιμῶνται ὀκτὼ φορὰς 18 δρχ. ἤτοι τὸ ὀκταπλάσιον τῶν 18 δραχμῶν, ὅθεν ἡ ζητουμένη τιμὴ θὰ εἶναι 18 δρχ. $\times8=144$ δραχμαί.

Παρατήρ. *Ἐν τῷ προβλήματι τούτῳ εἶναι δεδομένη ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος (ὁ 1 πῆχυς τιμᾶται 18 δρχ.) καὶ ζητεῖται ἡ τιμὴ πολλῶν δεδομένων μονάδων (πόσον τιμῶνται οἱ 8 πήχεις). Ἡ ζητουμένη τιμὴ εὑρίσκεται, ὡς εἴδομεν, διὰ πολλαπλασιασμοῦ.*

Ἐντεῦθεν συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα·

43) »Ὅταν δίδηται ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος καὶ ζητῆται ἡ τιμὴ πολλῶν δεδομένων μονάδων, κάμνομεν πολλαπλασιασμόν».

Πολλαπλασιαστέος εἶναι ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος, ἥτις εἶναι καὶ ὁμοειδὴς πρὸς τὸ ζητούμενον γινόμενον.

Ἐν τῷ προηγουμένῳ προβλήματι ἐθεωρήσαμεν ἀριθμοὺς συγκεκριμένους. Τὸ πρόβλημα θὰ λυθῇ πάλιν διὰ πολλαπλασιασμοῦ, ἐὰν ἐκφράσωμεν τὰ δεδομένα αὐτοῦ δι' ἀφῃρημένων ἀριθμῶν ὡς ἑξῆς·

2) Εὑρεῖν τὸ ὀκταπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ 18.

Ὅθεν ὁ ἀνωτέρω κανὼν δύναται νὰ γενικευθῇ ὡς ἑξῆς·

44) «Ὅταν δίδηται ἀριθμός τις καὶ ζητῆται τὸ διπλάσιον ἢ τριπλάσιον αὐτοῦ κτλ. κάμνομεν πολλαπλασιασμόν».

3) Αἱ 18 ὀκάδες πόσα δράμια περιέχουσι ;

4) Αἱ 17 ἑβδομάδες πόσας ἡμέρας ἔχουσι ;

5) Ποῖον ἀριθμὸν μᾶς δίδει τὸ 15πλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ 245 αὐξανόμενον κατὰ 145 ;

6) Ποῖον ἀριθμὸν μᾶς δίδει τὸ 27πλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ 583 ἐλαττωθὲν κατὰ τὸν 372 ; (ἀπ. 15369)

7) Ἡ ὀκᾶ τοῦ σίτου τιμᾶται 38 λεπτά. Πόσα λεπτὰ τιμῶνται αἱ 3586 ὀκ. σίτου ; (ἀπ. 136306 λεπτ.)

8) Μία κρήνη παρέχει εἰς μίαν ὥραν 258 ὀκ. ὕδατος. Πόσας ὀκάδας χωρεῖ ἡ δεξαμενή, ἥτις πληροῦται ὑπὸ τῆς κρήνης ταύτης εἰς 35 ὥρας; (ἀπ. 9030 ὀκ.)

9) Μία ἀτμομηχανὴ ἀτμοπλοίου καίει ἐν ταξειδίῳ 415 ὀκ. ἀνθράκων καθ' ὥραν. Πόσας ὀκάδας ἀνθράκων θὰ χρειασθῇ διὰ ταξείδιον ἀπὸ Πειραιῶς μέχρι Κωνσταντινουπόλεως, ὅπερ διαρκεῖ 38 ὥρας; (ἀπ. 15750 ὀκ.)

10) Ἁμαξοστοιχία ἔχουσα ταχύτητα 25 χιλιομέτρων καθ' ὥραν διανύει τὸ ἀπ' Ἀθηνῶν μέχρι Πύργου διάστημα εἰς 11 ὥρας. Πόσων χιλιομέτρων εἶναι τὸ μῆκος τῆς σιδηροδρομικῆς γραμμῆς μεταξὺ τῶν δύο τούτων πόλεων ; (ἀπ. 275 χιλιόμετ.)

11) Βιβλίον τι ἔχει 250 φύλλα· ἑκάστη σελὶς ἔχει 36 σειρὰς καὶ ἑκάστη σειρὰ 48 γράμματα. Πόσα γράμματα ἔχει ἐν ὅλῳ τὸ βιβλίον τοῦτο ; (ἀπ. 840000 γράμμ.)

12) Ἔμπορός τις ἐπώλησε 42 τεμάχια ὑφάσματος ἐκ 58 πήχεων ἕκαστον, πρὸς 16 δραχμὰς τὸν πῆχυν. Πόσας δραχμὰς εἰσέπραξεν ἐκ τῆς πωλήσεως ταύτης; (ἀπ 38976 δρχ.)

13) Οἰνοπώλης ἐπλήρωσε 37 βαρέλια, ἐξ ὧν ἕκαστον περιεῖχε 527 ὀκ. οἴνου πρὸς 46 λεπτὰ τὴν ὀκᾶν. Πόσα λεπτὰ ἐπλήρωσεν ;
(ἀπ. 896954 λεπτά).

14) Ἔμπορός τις ἐφόρτωσεν ἐπί τινος ἀτμοπλοίου 384 σάκκους ἀλεύρου ἐκ τῶν ὁποίων ἕκαστος ἐζύγιζεν 70 ὀκάδας, καὶ συνεφώνησε διὰ

ναῦλον 1 λεπτὸν τὴν ὀκᾶν. Πόσα λεπτὰ ἐπλήρωσεν; (ἀπ. 26880 λεπ.)

15) Σταφιδέμπορος ἐπώλησε 452 χιλιόλιτρα (τὸ χιλιόλιτρον εἶναι ἴσον πρὸς 375 ὀκ.) πρὸς 127 δρχ. τὸ χιλιόλιτρον. Πόσας δραχμὰς ἔλαβε καὶ πόσας ὀκάδας σταφίδος ἐπώλησεν;

(ἀπ. 54404 δραχ· καὶ 169500 ὀκ).

16) Ἠγόρασέ τις 452 πρόβατα πρὸς 14 δραχμὰς ἕκαστον καὶ μετεπώλησε ταῦτα πρὸς 22 δραχμὰς ἕκαστον, ἀφ' οὗ ἐδαπάνησε διὰ τὴν μεταφορὰν αὐτῶν καὶ τὴν διατροφὴν ἐπί τινας ἡμέρας 872 δραχ. ἐν ὅλῳ. Πόσας δραχμὰς ἐκέρδισεν ἢ ἐζημιώθη; (ἀπ. ἐκέρδ. 2744 δρ.)

17) Λυχνία οἰνοπνεύματος καίει καθ' ὥραν οἰνόπνευμα ἀξίας 14 λεπτῶν. Ἐὰν αὕτη καίῃ καθ' ἑκάστην ἐπὶ 5 ὥρας, πόσον στοιχίζει τὸ οἰνόπνευμα τὸ ὁποῖον θὰ καύσῃ εἰς 25 ἑβδομάδας; (7350 λεπτ.)

18) Πατήρ τις ἀφῆκε διὰ διαθήκης τὴν περιουσίαν του εἰς τοὺς 5 υἱούς του καὶ 3 θυγατέρας του· καὶ ἕκαστος μὲν τῶν υἱῶν ἔλαβε 5800 δραχ. ἑκάστη δὲ τῶν θυγατέρων 8400 δραχ. καὶ ἡ Κυβέρνησις ἔλαβεν ὡς φόρον 375 δραχμάς. Ποση ἦτο ὁλόκληρος ἡ περιουσία; (ἀ. 54575 δρ.)

19) Ἀγοράζει τις 3458 ὀκ. σίτου πρὸς 35 λεπτὰ τὴν ὀκᾶν· πωλεῖ τὰς 1890 ὀκ. πρὸς 39 λεπτὰ τὴν ὀκᾶν καὶ τὰς ὑπολοίπους πρὸς 32 λεπτά. Πόσον ἐκέρδισεν ἢ ἐζημιώθη; (ἀπ. ἐκέρδ. 2856 λεπτ.)

20) Ἀτμόπλοιον ταξειδεῦσαν ἐκ Πειραιῶς εἰς Βόλον καὶ τἀνάπαλιν, μετέφερε κατὰ μὲν τὸ πρῶτον ταξείδιον ἐπιβάτας Αης θέσεως 15, Βας 28 καὶ Γης 65· κατὰ δὲ τὸ δεύτερον Αης θέσεως 24, Βας 58 καὶ Γης 95. Ἐὰν τὸ εἰσιτήριον τιμᾶται Αης μὲν θέσεως 18 δραχ., Βας δὲ 12 δρ. καὶ Γης 6 δρχ., πόσας δραχμὰς εἰσέπραξε κατὰ τὰ δύο ταῦτα ταξείδια;

(εἰσέπραξε 2694 δρχ.)

21) Σιτέμπορός τις ἔχει ἔν τινι ἀποθήκῃ 93450 ὀκ. σίτου. Ἐπώλησε δὲ εἰς διαφόρους ἐποχὰς τὰ ἑξῆς· α') 127 σάκκους ἐξ ὧν ἕκαστος περιεῖχε 50 ὀκ. σίτου β') 245 σάκκους τῶν 45 ὀκ. καὶ γ') 78 σάκκους τῶν 65 ὀκ. Πόσας ὀκάδας σίτου ἔχει ἀκόμη ἐν τῇ ἀποθήκῃ του; (ἀ. 71005)·

ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ

Πρόβλημα 1ον.—Νὰ μοιράσωμεν 20 πεντάλεπτα εἰς 5 μαθητάς. Πόσα πεντάλεπτα θὰ λάβῃ ἕκαστος μαθητής;

Ἂν δώσωμεν εἰς ἕκαστον μαθητὴν ἀπὸ ἓν πεντάλεπτον, εἰς τοὺς 5 θὰ δώσωμεν 5 πεντάλεπτα καὶ ἑπομένως ἀπὸ τὰ 20 θὰ μείνωσι 20—5=15. Ἂν δώσωμεν ἀπὸ ἓν ἄλλο πεντάλεπτον εἰς ἕκαστον μαθητήν, θὰ λάβῃ ἕκαστος ἀπὸ δύο πεντάλεπτα καὶ θὰ μείνωσιν 15—5=10. Ἂν δώσωμεν πάλιν ἀπὸ ἓν πεντάλεπτον εἰς ἕκαστον, θὰ λάβῃ ἕκαστος ἀπὸ 3 πεντάλεπτα καὶ θὰ μείνωσι 10—5=5. Ἂν τέλος δώσωμεν εἰς ἕκαστον ἀπὸ ἓν πεντάλεπτον, δὲν μένει οὐδὲν καὶ ἕκαστος μαθητὴς θὰ λάβῃ ἀπὸ 4 πεντάλεπτα· Ὥστε

$$20=4+4+4+4+4$$

ἤτοι διῃρέθη ὁ 20 εἰς 5 ἴσα μερίδια, τόσα ὅσοι εἶναι οἱ μαθηταὶ καὶ ἕκαστον μερίδιον εἶναι 4 πεντάλεπτα.

Ἡ πρᾶξις δι' ἧς εὑρέθη τὸ μερίδιον τοῦτο καλεῖται *διαίρεσις* καὶ ὁρίζεται ὡς ἑξῆς·

45) «Διαίρεσις εἶναι ἡ πρᾶξις διὰ τῆς ὁποίας μοιράζωμεν ἀριθμόν τινα εἰς τόσα ἴσα μέρη, ὅσας μονάδας ἔχει ἄλλος τις ἀριθμός».

Ἡ Διαίρεσις αὕτη καλεῖται καὶ *μερισμός*.

Πρόβλημα 2ον.—Πόσα τετράδια ἀγοράζει μαθητής τις μὲ 20 πεντάλεπτα ὅταν ἕκαστον τετράδιον πωλεῖται ἀντὶ 5 πενταλέπτων;

Ἂν δώσωμεν 5 πεντάλεπτα ἀγοράζομεν ἓν τετράδιον, μᾶς μένουσι δὲ 20—5=15 πεντάλεπτα. Ἂν δώσωμεν καὶ ἄλλα 5 πεντάλεπτα θὰ ἀγοράσωμεν ἄλλο ἓν τετράδιον καὶ θὰ μᾶς μείνωσιν 15—5=10 πεντάλεπτα. Ἂν δώσωμεν καὶ ἄλλα 5 πεντάλεπτα θὰ ἀγοράσωμεν ἄλλο ἓν τετράδιον καὶ θὰ μᾶς μείνωσι 10—5=5. Ἂν τέλος δώσωμεν καὶ τὰ ὑπολειπόμενα 5 πεντάλεπτα θὰ ἀγοράσωμεν ἀκόμη ἓν τετράδιον καὶ δὲν μένει οὐδὲν πεντάλεπτον. Ἄρα θὰ ἀγοράσωμεν 4 τετράδια ἤτοι τόσα ὅσας φορὰς δύναται ν' ἀφαιρεθῇ ὁ 5 ἀπὸ τοῦ 20.

Τὸ ζητούμενον εὑρίσκεται καὶ ἐν τῷ προβλήματι τούτῳ διὰ τῆς αὐτῆς πράξεως ὡς καὶ ἐν τῷ προηγουμένῳ ἤτοι διὰ τῆς διαιρέσεως ἥτις δύναται νὰ ὁρισθῇ καὶ ὡς ἑξῆς·

46) Διαίρεσις εἶναι πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας δοθέντων δύο ἀριθμῶν εὑρίσκομεν πόσας φορὰς χωρεῖ ὁ εἷς εἰς τὸν ἕτερον.

Ἡ τοιαύτη διαίρεσις καλεῖται *μέτρησις*.

Ὁ ἀριθμὸς 20 τὸν ὁποῖον πρόκειται νὰ μοιράσωμεν ἢ νὰ μετρήσωμεν καλεῖται *διαιρετέος*, ὁ δὲ ἀριθμὸς 4 ὁ δεικνύων εἰς πόσα ἴσα μέρη θὰ μοιρασθῇ ὁ διαιρετέος ἢ μὲ τὸν ὁποῖον μετροῦμεν τὸν διαιρετέον καλεῖται *διαιρέτης*· τὸ ἐξαγόμενον τῆς πράξεως 4 καλεῖται πηλίκον.

Τὸ πηλίκον τοῦτο εἰς μὲν τὸν μερισμὸν καλεῖται *μερίδιον*, εἰς δὲ τὴν μέτρησιν *λόγος* τοῦ διαιρετέου πρὸς τὸν διαιρέτην. Εἰς τὴν μέτρησιν ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης πρέπει νὰ γίνωνται πάντοτε ἐκ τῆς αὐτῆς μονάδος.

Δυνατὸν πολλάκις ὁ διαιρετέος νὰ μὴ μοιράζεται ἀκριβῶς εἰς ἴσα μέρη, ὅσα δεικνύει ὁ διαιρέτης· π. χ. ἂν μοιράσωμεν 20 δραχ. εἰς 6 ἀνθρώπους, θὰ λάβῃ ἕκαστος 3 δραχ. καὶ θὰ περισσεύσωσι 2· αἱ 2 αὗται δραχμαὶ καλοῦνται *ὑπόλοιπον* τῆς διαιρέσεως ταύτης, εἶναι δὲ πάντοτε μικρότερον τοῦ διαιρετέου.

Τὸ σημεῖον τῆς διαιρέσεως εἶναι (:) ὅπερ γράφεται μεταξὺ τοῦ διαιρετέου καὶ τοῦ διαιρέτου καὶ ἀπαγγέλλεται *διὰ* π. χ. 21 : 3 σημαίνει νὰ διαιρεθῇ ὁ 21 διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 3 καὶ ἀπαγγέλλεται 21 διὰ 3.

Ἐὰν ὁ διαιρετέος εἶναι ἴσος πρὸς τὸν διαιρέτην τὸ πηλίκον εἶναι 1· ἐὰν ὁ διαιρέτης εἶναι ὁ 1 τὸ πηλίκον ἰσοῦται πρὸς τὸν διαιρετέον· καὶ ἐὰν ὁ διαιρετέος εἶναι μικρότερος τοῦ διαιρέτου, ἡ διαίρεσις διὰ τῶν μέχρι τοῦδε γνωστῶν ἀριθμῶν εἶναι ἀδύνατος.

Διαίρεσις τελεία.

47) Ἐὰν ὁ διαιρετέος μοιράζηται ἀκριβῶς εἰς τόσα ἴσα μέρη, ὅσα δεικνύει ὁ διαιρέτης χωρὶς νὰ μείνῃ ὑπόλοιπόν τι, τότε λέγομεν ὅτι ὁ διαιρετέος διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ διαιρέτου ἢ ὅτι ἡ διαίρεσις εἶναι *τελεία* π. χ.

$24:8=3$· ὁ ἀριθμὸς 24 διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ 8 καὶ δίδει πηλίκον 3· ἡ διαίρεσις αὕτη εἶναι τελεία. Τὸ πηλίκον 3 πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸν διαιρέτην 8 δίδει τὸν διαιρετέον 24 ἤτοι $24=8\times3$.

Ἐντεῦθεν ἕπεται ἡ ἑξῆς ἰδιότης·

48) «Εἰς πᾶσαν τελείαν διαίρεσιν ὁ διαιρετέος ἰσοῦται μὲ τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸ πηλίκον»·

Διαίρεσις ἀτελής.

49) Ἂν ἡ διαίρεσις ἀφίνῃ ὑπόλοιπόν τι λέγεται *ἀτελὴς* π. χ. $29:8$ δίδει πηλίκον 3 καὶ ὑπόλοιπον 5 ἡ διαίρεσις αὕτη εἶναι ἀτελής. Εἰς ταύτην διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν διαιρετέον 29, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν διαιρέτην 8 ἐπὶ τὸ πηλίκον 3 καὶ εἰς τὸ γινόμενον νὰ προσθέσωμεν καὶ τὸ ὑπόλοιπον 5 ἤτοι $29=8\times3+5$.

Ἐντεῦθεν ἕπεται ἡ ἑξῆς ἰδιότης·

50) «Εἰς πᾶσαν ἀτελῆ διαίρεσιν ὁ διαιρετέος ἰσοῦται μὲ τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸ πηλίκον σὺν τῷ ὑπολοίπῳ».

Γενικὸς ὁρισμὸς τῆς διαιρέσεως.

Ἐκ τῆς προηγουμένης ἰδιότητος τοῦ πηλίκου, ὅπερ καὶ ἐν τῇ τελείᾳ καὶ ἐν τῇ ἀτελεῖ διαιρέσει παριστᾷ τὸ μεγαλείτερον πολλαπλάσιον τοῦ διαιρέτου ὅπερ χωρεῖ ὁ διαιρετέος, ἕπεται ὁ ἑξῆς γενικώτερος ὁρισμὸς τῆς διαιρέσεως.

51) «Διαίρεσις εἶναι πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας δοθέντων δύο ἀριθμῶν εὑρίσκομεν τρίτον, ὅστις παριστᾷ τὸ μεγαλείτερον πολλαπλάσιον τοῦ διαιρέτου ὅπερ χωρεῖ ὁ διαιρετέος».

Μονοψήφιον καὶ πολυψήφιον πηλίκον.

52) Ἔστω ἡ διαίρεσις 2458:345. Τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως ταύτης εἶναι μονοψήφιον, διότι $345\times10=3450$ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ διαιρέτου 2458. Εἰς τὴν διαίρεσιν 7583:45 τὸ πηλίκον εἶναι πολυψήφιον, διότι $45\times10=450$ εἶναι μικρότερον τοῦ διαιρέτου 7583. Ἐν γένει

ἂν θέλωμεν νὰ γνωρίσωμεν, πρὶν ἢ ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν, ἂν τὸ πηλίκον εἶναι μονοψήφιον ἢ πολυψήφιον, πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρέτην ἐπὶ 10 γράφοντες εἰς τὸ τέλος αὐτοῦ 0· καὶ ἂν μὲν ὁ προκύπτων ἀριθμὸς εἶναι μεγαλύτερος τοῦ διαιρέτου, τὸ πηλίκον θὰ εἶναι μονοψήφιον ἄλλως θὰ εἶναι πολυψήφιον.

Πῶς ἐκτελεῖται ἡ διαίρεσις.

Εἰς τὴν διαίρεσιν διακρίνομεν δύο περιπτώσεις·
α΄) Ὅταν τὸ πηλίκον εἶναι μονοψήφιον.
β΄) Ὅταν τὸ πηλίκον εἶναι πολυψήφιον.

α΄. Περίπτωσις.

53) α΄) Ἂν ὁ διαιρέτης εἶναι μονοψήφιος, τὸ μονοψήφιον πηλίκον εὑρίσκεται τῇ βοηθείᾳ τοῦ Πυθαγορείου πίνακος π. χ. 68 : 7 δίδει πηλίκον 9, διότι ὁ διαιρέτης 7 πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ 9 δίδει γινόμενον 63, ὅπερ ἀφαιρούμενον ἀπὸ τοῦ 68 ἀφίνει ὑπόλοιπον 5.

β΄) Ἂν ὁ διαιρέτης εἶναι πολυψήφιος, εὑρίσκομεν τὸ μονοψήφιον πηλίκον ὡς ἑξῆς·

Ἔστω ἡ διαίρεσις 845 : 258. Ἵνα εὕρωμεν πόσας φορὰς χωρεῖ ὁ 258 εἰς τὸν 845, ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν κατ' ἀρχὰς πόσας φορὰς χωροῦσιν αἱ 2 ἑκατοντάδες τοῦ διαιρέτου εἰς τὰς 8 ἑκατοντάδας τοῦ διαιρετέου. Εἶναι φανερὸν ὅτι ἄλλας τόσας φορὰς ἢ ὀλιγωτέρας, οὐδέποτε δὲ περισσοτέρας θὰ χωρῇ ὁ διαιρέτης εἰς τὸν διαιρετέον. Τὸ πηλίκον τοῦ 8 διὰ τοῦ 2 εἶναι 4· καὶ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως ταύτης δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ 4, ἀλλὰ θὰ εἶναι ἢ 4 ἢ μικρότερον αὐτοῦ. Δοκιμάζομεν τὸ 4 πολλαπλασιάζοντες τοῦτο ἐπὶ τὸν διαιρέτην 258, ὅτε εὑρίσκομεν γινόμενον $258 \times 4 = 1032$ μεγαλύτερον τοῦ διαιρετέου· ἄρα τὸ 4 δὲν εἶναι τὸ ζητούμενον πηλίκον. Δοκιμάζομεν τὸ κατὰ 1 μικρότερον ψηφίον, ἤτοι 3, ὅπερ πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸν διαιρέτην 258 δίδει γινόμενον $258 \times 3 = 774$, μικρότερον τοῦ διαιρετέου· ἄρα τὸ 3 εἶναι τὸ ζητούμενον πηλίκον. Ἀφαιροῦντες ἤδη τὸ 774 ἀπὸ τοῦ διαιρετέου εὑρίσκομεν καὶ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως $845 - 774 = 71$.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς·

$$\begin{array}{r|l} 845 & 258 \\ \cline{2-2} 774 & 3 \\ \cline{1-1} 71. & \end{array}$$

Ὁμοίως ἔστω ἡ διαίρεσις 2547 : 578.

Λαμβάνομεν τὰς 25 ἑκατοντάδας τοῦ διαιρετέου καὶ διαιροῦμεν ταύτας διὰ τῶν 5 ἑκατοντάδων τοῦ διαιρέτου· τὸ πηλίκον 5, ὅπερ εὑρίσκομεν, πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸν διαιρέτην δίδει γινόμενον $578 \times 5 = 2890$, μεγαλύτερον τοῦ διαιρετέου. Δοκιμάζομεν λοιπὸν τὸ κατὰ μονάδα μικρότερον καὶ παρατηροῦμεν ὅτι τὸ γινόμενον $578 \times 4 = 2312$ εναι μικρότερον τοῦ διαιρετέου. Ἑπομένως τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως ταύτης εἶναι 4 καὶ τὸ ὑπόλοιπον $2547 - 2312 = 235$.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται πάλιν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον·

$$\begin{array}{r|l} 2547 & 578 \\ \cline{2-2} \underline{2312} & 4 \\ 235 & \end{array}$$

Ἀντὶ νὰ γράφωμεν ὁλόκληρον τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον κάτωθεν τοῦ διαιρετέου καὶ ἔπειτα νὰ ἀφαιρῶμεν, κάμνομεν ἀμέσως τὴν ἀφαίρεσιν.

$$\begin{array}{r|l} 2547 & 578 \\ \cline{2-2} 235 & 4 \end{array}$$

Ἐκ τούτων συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα·

54. «Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ μονοψήφιον πηλίκον τῆς διαιρέσεως δύο οἱωνδήποτε ἀριθμῶν, λαμβάνομεν τὸ πρῶτον ψηφίον τοῦ διαιρετέου ἢ τὰ δύο πρῶτα ψηφία αὐτοῦ, ἂν ὁ διαιρετέος ἔχῃ ἓν ψηφίον περισσότερον τοῦ διαιρέτου, καὶ διαιροῦμεν διὰ τοῦ πρώτου ψηφίου τοῦ διαιρέτου. Δοκιμάζομεν ἂν τὸ εὑρεθὲν ψηφίον εἶναι πηλίκον πολλαπλασιάζοντες τοῦτο ἐπὶ τὸν διαιρέτην· ἂν τὸ γινόμενον τοῦτο εἶναι μικρότερον ἢ ἴσον τῷ διαιρέτῃ, τὸ δοκιμαζόμενον ψηφίον εἶναι τὸ ζητούμενον πηλίκον· ἂν ὅμως ὑπερβαίνῃ τὸν διαιρετέον, δοκιμάζομεν τὸ κατὰ μονάδα μικρότερον ψηφίον, μέχρις οὗ εὕρωμεν γινόμενον μικρότερον τοῦ διαιρετέου. Ἀφαιροῦντες τοῦτο ἀπὸ τοῦ διαιρετέου εὑρίσκομεν καὶ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως.»

β΄) Περίπτωσις.

55. Τὸ πολυψήφιον πηλίκον τῆς διαιρέσεως δύο οἱωνδήποτε ἀριθμῶν εὑρίσκεται ὡς ἑξῆς·

α΄) Ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι μονοψήφιος ἡ διαίρεσις ἐκτελεῖται κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον·

Ἔστω π. χ. νὰ διαιρέσωμεν τὸν 5793 διὰ τοῦ 8 ἢ μᾶλλον νὰ μοιράσωμεν 5793 δραχμὰς εἰς 8 ἀνθρώπους, Λαμβάνομεν πρῶτον τὰς 5 μονάδας χιλιάδων καὶ παρατηροῦμεν ὅτι αὗται δὲν μοιράζονται εἰς τοὺς ὀκτὼ ἀνθρώπους. Τρέπομεν ταύτας εἰς 50 ἑκατοντάδας καὶ λαμβάνομεν μετὰ τούτων καὶ τὰς 7 ἑκατοντάδας καὶ μοιράζομεν τὰς 57 ἑκατοντάδας δραχμῶν εἰς τοὺς 8 ἀνθρώπους, ἤτοι διαιροῦμεν τὸν 57 διὰ τοῦ 8 καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 7 καὶ ὑπόλοιπον 1. Ἄρα ἕκαστος ἄνθρωπος θὰ λάβῃ ἀπὸ 7 ἑκατοντάδας δραχμῶν. Ἡ 1 ἑκατοντάς, ἥτις περισσεύει, τρέπεται εἰς 10 δεκάδας, αἵτινες μετὰ τῶν 9 δεκάδων τοῦ ἀριθμοῦ ἀποτελοῦσι 19 δεκάδας, τὰς ὁποίας μοιράζομεν εἰς τοὺς 8 ἀνθρώπους, ἤτοι διαιροῦμεν τὸν 19 διὰ τοῦ 8 καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 2 καὶ ὑπόλοιπον 3· ἄρα ἕκαστος τῶν 8 ἀνθρώπων θὰ λάβῃ ἀκόμη ἀπὸ 2 δεκάδας δραχμῶν· αἱ 3 δεκάδες αἵτινες περισσεύουσι, τρέπονται εἰς 30 μονάδας, αἵτινες μετὰ τῶν τριῶν μονάδων τοῦ ἀριθμοῦ δίδουσι 33 μονάδας, τὰς ὁποίας μοιράζομεν εἰς τοὺς 8 ἀνθρώπους, ἤτοι διαιροῦμεν τὸν 33 διὰ τοῦ 8 καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 4 καὶ ὑπόλοιπον 1· ἄρα ἕκαστος ἄνθρωπος θὰ λάβῃ ἀκόμη 4 δραχμὰς καὶ περισσεύει 1, ἥτις ἀποτελεῖ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς παρακειμένως·

5793	8
5600	700
193	20
160	4
33	
32	
1	

Δυνάμεθα νὰ συντομεύσωμεν τὴν διάταξιν τῆς πράξεως· καὶ πρῶτον μὲν τὸ πηλίκον δύναται νὰ γραφῇ 724, δηλ. ἕκαστον ψηφίον εἰς τοιαύτην θέσιν ἐν τῷ ἀριθμῷ, ὥστε νὰ σημαίνῃ πάλιν τῆς αὐτῆς τάξεως μονάδας. Ἔπειτα τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ εὑρισκόμενον ψηφίον τοῦ πηλίκου δυνάμεθα ν' ἀφαιρῶμεν ἀμέσως ἀπὸ τὸ χωριζόμενον τμῆμα τοῦ διαιρετέου, ὅπερ διαιροῦμεν, χωρὶς νὰ γράφωμεν τοῦτο κάτωθεν αὐτοῦ· καὶ τέλος δὲν εἶναι ἀνάγκη νὰ καταβιβάσωμεν πάντα τὰ ὑπολειπόμενα ψηφία τοῦ διαιρετέου, ἀλλ' ἓν ἕκαστον χωριστὰ κατὰ σειράν.

Κατὰ ταῦτα ἡ πρᾶξις διατάσσεται συντομώτερον·

5′7′9′3′	8
19	724
33	
1	

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἐκτελεῖται ἡ διαίρεσις 94834 : 4

9′4′8′3′4′	4
14	23708
28	
034	
2	

Παρατ. *Ἂν τύχῃ μερική τις διαίρεσις, ἀφ' οὗ καταβιβάσωμεν ἓν* *ψηφίον ἀπὸ τὸν διαιρετέον, νὰ μὴ εἶναι δυνατή, γράφομεν 0 εἰς τὸ πηλίκον καὶ καταβιβάζομεν τὸ ἀμέσως ἑπόμενον ψηφίον τοῦ διαιρετέου καὶ ἐξακολουθοῦμεν τὴν διαίρεσιν.*

β') Ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι πολυψήφιος, ἡ διαίρεσις ἐκτελεῖται κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον.

Ἔστω ἡ διαίρεσις 85847 : 356 ἢ νὰ μοιράσωμεν 85847 δραχμὰς εἰς 356 ἀνθρώπους. Λαμβάνομεν ἀπὸ τῆς ἀρχῆς τοῦ διαιρετέου τόσα ψηφία, ὅσα χρειάζονται ἵνα τὸ πηλίκον εἶναι μονοψήφιον· πρὸς τοῦτο χωρίζομεν ἀπὸ τῆς ἀρχῆς τοῦ διαιρετέου τόσα ψηφία, ὅσα ἔχει ὁ διαιρέτης ἢ καὶ ἓν περισσότερον· χωρίζομεν ἐνταῦθα τὰς 858 ἑκατοντάδας καὶ ταύτας μοιράζομεν εἰς τοὺς 356 ἀνθρώπους, ἤτοι διαιροῦμεν τὸν 858 διὰ τοῦ 356 καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 2. Πολλαπλασιάζομεν τὸ πηλίκον τοῦτο ἐπὶ 356 καὶ ἀφαιροῦντες τὸ $356 \times 2 = 712$ ἀπὸ τοῦ διαιρετέου εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον 146· ἕκαστος λοιπὸν ἄνθρωπος λαμβάνει 2 ἑκατοντάδας καὶ περισσεύουσιν 146 ἑκατοντάδες. Αὗται μετὰ τοῦ παραλειφθέντος μέρους τοῦ διαιρετέου δίδουσι νέον διαιρετέον 14647. Ἔχομεν λοιπὸν νέαν μερικὴν διαίρεσιν, εἰς τὴν ὁποίαν πάλιν λαμβάνομεν ἀπὸ τῆς ἀρχῆς τοῦ νέου διαιρετέου τόσα ψηφία, ὥστε τὸ πηλίκον νὰ εἶναι μονοψήφιον· λαμβάνομεν δηλ. 1464 δεκάδας καὶ διαιροῦμεν διὰ τοῦ 356. Τὸ πηλίκον εἶναι 4 καὶ ἐπομένως ἕκαστος ἄνθρωπος λαμβάνει ἀκόμη 4 δεκάδας δραχμῶν καὶ ὑπολείπονται $1464 - 1424 = 40$ δεκάδες. Τὸ ὑπόλοιπον τοῦτο μετὰ τοῦ παραλειφθέντος μέρους τοῦ νέου διαιρετέου ἀποτελεῖ τὸν ἀριθμὸν 407, τὸν ὁποῖον διαιροῦμεν διὰ τοῦ 356 καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 1 καὶ ὑπόλοιπον 51. Ἕκαστος λοιπὸν ἄνθρωπος θὰ λάβῃ ἀκόμη 1 δραχμὴν καὶ περισσεύουσι 51 δραχμαί, ὅπερ εἶναι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ταύτης.

Παρατηροῦμεν λοιπὸν ὅτι ἡ διαίρεσις αὕτη ἀνελύθη εἰς τὰς ἑξῆς μερικὰς διαιρέσεις·

858 ἑκατ.	356	1464 δεκ.	356	407 μον.	356
146	2 ἑκατ.	40	4 δεκ.	51	1 μον.

Δύνανται καὶ ἐνταῦθα κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν νὰ γίνωσιν αἱ αὐταὶ συντομίαι ὡς καὶ ἐν τῇ προηγουμένῃ διαιρέσει.

Μετὰ ταῦτα ἡ πρᾶξις δύναται νὰ διαταχθῇ ὡς παρακειμένως·

85847	356
1464	241
407	
51	

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

56. «Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ πολυψήφιον πηλίκον δύο οἱωνδήποτε ἀριθμῶν,

χωρίζομεν ἀπὸ τῆς ἀρχῆς τοῦ διαιρετέου τόσα ψηφία, ὅσα χρειάζονται ἵνα τὸ πηλίκον εἶναι μονοψήφιον (ὅσα ἔχει ὁ διαιρέτης ἢ καὶ ἓν περισσότερον)· διαιροῦμεν ἔπειτα τὸ χωρισθὲν τμῆμα τοῦ διαιρετέου καὶ εὑρίσκομεν τὸ πρῶτον ψηφίον τοῦ πηλίκου. Πολαπλασιάζομεν τὸ εὑρεθὲν ψηφίον ἐπὶ τὸν διαιρέτην καὶ ἀφαιροῦμεν τὸ γινόμενον τοῦτο ἀπὸ τοῦ χωρισθέντος τμήματος τοῦ διαιρετέου, δεξιᾷ δὲ τοῦ ὑπολοίπου καταβιβάζομεν καὶ τὸ ἑπόμενον ψηφίον τοῦ διαιρετέου. Τὸν προκύπτοντα ἀριθμὸν λαμβάνομεν ὡς διαιρετέον καὶ ἔχομεν νέαν μερικὴν διαίρεσιν, δι' ἧς εὑρίσκομεν τὸ δεύτερον ψηφίον τοῦ πηλίκου· τὸ εὑρεθὲν τοῦτο ψηφίον πολαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸν διαιρέτην καὶ τὸ γινόμενον ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ νέου διαιρετέου καὶ δεξιᾷ τοῦ ὑπολοίπου καταβιβάζομεν τὸ ἑπόμενον ψηφίον τοῦ διαιρετέου. Ἐξακολουθοῦμεν δὲ οὕτω, μέχρις οὗ καταβιβάσωμεν πάντα τὰ ψηφία τοῦ διαιρετέου. Ἂν τύχῃ εἰς μερικήν τινα διαίρεσιν ὁ διαιρετέος νὰ εἶναι μικρότερος τοῦ διαιρέτου, γράφομεν 0 εἰς τὸ πηλίκον καὶ καταβιβάζομεν τὸ ἀμέσως ἑπόμενον ψηφίον καὶ ἐξακολουθοῦμεν τὴν διαίρεσιν».

Κατὰ τὸν κανόνα τοῦτον ἐκτελοῦνται αἱ ἑξῆς διαιρέσεις·

$$\begin{array}{r|l} 754'8'3'2 & 245 \\ \cline{2-2} 1983 & 3080 \\ 232 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 2478'9'3' & 537 \\ \cline{2-2} 3309 & 461 \\ 873 & \\ 336 & \end{array}$$

Συντομίαι τῆς Διαιρέσεως.

α') Ἐὰν ἔχωμεν νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμόν τινα διὰ τοῦ 10, ἐπειδὴ τὸ 10 ἀποτελεῖ *μίαν δεκάδα* θὰ χωρῇ τόσας φορὰς εἰς τὸν *διαιρετέον*, ὅσας *δεκάδας* θὰ ἔχῃ οὗτος, τὸ δὲ ψηφίον τῶν μονάδων αὐτοῦ θὰ εἶναι τὸ *ὑπόλοιπον* τῆς διαιρέσεως· π. χ. 458 : 10 δίδει *πηλίκον* μὲν 45, *ὑπόλοιπον δὲ* 8.

Ὁμοίως ἂν ἔχωμεν νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμόν τινα διὰ 100, ἐπειδὴ τὸ 100 ἀποτελεῖ μίαν ἑκατοντάδα, θὰ χωρῇ εἰς τὸν ἀριθμὸν τόσας φοράς, ὅσας ἑκατοντάδας ἔχει οὗτος ἐν συνόλῳ, καὶ θὰ μείνῃ ὡς ὑπόλοιπον ὁ ὑπὸ τῶν δύο τελευταίων ψηφίων τοῦ διαιρετέου ἀποτελούμενος ἀριθμὸς π. χ. 7583 : 100 δίδει πηλίκον 75 καὶ ὑπόλοιπον 83.

Γενικῶς ἐξάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα·

57) «Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμόν τινα διὰ 10, 100, 1000 καὶ ἐν γένει δι' ἀριθμοῦ ἀποτελουμένου ἐκ τῆς 1 παρακολουθουμένης ὑφ' ὁσωνδήποτε μηδενικῶν, χωρίζομεν ἐκ δεξιῶν τοῦ διαιρετέου τόσα ψηφία, ὅσα μηδενικὰ ἔχει ὁ διαιρέτης, καὶ τὰ μὲν χωρισθέντα ψηφία ἀποτελοῦσι τὸ ὑπόλοιπον, τὰ δὲ λοιπὰ τὸ πηλίκον.»

Κατὰ ταῦτα 18438 : 1000 δίδει πηλίκον μὲν 18, ὑπόλοιπον δὲ 438.

6') Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν 75834 διὰ 2500.

Ἐπειδὴ ὁ διαιρέτης ἀποτελεῖται ἀκριβῶς ἀπὸ 25 ἑκατοντάδας, δὲν δύνανται αὗται νὰ χωρῶσιν εἰς τὰς μονάδας καὶ τὰς δεκάδας τοῦ διαιρετέου, ἑπομένως τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως ταύτης θὰ εὑρεθῇ ἂν διαιρεθῶσιν μόνον αἱ 758 ἑκατοντάδες τοῦ διαιρετέου διὰ τῶν 25 ἑκατοντάδων τοῦ διαιρέτου, ἤτοι εἶναι τὸ 30· αἱ δὲ ὑπολειπόμεναι 8 ἑκατοντάδες ἢ 800 μονάδες ἀποτελοῦσι μὲ τὰς 34 παραλειφθείσας μονάδας τοῦ διαιρετέου τὸ ὑπόλοιπον 834 τῆς διαιρέσεως ταύτης.

Ἡ πρᾶξις αὕτη διατάσσεται ὡς ἑξῆς·

$$\begin{array}{r|l} 758|34 & 25|00 \\ \hline 8\,34 & 30 \end{array}$$

Ἐντεῦθεν ἐξάγεται ὁ ἑξῆς κανών·

58) «Ἂν ἔχωμεν νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμόν τινα δι' ἄλλου λήγοντος εἰς μηδενικά, ἀποκόπτομεν τὰ μηδενικὰ τοῦ διαιρέτου καὶ ἄλλα τόσα ψηφία ἐκ δεξιῶν τοῦ διαιρετέου καὶ ἐκτελοῦμεν τὴν διαίρεσιν. Τὸ εὑρισκόμενον πηλίκον εἶναι τὸ ζητούμενον, τὸ δ' ἀληθὲς ὑπόλοιπον εὑρίσκεται, ἂν δεξιᾷ τοῦ εὑρεθέντος καταβιβάσωμεν καὶ τὰ ἀποκοπέντα ψηφία τοῦ διαιρετέου.»

Δοκιμὴ τῆς Διαιρέσεως.

59. Ἡ δοκιμὴ τῆς διαιρέσεως γίνεται διὰ πολλαπλασιασμοῦ· ἀρκεῖ πρὸς τοῦτο νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ *πηλίκον* ἐπὶ τὸν *διαιρέτην* καὶ νὰ προσθέσωμεν καὶ τὸ *ὑπόλοιπον*, ἂν ὑπάρχῃ· ἂν εὕρωμεν τὸν *διαιρετέον* ἡ πρᾶξις ἐγένετο ἄνευ λάθους (§ 50).

Νὰ δοκιμασθῶσιν αἱ διαιρέσεις τοῦ ἐδ. (§ 55).

Ἀσκήσεις Διαιρέσεως.

α') Ἀπὸ μνήμης νὰ εὑρεθῶσι τὰ πηλίκα τῶν ἑξῆς διαιρέσεων·

45 : 9=	60 : 15=	110 : 25=
253 : 10=	100 : 25=	800 : 20=
72 : 8=	90 : 11=	805 : 49=
48 : 6=	108 : 12=	94 : 19=
1248 : 100=	75 : 20=	5100 : 1000=
37 : 5=	96 : 18=	660 : 15=

β') Δύναται πολλάκις ἡ διαίρεσις νὰ ἐκτελεσθῇ καὶ ἄνευ τῆς συνήθους διατάξεως, ἀλλὰ συντομώτερον ὡς ἑξῆς· Ἔστω ἡ διαίρεσις 374 : 2.

διαιρετέος 374 : 2 διαιρέτης
πηλίκον 187
ὑπόλοιπον 0

Εὑρίσκομεν διαδοχικῶς τὰ ψηφία τοῦ πηλίκου χωρὶς νὰ γράφωμεν τὰ ὑπόλοιπα τῶν μερικῶν διαιρέσεων, ἀλλ' ἀπομνημονεύοντες ταῦτα.

Ὁμοίως ἐκτελεῖται καὶ ἡ ἑξῆς διαίρεσις·

διαιρετέος	8425 : 4	διαιρέτης
πηλίκον	2106	
ὑπόλοιπον	1	

Ὁ τρόπος οὗτος τῆς διατάξεως τῆς διαιρέσεως ἐφαρμόζεται συνήθως ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι μονοψήφιος.

Καθ' ὅμοιον τρόπον νὰ ἐκτελεσθῶσι καὶ αἱ ἑξῆς διαιρέσεις·

486 : 2	3545 : 5	4589 : 5	257 : 3
7584 : 4	8472 : 8	7583 : 6	378 : 8
4583 : 9	845 : 7	7834 : 7	583 : 4

γ') Νὰ ἐκτελεσθῶσι γραπτῶς καὶ κατὰ τὸν συνήθη τρόπον αἱ ἑξῆς διαιρέσεις·

358027 : 425	248872 : 458
1345083 : 12400	58234725 : 8943
7582345 : 2734	75834592 : 93743

Μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν διαιρέσεων τούτων νὰ γίνῃ ἡ δοκιμὴ αὐτῶν.

Προβλήματα διαιρέσεως.

1) Αἱ 5 ὀκάδες πράγματός τινος τιμῶνται 40 δραχ. Πόσον τιμᾶται ἡ 1 ὀκᾶ;

Λύσις.—Ἀφ' οὗ αἱ 5 ὀκάδες τιμῶνται 40 δραχ., ἐὰν μοιράσωμεν τὸν 40 εἰς 5 ἴσα μέρη ἤτοι 40=8+8+8+8+8, ἕκαστον τῶν μερῶν τούτων θὰ ἀντιστοιχῇ εἰς μίαν τῶν 5 ὀκάδων, ἤτοι εἶναι ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς ὀκᾶς. Ἀλλ' ἡ τιμὴ αὕτη, 8 δραχ. εὑρίσκεται καὶ ἀμέσως διὰ τῆς διαιρέσεως τοῦ 40 διὰ τοῦ 5 (§ 45).

Παρατήρ. *Ἐν τῷ προβλήματι τούτῳ παρατηροῦμεν ὅτι εἶναι δεδομένη ἡ τιμὴ πολλῶν δεδομένων μονάδων (40 δραχ. τιμῶνται αἱ 5 ὀκ.) καὶ ζητεῖται ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος (πόσον τιμᾶται ἡ 1 ὀκᾶ). Ὡς εἴδομεν, τὸ πρόβλημα τοῦτο λύεται διὰ τῆς διαιρέσεως.*

Ἐντεῦθεν συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα·

60. «Ὅταν δίδηται ἡ τιμὴ πολλῶν δεδομένων μονάδων καὶ ζητῆται ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος, κάμνομεν διαίρεσιν».

Διαιρετέος μὲν εἶναι ἡ δεδομένη τιμὴ τῶν πολλῶν μονάδων καὶ εἶναι ὁμοειδὴς πρὸς τὸ ζητούμενον πηλίκον, διαιρέτης δὲ ὁ ἀριθμὸς τῶν δοθεισῶν μονάδων, ἤτοι ἑτεροειδὴς πρὸς τὸν διαιρετέον.

Τὰ τοιαῦτα προβλήματα διαιρέσεως καλοῦνται *προβλήματα μερισμοῦ.*

Ἐν τῷ προηγουμένῳ προβλήματι ἐθεωρήσαμεν ἀριθμοὺς συγκεκριμένους. Διὰ διαιρέσεως θὰ λυθῇ πάλιν τὸ πρόβλημα, ἐὰν ἐκφράσωμεν τὰ δεδομένα δι' ἀφηρημένων ἀριθμῶν ὡς ἑξῆς.

2) Εὑρεῖν ἀριθμὸν τοῦ ὁποίου τὸ πενταπλάσιον εἶναι ὁ 40.

Ὅθεν ὁ ἀνωτέρω κανὼν δύναται νὰ γενικευθῇ ὡς ἑξῆς·

61. «Ὅταν δίδηται τὸ διπλάσιον, τὸ τριπλάσιον κτλ. ἀριθμοῦ τινος καὶ ζητῆται ὁ ἀριθμὸς οὗτος, κάμνομεν διαίρεσιν».

3) Ἐξοδεύει τις καθ' ἑκάστην 5 δραχ. Διὰ πόσας ἡμέρας θὰ τῷ ἐπαρκέσωσιν 60 δραχμαί ;

Λύσις. Ἐὰν εἶχε 5 δραχμὰς θὰ ἐπήρκουν αὗται μόνον διὰ μίαν ἡμέραν. Ἐὰν εἶχε 10 δραχ. ἤτοι δύο φορὰς 5, θὰ ἐπήρκουν αὗται διὰ δύο ἡμέρας, ἑπομένως αἱ 60 δραχμαὶ θὰ ἐπαρκέσωσι διὰ τόσας ἡμέρας, ὅσας φορὰς χωρεῖ ὁ 5 εἰς τὸν 60 ἤ, ὅπερ ταὐτό, ὅσας φορὰς ὁ 60 εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 5, δηλ. 12 ἡμέρας. Εὑρίσκεται δὲ τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο διὰ διαιρέσεως τοῦ 60 διὰ τοῦ 5 (§ 46).

Παρατήρ. *Ἐν τῷ προβλήματι τούτῳ δίδεται ἡ τιμὴ μιᾶς μονάδος (εἰς 1 ἡμέραν ἐξοδεύει 5 δραχμάς), ὡς καὶ ἡ τιμὴ πολλῶν μονάδων καὶ ζητεῖται τὸ πλῆθος τῶν μονάδων τούτων (εἰς πόσας ἡμέρας θὰ ἐξοδεύσῃ 60 δραχμάς).*

Ἐντεῦθεν συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα·

62. «Ὅταν δίδηται ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος καὶ ἡ τιμὴ τῶν πολλῶν μονάδων ἀγνώστου πλήθους καὶ ζητῆται τὸ πλῆθος τοῦτο, κάμνομεν διαίρεσιν».

Διαιρετέος εἶναι ἡ τιμὴ τῶν πολλῶν μονάδων, διαιρέτης ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος, ἤτοι ἀμφότεροι ὁμοειδεῖς, τὸ δὲ πηλίκον ἑτεροειδὲς πρὸς αὐτοὺς καὶ τὸ εἶδος αὐτοῦ ὁρίζεται ὑπὸ τοῦ προβλήματος.

Τὰ τοιαῦτα προβλήματα τῆς διαιρέσεως καλοῦνται *προβλήματα μετρήσεως*.

Ἐν τῷ προηγουμένῳ προβλήματι ἐθεωρήσαμεν ἀριθμοὺς συγκεκριμένους. Τὸ πρόβλημα θὰ λυθῇ πάλιν διὰ διαιρέσεως, ἐὰν ἐκφράσωμεν τὰ δεδομένα δι' ἀφηρημένων ἀριθμῶν ὡς ἑξῆς·

4) Πόσας φορὰς ὁ ἀριθμὸς 60 εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 5 ;

Ὅθεν ὁ προηγούμενος κανὼν δύναται νὰ γενικευθῇ ὡς ἑξῆς·

63. «Ὅταν ζητῆται νὰ εὕρωμεν ποσάκις ἀριθμός τις εἶναι μεγαλύτερος ἄλλου, κάμνομεν διαίρεσιν».

5) Λαμβάνει τις μισθὸν κατ' ἔτος 2400 δραχ. Πόσας λαμβάνει κατὰ μῆνα ;

6) 3600 λεπτὰ πόσας δραχμὰς κάμνουσι ;

7) 5600 δράμια πόσας ὀκάδας ἀποτελοῦσι ;

8) Τὸ 25πλάσιον ἀριθμοῦ τινος εἶναι ὁ 2875. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμὸς οὗτος ;

9) Ποσάκις ὁ ἀριθμὸς 1950 εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 150 ;

10) Ἐὰν εἰς ἕκαστον κιβώτιον δύνανται νὰ τοποθετηθῶσι 258 λεμόνια, πόσα κιβώτια χρειάζονται, διὰ νὰ τοποθετηθῶσι 5934 λεμόνια ;

11) Αἱ 6 ὀκάδες ἐλαιῶν δίδουσι 1 ὀκᾶν ἐλαίου. Πόσας ὀκάδας ἐλαίου θὰ μᾶς δώσωσι 6732 ὀκάδες ἐλαιῶν;

12) Αἱ 7525 δραχμαὶ πόσα 25δραχμα κάμνουσιν;

13) Ἁμαξοστοιχία τις διανύει 32 χιλιόμετρα καθ' ὥραν· εἰς πόσας ὥρας θὰ διανύσῃ 224 χιλιόμετρα; (ἀπ. 7 ὥρ.).

14) Ἁμαξοστοιχία τις διανύει τὸ ἀπ' Ἀθηνῶν μέχρι Πύργου διάστημα ἐκ 352 χιλιόμ. εἰς 11 ὥρας Πόσον διανύει καθ' ὥραν; (ἀπ. 32 χιλιόμ.).

15) Ἔμπορός τις ἠγόρασεν 158 πήχεις ὑφάσματος ἀντὶ 4860 δραχμῶν· ἐξώδευσε διὰ τὴν μεταφορὰν τοῦ ὑφάσματος τούτου 24 δρ. καὶ διὰ δημοτικὸν φόρον 172 δραχμ. Πόσον στοιχίζει ὁ πῆχυς τοῦ ὑφάσματος τούτου; (ἀπ. 32 δραχ.).

16) Δύο ἐργάται ἐργαζόμενοι ὁμοῦ ἐπὶ 25 ἡμέρας λαμβάνουσι 325 δραχμάς· ὁ εἷς ἐξ αὐτῶν λαμβάνει ἡμερομίσθιον 5 δραχ. Πόσον εἶναι τὸ ἡμερομίσθιον τοῦ ἄλλου; (ἀπ. 8 δραχ.).

17) Εἰς τὴν οἰκοδομὴν μιᾶς οἰκίας ἐπληρώθησαν εἰς ἡμερομίσθια 12480 δραχ. καὶ εἰργάσθησαν 48 ἐργάται λαμβάνοντες ἡμερομίσθιον 4 δραχ. Πόσας ἡμέρας διήρκεσεν ἡ οἰκοδομὴ τῆς οἰκίας ταύτης; (ἀπ. 65 ἡμέρας).

18) Ἠγόρασέ τις 5860 ὀκ. σίτου ἀντὶ 176855 λεπτῶν· ἀλλὰ κατὰ τὴν μεταφορὰν ἐχύθησαν 155 ὀκ. Πόσον τῷ στοιχίζει ἡ 1 ὀκᾶ; (ἀπ. 31 λεπτά).

19) Λαμβάνει τις κατ' ἔτος εἰσόδημα ἐκ τῆς οἰκίας του 2450 δρ. Ἐξοδεύει δὲ διὰ διαφόρους ἐπιδιορθώσεις κατ' ἔτος 215 δραχ. καὶ διὰ φόρους εἰς τὴν Κυβέρνησιν 135 δρ. Ποῖον εἶναι τὸ καθαρὸν εἰσόδημα τῆς οἰκίας ταύτης κατὰ μῆνα; (ἀπ. 175 δραχ.).

20) Ἀποθανών τις ὥρισεν ἐν τῇ διαθήκῃ του νὰ διανεμηθῇ ἡ ἐξ 195640 δραχ. περιουσία του ἐξ ἴσου εἰς τοὺς 4 υἱούς του, ἀφ' οὗ πληρώσωσι πρῶτον οὗτοι τὸν φόρον τοῦ Δημοσίου ἀνερχόμενον εἰς 3450 δραχ. καὶ δωρήσωσι προσέτι, εἰς μὲν τὸ νοσοκομεῖον 8450 δραχ. εἰς δὲ τὸ ταμεῖον τῆς Ἐθνικῆς Ἀμύνης 15400 δραχ. Πόσας δραχμὰς θὰ λάβῃ ἕκαστος τῶν υἱῶν του; (ἀπ. 42085 δραχ.).

21) Ἀτμόμυλός τις ἀλέθει εἰς 12 ὥρας 18300 ὀκ., δεύτερος ἀτμόμυλος ἀλέθει εἰς 20 ὥρας 35680 ὀκ. καὶ τρίτος ἀλέθει εἰς 24 ὥρας 42600 ὀκ. Ποῖος ἐκ τῶν τριῶν ἀλέθει περισσότερον καθ' ὥραν; (ἀπ. ὁ β').

22) Ἡ πρὸ τοῦ 1913 Ἑλλὰς χρεωστεῖ εἰς τοὺς δανειστάς της 813093680 δρχ., ὁ δὲ πληθυσμός τις ἀνέρχεται εἰς 2653700. Ἐὰν ὑποτεθῇ ὅτι 5 ἄτομα ἀποτελοῦσιν μίαν οἰκογένειαν, πόσαι δραχμαὶ ἐκ τοῦ χρέους τούτου ἀντιστοιχοῦσι εἰς ἑκάστην οἰκογένειαν; (ἀπ. 1532 δρ.)

23) Ὑπάλληλός τις λαμβάνει κατὰ μῆνα μισθὸν 85 δραχ. καὶ ἐνοι-

κιον ἀπό τινα οἰκίαν του 48 δραχ. κατὰ μῆνα, ἐξοδεύει δὲ πρὸς συντήρησίν του 835 δραχ. κατ' ἔτος. Πόσα ἔτη πρέπει νὰ ἐργασθῇ διὰ νὰ σχηματίσῃ κεφάλαιον 6088 δραχμῶν ; (ἀπ. 8 ἔτη).

24) Ἠγόρασέ τις 17 σάκκους ἀλεύρου, ἐξ ὧν ἕκαστος ἔχει βάρος 65 ὀκ. ἀντὶ 55250 λεπτῶν. Μεταπωλήσας τὸ ἄλευρον τοῦτο ἐζημιώθη 3315 λεπτά. Πρὸς πόσα λεπτὰ ἐπώλησεν ἑκάστην ὀκᾶν καὶ πόση εἶναι ἡ ζημία του κατ' ὀκᾶν ;

(ἀπ. ἐπώλησε 47 λεπτὰ τὴν ὀκᾶν, ἐζημιώθη 3 λεπ. κατ' ὀκ.)

25) Πατήρ τις ὥρισεν ἐν τῇ διαθήκῃ του νὰ μοιρασθῇ ἡ ἐκ 2500 δραχ. περιουσία του εἰς τοὺς τρεῖς υἱούς του ὡς ἑξῆς· ὁ β' νὰ λάβῃ 500 δραχ. περισσοτέρας τοῦ α' καὶ ὁ γ' 300 δρχ. περισσοτέρας τοῦ β'. Πόσας δραχμὰς ἔλαβεν ἕκαστος ;

(ἀπ. ὁ α' 400 δραχ., ὁ β' 900 δρ. καὶ ὁ γ' 1200 δρ.).

Προβλήματα διὰ τὴν ἐπανάληψιν ἐν τῇ β' τάξει.

1) Κατάστημα φωταερίου εἶχεν ἐν τῇ ἀποθήκῃ του 1345 τόννους ἀνθράκων· ἠγόρασε κατὰ τὸ διάστημα τοῦ ἔτους α') 548 τόνν. ἀνθράκων, β') 1647 τόν. καὶ γ') 1872 τόννους. Ἐὰν κατηνάλωσε καθ' ὅλον τὸ ἔτος 3452 τόννους, πόσοι τόννοι ὑπολείπονται ἐν τῇ ἀποθήκῃ του κατὰ τὸ τέλος τοῦ ἔτους ; (ἀπ. 1960 τόνν.)

2) Ἔμπορός τις εἶχεν ἐν τῇ ἀποθήκῃ του τὴν 1 7)βρίου 85750 ὀκ. σίτου· ἠγόρασε δὲ κατὰ τὴν 10ην τοῦ αὐτοῦ μηνὸς 47850 ὀκάδ. Κατὰ την 15ην 7)βρίου ἐπώλησε 58765 ὀκ., τὴν δὲ 20ὴν 43272 ὀκ. καὶ τὴν 30ὴν τοῦ ἰδίου μηνὸς 15793 ὀκάδ. Πόσας ὀκάδας σίτου ἔχει ἀκόμη ἐν τῇ ἀποθήκῃ του (ἀπ. 15770 ὀκάδ.)

3) Ἔμπορός τις ἠγόρασε καθ' ὅλον τὸ ἔτος διάφορα ἐμπορεύματα, τὰ ὁποῖα ἐστοίχισαν ἐν ὅλῳ 85670 δραχ., εἰσέπραξε δὲ ἐκ τῶν πωλήσεων ὁλοκλήρου τοῦ ἔτους 75140 δραχμάς Κατὰ τὸ τέλος τοῦ ἔτους εἶχεν ἐν τῇ ἀποθήκῃ του ἀπώλητα ἐμπορεύματα ἀξίας 18125 δραχμῶν. Πόσον τὸ κέρδος τοῦ ἐμπόρου τούτου ; (ἀπ. 7595 δρχ.)

4) Ἔμπορός τις ἠγόρασεν ἔρια 5 ποιοτήτων· ἐκ τῆς πρώτης ποιότητος ἠγόρασεν 687 ὀκ., ἐκ τῆς βας καὶ δης ἀπὸ 845 ὀκ. καὶ ἐκ τῆς γης 145 ὀκ. περισσοτέρας ἀπὸ ὅσας εἶχεν ἀγοράσει ἐκ τῆς αης ποιότητος καὶ ἐκ τῆς εης 258 ὀκ. περισσοτέρας ἢ ὅσας εἶχεν ἀγοράσει ἀπὸ τὴν δην. Πόσας ὀκάδας ἐρίου ἠγόρασεν ἐξ ἑκάστης ποιότητος, καὶ πόσας ἐξ ὅλων τῶν ποιοτήτων ;

(ἀπ. α' 687, β' 845, γ' 845, δ' 832, ε' 1090, ἐν ὅλῳ 4299 ὀκ.)

5) Ζωέμπορός τις ἠγόρασε 4 ἵππους· καὶ τὸν μὲν α' ἠγόρασεν ἀντὶ 580 δραχ., τὸν δὲ β' κατὰ 125 δραχμὰς εὐθηνότερον τοῦ α', τὸν δὲ γ' κατὰ 85 δραχ. ἀκριβώτερον τοῦ α' καὶ διὰ τὸν δ' ἔδωκε τόσας δραχμὰς

ὅσας εἶχε δώσει διὰ τὸν α΄ καὶ τὸν β΄ ὁμοῦ. Πόσας δραχμὰς ἔδωκε δι' ἕκαστον ἵππον χωριστὰ καὶ πόσας δι' ὅλους ὁμοῦ.

(ἀπ. α' 580, β' 455, γ' 665, δ' 1035, ἐν ὅλῳ 2735 δραχμάς.)

6) Στρατηγός τις ἔχει ὑπὸ τὰς διαταγάς του 18000 ἄνδρας· ἀφῆκεν εἴς τινα σταθμὸν ὡς φρουρὰν 600 ἄνδρας, ἐν ᾧ ἔφθασε συγχρόνως εἰς αὐτὸν καὶ ἐπικουρία ἐξ 800 ἀνδρῶν· ἐνοσηλεύοντο δὲ καὶ εἰς τὸ νοσοκομεῖον 450 ἄνδρες. Ζητεῖ νέαν ἐπικουρίαν 3500 ἀνδρῶν, ἀλλὰ τῷ ἀποστέλλονται μόνον 2770 ἄνδρες. Εἰς δεύτερον σταθμὸν ἀναγκάζεται νὰ ἀφήσῃ φρουρὰν ἐκ 1730 ἀνδρῶν. Πόσοι εἶναι οἱ ἄνδρες, τοὺς ὁποίους ἔχει τώρα ὑπὸ τὰς διαταγάς του ; λαθος. (ἀπ. 19690 ἄνδρες.) 187

7) Χρεωστεῖ τις 18470 δραχμὰς εἴς τινα καὶ τῷ δίδει 83 ἑκατοντάδραχμα, 148 εἰκοσιπεντάδραχμα, 51 δεκάδραχμα, 43 πεντάδραχμα καὶ 147 μονόδραχμα. Πόσα ὀφείλει ἀκόμη ; (ἀπ. 5598 δραχμ.)

8) Ἔχει τις τὸ ποσὸν 8473 δραχμῶν ἀποτελούμενον ἀπὸ 143 μονόδραχμα, 35 δίδραχμα, 18 πεντάδραχμα, 47 δεκάδραχμα, 132 εἰκοσιπεντάδραχμα, τὰ δὲ λοιπὰ εἰς ἑκατοντάδραχμα. Πόσα εἶναι τὰ ἑκατοντάδραχμα ; (ἀπ. 44)

9) Εἰς δεξαμενήν, ἥτις δύναται νὰ περιλάβῃ 2808 ὀκάδας ὕδατος, εἰσρέουσιν ἔκ τινος κρουνοῦ 185 ὀκ. καθ' ὥραν· εἰς δὲ τὸν πυθμένα ταύτης ὑπάρχει στρόφιγξ δι' ἧς ἐκρέουσιν 68 ὀκ. ὕδατος καθ' ὥραν, Ἐὰν ἀνοίξωμεν συγχρόνως τὸν κρουνὸν καὶ τὴν στρόφιγγα εἰς πόσας ὥρας θὰ γεμίσῃ ἡ δεξαμενή ; (ἀπ. εἰς 24 ὥρας).

10) Ἐργάτης τις ἐργασθεὶς ἐπί τινας ἡμέρας λαμβάνει ὡς ἀμοιβὴν 48 δραχμάς. Ἐὰν δὲ εἰργάζετο 15 ἡμέρας περισσότερον θὰ ἐλάμβανεν 108 δραχμάς. Ποῖον εἶναι τὸ ἡμερομίσθιον καὶ πόσας ἡμέρας εἰργάσθη ; (ἀπ. ἡμερομίσθιον 4 δρχ., ἡμέρ. 16) λα

11) Χωρικός τις ἐπώλησε 2 ἵππους πρὸς 258 δραχμὰς ἕκαστον, 3 βόας πρὸς 185 δρχ. ἕκαστον καὶ 148 πρόβατα πρὸς 15 δρχ. ἕκαστον. Ἠγόρασε δὲ μετὰ ταῦτα μίαν οἰκίαν μὲ 872 δρχ. καὶ 28 στρέμματα ἀγροῦ πρὸς 57 δραχμὰς τὸ στρέμμα. Πόσαι δραχμαὶ τῷ ἐπερίσσευσαν ; (ἀπ. 823 δρχμ.)

12) Ἠγόρασέ τις φασόλια πρὸς 63 λεπτὰ τὴν ὀκᾶν καὶ ἐπώλησεν αὐτὰ πρὸς 75 λεπτὰ τὴν ὀκᾶν καὶ ἐκέρδισεν ἐν ὅλῳ 30 δραχμάς. Πόσαι ὀκάδες ἦσαν τὰ φασόλια ταῦτα ; (ἀπ. 250 ὀκάδ.)

13) Στρατός τις ἀποτελεῖται ἀπὸ 3 μεραρχίας, ἑκάστη μεραρχία ἀπὸ 2 ταξιαρχίας, ἑκάστη ταξιαρχία ἐκ 5 συνταγμάτων, τὸ σύνταγμα ἀπὸ 3 τάγματα, τὸ τάγμα ἀπὸ 4 λόχους, ἕκαστος λόχος ἐκ 250 ἀνδρῶν. Ἐκ πόσων ἀνδρῶν ἀποτελεῖται ὁ στρατὸς οὗτος καὶ πόσας ὀκάδας ἄρτου χρειάζονται, ἂν ἕκαστος στρατιώτης λαμβάνει 300 δράμια ἄρτου καθ' ἡμέραν (ἀπ. 90000 ἄνδρας, 67500 ὀκ. ἄρτου.)

14) Τρεῖς ἐφοπλισταὶ κατέβαλον προσωρινῶς πρὸς ἀγορὰν ἀτμο-

πλοίου ὁ μὲν α΄ 58700 δρχ., ὁ δὲ β΄ 3450 δραχ. περισσοτέρας τοῦ α΄ καὶ ὁ γ΄ 2520 δράχ. περισσοτέρας τοῦ β΄. Ἡ ὁλικὴ τιμὴ τοῦ ἀτμοπλοίου ἦτο 204000 δρχ. Πόσας δραχμὰς πρέπει νὰ καταβάλῃ ἕκαστος ἀκόμη κατὰ τὴν πληρωμὴν τοῦ ὑπολοίπου, διὰ νὰ ἔχωσι καὶ οἱ τρεῖς ἴσον μερίδιον; (ἀπ. α΄ 9300 δραχ., β΄ 5850, γ΄ 3330).

15) Ἐργολάβος τις ἀνέλαβε τὴν οἰκοδομὴν οἰκίας ἀντὶ 40000 δρ., Ἐξώδευσε δὲ διὰ λίθους 6580 δρχ., δι᾽ ἄσβεστον 745 δραχ., δι᾽ ἄμμον 572 δρ., διὰ ξυλείαν 7874 δραχ., διὰ κεράμους 862 δραχ. Εἶχε δὲ προσέτι 35 κτίστας πρὸς 4 δραχ. ἡμερομίσθιον ἐργασθέντας ἐπὶ 78 ἡμέρας καὶ 18 τέκτονας πρὸς 5 δραχ. ἡμερομίσθιον ἐργασθέντας ἐπὶ 92 ἡμέρας. Πόσον ἐκέρδισεν ὁ ἐργολάβος ἐκ τῆς οἰκοδομῆς ταύτης;

(ἀπ. 4167 δραχ.).

16) Προμηθευτής τις ἀνέλαβε νὰ προμηθεύσῃ κριθὴν δι᾽ 800 ἵππους ἱππικοῦ τινος συντάγματος ἐπὶ ἓν ἔτος ἀντὶ 70 000 δραχ. Ἠγόρασε πρὸς τοῦτο α΄) 75350 ὀκ. κριθῆς πρὸς 18 λεπτὰ τὴν ὀκᾶν, β΄) 47800 ὀκ. πρὸς 21 λεπ. γ΄) 23500 ὀκ. πρὸς 19 λεπ. καὶ δ΄) 458700 ὀκ χόρτου πρὸς 6 λεπτὰ τὴν ὀκᾶν. Ζητεῖται νὰ εὕρωμεν ἂν ἐκέρδισε καὶ πόσον;

(ἀπ. 14412 δρ.).

17) Γεωργός τις ἔσπειρε 45 κοιλὰ σίτου, ἅτινα εἶχεν ἀγοράσει πρὸς 9 δραχ. τὸ κοιλὸν καὶ 28 κοιλὰ κριθῆς πρὸς 4 δραχ. τὸ κοιλόν. Ἐξώδευσε δὲ διὰ τὴν σποράν, θερισμὸν καὶ λοιπὴν ἐν γένει ἐργασίαν μέχρι τῆς συγκομιδῆς 1295 δραχ. Ἔλαβε δὲ κατὰ τὴν συγκομιδὴν 365 κοιλὰ σίτου πωληθέντα πρὸς 8 δραχ. τὸ κοιλὸν καὶ 292 κοιλὰ κριθῆς πωληθέντα πρὸς 5 δραχ. τὸ κοιλόν. Πόσας δραχμὰς ἐκέρδισεν οὗτος;

(ἀπ. 2568 δραχ.).

18) Καθεκλοποιὸς κατεσκεύασεν εἰς διάστημα 6 μηνῶν 1524 καθίσματα, ἐξώδευσε δὲ κατὰ τὴν κατασκευὴν αὐτῶν τὰ ἑξῆς· α΄) δι᾽ ἀγορὰν ξυλείας 2370 δραχ., β΄) δι᾽ ἐνοίκιον ἐπλήρωσε 60 δραχμὰς κατὰ μῆνα, γ΄ ἐπλήρωσεν εἰς δύο ἐργάτας του 75 δραχ. κατὰ μῆνα, δ΄) διὰ διάφορα ἄλλα ἔξοδα 1 δραχ. καθ᾽ ἡμέραν. Ζητεῖται νὰ εὕρωμεν πόσον στοιχίζει ἑκάστη δωδεκὰς καὶ πόσον πρέπει νὰ πωλήσῃ ἑκάστην δωδεκάδα διὰ νὰ κερδίσῃ 3 δρχ. εἰς ἑκάστην; (ὁ μὴν λογίζεται μὲ 30 ἡμέρας).

(Ἀπ. νὰ πωλῇ 33 δρχ. τὴν δωδεκάδα, τῷ στοιχίζει 30).

19) Ἔμπορός τις ἀλεύρων ἔχει ἐν τῇ ἀποθήκῃ του 854 σάκκους τῶν 70 ὀκάδ. ἀλεύρου Αης ποιότητος καὶ 1230 σάκκους τῶν 65 ὀκ. ἀλεύρου Βας ποιότητος. Ἡ ὀκᾶ ἀλεύρου Αης ποιότητος τῷ στοιχίζει 56 λεπτὰ καὶ Βας ποιότητος 52 λεπτά. Ἐπώλησε δὲ κατὰ τὴν διάρκειαν ἑνὸς μηνὸς α΄) 245 σάκκους Αης ποιότητος πρὸς 58 λεπτὰ τὴν ὀκᾶν, β΄) 458 σάκκους ἀλεύρου τῆς αὐτῆς ποιότητος πρὸς 59 λεπτὰ τὴν ὀκᾶν, γ΄) 645 σάκκους ἀλεύρου Βας ποιότητος πρὸς 55 λεπτὰ τὴν ὀκᾶν καὶ δ΄) 358 σάκκους ἀλεύρου τῆς αὐτῆς ποιότητος πρὸς 53 λεπτὰ τὴν ὀκᾶν.

Ζητεῖται νὰ εὕρωμεν α΄) Πόσαι ὀκάδες ἀλεύρου Αης καὶ Βας ποιότητος ἔμειναν ἀπώλητοι εἰς τὸ τέλος τοῦ μηνὸς καὶ β΄) πόσον ἐκέρδισεν ἐκ τῶν γενομένων πωλήσεων ;

(Ἀπ. Αης 10570 ὀκ., Βας 14755 ὀκ., ἐκέρδισεν 279525 λεπτά).

20) Ἀλευρέμπορος ἔχει νὰ μετακομίσῃ ἐκ τῆς ἀποθήκης του εἰς τὴν παραλίαν 32400 σάκκους ἀλεύρου· θέλει δὲ νὰ γίνῃ ἡ μεταφορὰ ἐντὸς μιᾶς ἡμέρας· ἐμίσθωσε πρὸς τοῦτο 40 φορτηγὰ ἁμάξια ἐξ ὧν ἕκαστον δύναται νὰ περιλάβῃ 15 σάκκους. Ζητεῖται α΄) πόσους δρόμους θὰ κάμῃ ἕκαστον ἁμάξιον ἐντὸς τῆς ἡμέρας. β΄) Πόσα λεπτὰ θὰ πληρώσῃ ὁ ἔμπορος διὰ τὴν μεταφορὰν τῶν σάκκων τούτων, ἐὰν δι᾽ ἕκαστον ἁμάξιον καὶ δι᾽ ἕκαστον δρόμον πληρώνει 75 λεπτὰ καὶ γ΄) Πόσα λεπτὰ θὰ λάβῃ ἕκαστος καραγωγεύς; (Ἀπ. δρόμους 54, θὰ πληρώσῃ 162000 λεπτά, ἕκαστος δὲ καραγωγεὺς θὰ λάβῃ 4050 λεπτά.)

21) Ἐκ τῆς πωλήσεως ὑφάσματος 958 πήχεων εἰσέπραξέ τις ἐν ὅλῳ 9697 δραχ. Εἶχε δὲ πωλήσει τὴν πρώτην φορὰν 275 πήχ. πρὸς 12 δραχ. τὸν πῆχυν, τὴν δευτέραν 387 πήχ. πρὸς 9 δρχ. τὸν πῆχυν, τὴν τρίτην 182 πήχ. πρὸς 11 δρχ. τὸν πῆχυν καὶ τέλος τοὺς ὑπολοίπους. Πρὸς πόσον ἐπώλησε τὸν πῆχυν τοῦ ὑπολοίπου τούτου ; (Ἀπ. 8 δραχμάς.).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΠΡΑΞΕΩΝ

Οἱ ἀριθμοί, τῶν ὁποίων τὰς πράξεις μέχρι τοῦδε ἐμάθομεν, καλοῦνται *ἀκέραιοι.*

Ἐπὶ τῶν πράξεων τῶν ἀκεραίων ἰσχύουσι γενικαί τινες ἀρχαί, αἵτινες καλοῦνται *ἰδιότητες*· τινὰς τούτων ἐγνωρίσαμεν ἐν τοῖς προηγουμένοις (§§ 20, 26, 33, 34, 35).

Ἐνταῦθα ἀναφέρομεν προσέτι καὶ τὰς ἑξῆς·

Ἰδιότητες προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως.

Μαθητής τις ἔλαβε παρὰ τοῦ πατρός του 8 πεντάλεπτα, παρὰ τῆς μητρός του 5 καὶ παρὰ τοῦ ἀδελφοῦ του 3, ἐπομένως ἔχει ἐν ὅλῳ $8+5+3$ πεντάλεπτα· ἂν ὁ πατήρ του τῷ ἔδιδε ἀκόμη 2 πεντάλεπτα, θὰ εἶχε $(8+5+3)+2=16+2=18$. Ἀλλὰ τοῦτο δύναται νὰ εὑρεθῇ ἀκόμη, ἂν τὰ 2 πεντάλεπτα προστεθῶσιν εἰς τὰ 8 τὰ ὁποῖα τῷ ἔδωκεν ὁ πατήρ του, ἤτοι $(8+2)+5+3=10+5+3$. Ὅθεν ἔχομεν $(8+5+3)+2=(8+2)+5+3$.

Ἐντεῦθεν ἕπεται ἡ ἑξῆς ἰδιότης.

64) «Διὰ νὰ προσθέσωμεν ἀριθμόν τινα εἰς ἄθροισμα, ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν αὐτὸν εἴς τινα τῶν προσθετέων.»

Σημ. Ὅταν ὁλόκληρον ἄθροισμα ἢ διαφορὰ ἢ γινόμενον κτλ. λαμβάνηται ὡς εἷς ἀριθμὸς καὶ ἐπ' αὐτοῦ πρόκειται νὰ ἐκτελεσθῇ ἄλλη τις πρᾶξις κλείομεν τοῦτο ἐντὸς παρενθέσεων π.δ.χ. $(8+5+3)+2$ σημαίνει τὸ 2 νὰ προστεθῇ εἰς ὁλόκληρον τὸ ἄθροισμα $(8+5+3)$.

Πρόβλημα. Ἐκ δύο Ἑλλην. σχολείων, τὸ μὲν ἔχει εἰς τὴν Α^{ην} τάξιν 42 μαθητάς, εἰς τὴν Β^{αν} 35 καὶ εἰς τὴν Γ^{ην} 24, τὸ δὲ ἔχει εἰς μὲν τὴν Α^{ην} 37 μαθητάς, εἰς δὲ τὴν Β^{αν} 28 καὶ εἰς τὴν Γ^{ην} 17. Πόσους μαθητὰς ἔχουσι καὶ τὰ δύο ὁμοῦ;

Εὑρίσκομεν πρῶτον πόσους μαθητὰς ἔχει ἕκαστον σχολεῖον.

$$\text{τὸ } 1^{ον} \quad 42+35+24=101$$
$$\text{τὸ } 2^{ον} \quad 37+28+17=82$$

καὶ προσθέτομεν τὰ δύο ἀθροίσματα· ἤτοι $(42+35+24)+(37+28+17)=101+82=183$.

Δυνάμεθα ὅμως νὰ εὕρωμεν ἀμέσως καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν 6 τάξεων τῶν δύο Ἑλλην. σχολείων ἤτοι $42+35+24+37+28+17=183$.

Ὅθεν ἔχομεν

$$(42+35+24)+(37+28+17)=42+35+24+37+28+17.$$

Ἐντεῦθεν ἕπεται ἡ ἑξῆς ἰδιότης·

65) «Διὰ νὰ προσθέσωμεν δύο ἀθροίσματα, ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν πάντας τοὺς προσθετέους τῶν δύο ἀθροισμάτων.»

Ἐὰν ἔχωμεν εἰς τὸ χρηματοφυλάκιόν μας ἓν 25δραχμον καὶ ἓν 5δραχμον καὶ πληρώσωμεν 3 δραχμάς, θὰ μᾶς μείνωσι $(25+5)-3=30-3=27$ δρχ. Δυνάμεθα ὅμως νὰ δώσωμεν τὰς 3 δραχ. ἀπὸ τὸ 5δραχμον ἀπὸ τὸ ὁποῖον θὰ μείνωσι 2 δραχμαὶ ἤτοι $25+(5-3)=25+2=27$.

Ὅθεν ἔχομεν $\quad (25+5)-3=25+(5-3)$

Ἐξ οὗ ἕπεται ἡ ἑξῆς ἰδιότης τῆς ἀφαιρέσεως.

66. «Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀριθμόν τινα ἀπὸ ἀθροίσματος ἀρκεῖ νὰ ἀφαιρέσωμεν αὐτὸν ἀφ' ἑνὸς τῶν προσθετέων.

Ἂν ἔχωμεν ἓν 100δραχμον καὶ ὀφείλωμεν εἰς τὸν Α. 15 δρχ., εἰς τὸν Β. 22 δρχ. μετὰ τὴν πληρωμὴν τῶν χρεῶν θὰ μᾶς μείνωσι $100-(15+22)=100-37=63$ δραχ. Δυνάμεθα ὅμως νὰ πληρώσωμεν εἰς τὸν Α τὰς 15 δραχ. καὶ μᾶς μένουσιν $100-15=85$, καὶ ἔπειτα εἰς τὸν Β τὰς 22 δρχ. καὶ μένουσι $85-22=65$ δραχμαί.

Ὅθεν ἔχομεν $\quad 100-(15+22)=(100-15)-22.$

Ἐντεῦθεν ἕπεται ἡ ἑξῆς ἰδιότης.

67) «Διά νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ ἀριθμοῦ τινὸς τὸ ἄθροισμα ἄλλων, ἀρκεῖ ν' ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν τὸν πρῶτον προσθετέον, ἀπὸ τοῦ ὑπολοίπου τὸν δεύτερον προσθετέον, ἀπὸ τοῦ νέου ὑπολοίπου τὸν τρίτον καὶ οὕτω καθεξῆς μέχρις οὗ ἀφαιρέσωμεν καὶ τὸν τελευταῖον προσθετέον τοῦ ἀθροίσματος»

Πρόλβημα. Ἐργάτης τις ἔχει οἰκονομίας ἀπὸ τὴν παρελθοῦσαν ἑβδομάδα 15 δρχ. καὶ εἰσέπραξε κατὰ τὴν ἑβδομάδα ταύτην ἀπὸ ἡμερομίσθια 18 δρ. ἀλλ' ἐξώδευσε ἕνεκα ἀσθενείας τοῦ τέκνου του 25 δραχ. Πόσας ἔχει ἤδη ;

Εἶναι φανερὸν ὅτι ἀπὸ τὰς 15 δραχ. θὰ ἀφαιρεθῶσιν αἱ $25-18=7$ δρχ. τὰς ὁποίας ἐξώδευσε περισσοτέρας ἀπὸ ὅσας εἰσέπραξεν κατὰ τὴν ἑβδομάδα ταύτην ἤτοι θὰ ἔχωμεν $15-(25-18)=15-7=8$ δρχ.

Δυνάμεθα ὅμως εἰς τὰς 15 δρχ. νὰ προσθέσωμεν τὰς εἰσπραχθείσας 18 δρχ. καὶ ἀπὸ τοῦ ἀθροίσματος $15+18$ ν' ἀφαιρέσωμεν τάς δαπανηθείσας 25 δρχ. ἤτοι $(15+10)-25$.

Ὅθεν ἔχομεν $15-(25-18)=(15+18)-25$.

Ἐφ' οὗ ἕπεται ἡ ἑξῆς ἰδιότης.

68. «Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν διαφορὰν δύο ἀριθμῶν ἀπό τινος ἄλλου, ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸν ἀριθμὸν τὸν ἀφαιρετέον τῆς διαφορᾶς καὶ ν' ἀφαιρέσωμεν τὸν μειωτέον.»

Σημ. Νὰ στηριχθῇ ἐπὶ τῆς ἰδιότητος ταύτης ἡ συντομία τῆς ἀφαιρέσεως ἀπό τινος ἀριθμοῦ τοῦ 7,99,999 κτλ.

Ἰδιότητες πολλαπλασιασμοῦ καὶ διαιρέσεως ἀθροισμάτων καὶ διαφορῶν.

Πρόβλημα. Δύο ἐργάται ἐργάσθησαν τὴν 1ην ἑβδομάδα ἐπὶ 5 ἡμ. καὶ τὴν 2αν ἐπὶ 6 ἡμ.—Ὁ πρῶτος ἐλάμβανε ἡμερομίσθιον 4 δρχ. ὁ δὲ δεύτερος 3 δρχ. Πόσας δραχμὰς ἔλαβον καὶ οἱ δύο ὁμοῦ ἐν ὅλῳ ;

Τὸ πρόβλημα τοῦτο δύναται νὰ λυθῇ κατὰ δύο τρόπους.

α') *Τρόπος.* Καὶ οἱ δύο ὁμοῦ ἐργάται εἰργάσθησαν κατὰ τὰς δύο ἑβδομάδας $5+6=11$ ἡμ. ἐλάμβανον δὲ καθ' ἡμέραν $4+3=8$ δρχ. ἄρα ἔλαβον ἐν ὅλῳ $(4+3)\times(5+6)=7\times 11=77$ δρχ.

β'.) *Τρόπος.* Ὁ α'. ἐργάτης τὴν μὲν 1ην ἑβδομάδα ἐργασθεὶς ἐπὶ 5 ἡμ. ἔλαβεν $4\times 5=20$ δρχ., τὴν δὲ 2αν ἐπὶ 6 ἔλαβεν $4\times 6=24$ δρχ. Ὁ δὲ β'. ἐργάτης κατὰ τὴν 1ην ἑβδομάδα ἐργασθεὶς ἐπὶ 5 ἡμ. ἔλαβεν $3\times 5=15$ δρχ. κατὰ τὴν 2αν ἔλαβεν $3\times 6=18$ δρχ.

Ἄρα καὶ οἱ δύο ὁμοῦ ἔλαβον

$(4\times 5)+(4\times 6)+(3\times 5)+(3\times 6)=20+24+15+18=77$ δρχ.

Ὅθεν ἔχομεν

$$(4+3)\times(5+6)=(4\times 5)+(4\times 6)+(3\times 5)+(3\times 6)$$

Τὰ τέσσαρα μερικὰ γινόμενα τοῦ 2ου μέλους εὑρίσκονται ἂν πολ/σωμεν ἕκαστον προσθετέον τοῦ ἀθροίσματος $(4+3)$ ἐφ' ἕκαστον προσθετέον τοῦ ἀθροίσματος $(5+6)$.

'Εντεῦθεν ἕπεται ἡ ἑξῆς ἰδιότης.

69) «Διὰ νὰ πολ/σωμεν ἄθροισμα πολλῶν προσθετέων ἐπὶ ἕτερον ἄθροισμα, ἀρκεῖ νὰ πολ/σωμεν ἕκαστον προσθετέον τοῦ πρώτου ἐφ' ἕκαστον προσθετέον τοῦ δευτέρου καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ μερικὰ γινόμενα.»

Πρόβλημα. Οἰκογενειάρχης τις λαμβάνει τὴν ἡμέραν 5 δρχ. καὶ ἐξοδεύει 3 δρχ. πρὸς συντήρησιν τῆς οἰκογενίας του. Πόσας δραχμὰς θὰ ἐξοικονομήσῃ κατὰ τὰς 6 ἐργασίμους ἡμέρας τῆς ἑβδομάδος ;

Λύεται καὶ τοῦτο κατὰ δύο τρόπους.

α') *Τρόπος.* 'Αφαιροῦμεν ἀπὸ τὰς 5 δρχ. τὰς ὁποίας λαμβάνει καθ' ἡμέραν, τὰς 3 δρχ. τὰς ὁποίας ἐξοδεύει καὶ τὸ ὑπόλοιπον πολ/ζομεν ἐπὶ 6 ἤτοι $(5-3)\times 6=2\times 6=12$ δρχ.

β') *Τρόπος.* —Εὑρίσκομεν πόσας δραχμὰς ἔλαβε κατὰ τὰς 6 ἡμ. ($5\times 6=30$ δρχ.) καὶ πόσας ἐδαπάνησε κατὰ τὸ διάστημα τοῦτο ($3\times 6=18$) καὶ ἔπειτα ἀφαιροῦμεν.

$$(5\times 6)-(3\times 6)=30-18=12 \text{ δρχ.}$$

"Οθεν ἔχωμεν $(5-3)\times 6=(5\times 6)-(3\times 6)$ (1)

'Εντεῦθεν ἕπεται ἡ ἑξῆς ἰδιότης

70) «Διὰ νὰ πολ/σωμεν διαφορὰν ἐπὶ ἀριθμόν, ἀρκεῖ νὰ πολ/σωμεν χωριστὰ τὸν μειωτέον καὶ τὸν ἀφαιρετέον καὶ ἀπὸ τοῦ πρώτου γινομένου ἀφαιρέσωμεν τὸ δεύτερον».

Κατὰ τὴν ἰδιότητα (§ 33) ἡ ἰσότης (1) δύναται νὰ γραφῇ καὶ ὡς ἑξῆς·

$$6\times(5-3)=(6\times 5)-(6\times 3).$$

Τοῦτο ἐκφράζει τὴν ἑξῆς ἰδιότητα.

71) «'Αριθμὸς πολ/ζεται ἐπὶ διαφοράν, ἂν πολ/σθῇ χωριστὰ ἐπὶ τὸν μειωτέον καὶ τὸν ἀφαιρετέον καὶ ἀπὸ τοῦ πρώτου γινομένου ἀφαιρεθῇ τὸ δεύτερον.»

Σημ. 'Επὶ τῆς ἰδιότητος ταύτης νὰ στηριχθῇ ἡ συντομία τοῦ πολ/σμοῦ ἐπὶ 9,99,999 κτλ.

Πρόβλημα. 3 γεωργοὶ συνέταιροι ἐπώλησαν τὰ προϊόντα καὶ εἰσέπραξαν ἀπὸ μὲν τὸν σῖτον 594 δρχ., ἀπὸ δὲ τὴν κριθὴν 396 δρχ. καὶ ἀπὸ τοὺς ἀμνοὺς 147 δραχ. Πόσας δραχμὰς θὰ λάβῃ ἕκαστος;

Θὰ διαιρέσωμεν τὸ σύνολον τῶν εἰσπράξεων, ἤτοι τὸ ἄθροισμα $594+396+147=1137$ δρχ. διὰ τοῦ 3 καὶ θὰ εὕρωμεν $1137:3=379$ δρχ. τὰς ὁποίας θὰ λάβῃ ἕκαστος ἤτοι

$$(594+396+147):3=1137:3=379 \text{ δρχ.}$$

'Αλλὰ δυνάμεθα νὰ μοιράσωμεν εἰς τοὺς 3 γεωργοὺς χωριστὰ τὰς 594 δρχ., ἃς ἔλαβον ἀπὸ τὴν πώλησιν τοῦ σίτου ($594:3=198$ δρχ.), ἔπειτα τὰς 396 δρχ. ($396:3=132$ δρχ.) καὶ ἔπειτα τὰς 147 δραχ. ($147 : 3=49$) καὶ τέλος νὰ προσθέσωμεν τὰ τρία ταῦτα πηλίκα

$$198+132+49=379.$$

Ὅθεν θὰ ἔχωμεν $(594+396+147):3=(549:3)+(396:3)+(147:3)=198+132+49=379$.

Ἐντεῦθεν ἕπεται ἡ ἑξῆς ἰδιότης·

72) «Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἄθροισμα δι' ἀριθμοῦ, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν ἕκαστον τῶν προσθετέων διὰ τοῦ ἀριθμοῦ (ἂν οἱ προσθετέοι διαιροῦνται ἀκριβῶς) καὶ προσθέσωμεν τὰ μερικὰ πηλίκα».

Ἐκ ταύτης ἕπεται ἀμέσως καὶ ἡ ἑπομένη ἰδιότης·

73) «Ἀριθμὸς διαιρῶν ἀκριβῶς δύο ἢ περισσοτέρους ἄλλους διαιρεῖ καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν».

π. δ. χ. ὁ 8 διαιρεῖ τὸν 40, 64 καὶ 24 ἀκριβῶς, θὰ διαιρῇ ἀκριβῶς καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν $40+64+24=128$.

Πρόβλημα. — 4 συνέταιροι ἐκέρδισαν 2456 δρχ. καὶ ἐζημιώθησαν 892 δρχ. Πόσας δραχμὰς θὰ λάβῃ ἕκαστος ἐκ τοῦ κέρδους;

Ἀφαιροῦμεν τὴν ζημίαν ἀπὸ τοῦ κέρδους ($2456-892=1564$ δρχ.) καὶ τὸ καθαρὸν κέρδος μοιράζομεν εἰς τοὺς 4 συνεταίρους ($1564:4=391$ δρχ.). Ἀλλὰ δυνάμεθα νὰ μοιράσωμεν εἰς τοὺς 4 συνεταίρους καὶ τὸ κέρδος ($2456:4=614$ δρχ.) καὶ τὴν ζημίαν ($892:4=223$ δρχ.) καὶ ἔπειτα ν' ἀφαιρέσωμεν ($614-223=391$ δρχ.), ἤτοι θὰ ἔχωμεν

$(2456-892):4=(2456:4)-(892:4)=614-223=691$·

Ἐξ οὗ ἕπεται ἡ ἑξῆς ἰδιότης·

74) «Ἐὰν ἔχωμεν νὰ διαιρέσωμεν διαφορὰν δύο ἀριθμῶν διά τινος ἀριθμοῦ, διαιροῦμεν (ἂν διαιροῦνται ἀκριβῶς) χωριστὰ τὸν μειωτέον καὶ τὸν ἀφαιρετέον καὶ ἀπὸ τοῦ πρώτου πηλίκου ἀφαιροῦμεν τὸν δεύτερον».

Ἐκ ταύτης ἕπεται ἀμέσως καὶ ἡ ἑπομένη ἰδιότης·

75) «Ἀριθμὸς διαιρῶν ἀκριβῶς δύο ἄλλους, διαιρεῖ ἀκριβῶς καὶ τὴν διαφορὰν αὐτῶν»· π. δ. χ. ὁ ἀριθμὸς 7 διαιρεῖ τὸν 42 καὶ τὸν 14 θὰ διαιρῇ καὶ τὴν διαφορὰν αὐτῶν $42-14=28$.

Ἰδιότητες πολλαπλασιασμοῦ καὶ διαιρέσεως γινομένων.

Πρόβλημα. Πόσας δραχμὰς θὰ λάβωσιν 8 ἐργάται ἐργασθέντες ἐπὶ 12 ἡμ. μὲ ἡμερομίσθιον 3 δρχ.

Εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ ποσὸν τῶν 12 δραχμῶν, τὰς ὁποίας θὰ λάβωσιν οἱ ἐργάται οὗτοι, εἶναι τὸ γινόμενον $8\times12\times3$. Ἐὰν οἱ ἐργάται διπλασιασθῶσιν, ἤτοι γίνωσι 16 βεβαίως τὸ ποσὸν $16\times12\times3$ θὰ εἶναι διπλάσιον τοῦ προηγουμένου· ἤτοι τὸ γινόμενον $8\times12\times3$ διπλασιάζεται ὅταν διπλασιασθῇ ὁ παράγων 8. Ὁμοίως διπλάσιον ποσὸν χρημάτων λαμβάνουσιν οἱ 8 ἐργ. μὲ τὸ αὐτὸ ἡμερομίσθιον, ἂν ἐργασθῶσι διπλασίας ἡμέρας, ἤτοι 24. Ὡσαύτως διπλάσιον ποσὸν χρημάτων θὰ λάβωσιν οἱ 8 ἐργάται εἰς 12 ἡμ., ἂν λαμβάνωσι διπλάσιον ἡμερομίσθιον.

Ὅθεν ἔχομεν

$$(8\times12\times3)\times2=16\times12\times3$$
$$(8\times12\times3)\times2=8\times24\times3$$
$$(8\times12\times3)\times2=8\times12\times6.$$

Ἐντεῦθεν ἕπεται ἡ ἑξῆς ἰδιότης·

76) «Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν γινόμενον ἐπὶ ἀριθμόν, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἕνα τῶν παραγόντων αὐτοῦ ἐπὶ τὸν ἀριθμόν».

Ἐπειδὴ τὸ γινόμενον $8\times12\times3$ εἶναι δὶς μικρότερον τοῦ $16\times12+3$ θὰ ἔχωμεν·

$$(16\times12\times3):2=8\times12\times3.$$

καὶ ἑπομένως ἔχομεν τὴν ἑξῆς ἰδιότητα·

77) «Διὰ νὰ διαιρέσωμεν γινόμενον πολλῶν παραγόντων δι᾽ ἀριθμοῦ, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν ἕνα τῶν παραγόντων αὐτοῦ διὰ τοῦ ἀριθμοῦ».

Ἐκ ταύτης ἕπονται καὶ αἱ ἑξῆς δύο ἰδιότητες·

78) «Ἀριθμὸς διαιρῶν ἕνα ἄλλον θὰ διαιρῇ καὶ πᾶν γινόμενον τούτου ἐπὶ οἷον δήποτε ἀριθμόν»· π. δ. χ. ὁ 6 διαιρεῖ τὸν 30 θὰ διαιρῇ καὶ τὸ 30×2, 30×3 κ.τ.λ.

79) «Διὰ νὰ διαιρέσωμεν γινόμενον πολλῶν παραγόντων δι᾽ ἑνὸς τῶν παραγόντων του, ἀρκεῖ νὰ ἐξαλείψωμεν τὸν παράγοντα τοῦτον».

π.δ.χ. $(9\times7\times15):7=(9\times15)$.

Πρόβλημα.—3 τεμάχια ὑφάσματος, ἐκ τῶν ὁποίων ἕκαστον ἀποτελεῖται ἀπὸ 8 πήχ., ἠγοράσθησαν ἀντὶ 240 δραχ. Πόσον τιμᾶται ὁ πῆχυς τοῦ ὑφάσματος τούτου;

Τὸ ὅλον ὕφασμα εἶναι $3\times8=24$ πήχεις· ἄρα ὁ πῆχυς τιμᾶται $240:(3\times8)=240:24=10$.

Δυνάμεθα ὅμως νὰ εὕρωμεν πρῶτον πόσον τιμᾶται τὸ 1 τεμάχιον ($240:3=80$ δρχ.) καὶ ἔπειτα πόσον τιμᾶται ὁ 1 πῆχυς $(80:8)=10$, ἤτοι $(240:3):8=10$.

Ὅθεν ἔχομεν $240:(3\times8)=(240:3):8$, ἐξ ἧς ἕπεται ἡ ἑξῆς ἰδιότης·

80) «Ἀριθμὸς διαιρεῖται διὰ γινομένου, ἂν διαιρεθῇ διὰ τοῦ πρώτου παράγοντος, τὸ πηλίκον διὰ τοῦ δευτέρου παράγοντος, τὸ νέον πηλίκον διὰ τοῦ τρίτου καὶ οὕτω καθεξῆς, μέχρις οὗ διαιρέσωμεν καὶ διὰ τοῦ τελευταίου παράγοντος τοῦ γινομένου».

Ἔστω νὰ μοιράσωμεν 29 δραχ. εἰς 8 ἀνθρώπους, ἤτοι νὰ διαιρέσωμεν τὸν 29 διὰ τοῦ 8· ἕκαστος τῶν 8 ἀνθρώπων θὰ λάβῃ 3 δρχ., θὰ περισσεύσωσι δὲ καὶ 5 δραχ. Ἐὰν διπλασιάσωμεν τὰς 29 δραχ., συγχρόνως δὲ διπλασιάσωμεν καὶ τοὺς 8 ἀνθρώπους, ἤτοι ἂν μοιράσωμεν 58 δραχ. εἰς 16 ἀνθρώπους, εἶναι φανερὸν ὅτι ἕκαστος τῶν 16 ἀνθρώπων θὰ λάβῃ πάλιν μερίδιον 3 δραχ., ἀλλὰ θὰ περισσεύσωσι τώρα 10 δρχ., ἤτοι διπλάσιαι ἢ πρότερον· δηλ. τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως $58:16$ εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ πηλίκον τῆς πρώτης διαιρέσεως, τὸ δὲ ὑπόλοιπον 10 εἶναι διπλάσιον τοῦ ὑπολοίπου 5 ταύτης.

Ἐντεῦθεν ἕπεται ἡ ἑξῆς ἰδιότης·

81) «Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν (ἢ διαιρέσωμεν) διαιρετέον καὶ διαιρέτην ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, τὸ μὲν πηλίκον δὲν μεταβάλλεται, τὸ δὲ ὑπόλοιπον πολλαπλασιάζεται (ἢ διαιρεῖται) ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν».

Ἐὰν τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως εἶναι 0, ἤτοι ἡ διαίρεσις εἶναι τελεία, εἶναι προφανὲς ὅτι καὶ μετὰ τὸν πολλαπλασιασμὸν τοῦ διαιρετέου καὶ διαιρέτου ἡ διαίρεσις ἐξακολουθεῖ νὰ εἶναι τελεία. Ἐντεῦθεν ἕπεται ἡ ἑξῆς ἰδιότης·

82) «Ἐὰν ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης τελείας διαιρέσεως πολ)σθῶσιν ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, τὸ μὲν πηλίκον δὲν μεταβάλλεται, ἡ δὲ διαίρεσις μένει πάλιν τελεία».

ΔΙΑΙΡΕΤΟΤΗΣ

83) *Ὁρισμοί.*— Ἀριθμός τις λέγεται *διαιρετὸς* δι᾽ ἄλλου, ἂν διαιρῆται ἀκριβῶς δι᾽αὐτοῦ. Ὁ δεύτερος λέγεται *διαιρέτης* τοῦ πρώτου· π.χ. ὁ 20 εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 5, ὁ δὲ 5 διαιρέτης τοῦ 20. Ὁ ἀριθμὸς ὁ διαιρετὸς δι᾽ ἄλλου λέγεται καὶ *πολλαπλάσιον* αὐτοῦ, διότι γίνεται ἐξ αὐτοῦ διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἐπί τινα ἀριθμόν, ὁ δὲ διαιρέτης *ὑποπολλαπλάσιον* τοῦ πρώτου.

Π.χ. ὁ 30 εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 6, διότι $6 \times 5 = 30$, ὁ δὲ 6 ὑποπολλαπλάσιον τοῦ 30.

84) Ἀριθμὸς ὅστις δὲν ἔχει ἄλλον διαιρέτην εἰμὴ τὸν ἑαυτόν του καὶ τὴν 1 λέγεται *πρῶτος*.

Πρῶτοι π. δ. χ. ἀριθμοὶ εἶναι ὁ 2, 3, 5, 7, 11 κ.τ.λ.

85. Πᾶς μὴ πρῶτος ἀριθμὸς καλεῖται *σύνθετος*.

Π. δ. χ. ὁ ἀριθμὸς 40 εἶναι σύνθετος, ὁμοίως ὁ 25, 50 κ.τ.λ.

86. *Κοινὸς διαιρέτης* δεδομένων ἀριθμῶν εἶναι ὁ διαιρῶν πάντας ἀκριβῶς.

Π.δ.χ. ὁ 5 εἶναι κ. διαιρέτης τῶν 20, 25, 35, 50.

87. Οἱ ἀριθμοὶ οἱ μὴ ἔχοντες ἄλλον κοινὸν διαιρέτην εἰμὴ τὴν 1 καλοῦνται *πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους*.

Π. δ. χ. 5, 14, 29 εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Χαρακτῆρες διαιρετότητος.

Πολλάκις εἶναι χρήσιμον νὰ γνωρίζωμεν, χωρὶς νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν, ἂν ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς δι᾽ ἄλλου.

Τοῦτο ἐπιτυγχάνομεν διά τινας διαιρέτας διὰ τῶν ἑξῆς κανόνων·

88. Ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς διὰ 10 ἂν λήγῃ εἰς 0, διὰ τοῦ 100 ἂν λήγῃ εἰς δύο μηδενικά, διὰ τοῦ 1000, ἂν εἰς τρία μηδενικὰ κ. ο. κ.».

Διότι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀριθμοῦ τινος διὰ 10 εἶναι τὸ τελευταῖον αὐτοῦ ψηφίον (§ 57). Ἑπομένως ἂν τοῦτο εἶναι 0 ἡ διαίρεσις διὰ 10 γίνεται ἀκριβῶς.

Ὁμοίως τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀριθμοῦ τινος διὰ 100 εἶναι ὁ ἀριθμὸς ὁ ἀποτελούμενος ὑπὸ τῶν δύο τελευταίων ψηφίων αὐτοῦ· ἑπομένως ἂν ταῦτα εἶναι μηδενικὰ ἡ διὰ τοῦ 100 διαίρεσις αὐτοῦ γίνεται ἀκριβῶς κ. ο. κ.

89) «Ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 2 ἢ 5, ἂν τὸ τελευταῖον αὐτοῦ ψηφίον εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ 2 ἢ 5».

Ἔστω ὁ ἀριθμὸς 458· οὗτος δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἄθροισμα 450+8. Ἀλλὰ ὁ ἀριθμὸς 450 εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 10 καὶ ἑπομένως διαιρετὸς διὰ τοῦ 5 ἢ 2 (§ 78), ὁ δὲ 8 διαιρεῖται διὰ τοῦ 2, οὐχὶ ὅμως διὰ τοῦ 5· ἄρα τὸ ἄθροισμα 450+8 ἤτοι ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς θὰ εἶναι διαιρετὸς μὲν διὰ τοῦ 2 (§ 73) οὐχὶ δὲ καὶ διὰ τοῦ 5.

Ὁμοίως ὁ ἀριθμὸς 675 εἶναι ἄθροισμα 670+5 ἤτοι ἀριθμῶν διαιρετῶν διὰ τοῦ 5, οὐχὶ ὅμως διὰ τοῦ 2· ἄρα εἶναι διαιρετὸς μὲν διὰ τοῦ 5 οὐχὶ δὲ καὶ διὰ 2.

Κατὰ ταῦτα διὰ νὰ εἶναι ἀριθμός τις διαιρετὸς διὰ 2, πρέπει νὰ λήγῃ εἰς ἓν τῶν ἑπομένων ψηφίων 0, 2, 4, 6, 8. Διὰ νὰ εἶναι δὲ διαιρετὸς διὰ 5 πρέπει νὰ λήγῃ εἰς 0 ἢ 5.

Οἱ ἀριθμοὶ οἱ διαιρούμενοι διὰ τοῦ 2 λέγονται *ἄρτιοι*, οἱ δὲ μὴ διαιρούμενοι λέγονται *περιττοί*.

Σημ. *Ἐὰν τὸ τελευταῖον ψηφίον ἀριθμοῦ τινος δὲν εἶναι διαιρετὸν διὰ 2 ἢ 5, τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ ψηφίου τούτου διὰ 2 ἢ 5 θὰ εἶναι καὶ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ὁλοκλήρου τοῦ ἀριθμοῦ διὰ 2 ἢ 5.*

90) «Ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 4 ἢ 25, ἂν τὰ δύο τελευταῖα ψηφία αὐτοῦ ἀποτελοῦσιν ἀριθμὸν διαιρετὸν διὰ τοῦ 4 ἢ 25».

Ἔστω ὁ ἀριθμὸς 3248· οὗτος δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἄθροισμα 3200+48. Ἀλλ' ὁ ἀριθμὸς 3200 εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 100 καὶ ἑπομένως εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 4 ἢ 25 (§ 78), ὁ δὲ 48 εἶναι μὲν διαιρετὸς διὰ τοῦ 4, οὐχὶ δὲ καὶ διὰ τοῦ 25· ἄρα τὸ ἄθροισμα 3200+48, ἤτοι ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς θὰ εἶναι διαιρετὸς μὲν διὰ τοῦ 4 (§ 73), οὐχὶ δὲ διὰ τοῦ 25.

Ὁμοίως ὁ ἀριθμὸς 4850 εἶναι ἄθροισμα 4800+50 εἶναι διαιρετὸν μὲν διὰ τοῦ 25, οὐχὶ δὲ καὶ διὰ τοῦ 4.

Κατὰ ταῦτα διὰ νὰ εἶναι ἀριθμός τις διαιρετὸς διὰ τοῦ 25, πρέπει νὰ λήγῃ ἢ εἰς 25 ἢ εἰς 50 ἢ εἰς 75 ἢ εἰς 00.

Σημ. *Ἐὰν τὰ δύο τελευταῖα ψηφία ἀριθμοῦ τινος ἀποτελοῦσιν ἀριθμὸν μὴ διαιρετὸν διὰ τοῦ 4 ἢ 25 ἀλλ' ἀφίνοντα ὑπόλοιπόν τι, τότε τὸ ὑπόλοιπον τοῦτο θὰ εἶναι καὶ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ὁλοκλήρου τοῦ ἀριθμοῦ διὰ 4 ἢ 25.*

91) «Ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 9 ἢ 3, ἂν τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων αὐτοῦ, ὡς ἁπλῶν μονάδων θεωρουμένων, εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ 9 ἢ 3».

Ἔστω ὁ ἀριθμὸς 873, τοῦ ὁποίου τὰ ψηφία ἔχουσιν ἄθροισμα 8+7+3=18 διαιρετὸν διὰ τοῦ 9 ἢ 3· λέγω ὅτι ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 9 ἢ 3, διότι ἡ δεκὰς περιέχει τὸ 9 ἢ πολ)σιον τοῦ 3 καὶ μίαν μονάδα, ἡ ἑκατοντὰς περιέχει τὸ 99, ὅπερ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 9 ἢ

3 καὶ μίαν μονάδα, ἡ χιλιὰς περιέχει τὸ 999 ἤτοι πολ)σιον τοῦ 9 ἢ 3 καὶ μίαν μονάδα ἀκόμη κ. ο. κ. Ἑπομένως ἂν ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς ἀναλυθῇ εἰς ἄθροισμα 800+70+3, ὁ μὲν 800 περιέχει 8 φορὰς τὸ 99 ἤτοι πολ)σιον τοῦ 9 ἢ 3 καὶ 8 μονάδας ἀκόμη, ὁ δὲ 70 περιέχει 7 φορὰς τὸ 9 ἤτοι πολ)σιον τοῦ 9 ἢ 3 καὶ 7 μονάδας ἀκόμη. Παρατηροῦμεν λοιπὸν ὅτι ὁ ἀριθμὸς 873 εἶναι ἄθροισμα πολ)σίων τινῶν τοῦ 9 ἢ 3 ἤτοι ἀριθμῶν διαιρετῶν διὰ τοῦ 9 ἢ 3 καὶ τῶν ψηφίων αὐτοῦ 8+7+3. Ἂν λοιπὸν τὸ ἄθροισμα 8+7+3 εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ 9 ἢ 3, εἶναι φανερὸν ὅτι καὶ ὁλόκληρος ὁ ἀριθμὸς θὰ εἶναι διαιρετὸς (§ 73) διὰ τοῦ 9 ἢ 3.

Σημ. 1. *Ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ δὲν εἶναι διαιρετὸν διὰ 9 ἢ 3, τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀθροίσματος τούτου διὰ 9 ἢ 3 εἶναι καὶ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ὁλοκλήρου τοῦ ἀριθμοῦ διὰ 9 ἢ 3.*

Σημ. 2. *Πρακτικῶς εὑρίσκομεν τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀριθμοῦ τινος διὰ 9 ὡς ἑξῆς· Προσθέτομεν τὰ ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ, καὶ ἂν μὲν τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι 9, τὸ ὑπόλοιπον θὰ εἶναι 0, ἂν δὲ μικρότερον τοῦ 9, τοῦτο θὰ εἶναι καὶ τὸ ὑπόλοιπον, ἂν τέλος εἶναι μεγαλύτερον τοῦ 9 ἐξακολουθοῦμεν προσθέτοντες τὰ ψηφία τούτου, μέχρις οὗ εὕρωμεν ἄθροισμα μονοψήφιον, ὅπερ εἶναι τὸ ζητούμενον ὑπόλοιπον.*

92) «Ἐὰν ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς διὰ δύο ἄλλων πρώτων πρὸς ἀλλήλους, θὰ εἶναι διαιρετὸς καὶ διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν».

Οὕτως ἂν ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 2 καὶ 3, θὰ εἶναι διαιρετὸς καὶ διὰ τοῦ 6· ἂν εἶναι διαιρετὸς διὰ 3 καὶ 4, θὰ διαιρῆται καὶ διὰ τοῦ 12· ἂν εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 3 καὶ 5 θὰ διαιρῆται καὶ διὰ τοῦ 15· ἂν εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 4 καὶ 9, θὰ διαιρῆται καὶ διὰ τοῦ 36 κτλ.

Ἐπὶ τῆς ἀνωτέρω Σημ. 2 στηρίζεται ἡ δοκιμὴ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ διὰ τοῦ 9.

93) *Δοκιμὴ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ διὰ τοῦ 9.*

Αὕτη γίνεται ὡς ἑξῆς·

Ἔστω ὁ πολλαπλασιασμὸς 4583×374=1590301.

2	5
1	1

Πρὸς δοκιμὴν αὐτοῦ γράφομεν δύο εὐθείας, γραμμὰς διασταυρουμένας καθέτως καὶ ἔπειτα προσθέτομεν τὰ ψηφία τοῦ πολλαπλασιαστέου 4+5+8+3=20 καὶ ἐξακολουθοῦμεν τοῦτο μέχρις οὗ εὕρωμεν ἄθροισμα μονοψήφιον 2+0=0, γράφομεν τὸ 2 εἰς τὴν ἄνω πρὸς τὰ ἀριστερὰ γωνίαν. Ὁμοίως ἐργαζόμεθα καὶ ἐπὶ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ 3+7+4=14 καὶ 1+4=5 καὶ γράφομεν τὸ 5 εἰς τὴν ἄνω πρὸς τὰ δεξιὰ γωνίαν. Πολλαπλασιάζομεν τὰ δύο εὑρεθέντα ψηφία 2×5=10 καὶ προσθέτομεν τὰ ψηφία τοῦ γινομένου τοῦ 1+0=1 καὶ γράφομεν τὸ 1 εἰς τὴν κάτω πρὸς τὰ δεξιὰ γωνίαν. Προσθέτομεν τέλος καὶ τὰ ψηφία τοῦ γινομένου 1+5+9+0+3+0+1=19 καὶ 1+9=10 καὶ 1+0=1, καὶ τὸ ψηφίον 1 γράφομεν εἰς τὴν κάτω πρὸς τὰ ἀριστερὰ γωνίαν. Ἐὰν τὰ δύο ψηφία τὰ γεγραμμένα εἰς τὰς κάτω γωνίας δὲν εἶναι τὰ αὐτὰ ἐγένετο λάθος εἰς τὴν πρᾶξιν· ἐὰν δὲ εἶναι τὰ αὐτὰ ἡ πρᾶξις ἐγένετο ἄνευ λάθους.

Σημ. *Ἡ δοκιμὴ δὲν εἶναι ἀσφαλής· διότι εἶναι δυνατὸν νὰ εὑρεθῶσι τὰ αὐτὰ ψηφία καὶ ὅμως νὰ ἐγένετο λάθος· ἀλλὰ τότε τὸ λάθος θὰ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 9.*

Ἀνάλυσις συνθέτων ἀριθμῶν εἰς πρώτους παράγοντας.

Γνωρίζομεν ἤδη (§ 84) ποίους ἀριθμοὺς καλοῦμεν πρώτους. Τοιοῦτο εἶναι ἄπειροι τὸ πλῆθος, ὡς 2, 3, 5, 7, 11, 17, 19, 23 κτλ.

94) Πᾶς σύνθετος ἀριθμὸς δύναται ν' ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον τοιούτων πρώτων ἀριθμῶν, οἵτινες καλοῦνται καὶ *πρῶτοι παράγοντες αὐτοῦ*.

Ἡ ἀνάλυσις αὕτη γίνεται ὡς ἑξῆς·

Ἔστω ὁ ἀριθμὸς 420· διαιροῦμεν αὐτὸν διὰ τοῦ 2 καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 210 ἤτοι $420=210\times2$. Τὸ πηλίκον 210 διαιροῦμεν πάλιν διὰ 2 καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 105 ἤτοι $210=2\times105$. Ἑπομένως ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς $420=2\times2\times105$.

Τὸ πηλίκον 105 δὲν διαιρεῖται πλέον διὰ 2, ἀλλὰ διαιρεῖται διὰ τοῦ ἀμέσως ἑπομένου πρώτου ἀριθμοῦ 3 καὶ δίδει πηλίκον 35 ἤτοι $105=3\times35$ καὶ ἑπομένως $420=2\times2\times3\times35$. Τὸ πηλίκον 35 δὲν διαιρεῖται πλέον διὰ τοῦ 3, διαιρεῖται ὅμως διὰ τοῦ ἀμέσως ἑπομένου πρώτου ἀριθμοῦ 5 καὶ δίδει πηλίκον τὸν πρῶτον ἀριθμὸν 7 ἤτοι $35=5\times7$ καὶ ἑπομένως ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς $420=2\times2\times3\times5\times7$, ἤτοι ἀνελύθη εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντων 2,2,3,5,7.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς·

$$\begin{array}{r|l} 420 & 2 \\ 210 & 2 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \text{καὶ } 420=2\times2\times3\times5\times7$$

Ἐντεῦθεν ἕπεται ὁ ἑξῆς κανών·

95) «Διὰ νὰ ἀναλύσωμεν σύνθετον ἀριθμὸν εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντων, διαιροῦμεν αὐτὸν διὰ τοῦ 2 (ἂν διαιρῆται)· τὸ εὑρισκόμενον πηλίκον διαιροῦμεν πάλιν διὰ τοῦ 2 καὶ ἐξακολουθοῦμεν οὕτω μέχρις οὗ εὕρωμεν πηλίκον μὴ διαιρούμενον διὰ τοῦ 2. Τὸ τελευταῖον τοῦτο πηλίκον διαιροῦμεν διὰ τοῦ 3 (ἂν διαιρῆται) καὶ τὸ νέον πηλίκον διαιροῦμεν πάλιν διὰ τοῦ 3 μέχρις οὗ εὕρωμεν πηλίκον μὴ διαιρούμενον διὰ τοῦ 3. Τὸ αὐτὸ πράττομεν καὶ διὰ τοὺς ἀμέσως ἑπομένους πρώτους ἀριθμοὺς μέχρις οὗ φθάσωμεν εἰς πηλίκον 1. Οἱ πρῶτοι ἀριθμοί, διὰ τῶν ὁποίων διαδοχικῶς διῃρέσαμεν, λαμβανόμενοι ὡς παράγοντες τοσάκις, ὅσας φο-

ρὰς διῃρέσαμεν δι᾽ ἑκάστου, ἀποτελοῦσι γινόμενον πολλῶν παραγόντων εἰς τοὺς ὁποίους ἀναλύεται ὁ δοθεὶς ἀριθμός».

Παραδείγματα.

525	3
175	5
35	5
7	7
1	

660	2
330	2
165	3
55	5
11	11
1	

$525=3\times5\times5\times7$

$660=2\times2\times3\times5\times11$

ΠΕΡΙ ΜΕΓΙΣΤΟΥ Κ. ΔΙΑΙΡΕΤΟΥ

Ὡρίσαμεν ἐν τῷ ἐδαφίῳ (§ 86) τί καλεῖται κ. διαιρέτης δύο ἢ περισσοτέρων δοθέντων ἀριθμῶν.

96) Ὁ μεγαλύτερος τῶν κ. διαιρετῶν δοθέντων ἀριθμῶν καλεῖται *μέγιστος κοινὸς διαιρέτης* αὐτῶν· π.χ. οἱ ἀριθμοὶ 24, 40 καὶ 16 ἔχουσι κ. διαιρέτας τοὺς ἀριθμοὺς 2,4,8. Ὁ 8 εἶναι ὁ Μ. Κ. Δ. τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

Ὁ Μ.Κ.Δ. δύο ἀριθμῶν εὑρίσκεται ὡς ἑξῆς·

97) «Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν Μ.Κ.Δ. δύο δοθέντων ἀριθμῶν, διαιροῦμεν τὸν μεγαλύτερον διὰ τοῦ μικροτέρου· καὶ ἂν μὲν ἡ διαίρεσις γίνηται ἀκριβῶς, τότε ὁ μικρότερος τῶν δύο ἀριθμῶν θὰ εἶναι ὁ Μ.Κ.Δ.αὐτῶν. Ἐὰν δὲ ἡ διαίρεσις ἀφήνῃ ὑπόλοιπόν τι, διαιροῦμεν δι᾽ αὐτοῦ τὸν μικρότερον τῶν δοθέντων ἀριθμῶν· καὶ ἂν ἡ νέα διαίρεσις γίνηται ἀκριβῶς, τὸ ὑπόλοιπον τῆς πρώτης διαιρέσεως εἶναι ὁ ζητούμενος Μ.Κ.Δ., ἐὰν δὲ καὶ ἡ διαίρεσις αὕτη ἀφήνει ὑπόλοιπόν τι, διαιροῦμεν δι᾽αὐτοῦ τὸ ὑπόλοιπον τῆς πρώτης διαιρέσεως· προχωροῦμεν δὲ οὕτω μέχρις οὗ φθάσωμεν εἰς διαίρεσιν τῆς ὁποίας τὸ ὑπόλοιπον εἶναι 0. Ὁ τελευταῖος διαιρέτης εἶναι ὁ Μ.Κ.Δ. τῶν δοθέντων ἀριθμῶν».

Παραδείγματα. Ἔστωσαν οἱ δύο ἀριθμοὶ 150 καὶ 50. Ἐπειδὴ ὁ 150 διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ 50, ἕπεται ὅτι ὁ 50 εἶναι ὁ Μ.Κ.Δ. αὐτῶν· ὅτι ὁ 50 εἶναι κ. διαιρέτης αὐτῶν εἶναι προφανές· εἶναι δὲ καὶ μέγιστος, διότι οὐδεὶς ἀριθμὸς μεγαλύτερος τοῦ 50 εἶναι δυνατὸν νὰ διαιρῇ τὸν 150 καὶ ἐπομένως νὰ εἶναι κ. διαιρέτης.

Ἔστωσαν ἤδη οἱ ἀριθμοὶ 1800 καὶ 270.

Κατὰ τὸν κανόνα διαιροῦμεν τὸν 1800 διὰ τοῦ 270 καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 6 καὶ ὑπόλοιπον 180. Διαιροῦμεν πάλιν τὸν 270 διὰ τοῦ 180 καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 1 καὶ ὑπόλοιπον 90. Τέλος διαιροῦμεν τὸν 180 διὰ τοῦ 90 καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 2 καὶ ὑπόλοιπον 0· ἄρα ὁ 90 εἶναι ὁ Μ.Κ.Δ. τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς·

	6	1	2	
1800	270	180	90	
180	90	0		

Ἐὰν οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ εἶναι περισσότεροι τῶν δύο, ὁ Μ.Κ.Δ. αὐτῶν εὑρίσκεται κατὰ τὸν ἑξῆς κανόνα.

