ΕΝΩΣΙΣ ΣΥΓΓΡΑΦΕΩΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ

10

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΤΑΞΙΣ
Ε' ΣΤ'

47

ΟΔΟΣ ΚΟΡΑΗ 8
ΑΘΗΝΑΙ

ΑΤΛΑΝΤΙΣ

Α. ΜΠΑΜΠΑΛΗ - Σ. ΒΟΥΡΝΑ

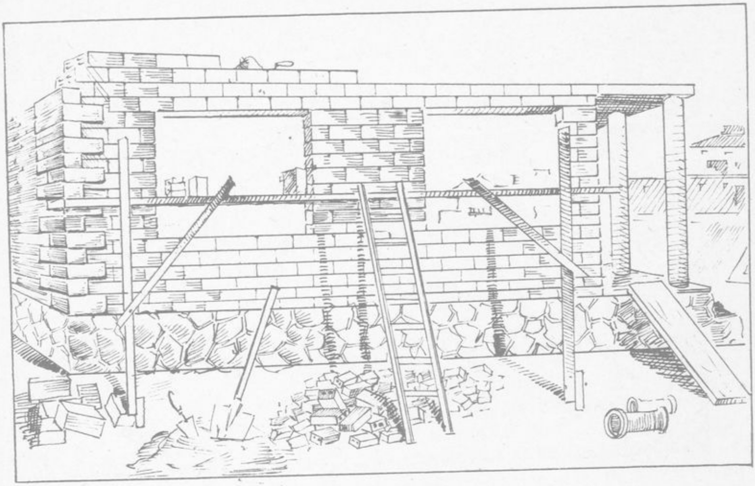
ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Διὰ τοὺς μαθητὰς Ε΄ καὶ ΣΤ΄ τάξεως τῶν Δημοτικῶν Σχολείων

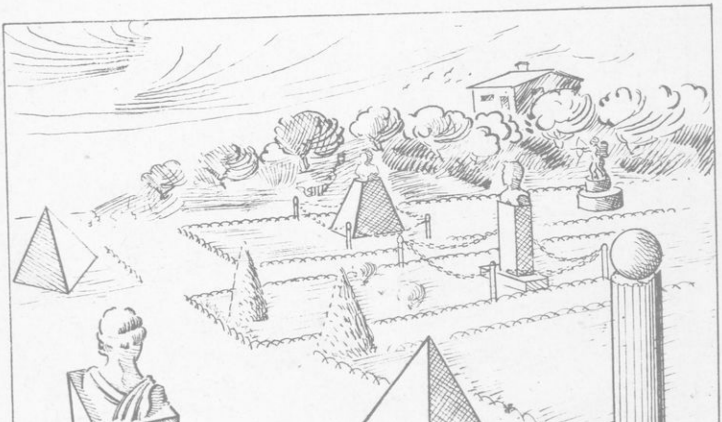
ΕΓΚΕΚΡΙΜΕΝΗ ΔΙΑ ΜΙΑΝ ΤΡΙΕΤΙΑΝ
Διὰ τῆς ὑπ᾽ ἀριθ. 61452/12-6-52 ἀποφάσεως Ὑπουργείου Παιδείας

ΕΚΔΟΣΕΙΣ: "ΑΤΛΑΝΤΙΔΟΣ" ΚΟΡΑΗ 8 — ΑΘΗΝΑΙ

Η ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΣΤΗΝ ΠΡΑΞΗ

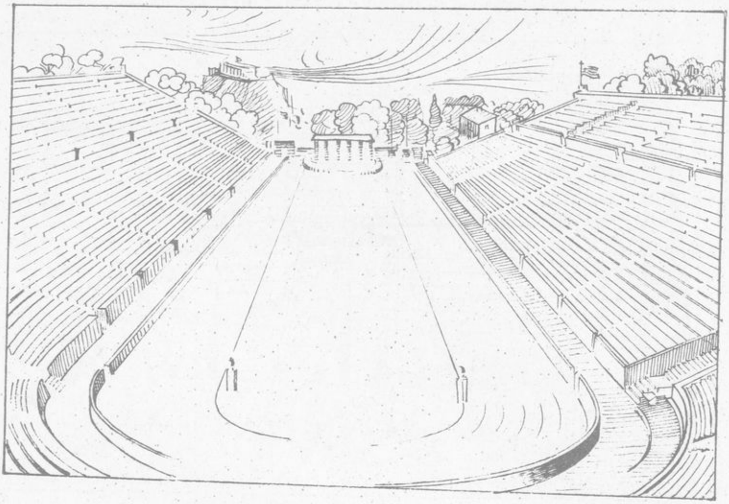


Ο ἰ κ ο δ ο μ ὴ

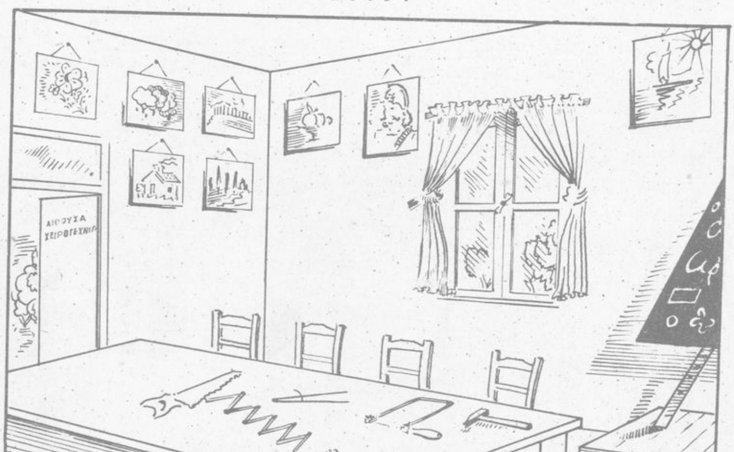


Ἡ ρ ῷ ο ν

Παρατηρήσετε καλὰ τὶς παραπάνω εἰκόνες
καὶ περιγράψετέ τες λεπτομερῶς.

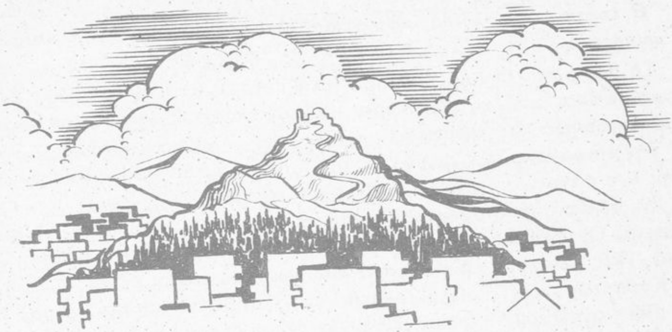


Στάδιον



Αἴθουσα χειροτεχνίας

Παρατηρήσετε καλὰ τὶς παραπάνω εἰκόνες καὶ περιγράψετέ τες λεπτομερῶς.



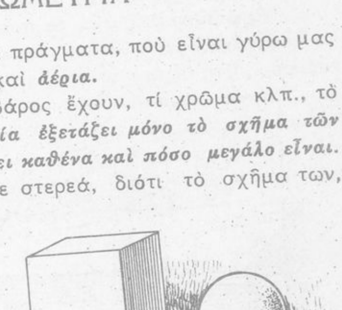
ΒΙΒΛΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ

ΤΙ ΕΙΝΑΙ Η ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Ἀπὸ τὴ Φυσικὴ μάθαμε ὅτι ὅλα τὰ πράγματα, ποὺ εἶναι γύρω μας χωρίζονται σὲ τρία εἴδη: ***στερεά, ὑγρὰ*** καὶ ***ἀέρια.***

Ἀπὸ τί εἶναι καμωμένα αὐτά, τί βάρος ἔχουν, τί χρῶμα κλπ., τὸ ἐξετάζουν ἄλλα μαθήματα. ***Ἡ Γεωμετρία ἐξετάζει μόνο τὸ σχῆμα τῶν σωμάτων. Δηλαδή, ἐξετάζει τί μορφὴ ἔχει καθένα καὶ πόσο μεγάλο εἶναι.***

Στὴ Γεωμετρία τὰ σώματα τὰ λέμε στερεά, διότι τὸ σχῆμα των, ὅταν τὸ ἐξετάζωμε, τὸ θεωροῦμε, γι' αὐτὴ τὴ φορά, σταθερὸ ὅπως τῶν στερεῶν σωμάτων.



Σχ. 1

ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ—ΟΓΚΟΣ

Τὰ σχήματα τῶν σωμάτων ποὺ βλέπομε γύρω στὴ φύση, συνήθως, ἔχουν διαφορετικὴ μορφή. Τὰ πρόσωπα ἑκατομμυρίων ἀνθρώπων τὰ ξεχωρίζομε μεταξύ των ἀπὸ τὰ βαθουλώματα καὶ τὶς κυρτώσεις, ποὺ παρουσιάζει ἡ ἐξωτερικὴ ὄψη τοῦ καθενός, δηλ. ἡ ἐπιδερμίδα τοῦ προσώπου. Ἡ μιὰ ντομάτα ἀπ' τὴν ἄλλη διαφέρει στὴ μορφή. Καὶ ἡ μορφή της φαίνεται ἀπ' τὴ φλοίδα της. Ἡ μορφὴ τοῦ αὐγοῦ φαίνεται ἀπ' τὸ κέλυφος τοῦ αὐγοῦ.

Ἡ λεπτὴ αὐτὴ φλοίδα, ποὺ περιβάλλει τὰ σώματα, λέγεται ἐπιφάνεια τῶν σωμάτων.

Τὸ σῶμα ποὺ δὲν ἔχει φλοίδα (μιὰ πέτρα), ἂς φαντασθοῦμε ὅτι τὸ βάψαμε μὲ ἕνα λεπτότατο στρῶμα μπογιᾶς· τὸ στρῶμα αὐτὸ τὸ θεωροῦμε γιὰ ἐπιφάνεια τοῦ σώματος.

Τὴν ἐπιφάνεια τῶν σωμάτων τὴν φανταζόμεθα τόσον λεπτὴ ὥστε νὰ μὴν ἔχη πάχος.

Τὰ σώματα ποὺ συναντᾶμε στὴ φύση, ἔχουν συνήθως ἀνώμαλη ἐπιφάνεια. Οἱ ἄνθρωποι προσπαθοῦν νὰ δίνουν στὰ σώματα ὄμορφη ἐπιφάνεια. Πῶς βρίσκομε τὰ μάρμαρα καὶ πῶς τὰ φτιάνομε ;

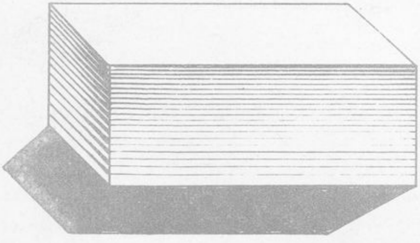
Κάθε σῶμα ἐκεῖ ποὺ βρίσκεται καταλαμβάνει κάποιο χῶρο. Ἂν ἦταν μέσα στὸ νερὸ τὸ σῶμα, θὰ ἐκτόπιζε νερὸ καὶ θὰ ἔπαιρνε τὴ θέση του. Ὅπως καὶ ὅταν εἶναι στὸν ἀέρα, διώχνει τὸν ἀέρα καὶ παίρνει τὴ θέση του.

Ἂν μετρήσωμε τὸ μέρος τοῦ χώρου ποὺ καταλαμβάνει ἕνα σῶμα, ὁ ἀριθμὸς ποὺ θὰ βροῦμε λέγεται ***ὄγκος*** τοῦ σώματος τούτου.

Ἅμα βγάλωμε ἀπὸ τὸ πασχαλιάτικο τσουρέκι ἕνα αὐγό, ὁ χῶρος ποὺ κατελάμβανε τὸ αὐγό, θὰ φαίνεται στὸ κοίλωμα ποὺ θὰ μείνη στὸ τσουρέκι, στὴ θέση ποὺ ἦταν τὸ αὐγό.

Ἄλλα σώματα εἶναι πιὸ μεγάλα καὶ ἔχουν πιὸ μεγάλο ὄγκο, ἄλλα πιὸ μικρὰ καὶ ἔχουν πιὸ μικρὸ ὄγκο.

Τὸν ὄγκο τῶν σωμάτων θὰ μάθωμε νὰ τὸν μετρᾶμε ἀργότερα.



Σχ. 2

Ἂν κυττάξωμε ἕνα ἀγκωνάρι μαρμάρινο (σχ. 2), θὰ δοῦμε πὼς ἔχει μῆκος, πλάτος καὶ ὕψος. Δηλ. τὸ μέγεθός του τὸ μετρᾶμε πρὸς τρεῖς διευθύνσεις: δεξιὰ - ἀριστερά, μπρὸς - πίσω, πάνω - κάτω. Τὰ μήκη ποὺ ἔχει τὸ σῶμα καὶ πρὸς τὶς τρεῖς αὐτὲς διευθύνσεις τὰ λέμε ***διαστάσεις τοῦ σώματος. Ὥστε τὰ σώματα ἔχουν τρεῖς διαστάσεις· (μῆκος, πλάτος, ὕψος).***

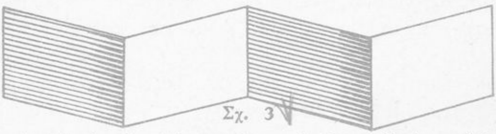
Διάφορες ἐπιφάνειες σωμάτων

Εἴδαμε πιὸ πάνω ὅτι κάθε σῶμα ἔχει δική του ἐπιφάνεια· θὰ ξεχωρίσωμε τὶς ἐπιφάνειες σὲ εἴδη :

α) Ἂν προσέξωμε τὴν ἐπιφάνεια τοῦ ὕδατος, ὅταν ἡσυχάζη, τὴν ἐπιφάνεια τοῦ πίνακα, τοῦ τοίχου, τοῦ πατώματος, τοῦ καθρέπτη, ὅλες αὐτὲς οἱ ἐπιφάνειες εἶναι ἴδιες.

Ἂν τεντώσωμε μιὰ κλωστὴ στὰ χέρια μας καὶ βάλωμε ὅπου τύχει τὰ ἄκρα τῆς τεντωμένης κλωστῆς ἐπάνω στὸν καθρέπτη, ὅλη ἡ κλωστή, σ' ὅλο τὸ τεντωμένο μέρος της, θὰ ἐγγίζη τὸν καθρέπτη. Ἡ ἐπιφάνεια ὅλων τῶν σωμάτων ποὺ ἀναφέραμε, ἔχει αὐτὴ τὴν ἰδιότητα.

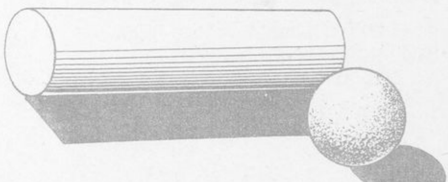
Ἡ ἐπιφάνεια αὐτὴ λέγεται ***ἐπίπεδος ἐπιφάνεια ἢ ἐπίπεδον.***



Σχ. 3

β) Ἂν πάρωμε ἕνα χαρτόνι καί, ἀπὸ τὸ ἐπίπεδο σχῆμα ποὺ ἔχει, τὸ σπάσωμε δυὸ τρεῖς φορές, ὅπως στὸ σχ. 3, θὰ δοῦμε πὼς ἡ νέα ἐπιφάνεια ἀποτελεῖται ἀπὸ πολλὰ ἐπίπεδα. Ἡ ἐπιφάνεια αὐτὴ λέγεται ***τεθλασμένη*** ἐπιφάνεια.

γ) Ἂν προσέξωμε τὴν ἐπιφάνεια ποὺ ἔχει ἕνα τόπι, ἢ οἱ σωλῆνες τῆς σόμπας (σχ. 4), θὰ δοῦμε ὅτι κανένα μέρος τῶν ἐπιφανειῶν αὐτῶν δὲν εἶναι ἐπίπεδο.



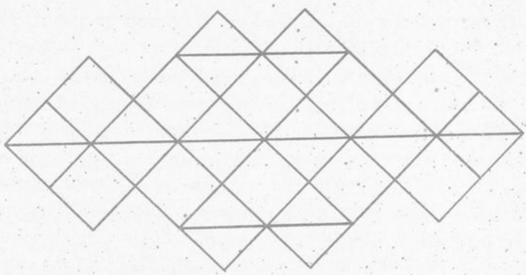
Σχ. 4

Κάθε ἐπιφάνεια ἡ ὁποία δὲν ἔχει κανένα μέρος της ἐπίπεδο, λέγεται ***καμπύλη ἐπιφάνεια.***

Σχ. 5

δ) Ἂν κυττάξωμε ἕνα κουτὶ γάλα (σχ. 5), θὰ δοῦμε ὅτι μοιάζει γύρω μὲ τὸ σωλῆνα τῆς σόμπας, ἀλλὰ ἀπάνω καὶ κάτω εἶναι κλεισμένο μὲ ἐπίπεδα. Δηλ. μέρος τῆς ἐπιφανείας του εἶναι ἐπίπεδος ἐπιφάνεια, καὶ μέρος εἶναι καμπύλη. Ἡ ἐπιφάνεια ποὺ ἔχει καὶ ἐπίπεδο μέρος καὶ καμπύλο, λέγεται ***μικτὴ ἐπιφάνεια.***

Ἂν θέλωμε νὰ δοῦμε, ἂν εἶναι μικρὴ ἢ μεγάλη μία ἐπιφάνεια, π. χ. τοῦ πατώματος, θὰ κυττάξωμε τί μῆκος καὶ τί πλάτος ἔχει. ***Ὥστε οἱ ἐπιφάνειες ἔχουν δύο διαστάσεις*** (μῆκος, πλάτος)· ὕψος δὲν ἔχουν.

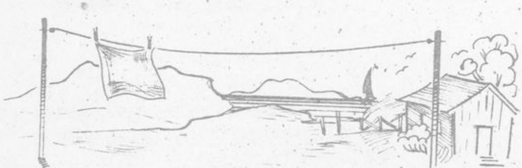


ΓΡΑΜΜΕΣ

Ἂν πάρωμε ἕνα λεπτότατο σύρμα καὶ τὸ στραβώσωμε (σχ. 6), ὅπως τύχει, τὸ σχῆμα ποὺ θἄχῃ λέγεται ***γραμμή***.

Ἂν πάρωμε μιὰ λεπτὴ κλωστὴ καὶ τὴ ρίξωμε στὸ ἔδαφος, τὸ σχῆμα ποὺ θὰ πάρῃ ἡ κλωστὴ λέγεται ***γραμμή***. Τὸ σχῆμα ποὺ ἔχει ἕνας σπάγγος ποὺ ἁπλώνομε τὰ ροῦχα (σχ. 7), εἶναι γραμμή. Τὸ σχῆμα ποὺ ἔχει μιὰ τρίχα τεντωμένη ἢ ἀφημένη ὅπως τύχει, λέγεται γραμμή. Ἂν τσακίσωμε ἕνα χαρτί, ἡ κόχη του εἶναι μιὰ γραμμή. Τὰ φύλλα τῶν δένδρων τελειώνουν γύρω - γύρω σὲ μιὰ γραμμὴ ποὺ τὰ περικλείει. Τὸ μαχαῖρι κόβοντας ἕνα μῆλο, κόβει τὴ φλοίδα του (τὴν ἐπιφάνειά του) σὲ μιὰ γραμμή.

Σχ. 6

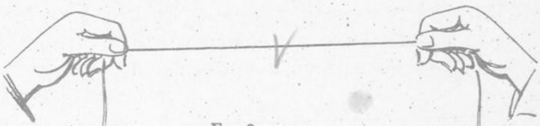


Σχ. 7

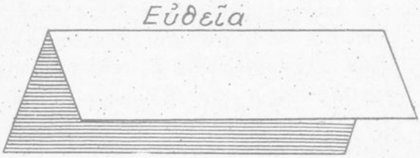
Εἴδη γραμμῶν

α) Ἂν μιὰ λεπτὴ τρίχα, τὴν τεντώσωμε (σχ. 8), τὸ σχῆμα ποὺ θὰ πάρῃ λέγεται ***εὐθεῖα γραμμὴ*** ἢ ***εὐθεῖα***.

Ἂν πάρωμε ἕνα χαρτόνι καὶ τὸ τσακίσωμε (σχ. 9), ἡ κόχη του εἶναι εὐθεῖα. Ἡ κόχη ποὺ ἑνώνον-



Σχ. 8

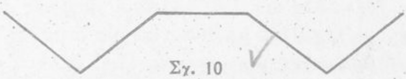


Σχ. 9

ται δύο τοῖχοι τῆς τάξης εἶναι εὐθεῖα.

β) Ἂν πάρωμε ἕνα σύρμα ποὺ εἶναι εὐθὺ καὶ τὸ τσακίσωμε δυὸ - τρεῖς φορές, ὅπως τὸ σχ. 10, ἡ γραμμὴ ποὺ θὰ σχηματίζη τὸ σχῆμα τοῦ σύρματος, θὰ ἀποτελῆται ἀπὸ μέρη εὐθείας. Ἡ γραμμὴ αὐτὴ λέγεται ***τεθλασμένη γραμμή.***

γ) Ἂν προσέξωμε τὸ σπάγγο ποὺ ἁπλώνομε τὰ ροῦχα, ὄχι τεντωμένο πολύ, (σχ. 7), θὰ δοῦμε ὅτι ἔχει σχῆμα γραμμῆς, ποὺ κανένα μέρος της δὲν εἶναι εὐθεῖα. Ἡ γραμμὴ αὐτὴ λέγεται ***καμπύλη γραμμή.***



Σχ. 10

δ) Ἡ γραμμὴ ποὺ ζωγραφίζομε ἕνα τόξο σὰν αὐτὸ ποὺ εἶχαν οἱ ἀρχαῖοι (σχ. 11), ἀποτελεῖται καὶ ἀπὸ εὐθεῖα (τὴ χορδή του) καὶ ἀπὸ καμπύλη. Ἡ γραμμὴ αὐτή, ποὺ ἀποτελεῖται ἀπὸ εὐθεῖες καὶ καμπύλες, λέγεται ***μικτὴ γραμμή.***

Σχ. 11

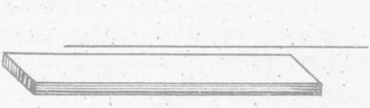
Ἂν θελήσωμε νὰ δοῦμε μιὰ γραμμὴ πόσο μεγάλη εἶναι, πρέπει νὰ δοῦμε μόνο, πόσο μῆκος ἔχει. ***Ὥστε οἱ γραμμὲς ἔχουν μόνο μία διάσταση (μῆκος).***

ΣΗΜΕΙΟΝ

Τὰ ἄκρα μιᾶς γραμμῆς, ὅπως ἡ μύτη τοῦ μολυβιοῦ μας ἢ τῆς πένας μας, ἡ τελεία τοῦ βιβλίου μας, λέγονται ***σημεῖα.*** Τὸ σημεῖο δὲν ἔχει καμιὰ διάσταση (οὔτε μῆκος, οὔτε πλάτος, οὔτε ὕψος).

Γραφὴ εὐθειῶν γραμμῶν

α) Γιὰ νὰ γράψωμε μιὰ εὐθεῖα, παίρνομε τὸ χάρακα (κανόνα) καὶ τὸν βάζομε ἀπάνω στὸν πίνακα ἢ στὸ τετράδιό μας. Μὲ τὸ ἕνα χέρι τὸν κρατᾶμε καὶ μὲ τὸ ἄλλο σύρομε τὴν κιμωλία, ὥστε νὰ γράφη καὶ νὰ ἀκουμπάη διαρκῶς στὸ χάρακα. Ἡ γραμμὴ ποὺ θὰ γραφῆ, θἆναι εὐθεῖα (σχ.



Σχ. 12

12). Ἂν τὴ μεγαλώσωμε πρὸς τὸ ἕνα ἢ τὸ ἄλλο της ἄκρο, τότε λέμε πὼς ***προεκτείναμε*** τὴν εὐθεῖα (σχ. 12).

Ἂν θέλωμε νὰ ὀνομάσωμε μία γραμμή, γιὰ νὰ τὴν ξεχωρίζωμε ἀπὸ μία ἄλλη ποὺ εἶναι γραμμένη κοντά της, βάζομε πλάϊ στὰ ἄκρα της δύο γράμματα (κεφαλαῖα συνήθως) ἀπ' τὸ ἀλφάβητο. Στὸ σχ. 14, λέμε : Ἡ εὐθεῖα ΑΒ, ἡ τεθλασμένη γραμμὴ ΕΖ, ἡ καμπύλη γραμμὴ ΓΔ, ἡ μικτὴ γραμμὴ ΗΘ.

Σχ. 14

Κάθε σημεῖο τὸ γράφομε μὲ μιὰ τελεία καὶ τὸ ὀνομάζομε μὲ ἕνα γράμμα κοντά του (σχ. 13) καὶ λέμε τὸ σημεῖον Α, τὸ σημεῖον Β, τὸ σημεῖον Γ.

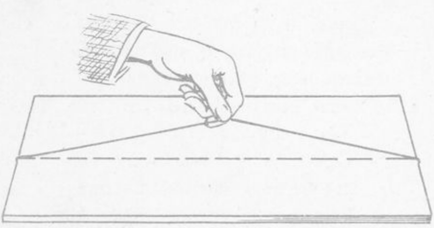
Μεγάλες εὐθεῖες γράφουν πολλὲς φορές, οἱ τεχνῖτες μὲ ἕνα σπάγγο ἢ μιὰ κλωστὴ βρεγμένη μὲ μπογιά. Π.χ. θέλουν νὰ γράψουν μιὰ εὐθεῖα, πάνω σὲ μιὰ σανίδα. Κρατοῦν τὴ βρεγμένη μὲ μπογιὰ κλωστή, τεντωμένη πάνω στὴ σανίδα ὥστε νὰ περνᾶ ἀπὸ κεῖ ποὺ θέλουν. Ἔπειτα τὴ σηκώνει λίγο ἕνας ἀπ' τὴ μέση, ὥστε ὅταν τὴν ἀφήση νὰ χτυπήση μὲ δύναμη στὴ σανίδα. Μὲ τὸ χτύπημα, ἡ κλωστὴ ἀφήνει τὴ μπογιά της στὴ σανίδα καὶ γράφεται ἡ εὐθεῖα.

Σχ. 13

Ἰδιότητες τῆς εὐθείας

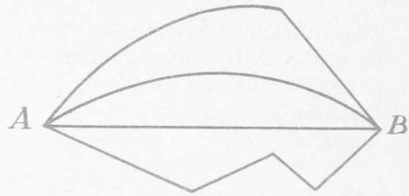
Κάθε εὐθεῖα μποροῦμε νὰ τὴν προεκτείνωμε ἀπὸ τὸ ἕνα ἢ καὶ ἀπὸ τὰ δύο ἄκρα της ὅσο θέλομε.

Ὅταν παίρνωμε ἕνα κομμάτι εὐθείας, λέμε πὼς ἔχομε ἕνα ***εὐθύγραμμο τμῆμα***· τὸ τμῆμα ΑΒ (σχ. 14).



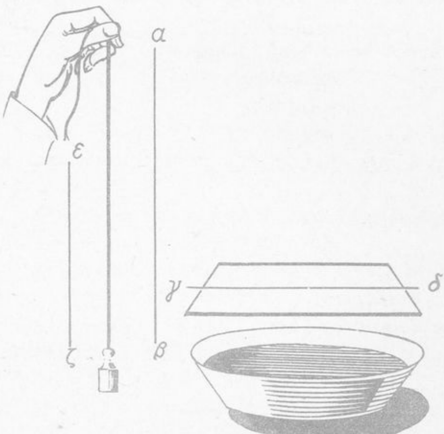
Ὅσες εὐθεῖες καὶ νὰ γράψωμε μὲ τὸν χάρακα, οἱ ὁποῖες νὰ περνοῦν ἀπὸ δύο σημεῖα, θὰ πέφτουν ἡ μιὰ ἐπάνω στὴν ἄλλη. ***Ὅλες οἱ εὐθεῖες ποὺ περνοῦν ἀπὸ δύο σημεῖα, τὰ ἴδια, συμπίπτουν εἰς μίαν εὐθεῖαν.***

Παίρνομε δύο σημεῖα Α καὶ Β καὶ τὰ ἑνώνουμε, μὲ ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα ἀπὸ διάφορες ἄλλες γραμμὲς (σχ. 15). ***Ἀπ' ὅλες τὶς γραμμὲς ποὺ ἑνώνουν τὰ δύο σημεῖα, ἡ πιὸ μικρὴ εἶναι ἡ εὐθεῖα γραμμή.*** Τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ ποὺ ἑνώνει δύο σημεῖα Α καὶ Β, λέγεται ***ἀπόστασις τῶν δύο αὐτῶν σημείων.***



Σχ. 15

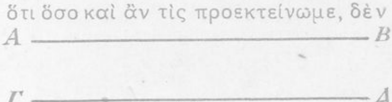
Παίρνομε τὸ νῆμα τῆς στάθμης (μία κλωστὴ ποὺ στὴ μία της ἄκρη εἶναι δεμένο ἕνα βαρύδι) καὶ τὸ κρεμᾶμε. Ὅταν σταματήση νὰ κινῆται, ἡ διεύθυνση ποὺ θάχη τὸ νῆμα λέγεται ***κατακόρυφος διεύθυνση*** (σχ. 16). Κάθε εὐθεῖα ΑΒ, ΕΖ ποὺ θάχη αὐτὴ τὴ διεύθυνση, λέγεται ***κατακόρυφος εὐθεῖα,*** καὶ κάθε ἐπίπεδο, ποὺ ἔχει τὴν κατεύθυνση τοῦ νήματος τῆς στάθμης, λέγεται ***κατακόρυφο ἐπίπεδο.***



Σχ. 16

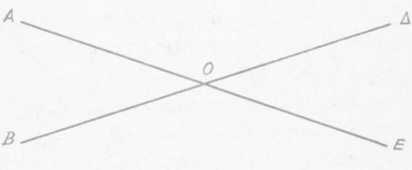
Ὅταν τὸ νερὸ ἠρεμῆ, ἡ ἐπιφάνειά του εἶναι ἐπίπεδος. Κάθε ἐπίπεδο ποὺ ἔχει τὴ διεύθυνση τῆς ἐπιφανείας τοῦ ἀκινήτου νεροῦ λέγεται ***ὁριζόντιο ἐπίπεδο*** (σχ. 16). Τέτοια ἐπίπεδα εἶναι τὸ πάτωμα, τὸ ταβάνι, τὸ τραπέζι κλπ. Κάθε εὐθεῖα ποὺ μπορεῖ νὰ εἶναι ἐπάνω σὲ ὁριζόντιο ἐπίπεδο λέγεται ***ὁριζόντιος εὐθεῖα*** (ὅπως ἡ ΓΔ σχ. 16).

Ἂν γράψωμε δύο εὐθεῖες μὲ τὸ χάρακα τὴ μιὰ ἀπ' τὴ μιὰ μεριά του καὶ τὴν ἄλλη ἀπὸ τὴν ἄλλη, θὰ δοῦμε ὅτι ὅσο καὶ ἂν τὶς προεκτείνωμε, δὲν θὰ συναντηθοῦν. Οἱ εὐθεῖες ποὺ εἶναι γραμμένες (βρίσκονται) ἀπάνω σ' ἕνα ἐπίπεδο καὶ δὲν συναντῶνται ὅσο καὶ ἂν προεκταθοῦν (σχ. 17), λέγονται ***παράλληλες εὐθεῖες.***



Σχ. 17

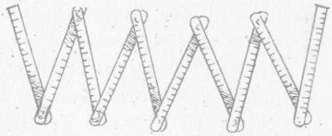
Ἅμα δύο εὐθεῖες ὅπως ἡ Α Β καὶ Γ Δ (σχ. 18) συναντῶνται, λέμε πὼς τέμνονται. Τὸ σημεῖον Ε, στὸ ὁποῖον τέμνονται λέγεται ***σημεῖον τομῆς.***



Σχ. 18

Σημ. Τὰ μέτρα μήκους τὰ

ξέρομε. Στὴ Γεωμετρία μετρᾶμε κυρίως μὲ τὸ γαλλικὸ μέτρο (σχ. 19). Τὰ μικρὰ μὲ τὸ ὑποδεκάμετρο. Τὰ μεγάλα μὲ τὴν κορδέλα.



Σχ. 19

Ἐρωτήσεις:

1) Τί ἐξετάζει σὲ ἕνα σῶμα ἡ Γεωμετρία;

2) Τί εἶναι ὄγκος ἑνὸς σώματος;

3) Τί λέγεται ἐπιφάνεια ἑνὸς σώματος;

4) Πόσων εἰδῶν ἐπιφανείας ἔχομε; Πῆτε δύο παραδείγματα στὸ κάθε εἶδος.

5) Πόσες διαστάσεις ἔχουν τὰ στερεὰ σώματα;

6) » » » οἱ ἐπιφάνειες;

7) » » » οἱ γραμμές;

8) » » » τὰ σημεῖα;

9) Πόσα εἴδη γραμμῶν ἔχομε; Βρῆτε ἕνα παράδειγμα στὸ κάθε εἶδος.

10) Πόσα εἴδη ἐπιφανειῶν ἔχομε; Βρῆτε ἕνα παράδειγμα στὸ κάθε εἶδος.

11) Πάρε τὸ χάρακά σου καὶ τοποθέτησέ τον, ὥστε νὰ εἶναι πρῶτα κατακόρυφος, ἔπειτα ὁριζόντιος.

12) Δεῖξε μέσα στὴν αἴθουσα ὁριζόντιες καὶ κατακόρυφες εὐθεῖες.

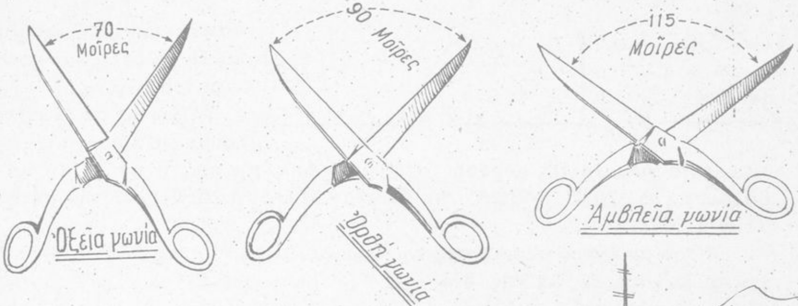
13) Βρῆτε στὸ τετράδιό σας, στὸ βιβλίο σας, στὴν αἴθουσα, παράλληλες εὐθεῖες.

14) Μετρῆστε τὸ μῆκος καὶ τὸ πλάτος τοῦ τετραδίου σας μὲ τὸ μέτρο.

15) Μετρῆστε τὸ μῆκος, τὸ πλάτος καὶ τὸ ὕψος (πάχος) τοῦ ἀναγνωστικοῦ σας βιβλίου, μὲ τὸ μέτρο.

16) Γράψτε μὲ τὸ χάρακα ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα στὸ τετράδιό σας καὶ ἔπειτα μετρῆστε το μὲ τὸ ὑποδεκάμετρο.

17) Πάρτε ἀπάνω στὸ τετράδιό σας 4 σημεῖα καὶ δόστε τους τὰ ὀνόματα Α, Β, Γ, Δ. Ἑνῶστε μὲ εὐθεῖες τὰ σημεῖα Α καὶ Β, Α καὶ Γ, Α καὶ Δ, Β καὶ Γ, Β καὶ Δ, Γ καὶ Δ. Μετρῆστε κατόπιν τὶς ἀποστάσεις δύο - δύο σημείων ἀπ' αὐτά, μὲ τὸ ὑποδεκάμετρο.

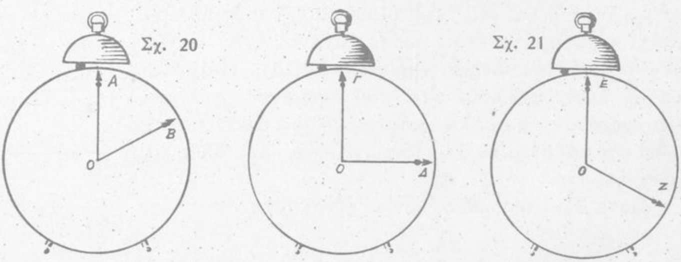


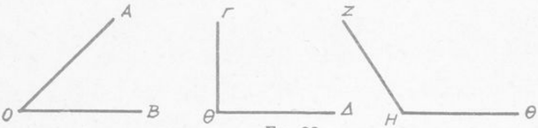
ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΓΩΝΙΕΣ

Ὁρισμοὶ

Κυττᾶξτε τὸ σχ. 20. Εἶναι ἕνα ρολόϊ. Οἱ δεῖχτες του ΟΑ καὶ ΟΒ εἶναι δύο εὐθεῖες ποὺ ἀρχίζουν ἀπὸ τὸ ἴδιο σημεῖο Ο. Ἅμα περάση λίγη ὥρα, οἱ δεῖχτες ἀνοίγουν πιὸ πολὺ (σχ. 21) καὶ τὸ σχῆμα, ποὺ εἶχαν πρῶτα, ἄλλαξε τώρα. Κάθε στιγμὴ οἱ δυὸ δεῖχτες φτιάνουν καὶ ἕνα νέο σχῆμα διαφορετικὸ ἀπὸ τὸ προηγούμενο. Τὸ σχῆμα ποὺ ἔχουν κάθε φορὰ οἱ δεῖχτες, τὸ λέμε ***γωνία***. Ὥστε· γωνία εἶναι τὸ σχῆμα, τὸ ὁποῖον γίνεται ἀπὸ δύο εὐθεῖες ποὺ ξεκινοῦν ἀπὸ τὸ ἴδιο σημεῖο. Οἱ δύο εὐθεῖες ποὺ φτιάχνουν μία γωνία, λέγονται ***πλευρὲς*** τῆς γωνίας. Στὸ σχ. 22, π. χ. ἡ πρώτη γωνία, ἔχει πλευρὲς τὶς εὐθεῖες ΟΑ καὶ ΟΒ. Τὸ σημεῖον ἀπὸ τὸ ὁποῖον ξεκινοῦν οἱ πλευρές, λέγεται ***κορυφὴ*** τῆς γωνίας. Στὸ σχ. 22,

Σχ. 20 Σχ. 21





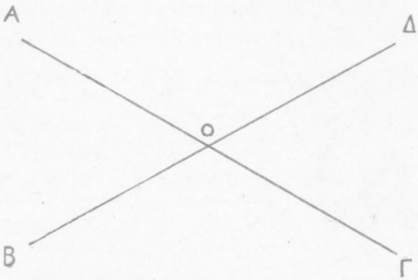
Σχ. 22

τὸ σημεῖο Ο, τὸ Θ καὶ τὸ Η, εἶναι οἱ κορυφὲς τῶν τριῶν γωνιῶν.

Τὴ γωνία τὴ διαβάζουμε μὲ τρία γράμματα, μὲ τὸ γράμμα τῆς κορυφῆς στὴ μέση. Δηλ. τὴν πρώτη (σχ. 22) τὴ διαβάζομε: γων. ΑΟΒ ἢ ΒΟΑ, τὴ δεύτερη: ΓΘΔ ἢ ΔΘΓ καὶ τὴν τρίτη: ΖΗΘ ἢ ΘΗΖ.

Ὅσο ἀνοίγουν οἱ πλευρὲς τῆς γωνίας, τόσο πιὸ μεγάλη γίνεται ἡ γωνία. Στὸ σχ. 22 ἀπ' τὶς δύο πρῶτες γωνίες, πιὸ μεγάλη εἶναι ἡ δεύτερη. Ποιὰ ἔχει μεγαλύτερες πλευρές, δὲν τὸ προσέχομε.

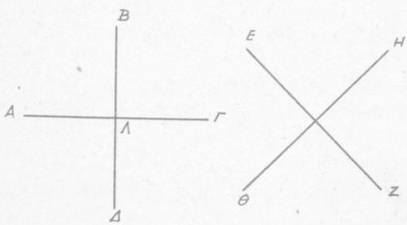
Ὅταν δύο εὐθεῖες τέμνωνται (σχ. 23), φτιάνουν γύρω ἀπὸ τὸ σημεῖο τῆς τομῆς των Ο, τέσσερες γωνίες ποὺ ἔχουν τὴν ἴδια κορυφή· τὶς γωνίες: ΑΟΒ, ΒΟΓ, ΓΟΔ, ΔΟΑ.



Σχ. 23

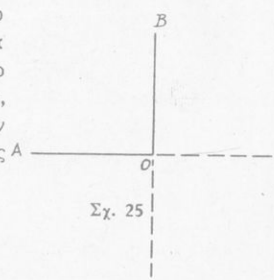
Ὀρθὴ γωνία

Ἅμα δύο εὐθεῖες τέμνωνται, ὅπως στὸ σταυρὸ (σχ. 24), φτιάνουν 4 γωνίες *ἴσες*. Οἱ εὐθεῖες οἱ ὁποῖες τέμνωνται ἔτσι, λέμε πὼς ***τέμνωνται καθέτως***.



Σχ. 24

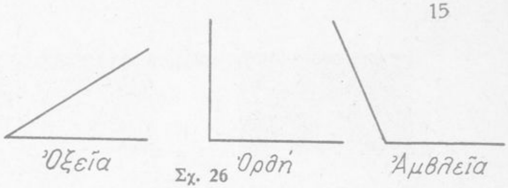
Ἔχομε τὴ γωνία ΑΟΒ (σχ. 25). Ὅταν μὲ τὸ μάτι μας προεκτείνωμε τὶς πλευρές της, ὅπως φαίνεται στὸ σχῆμα, βλέπομε ὅτι τέμνονται, ὅπως στὸ σταυρό, καθέτως. Ἄρα, οἱ πλευρὲς τῆς γωνίας ΑΟΒ τέμνονται καθέτως. Τὰ φύλλα τοῦ τετραδίου μας ἢ τοῦ βιβλίου μας εἶναι κομμένα ἔτσι, ὥστε καθένα ἔχει γωνία ***ὀρθὴ*** (καὶ ἀπάνω δεξιά, καὶ κάτω δεξιά). Ἡ ἀπάνω γωνία ἑνὸς φύλλου, καὶ τοῦ ἑπομένου φύλλου, ἅμα ἑνώσωμε τὰ φύλλα, πέφτουν ἡ μιὰ ἀπάνω στὴν ἄλλη σὰ νάταν μία. Τὸ ἴδιο γίνεται μὲ ὅλες τὶς ὀρθὲς γωνίες.



Σχ. 25

Ὥστε ὅλες οἱ ὀρθὲς γωνίες εἶναι ἴσες.

Κάθε γωνία μικρότερη ἀπὸ τὴν ὀρθή, λέγεται **ὀξεῖα** (σχ. 26). Κάθε γωνία μεγαλύτερη ἀπὸ τὴν ὀρθή, λέγεται **ἀμβλεῖα** (σχ. 26).



Σχ. 26

Σύγκριση γωνιῶν μὲ τὴν ὀρθὴ γωνία

Τὰ εὐθύγραμμα τμήματα, ἂν θέλωμε τὰ μετροῦμε μὲ τὸ γαλλικὸ μέτρο. Ἐνῶ ὅταν θέλωμε νὰ μετρήσωμε μία γωνία, δὲν μᾶς ἐνδιαφέρει τὸ μῆκος τῶν πλευρῶν της, μᾶς ἐνδιαφέρει μόνον τὸ ἄνοιγμα αὐτῶν.

Γιὰ νὰ μετρήσωμε μία γωνία, τὴ συγκρίνομε μὲ τὸ ἄνοιγμα τῆς ὀρθῆς. Ἂν τὸ ἄνοιγμα τῶν πλευρῶν αὐτῆς εἶναι μισὸ ἀπὸ τὸ ἄνοιγμα τῆς ὀρθῆς γωνίας, λέμε πὼς ἡ γωνία αὐτὴ εἶναι $\frac{1}{2}$ τῆς ὀρθῆς.

Ἀσκήσεις

1) Σχημάτισε στὸ τετράδιό σου μία ὀρθὴ γωνία.

Ἐπειδὴ στὴν ὀρθὴ γωνία πρέπει οἱ πλευρές της νἆναι κάθετες καὶ μὲ τὸ μάτι εἶναι δύσκολο νὰ τὸ βροῦμε, γι' αὐτὸ χρησιμοποιοῦμε ἕνα ὄργανο ποὺ τὸ λέμε **γνώμονα** (σχ. 27).

Σχ. 27

2) Φτιάσε μὲ λεπτὸ σύρμα μία γωνία. Ἐκτίμησέ την μὲ τὸ μάτι σου καὶ πὲς τὸ εἶδος της. Ἔπειτα τοποθέτησέ την ἀπάνω στὸ γνώμονα νὰ δῇς, ἂν τὴν ἐκτίμησες καλά.

3) Φτιάσε μὲ σύρμα ἄλλη γωνία, ἀλλὰ μὲ τόσο ἄνοιγμα, ὥστε νὰ δείχνῃ αὐτή, πόσο μικρότερη ἢ μεγαλύτερη εἶναι ἡ γωνία τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως, ἀπ' τὴν ὀρθή.

4) Φτιάσε ἕνα γνώμονα ἀπὸ χαρτόνι μόνος σου.

5) Σχημάτισε μ' αὐτὸν τρεῖς γωνίες ὀρθὲς στὸ τετράδιό σου.

