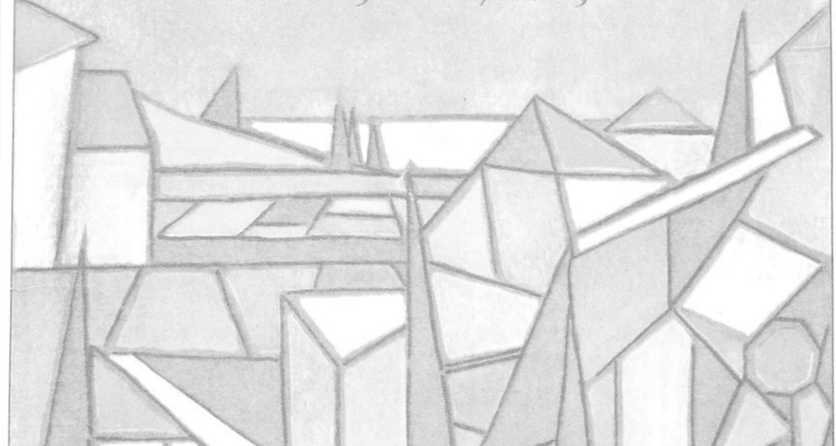
ΕΝΩΣΙΣ ΣΥΓΓΡΑΦΕΩΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Τάξεις Ε΄ & ΣΤ΄

Α΄ & Β΄ έτος συνδ/λίας



ΑΡΙΘΜΟΣ 30

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΕΝΤΑΥΡΟΣ ΑΘΗΝΑΙ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΚΩΝΣΤ. Σ. ΚΩΝΣΤΑΝΤΑ

ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Διά τούς μαθητάς Ε΄ και ΣΤ΄ τοῦ Δημοτικοῦ Σχολείου

Ἐγκεκριμένη διὰ τῆς ὑπ' ἀριθ. 61452/20-6-52 ἀποφάσεως
τοῦ Ὑπουργείου Ἐθνικῆς Παιδείας

ΕΚΔΟΣΕΙΣ «ΚΕΝΤΑΥΡΟΣ» ΑΘΗΝΑΙ

18726

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΒΑΣΙΛΕΙΟΝ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΝ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
Δ)νσις Διδ. Βιβλίων

Ἀριθ. Πρωτ. 61330 Ἐν Ἀθήναις τῇ 20 Ἰουνίου 1952

Πρὸς
Τὸν κ. Κ. Κωνσταντᾶν

Ἐνταῦθα

Ἀνακοινοῦμεν ὑμῖν, ὅτι διὰ τῆς ὑπ' ἀριθ. 61452/12-6-52 ἀποφάσεως τοῦ Ὑπουργείου μετὰ σύμφωνον γνωμοδότησιν τοῦ Κεντρικοῦ Γνωμοδοτικοῦ καὶ Διοικητικοῦ Συμβουλίου Ἐκπαιδεύσεως, ἐνεκρίθη τὸ ὑπὸ τὸν τίτλον «ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ» βιβλίον σας ὡς βοηθητικὸν τοῦ μαθήματος τῆς Γεωμετρίας διὰ τοὺς μαθητὰς τῶν Ε' καὶ ΣΤ' τάξεων τοῦ Δημοτικοῦ Σχολείου ἐπὶ μίαν τριετίαν ἀρχομένην ἀπὸ 1-9-52.

Παρακαλοῦμεν ὅθεν, ὅπως μεριμνήσητε διὰ τὴν ἔγκαιρον ἐκτύπωσιν τοῦ βιβλίου τούτου συμμορφούμενος πρὸς τὰς ὑποδείξεις τοῦ Ἐκπαιδευτικοῦ Συμβουλίου καὶ τὸν κανονισμὸν ἐκδόσεως βοηθητικῶν βιβλίων τοῦ Δημοτικοῦ Σχολείου.

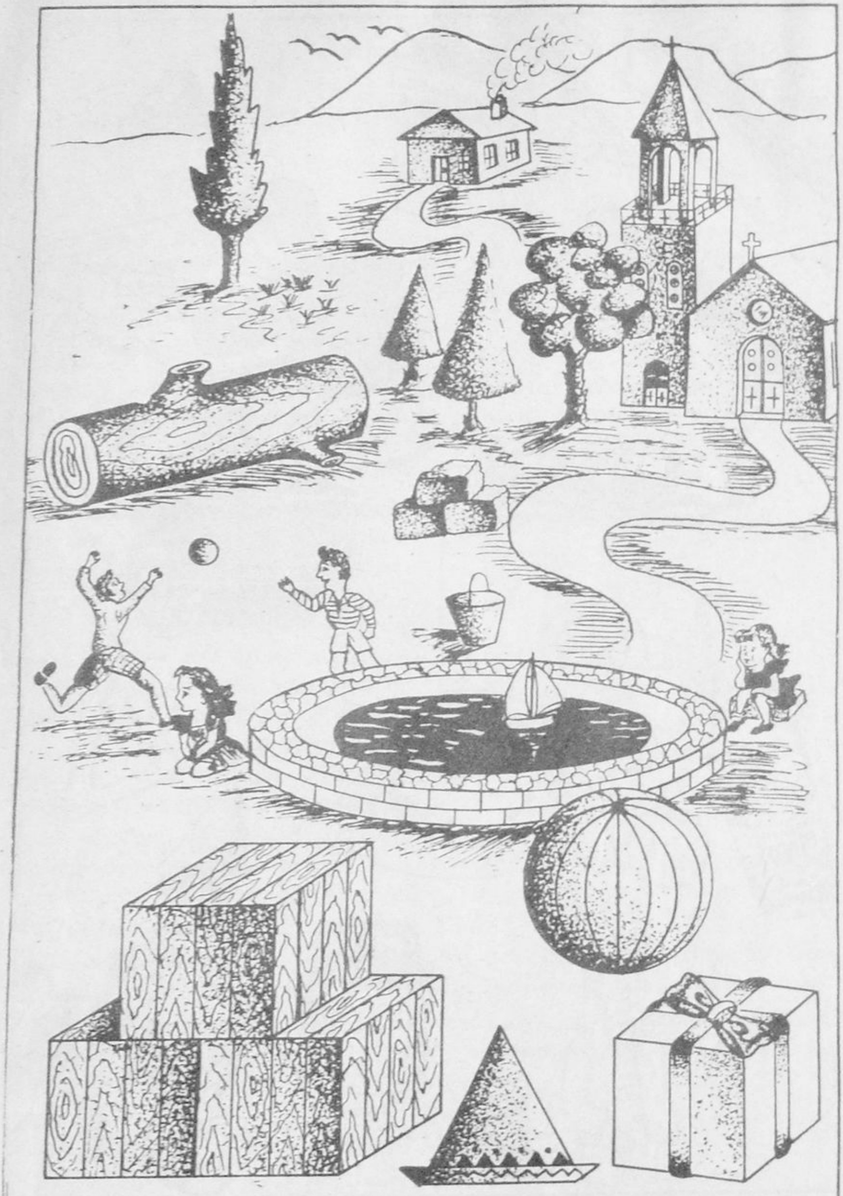
Ἐντολῇ Ὑπουργοῦ
Ὁ Διευθυντὴς
Χ. ΜΟΥΣΤΡΗΣ

Κοινοποίησις
Κ.Γ.Δ.Σ.Ε.

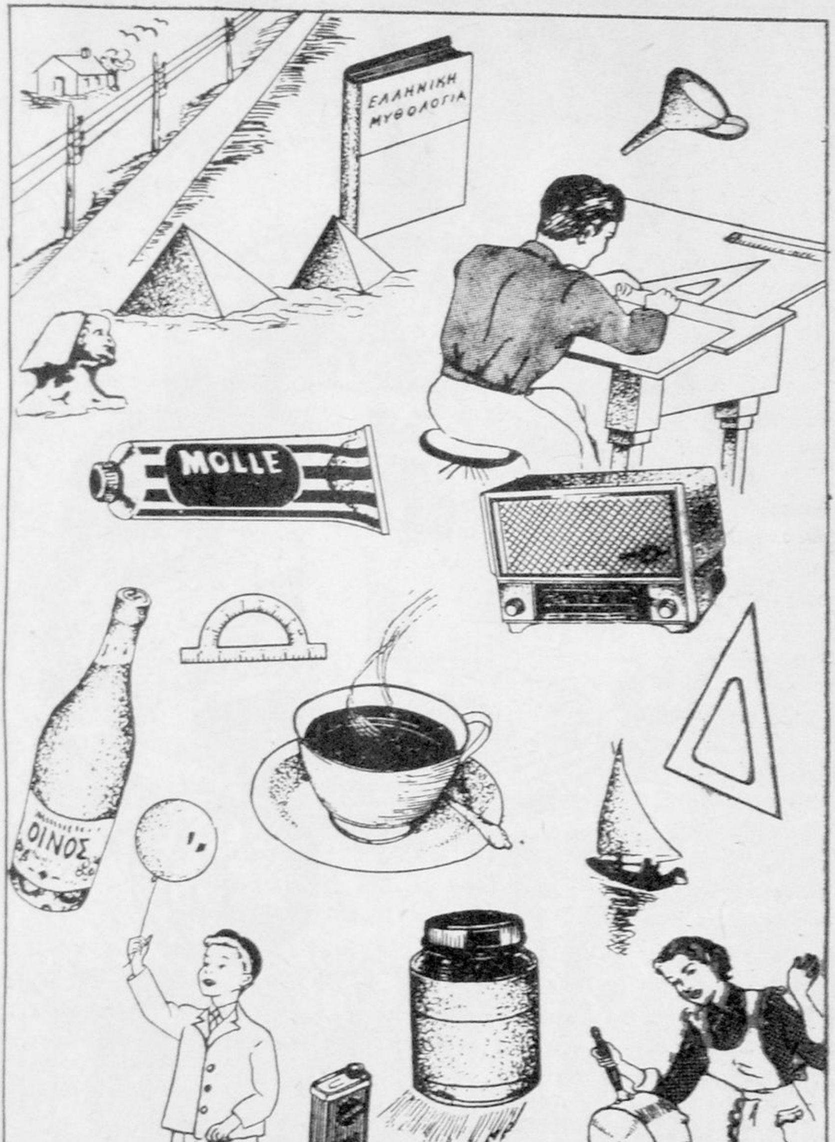
Πᾶν γνήσιον ἀντίτυπον φέρει τὴν ὑπογραφὴν τοῦ συγγραφέως.

Copyright by : ΕΚΔΟΣΕΙΣ «ΚΕΝΤΑΥΡΟΣ»
Ἀθῆναι 1960

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής



Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής



Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

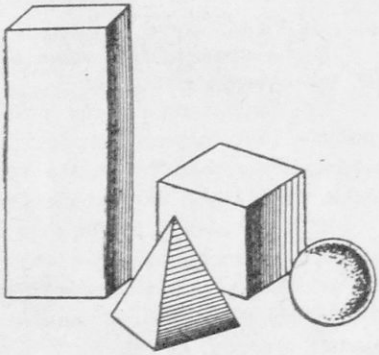
1. Σώματα.

(Πρὸ τῶν μαθητῶν ἔχομεν διάφορα στερεά: Κύβον, παραλληλεπίπεδον, πυραμίδα, κῶνον, κύλινδρον, σφαῖραν. Ἐξ αὐτῶν οἱ μαθηταὶ ὁδηγούμενοι καταλλήλως, κάμνουν τὰς ἑξῆς παρατηρήσεις:)

1.—Παρατηρῆστε τὰ πράγματα αὐτά: εὑρίσκονται μέσα στὸ διάστημα, ποὺ ἁπλώνεται γύρω μας. Καταλαμβάνουν ἕνα χῶρον αὐτοῦ, ἤτοι ἕνα μέρος του.

Εἶναι λοιπὸν σώματα. ***Ὁ χῶρος δέ, τὸν ὁποῖον κάθε σῶμα καταλαμβάνει μέσα στὸ διάστημα, λέγεται ὄγκος τοῦ σώματος.***

Ὁ ὄγκος αὐτῶν παρατηροῦμεν, ὅτι δὲν δύναται νὰ μεταβληθῇ ἄνευ τινὸς ἐνεργείας· ἔχουν δηλαδὴ ὡρισμένον ὄγκον.



Στερεὰ σώματα

2.—Παρατηρῆστε τὴν ἐξωτερικήν των μορφήν. Ἔχουν διάφορον ἐξωτερικὴν μορφήν, ποὺ λέγεται σχῆμα αὐτῶν. Παρατηροῦμεν, ὅτι καὶ τὸ σχῆμα τῶν σωμάτων αὐτῶν δὲν δύναται νὰ μεταβληθῇ ἄνευ τινὸς ἐνεργείας. Ἔχουν λοιπὸν τὰ σώματα αὐτὰ καὶ σχῆμα ὡρισμένον.

3.—Παρατηροῦμεν λοιπόν, ὅτι τὰ σώματα αὐτὰ ἔχουν ὡρισμένον ὄγκον καὶ ὡρισμένον σχῆμα. Εἶναι ἑπομένως ***σώματα στερεά***·

4.—Ἀπὸ τὸ καθένα φαίνονται μόνον τὰ ἐξωτερικά του ἄκρα (δηλαδὴ τὰ ἐξωτερικά του πέρατα), τὰ ὁποῖα ὅλα μαζὶ κάμνουν τὴν ἐπιφάνειαν τῶν σωμάτων.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

5.—Παρατηρῆστε τώρα τὰ ἄκρα τῆς ἐπιφανείας τοῦ καθενὸς ἐξ αὐτῶν ἢ ἑνὸς μέρους αὐτῆς. Μᾶς δίνουν ταῦτα ἕνα σχῆμα, ποὺ λέγεται *γραμμή*.

6.—Τὸ ἄκρον μιᾶς γραμμῆς λέγεται *σημεῖον*. Τὰ σημεῖα τὰ σημειώνομεν μὲ μιὰ στιγμὴ καὶ τὰ ὀνομάζομεν μὲ ἕνα γράμμα· (π. χ. τὸ σημεῖον Α΄ (·) τὸ σημεῖον Β΄ (·) κ.λ.π.

7.—Καὶ ἡ γῆ εἶναι σῶμα στερεὸ πολὺ μεγάλο. Πῶς νὰ μετροῦμε τὶς γραμμές της, τὴν ἐπιφάνειά της, τὸν ὄγκο της μᾶς διδάσκει *ἡ γεωμετρία*.

Ἀλλ᾿ ἡ γεωμετρία μᾶς μαθαίνει νὰ μετροῦμεν καὶ τὶς γραμμές, τὶς ἐπιφάνειες καὶ τὸν ὄγκον καὶ ἄλλων στερεῶν σωμάτων σὰν αὐτά, ποὺ παρατηροῦμεν.

Ἕνα ἀπὸ τὰ σώματα αὐτὰ εἶναι καὶ ὁ κύβος. (σχ. 10).

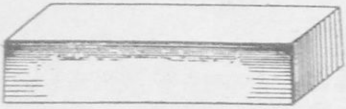
2. Ἐπιφάνεια τῶν σωμάτων

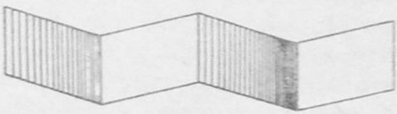
1.—*Ἐπιφάνεια ἑνὸς σώματος λέγεται τὸ σύνολον τῶν ἐξωτερικῶν του ἄκρων*.

2.—Ἐπιθέτομεν εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τῶν σωμάτων, ποὺ παρατηροῦμεν, τὸν κανόνα. Βλέπομεν, ὅτι εἰς ἄλλα ἐφάπτονται εἰς τὴν ἐπιφάνειάν των ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ κανόνος, ὅπως καὶ ἂν τὸν ἐπιθέσωμεν, εἰς ἄλλα δὲ ἓν μόνον σημεῖον αὐτοῦ.

Ἔχομεν λοιπὸν 4 εἴδη ἐπιφανειῶν: Τὴν ἐπίπεδον, τὴν τεθλασμένην, τὴν κυρτὴν καὶ τὴν μικτήν.

α) ***Ἐπίπεδος ἐπιφάνεια (ἢ ἁπλῶς ἐπίπεδον) λέγεται κάθε ἐπιφάνεια, ἐπὶ τῆς ὁποίας ὁ κανὼν τιθέμενος ἐφάπτεται δι᾿ ὅλων τῶν σημείων του.*** (σχ. 1).





Σχ. 1

Τοιαύτη εἶναι ἡ ἐπιφάνεια τῶν ὑαλοπινάκων, τῶν ὁμαλῶν τοίχων, τοῦ ἠρεμοῦντος ὕδατος, κ. ἄ.

β) *Τεθλασμένη ἐπιφάνεια λέγεται ἐκείνη, ἡ ὁποία ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο ἢ περισσοτέρας ἐπιπέδους ἐπιφανείας, χωρὶς ν᾿ ἀποτελοῦν ὅμως αὗται μίαν ἐπίπεδον*. (σχ. 1).

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Τοιαύτην ἐπιφάνειαν ἔχουν οἱ τοῖχοι τοῦ δωματίου ἀνὰ 2 ἢ 3 ἢ καὶ ὅλοι μαζί. Ἐπίσης οἱ μαρμάρινες σκάλες, οἱ κασετίνες, τὰ κουτιά.

γ) ***Κυρτὴ ἢ καμπύλη ἐπιφάνεια, λέγεται ἐκείνη, τῆς ὁποίας κανὲν μέρος δὲν εἶναι ἐπίπεδος ἐπιφάνεια, ὅσον μικρὸν καὶ ἂν εἶναι***, (σχ. 2).

Κυρτὴν ἐπιφάνειαν ἔχουν ἡ σφαῖρα, τὸ τόπι, οἱ βόλοι, οἱ καρποί, τὰ αὐγὰ κ. ἄ.

Σχ. 2

Σχ. 3

δ) ***Μικτὴ ἐπιφάνεια λέγεται ἐκείνη, ἡ ὁποία ἀποτελεῖται ἀπὸ ἐπίπεδον καὶ κυρτήν.*** (σχ. 3).

Τοιαύτην ἔχουν τὰ κανάτια, οἱ κύλινδροι, τὰ βαρέλια, τὰ κουτιὰ τῶν κονσερβῶν κ. ἄ.

Ἀσκήσεις :

Δείξατε στὰ σώματα, ποὺ παρατηροῦμεν :

1) Μίαν ἐπιφάνειαν ἐπίπεδον.
2) » » τεθλασμένην·
3) » » κυρτήν.
4) » » μικτήν.
5) Ὀνομάσατε σώματα μὲ ἐπιφάνειαν ἐπίπεδον.
6) » » » » τεθλασμένην.
7) » » » » κυρτήν.
8) » » » » μικτήν.

3. Γραμμαὶ

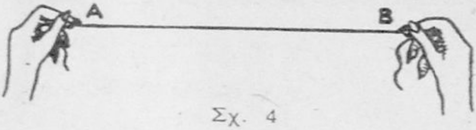
1.—***Γραμμὴ λέγεται τὸ σχῆμα, ποὺ μᾶς δίνουν τὰ πέρατα μιᾶς ἐπιφανείας***· (ὅλα τὰ ἄκρα ἑνὸς φύλλου χάρτου).-

2.—Τὰς γραμμὰς ὀνομάζομεν διὰ δύο ἢ καὶ περισσοτέρων γραμμάτων τοῦ ἀλφαβήτου, ποὺ τὰ γράφομεν εἰς τὰ ἄκρα των ἢ καὶ εἰς ἄλλα σημεῖα. (Ὅπως εἰς τὰ σχ. 4, 5, 6, 7).

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

3.—Παρατηροῦντες τὰς γραμμάς, ποὺ σχηματίζουν τὰ πέρατα τῶν ἐπιφανειῶν τῶν σωμάτων, βλέπομεν ὅτι ἔχομεν 4 εἴδη γραμμῶν : ***τὴν εὐθεῖαν, τὴν τεθλασμένην, τὴν καμπύλην*** καὶ ***τὴν μικτήν.***

α) ***Εὐθεῖα γραμμὴ λέγεται ἡ γραμμή, τὴν ὁποίαν μᾶς δίνει ἕνα νῆμα καλὰ τεντωμένον*** (ἡ ΑΒ σχ. 4).



Σχ. 4

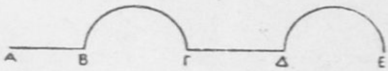
Εὐθεῖαν γραμμὴν μᾶς δίνει καὶ τὸ νῆμα τῆς στάθμης (σχ. 15) δηλαδὴ τὸ ὄργανον μὲ τὸ ὁποῖον οἱ κτίσται σταθμίζουν τοὺς τοίχους.

Σχ. 5

β) ***Τεθλασμένη γραμμὴ λέγεται ἐκείνη, ποὺ ἀποτελεῖται ἀπὸ 2 ἢ περισσοτέρας εὐθείας γραμμάς, χωρὶς αὗται ν' ἀποτελοῦν μίαν εὐθεῖαν·*** (ἡ ΔΕΖ σχ. 5).

γ) ***Καμπύλη γραμμὴ λέγεται ἐκείνη τῆς ὁποίας κανένα μέρος, δὲν εἶναι εὐθεῖα·*** (ἡ ΑΒ Σχ. 6).

Σχ. 6



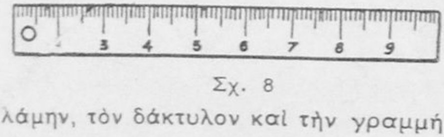
Σχ. 7

Καμπύλην γραμμὴν μᾶς δίνει καὶ ἓν νῆμα, ποὺ τὸ κρατοῦμεν ἀπὸ τὰ δύο ἄκρα του χαλαρωμένα.

δ) ***Μικτὴ γραμμὴ λέγεται ἐκείνη, ἡ ὁποία ἀποτελεῖται ἀπὸ εὐθεῖαν καὶ καμπύλην·*** ΑΒΓΔΕ (σχ. 7).

4. Χάραξις καὶ μέτρησις τῶν εὐθειῶν γραμμῶν

1.—Εὐθείας γραμμὰς χαράσσομεν μὲ ἓν ὄργανον, ποὺ λέγεται κανὼν ἢ χάρακας (σχ. 8).



Σχ. 8

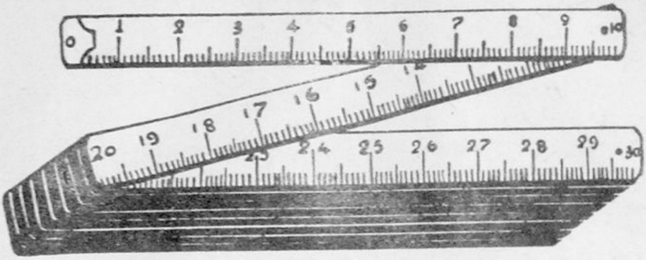
2.—Τὰς εὐθείας γραμμὰς μετροῦμεν :

α) Μὲ τὸ ***Μέτρον*** καὶ τὰ μέρη του· ἤτοι τὴν παλάμην, τὸν δάκτυλον καὶ τὴν γραμμὴν (σχ. 9).

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Μὲ τὸ μέτρον μετροῦμεν τὰς εὐθείας γραμμάς, αἱ ὁποῖαι δὲν εἶναι πολὺ μεγάλαι.

Τὸ μέτρον διαιρεῖται σὲ 10 ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται ***παλάμαι***· λέγονται ὅμως καὶ δέκατα.



Τὸ Γαλλικὸν μέτρον

Σχ. 9

Ἡ παλάμη διαιρεῖται σὲ 10 ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται ***δάκτυλοι*** ἢ ***πόντοι***. Ἄρα αἱ 10 παλάμαι (δηλ. τὸ μέτρον) ἔχουν $10 \times 10 = 100$ δακτύλους ἢ πόντους, ποὺ λέγονται καὶ ἑκατοστά.

Ὁ δάκτυλος πάλιν διαιρεῖται σὲ 10 ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται ***γραμμαί***. Ὥστε οἱ 100 δάκτυλοι ἤτοι ὅλον τὸ μέτρον ἔχει $10 \times 100 = 1000$ γραμμάς, αἱ ὁποῖαι λέγονται καὶ χιλιοστά.

Εἶναι λοιπόν :

α) 1 μ. = 10 παλ. ἢ 100 δάκτ. ἢ 1000 γραμμαί.
1 » = 10 » ἢ 100 »
1 » — 10 »

β) 1 παλ. = $\frac{1}{10}$ τοῦ μέτρου.

1 δάκτ. = $\frac{1}{10}$ τῆς παλ. ἢ $\frac{1}{100}$ τοῦ μέτρου.

1 γραμ. = $\frac{1}{10}$ τοῦ δακ. ἢ $\frac{1}{100}$ τῆς παλ. ἢ $\frac{1}{1000}$ τοῦ μ.

Μὲ τὰ μέρη τοῦ μέτρου ἤτοι μὲ τὴν παλάμην, τὸν δάκτυλον καὶ τὴν γραμμὴν μετροῦμεν τὰς εὐθείας γραμμάς, ποὺ εἶναι μικρότεραι τοῦ μέτρου.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

β) Μὲ τὸ *δεκάμετρον*: Τοῦτο ἀποτελεῖται ἀπὸ 10 μέτρα· μὲ αὐτὸ μετροῦμεν τὰς εὐθείας γραμμάς, ποὺ εἶναι 10—100 μέτρων ἢ καὶ μεγαλύτεραι.

γ) Μὲ τὸ *ἑκατόμετρον*: Τοῦτο ἀποτελεῖται ἀπὸ 100 μέτρα· μὲ αὐτὸ μετροῦμεν εὐθείας γραμμὰς ἀπὸ 100—1000 μέτρων ἢ καὶ μεγαλυτέρας.