98) *Κανὼν Α΄.* — «Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν Μ.Κ.Δ. πολλῶν ἀριθμῶν διαιροῦμεν πάντας τοὺς ἄλλους διὰ τοῦ μικροτέρου ἐξ αὐτῶν· καὶ ἂν μὲν πάντα τὰ ὑπόλοιπα εἶναι 0, ὁ ἀριθμὸς δι' οὗ διῃρέσαμεν εἶναι ὁ Μ.Κ.Δ. ἄλλως ἀντικαθιστῶμεν τοὺς ἀριθμοὺς τῶν ὁποίων τὰ ὑπόλοιπα δὲν εἶναι 0, διὰ τῶν ὑπολοίπων τούτων. Τὰ ὑπόλοιπα ταῦτα καὶ ὁ ἀριθμὸς δι' οὗ διῃρέσαμεν ἀποτελοῦσι νέαν σειρὰν ἀριθμῶν. Διαιροῦμεν πάλιν διὰ τοῦ μικροτέρου τούτων πάντας τοὺς ἄλλους· προχωροῦμεν δὲ οὕτω μέχρις οὗ φθάσωμεν εἰς σειρὰν ἀριθμῶν τοιούτων ὥστε ὁ μικρότερος ἐξ αὐτῶν νὰ διαιρῇ πάντας τοὺς ἄλλους.

Ὁ τελευταῖος οὗτος διαιρέτης εἶναι ὁ Μ.Κ.Δ. τῶν δοθέντων ἀριθμῶν»·

Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ 1800, 560, 960, 1200. Διαιροῦμεν πάντας τοὺς ἄλλους διὰ τοῦ μικροτέρου ἐξ αὐτῶν 560 καὶ ἀντικαθιστῶντες αὐτοὺς διὰ τῶν ἀντιστοίχων ὑπολοίπων λαμβάνομεν τὴν ἑξῆς σειρὰν ἀριθμῶν.

120, 560, 400, 80.

Διαιροῦμεν πάλιν πάντας τοὺς ἄλλους διὰ τοῦ μικροτέρου ἐξ αὐτῶν ἤτοι τοῦ 80 καὶ ἀντικαθιστῶντες αὐτοὺς διὰ τῶν ὑπολοίπων λαμβάνομεν τοὺς ἀριθμοὺς 40 καὶ 80. Ἐκ τούτων ὁ 40 διαιρεῖ ἀκριβῶς τὸν 80 καὶ ἐπομένως οὗτος εἶναι ὁ Μ.Κ.Δ. τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς·

1800	560	960	1200
120	560	400	80
40	0	0	80
40	0	0	0

Ὁ Μ.Κ.Δ. δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν εὑρίσκεται καὶ κατὰ τὸν ἑξῆς κανόνα.

99) *Κανὼν Β΄.* «Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν Μ.Κ.Δ. δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν, ἀναλύομεν αὐτοὺς εἰς τοὺς πρώτους αὐτῶν παράγοντας καὶ ἔπειτα σχηματίζομεν ἓν γινόμενον ἐξ ὅλων τῶν κοινῶν παραγόντων τῶν δοθέντων ἀριθμῶν, λαμβάνοντες ἕκαστον κοινὸν παράγοντα τοσάκις, ὅσας φορὰς οὗτος εὑρίσκεται ὡς κοινὸς παράγων εἰς τοὺς δοθέντας ἀριθμούς. Τὸ οὕτω σχηματιζόμενον γινόμενον εἶναι ὁ Μ.Κ.Δ. τῶν δοθέντων ἀριθμῶν».

Παράδειγμα. Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ 80, 280, 60. Ἀναλύομεν αὐτοὺς εἰς τοὺς πρώτους παράγοντας.

$$80=2\times2\times2\times2\times5,$$
$$280=2\times2\times2\times5\times7,$$
$$60=2\times2\times3\times5.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι εἰς τοὺς δοθέντας ἀριθμοὺς εὑρίσκονται ὡς κοινοὶ παράγοντες ὁ μὲν 2 δύο φοράς, ὁ δὲ 5 ἅπαξ· ἑπομένως τὸ γινόμενον $2\times2\times5=20$ εἶναι ὁ Μ.Κ.Δ. τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

Σημ... *Ἐὰν οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ διαιρεθῶσι διὰ τοῦ Μ.Κ.Δ. αὐτῶν, τὰ προκύπτοντα πηλίκα εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.*

ΠΕΡΙ ΕΛΑΧΙΣΤΟΥ ΚΟΙΝΟΥ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΟΥ

Ὡρίσαμεν (§ 83) τί καλεῖται πολλαπλάσιον ἀριθμοῦ τινος.

100) *Κοινὸν πολλαπλάσιον* δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν καλεῖται πᾶς ἀριθμὸς ὅστις διαιρεῖται ἀκριβῶς δι᾿ἑκάστου αὐτῶν.

Π.δ.χ. ὁ ἀριθμὸς 60 εἶναι Κ.Π. τῶν ἀριθμῶν 5, 12, 20 ὡς διαιρούμενος ἀκριβῶς δι᾿ἑκάστου αὐτῶν. Εἶναι φανερὸν ὅτι καὶ πάντα τὰ πολλαπλάσια τοῦ 60 θὰ εἶναι Κ.Π. τῶν δοθέντων ἀριθμῶν (§ 78). Ὅθεν οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ ἔχουσιν ἄπειρα πολλαπλάσια.

101) Τὸ μικρότερον ἐξ ὅλων τῶν κοινῶν πολλαπλασίων δοθέντων ἀριθμῶν καλεῖται *ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον* αὐτῶν.

Τὸ Ε.Κ.Π. πολλῶν ἀριθμῶν εὑρίσκεται κατὰ τοὺς ἑξῆς κανόνας.

102) *Κανὼν Α'*. «Δοκιμάζομεν ἂν ὁ μεγαλύτερος τῶν δοθέντων ἀριθμῶν διαιρῆται ἀκριβῶς δι᾿ἑκάστου τῶν λοιπῶν· καὶ ἂν μὲν τοῦτο συμβαίνῃ τότε ὁ μεγαλύτερος οὗτος ἀριθμὸς εἶναι τὸ Ε. Κ. Π. αὐτῶν, εἰ δὲ μή, δοκιμάζομεν τὸ διπλάσιον ἢ τριπλάσιον κτλ. τούτου, μέχρις οὗ φθάσωμεν εἰς πολλαπλάσιόν τι αὐτοῦ διαιρετὸν δι᾿ ἑκάστου τῶν λοιπῶν· τοῦτο θὰ εἶναι τὸ Ε. Κ. Π. τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.»

Παραδείγματα. Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ 120, 20, 12, 8.

Ὁ 120 διαιρεῖται ἀκριβῶς δι᾿ἑκάστου τῶν ἄλλων· ἄρα οὗτος εἶναι τὸ Ε Κ.Π. αὐτῶν. Καὶ ὅτι μὲν τὸ 120 εἶναι Κ. πολλαπλάσιον εἶναι προφανές, διότι εἶναι διαιρετὸς δι᾿ ὅλων τῶν λοιπῶν. Εἶναι δὲ καὶ ἐλάχιστον διότι οὐδεὶς ἀριθμὸς μικρότερος τοῦ 120 δύναται νὰ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 120 καὶ ἑπομένως νὰ εἶναι Κ. πολλαπλάσιον τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ 4. 15. 20, 12.

Ἐνταῦθα παρατηροῦμεν ὅτι οὔτε ὁ 20, οὔτε τὸ διπλάσιον αὐτοῦ (40) διαιροῦνται διὰ πάντων τῶν ἄλλων. Τὸ τριπλάσιον ὅμως τοῦ 20 ἤτοι τὸ 60 εἶναι διαιρετὸν διὰ πάντων τῶν ἄλλων καὶ ἑπομένως εἶναι τὸ Ε.Κ.Π. τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

103) *Κανὼν Βος.* «Ἵνα εὕρωμεν τὸ Ε.Κ.Π. δοθέντων ἀριθμῶν ἀναλύομεν ἕκαστον ἐξ αὐτῶν εἰς τοὺς πρώτους παράγοντας καὶ ἔπειτα σχη-

ματίζομεν ἓν γινόμενον λαμβάνοντες τοὺς πρώτους παράγοντας τοὺς ὁποίους περιέχουσιν οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ ἕκαστον τοσάκις, ὅσας περισσοτέρας φορὰς περιέχεται οὗτος ὡς παράγων εἴς τινα τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

Τὸ οὕτω σχηματιζόμενον γινόμενον εἶναι τὸ Ε. Κ. Π. τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ 60, 80, 75.

Ἀναλύομεν αὐτοὺς εἰς τοὺς πρώτους

$$60=2\times2\times3\times5$$
$$80=2\times2\times2\times2\times5$$
$$75=3\times5\times5.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι ὁ παράγων 2 περιέχεται περισσοτέρας φορὰς ὡς παράγων ἤτοι τετράκις εἰς τὸν 80, ὁ δὲ 3 ἅπαξ εἰς τοὺς ἀριθμοὺς 60 καὶ 75· καὶ ὁ 5 δὶς εἰς τὸν 75. Ἑπομένως τὸ Ε.Κ.Π. τῶν δοθέντων ἀριθμῶν θὰ εἶναι τὸ ἑξῆς γινόμενον·

$$2\times2\times2\times2\times3\times5\times5=1200.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΡΟΣ ΑΣΚΗΣΙΝ

1) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ ἑπόμεναι πράξεις κατὰ τὸν συντομώτερον τρόπον, λαμβανομένων ὑπ' ὄψιν καὶ τῶν ἰδιοτήτων (§§ 64—82).

α') $145-(15+20+37)$
β') $(18+7+20)-17$
γ') $(17+3+15)\times9$
δ') $(8+7)\times(4+6)$
ε') $(258-147)\times8$
στ') $(28+42+35):7$.

2) Ποῖοι ἐκ τῶν ἀριθμῶν 248, 375, 1458, 7825, 9476, 10575, 5400, 8432, 17650, 537, 2850, 35000, 18745, 891, 1530 εἶναι διαιρετοὶ δι' ἑνὸς ἐκ τῶν ἑξῆς ἀριθμῶν 2, 4, 5, 3, 9, 25, 10, 100, 1000.

3) Ποῖοι ἐκ τῶν ἀριθμῶν 552, 840, 750, 1820, 852, 2490, 4542, 7164, 5832, 7410, 2835 εἶναι διαιρετοὶ δι' ἑνὸς τῶν ἑξῆς ἀριθμῶν 6, 12, 15, 18, 45.

4) Εἶναι δυνατὸν ν' ἀποτελέσωμεν ποσὸν 2575 δραχ. μόνον ἐκ 5δράχμων, ἢ ἐξ 25δράχμων, ἢ ἐκ 10δράχμων ἢ ἐξ 100δράχμων ;

5) Βαρέλιόν τι περιέχει 3450 ὀκ. οἴνου παλαιοῦ. Εἶναι δυνατὸν νὰ μεταγγισθῇ οὗτος ἐξ ὁλοκλήρου εἰς φιάλας χωρητικότητος 2 ὀκ. τελείως πληρουμένας ;

6) Ὁ αὐτὸς οἶνος εἶναι δυνατὸν νὰ μεταγγισθῇ εἰς φιάλας χωρητικότητος 2 ὀκ. ἢ εἰς φιάλας τῶν 3 ὀκ. ;

7) 3252 ῥινόμακτρα δύνανται νὰ χωρισθῶσιν εἰς δωδεκάδας χωρὶς νὰ περισσεύσῃ κανέν ;

8) Εἶναι δυνατὸν ν' ἀποτελεσθῇ ἐκ τριλέπτων γραμματοσήμων α') τὸ ποσὸν τῶν 345 λεπτῶν, β') τὸ ποσὸν τῶν 845 λεπτῶν;

9) Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ πρῶτοι ἀριθμοὶ οἱ περιλαμβανόμενοι ἀπὸ τοῦ 1 μέχρι τοῦ 50.

10) Νὰ ἀναλυθῶσιν εἰς τοὺς πρώτους αὐτῶν παράγοντας οἱ ἑξῆς ἀριθμοί : 360, 480, 840, 105, 420, 780, 973, 385, 2600, 30800.

11) Νὰ εὑρεθῇ ὁ Μ. Κ. Δ. καὶ κατὰ τοὺς δύο κανόνας τῶν ἑξῆς ἀριθμῶν·

α'.) 250, 150
β'.) 945, 345
γ'.) 238, 75
δ'.) 3600, 480, 520
ε'.) 4200, 1500, 720, 840.

12) Νὰ εὑρεθῇ τὸ Ε. Κ. Π. καὶ κατὰ τοὺς δύο κανόνας τῶν ἑξῆς ἀριθμῶν. α'.) 80, 40
β'.) 150, 90
γ'.) 270, 60
δ'.) 183, 17.

13) Ποία εἶναι ἡ ἐλαχίστη ὁλικὴ ἀξία τριλέπτων γραμματοσήμων, ἅτινα δυνάμεθα νὰ πληρώσωμεν ἀκριβῶς μὲ πεντάλεπτα κερμάτια ;
(ἀπ. 15 λεπτ. ἢ 5 γραμ.).

14) Ἕκαστον πορτοκάλιον πωλεῖται πρὸς 12 λεπτά· ποία εἶναι ἡ ἐλαχίστη ἀξία πορτοκαλίων, ἅτινα δυνάμεθα νὰ πληρώσωμεν μὲ δεκάλεπτα κερμάτια ; (ἀπ. 60 λεπτ. ἢ 5 πορτοκ.)

15) Ἕκαστον ᾠὸν πωλεῖται πρὸς 16 λεπτά, ποία εἶναι ἡ ἐλαχίστη ἀξία ᾠῶν, τὰ ὁποῖα δυνάμεθα νὰ πληρώσωμεν ἀκριβῶς ἔχοντες μόνον εἰκοσάλεπτα ; (ἀπ. 80 λεπτὰ ἢ 5 ᾠά.)

Προβλήματα διὰ τὴν ἐπανάληψιν ἐν τῇ Β᾽ τάξει.

1) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ ἑπόμεναι πράξεις κατὰ τὸν συντομώτερον τρόπον, λαμβανομένων ὑπ' ὄψιν καὶ τῶν ἰδιοτήτων (§§ 64—81).

α'.) $(25+17+30)-(15+28)$
β'.) $(19+15+7)-12$
γ'.) $48-(7+8+12)$
δ'.) $(14+8+17)\times 9$
ε'.) $(15+9+17)\times(8+4)$
στ'.) $(85-15) : 7.$
ζ'. $(45\times 8\times 7) : 15$

2) Πῶς πρέπει νὰ μεταβάλωμεν τὸ τελευταῖον ψηφίον τοῦ ἀριθμοῦ 3457, ὥστε νὰ καταστῇ οὗτος διαιρετὸς α') διὰ τοῦ 2, β') διὰ τοῦ 3, γ') διὰ τοῦ 4, δ') διὰ τοῦ 5, ε') διὰ τοῦ 9, στ') διὰ τοῦ 25 ;

3) Πῶς πρέπει νὰ μεταβάλωμεν τὸ τελευταῖον ψηφίον ἢ τὰ δύο τελευταῖα ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ 7583, ὥστε νὰ καταστῇ οὗτος διαιρετὸς α') διὰ τοῦ 6, β') διὰ τοῦ 12, γ') διὰ τοῦ 15 ;

4) Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ οἱ περιλαμβανόμενοι μεταξὺ τοῦ 500 καὶ 600.
α'.) Οἱ διαιρετοὶ διὰ τοῦ 2,
β'.) Οἱ διαιρετοὶ διὰ τοῦ 3.
γ'.) Οἱ διαιρετοὶ διὰ τοῦ 4,
δ'.) Οἱ διαιρετοὶ διὰ τοῦ 5,
ε'.) Οἱ διαιρετοὶ διὰ τοῦ 6,
στ'.) Οἱ διαιρετοὶ διὰ τοῦ 12,
ζ'.) Οἱ διαιρετοὶ διὰ τοῦ 15.

5) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ ὑπόλοιπα τῆς διαιρέσεως, χωρὶς νὰ ἐκτελεσθῇ αὕτη, τῶν ἀριθμῶν.

5873, 75847, 58342.

α') διὰ τοῦ 2, β') διὰ τοῦ 3, γ') διὰ τοῦ 4, δ') διὰ τοῦ 5, ε') διὰ τοῦ 9 καὶ στ') διὰ τοῦ 25.

6) Λόχος τις ἀποτελεῖται ἀπὸ 240 ἄνδρας. Δύνανται οὗτοι νὰ καταταχθῶσι κατὰ τὰς στρατιωτικὰς ἀσκήσεις εἰς τετράδας ἀκριβῶς ἢ νὰ ἀποτελέσωσι διμοιρίας ἐξ 25 ἀνδρῶν, καὶ ἂν τοῦτο δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ γίνῃ ἀκριβῶς, πόσοι θὰ περισσεύσωσι;

7) Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ πρῶτοι ἀριθμοὶ οἱ περιλαμβανόμενοι ἀπὸ τοῦ 1 μέχρι τοῦ 100.

8) Πόσας φορὰς ὁ ἀριθμὸς 2520 περιέχει ὡς παράγοντα α') τὸν 2, β') τὸν 3.

9) Νὰ ἀναλυθῶσιν εἰς τοὺς πρώτους παράγοντας οἱ ἑξῆς ἀριθμοί·

7500, 3450, 1260, 5600

10) Νὰ εὑρεθῇ, ἂν οἱ ἑξῆς ἀριθμοὶ 860, 1200, 3600, 560 εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· καὶ ἂν δὲν εἶναι διὰ τίνος ἀριθμοῦ πρέπει νὰ διαιρεθῶσι, διὰ νὰ προκύψωσιν ὡς πηλίκα ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους;

11) Νὰ εὑρεθῇ τὸ Ε. Κ. Π. τῶν ἑξῆς ἀριθμῶν 480, 800, 150, 240 καὶ κατὰ τοὺς δύο κανόνας.

12) Ὀπωροπώλης τις πρόκειται ν' ἀποστείλῃ εἰς τρεῖς διαφόρους πόλεις λεμόνια· καὶ εἰς μὲν τὴν Αην 2500, εἰς τὴν Βην 3600 καὶ εἰς τὴν Γην 4800. Ἀλλὰ θέλει νὰ τοποθετήσῃ ταῦτα εἰς κιβώτια ὅσον τὸ δυνατὸν ὀλιγαριθμότερα καὶ τοιαῦτα ὥστε νὰ δύνανται νὰ περιλαμβάνωσιν ἴσον ἀριθμὸν λεμονίων· πρὸς τοῦτο ὅμως πρέπει νὰ τοποθετήσῃ ὅσον τὸ δυνατὸν περισσότερα λεμόνια εἰς ἕκαστον. Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμὸς λεμονίων, ἅτινα θὰ περιλάβῃ ἕκαστον κιβώτιον; (ἀπ. 100 λεμόνια).

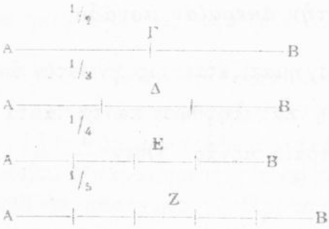
13) Τρία ἀτμόπλοια ἀναχωροῦσι συγχρόνως, ἤτοι τὴν 1ην Ἰανουαρίου ἐκ Πειραιῶς διὰ Μασσαλίαν. Τὸ α') ἐξ αὐτῶν ἐπαναλαμβάνει τὸ ταξείδιον κατὰ 16 ἡμέρας, τὸ β') κατὰ 20 ἡμέρας καὶ τὸ γ') κατὰ 24 ἡμέρας. Μετὰ πόσας ἡμέρας ἀπὸ τῆς πρώτης Ἰανουαρίου θὰ συμβῇ ν' ἀναχωρήσουν ἐκ νέου συγχρόνως ἐκ Πειραιῶς διὰ Μασσαλίαν;

(ἀπ. 120 ἡμέρας).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'.

ΚΛΑΣΜΑΤΑ

Ὁρισμοί. Ἓν μῆλον ὁλόκληρον παρίσταται διὰ τῆς μονάδος 1· ἐὰν κόψωμεν αὐτὸ εἰς δύο ἴσα μέρη, ἕκαστον ἐξ αὐτῶν καλεῖται *ἓν δεύτερον* ἢ *ἥμισυ* τοῦ μήλου καὶ παρίσταται διὰ τοῦ $\frac{1}{2}$ ἐὰν δὲ κόψωμεν αὐτὸ εἰς τρία ἴσα μέρη, ἕκαστον ἐξ αὐτῶν καλεῖται *ἓν τρίτον* τοῦ μήλου καὶ παρίσταται διὰ τοῦ $\frac{1}{3}$ Καθ' ὅμοιον τρόπον λαμβάνομεν καὶ τὸ *ἓν τέταρτον* ($^1/_4$) καὶ τὸ *ἓν πέμπτον* ($^1/_5$) κλπ. τοῦ μήλου.



Ὡσαύτως ἂν παραστήσωμεν διὰ τῆς 1 μίαν ὁλόκληρον γραμμὴν ΑΒ καὶ χωρίσωμεν ταύτην εἰς δύο ἢ τρία ἢ εἰς τέσσαρα κτλ. ἴσα μέρη λαμβάνομεν τὸ ἥμισυ ($^1/_2$) ἢ τὸ ἓν τρίτον ($^1/_3$) ἢ τὸ ἓν τέταρτον ($^1/_4$) κτλ. τῆς γραμμῆς ταύτης.

104) Ἡ μονὰς 1, ἥτις παριστᾷ ὁλόκληρον τὸ μῆλον ἢ τὴν γραμμὴν ΑΒ καλεῖται *ἀκεραία μονάς*, τὰ δὲ $^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_4$, $^1/_5$ κτλ., δι' ὧν παρίσταται ἕκαστον τῶν ἴσων μερῶν, εἰς τὰ ὁποῖα μοιράζομεν τὸ μῆλον ἢ τὴν γραμμήν, καλοῦνται *κλασματικαὶ μονάδες*.

Ἐντεῦθεν ἕπεται ὁ ἑξῆς ὁρισμός·

105) «Κλασματικὴ μονὰς καλεῖται ἓν τῶν ἴσων μερῶν, εἰς τὰ ὁποῖα μοιράζομεν τὴν ἀκεραίαν μονάδα».

Ἐὰν τὴν γραμμὴν ΑΒ διαιρέσωμεν εἰς 4 ἴσα μέρη καὶ λάβωμεν ἐξ αὐτῶν τὰ τρία ἀποτελεῖται νέον μέρος ταύτης ΑΕ, ὅπερ καλεῖται *τρία τέταρτα* καὶ παρίσταται διὰ τοῦ $\frac{3}{4}$.

Καθ' ὅμοιον τρόπον εὑρίσκομεν καὶ ἄλλα μέρη τῆς γραμμῆς ὡς τὰ *τέσσαρα πέμπτα* $\left(\frac{4}{5}\right)$· τὰ *δύο ἕβδομα* $\left(\frac{2}{7}\right)$ κτλ., τὰ $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{2}{7}$ κτλ. καλοῦνται *κλασματικοὶ ἀριθμοί*, καὶ γίνονται ὡς παρατηροῦμεν διὰ τῆς ἐπαναλήψεως μιᾶς κλασματικῆς μονάδος· ὡς π.δ.χ. τὸ $\frac{3}{4}$ ἐκ τῆς κλασματικῆς μονάδος $\frac{1}{4}$ ἐπαναλαμβανομένης τρὶς καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

Ἐντεῦθεν ἕπεται ὁ ἑξῆς ὁρισμός·

106 «Κλάσμα καλεῖται ὁ ἀριθμὸς ὁ προκύπτων ἐκ κλασματικῆς τινος μονάδος διὰ τῆς ἐπαναλήψεως».

107) Ὁ κλασματικὸς ἀριθμὸς γράφεται διὰ δύο ἀκεραίων ἀριθμῶν, τοῦ ἑνὸς γραφομένου κάτωθεν τοῦ ἄλλου καὶ χωριζομένων δι' ὁριζοντίας γραμμῆς. Καὶ ὁ μὲν ἄνωθεν τῆς γραμμῆς καλεῖται *ἀριθμητὴς* καὶ ἀπαγ-

γέλλεται ὡς ἀριθμητικὸν ἀπόλυτον, ὁ δὲ ἕτερος *παρονομαστὴς* καὶ ἀπαγγέλλεται ὡς ἀριθμητικὸν τακτικόν π.δ.χ. $\frac{5}{8}$ ἀπαγγέλλεται *πέντε ὄγδοα*, καὶ ὁ μὲν 5 εἶναι ἀριθμητής, ὁ δὲ 8 παρονομαστής. Καὶ ὁ μὲν παρονομαστὴς δεικνύει εἰς πόσα ἴσα μέρη μοιράζομεν τὴν μονάδα, ὁ δὲ ἀριθμητὴς πόσα ἐκ τῶν μερῶν τούτων ἐλάβομεν· π.δ.χ. $\frac{5}{8}$· ὁ παρονομαστὴς δεικνύει ὅτι ἐμοιράσαμεν τὴν ἀκεραίαν μονάδα εἰς 8 ἴσα μέρη, ὁ δὲ ἀριθμητὴς σημαίνει ὅτι ἐκ τῶν 8 τούτων μερῶν ἐλάβομεν τὰ 5.

Ὁ ἀριθμητὴς καὶ ὁ παρονομαστὴς καλοῦνται ὁμοῦ *ὅροι τοῦ κλάσματος*.

Σύγκρισις τῶν κλασμάτων πρὸς τὴν ἀκεραίαν μονάδα.

Ἂς θεωρήσωμεν τὸ κλάσμα $\frac{4}{4}$· τοῦτο σχηματίζεται ὡς γνωστὸν ἂν διαιρεθῇ ἡ ἀκεραία μονὰς εἰς 4 ἴσα μέρη καὶ ληφθῶσι πάντα ταῦτα· ἀλλ' οὕτω προφανῶς προκύπτει ὅλη ἡ ἀκεραία μονάς. Ὅθεν $\frac{4}{4} = 1$.

Ὁμοίως $\frac{5}{5} = 1$ καὶ $\frac{10}{10} = 1$ κ. ο. κ.

Ὅθεν ἕπεται

108) «Πᾶν κλάσμα ἔχον τοὺς δύο ὅρους ἴσους εἶναι ἴσον πρὸς τὴν ἀκεραίαν μονάδα».

Ἂς θεωρήσωμεν τὸ κλάσμα $\frac{7}{12}$· τοῦτο σχηματίζεται, ἂν διαιρεθῇ ἡ ἀκεραία μονὰς εἰς 12 ἴσα μέρη καὶ ληφθῶσιν ἐξ αὐτῶν μόνον τὰ 7, ἤτοι ὀλιγώτερα ἐκείνων, ἅτινα περιέχει ἡ 1· ἄρα εἶναι μικρότερον τῆς 1, ἤτοι $\frac{7}{12} < 1$.

Ὁμοίως καὶ $\frac{8}{15} < 1$ καὶ $\frac{14}{19} < 1$ κ. ο. κ.

Ἐντεῦθεν ἕπεται·

109) «Πᾶν κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν μικρότερον τοῦ παρονομαστοῦ εἶναι μικρότερον τῆς ἀκεραίας μονάδος».

Ἂς θεωρήσωμεν τέλος τὸ κλάσμα $\frac{7}{5}$· τοῦτο σχηματίζεται, ἂν διαιρέσωμεν τὴν ἀκεραίαν μονάδα εἰς 5 ἴσα μέρη καὶ ἔπειτα λάβωμεν τὸ ἓν ἐξ αὐτῶν 7 φοράς· ἀλλ' ἡ ἀκεραία μονὰς γίνεται καὶ αὕτη ἐκ τοῦ ἑνὸς μέρους $\left(\frac{1}{5}\right)$ ἐπαναλαμβανομένου πεντάκις· ὅθεν τὸ κλάσμα $\frac{7}{5}$ εἶναι μεγαλύτερον τῆς 1, ἤτοι $\frac{7}{5} > 1$ — Ὁμοίως $\frac{18}{7} > 1$ καὶ $\frac{17}{4} > 1$ κ. τ. λ.

Ἐντεῦθεν ἕπεται·

110) «Πᾶν κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν μεγαλύτερον τοῦ παρονομαστοῦ εἶναι μεγαλύτερον τῆς ἀκεραίας μονάδος».

Τροπὴ ἀκεραίων ἀριθμῶν εἰς ἰσοδύναμα κλάσματα.

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι θέλομεν νὰ τρέψωμεν τὸν ἀκέραιον 8 εἰς ἰσοδύναμον κλάσμα τοῦ ὁποίου παρονομαστὴς νὰ εἶναι ὁ 5.—Γνωρίζομεν ὅτι (§ 108) μία ἀκεραία μονὰς ἰσοῦται πρὸς $\frac{5}{5}$, ἑπομένως δύο ἀκέραιαι μονάδες θὰ ἔχωσι δύο φορὰς $\frac{5}{5}$ ἢ $\frac{10}{5}$ καὶ αἱ 8 ἀκέραιοι μονάδες θὰ ἔχωσιν ὀκτὼ φορὰς $\frac{5}{5}$ ἤτοι $\frac{40}{5}$

Ὁμοίως ἂν ἔχωμεν 12 δρχ. καὶ θέλωμεν νὰ τρέψωμεν αὐτὰς εἰς δέκατα (δεκάλεπτα) δηλ. εἰς κλάσμα τοῦ ὁποίου παρονομαστὴς εἶναι ὁ 10, θὰ σκεφθῶμεν ὡς ἑξῆς· Μία δραχμὴ ἔχει $\frac{10}{10}$ ἢ 10 δεκάλεπτα, ἑπομένως αἱ 12 δραχμαὶ θὰ ἔχωσι 12 φορὰς 10 δεκάλεπτα ἤτοι $\frac{120}{10}$.

Ἐκ τούτων συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα·

111) «Διὰ νὰ τρέψωμεν ἀκέραιον ἀριθμὸν εἰς ἰσοδύναμον κλάσμα, τοῦ ὁποίου ὁ παρονομαστὴς εἶναι δεδομένος, πολ)ζομεν τὸν ἀκέραιον ἐπὶ τὸν δοθέντα παρονομαστὴν καὶ τὸ μὲν γινόμενον θέτομεν ὡς ἀριθμητήν, παρονομαστὴν δὲ τὸν δοθέντα» π.δ.χ. ὁ 15 νὰ τραπῇ εἰς ὄγδοα· πολ)ζομεν $15\times8=120$ καὶ τὸν μὲν 120 θέτομεν ὡς ἀριθμητήν, τὸν δὲ 8 ὡς παρονομαστὴν ἤτοι $15=\frac{15\times8}{8}=\frac{720}{8}$.

Ὁμοίως 48 ἐπὶ δέκατα πέμπτα, θὰ ἔχωμεν

$$48=\frac{48\times15}{15}=\frac{720}{15}$$

Τροπὴ μικτοῦ εἰς ἰσοδύναμον κλάσμα.

112) Μικτὸς ἀριθμὸς καλεῖται ὁ συγκείμενος ἐξ ἀκεραίου καὶ κλάσματος ὡς π. δ. χ. $8\ \frac{3}{4}$

Πολλάκις εἶναι ἀνάγκη νὰ τρέψωμεν τὸν μικτὸν εἰς ἰσοδύναμον κλάσμα· τοῦτο δὲ γίνεται ὡς ἑξῆς·

Ἔστω ὁ μικτὸς ἀριθμὸς $9\ \frac{4}{5}$· ἵνα τρέψωμεν τοῦτον εἰς ἰσοδύναμον κλάσμα, τρέπομεν πρῶτον τὸν ἀκέραιον 9 εἰς πέμπτα (§ 116) ἤτοι $9=\frac{45}{5}$· οὕτω ὁ μικτὸς $9\ \frac{4}{5}$ ἀποτελεῖται ἀπὸ $\frac{45}{5}$ καὶ $\frac{4}{5}$ ἤτοι θὰ περιέχῃ ἐν ὅλῳ $\frac{49}{55}$ ἤτοι θὰ ἔχωμεν

$$9\ \frac{4}{5}=\frac{9\times5+4}{5}=\frac{49}{5}$$

Ἐκ τούτων ἕπεται ὁ ἑξῆς κανών:

113) «Διὰ νὰ τρέψωμεν μικτὸν εἰς ἰσοδύναμον κλάσμα, πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀκέραιον ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος καὶ προσθέ-

τομεν καὶ τὸν ἀριθμητήν, τὸν δὲ προκύπτοντα ἀριθμὸν θέτομεν ὡς ἀριθμητήν, παρονομαστὴν δὲ τὸν τοῦ κλάσματος.»

π. δ. χ. $18\frac{4}{7}$ νὰ τραπῇ εἰς ἰσοδύναμον κλάσμα· $18\times 7=126$ καὶ $126+4=130$.

$$\text{Ὅθεν } 18\frac{4}{7}=\frac{130}{7}.$$

Ἐξαγωγὴ τῶν ἀκεραίων μονάδων

Ἐὰν κλάσμα τι εἶναι μεγαλείτερον τῆς ἀκεραίας μονάδος, θὰ περιέχῃ μίαν ἢ περισσοτέραν ἀκεραίας μονάδας. Δυνάμεθα νὰ ἐξαγάγωμεν τὰς περιεχομένας τοιαύτας ἔν τινι κλάσματι ὡς ἑξῆς·

Ἔστω τὸ κλάσμα $\frac{29}{8}$. Γνωρίζομεν ὅτι $\frac{8}{8}=1$ (§ 108)· ἐὰν ἐξαγάγωμεν $\frac{8}{8}$ ἢ 1 ἀπὸ τὰ $\frac{29}{8}$ ὑπολείπονται $\frac{21}{8}$ ἐὰν πάλιν ἐκ τούτων ἐξαγάγωμεν $\frac{8}{8}$, ἢ 1 ὑπολείπονται $\frac{13}{8}$ καὶ ἂν τέλος ἐκ τούτων ἐξαγάγωμεν $\frac{8}{8}$ ἢ 1 ὑπολείπονται $\frac{5}{8}$, ἅτινα δὲν περιέχουσι πλέον ἀκεραίαν μονάδα. Ἔχομεν λοιπὸν ἐξαγάγει τόσας ἀκεραίας μονάδας, ὅσας φορὰς δύναται ν' ἀφαιρεθῇ ὁ παρονομαστὴς 8 ἀπὸ τὸν ἀριθμητὴν 29· τουτέστιν ὅσον εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμητοῦ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ· ἐπίσης παρατηροῦμεν ὅτι εἰς τὸ μένον κλάσμα ἀριθμητὴς εἶναι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ταύτης.

Ἐκ τούτων συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα:

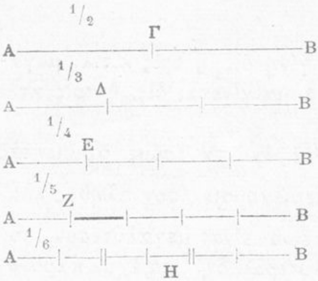
114. «Διὰ νὰ ἐξαγάγωμεν τὰς ἀκεραίας μονάδας κλάσματός τινος διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητὴν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ, καὶ τὸ μὲν πηλίκον εἶναι αἱ ἀκέραιαι μονάδες τοῦ κλάσματος, τὸ δὲ ὑπόλοιπον εἶναι ὁ ἀριθμητὴς τοῦ μένοντος κλάσματος, τοῦ ὁποίου παρονομαστὴς εἶναι ὁ αὐτός.»

$$\text{π. δ. χ, } \frac{48}{5}=9\frac{8}{5}\text{. ὁμοίως } \frac{136}{14}=9\frac{10}{14}.$$

Σημ. *Ἐὰν ὁ ἀριθμητὴς διαιρῆται ἀκριβῶς διὰ τοῦ παρονομαστοῦ, τὸ κλάσμα τρέπεται εἰς ἀκέραιον ὡς π. δ. χ.* $\frac{40}{8}=5$, $\frac{200}{5}=40$.

Σύγκρισις τῶν κλασματικῶν μονάδων πρὸς ἀλλήλας.

Ἄς θεωρήσωμεν τὴν γραμμὴν Α Β καὶ ἄς διαιρέσωμεν ταύτην εἰς δύο, τρία, τέσσαρα κ. τ. λ. ἴσα μέρη· οὕτω λαμβάνομεν τὰς κλασματικὰς μονάδας $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, κ. τ. λ.



Ἐὰν τώρα παραβάλωμεν πρὸς ἄλληλα τὰ μέρη ΑΓ, ΑΔ, ΑΕ, ΑΖ, κ. τ. λ., ἤτοι τὰς κλασματικὰς μονάδας $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, κ. τ. λ. παρατηροῦμεν ἀμέσως ὅτι τὸ $\frac{1}{3}$ εἶνε μικρότερον τοῦ $\frac{1}{2}$ καὶ τὸ $\frac{1}{4}$ εἶναι μικρότερον τοῦ $\frac{1}{3}$· ὁμοίως βλέπομεν ὅτι τὸ $\frac{1}{4}$ εἶναι δύο φορὰς μικρότερον τοῦ $\frac{1}{2}$ διότι τὸ $\frac{1}{2}$ ἀποτελεῖται ἐκ δύο μερῶν ἴσων πρὸς τὸ $\frac{1}{4}$· ὡσαύτως δυνάμεθα νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι τὸ $\frac{1}{6}$ εἶναι τρεῖς φορὰς μικρότερον τοῦ $\frac{1}{2}$ κτλ.

Ἐκ τούτων ἕπεται

115) «Ἡ κλασματικὴ μονὰς γίνεται δίς, τρὶς κτλ. μικροτέρα, ὅταν ὁ παρονομαστὴς γίνῃ δίς, τρίς, κτλ. μεγαλύτερος, καὶ τἀνάπαλιν.»

Κλάσματα ὁμώνυμα καὶ ἑτερώνυμα.

116) Τὰ κλάσματα, ἅτινα γίνονται ἐκ τῆς αὐτῆς κλασματικῆς μονάδος καὶ ἔχουσιν ἑπομένως τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, καλοῦνται *ὁμώνυμα*· τὰ δὲ ἐκ διαφόρων κλασματικῶν μονάδων γινόμενα καὶ ἔχοντα ἑπομένως διαφόρους παρονομαστὰς καλοῦνται *ἑτερώνυμα*· π.δ.χ. τὰ κλάσματα $\frac{7}{8}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{3}{8}$ εἶναι ὁμώνυμα, τὰ δὲ $\frac{5}{8}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{5}{12}$ εἶναι ἑτερώνυμα.

Ἰδιότητες κλασμάτων.

Ἂς θεωρήσωμεν κατ' ἀρχὰς δύο ὁμώνυμα κλάσματα, ὡς $\frac{5}{18}$ καὶ $\frac{7}{18}$. Ἐπειδὴ ταῦτα σχηματίζονται ἐκ τῆς αὐτῆς κλασματικῆς μονάδος $\frac{1}{18}$, ἕπεται ὅτι ἐκεῖνο ἐξ αὐτῶν θὰ εἶναι τὸ μεγαλύτερον, ὅπερ ἔχει περισσοτέρας τοιαύτας μονάδας, δηλ. τὸ ἔχον μεγαλύτερον ἀριθμητήν, ἤτοι $\frac{5}{18} < \frac{7}{18}$· ἐὰν δὲ θεωρήσωμεν καὶ τὸ κλάσμα $\frac{10}{}$, τοῦτο ὡς ἔχον δύο φορὰς περισσοτέρας κλασματικὰς μονάδας ἀπὸ τὸ $\frac{5}{18}$ εἶναι δύο φορὰς μεγαλύτερον τοῦ $\frac{5}{18}$ καὶ τἀνάπαλιν τὸ $\frac{5}{18}$ θὰ εἶναι δύο φορὰς μικρότερον τοῦ $\frac{10}{18}$. Καθ' ὅμοιον τρόπον βλέπομεν ὅτι τὸ $\frac{15}{18}$ εἶναι τρεῖς φορὰς μεγαλύτερον τοῦ $\frac{5}{18}$, ὡς περιέχον τρεῖς φορὰς περισσοτέρας κλασματικὰς μονάδας ἀπὸ τὸ $\frac{5}{18}$, καὶ τἀνάπαλιν τὸ $\frac{5}{18}$ εἶναι τρεῖς φορὰς μικρότερον τοῦ $\frac{15}{18}$ κτλ.

Ἐντεῦθεν ἕπεται ἡ ἑξῆς ἰδιότης·

117) «Ἐὰν ὁ ἀριθμητὴς τοῦ κλάσματος γίνῃ δὶς ἢ τρὶς κ.τ.λ. μεγαλύτερος ἢ μικρότερος καὶ ὁλόκληρον τὸ κλάσμα γίνεται δὶς ἢ τρὶς κτλ. μεγαλύτερον ἢ μικρότερον».

Ἂς θεωρήσωμεν δύο ἑτερώνυμα κλάσματα ἔχοντα ἴσους ἀριθμητὰς π.χ. $\frac{8}{5}, \frac{8}{7}$. Ἐπειδὴ τὰ κλάσματα ταῦτα περιέχουσιν ἴσον πλῆθος κλασματικῶν μονάδων (ἤτοι 8), ἕπεται ὅτι ἐκεῖνο εἶναι μεγαλύτερον, τοῦ ὁποίου αἱ κλασματικαὶ μονάδες εἶναι μεγαλύτεραι, δηλ. τὸ ἔχον παρονομαστὴν μικρότερον· ἄρα $\frac{8}{5} > \frac{8}{7}$. Ἐὰν δὲ θεωρήσωμεν καὶ τὸ κλάσμα $\frac{8}{10}$, ἐπειδὴ ἡ κλασματικὴ αὐτοῦ μονὰς $\frac{1}{10}$ εἶναι δὶς μικροτέρα τοῦ $\frac{1}{5}$ (§ 111), ἕπεται ὅτι τὸ κλάσμα $\frac{8}{16}$ εἶναι δὶς μικρότερον τοῦ $\frac{1}{5}$ καὶ τἀνάπαλιν τὸ $\frac{8}{5}$ εἶναι δὶς μεγαλύτερον τοῦ $\frac{8}{10}$. Καθ' ὅμοιον τρόπον παρατηροῦμεν ὅτι τὸ $\frac{8}{15}$ εἶναι τρὶς μικρότερον τοῦ $\frac{8}{5}$, καὶ τἀνάπαλιν τὸ $\frac{8}{5}$ εἶναι τρὶς μεγαλείτερον $\frac{8}{15}$. κ.ο.κ.

Ἐντεῦθεν ἕπεται ἡ ἑξῆς ἰδιότης·

118) «Ἐὰν ὁ παρονομαστὴς κλάσματος γίνῃ δὶς ἢ τρὶς κτλ. μεγαλύτερος, τὸ κλάσμα γίνεται δὶς ἢ τρὶς κτλ. μικρότερον· ἐὰν δὲ ὁ παρονομαστὴς γίνῃ δὶς ἢ τρὶς κτλ. μικρότερος, καὶ τὸ κλάσμα γίνεται δὶς ἢ τρὶς κ.τ.λ. μεγαλύτερον».

Ἂς θεωρήσωμεν τέλος ἓν κλάσμα οἱονδήποτε τὸ $\frac{3}{4}$· ἐὰν πολ)σωμεν τὸν ἀριθμητὴν αὐτοῦ ἐπὶ 2, τὸ προκῦπτον κλάσμα $\frac{3\times2}{4}$ ἢ $\frac{6}{4}$ εἶναι δὶς μεγαλύτερον τοῦ δοθέντος (§ 113), ἐὰν δὲ πολ)σωμεν τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος $\frac{6}{4}$ ἐπὶ 2, τὸ προκῦπτον κλάσμα $\frac{3\times2}{4\times2}$ ἢ $\frac{6}{8}$ εἶναι δὶς μικρότερον τοῦ $\frac{6}{4}$ (§ 114)· ἑπομένως τὸ κλάσμα $\frac{6}{8}$ θὰ ἔχῃ τὴν αὐτὴν ἀξίαν μὲ τὸ κλάσμα $\frac{3}{4}$ ἤτοι $\frac{3}{4} = \frac{3\times2}{4\times2} = \frac{4}{6}$.

Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ κλάσμα $\frac{6}{8}$ προκύπτει ἐκ τοῦ δοθέντος ἐὰν πολ)σωμεν τοὺς δύο ὅρους αὐτοῦ ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 2· καὶ τἀνάπαλιν τὸ $\frac{3}{4}$ προκύπτει ἐκ τοῦ $\frac{6}{8}$, ἐὰν διαιρέσωμεν καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ τελευταίου διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ (ἤτοι τοῦ 2). Ἐντεῦθεν ἕπεται ἡ ἑξῆς ἰδιότης.

119) «Ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος δὲν μεταβάλλεται, ἂν πολ)σθῶσιν ἢ διαιρεθῶσι μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ἀμφότεροι οἱ ὅροι τοῦ κλάσματος».

Ἀπλοποίησις.

120) *Ἁπλοποίησις* κλάσματος καλεῖται ἡ πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας

λαμβάνομεν ἐκ τοῦ δοθέντος ἕτερον ἰσοδύναμον κλάσμα μὲ ὅρους μικροτέρους.

Ἡ ἁπλοποίησις τῶν κλασμάτων στηρίζεται ἐπὶ τῆς ἰδιότητος (§115) καὶ γίνεται διὰ τῆς διαιρέσεως τῶν δύο ὅρων τοῦ κλάσματος διά τινος κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν.

Ἔστω π. δ. χ. τὸ κλάσμα $\frac{15}{20}$· ἐὰν διαιρέσωμεν καὶ τοὺς δύο ὅρους αὐτοῦ διὰ τοῦ κ. διαιρέτου αὐτῶν, ἤτοι διὰ τοῦ 5, λαμβάνομεν τὸ ἰσοδύναμον κλάσμα $\frac{3}{4}$, ὅπερ ἔχει ὅρους μικροτέρους, ἤτοι εἶναι ἁπλούστερον τοῦ δοθέντος.

121) Κλάσμα, τοῦ ὁποίου οἱ δύο ὅροι εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, δὲν ἁπλοποιεῖται· τὰ τοιαῦτα κλάσματα καλοῦνται *ἀνάγωγα*, ὡς π. δ. χ. $\frac{7}{8}$, $\frac{5}{9}$ κ.τ.λ.

Πᾶν κλάσμα ἁπλοποιούμενον δύναται νὰ καταστῇ ἀνάγωγον, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τοὺς δύο ὅρους αὐτοῦ διὰ τοῦ Μ. Κ. Δ. αὐτῶν (§99 Σημ.).

Διὰ τὴν εὐχερῆ ἁπλοποίησιν τῶν κλασμάτων δέον νὰ ἔχωμεν ὑπ' ὄψιν τοὺς χαρακτῆρας τῆς διαιρετότητος (§§ 88—92).

Παραδείγματα. Νὰ ἁπλοποιηθῶσι τὰ κλάσματα $\frac{135}{400}$ (διὰ τοῦ 5), $\frac{27}{30}$ (διὰ τοῦ 9), $\frac{3}{10}$ ἀνάγωγον, $\frac{240}{800}$ (διὰ τοῦ Μ. Κ. Δ. τῶν ὅρων αὐτοῦ), $\frac{7}{20}$ ἀνάγωγον.

Τροπὴ τῶν ἑτερωνύμων κλασμάτων εἰς ὁμώνυμα.

Ἂς θεωρήσωμεν κατ' ἀρχὰς δύο ἑτερώνυμα (§ 112) κλάσματα $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{7}$. Ἐὰν πολ)σωμεν τοὺς δύο ὅρους τοῦ πρώτου κλάσματος ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦ δευτέρου, λαμβάνομεν τὸ κλάσμα $\frac{3\times7}{4\times7}=\frac{21}{28}$, ὅπερ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ $\frac{3}{4}$ (§ 119). Ἐὰν δὲ πολ)σωμεν τοὺς δύο ὅρους τοῦ δευτέρου κλάσματος ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν 4 τοῦ πρώτου, λαμβάνομεν τὸ κλάσμα $\frac{5\times4}{7\times4}=\frac{20}{28}$, ὅπερ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ $\frac{5}{7}$. Οὕτως ἀντὶ τῶν δοθέντων κλασμάτων $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{7}$ ἐλάβομεν ἰσοδύναμα κλάσματα $\frac{21}{28}$, $\frac{20}{28}$, τὰ ὁποῖα εἶναι ὁμώνυμα.

Ἂς θεωρήσωμεν ἤδη περισσότερα τῶν δύο ἑτερώνυμα κλάσματα, τὰ ἑξῆς· $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{5}{6}$.

Πολ)ζομεν τοὺς δύο ὅρους τοῦ πρώτου κλάσματος ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν λοιπῶν παρονομαστῶν $8\times5\times6=240$ καὶ εὑρίσκομεν κλάσμα ἰσοδύναμον πρὸς αὐτὸ τὸ $\frac{3\times240}{4\times240}$ ἢ $\frac{720}{960}$. Ὁμοίως πολ)ζομεν τοὺς δύο ὅρους τοῦ δευτέρου κλάσματος ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν λοιπῶν παρονομαστῶν

$4\times5\times6=120$ καὶ λαμβάνομεν τὸ ἰσοδύναμον πρὸς αὐτὸ κλάσμα $\frac{5\times120}{8\times120}$ ἢ $\frac{600}{960}$. Πολ)ζομεν ἔπειτα τοὺς δύο ὅρους τοῦ τρίτου κλάσματος ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν λοιπῶν παρονομαστῶν $4\times8\times6=192$ καὶ λαμβάνομεν τὸ ἰσοδύναμον πρὸς αὐτὸ κλάσμα $\frac{2\times192}{5\times192}$ ἢ $\frac{384}{960}$.

Τέλος πολ(ζομεν τοὺς δύο ὅρους τοῦ τελευταίου κλάσματος ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν λοιπῶν παρονομαστῶν $4\times8\times5=160$ καὶ λαμβάνομεν τὸ ἰσοδύναμον πρὸς αὐτὸ κλάσμα $\frac{5\times160}{6\times160}$ ἢ $\frac{800}{960}$.

Οὕτω τὰ δοθέντα κλάσματα τρέπονται εἰς τὰ ἑξῆς ὁμώνυμα·

$$\frac{720}{960},\quad \frac{600}{960},\quad \frac{384}{960},\quad \frac{800}{960}.$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγεται ὁ ἑξῆς κανών.

122) «Διὰ νὰ τρέψωμεν ἑτερώνυμα κλάσματα εἰς ὁμώνυμα πολ)ζομεν τοὺς δύο ὅρους ἑκάστου κλάσματος ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν λοιπῶν παρονομαστῶν.

Κοινὸς παρονομαστὴς ὅλων τῶν κλασμάτων θὰ εἶναι τὸ γινόμενον ὅλων τῶν παρονομαστῶν.

Παράδειγμα.— Ἔστωσαν τὰ ἑξῆς ἑτερώνυμα κλάσμα $\frac{5}{8}, \frac{2}{7}, \frac{3}{4}$.

Τρέπομεν ταῦτα εἰς ὁμώνυμα ἐφαρμόζοντες τὸν ἀνωτέρω κανόνα.

$$\frac{5\times(7\times4)}{8\times(7\times4)},\quad \frac{2\times(8\times4)}{7\times(8\times4)},\quad \frac{3\times(8\times7)}{4\times(8\times7)}$$

ἤτοι προκύπτουσι τὰ ἑξῆς κλάσματα. $\frac{140}{224}, \frac{64}{224}, \frac{168}{224}$.

123) Εἴδομεν ἀνωτέρω ὅτι ὁ κ. παρονομαστὴς τῶν ὁμωνύμων κλασμάτων εἶναι τὸ γινόμενον ὅλων τῶν παρονομαστῶν, ἤτοι ἓν κ. πολ)σιον αὐτῶν. Πολλάκις ὅμως τὸ Ε. Κ. Π. τῶν παρονομαστῶν εἶναι πολὺ μικρότερον τοῦ γινομένου αὐτῶν· ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει ἡ τροπὴ τῶν ἑτερωνύμων κλασμάτων εἰς ὁμώνυμα γίνεται εὐκολώτερον διὰ τοῦ Ε. Κ. Π. τῶν παρονομαστῶν ὡς ἑξῆς·

Ἔστωσαν π. δ. χ. τὰ ἑτερώνυμα κλάσματα $\frac{2}{5}, \frac{3}{8}, \frac{7}{10}$. Οἱ παρονομασταὶ 5, 8, 10 ἔχουσιν Ε. Κ. Π. τὸ 40 (§§ 102, 103). Ἐὰν τώρα πολ)σωμεν τοὺς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος ἐπὶ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ Ε. Κ.Π. διὰ τοῦ παρονομαστοῦ 5, ἤτοι ἐπὶ 8, λαμβάνομεν τὸ ἰσοδύναμον πρὸς αὐτὸ κλάσμα $\frac{16}{40}$. Ὁμοίως ἐὰν πολ)σωμεν τοὺς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος $\frac{3}{8}$ ἐπὶ τὸ πηλίκον $40:8$, ἤτοι ἐπὶ 5, λαμβάνομεν τὸ ἰσοδύναμον πρὸς αὐτὸ κλάσμα $\frac{15}{40}$. Ἐὰν τέλος πολ)σωμεν τοὺς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος $\frac{7}{10}$ ἐπὶ τὸ πηλίκον $40:10$, ἤτοι ἐπὶ 4, λαμβάνομεν τὸ ἰσοδύναμον πρὸς αὐτὸ κλάσμα $\frac{28}{40}$.

Οὕτω τὰ δοθέντα κλάσματα τρέπονται εἰς τὰ ἑξῆς ὁμώνυμα·

$$\frac{16}{40},\quad \frac{15}{40},\quad \frac{28}{40}.$$

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται συντόμως ὡς ἑξῆς.

$$\frac{\overbrace{2}^{8}}{5},\quad \frac{\overbrace{5}^{5}}{8},\quad \frac{\overbrace{7}^{4}}{10}$$

40 Ε. Κ. Π.

$$\frac{16}{40},\quad \frac{25}{40},\quad \frac{28}{40}$$

Ἐκ τῶν προηγουμένων συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα·

124) «Διὰ νὰ τρέψωμεν τὰ ἑτερώνυμα κλάσματα εἰς ὁμώνυμα, εὑρίσκομεν πρῶτον τὸ Ε. Κ. Π. τῶν παρονομαστῶν καὶ πολ/ζομεν ἔπειτα τοὺς δύο ὅρους ἑκάστου κλάσματος ἐπὶ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ Ε. Κ. Π. διὰ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ κλάσματος».

Παράδειγμα $\frac{\overbrace{8}^{4}}{15},\quad \frac{\overbrace{3}^{15}}{4},\quad \frac{\overbrace{9}^{3}}{20},\quad \frac{\overbrace{7}^{5}}{12}.$ ἤτοι $\frac{32}{60},\quad \frac{45}{60},\quad \frac{27}{60},\quad \frac{35}{60},$

Σημ. — *Πρὶν ἢ προβῶμεν εἰς τὴν τροπὴν τῶν ἑτερωνύμων κλασμάτων εἰς ὁμώνυμα, πρὸς εὐκολίαν καθιστῶμεν πρότερον διὰ τῆς ἁπλοποιήσεως τὰ δοθέντα κλάσματα ἀνάγωγα.*

Ἀσκήσεις ἐπὶ τῶν κλασμάτων

α΄) Ἀπὸ μνήμης.

1) Ἐὰν μοιράσωμεν ἓν μῆλον εἰς 10 ἴσα μέρη καὶ λάβωμεν ἐκ τούτων τὰ 7, ποῖον κλάσμα τοῦ μήλου λαμβάνομεν;

2) Τὸ 1λεπτον, τὸ 2λεπτον, τὸ 5λεπτον, τὸ 10λεπτον, τὸ 20λεπτον ποίας κλασματικὰς μονάδας τῆς δραχμῆς παριστῶσιν;

3) Ποῖα κλάσματα τῆς δραχμῆς ἀποτελοῦσι α΄) τὰ 7 πεντάλεπτα, β΄) τὰ 27 μονόλεπτα, γ΄) τὰ 23 δίλεπτα, δ΄) Τὰ 2 εἰκοσάλεπτα. ε΄) τὰ 3 δεκάλεπτα;

4) Νὰ τραπῶσι α΄) ὁ ἀκέραιος 8 εἰς κλάσμα μὲ παρονομαστὴν τὸν 12, ἤτοι εἰς δωδέκατα, β΄) ὁ 15 εἰς τέταρτα, γ΄) ὁ 20 εἰς ὄγδοα, δ΄) ὁ 25 εἰς πέμπτα, ε΄) ὁ 32 εἰς ἔνατα.

5) Ἐὰν τραπῶσιν αἱ 8 δρχ. εἰς δεκάλεπτα, ποῖον κλάσμα τῆς δραχμῆς λαμβάνομεν, ποῖον ἂν τραπῶσιν εἰς 5λεπτα, ποῖον ἂν τραπῶσιν εἰς 20λεπτα;

6) Νὰ τραπῶσιν εἰς ἰσοδύναμα κλάσματα οἱ ἑξῆς μικτοί. $8\frac{1}{2}$, $9\frac{2}{3}$, $7\frac{5}{8}$, $11\frac{3}{4}$, $10\frac{1}{8}$, $7\frac{5}{6}$, $12\frac{1}{6}$, $18\frac{1}{4}$, $22\frac{1}{5}$, $12\frac{3}{7}$, $15\frac{11}{12}$, $8\frac{7}{13}$.

7) Νὰ ἐξαχθῶσιν αἱ περιεχόμεναι ἀκέραιαι μονάδες εἰς τὰ ἑξῆς κλάσματα.

$$\frac{13}{2},\quad \frac{20}{3},\quad \frac{17}{3},\quad \frac{22}{7},\quad \frac{26}{9},\quad \frac{88}{12},\quad \frac{65}{12},\quad \frac{46}{13},\quad \frac{101}{8},\quad \frac{111}{\ },\quad \frac{148}{\ }$$

8) Νὰ ἁπλοποιηθῶσι τὰ ἑξῆς κλάσματα· $\frac{8}{12}$, $\frac{6}{15}$, $\frac{36}{60}$, $\frac{40}{100}$, $\frac{70}{110}$, $\frac{}{150}$ $\frac{21}{30}$, $\frac{48}{72}$, $\frac{25}{400}$, $\frac{18}{81}$, $\frac{12}{40}$, $\frac{36}{84}$, $\frac{25}{275}$, $\frac{27}{360}$, $\frac{35}{42}$, $\frac{26}{39}$.

9) Νὰ τραπῶσιν εἰς ὁμώνυμα τὰ ἑξῆς κλάσματα·

$\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$ $\qquad$ $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$ $\qquad$ $\frac{3}{8}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ $\qquad$ $\frac{4}{9}$, $\frac{2}{3}$ $\qquad$ $\frac{5}{8}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{16}$

$\frac{3}{5}$, $\frac{7}{10}$ $\qquad$ $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{5}$ $\qquad$ $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{4}$.

β') Γραπτῶς.

1) Νὰ τραπῶσιν οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ α') 785 εἰς εἰκοστὰ ἕβδομα, β') 1423 εἰς τριακοστὰ τέταρτα, γ') 543 εἰς πεντηκοστὰ ὄγδοα, δ') ὁ 248 εἰς ἑκατοστὰ ἑξηκοστὰ πέμπτα, ε') ὁ 538 εἰς διακοσιοστὰ τεσσαρακοστά.

2) Νὰ τραπῶσιν εἰς ἰσοδύναμα κλάσματα οἱ ἑξῆς μικτοί· $783\frac{4}{15}$, $583\frac{15}{26}$, $1245\frac{35}{48}$, $2458\frac{7}{9}$, $3542\frac{5}{8}$, $4573\frac{5}{12}$, $743\frac{18}{47}$, $452\frac{132}{785}$.

3) Νὰ ἐξαχθῶσιν αἱ ἀκέραιαι μονάδες τῶν ἑξῆς κλασμάτων·

$\frac{245}{8}$, $\frac{378}{25}$, $\frac{1500}{125}$, $\frac{349}{48}$, $\frac{7834}{23}$, $\frac{58347}{153}$.

4) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ ἰσοδύναμα ἀνάγωγα κλάσματα διὰ διαδοχικῶν ἁπλοποιήσεων ἐκ τῶν ἑξῆς· $\frac{350}{875}$, $\frac{6380}{9360}$, $\frac{5400}{7320}$, $\frac{945}{1485}$, $\frac{420}{504}$.

5) Νὰ εὑρεθῶσιν τὰ ἀνάγωγα κλάσματα διὰ μιᾶς μόνης ἁπλοποιήσεως (§ 99 σημ.) ἐκ τῶν ἑξῆς·

$\frac{16}{72}$, $\frac{24}{100}$, $\frac{90}{315}$, $\frac{108}{900}$, $\frac{111}{189}$, $\frac{112}{196}$, $\frac{25}{300}$, $\frac{56}{70}$,

$\frac{40}{280}$, $\frac{91}{546}$, $\frac{248}{720}$, $\frac{144}{792}$, $\frac{49}{161}$, $\frac{65}{247}$, $\frac{272}{527}$, $\frac{209}{342}$.

6) Νὰ καταταχθῶσι τὰ ἑπόμενα κλάσματα κατ' αὔξουσαν σειρὰν μεγέθους $\frac{7}{15}$, $\frac{2}{15}$, $\frac{9}{15}$, $\frac{18}{15}$, $\frac{4}{15}$, $\frac{8}{15}$, $\frac{14}{15}$, $\frac{6}{15}$, $\frac{20}{15}$, $\frac{27}{15}$, καὶ νὰ εὑρεθῇ τὸ κλάσμα τὸ δὶς μεγαλύτερον τοῦ $\frac{2}{15}$, τὸ τρὶς μεγαλύτερον αὐτοῦ, τὸ τετράκις μεγαλύτερον κτλ.

7) Ὁμοίως νὰ καταταχθῶσιν τὰ κλάσματα $\frac{18}{7}$, $\frac{18}{4}$, $\frac{18}{2}$, $\frac{18}{9}$, $\frac{18}{20}$, $\frac{18}{5}$, $\frac{18}{15}$, $\frac{18}{6}$, $\frac{18}{11}$ καὶ νὰ εὑρεθῇ τὸ δὶς μικρότερον τοῦ $\frac{18}{2}$, τὸ τρὶς μικρότερον αὐτοῦ, τὸ τετράκις μικρότερον κτλ.

8) Ὁμοίως νὰ καταταχθῶσιν τὰ ἑξῆς κλάσματα

α') $\frac{7}{10}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{17}{12}$. β') $\frac{5}{9}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{5}{7}$. γ') $\frac{5}{12}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{19}{60}$, $\frac{4}{15}$, $\frac{7}{10}$. δ') $\frac{7}{15}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{13}{20}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{6}$.

ΠΡΑΞΕΙΣ ΤΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Πρόσθεσις.

125) Ὁ ὁρισμὸς τῆς προσθέσεως τοῦ (ἐδ. § 15) ἰσχύει καὶ ἐνταῦθα μὲ τὴν διαφορὰν μόνον ὅτι λέγοντες μονάδας ἐννοοῦμεν καὶ τὰς ἀκεραίας καὶ τὰς κλασματικάς.

Ὀνομάζομεν καὶ ἐνταῦθα τοὺς πρὸς πρόσθεσιν δοθέντας ἀριθμοὺς *προσθετέους*, τὸ δ' ἐκ τῆς προσθέσεως προκῦπτον ἐξαγόμενον *ἄθροισμα.*

Εἰς τὴν πρόσθεσιν τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν διακρίνομεν δύο περιπτώσεις:

Α') Ὅταν πάντες οἱ προσθετέοι εἶναι κλάσματα.

Β') Ὅταν τινὲς ἐξ αὐτῶν ἢ πάντες εἶναι μικτοί.

126) Α' Ἔστωσαν πρὸς πρόσθεσιν κατ' ἀρχὰς κλάσματα ὁμώνυμα τὰ ἑξῆς· $\frac{7 \text{ δρχ.}}{10}$ (δεκάλεπτα), $\frac{3 \text{ δρχ.}}{10}$, $\frac{5 \text{ δρχ.}}{10}$, $\frac{8 \text{ δρχ.}}{10}$

Εἶναι φανερὸν ὅτι $7^{\text{δεκάλ.}}+3^{\text{δεκάλ.}}+5^{\text{δεκάλ.}}+8^{\text{δεκάλ.}}=23^{\text{δεκάλ.}}$ ἢ ὅπερ ταὐτὸ $\frac{7 \text{ δρχ.}}{10}+\frac{3 \text{ δρχ.}}{10}+\frac{5 \text{ δρχ.}}{10}+\frac{8 \text{ δρχ.}}{10}=\frac{23 \text{ δρχ.}}{10}$. Ἐντεῦθεν ἕπεται·

127) «Τὸ ἄθροισμα δύο ἢ περισσοτέρων ὁμωνύμων κλασμάτων εἶναι κλάσμα, ἔχον ἀριθμητὴν μὲν τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμητῶν, παρονομαστὴν δὲ τὸν κοινὸν παρονομαστὴν τῶν δοθέντων κλασμάτων.»

Ἔστωσαν πρὸς πρόσθεσιν τὰ ἑτερώνυμα κλάσματα $\frac{3}{5}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{9}{10}$, $\frac{3}{4}$.

Ἐπειδὴ τὰ κλάσματα ταῦτα γίνονται ἐκ διαφόρων κλασματικῶν μονάδων, δὲν δυνάμεθα νὰ προσθέσωμεν ταῦτα ὡς ἔχουσιν, ἀλλ' εἶναι ἀνάγκη νὰ τρέψωμεν πρῶτον ταῦτα εἰς ὁμώνυμα καὶ ἔπειτα νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν πρόσθεσιν, ἤτοι $\frac{3}{5}+\frac{7}{8}+\frac{9}{10}+\frac{3}{4}=\frac{24}{40}+\frac{25}{40}+\frac{36}{40}+\frac{30}{40}=\frac{125}{40}=3\frac{1}{8}$

128) Β'. Κατὰ τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν τινὲς τῶν προσθετέων ἢ πάντες εἶναι μικτοί, δηλαδὴ ἀθροίσματα ἀκεραίου καὶ κλάσματος, προσθέτομεν χωριστὰ τοὺς ἀκεραίους καὶ χωριστὰ τὰ κλάσματα καὶ ἔπειτα ἑνώνομεν τὰ δύο ἀθροίσματα.

Παραδείγματα.

$25+8\frac{4}{5}+7\frac{3}{4}+9\frac{4}{7}+18\frac{5}{8}+\frac{7}{20}$. Τὸ μὲν ἄθροισμα τῶν ἀκεραίων εἶναι $25+8+7+9+18=67$. τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν κλασμάτων εἶναι·

$$\frac{4}{5}+\frac{3}{4}+\frac{4}{7}+\frac{5}{8}+\frac{7}{20}=$$

$$\frac{224}{280}+\frac{210}{280}+\frac{160}{280}+\frac{175}{280}+\frac{98}{280}=\frac{867}{280}=3\frac{27}{280}.$$

Ἑπομένως τὸ ζητούμενον ἄθροισμα εἶναι.

$$25+8\frac{4}{5}+7\frac{3}{4}+9\frac{4}{7}+18\frac{5}{8}+\frac{7}{20}=67+3\frac{27}{280}=70\frac{27}{280}.$$

Σημ. *Δυνάμεθα νὰ τρέψωμεν τοὺς μικτοὺς εἰς ἰσοδύναμα κλάσματα* *καὶ ἔπειτα νὰ προσθέσωμεν. Ἐν τῇ πράξει ὅμως προτιμῶμεν ὡς εὐκολώτερον νὰ προσθέτωμεν χωριστὰ τοὺς ἀκεραίους καὶ χωριστὰ τὰ κλάσματα.*

Ἀφαίρεσις.

129) Ὁ ὁρισμὸς τῆς ἀφαιρέσεως τοῦ ἐδαφ. (23) ἰσχύει καὶ ὅταν οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ εἶναι οἱοιδήποτε (ἀκέραιοι ἢ κλασματικοί).

Ἔχομεν καὶ ἐνταῦθα τὸν ἀριθμόν, ὅστις θὰ ἐλαττωθῇ, καὶ καλεῖται *μειωτέος*, τὸν ἀριθμὸν τὸν δεικνύοντα κατὰ πόσον θὰ ἐλαττωθῇ ὁ μειωτέος καὶ ὅστις καλεῖται *ἀφαιρετέος*, τὸ δ' ἐξαγόμενον τῆς πράξεως *ὑπόλοιπον* ἢ *διαφορά*.

Εἰς τὴν ἀφαίρεσιν διακρίνομεν τρεῖς περιπτώσεις·

Α'.) Ὅταν ὁ μειωτέος καὶ ὁ ἀφαιρετέος εἶναι ἀμφότεροι κλάσματα·

Β'.) Ὅταν ἀμφότεροι εἶναι μικτοί·

Γ'.) Ὅταν εἶναι οἱοιδήποτε ἀριθμοί.

130) Α'. Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι θέλομεν ν' ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ $\frac{12}{20}$ δρχ. (12 πενταλέπτων) τὰ $\frac{7}{20}$ δρχ. ἤτοι $\frac{12}{20}$ δρχ., $-\frac{7}{20}$ δρχ. Εἶναι φανερὸν ὅτι 12 πεντάλ. — 7 πεντ. = 5 πεντάλ. ἢ ὅπερ ταὐτὸ $\frac{12}{20}$ δρχ. — $\frac{7}{20}$ δρχ. $= \frac{5}{20}$ δρχ.

Ἐντεῦθεν ἕπεται ὅτι

131) «Ἡ διαφορὰ δύο ὁμωνύμων κλασμάτων εἶναι κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν μὲν τὴν διαφορὰν τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ μειωτέου, παρονομαστὴν δὲ τὸν παρονομαστὴν τῶν δοθέντων κλασμάτων». π. δ. χ $\frac{15}{23} - \frac{8}{23} = \frac{15-8}{23} = \frac{7}{23}$.

Ἄς ὑποθέσωμεν ἤδη ὅτι θέλομεν ν' ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ $\frac{5}{8}$ τὸ $\frac{2}{9}$

Ἐπειδὴ ταῦτα σχηματίζονται ἐκ διαφόρων κλασματικῶν μονάδων, δὲν δυνάμεθα ν' ἀφαιρέσωμεν ταῦτα ὡς ἔχουσιν, ἀλλ' εἶναι ἀνάγκη νὰ τρέψωμεν πρῶτον ταῦτα εἰς ὁμώνυμα καὶ ἔπειτα νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν ἀφαίρεσιν.

Οὕτως ἔχομεν $\frac{5}{8} - \frac{2}{9} = \frac{45}{72} - \frac{16}{72} = \frac{45-16}{72} = \frac{29}{72}$.

132) Β'. Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν μικτοὺς ἀριθμούς, ἀφαιροῦμεν χωριστὰ τοὺς ἀκεραίους καὶ χωριστὰ τὰ κλάσματα καὶ ἑνώνομεν τὰ δύο ὑπόλοιπα. Ἔστω π. δ. χ. $15\frac{4}{5} - 7\frac{3}{8}$.

Τὰ ὑπόλοιπα τῶν δύο ἀκεραίων εἶναι $15-7=8$.

Τῶν δὲ κλασμάτων $\frac{4}{5} - \frac{3}{8} = \frac{32}{40} - \frac{15}{40} = \frac{17}{40}$.

Ὅθεν θὰ ἔχωμεν τὸ ζητούμενον ὑπόλοιπον.

$$15\frac{4}{5} - 7\frac{3}{8} = 8\frac{17}{40}.$$

Παρατήρ. *Δυνατὸν νὰ συμβῇ τὸ κλάσμα τοῦ ἀφαιρετέου νὰ εἶναι* *μεγαλύτερον τοῦ κλάσματος τοῦ μειωτέου, δηλ. ἡ ἀφαίρεσις τῶν κλασμάτων νὰ μὴ εἶναι δυνατή.*

Ἔστω τὸ ἑξῆς παράδειγμα $8\frac{5}{9} - 3\frac{3}{4} = 5\frac{20}{36} - \frac{27}{36}$.

Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ προσθέτομεν μίαν ἀκεραίαν μονάδα ἢ $\frac{36}{36}$ εἰς τὸ κλάσμα τοῦ μειωτέου καὶ ἔχομεν $8\frac{56}{36}$. Διὰ νὰ μὴ μεταβληθῇ τὸ ὑπόλοιπον (§ 26), προσθέτομεν μίαν ἀκεραίαν μονάδα καὶ εἰς τὸν ἀκέραιον (3) τοῦ ἀφαιρετέου· ἤτοι θὰ ἔχωμεν $8\frac{5}{9} - 3\frac{3}{4} = 8\frac{20}{36} - 3\frac{27}{36} =$ $8\frac{56}{36} - 4\frac{27}{36} = 4\frac{29}{36}$.

133) Γ΄. Ἀφαίρεσις οἱωνδήποτε ἀριθμῶν.

1) Ἔστω πρὸς ἐκτέλεσιν ἡ ἀφαίρεσις $18\frac{5}{8} - 7$.

Ἀφαιροῦμεν μόνον τοὺς ἀκεραίους, τὸ δὲ κλάσμα μένει τὸ αὐτὸ (§ 66), ἤτοι $18\frac{5}{8} - 7 = 11\frac{5}{8}$.

2) Ἔστω πρὸς ἐκτέλεσιν ἡ ἀφαίρεσις $17\frac{5}{8} - \frac{3}{7}$.

Ἀφαιροῦμεν μόνον τὰ κλάσματα, ὁ δὲ ἀκέραιος μένει ὁ αὐτὸς (§ 66) ἤτοι $17\frac{5}{8} - \frac{3}{7} = 17\frac{35}{56} - \frac{24}{56} = 17\frac{11}{56}$.

Παρατήρ. *Ἐὰν ἡ ἀφαίρεσις τῶν κλασμάτων δὲν εἶναι δυνατή, ἡ ἀφαίρεσις ἐκτελεῖται ὡς ὑπεδείξαμεν εἰς τὴν ἀφαίρεσιν τῶν μικτῶν.*

π. δ. χ. $8\frac{4}{9} - \frac{5}{6} = 8\frac{8}{18} - \frac{15}{18} = 7\frac{26}{18} - \frac{15}{18} = 7\frac{11}{18}$.

3) Ἔστω πρὸς ἐκτέλεσιν ἡ ἀφαίρεσις $7 - \frac{4}{15}$.

Γράφομεν τὸν ἀκέραιον 7 ὡς μικτὸν λαμβάνοντες ἐξ αὐτοῦ μίαν ἀκεραίαν μονάδα καὶ τρέποντες αὐτὴν εἰς κλάσμα καὶ ἔπειτα ἐκτελοῦμεν τὴν ἀφαίρεσιν. Ὅθεν θὰ ἔχωμεν $7 - \frac{4}{15} = 6\frac{15}{15} - \frac{4}{15} = 6\frac{11}{15}$.

4) Ἔστω τέλος πρὸς ἐκτέλεσιν ἡ ἀφαίρεσις $15 - 8\frac{5}{9}$.

Καὶ ἐνταῦθα ἐργαζόμεθα ὡς εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα. Οὕτω δὲ λαμβάνομεν.

$$15 - 8\frac{5}{9} = 14\frac{9}{9} - 8\frac{5}{9} = 6\frac{4}{9}.$$

Ἀσκήσεις προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως τῶν κλασμάτων.

α΄) Ἀπὸ μνήμης.

$\frac{5}{8} + \frac{3}{8} + \frac{7}{8} + \frac{2}{8} + \frac{9}{8} =$; $\frac{11}{60} + \frac{17}{60} + \frac{31}{60} =$;

$\frac{}{2} + \frac{1}{3} =$; $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{8} =$; $\frac{7}{10} - \frac{5}{10} =$; $\frac{15}{28} - \frac{12}{28} =$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} =$; $\frac{3}{4} + \frac{2}{5} + \frac{7}{20} =$; $15\frac{14}{19} - \frac{5}{19} =$;

$5+\frac{3}{}=;\quad 7\frac{2}{3}+5+8\frac{5}{9}=;\quad \frac{5}{8}-\frac{1}{4}=;\quad \frac{3}{4}-\frac{1}{2}=$

$\frac{3}{4}+\frac{5}{8}=;\quad 8\frac{1}{2}+3\frac{1}{4}+2=;$

$\frac{2}{3}+\frac{3}{4}=;\quad 4+3+7\frac{8}{13}=;$

$\frac{7}{8}-\frac{5}{16}=;\quad 2\frac{2}{3}-\frac{5}{6}=;\quad 4\frac{5}{6}-1\frac{5}{12}=;\quad \frac{13}{20}-\frac{3}{5}=;$

$9-\frac{2}{7}=;\quad 8-3\frac{4}{5}=;\quad 1\frac{1}{2}-\frac{3}{4}=;\quad 10-\frac{11}{16}=;$

6΄) Γραπτῶς.

$\frac{14}{15}+\frac{5}{8}=;\quad \frac{7}{9}+\frac{11}{12}=;\quad \frac{2}{3}+\frac{7}{8}+\frac{9}{16}=;$

$\frac{}{7}+\frac{8}{21}+\frac{17}{18}+2\frac{1}{2}=;\quad 3\frac{1}{5}+\frac{13}{72}+2\frac{1}{9}=;$

$\frac{5}{12}+4\frac{1}{2}+\frac{8}{9}+\frac{11}{16}=;\quad 6\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+1\frac{7}{12}+\frac{17}{72}=;$

$\frac{5}{13}+\frac{1}{65}+2+2\frac{3}{4}+\frac{3}{20}=;\quad \frac{11}{15}+\frac{7}{12}+\frac{5}{42}+\frac{8}{9}+1\frac{1}{8}=;$

$\frac{11}{12}+\frac{5}{13}+\frac{7}{52}+3+\frac{1}{3}+\frac{5}{6}=;\quad \frac{1}{10}+6\frac{4}{5}+\frac{76}{77}+3+\frac{3}{70}=;$

$\frac{8}{9}+\frac{1}{16}+\frac{5}{6}+14\frac{1}{24}=;$

$1\frac{1}{2}+\frac{8}{15}+\frac{7}{20}+2\frac{1}{6}=;$

$\frac{3}{5}+\frac{8}{9}+2\frac{1}{3}+1\frac{4}{75}+\frac{5}{18}=;$

$\frac{23}{24}+\frac{13}{16}+2\frac{1}{10}+\frac{8}{9}+\frac{4}{15}=;$

$\frac{1}{5}+\frac{5}{24}+21\frac{1}{60}+2\frac{5}{12}+\frac{5}{18}=;$

$\frac{10}{17}-\frac{3}{34}=;\quad \frac{7}{12}-\frac{5}{16}=;$

$2-\frac{37}{60}=;\quad 2\frac{1}{2}-1\frac{1}{6}=;$

$7\frac{5}{16}-5\frac{11}{12}=;\quad \frac{31}{48}-\frac{7}{30}=;$

$\frac{37}{96}-\frac{5}{42}=;\quad \frac{61}{72}-\frac{5}{84}=;$

$1\frac{2}{15}-\frac{1}{3}=;\quad 1\frac{2}{9}-\left(\frac{1}{6}+\frac{3}{4}\right)$

$15\frac{3}{4}-\left(2\frac{5}{8}+3\frac{4}{5}+7\frac{}{10}\right)=;$

Προβλήματα προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως πρὸς ἄσκησιν.

1) Ἔχει τις εἰς τὸ βαλάντιόν του $34\frac{4}{5}$ δρχ. καὶ ἔλαβεν ἐντὸς τῆς ἡμέρας α΄.) $8\frac{3}{4}$ δρχ. 6΄.) $9\frac{1}{2}$ δρ. Πόσας δραχμὰς ἔχει τὴν ἑσπέραν; (ἀπ. $53\frac{1}{20}$ δραχ.).

2) Ἠγόρασέ τις ἔπιπλόν τι παλαιὸν ἀντὶ 158 $\frac{1}{5}$ δραχ. ἐξώδευσε δὲ πρὸς ἐπιδιόρθωσιν αὐτοῦ 24 $\frac{3}{10}$ δρχ. καὶ θέλει νὰ πωλήσῃ αὐτὸ καὶ νὰ κερδίσῃ 18 $\frac{1}{2}$ δρχ. Πόσας δραχ. θὰ πωλήσῃ τοῦτο ; (ἀπ. 201 δρχ.

3) Ἀπὸ ποῖον ἀριθμὸν πρέπει νὰ ἀφαιρεθῇ ὁ ἀριθμὸς 17 $\frac{3}{5}$ διὰ νὰ μείνῃ ὑπόλοιπον 26 $\frac{4}{7}$; (Ἀπ. 44 $\frac{6}{35}$).

4) Ἐργάτης τις ἔσκαψε τὴν πρώτην ἡμέραν τάφρον μήκους 28 $\frac{7}{8}$ πήχ., τὴν ἑπομένην ἡμέραν ἔσκαψε 12 $\frac{2}{3}$ πήχ. περισσότερον ἢ τὴν πρώτην ἡμέραν. Πόσους πήχεις τάφρου ἔσκαψε καὶ κατὰ τὰς δύο ἡμέρας; (ἀπ. 70 $\frac{5}{12}$).

5) Ἐκ τριῶν κρουνῶν ὁ πρῶτος γεμίζει εἰς μίαν ὥραν τὸ $\frac{1}{5}$ τῆς δεξαμενῆς, ὁ δεύτερος τὸ $\frac{1}{8}$ αὐτῆς καὶ ὁ τρίτος τὸ $\frac{1}{12}$· Πόσον μέρος τῆς δεξαμενῆς καὶ οἱ τρεῖς ὁμοῦ πληροῦσιν εἰς μίαν ὥραν; (ἀπ. $\frac{49}{120}$).

6) Εἶχέ τις 45 $\frac{3}{5}$ δρχ. καὶ ἐδαπάνησεν 8 $\frac{3}{4}$ δρχ. Πόσαι δραχμαὶ τῷ ἔμειναν; (ἀπ. 36 $\frac{17}{20}$ δραχ.)·

7) Ἠγόρασέ τις ζάκχαριν καὶ καφὲ ἀξίας 8 $\frac{3}{4}$ δρχ. καὶ ἔδωκε πρὸς πληρωμὴν αὐτοῦ ἓν 25δραχμον. Ποῖον ὑπόλοιπον θὰ λάβῃ; (ἀπ. 16 $\frac{1}{4}$ δρχ.)

8) Εἶχέ τις 100 δραχ, καὶ ἠγόρασε κατὰ τὸ διάστημα τῆς ἡμέρας διάφορα πράγματα, ἤτοι καφὲν ἀξίας 5 $\frac{3}{4}$ δραχ., βούτυρον ἀξίας 12 $\frac{4}{5}$ κρέας 3 $\frac{1}{2}$ δραχ., ζάκχαριν 4 $\frac{2}{5}$ δραχ. καὶ τέλος ἄλλα διάφορα ἀξίας ἐν ὅλῳ 12 $\frac{3}{10}$ δραχ. Πόσαι δραχμαὶ τῷ ἔμειναν; (ἀπ. 61 $\frac{1}{4}$ δραχ.).

9) Ἐργάτης τις ἀνέλαβε ν' ἀποπερατώσῃ ἐντὸς τριῶν ἡμερῶν ἔργον τι· καὶ κατὰ μὲν τὴν πρώτην ἡμέραν ἐξετέλεσε τὰ $\frac{2}{15}$, κατὰ δὲ τὴν δευτέραν τὰ $\frac{3}{8}$ αὐτοῦ. Πόσον μέρος τοῦ ἔργου θὰ ἐκτελέσῃ κατὰ τὴν τρίτην ἡμέραν; (ἀπ. $\frac{61}{120}$)

10) Ἔμπορός τις εἶχε τεμάχιον τσόχας 65 $\frac{3}{8}$ πήχ. Κατὰ τὸ διάστημα μιᾶς ἑβδομάδος ἐπώλησε α') 8 $\frac{3}{16}$ πήχ. τοῦ ὑφάσματος τούτου, β') 12 $\frac{3}{4}$ πήχ. γ') 18 $\frac{1}{2}$ πήχ. Πόσους πήχεις ἔχει ἀκόμη εἰς τὸ κατάστημά του κατὰ τὸ τέλος τῆς ἑβδομάδος; (ἀπ. 24 $\frac{15}{16}$).

11) Ἀτμόπλοιόν τι ἀνεχώρησεν ἐκ Πειραιῶς τὴν 9 $\frac{1}{4}$ ὥραν π. μ., ἔτε-

ρον δὲ ἀνεχώρησε τὴν $3\frac{3}{4}$ ὥραν μ. μ. Πόσας ὥρας βραδύτερον ἀνεχώρησε τὸ δεύτερον; (ἀπ. $6\frac{1}{4}$ ὥρ.).

12) Εἴς τι ἐργοστάσιον οἱ ἐργάται ἀρχίζουσι τὴν ἐργασίαν των τὴν $6\frac{1}{4}$ ὥραν π. μ., διακόπτουσι δὲ ταύτην τὴν 12 τῆς μεσημβρίας χάριν προγεύματος· ἐπαναλαμβάνουσι δὲ αὐτὴν κατὰ τὴν $1\frac{1}{2}$ ὥραν. μ.μ. καὶ ἀποχωροῦσι τὴν 6ην ἑσπερινὴν ὥραν. Πόσας ὥρας ἐργάζονται οἱ ἐργάται οὗτοι καθ' ἑκάστην; (ἀπ. $10\frac{1}{4}$ ὥρ.).

13) Πόσαι ὧραι μεσολαβοῦσιν ἀπὸ τῆς $6\frac{1}{2}$ ὥρας ταύτης τῆς πρωΐας μέχρι τῆς 9ης τῆς ἑπομένης πρωΐας, καὶ πόσαι μέχρι τῆς $10\frac{1}{4}$ τῆς ἑπομένης ἑσπέρας; (ἀπ. α') $26\frac{1}{2}$ ὥρ., β') $39\frac{3}{4}$ ὥρ.).

14) Ἠγοράσαμεν τρία τεμάχια ὑφάσματος, ἐξ ὧν τὸ α' εἶναι $25\frac{5}{8}$ πήχ., τὸ β' $3\frac{7}{10}$ πήχ., περισσότερον τοῦ α' καὶ τὸ γ' $1\frac{1}{2}$ πήχ. ὀλιγώτερον τοῦ α'. Ἐκ πόσων πήχεων ἀποτελεῖται ἕκαστον τεμάχιον καὶ ἐκ πόσων πήχεων ἀποτελοῦνται καὶ τὰ τρία ὁμοῦ.

(Ἀπ. Α') 79 πήχ. $\frac{3}{40}$, Β'.) τὸ β' $29\frac{13}{40}$, τὸ γ') 24 πήχ. $\frac{1}{8}$

15) Τρεῖς κρουνοὶ πληροῦσιν εἰς μίαν ὥραν τὸ $\frac{1}{8}$ δεξαμενῆς τινος· ἀλλ ὁ α' ἐκ τούτων πληροῖ εἰς 1 ὥραν τὸ $\frac{1}{20}$ αὐτῆς ὁ δὲ β' τὸ $\frac{1}{15}$. Πόσον μέρος τῆς δεξαμενῆς πληροῖ ὁ γ' μόνος εἰς μίαν ὥραν; $\left(\text{ἀπ. } \frac{1}{120}\right)$

16) Πατήρ τις ὥρισεν ἐν τῇ διαθήκῃ του νὰ λάβῃ ἡ σύζυγός του τὰ $\frac{2}{7}$ τῆς περιουσίας του καὶ ἕκαστος τῶν 3 υἱῶν του τὸ $\frac{1}{8}$ αὐτῆς, τὰ δὲ λοιπὰ νὰ δωρηθῶσιν εἰς τὸ ταμεῖον τοῦ Ἐθνικοῦ στόλου. Πόσον μέρος τῆς περιουσίας του θὰ λάβῃ τὸ ταμεῖον τοῦ Ἐθνικοῦ στόλου; $\left(\text{ἀπ. } \frac{19}{56}\right)$

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΚΑΙ ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ ΤΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

Εἰς τὸν πολ/σμὸν τῶν κλασμάτων διακρίνομεν τὰς ἑξῆς τρεῖς περιπτώσεις.
Α' Ὅταν ὁ πολ/στὴς εἶναι ἀκέραιος. Β' Ὅταν ὁ πολ/στὴς εἶναι κλάσμα. Γ') Ὅταν ὁ πολ/στὴς εἶναι μικτός.

Ὁμοίως εἰς τὴν διαίρεσιν τῶν κλασμάτων διακρίνομεν τὰς ἑξῆς τρεῖς περιπτώσεις.

Α') Ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι ἀκέραιος. Β') Ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι κλάσμα. Γ') Ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι μικτός.

Πολλαπλασιασμός.

Περίπτωσις Αη. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην θὰ ἔχωμεν νὰ πολ/σωμεν κλάσμα ἢ μικτὸν ἐπὶ ἀκέραιον.

Ἔστω πρῶτον ὅτι ἔχομεν νὰ πολ/σωμεν κλάσμα ἐπὶ ἀκέραιον. π. δ. χ. $\frac{5}{8}\times 3$.

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολ/σμοῦ πρέπει νὰ ἐπαναλάβωμεν τὸ $\frac{5}{8}$ τρεῖς φοράς, ἤτοι $\frac{5}{8}\times 3=\frac{5}{8}+\frac{5}{8}+\frac{5}{8}=\frac{5\times 3}{8}$.

Κατὰ ταῦτα τὸ ζητούμενον γινόμενον εὑρίσκεται, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμητὴν 5 τοῦ κλάσματος ἐπὶ τὸν ἀκέραιον 3 καὶ ὑπὸ τὸ γινόμενον τοῦτο θέσωμεν παρονομαστὴν τὸν αὐτὸν (ἤτοι 8).

Ὁμοίως τὸ γινόμενον $\frac{5}{6}\times 3$ εἶναι $\frac{5\times 3}{6}=\frac{15}{6}$ ἢ ἁπλούστερον $\frac{5}{2}$.

Ἀλλὰ τὸ γινόμενον τοῦτο προκύπτει ἐκ τοῦ $\frac{5}{6}$ ἂν ὁ παρονομαστὴς αὐτοῦ 6 διαιρεθῇ διὰ τοῦ ἀκεραίου 3.

Ἐντεῦθεν ἕπεται ὁ ἑξῆς πρακτικὸς κανών·

135) «Πολλαπλασιάζομεν κλάσμα ἐπὶ ἀκέραιον, ἂν διαιρέσωμεν τὸν παρονομαστὴν διὰ τοῦ ἀκεραίου (ἂν διαιρῆται ἀκριβῶς) ἢ ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμητὴν ἐπὶ τὸν ἀκέραιον.»

Ὁ κανὼν οὗτος ἕπεται ἀμέσως καὶ ἐκ τῶν ἰδιοτήτων (§ § 113 καὶ 114).

Παραδείγματα. $\frac{5}{10}\times 3=\frac{5\times 3}{10}=\frac{15}{10}=1\frac{1}{2}$, $\frac{7}{9}\times 3=\frac{7}{3}=2\frac{1}{3}$

Ἂς ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον μικτοῦ ἐπὶ ἀκέραιον, π. δ. χ. $7\frac{4}{5}\times 6$.—Ἐπειδὴ ὁ μικτὸς εἶναι ἄθροισμα ἀκεραίου καὶ κλάσματος, ἀρκεῖ κατὰ τὴν ἰδιότητα (§ 34) νὰ πολλαπλασιάσωμεν χωριστὰ τὰ δύο μέρη τοῦ μικτοῦ ἐπὶ τὸν ἀκέραιον καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ δύο μερικὰ γινόμενα. Ὥστε θὰ ἔχωμεν $7\frac{4}{5}\times 6=7\times 6+\frac{4}{5}\times 6=42+\frac{24}{5}=42+4\frac{4}{5}=46\frac{4}{5}$.

Ἐκ τούτων ἕπεται ὁ ἑξῆς κανών·

136) «Πολλαπλασιάζομεν μικτὸν ἐπὶ ἀκέραιον, ἂν πολλαπλασιάσωμεν χωριστὰ τὸν ἀκέραιον καὶ χωριστὰ τὸ κλάσμα καὶ ἑνώσωμεν τὰ δύο μερικὰ γινόμενα.»

Σημ. *Δυνάμεθα νὰ τρέψωμεν πρῶτον τὸν μικτὸν εἰς κλάσμα καὶ ἔπειτα νὰ ἐκτελέσωμεν τὸν πολλαπλασιασμόν.*

Παραδείγματα. $8\frac{3}{5}\times 7=56+\frac{21}{5}=56+4\frac{1}{5}=60\frac{1}{5}$.

$$8\frac{3}{5}\times 7=\frac{43}{5}\times 7=\frac{301}{5}=60\frac{1}{5}.$$

Ὁμοίως $12\frac{5}{8}\times 9=108+\frac{45}{8}=108+5\frac{5}{8}=113\frac{5}{8}$.

ἢ $12\frac{5}{8}\times 9=\frac{101}{8}\times 9=\frac{909}{8}=113\frac{5}{8}$.

Διαίρεσις.

Περίπτωσις Α΄. Διαίρεσις ἀκεραίου δι᾽ ἀκεραίου. Ἔστω π. δ. χ. ὅτι ἔχομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸν 3 διὰ τοῦ 5 ἢ ὅπερ τ' αὐτὸ νὰ μοιράσωμεν τὰς 3 δρχ. εἰς 5 ἀνθρώπους.—Ἐὰν μοιράσωμεν τὴν 1 δρχ. εἰς 5 ἴσα μέρη (20 λεπτά), ἕκαστος τῶν 5 ἀνθρώπων θὰ λάβῃ ἓν ἐξ αὐτῶν, ἤτοι $\frac{1}{5}$ (1 εἰκοσάλεπτον). Ὁμοίως ἐκ τῆς δευτέρας δραχμῆς θὰ λάβῃ ἕκαστος πάλιν $\frac{1}{5}$ δρχ. καὶ ἐκ τῆς τρίτης ἀκόμη $\frac{1}{5}$ δρχ. ἄρα ἕκαστος τῶν 5 ἀνθρώπων θὰ λάβῃ ἐκ τῶν 3 δρχ. $\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}$ ἢ $\frac{3}{5}$ δρχ. ὥστε τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως $3:5$ εἶναι τὸ κλάσμα $\frac{3}{5}$ ἤτοι $3:5=\frac{3}{5}$, ὅπερ πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸν διαιρέτην 5 δίδει τὸν διαιρετέον 3 ἤτοι $\frac{3}{5}\times5=\frac{15}{5}=3$.

Παρατηροῦμεν λοιπὸν ὅτι διὰ τῶν κλασμάτων ἡ διαίρεσις δύο ἀκεραίων καθίσταται πάντοτε δυνατὴ καὶ τελεία. Ὅθεν συνάγομεν τὸν ἑξῆς γενικώτερον ὁρισμὸν τῆς διαιρέσεως.

137) «Διαίρεσις εἶναι πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας δοθέντων δύο ἀριθμῶν εὑρίσκομεν τρίτον, ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν δεύτερον δίδει τὸν πρῶτον.»

Ὁ πρῶτος καλεῖται καὶ ἐνταῦθα *διαιρετέος*, ὁ δεύτερος *διαιρέτης* καὶ ὁ τρίτος *πηλίκον*138.Ἐκ τῶν προηγουμένων ἐπίσης συνάγομεν ὅτι. Τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως δύο ἀκεραίων εἶναι κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν μὲν τὸν διαιρετέον, παρονομαστὴν δὲ τὸν διαιρέτην.»

Καὶ ἀντιστρόφως·

139) «Πᾶν κλάσμα εἶναι πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμητοῦ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ.»

Ἐπειδὴ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως ἀκεραίου τινός, ὡς τοῦ 8 διὰ τῆς 1. εἶναι ἴσον μὲ τὸν διαιρετέον 8, πρέπει κατὰ τὴν ἀνωτέρω ἰδιότητα νὰ θεωρῶμεν τὸ κλάσμα $\frac{8}{1}$ (ἤτοι $8:1$) ὡς ἴσον πρὸς τὸν ἀριθμητήν του τὸν 8; ἤτοι $\frac{8}{1}=8$. Ὁμοίως $\frac{15}{1}=15$, $\frac{19}{1}=19$ κ.τ.λ.—Ἐντεῦθεν συνάγεται ὅτι.

140) «Πᾶς ἀκέραιος ἀριθμὸς δύναται νὰ παρασταθῇ ὡς κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν μὲν τὸν ἑαυτόν του, παρονομαστὴν δὲ τὴν 1.»

Διαίρεσις κλάσματος δι' ἀκεραίου.—Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι θέλομεν νὰ μοιράσωμεν 8 δεκάλ. (ἤτοι $\frac{8}{10}$ δρχ.) εἰς 4 ἀνθρώπους· εἶναι φανερὸν ὅτι ἕκαστος θὰ λάβῃ ὡς μερίδιον 2 δεκάλ. ἤτοι $\frac{8}{10}$ δρχ. Ὅθεν τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ $\frac{8}{10}$ δρχ. διὰ τοῦ 4 εἶναι ἴσον μὲ τὸ $\frac{2}{10}$ δρ. ἤτοι $\frac{8}{10}:4=\frac{8:4}{10}=\frac{2}{10}$.

Καὶ τῳόντι, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο ἐπὶ τὸν διαιρέτην 4 εὑρίσκομεν τὸ $\frac{8}{10}$, ἤτοι τὸν διαιρετέον.

Ἔστω ἤδη νὰ μοιράσωμεν 7 δεκάλ. ἤτοι $\frac{7}{10}$ δρ. εἰς δύο ἀνθρώπους. Ἐπειδὴ τὰ 7 δεκάλ. ἰσοδυναμοῦσι μὲ 14 πεντάλεπτα, ἕπεται ὅτι ἕκαστος ἄνθρωπος θὰ λάβῃ 7 πεντάλεπτα ἤτοι $\frac{7}{10}$ δρ. Ἄρα τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ $\frac{7}{10}$ διὰ τοῦ 2 εἶναι τὸ $\frac{7}{10}$ ἤτοι $\frac{7}{10}:2=\frac{7}{10\times 2}=\frac{7}{20}$.

Καὶ τῳόντι τὸ ἐξαγόμενον $\frac{7}{20}$ πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸν διαιρέτην 2 δίδει γινόμενον τὸν διαιρετέον. Ἐκ τούτων ἕπεται ὁ ἑξῆς κανών·

141) «Κλάσμα διαιρεῖται δι' ἀκεραίου, ἂν διαιρεθῇ ὁ ἀριθμητὴς (ἂν διαιρῆται ἀκριβῶς) ἢ πολλαπλασιασθῇ ὁ παρονομαστής.»

Τὸν κανόνα τοῦτον δυνάμεθα νὰ συναγάγωμεν ἀμέσως καὶ ἐκ τῶν ἰδιοτήτων (§ § 113, 114).

Διαίρεσις μικτοῦ δι', ἀκεραίου. Ἂς ὑποθέσωμεν τέλος ὅτι ἔχομεν τὴν διαίρεσιν $18\frac{4}{5}:7$.

142) Ἐπειδὴ ὁ διαιρετέος εἶναι ἄθροισμα ἀκεραίου καὶ κλάσματος ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν χωριστὰ τὰ δύο μέρη αὐτοῦ διὰ τοῦ ἀκεραίου καὶ νὰ ἑνώσωμεν τὰ δύο μερικὰ πηλίκα (§ 72).

Ὅθεν θὰ ἔχωμεν $18\frac{4}{5}:7=\frac{18}{7}+\frac{4}{7\times 5}=2\frac{4}{7}+\frac{4}{35}=2\frac{24}{35}$.

Σημ. *Δυνάμεθα νὰ τρέψωμεν τὸν μικτὸν εἰς κλάσμα καὶ ἔπειτα νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν.* *Παραδείγματα.*

$2\frac{3}{5}:8=\frac{2}{8}+\frac{3}{5\times 8}=\frac{2}{8}+\frac{3}{40}=\frac{13}{40}$ ἢ $2\frac{3}{5}:8=\frac{13}{5}:8=\frac{13}{40}$.

Ὁμοίως $18\frac{4}{7}:9=2+\frac{4}{63}=2\frac{4}{63}$ ἢ $18\frac{4}{7}:9=\frac{130}{7}:9=\frac{130}{63}=2\frac{4}{63}$.

Πολλαπλασιασμός.

143) *Περίπτωσις Βα.* Ἐκ τοῦ γενικοῦ ὁρισμοῦ, τὸν ὁποῖον ἐδώκαμεν εἰς τὸν πολ/σμὸν(§ 31), δυνάμεθα νὰ συναγάγωμεν εὐκόλως, πῶς γίνεται ὁ πολ/σμὸς ὅταν ὁ πολ/στὴς δὲν εἶναι ἀκέραιος, ἀλλὰ οἱοσδήποτε ἀριθμὸς κλάσμα ἢ μικτός.

Ἔστω νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ ἀριθμὸς 8 ἐπὶ $\frac{1}{7}$ κατὰ τὸν γενικὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ πρέπει ἐκ τοῦ πρώτου 8 νὰ σχηματισθῇ, τρίτος, ὅπως ὁ δεύτερος $\frac{1}{7}$ ἐγένετο ἐκ τῆς ἀκεραίας μονάδος· ἀλλὰ τὸ $\frac{1}{7}$ ἐγένετο ἐκ τῆς ἀκεραίας μονάδος διὰ τοῦ μερισμοῦ αὐτῆς εἰς 7 ἴσα μέρη, ἐξ ὧν ἐλάβομεν τὸ ἕν· ἄρα καὶ τὸ 8 πρέπει νὰ διαιρεθῇ εἰς 7 ἴσα μέρη, ἐξ ὧν νὰ λάβωμεν τὸ ἕν, ἤτοι νὰ λάβωμεν τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως 8 : 7, ὅπερ εἶναι $\frac{8}{7}$ (§ 138), ἤτοι $8\times\frac{1}{7}=\frac{8}{7}$.

Ὅθεν παρατηροῦμεν ὅτι ὁ πολλαπλασιασμὸς ἀριθμοῦ τινος ἐπὶ κλασματικὴν μονάδα εἶναι διαίρεσις τοῦ ἀριθμοῦ τούτου διὰ τοῦ παρονομαστοῦ της.

Ἔστω ἤδη ὁ 8 νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ $\frac{5}{7}$· τοῦτο σημαίνει ἐκ τοῦ 8 νὰ σχηματισθῇ τρίτος, ὅπως ὁ δεύτερος $\frac{5}{7}$ ἐγένετο ἐκ τῆς μονάδος. Ὁ $\frac{5}{7}$ ἐγένετο ἐκ τῆς 1, ἀφ' οὗ διῃρέθη αὕτη εἰς 7 ἴσα μέρη καὶ ἐλήφθησαν τὰ 5· ἄρα καὶ ὁ τρίτος θὰ σχηματισθῇ ἐκ τοῦ πρώτου 8, ἀφ' οὗ ὁ 8 διαιρεθῇ εἰς 7 ἴσα μέρη καὶ ληφθῶσιν ἐξ αὐτῶν τὰ 5, ἤτοι θὰ εἶναι ἴσος πρὸς

$$\frac{8}{7}+\frac{8}{7}+\frac{8}{7}+\frac{8}{7}+\frac{8}{7}=\frac{8\times5}{7}.$$ Ὅθεν

$$8\times 2\frac{5}{7}=\frac{8\times5}{7}=\frac{40}{7}=5\,\frac{5}{7}.$$

Ἐκ τοῦ παραδείγματος τούτου παρατηροῦμεν ὅτι, ὅταν πολλαπλασιαστὴς εἶναι κλάσμα, ὁ πολλαπλασιασμὸς σημαίνει ἐπανάληψιν μέρους ἀριθμοῦ πολλάκις. Ἐκ τούτων ἕπεται καὶ ὁ ἑπόμενος πρακτικὸς κανὼν πολλαπλασιασμοῦ ἀκεραίου ἐπὶ κλάσμα.

144) «Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀκέραιον ἐπὶ κλάσμα, πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀκέραιον ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴν καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ».

π. δ. χ. $9\times\frac{4}{5}=\frac{9\times4}{5}=\frac{36}{5}=7\,\frac{1}{5}$.

Παρατήρ. — *Ἐπὶ τῇ βάσει τῆς ἰδιότητος (§ 33) δυνάμεθα νὰ λάβωμεν ὡς πολλαπλασιαστέον τὸ κλάσμα καὶ ὡς πολλαπλασιαστὴν τὸν ἀκέραιον καὶ νὰ ἐφαρμόσωμεν τὸν κανόνα (§ 135) π. δ. χ.*

$$18\times\frac{4}{5}=\frac{4}{5}\times18=\frac{75}{5}=14\,\frac{2}{5}.$$

Ὁμοίως $8\times\frac{7}{24}=\frac{7}{24}\times8=\frac{7}{24:8}=\frac{7}{3}=2\,\frac{1}{3}$

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν δύο κλάσματα. π. δ. χ. $\frac{5}{8}\times\frac{7}{8}$

Κατὰ τὸν γενικὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ πρέπει νὰ λάβωμεν τὸ ὄγδοον $\frac{5}{9}$ τοῦ ἤτοι $\frac{5}{9}:8=\frac{5}{9\times8}$ καὶ τοῦτο νὰ ἐπαναλάβωμεν ἑπτάκις, ἤτοι $\frac{5}{9\times8}\times7=\frac{5\times7}{9\times8}$. Ὅθεν $\frac{5}{9}\times\frac{7}{8}=\frac{5\times7}{9\times8}=\frac{35}{72}$.

Ἐκ τούτων ἕπεται ὁ ἑξῆς πρακτικὸς κανών·

145) «Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν κλάσμα ἐπὶ κλάσμα, πολλαπλασιάζομεν ἀριθμητὴν ἐπ' ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν ἐπὶ παρονομαστήν, καὶ τὸ μὲν γινόμενον τῶν ἀριθμητῶν θέτομεν ὡς ἀριθμητήν, τὸ δὲ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν ὡς παρονομαστήν.»

π. δ. χ. $\frac{4}{15}\times\frac{7}{9}=\frac{4\times7}{15\times9}=\frac{28}{135}$.

$$\frac{5}{8}\times\frac{3}{4}=\frac{5\times3}{8\times4}=\frac{15}{32}.$$

Ἂς ὑποθέσωμεν τέλος ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν μικτὸν ἐπὶ κλάσμα, ὡς λ. χ. $8\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}$. ἢ τρέπομεν τὸν μικτὸν εἰς κλάσμα καὶ ἔπειτα ἐκτελοῦμεν τὸν πολλαπλασιασμόν, ὅτε θὰ ἔχωμεν $8\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}=\frac{44}{5}\times\frac{2}{3}=\frac{44\times2}{5\times3}=\frac{88}{15}=5\frac{13}{15}$, ἢ κατὰ τὴν ἰδιότητα (§ 34) πολλαπλασιάζομεν τὰ δύο μέρη τοῦ μικτοῦ ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστὴν καὶ ἑνώνομεν τὰ δύο μερικὰ γινόμενα, ὅτε λαμβάνομεν $8\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}=8\times\frac{2}{3}+\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}=\frac{16}{3}+\frac{8}{15}=5\frac{1}{3}+\frac{8}{15}=5\frac{13}{15}$. Ὅθεν συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα·

146) «Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν μικτὸν ἐπὶ κλάσμα, ἢ πολλαπλασιάζομεν πρῶτον τὸν ἀκέραιον καὶ ἔπειτα τὸ κλάσμα καὶ ἑνώνομεν τὰ δύο μερικὰ γινόμενα ἢ τρέπομεν πρῶτον τὸν μικτὸν εἰς κλάσμα καὶ ἔπειτα ἐκτελοῦμεν τὸν πολλαπλασιασμόν.»

π. δ. χ. $4\frac{5}{9}\times\frac{3}{7}=\frac{12}{7}+\frac{15}{63}=1\frac{5}{7}+\frac{15}{63}=1\frac{60}{63}$.

ἢ $4\frac{5}{9}\times\frac{3}{7}=\frac{41}{9}\times\frac{3}{7}=\frac{123}{63}=1\frac{60}{63}$.

Πολλαπλασιασμός.

Περίπτωσις Γ΄. Ἐὰν ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀκέραιον ἢ κλάσμα ἐπὶ μικτὸν ἐπὶ τῇ βάσει τῆς ἰδιότητος (§ 33) δυνάμεθα νὰ ἐκτελέσωμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν κατὰ τοὺς κανόνας (§§ 135, 136).

Παραδείγματα $8\times3\frac{4}{5}=3\frac{4}{5}\times8=24+\frac{32}{5}=30\frac{2}{5}$.

$\frac{7}{10}\times2\frac{3}{5}=2\frac{3}{5}\times\frac{7}{10}=\frac{13}{5}\times\frac{7}{10}=\frac{91}{50}=1\frac{41}{50}$.

Ἔστω νῦν πρὸς εὕρεσιν τὸ γινόμενον δύο μικτῶν, π. δ. χ. $8\frac{5}{9}\times3\frac{4}{5}$.

Τοῦτο δύναται νὰ εὑρεθῇ κατὰ δύο τρόπους.

Πρῶτον δυνάμεθα νὰ τρέψωμεν τοὺς μικτοὺς εἰς κλάσματα καὶ κατόπιν νὰ ἐκτελέσωμεν τὸν πολλαπλασιασμόν, ἤτοι

$$8\frac{5}{9}\times3\frac{4}{5}=\frac{77}{9}\times\frac{19}{5}=\frac{1463}{45}=32\frac{23}{45}.$$

Δεύτερον δ' ἐπὶ τῇ βάσει τῆς ἰδιότητος (§ 69) δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἕκαστον μέρος τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐφ' ἕκαστον μέρος τοῦ πολλαπλασιαστοῦ καὶ νὰ ἑνώσωμεν τὰ μερικὰ γινόμενα, ὅτε θὰ ἔχωμεν $8\frac{5}{9}\times3\frac{4}{5}=8\times3+\frac{5}{9}\times3+8\times\frac{4}{5}+\frac{5}{9}\times\frac{4}{5}=24+\frac{15}{9}+\frac{32}{5}+\frac{20}{45}=24+1\frac{6}{9}+6\frac{2}{5}+\frac{20}{45}=31\frac{30}{45}+\frac{48}{45}+\frac{20}{45}=31\frac{68}{45}=32\frac{23}{45}$

Ἐκ τούτων συνάγομεν τὸν ἑξῆς πρακτικὸν κανόνα·

147) «Πολλαπλασιάζομεν μικτὸν ἐπὶ μικτόν, ἂν τρέψωμεν τοὺς μικτοὺς εἰς κλασματικοὺς καὶ ἐκτελέσωμεν ἔπειτα τὸν πολλαπλασιασμόν, ἢ ἂν πολλαπλασιάσωμεν ἕκαστον μέρος τοῦ ἑνὸς μικτοῦ ἐφ' ἕκαστον

μέρος τοῦ ἑτέρου καὶ προσθέσωμεν τὰ τέσσαρα μερικὰ γινόμενα.»

Παράδειγμα. $7\frac{5}{9}\times 3\frac{7}{10}=\frac{68}{9}\times\frac{37}{10}=\frac{2516}{90}=27\frac{86}{90}=27\frac{43}{45}$ ἢ $7\frac{5}{9}\times 3\frac{7}{10}=7\times 3+\frac{5}{9}\times 3+7\times\frac{7}{10}+\frac{5}{9}\times\frac{7}{10}=21+\frac{15}{9}+\frac{49}{10}+\frac{35}{90}=21+1\frac{6}{9}+4\frac{9}{10}+\frac{35}{90}=26\frac{60}{90}+\frac{81}{90}+\frac{35}{90}=26\frac{176}{90}=27\frac{86}{90}=27\frac{43}{45}$.

Παρατήρ. *Ἐξ ὅλων τῶν προηγουμένων παρατηροῦμεν ὅτι τὸ γινόμενον εἶναι μεγαλύτερον ἢ ἴσον ἢ μικρότερον τοῦ πολλαπλασιαστέου, καθ' ὅσον ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι ἀριθμὸς μεγαλύτερος ἢ ἴσος ἢ μικρότερος τῆς ἀκεραίας μονάδος.*

Γινόμενον πολλῶν παραγόντων.

148) Ἀφοῦ γνωρίζομεν νὰ εὑρίσκωμεν τὸ γινόμενον δύο οἱωνδήποτε παραγόντων, εἶναι εὔκολον νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον ὅσων δήποτε καὶ οἵων δήποτε παραγόντων.

Πρὸς τοῦτο πολλαπλασιάζομεν κατὰ σειρὰν πρῶτον τοὺς δύο πρώτους παράγοντας, τὸ εὑρεθὲν γινόμενον ἐπὶ τὸν τρίτον καὶ τοῦτο ἐπὶ τὸν τέταρτον κ.ο.κ.. μέχρις οὗ ληφθῶσι πάντες οἱ παράγοντες.

Παράδειγμα. $\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{7}{9}\times\frac{2}{7}$.

Τὸ γινόμενον τῶν δύο πρώτων παραγόντων εἶναι $\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{4\times 3}{5\times 4}$ καὶ τὸ γινόμενον τούτου ἐπὶ τὸ κλάσμα $\frac{7}{9}$ εἶναι $\frac{4\times 3\times 7}{5\times 4\times 9}$ καὶ τέλος τὸ γινόμενον τούτου ἐπὶ τὸ κλάσμα $\frac{2}{7}$ εἶναι $\frac{4\times 3\times 7\times 2}{5\times 4\times 9\times 7}$. Ὅθεν ἔχομεν $\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{7}{9}\times\frac{2}{7}=\frac{4\times 3\times 7\times 2}{5\times 4\times 7\times 9}=\frac{3\times 7\times 2}{5\times 7\times 9}=\frac{3\times 2}{5\times 9}=\frac{2}{5\times 3}=\frac{2}{15}$.

Ἐκ τούτου συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα·

149) «Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ὁσαδήποτε κλάσματα, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀφ' ἑνὸς μὲν πάντας τοὺς ἀριθμητάς, ἀφ' ἑτέρου δὲ πάντας τοὺς παρονομαστὰς καὶ νὰ θέσωμεν τὸ μὲν πρῶτον γινόμενον ὡς ἀριθμητήν, τὸ δὲ δεύτερον ὡς παρονομαστήν».

Σημ. *Πρὶν ἢ ἐκτελέσωμεν τοὺς ἀνωτέρω πολλαπλασιασμούς, δυνάμεθα νὰ ἐκτελέσωμεν τὰς δυνατὰς ἁπλοποιήσεις.*

Οὕτως εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα ἁπλοποιοῦμεν διὰ τοῦ 4 ἐξαλείφοντες τὸν παράγοντα 4 ἀπὸ τὸν ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν (ἰδιότης § 79). Ἔπειτα ἁπλοποιοῦμεν διὰ τοῦ 7 κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον.

Τέλος ἁπλοποιοῦμεν διὰ τοῦ 3 ἀπαλείφοντες τὸν παράγοντα 3 ἀπὸ τὸν ἀριθμητὴν καὶ διαιροῦντες τὸν παράγοντα 9 εἰς τὸν παρονομαστὴν διὰ τοῦ 3 (ἰδιότης § 77).

Ὁ ἀνωτέρω κανὼν ἐφαρμόζεται καὶ ὅταν οἱ παράγοντες εἶναι οἱοιδήποτε ἀριθμοί, διότι τοὺς μὲν μικτοὺς δυνάμεθα νὰ τρέψωμεν εἰς κλάσματα, τοὺς δὲ ἀκεραίους νὰ θεωρήσωμεν ὡς κλάσματα μὲ παρονομαστὴν τὴν μονάδα (§ 140). π. δ. χ. $8\times\frac{4}{5}\times3\frac{3}{8}\times\frac{3}{4}=\frac{8}{1}\times\frac{4}{5}\times\frac{27}{8}\times\frac{3}{4}$ $=\frac{8\times4\times27\times3}{1\times5\times8\times4}=\frac{27\times3}{5}=\frac{81}{5}=16\frac{1}{5}$

Διαίρεσις.

150) *Περίπτωσις Β'.* Πρὶν ἢ ἐξετάσωμεν τὴν περίπτωσιν ταύτην εἶναι εὔκολον νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι, τοῦ διαιρετέου μένοντος τοῦ αὐτοῦ, ἂν ὁ διαιρέτης γίνῃ δὶς ἢ τρὶς κτλ. μικρότερος, τὸ πηλίκον γίνεται δὶς ἢ τρὶς κτλ. μεγαλύτερον καὶ ἂν ὁ διαιρέτης γίνῃ δὶς ἢ τρὶς κτλ. μεγαλύτερος, τὸ πηλίκον γίνεται δὶς ἢ τρὶς κτλ. μικρότερον·

π. δ. χ. $40:4=10$ καὶ $40:2=20$ καὶ $40:8=5$.

Ἔστω πρῶτον ὁ ἀριθμὸς 15 νὰ διαιρεθῇ διὰ τῆς κλασματικῆς μονάδος $\frac{1}{8}$. Ἐὰν ὁ διαιρέτης ἦτο ἡ 1, τὸ πηλίκον θὰ ἦτο 15. Ἐπειδὴ ὅμως ὁ διαιρέτης εἶναι $\frac{1}{8}$, ἤτοι 8 φορὰς μικρότερος τῆς 1, τὸ πηλίκον θὰ εἶναι ὀκτάκις μεγαλύτερος, ἤτοι 15×8. Ὅθεν $15:\frac{1}{8}=15\times8$.

Ἂς ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι ἔχομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν 15 διὰ τοῦ $\frac{7}{8}$· ἐὰν ὁ διαιρέτης ἦτο $\frac{1}{8}$, τὸ πηλίκον, ὡς εἴδομεν ἀνωτέρω, θὰ ἦτο 15×8.

Ἐπειδὴ ὅμως ὁ διαιρέτης εἶναι $\frac{7}{8}$, ἤτοι ἑπτάκις μεγαλύτερος τοῦ $\frac{1}{8}$, τὸ νέον πηλίκον θὰ εἶναι ἑπτάκις μικρότερον τοῦ προηγουμένου, ἤτοι $\frac{15\times8}{7}$. Ὅθεν θὰ ἔχωμεν $15:\frac{7}{8}=\frac{15\times8}{7}=15\times\frac{8}{7}$.

Ἔστω νὰ διαιρέσωμεν τὸ κλάσμα $\frac{7}{18}$ διὰ τοῦ $\frac{4}{5}$.

Ἐὰν ὁ διαιρέτης ἦτο 1, τὸ πηλίκον θὰ ἦτο $\frac{7}{18}$· ἐὰν ὁ διαιρέτης ἦτο $\frac{1}{5}$ τὸ πηλίκον θὰ ἦτο 5 φορὰς μεγαλύτερον, ἤτοι $\frac{7\times5}{18}$· ἐὰν ὁ διαιρέτης γίνῃ $\frac{4}{5}$, ἤτοι τετράκις μεγαλείτερος τοῦ $\frac{1}{5}$, τὸ πηλίκον θὰ γίνῃ τετράκις μικρότερον τοῦ προηγουμένου, ἤτοι $\frac{7\times5}{18\times4}$. Ὅθεν $\frac{7}{18}:\frac{4}{5}=\frac{7\times5}{18\times4}=\frac{7}{8}\times\frac{5}{4}$.

Ἐκ τῶν προηγουμένων συνάγεται ὁ ἑξῆς κανών·

151) «Διαιροῦμεν οἱονδήποτε ἀριθμὸν διὰ κλάσματος, ἂν ἀντιστρέψωμεν τοὺς ὅρους τοῦ κλασματικοῦ διαιρέτου καὶ πολλαπλασιάσωμεν».

Παραδείγματα. $7:\frac{4}{5}=7\times\frac{5}{4}=\frac{35}{4}=8\frac{3}{4}$

$\frac{7}{8}:\frac{4}{9}=\frac{7}{8}\times\frac{9}{4}=\frac{63}{32}=1\frac{31}{32}$. $8\frac{2}{5}:\frac{7}{10}=8\frac{2}{5}\times\frac{10}{7}=12.$

Διαίρεσις.

152) *Περίπτωσις Γ'.* Ἡ διαίρεσις διὰ μικτοῦ δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ

γίνῃ ἄλλως, εἰμὴ ἂν τρέψωμεν τὸν μικτὸν εἰς κλάσμα καὶ ἐφαρμόσωμεν τὸν κανόνα (§ 151).

π. δ. χ. $5 : 7\frac{3}{4} = 5 : \frac{31}{4} = 5 \times \frac{4}{31} = \frac{20}{31}$ $\quad \frac{7}{8} : 2\frac{3}{5} = \frac{7}{8} : \frac{13}{5}$ $= \frac{7}{8} \times \frac{5}{13} = \frac{35}{104}$ $\quad 7\frac{5}{9} : 2\frac{2}{3} = \frac{68}{9} : \frac{8}{3} = \frac{68}{9} \times \frac{3}{8} = 2\frac{5}{6}$.

Παρατήρ. *Ἐκ τῶν προηγουμένων παρατηροῦμεν ὅτι, ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι μεγαλύτερος τῆς ἀκεραίας μονάδος, τὸ πηλίκον εἶναι μικρότερον τοῦ διαιρετέου, ἂν ὁ διαιρέτης εἶναι ἴσος πρὸς τὴν ἀκεραίαν μονάδα, τὸ πηλίκον εἶναι ἴσον πρὸς τὸν διαιρετέον, καὶ τέλος ἂν ὁ διαιρέτης εἶναι μικρότερος τῆς ἀκεραίας μονάδος, τὸ πηλίκον εἶναι μεγαλύτερον τοῦ διαιρετέου.*

Σύνθετα κλάσματα.