6) Ζωγράφισε στὸ τετράδιό σου τὸν γνώμονά σου, περνώντας τὸ μολύβι σου γύρω του.

7) Δὲς τὸ σχῆμα τοῦ γνώμονα ποὺ ζωγράφισες στὸ τετράδιό σου. Ἔχει τρεῖς γωνίες· ἡ μία ἀπ' αὐτὲς εἶναι ὀρθή, οἱ ἄλλες δύο τί εἴδους γωνίες εἶναι ;

8) Σχημάτισε μία ὀξεῖα γωνία στὸ τετράδιό σου. Ὀνόμασέ την μὲ τρία γράμματα. Διάβασέ την.

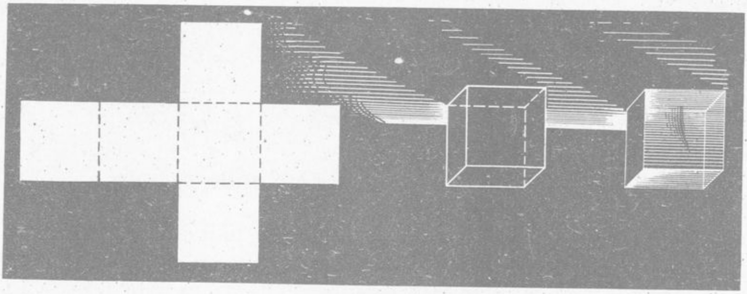
9) Κάμε τὴν ἴδια ἐργασία μὲ μία ἀμβλεῖα γωνία.

10) Σχημάτισε στὸ τετράδιό σου πολλὲς γωνίες, καὶ ἔπειτα γράψε κάτω ἀπὸ κάθε μία, τί εἴδους γωνία εἶναι.

11) Κύτταξε γύρω σου καὶ πὲς σώματα ποὺ νὰ ἔχουν ἐπάνω των ὀρθὲς γωνίες. Δεῖξε τες.

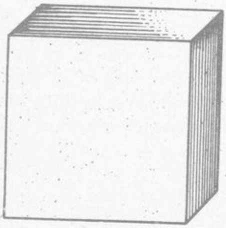
12) Μία γωνία εἶναι $1\frac{1}{2}$ ὀρθές. Πές, εἶναι μικρότερη ἢ μεγαλύτερη τῆς ὀρθῆς καὶ πόσο. Τί εἴδους γωνία εἶναι :

13) Πὲς τὰ ἴδια γιὰ μία γωνία ποὺ εἶναι $\frac{3}{4}$ τῆς ὀρθῆς.



ΚΥΒΟΣ

Ἔχεις μπροστά σου τὸ σῶμα (σχ. 28). Κύτταξέ το καλά. Θὰ δῇς ὅτι ἔχει σχῆμα ***κανονικό***. Ἔχει ***ὄγκο***, ἀφοῦ πιάνει ἕνα χῶρο. Ἡ ἐπιφάνειά του, ὅπως βλέπης, εἶναι τεθλασμένη (τσακισμένη). Τὸ τσάκισμα θὰ φανῇ καλὰ ἂν ἔχωμε ἕνα παρόμοιο σῶμα, ποὺ νὰ εἶναι καμωμένο π. χ. ἀπὸ χαρτόνι.



Σχ. 28

Ἂν μετρήσωμε τὶς διαστάσεις του, ***μῆκος***, ***πλάτος*** καὶ ***ὕψος***, θὰ δοῦμε ὅτι καὶ οἱ τρεῖς εἶναι ἴσες. Αὐτὸ τὸ σῶμα λέγεται ***κύβος***.

Ἐπιφάνεια τοῦ κύβου. Ἂν προσέξωμε καλὰ τὴν ἐπιφάνεια τοῦ κύβου, θὰ δοῦμε ὅτι εἶναι καμωμένη ἀπὸ 6 ἐπιφάνειες ἐπίπεδες καὶ κανονικές. Μέτρησέ τες καὶ σύ.

Πάρε σὲ ἕνα χαρτὶ τὸ σχῆμα μιᾶς ἀπ' αὐτὲς καὶ κύτταξε ὅτι ὅλες εἶναι ἴσες. Ἔχουν ὅλες τὸ ἴδιο μῆκος καὶ πλάτος. Κάθε μία ἀπὸ τὶς ἐπιφάνειες αὐτὲς λέγεται ***ἕδρα τοῦ κύβου***.

Ὁ κύβος λοιπὸν ἔχει 6 ἕδρες ἴσες.

Ἂν προσέξωμε τὶς ἕδρες τοῦ κύβου, θὰ δοῦμε ὅτι κάθε δύο γειτονικὲς ἀπ' αὐτές, συναντῶνται σὲ μία εὐθεῖα. Αὐτὴ ἡ εὐθεῖα λέγεται ***ἀκμή***. Μέτρησε πόσες εἶναι οἱ ἀκμὲς τοῦ κύβου. Ἂν τὶς μετρήσης καλά, θὰ δῇς ὅτι ἔχει 12 ἀκμές.

Ἂν πάρωμε τὸ μέτρο καὶ μετρήσωμε τὶς ἀκμές, θὰ δοῦμε ὅτι ὅλες εἶναι ἴσες.

Ὁ κύβος ἔχει 12 ἀκμὲς ἴσες.

Ἂν παρατηρήσωμε τὸν κύβο θὰ δοῦμε ἀκόμη ὅτι ἔχει μέρη μυτερά, ποὺ τελειώνουν σ' ἕνα σημεῖο. Σὲ κάθε τέτοιο σημεῖο, συναντῶνται τρεῖς ἀκμὲς τοῦ κύβου. Πρόσεξε νὰ δῇς αὐτὰ τὰ σημεῖα. Μέτρησέ τα. Ἂν τὰ μετρήσῃς θὰ δῇς ὅτι εἶναι 8. Κάθε τέτοιο σημεῖο λέγεται ***κορυφή***.

Ὁ κύβος ἔχει 8 κορυφές.

Σὲ κάθε κορυφή του συναντῶνται τρεῖς ἕδρες· τρία ἐπίπεδα. Τὸ σχῆμα ποὺ φτιάνουν οἱ τρεῖς αὐτὲς ἕδρες, λέγεται ***τρίεδρος στερεὰ γωνία.***

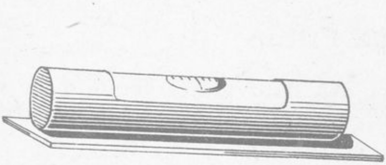
Ἂν πάρωμε τὸν κύβο καὶ τὸν βάλωμε ἀπάνω στὸ τραπέζι, ἡ ἕδρα του ποὺ εἶναι ἀπάνω στὸ τραπέζι καὶ ἡ ἀπέναντί της, ἡ ἀπάνω - ἀπάνω, λέγονται ***βάσεις τοῦ κύβου***· ἡ μία, κάτω βάση καὶ ἡ ἄλλη, ἄνω βάση. Ἂν προσέξωμε τὶς 4 ἀκμὲς ποὺ ἑνώνουν τὴν ἄνω μὲ τὴν κάτω βάση, θὰ δοῦμε πὼς καὶ οἱ 4 ἔχουν τὴν διεύθυνση τῆς κατακορύφου. Κάθε μία ἀπ' αὐτὲς εἶναι τὸ ***ὕψος*** τοῦ κύβου.

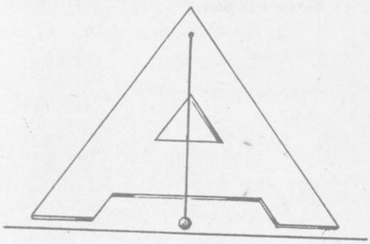
Ἂν γυρίσωμε τὸν κύβο καὶ βάλωμε ἄλλη ἕδρα του στὸ τραπέζι, τὰ ἴδια θὰ παρατηρήσωμε καὶ τότε.

Ἐκτὸς ἀπὸ τὶς βάσεις, οἱ ἄλλες τέσσερες ἕδρες ποῦναι γύρω - γύρω, λέγονται ***παράπλευρες ἕδρες.*** Καὶ οἱ 4 μαζὶ ἀποτελοῦν τὴν ***παράπλευρον*** ἐπιφάνεια τοῦ κύβου.

Πρόσεξε ἀκόμη τὶς δυὸ - δυὸ ἀπέναντι ἕδρες τοῦ κύβου. Πρῶτα τὴν ἀπάνω καὶ τὴν κάτω. Ὅσο καὶ ἂν αὐτὲς τὶς δύο ἕδρες τὶς προεκτείνωμε, δὲν θὰ συναντηθοῦν ποτέ. Οἱ ἕδρες αὐτές, λέγονται ***παράλληλες.*** Τὸ ἴδιο θὰ συμβῇ μὲ τὴ δεξιά, καὶ τὴν ἀριστερή. Τὸ ἴδιο καὶ μὲ τὴν ἐμπρὸς καὶ τὴν πίσω. ***Ὥστε κάθε δυὸ ἀπέναντι ἕδρες τοῦ κύβου εἶναι παράλληλες.***

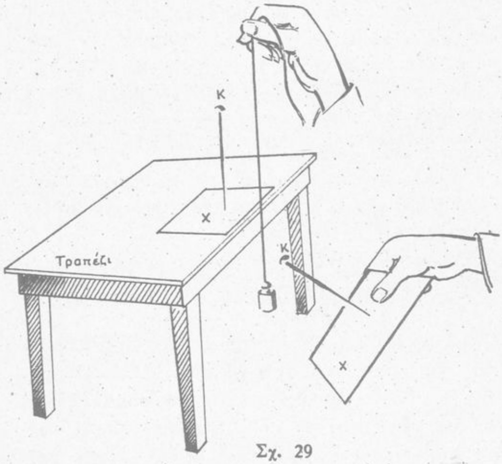
Οἱ τεχνῖτες ποὺ θέλουν νὰ δοῦν ἂν μία ἐπίπεδος ἐπιφάνεια εἶναι κατακόρυφος, ἔχουν ***τὸ νῆμα τῆς στάθμης.*** Φρόντισε νὰ δῇς ἕνα νῆμα στάθμης ἢ κάμε το καὶ μόνος σου, εἶναι εὔκολο. Ἂν θέλωμε νὰ δοῦμε ἂν ἕνα ἐπίπεδο εἶναι ὁριζόντιο, ἔχουμε ἕνα ἄλλο ἐργαλεῖο, ποὺ λέγεται ***ἀλφάδι.*** Πρέπει νὰ τὸ δῇς τὸ ἀλφάδι. Παρακάλεσε τὸ δάσκαλό σου ἢ ἕνα μαραγκὸ νὰ σοῦ τὸ δείξῃ.





ΕΥΘΕΙΑ ΚΑΘΕΤΟΣ ΠΡΟΣ ΕΠΙΠΕΔΟΝ

Ἀπάνω στὸ τραπέζι Τ (σχ. 29), βάζομε ἕνα ἐπίπεδο χαρτόνι Χ. Ἀπάνω στὸ χαρτόνι καρφώνομε μία καρφίτσα Κ ποὺ νἄχη τὴ διεύθυνση τοῦ νήματος τῆς στάθμης. Λέμε τότε, ὅτι ἡ καρφίτσα ἔχει κάθετο διεύθυνση πρὸς τὸ ἐπίπεδο τοῦ χαρτονιοῦ.



Σχ. 29

Ἂν τώρα τὸ χαρτόνι τὸ πιάσωμε μὲ τὸ χέρι μας καὶ τὸ μετακινήσωμε ὅπως τύχη στὸν ἀέρα, ἡ καρφίτσα θὰ ἐξακολουθῆ νὰ ἔχη κάθετο διεύθυνση πρὸς τὸ ἐπίπεδο τοῦ χαρτονιοῦ. Λέμε ἀκόμα, πὼς κάθε εὐθεῖα ποὺ θἄχη τὴ διεύθυνση τῆς καρφίτσας, θὰ εἶναι κάθετος στὸ ἐπίπεδο τοῦ χαρτονιοῦ· καὶ τὸ ἐπίπεδο τοῦ χαρτονιοῦ θὰ εἶναι κάθετο σ' αὐτὴ τὴν εὐθεῖα.

Ἀσκήσεις

1) Τὰ πόδια ἑνὸς ἁπλοῦ τραπεζιοῦ, εἶναι κάθετα στὸ ἐπίπεδο τοῦ πατώματος.

2) Κάρφωσε τὴν καρφίτσα σὰν στὸ προηγούμενο σχῆμα, κάθετα στὸ χαρτόνι ἀλλὰ στὴν ἄκρη του. Πάρε το στὸ χέρι καὶ κύτταξε μ' αὐτὸ ἂν ἕνα καρφί, ποὺ εἶναι καρφωμένο στὸν τοῖχο, εἶναι κάθετο στὸ ἐπίπεδο τοῦ τοίχου.

3) Νὰ βρῆς στὴν τάξη καὶ ἔξω ἀπ' αὐτήν, εὐθεῖες ποὺ νὰ εἶναι κάθετες πρὸς ἐπίπεδο.

ΔΙΕΔΡΟΣ ΓΩΝΙΑ

Προσέξτε δύο ἕδρες τοῦ κύβου ποὺ συναντῶνται σὲ μία ἀκμή· εἶναι σὰν ἀνοιγμένο βιβλίο. Κάθε δυὸ τέτοιες ἕδρες, φτιάχνουν σχῆμα ποὺ λέγεται ***δίεδρος γωνία***.

Δίεδρος γωνία εἶναι τὸ σχῆμα ποὺ ἔχει ἕνα χαρτόνι ὅταν τὸ σπάσωμε, ὅπως τὸ σχ. 9.

Ἂς ἐπαναλάβωμε μὲ λίγα λόγια τί εἴπαμε γιὰ τὸν κύβο.

1) Ὁ κύβος εἶναι γεωμετρικὸ σῶμα κανονικό.

2) Ἔχει καὶ τὶς τρεῖς διαστάσεις ἴσες.

3) Ἔχει 6 ἕδρες ἴσες.

4) Ἔχει 12 ἀκμὲς ἴσες.

5) Ἔχει 8 κορυφές.

6) Ὅταν δύο ἕδρες του εἶναι ὁριζόντιες, οἱ ἄλλες 4 ἕδρες του εἶναι κατακόρυφες. Βάλε τὸν κύβο σὲ τέτοια θέση.

7) Κάθε δυὸ ἀπέναντι ἕδρες του, εἶναι παράλληλες.

Ἀσκήσεις

1) Νὰ βρῆς σώματα; ποὺ ἔχουν τὸ σχῆμα τοῦ κύβου.

2) Νὰ κάμης ἀπὸ χαρτόνι ἕνα κύβο.

3) Νὰ βρῆς καὶ νὰ δείξης ἐπίπεδα ὁριζόντια.

4) Νὰ βρῆς καὶ νὰ δείξης ἐπίπεδα κατακόρυφα.

5) Σὲ μία ἕδρα τοῦ κύβου, ὅποια θέλεις, νὰ βρῆς καὶ νὰ δείξης τὶς κάθετες ἀκμὲς πρὸς αὐτήν.

6) Τὴν ἴδια ἐργασία κάνε καὶ μὲ μιὰ ἄλλη ἕδρα τοῦ κύβου.

7) Νὰ βρῆς καὶ νὰ δείξης ἐπίπεδα παράλληλα.

8) Νὰ κάμης ἀπὸ χαρτόνι ἕνα κύβο μὲ διαστάσεις 0,10 τοῦ μέτρου.

9) Νὰ βρῆς διέδρους γωνίες γύρω σου· φτιάσε καὶ μόνος σου μία δίεδρο γωνία μὲ χαρτόνι.

10) Δεῖξε στὸ δωμάτιο τριέδρους γωνίες.

ΤΕΤΡΑΓΩΝΟ

Ἂν πάρωμε ἕνα κύβο ἀπὸ χαρτόνι καὶ κόψωμε τὶς ἕδρες του στὶς ἀκμὲς καὶ τὶς χωρίσωμε, θὰ δοῦμε ὅτι ὅλες ἔχουν τὸ ἴδιο σχῆμα καὶ εἶναι ἴσες. Δὲς τὸ σχῆμα μιᾶς ἕδρας ἀπ' αὐτὲς (σχ. 30). Τὸ σχῆμα αὐτὸ λέγεται ***τετράγωνο***. Τὸ τετράγωνο ἔχει γύρω - γύρω 4 εὐθύγραμμα τμήματα ἴσα. Δές τα καὶ σύ, εἶναι ἴσα ;

Σχ. 30

Τὰ εὐθύγραμμα αὐτὰ τμήματα λέγονται ***πλευρὲς*** τοῦ τετραγώνου.

Πρόσεξε· στὸ τετράγωνο κάθε δύο διαδοχικὲς πλευρές του εἶναι κάθετες· φτιάχνουν ὀρθὲς γωνίες.

Τετράγωνο εἶναι τὸ σχῆμα ποὺ ἔχει 4 πλευρές, ὅλες ἴσες μεταξύ των καὶ ὅλες τὶς γωνίες του ὀρθές.

Ἂν τὴ μία ἀπὸ τὶς δύο διαδοχικὲς πλευρὲς τοῦ τετραγώνου τὴν πάρωμε γιὰ μῆκος του, ἡ ἄλλη θὰ εἶναι τὸ πλάτος του· αὐτὲς εἶναι οἱ διαστάσεις τοῦ τετραγώνου.

Οἱ διαστάσεις τοῦ τετραγώνου εἶναι ἴσες (τὸ μῆκος ἴσον μὲ τὸ πλάτος).

Ὅποια πλευρὰ τοῦ τετραγώνου θέλομε, τὴ λέμε ***βάση*** τοῦ τετραγώνου· τότε κάθε πλευρὰ ἀπὸ τὶς δύο κάθετες σ' αὐτὴ τὴ λέμε, ***ὕψος*** τοῦ τετραγώνου.

Ἡ βαση στὸ τετράγωνο εἶναι ἴση μὲ τὸ ὕψος.

Κύτταξε ἀκόμη, δυὸ - δυὸ ἀπέναντι πλευρὲς τοῦ τετραγώνου· εἶναι παράλληλες.

Ὅλες οἱ πλευρὲς τοῦ τετραγώνου, στὴ σειρὰ ὅπως εἶναι, φτιάχνουν μιὰ τεθλασμένη γραμμή. Αὐτὴ ἡ γραμμὴ λέγεται ***περίμετρος*** τοῦ τετραγώνου.

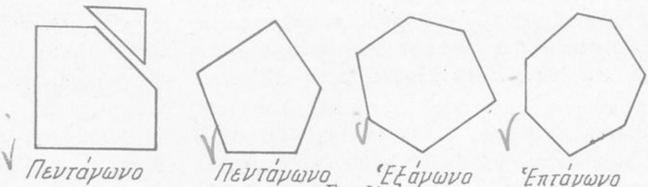
Ἂν μετρήσωμε μία - μία πλευρὰ χωριστὰ καὶ προσθέσωμε κατόπιν τὰ μήκη καὶ τῶν 4 πλευρῶν, θὰ βροῦμε τὸ μῆκος τῆς περιμέτρου. Ἐπειδὴ ὅμως καὶ οἱ 4 πλευρές του εἶναι ἴσες, γιὰ νὰ βροῦμε τὸ μῆκος τῆς περιμέτρου τοῦ τετραγώνου, μετροῦμε μόνο τὴ μία πλευρά του καὶ τὸ μῆκος της τὸ πολλαπλασιάζομε ἐπὶ 4.

Ὥστε· περίμετρος τοῦ τετραγώνου εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν 4 πλευρῶν του.

Γιὰ νὰ μετρήσωμε τὶς πλευρὲς τοῦ τετραγώνου, ἐπειδὴ εἶναι γραμμὲς (εὐθεῖες) ποὺ ἔχουν μόνο μῆκος, χρησιμοποιοῦμε τὶς μονάδες τοῦ μήκους. Ποιὲς εἶναι αὐτές, τὶς μάθαμε στὴν Ἀριθμητική. Ἂν τὶς ξέχασες, φρόντισε νὰ τὶς διαβάσης ἀπὸ τὴν Ἀριθμητική σου.

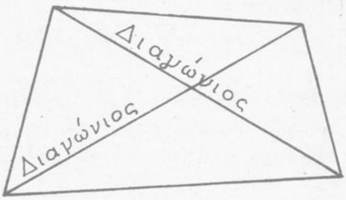
ΠΟΛΥΓΩΝΑ

Ἂν πάρωμε ἕνα τετράγωνο ἀπὸ χαρτὶ καὶ μὲ τὸ ψαλίδι κόψωμε, μὲ μιὰ ψαλιδιά, ἕνα μέρος του (σχ. 31α), τὸ σχῆμα ποὺ θὰ μείνη, θἄχη 5 πλευρές. Τὴν ἴδια δουλειὰ ἂν τὴ κάνωμε πάλι σὲ ἄλλη γωνία του, θὰ



Σχ. 31

δοῦμε πὼς τὸ σχῆμα ποὺ θὰ μείνη θἄχη 6 πλευρές. Τὰ σχήματα αὐτὰ ποὺ περικλείονται μὲ πιὸ πολλὲς ἀπὸ 4 πλευρές, λέγονται ὅλα ***πολύγωνα.*** Αὐτὸ ποὺ ἔχει 5 πλευρές, λέγεται ***πεντάγωνο***· αὐτὸ ποὺ ἔχει 6, ***ἑξάγωνο***· αὐτὸ ποὺ ἔχει 7, ***ἑπτάγωνο*** (σχ. 31)· κ.λ.π.



Σχ. 32

Τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου, λέγεται ***περίμετρος*** αὐτοῦ.

Κάθε εὐθύγραμμο τμῆμα ποὺ ἑνώνει δύο κορυφὲς τοῦ πολυγώνου καὶ δὲν εἶναι πλευρά, λέγεται ***διαγώνιος*** αὐτοῦ (σχ. 32).

Προβλήματα

1) Γράψε μὲ μολύβι στὸ τετράδιό σου ἕνα τετράγωνο, ποὺ νὰ ἔχῃ περίμετρο 0,20 μ.

2) Νὰ βρῇς ἀπάνω σὲ ἄλλα σώματα, σχήματα ποὺ νὰ εἶναι τετράγωνα, καὶ νὰ τὰ ἀναφέρῃς.

3) Ἔχομε κάποιο εἶδος τετραδίου ποὺ εἶναι χαρακωμένο σὲ τετράγωνα. Ποιὸ τετράδιο εἶναι αὐτό ;

4) Κόψε ἀπὸ χαρτόνι ἕνα τετράγωνο, ποὺ ἡ μία πλευρά του νὰ εἶναι 0,06 μ.

5) Ἕνα οἰκόπεδο τετράγωνο ἔχει πλευρὰ 30 μ. Πόση εἶναι ἡ περίμετρός του ;

6) Μία νοικοκυρὰ ἔχει ἕνα τραπεζομάνδηλο τετράγωνο, ποὺ ἡ μία πλευρά του ἔχει μῆκος 1,20 μ., καὶ θέλει νὰ βάλῃ γύρω - γύρω δαντέλλα. Πόσα μέτρα θὰ ἀγοράσῃ ;

7) Ἕνας ἔχει ἕνα κῆπο τετράγωνο καὶ θέλει νὰ τὸν περιτειχίσῃ. Γιὰ κάθε πλευρά, τοῦ ζήτησαν νὰ πληρώσῃ 220.000 δρχ. Πόσο θὰ πληρώσῃ γιὰ ὅλο τὸ περιτείχισμα ;

8) Ἕνας ἔχει ἕνα χωράφι τετράγωνο καὶ θέλει νὰ σκάψῃ γύρω - γύρω ἕνα βαθὺ αὐλάκι. Τοῦ ζήτησαν γιὰ κάθε μέτρο 5.000 δραχ. καὶ πλήρωσε γιὰ ὅλο 240.000 δραχ. Πόσα μέτρα ἦταν ἡ περίμετρός του, καὶ πόσα κάθε πλευρά ;

ΜΟΝΑΔΕΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ

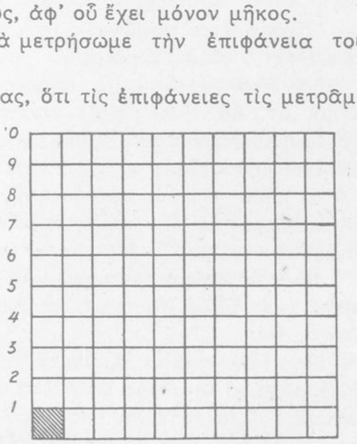
Πάρα πάνω μάθαμε νὰ μετρᾶμε τὴν περίμετρο τοῦ τετραγώνου. Καὶ τὴν μετρᾶμε μὲ τὶς μονάδες μήκους, ἀφ' οὗ ἔχει μόνον μῆκος.

Τώρα θὰ δοῦμε πῶς μποροῦμε νὰ μετρήσωμε τὴν ἐπιφάνεια τοῦ τετραγώνου.

Γνωρίζομε ἀπὸ τὴν ἀριθμητική μας, ὅτι τὶς ἐπιφάνειες τὶς μετρᾶμε μὲ τὸ τετραγωνικὸ μέτρο καὶ τὶς ὑποδιαιρέσεις του· ἢ μὲ τὸν τετραγωνικὸ τεκτονικὸ πῆχυ, ποὺ μεταχειρίζονται οἱ τεχνῖτες· ἢ ἂν εἶναι μεγάλες, μὲ τὸ στρέμμα.

Τὸ τετραγωνικὸ μέτρο, εἶναι ἕνα τετράγωνο, ποὺ κάθε πλευρά του εἶναι ἕνα γαλλικὸ μέτρο. Αὐτὸ εἶναι ἕνα ὡρισμένο μέρος τοῦ ἐπιπέδου.

Κάθε τ. μ. χωρίζεται (σχ. 33), μὲ παράλληλες πρὸς τὶς πλευρὲς εὐθεῖες, σὲ 100 τετραγωνάκια ποὺ οἱ πλευρές των εἶναι μία παλάμη, καὶ λέγονται ***τετραγωνικὲς παλάμες***.



Σχ. 33

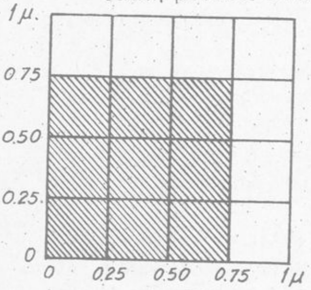
Ἔτσι τὸ τετρ. μέτρο χωρίζεται σὲ 10 λουρίδες. Κάθε λουρίδα ἔχει 10 τ. παλάμες. Οἱ 10 λουρίδες ἔχουν 10 × 10 = 100 τ. παλάμες.

Τὸ ἴδιο, κάθε τ. παλάμη χωρίζεται ὅμοια, σὲ 100 ***τετραγωνικὲς γραμμές.***

Ἄλλη μονάδα ποὺ μετρᾶμε τὶς ἐπιφάνειες, εἶναι τὸ τετραγωνικὸ χιλιόμετρο· τὸ τετράγωνο ποὺ ἔχει πλευρὰ ἕνα χιλιόμετρο.

Ἄλλη μονάδα ἐπιφανείας, εἶναι τὸ τετραγωνικὸ μίλι· τὸ τετράγωνο μὲ πλευρὰ ἕνα μίλιον.

Ἄλλη μονάδα εἶναι ὁ τετραγωνικὸς τεκτονικὸς πῆχυς· τὸ τετράγωνο μὲ πλευρὰ τὸν τεκτονικὸ πῆχυ (1 τεκ. πῆχ. = 0,75 μ.). Κυττᾶξτε στὸ σχ. 34, τὸν τετρ. τεκτ. πῆχυ μέσα στὸ τετρ. μέτρο· εἶναι τὰ $\frac{9}{16}$ τοῦ τετρ. μέτρου.



Σχ. 34

Ἄλλη μονάδα ἐπιφανείας εἶναι τὸ στρέμμα· (1 στρέμμα = 1.000 τ. μ.).

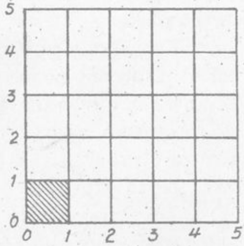
Ἡ πιὸ συνηθισμένη μονάδα ἐπιφανείας ἀπ' ὅλες, εἶναι τὸ τετραγωνικὸ μέτρο.

Γιὰ νὰ μετρήσωμε λοιπὸν τὴν ἐπιφάνεια τοῦ τετραγώνου, θὰ τὴν σκεπάσωμε μὲ τετραγωνικὰ μέτρα, καὶ ὅσα τετραγωνικὰ μέτρα χωρέση, τόσα τετρ. μέτρα θὰ εἶναι ἡ ἐπιφάνειά του.

Ἐμβαδὸν τετραγώνου

Ἔχομε ἕνα τετράγωνο (σχ. 35), ποὺ κάθε πλευρά του ὑποθέτομε πῶς εἶναι 5 γαλλικὰ μέτρα.

Ἂν τὸ σκεπάσωμε μὲ τετραγωνικὰ μέτρα, θὰ δοῦμε ὅτι θὰ χωρέση 25 τετραγωνικὰ μέτρα. Ὥστε ἡ ἐπιφάνεια τοῦ τετραγώνου, ποὺ ἡ πλευρά του ἔχει μῆκος 5 μ., εἶναι 25 τετρ. μέτρα, δηλ. 5 × 5. Ἄρα· γιὰ νὰ μετρήσωμε τὴν ἐπιφάνεια τοῦ τετραγώνου σὲ τετραγωνικὰ μέτρα, κάνομε τὰ ἑξῆς :



Σχ. 35

1ον) Μετροῦμε πόσα γαλλικὰ μέτρα εἶναι τὸ ***μῆκος*** του· ἄλλα τόσα μέτρα θὰ εἶναι καὶ τὸ πλάτος του.

2ον) Πολλαπλασιάζομε τὸ μῆκος ἐπὶ τὸ πλάτος. Ἐπειδὴ ὅμως εἰς τὸ τετράγωνο τὸ μῆκος εἶναι ἴσο μὲ τὸ πλάτος καὶ τὸ καθένα εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου, πολλαπλασιάζομε τὴν πλευρὰ ἐπὶ τὸν ἑαυτό της. Ὁ ἀριθμὸς ποὺ θὰ βροῦμε λέει, πόσα τετραγωνικὰ μέτρα εἶναι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ τετραγώνου. Ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς λέγεται ***ἐμβαδὸν*** τοῦ τετραγώνου. Στὸ σχῆμα 35, τὸ ἐμβαδὸν εἶναι : 5 × 5 = 25 τ. μ.

Ὥστε : *Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραγώνου, πολλαπλασιάζομε τὴν πλευρά του ἐπὶ τὸν ἑαυτόν της.*

Ἐμβ. τετραγ. = πλευρὰ × πλευρά, ἢ Ἐμβ. τετραγ. = μῆκος × πλάτος, ἢ καὶ Ἐμβ. τετραγ. = βάση × ὕψος.		τύπος

Σημείωση. Γιὰ νὰ τρέψωμε :

1) Τετραγωνικὰ μέτρα σὲ τετραγωνικοὺς τεκτονικοὺς πήχεις, τὰ πολλαπλασιάζομε ἐπὶ 16 καὶ διαιροῦμε διὰ 9. (τ. μ. $\times \frac{16}{9}$ = τ.τ.π.) (*)

2) Τετραγωνικοὺς τεκτονικοὺς πήχεις σὲ τετραγωνικὰ μέτρα, τοὺς πολλαπλασιάζομε ἐπὶ 9 καὶ διαιροῦμε διὰ 16. (τ. τ. π. $\times \frac{9}{16}$ = τ. μ.) (**).

Προβλήματα

1) Τὸ πάτωμα ἑνὸς δωματίου ἔχει σχῆμα τετραγώνου. Ἡ μία πλευρά του εἶναι 3, 80 μ. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδόν του ;

2) Ἕνας κῆπος τετραγωνικὸς ἔχει περίμετρο 48 μ. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδόν του ;

3) Ἕνα οἰκόπεδο σχήματος τετραγώνου ἔχει πωληθῆ πρὸς 200.000 δραχμὲς τὸν τετραγ. τεκτον. πῆχυ. Ἡ μία πλευρά του ἔχει μῆκος 18, 60 μ. Πόσες δραχμὲς ἔπιασε ἀπὸ τὴν πώληση τοῦ οἰκοπέδου τούτου ὁ ἰδιοκτήτης του ;

4) Τὸ δάπεδο ἑνὸς δωματίου εἶναι τετράγωνο καὶ ἔχει πλευρὰ 6,4 μ. Θέλομε νὰ τὸ στρώσωμε μὲ τετραγωνικὰ πλακάκια ποὺ κάθε πλευρά τους ἔχει μῆκος 0,20 μ. Πόσα πλακάκια θὰ μᾶς χρειασθοῦν ;

5) Ὁ κῆπος μιᾶς πλατείας ἔχει σχῆμα τετράγωνο μὲ πλευρὰ 25 μ. Θέλομε νὰ τὸν δεντροφυτέψωμε καὶ κάθε δένδρο νὰ ἀναλογῆ σὲ ἐπιφάνεια 10 τ. μ. Πόσα δένδρα θὰ φυτέψωμε ;

6) Θέλω νὰ πλακοστρώσω τὴν τετραγωνικὴ αὐλή μου, ποὺ ἡ περίμετρός της εἶναι 48 μ. Πόσα θὰ μοῦ κοστίση ἡ πλακόστρωση, ἂν κάθε πλακάκι τετραγωνικὸ μὲ πλευρὰ 0,25 μ., ἔχει 250 δραχμὲς καὶ ὁ τεχνίτης θέλει νὰ πληρωθῆ γιὰ τὴν ἐργασία του, πρὸς 5.000 δραχμὲς τὸ τετραγωνικὸ μέτρο ;

7) Ἕνα ἀκαλλιέργητο κτῆμα ποὺ ἔχει σχῆμα τετράγωνο μὲ πλευ-

(*) Ἡ πράξη διαίρεση. Διαιρέτης τὸ $\frac{9}{16}$.

(**) Ἡ πράξη πολλαπλασιασμός. Πολλαπλασιαστὴς τὸ $\frac{9}{16}$.

8) Πόσα χρήματα θα πάρουν;

ρὰ 120 μ., πωλήθηκε πρὸς 200.000. δρ. τὸ στρέμμα. Πόσες δραχμὲς πῆρε ὁ ἰδιοκτήτης του;

8) Δύο ἀδέλφια εἶχαν πάρει ἀπὸ κληρονομιὰ ἕνα οἰκόπεδο σχήματος τετραγώνου μὲ πλευρὰ 25,60 μ. Τὸ οἰκόπεδο αὐτὸ πωλήθηκε πρὸς 400.000 δραχ. τὸν τετρ. τεκτ. πῆχυ. Πόσα θὰ πάρη ὁ πρῶτος ἀδελφὸς ποὺ ἐδικαιοῦτο νὰ πάρη τὰ $\frac{3}{5}$, καὶ πόσο ὁ ἄλλος;

9) Πές μας, μὲ τί θὰ μετρήσω τὴν πλευρὰ ἑνὸς κτήματος τετραγωνικοῦ ποὺ εἶναι πολὺ μεγάλη; (κορδέλλα).

Ἐμβαδὸν ἐπιφανείας κύβου

Ἀφοῦ μάθαμε πῶς βρίσκομε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραγώνου, εἶναι εὔκολο νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφανείας τοῦ κύβου.

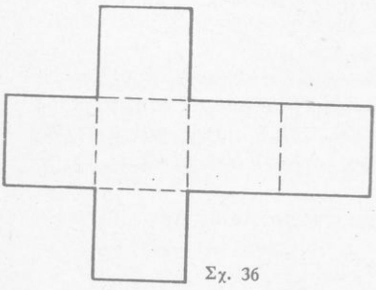
Ἕως τώρα ξέρομε, ὅτι ἐμβαδὸν εἶναι ὁ ἀριθμὸς ποὺ μᾶς δείχνει πόσα τετραγωνικὰ μέτρα εἶναι μία ἐπιφάνεια. Ξέρομε ἀκόμη, ὅτι γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τετραγώνου, πολλαπλασιάζομε τὸ μῆκος τῆς μιᾶς πλευρᾶς του ἐπὶ τὸν ἑαυτόν της, ἐπειδὴ στὸ τετράγωνο τὸ μῆκος καὶ τὸ πλάτος του εἶναι τὸ ἴδιο. Ξέρομε ἐπισης, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κύβου ἀποτελεῖται ἀπὸ 6 τετράγωνα ἴσα, ποὺ λέγονται ἕδρες.

Τί θὰ κάνωμε λοιπὸν γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύβου; Θὰ πολλαπλασιάσωμε τὸ ἐμβαδὸν μιᾶς ἕδρας του ἐπὶ 6, γιατὶ τόσες εἶναι οἱ ἕδρες του.

Γιὰ νὰ εὕρωμε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τοῦ κύβου, πολλαπλασιάζομε τὸ ἐμβαδὸν μιᾶς ἕδρας του ἐπὶ 6.

Ἀνάπτυγμα τῆς ἐπιφανείας τοῦ κύβου

Ἂν πάρωμε ἕναν κύβο ἀπὸ χαρτόνι καὶ κόψωμε τὸ χαρτόνι στὶς τρεῖς ἀκμὲς τῆς ἄνω βάσεως καὶ στὶς τέσσερες παράπλευρες ἀκμές, τότε οἱ ἕδρες τοῦ κύβου ἀνοίγουν καὶ μποροῦμε νὰ τὶς ἁπλώσωμε ἀπάνω στὸ ἐπίπεδο τῆς βάσεώς του. Τὸ σχῆμα ποὺ θἄχη τώρα τὸ χαρτόνι (σχ. 36), εἶναι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κύβου, ἁπλωμένη σ' ἕνα ἐπίπεδο, καὶ λέγεται ***ἀνάπτυγμα τῆς ἐπιφανείας τοῦ κύβου.***



Σχ. 36

Κάντε μὲ χαρτόνι ἕνα σχῆμα σὰν τὸ σχ. 36, μὲ ἓξ τετράγωνα συνεχόμενα ὅπως σ' αὐτό. Διπλῶστε το ὥστε νὰ κάνετε κύβο. Στὶς ἑνώσεις βάλτε χαρτὶ λεπτὸ μὲ γόμμα.

120 [illegible]. 200,000

Προβλήματα

1) Τὸ μῆκος μιᾶς ἀκμῆς κύβου εἶναι 1,20 μ. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφανείας του;

2) Ἡ ἀκμὴ ἑνὸς κύβου εἶναι 0,40 μ. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδὸν μιᾶς ἕδρας του καὶ πόσο τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφανείας του;

3) Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κύβου εἶναι 48 τ.μ. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς μιᾶς ἕδρας του;

4) Ἕνας κτηματίας ἔχει ἕνα μεγάλο τεπόζιτο τσίγκινο σχήματος κύβου. Ἡ ἀκμή του εἶναι 2,10 μ. Θέλει νὰ τὸ χρωματίσῃ ἐξωτερικῶς. Πόσα θὰ πληρώσῃ, ἐὰν γιὰ κάθε τετραγωνικὸ μέτρο τοῦ ζητοῦν 15.000 δραχμές;

5) Ἕνα δωμάτιο κυβικὸ θέλουν νὰ τὸ σκεπάσουν μὲ χαρτὶ ταπετσαρίας, τοῦ ὁποίου τὸ τετραγωνικὸ μέτρο ἔχει 950 δραχμές. Ἡ ἀκμὴ τοῦ δωματίου εἶναι 5,20 μ. Πόσα τετραγωνικὰ μέτρα χαρτὶ θὰ χρειασθῇ; (Τὸ ταβάνι καὶ τὸ πάτωμα δὲν θὰ σκεπασθοῦν).

ΜΟΝΑΔΕΣ ΟΓΚΟΥ ἢ ΧΩΡΗΤΙΚΟΤΗΤΟΣ

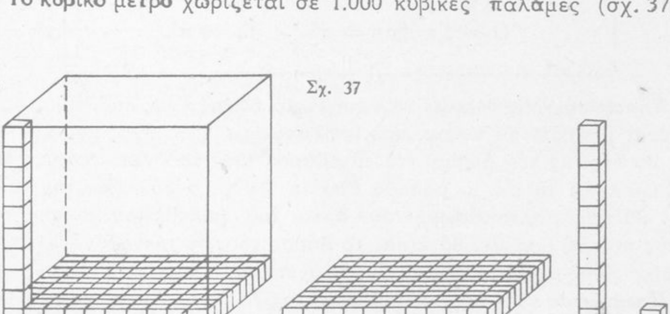
Ξέρομε πὼς οἱ διαστάσεις τοῦ κύβου (μῆκος, πλάτος, ὕψος) εἶναι ἴσες. Ἔχομε ἕνα κύβο τοῦ ὁποίου οἱ διαστάσεις εἶναι ἀπὸ ἕνα μέτρο. Τότε τὸν κύβο αὐτὸν τὸν λέμε ***κυβικὸ μέτρο.***

Ὑποθέστε ὅτι ὁ κύβος αὐτὸς (τὸ κυβικὸ μέτρο), εἶναι δοχεῖο γεμᾶτο: 1) Μὲ νερό. 2) Μὲ λάδι. 3) Μὲ σίδερο. 4) Μὲ μολύβι κλπ. Ἄλλοτε θἆναι βαρύτερος καὶ ἄλλοτε ἐλαφρότερος. Ὅμως ὅλες τὶς φορὲς θὰ πιάνῃ τὸν ἴδιο χῶρο. Τὸν χῶρο αὐτόν, τὸν λέμε ***κυβικὸ μέτρο.***

Τὸ κυβικὸ μέτρο τὸ ἔχομε ὡς μονάδα γιὰ νὰ μετρᾶμε τὸν χῶρο ποὺ πιάνει κάθε σῶμα.

Μὲ τὸ κυβ. μ., πιὸ κάτω θὰ μάθωμε νὰ μετρᾶμε τὸν χῶρο ποὺ πιάνει ἕνα σῶμα μικρὸ ἢ μεγάλο.

Τὸ κυβικὸ μέτρο χωρίζεται σὲ 1.000 κυβικὲς παλάμες (σχ. 37). Ἡ



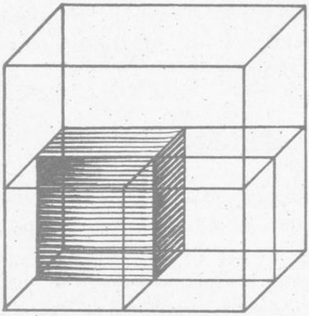
Σχ. 37

κυβικὴ παλάμη εἶναι κύβος μὲ πλευρὰ 1 παλάμη. Κάθε κυβικὴ παλάμη χωρίζεται σὲ 1.000 κυβικοὺς δακτύλους. Ὁ κυβικὸς δάκτυλος εἶναι κύβος μὲ πλευρὰ 1 δάκτυλο. Κάθε κυβικὸς δάκτυλος χωρίζεται σὲ 1.000 κυβικὲς γραμμές. Ἡ κυβικὴ γραμμὴ εἶναι κύβος μὲ πλευρὰ 1 γραμμή.

Ὅταν γεμίσωμε ἕνα δοχεῖο ποὺ ἔχει σχῆμα ἑνὸς κυβικοῦ μέτρου μὲ νερὸ ἀπεσταγμένο 4 βαθμῶν Κελσίου, τὸ βάρος τοῦ νεροῦ ποὺ χωράει σ' αὐτὸ τὸ δοχεῖο θἆναι ἕνας τόννος· 1 τόννος = 781 ὀκ. περίπου.

Ὄγκος κύβου

Ἔχομε ἕναν κύβο μὲ πλευρὰ 2 μ. Γιὰ νὰ βροῦμε πόσα κυβικὰ μέτρα εἶναι, τὸν χωρίζομε ὅπως στὸ σχῆμα 38.



Σχ. 38

Στὴν κάτω βάση του θὰ ἀκουμποῦν $2 \times 2 = 4$ κυβ. μέτρα καὶ θὰ φτιάνουν μία πλάκα ποὺ θἄχη 1 μ. ὕψος. Τὸ δεύτερο μέτρο τοῦ ὕψους του, θὰ μᾶς φτιάση ἄλλη μία πλάκα μὲ 4 κ. μ. Καὶ ὅλα τὰ κυβ. μ. θἆναι (2×2) ποὺ εἶναι ἡ πρώτη πλάκα, κι' αὐτὸ ἐπὶ 2, γιατὶ ἔχομε 2 τέτοιες πλάκες.

Ὁ κύβος μας θἆναι ἐν ὅλω:

$2 \times 2 \times 2 = 8$ κ. μ.

Ἂν ἡ πλευρὰ ἄλλου κύβου εἶναι 3 μ., τότε θὰ χωρίζεται σὲ $3 \times 3 \times 3 = 27$ κ. μ.