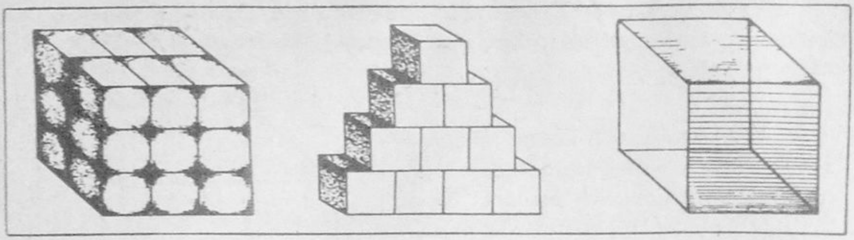
δ) Μὲ τὸ *χιλιόμετρον*: Τοῦτο ἀποτελεῖται ἀπὸ 1000 μέτρα· μὲ αὐτὸ μετροῦμεν εὐθείας γραμμὰς ἀπὸ 1000 μέτρων καὶ ἄνω. (Π. χ. τὰς ἀποστάσεις).

Τὸ μέτρον μὲ τὰ μέρη του, τὸ δεκάμετρον, τὸ ἑκατόμετρον καὶ τὸ χιλιόμετρον, μὲ τὰ ὁποῖα μετροῦμεν τὸ μῆκος τῶν εὐθειῶν γραμμῶν, λέγονται μονάδες τοῦ μήκους.

Ἀσκήσεις:

1) Μετρήσατε τὰς πλευρὰς τοῦ πατώματος.
2) Γράψατε μίαν εὐθεῖαν καὶ μετρήσατέ την.
3) Μετρήσατε μίαν πλευρὰν τῆς αὐλῆς μὲ τὸ μέτρον.
4) Ὑποθέσατε αὐτὸν τὸν σπάγγο ὡς ὕφασμα καὶ μετρήσατέ τον.
5) Χαράξατε μίαν εὐθεῖαν γραμμὴν 55 ἑκατοστῶν.
6) » » εὐθεῖαν 4 παλαμῶν.
7) » » εὐθεῖαν 750 γραμμῶν.
8) » » εὐθεῖαν γραμμήν, τεθλασμένην, καμπύλην καὶ μικτήν, ποὺ νὰ ἔχουν τὰ αὐτὰ πέρατα. Ἔπειτα συγκρίνατε ἑκάστην τῶν ἄλλων γραμμῶν πρὸς τὴν εὐθεῖαν καὶ εὕρετε: ποία εἶναι ἡ μικροτέρα μεταξὺ ὅλων τῶν εἰδῶν τῶν γραμμῶν, ποὺ ἔχουν τὰ αὐτὰ πέρατα.
9) Κάνετε ἀπὸ λεπτὴ χάρτινη ταινία ἕνα μέτρο καὶ σημειώσετε τὰς ὑποδιαιρέσεις του.
10) Πόσες παλάμες ἔχει τὸ μέτρον; πόσους δακτύλους; καὶ πόσες γραμμές;
11) Πόσους δακτύλους ἔχει ἡ παλάμη; Πόσες γραμμές;

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής



ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄.

ΚΥΒΟΣ

1. Παρατηρήσεις

Οἱ μαθηταὶ παρατηροῦντες κύβον κάμνουν τὰς ἀκολούθους παρατηρήσεις)

1. ***Ὄγκος καὶ σχῆμα του***: Ἔχει ὄγκον καὶ σχῆμα ὡρισμένον. ἤτοι εἶναι σῶμα στερεόν.

2. ***Ἐπιφάνειά του.*** Ἔχει ἐπιφάνειαν τεθλασμένην· ἀποτελεῖται ἀπὸ 6 ἐπιπέδους ἐπιφανείας, ποὺ λέγονται ***ἕδραι*** τοῦ κύβου.

Εἶναι λοιπὸν ὁ κύβος σῶμα στερεόν, ἑξάεδρον.

3. ***Ἕδραι του.***

1) Ἡ κάτω ἕδρα του διὰ τῆς ὁποίας οὗτος στηρίζεται, λέγεται ἕδρα τῆς βάσεως (ἡ ΑΒΓΔΑ σχ. 10).

2) Αἱ δὲ 4 ἕδραι του, ποὺ ἑνώνονται μὲ τὴν ἕδραν τῆς βάσεως καὶ τὴν ἀπέναντί της καὶ κάμνουν τὴν παράπλευρόν του ἐπιφάνειαν, λέγονται παράπλευροι ἕδραι. (Αἱ ἕδραι ΑΒΖΕΑ, ΑΕΘΔΑ, ΔΓΗΘΔ. ΓΒΖΗΓ σχ. 10)

3) Ἐάν, τοποθετοῦντες τὸν κύβον ἐπάνω σὲ χαρτόνι, ἰχνογραφήσωμεν ἀνὰ μίαν ὅλας τὰς ἕδρας του, τὰς κόψωμεν ἔπειτα καὶ τὰς ἐπιθέσωμεν τὴν μίαν ἐπάνω εἰς τὴν ἄλλην, ὅλαι ἐφαρμόζουν ἀκριβῶς· ὅλαι λοιπὸν αἱ ἕδραι τοῦ κύβου εἶναι ***ἴσαι.***

4) Ἐὰν ἐπεκτείνωμεν ὁσονδήποτε τὰς ἕδρας του καθ' ὅλας τὰς διευθύνσεις, καμμία δὲν συναντᾶται μὲ τὴν ἀπέναντί της.

Αἱ ἀπέναντι ἕδραι τοῦ κύβου, ποὺ δὲν συναντῶνται, ὅσον καὶ ἂν ἐπεκταθοῦν, λέγονται παράλληλοι· (ἡ ΑΒΓΔΑ καὶ ΕΖΗΘΕ· ἡ ΑΒΖΕΑ καὶ ἡ ΔΓΗΘΔ· ἡ ΑΕΘΔΑ καὶ ἡ ΒΓΗΖΒ σχ. 10).

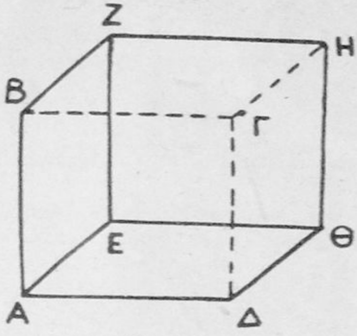
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ὁ κύβος λοιπὸν ἔχει τὰς ἕδρας του (τὰ ἐπίπεδά του) παραλλήλους ἀνὰ δύο· γι' αὐτὸ λέγεται παραλληλεπίπεδον.

4. *Δίεδροι καὶ τρίεδροι γωνίαι τοῦ κύβου.*

1) Αἱ ἕδραι τοῦ κύβου ἑνώνονται ἀνὰ δύο καὶ σχηματίζουν σχῆμα, ποὺ λέγεται γωνία *δίεδρος*· ὅπως (ἡ ΓΒΖΕΑΔΓ σχ. 10) καὶ ἡ ΑΒΓΔΕΖΑ (σχ. 11).

2) Ἑνώνονται ὅμως αἱ ἕδραι του καὶ ἀνὰ τρεῖς καὶ σχηματίζουν σχῆμα, ποὺ λέγεται γωνία *τρίεδρος* ἢ στερεὰ ὅπως ἡ Α ποὺ σχηματίζεται ἀπὸ τὰς 3 ἕδρας ΑΒΓΔΑ, ΑΒΖΕΑ καὶ ΑΕΘΔΑ (σχ. 10).



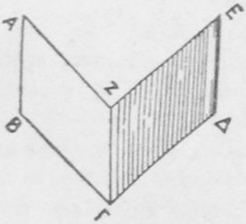
Σχ 10

3) Τὸ σημεῖον, εἰς τὸ ὁποῖον ἑνώνονται αἱ 3 ἕδραι κάθε τριέδρου γωνίας, λέγεται *κορυφὴ* αὐτῆς. (ὅπως τὸ Α σχ. 10).

4) Αἱ κορυφαὶ τῶν τριέδρων γωνιῶν λέγονται καὶ κορυφαὶ τοῦ κύβου. Εἶναι δὲ αὗται 8.

5. *Ἀκμαὶ τοῦ κύβου.*

Αἱ ἕδραι τοῦ κύβου ἑνούμεναι ἀνὰ δύο, μᾶς δίνουν καὶ εὐθείας γραμμάς, ποὺ λέγονται ἀκμαὶ αὐτοῦ ὅπως ἡ ΑΒ, ἡ ΑΕ, ἡ ΑΔ κ.λ.π. (σχ. 10). Ἐὰν μετρήσωμεν αὐτὰς θὰ ἴδωμεν, ὅτι ὅλαι εἶναι ἴσαι.



Σχ. 11

6. *Σχῆμα τῶν ἑδρῶν.*

1) Κάθε ἕδρα τοῦ κύβου τελειώνει σὲ 4 εὐθείας γραμμάς, ποὺ λέγονται πλευραὶ τῆς ἕδρας· ὅπως ἡ ΑΒ, ἡ ΒΓ, ἡ ΓΔ καὶ ἡ ΔΑ τῆς ἕδρας τῆς βάσεως (σχ. 10). Εἶναι δὲ αὗται, ὅπως εἴπομεν, ἴσαι. Εἶναι λοιπὸν κάθε ἕδρα τοῦ κύβου ἐπίπεδον, εὐθύγραμμον, τετράπλευρον, ἰσόπλευρον.

2) Ἑκάστη πλευρὰ κάθε ἕδρας τοῦ κύβου δὲν συναντᾶται μὲ τὴν ἀπέναντί της, ὅσον καὶ ἂν ἐπεκταθοῦν.

Εἶναι λοιπὸν αἱ πλευραὶ κάθε ἕδρας παράλληλοι ἀνὰ δύο, ἑκάστη μὲ τὴν ἀπέναντί της· ὡς ἡ ΑΒ καὶ ΔΓ, ἡ ΒΓ καὶ ΑΔ (σχ. 10). Καὶ διὰ τοῦτο κάθε ἕδρα τοῦ κύβου λέγεται ***παραλληλόγραμμον***.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

3) Εἶναι δὲ φανερόν, ὅτι τοῦτο εἶναι ἰσόπλευρον.

4) Τὸ ἄθροισμα τῶν 4 πλευρῶν κάθε ἕδρας τοῦ κύβου λέγεται περίμετρος αὐτῆς (δηλαδὴ τὸ ΑΒ + ΒΓ + ΓΔ + ΔΑ σχ. 10).

7. Ἐπίπεδοι γωνίαι τοῦ κύβου

1) Αἱ πλευραὶ κάθε ἕδρας τοῦ κύβου ἑνώνονται ἀνὰ 2 διὰ τῶν ἄκρων των καὶ κάνουν σχῆμα, τὸ ὁποῖον λέγεται *γωνία ἐπίπεδος*. (Ὅπως ἡ γωνία 7 τῆς ἕδρας ΑΒΓΔΑ σχ. 10).

2) Αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι κάθε ἕδρας τοῦ κύβου εἶναι 4 (π. χ. αἱ Α, Β, Γ, Δ τῆς ἕδρας ΑΒΓΔΑ σχ. 10).

3) Καὶ κάθε ἐπιπέδου ἐπιφανείας τὸ σχῆμα, τὸ ὁποῖον μᾶς δίδουν δύο εὐθεῖαί της, αἱ ὁποῖαι ἑνοῦνται χωρὶς ν' ἀποτελοῦν μίαν εὐθεῖαν, λέγεται ***ἐπίπεδος γωνίαι*** (ὡς αἱ γωνίαι : Α, Β, Γ, Δ, τῆς ἕδρας τῆς βάσεως (σχ. 10).

4) ***Πλευραὶ τῆς ἐπιπέδου γωνίας λέγονται αἱ εὐθεῖαι γραμμαί, ὁποῖαι τὴν σχηματίζουν*** (π. χ. τῆς γωνίας Α (σχ. 12) πλευραὶ εἶναι αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΑΓ).

6) ***Κορυφὴ τῆς ἐπιπέδου γωνίας λέγεται τὸ σημεῖον εἰς τὸ ὁποῖον ἑνοῦνται αἱ δύο πλευραί της*** (ὡς π. χ. τῆς γωνίας Α (σχ. 12) κορυφὴ εἶναι τὸ σημεῖον Α).

Σχ. 12

6) ***Καθορισμὸς ἐπιπέδου γωνίας*** : Τὴν ἐπίπεδον γωνίαν καθορίζομεν : ἢ δι' ἑνὸς γράμματος, τὸ ὁποῖον γράφομεν εἰς τὴν κορυφὴν ἢ διὰ τριῶν γραμμάτων, γράφοντες ἕνα εἰς τὴν κορυφὴν καὶ ἀπὸ ἕνα εἰς τὰ ἄλλα δύο ἄκρα τῶν πλευρῶν της. Διαβάζομεν δὲ ἢ τὸ γράμμα τῆς κορυφῆς της ἢ καὶ τὰ τρία θέτοντες εἰς τὸ μέσον τὸ γράμμα τῆς κορυφῆς (ὅπως: π. χ. ἡ γωνία Α ἢ ἡ γωνία ΒΑΓ ἢ ΓΑΒ σχ. 11).

Ἀσκήσεις :

1. Π α εἶναι τὰ ἐπίπεδα τοῦ κύβου ;
2. Π ιαι εἶναι αἱ δίεδροι γωνίαι τοῦ κύβου ;
3. » » τρίεδροι » » »
4. , » » κορυφαὶ » »
5. » » » ἀκμαὶ » »

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

6. Δείξατε στὸν κύβο παράλληλες ἕδρες.

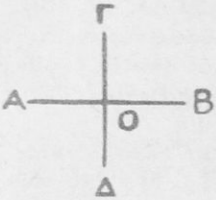
7. Δείξατε σὲ μιὰ ἕδρα τοῦ κύβου παράλληλες πλευρές.

8. Διαβάσατε τὰς ἐπιπέδους γωνίας τῆς ἕδρας Α Β Γ Δ Α καὶ τῆς Α Β Ζ Ε Α.

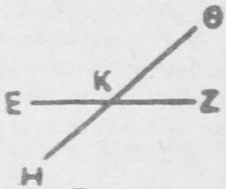
8. Θέσεις τῶν εὐθειῶν γραμμῶν πρὸς ἀλλήλας

1. ***Κάθετος εὐθεῖα :*** ***Μία εὐθεῖα λέγεται κάθετος ἐπὶ ἄλλην, ἐὰν ὅλαι αἱ γωνίαι, τὰς ὁποίας σχηματίζουν αὗται, εἶναι ἴσαι*** (π. χ. ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ΓΔ (σχ. 13) εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ, καὶ ἡ ΑΒ ἐπὶ τὴν ΓΔ· διότι εἶναι : ΑΟΓ = ΓΟΒ = ΒΟΔ = ΔΟΑ γωνίαι.

2. ***Πλάγιαι εὐθεῖαι :*** ***Δύο εὐθεῖαι λέγονται πλάγιαι, ἐὰν αἱ γωνίαι τὰς ὁποίας αὗται σχηματίζουν, δὲν εἶναι ὅλαι ἴσαι*** π. χ. ἡ ΘΗ καὶ ΕΖ (σχ. 14).

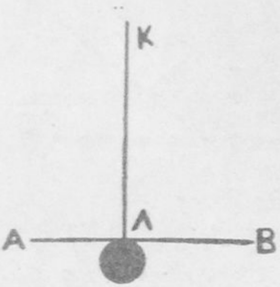


Σχ. 13

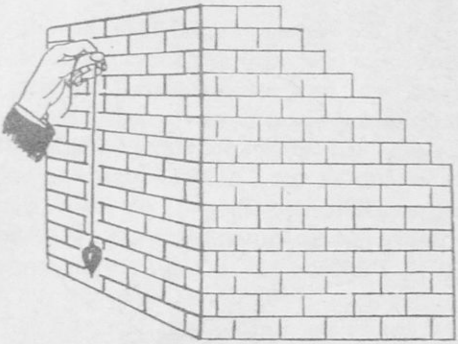


Σχ. 14

3. ***Κατακόρυφος εὐθεῖα, λέγεται ἡ εὐθεῖα, τὴν ὁποίαν χαράσσει ἓν σῶμα, τὸ ὁποῖον πίπτει*** ὡς ἡ ΚΛ (σχ. 15), τὴν ὁποίαν διέγραψε τὸ ἀποκάτω βόλι πίπτον.



Σχ. 15



Σχ 16.

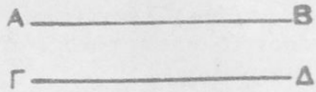
Κατακόρυφος εὐθεῖα εἶναι καὶ ἡ εὐθεῖα, τὴν ὁποίαν χαράσσει τὸ νῆμα τῆς στάθμης (σχ. 16).

4. ***Στάθμη :*** Εἶναι ἕνα σχοινὶ μὲ ἕνα βαρίδιον προσδεδεμένον εἰς τὸ ἓν ἄκρον του (σχ. 16). Ταύτην μεταχειρίζονται οἱ κτίσται διὰ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

νὰ ἐλέγχουν, ἐὰν ἕνας τοῖχος εἶναι κατακόρυφος ἢ ὄχι. (Εἶναι τοῦτο σπουδαῖον ; καὶ διατί ;)

5. *Ὁριζόντιος εὐθεῖα, λέγεται ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία εἶναι κάθετος εἰς τὴν κατακόρυφον*· ὅπως ἡ εὐθεῖα ΑΒ, ἡ ὁποία εἶναι κάθετος εἰς τὴν κατακόρυφον ΚΛ (σχ. 15).

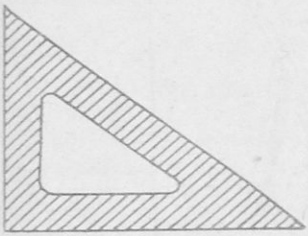


Σχ. 17

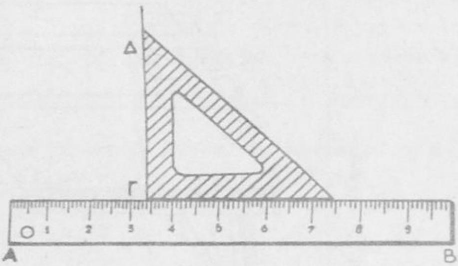
6. *Παράλληλοι εὐθεῖαι : Δύο ἢ περισσότεραι εὐθεῖαι μιᾶς ἐπιπέδου ἐπιφανείας λέγονται παράλληλοι, ἐὰν δὲν συναντῶνται, ὅσον καὶ ἂν ἐπεκταθῶσι καὶ ἀπὸ τὰ δύο ἄκρα των*, (ὅπως αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ σχ. 17).

7. Χάραξις καθέτων εὐθειῶν

1. Διὰ νὰ χαράξωμεν εὐθεῖαν κάθετον ἐπὶ μίαν ἄλλην χαράσσομεν μὲ τὸν γνώμονα (σχ. 18), ὅπως τὴν ΓΔ ἐπὶ τὴν ΑΒ (σχ. 19).



Σχ. 18



Σχ. 19

Ὁ γνώμων εἶναι σανὶς (σχ. 18), ποὺ ἔχει σχῆμα εὐθύγραμμον μὲ 3 γωνίας· τῆς μιᾶς ἐξ αὐτῶν αἱ πλευραὶ εἶναι κάθετοι ἡ μία ἐπὶ τὴν ἄλλην. Εἶναι δὲ αὕτη ὀρθή.

Διὰ νὰ χαράξωμεν λοιπὸν μίαν εὐθεῖαν κάθετον ἐπὶ τὴν ἄλλην διὰ τοῦ γνώμονος ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς : Τοποθετοῦμεν ἐπάνω εἰς τὴν εὐθεῖαν (π. χ. ΑΒ) τὸν γνώμονα, οὕτως ὥστε νὰ ἐφαρμόσῃ εἰς αὐτὴν ἡ μία κάθετος πλευρά του. Μετὰ ταῦτα σείροντες κατὰ μῆκος τῆς ἄλλης καθέτου πλευρᾶς του τὴν γραφῖδα, γράφομεν τὴν εὐθεῖαν ΔΓ, ἡ ὁποία εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ.

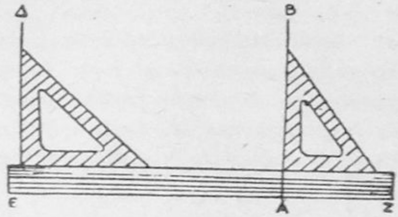
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

8. Χάραξις παραλλήλων εὐθειῶν

Παραλλήλους εὐθείας χαράσσομεν εἰς τὸν πίνακα:

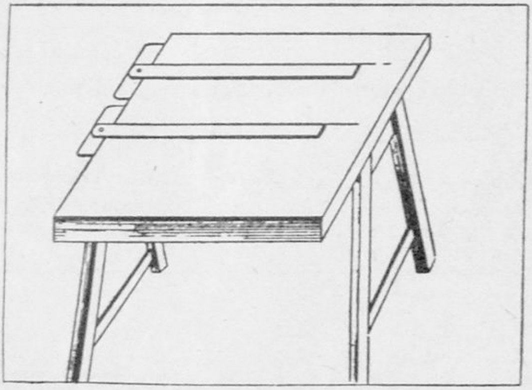
α) Μὲ τὸν **κανόνα**, κυλίοντες τοῦτον ἐπάνω εἰς τὸν πίνακα καὶ σύροντες κατὰ μῆκος αὐτοῦ τὴν κιμωλίαν.

β) Διὰ τοῦ κανόνος καὶ τοῦ γνώμονος, ὅπως μᾶς δείχνει τὸ σχ. 20· ὅπου χαράσσομεν ἐπὶ τὴν ΕΖ τὰς καθέτους ΑΒ καὶ ΕΔ.



Σχ. 20

γ) Μὲ τὸ ὄργανον ***Ταῦ***· ὡς μᾶς δείχει τὸ σχ. 21, ὅπου ἐφαρμόζομεν τοῦτο εἰς τὴν εὐθεῖαν καὶ χαράσσομεν ὅσας παραλλήλους εὐθείας γραμμὰς θέλομεν.



Σχ. 21

9. Χάραξις ἐπιπέδου γωνίας

Διὰ νὰ χαράξωμεν ἁπλῶς μίαν ἐπίπεδον γωνίαν, χαράσσομεν μὲ τὸν κανόνα μίαν εὐθεῖαν, τὴν ΑΓ καὶ ἀπὸ τὸ ἄκρον αὐτῆς τὸ Α, ἄλλην εὐθεῖαν ΑΒ. Τοιουτοτρόπως ἐχαράχθη ἡ ἐπίπεδος γωνία ΒΑΓ (σχ. 12).

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

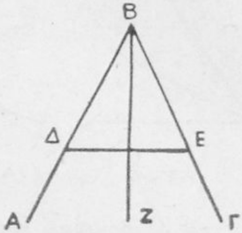
᾿Ασκήσεις :

1. Δείξατε εἰς τὸν κύβον μίαν ἀκμὴν κάθετον ἐπὶ τὴν ἄλλην.
2. Γράψατε στὸν πίνακα ἕνα κύβο καὶ διαβάσατε τὰς ἀκμάς του, ποὺ εἶναι κάθετοι στὰς ἀκμὰς τῆς ἕδρας τῆς βάσεώς του.
3. Χαράξαμε εὐθεῖαν κάθετον ἐπὶ ἄλλην.
4. Χαράξατε εὐθεῖαν πλαγίαν ἐπὶ ἄλλην.
5. Δείξατε μὲ ράβδους κατακόρυφον εὐθεῖαν καὶ ὁριζόντιον εἰς τὸν πόδα αὐτῆς.

10. Διχοτόμησις ἐπιπέδου γωνίας

῎Εστω ὅτι ἔχομεν νὰ διχοτομήσωμεν τὴν ἐπίπεδον γωνίαν ΑΒΓ (σχ. 22).

Πρὸς τοῦτο : α) ἀπὸ τὴν κορυφήν της Β λαμβάνομεν ἐπὶ τῶν πλευρῶν της ἴσα τμήματα ΒΔ = ΒΕ. β) ᾿Απὸ τῆς κορυφῆς Β φέρομεν διὰ τοῦ γνώμονος κάθετον ἐπὶ τὴν ΔΕ τὴν εὐθεῖαν ΒΖ. Αὐτὴ εἶναι ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας ΑΒΓ· ἤτοι εἶναι ΑΒΖ = ΖΒΓ.

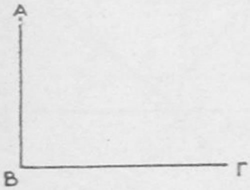


Σχ. 22

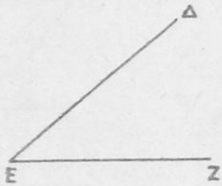
11. Εἴδη ἐπιπέδων γωνιῶν

1. Τὰ εἴδη τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν εἶναι τρία : ἡ ὀρθή, ἡ ὀξεῖα καὶ ἡ ἀμβλεῖα.

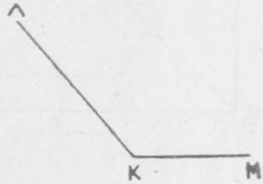
α) ***᾿Ορθὴ γωνία λέγεται ἡ ἐπίπεδος γωνία τῆς ὁποίας αἱ πλευραὶ εἶναι κάθετοι ἡ μία ἐπὶ τὴν ἄλλην*** π. χ. ἡ γωνία ΑΒΓ (σχ. 23).



Σχ. 23



Σχ. 24



Σχ. 25

β) ***᾿Οξεῖα γωνία λέγεται μία ἐπίπεδος γωνία, ἐὰν εἶναι μικροτέρα τῆς ὀρθῆς*** π. χ. ἡ γωνία ΔΕΖ (σχ. 24).

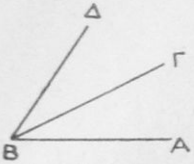
γ) ***᾿Αμβλεῖα γωνία λέγεται μία ἐπίπεδος γωνία, ἐὰν εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ὀρθῆς·*** π. χ. ἡ γωνία ΛΚΜ (σχ. 25).

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

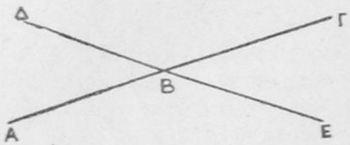
12. Ἐπίπεδοι γωνίαι ποὺ ἔχουν κοινὴν κορυφήν

1) *Ἐφεξῆς γωνίαι : Δύο γωνίαι λέγονται ἐφεξῆς, ἐὰν ἔχωσι κορυφὴν κοινὴν καὶ μίαν πλευρὰν κοινήν, τὰς δὲ μὴ κοινὰς πλευρὰς ἑκατέρωθεν τῆς κοινῆς πλευρᾶς·* π. χ. αἱ γωνίαι ΑΒΓ καὶ ΓΒΔ σχ. 26).