153) Τὸ πηλίκον δύο οἱωνδήποτε ἀριθμῶν δύναται νὰ παρασταθῇ κλασματικῶς (§ 139), π. δ. χ. $7 : \frac{3}{5} = \frac{7}{\frac{3}{5}}$. ὁ μὲν διαιρετέος 7 εἶναι ἀριθμητής, ὁ δὲ διαιρέτης $\frac{3}{5}$ εἶναι παρονομαστής.

Ὁμοίως τὸ πηλίκον $\frac{3}{5} : \frac{7}{8}$ παρίσταται ὡς κλάσμα $\frac{\frac{3}{5}}{\frac{7}{8}}$.

Τὰ τοιαῦτα κλάσματα, τῶν ὁποίων οἱ δύο ὅροι δὲν εἶναι ἀκέραιοι ἀριθμοί, καλοῦνται *σύνθετα κλάσματα.*

Τὰ σύνθετα κλάσματα ἔχουσιν ὅλας τὰς ἰδιότητας, τὰς ὁποίας ἔχουσι καὶ τὰ ἄλλα κλάσματα. Ἐπὶ τῇ βάσει δὲ τῆς ἰδιότητος (§ 115) δυνάμεθα νὰ τρέψωμεν τὰ σύνθετα κλάσματα εἰς συνήθη τοιαῦτα, ἅτινα καλοῦνται καὶ *ἁπλᾶ.*

Ἔστω π. χ. τὸ σύνθετον κλάσμα $\frac{7}{\frac{2}{5}}$. Δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τὸν 7 καὶ τὸν $\frac{3}{5}$ ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, ἤτοι τὸν 5·

$$\frac{7}{\frac{2}{5}} = \frac{7 \times 5}{\frac{2}{5} \times 5} = \frac{7 \times 5}{2} = \frac{35}{2} = 17\frac{1}{2}.$$

Εἰς τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον φθάνομεν καὶ ἂν ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν, τὴν ὁποίαν παριστᾷ τὸ σύνθετον κλάσμα· ἤτοι

$$\frac{7}{\frac{2}{5}} = 7 : \frac{2}{5} = 7 \times \frac{5}{2} = \frac{7 \times 5}{2} = \frac{35}{2} = 17\frac{1}{2}$$

Ὁμοίως ἔστω τὸ σύνθετον κλάσμα $\frac{\frac{3}{5}}{7}$

Δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, ἤτοι 5×8, δηλ. ἐπὶ τὸ κ. πολλαπλάσιον τῶν παρονομαστῶν τῶν δύο ὅρων τοῦ συνθέτου κλάσματος· ὅτε λαμβάνομεν

$$\frac{\frac{3}{5}}{\frac{7}{8}}=\frac{\frac{3}{5}\times5\times8}{\frac{7}{8}\times5\times8}=\frac{3\times8}{7\times5}=\frac{24}{}$$

Εἰς τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον φθάνομεν καὶ ἂν ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν, ἣν παριστᾷ τὸ σύνθετον κλάσμα, ἤτοι $\frac{\frac{3}{5}}{\frac{7}{8}}=\frac{3}{5}:\frac{7}{8}=\frac{3}{5}\times\frac{8}{7}=\frac{24}{35}$.

Ἐὰν οἱ ὅροι τοῦ συνθέτου κλάσματος εἶναι μικτοί, τρέπομεν αὐτοὺς εἰς κλάσματα καὶ ἔπειτα τρέπομεν αὐτὸ εἰς ἁπλοῦν. Ἐὰν δὲ εἷς τῶν ὅρων εἶναι ἀκέραιος, δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς κλάσμα ἔχον παρονομαστὴν τὴν μονάδα.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα·

154) «Διὰ νὰ τρέψωμεν σύνθετον κλάσμα εἰς ἁπλοῦν, πολλαπλασιάζομεν τοὺς δύο ὅρους αὐτοῦ ἐπὶ τὸ Ε. Κ. Π. τῶν παρονομαστῶν τῶν δύο ὅρων αὐτοῦ. π. δ. χ. $\frac{\frac{5}{8}}{\frac{3}{4}}=\frac{\frac{5}{8}\times8}{\frac{3}{4}\times8}=\frac{5}{3\times2}=\frac{5}{6}$.

Ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ ἀνωτέρω κανόνος αἱ πράξεις τῶν συνθέτων κλασμάτων ἀνάγονται εἰς πράξεις ἁπλῶν κλασμάτων· π. δ. χ.

$$\frac{\frac{3}{5}}{\frac{2}{7}}+\frac{4}{\frac{2}{5}}+\frac{8\frac{2}{5}}{3}=\frac{3\times7}{2\times5}+\frac{4\times5}{2}+\frac{42}{5\times3}=\frac{21}{10}+10+\frac{42}{15}=14\frac{9}{10}.$$

Ἀσκήσεις πολλαπλασιασμοῦ καὶ διαιρέσεως τῶν κλασμάτων.

1) Ἀπὸ μνήμης α'.) $\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}=$; $1\frac{1}{2}\times1\frac{1}{3}=$; $\frac{11}{12}\times8=$; $5\times\frac{1}{4}=$; $\frac{5}{16}\times\frac{4}{9}=$; $2\frac{1}{3}\times4\frac{1}{2}=$; $\frac{5}{8}\times4=$; $4\times\frac{2}{3}=$; $\frac{5}{6}\times\frac{5}{8}$;

β'.) $\frac{1}{2}:\frac{1}{3}=$; $\frac{3}{4}:\frac{2}{3}=$; $\frac{5}{6}:\frac{3}{4}=$; $6:\frac{3}{4}=$; $5:\frac{5}{6}=$; $12:\frac{2}{3}=$; $\frac{5}{8}:6=$; $\frac{2}{3}:12=$; $\frac{5}{6}:11=$; $3\frac{1}{2}:1\frac{1}{4}=$; $2\frac{1}{3}:1\frac{1}{3}=$; $8:\frac{5}{12}$;

2) Γραπτῶς α'.) $\frac{7}{18}\times\frac{2}{3}=$; $\frac{4}{7}\times\frac{21}{40}=$; $\frac{2}{3}\times17=$; $7\times\frac{3}{140}=$; $11\frac{1}{2}\times2\frac{1}{2}=$; $3\frac{1}{3}\times15\frac{2}{3}=$; $1\frac{8}{9}\times11\frac{5}{8}=$; $4\frac{1}{6}\times2\frac{1}{2}=$; $3\frac{4}{5}\times12\frac{11}{12}=$; $8\frac{3}{4}\times\frac{11}{12}=$; $\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}\times\frac{5}{8}\times\frac{2}{3}=$; $8\times\frac{3}{5}\times2\frac{4}{9}\times\frac{7}{8}=$; $\frac{4}{5}\times5\frac{3}{4}\times7\times2\frac{2}{5}=$;

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{8}}\times 28=;\ 135\times\frac{18}{\frac{3}{7}}=;\ \frac{17}{45}\times\frac{\frac{3}{8}}{23}=;\ 3\,\frac{\frac{4}{7}}{\frac{3}{16}}\times\frac{8}{4\frac{2}{5}}\times\frac{7}{8}.$$

β'.) $\frac{2}{3}:\frac{5}{11}=;\ \frac{4}{7}:\frac{7}{8}=;\ \frac{21}{40}:\frac{1}{3}=;\ \frac{8}{25}:132=;\ 145:\frac{15}{28}=;\ 8\frac{\ }{3}:14\frac{3}{8}=;\ 83\frac{1}{2}:11\frac{5}{12}=;\ 9\frac{1}{8}:\frac{5}{6}=;\ \left(2\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\right):\frac{11}{24}=;\ 8$

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}}:5=;\ \frac{3}{5}:\left(\frac{4}{9}\times\frac{1}{2}\right)=;\ \left(8\times\frac{3}{5}\times 2\frac{4}{7}\right):4=;$$

$$\left(2\times\frac{15}{23}\times\frac{4}{9}\right)=;\ \frac{15\frac{3}{4}}{\frac{7}{40}}:\frac{38}{7}=;$$

3) Νὰ ἐκτελεσθῶσι συντόμως οἱ ἑξῆς πολλαπλασιασμοί·

$45\times 5=;$	$187\times 5=;$	$240\times 5=;$
$3482\times 5=;$	$135\times 50=;$	$247\times 50=;$
$827\times 50=;$	$1253\times 50=;$	$385\times 500=;$
$4732\times 500=;$	$843\times 500=;$	$2452\times 500=$

Σημ. *Ἐπειδὴ ὁ* $5=\frac{10}{2}$, *διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμόν τινα ἐπὶ 5, ἤτοι ἐπὶ* $\frac{10}{2}$, *ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν αὐτὸν ἐπὶ 10 καὶ τὸ γινόμενον τοῦτο νὰ διαιρέσωμεν διὰ 2.*

Ὁμοίως παρατηροῦμεν ὅτι $50=\frac{100}{2}$ *καὶ* $500=\frac{1000}{2}$.

4) Νὰ ἐκτελεσθῶσι συντόμως οἱ ἑξῆς πολλαπλασιασμοί·

$148\times 15=;$	$4532\times 150=;$	$7424\times 150=;$
$1189\times 15=;$	$5067\times 15=;$	$1235\times 15=;$
$947\times 15=;$	$8254\times 150=;$	

Σημ. *Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ* $15=10+5=10+\frac{10}{2}$. *Ἄρα διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμόν τινα ἐπὶ 15, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν αὐτὸν πρῶτον ἐπὶ 10 καὶ δεύτερον νὰ λάβωμεν τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τούτου καὶ ἔπειτα νὰ προσθέσωμεν τὰ δύο μερικὰ γινόμενα.*

Ὁμοίως τὸ $150=100+\frac{100}{2}$.

5) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν συντόμως οἱ ἑξῆς πολλαπλασιασμοί·

$845\times 25=;$	$237\times 25=:$	$387\times 25=;$
$1786\times 25=;$	$2452\times 25=;$	$7483\times 25=;$
$383\times 125=;$	$187\times 125=;$	$2453\times 125=;$
$849\times 125=;$	$2373\times 125=;$	$8457\times 125=;$

Σημ. *Ἐπειδὴ ὁ* $25=\frac{100}{4}$, *διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμόν τινα* *ἐπὶ 25, ἤτοι ἐπὶ $\frac{100}{4}$, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν τοῦτον ἐπὶ 100 καὶ τὸ γινόμενον τοῦτο νὰ διαιρέσωμεν διὰ τοῦ 4.*

Ὁμοίως παρατηροῦμεν ὅτι $125=\frac{1000}{8}$.

6) Νὰ εὑρεθῶσι συντόμως τὰ ἑξῆς γινόμενα· $40\times\frac{3}{4}=$; $150\times\frac{2}{3}=$; $750\times\frac{3}{2}=$; $285\times\frac{5}{4}=$; $180\times\frac{4}{5}=$; $240\times\frac{5}{6}=$; $480\times\frac{4}{3}=$; $345\times1\frac{1}{3}=$; $793\times1\frac{1}{2}=$

Σημ. *Ἵνα πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμόν τινα ἐπὶ κλάσμα, οὗτινος ὁ ἀριθμητὴς εἶναι κατὰ μονάδα μικρότερος τοῦ παρονομαστοῦ, ὡς λ. χ. ἐπὶ $\frac{3}{4}$, ἀρκεῖ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ τούτου τὸ $\frac{1}{4}$ αὐτοῦ $\left\langle \text{διότι } \frac{3}{4}=\frac{4}{4}-\frac{1}{4}=1-\frac{1}{4}\right\rangle$. Ὁμοίως, ἵνα πολαπλασιάσωμεν ἀριθμόν τινα ἐπὶ κλάσμα, οὗτινος ὁ ἀριθμητὴς εἶναι κατὰ 1 μεγαλύτερος τοῦ παρονομαστοῦ, ὡς λ. χ. ἐπὶ $\frac{6}{5}$, ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸν δοθέντα ἀριθμὸν τὸ $\frac{1}{5}$ αὐτοῦ $\left\langle \text{διότι } \frac{6}{5}=\frac{5}{5}+\frac{1}{5}=1+\frac{1}{5}\right\rangle$.*

7) Νὰ ἐκτελεσθῶσι συντόμως αἱ ἑξῆς διαιρέσεις·

65:5=;	3125:25=;	15625:125=;
170:5=;	6250:125=;	9845:25=;
420:5=;	7340:25=;	145750:125=;

Σημ. *Ἐπειδὴ ὁ $5=\frac{10}{2}$, ἵνα διαιρέσωμεν ἀριθμόν τινα διὰ 5, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν αὐτὸν ἐπὶ 2 καὶ τὸ γινόμενον νὰ διαιρέσωμεν διὰ 10. Ὁμοίως $25=\frac{100}{4}$ καὶ $125=\frac{1000}{8}$.*

8) Νὰ ἐκτελεσθῶσι συντόμως αἱ ἑξῆς διαιρέσεις, $50:\frac{2}{3}=$; $276:\frac{7}{4}=$; $85:\frac{7}{8}=$; $145:1\frac{1}{4}=$; $232:\frac{5}{6}=$; $848:\frac{4}{5}=$; $135:\frac{5}{4}=$; $224:1\frac{1}{3}=$; $380:1\frac{1}{5}=$; (Παραβ. ἄσκησιν 6).

Λύσις προβλημάτων διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα.

1) Ὁ πῆχυς ὑφάσματός τινος τιμᾶται 12 δρχ. Πόσον τιμῶνται τὰ $\frac{5}{8}$ τοῦ πήχεως;

Τὸ πρόβλημα τοῦτο λύεται ἀκριβῶς, ὅπως καὶ τὸ πρόβλημα τὸ χρησιμεῦσαν διὰ τὴν γενίκευσιν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται συνήθως ὡς ἕπεται.

1 ἢ $\frac{8}{8}$ πήχ. τιμῶνται 12 δρχ.

τὸ $\frac{1}{8}$ » τιμᾶται $\frac{12}{8}$ »

καὶ τὰ $\frac{5}{8}$ » τιμῶνται $\frac{12\times5}{8}$

Ἡ τοιαύτη λύσις τῶν προβλημάτων καλεῖται λύσις διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα.

Παρατήρ. *Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ εὑρεθὲν ἐξαγόμενον* $\frac{12\times5}{8}$ *εἶναι τὸ γινόμενον τοῦ ἀριθμοῦ 12 ἐπὶ τὸ κλάσμα* $\frac{5}{8}$.

Καθ' ὅμοιον τρόπον λύεται τὸ πρόβλημα καὶ ὅταν ἐκφράσωμεν τὰ δεδομένα δι' ἀφῃρημένων ἀριθμῶν ὡς ἑξῆς·

2) Εὑρεῖν τὰ $\frac{5}{8}$ τοῦ ἀριθμοῦ 12.

Λύσις διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα.

τὰ $\frac{8}{8}$ τοῦ ἀριθμοῦ εἶναι 12

τὸ $\frac{1}{8}$ » » » $\frac{12}{8}$

τὰ $\frac{5}{8}$ » » » $\frac{12\times5}{8}$.

Τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον εὑρίσκεται καὶ ἀπ' εὐθείας διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ $12\times\frac{5}{8}$.

3) Ἡ 1 ὀκᾶ πράγματός τινος τιμᾶται $8\frac{4}{5}$ δρ. Πόσον τιμῶνται αἱ $7\frac{2}{3}$ ὀκ.;

Λύσις. Ἐν πρώτοις πρὸς εὐκολίαν τρέπομεν τοὺς μικτοὺς $8\frac{4}{5}$ δρχ. καὶ $7\frac{2}{3}$ ὀκ. εἰς τὰ κλάσματα $\frac{44}{5}$ δρ. καὶ $\frac{23}{3}$ ὀκ., ἔπειτα λύομεν τὸ πρόβλημα διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα ὡς ἑξῆς·

Ἡ 1 ὀκ. ἢ τὰ $\frac{3}{3}$ ὀκ. τιμῶνται $\frac{44}{5}$ δρ.

τὸ $\frac{1}{3}$ » » $\frac{44}{5\times3}$ δρ.

καὶ τὰ $\frac{23}{3}$ » τιμῶνται $\frac{44\times23}{5\times3}=21\frac{7}{15}$ δρχ.

Παρατήρ. — *Παρατηροῦμεν καὶ ἐνταῦθα ὅτι τὸ ἐξαγόμενον* $\frac{44\times23}{5\times3}$ *εὑρίσκεται καὶ ἀμέσως διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ* $\frac{44}{5}$ δρχ. ἐπὶ $\frac{23}{3}$ ὀκ.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον λύεται καὶ τὸ ἑξῆς γενικὸν πρόβλημα·

4) Εὑρεῖν ποῖον ἀριθμὸν ἀποτελοῦσι τὸ ἑπταπλάσιον καὶ τὰ $\frac{2}{3}$ ὁμοῦ λαμβανόμενα τοῦ ἀριθμοῦ $8\frac{4}{5}$.

Σκεπτόμενοι, ὡς καὶ ἐν τῷ προηγουμένῳ προβλήματι, εὑρίσκομεν ὅτι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι $\frac{44\times23}{5\times3}=21\frac{7}{15}$, ὅστις δύναται νὰ εὑρεθῇ καὶ ἀμέσως διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ $8\frac{4}{5}$ ἐπὶ $7\frac{2}{3}$, ἤτοι $8\frac{4}{5}\times7\frac{2}{3}$ $=\frac{44}{5}\times\frac{23}{3}=\frac{44\times23}{5\times3}$.

Ἐκ τῆς λύσεως τῶν ἀνωτέρω προβλημάτων συνάγομεν τοὺς ἑξῆς πρακτικοὺς κανόνας, οἵτινες εἶναι γενικώτεροι τῶν (§§ 43, 44).

155) «Ὅταν δίδηται ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος καὶ ζητῆται ἡ τιμὴ πολλῶν δεδομένων μονάδων ἢ δεδομένου μέρους τῆς μονάδος, κάμνομεν πολλαπλασιασμόν».

Πολλαπλασιαστέος εἶναι ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος καὶ πολλαπλασιαστὴς αἱ δεδομέναι μονάδες ἢ τὸ δεδομένον μέρος αὐτῆς.

156) «Ὅταν δίδηται ἀριθμός τις καὶ ζητῆται ὡρισμένον πολλαπλάσιον ἢ ὡρισμένον μέρος αὐτοῦ κάμνομεν πολλαπλασιασμόν».

5) Τὰ $\frac{4}{5}$ τῆς ὀκᾶς πράγματός τινος τιμῶνται 9 δρχ. Πόσον τιμᾶται ἡ 1 ὀκᾶ;

Λύσις. Ἀφοῦ τὰ $\frac{4}{5}$ ὀκ. τιμῶνται 9 δρχ.

τὸ $\frac{1}{5}$ » τιμᾶται $9:4$ ἢ $\frac{9}{4}$ δρχ.

καὶ τὰ $\frac{5}{5}$ ἢ ἡ 1 ὀκᾶ τιμῶνται $\frac{9\times5}{4}=\frac{45}{4}=11\frac{1}{4}$ δρχ.

Παρατ. *Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο* $\frac{9\times5}{4}$ *δύναται νὰ εὑρεθῇ καὶ ἀμέσως διὰ τῆς διαιρέσεως τοῦ 9 διὰ τοῦ* $\frac{4}{5}$, *ἤτοι*

$$9:\frac{4}{5}=9\times\frac{5}{4}=\frac{9\times5}{4}=11\,\frac{1}{4}.$$

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον λύεται καὶ τὸ ἑπόμενον γενικὸν πρόβλημα:

6) Εὑρεῖν ἀριθμόν, τοῦ ὁποίου τὰ $\frac{4}{5}$ ἀποτελοῦσι τὸν ἀριθμὸν 9.

Λύσις. Τὰ $\frac{4}{5}$ τοῦ ἀριθμοῦ εἶναι 9

τὸ $\frac{1}{5}$ » » » $\frac{9}{4}$

καὶ τὰ $\frac{5}{5}$ » » » $\frac{9\times5}{4}=11\frac{1}{4}$.

7) Οἱ 8 $\frac{3}{4}$ πήχ. τιμῶνται 14 $\frac{3}{5}$ δρχ. Πόσον τιμᾶται ὁ 1 πῆχυς;

Λύσις. Τρέπομεν τοὺς μικτοὺς εἰς κλασματικοὺς καὶ λύομεν τὸ πρόβλημα ὡς ἀνωτέρω.

τὰ $\frac{35}{4}$ τοῦ πήχ. τιμῶνται $\frac{73}{5}$ δρχ.

τὸ $\frac{1}{4}$ » » τιμᾶται $\frac{73}{5}:35$ ἢ $\frac{73}{5\times35}$ δραχ.

καὶ τὰ $\frac{4}{4}$ ἢ ὁ 1 πῆχ. τιμᾶται $\frac{73\times4}{5\times35}=1\frac{117}{175}$.

Παρατήρησις. *Τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο εὑρίσκεται καὶ ἀμέσως διὰ τῆς διαιρέσεως τοῦ* $\frac{73}{5}$ *διὰ τοῦ* $\frac{35}{4}$ $\left(\text{ἤτοι } \frac{73}{5}:\frac{35}{4}=\frac{73}{5}\times\frac{4}{35}=\frac{73\times4}{5\times35}=1\frac{117}{175}\right)$.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον λύεται καὶ τὸ ἑπόμενον γενικὸν πρόβλημα.

8) Τὸ 8πλάσιον καὶ τὰ $\frac{3}{4}$ ἀριθμοῦ τινος ἀποτελοῦσι τὸν ἀριθμὸν $14\frac{3}{5}$. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμὸς οὗτος;

Σκεπτόμενοι, ὡς καὶ ἐν τῷ ἀμέσως προηγουμένῳ προβλήματι, εὑρίσκομεν ὅτι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι $\frac{73\times4}{5\times35}=1\frac{117}{175}$, ἤτοι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ $14\frac{3}{5}$ διὰ τοῦ $8\frac{3}{4}$ ἤτοι $\left(14\frac{3}{5}:8\frac{3}{4}=\frac{73}{5}:\frac{35}{4}=\frac{73}{5}\times\frac{4}{35}=\frac{73\times4}{5\times35}\right)$.

Ἐκ τῆς λύσεως τῶν τεσσάρων τελευταίων προβλημάτων συνάγομεν τοὺς ἑξῆς πρακτικοὺς κανόνας γενικωτέρους τῶν (§§ 60,61).

157) «Ὅταν δίδηται ἡ τιμὴ τῶν πολλῶν μονάδων ἢ μέρους τῆς μονάδος καὶ ζητῆται ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος, κάμνομεν διαίρεσιν».

Διαιρετέος εἶναι ἡ δεδομένη τιμὴ καὶ διαιρέτης αἱ πολλαὶ δεδομέναι μονάδες ἢ τὸ δεδομένον μέρος αὐτῆς.

158) «Ὅταν δίδηται ὡρισμένον πολλαπλάσιον ἢ ὡρισμένον μέρος ἀριθμοῦ τινος καὶ ζητῆται νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμὸς οὗτος, κάμνομεν διαίρεσιν».

9) Ἐργάτης τις τελειώνει τὰ $\frac{3}{14}$ ἔργου τινὸς εἰς 1 ὥραν, εἰς πόσας ὥρας θὰ τελειώσῃ τὰ $\frac{7}{8}$ αὐτοῦ;

Λύσις. Ἀφ' οὗ τὰ $\frac{3}{14}$ τοῦ ἔργου τελειώνει εἰς 1 ὥραν

τὸ $\frac{1}{14}$ » » θὰ τελειώσῃ εἰς $1:3=\frac{1}{3}$ ὥρ.

καὶ τὰ $\frac{14}{14}$ ἢ ὅλον τὸ ἔργον » » $\frac{1\times14}{3}=\frac{14}{3}$ ὥρ.

τὸ $\frac{1}{8}$ τοῦ ἔργου » » $\frac{14}{3}:8$ ἢ $\frac{14}{8\times3}$ ὥρ.

καὶ τὰ $\frac{7}{8}$ τοῦ ἔργου θὰ τελειώσῃ εἰς $\frac{14\times7}{3\times8}=4\frac{1}{2}$ ὥρ.

Παρατήρ. *Παρατηροῦμεν ὅτι εἰς τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον φθάνομεν διὰ τῆς διαιρέσεως τοῦ $\frac{7}{8}$ διὰ τοῦ $\frac{3}{14}$ $\left(\text{ἤτοι } \frac{7}{8}:\frac{3}{14}=\frac{7}{8}\times\frac{14}{3}=\frac{7\times4}{8\times3}\right)$.*

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον λύεται καὶ τὸ ἑπόμενον γενικὸν πρόβλημα·

10) Ποσάκις ὁ ἀριθμὸς $\frac{3}{14}$ χωρεῖ εἰς τὸν $\frac{7}{8}$;

Ἐπαναλαμβάνοντες τὰς αὐτὰς σκέψεις εὑρίσκομεν ὅτι ὁ ἀριθμὸς $\frac{3}{14}$ χωρεῖ εἰς τὸν $\frac{7}{8}$, $\frac{14\times7}{3\times8}$ φοράς· ἤτοι ὅσον εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ $\frac{7}{8}$ διὰ τοῦ $\frac{3}{14}$ $\left(\text{ἤτοι } \frac{7}{8}:\frac{3}{14}=\frac{7}{8}\times\frac{14}{3}=\frac{3\times14}{8\times3}\right)$.

Ἐκ τῆς λύσεως τῶν δύο τελευταίων προβλημάτων συνάγομεν τοὺς ἑπομένους κανόνας γενικωτέρους τῶν (§ § 62, 63).

159) «Ὅταν δίδηται ἡ τιμὴ τῆς μονάδος καὶ ἡ τιμὴ πολλῶν μονάδων

ἢ μερῶν αὐτῆς (ἀγνώστου πλήθους),εὑρίσκομεν τὸ πλῆθος αὐτῶν διὰ τῆς διαιρέσεως».

Διαιρετέος εἶναι ἡ τιμὴ τῶν πολλῶν μονάδων (ἢ τῶν μερῶν τῆς μονάδος) καὶ διαιρέτης ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος.

160) «Ἵνα εὕρωμεν ποσάκις ἀριθμός τις χωρεῖ εἰς ἄλλον, διαιροῦμεν τὸν δεύτερον διὰ τοῦ πρώτου.»

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

α'.) Ἀπὸ μνήμης.

1) Εὑρεῖν πόσα λεπτὰ κάμνουσι α') τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς δρχ. β') τὰ $\frac{4}{5}$ αὐτῆς, γ') τὰ $\frac{7}{10}$, δ') τὰ $\frac{13}{20}$.

2) Εὑρεῖν πόσα δράμια κάμνουσι α') τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς ὀκᾶς. β') Τὰ $\frac{4}{5}$ αὐτῆς, γ') τὰ $\frac{5}{8}$, δ') τὰ $\frac{3}{10}$, ε') τὰ $\frac{7}{20}$, στ') τὰ $\frac{13}{40}$ ὀκ.

3) Εὑρεῖν τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ ἀριθμοῦ 40.

4) Εὑρεῖν τὰ $\frac{5}{6}$ τοῦ ἀριθμοῦ 60.

5) Εὑρεῖν τὸ διπλάσιον καὶ τὰ $\frac{3}{4}$ ὁμοῦ λαμβανόμενα τοῦ ἀριθμοῦ 40, ποῖον ἀριθμὸν ἀποτελοῦσιν ;

6) Εὑρεῖν τὸν ἀριθμόν, τοῦ ὁποίου τὰ $\frac{3}{5}$ εἶναι ὁ ἀριθμὸς 15.

7) Εὑρεῖν τὸν ἀριθμόν, τοῦ ὁποίου τὰ $\frac{4}{5}$ εἶναι ὁ ἀριθμὸς 20.

8) Πόσον τιμᾶται ἡ 1 ὀκᾶ πράγματός τινος, οὗτινος τὰ $\frac{4}{5}$ τιμῶνται 80 λεπτά

9) Πόσον τιμᾶται ὁ 1 πῆχυς ὑφάσματός τινος, τοῦ ὁποίου τὰ $\frac{5}{8}$ τοῦ πήχ. ἠγοράσαμεν 160 λεπτά ;

10) Ποῖον μέρος τῆς ὀκᾶς ἀποτελοῦσι α') τὰ 100 δράμια, β') τὰ 50 δραμ. γ'.) τὰ 80 δράμ. ;

11) Ποῖον μέρος τῆς δραχμῆς εἶναι α') τὰ 50 λεπτά, β') τὰ 25 λεπτά, γ') τὰ 80 λεπτά ;

12) Ποσάκις χωρεῖ ὁ ἀριθμὸς 20 εἰς τὸν 100 ;

13) Ποῖον μέρος τοῦ 40 εἶναι ὁ 8 ;

14) Ποῖον μέρος τοῦ 100 εἶναι ὁ 40 ;

β') Γραπτῶς.

1) Ὁ πῆχυς ὑφάσματός τινος τιμᾶται $2\frac{4}{5}$ δραχ., πόσον τιμῶνται οἱ $8\frac{5}{8}$ πήχ. ;

2) Μὲ 1 δραχμὴν ἀγοράζομεν $1\frac{5}{8}$ πήχ.· πόσους πήχεις ἀγοράζομεν μὲ $7\frac{9}{10}$ δρχ. ;

3) $5\frac{2}{5}$ ὀκ. τιμῶνται $18\frac{3}{5}$ δραχ. Πόσον τιμᾶται ἡ 1 ὀκᾶ ;

4) Μὲ 1 δραχμὴν ἀγοράζομεν $2\frac{4}{5}$ ὀκ., μὲ πόσας δραχμὰς ἀγοράζομεν $15\frac{5}{8}$ ὀκ. ;

5) Εὑρεῖν τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ ἀριθμοῦ 1500.

6) Ποῖον ἀριθμὸν ἀποτελοῦσι τὸ διπλάσιον καὶ τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ ἀριθμοῦ 693;

7) Μὲ $5\frac{3}{4}$ ἀγοράζομεν 1 ὀκᾶν πράγματός τινος· πόσας ὀκάδας θὰ ἀγοράσωμεν μὲ $78\frac{1}{2}$ δρχ.

8) Εὑρεῖν πόσον κάμνουσι τὰ $\frac{2}{3}$ τῶν $\frac{3}{4}$ τῶν $\frac{5}{7}$ τοῦ ἀριθμοῦ 560 (ἀπ. 260).

9) Τὰ $\frac{3}{4}$ μιᾶς δεξαμενῆς χωροῦσιν 900 ὀκ. Πόσας ὀκάδας χωρεῖ ὅλη ἡ δεξαμενή ; (ἀπ. 1200 ὀκ.).

10) Περιουσία τις ἀνέρχεται εἰς 48500 δρ. Πόσας δραχμὰς κάμνουσι α΄) τὰ $\frac{3}{5}$ καὶ β΄) τὰ $\frac{7}{10}$ αὐτῆς ; (ἀπ. α΄) 29100 δρ., β΄) 33950 δρχ.).

11) Τὰ $153\frac{1}{2}$ δράμια ποῖον μέρος τῆς ὀκᾶς ἀποτελοῦσιν ; $\left(\text{ἀπόκ. } \frac{307}{800}\right)$

12) Τὸ τριπλάσιον ἀριθμοῦ τινος προσλαβὸν καὶ τὰ $\frac{2}{3}$ αὐτοῦ ἀπετέλεσε τὸν ἀριθμὸν 1250. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμὸς οὗτος ; $\left(\text{ἀπ. } 340\frac{10}{11}\right)$.

13) Ἐργάτης τις ἐκτελεῖ εἰς μίαν ὥραν τὰ $\frac{2}{7}$ ἔργου τινός. Εἰς πόσας ὥρας θὰ ἐκτελέσῃ ὁλόκληρον τὸ ἔργον ; $\left(\text{ἀπ. } 3\frac{1}{2} \text{ ὥρ.}\right)$.

14) Κατὰ τὴν διάλυσιν καταστήματός τινος πωλεῖ ὁ ἰδιοκτήτης τὰ ἐμπορεύματά του εἰς τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς ἀρχικῆς τιμῆς των. Ποία εἶναι ἡ ἀρχικὴ ἀξία μεταξωτοῦ τινος ὑφάσματος, ὅπερ πωλεῖται πρὸς $12\frac{3}{20}$ δρχ. τὸν πῆχυν ; $\left(\text{ἀπ. } 16\frac{1}{5} \text{ δρχ.}\right)$.

15) Τεμάχιόν τι ὑφάσματος ἔχει μῆκος 200 πήχ. Ἐπωλήθησαν δὲ

διαδοχικῶς τὰ $\frac{1}{4}$ καὶ τὰ $\frac{2}{5}$ αὐτοῦ. Πόσοι πήχεις ἔμειναν; (ἀπ. 70 πήχ.)

16) Ἐὰν ὁ 1 πῆχυς ὑφάσματός τινος τιμᾶται $8\frac{1}{2}$ δρχ., πόσον τιμῶνται 3 τεμάχια ἐξ ὧν ἕκαστον ἀποτελεῖται ἐκ $45\frac{3}{4}$ πήχ.; $\left(\text{ἀπ. } 1166\frac{5}{8} \text{ δρχ.}\right)$.

2) 17) Ῥάπτης τις εἶχεν ἀγοράσει $85\frac{3}{4}$ πήχ. τσόχας καὶ ἐπώλησεν ἐξ αὐτῆς $16\frac{3}{4}$ πήχ. διὰ δὲ τοῦ ὑπολοίπου κατεσκεύασεν ἐνδυμασίας. Ἐὰν δι' ἑκάστην ἐνδυμασίαν χρειάζωνται $5\frac{3}{4}$ πήχ., πόσαι εἶναι αἱ κατασκευασθεῖσαι ἐνδυμασίαι; (ἀπ. 12 ἐνδυμ.).

18) Οἰκία τις τριώροφος ἔχει ἴσον ἀριθμὸν παραθύρων μετ' ἰσαρίθμων ὑελοπινάκων. Τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ πρώτου πατώματος εἶχον 54 ὑελοπίνακας. Πόσους ὑελοπίνακας ἔχουσι πάντα τὰ παράθυρα καὶ πόσας δραχμὰς στοιχίζουσιν οὗτοι ἐὰν ἕκαστος ἐξ αὐτῶν πωλῆται $\frac{3}{5}$ τῆς δραχμῆς; $\left(\text{ἀπ. 216 ὑελοπ., } 129\frac{3}{5} \text{ δρχ.}\right)$

3) 19) Ἔμπορός τις ἠγόρασεν ὕφασμα $145\frac{3}{8}$ πήχεις πρὸς $10\frac{1}{2}$ δρχ. τὸν πῆχυν, ἐπώλησε δ' ἐξ αὐτῶν τοὺς μὲν $38\frac{1}{2}$ πήχ. πρὸς 12 δραχ., τοὺς δὲ ὑπολοίπους πρὸς $10\frac{3}{4}$ δραχ. τὸν πῆχυν. Πόσας δραχμὰς ἐκέρδισεν; $\left(\text{ἀπ. } 83\frac{25}{32} \text{ δρ.}\right)$.

4) 20) Πατήρ τις ἐπέτρεψεν εἰς τὰ 4 τέκνα του ν' ἀγοράσωσι χρυσοῦν ὡρολόγιον. Τὸ πρῶτον τέκνον ἐπλήρωσεν $25\frac{1}{5}$ δραχ., τὸ δεύτερον $17\frac{1}{4}$ δρ., τὸ γ') $20\frac{1}{8}$ δραχ. καὶ τὸ δ') ἔδωκε τὰ $\frac{5}{8}$ τῶν ὅσων ἔδωκαν τὰ τρία πρῶτα ὁμοῦ. Πόσον ἀξίζει τὸ ὡρολόγιον $\left(\text{ἀπ. } 101\frac{49}{320}\right)$.

5) 21) Τρεῖς συνεταῖροι κατέβαλον πρὸς ἀγορὰν κτήματος 45000 δρχ. ἐν ὅλῳ. Ὁ μὲν α΄ κατέβαλε τὸ $\frac{1}{3}$ τῆς ἀξίας ταύτης, ὁ δὲ β') $\frac{14}{42}$ καὶ ὁ γ') τὸ ὑπόλοιπον. Πόσας δραχμὰς κατέβαλεν ἕκαστος; (ἀπ. 15000).

22) Μία ἁμαξοστοιχία διατρέχει τὸ ἀπ' Ἀθηνῶν μέχρι Λαρίσσης διάστημα εἰς $13\frac{1}{4}$ ὥρ. Εἰς πόσας ὥρας θὰ διατρέξῃ αὕτη τὸ ἀπ' Ἀθηνῶν μέχρι Λεβαδείας διάστημα, ὅπερ ἀποτελεῖ τὰ $\frac{7}{20}$ τοῦ πρώτου διαστήματος; $\left(\text{ἀπ. } 4\frac{51}{80} \text{ ὥρ.}\right)$.

6 23) Ἄνθρωπός τις ὥρισεν ἐν τῇ διαθήκῃ του νὰ μερισθῇ μετὰ τὸν θάνατόν του ἡ περιουσία του ὡς ἑξῆς· Ὁ μὲν υἱός του νὰ λάβῃ τὰ $\frac{2}{5}$ αὐτῆς, ἡ δὲ θυγάτηρ του τὰ $\frac{3}{8}$ αὐτῆς καὶ τὸ ὑπόλοιπον νὰ λάβῃ ἡ σύζυγος. Ἡ σύζυγος ἔλαβε 3150 δρχ.—Ποία ἦτο ἡ περιουσία καὶ πόσα ἔλαβεν ἕκαστον τῶν τέκνων του;

(Ἀπ. Ἡ περιουσία 14,000 δρ., ὁ υἱὸς ἔλαβεν 5600, ἡ δὲ θυγάτηρ 5250).

7 24) Ἐκέρδισέ τις εἰς δίκην ποσόν τι καὶ τὰ μὲν $\frac{2}{5}$ αὐτοῦ ἐκράτησεν ὁ δικηγόρος διὰ δικαστικὰ ἔξοδα, ἀφ' οὗ δὲ ἐπλήρωσε τὸ χρέος του ἐξ 650 δρχ. εἶχε 3450 δρχ. Ποῖον ἦτο τὸ ποσὸν ὁλόκληρον ὅπερ ἐκέρδισεν ἐν τῇ δίκῃ; (ἀπ. $6833\frac{1}{3}$ δρχ.).

8 25) Βαρέλιον πλῆρες ἐλαίου ζυγίζει ἐν ὅλῳ $285\frac{1}{4}$ ὀκ., τὸ δὲ βάρος τοῦ βαρελίου ἀποτελεῖ τὰ $\frac{2}{29}$ τοῦ ὅλου βάρους. α') Πόσον εἶναι τὸ καθαρὸν βάρος τοῦ ἐλαίου; β') Πόσον ἀξίζει τοῦτο πρὸς $1\frac{1}{20}$ δραχ. κατ' ὀκᾶν; (ἀπ. α') $265\frac{67}{116}$ ὀκ., β') $278\frac{1987}{2320}$ δρχ.).

26) Ἄνθρωπός τις ταξειδεύει ἐφ' ἁμάξης ἐπί τινος ὁδοῦ δενδροφυτευμένης μήκους 25262 μ. καὶ ἐμέτρησεν ἐπὶ τῆς μιᾶς δενδροστοιχίας 4000 δένδρα ἐν ᾧ εἶχε διατρέξει τὰ $\frac{5}{8}$ τῆς ὁδοῦ. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπ' ἀλλήλων εὑρίσκονται τὰ δένδρα ταῦτα; (ὑποτίθεται ὅτι ἀπέχουσιν ἀπ' ἀλλήλων ἴσην ἀπόστασιν). (ἀπ. $3\frac{3031}{3200}$ μ.).

27) Τρεῖς ἄνθρωποι διεμοίρασαν ἀγρόν τινα. Ὁ α') ἔλαβε τὸ $\frac{1}{3}$ αὐτοῦ, ὁ β') τὸ $\frac{1}{4}$ καὶ ὁ γ') τὸ ὑπόλοιπον ὅπερ ἦτο $15\frac{3}{4}$ στρέμμ. Ἐκ πόσων στρεμμάτων ἀποτελεῖται ὁλόκληρος ὁ ἀγρὸς καὶ πόσον ἀξίζει ἕκαστον μερίδιον, ἐὰν τὸ στρέμμα ἐκτιμᾶται 35 δραχ.; (ἀπ. $37\frac{4}{5}$ στρέμ. ὁ α' $12\frac{3}{5}$ στρέμ. ἀξίας 441 δρ. ὁ β'.) $9\frac{9}{10}$ στρέμ. ἀξίας δρχ. $330\frac{3}{4}$ καὶ τοῦ γ'. ἀξίας $551\frac{1}{4}$ δραχ.).

9 28) Ἐργάτης τις ἐκτελεῖ ἔργον τι εἰς $8\frac{3}{4}$ ὥρας· πόσον μέρος τοῦ ἔργου ἐκτελεῖ εἰς 1 ὥραν καὶ πόσον εἰς $3\frac{2}{3}$ ὥρας;

(ἀπ. $\frac{4}{35}$ τοῦ ἔργ., $\frac{44}{105}$ τοῦ ἔργ.).

29) Τρεῖς ἐργάται ἐκτελοῦσιν ἔργον τι ὁ μὲν α') μόνος του εἰς 20

ὥρας, ὁ δὲ β') εἰς 25 ὥρας καὶ ὁ γ') εἰς 30 ὥρας. Εἰς πόσας ὥρας καὶ οἱ τρεῖς ὁμοῦ ἐκτελοῦσιν τὸ ἔργον τοῦτο; $\left(\text{ἀπ. } 8\frac{4}{37} \text{ ὥρ.}\right)$.

30) Δεξαμενή τις γεμίζει ὑπὸ δύο κρουνῶν ὁμοῦ εἰς 25 ὥρας, ἐνῷ ὁ α' ἐξ αὐτῶν γεμίζει τὴν δεξαμενὴν εἰς 40 ὥρας. Εἰς πόσας ὥρας θὰ γεμίσῃ ὁ β' κρουνὸς τὴν δεξαμενὴν ταύτην; $\left(\text{ἀπ. } 66\frac{2}{3} \text{ ὥρ.}\right)$.

31) Ὁ Φρούραρχος μιᾶς πόλεως ἀπέστειλε τὸ $\frac{1}{20}$ τῶν ἀνδρῶν του πρὸς φρούρησιν τῶν δημοσίων καταστημάτων καὶ τὸ $\frac{1}{40}$ πρὸς περιπολίαν ἐν τῇ πόλει· ἦσαν δὲ καὶ τὸ $\frac{1}{50}$ τῶν ἀνδρῶν του ἐν τῷ νοσοκομείῳ. Οὕτως ἀπέμειναν ἐν τῷ στρατῶνι 180 ἄνδρες. Ἐκ πόσων ἀνδρῶν συνέκειτο ἡ φρουρά; (ἀπ. 200 ἄνδρες).

32) Ἐκ τῶν μήλων μηλέας τινὸς ἐσάπισε τὸ $\frac{1}{5}$, τὰ δὲ $\frac{3}{8}$ ἐχρησιμοποίησεν ὁ κηπουρὸς καὶ ἐκ τῶν ἐπιλοίπων πωληθέντων πρὸς $\frac{4}{5}$ δρ. κατ' ὀκᾶν εἰσέπραξεν οὗτος 160 δρχ. Πόσας ὀκάδας μήλων παρήγαγεν ἡ μηλέα αὕτη; $\left(\text{ἀπ. } 470\frac{10}{17} \text{ ὀκ.}\right)$.

33) Ἠγόρασέ τις δύο βόας ἀντὶ 1500 δραχ. Ἡ ἀξία τοῦ ἑνὸς ἰσοῦται πρὸς τὸ $\frac{5}{8}$ τῆς ἀξίας τοῦ ἑτέρου. Πόσον ἀξίζει ἑκάτερος;

$\left(\text{ἀπ. } 923\frac{1}{3} \text{ δρχ., } 576\frac{12}{13} \text{δρχ.}\right)$.

34) Δύο ὑδρόμυλοι ἀλέθουσιν ὁ μὲν 8450 ὀκ. σίτου εἰς 14 ὥρας, ὁ δὲ 9475 ὀκ. εἰς 18 ὥρας. Πόσον σίτον ἀλέθουσιν ὁμοῦ εἰς μίαν ὥραν, πόσον εἰς $4\frac{3}{4}$ ὥρας καὶ εἰς πόσας ὥρας θὰ ἀλέσωσι καὶ οἱ δύο ὁμοῦ 15400 ὀκ. σίτου;

$\left(\text{ἀπ. } 1129\frac{121}{126} \text{ ὀκ. εἰς 1 ὥραν, } 5367\frac{157}{504} \text{ εἰς } 4\frac{3}{4} \text{ ὥρας, } 13\frac{3681}{5695} \text{ ὥρας.}\right)$.

35) Ἁμαξοστοιχία τις ἀναχωρεῖ ἐξ Ἀθηνῶν εἰς τὰς $7\frac{1}{2}$ ὥρ. π. μ. μὲ ταχύτητα 35 χιλιομέτρων καθ' ὥραν. Κατὰ τὴν αὐτὴν ἡμέραν ἀνεχώρησεν ἐξ Ἀθηνῶν πρὸς τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν ἄλλη τις ἁμαξοστοιχία κατὰ τὴν 5ην ὥρ. π. μ. καὶ μὲ ταχύτητα 25 χιλιομ. Κατὰ ποίαν ὥραν θὰ συναντηθῶσιν αὗται καὶ εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἐξ Ἀθηνῶν;

$\left(\text{ἀπ. } 1\frac{3}{4} \text{ ὥρ. μ. μ. β') } 218\frac{3}{4} \text{ χιλιομέτρων}\right)$.

36) Καλὸς σίτος ἀποδίδει ἄλευρον τὰ $\frac{19}{25}$ τοῦ βάρους του. Πόσα κοιλὰ

σίτου ἐξ ὧν ἕκαστον ζυγίζει 21 $\frac{3}{4}$ ὀκ. χρειάζονται διὰ νὰ λάβωμεν 178 ὀκ. ἀλεύρου ; $\left(\text{ἀπ.}\ 10\ \frac{1270}{1653}\ \text{κοιλά}\right)$.

37) Μία ἁμαξοστοιχία ἀνεχώρησεν εἰς τὰς 8 $\frac{1}{4}$ π. μ. ἔκ τινος σταθμοῦ μὲ ταχύτητα 26 χιλιομ. καθ' ὥραν καὶ μετὰ 3 $\frac{3}{4}$ ὥρας ἐκπέμπεται ἀτμάμαξα ἥτις πρέπει νὰ φθάσῃ τὴν ἁμαξοστοιχίαν εἰς 4 $\frac{1}{2}$ ὥρας. Ποίαν ταχύτητα καθ' ὥραν πρέπει νὰ ἔχῃ αὐτή; $\left(\text{ἀπ.}\ 50\frac{4}{15}\ \text{χιλ.}\right)$.

38) Μοιράζομεν τὸ ποσὸν 7500 δραχ. εἰς 4 ἀνθρώπους· ὁ α' λαμβάνει τὰ $\frac{5}{16}$ τοῦ ποσοῦ τούτου, ὁ β') τὰ $\frac{3}{8}$ τοῦ ὑπολοίπου καὶ ὁ γ') τὸ $\frac{1}{2}$ τοῦ νέου ὑπολοίπου, καὶ ὁ τέταρτος τὸ τελευταῖον ὑπόλοιπον. Πόσας δραχμὰς λαμβάνει ἕκαστος;
$\left(\text{'Απ. ὁ α')}\ 2343\frac{3}{4}\ \text{δρχ., β')}\ 1933\frac{19}{32},\ \text{γ')}\ 1611\frac{21}{24},\ \text{ὁ δ')}\ 1611\frac{21}{24}\ \text{δρ.}\right)$.

39) Διὰ τὴν ἀγορὰν ἑνὸς κτήματος ὑπὸ 3 ἀδελφῶν, ὁ μὲν α' κατέβαλεν τὰ $\frac{2}{5}$ τῆς ἀξίας, ὁ δὲ β') τὰ $\frac{3}{8}$ τοῦ ὑπολοίπου καὶ ὁ γ') κατέβαλε τὸ ὑπόλοιπον τῆς ἀξίας, ὅπερ ἦτο 8500 δραχ. Πόση εἶναι ἡ ὅλη ἀξία τοῦ κτήματος καὶ πόσας δραχμὰς κατέβαλεν ἕκαστος ;
$\left(\text{'Απ.}\ 22666\frac{2}{3}\ \text{δραχ., ὁ α')}\ 9066\ \frac{2}{3},\ \text{ὁ β')}\ 5100\ \text{δραχ.}\right)$.

Χρῆσις τύπων ἐν τῇ λύσει προβλημάτων ἐν οἷς τὰ δεδομένα παρίστανται διὰ γραμμάτων.

161) Ἔστω πρὸς λύσιν τὸ ἑξῆς πρόβλημα.

Εἶχέ τις 12 δρχ. καὶ ἐξώδευσεν ἐξ αὐτῶν 3 $\frac{2}{5}$ δραχ. πρὸς ἀγορὰν κρέατος καὶ 4 $\frac{1}{2}$ πρὸς ἀγορὰν ἄλλων εἰδῶν. Πόσαι δραχμαὶ τῷ ἔμειναν;

Ἐν τῷ προβλήματι τούτῳ (ὡς καὶ εἰς πᾶν ἄλλο) διακρίνομεν ἀφ' ἑνὸς μὲν τὰ δεδομένα $\left(12\ \text{δραχ.},\ 3\frac{2}{5}\ \text{δραχ.},\ 4\ \frac{1}{2}\ \text{δραχ.}\right)$ καὶ ἀφ' ἑτέρου τὸ ζητούμενον (πόσαι δραχμαὶ τῷ ἔμειναν).—Πρὸς εὕρεσιν τοῦ ζητουμένου ἀρκεῖ προφανῶς νὰ προσθέσωμεν πρῶτον τὰς δαπανηθείσας δραχμὰς $3\ \frac{2}{5}+4\frac{1}{2}=7\frac{9}{10}$ δραχ. καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν $7\ \frac{9}{10}$ ν' ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ ἀρχικοῦ ποσοῦ 12 δραχ. ὅτε θὰ λάβωμεν 12 δρχ. — 7 $\frac{9}{10}$ δραχ. $=4\frac{1}{10}$ δρχ.

Παρατηροῦμεν ὅτι πρὸς εὕρεσιν τοῦ ζητουμένου ἐγένοντο διάφοροι συλλογισμοὶ καὶ διάφοροι πράξεις ἐπὶ τῶν δεδομένων τοῦ προβλήματος. Ἐν τῷ εὑρεθέντι ὅμως ἐξαγομένῳ $4\frac{1}{10}$ δραχ. οὐδὲν ἴχνος τῶν γενομένων πράξεων διασώζεται.

Ἐὰν ἐν τῷ προβλήματι τούτῳ μόνον οἱ δεδομένοι ἀριθμοὶ μεταβληθῶσι, τότε πρὸς εὕρεσιν τοῦ ζητουμένου εἶναι ἀνάγκη νὰ ἐπαναλάβωμεν τοὺς αὐτοὺς συλλογισμοὺς καὶ τὰς αὐτὰς πράξεις. Δυνάμεθα ὅμως νὰ εὕρωμεν τρόπον δι' οὗ πάντα τὰ προβλήματα τοῦ αὐτοῦ εἴδους νὰ λύωνται συντόμως καὶ χωρὶς νὰ εὑρισκώμεθα εἰς τὴν ἀνάγκην νὰ ἐπαναλάβωμεν τοὺς αὐτοὺς συλλογισμοὺς κατὰ τὴν λύσιν ἑκάστου τοιούτου προβλήματος.

Πρὸς τοῦτο παριστῶμεν τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος διὰ τῶν γραμμάτων α, β, γ, δ κτλ. Οὕτω π. δ. χ. λέγοντες α δραχ. ἐννοοῦμεν ἀριθμόν τινα δραχμῶν ὡς 5 δραχ. ἢ $7\frac{3}{4}$ δραχ. κτλ. ὁμοίως λέγοντες β ὀκάδας ἐννοοῦμεν ἀριθμόν τινα ὀκάδων ὡς 18 ὀκ. ἢ $219\frac{3}{4}$ ὀκ. κ.τ.λ.

Τὰ προβλήματα εἰς τὰ ὁποῖα τὰ δεδομένα παρίστανται διὰ γραμμάτων καλοῦνται *γενικὰ προβλήματα.*

Ἔστω πρὸς λύσιν τὸ ἑξῆς γενικὸν πρόβλημα·

Πρόβλημα 1ον). Εἶχέ τις α δραχμὰς καὶ ἐξώδευσε β δραχμὰς διὰ τὴν ἀγορὰν κρέατος καὶ γ δραχ. διὰ τὴν ἀγορὰν ἄλλων εἰδῶν. Πόσαι δραχμαὶ τῷ ἔμειναν;

Λύσις. — Εὑρίσκομεν πρῶτον τὸ ἄθροισμα τῶν δαπανηθεισῶν δραχμῶν β καὶ γ. Ἐπειδὴ ὅμως ἡ πρόσθεσις δὲν δύναται νὰ ἐκτελεσθῇ, ἐφ' ὅσον δὲν ὁρισθῶσιν οἱ ἀριθμοί, τοὺς ὁποίους παριστῶσι τὰ γράμματα β καὶ γ περιοριζόμεθα εἰς τὸ νὰ σημειώσωμεν τὴν πρᾶξιν καὶ τὸ ἐξαγόμενον αὐτῆς ὡς ἑξῆς $(\beta+\gamma)$. Μετὰ ταῦτα τὸ ἄθροισμα τοῦτο ἀφαιρούμενον ἀπὸ τοῦ ἀρχικοῦ ποσοῦ α δραχ. μᾶς δίδει τὸ ζητούμενον ὑπόλοιπον, ὅπερ σημειοῦμεν ὡς ἑξῆς· $\alpha-(\beta+\gamma)$.

Ἐν τῷ ἐξαγομένῳ τούτῳ διατηροῦνται, ὡς βλέπομεν, πᾶσαι αἱ πράξεις, αἵτινες εἶναι ἀνάγκη νὰ ἐκτελεσθῶσιν ἐπὶ τῶν δεδομένων τοῦ προβλήματος, διὰ νὰ προσδιορισθῇ τὸ ζητούμενον.

162) Ἡ τοιαύτη σημείωσις τῶν ἐκτελεστέων πράξεων ἀποτελεῖ *παράστασιν ἢ τύπον*, διὰ τοῦ ὁποίου ἐπιτυγχάνομεν τὴν λύσιν παντὸς προβλήματος ὁμοίου πρὸς τὸ θεωρηθὲν χωρὶς νὰ ἐπαναλάβωμεν τοὺς αὐτοὺς συλλογισμούς.

Οὕτω π. δ. χ., ἐὰν εἰς τὸν τύπον $\alpha-(\beta+\gamma)$ ἀντικαταστήσωμεν τὰ γράμματα διὰ τῶν ἀντιστοίχων δεδομένων (α διὰ τοῦ 12 δραχ., τὸ β διὰ τοῦ $3\frac{2}{5}$ δρχ. καὶ τὸ γ διὰ τοῦ $4\frac{1}{2}$ δρχ.) τοῦ ἐν τῇ ἀρχῇ ἀπ' εὐθείας λυθέντος προβλήματος, θὰ ἔχωμεν $12-3\left(\frac{2}{5}+4\frac{1}{2}\right)=12-\frac{9}{10}=4\frac{1}{10}$ δρχ.

Πρόβλημα. 2) Ἔμπορός τις εἶχε τὴν πρωΐαν τῆς Δευτέρας α δραχμὰς ἐν τῷ χρηματοκιβωτίῳ του. Εἰσέπραξε δὲ κατὰ τὸ διάστημα τῆς ἡμέρας β δραχ. ἀπό τινα χρεώστην, γ δραχ. ἀπὸ ἄλλον καὶ δ δραχ. ἀπὸ τρίτον. Ἐπλήρωσε δὲ ε δραχ. εἴς τινα, ζ δρχ. εἰς ἄλλον καὶ η δραχ. εἰς τρίτον τινά. Πόσα χρήματα ἔχει ἐν τῷ χρηματοκιβωτίῳ του τὴν ἑσπέραν τῆς Δευτέρας ;

Λύσις.—Εἰς τὰς α δραχ., ἃς τὴν πρωΐαν τῆς Δευτέρας ἔχει ἐν τῷ χρηματοκιβωτίῳ θὰ προσθέσωμεν τὰς εἰσπραχθείσας δραχμάς, ὅτε λαμβάνομεν ὡς ἄθροισμα τὸ $(α+β+γ+δ)$.

Ἔπειτα ἀπὸ τούτου θὰ ἀφαιρέσωμεν ὅλας τὰς δραχμάς. τὰς ὁποίας ἐπλήρωσε κατὰ τὸ διάστημα τῆς ἡμέρας, ἤτοι τὸ ἄθροισμα $(ε+ζ+η)$, οὕτω λαμβάνομεν τὸ ζητούμενον $(α+β+γ+δ)-(ε+ζ+η)$.

Ἐφαρμογή.—Ὁ ἔμπορος οὗτος ἔχει ἐν τῷ χρηματοκιβωτίῳ του τὴν πρωΐαν τῆς Δευτέρας $545\frac{3}{4}$ δραχ. καὶ εἰσέπραξε κατὰ τὸ διάστημα τῆς ἡμέρας τὰ ἑξῆς ποσά· 1) $135\frac{1}{2}$ δραχ., 2) $83\frac{2}{5}$ καὶ 3) 19 δραχ., ἐπλήρωσε δὲ τὰ ἑξῆς· 1) $73\frac{1}{2}$ δραχ.· 2) $185\frac{3}{5}$ καὶ 3) 237 $\frac{1}{4}$ δραχ. Πόσας δραχμὰς ἔχει τὴν ἑσπέραν τῆς Δευτέρας ;

Κατὰ τὸν προηγούμενον τύπον θὰ ἔχωμεν $\left(545\frac{3}{4}+135\frac{1}{2}+83\frac{2}{5}+19\right)-\left(73\frac{1}{2}+185\frac{3}{5}+237\frac{1}{4}\right)=783\frac{13}{20}-496\frac{7}{20}=287\frac{3}{10}$ δραχ.

Πρόβλημα 3) Ἡ ὀκᾶ πράγματός τινος τιμᾶται α δραχ. Πόσον τιμῶνται αἱ β ὀκάδες ;

Λύσις.—Ἀφ' οὗ ἡ 1 ὀκᾶ τιμᾶται α δραχ., αἱ 2 ὀκ. θὰ τιμῶνται $2\times α$ ἢ 2.α, αἱ 3 ὀκ. θὰ τιμῶνται $3\times α$ ἢ 3. α καὶ ἐν γένει αἱ β ὀκ. θὰ τιμῶνται $β\times α$ ἢ β. α δραχμάς.

Ἐφαρμογή.—Ἡ 1 ὀκᾶ πράγματός τινος τιμᾶται $5\frac{3}{4}$ δραχ.· πόσον τιμῶνται αἱ $8\frac{1}{2}$ ὀκ. ;

Λύσις· (διὰ τοῦ τύπου α. β.) $α.β=5\frac{3}{4}\times 8\frac{1}{2}=48\frac{7}{8}$ δραχ.

Σημ.. *Διὰ τοῦ τύπου τούτου λύονται πάντα τὰ προβλήματα πολλαπλασιασμοῦ τὰ ὁριζόμενα διὰ τῶν κανόνων (§ 153.154).*

Πρόβλημα 4). Οἱ β πήχεις πράγματός τινος τιμῶνται α δραχ. Πόσον τιμᾶται ὁ 1 πῆχυς ;

Λύσις. Ἐὰν ἠγοράζομεν 2 πήχεις μὲ α δρχ., ὁ 1 πῆχυς θὰ ἐτιμᾶτο προφανῶς $α:2$ ἢ $\frac{α}{2}$. Ὁμοίως ἐὰν ἠγοράζομεν 3 πήχ. ὁ 1 τούτων θὰ ἐτιμᾶτο $\alpha : 3$ ἢ $\frac{\alpha}{3}$ δραχ. καὶ ἐν γένει ἐὰν ἀγοράσωμεν β πήχ. μὲ α δραχ. ὁ 1 πῆχυς θὰ τιμᾶται $\alpha : \beta$ ἢ $\frac{\alpha}{\beta}$.

Ἐφαρμογή.—Οἱ $7\frac{1}{2}$ πήχ. ὑφάσματός τινος ἐπωλήθησαν ἀντὶ $25\frac{3}{4}$ δραχ. Πόσον ἐπωλήθη ὁ 1 πῆχ.;

Λύσις (διὰ τοῦ τύπου $\frac{\alpha}{\beta}$). $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{25\frac{3}{4}}{7\frac{1}{2}} = \frac{103}{4} \times \frac{2}{15} = 3\frac{13}{30}$

Σημ. *Διὰ τοῦ τύπου τούτου λύονται πάντα τὰ προβλήματα μερισμοῦ τὰ ὁριζόμενα διὰ τῶν κανόνων (§§ 155,156) (οἱ ἀριθμοὶ α καὶ β εἶναι ἑτεροειδεῖς, ὅταν εἶναι συγκεκριμένοι).*

Πρόβλημα 5). Ἐργάτης τις λαμβάνει β δραχ. ἡμερομίσθιον. Πόσας ἡμέρας πρέπει νὰ ἐργασθῇ, διὰ νὰ λάβῃ α δραχμάς;

Λύσις. Ἐὰν τὸ ἡμερομίσθιον ἦτο 2 δραχ., τότε ἔπρεπε νὰ ἐργασθῇ τόσας ἡμέρας, ὅσας φορὰς χωροῦσιν αἱ 2 εἰς τὰς α δραχμάς, ἤτοι $\alpha : 2$ ἢ $\frac{\alpha}{2}$· τώρα λαμβάνει τὴν ἡμέραν β δραχ. ἑπομένως, διὰ νὰ λάβῃ τὰς α δραχ., θὰ ἐργασθῇ τόσας ἡμέρας, ὅσας φορὰς χωρεῖ ὁ β εἰς τὸν α ἤτοι

$$\alpha : \beta \text{ ἢ } \frac{\alpha}{\beta}.$$

Ἐφαρμογή. Ἐργάτης τις λαμβάνει ἡμερομίσθιον $5\frac{1}{4}$ δραχ. Πόσας ἡμέρας θὰ ἐργασθῇ, διὰ νὰ λάβῃ $52\frac{1}{2}$ δραχμάς;

Λύσις διὰ τοῦ τύπου $\frac{\alpha}{\beta}$.

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{52\frac{1}{2}}{5\frac{1}{4}} = \frac{105}{2} \times \frac{4}{21} = \frac{210}{21} = 10 \text{ ἡμέραι.}$$

Σημ. *Διὰ τοῦ τύπου τούτου λύονται πάντα τὰ προβλήματα τὰ ὁριζόμενα διὰ τῶν κανόνων (§§ 157,158) (οἱ ἀριθμοὶ α καὶ β εἶναι ὁμοειδεῖς, ὅταν εἶναι συγκεκριμένοι).*

Πρόβλημα 6). Οἱ α πήχεις ὑφάσματός τινος τιμῶνται β δραχ., ἐδαπανήσαμεν διὰ τὴν μεταφορὰν αὐτῶν γ δραχ. καὶ ἐπληρώσαμεν διὰ δασμὸν δ δραχ.· πόσον μᾶς στοιχίζει ὁ πῆχυς τοῦ ὑφάσματος τούτου;

Λύσις. Οἱ α πήχεις στοιχίζουσιν $(\beta+\gamma+\delta)$ δραχ.· ἑπομένως ὁ 1 πῆχυς στοιχίζει $\frac{\beta+\gamma+\delta}{\alpha}$.

Ἐφαρμογή.—Ἠγοράσαμεν $8\frac{2}{3}$ πήχ. ὑφάσματός τινος ἀντὶ $45\frac{3}{4}$ δραχ. καὶ ἐδαπανήσαμεν διὰ τὴν μεταφορὰν $12\frac{1}{2}$ δραχ. καὶ ἐπληρώσαμεν διὰ δασμὸν $18\frac{2}{5}$ δραχ.—Πόσον μᾶς στοιχίζει ὁ 1 πῆχυς;

Λύσις διὰ τοῦ τύπου $\frac{\beta+\gamma+\delta}{\alpha}$.

$$\frac{\beta+\gamma+\delta}{\alpha}=\frac{45\frac{3}{4}+12\frac{1}{2}+18\frac{2}{5}}{8\frac{2}{3}}=8\frac{419}{520}\text{ δραχ.}$$

Πρόβλημα 7) Αἱ α ὀκ. σίτου ἀνταλλάσσονται πρὸς β ὀκ. κριθῆς, τῆς ὁποίας ἡ ὀκᾶ ἀξίζει γ δραχ. Πόσον ἀξίζει ἡ 1 ὀκᾶ σίτου;

Λύσις. Ἀφοῦ ἡ 1 ὀκᾶ κριθῆς ἀξίζει γ δραχ., αἱ β ὀκ. τιμῶνται γ. β δραχ.· αὕτη εἶναι καὶ ἡ τιμὴ τῶν α ὀκάδ. σίτου. Ἑπομένως ἡ μία ὀκᾶ σίτου ἀξίζει $\frac{\beta.\gamma}{\alpha}$.

Ἐφαρμογή. Αἱ $15\frac{3}{5}$ ὀκ. σίτου ἀνταλλάσσονται μὲ $28\frac{1}{2}$ ὀκ. κριθῆς, τῆς ὁποίας ἡ ὀκᾶ ἀξίζει $\frac{1}{5}$ δραχ. Πόσον ἀξίζει ἡ ὀκᾶ τοῦ σίτου;

Λύσις· (διὰ τοῦ τύπου $\frac{\beta.\gamma}{\alpha}$) $\frac{\beta.\gamma}{\alpha}=\frac{28\frac{1}{2}.\frac{1}{5}}{15\frac{3}{5}}=\frac{57}{156}$ δραχ.

Πρόβλημα 8) Ἠγοράσαμεν α ὀκ. οἴνου πρὸς β λεπτὰ τὴν ὀκᾶν· κατὰ τὴν μεταφορὰν ἐχύθησαν γ ὀκ. Πόσον μᾶς στοιχίζει ἡ ὀκᾶ τοῦ μείναντος οἴνου;

Λύσις. — Ἡ ἀξία τοῦ ὅλου οἴνου εἶναι α. β λεπτά· αἱ ὑπολειπόμεναι ὅμως ὀκάδες εἶναι α — γ. Ἑπομένως ἡ 1 ὀκᾶ ἐκ τούτων θὰ στοιχίζῃ

$$\frac{\alpha.\beta.}{\beta-\gamma}$$

Ἐφαρμογή. — Ἠγοράσαμεν $185\frac{1}{2}$ ὀκ. οἴνου πρὸς 42 λεπτὰ τὴν ὀκᾶν· κατὰ τὴν μεταφορὰν ἐχύθησαν $12\frac{3}{4}$ ὀκ. Πόσον στοιχίζει ἡ ὀκᾶ τοῦ μείναντος οἴνου;

Λύσις· (διὰ τοῦ τύπου $\frac{\alpha.\beta}{\beta-\gamma.}$) $\frac{\alpha.\beta}{\beta-\gamma.}=\frac{185\frac{1}{2}.42}{185\frac{1}{2}-12\frac{3}{4}}=\frac{779\times4}{691}=45\frac{69}{691}$.

Σημ. *Νὰ σχηματισθῶσιν ὑπὸ τῶν μαθητῶν διάφορα προβλήματα ὅμοια πρὸς τὰ θεωρηθέντα, λυόμενα διὰ τῶν ἀνωτέρω τύπων.*

Προβλήματα κλασματικῶν ἀριθμῶν διὰ τὴν ἐπανάληψιν ἐν τῇ Β' τάξει.

1) Ποῖον μέρος τοῦ 10 ἀποτελοῦσι α') ὁ ἀριθμὸς $3\frac{1}{3}$, β') ὁ ἀριθμὸς $6\frac{2}{3}$.

2) Ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ προηγουμένου προβλήματος νὰ ἐκτελεσθῶσι συντόμως αἱ

$183 \times 3\frac{1}{3} =$ $\quad$ $489 \times 3\frac{1}{3} =$ $\quad$ $745 \times 3\frac{1}{3} =$

$2835 \times 6\frac{2}{3} =$ $\quad$ $783 \times 6\frac{2}{3} =$ $\quad$ $1783 \times 6\frac{2}{3} =$

$47 : 3\frac{1}{3} =$ $\quad$ $189 : 3\frac{1}{3} =$ $\quad$ $245 : 3\frac{1}{3} =$

$179 : 6\frac{2}{3} =$ $\quad$ $347 : 6\frac{2}{3} =$ $\quad$ $135 : 6\frac{2}{3} =$

3) Ποῖον μέρος τοῦ 100 ἀποτελοῦσι α′) ὁ ἀριθμὸς $12\frac{1}{2}$, β′) ὁ $16\frac{2}{3}$, γ′) ὁ $33\frac{1}{3}$, δ′) ὁ $66\frac{2}{3}$, ε′) ὁ $11\frac{1}{9}$, στ′) ὁ $8\frac{1}{3}$;

4) Ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος νὰ ἐκτελεσθῶσι συντόμως αἱ ἑξῆς πράξεις·

$132 \times 8\frac{1}{3} =$ $\quad$ $478 \times 11\frac{1}{9} =$ $\quad$ $752 \times 12\frac{1}{2} =$

$247 \times 8\frac{1}{3} =$ $\quad$ $847 \times 11\frac{1}{9} =$ $\quad$ $1847 \times 12\frac{1}{2} =$

$195 : 8\frac{1}{3} =$ $\quad$ $947 : 11\frac{1}{9} =$ $\quad$ $3472 : 12\frac{1}{2} =$

$283 : 8\frac{1}{3} =$ $\quad$ $879 : 11\frac{1}{9} =$ $\quad$ $4583 : 12\frac{1}{2} =$

$178 \times 16\frac{2}{3} =$ $\quad$ $1027 \times 33\frac{1}{3} =$ $\quad$ $583 \times 66\frac{2}{3} =$

$197 \times 16\frac{2}{3} =$ $\quad$ $246 \times 33\frac{1}{3} =$ $\quad$ $945 \times 66\frac{2}{3} =$

$3898 : 16\frac{2}{3} =$ $\quad$ $1015 : 33\frac{1}{3} =$

$547 : 16\frac{2}{3} =$ $\quad$ $873 : 33\frac{1}{3} =$

5) Ἐπιθυμῶν νὰ καταμετρήσω τὸ μῆκος ἑνὸς τοίχου χρησιμοποιῶ τὴν ῥάβδον μου πρὸς τοῦτο καὶ εὑρίσκω ὅτι αὕτη χωρεῖ $12\frac{1}{2}$ φορὰς εἰς τὸν τοῖχον· ἐὰν τὸ μῆκος τῆς ῥάβδου εἶναι $\frac{7}{8}$ τοῦ πήχ., πόσον θὰ εἶναι τὸ μῆκος τοῦ τοίχου ; (ἀπ. $10\frac{15}{16}$ πηχ.).

6) Ἀτμόπλοιόν τι διανύει 21 μίλια εἰς $2\frac{1}{4}$ ὥρας, ἕτερον δὲ ἀτμόπλοιον $33\frac{1}{3}$ μίλια εἰς 3 ὥρας. Ποῖον ἐκ τῶν δύο εἶναι ταχύτερον καὶ κατὰ πόσα μίλια ;

(ἀπ. τὸ δεύτερον εἶναι ταχύτερον κατὰ $1\frac{7}{9}$ μίλ. τὴν ὥραν.)

7) Τὸ ἓν δράμιον μετάξης τιμᾶται $5\frac{3}{4}$ λεπτά. Πόση εἶναι ἡ τιμὴ τῆς ὀκᾶς, πόση ἡ τιμὴ τῶν $\frac{3}{5}$ τῆς ὀκᾶς καὶ πόση ἡ τιμὴ τῶν $\frac{3}{4}$ αὐτῆς.

(ἀπ. 23 δρ. ἡ ὀκᾶ, $13\frac{4}{5}$ δρ. τὰ $\frac{3}{5}$ τῆς ὀκ. $17\frac{1}{4}$ δρ. τὰ $\frac{3}{4}$ ὀκ.)·

8) Ράβδος μήκους $\frac{3}{4}$ πήχ. κατακορύφως τοποθετημένη έρριπτε κατὰ τὴν μεσημβρίαν σκιάν, ἥτις ἦτο ἴση πρὸς τὰ $\frac{2}{9}$ τῆς σκιᾶς, τὴν ὁποίαν κατὰ τὴν αὐτὴν στιγμὴν ἔρριπτε κωδωνοστάσιόν τι. Ποῖον εἶναι τὸ ὕψος τοῦ κωδωνοστασίου τούτου. $\left(\text{ἀπ. } 3\frac{3}{8} \text{ πήχ.}\right)$.

9) Οἶκός τις πτωχεύσας πληρώνει εἰς τοὺς πιστωτάς του, μεθ' ὧν συνεβιβάσθη τὰ $\frac{2}{3}$ τῶν ὅσων χρεωστεῖ· εἰς πόσον ἀνέρχεται α') ἡ πίστωσις ἑνὸς δανειστοῦ, ὅστις μετὰ τὸν συμβιβασμὸν λαμβάνει 15780 δραχ. καὶ β') πόσον εἶναι τὸ ὅλον χρέος τοῦ οἴκου, τὸ ὁποῖον ἀπεσβέσθη διὰ 75120 δραχ. (ἀπ. 23670 δρ., 112680 δραχ.).

10) Ἡ ὀκᾶ κριθῆς τιμᾶται 19 λεπτὰ καὶ ἡ τοῦ ἀραβοσίτου $23\frac{1}{2}$ λεπτά. Πόσας ὀκάδας κριθῆς θ' ἀνταλλάξῃ τις μὲ $8\frac{3}{4}$ ὀκάδας ἀραβοσίτου; $\left(\text{ἀπ. } 10\frac{125}{152} \text{ ὀκ.}\right)$.

11) Ἀτμάμαξα τρέχουσα $32\frac{1}{2}$ χιλιόμ. καθ' ὥραν χρειάζεται $10\frac{1}{4}$ ὥρ., ἵνα μεταβῇ ἀπὸ μιᾶς πόλεως εἰς ἄλλην. Ἐὰν πρόκηται νὰ ἐκτελέσῃ τὸ ταξείδιον τοῦτο ἐντὸς $7\frac{1}{2}$ ὡρῶν, πόσα χιλιόμ. πρέπει νὰ διατρέχῃ καθ' ὥραν; $\left(\text{ἀπ. } 44\frac{5}{12} \text{ χιλιόμ.}\right)$.

12) Πίθος τις περιέχει $125\frac{1}{4}$ ὀκ. ἐλαίου, δεύτερος δὲ πίθος οὗτινος ἡ χωρητικότης ὑπερβαίνει τὴν τοῦ α' κατὰ τὸ $\frac{1}{3}$ περιέχει $130\frac{1}{2}$ ὀκ. Εἶναι πλήρης ὁ β' πίθος; Καὶ ἂν δὲν εἶναι, πόσας ὀκάδας χρειάζεται ἀκόμη, ἵνα πληρωθῇ ἐντελῶς; $\left(\text{ἀπ. χρειάζεται ἀκόμη } 36\frac{1}{2} \text{ ὀκ.}\right)$.

10) 13) Ἀτμάμαξα πρέπει νὰ διατρέξῃ 350 χιλιόμ. εἰς 8 ὥρας. Κατὰ τὰς $3\frac{1}{2}$ πρώτας ὥρας διέτρεξε τὰ $167\frac{3}{4}$ χιλιόμ. Πόσα χιλιόμετρα πρέπει νὰ διατρέχῃ τώρα καθ' ὥραν; $\left(\text{ἀπ. } 40\frac{1}{2} \text{ χιλιόμ.}\right)$.

14) Ἐργάτης τις λαμβάνει ἡμερομίσθιον $4\frac{3}{5}$ δραχ. καὶ δὲν ἐργάζεται καθ' ὅλον τὸ ἔτος τὰς Κυριακὰς καὶ 25 ἄλλας ἑορτάς. Πόσας δραχμὰς θὰ λάβῃ καθ' ὅλον τὸ ἔτος (κοινὸν) καὶ πόσας θὰ οἰκονομήσῃ, ἐὰν ἐξοδεύῃ τὴν ἡμέραν πρὸς συντήρησιν τῆς οἰκογενείας του $3\frac{1}{3}$ δραχ.; $\left(\text{ἀπ. } 1324\frac{4}{5} \text{ δρ. θὰ λάβῃ, } 108\frac{2}{15} \text{ θὰ ἐξοικονομήσῃ.}\right)$.

15) Ἔμπορός τις θέλει νὰ κερδίσῃ ἐξ ἑκάστου ἐμπορεύματος τὸ $\frac{1}{3}$ τῆς τι-

μῆς, ἣν στοιχίζει τοῦτο. α΄) Πόσον στοιχίζει ἡ ὀκᾶ καφὲ πωλουμένη πρὸς $3\frac{3}{5}$ δραχ. καὶ β΄) Πόσον πρέπει νὰ πωλήσῃ τὴν ὀκᾶν ζακχάρεως στοιχίζουσαν $1\frac{11}{20}$ δραχ.; $\left(\text{Ἀπ. } 2\frac{7}{10}\text{ δραχ.}, 2\frac{1}{15}\text{ δραχ.}\right)$.

16) Ἐργάτης τις ἐχρειάσθη $10\frac{1}{2}$ ὥρας, διὰ νὰ ἐκτελέσῃ τὰ $\frac{3}{8}$ ἔργου τινός. Εἰς πόσας ὥρας θὰ τελειώσῃ α΄) τὸ ὑπόλοιπον ἔργον καὶ β΄) ὁλόκληρον τὸ ἔργον; $\left(\text{ἀπ. α΄ } 17\frac{1}{2}\text{ ὥρ., β΄ } 28\text{ ὥρ.}\right)$.

17) Πεζοπόρος τις, ἀφ' οὗ διέτρεξε τὰ $\frac{2}{5}$ μιᾶς ὁδοῦ, ἐχρειάσθη διὰ τὸ ὑπόλοιπον διάστημα $6\frac{1}{4}$ ὥρας. Ζητεῖται α΄) εἰς πόσας ὥρας διέτρεξε τὸ πρῶτον μέρος τῆς ὁδοῦ καὶ β΄) πόσον εἶναι τὸ μῆκος τῆς ὁδοῦ, ἐπὶ τῇ ὑποθέσει ὅτι ὁ πεζοπόρος διανύει $5\frac{3}{4}$ χιλιόμ. καθ' ὥραν;

$\left(\text{ἀπ. α΄ } 4\frac{1}{6}\text{ ὥρ., β΄ } 59\frac{43}{48}\text{ χιλιόμ.}\right)$.

11) 18) Τὸ τριπλάσιον ἑνὸς ἀριθμοῦ καὶ τὰ $\frac{3}{4}$ αὐτοῦ προσλαβόντα καὶ τὸν ἀριθμὸν 125 ἀπετέλεσαν τὸν 1625. Τίς ὁ ἀριθμὸς οὗτος; (ἀπ. 400).

19) Τὸ διπλάσιον ἀριθμοῦ τινος καὶ τὸ $\frac{1}{2}$ αὐτοῦ καὶ τὸ $\frac{1}{4}$ ὁμοῦ λαμβανόμενα καὶ ἐλαττούμενακα τὰ τὸν ἀριθμὸν 240 δίδουσι τὸν 2450. Τίς ὁ ἀριθμὸς οὗτος; $\left(\text{ἀπ. } 978\frac{2}{11}\right)$.

12 20) Διὰ τὰ $\frac{3}{8}$ τῆς ἀμπέλου εἰργάσθησαν 7 ἐργάται ἐπὶ 4 ἡμέρας πόσον θὰ στοιχίσῃ ἡ καλλιέργεια ὅλης τῆς ἀμπέλου, ἐὰν τὸ ἡμερομίσθιον ἑκάστου ἐργάτου συνεφωνήθη πρὸς $2\frac{4}{5}$ δραχ.;

$\left(\text{ἀπ. } 209\frac{1}{15}\text{ δραχ.}\right)$.

21) Ὑαλέμπορος ἠγόρασε 1500 ποτήρια πρὸς $2\frac{4}{5}$ δραχ. τὴν δωδεκάδα καὶ 1800 πινάκια (πιάτα) πρὸς $6\frac{1}{2}$ δραχ. τὴν δωδεκάδα. Ἐθραύσθησαν κατὰ τὴν μεταφορὰν 132 ποτήρια καὶ 72 πινάκια· ἐπώλησε δὲ ἕκαστον ποτήριον πρὸς $\frac{2}{5}$ δραχ. καὶ ἕκαστον πινάκιον πρὸς $\frac{7}{10}$ δραχ. Πόσας δραχμὰς ἐκέρδισεν οὗτος; $\left(\text{ἀπ. } 431\frac{4}{5}\text{ δραχ.}\right)$.

22) Τὸ $\frac{1}{2}$ καὶ τὸ $\frac{1}{3}$ μιᾶς περιουσίας ὁμοῦ λαμβανόμενα ὑπερβαίνουσι κατὰ 38000 τὸ $\frac{1}{5}$ αὐτῆς. Πόση εἶναι ἡ περιουσία αὕτη;

(ἀπ. 60000 δρχ.).

13 23) Εἶχέ τις ἀγοράσει $18\frac{1}{2}$ πήχ. ὑφάσματος, οὗτινος ὁ 1 πῆχυς ἐτιμᾶτο $3\frac{3}{4}$ δραχ., ἐπώλησε δὲ τὸ $\frac{1}{4}$ ἐξ αὐτοῦ πρὸς 4 δραχ. τὸν πῆχυν, τὸ $\frac{1}{3}$ πρὸς $4\frac{1}{5}$ δραχ. καὶ τὸ ὑπόλοιπον πρὸς $3\frac{4}{5}$ δραχ. Πόσον ἐκέρδισεν ἐκ τοῦ ὑφάσματος τούτου; $\left(\text{ἀπ. } 4\frac{19}{60}\text{ δραχ.}\right)$.

24) Ἰδιοκτήτης τις νηματουργείου ἠγόρασε καθ' ὅλον τὸ ἔτος 4170 δέματα (μπάλες) βάμβακος, ἐξ ὧν ἕκαστον ἐζύγιζε 75 ὀκ. Κατὰ τὴν μετατροπὴν τοῦ βάμβακος εἰς νῆμα συμβαίνει ἀπώλεια βάρους ἴση πρὸς τὰ $\frac{7}{64}$ τοῦ βάρους του. Ἐὰν τὸ νῆμα πωληθῇ πρὸς $3\frac{1}{5}$ δραχ. κατ' ὀκᾶν, πόσας δραχμὰς θὰ εἰσπράξῃ καθ' ὅλον τὸ ἔτος ἐκ τῆς πωλήσεως τοῦ νήματος ὁ ἐργοστασιάρχης; $\left(\text{ἀπ. } 109462\frac{1}{2}\text{ δρχ.}\right.$

25) Εἴς τι νηματουργεῖον ἐργάζονται ἐπὶ ἕνα μῆνα ἐκτὸς 4 Κυριακῶν καὶ 1 ἑορτῆς, 8 ἄνδρες, 15 γυναῖκες καὶ 25 παιδία. Ἕκαστος ἀνὴρ λαμβάνει ἡμερομίσθιον $4\frac{4}{5}$ δραχ., ἑκάστη γυνὴ $2\frac{1}{2}$ δρχ. καὶ ἕκαστον παιδίον $\frac{4}{5}$ δρχ. Παρήγαγον δὲ καθ' ὅλον τὸν μῆνα 2275 δέματα (πάκα) νήματος πωληθέντος πρὸς $9\frac{2}{5}$δρχ.καθ'ἕκαστον δέμα·στοιχίζει δὲ ὁ βάμβαξ, δι' οὗ κατασκευάζεται τὸ νῆμα τοῦτο 11200 δραχ. Πόσας δραχμὰς κερδίζει ὁ ἐργοστασιάρχης κατὰ τὸν μῆνα τοῦτον; (Ὁ μὴν 30 ἡμέρας) $\left(\text{ἀπ. } 7787\frac{1}{2}\text{ δρχ.}\right)$.

26) Ὑποδηματοποιός τις μετὰ τοῦ υἱοῦ του κατασκευάζουσι 4 ζεύγη ὑποδημάτων εἰς $11\frac{3}{4}$ ὥρας. Ὁ πατὴρ μόνος θὰ ἐξετέλει τὴν ἐργασίαν ταύτην εἰς $18\frac{1}{2}$ ὥρας. Εἰς πόσας ὥρας δύναται νὰ ἐκτελέσῃ τὴν ἐργασίαν ταύτην ὁ υἱὸς μόνος του; $\left(\text{ἀπ. } 32\frac{11}{54}\text{ ὥρ.}\right)$.

27) Δεξαμενή τις ἔχει εἰς τὸν πυθμένα της τρεῖς στρόφιγγας. Ἐὰν ἀνοιχθῶσιν αἱ δύο πρῶται στρόφιγγες, κενοῦται ἡ δεξαμενὴ εἰς $2\frac{1}{2}$ ὥρας, ἐὰν δὲ ἀνοιχθῶσι καὶ αἱ τρεῖς κενοῦται αὕτη εἰς 2 ὥρας. Εἰς πόσας ὥρας κενοῦται ἡ δεξαμενή, ἐὰν ἀνοίξωμεν μόνον τὴν τρίτην στρόφιγγα; (ἀπ. εἰς 10 ὥρας).

28) Τρεῖς ἐργάται σκάπτουσιν ὁμοῦ μίαν ἄμπελον εἰς 8 ἡμέρας. Ὁ α' ἐξ αὐτῶν δύναται νὰ σκάψῃ μόνος του τὴν ἄμπελον εἰς 15 ἡμέρας, ὁ δὲ β' εἰς 20 ἡμέρας. Εἰς πόσας ἡμέρας ὁ γ' μόνος του θὰ σκάψῃ τὴν ἄμπελον ταύτην; (ἀπ. 120 ἡμέρας).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ΄.

Δεκαδικοὶ ἀριθμοί.

161) Ὁρισμοί. — Αἱ κλασματικαὶ μονάδες, αἵτινες ἔχουσι παρονομαστὴν τὴν 1 παρακολουθουμένην ἀπὸ ὁσαδήποτε μηδενικά, ὡς $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ κτλ., καλοῦνται *δεκαδικαὶ μονάδες.*

Καὶ τὸ μὲν $\frac{1}{10}$ καλεῖται δεκαδικὴ μονὰς πρώτης τάξεως, τὸ δὲ $\frac{1}{100}$ δεκαδικὴ μονὰς δευτέρας τάξεως, τὸ $\frac{1}{1000}$ τρίτης κ. ο. κ. Ἐν γένει δὲ ἡ τάξις δεκαδικῆς τινος μονάδος ὁρίζεται διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μηδενικῶν, ἅτινα ἔχει ἐν τῷ παρονομαστῇ.

Οἱ ἐκ τῆς ἐπαναλήψεως τῶν μονάδων τούτων προκύπτοντες ἀριθμοί, ὡς $\frac{7}{10}$, $\frac{8}{100}$, $\frac{2458}{1000}$ κ.τ.λ., καλοῦνται *δεκαδικοὶ ἀριθμοὶ* ἢ *δεκαδικὰ κλάσματα.* Τὰ λοιπὰ κλάσματα καλοῦνται *κοινά.*

Δεκαδικὴ γραφὴ τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων.

162) Ἐὰν γράψωμεν εἰς μίαν σειρὰν τὰς ἀκεραίας μονάδας τῶν διαφόρων τάξεων ὡς καὶ τὰς δεκαδικὰς κ.τ.λ., ἤτοι 1000, 100, 10, 1, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{10000}$, $\frac{1}{100000}$ κτλ. παρατηροῦμεν ὅτι αἱ δεκαδικαὶ μονάδες εἶναι συνέχεια τῶν ἀκεραίων τοιούτων· καὶ τῷ ὄντι, ἐὰν ἐν τῇ ἀνωτέρω σειρᾷ θεωρήσωμεν οἱανδήποτε μονάδα εἴτε ἀκεραίαν εἴτε δεκαδικήν, βλέπομεν ὅτι αὕτη γίνεται ἐκ τῆς ἑπομένης πρὸς τὰ δεξιὰ ἐπαναλαμβανομένης δεκάκις. π.δ.χ. ἡ δεκὰς γίνεται ἐκ τῆς μονάδος ἐπαναλαμβανομένης δεκάκις, αὕτη πάλιν ἐκ τῆς μονάδος $\frac{1}{10}$ δεκάκις ἐπαναλαμβανομένης κ.ο.κ.

Ἐντεῦθεν ἕπεται ὅτι πᾶν δεκαδικὸν κλάσμα δύναται ν' ἀναλυθῇ εἰς μονάδας ἀκεραίας ἢ δεκαδικάς, οὕτως ὥστε ἐξ ἑκάστης τάξεως νὰ μὴ περιέχῃ περισσοτέρας τῶν 9. Οὕτω π.δ.χ. τὸ δεκαδικὸν κλάσμα $\frac{4578}{1000}$ δύναται ν' ἀναλυθῇ ὡς ἑξῆς· $\frac{4578}{1000}=\frac{4000}{1000}+\frac{500}{1000}+\frac{70}{1000}+\frac{8}{1000}$ ἢ ἁπλούστερα $\frac{4578}{1000}=4+\frac{5}{10}+\frac{7}{100}+\frac{8}{1000}$.

Ἕνεκα τούτου εἶναι εὔκολον νὰ γράψωμεν τὰ δεκαδικὰ κλάσματα ὑπὸ μορφὴν ὁμοίαν πρὸς τὴν τῶν ἀκεραίων· πρὸς τοῦτο δὲ ἀρκεῖ νὰ δεχθῶμεν καὶ ἐνταῦθα τὴν αὐτὴν συνθήκην, τὴν ὁποίαν ἐδέχθημεν καὶ κατὰ τὴν γραφὴν τῶν ἀκεραίων, ἤτοι ἕκαστον ψηφίον γεγραμμένον ἀριστερὰ ἄλλου τινὸς νὰ σημαίνῃ μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως· ἐπὶ πλέον νὰ χωρίζωμεν τὸ ψηφίον τῶν ἁπλῶν μονάδων ἀπὸ τὸ ἀμέσως ἑπόμενον ψηφίον τῶν δεκάτων διὰ τοῦ σημείου (,), ὅπερ καλεῖται *ὑποδιαστολή*· ἐὰν δὲ τυχὸν ἐλλείπουσι μονάδες τάξεώς τινος γράφομεν εἰς τὴν θέσιν αὐτῶν 0. Οὕτω τὸ δεκαδικὸν κλάσμα

$\frac{4578}{1000}=4+\frac{5}{10}+\frac{7}{100}+\frac{8}{1000}$ θὰ γραφῇ συντόμως ὡς ἑξῆς 4,578.

Ἡ τοιαύτη γραφὴ τοῦ δεκαδικοῦ κλάσματος καλεῖται *δεκαδική*. Τὸ πρὸ τῆς ὑποδιαστολῆς μέρος καλεῖται *ἀκέραιον*, τὸ δὲ μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴν *δεκαδικὸν* καὶ τὰ ψηφία αὐτοῦ *δεκαδικά*. Ἐκ τῆς τοιαύτης γραφῆς παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ψηφίον τῶν δεκάτων κατέχει τὴν πρώτην θέσιν μετὰ τὴν ὑποδιαστολήν, τὸ τῶν ἑκατοστῶν τὴν δευτέραν, τὸ τῶν χιλιοστῶν τὴν τρίτην κ.ο.κ. Ὁμοίως τὸ δεκαδικὸν κλάσμα $\frac{75083}{10000}$ δύναται ν' ἀναλυθῇ $\frac{75083}{10000}=7+\frac{5}{10}+\frac{0}{100}+\frac{8}{1000}+\frac{3}{10000}$ καὶ ἑπομένως νὰ γραφῇ ὑπὸ δεκαδικὴν μορφὴν ὡς ἑξῆς 7,5083.

Ὁμοίως τὸ δεκαδικὸν κλάσμα $\frac{385}{10000}$ δύναται ν' ἀναλυθῇ ὡς ἑξῆς· $\frac{385}{10000}$ $=0+\frac{0}{10}+\frac{3}{100}+\frac{8}{1000}+\frac{5}{10000}$ καὶ ἑπομένως δύναται νὰ γραφῇ 0,0385.

Σημ. *Ὅταν ὁ ἀριθμὸς δὲν περιέχῃ ἀκεραίας μονάδας, τότε γράφομεν 0 εἰς τὴν θέσιν τοῦ ἀκεραίου, ἤτοι ἀμέσως πρὸ τῆς ὑποδιαστολῆς.*

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα·

163) «Διὰ νὰ γράψωμεν δεκαδικόν τι κλάσμα ὑπὸ δεκαδικὴν μορφήν, λαμβάνομεν τὸν ἀριθμητὴν καὶ ἀπὸ τοῦ τέλους αὐτοῦ χωρίζομεν τόσα δεκαδικὰ ψηφία, ὅσα μηδενικὰ ἔχει ὁ παρονομαστής· ἐὰν δὲ δὲν ἐπαρκῶσι τὰ ψηφία τοῦ ἀριθμητοῦ γράφομεν πρὸ αὐτοῦ μηδενικὰ τόσα, ὥστε νὰ χωρίσωμεν τὰ ἀπαιτούμενα δεκαδικὰ ψηφία καὶ νὰ μείνῃ ἓν μηδενικὸν διὰ τὸν ἀκέραιον.» π.δ.χ. $\frac{7384}{1000}=7{,}384$, $\frac{245}{100000}=0{,}00245$.

Ἀπαγγελία δεκαδικῶν ἀριθμῶν.

164) Ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς ἀπαγγέλλεναι κατὰ τοὺς ἑξῆς τρεῖς τρόπους. α΄) Ἀπαγγέλλομεν ἕκαστον ψηφίον τοῦ ἀριθμοῦ χωριστὰ μὲ τὸ ὄνομα τῶν μονάδων, τὰς ὁποίας παριστᾷ, π. δ. χ. 3,058 ἀπαγγέλλεται 3 ἁπλαῖ μονάδες, 5 ἑκατοστὰ καὶ 8 χιλιοστά.

β΄) Ἀπαγγέλλομεν ὁλόκληρον τὸν ἀριθμὸν ὡς νὰ εἶναι ἀκέραιος μὲ τὸ ὄνομα τῶν μονάδων τοῦ τελευταίου ψηφίου· π. δ. χ. 3,47 ἀπαγγέλλεται τριακόσια—τεσσαράκοντα—ἑπτὰ ἑκατοστά.

γ΄) Χωρίζομεν τὸν ἀριθμὸν εἰς ὅσα δήποτε τμήματα καὶ ἀπαγγέλλομεν ἕκαστον τμῆμα χωριστὰ ὀνομάζοντες τὰς μονάδας, τὰς ὁποίας παριστᾷ τὸ τελευταῖον ψηφίον τοῦ τμήματος· π. δ. χ. ὁ ἀριθμὸς 45, 305709 ἀπαγγέλλεται ὡς ἑξῆς· 45 ἀκέραια, 305 χιλιοστὰ καὶ 709 ἑκατομμυριοστὰ ἢ καὶ ὡς ἑξῆς 45 ἀκέραια, 30 ἑκατοστά, 57 δεκάκις χιλιοστά, 9 ἑκατομμυριοστά.

Συνήθως χωρίζομεν τὸν δεκαδικὸν ἀριθμὸν εἰς δύο τμήματα, τὸ ἀκέραιον καὶ τὸ δεκαδικόν· π. δ. χ. 408,0396 ἀπαγγέλλεται 408 ἀκέραια καὶ 396 δεκάκις χιλιοστά.

Γραφὴ ἀπαγγελλομένου δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ.

165) Ἂν ὁ ἀριθμὸς ἀπαγγέλληται κατὰ τὸν πρῶτον τρόπον, γράφομεν ἕκαστον ψηφίον εἰς τοιαύτην θέσιν ὡς πρὸς τὴν ὑποδιαστολήν, ὥστε νὰ σημαίνῃ μονάδας, μὲ τὸ ὄνομα τῶν ὁποίων ἀπαγγέλλεται· π. δ. χ. ὁ ἀριθμὸς 5 ἀκέραιος, 8 ἑκατοστὰ καὶ 7 χιλιοστὰ γράφεται 5,087. Ὁμοίως ὁ ἀριθμὸς 9 δέκατα, 7 χιλιοστά, 8 ἑκατομμυριοστὰ γράφεται ὡς ἑξῆς· 0,907008.

Ἂν ὁ ἀριθμὸς ἀπαγγέλληται κατὰ τὸν δεύτερον τρόπον, γράφομεν αὐτὸν ὁλόκληρον ὡς ἀκέραιον καὶ ἀπὸ τοῦ τέλους ἀρχόμενοι χωρίζομεν διὰ τῆς ὑποδιαστολῆς τόσα δεκαδικὰ ψηφία, ὥστε τὸ τελευταῖον νὰ σημαίνῃ τὰς μονάδας, μὲ τὸ ὄνομα τῶν ὁποίων ἀπαγγέλλεται ὁ ἀριθμός· ἂν τυχὸν τὸ πλῆθος τῶν ψηφίων εἶναι ἀνεπαρκές, γράφομεν πρὸ τοῦ ἀριθμοῦ μηδενικά· π. δ. χ. ὁ ἀριθμὸς τετρακόσια—πεντήκοντα—ὀκτὼ ἑκατοστὰ γράφεται ὡς ἑξῆς 4,58.

Ἂν τέλος ὁ ἀριθμὸς ἀπαγγέλληται χωριστὰ τὸ ἀκέραιον μέρος καὶ χωριστὰ τὸ δεκαδικόν, γράφομεν τὸ ἀκέραιον καὶ ἀμέσως δεξιᾷ τούτου τὴν ὑποδιαστολὴν καὶ μετὰ ταύτην τὸ δεκαδικὸν μέρος γράφοντες ἐν ἀνάγκῃ πρὸ αὐτοῦ μηδενικά, ἵνα τὸ τελευταῖον ψηφίον σημαίνῃ μονάδας, μὲ τὸ ὄνομα τῶν ὁποίων ἀπαγγέλλεται τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ ἀριθμοῦ π. δ. χ. ὁ ἀριθμὸς τριάκοντα δύο ἀκέραιος καὶ πεντακόσια—ὀκτὼ χιλιοστὰ γράφεται ὡς ἑξῆς 32,508.

Ὁμοίως ὁ ἀριθμὸς ἑβδομήκοντα—τρία ἀκέραια καὶ εἴκοσι—πέντε ἑκατοντάκις χιλιοστὰ γράφεται ὡς ἑξῆς· 73,00025.

Γραφὴ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ ὡς κοινοῦ κλάσματος.

166) «Ἂν θέλωμεν νὰ γράψωμεν δεκαδικὸν ἀριθμὸν ὑπὸ κλασματικὴν μορφήν, ἀπαλείφομεν τὴν ὑποδιαστολὴν καὶ τὸν προκύπτοντα ἀριθμὸν θέτομεν ὡς ἀριθμητήν, παρονομαστὴν δὲ τὴν 1 παρακολουθουμένην ὑπὸ τόσων μηδενικῶν, ὅσα εἶναι τὰ δεκαδικὰ ψηφία αὐτοῦ»· π. δ. χ. 54,708 γράφεται ὡς κλάσμα $\frac{54708}{1000}$. Ὁμοίως 0,0045 γράφεται ὡς κλάσμα $\frac{45}{10000}$

Ἰδιότης τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν.

167) « Ἡ ἀξία τοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ δὲν μεταβάλλεται, ἂν εἰς τὸ τέλος τοῦ δεκαδικοῦ γραφῶσιν ὁσαδήποτε μηδενικά».

Ἡ ἰδιότης αὕτη συνάγεται ἀμέσως ἐκ τῆς ἰδιότητος (§ 115) τῶν κλασμάτων, ὡς εὐκόλως δυνάμεθα νὰ ἴδωμεν.—Ἔστω π. δ. χ. ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς 3,5, ὅστις ὑπὸ κλασματικὴν μορφὴν γράφεται $\frac{35}{10}$· ἂν πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ δέκα τοὺς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος τούτου, ἡ ἀξία αὐτοῦ δὲν μεταβάλλεται καὶ λαμβάνομεν τὸ $\frac{350}{100}$, ὅπερ δεκαδικῶς γράφεται 3,50 καὶ εἶναι τῆς αὐτῆς ἀξίας πρὸς τὸ 3,5.

Ὁμοίως ἂν πολλαπλασιάσωμεν τοὺς δύο ὅρους τοῦ $\frac{35}{10}$ ἐπὶ 1000, λαμβάνομεν $\frac{35000}{10000}$, ὅπερ δεκαδικῶς γράφεται 3,5000 καὶ εἶναι τῆς αὐτῆς ἀξίας πρὸς τὸ 3,5.

Σημ. *Καὶ μετά τινα ἀκέραιον ἀριθμὸν δυνάμεθα νὰ γράψωμεν μηδενικὰ χωρὶς νὰ μεταβληθῇ ἡ ἀξία αὐτοῦ, ἀρκεῖ πρῶτον νὰ γράψωμεν κατόπιν αὐτοῦ τὴν ὑποδιαστολὴν καὶ ἔπειτα τὰ μηδενικά.*

π. δ. χ. ὁ ἀκέραιος 87 γράφεται ὡς ἑξῆς 87,000. Ὁμοίως ὁ 125 γράφεται καὶ οὕτω 125,00.

Ἀσκήσεις.

1) Νὰ γραφῶσι κατὰ σειρὰν πᾶσαι αἱ δεκαδικαὶ μονάδες ἀπὸ τῆς πρώτης τάξεως μέχρι τῆς ὀγδόης.

2) Ποσάκις εἶναι μεγαλείτερον τὸ $\frac{1}{10}$ τοῦ $\frac{1}{100}$ ἢ τοῦ $\frac{1}{1000}$ ἢ τοῦ $\frac{1}{10000}$ κτλ.

3) Ποσάκις τὸ $\frac{1}{1000}$ εἶναι μικρότερον τοῦ $\frac{1}{10}$ καὶ ποσάκις τὸ $\frac{1}{100000}$ εἶναι μικρότερον τοῦ $\frac{1}{1000}$.

4) Νὰ γραφῶσιν ὑπὸ δεκαδικὴν μορφὴν τὰ ἑξῆς δεκαδικὰ κλάσματα. $\frac{35}{1000}$, $\frac{45832}{10000}$, $\frac{783}{1000000}$, $\frac{138234}{100}$ καὶ ν' ἀπαγγελθῶσιν ἔπειτα οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι καθ' ὅλους τοὺς δυνατοὺς τρόπους.

5) Νὰ γραφῶσιν οἱ ἑξῆς δεκαδικοὶ ἀριθμοί·

α΄) Πέντε χιλιοστὰ καὶ ὀκτὼ ἑκατοντάκις χιλιοστά.

β΄) Τεσσαράκοντα πέντε χιλιοστά.

γ΄) Ἑκατὸν—ὀγδοήκοντα ἀκέραια καὶ τριακόσια—πεντήκοντα-ἑπτὰ ἑκατοντ. χιλιοστά.

δ΄) Ὀκτὼ ἀκέραια καὶ ἑπτὰ ἑκατομμυριοστά.

6) Νὰ γραφῶσιν οἱ ἀριθμοὶ 5834, 0,0257, 35,72, 0,00008 ὑπὸ κλασματικὴν μορφήν.

7) Γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ δραχμὴ ἔχει 100 λεπτά, πῶς εἶναι δυνατὸν νὰ γραφῶσιν ὡς δεκαδικοὶ ἀριθμοὶ τὰ ἑξῆς ποσά· α΄) 45 λεπτά. β΄) 18 δραχ. καὶ 75 λεπ. γ΄) 145 δραχ. καὶ 5 λεπτά ;

8) Δοθέντων τῶν ἀριθμῶν 5,83, 2,5, 34, 12,04 18,4 εἰς ποίας θέσεις δυνάμεθα νὰ γράψωμεν μηδενικὰ χωρὶς νὰ μεταβληθῇ ἡ ἀξία αὐτῶν ;

9) Ἐν τῷ ἀριθμῷ 2,45 α΄) ποῖον εἶναι τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων καὶ πόσα δέκατα ἔχει ἐν ὅλῳ οὗτος. β΄) ποῖον εἶναι τὸ ψηφίον τῶν ἑκατοστῶν καὶ πόσα ἑκατοστὰ ἔχει ἐν ὅλῳ οὗτος καὶ γ΄) ποῖον εἶναι τὸ ψηφίον τῶν χιλιοστῶν καὶ πόσα χιλιοστὰ ἔχει ἐν ὅλῳ οὗτος κτλ.

ΠΡΑΞΕΙΣ ΤΩΝ ΔΕΚΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Πρόσθεσις.

168) Ὁ ὁρισμὸς τῆς προσθέσεως (§ 15) τῶν ἀκεραίων ἰσχύει καὶ διὰ τοὺς δεκαδικοὺς ἀριθμούς. Ἐκτελεῖται δὲ ἡ πρόσθεσις τῶν δεκαδικῶν

ἀριθμῶν, ὅπως καὶ ἡ τῶν ἀκεραίων. Ἔστω π. δ. χ. ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα 7,5+45, 934+8, 50783+38.

Γράφομεν πρῶτον μηδενικὰ εἰς τὸ τέλος τῶν προσθετέων (§ 167) οὕτως ὥστε νὰ ἔχωσι πάντες ἴσον πλῆθος δεκαδικῶν ψηφίων καὶ ἔπειτα προσθέτομεν αὐτοὺς ὡς ἐὰν ἦσαν ἀκέραιοι καὶ ἀπὸ τοῦ ἀθροίσματος χωρίζομεν ἀπὸ τοῦ τέλους ἀρχόμενοι τόσα δεκαδικὰ ψηφία, ὅσα ἔχει ἕκαστος τῶν προσθετέων.

7, 50000
45, 93400
8, 50783
38, 00000
———
99, 94183.

Παρατηροῦμεν ὅμως ὅτι εἰς τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον φθάνομεν, ἐὰν γράψωμεν τοὺς ἀριθμοὺς ἄνευ τῶν μηδενικῶν, τὰ ὁποῖα ἐγράψαμεν εἰς τὸ τέλος, προσέχοντες μόνον τὰ ψηφία τὰ σημαίνοντα μονάδας τῆς αὐτῆς τάξεως νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν στήλην, ὡς λ. χ. αἱ ἁπλαῖ μονάδες ὑπὸ τὰς ἁπλᾶς μονάδας, τὰ δέκατα ὑπὸ τὰ δέκατα κτλ. Ἐν τῷ ἀθροίσματι θέτομεν τὴν ὑποδιαστολὴν εἰς τὴν αὐτὴν στήλην.

7, 5
45, 934
8, 50783
38
———
99, 94183.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὁ ἑξῆς κανών·

169) «Διὰ νὰ προσθέσωμεν δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς γράφομεν αὐτοὺς τὸν ἕνα κάτωθεν τοῦ ἄλλου, οὕτως ὥστε τὰ ψηφία τὰ σημαίνοντα μονάδας τῆς αὐτῆς τάξεως (ἀκεραίας ἢ δεκαδικὰς) νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν στήλην καὶ ὑπ' αὐτοὺς σύρομεν ὁριζοντίαν γραμμήν. Ἔπειτα ἀρχόμενοι ἐκ δεξιῶν ἐκτελοῦμεν τὴν πρόσθεσιν τῶν ψηφίων ἑκάστης στήλης, ὡς καὶ εἰς τοὺς ἀκεραίους. Εἰς τὸ ἄθροισμα γράφομεν τὴν ὑποδιαστολὴν εἰς τὴν αὐτὴν στήλην».

Παραδείγματα.

7, 589	25, 8934	5, 92
3, 79	7, 45928	17, 458234
45, 87354	0, 08345	0, 9273
18	152, 045	23, 305534.
75, 25254.	185, 481137.	

Ἀφαίρεσις.

170) Ἡ ἀφαίρεσις τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν ὁρίζεται ὡς καὶ ἡ τῶν ἀκεραίων (§ 23) καὶ ἐκτελεῖται ὡς ἑξῆς· Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὴν διαφορὰν 4,973—0, 087343.

Ἐν πρώτοις γράφομεν μηδενικὰ εἰς τὸ τέλος τοῦ μειωτέου, ὥστε νὰ ἔχῃ οὗτος ἴσον πλῆθος δεκαδικῶν ψηφίων μὲ τὸν ἀφαιρετέον, ἔπειτα δὲ ἀφαιροῦμεν ὡς ἐὰν ἦσαν ἀκέραιοι, καὶ ἀπὸ τῆς εὑρεθείσης διαφορᾶς χωρίζομεν διὰ τῆς ὑποδιαστολῆς ἐκ δεξιῶν ἀρχόμενοι τόσα δεκαδικὰ ψηφία ὅσα ἔχει ἕκαστος ἐξ αὐτῶν.

4, 973000
0, 087343
———
4, 885657.

Δυνάμεθα ὅμως νὰ μὴ γράφωμεν εἰς τὸ τέλος μηδενικά, ἀλλὰ νὰ ὑπονοῶμεν ταῦτα κατὰ τὴν ἀφαίρεσιν.

4, 973
0, 087343
———
4, 885657.

Ἐντεῦθεν ἕπεται ὁ ἑξῆς κανών·

171) «Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν δεκαδικοὺς ἀριθμούς, γρά-

φομεν τὸν ἀφαιρετέον ὑπὸ τὸν μειωτέον, οὕτως ὥστε τὰ ψηφία τῶν μονάδων τῆς αὐτῆς τάξεως νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν στήλην καὶ ἔπειτα ἐκτελοῦμεν τὴν ἀφαίρεσιν, ὡς καὶ εἰς τοὺς ἀκεραίους, ὑπονοοῦντες μόνον μηδενικὰ εἰς τὰς κενὰς θέσεις. Εἰς τὴν διαφορὰν θέτομεν τὴν ὑποδιαστολὴν εἰς τὴν αὐτὴν στήλην».

Παραδείγματα.

14, 583	7, 8234	15, 8
9, 7234	0, 45	3, 478924
4, 8596.	4, 3743.	12, 321076.

Πολλαπλασιασμός.

172) Καὶ ὁ πολλαπλασιασμὸς τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν γίνεται ὡς καὶ εἰς τοὺς ἀκεραίους.

Ἔστω π. δ. χ. πρὸς εὕρεσιν τὸ γινόμενον 7, 589×3, 5.

Πρὸς τοῦτο γράφομεν τοὺς δοθέντας ἀριθμοὺς ὑπὸ κλασματικὴν μορφὴν καὶ ἔπειτα ἐκτελοῦμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν κατὰ τὸν κανόνα (§ 145). $\frac{7589}{1000}\times\frac{35}{10}=\frac{7589\times35}{1000\times10}=\frac{265615}{10000}$. Ἀλλὰ τὸ γινόμενον τοῦτο γράφεται ὑπὸ δεκαδικὴν μορφὴν ὡς ἑξῆς· 26,5615. Ὅθεν ἔχομεν 7,589×3,5=26,5615.

Τὸ ἐξαγόμενον ὅμως τοῦτο εὑρίσκομεν καὶ ἀμέσως ἂν πολλαπλασιάσωμεν τοὺς δοθέντας ἀριθμοὺς ὡς ἐὰν ἦσαν ἀκέραιοι καὶ ἀπὸ τοῦ γινομένου χωρίσωμεν τόσα δεκαδικὰ ψηφία, ὅσα ἔχουσι καὶ οἱ δύο ὁμοῦ παράγοντες.

```
  7,589
    3,5
 ------
  37945
 22767
 ------
 26,56 15.
```

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς.

Ἐκ τούτων συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα·

173) «Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν δύο δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς πολλαπλασιάζομεν ὡς ἐὰν ἦσαν ἀκέραιοι καὶ ἀπὸ τοῦ γινομένου χωρίζομεν τόσα δεκαδικὰ ψηφία, ὅσα ἔχουσιν οἱ δύο ὁμοῦ παράγοντες».

Παραδείγματα.

```
    35,87        13,87       0,208
    0,452           52        0,07
   ------       ------     -------
     7174         3774     0,01456.
   17935         6935
  14348         ------
  --------      731,24.
  16,21324.
```

Παρατήρ. *Ἐν τῷ δευτέρῳ παραδείγματι ὁ εἷς τῶν παραγόντων εἶναι ἀκέραιος, ἑπομένως χωρίζομεν ἀπὸ τοῦ τέλους τοῦ γινομένου τόσα δεκαδικὰ ψηφία, ὅσα ἔχει ὁ εἷς τῶν παραγόντων. Ἐν τῷ τρίτῳ παραδείγματι γράφομεν πρὸ τοῦ γινομένου τόσα μηδενικά, ὥστε νὰ χωρίσωμεν τὰ ἀπαιτούμενα δεκαδικὰ ψηφία καὶ νὰ μείνῃ ἓν μηδενικὸν διὰ τὸ ἀκέραιον μέρος.*

Συντομίαι πολλαπλασιασμοῦ.

174) «Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν δεκαδικὸν ἀριθμὸν ἐπὶ 10, 100,

1000 κτλ. μεταφέρομεν τὴν ὑποδιαστολὴν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ ἀριθμοῦ μίαν ἢ δύο ἢ τρεῖς κτλ. θέσεις, ἤτοι ὅσα μηδενικὰ ἔχει ὁ πολλαπλασιαστής»· π. δ. χ. $3{,}57 \times 10 = 35{,}7$.

Τῷ ὄντι ὁ ἀριθμὸς 35,7 εἶναι δεκάκις μεγαλείτερος τοῦ 3,57· διότι ἕκαστον ψηφίον τοῦ πρώτου παριστᾷ μονάδας δεκάκις μεγαλειτέρας ἐκείνων, τὰς ὁποίας τὸ αὐτὸ ψηφίον παριστᾷ ἐν τῷ δευτέρῳ. Ὁμοίως θὰ ἔχωμεν $3{,}57 \times 100 = 357$.

Παρατήρ.—*Ἂν δὲν ἐπαρκῶσι τὰ δεκαδικὰ ψηφία διὰ τὴν μετάθεσιν τῆς ὑποδιαστολῆς, ἀναπληροῦμεν αὐτὰ διὰ μηδενικῶν γραφομένων εἰς τὸ τέλος τοῦ ἀριθμοῦ· π. δ. χ.* $3{,}57 \times 10000 = 35700$.

Σημ. *Καὶ ὁ πολλαπλασιασμὸς ἀκεραίου ἐπὶ 10, 100, 1000 κτλ. δύναται νὰ περιληφθῇ εἰς τὸν ἀνωτέρω κανόνα, διότι καὶ ὁ ἀκέραιος ἀριθμὸς δύναται νὰ γραφῇ ὡς δεκαδικός·*

π. δ. χ. $45 \times 100 = 45{,}00 \times 100 = 4500$.

175) «Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν δεκαδικὸν ἐπὶ ἀκέραιον ἔχοντα εἰς τὸ τέλος ἓν ἢ περισσότερα μηδενικά, μεταφέρομεν εἰς τὸν πολλαπλασιαστέον τὴν ὑποδιαστολὴν τόσας θέσεις πρὸς τὰ δεξιά, ὅσα εἶναι τὰ μηδενικὰ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, τὰ ὁποῖα ἀποκόπτομεν καὶ ἔπειτα ἐκτελοῦμεν τὸν πολλαπλασιασμόν». π. δ. χ. $58{,}347 \times 800 = 5834{,}7 \times 8 = 46677{,}6$.

Τῷ ὄντι ὁ πολλαπλασιαστὴς 800 εἶναι 100×8.

Ἑπομένως ἔχομεν $58{,}347 \times 800 = 58{,}347 \times 100 \times 8 = 5834{,}7 \times 8$.

Διαίρεσις.

176) Εἰς τὴν διαίρεσιν τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν διακρίνομεν δύο περιπτώσεις. Α΄) Ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι ἀκέραιος. Β΄) Ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι δεκαδικός.

Α΄. Περίπτωσις. Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον 785,79 : 25.

785,79	25
35	3,1,4316.
107	
79	
40	
150	
00.	

Ἡ διάταξις τῆς πράξεως γίνεται ὡς καὶ εἰς τοὺς ἀκεραίους. Ἐκ τοῦ ἀκεραίου μέρους 785 τοῦ διαιρετέου εὑρίσκομεν τὸ ἀκέραιον μέρος 31 τοῦ πηλίκου, δεξιᾷ τοῦ ὁποίου θέτομεν τὴν ὑποδιαστολήν, τὸ δὲ ὑπόλοιπον 10 τρέπομεν εἰς 100 δέκατα καὶ εἰς ταῦτα προσθέτομεν τὰ 7 δέκατα τοῦ διαιρετέου (ἤτοι $100 + 7 = 107$ δέκατα). Διαιροῦντες τὰ 107 δέκατα διὰ τοῦ 25 εὑρίσκομεν εἰς τὸ πηλίκον 4 δέκατα καὶ ὑπόλοιπον 7 δέκατα. Τρέπομεν πάλιν τὰ 7 δέκατα εἰς 70 ἑκατοστά, ἅτινα μετὰ τῶν 9 ἑκατοστῶν τοῦ διαιρετέου δίδουσιν 79 ἑκατοστά· διαιροῦντες τὰ 79 ἑκατοστὰ διὰ τοῦ 25 εὑρίσκομεν πηλίκον 3 ἑκατοστὰ καὶ ὑπόλοιπον 4 ἑκατοστά. Τρέπομεν τὰ 4 ἑκατοστὰ εἰς 40 χιλιοστά, ἅτινα διαιρούμενα διὰ τοῦ 25 δίδουσιν πηλίκον μὲν 1 χιλιοστόν, ὑπόλοιπον δὲ 15 χιλιοστά. Ταῦτα πάλιν τρέπονται εἰς 150 δεκάκις χιλιοστά, ἅτινα διαιρούμενα διὰ τοῦ 55 δίδουσι πηλίκον 6 δεκ. χιλιοστὰ καὶ ὑπόλοιππν 0.

Ἐντεῦθεν συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα·

177) «Διαιροῦμεν δεκαδικὸν δι' ἀκεραίου ὡς ἐὰν ἦτο καὶ ὁ διαιρετέος ἀκέραιος καὶ ὅσα μὲν ψηφία τοῦ πηλίκου προκύπτουσιν ἐκ τοῦ ἀκεραίου μέρους τοῦ διαιρετέου εἶναι τὰ ψηφία τοῦ ἀκεραίου μέρους τοῦ πηλίκου, τὰ δὲ λοιπὰ εἶναι δεκαδικά».

Παραδείγματα.

```
75,83 | 8                 0,0095 | 4
      |-----------               |-----------
 38     9,47875.             15    0,002375.
  63                          30
   70                          20
    60                          0
     40
      0

          975,83 | 19
                 |-------------
            25     51,35947 7/19
             68
             113
              180
                90
                140
                  7.
```

Ἐν τῷ τελευταίῳ παρατηροῦμεν ὅτι ἡ διαίρεσις δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ τελειώσῃ ὅσον δήποτε καὶ ἂν προχωρήσωμεν, διότι οὐδέποτε θὰ εὕρωμεν ὑπόλοιπον 0. Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει δυνάμεθα νὰ σταματήσωμεν εἰς τι ὑπόλοιπον καὶ νὰ συμπληρώσωμεν τὸ πηλίκον γράφοντες δεξιᾷ αὐτοῦ κλάσμα μὲ ἀριθμητὴν τὸ ὑπόλοιπον, παρονομαστὴν δὲ τὸν διαιρέτην. Ὅθεν τὸ ἀκριβὲς πηλίκον τῆς διαιρέσεως ταύτης θὰ εἶναι 51, 35947 $\frac{7}{19}$ ἔνθα τὸ κλάσμα $\frac{7}{19}$ εἶναι μέρος τοῦ 0,00001.

Δυνάμεθα ὅμως νὰ παραλείψωμεν τὸ κλάσμα $\frac{7}{19}$ καὶ νὰ δεχθῶμεν ὡς πηλίκον τὸ 51, 35947.

Τὸ πηλίκον τοῦτο λέγεται *κατὰ προσέγγισιν* ἑνὸς ἑκατοντάκις χιλιοστοῦ καὶ εἶναι μικρότερον τοῦ ἀκριβοῦς κατὰ $\frac{7}{9}$ [ἤτοι ὀλιγώτερον τοῦ $\frac{1}{2}$ τῆς μονάδος ταύτης] τοῦ 0,00001.

Ἐὰν ὅμως σταματήσωμεν εἰς τὸ ἀμέσως προηγούμενον ὑπόλοιπον θὰ ἔχωμεν ὡς ἀκριβὲς πηλίκον 51, 3594 $\frac{14}{19}$. Παραλείποντες τὸ $\frac{14}{19}$ καὶ λαμβάνοντες ὡς πηλίκον τὸ 51, 3594 κάμνομεν λάθος $\frac{14}{19}$ τοῦ ἑνὸς δεκάκις χιλιοστοῦ $\left(\text{ἤτοι περισσότερον τοῦ } \frac{1}{2} \text{ τῆς μονάδος ταύτης}\right)$. Ἐὰν ὅμως λάβωμεν ὡς πηλίκον τὸ 51,3595, τοῦτο θὰ εἶναι μεγαλείτερον τοῦ ἀκριβοῦς, τὸ δὲ λάθος, τὸ ὁποῖον κάμνομεν, εἶναι τὰ $\frac{5}{19}$ τοῦ ἑνὸς δεκάκις χιλιοστοῦ, ἤτοι μικρότερον τοῦ $\frac{1}{2}$ τῆς μονάδος ταύτης. Οὕτω δυνάμεθα νὰ εὑρίσκωμεν τὸ πηλίκον μὲ ὅσην δήποτε προσέγγισιν θέλομεν.

Ἀσκήσεις.

1) Νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον 358,45 : 13 κατὰ προσέγγισιν 0,00001.
2) Νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον 75,832 : 45 κατὰ προσέγγισιν 0,0001.