Τὸν ἀριθμὸ 8 κ. μ., ποὺ λέει πόσο χῶρο πιάνει ὁ πρῶτος κύβος, ὅπως καὶ τὸν ἀριθμὸ 27 κ. μ. ποὺ λέει πόσο χῶρο πιάνει ὁ δεύτερος κύβος, τὸν λέμε ***ὄγκο τοῦ καθενὸς κύβου.***

Ὥστε : ***Γιὰ νὰ βροῦμε τὸν ὄγκο ἑνὸς κύβου ποὺ ξέρομε τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς του, πολλαπλασιάζομε πλευρὰ × πλευρὰ × πλευρά.***

Ὄγκος κύβου = πλ. × πλ. × πλ.	**τύπος**

Σημείωση. Ἂν θέλωμε νὰ βροῦμε τὸ βάρος ἑνὸς κυβικοῦ σώματος, π. χ. ἑνὸς μολυβένιου κύβου, ποὺ ὑπολογίσαμε τὸν ὄγκο του σὲ κ. μ., ἀρκεῖ νὰ ξέρωμε τὸν ἀριθμὸ (τὸ εἰδ. βάρος του) ποὺ λέει πόσες φορὲς βαρύτερο εἶναι τὸ 1 κ. μ. μολύβι, ἀπὸ τὸ 1 κ. μ. νερό. Μὲ τὸν ἀριθμὸ αὐτόν, θὰ πολλαπλασιάσωμε τὸν ὄγκο τοῦ μολυβένιου κύβου καὶ ὁ ἀριθμὸς ποὺ θὰ βροῦμε, θὰ εἶναι τὸ βάρος του, σὲ τόννους. (Πίνακας μὲ τὰ εἰδικὰ βάρη μερικῶν σωμάτων ὑπάρχει στὸ τέλος τοῦ βιβλίου).

Παράδειγμα: Ἕνας μολυβένιος κύβος ἔχει ὄγκο 10 κ. μ. Πόσο εἶναι τὸ βάρος του; (εἰδ. βάρ. μολυβιοῦ = 11,3).

Τὸ βάρος τοῦ μολυβένιου κύβου = 113 τόννοι.

Προβλήματα

(Πρὶν λύσης τὰ παρακάτω προβλήματα, θυμήσου καλὰ ὅλες τὶς μονάδες βάρους καὶ ὄγκου ἢ χωρητικότητος, δικές μας καὶ ξένες).

1) Ἑνὸς κύβου ἡ μία διάστασῃ εἶναι 0,80 μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος του;

2) Τὸ ὕψος μιᾶς κυβικῆς δεξαμενῆς εἶναι 6,20 μ. Πόσα κυβικὰ μέτρα εἶναι ἡ δεξαμενή; Καὶ πόσες ὀκάδες τὸ νερὸ ποὺ χωράει σ' αὐτήν;

3) Ποῖος εἶναι ὁ ὄγκος ἑνὸς κύβου, εἰς τὸν ὁποῖον ἡ περίμετρος μιᾶς ἕδρας του εἶναι 8,40 μ.;

4) Ἔχει ἕνας πολλὲς σανίδες τοποθετημένες σὲ σχῆμα κύβου. Ἡ πλευρὰ τοῦ κύβου αὐτοῦ εἶναι 3,50 μ. Τὶς πούλησε πρὸς 325.000 δραχ. τὸ κυβικὸ μέτρο. Πόσες δραχμὲς πῆρε;

5) Ἕνας ἔφτιασε δίπλα στὸ σπίτι του μία δεξαμενὴ κυβικὴ γιὰ νὰ μαζεύῃ νερὸ τῆς βροχῆς. Ἡ μία διάστασή της εἶναι 2,8 μ. Πόσες ὀκάδες νερὸ χωράει;

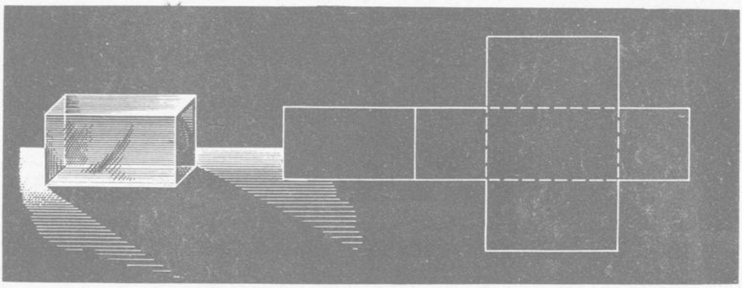
6) Μία κυβικὴ ἀποθήκη ἔχει ὕψος 6 μ. Τὴν γέμισαν μὲ σιτάρι. Πόσους τόννους σιτάρι χώρεσε, ἐὰν τὸ εἰδικὸ βάρος τοῦ σιταριοῦ εἶναι 1,60; (Τὸ βάρος, εἶναι ἴσον μὲ τὸν ὄγκον ἐπὶ τὸ εἰδικὸν βάρος).

7) Ἕνας ἐλαιοπαραγωγὸς ἔχει ἕνα μεγάλο δοχεῖο κυβικό, ποὺ τὸ πλάτος του εἶναι 3,20 μ. Πόσες ὀκάδες λάδι χωρεῖ, ἐὰν τὸ εἰδικὸ βάρος τοῦ λαδιοῦ εἶναι 0,912;

8) Μία αἴθουσα σχολείου ἔχει σχῆμα κύβου μὲ ἀκμὴ 6 μ. Γιὰ πόσους μαθητὰς εἶναι, ἂν γιὰ κάθε μαθητὴ χρειάζωνται 4 κυβικὰ μέτρα ἀέρος;

Ἀσκήσεις

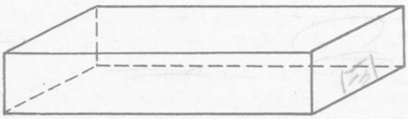
1) Νὰ βρῆς ἐπιφάνειες τετραγωνικές.
2) Νὰ κάμης ἀπὸ μία κόλλα χαρτὶ ἕνα τετράγωνο, χωρὶς νὰ χρησιμοποιήσης μέτρο.
3) Κάμε ἕνα κύβο ἀπὸ χαρτόνι.
4) Ἂν μπορῇς, κάμε καὶ ἕνα κύβο ἀπὸ πηλό.
5) Κάμε ἀπὸ χαρτόνι ἢ ἀπὸ σανίδι, ἕνα κουμπαρᾶ κυβικό.
6) Ἰχνογράφησε ἕνα τετράγωνο καὶ ἕνα κύβο.



ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΠΙΠΕΔΟ

Ἔχομε μερικὰ σώματα, ποὺ ἔχουν σχῆμα σὰν τοῦ κύβου, δὲν εἶναι ὅμως κύβοι.

Προσέξτε τὴν κασετίνα σας, τὸ κουτὶ ἀπὸ τὰ σπίρτα, τὶς πλάκες τοῦ σαπουνιοῦ. Θὰ σᾶς δείξη καὶ ὁ δάσκαλός σας ἕνα τέτοιο σῶμα.



Σχ. 39

Τὸ σχῆμα ποὺ ἔχουν τὰ στερεὰ αὐτὰ λέγεται ***ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο*** (σχ. 39).

Ἂν τὸ ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο τὸ παραβάλωμε μὲ τὸν κύβο θὰ δοῦμε ὅτι :

α) Ἔχει τὶς παρακάτω ***ὁμοιότητες :***

1) Ἔχει καὶ αὐτὸ 6 ἕδρες· μέτρησέ τες.

2) Ἔχει καὶ αὐτὸ 12 ἀκμές· μέτρησέ τες.

3) Ἔχει καὶ αὐτὸ 8 κορυφές· μέτρησέ τες.

4) Ὅταν τὸ βάλωμε ἀπάνω στὸ τραπέζι, ἡ ἀπάνω καὶ ἡ κάτω ἕδρες εἶναι ὁριζόντιες.

5) Τότε οἱ ἄλλες 4 εἶναι κατακόρυφες.

6) Κάθε δύο ἀπέναντι ἕδρες του, εἶναι παράλληλες.

7) Κάθε ἕδρα του ἔχει τέσσερες πλευρὲς ποὺ φτιάνουν ὀρθὲς γωνίες.

8) Ἡ ἐπιφάνειά του εἶναι τεθλασμένη.

β) Ἔχει ὅμως καὶ ***διαφορές·***

1) Οἱ ἕδρες του δὲν εἶναι ὅλες ἴσες, ὅπως τοῦ κύβου. Εἶναι μόνον ἴσες, δύο - δύο, οἱ ἀπέναντι ἕδρες.

2) Οἱ ἕδρες τοῦ κύβου εἶναι τετράγωνα, ἐνῶ στὸ ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο, ἔχουν ἄλλο σχῆμα.

3) Ἔχει τρεῖς διαστάσεις (μῆκος, πλάτος, ὕψος) ἄνισες.

Ὥστε : *Ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο εἶναι τὸ στερεὸ ποὺ ἔχει 6 ἕδρες, οἱ ὁποῖες ἀνὰ δύο ἀπέναντι εἶναι ἴσες καὶ παράλληλες, καὶ ὅλες οἱ γωνίες τῶν ἑδρῶν του εἶναι ὀρθές.*

Δύο ἀπέναντι ἕδρες τοῦ ὀρθογ. παραλ]δου, ὅποιες θέλομε, τὶς λέμε *βάσεις* του.

Ὅταν τὸ ὀρθογ. παραλληλεπίπεδο (σχ. 39), εἶναι τοποθετημένο μὲ μία του βάση ἀπάνω στὸ τραπέζι, αὐτὴ λέγεται ***κάτω βάση*** καὶ ἡ ἀπάνω, ***ἄνω βάση.***

Κάθε μία ἀκμὴ ποὺ ἑνώνει τὶς δύο βάσεις, εἶναι τὸ ὕψος τοῦ ὀρθογ. παραλληλεπιπέδου. Οἱ 4 ἄλλες ἕδρες του ποὺ εἶναι γύρω - γύρω, λέγονται παράπλευρες ἕδρες καὶ ἀποτελοῦν τὴν ***παράπλευρο ἐπιφάνεια*** τοῦ ὀρθογ. παραλληλεπιπέδου. Ἐνῶ ὅλες οἱ ἕδρες μαζὶ κάνουν τὴν ***ὁλικὴ ἐπιφάνεια*** αὐτοῦ.

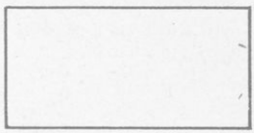
Ἀσκήσεις

1) Κατὰ τί διαφέρει τὸ ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο ἀπὸ τὸν κύβο ;
2) Νὰ βρῆς μέσα στὸ σχολεῖο ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα.
3) Νὰ βρῆς στὸ σπίτι σου τέτοια γεωμετρικὰ σώματα.
4) Νὰ ἰχνογραφήσης στὸ τετράδιό σου ἕνα ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο.
5) Κάμε ἀπὸ χαρτόνι ἕνα ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο.
6) Ὑπάρχουν ἀπὸ ξύλο ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα : Ποιά ;
7) Κάμε καὶ ἀπὸ πηλὸ ἕνα ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο, ἂν μπορῆς.
8) Νὰ δείξης μία ἕδρα τοῦ ὀρεογωνίου παραλληλεπιπέδου καὶ νὰ βρῆς τὶς κάθετες ἀκμὲς πρὸς αὐτήν.
9) Τὴν ἴδια ἐργασία κάμε την καὶ μὲ ἄλλη ἕδρα.

ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟ

Ἂν πάρωμε μία ἕδρα τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου καὶ τὴν ἰχνογραφήσωμε στὸ τετράδιό μας, θὰ μᾶς δώση σχῆμα σὰν τὸ σχ. 40.

Ἂν παραβάλωμε τὸ σχῆμα αὐτὸ μὲ τὸ τετράγωνο, θὰ δοῦμε ὅτι ἔχει τὶς γωνίες του ὀρθές, ὅπως καὶ τὸ τετράγωνο· δὲν ἔχει ὅμως ὅλες τὶς πλευρές του ἴσες, ἀλλὰ τὶς ἀνὰ δύο ἀπέναντι πλευρὲς ἴσες.



Σχ. 40

Αὐτὸ τὸ σχῆμα λέγεται ***ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο***, ἢ ἁπλῶς ***ὀρθογώνιο.***

Ὥστε : ***Ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο ἢ ὀρθογώνιο, εἶναι τὸ σχῆμα ποὺ ἔχει 4 πλευρές, ἀνὰ δύο ἀπέναντι ἴσες καὶ παράλληλες, καὶ τὶς 4 γωνίες του ὀρθές.***

Τὸ ὀρθογώνιο, ὅπως βλέπετε, εἶναι μία ἐπιφάνεια καὶ σὰν ἐπιφάνεια ἔχει δύο διαστάσεις, *πλάτος* καὶ *μῆκος* καὶ τὸ μετρᾶμε μὲ τετραγωνικὰ μέτρα.

Ὅποια πλευρά του θέλομε τὴ λέμε *βάση*· τότε κάθε πλευρὰ ἀπὸ τὶς δύο κάθετες σ' αὐτή, εἶναι *ὕψος* τοῦ ὀρθογωνίου.

Τὸ ἄθροισμα τῶν 4 πλευρῶν τοῦ ὀρθογωνίου λέγεται *περίμετρος* αὐτοῦ.

Πῶς βρίσκομε τὸ μῆκος τῆς περιμέτρου τοῦ ὀρθογωνίου

α) Ἀφοῦ ξέρομε ὅτι ἀνὰ δύο ἀπέναντι οἱ πλευρὲς τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι ἴσες, ὅσο μῆκος ἔχει ἡ μία πλευρά, τόσο θὰ ἔχῃ καὶ ἡ ἀπέναντί της.

Ὥστε : ***Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ μῆκος τῆς περιμέτρου τοῦ ὀρθογωνίου, εἶναι ἀρκετὸ νὰ μετρήσωμε τὶς δύο ἄνισες πλευρές, νὰ τὶς προσθέσωμε, καὶ νὰ διπλασιάσωμε τὸ ἄθροισμα αὐτό.***

Π.χ. Ἕνα ὀρθογώνιο ἔχει ἄνισες πλευρές, τὴ μία 5 μ. καὶ τὴν ἄλλη 3 μ. Καὶ οἱ δύο μαζὶ θὰ εἶναι $5 + 3 = 8$ μ. Καὶ ἡ περίμετρος, $8 \times 2 = 16$ μ.

β) Ἢ σκεπτόμαστε· ἀνὰ δύο οἱ ἀπέναντι πλευρὲς τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι ἴσες. Ὥστε στὸ παράδειγμά μας θὰ εἶναι, $5 \times 2 = 10$ μ., οἱ 2 μεγάλες ἴσες πλευρές· καὶ $3 \times 2 = 6$ μ., οἱ 2 μικρὲς ἴσες πλευρές. Καὶ ἡ περίμετρος τοῦ ὀρθογωνίου θὰ εἶναι, $10 + 6 = 16$ μ.

Προβλήματα

1) Ἕνα ὀρθογώνιο πάτωμα ἔχει μῆκος 8 μ. καὶ πλάτος 5 μ. Πόσα μέτρα εἶναι ἡ περίμετρός του ;

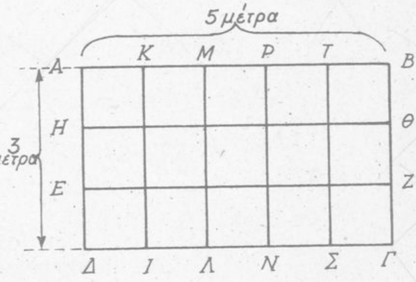
2) Ἕνα ὀρθογώνιο ἔχει βάση 10 μ. καὶ ὕψος 6 μ. Πόσα μέτρα εἶναι ἡ περίμετρός του ;

3) Ἔχομε ἕνα κῆπο σχήματος ὀρθογωνίου. Ἡ μεγάλη πλευρά του εἶναι 20 μ. καὶ ἡ μικρή του 8 μ. Θέλομε νὰ τὸ περιφράξωμε μὲ 4 σειρὲς σύρμα. Πόσα μέτρα σύρμα χρειάζονται ;

4) Ἕνας κτηματίας ἔχει ἕνα κτῆμα ὀρθογώνιο, μὲ μῆκος 56 μ. καὶ πλάτος 20 μ. Θέλει νὰ σκάψῃ γύρω - γύρω ἕνα αὐλάκι καὶ τοῦ ζητοῦν γιὰ κάθε μέτρο 1500 δραχμές. Πόσες δραχμὲς θὰ πληρώσῃ γιὰ ὅλο τὸ αὐλάκι ;

Ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου

Προσέξτε τὸ ὀρθογώνιο ΑΒΓΔ (σχ. 41). Ἡ ΑΔ εἶναι 3 μ. καὶ ἡ ΔΓ εἶναι 5 μ. Μὲ τὶς εὐθεῖες ΕΖ καὶ ΗΘ χωρίσαμε τὴν ἐπιφάνεια τοῦ ὀρθογωνίου σὲ τρεῖς λωρίδες μὲ πλάτος ἕνα μέτρο. Μὲ τὶς εὐθεῖες ΙΚ, ΛΜ, ΝΡ, ΣΤ χωρίσαμε κάθε λωρίδα σὲ 5 τετράγωνα ποὺ ἔχουν πλευρὲς 1 μ. Δηλαδὴ κάθε τέτοιο τετράγωνο εἶναι ἕνα τετραγωνικὸ μέτρο. Ἡ κάθε



Σχ. 41

λωρίδα εἶναι 5 τ. μ., οἱ 3 λωρίδες $3 \times 5 = 15$ τ. μ.

Ὥστε τὴν ἐπιφάνεια τοῦ ὀρθογωνίου τὴ μετροῦμε ὅπως καὶ τὴν ἐπιφάνεια τοῦ τετραγώνου. Μετροῦμε δηλαδὴ τὸ μῆκος καὶ τὸ πλάτος καὶ τὰ πολλαπλασιάζομε· τὸ γινόμενον θὰ εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὀρθογωνίου.

Ἡ διαφορὰ εἶναι ὅτι στὸ τετράγωνο μετροῦμε μόνον μία πλευρά του, τὸ μῆκος (τὴ βάση), γιατὶ οἱ ἄλλες, ἄρα καὶ τὸ πλάτος (τὸ ὕψος)· εἶναι ἴσες μ' αὐτή. Ἐνῶ δὲν μποροῦμε νὰ κάνωμε τὸ ἴδιο καὶ στὸ ὀρθογώνιο, γιατὶ τὸ μῆκος του δὲν εἶναι ἴσο μὲ τὸ πλάτος του, δηλ. ἡ βάση μὲ τὸ ὕψος.

Π.χ. ἔχομε ἕνα ὀρθογώνιο, ποὺ τὸ μῆκος του εἶναι 6,40 μ. καὶ τὸ πλάτος του 4,20 μ. Τὸ ἐμβαδόν του θὰ εἶναι $6{,}40 \times 4{,}20 = 26{,}88$ τ. μ

Ὥστε: ***Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου, πολλαπλασιάζομε τὸ μῆκος ἐπὶ τὸ πλάτος του, δηλ, τὴ βάση ἐπὶ τὸ ὕψος· τὸ γινόμενον ποὺ βρίσκομε εἶναι τὸ ἐμβαδόν του.***

Ἄρα : **Ἐμβ. ὀρθογ. = μῆκος × πλάτος**	
ἢ **Ἐμβ. ὀρθογ. = βάση × ὕψος**	**τύπος**

Προβλήματα

1) Μέτρησε τὸ μῆκος καὶ τὸ πλάτος τοῦ πατώματος τῆς τάξεώς σου, καὶ πές μας πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδόν του;

2) Μέτρησε τὸν πίνακά σου γιὰ νὰ βρῆς τὸ ἐμβαδόν του καὶ πές μας πόσο εἶναι.

3) Μέτρησε τὴν πόρτα τοῦ δωματίου σου, καὶ πές μας τὸ ἐμβαδόν της.

4) Μία αὐλὴ σχήματος ὀρθογωνίου, μὲ βάση 8,40 μ. καὶ ὕψος 4,80 μ., πρόκειται νὰ στρωθῆ μὲ πλακάκια τετράγωνα πλευρᾶς 0,20 μ. Πόσα πλακάκια θὰ χρειασθοῦν;

5) Τὸ δάπεδο ἑνὸς δωματίου ὀρθογωνίου ἔχει μῆκος 6,20 μ. καὶ πλάτος 4,60 μ. Πόσες σανίδες μήκους 3,1 μ. καὶ πλάτους 0,10 μ., θὰ χρειασθοῦν γιὰ νὰ τὸ πατώσωμε;

6) Ἕνα χωράφι σχήματος ὀρθογωνίου ποὺ ἔχει μῆκος 60 μ. καὶ πλάτος 40 μ., πουλήθηκε πρὸς 300.000 δρχ. τὸ στρέμμα. Πόσες δραχ. πῆρε ὁ ἰδιοκτήτης του;

7) Ἀγόρασε ἕνας ἕνα κτῆμα ἀκαλλιέργητο σχήματος ὀρθογωνίου, ποὺ ἔχει μῆκος 120 μ. καὶ πλάτος 45,50 μ. Θέλει τώρα νὰ τὸ κάμη ἀμπέλι καὶ νὰ φυτέψη κλήματα. Πόσα κλήματα θὰ φυτέψη στὸ κτῆμα του αὐτό, ἂν σὲ κάθε τετραγωνικὸ μέτρο φυτεύη 2 κλήματα ;

8) Ἕνα οἰκόπεδο σχήματος ὀρθογωνίου, ποὺ ἔχει μῆκος 60 μ. καὶ πλάτος 35,40 μ., πουλήθηκε πρὸς 200.000 δρχ. τὸν τετραγ. τεκτονικὸ πῆχυ. Πόσες δραχμὲς ἔδωσε ὁ ἀγοραστής ;

9) Μία τάξη ἔχει μῆκος 5,8 μ. καὶ πλάτος 4 μ. Πόσους μαθητὰς χωράει, ἂν γιὰ κάθε μαθητὴ χρειάζονται 0,80 τ. μ. ἀπ' τὸ πάτωμα ;

10) Κάμε μόνος σου ἕνα ὀρθογώνιο. Μέτρησέ το καὶ πές μας τὸ ἐμβαδόν του.

ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ ΥΠΟ ΚΛΙΜΑΚΑ

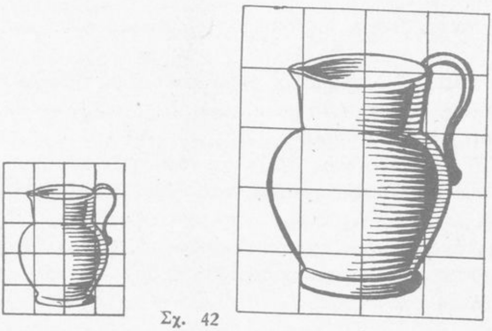
Ἔχομε στὸν πίνακα κρεμασμένους, τὸ χάρτη τῆς Ἑλλάδος καὶ τὸ χάρτη τῆς Εὐρώπης. Κυττᾶμε στὸ χάρτη τῆς Εὐρώπης καὶ βρίσκομε τὴν Ἑλλάδα. Τὴν γνωρίζομε ἀπὸ τὸ σχῆμα, ἂς εἶναι τὸ σχῆμα της πιὸ μικρὸ στὸ χάρτη τῆς Εὐρώπης. Αὐτὰ τὰ δύο σχήματα τῆς Ἑλλάδος, τὸ ἕνα μεγάλο καὶ τὸ ἄλλο μικρό, τὰ λέμε ***ὅμοια.***

Εἴχαμε μία μικρὴ φωτογραφία τοῦ παπποῦ καὶ τὴ δώσαμε στὸ φωτογράφο καὶ μᾶς τὴ μεγάλωσε. Ἡ μικρὴ καὶ ἡ μεγεθυσμένη φωτογραφία τοῦ παπποῦ, εἶναι σχήματα ὅμοια.

Ἄλλες φορές, σχήματα ποὺ ἔχομε, τὰ μεγεθύνομε καὶ ἄλλες, τὰ σμικρύνομε.

Ἀλλὰ ἡ μεγέθυνση ἢ ἡ σμίκρυνση εἶναι τέτοια ὥστε : ἡ ἀπόσταση δύο σημείων στὸ μεγάλο σχῆμα εἶναι τόσες φορὲς μεγαλύτερη ἀπὸ τὴν ἀπόσταση τῶν αὐτῶν σημείων στὸ μικρό, ὅσες φορὲς εἶναι μεγαλύτερη καὶ ἡ ἀπόσταση δύο ἄλλων τυχόντων σημείων στὸ μεγάλο σχῆμα, ἀπὸ τὴν ἀπόσταση τῶν αὐτῶν σημείων στὸ μικρό.

Γιὰ νὰ μεγεθύνωμε ἕνα σχῆμα κάνομε τὴν ἑξῆς ἐργασία : Ἔχομε



Σχ. 42

α β

π.χ. τὸ βάζο τοῦ σχ. 42 **α** καὶ θέλομε νὰ τὸ μεγαλώσωμε. Τὸ κλείνομε σ' ἕνα ὀρθογώνιο χωρισμένο σὲ τετράγωνα μὲ πλευρὰ μισὸ πόντο. Φτιάνομε ἕνα νέο ὀρθογώνιο, τὸ ὀρθογώνιο τοῦ σχ. 42 **β**, μὲ πλευρὲς π.χ διπλάσιες ἀπ' τὸ πρῶτο, χωρισμένο κι' αὐτὸ σὲ τετράγωνα ἀλλὰ μὲ πλευρὰ ἕνα πόντο, διπλάσια τῆς πλευρᾶς τῶν τετραγώνων τοῦ πρώτου ὀρθογωνίου. Τώρα βλέποντας ἀπὸ ποιὸ τετράγωνο τοῦ μικροῦ περνοῦν οἱ γραμμὲς ποὺ σχηματίζουν τὸ βάζο καὶ ἀπὸ ποιὸ μέρος κάθε τετραγώνου, ζωγραφίζομε στὸ μεγάλο ὀρθογώνιο, τὸ βάζο. Τὸ βάζο αὐτὸ θᾶναι μὲ διπλάσιες διαστάσεις ἀπὸ τὸ μικρὸ καὶ ὅμοιο μ' αὐτό.

Μὲ ἀντίστροφη ἐργασία, ἀπὸ τὸ μεγάλο βάζο μποροῦμε νὰ φτιάσωμε τὸ μικρό.

Τὴν ἴδια ἐργασία κάνομε συνήθως ἅμα ἔχομε νὰ φτιάσωμε ἕνα σχῆμα ὄχι ἀπὸ ἄλλο σχῆμα, ἀλλὰ ἀπὸ τὴν πραγματικότητα. Οἱ μηχανικοί, ὅλα τὰ σχέδια ἔργων ποὺ φτιάχνουν στὸ χαρτί, τὰ κάνουν ὑπὸ σμίκρυνση.

Τὴν ἀπεικόνιση αὐτὴ στὸ χαρτί, σχήματος ὁμοίου πρὸς ἕνα δοθέν, τὴν λέμε ἀπεικόνιση ὑπὸ κλίμακα.

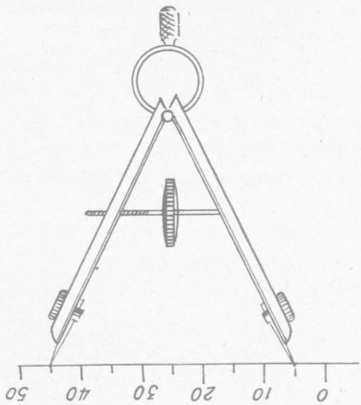
Ἂν μᾶς εἶχαν δώσει τὸ μεγάλο βάζο καὶ φτιάχναμε μεῖς τὸ μικρό, θὰ λέγαμε πὼς ἡ ἀπεικόνιση ἔγινε ὑπὸ κλίμακα $1:2$ ἢ $\frac{1}{2}$ (διαβάζομε· 1 πρὸς 2), γιατὶ τὰ τετράγωνα τοῦ μεγάλου ὀρθογωνίου ἔχουν διπλάσια πλευρὰ ἀπὸ τοῦ μικροῦ.

Ἂν τὰ τετράγωνα τοῦ μεγάλου, εἶχαν πλευρὰ 100 φορὲς μεγαλύτερη, τότε ἡ σμίκρυνση θὰ γινόταν ὑπὸ κλίμακα 1 πρὸς 100. (Γράφομε $1:100$ ἢ $\frac{1}{100}$).

Σχ. 43

Στὸ σχῆμα 43, ἔχομε φτιάσει τὸ σχέδιο τοῦ Σχολείου ἑνὸς χωριοῦ. Τὸ σχολεῖο αὐτὸ ἔχει μῆκος 14 μ. καὶ πλάτος 8 μ. Κάθε μέτρο, στὸ σχῆμα τὸ πήραμε μισὸ πόντο (200 φορὲς μικρότερο. Δηλαδὴ τὸ σχέδιο τὸ φτιάσαμε ὑπὸ κλίμακα 1 πρὸς 200. (Γράφομε· 1 : 200 ἢ $\frac{1}{200}$).

Οἱ γεωγραφικοὶ χάρτες, γίνονται πολλὲς χιλιάδες φορὲς μικρότεροι ἀπὸ τὴν πραγματικότητα. Σὲ μία ἄκρη, ἀπάνω στὸ χάρτη εἶναι γραμμένη ἡ κλίμακα. Γιὰ νὰ βρίσκωμε εὔκολα τὴν ἀπόσταση δύο πόλεων ἀπὸ τὸ χάρτη, κοντὰ στὴν κλίμακα ὑπάρχει ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα ἀριθμημένο, ὥστε νὰ λέη σὲ χιλιόμετρα ἀπάνω του, κάθε ἀπόσταση παρμένη ἀπὸ τὸν χάρτη αὐτὸν (σχ. 44).



Σχ. 44

Γιὰ νὰ βροῦμε σ' αὐτὸν τὸν χάρτη, τὴν εὐθεῖα ἀπόσταση (ὄχι τὴν ὁδικὴ) δύο πόλεων Α καὶ Β, παίρνομε τὸν διαβήτη καὶ βάζομε τὰ σκέλη του στὶς δύο πόλεις. Ἔπειτα βάζομε τὸ ἄνοιγμα τοῦ διαβήτη ἀπάνω στὸ ἀριθμημένο εὐθύγραμμο τμῆμα τοῦ χάρτη καὶ βλέπομε τὴ χιλιομετρικὴ ἀπόσταση τῶν δύο πόλεων· στὸ σχῆμα 44 εἶναι 35 χιλιόμ.

Ἀσκήσεις

1) Μέτρησε καὶ ὑπολόγισε ἀπ' τὸ χάρτη τῆς Εὐρώπης τὴν εὐθεῖα ἀπόσταση· α) τοῦ Πειραιῶς ἀπὸ τὰ Χανιά, β) τοῦ Πειραιῶς ἀπὸ τὴν Σμύρνη, γ) τῆς Νεαπόλεως ἀπὸ τὴν Μασσαλία, δ) τῆς Μασσαλίας ἀπὸ τὴν Μπιζέρτα, ε) τοῦ Πειραιῶς ἀπὸ τὴν Ἀλεξάνδρεια, στ) τοῦ Τόκιο ἀπὸ τὴ Σαγκάη, ζ) τοῦ Βερολίνου ἀπὸ τὴ Βαρσοβία, η) τῶν Παρισίων ἀπὸ τὸ Βερολῖνον.

2) Σχεδίασε ὑπὸ κλίμακα 1 : 100, τὴν τάξη σου.

3) » » » 1 : 200, τὸ Σχολεῖο σου μὲ τὴν αὐλή του.

4) » » » 1 : 100, τὴν τάξη σου μὲ τὰ παράθυρα, τὴν πόρτα καὶ τὴν ἕδρα.

5) Ξεσήκωσε ἀπὸ τὸν χάρτη τῆς Εὐρώπης τὴ Γαλλία σ' ἕνα τσιγαρόχαρτο· Ἀπ' αὐτό, φτιάσε στὴν Ἰχνογραφία σου τὸ σχῆμα τῆς Γαλλίας μὲ διαστάσεις διπλάσιες.

6) Τὴν ἴδια ἐργασία κάνε την καὶ γιὰ τὴν Σικελία, ἀλλὰ μὲ τριπλάσιες διαστάσεις ἀπ' ὅ,τι εἶναι στὸ χάρτη τῆς Εὐρώπης.

Ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου

Ξέρομε ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι τεθλασμένη καὶ ἀποτελεῖται ἀπὸ 7 ὀρθογώνιες ἕδρες του. Εὔκολο λοιπὸν εἶναι νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας του, ἀφοῦ ξέρωμε νὰ βρίσκωμε τὸ ἐμβαδὸν κάθε μιᾶς ἕδρας του.

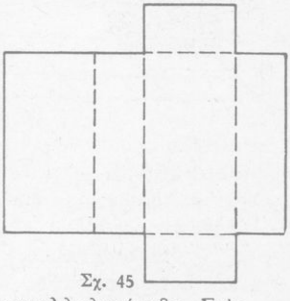
Θὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν κάθε ἕδρας χωριστά, καὶ θὰ προσθέσωμε τὰ 6 ἐξαγόμενα.

Ὥστε : ***Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, βρίσκομε τὸ ἐμβαδὸν κάθε ἕδρας του χωριστὰ καὶ προσθέτομε τὰ 6 αὐτὰ ἐμβαδά· τὸ ἄθροισμα αὐτὸ εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου.***

Ὑπάρχει καὶ κάποιος ἄλλος τρόπος συντομώτερος. Προσπαθήσετε νὰ τὸν βρῆτε.

Ἀνάπτυγμα τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου

Ἂν πάρωμε ἕνα ὀρθογ. παραλληλεπίπεδο ἀπὸ χαρτόνι καὶ κόψωμε τὸ χαρτόνι στὶς τρεῖς ἀκμὲς τῆς ἄνω βάσεως καὶ στὶς τέσσερες παράπλευρες ἀκμές, τότε οἱ ἕδρες τοῦ ὀρθογ. παραλληλεπιπέδου ἀνοίγουν καὶ μποροῦμε νὰ τὶς ἁπλώσωμε ἀπάνω στὸ ἐπίπεδο τῆς βάσεώς του. Τὸ σχῆμα ποὺ θἄχη τώρα τὸ χαρτόνι (σχ. 45), εἶναι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὀρθογ. παραλληλεπιπέδου ἁπλωμένη σ' ἕνα ἐπίπεδο, καὶ λέγεται ***ἀνάπτυγμα τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὀρθογ. παραλληλεπιπέδου.***



Σχ. 45

Νὰ κάνετε μὲ χαρτόνι ἕνα σχῆμα σὰν τὸ σχ. 45, μὲ 6 ὀρθογώνια συνεχόμενα, ὅπως σ' αὐτό. Διπλῶστε το, ὥστε νὰ κάνετε ὀρθογ. παραλληλεπίπεδο. Στὶς ἑνώσεις βάλτε χαρτὶ μὲ γόμμα.

Προβλήματα

1) Θέλομε νὰ χρωματίσωμε τοὺς 4 τοίχους τῆς τάξεώς μας, ποὺ ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλ)δου. Μέτρησέ τους μόνος σου καὶ πές μας πόσο θὰ πληρώσωμε, ἂν γιὰ κάθε τ. μέτρο μᾶς ζητοῦν 1.200 δραχμές ;

2) Θέλω νὰ κάμω ἕνα κιβώτιο σχήματος ὀρθογ. παραλ)δου μὲ πλάτος 1,20, μῆκος 1,80 καὶ ὕψος 0,60. Πόσες σανίδες θὰ μᾶς χρειασθοῦν, πλάτους 0.20 καὶ μήκους 3,60 μ. ;

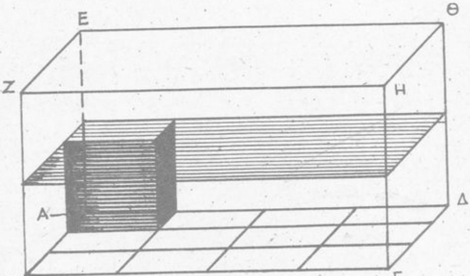
3) Μέτρησε μόνος τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τοῦ δωματίου ποὺ εἶναι ὀρθογ. παραλ)δο. Πές μας πῶς τὸ μέτρησες καὶ πόσο εἶναι ;

4) Ἕνα ὀρθογώνιο παραλ)δο ἔχει βάση μία ἕδρα του, μὲ μῆκος 4 μ. καὶ πλάτος 5 μέτρα, τὸ δὲ ὕψος τοῦ παραλ)δου εἶναι 7 μ. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του ; Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῶν δύο βάσεών του μαζί ; Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας του ; Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας του ;

5) Τί διαφέρει τὸ ὀρθογώνιο, ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο ; Τί διαφέρει ἡ βάση τοῦ ἑνός, ἀπὸ τὴ βάση τοῦ ἄλλου ;

Ὄγκος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου

Προσέξτε τὸ ὀρθογ. παραλ)δο στὸ σχ. 46. Τὸ μῆκος του, ΑΔ εἶναι 4 μ., τὸ πλάτος του, ΑΒ εἶναι 3 μ. καὶ τὸ ὕψος του, ΑΕ εἶναι 2 μ. Ἡ βάση του, ΑΒΓΔ εἶναι ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο καὶ εἶναι χωρισμένο σὲ $4 \times 3 = 12$ τετρ. μ. Ἂν ἀπάνω στὸ κάθε ἕνα τετρ. μέτρο τῆς βάσεως, τοποθετήσωμε ἕνα κυβικὸ μέτρο, θὰ χρειασθοῦν 12 κυβ. μ. γιὰ νὰ τὴ γεμίσωμε. Αὐτὰ θὰ φτιάσουν μία πλάκα ποὺ θἄχη ὕψος ἕνα μέτρο. Γιὰ νὰ γεμίση ὅλο τὸ ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο μὲ κυβικὰ μέτρα, θὰ χρειασθῆ ἄλλη μία τέτοια πλάκα, ἀπὸ ἄλλα τόσα κυβικὰ μέτρα.



Σχ. 46

Λοιπὸν ἡ μία πλάκα εἶναι 4×3, οἱ 2 πλάκες, δηλαδὴ ὁ ὄγκος τοῦ ὀρθογ. παραλ)δου, εἶναι $4 \times 3 \times 2 = 24$ κυβ. μέτρα.

Ὥστε ὁ ὄγκος τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου βρίσκεται ὅπως καὶ ὄγκος τοῦ κύβου. Μετροῦμε δηλαδὴ τὶς τρεῖς διαστάσεις του καὶ τὶς πολλαπλασιάζομε. Στὸν κύβο, ἐπειδὴ καὶ οἱ τρεῖς διαστάσεις εἶναι ἴσες, μᾶς φθάνει νὰ μετρήσωμε μόνο τὴ μία. Στὸ ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο ὅμως, ἐπειδὴ εἶναι ἄνισες, πρέπει νὰ μετρήσωμε καὶ τὶς τρεῖς, δηλαδὴ μῆκος, πλάτος καὶ ὕψος.

Ἐφαρμογή. Ἕνα ὀρθογ. παραλ)δο ποὺ ἔχει μῆκος 3 μ., πλάτος 2 μ. καὶ ὕψος 1,50 μ., ἔχει ὄγκο $3 \times 2 \times 1{,}50 = 9$ κυβ. μέτρα.

Παρατήρηση. Ἐπειδὴ ὄγκος καὶ χωρητικότητα εἶναι τὸ ἴδιο, καὶ ἡ χωρητικότητα αὐτοῦ τοῦ ὀρθογ. παραλ)δου = 9 κυβ. μέτρα.

Ὥστε : ***Γιὰ νὰ βροῦμε τὸν ὄγκο ἢ τὴ χωρητικότητα τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, πολλαπλασιάζομε τὶς τρεῖς διαστάσεις του, δηλαδὴ τὸ μῆκος ἐπὶ τὸ πλάτος ἐπὶ τὸ ὕψος· τὸ γινόμενο ποὺ βρίσκομε εἶναι ὁ ὄγκος του.***

Ἐπειδὴ οἱ δύο διαστάσεις τοῦ ὀρθογ. παραλ)δου εἶναι τὸ μῆκος καὶ τὸ πλάτος τῆς βάσεώς του, οἱ ὁποῖες ὅταν πολλαπλασιασθοῦν δίδουν τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του, ἡ δὲ τρίτη διάστασίς του εἶναι τὸ ὕψος του, τὸν κανόνα τοῦ ὄγκου τοῦ ὀρθογ. παραλ)δου, τὸν διατυπώνομε :

Ὄγκ. ὀρθογ. παραλ)δου = μῆκος × πλάτος × ὕψος ἢ **Ὄγκ. ὀρθογ. παραλ)δου = Ἐμβ. βάσεως × ὕψος**	**τύπος**

Σημείωση. Ὅταν λέμε μῆκος καὶ πλάτος ὀρθογ. παραλ)δου ἐννοοῦμε τὸ μῆκος καὶ τὸ πλάτος τῆς βάσεως.

Προβλήματα

1) Τὸ δωμάτιό μας ποὺ ἔχει σχῆμα ὀρθογ. παραλ)δου, ἔχει μῆκος 6,20 μ., πλάτος 4,50 καὶ ὕψος 1,60 μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος του ;

2) Ἕνας τσιμεντόλιθος σχήματος ὀρθογ. παραλ)δου, ἔχει μῆκος 1,60 μ., πλάτος 1,20 μ. καὶ ὕψος 0,80 μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος του ; Πόσοι τόννοι εἶναι τὸ βάρος του ; (Τὸ εἰδ. βάρος τοῦ τσιμεντόλιθου εἶναι 2,7[illegible]).

3) Μία δεξαμενὴ μὲ σχῆμα ὀρθογ. παραλ)δου, ἔχει μῆκος 3 μ., πλάτος 2,40 μ. καὶ ὕψος 3,80 μ. Πόσες ὀκάδες νερὸ χωράει ;

4) Ἕνας πλούσιος κτηματίας ἀπὸ τὴν ἐσοδεία του, γέμισε σιτάρι μιὰ ἀποθήκη του σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ποὺ εἶχε μῆκος 8 μ., πλάτος 6 καὶ ὕψος 3,80. Πόσους τόννους σιτάρι ἔκαμε ; Πόσες ὀκάδες τοῦ ἔμειναν, ἂν ἀπ' αὐτὸ τὸ σιτάρι ἔδωσε στοὺς φτωχοὺς τοῦ χωριοῦ 2.400 ὀκάδες ; (Εἰδ. βάρος σίτου 1,56).

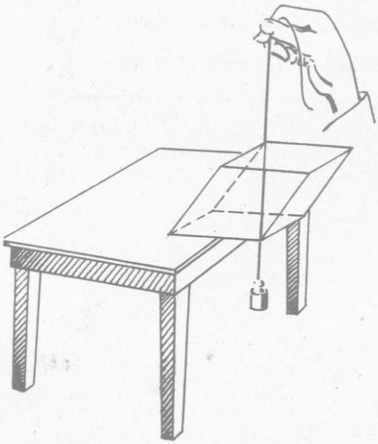
5) Ἕνας ἔμπορος, γέμισε μὲ λάδι ἕνα δοχεῖο μεγάλο σχήματος ὀρθογ. παραλληλεπιπέδου, ποὺ εἶχε μῆκος 3 μ., πλάτος 1,50 μ. καὶ ὕψος 1,4 μ. Πόσες ὀκάδες λάδι ἔχει μέσα τὸ δοχεῖο : (εἰδ. βάρος λαδιοῦ 0,912). Πόσες δραχμὲς θὰ πάρη ἂν πουλήση τὸ λάδι αὐτό, μὲ 14,500 δρχ. τὴν ὀκᾶ :

6) Σὲ μία ἀποθήκη σχήματος ὀρθογ. παραλληλεπιπέδου, ποὺ ἔχει μῆκος 8.10 μ., πλάτος 6,50 μ. καὶ ὕψος 4,50 μ., θέλουν νὰ βάλουν κιβώτια μὲ κονσέρβες. Κάθε κιβώτιο ἔχει μῆκος 0,90 μ., πλάτος 0,50 μ. καὶ ὕψος 0,30 μ. Πόσα τέτοια κιβώτια θὰ χωρέση ἡ ἀποθήκη ;

7) Ἕνα κιβώτιο σχήματος ὀρθογ. παραλληλεπιπέδου, μὲ μῆκος 1,20 μ., πλάτος 0,60 μ. καὶ ὕψος 0,52 μ., τὸ γέμισαν μὲ πλάκες σαπούνι. Κάθε πλάκα ἔχει μῆκος 0,08 μ., πλάτος 0,03 μ. καὶ ὕψος 0,04 μ. Μὲ πόσες τέτοιες πλάκες σαποῦνι γέμισε ;

8) Ἕνας θέλει νὰ κτίση μὲ τοῦβλα ἕναν τοῖχο, ποὺ νὰ ἔχη μῆκος 9 μ., πλάτος 0,30 μ, καὶ ὕψος 3,80 μ. Πόσα τοῦβλα θὰ χρειασθῆ, ἂν κάθε τοῦβλο πιάνει στὸ χτίσιμο 0,15 μ. μῆκος, 0,075 μ. πλάτος καὶ 0,05 μ ὕψος ;

9) Μία αἴθουσα σχήματος ὀρθογ. παραλληλεπιπέδου ἔχει μῆκος 10 μ., πλάτος 5,5 καὶ ὕψος 4,80 μ. Πόσοι ἄνθρωποι πρέπει νὰ μένουν μέσα, ἂν σὲ κάθε ἄτομο πρέπει νὰ ἀναλογοῦν 4 κυβ. μ. ἀέρος ;



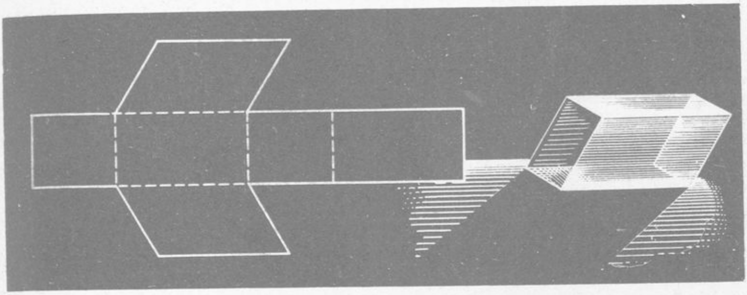
Σχ. 47

10) Μέτρησε τὸ τεπόζιτο τοῦ σπιτιοῦ σου ἢ τοῦ σχολείου σου, ἂν ἔχη σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, καὶ πές μας πόσο νερὸ χωράει ;

11) Ἕνας θέλει νὰ φτιάση ἕναν τοῖχο ὕψους 4 μ., μήκους 7,50 μ. καὶ πλάτους 0,60 μ. Τοῦ ζητοῦν γιὰ κάθε κυβικὸ μέτρο 5.000 δραχ. Πόσες δραχμὲς θὰ πληρώση γιὰ ὅλο τὸν τοῖχο ;

12) Νὰ κάμης ἀπὸ χαρτόνι ἕνα ὀρθογ. παραλληλεπίπεδο, ποὺ νὰ ἔχη μῆκος 0,15 μ., πλάτος 0,10 μ. καὶ ὕψος 0,05 μ. Νὰ τὸ φτιάσης καλὸ καὶ νὰ τὸ χαρίσης στὸ σχολεῖο σου.