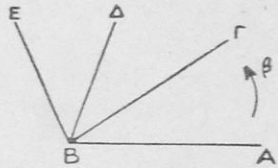
2) *Κατὰ κορυφὴν γωνίαι : Δύο γωνίαι λέγονται κατὰ κορυφήν, ἐὰν ἔχωσι κοινὴν κορυφὴν καὶ αἱ πλευραὶ τῆς μιᾶς εἶναι προεκτάσεις τῶν πλευρῶν τῆς ἄλλης·* π. χ. αἱ γωνίαι ΑΒΔ καὶ ΕΒΓ (σχ. 27).



Σχ. 26



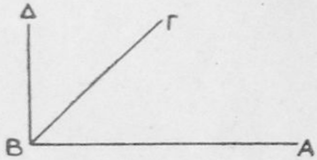
Σχ. 27



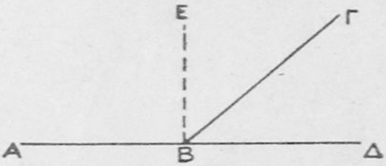
Σχ. 28

3) *Διαδοχικαὶ γωνίαι : Τρεῖς ἢ περισσότεραι γωνίαι λέγονται διαδοχικαί, ἐὰν ἑκάστη μετὰ τῆς ἑπομένης της εἶναι ἐφεξῆς γωνίαι·* π. χ. αἱ γωνίαι ΑΒΓ, ΓΒΔ, ΔΒΕ (σχ. 28).

4) *Ἄθροισμα ἐπιπέδων γωνιῶν. Τὸ ἄθροισμα δύο ἢ περισσοτέρων ἐπιπέδων γωνιῶν εἶναι ἐπίπεδος γωνία ἴση πρὸς ὅλας αὐτὰς ὁμοῦ·* π. χ. τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν : ΑΒΓ, ΓΒΔ, ΔΒΕ εἶναι ΑΒΓ+ΓΒΔ +ΔΒΕ=ΑΒΕ γωνία (σχ. 28).



Σχ. 29



Σχ. 30

5. *Συμπληρωματικαὶ γωνίαι : Δύο γωνίαι ἐπίπεδοι λέγονται συμπληρωματικαί, ἐὰν τὸ ἄθροισμά των εἶναι ἴσον μὲ μίαν ὀρθὴν γωνίαν·* π. χ. αἱ γωνίαι ΑΒΓ καὶ ΓΒΔ (σχ. 29).

6. *Παραπληρωματικαὶ λέγονται δύο γωνίαι, ἐὰν τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι ἴσον πρὸς δύο ὀρθὰς γωνίας,* (ὅπως αἱ γωνία ΑΒΓ καὶ ΓΒΔ (σχ. 30).

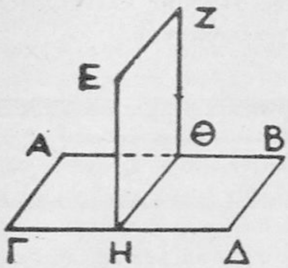
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

’Ασκήσεις :

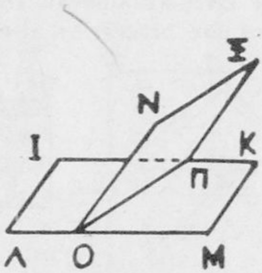
1) Χαράξατε ἐπίπεδον γωνίαν ὀρθὴν μὲ κορυφὴν τὸν σημεῖον Α.
2) » » » » » πλευρὰν τὴν εὐθεῖαν Α——Β.
3) Χαράξατε μίαν ἐπίπεδον γωνίαν καὶ ἀναγνώσατε αὐτήν.
4) Πόσας ἐπιπέδους γωνίας ἔχει ὁ κύβος ;
5) Φέρετε μίαν εὐθεῖαν κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ, ἡ ὁποία νὰ κεῖται πρὸς τὸ ἕνα μέρος αὐτῆς· καὶ λέγετε :
α) Πόσας γωνίας σχηματίζουν αἱ δύο εὐθεῖαι ; ὀνομάσατέ τας.
β) Τίνος εἴδους ἐπίπεδοι γωνίαι εἶναι αὗται ;
6) Φέρετε μίαν εὐθεῖαν κάθετον ἐπὶ μίαν ἄλλην καὶ ἡ ὁποία νὰ κεῖται καὶ πρὸς τὰ δύο μέρη αὐτῆς (ἤτοι νὰ τὴν τέμνῃ) καὶ λέγετε :
α) Πόσας ἐπιπέδους γωνίας σχηματίζουν αἱ δύο εὐθεῖαι ;
β) Τίνος εἴδους εἶναι αἱ ἐπίπεδοι αὗται γωνίαι ;
7) Χαράξατε δύο γωνίας συμπληρωνατικάς.
8) » » » παραπληρωματικάς.

13. Θέσις τῶν ἐπιπέδων πρὸς ἄλληλα

1. *Κάθετον ἐπίπεδον*: ***Ἕνα ἐπίπεδον λέγεται κάθετον ἐπὶ ἄλλο, ὅταν, τέμνον τοῦτο, σχηματίζῃ μὲ αὐτὸ διέδρους γωνίας ἴσας*** (ὅπως τὸ ἐπίπεδον ΕΖΘΗΕ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΒΔΓΑ σχ. 31.



Σχ. 31



Σχ. 32

Κάθε ἕδρα τοῦ κύβου εἶναι κάθετος ἐπὶ κάθε ἄλλην ἕδραν αὐτοῦ, μὲ τὴν ὁποίαν ἑνώνεται. Κάθε τοῖχος τοῦ δωματίου εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ πάτωμα, ἐπὶ τὸ ταβάνι καὶ τοὺς πλαγίους τοίχους, μὲ τοὺς ὁποίους ἑνώνεται.

2. *Πλάγιον ἐπίπεδον*: ***Ἕνα ἐπίπεδον λέγεται πλάγιον ἢ κεκλιμένον ἐπὶ ἕνα ἄλλο, ὅταν τέμνον τοῦτο σχηματίζῃ μὲ αὐτὸ διέδρους***

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

γωνίας ὀξείας καὶ ἀμβλείας (ὅπως τὸ ἐπίπεδον ΟΝΞΠ **ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον** ΙΚΜΛ σχ. 32).

3. *Κατακόρυφον ἐπίπεδον*: ***Ἕνα ἐπίπεδον λέγεται κατακόρυφον, ὅταν τοῦτο διέρχεται ὁλόκληρον διὰ τοῦ νήματος τῆς στάθμης.*** Τοιαῦτα ἐπίπεδα εἶναι οἱ τοῖχοι τῶν δωματίων.

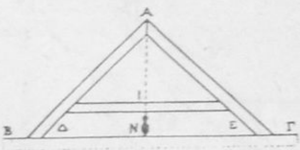
4. *Ὁριζόντιον ἐπίπεδον*: ***Ἕνα ἐπίπεδον λέγεται ὁριζόντιον, ὅταν τοῦτο εἶναι κάθετον εἰς ἄλλο κατακόρυφον·*** (ὅπως τὸ **πάτωμα** τοῦ δωματίου, ποὺ εἶναι κάθετον στὰ κατακόρυφα ἐπίπεδα **τῶν** τοίχων του).

Τὴν ὁριζοντιότητα ἑνὸς ἐπιπέδου ἐξακριβώνομεν μὲ **τὰ ὄργανα** ***ἀλφάδιον*** (σχ. 33) καὶ ***ἀεροστάθμη*** (σχ. 34).

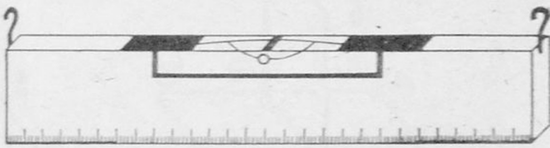
5. ***Τὸ ἀλφάδιον*** λοιπὸν εἶναι ὄργανον, μὲ τὸ ὁποῖον **ἐλέγχομεν**, ἂν ἕνα ἐπίπεδον εἶναι ὁριζόντιον ἢ κεκλιμένον.

Εἶναι κατασκευασμένον ἀπὸ 3 χονδρὰ ξύλα, ὥστε νὰ στέκεται ὄρθιον. Στὸ μεσαῖο ὁριζόντιο ξύλο ὑπάρχει ἕνα κατακόρυφο αὐλάκι, ἀπὸ δὲ τὴν κορυφὴ τοῦ ἀλφαδιοῦ κρέμεται μία στάθμη.

Ὅταν τὸ ἀλφάδιον τοποθετῆται ἐπάνω σὲ ἕνα ἐπίπεδον, ἂν τοῦτο εἶναι ὁριζόντιον, τὸ νῆμα τῆς στάθμης διέρχεται μέσα ἀπὸ τὸ αὐλάκι καὶ μᾶς δείχνει, ὅτι τὸ ἐπίπεδον εἶναι ὁριζόντιον. Ἂν δὲ τὸ ἐπίπεδον εἶναι κεκλιμένον, τὸ νῆμα τῆς στάθμης κλίνει δεξιὰ ἢ ἀριστερὰ καὶ μᾶς δείχνει ὅτι τοῦτο εἶναι κεκλιμένον.



Σχ. 33


Σχ. 34

6. ***Ἡ ἀεροστάθμη***: Εἶναι ὑάλινος σωλήν, οὐχὶ καλὰ γεμισμένος μὲ νερό, μέσα δὲ εἰς αὐτὸν κινεῖται ἐλευθέρως μία φυσαλίδα ἀέρος.

Τοποθετοῦμεν τὴν βάσιν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας. Τότε, ἂν αὕτη εἶναι ὁριζοντία, ἡ φυσαλὶς στέκεται εἰς τὸ μέσον τοῦ σωλῆνος.

7. *Παράλληλα ἐπίπεδα* : ***Δύο ἢ περισσότερα ἐπίπεδα λέγονται παράλληλα, ἐὰν δὲν συναντῶνται, ὅσον καὶ ἂν ἐπεκταθῶσι πρὸς ὅλας τὰς διευθύνσεις.*** Τέτοια ἐπίπεδα εἶναι : τὸ πάτωμα καὶ τὸ ταβάνι· οἱ ἀπέναντι τοῖχοι τοῦ δωματίου· αἱ ἀπέναντι ἕδραι τοῦ κύβου.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

14. Εἴδη διέδρων γωνιῶν

1. Καὶ τῶν διέδρων γωνιῶν τρία εἶναι τὰ εἴδη: *Ὀρθὴ δίεδρος*, ***ὀξεῖα δίεδρος*** καὶ *ἀμβλεῖα δίεδρος*.

2. ***Ὀρθὴ*** *δίεδρος γωνία λέγεται ἡ δίεδρος γωνία, τῆς ὁποίας αἱ* ***ἕδραι εἶναι κάθετοι*** *ἡ μία ἐπὶ τὴν ἄλλην*. Ὅλαι αἱ δίεδροι γωνίαι τοῦ κύβου εἶναι ὀρθαί.

3. ***Ὀξεῖα*** *δίεδρος γωνία, λέγεται ἡ δίεδρος γωνία, ἡ ὁποία εἶναι* ***μικροτέρα*** *τῆς ὀρθῆς διέδρου*. Αἱ δύο ἕδραι αὐτῆς εἶναι ἐπίπεδα πλάγια τὸ ἓν ἐπὶ τὸ ἄλλο.

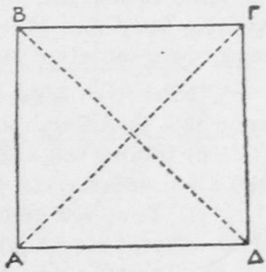
4. ***Ἀμβλεῖα*** *δίεδρος γωνία λέγεται ἡ δίεδρος γωνία, ἡ ὁποία* ***εἶναι μεγαλυτέρα*** *τῆς ὀρθῆς διέδρου γωνίας*.

5. Εὐκολονόητον εἶναι ὅτι αἱ ὀρθαὶ δίεδροι γωνίαι τοῦ κύβου ἔχουν ἀντιστοίχους ἐπιπέδους ὀρθάς. Καὶ ἀντιστρόφως αἱ ὀρθαὶ ἐπίπεδοι γωνίαι τοῦ κύβου ἔχουν ἀντιστοίχους διέδρους γωνίας ὀρθάς.

15. Ἄλλαι παρατηρήσεις εἰς τὸν κύβον

1. Ἐὰν ἐλέγξωμεν τὰς πλευρὰς τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν τοῦ κύβου διὰ τοῦ γνώμονος θὰ ἴδωμεν ὅτι αὗται εἶναι κάθετοι ἡ μία ἐπὶ τὴν ἄλλην. Ἐπομένως ὅλαι αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι τοῦ κύβου εἶναι ὀρθαὶ καὶ ἐπομένως ἴσαι.

Εἶναι λοιπὸν κάθε ἕδρα τοῦ κύβου παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον καὶ ἔχει ὅλας του τὰς πλευρὰς ἴσας. Τὰ τοιαῦτα σχήματα λέγονται *τετράγωνα*. Ὅθεν ***Τετράγωνον λέγεται*** *τὸ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον, ποὺ ἔχει τὰς 4 πλευράς του ἴσας*.



Σχ. 35

2. Τὸ τετράγωνον, διότι ἔχει ὅλας του τὰς πλευρὰς καὶ ὅλας του τὰς γωνίας ἴσας, λέγεται καὶ σχῆμα ***εὐθύγραμμον κανονικὸν*** (σχ. 35).

3. Καὶ κάθε εὐθύγραμμον σχῆμα, ποὺ ἔχει ὅλας του τὰς γωνίας ἴσας καὶ ὅλας του τὰς πλευρὰς ἴσας, λέγεται κανονικὸν εὐθύγραμμον σχῆμα.

4. Τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν πλευρῶν τοῦ τετραγώνου (καθὼς καὶ κάθε εὐθυγράμμου σχήματος), λέγεται ***περίμετρος*** αὐτοῦ. Π. χ. τοῦ τετραγώνου (σχ. 35) ἡ περίμετρος εἶναι: τὸ ἄθροισμα ΑΒ + ΒΓ + + ΓΔ + ΔΑ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

5. Κάθε εὐθεῖα, ἡ ὁποία ἑνώνει δύο γωνίας τοῦ τετραγώνου (καθὼς καὶ κάθε εὐθυγράμμου σχήματος) χωρὶς νὰ εἶναι πλευρὰ αὐτοῦ, λέγεται ***διαγώνιος*** αὐτοῦ, (ὅπως ἡ εὐθεῖα ΑΓ καὶ ΒΔ (σχ. 35).

6. Ἀφοῦ αἱ πλευραὶ τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν τοῦ κύβου εἶναι κάθετοι, αὗται εἶναι ὀρθαὶ (ὅπως εἴπομεν). Καὶ ἀφοῦ αὗται εἶναι ὀρθαὶ καὶ αἱ ἀντίστοιχοί των δίεδροι θὰ εἶναι ὀρθαί. Εἶναι λοιπὸν ὁ κύβος παραλληλεπίπεδον ὀρθογώνιον. Ὅθεν:

Κύβος λέγεται τὸ ἑξάεδρον ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον, τοῦ ὁποίου ὅλαι αἱ ἕδραι εἶναι ἴσα τετράγωνα (σχ. 10).

16. Διαστάσεις τοῦ κύβου

1. Ὁ κύβος, ὅπως βλέπεται, ἐπεκτείνεται πρὸς τὰ ἐμπρός, πρὸς τὰ πλάγια καὶ πρὸς τὰ ἄνω. Αἱ τρεῖς αὐταὶ ἐπεκτάσεις τοῦ κύβου λέγονται ***διαστάσεις*** αὐτοῦ.

Τὴν ἔκτασίν του πρὸς τὰ ἐμπρὸς τὴν λέγομεν ***μῆκος***· τὴν ἔκτασίν του πρὸς τὰ πλάγια ***πλάτος*** καὶ τὴν ἔκτασίν του πρὸς τὰ ἄνω, ***ὕψος***.

2. Αἱ τρεῖς ἀκμαί, ποὺ ξεκινοῦν ἀπὸ μιὰ κορυφὴ τῆς ἕδρας τῆς βάσεως, μᾶς δείχνουν τὰς 3 διαστάσεις τοῦ κύβου· ἐκείνη ποὺ διευθύνεται πρὸς τὰ ἐμπρός, μᾶς δείχνει τὸ μῆκος, ἐκείνη ποὺ διευθύνεται πρὸς τὰ πλάγια, τὸ πλάτος, καὶ ἐκείνη ποὺ διευθύνεται πρὸς τὰ ἄνω, τὸ ὕψος του. Μᾶς εἶναι δὲ γνωστόν, ὅτι καὶ αἱ τρεῖς αὐταὶ διαστάσεις του εἶναι ***ἴσαι***.

Ὅθεν: α) ***Μῆκος*** τοῦ κύβου εἶναι μία ἀκμὴ τῆς ἕδρας τῆς βάσεώς του, (ἡ ΑΔ σχ. 10).

β) ***Πλάτος τοῦ κύβου*** εἶναι ἡ ἀκμὴ τῆς ἕδρας τῆς βάσεώς του, ποὺ εἶναι κάθετος εἰς τὴν ἀκμὴν τοῦ μήκους, (ἡ ΑΒ σχ. 10).

γ) ***Ὕψος τοῦ κύβου*** λέγεται ἡ παράπλευρος ἀκμή του, ποὺ εἶναι κάθετος εἰς τὸ μῆκος καὶ τὸ πλάτος (ἡ ΑΕ σχ. 10).

3. Τὰς διαστάσεις τοῦ κύβου μετροῦμεν μὲ τὸ μέτρον καὶ μὲ τὰ μέρη αὐτοῦ ἤτοι τὰ δέκατα, τὰ ἑκατοστά, τὰ χιλιοστά.

4. Αἱ τρεῖς διαστάσεις τοῦ κύβου εἶναι ἴσαι. Διατί;

17. Ἰχνογράφησις τετραγώνου

1. Ἔστω ὅτι ἔχομεν νὰ γράψωμεν τετράγωνον μὲ πλευρὰν 0,20 τοῦ μέτρου.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Πρὸς τοῦτο :

α) Γράφομεν μὲ τὸν κανόνα εὐθεῖαν γραμμὴν καὶ λαμβάνομεν εἰς αὐτὴν μέρος ΑΒ = 0,20 μ., ὅσον εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου (σχ. 35).

β) Στὰ ἄκρα τῆς ΑΒ φέρομεν μὲ τὸν γνώμονα καθέτους ἴσας. μὲ τὴν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου· ἤτοι τὰς ΑΔ=0,20 μ. καὶ ΒΓ=0,20 μ.

γ) Ἑνώνομεν ἔπειτα τὰ ἄκρα Δ καὶ Γ διὰ τῆς εὐθείας ΔΓ. Τοιουτοτρόπως ἐγράψαμεν τὸ τετράγωνον ΑΒΓΔΑ (σχ. 35).

Τοιουτοτρόπως δὲ γράφομεν καὶ κάθε τετράγωνον, τοῦ ὁποίου μᾶς δίδεται ἡ πλευρά.

18. Πῶς κατασκευάζομεν τετράγωνα ἀπὸ χαρτόνι

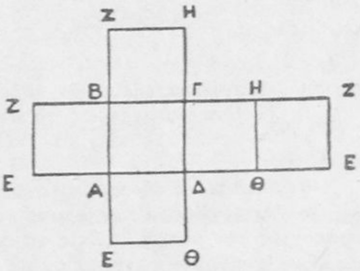
Πρὸς τοῦτο ἰχνογραφοῦμεν πρῶτον στὸ χαρτόνι τὸ τετράγωνον καὶ ἔπειτα κόπτομεν τὴν περίμετρόν του.

19. Ἰχνογράφησις κύβου

Διὰ νὰ γράψωμεν κύβον :

α) Ἰχνογραφοῦμεν πρῶτον ἓν τετράγωνον (ΑΒΓΔ) καὶ ἔπειτα ἓν ἄλλο ἴσον πρὸς αὐτὸ (τὸ ΕΖΗΘ), οὕτως ὥστε αἱ δύο πλευραί του ΒΓ καὶ ΕΖ νὰ τέμνωνται καθέτως (σχ. 10).

β) Σύρομεν κατόπιν τὰς ἀκμὰς ΒΖ καὶ ΓΗ, ΑΕ καὶ ΔΘ καὶ σχηματίζομεν τοιουτοτρόπως τὰς παραλλεύρους 4 ἕδρας : ΑΒΖΕ, ΔΓΗΘ, ΑΕΘΔ καὶ ΒΓΖΗ (σχ. 10).



Σχ. 36

20. Ἰχνογράφησις τοῦ ἀναπτύγματος κύβου

Διὰ νὰ ἰχνογραφήσωμεν τὸ ἀνάπτυγμα ἑνὸς κύβου :

α) Γράφομεν τὴν ἕδραν τῆς βάσεως μὲ πλευρὰν τὴν ἀκμὴν τοῦ κύβου· ἤτοι τὸ τετράγωνον ΑΒΓΔΑ (σχ. 36).

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

β) Γύρω ἀπὸ αὐτὴν καὶ μὲ βάσεις τὰς πλευράς της γράφομεν τὰς 4 παραπλεύρους ἕδρας τοῦ κύβου· ἤτοι τὰ τετράγωνα ΑΒΖΕΑ, ΒΓΗΖΒ, ΓΔΘΗΓ, ΑΔΘΕΑ.

γ) Μὲ βάσιν τὴν πλευρὰν ΗΘ τοῦ τετραγώνου ΔΓΗΘΔ γράφομεν τὴν ἀπέναντι τῆς ἕδρας τῆς βάσεως ἕδραν τοῦ κύβου· ἤτοι τὸ τετράγωνον ΗΘΕΖΗ (σχ. 36).

Καὶ τοιουτοτρόπως ἰχνογραφήσαμε τό ἀνάπτυγμα τοῦ κύβου.

21. Κατασκευὴ κύβου ἀπὸ χαρτόνι

Πρὸς τοῦτο: α) (Ἰχνογραφοῦμεν τὸ ἀνάπτυγμα τοῦ κύβου στὸ χαρτόνι.

β) Κόπτομεν ἔπειτα τὸ χαρτόνι εἰς τὴν περίμετρόν του καὶ χαράσσομεν ἐλαφρῶς διὰ μαχαιριδίου τὰς ἀκμάς, ποὺ δὲν ἐκόπησαν.

γ) Λυγίζομεν μετὰ ταῦτα τὰ τετράγωνα πρὸς σχηματισμὸν τοῦ κύβου.

δ) Καὶ τέλος κολλοῦμεν τὰς μὴ κολλημένας ἀκμὰς τῶν ἑδρῶν μὲ λωρίδας χαρτίνας καὶ γόμμα

Ἀσκήσεις:

1) Ἀναγνώσατε εἰς τὸν κύβον (σχ. 10) τὰς ἕδρας του.

2) Τὸ ἴδιον κάμετε εἰς τὸ ἀνάπτυγμά του (σχ. 36).

3) Ἀναγνώσατε εἰς τὸν κύβον (σχ. 10) τὰς ἀνὰ δύο παραλλήλους ἕδρας του.

4) Κάμετε τὸ ἴδιον εἰς τὸ ἀνάπτυγμά του (σχ. 36).

5) Ἀναγνώσατε τὰς ἕδρας τοῦ κύβου εἰς τὰ σχήματα 10 καὶ 36 ἀναγιγνώσκοντες τὴν αὐτὴν καὶ εἰς τὰ δύο σχήματα.

6) Ἰχνογραφήσατε κύβον μὲ ἀκμὴν 0,05 τοῦ μέτρου.

7) Ἀναγνώσατε τὰς ἕδρας τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τοῦ κύβου (σχ. 10).

8) Κατασκευάσατε ἀπὸ χαρτόνι κύβον μὲ ἀκμὴν 0,10 τοῦ μέτρου.

9) Μετρήσατε καὶ εὕρετε:

α) Τὰς διέδρους γωνίας τοῦ κύβου.

β) » τριέδρους » » »

γ) » ἀκμὰς τοῦ κύβου.

δ) » κορυφὰς τοῦ κύβου.

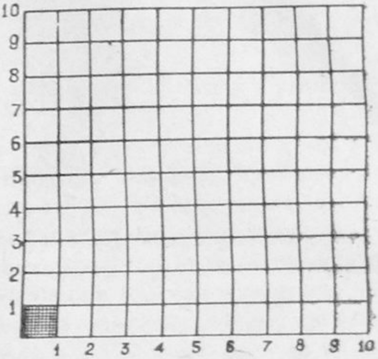
ε) » ἐπιπέδους γωνίας τοῦ κύβου.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

22. Μέτρησις τῆς ἐπιφανείας τοῦ κύβου

Τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κύβου καθὼς καὶ πᾶσαν ἐπιφάνειαν μετροῦμεν μὲ τὰς μονάδας ἐπιφανείας.

Αὗται εἶναι τετράγωνα, ποὺ ὡς πλευρὰν ἔχουν μίαν μονάδα τοῦ μήκους· ἤτοι τὸ μέτρον, τὴν παλάμην, τὸν δάκτυλον, τὴν γραμμήν, τὸ χιλιόμετρον κ.λ.π.



Σχ. 37

Αἱ μονάδες λοιπὸν τῆς μετρήσεως τῶν ἐπιφανειῶν εἶναι :

1. *Τὸ τετραγωνικὸν μέτρον.* Τοῦτο εἶναι τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἑκάστη πλευρὰ εἶναι 1 μέτρον. Ὡς τὸ τετράγωνον (σχ. 37).

Ἑκάστη πλευρὰ τοῦ τετρ. μέτρου διαιρεῖται σὲ 10 παλάμας. Ἐὰν ἀπὸ τὰς διαιρέσεις αὐτὰς σύρωμεν εὐθείας γραμμάς, τὸ τετραγωνικὸν μέτρον διαιρεῖται σὲ 100 τετραγωνικὰς παλάμας. Ἄρα 1 τ.μ. = 100 τ. π.