Τροπὴ κλάσματος εἰς δεκαδικόν.

Ὅπως διαιροῦμεν δεκαδικὸν δι' ἀκεραίου, οὕτως εὑρίσκομεν καὶ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως δύο ἀκεραίων μὲ οἵαν δήποτε προσέγγισιν θέλομεν. Ὁ διαιρετέος δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς δεκαδικὸς ἀριθμὸς (§ 167) τοῦ ὁποίου τὰ δεκαδικὰ ψηφία εἶναι πάντα μηδενικά.

Π. χ. τὸ πηλίκον τοῦ 7 : 8 εὑρίσκεται ὡς ἑξῆς·

```
7.000 | 8
      |------
  60    0,875.
  40
   0
```

Ἐπειδὴ ὅμως τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως ταύτης εἶναι ἴσον καὶ μὲ τὸ κλάσμα $\frac{7}{8}$ (§ 138), ἕπεται ὅτι $\frac{7}{8} = 0,875$.

Ἐντεῦθεν συνάγομεν τὰ ἑξῆς·

178) «Διὰ νὰ τρέψωμεν κοινόν τι κλάσμα εἰς δεκαδικόν, διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητὴν αὐτοῦ θεωρούμενον ὡς δεκαδικὸν ἀριθμὸν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ».

Παραδείγματα.

α') $\frac{13}{4}$

```
130 | 4
    |------
 10   3,25.
  20
   0
```

Ὅθεν $\frac{13}{4} = 3,25$.

β') $\frac{5}{7}$

```
50 | 7
   |-----------
10   0,7142857.
 30
  20
   60
    40
     50
      1
```

"Οθεν $\frac{5}{7}=0,7142857\ldots\ldots$

γ') $\frac{7}{12.}$

$$\begin{array}{r|l} 70 & 12 \\ \cline{2-2} 100 & 0,5833 \\ 40 & \\ 40 & \\ 4 & \end{array}$$

"Οθεν $\frac{7}{12}=0,5833\ldots\ldots$

Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ κλάσμα $\frac{13}{4}$ τρέπεται ἀκριβῶς εἰς δεκαδικὸν ἀριθμόν· δὲν συμβαίνει ὅμως τὸ αὐτὸ καὶ εἰς τὰ δύο ἄλλα κλάσματα. Τὸ κλάσμα $\frac{5}{7}$ μᾶς δίδει δεκαδικόν, τοῦ ὁποίου τὰ δεκαδικὰ ψηφία θὰ εἶναι ὁσαδήποτε θέλομεν, ἤτοι ἄπειρα, διότι ἡ διαίρεσις οὐδέποτε λαμβάνει πέρας· βλέπομεν δὲ προσέτι ὅτι εἰς τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ πηλίκου ψηφία τινὰ (714285) ἐπαναλαμβάνονται τὰ αὐτὰ καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν σειρὰν ἐπ' ἄπειρον. Τὰ ψηφία ταῦτα ἀποτελοῦσι τὴν καλουμένην *περίοδον* καὶ ὁ δεκαδικὸς ἀριθμός, ἐν τῷ ὁποίῳ συμβαίνει τοῦτο, καλεῖται *περιοδικὸν δεκαδικὸν κλάσμα.*

Ὁμοίως τὸ κλάσμα $\frac{7}{12}$ τρέπεται εἰς δεκαδικὸν περιοδικὸν κλάσμα 0,5833, τοῦ ὁποίου ἡ περίοδος εἶναι τὸ ψηφίον 3.

Τὸ μὲν περιοδικὸν δεκαδικὸν κλάσμα 0,714285 . . ., τοῦ ὁποίου ἡ περίοδος ἀρχίζει ἀμέσως μετὰ τὴν ὑποδιαστολήν, καλεῖται *ἁπλοῦν περιοδικόν*, τὸ δὲ 0,5833 . . ., τοῦ ὁποίου ἡ περίοδος ἀρχίζει οὐχὶ ἀπὸ τοῦ πρώτου δεκαδικοῦ ψηφίου, καλεῖται *μικτὸν περιοδικόν.*

Β' περίπτωσις. Διαίρεσις διὰ δεκαδικοῦ Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν νὰ διαιρέσωμεν 45,895 διὰ 0,37.

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τοὺς δοθέντας ἀριθμοὺς ἐπὶ 100, λαμβάνομεν τοὺς ἀριθμοὺς 4589,5 καὶ 37, τῶν ὁποίων τὸ πηλίκον εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ πηλίκον τῶν δοθέντων ἀριθμῶν (§ 81). Οὕτως ἡ διαίρεσις διὰ δεκαδικοῦ ἀνάγεται εἰς τὴν διαίρεσιν δι' ἀκεραίου καὶ ἐκτελεῖται κατὰ τὸν κανόνα (§ 177). 45,895 : 0,37.

$$\begin{array}{r|l} 4589,5 & 37 \\ \cline{2-2} 88 & 124,04 \\ 149 & \\ 150 & \\ 2 & \end{array}$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα·

179) «Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμόν τινα (ἀκέραιον ἢ δεκαδικὸν) διὰ δεκαδικοῦ, μεταθέτομεν πρῶτον τὴν ὑποδιαστολὴν τοῦ διαιρέτου εἰς τὸ τέλος καὶ ἄλλας τόσας θέσεις τὴν ὑποδιαστολὴν τοῦ διαιρετέου καὶ μετὰ ταῦτα ἐκτελοῦμεν τὴν διαίρεσιν».

Παραδείγματα. α') 458,9 : 0,378.

```
458900 | 378
 809   |1240,4...
 1530
  1800
   288.
```

β') 45,83 : 0,16.

```
4583 | 16
 138 |286,4375.
  103
   70
    60
    120
     80
      0
```

Συντομίαι διαιρέσεως.

180) «Διὰ νὰ διαιρέσωμεν δεκαδικὸν ἀριθμὸν διὰ 10, 100, 1000 κ.τ.λ. ἀρκεῖ νὰ μεταθέσωμεν τὴν ὑποδιαστολὴν αὐτοῦ τόσας θέσεις πρὸς τὰ ἀριστερά, ὅσα εἶνε τὰ μηδενικὰ τοῦ διαιρέτου».

Π. δ. χ. 45,8 : 10 = 4,58. Διότι ὁ 4,58 πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ 10 δίδει τὸν διαιρετέον 45,8, ἤτοι 4,58 × 10 = 45,8.

Ὁμοίως 245,8 : 100 = 2,458. Διότι 2,458 × 100 = 245,8.

Παρατ. α') *Ἂν πρὸ τῆς ὑποδιαστολῆς δὲν ὑπάρχωσιν ἐπαρκῆ ψηφία, ὅσα χρειάζονται διὰ τὴν μετάθεσιν τῆς ὑποδιαστολῆς, γράφομεν πρὸ τοῦ ἀριθμοῦ μηδενικά· π. δ. χ. 34,78 : 1000 = 0,03478.*

Παρατ. β'.) *Καὶ διὰ τὴν διαίρεσιν ἀκεραίου διὰ 10, 100 κ. λ. π. ἰσχύει ὁ αὐτὸς κανών, ἀρκεῖ νὰ θεωρήσωμεν τὴν ὑποδιαστολὴν εἰς τὸ τέλος τοῦ ἀκεραίου καὶ νὰ μεταθέσωμεν ταύτην πρὸς τὰ ἀριστερά, π. δ. χ. 583 : 100 = 5,83.*

181) «Ὅταν ὁ διαιρέτης λήγῃ εἰς ὁσαδήποτε μηδενικά, ἀποκόπτομεν πρῶτον τὰ μηδενικὰ αὐτοῦ καὶ μεταφέρομεν τὴν ὑποδιαστολὴν τοῦ διαιρετέου τόσας θέσεις πρὸς τὰ ἀριστερά, ὅσα εἶναι τὰ ἀποκοπέντα μηδενικά, καὶ μετὰ ταῦτα ἐκτελοῦμεν τὴν διαίρεσιν».

Π. δ. χ. ἡ διαίρεσις 45837 : 200 ἀνάγεται εἰς τὴν ἑξῆς 458,37 : 2 = 229,185 διότι κατὰ τὴν ἰδιότητα (§ 81) δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν τοὺς δοθέντας ἀριθμοὺς διὰ τοῦ 100.

Ὁμοίως ἡ διαίρεσις 3583,7 : 500 ἀνάγεται εἰς τὴν διαίρεσιν
35,837: 5=7,1674.

Πράξεις ἐπὶ κοινῶν κλασμάτων καὶ δεκαδικῶν.

182) Ὅταν ἔχωμεν νὰ ἐκτελέσωμεν πρᾶξίν τινα ἐπὶ δεκαδικῶν καὶ κλασματικῶν ἀριθμῶν, πρὸς αὐτῆς συμφέρει ἄλλοτε μὲν νὰ τρέψωμεν τοὺς κλασματικοὺς εἰς δεκαδικούς, ἄλλοτε δὲ νὰ διατηρήσωμεν τοὺς ἀριθμούς, ὡς εἶναι δεδομένοι, καὶ ἄλλοτε νὰ γράψωμεν τοὺς δεκαδικοὺς ὑπὸ κλασματικὴν μορφήν.

Παραδείγματα. α') Ἔστω πρὸς εὕρεσιν τὸ ἄθροισμα

$$385\frac{3}{4}+24,458+4\ \frac{2}{3}+48,9.$$

Πρὸς τοῦτο τρέπομεν τοὺς κλασματικοὺς εἰς δεκαδικούς, ἤτοι $385\ \frac{3}{4}=385,75$ καὶ $45\ \frac{2}{3}=45,667$ (κατὰ προσέγγισιν 0,001) καὶ ἔπειτα ἐκτελοῦμεν τὴν πρόσθεσιν $385,75+24,458+45,667+48,9=504,775$.

β') Ἔστω πρὸς ἐκτέλεσιν ἡ ἀφαίρεσις, $847,85-253\frac{5}{8}$. Τρέπομεν καὶ ἐνταῦθα τὸν ἀφαιρετέον εἰς δεκαδικόν, ἤτοι $253\frac{5}{8}=253,625$ καὶ ἔπειτα ἐκτελοῦμεν τὴν ἀφαίρεσιν $847,85-253,625=594,225$.

γ') Ἔστω πρὸς ἐκτέλεσιν ὁ πολλαπλασιασμὸς $3,45\times3\frac{2}{3}$. Ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν διατηροῦντες τοὺς ἀριθμοὺς ὡς ἐδόθησαν, λαμβάνομεν $3,45\times3\ \frac{2}{3}=\frac{37,95}{3}=12,65$ ἀκριβῶς. Ἐὰν ὅμως τρέψωμεν τὸ κλάσμα $\frac{2}{3}$ εἰς δεκαδικὸν κατὰ προσέγγισιν καὶ ἔπειτα ἐκτελέσωμεν τὸν πολλαπλασιασμόν, θὰ εὕρωμεν γινόμενον κατὰ προσέγγισιν ἤτοι : $3,45\times3\ \frac{2}{3}=3,45\times3,66=12,627$.

δ') Ἔστω τέλος πρὸς ἐκτέλεσιν ἡ ἑξῆς διαίρεσις $8\ \frac{5}{9}:0,9$.

Εἶναι πρακτικώτερον καὶ ἐνταῦθα νὰ τρέψωμεν τὸν μικτὸν εἰς δεκαδικὸν καὶ νὰ διαιρέσωμεν δεκαδικὸν διὰ δεκαδικοῦ. Ἀλλ' οὕτω τὸ πηλίκον θὰ εὑρεθῇ κατὰ προσέγγισιν. Ἐὰν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἀκριβὲς πηλίκον, εἶναι ἀνάγκη νὰ γράψωμεν τὸν δεκαδικὸν ὑπὸ κλασματικὴν μορφὴν καὶ ἔπειτα νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν πρᾶξιν ὡς ἑξῆς :

$$8\ \frac{5}{9}:\frac{9}{10}=\frac{61}{7}\times\frac{10}{9}=\frac{610}{63}=9\ \frac{43}{63}.$$

Παρατ. *Ἐν γένει δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν ὅτι, ἐὰν δὲν ἐνδιαφερώμεθα περὶ τῆς ἀκριβείας τοῦ ἐξαγομένου, εἶναι προτιμώτερον νὰ τρέ-*

πωμεν τὰ κοινὰ κλάσματα εἰς δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς καὶ μετὰ ταῦτα νὰ ἐκτελῶμεν τὰς πράξεις.

Ἀσκήσεις ἐπὶ τῶν πράξεων τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν.

α´) Ἀπὸ μνήμης·

1) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ ἑξῆς ἀθροίσματα.

$0,75+0,12=;$ $128,40+12,60=;$
$21,05+18=;$ $695,05+5,90=;$
$700+58,60=;$ $88,35+9=;$ $675,25+11,45=;$
$0,5+0,7=;$ $870+58,75=;$ $48,70+1,35=;$
$24.55+7.30=;$ $1,35+0,65=;$ $135,60+25,75=;$
$158,30+10=;$ $25+7,75=;$

2) Νὰ εὑρεθῶσιν αἱ ἑξῆς διαφοραί.

$1-0,65=;$ $5-2,25=;$ $18-6,70=;$
$18,50-10,25=;$ $27,60-10=;$ $158,45-730=;$
$58-15,60=;$ $148,75-25=;$ $900-200,50=;$
$(45+65)-18,70=;$ $(100+250)-80,75=;$
$(600+900)-50,030=;$

3) Νὰ τραπῶσιν εἰς δεκαδικούς, χωρὶς νὰ ἐκτελεσθῇ ἡ διαίρεσις, τὰ ἑξῆς κλάσματα·

$\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{20}, \frac{1}{25}, \frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \frac{5}{8}, \frac{7}{20}, \frac{4}{25}, \frac{7}{8}.$

4) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ ἑξῆς ἀθροίσματα καὶ αἱ διαφοραί·

$1,5+\frac{1}{2}=;$ $8,25-3\frac{1}{4}=;$ $15,6-7\frac{3}{5}=;$
$1,8+3\frac{2}{5}=;$ $12,25+2\frac{1}{4}=;$ $3,25+7\frac{3}{4}=;$
$5,80+2\frac{1}{2}=;$ $7,85+\frac{1}{20}=;$ $17,85+25\frac{1}{5}=;$
$5,80-2\frac{1}{2}=;$ $3.20-2\frac{1}{5}=;$ $4,75-1\frac{1}{4}=;$

5) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ ἑξῆς γινόμενα·

$4,58\times100=;$ $3,79\times0,1=;$ $1,75\times20=;$
$7,53\times10=;$ $28\times0,5=;$ $68\times0,50=;$
$13,5\times11=;$ $25,8\times2\times5=;$ $18,3\times50=;$
$7,5\times\frac{4}{5}=;$ $58.5\times99=;$ $2,34\times100=;$
$8,4\times12,5=;$ $64\times0.125=;$ $8,3\times100=;$
$37,8\times1000=;$ $7,45\times4\times25=;$ $145,8\times0,001=;$
$134,5\times10000=;$ $8,5\times0,8=;$ $140\times0,05=;$
$782.3\times0,01=;$ $38,70\times\frac{1}{3}=;$ $7,3\times40=;$
$48\times0,25=;$ $4,5\times3\frac{1}{3}=;$ $14,25\times25=;$

6) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ πηλίκα·

$18 : 10 =$ $\qquad$ $8{,}5 : \frac{1}{4} = ;$

$17{,}4 : 0{,}1 = ;$ $\qquad$ $5{,}8 : 3\frac{1}{3} = ;$

$35{,}6 : 1000 = ;$ $\qquad$ $3{,}6 : 9 = ;$

$8{,}7 : 200 = ;$ $\qquad$ $5{,}32 : 0{,}001 = ;$

$4{,}2 : \frac{1}{2} = ;$ $\qquad$ $5{,}6 : 7 = ;$

$12{,}6 : \frac{2}{3} = ;$ $\qquad$ $6{,}5 : \frac{5}{4} = ;$

$4{,}5 : 0{,}01 = ;$ $\qquad$ $8{,}7, : 3\frac{1}{2} =$

$4{,}8 : 60 = ;$ $\qquad$ $2{,}40 : 300 = ;$

β') Γραπτῶς·

1) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ ἑπόμενα ἀθροίσματα :

α'.) 0,75+0,325+0,09+0,928+0,009+0,05+0,7008+0,30645.

β') 13,125+4,6+0,5+8,429+17,542+11,194+7,9+8,643.

Σημ. *Οἱ προσθετέοι νὰ προστεθῶσι α') γραφόμενοι ἐν τῇ αὐτῇ στήλῃ ὁ εἷς κάτωθεν τοῦ ἄλλου καὶ β') καθ' ὁριζοντίαν γραμμήν.*

2) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὁλικὸν ἄθροισμα τῶν ἐν τῷ ἑπομένῳ πίνακι ἀριθμῶν.

15,10	22,65	—	54,40
17,20	49,55	17,25	8,35
8,25	117,25	3,45	124,95
9,35	63,40	18,15	86,20
7,65	—	29,65	73,65
14,25	27,15	32,40	84,95
19,35	19,25	54,90	77,20
127,10	18,45	17,25	64,35

Σημ. *Πρῶτον νὰ προστεθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ κατὰ στήλας καὶ τὰ μερικὰ ἀθροίσματα τῶν 4 στηλῶν ὁριζοντίως. Δεύτερον νὰ προστεθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ καθ' ὁριζοντίας γραμμὰς καὶ τὰ ἐν τῇ τελευταίᾳ στήλῃ μερικὰ ἀθροίσματα τῶν γραμμῶν τούτων νὰ προστεθῶσι κατακορύφως. Πρέπει δὲ εἰς τὴν κάτω δεξιὰν γωνίαν νὰ εὑρεθῇ τὸ αὐτὸ ὁλικὸν ἄθροισμα καὶ κατὰ τὰς δύο περιπτώσεις.*

3) Νὰ εὑρεθῇ καθ' ὅμοιον τρόπον τὸ ὁλικὸν ἄθροισμα τῶν ἑξῆς ἀριθμῶν. 0,485+0,695+75,095+10,147+69,75+35+8,125,748 +75+247,705+1280,45+0,475+3178,025+78,046+679,5 +587,175+15,645+18,75.

4) Εὑρεῖν τὰς ἑξῆς διαφοράς·

α') 6288,057—(1107,35+814,1+0,174)=;

β') 75,812—(0,0741+1.56+3,6285+22,9)=;

γ') 146—(21,282+0,74182+12,5143+4,18976)=;

5) Νὰ γραφῶσι καὶ προστεθῶσι α'.) 8 προσθετέοι μὲ 5 ἀκέραια καὶ 2 δεκαδικὰ ψηφία. β') 6 προσθετέοι μὲ 4 ἀκέραια ψηφία καὶ 3 δεκαδικὰ ψηφία· γ') 8 προσθετέοι μὲ 5 ἀκέραια καὶ 4 δεκαδικὰ ψηφία.

Προβλήματα δεκαδικῶν ἀριθμῶν.

1) Ὀφείλει τις εἴς τινα 85 δραχμάς, εἰς ἄλλον 65,45 δρχ., εἰς τρίτον 180,75 δρχ. καὶ εἰς τέταρτον 250,15 δρχ. Πόσα ὀφείλει ἐν ὅλῳ.

2) Ὁ ταμίας τραπέζης τινὸς εἰσέπραξε κατὰ τὴν 10ην Νοεμβρίου τὰ ἑξῆς ποσά· 185,75 δρχ.,705,50 δρχ.,1028,10 δρχ.,367,75 δρχ. 578 50 δρχ. 2038,05 δρχ., 4015,65 δρχ., 806,90 δρχ.,567,40 δρχ., 478 δρχ., 179,85 δρχ. Πόσα εἰσέπραξε τὸ ὅλον.

3) Ἐργοστασιάρχης τις ἔκαμεν εἰς τὸ τέλος τῆς ἑβδομάδος τὰς ἑξῆς πληρωμάς: 9478,50 δρχ. 9275,40 δρχ., 807,10 δραχ. 560, δρχ. καὶ 3675,45 δρχ., Πόσα ἐπλήρωσεν ἐν ὅλῳ ;

4) Ὤφειλέ τις 5675 δρχ. καὶ ἐπλήρωσεν ἀπέναντι τοῦ χρέους τούτου κατὰ διαφόρους ἐποχὰς ἐν ὅλῳ 3675,45 δρχ. Πόσα ὀφείλει ἀκόμη;

5) Ἔμπορός τις κατεῖχε τὴν 1ην Ἰανουαρίου 1912 εἰς ἐμπορεύματα, μετρητά, ἔπιπλα κτλ. ἐν ὅλῳ 85795,45 δρχ. ὤφειλε δὲ εἰς τρίτους ἐν ὅλῳ 47167,95 δρχ. Πόσον κεφάλαιον καθαρὸν (περιουσίαν) εἶχε τὴν ἡμέραν ταύτην;

6) Ἔμπορός τις εἶχε τὴν 1ην τοῦ ἔτους καθαρὸν κεφάλαιον 118675,40 δραχμάς. Κατὰ τὸ τέλος τοῦ ἔτους εἶχε κεφάλαιον καθαρὸν 125700 δρχ. Πόσον ἐκέρδισεν ἢ ἔχασε κατὰ τὸ λῆξαν ἔτος ;

7) Ἔμπορός τις κατέθεσεν εἰς τὴν Τράπεζαν τὴν 1ην Ἰανουαρίου 15000 δρχ., τὴν 5ην τοῦ αὐτοῦ μηνὸς ἑτέρας 5615,40 δραχ., τὴν δὲ 10ην ἀπέσυρε δι' ἀνάγκας τοῦ καταστήματός του 7826,65 δραχ. τὴν 15ην Ἰανουαρίου ἑτέρας 2875,90 δρχ., τὴν 20ὴν Ἰανουαρίου κατέθεσεν ἐκ νέου 3675,70 δρχ., τὴν 25ην Ἰανουαρίου ἀπέσυρε 5678,55 δρχ. καὶ τὴν 31ην Ἰανουαρίου 1875,15 δρχ. Ποῖον ὑπόλοιπον ἔμεινεν ἀκόμη ὑπὲρ αὐτοῦ τὴν 31ην Ἰανουαρίου ;

8) Εἶχε ἀγοράσει τις ποσόν τι καφὲ ἀντὶ 8675,45 δραχ.,ἐπώλησε δὲ κατ' ἀρχὰς ἓν μέρος αὐτοῦ ἀντὶ 3145,75 δρχ., ἓν ἕτερον ἀντὶ 2008,40 δρχ. καὶ τὸ ὑπόλοιπον ἀντὶ 4675,60 δρχ. ἐκέρδισεν ἢ ἐζημιώθη καὶ πόσον;

9) Πιστωτής εἶχε νὰ λάβῃ παρά τινος χρεώστου 6675,45 δρχ.. ἔλαβε

δὲ παρ' αὐτοῦ πρῶτον 1815,45 δραχ., ἔπειτα δὲ 962 δρχ. καὶ τέλος 3267,75 δρχ. Δικαιοῦται νὰ λάβῃ ἀκόμη ὑπόλοιπόν τι καὶ πόσον;

10) Ἔμπορός τις ἠγόρασε καθ' ὅλον τὸ ἔτος ἐμπορεύματα ἀξίας ἐν ὅλῳ 75185,45 δρχ. εἰσέπραξε δ' ἐκ τῶν πωληθέντων καθ' ὅλον τὸ ἔτος 73467,75 δραχ. καὶ τῷ ἀπέμεινον ἐν τῇ ἀποθήκῃ ἀπώλητα ἐμπορεύματα στοιχίζοντα εἰς αὐτὸν 8145,75 δραχ. Ἐκέρδησεν ἢ ἐζημιώθη καὶ πόσον;

11) Ἐργολάβος τις ἀνέλαβε νὰ ἐκτελέσῃ ἔργον τι κατ' ἀποκοπὴν ἀντὶ 56742 δραχ., ἐδαπάνησε δὲ πρὸς τοῦτο τὰ ἑξῆς· δι' ὑλικὰ 35672,45 δραχ. δι' ἡμερομίσθια 10728,75 δραχ. καὶ δι' ἄλλα μικρὰ ἔξοδα 4720,80 δρχ. Ἐκέρδισεν ἢ ἐζημιώθη καὶ πόσον;

12) Εἶχέ τις 25145,55 δρχ. καὶ ἠγόρασεν ἀγρὸν ἀντὶ 4185,65 δρχ. ἔπειτα εἰσέπραξε παρά τινος χρεώστου 2180,85 δρχ. καὶ ἠγόρασε κατόπιν μίαν οἰκίαν ἀντὶ 7185,45 δρ. καὶ ἓν ἐλαιοτριβεῖον ἀντὶ 6135,75 δρχ. Ἐδαπάνησε δὲ εἰς χαρτόσημα καὶ ἄλλα μικρὰ ἔξοδα διὰ τὰς γενομένας ἀγορὰς 135,70 δρχ. Πόσαι δραχμαὶ τῷ ἔμειναν;

13) Ἡ ὀκᾶ πράγματός τινος τιμᾶται 2,75 πόσον τιμῶνται αἱ $28\frac{4}{5}$ ὀκ.; (ἀπ. 79,20 δρχ.)

14) Οἱ $8\frac{3}{8}$ πήχ. τιμῶνται 75,50 δρχ. Πόσον τιμᾶται ὁ πῆχυς; (ἀπ. 9,01 δρχ.)

15) Ἐργάτης τις λαμβάνει ἡμερομίσθιον 4,25 δρχ. Πόσας ἡμέρας θὰ ἐργασθῇ διὰ νὰ λάβῃ 55,25 δρχ; (ἀπ. 13 ἡμ.)

16) Πόσον τιμῶνται α') 100 ᾠὰ πρὸς $7\frac{1}{2}$ λεπτὰ ἕκαστον, β') 10 ὀκάδ. ζακχάρεως πρὸς 1,25 τὴν ὀκ. καὶ γ') 50 ὀκ. ἀλεύρου πρὸς $56\frac{1}{2}$ λεπτὰ τὴν ὀκᾶν;

17) Πόσον στοιχίζει ἡ ὀκᾶ α') καφέ, ἐὰν δι' 100 ὀκ. ἐπληρώσαμεν 365 δρχ. β') βουτύρου, ἐὰν διὰ 10 ὀκ. ἐπληρώσαμεν 56,80 δρχ.;

18) Ἠγόρασέ τις 45450 πλίνθους ὀπτὰς (τοῦβλα) πρὸς 29,75 δρχ. τὴν χιλιάδα. Πόσας δραχμὰς ἐπλήρωσεν; (ἀπ. 1352, 14).

19) Ἠγόρασέ τις 2450 ὀκ. ζάκχαριν πρὸς 1,28 δρχ. τὴν ὀκᾶν, ἀλλ' ἕνεκα δυσμενῶν περιστάσεων ἠναγκάσθη νὰ πωλήσῃ αὐτὴν πρὸς 1,25 δρχ. Πόσον ἐζημιώθη; (ἀπ. 73,50).

20) Πατήρ τις δαπανᾷ καθ' ἡμέραν 2,75 δραχ. διὰ κρέας, 1 δραχμ. δι' ἄρτον, 50 λεπτὰ δι' οἶνον, 2,10 δραχ. δι' ἐνοίκιον καὶ 1,45 δραχμ. δι' ἄλλα διάφορα ἔξοδα. Εἰς πόσον ἀνέρχεται ἡ μηνιαία δαπάνη; (ἀπ. 234 δραχ.)

21) Πατήρ τις ἀποθανὼν κατέλιπε τὸ ποσὸν 65480 δραχ. Κατὰ τὴν διαθήκην ἔλαβε ἡ μὲν μήτηρ τὰ 0,15 τούτου, ἡ δὲ θυγάτηρ τὰ 0,23, ἕκαστος δ' ἐκ τῶν τριῶν υἱῶν του 0,12 καὶ τὸ ὑπόλοιπον διάφορα φιλανθρωπικὰ καταστήματα. Πόσας δραχμὰς ἔλαβεν ἕκαστος; (ἀπ. α'. 9822 δρχ., β'. 15060,40 δραχ., γ'. 7857,60 δραχ., δ'. 17024,80 δραχ.)

22) Ἔμπορός τις ἔλαβεν ἐξ Ἰταλίας 15 σάκκους ὀρύζης βάρους καθαροῦ 65 ὀκ. ἕκαστον, ἐπλήρωσε δὲ διὰ ναῦλον 3,25 δραχ. κατὰ σάκκον, δι' ἐκφόρτωσιν καὶ μεταφορὰν μέχρι τῆς ἀποθήκης του ἐν ὅλῳ 45,80 δραχ., διὰ δασμὸν 0,15 δραχ. κατ' ὀκᾶν. Ἐὰν ἡ τιμὴ τῆς ἀγορᾶς συνεφωνήθη πρὸς 0,68 δραχ. κατ' ὀκᾶν α') πόσον θὰ στοιχίσῃ ἐν ὅλῳ τὸ ἐμπόρευμα τοῦτο μετὰ τῶν ἐξόδων, β') πόσον ἡ ὀκᾶ; (ἀπ. ἐν ὅλῳ 903,80, ἡ ὀκᾶ 0,929 $\frac{1}{39}$ ἢ 93 λεπτὰ περίπου).

15 23) Ζῳέμπορός τις ἠγόρασεν ἐκ Θεσσαλίας 258 ἀμνοὺς πρὸς 18,60 ἕκαστον, ἐδαπάνησε δὲ διὰ τὴν μεταφορὰν αὐτῶν μέχρις Ἀθηνῶν 1,65 δραχ. δι' ἕκαστον καὶ ἀπέθανον καθ' ὁδὸν 15 ἀμνοί. Πόσας δραχμὰς στοιχίζει ἕκαστος τῶν ἐπιλοίπων καὶ πρὸς πόσον πρέπει νὰ πωλήσῃ ἕκαστον διὰ νὰ κερδίσῃ 425 δρχ. ἐν ὅλῳ. (ἀπ. 21,50 δρχ. στοιχίζει ἕκαστος, 23,25 δρχ. νὰ πωληθῇ ἕκαστος).

24) Εἰς ἐργοστάσιόν τι ἐργάζονται 15 ἄνδρες, 12 γυναῖκες καὶ 25 κοράσια. Ἐργάζονται 8 ὥρας καθ' ἡμέραν καὶ πληρώνονται οἱ μὲν ἄνδρες 0,75 δρχ. καθ' ὥραν, αἱ δὲ γυναῖκες 0,45 δρχ. καθ' ὥραν καὶ τὰ κοράσια 0,15 δρχ. καθ' ὥραν. Πόσας δραχμὰς πληρώνει ὁ ἐργοστασιάρχης καθ' ἑβδομάδα εἰς ὅλους τοὺς ἐργάτας;

(ἀπ. πληρώνει 979,20 δρχ. εἰς 6 ἡμέρας.)

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε΄.

Περὶ μέτρων, σταθμῶν καὶ νομισμάτων. Ὁρισμοί.

183) *Ποσά. Μέτρησις αὐτῶν.* Οἱ μαθηταὶ μιᾶς τάξεως ἀποτελοῦσι πλῆθός τι, ὅπερ δύναται νὰ αὐξήσῃ, προστιθεμένων εἰς τὴν τάξιν νέων μαθητῶν ἢ νὰ ἐλαττωθῇ ἀπερχομένων τινῶν. Ὁμοίως ὁ δρόμος, τὸν ὁποῖον διανύει ὁδοιπόρος τις κατά τι χρονικὸν διάστημα δύναται νὰ εἶναι μεγαλύτερος ἢ μικρότερος καθόσον βαδίζει ταχύτερον ἢ βραδύτερον.

Τὸ πλῆθος τῶν μαθητῶν, ὁ δρόμος τοῦ ὁδοιπόρου καὶ πᾶν ἄλλο, τὸ ὁποῖον δύναται νὰ αὐξηθῇ ἢ νὰ ἐλαττωθῇ, καλεῖται ἐν γένει *ποσόν*.

Ἐκ τούτων ἕπεται ὁ ἑξῆς ὁρισμός·

184. «Ποσὸν καλεῖται πᾶν τὸ ἐπιδεχόμενον αὔξησιν ἢ ἐλάττωσιν».

Τὰ ποσά, ἅτινα ἀποτελοῦνται ἐκ πολλῶν ὁμοίων πραγμάτων κεχωρισμένων ἀπ' ἀλλήλων, ὡς εἶναι τὸ πλῆθος τῶν μαθητῶν μιᾶς τάξεως, τὸ πλῆθος δένδρων κήπου τινὸς κ.τ.λ. δυνάμεθα νὰ καλέσωμεν *ποσὰ ἀσυνεχῆ*. Τὰ δὲ ποσά, οἷα ὁ δρόμος, ἡ γραμμή, ἡ ἐπιφάνεια κ.τ.λ., ἅτινα ἀποτελοῦνται ἀπὸ ἓν ὅλον συνεχές, καλοῦμεν *ποσὰ συνεχῆ*.

Ἡ εὕρεσις τοῦ ἀριθμοῦ πολλῶν ὁμοίων πραγμάτων, ἅτινα ἀποτελοῦσιν ἀσυνεχὲς ποσόν, καλεῖται *ἀρίθμησις* καὶ ἐγένετο περὶ αὐτῆς λόγος ἐν τῇ εἰσαγωγῇ (§ 5). Πρόκειται νῦν νὰ μάθωμεν, πῶς εὑρίσκεται ὁ ἀριθμὸς ὁ παριστῶν τὸ μέγεθος συνεχοῦς τινος ποσοῦ.

Ἂς ὑποθέσωμεν π. δ. χ. ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ μέγεθος τῆς γραμμῆς ΑΒ.

Πρὸς τοῦτο Α B

λαμβάνομεν Γ Δ

ὁμοειδὲς ποσόν, ἤτοι μίαν ἄλλην γραμμήν, π. δ. χ. τὴν ΓΔ ὡς μονάδα καὶ πρὸς αὐτὴν συγκρίνομεν τὴν ΑΒ. ἤτοι εὑρίσκομεν ποσάκις πρέπει νὰ ἐπαναλάβωμεν τὴν ΓΔ ὁλόκληρον ἢ καὶ μέρη αὐτῆς ὡρισμένα, διὰ νὰ σχηματίσωμεν τὴν ΑΒ. Ἔστω δὲ ὅτι πρέπει νὰ ἐπαναλάβωμεν ταύτην δὶς καὶ τὸ τέταρτον αὐτῆς τρίς. Ἐὰν παραστήσωμεν τὸ μέγεθος τῆς ΓΔ διὰ τοῦ 1, τὸ μέγεθος τῆς ΑΒ θὰ παρασταθῇ διὰ τοῦ $2\frac{3}{4}$.

Ἡ πρᾶξις, δι' ἧς εὑρίσκομεν τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο, καλεῖται *μέτρησις* τὸ δ' ἐξαγόμενον ταύτης παρίσταται δι' ἀριθμοῦ, ὅστις γίνεται ἐκ τῆς μονάδος καὶ τῶν μερῶν αὐτῆς, καθ' ὃν τρόπον ἡ γραμμὴ ΑΒ γίνεται ἐκ τῆς ΓΔ καὶ τῶν μερῶν αὐτῆς.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν καὶ τὸ μέγεθος παντὸς ἄλλου συνεχοῦς ποσοῦ.

Ἐντεῦθεν ἕπεται ὁ ἑξῆς ὁρισμός·

185) «Μέτρησις συνεχοῦς ποσοῦ δι' ἄλλου ὁμοειδοῦς καὶ ὡρισμένου, ὅπερ λαμβάνεται ὡς μονάς, καλεῖται ἡ πρᾶξις δι' ἧς εὑρίσκομεν πῶς τὸ πρῶτον ποσὸν δύναται νὰ σχηματισθῇ διὰ τῆς ἐπαναλήψεως ἐκ τοῦ δευτέρου καὶ τῶν μερῶν αὐτοῦ».

Μονάδες διάφοροι καὶ ὀνόματα αὐτῶν.

186) Διὰ τὴν ἀρίθμησιν ποσοῦ τινὸς ἀσυνεχοῦς εἴδομεν ὅτι λαμβάνεται ὡς μονάς, τὸ ἓν ἐκ τῶν πολλῶν ὁμοίων πραγμάτων. Εἶναι δὲ αὕτη φυσικὴ μονάς, τὴν ὁποίαν πανταχοῦ παρεδέχθησαν. Δὲν συμβαίνει ὅμως τὸ αὐτὸ καὶ διὰ τὴν μέτρησιν τῶν συνεχῶν ποσῶν· διότι, ὡς εἴδομεν, πρὸς τοῦτο λαμβάνεται κατὰ βούλησιν ὡς ἀρχικὴ μονὰς ὁμοειδές τι καὶ ὡρισμένον ποσόν. Ἡ μονὰς αὕτη ὑποδιαιρεῖται εἰς ἄλλας μικροτέρας μονάδας διὰ τὴν μέτρησιν ποσοῦ μικροτέρου τῆς ἀρχικῆς μονάδος· ἐπίσης λαμβάνονται καὶ ὡρισμένα πολλαπλάσια τῆς ἀρχικῆς μονάδος ὡς νέαι μονάδες πρὸς μέτρησιν πολὺ μεγάλων ποσῶν. Ἡ ἀρχικὴ μονάς, τὰ πολλαπλάσια καὶ αἱ ὑποδιαιρέσεις αὐτῆς διὰ ποσόν τι συνεχὲς ἐν γένει δὲν εἶναι αἱ αὐταὶ παρ' ἅπασι τοῖς λαοῖς. Εἶναι λοιπὸν ἀνάγκη νὰ γνωρίζωμεν τὰς μονάδας, τὰ πολλαπλάσια καὶ τὰς ὑποδιαιρέσεις αὐτῶν τὰς ἐν χρήσει παρ' ἡμῖν καὶ ἀλλαχοῦ καὶ αἵτινες εἶναι μᾶλλον συνήθεις καὶ χρήσιμοι εἰς τὸν πρακτικὸν βίον.

Εἰς ἄλλας μὲν μονάδας ἡ ὑποδιαίρεσις εἶναι δεκαδική, δηλαδὴ ἡ ἀρχικὴ μονὰς ὑποδιαιρεῖται εἰς 10 ἢ 100 κ.τ.λ. ἴσα μέρη. Εἰς ἄλλας ὅμως μονάδας ἡ ὑποδιαίρεσις γίνεται εἰς οἱαδήποτε μέρη μὴ δεκαδικά. Ὅθεν διὰ τὰ διάφορα ποσὰ ἔχομεν μονάδας μὲ δεκαδικὰς ὑποδιαιρέσεις καὶ μονάδας ἄνευ τοιούτων ὑποδιαιρέσεων.

Μονάδες μήκους.

187) α΄) *Μονάδες μὲ δεκαδικὴν ὑποδιαίρεσιν.* —Τοιαύτη εἶναι τὸ γαλλικὸν μέτρον, ὅπερ εἰσαχθὲν εἰς τὴν Ἑλλάδα κατὰ τὸ 1836 ὡς ἐπίσημος μονὰς τοῦ Κράτους ἐκλήθη βασιλικὸς πῆχυς.

Σημ. Εἰς νεώτερον διάταγμα τῆς 26ης 7)βρίου 1911 ὡς μονάδες μήκους, ἐπιφανείας καὶ ὄγκου ὡρίσθησαν πάλιν τὸ μέτρον, τὸ τετραγωνικὸν μέτρον καὶ τὸ κυβικὸν μέτρον. Ἡ ὀνομασία βασιλικὸς πῆχυς εἶναι ἀσυνήθης, μᾶλλον δὲ συνήθης εἶναι τὸ μέτρον.

Τὸ γαλλικὸν μέτρον εἶναι τὸ 0,0000001 τοῦ $\frac{1}{4}$ τοῦ μεσημβρινοῦ τῆς γῆς.

Ὑποδιαιρεῖται εἰς 10 ἴσα μέρη, ἅτινα καλοῦνται *παλάμαι* ἢ *ὑποδεκάμετρα*. Ἑκάστη παλάμη ὑποδιαιρεῖται εἰς ἄλλα 10 ἴσα μέρη, ἕκαστον τῶν ὁποίων καλεῖται *δάκτυλος* ἢ *ὑφεκατόμετρον* ἢ *ἑκατοστόμετρον* (κοιν. πόντος). Ἕκαστος δάκτυλος ὑποδιαιρεῖται πάλιν εἰς 10 ἴσα μέρη, ἕκαστον τῶν ὁποίων καλεῖται *γραμμὴ* ἢ *χιλιοστόμετρον*.

Αἱ σχέσεις τῶν μονάδων τούτων καταφαίνονται ἐν τῷ ἑπομένῳ πίνακι·

1 βασιλ. πῆ	= 10 παλ.	= 100 δακτύλ.	= 1000 γραμ.
	1 παλ.	= 10 δακ.	= 100 γραμ.
		1 δακ.	= 10 γραμ.

Ἐκ τοῦ πίνακος τούτου καταφαίνεται ὅτι ἡ παλάμη εἶναι τὸ $\frac{1}{10}$ τοῦ βασ. πήχεως, ὁ δάκτυλος τὸ $\frac{1}{100}$ καὶ ἡ γραμμὴ τὸ $\frac{1}{1000}$ αὐτοῦ.

Πολλαπλάσια τοῦ βασ. πήχεως εἶναι τὰ ἑξῆς·

1) Τὸ *δεκάμετρον*, μήκους 10 μέτρων, 2) τὸ *ἑκατόμετρον*, μήκους 100 μέτρων, 3) τὸ *χιλιόμετρον* ἢ *στάδιον*, μήκους 1000 μέτρων καὶ 4) τὸ *μυριάμετρον*, μήκους 10.000 μέτρων.

β΄) *Μονάδες ἄνευ δεκαδικῆς ὑποδιαιρέσεως.*

Τοιαῦται εἶναι αἱ ἑξῆς:

1) Ὁ *τεκτονικὸς πῆχυς* ἴσος πρὸς τὰ 0,75 ἢ $\frac{3}{4}$ τοῦ βασιλ. πήχεως.

2) Ὁ *μικρὸς πῆχυς* τῆς Κων)πόλεως ἴσος πρὸς τὰ 0,65 (0,648) τοῦ βασιλ. πήχεως καὶ καλεῖται *ἐνδεζέ*. Ὁ μικρὸς πῆχυς λαμβάνεται ἐν τῷ ἐμπορίῳ ἴσος μὲ 0,64 τοῦ μέτρου.

3) Ὁ *μέγας πῆχυς* τῆς Κων)πόλεως ἴσος πρὸς τὰ 0,67 (0,669) τοῦ βασ. πήχεως καὶ καλεῖται *ἀρσίν*.

Οἱ δύο οὗτοι τελευταῖοι πήχεις διαιροῦνται εἰς 8 ἴσα μέρη, ἅτινα καλοῦνται *ῥούπια*, καὶ χρησιμεύουσι διὰ τὴν μέτρησιν τῶν ὑφασμάτων· ἀλλ' ὁ μᾶλλον συνήθης παρ' ἡμῖν εἶναι ὁ ἐνδεζές.

4) Ἐν Ἀγγλίᾳ καὶ ἐν ταῖς Ἡνωμέναις Πολιτείαις τῆς Ἀμερικῆς ὡς ἀρχικὴν μονάδα μήκους μεταχειρίζονται τὴν ὑάρδαν ἴσην πρὸς 0,914 μέτρα καὶ ἥτις διαιρεῖται εἰς 3 πόδας καὶ ὁ ποῦς εἰς 12 δακτύλους (ἴντσες).

Ἐν τῇ πράξει λογαριάζονται 12 ὑάρδαι=11 μέτρα.

5) Ἐν Ῥωσσίᾳ μονὰς μήκους ἐν χρήσει εἶναι ὁ ἀρσὶν ἴσος πρὸς 0,711 μέτρα. Μεταχειρίζονται ὅμως καὶ τὸν Ἀγγλικὸν πόδα ἴσον πρὸς 0,305 μέτρα.

Σημ. *Παλαιὰ μονὰς μήκους ἦτο ἡ ὀργυιὰ ἴση πρὸς 1,949 μ. ἐκλιποῦσα ἤδη ἐντελῶς. Ἄλλαι μονάδες εὔχρηστοι διὰ μεγάλας ἀποστάσεις εἶναι τὸ ναυτικὸν μίλιον ἴσον πρὸς 1852,2 μέτρα, τὸ γερμανικὸν ἢ γεωγραφικὸν μίλιον ἴσον πρὸς 7420 μέτρα καὶ τὸ Ἀγγλικὸν μίλιον ἴσον πρὸς 1760 ὑάρδας. Ἐν Ῥωσσίᾳ εἶναι τὸ Βέρστιον ἴσον πρὸς 1067 μέτρα.*

Μονάδες ἐπιφανείας.

188) α΄) *Μονάδες μὲ δεκαδικὴν ὑποδιαίρεσιν*—Τοιαύτη εἶναι ἡ λαμβανομένη ἐπ τῇ βάσει τοῦ βασιλ. πήχεως.

Ἀρχικὴ μονὰς πρὸς μέτρησιν ἐπιφανειῶν εἶναι τὸ *τετραγωνικὸν μέτρον* ἤτοι τετράγωνον τοῦ ὁποίου ἑκάστη πλευρὰ ἰσοῦται πρὸς ἓν μέτρον. Ὑποδιαιρεῖται εἰς 100 ἴσα τετράγωνα ἐκ τῶν ὁποίων ἕκαστον ἔχει πλευρὰν ἴσην πρὸς μίαν παλάμην καὶ καλεῖται *τετραγωνικὴ παλάμη ἢ τετραγωνικὸν ὑποδεκάμετρον*. Ἡ ὑποδιαίρεσις αὕτη τοῦ τετραγωνικοῦ μέτρου γίνεται ὡς δεικνύει τὸ σχῆμα.

Ἡ τετραγωνικὴ παλάμη ὑποδιαιρεῖται ὁμοίως εἰς 100 ἴσα τετράγωνα, ἐκ τῶν ὁποίων ἕκαστον ἔχει πλευρὰν ἴσην πρὸς ἕνα δάκτυλον καὶ καλεῖται *τετραγωνικὸς δάκτυλος ἢ τετραγ. ὑφεκατόμετρον*.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ὁ τετραγ. δάκτυλος ὑποδιαιρεῖται εἰς 100 ἴσα τετράγωνα, ἐκ τῶν ὁποίων ἕκαστον ἔχει πλευρὰν ἴσην πρὸς μίαν γραμμὴν καὶ καλεῖται *τετραγωνικὴ γραμμὴ ἢ τετραγ. χιλιοστόμετρον*.

Σημ. *Δεξιᾷ τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ παριστῶντος ἐπιφάνειαν μετρηθεῖσαν διά τινος μονάδος γράφεται καὶ ἓν μικρὸν τετράγωνον.*

Ἡ σχέσις μεταξὺ τῶν μονάδων τούτων καταφαίνεται ἐν τῷ ἑπομένῳ πίνακι:

1 □ μ.	=	100 □ παλ.	=	10000 □	=	1000000 □ γραμ.
		1 □ παλ.	=	100 □ δ.	=	10000 □ γραμ.
				1 □ δ.	=	100 □ γραμ.

Ἐντεῦθεν βλέπομεν ὅτι 1 □ π. εἶναι τὸ $\frac{1}{100}$ τοῦ τετραγωνικοῦ μέτρου καὶ 1 □ δ. τὸ $\frac{1}{10000}$ τοῦ τετραγ. μέτρου καὶ 1 □ γρ. τὸ $\frac{1}{1000000}$ τοῦ τετραγ. μέτρου.

Διὰ τὴν μέτρησιν τῶν ἀγρῶν, ὡς μονὰς χρησιμεύει παρ' ἡμῖν α') τὸ *βασιλικὸν στρέμμα*, τὸ ὁποῖον ἔχει 1000 □ μ. καὶ εἶναι τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἑκάστη πλευρὰ εἶναι 31,62 μ. περίπου καὶ β'.) τὸ *παλαιὸν στρέμμα*. ὅπερ εἶναι ἴσον πρὸς 1,27 βασ. στρέμ. ἢ 1270 □ μ.

Διὰ τὴν μέτρησιν ἔτι μεγαλυτέρων ἐπιφανειῶν, ὡς νομῶν, χωρῶν κ.τ.λ. χρησιμεύει τὸ *τετραγ. χιλιόμετρον*, ἤτοι τετράγωνον ἔχον πλευρὰν ἴσην πρὸς 1000 μέτρα καὶ ἐπομένως εἶναι ἴσον πρὸς 1.000.000 □ μ. ἢ 1000 βασ. στρέμματα.

Εἰς τὰ Κράτη τῆς Εὐρώπης, ἅτινα παρεδέχθησαν τὸ Γαλ. μέτρον, διὰ τὴν καταμέτρησιν τῶν ἀγρῶν χρησιμεύει ὡς μονὰς τὸ *ἄριον* (are), ὅπερ εἶναι τετράγωνον ἔχον πλευρὰν 10 μ. ἤτοι ἴσον πρὸς 100 □ μ. καὶ ἔτι συνηθέστερον τὸ πολλαπλάσιον αὐτοῦ *ἑκτάριον* ἰσοδυναμοῦν μὲ 100 ἄρια. Ἐπομένως τὸ ἑκτάριον περιέχει 10000 □ μ. ἢ 10 βασ. στρέμ.

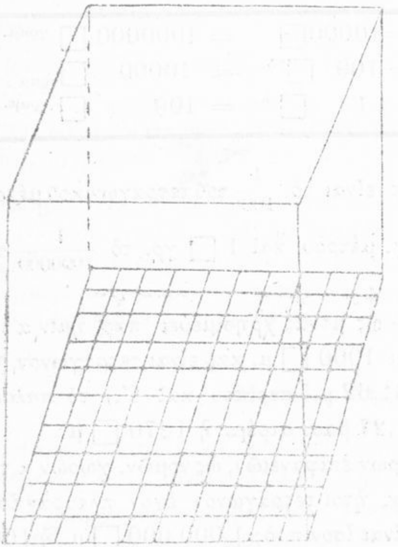
Ἐν Ἀγγλίᾳ καὶ ἐν ταῖς Ἡνωμέναις πολιτείαις χρησιμεύει τὸ *ἄκρον* ἴσον πρὸς 40,5 ἄρια περίπου.

β') *Μονάδες ἄνευ δεκαδικῆς ὑποδιαιρέσεως*. Τοιαύτη μονὰς εἶναι ὁ *τετραγ. τεκτονικὸς πῆχυς*, ἤτοι τετράγωνον τοῦ ὁποίου ἑκάστη πλευρὰ ἰσοῦται πρὸς ἕνα τεκτονικὸν πῆχυν, ἤτοι ἰσοῦται πρὸς $\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{9}{16}$ τοῦ τετραγωνικοῦ μέτρου. Χρησιμεύει ἰδίως ἡ μονὰς αὕτη πρὸς μέτρησιν τῶν οἰκοπέδων.

Μονάδες ὄγκου καὶ χωρητικότητος.

189) α') ***Μονάδες μὲ δεκαδικὴν ὑποδιαίρεσιν.*** Ὡς ἀρχικὴ μονὰς ὄγκου λαμβάνεται τὸ ***κυβικὸν μέτρον***, τὸ ὁποῖον εἶναι κύβος, τοῦ ὁποίου

ἑκάστη ἕδρα εἶναι ἴση πρὸς 1 □ μ. ἢ ἑκάστη πλευρὰ εἶναι ἴση πρὸς 1 μέτρ.



(Σχ. 2.)

Τὸ κυβικὸν μέτρον ὑποδιαιρεῖται εἰς 1000 ἴσους κύβους, ἐκ τῶν ὁποίων ἕκαστος ἔχει πλευρὰν ἴσην πρὸς μίαν παλάμην καὶ καλεῖται *κυβικὴ παλάμη* ἢ *κυβικὸν ὑποδεκάμετρον*.

Ἡ ὑποδιαίρεσις αὕτη γίνεται, ὡς δεικνύει τὸ παρακείμενον σχῆμα. Ἡ κυβ. παλάμη ὑποδιαιρεῖται καθ' ὅμοιον τρόπον εἰς 1000 κύβους, ἐκ τῶν ὁποίων ἕκαστος ἔχει πλευρὰν ἴσην πρὸς ἕνα δάκτυλον καὶ καλεῖται *κυβικὸς δάκτυλος* ἢ *κυβικὸν ὑφεκατόμετρον*.

Ἡ σχέσις μεταξὺ τῶν μονάδων τούτων καταφαίνεται ἐν τῷ ἑπομένῳ πίνακι:

$$1^{\text{κ. μ.}} = 1000^{\text{κ. παλ.}} = 1.000.000^{\text{κ. δακ.}}$$

$$1^{\text{κ. π.}} = 1000^{\text{κ. δακ.}}$$

Ἐντεῦθεν βλέπομεν ὅτι ἡ 1 κ. παλ. εἶναι τὸ $\frac{1}{1000}$ τοῦ κ. μ. καὶ ὁ 1 κ. δ. τὸ $\frac{1}{1000000}$ τοῦ κ. μέτρου.

Σημ. *Πρὸς μέτρησιν τῆς ἐπιφανείας ἢ τοῦ ὄγκου εἶναι ἀνάγκη, ὡς μᾶς διδάσκει ἡ Γεωμετρία, νὰ μετρήσωμεν γραμμάς τινας καὶ ἐξ αὐτῶν νὰ εὕρωμεν πόσα τετρ. μέτρα ἔχει ἡ ἐπιφάνεια ἢ πόσα κ. μέτρα ἔχει τὸ στερεόν· εὑρίσκονται δὲ ταῦτα διὰ καταλλήλων ὑπολογισμῶν. Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι αἱ ἀνωτέρω μονάδες ἐπιφανείας καὶ ὄγκου δὲν εἶναι πραγματικαί, ἀλλὰ χρησιμεύουσιν ὡς βάσεις τῶν ὑπολογισμῶν τῆς καταμετρήσεως καὶ διὰ τοῦτο καλοῦνται* ***θεωρητικαί***.

β') *Μονάδες ἄνευ δεκαδικῆς ὑποδιαιρέσεως*. Τοιαύτη εἶναι ὁ *κυβικὸς τεκτονικὸς πῆχυς*, ὅστις εἶναι κύβος τοῦ ὁποίου ἑκάστη πλευρὰ ἰσοῦται πρὸς ἕνα τεκτονικὸν πῆχυν.

Ἡ μονὰς αὕτη χρησιμεύει πρὸς καταμέτρησιν τοῦ ὄγκου τῶν τοίχων τῶν οἰκοδομῶν ἢ τῶν πρὸς οἰκοδομὴν λίθων. Εἶναι δὲ οὗτος ἴσος πρὸς $\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{27}{64}$ τοῦ κυβ. μέτρου.

190) Διὰ τὴν μέτρησιν τῆς χωρητικότητος λαμβάνεται ὡς μονὰς ἡ *λίτρα*, ἤτοι ὁ χῶρος μιᾶς κυβικῆς παλάμης, καὶ χρησιμεύει κατ' ἐξοχὴν διὰ τὴν μέτρησιν τῶν ὑγρῶν.

Ἡ χωρητικότης 100 κυβ. παλαμῶν ἀποτελεῖ τὸ καλούμενον *ἑκατόλιτρον* (μετρικὸν κοιλὸν) ὅπερ χρησιμεύει διὰ τὴν μέτρησιν τῶν δημητριακῶν καρπῶν.

Παρ' ἡμῖν καὶ ἐν Τουρκίᾳ διὰ τοὺς δημητριακοὺς καρποὺς χρησιμεύει ὡς μονὰς τὸ *κοιλὸν* τῆς Κων)πόλεως (σταμπὸλ) ἴσον πρὸς 35,37 λίτρας, διὰ δὲ τὰ ὑγρὰ ἡ μετρικὴ ὀκᾶ (1). Ἐν Ἀγγλίᾳ μεταχειρίζονται διὰ τὰ σιτηρὰ τὸ *αὐτοκρατορικὸν κουάρτερ* ἴσον πρὸς 2,91 ἑκατόλιτρα. ὅπερ ὑποδιαιρεῖται εἰς 8 *μποῦσελ*.

Εἰς δὲ τὰς Ἡνωμένας πολιτείας μεταχειρίζονται τὸ *μποῦσελ* ἴσον πρὸς 35,23 λίτρας.

Ἐν Ρωσσίᾳ τὴν *ψάθαν* (τσέρβερτ) ἴσην πρὸς 2,18 ἑκατόλιτρα.

Διὰ τὴν καταμέτρησιν τῆς χωρητικότητος τῶν πλοίων λαμβάνεται ὡς μονὰς ὁ *τόννος τῶν πλοίων* ἴσος πρὸς 2,83 κ. μέτρα.

Μονάδες βάρους.

191) α') *Μονάδες μετὰ δεκαδικῆς ὑποδιαιρέσεως.*

Ἀρχικὴ μονὰς βάρους εἶναι τὸ *χιλιόγραμμον* ἢ τὸ βάρος ὕδατος ἀπεσταγμένου καὶ θερμοκρασίας 4ο Κ. τὸ ὁποῖον χωρεῖ ἐντὸς τῆς κυβικῆς παλάμης.

Τὸ χιλιόγραμμον ὑποδιαιρεῖται εἰς 1000 ἴσα μέρη, ἅτινα καλοῦνται *γραμμάρια*· διὰ τοῦτο ὀνομάζεται καὶ χιλιόγραμμον.

Τὸ γραμμάριον εἶναι τὸ βάρος ὕδατος ἀπεσταγμένου καὶ θερμοκρασίας 4ο Κ. ὅπερ χωρεῖ εἰς τὸν κ. δάκτυλον. Πολλαπλάσιον τοῦ χιλιογράμμου σύνηθες ἐν τῷ ἐμπορίῳ εἶναι ὁ *μετρικὸς στατὴρ* ἴσος πρὸς 100 χιλιογρ. καὶ ὁ *μετρικὸς τόννος* ἴσος πρὸς 1000 χιλιόγραμμα ἢ πρὸς 10 μέτρ. στατῆρας.

Ἡ μεταξὺ τῶν μονάδων τούτων σχέσις καταφαίνεται ἐν τῷ ἑπομένῳ πίνακι:

1 μ. τὸν	=	10 μ. στ.	=	1000 χιλιόγρ.	=	1000000	γραμμάρια.
		1 μ. στατ.	=	100 χιλ.	=	100000	γραμμάρια.
				1 χιλιόγ.	=	1000	γραμμάρια.

(1) Ἡ μετρικὴ ὀκᾶ εἶναι ἡ χωρητικότης δοχείου ἐν τῷ ὁποίῳ χωρεῖ 1 ὀκᾶ βάρους ὕδατος ἀπεσταγμένου καὶ θερμοκρασίας 4ο Κ.

6΄) *Μονάδες ἄνευ δεκαδικῆς ὑποδιαιρέσεως.*

Τοιαύτη εἶναι ἐν μεγίστῃ χρήσει παρ' ἡμῖν ἡ Τουρκικὴ μονὰς ἡ σταθμικὴ ὀκᾶ, ἥτις ὑποδιαιρεῖται εἰς 400 δράμια καὶ πολλαπλάσιον αὐτῆς ὁ *στατὴρ* ἴσος πρὸς 44 ὀκ. Ἡ 1 ὀκᾶ ἰσοῦται πρὸς 1280 γραμμάρια.

Ἐν τῇ φαρμακευτικῇ εἶναι ἐν χρήσει παρ' ἡμῖν αἱ ἑξῆς μονάδες: *ἡ φαρμακευτικὴ λίτρα* ἴση πρὸς 360 γραμ. ἢ 112 $\frac{1}{2}$ δράμια. Ὑποδιαιρεῖται εἰς 12 *οὐγγίας*· αὕτη πάλιν εἰς 8 *δραχμὰς* καὶ ἡ δραχμὴ εἰς 3 *γράμμα* καὶ τέλος τὸ γράμμον εἰς 20 *κόκκους*.

Σημ. Διὰ τὴν στάθμησιν τῆς σταφίδος ἐν Πελοποννήσῳ μεταχειρίζονται τὸ *χιλιόλιτρον* ἴσον πρὸς 1000 ἑνετικὰς λίτρας, ἐξ ὧν ἑκάστη ἰσοδυναμεῖ πρὸς 150 δράμ. ἢ $\frac{3}{8}$ τῆς ὀκᾶς περίπου.

Ἐν δὲ τῇ Ἑπτανήσῳ εἶναι ἐν χρήσει ἡ Ἀγγλικὴ λίτρα.

Ἐν Ἀγγλίᾳ ἀρχικὴ μονὰς βάρους εἶναι ἡ *λίτρα* ἴση πρὸς 453,6 γραμ. καὶ ἥτις ὑποδιαιρεῖται εἰς 16 *οὐγγίας*. Πολλαπλάσια δὲ αὐτῆς εἶναι ὁ *Ἀγγλικὸς στατὴρ* ἴσος πρὸς 112 Ἀγγλ. λίτρας. Αἱ αὐταὶ μονάδες εἶναι ἐν χρήσει καὶ εἰς τὰς Ἡνωμένας Πολιτείας μὲ τὴν διαφορὰν μόνον ὅτι ὁ *Ἀμερικανικὸς στατὴρ* ἔχει 100 Ἀγλικὰς λίτρας.

Διὰ τοὺς ἀδάμαντας ὡς μονὰς βάρους λαμβάνεται τὸ καράτιον ἰσοδυναμοῦν πρὸς 0,205 γραμ. (1)

Μονάδες νομισμάτων.

α΄.) Κράτη Λατινικῆς ἑνώσεως. Τὰ διάφορα κράτη ἔχουσι διαφόρους μονάδας νομισμάτων. Τὰ ἑξῆς ὅμως πέντε κράτη: Ἡ Ἑλλάς, ἡ Ἑλβετία, ἡ Ἰταλία, ἡ Γαλλία, καὶ τὸ Βέλγιον διὰ συμβάσεως καλουμένης *Λατινικῆς νομισματικῆς ἑνώσεως*, παρεδέχθησαν ὡς ἀρχικὴν μονάδα τὸ *φράγκον* τὸ ὁποῖον ἐν Ἑλλάδι καλεῖται *δραχμὴ* καὶ ἐν Ἰταλίᾳ *λίρα*.

Τὸ φράγκον ὑποδιαιρεῖται εἰς 100 ἴσα μέρη καὶ τὸ ἓν ἐκ τούτων ἐκλήθη παρ' ἡμῖν *λεπτόν*. Τὴν αὐτὴν ἀρχικὴν μονάδα νομισμάτων ἔχουσι παραδεχθῇ καὶ τὰ ἄλλα κράτη ὡς ἡ Ρουμανία, ἡ Βουλγαρία, ἡ Σερβία καὶ ἡ Ἰσπανία. Τὸ φράγκον καλεῖται ἐν Ρουμανίᾳ *λέου*, ἐν Βουλγαρίᾳ *λέβυ*, ἐν Σερβίᾳ *δηνάριον* καὶ ἐν Ἰσπανίᾳ *πεσέτα*.

Τὰ νομίσματα κατασκευάζονται ἐκ διαφόρων μετάλλων, χρυσοῦ, ἀργύρου, χαλκοῦ καὶ νικελίου. Παρ' ἡμῖν εἶναι τὰ ἑξῆς μεταλλικὰ νομίσματα εἰς κυκλοφορίαν.

α΄) Χαλκᾶ. Τὸ μονόλεπτον, τὸ δίλεπτον, ὀβολὸς ἢ πεντάλεπτον, διώβολον ἢ δεκάλεπτον.

6΄) Νικέλινα. Τὸ πεντάλεπτον, δεκάλεπτον, εἰκοσάλεπτον.

γ΄) Ἀργυρᾶ. Τὸ εἰκοσάλεπτον, τὸ πεντηκοντάλεπτον, τὸ μονόδραχμον, δίδραχμον καὶ πεντάδραχμον ἢ τάλληρον.

---

(1) Ἐν Γαλλίᾳ ὡρίσθη τῷ 1909 τὸ μετρικὸν καράτιον ἴσον πρὸς 0,2 γραμ.

δ') Χρυσᾶ. Τὸ πεντάδραχμον, δεκάδραχμον, εἰκοσάδραχμον ἢ εἰκοσάφραγκον, τεσσαρακοντάδραχμον καὶ ἑκατοντάδραχμον.

Παρατήρ. *Τὰ χρυσᾶ καὶ ἀργυρᾶ νομίσματα δὲν κατασκευάζονται ἐκ καθαροῦ χρυσοῦ ἢ ἀργύρου, ἀλλ' ἐκ κράματος τούτων μετὰ χαλκοῦ.*

193) Τὸ ποσὸν τοῦ καθαροῦ χρυσοῦ ἢ ἀργύρου τὸ περιεχόμενον ἐν τῇ μονάδι τοῦ κράματος καλεῖται *τίτλος* τοῦ *κράματος* ἢ *βαθμὸς καθαρότητος* καὶ ἐκφράζεται συνήθως εἰς χιλιοστά. Εἰς τὰ χρυσᾶ κοσμήματα ὁ βαθμὸς καθαρότητος ἐκφράζεται εἰς εἰκοστὰ τέταρτα, ἅτινα καλοῦνται καράτια. Εἰς τὰ κράτη τῆς Λατινικῆς ἑνώσεως ὁ τίτλος τῶν μὲν χρυσῶν νομισμάτων εἶναι 0,900, τῶν δὲ ἀργυρῶν 0,835, ἐκτὸς τοῦ πενταδράχμου ὅπερ ἔχει τίτλον κράματος 0,900.

Τὸ βάρος τοῦ χαλκίνου πενταλέπτου ὡς καὶ τοῦ ἀργυροῦ φράγκου εἶναι 5 γραμμάρια.

Πρὸς εὐκολίαν τὰ πεπολιτισμένα κράτη ἐδέχθησαν, ἐκτὸς τῶν μεταλλικῶν νομισμάτων, καὶ χάρτινα, ἅτινα καλοῦνται *χαρτονομίσματα* ἢ *τραπεζογραμμάτια*. Ἐν Ἑλλάδι κυκλοφοροῦσι τὰ ἑξῆς· 5, 10, 25, 100, 500, 1000 δραχμῶν.

ΣΗΜ. 1. *Τὸ χρυσοῦν ἢ ἀργυροῦν φράγκον ἔπρεπε νὰ λογαριάζεται πρὸς μίαν δραχ. χαρτίνην. Ἀλλ' ἕνεκα διαφόρων λόγων λογαριάζεται ἄλλοτε πρὸς 1,02 δραχ. ἢ 0,99 δραχ. χαρτίνας ἄλλοτε περισσότερον καὶ ἄλλοτε ὀλιγώτερον.*

ΣΗΜ. 2. *Τὰ νομίσματα τῆς Λατινικῆς νομισματικῆς συμβάσεως κυκλοφοροῦσιν ἐλευθέρως εἰς τὰ πέντε κράτη ἅτινα μετέχουσι ταύτης. Πρὸ ὀλίγων ἐτῶν ἐν Ἰταλίᾳ ἐψηφίσθη νόμος καθ' ὃν τὰ Ἰταλικὰ φράγκα καὶ δίφραγκα κυκλοφοροῦσι μόνον ἐντὸς τῆς Ἰταλίας ἀπαγορευομένης τῆς ἐξαγωγῆς αὐτῶν. Ὅμοιος νόμος ἐψηφίσθη κατὰ τὸ 1908 καὶ ἐν Ἑλλάδι.*

β') Ἄλλαι χῶραι.

Ἐν Ἀγγλίᾳ ἀρχικὴ μονὰς εἶναι ἡ *λίρα στερλίνα* ἴση πρὸς 25,20 φρ. περίπου ὑποδιαιρεῖται εἰς 20 *σελίνια* καὶ τοῦτο εἰς 12 *πέννας*.

Ἐν Ρωσσίᾳ εἶναι τὸ *ρούβλιον* ἀργυροῦν νόμισμα ἔχον ἀξίαν 2,67 φράγκα καὶ διαιρεῖται εἰς 100 ἴσα μέρη καλούμενα *καπίκια*.

Ἐν Ὁλλανδίᾳ εἶναι τὸ *φλωρίνιον* ἰσοδυναμοῦν πρὸς 2,12 φρ. περίπου καὶ διαιρεῖται εἰς ἑκατοστά.

Ἐν ταῖς Σκανδιναυϊκαῖς χώραις (Δανίᾳ, Σουηδίᾳ, Νορβηγίᾳ) εἶναι ἡ *σκανδιναυϊκὴ κορώνα* ἴση πρὸς 2,15 φραγ. καὶ διαιρεῖται εἰς 100 ἴσα μέρη καλούμενα *αἶρε* (öre).

Ἐν Πορτογαλλίᾳ εἶναι τὸ *μιλρεΐς* ἴσον πρὸς 5,55 φραγ. καὶ διαιρεῖται εἰς 1000 *ρέϊς*.

Ἐν Γερμανίᾳ εἶναι τὸ *μάρκον* ἴσον πρὸς 1,23 φραγ. περίπου καὶ διαιρεῖται εἰς 100 *πφένιχ*.

Ἐν Αὐστρίᾳ εἶναι ἡ *κορώνα* ἴση πρὸς 1,05 φρ. καὶ διαιρεῖται εἰς 100

ΣΥΝΟΠΤΙΚΟΣ ΠΙΝΑΞ ΤΩΝ ΚΥΡΙΩΤΕΡΩΝ

Α') Μέτρα

α') Δεκαδικὸν με-

Κράτη ἐν οἷς εἶνε ἐν χρήσει	*Μονάδες μήκους*	*Μονάδες ἐπιφανείας*
Γαλλία	Μυριάμετρον .... = 10000 μ.	Τετραγ. Μυριάμετρον..= 100.000.000□μ
Βέλγιον	Χιλιόμετρον ..... = 1000 μ.	Τετραγ. χιλιόμετρον.....= 1.000.000□μ
	Ἑκατόμετρον.... = 100 μ.	Ἑκτάριον...= 10.000□μ
Ἑλβετία	Δεκάμετρον ...... = 10 μ.	Ἄριον ......= 100□μ
Γερμανία *Αὐστρία*	Μέτρον ἀρχικὴ μονὰς .... = 1 μ.	Τετραγ. μέτρον........= 1□μ
Ἱσπανία *Ρουμανία*	Ὑποδεκάμετρον. = $\frac{1}{10}$ μ.	Τετραγ. ὑποδεκάμετρον.= $\frac{1}{100}$ □μ
Βουλγαρία *Σερβία*	Ὑφεκατόμετρον. = $\frac{1}{10}$ μ.	Τετραγ. ὑφεκατόμετρον.= $\frac{1}{10.000}$ □μ
Τουρκία *Ἑλλὰς*	Χιλιοστόμετρον.. = $\frac{1}{1000}$ μ.	Τετραγ. χιλιοστόμετρον...= $\frac{1}{1.000.000}$ □μ

β') Ἄλλαι

Ἐν χρήσει εἰς τὴν Ἑλλάδα	Τεκτον. πῆχυς = $\frac{3}{4}$ μ.	Τετραγ. τεκτον. πῆχυς $\frac{9}{16}$ □μ
	Πῆχυς ἐμπορικὸς= 0,64 μ. (ἐνδεζὲς)	Βασιλ. στρέμμα....= 1000□μ
	ῥούπιον..........= $\frac{1}{8}$ τοῦ πήχ.	Παλαιὸν στρέμμα..= 1270□μ
Ἐν Ἀγγλίᾳ	Ἀγγλικὸν μίλιον = 1760 ὑάρδ.	Ἄκρον (διὰ τοὺς ἀγροὺς ....=40,5 στρέμ.
	Ὑάρδα (ἀρχικὴ μονὰς ....,= 1 ὑάρδ.	Τετραγ. ὑάρδα...= 1□ ὑάρδ.
	Ποῦς ....= $\frac{1}{3}$ ὑάρδ.	*Σημ.* Ἐκ τῆς μονάδος μήκους προσδιορίζονται αἱ μονάδες ἐπιφανείας καὶ ὄγκου.
	Δάκτυλος ....= $\frac{1}{36}$ ὑάρδ.	
Ἐν Ρωσσίᾳ	Ἀρσίν ....= 0,711 μ. Ἀγγλ. ποῦς ......= 0,305 μ. Βέρστιον........ = 1500 ἄρσιν	Τετραγ. ποῦς.

Β') Μονάδες

Κράτη ἔχοντα τὰς μονάδας τῆς Λατ. Νομισ. συμβάσεως	*Ἀγγλία*	*Γερμανία*	*Σκανδιναυϊκαὶ χῶραι*	*Ὁλλανδία*
Βέλγιον, Γαλλία, Ἑλβετία φράγκον Ἑλλὰς: Δραχμὴ Ἰταλία: Λίρα Ρουμανία: Λέου Βουλγαρία: Λέβι Σερβία δηνάριον Ἱσπανία Πεσέτα	Λίρα στερλίνα= φρ. 1£=25,22 Σελίνιον = $\frac{1}{20}$£ Πέννα= $\frac{1}{12}$ σελιν.	Μάρκον= φρ. 1 μάρκ. =1,25 1 πφένιχ= $\frac{1}{100}$ μάρκ.	Κορῶνα= 1κ.=2,12 φρ. αἶρε= $\frac{1}{100}$ τῆς κρ.	φλωρίνιον= 1φλ.=2,12 φρ. ὑποδιαιρεῖται εἰς ἑκατοστά

ΜΟΝΑΔΩΝ ΕΝ ΧΡΗΣΕΙ ΕΙΣ ΤΑ ΔΙΑΦΟΡΑ ΜΕΡΗ

καὶ σταθμά.

τρικὸν σύστημα.

Μονάδες ὄγκου	*Μονάδες χωρητικότητος*	*Μονάδες βάρους*
Κυβικὸν χιλιόμετρ. = 1.000.000000 κμ.		
Κυβικὸν μέτρον = 1 κ. μ.	Ἑκατόλιτρον ἢ μετρικὸν κοιλὸν διὰ τὰ σιτηρά..........=100 λίτρ.	Μετρικ. τόν.=1000 χλγ.
Κυβικὸν ὑποδεκάμετρον......= $\frac{1}{1000}$ κ. μ.	Λίτρα..........= 1 λίτρ.	Μετρ. στατὴρ= 100 χλγ.
Κυβικὸς ὑφεκτόμετρον.......= $\frac{1}{1000000}$ κ. μ.	Χωρητικότης μιᾶς κυβ. παλάμης.	Χιλιόγραμμον= 1 χλγ.
Κυβ. χιλιοστόμετρον........= $\frac{1}{1000000000}$ κ.μ.		Γραμμάριον. = $\frac{1}{1000}$ χλγ.

μονάδες

Κυβ. τεκτ. πῆχυς = $\frac{27}{64}$ κ. μ.	Κοιλὸν Κων/πόλεως (σταμπόλι) = 35,37 λ.	Στατὴρ.,........ = 44 ὀκ. Ὀκᾶ (ἀρχικὴ μονάς)............= 1 ὀκ. Δράμιον ....= $\frac{1}{400}$ ὀκ. Χιλιόλιτρον (διὰ τὴν σταφίδα)..=375 ὀκ. Ἀγγλ. λίτρ (ἐν Ἑπτανήσῳ)=453,6 γμ.
Κυβικὴ ὑάρδα...= 1 κ. ὑάρδα	Αὐτοκρ. κουάρτερ.....=2,91 ἑκατόλ. Μπούσελ = $\frac{1}{8}$ κουάρτερ Τόνος τῶν πλοίων. ...= 2,83 κ. μ.	Ἀγγλικὸς στατὴρ=112 λ. Ἀγγλικὴ λίτρα (ἀρχ. μον.)=1 λ.=453.γρ.6 Οὐγγία..... = $\frac{1}{16}$ λ.
Κυβικὸς ποῦς	Ψάθα....=2,10 ἑκατολ.	

νομισμάτων

Πορτογαλλία	*Αὐστρία*	*Ῥωσσία*	*Τουρκία καὶ Αἴγυπτος*	*Ἡνωμ. Πολιτεῖαι*
Μίλρεϊς= 1 μιλ.=5,55 φρ. Ρέϊς= $\frac{1}{1000}$ τοῦ μίλρ.	Κορῶνα= 1κ.=1,05 φρ. Χέλλερ= $\frac{1}{100}$ κρ.	Ρούβλιον= 1 ρούβ.=2,67 φ. Καπίκιον= $\frac{1}{100}$ ρουβλ.	Τὸ γρόσιον= $\frac{1}{100}$ τῆς Τουρκικῆς λίρας = 1λ.=22 80 φρ. Τὸ γρόσιον= $\frac{1}{100}$ τῆς Αἰγυπτιακῆς λίρας= 26 φρ.	Δολλάριον= 1 \$=5,18 φρ. σέντς= $\frac{1}{100}$ δολ.

χέλλερ ἢ καὶ τὸ διπλάσιον αὐτῆς τὸ *φιορίνιον* διαιρούμενον εἰς 100 *κρόϊτσερ.* Ἐν Τουρκίᾳ καὶ ἐν Αἰγύπτῳ ἀρχικὴ μονὰς εἶναι τὸ *γρόσιον* ὅπερ διαιρεῖται εἰς 40 *παράδες*. Νομίσματα εἰς κυκλοφορίαν ἐν Τουρκίᾳ εἶναι ἐκ χρυσοῦ μὲν ἡ *Τουρκικὴ λίρα* ἴση πρὸς 22,80 φράγ. τὸ ἥμισυ καὶ τὸ τέταρτον αὐτῆς, τὸ πεντόλιρον, ἐξ ἀργύρου δὲ τὸ *μετζίτιον* ἴσον πρὸς 4,30 φράγ. περίπου, τὸ $\frac{1}{2}$ καὶ τὸ $\frac{1}{4}$ αὐτοῦ, τὸ δίγροσον καὶ τὸ γρόσιον. Ἡ Τουρκικὴ λίρα ἔχει 100 γρόσια, συνήθως ὅμως ὑπολογίζεται αὕτη πρὸς 103 γρόσια ἢ 108 ἢ 109.

Ἐν Αἰγύπτῳ ἐπίσης κυκλοφοροῦν νόμισμα χρυσοῦν εἶναι ἡ *Αἰγυπτιακὴ λίρα* ἴση πρὸς 26 φράγκα. Ὑποδιαιρεῖται εἰς 100 γρόσια διατιμήσεως ἢ 200 γρόσια ἀγοραῖα.

Ἐν ταῖς Ἡνωμέναις πολιτείαις εἶναι τὸ *δολλάριον* ἴσον πρὸς 5,18 φράγκα καὶ διαιρεῖται εἰς 100 σέντς.

Μονάδες χρόνου.

194) Ἀρχικὴ μονὰς χρόνου εἶναι τὸ *ἡμερονύκτιον* ὅπερ ὑποδιαιρεῖται εἰς 24 *ὥρας* ἡ δὲ ὥρα εἰς 60 *πρῶτα λεπτά*, ἅτινα σημειώνονται 60′ ἢ κάλλιον 60 λ. ἕκαστον δὲ πρῶτον λεπτὸν ὑποδιαιρεῖται εἰς 60 *δεύτερα λεπτὰ* ἅτινα σημειώνονται 60′′ ἢ 60 δ.

Ὅθεν ἡ ὥρα εἶναι τὸ $\frac{1}{24}$ τῆς ἡμέρας, τὸ 1′ λ. τὸ $\frac{1}{1440}$ τῆς ἡμέρας, καὶ τὸ 1 δ. τὸ $\frac{1}{86400}$ τῆς ἡμέρας.

Πολλαπλάσια τῆς ἀρχικῆς μονάδος εἶναι ὁ *μὴν* καὶ τὸ ἔτος.

Τὸ ἔτος ἔχει 365 ἡμέρας.

Κυρίως τὸ ἔτος ἀποτελεῖται ἐκ 365 $\frac{1}{4}$ ἡμερῶν περίπου, ἀλλ' ἵνα ἀποτελῆται ἐξ ἀκεραίου ἀριθμοῦ ἡμερῶν παραλείπομεν τὸ $\frac{1}{4}$ τῆς ἡμέρας ὅπερ εἰς 4 ἔτη ἀποτελεῖ μίαν ἡμέραν προστιθεμένην εἰς πᾶν τέταρτον ἔτος· τὸ ἔτος τοῦτο ἔχον 366 ἡμέρ. καλεῖται *δίσεκτον* καὶ ἡ προστιθεμένη εἰς αὐτὸ ἡμέρα *ἐμβόλιμος*, τὰ δὲ λοιπὰ καλοῦνται *κοινά*.

Δίσεκτα ἔτη εἶναι τὰ διαιρετὰ διὰ τοῦ 4 ὡς τὸ 1908, 1912 κτλ.

Τὸ ἔτος ὑποδιαιρεῖται εἰς 12 μῆνας, καὶ ἄλλοι μὲν τούτων ἔχουσι 31 ἡμέρας, ἄλλοι δὲ 30 ἡμ. καὶ ὁ Φεβρουάριος 28 κατὰ τὰ κοινά, καὶ 29 κατὰ τὰ δίσεκτα, διότι εἰς αὐτὸν προστίθεται ἡ ἐμβόλιμος ἡμέρα.

Εὑρίσκομεν πόσοι μῆνες ἔχουσι 31 ἡμ. καὶ πόσοι 30 ὡς ἑξῆς :

Ἰούλιος 7		1	Ἰανουάριος
Ἰούνιος 6			Αὔγουστος
Μάϊος	5	2	Φεβρουάριος
Δεκέμβριος			Σεπτέμβριος
Ἀπρίλιος	4	3	Μάρτιος
Νοέμβριος			Ὀκτώβριος

Γράφομεν ἐν κύκλῳ τοὺς ἀριθμοὺς ἀπὸ τοῦ 1 κατὰ σειρὰν μέχρι τοῦ 7 καὶ σημειώνομεν παρ' αὐτοὺς τοὺς μῆνας κατὰ τὴν τάξιν των. Ὅσοι μὲν μῆνες γράφονται εἰς περιττοὺς ἀριθμοὺς ἔχουσι 31 ἡμ., οἱ δὲ λοιποὶ 30 ἐκτὸς τοῦ Φεβρουαρίου.

ΣΗΜ. Παρὰ τοῖς ἐμπόροις ὁ μὴν λογαριάζεται πρὸς 30 ἡμέρας καὶ τὸ ἔτος πρὸς 360 ἡμέρας· τὸ τοιοῦτον ἔτος καλεῖται *ἐμπορικόν*.

Μονάδες κυκλικῶν τόξων.

195) Διὰ νὰ μετρήσωμεν κυκλικόν τι τόξον λαμβάνομεν ὡς ἀρχικὴν μονάδα τόξον τῆς αὐτῆς περιφερείας, ὅπερ εἶναι τὸ $\frac{1}{360}$ αὐτῆς καὶ καλεῖται *μοῖρα*.

Ἡ μοῖρα ὑποδιαιρεῖται εἰς 60 ἴσα μέρη καλούμενα *πρῶτα λεπτὰ* καὶ ἕκαστον πρῶτον εἰς 60 *δεύτερα λεπτά*.

Ἡ μοῖρα παρίσταται διὰ τοῦ συμβόλου (^{0}) ὡς 45^0 ἤτοι 45 μοίρας, τὸ πρῶτον λεπτὸν ($'$) ὡς $50'$ ἤτοι 50 πρῶτα λεπτὰ καὶ τὸ δεύτερον λεπτὸν ($''$) ὡς $25''$ ἤτοι 25 δεύτερα λεπτά.

Δεκαδικὸν μετρικὸν σύστημα.

196) Ἐξ ὅλων τῶν μονάδων τὰς ὁποίας ἐγνωρίσαμεν, ἐκεῖναι αἵτινες ἔχουσι δεκαδικὴν ὑποδιαίρεσιν καὶ αἵτινες, ὡς εἴδομεν, ἐλήφθησαν ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ μέτρου ἀποτελοῦσι τὸ καλούμενον *Δεκαδικὸν μετρικὸν σύστημα*.

Τὸ σύστημα τοῦτο ἔχει τὸ πλεονέκτημα ὅτι αἱ μετρήσεις τῶν συνεχῶν ποσῶν διὰ τῶν μονάδων τούτου μᾶς δίδουσιν ὡς ἐξαγόμενα δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς ὧν αἱ πράξεις γίνονται εὐκόλως.

Οὕτω π. δ. χ. ἂν ὕφασμά τι ἔχῃ μῆκος : 8 $^{\text{μετ.}}$ 7 $^{\text{παλ.}}$ 9 $^{\text{δακ.}}$ 3 $^{\text{γραμ.}}$

Τὸ μῆκος τοῦτο δύναται νὰ γραφῇ ὡς ἑξῆς: 8 $^{\text{μ.}} + \frac{7\text{ μ.}}{10} + \frac{9\text{ μ.}}{100} + \frac{3\text{ μ.}}{1000}$ ἢ 8,793 μέτρα.

Ὁμοίως ἂν ἐπιφάνειά τις ἔχῃ 18 □ μ. 9 □ παλ. 19 □. δακ. 7 □ γρ. τὸ ἐμβαδὸν αὐτῆς θὰ παρίσταται ὑπὸ τοῦ ἀριθμοῦ 18 □ μ, $+ \frac{9\,\square\text{ μ.}}{100} + \frac{19\,\square\text{ μ.}}{10000} + \frac{7\,\square\text{ μ.}}{1000000}$ ἢ 8,091907 □. μ.

Ἐπίσης ἂν στερεόν τι περιέχῃ 7 κυβ. μ. 47 κ. παλ. 358 κ. δακ. ὁ ὄγκος αὐτοῦ θὰ παρίσταται ὑπὸ τοῦ ἀριθμοῦ 7 κ. $+ \frac{47\text{ κ. μ.}}{1000} + \frac{388\text{ κ. μ.}}{1000000}$ ἢ 7,047358 κ. μέτρα.

Ὁμοίως ὁ ἀριθμὸς 35 $^{\text{λίτρ.}}$ 846 $^{\text{γραμ.}}$ γράφεται ὡς ἑξῆς 35 $^{\text{λ.}} + \frac{845\text{ λ.}}{1000}$ ἢ 35,845 λίτραι.

Ὁ 8 χιλιογ. 452 γραμ. γράφεται 8 χιλ. $+ \frac{452 \text{ χιλιογ.}}{1000}$ ἢ 8,452 χιλιόγραμμα.

Ἡ μέτρησις τῶν συνεχῶν ποσῶν δι' ἄλλων μονάδων μᾶς παρέχει ἄλλους ἀριθμούς, περὶ τῶν ὁποίων πραγματευόμεθα εἰς τὸ ἑπόμενον κεφάλαιον.

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) 345,83 τεκτ. πήχεις νὰ τραπῶσι εἰς μέτρα.

Λύσις. Ἐπειδὴ ὁ 1 τεκ. πῆχυς ἰσοδυναμεῖ πρὸς τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ μέτρου, ἕπεται ὅτι οἱ 345,83 τεκτ. πήχεις θὰ ἰσοδυναμοῦσι πρὸς $345,83 \times \frac{3}{4}$ μέτρα.

2) Νὰ τραπῶσι 244 βασ. πήχεις εἰς μικροὺς πήχεις.

Λύσις. Ἐπειδὴ τὰ 0,64 τοῦ βασ. πηχ. κάμνουσιν 1 πῆχ. μικρὸν ἕπεται ὅτι οἱ 245 βασ. πηχ. κάμνουσι $\frac{248}{0,64}$ μικροὺς πήχεις.

3) Νὰ τραπῶσι 548,35 βασ. πηχ. α) εἰς ὑάρδας. β) εἰς ἐνδεζέ. γ) εἰς ἀρσὶν (Ῥωσσίας).

4) 745 ὑάρδαι πόσα μέτρα κάμνουσι ;

5) 1237 $\frac{1}{3}$ ὑάρδαι μὲ πόσους μικροὺς πήχεις (ἐνδεζὲ) ἰσοδυναμοῦσιν ;

6) 372 $\frac{5}{8}$ μικροὶ πήχεις μὲ πόσας ὑάρδας ἰσοδυναμοῦσιν ;

7) 872 ἀρσὶν (Ῥωσσίας) πόσα μέτρα κάμνουσιν ;

8) Ἀπόστασις ἐξ 845 ναυτικῶν μιλίων πρὸς πόσα χιλιόμετρα ἰσοδυναμεῖ ;

9) 843,540 χιλιόμετρα πόσα ναυτικὰ μίλια κάμνουσι ;

10) 2458 Ἀγγλ. μίλια πόσα χιλιόμετρα κάμνουσι ;

11) 3475 βέρτσια πόσα χιλιόμετρα κάμνουσι ;

12) 458 Ἀγγλ. μίλια πόσα βέρτσια κάμνουσι ;

13) Νὰ τραπῶσι 245,837 $\square$ μέτρα εἰς τετραγωνικοὺς τεκτονικοὺς πήχεις.

14) Ἀγρός τις ἔχει ἔκτασιν 452,87 ἑκτάρια. Μὲ πόσα βασιλικὰ στρέμματα ἰσοδυναμεῖ ἡ ἔκτασις αὕτη ;

15) 15,87 βασ. στρέμματα μὲ πόσα ἑκτάρια ἰσοδυναμοῦσιν ;

16) Ἡ ἔκτασις τῆς Ἑλλάδος εἶναι 64679 $\square$ χιλιόμ. Πόσων βασιλικῶν στρεμμάτων εἶναι ἡ ἔκτασις αὕτη καὶ πόσων ἑκταρίων ;

17) Ἀγρὸς ἐκτάσεως 15,8 ἄκρων μὲ πόσα βασ. στρέμματα ἰσοδυναμεῖ ;

18) Χωρικὸς καταμετρήσας τὴν ἄμπελον εὗρεν αὐτὴν 5 $\frac{3}{4}$ παλαιὰ στρέμματα. Ἐκ πόσων βασ. στρεμμάτων ἀποτελεῖται αὕτη ;

19) 347,832 κυβ. μέτρα μὲ πόσους κυβ. πήχ. ἰσοδυναμοῦσι ;

20) 845,3724 κυβ. μέτρα μὲ πόσους κυβ. τεκτ. πηχ. ἰσοδυναμοῦσιν ;

21) 1324,7 λίτραι σίτου α) μὲ πόσα Ἀγγλικὰ μποῦσελ β) μὲ πόσα Ἀμερικανικὰ μποῦσελ. γ) μὲ πόσα κοιλὰ Κων)πόλεως ἰσοδυναμοῦσιν ;

22) 2483,32 ἑκατόλιτρα κριθῆς μὲ πόσα κουᾶρτερ ἰσοδυναμοῦσιν ;

23) Πλοῖον τι μετέφερεν ἐκ Ταϊγανίου εἰς Πειραιᾶ 4583 ψάθας σίτου. Πόσων κοιλῶν Κων)λεως εἶναι ὁ σῖτος οὗτος ;

24) Ἐμπορικόν τι πλοῖον ἔχει χωρητικότητα 8452 τόννων. Μὲ πόσα κυβικὰ μέτρα ἰσοδυναμεῖ ἡ χωρητικότης αὕτη ;

25) 1 δραμ. μὲ πόσα γραμμάρια ἰσοδυναμεῖ ;

26) 1 γραμ. ποῖον μέρος τοῦ δραμίου εἶναι ;

27) 1 χιλιογρ. πόσα δράμια ἔχει ;

28) Νὰ τραπῶσι 360 δραμ. εἰς γραμμάρια.

29) Νὰ τραπῶσιν 850 γραμ. εἰς δράμια.

30) Νὰ τραπῶσι 28 ὀκ. εἰς χιλιόγραμμα.

31) Ὁ μετρικὸς στατὴρ πόσας ὀκάδας ἔχει ;

32) Ὁ μετρικὸς τόννος πόσας ὀκάδας ἔχει ;

33) Ὁ στατὴρ (44 ὀκ.) πόσα χιλιόγραμμα ἔχει ;

34) Τὸ χιλιόλιτρον σταφίδος πόσας ὀκάδας ἔχει ;

35) 4580 ὀκ. σταφίδος πόσα χιλιόγραμμα κάμνουσι ;

36) $85 \frac{7}{16}$ λίτραι Ἀγγλικαὶ πόσα χιλιόγραμμα κάμνουσι ;

37) $45 \frac{5}{8}$ λίτραι Ἀγγλικαὶ πόσας ὀκάδας κάμνουσι ;

38) $83 \frac{3}{4}$ ὀκ. νὰ τραπῶσιν εἰς Ἀγγλικὰς λίτρας.

39) Ὁ Ἀγγλικὸς στατὴρ πόσα χιλιόγραμμα ἢ πόσας ὀκάδας ἔχει ;

40) Ὁ Ἀμερικανικὸς στατὴρ πόσα χιλιόγραμμα ἢ πόσας ὀκάδας ἔχει ;

41) $13 \frac{3}{4}$ στατ. (Τουρκικοὶ) μὲ πόσους Ἀγγλικοὺς ἢ μὲ πόσους Ἀμερικανικοὺς στατῆρας ἰσοδυναμοῦσιν ;

42) Πόσα γράμμάρια ἔχει ἡ οὐγγία, πόσα ἡ δραχμή, πόσα τὸ γράμμον ;

43) Ἓν γραμμάριον κινίνης πόσους κόκκους ἔχει ;

44) 185 κόκκοι κινίνης πόσα γραμμάρια ἀποτελοῦσι ;

45) 245,60 φράγκ. μὲ πόσας δραχμὰς ἰσοδυναμοῦσι, ὅταν 1 φρ.= 0,99 δρχ. ;

46) 1500 δρχ. πόσα φράγκα κάμνουσιν, ὅταν 1 φρ. $= 0{,}99 \frac{3}{4}$ δρχ.

47) Πόσας δραχμὰς κάμνουσιν αἱ $845 \frac{1}{4}$ Ἀγγλ. λίραι, ὅταν 1 ἀγγλ. λίρ. =25,27 δρχ ;

48) Πόσας λίρας δυνάμεθα νὰ ἀγοράσωμεν μὲ 12458,60 δρχ ; (1 λίρ. =25,10) δρχ.

49) Πόσα εἰκοσάφραγκα θὰ ἀγοράσωμεν μὲ 23450,80 δρχ. ; (εἰκοσ. =19,95 δρχ.).

50) Πόσα φράγκα κάμνουσι αἱ 1258 $\frac{3}{4}$ Ἀγγλ. λίραι ;

51) Πόσα φράγκα κάμνουσιν αἱ 783 $\frac{1}{2}$ τουρκ. λίραι ;

52) Πόσα φράγκα κάμνουσι 245,45 μάρκα ;

53) Πόσα φράγκα κάμνουσι 458,40 δολλάρια ;

54) Πόσα φράγκα κάμνουσι 1245,675 μιλρέϊς ;

55) Πόσα φράγκα κάμνουσι 1458,35 ρούβλια.

56) Πόσας λίρας τουρκικὰς θ' ἀγοράσωμεν μὲ 2458,40 δραχμάς ; (1 λίρ. Τουρ.=22,75).

57) Πόσας δραχμὰς κάμνουσι 145,40 μάρκα ; (1 φρ.=0,99 $\frac{1}{2}$ δρ.)

58) Πόσας δραχμὰς κάμνουσι 548,35 δολλάρια ; (1 φρ.=0,99 $\frac{3}{8}$ δραχμ.)

59) 245,75 κορῶναι (Αὐστριακαὶ) πόσας δραχμ. κάμνουσι ; (1 φρ.= 0,99 δραχμ.)

60) 453,60 κορῶναι (Σκανδιναυϊκαί) πόσας δραχμὰς κάμνουσι ; (1 φρ.=0,99 δραχμ.)

61) 745 φιορίνια (Ὁλλανδικὰ) πόσας δραχμὰς κάμνουσι ; (1 φρ.= 1,02 δραχμ.)

62) 843,85 Ἰταλικαὶ λίραι πόσας δραχμὰς κάμνουσι ; $\left(1\right.$ φρ.=1, 02 $\left.\frac{1}{2}\text{δραχ.}\right)$.

63) Μὲ τιμὴν τοῦ φράγκου 0,995 δραχμ. πόσας δραχμὰς κάμνουσι α') 348,40 λέϋ, β') 248,50 λέου, γ') 752,8 δηνάρια, δ') 1245,875 μιλρέϊς, ε') 1583,40 πεσέται, στ') 3258,40 ρούβλια ;

64) Μὲ τιμὴν φράγκου 1,03 δραχ. καὶ μὲ 12425,50 δραχ. α') πόσα λέϋ, β') πόσα ρούβλια καὶ γ') πόσα μιλρέϊς ἀγοράζομεν ;

65) Πόσα ἑκατοστὰ τοῦ φράγκου ἔχει τὸ Τουρκικὸν ἢ Αἰγυπτιακὸν γρόσιον (διατιμ.) ; (ἀπ. 0,228 φρ., 0,26 φρ.)

66) Πόσα ἑκατοστὰ τοῦ φράγκου ἔχει τὸ ἀγοραῖον γρόσιον Τουρκίας α') μὲ λίραν Τουρκίας 103 γρόσια, β') 108 γρόσια, γ') 109 γρόσια ;
(ἀπ. 0,22 $\frac{14}{103}$ φραγ., 0,21 $\frac{1}{9}$ φρ., 0,20 $\frac{100}{109}$ φρ.)

67) Πόσα ἑκατοστὰ τοῦ φράγκου ἔχει τὸ ἀγοραῖον Αἰγυπτιακὸν γρόσιον ; (1 λίρα Αἰγυπτ.=200 γρ. ἀγορ.) (ἀπ. 0,13 φράγκα.)

68 Ὁ βασ. πῆχυς ὑφάσματός τινος τιμᾶται 2,45 δραχ. Πόσον τιμᾶται ὁ μικρὸς πῆχυς ; (ἀπ. 1,56 δρ.)

69) Ὁ βασ. πῆχυς ὑφάσματός τινος στοιχίζει 3,50 φρ. Πόσας δραχ.

στοιχίζει ὁ μικρὸς πῆχυς αὐτοῦ; (1 φρ.=0,99 δραχ.) (ἀπ. 2,22 δραχ.)

70) Ἡ ὑάρδα ὑφασματός τινος τιμᾶται 5 $\frac{1}{3}$ σελίνια. Πόσα φρ. τιμᾶται ὁ βασ. πῆχυς καὶ πόσας δραχ. ὁ μικρὸς πῆχυς; $\left(1\right.$ φρ.=0,99 $\left.\frac{1}{2}\right.$ δραχ.$\left.\right)$ (ἀπ. 7,25 φρ. ὁ βασ. πήχ., 7,22 δρ. περίπου ὁ μικρὸς πῆχυς.)

71) Οἰκόπεδόν τι πωλεῖται πρὸς 12,45 δραχ. τὸ τετραγ. μέτρον. Ποία εἶναι ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ τετραγ. τεκτ. πήχεως αὐτοῦ;

(ἀπ. 7,00 δραχ.)

16 72) Οἰκόπεδόν τι εἶναι ἐκτάσεως 2483,45 □ μ. Πόσον ἀξίζει τὸ οἰκόπεδον, ἐὰν πωλῆται πρὸς 7,25 τὸν τεκτ. τετρ. πῆχυν;

(ἀπ. 32008,90 δραχ.)

73) Ἀγρός τις ἐπωλήθη πρὸς 158,40 δραχ. τὸ βασ. στρέμμα, ἕτερος δὲ πρὸς 1625 δραχ. τὸ ἑκτάριον. Ποῖος ἐπωλήθη ἀκριβώτερον καὶ κατὰ πόσας δραχμὰς ἐπωλήθη ἀκριβώτερον τὸ βασ. στρέμμα;

(ἀπ. ὁ 6. ἀγρὸς ἐπωλήθη ἀκριβώτερον κατὰ 4,10 δραχ. τὸ 6. στρ.)

74) Ἡ τιμὴ τοῦ χιλιογρ. βομβυκίων (κουκουλίων) ἐν Μασσαλίᾳ εἶναι 9,45 φράγ. Ποία εἶναι ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ (εἰς δραχμὰς) τῆς ὀκᾶς τοῦ ἐμπορεύματος τούτου; (1 φρ.=1 δραχ.) (ἀπ. 12,09 δραχ.)

75) Τὸ κοιλὸν τῆς Κων)πόλεως εἴδους τινος σίτου ζυγίζει 19 $\frac{3}{4}$ ὀκ. Πόσα κοιλὰ κάμνουσι 4583 ὀκ. καὶ πόσον πρέπει νὰ πωλήσωμεν ἕκαστον κοιλόν, ἐὰν ἡ ὀκᾶ πωλῆται 42 $\frac{1}{2}$ λεπτά; (ἀπ. 232 $\frac{4}{79}$ κοιλ., 8,39 $\frac{3}{8}$ δραχ.).

Προβλήματα δεκαδικῶν ἀριθμῶν καὶ ἀλλαγῆς μονάδος διὰ τὴν ἐπανάληψιν ἐν τῇ Γ' τάξει.

1) Ἐὰν ἡ τιμὴ τῆς Ἀγγλικῆς λίτρας ἐλαίου ἐν Ἑπτανήσῳ εἶναι 0,45, ποία εἶναι ἡ ἀντίστοιχος αὐτοῦ τιμὴ κατ' ὀκᾶν;

2) Ἐὰν τὸ χιλιόλιτρον σταφίδος τιμᾶται 145 δραχ., πόσον τιμᾶται ἡ ὀκᾶ αὐτῆς καὶ πόσον τὸ χιλιόγραμμον;

3) Τὸ μποῦσελ τοῦ σίτου ἐν Ἀγγλίᾳ πωλεῖται πρὸς 6 $\frac{1}{2}$ σελίνια. Ποία εἶναι ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ (εἰς δραχμὰς) τοῦ κοιλοῦ Κων)πόλεως; (1 σελ.=1,26 δραχ.) (ἀπ. 7,96 δραχ.)

4) Ὅταν τὸ ἑκατόλιτρον σίτου πωλῆται ἐν Γαλλίᾳ πρὸς 18,25 φράγ., ποία εἶναι ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ (εἰς σελίνια) τοῦ κουῶρτερ ἐν Ἀγγλίᾳ.

(ἀπ. 2 λίρ. 2 σελ. 2 πέν. περίπου.)

17 5) Τὸ χιλιόγραμμον τοῦ τεΐου στοιχίζει 13,75 δραχ., πόσας ὀκάδας ἀγοράζομεν μὲ 1585,40 δραχμάς; (ἀπ. 90 $\frac{7}{88}$ ὀκ.)

18 6) Ἠγόρασέ τις οἰκόπεδον 745,68 □ τεκτ. πήχεων πρὸς 5,65 τὸν □ τεκτ. πῆχυν καὶ ἐπώλησε τοῦτον βραδύτερον πρὸς 10,25 δραχ. τὸ □ μέτρον. Πόσον ἐκέρδισεν ἢ ἐζημιώθη;

7) Εἰς ἕκαστον ὄγκον ἀέρος τὰ 0,21 εἶναι ὀξυγόνον καὶ τὸ ὑπόλοιπον ἄζωτον. Πόσος ὄγκος ὀξυγόνου καὶ ἀζώτου περιέχεται εἰς δωμάτιον χωρητικότητος 85,245 κυβ. μέτρων. (ἀπ. 17,90145 κυβ. μέτρων ὀξυγόνου.)

8) Ταξειδιώτης τις ἔχει δέμα ὅπερ ζυγίζει 24,560 χιλιόγρ. καὶ ἓν κιβώτιον βάρους 45 $\frac{1}{2}$ ὀκ. Ὁ σιδηρόδρομος παρέχει τὸ δικαίωμα εἰς ἕκαστον ἐπιβάτην νὰ φέρῃ μεθ' ἑαυτοῦ μέχρι 30 χιλιογρ.. βάρος χωρὶς νὰ πληρώσῃ ναῦλον· διὰ τὸ ἐπὶ πλέον βάρος πληρώνει 9 1)2 λεπτὰ κατὰ χιλιόγρ. Πόσον ναῦλον θὰ πληρώσῃ οὗτος; (ἀπ. 5,016 δραχ.)

9) Κτηματίας τις ἐπώλησε 14685 ὀκ. σταφίδος πρὸς 135 δραχ. τὸ χιλιόλιτρον. Πόσον εἰσέπραξεν ἐκ τοῦ προϊόντος τούτου καὶ πόσον κερδίζει, ἐὰν τὰ ἔξοδα τῆς ἐτησίας καλλιεργείας ἀνέρχονται εἰς δραχμὰς 2560; (ἀπ. εἰσέπραξεν 5286,60 δραχ., ἐκέρδισεν 2726,60 δραχ.)

19 10) Μία αὐλὴ ἔχει ἐπιφάνειαν 125,60 □ μ. καὶ πρόκειται νὰ στρωθῇ διὰ πλακῶν ἐξ ὧν ἑκάστη ἔχει ἐπιφάνειαν 0,7835 □ μ. α') Πόσαι τοιαῦται πλάκες θὰ χρειασθῶσι καὶ β') πόσον θὰ στοιχίσῃ ἡ πλακόστρωσις τῆς αὐλῆς ἐὰν συμφωνηθῇ πρὸς 4,35 δραχμὰς τὸ τετραγ. μέτρον; (ἀπ. 160,30 πλάκες, θὰ στοιχίσῃ 546,36 δραχ.)

11) Πρόκειται νὰ κτισθῇ τοῖχος 85,45 κυβ. μέτρων διὰ πλίνθων ὀπτῶν (τούβλων) ἐξ ὧν ἕκαστος ἔχει ὄγκον 85 κυβ. δακτύλους. α') Πόσαι πλίνθοι θὰ χρειασθῶσι καὶ β') πόση θὰ εἶναι ἡ ἀξία αὐτῶν πρὸς 28 δραχ. τὴν χιλιάδα; (ἀπ. 1005,294 χιλ., 28148,23 δραχ.)

12) Γεωργός τις ἐπώλησεν 145,5 κοιλὰ Κων)πόλεως πρὸς 8,45 δρχ. τὸ κοιλόν, 1248 ὀκ. ἀραβοσίτου πρὸς 21 λεπτὰ τὴν ὀκᾶν, 18 ὀκ. τυροῦ πρὸς 1,65 δραχ. τὴν ὀκᾶν καὶ 15 ἀμνοὺς πρὸς 14,75 δραχμ. ἕκαστον. Πόσας δραχμὰς εἰσέπραξεν; (ἀπ. 1741,50 δραχ.)

13) Ἁμαξοστοιχία διανύει τὴν ἀπόστασιν ἀπ' Ἀθηνῶν μέχρι Κορίνθου εἰς 3 ὥρας μὲ ταχύτητα 32,45 χιλιόμ. καθ' ὥραν, ἀπὸ Κορίνθου μέχρι Πατρῶν εἰς 4 $\frac{1}{4}$ ὥρας μὲ ταχύτητα 29,5 χιλιομ. καὶ ἀπὸ Πατρῶν μέχρι Πύργου εἰς 4 ὥρας μὲ ταχύτητα 33,4 χιλιόμ. Πόση εἶναι ἡ ἀπόστασις ἀπ' Ἀθηνῶν μέχρι Πύργου. (ἀπ. 356,325 χιλιόμ.)

14) Ἁμαξοστοιχία τις ἀποτελεῖται ἐκ 2 σιδηροδρ. ἁμαξῶν Α'ης θέσεως, εἰς ἑκάστην τῶν ὁποίων εἶναι 24 ἐπιβάται, ἐκ 5 ἁμαξῶν Β'ας θέσεως μὲ 30 ἐπιβάτας εἰς ἑκάστην, ἐξ 8 Γ'ης θέσεως μὲ 35 ἐπιβάτας εἰς ἑκάστην καὶ ἐκ 2 [illegible] τῶν ἁμαξῶν μὲ ἐμπορεύματα βάρος 8 τόνων

εἰς ἑκάστην. Πόσας δραχμὰς θὰ εἰσπράξῃ ἡ ἁμαξοστοιχία αὕτη δι' ἀπόστασιν 164 χιλιομ. γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἕκαστος ἐπιβάτης Αης θέσεως πληρώνει 0,11 δραχ. κατὰ χιλιόμ., τῆς Βας 0,0825 δραχμάς, τῆς Γης 0,0605 δραχ., τὰ δ' ἐμπορεύματα 0,16 δραχ. κατὰ τόννον καὶ χιλιόμετρον; (ἀπ. 6093,42 δραχ.)

15) Πόλις τις φωτίζεται διὰ 625 φανῶν φωταερίου. Ἕκαστος ἐξ αὐτῶν καταναλίσκει 140 λίτ. φωταερίου καθ' ὥραν καὶ καίει ἐπὶ 6 $\frac{1}{2}$ ὥρας κατὰ μέσον ὅρον καθ' ἑκάστην νύκτα. α) Πόσα κυβικὰ μέτρα φωταερίου καταναλίσκονται ἐτησίως καὶ β) πόσον στοιχίζει ἕκαστον κυβικὸν μέτρον φωταερίου, ἐὰν ἡ πόλις πληρώνῃ κατ' ἔτος διὰ τὸν φωτισμὸν 85400 δραχμάς; (ἔτος 365 ἡμέρας)

(ἀπ. 207593,75 κυβ. μέτρα, στοιχίζει 42 λεπτὰ περίπου τὸ κυβ. μέτρ.).

16) Ἠγόρασέ τις κτῆμα ἀντὶ 15465 δραχ. τὰ ἔξοδα τοῦ συμβολαίου εἶναι 145,50 δραχ. Ἐχρησιμοποίησε πρὸς ἰσοπέδωσιν 2473,275 κυβ. μέτρα χώματος πρὸς 1,05 δραχμὰς τὸ κυβ. μέτρον, κατεσκεύασε τοῖχον 195,50 κυβ. μ. πρὸς 3,75 δραχ. τὸ κυβ. μέτρον, μετεχειρίσθη 34 ἐργάτας ἐπὶ 21 ἡμ. πρὸς 2,45 δραχ. ἡμερομίσθιον, καὶ 4 κηπουροὺς ἐπὶ 18 ἡμ. πρὸς 3,75 δραχ. ἡμερομίσθιον, ἠγόρασε δὲ καὶ 545 ὀπωροφόρα δενδρύλλια πρὸς 0,18 δραχ. ἕκαστον. Πόσον τῷ στοιχίζει τὸ κτῆμα τοῦτο (ἀπ. 21057,86 δραχ).

17) Ἓν χιλιόγραμμον χαβιάρι στοιχίζει ἐν Ρωσσίᾳ 6 ρούβλια. Ἐὰν ὁ δασμὸς εἶναι 435 δραχ εἰς τὰς 100 ὀκάδ. καὶ τὰ διάφορα ἄλλα ἔξοδα 1,15 δραχ. κατ' ὀκᾶν, πόσας δραχμὰς κερδίζει κατ' ὀκᾶν ὁ πωλῶν τὸ χαβιάρι πρὸς 35,60 δραχ. τὴν ὀκᾶν; (1 ρούβ.=2,67 φρ.)
(ἀπ. κερδίζει 10,60 δραχ. κατ' ὀκᾶν.)

18) Σιτέμπορος ἠγόρασεν ἐξ Ἀμερικῆς σῖτον πρὸς 95 σέντς (0,95 δολ.) τὸ Ἀμερικαν. μποῦσελ, ἐδαπάνησε δὲ διὰ ναῦλον 2,3 λεπτ. κατ' ὀκᾶν καὶ διὰ δασμὸν 6,11 λεπτὰ κατ' ὀκᾶν. Ἐὰν τὸ μποῦσελ τοῦ σίτου τούτου ζυγίζει 21 ὀκ., πόσα λεπτὰ στοιχίζει ἡ ὀκᾶ; (1 δολ.=5,18 δραχ.)
(ἀπ. 31,84 λεπτὰ τὴν ὀκᾶν.)

19) Ἔμπορός τις ἀγοράσας ἔλαιον ἐξ Ἑλλάδος πρὸς 0,95 δραχμ. κατ' ὀκᾶν ἀπέστειλε τοῦτο εἰς Ῥουμανίαν, ἔνθα ἐπωλήθη 1,25 λέου κατὰ χιλιόγρ. Ἐὰν τὰ ἔξοδα τῆς μεταφορᾶς καὶ τοῦ δασμοῦ ἀνέρχωνται εἰς 0,10 λέου κατὰ χιλιόγραμμον, πόσας δραχμὰς κερδίζει ὁ ἔμπορος οὗτος κατ' ὀκᾶν; (ἀπ. 0,52 δραχμ.)

20) Καπνέμπορος ἀπέστειλεν εἰς Ἀλεξάνδρειαν 15458 ὀκ. καπνοῦ, ὅστις ἐπωλήθη πρὸς 13,5 γρόσια (διατιμήσεως) Αἰγυπτιακ. κατ' ὀκᾶν· ἐγένοντο δὲ καὶ ἔξοδα 36 λίρ. Αἰγυπτ. Πόσας δραχμὰς θὰ εἰσπράξῃ οὗτος; (1 λίρ. Αἰγυπτ.=26 δραχ.) (ἀπ. 55193,58 δραχ.)

21) Ὑφασματέμπορος ἠγόρασεν ἐξ Ἀγγλίας 145 $\frac{2}{3}$ ὑάρδ. τσόχας τινὸς πρὸς 5 σελ. τὴν ὑάρδαν. ἐπλήρωσε δὲ διὰ ναῦλον 12 $\frac{1}{2}$ σελίνια

καὶ διὰ δασμὸν 65,75 δραχ. Πρὸς πόσας δραχμὰς πρέπει νὰ πωλῇ τὸν μικρὸν πῆχυν ἵνα κερδίζῃ 0,45 δραχ. κατὰ πῆχυν; (1 σελ.=1,26 δραχ.) (ἀπ. 5,26 δραχ.)

22) Ἠγόρασέ τις ἐξ Ἀγγλίας 185 στατ. Ἀγγλ. γάδου (βακαλάου) πρὸς $48\frac{1}{2}$ σελ. τὸν στατῆρα, ἐπλήρωσε δὲ διὰ ναῦλον καὶ λοιπὰ $7\frac{1}{2}$ σελίνια κατὰ στατῆρα, διὰ δασμὸν $7\frac{1}{4}$ λεπτὰ κατ' ὀκᾶν καὶ δι' ἄλλα μικρὰ ἔξοδα 20,45 δραχμάς. Πόσας δραχμὰς τῷ στοιχίζει ἡ ὀκᾶ; (1 σελ.=1,25 δραχ.) (ἀπ. 1,99 δραχ.)

23) Ἔμπορός τις ἐκ Πατρῶν ἔλαβε τὴν 10ην 8)βρίου φορτίον ὀρύζης ἐκ Γενούης βάρους καθαροῦ (βάρος ὀρύζης ἄνευ σάκκων) 3185,75 χιλιόγρ. καὶ ἀξίας 1592,90 λιρῶν Ἰταλικῶν. Διὰ τὴν μεταφορὰν τούτου ἐπλήρωσε 30,60 λίρας κατὰ μετρικὸν τόννον, διὰ δασμὸν 0,17 δραχ. κατ' ὀκᾶν καὶ τέλος δι' ἐκφόρτωσιν καὶ μεταφορὰν μέχρι τῆς ἀποθήκης 65,45 δραχ. Πόσον στοιχίζει εἰς αὐτόν, α) ὅλον τὸ ἐμπόρευμα εἰς δραχμὰς καὶ β) ἡ 1 ὀκᾶ τούτου; (1 λίρα=1,02 δραχ.) (ἀπ. α. 3056,15 δραχμάς, β. ἡ 1 ὀκᾶ στοιχίζει 1,23 δραχμὰς περίπου.)

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΣΤ'.

ΣΥΜΜΙΓΕΙΣ ΑΡΙΘΜΟΙ

197) Ἐὰν μετρήσωμεν τεμάχιόν τι ὑφάσματος διὰ μονάδος τινὸς μὴ ἐχούσης δεκαδικὴν ὑποδιαίρεσιν ὡς π. δ. χ. μὲ τὸν μικρὸν πῆχυν καὶ εὕρωμεν ὅτι περιέχει 5 φορὰς τὸν πῆχυν καὶ ἀκόμη 6 φορὰς τὸ ῥούπιον αὐτοῦ, ὁ ἀριθμὸν ὅστις θὰ παριστᾷ τὸ μῆκος τοῦ ὑφάσματος θὰ εἶναι ὁ ἑξῆς· 5 πήχεις 6 ῥούπια.

Ὁ ἀριθμὸς οὗτος καλεῖται *συμμιγής*.

Ὁμοίως ἂν χρονικόν τι διάστημα περιέχῃ 3 ἡμέρας ὁλοκλήρους καὶ 7 ὥρας καὶ ἀκόμη 20 λ. θὰ παρίσταται ὑπὸ τοῦ συμμιγοῦς ἀριθμοῦ 3 ἡμ. 7 ὥρ. 20 λ.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὁ ἑξῆς ὁρισμός.

198) «Συμμιγὴς ἀριθμὸς καλεῖται ὁ συγκείμενος ἐκ πολλῶν ἄλλων ἀριθμῶν τῶν ὁποίων αἱ μονάδες εἶναι πολλαπλάσια ἢ ὑποπολλαπλάσια ἀρχικῆς τινος μονάδος ἔχουσαι ἴδιον ὄνομα».

Ὡς ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ ἐξάγεται, οἱ συμμιγεῖς ἀριθμοὶ εἶναι συγκεκριμένοι.

ΣΗΜ. Ὁ συμμιγὴς ἀριθμὸς δύναται νὰ ἀποτελῆται καὶ ἀπὸ ἕνα μόνον ἀριθμὸν ὡς λ. χ. 45 στατ. ἢ 45 στατ. 0 ὀκαδ. 0 δράμ.

199) «*Ἀριθμὸς ἀναγωγῆς* καλεῖται ὁ ἀριθμὸς ὅστις δεικνύει πόσαι μονάδες τάξεώς τινος ἀποτελοῦσι μίαν οἱανδήποτε μονάδα ἀνωτέρας τάξεως».

Π. δ. χ. ὁ 24 εἶναι ἀριθμὸς ἀναγωγῆς μεταξὺ τῆς ὥρας καὶ τῆς ἡμέρας (διότι 1 ἡμέρ.=24 ὥρας). Ὁμοίως ὁ 1440 εἶναι ἀριθμὸς ἀναγωγῆς μεταξὺ τοῦ πρώτου λεπτοῦ καὶ τῆς ἡμέρας (διότι 1 ἡμ.=24 ὥρ.×60 λ. = 1440 λεπτ.).

Ὡσαύτως ὁ ἀριθμὸς 60 εἶναι ἀριθμὸς ἀναγωγῆς μεταξὺ τοῦ πρώτου λεπτοῦ καὶ τῆς ὥρας (διότι 1 ὥρ.=60 λ.).

Ἀσκήσεις.—Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμὸς ἀναγωγῆς α) μεταξὺ δραμίου καὶ στατῆρος. β) μεταξὺ δακτύλου καὶ ὑάρδας. γ) μεταξὺ δακτύλου καὶ ποδός. δ) μεταξὺ λίτρας Ἀγγλ. καὶ στατῆρος Ἀγγλ. ε) μεταξὺ δευτέρου λεπτοῦ καὶ ἡμέρας κτλ.

Τροπὴ συμμιγοῦς ἀριθμοῦ εἰς μονάδας τῆς τελευταίας τάξεώς του.

Ἔστω ὁ συμμιγὴς 5 ἡμ. 7 ὥρ. 38 λ. 25 δ. νὰ τραπῇ εἰς μονάδας τῆς τελευταίας τάξεώς του ἤτοι εἰς δεύτερα λεπτά.

Ἐπειδὴ 1 ἡμ.=24 ὥρ, ἕπεται ὅτι 5 ἡμ. =5×24=120 ὥρ.

Ἐὰν εἰς τὰς 120 ὥρας προσθέσωμεν καὶ τὰ 7 ὥρ. λαμβάνομεν 127 ὥρας.

Ἐπειδὴ 1 ὥρ.=60 λεπτ. θὰ εἶναι 127 ὥρ.=60 λ. ×127 ὥρ.=7620 λ. Ἐὰν εἰς 7620 λ. προσθέσωμεν καὶ τὰ 38 λ. λαμβάνομεν 7658 λ. Ἐπειδὴ 1 λ.=60, δ. ἕπεται ὅτι 7658 λ.=60 δ.×7658=459480 δ. ἐὰν εἰς ταῦτα προσθέσωμεν καὶ τὰ 25 δ. λαμβάνομεν 459505 δ.—Ὅθεν 5 ἡμ. 7 ὥρ. 38 λ. 25 δ. =459505 δ.

5 ἡμ.7 ὥρ.38 λ.25 δ.
24
120 ὥρ.
7
127 ὥρ.
60 λ.
7620 λ.
38
7658 λ.
60 δ.
459480 δ.
25
459505 δ.

Ὡς παρατηροῦμεν ὁ δοθεὶς συμμιγὴς τραπεὶς εἰς μονάδας τῆς τελευταίας τάξεώς του ἐγένετο ἀκέραιος ἀριθμός.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὁ ἑξῆς κανών:

200) «Διὰ νὰ τρέψωμεν συμμιγῆ εἰς μονάδας τῆς τελευταίας τάξεώς του προχωροῦμεν ὡς ἑξῆς·

Τρέπομεν τὰς μονάδας τῆς ἀνωτάτης τάξεως τοῦ συμμιγοῦς εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως ἑπομένης τάξεως, πολλαπλασιάζοντες ταύτας ἐπὶ τὸν ἀντίστοιχον ἀριθμὸν ἀναγωγῆς καὶ εἰς τὸ γινόμενον προσθέτομεν καὶ τὰς μονάδας τῆς αὐτῆς τάξεως τοῦ δοθέντος συμμιγοῦς.—Τὸν οὕτω προκύπτοντα ἀριθμὸν τρέπομεν πάλιν εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως ἑπομένης τάξεως καὶ εἰς ταύτας προσθέτομεν καὶ τὰς μονάδας τῆς αὐτῆς τάξεως τοῦ συμμιγοῦς· προχωροῦμεν δὲ οὕτω μέχρις οὗ προστεθῶσι καὶ αἱ μονάδες τῆς τελευταίας τάξεως τοῦ συμμιγοῦς. Ὁ οὕτω προκύπτων ἀριθμὸς εἶναι ἀκέραιος».