13) Προσπάθησε νὰ μετρήσης μόνος σου σώματα, σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου.



ΠΛΑΓΙΟ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΠΙΠΕΔΟ

Δῆτε τὸ στερεὸ α στὸ σχ. 47. Ὅποια ἕδρα του κι' ἂν πάρωμε γιὰ βάση, οἱ ἀκμὲς ποὺ συνδέουν αὐτὴ τὴν ἕδρα μὲ τὴν ἀπέναντί της (τὴν ἄλλη βάση), δὲν εἶναι κάθετες στὶς βάσεις, εἶναι πλάγιες πρὸς αὐτές. Τὸ σχῆμα αὐτό, τὸ λέμε ***πλάγιο παραλληλεπίπεδο.***

Νὰ κάνετε ἕνα πλάγιο παραλ)δο ἀπὸ πηλό, ἀπὸ πατάτα.

Τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα τῆς κατακορύφου ποὺ περιέχεται μεταξὺ τῶν δύο βάσεων (σχ. 47), λέγεται ***ὕψος*** τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου.

Ἂν συγκρίνωμε τὸ πλάγιο παραλ)δο, μὲ τὸ ὀρθογώνιο παραλ)δο, θὰ δοῦμε ὅτι ἔχει τὶς πιὸ κάτω :

α) ***Ὁμοιότητες :***

1) Ἡ ἐπιφάνειά του εἶναι τεθλασμένη, ὅπως τοῦ ὀρθογ. παραλληλεπιπέδου.

2) Ἔχει καὶ αὐτὸ 6 ἕδρες, 12 ἀκμὲς καὶ 8 κορυφές.

3) Ἀνὰ δύο οἱ ἀπέναντι ἕδρες του εἶναι ἴσες καὶ παράλληλες.

β) ***Διαφορές :***

Στὸ πλάγιο παραλ)δο, ὅποιο ζευγάρι παραλλήλων ἑδρῶν κι' ἂν πάρωμε γιὰ βάσεις, οἱ ἀκμὲς ποὺ τὶς συνδέουν δὲν θὰ εἶναι κάθετες στὰ ἐπίπεδά των, θὰ εἶναι πλάγιες σ' αὐτά· ἐνῶ στὸ ὀρθογώνιο παραλ)δο εἶναι πάντοτε κάθετες.

Ἀσκήσεις

1) Νὰ βρῆς σώματα μὲ σχῆμα πλαγίου παραλληλεπιπέδου.

2) Νὰ κάμης ἀπὸ χαρτόνι ἕνα τέτοιο πλάγιο παραλ)δο.

3) Βάλε μὲ τὴ βάση του ἀπάνω στὸ τραπέζι, τὸ πλάγιο παραλ)δο ποὺ σᾶς ἔδειξε ὁ δάσκαλος. Δές, χωρὶς τὸ νῆμα τῆς στάθμης πρῶτα καὶ ἔπειτα μ' αὐτό, ὑπάρχουν ἀκμές του κατακόρυφες ;

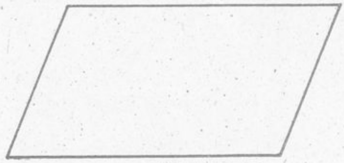
4) Πάρε στὰ χέρια σου τὸ πλάγιο παραλ)δο ποὺ ἔφτιασες ἀπὸ χαρτόνι. Ξεχώρισε μία ἕδρα του γιὰ βάση καὶ δές, ὑπάρχουν ἀκμὲς κάθετες πρὸς τὸ ἐπίπεδο αὐτῆς ;

5) Νὰ κάμης, ἀπὸ ξύλο ἢ ἀπὸ πηλὸ ἢ ἀπὸ πατάτα, ἕνα πλάγιο παραλ)δο.

6) Νὰ ἰχνογραφήσης στὸ τετράδιό σου ἕνα τέτοιο γεωμετρικὸ σχῆμα.

ΠΛΑΓΙΟ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟ

"Αν ἐξετάσωμε τὶς ἕδρες τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου, θὰ δοῦμε ὅτι μπορεῖ ἀπ' αὐτές, νᾆναι μερικὲς μὲ σχῆμα ὀρθογωνίου ἢ τετραγώνου, μπορεῖ καὶ καμμιά. Ὁπωσδήποτε ὅμως θὰ ὑπάρχουν ἕδρες ποὺ δὲν εἶναι ὀρθογώνια ἢ τετράγωνα, ἀλλὰ θᾆχουν τὸ σχῆμα 48.



Σχ. 48

Τὸ σχῆμα αὐτό, λέγεται ***πλάγιο παραλληλόγραμμο.***

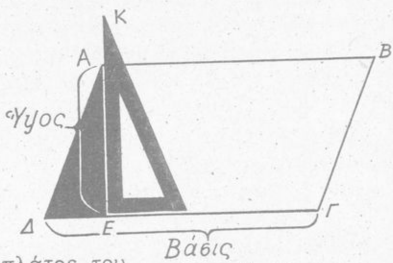
Τὸ πλάγιο παραλληλόγραμμο ἔχει 4 πλευρές, ἀνὰ δύο τὶς ἀπέναντι παράλληλες καὶ ἴσες. Ἐπίσης ἔχει δύο ἀπέναντι γωνίες ὀξεῖες καὶ ἴσες καὶ δύο ἀπέναντι ἀμβλεῖες καὶ ἴσες.

Νὰ δείξης ποιὲς εἶναι οἱ ἴσες πλευρές του· καὶ ποιὲς εἶναι οἱ ἴσες γωνίες του :

Μία ἀπ' τὶς πλευρές του, ὅποια μᾶς ἀρέσει, τὴ λέμε ***βάση.*** Τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα ποὺ εἶναι κάθετο στὴ βάση καὶ περιέχεται μεταξὺ τῆς βάσεως καὶ τῆς ἀπέναντι τῆς βάσεως πλευρᾶς, λέγεται ***ὕψος*** (σχ. 49).

Περίμετρος λέγεται, ὅπως στὸ τετράγωνο καὶ στὸ ὀρθογώνιο, τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν του.

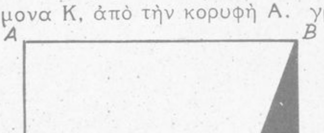
Τὴ μία πλευρά του, τὴ βάση, τὴ λέμε καὶ μῆκος τοῦ παραλληλογράμμου. Τότε, τὸ ὕψος εἶναι τὸ πλάτος του.



Σχ. 49

Ἐμβαδὸν πλαγίου παραλληλογράμμου

"Εχομε τὸ πλάγιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ (σχ. 49). Μὲ τὸ γνώμονα Κ, ἀπὸ τὴν κορυφὴ Α. γράφομε τὴν ΑΕ κάθετο στὴ βάση ΔΓ. "Επειτα μὲ τὸ ψαλίδι, κόβομε τὸ κομμάτι ΑΕΔ, καὶ τὸ βάζομε ἀπὸ τὴν ἄλλη πλευρά, τὴ ΒΓ, ὅπως στὸ σχ. 50. Τὸ σχῆμα ποὺ φτιάσαμε τώρα, τὸ ΑΒΕ΄Ε εἶναι ὀρθογώνιο. Καὶ τὸ ἐμβαδόν του εἶναι ἴσον μὲ τὴ βάση του ΕΕ΄, ἐπὶ τὸ ὕψος του ΕΑ.



Σχ. 50

"Αν μετρήσωμε τὴ βάση ΕΕ΄ τοῦ ὀρθογω**νίου** καὶ τὴ βάση ΔΓ τοῦ πλαγ. παραλ)μου, βλέπομε πὼς εἶναι **ἴσες, ὅπως τὸ** ὕψος ΑΕ τοῦ ὀρθογωνίου καὶ τὸ ὕψος ΑΕ τοῦ πλαγίου παραλληλογράμμου, εἶναι τὸ ἴδιο.

Ὥστε : | Ἐμβ. πλαγ. παραλ)μου = βάση × ὕψος | τύπος

Π. χ. Ἂν ἡ βάση ΔΓ = 3 μ. καὶ τὸ ὕψος ΑΕ = 1,4 μ., τὸ ἐμβαδὸν = 3 × 1,4 = 4,2 τ. μ.

Προσέχομε ὅτι τὸ ὕψος τοῦ πλαγ. παραλ)μου δὲν εἶναι ἡ ἄλλη του πλευρὰ ΑΔ, ὅπως στὸ ὀρθογώνιο, ἀλλὰ ἡ κάθετος στὴ βάση, ἡ ΑΕ.

Προβλήματα

1) Ἕνα οἰκόπεδο σχήματος πλαγ. παραλ)μου μὲ πρόσοψη 50 μ. καὶ βάθος 15 μ., πουλήθηκε πρὸς 600.000 δραχμ. τὸ τετραγωνικὸ μέτρο. Πόσες δραχμὲς πῆρε ὁ ἰδιοκτήτης του ; (Τί λέμε βάθος ;)

2) Ἕνα χωράφι μὲ σχῆμα πλάγιο παραλ)μο, ἔχει μῆκος 75 μ. καὶ πλάτος 45 μ. Πουλήθηκε πρὸς 830.000 δραχ. τὸ στρέμμα. Πόση ἦταν ἡ ἀξία του :

3) Ἕνας κῆπος σχήματος πλαγ. παραλ)μου μὲ βάση 25 μ. καὶ ὕψος 15 μ., πουλήθηκε 2.625.000 δραχ. Πρὸς πόσο πουλήθηκε τὸ τετραγωνικὸ μέτρο ;

4) Σ' ἕνα κτῆμα μὲ σχῆμα πλαγ. παραλ)μου, ποὺ εἶχε μῆκος 60 μ. καὶ πλάτος 35 μ., ἔκτισε ὁ ἰδιοκτήτης του ἕνα σπίτι, ποὺ ἔπιασε 192 τετραγωνικὰ μέτρα. Πόσα δένδρα θὰ φυτέψη στὸ ὑπόλοιπο κτῆμα, ἂν γιὰ κάθε δένδρο χρειάζεται ἐπιφάνεια 6 τ. μ. ;

5) Χάραξε μόνος σου στὴν αὐλή, ἕνα πλάγ. παραλ)μο, μέτρησέ το καὶ πές μας πόση εἶναι ἡ περίμετρός του.

6) Ὁ γείτονάς σου ἔχει ἕνα κῆπο σχήματος πλαγ. παραλ)μου καὶ θέλει νὰ τὸν φράξη μὲ 4 σειρὲς σύρμα. Πές μου, τί θὰ κάνη γιὰ νὰ λογαριάση πόσο σύρμα χρειάζεται γιὰ νὰ τὸν φράξη γύρω - γύρω :

7) Ἕνας, ἔχει στὸ σπίτι του ἕνα κῆπο σὰν τὸν παραπάνω τοῦ γείτονά σου. Ἡ μία μεγάλη πλευρὰ τοῦ κήπου εἶναι 12 μ. καὶ ἡ μία μικρή του πλευρά, 7,20 μ., θέλει νὰ φυτέψη γύρω - γύρω τριανταφυλλιές, ποὺ ἡ μία ν' ἀπέχη ἀπὸ τὴν ἄλλη 0,80 μ. Πόσες τριανταφυλλιὲς θὰ φυτέψη ;

8) Ἕνας κτηματίας ἔχει ἕνα ἀμπέλι σχήματος πλαγ. παραλ)μου, καὶ θέλει γύρω - γύρω ν' ἀνοίξη ἕνα αὐλάκι, γιὰ νὰ χύνωνται τὰ νερὰ τῆς βροχῆς. Τ' ἀμπέλι ἔχει μεγάλη πλευρὰ 20 μ. καὶ μικρὴ 15 μ. Πόσο θὰ πληρώση γιὰ τὸ αὐλάκι αὐτό, ἂν τοῦ ζητοῦν 1.500 δραχμ. τὸ μέτρο ;

Ἐμβαδὸν ἐπιφανείας πλαγίου παραλληλεπιπέδου

Εὔκολα μποροῦμε νὰ σκεφθοῦμε πῶς βρίσκομε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου, ἀφοῦ ξέρωμε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τοῦ πλαγ. παραλ)μου.

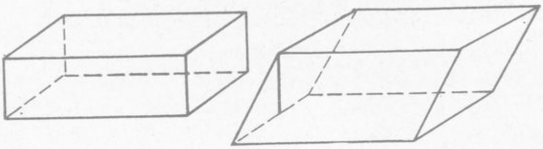
Θὰ βροῦμε τὰ ἐμβαδὰ ὅλων τῶν ἑδρῶν του καὶ θὰ τὰ προσθέσωμε.

Ὥστε : ***Βρίσκομε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου, ἂν βροῦμε τὰ ἐμβαδὰ ὅλων τῶν ἑδρῶν του καὶ τὰ προσθέσωμε.***

Κάμε τὴ μέτρηση αὐτὴ μόνος σου, στὸ πλάγιο παραλληλεπίπεδο ποὺ φτιάσατε μαζὶ μὲ τὸ δάσκαλό σας.

Ὄγκος πλαγίου παραλληλεπιπέδου

Ἂν φτιάσωμε δύο δοχεῖα ποὺ νἄχουν σχῆμα τὸ ἕνα ὀρθογώνιο παραλ)δο καὶ τὸ ἄλλο πλάγιο παραλ)δο (σχ. 51), καὶ τέτοια ὥστε οἱ βάσεις των, ποὺ εἶναι ἡ μία ὀρθογώνιο παραλ)μο καὶ ἡ ἄλλη πλάγιο παραλ)μο, νὰ ἔχουν τὸ ἴδιο ἐμβαδόν, τὸ δὲ ὕψος τῶν παραλ)δων νἆναι τὸ ἴδιο, καὶ τὰ γεμίσωμε νερό, θὰ δοῦμε ὅτι χωροῦν ἴση ποσότητα. Αὐτὸ μᾶς λέει πὼς τὰ δύο αὐτὰ παραλ)δα ἔχουν τὴν ἴδια χωρητικότητα, δηλ. τὸν ἴδιο ὄγκο. Ἔχουν ὅμως βάσεις μὲ ἴσα ἐμβαδὰ καὶ ὕψη ἴσα. Ἄρα, ὅπως ὁ ὄγκος τοῦ ὀρθογ. παραλ)δου ἰσοῦται μὲ τὸ ἐμβ. βάσ. Χ ὕψος, ἔτσι καὶ ὁ ὄγκος τοῦ πλαγίου παραλ)δου, ἰσοῦται μὲ τὸ ἐμβ. βάσ. Χ ὕψος.



Σχ. 51

Ὥστε : $\boxed{\textbf{Ὄγκ. πλαγ. παραλ)δου} = \textbf{Ἐμβ. βάσ.} \times \textbf{ὕψος}}$ **τύπος**

Παρατήρηση. Ἡ βάση τοῦ πλαγίου, μπορεῖ νἆναι τετράγωνο, ὀρθογώνιο ἢ καὶ πλάγιο παραλληλόγραμμο. Ὅ,τι ὅμως καὶ νἆναι, ἐμεῖς ξέρομε νὰ βρίσκωμε τὸ ἐμβαδόν του. Προσέξτε καὶ τὸ ὕψος του στὸ σχ. 47, δὲν εἶναι σὰν τοῦ ὀρθογ. παραλ)δου.

Σημείωση. Ὅταν λέμε μῆκος καὶ πλάτος τοῦ πλαγ. παραλ)δου, ἐννοοῦμε τὸ μῆκος καὶ τὸ πλάτος τῆς βάσεώς του.

Π ρ ο β λ ή μ α τ α

1) Ἕνα πλάγιο παραλληλεπίπεδο ἔχει μῆκος 4,20 μ., πλάτος 2,40 μ. καὶ ὕψος 1,80 μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος του ;

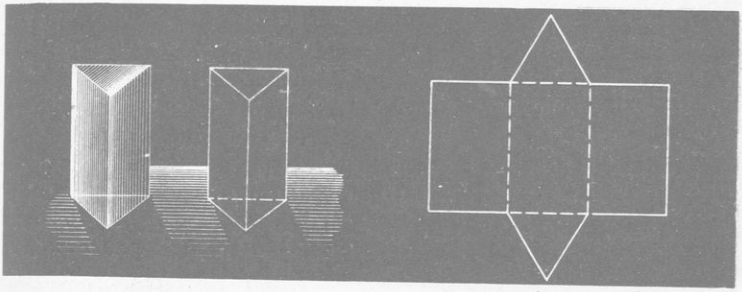
2) Ἕνα πλάγιο παραλληλεπίπεδο ἔχει ἐμβαδὸν βάσεως 8 τετραγ. μέτρα καὶ ὕψος 1,50 μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος του ;

3) Μία δεξαμενὴ νεροῦ, μὲ σχῆμα πλαγίου παραλληλεπιπέδου, ἔχει μῆκος 4,20 μ., πλάτος 2,80 μ. καὶ ὕψος 2,10 μ. Πόσες ὀκάδες νερὸ χωράει ;

4) Ἕνα μάρμαρο, μὲ σχῆμα πλαγίου παραλληλεπιπέδου, ἔχει μῆκος 1,70 μ., πλάτος 1,10 μ. καὶ ὕψος 0,80 μ. Πόσο βάρος ἔχει σὲ τόννους ;

5) Πές μας τί διαφέρει τὸ ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο ἀπὸ τὸ πλάγιο παραλληλεπίπεδο ;

6) Νὰ φτιάσῃς μὲ χαρτόνι ἕνα πλάγιο παραλληλεπίπεδο.

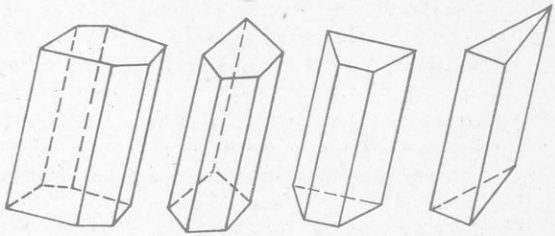


ΠΟΛΥΕΔΡΑ—ΠΡΙΣΜΑΤΑ—ΟΡΘΑ ΠΡΙΣΜΑΤΑ

Ὅταν ἕνα στερεὸ σῶμα περικλείεται γύρω γύρω ἀπὸ ἐπίπεδα, ἔχει σχῆμα τὸ ὁποῖον λέγεται ***πολύεδρον.***

Ἀπὸ τὰ πολύεδρα μέχρι τώρα εἴδαμε τὸν κύβο, τὸ ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο, καὶ τὸ πλάγιο παραλληλεπίπεδο.

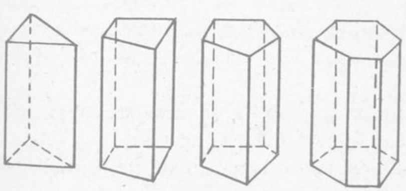
Πρίσματα λέγονται τὰ πολύεδρα ἐκεῖνα (σχ. 52 — 53), εἰς τὰ ὁποῖα : 1) ***Δύο ἕδρες εἶναι παράλληλες καὶ ἴσες*** (ἄνω καὶ κάτω βάση), καὶ 2) ***Οἱ παράπλευρες ἕδρες εἶναι παραλληλόγραμμα,*** (τετράγωνα, ὀρθογώνια, πλάγια παραλληλόγραμμα).



Σχ. 52

Ἀπὸ τὰ πρίσματα ὅσα ἔχουν βάση μὲ τρεῖς πλευρές, λέγονται ***τριγωνικὰ πρίσματα.*** Ὅσα ἔχουν βάσεις μὲ 4 πλευρές, λέγονται ***τετραγωνικὰ πρίσματα.*** Ὅσα ἔχουν βάσεις μὲ 5 πλευρές, λέγονται ***πενταγωνικὰ*** κ.λ.π.

Τοποθετοῦμε πρίσματα μὲ τὴν βάση των ἀπάνω στὸ τραπέζι. Ὅσα ἀπὸ αὐτὰ ἔχουν τὶς ἀκμὲς ποὺ συνδέουν τὶς βάσεις των, κατακόρυφες, (κάθετες στὶς βάσεις), λέγονται ***ὀρθὰ πρίσματα*** (σχ. 53).



Σχ. 53

Τώρα βλέπομε πῶς ὁ κύβος καὶ τὸ ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο εἶναι ὀρθὰ τετραγωνικὰ πρίσματα.

Ὅσα πρίσματα δὲν εἶναι ὀρθά, λέγονται ***πλάγια πρίσματα*** (σχ. 52). Τὸ πλάγ. παραλ)δο εἶναι πλάγ. πρῖσμα.

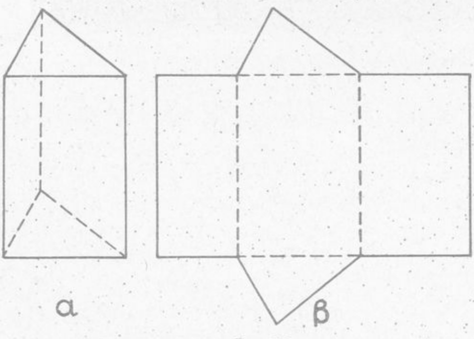
Στὰ πρίσματα οἱ ἀκμὲς ποὺ συνδέουν τὶς βάσεις εἶναι ὅλες ἴσες.

Στὸ ὀρθὸ πρῖσμα κάθε ἀκμὴ ἀπ' αὐτὲς εἶναι καὶ τὸ ***ὕψος*** τοῦ πρίσματος.

Τὸ ὕψος τοῦ πλαγίου πρίσματος τὸ βρίσκομε, ὅπως τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου.

Ἀνάπτυγμα τῆς ἐπιφανείας ὀρθοῦ τριγ. πρίσματος

Ἂν πάρωμε ἕνα ὀρθὸ τριγ. πρῖσμα, ὅπως τοῦ σχ. 54α, ἀπὸ χαρτόνι στὶς ἀκμὲς τοῦ πρίσματος ποὺ εἶναι ζωγραφισμένες μὲ διακεκομμένες γραμμές, ὅλες οἱ ἕδρες του ἀνοίγουν καὶ μποροῦμε **νὰ** τίς ἁπλώσωμε ἀπάνω **σ'** ἕνα ἐπίπεδο, στὸ τραπέζι. Τότε θὰ πάρουν τὸ σχ. 54β. Τὸ σχῆμα αὐτὸ λέγεται ***ἀνάπτυγμα*** τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὀρθοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος.



Σχ. 54

Φτιάστε ἕνα τέτοιο σχῆμα (σχ. 54β) ἀπὸ χαρτόνι καὶ προσπαθῆστε νὰ τὸ κάμετε ἔπειτα ὀρθὸ τριγ. πρῖσμα.

Κάντε τὴν ἴδια ἐργασία γιὰ τὸ ὀρθὸ τετρ. καὶ πενταγωνικὸ πρῖσμα.

Ὄγκος πρίσματος

Τὸν ὄγκο κάθε πρίσματος τὸν βρίσκομε πολλαπλασιάζοντας τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του, ὅπως καὶ τοῦ παραλ]δου.

Ὥστε : **Ὄγκος πρίσματος = Ἐμβ. βάσεως × ὕψος** τύπος

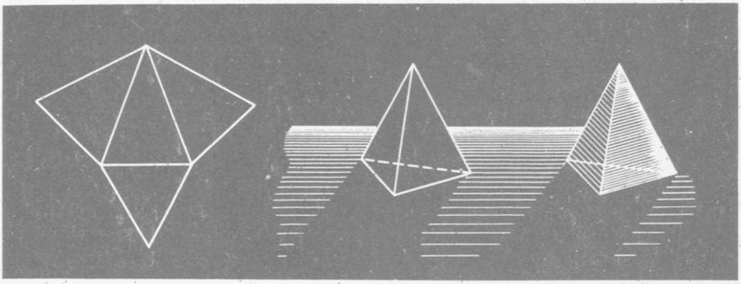
Προβλήματα

1) Στὰ σχ. 52, 53, ποιὸ εἶναι ὀρθὸ τριγωνικὸ πρῖσμα ; Ποιὸ πλάγιο τριγωνικό ; Ποιὸ ὀρθὸ καὶ ποιὸ πλάγιο τετραγωνικό ; Ποιὸ ὀρθὸ καὶ ποιὸ πλάγιο πενταγωνικό ; Ποιὸ ὀρθὸ καὶ ποιὸ πλάγιο ἑξαγωνικό ;

2) Ἰχνογραφίστε τὰ πλάγια ποίσματα στὸ τετράδιό σας καὶ ζωγραφίστε μὲ μία εὐθεῖα τὰ ὕψη των.

3) Τὸ ἐμβ. βάσεως στὸν τύπο, μὲ τί μονάδες τὸ παριστάνομε ; Μὲ τί τὸ ὕψος ;

4) Ἑνὸς πρίσματος ἡ βάση εἶναι τετράγωνο πλευρᾶς 5 μ. καὶ τὸ ὕψος του 7 μ. Νὰ βρῆτε τὸν ὄγκο του.



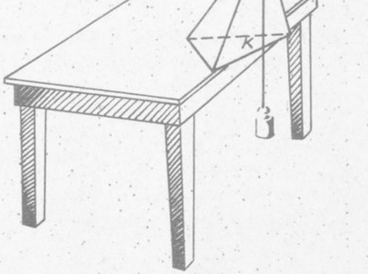
ΤΡΙΓΩΝΙΚΗ ΠΥΡΑΜΙΣ

Παρατηρῆστε καλὰ τὸ γεωμετρικὸ σῶμα τοῦ σχ. 55. Ὅπως βλέπετε, τὸ σχῆμα του δὲ μοιάζει μὲ κανένα ἀπὸ τὰ σχήματα ποὺ μάθαμε ἕως τώρα. Ἡ βάση του εἶναι τριγωνικὴ καὶ ἀπὸ κάθε πλευρὰ τῆς τριγωνικῆς βάσεως ὑψώνεται μιὰ ἕδρα πάλιν τριγωνική. Αὐτὲς οἱ τριγωνικὲς ἕδρες ἑνώνονται ἀπάνω σ' ἕνα σημεῖο.

Αὐτὸ τὸ γεωμ. σῶμα, λέγεται ***τριγωνικὴ πυραμίς.***

Τέτοια σώματα, ἀλλὰ μὲ βάση τετράγωνο βρέθηκαν στὴν Αἴγυπτο. Εἶναι ἀρχαῖα μνημεῖα μὲ σχῆμα πυραμίδος. Αὐτὰ τὰ κτίρια λέγονται Πυραμίδες τῆς Αἰγύπτου. Μέσα σ' αὐτὰ βρέθηκαν τάφοι τῶν Φαραώ.

Ὅπως βλέπομε (σχ. 55), ἡ τριγωνικὴ πυραμὶς εἶναι ἕνα πολύεδρο μὲ 4 ἕδρες, γι' αὐτὸ λέγεται καὶ ***τετράεδρο.***



Σχ. 55

Ὅλες οἱ ἕδρες τῆς τριγ. πυραμίδος εἶναι τριγωνικές.

Μία ἀπὸ τὶς ἕδρες της, τὴν παίρνομε γιὰ βάση.

Τὸ τετράεδρο ἔχει 4 κορυφές. Μετρῆστε τες καὶ σεῖς.

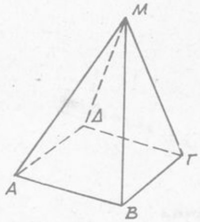
Τοποθετοῦμε τὴν τριγωνικὴ πυραμίδα μὲ τὴ βάση της ἀπάνω στὸ τραπέζι (σχ. 55). Οἱ ἄλλες τρεῖς παράπλευρες τριγωνικὲς ἕδρες, ἑνώνονται ψηλὰ σὲ ἕνα σημεῖο Ο ποὺ τὸ λέμε ***κορυφὴ*** τῆς πυραμίδος, ὅταν γιὰ βάση παίρνωμε τὴν ἕδρα ποὺ εἶναι ἀπάνω στὸ τραπέζι.

Ἡ τριγωνικὴ πυραμὶς ἔχει 6 ἀκμές, 6 δίεδρες γωνίες καὶ 4 τρίεδρες στερεὲς γωνίες.

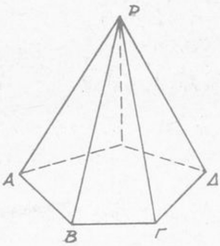
Ἡ ἐπιφάνειά της εἶναι τεθλασμένη.

Ἂν ἀπὸ τὴν κορυφή της Ο (σχ. 55) κρεμάσωμε τὸ νῆμα τῆς στάθμης, τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα ΟΚ, ἀπὸ τὴν κορυφή της ὡς τὴ βάση της, λέγεται *ὕψος* τῆς πυραμίδος.

Ἡ βάση στὴν τριγωνικὴ πυραμίδα ἔχει 3 πλευρές. Μπορεῖ ὅμως νὰ ἔχη 4, νὰ εἶναι τετράπλευρο· τότε ἡ πυραμὶς λέγεται τετραγωνικὴ (σχ. 56). Μπορεῖ πεντάγωνο, τότε λέγεται πενταγωνικὴ (σχ. 57), κλπ.



Σχ. 56



Σχ. 57

Ὥστε : ***Πυραμὶς εἶναι τὸ πολύεδρο ποὺ ἔχει βάση μία ἕδρα του μὲ 3 ἢ περισσότερες πλευρές, καὶ τὶς παράπλευρες ἕδρες τριγωνικὲς ποὺ ἑνώνονται ὅλες σὲ μία κορυφή, ἔξω ἀπὸ τὸ ἐπίπεδο τῆς βάσεώς της.***

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς

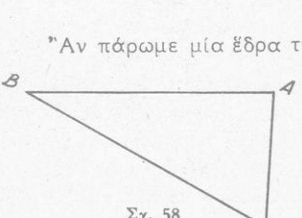
1) Στὶς πυραμίδες τῶν σχ. 55, 56, 57, : α) Ποιὰ εἶναι ἡ κορυφή ;
   β) Ποιὰ εἶναι ἡ βάση των ;
   γ) Ποιὰ ἀπ' αὐτὲς εἶναι τετραγωνική, ποιὰ πενταγωνική ;
   δ) Γράψτε γράμματα στὶς κορυφὲς τῶν ἑδρῶν των καὶ διαβάστε τὶς παράπλευρες ἀκμὲς καὶ τὶς παράπλευρες ἕδρες.

2) Ζωγραφίστε τὶς πυραμίδες τῶν σχ. 56, 57 καὶ φέρτε τὰ ὕψη ποὺ λείπουν ὅπως τὸ ΟΚ στὸ σχ. 55.

3) Ζωγραφίστε στὸ τετράδιό σας μία ἑξαγωνικὴ πυραμίδα, καὶ ἔπειτα φέρτε τὸ ὕψος της.

ΤΡΙΓΩΝΑ

Ἂν πάρωμε μία ἕδρα τῆς τριγωνικῆς πυραμίδος, θὰ δοῦμε ὅτι τὸ σχῆμα της εἶναι σὰν τὸ σχ. 58. Τὸ σχῆμα αὐτὸ λέγεται *τρίγωνο*, γιατὶ ἔχει τρεῖς πλευρὲς καὶ τρεῖς γωνίες.



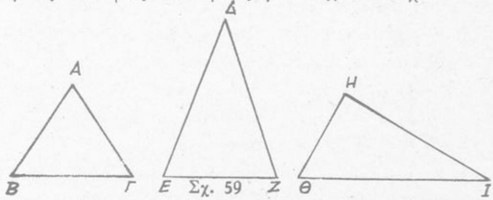
Σχ. 58

Τρίγωνο εἶναι τὸ σχῆμα ποὺ ἔχει τρεῖς πλευρὲς καὶ τρεῖς γωνίες.

Εἴδη τριγώνων

Ὅλα τὰ τρίγωνα ἔχουν τρεῖς πλευρὲς καὶ τρεῖς γωνίες, δὲν ἔχουν ὅμως ὅλα ἴδιο σχῆμα.

Στὸ σχ. 59 εἶναι τρία τρίγωνα διαφορετικὰ μεταξύ των.



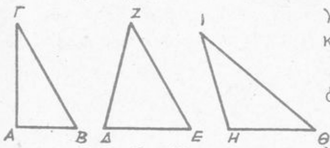
Σχ. 59

Τὸ πρῶτο τρίγωνο ἔχει καὶ τὶς τρεῖς πλευρές του ἴσες καὶ λέγεται ***ἰσόπλευρο,*** ὅπως καὶ κάθε τρίγωνο ποὺ ἔχει καὶ τὶς τρεῖς πλευρές του ἴσες.

Τὸ δεύτερο τρίγωνο ἔχει μόνο τὶς δύο πλευρές του ἴσες καὶ λέγεται ***ἰσοσκελές,*** ὅπως καὶ κάθε τρίγωνο ποὺ ἔχει δύο πλευρές του ἴσες.

Τὸ τρίτο τρίγωνο ἔχει καὶ τὶς τρεῖς πλευρές του ἄνισες μεταξύ των καὶ λέγεται ***σκαλινόν,*** ὅπως καὶ κάθε τρίγωνο ποὺ ἔχει ἄνισες τὶς πλευρές του.

Παρατηρῆστε τὰ τρίγωνα τοῦ σχ. 60. Τὸ πρῶτο τρίγωνο ἔχει μία γωνία ὀρθὴ καὶ τὶς ἄλλες δύο ὀξεῖες καὶ λέγεται ***ὀρθογώνιο.***



Σχ. 60

Τὸ δεύτερο ἔχει ὅλες τὶς γωνίες του ὀξεῖες καὶ λέγεται ***ὀξυγώνιο.***

Τὸ τρίτο ἔχει μία γωνία του ἀμβλεῖα καὶ τὶς ἄλλες δύο ὀξεῖες καὶ λέγεται ***ἀμβλυγώνιο.***

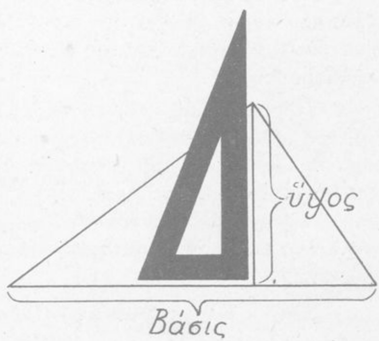
Τὰ τρίγωνα λοιπὸν ἀπὸ τὶς γωνίες των χωρίζονται σέ : 1) ὀρθογώνια, 2) ὀξυγώνια, 3) ἀμβλυγώνια.

Ἂν πάρωμε τὸ μοιρογνωμόνιο καὶ μετρήσωμε τὶς τρεῖς γωνίες κάθε τριγώνου καὶ τὶς προσθέσωμε, θὰ δοῦμε ὅτι ***οἱ τρεῖς γωνίες κάθε τριγώνου ἔχουν ἄθροισμα 180°***, δηλαδὴ 2 ὀρθὲς γωνίες, ἀφοῦ, ὅπως μάθαμε, κάθε ὀρθὴ γωνία εἶναι 90°.

Κάθε τρίγωνο ἔχει τρεῖς κορυφές. Τὶς κορυφὲς τῶν γωνιῶν του. Ἀπέναντι ἀπὸ κάθε πλευρὰ ὑπάρχει καὶ μία κορυφή.

Μία πλευρὰ τοῦ τριγώνου, ὅποια θέλομε, τὴν παίρνομε γιὰ ***βάση*** τοῦ τριγώνου. Ἡ κάθετος πρὸς τὴ βάση, ποὺ τὴ φέρομε ἀπὸ τὴν ἀπέναντι τῆς βάσεως κορυφή, λέγεται ***ὕψος*** τοῦ τριγώνου (σχ. 61).

Περίμετρος τριγώνου εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν του.



Σχ. 61

Ἀσκήσεις

1) Κάμε ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο.
2) » » ἰσόπλευρο »
3) » » σκαλινὸ »
4) » » ἀμβλυγώνιο »
5) » » ἰσοσκελὲς »
6) » « ὀξυγώνιο »

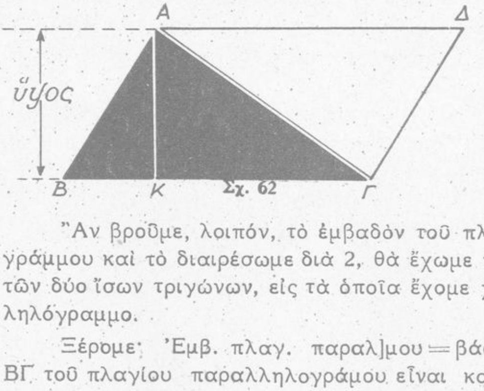
7) Σὲ κάθε ἕνα ἀπὸ τὰ τρίγωνα αὐτὰ ποὺ ἔκαμες, νὰ μετρήσης μὲ τὸ μοιρογνωμόνιό σου τὶς γωνίες των, καὶ νὰ βρῆς πόσες μοῖρες εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν καθενός.

8) Σ' ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο ἡ μία ὀξεῖα γωνία εἶναι 40°. Πόσων μοιρῶν εἶναι οἱ δύο ἄλλες;

9) Μέτρησες τὶς δύο γωνίες ἑνὸς τριγώνου καὶ εἶναι ἡ μία 80° καὶ ἡ ἄλλη 70°. Πόσων μοιρῶν εἶναι ἡ τρίτη γωνία του;

Ἐμβαδὸν τριγώνου

Ἔχομε τὸ πλάγιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ ἀπὸ χαρτὶ (σχ. 62) καὶ τὸ κόβομε μὲ μία ψαλλιδιὰ ΑΓ, ὅπως στὸ σχῆμα. Τὸ πλάγιο παραλληλόγραμμο χωρίζεται σὲ δύο τρίγωνα. Ἂν βάλωμε τὸ ἕνα τρίγωνο ἀπάνω στὸ ἄλλο, κατάλληλα, θὰ δοῦμε ὅτι γίνονται ἕνα· ἄρα καταλαμβάνουν τὴν ἴδια ἐπιφάνεια, δηλαδὴ ἔχουν τὸ ἴδιο ἐμβαδόν.



Σχ. 62

Ἂν βροῦμε, λοιπόν, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πλαγίου τούτου παραλληλογράμμου καὶ τὸ διαιρέσωμε διὰ 2, θὰ ἔχωμε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἑνὸς ἐκ τῶν δύο ἴσων τριγώνων, εἰς τὰ ὁποῖα ἔχομε χωρίσει τὸ πλάγιο παραλληλόγραμμο.

Ξέρομε· Ἐμβ. πλαγ. παραλ]μου = βάσις × ὕψος. Ἀλλὰ ἡ βάση ΒΓ τοῦ πλαγίου παραλληλογράμου εἶναι καὶ βάση τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, καὶ τὸ ὕψος ΑΚ τοῦ πλαγίου παραλληλογράμμου εἶναι καὶ ὕψος τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Ἄρα πολλαπλασιάζοντας τὴ βάση τοῦ τριγώνου ἐπὶ τὸ ὕψος του, βρίσκομε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πλαγίου παραλληλογράμμου. Ἀλλὰ τὸ ἐμβαδὸν αὐτό, ὅπως εἴδαμε, ἰσοῦται μὲ τὸ ἐμβαδὸν 2 τέτοιων τριγώνων.

Ὥστε: ***Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου πολλαπλασιάζομε τὴ βάση του ἐπὶ τὸ ὕψος του καὶ τὸ γινόμενο τὸ διαιροῦμε διὰ 2.***

$$\text{Ἐμβ. τριγώνου} = \frac{\text{βάση} \times \text{ὕψος}}{2}$$ τύπος

Π. χ. Ἂν στὸ τρίγωνό μας· ἡ βάση ΒΓ $=$ 6 μ. καὶ τὸ ὕψος ΑΚ $=$ 5 μ. τότε ἐμβαδὸν $= \frac{6 \times 5}{2} = \frac{30}{2} = 15$ τ. μ.

Προβλήματα

1) Τὴ βάση τοῦ τριγώνου μὲ τί μονάδες τὴ μετρᾶμε; Μὲ τί τὸ ὕψος;

2) Ἕνα τρίγωνο ἔχει βάση, 1,80 μ. καὶ ὕψος 1,20 μ. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδόν του;

3) Ἕνα χωράφι τριγωνικὸ ἔχει βάση 50 μ. καὶ ὕψος 12 μ. Πόσες δραχμὲς θὰ πάρη ὁ ἰδιοκτήτης του ἐὰν τὸ πουλήσῃ πρὸς 80.000 δραχ. τὸ τετρ. μέτρο;

4) Ὁ γείτονάς σου ἔχει ἕνα ἀμπέλι τριγωνικὸ μὲ βάση 90 μ. καὶ ὕψος 12 μ. καὶ θέλει νὰ ξέρη πόσα στρέμματα εἶναι τὸ ἀμπέλι του. Νὰ τοῦ τὸ βρῆς ἐσύ.

5) Ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο ἔχει κάθετες πλευρὲς 2,80 μ. καὶ 1,50 μ. Πόσα τετραγωνικὰ μέτρα εἶναι τὸ ἐμβαδόν του; (Στὰ ὀρθογώνια τρίγωνα, προτιμᾶμε γιὰ βάση, τὴ μία ἀπὸ τὶς δύο πλευρὲς τῆς ὀρθῆς γωνίας· τότε τὸ ὕψος, εἶναι ἡ ἄλλη).

6) Ἕνας πατέρας χάρισε στὰ δύο παιδιά του ἕνα χωράφι τριγωνικὸ μὲ βάση 120 μ. και ὕψος 90 μ., γιὰ νὰ τὸ μοιμάσουν ἐξ ἴσου. Πόσους τετρ. τεκτονικοὺς πήχεις πῆρε τὸ καθένα;

Ἐμβαδὸν ἐπιφανείας τριγωνικῆς πυραμίδος

Ἔχομε μία τριγωνικὴ πυραμίδα (σχ. 55 σελ. 45), ἀπὸ χαρτόνι. Κόβομε τὶς τριγωνικὲς ἕδρες της. Θὰ ἔχωμε ἐμπρός μας 4 τρίγωνα. Ἂν βροῦμε τὰ ἐμβαδὰ καὶ τῶν τεσσάρων τριγώνων, ὅπως ξέρομε, καὶ τὰ προσθέσωμε, θἄχωμε βρῆ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τῆς πυραμίδος.

ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΤΡΙΓΩΝΙΚΗ ΠΥΡΑΜΙΣ - ΕΜΒΑΔΟΝ ΤΗΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ ΤΗΣ

Ἂν ἡ βάση τῆς τριγωνικῆς πυραμίδος εἶναι ἰσόπλευρο τρίγωνο καὶ οἱ παράπλευρες ἀκμές της εἶναι ἴσες μεταξύ των, ἡ πυραμὶς λέγεται ***κανονικὴ πυραμίς.***

Οἱ παράπλευρες ἕδρες τῆς κανονικῆς πυραμίδος εἶναι 3 τρίγωνα ἰσοσκελῆ καὶ ἴσα.

Ὅταν θέλωμε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τῆς κανονικῆς τριγωνικῆς πυραμίδος, βρίσκομε τὸ ἐμβαδὸν μιᾶς ἀπὸ τὶς 3 ἴσες παράπλευρες τριγωνικὲς ἕδρες, τὸ τριπλασιάζομε καὶ ἔχομε τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τῆς πυραμίδος· σ' αὐτὸ προσθέτομε τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς, καὶ ἔχομε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τῆς κανονικῆς τριγωνικῆς πυραμίδος.