Ἑκάστη πλευρὰ τῆς τετραγωνικῆς παλάμης διαιρεῖται σὲ 10 δακτύλους. Ἐὰν ἀπὸ τὰς διαιρέσεις αὐτὰς σύρωμεν, ὅπως εἰς τὸ τετραγωνικὸν μέτρον, εὐθείας γραμμάς, ἡ τετραγωνικὴ παλάμη διαιρεῖται σὲ 100 τετραγωνικοὺς δακτύλους· ἄρα 1 τ.π. = 100 τ.δ.

Ἑκάστη πλευρὰ τοῦ τετρ. δακτύλου διαιρεῖται σὲ 10 γραμμές. Ἐὰν σύρωμεν ἀπὸ τὰς διαιρέσεις αὐτὰς εὐθείας, ὁ τ. δ. διαιρεῖται σὲ 100 γραμμές. Ἄρα 1 τ. δ. = 100 τ.γρ. Ὅθεν :

α) ***Τετραγωνικὴ παλάμη*** εἶναι τετράγωνον τοῦ ὁποίου ἑκάστη πλευρὰ εἶναι 1 παλάμη.

β) ***Τετραγωνικὸς δάκτυλος*** εἶναι τετράγωνον τοῦ ὁποίου ἑκάστη πλευρὰ εἶναι 1 δάκτυλος.

γ) ***Τετραγωνικὴ γραμμὴ*** εἶναι τετράγωνον τοῦ ὁποίου ἑκάστη πλευρὰ εἶναι 1 γραμμή.

όλο να το γράψουμε

Εἶναι λοιπόν :

α) 1 τ.μ. = 100 τ.π.
1 » = 100 τ.δ.
1 » » = 100 τ.γ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

β) 1 τ.μ. = 100 τ.π., ἢ 10.000 τ.δ., ἢ 1.000.000 τ.γρ.

1 τ.π. = 100 τ.δ., ἢ 10.000 τ.γρ.

1 τ.δ. = 100 τ.γρ.

γ) 1 τ.π. $= \frac{1}{100}$ τ.μ.

1 τ.δ. $= \frac{1}{100}$ τ.π. $\frac{1}{10\ 000}$ τ.μ.

1 τ.γ. $= \frac{1}{100}$ τ.δ., $\frac{1}{10.000}$ τ.π., $\frac{1}{1.000.000}$ τ.μ.

2 *Τετραγωνικὸν χιλιόμετρον:* Εἶναι τετράγωνον τοῦ ὁποίου ἑκάστη πλευρὰ εἶναι 1 χιλιόμετρον.

Ὅθεν: 1 τ.χ. = 1.000.000 τ.μ. (διότι 1000 × 1000 = 1.000.000)

Δι' αὐτοῦ μετροῦμεν τὰς πολὺ μεγάλας ἐπιφανείας (ὡς τὰς ἐπιφανείας τῶν χωρῶν, τῶν κρατῶν κλπ.).

3. ***Ἐμβαδὸν ἐπιφανείας τοῦ κύβου λέγεται ὁ ἀριθμός, ὅστις μᾶς λέγει ἀπὸ πόσας μονάδας ἐπιφανείας ἢ μέρους αὐτῆς ἀποτελεῖται ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κύβου.***

Νέον στρέμμα: Λέγεται ἐπιφάνεια ἀπὸ 1000 τετραγωνικὰ μέτρα.

18. Ἀσκήσεις

α) Ἰχνογραφήσατε σὲ χαρτόνι ἕν τετρ. μέτρον καὶ διαιρέσατέ το σὲ τετρ. παλάμας, μίαν τετρ. παλάμην σὲ τετρ. δακτύλους, ἕνα τετρ. δάκτυλο σὲ τετρ. γραμμές.

β) Πόσα τετρ. χιλιόμετρα εἶναι 25.550.450 τετρ. μέτρα;

γ) 65 τετρ. χιλιόμετρα πόσα τετρ. μέτρα εἶναι;

23. Μέτρησις τοῦ ὄγκου κύβου

(Πρὸ τῶν μαθητῶν τίθενται: ἕν κυβικὸν μέτρον, μία κυβικὴ παλάμη, εἷς κυβικὸς δάκτυλος καὶ μία κυβικὴ γραμμή).

1. Τὸν ὄγκον τοῦ κύβου καθὼς καὶ παντὸς στερεοῦ σώματος μετροῦμεν μὲ τὰς μονάδας τοῦ ὄγκου.

Εἶναι δὲ αὗται κύβοι μὲ ἀκμὰς τὰς μονάδας τοῦ μήκους καὶ εἶναι αἱ ἑξῆς:

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

α) *Τὸ κυβικὸν μέτρον.* Τοῦτο εἶναι κύβος τοῦ ὁποίου κάθε ἕδρα του εἶναι 1 τετραγωνικὸν μέτρον.

β) *Ἡ κυβικὴ παλάμη.* Αὕτη εἶναι κύβος, τοῦ ὁποίου ἡ κάθε ἕδρα εἶναι 1 τετραγ. παλάμη.

γ) *Ὁ κυβικὸς δάκτυλος.* Οὗτος εἶναι κύβος τοῦ ὁποίου ἡ κάθε ἕδρα εἶναι 1 τετραγωγικὸς δάκτυλος.

δ) *Ἡ κυβικὴ γραμμή.* Εἶναι κύβος, τοῦ ὁποίου ἡ κάθε ἕδρα εἶναι 1 τετραγωνικὴ γραμμή.

2. Ἀφοῦ ἡ ἕδρα τῆς βάσεως τοῦ κυβικοῦ μέμρου εἶναι 1 τετραγ. μέτρον ἀποτελεῖται ἀπὸ 100 τετρ. παλάμες. Δυνάμεθα λοιπὸν ἐπάνω σ᾽ αὐτὴν νὰ τοποθετήσωμεν 100 κυβικὰς παλάμας. Ἀπὸ αὐτὰς βλέπομεν ὅτι ἔγινεν ἓν παρελληλεπίπεδον μὲ διαστάσεις 1 μ. μῆκος, 1 μ. πλάτος, καὶ 1 παλάμη ὕψος. Τὸ κυβικὸν μέτρον ἔχει ὕψος 1 μέτρον ἤτοι 10 παλάμας. Ἐὰν λοιπὸν τοποθετήσωμεν δέκα τοιαῦτα παραλληλεπίπεδα τὸ ἓν ἐπάνω στὸ ἄλλο θὰ σχηματίσωμεν ἓν παραλληλεπίπεδον μὲ διαστάσεις ἓν μέτρον (μῆκος 1 μ., πλάτος 1 μ., ὕψος 1 μέτρ.).

Φανερὸν ἤδη ὅτι τὸ κυβικὸν μέτρον ἀποτελεῖται ἀπὸ 100 × 10 = 1000 κ. παλ.

3. Ὁμοίως σκεπτόμενοι καὶ διὰ τὴν κυβ. παλάμην εὑρίσκομεν ὅτι ἀποτελεῖται ἀπὸ 1000 κυβ. δακτ.

4. Ὁμοίως σκεπτόμενοι καὶ διὰ τὸν κυβ. δάκτυλον εὑρίσκομεν ὅτι ἀποτελεῖται ἀπὸ 1000 κυβ. γραμμάς,

5) Ὅθεν εἶναι :

α) 1 κ. μ. = 1000 κ. π.

1 κ. π. = 1000 κ. δ.

1 κ. δ. = 1000 κ. γρ.

β) 1 κ. μ. = 1000 κ. π. ἢ 1.000.000 κ. δ. ἢ 1.000.000.000 κ. γρ.

1 κ. π. = 1000 κ. δ. ἢ 1.000.000 κ. γρ.

1 κ. δ. = 1000 κ. γρ.

γ) 1 ι. = $\frac{1}{1000}$ κ. μ.

1 κ. . = $\frac{1}{1000}$ κ. π, ἢ $\frac{1}{1.000.000}$ κ. μ.

1 κ. γ. = $\frac{1}{1000}$ κ. δ. ἢ $\frac{1}{1.000.000}$ κ. π., ἢ $\frac{1}{1.000.000.000}$ κ.μ,

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

24. Ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τοῦ κύβου

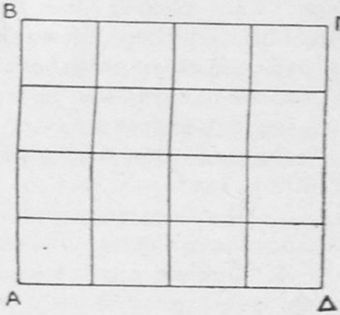
1. Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κύβου ἀποτελεῖται ἀπὸ 6 ἴσα τετράγωνα. Τὸ ἐμβαδὸν λοιπὸν ταύτης ἀποτελεῖται ἀπὸ τὸ ἐμβαδὸν τῶν 6 τετραγώνων του καὶ διὰ νὰ εὕρωμεν τοῦτο φανερὸν εἶναι ὅτι πρέπει νὰ ξεύρωμε πῶς βρίσκεται τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τετραγώνου.

2. Ὅθεν ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας κύβου λέγεται τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν ἑδρῶν του.

25. Εὕρεσις τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ἐπιφανείας τετραγώνου

1. Βάσις τοῦ τετραγώνου λέγεται μία πλευρά του (ἡ ΑΔ σχ. 38).

2. Ὕψος τοῦ τετραγώνου λέγεται μία πλευρά του κάθετος εἰς τὴν βάσιν (ΑΒ σχ. 38).



Σχ. 38

3. Ἔστω ὅτι πρόκειται νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραγώνου ΑΒΓΔ (σχ. 38) καὶ ἔστω ἡ βάσις του ΑΔ = 4 μ., ὁπότε καὶ τὸ ὕψος του ΑΒ = 4 μ.

Χωρίζω τὸ μῆκος του ΑΔ καὶ τὸ ὕψος του ΑΒ εἰς τὰ 4 μέτρα των καὶ ἀπὸ τὰς διαιρέσεις των φέρω καθέτους εὐθείας γραμμάς· τὸ τετράγωνον διαιρεῖται σὲ 16 τ. μ. ἄρα τὸ ἐμβαδόν του εἶναι 16 τετραγωνικὰ μέτρα.

Ἀλλὰ τοῦτο, παρατηροῦμεν εὑρίσκεται καὶ ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὴν βάσιν του ἐπὶ τὸ ὕψος του· ἤτοι 4 × 4 = 16 τ. μ.

Ὅθεν διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τετραγώνου πολλαπλασιάζομεν τὴν βάσιν του ἐπὶ τὸ ὕψος του.

26. Εὕρεσις τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ἐπιφανείας κύβου

Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κύβου ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰς 6 ἕδρας της ἤτοι ἀπὸ 6 ἴσα τετράγωνα. Ἑπομένως :

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς κύβου εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἕδρας τῆς βάσεώς του καὶ τοῦτο πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 6.

νά τόν γράψω.

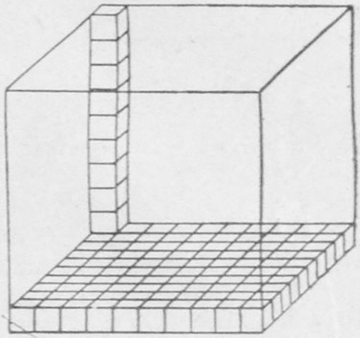
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

"*Ὅθεν*: τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύβου (σχ. 39) εἶναι:
$(4 \times 4) \times 6 = 16 \times 6 = 96$ τ. μέτρα

27. Εὕρεσις τοῦ ὄγκου κύβου

1. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον ἑνὸς κύβου μετροῦμεν τοῦτον μὲ τὸ κυβικὸν μέτρον, τὴν κυβικὴν παλάμην, τὸν κυβικὸν δάκτυλον, τὴν κυβικὴν γραμμήν.

Ἔστω ὅτι πρόκειται νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον ἑνὸς κύβου μὲ ἀκμὴν 4 μέτρα.



Σχ. 39

Σκέψις. Μᾶς εἶναι γνωστόν: α) τὸ μῆκος τοῦ κύβου (4 μ.), β) τὸ πλάτος του (4 μ.) καὶ γ) τὸ ὕψος του (4 μ.) ἤτοι αἱ τρεῖς διαστάσεις του.

Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἕδρας τῆς βάσεως εἶναι $4 \times 4 = 16$ τ. μ. Χωρίζομεν λοιπὸν τὴν ἕδραν τῆς βάσεως στὰ 16 τ. μ. καὶ ἐπάνω σ' αὐτὰ τοποθετοῦμεν 16 κ. μ. Θὰ σχηματισθῇ ἔτσι ἓν στερεὸν μὲ διαστάσεις: μῆκος 4 μ., πλάτος 4 μ. καὶ ὕψος 1 μ. Ὁ ὄγκος τούτου εἶναι γνωστὸς 16 κ. μ.

Ἐπὶ τοῦ στερεοῦ τούτου τοποθετοῦμεν ἄλλο ὅμοιον, ἐπὶ τούτων τρίτον καὶ ἐπὶ τούτων τέταρτον.

Τοιουτοτρόπως σχηματίζεται κύβος μὲ διαστάσεις: 4 μ μῆκος, 4 μ. πλάτος καὶ 4 μ. ὕψος, ἤτοι ὁ κύβος, ποὺ ζητοῦμεν τὸν ὄγκον. Φανερὸν τώρα εἶναι ὅτι ὁ ὄγκος τούτου εἶναι $16 \times 4 = 64$ κ. μ

Ἀλλὰ ὁ ὄγκος οὗτος 64 κ.μ. βλέπομεν ὅτι βρέθηκε μὲ τὸν πολλαπλασιασμὸν $(4 \times 4) \times 4 = 16 \times 4 = 64$ κ. μ. ἤτοι μὲ πολλαπλασιασμὸν τοῦ μήκους ἐπὶ τὸ πλάτος καὶ τοῦ γινομένου αὐτῶν ἐπὶ τὸ ὕψος τοῦ κύβου.

"***Ὅθεν**: Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον ἑνὸς κύβου πολλαπλασιάζομεν τὸ μῆκος ἐπὶ τὸ πλάτος καὶ τὸ γινόμενον αὐτῶν ἐπὶ τὸ ὕψος τοῦ κύβου*, ἤτοι: γράφω

Ὁ ὄγκος κύβου εἶναι γινόμενον τῶν τριῶν του διαστάσεων ($4 \times 4 \times 4 = 16 \times 4 = 64$ κ. μ.). γράφω

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

26. Προβλήματα κύβου

ΟΜΑΣ Α΄ (Προβλήματα τετραγώνου).

1. Τὸ πάτωμα ἑνὸς δωματίου ἔχει σχῆμα τετραγώνου, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι 4 μέτρα· πόσα μέτρα εἶναι ἡ περίμετρός του;

2. Τὸ πάτωμα ἑνὸς δωματίου εἶναι τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ περίμετρος εἶναι 16 μέτρα· πόσα μέτρα εἶναι ἡ πλευρά του;

("Ετερον μὲ περίμετρον 19,20 μ.).

3. Εἷς κῆπος ἔχει σχῆμα τετραγώνου καὶ ἡ πλευρά του εἶναι 40,60 μέτρα· πόσο συρματόπλεγμα θὰ χρειασθῇ διὰ νὰ περιφραχθῇ διὰ 5 συρμάτων;

4. Εἷς ἀνθόκηπος ἔχει σχῆμα τετραγώνου, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι 40 μέτρα· πόσα τετραγωνικὰ μέτρα εἶναι ἡ ἐπιφάνειά του;

5. Ἡ αὐλὴ σχολείου ἔχει σχῆμα τετραγώνου, τοῦ ὁποίου ἡ περίμετρος εἶναι 161,60 μέτρα· ποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδόν της;

6. Ἡ περίμετρος ἑνὸς τετραγωνικοῦ οἰκοπέδου, εἶναι 372 μ. Πόσα μέτρα εἶναι ἡ πλευρά του;

7. Μία ἄμπελος ἔχει σχῆμα τετραγώνου, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι 350 μέτρα· πόσα νέα στρέμματα εἶναι ἡ ἐπιφάνειά της;

8. Ἓν οἰκόπεδον ἔχει σχῆμα τετραγώνου, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι 55 μέτρα. Ἐὰν ἡ ἀξία τοῦ τετραγωνικοῦ μέτρου αὐτοῦ εἶναι 250 δραχ., ποία εἶναι ἡ ἀξία τοῦ οἰκοπέδου;

9. Ἓν οἰκόπεδον ἔχει σχῆμα τετραγώνου, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι 40 μέτρα. Τοῦτο ἠγοράσθη ἀντὶ 40.960 δραχμῶν. Ποία εἶναι ἡ ἀξία τοῦ τετρ. μέτρου;

10. Ἐκ δύο τετραγώνων τὸ μὲν ἔχει πλευρὰν 0,06 τοῦ μέτρου, τὸ δὲ 0,24 τοῦ μέτρου. Ποσάκις ἡ ἐπιφάνεια τοῦ μικροτέρου περιέχεται εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ μεγαλυτέρου;

11. Τὸ μῆκος καὶ τὸ πλάτος ἑνὸς μαγειρείου σχήματος τετραγώνου εἶναι 4,50 μέτρα. Πόσες τετραγωνικὲς πλάκες θὰ χρειασθοῦν διὰ νὰ στρωθῇ, ἐὰν ἡ πλευρὰ τῶν πλακῶν εἶναι 0,18 τοῦ μέτρου;

12. Μία πλατεῖα σχήματος τετραγώνου ἔχει πλευρὰν 81 μέτρων καὶ πρόκειται νὰ στρωθῇ μὲ πλάκες σχήματος τετραγώνου, τῶν ὁποίων ἡ πλευρὰ εἶναι 0,30 μ. Πόσες πλάκες θὰ χρειασθοῦν;

13. Κατασκευάσατε ἀπὸ χαρτόνι ἓν τετράγωνον καὶ εὕρετε: α) τὴν περίμετρόν του, β) τὸ ἐμβαδόν του.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΟΜΑΣ Β΄ (ἐμβαδοῦ καὶ ὄγκου κύβου).

1. Ἓν δωμάτιον ἔχει σχῆμα κύβου μὲ ἀκμὴν 5 μέτρων.

α) Ποῖον τὸ ἐμβαδόν του; . . . . ικὰ μέτρα ἀέρος εὑρίσκονται εἰς αὐτό;

2. Εἷς σωρὸς λίθων ἔχει σχῆμα κύβ . . . μὲ ἀ. . ὴν 10 μέτρων. Ποῖος εἶναι ὁ ὄγκος του;

3. Ἑνὸς δοχείου κυβικοῦ, ἡ ἕδρα τῆς βάσεως ἔχει πλευρὰν 0,55 μ. Ποῖος εἶναι ὁ ὄγκος του;

4. Ἓν κιβώτιον ἔχει σχῆμα κύβου, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκμὴ εἶναι 0,80 μ. Πόσες πλάκες σάπωνος σχήματος κύβου μὲ ἀκμὴν 0,08 μ. χωροῦν εἰς αὐτό;

5. Μία χορταποθήκη ἔχει σχῆμα κύβου μὲ ἀκμὴν 24 μ. Πόσα δεμάτια χόρτου σχήματος κύβου μὲ ἀκμὴν 1,20 μ. χωρεῖ;

6. Ἓν δωμάτιον ἔχει σχῆμα κύβου μὲ ἀκμὴν 5,60 μ. Τοῦτο συνεφωνήθη νὰ ἐλαιοχρωματισθῇ ἐσωτερικῶς πρὸς 35,5 δραχ. τὸ τετρ. μέτρον. Πόσον θὰ στοιχίσῃ ὁ ἐλαιοχρωματισμός του; (πάτωμα, ὀροφὴ ξύλινα).

7. Κατασκευάσατε ἀπὸ χαρτόνι ἕνα κύβον καὶ εὕρετε:

α) Πόσα μέτρα εἶναι ὅλαι αἱ ἀκμαί του.

β) Ποῖον τὸ ἐμβαδόν του.

γ) Ποῖος ὁ ὄγκος του.

8. Τοῦ κύβου (σχ. 39) εὕρετε: α) Τὸ ἐμβαδόν του, β) τὸν ὄγκον του.

9. Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κύβου εἶναι 24 τ.μ. Ποῖος εἶναι ὁ ὄγκος του;

10. Αἱ ἀκμαὶ ἑνὸς κύβου εἶναι 9,6 μ. Ποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδόν του;

11. Ἕνα δοχεῖον ἔχει σχῆμα κύβου μὲ ἀκμὴν 0,25 τοῦ μέτρου.

α) Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ δοχείου, καὶ β) Πόσα κιλὰ λάδι χωρεῖ τοῦτο; (τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ λαδιοῦ εἶναι 0,912) (1).

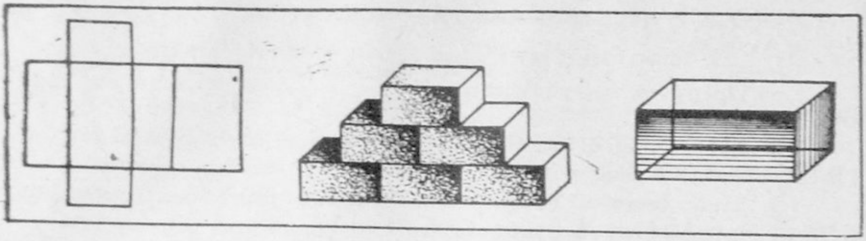
12. Μίαν κυβικὴν ἀποθήκην, τῆς ὁποίας τὸ μῆκος εἶναι 12 μ., πρόκειται νὰ τὴν γεμίσωμε μὲ κυβικὰ κιβώτια, ποὺ τὸ καθένα ἔχει ὕψος 2 μ. Πόσα τέτοια κιβώτια θὰ χωρέσῃ ἡ ἀποθήκη;

---

(1) *Σημείωσις.*

Ὅπως μᾶς εἶναι γνωστὸν (ἐκ τῆς Φ. Πειραματικῆς Ε΄) διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ βάρος ἑνὸς σώματος ἀπὸ τὸν ὄγκον του καὶ τὸ εἰδικὸν βάρος του, πολλαπλασιάζομεν τὸ εἰδικὸν βάρος του ἐπὶ τὸν ὄγκον του. Τὸ ἐξαγόμενον παριστάνει τὸ βάρος τοῦ σώματος εἰς τόννους. 1 τόννος = 1000 χιλιόγραμμα (κιλά).

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής



ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'

ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΝ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΠΙΠΕΔΟΝ

(Οἱ μαθηταὶ παρατηροῦν τὸ πρὸ αὐτῶν ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον).

1. Παρατηρήσεις

1. Ὄγκος καὶ σχῆμά του.

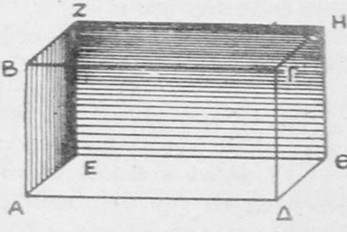
Ὅπως ὁ κύβος καὶ τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον, ἔχει ὡρισμένον ὄγκον καὶ σχῆμα· ἤτοι εἶναι στερεόν.

2. Ἐπιφάνειά του.

1. Ἡ ἐπιφάνειά του ἀποτελεῖται ἀπὸ 6 ἕδρας. Εἶναι ὅθεν πολύεδρον ἑξάεδρον.

2) Ὅλαι αἱ ἕδραι του εἶναι ἐπιφάνειαι ἐπίπεδοι (ἐπίπεδα).

3) Στηρίζεται διὰ μιᾶς ἕδρας του, ἡ ὁποία λέγεται ἕδρα τῆς βάσεως· (ἡ ΑΒΓΔ σχ. 40).



Σχ. 40

4) Αἱ ἕδραι του, ποὺ ἑνώνονται μὲ τὴν ἕδραν τῆς βάσεώς του καὶ μὲ τὴν ἀπέναντι αὐτῆς, ἀποτελοῦν τὴν παράπλευρον ἐπιφάνειάν του καὶ γι' αὐτὸ λέγονται παράπλευροι ἕδραι του (ἤτοι αἱ ΑΒΖΕΑ, ΔΓΗΘΔ, ΒΖΗΓΒ, ΑΕΘΔΑ).

5) Τοποθετοῦμεν τοῦτο σὲ χαρτόνι καὶ ἰχνογραφοῦμεν ἀνὰ μίαν ὅλας τὰ ἕδρας· τὰς κόπτομεν ἔπειτα καὶ τὰς ἐπιθέτομεν τὴν μίαν ἐπάνω εἰς τὴν ἄλλην ἀνὰ δύο. Παρατηροῦμεν ὅτι ἐφαρμόζουν

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἀκριβῶς μόνον ἡ καθεμιὰ μὲ τὴν ἀπέναντί της. Ἄρα εἶναι ἴσαι μόνον ἀνὰ δύο· ἡ καθεμιὰ μὲ τὴν ἀπέναντί της.

6) Ἐὰν ἐπεκτείνωμεν τὰς ἕδρας του καθ' ὅλας τὰς διευθύνσεις, ἑκάστη δὲν συναντᾶται μὲ τὴν ἀπέναντί της. Αἱ ἀπέναντι ὅθεν ἕδραι του εἶναι παράλληλοι, ὅπως καὶ εἰς τὸν κύβον.

Γι' αὐτὸ τὸ στερεὸν λέγεται παραλληλεπίπεδον.

3. *Δίεδροι καὶ τρίεδροι γωνίαι του:*

1) Καὶ τούτου αἱ ἕδραι ἑνοῦνται ἀνὰ δύο καὶ κάμνουν διέδρους γωνίας (ὡς ἡ ΑΕΖΒΓΔΑ σχ. 40).

2) Ἑνοῦνται δὲ αὗται καὶ ἀνὰ τρεῖς καὶ κάμνουν γωνίας τριέδρους ἢ στερεὰς (τὰς : Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ).

Αἱ ἕδραι : ΑΒΖΕΑ, ΑΕΘΔΑ καὶ ΑΒΓΔΑ σχηματίζουν τὴν τρίεδρον γωνίαν Α. (σχ. 40).