Τροπὴ ἀκεραίου εἰς συμμιγῆ.

Ἐὰν ἔχωμεν ἀριθμὸν ἀποτελούμενον ἐκ μονάδων τάξεώς τινος, εἶναι δυνατὸν αἱ μονάδες αὗται νὰ εἶναι τοσαῦται, ὥστε νὰ περιέχωσι καὶ μονάδας ἀνωτέρων τάξεων.

Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει δυνάμεθα νὰ τρέψωμεν τὸν ἀριθμὸν τοῦτον εἰς συμμιγῆ ὡς ἑξῆς:

Ἔστω π. δ. χ. 7852 πεν. Ἐπειδὴ 12 πεν. = 1 σελ. αἱ 7852 πεν. θὰ περιέχωσι τόσα σελίνια ὅσον εἶναι τὸ πηλίκον $\frac{7852}{12}$ ἢ 654 σελ. καὶ μένουσιν ὡς ὑπόλοιπον 4 πέν. Ὁμοίως ἐπειδὴ 20 σελ. = 1 λίρ. τὰ 654 σελ. θὰ περιέχωσι $\frac{654}{20}$ λίρ. ἤτοι 32 λίρας καὶ θὰ μείνωσι καὶ 14 σελ. Ὅθεν ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς 7852 πεν. = 32 λίρ. 14 σελ. 4 πεν.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς.

7852 πεν.	12	
65	654 σελ.	20
52	54	32 λιρ.
4 πεν.	14	

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὁ ἑξῆς κανών:

201) «Διὰ νὰ τρέψωμεν ἀκέραιον ἀριθμόν, ἀποτελούμενον ἐκ μονάδων τάξεώς τινος, εἰς συμμιγῆ προχωροῦμεν ὡς ἑξῆς: Τρέπομεν αὐτὸν εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως διαιροῦντες διὰ τοῦ ἀντιστοίχου ἀριθμοῦ ἀναγωγῆς. Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ταύτης θὰ παριστᾷ μονάδας τῆς δοθείσης τάξεως. Τὸ δὲ πηλίκον θὰ παριστᾷ μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως.

Τοῦτο τρέπομεν καθ' ὅμοιον τρόπον εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως καὶ προχωροῦμεν οὕτω μέχρις οὗ εὕρωμεν πηλίκον τοῦ ὁποίου αἱ μονάδες νὰ μὴ περιέχωσι μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως. Τὰ ὑπόλοιπα τῶν διαιρέσεων τούτων καὶ τὸ τελευταῖον πηλίκον ἀποτελοῦσι τὸν ζητούμενον συμμιγῆ ἀριθμόν».

Τροπὴ συμμιγοῦς εἰς μονάδας τάξεώς τινος οὐχὶ τῆς τελευταίας.

Ἔστω ὁ συμμιγὴς ἀριθμὸς 5 στατ. 28 ὀκ. 320 δράμ. νὰ τραπῇ εἰς στατῆρας. Ἐπειδὴ τὸ ἐξαγόμενον θέλομεν νὰ παριστᾷ στατῆρας, τὸ πρῶτον μέρος τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ ἤτοι οἱ 5 στατ. θὰ μείνωσι ἀμετάβλητοι. Τὸ δὲ ὑπολειπόμενον μέρος αἱ 28 ὀκ. καὶ 320 δρ. εἶναι ἀνάγκη νὰ τραπῇ εἰς κλάσμα στατῆρος· πρὸς τοῦτο τρέπομεν τὸ μέρος τοῦτο εἰς δράμια (§ 200) (28 ὀκ. 320 δρ. = 11520 δράμ.), εἶτα δὲ τρέπομεν τὸν ἀριθμὸν τοῦτον εἰς στατῆρας διαιροῦντες διὰ τοῦ ἀντιστοίχου ἀριθμοῦ ἀναγωγῆς (1 στ. = 17600 δράμ.) ἤτοι 28 ὀκ. 320 δράμ. = $\frac{11520}{17600} = \frac{36}{55}$ στατ. Ἐπομένως ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς 5 στατ. 28 ὀκ. 320 δράμ. = 5 $\frac{36}{55}$ στατ.

Ἔστω νῦν ὁ συμμιγὴς ἀριθμὸς 5 ἡμ. 18 ὧραι 20 λ. 40 δ. νὰ τραπῇ εἰς ὥρας.

Ἐν πρώτοις τὸ μέρος 5 ἡμ. 18 ὥρ. τρεπόμενον εἰς ὥρας δίδει 138 ὥρ., τὸ δὲ ὑπο ρα λεπτὰ δίδει 1240 $^{δ.}$ καὶ ταῦτα πάλιν τρεπόμενα εἰς ὥρας διὰ τοῦ ἀντιστοίχου ἀριθμοῦ ἀναγωγῆς (1 $^{ὥρ.}$ =3600 $^{δ.}$) δίδουσι τὸ κλάσμα $\frac{1240}{3600}$ ὥρ. ἢ ἁπλούστερον $\frac{31}{90}$ ὥρ.

Ὅθεν ἔχομεν 5 ἡμ. 18 ὧραι 20 $^{λ.}$ 40 $^{δ.}$=138 $\frac{31}{90}$ ὥρ.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγεται ὁ ἑξῆς κανών :

202) «Διὰ νὰ τρέψωμεν δοθέντα συμμιγῆ εἰς μονάδας ὡρισμένης τάξεως (οὐχὶ τῆς τελευταίας) προχωροῦμεν ὡς ἑξῆς : Τρέπομεν τὰ μέρη τοῦ ἀριθμοῦ, ὧν αἱ μονάδες εἶναι μεγαλύτεραι τῆς ὁρισθείσης (ἂν ὑπάρχωσι τοιαῦται) εἰς μονάδας τῆς τάξεως ταύτης, τὰ δὲ μέρη ὧν αἱ μονάδες εἶναι μικρότεραι τρέπομεν πρῶτον εἰς μονάδας τῆς τελευταίας τάξεως καὶ ταύτας ἔπειτα διαιροῦντες διὰ τοῦ ἀντιστοίχου ἀριθμοῦ ἀναγωγῆς εἰς κλάσματα τῆς ὁρισθείσης μονάδος. Ὁ ἀριθμὸς εἰς τὸν ὁποῖον οὕτω τρέπεται ὁ δοθεὶς συμμιγὴς εἶναι μικτὸς ἢ κλάσμα».

Παρατήρ. Τὸ κλασματικὸν μέρος δυνάμεθα νὰ τρέψωμεν εἰς δεκαδικὸν εἴτε ἀκριβῶς εἴτε κατὰ προσέγγισιν (§ 178) καὶ οὕτω ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς τρέπεται εἰς δεκαδικόν, π. δ. χ. νὰ τραπῇ ὁ 8 $^{λίρ.}$ 7 $^{σελ.}$ 9 $^{πέν.}$ εἰς δεκαδικὸν ἀριθμὸν λιρῶν. Κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα θὰ ἔχωμεν.

8 $^{λίρ.}$ 7 $^{σελ.}$ 9 $^{πέν.}$ =8 $\frac{47}{120}$ =8,391 $^{λίρ.}$ (κατὰπροσέγγισ.0,001.)

Δυνάμεθα ὅμως νὰ κάμωμεν τὴν μετατροπὴν ταύτην καὶ συντομώτερον ὡς ἑξῆς :

Ἐπειδὴ 1 $^{σελ.}$ = $\frac{1}{20}$ $^{λίρ.}$ =0,05 $^{λίρ.}$ καὶ 1 $^{πέν.}$ = $\frac{1}{240}$ =0,004 περίπου, ἀρκεῖ τὸν μὲν ἀριθμὸν τῶν σελινίων νὰ πολ)σωμεν ἐπὶ 5, ὅτε εὑρίσκομεν ἑκατοστὰ τῆς λίρας, τὸν δὲ ἀριθμὸν τῶν πεννῶν ἐπὶ 4, ὅτε εὑρίσκομεν χιλιοστὰ τῆς λίρας, καὶ ἔπειτα νὰ προσθέσωμεν ἤτοι :

8 $^{λίρ.}$ = 8 $^{λίρ.}$
7 $^{σελ.}$ = 0,35 $^{λίρ.}$ (7×5=35)
10 $^{πέν.}$ = 0,040 $^{λίρ.}$ (10×4=40)

Ἄρα 8 $^{λίρ.}$ 7 $^{σελ.}$ 10 $^{πέν.}$ = 8,390 λίρ. περίπου.

Τροπὴ κλάσματος εἰς συμμιγῆ ἀριθμόν.

Ἔστω π.δ.χ. τὸ κλάσμα $\frac{48}{5}$ στατ. νὰ τραπῇ εἰς συμμιγῆ ἀριθμόν.

Τὸ κλάσμα τοῦτο δύναται νὰ θεωρηθῇ προφανῶς ὡς τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τῶν 48 στατ. διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 5. Ἐὰν λοιπὸν ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν ταύτην θὰ εὕρωμεν ὡς πηλίκον 9 στατ. καὶ ὡς ὑπόλοιπον 3 στατ. Τὸ ὑπόλοιπον τοῦτο τρέπομεν εἰς ὀκάδας (3×44=132 ὀκ.) καὶ ταύτας διαιροῦμεν διὰ τοῦ 5. Τὸ πηλίκον τῆς νέας ταύτης διαιρέσεως θὰ εἶναι 26 ὀκάδ,, τὸ δὲ ὑπόλοιπον 2 ὀκάδες τρέπομεν εἰς δράμια (2×400=800 δράμ.) ἅτινα διαιροῦμεν διὰ τοῦ 5 καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 160 δράμια

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται οὕτω:

ΣΗΜ. Ἐὰν τὸ κλάσμα εἶναι μικρότερον τῆς ἀκεραίας μονάδος, τὸ πρῶτον πηλίκον εἶναι 0. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον τρέπεται καὶ ὁ μικτὸς εἰς συμμιγῆ, ἀρκεῖ πρὸς τοῦτο νὰ τραπῇ εἰς συμμιγῆ μόνον τὸ κλασματικὸν μέρος αὐτοῦ.

48 στ.	5
3 στ.	9 στ. 26 ὀκ. 160 δρ.
44 ὀκ.	
132 ὀκ.	
2	
400 δράμ.	
800 δράμ.	
0 δράμ.	

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα:

203) «Διὰ νὰ τρέψωμεν κλασματικὸν ἀριθμὸν εἰς συμμιγῆ, διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητὴν διὰ τοῦ παρανομαστοῦ· τὸ πηλίκον (ὅπερ δύναται νὰ εἶναι καὶ 0) παριστᾷ μονάδας τῆς αὐτῆς τάξεως μὲ τὸν διαιρετέον, τὸ δὲ ὑπόλοιπον τρέπομεν εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως. Τὸ ἐξαγόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ παρανομαστοῦ καὶ εὑρίσκομεν εἰς τὸ πηλίκον μονάδας τῆς αὐτῆς τάξεως μὲ τὸν νέον διαιρετέον, τὸ δὲ ὑπόλοιπον τρέπομεν εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως καὶ τὸ ἐξαγόμενον διαιροῦμεν πάλιν διὰ τοῦ παρανομαστοῦ κ.ο.κ. προχωροῦμεν μέχρις οὗ φθάσωμεν εἰς μονάδας τῆς τελευταίας τάξεως.»

Σημ. 1. Ἂν τυχὸν κατὰ τὴν τελευταίαν διαίρεσιν μείνῃ ὑπόλοιπόν τι, γράφομεν τοῦτο ὡς κλάσμα τῆς μονάδος τῆς τελευταίας τάξεως.

Σημ. 2. Ἐὰν ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς εἶναι δεκαδικός, γράφομεν τὸ δεκαδικὸν μέρος αὐτοῦ ὑπὸ κλασματικὴν μορφὴν καὶ τοῦτο τρέπομεν εἰς συμμιγῆ κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα.

Ἐὰν ὅμως πρόκειται περὶ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ Ἀγγλ. λιρῶν ὡς λ. χ. 7,478 λίρ. ἡ τροπὴ εἰς συμμιγῆ ἀριθμὸν γίνεται καὶ εὐκολώτερον ὡς ἑξῆς: Ἐπειδὴ 0,05 λίρ.=1 σελ., ἕπεται ὅτι τὰ 0,47 λίρ. περιέχουσι σελίνια 0,47:0,05 ἤτοι 9 σελίνια καὶ ὑπολείπονται 0,02 ἢ 0,020 ἅτινα μετὰ τῶν 0,008 τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ κάμνουσι 0,028 λίρ., τὰ 0,028 λίρ. διαιρούμενα διὰ τοῦ 0,004 δίδουσι πηλίκον 7 πεν. Ὅθεν 7,478 λίρ.=7 λίρ. 9 σελ. 7 πέν.

Ἀσκήσεις ἐπὶ τῆς τροπῆς συμμιγῶν ἀριθμῶν.

α') *Ἀπὸ μνήμης.* 1) Νὰ τραπῶσι εἰς μονάδας τῆς τελευταίας τάξεως οἱ ἑπόμενοι συμμιγεῖς:

5 ὀκ. 100 δραμ.	8 λ. 40 δ.	5 ὥρ. 40 λ.
8 σελ. 4 πέν.	7 πηχ. 6 ῥουπ.	7 λίρ. 8 σελ.

2) Νὰ τραπῶσιν οἱ ἑπόμενοι συμμιγεῖς.

α') 5 πήχ. 3 ῥούπ. εἰς μικτὸν ἀριθμὸν πήχεων.

β') 8 ὀκ. 250 δρ. » » » ὀκάδων.

γ') 7 λίρ. 15 σελ. εἰς δεκαδικὸν ἀριθμὸν λιρῶν.

δ') 3 ὀκ. 100 δρ. » » » ὀκάδων.

ε΄) 2 πήχ. 4 ῥούπ. εἰς δεκαδικὸν ἀριθμὸν πήχεων.

3) Νὰ τραπῶσι οἱ ἑπόμενοι ἀριθμοὶ εἰς συμμιγεῖς·

1650 δραμ. $8\frac{2}{3}$ λ., $5\frac{7}{8}$ πήχ. 17 πόδ. ἀγγλ. 15,40 λίρ., 900 δράμ. $5\frac{3}{4}$ ὀκ., 43 ῥούπ. $7\frac{5}{6}$ ἡμέρ., 8,25 ὀκ., $3\frac{2}{5}$ ὥρ.

β΄) *Γραπτῶς.* 1) Νὰ τραπῶσιν οἱ ἑπόμενοι συμμιγεῖς εἰς μονάδας τῆς τελευταίας τάξεως·

α΄) 5 λίρ. 81 σελ. 7 πέν.

β΄) 8 ἡμ. 7 ὥρ. 10 λ. 20 δ.

γ΄) 145 πήχ. 7 ῥουπ.

δ΄) 5 στατ. 38 ὀκ. 250 δρ.

2) Νὰ τραπῶσιν οἱ ἑπόμενοι συμμιγεῖς·

α΄) 15 λίρ. 8 σελ. 7 πέν. εἰς δεκαδικὸν ἀριθμὸν λιρῶν.

β΄) 5 ὑαρ. 1 πόδ. 8 δάκ. εἰς κλάσμα τῆς ὑάρδας.

γ΄) 8 στατ. ἀγγλ. 85 λίτ. εἰς κλάσμα τοῦ στατῆρος.

δ΄) 7 στατ. 8 ὀκ. 250 δραμ. εἰς κλάσμα τοῦ στατῆρος.

ε΄) 17 ἡμ. 15 ὥρ. 18 λ. 20 δ. εἰς ἀριθμὸν ὡρῶν κλασματικόν.

3) Νὰ τραπῶσιν οἱ ἑπόμενοι ἀριθμοὶ εἰς συμμμιγεῖς·

145450 δραμ., 7853 ἀγγλ. δάκτ., 8450 πέν., $\frac{5}{8}$ στατ., $\frac{19}{8}$ ἡμ., $\frac{173}{8}$ πήχ., $\frac{18}{5}$ λιρ. ἀγγλ. 7,832 λίρ. ἀγγλ. 0,458 λίρ. ἀγγλ., 7,15 ὀκ., $\frac{135}{12}$ ἔτη. $\frac{11}{30}$ ἔτη., 365,2422 ἡμέρ.

ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΥΜΜΙΓΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Πρόσθεσις.

204) Οἱ πρὸς πρόσθεσιν συμμιγεῖς ἀριθμοὶ πρέπει προφανῶς νὰ εἶναι ὁμοειδεῖς.

Ἡ πρόσθεσις τῶν συμμιγῶν ἀριθμῶν γίνεται περίπου ὡς καὶ τῶν ἀκεραίων· γράφομεν δηλ. τοὺς συμμιγεῖς προσθετέους τὸν ἕνα κάτωθεν τοῦ ἄλλου, οὕτως ὥστε οἱ ἀριθμοὶ οἱ ἐκ τῆς μονάδος τῆς αὐτῆς τάξεως γινόμενοι νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν στήλην, καὶ ἀρχίζομεν τὴν πρόσθεσιν ἀπὸ τὰς μονάδας τῆς τελευταίας τάξεως· ἂν τὸ ἄθροισμα τῶν μονάδων τάξεώς τινος δὲν περιέχῃ καὶ μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως, γράφομεν αὐτὸ ὡς εὑρέθη· ἂν δὲ περιέχῃ τοιαύτας, ἐξάγομεν ταύτας διαιροῦντες διὰ τοῦ ἀντιστοίχου ἀριθμοῦ ἀναγωγῆς, καὶ τὸ μὲν ὑπόλοιπον γράφομεν εἰς τὴν θέσιν τοῦ ἀθροίσματος, τὸ δὲ πηλίκον προσθέτομεν εἰς τὰς μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως.

Ὑποτεθείσθω ὅτι ἔχομεν νὰ προσθέσωμεν τοὺς ἑξῆς ἀριθμούς·

5 ἡμ. 7 ὥρ. 45 λ. + 8 ἡμ. 9 ὥρ. 25 δ. + 5 ὥρ. 30 λεπτ. 35 δ. + 10 ὥρ. 15 δ.

Γράφομεν αὐτοὺς ὡς ἑξῆς:

5 ἡμ.	7 ὥρ.	45 λ.	
8 ἡμ.	9 ὥρ.	0 λ.	25 δ.
	5 ὥρ.	30 λ.	35 δ.
	10 ὥρ.	0 λ.	15 δ.
14 ἡμ.	8 ὥρ.	16 λ.	15 δ.

Τὸ ἄθροισμα τῶν δευτέρων λεπτῶν εἶναι 75 καὶ περιέχει 1 λ. καὶ ὑπολείπονται 15 δ., ἅτινα γράφομεν εἰς τὴν στήλην. Ὁμοίως τὸ ἄθροισμα τῶν πρώτων λεπτῶν εἶναι 76 λ. καὶ περιέχει 1 ὥραν καὶ ὑπολείπονται 16 λ. ἅτινα γράφομεν εἰς τὴν στήλην αὐτῶν. Προσθέτομεν ἔπειτα τὰς ὥρας λαμβάνοντες ὁμοῦ καὶ τὴν 1 εὑρεθεῖσαν ὥραν καὶ εὑρίσκομεν ἄθροισμα 32 ὥρας, αἵτινες περιέχουσι 1 ἡμέραν καὶ ὑπολείπονται 8 ὧραι, τὰς ὁποίας γράφομεν εἰς τὴν στήλην των. Τέλος προσθέτομεν τὰς ἡμέρας λαμβάνοντες ὁμοῦ καὶ τὴν 1 εὑρεθεῖσαν ἡμέραν καὶ γράφομεν ὁλόκληρον τὸ εὑρεθὲν ἄθροισμα εἰς τὴν οἰκείαν στήλην.

Ἀφαίρεσις.

205) Καὶ εἰς τὴν ἀφαίρεσιν οἱ δεδομένοι ἀριθμοὶ πρέπει νὰ εἶναι ὁμοειδεῖς·

Ἡ ἀφαίρεσις τῶν συμμιγῶν ἀριθμῶν γίνεται ὡς καὶ τῶν ἀκεραίων. γράφομεν δηλ. τὸν ἀφαιρετέον κάτωθεν τοῦ μειωτέου, οὕτως ὥστε οἱ ἀριθμοὶ οἱ ἐκ τῆς αὐτῆς μονάδος γινόμενοι νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν στήλην καὶ κάτωθεν αὐτῶν σύρομεν γραμμὴν ὁριζοντίαν. Ἀρχίζομεν ἔπειτα τὴν ἀφαίρεσιν ἀπὸ τὰς μονάδας τῆς τελευταίας τάξεως καὶ προχωροῦμεν πρὸς τὰς μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως. Ἂν δὲ τύχῃ ὁ ἀριθμὸς τάξεώς τινος τοῦ ἀφαιρετέου νὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ ἀντιστοίχου ἀριθμοῦ τοῦ μειωτέου, προσθέτομεν εἰς τὸν τελευταῖον τόσας μονάδας τῆς τάξεώς του, ὅσαι ἀποτελοῦσι μίαν μονάδα τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως, οὕτω δὲ ἡ ἀφαίρεσις καθίσταται δυνατή· πρέπει ὅμως νὰ προσθέσωμεν 1 μονάδα εἰς τὸν ἀριθμὸν τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως τοῦ ἀφαιρετέου (§ 27.)

Ἔστω πρὸς ἐκτέλεσιν ἡ ἑξῆς ἀφαίρεσις·

8 λίρ.	7 σελ.	9 πέν.
3 λίρ.	12 σελ.	2 πεν.
4 λίρ.	15 σελ.	7 πεν.

Ἐν πρώτοις ἀφαιροῦμεν τὰς 2 πέννας ἀπὸ τὰς 9 πέννας καὶ εὑρίσκομεν τὸ ὑπόλοιπον 7 πέν. Ἐπειδὴ τώρα τὰ 12 σελ. δὲν ἀφαιροῦνται ἀπὸ τὰ 7 σελ., προσθέτομεν καὶ 20 σελ. (1 λίρ.=20 σελ.) καὶ ἀφαιροῦμεν τὰ 12 ἀπὸ τὰ 27 σελ. καὶ εὑρίσκομεν ὡς ὑπόλοιπον 15 σελ. Εἰς τὰς τρεῖς λίρας προσθέτομεν μίαν (1) λίρ. καὶ ἐκτελοῦμεν κατόπιν τὴν ἀφαίρεσιν τῶν λιρῶν.

Ἀσκήσεις προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως τῶν συμμιγῶν.

Α') *Ἀπὸ μνήμης.*

1) 200 δράμ. + 300 δράμ. =;

5 πήχ. 2 ῥούπ. + 7 πήχ. 4 ῥούπ. =;

7 ὀκ. 300 δράμ. + $\frac{1}{}$ ὀκᾶς. =;

5 πήχ. 1 ῥούπ. $+ \frac{3}{4}$ πήχ. $=$;

1 ὀκ. 100 δράμ. $+ 2$ ὀκ. 50 δρ. $=$;

8 πήχ. 7 ῥούπ. $+ 5$ ῥούπ. $=$;

18 ὀκ. 250 δρ. $+ \frac{3}{4}$ ὀκᾶς $=$;

17 ὀκ. 250 δράμ. $+ \frac{3}{5}$ ὀκᾶς. $=$;

2) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ ἑπόμεναι ἀφαιρέσεις·

1 ὀκ. 100 δρ. $- 200$ δρ. $=$;

15 στατ. $- 28$ ὀκ. $=$;

15 λίρ. 18 σελ. $- 10$ λίρ. 7 σελ. $=$;

15 πήχ. 7 ῥούπ. $- 8$ πήχ. 2 ῥούπ. $=$;

5 ὥρ. 20 λ. $- 2$ ὥρ. 15 λ. $=$;

3 ὀκ. 200 δράμ. $- \frac{1}{4}$ ὀκᾶς. $=$;

Β΄) *Γραπτῶς.* 1) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ ἑξῆς προσθέσεις·

α΄) 7 στατ. 28 ὀκ. 350 δρ. $+ 5$ ὀκ. 280 δρ. $+ 15$ στατ. 30 ὀκ. 1 δραμ. $+ \frac{15}{8}$ στατ. $=$;

β΄) 15 πήχ. 7 ῥούπ. $+ 25$ πήχ. 6 ῥούπ. $+ \frac{27}{4}$ πήχ. $+ 5,25$ πήχ. $=$;

γ΄) 17 λίρ. 8 σελ. 10 πέν. $+ 8,348$ λίρ. $+ \frac{15}{8}$ λίρ. $=$;

2) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ ἑξῆς ἀφαιρέσεις.

α΄) 7 πήχ. 5 ῥούπ. $- 3$ πήχ. 7 ῥούπ. $=$;

β΄) 15 στατ. $- 7$ στατ. 35 ὀκ. 250 δράμ. $=$;

γ΄) 5 λίρ. 12 σελ. 7 πέν. $- 3,248$ λίρ. $=$;

Πολλαπλασιασμὸς καὶ διαίρεσις τῶν συμμιγῶν ἀριθμῶν.

206) Εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν καὶ τὴν διαίρεσιν τῶν συμμιγῶν διακρίνομεν τὰς ἑξῆς τρεῖς περιπτώσεις·

Α΄) Ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς ἢ ὁ διαιρέτης εἶναι ἀκέραιος. Β΄) Ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς ἢ ὁ διαιρέτης εἶναι κλάσμα ἢ μικτὸς ἢ δεκαδικός. Γ΄) Ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς ἢ ὁ διαιρέτης εἶναι συμμιγής.

207) Α΄) *Πολλαπλασιασμὸς συμμιγοῦς ἐπὶ ἀκέραιον.* Ὅταν ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν συμμιγῆ ἐπὶ ἀκέραιον, πολλαπλασιάζομεν ἕκαστον μέρος τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστὴν καὶ ἀθροίζομεν τὰ μερικὰ γινόμενα (§ 34.)

Ἔστω π. δ. χ. νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ συμμιγὴς 8 ἡμ. 14 ὥρ. 40 λ. 25 δ. ἐπὶ τὸν ἀκέραιον 9.

Γράφομεν τὸν πολλαπλασιαστέον καὶ κάτωθεν αὐτοῦ τὸν πολλαπλασιαστὴν καὶ σύρομεν γραμμὴν ὁριζοντίαν. Ἀρχίζομεν τὸν πολλαπλασιασμὸν ἀπὸ τὰ 25 δ. τὸ γινόμενον αὐτῶν 25 δ. $\times 9 = 225$ δ. περιέχει καὶ πρῶτα λεπτὰ ἄκρα ἑξάκο-

8 ἡμ.	14 ὥρ.	40 λ.	25 δ.
			9
77 ἡμ.	12 ὥρ.	3 λ.	45 δ.

μεν διαιροῦντες διὰ τοῦ 60. Εὑρίσκομεν οὕτω 3 λ. καὶ ὑπολείπονται 45 δ., ἅτινα γράφομεν κάτωθεν τῆς γραμμῆς εἰς τὴν στήλην τῶν δευτέρων λεπτῶν. Πολλαπλασιάζομεν ἔπειτα 40 λεπτ. ἐπὶ 9 καὶ εἰς τὸ γινόμενον αὐτῶν 360 λ. προσθέτομεν καὶ τὰ 3 λ. τὰ 363 λ., περιέχουσιν 6 ὥρ. καὶ ἀκόμη 3 λ., τὰ ὁποῖα γράφομεν εἰς τὴν στήλην τῶν πρώτων λεπτῶν. Πολλαπλασιάζομεν κατόπιν τὰς 14 ὥρας ἐπὶ 9 καὶ εἰς τὸ γινόμενον 126 ὥρ. προσθέτομεν καὶ τὰς 6 ὥρ. Αἱ 132 ὥρ. περιέχουσι 5 ἡμέρ. καὶ ἀκόμη 12 ὥρ., τὰς ὁποίας γράφομεν εἰς τὴν στήλην τῶν ὡρῶν. Πολλαπλασιάζομεν τέλος τὰς 8 ἡμ. ἐπὶ 9 καὶ εἰς τὸ γινόμενον 72 ἡμ. προσθέτομεν καὶ τὰς 5 ἡμ. καὶ τὸν προκύπτοντα ἀριθμὸν 77 γράφομεν εἰς τὴν στήλην τῶν ἡμερῶν. Οὕτω τὸ ζητούμενον γινόμενον, ὅπερ προφανῶς εἶναι ὁμοειδὲς πρὸς τὸν πολλαπλασιαστέον, εἶναι 77 ἡμέρ. 12 ὥρ. 3 λεπτ. 45 δ.

208) Α΄) *Διαίρεσις συμμιγοῦς δι᾽ ἀκεραίου.* Ἡ διαίρεσις συμμιγοῦς δι᾽ ἀκεραίου ἐκτελεῖται, ἂν διαιρέσωμεν ἕκαστον μέρος τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ ἀκεραίου καὶ ἑνώσωμεν τὰ μερικὰ πηλίκα (§ 72).

Ἀρχίζομεν δὲ τὴν διαίρεσιν ἀπὸ τὰς μονάδας τῆς ἀνωτάτης τάξεως, διότι ἂν μείνῃ ὑπόλοιπόν τι τρέπομεν τοῦτο εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως ἑπομένης τάξεως καὶ προσθέτομεν ταύτας εἰς τὰς μονάδας τῆς τάξεως ταύτης τοῦ συμμιγοῦς· οὕτω δ᾽ ἐξακολουθοῦμεν, μέχρις οὗ φθάσωμεν εἰς τὰς μονάδας τῆς τελευταίας τάξεως.

Π.δ.χ. νὰ ἐκτελεσθῇ ἡ διαίρεσις 15 λίρ. 18 σελ. 6 πέν. : 6.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς·

15 λίρ. 18 σελ. 6 πέν.	6
3 λίρ.	2 λίρ. 13 σελ. 1 πέν.
20 σελ.	
60 σελ.	
18 σελ.	
78 σελ.	
0 σελ.	
6 πέν.	
6 πέν.	
0 πέν.	

Διαιροῦμεν πρῶτον τὰς 15 λίρας διὰ τοῦ 6 καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον μὲν 2 λίρ., ὑπόλοιπον δὲ 3 λίρ., τὰς ὁποίας τρέπομεν εἰς $3 \times 20 = 60$ σελ. Προσθέτομεν εἰς ταῦτα καὶ τὰ 18 σελ., τὰ ὁποῖα ἔχει ὁ διαιρετέος καὶ διαιροῦμεν τὰ 78 σελ. διὰ τοῦ 6 καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον μὲν 13 σελ., ὑπόλοιπον δὲ 0. Λαμβάνομεν τώρα τὰς 6 πέννας τοῦ διαιρετέου, τὰς ὁποίας διαιροῦμεν διὰ τοῦ 6, καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον μὲν 1 πέν., ὑπόλοιπον δὲ 0. Ὅθεν τὸ ζητούμενον πηλίκον, ὅπερ προφανῶς θὰ εἶναι ὁμοειδὲς πρὸς τὸν διαιρετέον, εἶναι 2 λίραι 13 σελ. 1 πέν.

ΣΗΜ. *Ἐὰν τὸ τελευταῖον ὑπόλοιπον εἶναι διάφορον τοῦ 0, γράφομεν αὐτὸ κλασματικῶς.*

209) *Πολλαπλασιασμὸς συμμιγοῦς ἐπὶ ἀκέραιον κατὰ τὴν μέθοδον τῶν ἁπλῶν μερῶν.* Ἔστω τὸ ἑξῆς παράδειγμα 5 ὀκ. 240 δράμ. $\times$ 160.

Πολλαπλασιάζομεν πρῶτον τὰς 5 ὀκ. ἐπὶ 160 καὶ εὑρίσκομεν ὡς γινόμενον 800 ὀκ.. Ἵνα εὕρωμεν τὸ γινόμενον τῶν 240 δραμ. ἐπὶ 160, παρατηροῦμεν ὅτι τὸ γινόμενον 1 ὀκ. ἢ 400 δραμ. ἐπὶ 160 θὰ εἶναι 160 ὀκ. Ὅθεν τὸ γινόμενον τῶν 200 δραμίων ἢ τοῦ $\frac{1}{2}$ ὀκ. ἐπὶ 160 θὰ εἶναι τὸ $\frac{1}{2}$ τῶν 160 ὀκ., ἤτοι 80 ὀκ., τὸ δὲ γινόμενον τῶν 40 δραμ., ἅτινα ἀποτελοῦσι τὸ $\frac{1}{5}$ τῶν 200 δραμίων, ἐπὶ 160 θὰ εἶναι τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ προηγουμένου γινομένου, ἤτοι 80 ὀκ. $\times \frac{1}{5} = 16$ ὀκ.

Ἐὰν ἑνώσωμεν πάντα ταῦτα τὰ μερικὰ γινόμενα 800 ὀκ. + 80 ὀκ. + 16 ὀκ. εὑρίσκομεν τὸ ζητούμενον γινόμενον 5 ὀκ. 240 δραμ. $\times$ 160 = 826 ὀκ.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς:

$$
\begin{array}{rl|l}
 & & 5 \text{ ὀκ. } 240 \text{ δρ.} \\
 & & 160 \\
\hline
240 = & \left\{ \begin{array}{l} 200 \text{ δρ.} = \frac{1}{2} \text{ ὀκ.} \\ 40 \text{ δρ.} = \frac{1}{5} \text{ τῶν } 200 \text{ δρ.} \end{array} \right. & \begin{array}{r} 800 \text{ ὀκ.} \\ 80 \text{ ὀκ.} \\ 16 \text{ ὀκ.} \\ \hline 826 \text{ ὀκ.} \end{array}
\end{array}
$$

Ἡ μέθοδος αὕτη καλεῖται *τῶν ἁπλῶν μερῶν*, διότι τὰ μέρη τοῦ συμμιγοῦς ἀναλύονται εἰς ἁπλᾶ μέρη, παριστανόμενα δηλ. ὑπὸ κλασματικῆς μονάδος καὶ ἑπομένως τὰ μερικὰ γινόμενα εὑρίσκονται διὰ διαιρέσεως. Προτιμᾶται δὲ ἡ μέθοδος αὕτη, ὅταν ὁ πολλαπλασιαστέος εἶναι ἀριθμὸς μέγας καὶ ἡ ἀνάλυσις τῶν μερῶν τοῦ συμμιγοῦς εἰς ἁπλᾶ μέρη εἶναι εὐχερής. Καθ' ὅμοιον τρόπον δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον 8 πήχ. 7 ῥουπ. $\times$150.

$$
\begin{array}{rl|l}
 & & 8 \text{ πήχ. } 7 \text{ ῥουπ.} \\
 & & 150 \\
\hline
7 \text{ ῥούπ.} = & \left\{ \begin{array}{l} 4 \text{ ῥούπ.} = \frac{1}{2} \text{ πήχ.} \\ 2 = \frac{1}{2} \text{ τῶν } 4 \text{ ῥ.} \\ 1 = \frac{1}{2} \text{ τῶν } 2 \text{ ῥ.} \end{array} \right. & \begin{array}{r} 1200 \text{ πήχ.} \\ 75 \text{ πήχ.} \\ 37 \text{ πήχ. } 4 \text{ ῥουπ} \\ 18 \text{ πήχ. } 6 \text{ ῥουπ.} \\ \hline 1331 \text{ πήχ. } 2 \text{ ῥούπ.} \end{array}
\end{array}
$$

210) Β') *Πολλαπλασιασμὸς συμμιγοῦς ἐπὶ κλάσμα ἢ μικτὸν ἢ δεκαδικόν.* Ὅταν ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν συμμιγῆ ἐπὶ κλάσμα, πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴν καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ (§ 144).

Παράδειγμα. 5 στ. 38 όκ. 250 δράμ. $\times \frac{3}{4}$.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς·

5 στ. 38 ὀκ. 250 δραχ.
3
17 στ. 27 ὀκ. 350 δράμ. | 4
4 στ. 17 ὀκ. 387 $\frac{2}{4}$ δραμ.

1 στ.
44 ὀκ.
44 ὀκ.
27 ὀκ.
71 ὀκ.
3 ὀκ.
400 δραμ.
1200 δραμ.
350 δραμ.
1550 δραμ.
2 δραμ.

Τὸ ζητούμενον γινόμενον εἶναι·

4 στ. 17 ὀκ. 387 $\frac{1}{2}$ δράμ.

Ἐὰν δὲ ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν συμμιγῆ ἐπὶ μικτόν, τρέπομεν τὸν μικτὸν εἰς κλάσμα καὶ ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν, ἢ πολλαπλασιάζομεν χωριστὰ ἐπὶ τὸν ἀκέραιον καὶ χωριστὰ ἐπὶ τὸ κλάσμα καὶ ἑνώνομεν τὰ δύο μερικὰ γινόμενα.

Παράδειγμα. 10 λίρ. 12 σελ. 8 πέν. $\times 4\frac{3}{5}$.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς· 10 λίρ. 12 σελ. 8 πέν.
4
42 λίρ. 10 σελ. 8 πέν.

Τὸ γινόμενον ἐπὶ τὸν ἀκέραιον 4 εἶναι 42 λίρ. 10 σελ. 8 πέν.
Τὸ γινόμενον ἐπὶ τὸ κλάσμα εἶναι τὸ ἑξῆς·

10 λίρ. 12 σελ. 8 πέν.
3
31 λίρ. 18 σελ. 0 πέν. | 5
6 λίρ. 7 σελ. 7 $\frac{1}{5}$ πέν.

1 λίρ.
20 σελ
20 σελ.
18 σελ.
38 σελ.
3 σελ.
12 πέν.
36 πέν.
1 πέν.

Προσθέτομεν ἤδη τὰ δύο εὑρεθέντα γινόμενα

Γινόμενον ἐπὶ 4		42 λίρ. 10 σελ. 8 πέν.
»	» $\frac{3}{5}$	6 λίρ. 7 σελ. 7 $\frac{1}{5}$ πέν
»	» $4\frac{3}{5}$	48 λίρ. 18 σελ. 3 $\frac{1}{5}$ πέν.

Δυνάμεθα ὅμως τὰ τρέψωμεν τὸν $4\frac{3}{5}$ εἰς κλάσμα $\frac{23}{5}$ καὶ ἔπειτα νὰ ἐκτελέσωμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν 10 λίρ. 12 σελ. 8 πέν. $\times \frac{23}{5}$.

Ὅταν τέλος ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν συμμιγῆ ἐπὶ δεκαδικόν, γράφομεν τὸν δεκαδικὸν ὑπὸ κλασματικὴν μορφὴν καὶ ἐκτελοῦμεν ἔπειτα τὴν πρᾶξιν.

Π. δ. χ. 5 πήχ. 7 ρουπ. $\times$ 0,3 = 5 πήχ. 7 ρουπ. $\times \frac{3}{10}$ = 1 πήχ. 6,1 ρούπ.

211) *Β') Διαίρεσις συμμιγοῦς διὰ κλάσματος ἢ μικτοῦ ἢ δεκαδικοῦ.* Ὅταν ἔχωμεν νὰ διαιρέσωμεν συμμιγῆ διὰ κλάσματος, ἀντιστρέφομεν τοὺς ὅρους τοῦ κλασματικοῦ διαιρέτου καὶ πολλαπλασιάζομεν (§ 151).

Παράδειγμα. $18^0\,45'\,20'' : \frac{5}{9} = 18^0\,45'\,20'' \times \frac{9}{5} = 32^0\,21'\,36''$

Ἐὰν ἔχωμεν νὰ διαιρέσωμεν συμμιγῆ διὰ μικτοῦ, τρέπομεν τὸν μικτὸν εἰς κλάσμα, ἀντιστρέφομεν τοὺς ὅρους αὐτοῦ καὶ ἔπειτα ἐκτελοῦμεν πολλαπλασιασμὸν (§ 151).

Παράδειγμα. $17^{\text{όκ.}}\ 150^{\text{δραμ.}} : 2\frac{3}{5} = 17^{\text{όκ.}}\ 150^{\text{δράμ.}} : \frac{13}{5} =$ $17^{\text{όκ.}}\ 150^{\text{δραμ.}} \times \frac{5}{13} = 6^{\text{όκ.}}\ 273\frac{1}{3}^{\text{δραμ.}}$

Ἐὰν ἔχωμεν νὰ διαιρέσωμεν συμμιγῆ διὰ δεκαδικοῦ, γράφομεν τὸν δεκαδικὸν ὑπὸ κλασματικὴν μορφὴν καὶ ἔπειτα ἐκτελοῦμεν τὴν πρᾶξιν.

Παράδειγμα. $5^{\text{πήχ.}}\ 4^{\text{ρούπ.}} : 0{,}8 = 5^{\text{πήχ.}}\ 4^{\text{ρούπ.}} : \frac{8}{10} = 5^{\text{πήχ.}}\cdot 4^{\text{ρ.}}$ $\times \frac{10}{8} = 6^{\text{πήχ.}}\ 7^{\text{ρούπ.}}$

212) *Γ') Πολλαπλασιασμός, ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι συμμιγής.* Διὰ νὰ μάθωμεν, πῶς ἐκτελεῖται ὁ πολλαπλασιασμὸς οἱουδήποτε ἀριθμοῦ ἐπὶ συμμιγῆ, λαμβάνομεν τὰ ἑξῆς προβλήματα πολλαπλασιασμοῦ, εἰς τὰ ὁποῖα ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι συμμιγὴς ἀριθμός.

1) Ἡ ὀκᾶ τοῦ καφὲ τιμᾶται 3,60 δραχ. Πόσον τιμῶνται αἱ 5 ὀκ. 350 δραμ.;

Τὸ πρόβλημα τοῦτο εἶναι πολλαπλασιασμοῦ (§ 155) καὶ πολλαπλασιαστέος εἶναι 3,60 δρχ. ὁμοειδὴς πρὸς τὸ ζητούμενον γινόμενον, πολλαπλασιαστὴς δὲ ὁ συμμιγὴς 5 ὀκ. 350 δράμ. Ὁ πολλαπλασιασμὸς οὗτος δύναται νὰ γίνῃ κατὰ τοὺς ἑξῆς δύο τρόπους·

Α' τρόπος. Ἐπειδὴ εἶναι δεδομένη ἡ τιμὴ τῆς 1 ὀκᾶς, τρέπομεν τὸν πολλαπλασιαστὴν 5 ὀκ. 350 δραμ. εἰς ἀριθμὸν ὀκάδων, ἤτοι εἰς $5\frac{350}{400}$ ὀκ. ἢ $5\frac{7}{8}$ ὀκ. Μετὰ ταῦτα ἔχομεν νὰ ἐκτελέσωμεν τὸν ἑξῆς πολλαπλασιασμὸν $3{,}60 \times 5\frac{7}{8} = 21{,}15$ δραχ.

Κατὰ ταῦτα, ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι συμμιγής, τρέπομεν τοῦτον εἰς μονάδας τῆς τάξεως ἐκείνης, τὴν ὁποίαν ὁρίζει τὸ πρόβλημα, καὶ ἔπειτα ἐκτελοῦμεν τὸν πολλαπλασιασμόν.

Β' τρόπος διὰ τῶν ἁπλῶν μερῶν.

Εὑρίσκομεν ἐν πρώτοις τὴν τιμὴν τῶν 5 ὀκ. (360 δρχ. $\times$ 5 = 18,00 δρχ.) Διὰ νὰ εὕρωμεν ἔπειτα πόσον τιμῶνται τὰ 350 δράμ., ἀναλύομεν ταῦτα εἰς ἁπλᾶ μέρη, ἤτοι εἰς 200 δραμ. = $\frac{1}{2}$ ὀκ., εἰς 100 δραμ. = $\frac{1}{2}$

τῶν 200 δραμ. καὶ 50 δραμ. $=\frac{1}{2}$ τῶν 100 δραμ. καὶ τῶν μερῶν τούτων εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν ὡς ἑξῆς·

Ἀφοῦ ἡ μία ὀκᾶ τιμᾶται 3,60 δραχ., τὰ 200 δραμ. ἤτοι τὸ $\frac{1}{2}$ τῆς ὀκᾶς θὰ τιμῶνται τὸ $\frac{1}{2}$ τῶν 3,60 δραχ., ἤτοι 1,80 δραχ., καὶ τὰ 100 δράμ. θὰ τιμῶνται τὸ $\frac{1}{2}$ τῶν 1,80 δρχ., ἤτοι 0,90 δρχ., καὶ τέλος τὰ 50 δράμ. θὰ τιμῶνται τὸ $\frac{1}{2}$ τῶν 0,90 δρχ., ἤτοι 0,45 δρχ., ὅθεν αἱ 5 ὀκ. 350 δράμ. τιμῶνται 18,00 δραχ. $+$ 1,80 δρχ. $+$ 0,90 δρχ. $+$ 0,45 δραχ. $=$ 21,15 δραχ.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς·

		3,60 δραχ. 5 ὀκ. 350 δραμ.
		18,00 δραχ.
350 δραμ.	$200 = \frac{1}{2}$ ὀκ.	1,80 »
	$=100 = \frac{1}{2}$ τῶν 200 δραμ.	0,90
	$50 = \frac{1}{2}$ τῶν 100 δραμ.	0,45
		21,15.

2) Μία οἰκογένεια ἐξοδεύει κατ' ἔτος 8 στ. 28 ὀκ. 200 δρμ. ἀλεύρου. Πόσον ἄλευρον ἐξοδεύει εἰς 9 μῆν. καὶ 20 ἡμ.;

Εἶναι πρόβλημα πολλαπλασιασμοῦ. Πολλαπλασιαστέος δὲ εἶναι ὁ 8 στ. 28 ὀκ. 200 δρ.

Καὶ ἐνταῦθα ὁ πολλαπλασιασμὸς ἐκτελεῖται, ὡς ἐν τῷ προηγουμένῳ προβλήματι κατὰ δύο τρόπους.

Α΄ τρόπος. Τρέπομεν πρῶτον τὸν συμμιγῆ πολλαπλασιαστὴν 9 μῆν. 20 ἡμ. εἰς κλάσμα τοῦ ἔτους (διότι τοῦ ἑνὸς ἔτους μᾶς δίδεται ἡ τιμὴ) ἤτοι εἰς $\frac{290}{360}$ ἢ $\frac{29}{36}$ ἔτ. καὶ ἔπειτα ἐκτελοῦμεν τὸν πολλαπλασιασμόν, ὅτε ἔχομεν 8 στ. 28 ὀκ. 200 δρμ. $\times \frac{29}{36} = 6$ στ. 42 ὀκ. 205 $\frac{5}{9}$ δρχ.

Β΄ τρόπος διὰ τῶν ἁπλῶν μερῶν.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς·

		8 στ. 28 ὀκ. 200 δραμ. 9 μῆν. 20 ἡμ.
9 μῆν. =	6 μῆν. $= \frac{1}{2}$ ἔτους.	4 στ. 14 ὀκ. 100 δραμ.
	3 μῆν. $= \frac{1}{2}$ τῶν 6 μην.	2 7 50
20 ἡμ. =	15 ἡμ. $= \frac{1}{6}$ τῶν 3 μην.	0 15 341 $\frac{2}{3}$
	5 ἡμ. $= \frac{1}{3}$ τῶν 15 ἡμερ.	0 5 113 $\frac{2}{3} + \frac{2}{9}$
		6 στ. 42 ὀκ. 205 $\frac{5}{9}$ δραμ.

213) *Γ´) Διαίρεσις, ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι συμμιγής.* Ἵνα μάθωμεν, πῶς ἐκτελεῖται ἡ διαίρεσις κατὰ τὴν περίπτωσιν ταύτην, ἂς θεωρήσωμεν τὰ ἀκόλουθα προβλήματα·

21) Μία οἰκογένεια ἐντὸς 3 μην. 25 ἡμ. κατηνάλωσεν 25 ὀκ. 300 δράμ. ζακχάρεως. Πόσην ζάκχαριν καταναλίσκει κατὰ μῆνα;

Τὸ πρόβλημα τοῦτο εἶναι μερισμοῦ (§ 157).

Διαιρέτης εἶναι ὁ 25 ὀκ. 300 δράμ. ὁμοειδὴς πρὸς τὸ ζητούμενον.

Ἐπειδὴ ζητεῖται τὸ ποσὸν τῆς ζακχάρεως, ὅπερ καταναλίσκει ἡ οἰκογένεια εἰς 1 μῆνα, ἀρκεῖ πρῶτον νὰ τρέψωμεν τὸν συμμιγῆ διαιρέτην 3 μῆν. 25 ἡμ. εἰς ἀριθμὸν μηνῶν, ἤτοι $3\frac{25}{30}$ μην. ἢ $3\frac{5}{6}$ μην. καὶ ἔπειτα νὰ διαιρέσωμεν διὰ τοῦ μικτοῦ $3\frac{5}{6}$.

Ὅθεν ἔχομεν 25 ὀκ. 300 δραμ. : 3 μην. 25 ἡμ. = 25 ὀκ. 300 δραμ. $3\frac{5}{6}$ = 25 ὀκ. 300 δραμ. : $\frac{23}{6}$ = 25 ὀκ. 300 δραμ. $\times\frac{6}{23}$ = 6 ὀκ. $286\frac{22}{23}$ δράμια.

Ἐκ τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος τούτου παρατηροῦμεν τὰ ἑξῆς·

214) «Εἰς τὰ προβλήματα μερισμοῦ ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης εἶναι ἑτεροειδεῖς. Ὅταν δὲ ὁ διαιρέτης εἶναι συμμιγής, διὰ νὰ ἐκτελεσθῇ ἡ διαίρεσις, ἀρκεῖ νὰ τρέψωμεν τοῦτον εἰς ἀριθμὸν τῆς μονάδος ἐκείνης, τῆς ὁποίας ἡ τιμὴ ζητεῖται ἐν τῷ προβλήματι· οὕτω δὲ ἡ πρᾶξις ἀνάγεται εἰς διαίρεσιν δι' ἀκεραίου ἢ διὰ κλάσματος.»

22 2) Ὁ στατὴρ πράγματός τινος τιμᾶται 5 σελ. 7 πέν., πόσους στατῆρας ἀγοράζομεν μὲ 18 λίρ. 5 σελ.;

Τὸ πρόβλημα τοῦτο εἶναι μετρήσεως (§ 159).

Ἐνταῦθα διαιρετέος μὲν εἶναι ὁ 18 λίρ. 5 σελ., διαιρέτης δὲ ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος, ἤτοι 5 σελ. 7 πέν. Διὰ νὰ γίνῃ εὐκολώτερον ἡ διαίρεσις, τρέπομεν τοὺς δύο συμμιγεῖς, οἵτινες εἶναι ὁμοειδεῖς, εἰς μονάδας τῆς τελευταίας τάξεως, ὅτε καταλήγομεν εἰς διαίρεσιν δύο ἀκεραίων. Καὶ ὁ μὲν διαιρετέος δίδει τὸν ἀκέραιον 4380 πεν., ὁ δὲ διαιρέτης τὸν 67 πέν. Ἄρα τὸ ζητούμενον πηλίκον θὰ εἶναι $\frac{4380}{67}$ στατ. Ἂν τρέψωμεν τὸ κλάσμα τοῦτο εἰς συμμιγῆ, λαμβάνομεν $\frac{4380}{67}$ στατ. = 65 στατ. 16 ὀκ. $167\frac{11}{67}$ δραμ.

Ἐκ τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος τούτου παρατηροῦμεν τὰ ἑξῆς·

215) «Εἰς τὰ προβλήματα μετρήσεως ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης εἶναι ὁμοειδεῖς, καὶ διαιρέτης εἶναι ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος. Διὰ νὰ διαιρέσωμεν τοὺς δύο συμμιγεῖς τρέπομεν ἀμφοτέρους εἰς μονάδας τῆς αὐτῆς τάξεως καὶ μάλιστα τῆς κατωτάτης, ἤτοι εἰς ἀκεραίους. Τὸ πηλίκον τῶν δύο τούτων ἀκεραίων εἶναι κλάσμα τῆς μονάδος ἐκείνης τῆς ὁποίας ἡ τιμὴ εἶναι δεδομένη ἐν τῷ προβλήματι· τὸ κλάσμα τοῦτο τρέπομεν εἰς συμμιγῆ ἀριθμόν».

Ἀσκήσεις πολλαπλασιασμοῦ καὶ διαιρέσεως.

1) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν οἱ ἑξῆς πολλαπλασιασμοί·

α΄) 8 στ. 18 ὀκ. 270 δράμ. $\times$ 12=;

β΄) 10 λίρ. 7 σελ. 8 πέν. $\times$ 16=;

γ΄) 5 πήχ. 7 ῥούπ. $\times$ 260=;

δ΄) 8 ἡμ. 15 ὥρ. 25 λ. 40 δ. $\times \frac{5}{8}$=;

ε΄) $7^{0}\,40'\,25'' \times 2\frac{4}{5}$=;

στ΄) 7 στ. 28 ὀκ. 250 δραμ. $\times$ 0,28=;

2) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ ἑξῆς διαιρέσεις=;

α΄) 19 ἡμ. 14 ὥρ. 45 δ. : 9=;

β΄) 18 πήχ. 6 ῥούπ. : 12=;

γ΄) 28 στ. 37 ὀκ. 300 δράμ. : 25=;

δ΄) 8 λίρ. 17 σελ. 6 πέν. : $\frac{8}{15}$=;

ε΄) 15 στατ. 40 ὀκ. 270 δραμ. : $3\frac{4}{5}$=;

στ΄) 27 στ. Ἀγλλ. 25 λίτρ. : 20,37=;

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

Α΄) *Ἀπὸ μνήμης.*

1) Ὅταν ἡ ὀκᾶ κρέατος πωλῆται 2,40 δραχ., πόσον ἀξίζουσι α΄) τὰ 300 δράμ., β΄) τὰ 250 δραμ., γ΄) τὰ 160 δράμ., δ΄) τὰ 120 δράμ., ε΄) αἱ 2 ὀκ. 100 δραμ. στ΄) αἱ 3 ὀκ. 50 δράμ. αὐτοῦ;

2) Ὁ πῆχυς ὑφάσματός τινος πωλεῖται 12 δραχ. Πόσον στοιχίζουσι α΄) τὰ 7 ῥούπ., β΄) τὰ 3 ῥούπ., γ΄) 2 πήχ. 1 ῥούπ., δ΄) τὰ 5 ῥούπ., ε΄) 3 πήχ. 6 ῥούπ. αὐτοῦ;

3) Πόσας δραχμὰς στοιχίζει ἡ ὀκᾶ τῆς μετάξης, ὅταν τὸ δράμιον πωλῆται α΄) 1 λεπτ. β΄) 2 λεπτ., γ΄) 3 λ. δ΄) $1\frac{1}{2}$ λ. ε) $2\frac{3}{4}$ λ. στ) $2\frac{5}{8}$ λ. ζ) $4\frac{3}{8}$ λ. η΄) $5\frac{1}{4}$ λεπτά;

4) Ἐὰν τὸ χαβιάρι πωλῆται κατ' ὀκᾶν 38 δραχ., πόσον στοιχίζουσι α΄) τὰ 200 δράμ., β΄) τὰ 100 δράμ., γ΄) τὰ 80 δράμ., δ΄) τὰ 50 δράμ., ε΄) τὰ 25 δράμ., στ΄) τὰ 125 δράμ., ζ΄) τὰ 240, η΄) τὰ 250 δράμ. αὐτοῦ;

5) Ἐὰν τὰ 5 ῥούπια ὑφάσματός τινος τιμῶνται 2,50 δραχ., πόσον τιμᾶται ὁ πῆχυς αὐτοῦ;

6) Ἐὰν τὰ 300 δράμ. πράγματός τινος πωλῶνται ἀντὶ 1,60 δραχ. πόσον τιμᾶται ἡ 1 ὀκᾶ τοῦ πράγματος τούτου;

7) Ἠγοράσαμεν 80 δράμ. χαβιάρι ἀντὶ 6,30 δραχ. Πόσον πωλεῖται ἡ ὀκᾶ αὐτοῦ;

8) Τὰ 150 δραμ. νήματος πωλοῦνται ἀντὶ 4,50 δραχ. Πόσον πωλεῖται ἡ ὀκᾶ τοῦ νήματος τούτου;

Β΄) *Γραπτῶς.*

9) Τὸ μικτὸν βάρος (βάρος τοῦ ἐμπορεύματος μετὰ τοῦ περικαλύμ-

ματος) εἶναι 314 Ἀγγλ. στατ. 94 λίτρ. τὸ δὲ ἀπόβαρον (κ. τάρα) 9 στατ. 105 λίτρ. Ποῖον εἶναι τὸ καθαρὸν βάρος τοῦ ἐμπορεύματος;

10) Ἐπλήρωσέ τις διὰ τὴν ἀγορὰν μιᾶς μερίδος βάμβακος 216 λίρ. 3 σελ. 2 πέν. καὶ εἰς ἔξοδα 13 λίρ. 17 σελ. 8 πέν., μετεπώλησε δὲ αὐτὴν ἀντὶ 302 λιρ. 12 σελ. 9 πέν. Πόσον εἶναι τὸ κέρδος;

11) Ἐγεννήθη τις τὴν 23ην Ἰουνίου 1875. Ποίαν ἡλικίαν θὰ ἔχῃ τὴν 28ην Αὐγούστου τοῦ 1914;

12) Ἄνθρωπός τις κατὰ τὴν 20ὴν Ἰανουαρίου 1912 εἶχεν ἡλικίαν 25 ἐτ. 10 μην. 20 ἡμ. Πότε ἐγεννήθη καὶ κατὰ ποίαν ἐποχὴν θὰ ἔχῃ ἡλικίαν 40 ἐτ. 8 μην. 10 ἡμ.;

13) Ἡ Ἐθνικὴ τράπεζα ἐξέδωκε κατὰ τὸ διάστημα ἑνὸς μηνὸς ἐπὶ Λονδίνου (πληρωτέας ἐν Λονδίνῳ) τὰς ἑξῆς Τραπεζιτικὰς ἐπιταγὰς α') 317 λίρ. 10 σελ. 5 πέν., β') 347 λίρ. 10 πέν., γ') 1005 λίρ. 3 σελ. 1 πέν., δ') 144 λίρ. 14 σελ. 9 πέν., ε') 400 λίρ., στ') 932 λίρ. 10 σελ. 4 πέν. Εἰς πόσον ἀνέρχονται ὁμοῦ αἱ ἐκδοθεῖσαι ἐπιταγαί;

14) Τηλεγράφημά τι παρεδόθη εἰς τὸ Τηλεγραφεῖον Ἀθηνῶν τὴν 11 ὥρ. 20 λ. π. μ. διὰ τὰς Καλάμας. Διεβιβάσθη τοῦτο ἐξ Ἀθηνῶν μετὰ 1 ὥρ. 20 λ. 10 δ., ἡ δ' ἐπίδοσις τοῦ τηλεγραφήματος ἐν Καλάμαις ἐγένετο μετὰ 2 ὥρ. 45 λεπτ. μετὰ τὴν ἐπίδοσιν αὐτοῦ. Κατὰ ποίαν ὥραν τῆς ἡμέρας ἔλαβε τὸ τηλεγράφημα ὁ παραλήπτης;

15) Εἷς ἐμπορορράπτης εἶχε τεμάχιον ὑφάσματος 145 ὑαρδ. 1 ποδ. 10 δακ. καὶ ἐχρησιμοποίησεν ἐξ αὐτοῦ α') 15 ὑαρ. 2 πόδ. 3 δακτ., β') 8 ὑαρδ. 1 δακτ. γ') 25 ὑαρδ. 1 πόδ. 7 δακτ., δ') 45 ὑαρ. 2 πόδας. Πόσον ὕφασμα ὑπολείπεται ἀκόμη;

16) Μεγαλέμπορός τις ἠγόρασε τὰ ἑξῆς ποσὰ καφὲ κατὰ τὸ διάστημα ἑνὸς ἔτους.

α') 61 σάκ. βάρους ἐν ὅλῳ 75 στατ. 28 ὀκ. 200 δρ.
β') 673 σάκ. » » » 783 στ. 32 ὀκ. 300 δρ.
γ') 458 σάκ. » » » 502 στ. 42 ὀκ. 100 δρ.
δ') 32 σάκ. » » » 38 στ. 20 ὀκ.

Πόσους σάκκους καὶ πόσους στατῆρας, ὀκάδας καὶ δράμια καφὲ ἠγόρασεν οὗτος καθ' ὅλον τὸ ἔτος;

17) Ὁ αὐτὸς μεγαλέμπορος ἐπώλησε κατὰ τὸ διάστημα τοῦ ἔτους

α') 255 σάκ. βάρους ἐν ὅλῳ 373 στ. 28 ὀκ. 250 δράμ.
β') 132 σάκ. » » » 142 στ. 20 ὀκ.
γ') 372 σάκ. » » » 392 στ. 100 δράμ.
δ') 147 σάκ. » » » 154 στ. 25 ὀκ. 150 δράμ.

Πόσοι σάκκοι καφὲ καὶ πόσοι στατῆρες, ὀκάδες καὶ δράμια καφὲ μένουσιν ἐν τῇ ἀποθήκῃ του;

18) Ἔμπορός τις ἠγόρασεν ἐξ Ἀγγλίας τὰ ἑξῆς ποσὰ ἐμπορεύματός τινος·

α') 8 στ. Ἀγγλ. 85 λίτρ. ἀντὶ 13 λίρ. 7 σελ. 2 πέν.
β') 32 στ. Ἀγγλ. 15 λίτρ. » 50 λιρ. 15 σελ.
γ') 20 στ. Ἀγ. 100 λίτρ. » 35 λίρ. 18 σελ. 7 πέν.
δ') 18 στ. Ἀγγλ. 50 λίτρ. » 28 λίρ. 10 πέν.

Πόσους στατῆρας καὶ λίτρας τοῦ ἐμπορεύματος τούτου ἠγόρασε καὶ πόση εἶναι ἡ ὁλικὴ ἀξία αὐτοῦ;

19) Ὁ πῆχυς ἑνὸς ὑφάσματος τιμᾶται 8,40 δραχ. Πόσον τιμῶνται οἱ 18 πήχ. 6 ῥούπ.; (ἀπ. 157,50 δραχ.)

23 20) Ἡ ὀκᾶ πράγματός τινος τιμᾶται 5,75 δραχ. Πόσον τιμῶνται αἱ 35 ὀκ. 320 δράμ.; (ἀπ. 205,85 δραχ.)

24 21) Ἠγόρασέ τις 15 βαρέλια ἐλαίου μικτοῦ βάρους ἐν ὅλῳ 25 στ. 18 ὀκ. Τὸ ἀπόβαρον δι' ἕκαστον βαρέλιον εἶναι 18 ὀκ. 350 δράμ. Πόσον εἶναι τὸ καθαρὸν βάρος τοῦ ἐλαίου καὶ πόσον στοιχίζει τοῦτο πρὸς 1,14 δραχ. τὴν ὀκᾶν καὶ εἰς πόσον θ' ἀνέλθῃ ἡ τιμὴ αὕτη ἂν ὑπελογίσθῃ καὶ ἡ τιμὴ ἑκάστου βαρελίου πρὸς 8,50 δραχ.;
(ἀπ. α'. 834 ὀκ. 350 δραμ., β'. 951,75 δραχ.. γ'. 1079,25 δραχ.)

23 22) Πόσους στατῆρας, ὀκάδας καὶ δράμια κάμνουσι 345,780 χιλιόγ.; (ἀπ. 6 στ. 6 ὀκ. 56 δράμ. περίπου.)

24 23) 8 στατ. 35 ὀκ. 300 δραμ. μὲ πόσα χιλιόγραμμα ἰσοδυναμοῦσι; (ἀπ. 496,320 χιλιόγρ.)

24) Ὅταν ἡ λίρα στερλίνα ἰσοδυναμῇ πρὸς 25,12 δραχ. πόσας λίρας, σελίνια καὶ πέννας θ' ἀγοράσῃ τις μὲ 2458,60 δραχ.;
(ἀπ. 97 λίρ. 17 σελ. $5\frac{127}{157}$ πέν.)

25) Μία λίρα στερλίνα ἰσοδυναμεῖ πρὸς 25,30 δραχ. Πόσας δραχμὰς κάμνουσι α') 18 λίρ. 10 σελ. 4 πέν., β') 12 σελ. 8 πέν., γ') 1340 πέννας; (ἀπ. α'. 468,47 δραχ. β'. 16,02 δραχ. γ'. 140,42 δραχ.)

26) Πόσους στατῆρας, ὀκάδας καὶ δράμια κάμνουσιν οἱ 18 στατ. Ἀγγλ. 95 λίτρ.; (ἀπ. 17 στ. 0 ὀκ. 40 δραμ. περίπου.)

27) Πόσους στατ. Ἀγγλ. καὶ λίτρας κάμνουσιν οἱ 15 στατ. 20 ὀκ. 200 δραμ; (ἀπ. 17 στ. Ἀγγλ. 16 λίτρ. καὶ ὑπολείπονται 128 γρ.)

25 28) Ἐπλήρωσέ τις δι' ἐνοίκιον ἀποθήκης 240,80 δραχ. διὰ 5 μῆν. 20 ἡμ. Πόσον εἶναι τὸ μηνιαῖον ἐνοίκιον; (ἀπ. 42,50 δραχ.)

29) 15 ὑάρδ. 2 πόδ. 7 δάκ. νὰ μετατραπῶσιν εἰς μέτρα.
(ἀπ. 14,497 μέτρα περίπου.)

30) Ὕφασμα 1663 ὑάρδ. 1 ποδ. 5 δακ. ἠγοράσθη πρὸς $48\frac{3}{4}$ πέν. κατὰ ὑάρδαν. Πόσας λίρας στοιχίζει τοῦτο ἐν ὅλῳ;
(ἀπ. 337 λίρ. 17 σελ. $10\frac{13}{48}$ πέν.)

31) Ὁ ναῦλος ἐμπορεύματός τινος συνεφωνήθη πρὸς 11 σελ. 3 πέν. κατὰ μετρικὸν τόννον. Πόσος θὰ εἶναι ὁ ναῦλος, ἂν τὸ ἐμπόρευμα ζυγίζῃ $312\frac{1}{2}$ τόννους; (ἀπ. 175 λίρ. 15 σελ. $7\frac{1}{2}$ πέν.)

32) Ὡρολόγιόν τι εἰς 8 ὥρ. 25 λ. ὑστερεῖ 18 λ. 20 δ. Πόσον ὑστερεῖ καθ' ὥραν; (ἀπ. 2 λ. $10\frac{70}{101}$)

33) Ἐὰν οἱ 5 στατ. 35 ὀκ. 250 δραμ. ἐμπορεύματός τινος στοιχίζωσι 1458,50 δραχ., πόσον στοιχίζει ἡ ὀκᾶ τούτου; (ἀπ. 5,70 δραχ.)

34) Ἐὰν οἱ 15 στ. Ἀγγλ. 85 λίτρ. στοιχίζουσιν 25 λίρ. 10 σελ. 8 πέν., πόσον στοιχίζει ἡ λίτρα; (ἀπ. 3 $\frac{833}{1765}$ πέν.)

35) Μὲ 5 σελ. 10 πέν. ἀγοράζομεν 1 ὑάρδ. ἔκ τινος ὑφάσματος. Πόσας ὑάρδας ἀγοράζομεν μὲ 18 λίρ. 10 σελ.;

(ἀπ. 63 ὑαρ. 1 πόδ. 3 $\frac{3}{7}$ δακ.)

Προβλήματα διὰ τὴν ἐπανάληψιν ἐν τῇ Γ' τάξει.

1) Πόσαι ὧραι περιλαμβάνονται α') ἀπὸ τῆς 6 ὥρ. 40 λ. π. μ. μέχρι τῆς 11 ὥρ. 35 λ. π. μ. τῆς αὐτῆς ἡμέρας, β') ἀπὸ τῆς 8 ὥρ. 35 λ. 20 δ. π. μ. μέχρι τῆς 8 ὥρ. 40 λ. μ. μ. τῆς αὐτῆς ἡμέρας, γ') ἀπὸ τῆς 1 ὥρας 20 λ. τῆς νυκτὸς μέχρι 5 ὥρ. 45 λ. 20 δ. τῆς πρωΐας;

2) Πόσαι ἡμέραι περιλαμβάνονται α') ἀπὸ 15ης Φεβρουαρίου μέχρι 28ης Μαΐου τοῦ αὐτοῦ ἔτους, β') ἀπὸ 10 Ἀπριλίου μέχρι 3ης Μαΐου τοῦ ἑπομένου ἔτους καὶ γ') ἀπὸ 18ης Ἰουνίου 1905 μέχρι 25ης Φεβρουαρίου 1907;

3) Ἐργάτης τις ἐργοστασίου λαμβάνει 0,80 δραχ, δι' ἑκάστην ὥραν ἐργασίας. Ἐὰν οὗτος ἐργάζηται καθ' ἑκάστην ἀπὸ τῆς 6ης τῆς πρωΐας μέχρι τῆς 11 ὥρας 40 λ. π. μ. καὶ ἀπὸ τῆς 12 ὥρ. 20 λ. μέχρι τῆς 6 ὥρ. 40λ. τῆς ἑσπέρας, πόσας δραχμὰς θὰ λάβῃ εἰς τὸ διάστημα μιᾶς ἑβδομάδος; (ἀπ. εἰς 6 ἡμέρας θὰ λάβῃ δρχ. 57,60).

4) Ἐὰν μία λίρα Ἀγγλίας τιμᾶται 25,15 δρχ., πόσας δραχμὰς κάμνουσι α') 145 λίρ. 17 σελ. 8 πεν. β') 18 λίρ. 7 πέν. γ') 125 λιρ. 14 σελ. δ') 428 λίρ. 4 σελ. 5 πεν.

(ἀπ. α'. 3668,93 δρχ. β'. 453,40 δρχ., γ' 3161,35, δρχ., δ'. 10769,73 δρχ.)

U5) Ἀτμόπλοιόν τι διήνυσεν εἰς 8 ὥρ. 45 λ. ἀπόστασιν 75.8 μίλ., σιδηρόδρομος δὲ διήνυσεν εἰς 6 ὥρ. 20 λ. ἀπόστασιν 145,8 χιλιομ. Κατὰ πόσα χιλιόμετρα καθ' ὥραν εἶναι ταχύτερος ὁ σιδηρόδρομος τοῦ ἀτμοπλοίου; (ἀπ. 6,981 χ.λ.μ.)

6) Ἡ γηγενὴς θερμότης ἀπό τινος βάθους καὶ ἐφεξῆς αὐξάνει κατὰ 1° Κ. ἀνὰ 33 μ. Ἐὰν εἰς βάθος 12 μέτρων ἐπικρατῇ ἔν τινι τόπῳ θερμοκρασία σταθερὰ ἴση πρὸς 16,4° Κ, πόση θερμοκρασία θὰ ἐπικρατῇ εἰς βάθος 175 ὑάρδ. 2 ποδ. ἐν τῷ αὐτῷ τόπῳ: (ἀπ. 20,9° Κ.)

7) Ἀτμόπλοιόν τι διανύει 18 $\frac{3}{4}$ μίλια εἰς 2 ὥρας 15 λ., ἕτερον διανύει 25 $\frac{1}{2}$ εἰς 3 ὥρ. 25 λ. καὶ τρίτον 38 $\frac{1}{8}$ μίλια εἰς 4 ὥρ. 20 λ. α') Ποῖον εἶναι ταχύτερον πάντων καὶ ποῖον βραδύτερον, β') κατὰ πόσα μίλια διαφέρουσιν αἱ ταχύτητες αὐτῶν ἀνὰ δύο θεωρούμεναι; (ἀπ. α'. τὸ ταχύτερον τὸ τρίτον τὸ βραδύτερον τὸ δεύτεροον. β'. μεταξὺ α' καὶ β' $\frac{107}{125}$ μίλια μεταξὺ γ' καὶ α' $\frac{145}{312}$ μίλ., μεταξὺ γ' καὶ β' $\frac{1427}{4264}$ μίλια.)

8) Ἀτμόπλοιον καίει $\frac{3}{4}$ τόν. ἀνθράκων καθ' ὥραν. Ἐὰν διανύῃ 21

μίλ. εἰς 2 ὥρ. 10 λ. καὶ πρόκειται νὰ διανύσῃ ἐν ὅλῳ 298 μίλια περίπου α΄) πόσα μίλια θὰ διανύῃ τὴν ὥραν, β΄) πόσας ὥρας θὰ χρειασθῇ καὶ γ΄) πόσους τόννους ἀνθράκων θὰ καταναλώσῃ ;

$\left(\text{ἀπ. α΄. } 9\frac{9}{13}\text{ μίλ., β΄. 30 ὥρ. 44 λ. περίπου γ΄. 23,059 τόννους}\right)$.

9) Παντοπώλης τις πωλεῖ τὴν μὲν ζάκχαριν πρὸς 1,35 δρχ., τὸν δὲ καφὲ πρὸς 3,60 δρχ. τὴν ὀκᾶν, καὶ εἰσέπραξεν ἐν μιᾷ ἡμέρᾳ 245,80 δρχ. Ἐὰν ἐπώλησεν 108 ὀκ. 300 δρχ. ζακχάρεως, πόσας ὀκάδας καφὲ ἐπώλησεν ; (ἀπ. 27 ὀκ. 200 δράμ.)

10) Μία λυχνία οἰνοπνεύματος καταναλίσκει καθ' ὥραν 23 δράμ. οἰνοπνεύματος καὶ καίει καθ' κάστην ἐπὶ 4 ὥρ. 15 λ. Ἐὰν τὸ οἰνόπνευμα πωλῆται πρὸς 1,10 δρχ., πόση εἶναι ἡ δαπάνη κατὰ μῆνα ; (30 ἡμέρ.) ; (ἀπ. 8,06).

11) Ἔχει τις 152 πρόβατα καὶ ἐξ ἑκάστου λαμβάνει 4 ὀκ. 250 δραμ. ἐρίου καὶ 5 ὀκ. 100 δραμ. τυροῦ· ἐὰν πωλῇ τὰ μὲν ἔρια πρὸς 2,85 δρχ. τὴν ὀκᾶν, τὸν δὲ τυρὸν πρὸς 1,25 δρχ. τὴν ὀκᾶν, ἔτι δὲ καὶ 65 ἀμνοὺς πρὸς 15,60 δρχ. ἕκαστον, α΄) πόσας δραχμὰς εἰσπράττει ἐκ τούτων κατ' ἔτος καὶ β΄) πόσας δραχμὰς κερδίζει, ἐὰν τὰ ἔξοδα τῆς διατροφῆς εἶναι ἐν ὅλῳ 950 δρχ ; (ἀπ. α΄. 4015,05 δρχ., β΄. 3065,05 δρχ.)

12) Τόξον τι 15° 20΄ 40΄΄ περιφερείας τινὸς ἔχει μῆκος 3.75 μ. Πόσον μῆκος ἔχει τόξον 1° τῆς αὐτῆς περιφερείας καὶ πόσον ὁλόκληρος αὕτη ἡ περιφέρεια ; (ἀπ. α΄. 0,244 μ. β΄. 87,979 μ.)

13) Ἐὰν ὁ Ἀγγλ. στατὴρ ἐμπορεύματός τινος τιμᾶται 2 λίρ. 5 σελ. 7 πεν., ποία εἶναι ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ Τουρκικοῦ στατῆρος (στατ. =44 ὀκ.) τοῦ αὐτοῦ πράγματος, μὲ τιμὴν τῆς λίρας 25,20 δρχ ; (ἀπ. 63,57 δρχ. περίπου).

14) Μία λίτρα ἐλαίου ζυγίζει 912 γραμμάρια. Πόσας ὀκάδας ἐλαίου χωρεῖ βαρέλιον χωρητικότητος 915,40 λιτρῶν. (ἀπ. 652 ὀκ. 88 δράμ. περίπου).

15) Βαρέλιόν τι χωρεῖ 538 ὀκ. 300 δραμ. ἐλαίου. Πόσα ἴσα δοχεῖα θὰ χρειασθῶμεν διὰ τὴν μετάγγισιν αὐτοῦ, ἂν ἕκαστον δοχεῖον ἔχῃ χωρητικότητα $2\frac{1}{2}$ λιτρῶν ; (ἀπ. 302 δοχεῖα περίπου).

16) Βαρέλιόν τι περιέχει 5 στ. 25 ὀκ. 300 δραμ. οἰνοπνεύματος. Πόσων λιτρῶν εἶναι τὸ οἰνόπνευμα τοῦτο, γνωστοῦ ὄντος ὅτι 1 λίτρα οἰνοπνεύματος ζυγίζει 850 γραμμάρια ; (ἀπ. 370,07 λίτρ.)

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ζ΄.

ΠΕΡΙ ΛΟΓΩΝ ΚΑΙ ΑΝΑΛΟΓΙΩΝ

216) «Λόγος δύο ὁμοειδῶν ποσῶν εἶναι ὁ ἀριθμὸς ὁ παριστῶν τὸ ἐξαγόμενον τῆς μετρήσεως τοῦ πρώτου ποσοῦ διὰ τοῦ δευτέρου λαμβανομένου ὡς μονάδος».

Κατὰ ταῦτα ὁ λόγος δύο ὁμοειδῶν ποσῶν εἶναι ὁ ἀριθμός, ὅστις γίνεται ἐκ τῆς μον[...] ὃν γίνεται ἐκ τοῦ δευτέρου καὶ τῶν μερῶν αὐτοῦ (§ 185). Π. δ. χ. ὁ λόγος τῆς εὐθείας γραμμῆς Α Β πρὸς τὴν Γ Δ εἶναι ὁ ἀριθμὸς 3· διότι ἡ πρώτη

Α B

Γ Δ γίνεται ἐκ τῆς δευτέρας ἐπαναλαμβανομένης τρίς, καὶ τἀνάπαλιν ὁ λόγος τῆς Γ Δ πρὸς τὴν Α Β εἶναι ὁ ἀριθμὸς $\frac{1}{3}$.

Κατ' ἀναλογίαν ἕπεται καὶ ὁ ἑξῆς ὁρισμός·

217) «Λόγος δύο ἀριθμῶν λέγεται ὁ ἀριθμός, ὅστις γίνεται ἐκ τῆς μονάδος καὶ τῶν μερῶν αὐτῆς, ὅπως ὁ πρῶτος ἀριθμὸς γίνεται ἐκ τοῦ δευτέρου καὶ τῶν μερῶν αὐτοῦ, τουτέστι τὸ πηλίκον τοῦ πρώτου διὰ τοῦ δευτέρου».

Π. δ. χ. Ὁ λόγος τοῦ ἀριθμοῦ 45 πρὸς τὸν 9 εἶναι $\frac{45}{9}$ ἢ $45 : 9$. Ὁμοίως ὁ λόγος τοῦ 5 πρὸς τὸν 8 εἶναι $\frac{5}{8}$ ἢ $5 : 8$. Ὡσαύτως ὁ λόγος τοῦ $\frac{5}{7}$ πρὸς τὸν $\frac{3}{4}$ εἶναι $\frac{\frac{5}{7}}{\frac{3}{4}}$ ἢ $\frac{5}{7} : \frac{3}{4}$, ἤτοι $\frac{20}{21}$. Καὶ ἐν γένει ὁ λόγος ἀριθμοῦ τινος α πρὸς ἄλλον β εἶναι $\frac{\alpha}{\beta}$ ἢ $\alpha : \beta$.

Οἱ δύο ἀριθμοὶ λέγονται *ὅροι τοῦ λόγου*· καὶ ὁ μὲν πρῶτος *ἡγούμενος*, ὁ δὲ δεύτερος *ἑπόμενος*.

218) *Ἀντίστροφοι λόγοι* καλοῦνται ἐκεῖνοι, τῶν ὁποίων τὸ γινόμενον ἰσοῦται πρὸς τὴν 1. Π. δ. χ. $\frac{3}{4}$ καὶ $\frac{4}{3}$ εἶναι ἀντίστροφοι, διότι $\frac{3}{4} \times \frac{4}{3} = 1$.

219) «Ὁ λόγος δύο ὁμοειδῶν ποσῶν ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν ἀριθμῶν, οἵτινες παριστῶσιν αὐτά, ὅταν μετρηθῶσι διὰ μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς μονάδος».

Π. δ. χ. Ὁ λόγος 3 τῆς εὐθείας ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ εἶναι ἴσος πρὸς τὸν λόγον τῶν ἀριθμῶν, οἵτινες παριστῶσι τὰ μήκη αὐτῶν μετρηθεισῶν διὰ τοῦ μέτρου.

Καὶ τῷ ὄντι, ἐὰν τὸ μέτρον χωρῇ εἰς τὴν Γ Δ πέντε φοράς, τότε εἰς τὴν τριπλασίαν εὐθεῖαν Α Β θὰ χωρῇ 3×5, ἤτοι 15 φοράς· ἑπομένως ὁ λόγος τῶν μηκῶν εἶναι ὁ αὐτός, ἤτοι $\frac{15}{5} = 3$.

Σημ. *Ἐπειδὴ ὁ λόγος δύο ἀριθμῶν εἶναι κλάσμα, ὅπερ ἔχει ὡς ἀριθμητὴν μὲν τὸν πρῶτον, ὡς παρονομαστὴν δὲ τὸν δεύτερον, εἶναι φανερὸν ὅτι οὗτος ἔχει πάσας τὰς ἰδιότητας τῶν κλασμάτων.* Οὕτω·

220) «Ὁ λόγος δύο ἀριθμῶν δὲν βλάπτεται, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἢ διαιρέσωμεν ἀμφοτέρους δι' ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ».

Κατὰ ταῦτα ὁ λόγος τοῦ 8 πρὸς τὸν 20 εἶναι ἴσος πρὸς τὸν λόγον τοῦ 16 πρὸς τὸν 40 ἢ τοῦ 4 πρὸς τὸν 10 κ.τ.λ.

221) *Ἀναλογίαι.* «Ἀναλογία καλεῖται ἡ ἰσότης δύο λόγων».

Π. δ. χ. Οἱ δύο ἴσοι λόγοι $\frac{5}{8}$ καὶ $\frac{10}{16}$ ἀποτελοῦσι μίαν ἀναλογίαν, ἥτις σημειοῦται οὕτως $\frac{5}{8} = \frac{10}{16}$ ἢ $5:8=10:16$.

Ἡ γενικὴ μορφὴ μιᾶς ἀναλογίας εἶνε $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ ἢ $\alpha : \beta = \gamma : \delta$.

Οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ οἱ ἀποτελοῦντες τὴν ἀναλογίαν καλοῦνται *ὅροι* αὐτῆς. Καὶ ὁ μὲν πρῶτος καὶ τελευταῖος (α καὶ δ) καλοῦνται *ἄκροι* οἱ δὲ λοιποὶ (β καὶ γ) *μέσοι ὅροι* τῆς ἀναλογίας.

Αἱ ἀναλογίαι ἔχουσι πολλὰς ἰδιότητας, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ σπουδαιοτέρα εἶναι ἡ ἑξῆς·

222) *Ἰδιότης.* — «Εἰς πᾶσαν ἀναλογίαν τὸ γινόμενον τῶν δύο ἄκρων ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῶν δύο μέσων».

Ἔστω π. δ. χ. ἡ ἀναλογία $\frac{3}{5} = \frac{12}{20}$.

Δυνάμεθα προφανῶς, χωρὶς νὰ μεταβληθῇ ἡ ἀξία τῶν λόγων, νὰ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς δύο ὅρους τοῦ πρώτου λόγου ἐπὶ 20, τοῦ δὲ δευτέρου ἐπὶ 5 (§ 220)· οὕτως ἡ ἀναλογία γίνεται $\frac{3\times20}{5\times20} = \frac{12\times5}{20\times5}$.

Ἐπειδὴ οἱ ἑπόμενοι ὅροι τῶν δύο ἴσων λόγων εἶναι ἴσοι (5×20), ἕπεται ὅτι καὶ οἱ ἡγούμενοι ὅροι αὐτῶν θὰ εἶναι ἴσοι ἤτοι $3\times20=12\times5$.

Ἡ ἰσότης δὲ αὕτη δεικνύει τὴν ἀλήθειαν τῆς προκειμένης ἰδιότητος.

Κατὰ ταῦτα, ἐὰν ἔχωμεν τὴν ἀναλογίαν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, θὰ εἶναι $\alpha\times\delta=\beta\times\gamma$.

Ἐπὶ τῆς ἰδιότητος ταύτης στηριζόμενοι δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν τὸν τέταρτον ὅρον μιᾶς ἀναλογίας δοθέντων τῶν τριῶν ἄλλων.

Π. δ. χ. εὑρεῖν ἕνα τῶν ἄκρων ὅρων ἀναλογίας, τῆς ὁποίας οἱ τρεῖς ἄλλοι εἶναι α, β, γ.

Ἔστω (χ) ὁ τέταρτος ὅρος τῆς ἀναλογίας, ἤτοι $\alpha : \beta = \gamma : \chi$.

Κατὰ τὴν προηγουμένην ἰδιότητα ἔχομεν $\chi.\ \alpha = \beta.\ \gamma$.

καὶ $\chi = \frac{\beta.\ \gamma}{\alpha}$

Ὅθεν ἕπεται ὁ ἑξῆς κανών·

223) «Πρὸς εὕρεσιν ἑνὸς ἄκρου ὅρου ἀναλογίας, τῆς ὁποίας εἶναι δεδομένοι οἱ τρεῖς ἄλλοι ὅροι, πολλαπλασιάζομεν τοὺς δύο δοθέντας μέσους καὶ διαιροῦμεν διὰ τοῦ γνωστοῦ ἄκρου».

Δυνατὸν νὰ ζητῆται εἷς τῶν μέσων ὅρων ἤτοι νὰ ἔχωμεν τὴν ἀναλογίαν $\alpha : \beta = \chi : \gamma$.

Ὅθεν $\beta.\ \chi = \alpha.\ \gamma$ καὶ $\chi = \frac{\alpha.\ \gamma}{\beta}$

ἐξ οὗ συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα·

224) «Διὰ νὰ εὕρωμεν ἕνα τῶν μέσων ὅρων ἀναλογίας, τῆς ὁποίας εἶναι δεδομένοι οἱ τρεῖς ἄλλοι ὅροι, πολλαπλασιάζομεν τοὺς δύο δοθέντας ἄκρους καὶ διαιροῦμεν διὰ τοῦ γνωστοῦ μέσου».

ΠΕΡΙ ΜΕΘΟΔΩΝ

Ποσὰ εὐθέως καὶ ἀντιστρόφως ἀνάλογα.

Πολλάκις τὰ διάφορα ποσὰ συνδέονται πρὸς ἄλληλα διὰ διαφόρων σχέσεων, οὕτως ὥστε ἡ μεταβολὴ τοῦ ἑνὸς νὰ ἐπιφέρῃ μεταβολὴν εἰς ἓν ἢ περισσότερα ἄλλα.

Π. δ. χ. Τὸ ἀνάστημα τοῦ παιδὸς ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς ἡλικίας, τὸ ποσὸν τῶν δραχμῶν διὰ τῶν ὁποίων ἀγοράζομεν ὕφασμά τι ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πήχεων τούτου κ.τλ. Ἐκ τῶν διαφόρων τούτων σχέσεων αἱ ἁπλούστεραι εἶναι αἱ δύο ἑπόμεναι.

225) «Δύο ποσὰ καλοῦνται εὐθέως ἀνάλογα, ὅταν ἔχωσι τοιαύτην σχέσιν πρὸς ἄλληλα, ὥστε πολλαπλασιαζομένου ἢ διαιρουμένου τοῦ ἑνὸς μὲ ἀριθμόν τινα, νὰ πολλαπλασιάζηται ἢ διαιρῆται καὶ τὸ ἕτερον μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν».

Π. δ. χ. Ἐὰν αἱ 8 ὀκάδες ἐμπορεύματός τινος τιμῶνται 12 δραχμ., διπλάσιαι αὐτοῦ ὀκάδες, ἤτοι 16 θὰ τιμῶνται διπλάσια ἤτοι 24 δραχμάς, καὶ τὸ $\frac{1}{2}$ τῶν 8 ὀκάδων ἤτοι 4 ὀκ. τιμῶνται τὸ ἥμισυ, ἤτοι 6 δραχμὰς κ. ο. κ.

Ὅθεν τὸ ποσὸν τοῦ ἐμπορεύματος καὶ ἡ ὁλικὴ τιμὴ αὐτοῦ εἶναι ποσὰ εὐθέως ἀνάλογα. Εἶναι δὲ φανερὸν ὅτι ὃν λόγον ἔχουσιν αἱ 8 ὀκ. πρὸς 16 ὀκ., τὸν αὐτὸν λόγον ἔχουσι καὶ αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ 12 δραχ. πρὸς 24 δραχ. τοῦ ἄλλου ποσοῦ. Τὸ αὐτὸ δὲ συμβαίνει εἰς πάντα τὰ ποσὰ ἅτινα εἶναι εὐθέως ἀνάλογα.

Ὅθεν συνάγομεν ὅτι:

«Εἰς τὰ εὐθέως ἀνάλογα ποσά, ὃν λόγον ἔχουσιν δύο τυχοῦσαι τιμαὶ τοῦ ἑνὸς ποσοῦ, τὸν αὐτὸν λόγον ἔχουσιν αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ τοῦ ἄλλου ποσοῦ».

Ὁμοίως τὸ ποσὸν τοῦ ὕδατος ὅπερ παρέχει κρήνη τις καὶ ὁ χρόνος καθ' ὃν εἶναι ἀνοικτὴ ἡ κρήνη εἶναι ποσὰ εὐθέως ἀνάλογα κ.τ.λ.

226) «Ποσὰ ἀντιστρόφως ἀνάλογα καλοῦνται ἐκεῖνα, τὰ ὁποῖα συνδέονται οὕτως ὥστε διπλασιαζομένου, τριπλασιαζομένου κ.τ.λ. καὶ ἐν γένει πολλαπλασιαζομένου τοῦ ἑνὸς ἐπί τινα ἀριθμόν, τὸ ἕτερον ὑποδιπλασιάζεται, ὑποτριπλασιάζεται καὶ ἐν γένει διαιρεῖται διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ καὶ τἀνάπαλιν».

Τὸ ποσὸν τῶν ἐργατῶν καὶ τὸ ποσὸν τῶν ἡμερῶν, κατὰ τὰς ὁποίας οἱ ἐργάται τελειώνουσιν ἔργον τι, εἶναι ποσὰ ἀντιστρόφως ἀνάλογα, διότι ἂν οἱ 10 ἐργάται τελειώνωσιν ἔργον τι εἰς 30 ἡμέρας, οἱ 20 ἐργάται θὰ τελειώσωσι τὸ αὐτὸ ἔργον εἰς τὸ ἥμισυ τῶν ἡμερῶν ἤτοι εἰς 15 ἡμέρας καὶ οἱ 5 ἐργάται θὰ τελειώσωσι τὸ αὐτὸ ἔργον εἰς διπλασίας ἡμέρας ἤτοι εἰς 60 ἡμέρας.

Εἶναι φανερὸν ὅτι ὃν λόγον ἔχουσιν αἱ δύο τιμαὶ 10 ἐργ. πρὸς 20 ἐργ. τοῦ ἑνὸς ποσοῦ, τὸν ἀντίστροφον λόγον ἔχουσιν αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ 30 ἡμ. πρὸς 15 ἡμ. τοῦ ἄλλου ποσοῦ. Τὸ αὐτὸ δὲ συμβαίνει εἰς πάντα τὰ ποσὰ ἅτινα εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα. Ὅθεν συνάγομεν ὅτι:

«Εἰς τὰ ἀντιστρόφως ἀνάλογα ποσά, ὃν λόγον ἔχουσι δύο τυχοῦσα τιμαὶ τοῦ ἑνὸς ποσοῦ, τὸν ἀντίστρσφον λόγον ἔχουσιν αἱ ἀντίστοιχοι τι μαὶ τοῦ ἄλλου ποσοῦ».

Παρατ.—*Ὅταν τὰ συνδεόμενα ποσὰ εἶναι περισσότερα τῶν δύο τότε πάλιν συγκρίνομεν ταῦτα ἀνὰ δύο ὡς ἑξῆς:*

Ἂς ὑποθέσωμεν π. δ. χ. ὅτι 4 ὑφανταὶ ὑφαίνουσιν εἰς 6 ἡμέρας 45 μέτρα ὑφάσματός τινος. Ἐνταῦθα ἔχομεν τρία ποσά, ἤτοι τὸ πλῆθος τῶν ὑφαντῶν, τὸν ἀριθμὸν τῶν ἡμερῶν καὶ τὸ μῆκος τοῦ ὑφάσματος. Ἐὰν θέλωμεν νὰ συγκρίνωμεν τὰ δύο πρῶτα ποσὰ πρὸς ἄλληλα, σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς: ἀφοῦ οἱ 4 ὑφανταὶ εἰς 6 ἡμ. ὑφαίνουσι 45 μέτρα ὑφάσματος, διπλάσιοι (ἤτοι 8) ὑφανταὶ θὰ ὑφάνωσι τὸ αὐτὸ μῆκος ὑφάσματος (ἤτοι 45 μέτ.) εἰς δύο φορὰς ὀλιγώτερον χρόνον (ἤτοι εἰς 3 ἡμέρας). Ὅθεν τὸ πλῆθος τῶν ὑφαντῶν καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα. Ὁμοίως ἂν θέλωμεν νὰ συγκρίνωμεν τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τρίτον ποσόν, σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς: ἀφοῦ οἱ 4 ὑφανταὶ εἰς 6 ἡμέρας ὑφαίνουσι 45 μ. ὑφάσματος διπλάσιοι (ἤτοι 8 ὑφαν.) εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον (ἤτοι 6 ἡμ.) θὰ ὑφάνωσι διπλάσιον μῆκος (ἤτοι 90 μ. τοῦ ὑφάσμ.). Ὅθεν τὸ πλῆθος τῶν ὑφαντῶν καὶ τὸ μῆκος τοῦ ὑφάσματος εἶναι εὐθέως ἀνάλογα ποσὰ κ. ο. κ.

Παρατηροῦμεν λοιπὸν ὅτι εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην πρέπει νὰ νοοῦμεν συμμεταβαλλόμενα μόνον τὰ δύο συγκρινόμενα ποσά, τὰ δὲ λοιπὰ ὡς ἀμετάβλητα.

Ἁπλῆ μέθοδος τῶν τριῶν.

Μέθοδος καλεῖται γενικός τις τρόπος καθ' ὃν λύονται τὰ προβλήματα εἴδους τινός. Ἡ ἁπλουστέρα ἐξ ὅλων τῶν μεθόδων εἰς τὴν ὁποίαν στηρίζονται καὶ πᾶσαι αἱ λοιπαὶ εἶναι ἡ *ἁπλῆ μέθοδος τῶν τριῶν.*

Εἰς τὴν μέθοδον ταύτην ὑπάγονται προβλήματα, οἷα τὰ ἑξῆς·

1) Αἱ 5 ὀκάδες πράγματός τινός τιμῶνται 28 δρχ. Πόσον τιμῶνται αἱ 8 ὀκ. αὐτοῦ;

Ἐν τῷ προβλήματι τούτῳ γίνεται λόγος περὶ δύο ποσῶν εὐθέως ἀναλόγων, τοῦ βάρους πράγματός τινος καὶ τῆς ἀξίας αὐτοῦ. Τῶν ποσῶν τούτων γνωρίζομεν δύο ἀστιστοιχούσας τιμὰς (ἤτοι 5 ὀκ. τιμῶνται 20 δρχ.) ἐπίσης γνωρίζομεν καὶ μίαν ἄλλην τιμὴν τοῦ πρώτου ποσοῦ (ἤτοι 8 ὀκ.) καὶ ζητοῦμεν τὴν εἰς αὐτὴν ἀντίστοιχον τιμὴν τοῦ ἑτέρου ποσοῦ (ἤτοι πόσας δραχμὰς στοιχίζουσιν αἱ 8 ὀκ.).

2) 16 ἐργάται ἐκτελοῦσι ἔργον τι εἰς 27 ἡμ., 12 ἐργάται εἰς πόσας ἡμέρας θὰ ἐκτελέσωσι τὸ αὐτὸ ἔργον;

Τὸ πρόβλημα τοῦτο προφανῶς εἶναι ὅμοιον μὲ τὸ προηγούμενον μὲ μόνην τὴν διαφοράν, ὅτι τὰ δύο ποσὰ περὶ ὧν γίνεται λόγος (ἤτοι ἐργάται καὶ χρόνος ἐκτελέσεως τῆς ἐργασίας) εἶναι ποσὰ ἀντιστρόφως ἀνάλογα.

227) Κατὰ ταῦτα.. «Εἰς τὴν ἁπλῆν μέθοδον τῶν τριῶν ὑπάγονται τὰ προβλήματα ἐκεῖνα, εἰς τὰ ὁποῖα δίδονται αἱ ἀντιστοιχοῦσαι τιμαὶ δύο ποσῶν εὐθέως ἢ ἀντιστρόφως ἀναλόγων καὶ ζητεῖται εἰς νέαν δεδομένην τιμὴν τοῦ ἑνὸς ποσοῦ ποία τιμὴ τοῦ ἑτέρου ἀντιστοιχεῖ».

Ἡ μέθοδος αὕτη καλεῖται τῶν τριῶν διότι ἐκ τριῶν ἀριθμῶν εὑρίσκεται τὸ ζητούμενον.

Ἂς ἴδωμεν νῦν πῶς γίνεται ἡ λύσις τῶν τοιούτων προβλημάτων καὶ ἂς θεωρήσωμεν πάλιν τὰ δύο ἀνωτέρω προβλήματα.

Λύσις τοῦ 1ου προβλήματος. Ἀφοῦ αἱ 5 ὀκ. τιμῶνται 28 δρχ. ἡ ὀκᾶ θὰ τιμᾶται $\frac{28}{5}$ δρχ. ἐπομένως αἱ 8 ὀκ. θὰ τιμῶνται $\frac{28\times8}{5}$ δραχ.

Εὑρέθη τὸ ζητούμενον διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα. Δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τοῦτο καὶ διὰ τῆς ἀναλογίας ὡς ἑξῆς.—Ἐπειδὴ τὰ δύο ποσὰ τοῦ προβλήματος εἶναι εὐθέως ἀνάλογα συμπεραίνομεν ὅτι ὁ λόγος $\frac{5}{8}$, τῶν δύο δεδομένων τιμῶν τοῦ πρώτου ποσοῦ εἶναι ἴσος πρὸς τὸν λόγον τῆς δεδομένης τιμῆς 28 δρχ. τοῦ ἑτέρου ποσοῦ, πρὸς τὴν ζητουμένην τιμὴν αὐτοῦ, ἣν παριστῶμεν διὰ τοῦ χ. ἤτοι $\frac{5}{8}=\frac{20}{\chi}$ ἢ $5:8=20:\chi$ Ὅθεν (§ 223) $\chi=\frac{20{,}8}{5}$. Τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο δύναται νὰ εὑρεθῇ πρακτικῶς ὡς ἑξῆς.

Γράφομεν τὰ δεδομένα καὶ τὸ ζητούμενον χ οὕτως ὥστε αἱ μὲν ἀντίστοιχοι τιμαὶ τῶν δύο ποσῶν νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν ὁριζοντίαν γραμμήν, αἱ δὲ δύο τιμαὶ ἑκατέρου τῶν ποσῶν νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν στήλην χωριζόμεναι δι' ὁριζοντίας γραμμῆς, ὥστε νὰ σχηματίζεται κλάσμα ἢ λόγος τῶν δύο τιμῶν ἑκατέρου τῶν ποσῶν $\frac{5\text{ ὀκ.}}{8\text{ ὀκ.}}\ \frac{28\text{ δρχ.}}{\chi}$.

Ἡ τοιαύτη διάταξις καλεῖται *κατάστρωσις τοῦ προβλήματος*.

Μετὰ ταῦτα πολλαπλασιάζομεν τὸν ἄνωθεν τοῦ χ εὑρισκόμενον ἀριθμὸν ἐπὶ τὸν λόγον $\left(\frac{5}{8}\right)$ τῶν δύο ἄλλων ἀριθμῶν ἀντεστραμμένον.

ἤτοι $\chi=28\times\frac{8}{5}=44\ \frac{4}{5}$ δρχ.

Λύσις τοῦ 2ου προβλήματος. Ἀφοῦ οἱ 16 ἐργάται ἐκτελοῦσι τὸ ἔργον εἰς 27 ἡμέρ. ὁ 1 ἐργ. θὰ ἐκτελέσῃ τὸ αὐτὸ εἰς 27×16 ἐπομένως οἱ 12 ἐργάται θὰ ἐκτελέσωσιν αὐτὸ εἰς $\frac{27\times16}{12}$.

Εὑρέθη τὸ ζητούμενον διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα. Δυνάμεθα ὅμως νὰ εὕρωμεν τοῦτο καὶ διὰ ἀναλογίας ὡς ἑξῆς.

Ἐπειδὴ τὰ δύο ποσὰ τοῦ προβλήματος εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα, συμπεραίνομεν ὅτι ὁ λόγος $\left(\frac{16}{12}\right)$ τῶν δύο τιμῶν τοῦ ἑνὸς ποσοῦ θὰ εἶναι ἴσον μὲ τὸν ἀντίστροφον λόγον τῆς δεδομένης τιμῆς (27 ἡμέρ.) τοῦ ἑτέρου ποσοῦ πρὸς τὴν ζητουμένην τιμὴν αὐτοῦ, ἣν παριστῶμεν διὰ τοῦ χ ἤτοι $\frac{16}{12}=\frac{\chi}{27}$ ἢ $16:12=\chi:27$ ἐξ ἧς ἕπεται (§ 224) καὶ $\chi=\frac{16.27}{12}$.

Εἰς τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον φθάνομεν πρακτικῶς ὡς ἑξῆς.

Καταστρώνομεν τὰ δεδομένα καὶ τὸ ζητούμενον τοῦ προβλήματος ὡς καὶ εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα ἤτοι ὡς ἑξῆς : $\frac{16 \text{ ἐρ.}}{12 \text{ ἐρ.}}$ $\frac{27 \text{ ἡμ.}}{}$

Μετὰ ταῦτα πολλαπλασιάζομεν τὸν ἄνωθεν τοῦ (χ) ἀριθμὸν ἐπὶ τὸν λόγον τῶν δύο ἄλλων ἀριθμῶν ὡς ἔχει ἤτοι : $\chi=27\times\frac{16}{12}=36$ ἡμ.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὸν ἑξῆς πρακτικὸν κανόνα.

228) «Μετὰ τὴν κατάστρωσιν τοῦ προβλήματος διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ἄγνωστον, πολλαπλασιάζομεν τὸν ἄνωθεν τοῦ ἀγνώστου ἀριθμὸν ἐπὶ τὸν λόγον τῶν δύο ἄλλων ἀριθμῶν, ἀντεστραμμένον μὲν ἐὰν τὰ ποσὰ εἶναι εὐθέως ἀνάλογα, ὅπως ἔχει δὲ ἂν τὰ ποσὰ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα».

Παραδείγματα.

1) Οἱ 3 πηχ. ὑφάσματός τινος τιμῶνται 5,60 δρχ. πόσον τιμῶνται τὰ 6 ῥούπια τοῦ αὐτοῦ ὑφάσματος ;

Τρέπομεν κατ' ἀρχὰς τοὺς τρεῖς πήχεις εἰς 24 ῥούπια καὶ εἶτα καταστρώνομεν τὸ πρόβλημα. $\frac{24 \text{ ρ.}}{6}$ $\frac{5,60 \text{ δρχ.}}{\chi}$ $\chi=5,60\times\frac{6}{26}=1,40$δρ.

2) Ὁ πῆχυς ὑφάσματός τινος τιμᾶται 3,80 πόσον τιμῶνται 2 πήχ. καὶ 3 ῥούπ. τοῦ αὐτοῦ ὑφάσματος ; ὁ 1 πηχ.=8 ῥουπ. καὶ οἱ 2 πήχ. καὶ 3 ῥουπ.=19 ῥουπ. ὅθεν ἕπεται $\frac{8 \text{ ρ.}}{19 \text{ ρ.}}$ $\frac{3,80 \text{ δρχ.}}{\chi}$ $\chi=3,80\times\frac{19}{8}$ $=9,025$ δρχ.

3) Τὰ 8,250 χιλιογρ. ἐμπορεύματός τινος ἐστοίχισαν 25,60 δραχ. πόσας δραχμὰς στοιχίζει ἡ ὀκᾶ ; Ἐπειδὴ ἡ 1 ὀκ.=1280 γραμ. καὶ 8,250 χιλιογ.=8250 γραμ. θὰ ἔχωμεν $\frac{8250 \text{ γραμ.}}{1280 \text{ γραμ.}}$ $\frac{25,60 \text{ δρχ.}}{\chi}$

$\chi=25,60\times\frac{1280}{8250}=3,97$ δραχμάς.

4) Μὲ 8 σελ. 10 πεν. ἀγοράζομεν 1 ὑάρ. ὑφάσματός τινος. Πόσας ὑάρδας θὰ ἀγοράσωμεν μὲ 5 λίρ. 15 σελ. ;

Ἐπειδὴ 8 σελ. 10 πέν.=0,44 λίρ. καὶ 5 λίρ. 15 σελ.=5,75 λίρ. θὰ ἔχωμεν $\frac{0,44 \text{ λίρ.}}{5,75 \text{ λίρ.}}$ $\frac{1 \text{ ὑαρδ.}}{\chi.}$ $\chi=1$ ὑαρδ. $\frac{5,75}{0,44}=\frac{575}{44}=13\frac{3}{44}$ ὑάρ.

Καὶ γενικῶς πάντα τὰ προβλήματα πολλαπλασιασμοῦ καὶ διαιρέσεως τῶν συμμιγῶν ἀριθμῶν δύνανται νὰ λυθῶσι διὰ τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν.

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Τὰ 250 δράμ. μετάξης τιμῶνται 16,50 δραχ. Πόσον τιμῶνται αἱ 2 ὀκ. καὶ 80 δράμια ; (ἀπ. 58,08 δραχ.)

2) Πόσα φράγκα κάμνουσι 632 Ὁλλανδικὰ φλωρίνια, ὅταν 189 φλωρίνια κάμνουσι 400 φράγκα ; (ἀπ. 1337,56 φράγκα).

3) Πόσα μάρκα τιμῶνται 278 χιλιόγραμμα μολύβδου ἐν Ἀμβούργῳ πρὸς 12,70 μάρκα τὰ 50 χιλιόγραμμα ; (ἀπ. 70,412 μάρκα).

2) Μόσα μάρκα τιμῶνται 172 κιβώτια σταφίδος ἐν Γερμανίᾳ πρὸς 144 μάρκα τὰ 44 κιβώτια ; (ἀπ. 562,90 μάρκα).

5) Ἐπὶ 997 ὀκ. καὶ 200 δραμ. ἐμπορεύματός τινος ὁ τελωνιακὸς δασμὸς ἀνέρχεται εἰς 102 δρχ. Εἰς πόσον θ' ἀνέλθῃ οὗτος ἐπὶ 1928 ὀκ.;

(ἀπ. 197,15 δραχμάς).

6) Πόσος εἶναι ὁ ναῦλος ἐπὶ 2451 ἑκατολίτρων σίτου πρὸς 42,50 κορώνας αὐστριακὰς τὰ 50 ἑκατόλιτρα ; (ἀπ. 2083,35 κορώνας).

7) 35 γρόσια Τουρκίας μὲ πόσας δραχμὰς ἰσοδυναμοῦσιν, ὅταν ἡ λίρα τιμωμένη 22,90 δρχ. λογαριάζηται πρὸς 108 γρόσια ; (ἀπ. 7,42 δρχ).

8) Πόσα γρόσια κάμνουσι 8,50 δρχ., ὅταν ἡ λίρα τιμωμένη 22,75 δρχ. λογαριάζηται πρὸς 103 γρόσια καὶ πόσα ὅταν ἡ λίρα λογαριάζηται πρὸς 100 γρόσια ; (ἀπ. α. 38 δρ. 19 παρ. β. 37 γρ. 14 παρ.)

27 9) Κωδωνοστάσιόν τι ῥίπτει σκιὰν 18,45 μέτρα. Ῥάβδος τις κατακορύφως τοποθετουμένη καὶ μήκους 1,15 μ. ῥίπτει κατὰ τὴν αὐτὴν στιγμὴν σκιὰν 1,45. Πόσον εἶναι τὸ ὕψος τοῦ κωδωνοστασίου ;

(ἀπὸ 14,432 μετρ.)

28 10) Ἐργάτης τις ἐργαζόμενος 8 ὥρ. καθ' ἡμέραν τελειώνει ἔργον τι εἰς 18 ἡμέρας. Ἐὰν ἐργάζηται 5 ὥρ. καὶ 20 λ. καθ' ἡμέραν, εἰς πόσας ἡμέρας θὰ τελειώσῃ τὸ αὐτὸ ἔργον ; (ἀπ. 27 ἡμ.)

11) 10 βήματα ὁδοιπόρου κάμνουσι $7\frac{1}{2}$ μέτρα. Πόσα βήματα θὰ κάμῃ οὗτος διὰ νὰ διατρέξῃ διάστημα 8,250 χιλιομ.

(ἀπ. 11000 βήμ.)

29 12) Ἐξ 60 ὀκ. ἐλαιῶν ἐξάγομεν 11 ὀκ. 300 δραμ. ἐλαίου, ἐκ 1540 ὀκ. ἐλαιῶν πόσας ὀκάδας ἐλαίου θὰ ἐξαγάγωμεν ;

$\left(\text{ἀπ. 301 ὀκ. } 223\frac{1}{3}\text{ δραμ.}\right)$.

13) Τὰ $\frac{7}{8}$ τοῦ πήχ. τιμῶνται 5,45 δρχ. Πόσον τιμῶνται οἱ 12 πήχεις ; (ἀπ. 74, 74 δραχ.)

14) Ταξειδιώτης τις ἐπλήρωσε δι' εἰσιτήριον βας θέσεως καὶ δι' ἀπόστασιν 175 χιλιομ. δραχμὰς 18,25. Πόσον θὰ ἐπλήρωνε δι' ἀπόστασιν 185 χιλιομ. ; (ἀπ. 19,30 δρχ.)

15) 112 ὑαρδ. καὶ 2 πόδ. ὑφάσματός τινος τιμῶνται 18 λίρ. καὶ 12 σελ. Πόσον τιμῶνται 87 ὑαρδ. 1 ποὺς καὶ 6 δάκτ. τοῦ αὐτοῦ ὑφάσματος ; $\left(\text{ἀπ. 14 λίρ. 8 σελ. 10 πεν. } \frac{146}{169}\right)$.

16) Διὰ τὴν ἐπίστρωσιν τοῦ πατώματος μιᾶς αἰθούσης ἐχρησιμοποιήθησαν 5 τάπητες πλάτους 1,75 μ. Πόσοι τάπητες πλάτους 1,25 μ. χρειάζονται πρὸς τοῦτο ; $\left(\text{ἀπ. } 5\frac{3}{5}\text{ τάπητες}\right)$.

17) Ἐὰν ἐργάτης τις ἐξοδεύῃ 2,45 δρχμ. καθ᾿ ἑκάστην πρὸς συντήρησιν τῆς οἰκογενείας του, ἐπαρκεῖ εἰς αὐτὸν ποσόν τι δρχ. ἐπὶ 25 ἡμέρας. Ἐὰν ὅμως ἐξοδεύῃ 3,20 δρχ. καθ᾿ ἡμέραν, διὰ πόσας ἡμέρας θὰ ἐπαρκέσῃ τὸ αὐτὸ χρηματικὸν ποσόν; $\left(\text{ἀπ. } 19 \frac{9}{64} \text{ ἡμ.}\right)$.

18) 2 ὀκ. καὶ 300 δραμ. κὸκ ἔχουσι θερμαντικὴν δύναμιν ὅσην 6 ὀκ. ξυλάνθρακος. Μὲ πόσας ὀκάδας τοῦ τελευταίου ἰσοδυναμοῦσι 15 στατ. καὶ 10 ὀκ. κόκ; $\left(\text{ἀπ. } 1461 \frac{9}{11} \text{ ὀκ.}\right)$.

19) Ὑφαντὴς ὑφαίνει 50 πήχεις ὑφάσματος τοῦ ὁποίου τὸ πλάτος εἶναι $\frac{7}{8}$ τοῦ πήχεως. Πόσον θὰ ὑφάνῃ εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον, ὅταν τὸ πλάτος εἶναι $\frac{5}{8}$; $\left(70 \text{ πήχ.}\right)$.

20) Ἐὰν διά τινα ἐνδυμασίαν χρειάζωνται 7 πήχ. καὶ 5 ῥούπ. ὑφάσματός τινος πλάτους 7 ῥουπ. Πόσοι πήχεις θὰ χρειασθῶσιν ἐξ ἄλλου ὑφάσματος ἔχοντος πλάτος μεγαλύτερον κατα $1 \frac{1}{2}$ ῥουπ.;

$\left(\text{ἀπ. } 6 \text{ πηχ. } 2 \frac{4}{17} \text{ ῥουπ.}\right)$.

21) Μὲ ποσόν τι σύρματος δύναται νὰ πλεχθῇ κιγκλήδωμα μήκους 40 μέτρων καὶ ὕψους $\frac{3}{4}$ τοῦ μέτρου. Ἐὰν τὸ ὕψος γίνῃ $1 \frac{1}{4}$ τοῦ μέτρου, διὰ πόσον μῆκος τοῦ κικλιδώματος θὰ ἐπαρκέσῃ τὸ ποσὸν τοῦτο τοῦ σύρματος; (ἀπ. 24 μετρ.)

22) Διὰ τὴν πλακόστρωσιν μιᾶς αὐλῆς χρειάζονται 85 πλάκες, ἐξ ὧν ἑκάστη ἔχει ἐπιφάνειαν 0,75 □ μ. Πόσαι πλάκες ἐπιφανείας $0,66 \frac{2}{3}$ □ μ. ἀπαιτοῦνται διὰ τὴν αὐτὴν αὐλήν; $\left(\text{ἀπόκ. } 95 \frac{5}{8} \text{ πλάκες.}\right)$

23) Μὲ ῥάκη βάρους 55 ὀκ. κατεσκευάζομεν 40 ὀκ. χάρτου ἐπιστολῶν. Πόσαι ὀκάδες ῥακῶν ἀπαιτοῦνται διὰ τὴν κατασκευὴν 34 δεσμίδων χάρτου τοιούτου, ἐὰν ἑκάστη δεσμὶς ζυγίζῃ 180 δράμια;

(ἀπόκ. 21 ὀκ. 15 δραμ.)

24) 15 ἐργάται δύνανται νὰ ἐκτελέσωσιν ἔργον τι εἰς 18 ἡμ. Ἀφοῦ ὅμως εἰργάσθησαν ἐπὶ 4 ἡμέρας προσέλαβον καὶ 7 ἐργ. ἀκόμη. Εἰς πόσας ἡμέρας θὰ ἀποπερατώσωσιν ἤδη τὸ ἔργον; $\left(\text{ἀπ. } 9 \frac{6}{11} \text{ ἡμ.}\right)$

25) Ἀγρός τις στρεμμάτων 245,8 ἐπωλήθη ἀντὶ 8758,60 δραχ., δεύτερος δὲ ἀγρὸς στρεμμάτων 183,45 ἀντὶ 5840,35. Ποῖος ἐκ τῶν δύο εἶναι ἀκριβώτερος; (ἀπ. ὁ α΄.)

26) Δύο δοχεῖα οἴνου περιέχουσι, τὸ μὲν α΄ 227,40 λίτρας οἴνου, τὸ δὲ 6΄ 1,785 ἑκατόλιτρα τοῦ αὐτοῦ οἴνου. Ἐὰν τὸ πρῶτον ἐπωλήθη ἀντὶ 135,40 δραχ. πόσον θὰ πωληθῇ τὸ δεύτερον; (ἀπ. 106,28 δραχ.)

27) Εἴς τι φρούριον ὑπάρχουσι 829 ἄνδρες καὶ ἔχουσι τροφὰς διὰ

5 $\frac{1}{2}$ μῆνας. Πόσον θὰ ἐπαρκέσωσιν αἱ αὐταὶ τροφαί, ἐὰν ἔλθωσιν ἀκόμη 175 ἄνδρες. (ἀπ. 4 μην. 16 ἡμ. περίπου)

Σύνθετος μέθοδος τῶν τριῶν.

229) Εἰς τὴν *σύνθετον μέθοδον τῶν τριῶν* ὑπάγονται τὰ προβλήματα ἐκεῖνα εἰς τὰ ὁποῖα, δίδεται ἡ τιμὴ ἑνὸς ποσοῦ ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς δεδομένας τιμὰς δύο ἢ περισσοτέρων ἄλλων ποσῶν εὐθέως ἢ ἀντιστρόφως ἀναλόγων πρὸς αὐτό, καὶ ζητεῖται ἡ νέα τιμὴ τοῦ ποσοῦ τούτου ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς ἄλλας δεδομένας τιμὰς τῶν ἄλλων ποσῶν.

Ὀνομάζεται δὲ σύνθετος διότι πᾶν πρόβλημα τῆς μεθόδου ταύτης δύναται νὰ ἀναλυθῇ εἰς προβλήματα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν, ὡς φαίνεται ἐκ τῆς λύσεως τοῦ ἑπομένου προβλήματος.

1) Ἐργάτης ἐργαζόμενος 8 ὥρ. καθ' ἡμέραν ἐπὶ 20 ἡμ. σκάπτει 12 στρέμματα ἀμπέλου τινος· ὁ αὐτὸς ἐργάτης ἐργαζόμενος 10 ὥρας καθ' ἡμέραν εἰς πόσας ἡμέρας δύναται νὰ σκάψῃ 18 στρέμματα τῆς αὐτῆς ἀμπέλου ;

Ἐν τῷ προβλήματι τούτῳ ὡς βλέπομεν, γίνεται λόγος περὶ τριῶν ποσῶν, τῶν ὡρῶν, ἡμερῶν καὶ στρεμμάτων. Δίδεται ἡ τιμὴ 20 ἡμ. τοῦ δευτέρου ποσοῦ ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὰς τιμὰς 8 ὥρ. καὶ 12 στρέμ. τῶν δύο ἄλλων ποσῶν· ζητεῖται δὲ νὰ εὕρωμεν τὴν νέαν τιμὴν τοῦ ποσοῦ τῶν ἡμερῶν, ἥτις ἀντιστοιχεῖ εἰς τὰς νέας τιμὰς 10 ὥρ. καὶ 18 στρεμ. τῶν δύο ἄλλων ποσῶν.

Πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος τούτου καταστρώνομεν ἐν πρώτοις τὰς δεδομένας τιμὰς τῶν ποσῶν καὶ τὴν ἄγνωστον τιμήν, ἣν παριστῶμεν διὰ τοῦ χ ὡς ἑξῆς:

$$\frac{8 \text{ ὥρ.}}{10 \text{ ὥρ.}}, \quad \frac{20 \text{ ἡμ.}}{\chi} \quad \frac{12 \text{ στρέμ.}}{18 \text{ στρεμ.}}$$

Οὕτως ὥστε αἱ μὲν ἀντιστοιχοῦσαι τιμαὶ τῶν διαφόρων ποσῶν νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν ὁριζοντίαν γραμμήν, αἱ δὲ δύο τιμαὶ ἑκάστου εἰς τὴν αὐτὴν στήλην χωριζόμεναι δι' ὁριζοντίας γραμμῆς, ὥστε νὰ σχηματίζηται κλάσμα ἢ λόγος τῶν δύο τιμῶν ἑκάστου ποσοῦ.

Μετὰ ταῦτα ζητοῦμεν νὰ μάθωμεν κατ' ἀρχὰς εἰς πόσας ἡμέρας ὁ ἐργάτης θὰ σκάψῃ τὰ 12 στρέμ. ἐὰν ἀντὶ 8 ὥρ. ἐργάζηται 10 ὥρ. καθ' ἡμέραν, ἤτοι καταστρώνομεν τὸ ἑξῆς πρόβλημα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν.

$$\frac{8 \text{ ὥρ.}}{10 \text{ ὥρ}} \quad \frac{20 \text{ ἡμ.}}{\chi} \quad \left(\frac{12 \text{ στρέμ.}}{12 \text{ στρέμ.}}\right)$$

Ἐπειδὴ τὰ ποσὰ τῶν ἡμερῶν καὶ τῶν ὡρῶν εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα θὰ ἔχωμεν κατὰ τὸν κανόνα (§ 228) $\chi = 20 \times \frac{8}{10}$.

Ἀφοῦ εὕρομεν ὅτι ὁ ἐργάτης ἐργαζόμενος 10 ὥρ. καθ' ἡμέραν σκάπτει τὰ 12 στρέμ. εἰς $20 \times \frac{8}{10}$ ἡμ. ζητοῦμεν τώρα νὰ εὕρωμεν εἰς πόσας ἡμέρας οὗτος ἐργαζόμενος τὰς αὐτὰς ὥρας καθ' ἡμέραν θὰ σκάψῃ τὰ 18 στρεμ. τῆς αὐτῆς ἀμπέλου ἤτοι καταστρώνομεν τὸ ἑξῆς πρόβλημα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν:

$$\left(\frac{10 \text{ ὥρ.}}{10 \text{ ὥρ.}}\right) \qquad \frac{20 \times \frac{8}{10}}{\chi} \qquad \frac{12 \text{ στρέμ.}}{18 \text{ στρέμ.}}$$

Ἐπειδὴ τὰ ποσὰ τῶν ἡμερῶν καὶ τῶν στρεμμάτων εἶναι εὐθέως ἀνάλογα θὰ ἔχωμεν $\chi = 20 \times \frac{8}{10} \times \frac{18}{12}$ ἡμ. Τοῦτο εἶναι καὶ τὸ ζητούμενον ἐξαγόμενον.