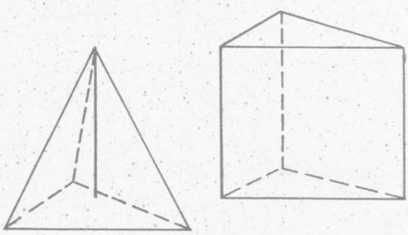
Ἀσκήσεις

1) Κατασκευάστε μόνοι σας μία κανονικὴ τριγωνικὴ πυραμίδα ἀπὸ χαρτόνι.
2) Νὰ βρῆτε τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς της.
3) Νὰ βρῆτε τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας της.
4) Νὰ βρῆτε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας της.

Ὄγκος τριγωνικῆς πυραμίδος

(Τὰ γεωμετρικὰ σώματα ποὺ ἔχουν ἴσους ὄγκους λέγονται *ἰσοδύναμα).*

Παίρνομε ἕνα τριγωνικὸ πρῖσμα, καμωμένο ἀπὸ χαρτόνι, καὶ μία τριγωνικὴ πυραμίδα, μὲ ἴση βάση καὶ ἴσο ὕψος μὲ τοῦ πρίσματος. Ἂν μπορούσαμε νὰ χωρίσωμε κατάλληλα τὸ τριγωνικὸ πρῖσμα, θὰ χωριζόταν σὲ τρεῖς τριγωνικὲς πυραμίδες, ἰσοδύναμες καὶ κάθε μία θὰ ἦταν ἰσοδύναμη μ' αὐτὴ ποὺ πήραμε πρῶτα. Ἐπειδὴ ὅμως αὐτὸ εἶναι δύσκολο, δοκιμάζομε μὲ ἕνα ἄλλο τρόπο νὰ συγκρίνωμε αὐτὰ τὰ δύο σώματα.



Σχ. 63

Τὸ σχ. 63 δείχνει μία τριγωνικὴ πυραμίδα καὶ ἕνα τριγωνικὸ πρῖσμα ποὺ ἔχουν ἴσες βάσεις καὶ ἴσα ὕψη.

Γεμίζομε τὴν τριγωνικὴ πυραμίδα μὲ ζάχαρη ἢ μὲ ἄμμο, καὶ τὴν ἀδειάζομε στὸ τριγωνικὸ πρῖσμα. Κάνοντας αὐτό, θὰ δοῦμε ὅτι γιὰ νὰ γεμίση τὸ τριγωνικὸ πρῖσμα, θὰ χρειασθοῦν 3 γεμᾶτες τριγωνικὲς πυραμίδες. Αὐτὸ μᾶς δείχνει ὅτι ὁ ὄγκος τῆς τριγωνικῆς πυραμίδος, εἶναι 3 φορὲς μικρότερος ἀπὸ τὸν ὄγκο τοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος. Ἂν λοιπὸν ἔχωμε τὸν ὄγκο ἑνὸς τριγωνικοῦ πρίσματος, ὁ ὄγκος τῆς τριγ. πυραμίδος, ποὺ ἔχει ἴση βάση καὶ ἴσο ὕψος μὲ αὐτὸ τὸ πρῖσμα, θὰ εἶναι 3 φορὲς μικρότερος.

Τώρα, ἀφοῦ ξέρομε ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος βρίσκεται ἂν πολλαπλασιάσωμε τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του, γιὰ νὰ βροῦμε τὸν ὄγκο τῆς τριγωνικῆς πυραμίδος θὰ διαιρέσωμε τὸν ὄγκον τοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος διὰ 3.

Ἔτσι : ***Γιὰ νὰ βροῦμε τὸν ὄγκο τῆς τριγωνικῆς πυραμίδος, πολλαπλασιάζομε τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς της ἐπὶ τὸ ὕψος της καὶ τὸ γινόμενον τὸ διαιροῦμε διὰ 3.***

Μὲ τὸν ἴδιο τρόπο βρίσκομε τὸν ὄγκο κάθε πυραμίδος.

Δηλαδὴ σύντομα γράφομε :

$$\boxed{\text{Ὄγκος πυραμίδος} = \frac{\text{Ἐμβ. βάσεως} \times \text{ὕψος}}{3}} \quad \text{τύπος}$$

Προβλήματα

1) Τὸ ἐμβαδὸν βάσεως στὸν τύπο, μὲ τί μονάδες τὸ μετρᾶμε ; Μὲ τί τὸ ὕψος ;

2) Μία τριγωνικὴ πυραμὶς ἔχει ἐμβαδὸν βάσεως 3 τ. μ. καὶ ὕψος 1,20 μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος της ;

3) Μία τριγωνικὴ πυραμὶς ἔχει βάση τρίγωνο μὲ βάση 2,40 μ. καὶ ὕψος 1,80 μ. Τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος εἶναι 3 μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος της ;

4) Μία τριγωνικὴ πυραμὶς ἔχει βάση ὀρθογώνιο τρίγωνο. Τῆς βάσεως αὐτῆς οἱ δύο κάθετες πλευρὲς εἶναι· ἡ μία 4 μ. καὶ ἡ ἄλλη 2,80 μ. Τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος εἶναι 3,20 μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος της ;

5) Ὁ ὄγκος μιᾶς τριγωνικῆς πυραμίδος εἶναι 36 κυβικὰ μέτρα καὶ τὸ ὕψος της 3,20 μέτρα. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς της ;

6) Μία τριγωνικὴ πυραμὶς ἔχει ὄγκο 8,40 κ. μ. καὶ ἐμβαδὸν βάσεως 6,30 τ. μ. Πόσα μέτρα εἶναι τὸ ὕψος της ;

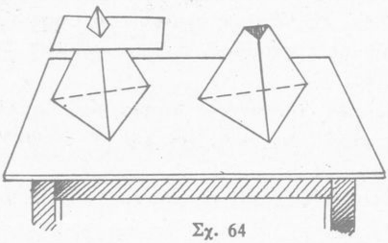
7) Μία τριγωνικὴ πυραμὶς μὲ ἐμβαδὸν βάσεως 3,80 τ. μ. καὶ ὕψος 2,40 μ., πόσες ὀκάδες νερὸ χωρεῖ ; Πόσες ὀκάδες λάδι ; Πόσες ὀκάδες πετρέλαιο ;

Ἀσκήσεις

1) Κάμε ἀπὸ χαρτόνι μία τριγωνικὴ πυραμίδα.
2) » » » ἕνα τριγωνικὸ πρῖσμα.
3) » » » ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνο.
4) » » » ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο.
5) » » » μία τετραγωνικὴ πυραμίδα.
6) » » » μία πενταγωνικὴ πυραμίδα.
7) » » πηλὸ διάφορα εἴδη πυραμίδων.

ΚΟΛΟΥΡΟΣ ΠΥΡΑΜΙΣ

Ἂν πάρωμε μία τριγωνικὴ πυραμίδα καὶ τῆς κόψωμε ἕνα κομμάτι πρὸς τὴν κορυφὴ μὲ ἕνα ἐπίπεδο παράλληλο πρὸς τὴ βάση της, θὰ δοῦμε ὅτι παρουσιάζεται ἕνα ἄλλο γεωμετρικὸ σῶμα τὸ ὁποῖον λέγεται ***κόλουρος τριγωνικὴ πυραμίς***· προσέξτε τὸ σχῆμα της (σχ. 64).



Σχ. 64

Ἡ κόλουρος τριγωνικὴ πυραμὶς ἔχει 5 ἕδρες, 9 ἀκμὲς καὶ 6 κορυφές.

Κατὰ τὸν ἴδιο τρόπο, μποροῦμε νὰ κάμωμε ***κόλουρο τετραγωνικὴ πυραμίδα, κόλουρο πενταγωνικὴ πυραμίδα*** κ.λ.π.

Ἂν παρατηρήσωμε τὸ σχῆμα μιᾶς ὁποιασδήποτε κολούρου πυραμίδος θὰ δοῦμε :

1ον) Ὅτι δὲν ἔχει κορυφή, ὅπως ἔχουν οἱ πυραμίδες, ἀλλὰ ἀντὶ κορυφῆς ἔχει μία ἕδρα παράλληλο πρὸς τὴ βάση τῆς πυραμίδος ἀπὸ τὴν ὁποία ἔγινε. Ἡ ἕδρα αὐτή, λέγεται ***ἄνω βάση*** τῆς κολούρου πυραμίδος, ἐνῶ ἡ βάση τῆς ὁλόκληρης πυραμίδος, λέγεται ***κάτω βάση*** τῆς κολούρου πυραμίδος.

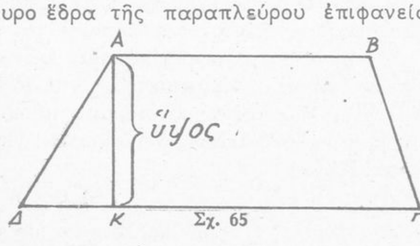
2ον) Ἡ ἄνω βάση πάντοτε, ἔχει τόσες πλευρὲς ὅσες καὶ ἡ κάτω βάση ἀλλὰ εἶναι μικρότερη.

3ον) Σὲ κάθε κόλουρο πυραμίδα, οἱ παράπλευρες ἕδρες της δὲν εἶναι τρίγωνα, ὅπως στὶς ὁλόκληρες πυραμίδες, ἀλλὰ τετράπλευρα.

ΤΡΑΠΕΖΙΟΝ

Ἂν πάρωμε μία παράπλευρο ἕδρα τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας μιᾶς κολούρου πυραμίδος καὶ τὴν ἰχνογραφήσωμε, θὰ παρουσιασθῆ τὸ σχῆμα 65.

Αὐτὸ τὸ σχῆμα λέγεται ***τραπέζιον***. Σὰν τὸ σχῆμα αὐτὸ ἔχουν ὅλες οἱ ἕδρες τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τῆς κολούρου πυραμίδος.



Σχ. 65

Τὸ τραπέζιον βλέπομε ὅτι ἀποτελεῖται ἀπὸ 4 πλευρές· ἑπομένως τὸ τραπέζιον εἶναι τετράπλευρο, ὅπως τὸ τετράγωνο, τὸ ὀρθογώνιο καὶ τὸ πλάγ. παραλληλόγραμμο. Διαφέρει ὅμως, διότι μόνον δυὸ πλευρές του εἶναι παράλληλες. Αὐτὲς οἱ δύο παράλληλες πλευρές, λέγονται ***βάσεις*** τοῦ τραπεζίου· ἄνω βάση καὶ κάτω βάση.

Ὥστε : ***Τραπέζιον εἶναι τὸ σχῆμα ποὺ ἔχει 4 πλευρές, ἀπὸ τὶς ὁποῖες μόνον δύο ἀπέναντι πλευρές του εἶναι παράλληλες.***

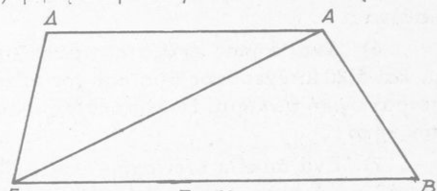
Εἰς τὸ τραπέζιον ΑΒΓΔ (σχ. 65), ὕψος εἶναι τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΚ ποὺ ἑνώνει τὶς δύο βάσεις του καὶ εἶναι κάθετο σ' αὐτές.

Ἀσκήσεις

1) Κάμε μία τετραγωνικὴ κόλουρο πυραμίδα στὸ τετράδιό σου.
2) » » τριγωνικὴ » » ἀπὸ πηλό.
3) » » ». » » » ξύλο.
4) » » » » » » χαρτόνι.
5) Μέτρησε τὶς ἕδρες. τὶς ἀκμές. τὶς κορυφὲς κάθε μιᾶς.
6) Πές μας τί εἶναι τραπέζιο.
7) Κάμε τὸ σχῆμα του στὸ τετράδιό σου.
8) Φέρε τὸ ὕψος του καὶ μέτρησέ το.
9) Μέτρησε τὶς δύο βάσεις του.
10) Σύγκρινε τὸ τραπέζιο· α) μὲ τὸ τετράγωνο, β) μὲ τὸ ὀρθογώνιο, γ) μὲ τὸ πλάγιο παραλληλόγραμμο.

Ἐμβαδὸν τραπεζίου

Στὸ τραπέζιο ΑΒΓΔ (σχ. 66) φέρομε τὴν διαγώνιο ΑΓ. Τὸ τραπέζιο ἔτσι χωρίστηκε σὲ δύο τρίγωνα. Ξέρομε τὰ βρίσκωμε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου.



Σχ. 66

Ἂν βροῦμε λοιπὸν τὰ ἐμβαδὰ καὶ τῶν δύο τριγώνων καὶ τὰ προσθέσωμε, τὸ ἄθροισμα ποὺ θὰ βροῦμε, θὰ εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου.

Τὸ ἐμβαδὸν αὐτὸ τοῦ τραπεζίου σύντομα τὸ βρίσκομε ἔτσι :

1ον) Μετροῦμε μιὰ βάση. 2ον) Μετροῦμε τὴν ἄλλη βάση. 3ον) Προσθέτομε τὰ μήκη τῶν δύο βάσεων. 4ον) Τὸ ἄθροισμα τῶν δύο βάσεων τὸ διαιροῦμε διὰ δύο. 5ον) Τὸ πηλίκον αὐτῆς τῆς διαιρέσεως τὸ πολλαπλασιάζομε ἐπὶ τὸ ὕψος.

Τὸ γινόμενον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ αὐτοῦ θὰ εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου.

Π. χ. Ἔχω ἕνα τραπέζιον. Μετρῶ τὴν κάτω βάση καὶ βρίσκω ὅτι εἶναι 1,20 μ. Μετρῶ τὴν ἄνω, καὶ εἶναι 0,80 μ. Μετρῶ καὶ τὸ ὕψος καὶ εἶναι 0,60 μ. Τὸ ἐμβαδόν του εἶναι $\frac{1,20 + 0,80}{2} \times 0,60 = 0,60$ τ. μ.

(Τὸ ἥμισυ τοῦ ἀθροίσματος, λέγεται ἡμιάθροισμα).

Ὥστε : ***Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου, πολλαπλασιάζομε τὸ ἡμιάθροισμα τῶν δύο βάσεων ἐπὶ τὸ ὕψος.***

Δηλ. $$\text{Ἐμβ. τραπεζίου} = \frac{\text{Βάση} + \text{βάση}}{2} \times \text{ὕψος}$$ τύπος

Στὸν τύπο· ***Βάση***, ἐννοοῦμε τὴ μεγάλη καὶ ***βάση***, τὴ μικρή.

Προβλήματα

1) Μὲ τί μονάδες μετρᾶμε τὴ μία Βάση, μὲ τί τὴν ἄλλη βάση, καὶ μὲ τί τὸ ὕψος ;

2) Ἕνα τραπέζιον ἔχει τὴν κάτω βάση 4,20 μ., τὴν ἄνω 1,80 μ. καὶ τὸ ὕψος 2,40 μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδόν του ;

3) Ἕνα τραπέζιον ἔχει τὶς δύο παράλληλες πλευρές του, τὴ μία 8 μ., τὴν ἄλλη 3,20 καὶ τὸ ὕψος του 4 μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδόν του ;

4) Ἕνα τραπέζιον ἔχει τὴ μία βάση του 3,60 μ., τὴν ἄλλη 1,40 μ. καὶ ἐμβαδὸν 6,25 τ. μ. Πόσον εἶναι τὸ ὕψος του ;

5) Ἕνα χωράφι σχήματος τραπεζίου ἔχει τὴ μία βάση 78 μ., τὴν ἄλλη 41,20 μ. καὶ ὕψος 40 μ. Αὐτὸ τὸ χωράφι θέλουν νὰ τὸ μοιράσουν 3 ἀδέλφια καὶ νὰ πάρουν ἀπὸ ἴσα. Πόσα τετραγωνικὰ μέτρα θὰ πάρη τὸ καθένα ;

6) Ἕνας κῆπος σχήματος τραπεζίου μὲ παράλληλες πλευρὲς 8,40 μ. καὶ 5,20 μ. ἔχει ὕψος 6 μ. καὶ χρειάζεται 6 δράμια λίπασμα σὲ κάθε τετραγωνικὴ παλάμη. Πόσες ὀκάδες λίπασμα θὰ χρειασθῆ, γιὰ ὅλο τὸν κῆπο ;

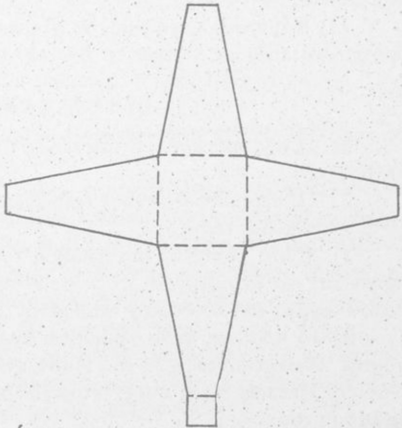
7) Ἕνα ἀμπέλι ἔχει σχῆμα τραπεζίου τοῦ ὁποίου ἡ μία βάση εἶναι 62 μ., ἡ ἄλλη 24 μ. καὶ τὸ ὕψος 12,40 μ. Πόσα κλήματα ἔχει, ἂν σὲ κάθε τετραγωνικὸ μέτρο εἶναι φυτεμένα 2 κλήματα ;

8) Μία στέγη ἔχει σχῆμα τραπεζίου τοῦ ὁποίου ἡ μία βάση εἶναι 12 μ., ἡ ἄλλη 8 μ. καὶ τὸ ὕψος 6,20 μ. Πόσα κεραμίδια θὰ χρειασθοῦν γιὰ νὰ σκεπασθῆ, ἂν σὲ κάθε τετραγωνικὸ μέτρο χρειάζωνται 60 κεραμίδια ;

9) Ὁ γείτονάς σου ἔχει μία αὐλὴ σχήματος τραπεζίου. Θέλει νὰ ἀγοράση τσιμέντο, γιὰ νὰ τὴ τσιμεντοστρώση. Δὲν ξέρει ὅμως πόσο πρέπει ν' ἀγοράση. Τί θὰ κάμης γιὰ νὰ βρῆς πόσα σακκιὰ τσιμέντο θὰ χρειασθοῦν, ἅμα ξέρης ὅτι ἕνα σακκὶ τσιμέντο στρώνει 4 τ. μ. τῆς αὐλῆς ;

Ἐμβαδὸν ἐπιφανείας κολούρου πυραμίδος

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς κολούρου πυραμίδος, βρίσκομε τὸ ἐμβαδὸν κάθε μιᾶς ἐκ τῶν ἑδρῶν της καὶ κατόπιν προσθέτομε τὰ ἐμβαδὰ αὐτά. Τὸ ἄθροισμα ποὺ θὰ βροῦμε εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφανείας τῆς κολούρου πυραμίδος.



Γιὰ νὰ βροῦμε λοιπὸν τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς κολούρου πυραμίδος, βρίσκομε τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας της καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῶν βάσεών της, καὶ προσθέτομε τὰ ἐξαγόμενα.

Ἀσκήσεις

1) Κάμε μόνος σου μία κόλουρο πυραμίδα καὶ προσπάθησε νὰ βρῆς τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας της.

2) Νὰ βρῆς ἢ νὰ φτιάσης διάφορα σώματα, ποὺ νὰ ἔχουν τὸ σχῆμα τῆς κολούρου πυραμίδος.

3) Ἰχνογράφησε μία τριγωνικὴ κόλουρο πυραμίδα καὶ κοντά της μία ἕδρα τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας της.

Ἐργασίες γιὰ ἐπανάληψη

1) Ἰχνογράφησε ὅλα τὰ πολύεδρα ποὺ ἔμαθες ἕως τώρα καὶ γράψε κάτω ἀπὸ τὸ καθένα τὸ ὄνομά του.

2) Σημείωσε κάτω ἀπ' τὸ καθένα, πῶς βρίσκομε τὸν ὄγκο του.

3) Γράψε ποιὲς εἶναι οἱ μονάδες τοῦ ὄγκου.

4) Ἰχνογράφησε ὅλα τὰ ἐπίπεδα σχήματα ποὺ ἔμαθες ἕως τώρα καὶ γράψε κάτω ἀπὸ τὸ σχῆμα καθενὸς τὸ ὄνομά του.

5) Γράψε κάτω ἀπὸ τὸ καθένα ἀπ' αὐτὰ τὰ σχήματα πῶς βρίσκομε τὸ ἐμβαδόν του.

6) Γράψε στὸ τετράδιό σου πῶς ἐργαζόμαστε γιὰ νὰ βρίσκωμε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῶν πολυέδρων.

7) Γράψε μὲ ποιὲς μονάδες μετροῦμε τὶς ἐπιφάνειες.

8) Γράψε στὸ τετράδιό σου ὅλα τὰ εἴδη τῶν γραμμῶν ποὺ ἔμαθες καὶ σημείωσε κάτω ἀπὸ τὸ καθένα, τὸ ὄνομά του.

9) Γράψε μὲ τί μονάδες μετρᾶμε τὶς γραμμές.

10) Γράψε ὅλα τὰ εἴδη τῶν γωνιῶν, ποὺ ξέρεις, καὶ σημείωσε σὲ καθένα τὸ ὄνομά του.

11) Γράψε ποιὰ γωνία λέγεται ὀρθή.

12) Ποιὰ γωνία εἶναι μεγαλύτερη καὶ ποιὰ εἶναι μικρότερη ἀπὸ δύο γωνίες;

13) Κάμε συλλογὴ ἀπὸ τὰ στερεὰ ποὺ ἔχεις φτιάσει μέχρι τώρα καὶ γράψε στὸ καθένα ἀπάνω τὸ ὄνομά του.

Γενικὰ προβλήματα

1) Ἡ πλευρὰ ἑνὸς τετραγώνου εἶναι 8,25 μ. Πόση εἶναι ἡ περίμετρός του;

2) Ἡ περίμετρος ἑνὸς τετραγώνου εἶναι 52,80 μ. Πόσα μέτρα εἶναι ἡ πλευρά του;

3) Ἕνας κῆπος τετραγωνικὸς τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι 25,40 μ. πρόκειται νὰ περιφραχθῇ μὲ συρματόπλεγμα. Πόσο θὰ κοστίσῃ τὸ συρματόπλεγμα, ἄν τὸ σύρμα πουλιέται 3.500 δραχμὲς τὸ μέτρο;

4) Τὸ πάτωμα ἑνὸς δωματίου ἔχει σχῆμα τετραγώνου, τοῦ ὁποίου ἡ κάθε πλευρὰ εἶναι 7,75 μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδόν του;

5) Ἡ περίμετρος ἑνὸς τετραγώνου εἶναι 213,60 μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδόν του;

6) Ἕνα τετραγωνικὸ οἰκόπεδο, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι 12,50 μ. πουλήθηκε πρὸς 35.000 δραχ. τὸ μ. Πόσο πουλήθηκε ὅλο τὸ οἰκόπεδο;

7) Μία τετραγωνικὴ αὐλὴ τῆς ὁποίας ἡ πλευρὰ εἶναι 8,5 μ., πρόκειται νὰ τσιμενταρισθῇ. Πόσο θὰ κοστίσῃ τὸ τσιμεντάρισμα, ἂν γιὰ κάθε τετραγωνικὸ μέτρο πληρώσωμε 15.000 δραχ.;

8) Οἱ ἀκμὲς ἑνὸς κύβου εἶναι 0,75 μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας του;

9) Θέλουμε νὰ ταχυδρομήσουμε ἕνα κυβικὸ κιβώτιο, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκμὴ εἶναι 0,45 μ. Στὸ ταχυδρομεῖο μᾶς ζητοῦν νὰ τὸ ντύσωμε ἀπ' ἔξω μὲ πανί. Πόσα τετραγωνικὰ μέτρα πανὶ χρειαζόμαστε γιὰ νὰ τὸ ντύσωμε;

10) Ἡ ἀκμὴ ἑνὸς κύβου εἶναι 1,85 μέτρα. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος του;

11) Ἡ ἀκμὴ ἑνὸς κυβικοῦ δοχείου εἶναι 1,55 μ. Πόσες κυβικὲς παλάμες εἶναι ὁ ὄγκος του;

12) Πόσα κυβικὰ μέτρα νερὸ χωράει μία κυβικὴ δεξαμενή, τῆς ὁποίας ἡ ἀκμὴ εἶναι 3,75 μέτρα;

13) Πόσες ὀκάδες λάδι χωράει μία κυβικὴ δεξαμενή, τῆς ὁποίας ἡ ἀκμὴ εἶναι 1,25 μέτρα; (Εἰδικὸν βάρος λαδιοῦ 0,915).

14) Ἕνα χωράφι σχήματος ὀρθογωνίου μὲ βάση 25 μ. καὶ ὕψος 32 μ., πουλήθηκε πρὸς 7.500 δραχ. τὸ τ. μ. Πόσο πουλήθηκε ὅλο τὸ χωράφι;

15) Μία αὐλὴ σχήματος ὀρθογωνίου μὲ βάση 8 μ. καὶ ὕψος 12 μ., πρόκειται νὰ περιφραχθῇ μὲ 6 σειρὲς σύρμα. Πόσα μέτρα σύρμα χρειάζεται γι' αὐτό;

16) Πόση εἶναι ἡ περίμετρος ὀρθογωνίου ποὺ ἔχει βάση 7,5 μ. καὶ ὕψος 10 μέτρα ;

17) Θέλουμε ν' ἀνοίξωμε ἕνα χαντάκι γύρω - γύρω στὸ ὀρθογώνιο χωράφι μας. Τὸ χωράφι μας ἔχει μῆκος 27 μ. καὶ πλάτος 14 μ. Πόσο μῆκος θὰ ἔχη τὸ χαντάκι καὶ πόσα θὰ πληρώσωμε, ἀφοῦ γιὰ κάθε μέτρο μᾶς ζητοῦν 4.000 δρχ. ;

18) Θέλουμε νὰ ἐλαιοχρωματίσωμε μία πόρτα ποὺ ἔχει μῆκος 2,50 μ. καὶ πλάτος 0,90 μ. Μᾶς ζητοῦν γι' αὐτὸ 15.000 δρχ. τὸ τ. μ. Πόσο θὰ μᾶς κοστίση τὸ βάψιμο κι' ἀπὸ τὶς δυὸ ὄψεις ;

19) Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς ὀρθογωνίου εἶναι 2.125 τ. μ., τὸ δὲ μῆκος του 250 μ. Πόσον εἶναι τὸ πλάτος του ;

20) Ἡ περίμετρος ἑνὸς ὀρθογωνίου εἶναι 330,80 μ. τὸ δὲ μῆκος του 135 μ. Πόσον εἶναι τὸ πλάτος του καὶ πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδόν του ;

21) Θέλουμε νὰ πατώσωμε ἕνα δωμάτιο, ποὺ ἔχει δάπεδο ὀρθογωνίου σχήματος, μὲ σανίδες. Τὸ μῆκος τοῦ δωματίου εἶναι 5,80 μ. καὶ τὸ πλάτος του 4,25 μ., τῆς δὲ σανίδας τὸ μῆκος εἶναι 2,90 μ, καὶ πλάτος 0,25 μ. Πόσες τέτοιες σανίδες θὰ χρειασθοῦμε ;

22) Μία αὐλὴ ὀρθογωνίου σχήματος ποὺ ἔχει μῆκος 14 μ. καὶ πλάτος 9 μ., πρόκειται νὰ στρωθῆ μὲ πλάκες, ποὺ κάθε μία ἔχει μῆκος καὶ πλάτος 0,20 μ. Πόσες τέτοιες πλάκες θὰ χρειασθοῦν ;

23) Τὸ μῆκος ἑνὸς δωματίου σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι 6 μ., τὸ πλάτος 9 μ. καὶ τὸ ὕψος 3,75 μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῶν τεσσάρων τοίχων του, καὶ πόσο θὰ κοστίση ὁ ὑδροχρωματισμός του, πρὸς 2.000 δρχ. τὸ τετραγωνικὸ μέτρο ; (Τὸ πάτωμα καὶ τὸ ταβάνι δὲν θὰ ὑδροχρωματισθοῦν).

24) Ποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς αἰθούσης τῆς διδασκαλίας σας ; (ὁλικὴ ἐπιφάνεια).

25) Πάρτε ἕνα ἀπὸ τὰ κιβώτια ποὺ ἔχουν κουτιὰ γάλα. Μετρῆστε το καὶ βρῆτε πόσο χαρτὶ χρειάζεται γιὰ νὰ τὸ περιτυλίξωμε ;

26) Ἕνας τοῖχος ἔχει μῆκος 15 μέτρα, πλάτος 1,50 μ. καὶ ὕψος 3,50 μ. Πόσο κόστισε τὸ κτίσιμό του, ἂν πληρώθηκαν οἱ κτίστες πρὸς 8.000 δρχ. τὸ κυβικὸ μέτρο ; (Τί σχῆμα ἔχει ὁ τοῖχος ;).

27) Ἕνα μάρμαρο σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ἔχει μῆκος 2,40 μ., πλάτος 0,90 μ. καὶ ὕψος 0,40 μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος του καὶ πόσο τὸ βάρος του ; (Εἰδικὸ βάρος μαρμάρου 2,83).

28) Μία ἀποθήκη σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ἔχει μῆκος 5 μέτρα, πλάτος 3,5 μέτρα καὶ ὕψος 3 μέτρα. Μετρῆστε ἕνα χαρτονένιο κιβώτιο ἀπ' αὐτὰ ποὺ βάζουν τὰ κουτιὰ τὸ γάλα καὶ βρῆτε, πόσα τέτοια κιβώτια σιτάρι χωράει ἡ παραπάνω ἀποθήκη ;

29) Θέλομε νὰ στρώσωμε τὴν αὐλή μας ποὺ ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου, μὲ ἄμμο πάχους 0,25 μ. Ἡ αὐλή μας ἔχει μῆκος 12,5 μ. καὶ πλάτος 8 μ. Πόσα κ. μ. ἄμμο θὰ χρειασθοῦμε ;

30) Τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως ἑνὸς πλαγίου παραλληλεπιπέδου εἶναι 42 τ. μ. καὶ τὸ ὕψος του 6,45 μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος του ;

31) Ἡ βάση ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι 2,5 μ. καὶ κάθε μία ἀπὸ τὶς ἴσες πλευρές του 2. μ. Πόση εἶναι ἡ περίμετρός του ;

32) Ἕνα τριγωνικὸ χωράφι ἔχει βάση 68, 50 μ. καὶ ὕψος 54 μ. Πόσα στρέμματα εἶναι ;

33) Ἕνας τριγ. κῆπος ποὺ ἔχει βάση 27,50 μ. καὶ ὕψος 19 μ., πουλήθηκε πρὸς 50.000 δρχ. τὸ τ. μ. Πόσο πουλήθηκε ὅλος ὁ κῆπος ;

34) Ἡ μία κάθετος πλευρὰ ἑνὸς ὀρθ. τριγώνου εἶναι 4,5 μ. καὶ ἡ ἄλλη 6 μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδόν του ;

35) Ἡ βάση μιᾶς πυραμίδος εἶναι τετράγωνο μὲ πλευρὰ 3,5 μ., τὸ δὲ ὕψος της 5 μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος της ;

36) Τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως μιᾶς πυραμίδος εἶναι 12 τ. μ. καὶ τὸ ὕψος της 6 μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος της ;

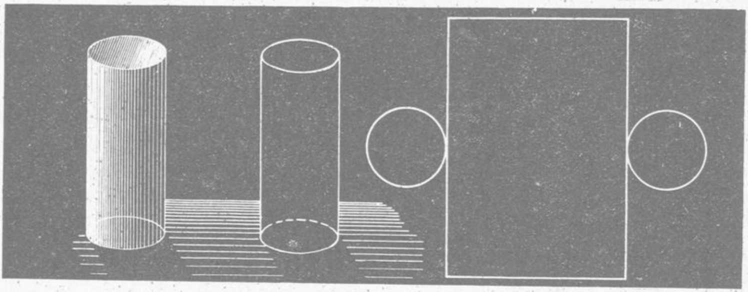
37) Ἕνα χωράφι σχήματος τραπεζίου, ποὺ ἔχει βάσεις 35 μ. καὶ 24 μ., καὶ ὕψος 20 μ., πουλήθηκε πρὸς 25.000 δραχμὲς τὸ τ. μ. Πόσο πουλήθηκε ὅλο ;

38) Ἕνα οἰκόπεδο σχήματος τραπεζίου, μὲ βάσεις 45 μ. καὶ 28 μ., καὶ ὕψος 20 μ., πουλήθηκε πρὸς 125.000 δραχ. τὸ τ. μ. Πόσο πουλήθηκε ὅλο ;

39) Θέλομε νὰ τσιμεντάρωμε μία πλατεία ποὺ ἔχει σχῆμα τραπεζίου, μὲ βάσεις 58 μ. καὶ 43 μ., καὶ ὕψος 36 μ. Μᾶς ζητοῦν 13.000 δραχμὲς κατὰ τ. μ. Πόσο θὰ κοστίση αὐτὸ τὸ τσιμεντάρισμα ;

40) Ὁ κὺρ Γιάννης ἔχει ἕνα χωράφι ὀρθογώνιο μὲ μῆκος 65 μ. καὶ ὕψος 42 μ. καὶ θέλει νὰ τὸ κάμη ἀνταλλαγὴ μὲ ἕνα ἄλλο χωράφι, τοῦ κὺρ Θανάση, ποὺ ἔχει σχῆμα τραπεζίου μὲ βάσεις 45 μ. καὶ 35 μ., καὶ ὕψος 21 μ. Δὲν ἤξεραν ὅμως νὰ κάνουν λογαριασμὸ καὶ γι' αὐτό, συμφώνησαν νὰ βροῦν ἕνα μορφωμένο νὰ τοὺς τὸν κάνη· καὶ ὅποιος θὰ πάρη περισσότερο χωράφι, νὰ πληρώση στὸν ἄλλο τὴ διαφορὰ πρὸς 6.000 δραχ. τὸ τ. μ. Σεῖς ποὺ εἶσθε παιδιὰ τοῦ Σχολείου, κάμετέ τους τὸ λογαριασμὸ αὐτό.

41) Ἕνας ἔχει δύο οἰκόπεδα, τὸ ἕνα ὀρθογώνιο, ποὺ ἔχει βάση 26 μ. καὶ ὕψος 17 μ. καὶ τὸ ἄλλο σχήματος τραπεζίου μὲ βάσεις 18 μ. καὶ 21 μ., καὶ ὕψος 24 μ. Τὸ πρῶτο τὄδωσε στὴν κόρη του καὶ τὸ δεύτερο στὸν γυιό του. Ποιὸ παιδὶ πῆρε τὸ μεγαλύτερο οἰκόπεδο ;



ΒΙΒΛΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

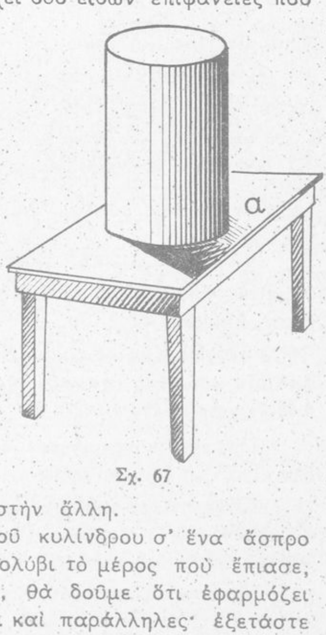
ΚΥΛΙΝΔΡΟΣ

Προσέξτε τὸ σχῆμα ποὺ ἔχει τὸ κουτὶ τὸ γάλα, τὸ σχῆμα ποὺ ἔχει ἕνα στρογγυλὸ μολύβι πρὶν τὸ ξύσωμε. Τὸ σχῆμα ποὺ ἔχουν αὐτὰ τὰ σώματα τὸ λέμε ***κύλινδρο.***

Ὁ κύλινδρος (σχ. 67) ὅπως βλέπετε ἔχει δύο εἰδῶν ἐπιφάνειες ποὺ κάνουν τὸ στερεὸ ἀπὸ παντοῦ κλειστό, τὴν γύρω - γύρω ποὺ εἶναι καμπύλη καὶ λέγεται παράπλευρος ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου, καὶ δύο ἐπίπεδες ἐπιφάνειες.

Οἱ δύο ἐπίπεδες ἐπιφάνειες τοῦ κυλίνδρου λέγονται ***βάσεις.***

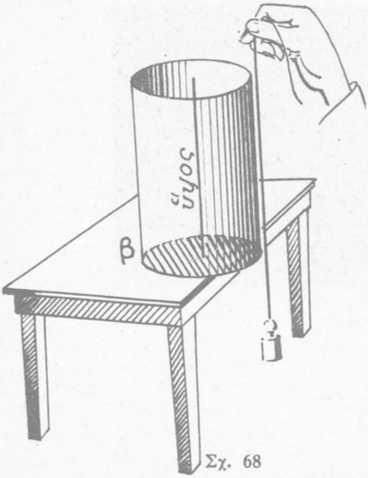
Ὅταν ὁ κύλινδρος στηρίζεται στὸ τραπέζι μὲ μία ἀπὸ τὶς βάσεις του, αὐτὴ ἡ βάση λέγεται ***κάτω βάση·*** ἡ ἄλλη λέγεται ***ἄνω βάση.*** Ἡ γύρω - γύρω καμπύλη ἐπιφάνειά του, ἅμα τὴ βλέπομε ἀπ' ἔξω εἶναι ***κυρτὴ*** (καμπουρωτή), ἅμα τὴ βλέπομε ἀπὸ μέσα, εἶναι ***κοίλη*** (βαθουλωτή).



Σχ. 67

Ἡ ὅλη ἐπιφάνεια λοιπὸν τοῦ κυλίνδρου εἶναι ***μικτή.*** Οἱ δύο βάσεις τοῦ κυλίνδρου εἶναι ***ἴσες.*** Αὐτὸ μποροῦμε νὰ τὸ καταλάβωμε, ἂν κόψωμε ἕνα χαρτὶ ἴσο μὲ τὴ μία βάση καὶ τὸ βάλωμε ἀπάνω στὴν ἄλλη.

Ἐπίσης ἂν στηρίξωμε τὴ μία βάση τοῦ κυλίνδρου σ' ἕνα ἄσπρο χαρτὶ καὶ σημειώσωμε μ' ἕνα καλοξυμένο μολύβι τὸ μέρος ποὺ ἔπιασε, καὶ κατόπιν βάλωμε ἀπάνω τὴν ἄλλη βάση, θὰ δοῦμε ὅτι ἐφαρμόζει ἀκριβῶς. Οἱ δύο βάσεις τοῦ κυλίνδρου εἶναι καὶ παράλληλες· ἐξετάστε καὶ σεῖς, εἶναι ;



Σχ. 68

Ἡ ἀπόσταση μεταξὺ τῶν δύο βάσεων λέγεται *ὕψος* τοῦ κυλίνδρου.

Προσέξτε (σχ. 68) τὸν κύλινδρο **β** ἀπάνω στὸ τραπέζι καὶ τὸ νῆμα τῆς στάθμης κοντά του. Τὸ μέρος τοῦ νήματος, ἀπὸ τὴν κάτω βάση ὡς τὴν ἄνω, εἶναι τὸ ὕψος του.

Ἀσκήσεις

1) Νὰ βρῆτε ἄλλα σώματα ποὺ ἔχουν κυλινδρικὸ σχῆμα.

2) Φτιάξτε ἕνα κύλινδρο μὲ ξύλο.

3) Συγκρίνατε τὸν κύλινδρο μὲ ἄλλα σώματα ποὺ μάθατε στὴ Γεωμετρία (πρίσματα πυραμίδες) καὶ νὰ βρῆτε σὲ τί μοιάζουν καὶ σὲ τί διαφέρουν.

ΚΥΚΛΟΣ

Ἐὰν στηρίξωμε τὴ μία βάση τοῦ κυλίνδρου στὸν πίνακα καὶ σύρωμε μία γραμμὴ γύρω της μὲ τὴν κιμωλία, θὰ σχηματισθῆ ἕνα νέο σχῆμα, ποὺ δὲν μοιάζει μὲ κανένα ἀπὸ ἐκεῖνα ποὺ μάθαμε ὣς τώρα στὴ Γεωμετρία. Τὸ σχῆμα αὐτὸ λέγεται ***κύκλος*** (σχ. 69).
Ὅπως βλέπετε, ὁ κύκλος εἶναι μία ἐπίπεδος ἐπιφάνεια ποὺ περικλείεται γύρω - γύρω, ἀπὸ μία καμπύλη γραμμή. Ἡ καμπύλη αὐτὴ γραμμὴ ποὺ περιβάλλει τὸν κύκλο, λέγεται ***περιφέρεια*** τοῦ κύκλου.

Σχ. 69

Στὴ μέση ἀκριβῶς τοῦ κύκλου ὑπάρχει ἕνα σημεῖον, ἀπὸ τὸ ὁποῖον ὅλα τὰ σημεῖα τῆς περιφέρειας ἀπέχουν ἐξ ἴσου.

Ὥστε : ***Κύκλος εἶναι ἕνα κομμάτι τοῦ ἐπιπέδου ποὺ περικλείεται ἀπὸ μία καμπύλη γραμμή, τῆς ὁποίας ὅλα τὰ σημεῖα ἀπέχουν ἐξ ἴσου, ἀπὸ ἕνα ὡρισμένο σημεῖο τοῦ ἐπιπέδου τούτου.***

Προσέχετε νὰ μὴ μπερδεύετε τὸν κύκλο μὲ τὴν περιφέρεια γιατὶ δὲν εἶναι τὸ ἴδιο πρᾶγμα.

Κέντρον τοῦ κύκλου. Τὸ ὡρισμένο σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου τοῦ κύκλου, ἀπὸ τὸ ὁποῖον ὅλα τὰ σημεῖα τῆς περιφερείας του ἀπέχουν ἐξ ἴσου, λέγεται ***κέντρον*** τοῦ κύκλου.

Ἀκτίνα τοῦ κύκλου. Ἑνώνομε, μὲ ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα, τὸ κέν-

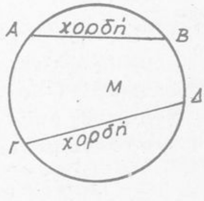
Σχ. 70

τρον τοῦ κύκλου μὲ ἕνα ὅποιο τύχη σημεῖο τῆς περιφερείας του. Κάθε τέτοιο εὐθύγραμμο τμῆμα λέγεται ***ἀκτίνα τοῦ κύκλου*** (σχ. 70).

Ὥστε : ***Ἀκτίνα τοῦ κύκλου λέγεται, τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα ποὺ ἑνώνει τὸ κέντρον τοῦ κύκλου μὲ ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖον τῆς περιφερείας του.***

Ἀκτῖνες μποροῦμε νὰ γράψωμε σὲ κάθε κύκλο ὅσες θέλομε. Ἂν τὶς συγκρίνομε μεταξύ των, θὰ δοῦμε ὅτι εἶναι ὅλες ***ἴσες*** στὸν ἴδιο κύκλο (σχ. 70).

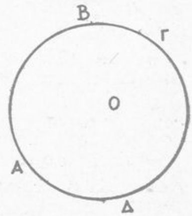
Χορδή. Στὸν κύκλο τοῦ σχ. 71 φέρομε τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ, τὸ ὁποῖον, ὅπως βλέπετε, ἑνώνει δύο σημεῖα τῆς περιφερείας του. Τὸ εὐθύγραμμο αὐτὸ τμῆμα λέγεται ***χορδή.***



Σχ. 71

Ὥστε : ***Χορδὴ λέγεται τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα ποὺ ἑνώνει δύο σημεῖα τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου.***

Τόξον. Στὸν κύκλο τοῦ σχ. 72, παίρνομε ἕνα κομμάτι τῆς περιφερείας του, π. χ. τὸ ΑΒ. Τὸ κομμάτι αὐτὸ τῆς περιφερείας λέγεται ***τόξον.*** Τόξον εἶναι καὶ τὸ κομμάτι ΓΔ τῆς περιφερείας, ὅπως καὶ ὁποιοδήποτε ἄλλο κομμάτι αὐτῆς.



Σχ. 72

Ὥστε : ***Τόξον λέγεται ἕνα κομμάτι τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου.***

Διάμετρος τοῦ κύκλου. Ἂν ἀπὸ ἕνα σημεῖον τῆς περιφερείας, φέρωμε ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα, ποὺ νὰ περνάη ἀπὸ τὸ κέντρον καὶ νὰ φθάνῃ σ' ἕνα ἄλλο σημεῖον τῆς περιφερείας, θἄχωμε μία χορδὴ ποὺ περνάει ἀπὸ τὸ κέντρον. Ἡ χορδὴ αὐτὴ λέγεται ***διάμετρος τοῦ κύκλου*** (σχ. 73).