3) Αἱ ἑνώσεις τῶν ἑδρῶν τῶν διέδρων γωνιῶν κάμνουν εὐθείας γραμμάς, αἱ ὁποῖαι λέγονται ἀκμαί. (Ὡς : ἡ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ· ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ· ΑΕ, ΒΖ, ΓΔ, ΔΘ).

4. *Σχῆμα τῶν ἑδρῶν του:*

1) Καὶ τούτου τὰ ἄκρα ἑκάστης ἕδρας μᾶς δίδουν εὐθείας γραμμάς, αἱ ὁποῖαι λέγονται πλευραί των.

Εἶναι ὅθεν αἱ ἕδραι του εὐθύγραμμα σχήματα.

2) Ἐὰν αἱ πλευραὶ ἑκάστης ἕδρας του ἐπεκταθοῦν καὶ πρὸς τὰ δύο ἄκρα των, ἑκάστη δὲν συναντᾶται μὲ τὴν ἀπέναντί της· ὅθεν αἱ πλευραὶ ἑκάστης ἕδρας του εἶναι παράλληλοι ἀνὰ δύο· ἤτοι ἑκάστη μὲ τὴν ἀπέναντί της.

Ἄρα ἡ κάθε ἕδρα του εἶναι ***παραλληλόγραμμον***.

3) Ἐὰν μετρήσωμεν τὰς πλευρὰς ἑκάστης θὰ ἴδωμεν ὅτι ἑκάστη εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀπέναντί της.

4) Αἱ πλευραὶ ἑκάστης ἕδρας ἑνώνονται ἀνὰ δύο διὰ τῶν ἄκρων των καὶ σχηματίζουν ἐπιπέδους γωνίας (ὡς αἱ ΒΑΔ, ΑΔΓ, ΔΓΒ, ΓΒΑ).

5) Ἐὰν ἐλέγξωμεν μὲ τὸν γνώμονα τὰς πλευρὰς τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου θὰ ἴδωμεν ὅτι αὗται εἶναι κάθετοι· ἐπομένως ὅλαι αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι ὀρθαί· ὡς ὀρθαὶ δὲ εἶναι ὅλαι ἴσαι.

Εἶναι λοιπὸν κάθε ἕδρα του ***ἐπίπεδον ὀρθογώνιον***.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ὅθεν κάθε ἕδρα του εἶναι: ὀρθογώνιον, παραλληλόγραμμον, ὅπως καὶ τὸ τετράγωνον, ἀλλ' ἔχει τὰς πλευράς του ἴσας μόνον ἀνὰ δύο, ἑκάστην μὲ τὴν ἀπέναντί της· (ἤτοι τὰς παραλλήλους).

*Ὅθεν: **Ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον** λέγεται τὸ παραλληλόγραμμον, ποὺ ἔχει ὅλας τὰς γωνίας του ὀρθάς, τὰς δὲ πλευράς του ἴσας ἀνὰ δύο (ἑκάστην μὲ τὴν ἀπέναντί της) (σχ. 41).*

5. *Σχῆμά του.*

Αἱ δίεδροί του γωνίαι ὅλαι εἶναι ὀρθαί, ἀφοῦ καὶ αἱ ἀντίστοιχοί των ἐπίπεδοι εἶναι ὀρθαί.

Συνεπῶς τὸ στερεὸν εἶναι παραλληλεπίπεδον ὀρθογώνιον.

Τὸ στερεὸν λοιπὸν εἶναι: ἑξάεδρον, παραλληλεπίπεδον, ὀρθογώνιον μὲ τὰς ἕδρας του ὀρθογώνια παραλληλόγραμμα, ἴσα ἀνὰ δύο· (ἕκαστον μὲ τὸ ἀπέναντί του).

Τὰ τοιαῦτα στερεὰ λέγονται παραλληλεπίπεδα ὀρθογώνια.

*Ὅθεν: **Ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον** λέγεται τὸ ἑξάεδρον παραλληλεπίπεδον, τοῦ ὁποίου ὅλαι αἱ ἕδραι εἶναι ὀρθογώνια παραλληλόγραμμα ἴσα καὶ παράλληλα ἀνὰ δύο, ἕκαστον μὲ τὸ ἀπέναντί του (σχ. 40).* Νὰ ὅλο τὸ γράψω.

2. Διαστάσεις ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου

Καὶ τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ἐπεκτείνεται ὅπως καὶ ὁ κύβος· πρὸς τὰ ἐμπρός, πρὸς τὰ πλάγια καὶ πρὸς τὰ ἄνω. Ἔχει λοιπὸν καὶ τοῦτο μῆκος, πλάτος καὶ ὕψος.

Ξεκινοῦν καὶ αἱ τρεῖς ἀπὸ μιὰ κορυφὴ τῆς ἕδρας τῆς βάσεως καὶ διευθύνονται: μία πρὸς τὰ ἐμπρὸς (τὸ μῆκος ΑΔ), μία πρὸς τὰ πλάγια (τὸ πλάτος ΑΒ) καὶ μία πρὸς τὰ ἄνω (τὸ ὕψος ΑΕ σχ. 40).

*Ὅθεν: α) **Μῆκος*** τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι μία ἀκμὴ τῆς ἕδρας τῆς βάσεώς του (ἡ ΑΔ. σχ. 40).

*β) **Πλάτος*** τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι ἡ ἀκμὴ τῆς ἕδρας τῆς βάσεώς του, ποὺ εἶναι κάθετος εἰς τὴν ἀκμὴν τοῦ μήκους (ΑΒ).

*γ) **Ὕψος*** τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι ἡ παράπλευρός του ἀκμή, ποὺ εἶναι κάθετος εἰς τὰς ἀκμὰς τοῦ μήκους καὶ τοῦ πλάτους αὐτοῦ (ΑΕ).

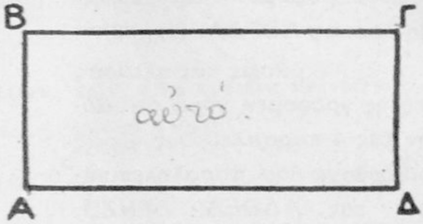
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

3. Ἰχνογράφησις ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου

Ἔστω ὅτι ἔχομεν νὰ ἰχνογραφήσωμεν ὀρθογ. παραλληλόγραμμον μὲ βάσιν 0,25 τοῦ μέτρου καὶ ὕψος 0,15 τοῦ μέτρου.

Πρὸς τοῦτο:

1) Γράφομεν μὲ τὸν κανόνα εὐθεῖαν γραμμὴν καὶ λαμβάνομεν εἰς αὐτὴν μέρος ΑΔ = 0,055 μ.



Σχ. 43

Στὰ ἄκρα τῆς ΑΔ φέρομεν μὲ τὸν γνώμονα καθέτους ἴσας μὲ τὸ ὕψος τοῦ ὀρθ. παραλληλογράμμου τὰς ΒΑ = 0,025 μ. καὶ ΓΔ = 0,025 μ.

3) Ἑνώνομεν ἔπειτα τὰ ἄκρα Β καὶ Γ διὰ τῆς εὐθείας ΒΓ. Τοιουτοτρόπως ἰχνογραφήσαμεν τὸ ὀρθογ. παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ μὲ βάσιν ΑΔ = 0,055 μ. καὶ ὕψος ΑΒ=0,025 μ.

Τοιουτοτρόπως δέ, ἰχνογραφοῦμεν καὶ κάθε ὀρθογ. παραλληλόγραμμον, τοῦ ὁποίου μᾶς δίδεται ἡ βάσις καὶ τὸ ὕψος.

4. Κατασκευὴ ὀρθογ. παραλληλογράμμου ἀπὸ χαρτόνι

Κάμνομεν ὅ,τι καὶ εἰς τὴν κατασκευὴν τοῦ τετραγώνου ἀπὸ χαρτόνι· ἤτοι ἰχνογραφοῦμεν πρῶτον στὸ χαρτόνι τὸ ὀρθογ. παραλληλόγραμμον καὶ κόπτομεν ἔπειτα εἰς τὴν περίμετρόν του.

5. Ἰχνογράφησις ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου

Κάμνομεν ὅτι ἀκριβῶς καὶ εἰς τὴν ἰχνογράφησιν κύβου (σελ. 23 § 19) μὲ τὴν διαφορὰν ὅτι ἰχνογραφοῦμεν ὀρθογώνια παραλληλόγραμμα ἀντὶ τετραγώνων.

Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον λοιπὸν ἰχνογραφοῦμεν τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ΑΒΓΔΕΖΗΘ (σχ. 40).

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

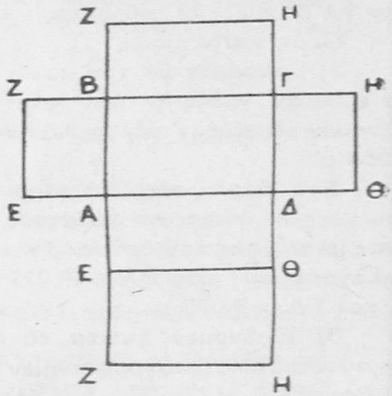
6. Ἰχνογράφησις τοῦ ἀναπτύγματος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου

Πρὸς τοῦτο:

1) Γράφομεν τὴν ἕδραν τῆς βάσεως ΑΒΓΔΑ. (σχ. 42).

2) Μὲ βάσεις τὰς πλευρὰς ταύτης γράφομεν γύρω ἀπ' αὐτὴν τὰς 4 παραπλεύρους ἕδρας τοῦ ὀρθογωνίου παραληλεπιπέδου· τὰς ΑΔΘΕΑ, ΒΓΗΖΒ, ΑΒΖΕΑ, ΔΓΗΘΔ.

3) Μὲ βάσιν τὴν πλευρὰν (ΕΘ) γράφομεν τὴν ἀπέναντι τῆς ἕδρας τῆς βάσεως ἕδραν ΕΘΗΖΕ.



Σχ. 42

7. Κατασκευὴ ὀρθ. παραλληλεπιπέδου ἀπὸ χαρτόνι

Κάμνομεν ὅ,τι καὶ εἰς τὸν κύβον· ἤτοι:

1) Ἰχνογραφοῦμεν τὸ ἀνάπτυγμα τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου. 2) Κόπτομεν αὐτὸ εἰς τὴν περίμετρόν του. 3) Χαράσσομεν ἐλαφρὰ τὰς ἀκμάς, ποὺ δὲν ἐκόπησαν. 4) Λυγίζομεν τὰς ἕδρας καταλλήλως. ε) Κολλοῦμεν τέλος τὰς ἕδρας εἰς τὰς μὴ κεκολημένας ἀκμὰς μὲ χαρτίνας λωρίδας καὶ γόμμα.

Ἀσκήσεις

1. Ἀναγνώσατε καὶ εἰς τὰ δύο σχήματα 41 καὶ 42 τὰς 6 ἕδρας ἑκάστου χωριστά.

2. Κάμετε τὸ ἴδιον, ἀλλ' ἀναγινώσκοντες τὴν αὐτὴν ἕδραν καὶ εἰς τὰ δύο.

3. Ἀναγνώσατε πρῶτα εἰς τὸ ἕνα καὶ ἔπειτα εἰς τὸ ἄλλο τὰς ἴσας καὶ παραλλήλους ἀνὰ δύο ἕδρας του.

4. Πόσας διέδρους γωνίας ἔχει τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον; Πόσας τριέδρους; Πόσας ἐπιπέδους; Πόσας ἀκμάς; Πόσας κορυφάς;

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

5. Δείξατε τὰς διέδρους γωνίας τοῦ δωματίου.

6. » » τριέδρους » » »

7. Διαβάσατε μόνον τὰς παραπλεύρους ἕδρας τοῦ σχ. 41 καὶ 42.

8. Νὰ βρῆιε τὰςς ὁμοιότητας καὶ τὰς διαφορὰς τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου καὶ τοῦ τετραγώνου.

9. Νὰ βρῆτε τὰς ὁμοιότητας καὶ διαφορὰς τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου καὶ τοῦ κύβου.

10. Ἰχνογραφήσατε ἓν ὀρθ. παραλληλόγραμμον μὲ τὰς διαγωνίους του.

8. Παράστασις τῶν εὐθειῶν, τῶν ἐπιφανειῶν καὶ τῶν στερεῶν σωμάτων σὲ χαρτὶ

(Κλίμαξ)

Εἶναι προφανὲς ὅτι ἡ παράστασις μιᾶς μεγάλης εὐθείας ἢ καμπύλης ἢ τεθλασμένης ἢ καὶ μικτῆς γραμμῆς μὲ τὸ πραγματικόν της μῆκος ἐπάνω στὸ μικρὸ φύλλο τοῦ βιβλίου τῆς γεωμετρίας δὲν εἶναι δυνατή. Ἑπομένως καὶ ἡ παράστασις πάνω στὸ ἴδιο φύλλο μιᾶς ἐπιφανείας μὲ πλευρὰς μεγάλας δὲν εἶναι εὔκολος νὰ γίνη μὲ τὰ πραγματικὰ μήκη τῶν πλευρῶν της. Ἐπίσης δὲν εἶναι εὔκολος νὰ γίνῃ πάνω στὰ μικρὰ φύλλα τοῦ βιβλίου καὶ ἡ παράστασις στερεῶν μεγάλων μὲ τὰ πραγματικὰ μήκη τῶν μεγάλων ἑδρῶν των.

Εὐκολονόητον λοιπὸν εἶναι πὼς ἐπάνω στὸ μικρὸ φύλλο τοῦ βιβλίου τῆς γεωμετρίας δὲν εἶναι εὔκολος ἡ παράστασις τῶν γραμμῶν μὲ τὰ πραγματικά των μήκη, καθὼς καὶ ἡ παράστασις ὅλων ἐν γένει τῶν μεγάλων γεωμετρικῶν σχημάτων. Γι' αὐτὸ οἱ ἄνθρωποι εὑρέθησαν στὴν ἀνάγκη νὰ σμικρύνουν ταῦτα καὶ νὰ τὰ παριστάνουν ὑπὸσμίκρυνσιν. Μία εὐθεῖα ὁδὸς π.χ. 1000 μέτρων παριστάνεται στὸ φύλλο ἐπάνω μὲ γραμμὴ $\frac{1}{100}$ ἢ $\frac{1}{1000}$ κ. λ. τοῦ μέτρου.

Εὐκολονόητον ἐπίσης εἶναι πὼς γιὰ νὰ παρασταθῇ ὑπὸ σμίκρυνσιν μία τεθλαμένη γραμμή, πρέπει τὸ κάθε τμῆμα αὐτῆς νὰ γραφῇ ὑπὸ τὴν ἰδίαν σμίκρυνσιν. Ἔτσι ἡ τεθλασμένη θὰ μᾶς παρουσιάζῃ ὑπὸ σμίκρυνσιν καὶ τὴν ὅλην της μορφὴν (τὴν ὅλην εἰκόνα της, τὸ σχῆμα της).

Κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον παριστάνεται ἐπάνω στὸ χαρτὶ καὶ κάθε ἐπιφάνεια. Ὅλαι αἱ πλευραὶ της δηλαδὴ παριστάνονται ὑπὸ τὴν αὐτὴν σμίκρυνσιν.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Καὶ στὴν παράσταση ἑνὸς στερεοῦ σώματος τὸ ἴδιον πρέπει νὰ συμβαίνῃ. Αἱ πλευραὶ ἑκάστου μέρους του πρέπει νὰ γράφωνται ὑπὸ τὴν αὐτὴν σμίκρυνσιν. Ἔτσι θὰ ἔχωμεν ἐνώπιόν μας ὑπὸ τὴν ἰδίαν σμίκρυνσιν καὶ τὴν ὅλην μορφὴν (ἤτοι τὴν εἰκόνα, τὸ σχῆμα) τοῦ στερεοῦ.

Ἔτσι λοιπὸν κατὰ τὴν παράστασιν μιᾶς ἐπιφανείας θὰ ὑπάρχῃ σταθερὰ ἀναλογία μεταξὺ τῶν μηκῶν τῶν γραμμῶν τοῦ σχήματος καὶ τῶν ἰδίων γραμμῶν τῆς πραγματικῆς ἐπιφανείας.

Ἡ σταθερὰ αὐτὴ ἀναλογία, ποὺ ὑπάρχει μεταξὺ τῶν μηκῶν ὅλων τῶν γραμμῶν τοῦ χάρτου μιᾶς ἐπιφανείας καὶ τῆς πραγματικῆς ἐπιφανείας λέγεται κλίμαξ.

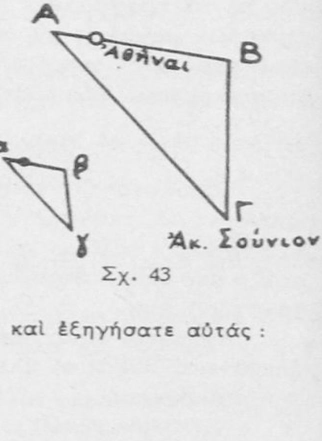
Ἡ κλίμαξ ὑπὸ τὴν ὁποίαν κατασκευάζονται οἱ χάρται σημειώνεται ἐπάνω στὸ χάρτη.

Οὕτως, ἐὰν σημειώνεται στὸ χάρτη κλίμαξ $\frac{1}{100}$ (= 1 : 100) θὰ πῇ ὅτι μῆκος 100 μέτρων παριστάνεται στὸ χάρτη μὲ μῆκος 1 μέτρου. Καὶ ἀντιθέτως· ἐὰν μία γραμμὴ στὸ χάρτη εἶναι 1 μέτρο θὰ πῇ ὅτι αὕτη στὴν πραγματικὴ ἐπιφάνεια εἶναι 100 μέτρα.

Ἀσκήσεις

1. Ὁ χάρτης τῆς Χερσονήσου ΑΒΓ (σχ. 43) ἔγινεν ὑπὸ κλίμακα $\frac{1}{1.700.000}$. Νὰ βρῆτε τὸ πραγματικὸν μῆκος τῶν πλευρῶν της.

2. Ὁ χάρτης τῆς αβγ τῆς αὐτῆς χερσονήσου ἔγινεν ὑπὸ κλίμακα $\frac{1}{10\,000\,000}$. Νὰ βρῆτε τὸ μῆκος τῶν πλευρῶν της.



Σχ. 43

5. Νὰ βρῆτε στὸ χάρτη σας τὴν ἀπόστασιν:

α) Πειραιῶς — Χανίων
β) Πειραιῶς — Ρόδου
γ) Ἀθηνῶν — Λαρίσης
δ) Ἀθηνῶν — Πατρῶν.

4. Νὰ κάνετε τὸ χάρτη τῆς αὐλῆς τοῦ σχολείου ὑπὸ κλίμακα $\frac{1}{200}$.

5. Ἀναγνώσατε τὰς ἀποκάτω κλίμακας καὶ ἐξηγήσατε αὐτάς:

α) $\frac{1}{100}$ (διὰ τὰ σχέδια οἰκοδομῶν)

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

β) $\frac{1}{1000}$ (διὰ σχέδια κτημάτων)

γ) $\frac{1}{50.000}$ (διὰ χάρτας στρατιωτικούς)

δ) $\frac{1}{1.000.00}$ (διὰ γεωγραφικοὺς χάρτας διεθνεῖς)

ε) $\frac{1}{1.500.000}$ (διὰ γεωγραφικοὺς σχολικοὺς χάρτας)

στ) $\frac{1}{10.000.000}$ » » » »

9. Εὕρεσις τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ἐπιφανείας ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου

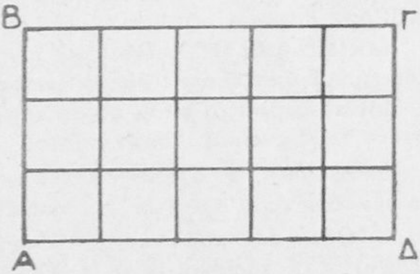
Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ἀποτελεῖται ἀπὸ 6 ἕδρας σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου.

Διὰ νὰ εὕρωμεν λοιπὸν τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου πρέπει νὰ ξεύρωμεν πῶς εὑρίσκεται τὸ ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου.

10. Εὕρεσις τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ἐπιφανείας ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου.

Βάσις τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου λέγεται μία πλευρά του: π.χ. ἡ ΑΔ (σχ. 44).

Ὕψος τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου λέγεται μία πλευρά του κάθετος εἰς τὴν βάσιν του ἡ ΑΒ (σχ. 44). Ἔστω ὅτι πρόκειται νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ (σχ. 44).



Σχ 44

Μετροῦμεν τὴν βάσιν του καὶ τὸ ὕψος του καὶ ἔστω ἡ βάσις του ΑΔ = 5 μ. καὶ τὸ ὕψος του ΑΒ = 3 μ. Χωρίζο-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

μεν τὴν βάσιν του καὶ τὸ ὕψος του σὲ μέτρα καὶ ἀπὸ τὰς διαιρέσεις των φέρομεν καθέτους εἰς τὴν βάσιν ΑΔ καὶ τὸ ὕψος ΑΒ. Παρατηροῦμεν τότε ὅτι τὸ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον διαιρεῖται σὲ 15 τ.μ. ἤτοι τὸ ἐμβαδόν του εἶναι 15 τ.μ 'Αλλὰ τοῦτο εὑρίσκεται καὶ ἂν πολλαπλασιασθῇ ἡ βάσις του ἐπὶ τὸ ὕψος του· ἤτοι $5 \times 3 = 15$ τ. μ.

"Οθεν: Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου πολλαπλασιάζομεν τὴν βάσιν του ἐπὶ τὸ ὕψος του.

11. Εὕρεσις τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ἐπιφανείας ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου

Ἔστω ὅτι πρόκειται νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου (σχ. 40), τοῦ ὁποίου αἱ διαστάσεις ἔστωσαν: μῆκος ἡ ΑΔ = 8 μέτρα· πλάτος ἡ ΑΒ = 4 μέτρα καὶ ὕψος ἡ ΑΕ = 2 μέτρα:

α) Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἕδρας τῆς βάσεως ΑΒΓΔΑ εἶναι

$8 \times 4 = 32$ τετρ. μέτρα.

β) Τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἕδρας ΑΔΘΕΑ εἶναι

$8 \times 2 = 16$ τετρ. μέτρα

γ) Τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἕδρας ΑΒΖΕΑ εἶναι $4 \times 2 = 8$ τετρ. μέτρα.

Τὸ ἐμβαδὸν ὅθεν τῶν τριῶν τούτων ἑδρῶν εἶναι

$32 + 16 + 8 = 56$ τετρ. μέτρα.

Ἀλλὰ ἡ ἕδρα ΕΖΗΘΕ εἶναι ἴση μὲ τὴν ἕδραν τῆς βάσεως ΑΒΓΔΑ· ἄρα καὶ αὐτῆς τὸ ἐμβαδὸν εἶναι 32 τ. μ.

Ἡ ἕδρα ΒΓΗΖΒ εἶναι ἴση μὲ τὴν ἕδραν ΑΔΘΕΑ· ἄρα καὶ αὐτῆς τὸ ἐμβαδὸν εἶναι 16 τετρ. μέτρα.

Καὶ ἡ ἕδρα ΔΓΗΘΔ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΑΒΖΕΑ· ἄρα καὶ τὸ ἐμβαδὸν ταύτης εἶναι 8 τετρ. μέτρα.

Ἄρα καὶ τῶν ἄλλων τριῶν ἑδρῶν ΕΖΗΘΕ, ΒΓΗΖΒ καὶ ΔΓΗΘΔ τὸ ἐμβαδὸν εἶναι $32 + 16 + 8 = 56$ τετρ. μέτρ.

"Οθεν, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῶν τριῶν πρώτων ἑδρῶν ἐπὶ 2, εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν καὶ τῶν 6 ἑδρῶν τοῦ ὀρθογ. παραλληλεπιπέδου· ἤτοι $56 \times 2 = 112$ τετρ. μέτρα.

Παρατηροῦμεν δὲ ὅτι: πρῶτον βρήκαμε τὸ ἐμβαδὸν τῶν τριῶν ἑδρῶν ΑΒΓΔΑ, ΑΔΘΕΑ καὶ ΑΒΖΕΑ ἑκάστης χωριστά· ἤτοι τῆς

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

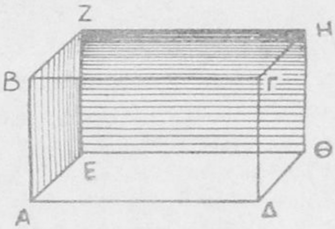
ἕδρας τῆς βάσεως καὶ τῶν δύο παραπλεύρων ἑδρῶν, αἱ ὁποῖαι μὲ τὴν ἕδραν τῆς βάσεως σχηματίζοτν μίαν τρίεδρον γωνίαν. Δεύτερον προσθέσαμε τὰ ἐμβαδὰ τῶν τριῶν τούτων ἑδρῶν καὶ τὸ ἄθροισμα πολλαπλασιάσαμε ἐπὶ 2.

Ὅθεν: Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἕδρας τῆς βάσεώς του καὶ τὸ ἐμβαδὸν δύο παραπλεύρων ἑδρῶν μετὰ τῶν ὁποίων αὕτη σχηματίζει μίαν τρίεδρον γωνίαν, καθεμιᾶς δὲ χωριστά. Προσθέτομεν ἔπειτα τὰ τρία ἐμβαδὰ καὶ τὸ ἄθροισμα πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 2.

12. Εὕρεσις τοῦ ὄγκου ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου

1. Ἔστω ὅτι πρόκειται νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου σχ. 45, τοῦ ὁποίου αἱ διαστάσεις εἶναι:

ΑΔ = 8 μ. τὸ μῆκος· ΑΒ = 4 μ. τὸ πλάτος· καὶ ΑΕ = 2 μ. τὸ ὕψος.



Σχ. 45

Σκέψις: Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἕδρας τῆς βάσεώς του ΑΒΓΔΑ εἶναι 8 × 4 = 32 τ.μ.