Εἰς τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον φθάνομεν ταχύτερον καὶ ὡς ἑξῆς:

Μετὰ τὴν κατάστρωσιν τοῦ (1) προβλήματος πρὸς εὕρεσιν τῆς ζητουμένης τιμῆς (χ) πολλαπλασιάζομεν τὸν ἄνωθεν αὐτῆς ἀριθμὸν πρῶτον ἐπὶ τὸν λόγον $\frac{8}{10}$ τῶν δύο τιμῶν τοῦ ποσοῦ τῶν ὡρῶν, πρὸς τὸ ὁποῖον εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογον τὸ ποσὸν τῶν ἡμερῶν· ἔπειτα δὲ ἐπὶ τὸν ἀντίστροφον λόγον $\left(\frac{18}{12}\right)$ τῶν δύο τιμῶν τοῦ ποσοῦ τῶν στρεμμάτων, πρὸς τὸ ὁποῖον εἶναι εὐθέως ἀνάλογον τὸ ποσὸν τῶν ἡμερῶν ἤτοι $\chi = 20 \times \frac{8}{10} \times \frac{18}{12} = \frac{20 \times 8 \times 18}{10 \times 12} = \frac{1 \times 8 \times 3}{1} = 24$ ἡμ.

Ἐντεῦθεν συνάγεται ὁ ἑξῆς πρακτικὸς κανών:

230) «Μετὰ τὴν κατάστρωσιν τοῦ προβλήματος διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ἄγνωστον (χ) πολλαπλασιάζομεν τὸν ἄνωθεν αὐτοῦ ἀριθμὸν ἐφ' ἕκαστον τῶν κλασμάτων, τὰ ὁποῖα σχηματίζουσι αἱ δύο τιμαὶ ἑκάστου ποσοῦ, ὡς ἔχει μὲν ἐὰν τὸ ποσὸν εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογον πρὸς τὸ ποσὸν τοῦ ἀγνώστου, ἀντεστραμμένον δέ, ἂν τὸ ποσὸν εἶναι ἀνάλογον πρὸς αὐτό».

Παραδείγματα.

1) Τάπης τις, ὅστις ἔχει μῆκος 8 πήχ. καὶ πλάτος 5 πήχ. τιμᾶται 850,60 δραχ. Ἕτερος τάπης τῆς αὐτῆς ποιότητος μήκους μὲν 10 πήχ. πλάτους δὲ 6 πήχ. πόσον τιμᾶται; Καταστρώνομεν τὸ πρόβλημα.

$$\frac{8 \text{ πήχ. μήκ.}}{10 \text{ πήχ. μήκ.}} \qquad \frac{5 \text{ πήχ. πλάτ.}}{6 \text{ πήχ. πλάτ.}} \qquad \frac{850{,}60 \text{ δραχ.}}{\chi}$$

Πολλαπλασιάζομεν τὸν ἄνωθεν τοῦ ἀγνώστου ἀριθμὸν 850,60 δρ. ἐπὶ τὸ κλάσμα $\frac{8}{10}$ ἀντεστραμμένον, διότι τὸ μῆκος τοῦ ὑφάσματος εἶναι εὐθέως ἀνάλογον πρὸς τὴν ἀξίαν αὐτοῦ, καὶ ἐπὶ τὸ κλάμμα $\frac{5}{6}$ ἀντεστραμμένον ἐπίσης, διότι καὶ τὸ πλάτος τοῦ ὑφάσματος εἶναι εὐθέως ἀνάλογον πρὸς τὴν ἀξίαν αὐτοῦ. Ὅθεν θὰ ἔχωμεν $\chi = 850{,}60 \times \frac{10}{8} \times \frac{6}{5}$. Μετὰ τὰς ἁπλοποιήσεις καὶ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πράξεων εὑρίσκομεν τὴν ζητουμένην ἀξίαν τοῦ τάπητος ἤτοι $\chi = 1275{,}90$ δραχ.

2) Διὰ νὰ ἐνδυθῶσι 25 στρατιῶται χρειάζονται 78 πήχ. ὑφάσματός

τινος τοῦ ὁποίου τὸ πλάτος εἶναι 1 πήχ. 2 ῥούπ. Διὰ νὰ ἐνδυθῶσι 35 στρατιῶται πόσοι πήχεις χρειάζονται ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος τοῦ ὁποίου τὸ πλάτος εἶναι 6 ῥούπ.; Καταστρώνομεν τὸ πρόβλημα.

$$\frac{25 \text{ στρατ.}}{35 \text{ στρατ.}} \qquad \frac{78 \text{ πήχ.}}{\chi} \qquad \frac{1 \text{ πήχ. } 2 \text{ ῥούπ. πλάτ.}}{6 \text{ ῥούπ. πλάτ.}}$$

Πρὶν ἐφαρμόσωμεν τὸν πρακτικὸν κανόνα ἀνάγομεν τοὺς ἀριθμοὺς ἑκάστης στήλης (ἐὰν εἶναι συμμιγεῖς) εἰς τὴν αὐτὴν μονάδα.

Κατὰ ταῦτα φθάνομεν εἰς τὴν ἑπομένην κατάστρωσιν.

$$\frac{25 \text{ στρατ.}}{35 \text{ στρατ.}} \qquad \frac{78 \text{ πήχ.}}{\chi} \qquad \frac{10 \text{ ῥούπ. πλάτ.}}{6 \text{ ῥούπ. πλάτ.}}$$

ἐξ οὗ προκύπτει $\chi = 78 \times \frac{35}{25} \times \frac{10}{6} = 182.$

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

30

1) Τεμάχιον ὑφάσματος 180 πήχ. μήκους καὶ 1 πήχ. καὶ 3 ῥούπ. πλάτους ἐπωλήθη ἀντὶ 650 δραχ., ἕτερον τεμάχιον ὑφάσματος τῆς αὐτῆς ποιότητος μήκους 240 πήχ. 5 ῥουπ. καὶ πλάτους 7 ῥουπ. πόσας δραχμὰς θὰ ἀξίζῃ; (ἀπ. 552,95 δραχ.)

2) Σιδηρᾶ τις πλὰξ ἔχουσα μῆκος 1,80 βασ. πήχ. πλάτος 0,45 β. πήχ. καὶ πάχος 0,15 β. π. ζυγίζει 185 ὀκ. 300 δραμ. Ἄλλη τις σιδηρᾶ πλὰξ ἔχουσα μῆκος 1,20 β. πήχ., πλάτος 0,80 β. πήχ. καὶ πάχος 0,22 β. πήχ. πόσον θὰ ζυγίζῃ; $\left(\text{ἀπ. } 322 \text{ ὀκ. } 353 \frac{47}{81} \text{ δράμ.}\right)$

31 3) Πληρώνει τις 284,32 δραχ. διὰ ναῦλον 9 τόν. 25 χιλ. δι' ἓν διάστημα 148,5 χιλιόμ. Πόσον θὰ στοιχίζῃ ἡ μεταφορὰ 4 τόν. καὶ 5 χιλιογ. εἰς ἀπόστασιν 172 χιλιομ.; (ἀπ. 145,97 δραχ. περίπου)

4) Εἴς τι φρούριον ὑπάρχουσι 30000 ὀκ. ἀλεύρου, αἵτινες ἐπαρκοῦσι διὰ τὴν τροφὴν 1500 ἀνδρῶν ἐπὶ 85 ἡμέρ. Κατὰ πόσον πρέπει νὰ αὐξηθῇ ἡ προμήθεια τῶν τροφῶν, ἐὰν προστεθῶσιν εἰς τούτους 900 ἄλλοι καὶ πρόκηται νὰ ἐπαρκέσωσιν αἱ τροφαὶ διὰ 234 ἡμέρας;

$\left(\text{ἀπ. } 102141 \frac{2}{17} \text{ ὀκάδ.}\right)$

5) Διὰ τὴν κατασκευὴν ἑνὸς θόλου θὰ ἐχρειάζοντο 276 πλίνθοι μήκους 22 δακτ., πλάτους 12 δακτ. καὶ πάχους $8 \frac{3}{4}$ δακτυλ. (1 δάκ. = 0,01 β. π.). Πόσοι πλίνθοι θὰ ἐπήρκουν πρὸς τοῦτο μήκους 21 δακτ., πλάτους 14 δακτ. καὶ πάχους $8 \frac{2}{5}$ ακτ.; $\left(\text{ἀπ. } 258 \frac{8}{49} \text{ πλίνθοι.}\right)$

6) Διὰ τὴν πλακόστρωσιν μιᾶς αὐλῆς πρόκειται νὰ χρησιμοποιηθῶσι πλάκες μήκους 12 δακτ. πλάτους $12 \frac{1}{3}$ δακτ.

Πόσαι τοιαῦται πλάκες χρειάζονται ἐὰν ἡ αὐτὴ αὐλὴ δύναται νὰ καλυφθῇ μὲ 376 πλάκας μήκους 24 δακτ. καὶ πλάτους $8 \frac{1}{4}$ δακ.

$\left(\text{ἀπ. } 503 \frac{1}{37} \text{ πλακ.}\right)$

7) Εἴς τι φρούριον ὑπάρχουσι ζωοτροφίαι διὰ 1520 ἄνδρας ἐπὶ 5 μῆνας. Ἐὰν ἡ φρουρὰ αὐξηθῇ κατὰ 100 ἄνδρας καὶ εἶναι ἀνάγκη νὰ διαμείνωσι $1\frac{5}{6}$ μηνὸς ἐπὶ πλέον, ποῖον σιτηρέσιον πρέπει νὰ λαμβάνῃ ἕκαστος; $\left(\text{ἀπ. } \frac{760}{1107} \text{ σιτηρ.}\right)$

8) Ὁδοιπόρος τις ὁδοιπορῶν 10 ὥρ. 20′ καθ' ἑκάστην, διανύει εἰς 4 ἡμέρ. 160 χιλιόμ. Εἰς πόσας ἡμέρας θὰ διανύσῃ 200 χιλιόμ. ἐὰν ὁδοιπορῇ 8 ὥρ. 40 λεπ. καθ' ἑκάστην; $\left(\text{ἀπ. } 5\frac{25}{26} \text{ ἡμ.}\right)$

9) Διὰ τὴν ἐπίστρωσιν ἐπιφανείας τινὸς ἐχρειάσθησαν 4 τάπητες μήκους 6 πήχ. καὶ πλάτους $1\frac{3}{8}$ τοῦ πήχ. Πόσοι τάπητες μήκους 7 πήχεων καὶ $1\frac{1}{4}$ πήχ. πλάτους ἀπαιτοῦνται διὰ τὴν ἐπίστρωσιν τῆς αὐτῆς ἐπιφανείας; $\left(\text{ἀπ. } 3\frac{27}{35} \text{ τάπ.}\right)$

10) 18 ἐργάται ἐργαζόμενοι καθ' ἡμέραν 9 ὥρ. ἐκτελοῦσι τὰ $\frac{4}{9}$ ἔργου τινὸς εἰς 12 ἡμ. Ἐὰν προσληφθῶσι καὶ ἕτεροι 10 ἐργάται καὶ ἐργάζωνται ὅλοι 8 ὥρ. καθ' ἡμέραν εἰς πόσας ἡμέρας θ' ἀποπερατώσωσι τὸ ἔργον; $\left(\text{ἀπὸ } 10\frac{95}{112} \text{ ἡμ.}\right)$

11) 86 δέματα (μπάλες) βάμβακος ἐξ ὧν ἕκαστον ζυγίζει 150 χιλιόγ. ἀξίζουσι 28380 δραχ. Πόσον θὰ ἀξίζωσι 104 δέματα ἐξ ὧν ἕκαστον ζυγίζει 140 χιλιόγρ. ὅταν ἡ ποιότης τοῦ βάμβακος τῶν πρώτων δεμάτων ἔχῃ λόγον πρὸς τὴν τῶν δευτέρων ὡς ὁ 11 πρὸς τὸν 14;
(ἀπόκ. 40768 δραχ.)

12) Ἐὰν 72 ὑφανταὶ εἰς 12 ἡμέρας ἐπὶ 9 ὥρας καθ' ἑκάστην ἐργαζόμενοι κατασκευάζωσι 225 τεμάχια ὑφάσματός τινος μήκους 30 πήχ. καὶ πλάτους 7 ῥουπ. πόσα τεμάχια κατατασκευάζουσι 60 ὑφανταὶ εἰς 14 ἡμέρας ἐπὶ $8\frac{1}{2}$ ὥρας καθ' ἑκάστην ἐργαζόμενοι, ὅταν ἕκαστον τεμάχιον ἔχῃ μῆκος μὲν 35 πήχεων καὶ πλάτος 1 πῆχ.;
(ἀπ. 155 τεμάχια περίπου.)

13) 32 κτίσται ἐργαζόμενοι ἐπὶ 15 ἡμ. 9 ὥρας καθ' ἑκάστην κτίζουσι τοῖχον, τοῦ ὁποίου τὸ μὲν μῆκος εἶναι 74,5 μέτρα, τὸ δὲ πλάτος $\frac{5}{8}$ μ. καὶ τὸ ὕψος 5 μέτ. Πόσον μῆκος τοίχου, τοῦ ὁποίου τὸ πλάτος εἶναι $\frac{1}{2}$ τοῦ μέτρου καὶ τὸ ὕψος 3 μ. θὰ τελειώσωσι 18 κτίσται ἐπὶ 15 ἡμέρας $9\frac{1}{2}$ ὥρ. καθ' ἑκάστην ἐργαζόμενοι; (ἀπ. 92,1 μέτρ. μῆκ.)

14) Ἀγρός τις μήκους 452 μέτρ. καὶ πλάτους 135,6 μ. ἐπωλήθη ἀντὶ 5186,30 δραχ. Ἐὰν ἕτερος ἀγρὸς ἄλλης γονιμότητος μήκους 67,8

μ. καὶ πλάτους 178,25 μ. πωλῆται ἀντὶ 1200 δραχ. ποῖον λόγον ἔχει ἡ ἀξία τοῦ πρώτου πρὸς τὴν τοῦ δευτέρου;

(ἀπ. ὡς ὁ 5 πρὸς τὸν 6 περίπου.)

15) Ἐργοστασιάρχης τις ἐπλήρωσε κατὰ τὸ διάστημα 4 ἑβδομάδων 4838,40 δραχ. δι' ἡμερομίσθια εἰς 96 ἐργάτας ἐργασθέντας ἐπὶ 6 ἡμέρ. καθ' ἑβδομάδα καὶ ἐπὶ 12 ὥρ. καθ' ἑκάστην, θέλει δὲ νὰ περιορίσῃ τὴν βιομηχαν. ἐργασίαν καὶ ἐλαττώνει τὸν χρόνον τῆς ἐργασίας εἰς 5 ἡμ. καθ' ἑβδομάδα καὶ εἰς 10 ὥρ. καθ' ἑκάστην. Ζητεῖται α) πόσους ἐργάτας δύναται τώρα νὰ ἀπασχολήσῃ ἐὰν θέλῃ νὰ πληρώνῃ δι' ἡμερομίσθια 860 δραχ. καθ' ἑβδομάδα. β) Πόσας δραχμὰς θὰ πληρώνῃ καθ' ἑβδομάδα δι' ἡμερομίσθια, ἐὰν κρατήσῃ μόνον 60 ἐργάτας;

(ἀπ. 96 ἐργ. 525 δραχ.)

Προβλήματα ὑπολογισμοῦ ποσοστῶν.

231) Τὰ προβλήματα ταῦτα εἶναι προβλήματα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν, εἰς τὰ ὁποῖα ὅμως ὁ εἷς τῶν τριῶν δεδομένων ἀριθμῶν εἶναι ὁ 100 ἢ 1000 κτλ. Διὰ τοῦτο αἱ πρὸς τὴν λύσιν τῶν τοιούτων προβλημάτων ἀπαιτούμεναι πράξεις ἐκτελοῦνται εὐκόλως καὶ ταχέως. Ἐντεῦθεν ἐξηγεῖται διατὶ ἐν τῷ ἐμπορίῳ ἐπικρατεῖ συνήθεια νὰ προσδιορίζωσιν ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ 100 ἢ 1000 κτλ. διάφορα ποσά, ὡς λόγου χάριν, τὰ κέρδη καὶ τὰς ζημίας, τὰς ἀμοιβὰς τὰς παρεχομένας εἰς μεσολαβοῦντα πρόσωπα δι' ἐμπορικὰς πράξεις (μεσιτείας, προμηθείας) διαφόρους ἐκπτώσεις εἴτε ἐπὶ τοῦ βάρους (ἀπόβαρον κοινῶς τάρα) εἴτε ἐπὶ τῶν τιμῶν (ἔκπτωσις κοινῶς σκόντο) ἐμπορεύματός τινος, τὰ πληρωνόμενα ἀσφάλιστρα εἰς ἀσφαλιστικὰς ἑταιρείας καὶ ἄλλα πολλά.

Ἂς ὑποθέσωμεν π. δ. χ. ὅτι παραγγελιοδόχος τις ἠγόρασε διὰ λογαριασμόν μας ἐμπορεύματα ἀξίας 4000 δραχ. Εἰς τοῦτον συμφωνοῦμεν νὰ δώσωμεν ἀμοιβήν τινα τὴν ὁποίαν ὁρίζομεν πρὸς 3 δραχμὰς π. δ. χ. δι' ἑκάστην ἑκατοντάδα δραχμῶν, ἐπὶ τῆς ἀξίας τοῦ ἐμπορεύματος.

Ἡ ἀμοιβὴ αὕτη καλουμένη προμήθεια παρίσταται συμβολικῶς 3 %, καὶ ἀπαγγέλεται τρία τοῖς ἑκατόν.

Ὁμοίως ὅταν λέγωμεν ὅτι ἀσφαλίζομεν τὴν οἰκίαν μας $1\frac{1}{2}$ ἐπὶ τοῖς χιλίοις, ἐννοοῦμεν ὅτι διὰ πᾶσαν χιλιάδα τῆς ἀξίας, τῆς οἰκίας καταβάλλομεν $1\frac{1}{2}$ δραχ. παρίσταται δὲ τοῦτο συμβολικῶς $1\frac{1}{2}$ ‰.

Τὸ ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ 100 ἢ 1000 κ. τ. λ, καταβαλλόμενον ποσὸν καλεῖται *ποσοστὸν* ἐπὶ τοῖς 100 ἢ τοῖς 1000 κτλ.

Ἔστωσαν πρὸς λύσιν τὰ ἑξῆς προβλήματα.

1) Παραγγελιοδόχος τις ἠγόρασε διὰ λογαριασμὸν τρίτου ἐμπορεύματα ἀξίας 5800 δρχ. Πόση εἶναι ἡ προμήθειά του πρὸς 2 %;

$$\frac{100 \text{ δρ. ἐμπ.}}{5800 \text{ δρ. ἐμπ.}} \quad \frac{2 \text{ δρ. προμήθ.}}{\chi} \qquad \chi = 2 \times \frac{5800}{100} = 2 \times 58 = 116 \text{ δρχ.}$$

Τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο εὑρίσκομεν ταχύτερον, ἂν διαιρέσωμεν τὴν ἀξίαν

5800 τῶν ἐμπορευμάτων διὰ 100, τὸ δὲ πηλίκον $\left(\frac{5800}{100}\right)$πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸ δεδομένον ποσοστὸν (2 %) ἤτοι προμήθεια πρὸς 2 % ἐπὶ 5800 δραχ.$=58\times2=116$ δρχ.

2) Ἠσφάλισέ τις τὴν οἰκίαν του ἀξίας 30000 δραχμῶν πρὸς 1 $\frac{1}{2}$ ‰. Πόσα ἀσφάλιστρα θὰ πληρώσῃ ἐτησίως;

Λύσις.

ἀξία οἰκίας	ἀσφάλιστρα.
1000 δρχ.	1 ½ δραχ.
30000 δρχ.	χ.

$$\chi=1\frac{1}{2}\times\frac{30000}{1000}=1\frac{1}{2}\times30=45 \text{ δραχμάς.}$$

Καὶ ἐνταῦθα τὸ ἐξαγόμενον εὑρίσκεται συντόμως, ἐὰν τὸ ἀσφαλιζόμενον ποσὸν (30000) δρχ. διαιρέσωμεν διὰ 1000 τὸ δὲ πηλίκον $\left(\frac{30000}{1000}\right)$ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸ δεδομένον ποσοστὸν $\left(1\frac{1}{2}\text{‰}\right)$ ἤτοι ἀσφάλιστρα πρὸς 1 $\frac{1}{2}$ ‰ ἐπὶ 30000 δρχ.$=30\times2\frac{1}{2}=45$ δρχ.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα·

232) «Ὅταν δίδηται τὸ ποσοστὸν τῶν 100 ἢ 1000 καὶ ζητῆται τὸ ἀντίστοιχον ποσοστὸν ἑτέρου ἀριθμοῦ, διαιροῦμεν τοῦτον διὰ τοῦ 100 ἢ 1000, τὸ δὲ πηλίκον πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸ δεδομένον ποσοστόν».

Παραδείγματα.

1) Εὑρεῖν τὴν μεσιτείαν πρὸς 1 $\frac{1}{2}$ % ἐπὶ ποσοῦ 7600 δραχμῶν.

Λύσις. Μεσιτεία 1 % ἐπὶ 7600 δρχ. 76 δρχ.

» $\frac{1}{2}$ % » » » 38 »

Μεσιτεία 1 $\frac{1}{2}$ % ἐπὶ 7600 δρχ. 114 δρχ.

Σημ. *Αἱ πράξεις αὗται ἐκτελοῦνται εὐκόλως καὶ ἀπὸ μνήμης.*

2) Πόσον στοιχίζουσι 7000 ὀκ. καφὲ πρὸς 260 δραχ. τὰς 100 ὀκάδ.;

3) Πόση εἶναι ἡ προμήθεια πρὸς 1 $\frac{1}{4}$ % ἐπὶ τοῦ ποσοῦ 4800 δρ.;

4) Ἐάν τις πωλεῖ ἐμπόρευμά τι ἀξίας δρ. 3800 μὲ κέρδος 9 % ἐπὶ τῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς πόσον κερδίζει ἐν ὅλῳ;

Παρατ. *Πάντα ἐν γένει τὰ προβλήματα ποσοστῶν ἀνάγονται εἰς τὰ προβλήματα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν καὶ λύονται κατὰ τοὺς πρακτικοὺς κανόνας ἐκείνων.*

Ἔστωσαν ἤδη τὰ ἑξῆς προβλήματα:

1) Ἔμπορός τις ἐπώλησεν ἐμπορεύματα ἀντὶ 1850 δραχ. μὲ κέρδος 8 % ἐπὶ τῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς. Πόσον τὰ εἶχεν ἀγοράσει καὶ πόσον εἶναι τὸ κέρδος;

Ἐὰν ἐπώλει τὰ ἐμπορεύματα 108 δραχ. θὰ τὰ ἠγόραζεν 100 ὅθεν δυνάμεθα νὰ καταστρώσωμεν τὸ πρόβλημα ὡς ἑξῆς:

τιμὴ πωλήσεως — τιμὴ ἀγορᾶς

$\dfrac{108 \text{ δραχ.}}{1850 \text{ δραχ.}}$ — $\dfrac{100 \text{ δραχ.}}{\chi}$

$$\chi = 100 \times \frac{1850}{108} = 1850 \times \frac{100}{108} = 1712{,}96 \text{ δρχ. ἢ τιμὴ τῆς ἀγορᾶς}$$

Ἑπομένως τὸ κέρδος εἶναι $1850 - 1712{,}96 = 137{,}04$ δρχ.

Τὸ κέρδος εὑρίσκεται καὶ ἀπ' εὐθείας ὡς ἑξῆς:

τιμὴ πωλήσεως — κέρδος

$\dfrac{108 \text{ δρχ.}}{1850 \text{ δρχ.}}$ — $\dfrac{8 \text{ δρχ.}}{\chi}$

$$\chi = 8 \times \frac{1850}{108} = 1850 \times \frac{8}{108} = 137{,}04 \text{ δρχ. κέρδος.}$$

2) Ἔμπορός τις ἐπώλησεν ἐμπορεύματα ἀντὶ 1920 δρχ. μὲ ζημίαν 9 % ἐπὶ τῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς. Πόσον τά εἶχεν ἀγοράσει καὶ πόση εἶναι ἡ ὁλικὴ ζημία;

Ἐὰν ἡ τιμὴ τῆς ἀγορᾶς τῶν ἐμπορευμάτων εἶναι 100 δρχ. τότ διὰ νὰ ζημιωθῇ 9 % πρέπει ταῦτα νὰ πωληθῶσιν ἀντὶ $100 - 9 = 91$ δρχ.

Ὅθεν ἕπεται ἡ ἑξῆς κατάστρωσις τοῦ προβλήματος.

$\dfrac{91 \text{ δραχ. τιμὴ πωλ.}}{1920 \text{ δραχ.}}$ — $\dfrac{100 \text{ δραχ. τιμὴ ἀγορ.}}{\chi}$

$$\chi = 100 \times \frac{1920}{91} = 2109{,}90 \text{ δραχ. ἀξία ἀγορᾶς.}$$

Ἑπομένως ἡ ζημία εἶναι $2109{,}90 - 1920 = 189{,}90$ δραχ.

Ἡ ζημία δύναται νὰ εὑρεθῇ ἀπ' εὐθείας ὡς ἑξῆς:

$\dfrac{91 \text{ δρχ. τιμὴ πωλ.}}{1920 \text{ δρχ.}}$ — $\dfrac{9 \text{ δρχ. ζημία.}}{\chi}$

$$\chi = 9 \times \frac{1920}{91} = 189{,}90 \text{ δραχ.}$$

3) Ἡ ὀκᾶ ὀρύζης στοιχίζει 0,95 δραχ. καὶ πωλεῖται 1,10 δραχ. Πόσον τοῖς ἑκατὸν κερδίζει ὁ ἔμπορος ἐπὶ τῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς τούτου; Ἀφοῦ ἐξ ἑκάστης ὀκᾶς κερδίζει $1{,}10 - 0{,}95 = 0{,}15$ δραχ. ἕπεται ἡ ἑξῆς κατάστρωσις: $\dfrac{0{,}95 \text{ δρχ. τιμὴ ἀγορ.}}{100 \text{ δρχ.}}$ — $\dfrac{0{,}15 \text{ δρχ. κέρδος.}}{\chi}$

$$\chi = 0{,}15 \times \frac{100}{0{,}95} = 15 \frac{15}{19} \%.$$

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

Α΄) *Ἀπὸ μνήμης.*

1) Εὑρεῖν τὸ 1 % α) ἐπὶ 9 δρχ. β) ἐπὶ 4000 δραχ. γ) ἐπὶ 1852 δρχ. δ) ἐπὶ $103 \frac{1}{3}$ ε) ἐπὶ $87 \frac{1}{2}$ δραχ.

2) Εὑρεῖν τὸ 10 % α) ἐπὶ 915 λιτρῶν β) ἐπὶ 1615 δραχ.

3) Εὑρεῖν τὸ 20 % α) ἐπὶ 1000 δραχ. β) ἐπὶ 4000 δραχ. γ) ἐπὶ 800 δραχ. δ) ἐπὶ 932 δολλαρ. ε) ἐπὶ 875 χιλιογρ.

4) Εὑρεῖν τὸ $25\,^0/_0$ α) ἐπὶ 840 λιρῶν στερλινῶν 6) ἐπὶ 871 ἑκατολίτρων γ) ἐπὶ 1000 στρεμμάτων.

5) Εὑρεῖν τὸ $\frac{1}{2}\,^0/_0$ α) ἐπὶ 120 δρχ. 6) ἐπὶ 70 δραχ. γ) ἐπὶ 810 δρχ.

6) Εὑρεῖν τὸ $\frac{1}{3}\,^0/_0$ α) ἐπὶ 720 δραχ. 6) ἐπὶ 960 λιρῶν στερλινῶν·

7) Εὑρεῖν τὸ $3\frac{1}{3}\,^0/_0$ α) ἐπὶ 420 ὀκ. 6) ἐπὶ 37 δραχ. ($3\frac{1}{3}$ = πρὸς τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ 10).

8) Εὑρεῖν τὸ $12\frac{1}{2}\,^0/_0$ α) ἐπὶ 1200 μ. 6) ἐπὶ 720 ὀκ. ($12\frac{1}{2}$ = πρὸς τὸ $\frac{1}{8}$ τοῦ 100).

9) Πόσον εἶναι τὸ $1\,^0/_{00}$ ἢ $5\,^0/_{00}$ ἢ $2\frac{1}{2}\,^0/_{00}$ ἢ $10\,^0/_{00}$ ἢ $\frac{1}{2}\,^0/_{00}$ ἢ $\frac{1}{3}\,^0/_{00}$ ἐπὶ 1340 δραχμῶν ;

10) Προμήθεια πρὸς $5\,^0/_0$ ἀνέρχεται εἰς 25 δραχ. Πόσον εἶναι τὸ ποσὸν ἐπὶ τοῦ ὁποίου ἐγένετο αὕτη ;

11) Ἐπὶ τίνος ποσοῦ τὸ $20\,^0/_0$ ἀνέρχεται εἰς 48 λίρας στερλίνας ;

12) Εἰς πόσον θὰ ἀνέλθῃ κεφάλαιον 2000 δραχ. ἐὰν εἰς τοῦτο προστεθῇ καὶ κέρδος $15\,^0/_0$. ;

13) Μεσιτεία πρὸς $\frac{1}{2}\,^0/_{00}$ ἀνέρχεται εἰς δραχ. 4,60· πόσον εἶναι τὸ ποσὸν ἐφ' οὗ ἐλήφθη αὕτη ;

Β΄) *Γραπτῶς.*

1) Πόσον πίτυρον δίδουσι 2485 ὀκ. σίτου ὅστις παρέχει $8\,^0/_0$ πίτυρον ;
(ἀπ. 230 ὀκ. 320 δράμ. πίτυρον).

2) Ἀσφαλίζει τις τὴν οἰκίαν του ἀξίας 33660 δραχ. πρὸς $1\frac{7}{9}\,^0/_{00}$. Πόσα ἀσφάλιστρα πληρώνει κατ' ἔτος ; (ἀπ. 59,84 δραχ.)

3) Ποία εἶναι ἡ προμήθεια πρὸς $2\,^0/_0$ ἐπὶ δραχ. 7583,15 ;
(ἀπ. 151,663 δραχ.)

4) Τὸ ἀπόβαρον πρὸς $7\frac{1}{2}\,^0/_0$ ἐμπορεύματός τινος ἀνέρχεται εἰς 140,500 χιλιόγραμμα. Πόσον εἶναι τὸ ἀκαθάριστον βάρος αὐτοῦ ;
(ἀπ. 1873,333 χιλιόγρ.)

5) Πόσον πρέπει νὰ πωλήσῃ τις κατ' ὀκᾶν καφὲν ἀξίας $3\frac{1}{2}$ δρχ. ἵνα κερδίσῃ $20\,^0/_0$. ; (ἀπ. 4,20.)

6) Τὸ καθαρὸν κεφάλαιον ἐμπόρου τινος κατὰ τὴν ἀπογραφὴν τῆς 1ης Ἰανουαρίου ἀνήρχετο εἰς 65740 δραχ. κατὰ δὲ τὴν ἀπογραφὴν τῆς 31ης Δεκεμβρίου τοῦ ἰδίου ἔτους ἀνῆλθεν εἰς 78172,85 δραχ. Πόσον τοῖς ἑκατὸν ἐκέρδισεν οὗτος ; (ἀπ. 18, δρχ. $9\,^0/_0$.)

7) Τὸ ἀκαθάριστον βάρος ἑνὸς ἐμπορεύματος εἶναι 2135 ὀκ. τὸ δὲ

ἀπόβαρον αὐτοῦ λογαριάζεται πρὸς $6\frac{1}{2}$ ‰ α) πόσον εἶναι τὸ καθαρὸν βάρος τοῦ ἐμπορεύματος καὶ β) πόση ἡ τιμὴ αὐτοῦ πρὸς 135,20 δραχ. τὰς 100 ὀκ.; (ἀπ. α) 1996 ὀκ. 90 δράμ. β) 2698,89 δραχ.)

8) Πόσον πρέπει νὰ πωλήσωμεν τὴν δωδεκάδα πορτοκαλίων διὰ νὰ κερδίσωμεν 5 % ἐπὶ τῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς, ἐὰν 3720 πορτοκάλια στοιχίζωσι 108,50 δραχ.; (ἀπ. $36\frac{3}{4}$ λεπτά.)

9) Ποία εἶναι ἡ μεσιτεία πρὸς $1\frac{1}{8}$ % ἐπὶ 15 λίρ. 6 σελ. 3 πέν.; (ἀπ. 3 σελ. $5\frac{1}{2}$ πέν.)

10) Ἐὰν πωλήσῃ τις σῖτον ἀξίας 34 λεπτῶν κατ' ὀκᾶν ἀντὶ $35\frac{1}{2}$ λ. πόσον τοῖς ἑκατὸν κερδίζει; (ἀπ. 4,41 % ἐπὶ τῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς).

11) Ἔμπορός τις διαλύων τὸ κατάστημά του πωλεῖ τὰ ἐμπορεύματά του μὲ ἔκπτωσιν 40 % ἐπὶ τῆς ἀξίας των. Εἰσέπραξε δὲ ἐκ τούτων 15845 δραχ. Πόση εἶναι ἡ ἀξία τῶν ἐμπορευμάτων; (26408,33 δρχ.)

12) Ὕφασμά τι στοιχίζει 7,80 δραχ. τὸ μέτρον. Πόσον πρέπει νὰ πωλήσῃ τις τὸν μικρὸν πῆχυν, ἂν θέλῃ νὰ κερδίσῃ 15 % ἐπὶ τῆς ἀρχικῆς ἀξίας; (ἀπ. 5,74 δραχ. περίπου.)

13) Ἡ ἀξία ἐμπορεύματος μετὰ τῶν ἐξόδων εἰς $12\frac{1}{2}$ % ἀνέρχεται εἰς 496 δραχ. Εἰς πόσον ἀνέρχονται τὰ ἔξοδα; (ἀπ. 55,11 δρχ.)

14) Τὸ καθαρὸν βάρος ἐμπορεύματός τινος ἀνήρχετο εἰς 3446,5 χιλιόγρ. μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν τοῦ ἀποβάρου πρὸς 3 %. Πόσον εἶναι τὸ ἀπόβαρον; (ἀπ. 106,592 χιλιόγρ.)

15) Τὸ κέρδος ἔκ τινος ἐμπορεύματος εἶναι 8 % ἐπὶ τῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς. Πόσον τοῖς ἑκατὸν εἶναι ἐπὶ τῆς ἀξίας τῆς πωλήσεως; (ἀπ. 7,40 % δραχ.)

16) Τὸ κέρδος ἔκ τινος ἐμπορεύματος εἶναι $12\frac{1}{2}$ % ἐπὶ τῆς ἀξίας τῆς πωλήσεως· πόσον τοῖς ἑκατὸν εἶναι τὸ κέρδος ἐπὶ τῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς; (ἀπ. 14,285 δραχ. %)

17) Ἠγόρασέ τις ἔλαιον τὸ ὁποῖον ἐπώλησε 15 λεπτὰ ἀκριβώτερον τὴν ὀκᾶν ἢ ὅσον τὸ ἠγόρασε· τὸ κέρδος εἶναι 18 % ἐπὶ τῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς. Πόσον ἠγόρασε τὴν ὀκᾶν; ($83\frac{1}{3}$ λεπτά.)

18) Ἀτμόπλοιόν τι ἠσφαλίσθη διὰ 90000 λίρ. πρὸς 15 σελ. 3 πεν. τὰς 100 λίρας. Εἰς πόσον ἀνέρχονται τὰ ἀσφάλιστρα; (ἀπ. 685 λίρ. 5 σελ.)

19) Γεωργός τις ἀσφαλίζει πρὸς $1\frac{1}{4}$ ‰ τὴν οἰκίαν του μετὰ τῶν παραρτημάτων ἀξίας 4580 δραχ. καὶ τὰ προϊόντα του ἤτοι 180 κοιλὰ σίτου ἀξίας πρὸς 8,40 δρχ. τὸ κοιλόν, 204 στατ. ἀχύρου ἀξίας πρὸς 2,80 δρχ. τὸν στατῆρα καὶ 185 στατ χόρτου ἀξίας πρὸς 4,60 δρχ. τὸν στατῆρα. Πόσα ἀσφάλιστρα θὰ πληρώσῃ; (ἀπ. 9,40 δρχ. περίπου).

20) Μεσίτης χρηματιστηρίου ἐπώλησε διὰ λογαριασμὸν τρίτου 5 μετοχὰς τῆς Ἐθνικῆς Τραπέζης πρὸς 3982,75 δρχ. ἑκάστην καὶ 8 μετοχὰς τοῦ σιδηροδρόμου Ἀθηνῶν-Πειραιῶς πρὸς 458 δραχ. ἑκάστην. Εἰς πόσον ἀνέρχεται ἡ μεσιτεία αὐτοῦ ὑπολογιζομένη πρὸς $\frac{1}{5}$ %;

(47,15 δρχ.)

21) Ἡ ἀξία τῶν μηχανῶν ἑνὸς ἐργοστασίου ἀνέρχεται εἰς 65700 δραχ. ἡ δὲ τῶν ἐπίπλων εἰς 8400 δρχ. Εἰς τὸ τέλος τοῦ ἔτους λογαριάζεται ἔκπτωσις ἕνεκα τῆς φθορᾶς ἐκ τῆς χρήσεως 20 % ἐπὶ τῆς ἀξίας τῶν μηχανῶν καὶ 10 % ἐπὶ τῆς τῶν ἐπίπλων. Εἰς πόσον ἀνέρχονται αἱ ἐκπτώσεις αὗται; (ἀπ. 13980 δραχμάς).

22) Τεμάχιον ὑφάσματος ἠγοράσθη πρὸς 8,25 φραγκα τὸ μέτρον. Ἐγένοντο ὅμως δι' αὐτὸ τὰ ἑξῆς ἔξοδα: μεσιτεία $\frac{3}{4}$ %, ἀσφάλιστρα 4 ‰, προμήθεια 2 % καὶ τελωνειακὸς δασμὸς 3 % (ἅπαντα ἐπὶ τῆς ἀρχικῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς). Πόσον μᾶς στοιχίζει τὸ μέτρον τοῦ ὑφάσματος τούτου;

(ἀπ. 8,76 φράγκα).

23) Μία μερὶς καφὲ ἠγοράσθη πρὸς 385 δραχμὰς τὰς 100 ὀκ. καὶ ἐγένοντο ἔξοδα ἐπ' αὐτῆς μέχρι τῆς ἀποθήκης $8\frac{1}{2}$ % ἐπὶ τῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς. Ἐὰν ἐπιβαρύνωμεν τὸ ἐμπόρευμα τοῦτο μὲ 10 % διὰ γενικὰ ἔξοδα τοῦ καταστήματος καὶ θέλωμεν νὰ κερδίσωμεν καὶ 15 % ἐπὶ τῆς τιμῆς τὴν ὁποίαν μᾶς στοιχίζει, πόσον πρέπει νὰ πωλήσωμεν τὴν ὀκᾶν; (ἀπ. 5,24 δραχ.)

24) Ἔμπορός τις ἐξ Ἀθηνῶν ἐπώλησεν εἴς τινα ἔμπορον ἐκ Πατρῶν 10 σάκκους καφὲ μικτοῦ βάρους 750 ὀκ. πρὸς 3.50 δρχ. τὴν ὀκᾶν τοῖς μετρητοῖς καὶ μὲ ἔκπτωσιν 2 %. Λογαριάζει δὲ ἀπόβαρον 1,5 % ἐπὶ τοῦ μικτοῦ βάρους καὶ δι' ἔξοδα συσκευασίας 0,80 δρχ. κατὰ σάκκον. Ζητεῖται τὸ ποσὸν τὸ ὁποῖον θὰ εἰσπράξῃ ὁ πρῶτος παρὰ τοῦ δευτέρου.

Σημ. *Ὁ ὑπολογισμὸς διατάσσεται συνήθως ἐπὶ εἰδικῶν ἐντύπων φύλλων καλουμένων* **τιμολογέων** *ὡς ἑξῆς:*

Ἐν Ἀθήναις τῇ 1 Νοεμβρίου 1909

Δ. Α. ὁ κ. Β. Γ. ἐκ Πατρῶν

ΑΘΗΝΑΙ **ΔΟΥΝΑΙ**

Σήματος ἀριθμοί	Ἀριθμὸς δεμάτων					
ΔΑ	10	Σάκκους καφὲ μικτοῦ βάρους=750 ὀκ.				
25 - 34		Ἀπόβαρον $1\frac{1}{2}$ % 11 ὀκ. 300 δρ.				
		Καθαρὸν βάρος 738 ὀκ. 300 δρ.				
		3,50 δρχ.	2585	60		
		Ἔκπτωσις 2 %	51	70	2533	90
		Συσκευὴ σάκκων 0,80 δρχ. κατὰ σάκκον			8	—
		Ἀξία τοῖς μετρητοῖς δραχ.			2541	90
		Δ. Α.				

25) Παραγγελιοδόχος τις ἐν Βόλῳ ἠγόρασε διὰ λογαριασμὸν ἐμπόρου τινὸς ἐξ Ἀθηνῶν 2450 ὀκ. καπνοῦ Θεσσαλίας πρὸς 3,45 δραχ. τὴν ὀκᾶν μὲ 2 % ἔκπτωσιν· λογαριάζει δὲ καὶ τὰ ἑξῆς ἔξοδα: μεσιτείαν ἀγορᾶς $\frac{7}{8}$ %, δι' ἀσφάλιστρα 145,15 δραχ. καὶ διάφορα ἄλλα ἔξοδα 45,50 δραχ. καὶ τέλος προμήθειάν του 2 % (ἐπὶ τῆς τιμῆς τοῦ ἐμπορεύματος μετὰ τῶν ἐξόδων). Πόση εἶναι ἡ προμήθεια καὶ πόσον θὰ στοιχίσῃ τὸ ἐμπόρευμα τοῦτο;

Αἱ πράξεις διατάσσονται οὕτω:

2450 ὀκ. καπνοῦ πρὸς 3,45 δρχ.		8452,50
ἔκπτωσις 2 %		169,05
μεσιτεία πρὸς $\frac{7}{8}$ (ἐπὶ 8283,45 δρχ.)	=72,50 δρχ.	8283.45
ἀσφάλιστρα	=145,15	
διάφορα ἄλλα ἔξοδα	= 45,50	263,15
		8546,60
Προμήθεια πρὸς 2 % (ἐπὶ 8546,60)		170,93
Ὁλικὴ ἀξία δραχ.		8717,53

Σημ. *Ὁ τοιοῦτος λογαριασμὸς καλεῖται* **« λ/σμὸς ἀγορᾶς »** *συντάσσεται ὑπὸ τοῦ παραγγελιοδόχου καὶ ἀποστέλλεται εἰς τὸν ἐντολέα διὰ λ/σμὸν τοῦ ὁποίου ἐγένετο ἡ ἀγορά.*

26) Παραγγελιοδόχος τις ἐν Βόλῳ ἐπώλησε διὰ λ/σμὸν κτηματίου τινὸς ἐκ Λαρίσης 12500 ὀκ. σίτου πρὸς 43 $\frac{1}{2}$ λεπτὰ τὴν ὀκᾶν, λογαριάζει δὲ δι' ἐνοίκιον ἀποθήκης 12,50 δραχ. δι' ἀσφάλιστρα 1 $\frac{1}{4}$ % ἐπὶ ἀξίας σίτου 6000 δραχ. μεσιτείαν πωλήσεως $\frac{7}{8}$ % καὶ προμήθειαν 2 %. Ποῖον εἶναι τὸ καθαρὸν προϊόν, ὅπερ δικαιοῦται νὰ λάβῃ ὁ κτηματίας;

Αἱ πράξεις διατάσσονται οὕτω:

12500 ὀκ. σίτου πρὸς 43 $\frac{1}{2}$ λεπτὰ κατ' ὀκᾶν δρχ.			5437,50
Ἔξοδα			
Ἐνοίκιον ἀποθήκης ·	δραχ.	12,50	
Ἀσφάλιστρα πρὸς 1 $\frac{1}{4}$ ‰ (ἐπὶ 6000 δρ.)	»	7,50	
Μεσιτεία πωλήσ. πρὸς $\frac{7}{8}$ % (ἐπὶ 5437,50 δρ.)	»	47,60	
Προμήθεια πρὸς 2 % (ἐπὶ 5437,50 δρ.)	»	108,75	176,35
Καθαρὸν προϊὸν πωλήσεως ὑπὲρ τοῦ ἐντολέως δρχ.			5261,15

Σημ. *Οἱ τοιοῦτοι λογαριασμοὶ καλοῦνται* **«λ/σμοὶ πωλήσεως»**, *συντάσσονται δὲ παρὰ τοῦ παραγγελιοδόχου καὶ ἀποστέλλονται εἰς τὸν ἐντολέα.*

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΟΚΟΥ

233) Καθ' ὃν τρόπον μισθώνοντες μίαν οἰκίαν μας λαμβάνομεν διὰ τὴν προσωρινὴν χρησιμοποίησιν αὐτῆς ἀποζημίωσίν τινα, ἥτις καλεῖται ἐνοίκιον, οὕτω καὶ ὅταν δανείζομεν ποσόν τι χρημάτων π.δ.χ. 30000 δραχμὰς εἴς τινα ἄλλον διὰ νὰ χρησιμοποιήσῃ ταῦτα, ἐπὶ ὡρισμένον χρονικὸν διάστημα, λαμβάνομεν παρ' αὐτοῦ ἀποζημίωσίν τινα, ἥτις δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς *ἐνοίκιον* τοῦ ἐν λόγῳ χρηματικοῦ ποσοῦ.

Τὸ χρηματικὸν ποσὸν ὅπερ δανείζομεν καλεῖται *κεφάλαιον*, τὸ δὲ ἐνοίκιον τοῦτο *τόκος*· ἡ δὲ διάρκεια τοῦ δανείου καλεῖται *χρόνος* καὶ μετρεῖται μὲ τὰς συνήθεις μονάδας τοῦ χρόνου ἤτοι ἔτη, μῆνας καὶ ἡμέρας. Διὰ τὴν ἁπλοποίησιν τῶν ὑπολογισμῶν οἱ ἔμποροι καθιέρωσαν ὡς μονάδα χρόνου τὸ ἐμπορικὸν ἔτος (§ 194).

Ὁ τόκος δι' ἑκάστην ἑκατοντάδα τοῦ κεφαλαίου εἰς ἓν ἔτος καλεῖται *ἐπιτόκιον*.

Τὸ ἐπιτόκιον παρίσταται διὰ τοῦ συμβόλου % π.δ.χ. 6 % σημαίνει ὅτι 100 δραχ. κεφάλαιον εἰς 1 ἔτος ἀποφέρει τόκον 6 δραχμάς. Ἐνίοτε διὰ τὸ ἐπιτόκιον λαμβάνεται ὡς χρονικὴ μονὰς τὸ ἑξάμηνον ἢ ὁ μήν.

Ὁ τόκος καλεῖται *ἁπλοῦς* ὅταν οὗτος εἰς τὸ τέλος ἑκάστης χρονικῆς μονάδος δὲν προστίθεται εἰς τὸ κεφάλαιον, ὥστε νὰ φέρῃ καὶ οὗτος τόκον. Ἐν ἐναντίᾳ περιπτώσει καλεῖται σύνθετος. Ἐνταῦθα θὰ γίνῃ λόγος περὶ προβλημάτων ἁπλοῦ τόκου.

Ἐπειδὴ εἰς ἕκαστον πρόβλημα τόκου θεωροῦμεν τέσσαρα ποσά, κεφάλαιον, τόκον, χρόνον καὶ ἐπιτόκιον, ἐξ ὧν θὰ εἶναι δεδομένα τὰ τρία καὶ θὰ ζητεῖται τὸ τέταρτον, διὰ τοῦτο διακρίνομεν τέσσαρα εἴδη προβλημάτων τόκου.

Α') Προβλήματα ἐν οἷς ζητεῖται ὁ τόκος.

1) Πόσον τόκον φέρουσι 585 δραχ. πρὸς 8 % τοκιζόμεναι ἐπὶ 3 ἔτη;

Τὸ πρόβλημα τοῦτο δύναται νὰ καταστρωθῇ ὡς πρόβλημα τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν ὡς ἑξῆς:

100 δρχ.	εἰς	1 ἔτ.	φέρουσι	8 δρχ. τόκ.
585 δρχ.	»	3 ἔτ.		χ

Τὸ κεφάλαιον καὶ ὁ τόκος εἶναι ποσὰ ἀνάλογα διότι διπλάσιον κεφάλαιον ἤτοι 200 δραχ. κατὰ τὸν αὐτὸν χρόνον (1 ἔτος) φέρει τόκον διπλάσιον ἤτοι 16 δραχ. Ὡσαύτως ὁ χρόνος καὶ ὁ τόκος εἶναι ποσὰ ἀνάλογα διότι τὸ αὐτὸ κεφάλαιον (100 δραχ.) εἰς διπλάσιον χρόνον ἤτοι εἰς 2 ἔτη φέρει τόκον διπλάσιον ἤτοι 16 δραχ. Ὅθεν κατὰ τὸν κανόνα (§ 230) θὰ ἔχωμεν $\chi = 8 \times \frac{585}{100} \times \frac{3}{1} = \frac{8 \times 585 \times 3}{100} = 140{,}40$ δραχμάς.

Κατὰ ταῦτα ὁ τόκος εὑρίσκεται συντόμως ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸ κεφάλαιον (585 δραχ.) ἐπὶ τὸν χρόνον (ἔτη 3) καὶ ἐπὶ τὸ ἐπιτόκιον (8) καὶ τὸ γινόμενον διαιρέσωμεν διὰ τοῦ 100.

2) Πόσον τόκον φέρουσι αἱ 375 δραχ. εἰς 5 μῆνας πρὸς 9 % τοκιζόμεναι;

Καταστρώνομεν τὸ πρόβλημα.

$$\frac{100\ \delta\rho\chi.}{75\ \delta\rho\chi.}\quad \frac{12\ \mu\eta\nu.}{5\ \mu\eta\nu.}\quad \frac{9}{\chi}\quad \chi = 9 \times \frac{375}{100} \times \frac{5}{12} = \frac{9\times375\times5}{100\times2}$$

$= 14{,}06$ δραχ. ἤτοι πολλαπλασιάζομεν καὶ ἐνταῦθα τὸ κεφάλαιον ἐπὶ τὸν χρόνον καὶ ἐπὶ τὸ ἐπιτόκιον καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ 100×12 ἢ 1200.

3) Πόσον τόκον φέρουσιν αἱ 780 δραχ, εἰς 260 ἡμέρας πρὸς 10 %, τοκιζόμεναι ;

Κατάστρωσις.

$$\frac{100\ \delta\rho\chi.}{780\ \delta\rho\chi.}\quad \frac{360\ \acute{\eta}\mu}{260}\quad \frac{10\ \delta\rho\chi.}{\chi}\quad \chi=10\times\frac{780}{100}\times\frac{260}{360}=\frac{10\times780\times260}{100\times360}$$

$= 56{,}33$ ἤτοι πολλαπλασιάζομεν τὸ κεφάλαιον ἐπὶ τὸν χρόνον καὶ ἐπὶ τὸ ἐπιτόκιον καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ 100×360 ἢ 36000.

Κατὰ ταῦτα ἐὰν παραστήσωμεν διὰ τοῦ γράμματος (Κ) τὸ κεφάλαιον, διὰ τοῦ (Π) τὸ ἐπιτόκιον, διὰ τοῦ (Τ) τὸν τόκον καὶ τὸν χρόνον διὰ τοῦ (Ε) μὲν εἰς ἔτη, διὰ τοῦ (Μ) εἰς μῆνας καὶ διὰ τοῦ (Η) εἰς ἡμέρας, θὰ ἔχωμεν πρὸς εὕρεσιν τοῦ τόκου τοὺς ἑξῆς τύπους,

$T = \frac{K.\Pi.E.}{100}$, $T = \frac{K.\Pi.M.}{1200}$, $T = \frac{K.\Pi.H.}{36000}$ ἤτοι πρὸς εὕρεσιν τοῦ τόκου, ὅταν εἶναι ἄγνωστος, ἔχομεν τὸν ἑξῆς πρακτικὸν κανόνα.

234) «Εὑρίσκομεν τὸν ζητούμενον τόκον, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὰ τρία δεδομένα, κεφάλαιον, χρόνον καὶ ἐπιτόκιον καὶ διαιρέσωμεν διὰ τοῦ 100ἢ 1200 ἢ 36000 ἂν ὁ χρόνος εἶναι ἐκπεφρασμένος εἰς ἔτη, εἰς μῆνας ἢ εἰς ἡμέρας.

Σημ. *Ἐὰν ὁ χρόνος εἶναι συμμιγὴς ἀριθμός, τρέπομεν αὐτὸν εἰς μονάδας μιᾶς τάξεως καὶ ἐφαρμόζομεν ἔπειτα τὸν ἄνω κανόνα.*

Παραδείγματα.

1) Εὑρεῖν τὸν τόκον 1575 δραχ. πρὸς 8 % α′ εἰς 5 ἔτ. 6′ εἰς 7 μην. καὶ γ′ εἰς 75 ἡμέρας.

Ὁ τόκος διὰ 5 ἔτη εἶχε $T = \frac{1575\times8\times5}{100} = 630$ δραχ.

» » » 8 μῆν. » $T = \frac{1575\times8\times7}{1200} = 73{,}50$ δραχ.

» » » 75 ἡμ. » $T = \frac{1575\times8\times75}{36000} = 26{,}25$ δραχ.

Ὑπολογισμὸς τοῦ τόκου διὰ τῶν τοκαρίθμων καὶ τῶν σταθερῶν διαιρετῶν.

Ὅταν ὁ χρόνος εἶναι ἐκπεφρασμένος εἰς ἡμέρας δυνάμεθα καὶ ἁπλούστερον νὰ ὑπολογίσωμεν τὸν τόκον. Ὡς γνωστὸν ὁ τόκος ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει δίδεται διὰ τοῦ ἑξῆς τύπου : $T = \frac{K.H.\Pi.}{36000}$. Ἐὰν διαιρέσωμεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος διὰ τοῦ ἐπιτοκίου Π, λαμβάνομεν τὸν ἑπόμενον τύπον $T = \frac{K.H}{\Delta}$ ἔνθα $\Delta = \frac{36000}{\Pi}$. Τὸ γινόμενον Κ.Η ἤτοι τοῦ κεφαλαίου ἐπὶ τὰς ἡμέρας καλεῖται *τοκάριθμος τοῦ κεφαλαίου*, τὸ δὲ Δ ἤτοι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως 36000 διὰ τοῦ ἐπιτοκίου καλεῖται *σταθερὸς διαιρέτης τοῦ ἐπιτοκίου.*

Ἐντεῦθεν συνάγομεν τὸν ἑξῆς πρακτικὸν κανόνα :

235) «Πρὸς εὕρεσιν τοῦ τόκου κεφαλαίου τινὸς δι' ἀριθμόν τινα ἡμερῶν, διαιροῦμεν τὸν τοκάριθμον τοῦ κεφαλαίου διὰ τοῦ σταθεροῦ διαιρέτου τοῦ ἐπιτοκίου».

Πίναξ σταθερῶν διαιρετῶν

%	Σταθεροὶ διαιρέται	%	Σταθεροὶ διαιρέται
3	12000	7	5143
4	9000	7,5	4800
4,5	8000	8	4500
5	7200	9	4000
6	6000	10	3600

Παραδείγματα.

1) Εὑρεῖν τὸν τόκον τῶν 500 δραχ. πρὸς 9 % ἀπὸ τῆς 7 Σεπτεμβρίου μέχρι 15 Δεκεμβρίου τοῦ αὐτοῦ ἔτους.

Λύσις. Ἐπειδὴ ἀπὸ τῆς 7ης Σεπτεμβρίου μέχρι τῆς 15 Δεκεμβρίου εἶναι 98 ἡμέραι, ὁ τοκάριθμος θὰ εἶναι $500 \times 98 = 49000$, διαιρούμενος δὲ οὗτος διὰ τοῦ σταθεροῦ διαιρέτου 4000 τοῦ ἐπιτοκίου 9 % ($\frac{36000}{9} = 4000$) μᾶς δίδει τὸν ζητούμενον τόκον.

$$T = 49000 : 4000 = 12{,}25 \text{ δραχμ.}$$

2) Εὑρεῖν τὸν τόκον πρὸς 8 % τῶν ἑξῆς κεφαλαίων α' 4800 δραχ. 75 ἡμέρ. β' 5600 δραχ. διὰ 62 ἡμ. καὶ γ') 8400 δραχ. εἰς 35 ἡμέρας.

Λύσις. Ὁ τόκος τοῦ α' κεφαλαίου θὰ εἶναι $\frac{4800 \times 75}{4500}$, τοῦ δὲ β' $\frac{5600 \times 62}{4500}$ καὶ τοῦ γ' $\frac{8400 \times 35}{4500}$. Ἄρα ὁ ζητούμενος τόκος θὰ εἶναι τὸ ἄθροισμα τούτων ἤτοι $T = \frac{8400 \times 75}{4500} + \frac{5600 \times 62}{4500} + \frac{8400 \times 35}{4500}$ ἤ

$T = \frac{360000 + 397200 + 294000}{4500}$ ἐξ οὗ συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

236) «Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν τόκον πολλῶν κεφαλαίων πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπιτόκιον ἐπὶ οἱαδήποτε χρονικὰ διαστήματα (εἰς ἡμέρας) προσθέτομεν τοὺς τοκαρίθμους αὐτῶν καὶ τὸ ἄθροισμα διαιροῦμεν διὰ τοῦ σταθεροῦ διαιρέτου τοῦ δεδομένου ἐπιτοκίου».

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται συντόμως ὡς ἑξῆς :

Κεφάλαια		ἡμέραι		τοκάριθμοι
4800	×	75	=	360.000
5600	×	62	=	397.200
8400	×	35	=	294.000
				10512(00

10512(00 : 45(00 = 233,60 δρχ.

Ὅθεν ὁ ὁλικὸς τόκος εἶναι $T = 233,60$ δραχ.

Β΄) Προβλήματα ἐν οἷς ζητεῖται τὸ κεφάλαιον.

38) 1) Ποῖον κεφάλαιον πρὸς 9 % τοκιζόμενον εἰς 3 ἔτη φέρει τόκον 250,40 δραχ.;

Τὸ πρόβλημα τοῦτο καταστρώνεται ὡς ἑξῆς:

$$\frac{100 \text{ δραχ.}}{\chi} \quad \frac{1 \text{ ἔτος}}{3 \text{ ἔτη}} \quad \frac{9 \text{ δραχ.}}{250,40 \text{ δραχ.}}$$

Ἐνταῦθα παρατηροῦμεν ὅτι τὸ κεφάλαιον καὶ ὁ χρόνος εἶναι ποσὰ ἀντιστρόφως ἀνάλογα, διότι ἂν αἱ 100 δραχ. εἰς 1 ἔτος φέρουσι τόκον 9 δραχ. διὰ νὰ λάβωμεν τὸν αὐτὸν τόκον εἰς διπλάσιον χρόνον ἤτοι εἰς δύο ἔτη πρέπει νὰ ἔχωμεν τὸ ἥμισυ τοῦ προηγουμένου κεφαλαίου ἤτοι 50 δρχ.

Ὅθεν θὰ ἔχωμεν: $\chi = 100 \times \frac{1}{3} \times \frac{250,40}{9} = \frac{100 \times 250,40}{3 \times 9} = 927$ δραχμάς.

2) Ποῖον κεφάλαιον πρὸς 10 % τοκιζόμενον εἰς 28 μῆνας φέρει τόκον 240 δραχ;

Καταστρώνομεν τὸ πρόβλημα οὕτως:

$$\frac{100 \text{ δραχ.}}{\chi} \quad \frac{12 \text{ μην.}}{28 \text{ μην.}} \quad \frac{10 \text{ δραχ.}}{240 \text{ δρχ.}} \qquad \chi = 100 \times \frac{12}{28} \times \frac{240}{10} = \frac{100 \times 12 \times 240}{28 \times 10}$$

$= 1028,57$ δραχ.

3) Ποῖον κεφάλαιον πρὸς 8 % τοκιζόμενον εἰς 85 ἡμέρας φέρει τόκον 56 δραχ.;

Καταστρώνοντες τὸ πρόβλημα ἔχομεν:

$\frac{100 \text{ δραχ.}}{\chi} \quad \frac{360 \text{ ἡμ.}}{85 \text{ ἡμ.}} \quad \frac{8 \text{ δραχ.}}{56}$ εὑρίσκομεν $\chi = 100 \times \frac{360}{85} \times \frac{56}{8} = \frac{100 \times 360 \times 56}{85 \times 8} = 2964,70$ δραχ.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὸν ἑξῆς πρακτικὸν κανόνα:

237) «Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ κεφάλαιον, πολλαπλασιάζομεν τὸν δεδομένον τόκον ἐπὶ 100 ἢ 1200 ἢ 36000 καθ' ὅσον ὁ χρόνος εἶναι ἐκπεφρασμένος εἰς ἔτη ἢ μῆνας ἢ ἡμέρας καὶ διαιροῦμεν διὰ τοῦ γινομένου τῶν δύο ἄλλων δεδομένων τοῦ χρόνου καὶ τοῦ ἐπιτοκίου»· ἤτοι ἔχομεν τοὺς ἑξῆς τύπους.

$$K = \frac{T \times 100}{\Pi.\ E} \text{ ἢ } K = \frac{T \times 1200}{\Pi.\ M} \text{ ἢ } K = \frac{T \times 36000}{\Pi.\ H}$$

Γ΄) Προβλήματα ἐν οἷς ζητεῖται ὁ χρόνος.

34) 1) Εἰς πόσον χρόνον κεφάλαιον 1450 δραχ. πρὸς 9 % τοκιζόμενον φέρει τόκον 205 δραχ;

Κατάστρωσις τοῦ προβλήματος.

$$\frac{100 \text{ δραχ.}}{1450} \quad \frac{1 \text{ ἔτ.}}{\chi} \quad \frac{9 \text{ δραχ.}}{205} \qquad \chi = 1 \times \frac{100}{1450} \times \frac{205}{9} = \frac{100 \times 205}{1450 \times 9}$$

$= \frac{410}{261} = 1$ ἔτ. 6 μην. 25 ἡμ.

Ἐντεῦθεν συνάγομεν τὸν ἑξῆς πρακτικὸν κανόνα.

238) «Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν χρόνον ἐκπεφρασμένον εἰς ἔτη, πολλαπλασιάζομεν τὸν δεδομένον τόκον ἐπὶ 100 καὶ διαιροῦμεν διὰ τοῦ γινομένου τῶν δύο ἄλλων δεδομένων, τοῦ κεφαλαίου καὶ τοῦ ἐπιτοκίου, ἤτοι ἔχομεν τὸν ἑξῆς τύπον $E = \frac{T \times 100}{K.\,\Pi}$.

Δ΄) Προβλήματα ἐν οἷς ζητεῖται τὸ ἐπιτόκιον.

1) Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον τοκιζόμεναι αἱ 2480 δραχ. φέρουσι εἰς 5 ἔτη τόκον 1350 δραχ.;

Κατάστρωσις τοῦ προβλήματος.

$\frac{2480 \text{ δραχ.}}{100 \text{ δραχ.}}\quad \frac{5 \text{ ἔτ.}}{1}\quad \frac{1350 \text{ δραχ.}}{\chi}\qquad \chi = 1350 \times \frac{100}{2480} \times \frac{1}{5} = \frac{1350 \times 100}{2480 \times 15}$ $= 10{,}86\,\%$ ἤτοι πολλαπλασιάζομεν τὸν δεδομένον τόκον ἐπὶ 100 καὶ διαιροῦμεν διὰ τοῦ γινομένου τῶν δύο ἄλλων δεδομένων ἤτοι τοῦ κεφαλαίου καὶ τοῦ χρόνου. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον εὑρίσκομεν τὸ ἐπιτόκιον, ὅταν ὁ χρόνος εἶναι ἐκπεφρασμένος εἰς μῆνας ἢ ἡμέρας, μὲ μόνην τὴν διαφορὰν ὅτι θὰ πολλαπλασιάζωμεν τὸν τόκον ἐπὶ 1200 ἢ 36000.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὸν ἑξῆς πρακτικὸν κανόνα.

239) «Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐπιτόκιον, πολλαπλασιάζομεν τὸν δεδομένον τόκον ἐπὶ 100 ἢ 1200 ἢ 36000 καθ' ὅσον ὁ χρόνος εἶναι ἐκπεφρασμένος εἰς ἔτη ἢ μῆνας ἢ ἡμέρας, καὶ διαιροῦμεν διὰ τοῦ γινομένου τῶν δύο ἄλλων δεδομένων».

Ἤτοι θὰ ἔχωμεν γενικῶς $\Pi = \frac{T \times 100}{K.E}$ ἢ $\Pi = \frac{T \times 1200}{K.M}$ ἢ $\Pi = \frac{T \times 36000}{K.H}$.

Γενικὸς κανών.

Ἐκ τῆς λύσεως τῶν προβλημάτων τόκου καὶ τῶν τεσσάρων εἰδῶν συνάγομεν τὸν ἑπόμενον πρακτικὸν κανόνα.

240) «Ἂν μὲν εἶναι ἄγνωστος ὁ τόκος, πρὸς εὕρεσιν αὐτοῦ πολλαπλασιάζομεν τὰ τρία δεδομένα ποσὰ καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ 100 ἢ 1200 ἢ 36000. Ἂν δὲ τοῦ τόκου ὄντος γνωστοῦ ζητεῖται ἓν ἐκ τῶν τριῶν ἄλλων ποσῶν, πολλαπλασιάζομεν τοῦτον ἐπὶ 100 ἢ 1200 ἢ 36000 καὶ τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο διαιροῦμεν διὰ τοῦ γινομένου τῶν δύο ἄλλων δεδομένων ποσῶν».

Πολλάκις ἐν τῷ πρακτικῷ βίῳ παρουσιάζονται προβλήματα τόκου, εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται τὸ κεφάλαιον ἢ ὁ τόκος, δεδομένων τοῦ ἀθροίσματος τοῦ κεφαλαίου καὶ τοῦ τόκου, τοῦ χρόνου, καὶ τοῦ ἐπιτοκίου.

241) Ἔστω πρὸς λύσιν τὸ ἑξῆς πρόβλημα.

Ποῖον εἶναι τὸ κεφάλαιον ὅπερ πρὸς 8 % τοκισθὲν ἐπὶ 3 ἔτη ἐγένετο μετὰ τοῦ τόκου του 7250 δραχ.;

Πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος τούτου εὑρίσκομεν τὸν τόκον τῶν 100 δραχ. εἰς 3 ἔτη ἤτοι 24 δραχ. ὅθεν γνωρίζομεν ὅτι αἱ 100 δραχ. μετὰ 3 ἔτη γίνονται μετὰ τοῦ τόκου των 124 δραχ.

Καταστρώνομεν ἤδη πρόβλημα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν.

Κεφαλ.		ἄθρ. κεφ. καὶ τόκου
100 δραχ.	δίδουσι	124 δραχ.
χ	»	7250 δραχ.

$$χ = 100 \times \frac{7250}{124} = 5846,77$$

Ὁ ἐμπεριεχόμενος τόκος εἶναι 7250—5846,77=1403,23. Ἀλλὰ δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸν τόκον καταστρώνοντες τὸ πρόβλημα ὡς ἑξῆς:

Τόκ.		ἄθρ. κεφ. καὶ τόκου
24 δραχ.	ἐμπεριέχεται εἰς	124 δραχ.
χ	»	7250

$$χ = 24 \times \frac{7250}{124} = 1403,23$$

Παρατ. *Δὲν δυνάμεθα νὰ λύσωμεν τὸ προηγούμενον πρόβλημα καταστρώνοντες τοῦτο ὡς πρόβλημα τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν δηλ. ὡς ἑξῆς :*

			κεφ. σὺν τῷ τόκῳ
100 δραχ. κεφαλ.	εἰς 1 ἔτ.	δίδει	108 δραχ.
χ	» 3 »	δίδουσι	7250 δραχ.

καὶ τοῦτο διότι μεταξὺ χρόνου καὶ ἀθροίσματος κεφαλαίου καὶ τόκου δὲν ὑπάρχει σχέσις οὔτε εὐθέως οὔτε ἀντιστρόφως ἀνάλογος. Αἱ 100 δραχ. εἰς 1 ἔτος γίνονται μετὰ τοῦ τόκου των 108 δραχ., ἀλλ' αἱ αὐταὶ 100 δραχ. εἰς 2 ἔτη δὲν γίνονται μετὰ τοῦ τόκου των διπλάσιαι τῶν 108 δρχ. ἤτοι 216 δραχ. Δὲν δύναται δὲ νὰ καταστρωθῇ πρόβλημα τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν ἂν τὰ ποσά, μὲ τὰ ὁποῖα καταστρώνεται τοῦτο, δὲν εἶναι πρὸς ἄλληλα ἀνὰ δύο εὐθέως ἢ ἀντιστρόφως ἀνάλογα.

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

Α') *Ἀπὸ μνήμης.*

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν τόκον κεφαλαίου τινὸς ἀπὸ μνήμης εἰς ἓν ἔτος λαμβάνομεν τὸ ἑκατοστὸν τοῦ κεφαλαίου καὶ τοῦτο πολ)ζομεν ἐπὶ τὸ ἐπιτόκιον.

1) Πόσος εἶναι ὁ τόκος 2000 δρχ. εἰς 1 ἔτος πρὸς $4 \frac{1}{2}$ %;

2) » » » » 1200 φράγ. » 2 ἔτη πρὸς 6 %;

3) » » » » 1500 μάρκ. » 4 ἔτη » $3 \frac{1}{2}$ %;

4) » » » » 875 λ. Ἀγ. » $\frac{1}{3}$ ἔτη » 3 %;

5) » » » » 1333,33 ρ. » 2 ἔτη » 5 %;

6) » » » » 1000 φ. Ὀλ. » $2 \frac{1}{2}$ » $4 \frac{1}{2}$ %;

7) » » » » 640 Ἰταλ. λ. » 9 μην. » 4 %;

8) » » » » 2500 δολλ. » 3 μην. » $3 \frac{1}{3}$ %;

9) » » » » 720 πεσετ. » 8 μῆν. » 5 %;

10) Ἐάν τις λαμβάνῃ κατὰ μῆνα τόκον 1 λεπτὸν δι' ἑκάστην δραχμὴν κεφαλαίου, πρὸς πόσον τοῖς ἑκατὸν κατ' ἔτος τοκίζει τὰ χρήματά του;

Β') *Γραπτῶς.*

1) Πόσον τόκον φέρουσιν αἱ 8458,60 δραχ. εἰς 8 μῆνας πρὸς 7 $\frac{3}{4}$ % ἐτησίως; (ἀπ. 437,02 δραχ.)

2) Πόσον τόκον φέρουσιν αἱ 12475,20 δραχ. εἰς 75 ἡμέρας πρὸς 8 %; (ἀπ. 207,92 δραχ.)

3) Ποῖον κεφάλαιον εἰς 185 ἡμ. πρὸς 8 $\frac{1}{2}$ % τοκιζόμενον φέρει τόκον 245,60 δραχμάς; (ἀπ. 5622,64 δραχ.)

4) Εἰς πόσον χρόνον 850 δραχ. πρὸς 7 $\frac{1}{2}$ % φέρουσι τόκον 119,50 δραχ; (ἀπ. εἰς 1 ἔτ. 10 μην. 15 ἡμ.)

5) Κεφάλαιον 1620 δραχ. ἔφερε τόκον 120,48 δραχ. ἀπὸ τῆς 31ης Δεκεμβρίου 1912 μέχρι τῆς 30ῆς 7)βρίου 1913. Ποῖον εἶναι τὸ ἐπιτόκιον; (ἀπ. 9,9 %).

6) Πόσον τόκον φέρουσι 917 λίρ. 10 σελ. 4 πέν. ἀπὸ τῆς 2ας Ἰανουαρίου μέχρι τῆς 15ης Ἰουνίου τοῦ αὐτοῦ ἔτους πρὸς 3 $\frac{1}{3}$ %; (α' μὲ ἐμπορικὸν ἔτος καὶ β' μὲ πολιτικὸν ἔτος);

(ἀπ. α' 13 λίρ. 17 σελ. β'. 13 λίρ. 18 σελ. 2 πέν.)

7) Μία μερὶς τεΐου ἀγορασθεῖσα τὴν 18ην Ἰουλίου 1912 ἀντὶ 3650 δραχ. μετεπωλήθη τὴν 15ην Ἰανουαρίου 1913 ἀντὶ 3945 δραχ. Πόσον τοῖς ἑκατὸν κερδίζει κατ' ἔτος ὁ ἔμπορος οὗτος; (ἀπ. 16,6 %).

8) Ἐδανείσαμεν κεφάλαιον 12060 δραχ. πρὸς 5 % κατ' ἔτος· εἰς διάστημα 1 ἔτ. 4 μην. ἐλάβομεν ἀπέναντι τῶν τόκων 519,40 δραχ. Πόσον τόκον ἔχομεν νὰ λάβωμεν ἀκόμη; (ἀπ. 284,60 δραχ).

9) Πότε μᾶς ἀπεδόθη κεφάλαιόν τι 2217,03 δραχ. ὅπερ ἐδανείσαμεν τὴν 27 Ἰουλίου τοῦ 1912, ἐὰν ὁ εἰσπραχθεὶς τόκος πρὸς 3 % εἶναι 30,41 δραχ; (ἀπ. τὴν 10ην Ἰανουαρίου)

10) Ἐδανείσαμεν 14076 δραχ. πρὸς 8 %. Τί μένει ἀπὸ τὸν τόκον τοῦ κεφαλαίου τούτου ἐπὶ 45 ἡμέρας, ἐὰν πληρώσωμεν μίαν ἐνδυμασίαν 85,40 δραχ. καὶ ἓν ζεῦγος ὑποδημάτων ἀξίας 28,30 δραχ;

(ἀπ. τοῦ ἔλειψαν 35.50 δραχ.)

11) Εἰς πόσον χρόνον κεφάλαιόν τι πρὸς 8 % τοκιζόμενον ἐπὶ ἁπλῷ τόκῳ διπλασιάζεται; (ἀπ. 12 $\frac{1}{2}$ ἔτη.)

12) Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον κεφάλαιόν τι τοκιζόμενον ἐπὶ ἁπλῷ τόκῳ ἐπὶ 15 ἔτη διπλασιάζεται; (ἀπ. 6 $\frac{2}{3}$ %).

13) Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον κεφάλαιον 18270 δραχ. τοκιζόμενον ἀνέρχεται μετὰ 133 ἡμέρας εἰς 18637,50 δραχ; (ἀπ. 5,44 %).

14) Ἰδιοκτήτης τις λαμβάνει κατὰ μῆνα ἐκ τῆς οἰκίας 125 δραχ. ἐξοδεύει δὲ κατ' ἔτος δι' ἐπισκευὰς 115,80 δραχ. καὶ διὰ φόρον 7,4 % ἐπὶ τοῦ ἐτησίου εἰσοδήματος. Ποῖον κεφάλαιον ἀντιπροσωπεύει ἡ οἰκία αὕτη τοῦ τόκου ὑπολογιζομένου πρὸς 5 %; (ἀπ. 25464).

15) Οἱ ἐτήσιοι τόκοι δημοσίου τινὸς δανείου 10.500.000 ἀνέρχονται εἰς 67800 δραχ. Πόσον εἶναι τὸ ἐπιτόκιον; (ἀπ. 3,50 %).

16) Μία μετοχὴ τῆς ἐθνικῆς Τραπέζης ἀξίας 3985,40 δραχ. δίδει καθ' ἑξαμηνίαν μέρισμα 85 δραχ. Πόσον τοῖς ἑκατὸν κατ' ἔτος λαμβάνει τόκον ὁ κάτοχος αὐτῆς; (ἀπ. $4\frac{1}{4}$ % (4,26 %)

17) Ἐργοστασιάρχης τις ἠγόρασε 52 δέματα (μπάλες) ἐρίου, ἕκαστον δέμα ζυγίζει 145 ὀκ. καὶ 1 ὀκὰ τιμᾶται 2,85 δραχ. Τὸ κεφάλαιον τοῦτο ἐδανείσθη πρὸς 8 % καὶ δὲν ἐπλήρωσε τόκον ἐπὶ 3 ἔτη. Πόσον ποσὸν χρεωστεῖ ἤδη; (ἀπ. 26646,36 δραχ. κεφάλ. καὶ τόκους ὁμοῦ).

18) Γεωργός τις ἐπώλησεν 72 πρόβατα τῶν ὁποίων τὴν ἀξίαν μετὰ τῶν τόκων αὐτῆς ἐπληρώθη μετὰ $2\frac{1}{2}$ ἔτη. Οἱ τόκοι οὓς ἔλαβεν κατὰ τὸν χρόνον τοῦτον πρὸς $4\frac{3}{4}$ % ἀνέρχονται εἰς 213,75 δραχ. Ζητεῖται πόσον ἐπώλησεν ἕκαστον πρόβατον (ἀπ. 25 δρχ.)

19) Ἔμπορός τις ἐπώλησε 30 βαρέλια ἐλαίου φαλαίνης χωρητικότητος ἕκαστον 750 λιτρῶν. Πωλεῖ τὸ ἔλαιον τοῦτο προς 110 δραχ. τὸ ἑκατόλιτρον καὶ δανείζει τὸ κεφάλαιον τοῦτο πρὸς $4\frac{1}{2}$ %. Ἐκ τοῦ κεφαλαίου τούτου ἔλαβε μετά τινα χρόνον τόκους ἐν ὅλῳ 9750 δραχ. Ἐπὶ πόσον χρόνον εἶχε τοκίσει τὸ κεφάλαιον τοῦτο;

(ἀπ. 8 ἔτη καὶ 1 μῆνα περίπου)

20) Ἡ ὑπηρεσία ἑνὸς δημοσίου δανείου ἀπαιτεῖ κατ' ἔτος 1.500.000 δρχ. διὰ τόκους. Τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ δανείου εἶνε πρὸς 4 % τὸ δὲ $\frac{1}{3}$ πρὸς 5 % Εἰς πόσον ἀνέρχεται τὸ χρέος τοῦτο; (ἀπ. 35.000.000 δραχ.)

21) Εἰς πόσον ἀνέρχεται μία περιουσία ἥτις φέρει κατὰ μῆνα τόκους 108 δρχ. ἐξ ὧν τὸ $\frac{1}{2}$ προέρχεται ἐξ ἑνὸς κεφαλαίου πρὸς 4 %, τὸ δὲ ἕτερον ἥμισυ ἐξ ἑνὸς κεφαλαίου πρὸς $4\frac{1}{2}$ %; (ἀπ. 30600 δρχ.).

22) Ἡ οἰκοδομὴ οἰκίας τινὸς ἀπῄτησε 85500 δραχ. ἡ οἰκία αὕτη εἶναι βεβαρυμένη μὲ χρέος 24000 δρχ. πρὸς $7\frac{1}{2}$ %· ὁ ἐτήσιος φόρος ἀνέρχεται εἰς 452,25 δραχ. δι' ἐπισκευὰς δὲ καὶ λοιπὰ ἀπαιτοῦνται ἐτησίως 378,75 δρχ. Ἐὰν τὸ ἐτήσιον εἰσόδημα ἀνέρχηται εἰς 5400 δραχ. πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον τοκίζεται τὸ κεφάλαιον τὸ ὁποῖον ἀντιπροσωπεύει ἡ οἰκία; (ἀπ. 3,24 % περίπου)

23) Πόσος εἶναι ὁ τόκος δανείου πρὸς 6 %, ὅπερ μετὰ 2 ἔτη 3 μῆνας ἀνῆλθε μετὰ τῶν τόκων του εἰς 8450 δρχ.; (ἀπ. 1005,06 δρχ.).

24) Πόσον ἦτο τὸ ἀρχικὸν κεφάλαιον τὸ ὁποῖον τοκισθὲν πρὸς 8 % ἀνῆλθε μετὰ τῶν τόκων του εἰς 2595,90 δραχ. μετὰ παρέλευσιν 5 μην;

(ἀπ. 2505,70 δραχ.)

25) Συνετάχθη συμβόλαιον δι' ἓν δάνειον δοθὲν τὴν 12ην Ἰανουα-

ρίου καὶ λῆγον τὴν 27ην Ἰουλίου μὲ ποσὸν 1583 δραχ. εἰς τὸ ὁποῖον περιλαμβάνεται καὶ ὁ τόκος 8 %. Εἰς πόσον ἀνέρχεται τὸ δάνειον ἄνευ τόκου ; (ἀπ. 151,22 δρχ.)

26) Πόσον τόκον θὰ πληρώσῃ τις πρὸς 7,5 % κατ' ἔτος διὰ τὰ ἑξῆς ποσά.

α') Διὰ 7500 δραχ. ἀπὸ 15 Μαρτίου μέχρι τέλους Ἰουνίου τοῦ 1914
β') » 6200 » » 20 » » » » » 1914
γ') » 3185,45 » » 17 Ἀπριλίου » » » » »
δ') » 2300 » » 15 Μαΐου » » » « »
(ἀπ. 365,63 δρχ.)

27) Ὀφείλει τις τόκους πρὸς 8 % κατ' ἔτος διὰ τὰ ἑξῆς ποσά.

α') 5140 δραχ. ἀπὸ 8ης 7]βρίου μέχρι τέλους Δεκεμβρίου τοῦ 1914
β') 4715 » » 10ης 9]βρίου » » » » »
γ') 8452 » » 1ης 10]βρίου » » » » »

Δικαιοῦται δὲ νὰ λάβῃ πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπιτόκιον τοὺς τόκους τῶν ἑξῆς ποσῶν.

α') 3547 δρχ. ἀπὸ 10ης Αὐγούστου μέχρι τέλους 10βρίου 1914
β') 2140 » » 15ης 7]βρίου » » » »
γ') 5732 » » 28ης Ὀκτωβρίου » » » »

Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὑπόλοιπον τῶν τόκων τοὺς ὁποίους οὗτος ὀφείλει νὰ καταβάλῃ ἢ δικαιοῦται νὰ εἰσπράξῃ τὴν 31ην 10βρίου ὡς καὶ τῶν κεφαλαίων. Ὁ λογαριασμὸς οὗτος καλούμενος *ἀλληλόχρεος τοκοφόρος λογαριασμὸς* διατάσσεται ὡς ἑξῆς:

Ἀλληλόχρεος τοκοφόρος λογαριασμὸς πρὸς 8 %
μέχρι τῆς 31 Δεκεμβρίου 1914

Κεφάλαια		Ἡμερομηνία		Ἡμέραι	Τοκάριθμοι		Κεφάλαια		Ἡμερομην.		Ἡμέραι	Τοκάριθμοι	
5140	—	8	7]βρίου	114	5859	60	3547	—	10	Αὐγούστ.	143	5072	21
4715	—	10	9]βρίου	51	2404	65	2140	—	15	7]βρίου	107	2289	80
8452	—	1	10]βρίου	30	2535	60	5732	—	28	8]βρίου	64	3668	48
			ἐξίσωσις τοκαρίθμου . . .		230	64	5	12		τόκοι π. 8 %			
							6882	88		ἐξίσωσις κεφαλαίου		11030	49
18307	—				11030	49	18307	—					

Σημ. *Τὸ πρὸς τὰ δεξιὰ ἄθροισμα τῶν τοκαρίθμων ὑπερβαίνει τὸ πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοιοῦτον κατὰ 230,64 ὅπερ ἐγράφη εἰς τὴν πρὸς τὰ ἀριστερὰ στήλην τῶν τοκαρίθμων πρὸς ἐξίσωσιν. Τὴν διαφορὰν ταύτην τῶν τοκαρίθμων διαιροῦντες διὰ τοῦ* $\frac{1}{100}$ *τοῦ σταθεροῦ διαιρέτου 4500 (διότι καὶ τῶν τοκαρίθμων ἐλήφθη τὸ* $\frac{1}{100}$) *εὑρίσκομεν ὅτι ἔχει νὰ λάβῃ 5,12 δραχ. εἰς τόκους. Τὸ πρὸς τὰ ἀριστερὰ ἄθροισμα τῶν κεφα-*

λαίων ὑπερβαίνει τὸ ἄθροισμα τῶν κεφαλαίων καὶ τῶν τόκων τῆς πρὸς τὰ δεξιά στήλης κατά 6882,88 δραχ. ὅπερ εἶναι τὸ κεφάλαιον τὸ ὁποῖον ὀφείλει καὶ ὅπερ γράφεται εἰς τὴν στήλην ταύτην τῶν κεφαλαίων πρὸς ἐξίσωσιν.

ΥΦΑΙΡΕΣΙΣ

Ὁρισμοί.— Ὅταν τις παραχωρῇ εἰς ἄλλον ποσόν τι χρηματικὸν ἢ ἐμπορευμάτων, ὑπὸ τὸν ὅρον ὁ δεύτερος νὰ ἐπιστρέψῃ τὰ χρήματα ἢ νὰ καταβάλῃ τὸ ἀντίτιμον τῶν ἐμπορευμάτων εἰς τὸν πρῶτον εἰς ὡρισμένην προθεσμίαν, λέγομεν ὅτι ὁ πρῶτος εἶναι *πιστωτὴς* ὁ δὲ δεύτερος *χρεώστης*. Ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον ὁ πιστωτὴς πρὸς ἀσφάλειάν του λαμβάνει παρὰ τοῦ χρεώστου ἓν ἔγγραφον φέρον τὴν ὑπογραφὴν τοῦ χρεώστου καὶ διὰ τοῦ ὁποίου οὗτος ἀναγνωρίζει ὅτι ἔλαβε παρὰ τοῦ πιστωτοῦ τὸ ποσόν, ὅπερ ὑπόσχεται νὰ ἀποδώσῃ εἰς αὐτὸν εἰς ὡρισμένην προθεσμίαν.

242) Τὸ ἔγγραφον τοῦτο καλεῖται γραμμάτιον· τὸ ἐν αὐτῷ ἀναφερόμενον ποσὸν *ὀνομαστικὴ ἀξία* τοῦ γραμματίου, ἡ δὲ ἐποχὴ καθ' ἣν θὰ καταβληθῇ ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου καλεῖται *λῆξις τοῦ γραμματίου.*

Τὸ γραμμάτιον συντάσσεται ἐπὶ χαρτοσήμου, οὗτινος ἡ ἀξία καθορίζεται ὑπὸ εἰδικοῦ νόμου. Ἐκ τῶν διαφόρων εἰδῶν γραμματίων συνηθέστερον εἶναι τὸ καλούμενον εἰς διαταγήν.

Παραθέτομεν ὑπόδειγμα τοιούτου γραμματίου.

ΧΑΡΤΟΣΗΜΟΝ

Ἐν Ἀθήναις τῇ 15 Νοεμβρίου 1907 Διὰ Δρ. 300

Μετὰ δύο μῆνας ἀπὸ σήμερον ὑπόσχομαι νὰ πληρώσω εἰς τὴν διαταγὴν τοῦ κ. Δ. Παυλίδου τὸ ἄνω ποσὸν τῶν δραχ. Τριακοσίων, ἀξίαν ληφθεῖσαν εἰς ἐμπορεύματα (ἢ τοῖς μετρητοῖς)

Κ. ΙΩΑΝΝΙΔΗΣ

Ὁ πιστωτὴς Δ. Παυλίδης ὀνομάζεται καὶ κομιστὴς τοῦ γραμματίου, ὁ δὲ Κ. Ἰωαννίδης ἐκδότης ἢ ὑπογραφεὺς ἢ χρεώστης τοῦ γραμματίου· τὸ γραμμάτιον καλεῖται *εἰσπρακτέον* μὲν ὡς πρὸς τὸν κομιστήν, *πληρωτέον* δὲ ὡς πρὸς τὸν ἐκδότην.

Ἕτερον ἔγγραφον πιστωτικὸν σύνηθες ἐν τῷ ἐμπορίῳ εἶναι ἡ συναλλαγματική.

Συναλλαγματικὴ καλεῖται τὸ ἔγγραφον, διὰ τοῦ ὁποίου πιστωτής τις διατάσσει τὸν ἐν ἄλλῃ ἢ τῇ αὐτῇ πόλει διαμένοντα χρεώστην του νὰ πληρώσῃ εἰς ἐποχὴν ὡρισμένην καὶ εἰς διαταγὴν προσώπου ὡρισμένου τὸ σημειούμενον ἐν αὐτῇ ποσόν.

Παραθέτομεν ὑπόδειγμα συναλλαγματικῆς.

Ἐν Πειραιεῖ τῇ 20 Νοεμβρίου 1912 Διὰ Δραχ. 1200

Μετὰ δύο μῆνας ἀπὸ σήμερον πληρώσατε διὰ ταύτης τῆς μόνης μου συναλλαγματικῆς εἰς τὴν διαταγὴν τοῦ κ. Δ. Γεωργιάδου τὸ ποσὸν τῶν δραχμῶν Χιλίων διακοσίων ἀξίαν ληφθεῖσαν εἰς μετρητὰ καὶ ἐγγράψατε αὐτὴν εἰς λογαριασμόν μου, ὡς εἰδοποιεῖσθε.

Τῷ κ. Π. Χρηστίδη

Εἰς Πάτρας *Α. ΠΕΤΡΙΔΗΣ*

243) *Ὑφαίρεσις.* Ὅταν ὁ κομιστὴς γραμματίου (ἢ συναλλαγματικῆς) θελήσῃ νὰ εἰσπράξῃ τὸ ποσὸν τοῦ γραμματίου πρὸ τῆς λήξεώς του, παραχωρεῖ αὐτὸ εἴς τινα τραπεζίτην, ὅστις καταβάλλει εἰς αὐτὸν τὴν ὀνομαστικὴν ἀξίαν ἠλαττωμένην κατὰ συμπεφωνημένον τι ποσόν, τὸ ὁποῖον καλεῖται *ὑφαίρεσις* (κ. σκόντο).

Ὁ κομιστὴς τοῦ γραμματίου λέγομεν *διαπραγματεύεται* (ἤτοι πωλεῖ) αὐτό, ὁ δὲ τραπεζίτης ὅτι *προεξοφλεῖ* (ἤτοι ἀγοράζει) τὸ γραμμάτιον.

Ἔχομεν δύο εἰδῶν ὑφαίρεσιν τὴν ἐσωτερικὴν καὶ τὴν ἐξωτερικήν. Ἡ συνηθεστέρα ἐν τῷ ἐμπορίῳ εἶναι ἡ *ἐξωτερική*, ἥτις καλεῖται καὶ *ἐμπορική*· ὁρίζεται δὲ αὕτη ὡς ἑξῆς.

244) Ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις καλεῖται ὁ τόκος τῆς ὀνομαστικῆς ἀξίας τοῦ γραμματίου (ἢ συναλλαγματικῆς) διὰ τὰς ἡμέρας, αἵτινες μεσολαβοῦσιν ἀπὸ τῆς ἡμέρας τῆς προεξοφλήσεως μέχρι τῆς ἡμέρας τῆς λήξεως τοῦ γραμματίου ἐπὶ ὡρισμένῳ ἐπιτοκίῳ.

Ἐὰν ἀπὸ τῆς ὀνομαστικῆς ἀξίας τοῦ γραμματίου ἀφαιρέσωμεν τὴν ἐξωτερικὴν ὑφαίρεσιν, εὑρίσκομεν τὴν λεγομένην *παροῦσαν* ἢ *καθαρὰν ἀξίαν* τοῦ γραμματίου τὴν ὁποίαν θὰ εἰσπράξῃ ὁ διαπραγματευόμενος τὸ γραμμάτιον.

Ἔστωσαν ἤδη πρὸς λύσιν τὰ ἑξῆς προβλήματα:

1) Γραμμάτιον 1580 δραχ. προεξοφλεῖται 45 ἡμέρας πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 9 %. Πόση εἶναι ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις καὶ πόση ἡ παροῦσα ἀξία αὐτοῦ;

Λύσις: Ὁ τοκάριθμος τοῦ κεφαλαίου εἶναι $1580 \times 45 = 71100$, ὁ δὲ σταθερὸς διαιρέτης τοῦ ἐπιτοκίου 9 % εἶναι $\frac{36000}{9} = 4000$. Ἑπομένως ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις θὰ εἶναι $71100 : 4000 = 17,77$ δραχ. ἢ 17,80 περίπου δραχ. καὶ ἡ παροῦσα ἀξία $1580 - 17,80 = 1562,20$ δρ.

Ὁ ὑπολογισμὸς συντάσσεται ὡς ἑξῆς:

Γραμμάτιον λήξεως 45 ἡμ. δραχ.		1580
Ὑφαίρεσις πρὸς 9 % διὰ 45 ἡμ.		17,80
	Καθαρὰ ἀξία γραμματίου	1562,20

2) Τὴν 20 Σ)βρίου ἔμπορός τις ἐν Ἀθήναις, παρουσιάζει εἰς τὴν Τράπεζαν Ἀθηνῶν πρὸς προεξόφλησιν μὲ ἐξωτερικὴν ὑφαίρεσιν πρὸς 8 % τὰ ἑπόμενα γραμμάτια.

α′) Γραμμάτιον ἐπὶ Πατρῶν ἀξίας 2000 δραχ. λήξεως 20 10)βρίου.

β′) Γραμμάτιον ἐπὶ Κορίνθου 1500 δραχ. λήξεως 18 Ν)βρίου καὶ

γ′) Γραμμάτιον ἐπὶ Χαλκίδος ἀξίας 800 δραχ. καὶ λήξεως 10 8)βρίου. Ζητεῖται ἡ καθαρὰ ἀξία τούτων.

Ὁ ὑπολογισμὸς διατάσσεται ὡς ἑξῆς: (§ 236).

Ποσὰ	Λήξεις	Ἡμέραι	Τοκάριθμοι	
2000	20 Δεκεμβρίου	90	180000	
1500	18 Νοεμβρίου	58	87000	
800	10 Ὀκτωβρίου	20	16000	
4500			2830]00	45]00
				62,90 δρχ.

62,90 ὑφαίρεσις πρὸς 8 %

4237,10 ἀξία τοῖς μετρητοῖς.

Ὡς παρατηροῦμεν προσδιορίζομεν πρῶτον τὰς ἡμέρας ἀπὸ τῆς προεξοφλήσεως μέχρι τῆς λήξεως ἑκάστου γραμματίου, ὑπολογίζομεν ἔπειτα τοὺς τοκαρίθμους καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν διαιροῦμεν διὰ τοῦ σταθεροῦ διαιρέτου τοῦ 8 %. Τὸ οὕτω εὑρισκόμενον πηλίκον $\left(\frac{283000}{4500} = \frac{2830}{45} = 62,90\right)$ εἶναι ἡ ὁλικὴ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις τὴν ὁποίαν ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ ἀθροίσματος τοῦ ποσοῦ τῶν γραμματίων. Τὸ ὑπόλοιπον θὰ εἶναι ἡ ζητουμένη ἀξία τὴν ὁποίαν θὰ καταβάλῃ ἡ Τράπεζα εἰς τὸν κάτοχον τῶν γραμματίων.

3) Γραμμάτιόν τι λῆγον μετὰ 75 ἡμ. καὶ προεξοφληθὲν πρὸς 9 % ἀπέφερε παροῦσαν ἀξίαν 1520 δραχ. Ποία εἶναι ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου καὶ πόση ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις;

Πρὸς τοῦτο εὑρίσκομεν τὸν τόκον τῶν 100 δραχ. πρὸς 9 % εἰς 75 ἡμ. καὶ ὅστις εἶναι $\frac{100 \times 75}{4000} = 1,875$ δραχ. καὶ ἔπειτα σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς:

Ὅταν ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου εἶναι 100 δραχ. ἡ παροῦσα θὰ εἶναι 100 — 1,875 ἢ 98,125 δραχ., ποία ἑπομένως θὰ εἶναι ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου, τοῦ ὁποίου ἡ παροῦσα ἀξία εἶναι 1520 δραχ.; ἤτοι $\frac{98,125 \text{ δρχ. παρ. ἀξία}}{1520}$ $\frac{100 \text{ δρχ. ὀνομαστ. ἀξία}}{\chi}$

$\chi = 100 \times \frac{1520}{98,125} = 1549,05$ δραχ. περίπου.

Ἑπομένως ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις εἶναι 1549,05—1520 ἢ 29,05.

Ἀλλ' ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις δύναται νὰ εὑρεθῇ καὶ ἀμέσως, ἂν καταστρωθῇ τὸ πρόβλημα ὡς ἑξῆς:

$$\frac{981,25\text{δρχ. παροῦσα ἀξία}}{1520} \qquad \frac{1,875 \text{ δρχ. ἐξωτερ. ὑφαίρεσις}}{\chi} \qquad \chi = 1,875 \times \frac{1520}{98,125} = 29,05.$$

Παρατ. *Τὸ πρόβλημα τοῦτο δὲν δύναται νὰ καταστρωθῇ ὡς πρόβλημα τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν δι' οὓς λόγους ἀνεπτύξαμεν εἰς τὴν παρατήρησιν τοῦ προβλήματος. (§ 241)*

Σημ. *Τὰ προβλήματα ὑφαιρέσεως εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται ὁ χρόνος ἢ τὸ ἐπιτόκιον εἶναι προβλήματα τόκου καὶ λύονται κατά τοὺς κανόνας (§ 238,239).*

Πρόβλημα. Γραμμάτιον 1840 δραχ. προεξοφλεῖται σήμερον πρὸς 8 % ἐξωτερικῶς ἀντὶ 1750 δραχ. Μετὰ πόσον χρόνον ἀπὸ σήμερον λήγει τὸ γραμμάτιον τοῦτο;

Αἱ 1840 δραχ. πρὸς 8 % φέρουσι τόκον 1840—1750=90 δραχ. Εἶναι ἑπομένως πρόβλημα τόκου εἰς τὸ ὁποῖον ζητεῖται ὁ χρόνος.

Κατὰ τὸν κανόνα (§ 238) θὰ ἔχωμεν $E = \frac{90 \times 100}{1840 \times 8} = 7$ μην. 10 ἡμερ.

Πρόβλημα. Γραμμάτιον 2400 δραχ. προεξοφλεῖται 8 μῆνας πρὸ τῆς λήξεως ἐξωτερικῶς ἀντὶ 2256 δραχ. Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον ἐγένετο ἡ προεξόφλησις;

Αἱ 2400 δραχ. εἰς 8 μῆνας φέρουσι τόκον 2400—2256=144 δρχ. Ὅθεν ζητεῖται ὁ χρόνος καὶ κατὰ τὸν κανόνα (§ 239) θὰ ἔχωμεν $\Pi = \frac{144 \times 1200}{2400 \times 8} = 9$ %.

* *Ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις.*

Ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις εἶναι ἄδικος, διότι εἶναι ὁ τόκος τοῦ ποσοῦ ὅπερ ἀναγράφεται ἐν τῷ γραμματίῳ καὶ οὐχὶ ὁ τόκος τοῦ πληρωτέου ποσοῦ κατὰ τὴν προεξόφλησιν ὑπὸ τοῦ ἐνεργοῦντος ταύτην. Προφανῶς ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία εἶναι τὸ ἄθροισμα κεφαλαίου καὶ τόκου καὶ ἑπομένως ἂν χωρίσωμεν τὰ δύο ταῦτα ποσά, τὸ μὲν πρῶτον εἶναι πράγματι ἡ παροῦσα ἀξία τοῦ γραμματίου, τὸ δὲ δεύτερον ὁ τόκος αὐτῆς ὅστις καὶ καλεῖται ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις. Ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις καλεῖται καὶ Τραπεζιτικὴ διότι ἐν Εὐρώπῃ γίνεται χρῆσις αὐτῆς παρὰ ταῖς Τραπέζαις.

Κατὰ τὰ προηγούμενα, τὰ προβλήματα τῆς ἐσωτερικῆς ὑφαιρέσεως λύονται ὅπως τὸ πρόβλημα (§ 241).

Ἔστω πρὸς λύσιν τὸ ἑξῆς πρόβλημα.

Πρόβλημα. Γραμμάτιον 2800 δρχ. προεξοφλεῖται 8 μην. πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 9 % ἐτησίως. Ποία εἶναι ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις;

Τόκος τῶν 100 δρχ. εἰς 8 μῆν. εἶναι 6 δρχ.

Ὅθεν ἔχομεν

Ὀνομ. ἀξία		Ἐσωτ. ὑφ.
106 δρχ.	ἔχει	6 δρχ.
2800		χ

$$χ=6\times\frac{2800}{106}=158{,}49$$

Ἄρα ἡ παροῦσα ἀξία τοῦ γραμματίου εἶναι

$$2800-158{,}49=2641{,}51 \text{ δρχ.}$$

Δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν παροῦσαν τοῦ γραμματίου ἐσωτερικῶς καὶ ἀπ' εὐθείας ὡς ἑξῆς·

ὀνομ. ἀξία	παρ. ἀξία
106 δρχ.	100
2800 »	χ

$$χ=100\times\frac{2800}{106}=2641{,}51 \text{ δρχ.}$$

Προβλήματα κοινῆς λήξεως πολλῶν γραμματίων.

Πολλάκις ἀντικαθιστῶμεν πολλὰ γραμμάτια λήγοντα εἰς διαφόρους προθεσμίας δι' ἑνὸς ἔχοντος ὀνομαστικὴν ἀξίαν τοιαύτην ὥστε διὰ τῆς τοιαύτης ἀντικαταστάσεως νὰ μὴ προκύπτῃ οὔτε κέρδος οὔτε ζημία. Ἡ λῆξις τοῦ κοινοῦ τούτου γραμματίου καλεῖται *κοινὴ λῆξις τῶν πολλῶν γραμματίων.*

Δύνανται νὰ παρουσιαθῶσι δύο εἰδῶν προβλήματα κοινῆς λήξεως.

α') Ἐκεῖνα εἰς τὰ ὁποῖα δεδομένης τῆς ὀνομαστικῆς ἀξίας τοῦ κοινοῦ γραμματίου ζητεῖται ἡ κοινὴ λῆξις καὶ

β') Ἐκεῖνα εἰς τὰ ὁποῖα διδομένης τῆς κοινῆς λήξεως τοῦ γραμματίου ζητεῖται ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ κοινοῦ γραμματίου.

Πρόβλημα α'. Ἀντικαθιστῶμεν διὰ γραμματίου ἀξίας 8400 δρχ. τὰ ἑξῆς γραμμάτια, α') γραμ. 2450 δρχ. λήξεως μετὰ 65 ἡμ. β') γραμ. 3200 δρχ. λήξεως μετὰ 80 ἡμ. καὶ γ') γραμ. 2740 δρχ. λήξεως μετὰ 90 ἡμ. Ποία εἶναι ἡ κοινὴ λῆξις, τοῦ ἐπιτοκίου τῆς προεξοφλήσεως λογιζομένου πρὸς 8 % ἐτησίως;

Εὑρίσκομεν τὴν ἐξωτ. ὑφαίρ. ἐν συνόλῳ τῶν γραμματίων ἅτινα θὰ ἀντικαταστήσωμεν διὰ τοῦ κοινοῦ γραμματίου. Κατὰ τὸν κανόνα (§ 236) θὰ ἔχωμεν

$$2450\times 65=159250$$
$$3200\times 80=256000$$
$$2740\times 90=246600$$

6618,50	45(80
	147,05 δρ.

Ἄρα ἡ ὁλικὴ παροῦσα ἀξία τοῦ γραμματίου εἶναι

$$(2450+3200+2740)-147{,}05=8390-147{,}05=8242{,}95 \text{ δρχ.}$$

καὶ ἡ παροῦσα ἀξία τοῦ γραμ. κοινῆς λήξεως θὰ εἶναι 8242,95, ἡ δὲ ὀνομαστικὴ 8400. Ἄρα ἔχομεν πρόβλημα ἐξωτ. ὑφαιρ. ἐν τῷ ὁποίῳ ζητεῖται ὁ χρόνος, ἤτοι θὰ ἔχωμεν

$$E=\frac{T\times 100}{K.\Pi}=\frac{157,05\times 100}{8400\times 8}=48 \text{ ἡμ.}\quad T=8400-8242,95=157,05$$

$$K=8400$$

$$\Pi=8^{0}/_{0}$$

Πρόβλημα 6'.) Πρόκειται ν' ἀντικαταστήσωμεν τὰ ἑξῆς γραμμάτια. α') 1800 δρχ. λήξεως μετὰ 40 ἡμ., 6') 1240 δρχ. λήξ. μετὰ 65 ἡμ., γ') 2500 δρχ. λήξ. μετὰ 115 ἡμ. καὶ δ') 560 δρχ. λήξ. μετὰ 50 ἡμ. δι' ἑνὸς γραμματίου λήξ. μετὰ 90 ἡμ. Ποία θὰ εἶναι ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ κοινοῦ γραμματίου, τοῦ ἐπιτοκίου λογιζομένου 9 $^{0}/_{0}$ ἐτησίως ;

Εὑρίσκομεν ἐν συνόλῳ τὴν ἐξωτ. ὑφαίρ. τῶν τεσσάρων γραμματίων ὡς καὶ ἐν τῷ προηγουμένῳ προβλήματι.

$$\begin{array}{r|l} 1800\times\ \ 40=\ \ 72000 & \\ 1240\times\ \ 65=\ \ 80600 & \\ 2500\times 115=287500 & \\ 560\times\ \ 50=\ \ 28000 & \\ \hline 468,100 & 4,000 \\ & \overline{117 \text{ δρχ.}} \end{array}$$

Ἡ ὁλικὴ παροῦσα ἀξία τῶν γραμματίων, ἥτις θὰ εἶναι καὶ παροῦσα ἀξία τοῦ γραμματίου κοινῆς λήξεως, εἶναι

$(1800+1240+2500+560)-117=6100-117=5983$ δρχ.

Ζητοῦμεν ἤδη νὰ εὕρωμεν τὴν ὀνομαστικὴν ἀξίαν τοῦ γραμματίου. Τὸ πρόβλημα καταντᾷ πλέον ἐξωτ. ὑφαιρ. (§ 244 Πρόβλ. 3).

Τόκος τῶν 100 δρχ. εἰς 90 ἡμ. 2,25 δρχ.

παρ. ἀξία	ὀνομ. ἀξ.
97,75 δρχ.	100 δρχ.
5983	χ

$$\chi=100\times\frac{5983}{97,75}=6120,70 \text{ δρχ.}$$ εἶναι ἡ ἀξία ἥτις θὰ ἀναγραφῇ εἰς τὸ γραμμάτιον κοινῆς λήξεως.

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν [1]

1) Γραμμάτιον ὀνομαστικῆς ἀξίας 1545,60 δρχ. προεξοφλεῖται 65 ἡμ. πρὸ τῆς λήξεως πρὸς 8$^{0}/_{0}$. Ποία εἶναι ἡ ὑφαίρεσις; (ἀπ. 22,325 δρχ.)

2) Γραμμάτιον εἰς διαταγὴν ἐκ 1560 δρχ. λῆγον τὴν 25 Νοεμβρίου 1912 προεξωφλήθη τὴν 3 Σεπτεβρίου τοῦ αὐτοῦ ἔτους πρὸς $6^{3}/_{4}{}^{0}/_{0}$. Ποία εἶναι ἡ καθαρὰ ἀξία αὐτοῦ; (ἀπ. 1536,015 δρχ.)

3) Ἐπὶ συναλλαγματικῆς τινος προεξοφληθείσης 130 ἡμ. πρὸ τῆς λήξεώς της πρὸς 90$^{0}/_{0}$ ὑπελογίσθη ὑφαίρεσις 106,60 δρχ. Ποία εἶναι ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία; (ἀπ. 3280 δρχ.)

4) Γραμμάτιον 5600 δραχ. λῆγον τὴν 12ην Δεκεμβρίου προεξωφλήθη

[1] Ἐν τοῖς προβλήμασι τούτοις πρόκειται περὶ ἐξωτερικῆς ὑφαιρέσεως.

τὴν 8ην Σεπτεμβρίου καὶ ἀπέδωκε καθαρὰν ἀξίαν 5445,50 δρχ. Πρὸς πόσον τοῖς ἑκατὸν κατ' ἔτος ὑπελογίσθη ἡ ὑφαίρεσις; (ἀπ. 10,45%)

5) Γραμματιόν τι 3560 δρχ. προεξοφληθὲν τὴν 10ην Μαΐου πρὸς 8% κατ' ἔτος ἀπέφερε καθαρὰν ἀξίαν 3478,50 δρχ. Πότε ἔληγε τὸ γραμμάτιον τοῦτο; (ἀπ. τὴν 23ην Αὐγούστου).

6) Συναλλαγματικὴ προεξοφλουμένη 2 $^1/_2$ μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς της πρὸς 8$^1/_2$ % κατ' ἔτος ἀπέφερε καθαρὰν ἀξίαν 4580 δρχ. Πόση εἶναι ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία ταύτης; (ἀπ. 4662,57 δρχ.)

7) Κέρδος τι λαχείου ἐξ 28000 δρχ. εἶναι καταβλητέον μετὰ 6 μῆνας ἀπὸ σήμερον· ποῖον ποσὸν δύναται νὰ εἰσπράξῃ ὁ κερδίσας σήμερον, ἐὰν παραχωρήσῃ αὐτὸ εἴς τινα Τραπεζίτην μὲ ὑφαίρεσιν 4$^1/_2$%; (ἀπ. 27370 δρχ.)

8) Μία Τράπεζα πληρώνει εἴς τινα ἰδιοκτήτην μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν προκαταβολικῶς τοῦ τόκου πρὸς 4 $^3/_4$% δι' ἓν ἔτος 13345 δρχ. Πόσος ἦτο ὁ ἀφαιρεθεὶς τόκος; (ἀπ. 691,70 δρχ.)

9) Κεφαλαιοῦχός τις δανείζει εἴς τινα ἐργολάβον ποσόν τι καὶ ἀφαιρεῖ προκαταβολικῶς τὸν τόκον τοῦ ποσοῦ τούτου πρὸς 6$^1/_2$% διὰ 2$^1/_2$ ἔτη. Ἐὰν ὁ ἐργολάβος λάβῃ ἐκ τοῦ ποσοῦ τούτου μετρητὰ 83250 δραχ., ποῖον εἶναι τὸ ποσὸν τοῦ δανείου; (ἀπ. 99402,98 δρχ.)

10) Ὀφειλέτης τις ὑπεχρεώθη διὰ δικαστικῆς ἀποφάσεως νὰ πληρώσῃ μετὰ 66 ἡμέρας ἀπὸ σήμερον 7090,50 δρχ. ἀλλ' ἐξοφλεῖ τὸ χρέος τοῦτο σήμερον διὰ 7032,50 δρχ. Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον ὑπελογίσθη ὁ τόκος; (ἀπ. 4,46 %).

11) Ἐὰν γραμματίου τινὸς λήγοντος τὴν 30ην Ἰουνίου καὶ προεξοφληθέντος πρὸς 9$^3/_4$% τὴν 1ην Ἀπριλίου ἐγένετο ὑφαίρεσις 32,60 δρχ., πόση εἶναι ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία αὐτοῦ (ἀπ. 1347,43 δρχ.)

12) Κομιστὴς γραμματίου τινὸς 5800 δρχ. λήξεως 15ης Ἰουλίου 1912 διαπραγματεύεται τοῦτο εἴς τινα τραπεζίτην τὴν 1 Ἰουνίου μὲ ὑφαίρεσιν πρὸς 8 % κατ' ἔτος, ἀλλὰ συμφωνεῖ νὰ πληρώσῃ καὶ προμήθειαν $^1/_2$ % ἐπὶ τῆς ὀνομαστικῆς ἀξίας τοῦ γραμματίου. Πόσην καθαρὰν ἀξίαν θὰ εἰσπράξῃ παρὰ τοῦ τραπεζίτου; (ἀπ. 5713 δρχ.)

Σημ. *Ἀφοῦ ὑπολογισθῇ ἡ ὑφαίρεσις, προστίθεται εἰς αὐτὴν καὶ ἡ προμήθεια ἐπὶ 5800 δρχ. (ἤτοι 29 δρχ) καὶ τὸ ἄθροισμα τοῦτο ἀφαιρεῖται ἀπὸ τῆς ὀνομαστικῆς ἀξίας τοῦ γραμματίου.*

13) Διὰ νὰ κάμωμεν πληρωμήν τινα σήμερον δανειζόμεθα τὸ ἀπαιτούμενον ποσὸν ὑπογράφοντες γραμμάτιον 2600 δρχ. λῆγον μετὰ 4 μῆνας ἀπὸ σήμερον. Ὁ πιστωτής, ἀφοῦ ἀφαιρέσῃ ἐκ τοῦ ποσοῦ τούτου τὸν τόκον αὐτοῦ πρὸς 7$^1/_2$% καὶ $^1/_2$% ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ποσοῦ διὰ προμήθειαν καὶ 1 δραχμὴν διὰ χαρτόσημον, μᾶς δίδει τὸ ὑπόλοιπον. Ποῖον εἶναι τὸ πραγματικὸν ἐπιτόκιον διὰ τὸ ποσόν, τὸ ὁποῖον λαμβάνομεν σήμερον; (ἀπ. 9,40%).

Λύσις. Ἡ διαφορὰ τοῦ ποσοῦ, ὅπερ λαμβάνομεν σήμερον ἀπὸ τὴν ὀνομαστικὴν ἀξίαν 2600 δρχ. τοῦ γραμματίου εἶναι ὁ τόκος τοῦ πρώτου ποσοῦ. Ἑπομένως τοῦτο θέλει ληφθῇ καὶ ὡς κεφάλαιον.

14) Παρουσίασέ τις τὴν 8ην Αὐγούστου εἴς τινα Τραπεζίτην Ἀθηνῶν πρὸς προεξόφλησιν τὰ ἑξῆς γραμμάτια.

α΄) 2500 δρχ. ἐπὶ Πατρῶν λήξεως 18ης 7)βρίου,
β΄) 3600 » » Ναυπλίου » 10ης 8)βρίου,
γ΄) 4250 » » Βόλου » 20ης 8)βρίου.

ὑπὸ τοὺς ἑξῆς ὅρους: ὑφαίρεσις 9 % κατ' ἔτος καὶ προμήθεια $^1/_4$ % ἐπὶ τῆς ὀνομαστικῆς ἀξίας τῶν γραμματίων. Πόση εἶναι ἡ καθαρὰ ἀξία τῶν γραμματίων, τὴν ὁποίαν θὰ εἰσπράξῃ; (ἀπ. 10164,25 δρχ.)

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΕΡΙΣΜΟΥ ΕΙΣ ΜΕΡΗ ΑΝΑΛΟΓΑ

245) *Ὁρισμός*. Ἐὰν ἔχωμεν, μίαν σειρὰν ἴσων λόγων, ὡς π.δ.χ. $\frac{50}{5} = \frac{200}{20} = \frac{180}{18} = \frac{240}{24}$ κτλ., οἱ ἡγούμενοι ὅροι 50, 200, 180, 240 καλοῦνται ἀνάλογοι πρὸς τοὺς ἑπομένους 5, 20, 18, 24 διότι προκύπτουσιν ἐξ αὐτῶν διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἐφ' ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, ἤτοι τὸν 10, καὶ τἀνάπαλιν οἱ ἑπόμενοι 5, 20, 18, 24 καλοῦνται ἀνάλογοι πρὸς τοὺς ἡγουμένους 50, 200, 180, 240, διότι προκύπτουσιν ἐξ διαιρέσεως αὐτῶν διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ $\frac{1}{10}$. Ἐν γένει ἀριθμοὶ καλοῦνται ἀνάλογοι πρὸς ἄλλους ἰσοπληθεῖς, ἐὰν ἕκαστος τῶν πρώτων προκύπτῃ ἐκ τοῦ ἀντιστοίχου τῶν δευτέρων διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἐφ' ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

246) *Ἰδιότης*. Ἐπειδὴ ἡ ἰσότης τῶν λόγων τούτων δὲν βλάπτεται, ἐὰν πολλαπλασιασθῶσιν ἢ διαιρεθῶσιν, πάντες οἱ παρονομασταὶ ἐφ' ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, συνάγομεν ὅτι οἱ ἀριθμοὶ 50, 200, 180, 240, οἱ ἀνάλογοι πρὸς τοὺς 5, 20, 18, 24, θὰ εἶναι ἀνάλογοι καὶ πρὸς τοὺς $5 \times K$, $20 \times K$, $18 \times K$, $24 \times K$, ἔνθα ὁ K εἶναι οἱοσδήποτε ἀκέραιος ἀριθμὸς ἢ κλασματικός.

247) Παρουσιάζονται πολλάκις προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα θέλομεν νὰ μοιράσωμεν ἀριθμόν τινα δεδομένον εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς δοθέντας ἀριθμούς. Πρόκειται νῦν νὰ μάθωμεν πρακτικὸν κανόνα πρὸς λύσιν τῶν τοιούτων προβλημάτων.

Ἔστω πρὸς λύσιν τὸ ἑξῆς πρόβλημα·

Νὰ μοιρασθῇ ὁ ἀριθμὸς 250 εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 7, 8, 10. Πρὸς τοῦτο σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς· Ἐὰν ὁ μεριστέος ἀριθμὸς ἦτο 25 τὰ μέρη αὐτοῦ θὰ ἦσαν προφανῶς 7, 8, 10 διότι καὶ ἄθροισμα ἔχουσιν 25, καὶ ἀνάλογα πρὸς τοὺς δοθέντας ἀριθμοὺς 7, 8, 10, εἶναι· Ἐὰν δὲ ὁ μεριστέος ἀριθμὸς ἦτο 1, ἤτοι ὁ ἀριθμὸς 25 άκις μικρότερος τοῦ 25, καὶ τὰ μέρη αὐτοῦ θὰ ἦσαν 25άκις μικρότερα, ἤτοι τὰ ἑξῆς· $\frac{7}{25}$, $\frac{8}{25}$, $\frac{10}{25}$ ἅτινα καὶ ἄθροισμα ἔχουσιν 1 καὶ ἀνάλογα εἶναι πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 7, 8, 10, ἐξ ὧν γίνονται διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ $\frac{1}{25}$.

Τέλος ἂν ὁ μεριστέος ἀριθμὸς γίνῃ 250, ἤτοι 250 φορὰς μεγαλύτερος τοῦ 1, καὶ τὰ μέρη αὐτοῦ θὰ γίνωσι 250 φορὰς μεγαλύτερα, ἤτοι $\frac{7}{25}\times250$, $\frac{8}{25}\times250$, $\frac{10}{25}\times250$ ἢ $7\times\frac{250}{25}=70$, $8\times\frac{250}{25}=80$, $10\times\frac{250}{25}=100$. Τὰ μέρη ταῦτα ἔχουσιν ἄθροισμα ἴσον πρὸς 250 καὶ ἀνάλογα εἶναι πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 7, 8, 10, ἐξ ὧν προκύπτουσι διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ $\frac{250}{25}$ ἤτοι ἐπὶ 10.

Ἐντεῦθεν ἕπεται ὁ ἑξῆς πρακτικὸς κανών·

248) Διὰ νὰ μοιράσωμεν ἀριθμόν τινα εἰς μέρη ἀνάλογα πολλῶν ἄλλων δεδομένων ἀριθμῶν, πολλαπλασιάζομεν τὸν δεδομένον ἀριθμὸν ἐφ' ἕνα ἕκαστον ἐξ αὐτῶν καὶ διαιροῦμεν διὰ τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν».

Πρὸς ἐφαρμογὴν τοῦ κανόνος τούτου ἔστωσαν πρὸς λύσιν τὰ ἑξῆς προβλήματα·

1) Νὰ μοιρασθῇ ὁ ἀριθμὸς 1250 εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 10, 15, 25. Κατὰ τὴν ἰδιότητα (§ 246) δυνάμεθα πρῶτον νὰ διαιρέσωμεν τοὺς δοθέντας ἀριθμοὺς 10, 15, 25 διὰ τοῦ Μ. Κ. Δ. αὐτῶν (5) καὶ ν' ἀντικαταστήσωμεν αὐτοὺς διὰ τῶν πηλίκων 2, 3, 5. Μετὰ ταῦτα διατάσσομεν τὴν πρᾶξιν ὡς ἑξῆς:

2	1250 μεριστέος	$\frac{1250\times2}{10}=250$
3		$\frac{1250\times3}{10}=375$
5		$\frac{1250\times5}{10}=655$
10		1250

Παρ. *Φαίνεται εὐκόλως ὅτι τὰ μέρη, εἰς τὰ ὁποῖα μοιράζομεν τὸν 1250, τὰ ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 2, 3, 5 τοὺς προκύψαντας ἐκ τῶν δοθέντων 10, 15, 25 δι' ἁπλοποιήσεως, δὲν βλάπτονται. Διότι τὰ μέρη τοῦ 1250 τὰ ἀνάλογα πρὸς τοὺς 10, 15, 25 εἶναι κατὰ τὸν κανόνα (§ 248)* $\frac{1250\times10}{50}$ $\frac{1250\times15}{50}$ $\frac{1250\times25}{50}$ *καὶ ἁπλοποιούμενα διὰ τοῦ 5 καὶ τὰ τρία δίδουσι*

$$\frac{1250\times2}{10}\quad\frac{1250\times3}{10}\quad\frac{1250\times5}{10}$$

ἤτοι τὰ αὐτὰ ἐξαγόμενα.

Σημ. *Πρὸς ταχυτέραν εὕρεσιν τοῦ ἐξαγομένου τούτου δυνάμεθα νὰ ἐκτελῶμεν πρῶτον τὴν διαίρεσιν 1250 : 10=125 καὶ ἔπειτα τοὺς πολλαπλασιασμούς, ἤτοι 125×2=250, 125×3=375, 125×5=625. Ἂν τὸ πηλίκον δὲν εὑρίσκηται ἀκριβῶς, εὑρίσκομεν αὐτὸ μὲ ἐπαρκῆ προσέγγισιν, ὅτε καὶ τὰ ἐξαγόμενα εὑρίσκονται κατὰ προσέγγισιν.*

2) Νὰ μοιρασθῇ ὁ ἀριθμὸς 850 εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{4}$.