Ὥστε : ***Διάμετρος κύκλου λέγεται ἡ χορδὴ ποὺ περνάει ἀπὸ τὸ κέντρον του.***

Σχ. 73

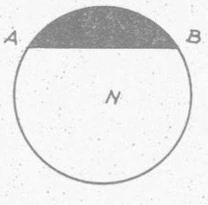
Ἡμικύκλιά - Ἡμιπεριφέρειες. Ἔχομε φτιάσει ἀπάνω σὲ λευκὸ χαρτὶ ἕναν κύκλο. Τὸν κόβομε γύρω - γύρω μὲ τὸ ψαλίδι. Γράφομε στὸν κύκλο αὐτὸν μία διάμετρο καὶ σπάζομε τὸ χαρτὶ ἀπάνω στὴν διάμετρο. Θὰ δοῦμε ὅτι τὰ δύο μέρη στὰ ὁποῖα χωρίστηκε ὁ κύκλος μὲ τὴ διάμετρο, εἶναι ἴσα (σχ. 74). Καὶ ὅτι τὰ δύο τόξα στὰ ὁποῖα χωρίστηκε ἡ περιφέρεια μὲ τὴ διάμετρο εἶναι ἐπίσης ἴσα.

Σχ. 74

Ὥστε : ***Κάθε διάμετρος χωρίζει τὸν κύκλο***

σὲ δύο ἴσα μέρη (ἡμικύκλια), καὶ τὴν περιφέρεια σὲ δύο ἴσα τόξα (ἡμιπεριφέρειες).

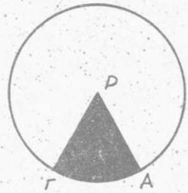
Τμῆμα κύκλου. Στὸν κύκλο Ν (σχ. 75), ἔχομε ἕνα τόξο ΑΒ. Φέρομε καὶ τὴ χορδή του Α Β (τὴ χορδὴ ποὺ ἑνώνει τὰ ἄκρα αὐτοῦ τοῦ τόξου). Τὸ τόξο Α Β καὶ ἡ χορδή του περικλείουν ἕνα κομμάτι ἀπὸ τὸν κύκλο. Τὸ κομμάτι αὐτὸ λέγεται ***τμῆμα κύκλου.***



Σχ. 75

Ὥστε: ***Τμῆμα κύκλου λέγεται, τὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου τοῦ κύκλου, ποὺ περικλείεται ἀπὸ ἕνα τόξο καὶ τὴ χορδὴ τοῦ τόξου αὐτοῦ.***

Τομεὺς κύκλου. Στὸν κύκλο Ρ (σχ. 76) παίρνομε ἕνα τόξο Γ Α. Φέρομε στὰ ἄκρα τοῦ τόξου αὐτοῦ, τὶς ἀκτῖνες Ρ Γ καὶ Ρ Α. Τὸ τόξο Γ Α καὶ οἱ ἀκτῖνες Ρ Γ καὶ Ρ Α εἰς τὰ ἄκρα του, περικλείουν ἕνα μέρος ἀπὸ τὸν κύκλο. Τὸ μέρος αὐτὸ τοῦ κύκλου λέγεται ***τομεὺς κύκλου*** ἢ ***κυκλικὸς τομεύς.***



Σχ. 76

Ὥστε: ***Τομεὺς κύκλου, λέγεται τὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου τοῦ κύκλου, ποὺ περικλείεται ἀπὸ ἕνα τόξο καὶ τὶς ἀκτῖνες ποὺ καταλήγουν εἰς τὰ ἄκρα τοῦ τόξου αὐτοῦ.***

Διαίρεση τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου

Ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου διαιρεῖται σὲ 360 ἴσα τόξα. Τὸ καθένα ἀπ' αὐτὰ λέγεται ***τόξο μιᾶς μοίρας.*** Κάθε τόξο μιᾶς μοίρας, διαιρεῖται σὲ 60 μικρὰ ἴσα τόξα ποὺ λέγονται ***πρῶτα λεπτά.*** Κάθε τόξο πρώτου λεπτοῦ, διαιρεῖται σὲ 60 πολὺ μικρὰ ἴσα τόξα ποὺ λέγονται ***δεύτερα λεπτά.***

Τὶς μοῖρες τὶς σημειώνομε μὲ ἕνα μικρὸ μηδέν, δεξιὰ καὶ λίγο πιὸ πάνω ἀπὸ τὸν ἀριθμό. Τὰ πρῶτα λεπτὰ τὰ σημειώνομε μὲ μία ὀξεῖα, ποὺ γράφομε δεξιὰ καὶ λίγο πιὸ πάνω ἀπὸ τὸν ἀριθμό, καὶ τὰ δεύτερα λεπτὰ μὲ δύο ὀξεῖες.

Ὅταν π. χ. θέλωμε νὰ γράψωμε 4 μοῖρες 50 πρῶτα λεπτὰ καὶ 30 δεύτερα, γράφομε $4^{0}\,50'\,30''$.

Πῶς φτιάχνομε κύκλους

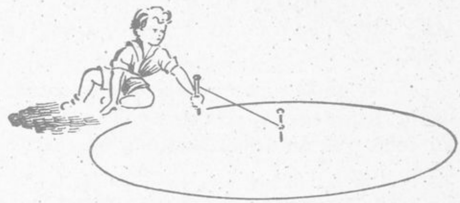
Κύκλους μποροῦμε νὰ φτιάξωμε μὲ τοὺς ἑξῆς τρόπους:

α) ***Μὲ τὸ διαβήτη.*** Ὁ διαβήτης εἶναι ἕνα γεωμετρικὸ ὄργανο, ποὺ πρέπει νὰ τὸ ἔχωμε δεῖ ὅλοι. Ὁ δάσκαλος θὰ σᾶς δείξη πῶς φτιάχνομε κύκλους μὲ τὸ διαβήτη (σχ. 77). Μ' αὐτὸ τὸν τρόπο γράφο-


Σχ. 77

με μικρούς κύκλους, στό τετράδιο, στόν πίνακα κλπ.

β) Όταν όμως θέλομε νά κάνωμε πολύ μεγάλους κύκλους, μεταχειριζόμαστε έναν άλλο τρόπο : Παίρνομε μία κλωστή ή ένα σπάγγο καί κάνομε στή μία άκρη του μία θηλειά τή θηλειά τήν περνάμε σ' ένα καρφί, τό όποίο καρφώνομε έκεί πού θέλομε νά είναι τό κέντρον τοῦ κύκλου. Στήν άλλη άκρη τῆς κλωστῆς δένομε μία κιμωλία. Ύστερα τεντώνομε τήν κλωστή καί τή γυρίζομε γύρω - γύρω, ὥσπου νά ξανάρθη ή κιμωλία στό ίδιο σημεῖο πού άρχίσαμε. Ή κιμωλία μας θά γράψη τήν περιφέρεια τοῦ κύκλου.



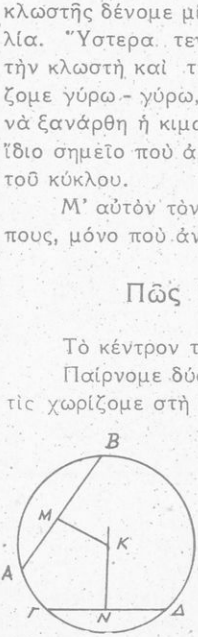
Σχ. 78

Μ' αὐτόν τόν τρόπο χαράσσουν καί οἱ κηπουροί κύκλους στούς κήπους, μόνο πού άντί κιμωλίας μεταχειρίζονται ένα παλουκάκι (σχ. 78).

Πῶς βρίσκομε τό κέντρον τοῦ κύκλου

Τό κέντρον τοῦ κύκλου τό βρίσκομε ώς έξῆς :

Παίρνομε δύο χορδές τοῦ κύκλου πού νά μήν είναι παράλληλες καί τίς χωρίζομε στή μέση άκριβῶς. Ύστερα άπό τή μέση κάθε μιᾶς, σύρομε καθέτους πρός κάθε μία χορδή· τό σημεῖον είς τό όποῖον θά συναντηθοῦν, είναι τό *κέντρον* τοῦ κύκλου (σχ. 79).



Σχ. 79

Άσκήσεις

1) Φτιάξε στό τετράδιό σου έναν κύκλο μέ τό διαβήτη, Σ' αὐτόν :

α) Δεῖξε τήν περιφέρεια.
β) Φέρε μία διάμετρο.
γ) Φέρε μία άκτῖνα του.
δ) Δεῖξε μία ήμιπεριφέρεια.
ε) Δεῖξε ένα τόξο.
στ) Φέρε μία χορδή.

2) Κάμε έναν άλλο κύκλο. Σ' αὐτόν :

α) Φέρε μία διάμετρο. Σέ τί χωρίστηκε ό κύκλος μέ τή διάμετρο αὐτή;
β) Κόψε μέ τό ψαλίδι τόν κύκλο.
γ) Κόψε μέ τό ψαλίδι ένα ήμικύκλιο.
δ) Κόψε μέ τό ψαλίδι έναν κυκλικό τομέα.
ε) Κόψε μέ τό ψαλίδι ένα τμῆμα κύκλου.

3) Τό τέταρτο τῆς περιφερείας, πόσων μοιρῶν τόξον είναι :
4) Κάμε έναν κύκλο μέ διάμετρο 5 δακτύλους.
5) Κάμε έναν κύκλο μέ άκτίνα 2 δακτύλους.
6) Κάμε στήν αὐλή ένα κύκλο μέ διάμετρο 140 δακτύλους.

Μέτρηση γωνίας σὲ μοῖρες

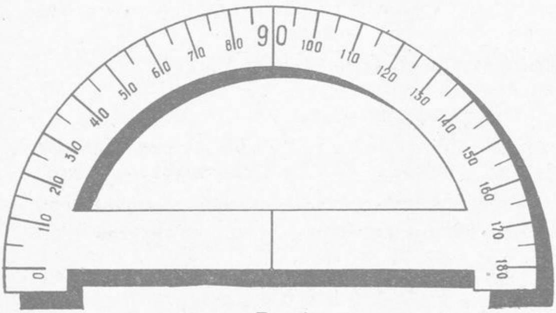
Ἂν χωρίσωμε τὴν περιφέρεια μὲ σημεῖα, σὲ 360 ἴσα τόξα, δηλαδὴ τόξα μιᾶς μοίρας τὸ καθένα, καὶ φέρωμε τὶς ἀκτῖνες ποὺ καταλήγουν σ' αὐτὰ τὰ σημεῖα, θὰ σχηματισθοῦν στὴ σειρὰ 360 ἴσες ἐπίκεντρες γωνίες. Κάθε μία ἀπὸ αὐτὲς τὶς γωνίες, λέμε πὼς ἔχει ἄνοιγμα μιᾶς μοίρας.

Ἂν σὲ ἕνα κύκλο φέρωμε δύο καθέτους διαμέτρους, θὰ σχηματισθοῦν τέσσσερες ἴσες ἐπίκεντρες γωνίες, ὀρθὲς ὅπως ξέρωμε. Τὰ τέσσερα τόξα στὰ ὁποῖα θὰ χωρισθῇ ἀπὸ τὰς διαμέτρους αὐτὰς ἡ περιφέρεια, θἆναι ἴσα.

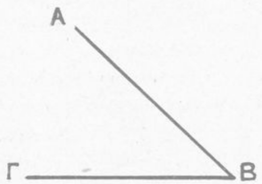
Πόσων μοιρῶν θἆναι τὸ καθένα ἀπ' αὐτὰ τὰ τέσσερα ἴσα τόξα ;

Πόσες γωνίες τῆς μιᾶς μοίρας, θὰ πιάνη κάθε μία ἀπ' αὐτὲς τὶς τέσσερες ὀρθὲς γωνίες ;

Πόσων μοιρῶν λοιπὸν εἶναι ἡ ὀρθὴ γωνία ;

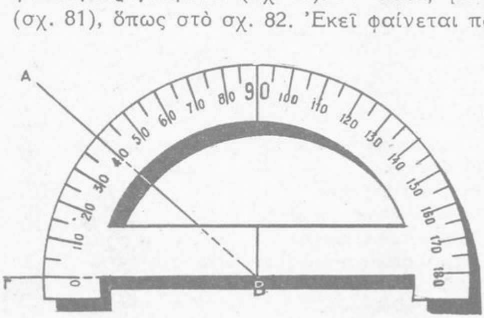


Σχ. 80



Σχ. 81

Γιὰ νὰ μετρήσωμε σὲ μοῖρες μία γωνία, ἔχομε τὸ ὄργανο ποὺ λέγεται ***μοιρογνωμόνιο*** (σχ. 80). Μ' αὐτό, μετρᾶμε τὴν γωνία π. χ. ΒΑΓ (σχ. 81), ὅπως στὸ σχ. 82. Ἐκεῖ φαίνεται πὼς εἶναι 50^0.



Σχ. 82

Κάθε ὀξεῖα γωνία εἶναι λιγώτερο ἢ περισσότερο ἀπὸ 90^0 ; Ἡ ἀμβλεῖα λιγώτερο ἢ περισσότερο ἀπὸ 90^0 ;

Ὅπως ἡ πήχη διαιρεῖται σὲ ρούπια, τὸ μέτρο σὲ παλάμες — δακτύλους —γραμμές, ἔτσι καὶ ἡ μοῖρα διαιρεῖται σὲ 60 πρῶτα λεπτὰ καὶ γράφεται

60΄. Τὸ 1΄ διαιρεῖται σὲ 60 δεύτερα λεπτὰ καὶ γράφεται 60΄΄. Π. χ. μία γωνία ποὺ εἶναι 40 μοῖρες, 27 πρῶτα λεπτὰ καὶ 52 δεύτερα λεπτά, θὰ γράφεται 40^0 27΄ 52΄΄, ὅπως γράφονται ὅλοι οἱ συμμιγεῖς.

Ἀσκήσεις

1) Γράψε μὲ τὸ γνώμονα μία ὀρθὴ γωνία.

α) Μέτρησέ την μὲ τὸ μοιρογνωμόνιο.

β) Μοίρασέ την μὲ τὸ μοιρογνωμόνιο σὲ δύο ἴσες γωνίες. Πόσων μοιρῶν εἶναι κάθε μία ἀπ' αὐτές ;

2) Σχημάτισε μία ἄλλη ὀρθὴ γωνία. Χώρισέ την σὲ τρεῖς ἴσες γωνίες. Πόσων μοιρῶν εἶναι κάθε μία ἀπ' αὐτές ;

3) Σχημάτισε μία γωνία 65^0. Τί εἴδους γωνία εἶναι ; Πόσο λείπει γιὰ νὰ γίνη μία ὀρθή ;

4) Σχημάτισε μία γωνία 120^0. Τί εἴδους γωνία εἶναι ; Πόσο εἶναι μεγαλύτερη ἀπὸ τὴν ὀρθή ;

5) Φτιάσε μία γωνία 50^0. Ὀνόμασέ την ΑΒΓ. Φέρε μία κάθετο εὐθεῖα στὴν πλευρά της ΒΑ, ποὺ νὰ περνάη ἀπὸ τὸ Β καὶ ὀνόμασέ την ΔΒΕ. Πόσων μοιρῶν εἶναι ἡ γωνία ΔΒΓ, καὶ πόσο ἡ ΕΒΓ ; Μέτρησέ τες.

ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ

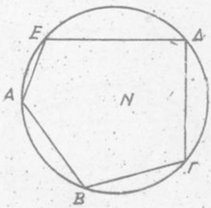
Εἴδαμε τὰ πολύγωνα στὴ σελίδα 20.

Ἀπὸ τὰ πολύγωνα ὅποιο ἔχει καὶ ὅλες τὶς πλευρὲς μεταξύ των ἴσες, καὶ ὅλες τὶς γωνίες μεταξύ των ἴσες, λέγεται ***κανονικὸ πολύγωνο.***

Ὥστε : ***Κανονικὸ πολύγωνο, λέγεται τὸ πολύγωνο ποὺ ἔχει ὅλες του τὶς πλευρὲς ἴσες μεταξύ των καὶ ὅλες του τὶς γωνίες ἴσες μεταξύ των.***

Ἐγγεγραμμένα πολύγωνα

Παίρνομε πέντε σημεῖα ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου (σχ. 83). Τὰ σημεῖα αὐτὰ τὰ ἑνώνομε μὲ χορδές. Ὅπως βλέπετε, σχηματίσθηκε τὸ πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ ποὺ εἶναι γραμμένο μέσα στὸν κύκλο καὶ ἔχει τὶς κορυφές του ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου. Τὸ πολύγωνο αὐτό, λέγεται ***ἐγγεγραμμένο στὸν κύκλο.***



Σχ. 83

Ὥστε : ***Ἐγγεγραμμένο σὲ κύκλο λέγεται ἕνα πολύγωνο, ὅταν οἱ κορυφές του βρίσκωνται ἐπὶ τῆς περιφερείας κύκλου.***

Ἐγγραφὴ κανονικῶν πολυγώνων σὲ κύκλο

Γιὰ νὰ ἐγγράψωμε ἕνα κανονικὸ πολύγωνο σὲ κύκλο, διαιροῦμε τὴν περιφέρεια τοῦ κύκλου σὲ τόσα ἴσα μέρη, ὅσες εἶναι οἱ πλευρὲς τοῦ πολυγώνου ποὺ θέλομε νὰ ἐγγράψωμε στὸν κύκλο. Ὕστερα ἑνώνομε τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως μὲ χορδὲς καὶ σχηματίζεται τὸ ἐγγεγραμμένο πολύγωνο στὸν κύκλο.

Τὸ πολύγωνο αὐτὸ θὰ εἶναι κανονικό, γιατὶ οἱ πλευρές του εἶναι ὅλες ἴσες, ὅπως ἴσες εἶναι καὶ ὅλες οἱ γωνίες του.

Αὐτὴ τὴν ἐργασία μποροῦμε νὰ τὴν κάνωμε πρακτικὰ ὡς ἑξῆς:

Ἀνοίγομε τὸ διαβήτη μας ὑπολογίζοντας μὲ τὸ μάτι τὸ ἄνοιγμά του, ὥστε νὰ διαιρῆ τὴν περιφέρεια τοῦ κύκλου σὲ τόσα ἴσα τόξα ὅσες θέλομε νὰ εἶναι οἱ πλευρὲς τοῦ πολυγώνου, ποὺ θὰ ἐγγράψωμε. Ὕστερα δοκιμάζομε ἂν τὸ πετύχαμε· ἂν ὄχι, μεγαλώνομε ἢ μικραίνομε τὸ ἄνοιγμα τοῦ διαβήτη μας, ὥσπου νὰ τὸ πετύχωμε. Ὅταν τὸ πετύχωμε, ἑνώνομε τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως μὲ χορδὲς καὶ σχηματίζεται τὸ ἐγγεγραμμένο κανονικὸ πολύγωνο στὸν κύκλο.

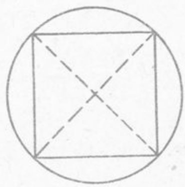
Τὸ κέντρον τοῦ κύκλου αὐτοῦ, λέγεται καὶ κέντρον τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου.

Πιὸ κάτω θὰ δοῦμε, πῶς μποροῦμε εὐκολώτερα νὰ ἐγγράψωμε σὲ κύκλο μερικὰ κανονικὰ πολύγωνα.

Ἐγγραφὴ τετραγώνου σὲ κύκλο

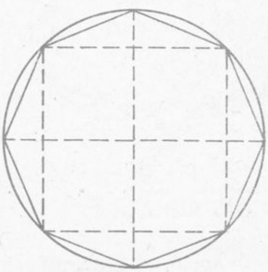
(Τὸ τετράγωνο εἶναι κανονικὸ τετράπλευρο, γιατὶ ξέρομε πὼς ὅλες οἱ πλευρές του εἶναι ἴσες, ὅπως καὶ ὅλες οἱ γωνίες του εἶναι ἴσες, ἀφοῦ εἶναι ὀρθές).

Γιὰ νὰ ἐγγράψωμε τετράγωνο σὲ κύκλο, φέρομε δύο διαμέτρους τὴ μία κάθετο στὴν ἄλλη καὶ ἑνώνομε τὰ ἄκρα των μὲ χορδές. Θὰ σχηματισθῆ ἔτσι ἕνα τετράγωνο ἐγγεγραμμένο στὸν κύκλο, μὲ πλευρὲς τὶς χορδὲς αὐτὲς (σχ. 84).



Σχ. 84

Ἐγγραφὴ κανονικοῦ ὀκταγώνου σὲ κύκλο



Σχ. 85

Γιὰ νὰ ἐγγράψωμε ἕνα κανονικὸ ὀκτάγωνο σὲ κύκλο, κάνομε τὰ ἑξῆς:

Ἐγγράφομε πρῶτα ἕνα κανονικὸ τετράγωνο, ὅπως μάθαμε παραπάνω. Φέρομε ὕστερα δύο ἀκόμη διαμέτρους, ἔτσι ποὺ νὰ εἶναι κάθετοι στὶς πλευρὲς τοῦ τετραγώνου, καὶ ἑνώνομε τὰ ἄκρα των καὶ τὶς γειτονικὲς κορυφὲς τοῦ τετραγώνου μὲ χορδές. Θὰ σχηματισθῆ τότε ἕνα κανονικὸ ὀκτάγωνο ἐγγεγραμμένο στὸν κύκλο (σχ. 85).

Ἐγγραφὴ κανονικοῦ 16γώνου σὲ κύκλο

Γιὰ νὰ ἐγγράψωμε σὲ κύκλο κανονικὸ 16γωνο, κάνομε τὰ ἑξῆς:

Ἐγγράφομε, ὅπως ξέρομε, τὸ κανονικὸ 8γωνο. Φέρομε διαμέτρους καθέτους στὶς πλευρές του. Ἔπειτα ἑνώνομε τὰ ἄκρα τῶν διαμέτρων αὐτῶν καὶ τὶς γειτονικὲς κορυφὲς τοῦ 8γώνου, μὲ χορδές θὰ σχηματισθῇ τότε ἕνα κανονικὸ 16γωνο ἐγγεγραμμένο σὲ κύκλο.

Ἂν ἐξακολουθήσωμε ἔτσι, μποροῦμε νὰ ἐγγράψωμε πολύγωνα μὲ 32, 64, 128 κλπ. πλευρές.

Ἂν προσέξωμε ὅμως θὰ παρατηρήσωμε, ὅτι ὅσο προχωροῦμε καὶ ἐγγράφομε στὸν κύκλο πολύγωνα μὲ περισσότερες πλευρές, τόσο οἱ πλευρές τους γίνονται μικρότερες καὶ ἡ περίμετρος τοῦ πολυγώνου πλησιάζει στὴν περιφέρεια τοῦ κύκλου, ὥσπου κάποτε θὰ συμπέσῃ μὲ αὐτήν. Ἡ περίμετρος δηλ. τοῦ πολυγώνου θὰ εἶναι τότε ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου.

Ἑπομένως μποροῦμε νὰ ποῦμε, ὅτι ὁ κύκλος εἶναι κανον. πολύγωνο ἐγγεγραμμένο σ' αὐτὸν μὲ ἄπειρες πλευρές· δηλ. μὲ πάρα πολὺ μεγάλο ἀριθμὸ πλευρῶν.

Ἀσκήσεις

1) Νὰ κάμῃς ἕναν κύκλο μὲ ἀκτίνα 0,05 μ. καὶ νὰ ἐγγράψῃς σ' αὐτόν, 4γωνο

2) Νὰ κάμῃς ἕναν κύκλο μὲ διάμετρο 0,06 μ. καὶ νὰ ἐγγράψῃς σ' αὐτόν, κανονικὸ 8γωνο.

3) Στὰ πιὸ πάνω πολύγωνα γράψε τὰς διαγωνίους των.

Ἐγγραφὴ κανονικοῦ ἑξαγώνου σὲ κύκλο

Τὸ κανονικὸ ἑξάγωνο ἐγγράφεται σὲ κύκλο ὡς ἑξῆς:

Κάνομε ἕνα κύκλο μὲ τὸ διαβήτη· ὁ διαβήτης μας ἔχει ἄνοιγμα ἴσο μὲ τὴν ἀκτίνα. Ἂν μὲ τὸ ἄνοιγμα αὐτὸ χωρίσωμε τὴν περιφέρεια τοῦ κύκλου, σὲ τόξα ἴσα, θὰ παρατηρήσωμε ὅτι χωρίζεται ἀκριβῶς σὲ 6 τόξα ἴσα, ποὺ ἔχουν χορδὲς ἴσες μὲ τὴν ἀκτίνα.

Ἑπομένως ἡ ἀκτίνα σὲ κάθε κύκλο διαιρεῖ τὴν περιφέρειά του σὲ 6 ἴσα τόξα.

Ἑνώνομε ὕστερα τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως μὲ χορδὲς καὶ ἔχομε κανονικὸ ἑξάγωνο ἐγγεγραμμένο σὲ κύκλο (σχ. 86)

Σχ. 86

Ἐγγραφὴ κανονικοῦ 12γώνου σὲ κύκλο

Γιὰ νὰ ἐγγράψωμε σὲ κύκλο, κανονικὸ 12γωνο κάνομε τὰ ἑξῆς:

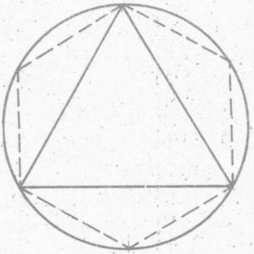
Ἐγγράφομε, ὅπως ξέρομε, τὸ κανονικὸ 6γωνο. Φέρομε διαμέτρους καθέτους στὶς πλευρές του. Ἔπειτα ἑνώνομε τὰ ἄκρα τῶν διαμέτρων αὐτῶν καὶ τὶς γειτονικὲς κορυφὲς τοῦ 6γώνου, μὲ χορδές. Οἱ χορδὲς αὐτὲς θὰ εἶναι οἱ πλευρὲς τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ 12γώνου, ποὺ θὰ ἔχη ἔτσι σχηματισθῆ.

Ἔτσι προχωρώντας, μποροῦμε νὰ ἐγγράψωμε 24γωνο, 48γωνο κλπ ὥσπου νὰ φθάσωμε πάλι στὸ κανονικὸ πολύγωνο μὲ τὶς ἄπειρες πλευρές, ποὺ ἡ περίμετρός του, θὰ γίνη περιφέρεια κύκλου.

Ἐγγραφὴ ἰσοπλεύρου τριγώνου σὲ κύκλο

(Τὸ κανονικὸ τρίγωνο εἶναι τὸ ἰσόπλευρο, γιατὶ ἔχει καὶ τὶς πλευρές του ἴσες καὶ τὶς γωνίες του ἴσες μεταξύ των).

Γιὰ νὰ ἐγγράψωμε ἰσόπλευρο τρίγωνο σὲ κύκλο, ἐγγράφομε κανονικὸ ἑξάγωνο. Ἑνώνομε τὶς τρεῖς κορυφές του, κάθε δεύτερη, μὲ χορδὲς καὶ ἔχομε ἰσόπλευρο τρίγωνο ἐγγεγραμμένο σὲ κύκλο (σχ. 87).



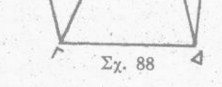
Σχ. 87

Πῶς βρίσκομε τὸ ἐμβαδὸν πολυγώνου

α) Ἐμβαδὸν κάθε πολυγώνου

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς πολυγώνου, φέρομε ὅλες τὶς διαγωνίους ἀπὸ μία κορυφὴ τοῦ πολυγώνου, π. χ. τὴν Α (σχ. 88). Ἔτσι χωρίζεται τὸ πολύγωνο σὲ τρίγωνα. Ὕστερα βρίσκομε τὸ ἐμβαδὸν καθενὸς τριγώνου χωριστὰ καὶ προσθέτομε τὰ ἐμβαδὰ ὅλων τῶν τριγώνων.

$$\left(\text{Ἐμβαδὸν τριγώνου} = \frac{\text{βάση} \times \text{ὕψος}}{2}\right).$$



Σχ. 88

Ὥστε : ***Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς πολυγώνου, χωρίζομε μὲ διαγωνίους τὸ πολύγωνο σὲ τρίγωνα. Ὕστερα βρίσκομε τὸ ἐμβαδὸν καθενὸς τριγώνου χωριστὰ καὶ προσθέτομε τὰ ἐμβαδὰ ὅλων αὐτῶν τῶν τριγώνων. Τὸ ἄθροισμα ποὺ θὰ βροῦμε εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πολυγώνου.***

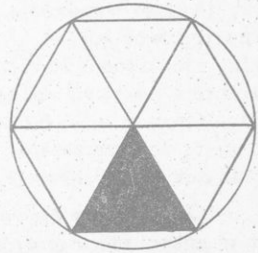
β) Ἐμβαδὸν κανονικοῦ πολυγώνου

Μὲ τὸν ἴδιο τρόπο, μποροῦμε νὰ βροῦμε καὶ τὸ ἐμβαδὸν κανονικοῦ πολυγώνου. Μποροῦμε ὅμως καὶ μὲ ἄλλο τρόπο συντομώτερο, τὸν ἑξῆς :

Ἀπὸ τὸ κέντρο τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου, φέρομε εὐθεῖες πρὸς τὶς κορυφές του. Ἔτσι τὸ πολύγωνο χωρίζεται σὲ τόσα ἴσα τρίγωνα, ὅσες πλευρὲς ἔχει (σχ. 89). Ὕστερα βρίσκομε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἑνὸς τριγώνου καὶ τὸ πολλαπλασιάζομε ἐπὶ τὸν ἀριθμὸ τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου.

Πιὸ εὔκολα βρίσκομε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου ἂν πολλαπλασιάσωμε τὴν περίμετρό του ἐπὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ὕψους ἑνὸς τῶν ἴσων τριγώνων του. (Τὸ ὕψος τῶν ἴσων αὐτῶν τριγώνων, λέγεται *ἀπόστημα* τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου).

Ὥστε : ***Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν κανον. πολυγώνου, πολ)σιάζομε τὴν περίμετρο τοῦ πολυγώνου ἐπὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ἀποστήματός του.***



Σχ. 89

Ἀσκήσεις

1) Κάμε ἕναν κύκλο μὲ ἀκτίνα 0,03 μ. Φτιάσε τὸ κανονικὸ ἑξάγωνο τὸ ἐγγεγραμμένο σ' αὐτόν, καὶ νὰ βρῆς τὸ ἐμβαδόν του. (Μέτρησε στὸ σχῆμα σου τὸ ἀπόστημα).

2) Κάμε ἕναν κύκλο μὲ διάμετρο 0,04 μ. Φτιάσε τὸ κανονικὸ 12γωνο τὸ ἐγγεγραμμένο σ' αὐτόν, καὶ νὰ βρῆς τὸ ἐμβαδόν του. (Μέτρησε στὸ σχῆμα σου τὴν πλευρὰ καὶ τὸ ἀπόστημα).

3) Κάμε ἕναν κύκλο μὲ ἀκτίνα 0,05 μ. Φτιάσε τὸ κανονικὸ 8γωνο τὸ ἐγγεγραμμένο σ' αὐτόν, καὶ νὰ βρῆς τὸ ἐμβαδόν του. (Μέτρησε στὸ σχῆμα σου τὴν πλευρὰ καὶ τὸ ἀπόστημα).

4) Πῶς ἐγγράφομε σὲ κύκλο, τετράγωνο, κανονικὸ 8γωνο, κανονικὸ 16γωνο ; Καὶ πῶς ἰσόπλευρο τρίγωνο, κανονικὸ 6γωνο, κανονικὸ 12γωνο ;

5) Ὅταν ἐγγράφωμε σὲ κύκλο ἕνα κανονικὸ πολύγωνο μὲ πολὺ μεγάλο ἀριθμὸ πλευρῶν, μὲ τί μοιάζει τὸ πολύγωνο ;

ΣΧΕΣΗ ΤΗΣ ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΣ ΤΟΥ ΚΥΚΛΟΥ ΠΡΟΣ ΤΗ ΔΙΑΜΕΤΡΟ ΤΟΥ

Ἔχομε ἀπὸ λεπτὸ σύρμα, τὴν περιφέρεια ἑνὸς κύκλου, τοῦ ὁποίου μετρήσαμε τὴ διάμετρο. Κόβομε τὴ συρμάτινη αὐτὴ περιφέρεια σ' ἕνα της σημεῖο καὶ τὴν ἰσώνομε ὥστε νὰ γίνη εὐθεῖα. Ἐὰν τώρα μετρήσωμε τὴ συρμάτινη αὐτὴ περιφέρεια, θὰ παρατηρήσωμε ὅτι ἡ περιφέρεια εἶναι 3,14 φορὲς μεγαλύτερη ἀπὸ τὴ διάμετρο ἢ ἡ διάμετρος εἶναι 3,14 φορὲς μικρότερη ἀπὸ τὴν περιφέρεια.

Αὐτὸ συμβαίνει σὲ κάθε κύκλο, εἴτε μικρὸ εἴτε μεγάλο.

Ὁ ἀριθμὸς λοιπὸν 3,14 φανερώνει, πόσες φορὲς μεγαλύτερη εἶναι ἡ περιφέρεια ἑνὸς κύκλου ἀπὸ τὴ διάμετρό του.

Τὸν ἀριθμὸ αὐτὸν 3,14, τὸν παριστάνουν ὅλοι οἱ λαοὶ στὴ Γεωμετρία μὲ τὸ γράμμα π. Δηλαδὴ $\pi = 3,14$.

Πῶς βρίσκομε τὴν περιφέρεια ὅταν ξέρωμε τὴ διάμετρο

Ἀπὸ τὰ παραπάνω, καταλαβαίνομε εὔκολα πὼς ὅταν ξέρωμε τὴν διάμετρο ἑνὸς κύκλου, μποροῦμε εὔκολα νὰ βροῦμε τὸ μῆκος τῆς περιφερείας του, ἀφοῦ εἶναι 3,14 φορὲς μεγαλύτερο ἀπὸ τὸ μῆκος τῆς διαμέτρου του· ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμε τὴν διάμετρο ἐπὶ 3,14 (π).

Ὅταν π. χ., ἡ διάμετρος ἑνὸς κύκλου εἶναι 4 μ., γιὰ νὰ βροῦμε τὸ μῆκος τῆς περιφερείας του, θὰ πολλαπλασιάσωμε τὴν διάμετρο ἐπὶ 3,14. Δηλ. $4 \times 3,14 = 12,56$ μ.

Ὥστε: ***Ὅταν ξέρωμε τὴν διάμετρο ἑνὸς κύκλου καὶ θέλωμε νὰ βροῦμε τὸ μῆκος τῆς περιφερείας του, πολλαπλασιάζομε τὴν διάμετρο ἐπὶ 3,14 (π).***

Στὴ Γεωμετρία, γιὰ εὐκολία μας, μεταχειριζόμαστε πολλὲς φορὲς γράμματα, γιὰ νὰ δηλώσωμε γεωμετρικὲς ἔννοιες. Ἔτσι π.χ., ἀντὶ νὰ γράψωμε διάμετρος, γράφομε ἕνα δ. Ὅταν θέλωμε νὰ γράψωμε τὸ μῆκος τῆς περιφερείας, γράφομε ἕνα Μ. Ἀντὶ νὰ γράψωμε ἀκτίνα, γράφομε ἕνα α.

Νὰ θυμᾶσθε λοιπὸν ὅτι:

Μ = μῆκος περιφερείας	δ = διάμετρος
α = ἀκτίνα	$2 \times \alpha$ = διάμετρος (Γιατί;)

Ὕστερα ἀπὸ αὐτὰ ποὺ εἴπαμε, μποροῦμε νὰ γράψωμε τὸν πάρα πάνω κανόνα καὶ ἔτσι:

$$\boxed{M = \delta \times \pi} \quad \text{τύπος}$$

Ἐπειδὴ δὲ ξέρομε ὅτι $\delta = 2 \times \alpha$, μποροῦμε τὸν ἴδιο κανόνα νὰ τὸν γράψωμε καὶ ἔτσι:

$$\boxed{M = 2 \times \alpha \times \pi} \quad \text{τύπος}$$

Δηλ. Μῆκος περιφ. = δύο ἀκτῖνες (διάμετρος) ἐπὶ 3,14.

Αὐτὸ σημαίνει πὼς ***γιὰ νὰ βροῦμε τὸ μῆκος τῆς περιφερείας, πολλαπλασιάζομε τὸ διπλάσιο τῆς ἀκτίνας ἐπὶ 3,14 (π.).***

Πῶς βρίσκομε τὴν διάμετρο ὅταν ξέρωμε τὴν περιφέρεια

Ὅταν ξέρωμε τὸ μῆκος τῆς περιφερείας καὶ θέλομε νὰ βροῦμε τὴν διάμετρο, κάνομε τὸ ἀντίθετο ἀπ' ὅ,τι κάναμε προηγουμένως.

Π. χ. ὅταν τὸ μῆκος τῆς περιφερείας ἑνὸς κύκλου εἶναι 6,28 μ., γιὰ νὰ βροῦμε τὴ διάμετρο, διαιροῦμε τὸ μῆκος τῆς περιφερείας διὰ 3,14.

Δηλ. 6,28 : 3,14 = 2 μ. Τὸ πηλίκον ποὺ βρήκαμε εἶναι ἡ διάμετρος ποὺ ζητᾶμε.

῞Ωστε : ***῞Οταν ξέρωμε τὸ μῆκος τῆς περιφερείας καὶ θέλομε νὰ βροῦμε τὸ μῆκος τῆς διαμέτρου, διαιροῦμε τὸ μῆκος τῆς περιφερείας διὰ 3,14 (π). Τὸ πηλίκον εἶναι τὸ μῆκος τῆς διαμέτρου.***

Τὸ ἴδιο συντομώτερα τὸ ἐκφράζομε·

$$\boxed{\frac{M}{\pi} = \delta} \quad \text{τύπος}$$

Σκεφθεῖτε, πῶς μποροῦμε νὰ βροῦμε τὴν ἀκτίνα, ὅταν ξέρωμε τὸ μῆκος τῆς περιφερείας.

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα

1) Ποιὰ εἶναι ἡ σχέση τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρο ;

2) Πῶς βρίσκομε τὴν περιφέρεια ἀπὸ τὴν διάμετρο ;

3) Πῶς βρίσκομε τὴν περιφέρεια ἀπὸ τὴν ἀκτίνα ;

4) Πῶς βρίσκομε τὴν διάμετρο ἀπὸ τὴν περιφέρεια ;

5) Πῶς βρίσκομε τὴν ἀκτίνα ἀπὸ τὴν περιφέρεια ;

6) Ἡ ἀκτίνα ἑνὸς κύκλου εἶναι 1,15 μ. Πόσα μέτρα εἶναι ἡ περιφέρειά του ;

7) Ἡ διάμετρος ἑνὸς κύκλου εἶναι 3,50 μ. Πόσα μ. εἶναι ἡ περιφέρειά του ;

8) Ἡ περιφέρεια ἑνὸς κύκλου εἶναι 6,50 μ. Πόσα μ. εἶναι ἡ διάμετρός του ;

9) Ἡ περιφέρεια ἑνὸς κύκλου εἶναι 7,80 μ. Πόσα μ. εἶναι ἡ ἀκτίνα του ;

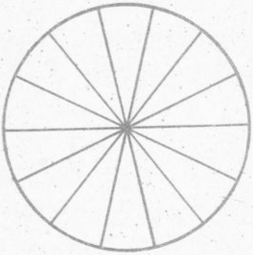
10) Ἕνας κυλινδρικὸς κορμὸς δένδρου κομμένου, ἔχει περιφέρεια τῆς μιᾶς βάσεώς του, 3,45 μ. Πόση εἶναι ἡ διάμετρός της ;

11) Ὁ τροχὸς μιᾶς ἁμάξης ἔχει ἀκτίνα 0,55 μ. Πόση εἶναι ἡ περιφέρεια τοῦ τροχοῦ, καὶ πόση ἀπόσταση θὰ διατρέξῃ ἡ ἅμαξα, ἂν κάμῃ 1000 στροφὲς ὁ τροχός ;

12) Ἕνα ἄλογο γιὰ νὰ ἀνεβάσῃ νερό, γυρίζει γύρω ἀπὸ ἕνα πηγάδι σ' ἕναν κύκλο ποὺ ἔχει διάμετρο 4 μέτρα. Σὲ μία ὥρα κάνει 200 στροφές. Ἂν ὑποθέσωμε πὼς ὁ δρόμος ποὺ κάνει ἦταν εὐθύς, πόση ἀπόσταση θὰ διέτρεχε στὸ 8ωρο ποὺ γυρίζει γύρω ἀπὸ τὸ πηγάδι ;

Πῶς βρίσκομε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου

Ἂν χωρίσωμε μὲ σημεῖα τὴν περιφέρεια ἑνὸς κύκλου σὲ πολλὰ ἴσα τόξα, καὶ φέρωμε στὰ σημεῖα αὐτὰ τὶς ἀκτῖνες, θὰ σχηματισθοῦν πολλοὶ κυκλικοὶ τομεῖς. Οἱ κυκλικοὶ αὐτοὶ τομεῖς μποροῦν νὰ ἐξομοιωθοῦν μὲ τρίγωνα, ποὺ ἔχουν βάση μὲν ἕνα ἀπὸ τὰ μικρὰ αὐτὰ ἴσα τόξα τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου, ὕψος δὲ τὴν ἀκτίνα τοῦ κύκλου (σχ. 90).



Σχ. 90

Ὅπως ξέρομε, γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου πολλαπλασιάζομε τὴ βάση ἐπὶ τὸ ὕψος του, καὶ τὸ γινόμενο τὸ διαιροῦμε διὰ 2. Ἂν βροῦμε λοιπὸν τὰ ἐμβαδὰ ὅλων αὐτῶν τῶν τριγώνων καὶ τὰ προσθέσωμε θὰ ἔχωμε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου. Ἀλλὰ ὅλες μαζὶ οἱ βάσεις αὐτῶν τῶν τριγώνων, ἀποτελοῦν τὴν περιφέρεια τοῦ κύκλου. Ὅλα δὲ αὐτὰ τὰ τρίγωνα ἔχουν ὕψος τὴν ἀκτίνα τοῦ κύκλου.

Ἀντὶ λοιπὸν νὰ πολλαπλασιάσωμε χωριστὰ τὴ βάση καθενὸς τριγώνου ἐπὶ τὸ ὕψος του, πολ)ζομε τὴν περιφέρεια τοῦ κύκλου, ποὺ εἶναι βάση ὅλων τῶν τριγώνων μαζί, ἐπὶ τὴν ἀκτίνα ποὺ εἶναι ὕψος ὅλων τῶν τριγώνων, καὶ τὸ γινόμενο τὸ διαιροῦμε διὰ 2.

Λοιπόν· γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν κύκλου, πολ)ζομε τὸ μῆκος τῆς περιφερείας ἐπὶ τὴν ἀκτίνα του καὶ τὸ γινόμενο τὸ διαιροῦμε διὰ 2.

Δηλ. Ἐμβ. κύκλου $= \frac{M \times \alpha}{2}$. Ἐπειδὴ ὅμως ξέρομε ὅτι $M = 2 \times \alpha \times \pi$, ὁ τύπος τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ κύκλου γίνεται·

Ἐμβ. κύκλου $= \frac{2 \times \alpha \times \pi \times \alpha}{2}$, καὶ ἁπλοποιώντας μὲ τὸ 2

ἔχομε $\boxed{\text{Ἐμβ. κύκλου} = \alpha \times \alpha \times \pi}$ τύπος

Ὥστε : ***Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν κύκλου, πολ)ζομε τὴν ἀκτίνα του ἐπὶ τὸν ἑαυτό της καὶ τὸ γινόμενο ποὺ θὰ βροῦμε, ἐπὶ 3,14.***

Παρατήρηση. Ὅταν βρίσκωμε τὸ ἐμβαδόν, βάζομε δίπλα ***τετραγωνικὰ*** (μέτρα, πήχεις, κλπ.), γιατὶ τὸ ἐμβαδὸν εἶναι ἐπιφάνεια καὶ τὸ μετρᾶμε μὲ τετραγωνικὲς μονάδες.

Παράδειγμα : Ἔχομε ἕναν κυκλο μὲ ἀκτίνα 8 μ. Ποιὸ εἶναι τὸ ἐμβαδόν του ;

Ξέρομε ὅτι : Ἐμβ. κύκλου $= \alpha \times \alpha \times \pi$.

Ἄρα τὸ Ἐμβ. τοῦ κύκλου μας $= 8 \times 8 \times 3{,}14 = 200{,}96$ τ. μ.