Χωρίζομεν λοιπὸν τὴν ἕδραν τῆς βάσεώς του στὰ 32 τ.μ. καὶ ἐπάνω σ' αὐτὰ τοποθετοῦμεν 32 κ.μ. Θὰ σχηματισθῇ ἔτσι ἓν στερεὸν μὲ διαστάσεις μῆκος 8 μ. πλάτος 4 μ. καὶ ὕψος 1 μ. Ἐπὶ τοῦ στερεοῦ τούτου τοποθετοῦμεν ἄλλο ὅμοιον. Θὰ σχηματισθῇ τότε στερεὸν μὲ διαστάσεις: μῆκος 8 μ., πλάτος 4 μ. καὶ ὕψος 2 μέτρων· ἤτοι τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον, τοῦ ὁποίου ζητοῦμεν τὸν ὄγκον. Φανερὸν ἤδη ὅτι ὁ ὄγκος τούτου εἶναι 32 × 2 = 64 κ. μ.

Ἀλλὰ παρατηροῦμεν ὅτι οὗτος βρίσκεται καὶ ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸ μῆκος 8 ἐπὶ τὸ πλάτος 4 καὶ τὸ γινόμενον αὐτῶν ἐπὶ τὸ ὕψος 2· ἤτοι (8 × 4) × 2 = 32 × 2 = 64 κ. μ.

Ὅθεν: διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου πολλαπλασιάζομεν τὸ μῆκος του ἐπὶ τὸ πλάτος καὶ τὸ γινόμενον αὐτῶν ἐπὶ τὸ ὕψος του· ἤτοι:

«Ὁ ὄγκος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι γινόμενον τῶν τριῶν του διαστάσεων».

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

13. Προβλήματα ὀρθογωνίου Παραλληλεπιπέδου

ΟΜΑΣ Α'. (ὀρθογ. παραλληλογράμμου).

1. Εἷς ἀγρὸς ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις εἶναι 75 μέτρα, τὸ δὲ ὕψος 40 μέτρα. Πόσα μέτρα εἶναι ἡ περίμετρός του !

2. Μία αὐλὴ ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου, τοῦ ὁποίου ἡ περίμετρος εἶναι 360 μέτρα, τὸ δὲ μῆκος του 105 μέτρα. Πόσα μέτρα εἶναι ἑκάστη τῶν ἄλλων πλευρῶν του ;

3. Μία ἄμπελος ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου μὲ βάσιν 45 μέτρων καὶ ὕψος 25,50 μέτρων Πόσον συρματόπλεγμα θὰ χρειασθῇ διὰ τὴν περίφραξίν της διὰ 7 συρμάτων ;

4. Εἷς ἀγρὸς ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου, τοῦ ὁποίου τὸ μῆκος εἶναι 56.60 μέτρα, τὸ δὲ πλάτος 38,75 μέτρα· Ποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδόν του ;

5. Εἷς κῆπος ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου καὶ εἶναι 575 τετρ. μέτρων. Ἐὰν τὸ μῆκος του εἶναι 25 μέτρα, ποῖον εἶναι τὸ πλάτος του ;

6 Ἓν οἰκόπεδον ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου. Ἡ περίμετρός του εἶναι 150 μ. τὸ δὲ μῆκος του 50 μ.· πόσο εἶναι τὸ πλάτος του ; Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδόν του ;

7. Εἷς ἀγρὸς σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου ἔχει βάσιν μὲν 100 μέτρων, τὴν δὲ κάθετον εἰς ταύτην πλευρὰν 50,50 μέτρων. Πόσα νέα στρέμματα εἶναι οὗτος ;

8. Ἓν οἰκόπεδον ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου μὲ βάσιν 50,60 μέτρα καὶ ὕψος 40 μέτρα. Τοῦτο ἐπωλήθη 101.800 δραχμάς. Πρὸς πόσον ἐπωλήθη τὸ τετραγ. μέτρον ;

9. Ἓν οἰκόπεδον ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου μὲ βάσιν 50 μέτρων καὶ ὕψος 35 μέτρων. Ταῦτο πωλεῖται πρὸς 200 δραχμὰς τὸ τετραγωνικὸν μέτρον. Ποία εἶναι ἡ ἀξία του ;

10. Τὸ πάτωμα ἑνὸς δωματίου ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου μὲ μῆκος μὲν 5,40 μέτρων, πλάτος δὲ 4,50 μέτρων. Πόσαι σανίδες θὰ χρειασθοῦν διὰ νὰ στρωθῇ, ἐὰν τὸ μῆκος ἑκάστης σανίδος εἶναι 1,80 μέτρων, τὸ δὲ πλάτος 0,25 μέτρων ;

11. Τὸ πάτωμα ἑνὸς μαγειρείου ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου μὲ μῆκος 6,40 μέτρων, πλάτος δὲ 4,80 μέτρων. Πόσα πλακάκια σχήματος τετραγώνου θὰ χρειασθοῦν διὰ τὴν πλακόστρωσίν του, ἐὰν ἡ περίμετρός των εἶναι 0,64 τοῦ μέτρου ;

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

12. Τὸ πάτωμα ἑνὸς δωματίου ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου, τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν εἶναι 32,40 τετραγωνικὰ μέτρα· τοῦτο ἐστρώθη μὲ τάπητα μήκους 27 μέτρων. Ποῖον εἶναι τὸ πλάτος τοῦ τάπητος ;

13. Ἡ βάσις ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου εἶναι 10,5 μ. τὸ δὲ ὕψος 5,5. Ποία εἶναι ἡ περίμετρός του ; Ποῖον τὸ ἐμβαδόν του ;

14. Ἡ βάσις ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου εἶναι 4 μ., ἡ δὲ περίμετρος 12 μ. ποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδόν του ;

15. Κατασκευάσατε ἀπὸ χαρτόνι ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον καὶ εὕρετε : α) Τὴν βάσιν του. β) Τὸ ὕψος του. γ) Τὴ περίμετρόν του. δ) Τὸ ἐμβαδόν του.

ΟΜΑΣ Β΄. (Ἐμβαδοῦ καὶ ὄγκου ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου).

1. Ἓν ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ἔχει διαστάσεις : μῆκος 8 μ., πλάτος 5 μ. καὶ ὕψος 3 μέτρων· α) Ποῖον τὸ ἐμβαδόν του ; β) Ποῖος ὁ ὄγκος του ;

2. Μία δεξαμενὴ ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου μὲ μῆκος 15 μέτρα, πλάτος 8.50 μ. καὶ ὕψος 5 μ. Πόσα κυβικὰ μέτρα ὕδατος χωρεῖ ;

3. Ἓν δωμάτιον ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου μὲ διαστάσεις : μῆκος 5 μ., πλάτος 3,80 μ. καὶ ὕψος 4 μ. Πόσα κυβικὰ μέτρα ἀέρος χωρεῖ ;

4. Μία σανὶς ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου μὲ διαστάσεις : μῆκος 4 μ., πλάτος 0,45 μ. καὶ πάχος 0,040 μ. ;

α) Ποῖον τὸ ἐμβαδόν της !

β) Ποῖος ὁ ὄγκος της ;

5. Εἰς μίαν τάφρον μήκους 35 μ. καὶ πλάτος 2,40 μ. ὑπάρχει νερὸ εἰς ὕψος 0,75 μ. Πόσα κυβικὰ μέτρα ὕδατος εὑρίσκονται εἰς αὐτήν ;

6. Μία πλατεῖα ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου τοῦ ὁποίου τὸ μῆκος εἶναι 80,5 μ., τὸ δὲ πλάτος 70 μ. Τὴν ἐπιφάνειαν ταύτης πρόκειται ν' ἀναβιβάσωμεν κατὰ 0,40 μ. Πόσα κυβικὰ μέτρα χώματος πρέπει νὰ προστεθοῦν ;

7. Ἓν κιβώτιον ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου μὲ διαστάσεις : μῆκος 1,50 μ. πλάτος 0,80 μ. καὶ ὕψος 0,50 μ. Πόσες πλάκες σάπωνος σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου μὲ δια-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

στάσεις: μῆκος 0,15 μ., πλάτος 0,05 μ. καὶ ὕψος 0,04 μ. χωροῦν σ' αὐτό;

8. Μία χορταποθήκη ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου μὲ διαστάσεις: μῆκος 40 μ., πλάτος 30 μ. καὶ ὕψος 10 μ. Πόσα δεμάτια χόρτου ἰδίου σχήματος καὶ μὲ διαστάσεις: μῆκος 1,20 μ. πλάτος 1 μ. καὶ ὕψος 1 μ. χωρεῖ αὕτη;

9. Κατασκευάσατε ἀπὸ χαρτόνι ἓν ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον καὶ εὕρετε: α) Πόσα μέτρα εἶναι ὅλαι αἱ ἀκμαί του; β) τὸ ἐμβαδόν του; γ) τὸν ὄγκον του;

10. Ἕνα τεπόζιτο ἔχει διαστάσεις: 2 μ., 1 μ. καὶ 0,75 μ. Ποῖος ὁ ὄγκος του καὶ πόσα κιλὰ νερὸ χωρεῖ;

11. Τὸ πάτωμα τοῦ δωματίου μας ἔχει ἐμβαδὸν 50,4 τετρ. μέτρα, τὸ ὕψος δὲ τούτου εἶναι 6 μέτρα. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος του;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ'

ΠΛΑΓΙΟΝ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΠΙΠΕΔΟΝ

(Οἱ μαθηταὶ παρατηροῦν τὸ πρὸ αὐτῶν πλάγιον παραλληλεπίπεδον)

1. Παρατηρήσεις

1. Ὄγκος καὶ σχῆμά του.

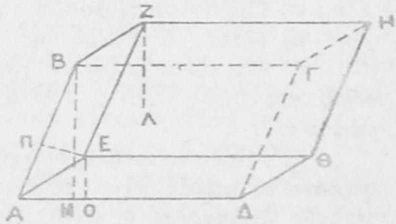
1. Ἔχει ὡρισμένον ὄγκον καὶ σχῆμα· ἤτοι εἶναι σῶμα στερεόν. (σχ. 46).

2. Ἐπιφάνειά του.

1) Ἡ ἐπιφάνειά του ἀποτελεῖται ἀπὸ 6 ἕδρας. Εἶναι ὅθεν πολύεδρον ἑξάεδρον.

2) Αἱ 6 ἕδραι του εἶναι ὅλαι ἐπίπεδοι. (Πῶς ἐλέγχομεν τοῦτο);

3) Καὶ τοῦτο στηρίζεται διὰ μιᾶς ἕδρας του, ἡ ὁποία λέγεται ἕδρα τῆς βάσεως. (ΑΒΓΔ σχ. 46).



Σχ. 46

4) Αἱ ἕδραι του, ποὺ ἑνοῦνται μὲ τὴν ἕδραν τῆς βάσεώς του καὶ μὲ τὴν ἀπέναντί της, ἀποτελοῦν τὴν παράπλευρόν του ἐπιφάνειαν καὶ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

λέγονται γι' αὐτὸ παράπλευροι ἕδραι. (ΑΔΘΕΑ, ΔΓΗΘΔ, ΓΗΖΒΓ, ΖΒΑΕΖ).

5) Ἐὰν τοποθετήσωμεν τοῦτο σὲ χαρτόνι καὶ ἰχνογραφήσωμεν ἀνὰ μίαν τὰς ἕδρας του καὶ τὰς ἐπιθέσωμεν τὴν μίαν ἐπάνω εἰς τὴν ἄλλην, ἐφαρμόζουν ἀκριβῶς μόνον ἡ καθεμιὰ μὲ τὴν ἀπέναντί της. Ἄρα εἶναι ἴσαι μόνον ἀνὰ δύο· ἡ καθεμιὰ μὲ τὴν ἀπέναντί της.

6) Ἐὰν ἐπεκτείνωμεν τὰς ἕδρας του καθ' ὅλας τὰς διευθύνσεις, ἑκάστη δὲν συναντᾶται μὲ τὴν ἀπέναντί της· ἄρα αἱ ἕδραι του εἶναι παράλληλοι ἀνὰ δύο. Εἶναι λοιπὸν παραλληλεπίπεδον.

3. *Δίεδροι καὶ τρίεδροι γωνίαι.*

1) Καὶ τούτου αἱ ἕδραι ἑνοῦνται ἀνὰ δύο καὶ σχηματίζουν διέδρους γωνίας ὡς τὴν ΑΕΖΒΓΔΑ.

2) Ἐπίσης ἑνοῦνται καὶ ἀνὰ τρεῖς καὶ σχηματίζουν γωνίας τριέδρους ἢ στερεὰς (τὰς Α,Β,Γ,Δ,Ε,Ζ,Η,Θ). Αἱ ἕδραι ΑΒΖΕΑ, ΑΕΘΔΑ καὶ ΑΒΓΔΑ σχηματίζουν τὴν τρίεδρον γωνίαν Α (σχ. 46).

3) Αἱ ἑνώσεις τῶν ἑδρῶν τῶν διέδρων γωνιῶν κάμνουν εὐθείας γραμμάς, ποὺ λέγονται ἀκμαί. (ὡς ἡ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ· ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ· ΑΕ, ΒΖ, ΓΗ, ΔΘ).

4. *Σχῆμα τῶν ἑδρῶν του.*

1) Καὶ τὰ ἄκρα ἑκάστης ἕδρας μᾶς δίνουν εὐθείας γραμμάς, αἱ ὁποῖαι λέγονται πλευραί της. Ὅθεν αἱ ἕδραι του εἶναι εὐθύγραμμα σχήματα.

2) Ἐὰν αἱ πλευραὶ ἑκάστης ἕδρας ἐπεκταθοῦν καὶ κατὰ τὰ δύο ἄκρα των δὲν συναντῶνται ἀνὰ δύο (ἑκάστη μὲ τὴν ἀπέναντί της). Ἄρα αἱ πλευραὶ ἑκάστης ἕδρας του εἶναι παράλληλοι ἀνὰ δύο. Ὥστε αἱ ἕδραι καὶ τοῦ στερεοῦ τούτου εἶναι παραλληλόγραμμα. Γι' αὐτὸ θὰ ἔχῃ κ.ὶ τὰς ἀπέναντί του πλευρὰς ἴσας.

3. Αἱ π· ·ραὶ ἑκάστης ἕδρας του ἑνοῦνται διὰ τῶν ἄκρων των καὶ κάμνουν ·ιπέδους γωνίας· π.χ. τὴν ΒΑΔ, ΑΔΓ, ΔΓΒ, ΓΒΑ.

4. Ἐά· ·έγξωμεν μὲ τὸν γνώμονα τὰς πλευρὰς τῶν ἐπιπέδων του γωνιῶν ἴδωμεν ὅτι αὗται δὲν εἶναι κάθετοι. Ἑπομένως αἱ ἐπίπεδοι γω· ·ι τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου δὲν εἶναι ὀρθαί, ἀλλ' εἶναι ἄ·λαι ὀξεῖαι καὶ ἄλλαι ἀμβλεῖαι. Εἶναι λοιπὸν κάθε ἕδρα του παραλληλόγραμμον ἔχον τὰς γωνίας του ὀξείας καὶ ἀμβλείας. Τὰ σχήματα αὐτὰ λέγονται πλάγια παραλληλόγραμμα.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ὅθεν: Πλάγιον παραλληλόγραμμον λέγεται τὸ παραλληλόγραμμον ποὺ ἔχει τὰς γωνίας του ἄλλας ὀξείας καὶ ἄλλας ἀμβλείας, τὰς δὲ πλευρὰς ἴσας ἀνὰ δύο.

5. Σχῆμα τοῦ ἑξαέδρου στερεοῦ.

1. Αἱ δίεδροί του γωνίαι, ποὺ εἶναι ἴσαι μὲ τὰς ἀντιστοίχους των ἐπιπέδους γωνίας, εἶναι ἐπίσης ἄλλαι ὀξεῖαι καὶ ἄλλαι ἀμβλεῖαι.

Εἶναι λοιπὸν τὸ στερεὸν ἑξάεδρον, παραλληλεπίπεδον, ἔχει τὰς διέδρους του γωνίας ὀξείας ἢ ἀμβλείας, τὰς δὲ ἕδρας πλάγια παραλληλόγραμμα, ἴσα καὶ παράλληλα ἀνὰ δύο (καθὲν μὲ τὸ ἀπέναντί του).

Τὰ τοιαῦτα στερεὰ λέγονται πλάγια παραλληλεπίπεδα.

Ὅθεν: Πλάγιον παραλληλεπίπεδον λέγεται τὸ ἑξάεδρον παραλληλεπίπεδον, τοῦ ὁποίου αἱ ἕδραι εἶναι πλάγια παραλληλόγραμμα, ἴσα δὲ καὶ παράλληλα ἀνὰ δύο, ἕκαστον μὲ τὸ ἀπέναντί του. (σχ. 46).

2. Διαστάσεις τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου

Καὶ τὸ πλάγιον παραλληλεπίπεδον ἔχει τὰς αὐτὰς ἐπεκτάσεις μὲ τὰ προηγούμενα στερεά. Καὶ αὐτὸ λοιπὸν ἔχει τρεῖς διαστάσεις, μῆκος, πλάτος καὶ ὕψος.

Ἀλλ' αἱ ἐπεκτάσεις του δὲν εἶναι κάθετοι μεταξύ των καὶ φέρομεν ἡμεῖς τοιαύτας εἰς τὸ μῆκος, γιὰ νὰ μετρήσωμεν τὸ πλάτος καὶ τὸ ὕψος.

Ὅθεν: α) Μῆκος τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου λέγεται μιὰ ἀκμὴ τῆς ἕδρας τῆς βάσεώς του. (ΑΔ σχ. 46).

β) Πλάτος τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου, λέγεται ἡ κάθετος εὐθεῖα, ποὺ φέρομεν εἰς τὴν ἀκμὴν τοῦ μήκους ἀπ' τὴν ἀπέναντί της ἀκμὴν τῆς βάσεως (ἡ ΒΜ σχ. 46).

γ) Ὕψος τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου, λέγεται ἡ κάθετος, ποὺ ἄγεται εἰς τὴν ἕδραν τῆς βάσεως ΑΒΓΔΑ, ἀπὸ ἓν σημεῖον τῆς ἀπέναντί της ἕδρας ΕΖΗΘΕ· (ἡ ΖΛ σχ. 46).

3. Ἰχνογράφησις πλαγίου παραλληλογράμμου

Διὰ νὰ ἰχνογραφήσωμεν πλάγιον παραλληλόγραμμον:

α) Γράφομεν μὲ τὸν κανόνα μίαν γωνίαν ὀξεῖαν τὴν Α (σχ. 47).

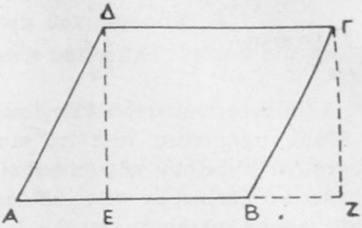
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

β) Φέρομεν μὲ τὸν κανόνα παράλληλον τῆς ΑΒ πλευρᾶς της τὴν ΔΓ.

γ) Φέρομεν ἐπίσης μὲ τὸν κανόνα παράλληλον τῆς ἄλλης πλευρᾶς τῆς ΑΔ τὴν ΒΓ.

δ) Ἐπεκτείνομεν τὰς παραλλήλους ταύτας μέχρι συναντήσεώς των καὶ ἔχομεν τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔΑ (σχ. 47).

2. Διὰ νὰ γράψωμεν ὅμως ἓν ὡρισμένον πλάγιον παραλληλόγραμμον ;



Σχ. 47

α) Γράφομεν μὲ τὸν κανόνα μίαν εὐθεῖαν καὶ λαμβάνομεν εἰς αὐτὴν μέρος ἴσον μὲ μίαν πλευρὰν τοῦ παραλληλογράμμου.

β) Γράφομεν εἰς τὰ ἄκρα αὐτῆς τὰς δύο γωνίας τοῦ πλαγίου παραλληλογράμμου (ὀξεῖαν καὶ ἀμβλεῖαν).

γ) Εἰς τὰς πλευρὰς τῶν γωνιῶν τούτων λαμβάνομεν μέρη ἴσα μὲ τὰς πλευρὰς τοῦ παραλληλογράμμου.

Τέλος ἑνοῦμεν τὰ ἄκρα τῶν πλευρῶν των δι' εὐθείας.

4. Κατασκευὴ πλαγίου παραλληλογράμμου ἀπὸ χαρτόνι

Πρὸς τοῦτο ἰχνογραφοῦμεν πρῶτον τὸ πλάγιον παραλληλόγραμμον στὸ χαρτόνι, καὶ ἔπειτα κόπτομεν τὸ χαρτόνι εἰς τὰ χαραχθείσας πλευράς.

5. Ἰχνογράφησις πλαγίου παραλληλεπίπεδου

Διὰ νὰ γράψωμεν πλάγιον παραλληλεπίπεδον κάμνομεν ὅ,τι καὶ διὰ τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον μὲ τὴν διαφορὰν ὅτι ἀντὶ δύο ἴσων ὀρθργωνίων παραλληλογράμμων ἰχνογραφοῦμεν στὸ χαρτόνι δύο πλάγια παραλληλόγραμμα ἴσα.

Ἀσκήσεις :

1) Ἀναγνώσατε τὰς ἕδρας τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου (σχ. 46).

2) Ἀναγνώσατε τὰς ἀνὰ 2 ἴσας καὶ παραλλήλους ἕδρας.

3) Τὸ πλάγιον παραλληλεπίπεδον ἔχει : Πόσας διέδρους γωνίας ; Πόσας τριέδρους ; Πόσας ἐπιπέδους ;

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

4) Ποῖαι αἱ ὁμοιότητες τοῦ πλαγίου καὶ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου;

5) Ποῖαι αἱ διαφοραὶ αὐτῶν;

6) Ποῖα κοινὰ ἔχουν τὸ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον καὶ τὸ πλάγιον τοιοῦτον;

6. Εὕρεσις τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ἐπιφανείας πλαγίου παραλληλεπιπέδου

Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου ἀποτελεῖται ἀπὸ 6 ἕδρας σχήματος πλαγίου παραλληλογράμμου. Διὰ νὰ εὕρωμεν λοιπὸν τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας ἑνὸς πλαγίου παραλληλεπιπέδου πρέπει νὰ ξεύρωμεν πῶς εὑρίσκεται τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας πλαγίου παραλληλογράμμου.

7. Εὕρεσις τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ἐπιφανείας πλαγίου παραλληλογράμμου

1. Ἔστω ὅτι ἔχομεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πλαγίου παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ (σχ. 47).

Μετροῦμεν τὴν βάσιν του ΑΒ καὶ τὸ ὕψος του ΔΕ καὶ ἔστω ΑΒ = 4 μ. καὶ ΔΕ = 3 μ.

Ἀποκόπτομεν τὸ τρίγωνον ΑΔΕ καὶ τὸ τοποθετοῦμεν τοιουτοτρόπως, ὥστε ἡ πλευρὰ τοῦ ΑΔ νὰ πέσῃ εἰς τὴν ἴσην της ΒΓ. Σχηματίζεται τότε τὸ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον ΔΓΖΕΔ, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις ΕΖ = ΑΒ = 4 μέτρα καὶ τὸ ὕψος ΔΕ = 3 μέτρα· τὸ δὲ ἐμβαδόν του $4 \times 3 = 12$ τ. μ.

Ἀλλὰ τὸ ὀρθογώνιον τοῦτο παραλληλόγραμμον φανερὸν ὅτι εἶναι ἴσον μὲ τὸ πλάγιον παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ. Ἄρα καὶ τὸ ἐμβαδὸν τούτου εἶναι 12 τ. μ. τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται καὶ σ' αὐτό, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὴν βάσιν του ἐπὶ τὸ ὕψος του· ἤτοι $4 \times 3 = 12$ τ μ.

Ὅθεν: Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς πλαγίου παραλληλογράμμου πολλαπλασιάζομεν τὴν βάσιν του ἐπὶ τὸ ὕψος του.

9. Εὕρεσις τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ἐπιφανείας πλαγίου παραλληλεπιπέδου

Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου ἀποτελεῖται ἀπὸ 6 πλάγια παραλληλόγραμμα, ἴσα μεταξύ των ἀνὰ δύο, καθένα μὲ τὸ ἀπέναντί του.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἐπομένως εὑρίσκοντες τὸ ἐμβαδὸν μιᾶς ἕδρας τούτου γνωρίζομεν καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἀπέναντί της.

Ἔστω ὅτι πρόκειται νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου (σχ. 48), τοῦ ὁποίου ἔστω:

α) Τῆς ἕδρας τῆς βάσεώς του ΑΒΓΔΑ τὸ μῆκος ΑΔ = 40 μέτρα καὶ τὸ ὕψος ΒΜ = 19 μέτρα.

β) Τῆς ἕδρας ΑΔΘΕΑ τὸ μῆκος ΑΔ = 40 μέτρα καὶ τὸ ὕψος ΕΟ = 6 μέτρα.

γ) Τῆς ἕδρας ΑΒΖΕΑ τὸ μῆκος ΑΒ = 20 μέτρα καὶ τὸ ὕψος ΕΠ = 6 μέτρα.

δ) Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἕδρας τῆς βάσεώς του ΑΒΓΔΑ εἶναι 40 × 19 = 760 τετρ. μέτρα.

ε) Τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἕδρας ΑΔΘΕΑ εἶναι 40 × 6 = 240 τετρ. μέτρα.

στ) Τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἕδρας ΕΒΖΕΑ εἶναι 20 × 6 = 120 τετρ. μέτρα.

Τὸ ἐμβαδὸν ὅθεν τῶν τριῶν τούτων ἑδρῶν εἶναι 760 + 240 + + 120 = 1120 τετρ. μέτρα.

Ἀλλὰ ἡ ἕδρα ΕΖΗΘΕ εἶναι ἴση μὲ τὴν ἕδραν τῆς βάσεως ΑΒΓΔΑ· ἄρα καὶ αὐτῆς τὸ ἐμβαδὸν εἶναι 760 τετρ. μέτρα.