Κατὰ τὴν ἰδιότητα (246) ἀντικαθιστῶμεν πρῶτον τὰ κλάσματα διὰ τῶν ἀκεραίων, οὓς εὑρίσκομεν πολλαπλασιάζοντες ταῦτα ἐπὶ τὸ Ε. Κ. Π. 20 τῶν παρονομαστῶν καὶ ἔπειτα ἐφαρμόζομεν τὸν κανόνα (§ 248).

$$\frac{1}{2}\times 20=\frac{10}{20}\times 20=10 \quad 850 \text{ μεριστέος} \quad \frac{850\times 10}{33}=257\frac{19}{33}$$

$$\frac{2}{5}\times 20=\frac{8}{20}\times 20=\ 8 \qquad\qquad \frac{850\times 8}{33}=206\frac{2}{33}$$

$$\frac{3}{4}\times 20=\frac{15}{20}\times 20=15 \qquad\qquad \frac{850\times 15}{33}=386\frac{12}{33}$$

$$33 \qquad\qquad\qquad 850$$

Παρατ. *Καὶ ἐνταῦθα παρατηροῦμεν ὅτι τὰ μέρη τοῦ 850 τὰ ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 10, 8, 15 εἶναι τὰ αὐτὰ πρὸς τὰ μέρη τοῦ 850 τὰ ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς* $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{4}$ *ἢ* $\frac{10}{20}$, $\frac{8}{20}$, $\frac{15}{20}$.
Διότι ἐφαρμόζοντες τὸν κανόνα (§ 248) ἔχομεν

$$\frac{850\times\frac{10}{20}}{\frac{33}{20}} \qquad \frac{850\times\frac{8}{20}}{\frac{33}{20}} \qquad \frac{850\times\frac{15}{20}}{\frac{33}{20}}$$

καὶ τρέποντες τὰ σύνθετα κλάσματα εἰς ἁπλᾶ, πολλαπλασιάζοντες καὶ τοὺς δύο ὅρους ἐπὶ 20, λαμβάνομεν $\frac{850\times 10}{33}$ $\frac{850\times 8}{33}$ $\frac{850\times 15}{33}$
ἤτοι τὰ αὐτὰ ἐξαγόμενα.

3) Τὸ κέρδος λήξαντος ἔτους ἀνερχόμενον εἰς δρχ. 2850 πρόκειται νὰ μοιρασθῇ μεταξὺ τῶν τριῶν συνεταίρων ἀναλόγως τῶν κεφαλαίων, ἅτινα οὗτοι κατέβαλον· καὶ ὁ μὲν α') κατέβαλεν 5800 δρχ., ὁ δὲ β') 4960 δρχ. καὶ ὁ γ') 6800 δρχ. Πόσας δρχ. ἐκ τοῦ κέρδους θὰ λάβῃ ἕκαστος;

Σημ. *Τὰ τοιαῦτα προβλήματα, ἐν οἷς πρόκειται νὰ μοιρασθῇ τὸ κέρδος ἢ ἡ ζημία μεταξὺ τῶν συνεταίρων καλοῦνται καὶ προβλήματα* **ἑταιρείας**, *λύονται δὲ καὶ ταῦτα κατὰ τὸν κανόνα (§ 248).*

Ἐνταῦθα ὁ μεριστέος ἀριθμὸς εἶναι τὸ κέρδος 2850 δρχ., οἱ δὲ ἀριθμοί, ἀναλόγως τῶν ὁποίων θὰ μοιρασθῇ τοῦτο, εἶναι οἱ 5800, 4960, 6800, τοὺς ὁποίους ἀντικαθιστῶμεν διὰ τῶν 145, 124, 170.

Μετὰ ταῦτα διατάσσομεν τὴν πρᾶξιν·

5800 : 10 = 580 ἢ 580 : 4 = 145 2850 μεριστέος.
4960 : 10 = 496 496 : 4 = 124
680 : 10 = 680 680 : 4 = 170
439

Ἄρα ὁ Α' θὰ λάβῃ $2850\times\frac{145}{439}=941,34$ δρχ.
» ὁ Β' » » $2850\times\frac{124}{439}=805,02$ »
» ὁ Γ' » » $2850\times\frac{170}{439}=1103,64$ »
2850 δραχ.

Παρατ. *Εἰς τὰ προβλήματα μερισμοῦ, ἅτινα ἐλύσαμεν ἀνωτέρω,* οἱ ἀριθμοί, ἀναλόγως τῶν ὁποίων μοιράζομεν τὸν μεριστέον ἀριθμόν, εἶναι ἀπ' εὐθείας δεδομένοι. Τὰ τοιαῦτα προβλήματα καλοῦμεν **ἁπλᾶ**· Ὑπάρχουσιν ὅμως καὶ προβλήματα μερισμοῦ **σύνθετα**, εἰς τὰ ὁποῖα οἱ ἀριθμοί, ἀναλόγως τῶν ὁποίων πρόκειται νὰ γίνῃ ὁ μερισμός, δίδονται ἐμμέσως καὶ εἶναι ἀνάγκη διὰ βοηθητικῶν ὑπολογισμῶν νὰ ὁρίσωμεν τούτους.

Ἔστωσαν πρὸς λύσιν τὰ ἑξῆς προβλήματα·

1) Νὰ μοιρασθῇ ὁ ἀριθμὸς 1200 εἰς μέρη ἀντιστρόφως ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 3, 5, 8.

Τοῦτο σημαίνει νὰ μοιρασθῇ ὁ ἀριθμὸς 1200 εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀντιστρόφων ἀριθμῶν τῶν 3, 5, 8. Οἱ ἀντίστροφοι δὲ τούτων εἶναι $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}$. Ὅθεν ἔχομεν $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}$

$$\frac{40}{120} \quad \frac{24}{120} \quad \frac{45}{120}$$

$$\text{ἢ} \quad 40 \quad 24 \quad 15$$

ἄρα τὰ μερίδια.

$\alpha')\ \frac{1200\times40}{79} = 607\frac{47}{79}$, $\beta')\ \frac{1200\times24}{79} = 364\frac{44}{79}$, $\gamma')\ \frac{1200\times15}{79} = 227\frac{67}{79}$.

2) Ἔργον τι ἀνέλαβον νὰ ἐκτελέσωσιν 94 ἐργάται διῃρημένοι εἰς 3 ὁμάδας ἀντὶ 2532 δραχ., εἰργάσθησαν δὲ ἡ μὲν α' ὁμὰς ἐξ 24 ἐργατῶν ἐπὶ 14 ἡμέρας, ἡ δὲ β' ἐκ 40 ἐργατῶν ἐπὶ 15 ἡμέρας καὶ γ' ἐκ 30 ἐργατῶν ἐπὶ 15 ἡμέρας. Πόσας δραχμὰς ἔλαβεν ἑκάστη ὁμὰς ἐκ τοῦ ἀνωτέρου ποσοῦ;

Ἐνταῦθα πρόκειται νὰ γίνῃ ὁ μερισμὸς τῶν 2532 δραχ. ἀναλόγως καὶ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἐργατῶν ἑκάστης ὁμάδος 24, 40, 30 καὶ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἡμερῶν ἐργασίας 14, 12, 15.

Ἵνα τὸ σύνθετον τοῦτο πρόβλημα καταστήσωμεν ἁπλοῦν, σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς·

Εἶναι φανερὸν ὅτι ὅσην ἐργασίαν ἐκτελοῦσιν 24 ἐργάται εἰς 14 ἡμέρας, τόσην ἐργασίαν ἐκτελεῖ καὶ 1 μόνον ἐργάτης εἰς 24×14 ἢ 336 ἡμέρας. Ὁμοίως τὴν ἐργασίαν, ἣν ἐκτελεῖ ἡ β' ὁμὰς εἰς 12 ἡμέρας θέλει ἐκτελέσει 1 μόνον ἐργάτης εἰς 12×40 ἢ 480 ἡμέρας. Τέλος τὴν ἐργασίαν ἣν ἐκτελεῖ ἡ γ' ὁμὰς εἰς 15 ἡμέρας θέλει ἐκτελέσει 1 μόνον ἐργάτης εἰς 15×30 ἡμέρας ἢ 450 ἡμ. Ὅθεν ἔχομεν νὰ μοιράσωμεν τὸν ἀριθμὸν 2532 εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 336, 480, 450. Κατὰ ταῦτα θὰ ἔχωμεν·

14 ἡμ. $\times$ 24 ἐρ. = 336 ἡμ. ἢ 56
12 » $\times$ 40 » = 480 » ἢ 80   2532 μεριστέος.
15 » $\times$ 30 » = 450 » ἢ 75

Τὸ μερίδιον τοῦ α' θὰ εἶναι $2532 \times \frac{56}{211} = 672$ δραχ.

» » » β' » » $2532 \times \frac{80}{211} = 960$ »

» » » γ' » » $2532 \times \frac{75}{211} = 900$ »

2532 δραχ.

3) Πρόκειται ν' ἀλεσθῶσι 159000 ὀκ. σίτου εἰς 4 μύλους· ὁ α' μύλος ἀλέθει 2000 ὀκ. εἰς 4 ὥρας, ὁ β' 3600 ὀκ. εἰς 6 ὥρ., ὁ γ' 4000 ὀκ. εἰς 5 ὥρας καὶ ὁ δ' 6000 ὀκ. εἰς 8 ὥρας. Πόσας ὀκάδας σίτου ἐκ τοῦ ἄνω ποσοῦ πρέπει νὰ δώσωμεν πρὸς ἄλεσιν εἰς ἕκαστον τῶν 4 μύλων, ἵνα ἡ ἄλεσις ἐκτελεσθῇ συγχρόνως ;

Τὸ μεριστέον ποσὸν ἐνταῦθα εἶναι 159000 ὀκ. σίτου, οἱ δὲ ἀριθμοί, ἀναλόγως τῶν ὁποίων θὰ μοιράσωμεν τοῦτο εὑρίσκονται ὡς ἑξῆς·

Εἰς 1 ὥραν ὁ α' μύλος θ' ἀλέσῃ $\frac{2000}{4}$ ἢ 500 ὀκ. σίτου, ὁ β' $\frac{3600}{6}$ 600 ὀκ., ὁ γ' $\frac{4000}{5}$ ἢ 800 ὀκ. καὶ ὁ δ' $\frac{6000}{8}$ ἢ 750 ὀκ.· ὥστε οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι θὰ εἶναι 500, 600, 800, 750.

Οὕτω τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς ἁπλοῦν καὶ λύεται ὡς ἑξῆς :

2000 ὀκ. : 4 ὥρ. = 500 ὀκ.	ἢ 10		159000 μεριστέος
3600 : 6 = 600	ἢ 12		
4000 : 5 = 800	ἢ 16		
6000 : 8 = 750	ἢ 15		
	53.		

Ὁ α' μύλος θὰ ἀλέσῃ $159000 \times \frac{10}{53} = 30000$ ὀκ. σίτου.

ὁ β' » » » $159000 \times \frac{12}{53} = 36000$ » »

ὁ γ' » » » $159000 \times \frac{16}{53} = 48000$ » »

ὁ δ' » » » $159000 \times \frac{15}{53} = 45000$ » »

159000 ὀκ. σίτου.

4) Ἔμπορός τις ἤρχισε μίαν ἐπιχείρησιν καταβαλὼν 8000 δρχ. Μετὰ 4 μῆνας προσέλαβε συνέταιρον, ὅστις κατέβαλεν 12000 δρχ. καὶ 6 μῆνας βραδύτερον προσέλαβον τρίτον συνέταιρον, ὅστις κατέβαλε 15000 δρχ. Ἡ ἐργασία διήρκεσεν ἐπὶ 18 μῆνας καὶ προῆλθεν ἐκ ταύτης κέρδος 7500 δρχ. Πόσα θὰ λάβῃ ἕκαστος ἐκ τοῦ κέρδους τούτου ;

Τὸ κεφάλαιον τοῦ 1ου ἐξ 8000 δρχ. ἔμεινεν εἰς τὴν ἐργασίαν ἐπὶ 18 μῆνας, τὸ τοῦ 2ου ἐκ 12000 δραχ. ἐπὶ 14 μῆνας καὶ τὸ τοῦ 3ου ἐκ 15000 δρχ. ἐπὶ 8 μῆνας. Ὁ 1ος θὰ ἐλάμβανε τὸ αὐτὸ κέρδος, ἂν εἰργάζετο ἐπὶ 1 μῆνα καταβαλὼν κεφάλαιον 8000×18, ὁ 2ος θὰ ἐλάμβανε τὸ αὐτὸ κέρδος ἐπὶ 1 μῆνα, ἂν κατέβαλε κεφάλαιον 12000×14 καὶ ὁ

3ος θὰ ἐλάμβανε τὸ αὐτὸ κέρδος ἐπὶ 1 μῆνα, ἂν κατέβαλε κεφάλαιον 15000×8.

Ὅθεν αἱ 7500 δραχ. θὰ μοιρασθῶσιν ἀναλόγως τῶν ἀριθμῶν

$$\begin{array}{l} 8000\times 18 \text{ ἢ } 8\times 18 \text{ ἢ } 2\times 18 \text{ ἢ } 2\times 6 \text{ ἢ } 1\times 6 = 6 \\ 12000\times 14 \text{ ἢ } 12\times 14 \text{ ἢ } 3\times 14 \text{ ἢ } 1\times 14 \text{ ἢ } 1\times 7 = 7 \\ 15000\times 8 \text{ ἢ } 15\times 8 \text{ ἢ } 15\times 2 \text{ ἢ } 5\times 2 \text{ ἢ } 5\times 1 = \underline{5} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 18 \end{array}$$

Ὅθεν τὰ τρία μερίδια θὰ εἶναι

$$\frac{7500\times 6}{18} = 416{,}666\times 6 = 2496{,}996,\quad \frac{7500\times 7}{18} = 416{,}666\times 7$$

$$= 2916{,}662,\quad \frac{7500\times 5}{18} = 416{,}666\times 5 = 2083{,}330.$$

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Τέσσαρα χωρία πρόκειται νὰ πληρώσωσι φόρον 78540 δραχ. ἀναλόγως τοῦ ἀριθμοῦ τῶν κατοίκων. Τὸ α′ ἔχει 350 κατ., τὸ β′ 240, τὸ γ′ 540 καὶ τὸ δ′ 640 κατ. Πόσας δραχμὰς θὰ πληρώσῃ ἕκαστον χωρίον ἐκ τοῦ φόρου τούτου ;
(ἀπ. α′ 1530,51 δρ., β′ 10649,49, δρ. γ′ 23961,36 δρ., δ′ 28398,65 δρ.)

2) Ἄνθρωπός τις ἀποθανὼν ἀφῆκε 3600 δραχ. νὰ διανεμηθῶσιν εἰς 3 οἰκογενείας ἀναλόγως τοῦ ἀριθμοῦ τῶν τέκνων ἑκάστης. Ἡ α′ οἰκογένεια ἔχει 9 τέκνα, ἡ β′ 7 καὶ ἡ γ′ 4. Πόσας δραχμὰς ἐκ τοῦ ποσοῦ τούτου θὰ λάβῃ ἑκάστη οἰκογένεια ;
(ἀπ. α′ 1620 δρχ., β′ 1260 δρχ., γ′ 720 δρχ.)

3) Ἐμπορικός τις οἶκος πτωχεύσας ἔχει ἐνεργητικὸν 25116 δραχ., χρεωστεῖ δὲ εἰς μὲν τὸν Α′ 9316,50 δραχ., εἰς δὲ τὸν Β′ 20000 δραχ., εἰς τὸν Γ′ 813,60 δραχ. καὶ εἰς τὸν Δ′ 5600 δραχ. Πόσας δραχμὰς θὰ λάβῃ ἐκ τοῦ ἐνεργητικοῦ ἕκαστος τῶν 4 πιστωτῶν ;
(ἀπ. Α′ 6548,93 δραχ. Β′ 14058,78 Γ′ 571,84 καὶ Δ′ 3936,45 δρχ.)

4) Τέσσαρες κτηματίαι συνεφώνησαν νὰ καταβάλωσι διὰ τὴν κατασκευὴν μιᾶς ὁδοῦ ἐν ὅλῳ 25000 δραχ. ἀναλόγως τῆς ἐκτάσεως τῶν πρὸς τὴν ὁδὸν ταύτην συνορευόντων κτημάτων των. Καὶ τὸ μὲν κτῆμα τοῦ Α′ εἶναι ἐκτάσεως 450 στρεμ., τοῦ Β′ 8175 στρεμ. τοῦ Γ′ 825 στρέμ. καὶ τοῦ Δ′ 1200 στρέμ. Πόσας δραχμὰς θὰ πληρώσῃ ἕκαστος ;
(ἀπ. α′ 1056,34, δρ. β′ 19190,14, δρ. γ′ 1936,62 καὶ δ′ 2816,90 δρ.)

37) 5) Τέσσαρες ἐργάται ἐθέρισαν ἀπὸ κοινοῦ ἀγρόν τινα, διὰ τὸν ὁποῖον ἐπληρώθησαν 58,5 κοιλὰ σίτου. Πρόκειται νὰ διανεμηθῶσι ταῦτα ἀναλόγως τῶν στρεμμάτων, τὰ ὁποῖα ἐθέρισεν ἕκαστος· καὶ ὁ μὲν α′ ἐθέρισε 12,5 στρέμ., ὁ β′ 19,5 στρέμ., ὁ γ′ 13,4 στρέμ. καὶ ὁ δ′ 26,6 στρέμ. Πόσα κοιλὰ σίτου θὰ λάβῃ ἕκαστος ;
(ἀπ. α′ $10\frac{5}{32}$, κοιλ. β′ $15\frac{27}{32}$, γ′ $10\frac{71}{80}$, δ′ $21\frac{49}{80}$ κοιλ.).

6) Τὸ βρεττανικὸν μέταλλον περιέχει 72 μέρη κασσιτέρου, 4 μέρη χαλκοῦ καὶ 24 μέρη ἀντιμονίου. Ἐὰν πρόκειται νὰ κατασκευασθῇ

τοιοῦτον μέταλλον 152 ὀκαδ., 320 δραμ., πόσαι ὀκάδες ἐξ ἑκάστου τῶν ἀνωτέρω μετάλλων πρέπει νὰ συντακῶσιν ;

(ἀπ. 110 ὀκ. 13 $\frac{2}{5}$ δραμ. χαλκοῦ, 6 ὀκ. 44 $\frac{4}{5}$ δραμ. κασσιτέρου, 36 ὀκ 271 $\frac{1}{5}$ δραμ. ἀντιμονίου.)

7) Ἐπλήρωσέ τις ναῦλον 877,62 δρχ. διὰ τὴν μεταφορὰν τεσσάρων διαφόρων ἐμπορευμάτων. Πόσος ναῦλος ἀναλογεῖ εἰς ἕκαστον ἐμπόρευμα, ἐὰν τὸ μὲν α′ ζυγίζῃ 4107 ὀκ., τὸ β′ 1067 ὀκ. 200 δραμ., τὸ γ′ 2153 ὀκ. καὶ τὸ δ′ 3962 ὀκ. 200 δραμ. ;

(ἀπ. α′ 319,25 β′ 82,98 γ′ 167,37 καὶ τὸ δ′ 308,02 δρχ.)

8) Διὰ τρία ὑφάσματα ὁμοῦ παρεχωρήθη ἔκπτωσις ἀνερχομένη εἰς 1063,30 δραχ. Πόσον μέρος τῆς ἐκπτώσεως ταύτης ἀναλογεῖ εἰς ἕκαστον ὕφασμα, γνωστοῦ ὄντος ὅτι τὸ μὲν α′ ἐτιμᾶτο 3564,50 δρχ., τὸ β′ 4127,80 δρχ. καὶ τὸ γ′ 813,90 δρχ. ;

(ἀπ. α′ 445,57 δρχ. β′ 515,98 δρχ. καὶ τὸ γ′ 101,74 δρχ.)

9) Πόσας δραχμὰς κατέθεσεν ἕκαστος τῶν 4 συνεταίρων μιᾶς ἐμπορικῆς ἑταιρίας, τῆς ὁποίας τὸ ὁλικὸν κεφάλαιον ἦτο 126300 δρχ., ἐὰν ἔκ τινος ἐπελθούσης ζημίας ἔλαχον εἰς μὲν τὸν α′ 532,50 δρχ. εἰς τὸν β′ 1016,50, εἰς τὸν γ′ 591 καὶ εἰς τὸν δ′ 4100 δραχμαί ;

(ἀπ. α′ 10778 δρχ. β′ 20574,35 γ′ 11962,05 καὶ δ′ 82985,60 δρχ.)

10) Πρόκειται νὰ διανεμηθῇ τὸ ποσὸν 5000 δραχ. μεταξὺ 5 προσώπων, οὕτως ὥστε ἕκαστος ἐξ αὐτῶν νὰ λαμβάνῃ 100 δραχμὰς περισσοτέρας τοῦ ἀμέσως προηγουμένου, πόσας δραχμὰς θὰ λάβῃ ἕκαστον; (ἀπ. ὁ α′. 800, ὁ β′ 900, ὁ γ′ 1000, ὁ δ′ 1100 καὶ ὁ ε′ 1200 δραχμάς).

11) Τέσσαρα βαρέλια ἴσης χωρητικότητος περιέχουσιν ὁμοῦ 1150 ὀκ. οἴνου· ἀλλὰ τὸ μὲν α′ εἶναι πλῆρες μόνον κατὰ τὸ $\frac{1}{2}$, τὸ β′. κατὰ τὰ $\frac{2}{3}$, τὸ γ′ κατὰ τὸ $\frac{1}{4}$ καὶ τὸ δ′ ὁλόκληρον. Πόσας ὀκάδας οἴνου περιέχει ἕκαστον βαρέλειον.

(ἀπ. α′ 237 $\frac{27}{29}$ ὀκ. β′ 317 $\frac{7}{29}$ ὀκ. γ′ 118 $\frac{28}{29}$ ὀκ. καὶ δ′ 475 $\frac{28}{29}$ ὀκ.)

12) Διὰ τὴν ἀγορὰν ἑνὸς πλοίου ἐν Ῥοττερδάμῃ ὑπὸ 4 ἐφοπλιστῶν κατέβαλον ὁ μὲν α′ 8100 φλωρ. Ὁλλανδ., ὁ δὲ β′ 9000 φλωρ., ὁ γ′ 9600 φλωρ. καὶ ὁ δ′ 6300 φλωρ. Ζητεῖται α′) πόσον μέρος τοῦ πλοίου ἐξουσιάζει ἕκαστος καὶ β′) πόσα φλωρίν. θὰ λάβῃ ἕκαστος ἐκ τοῦ καθαροῦ κέρδους 4176 φλωρ. τὰ ὁποῖα ἀπέφερε τὸ πλοῖον τοῦτο κατά τινα χρόνον.

(ἀπ. ὁ α′ $\frac{27}{110}$ τοῦ πλοίου, 1025 $\frac{1}{55}$ φλωρ., ὁ β′ $\frac{30}{110}$ τοῦ πλοίου, 1138,92 φλωρ., ὁ γ′ $\frac{32}{110}$ τοῦ πλοίου 1214,84 φλωρ. καὶ ὁ δ′ $\frac{21}{110}$ τοῦ πλοίου 797,24 φλωρ.).

13) Νὰ μοιρασθῇ τὸ ποσὸν τῶν 158000 δρχ. μεταξὺ τεσσάρων προσώπων οὕτως, ὥστε ὁ β′ νὰ λάβῃ τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ μεριδίου τοῦ α′, ὁ γ′ τὸ $\frac{1}{4}$

τοῦ μεριδίου τοῦ δευτέρου καὶ ὁ δ' τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ μεριδίου τοῦ τρίτου. Πόσας δραχ. θὰ λάβῃ ἕκαστος; (ἀπ. α' 81257,13, β' 54171,42, γ' 13542,85 καὶ δ' 9028,57 δραχμάς.)

Λύσις. Οἱ ἀριθμοὶ ἀναλόγως τῶν ὁποίων θὰ μοιρασθῇ τὸ ποσὸν 158000 δρχ. εὑρίσκονται ὡς ἑξῆς·

Τὸ μερίδιον τοῦ α' εἶναι 1, τὸ δὲ μερίδιον τοῦ β' εἶναι τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ μεριδ. τοῦ α' Τὸ μερίδιον τοῦ γ' εἶναι τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ μεριδ. τοῦ β', ἤτοι $\frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{16}$ τοῦ μεριδίου τοῦ α'. Καὶ τὸ μερίδιον τοῦ δ' εἶναι τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ μεριδίου τοῦ γ' ἤτοι τὰ $\frac{2}{3} \times \frac{3}{16} = \frac{1}{8}$ τοῦ μεριδ. τοῦ α.

Ἄρα οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ εἶναι 1 $\frac{3}{4}$ $\frac{3}{16}$ $\frac{1}{8}$ ἀναλόγως τῶν ὁποίων θὰ μοιρασθῇ τὸ ποσὸν 158000 δραχ.

14) Τρεῖς ἔμποροι ἀποικιακῶν ἠγόρασαν διὰ κοινῆς παραγγελίας καφὲ Ἀραβίας βάρους 50 στατ., 22 ὀκ., 100 δραμ. καὶ ἀξίας κατὰ τὸ τιμολόγιον 7580 δραχμῶν. Καὶ ὁ μὲν α' ἀναλαμβάνει 22 στατ. 11 ὀκ., 200 δραμ. ὁ β' 16 στατ. 1 ὀκ. καὶ ὁ γ' τὸ ὑπόλοιπον. Πόσον μέρος ἐκ τοῦ ποσοῦ τοῦ τιμολογίου ἐπλήρωσεν ἕκαστος.

(ἀπ. α', 3341,21 δρχ. β' 2406,08 καὶ γ' 1832,72 δρχ.).

15) Τέσσαρες κεφαλαιοῦχοι συνεφώνησαν νὰ ἐκτελέσωσι μίαν ἐπιχείρησιν· καὶ ὁ μὲν πρῶτος κατέβαλεν 27500 δολλάρια ἐπὶ 1 ἔτος 6 μῆν., ὁ δὲ β' 80135 δολλάρ. ἐπὶ $23\frac{1}{2}$ μην., ὁ γ' 29150 δολ. ἐπὶ 1 ἔτ., 5 μῆν. καὶ ὁ δ' 45205 δολάρ. ἐπὶ 17 $\frac{1}{2}$ μῆνας. Πόσα δολλάρια ἐκ τοῦ κέρδους 16213,50 δολ. θὰ λάβῃ ἕκαστος;
(ἀπ. α' 2189,92 δολ. β' 8331,30 δολ. γ' 2192,35 δολ. καὶ δ' 3499,83 δολλάρια περίπου).

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΕΣΟΥ ΟΡΟΥ ΚΑΙ ΜΕΙΞΕΩΣ

249) *Ὁρισμοί*. «Μέσος ὅρος ἢ ἀριθμητικὸν μέσον δεδομένων ἀριθμῶν καλεῖται τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀριθμῶν διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ ἐκφράζοντος τὸ πλῆθος αὐτῶν»· π.δ.χ. ὁ μέσος ὅρος τῶν ἀριθμῶν 8, 7, 12, 5 εἶναι τὸ πηλίκον $\frac{8+7+12+5}{4}=8$.

250) Δυνατὸν ἀντὶ νὰ λαμβάνηται ἅπαξ ἕκαστος τῶν ἀριθμῶν, ὧν ζητεῖται ὁ μέσος ὅρος, νὰ λαμβάνηται δὶς ἢ τρὶς καὶ ἐν γένει νὰ πολλαπλασιάζηται ἐπὶ ἀντίστοιχόν τινα ἀριθμόν. Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει προσθέτομεν τὰ γινόμενα ταῦτα καὶ τὸ ἄθροισμα διαιροῦμεν διὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν πολλαπλασιαστῶν, ὅπερ ἄθροισμα δεικνύει πάλιν τὸ πλῆθος τῶν λαμβανομένων ἀριθμῶν διὰ τὸν μέσον ὅρον.

Π. δ. χ. ὁ μέσος ὅρος τῶν ἀριθμῶν 5, 8, 10, 14 ἐξ ὧν ὁ α΄) πολλαπλασιάζεται ἐπὶ 2, ὁ β΄) ἐπὶ 4, ὁ γ΄) ἐπὶ 7 καὶ ὁ δ΄) ἐπὶ 3 εἶναι

$$5\times 2=10$$
$$8\times 4=32$$
$$10\times 7=70$$
$$\frac{14\times 3}{16}=\frac{42}{154}$$ τὸ πηλίκον $154 : 16=9\frac{5}{8}$

251) *Μείγματα καὶ κράματα.* Πολλάκις ἐν τῷ πρακτικῷ βίῳ παρίσταται ἀνάγκη ν' ἀναμείξωμεν διαφόρους οὐσίας πρὸς σχηματισμὸν χρησίμων μειγμάτων. Ἐὰν π.δ.χ. ἀναμίξωμεν ἄνυδρον οἰνόπνευμα μεθ' ὕδατος, λαμβάνομεν ἓν οἰνοπνευματοῦχον μεῖγμα. Ὁμοίως ἀναμειγνύοντες διαφόρους ποιότητας σίτου λαμβάνομεν ἕτερον μεῖγμα σίτου. Ὡσαύτως συντήκοντες διάφορα μέταλλα, ὡς λ.χ. χρυσὸν μετὰ χαλκοῦ, λαμβάνομεν μεῖγμα, ὅπερ καλεῖται *κρᾶμα*.

Ὡρίσαμεν ἀλλαχοῦ (§ 193) τί καλοῦμεν τίτλον κράματος· *βαθμὸς* δὲ οἰνοπνευματούχου ὑγροῦ καλεῖται ὁ ἀριθμὸς ὁ δεικνύων πόσοι ὄγκοι ἀνύδρου οἰνοπνεύματος περιέχονται εἰς 100 ἴσους ὄγκους τοῦ ὑγροῦ τούτου· λέγοντες π.δ.χ. ὅτι οἰνόπνευμά τι εἶναι βαθμοῦ 85° ἐννοοῦμεν ὅτι ἐξ 100 ἴσων ὄγκων τοῦ ὑγροῦ τούτου οἱ 85 εἶναι ἄνυδρον οἰνόπνευμα.

Τὰ προβλήματα τ' ἀναφερόμενα εἰς τοιαύτας ἀναμείξεις καλοῦνται *προβλήματα μείξεως*, κατατάσσονται δ' εἰς δύο κατηγορίας.

Προβλήματα μείξεως Α΄ κατηγορίας.

252) Προβλήματα μείξεως τῆς Αης κατηγορίας εἶναι ἐκεῖνα, εἰς τὰ ὁποῖα εἶναι δεδομέναι αἱ διάφοροι πρὸς ἀνάμειξιν ποσότητες διαφόρων εἰδῶν καὶ ἡ τιμὴ τῆς μονάδος ἑκάστου εἴδους καὶ ζητεῖται ἡ τιμὴ τῆς μονάδος τοῦ μείγματος.

Σημ. *Ὡς τιμὴν τῆς μιᾶς μονάδος θεωροῦμεν προσέτι καὶ τὸν τίτλον κράματος καὶ τὸν βαθμὸν οἰνοπνεύματος.*

Ἔστωσαν πρὸς λύσιν τὰ ἑξῆς προβλήματα·

1) Ἔχει τις τέσσαρα εἴδη καφὲ τῶν 4,20 δρχ., 3,80 δρχ., 3,50 δρχ., καὶ τῶν 3,20 δρχ. κατ' ὀκᾶν. Ἐὰν λάβῃ 580 ὀκ. ἐξ ἑκάστου εἴδους καὶ σχηματίσῃ μεῖγμα, ποία θὰ εἶναι ἡ τιμὴ τῆς ὀκᾶς τοῦ μείγματος;

Λύσις. Ἐὰν λάβωμεν ἀνὰ μίαν ὀκᾶν ἐξ ἑκάστου εἴδους, σχηματίζεται μεῖγμα 4 ὀκ., ὅπερ στοιχίζει $4,20+3,80+3,50+3,20$ δρχ. ἑπομένως ἐὰν λάβωμεν ἀνὰ 500 ὀκ. ἐξ ἑκάστου εἴδους, θὰ σχηματίσωμεν μεῖγμα 4×500 ὀκ., ὅπερ θὰ ἔχῃ προφανῶς ἀξίαν $(4,20+3,80+3,50+3,20)\times 500$· ὅθεν ἡ 1 ὀκᾶ τοῦ μείγματος τούτου θὰ τιμᾶται

$$\frac{(4,20+3,80+3,500)\times 500}{4\times 500}$$

ἢ ἁπλούστερον $\frac{4,20+3,80+3,50+3,20}{4}=3,675$ δρχ.

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι, ὁσάκις τὰ ἀναμειγνυόμενα ποσὰ εἶναι ἴσα, ἡ τιμὴ τῆς μονάδος τοῦ μείγματος εἶναι ὁ μέσος ὅρος (§ 249) τῶν δοθεισῶν τιμῶν.

2) Ἐὰν ἀναμείξῃ τις 2850 ὀκ. σίτου τῶν 40 λεπτῶν κατ' ὀκᾶν καὶ 3600 ὀκ. τῶν 38 λεπτ. καὶ 2400 ὀκ. τῶν 32 λεπτ., ποία θὰ εἶναι ἡ τιμὴ τῆς ὀκᾶς τοῦ μείγματος;

Λύσις.	2850 ὀκ. πρὸς 40	λ. τιμῶνται	$2850 \times 40 = 114000$ λ.
	3400 » » 38	» »	$3400 \times 38 = 129200$ λ.
	2400 » » 32	» »	$2400 \times 32 = 76800$ λ.
ἄρα αἱ	8650 ὀκ. μείγματος	τιμῶνται	320000 λ.

ἑπομένως ἡ 1 ὀκᾶ τοῦ μείγματος τιμᾶται $\frac{320000}{8650} = 36\frac{17}{172}$ λεπτά.

Παρατ. *Βλέπομεν ὅτι ἡ εὑρεθεῖσα τιμὴ τῆς ὀκᾶς τοῦ μείγματος εἶναι ὁ μέσος ὅρος (§ 250) τῶν δοθεισῶν τιμῶν 40 λ., 38 λ., 32 λ. πολλαπλασιαζομένων ἐπὶ τ' ἀντίστοιχα ποσὰ 2850 ὀκ., 3400 ὀκ., 2400 ὀκ.*

3) Ἐὰν συντακῶσι 250 δρμ. χρυσοῦ τίτλου 0,830 καὶ 180 δρμ. τίτλου 0,900 καὶ 320 δρμ. τίτλου 0,875, ποῖος θὰ εἶναι ὁ τίτλος τοῦ κράματος χρυσοῦ, τὸ ὁποῖον λαμβάνομεν;

Λύσις.

250	δρ. χρυσ. 0,830 τίτλ.	περιέχουσι	$250 \times 0{,}830 = 207{,}5$ καθ. χρ.
180	» » 0,900 »	»	$180 \times 0{,}900 = 162$ » »
320	» » 0,875 »	»	$320 \times 0{,}875 = 280$ » »
750	δρμ. χρυσ.	περιέχουσι καθ. χρυσὸν	649,5 δρμ.

1 » » περιέχει $\frac{649{,}5}{750} = 0{,}866.$

Ὅθεν ὁ τίτλος τοῦ νέου κράματος εἶναι ὁ 0,866.

Εἰς τὴν αὐτὴν κατηγορίαν κατατάσσομεν καὶ τὰ προβλήματα ἐκεῖνα, τὰ ὁποῖα διαφέρουσι τῶν προηγουμένων μόνον κατὰ τοῦτο, ὅτι ἀντὶ νὰ ζητῆται ἡ τιμὴ τῆς μονάδος τοῦ μείγματος, εἶναι δεδομένη αὕτη, ζητεῖται δ' ἡ τιμὴ τῆς μονάδος ἑνὸς οἱουδήποτε ἐκ τῶν ἀναμειγνυομένων εἰδῶν.

Ἔστω τοιοῦτον πρόβλημα τὸ ἑξῆς·

4) Διὰ νὰ σχηματίσωμεν μεῖγμα οἰνοπνεύματος βαθμοῦ 80°, ἀναμειγνύομεν 12 λίτρ. οἰνοπνεύματος 75°, 16,5 λίτρ. βαθμοῦ 60°, 32 λίτρ. βαθμοῦ 95° καὶ 9 λίτρ. ἀγνώστου βαθμοῦ. Ποῖος εἶναι ὁ βαθμὸς τοῦ τελευταίου εἴδους.

Λύσις	λίτρ.	βαθμ.		λίτρ. ἀνύδρου οἰνοπνεύμ.
	12	75°	περιέχουσι	$12 \times 0{,}75 = 9$
	16,5	60°	»	$16{,}5 \times 0{,}60 = 9{,}90$
	32	95°	»	$32 \times 0{,}95 = 30{,}40$
ἑπομένως	60,5		»	49,30

Ἀλλὰ θέλομεν νὰ σχηματίσωμεν ὁλικὸν μεῖγμα $60{,}5 + 9 = 69{,}5$ λίτρ. βαθμοῦ 80°, ἤτοι περιέχον ἄνυδρον οἰνόπνευμα $69{,}5 \times 0{,}80 = 55{,}60$ λίτρας. Ἑπομένως αἱ ὑπόλοιποι λίτραι 9 θὰ περιέχωσιν ἄνυδρον οἰνόπνευμα $55{,}60 - 49{,}30 = 6{,}30$ λ. καὶ ἡ 1 λίτρα θὰ περιέχῃ $\frac{6{,}30}{9} = 0{,}70$

Ἄρα ὁ ζητούμενος βαθμὸς εἶναι 70°.

5) Ἀναμειγνύομεν 2400 ὀκ. οἴνου τῶν 60 λ. μετὰ 1800 ὀκ. οἴνου τῶν 40 λ. καὶ μετὰ 300 ὀκ. ὕδατος. Ποία εἶναι ἡ τιμὴ τῆς ὀκᾶς τοῦ μείγματος ἄνευ κέρδους καὶ ποία μετὰ κέρδους 12 % ἐπὶ τῆς ἀξίας τοῦ ὅλου μείγματος;

Ἐν τῷ προβλήματι τούτῳ πρέπει νὰ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν ὅτι ἡ τιμὴ τῆς ὀκᾶς τοῦ ὕδατος εἶναι 0. Κατὰ τὰ λοιπὰ ἐργαζόμεθα ὡς εἰς τὰ προηγούμενα.

2400 ὀκ. × 60 λ. = 144000 λ.
1800 ὀκ. × 50 λ. = 72000 λ.
300 ὀκ. × 0 λ. = 0
4500 2160(00 | 45(00
48 λ.

Ἡ τιμὴ τῆς ὀκᾶς τοῦ μείγματος ἄνευ κέρδους εἶναι 48 λ.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ δεύτερον ζητούμενον, αὐξάνομεν τὴν ὁλικὴν ἀξίαν τοῦ μείγματος (216000 λ.) κατὰ 12 % καὶ ἔπειτα διαιροῦμεν διὰ τοῦ ποσοῦ 4500 ὀκ. τοῦ μείγματος ἢ εὐκολώτερον πράττομεν τοῦτο ἐπὶ τῆς τιμῆς 48 λ.

100 112
48 χ

$$\chi = 112 \times \frac{48}{100} = 53{,}79 \text{ λ. ἢ } 54 \text{ λ. περίπου.}$$

Προβλήματα μείξεως Β′ κατηγορίας.

253) Προβλήματα μείξεως Βας κατηγορίας εἶναι ἐκεῖνα, εἰς τὰ ὁποῖα δίδονται αἱ τιμαὶ τῆς μονάδος τῶν διαφόρων πρὸς ἀνάμειξιν ποσῶν καὶ ζητεῖται κατὰ ποίαν ἀναλογίαν θ' ἀναμειχθῶσι ταῦτα, διὰ νὰ προκύψῃ μεῖγμα, τοῦ ὁποίου ἡ μονὰς νὰ ἔχῃ μέσην τινὰ τιμὴν δεδομένην.

Ἔστωσαν πρὸς λύσιν τοιαῦτα προβλήματα τὰ ἑξῆς·

1) Κατὰ ποίαν ἀναλογίαν πρέπει ν' ἀναμείξωμεν οἶνον, οὗτινος ἡ ὀκᾶ τιμᾶται 60 λ., μὲ οἶνον, οὗτινος ἡ ὀκᾶ τιμᾶται 40λ., διὰ νὰ σχηματίσωμεν μεῖγμα, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ νὰ τιμᾶται 55 λ.;

Λύσις. Πρὸς τοῦτο σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς·

Ἑκάστη ὀκᾶ τοῦ α′ εἴδους εἰσαγομένη εἰς τὸ μεῖγμα καὶ πωλουμένη 55 λ. φέρει ζημίαν 60—55=5 λ.· ἑκάστη δ' ὀκᾶ τοῦ β′ εἴδους εἰσαγομένη εἰς τὸ μεῖγμα καὶ πωλουμένη 55 λ. φέρει κέρδος 55—40=15λ. Ἐὰν λοιπὸν λάβωμεν πρὸς ἀνάμειξιν ἐκ μὲν τοῦ α′ εἴδους 15 ὀκ., ἐκ δὲ τοῦ β′ 5 ὀκ., θὰ ἔχωμεν ἀφ' ἑνὸς μὲν ζημίαν 5 λ. ×15 ὀκ. =75 λ., ἀφ' ἑτέρου δὲ κέρδος 15 λ. × 5 ὀκ. = 75 λ. ὥστε βλέπομεν ὅτι μὲ τοιαύτην ἀνάμειξιν τὸ κέρδος καὶ ἡ ζημία ἐξισοῦνται καὶ ἑπομένως τὸ προκύπτον μεῖγμα θὰ στοιχίσῃ ἐν ὅλῳ ὅσον καὶ τὰ ἀναμειγνυόμενα ποσά.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται συντόμως ὡς ἑξῆς·

α′. εἶδος ἡ ὀκᾶ 60 15 ὀκ ἢ 3 ὀκ. (ἁπλοποιοῦμεν διὰ τοῦ 5)
μέση τιμὴ 55
β′. εἶδος ἡ ὀκᾶ 40 λ. 5 ὀκ. ἢ 1 ὀκ.

Ἡ ἀνάμειξις λοιπὸν τῶν δύο εἰδῶν βλέπομεν ὅτι πρέπει νὰ γίνῃ ἀναλόγως τῶν ἀριθμῶν 15 καὶ 5 ἢ ἁπλούστερον 3 καὶ 1, τουτέστιν ὅσας φορὰς λάβωμεν 3 ὀκ. ἐκ τοῦ α', τόσας φορὰς πρέπει νὰ λάβωμεν 1 ὀκ. ἐκ τοῦ β'. Κατὰ ταῦτα ἡ λαμβανομένη ποσότης ἐκ τοῦ α' εἴδους θ' ἀποτελῇ τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ ὅλου μείγματος καὶ ἡ ἐκ τοῦ β' τὸ $\frac{1}{4}$ αὐτοῦ.

Δοκιμή. α' εἶδος 3 ὀκ. $\times$60 λ. $=$180 λ.
β' » 1 ὀκ. $\times$40 λ. $=$ 40 λ.
μεῖγμα 4 ὀκ. $\times$55 λ. $=$ 220 λ.

2) Συντήκομεν δύο κράματα χρυσοῦ, τὸ μὲν τίτλου 0,835, τὸ δὲ 0,900. Πόσα δράμια πρέπει νὰ λάβωμεν ἐξ ἑκατέρου τούτων, ἵνα ἀποτελέσωμεν νέον κρᾶμα 340 δραμίων τίτλου 0,875 ;

Διατάσσομεν τὴν πρᾶξιν ὡς καὶ προηγουμένως.

α' κρᾶμα 0,835 τίτλ. 25 δρμ. ἢ 5 (ἁπλοποί-
μέσος τίτλ. 0,875 ησις διὰ 5)
β' κρᾶμα 0,900 40 δρμ. ἢ 8

Ἐντεῦθεν συνάγομεν ὅτι ἡ ἀνάμειξις δέον νὰ γίνῃ ἀναλόγως τῶν ἀριθμῶν 5 καὶ 8, ἤτοι ἐκ μὲν του α' κράματος νὰ λάβωμεν $\frac{5}{13}$ τοῦ ὅλου μείγματος τῶν 340 $\left(\text{ἢ } 300 \times \frac{5}{13} = 123\frac{1}{3} \text{ δρμ.}\right)$, ἐκ δὲ τοῦ β' τὰ $\frac{8}{13}$ τῶν 340 δρμ. $\left(\text{ἢ } 340 \times \frac{8}{13} = 196\,\frac{12}{13} \text{ δρμ.}\right)$.

3) Θέλει τις ν' ἀναμείξῃ καφέ, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ τιμᾶται 3,70 δρχ. μὲ 180 ὀκ. ἄλλης ποιότητος καφέ, οὗτινος ἡ ὀκᾶ τιμᾶται 3,20 δρχ. Πόσας ὀκάδας πρέπει νὰ λάβῃ ἀπὸ τὸ α. εἶδος, διὰ νὰ κάμῃ μεῖγμα, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ νὰ πωλῆται πρὸς 3,50 δρχ. ;

Διατάσσομεν τὴν πρᾶξιν ὡς ἀνωτέρω.

α' εἶδος ἡ ὀκᾶ 3,70 30 ὀκ. ἢ 3 ὀκ.
μέση τιμὴ 3,50
β' εἶδος ἡ ὀκᾶ 3,20 20 ὀκ. ἢ 2 ὀκ.

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ἀνάμειξις δέον νὰ γίνῃ ἀναλόγως τῶν ἀριθμῶν 3 καὶ 2. Ἑπομένως ἡ ζητουμένη ποσότης (χ) τοῦ α' εἴδους θὰ ἔχῃ λόγον πρὸς 180 ὀκ. τοῦ β' εἴδους, ὃν λόγον ἔχει ὁ 3 πρὸς τὸν 2, ἤτοι θὰ ἔχωμεν $\chi : 180 = 3 : 2$ καὶ ἑπομένως $\chi = \frac{180 \times 3}{2} = 270$ ὀκ.

4) Πόσα γραμμάρια κράματος χρυσοῦ τίτλου 0,835 χρειάζονται νὰ συντήξωμεν μετὰ 120 γραμ. καθαροῦ χρυσοῦ, διὰ νὰ λάβωμεν κρᾶμα τίτλου 0,900 ;

Δέον νὰ ἔχωμεν ὑπ' ὄψιν ὅτι ὁ καθαρὸς χρυσὸς ἔχει τίτλον 1 ἢ 1,000.
Ἡ λύσις κατὰ τὰ λοιπὰ γίνεται ὡς καὶ εἰς τὰ προηγούμενα.

$$\begin{array}{ccc} 0{,}835 & & 100 \text{ ἢ } 20 \\ & 0{,}900 & \\ 1{,}000 & & 65 \text{ ἢ } 13 \end{array}$$

$$\chi : 180 = 20 : 13 \text{ καὶ } \chi = \frac{180 \times 20}{13} = 276 \frac{12}{13} \text{ γρμ.}$$

Σημ. — *Ἂν κρᾶμα χρυσοῦ ἀναμείξωμεν μετὰ χαλκοῦ, δέον νὰ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν ὅτι ὁ χαλκὸς ἔχει τίτλον 0.*

5) Ἔμπορος τις ἔχει δύο ποιότητας ἐλαίου τῆς μὲν α' ποιότητος ἡ ὀκᾶ στοιχίζει 1,30 δρχ. τῆς δὲ β' 1,10 δρχ. Θέλει νὰ κάμῃ μεῖγμα 2800 ὀκ., ὅπερ νὰ πωλήσῃ πρὸς 1,28 δρ. καὶ νὰ κερδίσῃ 10 % ἐπὶ τῆς ἀξίας τοῦ μείγματος. Πόσας ὀκάδας θὰ λάβῃ ἐξ ἑκατέρας ποιότητος;

Θὰ εὕρωμεν πρῶτον πόσον θὰ ἐπωλεῖτο ἡ ὀκᾶ ἑκατέρας ποιότητος μετὰ τοῦ κέρδους 10 %.

ἀξ. ἀγ.	ἀξ. πωλ.	ἀξ ἀγ.	ἀξ πωλ.
100	110	100	110
1,30	χ	1,10	χ

$$\chi = 110 \times \frac{1{,}30}{100} = 1{,}43 \qquad \chi = 110 \times \frac{1{,}10}{100} = 1{,}21$$

Καταστρώνομεν ἤδη τὸ πρόβλημα ὡς εἰς τὰ προηγούμενα.

$$\begin{array}{lccc} \alpha'. & 1{,}43 \text{ δρχ.} & & 7 \\ & & 1{,}28 \text{ δρ.} & \\ \beta'. & 1{,}21 \text{ δρχ.} & & 15 \end{array}$$

$$\alpha') \ \frac{2800 \times 7}{22} = 890 \frac{10}{11} \text{ ὀκ.} \quad \beta' \ \frac{2800 \times 15}{22} = 1909 \frac{1}{11} \text{ ὀκ.}$$

Σημ. *Δύναται τὸ πρόβλημα τοῦτο νὰ λυθῇ καὶ ἄλλως. Ἡ τιμὴ 1,28 δρχ. εἰς τὴν ὁποίαν θὰ πωλήσῃ τὸ ἔλαιον εἶναι ἄθροισμα τῆς ἀξίας τοῦ ἐλαίου καὶ τοῦ κέρδους 10 % ἐπὶ τῆς ἀξίας ταύτης. Εὑρίσκομεν τὴν τιμήν, εἰς τὴν ὁποίαν θὰ ἐπωλεῖτο τὸ μεῖγμα ἄνευ κέρδους.*

110 ἀξ. πωλ.	100 ἀξ ἀγ.
1,28	χ

$$\chi = 100 \times \frac{1{,}20}{1{,}10} = 1{,}16 \frac{4}{11}$$

Ἤδη κατατάσσομεν τὸ πρόβλημα ὡς ἑξῆς·

$$\begin{array}{lccc} \alpha' & 1{,}30 \text{ δρχ.} & & 6\frac{4}{11} \text{ ἢ } \frac{70}{11} \text{ ἢ } 70 \text{ ἢ } 7 \\ & & 1{,}16\frac{4}{11} & \\ \beta' & 1{,}10 \text{ δρχ.} & & 13\frac{7}{11} \text{ ἢ } \frac{150}{11} \text{ ἢ } 150 \text{ ἢ } 15 \end{array}$$

ἤτοι φθάνομεν εἰς τὰ αὐτὰ ἐξαγόμενα.

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Ἐργάτης τις ἐργασθεὶς κατὰ τὰς 6 ἡμέρας τῆς ἑβδομάδος ἔλαβε τὴν μὲν 1ην ἡμέραν 3 δρχ. τὴν δὲ 2αν 2,75 δρ., τὴν 3ην 4,50 δρχ. τὴν 4ην 5 δρχ. τὴν 5ην 4,75 δρχ. καὶ τὴν 6ην 4,90 δρχ. Ποῖον εἶναι τὸ ἡμερομίσθιον κατὰ μέσον ὅρον ; (Ἀπ. 4,31 δρχ.)

2) Τέσσαρα βαρέλια καφὲ ζυγίζουσι τὸ μὲν α' 10 στ.—3 ὀκ.—50 δρμ., τὸ δὲ β' 9 στ.—30 ὀκ.—200 δρμ., τὸ γ' 11 στ.—20 ὀκ.—150 δρμ., τὸ δὲ δ' 9 στ.—10 ὀκ.—200 δρμ. Πόσον ζυγίζει κατὰ μέσον ὅρον ἕκαστον βαρέλιον; (Ἀπ. 10 στ.—5 ὀκ.—45 δρμ.)

3) Ἁμαξοστοιχία τις διήνυε ἐπὶ 8 $\frac{1}{2}$ ὥρας 32 χλμ. καθ' ὥραν, κατὰ τὰς 5 ἑπομένας ὥρας 45,400 χλμ. καθ' ὥραν καὶ κατὰ τὰς τελευταίας 6 $\frac{1}{2}$ ὥρας 36,500 χλμ. καθ' ὥραν. Ποία εἶναι ἡ μέση ταχύτης αὐτῆς καθ' ὥραν; (Ἀπ. 36,8125 χλμ.)

4) Μαθητής τις ἔλαβεν εἰς μὲν τὰ Ἑλληνικὰ ὁλικὸν βαθμὸν 7, εἰς δὲ τὰ Μαθηματικὰ 8, εἰς τὰ Ἱερὰ 9, εἰς τὴν Γυμναστικὴν 6, εἰς τὰ Γαλλικὰ 5, εἰς τὴν Φυσικὴν 8, εἰς τὴν Ἱστορίαν 6 καὶ εἰς τὴν Γεωγραφίαν 7. Ὁ βαθμὸς τῶν Ἑλληνικῶν, Μαθηματικῶν καὶ τῆς Γυμναστικῆς ἔχει συντελεστὴν (πολλαπλασιάζεται) τὸν 2 καὶ τῶν ὑπολειπομένων τὸν 1. Τίς εἶναι ὁ γενικὸς βαθμὸς τοῦ μαθητοῦ τούτου ; (Ἀπ. 7).

5) Οἱ ἐργάται ἑνὸς κτήματος ἐργάζονται κατὰ τὰς 120 ἡμ. 9 ὥρας καθ' ἡμέραν, κατὰ τὰς 135 ἡμ. 12 ὥρ. καὶ κατὰ τὰς 45 ἡμ. 13 ὥρ. Ποία εἶναι ἡ μέση διάρκεια τῆς ἡμερησίας ἐργασίας καθ' ὅλον τὸ ἔτος; (Ἀπ. 10 ὥρ. 57 λ.).

6) Ἔν τινι διώρυγι ἔσκαψαν 9 ἐργ. ἐπὶ 5 ἡμ. ἓν μέρος 56 $\frac{1}{2}$ μ., 8 ἄλλοι ἐπὶ 11 ἡμ. ἕτερον μέρος 118 μ. καὶ 12 ἄλλοι ἐπὶ 7 ἡμ. μέρος 83 $\frac{1}{2}$ μ. Πόσα μέτρα ἔσκαψεν ἕκαστος ἐργάτης τὴν ἡμέραν κατὰ μέσον ὅρον; (Ἀπ. 1,19 μ.)

7) Ἠγόρασέ τις α' 10 τεμάχια (τόπια) τῶν 35 μ. πρὸς 6,25 δρχ. τὸ μέτρον· β' 12 τεμάχια τῶν 30 μ. πρὸς 7,35 δρχ. τὸ μέτρον, γ'. 15 τεμάχια τῶν 40 μ. πρὸς 8,15 δρχ. τὸ μέτρον. Ποία εἶναι κατὰ μέσον ὅρον ἡ τιμὴ τοῦ μέτρου τῶν ὑφασμάτων τούτων ; (Ἀπ. 7,422 δραχ.).

8) Ἔμπορός τις ἠγόρασε 2458 ὀκ. σίτου πρὸς 44 λ. τὴν ὀκᾶν, 4580 ὀκ. ἄλλης ποιότητος πρὸς 45 $\frac{3}{4}$ λ. τὴν ὀκᾶν. Ποία εἶναι ἡ μέση τιμὴ τῆς ὀκᾶς τοῦ ὅλου σίτου; (Ἀπ. 45 $\frac{977}{7038}$ λ.)

9) Ἀνέμειξέ τις 625 λίτρ. οἰνοπνεύματος 80° καὶ 550 λ. τῶν 60° καὶ 105 λ. ὕδατος. Πόσος θὰ εἶναι ὁ βαθμὸς τοῦ μείγματος; (Ἀπ. 65°).

10) Διὰ τὴν κατασκευὴν δοχείου τινὸς συντήκει τις 4 $\frac{1}{2}$ χλγ. ἀργύρου τίτλου 0,900 καὶ 1 $\frac{1}{4}$ χλγ. ἀργύρου τίτλου 0,600 καὶ 250 γρμ.

χαλκοῦ. Ποῖος θὰ εἶναι ὁ τίτλος τοῦ κράματος ἐξ οὗ κατεσκευάσθη τὸ δοχεῖον; ('Απ. 0,800).

11) Ἔμπορός τις ἔχει δύο ποιότητας ὀρύζης τῶν 0,85 δρχ. καὶ 0,92 δρχ. κατ' ὀκᾶν. Ἐὰν ἀναμείξῃ δύο ποσὰ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν ποιοτήτων ἔχοντα λόγον πρὸς ἄλληλα, ὡς ὁ 5 πρὸς 2, ποῖα θὰ εἶναι ἡ μέση τιμὴ τῆς ὀκᾶς τοῦ μείγματος; ('Απ. 0,87 δρχ.)

12) Συντήκομεν κρᾶμα χρυσοῦ 285 γρμ. τίτλου 0,835 μετ' ἄλλου κράματος χρυσοῦ 325 γρμ. καὶ τίτλου 0,920 καὶ μετὰ καθαροῦ χρυσοῦ 152 γρμ. Πόσος θὰ εἶναι ὁ τίτλος τοῦ νέου κράματος; ('Απ. 0,904),

13) Ἔμπορός τις θέλει νὰ λάβῃ μεῖγμα 840 ὀκ, 300 δρμ. ἐλαίου, οὗτινος ἡ ὀκᾶ νὰ στοιχίζῃ 1,15 δρχ. Πρὸς τοῦτο ἀναμειγνύει δύο ποιότητας ἐλαίου· καὶ τῆς μὲν α' ποιότητος ἡ ὀκᾶ στοιχίζει 1,25, δρχ. τῆς β' 1,02 δρχ. Πόσας ὀκάδας θὰ λάβῃ ἐξ ἑκατέρου εἴδους;

$\left(\text{'Απ. α' 475 ὀκ., 82}\ \frac{3}{5}\ \text{δρμ. β' 365 ὀκ., 217}\ \frac{2}{5}\ \text{δρμ.}\right)$

14) Πόσον ἄργυρον τίτλου $0{,}766\frac{2}{3}$ πρέπει ν' ἀναμείξῃ τις μὲ 72 ὀκ. ἀργύρου τίτλου $0{,}910\frac{1}{2}$ ἵνα λάβῃ κρᾶμα βαθμοῦ καθαρότητος 0,800;

(ἀπ. 238 ὀκ. 272 δρμ.).

15) Χρειάζεταί τις οἰνόπνευμα 70^0 καὶ ἔχει τοιοῦτον τῶν 90^0 καὶ $62\frac{1}{2}{}^0$. Ζητεῖται α') κατὰ ποίαν ἀναλογίαν πρέπει νὰ γίνῃ ἡ ἀνάμιξις, β') πόσας μετρικὰς ὀκάδας πρέπει νὰ λάβῃ ἐξ ἑκάστου εἴδους, ἵνα λάβῃ μεῖγμα 800 ὀκ.

('Απ. α'. ὡς 3 πρὸς 8, β'. 218 ὀκ. $72\frac{8}{11}$ δράμ, 581 ὀκ., $327\frac{3}{11}$ δράμ.).

16) Πόσον ἄργυρον καὶ πόσον χαλκὸν πρέπει νὰ συντήξῃ τις, διὰ νὰ κόψῃ 400 ἀργυρᾶ πεντάδραχμα, ὧν ὁ βαθμὸς καθαρότητος εἶναι 0,900 καὶ τὸ βάρος ἑκάστου 25 γρμ.; (ἀπ. 9 χ.λ.γ. ἀργύρ. καὶ 1 χ.λ.γ. χαλκοῦ).

17) Πόσον χρυσὸν καὶ χαλκὸν πρέπει τις ν' ἀναμείξῃ, διὰ νὰ κατασκευάσῃ 500 χρυσᾶ εἰκοσάφραγκα, γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἕκαστον εἰκοσάφραγκον ἔχει βάρος 6,4516 γρμ. καὶ τίτλον 0,900; χρυσοῦ καὶ 0,32258 χ.λ.γ. χαλκοῦ. (ἀπ. 2,90322 χ.λ.γ.).

18) Ἔχει τις κρᾶμα 21 χ.λ.γ. χρυσοῦ τίτλου 0,850. Πόσα χ.λ.γ. χαλκοῦ πρέπει νὰ προσθέσῃ εἰς αὐτό, ἵνα καταβιβασθῇ ὁ τίτλος αὐτοῦ εἰς 0,800; (ἀπ. 1,3125 χ.λ.γ. χαλκοῦ).

19) Ἐπώλησέ τις 45 πρόβατα, ἐξ ὧν τὰ 8 πρὸς 18,75 δρχ. ἕκαστον, 5 ἄλλα πρὸς 20,50 δρχ., τὰ $\frac{3}{8}$ τοῦ ὑπολοίπου πρὸς 15,70 δρχ., τὰ $\frac{3}{5}$ τοῦ νέου ὑπολοίπου πρὸς 18,80 δρχ. καὶ τὰ ὑπόλοιπα πρὸς 24,50 δρχ. Ποία εἶναι ἡ μέση τιμὴ ἑκάστου προβάτου; (ἀπ. 19,166 δρχ.).

20) Ἠγόρασέ τις ποσόν τι ζακχάρεως τριῶν ποιοτήτων μὲ τὰς ἑξῆς τιμάς· πρὸς 1,15 δρχ., πρὸς 1,28 δρχ. καὶ πρὸς 1,30 δρχ. τὴν ὀκᾶν. Ἐκ τοῦ β' εἴδους ἠγόρασε ποσὸν τριπλάσιον ἢ ἐκ τοῦ α' καὶ ἐκ τοῦ

γ' ποσόν, ὅσον ἐκ τοῦ α' καὶ β'. Ποία εἶναι ἡ μέση τιμὴ τῆς ὀκᾶς;

(ἀπ. $1{,}22\frac{3}{8}$ δρχ.).

21) Ἔμπορός τις ἀναμειγνύει 85 ὀκ. ἀλεύρου τῶν 48 λ., 30 ὀκ. ἄλλης ποιότητος τῶν 52 λ. καὶ 235 ὀκ. τρίτης ποιότητος τῶν 45 λ. Εἰς ποίαν τιμὴν πρέπει νὰ πωλήσῃ τὴν ὀκᾶν τοῦ μείγματος ἂν θέλῃ νὰ κερδήσῃ 25,60 δρχ.; (ἀπ. 0,536 δρχ.).

22) Οἰνοπώλης ἀναμειγνύει 158 ὀκ. οἴνου τῶν 60 λ. καὶ 245 ὀκ. οἴνου τῶν 50 λ. καὶ 83 ὀκ. ὕδατος; Ποία εἶναι ἡ μέση τιμὴ τοῦ μείγματος;

(ἀπ. 0,447 δρχ.).

23) Ἔχει τις 36 λίτ. οἰνοπνεύματος τῶν 80°. Πόσας λίτρας ὕδατος πρέπει νὰ προσθέσῃ εἰς αὐτό, ἵνα λάβῃ οἰνόπνευμα $68\frac{1}{4}$ °;

(ἀπ. $6\frac{18}{91}$ λίτρ.).

24) Ἔμπορός τις ἀναμειγνύει 3450 ὀκ. σίτου τῶν 40 λ. καὶ 2420 ὀκ. τῶν $42\frac{1}{2}$ λ. καὶ 4560 ὀκ. τῶν 45 λ. Πόσον πρέπει νὰ πωλῇ τὴν ὀκᾶν τοῦ μείγματος, ἵνα κερδίζῃ $12\frac{1}{2}$ % ἐπὶ τῆς ἀξίας τοῦ μείγματος;

(ἀπ. 0,481 δρχ.)

25) Καπνέμπορος ἀνέμειξε τρία εἴδη καπνοῦ· ἐκ μὲν τοῦ α') εἴδους τῶν 2,85 δρχ. ἔλαβεν 845 ὀκ., ἐκ δὲ τοῦ β') τῶν 3,20 δρχ. 585 ὀκ. καὶ ἐκ τοῦ γ') τῶν 3,65 δρχ. 450 ὀκ. Ἐὰν ἐπώλησε τὴν ὀκᾶν τοῦ μείγματος πρὸς 3,40 δρχ., ἐκέρδισεν ἢ ἐζημιώθη καὶ πόσον τοῖς ἑκατόν;

(ἀπ. ἐκέρδισεν 7,93 % περίπου).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Η'.

ΠΕΡΙ ΤΕΤΡΑΓΩΝΟΥ ΚΑΙ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

254) Τὸ γινόμενον τὸ ὁποῖον εὑρίσκομεν πολλαπλασιάζοντες ἀριθμόν τινα ἐπὶ τὸν ἑαυτόν του, καλεῖται *τετράγωνον* ἢ *δευτέρα δύναμις* τοῦ ἀριθμοῦ τούτου.

Π.δ.χ. $3\times3=9$ λέγεται τετράγωνον τοῦ 3· ὁμοίως $\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{16}{25}$ λέγεται τετράγωνον τοῦ $\frac{4}{5}$· ὡσαύτως $3{,}5\times3{,}5=12{,}25$ εἶναι τετράγωνον τοῦ 3,5.

Τὸ γινόμενον τριῶν ἴσων παραγόντων καλεῖται *κύβος* ἢ *τρίτη δύναμις* τοῦ ἑνὸς τῶν παραγόντων· π.δ.χ. $4\times4\times4=64$ λέγεται κύβος τοῦ 4. Ὁμοίως $\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{8}{27}$ λέγεται κύβος τοῦ $\frac{2}{3}$.

Ἐν γένει τὸ γινόμενον ἴσων παραγόντων καλεῖται δύναμις τοῦ ἑνὸς τῶν παραγόντων· καὶ ἂν οἱ παράγοντες εἶναι τέσσαρες, ἡ δύναμις καλεῖται *τετάρτη*· ἂν πέντε, *πέμπτη* κ.ο.κ. Π.δ.χ. $5\times5\times5\times5=625$ εἶναι ἡ τετάρτη δύναμις τοῦ 5.

Παράστασις τῶν δυνάμεων. Τὸ τετράγωνον ἢ τὴν δευτέραν δύναμιν ἀριθμοῦ τινος, ὡς τοῦ 3, παριστῶμεν συντόμως διὰ τοῦ συμβόλου 3^2, ἤτοι $3^2 = 3 \times 3$. Καὶ γενικῶς τὸ τετράγωνον οἱουδήποτε ἀριθμοῦ (α) παριστῶμεν $\alpha^2 = \alpha \times \alpha$.

Ἐν τῇ παραστάσει ταύτῃ, ὁ μὲν ἀριθμὸς α λέγεται *βάσις* τῆς δυνάμεως, ὁ δὲ ἄνω καὶ δεξιᾷ τούτου γεγραμμένος ἀριθμὸς ^{2} καλεῖται *ἐκθέτης* τῆς δυνάμεως. Ὁμοίως ὁ κύβος οἱουδήποτε ἀριθμοῦ τινὸς α παρίσταται διὰ τοῦ α^3, ἤτοι $\alpha^3 = \alpha \times \alpha \times \alpha$. Ὁμοίως ἡ τετάρτη δύναμις οἱουδήποτε ἀριθμοῦ α παρίσταται α^4, ἤτοι $\alpha^4 = \alpha \times \alpha \times \alpha \times \alpha$ κ.ο.κ.

Ἀσκήσεις.

1) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ τετράγωνα τῶν ἀκεραίων 1—25.

2) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ τετράγωνα τῶν $34\frac{1}{2}$, $8\frac{3}{4}$, 1025, 3400 8500, 9040, 13065, 14295.

3) Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ κύβοι τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν 1 ἕως 12.

4) Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ κύβοι τῶν: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{8}{15}$, $7\frac{1}{4}$, 8,25, 47,135, 0,0175, 1,3456, 750, 1200, 1435, 7865.

5) Νὰ ὑπολογισθῶσιν αἱ ἑξῆς δυνάμεις $\left(\frac{3}{4}\right)^3$, $\left(\frac{2}{5}\right)^4$, $(1{,}4)^5$ $(0{,}002)^6$ $\left(\frac{1}{4}\right)^7$,

6) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ ἑξῆς ἐξαγόμενα·

α΄) $3{,}25^2 + 1{,}7^3 + \left(\frac{7{,}35}{2}\right)^2$ β΄) $\dfrac{48.\left(\frac{5}{14}\right)^2 - 8.(4{,}125)^2}{67.(0{,}18)^2 + (4{,}25)^3.7}$

Περὶ τετραγωνικῆς ῥίζης.

255) *Τετραγωνικὴ ῥίζα* ἀριθμοῦ τινος καλεῖται ὁ ἀριθμὸς ἐκεῖνος, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον ἰσοῦται πρὸς τὸν δοθέντα ἀριθμόν. Π.δ.χ. ἡ τετραγ. ῥίζα τοῦ 64 εἶναι ὁ 8, διότι $8^2 = 64$.

Ἡ τετραγ. ῥίζα τοῦ ἀριθμοῦ 64 παρίσταται συμβολικῶς ὡς ἑξῆς $\sqrt{64}$ ἤτοι $\sqrt{64} = 8$. Τὸ σύμβολον ($\sqrt{}$) καλεῖται *ῥιζικόν*, ὁ δ' ὑπ' αὐτὸ γεγραμμένος ἀριθμὸς *ὑπόῤῥιζος* ποσότης.

Ὁμοίως ἡ τετραγ. ῥίζα τοῦ 81 εἶναι ὁ 9, διότι $9^2 = 81$.

Ἐὰν ὅμως ζητῶμεν τὴν τετραγ. ῥίζαν τοῦ 75, παρατηροῦμεν ὅτι οὗτος δὲν εἶναι τετράγωνον ἀκεραίου τινὸς ἀριθμοῦ, ἀλλ' ὅτι περιέχεται μεταξὺ τῶν τετραγώνων τῶν δύο διαδοχικῶν ἀκεραίων 8 καὶ 9, ἤτοι μεταξὺ τῶν 64 καὶ 81. Ἐν τῇ περιστάσει ταύτῃ ὡς τετραγ. ῥίζαν τοῦ ἀριθμοῦ 75 θεωροῦμεν τὸν μικρότερον ἐκ τῶν δύο διαδοχικῶν ἀκεραίων, ἤτοι τὸν 8, καὶ λέγομεν τότε ὅτι ὁ 8 εἶναι ἡ τετραγ. ῥίζα τοῦ 75 κατὰ προσέγγισιν ἀκεραίας μονάδος.

Ὁμοίως τοῦ ἀριθμοῦ 60 ἡ τετραγ. ῥίζα κατὰ προσέγγισιν ἀκεραίας μονάδος εἶναι ὁ 7, διότι ὁ 60 περιλαμβάνεται μεταξὺ 7^2 καὶ 8^2.

Ἐὰν ἐν τῷ προηγουμένῳ παραδείγματι θεωρήσωμεν, ἀντὶ τῶν δύο διαδοχικῶν ἀριθμῶν 7 καὶ 8, τοὺς ἑπομένους ἀριθμοὺς

7, 7,1 7,2, 7,3 . . . . 7,9, 8

καὶ ὑψώσωμεν αὐτοὺς εἰς τὸ τετράγωνον, παρατηροῦμεν ὅτι ὁ ἀριθμὸς 60 περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν δύο διαδοχικῶν τετραγώνων τῶν 7,7 καὶ 7,8 διότι $7,7=59,29$ καὶ $7,8^2=60,64$.

Ὁ μικρότερος τῶν δύο τούτων ἀριθμῶν, ἤτοι ὁ 7,7 θεωρεῖται ὡς τετραγ. ῥίζα τοῦ 60 κατὰ προσέγγισιν 0,1. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ὁρίζομεν καὶ τὴν τετραγ. ῥίζαν ἀριθμοῦ, κατὰ προσέγγισιν 0,01, 0,001 κτλ.

Εὕρεσις τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης

Α΄) Εὕρεσις τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης ἀκεραίου ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν ἀκεραίας μονάδος.

256) Πρακτικὸς κανών. «Χωρίζομεν τὸν δοθέντα ἀριθμὸν εἰς διψήφια τμήματα ἀρχόμενοι ἐκ δεξιῶν· τὸ πρῶτον πρὸς τὰ ἀριστερὰ τμῆμα θὰ ἔχῃ δύο ἢ καὶ ἓν ψηφίον. Τοῦ τμήματος τούτου ἐξάγομεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν κατὰ προσέγγισιν ἀκεραίας μονάδος καὶ εὑρίσκομεν οὕτω τὸ πρῶτον ψηφίον τῆς ῥίζης. Τὸ τετράγωνον τοῦ ψηφίου τούτου ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ πρώτου τμήματος τοῦ ἀριθμοῦ καὶ δεξιᾷ τοῦ ὑπολοίπου καταβιβάζομεν τὸ ἀμέσως ἑπόμενον διψήφιον τμῆμα.

Τοῦ οὕτω προκύπτοντος ἀριθμοῦ διαιροῦμεν τὰς δεκάδας διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ εὑρεθέντος ψηφίου τῆς ῥίζης. Τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως ταύτης γράφομεν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ διαιρέτου καὶ τὸν οὕτω προκύπτοντα ἀριθμὸν πολλαπλασιάζομεν ἐπ' αὐτὸ τὸ πηλίκον· καὶ ἂν τὸ γινόμενον ἀφαιρῆται ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ οὗ τὰς δεκάδας διῃρέσαμεν, τὸ εὑρεθὲν ψηφίον εἶναι τὸ δεύτερον ψηφίον τῆς ῥίζης, εἰ δὲ μὴ δοκιμάζομεν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον τὸ κατὰ μονάδα μικρότερον ψηφίον κ. ο. κ., μέχρις οὗ εὕρωμεν ψηφίον, οὗτινος τὸ γινόμενον ν' ἀφαιρῆται.

Δεξιᾷ τοῦ εὑρισκομένου ὑπολοίπου καταβιβάζομεν τὸ ἀμέσως ἑπόμενον διψήφιον τμῆμα τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ καὶ τοῦ οὕτω σχηματιζομένου ἀριθμοῦ διαιροῦμεν τὰς δεκάδας διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ εὑρεθέντος μέρους τῆς ῥίζης, καὶ γράφομεν τὸ πηλίκον δεξιᾷ τοῦ διαιρέτου καὶ πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸ τοῦτο τὸν οὕτω προκύπτοντα ἀριθμόν· καὶ ἂν μὲν τὸ γινόμενον ἀφαιρῆται ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ, οὗ τὰς δεκάδας διῃρέσαμεν, τὸ εὑρεθὲν πηλίκον θὰ εἶναι τὸ τρίτον ψηφίον τῆς ῥίζης, εἰ δὲ μὴ δοκιμάζομεν τὸ κατὰ μονάδα μικρότερον ψηφίον κ. ο. κ. Προχωροῦμεν δ' οὕτω μέχρις οὗ καταβιβάσωμεν πάντα τὰ διψήφια τμήματα τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ. Τὸ τελευταῖον ὑπόλοιπον εἶναι τὸ ὑπόλοιπον τῆς πράξεως. Καὶ ἂν μὲν τοῦτο εἶναι 0, ἡ εὑρεθεῖσα τετραγωνικὴ ῥίζα εἶναι ἡ ἀκριβής, ἄλλως εἶναι ἡ κατὰ προσέγγισιν ἀκεραίας μονάδος».

Σημ. *Ἂν τύχῃ μία τῶν διαιρέσεων νὰ δίδῃ πηλίκον 0 γράφομεν εἰς τὴν ῥίζαν ὡς ψηφίον τὸ 0 καὶ ἐξακολουθοῦμεν τὴν πρᾶξιν.*

Παραδείγματα. Νὰ ἐξαχθῇ κατὰ προσέγγισιν ἀκεραίας μονάδος ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ ἀριθμοῦ 170458. Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἐξῆς.

√17.04.58	412		
16	81	822	
104	1	2	
81	81	1644	
2358			
1644			
714			

Ὁμοίως νὰ ἐξαχθῇ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα κατὰ προσέγγισιν ἀκεραίας μονάδος τοῦ ἀριθ. 9258348.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἐξῆς·

√9.25.83.48	3042		
9	6	604	6082
025		4	2
2583		2416	12164
2416			
16748			
12164			
4584			

Ἐνταῦθα παρατηροῦμεν ὅτι ἐν τῷ πρώτῳ παραδείγματι ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα εἶναι 412 καὶ τὸ ὑπόλοιπον 114, ὅπερ δὲν πρέπει νὰ ὑπερβαίνῃ τὸ διπλάσιον τῆς ῥίζης 412, ἤτοι τὸ 824.

Ἐὰν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν κατὰ προσέγγισιν ἀκεραίας μονάδος μικτοῦ ἢ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ οὐχὶ μικροτέρου τῆς μονάδος, εὑρίσκομεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν μόνον τοῦ ἀκεραίου μέρους. Π. δ. χ. ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 783,45 κατὰ προσέγγισιν ἀκεραίας μονάδος εἶναι ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 783. Ὁμοίως ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ $145\frac{3}{4}$ κατὰ προσέγγισιν ἀκεραίας μονάδος εἶναι ἡ αὐτὴ μὲ τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ 145.

Β΄) Εὕρεσις τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης ἀριθμοῦ τινος κατὰ προσέγγισιν δεκαδικῆς μονάδος.

257) Πρακτικὸς κανών. «Ἵνα εὕρωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν ἀκεραίου ἢ δεκαδικοῦ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{10}$ ἢ $\frac{1}{100}$ ἢ $\frac{1}{1000}$ κ. τ. λ. πολλαπλασιάζομεν τὸν δοθέντα ἀριθμὸν ἐπὶ 10^2 ἢ 100^2 ἢ 1000^2 κ.τ.λ. καὶ τοῦ οὕτω προκύπτοντος ἀριθμοῦ εὑρίσκομεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν κατὰ προσέγγισιν ἀκεραίας μονάδος καὶ ταύτην διαιροῦμεν διὰ 10 ἢ 100 ἢ 1000 κτλ.».

Παραδείγματα. Εὑρεῖν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν· α΄) τοῦ 845 κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{100}$ καὶ β΄) τοῦ 3,458 κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{1000}$.

α΄) $845 \times 100^2 = 845 \times 10000 = 8450000$

√8.45.00.00	2906		
4 45	49	5806	
4 41	9	6	
400	441	34835	
40000			
34836			
5165			

$\frac{2906}{100} = 29{,}06$ εἶναι ἡ ζητουμένη ῥίζα.

β΄) $3{,}458 \times 1000^2 = 3{,}458 \times 1000000 = 3458000$

√3.45.80.00	1859		
2 45			
2 24	28	365	3709
2180	8	5	9
1825	224	1825	33381
35500			
33381			
2119			

$\frac{1859}{1000} = 1{,}859$ εἶναι ἡ ζητουμένη ῥίζα.

Παρατήρησις. *Ἐὰν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν κλάσματός τινος κατὰ προσέγγισιν δεκαδικῆς μονάδος, τρέπομεν πρῶτον τοῦτο εἰς δεκαδικὸν καὶ ἔπειτα ἐφαρμόζομεν τὸν ἀνωτέρω κανόνα.*

Π. δ. χ. νὰ εὑρεθῇ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ $\frac{7}{8}$ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{100}$

$$\frac{7}{8}=0,875 \text{ καὶ } 0,875\times 100^2=0,875\times 10000=8750.$$

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{87\ 50} & 93 \\ \ \ 6\ 50 & 183 \\ \ \ 5\ 49 & \ \ \ 3 \\ \hline \ \ 2\ 01 & 549 \end{array} \qquad \sqrt{\frac{7}{8}}=0,93$$

Ἀσκήσεις.

1) Εὑρεῖν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν α΄) τοῦ 64, β΄) τοῦ 81 γ΄) τοῦ 36, δ΄) τοῦ 100 ε΄) τοῦ 121, στ΄) τοῦ 144, ζ΄) τοῦ 400, η΄) τοῦ 10000, θ΄) τοῦ 2500, ι΄) τοῦ 6400, ια΄) τοῦ 8100.

2) Εὑρεῖν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν κατὰ προσέγγισιν ἀκεραίας μονάδος τῶν ἑξῆς: α΄) 72,625, β΄) 30625, γ΄) 1457878, δ΄) 25004765.

3) Εὑρεῖν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{100}$ τῶν ἑξῆς α΄) 845, β΄) 15,745, γ΄) $8\frac{3}{4}$

4) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ ἑξῆς ἐξαγόμενα: α΄) $\sqrt{11,9225-(0,837)^2}$

β΄) $\dfrac{(2,45)^2-\sqrt{2,25}}{2^2}$

γ΄) $\dfrac{5\,(2,4)^2-3\sqrt{1,96}}{7\sqrt{20,25}}$

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τετραγώνου ἔχοντος πλευρὰν ἴσην α) πρὸς 8 μ. β΄) πρὸς 12 μ. γ΄) πρὸς 10,75 μ. δ΄) πρὸς 23,60 μ.

2) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς κυκλικοῦ οἰκοπέδου, οὗτινος ἡ διάμετρος εἶναι ἴση α΄) πρὸς 18,45 μ. β΄) πρὸς 25,50 μ. γ΄) πρὸς 38,75 μ.

Σημ. —*Τὸ ἐμβαδὸν κύκλου ἔχοντος ἀκτῖνα (α) μέτρων δίδεται, ὡς γνωστὸν ἐκ τῆς γεωμετρίας ὑπὸ τοῦ τύπου $\pi\alpha^2$, ἔνθα $\pi=3,1459$.*

3) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος κύβου ἔχοντος πλευρὰν ἴσην α΄) πρὸς 4 μ. β΄) πρὸς 8 μ. γ΄) πρὸς 9,25 μ. δ΄) πρὸς 12,75 μ.

4) Νὰ εὑρεθῇ τὸ βάρος ἑνὸς κύβου ἐκ μαρμάρου μὲ πλευρὰν α΄) 1 μ. β΄) 2 μ. γ΄) 3,45 μ. δ΄) 4,65 μ. (Εἰδ. βάρος μαρμάρου 2,65 περ.)

5) Ἐπώλησέ τις ἓν οἰκόπεδον ὀρθογώνιον ἔχον μῆκος 17,25 μ. καὶ πλάτος 7,25, ἓν ἕτερον τετραγωνικοῦ σχήματος μὲ πλευρὰν 8,45 μ. καὶ τέλος ἓν κυκλικὸν μὲ διάμετρον 38,45 μ. ἅπαντα πρὸς 8,75 δρχ. τὸ τετραγ. μέτρον. Πόσον εἰσέπραξεν ἐν ὅλῳ;

6) Νὰ εὑρεθῇ ἡ πλευρὰ τετραγώνου ἰσοδυνάμου πρὸς ἓν βασιλικὸν στρέμμα.

7) Τὸ παλαιὸν στρέμμα ἔχει ἔκτασιν 3025 τετραγ. μικρῶν πήχεων. Πόση εἶναι ἡ πλευρὰ α') εἰς μικροὺς πήχ., β') εἰς μέτρα τετραγώνου ἰσοδυνάμου πρὸς τὸ παλαιὸν στρέμμα.

8) Τὸ ἐμβαδὸν κυκλ. ἀλωνίου εἶναι 85,40 □ μ. Πόση εἶναι ἡ ἀκτὶς αὐτοῦ καὶ πόση ἡ περιφέρεια ;

Σημ. — *Τὸ μῆκος τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου 2πα.*

9) Ἡ περιφέρεια κυκλ. τινὸς οἰκοπέδου ἰσοῦται πρὸς 195,60 μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ ;

10) Οἰκόπεδόν τι ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου ἔχοντος μῆκος 45,75 μ. καὶ καὶ πλάτος 28,30 μ. Πόσων μέτρων πλευρὰν θὰ ἔχῃ τετραγωνικὸν οἰκόπεδον ἰσοδύναμον πρὸς τὸ πρῶτον ;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Θ'.

ΑΝΑΜΙΚΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

πρὸς ἄσκησιν

1) Εἴς τινα πολιορκίαν διαρκέσασαν 30 ἡμ. ἐδαπανήθησαν 1244160 δρχ. διὰ τὴν πυρίτιδα τῶν πυροβόλων· ἕκαστον πυροβόλον ἔρριπτε 40 βολὰς καθ' ἡμέραν καὶ δι' ἑκάστην βολὴν ἀπητοῦντο 2 ὀκ. 100 δρμ. πυρίτιδος, τῆς ὁποίας ἡ ὀκᾶ ἐτιμᾶτο 3,20 δρχ. Πόσα ἦσαν τὰ πυροβόλα; (Ἀπ. 144).

2) Ὀδοντωτὸς τροχὸς ἔχει 144 ὀδόντας· οἱ ὀδόντες αὐτοῦ ἐμπλέκονται μετὰ τῶν ὀδόντων δευτέρου τροχοῦ ἔχοντος 96 ὀδόντας· τούτου πάλιν οἱ ὀδόντες ἐμπλέκονται μετὰ τῶν ὀδόντων τρίτου τροχοῦ ἔχοντος 48 ὀδόντας. Ἐὰν ὁ α' κάμῃ 150 στροφὰς κατὰ 1 πρῶτον λεπτόν, πόσας στροφὰς κάμνει ὁ β' καὶ πόσας ὁ γ' ἐν τῷ αὐτῷ χρόνῳ ;

(Ἀπ. ὁ β' 225 στρ., ὁ γ' 450 στρ.)

3) Ἐκκρεμές τι κάμνει 4650 αἰωρήσεις εἰς $7 \frac{1}{2}$ λ. Ἐμετρήσαμεν 39 αἰωρήσεις τοῦ ἐκκρεμοῦς τούτου ἀπὸ τῆς στιγμῆς, καθ' ἣν ἀντελήφθημεν τὴν λάμψιν τῆς ἀστραπῆς μέχρι τῆς στιγμῆς, καθ' ἣν ἠκούσαμεν τὴν βροντήν. Γνωστοῦ ὄντος, ὅτι ὁ ἦχος διατρέχει 340 μ. κατὰ 1,δ. εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀφ' ἡμῶν ἐγένετο ἡ ἀστραπή ; (Ἀπ. 712,9)

4) Ἐν Λονδίνῳ μία λίτρα Ἀγγλικὴ λευκῶν πτερῶν στρουθοκαμήλου στοιχίζει 12 λ. 10 σελ. 6 π. Ποία εἶναι εἰς δραχμὰς (ἄνευ τῶν ἐξόδων ἡ τιμὴ μιᾶς ὀκᾶς τούτων ἐν Ἀθήναις ; (1 λιρ. =25,15 δρχ.)

(Ἀπ. 315 δρχ.)

5) Τρεῖς ἐργάται δύνανται νὰ ἐκτελέσωσιν ἔργον τι ὁμοῦ εἰς $4 \frac{1}{}$ ἡμ. Ὁ α' ἐξ αὐτῶν ἐκτελεῖ αὐτὸ εἰς $8 \frac{2}{5}$ ἡμ. καὶ ὁ β' εἰς $12 \frac{2}{3}$ ἡμ.

Εἰς πόσας ἡμέρας ὁ γ' ἐργάτης μόνος του δύναται νὰ ἐκτελέσῃ τοῦτο;
$\left(\text{'Απ. } 41\frac{8}{29} \text{ ἡμ.}\right)$.

6) Βαρέλιον πλῆρες ἐλαίου ζυγίζει 245 ὀκ. 300 δρμ., τὸ δὲ ἀπόβαρον αὐτοῦ εἶναι 15 ὀκ. 100 δρμ. Πόσων λιτρῶν χωρητικότητα ἔχει; (Εἰδ. β. ἐλαίου 0,912) ('Απ. 323,508 λιτρ.)

7) Ἡ πίεσις τοῦ ἀτμοσφαιρικοῦ ἀέρος ἐπὶ ἑνὸς τετραγ. δακτύλου εἶναι 1033.6 γρμ.

Πόση εἶναι ἡ πίεσις εἰς ὀκάδας, ἣν ὑφίσταται τὸ ἀνθρώπινον σῶμα, ἂν ἔχῃ ἐπιφάνειαν 1,45 □ μ.; ('Απ. 11708 ὀκ. 300 δρμ.)

8) Δεξαμενή τις χωρεῖ 820 ὀκ. ὕδατος. Ἔκ τινος κρήνης ρέει εἰς αὐτὴν εἰς $\frac{2}{5}$ λεπτοῦ $2\frac{2}{3}$ ὀκ. ὕδατος, εἰς δὲ τὸν πυθμένα αὐτῆς ὑπάρχει στρόφιγξ, ἐξ ἧς ἀνοιγομένης ἐκρέουσιν εἰς $\frac{3}{4}$ λεπτοῦ $2\frac{1}{9}$ ὀκ. ὕδατος. Ἐὰν ἡ δεξαμενὴ εἶναι κενὴ καὶ ἀνοιχθῶσι συγχρόνως ἡ κρήνη καὶ ἡ στρόφιγξ, εἰς πόσα πρῶτα λεπτὰ θὰ πληρωθῇ ἡ δεξαμενή;
('Απ. 3 ὥρ. 32 π. 53 δ. περίπου).

9) Ἐργάτης τις εἶχεν ἐκτελέσει ἐντὸς $4\frac{1}{2}$ ὥρ. τὸ $\frac{1}{12}$ ἔργου τινός, ὁπότε ἔρχεται εἰς βοήθειάν του ἕτερος ἐργάτης, ὅστις εἶναι γνωστὸν ὅτι εἰς 2 ὥρ. ἐκτελεῖ τοσαύτην ἐργασίαν, ὅσην ὁ α'. εἰς 3 ὥρ. Εἰς πόσας ὥρας οἱ δύο ἐργάται ὁμοῦ θὰ ἀποπερατώσωσι τὸ ὑπόλοιπον τοῦ ἔργου τούτου; ('Απ. 19 ὥρ. 45 π.)

10) Πατήρ τις διένειμε ποσόν τι χρημάτων εἰς τὰ 3 τέκνα του ὡς ἑξῆς· Εἰς μὲν τὸν πρεσβύτερον υἱόν του ἔδωκε τὰ $\frac{3}{7}$ τοῦ ὅλου ποσοῦ καὶ ἀκόμη 150 δρχ., εἰς δὲ τὸν νεώτερον τὸ $\frac{1}{2}$ ἐξ ὅσων ἔδωκεν εἰς τὸν α', καὶ ἀκόμη 250 δρχ. Τὸ δὲ ὑπόλοιπον ἀνερχόμενον εἰς 200 δρχ. ἔδωκεν εἰς τὴν θυγατέρα του. Ποῖον εἶναι τὸ διανεμηθὲν ποσὸν καὶ πόσας δραχμὰς θὰ λάβῃ ἕκαστον τέκνον;
('Απ. τὸ ποσὸν 1890 δρχ., ὁ α' 960 δρχ., ὁ β'. 730 δρχ.)

11) Ἀτμόπλοιόν τι διήνυσε μὲ ταχύτητα $8\frac{1}{2}$ μιλ. καθ' ὥραν εἰς $5\frac{3}{4}$ ὥρ. τὰ $\frac{3}{5}$ τοῦ ὅλου διαστήματος, ὅπερ ὀφείλει νὰ διατρέξῃ. Ἕνεκα βλάβης τῆς μηχανῆς του ἠναγκάσθη νὰ διανύῃ τὸ ὑπόλοιπον διάστημα μὲ ταχύτητα κατὰ τὸ $\frac{1}{4}$ μικροτέραν τῆς πρώτης αὐτοῦ ταχύτητος. Ζητεῖται α') πόσων μιλίων εἶναι τὸ διάστημα, ὅπερ διέτρεξε μὲ τὴν πρώτην ταχύτητα, β') πόσον εἶναι τὸ διάστημα, ὅπερ διέτρεξε μὲ τὴν δευτέραν ταχύτητα· γ') εἰς πόσας ὥρας διήνυσε τὸ β' μέρος τοῦ διαστήματος;
('Απ. α'. $48\frac{7}{8}$ μιλ., β'. $32\frac{7}{12}$ μιλ., γ'. 5 ὥρ. $6\frac{34}{51}$ λ.).

12) Ἀτμόπλοιόν τι εἰσέπραξε διὰ ταξείδιον ἀπὸ Πειραιῶς μέχρι Σύρου 794 δρχ. ἐξ 60 ἐπιβατῶν Αης καὶ Βας θέσεως. Ἕκαστος ἐπιβάτης τῆς Αης θέσεως πληρώνει 15,60 δρχ., τῆς δὲ Βας 8,50 δρχ. Πόσοι ἦσαν οἱ ἐπιβάται τῆς Αης θέσεως καὶ πόσοι τῆς Βας ; (Ἀπ. 40 Αης, 20 Βας).

Λύσις. Ἐὰν οἱ ἐπιβάται ἦσαν ὅλοι Αης θέσεως, θὰ ἐπλήρωνον $15,60\times60=936$ δρχ. ἤτοι ἐπὶ πλέον 142 δρχ. ἕκαστος ἐπιβάτης τῆς Βας θέσεως πληρώνει 8,50 δρχ., ἤτοι ὀλιγώτερον κατὰ 7,10 δρχ. Ἄρα οἱ ἐπιβάται τῆς Βας θέσεως εἶναι $\frac{142}{7,1}=20$.

13) Ἐμπορικὸν πλοῖον μὲ ταχύτητα $9\frac{1}{2}$ μιλ. καθ' ὥραν εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν 45 μιλ. ἀπό τινος θωρηκτοῦ ταχύτητος $22\frac{3}{4}$ μιλ., Τὸ ἐμπορικὸν εὑρισκόμενον εἰς ἀπόστασιν $32\frac{1}{2}$ μιλ. ἀπὸ τῆς πλησιεστέρας ἀκτῆς καταδιώκεται ὑπὸ τοῦ θωρηκτοῦ. Θὰ προλάβῃ νὰ ῥιφθῇ εἰς τὴν ξηράν ; καὶ εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπ' αὐτοῦ θὰ εὑρίσκηται τὸ θωρηκτόν ;
(Ἀπ. δὲν προλαμβάνει).

14) Καφές τις μετὰ τῶν ἐξόδων ὑπολογιζομένων πρὸς $5\frac{1}{2}$ % ἐπὶ τῆς τιμῆς τῆς ἀγορᾶς στοιχίζει 3,80 δρχ. κατ' ὀκᾶν. Πρὸς πόσον ἠγοράσθη ἑκάστη ὀκᾶ καὶ πρὸς πόσον πρέπει νὰ πωληθῇ, ἵνα φέρῃ κέρδος 12% ἐπὶ τῆς τιμῆς εἰς τὴν ὁποίαν στοιχίζει; (Ἀπ. α'. 3,60 δρχ., β'. 4,256 δρχ.).

15) Ἀσφαλίσας τις φορτίον τι πρὸς $5\frac{1}{4}$ ‰ ἐπλήρωσεν ἀσφάλιστρα 625,50 δρχ. Διὰ πόσας δραχμὰς ἔχει ἀσφαλισθῇ τὸ φορτίον τοῦτο καὶ ποία εἶναι ἡ πραγματικὴ ἀξία τούτου, ἂν εἰς τὴν ἀσφαλισθεῖσαν ἀξίαν περιλαμβάνεται καὶ κέρδος φανταστικὸν 10 % ἐπὶ τῆς τιμῆς τοῦ ἐμπορεύματος ; (Ἀπ. 119142,85 δρχ., πραγμ. ἀξίαν 108311,69 δρχ.).

16) Ἐδανείσθη τις ἓν ποσὸν πρὸς 8 % καὶ μετὰ 7 μῆνας καὶ 15 ἡμ. ἐπλήρωσεν ἐν ὅλῳ 12415 δρχ. κεφάλαιον μετὰ τοῦ τόκου. Ποῖον εἶναι τὸ κεφάλαιον, τὸ ὁποῖον ἐδανείσθη ; (Ἀπ. 11823,80 δρχ.).

17) Πλοῖόν τι βυθισθὲν ἦτο ἠσφαλισμένον διὰ 185000 δρχ. Πόσην ἀποζημίωσιν θὰ καταβάλῃ ἡ ἀσφαλιστικὴ ἑταιρεία, ἥτις εἶχεν ἀσφαλίσει τὰ $\frac{3}{5}$ τῆς ἀξίας τοῦ πλοίου· πόσην ἡ Β', ἥτις εἶχεν ἀσφαλίσει τὸ $\frac{1}{4}$ αὐτῆς καὶ πόσην ἡ Γ', ἥτις εἶχεν ἀσφαλίσει τὸ ὑπόλοιπον ;
(Ἀπ. Α' 111000 δρχ., Β' 46250 δρχ., Γ' 27750 δρχ.).

18) Τέσσαρες ἔμποροι ἀνέλαβον μίαν ἐπιχείρησιν, τῆς ὁποίας τὰ κέρδη διενεμήθησαν καὶ ἔλαβον ὁ μὲν α') 450 δρχ., ὁ δὲ β') 240 δρχ., ὁ γ') 380 δρχ. καὶ ὁ δ') 730 δρχ. Ἐὰν ὁ πρῶτος κατέβαλε κεφάλαιον 8500 δρχ., πόσας δραχμὰς κατέβαλεν ἕκαστος τῶν ἄλλων ;
(Ἀπ. β'. 4533,33 δρχ., γ'. 7177,77 δρχ., δ'. 13788,88 δρχ.).

19) Ἐτόκισέ τις τὰ $\frac{2}{5}$ τῶν χρημάτων του πρὸς 8 %, τὸ δὲ ὑπόλοιπον πρὸς 9 % κατ' ἔτος, λαμβάνει δ' ἐτήσιον τόκον 2450 δρχ. α') πόσα ἦσαν ὅλα τὰ χρήματα καὶ β') πόσα χρήματα ἐτόκισε πρὸς 8 % καὶ πόσα πρὸς 9 %; (Ἀπ. α'. 28488,37 δρχ., β'. 11395,35 δρχ., γ'. 17093,02 δρχ.).

20) Εἴς τινα ἑταιρείαν ὁ Α κατέθεσε δρχ. 65000, ὁ Β δρχ. 105000 καὶ ὁ Γ. δρχ. 125000· ἐκ τοῦ καθαροῦ κέρδους ὁ Α καὶ ὁ Β ἀφαιροῦσιν εἰς τὸ τέλος τοῦ ἔτους 25 % ὡς ἀμοιβήν των διὰ τὴν διοίκησιν τῆς ἑταιρείας, ἤτοι $12\frac{1}{2}$ % ἕκαστος αὐτῶν, τὸ δ' ὑπόλοιπον τοῦ κέρδους διανέμεται μεταξὺ τῶν 3 συνεταίρων ἀναλόγως τῶν κεφαλαίων, ἅτινα κατέθεσαν. Ἐὰν ὑποτεθῇ ὅτι τὸ ἐτήσιον κέρδος εἶναι 27365 δρχ., πόσον μερίδιον θὰ λάβῃ ἕκαστος;

(Ἀπ. α'. 7942,80 δρχ., β'. 10725,69 δρχ., γ'. 8696,50 δρχ.).

21) Γραμμάτιόν τι ἔληξε τὴν 8ην Δεκεμβρίου 1912· ἀλλ' ἐπληρώθη τὴν 25ην Φεβρουαρίου 1913· ἕνεκα τούτου ὁ χρεώστης ἐπλήρωσε διὰ τὸ χρονικὸν τοῦτο διάστημα τόκον 37,50 δρχ. πρὸς 8 % κατ' ἔτος. Ποία ἦτο ἡ ἀξία τοῦ γραμματίου; (Ἀπ. 2191,75 δρχ.).

22) Τέσσαρες ἀδελφοὶ κληρονομοῦσι παρὰ τοῦ πατρός των 165000 δρχ. Ἐκ τούτων ὁ μὲν β' θὰ λάβῃ $1\frac{3}{4}$ τοῦ μεριδίου τοῦ α' ὁ δὲ γ' τὸ $\frac{1}{2}$ τοῦ μεριδίου τοῦ α' καὶ τοῦ β' καὶ ὁ δ' ὅσον καὶ ὁ α'. Πρέπει δὲ πρὸ τῆς διανομῆς νὰ πληρωθῇ ὁ φόρος τοῦ δημοσίου πρὸς $4\frac{1}{2}$ % ἐπὶ τοῦ ποσοῦ τούτου. Πόσας δραχμὰς θὰ λάβῃ ἕκαστος;
(Ἀπ. ὁ α' 30746,34 δρ., ὁ β' 53806,10 δρχ., ὁ γ' 42276,22 δρχ., ὁ δ' 30746,34 δρχ.).

23) Θέλει τις ἐκ δύο ποιοτήτων σίτου, τοῦ μὲν Αης ποιότητος 45 λ. τὴν ὀκᾶν, τοῦ δὲ Βας 40 λ. νὰ σχηματίσῃ μεῖγμα 8450 ὀκ., οὗτινος ἡ ὀκᾶ νὰ πωλῆται πρὸς 44 λ. καὶ νὰ κερδίζῃ ἐκ τῆς ἀναμίξεως ταύτης 8 % ἐπὶ τῆς ἀξίας τοῦ μείγματος. Πόσας ὀκάδας θὰ λάβῃ ἐξ ἑκάστου εἴδους; (Ἀπ. Αης 1251 ὀκ. 340 δρμ. Βας 7198 ὀκ. 60 δρμ.).

24) Ἐργοστασιάρχης τις καλλιεργεῖ 1200 στρέμ. ἀγροῦ, ἐξ οὗ ἀπολαμβάνει 1250 ὀκ. τεύτλων κατὰ στρέμμα. Τὰ τεῦτλα ἀποδίδουσι ζάκχαριν ἴσην πρὸς 5 % τοῦ βάρους αὐτῶν. Τὰ ἔξοδα τῆς καλλιεργείας τοῦ ἀγροῦ καὶ τῆς κατασκευῆς τῆς ζακχάρεως ἀνέρχονται εἰς 109,50 δρχ. ἐπὶ τῶν 100 ὀκ ζακχάρεως. Ἐὰν ἡ παραγομένη ζάκχαρις πωλῆται πρὸς 1,25 δρχ. κατ' ὀκᾶν, πόσον εἶναι τὸ ὁλικὸν κέρδος τοῦ ἐργοστασιάρχου;
(Ἀπ. 11875 δρχ.).

25) Ἠγόρασέ τις οἰκίαν ἀντὶ 12860 δρχ. καὶ ἐδαπάνησε διὰ τὴν ἐπισκευὴν αὐτῆς ἐφ' ἅπαξ 2580 δρχ. Ἐνοικιάζει δ' αὐτὴν 120 δρχ. κατὰ μῆνα καὶ πληρώνει 6 % ἐπὶ τοῦ ἐτησίου ἐνοικίου διὰ δημόσιον φόρον καὶ

125 δρχ. κατ' ἔτος δι' ἐπισκευήν. Πόσον τοῖς ἑκατὸν κατ' ἔτος εἶναι τὸ εἰσόδημα τῆς οἰκίας ταύτης; ('Απ. 7,95 %).

26) Ἔμπορός τις ἠγόρασε ποσότητά τινα ἐρίου συνισταμένην ἐκ 4 ποιοτήτων· καὶ τὸ μὲν $\frac{1}{4}$ τῆς ἀγορασθείσης ποσότητος ἠγοράσθη πρὸς 3,80 δρχ. τὴν ὀκᾶν, τὰ δὲ $\frac{2}{5}$ αὐτῆς πρὸς 4,20 δρχ. καὶ τὰ $\frac{2}{9}$ πρὸς 2,80 δρχ. τὴν ὀκᾶν, καὶ τὸ ὑπολειπόμενον μέρος ἐξ 69 ὀκ. πρὸς 2,75 δρχ. Ζητεῖται α') ποία εἶναι ἡ ἀγορασθεῖσα ποσότης καὶ β') ποία εἶναι ἡ μέση τιμὴ τῆς ὀκᾶς;

('Απ. α'. 540 ὀκ., β'. ἡ μέση τιμὴ τῆς ὀκᾶς 3,60 δρχ.).

27) Ἐκ 3 ἐργατῶν ὁ α' δύναται νὰ ἐκτελέσῃ μόνος του ἔργον τι εἰς 15 ὥρ., ὁ β' εἰς 20 ὥρ. καὶ ὁ γ' εἰς 18 ὥρ. Εἰργάσθησαν καὶ οἱ τρεῖς ὁμοῦ καὶ ἐπληρώθησαν διὰ τὴν ἐκτέλεσιν ὅλου τοῦ ἔργου 85,60. δρχ. α') πόσας δραχμὰς θὰ λάβῃ ἕκαστος ἐκ τῆς ἀμοιβῆς ταύτης, β') εἰς πόσας ὥρας θὰ ἐκτελέσωσι τὸ ἔργον; ('Απ. Α') ὁ α' 33,14 δρχ., ὁ β') 24,85 δρχ., ὁ γ') 27,61 δρχ., Β') εἰς 5 ὥρ., 48 $\frac{12}{31}$ π.).

28) Βιομήχανός τις ἠγόρασε 645 ψάθας σίτου Ταϊγανίου πρὸς 7,5 ρούβλια τὴν ψάθαν· ἐπλήρωσε δὲ διὰ ναῦλον 10 $\frac{1}{2}$ σελ. κατὰ μετρικὸν τόννον, διὰ δασμὸν 6,11 δρχ. εἰς τὰς 100 ὀκ., δι' ἐκφόρτωσιν καὶ μεταφορὰν μέχρι τῆς ἀποθήκης 637,50 δρχ.· εἶναι γνωστὸν ὅτι μία ψάθα τοῦ σίτου τούτου ἔχει βάρος 168,4 χ.λ.γ. Πόσον στοιχίζει ὁλόκληρον τὸ φορτίον μέχρι τῆς ἀποθήκης καὶ πόσον ἡ μία ὀκᾶ; (1 ρούβλ.=2,68 δρχ., 1 σελ.=1,26 δρχ.).
('Απ. τὸ ὅλον φορτ. 23681 δρχ., ἡ 1 ὀκ. 28 λ. περίπου, βάρ. 84858 ὀκ.).

29) Ὁ αὐτὸς βιομήχανος ἐδαπάνησε διὰ τὴν ἄλεσιν τοῦ ἄνω σίτου 3 λ. κατ' ὀκᾶν καὶ ἔλαβε πίτυρα 18 %, σιμιγδάλια 12 % καὶ τὸ ὑπόλοιπον εἰς ἄλευρα. Μετεπώλησε τὰ μὲν πίτυρα πρὸς 14 λ. τὴν ὀκᾶν, τὸ δὲ σιμιγδάλιον πρὸς 57 λ. καὶ τὸ ἄλευρον πρὸς 54 λ. Πόσας δραχμὰς ἐκέρδησεν ἐκ τοῦ σίτου τούτου; ('Απ. 16388 δρχ.)

30) Καπνέμπορος συνεφώνησε μετὰ τοῦ αὐστριακοῦ μονοπωλίου νὰ παραδώσῃ ἐντὸς τεταγμένης διορίας 125000 χ.λ.γ. καπνοῦ Θεσσαλικοῦ ὡρισμένης ποιότητος πρὸς 225 κορώνας τὸν μ. στατῆρα παραδοτέον ἀνεξόδως εἰς Τεργέστην. Ὁ ἔμπορος οὗτος ἠγόρασεν 8000 ὀκ. καπνοῦ πρὸς 2,10 δρχ. κατ' ὀκᾶν καὶ τὰς ὑπολοίπους πρὸς 2,15 δρχ. Ἐδαπάνησε δὲ διὰ μεταφορὰν τοῦ καπνοῦ μέχρι Τεργέστης διὰ ναῦλον, ἀσφάλειαν καὶ λοιπὰ 0,10 δρχ. κατὰ χιλιόγ. α') Πόσον ἐκέρδισεν ἐν ὅλῳ ἐκ τῆς ἐπιχειρήσεως ταύτης καὶ β') πόσον τοῖς ἑκατὸν εἶναι τὸ κέρδος ἐκ τοῦ ὁλικοῦ κεφαλαίου, τὸ ὁποῖον ἀπησχόλησε διὰ τὴν ἐπιχείρησιν ταύτην;

('Απ. α'. 50601,55 δρχ. τὸ κέρδος, β'. 23 % περίπου τὸ κέρδος).

31) Κτηματίας δαπανᾷ διὰ τὴν καλλιέργειαν μιᾶς σταφιδαμπέλου ἐξ 120 στρεμ. τὰ ἑξῆς ποσά : α') διὰ τὴν λίπανσιν 3,25 δρχ. κατὰ στρέμμα, 6') διὰ σκάψιμον ἀπασχολεῖ 15 ἐργάτας ἐπὶ 24 ἡμ., εἰς ἕκαστον τῶν ὁποίων πληρώνει πρὸς 3,25 δρχ. καθ' ἑκάστην, γ') διὰ τὸ κλάδευμα ἀπασχολεῖ 3 ἐργ. ἐπὶ 10 ἡμ. πληρώνων εἰς ἕκαστον 4 δρχ. καθ' ἑκάστην, δ') διὰ τὸ σκάλισμα, τρυγητὸν κ.τ.λ. ἐξοδεύει 48,25 δρχ. κατὰ στρέμμα. Τὸ κτῆμα τοῦτο ἀπέδωκεν εἰς αὐτὸν 78 $\frac{3}{4}$ χιλιογ. σταφίδος, ἅτινα ἐπώλησε πρὸς 122,50 δρχ. ἕκαστον. Ζητεῖται α') πόσον εἶναι τὸ καθαρὸν κέρδος τοῦ κτηματίου καὶ ποῖον κεφάλαιον ἀντιπροσωπεύει ἡ σταφιδάμπελος πρὸς 7 $^0/_0$ κατ' ἔτος ;

('Απ. α'. 7918,62 δρχ. καθ. κέρδ., 6'. 113139,40 δρχ. κεφ.).

32) Ἀμπελουργός τις ἔχει ἄμπελον ἐκτάσεως 75 στρεμ. Δαπανᾷ δὲ διὰ τὴν καλλιέργειαν ταύτης κατ' ἔτος τὰ ἑξῆς ποσά : α') διὰ σκάψιμον 165 ἡμερομίσθια πρὸς 3,20 δρχ., 6') διὰ κλάδευμα 25 ἡμερομίσθια πρὸς 4,25 δρχ., γ') διὰ τὸν τρυγητόν, πάτημα τῶν σταφυλῶν καὶ τὴν μεταφορὰν μέχρι τῆς ἀποθήκης 8,25 δρχ. εἰς τὰς 100 ὀκ. σταφυλῶν. Εἶναι γνωστὸν ὅτι 100 ὀκ. σταφυλῶν παρέχουσι 54 ὀκ. οἴνου καὶ ὅτι ἐκ τῶν στεμφύλων παράγεται 18 $^0/_0$ οἰνοπνευματοῦχον ὑγρόν. Ἐὰν ὁ ἀμπελουργὸς λαμβάνῃ κατ' ἔτος 225 φορτία σταφυλῶν τῶν 90 ὀκ. α') πόσας ὀκάδας οἴνου καὶ οἰνοπνευματούχου ὑγροῦ ἔχει πρὸς πώλησιν, 6') πόσον θὰ κερδίσῃ, ἂν πωλήσῃ τὸν μὲν οἶνον πρὸς 48 $\frac{1}{2}$ λ. τὴν ὀκᾶν, τὸ δὲ οἰνοπνευματοῦχον ὑγρὸν πρὸς 85 λ. τὴν ὀκᾶν καὶ γ') ποίαν ἀξίαν ἀντιπροσωπεύει ἡ ἄμπελος αὕτη πρὸς 6 $^0/_0$ ἐτησίως ; ('Απ. α'. 10935 ὀκ. οἴνου, 1676,7 ὀκ. οἰνοπνευματ. ὑγροῦ, 6'. 4423,80 δρχ., γ'. 73730 δρχ.).

33) Κεφαλαιοῦχός τις ἀπολαμβάνει ἐκ τῆς οἰκίας του ἀξίας 25000 δρχ. ἐνοίκιον κατὰ μῆνα 135 δρχ., ἐν ᾧ ἐξοδεύει δι' αὐτὴν διὰ φόρον καὶ ἐπισκευὴν 225 δρχ. κατ' ἔτος, ἐξ ἑνὸς ἐλαιοπεριβόλου ἀξίας 8450 δρχ. καθαρὸν κατ' ἔτος εἰσόδημα 750 δρχ. καὶ ἐκ 30000 δρχ. μετρητῶν, ἃς τοκίζει, λαμβάνει τόκον πρὸς 8 $^0/_0$ κατ' ἔτος. Πόσον τοῖς ἑκατὸν κατ' ἔτος κατὰ μέσον ὅρον ἀποφέρει εἰς αὐτὸν εἰσόδημα ἡ ὅλη περιουσία ; ('Απ. 7,163 $^0/_0$).

34) Τὴν 1ην Ὀκτωβρίου 1912 διεπραγματεύθη ἔμπορός τις Κ εἴς τινα τραπεζίτην Δ τὰ ἀκόλουθα γραμμάτια : 4500 δρχ. ἐπὶ Πειραιῶς λήξεως 31 Ὀκτωβρίου, 3100 δρχ., ἐπὶ Σύρου λήξεως 15 Νοεμβρίου, 2400 δρχ. ἐπὶ Ναυπλίου λήξεως 25 Νοεμβρίου καὶ 2150 δρχ. ἐπὶ Τριπόλεως λήξεως 7 Δεκεμβρίου, ὑπὸ τοὺς ἑξῆς ὅρους : ὑφαίρεσιν ἐξωτερικὴν πρὸς 9 $^0/_0$ κατ' ἔτος καὶ προμήθειαν $\frac{1}{8}$ $^0/_0$ ἐπὶ τῆς ὀνομαστικῆς ἀξίας τῶν γραμματίων. Πόση εἶναι ἡ καθαρὰ ἀξία, τὴν ὁποίαν θὰ εἰσπράξῃ ὁ ἔμπορος Κ. ('Απ. 11981,05 δρχ.).

35) Ἔμπορός τις Π ἐκ Πειραιῶς ὀφείλει εἴς τινα Τραπεζίτην τοὺς τόκους πρὸς 8 $^0/_0$ τῶν ἑξῆς κεφαλαίων: 7100,45 δρχ. ἀπὸ 8ης Ἰανουαρίου μέχρι 30ῆς Ἰουνίου, 5200 δρχ. ἀπὸ 20ῆς Ἀπριλίου μέχρι 30ῆς Ἰουνίου καὶ 3145,55 δρχ. ἀπὸ 18ης Μαΐου μέχρι τέλους Ἰουνίου. Ἀφ' ἑτέρου ὅμως δικαιοῦται νὰ λάβῃ τοὺς τόκους ἐπὶ τῷ αὐτῷ ἐπιτοκίῳ τῶν ἑξῆς ποσῶν: 2135,45 δρχ. ἀπὸ 1ης Ἰανουαρίου μέχρι 30ῆς Ἰουνίου, 1547,65 δρχ. ἀπὸ 5ης Φεβρουαρίου μέχρι 30ῆς Ἰουνίου καὶ 4670 δρχ. ἀπὸ 10ης Μαρτίου μέχρι τέλους Ἰουνίου. Ποῖον κεφάλαιον καὶ πόσους τόκους ὀφείλει κατὰ τὴν 30ὴν Ἰουνίου εἰς τὸν Τραπεζίτην του; (τοκοφόρος λογαριασμὸς) (Ἀπ. ὀφείλει 7102,90 δρχ. κεφάλ. καὶ 130,30 δρχ. τόκους).

36) Ὁ ἐν Καλάμαις παραγγελιοδόχος Δ. Ἰωαννίδης ἔλαβε παρὰ τοῦ κ. Πετρίδου μεγαλεμπόρου ἐκ Πειραιῶς 100 σάκκους ὀρύζης 7800 ὀκ. μὲ τὸν ὅρον νὰ πωλήσῃ αὐτοὺς διὰ λογαριασμὸν τοῦ ἀποστολέως πρὸς 0,95 δρχ. τὴν ὀκᾶν τοὐλάχιστον. Μετά τινα χρόνον ὁ παραγγελιοδόχος οὗτος συντάσσει καὶ ἀποστέλλει εἰς τὸν ἐντολέα τὸν λογαριασμὸν τῶν γενομένων πωλήσεων. Τὴν 30 Σεπτεμβρίου ἐπώλησεν 25 σάκκους τῶν 78 ὀκ. πρὸς 0,98 δρχ. κατ' ὀκᾶν καὶ μὲ ἔκπτωσιν 2 $^0/_0$. Τὴν 2αν Ὀκτωβρίου ἐπώλησεν ἄλλους 30 σάκ. τοῦ αὐτοῦ βάρους πρὸς 0,97 δρχ. καὶ μὲ ἔκπτωσιν $1\frac{1}{2}$ $^0/_0$. Τὴν 4ην Ὀκτωβρίου ἐπώλησεν ἀκόμη 40 σάκ. τοῦ αὐτοῦ βάρους πρὸς 0,95 δρχ. καὶ τὴν 6ην Ὀκτωβρίου τοὺς ὑπολοίπους 5 σάκ. τοῦ αὐτοῦ βάρους πρὸς 0,97 καὶ μὲ ἔκπτωσιν 1 $^0/_0$. Διὰ ναῦλον καὶ παραλαβὴν τοῦ ἐμπορεύματος ἐδαπάνησε 296,40 δρχ., δι' ἐνοίκιον ἀποθήκης 6 λεπ. κατὰ σάκκον, ἀσφάλιστρα 1 $^0/_{00}$ (ἐπὶ 8000 δρχ.) καὶ $1\frac{1}{2}$ $^0/_0$ προμήθειαν (ἐπὶ τοῦ ποσοῦ τῶν πωλήσεων μετὰ τῶν ἐξόδων). Πόσας δραχμὰς δικαιοῦται νὰ λάβῃ ὁ ἀποστολεὺς Κ. Πετρίδης παρὰ τοῦ Δ. Ἰωαννίδου; (λογαριασμὸς πωλήσεως πρβλ. εἰς τὸ προβλ. 26 σελ. 177). (Ἀπ. 7019,15 δρχ.).

37) Παραγγελιοδόχος τις Κ. ἐν Βόλῳ ἀγοράζει διὰ λογαριασμὸν τοῦ Δ. ἐκ Θεσσαλονίκης 280 βαρέλια ἐλαίου νέας ἐσοδείας. Συντάσσει καὶ ἀποστέλλει εἰς αὐτὸν τὸν ἑξῆς λογαριασμόν: 280 βαρέλια ἐλαίου μικτοῦ βάρους ἐν ὅλῳ 31200 ὀκ.. ἀπόβαρον 15 $^0/_0$ ἐπὶ τοῦ μικτοῦ βάρους, πρὸς 105 δρχ. τὰς 100 ὀκ. μὲ ἔκπτωσιν 1 $^0/_0$.

Τιμὴ ἑκάστου βαρελίου κενοῦ 8 δρχ. μεσιτεία ἀγορᾶς, $\frac{3}{4}$ $^0/_0$ ἐπὶ τῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς, ἀσφάλιστρα 2 $^0/_{00}$ (ἐπὶ 32000 δρχ.) καὶ ἔξοδα φορτώσεως 0,80 δρχ. δι' ἕκαστον βαρέλιον.

Ἐξαγωγικὸς φόρος 6 λεπ. κατ' ὀκᾶν καὶ ἄλλα μικρὰ ἔξοδα 15,80 δρχ. Προμήθεια 2 $^0/_0$ (ἐπὶ τῆς ὁλικῆς ἀξίας τοῦ ἐμπορεύματος μετὰ τῶν ἐξόδων). Πόσας δραχμὰς δικαιοῦται ν' ἀπαιτήσῃ ὁ παραγγελιοδόχος παρὰ τοῦ ἐντολέως διὰ τὸ εἰς αὐτὸν ἀποσταλὲν ἔλαιον; (πρβλ. εἰς τὸ πρόβλ. 25 σελ. 177) (Ἀπ. 32557,19 δρχ.)

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι΄.

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΠΛΟΓΡΑΦΙΚΗΣ ΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ

Α΄. Σκοπὸς καὶ συστήματα τῆς Λογιστικῆς.

258) *Σκοπὸς τῆς Λογιστικῆς.* Ἡ Λογιστικὴ εἶναι κλάδος τῶν Μαθηματικῶν ἐπιστημῶν, ὅστις διδάσκει νὰ ἐγγράφωμεν μεθοδικῶς τὰς ἐργασίας οἴκου τινὸς (ἐμπορικοῦ, τραπεζιτικοῦ, βιομηχανικοῦ κτλ.), οὕτως ὥστε νὰ εἶναι δυνατὸν νὰ γνωρίζωμεν καθ' οἱανδήποτε στιγμὴν τὸ ἀποτέλεσμα αὐτῶν.

Διὰ τῆς Λογιστικῆς πᾶς ἐπιχειρηματίας δύναται νὰ γνωρίζῃ ἀνὰ πᾶσαν στιγμὴν τί κατέχει, τὶ ὀφείλει εἰς τρίτους, τί τρίτοι ὀφείλουσιν αὐτῷ καὶ τέλος κατὰ πόσον ἠλαττώθη ἢ ηὐξήθη ἡ εἰς τὴν ἐπιχείρησιν ἀπησχολημένη περιουσία αὐτοῦ μετά τινα περίοδον ἐργασιῶν, ἐν ἄλλαις λέξεσι τί ἐζημιώθη ἢ ἐκέρδισεν ἐκ τῶν ἐργασιῶν αὐτοῦ.

259) *Συστήματα Λογιστικῆς.* Διακρίνομεν δύο τοιαῦτα· α΄) τὴν *Ἁπλογραφικὴν Λογιστικὴν* καὶ β΄) τὴν *Διπλογραφικήν.*

Ἡ πρώτη εἶναι ἁπλῆ μὲν καὶ εὔκολος, ἀλλ' ἀτελὴς ὡς μὴ παρέχουσα πᾶσαν ἐπιθυμητὴν πληροφορίαν μηδὲ πλήρη τῶν ἐγγραφῶν ἔλεγχον. Διὰ τοῦτο βλέπομεν αὐτὴν ἐφαρμοζομένην ἐν ἐπιχειρήσεσι μικρᾶς σπουδαιότητος.