Προβλήματα

1) Ἡ διάμετρος ἑνὸς κύκλου εἶναι 6 μ. Ποιὸ εἶναι τὸ ἐμβαδόν του ;

2) Ποιὸ εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου, τοῦ ὁποίου ἡ περιφέρεια εἶναι 6,50 μέτρα ;

3) Ἕνα κυκλικὸ τραπέζι ἔχει ἀκτίνα 0,90 μ. Πόση εἶναι ἡ περιφέρειά του καὶ πόσο τὸ ἐμβαδόν του ;

4) Μία κυκλική πλατεῖα ἔχει διάμετρο 25 μ. Ποιὸ εἶναι τὸ ἐμβαδόν της ;

5) Τὴν πλατεῖα αὐτὴ θέλει ὁ Δῆμος νὰ τὴν στρώση μὲ τσιμέντο. Πόσο θὰ στοιχίση, ἂν πληρώση 10.000 κατὰ τετραγωνικὸ μέτρο ;

6) Θέλομε νὰ σκεπάσωμε τὸ κυκλικὸ στόμιο ἑνὸς πηγαδιοῦ, ποὺ ἔχει διάμετρο 2,50 μ., μὲ λαμαρίνα. Πόσο θὰ στοιχίση τὸ σκέπασμα, ἂν ἡ λαμαρίνα πωλῆται πρὸς 18.000 δρχ. τὸ τετραγωνικὸ μέτρο ;

7) Ἀπὸ δύο ὁμοκέντρους κύκλους, ὁ ἕνας ἔχει ἀκτίνα 2,15 μ. καὶ ὁ ἄλλος 3,45 μ. Πόσο μεγαλύτερη εἶναι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ δευτέρου ;

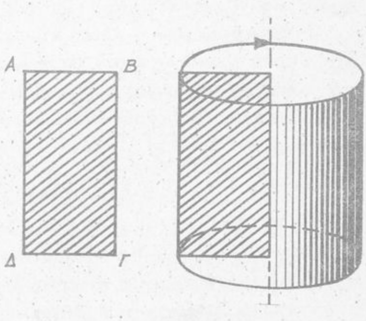
8) Ἔχομε ἕνα κυκλικὸ ἀνθόκηπο μὲ διάμετρο 8 μ., καὶ θέλομε νὰ τὸν ποτίσωμε. Πόσες ὀκάδες νερὸ μᾶς χρειάζεται γι' αὐτό, ἂν γιὰ κάθε τετρ. μέτρο χρειάζονται 20 ὀκ. νερό ;

9) Ἕνα ποδήλατο τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτίνα εἶναι 0,38 μ., ὅταν τρέχη κάνει σὲ ἕνα λεπτὸ 60 στροφές. Σὲ πόσο χρόνο θὰ διατρέξη ἀπόσταση 10 χιλιομέτρων.

10) Κάντε καὶ μόνοι σας 2 ὅμοια προβλήματα.

Κατασκευὴ κυλίνδρου

Ἐὰν τὸ ὀρθογώνιο ΑΒΓΔ (σχ. 91) περιστραφῆ περὶ τὴν πλευρά του ΒΓ θὰ γίνη ἕνας κύλινδρος, γιατὶ οἱ μὲν πλευρές του ΒΑ καὶ ΓΔ, θὰ γράψουν δύο ἴσους κύκλους, τὶς βάσεις τοῦ κυλίνδρου, ὅπως φαίνεται στὸ διπλανὸ σχῆμα, ἡ δὲ πλευρὰ ΑΔ, τὴν κυρτὴ ἐπιφάνεια αὐτοῦ· ἡ ΒΓ θὰ μείνη ἀκίνητη.



Σχ. 91

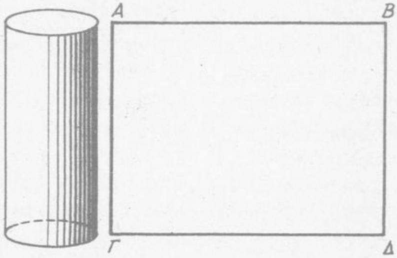
Φτιάστε μὲ σύρμα ἕνα ὀρθογώνιο σὰν τὸ ΑΒΓΔ, ποὺ ἡ πλευρά του ΑΔ, νὰ ἔχη δύο ἄκρες πέρα ἀπὸ τὶς κορυφὲς Α καὶ Δ. Κρατῆστε τὸ συρμάτινο ὀρθογώνιο ἀπὸ τὶς προεκτάσεις αὐτὲς τῆς ΑΔ καὶ περιστρέψτε το μὲ μεγάλη ταχύτητα. Παρατηρῆστε τὸ σχῆμα ποὺ θὰ φαίνεται μὲ τὴν περιστροφὴ αὐτή. Θὰ φαίνεται ἀμυδρὰ ἕνας κύλινδρος· οἱ κυκλικὲς βάσεις του καὶ ἡ κυρτή του ἐπιφάνεια.

Πῶς βρίσκομε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐξωτερικῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου

Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου, ὅπως μάθαμε, εἶναι μικτή. Ἀποτελεῖται ἀπὸ τὶς δύο κυκλικὲς ἐπιπέδους ἐπιφάνειες τῶν βάσεών του, καὶ τὴν κυρτὴ παράπλευρο ἐπιφάνειά του.

Πῶς βρίσκομε τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς κύκλου, τὸ μάθαμε. Μένει νὰ δοῦμε πῶς βρίσκομε τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας του.

Ἂν τυλίξωμε τὴν παράπλευρο ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου μὲ χαρτὶ μία φορά, ἔτσι ποὺ νὰ τὴν σκεπάση ἴσα ἴσα, καὶ ὕστερα ξετυλίξωμε τὸ χαρτί, θὰ παρατηρήσωμε ὅτι τὸ χαρτὶ αὐτὸ ἁπλωμένο ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου (σχ. 92).



Σχ. 92

Στὸ σχῆμα 92, ὅπως βλέπετε, τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ ἔχει βάση τὴν ΓΔ, ποὺ εἶναι ἴση μὲ τὴν περιφέρεια τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου καὶ ὕψος τὴν ΑΔ, ποὺ εἶναι ἴση μὲ τὸ ὕψος τοῦ κυλίνδρου.

Ἑπομένως τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου, τὸ βρίσκομε ὅπως καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου. Δηλ. πολ)ζομε τὴ βάση ἐπὶ τὸ ὕψος. Ἐδῶ ὅμως, βάση τοῦ ὀρθογωνίου μας εἶναι ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου τῆς βάσεως καὶ ὕψος του, τὸ ὕψος τοῦ κυλίνδρου.

Ὥστε : ***Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου, πολ)ζομε τὸ μῆκος τῆς περιφερείας τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του.***

Ἐπειδὴ ὅμως ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου, ἀποτελεῖται ἀπὸ τὴν κυρτὴ ἐπιφάνεια καὶ τὶς δύο βάσεις του, ***γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου, βρίσκομε τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του, τὸ ἐμβαδὸν τῶν δύο βάσεών του καὶ τὰ προσθέτομε· τὸ ἄθροισμα ποὺ θὰ βροῦμε εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου.***

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα

1) Πῶς βρίσκομε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου ;

2) Πῶς βρίσκομε τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου ;

3) Πῶς βρίσκομε τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου ;

4) Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κυλίνδρου, ποὺ ἔχει ἀκτίνα βάσεως 1,5 μ. καὶ ὕψος 2,5 μ.. ;

5) Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ὁλοκλήρου τῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κυλίνδρου, ποὺ ἔχει ἀκτίνα βάσεως 2,75 μ. καὶ ὕψος 4 μ. ;

6) Δύο κύλινδροι ἔχουν· ὁ μὲν ἕνας ἀκτίνα βάσεως 2 μ., ὁ δὲ ἄλλος 2,5 μ. Τὸ ὕψος καὶ τῶν δύο εἶναι 3 μ. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τοῦ καθενός ;

7) Ἕνα κυλινδρικὸ τεπόζιτο, ἔχει ἀκτίνα βάσεως 0,45 μ. καὶ ὕψος 2 μ. Πόσα τετραγ. μέτρα λαμαρίνα χρειάστηκε γιὰ νὰ κατασκευασθῆ ;

8) Τὸ τεπόζιτο τοῦ νεροῦ τοῦ σχολείου μας, εἶναι κυλινδρικὸ καὶ ἔχει διάμετρο βάσεως 0,80 μ. καὶ ὕψος 1,40 μ. Εἶναι δὲ φτιαγμένο ἀπὸ λαμαρίνα που τὴν ἀγοράσαμε πρὸς 18χ. δρ. τὸ τ. μ. Πόσο στοίχισε τὸ τεπόζιτο;

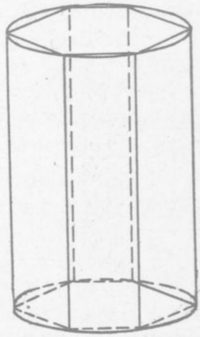
Πῶς βρίσκομε τὸν ὄγκο τοῦ κυλίνδρου

Παίρνομε ἕνα κύλινδρο καὶ μέσα σ' αὐτὸν ἕνα ὀρθὸ πολυγωνικὸ πρῖσμα, τοῦ ὁποίου ἡ κάθε βάση εἶναι κανονικὸ πολύγωνο ἐγγεγραμμένο στὶς κυκλικὲς βάσεις τοῦ κυλίνδρου (σχ. 93). Τὰ ὕψη καὶ τῶν δύο στερεῶν θὰ εἶναι ἴσα.

Ὅπως μάθαμε ὅμως, τὸ κανονικὸ πολύγωνο τὸ ὁποῖον ἔχει πάρα πολὺ μεγάλον ἀριθμὸ πλευρῶν, καταλήγει νὰ γίνη ὁ κύκλος εἰς τὸν ὁποῖον εἶναι ἐγγεγραμμένο. Καὶ τότε ἡ περίμετρός του, γίνεται ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου αὐτοῦ· τὸ ἐμβαδόν του, ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου· καὶ ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματός μας, ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου μας.

Ἄρα· ὁ κύλινδρος εἶναι ὀρθὸ πολυγωνικὸ πρῖσμα, ποὺ ἔχει βάση κανονικὸ πολύγωνο μὲ πάρα πολλὲς πλευρές.

Συνεπῶς τὸν ὄγκο του τὸν βρίσκομε ὅπως καὶ τοῦ πρίσματος.



Σχ. 93

Δηλαδή : ***Γιὰ νὰ βροῦμε τὸν ὄγκο τοῦ κυλίνδρου, πολλαπλασιάζομε τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του.***

Ὄγκ. κυλίνδρου = Ἐμβ. Βασ. × ὕψος **ἢ Ὄγκ. κυλ. = α × α × π × ὕψος**	τύπος

Παράδειγμα: Ἔχομε ἕναν κύλινδρο μὲ ἀκτίνα βάσεως 2 μ. καὶ ὕψος 5 μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος του;

Λύση : α) Βρίσκομε τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του, (α × α × π)· δηλ. 2 × 2 × 3,14 = 12,56 τ. μ.

β) Πολ)ζομε τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος· 12,56 × 5 = 62,80 κ. μ. Ἄρα, ὁ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου μας εἶναι 62,80 κ. μ.

Προβλήματα

1) Ἕνα κυλινδρικὸ πηγάδι ἔχει ἀκτίνα βάσεως 0,75 μ. καὶ ὕψος 16 μ. Πόσες ὀκ. νερὸ χωράει, ἂν γεμίση;

2) Τὸ πηγάδι αὐτὸ γιὰ νὰ τὸ ἀνοίξωμε, πληρώσαμε τοὺς τεχνῖτες πρὸς 45.000 δρ. τὸ κ. μ. Πόσο μᾶς στοίχισε :

3) Ἕνας κομμένος κυλινδρικὸς κορμὸς βαλανιδιᾶς, ποὺ ἔχει διάμετρο τῆς βάσεως 0,75 μ. καὶ ὕψος 9 μ., πουλήθηκε πρὸς 145.000 δρχ. τὸ κ. μ. Πόσο πῆρε ὁ ἰδιοκτήτης του;

4) Ἕνας ξυλέμπορος ἀγόρασε 20 κυλινδρικοὺς κορμοὺς καρυδιᾶς

ποὺ εἶχαν οἱ μισοί, ἀκτίνα βάσεως 0,25 μ. καὶ οἱ ἄλλοι μισοί, διάμετρο βάσεως 0,70 μ. Τὸ ὕψος ὅλων ἦταν 8 μ. Ἂν τοὺς ἀγόρασε πρὸς 17.500 δρχ. τὸ κ. μ., πόσο πλήρωσε ;

5) Ἕνας ἄνοιξε ἕνα κυλινδρικὸ λάκκο, μὲ διάμετρο βάσεως 6 μ. καὶ ὕψος 5 μ. Πλήρωσε δὲ τοὺς ἐργάτες πρὸς 35.000 δρχ. τὸ κυβ. μ. Πόσο τοῦ στοίχισε ὁ λάκκος αὐτός ;

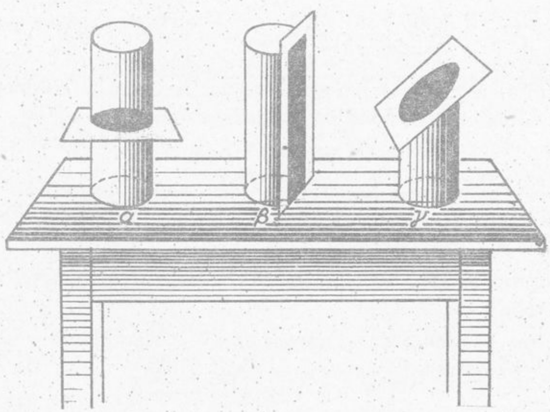
6) Ἕνα κυλινδρικὸ δοχεῖο, ἔχει ἀκτίνα βάσεως 0,15 μ. καὶ ὕψος 0,65 μ. Πόσες ὀκ. νερὸ χωράει ;

7) Στὸ σχολεῖο μας γιὰ νὰ βράζωμε τὸ γάλα, ἔχομε ἕνα κυλινδρικὸ καζάνι, ποὺ ἔχει διάμετρο 0,45 μ. καὶ ὕψος 0,90 μ. Πόσες μερίδες γάλα χωράει ; (Ἡ μερίδα εἶναι 75 δράμια. Εἰδ. βάρ. γάλακτος 1,03).

8) Μία μαρμάρινη κολώνα κυλινδρικὴ ἔχει διάμετρο 0,40 μ. καὶ ὕψος 3.50 μ. Πόσο ζυγίζει ; (Εἰδ. βάρος μαρμάρου 2,837).

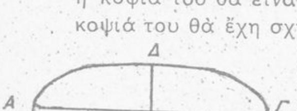
ΕΛΛΕΙΨΗ

Κάνομε ἕνα κύλινδρο ἀπὸ πατάτα καὶ τὸν τοποθετοῦμε μὲ τὴν βάση του ἀπάνω στὸ τραπέζι. Ἐὰν τὸν κόψωμε ὁριζοντίως (σχῆμα 94α),



Σχ. 94 (α β γ)

ἡ κοψιά του θὰ εἶναι κύκλος. Ἐὰν τὸν κόψωμε κατακορύφως (σχ. 9 β), ἡ κοψιά του θὰ ἔχη σχῆμα ὀρθογωνίου. Ἐὰν ὅμως κόψωμε τὸν κύλινδρο λίγο πλάγια (σχ. 94γ), ἡ κοψιά του θὰ ἔχη σχῆμα ὅμοιο μὲ τὸ σχῆμα 95. Τὸ σχῆμα αὐτὸ τὸ λέμε ***ἔλλειψη***.



Σχ. 95

Ὅπως βλέπετε ἡ ἔλλειψη μοιάζει μὲ τὸν κύκλο, ἀλλὰ δὲν εἶναι τέλειος κύκλος.

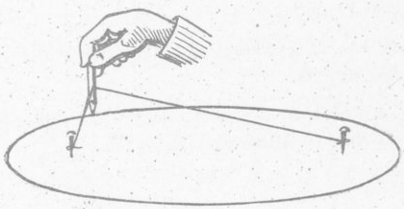
Ἡ ἔλλειψη ἔχει δύο καθέτους διαμέτρους·

μία μεγάλη καὶ μία μικρή, ποὺ λέγονται *ἄξονες* (μεγάλος καὶ μικρός).

Κάθε ἄξονας διαιρεῖ τὴν ἔλλειψη σὲ δύο ἴσα μέρη.

Πῶς χαράσσομε ἔλλειψη

Γιὰ νὰ χαράξωμε ἔλλειψη στὸν πίνακα, καρφώνομε δύο καρφίτσες σὲ κάποια ἀπόσταση τὴ μία ἀπὸ τὴν ἄλλη. Τὰ σημεῖα ποὺ καρφώσαμε τὶς καρφίτσες λέγονται *ἑστίες* τῆς ἐλλείψεως. Ὕστερα δένομε μία κλωστὴ στὶς δύο καρφίτσες, ποὺ νὰ εἶναι μεγαλύτερη ἀπὸ τὴν ἀπόστασή των. Δίνομε στὴν κλωστὴ τόσο μῆκος, ὅσο μῆκος θέλομε νὰ ἔχη ὁ μεγάλος ἄξονας τῆς ἐλλείψεως. Κατόπιν μὲ τὴν κιμωλία τεντώνομε τὴν κλωστὴ καὶ σέρνομε τὴν κιμωλία πάνω στὸν πίνακα μὲ τεντωμένη τὴν κλωστή. Ἡ κιμωλία μας θὰ γράψη ἔλλειψη (σχ. 96).



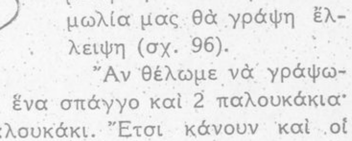
Σχ. 96

Ἂν θέλωμε νὰ γράψωμε ἔλλειψη στὸ χῶμα, κάνομε τὸ ἴδιο μ' ἕνα σπάγγο καὶ 2 παλουκάκια· ἀντὶ γιὰ κιμωλία παίρνομε ἕνα τρίτο παλουκάκι. Ἔτσι κάνουν καὶ οἱ κηπουροί.

Πῶς βρίσκομε τὶς ἑστίες τῆς ἐλλείψεως

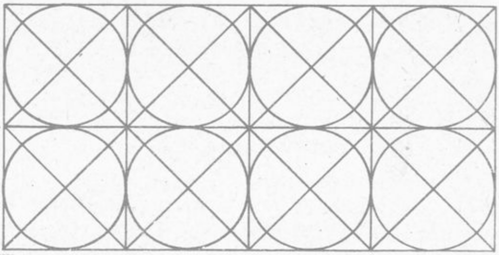
Ἂν μᾶς δώσουν τὰ μήκη τῶν ἀξόνων τῆς ἐλλείψεως, μποροῦμε νὰ βροῦμε τὶς ἑστίες της καὶ νὰ γράψωμε τὴν ἔλλειψη.

Οἱ ἄξονες τῆς ἐλλείψεως τέμνονται καθέτως καὶ ὁ ἕνας περνάει ἀπ' τὴ μέση τοῦ ἄλλου. Μὲ κέντρο τὸ σημεῖο Δ τοῦ μικροῦ ἄξονα (σχ. 97) καὶ μὲ ἀκτίνα τὸ μισὸ τοῦ μεγάλου ἄξονα, γράφομε μὲ τὸ διαβήτη μας περιφέρεια κύκλου. Ἡ περιφέρεια αὐτὴ κόβει τὸν μεγάλο ἄξονα στὰ σημεῖα Ε καὶ Ε'. Τὰ σημεῖα αὐτὰ εἶναι οἱ ἑστίες τῆς ἐλλείψεως. Ὕστερα γράφομε τὴν ἔλλειψη μὲ τὸν τρόπο ποὺ μάθαμε. Ἡ κλωστὴ ποὺ θᾆναι δεμένη στὶς ἑστίες, θᾄχη μῆκος ἴσο μὲ τὴ γραμμὴ ΕΔΕ'.



Σχ. 97

Ἀντικείμενα ποὺ ἔχουν σχῆμα ἐλλείψεως, εἶναι μερικὲς σφραγίδες, μερικὰ κουτάλια, μερικὰ πιάτα, μερικὰ κάδρα κλπ.



Πῶς βρίσκομε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐλλείψεως

(*Ἡμιάξονα* λέμε τὸν μισὸ ἄξονα).

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐλλείψεως, πολλαπλασιάζομε τὸ γινόμενο τῶν δύο ἡμιαξόνων της ἐπὶ 3,14.

Παράδειγμα: Ἐὰν ὁ μεγάλος ἄξονας μιᾶς ἐλλείψεως εἶναι 6 μ. καὶ ὁ μικρὸς 4 μ.. πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδόν της :

Λύση. Ἐμβ. ἐλλείψεως = 3 × 2 × 3,14 = 18,84 τ. μ.

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα

1) Κάντε μία ἔλλειψη μὲ μεγάλο ἄξονα 0,08 μ. καὶ μικρὸ 0,06 μ.

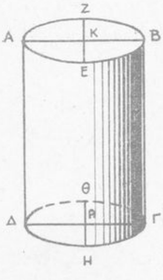
2) Κάντε στὴν αὐλὴ μία ἔλλειψη μὲ μεγάλο ἄξονα 1,40 μ. καὶ μικρὸ 0,90 μ.

3) Πῶς βρίσκομε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐλλείψεως;

4) Ὁ μεγάλος ἄξονας μιᾶς ἐλλείψεως εἶναι 5 μ. καὶ ὁ μικρὸς 3 μ. Ποιὸ εἶναι τὸ ἐμβαδόν της ;

5) Οἱ ἄξονες μιᾶς ἐλλειπτικῆς πρασσιᾶς εἶναι 12 μ. καὶ 7 μ. Ποιὸ εἶναι τὸ ἐμβαδόν της ;

Ἰχνογράφηση κυλίνδρου

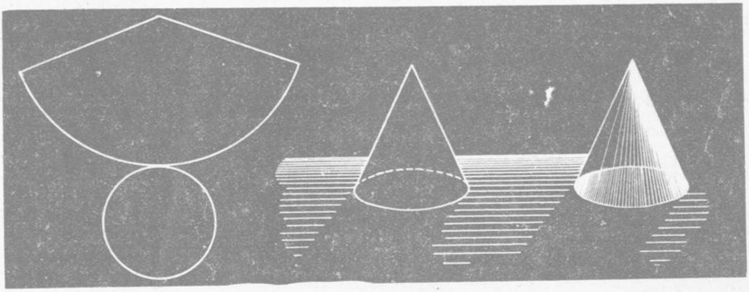


Σχ. 98

Γράφομε ἕνα ὀρθογώνιο, π. χ. τὸ ΑΒΓΔ (σχ. 98). Ἔπειτα ἐπειδὴ ὁ κύκλος, ὅταν τὸν βλέπωμε πλάγια, μοιάζει μὲ ἔλλειψη, παίρνομε τὶς ὁριζόντιες βάσεις τοῦ ὀρθογωνίου, τὶς ΑΒ καὶ ΓΔ γιὰ μεγάλους ἄξονες τῶν ἐλλείψεων καὶ γράφομε τοὺς μικροὺς ἄξονες ΕΖ καὶ ΗΘ καθέτως στὰ μέσα Κ καὶ Λ τῶν μεγάλων.

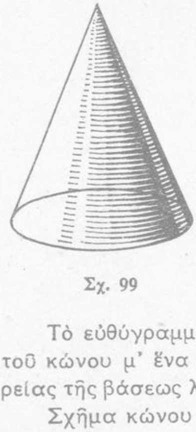
Ὕστερα γράφομε δύο ἐλλείψεις μὲ τὸν τρόπο ποὺ μάθαμε.

Θἄχωμε ἔτσι ἰχνογραφήσει ἕναν κύλινδρο.



ΚΩΝΟΣ

Τὸ γεωμετρικὸ σῶμα ποὺ βλέπετε στὸ σχῆμα 99, λέγεται ***κῶνος.***



Σχ. 99

Ὅπως βλέπετε, ὁ κῶνος ἔχει δύο ἐπιφάνειες. Μία ἐπίπεδο κυκλική, ποὺ εἶναι ἡ βάση του καὶ μία κυρτὴ ποὺ εἶναι ἡ παράπλευρος ἐπιφάνειά του. Ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια τοῦ κώνου κλείνει ἀπάνω σὲ ἕνα σημεῖο, σὰν τὴν πυραμίδα, ποὺ λέγεται ***κορυφὴ*** τοῦ κώνου.

Ἡ κάθετος εὐθεῖα ἀπὸ τὴν κορυφὴ τοῦ κώνου στὸ ἐπίπεδο τῆς βάσεώς του, περνάει ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς κυκλικῆς βάσεως αὐτοῦ.

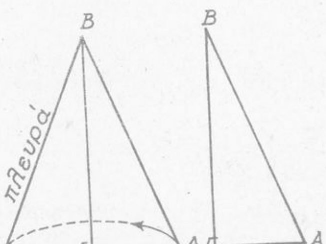
Τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα τῆς καθέτου αὐτῆς ἀπὸ τὴν κορυφὴ ὥς τὴ βάση τοῦ κώνου, λέγεται ***ὕψος*** τοῦ κώνου.

Τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα ποὺ ἑνώνει τὴν κορυφὴ τοῦ κώνου μ' ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖον τῆς περιφερείας τῆς βάσεως λέγεται ***πλευρὰ*** τοῦ κώνου (σχ. 100).

Σχῆμα κώνου ἔχουν τὰ χωνιά, μερικὲς σκηνές, μερικὲς καλύβες, ἡ μύτη τοῦ μολυβιοῦ ὅταν εἶναι ξυμένο μὲ ξύστρα, κ.λ.π.

Σχ. 100

Κατασκευὴ κώνου



Σχ. 101

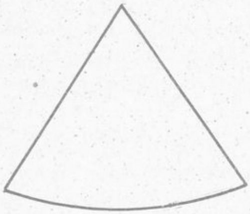
Ἂν περιστρέψωμε τὸ ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (σχ. 101), περὶ τὴν κάθετο πλευρά του ΒΓ, ἡ ὁποία θὰ μένη ἀκίνητη ἕως ὅτου ἐπανέλθη τὸ τρίγωνο στὴ θέση του, ἡ μὲν πλευρὰ ΑΓ θὰ γράψη τὴν κυκλικὴ βάση τοῦ κώνου, ἡ δὲ πλευρὰ ΑΒ, τὴν κυρτὴ παράπλευρο ἐπιφάνεια αὐτοῦ.

Τὴν ἐργασία ποὺ κάναμε μὲ τὸ συρμάτινο ὀρθογώνιο, καὶ ποὺ περιστρέφοντάς το εἴδαμε τὸν κύλινδρο, κάντε τη τώρα μὲ ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο· κρατῆστε το μόνο ἀπὸ τὰ ἄκρα μιᾶς καθέτου πλευρᾶς του ποὺ τὴν παίρνομε νὰ ξεπερνάῃ τὸ τρίγωνο κι' ἀπὸ τὶς δύο ἄκρες της.

Πῶς βρίσκομε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας κώνου

Ὅπως εἴπαμε, ὁ κῶνος ἔχει δύο ἐπιφάνειες, μία κυκλικὴ καὶ μία κυρτή. Ἐπομένως γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφανείας του πρέπει νὰ βροῦμε χωριστὰ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυκλικῆς βάσεώς του καὶ χωριστὰ τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του, καὶ νὰ τὰ προσθέσωμε. Τὸ ἄθροισμά τους θὰ εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου.

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου ξέρομε πῶς βρίσκεται (α Χ α Χ π). Πρέπει ὅμως νὰ βροῦμε καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας.



Σχ. 102

Ἂν τυλίξωμε τὴν ἐπιφάνεια αὐτὴ μὲ ἕνα χαρτί, ἔτσι ποὺ νὰ τὴν σκεπάσῃ ἴσα - ἴσα καὶ ὕστερα βγάλωμε τὸ χαρτὶ καὶ τὸ τεντώσωμε, θὰ παρατηρήσωμε πὼς ἔχει σχῆμα κυκλικοῦ τομέως (σχ. 102), ποὺ ἔχει κέντρο τὴν κορυφὴ τοῦ κώνου καὶ ἀκτίνα τὴν πλευρά του.

Σὲ προηγούμενο μάθημα μάθαμε, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν κυκλικοῦ τομέως τὸ βρίσκομε ὅπως καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου· δηλ. πολ)ζομε τὴ βάση ἐπὶ τὸ ὕψος καὶ τὸ γινόμενο τὸ διαιροῦμε διὰ 2.

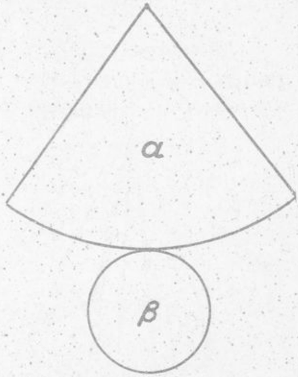
Βάση ὅμως τοῦ κυκλικοῦ αὐτοῦ τομέως, εἶναι ἡ περιφέρεια (τῆς κυκλικῆς βάσεως) τοῦ κώνου, τὴν ὁποία ἐφαρμόζει. Καὶ ὕψος του, ἡ πλευρὰ τοῦ κώνου, ποὺ εἶναι καὶ ἀκτίνα τοῦ κυκλικοῦ τομέως.

Ἄρα: ***Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου, πολλαπλασιάζομε τὸ μῆκος τῆς περιφερείας τῆς βάσεώς του, ἐπὶ τὴν πλευρά του καὶ τὸ γινόμενο τὸ διαιροῦμε διὰ 2.***

Παράδειγμα: Ἡ πλευρὰ ἑνὸς κώνου εἶναι 8 μ. καὶ ἡ διάμετρος τῆς βάσεώς του 6 μ. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του;

Λύση: Ὅπως μάθαμε, γιὰ νὰ βροῦμε τὸ μῆκος τῆς περιφερείας, πολλαπλασιάζομε τὴν διάμετρο ἐπὶ 3,14 (Μ = δ Χ π).

Ἐπομένως ἐδῶ εἶναι : Μ = 6 Χ 3,14 = 18,84 μ. Τὸ μῆκος τῆς περιφερείας τῆς βάσεως, θὰ τὸ πολ)σωμε ἐπὶ τὴν πλευρά· 18,84 Χ 8 = 150,72. Αὐτὸ θὰ τὸ διαιρέσωμε διὰ 2· δηλ. 150,72 : 2 = 75,36 τ. μ. Ἄρα, τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου αὐτοῦ, εἶναι 75,36 τ. μ.



Σχ. 103

Ἐὰν τώρα θέλωμε νὰ βροῦμε καὶ τὸ ἐμβαδὸν ὁλοκλήρου τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου, στὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του (σχ. 103α), θὰ προσθέσωμε καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του (σχ. 103β). Ὅπως ξέρομε, ἐμβ. κύκλου = α × α × π.

Στὸ πιὸ πάνω παράδειγμα δὲν ξέρομε τὴν ἀκτίνα, ξέρομε ὅμως τὴν διάμετρο, τῆς ὁποίας τὸ μισὸ εἶναι ἡ ἀκτίνα. Θὰ ἔχωμεν λοιπόν, Ε = 3 × 3 × 3,14 = 28,26 τ. μ., τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως.

Σ' αὐτὸ προσθέτομε καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας καὶ θὰ ἔχωμε 75,36 + 28,26 = 103,62 τ. μ., τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου.

Ὥστε: ***Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου, βρίσκομε τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του, τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του καὶ προσθέτομε τὰ δύο ἐμβαδά· αὐτὸ ποὺ θὰ βροῦμε θὰ εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου.***

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα

1) Πῶς βρίσκομε τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κώνου;

2) Πῶς βρίσκομε τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφανείας κώνου;

3) Θέλομε νὰ φτιάσωμε μία κωνικὴ σκηνὴ ἀπὸ ὕφασμα. Πόσα μέτρα ὕφασμα θὰ χρειασθοῦμε, ἐὰν ἡ ἀκτίνα τῆς βάσεώς της θέλωμε νὰ εἶναι 1,75 μ. καὶ τὸ ὕψος της 2,45 μέτρα;

4) Τὸ μῆκος τῆς περιφερείας τῆς βάσεως ἑνὸς κώνου εἶναι 12 μ. καὶ ἡ πλευρά του 8 μ. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου αὐτοῦ;

5) Ἡ ἀκτίνα τῆς βάσεως μιᾶς κωνικῆς στέγης, εἶναι 2,35 μ. καὶ ἡ πλευρά της 4,70 μ. Πόσα τετραγ. μέτρα τσίγκος χρειάζονται γιὰ νὰ τὴ σκεπάσωμε;

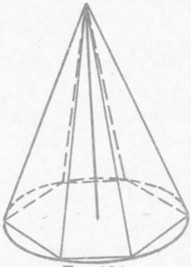
6) Ἡ διάμετρος τῆς βάσεως ἑνὸς κώνου, εἶναι 4,50 μ. καὶ ἡ πλευρά του, 5 μ. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του;

7) Ἡ ἀκτίνα τῆς βάσεως ἑνὸς κώνου εἶναι 2,50 μ. καὶ ἡ πλευρὰ τοῦ κώνου 6 μ. Ποιὸ εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ὁλοκλήρου τῆς ἐπιφανείας του;

8) Ἕνας κῶνος ἔχει μῆκος περιφερείας τῆς βάσεώς του 4,75 μ. καὶ πλευρὰ τὸ διπλάσιο τῆς ἀκτίνας του. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφανείας του;

Πῶς βρίσκομε τὸν ὄγκο τοῦ κώνου

Ἂν πάρωμε μὲ τὴν ἴδια κορυφή, ἕνα κῶνο καὶ μία πολυγωνικὴ πυραμίδα μὲ βάση κανονικὸ πολύγωνο ἐγγεγραμμένο στὴν κυκλικὴ βάση τοῦ κώνου (σχ. 104), καὶ τὰ συγκρίνωμε, θὰ παρατηρήσωμε, ὅτι μοιάζουν μὲν στὸ ὅτι καὶ τὰ δύο στερεὰ ἔχουν τὴ βάση στὸ ἴδιο ἐπίπεδο καὶ τελειώνουν στὴν ἴδια κορυφή· διαφέρουν ὅμως στὸ ὅτι τὸ ἕνα ἔχει βάση κύκλο καὶ τὸ ἄλλο πολύγωνο. Ἂν ὅμως κάνωμε τὸ κανονικὸ πολύγωνο τῆς βάσεως τῆς πυραμίδος μὲ ἄπειρες πλευρές, ἡ περίμετρός του θὰ καταλήξη νὰ γίνη ἡ κυκλικὴ βάση τοῦ κώνου, καὶ ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος, θὰ γίνη ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου.



Σχ. 104

Ὥστε· ὁ κῶνος εἶναι μία πυραμίδα μὲ ἄπειρες πλευρές. Ἑπομένως καὶ ὁ ὄγκος του βρίσκεται ὅπως καὶ ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδος. Τὸν θυμᾶσθε; (Ἐμβαδὸν τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος διὰ 3).

Ἀλλὰ καὶ μὲ ἄλλο τρόπο φτάνομε στὸ ἴδιο ἀποτέλεσμα.

Παίρνομε ἕνα κύλινδρο καὶ ἕνα κῶνο ἀπὸ χαρτόνι, ποὺ νὰ ἔχουν τὴν ἴδια βάση καὶ τὸ ἴδιο ὕψος. Γεμίζομε τὸν κῶνο μὲ ψιλὴ ἄμμο καὶ τὸν ἀδειάζομε στὸν κύλινδρο. Θὰ παρατηρήσωμε ὅτι γιὰ νὰ γεμίση ὁ κύλινδρος, θὰ χρειασθῆ ν' ἀδειάσωμε τὸν κῶνο τρεῖς φορὲς στὸν κύλινδρο Δηλ. ὁ κύλινδρος χωράει τριπλασία ποσότητα ἄμμου ἀπὸ τὸν κῶνο. Ἄρα, ἔχει τριπλάσιο ὄγκο ἀπὸ τὸν ὄγκο τοῦ κώνου. Μάθαμε δὲ ὅτι γιὰ νὰ βροῦμε τὸν ὄγκο τοῦ κυλίνδρου, πολλαπλασιάζομε τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του.

Γιὰ νὰ βροῦμε λοιπὸν τὸν ὄγκο τοῦ κώνου πολλαπλασιάζομε τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του καὶ τὸ γινόμενο διαιροῦμε διὰ 3.

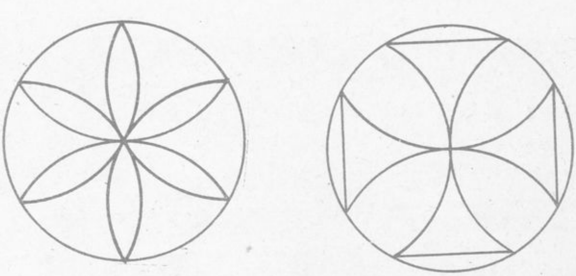
Ὥστε : ***Γιὰ νὰ βροῦμε τὸν ὄγκο τοῦ κώνου, πολλαπλασιάζομε τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του καὶ τὸ γινόμενο τὸ διαιροῦμε διὰ 3.***

Παράδειγμα : Ἡ ἀκτίνα τῆς βάσεως ἑνὸς κώνου, εἶναι 6 μ. καὶ τὸ ὕψος του 8 μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος του ;

Λύση : α) Θὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως. Ἡ βάση εἶναι κύκλος, τὸ δὲ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου, ὅπως μάθαμε, εἶναι $α \times α \times π$· ἐδῶ, $6 \times 6 \times 3,14 = 113,04$ τ. μ.

β) Αὐτὸ θὰ τὸ πολλαπλασιάσωμε ἐπὶ τὸ ὕψος· $113,04 \times 8 = 904,32$.

γ) Αὐτὸ θὰ τὸ διαιρέσωμε διὰ 3. Ἦτοι $904,32 : 3 = 301,44$ κ. μ., εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ κώνου.



Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα

1) Πῶς βρίσκομε τὸν ὄγκο τοῦ κώνου ;

2) Ποιὰ σχέση ἔχει ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδος μὲ τὸν ὄγκο τοῦ κυλίνδρου ;

3) Ποιὸς εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ κώνου, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτίνα τῆς βάσεως εἶναι 2,5 μ. καὶ τὸ ὕψος του 3 μ. ;

4) Πόσα κ. μ. ἀέρα περικλείει κωνικὴ σκεπή, τῆς ὁποίας ἡ διάμετρος τῆς βάσεως εἶναι 3,40 μ. καὶ τὸ ὕψος της 2,75 μ. ;

5) Ἕνα κωνικὸ δοχεῖο, ἔχει διάμετρο βάσεως 0,75 μ. καὶ ὕψος 3,5 μ. Πόσα κυβικὰ μέτρα νερὸ χωράει :

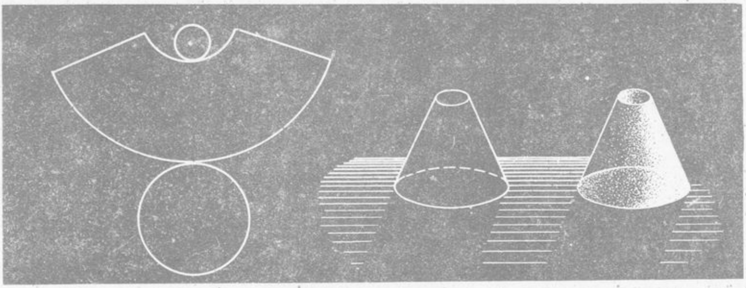
6) Μία κωνικὴ καλύβα, ἔχει διάμετρο βάσεως 4,5 μ. καὶ ὕψος 2,5 μ. Πόσα κ. μ. εἶναι ὁ ὄγκος της ;

7) Ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως ἑνὸς κώνου, εἶναι 6 μ. καὶ τὸ ὕψος του 5 μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ κώνου αὐτοῦ ;

8) Ἕνα κωνικὸ καμίνι (ποὺ κάνουν ξυλοκάρβουνα), ἔχει περιφέρεια βάσεως 18,84 μ. καὶ ὕψος 4 μ. Πόσες ὀκάδες κάρβουνα θὰ βγάλη, ἂν κάθε κ. μ. ξύλα βγάζη 50 ὀκ. κάρβουνα ;

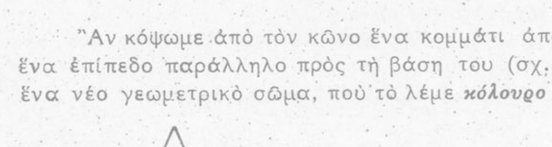
Πῶς φτιάχνομε κῶνο μὲ χαρτόνι

Ἐὰν ξετυλίξωμε ἕνα χάρτινο κῶνο θὰ δοῦμε ὅτι ἔχει τὸ σχῆμα ποὺ βλέπετε στὸ σχ. 102, τῆς σελ. 80. Ἂν λοιπὸν ἰχνογραφήσωμε τὸ σχῆμα αὐτό, ποὺ εἶναι κυκλικὸς τομεύς, σὲ χαρτόνι καὶ τὸ κόψωμε, ἔχομε τὸ ἀνάπτυγμα ἑνὸς κώνου. Τὴν ἐπιφάνεια αὐτή, τὴν τυλίγομε καὶ τὴν κολλᾶμε. Στὸ κάτω μέρος ἐφαρμόζομε ἕνα κύκλο ὥστε νὰ κλείση ἡ βάση.



ΚΟΛΟΥΡΟΣ ΚΩΝΟΣ

Ἂν κόψωμε ἀπὸ τὸν κῶνο ἕνα κομμάτι ἀπὸ τὴν κορυφή του, μὲ ἕνα ἐπίπεδο παράλληλο πρὸς τὴ βάση του (σχ. 105α), θὰ σχηματισθῇ ἕνα νέο γεωμετρικὸ σῶμα, ποὺ τὸ λέμε ***κόλουρο κῶνο*** (σχ. 105β).



Σχ. 105

Τὸ γεωμετρικὸ αὐτὸ σῶμα, ὅπως βλέπετε, ἔχει ἐπιφάνεια ξεχωρισμένη σὲ τρία μέρη. Δύο ἐπίπεδα παράλληλα κυκλικά, ποὺ εἶναι οἱ ***βάσεις*** του, καὶ ἕνα κυρτὸ μέρος, ποὺ εἶναι ἡ ***παράπλευρος*** ἐπιφάνειά του.

Ἡ εὐθεῖα ποὺ ἑνώνει τὰ κέντρα τῶν δύο βάσεών του λέγεται ***ὕψος*** τοῦ κολούρου κώνου. Ἡ δὲ εὐθεῖα τῆς κυρτῆς του ἐπιφανείας, ποὺ ἑνώνει τὶς δύο περιφέρειες τῶν βάσεών του, λέγεται ***πλευρὰ*** τοῦ κολούρου κώνου.

Ἀντικείμενα ποὺ ἔχουν σχῆμα κολούρου κώνου εἶναι μερικὰ ποτήρια, μερικοὶ κουβάδες, μερικὲς γλάστρες, ἀμπαζοὺρ κλπ.

Ἐμβαδὸν ἐπιφανείας κολούρου κώνου

Εἴπαμε πὼς ὁ κόλουρος κῶνος ἔχει τρεῖς ἐπιφάνειες. Γιὰ νὰ βροῦμε λοιπὸν τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφανείας του; πρέπει νὰ βροῦμε χωριστὰ τὸ ἐμβαδὸν κάθε ἐπιφανείας καὶ νὰ προσθέσωμε τὰ τρία ἐμβαδά.

Καὶ τὰ μὲν ἐμβαδὰ τῶν βάσεων τὰ βρίσκομε εὔκολα, γιατὶ ξέρομε πῶς βρίσκεται τὸ ἐμβαδὸν κύκλου (α × α × π). Μᾶς μένει ὅμως καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας, ποὺ τὸ βρίσκομε ἔτσι :

Ἐὰν τυλίξωμε τὴν κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κολούρου κώνου μὲ χαρτί, ἔτσι ποὺ νὰ τὴν σκεπάση ἴσα ἴσα καὶ ὕστερα τὸ ξετυλίξωμε, τὸ χαρτὶ αὐτὸ θὰ εἶναι ἕνας κυκλικὸς τομεὺς ποὺ τοῦ λείπει ἕνας μικρότερος τομεὺς ἀπὸ τὴν κορυφὴ τοῦ μεγάλου (σχ. 106).

Σχ. 106

Πρέπει λοιπὸν νὰ ἀφαιρέσωμε ἀπὸ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μεγάλου τομέως τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μικροῦ.

Τὸ ἴδιο ὅμως ἀποτέλεσμα θὰ βροῦμε συντομώτερα, ἂν προσθέσωμε τὰ μήκη τῶν περιφερειῶν τῶν δύο βάσεων τοῦ κολούρου κώνου, πάρωμε τὸ μισὸ αὐτοῦ τοῦ ἀθροίσματος καὶ τὸ πολλαπλασιάσωμε ἐπὶ τὴν πλευρὰ τοῦ κολούρου κώνου.

Ὥστε : ***Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κολούρου κώνου, πολλαπλασιάζομε τὸ ἡμιάθροισμα τῶν περιφερειῶν τῶν βάσεών του ἐπὶ τὴν πλευρά του.***

Παράδειγμα: Οἱ περιφέρειες τῶν βάσεων ἑνὸς κολούρου κώνου εἶναι ἡ μία 6 μ., ἡ ἄλλη 4 μ. καὶ ἡ πλευρά του 3 μ. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του ;

Λύση: $6 + 4 = 10$, $10 : 2 = 5$, $5 \times 3 = 15$ τ. μ. εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του.

Ἐὰν θέλωμε νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὅλης ἐπιφανείας τοῦ κολούρου κώνου, στὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του θὰ προσθέσωμε καὶ τὰ ἐμβαδὰ τῶν δύο βάσεών του.

Ὥστε : ***Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας κολούρου κώνου, βρίσκομε τὰ ἐμβαδὰ τῶν δύο κυκλικῶν βάσεών του καὶ τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του καὶ τὰ προσθέτομε. Τὸ ἄθροισμα αὐτὸ θὰ εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφανείας τοῦ κολούρου κώνου.***

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα

1) Πῶς βρίσκομε τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κολούρου κώνου ;

2) Πῶς βρίσκομε τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφανείας κολούρου κώνου ;

3) Ἕνας κόλουρος κῶνος, ἔχει ἀκτῖνες βάσεων 0,75 μ., 0,45 μ. καὶ πλευρὰ 0,35 μ. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του ;

4) Ἕνας κόλουρος κῶνος ἔχει ἀκτῖνες βάσεων 1,25 μ., 2,15 μ. καὶ πλευρὰ 1,70 μ. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφανείας του ;

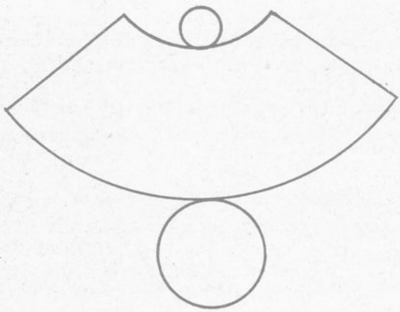
5) Ἡ διάμετρος τῆς μεγάλης βάσεως ἑνὸς κολούρου κώνου, εἶναι 8 μ. καὶ τῆς μικρῆς 3 μ., ἡ δὲ πλευρά του 6,5 μ. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του ;

6) Θέλω νὰ φτιάσω ἀπὸ λαμαρίνα, ἕνα δοχεῖο σὲ σχῆμα κολούρου κώνου, μὲ διαμέτρους τῶν βάσεών του 5 μ. καὶ 3 μ. καὶ πλευρὰ 4 μ. Πόσα τ. μ. λαμαρίνα χρειάζομαι ;

Κάντε καὶ μόνοι σας, ὅμοια προβλήματα.

Ὄγκος κολούρου κώνου

Ὁ ὄγκος κολούρου κώνου βρίσκεται κατὰ προσέγγιση, ἐὰν πολλαπλασιάσωμε τὸ ἡμιάθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν δύο βάσεων, ἐπὶ τὸ ὕψος.



Τὸ πιὸ σωστὸ ὅμως εἶναι νὰ βροῦμε πρῶτα τὸν ὄγκο ὁλοκλήρου τοῦ κώνου καὶ ὕστερα τὸν ὄγκο τοῦ μικρότερου, ποὺ λείπει ἀπὸ τὸν ὁλόκληρο, γιὰ νὰ γίνη κόλουρος καὶ νὰ ἀφαιρέσωμε τὸν ὄγκο τοῦ μικροῦ αὐτοῦ, ἀπὸ τὸν ὄγκο τοῦ ὁλοκλήρου κώνου.

Αὐτὸ ποὺ θὰ μείνη, θὰ εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ κολούρου κώνου.

Ἀσκήσεις

1) Πῶς μποροῦμε ἕνα κῶνο, νὰ τὸν κάνουμε κόλουρο κῶνο ;
2) Πόσα μέρη διακρίνομε στὴν ἐπιφάνεια τοῦ κολούρου κώνου καὶ τί εἶδος εἶναι κάθε μέρος της ;
3) Τί εἶδος ἐπιφάνεια εἶναι, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κολούρου κώνου ;
4) Τί λέγεται πλευρὰ τοῦ κολούρου κώνου ;
5) Πῶς βρίσκομε τὸ ἐμβαδὸν τῶν βάσεων τοῦ κολούρου κώνου ;
6) Πῶς βρίσκομε τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κολούρου κώνου ;
7) Πῶς βρίσκομε τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφανείας τοῦ κολούρου κώνου ;
8) Πῶς βρίσκομε τὸν ὄγκο τοῦ κολούρου κώνου, κατὰ προσέγγιση ; Καὶ πῶς τὸν βρίσκομε ἀκριβῶς ;

Προβλήματα

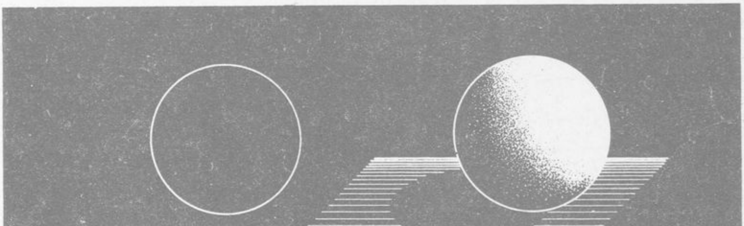
1) Ἡ ἀκτίνα τῆς μεγάλης βάσεως ἑνὸς κολούρου κώνου εἶναι 4,5 μ., τῆς μικρῆς 2,5 μ., ἡ δὲ πλευρά του 4 μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος του, περίπου ;

2) Ἡ διάμετρος τῆς μεγάλης βάσεως ἑνὸς κολούρου κώνου εἶναι 7 μ., ἡ ἀκτίνα τῆς μικρῆς βάσεως 2 μ., ἡ δὲ πλευρά του 6 μ. Νὰ βρεθῆ : α) Τὸ ἐμβαδὸν τῶν βάσεών του. β) Τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του. γ) Τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφανείας του καὶ δ) Ὁ ὄγκος του, κατὰ προσέγγιση.

3) Τὸ καζάνι ποὺ βράζομε τὸ γάλα στὸ σχολεῖο, ἔχει σχῆμα κολούρου κώνου μὲ ἀκτίνες βάσεων 0,40 μ. καὶ 0,25 μ. καὶ ὕψος 0,90 μ. Πόσα κ. μ. γάλα χωράει περίπου ;

4) Τὸ γάλα τὸ μοιράζομε μ' ἕνα δοχεῖο ποὺ ἔχει σχῆμα κολούρου κώνου, μὲ περιφέρειες βάσεων 0,20 μ. και 0,12 μ. καὶ ὕψος 0,15 μ. Πόσα τέτοια δοχεῖα γάλα χωράει τὸ καζάνι μας, ποὺ ἔχει κυλινδρικὸ σχῆμα μὲ ἀκτίνα βάσεων 0,5 μ. καὶ ὕψος 0,6 μ. ;

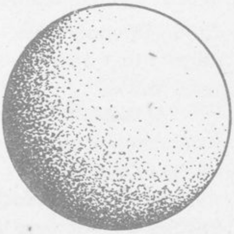
5) Μία στέρνα, σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου γεμάτη μοῦστο, μὲ διαστάσεις 6 μ. μῆκος, 4 μ. πλάτος καὶ 3 μ. ὕψος, τὴν ἀδειάζομε μὲ ἕνα κουβᾶ σχήματος κολούρου κώνου, μὲ ἀκτῖνες βάσεων 0,3 μ. καὶ 0,15 μ., καὶ ὕψος 0,60 μ. Πόσους κουβάδες μοῦστο βγάλαμε περίπου ;



Σ Φ Α Ι Ρ Α

Παίρνομε ἕνα τόπι καὶ τὸ παρατηροῦμε προσεκτικά. Πρῶτα - πρῶτα βλέπομε, πὼς δὲ μοιάζει μὲ κανένα ἀπὸ τὰ στερεὰ ποὺ μάθαμε ὡς τώρα στὴ Γεωμετρία. Αὐτὸ τὸ γεωμετρικὸ σῶμα, ὅπως βλέπετε (σχ. 107) ἔχει μόνο κυρτὴ ἐπιφάνεια· κανένα μέρος της δὲν εἶναι ἐπίπεδο.

'Απ' ὅπου καὶ ἂν τὸ βάλωμε στὸ τραπέζι, στέκεται· ὥστε δὲν ἔχει καμμιὰ βάση ξεχωριστή.



Σχ. 107

Τὸ σῶμα αὐτὸ λέγεται ***σφαῖρα.***

Τὰ στερεὰ σώματα ποὺ ἔχουν τὸ σχῆμα αὐτό, λέγονται ***σφαιρικά.***

Τέτοια σώματα εἶναι τὸ τόπι, οἱ βόλοι, μερικὰ πορτοκάλια, ἡ μπάλλα τοῦ ποδοσφαίρου, οἱ μπίλιες τοῦ μπιλιάρδου, κλπ.

Μέσα στὴ σφαῖρα καὶ ἀκριβῶς στὴ μέση, ὑπάρχει ἕνα σημεῖο, ἀπὸ τὸ ὁποῖο ἀπέχουν ἐξ ἴσου ὅλα τὰ σημεῖα τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας. Τὸ σημεῖο αὐτό, λέγεται ***κέντρον*** τῆς σφαίρας.

῞Ωστε : ***Σφαῖρα λέγεται τὸ στερεό, ποὺ περικλείεται ἀπὸ μία κυρτὴ ἐπιφάνεια, τῆς ὁποίας ὅλα τὰ σημεῖα ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς.***

Ἀκτίνα - Διάμετρος σφαίρας

Κάθε εὐθεῖα, ποὺ ἑνώνει τὸ κέντρο τῆς σφαίρας μὲ ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο τῆς ἐπιφανείας της, λέγεται ***ἀκτίνα τῆς σφαίρας.***

῞Ολες οἱ ἀκτῖνες τῆς ἴδιας σφαίρας εἶναι ἴσες.

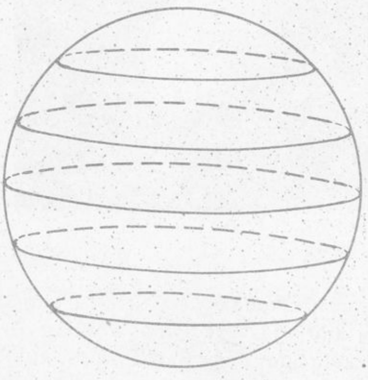
Ἡ εὐθεῖα ποὺ ἑνώνει δύο σημεῖα τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας καὶ περνάει ἀπὸ τὸ κέντρο, λέγεται ***διάμετρος τῆς σφαίρας.***

Ἡ διάμετρος εἶναι διπλάσια τῆς ἀκτίνας.

Διαμέτρους καὶ ἀκτῖνες, μποροῦμε νὰ φέρωμε ὅσες θέλομε.

Κύκλοι σφαίρας

῎Αν κόψωμε ἕνα σφαιρικὸ σῶμα, π. χ. ἕνα σφαιρικὸ πορτοκάλι σὲ δύο κομμάτια, θὰ παρατηρήσωμε ὅτι ἡ τομὴ (κοψιὰ) θὰ ἔχῃ σχῆμα κύκλου. ῞Οσες τομὲς καὶ ἂν κάνωμε στὴ σφαῖρα μὲ ἕνα ἐπίπεδο, ὅλες θὰ εἶναι κύκλοι.



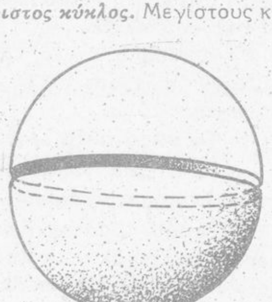
Σχ. 108

῎Αν κάνωμε πολλὲς τέτοιες τομὲς σὲ μία σφαῖρα, θὰ παρατηρήσωμε ὅτι, ὅσο οἱ τομὲς ἀπομακρύνονται ἀπὸ τὸ κέντρο, τόσο οἱ κύκλοι γίνονται μικρότεροι· καὶ ὅσο πλησιάζουν πρὸς τὸ κέντρο, τόσο οἱ κύκλοι γίνονται μεγαλύτεροι (σχ. 108).

Ὁ κύκλος κάθε τομῆς ποὺ περνάει ἀπὸ τὸ κέντρο τῆς σφαίρας, λέγεται ***μέγιστος κύκλος.*** Μεγίστους κύκλους μποροῦμε νὰ φέρωμε, ὅσους θέλομε σὲ μία σφαῖρα· εἶναι δὲ ὅλοι ἴσοι μεταξύ των.

῞Ολοι οἱ ἄλλοι κύκλοι ποὺ δὲν περνοῦν ἀπὸ τὸ κέντρο τῆς σφαίρας, λέγονται ***μικροὶ κύκλοι.***

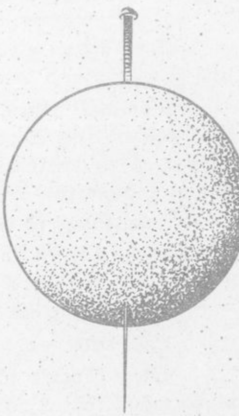
Κάθε μέγιστος κύκλος διαιρεῖ τὴ σφαῖρα σὲ δύο ἴσα μέρη, ποὺ λέγονται ***ἡμισφαίρια*** (σχ. 109). ῎Αν κάνωμε στὴ σφαῖρα πολλὲς τομὲς παράλληλες, οἱ κύκλοι ποὺ θὰ σχηματισθοῦν λέγονται ***παράλληλοι κύκλοι*** (σχ. 108).



Σχ. 109

Ἄξονας — Πόλοι σφαίρας

Ἂν τρυπήσωμε μία σφαῖρα μὲ μία εὐθεῖα (π. χ. ἕνα πορτοκάλι μὲ ἕνα σύρμα), ἔτσι ποὺ νὰ περάση ἀπὸ τὸ κέντρο της, ἕνα τμῆμα τῆς εὐθείας αὐτῆς θὰ εἶναι μία διάμετρος τῆς σφαίρας.



Σχ. 110

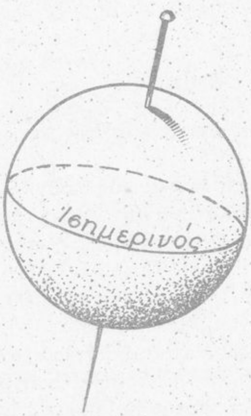
Μποροῦμε γύρω ἀπὸ τὴν εὐθεῖα αὐτή, μὲ τὴν φαντασία μας, νὰ περιστρέψωμε τὴ σφαῖρα. Τότε ἡ εὐθεῖα αὐτὴ γύρω ἀπὸ τὴν ὁποία γυρίζει ἡ σφαῖρα, λέγεται ***ἄξονας τῆς σφαίρας.***

Οἱ ἄκρες αὐτοῦ τοῦ ἄξονα (διαμέτρου), λέγονται ***πόλοι*** (σχ. 110).

Ἡ Γῆ, ὅπως θυμᾶσθε ἀπὸ τὴν Γεωγραφία, εἶναι κι' αὐτὴ σφαῖρα, ποὺ γυρίζει γύρω ἀπὸ τὸ νοητό της ἄξονα.

Ἔχομε κι' ἐκεῖ πόλους, ποὺ τοὺς λέμε Βόρειο καὶ Νότιο.

Ἔχομε παραλλήλους κύκλους, ἔχομε μεγίστους κύκλους ποὺ τοὺς λέμε μεσημβρινούς, ἔχομε τέλος ἕνα μέγιστο κύκλο, ποὺ τὸν λέμε Ἰσημερινὸ (σχ. 111).



Σχ. 111

Ἐμβαδὸν ἐπιφανείας σφαίρας

Εἴπαμε ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας εἶναι κυρτὴ καὶ δὲν μοιάζει μὲ τὴν ἐπιφάνεια κανενὸς ἀπὸ τὰ γεωμετρικὰ σώματα ποὺ μάθαμε ὡς τώρα. Ἂν πάρωμε ἕνα σφαιρικὸ σῶμα, π. χ. ἕνα τόπι καὶ τὸ χωρίσωμε σὲ δύο ἴσα μέρη (ἡμισφαίρια), θὰ παρατηρήσωμε ὅτι ἡ ἐπιφάνειά τους, δὲν ἰσώνει ὅσο κι' ἂν προσπαθήσωμε. Γιὰ νὰ γίνη αὐτό, πρέπει νὰ κόψωμε τὴν ἐπιφάνεια σὲ πολὺ μικρὰ κομματάκια.

Ἂν λοιπὸν κόψωμε τὶς ἐπιφάνειές καὶ τῶν δύο ἡμισφαιρίων σὲ μικρὰ κομματάκια καὶ τὰ βάλωμε κοντὰ - κοντὰ καὶ βροῦμε τὸ ἐμβαδόν των, θὰ παρατηρήσωμε ὅτι τὸ ἐμβαδὸν ὅλων αὐτῶν τῶν κομματιῶν μαζί, θὰ εἶναι τετραπλάσιο τοῦ ἐμβαδοῦ ἑνὸς μεγίστου κύκλου τῆς σφαίρας.

Ὥστε : ***Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, βρίσκομε τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς μεγίστου κύκλου της καὶ τὸ πολ)ζομε ἐπὶ 4. Τὸ γινόμενο ποὺ θὰ βροῦμε, εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.***

Ἐμβ. ἐπιφ. σφαίρας $= 4 \times \pi \times \alpha \times \alpha$	τύπος

Παράδειγμα: Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας σφαίρας, ποὺ ἔχει ἀκτίνα 3 μέτρα ;

Λύση: Ὅπως εἴπαμε, θὰ βροῦμε πρῶτα τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς μεγίστου κύκλου της. Ξέρομε δὲ ὅτι κάθε μέγιστος κύκλος, ἔχει τὴν ἴδια ἀκτίνα μὲ τὴ σφαῖρα. Ἐδῶ λοιπόν, ζητοῦμε τὸ ἐμβαδὸν κύκλου τοῦ ὁποίου ξέρομε τὴν ἀκτίνα. Ἀλλὰ τὸ ἐμβαδὸν κύκλου εἶναι· $\alpha \times \alpha \times \pi$.

Ἑπομένως, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μεγίστου κύκλου τῆς σφαίρας θὰ εἶναι $3 \times 3 \times 3{,}14 = 28{,}26$ τ. μ. Καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, θὰ εἶναι $28{,}26 \times 4 = 113{,}04$ τ. μ.

Ἢ μὲ τὸν τύπο :

Ἐμβ. ἐπιφ. σφ. $= 3{,}14 \times 3 \times 3 = 113{,}04$ τ. μ.

Ὅταν ξέρωμε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας καὶ ζητοῦμε τὸ ἐμδαδὸν τοῦ μεγίστου κύκλου της, κάνομε τὸ ἀντίθετο· δηλ., διαιροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, διὰ 4.

Ἀπὸ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μεγίστου κύκλου τῆς σφαίρας, μποροῦμε νὰ βροῦμε τὴν διάμετρο καὶ τὴν ἀκτίνα της. (Πῶς ;)

Πῶς βρίσκομε τὴν ἀκτίνα τῆς σφαίρας

Ὅπως εἴπαμε, γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, πρέπει νὰ ξέρωμε τὴν ἀκτίνα.

Ἂν ὅμως μᾶς δώσουν ἕνα τόπι ἢ ἕνα πορτοκάλι καὶ μᾶς ποῦν νὰ βροῦμε μόνοι μας τὴν ἀκτίνα, δὲν εἶναι πολὺ εὔκολο πρᾶγμα, γιατὶ θὰ δυσκολευθοῦμε νὰ βροῦμε τὸ κέντρο της. Γι' αὐτό, ἔχει βρεθῆ ἕνας πρακτικὸς τρόπος γι' αὐτὴ τὴ δουλειά.

Βάζομε τὴ σφαῖρα σὲ μία ἐπίπεδο ἐπιφάνεια, π. χ. σ' ἕνα τραπέζι, καὶ ἀπάνω στὴ σφαῖρα βάζομε μία σανίδα ἔτσι, ποὺ νὰ ἐφάπτεται τῆς σφαίρας καὶ νὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ τραπέζι. Μετρᾶμε ὕστερα τὴν ἀπόσταση μεταξὺ τῶν δύο ἐπιφανειῶν (τραπεζιοῦ καὶ σανίδας). Ἐκεῖνο ποὺ θὰ βροῦμε εἶναι ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας. Ἀπ' αὐτὴν βρίσκομε τὴν ἀκτίνα. (Καὶ ἀπὸ τὴν ἀκτίνα, βρίσκομε τὸ ἐμβαδόν).

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα

1) Τί λέγεται σφαῖρα ; Πέστε μερικὰ σφαιρικὰ σώματα ;

2) Ποιοὶ λέγονται μέγιστοι κύκλοι τῆς σφαίρας ; Καὶ ποιοὶ μικροὶ κύκλοι ;

3) Τί λέγεται διάμετρος τῆς σφαίρας ;

4) Τί λέγεται ἀκτίνα τῆς σφαίρας καὶ πῶς βρίσκεται ;

5) Τί λέμε πόλους τῆς σφαίρας ;

6) Πῶς βρίσκομε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μεγίστου κύκλου τῆς σφαίρας ;

7) Πῶς βρίσκομε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ;

8) Ἡ ἀκτίνα μιᾶς σφαίρας εἶναι 1,5 μ. Πόση εἶναι ἡ ἐπιφάνειά της ;

9) Ἡ περιφέρεια τοῦ μεγίστου κύκλου τῆς σφαίρας εἶναι 2,5 μ. Πόση εἶναι ἡ ἀκτίνα της ;

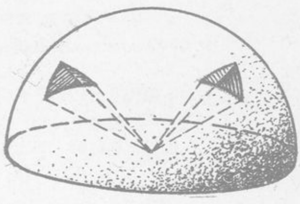
10) Ἡ διάμετρος μιᾶς σφαίρας εἶναι 5 μ. Πόσο τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας της ;

11) Ὁ μεσημβρινὸς τῆς Γῆς εἶναι 40.000 χιλιόμετρα. Πόση εἶναι ἡ ἀκτίνα τῆς Γῆς, καὶ πόσο τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας της ;

12) Νὰ βρῆς τὸ ἐμβαδὸν ποὺ ἔχει τὸ τόπι σου.

Ὄγκος σφαίρας

Παίρνομε ἕνα σφαιρικὸ καρποῦζι. Τὸ χωρίζομε σὲ δύο ἡμισφαίρια καὶ παίρνομε τὸ ἕνα (σχ. 112). Σ' αὐτὸ εὔκολα μποροῦμε νὰ βροῦμε τὸ κέντρο του καὶ βάζομε ἕνα σημάδι. Ὕστερα χαράζομε ἕνα τρίγωνο στὸ κυρτὸ μέρος τῆς ἐπιφανείας του, ὅπως φαίνεται στὸ σχῆμα. Κατόπιν βυθίζομε ἕνα μαχαιράκι στὶς πλευρὲς αὐτοῦ τοῦ τριγώνου, ὥσπου νὰ φθάση ἐκεῖ ποὺ σημειώσαμε τὸ κέντρο τῆς σφαίρας. (Ὅπως βουλώνομε τὸ καρποῦζι). Βγάζομε ὕστερα τὸ κομμάτι ποὺ κόψαμε καὶ παρατηροῦμε, ὅτι μοιάζει σὰν τριγωνικὴ πυραμίδα, ἡ ὁποία ἔχει βάση ἕνα μέρος τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.



Σχ. 112

Κατὰ τὸν ἴδιο τρόπο, μποροῦμε νὰ μοιράσωμε τὴ σφαῖρα σὲ πολλὲς τέτοιες τριγωνικὲς πυραμίδες, ποὺ ὅλες μαζὶ θὰ ἔχουν, κορυφὴ τὸ κέντρο τῆς σφαίρας, βάση τὴν ἐπιφάνειά της καὶ ὕψος τὴν ἀκτίνα τῆς σφαίρας.

Μποροῦμε δηλ. νὰ θεωρήσωμε τὴ σφαῖρα σὰν μία μεγάλη πυραμίδα ποὺ ἔχει, βάση τὴν ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας, κορυφὴ τὸ κέντρον της καὶ ὕψος τὴν ἀκτίνα της.

Ἑπομένως τὸν ὄγκο τῆς σφαίρας, τὸν βρίσκομε ὅπως καὶ τὸν ὄγκο τῆς πυραμίδος.

Ὥστε : ***Γιὰ νὰ βροῦμε τὸν ὄγκο τῆς σφαίρας, πολ)ζομε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας της ἐπὶ τὴν ἀκτίνα της καὶ τὸ γινόμενο τὸ διαιροῦμε διὰ 3.***

Παράδειγμα : Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος σφαίρας, τῆς ὁποίας ἡ ἀκτίνα εἶναι 5 μέτρα ;

Λύση : Σύμφωνα μὲ ὅσα μάθαμε, πρέπει νὰ βροῦμε πρῶτα τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς μεγίστου κύκλου της ($E = \alpha \times \alpha \times \pi$), ἤτοι $5 \times 5 \times 3{,}14 =$ 78,50 τ. μ. Αὐτὸ θὰ τὸ πολλαπλασιάσωμε ἐπὶ 4, γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας· $78{,}50 \times 4 = 314$ τ. μ.

Τώρα, γιὰ νὰ βροῦμε τὸν ὄγκο τῆς σφαίρας, τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας της θὰ τὸ πολ)σωμε ἐπὶ τὴν ἀκτίνα τῆς σφαίρας· 314 × 5 = 1570. Καὶ αὐτὸ θὰ τὸ διαιρέσωμε διὰ 3· 1570 : 3 = 523,33 κ. μ. Ἄρα, 523,33 κ. μ. εἶναι ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας.

Ὥστε : ***Γιὰ νὰ βροῦμε τὸν ὄγκο τῆς σφαίρας, πρέπει νὰ κάμωμε τὶς ἑξῆς ἐργασίες ;***

α) Νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς μεγίστου κύκλου της.

β) Τὸ ἐμβαδὸν αὐτὸ νὰ τὸ πολ)σωμε ἐπὶ 4, γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.

γ) Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας νὰ τὸ πολ)σωμε ἐπὶ τὴν ἀκτίνα της.

δ) Νὰ διαιρέσωμε τὸ γινόμενο αὐτὸ διὰ 3.

$$\boxed{\text{Ὀγκ. σφαίρας} = \frac{4 \times (\pi \times \alpha \times \alpha) \times \alpha}{3}} \quad \text{τύπος}$$

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα

1) Πῶς βρίσκεται ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας ;

2) Μία σφαῖρα ἔχει διάμετρο 3,50 μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος της ;

3) Ἡ περιφέρεια τοῦ μεγίστου κύκλου μιᾶς σφαίρας εἶναι 4,25 μ. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας της ; Καὶ πόσος ὁ ὄγκος της ;

4) Ἡ ἀκτίνα μιᾶς σφαίρας εἶναι 6 μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος της ;

5) Ἕνα σφαιρικὸ ἀερόστατο ποὺ ἔχει διάμετρο 5 μ., πόσα κ. μ. ἀέριο χωράει ;

6) Πόσο ζυγίζει μία χρυσῆ σφαῖρα, ποὺ ἔχει διάμετρο 0,05 μ. ; (Εἰδ. βάρος χρυσοῦ 19,3).

7) Ὁ μέγιστος κύκλος τῆς Γῆς ἔχει μῆκος περιφερείας 40 ἑκατομμ. μέτρα. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος τῆς Γῆς ;

Πῶς βρίσκομε τὸν ὄγκο σωμάτων ποὺ δὲν ἔχουν σχῆμα σὰν αὐτὰ ποὺ μάθαμε

Τὸν ὄγκο τῶν σωμάτων, ποὺ δὲν ἔχουν σχῆμα σὰν τὰ γεωμετρικὰ σώματα ποὺ μάθαμε, τὸν βρίσκομε ὡς ἑξῆς :

Ἡ φυσικὴ μᾶς διδάσκει, ὅτι κάθε σῶμα ποὺ βυθίζεται στὸ νερὸ ἐκτοπίζει (διώχνει) τόσο νερό, ὅσος εἶναι ὁ ὄγκος του.

Παίρνομε λοιπὸν ἕνα δοχεῖο γεμάτο νερὸ καὶ βάζομε μέσα τὸ σῶμα, τοῦ ὁποίου τὸν ὄγκο θέλομε νὰ βροῦμε. (Τὸ σῶμα δὲν πρέπει νὰ διαλύεται στὸ νερό). Κάτω ἀπὸ τὸ δοχεῖο, βάζομε μία λεκάνη. Ἔπειτα μαζεύομε τὸ νερὸ ποὺ θὰ χυθῇ στὴ λεκάνη.

Ὅσος εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ νεροῦ ποὺ χύθηκε, τόσος εἶναι καὶ ὁ ὄγκος τοῦ σώματος ποὺ ζητᾶμε.

Γιὰ νὰ βροῦμε ὅμως τὸν ὄγκο τοῦ νεροῦ ποὺ χύθηκε, τὸ ζυγίζομε. Ὅσο εἶναι τὸ βάρος του σὲ τόννους, τόσος θὰ εἶναι καὶ ὁ ὄγκος του σὲ κυβικὰ μέτρα. Ἤ, ὅσο εἶναι τὸ βάρος του σὲ κιλά, τόσος θὰ εἶναι καὶ ὁ ὄγκος του σὲ κυβ. παλάμες. Ἤ, ὅσο εἶναι τὸ βάρος του σὲ γραμμάρια, τόσος θὰ εἶναι ὁ ὄγκος του σὲ κυβ. δακτύλους.

Παρατήρηση. Ἂν τὸ σῶμα διαλύεται στὸ νερό, μεταχειριζόμαστε ἄλλο ὑγρό, στὸ ὁποῖο νὰ μὴ διαλύεται. Π.χ. οἰνόπνευμα καὶ ἄλλα. Τότε πρέπει νὰ λάβωμε ὑπ' ὄψιν μας καὶ τὸ εἰδ. βάρος τοῦ ὑγροῦ ποὺ μεταχειριστήκαμε.

Εἰδικὸν βάρος σώματος. Σχέση εἰδ. βάρους—ὄγκου—καὶ βάρους ἑνὸς σώματος

(Ξέρομε ἀπ' τὴ Φυσικὴ (τὸ μάθαμε στὴν Πέμπτη), ὅτι εἰδικὸ βάρος ἑνὸς σώματος, εἶναι ὁ ἀριθμὸς ποὺ λέει πόσες φορὲς βαρύτερο εἶναι τὸ σῶμα ἀπὸ τὸ βάρος ἴσου ὄγκου ὕδατος ἀπεσταγμένου 4 βαθμῶν Κελσίου.

Ξέρομε ἀκόμη, ὅτι 1 κ. μ. ὕδατος ζυγίζει ἕναν τόννο ἢ 781 ὀκ. περίπου).

Ἔχομε ἕνα σῶμα, π.χ. ἀπὸ μάρμαρο καὶ ζητᾶμε τὸ βάρος του, χωρὶς νὰ τὸ ζυγίσωμε.

Βρίσκομε τὸν ὄγκο του ὅπως ξέρομε, σε κ. μ., ἢ κ. παλ., ἢ κ. δακτ. Ἂν τὸ σῶμα αὐτὸ ἦταν ἀπὸ νερό, τόσο θὰ ἦταν καὶ τὸ βάρος του σὲ τόννους ἢ κιλὰ ἢ γραμμάρια. Ἀλλὰ δὲν εἶναι ἀπὸ νερό, εἶναι ἀπὸ μάρμαρο.

Γι' αὐτό, γιὰ νὰ βροῦμε τὸ βάρος του, θὰ πολαπλασιάσωμε τὸν ὄγκο του ἐπὶ τὸ εἰδ. βάρος τοῦ μαρμάρου, γιατὶ τόσες φορὲς βαρύτερο εἶναι τὸ μάρμαρο ἀπ' τὸ νερό. Τὸ γινόμενο θὰ μᾶς δώση τὸ βάρος τοῦ μαρμάρου χωρὶς νὰ τὸ ζυγίσωμε.

Ὥστε : ***Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ βάρος ἑνὸς σώματος, πολλαπλασιάζομε τὸν ὄγκο του ἐπὶ τὸ εἰδικόν του βάρος.***

Ἀπ' αὐτὸ καταλαβαίνομε ὅτι·

Ἅμα τὸ βάρος ἑνὸς σώματος τὸ διαιρέσωμε διὰ τοῦ εἰδικοῦ του βάρους, βρίσκομε τὸν ὄγκο του. Καὶ

Ἅμα τὸ βάρος ἑνὸς σώματος τὸ διαιρέσωμε διὰ τοῦ ὄγκου του, βρίσκομε τὸ εἰδικὸν βάρος του.

Δηλαδή. Ἂν γράψωμε μὲ τὸ Β τὸ βάρος τοῦ σώματος, μὲ τὸ ε τὸ εἰδικόν του βάρος καὶ μὲ τὸ Ο τὸν ὄγκο του, θὰ ἔχωμε :

1) $\boxed{\mathrm{B} = \varepsilon \times \mathrm{O}}$ 2) $\boxed{\mathrm{O} = \frac{\mathrm{B}}{\varepsilon}}$ 3) $\boxed{\varepsilon = \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{O}}}$

Αὐτοὶ εἶναι οἱ τύποι ποὺ βρίσκομε ἕνα ἀπὸ τὰ 3 ποσὰ Β,Ο,ε, ἑνὸς σώματος, ὅταν ξέρωμε τὰ δύο ἄλλα.

Ὁ ὄγκος καὶ τὸ βάρος ἀντιστοιχοῦν ἔτσι, ὥστε ὅταν ὁ ὄγκος εἶναι κυβικὰ μέτρα, τὸ βάρος εἶναι τόννοι καὶ ἀντιθέτως.

Ἢ ὅταν ὁ ὄγκος εἶναι κυβικὲς παλάμες, τὸ βάρος εἶναι χιλιόγραμμα καὶ ἀντιθέτως.

(1 τόννος = 100 χιλιόγραμμα (κιλά), 1 κιλὸ = 1000 γραμμάρια.
1 τόννος = 781 ὀκ. περίπου.
1 χιλιόγραμμο (κιλὸ) = 312,5 δράμια.
1 γραμμάριο = 0,31 δράμια.
1 ὀκᾶ = 1280 γραμμάρια.
1 δράμι = 3,2 γραμμάρια).

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα

1) Τί λέγεται εἰδικὸν βάρος ἑνὸς σώματος ;

2) Πῶς βρίσκεται τὸ εἰδικὸν βάρος ἑνὸς σώματος ;

(Στὰ παρακάτω προβλήματα ἂν μᾶς χρειάζεται εἰδ. βάρος νὰ τὸ παίρνωμε ἀπὸ τὸν πίνακα ποὺ εἶναι στὴν τελευταία σελίδα τοῦ βιβλίου).

3) Πόσο εἶναι τὸ εἰδ. βάρος ἑνὸς σώματος, ποὺ ἔχει ὄγκο 4,5 κυβ. παλάμες καὶ ζυγίζει 11,25 κιλά ;

4) Πῶς βρίσκομε τὸν ὄγκο ἑνὸς σώματος, ὅταν ξέρωμε τὸ βάρος του ;

5) Πόσο ζυγίζει ἕνα μάρμαρο, ποὺ ἔχει ὄγκο 58 κυβ. δακτύλους ;

6) Πόσο ζυγίζει ἕνα κομμάτι μολύβι, ποὺ ἔχει ὄγκο 25 κυβ. δακτύλους ;

7) Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος ἐλαίου, ποὺ ζυγίζει 65 χιλιόγραμμα ;

8) Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος γάλακτος, ποὺ ζυγίζει 25 χιλιόγραμμα ;

9) Πόσο ζυγίζει ἕνα διαμάντι, ποὺ ἔχει ὄγκο 2 κυβ. δακτύλους ;

10) Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος οἰνοπνεύματος, ποὺ ζυγίζει 2,5 χιλιογρ. ;

Διάφορα προβλήματα

1) Ἡ πλευρὰ ἑνὸς κανονικοῦ ἑξαγώνου εἶναι 8 δάκτ. Κάντε τὸ σχῆμα καὶ μετρῆστε τὸ ἀπόστημά του. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδόν του ;

2) Ἡ περιφέρεια ἑνὸς κύκλου εἶναι 48,5 μ. Πόση εἶναι ἡ διάμετρός του ;

3) Ἡ διάμετρος ἑνὸς κύκλου εἶναι 5 μ. Πόση εἶναι ἡ περιφέρειά του ;

4) Ἡ ἀκτίνα ἑνὸς κύκλου εἶναι 2,75 μ. Πόση εἶναι ἡ περιφέρειά του ;

5) Ἡ περιφέρεια ἑνὸς κύκλου εἶναι 28,50 μ. Πόση εἶναι ἡ ἀκτίνα του ;

6) Ὁ τροχὸς ἑνὸς ἁμαξιοῦ ἔχει ἀκτίνα 0,60 μ. Πόση εἶναι ἡ περιφέρειά του ; Καὶ πόση ἀπόσταση θὰ διατρέξῃ, ἂν κάμῃ 1.500 στροφές ;

7) Ἡ διάμετρος τοῦ τροχοῦ ἑνὸς κάρρου εἶναι 1,20 μ. Πόση εἶναι ἡ περιφέρεια τοῦ τροχοῦ καὶ πόση ἀπόσταση θὰ διατρέξη, ἂν κάμη 1.000 στροφές ;

8) Ἡ ἀκτίνα ἑνὸς κύκλου εἶναι 4,5 μ. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδόν του ;

9) Ἡ διάμετρος ἑνὸς κύκλου εἶναι 1,80 μ. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδόν του ;

10) Ἡ περιφέρεια ἑνὸς κύκλου εἶναι 24,50 μ. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδόν του ;

11) Μία κυκλικὴ αὐλὴ ἔχει διάμετρο 7,20 μ. Πόσο θὰ πληρώσωμε νὰ τὴν τσιμεντάρωμε, ἂν γιὰ κάθε τετρ. μέτρο μᾶς ζητοῦν 75.000 δραχ.

12) Ἡ διάμετρος τῆς βάσεως ἑνὸς κυλίνδρου εἶναι 3,75 μ., τὸ δὲ ὕψος του 6,50 μ. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του ;

13) Ἔχω ἕνα τεπόζιτο κυλινδρικό, ποὺ ἔχει ἀκτίνα βάσεως 0,45 μ. καὶ ὕψος 1,40 μ. Πόσο θὰ πληρώσω γιὰ νὰ τὸ βάψω μὲ λαδομπογιὰ ἀπὸ μέσα κι' ἀπέξω, ἀφοῦ μοῦ ζητοῦν 3.000 δραχ. γιὰ κάθε τετρ. μέτρο ; (Ἡ ἄνω βάση λείπει, εἶναι ἀνοικτό).

14) Μία κυλινδρικὴ δεξαμενὴ ἔχει ἀκτίνα βάσεως 0,75 μ. καὶ ὕψος 5 μ. Πόσες ὀκ. νερὸ χωράει ;

15) Ἕνας πηγαδᾶς, ἄνοιξε ἕνα κυλινδρικὸ πηγάδι, μὲ διάμετρο 2,5 μ. καὶ ὕψος 8 μ. Πληρώθηκε πρὸς 35.000 δραχ. τὸ κ. μ. Πόσα χρήματα πῆρε ;

16) Ἕνα κυλινδρικὸ τεπόζιτο ἔχει διάμετρο βάσεως 0,90 μ. καὶ ὕψος 1,20 μ. Πόσες ὀκάδες λάδι χωράει ;

17) Μία κωνικὴ σκηνὴ ἔχει ἀκτίνα βάσεως 0,75 μ. καὶ πλευρὰ 2,75 μ. Πόσα τ. μ. ὕφασμα χρειάσθηκε γιὰ νὰ γίνη ;

18) Ἡ διάμετρος τῆς βάσεως ἑνὸς κώνου εἶναι 2,5 μ. καὶ ἡ πλευρά του 2,15 μ. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας του ;

19) Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος κώνου, ποὺ ἔχει ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του 15 τ. μ. καὶ ὕψος 3,80 μ. ;

20) Ἕνας κόλουρος κῶνος ἔχει ἀκτίνα τῆς μιᾶς βάσεως 0,65 μ., τῆς ἄλλης 1,5 μ. καὶ πλευρὰ 3 μ. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του ;

21) Ἡ ἀκτίνα τῆς μιᾶς βάσεως κολούρου κώνου εἶναι 0,40 μ., τῆς ἄλλης 0,90 μ. καὶ ἡ πλευρά του 2,5 μ. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ὁλοκλήρου τῆς ἐπιφανείας του ;

22) Ἡ ἀκτίνα μιᾶς σφαίρας εἶναι 1.50 μ. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας της ;

23) Ἡ διάμετρος μιᾶς σφαίρας εἶναι 4 μ. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας της ;

24) Πόσα τ. μ. ὕφασμα χρειάζεται, γιὰ νὰ σκεπασθῆ ἕνα σφαιρικὸ ἀερόστατο ποὺ ἔχει ἀκτίνα 2,5 μ. ;

25) Ἡ διάμετρος ἑνὸς σφαιρικοῦ ἀεροστάτου εἶναι 4,5 μ. Πόσα κ. μ. ἀερίου χωράει ;

26) Μία σφαίρα μολυβένια ἔχει διάμετρο 0,45 μ. Πόσο ζυγίζει ;

27) Πόσο ζυγίζει μία χρυσῆ σφαίρα ποὺ ἔχει διάμετρο 0,25 μ. ;

28) Πόσο ζυγίζει μία σφαῖρα μαρμάρινη ποὺ ἔχει διάμετρο 0,75 μ. ;

29) Πῶς βρίσκομε τὸ εἰδ. βάρος ἑνὸς σώματος ;

30) Πῶς βρίσκομε τὸ βάρος ἑνὸς σώματος, χωρὶς νὰ τὸ ζυγίσωμε ;

31) Πῶς βρίσκομε τὸν ὄγκο ἑνὸς σώματος, χωρὶς νὰ μετρήσωμε τὶς διαστάσεις του ;

32) Ἕνα μάρμαρο ἔχει ὄγκο 2,5 κυβ. μ. Πόσο ζυγίζει ;

33) Πόσο ζυγίζει ἕνα κομμάτι μολύβι, ποὺ ἔχει ὄγκο 30 κυβ. δακτ. ;

34) Πόσο ζυγίζει ἕνα κομμάτι χρυσάφι ποὺ ἔχει ὄγκο 0,10 κ. δ. ;

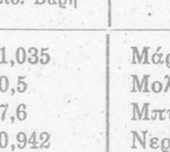
35) Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος χαλκοῦ, ποὺ ζυγίζει 6 χιλιόγραμμα ;

36) Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος σιδήρου, ποὺ ζυγίζει 50 χιλιόγραμμα ;

ΣΤΡΕΜΑ 1000 Τ.Μ.

Ἀλφαβητικὸς πίναξ Εἰδικοῦ Βάρους διαφόρων σωμάτων

Σώματα	Εἰδ. Βάρη	Σώματα	Εἰδ. Βάρη
Ἀλεῦρι	1,035	Μάρμαρο	2,70
Ἄργυρος (ἀσῆμι)	10,5	Μολύβι	11,30
Ἀτσάλι	7,6	Μπύρα	1,02
Βούτυρο	0,942	Νερὸ θαλάσσης	1,03
Γάλα ἀγελαδινὸ	1,03	Νερὸ ἀπεσταγμένο	1
Γυαλὶ	2,5	Οἰνόπνευμα	0,79
Διαμάντι	3,5	Πάγος	0,91
Ζάχαρη	1,67	Πετρέλαιο	0,80
Θειάφι	2,07	Σίδηρος	7,8
Κρασὶ	0,99	Σιτάρι	1,56
Λάδι	0,915	Φελλὸς	0,24
Λευκόχρυσος (Πλατίνα)	21,5	Χαλκὸς	8,9
		Χρυσὸς	19,26



στρ. 48 ω.τ. 925 στ.

Κόστος

250 δρχ. 5.000 τ.λ.

120
120
240
12
3600 ...

Ιρλανδία

25 3
6
150

3600

36000 στρ. 360 στρ.

~~200.000~~

ΒΑΣΙΛΕΙΟΝ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΝ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΚΑΙ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Δ/ΣΙΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ

Ἀριθ. Πρωτ. 61330 Ἐν Ἀθήναις τῇ 20 Ἰουνίου 1952

Πρὸς

Τοὺς κ. κ. Ἀ. Μπάμπαλην — Σ. Βουρνᾶν

Ἐνταῦθα

Ἀνακοινοῦμεν ὑμῖν ὅτι διὰ τῆς ὑπ' ἀριθμ. 61452]12-6-52 ἀποφάσεως τοῦ Ὑπουργείου μετὰ σύμφωνον γνωμοδότησιν τοῦ Κεντρικοῦ Γνωμοδοτικοῦ καὶ Διοικητικοῦ Συμβουλίου Ἐκπαιδεύσεως ἐνεκρίθη τὸ ὑπὸ τὸν τίτλον «ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ» βιβλίον σας ὡς βοηθητικὸν τοῦ μαθήματος τῆς *Γεωμετρίας* διὰ τοὺς μαθητὰς τῶν Ε' καὶ ΣΤ' τάξεως τοῦ Δημοτικοῦ Σχολείου ἐπὶ μίαν τριετίαν ἀρχομένην ἀπὸ 1-9-52. Παρακαλοῦμεν ὅθεν ὅπως μεριμνήσητε διὰ τὴν ἔγκαιρον ἐκτύπωσιν τοῦ βιβλίου τούτου συμμορφούμενοι πρὸς τὰς ὑποδείξεις τοῦ Ἐκπαιδευτικοῦ Συμβουλίου καὶ τὸν κανονισμὸν ἐκδόσεως βοηθητικῶν βιβλίων τοῦ Δημοτικοῦ Σχολείου.

Κοινοποίησις :
Κ.Γ.Δ.Σ.Ε.

Ἐντολῇ Ὑπουργοῦ
Ὁ Διευθυντὴς
Χ. ΜΟΥΣΤΡΗΣ