Ἡ ἕδρα ΒΓΗΖΒ εἶναι ἴση μὲ τὴν ἕδραν ΑΔΘΕΑ· ἄρα καὶ αὐτῆς τὸ ἐμβαδὸν θὰ εἶναι 240 τετρ. μέτρα.

Καὶ ἡ ἕδρα ΔΓΗΘΔ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΑΒΖΕΑ· ἄρα καὶ αὐτῆς τὸ ἐμβαδὸν εἶναι 120 τετρ. μέτρα

Ὥστε καὶ τῶν τριῶν ἄλλων ἑδρῶν ΕΖΗΘΕ, ΒΓΗΖΒ καὶ ΔΓΗΘΔ τὸ ἐμβαδὸν εἶναι 760 + 240 + 120 = 1120 τετρ. μέτρα. Ὅθεν ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῶν τριῶν πρώτων ἑδρῶν ἐπὶ 2, εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν καὶ τῶν 6 ἑδρῶν τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου· ἤτοι 1120 × 2 = 2240 τετρ. μέτρα.

Παρατηροῦμεν δὲ ὅτι:

Πρῶτον βρήκαμε τὸ ἐμβαδὸν τῶν τριῶν ἑδρῶν ΑΒΓΔΑ, ΑΔΘΕΑ καὶ ΑΒΖΕΑ, ἑκάστης χωριστά. ἤτοι τῆς ἕδρας τῆς βάσεως καὶ δύο παραπλεύρων ἑδρῶν, αἱ ὁποῖαι μὲ αὐτὴν σχηματίζουν μίαν τρίεδρον γωνίαν. Δεύτερον προσθέσαμε τὰ ἐμβαδὰ τῶν τριῶν αὐτῶν ἑδρῶν καὶ τὸ ἄθροισμα πολλαπλασιάσαμε ἐπὶ 2.

Ὅθεν: Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς πλαγίου παραλληλεπιπέδου εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἕδρας τῆς βάσεώς του καὶ τὸ ἐμβα-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

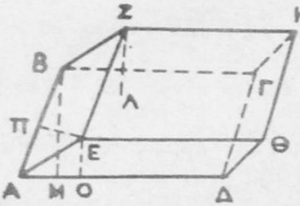
δὸν δύο παραπλεύρων ἑδρῶν μετὰ τῶν ὁποίων αὕτη σχηματίζει μίαν τρίεδρον γωνίαν, καθεμιᾶς δὲ χωριστά. Προσθέτομεν ἔπειτα τὰ τρία ἐμβαδὰ καὶ τὸ ἄθροισμα πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 2.

10. Εὕρεσις τοῦ ὄγκου πλαγίου παραλληλεπιπέδου

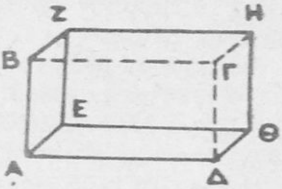
Κατασκευάζομεν ἀπὸ χαρτόνι ἓν πλάγιον παραλληλεπίπεδον μὲ διαστάσεις:

Μῆκος ΑΔ=0,30 μ. Πλάτος ΒΜ=0,15 μ. καὶ ὕψος ΖΛ=0,20 μ. (σχ. 48).

Κατασκευάζομεν μὲ χαρτόνι καὶ ἓν ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον μὲ τὰς αὐτὰς διαστάσεις· ἤτοι: μῆκος ΑΔ = 0,30 μ., πλάτος ΑΒ = 0,15 μ. καὶ ὕψος ΑΕ = 0,20 μ. Γεμίζομεν τοῦτο μὲ ἄμμον καὶ



Σχ. 48



Σχ. 49

τὸ ἀδειάζομεν εἰς τὸ πλάγιον παραλληλεπίπεδον· βλέπομεν ὅτι καὶ τοῦτο γεμίζει ἀκριβῶς. Ἄρα τὰ δύο παραλληλεπίπεδα ἔχουν τὸν αὐτὸν ὄγκον.

Εὑρίσκομεν τώρα τὸν ὄγκον τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου: ἤτοι $0{,}30 \times 0{,}15 \times 0{,}20 = 0{,}009$ κ.μ.

Κάμνομεν τὸ ἴδιο καὶ εἰς τὸ πλάγιον παραλληλεπίπεδον· ἤτοι πολλαπλασιάζομεν τὸ μῆκος του ἐπὶ τὸ πλάτος του καὶ τὸ γινόμενον τούτων ἐπὶ τὸ ὕψος του. ἤτοι: $0{,}30 \times 0{,}15 \times 0{,}20 = 0{,}009$ κ.μ.

Βλέπομεν ὅτι εὑρήκαμεν τὸν ὄγκον του, ὁ ὁποῖος εἶναι ὁ αὐτὸς μὲ τὸν ὄγκον τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου. Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου εὑρίσκεται ὅπως καὶ τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου.

*Ὅθεν: **Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον ἑνὸς πλαγίου παραλληλεπιπέδου πολλαπλασιάζομεν τὸ μῆκός του ἐπὶ τὸ πλάτος του καὶ τὸ γινόμενον τούτων ἐπὶ τὸ ὕψος του.***

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἤτοι: «*Ὁ ὄγκος τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου εἶναι γινόμενον τῶν τριῶν του διαστάσεων*».

11. Προβλήματα πλαγίου παραλληλεπιπέδου

ΟΜΑΣ Α΄ (Πλαγίου παραλληλογράμμου)

1. Μία ἄμπελος ἔχει σχῆμα πλαγίου παραλληλογράμμου, τοῦ ὁποίου ἡ μὲν βάσις εἶναι 56 μ, τὸ δὲ ὕψος 45 μέτρα. Ποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδόν της;

2. Μία αὐλὴ ἔχει σχῆμα πλαγίου παραλληλογράμμου, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις εἶναι 34,5 μέτρα, μία δὲ ἀπὸ τὰς μὴ παραλλήλους πρὸς τὴν βάσιν πλευρὰς του 20,60 μέτρα. Πόσα μέτρα εἶναι ἡ περίμετρός του;

3. Μία αὐλὴ ἔχει σχῆμα πλαγίου παραλληλογράμμου, τοῦ ὁποίου ἡ περίμετρος εἶναι 90 μέτρα, μία δὲ ἀπὸ τὰς μὴ παραλλήλους πρὸς τὴν βάσιν πλευρὰς του 15 μέτρα καὶ ὕψος του 10 μέτρα. Πόση εἶναι ἡ ἐπιφάνειά της;

4. Μία ἄμπελος ἔχει σχῆμα πλαγίου παραλληλογράμμου, μὲ βάσιν 108 μέτρων καὶ ὕψος 50,50 μέτρων. Αὕτη ἐπωλήθη ἀντὶ 98.172 δραχμῶν. Πρὸς πόσον ἐπωλήθη τὸ τετραγωνικὸν μέτρον;

5. Ἓν οἰκόπεδον ἔχει σχῆμα πλαγίου παραλληλογράμμου, τοῦ ὁποίου τὸ μῆκος εἶναι 170 μέτρων, τὸ δὲ πλάτος 30 μέτρων. Τοῦτο ἐπωλήθη πρὸς 150 δραχμὰς τὸ τετρ. μέτρον. Ποία ἦτο ἡ ἀξία τοῦ οἰκοπέδου;

6. Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς οἰκοπέδου σχήματος πλαγίου παραλληλογράμμου εἶναι 2420 τετρ. μέτρα, ἡ δὲ βάσις του 60,50 μέτρα. Ποῖον εἶναι τὸ ὕψος του;

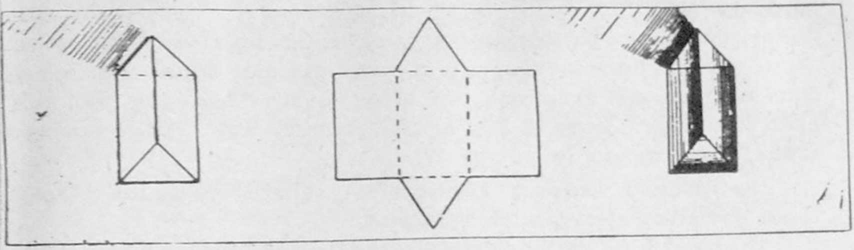
ΟΜΑΣ Β΄ (πλαγίου παραλληλεπιπέδου).

1. Ἑνὸς πλαγίου παραλληλεπιπέδου ὅλαι αἱ ἕδραι του εἶναι πλάγια παραλληλόγραμμα (σχ. 48). Ἡ ἕδρα τῆς βάσεώς του ἔχει βάσιν μὲν 20 μέτρων, ὕψος δὲ 9,50 μέτρων. Ἡ παράπλευρος ἕδρα του, ποὺ ἔχει βάσιν κοινὴν μὲ τὴν ἕδραν τῆς βάσεως, ἔχει ὕψος 3 μέτρων. Ἡ δὲ παράπλευρος ἕδρα του, ποὺ μὲ τὰς δύο προηγουμένας σχηματίζουν τρίεδρον γωνίαν, ἔχει βάσιν μὲν 10 μέτων, ὕψος δὲ 3 μέτρων. Τὸ ὕψος τέλος τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου εἶναι 2,50 μέτρων: α) Ποῖον τὸ ἐμβαδόν του; β) Ποῖος ὁ ὄγκος του;

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

2. Ἑνὸς πλαγίου παραλληλεπιπέδου ὅλαι αἱ ἕδραι του εἶναι πλάγια παραλληλόγραμμα. Ἡ ἕδρα τῆς βάσεώς του ἔχει βάσιν μὲν 40 μ., ὕψος δὲ 19 μ. Ἡ παράπλευρος ἕδρα του, ποὺ ἔχει βάσιν κοινὴν μὲ τὴν ἕδραν τῆς βάσεως, ἔχει ὕψος 6 μέτρων· ἡ δὲ παράπλευρος ἕδρα του, ποὺ μὲ τὰς δύο προηγουμένας σχηματίζουν γωνίαν τρίεδρον, ἔχει βάσιν μὲν 20 μέτρων, ὕψος δὲ 6 μέτρων. Τὸ ὕψος τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου εἶναι 5 μέτρων. α) Ποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν του ; β) Ποῖος ὁ ὄγκος του ;

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής



ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε΄

ΠΡΙΣΜΑΤΑ

(Οἱ μαθηταὶ παρατηροῦν τὰ πρὸ αὐτῶν πρίσματα)

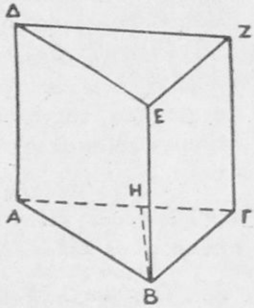
1. Παρατηρήσεις

1. Ἕκαστον ἔχει ὡρισμένον σχῆμα καὶ ὄγκον. ἤτοι εἶναι σῶμα στερεόν.

2. Ἕκαστον εἶναι πολύεδρον.

3. Αἱ ἕδραι ἑκάστου εἶναι ἐπίπεδοι.

4. Καὶ τοῦτο στηρίζεται διὰ μιᾶς ἕδρας ἡ ὁποία λέγεται ἕδρα τῆς βάσεως· (ἡ ΑΒΓ σχ. 49). Ἀλλὰ καὶ ἡ ἀπέναντί της ΔΕΖ λέγεται ἕδρα τῆς βάσεως.



Σχ. 49

5. Αἱ ἕδραι του, ποὺ ἑνοῦνται μὲ τὰς ἕδρας τῶν βάσεών του, ἀποτελοῦν τὴν παράπλευρόν του, ἐπιφάνειαν καὶ λέγονται γι' αὐτὸ παράπλευροι ἕδραι· (αἱ ΑΔΖΓΑ, ΑΔΕΒΑ, ΒΕΖΓΒ).

6. Καὶ τούτων αἱ ἕδραι ἑνοῦνται καὶ σχηματίζουν διέδρους καὶ τριέδρους γωνίας καὶ ἀκμάς.

7. Ἐὰν ἐπεκτείνωμεν τὰς ἕδρας του πρὸς ὅλας τὰς διευθύνσεις των θὰ ἴδωμεν ὅτι παράλληλοι εἶναι πάντοτε μόνον αἱ ἕδραι τῶν δύο βάσεών του, αἱ ὁποῖαι καὶ αἱ δύο ἔχουν τὸ αὐτὸ σχῆμα.

8. Ἐὰν ἰχνογραφήσωμεν σὲ χαρτόνι τὰς ἕδρας τοῦ πρίσματος, τὰς κόψωμεν καὶ τὰς ἐπιθέσωμεν ἀνὰ δύο τὴν μίαν ἐπάνω εἰς τὴν

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἄλλην, θὰ ἴδωμεν ὅτι ἐφαρμόζουν καὶ ἑπομένως εἶναι ἴσαι μόνον α
ἕδραι τῶν δύο βάσεών του, αἱ δὲ παράπλευροι ἕδραι δὲν ἐφαρμό
ζουν πάντοτε, καὶ ἑπομένως δὲν εἶναι πάντοτε ἴσαι (σχ. 34). Αὗτα
εἶναι ἴσαι μόνον, ὅταν αἱ ἕδραι τῶν βάσεών των ἔχουν κανονικό
εὐθύγραμμον σχῆμα (π. χ. σχ. 49).

9. Τὰ ἄκρα ἑκάστης ἕδρας εἶναι εὐθεῖαι γραμμαί. Ἄρα α
ἕδραι των εἶναι εὐθύγραμμα σχήματα.

Αἱ εὐθεῖαι δὲ εἰς τὰς ὁποίας τελειώνουν ταῦτα λέγονται πλευ
ραὶ αὐτῶν.

10. Αἱ πλευραὶ ἑκάστης ἕδρας ἑνοῦνται διὰ τῶν ἄκρων τω
καὶ σχηματίζουν ἐπιπέδους γωνίας.

11. Ἐὰν ἐπεκτείνωμεν τὰς πλευρὰς τῶν ἑδρῶν του καὶ κατ
τὰ δύο ἄκρα των θὰ ἴδωμεν ὅτι μόνον τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν το
αἱ πλευραὶ δὲν συναντῶνται ἀνὰ δύο, ἑκάστη μὲ τὴν ἀπέναντί της

Ὅθεν: Αἱ παράπλευροι ἕδραι εἶναι πάντοτε παραλληλόγραμμα
αἱ δὲ ἕδραι τῶν βάσεών του ἔχουν οἱονδήποτε σχῆμα.

12. Ἐὰν ἐλέγξωμεν μὲ τὸν γνώμονα τὰς πλευρὰς τῶν ἐπιπέ
δων του γωνιῶν, θὰ ἴδωμεν ὅτι εἰς ἄλλα αὗται εἶναι κάθετοι καὶ εἰς
ἄλλα ὄχι. Ἑπομένως αἱ ἐπίπεδοί των γωνίαι εἰς ἄλλα εἶναι ὀρθαί,
εἰς ἄλλα ὀξεῖαι καὶ ἀμβλεῖαι καὶ εἰς ἄλλα μερικαὶ ὀξεῖαι καὶ ἀμ
βλεῖαι καὶ μερικαὶ ὀρθαί.

13. Τὸ καθένα λοιπὸν εἶναι: σῶμα, στερεόν, πολύεδρον μὲ
παραλλήλους καὶ ἴσας μόνον δύο ἕδρας, αἱ ὁποῖαι ἔχουν οἱονδή-
ποτε σχῆμα, τὰς δὲ παραπλεύρους ἕδρας παραλληλόγραμμα. Ταῦτα
λέγομεν πρίσματα.

***Ὅθεν*: Πρίσμα λέγεται τὸ πολύεδρον στερεόν, τοῦ ὁποίου μό-
νον δύο ἕδραι εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι, ἔχουν δ' αὗται οἱονδήποτε
σχῆμα, αἱ δὲ ἄλλαι ἕδραι του, αἱ παράπλευροι, εἶναι παραλληλόγραμμα**

Ὁ κύβος, τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον καὶ τὸ πλάγιον
παραλληλεπίπεδον λοιπὸν εἶναι πρίσματα.

14. Αἱ δύο παράλληλοι ἕδραι τοῦ πρίσματος λέγονται βάσεις
αὐτοῦ.

Ἂν αἱ πλευραὶ τούτων εἶναι 3 τὸ σχῆμα των λέγεται τρίπλευ
ρον ἢ τρίγωνον, (διότι αὗται σχηματίζουν 3 ἐπιπέδους γωνίας).

Ἂν αἱ πλευραὶ τῶν βάσεων εἶναι 4, τὸ σχῆμα των λέγεται
τετράπλευρον, ἂν δὲ περισσότεραι, πολύπλευρον ἢ πολύγωνον.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

2. Εἴδη πρισμάτων

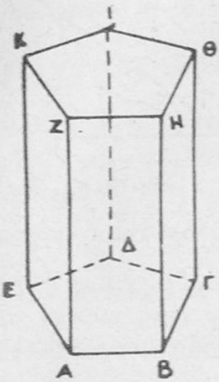
Ἀναλόγως τοῦ σχήματος τῶν ἑδρῶν τῶν δύο βάσεων τὸ πρίσμα λέγεται:

α) *Τριγωνικόν*, ἂν αὗται εἶναι τρίγωνα (σχ. 49).

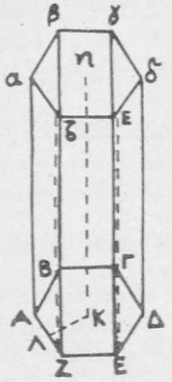
β) *Πενταγωνικόν*, ἂν αὗται εἶναι πεντάγωνα (σχ. 50).

γ) *Ἑξαγωνικόν*, ἂν αὗται εἶναι ἑξάγωνα, κ.λ.π. (σχ. 51).

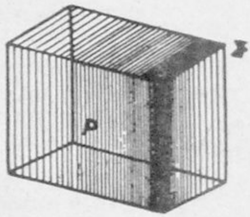
δ) ***Κανονικὸν*** λέγεται τὸ πρίσμα, ὅταν αἱ ἕδραι τῶν βάσεών του εἶναι κανονικὸν εὐθύγραμμον σχῆμα (σχ. 51).



Σχ. 50



Σχ. 51


Σχ. 52

ε) *Ὀρθὸν* λέγεται ἓν πρίσμα, ὅταν ὅλαι αἱ παράπλευροι ἕδραι του εἶναι ὀρθογώνια (ὡς τὰ σχ. 49, 50, 51). Ἐπίσης ὁ κύβος καὶ τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον εἶναι ὀρθὰ πρίσματα.

στ) Πλάγιον ἢ κεκλιμένον λέγεται τὸ πρίσμα, τὸ ὁποῖον δὲν εἶναι ὀρθὸν (ὡς τὸ σχ. 52). Τὸ πλάγιον παραλληλεπίπεδον εἶναι πρίσμα πλάγιον.

3. Σχῆμα τῶν ἑδρῶν τῶν βάσεων τῶν πρισμάτων

Αἱ ἕδραι λοιπὸν τῶν βάσεων τῶν πρισμάτων εἶναι εὐθύγραμμα σχήματα: Τρίγωνα, πεντάγωνα, ἑξάγωνα κ.λ. πολύγωνα.

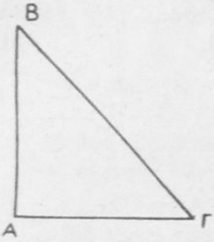
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

4. Τρίγωνα

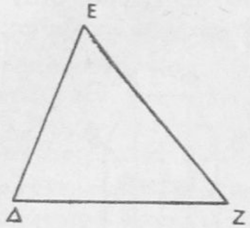
1. Τρίγωνον λέγεται τὸ εὐθύγραμμον σχῆμα, τὸ ὁποῖον ἔχει τρεῖς πλευρὰς καὶ τρεῖς γωνίας. (Σχ. 53, 54, 55),

2. Ὀρθογώνιον τρίγωνον λέγεται τὸ τρίγωνον, τοῦ ὁποίου μία γωνία εἶναι ὀρθή (ΑΒΓ σχ. 53).

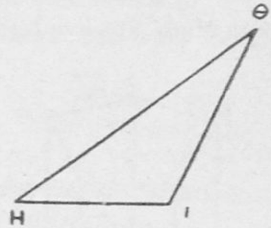
3. Ὀξυγώνιον τρίγωνον λέγεται τὸ τρίγωνον, τοῦ ὁποίου ὅλαι αἱ γωνίαι εἶναι ὀξεῖαι (ΔΕΖ σχ. 54).



Σχ. 53



Σχ. 54

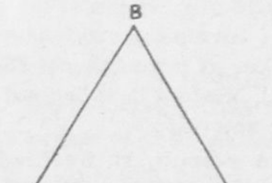


Σχ. 55

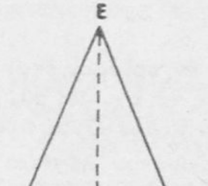
4. Ἀμβλυγώνιον τρίγωνον λέγεται τὸ τρίγωνον, τοῦ ὁποίου μία γωνία εἶναι ἀμβλεῖα (ΗΙΘ σχ 55).

5. Ἰσόπλευρον τρίγωνον λέγεται ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον ἔχει καὶ τὰς τρεῖς πλευράς του ἴσας πρὸς ἀλλήλας. (ΑΒΓ σχ. 56).

6. Ἰσοσκελὲς τρίγωνον λέγεται ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον ἔχει ἴσας μόνον δύο πλευρὰς (δύο σκέλη). (ΔΕΖ σχ. 57).



Σχ. 56



Σχ. 57

Σχ. 58

7. Σκαλινὸν τρίγωνον λέγεται ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον ἔχει τὰς τρεῖς πλευράς του ἀνίσους. (ΚΛΜ σχ. 58).

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

8. Πλευραὶ τοῦ τριγώνου λέγονται αἱ εὐθεῖαι εἰς τὰς ὁποίας τοῦτο περατοῦται· (ἡ ΑΒ, ΒΓ. ΓΑ σχ. 53).

9) Γωνίαι τοῦ τριγώνου λέγονται αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι, ποὺ σχηματίζουν αἱ πλευραὶ του ἑνούμεναι· (ἡ ΑΒΓ, ἡ ΒΓΑ καὶ ἡ ΓΑΒ σχ 53).

10. Κορυφαὶ τοῦ τριγώνου λέγονται αἱ κορυφαὶ τῶν γωνιῶν του· (ἡ Α, ἡ Β, ἡ Γ. σχ. 53).

5. Ἰχνογράφησις τριγώνου

α) Διὰ νὰ ἰχνογραφήσωμεν ἁπλῶς ἓν τρίγωνον γράφομεν μίαν γωνίαν καὶ ἑνώνομεν τὰ ἐλεύθερα ἄκρα τῶν πλευρῶν της μὲ εὐθεῖαν.

β) Διὰ νὰ γράψωμεν ὅμως ἓν ὡρισμένον τρίγωνον γράφομεν διὰ τοῦ κανόνος μίαν πλευράν του καὶ εἰς τὰ ἄκρα της γράφομεν τὰς γωνίας τοῦ τριγώνου, ποὺ ἔχουν κοινὴν τὴν πλευρὰν ταύτην. Ἔπειτα ἐπεκτείνομεν τὰς ἄλλας δύο πλευράς του μέχρι συναντήσεώς των.

6. Κατασκευὴ τριγώνου ἀπὸ χαρτόνι

Πρὸς τοῦτο ἰχνογραφοῦμεν τὸ τρίγωνον στὸ χαρτόνι καὶ ἔπειτα κόπτομεν τοῦτο στὰς χαραχθείσας πλευράς του.

7. Διαστάσεις τοῦ τριγώνου

1. Αἱ ἐπίπεδοι ἐπιφάνειαι τῶν τριγώνων ἐπεκτείνονται μόνον πρὸς τὰ ἐμπρὸς καὶ πλάγια, οὐχὶ δὲ καὶ πρὸς τὰ ἄνω. Ὅθεν αἱ διαστάσεις τῶν τριγώνων εἶναι δύο· μῆκος καὶ πλάτος. Εἰς τὰς ἐπιπέδους ἐπιφανείας τὸ μὲν μῆκος λέγομεν καὶ βάσιν αὐτῆς, τὸ δὲ πλάτος καὶ ὕψος αὐτῆς.

2. Βάσις παντὸς τριγώνου εἶναι μία ἀπὸ τὰς πλευράς του. (ἡ ΑΒ σχ. 53), ἡ ΔΖ σχ. 54, ἡ ΚΜ σχ. 58).

3. Ὕψος παντὸς τριγώνου εἶναι ἡ κάθετος εἰς τὴν βάσιν του εὐθεῖα ἀπὸ τὴν ἀπέναντι κορυφήν· (ἡ ΑΒ σχ. 53, ἡ ΕΗ σχ. 57, ἡ ΛΟ σχ. 58).

4. Τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ (σχ. 53), βάσις μὲν εἶναι μία τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας του (ἡ ΑΓ), ὕψος δὲ ἡ ἄλλη πλευρὰ τῆς ὀρθῆς γωνίας του ἡ ΑΒ, ἡ ὁποία εἶναι κάθετος εἰς τὴν βάσιν ΑΓ.

Ἀσκήσεις :

1. Γράψατε ἓν τρίγωνον ὀρθογώνιον, ἓν ὀξυγώνιον, ἓν ἀμβλυγώνιον.
2. Γράψατε ἓν τρίγωνον ἰσόπλευρον, ἓν ἰσοσκελές, ἓν σκαλινόν.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

3. Κατασκευάσατε ἀπὸ χαρτόνι τοιαῦτα τρίγωνα: (ὀρθογώνιον, ὀξυγώνιον, ἀμβλυγώνιον, ἰσόπλευρον, ἰσοσκελές, σκαλινόν).

4. Κατασκευάσετε ἀπὸ χαρτόνι ἓν ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον καὶ ἓν πλάγιον τοιοῦτον· χαράξατε ἔπειτα σ' αὐτὰ ἀνὰ μίαν διαγώνιον καὶ λυγίστε τα ἐπάνω σ' αὐτές.