Ἡ δευτέρα εἶναι συστηματικὴ καὶ ἀρτία παρέχουσα πᾶσαν ἐπιθυμητὴν πληροφορίαν καὶ μέσα πλήρους τῶν ἐγγραφῶν ἐλέγχου· δι' ὃ βλέπομεν αὐτὴν ἐφαρμοζομένην ἐν πάσῃ σπουδαίᾳ καὶ καλῶς ὠργανωμένῃ ἐπιχειρήσει.

Τὰ ὄργανα ἀμφοτέρων τῶν συστημάτων εἶναι οἱ λεγόμενοι *Λογαριασμοὶ* ἢ *Μερίδες* καὶ τὰ *Λογιστικὰ βιβλία.*

Σημ. — *Ἐν τοῖς ἑπομένοις θεωροῦμεν τὸ πρῶτον σύστημα.*

Β΄ Λογαριασμός, Δοῦναι, Λαβεῖν, Χρέωσις, Πίστωσις.

260) *Γένεσις καὶ σκοπὸς τοῦ λογαριασμοῦ.*—Πᾶς ἐπιχειρηματίας ἐν τῇ διεξαγωγῇ τῆς ἐπιχειρήσεώς του ἀναγκάζεται οὐχὶ σπανίως νὰ ἔλθῃ εἰς οἰκονομικὰς σχέσεις μετὰ διαφόρων προσώπων ἐνεργῶν μεθ' ἑκάστου τούτων δοσοληψίας ὑπὸ συμφωνουμένους ὅρους.

Ἐὰν ἐπιχειρηματίας τις ἐπιθυμῇ ἀνὰ πᾶσαν στιγμὴν νὰ γνωρίζῃ τὴν οἰκονομικὴν θέσιν του ἀπέναντι προσώπου τινός, μεθ' οὗ ἐνεργεῖ δοσοληψίας, δὲν εἶναι φρόνιμον νὰ ἐμπιστεύηται αὐτὰς μόνον εἰς τὴν μνήμην του, ἀλλὰ πρέπει καὶ νὰ τηρῇ λεπτομερῆ, ἀκριβῆ καὶ μεθοδικὴν σημείωσιν αὐτῶν. Μία τοιαύτη σημείωσις ὀνομάζεται *Λογαριασμὸς* ἢ *μερὶς* τοῦ θεωρουμένου προσώπου ἐν τοῖς βιβλίοις τοῦ ἐπιχειρηματίου (ἢ συντομώτερον παρὰ τῷ ἐπιχειρηματίᾳ).

261) *Διάταξις τοῦ λογαριασμοῦ.* Ἡ εἰς τὸν λογαριασμὸν διδομένη διάταξις δύναται νὰ εἶναι οἱαδήποτε· ἀρκεῖ μόνον νὰ ἐπιτυγχάνηται ὁ δι' αὐτοῦ ἐπιδιωκόμενος σκοπός. Οὕτω λ. χ. τὰς δοσοληψίας, τὰς ὁποασί διεξάγομεν μετὰ τοῦ τραπεζίτου μας Δ. Πετρίδου, δυνάμεθα νὰ σημειώμεν ἔν τινι ἰδιαιτέρῳ φύλλῳ (λ.χ. ἔν τινι σελίδι εἰδικοῦ βιβλίου), ὡς ἑξῆς.

Λογαριασμὸς Δ. Πετρίδου.

1912 Ἰανουαρίου 5.	Κατεθέσαμεν παρ' αὐτῷ μετρητὰς δρχ.	10000
» » 14·	Ὁ Κ. Ἰωαννίδης κατὰ διαταγὴν καὶ λογαριασμόν μας κατέθηκε παρ' αὐτῷ δρχ.	4857,50
	ἤτοι ἔχομεν ἐν ὅλῳ παρ' αὐτῷ δρχ.	14857,50
» Φεβρουαρίου 20.	Ἀπεσύραμεν παρ' αὐτοῦ δι' ἀνάγκας τοῦ καταστήματός μας δρχ.	3000
	Οὕτω μένει ὑπὲρ ἡμῶν ὑπόλοιπον δρχ.	11857,50
1912 Μαρτίου 4,	Ἐπλήρωσε διὰ λογαριασμόν μας εἰς τὸν προμηθευτήν μας Π Νικολάου δρχ.	3940,10
	Οὕτω μένει ὑπὲρ ἡμῶν ὑπόλοιπον δρχ.	7917,40
» » 10.	Ἠγόρασε διὰ λογαριασμόν μας 1 μετοχὴν τῆς Ἐθν. Τραπέζης στοιχίσασαν δρχ.	4018,60
	Οὕτω τὴν 10 Μαρτίου μένει ὑπὲρ ἡμῶν ὑπόλοιπον δρχ.	3898,80

Ἀντὶ ὅμως τῆς ἀρχαϊκῆς πως διατάξεως ταύτης προτιμᾶται ἄλλη τις μεθοδικωτέρα, καθ' ἣν αἱ γενόμεναι πράξεις κατατάσσονται οὐ μόνον κατὰ χρονολογικὴν σειράν, ἀλλὰ καὶ ἀναλόγως τῆς φύσεως αὐτῶν. Ἰδοὺ αὕτη :

Λογαριασμὸς Δ. Πετρίδου.

Κατάλογος τῶν πραγμάτων, ἅτινα οὗτος ἔλαβε παρ' ἡμῶν (ἢ καὶ παρ' ἄλλων διὰ λογαριασμόν μας, ὅπερ εἰς τὸ αὐτὸ καταντᾷ).		Κατάλογος τῶν πραγμάτων, ἅτινα οὗτος ἔδωκεν εἰς ἡμᾶς (ἢ καὶ εἰς ἄλλους διὰ λογαριασμόν μας, ὅπερ εἰς τὸ αὐτὸ καταντᾷ)	
1912 Ἰανουαρίου. 5. Καταθεσίς μας δρχ.	10000	1912 Φεβρουαρ. 20. Ἀπεσύραμεν μετρητὰ δρχ.	3000
» » 14. Κατάθεσις Ἰωαννίδου διὰ λ)σμόν μας δρχ,	4857,50	» Μαρτίου 4. Πληρωμὴ του εἰς Νικολάου διὰ λογαριασμόν μας δρχ.	3940,10
		» » 10. Ἀγορὰ 1 μετοχῆς τῆς Ἐθν. Τραπέζης διὰ λ)σμόν μας δρχ.	4018,60
Ἐν ὅλῳ δρχ.	14857,50	Ἐν ὅλῳ δρχ.	10958,70

Περίληψις.

Ὁ Δ. Πετρίδης ἔλαβε παρ' ἡμῶν ἐν ὅλῳ	δρχ.	14857,50
» ἔδωκεν εἰς ἡμᾶς ἐν ὅλῳ	»	10958,70
Μένει ὑπόλοιπον ὑπὲρ ἡμῶν τὴν 10ην Μαρτίου ἐκ	δρχ.	3898,80

Ἐπεξήγησις τῆς διατάξεως. Κατὰ τὴν διάταξιν ταύτην αἱ μεταξὺ ἡμῶν καὶ τοῦ Δ. Πετρίδου γενόμεναι πράξεις εἶναι συστηματικώτερον διατεταγμέναι.

Οὕτω λ. χ. πᾶσαι αἱ πράξεις, καθ' ἃς ἔτυχεν ὁ Δ. Πετρίδης νὰ λάβῃ παρ' ἡμῶν, ἀμέσως ἢ ἐμμέσως (δηλ. παρὰ τρίτου διὰ λογαριασμόν μας) πρᾶγμά τι, εὑρίσκονται εἰς ἓν καὶ τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ λογαριασμοῦ, τὸ ἀριστερόν. Ἑκάστη τῶν πράξεων τούτων ἐκτίθεται συντόμως καὶ σαφῶς, συνοδεύεται δ' ἀφ' ἑνὸς ὑπὸ τῆς χρονολογίας, καθ' ἣν αὕτη συνέβη, ἀφ' ἑτέρου δὲ ὑπὸ τοῦ ποσοῦ τοῦ δηλοῦντος τὴν συμφωνηθεῖσαν ἀξίαν τοῦ πράγματος. Ἐπειδὴ δ' ὁ Δ. Πετρίδης λαμβάνει ἑκάστοτε πρᾶγμά τι οὐχὶ ὡς δωρεάν, ἀλλ' ὑπὸ τὸν ὅρον ν' ἀποδώσῃ ἡμῖν θᾶττον ἢ βράδιον τὸ ἀντίτιμον αὐτοῦ, δυνάμεθα νὰ θεωρῶμεν τὰ ἐν τῷ ἀριστερῷ μέρει ἀναγραφόμενα ποσὰ καὶ ὡς χρέη τοῦ Δ. Πετρίδου πρὸς ἡμᾶς, ἤτοι ὡς ποσά, ἅτινα ὀφείλει οὗτος νὰ δώσῃ (= δοῦναι) πρὸς ἡμᾶς κατὰ τοὺς συμπεφωνημένους ὅρους. Δυνάμεθα ὅθεν νὰ καλῶμεν τὸ ἀριστερὸν τοῦ λογαριασμοῦ μέρος ἐπὶ τὸ συντομώτερον «**Δοῦναι**».

Ἀφ' ἑτέρου πᾶσαι αἱ πράξεις, καθ' ἃς ὁ Δ. Πετρίδης ἔτυχε νὰ δώσῃ ἡμῖν, ἀμέσως ἢ ἐμμέσως, πρᾶγμά τι, εὑρίσκονται εἰς ἓν καὶ τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ λογαριασμοῦ τὸ δεξιόν. Ἑκάστη δὲ τούτων ἐκτίθεται, καθ' ὃν τρόπον γίνεται τοῦτο καὶ ἐν τῷ ἀριστερῷ μέρει. Τὰ ἐν τῷ δεξιῷ μέρει ἀναγραφόμενα ποσὰ δηλοῦσι τὰς ἀξίας τῶν εἰς ἡμᾶς δοθέντων παρὰ τοῦ Δ. Πετρίδου πραγμάτων. Ἐπαναλαμβάνοντες ὅμως τὰς αὐτὰς σκέψεις, ἃς ἐκάμαμεν προηγουμένως ὡς πρὸς τὰ ποσὰ τοῦ ἀριστεροῦ μέρους, πειθόμεθα εὐκόλως, ὅτι τὰ τοῦ δεξιοῦ μέρους ποσὰ δυνάμεθα νὰ θεωρῶμεν καὶ ὡς χρέη ἡμῶν πρὸς τὸν Δ. Πετρίδην, ἤ, ὅπερ ταὐτό, ὡς *ἀπαιτήσεις* τούτου παρ' ἡμῶν, ἐν ἄλλαις λέξεσιν ὡς ποσά, ἅτινα οὗτος δικαιοῦται παρ' ἡμῶν νὰ λάβῃ (=Λαβεῖν). Δυνάμεθα ὅθεν νὰ καλῶμεν τὸ δεξιὸν τοῦ λογαριασμοῦ μέρους ἐπὶ τὸ συντομώτερον «**Λαβεῖν**».

Κατὰ ταῦτα τὸ ἀριστερὸν τοῦ λογαριασμοῦ μέρος δυνάμεθα νὰ θεωρῶμεν ὡς κατάλογον τῶν πρὸς ἡμᾶς χρεῶν τοῦ Δ. Πετρίδου, τοῦ τιτλούχου τοῦ λογαριασμοῦ, τὸ δὲ δεξιὸν ὡς κατάλογον τῶν πρὸς αὐτὸν χρεῶν ἡμῶν ἤ, ὅπερ ταὐτό, τῶν ἀπαιτήσεων αὐτοῦ παρ' ἡμῶν.

262 *Σύντομος διάταξις τοῦ λογαριασμοῦ.* Τούτων τεθέντων ὁ λογαριασμὸς τοῦ Δ. Πετρίδου ἁπλουστεύεται οὕτω :

Δ. ΠΕΤΡΙΔΗΣ

ΔΟΥΝΑΙ ΛΑΒΕΙΝ

Χρονολογία		Ἔκθεσις πράξεως	Ποσὰ		Χρονολογία		Ἔκθεσις πράξεως	Ποσὰ	
1912			Δραχ.	Λ.	1912			Δραχ.	Λ.
Ἰαν.	5	Καταθέσεις μας παρ' αὐτῷ	10000		Φεβρ.	20	Ἀπεσύραμεν παρ' αὐτοῦ	3000	
»	14	Καταθέσεις Ἰωαννίδου διὰ λογαριασμόν μας.	4857	50	Μαρτ.	4	Πληρωμή του εἰς Νικολάου διὰ λογαριασμόν μας	3940	10
					»	10	Ἀγορὰ 1 μετοχῆς διὰ λογαριασμόν μας	4018	60
		Ἐν ὅλῳ	14857	50			Ἐν ὅλῳ	10958	70

Περίληψις.

Ὁ Δ. Πετρίδης ὀφείλει «**δοῦναι**» ἡμῖν ἐν ὅλῳ δρχ. 14857,50
» δικαιοῦται «**λαβεῖν**» παρ' ἡμῶν » 10958,70
Ἄρα τὴν 10ην Μαρτ. ὀφείλει οὗτος «**Δοῦναι**» ἡμῖν ὑπόλ. δρ. 3898,80

Παρατ. *1η. Πρὸς βαθυτέραν κατανόησιν τῶν τοῦ λογαριασμοῦ θεωροῦμεν καλόν, ὅπως ὁ μαθητὴς ἀσκῆται εἰς τὸ ν' ἀναγινώσκῃ τὰς ἐγγραφὰς τοῦ λογαριασμοῦ ὡς ἑξῆς:*

Ὡς πρὸς τὸ ἀριστερὸν μέρος θὰ λέγῃ. Ὁ Δ. Πετρίδης (ὁ τιτλοῦχος τοῦ λογαριασμοῦ) ὀφείλει νὰ δώσῃ ἡμῖν (=δοῦναι) τὰ ἑξῆς· α') 10000 δρχ., διότι τὴν 5ην Ἰανουαρίου ἔλαβε παρ' ἡμῶν ἴσον ποσὸν τοῖς μετρητοῖς· β') δρχ. 4857,50, διότι ἔλαβε τὴν 14ην Ἰανουαρίου παρ' ἡμῶν ἐμμέσως (διὰ τοῦ κ. Ἰωαννίδου) ἴσον ποσὸν τοῖς μετρητοῖς κ. ο. κ.

Ὡς πρὸς τὸ δεξιὸν μέρος θὰ λέγῃ: Ὁ Δ. Πετρίδης δικαιοῦται λαβεῖν (=νὰ λάβῃ) παρ' ἡμῶν: α') δρχ. 3000, διότι τὴν 20ὴν Φεβρουαρ. 1912 ἔδωκεν ἡμῖν ἴσον ποσὸν τοῖς μετρητοῖς· β') δρχ. 3940,10, διότι τὴν 4ην Μαρτίου ἔδωκεν εἰς ἡμᾶς ἐμμέσως (ἤτοι εἰς τὸν Νικολάου διὰ λογαριασμόν μας) ἴσον ποσὸν εἰς μετρητά· γ') δρχ. 4018,60, διότι τὴν 10ην Μαρτίου ἔδωκεν εἰς ἡμᾶς ἴσον ποσὸν εἰς τίτλους, ἤτοι εἰς 1 μετοχὴν τῆς Ἐθν. Τραπέζης τῆς Ἑλλάδος κ. ο. κ.

Παρατ. *2α. Εἶναι ἀνάγκη νὰ προσθέσωμεν καὶ τὰ ἑξῆς:*

Χρέος τοῦ Δ. Πετρίδου πρὸς ἡμᾶς δύναται καὶ ἄλλως νὰ προκύψῃ.

Ἐὰν π. δ. χ. συνεφωνήθη τὰ παρ' αὐτῷ κεφάλαιά μας ν' ἀποφέρωσι τόκον ὑπὲρ ἡμῶν καὶ ὑπολογισμοῦ γενομένου προέκυψε τὴν 10ην Μαρτίου ποσὸν τόκου δρχ. 48,50 ὑπὲρ ἡμῶν, τὸ ποσὸν τοῦτο θὰ εἶναι προφανῶς χρέος τοῦ Δ. Πετρίδου πρὸς ἡμᾶς. Προκειμένου νὰ σημειωθῇ τὸ ποσὸν τοῦτο εἰς τὸν λογαριασμὸν τοῦ Δ. Πετρίδου ἀνάγκη νὰ ἐγγραφῇ εἰς τὸ «*Δοῦναι*» τοῦ λογαριασμοῦ, ὅπου εὑρίσκονται καὶ τὰ λοιπὰ τοῦ Δ. Πετρίδου χρέη πρὸς ἡμᾶς. Τὸ χρέος τῶν 48,50 δρχ., ἐπειδὴ δὲν καλύπτει ἴσην ἀξίαν πράγματός τινος δοθέντος τῷ Πετρίδῃ παρ' ἡμῶν, συνεπάγεται ἐλάττωσιν ἴσην τῆς ὅλης περιουσίας τοῦ Δ. Πετρίδου, ἤτοι ζημίαν τοῦ Δ. Πετρίδου, αὔξησιν δὲ ἴσην τῆς ὅλης περιουσίας ἡμῶν, ἤτοι ὠφέλειαν ἡμῶν. Ὡσαύτως, ἐὰν συνεφωνήθη ὁ Δ. Πετρίδης νὰ λογαριάσῃ ὑπὲρ ἑαυτοῦ δρχ. 5 ὡς προμήθειαν, ἤτοι ὡς ἀμοιβήν του διὰ τὴν μεσολάβησίν του πρὸς ἀγορὰν τῆς 1 μετοχῆς τῆς Ἐθν. Τραπέζης τὴν 10ην Μαρτίου διὰ λογαριασμόν μας, τὸ ποσὸν τοῦτο θὰ παριστᾷ ἀπαίτησιν τοῦ Δ. Πετρίδου παρ' ἡμῶν. Ἡ ἀπαίτησις αὕτη προκειμένου νὰ ἐγγραφῇ εἰς τὸν λογαριασμὸν θὰ σημειωθῇ ἐν τῷ «*Λαβεῖν*», ὅπου εὑρίσκονται καὶ αἱ λοιπαὶ ἀπαιτήσεις τοῦ Δ. Πετρίδου. Τὸ ποσὸν τῆς ἐν λόγῳ προμηθείας εἶναι προφανῶς ὠφέλεια μὲν διὰ τὸν Δ. Πετρίδην, ζημία δὲ δι' ἡμᾶς.

263) Ἐκ πάντων τῶν εἰρημένων ἀγόμεθα εἰς τὸν ἀκόλουθον ὁρισμόν. «*Λογαριασμὸς* ἢ *Μερὶς* προσώπου τινὸς καλεῖται πίναξ τις (ἤτοι φύλλον χάρτου) τιτλοφορούμενος μὲ τὸ ὄνομα τοῦ προσώπου τούτου καὶ διῃρημένος διὰ καθέτου γραμμῆς εἰς δύο μέρη. Καὶ εἰς μὲν τὸ ἀριστερόν, τὸ φέρον τὸν τίτλον «*Δοῦναι*», ἐγγράφονται πάντα τὰ πράγματα, ἅτινα ὁ τιτλοῦχος τοῦ λογαριασμοῦ ἔλαβε, καὶ πᾶσαι αἱ ζημίαι, ἃς ὀφείλει νὰ ὑποστῇ δυνάμει συμφωνιῶν, ἐν ἄλλαις λέξεσι πάντα τὰ χρέη τοῦ τιτλούχου.

Εἰς δὲ τὸ δεξιὸν μέρος, τὸ φέρον τὸν τίτλον «*Λαβεῖν*» ἐγγράφονται πάντα τὰ πράγματα, ἅτινα ὁ τιτλοῦχος τοῦ λογαριασμοῦ ἔδωκε, καὶ πᾶσαι αἱ ὠφέλειαι, ἃς δυνάμει συμφωνιῶν δικαιοῦται νὰ καρπωθῇ, ἐν ἄλλαις λέξεσι πᾶσαι αἱ ἀπαιτήσεις τοῦ τιτλούχου.

264) *Χρέωσις λογαριασμοῦ*. Ὅταν ἐγγράφωμεν ποσόν τι εἰς τὸ «*Δοῦναι*» λογαριασμοῦ τινος μετὰ συντόμου ἐκθέσεως τῆς εἰς ἣν ἀναφέρεται, πράξεως καὶ τῆς σχετικῆς χρονολογίας, τότε λέγομεν, ὅτι «*Χρεοῦμεν*» τὸν λογαριασμὸν τοῦτον μὲ τὸ ἐν λόγῳ ποσόν.

Σημ. *Ἡ σύντομος ἔκθεσις τῆς σχετικῆς πράξεως καλεῖται αἰτιολογία τῆς χρεώσεως.*

265) *Πίστωσις λογαριασμοῦ*. Ὅταν ἐγγράφωμεν ποσόν τι εἰς τὸ «*Λαβεῖν*» λογαριασμοῦ τινος μετὰ συντόμου ἐκθέσεως τῆς εἰς ἣν ἀναφέρεται πράξεως καὶ τῆς σχετικῆς χρονολογίας, τότε λέγομεν, ὅτι «*Πιστοῦμεν*» τὸν λογαριασμὸν τοῦτον μὲ τὸ ἐν λόγῳ ποσόν.

Σημ. *1. Ἁπλογραφία ἐκλήθη, διότι κατ' αὐτὴν τὰ διάφορα ποσὰ ἐγγράφονται ἅπαξ ἢ εἰς τὴν χρέωσιν ἢ εἰς τὴν πίστωσιν λογαριασμοῦ τινος. Ἐνῷ ἐν τῇ διπλογραφίᾳ ποσόν τι ἐγγράφεται δίς, ἤτοι εἰς τὴν* *χρέωσιν λογαριασμοῦ τινος καὶ εἰς τὴν πίστωσιν ἄλλου λογαριασμοῦ.*

Σημ. 2. *Ἡ σύντομος ἔκθεσις τῆς πράξεως καλεῖται αἰτιολογία τῆς πιστώσεως.*

266) Πρὸς ὀρθὴν χρέωσιν ἢ πίστωσιν λογαριασμοῦ τινος δέον νὰ ἔχωμεν ὑπ' ὄψει τὰς ἑπομένας θεμελιώδεις τῆς λογιστικῆς ἀρχάς, ὧν ἡ ἀλήθεια ἐξάγεται ἀμέσως ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ (§ 263).

α') Πᾶς λογαριασμὸς (ἤτοι ὁ τιτλοῦχος τοῦ λογαριασμοῦ) λαμβάνων πρᾶγμά τι χρεοῦται μὲ τὴν ἀξίαν τούτου· ἐπίσης χρεοῦται καὶ μὲ πᾶσαν ζημίαν, ἣν ὀφείλει νὰ ὑποστῇ.

β') Πᾶς λογαριασμὸς (ἤτοι ὁ τιτλοῦχος τοῦ λογαριασμοῦ) δίδων πρᾶγμά τι «*πιστοῦται*» μὲ τὴν ἀξίαν αὐτοῦ· ἐπίσης «*πιστοῦται*» καὶ μὲ πᾶσαν ὠφέλειαν, ἥτις τῷ ἀνήκει.

Παραδείγματα. 1) Καταθέτω σήμερον δρχ. 8000 παρὰ τῇ Τραπέζῃ Ἀθηνῶν. Ἐγὼ μὲν θὰ χρεώσω τὸν παρ' ἐμοὶ (=ἐν τοῖς βιβλίοις μου) λογαριασμὸν τῆς «*Τραπέζης Ἀθηνῶν*» μὲ δρχ. 8000 ὡς λαβόντα ἴσον ποσόν, τὸ παρ' αὐτῇ κατατεθὲν (§ 266 α') ἡ δὲ «*Τράπεζα Ἀθηνῶν*», θὰ πιστώσῃ μὲ δρχ. 8000 τὸν παρ' αὐτῇ λογαριασμόν μου ὡς δώσαντα αὐτῇ ἴσον ποσόν, τὸ κατατεθὲν (266 β').

2) Ἄλλην τινὰ ἡμέραν βραδύτερον ἀποσύρω ἀπὸ τῆς αὐτῆς Τραπέζης δρχ. 3600. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ἐγὼ μὲν θὰ πιστώσω τὸν παρ' ἐμοὶ λογαριασμὸν τῆς «*Τραπέζης Ἀθηνῶν*» μὲ 3600 δρχ. ὡς δώσαντα ἴσον ποσὸν (266 β'), ἡ δὲ «*Τράπεζα Ἀθηνῶν*» θὰ χρεώσῃ μὲ 3600 δρχ. τὸν παρ' αὐτῇ λογαριασμόν μου, ὡς λαβόντα ἴσον ποσόν, τὸ ἀποσυρθὲν (266 α')

3) Μετά τινα χρόνον ἡ αὐτὴ Τράπεζα μὲ εἰδοποιεῖ, ὅτι τῇ ὀφείλομεν προμήθειαν δρχ. 5,45 καὶ ὅτι δικαιούμεθα νὰ λάβωμεν παρ' αὐτῆς τόκον, διὰ χρονικόν τι διάστημα, δρχ. 25,65. Ἐγὼ μὲν θὰ πιστώσω τὸν παρ' ἐμοὶ λογαριασμὸν τῆς «*Τραπέζης Ἀθηνῶν*» μὲ δρχ. 5,45 ὡς ποσὸν ὠφελείας ὑπὲρ αὐτοῦ (266 β') καὶ θὰ χρεώσω αὐτὸν μὲ δρχ. 25,65 ὡς ποσὸν ζημίας αὐτοῦ (266 α'), ἡ δὲ «*Τράπεζα Ἀθηνῶν*» θὰ ἐκτελέσῃ ἀντιθέτους ἐγγραφὰς εἰς τὸν παρ' αὐτῇ λογαριασμόν μου.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Τὴν 5ην Μαΐου 1912 παραλαμβάνει ὁ ἐν Καλάμαις ἔμπορος Δ. Ἰωαννίδης μετὰ προηγουμένην παραγγελίαν ποσόν τι ἐμπορευμάτων παρὰ τοῦ ἐν Πειραιεῖ προμηθευτοῦ του, Κ. Γρηγορίου, ὧν ἡ ἀξία κατὰ τὸ σχετικὸν τιμολόγιον (Ἄσκ. ποσοστῶν· προβλ. 24) ἀνέρχεται εἰς δρχ.

5400, πληρωτέας μετὰ δύο μῆνας. Τίνας χρεώσεις ἢ πιστώσεις θὰ ἐκτελέση ἕκαστος τῶν ἐνδιαφερομένων ;

Σημ. — *Ὁ διδάσκων μετὰ κατάλληλον ἐξήγησιν καὶ ὁδηγίαν δύναται νὰ ἐπιβάλη τοῖς μαθηταῖς καὶ τὴν σύνταξιν τοῦ σχετικοῦ τιμολογίου καὶ τῶν συναφῶν πρὸς τὴν θεωρουμένην πρᾶξιν ἐπιστολῶν. Τὸ αὐτὸ ἰσχύει καὶ διὰ τὰς ἑπομένας ἀσκήσεις.*

2) Τὴν 7ην Μαΐου 1912 ὁ ἐν Καλάμαις Δ. Ἰωαννίδης (ἄσκ. 1) ἀποστέλλει τῷ κ. Κ. Γρηγορίῳ εἰς Πειραιᾶ γραμμάτιον εἰς διαταγὴν τούτου ἀξίας ὀνομαστικῆς 2500 δρχ. καὶ λήξεως 5 Ἰουλίου. Τίνας χρεώσεις ἢ πιστώσεις θὰ κάμη ἑκάτερος τῶν ἐνδιαφερομένων ;

3) Ὁ ἐν Βόλῳ Κ. Μενελάου ἐπλήρωσε τὴν 15ην Μαρτίου εἰς τὸν Π. Δημητρίου τῆς αὐτῆς πόλεως δρχ. 1000 κατὰ διαταγὴν καὶ διὰ λογαριασμὸν τοῦ ἐν Λαρίσῃ Τ. Λαμπρίδου. Τίνας χρεώσεις ἢ πιστώσεις θὰ ἐκτελέση ἕκαστος ἐξ αὐτῶν ;

4) Ὁ ἐν Πειραιεῖ παραγγελιοδόχος Δ. Χρηστίδης ἠγόρασε κατὰ διαταγὴν καὶ διὰ λογαριασμὸν τοῦ ἐν Πάτραις Δ. Παυλίδου καὶ ἐξαπέστειλεν εἰς αὐτὸν τὴν 10ην Ἀπριλίου τὰ ἑξῆς· 100 σάκκους καφὲ Βραζιλίας ὁλικοῦ καθαρ. βάρους ὀκ. 5000 πρὸς δρχ. 4,25 κατ᾽ ὀκᾶν. Ὁ παραγγελιοδόχος λογαριάζει διὰ ναῦλον καὶ ἄλλα μικρὰ ἔξοδα ἀγορᾶς δρχ. 245,25 καὶ ἀπαιτεῖ διὰ τὴν μεσολάβησίν του ὡς ἀμοιβήν, προμήθειαν πρὸς 1 % ἐπὶ τῆς ὁλικῆς ἀξίας τοῦ ἐμπορεύματος μετὰ τῶν ἐξόδων. Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἡ τελικὴ ἀξία τοῦ ἐμπορεύματος καὶ νὰ γίνωσιν αἱ σχετικαὶ χρεώσεις ἢ πιστώσεις παρ᾽ ἑκατέρῳ τῶν ἐνδιαφερομένων.

5) Τὴν 20ὴν Ἀπριλίου λαμβάνει ὁ αὐτὸς παραγγελιοδόχος Δ. Χρηστίδης παρὰ τοῦ ἐν Πάτραις Δ. Παυλίδου ἐπιταγὴν ἐκ δρχ. 20000 ἐπὶ τῆς Ἐθν. Τραπέζης καὶ μίαν συναλλαγματικὴν (242) ἐπὶ Ἀθηνῶν λήξεως 30ῆς Ἀπριλίου καὶ ὀνομαστικῆς ἀξίας δρχ. 1710.20. Τίνες χρεώσεις ἢ πιστώσεις θὰ γίνωσι παρ᾽ ἑκατέρῳ ;

6) Ὁ ἐν Πειραιεῖ παραγγελιοδόχος Κ. Ἰωάννου ἐπώλησε τὴν 20ὴν Φεβρουαρ. 8000 ὀκ. ἐλαίου πρὸς δρχ. 1,05 τὴν ὀκᾶν. Τὸ ἔλαιον τοῦτο εἶχε προαποστείλει πρὸς τοῦτο εἰς αὐτὸν ὁ ἐν Γυθείῳ Γ. Νικολάου. Ὁ Κ. Ἰωάννου λογαριάζει διάφορα ἔξοδα συμποσούμενα εἰς δρχ. 345,75 καὶ προμήθειάν του πρὸς $1\frac{1}{2}$ % ἐπὶ τῆς ἀκαθαρίστου τιμῆς πωλήσεως τοῦ ἐλαίου (τῆς πρὸ τῆς ἀφαιρέσεως οἱουδήποτε ἐξόδου). Ζητεῖται νὰ προσδιορισθῇ ἡ καθαρὰ ἀξία τοῦ ἐλαίου (ἡ μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν πάν-

των τῶν συναφῶν ἐξόδων πωλήσεως) καὶ νὰ γίνωσιν αἱ σχετικαὶ χρεώσεις ἢ πιστώσεις παρ' ἑκατέρῳ.

7) Τὴν 1ην Μαρτίου ὁ αὐτὸς Κ. Ἰωάννου καταθέτει εἰς τὴν ἐν Ἀθήναις Τράπεζαν Π. Γεωργίου διὰ λογαριασμὸν τοῦ ἐκ Γυθείου Γ. Νικολάου τὸ καθαρὸν προϊὸν τῆς πωλήσεως τοῦ ἐλαίου (Ἀσκ. 6). Ζητεῖται νὰ γίνωσιν αἱ δέουσαι ἐγγραφαὶ παρ' ἑκάστῳ τῶν τριῶν μνημονευομένων.

8) Ὁ ἐν Πάτραις ἔμπορος Κ. Λαμπρίδης πρὸς κάλυψιν ἀπαιτήσεώς του ἐκ δρχ. 2102,45 σύρει τὴν 7ην Φεβρουαρ. συναλλαγματικὴν 90 ἡμερῶν ἴσου ποσοῦ ἐπὶ τοῦ ἐν Πύργῳ χρεώστου Θ. Σταυρίδου, ἣν καὶ ἀποδέχεται ὁ τελευταῖος. Τίνες χρεώσεις ἢ πιστώσεις θὰ ἐκτελεσθῶσι παρ' ἑκατέρῳ ;

9) Ὁ ἐν Λαμίᾳ Κ. Ὁμηρίδης πρὸς κάλυψιν τῆς ἀξίας τιμολογίου ὑπογράφει τὴν 20ὴν Μαΐου γραμμάτιον εἰς διαταγὴν τοῦ ἐκ τῆς αὐτῆς πόλεως προμηθευτοῦ του. Γ. Ἀστεριάδου ἀξίας δρχ. 1855,45 καὶ λήξ. 31ης Αὐγούστου. Τίνες χρεώσεις ἢ πιστώσεις θὰ γίνωσι παρ' ἑκατέρῳ.

Γ') Ἄνοιγμα, Περάτωσις, Μεταφορὰ λογαριασμοῦ

267) *Ἄνοιγμα λογαριασμοῦ.* Ἅμα τῇ ἐνάρξει δοσοληψιῶν μεταξὺ ἡμῶν καὶ τρίτου τινός, ἀφιεροῦμεν πρὸς ἐγγραφὴν αὐτῶν μίαν σελίδα (ἢ καὶ μέρος αὐτῆς) τοῦ ἡμετέρου Καθολικοῦ, ἤτοι τοῦ βιβλίου τοῦ περιλαμβάνοντος πάντας τοὺς παρ' ἡμῖν λογαριασμοὺς τῶν τρίτων. Ἡ πρᾶξις αὕτη καλουμένη «*Ἄνοιγμα λογαριασμοῦ*», γίνεται ὡς ἑξῆς.

Γράφομεν μὲ μεγάλα στρογγύλα γράμματα 1) τὸ ὀνοματεπώνυμον τοῦ θεωρουμένου προσώπου ἐπὶ κεφαλῆς καὶ ἐν μέσῳ τῆς ἀφιερουμένης σελίδος, συνοδευόμενον καὶ ὑπὸ τῆς κατοικίας αὐτοῦ· 2) τὰς λέξεις «*Δοῦναι*» καὶ «*Λαβεῖν*» ἑκατέρωθεν τοῦ ὀνοματεπωνύμου καὶ εἰς τὰς δύο ἀνωτέρας τῆς σελίδος γωνίας.

Ὑπόδειγμα.

Ι. ΦΙΛΙΠΠΟΥ *ἐκ Καλαμῶν*

ΔΟΥΝΑΙ ΛΑΒΕΙΝ

Σημ. — *Συνήθως οἱ τίτλοι «Δοῦναι» καὶ «Λαβεῖν» εἶναι ἐκ τῶν προτέρων τετυπωμένοι ἐν ἑκάστῃ τοῦ Καθολικοῦ σελίδι. Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει ἀρκεῖ ἡ ἐγγραφὴ τοῦ ὀνοματεπωνύμου μετὰ τῆς κατοικίας.*

268) *Περάτωσις λογαριασμοῦ.* Καλεῖται οὕτως ἡ πρᾶξις, δι' ἧς προσδιορίζομεν τὸ ὑπόλοιπον, ὅπερ παρουσιάζει κατά τινα ἐποχὴν δεδομένην λογαριασμός τις εἴτε ὑπὲρ εἴτε κατὰ τοῦ τιτλούχου του. Γίνεται δὲ τοῦτο ὡς ἑξῆς·

Προσδιορίζομεν ἐπὶ προχείρου φύλλου χάρτου ἀφ' ἑνὸς μὲν τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν ποσῶν τοῦ «*Δοῦναι*» τοῦ θεωρουμένου λογαριασμοῦ, ἀφ' ἑτέρου δὲ τὸ τῶν ποσῶν τοῦ «*Λαβεῖν*» καὶ ἀφαιροῦμεν τὸ μικρότερον ἄθροισμα ἀπὸ τοῦ μεγαλυτέρου (262 Περίληψις). Τὸ οὕτω προκῦπτον ὑπόλοιπον θὰ εἶναι κατὰ τοῦ τιτλούχου, ἂν τὸ ἄθροισμα τοῦ «*Δοῦναι*», ἤτοι τὸ σύνολον τῶν χρεῶν τοῦ τιτλούχου (261 ἐπεξήγησις) εἶναι μεῖζον τοῦ τοῦ «*Λαβεῖν*» ἤτοι τοῦ συνόλου τῶν ἀπαιτήσεων αὐτοῦ· τοὐναντίον δὲ τὸ ὑπόλοιπον θὰ εἶναι ὑπὲρ τοῦ τιτλούχου, ἐὰν τὸ τοῦ «*Λαβεῖν*» ἄθροισμα εἶναι μεγαλύτερον.

Ἐν τῇ πρώτῃ περιπτώσει τὸ ὑπόλοιπον ὀνομάζεται «*χρεωστικὸν ὑπόλοιπον*» ἢ «*χρεωστικὴ ἐξίσωσις*», ἐν δὲ τῇ δευτέρᾳ «*πιστωτικὸν ὑπόλοιπον*» ἢ «*πιστωτικὴ ἐξίσωσις*».

Πρὸς ἐξέλεγξιν τοῦ οὕτως εὑρισκομένου ὑπολοίπου σημειοῦμεν αὐτὸ ἐν τῷ λογαριασμῷ μετὰ τῆς σχετικῆς χρονολογίας καὶ αἰτιολογίας (264, 265 Σημ.), ἂν μὲν εἶναι χρεωστικόν, ἐν τῇ στήλῃ τῶν ποσῶν τοῦ «Λαβεῖν», ἂν δὲ πιστωτικόν, ἐν τῇ στήλῃ τῶν ποσῶν τοῦ «Δοῦναι», καὶ ἀκολούθως προσθέτομεν πάντα τὰ ποσὰ ἐν ἑκατέρᾳ στήλῃ. Τὰ δύο οὕτω προκύψαντα ἀθροίσματα θὰ εἶναι ἴσα ἀλλήλοις (§ 29), ἐὰν τὸ ὑπόλοιπον τοῦ λογαριασμοῦ ὀρθῶς εἶχεν ὑπολογισθῇ.

Ὑφ' ἑκάτερον τῶν ἴσων τούτων ἀθροισμάτων, γραφομένων εἰς τὸ αὐτὸ ὕψος, ἄγομεν μικρὰν διπλῆν ὁριζοντίαν γραμμήν, δι' ἧς δηλοῦται, ὅτι ταῦτα δὲν πρέπει νὰ συγχωνευθῶσι βραδύτερον μετ' ἄλλων νεωτέρων ποσῶν τυχὸν γραφησομένων ὑπὸ τὴν διπλῆν γραμμήν.

Τέλος τὸ ὑπόλοιπον τοῦ λογαριασμοῦ ἐγγράφεται μετὰ τῆς σχετικῆς χρονολογίας καὶ αἰτιολογίας ὑπὸ τὴν διπλῆν γραμμὴν ἐν τῇ φυσικῇ τοῦ λογαριασμοῦ στήλῃ, ἤτοι, ἂν μὲν εἶναι χρεωστικόν, ἐν τῇ στήλῃ τῶν ποσῶν τοῦ «Δοῦναι», ἂν δὲ πιστωτικόν, ἐν τῇ τοῦ «Λαβεῖν», ἵνα οὕτως ἐγκαινιασθῇ ἡ σειρὰ τῶν χρεώσεων (264) καὶ πιστώσεων (265) τοῦ λογαριασμοῦ κατὰ τὴν ἀρχομένην νέαν περίοδον δοσοληψιῶν. Ἀφ' οὗ δὲ πάντα ταῦτα γίνωσι, τότε λέγομεν ὅτι ἡ περάτωσις τοῦ λογαριασμοῦ εἶναι συντετελεσμένη.

Παρ. *1) Ἐὰν ἐν τῷ πρὸς περάτωσιν λογαριασμῷ συμβῇ νὰ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ποσῶν τοῦ «Δοῦναι» ἴσον πρὸς τὸ τῶν ποσῶν τοῦ «Λαβεῖν», τότε προφανῶς οὐδὲν ὑπόλοιπον προκύπτει εἴτε ὑπὲρ εἴτε κατὰ τοῦ τιτλούχου. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ λέγομεν, ὅτι ὁ λογαριασμὸς εἶναι ἐν ἰσοζυγίῳ. Ἡ περάτωσις τοῦ τοιούτου λογαριασμοῦ γίνεται ἁπλῶς γραφομένων τῶν δύο ἴσων ἀθροισμάτων εἰς τὸ αὐτὸ ὕψος ἐν ταῖς σχετικαῖς τῶν ποσῶν στήλαις καὶ ἀγομένης ὑφ' ἑκάτερον διπλῆς ὁριζοντίας γραμμῆς.*

Ὑποδείγματα

1. Λογαριασμοῦ περατωθέντος μεθ' ὑπολοίπου (τὴν 31ην Ἰουλίου 1912)

Κ. ΙΩΑΝΝΙΔΗΣ *ἐκ Τριπόλεως*

ΔΟΥΝΑΙ ΛΑΒΕΙΝ

Χρονολογία 1912		Ἔκθεσις πράξεως	Ποσὰ Δραχ.	Λ.	Χρονολογία 1912		Ἔκθεσις πράξεως	Ποσὰ Δραχ.	Λ.
Ἀπριλ	18	Τιμολόγιόν μας	340	65	Ἀπρ.	30	Πληρωμή του	280	—
Μαΐου	25	» »	485	10	Μαΐου	31	» »	500	
Ἰουν.	28	» »	542	80	Ἰουλ.	10	» »	100	
					»	10	Γραμμάτιόν του εἰς διαταγήν μας	425	50
					»	31	Ὑπόλοιπον χρεωστ.	63	05
			1368	55				1368	55
Αὐγ.	1	Ὑπόλοιπον εἰς νέον	63	05					

2. Λογαριασμοῦ περατωθέντος ἄνευ ὑπολοίπου (ἐν ἰσοζυγίῳ).

35 Π. ΝΙΚΟΛΑΟΥ *ἐκ Βόλου* 35

ΔΟΥΝΑΙ *ΛΑΒΕΙΝ*

1912			Δρχ.	Λ.	1912			Δρχ.	Λ.
Ἀπριλ.	8	Πληρωμή μας	615	80	Μαρτίου	15	Τιμολόγιόν του	845	60
»	30	» »	718	20	Μαΐου	20	» »	1118	10
Μαΐου	20	Γραμμάτιόν μας εἰς διαταγήν του	629	70					
			1963	70				1963	70

Παρατήρ. 2. Πολλάκις ἀπαντῶμεν καὶ ἄλλας διατάξεις λογαριασμῶν, οἷαι αἱ ἀκόλουθοι:

α') Κ. ΙΩΑΝΝΙΔΗΣ *ἐκ Τριπόλεως* Σελὶς 20

Χρονολογ. 1912		*Αἰτιολογία*	*Δοῦναι* Δρχ.	Λ.	*Λαβεῖν* Δρχ.	Λ.
Ἀπριλ.	18	Τιμολόγιόν μας ὑπ' ἀρ. 102	340	65		
»	30	Πληρωμή του			280	—
Μαΐου	25	Τιμολόγιόν μας ὑπ' ἀρ. 211	485	10		
»	31	Πληρωμή του			500	—
Ἰουνίου	28	Τιμολόγιόν μας ὑπ' ἀρ. 315	542	80		
Ἰουλίου	10	Πληρωμή του			100	—
»	10	Γραμμάτιόν του εἰς διαταγήν μας 2 μηνῶν			425	50
»	31	Ἐξίσωσις χρεωστική			63	05
			1368	55	1368	55
Αὐγούσ.	1	Ὑπόλοιπον εἰς νέον	63	05		

β') Κ. ΜΕΝΕΛΑΟΥ *ἐκ Πατρῶν* Σελὶς 30

Χρονολογία		*Αἰτιολογία*	*Δοῦναι*		*Λαβεῖν*		*Ὑπόλοιπα*		
			Δρχ.	Λ.	Δρχ.	Λ.		Δρχ.	Λ.
Ἀπριλίου	18	Τιμολόγιόν μας	340	65			Χ	340	65
»	30	Πληρωμή του			280	—	Χ	50	65
Μαΐου	25	Τιμολόγιόν μας	485	10			Χ	545	75
Ἰουνίου	10	Γραμμάτιόν του 3 μηνῶν			750	10	Π.	204	35
»	30	Τιμολόγιόν μας	605	20			Χ	400	85
Ἰουλίου	15	Πληρωμή του			350	85	Χ	50	—
»	31	Ὑπόλοιπον χρεωστικὸν			50	—			
			1430	95	1430	95			
Αὐγούστ.	1	Ὑπόλοιπον εἰς νέον	50				Χ	50	—

Ἐπεξήγησις. Κατὰ τὴν τελευταίαν διάταξιν προσδιορίζομεν μεθ᾽ἑκάστην χρέωσιν ἢ πίστωσιν τὸ προσωρινὸν ὑπόλοιπον τοῦ λογαριασμοῦ καὶ σημειοῦμεν αὐτὸ ἐν τῇ εἰδικῇ στήλῃ μετὰ τοῦ γράμματος Χ ἢ Π, καθόσον εἶναι χρεωστικὸν ἢ πιστωτικόν.

Σημ. *Ἡ περάτωσις τῶν λογαριασμῶν γίνεται συνήθως περιοδικῶς, εἰς τὸ τέλος ἑκάστου τριμήνου ἢ ἑξαμήνου ἢ ἔτους κ.λ.π. Δύναται ὅμως δι᾽ ἐκτάκτους λόγους νὰ γίνῃ περάτωσις λογαριασμῶν καὶ ἐν πάσῃ ἐνδιαμέσῳ ἐποχῇ.*

269) *Μεταφορὰ λογαριασμοῦ.* Ὅταν αἱ ἐγγραφαὶ (χρεώσεις ἢ πιστώσεις) λογαριασμοῦ τινος πολλαπλασιαζόμεναι βαθμηδὸν καταλάβωσιν ὅλον σχεδὸν τὸν χῶρον, εἴτε τοῦ «Δοῦναι» εἴτε τοῦ «Λαβεῖν», εἴτε καὶ ἀμφοτέρων, οὕτως ὥστε νὰ μὴ μένῃ πλέον τοιοῦτος διὰ νέαν τινὰ ἐγγραφήν, τότε προβαίνομεν εἰς τὰς ἀκολούθους πράξεις·

α') Προσθέτομεν πρῶτον μὲν πάντα τὰ ἤδη ἐγγεγραμμένα ποσὰ τοῦ «Δοῦναι», δεύτερον δὲ τὰ τοῦ «Λαβεῖν» καὶ γράφομεν τὰ προκύπτοντα δύο ἀθροίσματα ἐν τῇ τελευταίᾳ σειρᾷ σημειοῦντες πρὸ ἑκατέρου τὴν φράσιν «εἰς μεταφοράν».

β') Ἀκυροῦμεν τὸν τυχὸν μένοντα ἐλεύθερον χῶρον ἐν τῷ «Δοῦναι» ἢ ἐν τῷ «Λαβεῖν» διὰ τεθλασμένης γραμμῆς.

γ') Ἀνοίγομεν (267) ἐν ἐλευθέρᾳ τοῦ Καθολικοῦ σελίδι νέον τοῦ τιτλούχου λογαριασμόν, ἐν ᾧ ἐγγράφομεν ἀντιστοίχως τὰ δύο ῥηθέντα ἀθροίσματα (269 α') τοῦ παλαιοῦ λογαριασμοῦ, ἕκαστον μετὰ τῆς φράσεως «ἐκ μεταφορᾶς» καὶ ὑπ᾽ αὐτὰ πᾶσαν τυχὸν νέαν χρέωσιν ἢ πίστωσιν τοῦ θεωρουμένου λογαριασμοῦ.

Τὸ σύνολον τῶν πράξεων τούτων καλεῖται «μεταφορὰ λογαριασμοῦ».

Παράδειγμα. Ἔστω ὁ λογαριασμὸς

14 Π. ΔΗΜΗΤΡΙΟΥ *ἐκ Σύρου* 14

ΔΟΥΝΑΙ *ΛΑΒΕΙΝ*

1912			δρχ.	λ.	1912			δρχ.	λ.
Ἀπριλ.	5	Τιμολόγιόν μας	845	60	Ἀπριλ.	30	Πληρωμή του	950	60
»	24	» »	918	40	»	30	Γραμμάτιον εἰς διαταγήν μας	1140	10
Μαΐου	14	» »	758	10					
		Εἰς μεταφορὰν (σ.71)	2522	10			Εἰς μεταφορὰν (σ.71)	2090	70

Ἐκ τούτου γίνεται τὴν 20ὴν Μαΐου μεταφορὰ εἰς τὸν ἀκόλουθον λογαριασμὸν τοῦ ἰδίου ἀνοιχθέντα ἐν νέᾳ σελίδι 71.

71 Π. ΔΗΜΗΤΡΙΟΥ *ἐκ Σύρου* 71

ΔΟΥΝΑΙ *ΛΑΒΕΙΝ*

			δρχ.	λ.				δρχ.	λ.
1912		ἐκ μεταφορᾶς (σ.14)	2522	10			ἐκ μεταφορᾶς (σ.14)	2090	70
Μαΐου	20	Τιμολόγιόν μας	510	20					

Σημ. *Ἡ μεταφορὰ ἠδύνατο νὰ γίνῃ καὶ ἄλλως. Περατοῦμεν (268) τὸν πρῶτον λογαριασμὸν (σελ.14) τὴν 20ὴν Μαΐου καὶ μὲ τὸ προκύπτον ὑπόλοιπον ἐγκαινιάζομεν τὰς ἐγγραφὰς τοῦ νέου λογαριασμοῦ (σελ. 71). Οὕτω δὲ οἱ ἄνω λογαριασμοὶ θὰ εἶχον τὴν ἀκόλουθον ὄψιν.*

14 Π. ΔΗΜΗΤΡΙΟΥ *ἐκ Σύρου* 14

ΔΟΥΝΑΙ *ΛΑΒΕΙΝ*

			δρχ.	λ.				δρχ.	λ.
1912					1912				
Ἀπριλ.	5	Τιμολόγιόν μας	845	60	Ἀπριλ.	30	Πληρωμή του.	950	60
»	24	» »	918	40	»	30	Γρ/τιον εἰς δ/γήν μας	1140	10
Μαΐου	14	» »	758	10			ὑπόλοιπ. πρὸς ἐξίσ.	431	40
			2522	10				2522	10
Μαΐου	20	ὑπόλοιπον εἰς νέον (σελ. 71)	431	40					

71 Π. ΔΗΜΗΤΡΙΟΥ *ἐκ Σύρου* 71

ΔΟΥΝΑΙ *ΛΑΒΕΙΝ*

			δρχ.	λ.					
1912									
Μαΐου	20	Ὑπόλοιπον παλαιοῦ λογαριασμοῦ (σ.14)	431	40					
»	20	Τιμολόγιόν μας	510	20					

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Κατὰ τοὺς μῆνας Μάρτιον καὶ Ἀπρίλιον 1912 ἐγένοντο μεταξὺ τοῦ ἐν Πειραιεῖ Δ. Μενελάου καὶ τοῦ ἐν Χαλκίδι Κ. Πετρίδου αἱ κάτωθι πράξεις :

1912 Μαρτίου 1.	Ὁ Δ. Μενελάου ἐδικαιοῦτο νὰ λάβῃ ἐξ ὑπολοίπου παλαιοῦ λογαριασμοῦ	δρχ.	185,10
» » 10.	Ὁ Κ. Πετρίδης ἔλαβε παρὰ τοῦ Δ. Μενελάου ἐμπορεύματα ἀξίας	δρχ.	675,40
» » 20.	Ὁ Κ. Πετρίδης ἀποστέλλει εἰς τὸν Δ. Μενελάου α΄) γραμμάτιον εἰς διαταγὴν αὐτοῦ λήξεως 10ης Μαΐου	δρχ.	540 —
	β΄) μετρητὰς	δρχ.	200 —
» Ἀπριλίου 10.	Ὁ Κ. Πετρίδης λαμβάνει παρὰ τοῦ Δ. Μενελάου νέα ἐμπορεύματα ἀξίας	δρχ.	1808,75
» » 16.	Ὁ Δ. Μενελάου σύρει συναλλαγματικὴν ἐπὶ τοῦ Κ. Πετρίδου λήξεως 10ης Ἰουνίου ἀξίας	δρχ.	1860.50

1912 'Απριλίου 20. Ὁ Δ. Μενελάου ἀποστέλλει τῷ κ. Πετρίδῃ ἐμπορεύματα ἀξίας δρχ. 675,40

» » 28. Ὁ Κ. Πετρίδης καταθέτει διὰ λογαριασμὸν τοῦ Δ. Μενελάου εἰς τὸ ἐν Χαλκίδι ὑποκατάστημα τῆς 'Εθν. Τραπέζης δρχ. 900 —

Ζητεῖται α') νὰ ἐγγραφῶσιν αὗται ἀφ' ἑνὸς ἐν τῷ λογαριασμῷ «*Κ. Πετρίδης ἐκ Χαλκίδος*» καὶ ἀφ' ἑτέρου ἐν τῷ λογαριασμῷ «*Δ. Μενελάου ἐκ Πειραιῶς*» ἔχοντι τὴν ἐν (§ 268 Παρατ. 2) ἐμφαινομένην πρώτην διάταξιν· β') νὰ γίνῃ μεταφορὰ ἐν μὲν τῷ πρώτῳ λογαριασμῷ τὴν 31ην Μαρτίου, ἐν δὲ τῷ δευτέρῳ τὴν 15ην 'Απριλίου καὶ γ') νὰ γίνῃ περάτωσις ἀμφοτέρων τῶν λογαριασμῶν τὴν 30 'Απριλίου.

Δ' *'Ενεργητικόν, Παθητικόν, Κεφάλαιον, Κέρδος, Ζημία.*

270) *'Ενεργητικὸν* ἐπιχειρηματίου τινὸς κατά τινα δεδομένην ἐποχὴν καλεῖται τὸ σύνολον τῶν πραγμάτων, ἅτινα κατέχει οὗτος κατὰ τὴν ἐποχὴν ταύτην, ὡς μετρητῶν, τίτλων, ἐμπορευμάτων, ἐργαλείων, ἐπίπλων, γραμματίων εἰσπρακτέων κ. τ. λ. ὡς καὶ τῶν χρεωστικῶν ὑπολοίπων τῶν παρ' αὐτῷ προσωπικῶν λογαριασμῶν, (268) ἤτοι τῶν ὑπολοίπων, ἅτινα τρίτοι ὀφείλουσιν αὐτῷ κατὰ τὴν θεωρουμένην ἐποχήν.

Τὰ συστατικὰ μέρη τοῦ ἐνεργητικοῦ ὀνομάζονται «*ἐνεργιτηκαὶ ἀξίαι*».

Σημ. — *Τὸ ἐνεργητικὸν δυνάμεθα νὰ θεωρῶμεν ὡς τὴν ἀκαθάριστον περιουσίαν τοῦ ἐπιχειρηματίου, ἥτις κατὰ τὴν θεωρουμένην ἐποχὴν εὑρίσκεται ἀπησχολημένη εἰς τὴν ἐπιχείρησιν.*

Παράδειγμα. Ἔμπορός τις 'Αθανασίου κατεῖχε τὴν 31ην 10)βρίου 1911 τὰ ἑξῆς :

Μετρητὰ ἐν τῷ χρηματοκιβωτίῳ	δρχ.	10000
'Εμπορεύματα διάφορα ἐν τῇ ἀποθήκῃ ὁλικῆς ἀξίας	»	25485,75
Ἔπιπλα διάφορα ὁλικῆς ἀξίας	»	2158,10
Γραμμάτια εἰσπρακτέα » »	»	4285,20
Χρεῶσται διάφοροι, σύνολον χρεωστικῶν ὑπολοίπων	δρχ.	7138,45
Ἄρα τὸ ἐνεργητικόν του τῆς 31ης Δ)βρίου συνεποσοῦτο εἰς	δρχ.	49067,50

271) *Παθητικὸν* δὲ τοῦ ἐπιχειρηματίου κατὰ τὴν θεωρουμένην ἐποχὴν καλεῖται τὸ σύνολον τῶν ποσῶν, ἅτινα κατὰ τὴν ἐποχὴν ταύτην ὀφείλει οὗτος ὑφ' οἱανδήποτε μορφὴν πρὸς τρίτους· τὰ συστατικὰ μέρη τοῦ παθητικοῦ καλοῦνται «*παθητικαὶ ἀξίαι*». Τοιαῦται εἶναι λ.χ. τὰ πιστωτικὰ ὑπόλοιπα τῶν παρὰ τῷ ἐπιχειρηματίᾳ λογαριασμῶν τῶν τρίτων, τὰ πληρωτέα γραμμάτια κ. τ. λ.

Παραδείγματα. Ὁ αὐτὸς ἔμπορος 'Αθανασίου ὤφειλε τὴν 31ην Δ)βρίου 1911 τὰ ἑξῆς·

Γραμμάτια πληρωτέα ἐν κυκλοφορίᾳ ὁλικῆς ἀξίας	δρχ.	5940,25
Ἐνοίκιον καθυστερούμενον 1ης τριμηνίας	»	600 —
Πιστωταὶ διάφοροι, σύνολον πιστωτικῶν ὑπολοίπων	»	500.—
Ἄρα τὸ παθητικὸν αὐτοῦ συνεποσοῦτο τὴν 31ην Δ)βρίου εἰς	»	11540,25

272) *Κεφάλαιον* ἐπιχειρηματίου τινὸς κατά τινα ἐποχὴν καλεῖται τὸ μένον ὑπόλοιπον, ἀφ οὗ ἀπὸ τοῦ ἐνεργητικοῦ τῆς ἐποχῆς ταύτης ἀφαιρεθῇ τὸ παθητικὸν τῆς αὐτῆς ἐποχῆς· ἄρα τοῦτο παριστᾷ τὴν καθαρὰν περιουσίαν τοῦ ἐπιχειρηματίου, ἥτις κατὰ τὴν θεωρουμένην ἐποχὴν εὑρίσκεται ἀπησχολημένη εἰς τὴν ἐπιχείρησιν.

Παράδειγμα. Τὸ κεφάλαιον τοῦ αὐτοῦ ἐμπόρου Ἀθανασίου κατὰ τὴν 31ην Δ)βρίου 1911 ἀνήρχετο εἰς δρχ. 49067,50—11540,25= 37527,25.

Παρατ. *Ἐὰν τὸ ἐνεργητικὸν οἴκου τινὸς κατά τινα ἐποχὴν εἶναι ἴσον πρὸς τὸ παθητικόν, τότε οὐδὲν κεφάλαιον μένει ὑπὲρ τοῦ οἴκου. Ἐὰν δὲ τὸ ἐνεργητικὸν εἶναι μικρότερον τοῦ παθητικοῦ, τότε οὐ μόνον οὐδὲν κεφάλαιον ὑπὲρ τοῦ οἴκου ὑπολείπεται, ἀλλὰ καὶ μένει οὗτος χρεώστης (ἢ κοινῶς ἀνοικτὸς) πρὸς τρίτους διὰ τὸ περισσεῦον μέρος τοῦ παθητικοῦ.*

Παραδείγματα.

1) Τὴν 30ην Ἰουνίου 1912 ἡ οἰκονομικὴ κατάστασις ἐμπόρου τινὸς Γεωργίου ἦτο τοιαύτη :

Ἐνεργητικὸν	δρχ.	45675,10
Παθητικὸν	»	45675,10
Ἄρα τὸ κεφάλαιον αὐτοῦ ἦτο	»	0

2) Ἡ δὲ κατάστασις ἄλλου τινὸς ἐμπόρου Ἀντωνίου ἦτο :

Παθητικὸν	δρχ.	85640,25
Ἐνεργητικὸν	»	67138,45
Ἄρα μένει χρεώστης διὰ	»	18501,80

273) *Κέρδος, Ζημία.* Κατὰ τὴν πρὸς ἄλληλα σύγκρισιν τῶν κεφαλαίων, ἅτινα οἶκός τις κατεῖχεν εἰς δύο διαφόρους ἐποχάς, τρεῖς περιπτώσεις δύνανται νὰ παρουσιασθῶσι, καθόσον τὸ τῆς προγενεστέρας ἐποχῆς κεφάλαιον εἶναι μικρότερον ἢ μεῖζον ἢ ἴσον πρὸς τὸ τῆς μεταγενεστέρας. Ἐν τῇ πρώτῃ περιπτώσει συμπεραίνομεν, ὅτι τὸ ἀρχικὸν κεφάλαιον ὑπέστη συνεπείᾳ τῶν ἐργασιῶν τῆς μεταξὺ τῶν δύο ἐποχῶν περιόδου «*αὔξησιν*» ἴσην πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν δύο κεφαλαίων· ἡ αὔξησις αὕτη καλεῖται «*Κέρδος*» τοῦ οἴκου (262, Παρ. 2).

Ἐν τῇ δευτέρᾳ περιπτώσει συνάγομεν, ὅτι αἱ ἐργασίαι τῆς εἰρημένης περιόδου ἐπήνεγκον *ἐλάττωσιν* τοῦ ἀρχικοῦ κεφαλαίου, ἴσην πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν δύο κεφαλαίων· ἡ ἐλάττωσις αὕτη καλεῖται «*Ζημία*» τοῦ οἴκου (262, Παρ. 2). Κατὰ τὴν τρίτην τέλος περίπτωσιν συμπεραίνομεν, ὅτι οὐδεμία αὔξησις ἢ ἐλάττωσις κεφαλαίου ἐν συνόλῳ προῆλθεν ἐκ τῶν ἐργασιῶν τῆς ἐπιχειρήσεως κατὰ τὴν μνησθεῖσαν περίοδον.

Παραδείγματα. 1.) Τὸ κεφάλαιον οἴκου τινὸς ἀνήρχετο τὴν 1ην Ἰανουαρίου 1912 εἰς δρχ. 105600, τὴν δὲ 30ην Ἰουνίου 1912 εἰς δρχ. 110400,65. Ὁ οἶκος οὗτος ἐκέρδισεν ἑπομένως ἐκ τῶν ἐργασιῶν τοῦ 1ου ἑξαμήνου τοῦ 1912 δρχ. 110400.65—105600=4800,65.

Παραδ. 2.) Τὸ κεφάλαιον οἴκου τινὸς ἦτο τὴν μὲν 1ην Ὀκτωβρίου 1911 δρχ. 90000, τὴν δὲ 1ην Ἀπριλίου 1912 δρχ. 87200· ἄρα ὁ οἶκος οὗτος ὑπέστη ἐκ τῶν ἐργασιῶν τοῦ μεσολαβήσαντος ἑξαμήνου ζημίαν ἴσην πρὸς δρχ. 90000—87200=2800.

Παράδ. 3.) Οἶκος τις κατεῖχε τὴν 30ην Ἰουνίου 1911 κεφάλαιον δρχ. 65000 καὶ τὴν 31ην 10)βρίου 1911 κεφάλαιον δρχ, 65000. Ἄρα ἐν συνόλῳ οὐδὲν κέρδος ἢ ζημίαν καθαρὰν ὑπέστη ὁ οἶκος οὗτος κατὰ τὸ ἐνδιάμεσον ἑξάμηνον.

Ε'. Ἀπογραφή, Ἰσολογισμός.

274) *Ἀπογραφὴ* λέγεται ἡ ἐργασία ἐκείνη, δι' ἧς προσδιορίζομεν τὸ κεφάλαιον, ὅπερ οἶκός τις κατέχει κατά τινα δεδομένην ἐποχήν. Συνίσταται δ' αὕτη εἰς τὴν λεπτομερῆ καὶ ἀκριβῆ καταγραφὴν α') πασῶν τῶν ἐνεργητικῶν ἀξιῶν τοῦ οἴκου, ἐκτετιμημένων μὲ τὴν πραγματικὴν τιμήν των, ἐξ ὧν θὰ προκύψῃ τὸ ὅλον ἐνεργητικὸν (§ 270) τοῦ οἴκου, καὶ β') πασῶν τῶν παθητικῶν ἀξιῶν αὐτοῦ, ἐκτετιμημένων ὁμοίως, ἐξ ὧν θὰ προκύψῃ τὸ ὅλον παθητικὸν (§ 271). Ἡ διαφορὰ τοῦ παθητικοῦ ἀπὸ τοῦ ἐνεργητικοῦ δίδει ἀκολούθως τὸ ζητούμενον κεφάλαιον (§ 272).

Ἡ ἀπογραφὴ ἔχει ὑψίστην σημασίαν διὰ πάντα ἐπιχειρηματίαν. Δι' αὐτῆς μανθάνει οὗτος οὐ μόνον τὸ μέγεθος τοῦ Κεφαλαίου, ὅπερ κατέχει κατά τινα ἐποχὴν δεδομένην, ἀλλὰ καὶ τὸν τρόπον τῆς συγκροτήσεως αὐτοῦ. Ἐξ ἄλλου διὰ τῆς συγκρίσεως δύο διαδοχικῶν ἀπογραφῶν μανθάνει οὗτος, ἂν αἱ ἐργασίαι τῆς μεσολαβησάσης χρονικῆς περιόδου ἐπέφεραν μεταβολήν τινα (αὔξησιν ἢ ἐλάττωσιν) κεφαλαίου ἢ μὴ (§ 273). Διὰ τοῦτο ὁ Ἐμπορικὸς κῶδιξ ἐπιβάλλει εἰς τὸν ἔμπορον νὰ συντάσσῃ ἀπογραφήν· α') ἅμα τῇ ἱδρύσει τοῦ καταστήματος· β') κατὰ τὸ τέλος ἑκάστου ἔτους· καὶ γ') εἰς ἄλλας ἐκτάκτους περιστάσεις, ὡς λ. χ. κατὰ τὴν πώλησιν ἢ διάλυσιν ἢ πτώχευσιν τοῦ οἴκου κ. τ. λ.

275) *Ἰσολογισμός.* Ἐπειδὴ ἡ ἀπογραφὴ καταλαμβάνει συνήθως πολλὰς σελίδας, διὰ τοῦτο ἐπικρατεῖ συνήθεια νὰ συντάσσηται καὶ μεθοδικὴ αὐτῆς περίληψις· ἡ περίληψις αὕτη καλεῖται «*Ἰσολογισμός*».

Διάταξις ἰσολογισμοῦ. Ὁ ἰσολογισμὸς ἀποτελεῖ πίνακα (φύλλον χάρτου) διῃρημένον διὰ καθέτου γραμμῆς εἰς δύο μέρη. Εἰς τὸ ἀριστερόν, τὸ φέρον τὸν τίτλον «*ἐνεργητικόν*», ἐγγράφομεν εἰς ὀλίγα ὁλικὰ ποσὰ τὰς διαφόρους τοῦ θεωρουμένου οἴκου ἐνεργητικὰς ἀξίας. Εἰς δὲ τὸ δεξιόν, ὑπὸ τὸν τίτλον «*Παθητικὸν*» ἐγγράφομεν ὁμοίως τὰς διαφόρους τοῦ οἴκου παθητικὰς ἀξίας.

Πρὸς ἐξέλεγξιν τοῦ προκύπτοντος κεφαλαίου σημειοῦμεν αὐτὸ ὑπὸ τὰς παθητικὰς ἀξίας καὶ ἐκτελοῦμεν προσθέσεις εἰς ἀμφότερα τὰ μέρη καὶ εἰς τὸ αὐτὸ ὕψος· τὰ δύο ὁλικὰ ἀθροίσματα ὀφείλουσι νὰ εἶναι ἴσα πρὸς ἄλληλα (§ 29).

Τέλος ὑφ' ἕκαστον ἐκ τῶν τελευταίων ἀθροισμάτων ἄγεται διπλῆ ὁριζοντία γραμμὴ καὶ ἀκυροῦται διὰ τεθλασμένης γραμμῆς ὁ τυχὸν ἀπομένων κενὸς χῶρος τοῦ πίνακος.

Σημ. *1) Ἡ ἀπογραφὴ καὶ ὁ ἀντίστοιχος ἰσολογισμὸς συντασσόμενοι κατ' ἀρχὰς προχείρως ἀναγράφονται ἀκολούθως μεθοδικῶς καὶ ἐπισταμένως ἐν εἰδικῷ βιβλίῳ, ὅπερ καλεῖται «Βιβλίον ἀπογραφῶν καὶ ἰσολογισμῶν».*

Σημ. *2) Ὁ ἐπιχειρηματίας ὀφείλει νὰ χρονολογῇ τὴν ἀπογραφὴν καὶ ἰσολογισμὸν καὶ νὰ κυρώνῃ ταῦτα διὰ τῆς ὑπογραφῆς του.*

276) Ὡς παράδειγμα ἔστω ἡ κάτωθι ἀπογραφὴ μετὰ τοῦ ἀντιστοίχου ἰσολογισμοῦ τοῦ ἐν Πειραιεῖ οἴκου Δ. Ἰωαννίδου τῆς 31ης Δεκεμβρίου 1911.

Ἀπογραφὴ τῆς 31/12/1911.

α') Ἐνεργητικὸν

	δρχ.	λ.	δρχ.	λ.
Ταμεῖον, μετρητὰ ἐν τῷ χρηματοκιβωτίῳ			7148	25
Ἀποθήκη, 100 σάκκοι καφὲ Βραζιλίας ὁλ. καθαροῦ βάρους ὀκ 5000 πρὸς 3,20 δρχ. τὴν ὀκᾶν	16000	—		
80 κιβώτια ζακχάρεως ὁλ. καθ. βάρους ὀκ 4800 πρὸς 1,28 δρχ. τὴν ὀκᾶν	6144	—		
120 σάκκοι ὀρύζης Καρολίνας ὁλ. καθ. βάρους ὀκ. 7440 πρὸς 0,95 δρχ. τὴν ὀκᾶν	7068	—	29212	—
Ἔπιπλα, σημερινὴ ἀξία τούτων (χάριν συντομίας παραλείπεται ἡ λεπτομερὴς τούτων ἀναγραφή)			2138	40
Ἐνοίκιον προπληρωθὲν τοῦ σήμερον ἀρχομένου ἑξαμήνου.			900	—
Χρεῶσται: Α. Ἀργυρίου ἐνταῦθα, σημερινὸν χρεωστικὸν ὑπόλοιπον λογαριασμοῦ του	6540	15		
Κ. Γρηγορίου ἐκ Πατρῶν σημερινὸν χρεωστικὸν ὑπόλοιπον λογαριασμοῦ του.	7675	20	14215	35
			53614	—

β') Παθητικὸν

	δρχ.	λ.	δρχ.	λ.
Φόρος καθυστερούμενος β' ἑξαμηνίας 1911			125	75
Πιστωταί:				
Κ. Ἀντωνίου ἐνταῦθα σημερ. πιστωτ. ὑπολ. λογαριασμοῦ του	7148	60		
Λ. Ἰωάννου ἐξ Ἀθηνῶν » » » »	5000	—	12148	60
ἐν ὅλῳ			12274	35
Κεφάλαιον σημερινὸν			41339	65
			53614	—

Ἰσολογισμὸς

Ἐνεργητικὸν	Ποσὰ δρχ.	λ.	Παθητικὸν	Ποσὰ δρχ.	λ.
Ταμεῖον.	7148	25	Φόρος καθυστερούμενος . .	125	75
Ἀποθήκη	29212	—	Πιστωταὶ διάφοροι	12148	60
Ἔπιπλα	2138	40	Κεφάλαιον σημερινὸν . .	41339	65
Ἐνοίκιον προπληρωθὲν . .	900	—			
Χρεῶσται διάφοροι. . . .	14215	35			
	53614	—		53614	—

Βεβαιῶ, ὅτι ἡ ἄνω ἀπογραφὴ μετὰ τοῦ ἀντιστοίχου ἰσολογισμοῦ συνετάχθη εὐσυνειδήτως καὶ συμφώνως πρὸς τὰ λογιστικά μου βιβλία.

Ἐν Πειραιεῖ, τῇ 31η Δεκεμβρίου 1911.

Δ. ΙΩΑΝΝΙΔΗΣ.

ΣΤ′. *Λογιστικὰ βιβλία.*

277) *Λογιστικὰ βιβλία* καλοῦνται ἐκεῖνα, ἐν οἷς ὁ ἐπιχειρηματίας ἐγγράφει μεθοδικῶς τὰς ἐν τῷ οἴκῳ αὐτοῦ γενομένας καθ' ἑκάστην οἰκονομικὰς πράξεις καὶ διὰ τῶν ὁποίων δύναται ἀνὰ πᾶσαν στιγμὴν νὰ μανθάνῃ τὴν οἰκονομικὴν θέσιν τοῦ οἴκου του.

Ἐκ τῶν ἐν χρήσει βιβλίων, ἄλλα μὲν ἐπιβάλλονται ὑπὸ τοῦ νόμου, ὡς τὸ «*Ἡμερολόγιον*», τὸ «*Βιβλίον τῶν ἀπογραφῶν καὶ Ἰσολογισμῶν*» καὶ τὸ τῆς «*Ἀντιγραφῆς τῶν Ἐπιστολῶν*», ἄλλα δὲ εἶναι προαιρετικά, ὡς τὸ «*Πρόχειρον*», τὸ «*Καθολικὸν*» τὸ τοῦ «*Ταμείου*» καὶ ἄλλα.

Σημ. *1) Ὁ νόμος ἀπαιτεῖ, ὅπως ὁ ἔμπορος φυλάττῃ ἐπὶ 10 τοὐλάχιστον ἔτη ἅπαντα τὰ λογιστικὰ βιβλία, ὡς καὶ τὰς λαμβανομένας ἐπιστολὰς ταξιθετῶν αὐτὰς καταλλήλως ἐντὸς φακέλλων.*

Σημ. *2) Ὡς πρὸς τὸν τύπον τῶν ὑποχρεωτικῶν βιβλίων ὁ νόμος ὁρίζει τὰ ἑξῆς :*

Ταῦτα πρέπει νὰ εἶναι α′) πρὸ τῆς χρήσεώς των βιβλιοδετημένα νὰ εἶναι ἠριθμημένα καὶ μονογραφημένα παρὰ τῆς ἁρμοδίου ἀρχῆς (τὸ τῆς ἀντιγραφῆς τῶν ἐπιστολῶν δὲν ὑπόκειται εἰς τὴν διατύπωσιν ταύτην), γ′) νὰ γράφωνται εἰς τὴν ἐγχώριον γλῶσσαν κατὰ χρονολογικὴν σειρὰν, ἄνευ προσθήκης ἢ ἀφαιρέσεως φύλλων, ἄνευ διορθώσεως ἢ ὑπεργραφῶν ἢ παρεγγραφῶν λέξεως ἢ κενῶν διαστημάτων· ἐὰν συμβῇ λάθος, τοῦτο διορθοῦται διὰ νέας καταλλήλου ἐγγραφῆς γινομένης κατὰ τὴν ἡμέραν τῆς ἀνακαλύψεως καὶ δ′) νὰ εἶναι νομίμως χαρτοσεσημασμένα.

278) *Πρόχειρον.* Οὕτω καλεῖται τὸ βιβλίον ἐκεῖνο, ἐν ᾧ ὁ ἔμπορος πρὸς βοήθειαν τῆς μνήμης ἐγγράφει προχείρως τὰς ἐν τῷ καταστήματί του καθ' ἑκάστην διεξαγομένας πράξεις, καθ' ἣν χρονολογικὴν σειρὰν γίνονται.

Διὰ τῆς χρήσεως τοῦ προχείρου κατορθοῖ ὁ ἔμπορος εὐκολώτερον νὰ τηρῇ καθαρὰ καὶ συμφώνως πρὸς τὰς ἀπαιτήσεις τοῦ νόμου (§ 277 Σημ. 2) τὰ ὑποχρεωτικὰ βιβλία.

Ἡ διάταξις τοῦ προχείρου ποικίλλει παρὰ τοῖς διαφόροις οἴκοις. Ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον δ' ἐπικρατεῖ ἡ κάτωθι ὑποδεικνυομένη.

Ὑπόδειγμα. Πρόχειρον τοῦ ἐν Πάτραις οἴκου Π. Κωνσταντινίδου.

Μὴν Σεπτέμβριος 1911

Αὔξων ἀριθμός	Ἔκθεσις πράξεων	Ποσὰ δρχ.	λ.
35	10η		
	Κατεθέσαμεν παρὰ τῇ ἐνταῦθα «Τραπ. Ἀθηνῶν» μετρητά.	2500	—
36	10η		
	Αἱ σημεριναὶ λιανικαὶ πωλήσεις τοῖς μετρητοῖς ἀπέδωκαν. .	540	—
37	11η		
	Ἐπωλήσαμεν τῷ ἐνταῦθα Δ. Παυλίδῃ ἐμπορεύματα ὁλικῆς ἀξίας κατὰ τὸ ὑπ' ἀριθμ. 180 σχετικὸν τιμολόγιόν μας πληρωτέας τμηματικῶς	250	—
38	11η		
	Αἱ λιανικαὶ πωλήσεις τοῖς μετρητοῖς ἀπέδωκαν	495	75
39	12η		
	Ἀπεσύραμεν παρὰ τῆς ἐνταῦθα «Τραπ. Ἀθηνῶν» μετρητά. .	500	—
40	12η		
	Εἰσεπράξαμεν παρὰ τοῦ ἐνταῦθα Δ. Παυλίδου ἔναντι λογαριασμοῦ του μετρητά	150	—
	κ. ο. κ.		

Ἐπεξήγησις. Κατὰ τὴν διάταξιν ταύτην πᾶσα ἐγγραφομένη πρᾶξις φέρει πρὸς διάκρισιν αὔξοντα ἀριθμὸν καὶ συνοδεύεται ὑπὸ τῆς ἡμερομηνίας, καθ' ἣν ἐγένετο, τὸ δὲ ἀντίστοιχον αὐτῇ ποσὸν σημειοῦται ἐν τῇ τελευταίᾳ πρὸς τὰ δεξιὰ εἰδικῇ στήλῃ.

Σημ. *Ἐν τοῖς σπουδαιοτέροις οἴκοις τὸ πρόχειρον ἀντικαθίσταται ὑπὸ σειρᾶς ὅλης εἰδικῶν βιβλίων, ὧν ἕκαστον περιλαμβάνει ὡρισμένην κατηγορίαν πράξεων.*

279) *Ἡμερολόγιον.* Οὕτω καλεῖται τὸ βιβλίον ἐκεῖνο, ἐν ᾧ ὁ ἔμπορος ὀφείλει κατὰ τὸν νόμον νὰ ἐγγράφῃ «πάσας τὰς ἐργασίας του, ἐμπορικὰς ἢ μή, ἐπὶ πιστώσει ἢ τοῖς μετρητοῖς, εἴτε δι' ἴδιον λογαριασμὸν γινομένας εἴτε μή, ὡς καὶ τὰς μηνιαίας οἰκιακὰς καὶ τοῦ καταστήματος δαπάνας». Αἱ πράξεις αὗται σημειούμεναι τὸ πρῶτον προχείρως ἐν τῷ Προχείρῳ μεταφέρονται ἀκολούθως εἰς τὸ ἡμερολόγιον ἐν ἡσυχίᾳ καὶ ἐπισταμένως.

Ἡ διάταξις τοῦ ἡμερολογίου τηρουμένου ἁπλογραφικῶς διαφέρει παρὰ τοῖς διαφόροις οἴκοις.

Ἰδοὺ αἱ συνηθέστεραι

Ἡμερολόγιον τοῦ ἐν Πάτραις οἴκου Π. Κωνσταντινίδου (Α' διάταξις)

Μὴν Σεπτέμβριος

Αὔξων ἀριθμός	Παραπομπή	Ἔκθεσις πράξεων	Ποσά	
			δραχ.	λ.
		Ἐκ μεταφορᾶς	38645	25
35		10η		
	Καθολικ. 1	*Τράπεζα Ἀθηνῶν*, ἐνταῦθα, *Δοῦναι*	2500	—
	Ταμεῖον 3	διὰ τὴν σημερινὴν κατάθεσίν μας παρ' αὐτῇ		
36		10η		
	Ταμεῖον 3	Αἱ σημεριναὶ λιανικαὶ πωλήσεις ἀπέδωκαν	540	—
37		11η		
	Καθολικ. 20	*Δ. Παυλίδης*, ἐνταῦθα, *Δοῦναι*	250	—
		δι' ἀξίαν σημερινοῦ τιμολογίου μας ὑπ' ἀριθ. 180		
38		11η		
	Ταμεῖον 3	Αἱ λιανικαὶ πωλ. τοῖς μετρητοῖς ἀνῆλθον σήμερ. εἰς	495	75
39		12η		
	Καθολικ. 1	*Τράπεζα Ἀθηνῶν*, ἐνταῦθα, *Λαβεῖν*	500	—
	Ταμεῖον 3	δι' ὅσα ἀπεσύραμεν σήμερον παρ' αὐτῆς		
40		12η		
	Καθολικ. 20	*Δ. Παυλίδης*, ἐνταῦθα, *Λαβεῖν*	150	—
	Ταμεῖον 3	δι' ὅσα μᾶς ἐμέτρησε σήμερον διὰ λ/σμόν του		
		κ. ο. κ.		

Ἐπεξήγησις. Ἡ διάταξις τοῦ ἄνω ἡμερολογίου, εἰς ὃ ἔχουσι μεταφερθῇ αἱ ἐν τῷ προηγουμένῳ προχείρῳ (§ 278, ὑποδ.) ἀναγραφόμεναι πράξεις, εἶναι σχεδὸν ὁμοία πρὸς τὴν τοῦ προχείρου τούτου. Καὶ ἐν τῷ ἡμερολογίῳ, ὡς βλέπομεν, πᾶσα πρᾶξις μὴ ἀπαιτοῦσα τὴν χρέωσιν ἢ πίστωσιν προσωπικοῦ τινος λογαριασμοῦ ἐγγράφεται ὁμοίως, ὡς καὶ ἐν τῷ Προχείρῳ. Ἐν τῇ ἐναντίᾳ ὅμως περιπτώσει ἡ ἐγγραφὴ τῆς πράξεως ἐν τῷ Ἡμερολογίῳ γίνεται ὡς ἑξῆς·

1) Σημειοῦμεν τὴν ἀντίστοιχον ἡμέραν τοῦ μηνὸς (ὡς καὶ ἐν τῷ Προχείρῳ), 2) ἐν τῇ ἀκολούθῳ σειρᾷ γράφομεν μὲ μεγάλα στρογγύλα γράμματα ἀριστερὰ μὲν τὸ ὄνομα τοῦ προς χρέωσιν ἢ πίστωσιν λογαριασμοῦ δεξιὰ δὲ τὴν λέξιν «Δοῦναι» ἢ «Λαβεῖν» καθόσον πρόκειται περὶ χρεώσεω, ἢ πιστώσεως καὶ μετ' αὐτὴν ἐν τῇ στήλῃ τῶν ποσῶν τὸ τῆς χρεώσεως ἢ πιστώσεως ποσὸν καὶ 3) ἐν ταῖς ἑπομέναις σειραῖς αἰτιολογοῦμεν τὴν χρέωσιν ἢ πίστωσιν ἐγγράφοντες συντόμως καὶ σαφῶς τὴν σχετικὴν πρᾶξιν, ἐξ ἧς αὕτη προέρχεται.

Β' Διάταξις (τοῦ αὐτοῦ ἡμερολογίου).

Μὴν Σεπτέμβριος 1911.

Αὔξων ἀριθμός	Παραπομπή	Ἔκθεσις πράξεων	Ποσὰ δρχ.	λ.	Δοῦναι δρχ.	λ.	Λαβεῖν δρχ.	λ.
		Ἐκ μεταφορᾶς	18138	40	11138	10	9368	75
35		——— 10η ———						
	Καθολ. 1	**Τράπεζα Ἀθηνῶν**, ἐνταῦθα,			2500	—		
	Ταμεῖον 3	διὰ τὴν σημερινὴν κατάθεσίν μας						
36		——— 10η ———						
	Ταμεῖον 3	Ὁλικὸν προϊὸν σημ. λιαν. πωλ. μετρητ.	540	—				
37		——— 11η ———						
	Καθολ. 20	**Δ. Παυλίδης**, ἐνταῦθα			250	—		
		δι' ἀξίαν τιμολογίου μας ὑπ' ἀριθ. 180						
38		——— 11 ———						
	Ταμεῖον 3	Ὁλικ. προϊὸν σημερ. πωλ. μετρητοῖς	495	75				
39		——— 12η ———						
	Καθολ. 1	**Τράπεζα Ἀθηνῶν**, ἐνταῦθα,					500	—
	Ταμεῖον 3	δι' ὅσα ἀπεσύρσμεν σήμερον						
40		——— 12 ———						
	Καθολ. 20	**Δ. Παυλίδης**, ἐνταῦθα,					150	—
	Ταμεῖον 3	διὰ σημερινὴν πληρωμήν του						
		κ. ο. κ.						

Ἐπεξήγησις. Ἡ νέα αὕτη διάταξις διαφέρει τῆς προηγουμένης κατὰ τοῦτο, ὅτι ἀντὶ μιᾶς ἔχει τρεῖς στήλας ποσῶν, ἤτοι α') μίαν διὰ τὰ ποσὰ τῶν πράξεων, αἵτινες δὲν ἐπιβάλλουσι χρέωσιν ἢ πίστωσιν λογαριασμοῦ τινός, β') ἑτέραν ὑπὸ τὸν τίτλον «*Δοῦναι*» διὰ τὰ ποσὰ τῶν πράξεων τῶν ἐπιβαλλουσῶν χρέωσιν λογαριασμοῦ τινος καὶ γ') τρίτην ὑπὸ τὸν τίτλον «*Λαβεῖν*» διὰ τὰ ποσὰ τῶν πράξεων τῶν ἐπιβαλλουσῶν πίστωσιν λογαριασμοῦ τινος.

Καὶ κατὰ τὴν νέαν διάταξιν αἱ ἐγγραφαὶ τῶν πράξεων γίνονται σχεδὸν ὁμοίως, ὡς καὶ κατὰ τὴν πρώτην. Ἡ μόνη διαφορὰ εἶναι, ὅτι δεξιᾷ τοῦ ὀνόματος τοῦ πρὸς χρέωσιν ἢ πίστωσιν λογαριασμοῦ δὲν σημειοῦται πλέον ἡ λέξις «*Δοῦναι*» ἢ «*Λαβεῖν*» ὡς ἐγγεγραμμένη ἤδη ἐπὶ κεφαλῆς τῆς οἰκείας στήλης τῶν ποσῶν.

Σημ. *Τὸν σκοπὸν τῆς ὑπὸ τὸν τίτλον «Παραπομπὴ» στήλης τοῦ ἡμερολογίου θὰ μάθωμεν κατωτέρω.*

280) *Καθολικόν.* Οὕτω καλεῖται τὸ βιβλίον, ἐν ᾧ ὁ ἔμπορος ἀνοίγει (§ 267) τοὺς λογαριασμοὺς (§ 263) τῶν διαφόρων προσώπων (τραπεζιτῶν, προμηθευτῶν, πελατῶν, κτλ.), μεθ' ὧν ἐνεργεῖ δοσοληψίας.

Ἐκ τοῦ ἡμερολογίου μεταφέρονται τὰ διάφορα ποσὰ χρεώσεων ἢ πιστώσεων εἰς τὰ ἀντίστοιχα μέρη (*Δοῦναι* ἢ *Λαβεῖν*) τῶν ἐν τῷ Καθολικῷ λογαριασμῶν, οὓς ἀποβλέπουσι, κατὰ τὰ ἐδάφια (§ 264, 265).

Σημ. *Πρὸς διευκόλυνσιν τῆς μεταφορᾶς ταύτης γίνεται πολλάκις χρῆσις καὶ «εὑρετηρίου» ἤτοι ἑνὸς βιβλιαρίου περιέχοντος κατ' ἀλφαβητικὴν τάξιν τ[illegible]ῶν ἑκά-*

στου μετὰ τῆς σελίδος, ἣν ἐν τῷ Καθολικῷ κατέχει. Αἱ σελίδες αὗται σημειοῦνται καὶ ἐν τῇ στήλῃ «Παραπομπῆς» (279, Σημ.) τοῦ Ἡμερολογίου, καὶ ὅσου ἀναγράφονται αἱ τῶν ποσῶν μεταφοραὶ ἐξ αὐτοῦ εἰς τὸ Καθολικόν.

Παραλλήλως δὲ σημειοῦνται ἐν τῇ ἀναλόγῳ στήλῃ «παραπομπῆς» τῶν ἐν τῷ Καθολικῷ λογαριασμῶν καὶ αἱ σχετικαὶ σελίδες τοῦ Ἡμερολογίου, ἐν αἷς εὑρίσκονται τὰ μεταφερόμενα ποσά.

281) *Παράδειγμα.* Κατωτέρω παραθέτομεν λογαριασμούς τινας Καθολικοῦ, εἰς οὓς ἔχουσι μεταφερθῆ τὰ τῶν χρεώσεων καὶ πιστώσεων ποσὰ ἐκ τοῦ Ἡμερολογίου (§ 276, Ὑποδ. Α΄).

Σελ. 1 ΤΡΑΠΕΖΑ ΑΘΗΝΩΝ ἐν Πάτραις Σελ. 1

Δοῦναι *Λαβεῖν*

Χρονολ.		Αἰτιολογία	Παραπομπή	Ποσὰ		Χρονολ.		Αἰτιολογία	Παραπομπή	Ποσὰ	
1911			Ἡμ.	δρχ.	λ.	1911			ἡμ.	δρχ.	λ.
Σεπτ.	10	Κατάθεσίς μας	10	2500	—	Σεπτ.	12	δι' ὅσα ἀπεσύραμεν	10	500	—

Σελ. 20 Δ. ΠΑΥΛΙΔΗΣ ἐν Πάτραις Σελ. 20

Δοῦναι *Λαβεῖν*

Χρονολ.		Αἰτιολογία	Παραπομπή	Ποσὰ		Χρονολ.		Αἰτιολογία	Παραπομπή	Ποσὰ	
1911			Ἡμ.	δρχ.	λ.	1911			ἡμ.	δρχ.	λ.
Σεπτ.	11	Τιμολόγιόν μας ἀριθ. 180	10	250	—	Σεπτ.	12	Πληρωμή του	10	150	—

Σημ. Πολλάκις ἐν τοῖς καταστήμασι λιανικῆς ἰδίᾳ πωλήσεως τὸ Καθολικὸν ἀντικαθίσταται ὑπὸ τοῦ συνόλου τῶν λεγομένων «βιβλιαρίων καταναλώσεως», ἐξ ὧν ἕκαστον ἀναφέρεται εἰς ὡρισμένον καταναλωτὴν (ἢ πελάτην) καὶ παριστᾷ τὸν λογαριασμὸν τούτου.

282) *Βιβλίον Ταμείου.* Εἰς τὸ βιβλίον τοῦτο ἐγγράφει μεθοδικῶς ὁ ἔμπορος ἀφ' ἑνὸς μὲν τὰ ἑκάστοτε εἰσερχόμενα εἰς τὸ κατάστημα ποσὰ μετρητῶν (ἤτοι τὰς εἰσπράξεις του), ἀφ' ἑτέρου δὲ τὰ ἑκάστοτε ἐξερχόμενα τοιαῦτα (ἤτοι τὰς πληρωμάς του).

Τῇ βοηθείᾳ τούτου δύναται ὁ ἔμπορος νὰ γνωρίζῃ ἀνὰ πᾶσαν στιγμὴν τὸ ἐν τῷ χρηματοκιβωτίῳ ἐναπομένον ὑπόλοιπον μετρητῶν.

Ἡ διάταξις τοῦ ἐν λόγῳ βιβλίου εἶναι ὁμοία πρὸς τὴν τοῦ προσωπικοῦ λογαριασμοῦ.

Ὡς ὑπόδειγμα παραθέτομεν μίαν σελίδα τοῦ βιβλίου τούτου, τὴν περιέχουσαν τὰς ἐν τῷ Ἡμερολογίῳ (§ 279 ὑποδ. Α') ἀναφερομένας εἰσπράξεις καὶ πληρωμὰς (τοῦ ἐν Πάτραις οἴκου Π. Κωνσταντινίδου).

Σελ. 3. ΤΑΜΕΙΟΝ Σελ. 3.

Εἰσπράξεις (ἢ *Δοῦναι*) Πληρωμαὶ (ἢ *Λαβεῖν*)

Χρονολ.		Ἔκθεσις πράξεως	Παραπομπή	Ποσὰ		Χρονολ.		Ἔκθεσις πράξεως	Παραπομπή	Ποσὰ	
			Ἡμ.	δρχ.	λ.	1911			ἡμ.	δρχ.	λ.
1911		ἐκ μεταφορᾶς		15600	40			Ἐκ μεταφορᾶς		12480	25
Σεπτ	10	Προϊὸν σημερ. πωλήσεων	10	540	—	Σεπτ.	10	Κατάθεσίς μας	10	2500	—
»	11	Προϊὸν σημερ. πωλήσεων	10	495	75						
»	12	παρὰ «Τραπ. Ἀθηνῶν» ἐνταῦθ.	10	500	—						
»	12	παρὰ Δ. Παυλίδη ἐνταῦθα	10	150	—						

Ἐπεξήγησις. Εἰς τὸ ἀριστερὸν τῆς σελίδος μέρος, τὸ φέρον τὸν τίτλον «Εἰσπράξεις» (ἢ *Δοῦναι*) ἐγγράφει ὁ ἔμπορος τὰ ἑκάστοτε εἰσπραττόμενα χρηματικὰ ποσά, ἕκαστον συνοδευόμενον ὑπὸ τῆς σχετικῆς χρονολογίας καὶ συντόμου ἐκθέσεως τῆς ἀντιστοίχου πράξεως. Εἰς δὲ τὸ δεξιόν, τὸ ὑπὸ τὸν τίτλον «Πληρωμαί» (ἢ *Λαβεῖν*), ἐγγράφει ὁμοίως τὰ ποσά, ἅτινα ἑκάστοτε πληρώνει.

Ἐὰν κατά τινα στιγμὴν ὁ ἔμπορος ἀθροίσῃ πρῶτον τὰ ποσὰ τοῦ ἀριστεροῦ μέρους, δεύτερον τὰ τοῦ δεξιοῦ καὶ εἶτα ἀφαιρέσῃ ἀπὸ τοῦ πρώτου ἀθροίσματος (ὅπερ οὐδέποτε εἶναι τὸ μικρότερον) τὸ δεύτερον, θὰ εὕρῃ ὑπόλοιπόν τι, ὅπερ θὰ δεικνύῃ τὸ κατὰ τὴν θεωρουμένην στιγμὴν ἐναπομένον ἐν τῷ χρηματοκιβωτίῳ ποσὸν μετρητῶν, ἐπὶ τῇ ὑποθέσει, ὅτι ἀνελλιπῶς καὶ ὀρθῶς ἔχουσι σημειωθῆ πάντα τὰ μέχρι τῆς στιγμῆς ταύτης εἰσπραχθέντα ἢ πληρωθέντα ποσά.

Σημ. *Ὁ προορισμὸς τῆς ὑπὸ τὸν τίτλον «Παραπομπὴ» στήλης τοῦ ἐν λόγῳ βιβλίου εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὸν τῆς ἀντιστοίχου στήλης τῶν λογαριασμῶν τοῦ Καθολικοῦ. (§ 280, Σημ.)*

283) «*Διάφορα ἀνάλογα* (πρὸς τὸ τοῦ Ταμείου) *Βιβλία*».

Διὰ τοῦ βιβλίου τοῦ ταμείου δύναται, ὡς εἴδομεν, ὁ ἔμπορος νὰ ἐξελέγχῃ τὴν κίνησιν τῶν μετρητῶν (εἰσαγωγήν, ἐξαγωγὴν καὶ ὑπόλοιπον αὐτῶν). Δι' ἀναλόγων βιβλίων δύναται οὗτος, ἂν ἐπιθυμῇ τοῦτο, νὰ ἐξελέγχῃ τὴν κίνησιν (εἰσαγωγήν, ἐξαγωγὴν καὶ ὑπόλοιπον) καὶ πάσης ἄλλης ἐκ τῶν ἀξιῶν, ἐξ ὧν ἀπαρτίζεται τὸ κεφάλαιον αὐτοῦ, ὡς λ. χ. τῶν ἐμπορευμάτων, τῶν ἐπίπλων, τῶν τίτλων, τῶν γραμματίων (εἰσπρακτέων ἢ πληρωτέων), τῶν ἐργαλείων, τῶν πρώτων ὑλῶν κ. τ. λ.

Τὰ βιβλία ταῦτα ἔχοντα ὁμοίαν περίπου διάταξιν καὶ ἀναλόγως τηρούμενα φέρουσιν ἀνάλογα ὀνόματα, ὡς λ. χ. «*Βιβλίον Ἀποθήκης*», «*Βιβλίον Ἐπίπλων*» κ. τ. λ.

284) «*Βιβλίον ἀπογραφῶν καὶ ἰσολογισμῶν*». Οὕτω καλεῖται ἐκεῖνο, ὅπερ δέχεται τὰς ἐγγραφὰς τῶν ἑκάστοτε ἐνεργουμένων ὑπὸ τοῦ ἐμπόρου ἀπογραφῶν (274) καὶ ἰσολογισμῶν (275). Τοῦ βιβλίου τούτου ὑπόδειγμα παρέχει τὸ παράδειγμα (276).

285) «*Βιβλίον ἀντιγραφῆς ἐπιστολῶν*». Ἐν τῷ βιβλίῳ τούτῳ ἐπιβαλλομένῳ ὑπὸ τοῦ νόμου (§ 277) λαμβάνει ὁ ἔμπορος τῇ βοηθείᾳ εἰδικοῦ πιεστηρίου πιστὸν ἀντίγραφον πάσης ἐπιστολῆς (ἢ τηλεγραφήματος), ἣν ἀπευθύνει πρὸς τρίτον, μεθ' οὗ ἔχει ἐμπορικὰς σχέσεις. Πρὸς τοῦτο δὲ γράφεται προηγουμένως ἡ ἐπιστολὴ δι' εἰδικῆς μελάνης (μελάνης τῆς ἀντιγραφῆς) εἴτε διὰ γραφίδος εἴτε διὰ γραφομηχανῆς.

Ζ'. Ἁπλογραφικαὶ Ἀσκήσεις.

Ἐγγραφὴ τῶν κατὰ Ὀκτώβριον τοῦ 1911 ἐργασιῶν τοῦ ἐν Πειραιεῖ οἴκου Γ. Δημητρίου.

α') Ἐν τῷ Προχείρῳ

Μὴν Ὀκτώβριος 1911

		Δραχ.	Λ.
1	1 Πρὸς ἔναρξιν τῶν ἐργασιῶν μας κατεθέσαμεν σήμερον μετρητὰ . . .	40000	—
2	2 Ἐπληρώσαμεν εἰς τὸν ἰδιοκτ. Π. Σδι' ἐνοίκιον 6μηνῶν ἀπὸ 1ης τρ. δρ. 1200 [illegible] Δ. Κ., [illegible] ἀγορασθέντων ἐπιπλ. κατὰ τὸ τιμ)όν του δραχ. 1150	2350	—
3	5 Ἠγοράσαμεν παρὰ Δ. Ἀντωνιάδου ἐνταῦθα διάφορα ἐμπ)τα κατὰ τὸ σχετικὸν τιμολ)όν του ἀξίας εἰς λ)σμόν (δηλ. ἐπὶ πιστώσει) δραχ. .	2920	—
4	6 Ἠγοράσαμεν παρὰ Π. Δημητριάδου, ἐνταῦθα, διάφορα ἐμπορ)τα κατὰ τὸ σχετικὸν τιμολ)όν του ἀξίας εἰς λ)σμὸν δραχ. .	1400	—
5	7 [1]) Αἱ εἰσπράξεις ἐκ τῶν λιανικῶν πωλήσεων μέχρι σήμερον ἀπὸ 1 [illegible] ἀνῆλθον εἰς	1400	—
6	9 Ἐπληρώσαμεν διὰ διαφόρους προμηθείας τοῦ γραφείου μας δραχ. .	45	—
7	Ἐμετρήσαμεν εἰς Δ. Ἀντωνιάδην ἐνταῦθα ἔναντι λ)σμοῦ δραχ. . .	1900	—
8	9ν [2]) Ὑπεγράψαμεν γραμ)ον εἰς δ(γὴν τοῦ ἐνταῦθα προμηθευτοῦ μας Π. Δημητριάδου λήξεως 5 Νοεμ. ἐ. ἔ. καὶ ἀξίας ὀνομαστικῆς δρ. . . .	500	—
9	9 Ἐπωλήσαμεν εἰς Γ. Πετρίδην ἐνταῦθα ἐμ)τα κατὰ τὸ τιμολ)όν μας ἀξίας εἰς λ)σμόν . . .	125	75
10	10 Ἐπωλήσαμεν εἰς Δ. Μιχαὴλ ἐνταῦθα διάφορα ἐμπ)τα κατὰ τὸ τιμολογιόν μας ἀξίας εἰς λ)σμὸν	214	70
11	10 Ἠγοράσαμεν τοῖς μετρητοῖς παρὰ τῆς ἑταιρείας τῶν μονοπωλίων διάφορα εἴδη ἀξίας . . .	875	40
12	12 Ὁ Ἰ. Πετρίδης τῆς πόλεώς μας ἐμέτρησεν εἰς ἡμᾶς διὰ λ)σμόν του δρ.	75	50
13	14 Αἱ εἰσπράξεις ἐκ τῶν λιανικῶν ἀπὸ 8—14 τρέχ. ἀνῆλθον εἰς δραχ.	695	—
14	15 [3]) Ὁ Α. Μιχαὴλ ἐνταῦθα ὑπέγραψε γραμ)ον εἰς δ)γήν μας, ἔναντι λ)σμοῦ λήξ. 30 Νοεμ. ἐ. ἔτους καὶ ὀνομαστικῆς ἀξίας	200	—
15	21 Αἱ εἰσπράξεις ἐκ τῶν λιανικῶν πωλήσεων ἀπὸ 15 ἕως 21 τρέχ. ἀνῆλθον εἰς δραχμὰς	845	70
16	31 [4]) Αἱ εἰσπράξεις ἐκ τῶν λιανικῶν πωλήσεων ἀπὸ 22-31 τρέχ. ἀνῆλθον εἰς δραχμὰς	2945	60
17	Ἐπληρώσαμεν εἰς τοὺς ὑπαλλήλους μας διὰ μισθοὺς λήξ. μηνὸς δραχμὰς 100. [5]) Αἱ μικραὶ δαπάναι τοῦ καταστήματος κατὰ τὸν λήξ. μῆνα Ὀκτώβρ. ἀνῆλθον εἰς δραχ. 38,75.	138	75
18	Κατὰ τὸν λήξαντα μῆνα ἀπεσύραμεν διὰ τὴν οἰκογένειάν μας μετρ. δραχμὰς 150 καὶ διάφορα ἐμπορ)τα κατὰ τὸ σχετ. βιβλιάριον καταναλώσεως ἀξίας	250	—
		56881	40

Ὅρα σχόλια ὄπισθεν.

1) Χάριν συντομίας ἐγγράφομεν τὰς εἰσπράξεις ἐκ τῶν λιανικῶν πωλήσεων περιληπτικῶς εἰς τὸ τέλος ἑκάστης ἑβδομάδος, ἐνῷ ἐν τῇ πράξει γίνεται τοῦτο καθ' ἑκάστην ἑσπέραν.

2) Τὰ πληρ)α γραμ)ά μας σημειοῦμεν μὲ τὴν λῆξιν των κ.τ.λ. εἰς τὸ λεγόμενον «*βιβλιάριον λήξεων*».

3) Τὰ εἰσ)α γραμ)ά μας σημειοῦμεν μὲ τὴν λῆξιν των κ.λ.π. εἰς τὸ λεγόμενον «*βιβλιάριον λήξεων*».

4) Τὸ ποσὸν τῶν εἰσπράξεων τούτων εἶναι πολὺ μεγαλύτερον τῶν προηγουμένων, διότι περιλαμβάνει καὶ τὰ ποσὰ τῶν ἐπὶ πιστώσει λιανικῶν τοῦ μηνὸς πωλήσεων ἅτινα εἰσπράττομεν εἰς τὸ τέλος τοῦ μηνὸς ἐπὶ τῇ βάσει τῶν σχετικῶν βιβλιαρίων, καταναλώσεως (281 Σημ.).

5) Διὰ τὰς καθημερινὰς μικρὰς δαπάνας τοῦ καταστήματος τηροῦμεν ἰδιαίτερον βιβλιάριον «*τὸ βιβλίον τοῦ μικροῦ Ταμείου*». Ἐντεῦθεν κατὰ μῆνα μεταφέρεται τὸ σύνολον αὐτῶν εἰς τὸ πρόχειρον καὶ ἀκολούθως εἰς τὰ λοιπὰ βιβλία.

β') *Ἐν τῷ ἡμερολογίῳ.*

Μὴν Ὀκτώβριος 1911.

				Δρχ.	Λ.
		1			
Ταμεῖον	1	Πρὸς ἔναρξιν τῶν ἐμπορικῶν μας ἐργασιῶν κατεθέσαμεν μετρητά		40000	—
		2			
Ταμεῖον	1	Ἐπληρώσαμεν εἰς τὸν Ι. Σ. ἐνοίκιον καταστήματος ἐξ μηνῶν ἀπὸ 1ης τρέχοντος κατὰ τὴν σχετικὴν ἀπόδειξίν του. δρχ.	1200		
		Ὁμοίως εἰς Δ. Κ. δι' ἀγορασθέντα ἔπιπλα πρὸς χρῆσιν τοῦ καταστήματος . . . . δραχ.	1150	2350	—
		6			
Καθολικὸν	1	*Δ. Ἀντωνιάδης*, ἐνταῦθα, *Λαβεῖν* δι' ἀξίαν σημερινοῦ τιμολογίου του ἐκ δραχ. 2920		2920	—
		7			
	2	*Π. Δημητριάδης*, ἐνταῦθα, *Λαβεῖν* δι' ἀξίαν σημερινοῦ τιμολογίου του ἐκ δρχ. 1400.		1400	—
		7			
Ταμεῖον	1	Εἰσεπράξαμεν ἐκ τῶν λιανικῶν πωλήσεων ἀπὸ 1 - 7 τρέχοντος δραχ.		1400	—
		8			
»	»	Ἐπληρώσαμεν διὰ διαφόρ. προμηθείας τοῦ γραφείου μας δραχ.		45	—
		9			
Καθολικὸν	1	*Δ. Ἀντωνιάδης*, ἐνταῦθα, *Δοῦναι*			
Ταμεῖον	1	δι' ὅσα ἐμετρήσαμεν αὐτῷ ἔναντι λ)σμοῦ		1900	—
		9			
Καθολικὸν	2	[1] *Π. Δημητριάδης*, ἐνταῦθα, *Δοῦναι* διὰ τὸ εἰς δ)γήν του γραμ)όν μας λήξ. 5 Νοεμβρίου ἀξ. δραχ. 500.		500	
		9			
Καθολικὸν	3	*Ι. Περίδης*, ἐνταῦθα, *Δοῦναι* διὰ τὰ πωληθέντα αὐτῷ ἐμπορ)τα κατὰ τὸ σχετικὸν τιμολ)όν μας.		125	75
		10			
Καθολικὸν	4	*Δ. Μιχαήλ*, ἐνταῦθα *Δοῦναι* δι' ἀξίαν τῶν εἰς αὐτὸν πωληθέντων κατὰ τὸ σχετ. τιμ)όν μας		214	70
		Εἰς μεταφορὰν		50855	45

1) Τὴν αὐτὴν χρέωσιν θὰ ἐκάμνομεν καὶ ἂν ὁ Π. Δημητριάδης κατοικῶν ἐν ἄλλῃ πόλει ἔσυρε συν)κὴν ἐφ' ἡμῶν λήξ. 5 Νοεμβρ. καὶ ἀξίας 500 δραχ. καὶ ἡμεῖς ἀπεδεχόμεθα αὐτήν.

			'Εκ μεταφορᾶς	50855	45
11			— 10 —	Δραχ.	Λ.
	Ταμεῖον	1	'Επληρώσαμεν εἰς τὴν 'Εταιρείαν τῶν Μονοπωλίων διάφορα εἴδη, ἅτινα παρ' αὐτῆς ἠγοράσαμεν δρχ. . .	875	40
12			— 12 —		
	Καθολικὸν	3	***Δ. Πετρίδης***, ἐνταῦθα *Λαβεῖν*	75	50
	Ταμεῖον	1	δι' ὅσα μᾶς ἐμέτρησεν ἔναντι λ)σμοῦ του		
13			— 14 —		
	Ταμεῖον	1	Εἰσεπράξαμεν ἐκ τῶν λιανικῶν πωλήσεων ἀπὸ 8-14 τρέχ. δργ.	695	—
14			— 15 —		
	Καθολικὸν	4	***Δ. Μιχαήλ***, ἐνταῦθα, *Λαβεῖν* διὰ τὸ γραμ)όν του εἰς δ)γήν μας λήξ. 30 Νοεμβρίου ἐ. ἔ. ἐκ δραχ. 200	200	—
15			— 21 —		
	Ταμεῖον	1	Εἰσεπράξαμεν ἐκ τῶν λιανικῶν πωλήσεων ἀπὸ 15-21 τρ.	845	70
16			— 31 —		
	»	«	Εἰσεπράξαμεν ἐκ τῶν λιανικῶν πωλήσεων ἀπὸ 22-31 τρ.	2945	60
17			— 31 —		
	»	«	'Επληρώσαμεν εἰς τοὺς ὑπαλλήλους μας διὰ μισθοὺς ληξ. μην. δρ. 100		
	»	«	Αἱ δὲ μικραὶ δαπάναι τοῦ καταστήματος κατὰ τὸ σχετικόν βιβλιάριον ἀνῆλθον κατὰ τὸν λήγοντα μῆνα εἰς δραχ. 38,75	138	75
18					
	Ταμεῖον	1	'Απεσύραμεν χάριν τῆς οἰκογενείας μας κατὰ τὸν λήξαντα μῆνα τὰ ἑξῆς : Μετρητὰ δραχ. 150 'Εμπορ)τα κατὰ τὸ σχετ. βιβλιάριον δλικ, ἀξίας δ. 100	250	—
			'Εν ὅλῳ . . .	56881	40

γ' 'Εν τῷ Καθολικῷ

Σελ. 1 Σελ. 1

Δ. ΑΝΤΩΝΙΑΔΗΣ, ἐνταῦθα

Δοῦναι *Λαβεῖν*

1911				δρχ.	λ.	1911				δρ.	λ.
'Οκτ.	9	Πληρωμή μας .	1	1900	—	'Οκτ.	5	Τιμολόγιόν του.	1	2920	—
»	31	ἐξίσωσις πιστωτ.		1020	—						
				2920						2920	—
						Νοεμβ.	1	ὑπόλ. εἰς νέον δρ.		1020	—

Π. ΔΗΜΗΤΡΙΑΔΗΣ, ἐνταῦθα

Δοῦναι *Λαβεῖν*

1911				δρχ.	λ.	1911				δρχ.	λ.
'Οκτ.	9	Γραμ/όν μας εἰς δ/γήν του λ. 5/11	1	500	—	'Οκτ.	6	Τιμολόγιόν του.	1	1400	—
»	31	ἐξίσ. πιστωτικὴ		900	—						
				1400	—					1400	—
					—	Νοεμβ.	1	ὑπόλοιπ. εἰς νέον		900	—

Ι. ΠΕΤΡΙΔΗΣ, ἐνταῦθα

Δοῦναι *Λαβεῖν*

1911				δρχ.	λ.	1911				δρχ.	λ.
'Οκτ.	0	Τιμολόγιόν μας.	1	125	75	'Οκτ.	12	Πληρωμή του .	2	75	50
						»	31	ὑπόλ. χρεωστικὸν		50	25
				125	75					125	75
Νοεμβ.	1	ὑπόλοιπ. εἰς νέον		50	25						

Δ. ΜΙΧΑΗΛ, ἐνταῦθα

Δοῦναι — *Λαβεῖν*

1911				δρχ.	λ.	1911				δρχ.	λ.
Ὀκτ.	10	Τιμολόγιόν μας.	1	214	70	Ὀκτ.	15	Γραμ/όν του εἰς δ/γήν μας λ. 30/11	2	200	—
								ἐξίσωσις χρεωστ.		14	70
				214	70					214	70
Νοεμ.	1	ὑπόλοιπ. εἰς νέον		14	70						

δ'. ἐν τῷ Βιβλίῳ Ταμείου.

Σελ. 1 — ΤΑΜΕΙΟΝ — Σελ. 1

Εἰσπράξεις — *Πληρωμαὶ*

1911				δραχ.	λ.	1911				δρχ.	λ.
Ὀκτβ.	1	Κατάθ. ἀρχικοῦ Κεφαλαίου . .	1	40000	—	Ὀκτ.	2	Εἰς Π.Σ. δι' ἐνοίκιον 6 μηνῶν .	1	1200	—
»	7	Λιανικαὶ πωλήσ. ἀπὸ 1 - 7 τρέχ.	1	1400	—	»	2	εἰς Β. Κ. διὰ διάφορα ἔπιπλα .	1	1150	—
»	12	Παρὰ Δ. Πετρίδου ἐνταῦθα ἔναντι λογ/ασμοῦ	2	75	50	»	8	δι' ἀγορὰν εἰδῶν γραφείου μας .	1	45	—
»	14	λιανικ. πωλήσεις ἀπὸ 8 - 14 τρέχ.	2	695	—	»	9	εἰς Δ. Ἀντωνιάδην, ἐνταῦθα .	1	1900	—
»	21	λιανικ. πωλήσεις ἀπὸ 15 - 21 τρέχ.	2	845	70	»	10	εἰς ἑταιρ. Μονοπ. δι' ἀγορὰν διαφόρων εἰδῶν. .	1	875	40
»	31	Λιανικ. πωλήσεις ἀπὸ 22 - 31 τρέχ.	2	2945	60	»	31	εἰς ὑπαλλήλους διὰ μισθοὺς Ὀκτωβρ.	2	100	—
						»	31	διάφορα μικρὰ ἔξοδα καταστήματος κατὰ τὸν μῆνα Ὀκτώβρ.	2	38	75
						»	31	δι' ἔξοδα οἰκογ. κατ' Ὀκτώβρ .	2	150	—
						»	31	ὑπόλ. μετρητῶν ἐν τῷ χρηματοκιβ.		40502	65
				45961	80					45961	80
Νοεμβ.	1	Ὑπόλ. μετρητ. ἐκ τοῦ προηγ. μηνὸς		40502	65						

ε') Ἐν τῷ Βιβλίῳ τῶν Ἀπογραφῶν καὶ Ἰσολογισμῶν.

	Δραχ.	Λ.
Α'. Ἀπογραφὴ τῆς 1ης Ὀκτωβρίου 1911.		
Κεφάλαιον ἀρχικὸν κατατεθὲν ἐξ ὁλοκλήρου τοῖς μετρητοῖς	40000	
Β'. Ἀπογραφὴ τῆς 31 Ὀκτωβρίου 1911		
α' Ἐνεργητικὸν		
Ταμεῖον [1]) μετρητὰ ἐν τῷ χρηματοκιβωτίῳ	40502	65
Ἔπιπλα [2]) ἀξία τούτων σημερινὴ (ἕπεται λεπτομερὴς σημείωσις τούτων)	1035	—
Ἐμπορεύματα [3]) ἀξία τῶν ἐν τῇ ἀποθήκῃ τοιούτων (ἕπεται λεπτομερὴς σημείωσις τούτων)	961	20
Ἐνοίκιον προπληρωθέν, τὸ ἀνάλογον εἰς τοὺς 5μῆνας Νοέμ.-Μάρτιον.	1000	—
Γραμ/α Εἴσπρ/α [4]) γραμ/ον Δ. Μιχαὴλ λήξ. 30/11 δρ. 200	200	—
Χρεῶσται [5]) Ι. Πετρίδης, ἐνταῦθα, ὑπόλ. χρεωστ. δραχ. 50,25		
» Δ. Μιχαὴλ » » » » 14,70 . . .	64	95
Ἐν ὅλῳ . . .	43763	80

β΄ Παθητικὸν

	Δραχ.	Λ.
Γραμ/α [6]) *πληρ/α*: γραμ)όν μας εἰς δ)γὴν Π. Δημητριάδου λήξ. 5)11 ἀξίας 500 δραχ.	500	—
Πιστωταὶ [5]): Π. Δημητριάδης ἐνταῦθα, ὑπόλ. πιστωτικὸν δραχ. 900.		
Δ. Ἀντωνιάδης » » » » 1020.	1920	—
Κεφάλαιον σημερινὸν (τῆς 31 Ὀκτωβρ. 1911)	41343	80
Ἐν ὅλῳ . . .	43763	80

1) Τὸ ὑπόλοιπον τῶν μετρητῶν δίδεται ὑπὸ τοῦ βιβλίου τοῦ Ταμείου καὶ ἐξελέγχεται διὰ τῆς μετρήσεως τῶν ἐν τῷ χρηματοκιβωτίῳ χρημάτων.

2) Τὰ ἔπιπλα ἐστοίχιζον ἀρχικῶς δρ. 1150, ἀλλ' ἕνεκα τῆς χρήσεως ὑφίστανται ὑποτίμησιν, ἣν ἐνταῦθα ὑπελογίσαμεν πρὸς 10 % ἐπὶ τῆς ἀρχικῆς ἀξίας. Οὕτως ἡ σημερινὴ ἀξία τούτων εἶνε δρ. 1150 - 115 = 1035 δραχ.

3) Τὰ ἐμπορεύματα ἐξελέγχονται κατὰ ποσότητα ἐν τῇ ἀποθήκῃ καὶ ἐκτιμῶνται ἐν γένει μὲ τὴν τιμήν, ἣν ἐστοίχισαν μέχρι τῆς εἰσόδου των εἰς τὴν ἀποθήκην. Ἐὰν ὅμως ἕνεκα λόγου τινος, ὡς τῆς παρελεύσεως τῆς ἐποχῆς, τοῦ συρμοῦ ἢ βλάβης ποιότητος κ.λ.π. ἐμπορ)ά τι ἔχῃ σήμερον πραγματικὴν τιμὴν κατωτέραν τῆς ἀρχικῆς τότε ἐκτιμῶμεν αὐτὸ μὲ τὴν κατωτέραν ταύτην τιμήν.

Ἡ ἀπογραφὴ τῶν ἐμπορ)των εἶναι καὶ μέσον ἐξελέγξεως τοῦ «*Βιβλίου ἀποθήκης*», ὁσάκις τηρεῖται τοιοῦτον.

4) Ταῦτα εὑρίσκονται ἐν τῷ χαρτοφυλακίῳ μας καὶ συγχρόνως δεικνύονται ὑπὸ τοῦ ἀντιστοίχου «*βιβλιαρίου λήξεων*».

5) Ταῦτα δεικνύονται ὑπὸ τῶν λ)σμῶν τοῦ *Καθολικοῦ*.

6) Ταῦτα δεικνύονται ὑπὸ τοῦ σχετικοῦ «*βιβλιαρίου λήξεων*».

Ἰσολογισμὸς

Ἐνεργητικὸν	Δρχ.	λ.	*Παθητικὸν*	Δρχ.	λ.
Ταμεῖον	40502	65	*Γραμμάτια Πληρωτέα* . .	500	—
Ἔπιπλα	1035	—	*Πιστωταὶ* διάφοροι	1920	—
Ἐμπορεύματα	961	20	*Κεφάλαιον* σημεριγόν . . .	41343	80
Ἐνοίκιον προπληρωθὲν .	1000	—			
Γραμμάτια εἰσπρακτέα . .	200	—			
Χρεῶσται διάφοροι . . .	64	95			
	43763	80		43763	80

Ὑπολογισμὸς προελθόντος ἀποτελέσματος (κέρδους ἢ ζημίας)

Κεφάλαιον τῆς 31ης Ὀκτωβρίου 1911	δρχ.	41343,80
» » 1ης » » (τὸ ἀρχικὸν)	»	40000,—
Καθαρὸν κέρδος ἐκ τῶν ἐργασιῶν τοῦ μηνὸς Ὀκτωβρίου . . .	»	1343,80

Βεβαιῶ ὅτι ἡ ἀνωτέρω ἀπογραφὴ μετὰ τοῦ ἀντιστοίχου ἰσολογισμοῦ συνετάχθη εἰλικρινῶς καὶ συμφώνως πρὸς τὰ ἐμπορικά μου (λογιστικὰ) βιβλία.

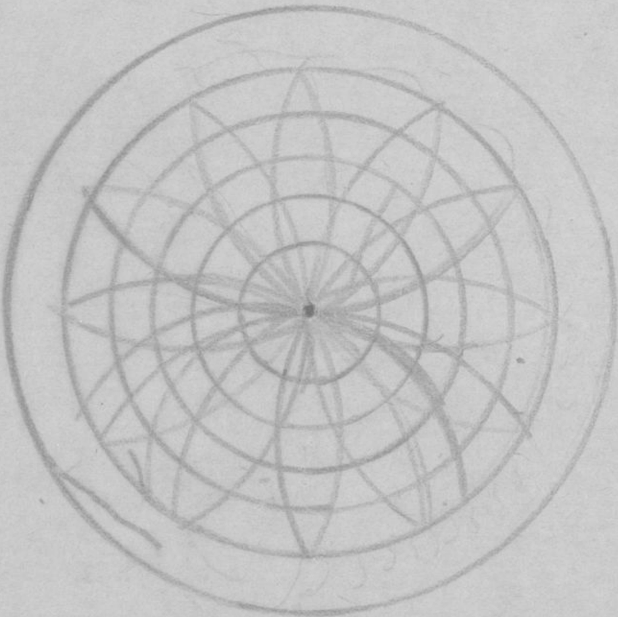
Ἐν Πειραιεῖ, τῇ 31ῃ Ὀκτωβρίου 1911.

Π. Δημητρίου (ὑπογραφή)

ΤΕΛΟΣ

60
8
480

320
8
2560 | 60
2



3500/98