Βλέπομεν τότε ὅτι: α) τὸ καθὲν διηρέθη εἰς 2 ἴσα τρίγωνα, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν ἰδίαν βάσιν καὶ τὸ ἴδιον ὕψος μὲ τὰ παραλληλόγραμμα — β) ὅτι τὸ καθὲν τρίγωνον εἶναι τὸ ἥμισυ ἀπὸ τὸ παραλληλόγραμμον, ποὺ ἔχει τὴν ἰδίαν βάσιν καὶ τὸ ἴδιον ὕψος.

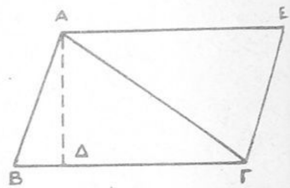
Συμπεράσματα :

1) Ἡ διαγώνιος παντὸς παραλληλογράμμου διαιρεῖ τοῦτο εἰς δύο ἴσα τρίγωνα.

2) Πᾶν τρίγωνον εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ παραλληλογράμμου μὲ τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος.

8. Εὕρεσις τοῦ ἐμβαδοῦ τριγώνου

Ἔστω τοῦ τριγώνου ΑΒΓ (σχ. 59)· μετροῦμεν τὴν βάσιν του καὶ τὸ ὕψος του· καὶ ἔστω ἡ βάσις του ΒΓ = 20 μ. καὶ τὸ ὕψος του ΑΔ = 8 μ. Ἀπὸ τὸ σημεῖον Α φέρω τὴν ΑΕ παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ, ἀπὸ δὲ τὸ σημεῖον Γ τὴν ΓΕ παράλληλον πρὸς τὴν ΒΑ· τοιουτοτρόπως ἔχομεν τὸ π λ ά γ ι ο ν παραλληλόγραμμον ΑΒΓΕΑ. Ἡ διαγώνιος τούτου ΑΓ τὸ διαιρεῖ στὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΓΕ, τὰ ὁποῖα εἶναι ἴσα. διότι πᾶσα διαγώνιος παραλληλογράμμου διαιρεῖ τοῦτο εἰς δύο τρίγωνα ἴσα.



Σχ. 59

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πλαγίου παραλληλογράμμου ΑΒΓΕΑ εἶναι 20 × 8 = 160 τ. μ.

Ἄρα τοῦ καθενὸς τριγώνου τὸ ἐμβαδὸν εἶναι $\frac{160}{2} = 80$ τ. μ.
Ἀλλὰ τὸ 160 εἶναι γινόμενον τῆς βάσεως ΒΓ τοῦ τριγώνου ἐπὶ τὸ ὕψος τοῦ ΑΔ (20 × 8 = 160).

Ὅθεν: Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου 80 τ. μ. εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του (160 : 2=80).

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Διὰ νὰ εὕρωμεν λοιπὸν τὸ ἐμβαδὸν παντὸς τριγώνου πολλαπλασιάζομεν τὴν βάσιν του ἐπὶ τὸ ὕψος του καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ 2.

9. Προβλήματα

1. Γράψατε ἕν ὀρθογώνιον τρίγωνον, ἕν ὀξυγώνιον ἰσοσκελές, ἕν ἀμβλυγώνιον καὶ εὕρετε τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστου.

2. Εὕρετε τὸ ἐμβαδὸν τῶν τριγώνων: α) ΑΒΓ σχ. 53, β) ΔΕΖ σχ. 57, γ) ΚΛΜ σχ. 58).

3. Αἱ πλευραὶ ἑνὸς τριγώνου εἶναι 5 μέτρα, 7 μέτρα καὶ 10 μέτρα. Ποία εἶναι ἡ περίμετρός του;

4. Ἡ πλευρὰ ἑνὸς ἰσοπλεύρου τριγώνου εἶναι 2,06 μέτρα· ποία εἶναι ἡ περίμετρός του;

5. Ἡ βάσις ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι 3,80 μέτρα, τὸ δὲ ἕν σκέλος αὐτοῦ 6,45 μέτρα· ποία εἶναι ἡ περίμετρός του;

6. Ἡ περίμετρος ἰσοπλεύρου τριγώνου εἶναι 1,11 μέτρα· πόσα μέτρα εἶναι ἑκάστη τῶν πλευρῶν;

7. Ἡ περίμετρος ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι 88 μέτρα, ἡ δὲ βάσις του 18 μέτρα· ποῖον εἶναι τὸ μῆκος ἑκάστου σκέλους του;

8. Ἡ βάσις μιᾶς τριγωνικῆς ἀμπέλου εἶναι 80 μέτρα, τὸ δὲ ὕψος της 60 μέτρα· ποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδόν της;

9. Αἱ πλευραὶ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι ἡ μὲν μία 20 μέτρα, ἡ δὲ ἄλλη 15 μέτρα· ποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδόν του;

10. Ἡ βάσις ἑνὸς τριγωνικοῦ ἀγροῦ εἶναι 350 μέτρα, τὸ δὲ ὕψος του 180 μέτρα· πόσα νέα στρέμματα εἶναι ὁ ἀγρὸς οὗτος;

11. Τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου εἶναι 150 τετρ. μέτρα, ἡ δὲ βάσις του 20 μέτρα· ποῖον εἶναι τὸ ὕψος του;

12. Τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου εἶναι 150 τετρ. μέτρα, τὸ δὲ ὕψος του 15 μέτρα· ποῖον εἶναι τὸ μῆκος τῆς βάσεώς του;

13. Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι 600 τετρ. μέτρα, ἡ δὲ μία πλευρὰ τῆς ὀρθῆς γωνίας 40 μέτρα· πόσα μέτρα εἶναι ἡ ἄλλη πλευρὰ τῆς ὀρθῆς του γωνίας;

14. Ἡ βάσις ἑνὸς ἀγροῦ τριγωνικοῦ εἶναι 54,60 μέτρων, τὸ δὲ ὕψος 28 μέτρων· τὸ μῆκος δὲ ἑνὸς ἄλλου ἀγροῦ σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου καὶ ἴσου πρὸς αὐτὸν εἶναι 40 μέτρων· ποῖον εἶναι τὸ ὕψος τούτου;

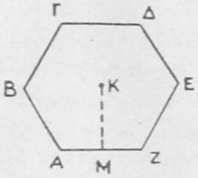
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

10. Πολύγωνα

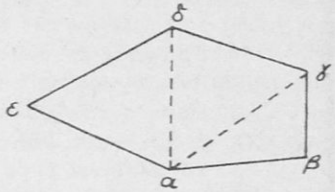
1. Πολύγωνον λέγεται τὸ εὐθύγραμμον σχῆμα τὸ ὁποῖον ἔχει πολλὰς γωνίας (ὡς τὸ ΑΒΓΔΕΖΑ σχ. 60 καὶ αβγδεα 61).

'Αναλόγως τῶν γωνιῶν του τὸ πολύγωνον λέγεται πεντάγωνον, ἑξάγωνον, ὀκτάγωνον κλπ.

2. Πλευραὶ τοῦ πολυγώνου λέγονται αἱ εὐθεῖαι εἰς τὰς ὁποίας περατοῦται (ὡς αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΑ).



Σχ. 60



Σχ. 61

3. Γωνίαι τοῦ πολυγώνου λέγονται αἱ γωνίαι τὰς ὁποίας σχηματίζουν αἱ πλευραί του ἑνούμεναι (ὡς ἡ ΖΑΒ, ἡ ΑΒΓ κ.λ.π.).

4. Κορυφαὶ τοῦ πολυγώνου λέγονται αἱ κορυφαὶ τῶν γωνιῶν του. (Ὡς ἡ Α, ἡ Β, ἡ Γ, ἡ Δ, ἡ Ε, ἡ Ζ σχ. 60).

5. Κανονικὸν λέγεται τὸ πολύγωνον, ὅταν ὅλαι αἱ πλευραί του καὶ ὅλαι αἱ γωνίαι του εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας. (Ὡς τὸ ΑΒΓΔΕΑ σχ. 60).

6. Μὴ κανονικὸν λέγεται τὸ πολύγωνον, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ καὶ αἱ γωνίαι δὲν εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας. (Ὡς τὸ αβγδε σχ. 61).

11. 'Ιχνογράφησις κανονικοῦ πολυγώνου

Διὰ νὰ ἰχνογραφήσωμεν κανονικὸν πολύγωνον :

α) Χαράσσομεν μὲ τὸν κανόνα εὐθεῖαν καὶ λαμβάνομεν ἐπάνω εἰς αὐτὴν μέρος ἴσον μὲ τὴν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου.

β) Εἰς τὰ ἄκρα της χαράσσομεν γωνίας ἴσας μὲ τὴν τοῦ πολυγώνου.

γ) Εἰς τὰς νέας πλευρὰς χαράσσομεν τὴν αὐτὴν γωνίαν καὶ οὕτω καθεξῆς μέχρις ὅτου συμπληρωθῇ τὸ πολύγωνον.

12. Κατασκευὴ κανονικοῦ πολυγώνου ἀπὸ χαρτόνι

α) *Οἱουδήποτε κανονικοῦ πολυγώνου* :

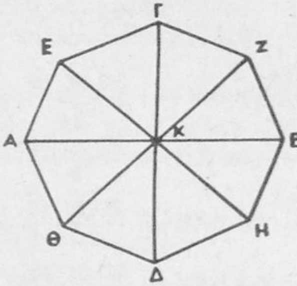
Πρὸς τοῦτο ἰχνογραφοῦμεν πρῶτον τὸ κανονικὸν πολύγωνον στὸ χαρτόνι καὶ ἔπειτα κόπτομεν τὸ χαρτόνι εἰς τὰς χαραχθείσας πλευράς του.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

β) *Κανονικοῦ ὀκταγώνου* :

Κανονικὸν ὀκτάγωνον ἀπὸ χαρτόνι κατασκευάζομεν ὡς ἑξῆς :

Διὰ τοῦ γνώμονος φέρομεν ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ κάθετον τὴν ΓΔ. Αἱ δύο αὗται κάθετοι εὐθεῖαι σχηματίζουν τὰς 4 ὀρθὰς γωνίας ΑΚΓ, ΓΚΒ, ΒΚΔ καὶ ΔΚΑ. Ταύτας διχοτομοῦμεν κατὰ τὸν γνωστὸν τρόπον (σελ. 17 § 10). Ἑκάστη διαιρεῖται εἰς 2 ὀξείας, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ καθεμιὰ εἶναι ἴση πρὸς τὸ $\frac{1}{2}$ ὀρθῆς. Ἄρα ὅλαι αἱ χαραχθεῖσαι 8 ὀξεῖαι γωνίαι εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας· ἤτοι εἶναι γωνίαι ΑΚΕ = ΕΚΓ = = ΓΚΖ = ΖΚΒ = ΒΚΗ = ΗΚΔ = = ΔΚΘ = ΘΚΑ.



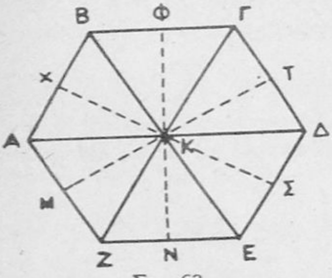
Σχ. 62

Φέρομεν ἔπειτα τὰς εὐθείας ΑΕ, ΕΓ, ΓΖ, ΖΒ, ΒΗ, ΗΔ, ΔΘ, ΘΑ, καὶ τὰς μετροῦμεν. Εὑρίσκομεν δὲ ὅτι ὅλαι εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας· ἤτοι ΑΕ = ΕΓ = ΓΖ = ΖΒ = ΒΗ = ΗΔ = = ΔΘ = ΘΑ. Τοιουτοτρόπως ἰχνογραφήσαμεν στὸ χαρτόνι τὸ κανονικὸν ὀκτάγωνον σχ. 62.

Κόπτομεν τέλος τὸ χαρτόνι εἰς τὴν περίμετρον τοῦ κανονικοῦ ὀκταγώνου ΑΕΓΖΒΗΔΘΑ.

13. Εὕρεσις τοῦ ἐμβαδοῦ κανονικοῦ πολυγώνου

1. Ἔστω ὅτι πρόκειται νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔΕΖΑ (σχ. 63), τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι ἡ περίμετρός του ΑΒΓΔΕΖΑ, ὕψος δὲ ἡ κάθετος ΚΝ ἡ ὁποία ἄγεται εἰς μίαν πλευρὰν του ἐκ τοῦ κέντρου του.



Σχ. 63

Ἑνώνομεν τὸ κέντρον του Κ μὲ τὰς κορυφάς του Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ διὰ τῶν εὐθειῶν ΑΚ, ΒΚ, ΓΚ, ΔΚ, ΕΚ, ΖΚ. Τοιτοτρόπως τὸ πολύγωνον διῃρέθη εἰς τὰ τρίγωνα ΑΚΒ, ΒΚΓ. ΓΚΔ, ΔΚΕ, ΕΚΖ, ΖΚΑ.

Τοῦ	ΑΚΒ	βάσις	εἶναι	ἡ	ΑΒ	καὶ	ὕψος ἡ	ΚΧ
»	ΒΚΓ	»	»	»	ΒΓ	»	» »	ΚΦ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Τοῦ	ΓΚΔ	βάσις	εἶναι	ἡ	ΓΔ	καὶ	ὕψος	ἡ	ΚΤ
»	ΔΚΕ	»	»	»	ΔΕ	»	»	»	ΚΣ
»	ΕΚΖ	»	»	»	ΕΖ	»	»	»	ΚΝ
»	ΖΚΑ	»	»	»	ΖΑ	»	»	»	ΚΜ

Αἱ βάσεις ὅλων εἶναι ἴσαι καθὼς καὶ τὰ ὕψη· μετροῦμεν τὴν βάσιν ΑΒ τοῦ τριγώνου ΑΚΒ καὶ τὸ ὕψος ΚΧ καὶ ἔστω ὅτι εὕρομεν ΑΒ = 20 μέτρα καὶ ΚΧ = 16 μέτρα. Θὰ ἔχουν λοιπὸν ὅλα τὰ τρίγωνα βάσιν 20 μέτρων καὶ ὕψος 16 μέτρων. Ὥστε θὰ εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου :

α) $ΑΚΒ = \frac{20 \times 16}{2} = \frac{320}{2} = 160$ τ. μ.

β) $ΒΚΓ = \frac{20 \times 16}{2} = \frac{320}{2} = 160$ τ. μ.

γ) $ΓΚΔ = \frac{20 \times 16}{2} = \frac{320}{2} = 160$ τ. μ.

δ) $ΔΚΕ = \frac{20 \times 16}{2} = \frac{320}{2} = 160$ τ. μ.

ε) $ΕΚΖ = \frac{20 \times 16}{2} = \frac{320}{2} = 160$ τ. μ.

στ) $ΖΚΑ = \frac{20 \times 16}{2} = \frac{320}{2} = 160$ τ. μ.

ὅλων δὲ ὁμοῦ 960 τ. μ.

Ἀλλὰ φανερὸν εἶναι ὅτι τοῦτο εἶναι καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔΕΖ. Ἀλλὰ τοῦτο : εὑρίσκομεν καὶ πολλασιάζοντες τὴν περίμετρόν του ΑΒΓΔΕΖΑ, ποὺ εἶναι 20 × 6 = 120 μέτρα, ἐπὶ τὸ ὕψος του ΚΧ = 16 καὶ διαιροῦντες διὰ 2· ἤτοι : $\frac{120 \times 16}{2} = \frac{1920}{2} = 960$ τ.μ.

Ὅθεν : Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν κανονικοῦ πολυγώνου πολλαπλασιάζομεν τὴν βάσιν του (περίμετρόν του) ἐπὶ τὸ ὕψος του καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ 2.

14. Προβλήματα

1. Εὕρετε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου ΑΒΓΔΕΖ, (σχ. 41) μετροῦντες τὴν βάσιν του καὶ τὸ ὕψος του.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

2. Εὕρετε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κανονικοῦ ὀκταγώνου σχ. 62.

3. Κατασκευάσατε ἀπὸ χαρτόνι ἕνα ὀκτάγωνον κανονικὸν πο-
ύγωνον καὶ εὕρετε τὸ ἐμβαδόν του.

4. Ἡ περίμετρος ἑνὸς ὀκταπλεύρου κανονικοῦ πολυγώνου εἶναι
40 μέτρα· ποία εἶναι ἡ πλευρά του ;

5. Ἡ πλευρὰ ἑνὸς ὀκταπλεύρου κανονικοῦ πολυγώνου εἶναι 30
ιέτρα, τὸ δὲ ὕψος του 38 μέτρα· ποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδόν του ;

6. Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς κανονικοῦ πολυγώνου εἶναι 2280 τετρ.
ιέτρα, ἡ δὲ βάσις του 120 μέτρα· ποῖον εἶναι τὸ ὕψος του ;

7. Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς ὀκταπλεύρου κανονικοῦ πολυγώνου εἶναι
512 τετρ. μέτρα, τὸ δὲ ὕψος του 12,8 μέτρα· ποία εἶναι ἡ πλευ-
ρά του ;

8. Ἓν οἰκόπεδον ἔχει σχῆμα ἑξαγώνου κανονικοῦ πολυγώνου,
τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι 108 μέτρα, τὸ δὲ ὕψος του 93,53 μέτρα.
Πόσον ἀξίζει τὸ οἰκόπεδον, ἐὰν τὸ τετραγωνικὸν μέτρον αὐτοῦ τι-
μᾶται 10.000 δραχ.

15. Διαστάσεις τοῦ πρίσματος

Καὶ εἰς τὸ πρίσμα, ὅπως εἰς ὅλα τὰ στερεά, ἔχομεν 3 διαστά-
σεις· ἤτοι μῆκος, πλάτος καὶ ὕψος. α) Μῆκος τοῦ πρίσματος εἶναι ἡ
βάσις (ἢ μῆκος) τῆς ἕδρας τῆς βάσεώς του· (ἡ ΑΓ σχ. 49, ἡ ΑΒΓΔΕΖΑ
σχ. 51) β) Πλάτος τοῦ πρίσματος εἶναι τὸ ὕψος τῆς ἕδρας τῆς βά-
σεώς του, (ἡ ΒΗ σχ. 49, ἡ ΚΛ σχ. 51) γ) Ὕψος τοῦ πρίσματος εἶναι
ἡ κάθετος, ποὺ ἄγεται εἰς μίαν βάσιν του ἀπὸ ἓν σημεῖον τῆς ἄλλης
βάσεώς του, (ἡ Κη. σχ. 51).

16. Ἰχνογράφησις πρίσματος

Πρὸς τοῦτο: α) Γράφομεν τὰς δύο βάσεις του τὴν μίαν ἄνω
καὶ τὴν ἄλλην κάτωθι αὐτῆς ἔτσι, ὥστε αἱ ἀντίστοιχοι πλευραὶ των
νὰ εἶναι παράλληλοι καὶ β) ἑνοῦμεν τὰς κορυφὰς τῶν ἀπέναντι γω-
νιῶν δι' εὐθειῶν (σχ. 49, 50, 51)

17. Πῶς ἰχνογραφοῦμεν τὸ ἀνάπτυγμα πρίσματος

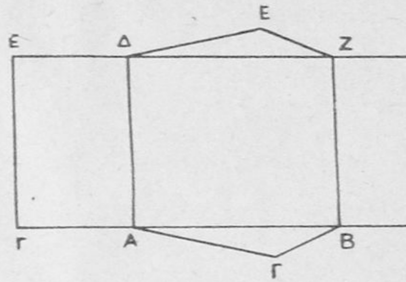
Πρὸς τοῦτο: α) Γράφομεν δύο ὁριζοντίους εὐθείας παραλλή-
λους, ποὺ ν' ἀπέχουν μεταξύ των, ὅσον τὸ ὕψος τῶν παραπλεύρων
ἑδρῶν, ἤτοι τοῦ πρίσματος.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

β) Λαμβάνομεν εἰς αὐτὰς μέρη ἴσα μὲ τὰς ἀκμὰς τῶν ἑδ
τῶν βάσεων τοῦ πρίσματος.

γ) Ἑνώνομεν ἔπειτα τὰ ἄκρα τῶν τμημάτων τούτων μὲ εὐθείας. Τοιουτοτρόπως ἔχομεν τὸ ἀνάπτυγμα τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τοῦ πρίσματος.

δ) Γράφομεν τὰς ἕδρας τῶν βάσεων τοῦ πρίσματος κατὰ τὰ γνωστά.



Σχ. 61

Ἔτσι ἔχομεν τὸ ἀνάπτυγμα τοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος σχ
εἰς τὸ σχ. 65.

18. Κατασκευὴ πρίσματος ἀπὸ χαρτόνι

Πρὸς τοῦτο: α) Ἰχνογραφοῦμεν στὸ χαρτόνι τὸ ἀνάπτ
τοῦ πρίσματος (σχ. 64). Κόπτομεν τὸ χαρτόνι εἰς τὴν περίμ
τοῦ ἀναπτύγματος. γ) Χαράσσομεν ἐλαφρὰ τὰς μὴ κοπείσας ἀ
δ) Λυγίζομεν τὰς ἕδρας πρὸς σχηματισμὸν τοῦ πρίσματος κ
Κολλοῦμεν τὰς ἕδρας στὶς μὴ κολλημένες ἀκμές των μὲ χάρ
ταινίες καὶ γόμμα.

19. Εὕρεσις τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ἐπιφανείας πρίσματος

Εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τοῦ πρίσ
ἀποτελεῖται ἀπὸ τὸ ἐμβαδὸν τῶν δύο βάσεών του καὶ ἀπὸ τὸ
δὸν τῶν παραπλεύρων του ἑδρῶν· ἤτοι τῆς παραπλεύρου το
φανείας. Ἀλλ' ὅλων τῶν ἑδρῶν αὐτῶν γνωρίζομεν νὰ εὑρίσ
τὸ ἐμβαδόν των, ὁποιονδήποτε καὶ ἂν ἔχουν εὐθύγραμμον σ

Ἔσεω τὸ ὀρθὸν κανονικὸν ἑξαγωνικὸν πρίσμα (σχ. 5
πλευρὰ τῆς βάσεώς του ΑΖ=2 μ.· τὸ ὕψος τῆς ἕδρας τῆς βάσε
ΚΛ=1,8 μέτρα· καὶ τὸ ὕψος τοῦ πρίσματος Κκ=8 μ.

Αἱ ἕδραι τῶν βάσεών του εἶναι κανονικὰ πολύγωνα, αἱ
ράπλευροι ἕδραι ὀρθογώνια παραλληλόγραμμα. Ὅθεν ἔχομεν

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

α) Ἐμβαδὸν τῆς ἕδρας τῆς βάσεως ΑΒΓΔΕΖ,

$$\frac{(2 \times 6) \times 1{,}8}{2} = \frac{12 \times 1{,}8}{2} = \frac{21{,}6}{2} = 10{,}8 \text{ τ. μ.}$$

τῶν δὲ δύο βάσεων $10{,}8 \times 2 = 21{,}6$ τ. μ.

β) Τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας εἶναι:

$(8 \times 2) \times 6 = 16 \times 6 = 96$ τ. μ. (1).

γ) Καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πρίσματος εἶναι $21{,}6 + 96 = 117{,}6$ τ. μ.

*Ὅθεν: **Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν παντὸς πρίσματος, εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν α) τῶν ἑδρῶν τῶν δύο βάσεών του. β) Τῆς παραπλεύρου του ἐπιφανείας καὶ γ) προσθέτομεν τὰ δύο εὑρεθέντα ταῦτα ἐμβαδά.***

20. Εὕρεσις τοῦ ὄγκου παντὸς πρίσματος

Κατασκευάζομεν ἀπὸ χαρτόνι ὀρθὸν κανονικὸν ἑξαγωνικὸν πρίσμα (ὡς τοῦ σχ. 51) μὲ πλευρὰν τῆς ἕδρας τῆς βάσεώς του ΑΖ = 0,10 μ., ὕψος ταύτης ΚΛ = 0,09 μ. καὶ ὕψος τοῦ πρίσματος Κκ = 0,50 μ.

Κατασκευάζομεν ἐπίσης ἀπὸ χαρτόνι καὶ ἓν ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον μὲ βάσιν ἴσην μὲ τὴν τοῦ πρίσματος.

Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἕδρας τῆς βάσεως τοῦ πρίσματος εἶναι:

$$\frac{(0{,}10 \times 6) \times 0{,}09}{2} = \frac{0{,}60 \times 0{,}09}{2} = \frac{0{,}054}{2} = 0{,}027 \text{ τ. μ.}$$

Διὰ νὰ ἔχῃ δὲ καὶ ἡ ἕδρα τῆς βάσεως τοῦ ὀρθ. παραλληλεπιπέδου ἐμβαδὸν 0,027 τ. μ., (γιὰ νὰ εἶναι ἴση μὲ τὴν ἕδραν τῆς βάσεως τοῦ πρίσματος), ἀφοῦ τὸ πλάτος θὰ εἶναι 0,09 μ., ὅσο καὶ τοῦ πρίσματος, πρέπει τὸ μῆκός του νὰ εἶναι $0{,}027 : 0{,}09 = 2{,}7 : 9 = 0{,}3$ μ.

Τότε καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἕδρας τῆς βάσεως τοῦ ὀρθ. παραλληλεπιπέδου θὰ εἶναι: $0{,}3 \times 0{,}09 = 0{,}027$ τ. μ.

Σημείωσις (1)
Τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου του ἐπιφανείας εὑρίσκομεν καὶ ὡς ἑξῆς: Σκεπάζομεν ταύτην μὲ χαρτὶ καὶ ἀνοίγομεν ἔπειτα τοῦτο. Σχηματίζει τοῦτο ἓν ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον μὲ βάσιν τὴν περίμετρον τῆς ἕδρας τῆς βάσεως τοῦ πρίσματος καὶ ὕψος τὸ τοῦ πρίσματος. Τὸ ἐμβαδὸν τούτου εἶναι: $(2 \times 6) \times 8 = 12 \times 8 = 96$ τ. μ. Ὅθεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας παντὸς πρίσματος εὑρίσκεται καὶ ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὴν περίμετρον τῆς ἕδρας τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής